ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΗΣ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΝΙΚΟΥ Λ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ
ΝΤΙΝΟΥ Χ. ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1.2

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Περιέχονται οἱ λύσεις τῶν ἀσκήσεων τοῦ βιβλίου τῶν ἰδίων συγγραφέων "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ,,

ΑΘΗΝΑ : 1966

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τὶς ὑπογραφὲς τῶν συγγραφέων.

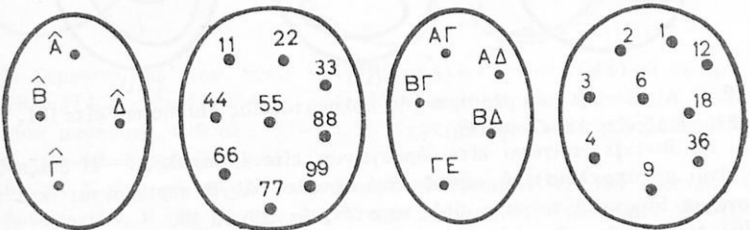
Ν. Δ. ΣΩΤΗΡΑΚΗ – ΝΤ. ΜΠΙΝΑΡΔΟΠΟΥΛΟΥ

1. **«Μαθηματικὰ τῆς Α΄ Γυμνασίου»**, (ἔκδοση 1965). Ἕνα τελείως μοντέρνο βιβλίο Μαθηματικῶν, σύμφωνο μὲ τὸ ἀναλυτικὸ πρόγραμμα.
2. **«Ἀσκήσεις Μαθηματικῶν Α΄ Γυμνασίου»**, (ἔκδοση 1965). Περιέχει τὶς λύσεις τῶν ἀσκήσεων τοῦ παραπάνω βιβλίου.
3. **«Μαθηματικὰ τῆς Β΄ Γυμνασίου»**. Σύμφωνα μὲ τὸ νέο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα (Πράξη 55/24-8-1965 τοῦ Π.Ι.).

1

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

1. i) $\Sigma=\{\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}, \widehat{\Delta}\}=\{x | x=$ γωνία τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ$\}$.
ii) $\Pi=\{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}=\{x | x=$ πολ11 καὶ $0<x<100\}$.
iii) $\Delta=\{$ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ, ΒΕ, ΓΕ$\}=\{x | x=$ διαγώνιος τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ$\}$.
iv) $E=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}=\{x | x=\delta(36)\}$.
Ἡ διαγραμμική τους παράσταση δίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα σχέδια i, ii, iii, iv.



(i) (ii) (iii) (iv)

2. $A=\{1, 2, 3, 6\}=\{x | x=\delta(6)\}$. Ἡ διαγραμμική του παράσταση γίνεται, ὅπως στὰ παραπάνω σχέδια.

3. $A=\{12, 17, 25, 37, 50\}=\{3\times 4,\ 15+2,\ 5^2,\ 4\times 9+1,\ 7^2+1\}=\{15-3, 4^2+1, 4\times 6+1,\ 6^2+1,\ 2\times 25\}=\{2\times 6,\ 3\times 5+2,\ 3^2+4^2,\ 4\times 10-3,\ 2\times 5^2\}$.

4. i) $A=\{x | x=$ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδας$\}\sim\{x | x=$ ἀστέρι τῆς μεγάλης ἄρκτου$\}\sim\{x | x=$ χρῶμα τῆς ἴριδας$\}\sim\{x | x=$ νομὸς τῆς Πελοποννήσου$\}$.
ii) $B=\{x | x=\delta(12)\}\sim\{x | x=$ πλευρὰ ἑξαγώνου$\}\sim\{x | x=$ τάξη τοῦ δημοτικοῦ σχολείου$\}\sim\{x | x=$ πολ8 καὶ $0<x<50\}$.
iii) $\Gamma=\{x | x=$ διαγώνιος ἑξαγώνου$\}\sim\{x | x=\delta(36)\}\sim\{$κράτος τῆς Β. Ἀμερικῆς$\}\sim\{x | x=$ γράμμα τῆς λέξης «ἀρχιεπίσκοπος»$\}$.
iv) $\Delta=\{x | 2x-1=5\}\sim\{x | x=$ μεσημβρινὸς τοῦ τόπου μας$\}\sim\{x | x=$ διχοτόμος γωνίας$\}\sim\{x | x=$ κάθετος σὲ ὁρισμένο σημεῖο Α εὐθείας ε$\}$.

5. Εἶναι : $\Delta(12)=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $\Delta(24)=\{1,2,3,4,6,8,12,24\}$ καὶ $\Delta(72)=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72\}$. Ἄρα εἶναι : $\Delta(12)\subset\Delta(24)\subset\Delta(72)\subset\Phi$.

6. Εἶναι : $\mathscr{P}(A)=\{\varnothing, \alpha, \beta, \gamma, \delta, (\alpha, \beta), (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma), (\beta, \delta), (\gamma, \delta), (\alpha, \beta, \gamma), (\alpha, \beta, \delta), (\alpha, \gamma, \delta), (\beta, \gamma, \delta), (\alpha, \beta, \gamma, \delta)\}$ καὶ τὸ $B=\{\beta, \gamma\}$ εἶναι στοιχεῖο τοῦ $\mathscr{P}(A)$. Ἄρα : $B\subset\mathscr{P}(A)$.

7. Εἶναι : i) πληθαρ $A=5$, ii) πληθαρ $B=6$, iii) πληθαρ $\Gamma=9$.

8. i) $A\cap B=\{x | x=$ ὀρθογώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο$\}$.
ii) $A\cap B=\{x | x=$ διαιρέτης τοῦ μ.κ.δ. $(18, 24)\}=\{1, 2, 3, 6\}$.
iii) $A\cap B=\{x | x=$ τετράγωνο$\}$.
iv) $A\cap B=\{x | x=$ πολλαπλάσιο τοῦ ε.κ.π. $(5, 10)\}$.
v) Εἶναι : $A=\{3\}$ καὶ $B=\{x | x=$ ἀριθμὸς ἄρτιος$\}$. Ἄρα θὰ εἶναι : $A\cap B=\varnothing$.

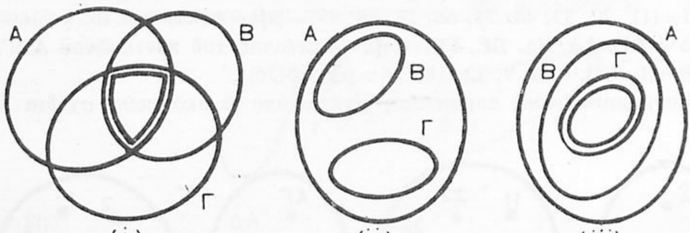
9. i) $A\cap B\cap\Gamma=\{x | x=$ κ.π.$(3, 4, 5)\}=\{60, 120, 180,\ldots\}$.

ii) $A\cap B\cap\Gamma=\{x \mid x=\text{τετράγωνο}\}$.

iii) Ἀφοῦ τὰ Β καὶ Γ εἶναι σὲ διάζευξη ὑποσύνολα τοῦ Α, θὰ εἶναι : $A\cap B\cap\Gamma=\varnothing$.

iv) Εἶναι : $\Gamma\subset B\subset A$. Ἄρα : $A\cap B\cap\Gamma=\Gamma=\{x \mid x=\text{ἰσόπλευρο τρίγωνο}\}$.

Τὰ σχετικὰ διαγράμματα δίνονται ἀπὸ τὰ παρακάτω σχέδια i, ii, iii, iv.



(i) (ii) (iii)

10. i) $A\cup B=\{x \mid x=\text{διαμέρισμα τῆς πολυκατοικίας Πατησίων εἴτε 181, εἴτε 183}\}$ (διάζευξη ἀποκλειστική).

ii) $A\cup B=\{x \mid x=\text{τρίγωνο εἴτε ὀρθογώνιο, εἴτε ἰσοσκελές}\}$. Ἡ διάζευξη ἐδῶ εἶναι μὴ ἀποκλειστική, ἀφοῦ στὸ σύνολο $A\cup B$ περιέχονται καὶ τὰ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ τρίγωνα, δηλ. τὰ στοιχεῖα τοῦ $A\cup B$.

iii) $A\cup B=\{x \mid x=\text{εἴτε } \Delta(6), \text{ εἴτε } \Delta(8)\}$ (διάζευξη μὴ ἀποκλειστική).

iv) $A\cup B=$ ἡμιευθ Αx. Ἡ διάζευξη εἶναι ἀποκλειστική, ἀφοῦ τὰ σημειοσύνολα τμ[ΑΒ[καὶ ἡμιευθ[Βx εἶναι διαζευγμένα.

11. i) Εἶναι : $A\cap(B\cup\Gamma)=\{\alpha, \beta, \gamma\}\cap\{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}=\{\beta, \gamma\}$ καί : $(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)=\{\beta, \gamma\}\cup\{\gamma\}=\{\beta, \gamma\}$. Ἄρα : $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)=\{\beta,\gamma\}$.

ii) $A\cap(B\cup\Gamma)=$ τμ[ΛΜ]$\cap$εὐθ xy$=$τμ[ΛΜ] καί : $(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)=\{\Lambda\}\cup$τμ[ΛΜ]$=$τμ[ΛΜ].

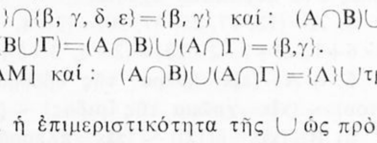
Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐπαληθεύεται καὶ ἡ ἐπιμεριστικότητα τῆς $\cup$ ὡς πρὸς τὴν $\cap$.

12. i) $A=\{x \mid x=\text{τρίγωνο}\}=(A_1=\{x \mid x=\text{τρίγωνο σκαληνό}\}\cup A_2=\{x \mid x=\text{τρίγωνο ἰσοσκελές}\})$, ὅπου $A_1\cap A_2=\varnothing$ καὶ $A_1\neq\varnothing$, $A_2\neq\varnothing$.

ii) $B=\{x \mid x=\text{μαθητὴς τοῦ Γυμνασίου μας}\}=(B_1=\{x \mid x=\text{μαθητὴς τῆς Α΄ τάξης}\}\cup B_2=\{x \mid x=\text{μαθητὴς τῆς Β΄ τάξης}\}\cup B_3=\{x \mid x=\text{μαθητὴς τῆς Γ΄ τάξης}\})$. Εἶναι φανερὸ ὅτι : $B_1\neq\varnothing$, $B_2\neq\varnothing$, $B_3\neq\varnothing$ καὶ $B_1\cap B_2=\varnothing$, $B_1\cap B_3=\varnothing$, $B_2\cap B_3=\varnothing$.

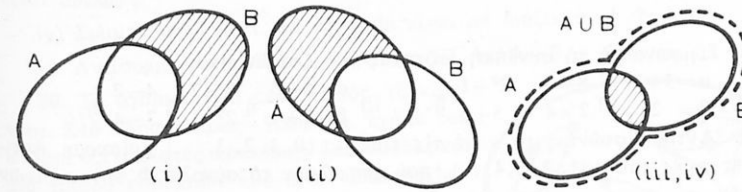
iii) Τὸ Γ διαμερίζεται στὰ μὴ κενὰ καὶ διαζευγμένα μεταξύ του ὑποσύνολα : $\Gamma_1=\{x \mid x=\text{διάκονος}\}$, $\Gamma_2=\{x \mid x=\text{ἱερεύς}\}$, $\Gamma_3=\{x \mid x=\text{ἀρχιμανδρίτης}\}$ καὶ $\Gamma_4=\{x \mid x=\text{ἀρχιεπίσκοπος}\}$.

iv) Ὁ διαμερισμὸς τοῦ Δ δίνει τὶς ἀκόλουθες κλάσεις ἰσοδυναμίας : $\Delta_1=\{x \mid x=\text{ἀνθυπολοχαγός}\}$, $\Delta_2=\{x \mid x=\text{ὑπολοχαγός}\}$, $\Delta_3=\{x \mid x=\text{λοχαγός}\}$, $\Delta_4=\{x \mid x=\text{ταγματάρχης}\}$, $\Delta_5=\{x \mid x=\text{ἀντισυνταγματάρχης}\}$, $\Delta_6=\{x \mid x=\text{συνταγματάρχης}\}$ $\Delta_7=\{x \mid x=\text{ταξίαρχος}\}$, $\Delta_8=\{x \mid x=\text{ὑποστράτηγος}\}$ καὶ $\Delta_9=\{x \mid x=\text{ἀντιστράτηγος}\}$.



13. Στὸ δοσμένο σχέδιο οἱ ἀριθμοὶ ἔχουν τοποθετηθῆ σωστά. Ἡ θέση τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Ε δίνεται στὸ παραπάνω σύνθετο διάγραμμα.

14. Στὴν καθεμιὰ ἀπὸ τὶς τέσσαρες περιπτώσεις ἀντιστοιχεῖ τὸ ἀκόλουθο διάγραμμα:

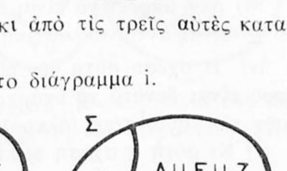


15. Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $\nu(A\cup B)=\nu(A)+\nu(B)-\nu(A\cap B)$ θὰ ἔχουμε: $\nu(A\cup B)=37+20-12=45$. Ἄρα: $54-45=9$ μαθητὲς εἶχαν βαθμὸ $\leqslant 15$ στὰ δυὸ αὐτὰ μαθήματα, ἐνῶ οἱ: $37-12=25$ εἶχαν βαθμὸ $\geqslant 15$ στὰ μαθηματικὰ καὶ οἱ: $20-12=8$ στὰ ἑλληνικά.

16. Ἂν Σ εἶναι τὸ σύνολο τῶν παραλληλογράμμων, Π τῶν πλαγίων, Ο τῶν ὀρθογωνίων, Ρ τῶν ρόμβων καὶ Τ τῶν τετραγώνων, ἐνῶ εἶναι: $\Sigma=\Pi\cup O\cup P\cup T$, δὲν εἶναι: $\Pi\cap O=\varnothing$, ἀλλά: $O\subset\Pi\Rightarrow O\cap\Pi=O$, οὔτε: $O\cap P=\varnothing$, ἀλλά: $O\cap P=T$. Συνεπῶς, ἡ ἀπόκριση εἶναι «ὄχι».

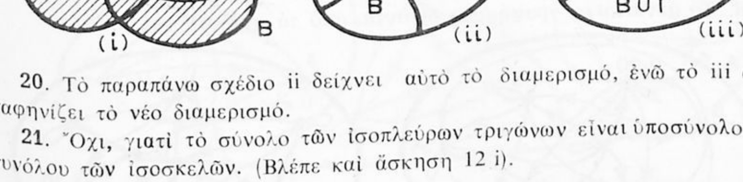
17. Ὄχι, γιατὶ στὸ σύνολο τῶν κυρτῶν γωνιῶν (Κ) περιλαμβάνεται καὶ ἡ ὀρθὴ (O_ρ) καὶ ἡ ἁπλωτὴ γωνία (A_π).

Ὑπάρχει ὁ διαμερισμός: $K=O_\xi\cup A_{\mu\beta}\cup O_\rho\cup A_\pi$ ποὺ τὰ ὑποσύνολά του πληροῦν τὶς γνωστές μας συνθῆκες τοῦ διαμερισμοῦ. Ἡ διαγραμμική του παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο.



18. Ὄχι, γιατὶ ὅλα σχεδὸν τὰ σώματα, μὲ τὶς κατάλληλες συνθῆκες μποροῦν νὰ περάσουν κι ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς καταστάσεις.

19. Ἡ λύση δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σύνθετο διάγραμμα i.



20. Τὸ παραπάνω σχέδιο ii δείχνει αὐτὸ τὸ διαμερισμό, ἐνῶ τὸ iii ἀποσαφηνίζει τὸ νέο διαμερισμό.

21. Ὄχι, γιατὶ τὸ σύνολο τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν ἰσοσκελῶν. (Βλέπε καὶ ἄσκηση 12 i).

2
ΟΙ ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

22. Σύμφωνα μὲ τὴ συνθήκη ἰσότητας δύο ζευγῶν εἶναι :

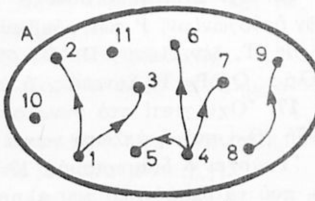
i) $\begin{matrix} \alpha=3+2 \\ \beta=2^3 \end{matrix}$ ἤ $\dfrac{8-3}{2\times4}$ ἤ $\dfrac{2^2+1}{5+3}$ ἤ..., ii) $\begin{matrix} \alpha=5-3 \\ \beta=2+1 \end{matrix}$ ἤ $\dfrac{3^2-7}{2^2-1}$ ἤ $\dfrac{4-2}{7-4}$ ἤ...

23. Ἀντικαθιστώντας τὸ x μὲ τὶς τιμές : {0, 1, 2, 3, ...} βρίσκομε ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ y:{1, 2, 3,4...}, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ σύνολο Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

24. i) R=«...ὁ α ἔχει διπλάσιο τὸ β...», ii) R=«... ὁ α ἔχει πενταπλάσιο τὸ β...».

25. i) 1: R=«... ὁ β εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ α...», ii) 1 : R=«... ὁ β εἶναι μικρότερος τοῦ α...».

26. Τὸ γράφημα δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο, ὅπου τὰ βέλη δείχνουν τὰ παιδιὰ τῶν ἀνδρῶν 1, 4 καὶ 8. Ἔτσι ὁ 1 εἶναι πατέρας τῶν 2 καὶ 3, ὁ 4 πατέρας τῶν 5, 6, 7 καὶ ὁ 8 τοῦ 9. Ὁ 10 εἶναι ἕνας ἄνδρας χωρὶς παιδὶ καὶ τὸ 11 ἕνα παιδὶ ὀρφανὸ ἀπὸ πατέρα.



27. i) Ἡ σχέση R εἶναι ἀντιανακλαστική, ἀφοῦ κανένας δὲν εἶναι πατέρας τοῦ ἑαυτοῦ του.

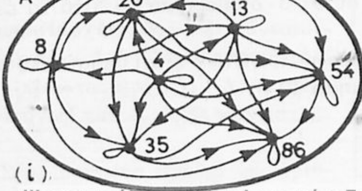
ii) Ἡ σχέση $\geqslant$ στὸ Φ_0 (ὁλικὴ διάταξη) εἶναι ἀνακλαστική, ἀφοῦ κάθε ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἑαυτό του (α=α).

iii) Δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι $\varepsilon \perp \varepsilon$. Ἄρα ἡ σχέση τῆς καθετότητας στὸ σύνολο $\mathscr{D}$ εἶναι ἀντιανακλαστική.

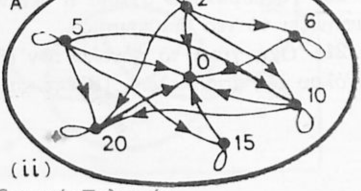
iv) Ἡ σχέση αὐτὴ δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική, οὔτε ἀντιανακλαστική, ἀφοῦ εἶναι δυνατὸ νὰ ὑπάρχουν καὶ μέλη τῆς οἰκογένειας ποὺ νὰ μὴν ἀγαποῦν τὸν ἑαυτό τους (ἀλκοολικοί, τοξικομανεῖς κ.τ.λ.).

v) Κι αὐτὴ ἡ σχέση δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική, οὔτε ἀντιανακλαστική, γιατὶ ὑπάρχει μόνο μιὰ γωνία, ἡ $\widehat{\alpha}=45^0$, ποὺ εἶναι συμπλήρωμα τοῦ ἑαυτοῦ της.

28. Τὰ ἀντίστοιχα γραφήματα δίνονται ἀπὸ τὰ σχέδια i καὶ ii.



(i)



(ii)

29. i) Εἶναι συμμετρική, ἀφοῦ : $\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow \beta \perp \alpha$.

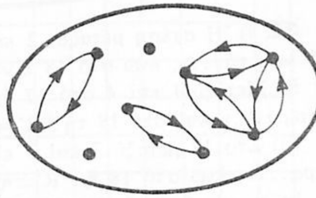
ii) Εἶναι ἀντισυμμετρική. Πραγματικά : $\alpha \| \beta$ καὶ $\beta \| \alpha \Longleftrightarrow \alpha = \beta$.

iii) Ἡ σχέση : R=«...ἔχει ἀδελφή τή...» δὲν εἶναι οὔτε συμμετρική, οὔτε ἀντισυμμετρική, ἀφοῦ μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν καὶ δυάδες κοριτσιῶν ποὺ νὰ εἶναι ἀδελφές.

iv) Συμμετρική, γιατὶ καὶ τὸ B θὰ εἶναι σὲ διάζευξη μὲ τὸ A.

v) Ἀντισυμμετρική, ἀφοῦ : $A \subset B$ καὶ $B \subset A \Rightarrow A = B$.

30. Τὰ ἀγόρια εἶναι ξένα πρὸς τὰ κορίτσια. Στὸ παραπλεύρως γράφημα ἔχομε δυὸ ἀγόρια (ξεχωριστὲς κοκκίδες) δυὸ δυάδες καὶ μιὰ τριάδα κοριτσιῶν ποὺ εἶναι ἀδελφές.



31. i) Εἶναι μεταβατική, ἀφοῦ : $(\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma) \Rightarrow \alpha \leqslant \gamma$ (ὁλικὴ διάταξη τῶν ἀριθμῶν).

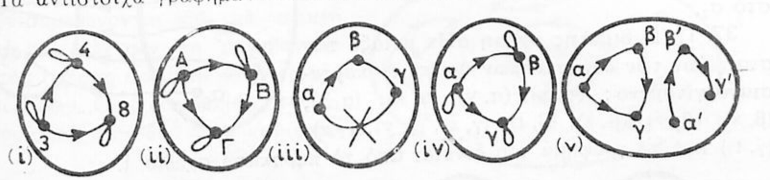
ii) Ξέρομε ὅτι : $(A \subset B$ καὶ $B \subset \Gamma) \Rightarrow A \subset \Gamma$.
Ἄρα ἡ σχέση τοῦ ἐγκλεισμοῦ τῶν συνόλων εἶναι μεταβατική.

iii) Δὲν εἶναι μεταβατική γιατί, ἂν ὁ α εἶναι παπποὺς τοῦ β καὶ ὁ β παπποὺς τοῦ γ, ὁ α θὰ εἶναι ὄχι παπποὺς, ἀλλὰ προπάππος τοῦ γ.

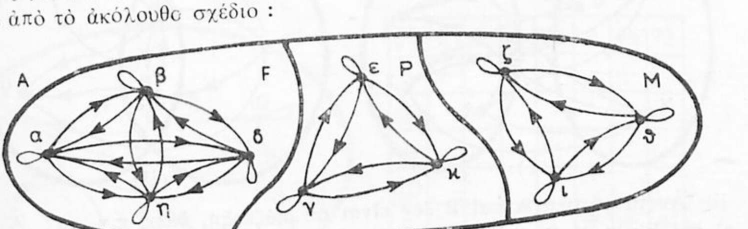
iv) Εἶναι μεταβατική, ἀφοῦ : $(\alpha \| \beta$ καὶ $\beta \| \gamma) \Rightarrow \alpha \| \gamma$. Ἡ ἐπαλήθευση μὲ ἀριθμοὺς εἶναι εὔκολη.

v) Μπορεῖ νὰ εἶναι ἢ νὰ μὴ εἶναι μεταβατική. Ἂν π.χ. ἡ α ἔχη ἐξαδέλφη τὴ β καὶ ἡ β τὴ γ, τότε ἡ α ἢ θὰ ἔχη ἐξαδέλφη τὴ γ (μεταβατική) ἢ θὰ ἔχη ἀδελφὴ τὴ γ ἢ ἀκόμη θὰ εἶναι ξένη πρὸς τὴ γ (μὴ μεταβατική).

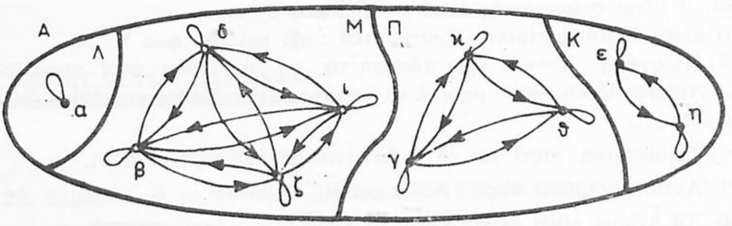
Τὰ ἀντίστοιχα γραφήματα δίνονται στὸ ἀκόλουθο σχέδιο :



32. Ἕνας διαμερισμὸς μὲ βάση τὴ διμελὴ σχέση : R=«...εἶναι τῆς ἴδιας μάρκας μέ...» καὶ γιὰ τὶς μάρκες Φίατ (F), Πεζὼ (P) καὶ Μερσεντὲς (M) δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο :



33. Μὲ βάση τὴ διμελὴ σχέση : R=«...ἔχει τὸ ἴδιο χρῶμα μέ...» καὶ γιὰ τὰ χρώματα λευκὸ (Λ), μαῦρο (M), πράσινο (Π), κόκκινο (K), ἕνας διαμερισμὸς δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο :



34. i) Ἡ σχέση μεταξὺ 2 καὶ 5 στὸ γράφημα 17 εἶναι ἡ : R=«. . . ἔχει ἀδελφὴ τή. . .», ἐνῶ στὸ 18 εἶναι ἡ : R΄=«. . .ἔχει ἀδελφὸ τό. . .».

ii) Μεταξὺ 1 καὶ 4 στὸ 17 ἔχομε τὴ σχέση : R=«. . .ἔχει παππού ἀπὸ τὴ μητέρα. . .» καὶ στὸ 18 τή : R΄=«. . .ἔχει γιαγιὰ ἀπὸ τὸν πατέρα. . .».

iii) Στὸ 17 μεταξὺ 7 καὶ 3 εἶναι ἡ σχέση : «. . .ἔχει παππού ἀπὸ τὸν πατέρα. . .», ἐνῶ στὸ 18 ἡ : R΄=«. . .ἔχει γιαγιὰ ἀπὸ τὴ μητέρα. . .».

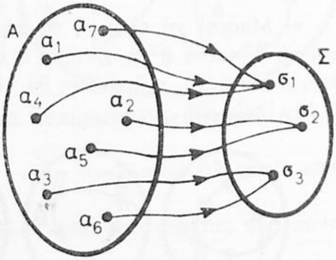
iv, v, vi) Στὸ 17 εἶναι ἡ R΄ τῆς παραπάνω περίπτωσης ii καὶ στὸ 18 ἡ σχέση R τῆς ii.

35. Θὰ θυμηθοῦμε γνωστές μας γεωμετρικὲς προτάσεις :

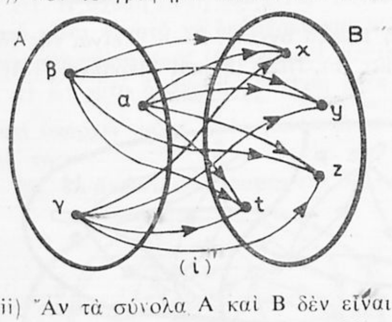
i) $(\alpha \parallel \beta$ καὶ $\beta \parallel \gamma) \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$, ii) $(\alpha \perp \beta$ καὶ $\beta \perp \gamma) \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$,

iii) $(\alpha \perp \beta$ καὶ $\beta \parallel \gamma) \Rightarrow \alpha \perp \gamma$, ἢ $(\alpha \parallel \beta,\ \beta \perp \gamma) \Rightarrow \alpha \perp \gamma$.

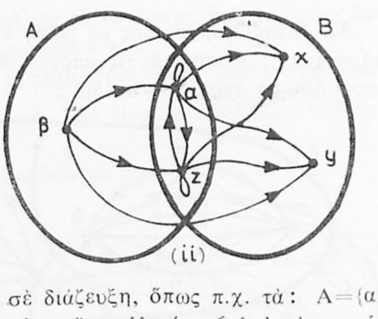
36. Γιὰ τὸ σύνολο τῶν ἀθλητῶν : $\Sigma=\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7\}$ ἡ σχέση ατσ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως γράφημα ποὺ δείχνει ὅτι οἱ ἀθλητὲς α_1, α_4, α_7 ἀνήκουν στὸ σύλλογο σ_1, οἱ α_2, α_5 στὸ σ_2 καὶ οἱ α_3, α_6 στὸ σ_3,



37. i) Ἡ διμελὴς σχέση αΗx μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δυὸ συνόλων ὁρίζει τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο : $\{(\alpha, x), (\alpha, y), (\alpha, z), (\alpha, t), (\beta, x), (\beta, y), (\beta, z), (\beta, t), (\gamma, x), (\gamma, y), (\gamma, z), (\gamma, t)\}$ ποὺ τὸ γράφημά του δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i.



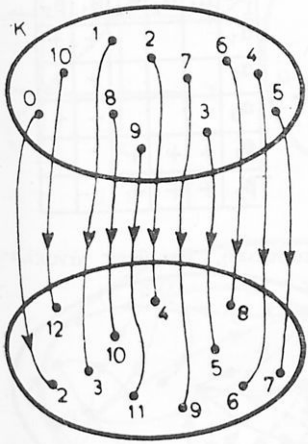
(i)



(ii)

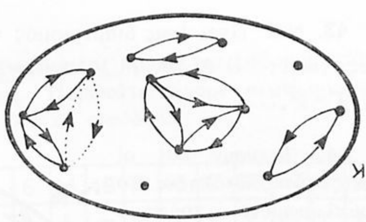
ii) Ἂν τὰ σύνολα Α καὶ Β δὲν εἶναι σὲ διάζευξη, ὅπως π.χ. τά : $A=\{\alpha, \beta, z\}$ καὶ $B=\{\alpha, x, y, z\}$ ἡ σχέση αΗ΄x=«ὁ α ἔχει ἡλικία $\leqslant$ ἀπὸ τὸν x» ὁρίζει τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο : $\{(\alpha, \alpha), (\alpha, x), (\alpha, y), (\alpha, z), (\beta, \alpha), (\beta, x), (\beta, y), (\beta, z), (z, \alpha), (z, x), (z, y), (z, z)\}$ ποὺ τὸ γράφημά του δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο ii.

38. Θὰ ἔχουμε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο = {(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 7), (6, 8), (7, 9), (8, 10), (9, 11), (10, 12)}, ποὺ τὸ γράφημά του καὶ ὁ ἀντίστοιχος πίνακας διπλῆς εἰσόδου εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

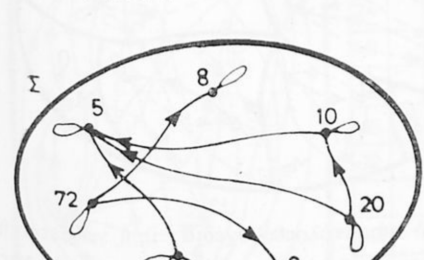


x \ y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	+										
1		+									
2			+								
3				+							
4					+						
5						+					
6							+				
7								+			
8									+		
9										+	
10											+

39. Ἡ σχέση αὐτὴ δὲν εἶναι ἀνακλαστική. Εἶναι ὅμως συμμετρικὴ καὶ μεταβατική. Ὑπάρχουν δυὸ δυάδες καὶ δυὸ τριάδες ἀδελφῶν. Τὰ βέλη ποὺ λείπουν σημειώνονται ἐδῶ μὲ στικτὴ γραμμὴ καὶ δείχνουν τὴ μεταβατικότητα τῆς σχέσης ἀνάμεσα στὴν τριάδα τῶν ἀδελφῶν. Οἱ δυὸ κοκκίδες ποὺ ἀπομένουν δείχνουν δυὸ ξένα κορίτσια.

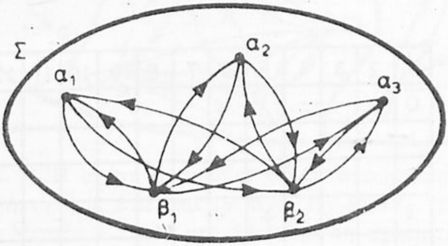


40. Τὸ γράφημα καὶ ὁ πίνακας δίνονται στὰ ἀκόλουθα σχέδια :



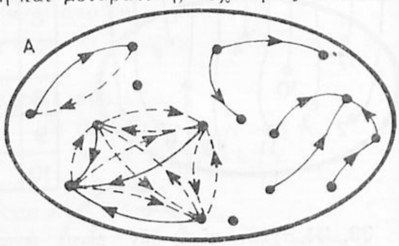
y \ x	5	8	10	20	9	45	72
5	+		+	+		+	
8		+					+
10			+	+			
20				+			
9					+	+	+
45						+	
72							+

41. Δὲν εἶναι οὔτε ἀνακλαστική. οὔτε μεταβατικὴ εἶναι μόνο συμμετρική. Γράφημα καὶ πίνακας διπλῆς εἰσόδου εἶναι τὰ ἀκόλουθα:



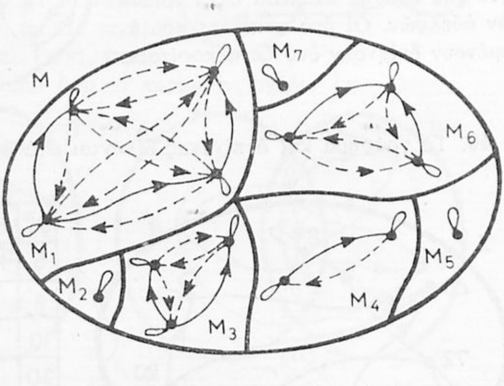
Σ \ Σ	α1	α2	α3	β1	β2
α1				+	+
α2				+	+
α3				+	+
β1	+	+	+		
β2	+	+	+		

42. Ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ὄχι ὅμως ἀνακλαστική. Μὲ βάση τὶς δυὸ αὐτὲς ἰδιότητες τὸ γράφημα συμπληρώνεται μὲ βέλη συμμετρικότητας καὶ μεταβατικότητας. Ἕνα μέρος ἀπ' αὐτὸ τὸ γράφημα συμπληρώνομε στὸ παραπλεύρως σχέδιο μὲ τὰ διακοπτὰ βέλη. Συμπληρῶστε καὶ σεῖς τὸ ὑπόλοιπο, ἀφοῦ κάμετε τὸ σχέδιο σὲ μεγαλύτερο μέγεθος.

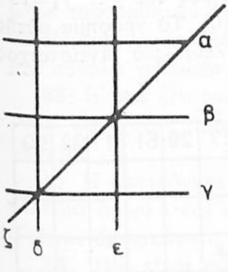


43. Ναί· εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Σ′ τῶν μαθητῶν τῆς τάξης μας, γιατί: i) $A \cup B \cup \Gamma \cup \ldots \cup \Omega = \Sigma'$, ii) $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing, \ldots$ iii) $A \cap B = \varnothing$, $A \cap \Gamma = \varnothing, \ldots$

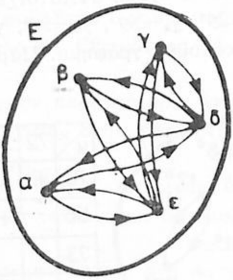
44. Ἰσχύουν καὶ οἱ τρεῖς αὐτὲς ἰδιότητες. Τὸ συμπληρωμένο γράφημα δίνεται παραπλεύρως. Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ σύνολο: $\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7\}$ ἀποτελεῖ ἕνα διαμερισμὸ τοῦ συνόλου M.



45. Τὰ ζητούμενα δίνονται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα σχέδια: i) ἡ γεωμετρικὴ κατασκευή, ii) τὸ γράφημα τῆς σχέσης καθετότητας, iii) ὁ πίνακας διπλῆς εἰσόδου αὐτῆς τῆς σχέσης, iv) τὸ γράφημα τῆς παραλληλίας καὶ v) ὁ ἀντίστοιχος πίνακας διπλῆς εἰσόδου.



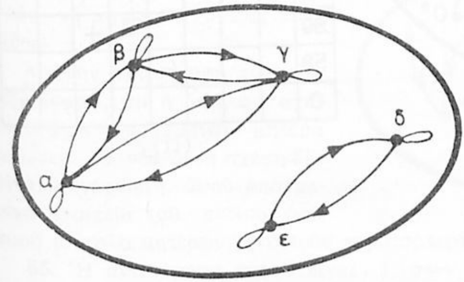
(i)



(ii)

E \ E	α	β	γ	δ	ε	ζ
α				+	+	
β				+	+	
γ				+	+	
δ	+	+	+			
ε	+	+	+			
ζ						

(iii)

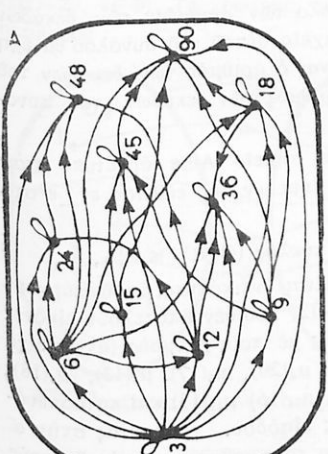


(iv)

E \ E	α	β	γ	δ	ε	ζ
α	+	+	+			
β	+	+	+			
γ	+	+	+			
δ				+	+	
ε				+	+	
ζ						

(v)

46. Στὴ συμπλήρωση αὐτοῦ τοῦ γραφήματος πρέπει νὰ λάβουμε ὑπόψη καὶ τὴ μεταβατικότητα αὐτῆς τῆς σχέσης. Παρακάτω δίνομε συμπληρωμένο τὸ γράφημα καὶ τὸν ἀντίστοιχο πίνακα διπλῆς εἰσόδου.

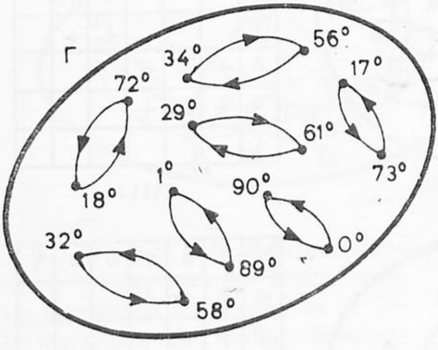


(i)

A \ A	3	6	24	48	15	45	12	36	90	9	18
3	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
6		+	+	+			+	+	+		+
24			+	+							
48				+							
15					+	+			+		
45						+			+		
12			+	+			+	+			
36								+			
90									+		
9						+		+	+	+	+
18								+	+		+

(ii)

47. Στίς δοσμένες τιμὲς τοῦ x ἔχομε ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ y: $y_1=18^0$, $y_2=56^0$, $y_3=73^0$, $y_4=61^0$, $y_5=29^0$, $y_6=89^0$, $y_7=58^0$, $y_8=0^0$. Τὸ γράφημα αὐτῆς τῆς σχέσης δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο γράφημα. Παραπλεύρως ὁ ἀντίστοιχος πίνακας διπλῆς εἰσόδου.



(ι)

y \ x	72	34	17	29	61	1	32	90
18	+							
56		+						
73			+					
61				+				
29					+			
89						+		
58							+	
0								+

(ιι)

3

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ—ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

48. Ἂν Δ={1, 2, 3, . . .}=Φ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν τῶν δεκάδων τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, κάθε στοιχεῖο αὐτοῦ τοῦ συνόλου θὰ ἔχη 10 εἰκόνες στὸ σύνολο Φ. Ἔτσι π.χ. τὸ 1 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ συνόλου {10, 11, 12, . . ., 19}, ὁ 23 εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν δεκάδων τοῦ συνόλου {230, 231, 232, . . .,239} κ.τ.λ.

49. Πρόκειται γιὰ ἐπεικόνιση, γιατὶ κάθε σημεῖο $A\in\varepsilon$ (ἀρχέτυπο στοιχεῖο) ἔχει εἰκόνες του τὸ ἀπειροσύνολο τῶν σημείων τῆς εὐθείας $\varepsilon_1 \perp \varepsilon$ στὸ σημεῖο Α.

50. Ἀντιπροσωπεύουν τὸ διμελὲς σύνολο: κύκλος $(O, R)\cap\varepsilon=\{A, B\}$.

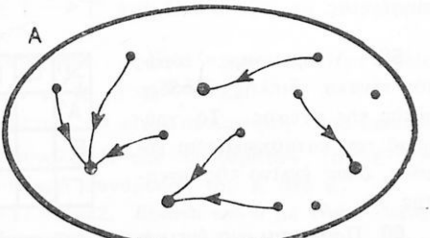
51. Ἡ ἀπεικόνιση τοῦ Μ στὸ σύνολο Β εἶναι ἐνεικόνιση, ἀφοῦ ὑπάρχουν καὶ στοιχεῖα τοῦ Β, τοὐλάχιστο οἱ βαθμοὶ 1—12, ποὺ δὲν ἀποτελοῦν εἰκόνες στοιχείων τοῦ Μ. Βαθμολογῆστε τοὺς μαθητὲς μὲ τοὺς βαθμοὺς (ἀντίστοιχα μέσα στὴν παρένθεση): $\mu_1(13)$, $\mu_2(15)$, $\mu_3(14)$, $\mu_4(20)$, $\mu_5(17)$, $\mu_6(13)$, $\mu_7(18)$, $\mu_8(14)$, $\mu_9(16)$, $\mu_{10}(14)$, $\mu_{11}(17)$, $\mu_{12}(19)$, $\mu_{13}(15)$, $\mu_{14}(16)$ $\mu_{15}(13)$ καὶ κατασκευάστε τὸ γράφημα καθὼς καὶ τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου, γράφοντας στὴν α΄ γραμμὴ τοὺς βαθμοὺς 1—20 καὶ στὴν α΄ στήλη τοὺς μαθητὲς μὲ τοὺς βαθμούς τους, ὅπως τοὺς δίνομε παραπάνω.

52. Θὰ ἔχουμε ἀμφεικόνιση στὴν περίπτωση ποὺ δὲν ὑπάρχουν στὸ σύνολο τῶν μαθητῶν ἀδελφοί. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση ἡ ἀπεικόνιση τοῦ Α θὰ εἶναι πάνω στὸ σύνολο Β. ᾿Ενεικόνιση θὰ ἔχουμε, ἂν ὁρίσουμε τὸ Β ὡς ἕνα σύνολο γυναικῶν.

53. i) Ἂν δὲν ὑπάρχουν περισσότεροι ἀπὸ ἕνας μαθητὲς μὲ τὸ ἴδιο ἐπώνυμο, θὰ ἔχουμε ἀμφεικόνιση. Στὴν ἀντίθετη περίπτωση θὰ ἔχουμε ἐπεικόνιση.

ii) Ἡ ἀπεικόνιση τοῦ Φ στὸ Φ εἶναι ἐνεικόνιση, ἀφοῦ ὑπάρχουν στὸ δεύτερο σύνολο καὶ οἱ μὴ τετράγωνοι ἀριθμοί, ἐνῶ ἡ ἀπεικόνιση τοῦ Φ στὸ Τ εἶναι ἀμφεικόνιση.

54. Ἡ σ εἶναι συνάρτηση τοῦ Α στὸ Α, γιατὶ ἀπὸ κάθε ἀρχέτυπο στοιχεῖο (παιδὶ) ξεκινᾶ ἕνα, καὶ μόνο ἕνα, βέλος ποὺ κατευθύνεται πρὸς τὴ μητέρα (χοντρὲς κοκκίδες).

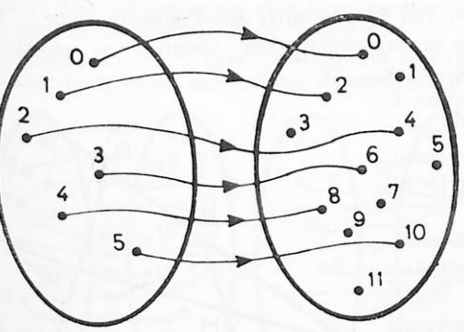


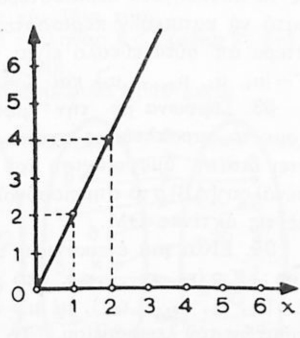
Μὲ τὴν ἀντιστροφὴ τῶν βελῶν ἐκφράζεται ἡ διμελὴς σχέση: 1 : σ = «... εἶναι μητέρα τοῦ...». Ἡ νέα αὐτὴ σχέση δὲν εἶναι συνάρτηση, ἀφοῦ ἀπὸ μερικὰ στοιχεῖα τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ (σύνολο μητέρων) ξεκινοῦν περισσότερα ἀπὸ ἕνα βέλη.

55. Ἡ ἀντίστροφη σχέση εἶναι. 1 : σ = « ..εἶναι συμμετρικὸ πρὸς εὐθεία ...». Καὶ ἡ νέα αὐτὴ σχέση, ὅπως καὶ ἡ ἀρχική, εἶναι συνάρτηση (ἀμφιμονοσήμαντη).

᾿Απ᾿ αὐτὴ καὶ τὴν προηγούμενη ἄσκηση συνάγεται ὅτι ἡ ἀντίστροφη σχέση μιᾶς συνάρτησης δὲν εἶναι κατανάγκη συνάρτηση.

56. Τὸ πεδίο τῶν τιμῶν αὐτῆς τῆς συνάρτησης εἶναι τὸ σύνολο : $A = \{x | x = 2\nu,\ \nu \in \Phi\}$. Τὸ γράφημά της καὶ ἡ γραφική της παράσταση εἶναι τὰ ἀκόλουθα :



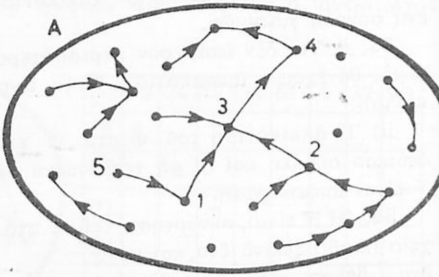


57. Ὁ πίνακας τιμῶν αὐτῆς τῆς συνάρτησης εἶναι ὁ ἀκόλουθος :

x =	0	1	2	3	4	5	6	...
3(x+1) = y =	3	6	9	12	15	18	21	...

'Απ' αὐτὸ συνάγεται ὅτι ἡ συνάρτηση εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη μὲ πεδίο τιμῶν τὸ σύνολο : $\Pi=\{3, 6, 9\ldots\}$ καὶ ἐνεικόνιση μὲ πεδίο τιμῶν τὸ Φ_0.

58. 'Αριθμοῦμε μερικὰ στοιχεῖα τοῦ Α καὶ βρίσκομε ὅτι : i) οἱ 1 καὶ 2 εἶναι ἀδέλφια (πατέρας τους ὁ 3), ii) ὁ 1 ἔχει παπποὺ τὸν 4, iii) ὁ 5 ἔχει θεῖο τὸν 2 καὶ iv) ὁ 5 ἔχει προπάππο του τὸν 4.



Ἂν ἀριθμήσετε ὅλα τὰ στοιχεῖα, θὰ βρῆτε καὶ ἄλλες δυάδες μὲ τὸν ἴδιο, ὅπως παραπάνω, βαθμὸ συγγένειας.

59. Δίνομε παραπλεύρως τὸν πίνακα διπλῆς εἰσόδου αὐτῆς τῆς σχέσης. Τὸ γράφημά του κατασκευάζεται εὔκολα, ὅπως ἐκεῖνο τῆς ἄσκησης 36.

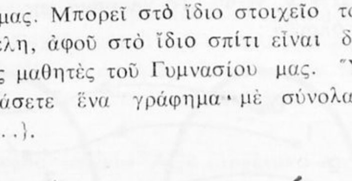
Τ\Π	α	β	γ	δ	ε	ζ	η	ϑ	ι	κ	λ
Α′					+				+		
Β′		+				+				+	
Γ′	+		+	+			+	+			+

60. Πρόκειται γιὰ ἐνεικόνιση τοῦ συνόλου τῶν χρονολογιῶν ποὺ γεννήθηκε καθένα ἀπὸ τὰ μέλη αὐτῆς τῆς οἰκογένειας, π.χ. $X=\{\pi(1921), \mu(1928), \alpha_1(1948), \alpha_2(1950), \alpha_3(1953)\}$, στὸ σύνολο τῶν ἐτῶν : $E=\{1921, 1922, 1923, \ldots 1959\}$.

61. Εἶναι περίπτωση ἀμφεικόνισης. Τὸ γράφημά της θὰ κατασκευασθῆ, ὅπως τῆς ἄσκησης 47, ὅπου μὲ τὰ διπλὰ βέλη ἐκφράζεται ἡ συμμετρικότητα τῆς σχέσης.

62. Πρόκειται γιὰ ἐνεικόνιση, ἀφοῦ θὰ ὑπάρχουν καὶ στοιχεῖα τοῦ Κ, ὅπου δὲν καταλήγει κανένα βέλος, σπίτια δηλ. τῆς πόλης μας, ὅπου δὲν κατοικεῖ κανένας μαθητὴς τοῦ Γυμνασίου μας. Μπορεῖ στὸ ἴδιο στοιχεῖο τοῦ Κ νὰ καταλήγουν περισσότερα ἀπὸ ἕνα βέλη, ἀφοῦ στὸ ἴδιο σπίτι εἶναι δυνατὸ νὰ κατοικοῦν περισσότεροι ἀπὸ ἕνας μαθητὲς τοῦ Γυμνασίου μας. Ὕστερα ἀπ' αὐτὰ εὔκολο εἶναι νὰ κατασκευάσετε ἕνα γράφημα μὲ σύνολα : $\Gamma=\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots, \mu_8\}$ καὶ $K=\{\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots\}$.

63. Σύμφωνα μὲ τὴν ἐμφώνηση ἔχομε τὸ παραπλεύρως σχέδιο. Προκύπτει ἔτσι ἡ ἀμφεικόνιση τοῦ σημειοσυνόλου [ΑΒ] στὸ σημειοσύνολο [Α′Β′] μὲ τὶς ἀκτίνες ΟΜ.



64. Εἶναι μιὰ ἐνεικόνιση τοῦ συνόλου : $K=\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots \kappa_\nu\}$, στὸ σύνολο : $E=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots \varepsilon_\mu\}$, μὲ $\mu>\nu$, τῶν ἐπιβατῶν τοῦ λεωφορείου. Τὸ γράφημά της θὰ γίνῃ, ὅπως στὴν παραπάνω ἄσκηση 56.

65. Ἂν πάρουμε τὰ σύνολα Κ καὶ Ε τῆς προηγούμενης ἄσκησης (μὲ

$\mu<\nu$) ἡ δοσμένη σχέση ὁρίζει τὴν ἐνεικόνιση : $\sigma: E \xrightarrow{\sigma} K$. Μὲ τὴν ἴδια σχέση σ δὲν ὑπάρχει ἀπεικόνιση τοῦ Κ στὸ σύνολο Ε, ἀφοῦ ὑπάρχουν καὶ στοιχεῖα τοῦ Κ ($\nu>\mu$) ποὺ δὲν εἶναι ἀρχέτυπα στοιχείων τοῦ Ε.

66. i) Στὴν ἄσκηση 61 ἔχομε τὴ διμελὴ σχέση ; σ=«. . .ἔχει συμμετρικὸ ὡς πρὸς σημεῖο $O\in\Pi$. . .» καὶ ἀπεικόνιση τοῦ ἐπιπέδου Π στὸ ἴδιο τὸ ἐπίπεδο Π. Ἄρα ἔχομε τὴ συνάρτηση : $\sigma: \Pi \xrightarrow{\sigma} \Pi$ ἢ $\sigma: x\in\Pi \xrightarrow{\sigma} \sigma(x)S_0y\in\Pi$.

ii) Στὴν ἄσκηση 62 ἡ δοσμένη σχέση : σ=«. . .ἔχει κατοικία. . .» εἶναι συνάρτηση. Γράφομε : $\sigma: \Gamma \xrightarrow{\sigma} K$ καὶ διαβάζομε : «τὸ σύνολο Γ ἀπεικονίζεται μὲ τὴ συνάρτηση σ στὸ σύνολο Κ».

iii) Στὴν 63 ἡ σχέση : σ=«. . .μὲ τὴν ἀκτίνα ΟΜ τὸ Μ ἔχει ἀντίστοιχο τὸ Μ΄. . .» εἶναι ἡ συνάρτηση : $\sigma: T \xrightarrow{\sigma} T'$ ποὺ ἀπεικονίζει τὸ σημειοσύνολο $T=[AB]$ στὸ $T'=[A'B']$.

iv) Στὴν 64 ἡ σχέση : σ=«. . .κατέχεται. . .» εἶναι συνάρτηση μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο Ε καὶ πεδίο τιμῶν τὸ Κ ($\sigma: E \xrightarrow{\sigma} K$).

v) Στὴν 65 ἡ σχέση ; σ=«. . .κάθεται. . .» εἶναι συνάρτηση ποὺ ἀπεικονίζει τὸ σύνολο Ε τῶν θεατῶν στὸ σύνολο Κ τῶν καθισμάτων ($\sigma: E \xrightarrow{\sigma} K$), ἐνῶ μὲ τὴν ἴδια σχέση σ δὲν ὑπάρχει συνάρτηση τοῦ Κ στὸ Ε.

67. Εἶναι : $f(2)=2+5=7$, $f(17)=17+5=22$. Εἰκόνα τοῦ 0 μὲ τὴν f εἶναι ὁ ἀριθμός : $f(0)=0+5=5$. Βρίσκομε τὴν τιμὴ τοῦ x, γιὰ τὴν ὁποία εἶναι : $x+5=8 \Longleftrightarrow x=8-5 \Rightarrow x=3$. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3. Ἂν εἶναι : $f(\alpha)=87$, θὰ ἔχουμε : $\alpha+5=87 \Longleftrightarrow \alpha=87-5 \Rightarrow \alpha=82$.

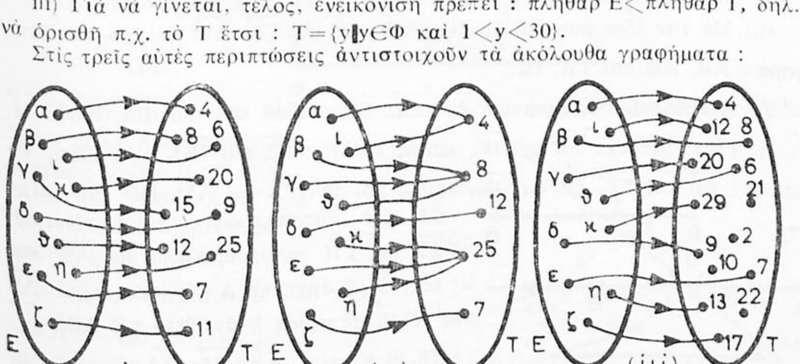
68. Ἡ συνάρτηση συμβολίζεται : $x \overset{\sigma}{—} 2x=y$. Εἰκόνα τοῦ 8 μὲ τὴ σ εἶναι ὁ ἀριθμός : $y=2.8=16$. Γιὰ νὰ εἶναι : $y=18$, θὰ ἔχουμε ἀρχέτυπο : $2x=18 \Longleftrightarrow x=18:2 \Rightarrow x=9$. Θὰ εἶναι : $2\alpha=100 \Longleftrightarrow \alpha=100:2 \Rightarrow \alpha=50$. Ἂν εἶναι : $2x=x \Longleftrightarrow 2x-x=0 \Rightarrow x=0$.

69. Ἂν εἶναι : $E=\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \iota, \kappa\}$, i) γιὰ νὰ εἶναι ἡ σ ἀμφιμονοσήμαντη, πρέπει τὸ σύνολο : $T\sim E$, π.χ. $T=\{4, 8, 6, 12, 20, 15, 25, 9, 11, 7\}$.

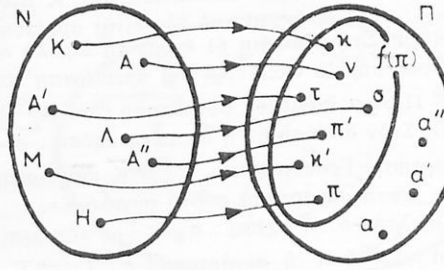
ii) Γιὰ ν' ἀπεικονίζη τὸ Ε πάνω στὸ Τ, πρέπει νὰ εἶναι : πληθαρ$E>$πληθαρ Τ, δηλ. νὰ ὑπάρχουν εἴδη ἐμπορευμάτων μὲ τὴν ἴδια τιμή.

iii) Γιὰ νὰ γίνεται, τέλος, ἐνεικόνιση πρέπει : πληθαρ $E<$πληθαρ Τ, δηλ. νὰ ὁρισθῆ π.χ. τὸ Τ ἔτσι : $T=\{y|y\in\Phi$ καὶ $1<y<30\}$.

Στὶς τρεῖς αὐτὲς περιπτώσεις ἀντιστοιχοῦν τὰ ἀκόλουθα γραφήματα :



70. Εἶναι : N={Κορινθίας (K), Ἀργολίδας (A), Ἀρκαδίας (A′), Μεσσηνίας (M), Ἠλείας (H), Ἀχαΐας (A″)}, f(Π)={Κόρινθος (κ), Ναύπλιο (ν), Τρίπολη (τ), Σπάρτη (σ), Καλαμάτα, (κ′), Πύργος (π), Πάτρα (π′)} καὶ Π=f(Π)∪{Αἴγιο (α), Ἀμαλιάδα (α′), Ἄργος (α″)}.



Εἶναι φανερὸ ὅτι πρόκειται γιὰ ἐνεικόνιση τοῦ N στὸ Π. Ἡ ἀντίστροφη σχέση : 1 : f=«...εἶναι πρωτεύουσα τοῦ νομοῦ...» δὲν εἶναι ἀπεικόνιση τοῦ Π στὸ M, ἀλλὰ ἀπεικόνιση (ἀμφεικόνιση) τοῦ f(Π) στὸ N.

71. Εἶναι συνάρτηση, ἐνῶ ἡ ἀντίστροφη σχέση : 1 : σ=«...ἔχει ἀριθμὸ τηλεφώνου...» εἶναι συνάρτηση, ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, κάθε ἄτομο ἔχῃ ἕνα, καὶ μόνο ἕνα, ἀριθμὸ τηλεφώνου.

72. Ἡ f δὲν εἶναι συνάρτηση τοῦ A στὸ Λ, γιατὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ A (ἀρχέτυπο) ἔχει περισσότερες ἀπὸ μιὰ εἰκόνες στὸ Λ. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο ἡ ἀντίστροφη σχέση : 1 : f=«...περιέχει τὸ φωνῆεν...» δὲν εἶναι συνάρτηση τοῦ Λ στὸ A.

4
ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

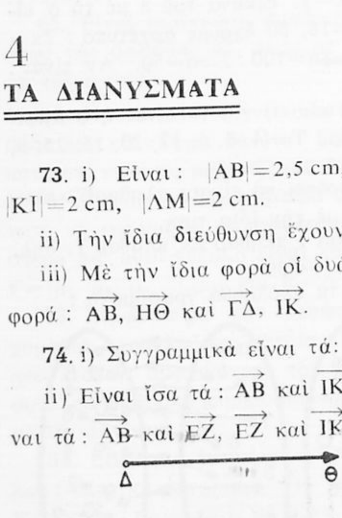
73. i) Εἶναι : $|AB|=2{,}5$ cm, $|\Gamma\Delta|=4{,}5$ cm, $|EZ|=1{,}5$ cm, $|H\Theta|=1$ cm, $|KI|=2$ cm, $|\Lambda M|=2$ cm.

ii) Τὴν ἴδια διεύθυνση ἔχουν τά : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{H\Theta}$ καὶ τά : $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{IK}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$.

iii) Μὲ τὴν ἴδια φορὰ οἱ δυάδες : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EZ}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$ καὶ μὲ ἀντίθετη φορά : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{H\Theta}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{IK}$.

74. i) Συγγραμμικὰ εἶναι τά: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{IK}$, καθὼς καὶ τά : $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$.

ii) Εἶναι ἴσα τά : $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{IK}$, καθὼς καὶ τά : $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{H\Theta}$. Ἀντίθετα εἶναι τά : $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{EZ}$ καὶ $\overrightarrow{IK}$, καθὼς καὶ τὰ : $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{\Lambda M}$, $\overrightarrow{H\Theta}$ καὶ $\overrightarrow{\Lambda M}$.

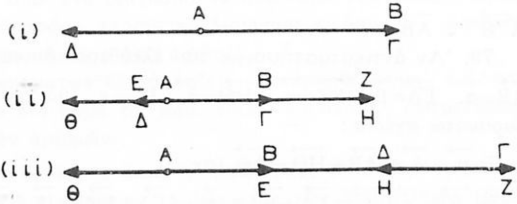


75. Στὸ παραπλεύρως σχέδιο εἶναι : i) τὰ $\overrightarrow{\Gamma Z}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma H}$ συγγραμμικὰ μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ ii) τὸ $\overrightarrow{\Delta\Theta}$ μὲ ἀρχὴ τὸ Δ καὶ ἴσο μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ $\overrightarrow{IE}$ μὲ πέρας E ἀντίθετο τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

76. i) Εἶναι : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}$.

ii) Παίρνομε : $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{EZ}=\vec{\gamma}$,

$\overrightarrow{H\Theta}=\vec{\delta}$ καὶ ἔχομε: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(\vec{\gamma}+\vec{\delta})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+(\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{H\Theta})=\overrightarrow{A\Delta}+(\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{H\Theta})=(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{EZ})+\overrightarrow{H\Theta}=\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{H\Theta}$ $=\overrightarrow{A\Theta}$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο ii).



iii) Εἶναι: $(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})+(\vec{\beta}+\vec{\delta})=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EZ})+(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{H\Theta})=\overrightarrow{AZ}+(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{H\Theta})=(\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{H\Theta}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{H\Theta}=\overrightarrow{A\Theta}$ (βλέπε παραπάνω σχέδιο iii).

Ἀπὸ τὰ ἐξαγόμενα στὶς δυὸ τελευταῖες περιπτώσεις παρατηροῦμε ὅτι: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+(\vec{\gamma}+\vec{\delta})=(\vec{\alpha}+\vec{\gamma})+(\vec{\beta}+\vec{\delta})=\overrightarrow{A\Theta}$.

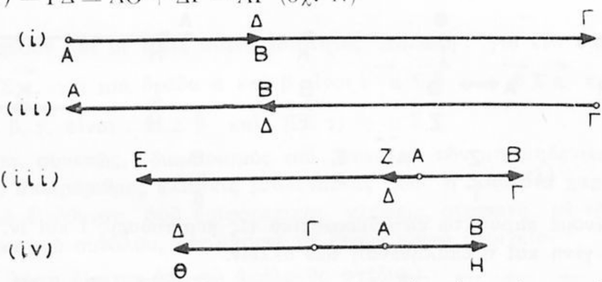
77. Ὅπως στὴν παραπάνω ἄσκηση, ἀντικαθιστοῦμε τὰ ἐλεύθερα διανύσματα μὲ τὰ ἀντίστοιχα ἐφαρμοστὰ καί, ἐφαρμόζοντας τὸν κανόνα τῆς ἀφαίρεσης, ἔχομε:

i) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο i).

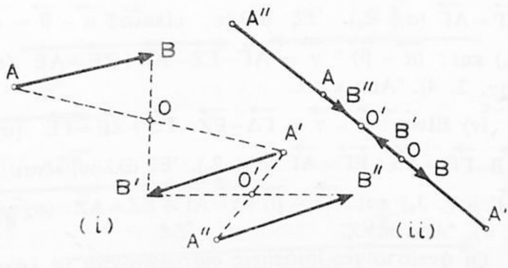
ii) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Gamma A}$ (σχ. ii). Εἶναι $\overrightarrow{\Gamma A}$ ἀντίθετο $\overrightarrow{A\Gamma}$.

iii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})-\vec{\gamma}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})-\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{AE}$ (σχ. iii).

iv) $\vec{\alpha}-(\vec{\beta}-\vec{\gamma})+(\vec{\delta}-\vec{\gamma})=\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}-\vec{\gamma}=(\vec{\alpha}+\vec{\delta})-\vec{\beta}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{H\Theta})-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{A\Theta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. iv)



78. i) Ξέρομε ὅτι δυὸ τμήματα, συμμετρικὰ πρὸς κέντρο, εἶναι ἴσα. Ἔτσι εἶναι (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i): $|AB|=|A'B'|$ καὶ $|A'B'|=|A''B''|$. Ἂν τώρα λάβουμε ὑπόψη καὶ τὴ φορά, θὰ εἶναι: $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A''B''}=\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AB}$ καί, μὲ τὴ μεταβατικότητα τῆς ἰσότητας: $\overrightarrow{A''B''}=\overrightarrow{AB}$.



ii) Μὲ τοὺς ἴδιους συλλογισμοὺς ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο ii ἔχομε πάλι: $\overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{AB}$.

79. Ἂν ἀντικαταστήσουμε τὰ ἐλεύθερα διανύσματα μὲ τὰ ἐφαρμοστά: $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{EZ}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{H\Theta}=\vec{\delta}$, $\overrightarrow{IK}=\vec{\varepsilon}$, θὰ ἔχουμε, ὅπως φαίνεται στὰ παρακάτω σχέδια:

i) $\vec{\alpha}+\vec{\delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{H\Theta}=\overrightarrow{A\Theta}$ (σχ. i).

ii) $\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}+\overrightarrow{IK}=(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ})+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{\Gamma Z}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{\Gamma K}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. ii).

iii) $\vec{\delta}+\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{H\Theta}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{HK}$ (σχ. iii).

iv) $\vec{\alpha}-\vec{\varepsilon}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{AI}$ (σχ. iv).

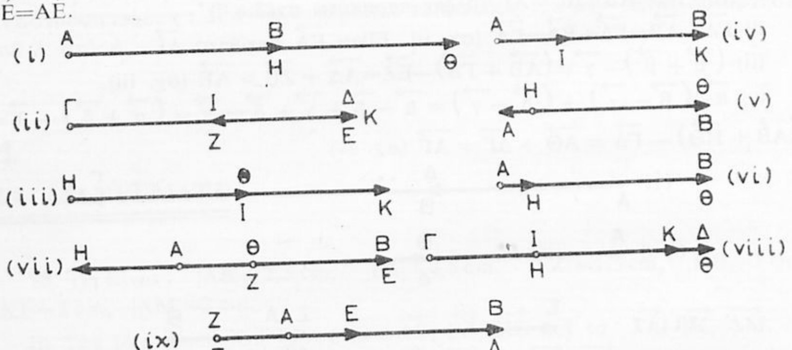
v) $\vec{\delta}-\vec{\alpha}=\overrightarrow{H\Theta}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{H\Theta}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{HA}$ (σχ. v).

vi) $\vec{\alpha}-\vec{\delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{H\Theta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Theta H}=\overrightarrow{AH}=-\overrightarrow{HA}$ (σχ. vi).

vii) $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EZ}-\overrightarrow{H\Theta}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EZ})+\overrightarrow{\Theta H}=\overrightarrow{AZ}+\overrightarrow{\Theta H}=\overrightarrow{AH}$ (σχ. vii)

viii) $(\vec{\beta}-\vec{\delta})+\vec{\varepsilon}=(\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{H\Theta})+\overrightarrow{IK}=(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Theta H})+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{\Gamma H}+\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{\Gamma K}$ (σχ. viii).

ix) $\vec{\alpha}-(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ})=(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta})-\overrightarrow{EZ}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma})+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{AE}$.



80. Δίνομε παρακάτω κατασκευαστικὰ τὶς περιπτώσεις i καὶ iv. Μὲ ὅμοιο τρόπο θὰ γίνη καὶ ἡ ἐπαλήθευση τῶν ἄλλων.

i) $\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{\Gamma Z}$ (σχ. 1_0) καί: $\vec{\alpha}-(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma Z}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{Z\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. 2_0). Ἐξ ἄλλου, εἶναι: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. 3_0) καί: $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-\vec{\gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{AE}$ (σχ. 4_0). Ἀλλά: $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AE}$ (σχ. 3, 4). Ἄρα κ.τ.λ.

iv) Εἶναι: $\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}-\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{ZE}=\overrightarrow{\Gamma E}$ (σχ. 1_0) καί: $\vec{\alpha}-(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma E}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. 2_0). Ἐξ ἄλλου, εἶναι: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$ (σχ. 3_0) καί: $(\vec{\alpha}-\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{EZ}=\overrightarrow{AZ}$ (σχ. 4_0). Ἀλλά: $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AZ}$ (σχ. 3, 4). Ἄρα κ.τ.λ.

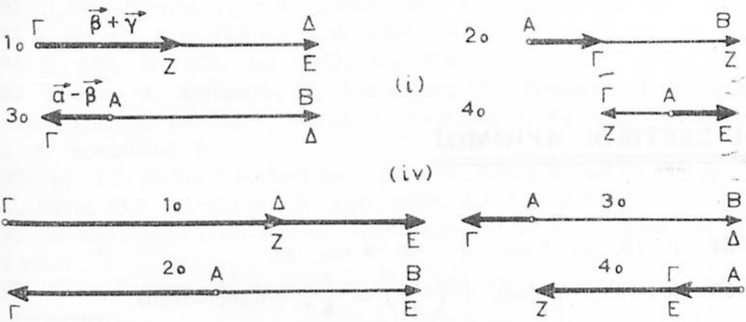
Οἱ ἀντίστοιχες ἰδιότητες διατυπώνονται μὲ λόγια ἔτσι:

i) Γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕνα διάνυσμα τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπ' αὐτὸ τὸ πρῶτο προσθετέο διάνυσμα κι ἀπὸ τὴ διαφορὰ τὸ δεύτερο. (Ἀφαίρεση ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμό).

ii) Ἡ διαφορὰ δυὸ διανυσμάτων δὲν ἀλλάζει, ἂν προσθέσουμε καὶ στὸ μειωτέο καὶ στὸ ἀφαιρετέο διάνυσμα τὸ ἴδιο τρίτο διάνυσμα. (Θεμελιώδης ἰδιότητα τῆς ἀφαίρεσης τῶν ἀριθμῶν).

iii) Γιὰ νὰ προσθέσουμε διαφορὲς διανυσμάτων, ἀρκεῖ νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μειωτέων διανυσμάτων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀφαιρετέων (Πρόσθεση διαφορῶν ἀριθμῶν).

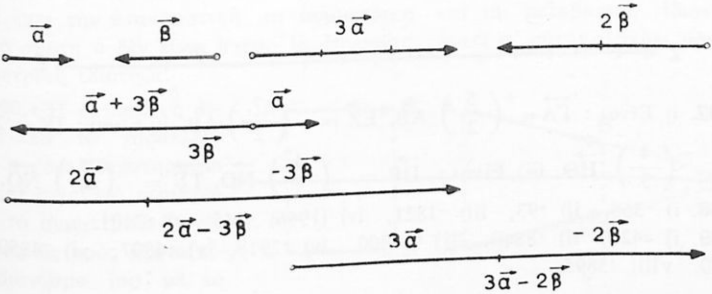
iv) Γιὰ νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕνα διάνυσμα τὴ διαφορὰ δύο ἄλλων, ἀρκεῖ ἀπὸ τὸ διάνυσμα αὐτὸ νὰ ἀφαιρέσουμε τὸ μειωτέο καὶ νὰ προσθέσουμε τὸ ἀφαιρετέο διάνυσμα τῆς διαφορᾶς. (Ἀφαίρεση διαφορᾶς ἀπὸ ἀριθμό).



81. Ἰσχύουν καὶ οἱ τρεῖς αὐτὲς ἰδιότητες. Δηλαδή: γιὰ ἕνα διάνυσμα $\vec{\alpha}$ εἶναι: $\vec{\alpha}\,\Sigma\,\vec{\alpha}$, γιὰ μιὰ δυάδα α καὶ β εἶναι: $\vec{\alpha}\,\Sigma\,\vec{\beta} \Longleftrightarrow \vec{\beta}\,\Sigma\,\vec{\alpha}$ καὶ γιὰ μιὰ τριάδα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, εἶναι: $(\vec{\alpha}\,\Sigma\,\vec{\beta}$ καὶ $\vec{\beta}\,\Sigma\,\vec{\gamma}) \Rightarrow \vec{\alpha}\,\Sigma\,\vec{\gamma}$.

Ὑπάρχει, συνεπῶς, διαμερισμὸς τοῦ συνόλου τῶν μὴ μηδενικῶν διανυσμάτων σὲ ἀπειράριθμες κλάσεις ἰσοδυναμίας ποὺ ἡ καθεμιὰ χαρακτηρίζεται ἀπὸ μιὰ διεύθυνση. Δυὸ διαφορετικὲς κλάσεις, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ διαμερισμοῦ συνόλου, δὲν μπορεῖ νὰ ἔχουν κοινὸ στοιχεῖο.

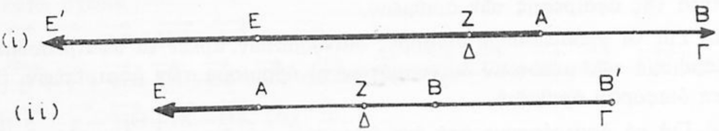
82. Ἡ λύση δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο:



83. Μὲ ἀντικατάσταση τῶν ἐλεύθερων μὲ τὰ ἀντίστοιχα ἐφαρμοστὰ διανύσματα : $\vec{\alpha}=\vec{AB}$, $\vec{\beta}=\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{\gamma}=\vec{EZ}$, θὰ ἔχουμε :

i) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\gamma}=\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}-2\vec{EZ}=(\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta})+\vec{ZE'}=\vec{A\Delta}+\vec{ZE'}=\vec{AE'}$ (σχ. i).

ii) $2\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}=2\vec{AB}+\vec{\Gamma\Delta}-\vec{EZ}=(\vec{AB'}+\vec{\Gamma\Delta})+\vec{ZE}=\vec{A\Delta}+\vec{ZE}=\vec{AE}$ (σχ. ii).



Μὲ ὅμοιο τρόπο κατασκευάζεται καὶ τό : $3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}-4\vec{\gamma}$.

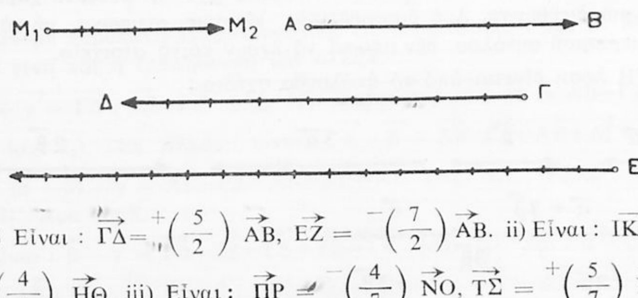
5
ΟΙ ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

84. i) $^{-}10$, ii) $^{-}5$ καὶ $^{-}30$, iii) $^{+}8$ καὶ $^{+}53$.

85. i) $|^{+}3|=3$, $|^{-}9|=9$, $\left|{}^{+}\left(\frac{3}{8}\right)\right|=\frac{3}{8}$, $|^{-}0{,}808|=0{,}808$.

ii) $4=|^{+}4|=|^{-}4|$, $12=|^{+}12|=|^{-}12|$, $\frac{5}{7}=\left|{}^{+}\left(\frac{5}{7}\right)\right|=\left|{}^{-}\left(\frac{5}{7}\right)\right|$, $0{,}15=|^{+}0{,}15|=|^{-}0{,}15|$.

86. Εἶναι : $\vec{AB}={}^{+}\left(\frac{3}{2}\right)\vec{M_1M_1}$, $\vec{\Gamma\Delta}={}^{-}\left(\frac{9}{4}\right)\vec{M_1M_2}$, $\vec{EZ}={}^{-}\left(\frac{17}{5}\right)\vec{M_1M_2}$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο).

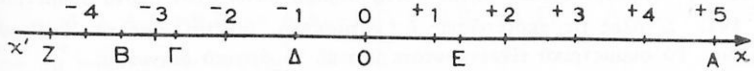


87. i) Εἶναι : $\vec{\Gamma\Delta}={}^{+}\left(\frac{5}{2}\right)\vec{AB}$, $\vec{EZ}={}^{-}\left(\frac{7}{2}\right)\vec{AB}$. ii) Εἶναι : $\vec{IK}={}^{+}2\vec{H\Theta}$, $\vec{\Lambda M}={}^{-}\left(\frac{4}{3}\right)\vec{H\Theta}$. iii) Εἶναι : $\vec{\Pi P}={}^{-}\left(\frac{4}{7}\right)\vec{NO}$, $\vec{T\Sigma}={}^{+}\left(\frac{5}{7}\right)\vec{NO}$.

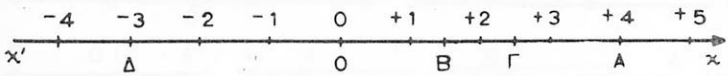
88. i) $^{-}368$, ii) $^{+}93$, iii) $^{-}1821$, iv) (1966) $^{+}145$, v) $^{-}2401$.

89. i) $^{-}420$, ii) $^{+}8840$, iii) $^{-}10800$, iv) $^{+}2918$, v) $^{+}4807$, vi) $^{-}4850$ vii) $^{-}7450$, viii) $^{+}5895$.

90. Ἐκτὸς τοῦ $^{-}7$, οἱ ἄλλοι ἀριθμοὶ θὰ ἔχουν τὶς ἀκόλουθες θέσεις :



91. Ἡ τοποθέτηση γίνεται, ὅπως στὸ ἀκόλουθο σχέδιο :



Τὰ προσημασμένα ἀπόμετρα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{O\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta A}$, $\overrightarrow{\Gamma O}$ εἶναι ἀντίστοιχα : $^{-}3$, $^{+}7$, $^{-}2\frac{1}{2}$.

92. i) $^{+}3h + {}^{+}15min$, ii) $^{+}7h + {}^{-}20min$, iii) $^{+}13h + {}^{-}5min$, iv) $0h + {}^{+}25min$.

93. i) 480 π.Χ., ii) 490 π.Χ., iii) 1204 μ.Χ.

94. i) $^{-}480$, ii) $^{-}479$, iii) $^{+}1453$, iv) $^{+}273$.

95. Ἰούλιος $^{+}1$, Αὔγουστος $^{+}2$, Σεπτέμβρης $^{+}3$, Ὀκτώβρης $^{+}4$, Νοέμβρης $^{+}5$, Δεκέμβρης $^{+}6$, Ἰούνιος $^{-}1$, Μάϊος $^{-}2$, Ἀπρίλιος $^{-}3$, Μάρτιος $^{-}4$, Φεβρουάριος $^{-}5$, Ἰανουάριος $^{-}6$.

96. α) $^{+}3{,}5$, βάθος $5+3{,}5=8{,}5$m, β) $^{+}4{,}80$, βάθος $8{,}5+4{,}8=13{,}3$ m, γ) $^{-}5{,}20$, βάθος $13{,}3-5{,}2=8{,}1$ m, δ) $^{-}3{,}80$, βάθος $8{,}1-3{,}8=4{,}3$ m.

97. Ἡ παράσταση εἶναι εὔκολη, ἀρκεῖ κάθε 10^{0} νὰ παρασταθοῦν μὲ τμῆμα 1 cm.

98. Ἡ παράσταση τῶν σημείων εἶναι εὔκολη. Οἱ τετμημένες τους θὰ εἶναι ἀντίστοιχα :

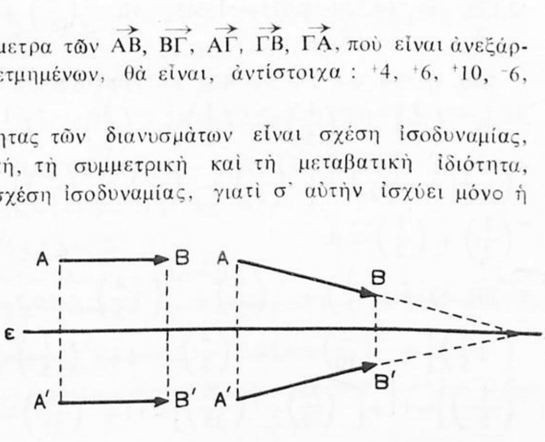
i) Μὲ ἀρχὴ τὸ Α : Α(0), Β($^{+}4$), Γ($^{+}10$), ii) μὲ ἀρχὴ τὸ Β : Α($^{-}4$), Β(0), Γ($^{+}6$), iii) μὲ ἀρχὴ τὸ Γ : Α($^{-}10$), Β($^{-}6$), Γ(0).

iv) Μὲ ἀρχὴ τὸ μέσο Μ τοῦ τμήματος ΑΒ, δηλ. τὸ Μ ($^{+}4$), θὰ εἶναι : Α($^{-}2$), Β($^{+}2$), Γ($^{+}8$), v) τὸ μέσο Ν τοῦ ΒΓ, δηλ. τὸ Ν($^{+}9$), θὰ εἶναι : Α($^{-}7$), Β($^{-}3$), Γ($^{+}3$), vi) τὸ μέσο Π τοῦ ΑΓ, δηλ. τὸ Π($^{+}7$), θὰ εἶναι : Α($^{-}5$), Β($^{-}1$), Γ($^{+}5$).

Τὰ προσημασμένα ἀπόμετρα τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, ποὺ εἶναι ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν τετμημένων, θὰ εἶναι, ἀντίστοιχα : $^{+}4$, $^{+}6$, $^{+}10$, $^{-}6$, $^{-}10$.

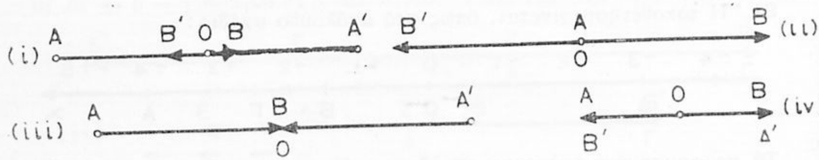
99. Ἡ σχέση τῆς ἰσότητας τῶν διανυσμάτων εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας, γιατὶ ἔχει τὴν ἀνακλαστική, τὴ συμμετρικὴ καὶ τὴ μεταβατικὴ ἰδιότητα, ἐνῶ ἡ σχέση ο δὲν εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας, γιατὶ σ' αὐτὴν ἰσχύει μόνο ἡ συμμετρικὴ ἰδιότητα.

100. Ἡ κατασκευὴ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο. Παρατηροῦμε ὅτι καὶ στὶς δυὸ περιπτώσεις τὸ συμμετρικὸ διανύσματος ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι διάνυσμα ἴσο μὲ τὸ



ἀρχικὸ καὶ ὅτι στὴ δεύτερη περίπτωση ὁ φορέας τοῦ διανύσματος καὶ ὁ φορέας τοῦ συμμετρικοῦ του ἔχουν κοινὸ σημεῖο πάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας.

101. Σ' ὅλες τὶς περιπτώσεις ἡ κατασκευὴ δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο. Τὸ συμμετρικὸ εἶναι πάντοτε ἴσο μὲ τὸ ἀρχικὸ διάνυσμα.



6

ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ

102. i) ${}^{+}3+{}^{+}5={}^{+}8$, ii) ${}^{-}2+{}^{-}4={}^{-}6$, iii) ${}^{+}7+{}^{-}3={}^{+}4$, iv) ${}^{+}5+{}^{-}8={}^{-}3$.

103. i) ${}^{+}13+{}^{+}37={}^{+}50$, ii) ${}^{-}25+{}^{+}15={}^{-}10$, iii) ${}^{-}35+{}^{-}65={}^{-}100$, iv) ${}^{+}32+{}^{-}12={}^{+}20$, v) ${}^{+}108+{}^{-}191={}^{-}83$, vi) ${}^{-}312+{}^{-}288={}^{-}600$.

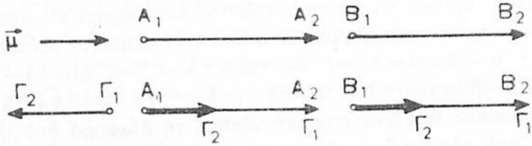
104. i) ${}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)+{}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)={}^{-}\left(\frac{6}{10}\right)+{}^{-}\left(\frac{5}{10}\right)={}^{-}\left(\frac{11}{10}\right)$, ii) ${}^{-}\left(\frac{5}{8}\right)+{}^{+}\left(\frac{7}{12}\right)={}^{-}\left(\frac{15}{24}\right)+{}^{+}\left(\frac{14}{24}\right)={}^{-}\left(\frac{1}{24}\right)$, iii) ${}^{-}\left(2\frac{1}{4}\right)+{}^{+}\left(5\frac{2}{3}\right)={}^{-}\left(\frac{9}{4}\right)+{}^{+}\left(\frac{17}{3}\right)={}^{-}\left(\frac{27}{12}\right)+{}^{+}\left(\frac{68}{12}\right)={}^{+}\left(\frac{41}{12}\right)={}^{+}\left(3\frac{5}{12}\right)$, iv) ${}^{+}6{,}3+{}^{-}4{,}125={}^{+}2{,}175$, v) ${}^{-}10{,}32+{}^{+}8{,}675={}^{-}1{,}645$, vi) ${}^{+}\left(\frac{3}{8}\right)+{}^{-}0{,}123={}^{+}0{,}375+{}^{-}0{,}123={}^{+}0{,}252$, vii) ${}^{-}3+{}^{+}4{,}36\ldots={}^{+}1{,}36\ldots$

105. i) ${}^{-}3+{}^{+}6+{}^{-}7+{}^{+}5+{}^{+}4=({}^{-}3+{}^{-}7)+({}^{+}6+{}^{+}5+{}^{+}4)={}^{-}10+{}^{+}15={}^{+}5$.

ii) ${}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{5}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)+{}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{4}\right)+{}^{+}\left(\frac{2}{5}\right)=\left[{}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{4}\right)\right]+{}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)+\left[{}^{+}\left(\frac{1}{5}\right)+{}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)+{}^{+}\left(\frac{2}{5}\right)\right]={}^{-}\left(\frac{2}{4}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)+0={}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

iii) ${}^{+}2+{}^{-}\left(\frac{3}{7}\right)+{}^{+}\left(\frac{4}{5}\right)+{}^{-}\left(1\frac{4}{5}\right)+{}^{+}0{,}2={}^{+}2+{}^{-}\left(\frac{3}{7}\right)+\left[{}^{+}\left(\frac{4}{5}\right)+{}^{-}\left(1\frac{4}{5}\right)\right]+{}^{+}\left(\frac{2}{10}\right)={}^{+}2+{}^{-}\left(\frac{3}{7}\right)+{}^{-}1+{}^{+}\left(\frac{1}{5}\right)=({}^{+}2+{}^{-}1)+\left[{}^{-}\left(\frac{3}{7}\right)+{}^{+}\left(\frac{1}{5}\right)\right]={}^{+}1+\left[{}^{-}\left(\frac{15}{35}\right)+{}^{+}\left(\frac{7}{35}\right)\right]={}^{+}1+{}^{-}\left(\frac{8}{35}\right)={}^{+}\left(\frac{35}{35}\right)+{}^{-}\left(\frac{8}{35}\right)={}^{+}\left(\frac{27}{35}\right)$.

106. Ἂν εἶναι : $\overrightarrow{A_1A_2}=\alpha\vec{\mu}$, $\overrightarrow{B_1B_2}=\beta\vec{\mu}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}=\gamma\vec{\mu}$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο), $\alpha=\beta \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{\Gamma_1\Gamma_2} \Rightarrow \overrightarrow{A_1\Gamma_2}=\overrightarrow{B_1\Gamma_2} \Rightarrow$ $\alpha\vec{\mu}+\gamma\vec{\mu}=\beta\vec{\mu}+\gamma\vec{\mu} \Rightarrow (\alpha+\gamma)\vec{\mu}=(\beta+\gamma)\vec{\mu} \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$.



107. Εἶναι : $(^{-}2+^{+}3)+^{-}1=^{+}1+^{-}1=0$, $^{-}2+(^{+}3+^{-}1)=^{-}2+^{+}2=0$ καὶ $^{+}3+(^{-}2+^{-}1)=^{+}3+^{-}3=0$. Ἄρα κ.τ.λ.

108. i) α'. $^{+}35+^{-}10+^{-}25+^{+}11=^{+}25+^{-}25+^{+}11=0+^{+}11=^{+}11$. β'. $^{+}35+^{-}10+^{-}25+^{+}11=(^{+}35+^{+}11)+(^{-}10+^{-}25)=^{+}46+^{-}35=^{+}11$.

ii) α'. $^{+}55+^{-}12+^{+}14+^{-}30=^{+}43+^{+}14+^{-}30=^{+}57+^{-}30=^{+}27$. β'. $^{+}55+^{-}12+^{+}14+^{-}30=(^{+}55+^{+}14)+(^{-}12+^{-}30)=^{+}69+^{-}42=^{+}27$.

iii) α'. $^{-}40+^{+}24+^{-}25+^{+}17=^{-}16+^{-}25+^{+}17=^{-}41+^{+}17=^{-}24$. β'. $^{-}40+^{+}24+^{-}25+^{+}17=(^{-}40+^{-}25)+(^{+}24+^{+}17)=^{-}65+^{+}41=^{-}24$.

iv) α'. $^{-}47+^{-}30+^{+}80+^{-}16=^{-}77+^{+}80+^{-}16=^{+}3+^{-}16=^{-}13$. β'. $^{-}47+^{-}30+^{+}80+^{-}16=(^{-}47+^{-}30+^{-}16)+^{+}80=^{-}93+^{+}80=^{-}13$.

109. i) $^{-}3-^{+}3=^{-}3+^{-}3=^{-}6$, $^{-}3-^{-}2{,}5=^{-}3+^{+}2{,}5=^{-}0{,}5$, $^{-}3-^{+}4\frac{3}{4}=^{-}3+^{-}4\frac{3}{4}=^{-}7\frac{3}{4}$, $^{-}3-^{-}1{,}2=^{-}3+^{+}1{,}2=^{-}1{,}8$.

ii) $^{+}1\frac{1}{2}-^{+}3=^{+}1\frac{1}{2}+^{-}3=^{-}1\frac{1}{2}$, $^{+}1\frac{1}{2}-^{-}2{,}5=^{+}1{,}5+^{+}2{,}5=^{+}4$, $^{+}1\frac{1}{2}-^{+}3\frac{3}{4}=^{+}1\frac{2}{4}+^{-}3\frac{3}{4}=^{-}2\frac{1}{4}$, $^{+}1\frac{1}{2}-^{-}1{,}2=^{+}1{,}5+^{+}1{,}2=^{+}2{,}7$.

iii) $0-^{+}3=0+^{-}3=^{-}3$, $0-^{-}2{,}5=0+^{+}2{,}5=^{+}2{,}5$, $0-^{+}3\frac{3}{4}=0+^{-}3\frac{3}{4}=^{-}3\frac{3}{4}$, $0-^{-}1{,}2=0+^{+}1{,}2=^{+}1{,}2$.

iv) $^{-}3{,}75-^{+}3=^{-}3{,}75+^{-}3=^{-}6{,}75$, $^{-}3{,}75-^{-}2{,}5=-3{,}75+^{+}2{,}5=-1{,}25$, $^{-}3{,}75-^{+}3\frac{3}{4}=^{-}3{,}75+^{-}3{,}75=^{-}7{,}5$, $^{-}3{,}75-^{-}1{,}2=^{-}3{,}75+^{+}1{,}2=^{-}2{,}55$.

110. i) $x+^{+}3=^{+}1 \Longleftrightarrow x=^{+}1-^{+}3=^{-}1+^{-}3=^{-}4$.

ii) $x-^{+}3=^{-}5 \Longleftrightarrow x=^{-}5+^{+}3=^{-}2$.

iii) $^{-}3+x=^{+}7 \Longleftrightarrow x=^{+}7-^{-}3=^{+}7+^{+}3=^{+}10$.

iv) $^{+}1-x=^{-}2 \Longleftrightarrow ^{+}1=x+^{-}2 \Longleftrightarrow x+^{-}2=^{+}1 \Longleftrightarrow x=^{+}1-^{-}2=^{+}1+^{+}2=^{+}3$.

v) $x-^{+}1{,}25=^{-}3\frac{1}{2} \Longleftrightarrow x=^{-}3{,}5+^{+}1{,}25=^{-}2{,}25$.

vi) $^{+}3-x=^{-}2{,}5 \Longleftrightarrow ^{+}3=^{-}2{,}5+x \Longleftrightarrow ^{-}2{,}5+x=^{+}3 \Longleftrightarrow x=^{+}3-^{-}2{,}5=$ $^{+}3+^{+}2{,}5=^{+}5{,}5$.

vii) ${}^{-}2\frac{1}{3} + x = {}^{-}2,333\ldots \iff x = {}^{-}2,333\ldots - {}^{-}2,333\ldots = {}^{-}2,333\ldots + {}^{+}2,333\ldots = 0$.

111. i) Εἶναι: $\alpha - (\beta + \gamma) = {}^{+}3 - ({}^{-}5 + {}^{+}8) = {}^{+}3 - {}^{+}3 = {}^{+}3 + {}^{-}3 = 0$ καὶ $(\alpha - \beta) - \gamma = ({}^{+}3 - {}^{-}5) - {}^{+}8 = ({}^{+}3 + {}^{+}5) + {}^{-}8 = {}^{+}8 + {}^{-}8 = 0$. Ὥστε: Γιὰ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕνα σχετικὸ ἀριθμὸ τὸ ἄθροισμα δυὸ ἄλλων, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸν πρῶτο προσθετέο κι ἀπὸ τὴ διαφορὰ τὸ δεύτερο.

ii) Εἶναι: $\alpha - (\beta - \gamma) = {}^{+}3 - ({}^{-}5 - {}^{+}8) = {}^{+}3 - ({}^{-}5 + {}^{-}8) = {}^{+}3 - {}^{-}13 = {}^{+}3 + {}^{+}13 = {}^{+}16$ καί: $(\alpha - \beta) + \gamma = ({}^{+}3 - {}^{-}5) + {}^{+}8 = ({}^{+}3 + {}^{+}5) + {}^{+}8 = {}^{+}8 + {}^{+}8 = {}^{+}16$. Ὥστε: Γιὰ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἕνα σχετικὸ ἀριθμὸ τὴ διαφορὰ δυὸ ἄλλων, ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸ μειωτέο τῆς διαφορᾶς καὶ νὰ προσθέσουμε τὸν ἀφαιρετέο.

iii) Εἶναι: $\alpha - \beta = {}^{+}3 - {}^{-}5 = {}^{+}3 + {}^{+}5 = {}^{+}8$ καὶ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = ({}^{+}3 + {}^{+}8) - ({}^{-}5 + {}^{+}8) = {}^{+}11 - {}^{+}3 = {}^{+}8$ καὶ $(\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma) = ({}^{+}3 - {}^{+}8) - ({}^{-}5 - {}^{+}8) = ({}^{+}3 + {}^{-}8) - ({}^{-}5 + {}^{-}8) = {}^{-}5 - {}^{-}13 = {}^{-}5 + {}^{+}13 = {}^{+}8$. Ὥστε: Ἡ διαφορὰ δυὸ σχετικῶν ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει, ἂν προσθέσουμε (ἢ ἀφαιρέσουμε) στὸ μειωτέο καὶ τὸν ἀφαιρετέο της τὸν ἴδιο σχετικὸ ἀριθμό.

iv) Εἶναι: $(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) = ({}^{+}3 - {}^{-}5) + ({}^{+}8 - {}^{-}1) = ({}^{+}3 + {}^{+}5) + ({}^{+}8 + {}^{+}1) = {}^{+}8 + {}^{+}9 = {}^{+}17$ καὶ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \delta) = ({}^{+}3 + {}^{+}8) - ({}^{-}5 + {}^{-}1) = {}^{+}11 - {}^{-}6 = {}^{+}11 + {}^{+}6 = {}^{+}17$. Ὥστε: Γιὰ νὰ προσθέσουμε διαφορὲς σχετικῶν ἀριθμῶν, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε χωριστὰ τοὺς μειωτέους καὶ χωριστὰ τοὺς ἀφαιρετέους καὶ ἀπὸ τὸ πρῶτο ἄθροισμα νὰ ἀφαιρέσουμε τὸ δεύτερο.

112. Ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{BA}$ εἶναι: ${}^{-}3\frac{1}{2} - {}^{+}4\frac{5}{10} = {}^{-}3\frac{1}{2} + {}^{-}4\frac{1}{2} = {}^{-}8$ καὶ τοῦ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$: ${}^{-}1 - {}^{-}4\frac{1}{2} = {}^{-}1 + {}^{+}4\frac{1}{2} = {}^{+}3\frac{1}{2}$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε: $\overline{\Gamma B} = {}^{+}5\frac{1}{2}$, $\overline{A\Delta} = {}^{-}1$, $\overline{A\Gamma} = {}^{+}2\frac{1}{2}$, $\overline{B\Delta} = {}^{-}9$, $\overline{\Delta A} = {}^{+}1$, $\overline{\Gamma A} = {}^{-}2\frac{1}{2}$, $\overline{B\Gamma} = {}^{-}5\frac{1}{2}$, $\overline{\Delta B} = {}^{+}9$.

113. i) $A = {}^{-}3 - {}^{+}2 + {}^{-}5 = {}^{-}3 + {}^{-}2 + {}^{-}5 = {}^{-}10$. ii) $B = {}^{+}2 - {}^{-}5 - {}^{-}3 = {}^{+}2 + {}^{+}5 + {}^{+}3 = {}^{+}10$. iii) $\Gamma = {}^{-}3 + {}^{+}2 + {}^{-}5 = {}^{-}6$.

114. i) $A = {}^{-}2,5 + {}^{+}2,5 + {}^{-}3 + {}^{-}4\frac{1}{4} = {}^{-}7\frac{1}{4}$. ii) $B = {}^{+}2,5 + {}^{-}3 - ({}^{-}2,5 - {}^{-}4,25) = {}^{-}0,5 - ({}^{-}2,5 + {}^{+}4,25) = {}^{-}0,5 - {}^{+}1,75 = {}^{-}0,5 + {}^{-}1,75 = {}^{-}2,25$.

iii) $\Gamma = {}^{-}2,5 - {}^{+}2,5 - ({}^{-}3 + {}^{-}4,25) = {}^{-}2,5 + {}^{-}2,5 - {}^{-}7,25 = {}^{-}5 + {}^{+}7,25 = {}^{+}2,25$.

115. i) $- {}^{+}5 + {}^{+}3 - {}^{+}\left(\frac{2}{3}\right) + {}^{+}1 = {}^{-}5 + {}^{+}3 + {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) + {}^{+}1 = {}^{-}5\frac{2}{3} + {}^{+}4 = {}^{-}1\frac{2}{3}$.

ii) ${}^{+}2 - {}^{+}3\frac{1}{2} + {}^{+}1\frac{1}{2} - {}^{+}0,25 = {}^{+}2 + {}^{-}3\frac{1}{2} + {}^{+}1\frac{1}{2} + {}^{-}0,25 = {}^{-}0,25$.

iii) ${}^{+}1,25 - {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) + {}^{+}0,75 - {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right) = {}^{+}1,25 + {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) + {}^{+}0,75 + {}^{-}\left(\frac{2}{4}\right) = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right)$.

iv) ${}^-1{,}2+{}^+\left(\frac{3}{5}\right)-{}^+0{,}7+{}^+\left(\frac{1}{2}\right)={}^-1{,}2+{}^+0{,}6+{}^-0{,}7+{}^+0{,}5={}^-0{,}8$.

116. i) $\sigma+\tau=({}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1)+({}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2)={}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1+{}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2={}^-5+{}^+3+{}^+4+{}^-1+{}^-3+{}^+7+{}^-1+{}^+2={}^+6$.

ii) $\tau+\rho=({}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2)+({}^+8-{}^+1-{}^-5)={}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2+{}^+8-{}^+1-{}^-5={}^-3+{}^+7+{}^-1+{}^+2+{}^+8+{}^-1+{}^+5={}^+17$.

iii) $\sigma+\rho=({}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1)+({}^+8-{}^+1-{}^-5)={}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1+{}^+8-{}^+1-{}^-5={}^-5+{}^+3+{}^+4+{}^-1+{}^+8+{}^-1+{}^+5={}^+13$.

iv) $\sigma+\tau+\rho=({}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1)+({}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2)+({}^+8-{}^+1-{}^-5)={}^-5+{}^+3+{}^+4-{}^+1+{}^-3+{}^+7-{}^+1+{}^+2+{}^+8-{}^+1-{}^-5={}^-5+{}^+3+{}^+4+{}^-1+{}^-3+{}^+7+{}^-1+{}^+2+{}^+8+{}^-1+{}^+5={}^+18$.

117. i) Εἶναι: $\rho={}^-3+{}^+7-{}^-4={}^-3+{}^+7+{}^+4$ καὶ $-\rho={}^+3+{}^-7+{}^-4$, $\sigma=-{}^-9-{}^+6+{}^-5={}^+9+{}^-6+{}^-5$ καὶ $-\sigma={}^-9+{}^+6+{}^+5$, $\tau={}^+1-{}^-2-{}^+8={}^+1+{}^+2+{}^-8$ καὶ $-\tau={}^-1+{}^-2+{}^+8$.

ii) Εἶναι: $\rho-\sigma={}^-3+{}^+7+{}^+4+{}^-9+{}^+6+{}^+5={}^+10$, $\tau-\sigma={}^+1+{}^+2+{}^-8+{}^-9+{}^+6+{}^+5={}^-3$ καὶ $\sigma-(\rho+\tau)=\sigma-\rho-\tau={}^+9+{}^-6+{}^-5+{}^+3+{}^-7+{}^-4+{}^-1+{}^-2+{}^+8={}^-5$.

118. i) ${}^+1-({}^+2-{}^+3+{}^+5)={}^+1-({}^+2+{}^-3+{}^+5)={}^+1+{}^-2+{}^+3+{}^-5={}^-3$.

ii) ${}^-2-({}^+3+{}^+5-{}^+1)={}^-2-({}^+3+{}^+5+{}^-1)={}^-2+{}^-3+{}^-5+{}^+1={}^-9$.

iii) ${}^+2-{}^+3-[{}^+5-({}^+3-{}^+1)+{}^+2]={}^+2+{}^-3-[{}^+5-({}^+3+{}^-1)+{}^+2]={}^+2+{}^-3-({}^+5+{}^-3+{}^+1+{}^+2)={}^+2+{}^-3+{}^-5+{}^+3+{}^-1+{}^-2={}^-6$.

119. i) ${}^+450-{}^-85={}^+450+{}^+85={}^+535$. ii) ${}^+75-{}^-75={}^+75+{}^+75={}^+150$. iii) ${}^-250-{}^-450={}^-250+{}^+450={}^+200$.

120. i) ${}^-384-{}^-597={}^-384+{}^+597={}^+213$. ii) ${}^-322-{}^-384={}^-322+{}^+384={}^+62$.

121. i) ${}^-336-{}^-356={}^-336+{}^+356={}^+20$. ii) ${}^-324-{}^-336={}^-324+{}^+336={}^+12$, iii) ${}^-324-{}^-356={}^-324+{}^+356={}^+32$.

122. Εἶναι: i) $\overline{AB}={}^+3-{}^-2={}^+3+{}^+2={}^+5$, ii) $\overline{B\Delta}={}^+4-{}^+3={}^+4+{}^-3={}^+1$, iii) $\overline{A\Gamma}={}^-1-{}^-2={}^-1+{}^+2={}^+1$, iv) $\overline{\Gamma A}={}^-2-{}^-1={}^-2+{}^+1={}^-1$.

123. i) $A={}^+4-{}^-3+{}^-5-{}^+7={}^+4+{}^+3+{}^-5+{}^-7={}^-5$, $B={}^+4-[({}^-3-{}^-5)+{}^+7]={}^+3-[({}^-3+{}^+5)+{}^+7]={}^+4-({}^+2+{}^+7)={}^+4-{}^+9={}^+4+{}^-9={}^-5$, $\Gamma={}^+4-{}^-3-({}^-5-{}^+7)={}^+4+{}^+3-({}^-5+{}^-7)={}^+4+{}^+3+{}^+5+{}^+7={}^+19$.

ii) $A={}^-8-{}^-6+{}^+10-{}^-1={}^-8+{}^+6+{}^+10+{}^+1={}^+9$, $B={}^-8-[({}^-6-{}^+10)+{}^-1]={}^-8-[({}^-6+{}^-10)+{}^-1]={}^-8-({}^-16+{}^-1)={}^-8-{}^-17={}^-8+{}^+17={}^+9$, $\Gamma={}^-8-{}^-6-({}^+10-{}^-1)={}^-8+{}^+6-({}^+10+{}^+1)={}^-8+{}^+6+{}^-10+{}^-1={}^-13$.

iii) $A={}^-\left(\frac{1}{2}\right)-{}^+\left(\frac{2}{3}\right)+{}^-\left(\frac{3}{4}\right)-{}^-\left(\frac{5}{6}\right)={}^-\left(\frac{6}{12}\right)+{}^-\left(\frac{8}{12}\right)+{}^-\left(\frac{9}{12}\right)+{}^+\left(\frac{10}{12}\right)={}^-\left(\frac{13}{12}\right)$, $B={}^-\left(\frac{1}{2}\right)-\left(\left[{}^+\left(\frac{2}{3}\right)-{}^-\left(\frac{3}{4}\right)\right]+{}^-\left(\frac{5}{6}\right)\right)={}^-\left(\frac{1}{2}\right)-\left[{}^+\left(\frac{2}{3}\right)+{}^+\left(\frac{3}{4}\right)+{}^-\left(\frac{5}{6}\right)\right]={}^-\left(\frac{6}{12}\right)+{}^-\left(\frac{8}{12}\right)+{}^-\left(\frac{9}{12}\right)+{}^+\left(\frac{10}{12}\right)={}^-\left(\frac{13}{12}\right)$

$\Gamma={}^-\left(\frac{1}{12}\right)-{}^+\left(\frac{2}{3}\right)-\left[{}^-\left(\frac{3}{4}\right)-{}^-\left(\frac{5}{6}\right)\right]={}^-\left(\frac{1}{2}\right)+{}^-\left(\frac{2}{3}\right)-\left[{}^-\left(\frac{3}{4}\right)+{}^+\left(\frac{5}{6}\right)\right]={}^-\left(\frac{6}{12}\right)+{}^-\left(\frac{8}{12}\right)+{}^+\left(\frac{9}{12}\right)+{}^-\left(\frac{10}{12}\right)={}^-\left(\frac{15}{12}\right)$.

124. i) $^-11+(0-[^-6-(^+1+^-4]-^+8)=^-11+[0-(^-6-^-3)+^-8]=^-11+[-(^-6+^+3)+^-8]=^-11+(^+6+^-3+^-8)=^-11+^+6+^-3+^-8=^-16$.

ii) $^+3+(^-6-[0-(^-9+^+8)]-^-1)=^+3+[^-6-(^-1)+^+1]=^+3+(^-6+^-1+^+1)=^+3+^-6=^-3$.

125. i) $(^-20-^+4)+(^+7-^+25-^-18)=^-20+^-4+^+7+^-25+^+18=^-24$.

ii) $(-^-6+^+3+^-5)-(^+10+^-20-^-5)=(^+6+^+3+^-5)-(^+10+^-20+^+5)=^+6+^+3+^-5+^-10+^+20+^-5=^+9$.

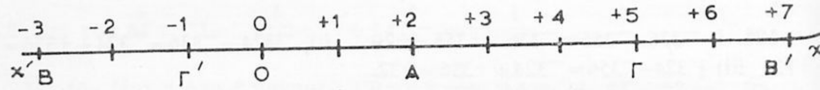
iii) $(^-12-^-8+^+3)+(^+6-^+13+^-11)-(^-3-^-7)=(^-12+^+8+^+3)+(^+6+^-13+^-11)-(^-3+^+7)=^-12+^+8+^+3+^+6+^-13+^-11+^+3+^-7=^-23$.

iv) $(^+21-^-3)-(^-7+^-12)-(-^-6-^-3)+(^+4-^+9)=(^+21+^+3)-(^-7+^-12)-(^+6+^+3)+(^+4+^-9)=^+21+^+3+^+7+^+12+^-6+^-3+^+4+^-9=^+29$.

126. i) $^+2-(^+3-^+5)-^+1-^+7$, ii) $-^+3+(^+1-^+5-^+1)-^+2$, iii) $^+2-(^+3+^+5)-^+1$, iv) $^+3-(^+5-^+1+^+7)$.

127. i) Ἄν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Β, θὰ ἔχουμε : $x-^+7=^-15\Longleftrightarrow x=^-15+^+7=^-8$. ii) Ἄν x εἶναι ἡ τετμημένη τῆς νέας ἀρχῆς Ο′ ὡς πρὸς τὴν Ο δηλ. τοῦ διανύσματος $\vec{OO'}$, θὰ ἔχουμε : $\vec{OO'}=\vec{OA}+\vec{AO'}$ καὶ γιὰ τὰ προσημασμένα ἀπόμετρά τους : $x=^+7+^+9=^+16$. Ἡ τετμημένη τότε τοῦ Β θὰ εἶναι: $^-16+^-8=^-24$.

128. Μὲ ἀρχὴ συντεταγμένων τὸ Α ἡ τετμημένη τοῦ Γ θὰ εἶναι : $^+5-^+2=^+3$ καὶ ἡ τετμημένη τοῦ συμμετρικοῦ του Γ′: $^+2-^+3=^+2+^-3=^-1$. Ἐπίσης ἡ τετμημένη τοῦ Β γίνεται : $^-3+^-2=^-5$. Ἔτσι ἡ τετμημένη τοῦ συμμετρικοῦ του Β′ θὰ εἶναι : $^+2-^-5=^+2+^+5=^+7$. Αὐτὸ ἄλλως τε ἀπαληθεύεται κι ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο.



Τὰ σχετικὰ ἀπόμετρα θὰ εἶναι : $\overline{ΒΓ}=^+5-^-3=^+5+^+3=^+8$ καὶ $\overline{Β'Γ'}=^-1-^+7=^-1+^-7=^-8$.

129. Εἶναι πραγματικὰ καί : $A\cap B=B\Rightarrow B\subset A$, ἀφοῦ ἡ πράξη τῆς τομῆς δείχνει ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Β ἀνήκει καὶ στὸ Α. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι : $A\cup B=A\Rightarrow B\subset A$.

7

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ–ΔΥΝΑΜΕΙΣ

130. i) $^-2.^+3=^-6$, ii) $^+2{,}5.^-4=^-10$, iii) $^-2\frac{1}{2}.^-1=^+2\frac{1}{2}$, iv) $^+0{,}75.^-8=^-6$, v) $^-1\frac{1}{2}.^-\left(\frac{2}{3}\right)=^+1$, vi) $^-3\frac{5}{8}.^+0{,}12=^-0{,}435$.

131. i) ${}^{-}2.{}^{+}3-{}^{+}3.{}^{-}5+{}^{-}2.{}^{+}3.{}^{-}5={}^{-}6-{}^{-}15+{}^{+}30={}^{-}6+{}^{+}15+{}^{+}30={}^{+}39.$

ii) ${}^{-}5.{}^{-}2+{}^{-}2-{}^{-}2.{}^{+}3={}^{+}10+{}^{-}2-{}^{-}6={}^{+}10+{}^{-}2+{}^{+}6={}^{+}14.$

iii) ${}^{+}3.{}^{-}2.{}^{+}3-{}^{-}2.{}^{+}3.{}^{-}5+{}^{-}2.{}^{-}5={}^{-}18-{}^{+}30+{}^{+}10={}^{-}18+{}^{-}30+{}^{+}10={}^{-}38.$

132. i) ${}^{-}2.{}^{+}4.{}^{-}5.{}^{+}8=({}^{-}2.{}^{-}5).({}^{+}4.{}^{+}8)={}^{+}10.{}^{+}32={}^{+}320.$

ii) ${}^{+}\left(\frac{3}{2}\right).{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right).{}^{+}\left(\frac{4}{9}\right).{}^{+}\left(\frac{1}{4}\right).{}^{-}\left(\frac{4}{5}\right).{}^{+}18={}^{+}\left(\frac{3.5.4.1.4}{2.6.9.4.5}.18\right)={}^{+}2.$

iii) ${}^{-}7.{}^{-}5.{}^{+}4.{}^{-}1.{}^{+}25=({}^{-}7.{}^{-}5.{}^{-}1).({}^{+}4.{}^{+}25)={}^{-}35.{}^{+}100={}^{-}3500.$

iv) ${}^{-}2{,}5\,.\,{}^{+}1{,}25\,.\,{}^{-}4\,.\,{}^{-}1{,}6\,.\,{}^{+}0{,}4=({}^{-}2{,}5.{}^{-}4)\,.\,({}^{+}1{,}25\,.\,{}^{+}0{,}4)\,.\,{}^{-}1{,}6={}^{+}10\,.\,{}^{+}0{,}5\,.\,{}^{-}1{,}6={}^{-}8.$

133. i) ${}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4=({}^{-}3.{}^{+}2)\,.\,({}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4)={}^{-}6.{}^{+}20={}^{-}3.({}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4)={}^{-}3.{}^{+}40={}^{-}5.({}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{+}4)={}^{-}5.{}^{+}24={}^{-}1.({}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}5.{}^{+}4)={}^{-}1.{}^{+}120.$

ii) ${}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4=({}^{-}3.{}^{+}2).{}^{-}1.({}^{-}5.{}^{+}4)={}^{-}6.{}^{-}1.{}^{-}20=({}^{-}3.{}^{+}4).{}^{-}1.({}^{+}2.{}^{-}5)={}^{-}12.{}^{-}1.{}^{-}10={}^{-}3.({}^{+}2.{}^{-}1)\,.\,({}^{-}5.{}^{+}4)={}^{-}3.{}^{-}2.{}^{-}20={}^{-}3\,.\,({}^{+}2.{}^{-}5).({}^{-}1.{}^{+}4)={}^{-}3.{}^{-}10.{}^{-}4={}^{-}5.({}^{-}3.{}^{+}2).({}^{-}1.{}^{+}4)={}^{-}5.{}^{-}6.{}^{-}4={}^{-}5.({}^{-}3.{}^{+}4).({}^{-}1.{}^{+}2)={}^{-}5.{}^{-}12.{}^{-}2.$

iii) ${}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4={}^{-}3.{}^{+}2.({}^{-}1.{}^{-}5)\,.{}^{+}4={}^{-}3\,.{}^{+}2.{}^{+}5.{}^{+}4={}^{-}1.{}^{+}2\,.\,({}^{-}3.{}^{-}5).{}^{+}4={}^{-}1.{}^{+}2.{}^{+}15.{}^{+}4={}^{-}5.{}^{+}2.({}^{-}3.{}^{-}1).{}^{+}4={}^{-}5.{}^{+}2.{}^{+}3.{}^{+}4.$

iv) ${}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4={}^{-}3.{}^{+}2.{}^{-}1.{}^{-}5.{}^{+}4.{}^{-}1.{}^{-}1={}^{-}3.({}^{+}2.{}^{-}1).{}^{-}5.({}^{+}4.{}^{-}1).{}^{-}1={}^{-}3.{}^{-}2.{}^{-}5.{}^{-}4.{}^{-}1.$

134. i) Τὸ γινόμενο δυὸ παραγόντων δὲν ἀλλάζει. Π.χ. : ${}^{-}2.{}^{+}4={}^{+}2.{}^{-}4={}^{-}8$ ἢ ${}^{-}5.{}^{-}3={}^{+}5.{}^{+}3={}^{+}15$ κ.τ.λ.

ii) Τὸ γινόμενο τριῶν παραγόντων γίνεται ἀντίθετο. Π.χ. : ${}^{-}2.{}^{+}3.{}^{-}5=-({}^{+}2.{}^{-}3.{}^{+}5)$ ἢ ${}^{+}3.{}^{-}5.{}^{+}2=-({}^{-}3.{}^{+}5.{}^{-}2)$ κ.τ.λ.

135. i) $({}^{-}2)^7={}^{-}128$, ii) $({}^{+}5)^3={}^{+}125$, iii) $({}^{-}11)^2={}^{+}121$, iv) $({}^{-}3)^4={}^{+}81$, v) $({}^{-}1)^{127}={}^{-}1$, vi) $({}^{-}10)^9={}^{-}1000000000$, vii) $({}^{+}30)^3={}^{+}27000$, viii) $({}^{-}1)^{378}={}^{+}1$, ix) $({}^{-}100)^4={}^{+}100000000$, x) $({}^{-}500)^3={}^{-}125000000$, xi) $\left[{}^{-}\left(\frac{1}{7}\right)\right]^2={}^{+}\left(\frac{1}{49}\right)$, xii) $\left[{}^{-}\left(\frac{2}{5}\right)\right]^2={}^{+}\left(\frac{4}{25}\right)$, xiii) $\left({}^{+}1\,\frac{1}{2}\right)^3={}^{+}\left(\frac{3}{2}\right)^3={}^{+}\left(\frac{27}{8}\right)$, xiv) $({}^{-}0{,}25)^3={}^{-}0{,}015625$, xv) $({}^{-}1{,}333\ldots)^2=\left[{}^{-}\left(\frac{13-1}{9}\right)\right]^2=\left[{}^{-}\left(\frac{12}{9}\right)\right]^2={}^{+}\left(\frac{144}{81}\right)={}^{+}1{,}777\ldots$, xvi) $({}^{-}23.{}^{+}0{,}375.{}^{-}1003)^0={}^{+}1.$

136. i) $[({}^{-}3)^2]^3=({}^{-}3)^6={}^{+}729$, ii) $[({}^{-}2).({}^{-}2)^2.({}^{-}2)^3.({}^{-}2)^0]^2=[({}^{-}2)^6]^2=({}^{-}2)^{12}={}^{+}4096.$

iii) $[({}^{-}2)^3.({}^{-}5)^2.({}^{+}10)]^3=({}^{-}2)^9.({}^{-}5)^6.({}^{+}10)^3=({}^{-}512)\,.\,({}^{+}15625)\,.\,({}^{+}1000)={}^{-}8\,000\,000\,000.$

iv) $$\left(\left[{}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2.\left[{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)\right]^2.\left[{}^{-}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^3\right)^2=\left[{}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)\right]^4.\left[{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)\right]^4.\left[{}^{-}\left(\frac{3}{2}\right)\right]^6$$
$$={}^{+}\left(\frac{1}{16}\right).{}^{+}\left(\frac{16}{81}\right).{}^{+}\left(\frac{729}{64}\right)={}^{+}\left(\frac{1.16.729}{16.81.64}\right)={}^{+}\left(\frac{9}{64}\right).$$

137. i) $({}^{-}8)^3=[({}^{-}2)^3]^3=({}^{-}2)^9$, ii) $({}^{-}3)^2.({}^{+}2)^2.{}^{-}6=({}^{-}3.{}^{+}2)^2.{}^{-}6={}^{-}6^2.{}^{-}6=({}^{-}6)^3.$

iii) ${}^{-}125.({}^{+}3)^3=({}^{-}5)^3.({}^{+}3)^3=({}^{-}5.{}^{+}3)^3=({}^{-}15)^3$, iv) ${}^{-}72={}^{-}8.{}^{+}9=({}^{-}2)^3.({}^{-}3)^2.$

138. i) $A=(^{+}7+^{-}3+^{-}5).^{-}6=^{-}1.^{-}6=^{+}6$ ἢ $A=^{+}7.^{-}6+^{-}3.^{-}6+^{-}5.^{-}6=$ $^{-}42+^{+}18+^{+}30=^{+}6$.

ii) $B=(^{-}3+^{+}8+^{+}1+^{-}2).^{+}3=^{+}4.^{+}3=^{+}12$ ἢ $B=^{-}3.^{+}3+^{+}8.^{+}3+^{+}1.^{+}3+$ $^{-}2.^{+}3=-9+^{+}24+^{+}3+^{-}6=^{+}12$.

iii) $\Gamma=\left[^{-}\left(\frac{2}{3}\right)+^{+}\left(\frac{5}{6}\right)+^{-}\left(\frac{1}{2}\right)+^{+}\left(\frac{3}{8}\right)\right].^{-}24=\left[^{-}\left(\frac{16}{24}\right)+^{+}\left(\frac{20}{24}\right)+\right.$ $\left.^{-}\left(\frac{12}{24}\right)+^{+}\left(\frac{9}{24}\right)\right].^{-}24=^{+}\left(\frac{1}{24}\right).^{-}24=^{-}1$ ἢ $\Gamma=^{-}\left(\frac{2}{3}\right).^{-}24+^{+}\left(\frac{5}{6}\right).$ $^{-}24+^{-}\left(\frac{1}{2}\right).^{-}24+^{+}\left(\frac{3}{8}\right).^{-}24=^{+}16+^{-}20+^{+}12+^{-}9=^{-}1$.

iv) $\Delta=(^{+}8+^{-}3).(^{-}5+^{-}7+^{+}4)=^{+}5.^{-}8=^{-}40$ ἢ $\Delta=^{+}8.^{-}5+^{-}3.^{-}5+^{+}8.^{-}7$ $+^{-}3.^{-}7+^{+}8.^{+}4+^{-}3.^{+}4=^{-}40+^{+}15+^{-}56+^{+}21+^{+}32+^{-}12=^{-}40$.

v) $E=(^{-}6+^{+}4+^{-}3).(^{-}2+^{+}5).^{-}7=^{-}5.^{+}3.^{-}7=^{+}105$ ἢ $E=[^{-}6.^{-}2+^{+}4.$ $2+^{-}3.^{-}2+^{-}6.^{+}5+^{+}4.^{+}5+^{-}3.^{+}5].^{-}7=(^{+}12+^{-}8+^{+}6+^{-}30+^{+}20+^{-}15).$ $7=^{-}15.^{-}7=^{+}105$.

139. i) $(^{+}1+^{+}5).(^{+}3+^{-}3).(^{-}5+^{+}3)=^{+}6.0.^{-}2=0$.

ii) $(^{-}4+^{+}5).(^{+}2+^{-}3).(^{+}6+^{+}3)=^{+}1.^{-}1.^{+}9=^{-}9$.

iii) $(0+^{+}5).(^{+}4+^{-}3).(^{-}7+^{+}3)=^{+}5.^{+}1.^{-}4=^{-}20$.

iv) $(^{-}2+^{+}5).(^{-}3+^{-}3).(^{-}4+^{+}3)=^{+}3.^{-}6.^{-}1=^{+}18$.

140. i) $A=(^{+}7+^{-}3)^2=(^{+}4)^2=^{+}16$ ἢ $A=(^{+}7)^2+2.^{+}7.^{-}3+(^{-}3)^2=49+^{-}42$ $+^{+}9=^{+}16$.

ii) $B=(^{+}2+^{-}5)^2=(^{-}3)^2=^{+}9$ ἢ $B=(^{+}2)^2+2.^{+}2.^{-}5+(^{-}5)^2=^{+}4+^{-}20+^{+}25=^{+}9$.

iii) $\Gamma=(^{-}4+^{-}1)^2=(^{-}5)^2=^{+}25$ ἢ $\Gamma=(^{-}4)^2+2.^{-}4.^{-}1+(^{-}1)^2=^{+}16+^{+}8+$ $^{+}1=^{+}25$.

141. Ἀφοῦ ὁ ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντες εἶναι 0 τὸ γινόμενο θὰ εἶναι ἴσο μὲ 0.

142. i) $^{-}36=^{-}1.^{+}36=^{-}2.^{+}18=^{-}3.^{+}12=^{-}4.^{+}9=^{-}6.^{+}6=^{-}9.^{+}4=^{-}12.^{+}3$ $=^{-}18.^{+}2=^{-}36.^{+}1$.

ii) $^{-}36=^{-}1.^{-}2.^{-}18=^{-}1.^{-}3.^{-}12=^{-}1.^{-}4.^{-}9=^{-}1.^{-}6.^{-}6=^{-}2.^{-}3.^{-}6=^{-}2.$ $^{-}2.^{-}9=^{-}3.^{-}3.^{-}4$.

iii) $^{-}36=^{+}1.^{+}2.^{+}18.^{-}1=^{+}1.^{+}3.^{+}12.^{-}1=^{+}1.^{+}4.^{+}9.^{-}1=^{+}1.^{+}6.^{+}6.$ $^{-}1=^{+}2.^{+}3.^{+}6.^{-}1=^{+}3.^{+}3.^{+}4.^{-}1=^{+}1.^{+}2.^{+}9.^{-}2=\ldots$

143. i) $^{+}60=^{-}1.^{-}2.^{-}3.^{-}10=^{-}1.^{-}2.^{-}5.^{-}6=^{-}1.^{-}3.^{-}4.^{-}5=^{-}2.^{-}2.$ $^{-}3.^{-}5$.

ii) $^{+}60=^{+}1.^{+}2.^{-}3.^{-}10=^{+}1.^{-}2.^{+}3.^{-}10=^{+}1.^{-}2.^{-}3.^{+}10=\ldots$

iii) Εἶναι ἀδύνατο, γιατὶ τὸ γινόμενο 4 παραγόντων μὲ περιττὸ πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων (1 ἢ 3) εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός.

144. i) $0=0.^{+}\alpha=0.^{-}\alpha$, ii) $0=0.^{+}\alpha.^{+}\beta=0.^{+}\alpha.^{-}\beta=0.^{-}\alpha.^{-}\beta$. iii) $0=$ $0.^{+}\alpha.^{+}\beta.^{+}\gamma=0.^{+}\alpha.^{+}\beta.^{-}\gamma=\ldots$

145. i) $A=^{-}12.^{-}\left(\frac{2}{3}\right)+^{-}12.^{+}\left(\frac{1}{4}\right)-^{-}12.^{-}\left(\frac{3}{4}\right)-^{-}12.^{+}\left(\frac{5}{6}\right)+^{-}12.$ $^{-}\left(\frac{1}{2}\right)=^{+}8+^{-}3-^{+}9-^{-}10+^{+}6=^{+}8+^{-}3+^{-}9+^{+}10+^{+}6=^{+}12$, ἢ $A=^{-}12.$

$^{-}\left(\frac{8}{12}\right)+{}^{+}\left(\frac{3}{12}\right)-{}^{-}\left(\frac{9}{12}\right)-{}^{+}\left(\frac{10}{12}\right)+{}^{-}\left(\frac{6}{12}\right)\Big]={}^{-}12.\Big[{}^{-}\left(\frac{8}{12}\right)+{}^{+}\left(\frac{3}{12}\right)+$
$^{+}\left(\frac{9}{12}\right)+{}^{-}\left(\frac{10}{12}\right)+{}^{-}\left(\frac{6}{12}\right)\Big]={}^{-}12.{}^{-}\left(\frac{12}{12}\right)={}^{-}12.{}^{-}1={}^{+}12.$

ii) $B=\left[{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)-{}^{+}\left(\frac{1}{6}\right)+{}^{-}\left(\frac{7}{12}\right)-{}^{+}1\right].{}^{+}24={}^{+}\left(\frac{2}{3}\right).{}^{+}24+{}^{-}\left(\frac{1}{6}\right).$
${}^{+}24+{}^{-}\left(\frac{7}{12}\right).{}^{+}24+{}^{-}1.{}^{+}24={}^{+}16+{}^{-}4+{}^{-}14+{}^{-}24={}^{-}26$, ἢ $B=\Big[{}^{+}\left(\frac{8}{12}\right)+$
${}^{-}\left(\frac{2}{12}\right)+{}^{-}\left(\frac{7}{12}\right)+{}^{-}\left(\frac{12}{12}\right)\Big].{}^{+}24={}^{-}\left(\frac{13}{12}\right).{}^{+}24={}^{-}26.$

iii) $\Gamma={}^{-}2.{}^{-}5+{}^{+}5.{}^{-}5-{}^{-}2.{}^{-}4-{}^{+}5.{}^{-}4={}^{+}10+{}^{-}25-{}^{+}8-{}^{-}20={}^{+}10+{}^{-}25+{}^{-}8+{}^{+}20={}^{-}3$, ἢ $\Gamma={}^{+}3.({}^{-}5+{}^{+}4)={}^{+}3.{}^{-}1={}^{-}3.$

iv) $\Delta={}^{-}\left(\frac{2}{3}\right).{}^{-}24-{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right).{}^{-}24+{}^{-}\left(\frac{2}{3}\right).{}^{-}12-{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right).{}^{-}12={}^{+}16-{}^{+}20+{}^{+}8-{}^{+}10={}^{+}16+{}^{-}20+{}^{+}8+{}^{-}10={}^{-}6$, ἢ $\Delta=\Big[{}^{-}\left(\frac{4}{6}\right)+{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)\Big].{}^{-}36={}^{-}6.$

146. i) $\alpha={}^{+}5$ ἢ $\alpha={}^{-}1$, ii) $\alpha=0$ ἢ $\alpha={}^{+}4$, iii) $\alpha={}^{-}2$ ἢ $\alpha={}^{-}1$, iv) $\alpha={}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)$ ἢ $\alpha={}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)$ ἢ $\alpha={}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)$.

147. i) $({}^{-}3+{}^{+}5)^2=({}^{-}3)^2+2.{}^{-}3.{}^{+}5+({}^{+}5)^2={}^{+}9+{}^{-}30+{}^{+}25={}^{+}4.$
ii) $({}^{+}3-{}^{+}5)^2=({}^{+}3)^2-2.{}^{+}3.{}^{+}5+({}^{+}5)^2={}^{+}9-{}^{+}30+{}^{+}25={}^{+}34+{}^{-}30={}^{+}4.$
iii) $(-5+{}^{+}4)^2=({}^{-}5)^2+2.{}^{-}5.{}^{+}4+({}^{+}4)^2={}^{+}25+{}^{-}40+{}^{+}16={}^{+}1.$

8
ΔΙΑΙΡΕΣΗ–ΚΛΑΣΜΑΤΑ

148. Εἶναι : i) ${}^{+}1$, ii) ${}^{-}\left(\frac{1}{8}\right)$, iii) ${}^{-}1$, iv) ${}^{+}\left(\frac{1}{8}\right)$, v) ${}^{+}\left(\frac{7}{5}\right)$, vi) ${}^{-}\left(\frac{7}{5}\right)$, vii) ${}^{-}\left(\frac{3}{7}\right)$, viii) ${}^{-}\left(\frac{100}{25}\right)={}^{-}4$, ix) ${}^{-}4$, x) ${}^{+}\left(\frac{9}{12}\right)$.

149. Δὲν ὑπάρχει ἀντίστροφος τοῦ 0, γιατὶ τὸ κλάσμα $\frac{1}{0}$ δὲν ἔχει νόημα.

150. i) ${}^{+}45:{}^{+}9={}^{+}5\Longleftrightarrow{}^{+}45={}^{+}9.{}^{+}5$, ii) $-48:-12={}^{+}4\Longleftrightarrow-48={}^{-}12.{}^{+}4$, iii) ${}^{+}95:{}^{-}5={}^{-}19\Longleftrightarrow{}^{+}95={}^{-}5.{}^{-}19$, iv) ${}^{-}75:{}^{+}5={}^{-}15\Longleftrightarrow{}^{-}75={}^{+}5.{}^{-}15$, v) ${}^{+}3{,}75:{}^{-}1{,}25={}^{-}3\Longleftrightarrow{}^{+}3{,}75={}^{-}1{,}25.{}^{-}3$, vi) ${}^{-}1.{}^{+}\left(\frac{3}{2}\right)={}^{-}\left(\frac{3}{2}\right)\Longleftrightarrow{}^{-}1={}^{+}\left(\frac{2}{3}\right).{}^{-}\left(\frac{3}{2}\right)$, vii) ${}^{-}\left(\frac{8}{3}\right).{}^{-}\left(\frac{7}{5}\right)={}^{+}\left(\frac{56}{15}\right)\Longleftrightarrow{}^{-}\left(\frac{8}{3}\right)={}^{-}\left(\frac{5}{7}\right).{}^{+}\left(\frac{56}{15}\right)$, viii) ${}^{-}0{,}48.{}^{-}\left(\frac{9}{4}\right)={}^{+}1{,}08\Longleftrightarrow{}^{-}0{,}48={}^{-}\left(\frac{4}{9}\right).{}^{+}1{,}08$, ix)

${}^{-}\left(\frac{16}{5}\right) . {}^{+}\left(\frac{100}{8}\right) = {}^{-}40 \Longleftrightarrow \left(\frac{16}{5}\right) = {}^{+}0{,}08 . {}^{-}40$, x) ${}^{-}0{,}555\ldots : {}^{-}0{,}2525\ldots =$
${}^{-}\left(\frac{5}{9}\right) : {}^{-}\left(\frac{25}{99}\right) = {}^{-}\left(\frac{5}{9}\right) . {}^{-}\left(\frac{99}{25}\right) = {}^{+}\left(\frac{11}{5}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{5}{9}\right) = {}^{-}\left(\frac{25}{99}\right) . {}^{+}\left(\frac{11}{5}\right)$.

151. i) ${}^{-}125x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, ii) ${}^{+}3x = {}^{-}5 \Longleftrightarrow x = \frac{{}^{-}5}{{}^{+}3} = {}^{-}\left(\frac{5}{3}\right)$.

iii) ${}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)x = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) \Longleftrightarrow x = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) : {}^{+}\left(\frac{2}{3}\right) = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) . {}^{+}\left(\frac{3}{2}\right) = {}^{-}1.$

iv) ${}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) x = {}^{-}1{,}2 \Longleftrightarrow x = {}^{-}\left(\frac{12}{10}\right) : {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) = {}^{-}\left(\frac{12}{10}\right) . {}^{-}\left(\frac{6}{5}\right) = {}^{+}\left(\frac{72}{50}\right)$
$= {}^{+}\left(\frac{36}{25}\right)$.

v) ${}^{-}0{,}25x = {}^{-}\left(\frac{1}{4}\right) \Longleftrightarrow x = {}^{-}\left(\frac{1}{4}\right) : {}^{-}\left(\frac{1}{4}\right) = {}^{-}\left(\frac{1}{4}\right) . {}^{-}\left(\frac{4}{1}\right) = {}^{+}1.$

vi) ${}^{-}\left(\frac{3x}{5}\right) = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)x = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) \Longleftrightarrow x = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) : {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$
$= {}^{+}\left(\frac{25}{18}\right)$.

vii) ${}^{-}\left(\frac{3x}{4}\right) - {}^{+}1 = {}^{-}\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)x = {}^{+}1 + {}^{-}\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)x$
$= {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow x = {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right) : {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) = {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right) . {}^{-}\left(\frac{4}{3}\right) = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right)$.

viii) ${}^{+}\left(\frac{x}{2}\right) + {}^{-}\left(\frac{1}{3}\right) = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) \Longleftrightarrow {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)x = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) - {}^{-}\left(\frac{1}{3}\right) \Longleftrightarrow$
${}^{+}\left(\frac{1}{2}\right)x = {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) + {}^{+}\left(\frac{2}{6}\right) \Longleftrightarrow {}^{+}\left(\frac{1}{2}\right) x = {}^{-}\left(\frac{3}{6}\right) = {}^{-}\frac{1}{2} \Rightarrow x = {}^{-}1.$

ix) ${}^{-}\left(\frac{2x}{3}\right) - {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) = {}^{+}\left(\frac{x}{6}\right) + {}^{+}\left(\frac{3}{2}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{2x}{3}\right) = {}^{+}\left(\frac{x}{6}\right) + {}^{+}\left(\frac{3}{2}\right) +$
${}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right)x = {}^{+}\left(\frac{1}{6}\right)x + {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right)x - {}^{+}\left(\frac{1}{6}\right)x = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow$
$\left[{}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) - {}^{+}\left(\frac{1}{6}\right)\right] x = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow {}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) x = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow x = \left(\frac{3}{4}\right) :$
${}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) = {}^{-}\left(\frac{9}{10}\right)\Big]$.

152. i) $\frac{{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) . {}^{+}12}{{}^{+}\left(\frac{1}{12}\right) . {}^{+}12} = \frac{{}^{-}10}{{}^{+}1} = -10$, ii) $\frac{{}^{+}\left(\frac{5}{3}\right) . {}^{-}6}{{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) . {}^{-}6} = \frac{{}^{-}10}{{}^{+}5} = {}^{-}2.$

iii) $\frac{{}^{-}1 . {}^{+}3}{{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right) . {}^{+}3} = \frac{{}^{-}3}{{}^{+}2} = {}^{-}\left(\frac{3}{2}\right)$, iv) $\frac{{}^{-}\left(\frac{5}{6}\right) . {}^{-}6}{{}^{-}1 . {}^{-}6} = \frac{{}^{+}5}{{}^{+}6} = {}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)$.

v) $\dfrac{^-\left(\frac{5}{7}\right).^+21}{^+\left(\frac{2}{3}\right).^+21} = {}^-\left(\frac{15}{14}\right)$.

vi) $\dfrac{^-\left(\frac{5}{9}\right).^+36+{}^+\left(\frac{7}{12}\right).^+36}{^-1.^+36+{}^-\left(\frac{3}{4}\right).^+36+{}^+\left(\frac{5}{6}\right).^+36+{}^-\left(\frac{5}{18}\right).^+36} = \dfrac{^-20+{}^+21}{^-36+{}^-27+{}^+30+{}^-10}$

$= \dfrac{^+1}{^-43} = {}^-\left(\frac{1}{43}\right)$.

vii) $\dfrac{^+\left(\frac{1}{2}\right).^+12+{}^+5.^+12+{}^+\left(\frac{1}{6}\right).^+12}{^-\left(\frac{2}{3}\right).^+12+{}^+1.^+12+{}^+\left(\frac{3}{4}\right).^+12} = \dfrac{^+6+{}^+60+{}^+2}{^-8+{}^+12+{}^+9} = \dfrac{^+68}{^+13}$.

153. i) $A=\left[{}^-\left(\frac{2}{3}\right)\right]^3 = {}^-\left(\frac{8}{27}\right)$, ii) $B=(^-3)^9 : (^-3)^5=(^-3)^4={}^+81$,

iii) $\Gamma=\left[{}^-\left(\frac{3}{5}\right)\right]^9 : \left[{}^-\left(\frac{3}{5}\right)\right]^5 = \left[{}^-\left(\frac{3}{5}\right)\right]^4 = {}^+\left(\frac{81}{625}\right)$, iv) $\Delta=(^-2)^{10}$: $(^-2^{10})=(^-2)^0={}^+1$, v) $E=(^-5)^{12} : (^-5)^{10}=(^-5)^2={}^+25$.

154. i) Εἶναι: $^-1+{}^+\left(\frac{4}{3}\right)={}^-\left(\frac{3}{3}\right)+{}^+\left(\frac{4}{3}\right)={}^+\left(\frac{1}{3}\right)$ καὶ ἀντίστροφος: $^+3$.

ii) $^+1+{}^-\left(\frac{5}{4}\right)={}^+\left(\frac{4}{4}\right)+{}^-\left(\frac{5}{4}\right)={}^-\left(\frac{1}{4}\right)$ καὶ ἀντίστροφος: $^-4$.

iii) $A={}^-\left(\frac{8}{15}\right)+{}^-\left(\frac{5}{12}\right)={}^-\left(\frac{57}{60}\right)={}^-\left(\frac{19}{20}\right)$ καὶ ἀντίστροφος: $^-\left(\frac{20}{19}\right)$.

iv) $B=\left[{}^-\left(\frac{15}{20}\right)+{}^+\left(\frac{14}{20}\right)\right].\left[{}^+\left(\frac{8}{10}\right)+{}^-\left(\frac{5}{10}\right)\right]={}^-\left(\frac{1}{20}\right).{}^+\left(\frac{3}{10}\right)=$ $^-\left(\frac{3}{200}\right)$ καὶ ἀντίστροφος: $\left(\frac{200}{3}\right)$.

155. i) $^+13$, ii) $^-9$, iii) $^-9$, iv) $^+6$, v) $^+3$, vi) $^-7$, vii) $^+22$.

156. i) Εἶναι: $\alpha-\beta={}^-234-{}^-18={}^-234+{}^+18={}^-216$ καὶ $\alpha+\beta={}^-234+{}^-18$ $={}^-252$. Ἄρα: $(\alpha-\beta):(\alpha+\beta)={}^-216 : {}^-252={}^+\left(\frac{6}{7}\right)$.

Μὲ ὅμοιο τρόπο βρίσκομε πηλίκα: ii) $^+\left(\frac{5}{4}\right)$, iii) $^+\left(\frac{4}{3}\right)$, iv) $^+\left(\frac{5}{7}\right)$, v) $^+\left(\frac{1}{2}\right)$, vi) $^+\left(\frac{4}{3}\right)$, vii) $^+\left(\frac{21}{23}\right)$.

157. i) $A={}^-\left(\frac{3}{8}\right):{}^+\left(\frac{2}{15}\right)={}^-\left(\frac{3}{8}\right).{}^+\left(\frac{15}{2}\right)={}^-\left(\frac{45}{16}\right)$.

ii) $B={}^-\left(\frac{7}{60}\right):{}^-\left(\frac{612}{25}\right)={}^-\left(\frac{7}{60}\right).\left(\frac{25}{612}\right)={}^+\left(\frac{35}{7344}\right)$.

iii) $\Gamma={}^+\left(\frac{14}{5}\right):{}^+2={}^+\left(\frac{7}{5}\right)$.

iv) $\Delta = \left[{}^{+}\left(\frac{12}{6}\right) + {}^{-}\left(\frac{3}{6}\right) + {}^{-}\left(\frac{10}{6}\right)\right] : \left[{}^{-}\left(\frac{3}{12}\right) + {}^{+}\left(\frac{12}{12}\right) + {}^{-}\left(\frac{10}{12}\right)\right] =$
${}^{-}\left(\frac{1}{6}\right) : {}^{-}\left(\frac{1}{12}\right) = {}^{-}\left(\frac{1}{6}\right) \cdot {}^{-}12 = {}^{+}2.$

158. i) ${}^{+}2x = {}^{-}8 \iff x = {}^{-}8 : {}^{+}2 \Rightarrow x = {}^{-}4.$

ii) ${}^{-}3x = {}^{+}12 \iff x = {}^{+}12 : {}^{-}3 \Rightarrow x = {}^{-}4.$

iii) ${}^{-}\left(\frac{1}{5}\right)x = {}^{-}\left(\frac{7}{15}\right) \iff x = {}^{-}\left(\frac{7}{15}\right) : {}^{-}\left(\frac{1}{5}\right) = {}^{-}\left(\frac{7}{15}\right) \cdot {}^{-}5 = {}^{+}\left(\frac{7}{3}\right).$

iv) $\frac{+3}{x} = {}^{-}2 \iff {}^{+}3 = {}^{-}2x \iff {}^{-}2x = {}^{+}3 \iff x = {}^{+}3 : {}^{-}2 = {}^{-}\left(\frac{3}{2}\right).$

v) $\frac{-8}{x} = {}^{-}4 \iff {}^{-}8 = {}^{-}4x \iff {}^{-}4x = 8 \iff x = {}^{-}8 : {}^{-}4 = +2.$

159. i) Ἀντίθετο, ii) ἀντίθετο, iii) δὲν ἀλλάζει.

160. Σὲ κάθε περίπτωση δίνουμε τὴ λύση γιὰ μιὰ μόνο ὁμάδα τιμῶν καὶ τὰ ἀποτελέσματα γιὰ τὶς ὑπόλοιπες. Ἔτσι εἶναι:

i) $\frac{{}^{+}1}{{}^{+}1 + {}^{-}3} - {}^{-}3 = \frac{{}^{+}1}{{}^{-}2} + {}^{+}3 = {}^{-}\left(\frac{1}{2}\right) + {}^{+}\left(\frac{6}{2}\right) = {}^{+}\left(\frac{5}{2}\right)$. Οἱ λοιπὲς λύσεις εἶναι ἀντίστοιχα: ${}^{+}\left(\frac{32}{5}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{31}{3}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{11}{3}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{163}{63}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{451}{248}\right)$, ${}^{+}4$, ${}^{-}\left(\frac{49}{102}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{29}{180}\right)$.

ii) ${}^{-}4 - \frac{{}^{-}6}{{}^{-}4 + {}^{-}6} = {}^{-}4 - \frac{{}^{-}6}{{}^{-}10} = {}^{-}4 - {}^{+}\left(\frac{3}{5}\right) = {}^{-}4 + {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right) = {}^{-}\left(\frac{23}{5}\right)$. Οἱ ἄλλες λύσεις εἶναι ἀντίστοιχα: ${}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{17}{3}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{9}{2}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{83}{42}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{44}{93}\right)$, ${}^{+}0{,}6$, ${}^{-}\left(\frac{4949}{5100}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{2009}{1800}\right)$.

iii) $\frac{{}^{-}5 + {}^{-}10}{{}^{-}15} = \frac{{}^{-}15}{{}^{-}15} = 1$. Οἱ ὑπόλοιπες λύσεις εἶναι ἀντίστοιχα: ${}^{+}\left(\frac{2}{5}\right)$, ${}^{-}1$, ${}^{-}\left(\frac{2}{9}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{7}{12}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{31}{44}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{5}{4}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{102}{25}\right)$, ${}^{-}0{,}09$.

iv) $\frac{{}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)}{{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right) + {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{{}^{-}\left(\frac{1}{2}\right)}{{}^{+}\left(\frac{8}{12}\right) + {}^{-}\left(\frac{9}{12}\right)} = {}^{+}6$. Οἱ ὑπόλοιπες λύσεις εἶναι ἀντίστοιχα: ${}^{-}\left(\frac{1}{8}\right)$, -1, ${}^{+}\left(\frac{1}{5}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{15}{4}\right)$, ${}^{-}\left(\frac{112}{131}\right)$, ${}^{-}2$, ${}^{+}\left(\frac{2}{75}\right)$, ${}^{+}\left(\frac{1}{90}\right)$.

v) $$\frac{{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right) + {}^{+}\left(\frac{2}{3}\right)}{{}^{-}\left(\frac{4}{9}\right)} - \frac{{}^{+}\left(\frac{2}{3}\right) + {}^{+}\left(\frac{4}{9}\right)}{{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right) + {}^{+}\left(\frac{4}{6}\right)}{{}^{-}\left(\frac{4}{9}\right)} - \frac{{}^{+}\left(\frac{6}{9}\right) + {}^{+}\left(\frac{4}{9}\right)}{{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)}$$

$$= \frac{{}^{+}\left(\frac{10}{6}\right)}{{}^{-}\left(\frac{4}{9}\right)} - \frac{{}^{+}\left(\frac{10}{9}\right)}{{}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)} = {}^{-}\left(\frac{15}{4}\right) - {}^{+}\left(\frac{4}{3}\right) = {}^{-}\left(\frac{45}{12}\right) + {}^{-}\left(\frac{16}{12}\right) = {}^{-}\left(\frac{61}{12}\right).$$

Οἱ ἄλλες λύσεις εἶναι ἀντίστοιχα: ${}^{+}\left(\frac{10}{3}\right)$, ${}^{+}3, {}^{+}1$, ${}^{-}\left(\frac{23}{48}\right), {}^{-}\left(\frac{1471}{1624}\right), {}^{+}\left(\frac{17}{6}\right)$, ${}^{+}62,27$, ${}^{+}99,9$.

161. i) $\frac{{}^{+}2x-{}^{+}3}{{}^{+}5} = {}^{-}3 \iff {}^{+}2x-{}^{+}3={}^{-}3.{}^{+}5 \iff {}^{+}2x-{}^{+}3={}^{-}15 \iff {}^{+}2x={}^{+}3+{}^{-}15 \iff {}^{+}2x={}^{-}12 \iff x={}^{-}12:{}^{+}2 \Rightarrow x={}^{-}6$.

ii) $\frac{x+{}^{-}1}{{}^{+}2}-{}^{+}1={}^{+}1 \iff \frac{x+{}^{-}1}{{}^{+}2}={}^{+}1+{}^{+}1 \iff \frac{x+{}^{-}1}{{}^{+}2}={}^{+}2 \iff x+{}^{-}1={}^{+}2.{}^{+}2 \iff x+{}^{-}1={}^{+}4 \iff x={}^{+}4-{}^{-}1 \Rightarrow x={}^{+}5$.

iii) $\frac{{}^{+}4}{x+{}^{-}1}={}^{+}2 \iff {}^{+}4={}^{+}2(x+{}^{-}1) \iff {}^{+}4={}^{+}2x+{}^{+}2.{}^{-}1 \iff {}^{+}4={}^{+}2x+{}^{-}2 \iff {}^{+}2x+{}^{-}2={}^{+}4 \iff {}^{+}2x={}^{+}4-{}^{-}2 \iff 2x={}^{+}4+{}^{+}2 \iff {}^{+}2x={}^{+}6 \iff x={}^{+}6:{}^{+}2={}^{+}3$.

iv) $\frac{{}^{+}1+{}^{+}2x}{{}^{+}3}={}^{-}3 \iff {}^{+}1+{}^{+}2x={}^{-}3.{}^{+}3 \iff {}^{+}1+{}^{+}2x={}^{-}9 \iff {}^{+}2x={}^{-}9-{}^{+}1 \iff {}^{+}2x={}^{-}10 \iff x={}^{-}10:{}^{+}2={}^{-}5$.

162. Ἂν εἶναι x αὐτὸς ὁ ἀριθμός, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $21-\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}x \iff 21=\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x \iff 21=\frac{7}{6}x \iff \frac{7}{6}x=21 \iff x=21:\frac{7}{6}=21.\frac{6}{7}=18$.

163. Ἂς ποῦμε ὅτι ὕστερα ἀπὸ x ἔτη θὰ συμβῇ ὅ,τι ἐπιτάσσει τὸ πρόβλημα. Τότε οἱ ἡλικίες πατέρα καὶ γυιοῦ θὰ εἶναι ἀντίστοιχα: $48+x$ καὶ $15+x$ καὶ θὰ συνδέονται μὲ τὴν ἐξίσωση: $48+x=4.(15+x) \iff 48+x=60+4x \iff x-4x=60-48 \iff {}^{-}3x=12 \iff x={}^{+}12:{}^{-}3={}^{-}4$. Ὥστε αὐτὸ συνέβη πρὶν 4 ἔτη. Μιὰ ἐπαλήθευση ἐπιβαιώνει τὴν ἀκρίβεια τοῦ ἀποτελέσματος.

164. Ἂν x εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ Α, ἡ τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{AB}$ θὰ εἶναι: ${}^{+}5-x={}^{+}8$. Λύνοντας τὴν ἐξίσωση βρίσκομε: ${}^{-}x={}^{+}8-{}^{+}5 \iff {}^{-}x={}^{+}3$ καὶ $x={}^{-}3$.

165. Ἡ τετμημένη τὰ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι: $\overline{AB}={}^{-}3-{}^{+}5={}^{-}3+{}^{-}5={}^{-}8$. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ μὲ τετμημένες ${}^{+}5.\frac{3}{2}$ καὶ ${}^{-}3.\frac{3}{2}$ ὁρίζουν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μὲ τετμημένη $\overline{\Gamma\Delta}: {}^{-}3.\frac{3}{2}-{}^{+}5.\frac{3}{2}=({}^{-}3-{}^{+}5).\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\overline{AB}$.

166. Θὰ προκύψουν 7 κλάσεις ἰσοδυναμίας, ὅσα καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ Σ.

i) $\mathscr{P}(\Phi_0)\rightarrow\Sigma$ εἶναι ἀμφεικόνιση, ἀφοῦ σὲ κάθε κλάση διαμερισμοῦ τοῦ Φ_0 ἀντιστοιχίζεται ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο τοῦ Σ.

ii) $\Phi_0 \rightarrow\Sigma$ εἶναι ἐπεικόνιση, ἀφοῦ ἀπειράριθμα στοιχεῖα τοῦ Φ_0 θὰ ἔχουν τὴν εἰκόνα τους σὲ καθένα στοιχεῖο τοῦ Σ.

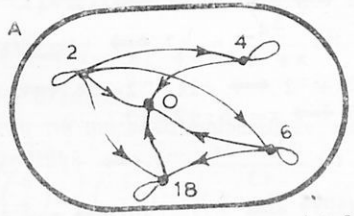
iii) $\mathscr{P}(\Phi_0) \rightarrow \Phi_0$ εἶναι ἐνεικόνιση, ἀφοῦ ὑπάρχουν ἀπειράριθμα στοχεῖα τοῦ Φ_0 ποὺ δὲν ἀποτελοῦν εἰκόνες κανενὸς ἀπὸ τὰ ὑποσύνολα $\mathscr{P}(\Phi_0)$.

9

ΔΙΑΤΑΞΗ ΤΩΝ ΣΧΕΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

167. Ἡ σχέση αὐτὴ ἐπιβάλλει ὁλικὴ διάταξη στὸ δοσμένο σύνολο, ἀφοῦ οἱ ἰδιότητες ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ ἐφαρμόζονται σὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα του.

168. Ἡ διάταξη ἐδῶ δὲν εἶναι ὁλική, ἀφοῦ οἱ ἰδιότητες ἀνακλαστική, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατικὴ δὲν ἐφαρμόζονται σὲ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Ἔτσι ὁ 0 δὲν διαιρεῖ τὸν ἑαυτό του, ὁ 4 δὲν διαιρεῖ τὸν 6 κ.τ.λ.



169. i) $1<2$, ii) ${}^{-}\left(\frac{1}{2}\right) < {}^{-}\left(\frac{1}{3}\right)$, iii) $0 > {}^{-}15$, iv) ${}^{-}17<0$, v) ${}^{+}\left(\frac{5}{12}\right) < {}^{+}\left(\frac{11}{18}\right)$, vi) ${}^{-}\left(\frac{5}{12}\right) > {}^{-}\left(\frac{11}{18}\right)$.

170. i) ${}^{-}18<{}^{-}15<{}^{-}9<{}^{-}6<0<{}^{+}4<{}^{+}10<{}^{+}24$. ii) Ἡ τροπὴ τῶν δοσμένων ρητῶν σὲ ὁμωνύμους μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη διάταξη :

$$-4 < {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) < {}^{-}\left(\frac{5}{12}\right) < {}^{+}\left(\frac{1}{4}\right) < {}^{+}\left(\frac{7}{10}\right) < +3\ \frac{1}{2}.$$

171. i) $12-(7-15)=12-7+15=20$, ii) $-3-(-7-10)=-3+7+10=14$, iii) $(5-10+3)+(-12+5-8)=5-10+3-12+5-8=0$, iv) $(11+7-6)-(-12+4+6)=11+7-6+12-4-6=14$, v) $(-8+5-7).(5-11).(-6)=(-10).(-6).(-6)=-360$, vi) $[(3-7)+(11-2-6)].(-8)=(3-7+11-2-6).(-8)=(-1).(-8)=8$, vii) $[(-5+13)-(19-8-4)].3=(-5+13-19+8+4).3=1.3=3$, viii) $[5.(-12)-(-15).7]:(-3)=[(-60)-(-105)]:(-3)=(-60+105):(-3)=45:(-3):(-3)=-15$.

172. i) $$\frac{\frac{-1}{2}-\frac{2}{-3}}{\frac{3}{7}-\frac{-9}{-14}}=\frac{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{\frac{3}{7}-\frac{9}{14}}=\frac{-\frac{1}{2}.42+\frac{2}{3}.42}{\frac{3}{7}.42-\frac{9}{14}.42}=\frac{-21+28}{18-27}=\frac{7}{-9}=-\frac{7}{9}.$$

ii) $$\frac{\frac{5}{6}+\frac{1}{-3}}{\frac{2}{-5}-\frac{1}{-6}}=\frac{\frac{5}{6}-\frac{1}{3}}{-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}=\frac{\frac{5}{6}.30-\frac{1}{3}.30}{-\frac{2}{5}.30+\frac{1}{6}.30}=\frac{25-10}{-12+5}=\frac{15}{-7}=-\frac{15}{7}.$$

iii) $$\frac{2+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{5}-1+\frac{2}{3}}=\frac{2.60+\frac{1}{2}.60-\frac{1}{4}.60}{\frac{1}{5}.60-1.60+\frac{2}{3}.60}=\frac{120+30-15}{12-60+40}=\frac{135}{-8}=-\frac{135}{8}.$$

173. Εἶναι : $\frac{5}{3}=1+\frac{2}{3}>+1$ καὶ $\frac{1,2}{4,5}=\frac{12}{45}=\frac{4}{15}<+1$, ἐνῶ : $\frac{3}{5}<+1$ καὶ $\frac{15}{4}>+1$.

Ἐπίσης εἶναι : $-\frac{3}{4}>-1$ καὶ $-\frac{7}{5}=-1\frac{2}{5}<-1$, ἐνῶ : $-\frac{4}{3}<-1$ καὶ $-\frac{5}{7}>-1$.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ συνάγεται ὅτι : ὁ ἀντίστροφος σχετικοῦ ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ ±1 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ∓1.

174. Ἔχομε : $(\alpha=\beta$ καὶ $\gamma>\delta)\Rightarrow\alpha-\gamma<\beta-\delta$, δηλ. ἀνισότητα ἑτερόστροφη, γιατὶ στὴν πρώτη διαφορὰ ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο τῆς δεύτερης, ἐνῶ ὁ μειωτέος εἶναι ὁ ἴδιος.

175. i) $\frac{-3x+2}{4}>2 \iff -3x+2>8 \Rightarrow -3x>8-2 \Rightarrow -3x>6 \Rightarrow 3x<-6 \Rightarrow x<-2$. Ὥστε : $\left\{x \,\|\, \frac{-3x+2}{4}<2\right\}=\{x\|x<-2\}$.

ii) $\frac{-1-5x}{3}<3 \iff -1-5x<9 \Rightarrow -5x<9-(-1) \Rightarrow -5x<10 \Rightarrow 5x>-10 \Rightarrow x>-2$. Ὥστε : $\left\{x \,\|\, \frac{-1-5x}{3}<3\right\}=\{x\|x>-2\}$.

iii) $\frac{-5x-3}{4}-1\leqslant2 \iff -5x-3-4\leqslant8 \iff -5x-7\leqslant8 \iff -5x\leqslant8+7 \iff -5x\leqslant15\Rightarrow x\geqslant-3$. Ὥστε : $\left\{x \,\|\, \frac{-5x-3}{4}-1\leqslant2\right\}=\{x\|x\geqslant-3\}$.

iv) $0\leqslant-2x+4 \iff -2x+4\geqslant0 \iff -2x\geqslant-4 \iff 2x\leqslant4\Rightarrow x\leqslant2$. Ὥστε : $\{x\|0\leqslant-2x+4\}=\{x\|x\leqslant2\}$.

176. $-2\leqslant\frac{2x-4}{3} \iff -6\leqslant2x-4 \iff 2x-4\geqslant-6 \iff 2x\geqslant-6+4 \iff 2x\geqslant-2\Rightarrow x\geqslant-1$ καὶ $\frac{2x-4}{3}\leqslant2 \iff 2x-4\leqslant6 \iff 2x\leqslant4+6 \iff 2x\leqslant10 \Rightarrow x\leqslant5$. Ὥστε : $\left\{x\|x\in\Phi_0 \text{ καὶ } -2\leqslant\frac{2x-4}{3}\leqslant2\right\}=\{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

177. i) Εἶναι : $A(+0,5)$, $B(+2,3)$, $\Gamma(+3,85)$, $\Delta(-2,65)$, $E(-4,85)$.

ii) Εἶναι : $\overline{O\Delta}=-2,65$, $\overline{AB}=2,3-0,5=+1,8$, $\overline{E\Gamma}=3,85-(-4,85)=+8,7$, $\overline{A\Delta}=-2,65-0,5=-3,15$, $\overline{A\Gamma}=3,85-0,5=+3,35$ $\overline{BE}=-4,85-2,3=-7,15$, $\overline{\Delta B}=2,3-(-2,65)=+4,95$.

iii) Εἶναι : $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma O}+\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{\Delta B}=3,35-3,85-2,65+4,95=+1,8=\overrightarrow{AB}$ καὶ : $\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}=7,15-4,95+6,5-8,7=0$.

178. Ἂν ἡ μετατόπιση γίνη κατὰ $-\lambda$ θὰ ἔχουμε, τετμημένες $A(\alpha+\lambda)$, $B(\beta+\lambda)$ καὶ $\overline{AB}=(\beta+\lambda)-(\alpha+\lambda)=\beta-\alpha$. Ἂν ἡ μετατόπιση γίνη κατὰ $+\lambda$, οἱ τετμημένες γίνονται $A(\alpha-\lambda)$, $B(\beta-\lambda)$ καὶ $\overline{AB}=(\beta-\lambda)-(\alpha-\lambda)=\beta-\alpha$.

179. i) $\frac{x}{2}-2>\frac{x}{5}+1 \iff 5x-20>2x+10 \iff 5x-2x>20+10 \Rightarrow 3x>30 \Rightarrow x>10$. Ὥστε: $\left\{x \mid \frac{x}{2}-2>\frac{x}{5}+1\right\}=\{x \mid x>10\}$.

ii) $\frac{3(x-1)}{4}-\frac{x}{3}<\frac{1}{2} \iff 9(x-1)-4x<6 \iff 9x-9-4x<6 \iff 5x-9<6 \iff 5x<9+6 \Rightarrow 5x<15 \Rightarrow x<3$. Ὥστε: $\left\{x \mid \frac{3(x-1)}{4}-\frac{x}{3}<\frac{1}{2}\right\}=\{x \mid x<3\}$.

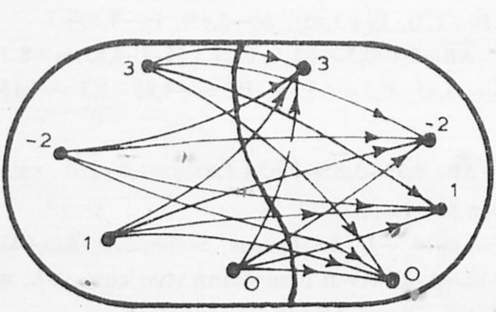
iii) $\frac{1-2x}{3}>\frac{2-3x}{5} \iff 5(1-2x)>3(2-3x) \iff 5-10x>6-9x \iff -10x+9x>6-5 \Rightarrow -x>1 \Rightarrow x<-1$. Ὥστε: $\left\{x \mid \frac{1-2x}{5}>\frac{2-3x}{5}\right\}=\{x \mid x<-1\}$.

iv) $x-\frac{1-x}{2}<\frac{2-x}{3} \iff 6x-3(1-x)<2(2-x) \iff 6x-3+3x<4-2x \iff 6x+3x+2x<3+4 \Rightarrow 11x<7 \Rightarrow x<\frac{7}{11}$. Ὥστε: $\left\{x \mid x-\frac{1-x}{2}<\frac{2-x}{3}\right\}=\left\{x \mid x<\frac{7}{11}\right\}$.

v) $1-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>2-\frac{x}{4} \iff 12-6x-4x>24-3x \iff -6x-4x+3x>24-12 \Rightarrow -7x>14 \Rightarrow 7x<-12 \Rightarrow x<-\frac{12}{7}$. Ὥστε: $\left\{x \mid 1-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}>2-\frac{x}{4}\right\}=\left\{x \mid x<-\frac{12}{7}\right\}$.

10
ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

180. Εἶναι: $A^2=\{(3,3), (3,-2), (3,1), (3,0), (-2,3), (-2,-2), (-2,1),$



A \ A	3	-2	1	O
3	(3,3)	(3,-2)	(3,1)	(3,O)
-2	(-2,3)	(-2,-2)	(-2,1)	(-2,O)
1	(1,3)	(1,-2)	(1,1)	(1,O)
O	(O,3)	(O,-2)	(O,1)	(O,O)

$(-2,0)$, $(1,3)$, $(1,-2)$, $(1,1)$, $(1,0)$, $(0,3)$, $(0,-2)$, $(0,1)$, $(0,0)$. Τὸ γράφημα καὶ ὁ πίνακας διπλῆς εἰσόδου δίνονται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο.

181. Εἶναι $A \times B$, ὅπου: $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $B = \{3, 4, 5\}$. Ὁ πίνακας διπλῆς εἰσόδου καὶ τὸ γράφημα θὰ γίνουν, ὅπως στὴν προηγούμενη ἄσκηση. Τὸ Βέννιο διάγραμμα θὰ γίνη, ὅπως στὸ σχ. 58 τοῦ βιβλίου.

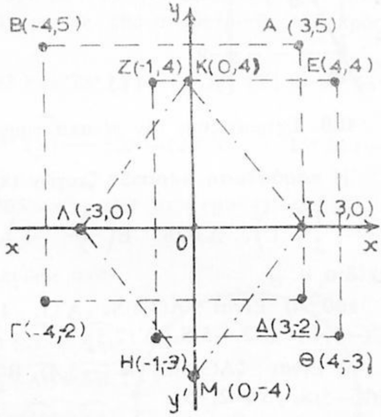
182. Οἱ γεωμετρικὲς εἰκόνες αὐτῶν τῶν σημείων θὰ ὁρισθοῦν, ὅπως στὸ σχ. 59 τοῦ βιβλίου.

183. Εἶναι: $A(+1,0)$, $B = \left(+1\frac{1}{2}, +1\right)$, $\Gamma\left(0, +1\frac{1}{2}\right)$, $\Delta = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ $E\left(-1\frac{1}{2}, 0\right)$, $Z\left(-1\frac{1}{2}, -1\right)$, $H(0,-1)$, $\Theta = \left(+1\frac{1}{2}, -1\right)$.

Τὰ σημεῖα Β καὶ Ζ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Τὰ Β καὶ Θ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς ἄξονα $x'x$.

184. Εἶναι: $K \times \Lambda = \{(\delta,\alpha), (\delta,\beta), (\delta,\gamma), (\varepsilon,\alpha), (\varepsilon,\beta), (\varepsilon,\gamma)\}$. Ὁ πίνακας διπλῆς εἰσόδου θὰ ἔχη στὴν πρώτη στήλη τὰ στοιχεῖα τοῦ Κ. Τὸ γράφημα θὰ εἶναι ὅπως στὸ σχ. 57 μὲ ἀλλαγὴ τῆς φορᾶς στὰ βέλη. Τὸ Βέννιο διάγραμμα, ὅπως στὸ σχ. 58 τοῦ βιβλίου.

185. i) Τὰ Α καὶ Β ἔχουν τὴν ἴδια τεταγμένη. Ἄρα ἀνήκουν σὲ εὐθεία $AB \parallel x'x$. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο καὶ $\Gamma\Delta \parallel x'x$. Τὰ Α καὶ Δ ἔχουν τὴν ἴδια τετμημένη, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ Β καὶ Γ. Ἄρα θὰ εἶναι $A\Delta \parallel y'y$ καὶ $B\Gamma \parallel y'y$ καί, ἀφοῦ $x'x \perp y'y$, τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θὰ εἶναι ὀρθογώνιο (βλέπε καὶ παραπλεύρως σχέδιο).



ii) Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο καὶ τὸ ΕΖΗΘ εἶναι ὀρθογώνιο.

iii) Τὸ ΙΚΛΜ εἶναι παραλληλόγραμμο, ἀφοῦ ἔχει κέντρο συμμετρίας, τὸ Ο, καὶ ρόμβος, ἀφοῦ ἔχει μόνους ἄξονες συμμετρίας τὶς διαγωνίους του.

186. i) Πρόκειται γιὰ εὐθεία παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$, ἀφοῦ ὅλα τὰ σημεῖα αὐτὰ ἔχουν τὴν ἴδια τετμημένη.

ii) Ἡ εὐθεία ΕΘ εἶναι παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$, ἀφοῦ ὅλα τὰ σημεῖα της ἔχουν τὴν ἴδια τεταγμένη.

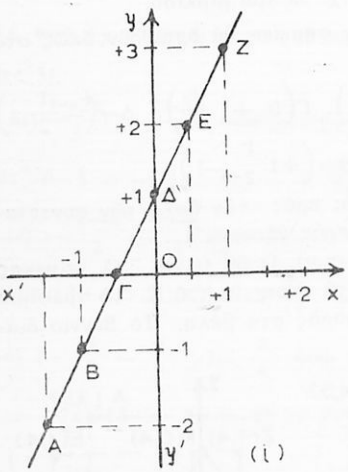
187. i) Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀνήκουν στὴ διχοτόμο τῆς δεύτερης καὶ τέταρτης γωνίας τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων.

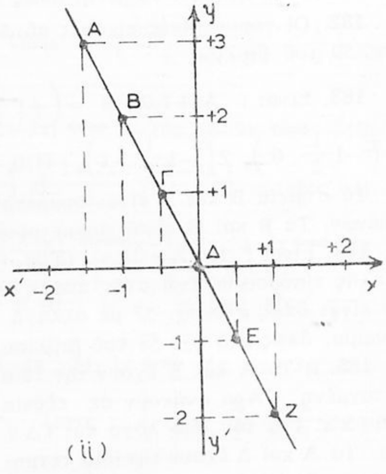
ii) Ἀνήκουν στὴ διχοτόμο τῆς πρώτης καὶ τρίτης γωνίας $\measuredangle(x'x, y'y)$.

188. Μὲ τὶς δοσμένες τιμὲς τῆς x θὰ ἔχουμε τὸν ἀκόλουθο πίνακα:

$x=$	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	3
$2x+1=y=$	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Ἡ παράσταση μερικῶν ζευγῶν (x,y) σὲ καρτεσιανὲς συντεταγμένες, ὅπως τὰ $A\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$, $B(-1, -1)$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $\Delta(0,1)$ $E\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $Z(1,3)$, δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i.





189. Σχηματίζομε τὸν πίνακα τιμῶν, ὅπως στὴν παραπάνω ἄσκηση.

Ἡ παράσταση μερικῶν ζευγῶν (x,y) ὅπως τὰ $A\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$, $B(-1,2)$, $\Gamma\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\Delta(0,0)$, $E\left(\frac{1}{2}, -1\right)$, $Z(1, -2)$, δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο ii.

190. i) Εἶναι : $A(3,4)S_{x'x}A'(3, -4)$, $B(-2,3)S_{x'x}B'(-2, -3)$, $\Gamma(-1, -4)S_{x'x}\Gamma'(-1,4)$, $\Delta(2,-5)S_{x'x}\Delta'(2,5)$.

ii) Εἶναι : $A(3,4)S_{y'y}A'(-3,4)$, $B(-2,3)S_{y'y}B'(2,3)$, $\Gamma(-1, -4)S_{y'y}\Gamma'(1,-4)$, $\Delta(2,-5)S_{y'y}\Delta'(-2,-5)$.

iii) Εἶναι : $A(3,4)S_oA'(-3, -4)$, $B(-2,3)S_oB'(2,-3)$, $\Gamma(-1,-4)S_o\Gamma'(1,4)$, $\Delta(2,-5)S_o\Delta'(-2, 5)$.

191. i) $4>3 \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ καὶ $-5<-2 \Rightarrow -\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$. Ὥστε ἀποτελοῦν ἀνισότητα ἑτερόστροφη πρὸς τὴ δοσμένη.

ii) $-4 < 3 \Rightarrow -\frac{1}{4} < \frac{1}{3}$ καὶ $5>-2 \Rightarrow \frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$, δηλ. ἀποτελοῦν ἀνισότητα ὁμόστροφη.

192. i) $-1>-2 \Rightarrow (-1)^2<(-2)^2 \Rightarrow 1<4$ καὶ $(-1)^3>(-2)^3 \Rightarrow -1>-8$.

ii) $+5<+7 \Rightarrow (+5)^2<(+7)^2 \Rightarrow 25<49$ καὶ $(+5)^3<(+7)^3 \Rightarrow 125<343$.

iii) $-2<+1 \Rightarrow (-2^2)>(+1)^2 \Rightarrow 4>1$ καὶ $(-2)^3<(+1)^3 \Rightarrow -8<+1$.

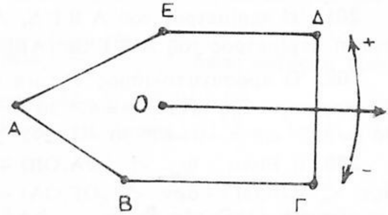
iv) $-3<+6 \Rightarrow (-3)^2<(+6)^2 \Rightarrow 9<36$ καὶ $(-3)^3<(+6)^3 \Rightarrow -27<+216$.

11

ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

193. Ἡ ἀρνητική, ἐνῶ γιὰ τὸ συμμαθητή μας τοῦ ἀπέναντι πεζοδρομίου εἶναι ἡ θετική.

194. Τὸ πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ καὶ ὁ προσανατολισμός του δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο.



195. Ἡ συμμετρικὴ πρὸς κέντρο μιᾶς προσανατολισμένης γωνίας διατηρεῖ τὸν προσανατολισμό, ἐνῶ ἡ συμμετρική της πρὸς ἄξονα ἔχει ἀντίθετο προσανατολισμό.

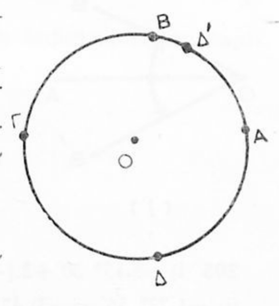
Ἔτσι, ἂν ἡ δοσμένη γωνία ἔχει ἀπόμετρο 30^0, ἡ συμμετρική της πρὸς κέντρο θὰ ἔχῃ ἀπόμετρο 30^0, ἐνῶ τὸ ἀπόμετρο τῆς συμμετρικῆς της πρὸς ἄξονα θὰ εἶναι -30^0.

196. i) $78^0\,25' + (-127^0\,47') - (-82^0\,53') = 78^0\,25' + (-127^0\,47') + 82^0\,53' = 33^0\,31'$.

ii) $-350^0 + 120^0\,35' + (-15^0\,20') - (-245^0\,15') = -350^0 + 120^0\,35' + (-15^0\,20') + 245^0\,15' = 40'$.

iii) $230^0\,30' - (-187^0\,32') - 98^0\,30' - (-305'\,48') = 230^0\,30' + 187^0\,32' - 98^0\,30' + 305^0\,48' = 625^0\,20'$.

197. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπλεύρως σχέδιο, εἶναι :



i) $\widehat{AB}+\widehat{B\Delta}+\widehat{\Delta\Gamma}=(\widehat{AB}+\widehat{B\Delta})+\widehat{\Delta\Gamma}=\widehat{A\Delta}+\widehat{\Delta\Gamma}=\widehat{A\Gamma}$.

ii) $\widehat{A\Gamma}+\widehat{\Gamma\Delta}+\widehat{\Delta B}=(\widehat{A\Gamma}+\widehat{\Gamma\Delta})+\widehat{\Delta B}=\widehat{A\Delta}+\widehat{\Delta B}=\widehat{AB}$.

iii) $\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma}-\widehat{\Gamma\Delta}=(\widehat{AB}+\widehat{B\Gamma})+\widehat{\Delta\Gamma}=\widehat{A\Gamma}+\widehat{\Gamma\Delta'}=\widehat{A\Delta'}$

iv) $\widehat{A\Delta}+\widehat{\Delta B}-\widehat{AB}=(\widehat{A\Delta}+\widehat{\Delta B})-\widehat{AB}=\widehat{AB}+\widehat{BA}=0$.

198. i) $128^0\,40' + 41^0\,20' = 170^0$.

ii) $-204^0\,40' - (-300^0\,10') = -204^0\,40' + 300^0\,10' = 95^0\,30'$.

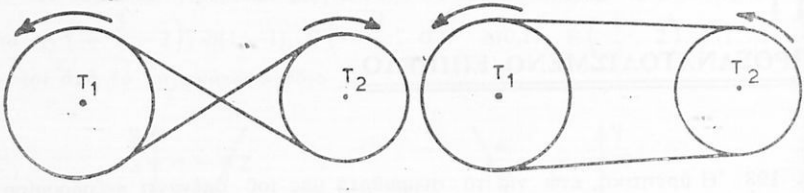
iii) $2.104^0\,45' - (-3.42^0\,10') = 209^0\,30' + 126^0\,30' = 336^0$.

iv) $-3.(-87^0\,40') - (-304^0) = 263^0 + 304^0 = 567^0$.

v) $360^0 - (-2).(-105^0\,30') = 360^0 - 211^0 = 149^0$.

199. Ὁ Β θὰ στρέφεται κατὰ τὴν ἀρνητικὴ φορὰ καὶ ὁ Γ κατὰ τὴ θετική.

200. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παρακάτω σχέδιο, στὴν πρώτη περίπτωση ὁ T_2 θὰ στρέφεται κατὰ τὴν ἀρνητικὴ φορά, ἐνῶ στὴ δεύτερη ἡ φορά του θὰ εἶναι ἐπίσης θετική.

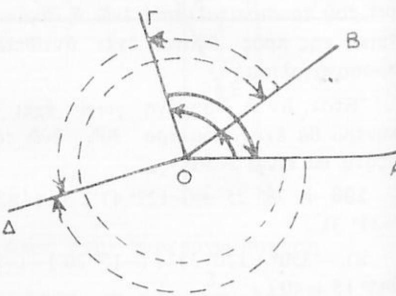


201. Ἡ περίμετρος τοῦ Α΄Β΄Γ΄S_0 ΑΒΓ διαγράφεται κατὰ τὴ θετικὴ φορά, ἐνῶ ἡ περίμετρος τοῦ Α΄Β΄Γ΄Sε (ΑΒΓ) διαγράφεται κατὰ τὴν ἀρνητική.

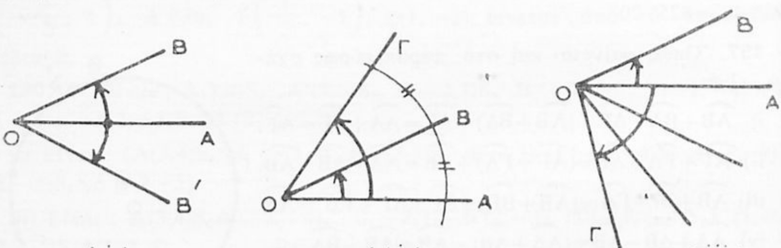
202. Ὁ προσανατολισμὸς τῆς μὴ κυρτῆς ∢ (ΟΑ,ΟΒ) θὰ εἶναι ἀρνητικός. Τὸ ἀπόμετρό της εἶναι : $\beta = 67^0\ 30' - 360^0 = -292^0\ 30'$, $\alpha+\beta = 67^0\ 30' + (-292^0\ 30') = 225^0$ καὶ $\alpha - \beta = 67^0\ 30' - (-292^0\ 30') = 67^0\ 30' + 292^0\ 30' = 360^0$.

203. i) Εἶναι : θετ. ∢ (ΟΑ,ΟΒ) + θετ. ∢ (ΟΒ,ΟΓ) + ἀρν. ∢ (ΟΓ,ΟΑ) = ∢(ΟΑ,ΟΓ) + ∢(ΟΓ,ΘΑ) = 0.

ii) Εἶναι : ἀρν. ∢ (ΟΑ,ΟΒ) + θετ. ∢(ΟΒ,ΟΓ) + θετ. ∢ (ΟΓ,ΟΔ) = ἀρν. ∢ (ΟΑ,ΟΒ) + θετ. ∢ (ΟΒ,ΟΔ) = ἀρν. ∢ (ΟΑ,ΟΔ).



204. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὸ ἀκόλουθο σχέδιο. Εἶναι : i) ∢ (ΟΑ, ΟΒ΄) = −1. ∢ (ΟΑ,ΟΒ) (ἀρνητική), ii) ∢ (ΟΑ,ΟΓ) = 2. ∢ (ΟΑ,ΟΒ) (θετική), iii) ∢(ΟΑ,ΟΓ) = −3.∢(ΟΑ,ΟΒ) ἀρνητική).

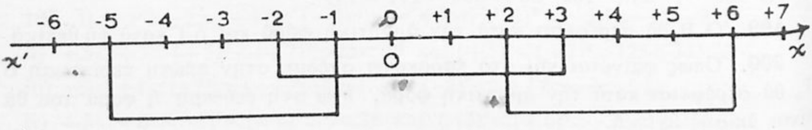


(j) (jj) (jjj)

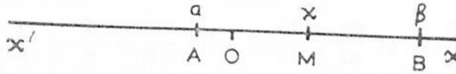
205 i) $-3.15^0\ 20' + 2.(-35^0\ 45') = -46^0 - 71^0\ 30' = -117^0\ 30'$.

ii) $-1.72^0\ 36' - (-3).47^0\ 53' = -72^0\ 36^0 + 143^0\ 39' = 71^0\ 3'$.

206. Ἡ παράστασή τους γίνεται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :



207. Εἶναι : $x=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}$ καί : $x=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{MB}$. Προσθέτοντας κατὰ μέλη ἔχομε :



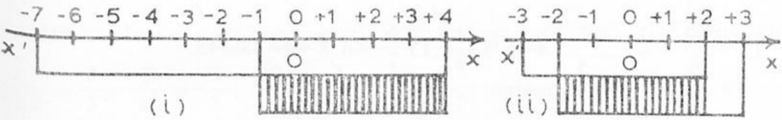
$2x=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{MB}$ καί, ἐπειδὴ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$, θὰ εἶναι:

$2x=\overline{OA}+\overline{OB}=\alpha+\beta$ καὶ $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

Ὥστε : ἡ τετμημένη τοῦ μέσου ἑνὸς τμήματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν τετμημένων τῶν ἄκρων του.

Ἂν $\alpha=-4$ καὶ $\beta=10$, θὰ εἶναι : $x=\overline{OM}=\dfrac{-4+10}{2}=3$, ὅπως φαίνεται ἀμέσως, ἂν στὸν ἄξονα x'x πάρουμε τὰ σημεῖα $A(-4)$ καὶ $B(+10)$.

208. Τὰ παρακάτω σχέδια i καὶ ii δίνουν τὶς λύσεις : i) $A=\{-1,0,+1,+2,+3\}$ καὶ ii) $B=\{-2,-1,0,1,2\}$.



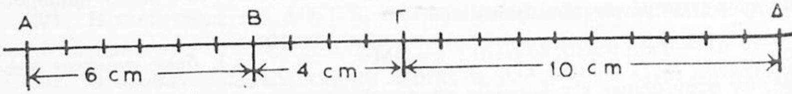
209. Ἂν x εἶναι ὁ μεγαλύτερος, ὁ μικρότερος θὰ εἶναι $x-8$ καί, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα, θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x-8}{3}=1$ καὶ τὴ λύση της : $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x-8}{3}=1 \iff 3x+2(x-8)=6 \iff 3x+2x-16=6 \iff 5x-16=6 \iff 5x=16+6 \Rightarrow x=\dfrac{22}{5}$. Ὥστε ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ $\dfrac{22}{5}$ καὶ ὁ μικρότερος : $\dfrac{22}{5}-8=-\dfrac{18}{5}$. Ἡ ἐπαλήθευση ἐπιβεβαιώνει τὴν ἀκρίβεια τῆς λύσης.

12
ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

210. Εἶναι : i) $\dfrac{0,75}{1,00}=\dfrac{3}{4}$, ii) $\dfrac{1}{2}$, iii) $\dfrac{1}{3}$, iv) $\dfrac{1000}{1852}=\dfrac{250}{463}$.

211. Εἶναι : i) $\dfrac{\Pi}{\Gamma}=\dfrac{60}{20}=3$, ii) $\dfrac{M}{\Pi}=\dfrac{48}{60}=\dfrac{4}{5}$, iii) $\dfrac{K}{M}=\dfrac{12}{48}=\dfrac{1}{4}$, iv) $\dfrac{\Gamma}{K}=\dfrac{20}{12}=\dfrac{5}{3}$, v) $\dfrac{\Pi}{K}=\dfrac{60}{12}=5$.

212. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο εἶναι: i) $\frac{AB}{\Gamma\Delta}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, ii) $\frac{\Gamma\Delta}{A\Gamma}=\frac{10}{10}=1$, iii) $\frac{B\Gamma}{AB}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, iv) $\frac{A\Gamma}{B\Delta}=\frac{10}{14}=\frac{5}{7}$, v) $\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{\Delta A}}=\frac{+4}{-20}=-\frac{1}{5}$, vi) $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Delta B}}=\frac{+6}{-14}=-\frac{3}{7}$, vii) $\frac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{A\Delta}}=\frac{+10}{+20}=+\frac{1}{2}$.



213. i) $\frac{\frac{4}{9}}{5}=\frac{7}{78{,}75} \iff \frac{4}{9}\cdot 78{,}75=35 \iff 35=35.$

ii) $\frac{3\frac{1}{2}}{6}=\frac{8}{13\frac{5}{7}} \iff 3\frac{1}{2}\cdot 13\frac{5}{7}=6\cdot 8 \iff 48=48.$

iii) $\frac{2\frac{1}{2}}{5\frac{1}{3}}=\frac{1\frac{1}{2}}{3{,}2} \iff 2\frac{1}{2}\cdot 3{,}2=5\frac{1}{3}\cdot 1\frac{1}{2} \iff 8=8.$

214. Ναί, γιατί: i) $4\cdot 51=17\cdot 12$, ii) $12\cdot 42=18\cdot 28$, iii) $9\cdot 24=12\cdot 18$.
Τὶς ἀναλογίες:

i) $4\cdot 51=17\cdot 12 \iff \frac{4}{17}=\frac{12}{51} \iff \frac{4}{12}=\frac{17}{51} \iff \frac{51}{17}=\frac{12}{4} \iff \frac{17}{4}=\frac{51}{12}.$

ii) $12\cdot 42=18\cdot 28 \iff \frac{12}{18}=\frac{28}{42} \iff \frac{12}{28}=\frac{18}{42} \iff \frac{42}{18}=\frac{28}{12} \iff \frac{18}{12}=\frac{42}{28}.$

iii) $9\cdot 24=12\cdot 18 \iff \frac{9}{12}=\frac{18}{24} \iff \frac{9}{18}=\frac{12}{24} \iff \frac{24}{12}=\frac{18}{9} \iff \frac{12}{9}=\frac{24}{18}.$

215. i) $1{,}5\cdot 4=12\cdot 0{,}5 \iff \frac{1{,}5}{12}=\frac{0{,}5}{4} \iff \frac{1{,}5}{0{,}6}=\frac{12}{4} \iff \frac{4}{12}=\frac{0{,}5}{1{,}5} \iff \frac{12}{1{,}5}=\frac{4}{0{,}5}.$

ii) $8\cdot 0{,}6=3\cdot 1{,}6 \iff \frac{8}{3}=\frac{1{,}6}{0{,}6} \iff \frac{8}{1{,}6}=\frac{3}{0{,}6} \iff \frac{0{,}6}{3}=\frac{1{,}6}{8} \iff \frac{3}{8}=\frac{0{,}6}{1{,}6}.$

iii) $0{,}5\cdot 16=4\cdot 2 \iff \frac{0{,}5}{4}=\frac{2}{16} \iff \frac{0{,}5}{2}=\frac{4}{16} \iff \frac{16}{4}=\frac{2}{0{,}5} \iff \frac{4}{0{,}5}=\frac{16}{2}.$

216. i) $\frac{-8}{6}=\frac{x}{9} \iff -8\cdot 9=6x \iff 6x=-72 \Rightarrow x=-12.$

ii) $\frac{x}{6}=\frac{16}{12} \iff 12x=6\cdot 16 \iff 12x=96 \Rightarrow x=8.$

iii) $\frac{4}{x}=\frac{-5}{7{,}5} \iff 4\cdot 7{,}5=-5x \iff -5x=30 \Rightarrow x=-6.$

iv) $\dfrac{-5}{4,25}=\dfrac{7,5}{x} \iff -5x=4,25.7,5 \iff -5x=31,875 \Rightarrow x=-6,375.$

v) $\dfrac{\frac{2}{3}}{x}=\dfrac{5}{\frac{1}{2}} \iff \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=5x \iff 5x=\dfrac{1}{3} \Rightarrow x=\dfrac{1}{15}.$

217. Ναί, ἀλλὰ μὲ τὴ σειρά : 15, $\dfrac{7}{3}$, $\dfrac{5}{8}$, ἐπειδή : $\dfrac{3}{15}=\dfrac{\frac{7}{15}}{\frac{7}{3}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{8}}=\dfrac{1}{5}$. Μὲ συντελεστὴ ἀναλογίας 2 θὰ ἔχουμε τὴν τριάδα τῶν ἀριθμῶν : 6, $\dfrac{14}{15}$, $\dfrac{1}{4}$.

218. Εἶναι : $\dfrac{\alpha}{-12}=\dfrac{\beta}{15}=\dfrac{3}{5}=\dfrac{12}{\gamma}=\dfrac{1}{\delta}$ καὶ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις : $\dfrac{\alpha}{-12}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\beta}{15}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{12}{\gamma}=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{1}{\delta}=\dfrac{3}{5}$ παίρνομε τὶς τιμές : $\alpha=-\dfrac{36}{5}$, $\beta=9$, $\gamma=20$, $\delta=\dfrac{5}{3}$.

219. Εἶναι, ἐπειδή : $4.18=3.24=8.9=6\ 12=2.36=72$.

220. Ἂν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τὰ ἀπόμετρα μήκους τῶν ὁμολόγων πλευρῶν του, θὰ ἔχουμε : $\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{\beta}{5}=\dfrac{\gamma}{7}=\dfrac{\delta}{6}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{3+5+7+6}=\dfrac{70}{21}=\dfrac{10}{3}$ καὶ ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις : $\dfrac{\alpha}{3}=\dfrac{10}{3}\Rightarrow\alpha=10$, $\dfrac{\beta}{5}=\dfrac{10}{3}\Rightarrow\beta=\dfrac{50}{3}$, $\dfrac{\gamma}{7}=\dfrac{10}{3}\Rightarrow\gamma=\dfrac{70}{3}$, $\dfrac{\delta}{6}=\dfrac{10}{3}\Rightarrow\delta=20$.

221. Εἶναι : $\dfrac{R\eta}{R\gamma}=109$ ἢ $\dfrac{R\gamma}{R\eta}=\dfrac{1}{109}$ καὶ $\dfrac{R\sigma}{R\gamma}=\dfrac{3}{11}$. Πολλαπλασιάζοντας κατὰ μέλη βρίσκομε : $\dfrac{R\gamma}{R\eta}\cdot\dfrac{R\sigma}{R\gamma}=\dfrac{1}{109}\cdot\dfrac{3}{11}\iff\dfrac{R\sigma}{R\eta}=\dfrac{3}{1199}$.

222. i) Εἶναι : $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\iff\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}\iff\dfrac{\alpha+\gamma}{\gamma}=\dfrac{\beta+\delta}{\delta}$ (1), καὶ $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\iff\dfrac{\alpha}{\gamma}=\dfrac{\beta}{\delta}\iff\dfrac{\alpha-\gamma}{\gamma}=\dfrac{\beta-\delta}{\delta}$ (2). Διαιρώντας κατὰ μέλη τὶς ἀναλογίες (1) καὶ (2) παίρνομε : $\dfrac{\alpha+\gamma}{\alpha-\gamma}=\dfrac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$.

ii) Εἶναι : $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\iff\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{7\gamma}{7\delta}\iff\dfrac{\alpha}{7\gamma}=\dfrac{\beta}{7\delta}\iff\dfrac{\alpha+7\gamma}{7\gamma}=\dfrac{\beta+7\delta}{7\delta}$ (1) καὶ $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}\iff\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{7\gamma}{7\delta}\iff\dfrac{\alpha}{7\gamma}=\dfrac{\beta}{7\delta}\iff\dfrac{\alpha-7\gamma}{7\gamma}=\dfrac{\beta-7\delta}{7\delta}$ (2).

Διαιροῦμε κατὰ μέλη τὶς ἀναλογίες (1) καὶ (2) καὶ βρίσκομε : $\dfrac{\alpha+7\gamma}{\alpha-7\gamma}=\dfrac{\beta+7\delta}{\beta-7\delta}$.

iii) Εἶναι : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\alpha}{2\gamma}=\frac{5\beta}{5\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\alpha}{5\beta}=\frac{2\gamma}{5\delta} \Longleftrightarrow$ $\frac{2\alpha-5\beta}{5\beta}=\frac{2\gamma-5\delta}{5\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\alpha-5\beta}{2\gamma-5\delta}=\frac{5\beta}{5\delta}=\frac{\beta}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{2\alpha-5\beta}{\beta}=\frac{2\gamma-5\delta}{\delta}$.

223. i) Εἶναι: $\frac{6}{5}x=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{11} \Rightarrow x=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{11}:\frac{6}{5}=\frac{5}{4}\cdot\frac{3}{11}\cdot\frac{5}{6}=\frac{25}{88}$.

ii) Εἶναι : $-2x=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}:(-2)=-\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{2}{21}$.

iii) Εἶναι : $4\frac{1}{5}x=6\frac{3}{4}.(-7) \Rightarrow x=\frac{27}{3}.(-7).\frac{5}{21}=-15$.

224. i) $\frac{x-13}{11}=\frac{35}{77} \Longleftrightarrow 77(x-13)=11.35 \Longleftrightarrow 7(x-13)=35 \Longleftrightarrow 7x-91=35 \Longleftrightarrow 7x=91+35 \Longleftrightarrow 7x=126 \Rightarrow x=18$.

ii) $\frac{x+25}{24}=\frac{4}{3} \Longleftrightarrow 3.(x+25)=24.4 \Longleftrightarrow 3x+75=96 \Longleftrightarrow 3x=96-75 \Longleftrightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7$.

iii) $\frac{x}{13-x}=\frac{1,5}{2,4} \Longleftrightarrow \frac{x}{13-x}=\frac{5}{8} \Longrightarrow 8x=5.(13-x) \Longleftrightarrow 8x=65-5x \Longleftrightarrow 8x+5x=65 \Longleftrightarrow 13x=65 \Rightarrow x=5$.

225. i) Εἶναι : $x+y=4{,}8$ καὶ $\frac{x}{y}=\frac{1}{3} \Longleftrightarrow \frac{x+y}{y}=\frac{1+3}{3}$ καί, ἐπειδὴ $x+y=4{,}8$, ἡ τελευταία ἀναλογία γίνεται ἐξίσωση τοῦ y : $\frac{4{,}8}{y}=\frac{4}{3}$ ποὺ ἡ λύση της δίνει $y=3{,}6$, ἄρα καί : $x=4{,}8-3{,}6=1{,}2$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε : ii) $y=\frac{9}{5}$, $x=\frac{6}{5}$, iii) $y=\frac{15}{8}$, $x=-\frac{3}{2}$, iv) $y=-\frac{42}{11}$, $x=-\frac{24}{11}$.

226. i) Εἶναι : $x-y=1.6$ καὶ $\frac{x}{y}=\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{x-y}{y}=\frac{3-2}{2}$ καί, ἐπειδὴ $x-y=1{,}6$, θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $\frac{1{,}6}{y}=\frac{1}{2} \Rightarrow y=3{,}2$ καὶ $x=3{,}2+1{,}6=4{,}8$.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε : ii) $y=-\frac{3}{5}$, $x=\frac{1}{5}$, iii) $y=-\frac{55}{14}$, $x=-\frac{10}{7}$, iv) $y=\frac{5}{3}$, $x=-\frac{1}{3}$.

227. Ἂν x εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα, ἡ ἡλικία τοῦ γυιοῦ θὰ εἶναι $x-30$ καὶ $\frac{x-30}{x}=\frac{2}{7} \Longleftrightarrow 7(x-30)=2x \Longleftrightarrow 7x-210=2x \Longleftrightarrow 7x-2x=210 \Rightarrow x=42$. Ὥστε οἱ ἡλικίες τους ἦσαν ἀντίστοιχα 42 καὶ 12 ἔτη.

228. i) Θὰ ἔχουμε : $\frac{6}{\alpha}=\frac{15}{\beta}=\frac{\gamma}{10}=\frac{3}{4}=\frac{\delta}{2}$ καὶ τὶς ἐξισώσεις : $\frac{6}{\alpha}=\frac{3}{4}\Rightarrow\alpha=8$, $\frac{15}{\beta}=\frac{3}{4}\Rightarrow\beta=20$, $\frac{\gamma}{10}=\frac{3}{4}\Rightarrow\gamma=7{,}5$, $\frac{\delta}{2}=\frac{3}{4}\Rightarrow\delta=\frac{3}{2}$.

ii) Θὰ ἔχουμε : $6\alpha=15\beta=10\gamma=3.4=2\delta$ καὶ τὶς ἐξισώσεις : $6\alpha=12\Rightarrow\alpha=2$, $15\beta=12\Rightarrow\beta=0{,}8$ $10\gamma=12\Rightarrow\gamma=1{,}2$, $2\delta=12\Rightarrow\gamma=1{,}2$, $2\delta=12\Rightarrow\delta=6$.

229. i) $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\gamma'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{2}{3}\iff\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{2\beta}{2\beta'}=\frac{5\gamma}{5\gamma'}=\frac{2}{3}\iff\frac{\alpha+2\beta+5\gamma}{\alpha'+2\beta'+5\gamma'}=\frac{2}{3}$.

ii) $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}=\frac{2}{3}\iff\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{-3\beta}{-3\beta'}=\frac{4\gamma}{4\gamma'}=\frac{2}{3}\iff\frac{\alpha-3\beta+4\gamma}{\alpha-3\beta'+4\gamma'}=\frac{2}{3}$.

iii) Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο βρίσκομε : $\frac{2\alpha-4\beta-7\gamma}{2\alpha'-4\beta'-7\gamma'}=\frac{2}{3}$.

230. i) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\gamma'}{\delta'}\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\gamma'}{\delta'}\Rightarrow\frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}=\frac{\gamma\gamma'}{\delta\delta'}$.

ii) $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1) καὶ $\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\gamma'}{\delta'}\iff\frac{\beta'}{\alpha'}=\frac{\delta'}{\gamma'}$ (2). Πολλαπλασιάζομε τὶς (1) καὶ (2) κατὰ μέλη : $\frac{\alpha\beta'}{\beta\alpha'}=\frac{\gamma\delta'}{\delta\gamma'}$.

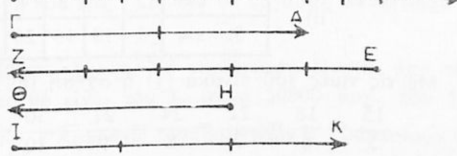
231. Εἶναι : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{x}$ (1) καὶ $\frac{\delta}{\varepsilon}=\frac{\zeta}{x}\iff\delta x=\varepsilon\zeta\iff x=\frac{\varepsilon\zeta}{\delta}$. Θέτομε τὴν τιμὴ τοῦ x στὴν (1) καὶ ἔχομε : $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\frac{\varepsilon\zeta}{\delta}}\iff\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma\delta}{\varepsilon\zeta}$.

232. i) Εἶναι : $\frac{x}{18}=\frac{y}{-5}=\frac{z}{3}\iff\frac{x}{18}=\frac{-3y}{15}=\frac{z}{3}\iff\frac{x}{18}=\frac{-3y+z}{15+3}\iff\frac{x}{18}=\frac{-3y+z}{18}\iff x=-3y+z$.

ii) Εἶναι: $\frac{x}{18}=\frac{y}{-15}=\frac{z}{3}\iff\frac{x}{18}=\frac{y+z}{-15+3}$ καί, ἐπειδὴ $y+z=4$, θὰ ἔχουμε : $\frac{x}{18}=\frac{y}{-15}=\frac{z}{3}=\frac{4}{-12}=-\frac{1}{3}$ καὶ τὶς ἐξισώσεις: $\frac{x}{18}=-\frac{1}{3}\Rightarrow x=-6$, $\frac{y}{-15}=-\frac{1}{3}\Rightarrow y=5$, $\frac{z}{3}=-\frac{1}{3}\Rightarrow z=-1$.

233. Δίνεται ὅτι : $\alpha\alpha'=\beta\beta'$. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta'}{\alpha'}$.

234 Τὰ διανύσματα ποὺ θὰ προκύψουν δίνονται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο καὶ ἔχουν σχετικὸ ἀπόμετρο : $\overline{AB}=+6$ cm, $\overline{\Gamma\Delta}=+4$ cm, $\overline{EZ}=-5$ cm, $\overline{H\Theta}=-3$ cm, $\overline{IK}=+4{,}5$ cm.



i) $\overline{AB}-\overline{\Gamma\Delta}=+6-4=+2$.

ii) $\overline{AB}-(\overline{\Gamma\Delta}+\overline{EZ})=+6-(+4-5)=+6-(-1)=+6+1=+7$ cm.

iii) $(\overline{AB}+\overline{\Gamma\Delta})-(\overline{EZ}+\overline{H\Theta})=(+6+4)-(-5-3)=+10-(-8)=+10+8=18$ cm.

iv) $(\overline{\Gamma\Delta}-\overline{EZ})-(\overline{H\Theta}-\overline{IK})=[+4-(-5)]-(-3-4,5)=(+4+5)-(-7,5)=+9+7,5=16,5$ cm.

235. i) Εἶναι: $\dfrac{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{-5}{3} \iff \overrightarrow{\Gamma\Delta}=-\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$. Ὥστε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ θὰ πολλαπλασιάσουμε τὸ $\overrightarrow{AB}$ μὲ τὸν ἀριθμὸ $-\dfrac{5}{3}$.

ii) Εἶναι: $\dfrac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{5}{3} \iff \overrightarrow{\Delta\Gamma}=\dfrac{5}{3}\overrightarrow{AB}$, δηλ. θὰ πολλαπλασιάσουμε τὸ $\overrightarrow{AB}$ μὲ τὸν ἀριθμὸ $\dfrac{5}{3}$.

iii) Εἶναι: $\dfrac{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}{\overrightarrow{BA}}=\dfrac{5}{-3} \iff \overrightarrow{\Delta\Gamma}=-\dfrac{5}{5}\overrightarrow{BA}$, δηλ. μὲ τὸ $-\dfrac{5}{3}$.

236. i) Ἂν $\alpha=+3$ θὰ ἔχουμε $|\alpha|=3$ καὶ $0<+3+3=2.3$. Ἐπίσης ἂν εἶναι: $\alpha=-3$, θὰ ἔχουμε $|\alpha|=3$ καὶ $0=-3+3<2.3$.

ii) Ἂν $\alpha=+3$, τότε $|\alpha|=3$ καὶ $-3<+3=|+3|$. Ἐπίσης, ἂν $\alpha=-3$, τότε $|\alpha|=3$ καὶ $-3=-3<3$.

13
ΠΟΣΑ ΣΥΜΜΕΤΑΒΛΗΤΑ

237. Κατευθεία ἀνάλογα ποσὰ εἶναι στὶς περιπτώσεις i, ii, iv, vi καὶ ἁπλῶς συμμεταβλητὰ στὶς iii καὶ v.

238. Οἱ πίνακες τιμῶν τῆς συνάρτησης $vt=s$ εἶναι:

i)

v=	5	6	7	8	9	10	11	12
3v=s=	15	18	21	24	27	30	33	36

ii)

t=	1	2	3	4	5	6	7	8
5t=s=	5	10	15	20	25	30	35	40

Μὲ τὶς τιμὲς τοῦ πίνακα (1) ἡ σχέση (6) τοῦ βιβλίου γίνεται:

$$\frac{15}{5}=\frac{18}{6}=\frac{21}{7}=\frac{24}{8}=\frac{27}{9}=\frac{30}{10}=\frac{33}{11}=\frac{36}{12}=3(=t).$$

Ἡ σχέση (7) τοῦ βιβλίου μὲ τὶς τιμὲς τοῦ πίνακα ii γίνεται.

$$\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=\frac{25}{5}=\frac{30}{6}=\frac{35}{7}=\frac{40}{8}=5(=\nu).$$

239.

i) $\sigma : x\in\Pi^+ \xrightarrow{\sigma} 4x=y \in\Pi^+$

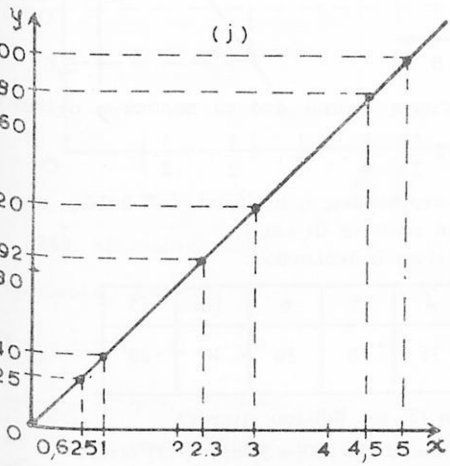
ii) $\sigma : x\in P^+ \xrightarrow{\sigma} \frac{3}{4}x=y\in P^+$

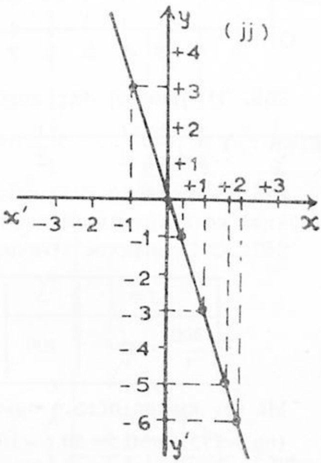
iii) $\sigma : x\in\Pi^+ \xrightarrow{\sigma} 90x=y\in\Pi^+$

iv) $\sigma : x\in P^+ \xrightarrow{\sigma} 7x=y\in P^+$

v) $\sigma : x\in P^+ \xrightarrow{\sigma} 1{,}90x=y\in P^+$

240. Εἶναι : $\sigma : x\in P^+ \xrightarrow{\sigma} 40x=y \in P^+$. Ἡ γραφικὴ παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i. Τὰ 3m ἀξίζουν 120 δρχ., τὰ 2,3 m ἀξίζουν 92 δρχ. καὶ τὰ 4,5m 180 δρχ. Σὲ 120 δρχ. ἀντιστοιχοῦν 3m, σὲ 25 δρχ. 0,625m καὶ σὲ 200 δρχ. 5m.





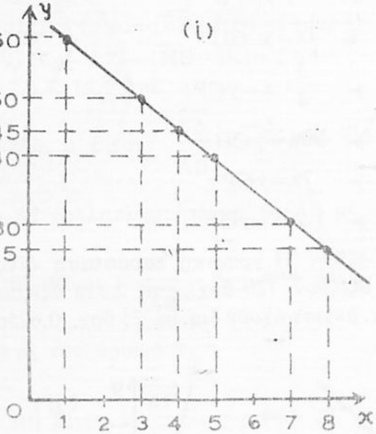
241. Ἡ παράσταση τῆς συνάρτησης δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο ii. Τὰ διατεταγμένα ζεύγη συμπληρώνονται ἔτσι : $(2, -6)$, $(-1,3)$, $(2, -6)$, $(-1, 3)$, $\left(\frac{5}{3}, -5\right)$, $\left(\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

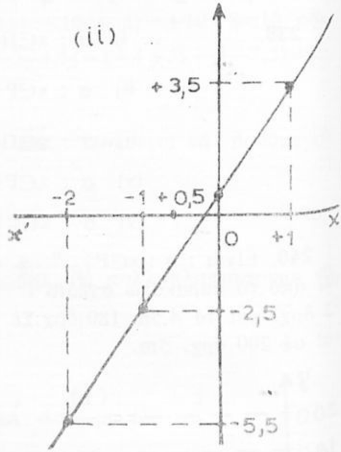
242. Εἶναι : $Y = \{18, 14, 10, 6, 2\}$ καὶ $X' = \{-3, -1, 5, 6, 10\}$.

243. Εἶναι : $\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 25x+500=y$. Ἂν ἐργασθῆ 18 ὧρες ἢ 30 ὥρ. ἢ 40 ὥρ., θὰ εἰσπράξῃ ἀντίστοιχα : 950 δρχ. ἢ 1250 δρχ. ἢ 1500 δρχ. Γιὰ νὰ εἰσπράξῃ 1100 δρχ. ἢ 1300 δρχ. ἢ 800 δρχ., πρέπει νὰ ἐργασθῆ ἀντίστοιχα : 24 ὧρες ἢ 32 ὥρ. ἢ 12 ὥρ.

244. Εἶναι : $\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 65000-5x=y$. Ἡ παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i. Τὸ ὑπόλοιπο θὰ εἶναι τὸν 3_0 μήνα 50000 δρχ., τὸν 5_0

40000 δρχ. καὶ τὸν 8ο 25000 δρχ. Ὑπόλοιπο 45000 δρχ. θὰ ἔχῃ τὸν 4ο μῆνα, 30000 δρχ. τὸν 7ο καὶ 10000 δρχ. τὸν 11ο.





245. Ἡ γραφική της παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο ii.

Εἶναι : $Y = \left\{-8\frac{1}{2},\ -5\frac{1}{2},\ -2\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 3\frac{1}{2},\ 6\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2}\right\}$.

246. Ἀντίστροφα εἶναι στὶς περιπτώσεις i, ii, iv, vi, ἐνῶ ἁπλῶς συμμεταβλητὰ κατὰ τὴν ἀντίθετη φορὰ εἶναι τὰ iii καὶ v.

247. Ὁ ζητούμενος πίνακας εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

t=	3	4	5	6	10	15
$\frac{300}{t}$ =v=	100	75	60	50	30	20

Μὲ τὸν πίνακα αὐτὸ ἡ σχέση (2) τοῦ βιβλίου γίνεται:

$100.3 = 75.4 = 60.5 = 50.6 = 30.10 = 20.15 = 300 (= S)$ καὶ ἡ (3) δίνει:

$$100.3 = 75.4 \iff \frac{100}{75} = \frac{4}{3},\ 100.3 = 60.5 \iff \frac{100}{600} = \frac{5}{3}, \ldots$$

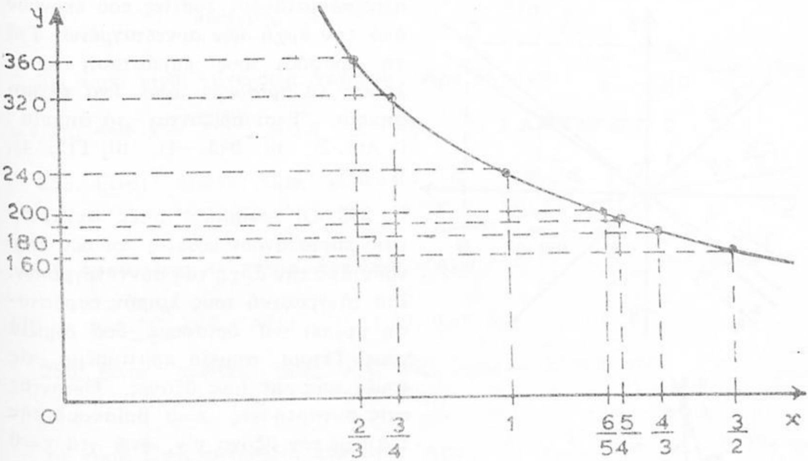
248. Γιὰ μιὰ τυχαία τιμὴ τοῦ x θὰ ὑπάρχῃ τιμὴ τοῦ y τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι: xy=240. Π.χ. γιὰ ἡμερήσια κατανάλωση x=0,5 kg θὰ εἶναι ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ y : 240 : 0,5=480 ἡμέρες.

Ἡ ἀντίστοιχη συνάρτηση εἶναι: $\sigma : x \xrightarrow{\sigma} \frac{240}{x} = y$.

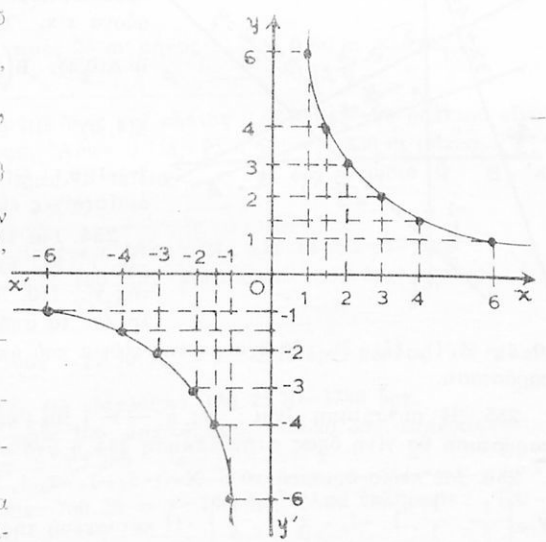
Ὁ ζητούμενος πίνακας τιμῶν εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

x=	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{1}{5}$
$\frac{240}{x}$ = y =	360	320	240	160	180	192	200

Ἡ γραφικὴ παράσταση δίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i. Σὲ ἡμερήσια κατανάλωση $1\frac{3}{5}$ kg ἢ 2kg ἀντιστοιχεῖ ἀριθμὸς ἡμερῶν 150 ἢ 120. Σὲ 400 ἡμ. ἢ 100 ἡμ. ἀντιστοιχεῖ ἡμερήσια κατανάλωση $\frac{3}{5}$ kg ἢ 2,4 kg.



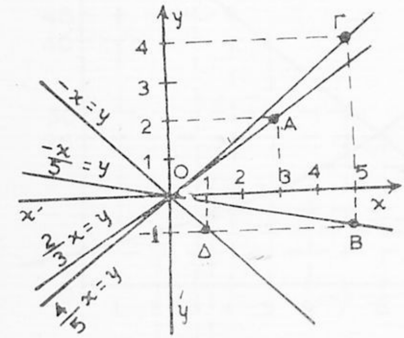
249. Μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τὸ σύνολο : $X=\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 3, 4, 6, 12, -\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}, -2, -3, -4, -6, -12\right\}$ θὰ ἔχουμε πεδίο τιμῶν τῆς συνάρτησης : $Y=\left\{12, 6, 4, 3, 2, \frac{3}{2}, 1, \frac{1}{2}, -12, -6, -4, -3, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right\}$ καὶ τὴ γραφικὴ παράσταση τοῦ παραπλεύρως σχεδίου.



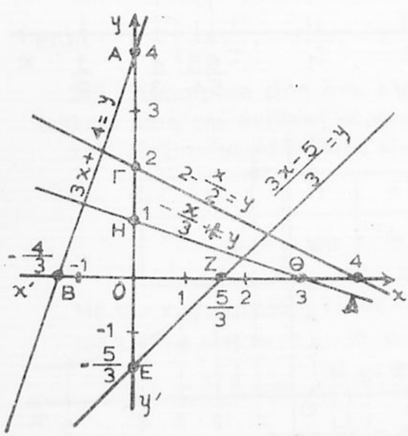
250. Στὸν α΄ πίνακα τὰ ποσὰ X καὶ Y εἶναι ἀνάλογα, ἐπειδή : $\frac{2}{4}=\frac{5,3}{10,6}=\ldots=\frac{1}{2}$, ἐνῶ στὸν β΄ τὰ X καὶ Y εἶναι ἀντίστροφα, ἐπειδή : $10.10=4.25=\ldots=100$.

Τὰ κενὰ στὸν α′ πίνακα θὰ συμπληρωθοῦν ἔτσι : α′ γραμμὴ 0,05 καὶ 7,5, β′ γραμμή : 10 καὶ 0,8. Στὸ β′ πίνακα : α′ γραμμή : 250, 400, καὶ 0,25, β′ γραμμή : 1 καὶ 0,5.

251. Κατεθεία ἀνάλογα εἶναι τὰ ποσὰ στὶς περιπτώσεις i καὶ v, ἀντιστρόφως ἀνάλογα στὶς ii καὶ iii, ἁπλῶς συμμεταβλητὰ στὶς iv καὶ vi.



252. Οἱ γραμμικὲς αὐτὲς συναρτήσεις παριστάνουν εὐθεῖες ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Γιὰ τὴ γραφική τους παράσταση ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ὁρίσουμε ἀπὸ ἕνα ἀκόμη σημεῖο. Ἔτσι ὁρίζονται τὰ σημεῖα : i) Α(3, 2), ii) Β(5, −1), iii) Γ(5, 4), iv) Δ(1, −1).



253. Οἱ γραμμικὲς αὐτὲς συναρτήσεις παριστάνουν εὐθεῖες ποὺ δὲν περνοῦν ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων. Γιὰ τὴ γραφική τους λοιπὸν παράσταση πρέπει νὰ ὁρίσουμε δυὸ σημεῖα τους. Τέτοια σημεῖα προτιμοῦμε τὶς τομές τους μὲ τοὺς ἄξονες. Θέτοντας στὶς συναρτήσεις $x=0$ βρίσκομε τὴν τομὴ μὲ τὸν ἄξονα $y'y$, ἐνῶ γιὰ $y=0$ προσδιορίζομε τὴν τομή τους μὲ τὸν ἄξονα $x'x$. Ἔτσι ὁρίζομε τὰ σημεῖα : i) $A(0,4)$, $B\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, ii) $\Gamma(0,2)$, $\Delta(4, 0)$, iii) $E\left(0, -\frac{5}{3}\right)$, $Z\left(\frac{5}{3}, 0\right)$, iv) $H(0,1)$ $\Theta(3,0)$ καὶ χαράσσομε τὶς ἀντίστοιχες εὐθεῖες.

254. Γιὰ τὶς τιμὲς τῆς x : {−2, −1, 0, 1, 2} ἔχομε ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς y : {10, 7, 4, 1, −2}. Ὁρίζοντας λοιπὸν τὰ σημεῖα : (−2, 10), (−1, 7), (0, 4), (1, 1), (2, −2), θὰ ἔχουμε τὴν εὐθεία ποὺ ἀποτελεῖ τὴ γραφική της παράσταση.

255. Ἡ συνάρτηση εἶναι : $\sigma : x \xrightarrow{\sigma} 1{,}50x+40=y$. Ἡ γραφική της παράσταση θὰ γίνῃ ὅπως στὴν ἄσκηση 244 ἢ στὸ σχ. 71 τοῦ βιβλίου.

256. Μὲ πεδίο ὁρισμοῦ τό : $X=\{-5, -3, -1, 1, 3, 5\}$ ἔχομε πεδίο τιμῶν $Y=\left\{\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{5}\right\}$. Ἡ κατασκευὴ τῆς ὑπερβολῆς ποὺ ὁρίζεται ἀπ᾽ αὐτὴ τὴ συνάρτηση θὰ γίνῃ ὅπως στὴν ἄσκηση 249.

14
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

257. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 4 γαλ. —— 350 km
δεύτερες » x » —— 210 »

Τὰ ποσὰ εἶναι κατευθεῖα ἀνάλογα. Ἄρα θὰ εἶναι : $\frac{4}{x}=\frac{350}{210} \iff 350x$ $=4.210 \iff x=\frac{4.210}{350}.=2{,}4$ γαλ. Ἀξία : 24.2,4=57,60 δρχ.

258. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 0,400 kw —— 60 min
δεύτερες » x » —— 110 »

Τὰ ποσὰ εἶναι κατευθεῖα ἀνάλογα. Ἄρα : $\frac{0{,}400}{x}=\frac{60}{110} \iff 60x=0{,}4.$ $110 \Rightarrow x=\frac{2{,}2}{3}$ kwh. Ἀξία : $\frac{2{,}2}{3}.1{,}20=0{,}88$ δρχ.

259. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 3^0 C αὔξ. —— 27 mm αὔξ.
δεύτερες » 5^0 C ἐλατ. —— x » ἐλάτ.

Τὰ ποσὰ εἶναι κατευθεῖα ἀνάλογα. Ἄρα : $\frac{3}{5}=\frac{27}{x} \iff 3x=5.27x \Rightarrow$ $x=45$ mm ἐλάττωση.

260. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 25 m μῆκος —— 0,60 m πλάτος
δεύτερες » x » —— 0,75 »

Τὰ συμμεταβλητὰ ποσὰ μῆκος καὶ πλάτος (τὸ βάρος τοῦ μαλλιοῦ εἶναι σταθερὸ) εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα : $0{,}75x=25.0{,}60 \Rightarrow x=20$ m μῆκος.

261. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 15 παιδιὰ —— 14 δρχ. μερίδιο
δεύτερες » 21 » —— x »

Τὰ ποσὰ ἐδῶ εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα : $21x=15.14 \Rightarrow x=10$ δρχ.

262. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 100 δρχ. κόστος —— 12 δρχ. κέρδος
δεύτερες » 22,50 » —— x »

καί : $\frac{100}{22{,}50}=\frac{12}{x} \iff 100x=22{,}50.12 \Rightarrow x=2{,}70$ δρχ. κέρδος. Τὸ πωλεῖ : $22{,}50+2{,}70=25{,}20$ δρχ/kg. Θὰ εἰσπράξῃ : 150.25,20=3780 δρχ.

263. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 100 δρχ. ἀξία —— 20 δρχ. ἔκπτωση
δεύτερες » 2,5.280 » —— x »

καί : $\frac{100}{700}=\frac{20}{x} \iff 100x=700.20 \Rightarrow x=140$ δρχ. Ἄρα ἐπλήρωσε : 700 — 140=560 δρχ.

264. Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 10800 δρχ. ἀξία —— 10800—9180 δρχ. ἔκπτωση
δεύτερες » 100 » —— x »

καὶ : $\frac{10800}{100} = \frac{1620}{x} \Longleftrightarrow 108x = 1620 \Rightarrow x = 15$ δρχ. Ὥστε ἡ ἔκπτωση ἦταν 15%. Μὲ 20% ἡ ἔκπτωση θὰ ἦταν : $\frac{20}{100} . 10800 = 2160$ καὶ ἡ ἀξία : $10800 - 2160 = 8640$ δρχ.

265. α) Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 100 kg γάλα —— 23 kg κρέμα
δεύτερες » x » —— 9,2 »

καὶ : $\frac{100}{x} = \frac{23}{9{,}2} \Longleftrightarrow 23x = 100 . 9{,}2 \Rightarrow x = 40$ kg γάλα.

β) Εἶναι : πρῶτες τιμὲς 100 kg κρέμα —— 20 kg βούτυρο
9,2 » —— x »

καὶ : $\frac{100}{9{,}2} = \frac{20}{x} \Longleftrightarrow 100x = 9{,}2 . 20 \Rightarrow x = 1{,}84$ kg βούτυρο.

266. Κόστος τοῦ 1 m : 3360 : 120 = 28 δρχ. καὶ κέρδος ἀπὸ τὴν πώλησή του : 35 − 28 = 7 δρχ. Ὥστε θὰ ἔχουμε :

πρῶτες τιμὲς 28 δρχ. κόστος —— 7 δρχ. κέρδος
δεύτερες » 100 » —— x »

καὶ : $\frac{28}{100} = \frac{7}{x} \Longleftrightarrow 28x = 100 . 7 \Rightarrow x = 25$ δρχ., δηλ. κέρδος 25%.

267. Πρῶτες τιμές : 20 φυλ.—1,20m μῆκ.— 80cm πλ.—2mm πάχ.—40kg βάρ.
δεύτερες » 16 » —1,50 » —100 » —3 » — x »

Τὰ ποσὰ βάρος καὶ καθένα ἀπὸ τὰ ἄλλα εἶναι ἀνάλογα. Ἄρα θὰ εἶναι : $x = 40 . \frac{16}{20} . \frac{1{,}5}{1{,}2} . \frac{100}{80} . \frac{3}{2} = 75$ kg. Τὸ πρόβλημα λύσαμε γιὰ συντομία μὲ βάση τὴν παρατήρηση τῆς § 68 τοῦ βιβλίου. Ἡ ἀνάλυσή του σὲ 4 προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου ἀπαιτεῖ πολὺ χρόνο.

268. Πρῶτες τιμὲς : 21 τεχνίτες —— 8 ὡρ/ἡμ. —— 12 ἡμέρες
δεύτερες » : 16 » —— 9 » —— x »

Τὸ πρόβλημα ἀναλύεται στὰ ἀκόλουθα δύο προβλήματα :

πρῶτες τιμὲς	21 τεχνίτες — 12 ἡμ.	8 ὡρ/ἡμ. — y ἡμ.
δεύτερες »	16 » — y »	9 » — x »

Καὶ στὰ δυὸ αὐτὰ προβλήματα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα :

$16y = 21 . 12 \Rightarrow y = \frac{63}{4}$ ἡμ. καὶ $9x = 8y \Longleftrightarrow 9x = 8 . \frac{63}{4} \Rightarrow x = 14$ ἡμ.

Ἡ λύση μὲ τὸν κανόνα δίνει : $x = 12 . \frac{21}{16} . \frac{8}{9} = 14$ ἡμ.

269. Πρῶτες τιμές : 18 kg νῆμα — 27 m μῆκος — 0,80 m πλάτος
δεύτερες » 25 » — x » — 1,20 »

Τὸ πρόβλημα ἀναλύται στὰ ἀκόλουθα δύο προβλήματα :

Πρῶτες τιμές:	18 kg νῆμα — 27 m μῆκος	0,80 m πλάτος — y m μῆκος
δεύτερες » :	25 » — y »	1,20 » — x »

Στὸ πρῶτο τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ στὸ δεύτερο ἀντίστροφα.

Ἄρα θὰ εἶναι : $\frac{18}{25}=\frac{27}{y} \Longleftrightarrow 18y=25.27 \Rightarrow y=\frac{75}{2}$ m καί: $1,20x=0,80y$ $\Longrightarrow 1,20x=0,80.\frac{75}{2} \Rightarrow x=25$m μῆκος ὑφάσματος.

Ἡ λύση μὲ τὸν κανόνα δίνει : $x=27.\frac{25}{18}.\frac{0,80}{1,20}=25$m μῆκος.

270. Πρῶτες τιμές : 4 ἐργ. — 10 ὥρ/ἡμ — 15 στρμ. — 3 ἡμέρες
δεύτερες » x » — 8 » — 12 » — 2 »

Τὸ πρόβλημα ἀναλύεται στὰ ἀκόλουθα τρία προβλήματα :

π. τ. :	3 ἡμ. — 4 ἐργ.	15 στρμ. — ω ἐργ.	10 ὥρ/ἡμ. — y ἐργ.
δ. τ. :	2 » — ω »	12 » — y »	8 » — x »

Στὰ α′ καὶ γ′ προβλήματα τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῶ στὸ β′ εἶναι ἀνάλογα.

Ἄρα θὰ ἔχουμε : α) $2.\omega=3.4 \Rightarrow \omega=6$, β) $\frac{15}{12}=\frac{6}{y} \Longleftrightarrow 15y=6.12 \Rightarrow$ $y=\frac{24}{5}$, γ) $8.x=10.\frac{24}{5} \Rightarrow x=6$ ἐργάτες.

Μὲ τὸν κανόνα ἐπίσης βρίσκομε : $x=4.\frac{10}{8}\cdot\frac{12}{15}\cdot\frac{3}{2}=6$ ἐργάτες.

271. Πρῶτες τιμές : 5 ἀργ. — 8 h/ἡμ. — 4 ἡμ. — 80 τόπια — 60m μῆκος
δεύτερες » : 3 » — 10 » — x » — 50 » — 72 »

Τὰ ποσὰ ἡμέρες—ἀργαλειοὶ καὶ ἡμέρες—ἡμερήσια ἐργασία εἶναι ἀντίστροφα, ἐνῶ τὰ ἡμέρες—τόπια καὶ ἡμέρες—μῆκος εἶναι ἀνάλογα. Ἄρα μὲ τὸν κανόνα θὰ ἔχουμε : $x=4.\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{50}{80}\cdot\frac{72}{60}=4$ ἡμέρες.

272. Ὁλικὸ κεφάλαιο = ἀξία λαδιοῦ $=1740.19,50=33930$ δρχ., $\kappa_1=33930.\frac{5}{9}=18850$ δρχ. καὶ $\kappa_2=33930-18850=15080$ δρχ. Θὰ ἔχουμε τὶς ἐξισώσεις :

$100\ \tau_1=18850.4,5.\frac{8}{12} \Rightarrow \tau_1=565,50$ δρχ. καί : $100\ \tau_2=15080.12.\frac{8}{12} \Rightarrow \tau_2$ $=1206,40$ δρχ. Ὥστε : $\tau_1+\tau_2=1771,90$ δρχ.

273. α) Εἶναι : κ = ἀξία σταφίδας $=3000\ 8=24000$ δρχ. καί : $100\tau=24000.6$ $\Rightarrow \tau=1440$ δρχ.

β) Εἶναι : $\kappa_1=24000.\frac{3}{5}=14400$, $\kappa_2=24000-14400=9600$ δρχ., $100\ \tau_1=$ $14400.8 \Rightarrow \tau_1=1152$ δρχ. καὶ $100\tau_2=9600.4,5=432$. Ἄρα θὰ εἶναι : $\tau_1+\tau_2$ $=1152+432=1584$ δρχ. Συνεπῶς, τὸν συμφέρει ὁ δεύτερος συνδυασμὸς ποὺ τοῦ ἐξασφαλίζει : $1584-1440=144$ δρχ. περισσότερο τόκο.

274. Εἶναι $x=82$ ἡμέρες $=\frac{82}{365}$. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $180.233,10$ $=\kappa.9.\frac{82}{365} \Rightarrow \kappa=\frac{100.233,10.365}{9.82} \sim 11528,65$ δρχ.

275. α) Εἶναι : $100\tau=42000.8.2 \Rightarrow \tau=6720$ δρχ.

β) Εἶναι : $100.6720=\kappa.9.\frac{40}{90} \Rightarrow \kappa=\frac{100.6720.12}{9.40}=22400$ δρχ.

276. $K=$ἀξία καπνοῦ$=456.37{,}50=17100$ δρχ. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $100.484{,}50=17100.8{,}5.x \Rightarrow x=\frac{4845}{14535}$ ἔτη$=4$ μῆνες.

277. α) Εἶναι : $100\tau=14600.9.\frac{88}{360} \Rightarrow \tau=321{,}20$ δρχ.

β) Εἶναι : $100.321{,}20=19800.8.x \Rightarrow x=73$ ἡμέρες.

278. Εἶναι : $\tau=8064-7200=864$ δρχ. Ἄρα ἔχομε τὴν ἐξίσωση : $864.100=7200.\varepsilon.\frac{16}{12} \Rightarrow \varepsilon=9\%$.

279. Εἶναι : $100.\tau_1=18000.10.\frac{3}{12} \Rightarrow \tau_1=450$ δρχ. καὶ $\tau=450-87=363$ δρχ. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $100.363=22000.\frac{72}{360}.\varepsilon \Rightarrow \varepsilon=8{,}25\%$.

281. Εἶναι : $100.Y=10500.7{,}5.\frac{40}{360} \Rightarrow Y=8{,}75$ δρχ. καὶ προμήθεια : $\frac{1{,}5}{100}.10500=157{,}50$. Ὁλικὴ κράτηση : $8{,}75+157{,}50=166{,}25$. Ἄρα εἰσέπραξε: $10500-166{,}25=10333{,}75$ δρχ.

282. Εἶναι : $192.100=A_{ον}.6.\frac{20}{360} \Rightarrow A_{ον}=57600$ δρχ. καὶ $A_{πρ}=57600-192=57408$ δρχ.

283. Εἶναι : $Y=5000-4920=80$ δρχ. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $80.100=50000.\varepsilon.\frac{96}{360} \Rightarrow \varepsilon=6\%$.

284. Εἶναι : $Y=12600-12516=84$ δρχ. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση : $100.84=12600.12.x \Rightarrow x=\frac{7}{126}$ ἔτη$=20$ ἡμέρες.

285. Εἶναι : $x_\mu=\frac{1273+1387+955+1017+1293}{5}=1185.$

286. Εἶναι : $x_\mu=\frac{875+874{,}24+876{,}12}{3}=875{,}12$ m.

287. Εἶναι : $\tau_\mu=\frac{7\ 130+5.100+8.80}{7+5+8}=\frac{2050}{20}=102{,}50$ δρχ. καὶ ὁλικὴ δαπάνη : $10.20.102{,}50=24600$ δρχ.

288. Θὰ εἶναι : $\frac{x}{83}=\frac{y}{11}=\frac{\omega}{6}=\frac{x+y+\omega}{83+11+6}=\frac{240}{100}=2{,}4$ καὶ $\frac{x}{83}=2{,}4 \Rightarrow x=199{,}2$ kg, $\frac{y}{11}=2{,}4 \Rightarrow y=26{,}4$ kg, $\frac{\omega}{6}=2{,}4 \Rightarrow \omega=14{,}4$ kg.

289. Ἄν x, y, ω εἶναι τὰ μερίδια ἀπὸ τὸ κέρδος θὰ ἔχουμε : $\frac{x}{47800}=\frac{y}{63200}=\frac{\omega}{80000}=\frac{x+y+\omega}{191000}=\frac{36290}{191000}$ καὶ $\frac{x}{47800}=\frac{36290}{191000} \Rightarrow x=9082$ δρχ.,

$\frac{y}{63200} = \frac{36260}{191000} \Rightarrow y = 12008$ δρχ., $\frac{\omega}{80000} = \frac{36290}{191000} \Rightarrow \omega = 15200$ δρχ.

290. Ὁ μερισμὸς θὰ γίνῃ ἀνάλογα πρὸς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα : $\frac{6}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}$ ἢ πρὸς τοὺς ἀριθμητὲς 6, 8, 9. Ἔτσι θὰ ἔχουμε : $\frac{x}{6} = \frac{y}{8} = \frac{\omega}{9} = \frac{x+y+\omega}{6+8+9} = \frac{57{,}5}{23}$ καὶ $\frac{x}{6} = \frac{57{,}5}{23} \Rightarrow x = 15$ στρμ., $\frac{y}{8} = \frac{57{,}5}{23} \Rightarrow y = 20$ στρμ, $\frac{\omega}{9} = \frac{57{,}5}{23} \Rightarrow \omega = 22{,}5$ στρμ.

291. Θὰ δώσουν ποσὰ ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τοὺς χρόνους ποὺ χρειάζεται κάθε κρουνὸς γιὰ νὰ γεμίσῃ τὴ δεξαμενή, δηλ. πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 10, 12, 15 ἢ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀντιστρόφως των $\frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \frac{1}{15}$ ἢ ἀνάλογα πρὸς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα $\frac{6}{60}, \frac{5}{60}, \frac{4}{60}$ ἢ ἀνάλογα πρὸς τοὺς ἀριθμητὲς αὐτῶν τῶν κλασμάτων 6, 5, 4. Ἔτσι θὰ εἶναι : $\frac{x}{6} = \frac{y}{5} = \frac{\omega}{4} = \frac{x+y+\omega}{6+5+4} = \frac{800}{15}$ καὶ $\frac{x}{6} = \frac{800}{15} \Rightarrow x = 320$ t, $\frac{y}{5} = \frac{800}{15} \Rightarrow y = \frac{800}{3}$ t, $\frac{\omega}{4} = \frac{800}{15} \Rightarrow \omega = \frac{640}{3}$ t.

292. Ὁ μερισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ 3540 θὰ γίνῃ ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα $6 \times 3 \times 4 = 72$, $8 \times 5 \times 2 = 80$, $7 \times 4 \times 3 = 84$. Ἔτσι εἶναι : $\frac{x}{72} = \frac{y}{80} = \frac{\omega}{84} = \frac{x+y+\omega}{72+80+84} = \frac{3540}{236} = 15$ καὶ $\frac{x}{72} = 15 \Rightarrow x = 1080$ $\frac{y}{80} = 15 \Rightarrow y = 1200$, $\frac{\omega}{84} = 15 \Rightarrow \omega = 1260$ δρχ.

293. Οἱ χρόνοι, κατὰ τοὺς ὁποίους ἔμειναν τὰ κεφάλαια τῶν τριῶν συνεταίρων στὴν ἐπιχείρηση, ἦσαν ἀντίστοιχα : 32 μῆνες, 26 μῆνες καὶ 24 μῆνες. Ὁ μερισμὸς τοῦ κέρδους θὰ γίνῃ σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα : 340000×32, 300000×26, 360000×24 ἢ πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 272, 195, 216, ὁπότε βρίσκονται μερίδια : $x \simeq 154490{,}50$, $y \simeq 110756$, $\omega \simeq 122683{,}50$.

294. Εἶναι : $\tau_\mu = \frac{24 \cdot 4{,}50 + 16 \cdot 5{,}75}{24+26} = 5$ δρχ. τὸ κόστος τοῦ kg τοῦ μείγματος καὶ $5{,}60 - 5 = 0{,}60$ δρχ. τὸ κέρδος στὸ kg. Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο βρίσκομε ποσοστὸ κέρδους 12%.

295. Τὰ 40 gr τοῦ α′ περιέχουν $40 \cdot 0{,}758$ gr καθαρὸ ἄργυρο, ἐνῶ τὰ 60 gr τοῦ β′ περιέχουν $60 \cdot 0{,}850$ καὶ τὰ 24 gr τοῦ γ′ $24 \times 0{,}900$. Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\frac{\text{βάρος ἀργύρου}}{\text{βάρος κράματος}} = \frac{40 \cdot 0{,}758 + 60 \cdot 0{,}850 + 24 \cdot 0{,}900}{40+60+24} = 0{,}830.$$

296. Ἂς εἶναι x kg τῶν 11 δρχ. ἡ τιμὴ τοῦ μείγματος θὰ εἶναι : $\frac{11x + 9{,}50 \cdot 100}{x+100} = 10$. Λύνοντας τὴν ἐξίσωση βρίσκομε : $x = 50$ kg.

297. Ἂν πάρουμε x gr ἀπὸ τὸ α′ καὶ y gr ἀπὸ τὸ β′, θὰ ἔχουμε τίτλο κράματος : $\frac{0{,}720x + 0{,}960y}{x+y} = 0{,}816 \Longleftrightarrow 0{,}720x + 0{,}960y = 0{,}816x + 0{,}816y$ $\Longleftrightarrow 0{,}960y - 0{,}816y = 0{,}816x - 0{,}720x \Longleftrightarrow 0{,}144y = 0{,}096x \Longleftrightarrow \frac{x}{y} =$

$\frac{0,144}{0,096} = \frac{3}{2}$. Ὥστε ὁ λόγος συγχώνευσης θὰ εἶναι $\frac{3}{2}$.

Μερίζομε τώρα τὸν ἀριθμὸ 50 ἀνάλογα πρὸς τοὺς 3 καὶ 2 καὶ ἔχομε: $\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{x+y}{3+2} = \frac{50}{5} = 10$ καὶ $\frac{x}{3} = 10 \Rightarrow x = 30$ gr καὶ $\frac{y}{2} = 10 \Rightarrow y = 20$ gr.

298. Σὲ 1,5 h μένουν στὴ δεξαμενή: $150 - 45\frac{3}{4} = 104,75$ kg νερό. Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο τῶν τριῶν βρίσκομε ὅτι σὲ 7,5 h ἡ δεξαμενὴ θὰ ἔχῃ 521,25 kg νερό.

299. Σὲ 24 h προχωρεῖ 4 min. Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο βρίσκομε ὅτι σέ: $7 \times 24 + 8 = 176$ h θὰ ἔχῃ προχωρήσει κατὰ 29 min 20 sec καὶ θὰ δείχνῃ τὴν 8h 29min 20 sec.

300. Τὰ ἔξοδά του θὰ γίνουν: $90 \times 0,75 = 67,50$ δρχ. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα: $67,5x = 90.24 \Rightarrow x = 32$ ἡμέρες.

301. Τιμὴ κόστους: $1782 : 132 = 13,50$ δρχ./m. Τὸ α΄ μέρος ἦταν $132 . \frac{5}{8} = 82,5$ m καὶ κόστιζε: $82,5 . 13,50 = 1113,75$ δρχ. Ἀπὸ αὐτὸ μὲ ποσοστὸ 16% κέρδισε 178,20 δρχ. Τὸ ὑπόλοιπο ἦταν 49,5 m καὶ ἐπωλήθη μὲ ζημία 2,80 δρχ/m. Ὥστε ἀπ᾿ αὐτὸ ζημιώθηκε: $49,5 . 2,80 = 138,60$ δρχ. Ἄρα τὸ κέρδος του ἦταν: $178,20 - 138,60 = 39,60$ δρχ.

302. Ποσοστὸ 3% ἀντιστοιχεῖ σὲ 30‰. Ἄρα ἡ αὔξηση κατὰ 1632 ἄτομα ἀντιστοιχεῖ στά: $30 - 13 = 17$‰ τοῦ πληθυσμοῦ. Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο εὔκολα βρίσκομε πληθυσμὸ 96000.

303. Βρίσκομε πρῶτα τὸ κόστος μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο. Εἶναι:

πρῶτες τιμές: κόστος 100 δρχ. — πώληση 115 δρχ.
δεύτερες » : » x » — » 96 »

καί: $\frac{100}{x} = \frac{115}{96} \Longleftrightarrow 116x = 100.96 \Rightarrow x \approx 83,48$ δρχ. Μὲ ποσοστὸ 20% τὸ κέρδος θὰ εἶναι: $0,20 . 83,48 \simeq 16,70$ καὶ ἡ τιμὴ πώλησης: $83,48 + 16,70 = 100,18$ δρχ.

304. Ὅπως στὸ προηγούμενο πρόβλημα, βρίσκομε κόστος 50 δρχ. Ἂν τὸ πωλοῦσε 59 θὰ ἐκέρδιζε 9 δρχ. στὶς 50 δηλ. 18%.

305 α) $2184 . 100 = \kappa_1 . 7 . \frac{18}{12} \Rightarrow \kappa_1 = 10400$ δρχ. Ἄρα $\kappa_2 = 25000 - 10400 = 14600$ καὶ $\tau_2 = 2184 - 140 = 2044$ δρχ.

β) $2044 \ 100 = 14600 . 8 . x \Rightarrow x = \frac{21}{12}$ ἔτη = 1 ἔτος 9 μην.

306. Ἂν τὸ κεφάλαιο εἶναι κ, ὁ τόκος του θὰ εἶναι 54374 — κ. Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $(54374 - \kappa) 100 = \kappa . 3 . 8 \Longleftrightarrow 5437400 - 100\kappa = 24\kappa \Longleftrightarrow 124\kappa = 5437400 \Rightarrow \kappa = 43850$ δρχ.

307. Ἡ προεξόφληση τοῦ β΄ ἔγινε 46 ἡμ. πρὶν τὴ λήξη του. Ἄρα θὰ ἔχουμε: $100 . Y = 2400 . 8 . \frac{46}{360} \Rightarrow Y \simeq 24,53$. Ἄρα θὰ πληρώσῃ: $3500 + (2400 - 24,53) = 5875,47$ δρχ.

308. Ὁ μερισμὸς θὰ γίνῃ ἀνάλογα πρὸς τὰ γινόμενα: $2 \times \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$, $3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$, $5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{5}$ ἢ πρὸς τὰ ὁμώνυμα κλάσματα: $\frac{96}{60}$, $\frac{135}{60}$, $\frac{100}{60}$ ἢ τοὺς ἀριθμούς: 96, 135, 100. Ἔτσι, θὰ εἶναι: $\frac{x}{96} = \frac{y}{135} = \frac{\omega}{100} = \frac{x+y+\omega}{96+135+100} = \frac{56270}{331} = 170$ καὶ $\frac{x}{96} = 170 \Rightarrow x = 16320$, $\frac{y}{135} = 170 \Rightarrow y = 22950$, $\frac{\omega}{100} = 170 \Rightarrow \omega = 17000$ δρχ.

309. α) Θὰ εἶναι τίτλος: $\frac{20}{20+12} = 0{,}625$. β) Ἀφοῦ σὲ 32 μέρη κράμα ὑπάρχουν 20 μέρη χρυσός, σὲ 24 μέρη κράμα θὰ ὑπάρχουν 15 μέρη χρυσός, ὅπως βρίσκεται μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο. Ὥστε θὰ εἶναι 15 καρατίων.

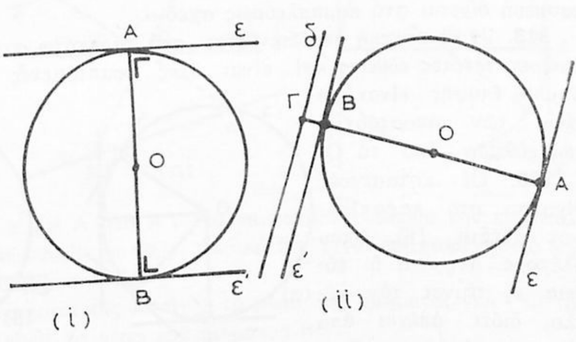
310. Μὲ τὴν ἁπλὴ μέθοδο βρίσκομε κόστος μείγματος 5 δρχ/kg. Ἂν x kg εἶναι τὸ λευκὸ ἀλεύρι, θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $\frac{6x+100.4{,}20}{x+100} = 5 \Longleftrightarrow 6x+420=5x+500 \Longleftrightarrow 6x-5x=500-420 \Rightarrow x=80$ kg.

15

ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΚΥΚΛΩΝ

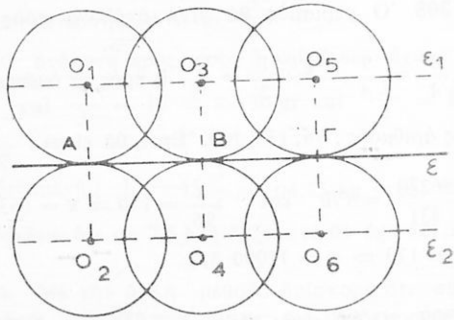
311. i) Εἶναι ἐξωτερική, ἐπειδὴ ΟΑ(2,5)>ΟΡ(2), ii) τέμνουσα, ἐπειδὴ ΟΑ(15)<ΟΡ(20), iii) ἐφαπτομένη, ἐπειδὴ ΟΑ=ΟΡ.

312. Ἀρκεῖ στὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΑΒ νὰ χαράξουμε τὶς ε ⊥ ΑΒ καὶ ε′ ⊥ ΑΒ. Θὰ εἶναι ε ∥ ε′ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).



313. Χαράσσομε τὴ διάμετρο ΑΒ ⊥ δ καὶ στὰ ἄκρα της τὶς εὐθεῖες ε ⊥ ΑΒ καὶ ε′ ⊥ ΑΒ. Θὰ εἶναι: ε ∥ ε′ ∥ δ (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii).

314. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο, ὅπου οἱ κύκλοι O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, μὲ ἀκτίνες $O_1A = O_2A = O_3B = O_4B = O_5\Gamma = O_6\Gamma = 2cm$ ἐφάπτονται τῆς ε στὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Ὑπάρχουν ἀπειροπληθεῖς τέτοιοι κύκλοι καὶ τὸ σύνολο τῶν κέντρων τους εἶναι δυὸ εὐθεῖες ε_1, $\varepsilon_2 \parallel \varepsilon$ σὲ ἀπόσταση 2cm ἀπὸ τὴν ε.



315. α) Ἡ σχετικὴ θέση δυὸ κύκλων εἶναι ἐξωτερικὴ ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴ διάκεντρό τους.

β) Ἡ σχετικὴ θέση δυὸ κύκλων εἶναι ἐξωτερικῆς ἐπαφῆς ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους εἶναι ἴσο μὲ τὴ διάκεντρό τους.

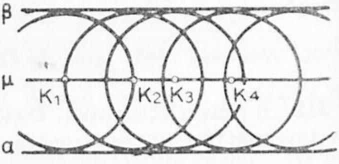
γ) Δυὸ κύκλοι τέμνονται ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, ἡ διάκεντρός του εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διαφορὰ καὶ μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τους.

δ) Ἡ σχετικὴ θέση δυὸ κύκλων εἶναι ἐσωτερικῆς ἐπαφῆς ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, ἡ διάκεντρός τους εἶναι ἴση μὲ τὴ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων τους.

ε) Ἡ σχετικὴ θέση δυὸ κύκλων εἶναι ἐσωτερικὴ ἐάν, καὶ μόνο ἐάν, ἡ διάκεντρός τους εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὴ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων τους.

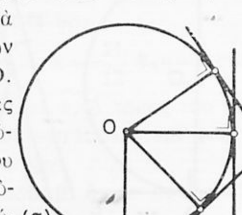
316. Οἱ κατασκευὲς εἶναι εὔκολες. Οἱ σχετικὲς θέσεις εἶναι : i) ἐσωτερικῆς ἐπαφῆς, ii) ἐξωτερική, iii) τέμνονται, iv) ἐξωτερικῆς ἐπαφῆς, v) ἐσωτερική.

317. Τὸ κέντρο τοῦ ζητούμενου κύκλου πρέπει νὰ ἀπέχη ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς ταινίας. Ὑπάρχουν ἄπειροι τέτοιοι κύκλοι καὶ τὰ κέντρα τους εἶναι σημεῖα τῆς μεσοπαράλληλης τῆς ταινίας. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο.

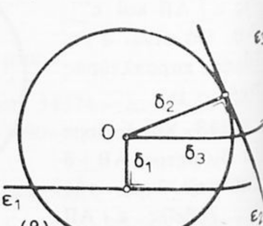


318. Ἡ κατασκευὴ ὑποδεικνύεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Ὑπάρχουν ἄπειρες τέτοιες εὐθεῖες καὶ εἶναι ὅλες ἐφαπτόμενες τοῦ κύκλου (O, R). Σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι τὰ ἴχνη τῶν ἀποστάσεων τῶν εὐθειῶν ἀπὸ τὸ Ο.

319. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (β), ὅπου βλέπομε ὅτι : i) ἡ εὐθεία ε_1 τέμνει τὸν κύκλο, διότι ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο ἀπόσταση $\delta_1 =$



(α)



(β)

1,9 cm $<$28 mm$=$R, ii) ἡ εὐθεία ε_1 ἐφάπτεται μὲ τὸν κύκλο, διότι ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο ἀπόσταση $\delta_2=0{,}028\text{m}=28\text{mm}=R$, iii) ἡ εὐθεία ε_3 εἶναι ἐξωτερικὴ ὡς πρὸς τὸν κύκλο, διότι ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρο ἀπόσταση $\delta_3=3\text{cm}>28\text{mm}=R$.

320. Τὸ κέρδος τοῦ Α΄ ἦταν: 29700 − 15510 = 14190 δρχ. Καὶ τώρα ἔχομε :

Πρῶτες τιμές :	κέρδος Α΄ = 14190 —	κέρδος Β΄ = 15510
Δεύτερες τιμές :	κεφάλαιο Α΄ = 23650 —	κεφάλαιο Β΄ x

καί : $\dfrac{14190}{23650}=\dfrac{15510}{x} \iff 14190x=15510.23650 \Rightarrow x=\dfrac{15510.23650}{14190}=25850$ δρχ.

321. Τὰ κεφάλαια κ_1, κ_2, κ_3 εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρὸς τὰ ἐπιτόκια (γιὰ τὸν ἴδιο χρόνο καὶ ἴσους τόκους). Ἄρα θὰ εἶναι : $\kappa_1.8=\kappa_2.9=\kappa_3.12$ ἢ $\dfrac{\kappa_1}{\frac{1}{8}}=$

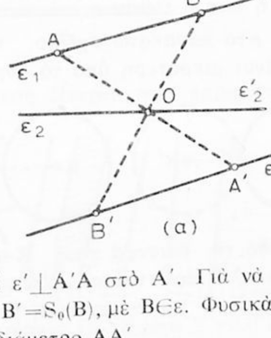
$$\frac{\kappa_2}{\frac{1}{9}}=\frac{\kappa_3}{\frac{1}{12}}=\frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3}{\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}}=\frac{41170}{\frac{23}{72}}=\frac{41170.72}{23} \text{ καὶ } \kappa_1=\frac{41170.72}{23.8}=16110,$$

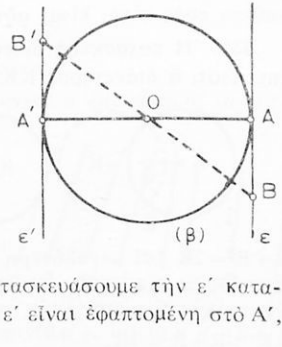
$$\kappa_2=\frac{41170.72}{23.9}=14320, \quad \kappa_3=\frac{41170.72}{23.12}=10740 \text{ δρχ.}$$

16

ΕΥΘΕΙΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ

322. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α), ὅπου : $A'=S_0(A)$ καὶ $B'=S_0(B) \Rightarrow A'B'=S_0(AB)$ μὲ $A,B\in\varepsilon_1$ καὶ A', $B'\in\varepsilon_1'$. Ἄρα: $\varepsilon_1'=S_0(\varepsilon_1)$ καί : $\varepsilon_2=S_0(\varepsilon_2)$, διότι $O\in\varepsilon_2$.



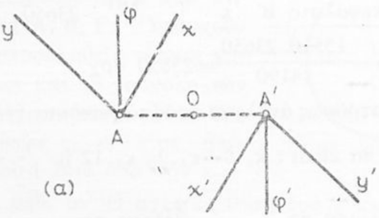


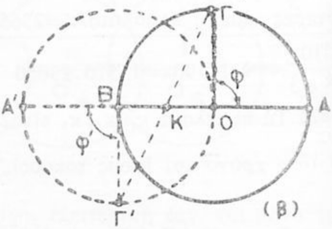
323. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (β) καὶ ἔχομε : $A'=S_0(A) \Rightarrow A'\in(O,R)$, $\varepsilon'=S_0(\varepsilon) \Rightarrow \varepsilon' \parallel \varepsilon$ καὶ $\varepsilon' \perp A'A$ στὸ Α΄. Γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὴν ε΄ κατασκευάσαμε πρῶτα τὸ $B'=S_0(B)$, μὲ $B\in\varepsilon$. Φυσικὰ ἡ ε΄ εἶναι ἐφαπτομένη στὸ Α΄, ὡς κάθετος πρὸς τὴ διάμετρο ΑΑ΄.

324. i) Τὸ κέντρο συμμετρίας Κ εἶναι τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΑΑ΄, ii) τὸ κέντρο συμμετρίας Κ εἶναι τὸ μέσο τοῦ τμήματος ΒΒ΄.

325. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Ἡ $A'\varphi'=S_0(A\varphi)$

εἶναι παράλληλη τῆς Αφ καὶ ἔχει ἀντίθετη φορά. Εἶναι : $\measuredangle$ (Αφ, Αy) = $\measuredangle$ (Α΄φ΄, Α΄y΄) = $80^0-30^0=50^0$, $\measuredangle$(Α΄x΄, Α΄y΄) = $\measuredangle$(Αx, Αy) = 80^0 (συμμετρικές), $\measuredangle$(Α΄x΄, Α΄φ΄) = $\measuredangle$(Αx, Αφ) = 30^0 (συμμετρικές). Ἡ κατασκευὴ διευκολύνεται, ἄν ἀπὸ τὸ $A'=S_0(A)$ φέρουμε τὶς ἡμιευθεῖες Α΄x΄, Α΄y΄, Α΄φ΄ παράλληλες μὲ ἀντίθετη φορὰ πρὸς τὶς Αx, Αy, Αφ.





326. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Εἶναι : $B=S_K(O)$, $\Gamma'=S_K(\Gamma)$ καὶ ἑπομένως: $B\Gamma' \perp AB$ καὶ $\widehat{\varphi'}=S_K(\widehat{\varphi})$.

327. i) $\widehat{A}_1=58^0 \Rightarrow \widehat{A}_3=\widehat{A'}_1=\widehat{A'}_3=58_0$ καί : $\widehat{A}_2=180^0-58^0=122^0 \Rightarrow \widehat{A}_4=\widehat{A'}_2=\widehat{A'}_4=122^0$. ii) $\widehat{A'}_2=\widehat{A'}_4=\widehat{A}_2=\widehat{A}_4=120$ gr καὶ $\widehat{A}_1=\widehat{A}_3=\widehat{A'}_1=\widehat{A'}_3=80$ gr. iii) $\widehat{A}_3=\widehat{A}_1=\widehat{A'}_3=\widehat{A'}_1=0{,}65$ ὀρθ. καὶ $\widehat{A}_2=\widehat{A}_4=\widehat{A'}_2=\widehat{A'}_4=1{,}35$ ὀρθ.

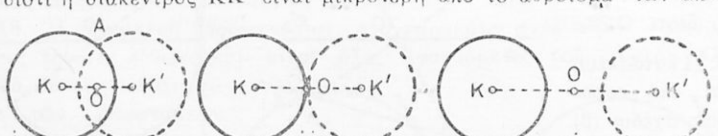
328. Ναί, εἶναι χαρακτηριστική, γιατὶ ἀληθεύει καὶ ἡ ἀντίστροφη πρόταση. Ἄν δηλ. δυὸ διαφορετικές εὐθεῖες ε καὶ ε΄ ἔχουν ἕνα τουλάχιστο κέντρο συμμετρίας Ο, τότε οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες. Πραγματικά, ἄν $\varepsilon \cap \varepsilon' = M$, τότε καὶ τὸ $M'S_0(M)$ θὰ ἦταν κοινό τῶν ε καὶ ε΄. Ἀλλὰ τότε οἱ ε καὶ ε΄ ταυτίζονται.

329. Ὄχι, γιατὶ δυὸ εὐθεῖες συμμετρικὲς ὡς πρὸς ἄξονα ἢ εἶναι παράλληλες ἢ τέμνονται πάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας.

330. Θὰ εἶναι : $\varepsilon' \equiv \varepsilon$, δηλ. $\varepsilon = S_{x'x}$ (ε).

331. Ναί, καὶ ἐκφράζει ὅτι: τὸ συμμετρικὸ μιᾶς εὐθείας ε ὡς πρὸς ἄξονα κάθετο πρὸς αὐτή, εἶναι αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ εὐθεία ε.

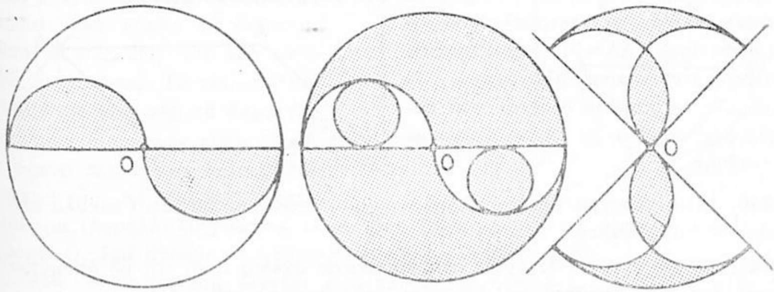
332. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. i) Οἱ κύκλοι τέμνονται, διότι ἡ διάκεντρος ΚΚ΄ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων



$R+R'=2R$ καὶ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ διαφορά τους $R-R'=0$. ($KO<R$ καὶ $K'O<R \Rightarrow KK'<2R$). ii) Οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, διότι $KK'=KO+OK'=R+R'$. iii) Οἱ κύκλοι ἔχουν σχετικὴ θέση ἐξωτερική, διότι $KK'>R+R'=2R$.

333. Ὅταν τὰ κέντρα K_1, K_2, K_3 δὲν εἶναι ὁμοευθειακά, τὰ κέντρα συμμετρίας τους ἀνὰ δυὸ εἶναι τὰ μέσα O_1 O_2 καὶ O_3 τῶν διακέντρων K_1K_2, K_2K_3 καὶ K_3K_1. Τὸ ἴδιο καὶ ὅταν τὰ κέντρα K_1, K_2, K_3 εἶναι ὁμοευθειακά. Τὸ κέντρο συμμετρίας στὸ κάθε ζεῦγος τῶν ἴσων κύκλων εἶναι τὸ μέσο τῆς διακέντρου.

334. Οἱ λύσεις δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια.



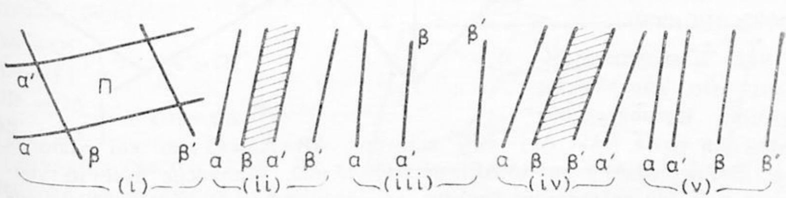
335. Στοὺς δυὸ ἄνισους μὴ ὁμόκεντρους κύκλους, μόνος ἄξονας συμμετρίας εἶναι ἡ εὐθεία τῆς διακέντρου, γιατὶ ἡ διάκεντρος εἶναι φορέας διαμέτρων κι᾿ ἐμεῖς ξέρομε ὅτι κάθε διάμετρος εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ κύκλου. Ὅταν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, ὑπάρχει καὶ δεύτερος ἄξονας συμμετρίας: ἡ μεσοκάθετος τῆς διακέντρου.

336. Εἶναι φανερὸ ὅτι κάθε εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὸ κοινὸ κέντρο τους εἶναι φορέας διαμέτρων ὅλων τῶν ὁμοκέντρων κύκλων, ἑπομένως κοινὸς ἄξονας συμμετρίας.

17

ΤΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ

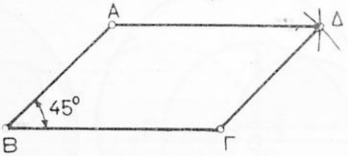
337. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο καὶ εἶναι i) $(\alpha, \alpha') \cap$



(β,β') = παραλληλόγραμμο Π. ii) $(\alpha,\alpha') \cap (\beta,\beta')$ = ταιν(β,α'). iii) $(\alpha,\alpha') \cap (\beta,\beta')$ = εὐθ α′ = εὐθ. β. iv) $(\alpha,\alpha') \cap (\beta,\beta') = (\beta,\beta')$ ἢ $(\beta,\beta') \subset (\alpha,\alpha')$. v) $(\alpha,\alpha') \cap (\beta,\beta') = \varnothing$.

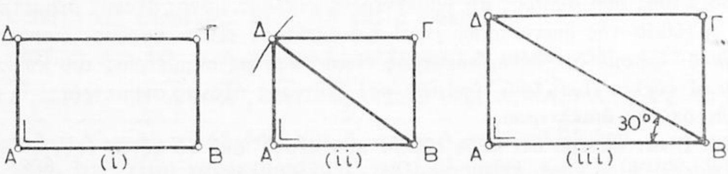
338. Γιατὶ στὸ παραλληλόγραμμο τῆς πλάγιας τομῆς δύο ταινιῶν (σχ. 86 τοῦ βιβλίου) δύο κορυφὲς ποὺ ἀνήκουν στὴν ἴδια πλευρὰ δὲν εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας τῆς ἀντίστοιχης ταινίας. Ὅταν ὅμως οἱ ταινίες τέμνονται καθέτως, οἱ ἄξονες συμμετρίας τους τέμνονται ἐπίσης καθέτως καὶ ἑπομένως τὸ παραλληλόγραμμο ἔχει δυὸ ἄξονες συμμετρίας.

339. Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ στηρίζεται στὴ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα (ΙΙ). Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ εἶναι ἴσες (ΑΔ=ΒΓ καὶ ΓΔ=ΒΑ) ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἡ ζητούμενη κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο μὲ (ΑΒ)=2 cm καὶ (ΒΓ)=3 cm.



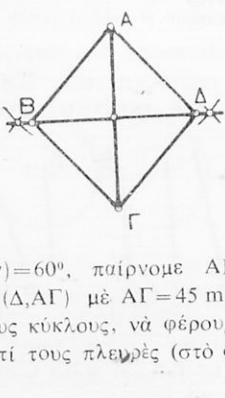
340. Εἶναι τέσσερα ἴσα παραλληλόγραμμα, ὅπως ἐπαληθεύεται εὔκολα στὸ σχέδιο 86 τοῦ βιβλίου.

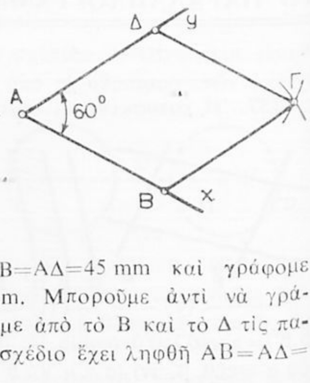
341. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια i, ii, iii, μὲ ἀπόμετρα μήκους στὰ μισὰ ἐκείνων ποὺ δίνονται στὴν ἄσκηση τοῦ βιβλίου.



342. Ἡ περίμετρος τοῦ γηπέδου εἶναι: 124.0,75.6=558 m. Ἂν x m εἶναι τὸ πλάτος, τότε τὸ μῆκος εἶναι 2x (διπλάσιο) καὶ ἡ περίμετρος $x+2x+x+2x=5x$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν τὴν ἐξίσωση: $5x=558$ ποὺ ἡ λύση της εἶναι: $5x=558 \Longleftrightarrow x=558:5=111{,}60$ m. Τὸ γήπεδο λοιπὸν ἔχει πλάτος 111,60 m καὶ μῆκος 2.111,60=223,20 m.

343. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο: τοποθετήσαμε πρῶτα τὴ διαγώνιο ΑΓ=5 cm, κατασκευάσομε τὴ μεσοκάθετή της καὶ πάνω σ' αὐτὴ πήραμε ἀπὸ τὸ ἕνα καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς τομῆς τμήματα ΟΒ=21 mm καὶ ΟΔ=21 mm (στὸ σχέδιο τὰ ἀπόμετρα μήκους ἔχουν ληφθῆ στὸ μισό).

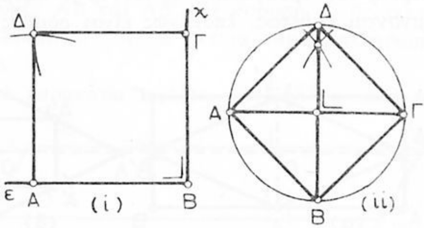




344. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο: Κατασκευάζομε πρῶτα τὴ γωνία (Ax, Ay)=60°, παίρνομε ΑΒ=ΑΔ=45 mm καὶ γράφομε τοὺς κύκλους (Β,ΑΓ) καὶ (Δ,ΑΓ) μὲ ΑΓ=45 mm. Μποροῦμε ἀντὶ νὰ γράψουμε τοὺς δυὸ τελευταίους κύκλους, νὰ φέρουμε ἀπὸ τὸ Β καὶ τὸ Δ τὶς παράλληλες πρὸς τὶς ἀπέναντί τους πλευρὲς (στὸ σχέδιο ἔχει ληφθῆ ΑΒ=ΑΔ=22,5 mm).

345. i) Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (i). Παίρνομε πάνω σὲ μιὰ εὐθεία ε τμΑΒ=43 mm καὶ πάνω στὴν ἡμιευθεία Bx ⊥ ε, τὸ τμΒΓ=ΑΒ.

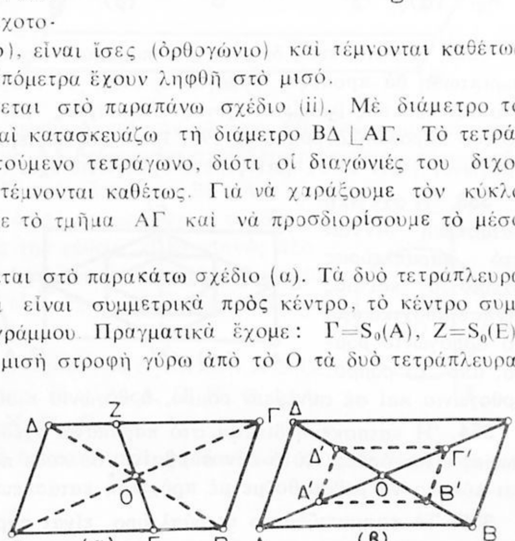
Ἡ τέταρτη κορυφὴ Δ εἶναι ἡ τομὴ τῶν κύκλων (Α,ΑΒ) καὶ (Γ,ΑΒ). Τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνο, γιατὶ ἔχει τὶς γωνίες του ὀρθὲς καὶ τὶς πλευρές του ἴσες. ii) Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (ii). Κατασκευάζομε πρῶτα ἕνα κύκλο μὲ διάμετρο 5cm (R = 2,5 cm) καὶ δυὸ κάθετες διαμέτρους. Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ μὲ κορυφὲς τὰ ἄκρα τῶν καθέτων διαμέτρων εἶναι τὸ ζητούμενο τετράγωνο, διότι οἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται (παραλληλόγραμμο), εἶναι ἴσες (ὀρθογώνιο) καὶ τέμνονται καθέτως (ρόμβος). Στὰ σχέδια τὰ ἀπόμετρα ἔχουν ληφθῆ στὸ μισό.



346. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (ii). Μὲ διάμετρο τὸ τμῆμα ΑΓ γράφω κύκλο καὶ κατασκευάζω τὴ διάμετρο $ΒΔ \perp ΑΓ$. Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενο τετράγωνο, διότι οἱ διαγώνιές του διχοτομοῦνται, εἶναι ἴσες καὶ τέμνονται καθέτως. Γιὰ νὰ χαράξουμε τὸν κύκλο πρέπει πρῶτα νὰ χαράξουμε τὸ τμῆμα ΑΓ καὶ νὰ προσδιορίσουμε τὸ μέσο του Ο.

347. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὰ δυὸ τετράπλευρα εἶναι κατευθεία ἴσα, διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς κέντρο, τὸ κέντρο συμμετρίας Ο τοῦ παραλληλογράμμου. Πραγματικὰ ἔχομε: $Γ = S_0(A)$, $Z = S_0(E)$, $B = S_0(Δ)$ καὶ ἑπομένως μὲ μισὴ στροφὴ γύρω ἀπὸ τὸ Ο τὰ δυὸ τετράπλευρα, συμπίπτουν. Ὅταν $EZ \parallel BΓ$, τὰ ἴσα τετράπλευρα γίνονται ἴσα παραλληλόγραμμα.

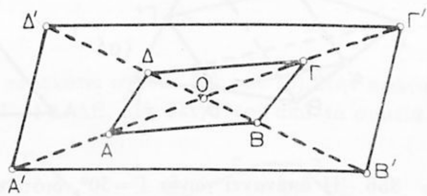
348. Ὅπως φαίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (β), τὸ τετράπλευρο Α'Β'Γ'Δ' εἶναι παραλληλόγραμμο, γιατὶ οἱ διαγώνιοί του Α'Γ' καὶ Β'Δ' διχοτομοῦνται καὶ ἑπομένως ἔχει κέντρο συμμετρίας τὸ ἴδιο μὲ τὸ ἀρχικὸ παραλληλόγραμμο.



349. Τὸ νέο τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο, διότι οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται:

$$\left.\begin{aligned} OA &= OΓ \\ AA' &= ΓΓ' \end{aligned}\right\} \Rightarrow OA' = OΓ'$$

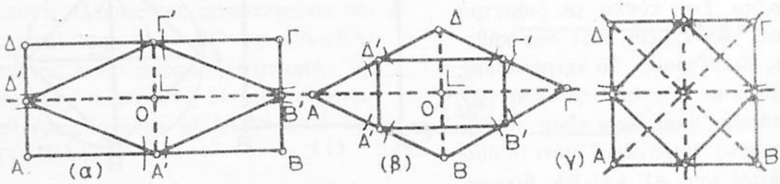
$$\left.\begin{aligned} OB &= OΔ \\ BB' &= ΔΔ' \end{aligned}\right\} \Rightarrow OB' = OΔ'$$



Παρατηροῦμε ὅτι τὸ νέο παραλληλόγραμμο δὲν ἔχει τὶς πλευρές του παράλληλες πρὸς τὸ παλαιό.

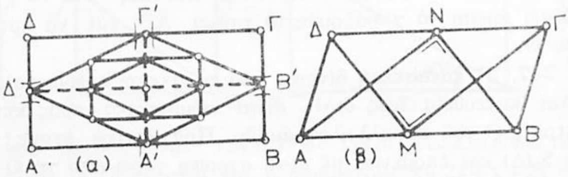
350. Ἐφαρμόστε τὶς ὑποδείξεις τοῦ βιβλίου, γιὰ ἐξάσκηση στὴν ὑποδεικνυόμενη κατασκευή.

351. Ἡ κατασκευὴ ὑποδεικνύεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὸ νέο τετράπλευρο εἶναι ρόμβος, διότι οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται (ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου (§ 197, Ιβ′), ἑπομένως εἶναι παραλληλόγραμμο, καὶ τέμνονται καθέτως, ἑπομένως εἶναι ρόμβος.



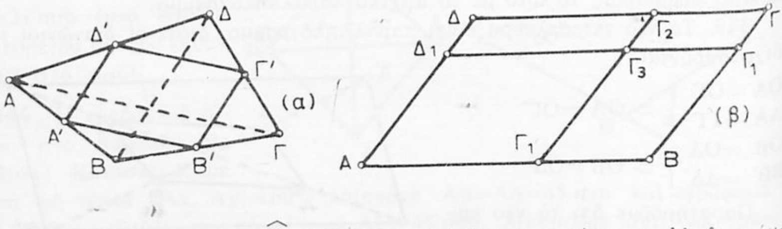
352. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὰ παραπάνω σχέδια (β) καὶ (γ). Στὴν πρώτη περίπτωση θὰ προκύψη ὀρθογώνιο, διότι οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου ποὺ τέμνονται καθέτως θὰ εἶναι ἄξονες συμμετρίας τῶν ταινιῶν ποὺ σχηματίζουν τὸ νέο παραλληλόγραμμο (§ 197, Ιβ′). Στὴ δεύτερη περίπτωση εἶναι πάλι τετράγωνο, γιατὶ τὸ σχηματιζόμενο ὀρθογώνιο ἔχει τέσσερις ἄξονες συμμετρίας.

353. Ἡ σχετικὴ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (α) καὶ μᾶς δίνει διαδοχικὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο ρόμβο, ἀπὸ τὸ ρόμβο, ὀρθογώνιο καὶ σὲ συνέχεια ρόμβο, ὀρθογώνιο κ.οὕ.κ.



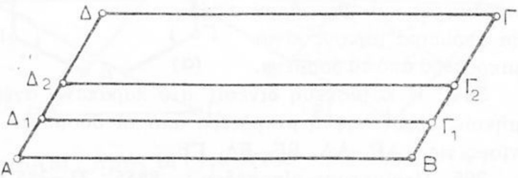
354. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Οἱ σχηματιζόμενες γωνίες εἶναι ὀρθές. Αὐτὸ δὲν συμβαίνει σὲ κάθε παραλληλόγραμμο, ὅπως εἶναι εὔκολο νὰ βεβαιωθοῦμε μὲ πρόχειρη κατασκευή.

355. Τὸ σχηματιζόμενο τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο μὲ διαγωνίους τὰ τμήματα ποὺ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α).

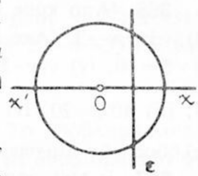


356. Ἡ ἀπέναντι γωνία $\widehat{Γ}=50^0$, διότι οἱ ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες καί, ἐπειδὴ $\widehat{B}+\widehat{Γ}=2$ὀρ.$=180^0$ (ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ) καὶ $\widehat{Γ}=50^0 \Rightarrow \widehat{B}=180^0-50^0=130^0$ καί, τέλος, $\widehat{Δ}=\widehat{B}=130^0$. Μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ὅσα θέλουμε παραλληλόγραμμα μὲ τὴ γωνία $\widehat{A}=50^0$, ποὺ ὅπως θὰ μάθουμε σὲ ἄλλο κεφάλαιο εἶναι **ὅμοια** μεταξύ τους. Ἕνα τέτοιο παραλληλόγραμμο δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Ἀφοῦ κατασκευάσουμε τὴ γωνία $A=50^0$ πήραμε αὐθαίρετα τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΔ. Ἡ κορυφὴ Γ βρίσκεται κατὰ τὸ γνωστό μας τρόπο μὲ τὸ διαβήτη. Ἄλλα τέτοια παραλληλόγραμμα εἶναι τὰ $AB\Gamma_1\Delta_1$, $A\Gamma_1\Gamma_2\Delta$, $A\Gamma_1\Gamma_3\Delta_1$,...

357. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. Οἱ ἄλλες τρεῖς γωνίες του εἶναι: $\widehat{\Gamma}=\widehat{A}=60^0$ καὶ $\widehat{B}=\widehat{\Delta}=180^0-60^0=120^0$. Μὲ πλευρὰ $AB=55$ mm καὶ γωνίες ἴσες μὲ τὶς παραπάνω γωνίες, μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ὅσα θέλουμε παραλληλόγραμμα ποὺ νὰ ἔχουν κοινὴ τὴ γωνία $\widehat{A}$ καὶ τὴν πλευρὰ ΑΒ, ὅπως φαίνεται στὸ σχέδιό μας. Οἱ πλευρές τους ΑΔ βρίσκονται στὴν ἴδια ἡμιευθεία—πλευρὰ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ καὶ οἱ πλευρὲς ΒΓ, στὴν ἡμιευθεία ΒΓ ∥ ΑΔ.



358. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο, ἡ ἀπὸ κέντρο Ο κάθετη πρὸς τὴν εὐθεία εἶναι κοινὸς ἄξονας συμμετρίας τῆς εὐθείας καὶ τοῦ κύκλου εἴτε ἡ εὐθεία καὶ ὁ κύκλος τέμνονται εἴτε ἔχουν ἐξωτερικὴ σχετικὴ θέση, εἴτε ἐφάπτονται.

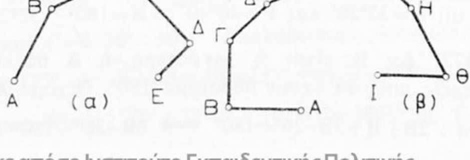


359. Κέντρο συμμετρίας ἔχουν τά: Ζ,Η,Θ,Ι,Ν,Ξ,Ο, Φ, Χ, καὶ ἄξονα συμμετρίας τά: Α, Δ, Ε, Η, Θ, Ι, Λ, Μ, Ξ, Ο, Π, Σ, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω.

360. Κέντρο συμμετρίας ὑπάρχει στὰ σχέδια: (α), (γ), (δ), (στ) καὶ (η).

18
ΤΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ—ΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

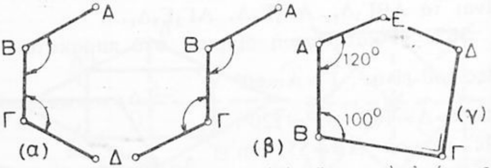
361. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὰ παρακάτω σχέδια (α) καὶ (β). Στὴν πρώτη περίπτωση οἱ πλευρὲς εἶναι: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, μιὰ ὀλιγότερη ἀπὸ τὰ σημεῖα. Στὴ δεύτερη περίπτωση οἱ πλευρὲς εἶναι: ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, ἐπίσης μιὰ ὀλιγότερη ἀπὸ τὰ σημεῖα. Ἔχομε πάντοτε μιὰ πλευρὰ λιγότερη ἀπὸ τὰ σημεῖα.



Γιὰ μιὰ ἀνοιχτὴ τεθλασμένη γραμμὴ (μεταξὺ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τελευταίου σημείου δὲν κατασκευάζεται πλευρὰ) μὲ 7 πλευρὲς χρειάζονται 8 σημεῖα.

362. Νὰ μεταφέρετε στὸ τετράδιό σας καθένα ἀπ' αὐτὰ τὰ μοντέλα καὶ νὰ τὸ ἐπεκτείνετε, ὥστε νὰ συμπληρωθοῦν λωρίδες σ' ὅλο τὸ μῆκος τοῦ τετραδίου σας.

363. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὰ παραπλεύρως σχέδια (α) καὶ (β), ὅπου τὰ ἀπόμετρα μήκους εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὰ δοσμένα.



364. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (γ), ὅπου τὰ ἀπόμετρα μήκους ἔχουν ληφθῆ μικρότερα ἀπὸ τὰ δοσμένα. Ἔχομε συνολικὰ 5 διαγωνίους τίς : ΑΓ, ΑΔ, ΒΕ, ΒΔ, ΓΕ.

365. Περίμετρος οἰκοπέδου : $8855 : 23 = 385$ m καὶ $2(AB) = 2.107 = 214$m, $(\Gamma\Delta) = 214 - 49 = 165$ m, $(B\Gamma) = \frac{1}{3}.165 + 28 = 55 + 28 = 83$ m. Ἔχομε λοιπόν: $(AB) = 107$ m, $(B\Gamma) = 83$ m, $(\Gamma\Delta) = 165$ m καί : $(\Delta A) = 385 - (107 + 83 + 165) = 385 - 355 = 30$ m.

366. Ἀπὸ κάθε κορυφὴ περνοῦν : i) $1(=4-3)$, ii) $2(=5-3)$, iii) $5(=8-3)$, iv) $\nu - 3$. Ἀπὸ ὅλες τὶς κορυφὲς περνοῦν : i) $4 \times 1 = 4$, ii) $5 \times 2 = 10$, iii) $8 \times 5 = 40$, iv) $\nu(\nu-3)$. Διαφορετικὲς διαγωνίους ἔχουν : i) $4 : 2 = 2$, ii) $10 : 2 = 5$, iii) $40 : 2 = 20$, iv) $\frac{\nu.(\nu-3)}{2}$. Αὐτὸς εἶναι ὁ γενικὸς τύπος ποὺ δίνει τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνὸς πολυγώνου μὲ ν πλευρές.

367. i) Ναί, γιατὶ ἀληθεύουν οἱ τριγωνικὲς ἀνισότητες : $5-4<8<5+4$, $8-5<4<8+5$, $8-4<5<8+4$. Περίμετρος : $5+4+8=17$cm. ii) Ὄχι, γιατὶ εἶναι : $60mm > 25+33(=58)$mm. iii) Ὄχι, γιατὶ εἶναι : $\alpha(=100mm) > \beta(=80mm) + \gamma(=10mm)$, iv) Ναί, γιατί : $\gamma(=5,4dm) - \alpha(4,7dm) < \beta(=7,3\ dm) < \gamma + \alpha(=10,1dm)$. Περίμετρος : $4,7+7,3+5,4=17,4$ dm $=1,74$ m.

368. Ἂν $\alpha = 16m$, $\beta = 10m$, ἡ γ δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι ἴση μὲ $2\alpha = 32$ m, γιατὶ τότε δὲν ἀληθεύουν οἱ τριγωνικὲς ἀνισότητες. Ἄρα θὰ εἶναι : $\gamma = 2\beta = 2.10 = 20$ m. Ἡ ἐπαλήθευση γιὰ τὴν ὕπαρξη τριγώνου εἶναι ἁπλή.

369. Θὰ εἶναι : $\frac{1}{2}(B\Gamma) = 17 - 1 = 16 \Rightarrow (B\Gamma) = 2.16 = 32$m καί : $\frac{1}{2}(A\Gamma) = 17 + 5 = 22 \Rightarrow (A\Gamma) = 2.22 = 44$m καὶ $2\tau = 17 + 32 + 44 = 93$ m.

370. Ἂν Δ εἶναι ἡ τέταρτη γωνία, θὰ ἔχουμε : $\Delta = 360^0 - 234^0 = 126^0$, ἄρα καί : $B = \Delta = 126^0$. Οἱ ἄλλες δυὸ γωνίες Α καὶ Γ, ὡς παραπληρώματα τῶν Β καὶ Δ, θὰ ἔχουν ἀπόμετρο : $A = \Gamma = 180^0 - 126^0 = 54^0$.

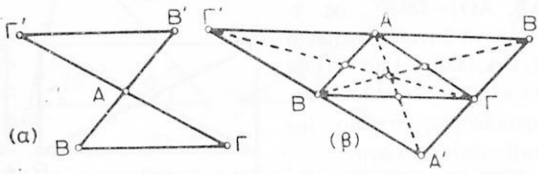
371. i) $\widehat{A} = 72^0$ καὶ $\widehat{B} = 47^0 \Rightarrow \widehat{\Gamma} = 180^0 - (72^0 + 47^0) = 180^0 - 119^0 = 61^0$. ii) $\widehat{B} = 23^050'$ καὶ $\widehat{\Gamma} = 107^040' \Rightarrow \widehat{A} = 180^0 - (23^050' + 107^040') = 180^0 - 131^030' = 48^0 30'$, iii) $A = 32^020'$ καὶ $\Gamma = 46^040' \Rightarrow B = 180^0 - (32^020' + 46^040') = 180^0 - 79^0 = 101^0$.

372. Ἂν $\widehat{B}$ εἶναι ἡ μικρότερη, ἡ $\widehat{A}$ θὰ εἶναι $2\widehat{B}$ καὶ ἡ $\widehat{\Gamma} = 3\widehat{B} - 26^0$. Οἱ τρεῖς μαζὶ θὰ ἔχουν ἄθροισμα 180^0. Ἔχομε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση : $2\widehat{B} + \widehat{B} + 3\widehat{B} - 26^0 = 180^0 \Longleftrightarrow 6\widehat{B} - 26^0 = 180^0 \Longleftrightarrow 6\widehat{B} = 180^0 + 26^0 = 20_06 \Rightarrow$

$B=\frac{206}{6}=34^0 20'$ καὶ ἑπομένως $\widehat{A}=2\widehat{B}=68^0 40'$ καὶ $\widehat{\Gamma}=3\widehat{B}-26^0=103^0-26^0=77^0$.
Ἐπαλήθευση: $34^0 20'+68^0 40'+77^0=180^0$.

373. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α), ὅπου $AB'=S_A(AB)$ ὁμουευθειακές, $A\Gamma'=S_A(A\Gamma)$ ὁμοευθειακές, $B'\Gamma'=S_A(B\Gamma)$ παράλληλες.

374. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὰ παραπλεύρως τρίγωνα. Τὰ τρία συμμετρικὰ τοῦ ἀρχικοῦ μαζὶ μὲ τὸ ἀρχικὸ ἔχουν ὡς ἕνωση ἕνα νέο τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ τετραπλάσιο τοῦ ἀρχικοῦ: τργ$AB\Gamma \cup$τργ$A'B\Gamma \cup$τργ$B'\Gamma A \cup$τργ$\Gamma' BA=$τργ$A'B'\Gamma'$.



375. Κατασκευάζοντας ἀπὸ μιὰ κορυφὴ ὅλες τὶς δυνατὲς διαγωνίους ἔχομε: i) Στὸ πεντάγωνο 3 τρίγωνα. ἑπομένως: $3.2=6$ ὀρθ. ii) Στὸ ἑξάγωνο $6-2=4$ τρίγωνα, ἑπομένως: $4.2=8$ ὀρθ. iii) Στὸ δεκαπεντάγωνο $15-2=13$ τρίγωνα, ἑπομένως: $13.2=26$ ὀρθ.

376. Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι τὸ πολύγωνο ἔχει ν πλευρὲς (καὶ ν γωνίες) τότε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του σὲ ὀρθὲς δίνεται ἀπὸ τὴ σχέση $(\nu-2).2=3150:90=35$ ὀρθ. Ἔχομε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση $2\nu-4=35$: Εἶναι:

$$2\nu-4=35 \Longleftrightarrow 2\nu=4+35=39 \Rightarrow \nu=\frac{39}{2}=19,5.$$

Τέτοιο ὅμως πολύγωνο μὲ 19,5 πλευρὲς δὲν ὑπάρχει. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν δὲν ἔχει λύση. Αὐτό, ἐξ ἄλλου. φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ποὺ εἶναι 35 ὀρθές, ἐνῶ ἀπὸ τὸν τύπο: $\Sigma=2(\nu-2)$ συνάγεται ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν πολυγώνου εἶναι ἄρτιος ἀριθμὸς ὀρθῶν γωνιῶν.

377. Ἂν ἡ μικρότερη εἶναι α, ἡ ἀμέσως μεγαλύτερη θὰ εἶναι $\beta=\alpha+11$ καὶ ἡ τρίτη $\gamma=\beta+11=\alpha+11+11=\alpha+22$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $\alpha+\alpha+11+\alpha+22=255 \Longleftrightarrow 3\alpha+33=255 \Longleftrightarrow 3\alpha=222 \Rightarrow \alpha=222:3=74$m. Τότε: $\beta=\alpha+11=74+11=85$ καὶ $\gamma=85+11=96$m.

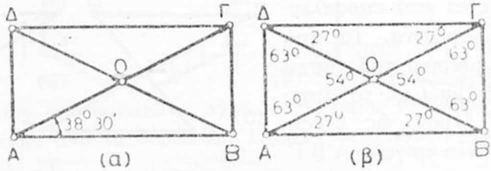
378. Παρατηρῶ πρῶτα ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ πρέπει: α΄ νὰ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Ἀφοῦ λοιπὸν $\alpha=15$m καὶ $\beta=24$m, πρέπει: $9<\gamma<39$. β΄. Πρέπει νὰ εἶναι περιττὸ πολλαπλάσιο τοῦ 9. Ἑπομένως θὰ εἶναι: $\gamma=3.9=27$. Ἡ τιμὴ αὐτὴ ὑπακούει καὶ στὴν τριγωνικὴ ἀνισότητα: $9<27<39$.

379. Ἂν $\widehat{A}=54^0 30'$, τότε $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0-54^0 30'=125^0 30'$. Καί, ἂν $B=2\Gamma$, τότε $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}=3\widehat{\Gamma}=125^0 30'$. Ἔχομε λοιπόν: $3\widehat{\Gamma}=125^0 30'$. $\Longleftrightarrow \widehat{\Gamma}=125^0 30':3=41^0 50'$, ὁπότε $B=2\Gamma=83^0 40'$. Ἐπαλήθευση: $53^0 30'+41^0 50'+54^0 30'=180^0$.

380. i) Θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $\widehat{A}+2\widehat{A}+3\widehat{A}=180^0 \Longleftrightarrow 6\widehat{A}=180^0 \Rightarrow \widehat{A}=30^0$, ὁπότε $\widehat{B}=2.30^0=60^0$ καὶ $\widehat{\Gamma}=3.30^0=90^0$. Ἐπαλήθευση: $30^0+60^0+90^0=180^0$. ii) $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0-45^0=135^0$ ἢ $\widehat{B}+3\widehat{B}=4\widehat{B}=135^0 \Longleftrightarrow \widehat{B}=135^0:4=33^0 45'$, ὁπότε $\widehat{\Gamma}=3\widehat{B}=101^0 15'$. Ἐπαλήθευση: $45^0+33^0 45'+101^0 15'=180^0$. iii) $\widehat{\Gamma}=180^0$

$-(\widehat{A}+\widehat{B})=180^0-90^0=90^0$, $\widehat{\Gamma}=3\widehat{A}=90^0 \iff \widehat{A}=30^0$ καὶ τέλος $\widehat{A}+\widehat{B}=90^0$ καὶ $\widehat{A}=30^0 \Rightarrow \widehat{B}=60^0$. iv) $\widehat{A}=\widehat{B}=\frac{1}{2}\widehat{\Gamma} \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{\Gamma}+\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}=180^0$ $2\widehat{\Gamma}=180^0$ $\Rightarrow \widehat{\Gamma}=90^0$, ὁπότε $\widehat{A}=\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}=\frac{1}{2}.90^0=45^0$ καὶ $\widehat{B}=45^0$.

381. Ἂς εἶναι ΑΒΓΔ τὸ δοσμένο ὀρθογώνιο. Ἐπειδὴ $\sphericalangle$(ΒΑ, ΒΟ) = $\sphericalangle$(ΑΒ, ΑΟ) = 38°30′, θὰ ἔχουμε τὴ ζητούμενη γωνία $\sphericalangle$(ΟΑ, ΟΒ) = 180° − 2 (38° 30′) = 180° − 77° = 103°. Τὸ παραπλεύρως σχέδιο (α) ὑποβοηθεῖ τὴ λύση.



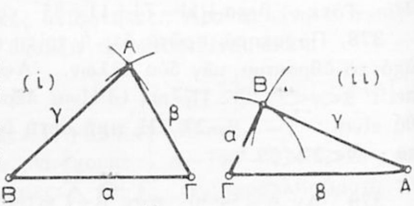
382. Ἂς εἶναι ΑΒΓΔ τὸ δοσμένο ὀρθογώνιο στὸ παραπάνω σχέδιο β). Ἐπειδὴ $\sphericalangle$(ΑΟ, ΑΔ) = $\sphericalangle$(ΔΑ, ΔΟ), θὰ ἔχομε ; 2.$\sphericalangle$(ΑΟ, ΑΔ) + 54° = 180° $\iff$ 2$\sphericalangle$(ΑΟ,ΑΔ) = 180° − 54° = 126° $\Rightarrow$ $\sphericalangle$(ΑΟ, ΑΔ) = 126°: 2 = 63°. Γιὰ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες $\sphericalangle$(ΑΒ, ΑΟ) καὶ $\sphericalangle$(ΔΟ, ΔΓ) ἔχομε : 90° − 63° = 27°. Μέσα στὴν κάθε μιὰ γωνία ἀναγράφομε τὸ ἀπόμετρό της.

383. Τὰ τρόφιμα ποὺ ἀπόμειναν ἦσαν ἀρκετὰ γιὰ τὴν τροφοδοσία 1000 ἀνδρῶν σὲ 54 − 18 = 36 ἡμ. Γιὰ τὴν τροφοδοσία 1500 ἀνδρῶν, πόσες μέρες ἀρκοῦν. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα. Ἄρα θὰ ἔχουμε : 1500 x = 1000 . 36 $\Rightarrow$ x = 24 ἡμ. Ἄρα τὰ τρόφιμα ἐξαντλήθηκαν σέ : 18 + 24 = 42 ἡμ.

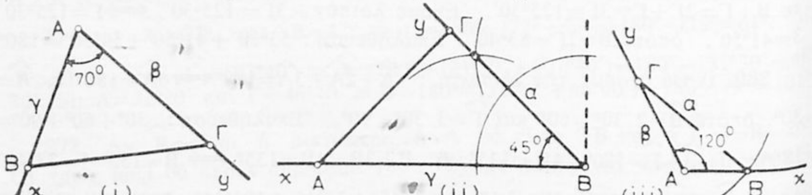
19

ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

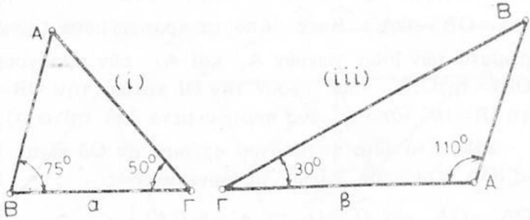
384. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παραπλεύρως σχέδια. Ἡ κατασκευὴ iii εἶναι ἀδύνατη : α + γ = β, ἐνῶ πρέπει νὰ εἶναι α + γ > β. Ἀδύνατη ἐπίσης εἶναι ἡ iv, γιατὶ α + β = 5,7 < 6 = γ.



385. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια :



386. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια. Ἡ ii εἶναι ἀδύνατη, γιατὶ δίνεται: $\widehat{A}+\widehat{B}=100^0+80^0=180^0$, ἐνῶ πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{A}+\widehat{B}<180^0$ (ἢ $A+B+\Gamma=180^0$). Ἀδύνατη ἐπίσης εἶναι καὶ ἡ iv, γιατὶ $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=105^0+90^0=195^0>180^0$.

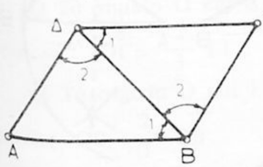


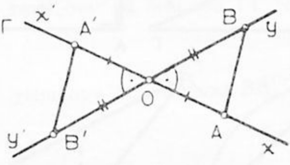
387. Ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὰ στοιχεῖα $\alpha=8$cm, $\beta=5$cm καὶ $\gamma=6$cm γίνεται ὅπως στὰ παραπάνω σχέδια τῆς ἄσκησης 384 μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ γιὰ τὴν κατασκευή του εἶναι περιττὸ νὰ δοθῆ ἡ γωνία $\widehat{A}=60^0$. Ἂν θέλουμε στὸ τρίγωνο ΑΒΓ νὰ εἶναι γωνία $\widehat{A}=60^0$ θὰ πρέπει νὰ παραλείψουμε τὴν πλευρὰ $\alpha=6$ cm. Τρίγωνο ποὺ νὰ ἱκανοποιῆ ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα δὲν ὑπάρχει.

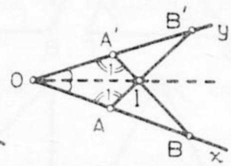
388. Στὸ πρόβλημα αὐτὸ μᾶς εἶναι ἀρκετὰ τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα γιὰ νὰ κατασκευάσουμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ, ὅπως τὸ σχέδιο τῆς ἄσκησης 385, ὅπου ἡ γωνία $\widehat{A}$ εἶναι τελείως ὁρισμένη καὶ ἄσχετη μὲ τὴν τιμὴ ποὺ τῆς δίνει τὸ πρόβλημα. Τρίγωνο ποὺ νὰ ἱκανοποιῆ ὅλα τὰ στοιχεῖα ποὺ δίνει τὸ πρόβλημα δὲν ὑπάρχει.

389. Παίρνομε αὐθαιρέτως μιὰ πλευρὰ $AB=\gamma=5$cm καὶ κατασκευάζομε τρίγωνο ΑΒΓ, ὅπως στὸ σχέδιο (i) τῆς ἄσκησης 386, στὸ ὁποῖο ἡ τρίτη γωνία εἶναι $180^0-(72^0+53^0)=180^0-125^0=55^0$. Τέτοια ὅμως τρίγωνα μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ὅσα θέλουμε παίρνοντας, κάθε φορά, αὐθαίρετα τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς γ. Γιὰ νὰ εἶναι ὁρισμένο τὸ τρίγωνο, πρέπει νὰ ἔχῃ δοθῆ καὶ ἡ πλευρὰ γ.

390. Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν τὴν πλευρὰ ΒΔ κοινὴ καὶ τὶς γειτονικές της γωνίες $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$ (ἐντὸς ἐναλλάξ...) καὶ $\widehat{\Delta}_2=\widehat{B}_2$ (ἐντὸς ἐναλλάξ...), εἶναι λοιπὸν ἴσα.







391. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο. i) Τὰ δυὸ τρίγωνα ΟΑΒ $=$ΟΑ΄Β΄ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν τὶς πλευρές τους $OA=OA'$, $OB=OB'$ καὶ τὶς γωνίες τους στὸ Ο ἴσες (κατακορυφή). ii) Τὰ δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα γιατὶ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο: $(O=S_0(O),\ A'=S_0(A),\ B'=S_0=(B))$. Μὲ τὴ συμμετρία ἡ σύγκριση εἶναι ἄμεση καὶ ἁπλούστερη.

392. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο. Σύμφωνα μὲ αὐτὴ θὰ ἔχουμε: i) τργΟΒΑ΄$=$τργΟΒ΄Α, γιατὶ ἔχουν τὶς πλευρές τους ΟΒ$=$

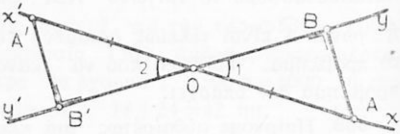
OB', $OA = OA'$ καὶ τὴ γωνία στὸ O κοινή, δηλαδὴ δυὸ πλευρὲς καὶ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζουν ἀντίστοιχα ἴσες. ii) τργ. IAB=τργ. $IA'B'$ γιατὶ ἔχουν: $AB = A'B'$ ($OB = OB'$ καὶ $OA = OA' \Longleftrightarrow OB - OA = OB' - OA'$), $\widehat{B} = \widehat{B'}$ (ἀπὸ τὰ προηγούμενα τρίγωνα) καὶ $\widehat{A} = \widehat{A'}$ (παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν $\widehat{A_1}'$ καὶ $\widehat{A_1}$ τῶν προηγουμένων τριγώνων). iii) τργ OIB=τργOIB', γιατὶ ἔχουν τὴν OI κοινή, τὴν $OB = OB'$ (ἀπὸ κατασκευὴ) καὶ τὴ $IB = IB'$ (ἀπὸ τὰ δυὸ προηγούμενα ἴσα τρίγωνα).

393. Στὸ ἴδιο παραπάνω σχέδιο, ἂν $O\delta$ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\sphericalangle(OA, OA')$, θὰ ἔχουμε τὶς συνεπαγωγές:

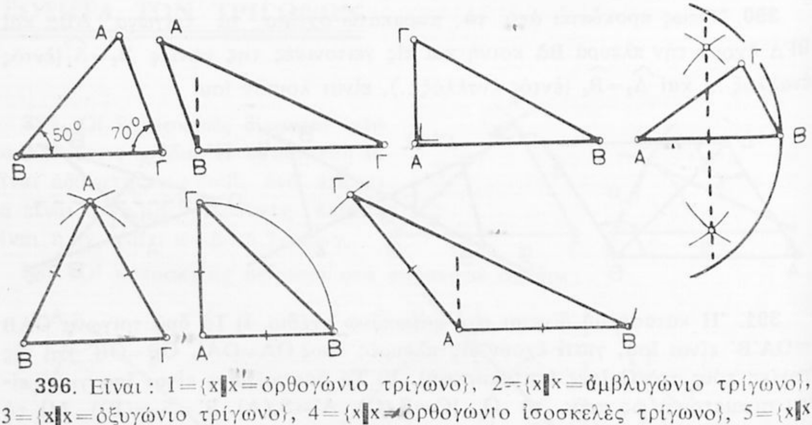
$$\left.\begin{aligned} OA' = OA \text{ καὶ } \widehat{O_1} = \widehat{O_2} &\Rightarrow A' = S_{O\delta}(A) \\ OB = OB' \text{ καὶ } \widehat{O_1} = \widehat{O_2} &\Rightarrow B' = S_{O\delta}(B) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{τμ. } A'B = S_{O\delta}(AB').$$

Τὰ δύο λοιπὸν τμήματα $A'B$ καὶ AB' ἔχουν τὰ ἄκρα τους συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο $O\delta$, ἐπομένως εἶναι συμμετρικὰ (καὶ ἴσα). Τὸ κοινό τους σημεῖο I ἀνήκει λοιπὸν στὴ διχοτόμο καὶ ὅλα τὰ ζεύγη τῶν τριγώνων τῆς προηγούμενης ἄσκησης εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία $O\delta$ καὶ ἐπομένως ἴσα. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ μέθοδος τῆς συμμετρίας εἶναι ἁπλούστερη καὶ συντομότερη.

394. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται εἶναι ἴσα, ἐπειδή: i) ἔχουν ἴσες τὶς ὑποτείνουσές τους $OA = OA'$ καὶ μιὰ ὀξεία γωνία $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$ (κατακορυφή). ii) Εἶναι συμμετρικὰ μὲ κέντρο συμμετρίας τὸ O ($OA' = S_O(OA)$, $\widehat{O_2} = S_O(\widehat{O_1})$). Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ μέθοδος τῆς συμμετρίας εἶναι ἁπλούστερη καὶ ἀμεσότερη.

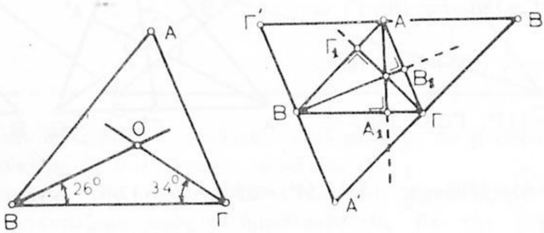


395. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια.



396. Εἶναι: $1 = \{x \mid x = \text{ὀρθογώνιο τρίγωνο}\}$, $2 = \{x \mid x = \text{ἀμβλυγώνιο τρίγωνο}\}$, $3 = \{x \mid x = \text{ὀξυγώνιο τρίγωνο}\}$, $4 = \{x \mid x = \text{ὀρθογώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο}\}$, $5 = \{x \mid x = \text{ἀμβλυγώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο}\}$, $6 = \{x \mid x = \text{ὀξυγώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο}\}$, $7 = \{x \mid x = \text{ἰσόπλευρο τρίγωνο}\}$, $8 = \{x \mid x = \text{σκαληνὸ ὀξυγώνιο τρίγωνο}\}$, $9 = \{x \mid x = \text{σκαληνὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο}\}$, $10 = \{x \mid x = \text{σκαληνὸ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο}\}$.

397. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο i. Στὸ τρίγωνο ΟΒΓ ἔχομε: i) $\widehat{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\ \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Gamma = \frac{1}{2} \cdot 52^0 = 26^0$, $\widehat{\Gamma} = \frac{1}{2}\mathrm{B}\Gamma\widehat{\mathrm{A}} = \frac{1}{2} \cdot 68^0 = 34^0$ καὶ ἐπομένως $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{O}}\Gamma = 180^0 - (26^0 + 34^0) = 180^0 - 60^0 = 120^0$, ii) $\widehat{\mathrm{A}} = 180^0 - (68^0 + 52^0) = 180^0 - 120^0 = 60^0$. Ἐπομένως $\widehat{\mathrm{O}} - \widehat{\mathrm{A}} = 120^0 - 60^0 = 60^0$.



398. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο. Ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα ΒΓΒ′Α καὶ ΒΓΑΓ′ ἔχομε τὴ συνεπαγωγή: (ΒΓ = ΑΒ′ καὶ ΒΓ = Γ′Α) ⇒ Γ′Α = ΑΒ′. Τὸ ὕψος λοιπὸν $\mathrm{AA_1}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συγχρόνως μεσοκάθετη τῆς πλευρᾶς Β′Γ′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′. Γιὰ ὅμοιο λόγο καὶ τὰ ἄλλα δύο ὕψη $\mathrm{BB_1}$ καὶ $\Gamma\Gamma_1$ εἶναι μεσοκάθετες τῶν πλευρῶν Γ′Α′ καὶ Α′Β′ τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′. Ἐμεῖς ὅμως ξέρουμε ὅτι οἱ μεσοκάθετες τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α′Β′Γ′ εἶναι συγκλίνουσες εὐθεῖες. Ἐπομένως καὶ τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ συγκλίνουν, (εἰς τὸ ὀρθόκεντρο τοῦ τριγώνου).

399. α) Διότι τὸ τμῆμα Β′Γ′ ποὺ συνδέει τὰ μέσα τῶν δυὸ πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι παράλληλο πρὸς τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἴσο μὲ τὸ μισό της.

β) Τὸ ἴδιο γιὰ τὸ τμῆμα ΕΔ στὸ τρίγωνο ΟΒΓ.

γ) Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας στὴ σχέση παραλληλίας στὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

δ) Ἕνεκα τῆς μεταβατικότητας στὴ σχέση ἰσότητας μεταξὺ τμημάτων.

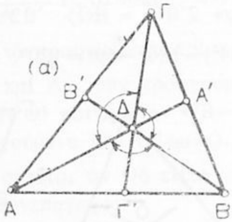
ε) Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρο ΕΔΒ′Γ′ ἔχει τὶς δυὸ ἀπέναντι πλευρές του ΕΔ καὶ Β′Γ′ ἴσες καὶ παράλληλες εἶναι παραλληλόγραμμο μὲ κέντρο συμμετρίας τὸ Ο, ἐπομένως οἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.

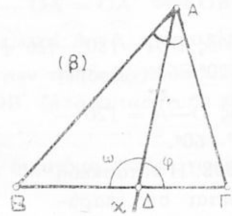
ζ) Τὰ σημεῖο Ο καὶ Δ χωρίζουν τὰ διάμεσο ΓΓ′ σὲ τρία ἴσα μέρη μὲ συνέπεια: $\mathrm{O}\Gamma = \frac{2}{3}\ \Gamma\Gamma'$.

η) Τὰ σημεῖα Ο καὶ Ε χωρίζουν τὴ διάμεσο ΒΒ′ σὲ τρία ἴσα μέρη, ἐπομένως $\mathrm{OB} = \frac{2}{3}\ \mathrm{BB'}$.

Ἡ τρίτη διάμεσος πρέπει, σύμφωνα μὲ τὰ παραπάνω, νὰ συναντᾶ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς δυὸ ἄλλες στὸ σημεῖο ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὴν ἀντίστοιχη κορυφὴ ἀπόσταση ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους ὁλόκληρης τῆς διαμέσου. Τέτοιο ὅμως σημεῖο ὑπάρχει ἕνα σὲ κάθε διάμεσο καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ Ο τῆς τομῆς τῶν δυὸ πρώτων διαμέσων. Ἐπομένως οἱ τρεῖς διάμεσοι τριγώνου συγκλίνουν σ' ἕνα σημεῖο ποὺ ἀπέχει ἀπὸ τὴν κάθε κορυφὴ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀντίστοιχου μήκους της.

400. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Ὑπολογίζομε πρῶτα τὴ γωνία $\widehat{\Gamma}=180^0-(54^0+68^0)=180^0-122^0=58^0$. Ἔχομε τώρα: $\widehat{B\Delta\Gamma}=180-\frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{\Gamma})=180-\frac{1}{2}(68^0+58^0)=180^0-63^0=117^0$, $\Gamma\Delta A=180-\frac{1}{2}(\widehat{\Gamma}+\widehat{A})=180^0-\frac{1}{2}(58^0+54^0)=180^0-56^0=124^0$, $\widehat{A\Delta B}=180^0-\frac{1}{2}(\widehat{A}+\widehat{B})=180^0-\frac{1}{2}(54^0+68^0)=180^0-61^0=119^0$. Ἐπαλήθευση: $117^0+124^0+119^0=360^0$.

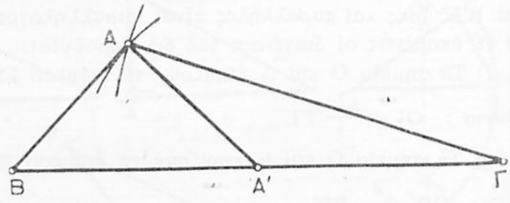




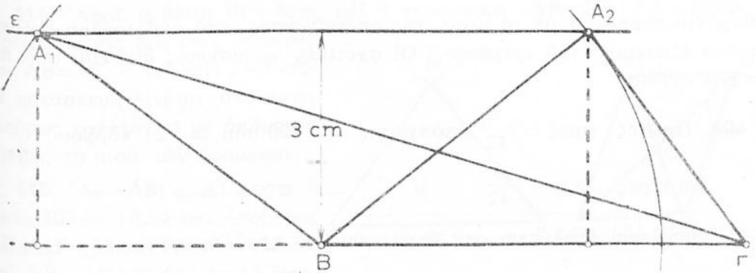
401. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΔΒ στὸ παραπάνω σχέδιο (β) εἶναι ἀντίστοιχα: $\omega=\frac{A}{2}+\Gamma$ καὶ $\varphi=\frac{A}{2}+B$. Ἔχομε τώρα τὶς ἰσότητες: $\omega+\varphi=180^0$ καὶ $\omega-\varphi=\Gamma-B=24^0$ κι ἀπ' αὐτές: $\omega=(180^0+24^0):2=102^0$ καὶ $\varphi=(180-24):2=78^0$.

402. Ὑπολογίζομε πρῶτα τὶς γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ ἀπὸ τὶς σχέσεις ποὺ μᾶς δίνονται. Ἔχομε λοιπόν: $\widehat{B}=\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=120^0 \Rightarrow \frac{1}{2}\widehat{\Gamma}+\widehat{\Gamma}=120^0 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}\widehat{\Gamma}=320^0 \Longleftrightarrow \widehat{\Gamma}=120^0:\frac{3}{2}=120^0\cdot\frac{2}{3}=80^0$ καὶ $\widehat{\Gamma}=80^0 \Rightarrow \widehat{B}=\frac{1}{2}\widehat{\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot 80^0=40^0$. Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως στὰ σχέδια τῆς ἄσκησης 386.

403. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. Κατασκευάζομε πρῶτα τὸ τρίγωνο ΑΑ΄Γ μὲ πλευρὲς ΑΓ=55 mm, ΑΑ΄=25 mm καὶ Α΄Γ= $\frac{1}{2}\cdot 68=34$ mm. Ἀπὸ αὐτὸ εἶναι εὔκολο νὰ βροῦμε τὴν κορυφὴ Β τοῦ ζητούμενου τριγώνου προεκτείνοντας τὴν πλευρὰ ΓΑ΄ τοῦ ΑΑ΄Γ πέρα ἀπὸ τὸ Α΄ κατά: Α΄Β=ΓΑ΄=34 mm.



404. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο: Τοποθετοῦμε πρῶτα τὴν πλευρὰ ΒΓ=6 cm, γράφομε τὸν κύκλο μὲ κέντρο Β καὶ ἀκτίνα 5 cm (Β, 5 cm) καὶ κατασκευάζομε τὴν εὐθεία ε ∥ εὐθ. ΒΓ σὲ ἀπόσταση ἀπὸ τὴ ΒΓ=3 cm, ὅσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ζητούμενου τριγώνου. Ἡ εὐθεία ε τέμνει τὸν κύκλο (Β, 5 cm) σὲ δυὸ σημεῖα, τὰ ὁποῖα δίνουν δυὸ λύσεις γιὰ τὴν κορυφὴ Α, ἑπομένως καὶ γιὰ τὸ ζητούμενο τρίγωνο: τὶς $A_1B\Gamma$ καὶ $A_2B\Gamma$. Μποροῦσε νὰ ὑπάρχη μόνο μιὰ λύση, ἂν ἡ εὐθεία ε ἦταν ἐφαπτομένη τοῦ

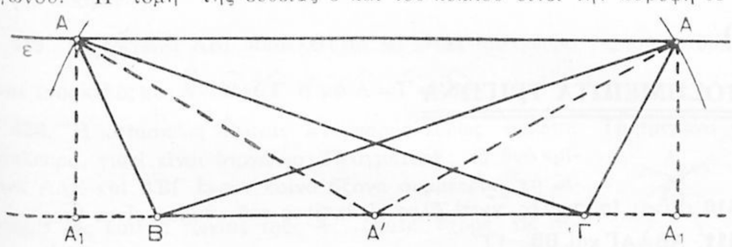


κύκλου (Β, 5 cm) ἢ ὅταν δηλ. δοθῆ : $υ=5$ cm, καὶ καμμιά, ἂν ἡ εὐθεία ε ἦταν ἐξωτερικὴ τοῦ κύκλου, ἂν δηλ. ἦταν : $υ>5$ cm.

405. Τοποθετοῦμε πρῶτα τὴν πλευρὰ ΒΓ=5 cm καὶ σχηματίζομε τὴ $\sphericalangle(ΒΓ, Βx)=110^0$, κατασκευάζομε πρὸς τὸ ἡμιεπίπεδο τῆς Βx τὴν εὐθεία $ε \parallel ΒΓ$ σὲ ἀπόσταση 4 cm. Ἡ τομή της μὲ τὴ Βx μᾶς δίνει τὴν κορυφὴ Α τοῦ ζητούμενου τριγώνου.

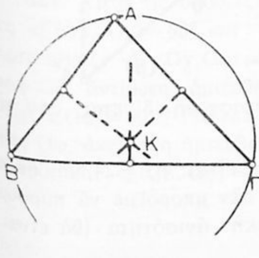
406. Κατασκευάζομε πρῶτα τὸ τρίγωνο ΒΓΒ′ μὲ ΒΓ=6 cm, $ΓΒ' = \frac{1}{2}ΑΓ = \frac{1}{2} . 4{,}6 = 2{,}3$ cm καὶ ΒΒ′=4 cm. Ἡ τρίτη κορυφὴ Α ὁρίζεται μὲ τὴν προέκταση τῆς ΓΒ′ κατὰ τμῆμα Β′Α=ΓΒ′.

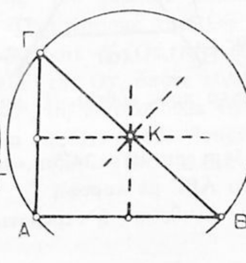
407. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο : Τοποθετοῦμε τὴν πλευρὰ ΒΓ=6 cm, προσδιορίζομε τὸ μέσο της Α′, κατασκευάζομε τὸν κύκλο (Α′, 5 cm) καὶ τὴν εὐθεία $ε \parallel ΒΓ$ σὲ ἀπόσταση 3 cm, ὅσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου. Ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ε καὶ τοῦ κύκλου δίνει τὴν κορυφὴ Α τοῦ

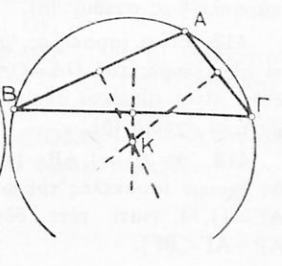


τριγώνου. Ἐδῶ ἔχομε δυὸ λύσεις, μπορούσαμε ὅμως νὰ ἔχουμε μιὰ λύση (περίπτωση ἐπαφῆς) ἢ καμμιὰ (ἐξωτερικὴ θέση), ὅπως στὴν ἄσκηση 404.

408. Στὸ ὀξυγώνιο τρίγωνο βρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου, στὸ







ὀρθογώνιο συμπίπτει μὲ τὸ μέσο τῆς ὑποτείνουσας, στὸ ἀμβλυγώνιο βρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ τριγώνου. Οἱ σχετικὲς κατασκευὲς δίνονται στὸ παραπάνω σχέδιο.

409. Πρῶτες τιμές : $\frac{7}{12}$ ἀπόστασης — 320 min — 21 κόμβοι

δεύτερες » $\frac{5}{12}$ » — x » — 16 »

Τὸ πρόβλημα ἀναλύεται στὰ ἀκόλουθα δυὸ προβλήματα :

πρῶτες τιμές : $\frac{7}{12}$ ἀπόστασης — 320 min		21 κόμβοι — y min
δεύτερες » $\frac{5}{12}$ » — y »		16 » — x »

Στὸ α΄ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα καὶ στὸ β΄ ἀντίστροφα. Ἄρα :

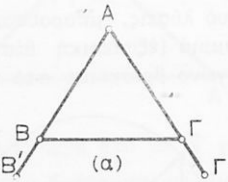
$$\frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{320}{y} \iff 7y = 5.320 \Rightarrow y = \frac{5.320}{7} \quad \text{καὶ } 16x = 21y \iff 16x = 21\cdot\frac{5.320}{7} \Rightarrow x = 300\text{min ἢ } 5\text{h}.$$

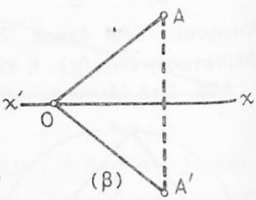
20

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

410. Εἶναι ἰσοσκελές, γιατὶ ὅλες οἱ ἀκτίνες τοῦ κύκλου εἶναι ἴσες.

411. ΑΒ=ΑΓ καὶ ΒΒ΄=ΓΓ΄ ⇒ ΑΒ+ΒΒ΄=ΑΓ+ΓΓ΄ ⇒ ΑΒ΄=ΑΓ΄. Ἄρα εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (α).



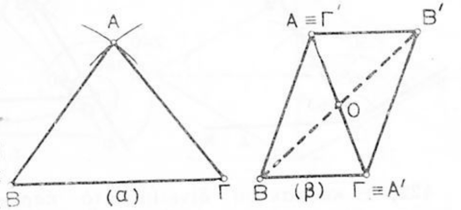


412. Εἶναι ἰσοσκελές, γιατὶ οἱ πλευρές του ΟΑ=ΟΑ΄, διότι εἶναι τμήματα συμμετρικὰ πρὸς εὐθεία. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β).

413. Ἂν εἶναι : ΑΒ=11,34m καὶ ΒΓ=24,5m, θὰ εἶναι: ΑΓ=24,5m, ὁπότε θὰ ἔχουμε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ μὲ κορυφὴ Γ. Δὲν μποροῦμε νὰ πάρουμε ΑΓ=11,34, γιατὶ τότε δὲν ἀληθεύει ἡ τριγωνικὴ ἀνισότητα (θὰ εἶναι : ΑΒ+ΑΓ<ΒΓ).

414. Ἀφοῦ ἡ βάση ΒΓ = 6cm, καὶ ἡ περίμετρος ΑΒ + ΒΓ + ΓΑ = 16cm, θὰ ἔχουμε γιὰ τὶς δυὸ ἴσες πλευρές του ΑΒ = ΑΓ = (16 − 6) : 2 = 5 cm. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (α) μὲ ἀπόμετρα μήκους τὰ μισὰ τῶν δοσμένων.

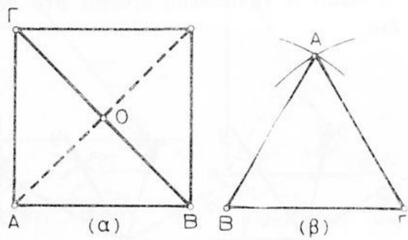
415. Ἂν ΑΒ = ΑΓ, τότε ἡ βάση ΒΓ = 10,54 καὶ ἑπομένως ΑΒ + ΑΓ = 38,06 − 10,54 = 27,52m καὶ ΑΒ = ΑΓ = 27,52 : 2 = 13,76m.



416. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β).

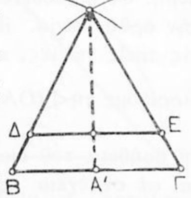
417. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὸ τετράπλευρο ΑΒΑ′Γ εἶναι ὀρθογώνιο, γιατὶ εἶναι παραλληλόγραμμο (ἔχει κέντρο συμμετρίας) μὲ ἴσες διαγωνίους.

418. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (β). Τοποθετοῦμε τὴν πλευρὰ ΒΓ = α = 5cm καὶ γράφομε τοὺς κύκλους (Β,5 cm) καὶ (Γ,5 cm). Οἱ τομές τους Α καὶ Α′ μᾶς δίνουν δυὸ τρίγωνα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΒΓ. Στὸ σχέδιο ἔχομε κατασκευάσει μόνο τὸ ἕνα, ΑΒΓ μὲ πλευρὰ τὸ ½ τῆς δοσμένης

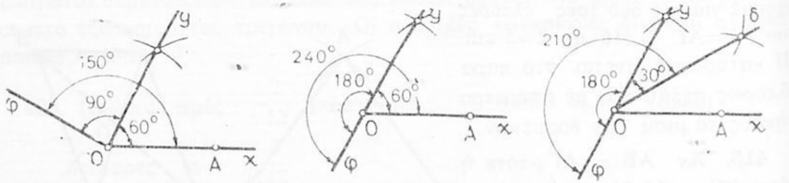


419. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἀποκλείεται νὰ εἶναι ἰσόπλευρο· μπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς μέ: $\widehat{A} = \widehat{B} \neq \widehat{\Gamma}$ ἢ μὲ $\widehat{A} = \widehat{\Gamma} \neq \widehat{B}$.

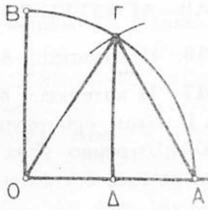
420. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο. Τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσόπλευρο, γιατὶ εἶναι ἰσογώνιο. Πραγματικά : τὰ δυὸ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΑΒΓ ἔχουν κοινὸ ἄξονα συμμετρίας τὴ διχοτόμο τῆς κοινῆς γωνίας τους $\widehat{A}$, ὁπότε ἔχομε τὶς συνεπαγωγές : $\Delta E \perp AA'$ καὶ $B\Gamma \perp AA' \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma \Rightarrow \widehat{\Delta} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{E} = \widehat{\Gamma}$, ἑπομένως $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma} \Rightarrow \widehat{A} = \widehat{\Delta} = \widehat{E}$.



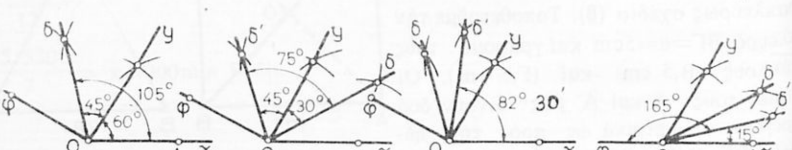
421. Κατὰ τὶς ὑποδείξεις τοῦ βιβλίου κατασκευάζομε τὴ $\sphericalangle(Ox, Oy) = 60^0$ καί : i) χαράσσομε τὴν $O\varphi \perp Oy$, ὁπότε εἶναι : $\sphericalangle(Oy, O\varphi) = 90^0$ καὶ $\sphericalangle(Ox, O\varphi) = 60^0 + 90^0 = 150^0$, ii) χαράσσομε τὴν Οφ, ἀντίθετη ἡμιευθεία τῆς Οy, ὁπότε εἶναι : $\sphericalangle(Oy, O\varphi) = 180^0$ καί : $\sphericalangle(Ox, O\varphi) = 60^0 + 180^0 = 240^0$, iii) διχοτομοῦμε τὴ $\sphericalangle(Ox, Oy)$ καὶ χαράσσομε τὴν Οφ, ἀντίθετη ἡμιευθεία τῆς Οy, ὁπότε εἶναι : $\sphericalangle(O\delta, Oy) = 30^0$, $\sphericalangle(Oy, O\varphi) = 180^0$ καὶ $\sphericalangle(O\delta, O\varphi) = 30^0 + 180^0 = 210^0$ (βλέπε τὰ παρακάτω σχέδια).



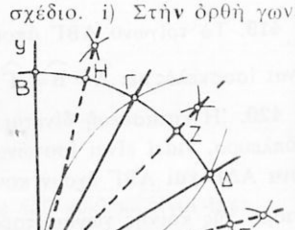
422. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. Ἔχομε: i) ΟΑ = ΟΓ (ἀκτίνες). ii) ΟΓ = ΑΓ, γιατὶ τὸ τρίγωνο ΓΟΑ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεία ΓΔ, μεσοκάθετη τῆς ἀκτίνας ΟΑ, ἑπομένως: ΓΟ = ΓΑ. Τὸ τρίγωνο ΓΟΑ εἶναι ἰσοσκελές.



423. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο.



424 Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. i) Στὴν ὀρθὴ γωνία ∢(Ox, Oy) γράφομε τὸ τεταρτοκύκλιο ΟΑΒ. Οἱ κύκλοι (Α, ΟΑ) καὶ (Β, ΟΒ) ὁρίζουν πάνω στὸ τόξο $\widehat{AB}$ ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ποὺ χωρίζουν τὸ τόξο ΑΒ σὲ τρία ἴσα μέρη. Οἱ ἡμιευθεῖες ΟΓ καὶ ΟΔ τριχοτομοῦν τὴν ὀρθὴ γωνία. ii) Διχοτομώντας μιὰ ἀπὸ τὶς τρεῖς γωνίες, π.χ. τὴ ∢(ΟΑ, ΟΔ) προσδιορίζομε τὴ ∢(ΟΑ, ΟΕ) $= \frac{1}{6}$ (ΟΑ, ΟΒ). Μὲ



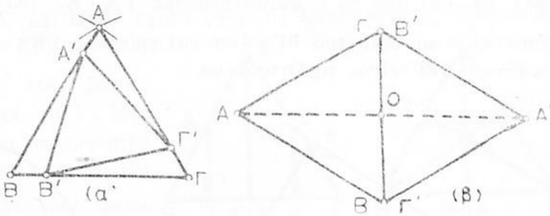
τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη προσδιορίζομε καὶ τὰ μέσα τῶν τόξων $\widehat{ΔΓ}$ καὶ $\widehat{ΓB}$ καὶ σὲ συνέχεια κατασκευάζομε τὶς διχοτόμους καὶ τῶν δυὸ ἄλλων γωνιῶν (ΟΔ, ΟΓ) καὶ (ΟΓ, ΟΒ).

425. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὸ νέο τρίγωνο Α′Β′Γ′ εἶναι ἰσόπλευρο, γιατί:

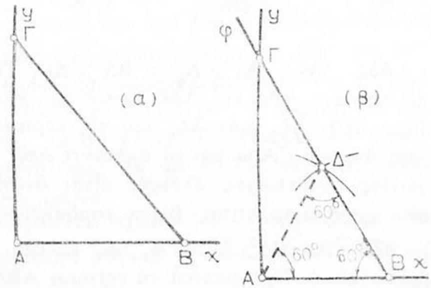
$$\left.\begin{array}{l} AB = BΓ = ΓA \\ AA' = BB' = ΓΓ' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B = B'Γ = Γ'A$$ καὶ ἑπομένως τὰ τρίγωνα Α′ΒΒ′ = Β′ΓΓ′ = Γ′ΑΑ′, γιατὶ ἔχουν ἀπὸ μιὰ γωνία τους ἴση (60°) καὶ τὶς πλευρές της ἀντίστοιχα ἴσες.

426. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (β). Ἡ ἕνωση τῶν δύο

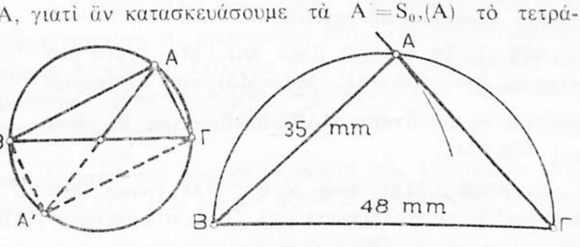
συμμετρικῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων μᾶς δίνει τὸ ρόμβο ΑΒΑ΄Γ, στὸν ὁποῖο οἱ γωνίες $\widehat{A}=\widehat{A'}=60^0$ καὶ οἱ ἄλλες δύο $\widehat{ABA'}=\widehat{A\Gamma A'}=120^0$.



427. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια (α) καὶ (β) μὲ ἀπόμετρα μήκους τὰ μισὰ τῶν δοσμένων στὴν πρώτη καὶ τὸ $^1/_3$ στὴ δεύτερη. i) Στὶς πλευρὲς Ax καὶ Ay τῆς ὀρθῆς γωνίας Α παίρνομε ΑΒ=48mm καὶ ΑΓ=59mm, τὸ τμῆμα ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. ii) Στὴν πλευρὰ Ax τῆς ὀρθῆς γωνίας ∢ (Ax, Ay) παίρνομε ΑΒ = 52mm καὶ κατασκευάζομε τὴ γωνία ∢ (ΒΑ, Βφ) = 60^0. Ἡ τομὴ Γ (ἡμιευθΒφ∩ ἡμιευθΑy={Γ}) εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου $\widehat{AB\Gamma}$. Παρατηροῦμε ὅτι $AB=\frac{1}{2}B\Gamma$. Πραγματικά, ἂν Δ εἶναι τὸ μέσο τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ, ξέρουμε ὅτι: $A\Delta=\frac{1}{2}B\Gamma=B\Delta\Rightarrow$ $\widehat{B}=\widehat{BA\Delta}=60^0\Rightarrow\widehat{B\Delta A}=60^0$, τὸ τρίγωνο λοιπὸν ΑΒΔ εἶναι ἰσόπλευρο.



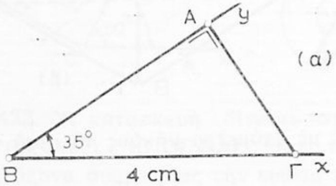
428. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο στὸ Α, γιατὶ ἂν κατασκευάσουμε τὰ $A'=S_0,(A)$ τὸ τετράπλευρο ΑΒΑ΄Γ εἶναι παραλληλόγραμμο (ἔχει κέντρο συμμετρίας) μὲ ἴσες διαγωνίους, ἑπομένως ὀρθογώνιο. Ἄλλος τρόπος: ἡ ΟΑ, διάμεσος τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ μισό της. Ἄρα τὸ ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιο μὲ ὑποτείνουσα ΒΓ.

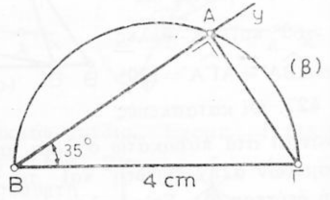


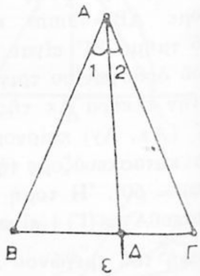
429. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β): Μὲ διάμετρο ΒΓ= 48mm γράφομε ἡμικύκλιο καὶ σὲ συνέχεια τὸν κύκλο (Β,35mm), ὁ ὁποῖος τέμνει τὸ ἡμικύκλιο σ' ἕνα σημεῖο Α ποὺ εἶναι ἡ κορυφὴ τοῦ ζητούμενου ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ.

430. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὰ παρακάτω σχέδια (α) καὶ (β). α) Κατασκευάζομε μὲ τὸ γωνιόμετρο τὴ γωνία ∢(Bx, By) = 35^0, παίρνομε 4 cm=

$B\Gamma \subset Bx$ καὶ ἀπὸ τὸ Γ κατασκευάζομε $\Gamma A \perp By$ ($A \in By$). β) Κατασκευάζομε ἡμικύκλιο μὲ διάμετρο $B\Gamma = 4$ cm καὶ τὴ γωνία $\widehat{\Gamma BA} = 35^0$ ($A \in$ ἡμιεπ.ΒΓ). Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενο.

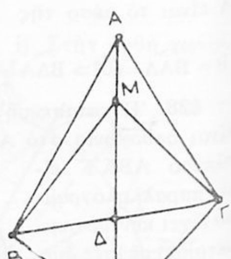






431. Ἂν : $A_1 > A_2 \Rightarrow B\Delta > \Delta\Gamma$. Πραγματικὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουν δύο πλευρές τους ἴσες ($AB = A\Gamma$, $A\Delta = A\Delta$) καὶ τὶς περιεχόμενες γωνίες ἄνισες. Ἄρα καὶ οἱ ἀπέναντι ἀπὸ τὶς ἄνισες γωνίες ἀντίστοιχες πλευρὲς εἶναι ἄνισες μὲ τὴν ἴδια φορὰ ἀνισότητας (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).

432. Ἂν $B\Delta > \Delta\Gamma \Rightarrow A_1 > A_2$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο). Πραγματικὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΔΓ ἔχουν δυὸ πλευρές τους ἴσες ($AB = A\Gamma$, $A\Delta = A\Delta$) καὶ τὶς τρίτες πλευρὲς ἄνισες ($B\Delta > \Delta\Gamma$). Ἄρα καὶ οἱ ἀπέναντι ἀπὸ τὶς ἄνισες πλευρὲς γωνίες A_1, A_2 εἶναι ἄνισες μὲ τὴν ἴδια φορὰ ἀνισότητας.



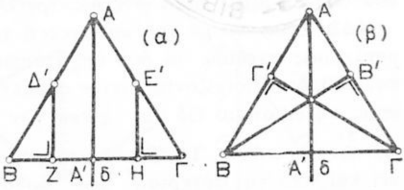
433. Τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ ἔχουν δυὸ πλευρὲς ἴσες ($B\Delta = \Delta\Gamma$, $A\Delta = A\Delta$) καὶ τὶς τρίτες πλευρὲς ἄνισες ($AB > A\Gamma$). Ἄρα οἱ ἀπέναντι γωνίες $\widehat{A\Delta B} > \widehat{A\Delta\Gamma}$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).

434. i) Τὰ τρίγωνα ΒΜΔ καὶ ΓΜΔ ἔχουν δυὸ πλευρὲς ἴσες ($B\Delta = \Delta\Gamma$, $M\Delta = M\Delta$) καὶ τὶς περιεχόμενες γωνίες ἄνισες $\widehat{M\Delta B} > \widehat{M\Delta\Gamma}$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $MB > M\Gamma$.

ii) $\widehat{M\Delta B} > \widehat{M\Delta\Gamma} \Longleftrightarrow \widehat{N\Delta B} < \widehat{N\Delta\Gamma}$ (γωνίες ἀνὰ δυὸ ἐφεξῆς παραπληρωματικές). Ἔτσι στὰ τρίγωνα ΝΔΒ καὶ ΝΔΓ : ($B\Delta = \Delta\Gamma$, $N\Delta = N\Delta$, $\widehat{N\Delta B} < \widehat{N\Delta\Gamma}$) $\Rightarrow NB < N\Gamma$.

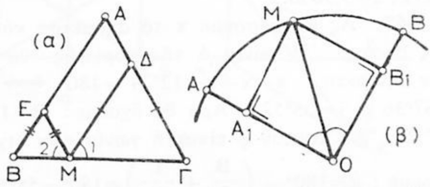
435. Ὅπως εἶναι εὔκολο νὰ ὁδηγηθοῦμε ἀπὸ τὸ σχέδιο (β) τῆς ἄσκ. 430 βρίσκομε : ἐσωτερικὴ γωνία $\widehat{B} = 180^0 - 132^0 = 48^0$, γωνία τῆς βάσης $\widehat{\Gamma} = \widehat{B} = 48^0$ καὶ γωνία τῆς κορυφῆς $A = 180^0 - (2 . 48^0) = 180^0 - 96^0 = 84^0$.

436. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α) : Ἄς εἶναι Δ΄ καὶ Ε΄ τὰ μίσα τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, Δ΄Ζ καὶ Ε΄Η οἱ ἀποστάσεις τους ἀπὸ τὴ βάση ΒΓ. Ἔχομε : α) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΒΔ' καὶ ΗΓΕ' ἔχουν ἴσες τὶς ὑποτείνουσές τους Δ'Β καὶ Ε'Γ (μισὰ τῶν ΑΒ=ΑΓ) κα' τὶς ὀξεῖες γωνίες τους $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ (τῆς βάσης τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου). β) Τὰ ἴδια ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο Αδ τῆς γωνίας $\widehat{A}$ τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ.



437. Σύμφωνα μὲ τὴν κατασκευὴ τοῦ παραπάνω σχήματος (β), τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΒ' καὶ ΑΓΓ' εἶναι ἴσα, γιατί ; α) ἔχουν τὶς ὑποτείνουσές τους ΑΒ=ΑΓ καὶ τὴν ὀξεία γωνία $\widehat{A}$ κοινὴ καὶ στὰ δυό, ἑπομένως ἀπέναντι ἀπὸ τὴν κοινὴ γωνία $\widehat{A}$ θὰ ἔχουμε ἴσες τὶς κάθετες πλευρὲς ΒΒ' καὶ ΓΓ' ποὺ εἶναι τὰ δυὸ ὕψη τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. β) Μιὰ ἀναστροφὴ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ πάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας του Αδ θὰ ἀντιστοιχίση τὸ Β μὲ τὸ Γ καὶ τὸ Β' μὲ τὸ Γ' (ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν στὰ Β' καὶ Γ') ἑπομένως καὶ τὸ ὕψος ΒΒ' μὲ τὸ ΓΓ' ποὺ θὰ εἶναι ἴσα σὰν ἀντίστοιχα στὴν ἀξονικὴ συμμετρία.

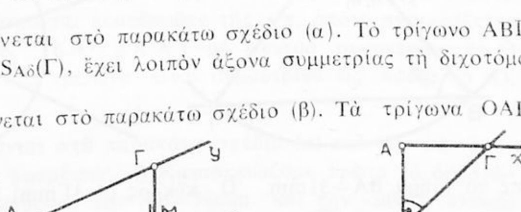
438 Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΒΜ καὶ ΔΜΓ εἶναι ἰσοσκελῆ ($\widehat{M_1}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}\Rightarrow\widehat{M_1}=\widehat{\Gamma}$ καὶ γιὰ ὅμοιο λόγο $\widehat{M_2}=\widehat{B}$), ἑπομένως ἀντικαθιστῶντας στὴν περίμετρο τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΜΔ, τὴν πλευρὰ ΜΕ μὲ τὴν ΕΒ καὶ τὴ ΜΔ μὲ τὴ ΔΓ ἔχομε : $AE+EM+M\Delta+\Delta A=AE+EB+\Gamma\Delta+\Delta A=AB+A\Gamma$.



439. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Τὸ ὅλο σχῆμα ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεία ΟΜ. Μιὰ ἀναστροφὴ του λοιπὸν πάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας θὰ ἀντιστοιχίση τὶς ἀποστάσεις MA_1 καὶ MB_1 ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν στὰ σημεῖα A_1 καὶ B_1. Στὸ ἴδιο συμπέρασμα φτάνομε καὶ ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων A_1OM καὶ B_1OM ποὺ ἔχουν κοινὴ ὑποτείνουσα τὴν ΟΜ καὶ τὶς ὀξεῖες γωνίες τους στὸ Ο ἴσες (ἐπίκεντρες ἴσων τόξων).

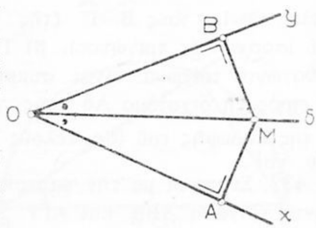
440. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι $B=S_{A\delta}(\Gamma)$, ἔχει λοιπὸν ἄξονα συμμετρίας τὴ διχοτόμο τῆς Α',

441. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (β). Τὰ τρίγωνα ΟΑΓ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἴσα : α) γιατὶ ἔχουν ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρά τους, τὴν ΟΑ=ΟΒ, καὶ μιὰ ὀξεία γωνία, στὸ Ο, κατακορυφή. β) Τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς



τὸ σημεῖο Ο ποὺ εἶναι κέντρο συμμετρίας τῶν παραλλήλων ἡμιευθειῶν. Ἑπομένως $A=S_0(B)$ καὶ $\Gamma=S_0(\Delta)\Rightarrow$ τργ$O A \Gamma=S_0(O B \Delta)\Rightarrow$ τργ$O A \Gamma=$ τργ$O B \Delta$.

442. Σύμφωνα μὲ τὴν κατασκευὴ τοῦ παραπλεύρως σχεδίου οἱ δυὸ ἀποστάσεις MA καὶ MB ἀντιστοιχίζονται στὴ συμμετρία ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο Οδ καὶ ἕνεκα τῶν ὀρθῶν γωνιῶν $\widehat{A}$ καὶ $\widehat{B}$. Τὸ ἴδιο συμπέρασμα βγαίνει καὶ ἀπὸ τὴ σύγκριση τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων OAM καὶ OBM (κοινὴ ὑποτείνουσα καὶ μιὰ ὀξεία γωνία ἴση (ἕνεκα τῆς διχοτόμου Οδ).

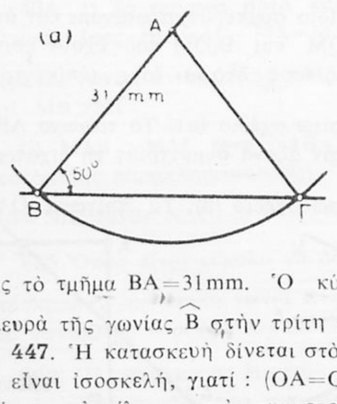


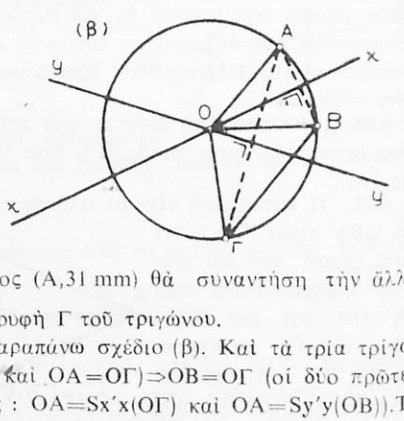
443. Ἡ ἴδια κατασκευὴ τῆς ἄσκησης 424 ἀφοῦ πρῶτα κατασκευάσουμε τὸ τεταρτοκύκλιο.

444. Ἂς ὀνομάσουμε x τὸ μῆκος τῆς βάσης. Τότε κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς θὰ ἔχῃ μῆκος $3x-3{,}54$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση : $x+(2x-3{,}54)+(2x-3{,}54)=26{,}67$. Εἶναι : $x+2x-3{,}54+2x-3{,}54=26{,}67 \Longleftrightarrow 5x-7{,}08=26{,}67 \Longleftrightarrow 5x=26{,}67+7{,}08=33{,}64 \Rightarrow x=33{,}75:5=6{,}75$ m. Ἀφαιρώντας ἀπὸ τὴν περίμετρο 26,67 τὴ βάση 6,75 ἔχομε : $26{,}67-6{,}75=19{,}92$, ἄθροισμα τῶν δυὸ ἴσων πλευρῶν, ποὺ καθεμιὰ θὰ ἔχῃ μῆκος: $19.92:2=9{,}96$ m.

445. Ἂς ὀνομάσουμε x τὸ ἀπόμετρο κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς γωνίες B καὶ Γ τῆς βάσης. Ἡ γωνία A τῆς κορυφῆς θὰ εἶναι $x+12^{0}24'$. Λύνομε λοιπὸν τὴν ἐξίσωση : $x+x+x+12^{0}24'=180^{0} \Longleftrightarrow 3x=180^{0}-12^{0}24'=167^{0}36' \Rightarrow x=(167^{0}36'):3=55^{0}52'$. Ἄρα θὰ ἔχουμε : $B=\Gamma=55^{0}52'$ καὶ $A=55^{0}\ 52'+12^{0}24'=68^{0}16'$. Ἂν λοιπὸν φ εἶναι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν B καὶ Γ, θὰ ἔχουμε : $\varphi=180^{0}-\left(\frac{B}{2}+\frac{\Gamma}{2}\right)=180^{0}-55^{0}52'=124^{0}\ 8'$.

446. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α) μὲ AB=31 mm: Κατασκευάζομε πρῶτα τὴ γωνία $B=50^{0}$ καὶ παίρνομε πάνω στὴ μιὰ πλευρά

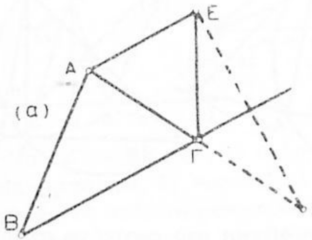


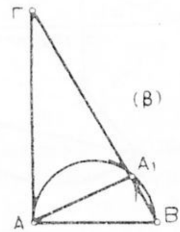


της τὸ τμῆμα BA=31mm. Ὁ κύκλος (A,31 mm) θὰ συναντήση τὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς γωνίας $\widehat{B}$ στὴν τρίτη κορυφὴ Γ τοῦ τριγώνου.

447. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Καὶ τὰ τρία τρίγωνα εἶναι ἰσοσκελῆ, γιατί : $(OA=OB$ καὶ $OA=O\Gamma)\Rightarrow OB=O\Gamma$ (οἱ δύο πρῶτες ἰσότητες ὀφείλονται στὶς συμμετρίες : $OA=S_{x'x}(O\Gamma)$ καὶ $OA=S_{y'y}(OB)$). Τὸ ζητούμενο κέντρο εἶναι τὸ Ο, ἐπειδή : $OA=OB=O\Gamma$.

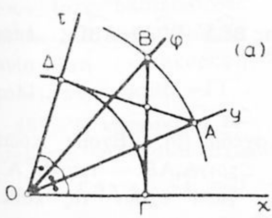
448. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Ἔχομε : ΓΔ=ΓΑ καὶ ΓΕ=ΓΔ (ἕνεκα τῆς συμμετρίας)⇒ΓΑ=ΓΕ, ἑπομένως τὸ τρίγωνο ΓΑΕ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴ Γ.

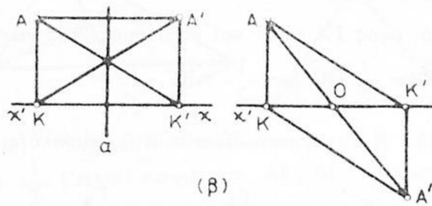




449. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπλεύρως σχέδιο (β) : μὲ τὰ ἀπόμετρα μήκους στὸ μισὸ τοποθετοῦμε τὴν πλευρὰ ΑΒ καὶ κατασκευάζομε μὲ ἕνα ἀπὸ τοὺς γνωστούς μας τρόπους τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο A_1AB (ὑποτείνουσα ΑΒ). Ἡ προέκταση τῆς BA_1 καὶ ἡ $AΓ \perp AB$ προσδιορίζουν μὲ τὴν τομή τους τὴν τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητούμενου τριγώνου.

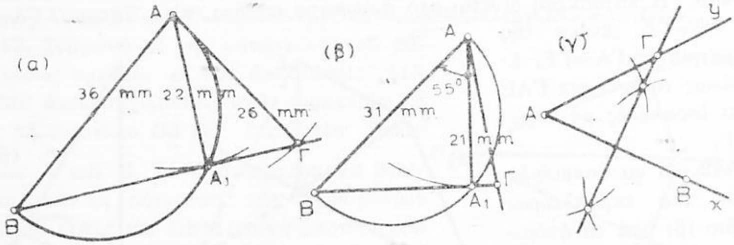
450. Ἔχομε ὅτι : ΟΑ=ΟΒ, ΟΓ=ΟΔ, $\widehat{ΓΟΒ}=\widehat{ΑΟΔ}$⇒τριγΓΟΒ=τριγΑΟΔ⇒ΓΒ=ΑΔ (βλέπε παρακάτω σχέδιο α').





451. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Ὑπάρχουν δυὸ περιπτώσεις : α) τὰ σημεῖα Α καὶ Α' βρίσκονται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο, ὁπότε σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιο ΑΑ'Κ'Κ, στὸ ὁποῖο τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΑ'Κ καὶ ΑΑ'Κ' εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν τὴν κάθετη πλευρὰ ΑΑ' κοινὴ καὶ τὴν Α'Κ'=ΑΚ. (Ἐξ ἄλλου τὰ δυὸ αὐτὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας **α** τοῦ ὀρθογωνίου μέ : $A'=S_α(A)$ καὶ $K=S_α(K')$). β) Τὰ σημεῖα Α καὶ Α' βρίσκονται ἑκατέρωθεν τῆς x'x, ὁπότε σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ΑΚΑ'Κ' (ΚΑ=∥Κ'Α') μὲ κέντρο συμμετρίας τὸ Ο (τομὴ ΑΑ' μὲ ΚΚ') καὶ τὰ δυὸ τρίγωνα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο, ἑπομένως ἴσα.

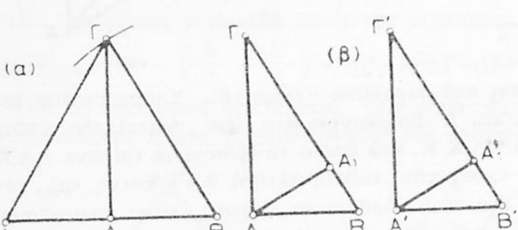
452. Οἱ κατασκευὲς δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια (α) καὶ (β) μὲ ἀπόμετρα μήκους τὰ μισὰ τῶν δοσμένων. i) Κατασκευάζομε πρῶτα τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AA_1B μὲ ὑποτείνουσα τὴν ΑΒ=36mm καὶ τὴν κάθετη πλευρὰ AA_1=22mm. Ὁ κύκλος (Α, 26mm) τέμνει τὴν ἡμιευθεία BA_1 στὴν τρίτη κορυφὴ Γ τοῦ ζητούμενου τριγώνου. ii) Κατασκευάζομε τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο AA_1B, μὲ ὑποτείνουσα τὴν ΑΒ=31mm καὶ τὴν κάθετη πλευρὰ AA_1=21mm, καὶ τὴ γωνία $\widehat{A}=55^0$. Ἡ προέκταση τῆς BA_1 στὴν τομή της μὲ τὴν ἄλλη πλευρὰ τῆς $\widehat{A}$ ὁρίζει τὴν τρίτη κορυφὴ Γ τοῦ τριγώνου.



453. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (γ). Τὸ σύνολο τῶν σημείων ποὺ ἀπέχουν ἴσες ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ Α καὶ Β εἶναι ἡ μεσοκάθετη μ τοῦ τμήματος ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιευθεία Αy στὸ ζητούμενο σημεῖο Γ καὶ θὰ εἶναι ΓΒ=ΓΑ.

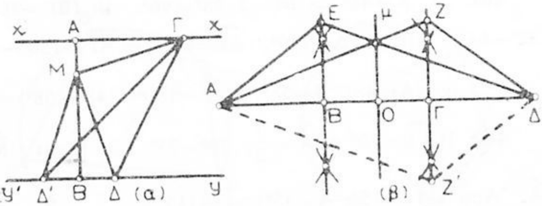
454. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α) : i) (ΒΓ = 2ΑΒ καὶ ΑΔ=ΑΒ) ⇒ ΒΓ=ΒΔ. Ἐπίσης $\Delta = S_{AB}(B)$ ⇒ ΒΓ=ΓΔ. Τὸ τρίγωνο λοιπὸν ΒΓΔ εἶναι ἰσόπλευρο. ii) Στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ εἶναι $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\widehat{\Delta}=60^0$ καὶ τὸ ὕψος ΓΑ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας $\widehat{B\Gamma\Delta}$ ($\widehat{B\Gamma\Delta}=\widehat{AB\Gamma}$), ἐπομένως $\widehat{\Gamma B}=\frac{1}{2}.\ \widehat{B\Gamma\Delta}=\frac{1}{2}\ \widehat{AB\Gamma}$.

455. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (β). Ἔχομε πρῶτα: τριγA_1AB = τργ $A_1'A'B'$, γιατὶ ἔχουν τὶς κάθετες πλευρές τους ἴσες μία μὲ μία, ἐπομένως καὶ οἱ γωνίες $\widehat{B'}=\widehat{B}$ καὶ τὰ συμπληρώματά τους $\widehat{\Gamma'}=\widehat{\Gamma}$. Καὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα λοιπὸν $A_1'A'\Gamma$ = $A_1A\Gamma$, γιατὶ ἔχουν ἀπὸ μιὰ κάθετη πλευρὰ ἴση καὶ τὴν ἀπέναντί της γωνία ἴση ($A_1'A'=A_1A$ καὶ $\widehat{\Gamma'}=\widehat{\Gamma}$). Οἱ ἑνώσεις τῶν δύο ζευγῶν τῶν ἴσων τριγώνων ἀποτελοῦν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒΓ ποὺ εἶναι συνεπῶς ἴσα.



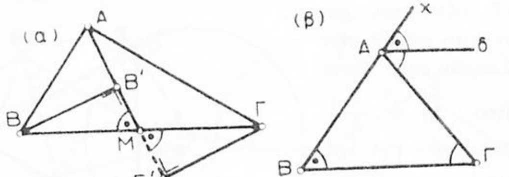
456. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΜΓ=ΒΔΜ, γιατὶ ἔχουν τὶς κάθετες πλευρές τους ἴσες μιὰ μὲ μιά, ἐπομένως ἔχουν ἴσες ὑποτείνουσες ΜΓ=ΜΔ. Τὸ τρίγωνο λοιπὸν ΜΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Τὰ ἴδια συμβαίνουν καὶ ἂν πάρουμε τὸ τμῆμα ΒΔ΄ συμμετρικὸ τοῦ ΒΔ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΑΒ. Ἔχομε πάλι τργΑΜΓ = τργ ΒΔΜ, ΜΓ = ΜΔ΄ καὶ τρίγωνο ΜΓΔ΄ ἰσοσκελές.

457. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (β). i) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΕ=ΓΔΖ, γιατὶ ἔχουν ἴσες μία μὲ μία τὶς κάθετες πλευρές τους (οἱ



μεσοκάθετες τῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΒΔ περνοῦν ἀπὸ τὰ μέσα τους Β καὶ Γ). ii) Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΓΑΖ = ΒΔΕ, γιατὶ ἔχουν τὶς κάθετες πλευρές του ΓΑ=ΒΔ καὶ ΓΖ =ΒΑ. Οἱ ἴδιες συγκρίσεις γίνονται ἂν πάρουμε τὸ ΓΖ′ = ΒΕ πρὸς τὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδο. Στὰ ἴδια συμπεράσματα καταλήγουμε ἀμεσότερα, ἂν προσέξουμε τὴν ἀξονικὴ συμμετρία τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ὡς πρὸς τὴ μεσοκάθετη μ τοῦ τμήματος ΑΔ ποὺ εἶναι καὶ τοῦ ΒΓ μεσοκάθετη. Ὅταν τὸ Ζ′ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὴν εὐθεία ΑΔ μεταβαίνουμε σὲ δεύτερη ἀξονικὴ συμμετρία καὶ καταλήγουμε μεταβατικῶς στὰ ἴδια συμπεράσματα: τργΑΒΕ=τργΓΔΖ=τργ ΓΔΖ′ καὶ τργΑΕΔ=τργ ΓΖΔ=τργΓΖ′Δ.

458. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα Β′ΒΜ καὶ Γ′ΓΜ εἶναι ἴσα, γιατὶ ἔχουν ἴσες ὑποτείνουσες ΒΜ = ΜΓ καὶ μιὰ ὀξεία γωνία ἴση (κατακορυφὴ στὸΜ), ἑπομένως ΒΒ′=ΓΓ′.

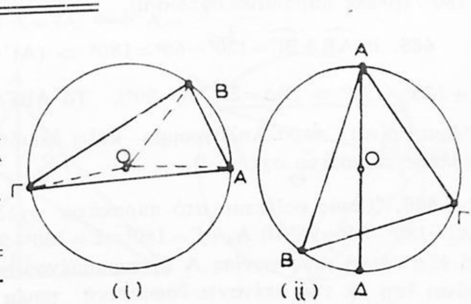


459. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Ἔχομε τὶς συνεπαγωγές: ΑΒ = ΑΓ ⇒ $\widehat{\Gamma}=\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma A x}=\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=2\widehat{\Gamma}$ ⇒ $\frac{1}{2}\widehat{\Gamma A x}=\widehat{\Gamma A \delta}=\widehat{\Gamma}$ ⇒ Αδ ∥ ΒΓ. Ἀντίστροφα: ($\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ καὶ Αδ ∥ ΒΓ) ⇒ $\widehat{B}=\sphericalangle$ (ΑΔ,Αx) καὶ $\widehat{\Gamma}=\sphericalangle$ (ΑΓ, Αδ) ⇒ $\sphericalangle$ (Αδ, Αx) = $\sphericalangle$ (ΑΓ, Αδ).

21

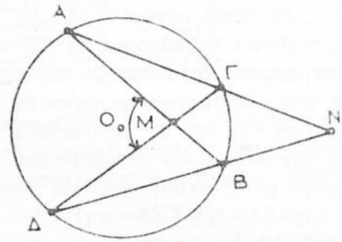
ΓΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΙΚΟΣ ΔΙΣΚΟΣ

460: i) $\overset{\frown}{AB}=48^0 \Rightarrow \widehat{\Gamma}=\frac{1}{2}\cdot 48^0=24^0$. ii) $\overset{\frown}{B\Gamma}=150^0 \Rightarrow \widehat{A}=\frac{1}{2}\cdot 150^0=75^0$. iii) $(\widehat{\Gamma}=24^0, \widehat{A}=75^0) \Rightarrow \widehat{B}=180^0-(\widehat{A}+\widehat{\Gamma})=180^0-(75^0+24^0)=81^0$. (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).

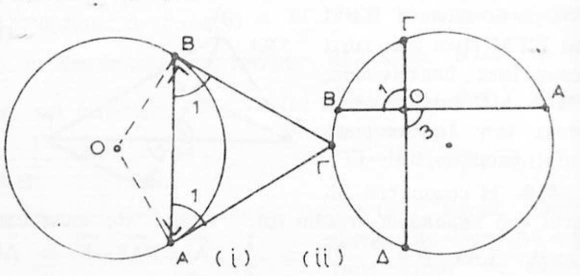


461. i) $\widehat{A}=48^0 \Rightarrow \overset{\frown}{B\Gamma}=2.48^0=96^0$. ii) $(\overset{\frown}{B\Gamma}=96^0,\ \overset{\frown}{B\Delta}=32^0) \Rightarrow \overset{\frown}{\Delta\Gamma}=96^0-32^0=64^0$. iii) $(\overset{\frown}{A\Gamma\Delta}=180^0,\ \overset{\frown}{\Delta\Gamma}=64^0) \Rightarrow \overset{\frown}{A\Gamma}=180^0-64^0=116^0 \Rightarrow \widehat{B}=\frac{1}{2}\,.\,116^0=58^0$. iv) $(\widehat{A}=48^0,\ \widehat{B}=58^0) \Rightarrow \widehat{\Gamma}=180^0-(48^0+58^0)=74^0$.

462. i) $\overset{\frown}{\Gamma B}=70^0 \Rightarrow \widehat{A}=\frac{1}{2}.70^0=35^0$. ii) Εἶναι : $\widehat{M}=\widehat{A}+\widehat{\Gamma} \iff \widehat{\Gamma}=\widehat{M}-\widehat{A}$. Ἄρα : $(\widehat{M}=115^0,\ \widehat{A}=35^0) \Rightarrow \Gamma=115^0-35^0=80^0 \Rightarrow \overset{\frown}{A\Delta}=2.80^0=160^0$.iii) Ἀπόμετρο $\widehat{N}=\frac{1}{2}\ (160^0-70^0) = 45^0$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).



463. Ὅπως φαίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο i, ἡ γωνία ἐπαφῆς $\widehat{A}_1$ ἔχει ἀπόμετρο τὸ μισὸ ἀπόμετρο τοῦ τόξου ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Ὥστε εἶναι : $\widehat{A}_1 = \frac{1}{2}.120^0=60^0$. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι καὶ $\widehat{B}_1=60^0$. Ἄρα τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρο.

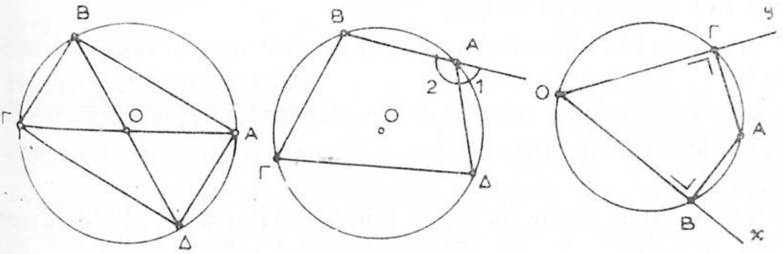


Ἂν εἶναι τόξο $\overset{\frown}{AB}=60^0 \Rightarrow \widehat{A}_1=30^0=\widehat{B}_1 \Rightarrow \widehat{\Gamma}=180^0-(30^0+30^0)=120^0$.

464. Κατὰ τὰ γνωστά : ἀπόμετρο $\widehat{O}_1=\frac{1}{2}$. ἀπόμετρο $(\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{A\Delta})$ καὶ ἀπόμετρο $O_3 = \frac{1}{2}$ ἀπόμετρο $(\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{A\Delta})$. Ἄρα ἀπόμετρο (O_1+O_3) = ἀπόμετρο $(\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{A\Delta})$. Ἀλλά : ἀπόμετρο $(O_1+O_3)=180^0$. Ἄρα ἀπόμετρο : $\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{A\Delta}=180^0$. (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii).

465. i) $\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{B\Gamma}=120^0+60^0=180^0 \Rightarrow (A\Gamma=2R,\ \widehat{\Delta}=90^0)$. ii) $\overset{\frown}{B\Gamma}+\overset{\frown}{\Gamma\Delta}=60^0+120^0=180^0 \Rightarrow (B\Delta=2R,\ \widehat{A}=90^0)$. Τὸ ΑΒΓΔ ἔχει κέντρο συμμετρίας τὸ Ο. Ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμο καί, ἐπειδὴ $\widehat{A}=90^0$, θὰ εἶναι ὀρθογώνιο· (βλέπε παρακάτω σχέδιο i).

466. Ὅπως φαίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο ii εἶναι : i) $\widehat{A}_1+\widehat{A}_2=180^0 \Rightarrow A_2=180^0-84^0=96^0$.ii) $A_2+\Gamma=180^0 \Rightarrow \Gamma=180^0-96^0=84^0$. Ἀπὸ αὐτὸ συνάγεται ὅτι: ἡ ἐξωτερικὴ μιᾶς γωνίας **Α** ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπέναντι ἐσωτερικὴ γωνία **Γ** τοῦ τετραπλεύρου. Γιὰ τὶς

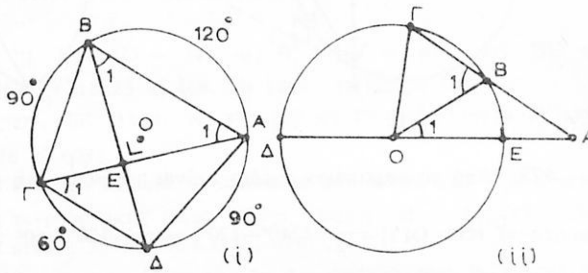


(i) (ii) (iii)

γωνίες $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}$ μποροῦμε νὰ ποῦμε μόνο ὅτι ἔχουν ἄθροισμα 180^0.

467. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο iii. Ἔχομε ὅτι : $(\widehat{B}=90^0, \widehat{\Gamma}=90^0) \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{O}+\widehat{A}=180^0$. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ ἀπέναντι γωνίες του εἶναι παραπληρωματικὲς τὸ τετράπλευρο ἐγγράφεται σὲ κύκλο.

468. Ἔχομε ὅτι : i) $(\widehat{AB}=120^0, \widehat{B\Gamma}=90^0, \widehat{\Gamma\Delta}=60^0) \Rightarrow \widehat{\Delta A}=360^0-(120^0+90^0+60^0)=90^0$. ii) $(\widehat{B\Gamma}=90^0, \widehat{\Delta A}=90^0) \Rightarrow \widehat{B\Gamma}=\widehat{\Delta A} \Rightarrow \widehat{\Gamma_1}=\widehat{A_1} \Rightarrow AB \parallel \Gamma\Delta$. Ἄρα τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ εἶναι τραπέζιο (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).

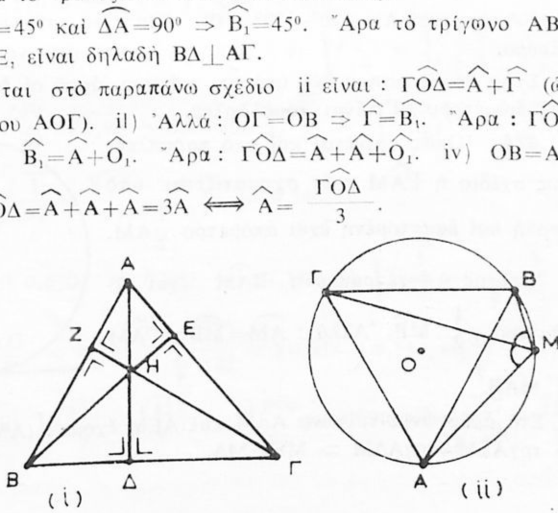


iii) $\widehat{B\Gamma}=\widehat{\Delta A} \Rightarrow$ χορΒΓ=χορΔΑ. Ἄρα τὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.

iv) $\widehat{B\Gamma}=90^0 \Rightarrow \widehat{A_1}=45^0$ καὶ $\widehat{\Delta A}=90^0 \Rightarrow \widehat{B_1}=45^0$. Ἄρα τὸ τρίγωνο ΑΒΕ εἶναι ὀρθογώνιο στὸ Ε, εἶναι δηλαδὴ $B\Delta \perp A\Gamma$.

469. Ὅπως φαίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο ii εἶναι : $\Gamma\widehat{O}\Delta=\widehat{A}+\widehat{\Gamma}$ (ὡς ἐξωτερικὴ τοῦ τριγώνου ΑΟΓ). ii) Ἀλλά : $O\Gamma=OB \Rightarrow \widehat{\Gamma}=\widehat{B_1}$. Ἄρα : $\Gamma\widehat{O}\Delta=\widehat{A}+\widehat{B_1}$. iii) Ἀλλά : $\widehat{B_1}=\widehat{A}+\widehat{O_1}$. Ἄρα : $\Gamma\widehat{O}\Delta=\widehat{A}+\widehat{A}+\widehat{O_1}$. iv) $OB=AB \Rightarrow \widehat{O_1}=\widehat{A}$. Ἄρα : $\Gamma\widehat{O}\Delta=\widehat{A}+\widehat{A}+\widehat{A}=3\widehat{A} \iff \widehat{A}=\dfrac{\Gamma\widehat{O}\Delta}{3}$.

470. Ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο i φαίνεται ὅτι καθένα ἀπὸ τὰ τετράπλευρα ΒΔΗΖ, ΓΔΗΕ καὶ ΑΖΗΕ ἔχει δυὸ ἀπέναντι γωνίες του ὀρθὲς καί, συνεπῶς, παραπληρωματικές.

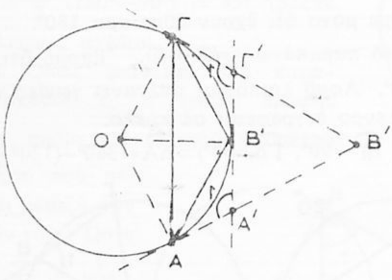


Ἄρα εἶναι ἐγγράψιμα σὲ κύκλους.

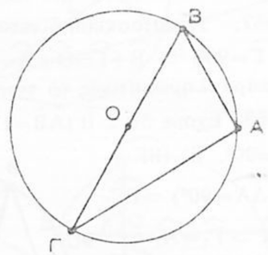
471. Εἶναι : $\widehat{ΒΓ}=\widehat{ΓΑ}=120^0 \Rightarrow \widehat{ΒΜΓ}=\widehat{ΓΜΑ}=60^0$ (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii).

472. Ὅπως φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο i ἔχομε : $\widehat{ΑΒ}=60^0 \Rightarrow \widehat{Γ}=30^0$; $\widehat{ΒΓ}=\widehat{ΑΓ}-\widehat{ΑΒ}=120^0-60^0=60^0 \Rightarrow \widehat{Α}=30^0$, ἄρα καί : $\widehat{Β}=180^0-(30^0+30^0)=120^0$.

Ἐπίσης (βλέπε σχέδιο ii) εἶναι : $(\widehat{ΑΒ}=60^0,\ \widehat{ΑΓ}=120^0) \Rightarrow \widehat{ΒΓ}=60^0+120^0=180^0 \Rightarrow ΒΓ=2R \Rightarrow \widehat{Α}=90^0$, $\widehat{ΑΒ}=60^0 \Rightarrow \widehat{Γ}=30^0$, $\widehat{ΑΓ}=120^0 \Rightarrow \widehat{Β}=60^0$.



(i)

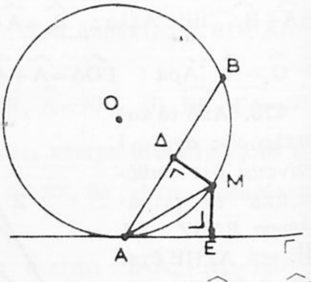


(ii)

473. Ἀπὸ τὸ παραπάνω σχέδιο i εἶναι : $B'=\frac{1}{2}$ [μὴ κυρτὴ $\sphericalangle(ΟΑ,ΟΓ)$— κυρτὴ $\sphericalangle(ΟΑ, ΟΓ)$] $=\frac{1}{2}.(240^0-120^0)=\frac{1}{2}.120^0=60^0$ (γωνία ἐφαπτομένων) καὶ $\widehat{A_1}'=\frac{1}{2}$ [μὴ κυρτὴ $\sphericalangle(ΟΑ, ΟΒ)$—κυρτὴ $\sphericalangle(ΟΑ, ΟΒ)$]$=\frac{1}{2}(300^0-60^0)=120^0$, ἄρα καὶ $Α'=180^0-120^0=60^0$. Ὥστε τὸ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρο.

Στὴν περίπτωση ii δὲν ὑπάρχει τρίγωνο, ἀφοῦ οἱ ἐφαπτόμενες στὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου ΒΓ εἶναι παράλληλες.

474. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπλεύρως σχέδιο ἡ $\widehat{ΓΑΜ}$ πού σχηματίζεται ἀπὸ χορδὴ καὶ ἐφαπτομένη ἔχει ἀπόμετρο $\frac{1}{2}\widehat{ΑΜ}$.



Ἐπίσης ἡ ἐγγεγραμμένη $\widehat{ΒΑΜ}$ ἔχει ἀπόμετρο $\frac{1}{2}\widehat{ΜΒ}$. Ἀλλά : $\widehat{ΑΜ}=\widehat{ΜΒ} \Rightarrow \widehat{ΓΑΜ}=\widehat{ΜΑΒ}$.

Στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΜ καὶ ΑΕΜ ἔχομε : $(ΑΜ=ΑΜ,\ \widehat{ΓΑΜ}=\widehat{ΜΑΒ}) \Rightarrow$ τργΑΕΜ=τργΑΔΜ $\Rightarrow$ ΜΕ=ΜΔ.

22

Η ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

475. i) $\sqrt{5^4 \cdot 7^2} = 5^2 \cdot 7$ ii) $\sqrt{3^6 \cdot 5^4} = 3^3 \cdot 5^2$, iii) $\sqrt{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2} = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, iv) $\sqrt{3600} = \sqrt{36 \cdot 100} = 6 \cdot 10 = 60$, v) $\sqrt{1440000} = \sqrt{12^2 \cdot 100^2} = 12 \cdot 100 = 1200$, vi) $\sqrt{81000000} = \sqrt{9^2 \cdot 10^6} = 9 \cdot 10^3 = 9000$, vii) $\sqrt{\frac{49}{144}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{144}} = \frac{7}{12}$, viii) $\sqrt{0{,}0081} = \sqrt{\frac{81}{10^4}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{10^4}} = \frac{9}{10^2} = 0{,}09$.

476. Τὸ ζητούμενο σύνολο εἶναι: $\{17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24\}$.

477. Εἶναι ἡ 6,8, διότι ἡ κατὰ προσέγγιση 0,1 ἀπὸ τὰ κάτω τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ εἶναι 6,7.

478. $\sqrt{5776} = 76$. ii) $\sqrt{119025} = 345$, iii) $\sqrt{770884} = 878$, iv) $733 < \sqrt{538000} < 734$, v) $467 < \sqrt{218723} < 468$, vi) $186 < \sqrt{34600} < 187$.

480. i) 505, ii) 2809, iii) 31360, iv) 175616, v) $371 < \sqrt{138129} < 372$, vi) $6081 < \sqrt{37015896} < 6082$.

481. Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τὸ ὑπόλοιπο ποὺ μένει στὸ τέλος κατὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς τετραγωνικῆς ρίζας. Ἔτσι, ἐπειδὴ $181 < \sqrt{32847} < 182$ μὲ ὑπόλοιπο 86, θὰ εἶναι: $32847 - 86 = 32761 = 181^2$.

482. Ἔχομε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $3x \cdot 5x = 766140 \iff 15x^2 = 766140 \iff x^2 = 766140 : 15 = 51076 \iff x = \sqrt{51076} = 226$.

483. i) 8,66 ii) 21,16, iii) 30,25, iv) 78,97, v) $\sqrt{\frac{7}{8}} = \sqrt{\frac{7 \cdot 8}{8 \cdot 8}} = \frac{\sqrt{56}}{8} = \frac{7{,}48}{8} \sim 0{,}93$ vi) $\sqrt{\frac{19}{20}} = \sqrt{0{,}95} \sim 0{,}97$ vii) $\sqrt{\frac{85}{6}} = \sqrt{\frac{85 \cdot 6}{6^2}} = \frac{\sqrt{510}}{6} = \frac{22{,}58}{6} \sim 3{,}76$ viiii) $\sqrt{\frac{1}{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{4{,}12}{17} \sim 0{,}24$

484. i) 3,162, ii) 0,610, iii) 0,053, iv) 81,110, v) $\sqrt{\frac{3}{125}} = \sqrt{\frac{3}{5^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^4}} = \frac{\sqrt{15}}{25} = \frac{3{,}873}{25} \sim 0{,}154$ ἢ $\sqrt{\frac{3}{125}} = \sqrt{0{,}024} \sim 0{,}154$, vi) $\sqrt{\frac{10}{7}} = \frac{\sqrt{70}}{7} \sim \frac{8{,}367}{7} \sim 1{,}195$, vii) $\sqrt{\frac{123}{9}} = \frac{\sqrt{123}}{3} \sim \frac{11{,}090}{3} \sim 3{,}696$, vii) $\sqrt{\frac{17}{12}} = \frac{\sqrt{204}}{12} \sim \frac{14{,}282}{12} \simeq 1{,}190$.

485. i) $\sqrt{\dfrac{361}{576}} = \dfrac{\sqrt{361}}{\sqrt{576}} = \dfrac{19}{24}$, ii) $\sqrt{\dfrac{324}{1225}} = \dfrac{18}{35}$ iii) $\sqrt{\dfrac{75}{108}} = \sqrt{\dfrac{25}{36}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \dfrac{5}{6}$, iv) $\sqrt{\dfrac{112}{175}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$, v) $\sqrt{\dfrac{288}{1458}} = \sqrt{\dfrac{288:18}{1458:18}} = \sqrt{\dfrac{16}{81}} = \dfrac{4}{9}$, vi) $\sqrt{\dfrac{2025}{3721}} = \dfrac{45}{61}$, vii) $\sqrt{\dfrac{3072}{7203}} = \sqrt{\dfrac{3072:3}{7203:3}} = \sqrt{\dfrac{1024}{2401}} = \dfrac{32}{49}$, viii) $\sqrt{\dfrac{2178}{3042}} = \sqrt{\dfrac{2172:18}{3042:18}}\sqrt{\dfrac{121}{169}} = \dfrac{11}{13}$.

486. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\dfrac{23}{37}$ εἶναι ἀνάγωγο, κάθε κλάσμα τῆς κλάσης του θὰ εἶναι ἴσο μὲ $\dfrac{23x}{37x}$ $(x \in \Phi)$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $23x.37x = 41699 \Longleftrightarrow 851x^2 = 41699 \Longleftrightarrow x^2 = 41699 : 851 = 49 \Longleftrightarrow x = \sqrt{49} = 7$. Τὸ ζητούμενο λοιπὸν κλάσμα εἶναι: $\dfrac{7.23}{7.37} = \dfrac{161}{259}$ Ἐπαλήθευση. $259.161 = 41699$.

487. Γνωρίζομε ὅτι τὰ τετράγωνα δυὸ διαδοχικῶν ἀριθμῶν διαφέρουν κατὰ τὸ ἄθροισμά τους. Ἂν λοιπὸν οἱ δυὸ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι x καὶ x+1 θὰ ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $2x+1 = 545 \Longleftrightarrow 2x = 545-1 \Longleftrightarrow x = 544 : 2 = 272$. Οἱ δυὸ λοιπὸν ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ **272** καὶ **273**.

488. Ἔχομε $\sqrt{5989} \sim 77$, μὲ προσέγγιση μονάδας ἀπὸ τὰ κάτω. Ἐξ ἄλλου $78^2 = 6084$ καὶ $6084 - 5989 \doteq 95$. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσουμε τὸν 95 στὸν 5989, θὰ ἔχουμε τὸν $5989 + 95 = 6084 = 78^2$. Ὁ 95 εἶναι ὁ μικρότερος, γιατὶ ἡ ἀπὸ τὰ κάτω τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγιση μονάδας εἶναι 77.

489. Ἂν 2x καὶ 2x+2 εἶναι οἱ δυὸ διαδοχικοὶ ἄρτιοι, θὰ ἔχουμε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $(2x+2)^2 - (2x)^2 = 428 \Longleftrightarrow 4x^2 + 8x + 4 - 4x^2 = 428 \Longleftrightarrow 8x + 4 = 428 \Longleftrightarrow 8x = 424 \Longleftrightarrow x = 424:8 = 53$. Οἱ δυὸ λοιπὸν ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι $2.53 = 106$ καὶ 108.

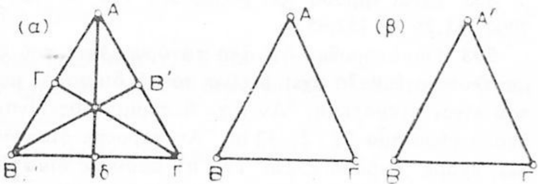
490. Τὸ μεγαλύτερο ὑπόλοιπο θὰ εἶναι τὸ $36 = 6^2$. Ἑπομένως τὸ ζητούμενο σύνολο θὰ εἶναι: $\{37.1+1,\ 37.2+4,\ 37.3+9,\ 37.4+16,\ 37.5+25,\ 37.6+36\}$ ἢ $\{38, 78, 120, 164, 210, 258\}$.

491. Ἕνας ἀριθμὸς θὰ λήγῃ σέ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ἢ 0. Τὸ τετράγωνό του θὰ λήγῃ στὸ ψηφίο ποὺ λήγει τὸ τετράγωνο τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων του, δηλαδὴ σὲ 1, 4, 9, 6, 5 ἢ ἄρτιο ἀριθμὸ μηδενικῶν καὶ ποτὲ σὲ 2, 3, 7 ἢ 8.

492. Ὑποθέτομε τὸ δοσμένο $\dfrac{\alpha}{\beta}$ κλάσμα ἀνάγωγο, ὁπότε μ.κ.δ. $(\alpha,\beta) = 1$. Σύμφωνα μὲ τὴν ὑπόθεση, θὰ πρέπει $\alpha\beta = \gamma^2 \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha\beta}{\beta^2} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2} \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \left(\dfrac{\gamma}{\beta}\right)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\gamma}{\beta}$.

493. Τέτοιο κλάσμα θὰ ἔχῃ τὴ μορφὴ $\dfrac{\alpha}{9}$ μὲ περίοδο α μονοψήφιο τετράγωνο ἀριθμό. Μονοψήφιοι ὅμως τετράγωνοι ἀριθμοί εἶναι οἱ: 1, 4, 9, ἐπομένως οἱ δυὸ λύσεις εἶναι $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}$.

494. Ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὴν κατασκευὴ τοῦ παρακάτω σχεδίου (α), ὅπου $A\Gamma' = \Gamma'B$ καὶ $AB' = B'\Gamma$, τὰ τμήματα BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ ἔχουν τὰ ἄκρα τους συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας $A\delta$ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἐπομένως ἴσα. Στὸ ἴδιο συμπέρασμα φτάνομε καὶ μὲ τὴ σύγκριση τῶν τριγώνων ABB' καὶ $A\Gamma\Gamma'$ ποὺ ἔχουν τὴ γωνία τους $\widehat{A}$ κοινὴ καὶ τὶς πλευρὲς ποὺ τὴ σχηματίζουν ἀντιστοίχως ἴσες ($AB = A\Gamma$ καὶ $AB' = A\Gamma'$).



495. Ἂν εἶναι $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (παραπάνω σχέδιο (β)) τὰ δυὸ τρίγωνα μὲ τὶς βάσεις τους $B\Gamma = B'\Gamma'$ καὶ τὶς γωνίες τῆς κορυφῆς τους $\widehat{A} = \widehat{A'}$, τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν καὶ τὶς γωνίες τῶν βάσεών τους: $\widehat{B} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, θὰ εἶναι ἐπομένως ἴσα. Ἂν πάλι ἔχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{B'}$, θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$, θὰ εἶναι λοιπὸν πάλι ἴσα.

496. Εἶναι: $\kappa_1 = \frac{5}{8} . 40000 = 25000$ καὶ $\kappa_2 = 15000$ δρχ. Μὲ $x = 1$ ἔτος ἀπὸ τὶς ἀντίστοιχες ἐξισώσεις παίρνομε: $100\tau_1 = 25000 . 1 . 12 \Rightarrow \tau_1 = 3000$, $100\tau_2 = 15000 . 1 . 7 \Rightarrow \tau_2 = 1050$ δρχ. καὶ $\tau_1 + \tau_2 = 4050$ δρχ.

Κατὰ τὴ β′ περίπτωση θὰ ἔχουμε: $\tau = \frac{8}{9} . 4050 = 3600$ καὶ βρίσκομε ἀπὸ τῆν ἐξίσωση: $100 . 3600 = 40000 . 1 . \varepsilon \Rightarrow \varepsilon = 9\%_0$.

23

ΤΑ ΕΜΒΑΔΑ ΕΥΘ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

497. Τὸ κάθε πλακάκι ἔχει ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας $20 \times 30 = 600 cm^2$. Ἐπομένως μὲ τὰ 32 πλακάκια θὰ καλύψουμε ἐπιφάνεια $32.600 = 19200\ cm^2 = 1{,}92\ m^2$.

498. Τὸ χαλὶ ἔχει ἐπιφάνεια: $4.2{,}75\ m^2$ καὶ ἐπομένως ἀξία: $4.2{,}75.450 = 4950$ δρχ.

499. Ἐμβαδὸ γηπέδου: $212{,}3.108{,}5 = 23034{,}55\ m^2 = 23{,}03455$ στρέμματα $= 2{,}304355$ ha.

500. Κάθε πλάκα ἔχει ἐμβαδὸ ἐπιφάνειας: $0{,}50.0{,}30 = 0{,}15\ m^2$. Τὰ δυὸ πεζοδρόμια ἔχουν ἐπιφάνεια $2.1{,}5.245 = 735\ m^2$. Θὰ χρειασθοῦν λοιπὸν πλάκες: $735 : 0{,}15 = 4900$.

501. Ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ πλάτος τῶν 95 m τὸ 1,10 m τοῦ πλάτους τοῦ δρομίσκου καὶ ἀπομένει συνολικὰ πλάτος τῶν δυὸ κομματιῶν τοῦ λιβαδιοῦ 95–1,10 = 93,90 m. Ἔχομε λοιπὸν ὁλικὸ ἐμβαδὸ τῶν δυὸ κομματιῶν 93,90.180=16902 m² = 16,902 στρέμματα.

502. Εἶναι ἐμβαδὸ τοῦ χωραφιοῦ : 79a = 7900 m² καὶ ἑπομένως μῆκος 7900 : 51,75 ∼ 152,65 m.

503. Παρατηροῦμε ὅτι ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια περίμετρο μεγαλύτερο ἐμβαδὸ ἔχει ἐκεῖνο ποὺ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν δυὸ διαστάσεών του εἶναι μικρότερη. Ἂν π.χ. ἡ περίμετρος εἶναι 72 m, οἱ δυὸ διαστάσεις ἔχουν ἄθροισμα 72 : 2=32 m. Ἂν πάρουμε διαστάσεις 18 καὶ 14 (18+14=32), ἔχομε ἐμβαδὸ 252 m² ἐνῶ ἂν πάρουμε διαστάσεις μὲ μεγαλύτερη διαφορά, π.χ. 19.13, ἔχουμε ἐμβαδὸ 247 m². Τὸ μεγαλύτερο ἐμβαδὸ θὰ ἔχουμε στὶς ἴσες διαστάσεις : 16.16=256 m².

504. Πλάτος γηπέδου : 2304 : 65 ≃ 35,45 m. Περίμετρος : 2. (65+35,45) ∼ 200,90 m.

505. Κάθε μιὰ διάσταση θὰ ἐλαττωθῆ κατὰ 2,5+2,5=5 cm, ἑπομένως οἱ νέες διαστάσεις θὰ εἶναι 25 cm καὶ 15 cm καὶ τὸ ὀρθογώνιο θὰ ἔχη περίμετρο : 2.(25+15)=80 cm καὶ ἐμβαδό : 25.15=375 cm².

506. Ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι : 44.8 : 4=11,2 m καὶ ἑπομένως τὸ ἐμβαδό του : 11,2²=125,44 m².

507. Οἱ 8 στύλοι τῆς κάθε πλευρᾶς κλείνουν μῆκος ἀνάμεσα στοὺς δυὸ ἀκραίους : 7.4=28 m (7 διαστήματα μεταξὺ τῶν 8 πασάλων), ὅσο εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου. Ἔχομε λοιπὸν ἐμβαδό : 28²=784 m².

508. Ἐμβαδὸ τετραγώνου : 7921.100=792100 m² καὶ πλευρά : $\sqrt{792100}$= 890 m.

509. Εἶναι : 1280 τ. τ. π.χ. = 1280 $\times \frac{9}{16}$ =720m², $\alpha = \sqrt{720} \sim 26{,}83$ m καὶ 4α ∼ 4.26,83=107,32 m.

510. Ἐμβαδὸ τοῦ πρώτου : (180 : 4)²=45²=2025 m³, ὅσο καὶ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ δευτέρου. Πλάτος τοῦ δευτέρου : 2025 : 75=27 m.

511. Τὸ ἐλεύθερο μέρος τῆς αὐλῆς εἶναι ὀρθογώνιο μὲ πλάτος : 12–2.1,6 8,8 m καὶ μῆκος 12—1,6=10,4 m. Ἑπομένως θὰ ἔχη ἐμβαδό : 8,8.10,4= 91,52 m².

512. Τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο εἶναι τὸ μισὸ τοῦ ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις ΑΒ = 40 mm καὶ ΑΓ = 60 mm. Ἑπομένως ἔχει ἐμβαδό : $\frac{1}{2}$. 40.60 = 1200 mm² ἢ 12 cm².

513. Στὸ πρῶτο ἀριστερὰ ἔχομε ἐμβαδό : 4.(7.14)=392 mm². Στὸ μεσαῖο : 54.27—9.36=1134 mm². Στὸ τρίτο δεξιά, θὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου : 20.12=240 mm² τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων ὀρθογωνίων τριγώνων : $\frac{1}{2}$ (16.4+4.4+8.8+12.8)= $\frac{1}{2}$ (64+16+64+96) = 120 mm². Ἑπομένως τὰ ζητούμενο ἐμβαδὸ εἶναι : 240—120=120 mm².

514. Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ διπλασίου τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι : 2.1120=2240 dm². Ἂν τὸ μῆκος του εἶναι x, τὸ πλάτος του θὰ εἶναι $\frac{5}{7}$ x. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση : $\frac{5}{7}$ $x^2=2240 \Longleftrightarrow x^2=2240.\ \frac{7}{5}=448.7=3136 \Longleftrightarrow$ $x=\sqrt{3136}=56$. Οἱ κάθετες λοιπὸν πλευρὲς τοῦ τριγώνου ἔχουν μήκη : 56 dm ἡ μία καὶ $\frac{5}{7}$. 56=40 dm ἡ ἄλλη.

515. Εἶναι : $S=8{,}72.1{,}98=17{,}2656\ m^2$ (19,8 dm=1,98 m).

516. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν 36 ἴσων παραλληλογράμμων εἶναι: $36.(16.8)=4608\ mm^2=46{,}08\ cm^2$.

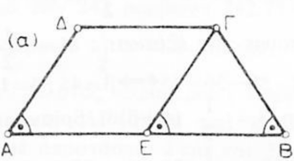
517. Εἶναι : $S=\frac{1}{2}.\ 52.66=26.66=1716\ mm^2=17{,}16\ cm^2$.

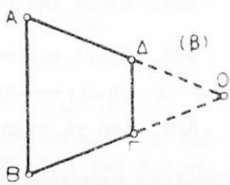
518. Θὰ ἔχομε : $S=\frac{1}{2}\ 105.(90+65)=\frac{1}{2}.\ \ 105.155=8137{,}50\ m^2$.

519. Ἔχομε : $\frac{1}{2}.\ 12.(\mathrm{B\Gamma})=132 \Longleftrightarrow (\mathrm{B\Gamma})=\frac{132}{6}=22$ cm.

520. Ἐμβαδὸ τοῦ τριγώνου = ἐμβ. ὀρθογωνίου = 30.24 = 720 m². Ἀπὸ τὴ σχέση $S=\frac{\beta.\upsilon}{2}$ ἔχουμε μὲ τὶς ἀντίστοιχες ἀντικαταστάσεις : $\frac{40\,\upsilon}{2}$ ἢ $20.\upsilon$ $=720 \Longleftrightarrow \upsilon=720:20=36$ m.

521. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο (α). Μὲ τὴ ΓΕ ∥ ΔΑ τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιο ΑΒΓΔ διαμερίζεται στὸ παραλληλόγραμμο ΑΕΓΔ καὶ τὸ τρίγωνο ΓΕΒ. Ἔχομε :

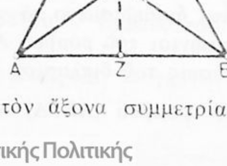




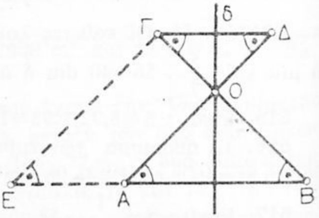
(ΕΓ=ΑΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ) ⇒ ΕΓ = ΒΓ ⇒ $\widehat{B}=\widehat{E}$. Ἀλλὰ ($\widehat{B}=\widehat{E}$ καὶ $\widehat{E}=\widehat{A}$) ⇒ $\widehat{B}=\widehat{A}$ (οἱ γωνίες $\widehat{A}=\widehat{E}$ ὡς ἀντίστοιχες τῶν παραλλήλων ΓΕ καὶ ΔΑ καθὼς τέμνονται ἀπὸ τὴν ΑΒ. Ἐπίσης καὶ οἱ δυὸ ἄλλες γωνίες $\widehat{\Delta}=\widehat{\Gamma}$, ὡς παραπληρώματα τῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{A}$ (ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά...).

522. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο (β). Ἐπειδή, σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ἄσκηση $\widehat{A}=\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta}=\widehat{\Gamma}$, ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒΔ εἶναι ἰσοσκελῆ, γιατὶ ἔχουν δυὸ γωνίες τους ἴσες.

523. Ἀπὸ τὴν παρακάτω κατασκευή, μὲ τὴν προέκταση τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν προκύπτουν ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ. (ἄσκηση 521 καὶ 522) μὲ κοινὴ κορυφὴ Ο καὶ τὶς βάσεις τους ΑΒ ∥ ΓΔ. Ἡ διχοτόμος ΟΖ τῆς γωνίας τῆς κοινῆς κορυφῆς Ο εἶναι κοινὸς ἄξονας συμμετρίας τῶν δυὸ τριγώνων καὶ συνεπῶς ἄξονας συμμετρίας τοῦ τραπεζίου ΑΒΓΔ (καὶ κοινὴ μεσοκάθετη τῶν βάσεών του). Τὸ κυρτὸ λοιπὸν ἰσοσκελὲς τραπέζιο ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεία ποὺ περνᾶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν βάσεών του. Οἱ διαγώνιοι του ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι τμήματα μὲ τὰ ἄκρα τους $A=S_{OZ}$ (Β) καὶ $\Gamma=S_{OZ}$ (Δ). Ἄρα εἶναι τμήματα ἴσα καὶ τέμνονται πάνω στὸν ἄξονα συμμετρίας.



524. Ἀπὸ τὴν παρακάτω κατασκευὴ βλέπομε ὅτι οἱ διασταυρούμενες μὴ παράλληλες πλευρὲς ΒΓ καὶ ΑΔ τοῦ κὴ κυρτοῦ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται στὴν κοινὴ κορυφὴ Ο δυὸ ἰσοσκελῶν τριγώνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ. (Ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἰσοσκελῆ βγαίνει ἀπὸ τὸ βοηθητικὸ παραλληλόγραμμο ΕΑΔΓ μὲ συνεπαγωγὲς ἀνάλογες τῆς ἄσκησης 521). Ἡ διχοτόμος λοιπὸν Οδ τῆς γωνίας τῆς κοινῆς κορυφῆς Ο εἶναι κοινὸς ἄξονας συμμετρίας τῶν δυὸ ἰσοσκελῶν τριγώνων καὶ συνεπῶς ἄξονας συμμετρίας τοῦ ἰσοσκελοῦς μὴ κυρτοῦ τραπεζίου.



525. Ἔχομε γιὰ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου: $S = \frac{1}{2}(213 + 612) \cdot 50 = 20625\ m^2 = 2{,}0625$ ha. Γιὰ τὴ λίπανσή του θὰ χρειαστοῦν $2{,}0625 \cdot 150 \simeq 309{,}375$ kg λίπασμα.

526. Ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου: $S = \frac{1}{2}(136+48) \cdot 106 = 9752\ m^2 = 9{,}752$ στρέμματα. Ἀπόδοση σὲ παραγωγὴ σιταριοῦ στὸ ἕνα στρέμμα: $3498 : 9{,}752 \simeq 358{,}695$ kg./στρ.

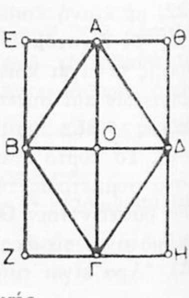
527. Ἔχομε τὴν ἐξίσωση: $28 = \frac{1}{2}(8+6) \cdot \upsilon$ ἢ $28 = 7\upsilon \Longleftrightarrow \upsilon = 28 : 7 = 4$m.

528. Ἔχομε νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση: $81 = \frac{1}{2}(9+\beta) \cdot 8$ ἢ $(9+\beta) \cdot 4 = 81 \Longleftrightarrow 36 + 4\beta = 81 \Longleftrightarrow 4\beta = 81 - 36 = 45 \Longleftrightarrow \beta = 45 : 4 = 11{,}25$ m.

529. Ἀπὸ τὴ σχέση $S = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)\upsilon$ βρίσκομε μὲ ἀντικατάσταση τῶν δοσμένων στοιχείων: $616 = \frac{1}{2}(3\beta+\beta) \cdot 28$ ἢ $616 = 4\beta \cdot 14 \Longleftrightarrow \beta = 616 : (4 \cdot 14) = 11$m. Ἄρα θὰ εἶναι καί: $3\beta = 33$ m.

530. Γιὰ τὸ πρῶτο, ἀριστερὰ ἔχομε: $S = \frac{1}{2} \cdot (60+36) \cdot 36 = 1728\ mm^2$. Γιὰ τὸ μεσαῖο: $S = \frac{1}{2} \cdot (45+15) \cdot 45 = 1350\ mm^2$. Γιὰ τὸ τελευταῖο δεξιά: $S = \frac{1}{2}(40+16) \cdot 24 = 672\ mm^2$.

531. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο. i) Ἐπειδὴ οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται κάθετα, θὰ τέμνωνται κάθετα καὶ οἱ παράλληλες πρὸς αὐτὲς ποὺ περνοῦν ἀπὸ τὶς κορυφὲς τοῦ ρόμβου καὶ σχηματίζουν συνεπῶς ὀρθογώνιο. ii) Τὸ ὀρθογώνιο ΕΓΗΘ ἔχει διαστάσεις ἴσες μὲ τὶς διαγωνίους τοῦ ρόμβου καὶ ἑπομένως ἐμβαδὸ διπλάσιο τοῦ ρόμβου (αὐτὸ φαίνεται καὶ ἀπὸ τὰ 8 ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ εἶναι διαμερισμένο τὸ ὀρθογώνιο ΕΖΗΘ). iii) Ἀφοῦ οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι ἴσες μὲ τὶς διαστάσεις τοῦ διπλασίου του ὀρθογωνίου ΕΖΗΘ, τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ρόμβου $(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2}(ΕΖΗΘ) = \frac{1}{2}(ΑΓ) \cdot (ΒΔ)$.



532. Τοποθετοῦμε πρῶτα τὴ διαγώνιό του ΑΓ=72 mm. Κατασκευάζομε τὴ μεσοκάθετή της καὶ παίρνομε πάνω σ'αὐτὴ ἀπὸ τὰ δυὸ μέρη τῆς τομῆς Ο τμήματα ΟΒ=ΟΔ=20 mm (ὥστε ΒΔ = 40 mm). Ἔχομε ἔτσι τὸ ζητούμενο ρόμβο ΑΒΓΔ μὲ ἐμβαδὸ $S=\frac{1}{2}\,72.40=1440$ mm².

533. Ἀκέραιοι ρόμβοι κατὰ μῆκος τῆς μεγάλης πλευρᾶς τῆς κουβέρτας 165 : 15=11. Ἀκέραιοι ρόμβοι κατὰ μῆκος τῆς μικρῆς πλευρᾶς (καὶ κατὰ μῆκος τῆς μικρῆς διαγωνίου) 110 : 10 = 11. Ἔχομε λοιπὸν 11 σειρὲς ἀπὸ 11 ρόμβους δηλ. 11 . 11=121 ρόμβους. Γιὰ τὸ γέμισμα τῶν κενῶν ποὺ εἶναι 10 σειρὲς ἀπὸ 10 ρόμβους θὰ χρειασθοῦμε 10 . 10=100 ρόμβους, δηλαδὴ γιὰ ὅλη τὴν κουβέρτα θὰ μᾶς χρειαστοῦν ὁλόκληροι ρόμβοι 121+100=221. Γιὰ τὴ συμπλήρωση τῶν κενῶν στὴν περίμετρο τῆς κουβέρτας θὰ μᾶς χρειαστοῦν: ἀπὸ τὶς δυὸ μεγάλες πλευρὲς 10+10 = 20 μισοὶ ρόμβοι κομμένοι κατὰ μῆκος τῆς μεγάλης διαγωνίου, καὶ 10+10 = 20 μισοὶ κομμένοι κατὰ μῆκος τῆς μικρῆς διαγωνίου. Γιὰ τὶς 4 ἄκρες τῆς κουβέρτας θὰ χρειασθῆ ἀπὸ $\frac{1}{4}$ ρόμβου γιὰ κάθε μία. Ἐπαλήθευση: Ἐμβαδὸ κουβέρτας: 1,65.1,40 = 1,8150m² = 18150 cm². Ἀριθμὸς ρόμβων μὲ συναρμολογημένα σὲ ρόμβους τὰ τεμάχια: 121+100+10+10+1=242. Ἐμβαδὸ τοῦ κάθε ρόμβου: $\frac{1}{2}$. 10 . 15 = 75 cm². Ἄρα καὶ ἐπιφάνεια τῶν 242 ρόμβων: 242.75=18150 cm².

534. Ἐμβαδὸ τοῦ κάθε ρόμβου: $\frac{1}{2}$. 10.8=40 cm². Ἐμβαδὸ παραθύρου: 477.40=19080 cm²=1,9080 m². Πλάτος παραθύρου: 1,9080 : 2,40=0,795 m.

535. Τοποθετοῦμε τὴ διαγώνιο ΑΓ=6 cm καὶ κατασκευάζομε στὰ δυὸ ἡμιεπίπεδα δυὸ παράλληλες σὲ ἀποστάσεις 2 cm καὶ 3 cm. Στὴ μιὰ ἀπὸ αὐτὲς τοποθετοῦμε τὴν κορυφὴ Β καὶ στὴν ἄλλη τὴν κορυφὴ Δ. Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγώνων, δηλ. $(ΑΓΒ)=\frac{1}{2}.6.2=6$ cm² καὶ $(ΑΓΔ)=\frac{1}{2}\,.\,6.3=9$ cm² καὶ $S=6+9=15$ cm².

536. Ἐμβαδὸ ἑξαγώνου ἀριστερά: Εἶναι διαμερισμένο σὲ δυὸ τραπέζια μὲ ἐμβαδά: $S_1=\frac{1}{2}(117+78).32=3120$ m² καὶ $S_2=\frac{1}{2}(117+26).20=1430$ m² καὶ $S=S_1+S_2=3120+1430=4550$ m².

537. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο: (72+36+18) . 72=9072 m² ἀφαιροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ διαγραμμισμένων μερῶν του: $\frac{1}{2}\,.\,18\,.\,36+\frac{1}{2}\,.\,54\,.\,36+\frac{1}{2}(36+18)\,.\,54+18.18+\frac{1}{2}\,.\,36.18+\frac{1}{2}\,.\,72.36=9.36+27.36+27.54+18.18+36.36=4698$ καὶ $S=9072-4698=4374$ m².

538. Ἐμβαδὸ τραπεζίου: $S_1=\frac{1}{2}(40+62).37=1887$mm². Ἐμβαδὸ τριγώνου $S_2=\frac{1}{2}\,.\,62.29=899$ mm². Ἐμβαδὸ πενταγώνου $S=S_1+S_2=1887+899=2786$ mm².

539. Εἶναι : $(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές ; $(ΒΓ)^2=5,1^2+6,8^2=26,01+46,24=72,25\ cm^2$.

540. Εἶναι ; i) ὀρθογώνιο στὸ Α, ἐπειδή : $13^2=5^2+12^2$ ἢ $169=169$.

ii) Ὀρθογώνιο στὸ Α, ἐπειδὴ : $17^2=8^2+15^2$ ἢ $289=289$.

iii) Ὀρθογώνιο στὸ Α, ἐπειδή : $3,9^2=3,6^2+1,5^2$ ἢ $15,21=15,21$.

541. i) $α^2=β^2+γ^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $α^2=0,9^2+1,2^2=0,81+1,44=2,25 \Rightarrow α=\sqrt{2,25}=1,5$ cm.

ii) Μὲ τὶς δοσμένες τιμές ἡ σχέση : $α^2=β^2+γ^2$ δίνει : $α^2=6^2+2,5^2=36+6,25=42,25 \Longleftrightarrow α=\sqrt{42,25}=6,5$ cm.

iii) Εἶναι : $α^2=4^2+7,5^2=16+56,25=72,25 \Rightarrow α=\sqrt{72,25}=8,5$ cm.

542. i) Εἶναι : $α^2=25^2+60^2=625+3600=4225 \Rightarrow α=\sqrt{4225}=65$ cm.

ii) Εἶναι : $3,4^2=1,6^2+γ^2 \Longleftrightarrow 11,56=2,56+γ^2 \Longleftrightarrow γ^2=11,56-2,56=9 \Rightarrow γ=\sqrt{9}=3$ cm.

iii) Εἶναι : $30^2=β^2+18^2 \Longleftrightarrow 900=β^2+324 \Longleftrightarrow β^2=900-324=576 \Rightarrow β=\sqrt{576}=24$ cm.

543. Εἶναι : $40800 : 4,800=8,500\ m^2=8,500$ στρέμματα $=85a$.

544. Εἶναι : 560 τ.τ.π. $=\frac{9}{16}.\ 560=315m^2$. Ἀξία τοῦ οἰκοπέδου : $315.240=75600$ δρχ.

545. Σφάλμα τοῦ μήκους : $11.0,03=0,33$m. Σφάλμα τοῦ πλάτους : $7.0,03=0,21$m. Πραγματικὲς διαστάσεις : μῆκος $110+0,33=110,33$, πλάτος $70+0,21=70,21$. Ἐμβαδό : $110,33.70,21 \simeq 7746,27\ m^2$.

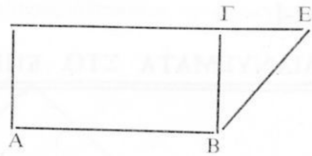
546. Εἶναι ἐμβαδό : $0,6468$ ha $=6468\ m^2$ καὶ ἡ ἄλλη διάσταση : $6468:77=84$m. Μεταξὺ δυὸ κορυφῶν τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τὸ μῆκος τους μεσολαβοῦν $84:1,75=48$ διαστήματα τῶν 1,75m καὶ μεταξὺ δυὸ κορυφῶν κατὰ τὸ πλάτος του μεσολαβοῦν $77: 1,75=44$ διαστήματα. Μεσολαβοῦν δηλ. 47 σημεῖα διαίρεσης τῶν διαστημάτων αὐτῶν κατὰ μῆκος καὶ 43 κατὰ πλάτος. Στὰ σημεῖα αὐτὰ θὰ φυτευθοῦν δένδρα : $2.47+2.43=2.90=180$ καὶ 4 στὶς τέσσερις κορυφές, δηλ. ; $180+4=184$ δένδρα.

547. Οἱ διαστάσεις τοῦ τραπεζομάντηλου θὰ εἶναι : $2,60+2.0,15=2,60+0,30=2,90$ m τὸ μῆκος καὶ $1,40+2.0,15=1,40+0,30=1,70$ m τὸ πλάτος. Ἡ περίμετρός του, συνεπῶς, θὰ εἶναι ; $2.2,90+2.1,70=9,20$ m καὶ τὸ ἐμβαδό του : $S=2,90 \times 1,70=4,93\ m^2$.

548. Περίμετρος οἰκοπέδου ; $23112 : 107=216$ m. Πλευρὰ οἰκοπέδου: $216:4=54$ m. Ἐμβαδὸ οἰκοπέδου : $54^2=2916\ m^2=2,916$ στρέμματα $=2916 : \frac{9}{16}=2916.\frac{16}{9}=5184$ τ.τ. π.χ. Ἀξία οἰκοπέδου : $5184.475=2462400$ δρχ.

549. Εἶναι: $S=13,56a=1356\ m^2$, ἐμβαδὸ τριγώνου ΒΓΕ : $\frac{1}{2}19.8,5=80,75m^2$.

καὶ ἐμβαδὸ ὀρθογωνίου : $1356 - 80{,}75 = 1275{,}25\ m^2$. Ἄρα θὰ εἶναι ; $(ΔΓ)=1276{,}25 : 19 \sim 67{,}12\ m$ καὶ $(ΔΕ) = (ΔΓ) + (ΓΕ) = 67{,}12+8{,}5 \sim 75{,}62\ m$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).



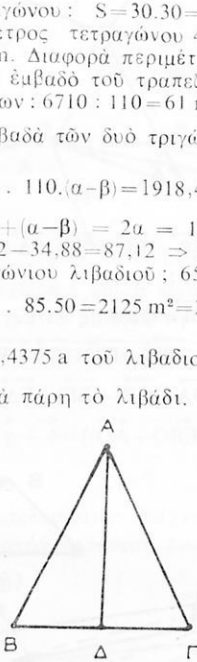
550. Ἐμβαδὸ τοῦ τετραγώνου : $30^2=900\ cm^3$. Ἐμβαδὸ τριγώνου $ΑΒΜ= \frac{1}{2}.30.(ΒΜ) = \frac{1}{3}.900 = 300\ cm^2$. Ἔχομε λοιπὸν νὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωση : $\frac{1}{2}.30(ΒΜ)=300 \Longleftrightarrow (ΒΜ)=300:15=20cm$.

551. Ἐμβαδὸ τετραγώνου : $S=30.30=900\ m^2$. Πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου $900 : 45=20\ m$. Περίμετρος τετραγώνου $4.30=120\ m$. Περίμετρος ὀρθογωνίου : $2.(45+20)=130\ m$. Διαφορὰ περιμέτρων : $130-120=10\ m$.

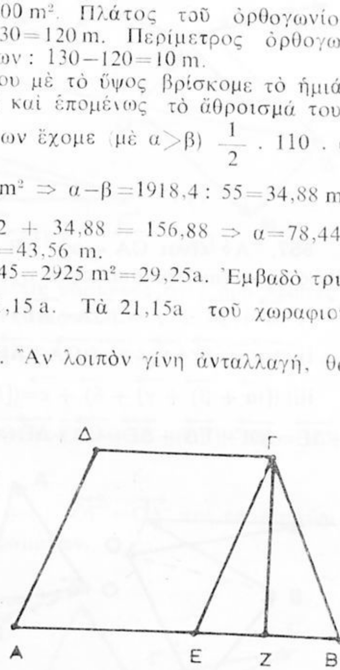
552. Διαιρώντας τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου μὲ τὸ ὕψος βρίσκομε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δυὸ βάσεων : $6710 : 110=61\ m$ καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμά τους $α+β=122m$. Γιὰ τὰ ἐμβαδὰ τῶν δυὸ τριγώνων ἔχομε (μὲ $α>β$) $\frac{1}{2}.110.α - \frac{1}{2}.110.β= \frac{1}{2}.110.(α-β)=1918{,}4\ m^2 \Rightarrow α-β=1918{,}4 : 55=34{,}88\ m$. Ἔχομε λοιπόν : $(α+β)+(α-β) = 2α = 122 + 34{,}88 = 156{,}88 \Rightarrow α=78{,}44$, $(α+β)-(α-β)=2β=122-34{,}88=87{,}12 \Rightarrow β=43{,}56\ m$.

553. Ἐμβαδὸ ὀρθογώνιου λιβαδιοῦ ; $65.45=2925\ m^2=29{,}25a$. Ἐμβαδὸ τριγωνικοῦ χωραφιοῦ: $\frac{1}{2}.85.50=2125\ m^2=21{,}15\ a$. Τὰ $21{,}15a$ τοῦ χωραφιοῦ ἀξίζουν $\frac{5}{4}.21{,}15=26{,}4375\ a$ τοῦ λιβαδιοῦ. Ἂν λοιπὸν γίνη ἀνταλλαγή, θὰ κερδίση ἐκεῖνος ποὺ θὰ πάρη τὸ λιβάδι.

554. Προσδιορίζομε τὸ ὕψος του. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $ΑΔΒ$ ($\widehat{Δ} = 90^0$) (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i) εἶναι : $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)^2 - (ΒΔ)^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $υ^2=4{,}8^2 - 2^2=23{,}04-4 = 19{,}04 \Rightarrow υ=\sqrt{19{,}04}\sim 4{,}36cm$.



(i)



(ii)

Ἄρα θὰ εἶναι : $Ε= \frac{1}{2}.4.4{,}36 \simeq 8{,}72\ cm^2$.

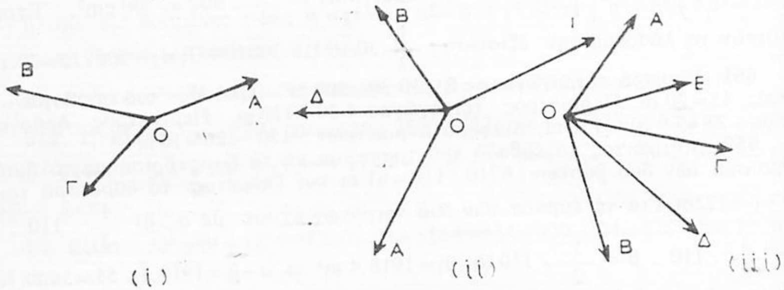
555. Ἂν χαράξουμε τὴν $ΓΕ \parallel ΔΑ$ (παραπάνω σχέδιο ii) σχηματίζεται τὸ παραλληλόγραμμο ΑΕΓΔ ($ΑΕ=ΔΓ=20\ cm$) καὶ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΕΓΒ ($ΕΓ=ΑΔ=ΒΓ$) μὲ βάση $ΕΒ=ΑΒ-ΑΕ=36-20=16\ cm$.

Προσδιορίζομε, ὅπως παραπάνω, τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΕΓΒ ποὺ εἶναι ἴσο μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου. Ἔχομε : $(ΓΖ)^2=(ΒΓ)^2-(ΖΒ)^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $υ^2=17^2-8^2=225 \Rightarrow υ= \sqrt{225}=15\ cm$.

Καὶ τώρα ὑπολογίζομε τὸ ἐμβαδὸ τοῦ τραπεζίου : $S= \frac{1}{2}(36 + 20).15 = 420\ cm^2$.

24
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

556. Ἡ λύση δίνεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο σχέδιο :

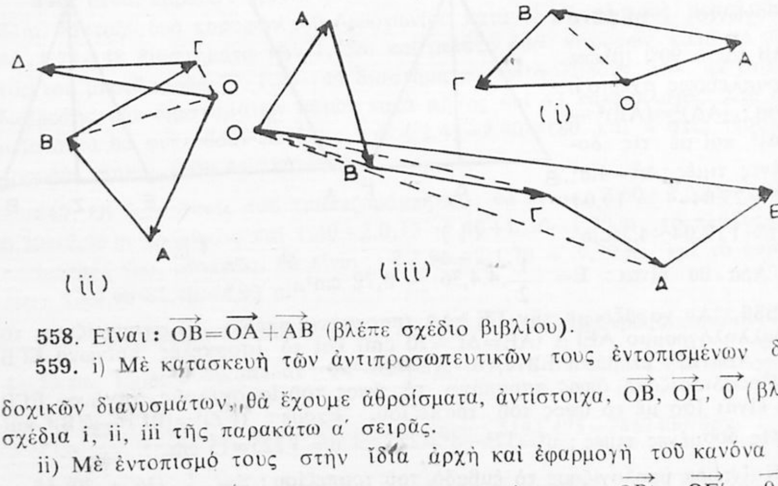


557. Ἂν εἶναι $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{\beta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{\delta}$, $\overrightarrow{\Delta E}=\vec{\varepsilon}$, θὰ ἔχουμε, ὅπως φαίνεναι στὸ ἀκόλουθο σχέδιο :

i) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$.

ii) $[(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]+\vec{\delta}=[(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma}]+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma})+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}$.

iii) $([(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}]+\vec{\delta})+\vec{\varepsilon}=([(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{B\Gamma})+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{\Delta E}=[(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{B\Gamma})+\overrightarrow{\Gamma\Delta}]$ $+\overrightarrow{\Delta E}=(\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta})+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{\Delta E}=\overrightarrow{OE}$.

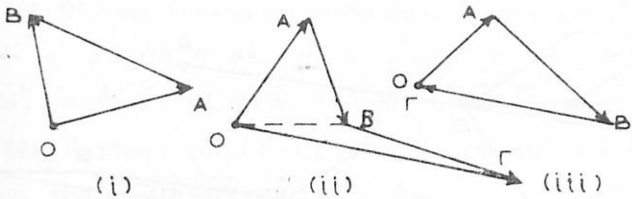


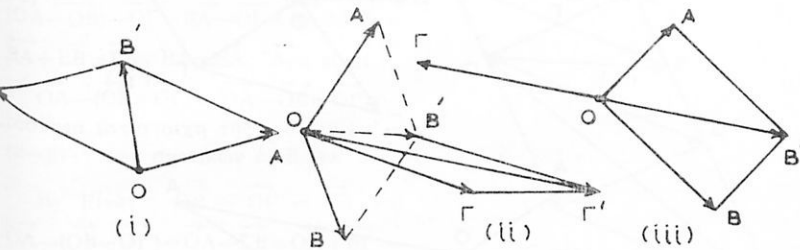
558. Εἶναι : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$ (βλέπε σχέδιο βιβλίου).

559. i) Μὲ κατασκευὴ τῶν ἀντιπροσωπευτικῶν τους ἐντοπισμένων διαδοχικῶν διανυσμάτων, θὰ ἔχουμε ἀθροίσματα, ἀντίστοιχα, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$, $\vec{0}$ (βλέπε σχέδια i, ii, iii τῆς παρακάτω α΄ σειρᾶς.

ii) Μὲ ἐντοπισμό τους στὴν ἴδια ἀρχὴ καὶ ἐφαρμογὴ τοῦ κανόνα τοῦ παραλληλογράμμου, θὰ ἔχουμε ἀθροίσματα, ἀντίστοιχα, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{O\Gamma'}$, $\vec{0}$.

Ἡ σύγκριση τῶν ἀποτελεσμάτων δείχνει ὅτι : $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma'}$, ἐνῶ στὴν περίπτωση iii ἔχομε καὶ μὲ τοὺς δυὸ τρόπους ἄθροισμα τὸ μηδενικὸ διάνυσμα.



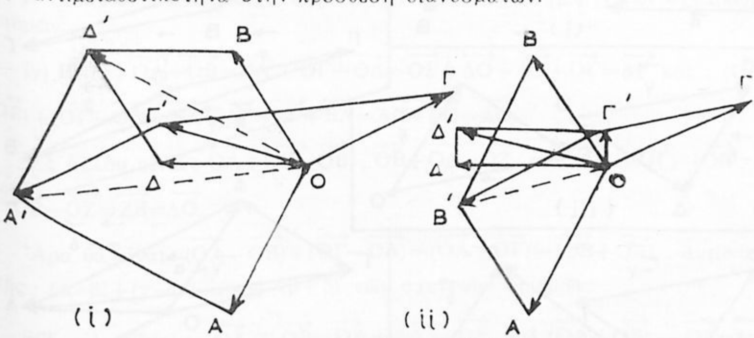


560. Στὰ παρακάτω σχέδια i καὶ ii δίνομε τὶς κασκευὲς στὶς δυὸ πρῶτες περιπτώσεις, ἀφίνοντας γιὰ τὸ μαθητὴ τὴ γ΄ κατασκευή.

i) Εἶναι : $\vec{\beta}+\vec{\delta}+\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=[(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})+\overrightarrow{OA}]+\overrightarrow{O\Gamma}=(\overrightarrow{O\Delta'}+\overrightarrow{OA})+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma'}$.

ii) Εἶναι : $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}+\vec{\delta}=[(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}]+\overrightarrow{O\Delta}=(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Gamma'}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Delta'}$.

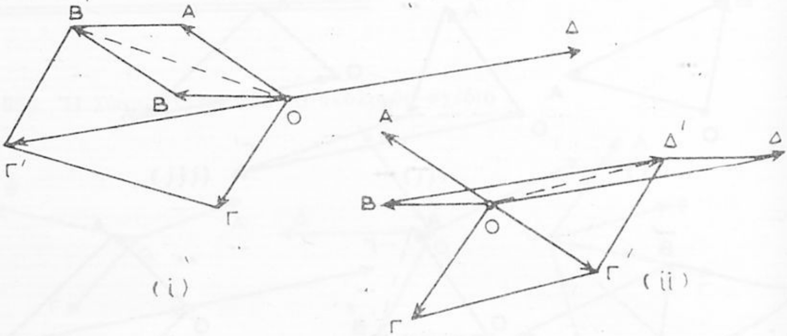
Ἡ σύγκριση τῶν ἀποτελεσμάτων δείχνει ὅτι : $\overrightarrow{O\Gamma'}=\overrightarrow{O\Delta'}$ καὶ ἐπαληθεύει τὴν ἀντιμεταθετικότητα στὴν πρόσθεση διανυσμάτων.

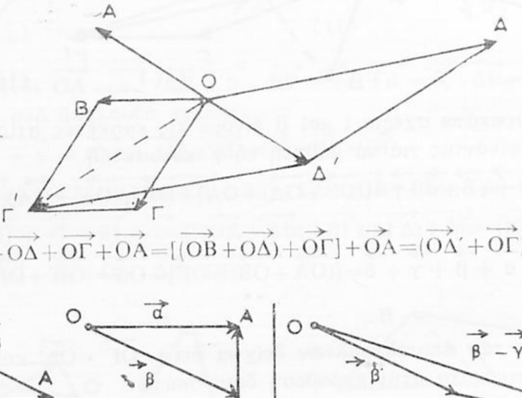


561. Ἡ ἐπαλήθευση τοῦ κανόνα γίνεται μὲ τὶς κατασκευὲς τῆς ἄσκησης 557, καθὼς καὶ μὲ τὶς κατασκευὲς τῆς α΄ σειρᾶς τῆς ἄσκησης 559.

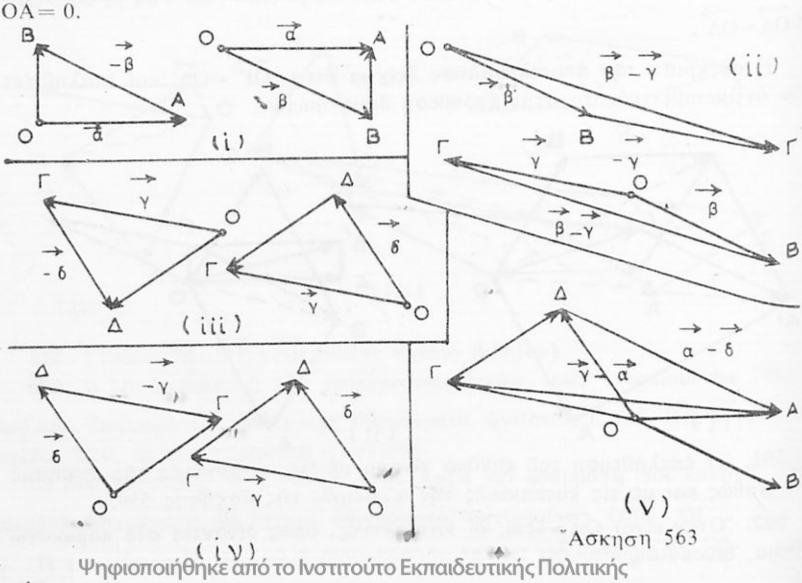
562. Ὅταν εἶναι $\overline{O\Delta}=4cm$, οἱ κατασκευές, ὅπως δίνονται στὰ παρακάτω σχέδια, δίνουν ἀθροίσματα ἴσα μὲ τό μηδενικὸ διάνυσμα. Ἔτσι εἶναι :

i) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=[(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}]+\overrightarrow{O\Delta}=(\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Gamma'}+\overrightarrow{O\Delta}=\vec{0}.$





ii) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{OA}=[(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})+\overrightarrow{O\Gamma}]+\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{O\Delta'}+\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O\Gamma'}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}.$

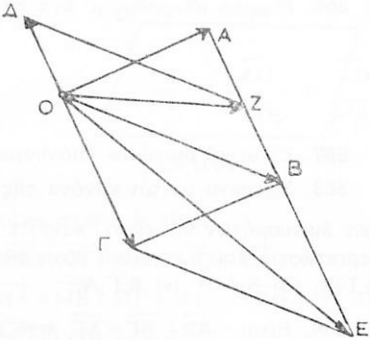


Ασκηση 563

iii) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{OA}=[(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{O\Delta}]+\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{O\Gamma'}+\overrightarrow{O\Delta})+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O\Delta'}+\overrightarrow{OA}=\vec{0}$.

563. Οἱ λύσεις δίνονται στὰ σχέδια τῆς προηγούμενης σελίδας ὅπου εἶναι: i) $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OB}$ ἢ $\overrightarrow{BA}$, ii) $\vec{\beta}-\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$ ἢ $\overrightarrow{\Gamma B}$, iii) $\vec{\gamma}-\vec{\delta}=\overrightarrow{O\Delta}$ ἢ $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$, iv) $\vec{\delta}-\vec{\gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}$ ἢ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, v) $(\vec{\alpha}-\vec{\delta})-(\vec{\gamma}-\vec{\alpha})=\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

564. i) Εἶναι: $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OE}$ καί: $\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EA}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ καί: $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Gamma O}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{EA}$. Ἄρα εἶναι: $\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}$ ἰσότητα ἀντίστοιχη τῆς: $\alpha-(\beta+\gamma)=(\alpha-\beta)-\gamma$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.



ii) Εἶναι: $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$ καὶ $\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\vec{0}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ καὶ $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Ἄρα εἶναι: $\overrightarrow{OA}-(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{O\Gamma}$, ἀντίστοιχη τῆς: $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)+\gamma$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

iii) Εἶναι: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OE}$ καὶ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$. Ἄρα εἶναι $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$, ἀντίστοιχη τῆς: $(\alpha-\beta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

iv) Εἶναι: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{\Delta O}=\overrightarrow{\Delta O}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ καί: $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta})=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma O}=\overrightarrow{\Delta O}$.

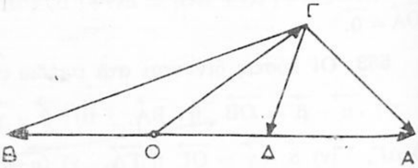
Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{OZ}$ καὶ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{ZB}=\overrightarrow{\Delta O}$.

Ἄρα θὰ εἶναι: $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta})=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})-(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})$, ἀντίστοιχη τῆς: $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

565. i) Εἶναι: $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}$ καὶ $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

ii) Εἶναι: $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma A}$ καὶ $(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

iii) Εἶναι $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma B}$ καὶ $\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma B}$ $+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$



Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγεται ὅτι: $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})-\overrightarrow{O\Gamma}=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma})+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma})$, ποὺ ἐκφράζει τὴ σχέση: $(\alpha+\beta)-\gamma$ $=(\alpha-\gamma)+\beta=\alpha+(\beta-\gamma)$ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

566. Εὔκολα μποροῦμε μ' ἕνα σχέδιο νὰ δοῦμε ὅτι: $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA'}}=-1$ καὶ

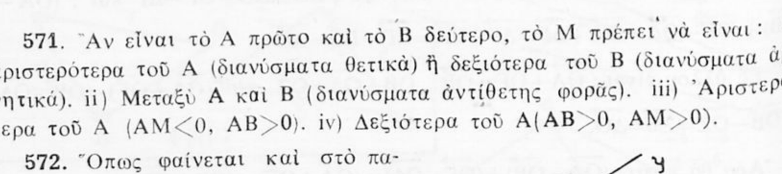
$$\frac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{A'A}}=\frac{\overrightarrow{OA}}{2\overrightarrow{OA}}=\frac{1}{2}.$$

567. Εἶναι τὸ διαγώνιο διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ τοῦ ρόμβου ΑΒΜΓ.

568. Σύμφωνα μὲ τὸν κανόνα τῆς πρόσθεσης δυὸ διαδοχικῶν συγγραμμικῶν διανυσμάτων θὰ εἶναι πάντοτε: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$. Κάμετε τὰ σχέδια στὶς περιπτώσεις ποὺ ἡ σχετικὴ θέση τῶν σημείων αὐτῶν εἶναι: i) Α, Β, Γ, ii) Α,Γ,Β, iii) Β,Α,Γ, iv) Β,Γ,Α.

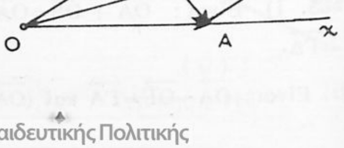
569. Εἶναι: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma} \iff \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$. Πραγματικά, ἀπὸ τὸ α' σκέλος τῆς ἰσοδυναμίας ἔχομε: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$ δηλ. τὸ β' σκέλος καὶ ἀπὸ τὸ β': $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{A\Gamma}=\vec{0}+\overrightarrow{A\Gamma}$ ἢ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$, δηλ. τὸ α'.

570. Ἡ λύση δίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα σχέδια i–iv.



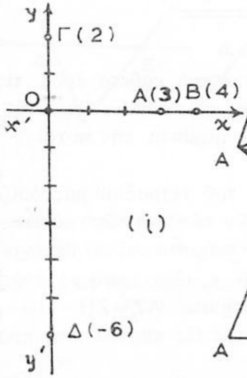
571. Ἂν εἶναι τὸ Α πρῶτο καὶ τὸ Β δεύτερο, τὸ Μ πρέπει νὰ εἶναι: i) ἀριστερότερα τοῦ Α (διανύσματα θετικὰ) ἢ δεξιότερα τοῦ Β (διανύσματα ἀρνητικά). ii) Μεταξὺ Α καὶ Β (διανύσματα ἀντίθετης φορᾶς). iii) Ἀριστερότερα τοῦ Α ($AM<0$, $AB>0$). iv) Δεξιότερα τοῦ Α($AB>0$, $AM>0$).

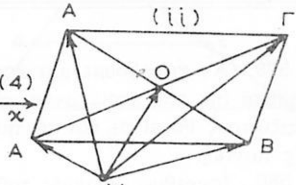
572. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπλεύρως σχέδιο εἶναι:

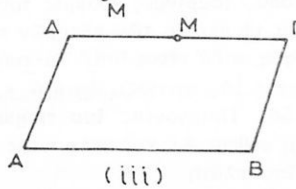


i) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{O\Gamma}$, ii) $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, iii) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$, iv) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}$, v) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}+$ $\overrightarrow{OB}2=\overrightarrow{OB}$.

573. i) $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OB} \Rightarrow \lambda=\frac{3}{4}$, ii) $\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda\overrightarrow{O\Delta} \Rightarrow \lambda=-\frac{1}{3}$, iii) $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\lambda\overrightarrow{O\Gamma} \Rightarrow \lambda=-4$, iv) $\overrightarrow{O\Delta}=\lambda\overrightarrow{\Delta\Gamma} \Rightarrow \lambda=-\frac{3}{4}$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).







574. Ἂν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ εἶναι τὰ ἐφαρμοστά, κοινῆς ἀρχῆς Ο, διανύσματα, θὰ ἔχουμε: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$, ἐνῶ $\vec{\beta}-\vec{\alpha}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$. Ἄρα θὰ εἶναι: $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=-(\vec{\beta}-\vec{\alpha})$.

575. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπάνω σχέδιο ii εἶναι:
$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{O\Gamma}$, $\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{O\Delta}$.

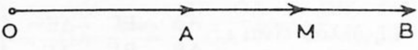
Προσθέτομε κατὰ μέλη καὶ ἔχομε: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{M\Gamma}+\overrightarrow{M\Delta}=4\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}=4\overrightarrow{MO}$, ἐπειδὴ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ καὶ $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\vec{0}$.

576. εἶναι: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{\Delta M} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=-2\,\overrightarrow{M\Delta} \Longleftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{M\Delta}}=-2$

(βλέπε παραπάνω σχέδιο iii).

577. Θὰ κάμετε ἕνα γράφημα, ὅπως τὸ σχ. 26 τοῦ βιβλίου. Τὸ πεδίο ὁρισμοῦ Π θὰ ἔχῃ στοιχεῖα του τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (γράψτε μερικὰ Α,Β,Γ,Δ,Ε), ἐνῶ τὸ πεδίο τιμῶν Α θὰ ἔχῃ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τὶς διανυσματικὲς ἀκτῖνες (π.χ. α,β,γ,δ,ε).

578. Εἶναι: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ καὶ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$. Προσθέτομε κατὰ μέλη καὶ ἔχομε: $2\,\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, ἐπειδὴ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}=\vec{0}$. Ἄρα: $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.



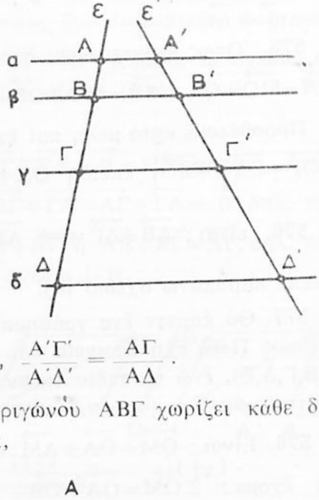
25
ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

579. Ἂν χαράξουμε μιὰ κοινὴ κάθετο πρὸς τὶς πλευρὲς τῶν ταινιῶν, τὰ τμήματά της ποὺ περιέχονται στὶς ταινίες θὰ εἶναι ἴσα (ἴσα πλάτη). Ἄρα ἴσα μεταξύ τους θὰ εἶναι καὶ τὰ τμήματα τῆς τυχαίας εὐθείας ε ποὺ περιέχονται στὶς ταινίες.

580. Ἰσάριθμες γραμμὲς τοῦ τετραδίου μας ὁρίζουν ταινίες μὲ ἴσα πλάτη. Ἄρα τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν ταινιῶν αὐτῶν περιεχόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ε θὰ εἶναι ἴσα. Τὰ τμήματα αὐτὰ θὰ ἔχουν τὴ μικρότερη τιμὴ (τὸ πλάτος τῆς ταινίας), ὅταν ἡ ε εἶναι κάθετη πρὸς τὶς πλευρὲς τῶν ταινιῶν.

581. Παίρνοντας ἴσα τμήματα $AZ = ZH = H\Theta = \Theta I = IK$ πάνω στὴ βοηθητικὴ εὐθεία Ax καὶ γράφοντας τὶς παράλληλες πρὸς τὴν KB ὁρίζομε ταινίες μὲ ἴσα πλάτη.

582. Ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπλεύρως σχέδιο, εἶναι:



i) $\dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{B\Gamma}{B\Delta} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{A\Gamma}{A\Delta} = \dfrac{1}{2}$.

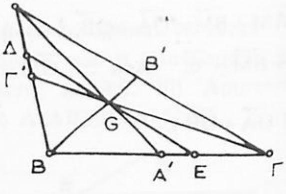
ii) $\dfrac{A'B'}{B'\Gamma'} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{2}{3}$, $\dfrac{A'B'}{A'\Gamma'}$

$= \dfrac{1}{3}$, $\dfrac{B'\Gamma'}{B'\Delta'} = \dfrac{2}{5}$, $\dfrac{A'\Gamma'}{A'\Delta'} = \dfrac{1}{2}$.

iii) $\dfrac{A'B'}{B'\Gamma'} = \dfrac{AB}{B\Gamma}$, $\dfrac{B'\Gamma'}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}$,

$$\frac{A'B'}{A'\Gamma'} = \frac{AB}{A\Gamma},\ \frac{B'\Gamma'}{B'\Delta'} = \frac{B\Gamma}{B\Delta},\ \frac{A'\Gamma'}{A'\Delta'} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}.$$

583. Ξέρουμε ὅτι τὸ κέντρο βάρους G τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει κάθε διάμεσό του, ὅπως τὴ ΒΒ', σὲ δυὸ μέρη τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι: $\dfrac{GB'}{BB'} = \dfrac{1}{3}$ καὶ $\dfrac{BG}{BB'} = \dfrac{2}{3}$.



Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\dfrac{A\Delta}{AB} = \dfrac{E\Gamma}{B\Gamma} = \dfrac{\Delta E}{A\Gamma} = \dfrac{GB'}{BB'}$

$= \dfrac{1}{3}$ καὶ $\dfrac{B\Delta}{AB} = \dfrac{BE}{B\Gamma} = \dfrac{BG}{BB'} = \dfrac{2}{3}$.

Ἀπὸ τὶς πολλαπλὲς αὐτὲς ἀναλογίες μὲ τὶς δοσμένες τιμὲς ἔχομε τὶς ἐξισώσεις:

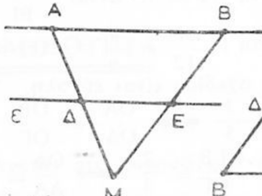
$\dfrac{A\Delta}{6} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (A\Delta) = 2$ m, $\dfrac{E\Gamma}{9} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (E\Gamma) = 3$ m, $\dfrac{\Delta E}{12} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow (\Delta E) = 4$ m,

$\dfrac{B\Delta}{6} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow (B\Delta) = 4$ m, $\dfrac{BE}{9} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow (BE) = 6$ m.

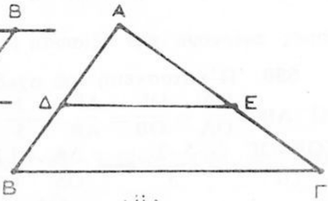
584. Στὸ τρίγωνο ΑΜΒ ποὺ σχηματίστηκε ἔτσι (βλέπε παρακάτω σχέδιο i) εἶναι :

$\frac{M\Delta}{MA} = \frac{ME}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Delta E \parallel AB$ (§ 135, β΄).



(i)



(ii)

585. Ἔχομε ὅτι :

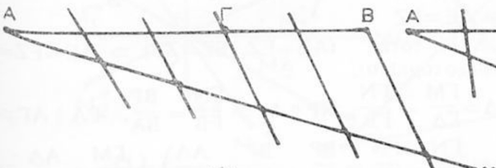
$\Delta E \parallel B\Gamma \Longleftrightarrow \frac{E\Gamma}{A\Gamma} = \frac{\Delta B}{AB}$

καὶ γιὰ τὶς δοσμένες

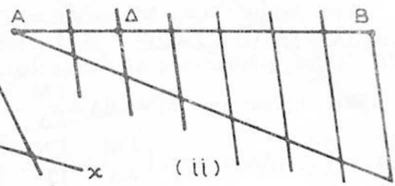
τιμές : $\frac{E\Gamma}{7} = \frac{5-3{,}5}{5} \Rightarrow$

$(E\Gamma) = 2{,}1$ cm (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii).

586. Μὲ τὸ γνωστό μας τρόπο χωρίζομε τὸ τμῆμα $AB = \alpha$ σὲ 5 ἴσα μέρη (σχέδιο i) ἢ σὲ 7 ἴσα μέρη (σχέδιο ii) καὶ παίρνομε τὰ τμήματα $A\Gamma = \frac{3}{5}\alpha$ καὶ $A\Delta = \frac{2}{7}\alpha$.

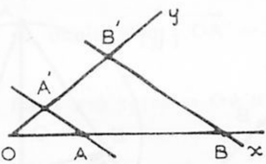


(i)

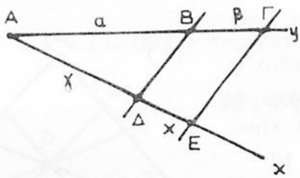


(ii)

587. Χαράσσομε τὴν εὐθεία $A'A$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο i) καὶ ἀπὸ τὸ B τὴν $BB' \parallel AA'$. Τὸ B' εἶναι τὸ ζητούμενο σημεῖο, ἐπειδή :



(i)



(ii)

$BB' \parallel AA' \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Longleftrightarrow \frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'} \Longleftrightarrow \frac{OB-OA}{OA} = \frac{OB'-OA'}{OA'}$

$\Longleftrightarrow \frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'} \Longleftrightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OA'}{A'B'}$.

588. Σύμφωνα μὲ τὴν ὁδηγία τοῦ βιβλίου καὶ τὴν παραπάνω ἄσκηση ἐκτελοῦμε τὴν κατασκευὴ τοῦ παραπάνω σχεδίου ii. Θὰ εἶναι $x = \Delta E$, ἐπειδή :

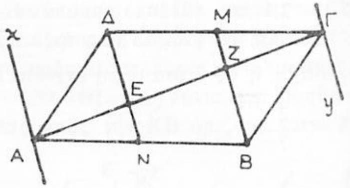
$E\Gamma \parallel \Delta B \Rightarrow \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{AE} \Longleftrightarrow \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{AE}{A\Delta} \Longleftrightarrow \frac{A\Gamma - AB}{AB} = \frac{AE - A\Delta}{A\Delta} \Longleftrightarrow$

$\frac{B\Gamma}{AB} = \frac{\Delta E}{A\Delta} \Longleftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{\Delta E}$.

589. Εἶναι : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ καὶ $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. Ἄρα : $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma} \Rightarrow$

$\Delta E \parallel B\Gamma$ (βλέπε σχέδιο ἄσκησης 585). Εἶναι : $\frac{\Delta E}{B\Gamma}=\frac{A\Delta}{AB}$. Μὲ τὶς δοσμένες τιμὲς παίρνομε τὴν ἐξίσωση : $\frac{\Delta E}{12}=\frac{4}{6}\Rightarrow(\Delta E)=8$ cm.

590. Ἡ κατασκευὴ τοῦ σχεδίου εἶναι εὔκολη. Ἔχομε ὅτι : $\Delta\Gamma \parallel AB \Rightarrow \frac{O\Delta}{OA}=\frac{O\Gamma}{OB}=\frac{\Delta\Gamma}{AB}=\frac{3}{5} \Longleftrightarrow \frac{OA}{O\Delta}=\frac{OB}{O\Gamma}=\frac{5}{3} \Longleftrightarrow \frac{OA-O\Delta}{O\Delta}=\frac{OB-O\Gamma}{O\Gamma}=\frac{5-3}{3} \Longleftrightarrow \frac{\Delta A}{O\Delta}=\frac{\Gamma B}{O\Gamma}=\frac{2}{3} \Longleftrightarrow \frac{O\Delta}{\Delta A}=\frac{O\Gamma}{\Gamma B}=\frac{3}{2}$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμὲς παίρνομε : $\frac{O\Delta}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow(O\Delta)=6$ cm, $\frac{O\Gamma}{4}=\frac{3}{2}\Rightarrow(O\Gamma)=6$ cm.

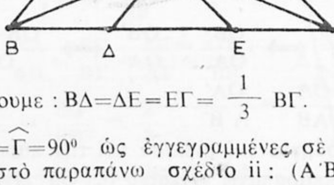


591. Εἶναι : $(NB=\frac{1}{2}AB,\ \Delta M=\frac{1}{2}\Delta\Gamma,\ AB=\Delta\Gamma)\Rightarrow NB=\Delta M$. Ἀλλά: $(NB=\Delta M,\ NB \parallel \Delta M)\Rightarrow \Delta N \parallel BM$. Χαράσσομε ἀκόμη τὶς $Ax \parallel \Delta N$ καὶ $\Gamma y \parallel BM$.

Ἔτσι ἔχομε : $AN=NB \Rightarrow AE=EZ$ καὶ $\Delta M=M\Gamma \Rightarrow EZ=Z\Gamma$. Ἀλλὰ τότε : $(AE=EZ,\ EZ=Z\Gamma)\Rightarrow AE=EZ=Z\Gamma$. Ὥστε ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ τριχοτομεῖται.

592. Ἔχομε ὅτι : $MN \parallel B\Delta \Rightarrow \frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}=\frac{\Gamma N}{\Gamma B}$, $NP \parallel A\Gamma \Rightarrow \frac{\Gamma N}{\Gamma B}=\frac{BP}{BA}$, $P\Lambda \parallel A\Gamma \Rightarrow \frac{BP}{BA}=\frac{A\Lambda}{A\Delta}$. Ἀλλὰ τότε: $\left(\frac{\Gamma M}{A\Delta}=\frac{\Gamma N}{\Gamma B},\ \frac{\Gamma N}{\Gamma B}=\frac{BP}{BA},\ \frac{BP}{BA}=\frac{A\Lambda}{A\Delta}\right)\Rightarrow\frac{\Gamma M}{\Gamma\Delta}=\frac{A\Lambda}{A\Delta}\Rightarrow$ $\Lambda M \parallel A\Gamma$.

593. Ἀπὸ τὸ τρίγωνο $B\Gamma\Gamma'$ εἶναι : $\Delta G \parallel B\Gamma' \Rightarrow \frac{B\Delta}{B\Gamma}=\frac{\Gamma' G}{\Gamma'\Gamma}=\frac{1}{3}\Rightarrow B\Delta=\frac{1}{3}B\Gamma$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).



Ἐπίσης ἀπὸ τὸ τρίγωνο $\Gamma BB'$ εἶναι: $EG \parallel \Gamma B' \Rightarrow \frac{E\Gamma}{B\Gamma}=\frac{B'G}{BB'}=\frac{1}{3}\Rightarrow E\Gamma=\frac{1}{3}B\Gamma$. Ἄρα θὰ ἔχουμε : $B\Delta=\Delta E=E\Gamma=\frac{1}{3}B\Gamma$.

594. Εἶναι : $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}=90^0$ ὡς ἐγγεγραμμένες σὲ ἡμικύκλιο. Ἀλλὰ τότε, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπάνω σχέδιο ii : $(A'B \perp AB,\ \Delta E \perp AB)\Rightarrow \Delta E \parallel A'B \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{A\Delta}{AA'}$ (1).

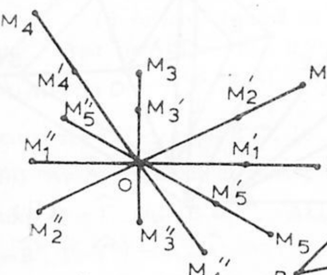
Ἐπίσης εἶναι : $(A'\Gamma \perp A\Gamma,\ \Delta Z \perp A\Gamma)\Rightarrow \Delta Z \parallel A'\Gamma \Rightarrow \frac{AZ}{A\Gamma}=\frac{A\Delta}{AA'}$ (2). Ἀπὸ τὶς ἀναλογίες (1) καὶ (2) παίρνομε : $\frac{AE}{AB}=\frac{AZ}{A\Gamma}\Rightarrow EZ \parallel B\Gamma$.

595. Ἡ ἴδια λύση μὲ τὴν ἄσκηση 583.

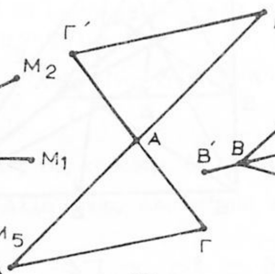
26
ΟΜΟΘΕΣΙΑ ΚΑΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

596. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο i. Εἶναι : $\overrightarrow{OM_1'}=\frac{3}{5}\overrightarrow{OM_1}$ καὶ $\overrightarrow{OM_1''}=-\frac{3}{5}\overrightarrow{OM_1}$ κ.τ.λ.

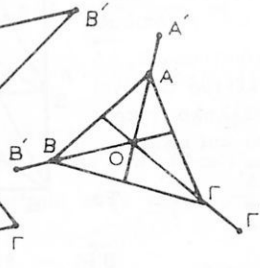
597. Εἶναι : $\overrightarrow{AB'}=-\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma'}=-\overrightarrow{A\Gamma}$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο ii).



(i)



(ii)

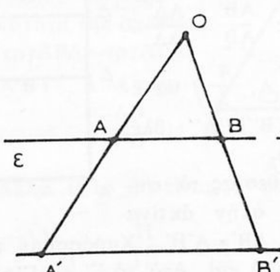


(iii)

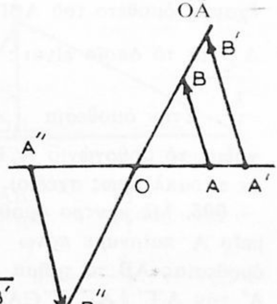
598. Τὰ ὁμόθετα τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ μὲ κέντρο ὁμοθεσίας τὴν τομὴ Ο τῶν διχοτόμων του καὶ λόγο $\frac{3}{2}$ εἶναι τὰ σημεῖα Α΄,Β΄, Γ΄, γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι : $\overrightarrow{OA'}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OA}$ κ.τ.λ. (βλέπε παραπάνω σχέδιο iii).

599. Γιατὶ στὸ τρίγωνο ΟΑ΄Β΄ ποὺ σχηματίσθηκε : $AB \parallel A'B' \Rightarrow \frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}=\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}=2 \Rightarrow \overrightarrow{OB'}=2\overrightarrow{OB}$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο i).

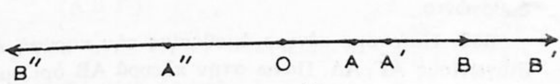
600. Ἡ κατασκευὴ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο ii. Ἔχομε ὅτι: $\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}=\frac{\overrightarrow{OB'}}{\overrightarrow{OB}}=\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{\overrightarrow{A''B''}}{\overrightarrow{AB}}=\frac{\overrightarrow{OA''}}{\overrightarrow{OA}}=$



(i)



(ii)



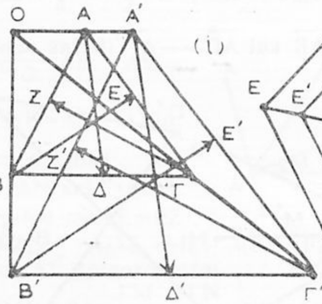
(iii)

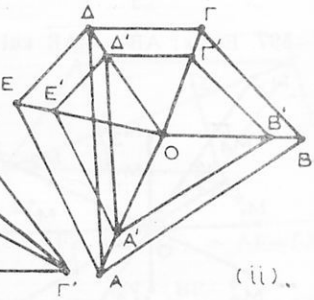
$\dfrac{\overrightarrow{OB''}}{\overrightarrow{OB}} = -\dfrac{3}{2}$. Παρατηροῦμε ὅτι :

$$\left(\overrightarrow{A'B'} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A''B''} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\right) \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{A''B''}.$$

601. Οἱ ἴδιες ἀναλογίες κι' ἡ ἴδια σχέση μεταξὺ A'B' καὶ A''B'' στὴν περίπτωση, ὅπου $O \in$ εὐθ AB (βλέπε παραπάνω σχέδιο iii).

602. Στὸ παρακάτω σχέδιο i ἔχομε ὁμόθετο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ στὴν ὁμοθεσία $\left(O, \frac{5}{3}\right)$ τὸ τρίγωνο Α'Β'Γ'.

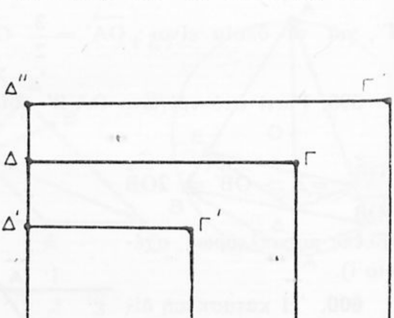




Τὸ $\overrightarrow{A'\Delta'}$ ὁμόθετο τοῦ ἐντοπισμένου διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$ μὲ κέντρο O εἶναι παράλληλο πρὸς αὐτὸ καὶ εἶναι : $\dfrac{\overrightarrow{A'\Delta'}}{\overrightarrow{A\Delta}} = \dfrac{5}{3}$. Τὸ ἴδιο εἶναι καί : $\dfrac{\overrightarrow{B'E'}}{\overrightarrow{BE}} = \dfrac{5}{3}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{\Gamma'Z'}}{\overrightarrow{\Gamma Z}} = \dfrac{5}{3}$.

603. Ὁμόθετο τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ στὴν ὁμοθεσία $\left(O, \frac{3}{4}\right)$ εἶναι τὸ πεντάγωνο Α'Β'Γ'Δ'Ε (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii). Οἱ ὁμόλογες διαγώνιοι ΑΔ ∥ Α'Δ' καὶ $\dfrac{A'\Delta'}{A\Delta} = \dfrac{3}{4}$.

604. Στὴν ὁμοθεσία $\left(A, \frac{3}{5}\right)$ θὰ ἔχουμε ὁμόθετο τοῦ ΑΒΓΔ τὸ Α'Β'Γ'Δ', γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι : $\dfrac{AB'}{AB} = \dfrac{A\Delta'}{A\Delta} = \dfrac{3}{5}$. Στὴν ὁμοθεσία $\left(A, \frac{4}{3}\right)$ θὰ ἔχουμε τὸ ὀρθογώνιο Α''Β''Γ''Δ'' (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).



605. Μὲ κέντρο ὁμοθεσίας τὸ σημεῖο Α παίρνομε πάνω στὴν ἀκτίνα ὁμοθεσίας ΑΒ τὸ τμῆμα ΑΒ'=Α'Β'. Χαράσσομε τὴ διαγώνιο ΑΓ, ἀπὸ τὸ Α' τὴν Α'Γ' ∥ ΑΓ ($\Gamma' \in A\Gamma$) καὶ ἀπὸ τὸ Γ' τὴ Γ'Δ' ∥ ΓΔ ($\Delta' \in A\Delta$) καὶ ἔτσι κατασκευάζομε τὸ ὁμόθετο τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ ποὺ εἶναι τὸ ζητούμενο ὀρθογώνιο.

606. Παίρνομε κέντρο ὁμοθεσίας τὴν κορυφὴ Α καὶ χαράσσομε τίς διαδιαγωνίους ΑΓ, ΑΔ. Πάνω στὴν πλευρὰ ΑΒ ὁρίζομε τμΑΒ'=Α'Β' καὶ ἀπὸ τὸ

Β΄ χαράσσομε τὴ Β΄Γ΄ ∥ ΒΓ (Γ΄∈ΑΓ). Ἔπειτα χαράσσομε τὴ Γ΄Δ΄ ∥ ΓΔ καὶ Δ΄Ε΄ ∥ ΔΕ (Δ΄∈ΑΔ, Ε∈ΑΕ). Τὸ πεντάγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ ὁμόθετο τοῦ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμοιο πρὸς αὐτό.

607. i) Στὸ δοσμένο τρίγωνο ΑΒΓ χαράσσομε τὴ διάμεσο ΑΔ, πάνω στὴν ἡμιευθεία ΑΔ παίρνομε τμΑΔ΄=Α΄Δ΄ καὶ ἀπὸ τὸ Δ΄ χαράσσομε τὴ Β΄Γ΄ ∥ ΒΓ.

ii) Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, ἀφοῦ χαράξουμε τὴ διχοτόμο ΑΕ τῆς $\widehat{A}$ ἢ τὸ ὕψος ΑΖ, κατασκευάζομε τὸ ζητούμενο τρίγωνο.

608. i) Ἂν $\widehat{A}=\widehat{A'}=90^0$ καὶ $\widehat{B}=\widehat{B'}$, ἐπειδὴ $\left(\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=180^0,\ \widehat{B'}+\widehat{\Gamma'}=180^0\right)$ $\Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{B'}+\widehat{\Gamma'}$ καὶ μὲ τὴν ἰδιότητα τῆς διαγραφῆς στὴν πρόσθεση θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν θὰ ἔχουν καὶ τὶς τρεῖς γωνίες τους ἴσες, μιὰ μὲ μιά. Ἄρα τργΑΒΓ ∼ τργΑ΄Β΄Γ΄ (§ 144, I).

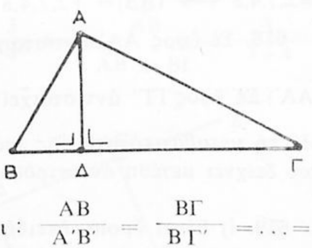
ii) Δίνεται ὅτι : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. Ἀλλὰ εἶναι καί : $\widehat{A}=\widehat{A'}=90^0$. Ἄρα (§ 144, II) θὰ εἶναι τργΑΒΓ ∼ τργΑ΄Β΄Γ΄.

iii) Ἂν $\widehat{A}, \widehat{A'}$ εἶναι οἱ γωνίες τῆς κορυφῆς, θὰ ἔχουμε : $\widehat{B}=\widehat{B'} \Rightarrow \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$, ἐπειδὴ $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{B'}=\widehat{\Gamma'}$. Ἀλλὰ ὅπως ἀποδείξαμε στὴν περίπτωση i : $\left(\widehat{B}=\widehat{B'},\ \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}\right) \Rightarrow \widehat{A}=\widehat{A'}$.

Ἐπίσης : $\widehat{A}=\widehat{A'} \Rightarrow \widehat{B}+\widehat{\Gamma}=\widehat{B'}+\widehat{\Gamma'} \Rightarrow 2\widehat{B}=2\widehat{B'} \Rightarrow \widehat{B}=\widehat{B'}$ καὶ ξαναγυρίζομε στὴν ἴδια, ὅπως παραπάνω περίπτωση.

iv) Δίνεται : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$. Ἀλλά : $(AB=A\Gamma,\ A'B'=A'\Gamma') \Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$. Ἄρα θὰ ἔχουμε : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ καὶ (§ 144, III) τργ ΑΒΓ ∼ τργ Α΄Β΄Γ΄.

609. Εἶναι : τργ ΑΒΓ ∼ τργ ΑΒΔ, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια κι ἔχουν μιὰ ὀξεία γωνία (τὴ Β) κοινὴ (§ 144I, Παρατ. 1). Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι καί : τργΑΒΓ ∼ τργΑΓΔ καὶ μὲ τὴ μεταβατικότητα τῆς σχέσης ὁμοιότητας : τργΑΒΓ ∼ τργΑΒΔ ∼ τργΑΓΔ.



610. Ἂν ΑΒΓ...ΛΜ καὶ Α΄Β΄Γ΄...Λ΄Μ΄ εἶναι δυὸ ὅμοια πολύγωνα, θὰ ἔχουμε : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\ldots=\dfrac{\Lambda M}{\Lambda' M'}$. Ἀλλὰ (§ 58 β΄) εἶναι : $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\ldots=\dfrac{\Lambda M}{\Lambda' M'}=\dfrac{AB+B\Gamma+\ldots+\Lambda M}{A'B'+B'\Gamma'+\ldots+\Lambda' M'}=\dfrac{\Pi}{\Pi'}$.

611. Θὰ ἔχουμε (§ 145 α΄) : $\dfrac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')}=\lambda^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : i) $\dfrac{36}{(A'B'\Gamma')}=\dfrac{4}{9} \Longleftrightarrow 4(A'B'\Gamma')=9.36 \Rightarrow (A'B'\Gamma')=81\ cm^2$, ii) $\dfrac{36}{(A'B'\Gamma')}=\dfrac{25}{81} \Longleftrightarrow 25(A'B'\Gamma')=36.81 \Rightarrow (A'B'\Gamma')=116.64\ cm^2$.

612. Θὰ εἶναι: τργ$AB\Gamma \sim$ τργ $A'B'\Gamma'$ μὲ $\lambda = \frac{2}{3}$ (§ 131 β). Ἄρα (§ 145 β') θὰ ἔχουμε: $\frac{(A'B'\Gamma')}{27} = \frac{4}{9} \Longleftrightarrow 9(A'B'\Gamma') = 27.4 \Rightarrow (A'B'\Gamma') = 12\ m^2$ καὶ $(ABB'A') = 15\ m^2$.

613. Εἶναι: παραλ/μο $AA'O\Delta' \sim$ παραλ/μο $AB\Gamma\Delta$ μὲ $\lambda = \frac{1}{2}$. Ἄρα (§ 145 β') θὰ ἔχουμε: $\frac{(AA'O\Delta')}{72} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 4.(AA'O\Delta') = 72 \Rightarrow (AA'O\Delta') = 18\ cm^2$.

614. Θὰ εἶναι: τργ$A'B'\Gamma' \sim$ τργ$AB\Gamma$ μὲ $\lambda = \frac{1}{2}$ (§ 100,2). Ἄρα (§ 145β) θὰ ἔχουμε: $\frac{(A'B'\Gamma')}{72} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 4(A'B'\Gamma') = 12 \Rightarrow (A'B'\Gamma') = 3\ cm^2$.

615. Θὰ ἐργασθῆτε σύμφωνα μὲ τὶς κατασκευαστικὲς ὁδηγίες τοῦ βιβλίου (§ 146).

616. Χαράξτε τὴ διάμεσο $A\Delta$ τοῦ τργ$AB\Gamma$ καὶ πάνω σ' αὐτὴ πάρτε τμ $A\Delta_1 = A'\Delta'$. Ἀπὸ τὸ Δ_1 χαράξτε τὴ $B_1\Gamma_1 \parallel B\Gamma$ ($B_1 \in AB$, $\Gamma_1 \in A\Gamma$).

Ξέρομε (§ 136) ὅτι: $\frac{B_1\Delta_1}{B\Delta} = \frac{\Delta_1\Gamma_1}{\Delta\Gamma} \Longleftrightarrow \frac{B_1\Delta_1}{\Delta_1\Gamma_1} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = 1 \Longleftrightarrow$ $B_1\Delta_1 = \Delta_1\Gamma_1$. Ὥστε στὸ τργ$AB_1\Gamma_1$ ποὺ εἶναι ὅμοιο πρὸς τὸ $AB\Gamma$ ἡ $A\Delta_1$ εἶναι ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν $A\Delta$ διάμεσος. Στὴ συνέχεια ἐργασθῆτε σύμφωνα μὲ τὶς ὁδηγίες τοῦ βιβλίου.

617. i) Εἶναι: $(B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 + (AB)^2$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές: $(B\Gamma)^2 = 4{,}5^2 + 6^2 \Longleftrightarrow (B\Gamma)^2 = 56{,}25 \Rightarrow (B\Gamma) = 7{,}5cm$ (βλέπε σχέδιο ἄσκησης 609).

ii) Ἔχομε ὅτι (§ 147 α'): $(AB)^2 = (B\Gamma)\ (B\Delta)$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές: $4{,}5^2 = 7{,}5.\ (B\Delta) \Longleftrightarrow (B\Delta) = \frac{20{,}25}{7{,}5} \Rightarrow (B\Delta) = 2{,}7$ cm καὶ $(\Delta\Gamma) = 7{,}5 - 2{,}7 = 4{,}8$ cm.

iii) Εἶναι (§ 147 β): $(A\Delta)^2 = (B\Delta)\ (\Delta\Gamma)$ καὶ μὲ τὶς παραπάνω τιμές: $(A\Delta)^2 = 2{,}7.4{,}8 \Longleftrightarrow (A\Delta) = \sqrt{2{,}7.4{,}8} \Rightarrow (A\Delta) = 3{,}6$ cm.

618. Σὲ ὕψος AA' ἀντιστοιχεῖ βάση $B\Gamma$ καὶ ἐμβαδό: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}.(B\Gamma)(AA')$. Σὲ ὕψος $\Gamma\Gamma'$ ἀντιστοιχεῖ βάση AB καὶ ἐμβαδό: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB).(\Gamma\Gamma')$. Μὲ τὴ μεταβατικότητα τῆς ἰσότητας ἔχομε: $(B\Gamma).(A'A) = (AB.(\Gamma\Gamma')$, σχέση ποὺ δείχνει μεγέθη ἀντιστρόφως ἀνάλογα (§ 58 γ', § 64 α').

619. i) Εἶναι ὅμοια, ἐπειδή: $\left(\frac{(AB)}{(A'B')} = \frac{7{,}5}{12} = \frac{5}{8}\right.$ καὶ $\left.\frac{(A\Gamma)}{(A'\Gamma')} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}\right) \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{5}{8}$.

ii) Μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα εἶναι: $(B\Gamma)^2 = 7{,}5^2 + 10^2 = 156{,}25 \Rightarrow (B\Gamma) = 12{,}5$ cm καί, ἀφοῦ τργ$A'B'\Gamma' \sim$ τργ$AB\Gamma$, θὰ εἶναι: $\frac{12{,}5}{(B'\Gamma')} = \frac{5}{8} \Longleftrightarrow 5.(B'\Gamma') = 12{,}5.8 \Rightarrow (B'\Gamma') = 20$ cm.

620. i) Ἡ κεντρικὴ εἴσοδος ἔχει διαστάσεις στὸ σχέδιο 10 mm, 12 mm, στὸ πραγματικό : $1 \times 200 = 2000$ mm ἢ 2 m καὶ $12 \times 200 = 2400$ mm ἢ 2,4 m καὶ ἐμβαδό : $2 \times 2{,}4 = 4{,}8$ m².

ii) Κάθε μπαλκονόπορτα ἔχει διαστάσεις στὸ σχέδιο 8 mm, 12 mm, στὸ πραγματικὸ 1,6 m, 2,4 m καὶ ἐμβαδό : $1{,}6 \times 2{,}4 = 3{,}84$ m².

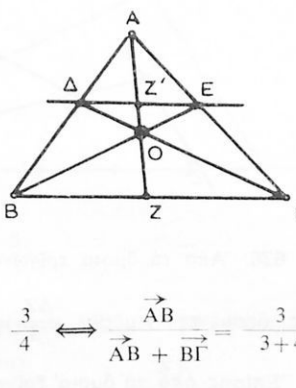
iii) Τὰ παράθυρα τῶν ὀρόφων ἔχουν διαστάσεις 7 mm, 8 mm στὸ σχέδιο, 1,4 m, 1,6 m στὸ πραγματικὸ καὶ ἐμβαδὸ τὸ καθένα : $1{,}4 \times 1{,}6 = 2{,}24$ m².

iv) Τὰ τετραγωνικὰ παράθυρα τοῦ ἀετώματος ἔχουν πλευρὰ 4 mm στὸ σχέδιο καὶ 0,8 m στὸ πραγμαπικὸ καὶ ἔμβαδό : $0{,}8^2 = 0{,}64$ m². Ὁ κυκλικὸς φεγγίτης ἔχει διάμετρο 5 mm στὸ σχέδιο, 1 m στὸ πραγματικό, ἀκτίνα 0,5 m καὶ ἐμβαδό : $3{,}14 . 0{,}5^2 = 0{,}785$ m² (βλέπε § 155 α΄).

621. Οἱ διαστάσεις στὸ σχέδιο θὰ εἶναι : i) $4{,}50 : 125 = 0{,}036$ m ἢ 36 mm καί : $3{,}80 : 125 = 0{,}0304$ m ἢ 30,4 mm, ii) $4{,}5 : 200 = 0{,}0225$ m ἢ 22,5 mm καὶ $3{,}80 : 200 = 0{,}019$ m ἢ 19 mm. Ὁ λόγος ὁμοιότητας τοῦ α΄ σχεδίου πρὸς τὸ β΄ εἶναι : $(1 : 125) : (1 : 200) = \frac{8}{5}$ καὶ τοῦ β΄ πρὸς τὸ α΄ ὁ $\frac{5}{8}$.

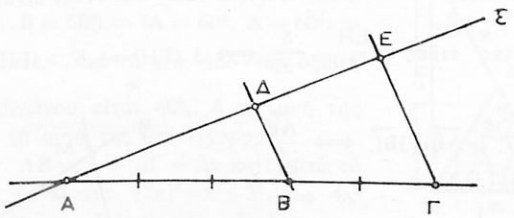
622. Ἡ κλίμακα τοῦ χάρτη εἶναι : $\frac{48}{7200000} = \frac{1}{150000}$.

623. i) Πρόκειται γιὰ συγκλίνουσες εὐθεῖες (βλέπε παραπλεύρως σχεδιο) καί, ὅπως εἶναι γνωστό, θὰ ἔχουμε : $\frac{\Delta Z'}{BZ} = \frac{Z'E}{Z\Gamma} \iff \frac{\Delta Z'}{Z'E} = \frac{BZ}{Z\Gamma} = 1 \iff \Delta Z' = Z'E$.



ii) Στὸ τραπέζιο ΒΓΕΔ οἱ εὐθεῖες ΒΕ καὶ ΓΔ καὶ Ζ΄Ζ ὁρίζουν πάνω στὶς βάσεις του ὁμόλογα τμήματα ἀνάλογα : $\frac{\Delta Z'}{Z'E} = \frac{BZ}{Z\Gamma}$. Ἄρα εἶναι εὐθεῖες συγκλίνουσες στὸ Ο.

624 Δίνεται : $\vec{AB} = \frac{3}{4}\vec{B\Gamma} \iff \frac{\vec{AB}}{\vec{B\Gamma}} = \frac{3}{4} \iff \frac{\vec{AB}}{\vec{AB} + \vec{B\Gamma}} = \frac{3}{3+4}$ $\iff \frac{\vec{AB}}{\vec{A\Gamma}} = \frac{3}{7}$. Ἡ σχέση αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν κατασκευὴ τῶν σημείων Β καὶ Γ, ὅπως στὸ παραπλεύρως σχέδιο.



Ἐπίσης εἶναι :

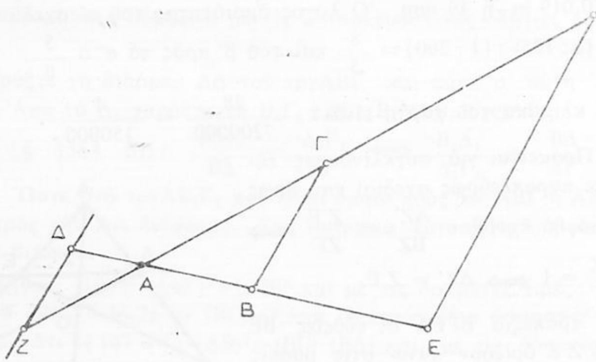
$$\vec{A\Delta} = \frac{3}{4}\vec{\Delta E} \iff \frac{\vec{A\Delta}}{\vec{\Delta E}} = \frac{3}{4} \iff \frac{\vec{A\Delta}}{\vec{A\Delta} + \vec{\Delta E}} = \frac{3}{3+4} \iff \frac{\vec{A\Delta}}{\vec{AE}} = \frac{3}{7} \iff$$

$\vec{A\Delta} = \frac{3}{7}\vec{AE}$. Ἄρα θὰ εἶναι $x = \frac{3}{7}$.

Ἔχομε ὅτι : $\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{3}{7}, \quad \dfrac{\overrightarrow{A\Delta}}{\overrightarrow{AE}} = \dfrac{3}{7}\right) \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A\Delta}}{\overrightarrow{AE}}$. Ἄρα (§135, β′) θὰ εἶναι $B\Delta \parallel \Gamma E$ καὶ $\dfrac{B\Delta}{\Gamma E} = \dfrac{AB}{A\Gamma} = \dfrac{3}{7}$.

625. Θὰ εἶναι : $\dfrac{AN}{A\Gamma} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{MN}{B\Gamma}$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $\dfrac{AN}{3} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{MN}{5}$. Θὰ ἔχουμε λοιπὸν τὶς ἐξισώσεις : $\dfrac{(AN)}{3} = \dfrac{8}{6} \iff 6(AN) = 3.8 \Rightarrow (AN) = 4$ cm καὶ $\dfrac{(MN)}{5} = \dfrac{8}{6} \iff 6.(MN) = 5.8 \Rightarrow (MN) = \dfrac{40}{6} = \dfrac{20}{3}$ cm.

Ἀκόμη εἶναι καὶ $\Gamma N = AN - A\Gamma = 4 - 3 = 1$ cm.

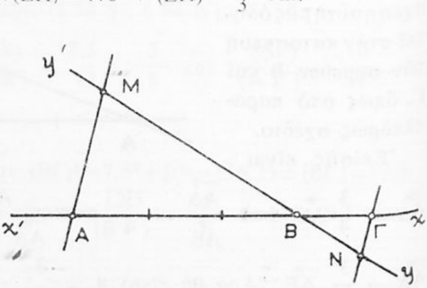


626. Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΖ εἶναι : $\dfrac{\Delta Z}{B\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{AB}$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $\dfrac{\Delta Z}{4} = \dfrac{2}{3} \iff 3(\Delta Z) = 4\ 2 \Rightarrow (\Delta Z) = \dfrac{8}{3}$ cm.

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΗ εἶναι : $\dfrac{EH}{B\Gamma} = \dfrac{AE}{AB}$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμές : $\dfrac{EH}{4} = \dfrac{8}{3} \iff 3.(EH) = 4.8 \Rightarrow (EH) = \dfrac{32}{3}$ cm.

627. i) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{B\Gamma} \iff \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 3 \Rightarrow \dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{1}{3}$.

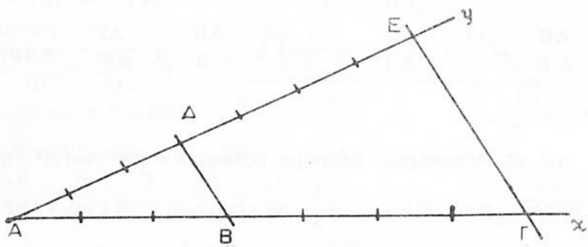
ii) $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \dfrac{3}{1} \iff \dfrac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}} =$



$\frac{3}{3+1} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{3}{4}$. Ἐπίσης : $\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{1}{3} \iff \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{1}{1+3} \iff \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{1}{4}$.

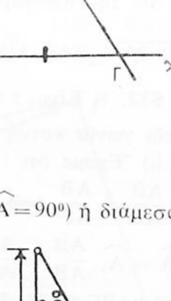
iii) $AM \parallel \Gamma N \Rightarrow$ τργ$ABM \sim$ τργ$\Gamma BN \Rightarrow \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{BN}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{3}{1} \iff \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}} = \frac{3}{1+3} \iff \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{3}{4}$. Ἐπίσης εἶναι : $\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{MB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{3}{1} \iff \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}} = \frac{3}{3+1} \iff \frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{MN}} = \frac{3}{4}$. Ἐξ ἄλλου εἶναι: $\frac{\overrightarrow{BN}}{\overrightarrow{BM}} = \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{BA}} = -\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{AM}{N\Gamma} = \frac{AB}{B\Gamma} = 3$.

628. Εἶναι : $\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{2}{5} \iff \frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{5}{2} \iff \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{5}{5-2} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{3}$.



Ἀλλά : τργ$AB\Delta \sim$ τργ$A\Gamma E \Rightarrow \frac{\overrightarrow{\Gamma E}}{\overrightarrow{B\Delta}} = \frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{5}{3}$.

629. i) Ξέρομε ὅτι σὲ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^0$) ἡ διάμεσος $A\Delta = \frac{1}{2}.B\Gamma = \Delta B$ (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο).



Ἀλλά : ($A\Delta = \Delta B$, $\widehat{B} = 60^0$) $\Rightarrow$ ($\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{\Delta} = 60^0$) $\Rightarrow$ $AB = \Delta B = \frac{1}{2}.B\Gamma$. Ὥστε, ὅταν ἡ μιὰ ἀπὸ τὶς ὀξεῖες γωνίες ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 60^0, ἡ διπλανή της κάθετη πλευρὰ εἶναι τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας.

Ἂν λοιπὸν εἶναι : $AB = x \Rightarrow B\Gamma = 2x$ καί, κατὰ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, θὰ εἶναι : $(2x)^2 = x^2 + 3^2 \iff 4x^2 = x^2 + 9 \iff 4x^2 - x^2 = 9 \iff 3x^2 = 9 \iff x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$. Ὥστε θὰ εἶναι : $(AB) = 1{,}73$ cm καὶ $(B\Gamma) \simeq 3{,}46$ cm.

ii) Τὸ τργ$A'B'\Gamma'$ θὰ ἔχῃ γωνίες ἀντίστοιχα ἴσες μὲ τοῦ $AB\Gamma$ καὶ πλευρές :

$(A'B')\simeq 1{,}73 \cdot \frac{3}{5} \simeq 1{,}04$, $(A'\Gamma')=3 \cdot \frac{3}{5}=1{,}8$, $(B'\Gamma')=3{,}46 \cdot \frac{3}{5} \simeq 2{,}08$ cm.

630. Ἔχομε ὅτι : $(AB=A\Gamma,\ \widehat{B}=30^0) \Rightarrow (\widehat{\Gamma}=30^0,\ \widehat{A}=120^0)$. Τὸ ὕψος $A\Delta$ χωρίζει τὸ τρ$\gamma AB\Gamma$ στὰ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ καὶ $A\Delta\Gamma$ $(\widehat{\Delta}=90^0)$, στὰ ὁποῖα $\Delta\widehat{A}B=\Delta\widehat{A}\Gamma=60^0$. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὴν παραπάνω ἄσκηση θὰ εἶναι : $A\Delta=\frac{1}{2}AB$. Ἂν $(A\Delta)=x \Rightarrow (AB)=2x$ καί, ἀφοῦ $(B\Delta)=\frac{1}{2}(B\Gamma)=3$ m, μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα, θὰ εἶναι : $(2x)^2=x^2+3^2 \iff 4x^2=x^2+9 \Rightarrow x=\sqrt{3}$. Ὥστε θὰ εἶναι : $(A\Delta)\simeq 1{,}73$ καὶ $(AB)=A\Gamma\simeq 3{,}46$ m.

Τὸ τρ$\gamma\ A'B'\Gamma' \sim$ τρ$\gamma\ AB\Gamma$ θὰ ἔχῃ : $\widehat{A'}=\widehat{A}=120^0$, $\widehat{B'}=\widehat{B}=\widehat{\Gamma'}=30^0$ καὶ $(A'B')=(A'\Gamma')=\frac{2}{3}(AB)=\frac{2}{3} \cdot 3{,}46\simeq 2{,}31$ καὶ $(B'\Gamma')=\frac{2}{3} \cdot 6=4$ m.

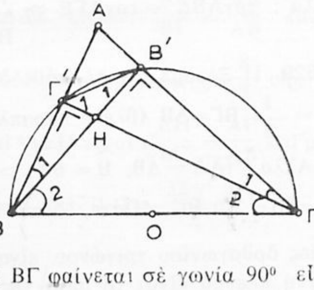
631. Εἶναι : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{1{,}5}{4{,}5}=\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{6}{18}=\frac{1}{3}$. Ἀλλά :

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{1}{3},\ \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \frac{AB}{A'B'}=\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \Rightarrow \text{τρ}\gamma\, AB\Gamma \sim \text{τρ}\gamma\, A'B'\Gamma',$$

μὲ $\lambda=\frac{1}{3}$.

Μὲ τὸ Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκομε : $(B\Gamma)^2=1{,}5^2+6^2=38{,}25 \Rightarrow (B\Gamma)=\sqrt{38{,}25}\simeq 6{,}18$. Μὲ $\lambda=\frac{1}{3}$ θὰ εἶναι καί : $(B'\Gamma')=3 \cdot (B\Gamma)\simeq 18{,}54$ m.

632. i) Εἶναι : τρ$\gamma\ ABB' \sim$ τρ$\gamma A\Gamma\Gamma'$, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν μιὰ ὀξεία γωνία κοινὴ (§144, I, παρατ. 1).



ii) Ἔχομε ὅτι : τρ$\gamma ABB' \sim$ τρ$\gamma A\Gamma\Gamma'$

$\Rightarrow \frac{AB'}{A\Gamma'}=\frac{AB}{A\Gamma} \iff \frac{AB'}{AB}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}$. Ἀλλά :

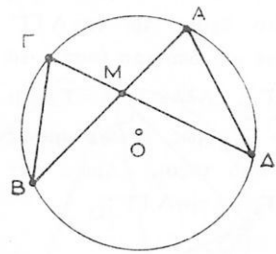
$\left(\widehat{A}=\widehat{A},\ \frac{AB'}{AB}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}\right) \Rightarrow$ τριγ $AB'\Gamma'$ $\sim$τριγ$AB\Gamma$ (§144, II).

iii) Εἶναι : $\widehat{\Gamma'}=90^0$ καὶ $\widehat{B'}=90^0$. Ἀλλὰ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ τμῆμα $B\Gamma$ φαίνεται σὲ γωνία 90^0 εἶναι τὸ ἡμικύκλιο (O,OB) (§ 111).

iv) Εἶναι : τρ$\gamma\ B\Gamma'H \sim$ τριγ $\Gamma B'H$, ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν $\widehat{B_1}=\widehat{\Gamma_1}$ ὡς ἐγγεγραμμένες στὸ ἴδιο τόξο $\widehat{\Gamma'B'}$ (§ 107 δ΄).

Ἐπίσης : $\widehat{B'_1}=\widehat{\Gamma_2}$ καὶ $\widehat{\Gamma'_1}=\widehat{B_2}$ (ὡς ἐγγεγραμμένες στὸ ἴδιο τόξο). Ἑπομένως τρ$\gamma\ \Gamma'HB' \sim$ τρ$\gamma BH\Gamma$.

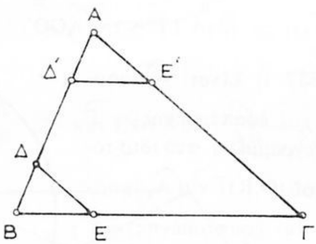
633. Εἶναι: $\widehat{B}=\widehat{\Delta}$ (ἐγγεγραμμένες στὸ τόξο $\widehat{A\Gamma}$) καὶ $\widehat{\Gamma}=\widehat{A}$ (ἐγγεγραμμένες στὸ τόξο $\widehat{B\Delta}$). Ἄρα (§144, I, παρατ. 1) θὰ εἶναι τργ$AM\Delta \sim$ τργΓMB.



Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν τῶν τριγώνων θὰ ἔχουμε τὴν ἀναλογία: $\dfrac{MA}{M\Gamma}=\dfrac{M\Delta}{MB} \iff (MA).(MB)=(M\Gamma).(M\Delta)$.

634. i) Εἶναι: τργ$A'\Delta'E' \sim$ τργ$AB\Gamma \Rightarrow \dfrac{A\Delta'}{AB}=\dfrac{AE'}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta'E'}{B\Gamma}$.

ii) Ἐπίσης: τργ$B\Delta E \sim$ τργ$AB\Gamma \Rightarrow$ $\dfrac{B\Delta}{AB}=\dfrac{BE}{B\Gamma}=\dfrac{\Delta E}{A\Gamma}$.



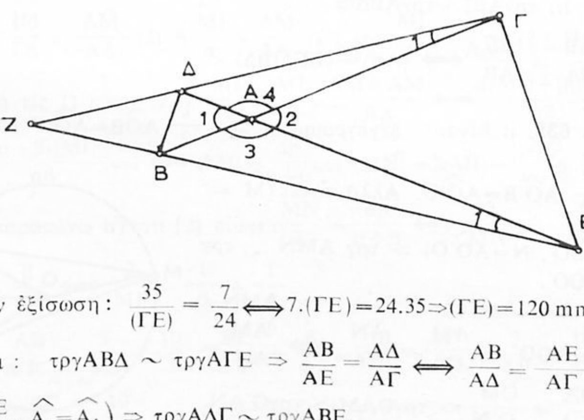
iii) Ἀλλά: $(\Delta B=AB-A\Delta,\ A\Delta'=AB-B\Delta'$ καὶ $A\Delta=B\Delta') \Rightarrow \Delta B=A\Delta'$.

iv) Ἔτσι οἱ ἀναλογίες i καὶ ii δίνουν: $\dfrac{AE'}{A\Gamma}=\dfrac{\Delta E'}{B\Gamma}=\dfrac{BE}{B\Gamma}=\dfrac{\Delta E}{A\Gamma}$. Ἄρα θὰ εἶναι καί: $AE'=\Delta E$ καὶ $\Delta'E'=BE$.

v) Ἀλλά: $(A\Delta'=\Delta B,\ AE'=\Delta E,\ \Delta'E'=BE) \Rightarrow$ τργ$A\Delta'E'=$τργ$B\Delta E$.

635. i) Εἶναι: $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{28}{96}=\dfrac{7}{24},\ \dfrac{A\Delta}{A\Gamma}=\dfrac{21}{72}=\dfrac{7}{24}$. Ἄρα: $\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}$.

Ἀλλά: $\left(\dfrac{A\Delta}{AE}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma},\ \widehat{A_1}=\widehat{A_2}\right) \Rightarrow$ τργ$AB\Delta \sim$ τργ$A\Gamma E$.



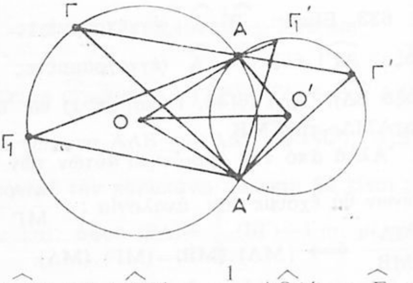
ii) τργ$AB\Delta \sim$ τργ$A\Gamma E \Rightarrow \dfrac{B\Delta}{\Gamma E}=\dfrac{AB}{AE}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma}=\dfrac{7}{24}$.

Ἄρα θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $\dfrac{35}{(\Gamma E)}=\dfrac{7}{24} \iff 7.(\Gamma E)=24.35 \Rightarrow (\Gamma E)=120$ mm

iii) Ἔχομε ὅτι: τργ$AB\Delta \sim$ τργ$A\Gamma E \Rightarrow \dfrac{AB}{AE}=\dfrac{A\Delta}{A\Gamma} \iff \dfrac{AB}{A\Delta}=\dfrac{AE}{A\Gamma}$.

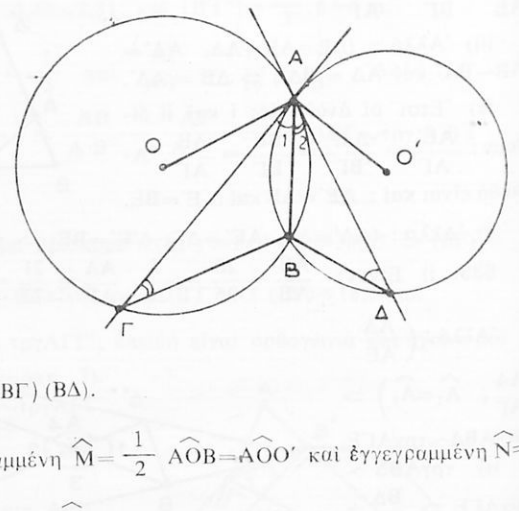
Ἀλλά: $\left(\dfrac{AB}{A\Delta}=\dfrac{AE}{A\Gamma},\ \widehat{A_3}=\widehat{A_4}\right) \Rightarrow$ τργ$A\Delta\Gamma \sim$ τργABE.

iv) τργ$A\Delta\Gamma \sim$ τργ$ABE \Rightarrow \widehat{\Gamma_1}=\widehat{E_1}$. Ἀλλά: $(\widehat{Z}=\widehat{Z},\ \widehat{\Gamma_1}=\widehat{E_1}) \Rightarrow$ τργ$\Delta EZ \sim$ τργ$B\Gamma Z$. Ἀκόμη ἔχομε: τργ$\Delta EZ \sim$ τργ$B\Gamma Z \Rightarrow \dfrac{ZE}{Z\Gamma}=\dfrac{\Delta E}{B\Gamma}=\dfrac{117}{100}$.



636. i) Στὸ παραπλεύρως σχέδιο ἔχομε τὸ τργ $A'ΓΓ'$ καὶ σὲ μιὰ δεύτερη θέση, τὸ $A'Γ_1Γ_1'$. Ἀλλά : $\widehat{Γ}=\widehat{Γ_1}$ καὶ $\widehat{Γ'}=\widehat{Γ_1'}$ (ὡς ἐγγεγραμμένες στὸ ἴδιο τόξο). Ἄρα : τργ $A'Γ_1Γ_1' \sim$ τργ$A'ΓΓ'$.

ii) Εἶναι : (ἐγγεγραμμένη $\widehat{Γ}=\frac{1}{2}\ A\widehat{O}A'$ καὶ $A\widehat{O}O'=\frac{1}{2}\ A\widehat{O}A'$) $\Rightarrow \widehat{Γ}=A'\widehat{O}O'$. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι καί: $\widehat{Γ'}=A'\widehat{O'}O$. Ἀλλά: $(\widehat{Γ}=A'\widehat{O}O',\ \widehat{Γ'}=A\widehat{O'}O) \Rightarrow$ τργ$A'ΓΓ' \sim$ τργAOO'.

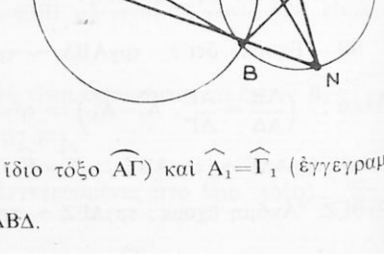


637. i) Εἶναι: $\widehat{A_2}$ (χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης)$=\widehat{Γ}$ (ἐγγεγραμμένη στὸ ἴδιο τόξο τοῦ (O,R)) καὶ $\widehat{A_1}$ (χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης)$=\widehat{Δ}$ (ἐγγεγραμμένη στὸ ἴδιο τόξο τοῦ (O'R')). Ἀλλά : $(\widehat{A_2}=\widehat{Γ},\ \widehat{A_1}=\widehat{Δ}) \Rightarrow$ τργ$ABΓ \sim$ τργ$ABΔ$.

ii) τργ$ABΓ \sim$ τργ$ABΔ \Rightarrow$

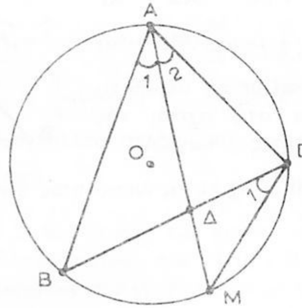
$$\frac{AB}{BΔ}=\frac{BΓ}{AB} \iff (AB)^2=(BΓ)\,(BΔ).$$

638. i) Εἶναι : ἐγγεγραμμένη $\widehat{M}=\frac{1}{2}\ A\widehat{O}B=A\widehat{O}O'$ καὶ ἐγγεγραμμένη $\widehat{N}=\frac{1}{2}\ A\widehat{O'}B=A\widehat{O'}O$. Ἀλλὰ τότε: $(\widehat{M}=A\widehat{O}O',\ \widehat{N}=A\widehat{O'}O) \Rightarrow$ τργ $AMN \sim$ τργ AOO'.



ii) Ἀπὸ τὴν i εἶναι : τργ$AMN \sim$ τργ$AOO' \Rightarrow \frac{AM}{OA}=\frac{AN}{O'A} \iff \frac{AM}{AN}=\frac{OA}{O'A}=\frac{OM}{O'N} \Rightarrow$ τργ$OAM \sim$ τργ$O'AN$.

639. i) $[\widehat{B}=\widehat{M}$ (ἐγγεγραμμένες στὸ ἴδιο τόξο $\widehat{AΓ}$) καὶ $\widehat{A_1}=\widehat{Γ_1}$ (ἐγγεγραμμένες στὸ τόξο $\widehat{BM}$)$] \Rightarrow$ τργ$ΓMΔ \sim$ τργ$ABΔ$.

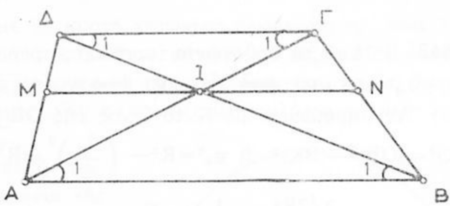


ii) [$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$ (ΑΜ = διχοτόμος τῆς Α) καὶ $\widehat{B}=\widehat{M}$ (ἐγγεγραμμένες στὸ ἴδιο τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$] $\Rightarrow$ τργΑΜΓ$\sim$τργΑΒΔ.

iii) Μὲ τὴ μεταβατικότητα στὴ σχέση τῆς ὁμοιότητας εἶναι: τργΓΜΔ$\sim$τργΑΜΓ$\sim$τργΑΒΔ.

640. i) ($\widehat{A}_1=\widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{B}_1=\widehat{\Delta}_1$) $\Rightarrow$ τργ ΙΑΒ$\sim$ΙΓΔ $\Rightarrow \dfrac{IB}{I\Delta}=\dfrac{IA}{I\Gamma} \Longleftrightarrow \dfrac{IB+I\Delta}{I\Delta}=\dfrac{IA+I\Gamma}{I\Gamma} \Longleftrightarrow \dfrac{\Delta B}{I\Delta}=\dfrac{\Gamma A}{I\Gamma} \Longleftrightarrow \dfrac{I\Delta}{\Delta B}=\dfrac{I\Gamma}{\Gamma A}$ (1).

Ἔχομε ἀκόμη: $MI \parallel AB \Rightarrow \dfrac{MI}{AB}=\dfrac{I\Delta}{\Delta B}$ (2) καὶ $IN \parallel AB \Rightarrow \dfrac{IN}{AB}=\dfrac{I\Gamma}{\Gamma A}$(3).



Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1), (2), (3) συνάγεται ὅτι: $\dfrac{MI}{AB}=\dfrac{IN}{AB} \Rightarrow MI=IN$.

ii) Ἀπὸ τὸ τργΑΒΔ εἶναι: $\dfrac{MI}{AB}=\dfrac{\Delta M}{\Delta A}$ (1) καὶ

ἀπὸ τὸ τργ ΑΓΔ: $\dfrac{IM}{\Gamma\Delta}=\dfrac{AM}{A\Delta}$ (2) ἢ $\dfrac{MI}{\alpha}=\dfrac{\Delta M}{\Delta A}$ (1΄) καὶ $\dfrac{MI}{\beta}=\dfrac{AM}{A\Delta}$ (2΄). Προσθέτομε κατὰ μέλη τὶς (1΄) καὶ (2΄): $\dfrac{MI}{\alpha}+\dfrac{MI}{\beta}=\dfrac{\Delta M+AM}{A\Delta} \Longleftrightarrow \dfrac{\alpha(MI)+\beta(MI)}{\alpha\beta}$

$=\dfrac{A\Delta}{A\Delta}=1 \Longleftrightarrow \dfrac{(\alpha+\beta)(MI)}{\alpha\beta}=1 \Longleftrightarrow (MI)=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ καὶ $(MN)=2(MI)=\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (3).

iii) Ἀπὸ τὴν παραπάνω σχέση (3) εἶναι: $\dfrac{MN}{2}=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} \Longleftrightarrow \dfrac{2}{MN}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{MN}=\dfrac{\alpha}{\alpha\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha\beta} \Longleftrightarrow \dfrac{2}{MN}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}$.

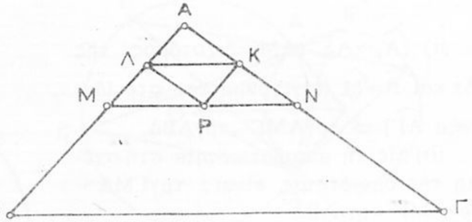
641. Εἶναι: $\left(\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{5}{3,5}=\dfrac{10}{7},\ \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{6}{4,2}=\dfrac{10}{7},\ \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\dfrac{7}{4,9}=\dfrac{10}{7}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}=\dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}=\dfrac{10}{7} \Rightarrow$ τργΑΒΓ$\sim$τργΑ΄Β΄Γ΄.

642. Ξέρομε ὅτι (§100,2) τὸ τμῆμα ποὺ συνδέει τὰ μέσα δυὸ πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ μισὸ τῆς τρίτης πλευρᾶς. Ἄρα θὰ ἔχουμε:

$\left(\dfrac{K\Lambda}{MN}=\dfrac{\Lambda P}{AN}=\dfrac{PK}{AM}=\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow$ τργΚΛΡ$\sim$τργΑΜΝ.

Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι: $\left(\frac{MN}{B\Gamma}=\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{A\Gamma}=\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ τργ$AMN \sim$ τργ$AB\Gamma$ καὶ μὲ τὴ μεταβατικότητα στὴ σχέση τῆς ὁμοιότητας: τριγ$K\Lambda P \sim$ τργ$AB\Gamma$. Ὁ λόγος ὁμοιότητας εἶναι: $\left(\frac{K\Lambda}{MN}=\frac{1}{2}, \frac{MN}{AB}=\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \frac{K\Lambda}{AB}=\frac{1}{4}$.



27

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

643. i) Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΒΟΓ (σχ. 200 τοῦ βιβλίου) εἶναι: $\lambda_4^2=R^2+R^2 \Longleftrightarrow \lambda_4^2=2R^2 \Longleftrightarrow \lambda_4=\sqrt{2R^2}=R\sqrt{2}$.

ii) Ἂν σημειώσετε μὲ Κ τὸ ἴχνος τῆς $OE \perp B\Gamma$ πάνω στὴ ΒΓ, θὰ ἔχετε: $(OK)^2=(OB)^2-(BK)^2$ ἢ $\alpha_4^2=R^2-\left(\frac{\lambda_4}{2}\right)^2=R^2-\frac{\lambda_4^2}{4}=R^2-\frac{2R^2}{4}=\frac{4R^2-2R^2}{4}=\frac{2R^2}{4}$ καὶ $\alpha_4=\sqrt{\frac{2R^2}{4}}=\frac{1}{2}R\sqrt{2}$.

644. Τὸ κέντρο τοῦ κύκλου θὰ εἶναι τὸ κέντρο συμμετρίας τοῦ τετραγώνου καὶ ἡ ἀκτίνα του ἴση μὲ τὸ μισὸ τῆς διαγωνίου του ΑΓ. Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (βλέπε σχ. 200 τοῦ βιβλίου): $R^2+R^2=70^2 \Longleftrightarrow 2R^2=4900 \Longleftrightarrow R^2=2450 \Longleftrightarrow R=\sqrt{2450}=49{,}5$ μὲ προσέγγιση 0,1 ἀπὸ τὰ πάνω.

645. Ἡ κατασκευὴ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπλεύρως σχέδιο.

646. Σύμφωνα μὲ τὶς ὑποδείξεις τῆς ἄσκησης θὰ κάμετε εὔκολα τὰ ζητούμενα σχέδια.

647. i) Εἶναι ἄθροισμα γωνιῶν: $\Sigma=2.6-4=8$ ὀρθές. Ἄρα: $\widehat{A_1}=\widehat{A_2}=\ldots=A_6=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$ ὀρθ. ἢ $\frac{4}{3}.90^0=120^0$. Ἐξ ἄλλου θὰ εἶναι: $\sphericalangle(OA_1, OA_2)=\frac{4}{6}$ ὀρθ. ἢ $\frac{4}{6}.90^0=60^0$.

ii) Εἶναι: $\Sigma=2.12-4=20$ ὀρθ.,

$\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\ldots=\widehat{A}_{12}=\frac{20}{12}=\frac{5}{3}$ ὀρθ. ἢ $\frac{5}{3}.90^0=150^0$ καὶ $\sphericalangle(OA_1,OA_2)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ ὀρθ. ἢ $\frac{1}{3}.90^0=30^0$.

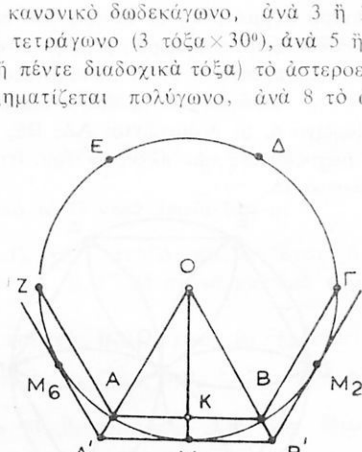
iii) Εἶναι: $\Sigma=2.16-4=28$ ὀρθ., $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2=\ldots=\widehat{A}_{16}=\frac{28}{16}=\frac{7}{4}$ ὀρθ. ἢ $\frac{7}{4}.90^0=157^0\,30'$ καὶ $\sphericalangle(OA_1,OA_2)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$ ὀρθ. ἢ $\frac{1}{4}.90^0=22^0\,30'$.

648. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΚΒ (βλέπε σχέδιο 201 τοῦ βιβλίου) εἶναι: $\frac{1}{2}\widehat{O}+\frac{1}{2}\widehat{B}=90^0 \Rightarrow \widehat{O}+\widehat{B}=180^0$.

649. i) Ἂν πάρουμε τὶς κορυφὲς ἀνὰ 2, θὰ ἔχουμε τὸ κυρτὸ κανονικὸ ἑξάγωνο, ἀνὰ 3 (μ.κ.δ $[3,6]=3$) τὸ ἰσόπλερο τρίγωνο, ἀνὰ 4 (μ.κ.δ$[4,6]=2$) δὲν σχηματίζεται πολύγωνο, ἀνὰ 5 ξαναγυρίζομε στὸ κυρτὸ κανονικὸ ἑξάγωνο.

ii) Ἀνὰ 2 ἢ 4 κορυφὲς ἔχομε τὸ κυρτὸ κανονικὸ πεντάγωνο. Ἀνὰ 3 κορυφὲς (μ.κ.δ$[3,5]=1$) θὰ ἔχουμε τὸ ἀστεροειδές. Στὸ δεκάγωνο ἀνὰ 2 ἢ 9 κορυφὲς ἔχομε τὸ κυρτό δεκάγωνο, ἀνὰ 3 ἢ 8 τὸ κυρτὸ πεντάγωνο, ἀνὰ 4 τὸ ἀστεροειδὲς κανονικό δεκάγωνο, ἀνὰ 5 ἢ 7 τὸ ἀστεροειδὲς κανονικὸ πεντάγωνο, ἀνὰ 6 δὲν σχηματίζεται πολύγωνο.

iii) Ἀνὰ 2 κορυφὲς ἔχουμε τὸ κυρτὸ κανονικὸ δωδεκάγωνο, ἀνὰ 3 ἢ 11 τὸ κυρτὸ κανονικὸ ἑξάγωνο, ἀνὰ 4 ἢ 10 τετράγωνο (3 τόξα $\times 30^0$), ἀνὰ 5 ἢ 9 τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, ἀνὰ 6 κορυφὲς (ἢ πέντε διαδοχικὰ τόξα) τὸ ἀστεροειδὲς κανονικὸ δωδεκάγωνο, ἀνὰ 7 δὲν σχηματίζεται πολύγωνο, ἀνὰ 8 τὸ ἀστεροειδὲς κανονικὸ 24γωνο.

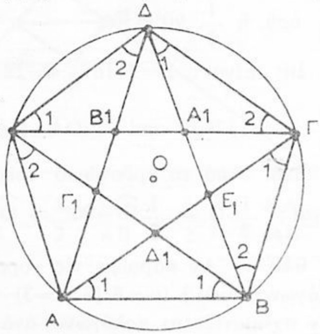


650. Χωρίζονται σὲ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ποὺ ἔχουν κοινὴ τὴ γωνία τῆς κορυφῆς.

Εἶναι: $\lambda=\frac{\alpha_6}{OM_1}=\frac{\frac{R}{2}\sqrt{3}}{R}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

651. Ἂν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τους, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τους θὰ εἶναι: $\Sigma=2\nu-4$ ὀρθ. καὶ καθεμιὰ ἀπ' αὐτὲς ἴση μέ: $\frac{2\nu-4}{\nu}$ ὀρθ. Ἄρα θὰ ἔχουν τὶς γωνίες τους ἴσες. Εἶναι ἐξ ἄλλου: $AB=B\Gamma=\ldots=MN$ καὶ $A_1B_1=B_1\Gamma_1=\ldots=M_1N_1$ ἢ $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\ldots=1$ καὶ $\frac{A_1B_1}{B_1\Gamma_1}=\frac{B_1\Gamma_1}{\Gamma_1\Delta_1}=\ldots=1$. Ἄρα θὰ εἶναι: $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A_1B_1}{B_1\Gamma_1} \Longleftrightarrow \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1}$ καθὼς καί: $\frac{B\Gamma}{\Gamma\Delta}=\frac{B_1\Gamma_1}{\Gamma_1\Delta_1} \Longleftrightarrow \frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1}=\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma_1\Delta_1}$ καί, γενικά: $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{B\Gamma}{B_1\Gamma_1}=\ldots=\frac{MN}{M_1N_1}$. Ὥστε ἔχουν καὶ τὶς πλευρές τους ἀνάλογες. Συνεπῶς εἶναι ὅμοια.

652. Εἶναι : $ΑΓ=ΒΔ=ΓΕ=ΔΑ=ΕΒ$ (χορδὲς ἴσων τόξων). Ἀλλά : $\widehat{A}_1=\widehat{B}_1=\widehat{B}_2=\widehat{Γ}_1=\widehat{Γ}_2=\widehat{Δ}_1=\widehat{Δ}_2=\widehat{E}_1=\widehat{E}_2=\widehat{A}_2$ (ἐγγεγραμμένες σὲ ἴσα τόξα). Ἄρα τὰ τρίγωνα $ΑΔ_1Β$, $ΒΕ_1Γ$, $ΓΑ_1Δ$, $ΔΒ_1Ε$, $ΕΓ_1Α$ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα, ἐπειδὴ ἔχουν καὶ τὶς βάσεις τους ἴσες ($ΑΒ=ΒΓ=\ldots$). Τότε ὅμως : $ΑΔ_1=Δ_1Β=ΒΕ_1=Ε_1Γ=ΓΑ_1=Α_1Δ=ΔΒ_1=Β_1Ε=ΕΓ_1=Γ_1Α$ καὶ μὲ τὴν ἀφαίρεση ἀνὰ δύο ἴσων τμημάτων ἀπὸ τὶς ἀντίστοιχες διαγωνίους : $Α_1Β_1=Β_1Γ_1=Γ_1Δ_1=Δ_1Ε_1=Ε_1Α_1$.



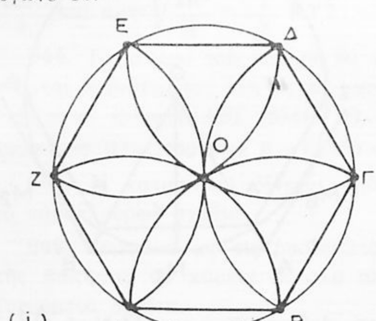
Ὥστε τὸ $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ ἔχει τὶς πλευρές του ἴσες. Ἀλλὰ καὶ οἱ γωνίες του εἶναι ἴσες, ἐπειδὴ σχηματίζονται ἀπὸ χορδὲς καὶ ἔχουν ἴσα τὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τους τόξα (§ 108). Ἄρα εἶναι κανονικὸ πεντάγωνο.

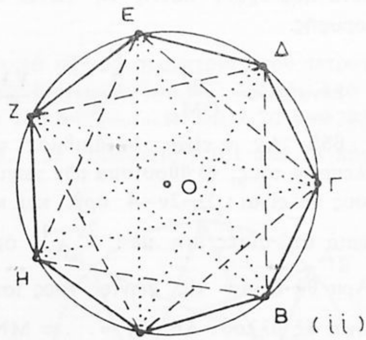
653. Ἡ κατασκευὴ δίνεται στὸ παρακάτω σχέδιο i.

654. Τὸ τετράγωνο, τὸ ὀκτάγωνο, τὸ ἑξάγωνο καὶ τὸ δωδεκάγωνο ἔχουν κέντρο συμμετρίας τὸ κέντρο τοῦ περιγραφόμενου κύκλου.

655. Στὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο 3, οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ στὸ κανονικὸ πεντάγωνο 5, οἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν του.

Στὸ τετράγωνο 4, οἱ διαγώνιοι καὶ οἱ μεσοκάθετες τῶν πλευρῶν του, στὸ ἑξάγωνο 6, οἱ 3 διαγώνιοι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ, (βλέπε σχ. 203 τοῦ βιβλίου) καὶ οἱ 3 μεσοκάθετες τῶν πλευρῶν του, στὸ ὀκτάγωνο 8, στὸ 12γωνο 12 καὶ στὸ 16γωνο 16.





656. Θὰ ἀρχίσουμε ἀπὸ ἕνα τόξο 51^0 ($360^0 : 7 \simeq 51^0$) κι ἔπειτα αὐξάνοντας ἢ ἐλαττώνοντας τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη θὰ ἐπιτύχουμε ἕνα 7γωνο, ὅπως αὐτὸ μὲ τὴ συνεχὴ γραμμὴ στὸ παραπάνω σχέδιο ii. Παίρνοντας ἀνὰ 3 κορυφὲς θὰ ἔχουμε τὸ ἀστεροειδές, 7γωνο μὲ τὴ διακοπτὴ γραμμή, ἐνῶ ἀνὰ 4 κορυφὲς θὰ ἔχουμε τὸ ἀστεροειδὲς μὲ τὴ στικτὴ γραμμή.

657. Γιὰ τὰ κανονικὰ ἑξάγωνα θὰ χρειασθοῦν 3 διαφορετικὰ χρώματα. Τὸ ἴδιο καὶ γιὰ τὰ τετράγωνα.

658. Γιατὶ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων, ἀνὰ 3, εἶναι: $3\times 120=360^0$ καὶ τῶν τετραγώνων, ἀνὰ 4, εἶναι: $4\times 90=360^0$ δηλ. μιὰ πλήρης γωνία.

659. Τὸ πεζοδρόμιο ἔχει ἐμβαδό: $S=15\times 2{,}5=37{,}5\ m^2$ ἢ $375000\ cm^2$ καὶ κάθε πλάκα: $S_6=1{,}5\times 8^2\times 1{,}732\sim 166\ cm^2$. Ἄρα θὰ χρειασθοῦν: $375000:116\sim 2259$ πλάκες.

660. Εἶναι: $S_8=2\times 3{,}2^2\times\sqrt{2}=2\times 10{,}24\times 1{,}414\sim 28{,}96\ m^2$.

661. Τὸ ἐμβαδὸ τοῦ πατώματος εἶναι: $S=4{,}5\times 5{,}8=26{,}10\ m^2$ ἢ $261000\ cm^2$ καὶ κάθε πλάκας: $S_6=1{,}5\times 9^2\times 1{,}732\sim 210\ cm^2$. Ἄρα θὰ χρειασθοῦν: $261000:210\sim 1245$ πλάκες καὶ τὸ στρώσιμο θὰ στοιχίση: $26{,}10\times 150=3915$ δρχ.

662. Εἶναι: $R=3{,}75$ m καὶ $S_{12}=3\times 3{,}75^2=42{,}1875\ m^2$.

663. Εἶναι: $S_6=\dfrac{3}{2}R^2\sqrt{3}$ καὶ μὲ τὶς δοσμένες τιμὲς θὰ ἔχουμε τὴν ἐξίσωση: $41{,}52=1{,}5\,.R^2.\,1{,}73\iff R^2=\dfrac{41{,}52}{1{,}5\times 1{,}73}\sim 16\Rightarrow R=\sqrt{16}=4$. Ἄρα θὰ εἶναι καί: $\lambda_6=R=4$ m.

664. Τὸ πεζοδρόμιο ἔχει ἐμβαδό: $S=12\times 2{,}5=30\ m^2$ ἢ $300000\ cm^2$. Ἄρα τὸ ἐμβαδὸ κάθε πλάκας θὰ εἶναι: $S_4=300000:120=2500\ cm^2$ καὶ ἡ πλευρά της: $\lambda_4=\sqrt{2500}=50$ cm.

665. Εἶναι: $\dfrac{1}{6}\times 360=60^0$ καὶ $\dfrac{1}{10}\times 360^0=36^0$. Ἄρα: $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{10}=60^0-36^0=24^0=\dfrac{1}{15}$ τοῦ κύκλου. Οἱ κατασκευὲς εἶναι εὔκολες.

666. Ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ κανονικοῦ ν-γώνου εἶναι: $\dfrac{4}{\nu}$ ὀρθ. ἢ $\dfrac{360^0}{\nu}$. Μία λοιπὸν στροφὴ τοῦ ν-γώνου γύρω ἀπὸ τὸ Ο κατὰ γωνία ἴση μὲ $\dfrac{360^0}{\nu}$ θὰ φέρη τὴν κορυφὴ Α στὴ Β, τὴ Β στὴ Γ, τὴ Γ στὴ Δ κ.τ.λ. Ἔτσι ἡ περιφέρεια ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β, Γ θὰ περνᾶ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ Δ κ.τ.λ.

667. Στὸ σχ. 202 χαράξτε τὴν OB_2 καὶ τὴ B_1B_3. Τότε θὰ ἔχουμε: $\dfrac{A_1B_2}{B_1B_2}=\dfrac{A_2B_2}{B_3B_2}\Rightarrow B_1B_3\parallel A_1A_2$ καὶ $OB_2\perp A_1A_2\Rightarrow OB_2\perp B_1B_3$. Ἀλλὰ ἔτσι ἡ OB_2 εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς B_1B_3 καὶ $B_1=S_{OB_2}(B_3)$. Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι καὶ $B_\nu=S_{OB_2}(B_4)$ κ.τ.λ.

668. Ἔχομε ὅτι: $S_{12}=3R^2$ ἢ $18{,}75=3R^2\iff R^2=6{,}25\Rightarrow R=\sqrt{6{,}25}=2{,}5$ m ἢ 250 cm. Ἡ κατασκευὴ θὰ γίνη μὲ ἀκτίνα: $250:100=2{,}5$ cm.

669. Εἶναι: $S_8=2R^2\sqrt{2}$ ἢ $6{,}3630=2.R^2.1{,}414\iff R^2=2{,}25\Rightarrow R=\sqrt{2{,}25}=1{,}5$ m ἢ 150 cm. Ἡ κατασκευὴ θὰ γίνη μὲ ἀκτίνα: $150:50=3$ cm.

670. Ἀπὸ τὸν τύπο: $S_{12}=3R^2$ ἔχομε: $S_{12}=3\ 2{,}4^2=17{,}28\ m^2$. Ξέρομε, ἐξ ἄλλου ὅτι (ἄσκ. 651) δυὸ κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ πλευρῶν εἶναι ὅμοια καὶ ὅτι (ἄσκ. 610) ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τους εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν πλευρῶν τους κι αὐτὸς πάλι εἶναι ἴσος μὲ τὸ λόγο τῶν ἀκτίνων τους. Ὥστε ἡ ἀκτίνα τοῦ β′ θὰ εἶναι: $R'=\dfrac{5}{3}.2{,}4=4$ m καὶ τὸ ἐμβαδό του:

$S'_{12}=3.4^2=48\ m^2$. Θά κατασκευάσουμε δυό ὁμόκεντρους κύκλους μέ ἀκτίνες 2,4 καί 4 cm κ.τ.λ.

671. Εἶναι : $27=3\ R^2 \iff R^2=9 \Rightarrow R=3$ m ἤ 300 cm. Ἄρα ἡ κατασκευή θά γίνη μέ ἀκτίνα : $R'=300:50=6$ cm.

672. Εἶναι : $145{,}96875=1{,}5.R^2.1{,}73 \iff R^2=56{,}25 \Rightarrow R=\sqrt{56{,}25}=7{,}5$ m ἤ 750 cm. Ἄρα ἡ κατασκευή θά γίνη μέ ἀκτίνα : $R'=750:150=5$ cm.

28
ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ ΚΑΙ ΔΙΣΚΟΥ

673. : i) $2.3{,}14.2{,}5 \simeq 15{,}7$ m, ii) $2.3{,}14.1{,}2 \simeq 7{,}536$ m, iii) $2.3{,}14.0{,}8 \simeq 5{,}024$ m.

674. Εἶναι : i) $\tau=\dfrac{60.3{,}14.64}{180} \simeq 66{,}99$ cm, ii) $\tau=\dfrac{30{,}25.3{,}14.64}{180} \simeq 33{,}77$ cm, iii) $\tau=\dfrac{45{,}5.3{,}14.64}{180} \simeq 50{,}8$ cm.

675. Εἶναι : i) $2.3{,}14.R=34{,}54 \iff R=\dfrac{34{,}54}{2.3{,}14}=5{,}5$ cm, ii) $2.3{,}14.R=15{,}70 \iff R=\dfrac{15{,}70}{2.3{,}14}=2{,}5$ m.

676. Εἶναι : i) $\dfrac{45.3{,}14.R}{180}=4{,}3175 \iff R=\dfrac{4{,}3175.180}{45.3{,}14}=5{,}5$ m, ii) $\dfrac{72.3{,}14.R}{180}=11{,}304 \iff R=\dfrac{11{,}304.180}{72.3{,}14}=9$ m.

677. Εἶναι : i) $S=3{,}14.1^2 \simeq 3{,}14\ m^2$, ii) $S=3{,}14.2{,}5^2 \simeq 19{,}6250\ m^2$, iii) $S=3{,}14.8^2 \simeq 200{,}96\ cm^2$.

678. Εἶναι : $T=\dfrac{27}{360}.314.3^2 \simeq 2{,}1195\ m^2$, ii) $T=\dfrac{36}{360}.3{,}14.3^2 \simeq 2{,}826\ m^2$, iii) $T=\dfrac{72}{360}.3{,}14.3^2 \simeq 5{,}652\ m^2$, iv) $\dfrac{234}{360}.3{,}14.3^2 \simeq 18{,}369\ m^2$.

679. Εἶναι : $2.3{,}14.R=9{,}42 \iff R=\dfrac{9{,}42}{2\cdot 3{,}14}=\dfrac{3}{2}$ cm καί $S=3{,}14\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \simeq 7{,}065\ m^2$.

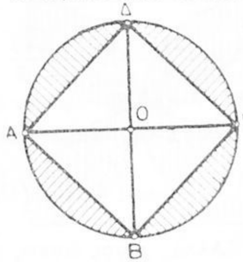
680. Εἶναι : $3{,}14.R^2=7{,}065 \iff R^2=\dfrac{7{,}065}{3{,}14}=9 \Rightarrow R=3$ καί $\gamma=2.3{,}14.3 \simeq 18{,}84$ m.

681. Εἶναι : $\dfrac{72}{360}.3{,}14.R^2=1{,}4130 \iff R^2=\dfrac{1{,}4130.360}{72.3{,}14}=2{,}25 \Rightarrow R=1{,}5$ m καί $\gamma=2.3{,}14.1{,}5=9{,}42$ m.

682. Εἶναι : $S=3,14(7,5^2-4,5^2)=3,14.36 \sim 113,04\ m^2$.

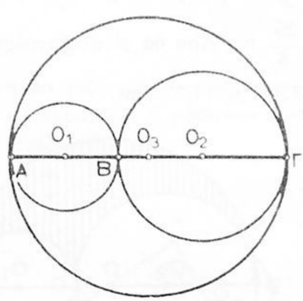
683. Ἂν R εἶναι ἡ ἀκτίνα τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου, θὰ ἔχουμε : $2.3,14.R = 100,48 \Longleftrightarrow R = \frac{100,48}{2.3,14} = 16$ m καί, ἐπειδὴ $R' = 14 : 2 = 7$ m, θὰ εἶναι : $S=3,14(16^2-7^2)=3,14.207 \sim 649,98\ m^2$.

684. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ παρακάτω σχέδιο, τὸ ἐμβαδὸ κάθε κυκλικοῦ τμήματος εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τεταρτοκυκλίου ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου. Θὰ εἶναι δηλ. : $S = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2} = R^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) \simeq 25.\frac{3,14-2}{4} \sim 7,125\ cm^2$.



685. Τὸ μῆκος τῆς μεγάλης (βλέπε παραπλεύρως σχέδιο) εἶναι : $2\pi.\frac{(A\Gamma)}{2} = \pi.(A\Gamma)$,

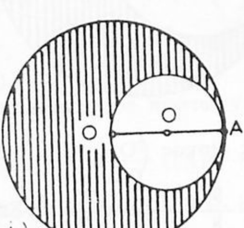
καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν δύο ἄλλων : $2\pi.\frac{(AB)}{2}+2\pi.\frac{(B\Gamma)}{2} = \pi(AB) + \pi(B\Gamma) = \pi.[(AB)+(B\Gamma)] = \pi.(A\Gamma)$. Γιὰ τὶς τιμὲς $(AB) = 10$ καὶ $(B\Gamma) = 4$, ὁπότε καὶ $(A\Gamma) = 10+4 = 14$, εἶναι ἀντίστοιχα : $2\pi.7 = 14\pi$ καὶ $2\pi.5+2\pi.2 = 10\pi+4\pi = 14\pi$.



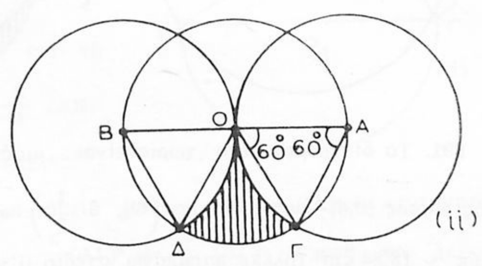
686. Τὸ μῆκος τοῦ κύκλου του εἶναι : $3,14.80 \sim 251,2$ cm καὶ τὸ 1 km θὰ διανύση μέ : $100000 : 251,2 \sim 398$ στροφές. Μὲ 400 γύρους τοῦ πεντὰλ θὰ διατρέξη : $400.2,5.251,2 \sim 251200$ cm ἢ 2,512 km.

687. Εἶναι : $40^2-3,14.11^2 \sim 1600-379,94 \sim 1220,06$ m.

688. Εἶναι : $S_O = 3,14.6^2$ καὶ $S_{O'} = 3,14.3^2$ (βλέπε παρακάτω σχέδιο i).



(i)



(ii)

Ἄρα τὸ ζητούμενο $S = S_O - S_{O'} = 3,14.6^2 - 3,14.3^2 = 3,14.(6^2-3^2) = 3,14.27 \sim 84,78\ cm^2$.

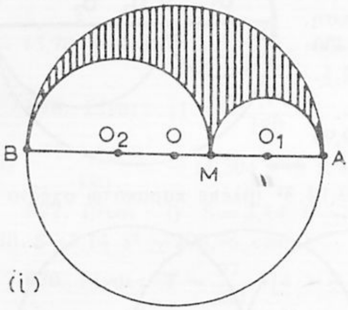
689. Εἶναι : καμπ. τργΟΓΔ=μισὸς δίσκος ΑΓΔΒ — (μικτογραμ. τργΑΓΟ + μικτογραμ. τργΟΔΒ), ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παραπάνω σχέδιο ii.

Ἀλλά : μισὸς δίσκος ΑΓΔΒ $= \frac{1}{2}\pi R^2$ καὶ μικτογραμ. τργΑΓΟ = μικτογραμ. τργ ΟΔΒ = τομ ΓΟΑ + τομ ΟΑΓ — τργ ΑΟΓ = 2 τομ ΓΟΑ — τργ ΑΟΓ = $2 \cdot \frac{60^0}{360^0} \pi R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{\pi}{3} R^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2$.

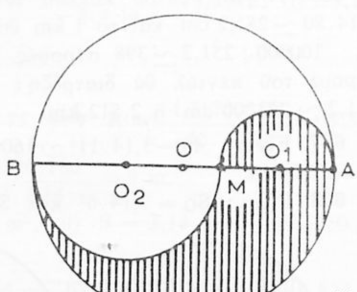
Ὥστε θὰ εἶναι: καμπ. τργ ΟΓΔ $= \frac{\pi}{2} R^2 - 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) R^2 = \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{4}\right) R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) R^2 = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{6} R^2$ καί, μὲ $\sqrt{3} = 1{,}73$, $\pi = 3{,}14$, $R = 5$, θὰ ἔχουμε ζητούμενο $S \simeq 8{,}54$ cm².

690. Εἶναι: καμπ. χωρίο ΜΑΒ=μισὸς δίσκος (Ο,4)— $\left[\right.$μισὸς δίσκος$\left(O_1, 1\frac{1}{2}\right)$+μισὸς δίσκος $\left.\left(O_2, 2\frac{1}{2}\right)\right]$, ὅπως φαίνεται καὶ στὸ παρακάτω σχέδιο i.

Ἀλλά: μισὸς δίσκος (Ο,4)$= \frac{1}{2} \pi . 4^2 = 8\pi$, μισὸς δίσκος $\left(O_1, 1\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi . \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}\pi =$ καὶ μισὸς δίσκος $\left(O_2, 2\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi . \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{8}\pi$. Ἄρα θὰ εἶναι ζητούμενο : $S = 8\pi - \left(\frac{9}{8}\pi - \frac{25}{8}\pi\right) = 8\pi - \frac{17}{4}\pi = \frac{15}{4} . 3{,}14 \simeq 11{,}77$ cm².



(i)



(ii)

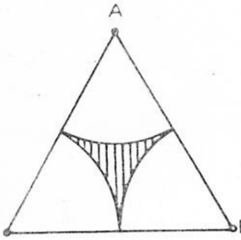
691. Τὸ διαγραμμισμένο χωρίο εἶναι: μισὸς δίσκος $\left(O_1, 1\frac{1}{2}\right)$ + μισὸς δίσκος (0,4)—μισὸς δίσκος $\left(O_2, 2\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}\pi + 8\pi - \frac{25}{8}\pi = 8\pi - 2\pi = 6\pi \simeq 18{,}84$ cm³ (βλέπε παραπάνω σχέδιο ii καὶ ἐξαγόμενα προηγούμενης ἄσκησης).

Τὸ ὑπόλοιπο χωρίο θὰ εἶναι: δίσκος (Ο,4)—διαγραμμισμένο χωρίο$=16\pi - 6\pi = 10\pi \simeq 31{,}4$ cm².

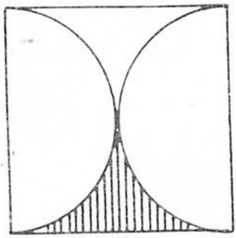
692. Τὸ τραπέζι ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 1,5m καὶ 3,17 m κι ἕνα κύκλο μὲ ἀκτίνα 0,75m. Ἄρα τὸ ἐμβαδό του θὰ εἶναι: $3{,}17 . 1{,}5 + 3{,}14 . 0{,}75^2 \simeq 6{,}521250$ m² καὶ ἡ περίμετρος του : $2.(3{,}17 + 1.5) +$

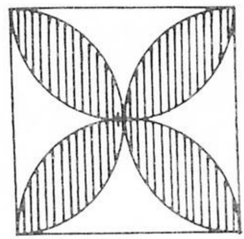
$2.3{,}14.0{,}75 \simeq 14{,}05$ m. Συνεπῶς, μποροῦν νὰ καθήσουν σ' αὐτό : $14{,}05 : 0{,}65 \simeq 21$ ἄτομα.

693. Εἶναι ζητούμενο S = S ἰσοπλεύρου τριγώνου — 3 S τομέα 60^0 = $\frac{\sqrt{3}}{4}.\ 6^2 - 3\ .\ \frac{60}{360}\ .\ 3{,}14\ 3^2 = \frac{1{,}73}{4}\ .\ 36 - \frac{3{,}14}{2}\ .\ 9 \simeq 1{,}44$ cm² (βλέπε παρακάτω σχέδιο i).



(i)

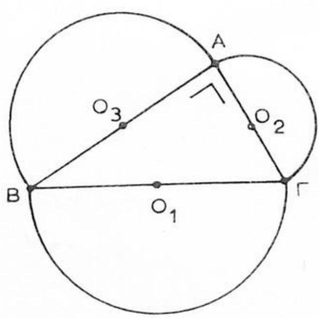

(ii)


(iii)

694. Ὅπως φαίνεται στὸ παραπάνω σχέδιο ii εἶναι ζητούμενο $S = \frac{1}{2}$ (S τετραγώνου – S δίσκου) $= \frac{1}{2}\ .(6^2 - 3{,}14\ .\ 3^2) \simeq 3{,}87$ cm².

695. Προσδιορίζομε, ὅπως παραπάνω, τὸ ἐμβαδὸ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου ποὺ βρέθηκε ἴσο μὲ 3,87 cm² καὶ τότε θὰ ἔχουμε : S ρόδακα $= 6^2 - 4\ .\ 3{,}87 \simeq 36 - 15{,}48 \simeq 20{,}52$ cm² (βλέπε παραπάνω σχέδιο iii).

696. Οἱ ἀκτίνες τῶν τριῶν μισῶν δίσκων εἶναι ἀντίστοιχα $\frac{AB}{2}$, $\frac{A\Gamma}{2}$ καὶ $\frac{B\Gamma}{2}$. Ἄρα τὰ ἐμβαδά τους θὰ εἶναι : $\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ (AB)^2$, $\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ (A\Gamma)^2$, $\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\ (B\Gamma)^2$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων : $\frac{\pi}{4}\ (AB)^2 + \frac{\pi}{4}(A\Gamma)^2 = \frac{\pi}{4}\ [(AB)^2 + (A\Gamma)^2]$.



Ἀλλά, σύμφωνα μὲ τὸ πυθαγόρειο θεώρημα, εἶναι $(AB)^2 + A\Gamma)^2 = (B\Gamma)^2$. Ἄρα θὰ ἔχουμε : $\frac{\pi}{4}(AB)^2 + \frac{\pi}{4}(A\Gamma)^2 = \frac{\pi}{4}\ (B\Gamma)^2$, σχέση ποὺ δείχνει ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν μισῶν δίσκων ποὺ ἔχουν διαμέτρους τὶς κάθετες πλευρὲς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸ τοῦ μισοῦ δίσκου ποὺ ἔχει διάμετρο τὴν ὑποτείνουσα τοῦ ἴδιου τριγώνου.