

002
ΚΛΣ
ΣΤ3
35

ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

Α

2

ΜΜ

Σταυρού Σταυροπούλου

ΤΕΥΧΟΣ 2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ



ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΜΑΙΚΗΝΑΣ"

ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΑΣΚΛΗΠΙΟΥ-ΣΚΟΥΦΑ 66-ΑΘΗΝΑΙ

(Τ.Τ.144), ΤΗΛ. 610-214

ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΜΜΣ

Σταυροπούλου (Σταύρος)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΕΥΧΟΣ 2

ΠΕΡΙΕΧΕΙ ΤΑΣ 346-629 ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ
ΑΥΤΩΝ, ΤΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑΣ ΕΙΣ ΤΟ ΒΙΒΛΙΟΝ «ΤΡΙΓΩ-
ΝΟΜΕΤΡΙΑ» ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ



ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ "ΜΑΙΚΗΝΑΣ",
ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΤΑΥΡΟΠΟΥΛΟΥ

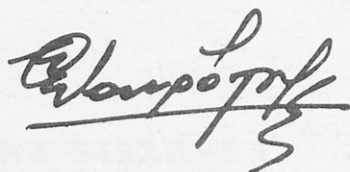
ΑΣΚΛΗΠΙΟΥ & ΣΚΟΥΦΑ 66 - ΑΘΗΝΑΙ (144) - ΤΗΛ. 610-214



ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΤΗΣ ΒΟΥΛΗΣ
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εκδ. "Μαϊκήνας" 1966
318

002
272
Σ73
35

Κάθε γνήσιον αντίτυπον φέρει την υπογραφήν του συγγραφέως.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read 'Theodoros S. Sphakianakis', with a horizontal line drawn beneath the name.

COPYRIGHT 1963 υπό του συγγραφέως

ΠΡΑΚΤΙΚΑΙ ΔΣΚΙΣΕΙΣ

ΠΙΘΑΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

Νά εὑρεθοῦν τὰ ἡμίτονα, τὰ συνημίτονα καί αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν ἀκολουθῶν γωνιῶν. —

346) 41ο10' 74ο30' 35ο15' 59ο30'

Λύσις. — α) Ζητοῦνται ἡμ(41ο10'), συν(41ο10'), ἐφ(41ο10'). Ἐκ τοῦ πίνακος λαμβάνομεν. —

$$\eta\mu(41\circ 10') = 0,65825$$

$$\sigma\upsilon\nu(41\circ 10') = 0,75279$$

$$\epsilon\phi(41\circ 10') = 0,87441$$

β) Ζητοῦνται ἡμ(74ο30'), συν(74ο30'), ἐφ(74ο30').

Ἐκ τοῦ πίνακος λαμβάνομεν. —

$$\eta\mu(74\circ 30') = 0,96363$$

$$\sigma\upsilon\nu(74\circ 30') = 0,26724$$

$$\epsilon\phi(74\circ 30') = 3,60588$$

γ) Ζητοῦνται ἡμ(35ο15'), συν(35ο15'), ἐφ(35ο15').

$$\eta\mu(35\circ 15') = 0,57714$$

$$\eta\mu(35\circ 10') = 0,57596$$

$$+ 0,00118$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(35\circ 15') = ; 0,57714 \\ \eta\mu(35\circ 30') = 0,57833 \end{array} \right) D = 0,00237$$

Εἰς αὐξῆσιν ἡμ 0,00237 ἀντιστοιχεῖ 10' αὐξήσεις γωνίας.
Εἰς ποίαν αὐξῆσιν ἡμ d ἀντιστοιχεῖ 5' αὐξήσεις γωνίας;

$$d = 0,00237 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,01185}{10} = 0,001185 \text{ ἢ } 0,00118$$

$$\sigma\upsilon\nu(35\circ 15') = ; 0,81664$$

$$\sigma\upsilon\nu(35\circ 10') = 0,81748$$

$$- 0,00084$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(35\circ 15') = ; 0,81664 \\ \sigma\upsilon\nu(35\circ 20') = 0,81580 \end{array} \right) D = 0,00168$$

Εἰς αὐξῆσιν ἡμιτόνου 0,00168 ἀντιστοιχεῖ αὐξήσεις 10'.
Εἰς ποίαν αὐξῆσιν ἡμ d ἀντιστοιχεῖ αὐξήσεις γωνίας 5';

$$d = 0,00168 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,00840}{10} = 0,00084$$

$$\epsilon\phi(35\circ 15') = ; 0,70673$$

$$\epsilon\phi(35\circ 10') = 0,70455$$

$$+ 0,00218$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \epsilon\phi(35\circ 15') = 0,70673 \end{array} \right) D = 0,00436$$

$$\backslash \text{ έφ}(35^{\circ}20') = 0,70891 /$$

Είς αύξησιν ήμ 0,00436 άντιστοιχεῖ αύξησις γωνίας 10'
Είς ποίαν αύξησιν d = ; " " 5'

$$d = 0,00436 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,2180}{10} = 0,00218$$

δ) Ζητοῦνται τὰ ήμ(59°30'), συν(59°30'), έφ(59°30'). Έκ τῶν πινακῶν εύρίσκομεν. -

$$\text{ήμ}(59^{\circ}30') = 0,86163$$

$$\text{συν}(59^{\circ}30') = 0,50754$$

$$\text{έφ}(59^{\circ}30') = 1,69766$$

347.) 81°45' 47°26' 50°28' 68°57'
Λύσεις. - α) Ζητοῦνται ήμ(81°45'), συν(81°45'), έφ(81°45')

$$\text{ήμ}(81^{\circ}45') = ;$$

$$\text{ήμ}(81^{\circ}40') = 0,98944$$

$$10' \left(\begin{array}{l} 5' \left(\begin{array}{l} \text{ήμ}(81^{\circ}45') = ; \\ \text{ήμ}(81^{\circ}50') = 0,98986 \end{array} \right. + \frac{0,00021}{0,98965} \end{array} \right) D = 0,00042$$

Είς αύξησιν ήμ 0,00042 άντιστοιχεῖ αύξησις γωνίας 10'
Ποία αύξησις d = ; " είς αύξησιν " 5'

$$d = 0,00042 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,00210}{10} = 0,00021$$

$$\text{συν}(81^{\circ}45') = ; 0,14349$$

$$\text{συν}(81^{\circ}40') = 0,14493$$

$$10' \left(\begin{array}{l} 5' \left(\begin{array}{l} \text{συν}(81^{\circ}45') = ; \\ \text{συν}(81^{\circ}50') = 0,14205 \end{array} \right. - \frac{0,00144}{0,14349} \end{array} \right) D = 0,00288$$

Είς ελάττωσιν συν 0,00288 άντιστοιχεῖ αύξησις τόξου 10'
Πόση ελάττωσις d = ; άντιστοιχεῖ είς αύξησ. " 5'

$$d = 0,00288 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,01440}{10} = 0,00144$$

$$\text{έφ}(81^{\circ}45') = ; 6,89758$$

$$\text{έφ}(81^{\circ}40') = 6,82694$$

$$10' \left(\begin{array}{l} 5' \left(\begin{array}{l} \text{έφ}(81^{\circ}45') = ; \\ \text{έφ}(81^{\circ}50') = 6,96823 \end{array} \right. + \frac{0,07064}{6,89758} \end{array} \right) D = 0,14129$$

Είς α.ύξησιν έφ 0,14129 άντιστοιχεῖ αήξησις γων. 10'
Πόση αύξησις έφ d = ; " είς αύξησιν " 5'

$$d = 0,14129 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,70645}{10} = 0,070645 \approx 0,07064$$

β) Ζητούνται: $\eta\mu(47^{\circ}26')$, $\sigma\upsilon\nu(47^{\circ}26')$, $\xi\varphi(47^{\circ}26')$
 $\eta\mu(47^{\circ}26') = ; 0,73649$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(47^{\circ}20') = 0,73531 \\ \quad + 0,00118 \\ \eta\mu(47^{\circ}26') = ; 0,73649 \\ \eta\mu(47^{\circ}30') = 0,73728 \end{array} \right) D = 0,00197 \right.$$

Είς αύξησιν $\eta\mu$ 0,00197 ἀντιστοιχεῖ αύξησης γωνίας $10'$
 Εἰς αύξησης ἀντιστοιχεῖ εἰς $d = ;$ εἰς γωνίαν $6'$

$$d = 0,00197 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,01182}{10} = 0,001182 \approx 0,00118$$

$$\sigma\upsilon\nu(47^{\circ}26') = ; 0,67645$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(47^{\circ}20') = 0,67773 \\ \quad - 0,00128 \\ \sigma\upsilon\nu(47^{\circ}26') = ; 0,67645 \\ \sigma\upsilon\nu(47^{\circ}30') = 0,67559 \end{array} \right) D = 0,00214 \right.$$

$0,00214 \quad 10'$
 $d = ; \quad 6'$

$$d = 0,00214 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,01284}{10} = 0,001284 \approx 0,00128$$

$$\xi\varphi(47^{\circ}26') = ; 1,08877$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{l} \xi\varphi(47^{\circ}20') = 1,08496 \\ \quad + 0,00381 \\ \xi\varphi(47^{\circ}26') = ; 1,08877 \\ \xi\varphi(47^{\circ}30') = 1,09131 \end{array} \right) D = 0,00635 \right.$$

$0,00635 \quad 10'$
 $d = ; \quad 6'$

$$d = 0,00635 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,03810}{10} = 0,00381$$

γ) Ζητούνται: $\eta\mu(50^{\circ}28')$, $\sigma\upsilon\nu(50^{\circ}28')$, $\xi\varphi(50^{\circ}28')$
 $\eta\mu(50^{\circ}28') = ; 0,77125$

$$10' \left(8' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(50^{\circ}20') = 0,76977 \\ \quad + 0,00148 \\ \eta\mu(50^{\circ}28') = ; 0,77125 \end{array} \right) D = 0,00185 \right.$$

$$\begin{array}{r} \backslash \quad \eta\mu(50^{\circ}30') = ; 0,77162 \\ \quad 0,00185 \quad 10' \\ \quad d = ; \quad 8' \end{array}$$

$$d = 0,00185 \cdot \frac{8'}{10} = \frac{0,01480}{10} = 0,00148$$

$$\begin{array}{r} \sigma\upsilon\nu(50^{\circ}28') = ; 0,63653 \\ \sigma\upsilon\nu(50^{\circ}20') = 0,63832 \\ \quad - 0,00179 \\ \hline \sigma\upsilon\nu(50^{\circ}28') = ; 0,63653 \\ \sigma\upsilon\nu(50^{\circ}30') = 0,63608 \\ \quad 0,00224 \quad 10' \\ \quad d = ; \quad 8' \end{array} \quad D = 0,00224$$

$$\begin{array}{r} 0,00224 \quad 10' \\ d = ; \quad 8' \end{array}$$

$$d = 0,00224 \cdot \frac{8'}{10} = \frac{0,01792}{10} = 0,001792 \approx 0,00179$$

$$\begin{array}{r} \xi\varphi(50^{\circ}28') = ; 1,21167 \\ \xi\varphi(50^{\circ}20') = 1,20593 \\ \quad + 0,00574 \\ \hline \xi\varphi(50^{\circ}28') = ; 1,21167 \\ \xi\varphi(50^{\circ}30') = 1,21310 \\ \quad 0,00717 \quad 10' \\ \quad d = ; \quad 8' \end{array} \quad D = 0,00717$$

$$d = 0,00717 \cdot \frac{8'}{10} = \frac{0,05736}{10} = 0,005736 \approx 0,00574$$

δ) Ζητούνται $\eta\mu(68^{\circ}57')$, $\sigma\upsilon\nu(68^{\circ}57')$, $\xi\varphi(68^{\circ}57')$

$$\begin{array}{r} \eta\mu(68^{\circ}57') = ; 0,93326 \\ \eta\mu(68^{\circ}50') = 0,93253 \\ \quad + 0,00073 \\ \hline \eta\mu(68^{\circ}57') = ; 0,93326 \\ \eta\mu(69^{\circ}) = 0,93358 \\ \quad 0,00105 \quad 10' \\ \quad d = ; \quad 7' \end{array} \quad D = 0,00105$$

$$d = 0,00105 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,00735}{10} = 0,000735 \approx 0,00073$$

$$\sigma\upsilon\nu(68\circ57') = ; 0,35918$$

$$10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(68\circ50') = 0,36108 \\ \sigma\upsilon\nu(68\circ57') = ; 0,35918 \\ \sigma\upsilon\nu 69\circ = 0,35837 \end{array} \right) \right. \left. \begin{array}{l} - 0,00190 \\ \hline \end{array} \right) D = 0,00271$$

$$0,00271 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00271 \cdot \frac{7'}{10'} = \frac{0,01897}{10} = 0,001897 \text{ ή } 0,00190$$

$$\acute{\epsilon}\varphi(68\circ57') = ; 2,59865$$

$$10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \acute{\epsilon}\varphi(68\circ50') = 2,58361 \\ \acute{\epsilon}\varphi(68\circ57') = ; 2,59865 \\ \acute{\epsilon}\varphi 69\circ = 2,60509 \end{array} \right) \right. \left. \begin{array}{l} + 0,01514 \\ \hline \end{array} \right) D = 0,02148$$

$$0,02148 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,02148 \cdot \frac{7'}{10'} = \frac{0,15036}{10} = 0,015036 \text{ ή } 0,01504$$

348.) 2907', 42012' 19049' 82035'
 Λύσεις.- Ζητοῦνται: ήμ(2907'), σιν(2907'), έφ(2907')

$$\alpha) \text{ ήμ}(2907') = ; 0,48659$$

$$10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \text{ήμ } 290 = 0,48481 \\ \text{ήμ}(2907') = ; 0,48659 \\ \text{ήμ}(29010') = 0,48735 \end{array} \right) \right. \left. \begin{array}{l} + 0,00178 \\ \hline \end{array} \right) D = 0,00254$$

$$0,00254 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00254 \cdot \frac{7'}{10'} = \frac{0,01778}{10} = 0,001778 \text{ ή } 0,00178$$

$$\sigma\upsilon\nu(2907') = ; 0,87363$$

$$10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(290 = 0,87462 \\ \sigma\upsilon\nu(2907') = ; 0,87363 \\ \sigma\upsilon\nu(29010') = 0,87321 \end{array} \right) \right. \left. \begin{array}{l} - 0,00099 \\ \hline \end{array} \right) D = 0,00141$$

$$0,00141 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00141 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,00987}{10} = 0,000987 \approx 0,00099$$

$$\xi\varphi(2907') = ; 0,55698$$

$$10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \xi\varphi 290 \\ \xi\varphi(2907') \\ \xi\varphi(29010') \end{array} \right) \begin{array}{l} = 0,55431 \\ + 0,00267 \\ = 0,55698 \\ = 0,55812 \end{array} \right) D = 0,00381$$

$$0,00381 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00381 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,02667}{10} = 0,002667 \approx 0,00267$$

$$\beta) \text{ Ζητούνται } \eta\mu(42012'), \sigma\upsilon\nu(42012'), \xi\varphi(42012')$$

$$\eta\mu(42012') = ; 0,67172$$

$$10' \left(2' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(42012') \\ \eta\mu(42020') \end{array} \right) \begin{array}{l} = 0,67129 \\ + 0,00043 \\ = 0,67172 \\ = 0,67344 \end{array} \right) D = 0,00215$$

$$0,00215 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 2'$$

$$d = 0,00215 \cdot \frac{2'}{10} = \frac{0,00430}{10} = 0,00043$$

$$\sigma\upsilon\nu(42012') = ; 0,74080$$

$$10' \left(2' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(42010') \\ \sigma\upsilon\nu(42012') \\ \sigma\upsilon\nu(42020') \end{array} \right) \begin{array}{l} = 0,74119 \\ - 0,00039 \\ = 0,74080 \\ = 0,73924 \end{array} \right) D = 0,00195$$

$$0,00195 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 2'$$

$$d = 0,00195 \cdot \frac{2'}{10} = \frac{0,00039}{10} = 0,00039$$

$$\xi\varphi(42012') = ; 0,90755$$

$$10' \left(2' \left(\begin{array}{l} \xi\varphi(42010') \\ \xi\varphi(42012') \end{array} \right) \begin{array}{l} = 0,90669 \\ + 0,00086 \\ = 0,90755 \end{array} \right) D = 0,00430$$

$$\begin{array}{l} \backslash \quad \acute{\epsilon}\varphi(42020') = 0,91099 \quad \checkmark \\ 0,00430 \quad 10' \\ d=; \quad 2' \end{array}$$

$$d = 0,00430 \cdot \frac{2'}{10'} = \frac{0,00860}{10} = 0,00086$$

$$\gamma) \text{ Ζητοῦνται: } - \acute{\eta}\mu(19049'), \sigma\upsilon\nu(19049'), \acute{\epsilon}\varphi(19049').$$

$$\acute{\eta}\mu(19049') = ; 0,33902$$

$$\begin{array}{l} 10' \left(9' \left(\begin{array}{l} \acute{\eta}\mu(19040') = 0,33655 \\ \quad + 0,00247 \\ \acute{\eta}\mu(19049') = ; 0,33902 \\ \acute{\eta}\mu(19050') = 0,33929 \end{array} \right) \right. \quad D = 0,00274 \\ 0,00274 \quad 10' \\ d=; \quad 9' \end{array}$$

$$d = 0,00274 \cdot \frac{9'}{10'} = \frac{0,02466}{10} = 0,002466 \quad \eta \quad 0,65247$$

$$\sigma\upsilon\nu(19049') = ; 0,94078$$

$$\begin{array}{l} 10' \left(9' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(19040') = 0,94167 \\ \quad - 0,00089 \\ \sigma\upsilon\nu(19049') = ; 0,94078 \\ \sigma\upsilon\nu(19050') = 0,94068 \end{array} \right) \right. \quad D = 0,00099 \\ 0,00099 \quad 10' \\ d=; \quad 9' \end{array}$$

$$d = 0,00099 \cdot \frac{9'}{10'} = \frac{0,00891}{10} = 0,00089$$

$$\acute{\epsilon}\varphi(19049') = ; 0,36035$$

$$\begin{array}{l} 10' \left(9' \left(\begin{array}{l} \acute{\epsilon}\varphi(19040') = 0,35739 \\ \quad + 0,00296 \\ \acute{\epsilon}\varphi(19049') = ; 0,36035 \\ \acute{\epsilon}\varphi(19050') = 0,36068 \end{array} \right) \right. \quad D = 0,00329 \\ 0,00329 \quad 10' \\ d=; \quad 9' \end{array}$$

$$d = 0,00329 \cdot \frac{9'}{10'} = \frac{0,02961}{10} = 0,00296$$

δ) Ζητοῦνται. - $\eta\mu(82^{\circ}35')$, $\sigma\upsilon\nu(82^{\circ}35')$, $\acute{\epsilon}\varphi(82^{\circ}35')$
 $\eta\mu(82^{\circ}35') = ; 0,99163$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(82^{\circ}30') = 0,99144 \\ \quad + 0,00019 \\ \eta\mu(82^{\circ}35') = ; 0,99163 \\ \eta\mu(82^{\circ}40') = 0,99182 \end{array} \right) D = 0,00038$$

$$0,00038 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5'$$

$$d = 0,00038 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,0019}{10} = 0,00019$$

$\sigma\upsilon\nu(82^{\circ}35') = ; 0,12909$

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(82^{\circ}30') = 0,13053 \\ \quad - 0,00144 \\ \sigma\upsilon\nu(82^{\circ}35') = ; 0,12909 \\ \sigma\upsilon\nu(82^{\circ}40') = 0,12764 \end{array} \right) D = 0,00289$$

$$0,00289 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5'$$

$$d = 0,00289 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,01445}{10} = 0,001445 \approx 0,00144$$

$\acute{\epsilon}\varphi(82^{\circ}35') = ; 7,68305$

$$10' \left(\begin{array}{l} \acute{\epsilon}\varphi(82^{\circ}30') = 7,59575 \\ \quad + 0,08730 \\ \acute{\epsilon}\varphi(82^{\circ}35') = ; 7,68305 \\ \acute{\epsilon}\varphi(82^{\circ}40') = 7,77035 \end{array} \right) D = 0,17460$$

$$0,17460 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5'$$

$$d = 0,17460 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,87300}{10} = 0,08730$$

349) $\eta\mu(41^{\circ}12')$, $\sigma\upsilon\nu(41^{\circ}12')$, $\acute{\epsilon}\varphi(41^{\circ}12')$.

α) Ζητοῦνται. - $\eta\mu(41^{\circ}12')$, $\sigma\upsilon\nu(41^{\circ}12')$, $\acute{\epsilon}\varphi(41^{\circ}12')$
 $\eta\mu(41^{\circ}12') = ; 0,65869$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(41^{\circ}10') = 0,65825 \\ \quad + 0,00044 \\ \eta\mu(41^{\circ}12') = ; 0,65869 \end{array} \right) D = 0,00219$$

$$\begin{aligned} \backslash \quad \eta\mu(41\circ 20') &= 0,66044 \quad \swarrow \\ 0,00219 \quad 10' \\ d = ; \quad 2' \end{aligned}$$

$$d = 0,00219 \cdot \frac{2'}{10'} = \frac{0,00438}{10} = 0,000438 \quad \eta \quad 0,00044$$

$$\begin{aligned} \sigma\nu(41\circ 12') &= ; \quad 0,75241 \\ \sigma\nu(41\circ 10') &= \quad 0,75279 \\ 10' \left(2' \left(\begin{array}{l} -0,00038 \\ \sigma\nu(41\circ 12') = ; \quad 0,75241 \\ \sigma\nu(41\circ 20') = \quad 0,75088 \end{array} \right) \right. & \quad D = 0,00191 \\ 0,00191 \quad 10' \\ d = ; \quad 2' \end{aligned}$$

$$d = 0,00191 \cdot \frac{2'}{10'} = \frac{0,00382}{10} = 0,00038$$

$$\begin{aligned} \acute{\epsilon}\varphi(41\circ 12') &= ; \quad 0,87544 \\ \acute{\epsilon}\varphi(41\circ 10') &= \quad 0,87441 \\ 10' \left(2' \left(\begin{array}{l} + 0,00103 \\ \acute{\epsilon}\varphi(41\circ 12') = ; \quad 0,87544 \\ \acute{\epsilon}\varphi(41\circ 20') = \quad 0,87955 \end{array} \right) \right. & \quad D = 0,00514 \\ 0,00514 \quad 10' \\ d = ; \quad 2' \end{aligned}$$

$$d = 0,00514 \cdot \frac{2'}{10'} = \frac{0,01028}{10} = 0,001028 \quad \eta \quad 0,00103$$

β) Ζητούνται τὰ $\eta\mu(44\circ 15')$, $\sigma\nu(44\circ 15')$, $\acute{\epsilon}\varphi(44\circ 15')$.

$$\begin{aligned} \eta\mu(44\circ 15') &= ; \quad 0,69779 \\ \eta\mu(44\circ 10') &= \quad 0,69675 \\ 10' \left(5' \left(\begin{array}{l} + 0,00104 \\ \eta\mu(44\circ 15') = ; \quad 0,69779 \\ \eta\mu(44\circ 20') = \quad 0,69883 \end{array} \right) \right. & \quad D = 0,00208 \\ 0,00208 \quad 10' \\ d = ; \quad 5' \end{aligned}$$

$$d = 0,00208 \cdot \frac{5'}{10'} = \frac{0,01040}{10} = 0,00104$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\nu\nu}(44015') &=; 0,71631 \\ \sigma_{\nu\nu}(44010') &= 0,71732 \\ &\quad -0,00102 \\ 10 \left(\begin{array}{l} 5' \\ \sigma_{\nu\nu}(44015') =; 0,71631 \\ \sigma_{\nu\nu}(44020') = 0,71529 \end{array} \right) & D = 0,00203 \\ 0,00203 & 10' \\ d =; & 5' \end{aligned}$$

$$d = 0,00203 \cdot \frac{5'}{10} = \frac{0,01015}{10} = 0,001015 \approx 0,00101$$

$$\begin{aligned} \xi\varphi(44015') &=; 0,97416 \\ \xi\varphi(44010') &= 0,97133 \\ &\quad + 0,00283 \\ 10 \left(\begin{array}{l} 5' \\ \xi\varphi(44015') =; 0,97416 \\ \xi\varphi(44020') = 0,97699 \end{array} \right) & D = 0,00566 \\ 0,00566 & 10' \\ d =; & 5' \end{aligned}$$

$$d = 0,00566 \cdot \frac{5'}{10} = \frac{0,02830}{10} = 0,00283$$

γ) Ζητούνται τα: $\eta\mu(67^\circ 30')$, $\sigma_{\nu\nu}(67^\circ 30')$, $\epsilon\varphi(67^\circ 30')$

Από τους πίνακες εύρισκομεν:

$$\eta\mu(67^\circ 30') = 0,92388$$

$$\sigma_{\nu\nu}(67^\circ 30') = 0,38268$$

$$\epsilon\varphi(67^\circ 30') = 2,41421$$

δ) Ζητούνται τα: $\eta\mu(68051')$, $\sigma_{\nu\nu}(68051')$, $\xi\varphi(68051')$

$$\eta\mu(68051') =; 0,93263$$

$$\eta\mu(68050') = 0,93253$$

$$+ 0,00010$$

$$10 \left(\begin{array}{l} 1' \\ \eta\mu(68051') =; 0,93263 \\ \eta\mu 690 = 0,93358 \end{array} \right) & D = 0,00105$$

$$0,00105 \quad 10'$$

$$d =; \quad 1'$$

$$d = 0,00105 \cdot \frac{1'}{10} = 0,000105$$

$$\sigma_{\nu\nu}(68051') =; 0,36081$$

$$\begin{array}{l}
 10' \left(1' \left(\begin{array}{l} \sigma_{\nu\nu}(68050') = 0,36108 \\ -0,00027 \\ \sigma_{\nu\nu}(68051') = 0,36081 \\ \sigma_{\nu\nu}(690) = 0,35837 \end{array} \right) \right. \\
 \left. \begin{array}{l} D = 0,00271 \\ 0,00271 \\ d = ; \end{array} \right) 10' \\
 \left. \begin{array}{l} 10' \\ 1' \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$d = 0,00271 \cdot \frac{1'}{10} = 0,00027$$

$$\begin{array}{l}
 \xi\varphi(68051') = ; 2,58576 \\
 \xi\varphi(68050') = 2,58361 \\
 + 0,00215 \\
 10' \left(1' \left(\begin{array}{l} \xi\varphi(68051') = ; 2,58576 \\ \xi\varphi(690) = 2,60509 \end{array} \right) \right. \\
 \left. \begin{array}{l} D = 0,02148 \\ 0,02148 \\ d = ; \end{array} \right) 10' \\
 \left. \begin{array}{l} 10' \\ 1' \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$d = 0,02148 \cdot \frac{1'}{10} = 0,002148 \approx 0,00215$$

350) 43047', 42041' 71036 34016'

Αύσις.- α) Ζητούνται: $\eta\mu(43047')$, $\sigma_{\nu\nu}(43047')$, $\xi\varphi(43047')$.

$$\begin{array}{l}
 \eta\mu(4347') = ; 0,69193 \\
 \eta\mu(43040') = 0,69046 \\
 + 0,00147 \\
 10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(43047') = ; 0,69193 \\ \eta\mu(43050') = 0,69256 \end{array} \right) \right. \\
 \left. \begin{array}{l} D = 0,00210 \\ 0,00210 \\ d = ; \end{array} \right) 10' \\
 \left. \begin{array}{l} 10' \\ 7' \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$d = 0,00210 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,01470}{10} = 0,00147$$

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{\nu\nu}(43047') = ; 0,72196 \\
 \sigma_{\nu\nu}(43040') = 0,72337 \\
 - 0,00141 \\
 10' \left(7' \left(\begin{array}{l} \sigma_{\nu\nu}(43047') = ; 0,72196 \\ \sigma_{\nu\nu}(43050') = 0,72136 \end{array} \right) \right. \\
 \left. \begin{array}{l} D = 0,00201 \\ 0,00201 \\ d = ; \end{array} \right) 10' \\
 \left. \begin{array}{l} 10' \\ 7' \end{array} \right)
 \end{array}$$

$$d = 0,00201 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,01407}{10} = 0,001407 \approx 0,00141$$

$$\epsilon\varphi(43047') = ; \quad 0,95841$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \epsilon\varphi(43040') = 0,95451 \\ + 0,00390 \\ \epsilon\varphi(43047') = ; \quad 0,95841 \\ \epsilon\varphi(43050') = 0,96008 \end{array} \right) \quad D = 0,00557$$

$$0,00557 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00557 \cdot \frac{7'}{10} = \frac{0,03899}{10} = 0,003899 \approx 0,00390$$

β) Ζητούνται. - $\eta\mu(42041')$, $\sigma\upsilon\nu(42041')$, $\epsilon\varphi(42041')$

$$\eta\mu(42041') = ; \quad 0,67794$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(42040') = 0,67773 \\ + 0,00021 \\ \eta\mu(42041') = ; \quad 0,67794 \\ \eta\mu(42050') = 0,67987 \end{array} \right) \quad D = 0,00214$$

$$0,00214 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 1'$$

$$d = 0,00214 \cdot \frac{1'}{10} = 0,000214 \approx 0,00021$$

$$\sigma\upsilon\nu(42041') = ; \quad 0,73531$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(42040') = 0,73531 \\ - 0,00020 \\ \sigma\upsilon\nu(42041') = ; \quad 0,73511 \\ \sigma\upsilon\nu(42050') = 0,73333 \end{array} \right) \quad D = 0,00198$$

$$0,00198 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 1'$$

$$d = 0,00198 \cdot \frac{1'}{10} = 0,000198 \approx 0,00020$$

$$\epsilon\varphi(42041') = ; \quad 0,92223$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \epsilon\varphi(42040') = 0,92169 \\ + 0,00054 \\ \epsilon\varphi(42041') = ; \quad 0,92223 \\ \epsilon\varphi(42050') = 0,92709 \end{array} \right) \quad D = 0,00540$$

$$0,00540 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 1'$$

$$d = 0,00540 \cdot \frac{1'}{10} = 0,00054$$

Ζητούνται τὰ $\eta\mu(71036')$, $\sigma\upsilon\nu(71036')$, $\xi\varphi(71036')$.

$$\eta\mu(71036') = ; 0,94885$$

$$\eta\mu(71030') = 0,94832$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{r} + 0,00053 \\ \hline \end{array} \right) \right.$$

$$\eta\mu(71036') = ; 0,94885$$

$$\eta\mu(71040') = 0,94921$$

$$D = 0,00089$$

$$0,00089 \quad 10'$$

$$d = ; 6'$$

$$d = 0,00089 \cdot \frac{6'}{10} = \frac{0,00534}{10} = 0,000534 \approx 0,00053$$

$$\sigma\upsilon\nu(71036') = ; 0,31564$$

$$\sigma\upsilon\nu(71030') = 0,31730$$

$$-0,00166$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{r} \hline \sigma\upsilon\nu(71036') = ; 0,31564 \\ \sigma\upsilon\nu(71040') = 0,31454 \end{array} \right) \right.$$

$$D = 0,00276$$

$$0,00276 \quad 10'$$

$$d = ; 6'$$

$$d = 0,00276 \cdot \frac{6'}{10} = \frac{0,01656}{10} = 0,001656 \approx 0,00166$$

$$\xi\varphi(71036') = ; 3,00617$$

$$\xi\varphi(71030') = 2,98868$$

$$+ 0,01749$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{r} \hline \xi\varphi(71036') = ; 3,00617 \\ \xi\varphi(71040') = 3,01783 \end{array} \right) \right.$$

$$D = 0,02915$$

$$0,02915 \quad 10'$$

$$d = ; 6'$$

$$d = 0,02915 \cdot \frac{6'}{10} = \frac{0,17490}{10} = 0,01749$$

Ζητούνται τὰ $\eta\mu(34016')$, $\sigma\upsilon\nu(34016')$, $\xi\varphi(34016')$.

$$\eta\mu(34016') = ; 0,56305$$

$$\eta\mu(34010') = 0,56160$$

$$+ 0,00145$$

$$10' \left(6' \left(\begin{array}{r} \hline \eta\mu(34016') = ; 0,56305 \end{array} \right) \right.$$

$$D = 0,00241$$

$$\begin{array}{l} \backslash \quad \eta\mu(34020') = 0,56401 \quad \downarrow \\ 0,00241 \quad 10' \\ d=; \quad 6' \end{array}$$

$$d = 0,00241 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,01446}{10} = 0,001446 \quad \eta \quad 0,00145$$

$$\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(34016') =; 0,82643 \\ \sigma\upsilon\nu(34010') = 0,82741 \\ 10' \left(\begin{array}{l} 6' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(34016') =; 0,82643 \\ \sigma\upsilon\nu(34020') = 0,82577 \end{array} \right) \\ \sigma\upsilon\nu(34010') = - 0,00098 \end{array} \right) \quad D = 0,00164 \\ 0,00164 \quad 10' \\ d=; \quad 6' \end{array}$$

$$d = 0,00164 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,00989}{10} = 0,000989 \quad \eta \quad 0,00099$$

$$\begin{array}{l} \acute{\epsilon}\varphi(34016') =; 0,68131 \\ \acute{\epsilon}\varphi(34010') = 0,67875 \\ 10' \left(\begin{array}{l} 6' \left(\begin{array}{l} \acute{\epsilon}\varphi(34016') =; 0,68131 \\ \acute{\epsilon}\varphi(34020') = 0,68301 \end{array} \right) \\ \acute{\epsilon}\varphi(34010') = + 0,00256 \end{array} \right) \quad D = 0,00426 \\ 0,00426 \quad 10' \\ d=; \quad 6' \end{array}$$

$$d = 0,00426 \cdot \frac{6'}{10'} = \frac{0,02556}{10} = 0,002556 \quad \eta \quad 0,00256$$

351) Δίδεται $\eta\mu\chi$ 0,7793, $\eta\mu\chi$ 0,2844, $\eta\mu\chi$ 0,9407
α) Ζητείται η $\acute{o}\xi\epsilon\iota\alpha$ $\gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha$

$$\begin{array}{l} d=0,00033 \left(\begin{array}{l} 0,77897 = \eta\mu(51010') \\ 0,77930 = \eta\mu\chi \\ 0,78079 = \eta\mu(51020') \end{array} \right) 10' \\ D = 0,00182 \\ \text{Εἰς αὐξησιν } \eta\mu \quad 0,00182 \text{ ἀντιστοιχεῖ αὐξησις } \gamma\omega\nu. \quad 10' \\ \text{" " " } 0,00033 \text{ πόση αὐξησις } \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha\varsigma \text{ ἀντιστοιχεῖ;} \end{array}$$

$$x = 10. \frac{0,00033}{0,000182} = 1'49''$$

$$\text{"Αρα τόξον } x = (51010') + (1'49'') = 51011'49''$$

β) Δίδεται ήμ $x = 0,28440$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .-

$$d = 0,00038 \left(\begin{array}{l} 0,28402 = ήμ(16030') \\ 0,28440 = ήμ x \\ 0,28680 = ήμ(16040') \\ 0,00278 \quad 10' \\ 0,00038 \quad x \end{array} \right) 10'$$

$$x = 10. \frac{0,00038}{0,00278} = 1'22''$$

Άρα, τόξον $x = (16030') + (1'22'') = 160 \ 31' \ 22''$

γ) Δίδεται ήμ $x = 0,94070$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .-

$$d = 0,00002 \left(\begin{array}{l} 0,94068 = ήμ(70010') \\ 0,94070 = ήμ x \\ 0,94167 = ήμ(70020') \end{array} \right) 10'$$

$$D = 0,00099$$

$$x = 10. \frac{0,00002}{0,00099} = 12''$$

Άρα, τόξον $x = (70010') + 12'' = 70 \ 10' \ 12''$

$$352, \quad \sigma\upsilon\nu x = 0,86700, \quad \sigma\upsilon\nu x = 0,98920, \quad \sigma\upsilon\nu x = 0,59040.$$

α) Δίδεται $\sigma\upsilon\nu x = 0,86700$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$d = 0,00048 \left(\begin{array}{l} 0,86748 = \sigma\upsilon\nu(29050') \\ 0,86700 = \sigma\upsilon\nu x \\ 0,86603 = \sigma\upsilon\nu 300 \end{array} \right) 10'$$

$$D = 0,00145$$

Είς ελάττωσιν $0,00145$ άντιστοιχεϊ αύξησις γωνία $10'$
είς ελάττωσιν $\sigma\upsilon\nu 0,00048$ πόση αύξησις γωνίας άντιστοι-
χεϊ;

$$x = 10. \frac{0,00048}{0,00145} = 3'19''$$

Άρα ή όξεϊα γωνία $x = (29050') + (3'19'') = 29053'19''$

β) Δίδεται $\sigma\upsilon\nu x = 0,98920$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$d = 0,00024 \left(\begin{array}{l} 0,98944 = \sigma\upsilon\nu(8020') \\ 0,98920 = \sigma\upsilon\nu x \\ 0,98902 = \sigma\upsilon\nu(8030') \\ 0,00042 \quad 10' \\ 0,00024 \quad x \end{array} \right) 10'$$

$$D = 0,00042$$

$$x = 10. \frac{0,00024}{0,00042} = 5'43''$$

έπομένως τόξον $x = (8020') + (5'43'') = 80 \ 25'43''$

γ) Δίδεται συν $x=0,59040$. Ζητείται ἡ ὀξεῖα γωνία x .

$$\begin{aligned} d &= 0,00208 \left(\begin{array}{l} 0,59248 = \text{συν}(53040') \\ 0,59040 = \text{συν}x \\ 0,59014 = \text{συν}(53050') \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00234 \left(\begin{array}{l} 0,00234 \\ 0,00208 \end{array} \right) 10' \\ &\quad x ; \end{aligned}$$

$$x = 10. \frac{0,00208}{0,00234} = 8'53''$$

ἐπομένως ὀξεῖα γωνία $x = (53040') + (8'53'') = 530\ 48'53''$.

353) ἐφ $x=0,96110$, ἐφ $x=0,39730$, ἐφ $x=0,80820$.

α) Δίδεται ἐφ $x=0,96110$. Ζητείται ἡ ὀξεῖα γωνία x .

$$\begin{aligned} d &= 0,00102 \left(\begin{array}{l} 0,96008 = \text{ἐφ}(43050') \\ 0,96110 = \text{ἐφ}x \\ 0,96569 = \text{ἐφ} 440 \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00561 \end{aligned}$$

εἰς αὐξησιν ἐφαπτ. 0,00561 ἔχομεν ἀντίστοιχον αἰξησιν γωνίας $10'$, εἰς αὐξησιν ἐφαπτ. 0,00102 πόση αὐξησις γωνίας ἀντιστοιχεῖ;

$$x = 10. \frac{0,00102}{0,00561} = 1'49''$$

ἄρα ὀξεῖα γωνία $x = (43050') + (1'49'') = 430\ 51'49''$

β) Δίδεται ἐφ $x=0,39730$. Ζητείται ἡ ὀξεῖα γωνία x .

$$\begin{aligned} d &= 0,00003 \left(\begin{array}{l} 0,39727 = \text{ἐφ}(21040') \\ 0,39730 = \text{ἐφ}x \\ 0,40065 = \text{ἐφ}(21050') \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00338 \left(\begin{array}{l} 0,00338 \\ 0,00003 \end{array} \right) 10' \\ &\quad x ; \end{aligned}$$

$$x = 10. \frac{0,00003}{0,00338} = 5''$$

ἐπομένως, ὀξεῖα $x = (21040') + 5'' = 210\ 40'5''$

γ) Δίδεται ἐφ $x=0,80820$. Ζητείται ἡ ὀξεῖα γωνία x .

$$\begin{aligned} d &= 0,00322 \left(\begin{array}{l} 0,80498 = \text{ἐφ}(38050') \\ 0,80820 = \text{ἐφ}x \\ 0,80978 = \text{ἐφ} 390 \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00480 \left(\begin{array}{l} 0,00480 \\ 0,00322 \end{array} \right) 10' \\ &\quad x ; \end{aligned}$$

$$x = 10 \cdot \frac{0,00322}{0,00480} = 6'42''$$

$$\alpha\beta\alpha, \delta\epsilon\epsilon\tau\alpha \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha x = (38050') + (6'42'') = 380\ 56'42''$$

$$354) \quad \sigma\varphi x = 0,87230, \sigma\varphi x = 0,37060, \sigma\varphi x = 0,68130.$$

Λύσις. α) Ζητείται η δξεῖα γωνία x διδομένης

$$\sigma\varphi x = 0,87230$$

$$d = 0,00211 \quad \left(\begin{array}{l} 0,87441 = \sigma\varphi x \ (48050') \\ 0,87230 = \sigma\varphi x \\ 0,86929 = \sigma\varphi 490 \end{array} \right) \quad \swarrow \quad 10'$$

$$D = 0,00512 \quad \begin{array}{l} 0,00512 \quad 10' \\ 0,00211 \quad x \end{array};$$

$$x = 10 \cdot \frac{0,00211}{0,00512} = 4'7''$$

$$\alpha\beta\alpha, \delta\epsilon\epsilon\tau\alpha \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha x = (48050') + (4'7'') = 48054'7''$$

β) Δίδεται $\sigma\varphi x = 0,37060$. Ζητείται η δξεῖα γωνία x.

$$d = 0,00328 \quad \left(\begin{array}{l} 0,37388 = \sigma\varphi(69030') \\ 0,37060 = \sigma\varphi x \\ 0,37057 = \sigma\varphi(69040') \end{array} \right) \quad \swarrow \quad 10'$$

$$D = 0,00331 \quad \begin{array}{l} 0,00331 \quad 10' \\ 0,00328 \quad x \end{array};$$

$$x = 10 \cdot \frac{0,00328}{0,00331} = 9'55''$$

$$\alpha\beta\alpha \delta\epsilon\epsilon\tau\alpha \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha x = (69030') + (9'55'') = 690\ 39'55''$$

γ) Δίδεται $\sigma\varphi x = 0,68130$. Ζητείται η δξεῖα γωνία x.

$$d = 0,00171 \quad \left(\begin{array}{l} 0,68301 = \sigma\varphi(55040') \\ 0,68130 = \sigma\varphi x \\ 0,67875 = \sigma\varphi(55050') \end{array} \right) \quad \swarrow \quad 10'$$

$$D = 0,00426 \quad \begin{array}{l} 0,00426 \quad 10' \\ 0,00171 \quad x \end{array};$$

$$x = 10 \cdot \frac{0,00171}{0,00426} = 4'$$

$$\alpha\beta\alpha \eta \delta\epsilon\epsilon\tau\alpha \gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha x = (55040') + 4' = 550\ 44'$$

355) ήμ $x=0,17390$, ήμ $x=0,7832$, ήμ $x=0,22340$.
 Λύσις.- α) Δίδεται ήμ $x=0,17390$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$\begin{array}{rcl} d = 0,00025 & \left(\begin{array}{l} 0,17365 = \text{ήμ } 100 \\ 0,17390 = \text{ήμ } x \\ 0,17651 = \text{ήμ } (100+10) \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00286 & \begin{array}{l} 0,00286 \quad 10' \\ 0,00025 \quad x \end{array} & \end{array}$$

$$x = 10. \frac{0,00025}{0,00286} = 52''$$

Άρα ή όξεϊα γωνία $x = 10^{\circ} 52''$

β) Δίδεται ήμ $x=0,78320$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$\begin{array}{rcl} d = 0,00059 & \left(\begin{array}{l} 0,78261 = \text{ήμ } (51^{\circ} 30') \\ 0,78320 = \text{ήμ } x \\ 0,78442 = \text{ήμ } (51^{\circ} 40') \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00181 & \begin{array}{l} 0,00181 \quad 10' \\ 0,00059 \quad x \end{array} & \end{array}$$

$$x = 10. \frac{0,00059}{0,00181} = 3' 16''$$

Άρα, όξεϊα γωνία $x = (51^{\circ} 30') + (3' 16'') = 51^{\circ} 33' 16''$

γ) Δίδεται ήμ $x=0,22340$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$\begin{array}{rcl} d = 0,00128 & \left(\begin{array}{l} 0,22212 = \text{ήμ } (12^{\circ} 50') \\ 0,22340 = \text{ήμ } x \\ 0,22495 = \text{ήμ } 130 \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00283 & \begin{array}{l} 0,00283 \quad 10' \\ 0,00128 \quad x \end{array} & \end{array}$$

$$x = 10. \frac{0,00002}{0,00283} = 4' 31''$$

Άρα, όξεϊα γωνία $x = (12^{\circ} 50') + (4' 31'') = 12^{\circ} 54' 31''$

356-7) συν $x=0,23060$, συν $x=0,2080$.

Λύσις.- α) Δίδεται συν $x=0,23060$. Ζητείται ή όξεϊα γωνία x .

$$\begin{array}{rcl} d = 0,00002 & \left(\begin{array}{l} 0,23062 = \text{συν } (76^{\circ} 40') \\ 0,23060 = \text{συν } x \\ 0,22778 = \text{συν } (76^{\circ} 50') \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00284 & \begin{array}{l} 0,00284 \quad 10' \\ 0,00002 \quad x \end{array} & \end{array}$$

$$x = 10. \frac{0,00002}{0,00284} = 4''$$

Άρα, η όξεϊα γωνία $x = (76040') + 4'' = 76040'4''$

β) Δίδεται $\sin x = 0,2080$. Ζητείται η όξεϊα γωνία x .

$$0,2080 < 0,70711 \rightarrow x > 45'$$

$$\begin{aligned} d &= 0,00276 \left(\begin{array}{l} 0,21076 = \sin(77050') \\ 0,2080 = \sin x \\ 0,20791 = \sin(77060') \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00285 \quad 10' \\ &0,00276 \quad x; \end{aligned}$$

$$x = 10' \cdot \frac{0,00276}{0,00285} = \frac{2760}{285} = 9'41''$$

Άρα, η όξεϊα γωνία $x = (77050') + (9'41'') = 77059'41''$

358) έφ $x = 1,2334$

Λύσις.- Δίδεται έφ $x = 1,2334$. Ζητείται η όξεϊα γωνία x .

$$x = ? \quad 1,2334 > 1 \rightarrow x > 450$$

$$\begin{aligned} d &= 0,00582 \left(\begin{array}{l} 1,22758 = \text{έφ}(50050') \\ 1,2334 = \text{έφ } x \\ 1,23490 = \text{έφ}(50060') \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,00732 \quad 10' \\ &0,00582 \quad x \end{aligned}$$

$$x = 10' \cdot \frac{0,00582}{0,00732} = \frac{5820}{732} = 7'57''$$

Άρα, όξεϊα γωνία $x = (50050') + (7'57'') = 50057'57''$

358β) $\sigma\varphi x = 2$. $x = ?$

$$2 > 1 \rightarrow x < 450$$

$$\begin{aligned} d &= 0,00569 \left(\begin{array}{l} 2,00569 = \sigma\varphi(63030') \\ 2,00 = \sigma\varphi x \\ 1,99116 = \sigma\varphi(63040') \end{array} \right) 10' \\ D &= 0,01453 \quad 10' \\ &0,00569 \quad x; \end{aligned}$$

$$x = 10' \cdot \frac{0,00569}{0,01453} = \frac{5690}{1453} = 3'55''$$

Άρα $x = (63030') + (3'55'') = 63033'55''$

Τριγωνομετρικά ἐξισώσεις.

Ἐπιλύσατε τὰς ἀκολουθούσας ἐξισώσεις καὶ σημειώσατε τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων ἐπὶ τοῦ κύκλου (Φ).

359) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sin x = \frac{1}{2}$

α) $\sin x = \frac{1}{2} \quad x = ;$

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$

Ἄρα $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$.

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

β) $\sin x = -\frac{1}{2}$

Γνωρίζομεν ὅτι : $-\frac{1}{2} = \sin -\frac{\pi}{3}$

Ἐπομένως $\sin x = \sin -\frac{\pi}{3}$

Ἄρα αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι $x = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$

$$x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$$

360).- α) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = ;$

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu \frac{\pi}{3}$.

"Αρα $\eta\mu\chi = \eta\mu \frac{\pi}{3}$

Επομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσσεως εἶναι $\chi = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

$$\chi = (2k + 1) \pi + \frac{\pi}{3}$$

β) $\eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Γνωρίζομεν ὅτι $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

"Αρα $\eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Επομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσσεως εἶναι $\chi = 2k\pi - \frac{\pi}{3}$

$$\chi = (2k + 1) \pi + \frac{\pi}{3}$$

361) α) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\epsilon\phi\chi = 1$.

Γνωρίζομεν ὅτι $1 = \epsilon\phi\frac{\pi}{4}$

"Αρα $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\frac{\pi}{4}$

Επομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσσεως εἶναι $\chi = k\pi + \frac{\pi}{4}$

β) $\epsilon\phi\chi = -1$

Γνωρίζομεν ὅτι $-1 = \epsilon\phi\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \epsilon\phi\frac{3\pi}{4}$

"Αρα $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi\frac{3\pi}{4}$

Αἱ λύσεις ἐπομένως τῆς ἐξίσωσσεως εἶναι $\chi = k\pi + \frac{3\pi}{4}$

362) α) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$

"Αρα $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 45^\circ$

Αί λύσεις συνεπώς της εξίσωσης είναι $\chi = 360k + 450$.

$$\chi = 360k - 450$$

$$\beta) \sin \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Είναι γνωστόν ότι $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 135^\circ$

"Αρα $\sin \chi = \sin 135^\circ$.

Αί λύσεις επομένως της εξίσωσης είναι $\chi = 360k + 135^\circ$

$$\chi = 360k - 135^\circ$$

$$363) \alpha. - \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \eta\mu = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Εἶναι γνωστόν ὅτι } \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

"Αρα $\eta\mu \chi = \eta\mu 45^\circ$

Αί λύσεις της εξίσωσης είναι συνεπώς $\chi = 360k + 45^\circ$

$$\chi = 180^\circ (2k + 1) - 45^\circ$$

$$\beta. - \eta\mu \chi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Εἶναι γνωστόν ὅτι } \eta\mu(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

"Αρα $\eta\mu \chi = \eta\mu(-45^\circ)$

Επομένως αἱ λύσεις της εξίσωσης είναι $\chi = 360k - 45^\circ$.

$$\chi = 180(2k + 1) + 45^\circ$$

$$364) \alpha. - \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \epsilon\phi \chi = \sqrt{3}$$

$$\text{Εἶναι γνωστόν ὅτι } \epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$$

"Αρα $\epsilon\phi \chi = \epsilon\phi 60^\circ$

Επομένως ἡ λύσις της εξίσωσης είναι $\chi = k \cdot 180^\circ + 60^\circ$

$$\beta. - \epsilon\phi \chi = -\sqrt{3}$$

$$\text{Εἶναι γνωστόν ὅτι } \epsilon\phi(180^\circ - 60^\circ) = \epsilon\phi 120^\circ = -\sqrt{3}$$

"Αρα $\epsilon\phi \chi = \epsilon\phi 120^\circ$

Επομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἶναι $\chi = 180 \cdot k + 120 \circ$.

$$365) \alpha. - \sin(2\chi - \frac{\pi}{4}) = \sin(\chi + \frac{\pi}{6}).$$

Ἴνα τὰ δύο τόξα τὰ ὁποῖα ἔχουν μέτρα $2\chi - \frac{\pi}{4}$ καὶ $\chi + \frac{\pi}{6}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὅπως κατὰ προσέγγισιν $2k\pi$ εἶναι ἴσα ἢ ἀντίθετα.

$$\text{Επομένως.} - 2\chi - \frac{\pi}{4} = \chi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (1)$$

$$2\chi - \frac{\pi}{4} = -(\chi + \frac{\pi}{6}) + 2k\pi \quad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν. -

$$\chi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν. -

$$\chi = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$$

Ἡ οἰκογένεια (1) δίδει ἓν μόνον σημεῖον πέρας τῶν τόξων (λύσεις). Ἡ δευτέρα (2) οἰκογένεια δίδει τρία σημεῖα B_0, B_1, B_2 κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου.

$$366) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐφ} 2\chi = \sqrt{3}$$

$$\text{Εἶναι γνωστόν ὅτι } \sqrt{3} = \text{ἐφ } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ἀρα ἐφ} 2\chi = \text{ἐφ } \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Επομένως } 2\chi = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \text{καὶ } \chi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

$$367) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἡμ } (\chi + \frac{\pi}{6}) = \text{ἡμ } (-\frac{3\pi}{4} + 2\chi)$$

Ἴνα δύο τόξα μέτρων $\chi + \frac{\pi}{6}$ καὶ $-\frac{3\pi}{4} + 2\chi$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν 2π εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά.

Ἐπομένως θά ἔχωμεν.-

$$(1) \quad \chi + \frac{\pi}{6} = -\frac{3\pi}{4} + 2\chi + k \cdot 2\pi$$

$$(2) \quad \chi + \frac{\pi}{6} = \pi - \left(-\frac{3\pi}{4} + 2\chi\right) + k \cdot 2\pi$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $-\chi = \frac{7\pi}{12} - k \cdot 2\pi$ ἢ $\chi = -\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $\chi = \frac{\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) ἡ οἰκογένεια (1) παριστάνει ἓνα μόνον σημεῖον Α ἐνῶ ἡ οἰκογένεια (2) δίδει τρία σημεῖα Β₀, Β₁, Β₂ κορυφάς ἐνός ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

368) Νά λυθῇ α) ἡ ἡμ₃χ = ἡμχ.

Ἵνα δύο τόξα μέτρων 3χ καὶ χ ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὥπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$ εἶναι ἰσοῦν ἢ παραπληρωματικά.

Ἐπομένως ἔχομεν.- (1) $3\chi = \chi + k \cdot 2\pi$

(2) $3\chi = \pi - \chi + k \cdot 2\pi$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\chi = k\pi$

" " (2) " $\chi = -\frac{2\pi}{4} + k\pi$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνικοῦ κύκλου ἡ (1) δίδει τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων καὶ τὸ ἀντιδιαμετρικόν αὐτῶν. Ἐνῶ ἡ (2) δίδει τὸ μέσον, τὸ πρῶτον τεταρτημόριον καὶ τὸ ἀντιδιαμετρικόν του.

β).- ἡμ₃χ = -ἡμχ ἢ

ἡμ₃χ = ἡμ(-χ).

Ἐπομένως θά ἔχωμεν.-

$$(1) \quad 3\chi = -\chi + k \cdot 2\pi$$

$$(2) \quad 3\chi = \pi - (-\chi) + k \cdot 2\pi$$

Ἐν τῇς (1) λαμβάνομεν. - $\chi = \frac{k\pi}{2}$

" " (2) " $\chi = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Ἡ (1) δίδει τὰς κορυφάς τοῦ τριγώνου IKI'K'

" (2) " δύο σημεῖα ἀντιδιαμετρικά τὰ K καὶ K'.

369) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $2\chi = 0$

Τότε $2\chi = k \cdot \pi$, $\chi = \frac{k\pi}{2}$

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν περάτων τῶν τάξεων ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. -

Δίδομεν εἰς τό k τιμὰς $0, 1, 2, \dots$ καὶ εὐρίσκομεν τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ χ .

$k=0$ $\chi = 0$

$k=1$ $\chi = \frac{\pi}{2}$

$k=2$ $\chi = \pi$

$k=3$ $\chi = \frac{3\pi}{2}$

$k=4$ $\chi = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

Ἄρα, ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου αἱ λύσεις τῆς ἑξίσωσης ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς τετραγώνου. Τό τετράγωνον τοῦτο ἔχει κορυφὰς $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

370) Νά λυθῇ ἡ συν $3\chi = 1$

Τότε $3\chi = 2k\pi$. $\chi = \frac{2k\pi}{3}$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων,) σχηματίζεται ἰσόπλευρον τρίγωνον μετὰ κορυφῶν

$$0, \quad -\frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{4\pi}{3}$$

$$371) \text{ Νά λυθῇ ἡ συν } (2\chi - \frac{\pi}{3}) = \text{ συν } \frac{5\chi}{6}$$

Ἵνα τὰ δύο τόξα μέτρων $2\chi - \frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{5\chi}{6}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, εἶναι ἴσα ἢ ἀντίθετα. Συνεπῶς ἡ προτεινόμενη ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς δύο ἐξισώσεις. —

$$(1) \quad 2\chi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\chi}{6} + 2k\pi$$

$$(2) \quad 2\chi - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\chi}{6} + 2k\pi$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $\frac{7\chi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ἢ $\chi = \frac{2\pi}{7} + \frac{12k\pi}{7}$

" " (2) " $\frac{17\chi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ἢ $\chi = \frac{2\pi}{17} + \frac{12k\pi}{17}$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), ἡ οἰκογένεια (1) παριστάνει κορυφὰς κανονικοῦ ἑπταγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ ἑπταγώνου τούτου εἶναι $0, \frac{2\pi}{7}, \frac{4\pi}{7}, \frac{6\pi}{7}, \frac{8\pi}{7}, \frac{10\pi}{7}, \frac{12\pi}{7}$ ὅταν τὸ λαμβανόμενον διάστημα εἶναι $0, \dots, 2\pi$.

Ὅμοίως, ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια λύσεων (2) παριστάνει τὰς κορυφὰς κανονικοῦ δεκάεπτου γώνου.

$$372) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἡμ} 2\chi = \text{ ἡμ}(-\frac{\pi}{3} - \chi).$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων 2χ καὶ $-\frac{\pi}{3} - \chi$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτομον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$ εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά.

Επομένως θά ἔχωμεν.-

$$(1) \quad 2\chi = \frac{\pi}{3} - \chi + k \cdot 2\pi$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - \chi\right) + k \cdot 2\pi$$

Εκ τῆς (1) λαμβάνομεν .- $3\chi = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{9} + \frac{k \cdot 2\pi}{3}$

$$\begin{aligned} \text{" " (2)} \quad & 2\chi = \pi - \frac{\pi}{3} + \chi + k \cdot 2\pi, \\ & \chi = \pi - \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \end{aligned}$$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρα-
τα τῶν τόξων (λύσεων), παρατηροῦμεν ὅτι ἡ οἰκογένεια
(1) δίδει τρία σημεῖα $\frac{\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}, \frac{13\pi}{9}$, διὰ διάνυσμα ἀπὸ
0..... 2π (κορυφαί ἰσοσπλεύρου τριγώνου) .

Εκ τῆς οἰκογενείας (2) λαμβάνομεν ἓν μόνον σημεῖον
τό $\frac{2\pi}{3}$.

$$373) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ} \left(\frac{\pi}{4} - 7\chi \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} .$$

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὀξεῖα γωνία α ἡ ἔχουσα ἡμίτονον
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ἰσοῦται μέ 60° ἢ $\frac{\pi}{3}$,

ἄρα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται.-

$$\eta\mu \left(\frac{\pi}{4} - 7\chi \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Επομένως } \frac{\pi}{4} - 7\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{4} - 7\chi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (2)$$

Εκ τῆς πρώτης ἔχομεν.- $-7\chi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi =$

$$\frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{84} - \frac{2k\pi}{7} .$$

Εκ τῆς (2) ἔχομεν.- $-7\chi = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi = \frac{5\pi}{12} +$
 $+ 2k\pi, \quad \chi = -\frac{5\pi}{84} - \frac{2k\pi}{7}$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν οἰκογένειαν (I) ταῦτα ἀποτελοῦν τὰς κορυφάς κανονικοῦ ἑπταγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. -

$$-\frac{\pi}{84}, -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{2\pi}{7}\right), -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{4\pi}{7}\right), -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{6\pi}{7}\right) \\ -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{8\pi}{7}\right), -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{10\pi}{7}\right), -\left(\frac{\pi}{84} + \frac{12\pi}{7}\right).$$

Διὰ τὴν οἰκογένειαν (2) τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) ἀποτελοῦν ὁμοίως κορυφάς κανονικοῦ ἑπταγώνου. Εὐρίσκονται δέ αἱ κορυφαὶ αὗται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. -

$$-\frac{5\pi}{84}, -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{2\pi}{7}\right), -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{4\pi}{7}\right), -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{6\pi}{7}\right) \\ -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{8\pi}{7}\right), -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{10\pi}{7}\right), -\left(\frac{5\pi}{84} + \frac{12\pi}{7}\right).$$

$$374) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ} \left(2\chi + \frac{\pi}{3} \right) = \eta \mu \left(-\frac{2\pi}{3} - \chi \right)$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $2\chi + \frac{\pi}{3}$ καὶ $-\frac{2\pi}{3} - \chi$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$ εἶναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά.

Ἐπομένως θά ἔχωμεν. -

$$(I) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \chi + 2 \cdot k\pi, \quad 3\chi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{2\pi}{3} - \chi \right) + 2k\pi \rightarrow 2\chi + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{2\pi}{3} + \chi + 2k\pi,$$

$$+ \chi + 2k\pi, \quad \chi = 2k\pi.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) ἡ οἰκογένεια (I) παριστάνει

ρυφάς ίσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ τριγώνου
 τούτου εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{9}$, $\frac{7\pi}{9}$,
 $\frac{13\pi}{9}$. Ἐκ τῆς οἰκογενείας (2) λαμβάνομεν ἓν μόνο ση-
 μεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς ἀρχῆς τῆς μετρήσεως τῶν τόξων
 τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου.

375) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $3\chi = \eta\mu(\frac{\pi}{5} - \chi)$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων 3χ , $\frac{\pi}{5} - \chi$ ἔχουν τό αὐτό ἡμί-
 τονον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$,
 εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Ἐπομένως θά ἔχωμεν. -

(1) $3\chi = \frac{\pi}{5} - \chi + 2k\pi$, $4\chi = \frac{\pi}{5} + 2k\pi$, $\chi = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$.

(2) $3\chi = \pi - (\frac{\pi}{5} - \chi) + 2k\pi$, $3\chi = \pi - \frac{\pi}{5} + \chi + 2k\pi$,

$\chi = \frac{4\pi}{10} + \frac{2k\pi}{2} = \frac{2\pi}{5} + k\pi$.

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέ-
 ρατα τῶν τόξεων (λύσεων) ἡ οἰκογένεια (1) παριστάνει
 κορυφάς τετραγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ τετραγώνου τούτου
 εἰνται εἰς τὰ πέραρα τῶν τόξων $\frac{\pi}{20}$, $\frac{11\pi}{20}$, $\frac{21\pi}{20}$, $\frac{31\pi}{20}$.

Ἐκ τῆς οἰκογενείας (2) λαμβάνομεν 2 μόνον σημεῖα. -

$\frac{2\pi}{5}$, $\frac{7\pi}{5}$

376) Νά λυθῇ ἡ $\sin(4\chi + 300) = \sin(600 - \chi)$.

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $4\chi + 300$, $600 - \chi$ ἔχουν τό αὐτό
 συνημίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν
 $k \cdot 2\pi$, εἶναι ἴσα ἢ ἀντίθετα. Συνεπῶς ἡ προτεινομένη
 εἰσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰ ἐξισώσεις. -

$$(1) \quad 4\chi + 300 = 600 - \chi + k \cdot 3600, \quad 5\chi = 600 - 300 + k \cdot 3600 \\ \chi = 600 + 720 \cdot k.$$

$$(2) \quad 4\chi + 300 = - (600 - \chi) + k \cdot 3600, \quad 4\chi - \chi = -600 - 300 + k \cdot 3600, \quad 3\chi = -900 + k \cdot 3600, \quad \chi = -300 + 1200 \cdot k.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), ἡ οἰκογένεια (1) παριστάνει κορυφὰς κανονικοῦ πενταγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ πενταγώνου τούτου εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — 60, 780, 1500, 2220, 2940.

Τὰ τόξα (λύσεις) τῆς οἰκογενείας (2) παριστάνουν πάλιν κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — 900, 2100, 3300,

$$377) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ}\chi = -\frac{1}{4} = 0,25000.$$

Κατ' ἀρχὰς εὐρίσκομεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν χ τῆς ὁποίας τὸ ἡμίτονον ἰσοπῦται πρὸς 0,25. —

$$\begin{array}{lcl} d = 0,00241 & \left(\begin{array}{l} 0,24759 = \text{ἡμ}(140^\circ 20') \\ 0,25000 = \text{ἡμ}\chi \\ 0,25038 = \text{ἡμ}(140^\circ 30') \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00279 & & \\ & \begin{array}{cc} 0,00279 & 10' \\ 0,00241 & \chi \end{array} & \end{array}$$

$$\chi = 10 \cdot \frac{0,00241}{0,00279} = \frac{2410}{279} = 8' 38''$$

$$\text{Ἄρα ἡ ὀξεῖα γωνία } \chi = (140^\circ 20') + (8' 38'') = 140^\circ 28' 38''$$

$$\text{Ἐπομένως ἡμ}\chi = \text{ἡμ}(140^\circ 28' 38'').$$

Ἄρα αἱ λύσεις τῆς ἐξιśύσεως εἶναι . —

$$(1) \quad \chi = 3600 \cdot k + (140^\circ 28' 38'')$$

$$(2) \quad \chi = 1800 (2k + 1) - (140^\circ 28' 38'')$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ οἰκογένεια λύσεων ἀποτελεῖ ἓν σημεῖον, τὸ πέρας τοῦ τόξου $140^\circ 28' 38''$

Ἡ οἰκογένεια λύσεων (2) ἀποτελεῖ ἓν σημεῖον, τό πέ-
 ρας τοῦ τόξου $180^{\circ} - (140^{\circ} 28' 38'') = 165^{\circ} 31' 22''$.

$$378) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξ } (3\chi - 107^{\circ}) = - 3,00420.$$

Κατ' ἀρχάς εὐρίσκομεν τήν τιμήν τοῦ τόξου ὅπερ ἔχει
 ἐφαπτομένην ἴσην πρός $- 3,00420$. Ἐάν καλέσωμεν α τό
 τόξον τοῦτο, θά ἔχωμεν ἐφα $= - 3,00420$, ἐφ($-\alpha$) $= 3,00420$.
 εὐρίσκομεν τό τόξον ($-\alpha$).

$$\begin{array}{rcl} d = 0,01552 & \left(\begin{array}{l} 2,98868 = \text{ἐφ } (71^{\circ} 30') \\ 3,00420 = \text{ἐφ } (-\alpha) \\ 3,01783 = \text{ἐφ } (71^{\circ} 40') \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,02915 & & \\ & \begin{array}{l} 0,02915 \quad 10' \\ 0,01552 \quad x \end{array} & \end{array}$$

$$\chi = 10' \cdot \frac{0,01552}{0,02915} = \frac{15520}{2915} = 5' 13''$$

$$\begin{aligned} \text{Ἐφα τόξον } (-\alpha) &= (71^{\circ} 30') + (5' 13'') = 71^{\circ} 35' 13'' \\ \text{ὁπότε } \alpha &= -71^{\circ} 35' 13''. \end{aligned}$$

Ἐπομένως ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν. -

$$\text{ἐφ}(3\chi - 107^{\circ}) = \text{ἐφ}(-71^{\circ} 35' 13'').$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως ταύτης δίδονται διά τῆς
 σχέσεως . -

$$3\chi - 107^{\circ} = -(71^{\circ} 35' 13'') + 180^{\circ} \quad . k$$

$$3\chi = 107^{\circ} - (71^{\circ} 35' 13'') + 180^{\circ} \quad . k$$

$$3\chi = (35^{\circ} 24' 47'') + 180^{\circ} k$$

$$\chi = (11^{\circ} 48' 16'') + \frac{180^{\circ}}{3} \cdot k = (11^{\circ} 48' 16'') = 60^{\circ} k$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώ-
 σεως ἀποτελοῦν κορυφάς κανονικοῦ ἑξαγώνου. Αἱ κορυφαί
 τοῦ ἑξαγώνου τούτου εὐρίσκονται εἰς τά πέρατα τῶν τό-

ξων.- 11ο 48'16'', 71ο 48'16'', 131ο 48'16'',
191ο 48'16'', 251ο 48'16'', 311ο 48'16''.

$$379) .- \text{Νά λυθῇ ἡ ἐφ}3\chi = \text{ἐφ}(\chi + \frac{\pi}{4})$$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν 3χ , $\chi + \frac{\pi}{4}$ ἔχουν τήν αὐτήν ἐφαπ-
μόνην πρέπει καί ἀρκεῖ νά ἰσχύῃ ἡ σχέσις.-

$$3\chi = \chi + \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

Ἐπί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου αἱ λύσεις τῆς ἐξι-
σεως ταύτης ἀποτελοῦν τὰ κορυφάς τετραγώνου. Τό τετρα-
γωνον τοῦτο ἔχει τὰς κορυφάς του εἰς τὰ πέρατα τῶν τό-
ξων $\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8} + \pi, \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{2}$.

$$380) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἡμ}2\chi = \text{ἡμ}(\frac{\pi}{2} - \chi).$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων 2χ , $\frac{\pi}{2} - \chi$ ἔχουν τό αὐτό ἡμί-
τονον, πρέπει καί ἀρκεῖ ὅπως, κατά προσέγγισιν $k\pi$,
νά εἶναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά.

$$(I) \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} - \chi + 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - (\frac{\pi}{2} - \chi) + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} + \chi + 2k\pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

Σημειοῦντες ἐπί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα
τῶν τόξων (λύσεων), ἡ οἰκογένεια (I) παριστᾷ κορυφάς
ἰσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ τριγώνου τούτου,
κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων.- $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3},$
 $\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}.$

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ἓν μόνον σημεῖον. Τοῦτο

κεῖται εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $-\frac{\pi}{2}$.

381) Νά λυθῇ ἡ συν $(2\chi + \frac{\pi}{3}) = \text{συν}(\frac{\pi}{4} - \chi)$.

Ἵνα δύο τόξα, τιμῶν $2\chi + \frac{\pi}{3}$ καὶ $\frac{\pi}{4} - \chi$ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, εἶναι ἴσα ἢ ἀντίθετα.

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν δύο σχέσεων. -

$$(1) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - \chi + k2\pi \quad \text{ἢ} \quad 3\chi = \frac{\pi}{12} + k2\pi$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = -\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = -(\frac{\pi}{4} - \chi) + k2\pi \quad \text{ἢ} \quad \chi = -\frac{7\pi}{12} + k \cdot 2\pi$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεις) ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ κορυφᾶς κανονικοῦ ἰσοσπλεύτου τριγώνου A_0, A_1, A_2 , ἐνῶ ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ἓν μόνον σημεῖον B_0 .

382) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $(2\chi - \frac{\pi}{3}) = \eta\mu(\chi + \frac{\pi}{4})$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν $2\chi - \frac{\pi}{3}$ καὶ $\chi + \frac{\pi}{4}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά.

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν δύο σχέσεων. -

$$(1) \quad 2\chi - \frac{\pi}{3} = \chi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ἢ} \quad \chi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$$

$$(2) \quad 2\chi - \frac{\pi}{3} = \pi - (\chi + \frac{\pi}{4}) + 2k\pi \quad \text{ἢ} \quad 3\chi = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = \frac{13\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ ἐν σημεῖον A_0 , ἐνῶ ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ κορυφὰς κανονικοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου $B_0, B_1, B_2, \dots$. Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων .-

$$\frac{13\pi}{36}, \frac{13\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}, \frac{13\pi}{36} + \frac{4\pi}{3}.$$

$$383) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ συν} \left(3\chi - \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ - \frac{\pi}{4} < \chi < \frac{3\pi}{4}.$$

Γνωρίζομε ὅτι $\sin 30^\circ = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς .-

$$\sin \left(3\chi - \frac{2\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$$

ὁπότε ἡ (1) $3\chi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $3\chi = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$,

$$\chi = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3},$$

ἡ (2) $3\chi - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $3\chi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$,

$$\chi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ κορυφὰς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ τοῦ τριγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων .-

$$\frac{5\pi}{18}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}.$$

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ὁμοίως ἰσόπλευρον τρίγωνον μετὰ κορυφῶν εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων .-

$$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}.$$

Ἐπειδὴ ὁμως ὑπάρχει ὁ δοθεὶς περιορισμός εἰς τὴν περίπτωσηιν (I) δέν ἔχομεν εἰρή μόνον ἓν σημεῖον $\chi = \frac{5\pi}{18}$

ὅπερ εὐρίσκεται εἰς τό διάνυσμα $-\frac{\pi}{4} \dots \frac{3\pi}{4}$.

Ὅμοίως εἰς τὴν περίπτωσιν (2) δεχόμεθα ὡς λύσιν μόνον ἓν σημεῖον, διὰ $\chi = \frac{\pi}{6}$, ὅπερ εὐρίσκεται ἐντός τοῦ διαστήματος $-\frac{\pi}{4} \dots \frac{3\pi}{4}$.

$$384) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ} \left(\frac{\pi}{4} - 2\chi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < \chi < 2\pi.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ = \eta\mu \frac{\pi}{3}$. Ἄρα ἐκ τῆς δοθείσης ἐξιśώσεως ἔπεται ἡ ἀκόλουθος τοιαύτη.-

$$\eta\mu \left(\frac{\pi}{4} - 2\chi \right) = \eta\mu \frac{\pi}{3}, \quad \text{Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν.}$$

$$(I) \quad \frac{\pi}{4} - 2\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad -2\chi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$-2\chi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{24} - k\pi.$$

$$(2) \quad \frac{\pi}{4} - 2\chi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad -2\chi = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$-2\chi = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{5\pi}{24} - k\pi,$$

Ἄν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέ-
ρατα τῶν τόξων (λύσεωv) καί ἐάν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τόν
δοθέντα περιορισμόν, θά ἔνωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν (I)
δύο σημεῖα $-\frac{23\pi}{24}$, $\frac{47\pi}{24}$.

Ὅμοίως διὰ τὴν περίπτωσιν (2) ἔχομεν δύο σημεῖα :

$$-\frac{19\pi}{24}, \quad \frac{43\pi}{24}.$$

$$385) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ} \quad \eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$$

$$-\pi < \chi < \pi.$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι} \quad -\frac{1}{2} = \eta\mu(-30^\circ) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}).$$

Ἄρα ἐκ τῆς δοδεΐσης ἐξισώσεως ἐπεται ἡ ἀκόλουθος αὐτή.-

$$\eta\mu(2\chi + \frac{\pi}{3}) = \eta\mu(-\frac{\pi}{6}) \quad \text{ἐξ αὐτῆς δέ ἔχομεν.}$$

$$(1) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad 2\chi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$2\chi = -\frac{3\pi}{6} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$(2) \quad 2\chi + \frac{\pi}{3} = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2k\pi, \quad 2\chi = \pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\chi = \frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ περὶ τῶν τῶν τόξων (λύσεων) καὶ ἐφ' ὅσον πρέπει $-\pi < \chi < \pi$, θά ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκόγενειαν (1), 2 σημεῖα. $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$. Ὁμοίως διὰ τὴν οἰκόγενειαν λύσεων (2), ἔχομε 2 σημεῖα $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{5\pi}{12} + \pi$.

$$386) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ} \quad \eta\mu(2\chi + 59\pi) = \eta\mu(-\frac{45\pi}{2} - 3\chi)$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $2\chi + 59\pi$, $-\frac{45\pi}{2} - 3\chi$, ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά.

$$(1) \quad 2\chi + 59\pi = -\frac{45\pi}{2} - 3\chi + 2k\pi, \quad 5\chi = -\frac{45\pi}{2} - 59\pi + 2k\pi =$$

$$= -\frac{45\pi - 118\pi}{2} + 2k\pi, \quad 5\chi = -\frac{73\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\chi = -\frac{73\pi}{10} + \frac{2}{5}k\pi$$

$$(2) \quad 2\chi + 59\pi = \pi - (-\frac{45\pi}{2} - 3\chi) + 2k\pi, \quad -\chi = \pi - 59\pi - \frac{45\pi}{2}$$

$$+2 \text{ } k\pi, \quad -\chi = -58\pi - \frac{45\pi}{2} + 2 \text{ } k\pi, \quad -\chi = -\frac{161\pi}{2} + 2 \text{ } k\pi,$$

$$\chi = \frac{161\pi}{2} - 2 \text{ } k\pi.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν

(I) λύσεις αἰτίνες κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς κανονικοῦ πενταγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων: $-\frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10}, \frac{15\pi}{10}, \frac{19\pi}{10}$.

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) ἔχομεν μίαν μόνον λύσιν. Τό σημεῖον τοῦτο κεῖται εἰς τὸ πέρας τοῦ τόξου $-\frac{\pi}{2}$.

$$387) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ}(3\chi + \frac{\pi}{3}) = \eta\mu(\frac{2\pi}{3} - \chi).$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $3\chi + \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} - \chi$ ἔχουν τὸ αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νὰ ᾖναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Ἐπομένως ἔχομεν.

$$(I) \quad 3\chi + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \chi + k \cdot 2\pi, \quad 4\chi = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

$$(2) \quad 3\chi + \frac{\pi}{3} = \pi - (\frac{2\pi}{3} - \chi) + k \cdot 2\pi, \quad 3\chi + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \chi + k \cdot 2\pi,$$

$$2\chi = 2 \cdot k\pi, \quad \chi = k\pi.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν

(I) λύσεις κειμένας εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων.

$$\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + \pi, -\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}.$$

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) ἔχομεν λύσεις δύο σημεῖα.

0, π , ἀντιδιαμετρικά.

$$388) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἑμ}\left(3\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \quad 0 < \chi < 2\pi.$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι } -\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-30^\circ\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$

Ἄρα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. -

$$\eta\mu\left(3\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right). \quad \text{Ἐξ αὐτῆς συνάγομεν. -}$$

$$(1) \quad 3\chi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad 3\chi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$3\chi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$$(2) \quad 3\chi - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{6} +$$

$$+ 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{9\pi}{6} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων), θά ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) λύσεις κειμένας εἰς τὰς κορυφάς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}$.

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) ὁμοίως τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων κεῖνται εἰς τὰς κορυφάς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκοται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. -

$$-\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, \quad -\frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}.$$

$$389) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ συν}\left(\chi + 45^\circ\right) = \text{συν}\left(150^\circ - 2\chi\right).$$

$$700^\circ < \chi < 900^\circ$$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν $\chi + 45^\circ$, $150^\circ - 2\chi$ ἔχουν τὰ αὐτὸ συνημίτονον πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 360^\circ$ νά ᾖναι ἴσα ἢ ἀντίθετα. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσως δίδονται ὑπὸ τῶν δύο σχέσεων. -

$$(1) \chi + 450 = 1500 - 2\chi + 3600 \cdot k, \quad 3\chi = 1050 + 3600 \cdot k,$$

$$\chi = \frac{1050}{3} + 1200 \cdot k,$$

$$(2) \chi + 450 = 2\chi - 1500 + 3600 \cdot k, \quad -\chi = -1500 - 450 + 3600 \cdot k,$$

$$\chi = 1950 - 3600 \cdot k.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ κορυφᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Ἐπειδὴ ὅμως πρέπει $7000 < \chi < 9000$ ἀπὸ τὰς εὐρεθείσας λύσεις λαμβάνομεν δύο σημεῖα πᾶ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. -

$$7200 + \frac{1050}{3}, \quad 8400 + \frac{1050}{3}.$$

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) καὶ εἰς τὰ ὅρια $7000 \dots 9000$, δέν ἔχωμεν οὐδέν σημεῖον

$$390) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ}(3\chi) = \text{ἡμ}\left(\chi + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν 3χ , $\chi + \frac{2\pi}{3}$ ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$ εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν δύο σχέσεων. -

$$(1) \quad 3\chi = \chi + \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{3} + k\pi.$$

$$(2) \quad 3\chi = \pi - \left(\chi + \frac{2\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad 4\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θά ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) λύσεις ἀντιδιαμετρικὰς μεταξύ των. Αἱ λύσεις αὗται θά εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. -

$$\frac{\pi}{3}, \quad \pi + \frac{\pi}{3}.$$

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) αἱ λύσεις θὰ κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\cdot \frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \pi$, $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$

$$391) \quad \eta\mu\left(3\chi + \frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν $3\chi + \frac{\pi}{2}$, $\chi - \frac{\pi}{3}$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἄρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k2\pi$, εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξίσωσως δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων.

$$(1) \quad 3\chi + \frac{\pi}{2} = \chi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad 2\chi = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \\ 2\chi = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{5\pi}{12} + k\pi.$$

$$(2) \quad 3\chi + \frac{\pi}{2} = \pi - \left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad 4\chi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \chi = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) λύσεις ἀντιδιαμετρικὰς μεταξύ των. Αἱ λύσεις αὗται θὰ εὐρίσκωνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $-\frac{5\pi}{12}$, $-\frac{5\pi}{12} + \pi$.

Εἰς τὴν οἰκογένειαν (2) αἱ λύσεις θὰ κεῖνται εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. $-\frac{5\pi}{24}$, $\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{24} + \pi$, $\frac{5\pi}{24} + \frac{3\pi}{2}$

$$392) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐφ}\left(5\chi + \frac{\pi}{6}\right) = I \quad -\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{\pi}{2}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $I = \epsilon\phi 45^\circ = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$. Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. $-\epsilon\phi\left(5\chi + \frac{\pi}{6}\right) = \epsilon\phi \frac{\pi}{4}$.

ἵνα δύο τόξα $5\chi + \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσις .-

$$5\chi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad 5\chi = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + k\pi, \quad 5\chi = \frac{2\pi}{12} + k\pi,$$

$$5\chi = \frac{\pi}{12} + k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{60} + \frac{k\pi}{5}$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θὰ ἔχωμεν λύσεις κειμένας εἰς τὰς κορυφὰς κανονικοῦ δεκαγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν ἐξῆς τόξων. - $\frac{\pi}{60}$, $\frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{5}$,

$$\frac{\pi}{60} + \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{3\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{4\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \pi, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{6\pi}{5}$$

$$\frac{\pi}{60} + \frac{7\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{8\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{9\pi}{5}.$$

Λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ δεχόμεθα μόνον τὰ ἐξῆς σημεῖα πέρατα τῶν τόξων. -

$$\frac{\pi}{60}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{2\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{8\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{60} + \frac{9\pi}{5},$$

$$(\text{ἢ τὰ δύο τελευταῖα τόξα} - \frac{115\pi}{300} - \frac{55\pi}{300})$$

$$393) \quad \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἡμ} \left(\frac{2\chi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{ἡμ } 60^\circ = \text{ἡμ } \frac{\pi}{3}$. Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. - $\text{ἡμ} \left(\frac{2\chi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) =$

$$\text{ἡμ } \frac{\pi}{3}. \quad \text{ἵνα δύο τόξα τιμῶν } \frac{2\chi}{3} + \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3} \text{ ἔχουν τὸ}$$

ὅτι ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἅπῳς ταῦτα, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$ εἶναι ἴσα ἢ καταπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ὑπὸ τῶν ἀκολουθῶν σχέσεων. -

$$(1) \quad \frac{2\chi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{2\chi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$\frac{2\chi}{3} = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{8} + 3k\pi.$$

$$(2) \quad \frac{2\chi}{3} + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \frac{2\chi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$= \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{5\pi}{8} + 3k\pi.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θά ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν

(I) λύσεις ἀντιδιαμετρικὰς μεταξύ των. Αἱ λύσεις αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} + 3\pi$

Ὁμοίως διὰ τὴν οἰκογένειαν (2) θά ἔχωμεν ὡς λύσεις σημεῖα ἀντιδιαμετρικὰ μεταξύ τῶν. Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{5\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} + 3\pi$.

$$394) \quad \text{Νὰ λυθῇ ἡ ἐφ} 2\chi = \text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{4} - 3\chi\right).$$

Ἵνα τὰ δύο τόξα τιμῶν $2\chi, \frac{\pi}{4} - 3\chi$, ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ σχέσηις.

$$2\chi = \frac{\pi}{4} - 3\chi + k\pi, \quad 5\chi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{20} + \frac{k\pi}{5}.$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσως ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς κανονικοῦ δεκαγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. —

$$\frac{\pi}{20}, \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{3\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \pi,$$

$$\frac{\pi}{20} + \frac{6\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{7\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{8\pi}{5}, \frac{\pi}{20} + \frac{9\pi}{5}.$$

395) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $5\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} + 3\chi\right)$.

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν 5χ , $-\frac{\pi}{2} + 3\chi$, ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καί ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά ᾔηται ἴσα ἡ παραπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ἀπό τὰς σχέσεις. -

$$(1) \quad 5\chi = \frac{\pi}{2} + 3\chi + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$(2) \quad 5\chi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} + 3\chi\right) + 2k\pi, \quad 5\chi + 3\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$8\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θά ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) λύσεις ἀντιδιαμετρικάς μεταξύ των. Αἱ λύσεις αὗται ἀποτελοῦν τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{4}$, $\pi + \frac{\pi}{4}$.

Διὰ τὴν οἰκογένειαν (2) θά ἔχωμεν λύσεις κειμένας εἰς τὰς κορυφὰς κανονικοῦ ὀκταγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{16}$, $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{16} + \pi, \quad \frac{\pi}{16} + \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{16} + \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{16} + \frac{7\pi}{4}.$$

396) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $3\chi = \eta\mu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right)$.

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν 3χ , $\chi + \frac{\pi}{3}$, ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καί ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, εἶναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά. Ἐπομένως, αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ἀπό τὰς σχέσεις.

$$(1) \quad 3\chi = \chi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

$$(2) \quad 3\chi = \pi - \left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi, \quad 4\chi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) λύσεις ἀντιδιαμετρικὰς μεταξύ τῶν. Αἱ λύσεις αὗται κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — $-\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \pi$

Διὰ τὴν οἰκογένειαν (2), θὰ ἔχωμεν λύσεις κειμένας εἰς τὰς κορυφὰς τετραγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{6} + \pi$, $\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$,

$$397) \text{ Νά λυθῇ ἡ συν } 3\chi = \text{ συν } (2\chi - \frac{\pi}{3}) .$$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν 3χ , $2\chi - \frac{\pi}{3}$, ἔχουν τό αὐτό συννημίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ὅπως κατὰ προσέγγισιν 2π , εἶναι ἴσα ἢ ἀντίθετα. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως εἰδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων,

$$1) \quad 3\chi = 2\chi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad -\chi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,$$

$$2) \quad 3\chi = \frac{\pi}{3} - 2\chi + 2k\pi, \quad 5\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, τὰς λύσεις τῆς ἐξισώσεως τῆς οἰκογενείας (1), αὗται ἀποτελοῦν ἓν μόνον σημεῖον. Τοῦτο εἶναι τό πέρας τοῦ τόξου $-\frac{5\pi}{3}$.

Αἱ λύσεις τῆς οἰκογενείας (2) ἀποτελοῦν τὰς κορυφὰς κανονικοῦ πενταγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{5}$,

$$\frac{\pi}{15} + \frac{6\pi}{5}, \quad \frac{\pi}{15} + \frac{8\pi}{5} .$$

398) Νά λυθῇ ἡ συν $\frac{9\chi}{2} = \text{συν} \left(\frac{3\chi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right)$

Ἵνα δύο τόξα τιμῶν $\frac{3\chi}{2}$ καί $\frac{3\chi}{2} + \frac{3\pi}{2}$ ἔχουν τό αὐ-
τό συνημίτονον, πρέπει καί ἀρκεῖ ὅπως, κατά προσέγγισιν
κ.2π, νά εἶναι ἴσα ἡ ἀντίθετα.

Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως δίδονται ὑπό τῶν
σχέσεων .-

$$(1) \quad \frac{9\chi}{2} = \frac{3\chi}{2} + \frac{3\pi}{2} + 2 \text{ κπ}, \quad \eta \quad \frac{6\chi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2 \text{ κπ}, \quad \eta \quad \chi = \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \frac{2\kappa\pi}{3}.$$

$$(2) \quad \frac{9\chi}{2} = - \left(\frac{3\chi}{2} + \frac{3\pi}{2} \right) + 2 \text{ κπ}, \quad \eta \quad 6\chi = - \frac{3\pi}{2} + 2 \text{ κπ},$$

$$\eta \quad \chi = - \frac{\pi}{4} + \frac{\kappa\pi}{3}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ
πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ
τὰ σημεῖα A_0, A_1, A_2 κορυφᾶς κανονικοῦ τριγώνου

$$\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi}{3}.$$

Ἐνῶ ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ τὰ σημεῖα $B_0, B_1, B_2,$
 B_3, B_4, B_5 , τὰ ὁποῖα εἶναι πέρατα τῶν τόξων $-\frac{\pi}{4},$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{4} + \pi, -\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3},$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}, \text{ δηλαδή κορυφᾶς κανονικοῦ ἑξαγώνου.}$$

399) Νά λυθῇ $\epsilon\varphi \left(\frac{\pi}{3} - 2\chi \right) = \epsilon\varphi \left(3\chi - \frac{\pi}{6} \right).$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως δίδονται ὑπό τῆς σχέσεως.

$$\frac{\pi}{3} - 2\chi = 3\chi - \frac{\pi}{6} + \kappa\pi$$

$$\eta \quad -2\chi - 3\chi = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \kappa\pi,$$

$$- 5\chi = - \frac{3\pi}{6} + k\pi \quad \eta \quad \chi = \frac{\pi}{10} - \frac{k\pi}{5}.$$

Ἐάν σημειώσωμεν τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) τῆς ἐξιśσεως ταῦτα θά εἶναι κορυφαί κανονικοῦ δεκαγώνου ἀντιστοιχοῦντα εἰς $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} - \frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} - \frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} - \frac{5\pi}{5}$, ἢ $\frac{\pi}{10} - \pi$. κτλ. δηλαδή συμμετρικά τῶν 5 πρώτων.

400) Νά λυθῇ ἡ ἐφ3χ = ἐφ($\frac{\pi}{3} - 2\chi$).

Αἱ λύσεις τῆς ἐξιśσεως δίδονται ὑπό τῆς

$$3\chi = \frac{\pi}{3} - 2\chi + k\pi,$$

$$\eta \quad 5\chi = \frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\eta \quad \chi = \frac{\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$$

Τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) τῆς ἐξιśσεως, ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ποῦ παριστῶνται ἀντιστοίχως ὑπό τῶν $\frac{\pi}{15}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{5}$, $\frac{\pi}{15} + \frac{5\pi}{5}$ κτλ. εἶναι κορυφαί κανονικοῦ δεκαγώνου αἱ ὁποῖαι ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς.

401) Νά λυθῇ ἡ ἡμ3χ = συν($\chi - \frac{\pi}{6}$).

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὰ συμπληρωματικά τόξα τό συνω = ἡμ(90 - ω). Ἐπομένως $\text{συν}(\chi - \frac{\pi}{6}) = \text{ἡμ}[\frac{\pi}{2} - (\chi - \frac{\pi}{6})]$
 Ἄρα ἐάν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἔχομεν.
 $\text{ἡμ}3\chi = \text{ἡμ}(\frac{\pi}{2} - \chi + \frac{\pi}{6})$

$$\eta \text{ ή } \mu 3\chi = \eta \mu \left(-\frac{4\pi}{6} - \chi \right) \quad \eta \text{ ή } \mu 3\chi = \eta \mu \left(-\frac{2\pi}{3} - \chi \right).$$

Γινα δύο τόξα μέτρων 3χ καί $-\frac{2\pi}{3} - \chi$ ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$. Ἐπομένως. -

$$(1) \quad 3\chi = -\frac{2\pi}{3} - \chi + 2k\pi \quad \eta \quad 4\chi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \quad \eta \quad \chi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{4}.$$

$$(2) \quad 3\chi = \pi - \left(-\frac{2\pi}{3} - \chi \right) + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{6} + k\pi.$$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων (λύσεων) ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ τὰ σημεία A_0, A_1, A_2, A_3 , πέρατα ἀντιστοίχως τῶν τόξων $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6} + \pi$, $-\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$, δηλαδή κορυφὰ τετραγώνου, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς.

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ τὰ σημεία B_0, B_1 , ἀντιδιαμετρικά πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6} + \pi$.

$$402) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ} \quad \eta \mu \left(2\chi - \frac{\pi}{4} \right) = \sigma \nu \left(\frac{\pi}{6} + \chi \right)$$

$$\sigma \nu \left(\frac{\pi}{6} + \chi \right) = \eta \mu \left[-\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{6} + \chi \right) \right] \text{ ὡς συμπληρωματικά.}$$

$$\text{Ἐπομένως} \quad \eta \mu \left(2\chi - \frac{\pi}{4} \right) = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - \chi \right)$$

$$\eta \quad \eta \mu \left(2\chi - \frac{\pi}{4} \right) = \eta \mu \left(\frac{2\pi}{6} - \chi \right)$$

$$\eta \quad \eta \mu \left(2\chi - \frac{\pi}{4} \right) = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{3} - \chi \right)$$

Γινα τὰ δύο τόξα μέτρων $2\chi - \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3} - \chi$ ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον πρέπει καί ἀρκεῖ ὅπως κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά ᾔναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά.

Επομένως. - (1) $2\chi - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} - \chi + 2k\pi$, $3\chi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\chi = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$.

(2) $2\chi - \frac{\pi}{4} = \pi - (\frac{\pi}{3} - \chi) + 2k\pi$, $\chi = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $\chi = \frac{11\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$.

Σημειώντες επί τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{7\pi}{36}$, $\frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{36} + \frac{4\pi}{3}$, δηλαδή κορυφᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς.

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ἓν σημεῖον ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ οὗ κύκλου, δηλαδή τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{11\pi}{12}$.

403) Νά λυθῇ ἡ ἡμ 2χ + συν 3χ = 0

ἡμ 2χ = -συν 3χ , ἡμ 2χ = συν ($\pi - 3\chi$).

Ἀλλά, συν($\pi - 3\chi$) = ἡμ $\left[-\frac{\pi}{2} - (\pi - 3\chi) \right]$, διότι εἶναι συμπληρωματικά τόξα.

Επομένως. - ἡμ 2χ = ἡμ $(-\frac{\pi}{2} - \pi + 3\chi)$ ἢ ἡμ 2χ = ἡμ $(-\frac{\pi}{2} + 3\chi)$.

Ἵνα δύο τόξα μέτρων 2χ , $-\frac{\pi}{2} + 3\chi$, ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καί ἄρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Επομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις. -

(1) $2\chi = -\frac{\pi}{2} + 3\chi + 2k\pi$, $-\chi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\chi = \frac{\pi}{2} - 2k\pi$

(2) $2\chi = \pi - (-\frac{\pi}{2} + 3\chi) + 2k\pi$, $2\chi = \frac{3\pi}{2} - 3\chi + 2k\pi$,

$5\chi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $\chi = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ ἓν σημεῖον, δηλαδή τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{\pi}{2}$, ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς, ἡ δέ οἰκογένεια (2) παριστᾷ σημεῖα κείμενα εἰς τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κανονικοῦ πενταγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ πενταγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $-\frac{3\pi}{10}$, $\frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}$, $\frac{3\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}$.

404) Νά λυθῇ ἡ ἡμ 3χ + συν 2χ = 0
 ἡμ 3χ = - συν 2χ , ἡμ 3χ = συν ($\pi - 2\chi$)
 Ἀλλά, συν ($\pi - 2\chi$) = ἡμ $\left[\frac{\pi}{2} - (\pi - 2\chi) \right]$ διότι εἶναι συμπληρωματικά τὰ τόξα. Ἐπομένως ἔχομεν: ἡμ 3χ = ἡμ ($\frac{\pi}{2} - \pi + 2\chi$) ἢ ἡμ 3χ = ἡμ ($-\frac{\pi}{2} + 2\chi$).

Ἰνα δύο τόξα μέτρων 3χ , $-\frac{\pi}{2} + 2\chi$, ἔχουν τό αὐτό ἡμίτονον, πρέπει καί ἀρνεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά ᾔναι ἴσα ἡ παραπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις.-

$$\begin{aligned} (1) \quad 3\chi &= -\frac{\pi}{2} + 2\chi + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi. \\ (2) \quad 3\chi &= \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + 2\chi \right) + 2k\pi, \quad 3\chi = \pi + \frac{\pi}{2} - 2\chi + 2k\pi, \\ 5\chi &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{3\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5}. \end{aligned}$$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ ἓν σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Τό σημεῖον τοῦτο εὕρεται εἰς τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{3\pi}{2}$.

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ σημεῖα κείμενα εἰς τὰς κορυφὰς ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον κανονικοῦ πενταγώνου.

Αἱ κορυφαί τοῦ πενταγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}, \frac{3\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}$

$$405) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ}(3\chi - \frac{\pi}{2}) = \text{συν}(\chi + \frac{\pi}{3}) \\ - \frac{\pi}{2} < \chi < \frac{5\pi}{2}$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\text{συν}(\chi + \frac{\pi}{3}) = \text{ἡμ}[\frac{\pi}{2} - (\chi + \frac{\pi}{3})]$ διότι τὸ τόξα εἶναι παραπληρωματικά. Ἐπομένως ἔχομεν. —

$$\text{ἡμ}(3\chi - \frac{\pi}{2}) = \text{ἡμ}(\frac{\pi}{2} - \chi - \frac{\pi}{3}) \quad \eta$$

$$\text{ἡμ}(3\chi - \frac{\pi}{2}) = \text{ἡμ}(\frac{\pi}{6} - \chi).$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $3\chi - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} - \chi$, ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ προσέγγισιν $k \cdot 2$ εἶναι ἴσα ἢ παραπληρωματικά. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξιśώσεως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις. —

$$(1) \quad 3\chi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} - \chi + 2k\pi, \quad 4\chi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}.$$

$$(2) \quad 3\chi - \frac{\pi}{2} = \pi - (\frac{\pi}{6} - \chi) + 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{5\pi}{6} + \chi + \frac{\pi}{2} +$$

$$+ 2k\pi, \quad \chi = \frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ τὰ σημεῖα A_0, A_I, A_2, A_3 πέρατα ἀντιστοιχῶς τῶν τόξων. —

$\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$, δηλαδή κορυφάς τετραγώνου, τὰ ὁποῖα ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς. Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ δύο σημεῖα ἀντιδιαμετρικά ἐπαναλαμβανόμενα περιοδικῶς. Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται εἰς τὰ πέρατα

ράτα τῶν τόξων. — $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} + \pi$.

Ἐπειδὴ $-\frac{\pi}{2} < \chi < \frac{5\pi}{2}$, ἐκ τῶν λύσεων τῆς ἐξίσωσε-

ως, λαμβάνομεν διὰ μὲν τὴν οἰκογένειαν (1) τὰς τιμὰς:

$$-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6} + 2\pi,$$

διὰ δὲ τὴν οἰκογένειαν (2) λαμβάνομεν τὰς τιμὰς:

$$\frac{2\pi}{3}, \pi + \frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}.$$

406) Νά λυθῇ ἡ ἡμ $2\chi - \sin \chi = 0$.

$$\eta \mu 2\chi = \sin \chi.$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\sin \chi = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right)$, ἐπειδὴ τὰ τόξα χ ,

$\frac{\pi}{2} - \chi$ εἶναι συμπληρωματικά. Ἀρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $\eta \mu 2\chi = \eta \mu \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right)$. Ἐπομένως αἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσεως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις:

$$(1) \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} - \chi + 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \chi \right) + 2k\pi, \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} + \chi + 2k\pi,$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα

τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένεια (1) παριστᾷ τὰ σημεῖα

A_0, A_1, A_2 , πέρατα ἀντιστοίχως τῶν τόξων $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3},$

$\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}$, δηλαδή κορυφᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου. Τὰ ση-

μεῖα ταῦτα, ὡς γνωστόν ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς.

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ἓν μόνον σημεῖον, ἐπαναλαμβάνόμενον περιοδικῶς, κείμενον δὲ εἰς τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{\pi}{2}$.

$$407) \text{ Νά λυθῇ ἡ συν} \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) + \text{συν}(3\chi + \pi) = 0.$$

$$\text{συν} \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) = -\text{συν}(3\chi + \pi)$$

Γνωρίζομεν ὅτι. - $\text{συν}(3\chi + \pi) = \text{συν} \left[\pi - (3\chi + \pi) \right]$ ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι παραπληρωματικά. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται. - $\text{συν} \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) = \text{συν} \left[\pi - 3\chi - \pi \right]$ ἢ

$$\text{συν} \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) = \text{συν}(-3\chi) \quad \text{ἢ} \quad \text{συν} \left(\chi - \frac{\pi}{3} \right) = \text{συν} 3\chi$$

Ἵνα δύο τόξα μέτρων $\chi - \frac{\pi}{3}$, 3χ ἔχουν τὸ αὐτὸ συνημέλιον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅπως, κατὰ πρόσέγγισιν $k \cdot 2\pi$, νά ᾖναι ἴσα ἢ ἀντίθετα. Ἐπομένως, αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως δίδονται ἀπὸ τὰς σχέσεις. -

$$(1) \chi - \frac{\pi}{3} = 3\chi + 2k\pi, \quad -2\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{6} - k\pi$$

$$(2) \chi - \frac{\pi}{3} = -3\chi + 2k\pi, \quad 4\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$$

σημειοῦντες ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου τὰ πέρατα τῶν τόξων λύσεων, ἡ οἰκογένειά (1) παριστᾷ τὰ σημεῖα A_0, A_1 , ἀντιδιαμετρικά μεταξὺ των, πέρατα τῶν τόξων. -

$-\frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ τὰ σημεῖα $A_0, A_1,$

A_2, A_3 , πέρατα ἀντιστοίχως τῶν τόξων $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2},$

$-\frac{\pi}{12} + \pi, \frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$, δηλαδή κορυφὰς τετραγώνου.

$$408) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἡμ} 2\chi = \text{συν} \left(3\chi + \frac{\pi}{6} \right).$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\text{συν} \left(3\chi + \frac{\pi}{6} \right) = \text{ἡμ} \left[\frac{\pi}{2} - \left(3\chi + \frac{\pi}{6} \right) \right]$ ἐπεὶ δὴ τὰ τόξα εἶναι συμπληρωματικά. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. - $\text{ἡμ} 2\chi = \text{ἡμ} \left(\frac{\pi}{2} - 3\chi - \frac{\pi}{6} \right)$ ὅποτε αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὐρίσκονται ἀπὸ τὰς δύο σχέσεις. -

$$(1) \quad 2\chi = \frac{\pi}{3} - 3\chi + 2k\pi, \quad 5\chi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5}$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - \left(\frac{\pi}{3} - 3\chi\right) + 2k\pi, \quad 2\chi = \pi - \frac{\pi}{3} + 3\chi + 2k\pi, \\ -\chi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{2\pi}{3} - 2k\pi.$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια (I) παριστᾷ τὰ σημεῖα A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 , κορυφᾶς κανονικοῦ πενταγώνου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{15} + \frac{4\pi}{5}, \frac{\pi}{15} + \frac{6\pi}{5}, \frac{\pi}{15} + \frac{8\pi}{5}$.

Ἡ οἰκογένεια (2) παριστᾷ ἓν μόνον σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς, κείμενον εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $\frac{4\pi}{3}$.

$$409) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἡμ}(4\chi - \frac{\pi}{3}) = \text{συν}(\frac{\pi}{4} - \chi)$$

$$\text{Γνωρίζομεν ὅτι } \text{συν}(\frac{\pi}{4} - \chi) = \text{ἡμ}\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - \chi\right)\right]$$

ἐπειδὴ τὰ τόξα εἶναι συμπληρωματικά. Ἄρα, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. —

$$\text{ἡμ}(4\chi - \frac{\pi}{3}) = \text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + \chi\right)$$

$$\text{ἡμ}(4\chi - \frac{\pi}{3}) = \text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{4} + \chi\right).$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ἀπὸ τὰς ἐξῆς δύο σχέ-

$$\text{σεις (1) } 4\chi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + \chi + 2k\pi, \quad 3\chi = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$3\chi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}.$$

$$(2) \quad 4\chi - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + \chi\right) + 2k\pi, \quad 4\chi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} - \chi + 2k\pi, \\ 5\chi = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad 5\chi = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{13\pi}{60} + \frac{2k\pi}{5}.$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια (I) παριστᾷ σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῶν κορυφῶν ἰσοπλευροῦ τριγώ-

νου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τ
 ξων. — $\frac{7\pi}{36}$, $\frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{36} + \frac{4\pi}{3}$. Ἡ οἰκογένεια (2) παρισ
 τᾶ σημεῖα κεῖμενα ἐπὶ τῶν κορυφῶν κανονικοῦ πενταγώνου.

Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων.
 $\frac{13\pi}{60}$, $\frac{13\pi}{60} + \frac{2\pi}{5}$, $\frac{13\pi}{60} + \frac{4\pi}{5}$, $\frac{13\pi}{60} + \frac{6\pi}{5}$, $\frac{13\pi}{60} + \frac{8\pi}{5}$.

$$410) \quad \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right).$$

Γνωρίζομεν ὅτι. —

$\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right) = \epsilon\phi\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2\chi\right)\right]$ ἐπειδὴ τὰ τόξα
 εἶναι συμπληρωματικά. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται
 ὡς ἐξῆς. — $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 2\chi\right),$

$$\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \chi\right) = \epsilon\phi(-2\chi)$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως παρέχονται ἀπὸ τὴν σχέσιν. —

$$\frac{\pi}{4} - \chi = -2\chi + k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια λύσεων
 τῆς ἐξισώσεως παριστάνει δύο σημεῖα ἀντιδιαμετρικά με
 ταξύ των. Τὰ σημεῖα ταῦτα εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα
 τῶν τόξων. — $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

$$411) \quad \epsilon\phi 3\chi = \sigma\phi 2\chi$$

Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\phi 2\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - 2\chi\right)$ ἐπειδὴ τὰ τόξα
 2χ , $\frac{\pi}{2} - 2\chi$ εἶναι συμπληρωματικά. Ἐπομένως ἡ δοθεῖσα
 ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. — $\epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - 2\chi\right).$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως παρέχονται ἀπὸ τὴν σχέσιν. —

$$3\chi = \frac{\pi}{2} - 2\chi + k\pi, \quad 5\chi = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \chi = \frac{10}{10} + \frac{k\pi}{5}.$$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ οἰκογένεια λύσεων τῆς δοθείσης ἐξίσωσης παριστᾷ τὰς κορυφὰς κανονικοῦ δεκαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν τριγωνομετρικὸν κύκλον. Αἱ κορυφαὶ τοῦ δεκαγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — $\frac{\pi}{10}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{3\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \pi$, $\frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{7\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{9\pi}{5}$, $\frac{\pi}{10} + \frac{4\pi}{5}$.

412) Νά λυθῇ ἡ $\epsilon\phi(3\chi - \frac{\pi}{3}) = \sigma\phi \frac{\pi}{5}$.
Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\phi \frac{\pi}{5} = \epsilon\phi(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5})$ ἐπειδὴ τὰ τόξα $\frac{\pi}{5}$ καὶ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} = \frac{3\pi}{10}$ εἶναι συμπληρωματικά. Ἐπομένως δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς $\epsilon\phi(3\chi - \frac{\pi}{3}) = \epsilon\phi(\frac{3\pi}{10})$. Αἱ λύσεις δέ ταύτης παρέχονται ἀπὸ τὴν σχέσιν. — $3\chi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{10} + k\pi$, ἢ $3\chi = \frac{3\pi}{10} + \frac{\pi}{3} + k\pi$, $3\chi = \frac{19\pi}{30} + k\pi$, ἢ $\chi = \frac{19\pi}{90} + \frac{k\pi}{3}$.

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἡ οἰκογένεια τῶν λύσεων τῆς ἐξίσωσης παριστᾷ τὰς κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου. Αἱ κορυφαὶ αὗται εὐρίσκονται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων. — $\frac{19\pi}{90}$, $\frac{19\pi}{90} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{90} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{90} + \pi$, $\frac{19\pi}{90} + \frac{4\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{90} + \frac{5\pi}{3}$.

413) Νά λυθῇ ἡ $\sigma\upsilon\nu^2\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = 0$.
Ἀναλύομεν εἰς γινόμενον παραγόντων. — $\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu\chi - 1) = 0$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἢ α) $\sigma\upsilon\nu\chi = 0$, ἢ β) $\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0$, $\sigma\upsilon\nu\chi = 1$.
Ἐκ τῆς περιπτώσεως α) ἔχομεν. — $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$.

Άρα αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως δίδονται ἀπό τὰς σχέσεις

$$(1) \quad \chi = \frac{\pi}{2} + 2 \kappa\pi, \quad (2) \quad \chi = -\frac{\pi}{2} + 2 \kappa\pi,$$

καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις (1), (2), αἱ λύσεις ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου παριστοῦν ἓν σημεῖον ἑπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) τὸ σημεῖον τοῦτο καίται εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $\frac{\pi}{2}$, ἐνῶ διὰ τὴν οἰκογένειαν (2) εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $\frac{3\pi}{2}$.
β) ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\sin \chi = 1$, ἔχομεν $\sin \chi = \sin 0$, ἄρα αἱ λύσεις δίδονται ἀπὸ τὴν σχέσηιν $\chi = 2 \kappa\pi$. Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου αἱ λύσεις ἀποτελοῦν ἓν σημεῖον ἑπαναλαμβανόμενον εἰς τὴν ἀρχὴν μετρήσεως τῶν τόξων.

$$414) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ } 2\eta\mu^2 \chi + 3\eta\mu\chi - 2 = 0.$$

Λύοντες ἀλγεβρικῶς τὴν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν ἔχομεν.

$$\eta\mu\chi = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 + 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

$$\text{ὁπότε } \eta\mu\chi = -\frac{8}{4}, \quad \eta\mu\chi = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Ἡ τιμὴ τοῦ $\eta\mu\chi = -\frac{8}{4}$ ἀπορρίπτεται διότι εἶναι μικροτέρα τῆς ἀρνητικῆς μονάδος.

Άρα ἰσχύει μόνον ἡ τιμὴ $\eta\mu = \frac{1}{2}$. Ἐξ αὐτῆς ἐπειδὴ

$$\frac{1}{2} = \eta\mu 30^\circ = \eta\mu \frac{\pi}{6}, \quad \text{ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν}$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu \frac{\pi}{6}. \quad \text{Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης δίδονται ἀπὸ τὰς ἐξῆς δύο σχέσεις} \quad (1) \quad \chi = \frac{\pi}{6} + 2 \kappa\pi,$$

$$(2) \quad \chi = \pi - \frac{\pi}{6} + 2 \kappa\pi, \quad \chi = \frac{5\pi}{6} + 2 \kappa\pi.$$

Ἡ οἰκογένεια (1) ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου παριστᾷ ἓν σημεῖον ἑπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Τό

μεῖον τοῦτο εὐρίσκεται εἰς τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{\pi}{6}$.

Ἡ οἰκογένεια (2) ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου πα-
ριστᾷ ἓν σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Τό ση-
μεῖον τοῦτο εὐρίσκεται εἰς τό πέρας τοῦ τόξου $\frac{5\pi}{6}$.

415) Νά λυθῇ ἡ $4\sigma\upsilon\nu^2 \chi - 3 = 0$. $0 < \chi < 360$
Ἀναλύομεν τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς γινόμενον παρα-
γόντων. - $(2\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{3}) = 0$. Ἐξ αὐτῆς ἔ-
πεται ὅτι ἢ α) $2\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3} = 0$ ἢ β) $2\sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{3} = 0$.

Κατά τήν α) περίπτωσιν ἔχομεν. - $2\sigma\upsilon\nu\chi = -\sqrt{3}$, $\sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἐπειδὴ $-\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu(180 - 30) = \sigma\upsilon\nu 150$, ἡ

δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς ἐξῆς. - $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 150$.

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης δίδονται ἐκ τῶν σχέσε-
ων. - (1) $\chi = 150 + 360k$. (2) $\chi = -150 + 360k$.

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια λύσεων
(1) παριστᾷ ἓν σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς.

Λόγῳ τοῦ τεθέντος περιορισμοῦ, ἐξ ὅλων τῶν λύσεων, λαμ-
βάνομεν μόνον τό σημεῖον Λ_0 , καίμενον εἰς τό πέρας τοῦ
τόξου 150. Ἡ οἰκογένεια λύσεων (2) παριστᾷ ἐπίσης

ἓν σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Λόγῳ τοῦ πε-
ριορισμοῦ, ἐξ ὅλων τῶν λύσεων λαμβάνομεν τό σημεῖον

Γ_1 , καίμενον εἰς τό πέρας τοῦ τόξου. $360 - 150 = 210$.

Κατά τήν β) περίπτωσιν ἔχομεν. $2\sigma\upsilon\nu\chi = 3$. $\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{3}{2}$

Ἐπειδὴ $\frac{3}{2} = \sigma\upsilon\nu 30$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται ὡς
ἐξῆς. - $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 30$. Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως ταύτης

δίδονται ἀπό τὰς σχέσεις (1) $\chi = 30 + 360k$.

(2) $\chi = 30 + 360k$.

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἡ οἰκογένεια λύσεων (1) παριστᾷ ἓν σημεῖον ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ, ἐξ ὧν τῶν λύσεων, λαμβάνομεν τὴν τιμὴν $\chi = 300$. Ἡ οἰκογένεια λύσεων (2) παριστᾷ ὁμοίως ἓν σημεῖον, ἐπαναλαμβανόμενον περιοδικῶς. Ὅμοιως, λόγῳ τοῦ ἀρχικοῦ περιορισμοῦ, ἐκ τῶν λύσεων λαμβάνομεν μόνον τὴν τιμὴν $\chi = 3600 - 300 = 3300$.

$$416) \text{ Νά λυθῇ ἡ (1) } \sin^2 \chi - \sin^2 \alpha = 0 \quad \eta \\ (\sin \chi + \sin \alpha) (\sin \chi - \sin \alpha) = 0 \text{ ἐκ τῆς ὁποίας}$$

$$\eta \quad \alpha) \sin \chi + \sin \alpha = 0$$

$$\sin \chi = -\sin \alpha$$

$$\sin \chi = \sin(\pi - \alpha)$$

Ἐπομένως αἱ λύσεις .-

$$(1) \quad \chi = \pi - \alpha + 2k\pi \quad \eta \quad \chi = -\alpha + (2k + 1)\pi$$

$$2) \quad \chi = -(\pi - \alpha) + 2k\pi, \quad \chi = \alpha + (2k - 1)\pi$$

$$\eta \quad \beta) \sin \chi - \sin \alpha = 0$$

$$\sin \chi = \sin \alpha$$

$$\kappa α ἱ αἱ λύσεις εἶναι \quad (1) \quad \chi = \alpha + 2k\pi,$$

$$(2) \quad \chi = -\alpha + 2k\pi,$$

2ον Ἴνα $\chi^2 - \chi\sqrt{2} - \sin \alpha = 0$ ἔχει μίαν διπλὴν ρίζαν πρέπει ἡ $\Delta = 0$, δηλαδή $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0 \quad \eta \quad (\sqrt{2})^2 + 4\sin \alpha = 0 \quad \eta \quad 4\sin \alpha + 2 = 0, \quad 4\sin \alpha = -2, \quad \sin \alpha = -\frac{1}{2}$

$$\text{Ἀλλά } -\frac{1}{2} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{2\pi}{3}, \quad \text{Ἐπομένως}$$

$$\sin \alpha = \sin \frac{2\pi}{3}. \quad \text{Ἄρα αἱ λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν}$$

$$(1) \quad \alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad (2) \quad \alpha = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi.$$

$$417) \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi + 3 = 0. \quad 200^\circ \leq \chi \leq 400^\circ$$

$$\sigma\upsilon\nu\chi = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$\eta \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4}, \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$(1) \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{6}{4} > 1 \quad \text{ἀπορρίπτεται}$$

$$(2) \quad \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

τότε $\chi = \kappa.400^\circ$, $\chi = 400^\circ$ λόγω περιορισμοῦ.

418) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις .- Ἐντός ποίου διαστήματος δέον νά ἐκλέξωμεν τό μ ἵνα αὕτη ἡ ἐξίσωσις .- $\mu\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi - 2\mu = 0$ ἐπιδέχεται διά $\eta\mu\chi$ μίαν καί μόνον λύσιν; Ποίαν τιμὴν δέον νά δώσωμεν εἰς τό μ ἵνα $\chi = 1500$ γίνῃ ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως;

α) Ἴνα ἡ ἐξίσωσις $\mu\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi - 2\mu = 0$ ἔχει μίαν καί μόνον λύσιν πρέπει $\Delta = 0$ ἢ $1 + 4 \cdot \mu \cdot 2\mu = 0$ ἢ $8\mu^2 + 1 = 0$.

$$\mu^2 = -\frac{1}{8}, \quad \mu = \pm \sqrt{-\frac{1}{8}} = \pm i \frac{\sqrt{8}}{8} = \pm i \frac{2\sqrt{2}}{8} = \pm i \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\beta) \quad \mu\eta\mu^2 1500 + \eta\mu 1500 - 2\mu = 0$$

$$\eta \quad \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2\mu = 0, \quad \frac{\mu}{4} + \frac{1}{2} - 2\mu = 0,$$

$$1 + 2 - 8\mu = 0 \quad \eta \quad -7\mu + 2 = 0, \quad 7\mu = 2 \quad \text{καί} \quad \mu = \frac{2}{7}$$

419) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις .- $4\eta\mu^2\chi - 2(\sqrt{3} - 1)\eta\mu\chi - \sqrt{3} = 0$.

Λαμβάνομεν τόν τύπον τοῦ ἡμίσεως .-

$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3} - 1 \pm \sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2 + 4\sqrt{3}}}{4} \quad \eta$$

$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3}}}{4} \quad \eta$$

$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1}}{4} = \frac{\sqrt{3}-1 \pm \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}}{4}$$

$$\text{"Αρα } \eta\mu\chi = \frac{(\sqrt{3}-1) \pm (\sqrt{3}+1)}{4}$$

$$\alpha) \eta\mu\chi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \eta\mu 60^\circ = \eta\mu \frac{\pi}{3}$$

Επομένως αἱ λύσεις.-

$$(1) \chi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(2) \chi = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

Ἐκάστη τῶν ἀνωτέρω δύο οἰκογενειῶν παριστᾷ ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου ἀνά ἓν σημεῖον. Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται εἰς τὰ πέρατα τῶν τόξων $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$.

$$\beta) \eta\mu\chi = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = \eta\mu(-\frac{\pi}{6})$$

Επομένως αἱ λύσεις εἶναι.-

$$(1) \chi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(2) \chi = \pi - (-\frac{\pi}{6}) + 2k\pi \quad \eta \quad \chi = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\eta \quad \chi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

Ὅμοίως ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, ἕκαστη τῶν οἰκογενειῶν (β), παριστᾷ ἓν σημεῖον. Διὰ τὴν οἰκογένειαν (1) τό σημεῖον τοῦτο κεῖται εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $\frac{11\pi}{6}$ διὰ δέ τὴν οἰκογένειαν (2) τό σημεῖον τοῦτο κεῖται εἰς τὸ πέρασ τοῦ τόξου $\frac{7\pi}{6}$.

420) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφ $5\chi = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\chi}$ ἢ

$\varepsilon\varphi 5\chi = \sigma\varphi\chi$ ἢ $\varepsilon\varphi 5\chi = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{2} - \chi\right)$

Αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δίδονται ἀπό τὴν σχέσιν. — $5\chi = -\frac{\pi}{2} - \chi + k\pi$, ἢ $6\chi = -\frac{\pi}{2} + k\pi$, καὶ $\chi = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}$

Ἐπὶ τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου, αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀποτελοῦν τὰς κορυφάς κανονικοῦ δωδεκαγώνου. Αἱ κορυφαί τοῦ δωδεκαγώνου τούτου κεῖνται εἰς τὰ πέωρατα τῶν κάτωθι τόξων. — $-\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12} + \pi$, $\frac{\pi}{12} + \frac{7\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{3\pi}{2}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{3}$, $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{6}$.

421) Σπουδάσατε τὴν ἐξίσωσιν. —

$\alpha\eta\mu^2\chi + (2\alpha - 1)\eta\mu\chi - 3\alpha - 1 = 0$.

Λύομεν ἀλγεβρικῶς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. —

$$\mu\chi = \frac{-(2\alpha-1) \pm \sqrt{(2\alpha-1)^2 \pm 4\alpha(3\alpha+1)}}{2\alpha} =$$

$$= \frac{-(2\alpha-1) \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha + 1 + 12\alpha^2 + 4\alpha}}{2\alpha}$$

$$\mu\chi = \frac{-(2\alpha-1) \pm \sqrt{16\alpha^2 + 1}}{2\alpha}$$

Ἡ τιμὴ τοῦ $\eta\mu\chi$ πρέπει νά περιλαμβάνονται μεταξύ -1 , $+1$. Γνωρίζομεν ὅτι ἵνα ἡ τιμὴ μιᾶς ρίζης τῆς ἀλγεβρικοῦ ἐξισώσεως $\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, περιλαμβάνεται μεταξύ $-1 \dots +1$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $\varphi(-1) \cdot \varphi(+1) < 0$.

Ἐάν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἀνισότητα, συμφώνως πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, θὰ ἔχωμεν.-

$$\varphi(-1) = \alpha(-1)^2 + (2\alpha-1)(-1) - 3\alpha - 1 = \alpha + 1 - 2\alpha - 3\alpha - 1 = -4\alpha.$$

$$\varphi(+1) = \alpha \cdot 1^2 + (2\alpha-1) \cdot 1 - 3\alpha - 1 = \alpha + 2\alpha - 1 - 3\alpha - 1 = -2.$$

Ἐπομένως $\varphi(-1) \cdot \varphi(+1) = (-4\alpha)(-2) = 8\alpha$. Πρέπει $8\alpha < 0$, ἢ $\alpha < 0$.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικές, περιλαμβανομένης ἀμοφοτέρας μετὰ τῶν $-1, +1$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ.- ἵνα $\Delta > 0$, $\alpha\varphi(-1) > 0$, $\alpha\varphi(1) > 0$, $-1 < -\frac{\beta}{2\alpha}$, $1 > -\frac{\beta}{2\alpha}$. Διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἔχωμεν.- $\Delta = (2\alpha-1)^2 + 4\alpha(3\alpha+1) = 16\alpha^2 + 1 > 0$, $\alpha\varphi(-1) = \alpha(-4\alpha) = -4\alpha^2$. Ἀλλὰ, διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ α , εἶναι ἀδύνατον νὰ ἔχωμεν $-4\alpha^2 > 0$. Δηλαδή εἶναι ἀδύνατον τό (-1) νὰ κεῖται ἐντός τῶν ριζῶν. Ἄρα δέν ἔχωμεν ποτέ τὴν περίπτωσιν, ὅπου αἱ τιμαὶ τῶν δύο ριζῶν τῆς ἐξιśωσης θὰ περιέχονται μεταξύ $-1, 1$. Τό πρόβλημα δέν θὰ ἔχῃ λύσιν ὅταν αἱ ρίζαι κεῖνται ἐντός τοῦ διαστήματος τῶν τιμῶν ἀπὸ -1 ἕως $+1$. Ὅταν δηλαδή $\alpha\varphi(-1) < 0$, $\alpha\varphi(1) < 0$.

Κατὰ τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $\alpha = -\frac{3}{7}$, δι' ἀντικαταστάσεως ἔχωμεν.-

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\chi} &= \frac{-\left[2 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) - 1\right] \pm \sqrt{16 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right)^2 + 1}}{2 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right)} \\ &= \frac{-\left[-\frac{12}{7} - 1\right] \pm \sqrt{\frac{16 \cdot 36}{49} + 1}}{-\frac{12}{7}} \end{aligned}$$

$$\eta\mu\chi = \frac{\frac{19}{7} \pm \sqrt{\frac{576+49}{49}}}{-\frac{12}{7}} = \frac{\frac{19}{7} \pm \frac{\sqrt{625}}{7}}{-\frac{12}{7}} = \frac{19 \pm 25}{-12}$$

οπότε η $\eta\mu\chi = -\frac{44}{12} < -1$, άρα δέ απορρίπτεται

$$\eta\mu\chi = -\frac{6}{12} = -\frac{1}{2}.$$

Γνωρίζομεν ότι $-\frac{1}{2} = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. 'Οπότε η δοθεῖσα
έξίσωσις γράφεται .-

$\eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Αί λύσεις τῆς
έξιώσεως ταύτης δίδονται υπό τῶν σχέσεων.-

$$(1) \chi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad (2) \chi = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \\ = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$422) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \epsilon\phi 2\chi . \sigma\phi\left(3\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$$

Ἡ άνωτέρω ἐξίσωσις ἀναλύσεται εἰς δύο ἄλλας, ἥτοι:

$$(1) \epsilon\phi 2\chi = 0 \quad \eta \quad \epsilon\phi 2\chi = \epsilon\phi 0. \text{ Μὲ λύσεις } 2\chi = k\pi, \chi = \frac{k\pi}{2},$$

$$\text{καί } (2) \sigma\phi\left(3\chi - \frac{\pi}{3}\right) = 0. \text{ Γνωρίζομεν ὅτι } 0 = \sigma\phi\frac{\pi}{2}.$$

Άρα ἡ ἐξίσωσις (2) γράφεται ὡς ἐξῆς.-

$$\sigma\phi\left(3\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\phi\frac{\pi}{2},$$

αὐτὶς λύσεις δέ ταύτης δίδονται υπό τῶν τύπων.-

$$3\chi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad 3\chi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad 3\chi = \frac{5\pi}{6} + k\pi,$$

$$\chi = \frac{5\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}.$$

$$423) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } 4\eta\mu^2\chi = 1.$$

Ἀναλύομεν τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς γινόμενον πα-
ρογόντων: $(2\eta\mu\chi + 1)(2\eta\mu\chi - 1) = 0.$

Ἐκ τῆς νέας μορφῆς τῆς ἐξίσωσης λαμβάνομεν. -

$$\eta \text{ (1) } 2\eta\mu\chi + 1 = 0, 2\eta\mu\chi = -1, \eta\mu\chi = -\frac{1}{2}, \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right). \text{ Μὲ λύσεις δεδομένας ἐν τῶν τύπων } \chi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \chi = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

$$\eta \text{ (2) } 2\eta\mu\chi - 1 = 0, \eta\mu\chi = \frac{1}{2}, \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6} + 2k\pi. \text{ Μὲ σε δεδομένας ἐν τῶν τύπων: } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$424) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, } -\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi 3\chi = \mu\epsilon\phi 2\chi.$$

$$\Gammaνωρίζομεν ὅτι \epsilon\phi 3\chi = \epsilon\phi(2\chi + \chi) = \frac{\epsilon\phi 2\chi + \epsilon\phi\chi}{1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi}.$$

Ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἔχομεν. -

$$\epsilon\phi\chi - \frac{\epsilon\phi 2\chi + 3\phi\chi}{1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi} = \mu\epsilon\phi 2\chi \quad \eta$$

$$\begin{aligned} \epsilon\phi\chi(1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi) - (\epsilon\phi\chi + \epsilon\phi 2\chi) &= \mu\epsilon\phi 2\chi(1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi) \quad \eta \\ \epsilon\phi\chi - \epsilon\phi^2\chi - \epsilon\phi^2\chi - \epsilon\phi\chi - \epsilon\phi 2\chi &= \mu\epsilon\phi 2\chi(1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi) \quad \eta \\ + \epsilon\phi 2\chi(1 + \epsilon\phi^2\chi) + \mu\epsilon\phi 2\chi(1 - \epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi) &= 0 \quad \eta \\ \epsilon\phi 2\chi(1 + \epsilon\phi^2\chi + \mu - \mu\epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi) &= 0. \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ εὐρεθέντος γινομένου πρέπει ἡ

$$1) \epsilon\phi 2\chi = 0 \quad \eta \quad 2) 1 + \epsilon\phi^2\chi + \mu - \mu\epsilon\phi\chi\epsilon\phi 2\chi = 0.$$

$$\text{Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν: } \epsilon\phi 2\chi = \epsilon\phi 0, 2\chi = k\pi, \chi = \frac{k\pi}{2}$$

Ἀλλὰ ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν. -

$$\eta\mu 2\chi = 0, \text{ διότι ἔχουν καὶ αἱ δύο τὰς αὐτὰς λύσεις. -}$$

$$\eta\mu 2\chi = \eta\mu 0, 2\chi = k\pi, \chi = \frac{k\pi}{2}. \text{ Ἄρα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν } \epsilon\phi 2\chi = 0 \text{ μὲ τὴν } \eta\mu 2\chi = 0.$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσης (2) ἔχομεν. -

$$1 + \epsilon\phi^2\chi + \mu - \mu\epsilon\phi\chi \cdot \frac{2\epsilon\phi\chi}{1 - \epsilon\phi^2\chi} = 0 \quad \eta$$

$$-\varepsilon\varphi^4\chi + \mu - \mu\varepsilon\varphi^2\chi - 2\mu\varepsilon\varphi^2\chi = 0 \quad \eta \quad \varepsilon\varphi^4\chi + 3\mu\varepsilon\varphi^2\chi - (\mu + 1) = 0.$$

α). Γνωρίζομεν ὅτι : $\sin 2\omega = 2\sin^2\omega - 1 \quad \eta \quad 2\sin^2\omega = \sin 2\omega + 1$, $\sin^2\omega = \frac{\sin 2\omega + 1}{2}$. Ἐπίσης γνωρίζομεν ὅτι, -

$$\sin 2\omega = 1 - 2\eta\mu^2\omega, \quad \eta \quad 2\eta\mu^2\omega = 1 - \sin 2\omega, \quad \eta\mu^2\omega = \frac{1 - \sin 2\omega}{2}$$

$$\delta\acute{\nu}\omicron\tau\epsilon, \quad \varepsilon\varphi^2\omega = \frac{\eta\mu^2\omega}{\sin^2\omega} = \frac{1 - \sin 2\omega}{1 + \sin 2\omega}.$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τήν σχέσιν(α), θά ἔχωμεν. -

$$\left(\frac{1 - \sin 2\chi}{1 + \sin 2\chi}\right)^2 + 3\mu \frac{1 - \sin 2\chi}{1 + \sin 2\chi} - (\mu + 1) = 0 \quad \eta$$

$$(1 - \sin 2\chi)^2 + 3\mu (1 - \sin 2\chi)(1 + \sin 2\chi) - (\mu + 1)(1 + \sin 2\chi)^2 = 0$$

$$1 - 2\sin 2\chi + \sin^2 2\chi + 3\mu - 3\mu\sin^2 2\chi - \mu - 1 - 2\mu\sin 2\chi - 2\sin 2\chi - \mu\sin^2 2\chi - \sin^2 2\chi = 0.$$

$$-4\sin 2\chi + 2\mu - 4\mu\sin^2 2\chi - 2\mu\sin 2\chi = 0 \quad \eta \quad \mu\sin^2 2\chi + (\mu + 2)\sin 2\chi - \mu = 0.$$

$$\Delta\iota\acute{\alpha} \mu = 0, \quad \theta\acute{\alpha} \quad \varepsilon\chi\omega\mu\epsilon\nu : \quad 2\sin 2\chi = 0 \quad \eta \quad \sin 2\chi = 0,$$

$$\sin 2\chi = \sin \frac{\pi}{2}. \quad \text{Ἄρα αἱ λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν : -}$$

$$2\chi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad \eta$$

$$2\chi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad \chi = -\frac{\pi}{4} + k\pi.$$

$$\Delta\iota\acute{\alpha} \mu = 1, \quad \theta\acute{\alpha} \quad \varepsilon\chi\omega\mu\epsilon\nu : \quad 2\sin^2 2\chi + 3\sin 2\chi - 1 = 0.$$

$$\delta\acute{\nu}\omicron\tau\epsilon : \quad \sin 2\chi = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4 \cdot 2}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{17}}{4} = \frac{-3 \pm 4,12310}{4}$$

$$\sin 2\chi = \frac{-3 - 4,12310}{4} = -\frac{7,12310}{4} < -1 \quad \acute{\alpha}\rho\omicron\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho\rho \quad \eta$$

$$\sin 2\chi = \frac{-3 + 4,12310}{4} = \frac{1,12310}{4} = 0,28077$$

Εὐρίσκομεν τὴν ὀξεῖαν γωνίαν 2χ τῆς ὁποίας τὸ συνημ-
τονον ἴσοῦται πρὸς τὸν εὐρεθέντα ἀριθμόν.-

$$\begin{array}{rcl} d = 0,00046 & \left(\begin{array}{l} 0,28123 = \text{συν}(73^{\circ}40') \\ 0,28077 = \text{συν}2\chi \\ 0,27843 = \text{συν}(73^{\circ}50') \end{array} \right) & 10' \\ D = 0,00280 & & \\ & 0,00280 & 10' \\ & 0,00046 & \chi \end{array}$$

$$\chi = 10' \cdot \frac{0,00046}{0,00280} = \frac{460}{280} = 1'38''$$

ἄρα ἡ ὀξεῖα γωνία $2\chi = 73^{\circ}41'38''$

ὁπότε $\text{συν}2\chi = \text{συν}(73^{\circ}41'38'')$ αἱ δὲ λύσεις δίδονται
ὑπὸ τῶν σχέσεων.-

$$2\chi = (73^{\circ}41'38'') + 2.180^{\circ}.k, \quad \eta \quad \chi = 36^{\circ}50'49'' + 180$$

$$2\chi = -(73^{\circ}41'38'') + 2.180^{\circ}.k, \quad \eta \quad \chi = 36^{\circ}50'49'' - 180$$

Ἡ ἐξίσωσις $\eta \mu 2\chi = 0$, ἐλύθη ὡς ἀνωτέρω.

$$2\mu \text{συν}^2 2\chi + (\mu + 2) \text{συν} 2\chi - \mu = 0$$

$$\text{συν} 2\chi = \frac{-(\mu + 2) \pm \sqrt{(\mu + 2)^2 + 4 \cdot 2\mu^2}}{4\mu} = \frac{-(\mu + 2) \pm \sqrt{9\mu^2 + 4\mu + 4}}{4\mu}$$

διὰ νὰ γίνουν ἀποδεκταί αἱ ρίζαι τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως
πρέπει νὰ κεῖνται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $-1, +1$. Ἀρα,
θὰ ἐξετάσωμεν τὰς θέσεις τῶν ἀριθμῶν $-1, +1$, ὡς πρὸς
τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως.

Διὰ νὰ κεῖται μία μόνον ρίζα μεταξύ $-1 \dots +1$, πρέ-
πει καὶ ἀρκεῖ:- $\varphi(1) \cdot \varphi(-1) < 0$.

$$\varphi(1) = 2\mu + \mu + 2 - \mu = 2(\mu + 1)$$

$$\varphi(-1) = 2\mu - \mu - 2 - \mu = -2$$

ὁπότε $\varphi(1) \cdot \varphi(-1) = -4(\mu + 1) < 0$, ἢ $\mu + 1 > 0$, $\mu > -1$.
Θὰ ἐξετάσωμεν πότε θὰ κεῖνται καὶ αἱ δύο ρίζαι μεταξύ
τῶν ἀριθμῶν $-1 \dots +1$.

Γνωρίζομεν ὅτι, ἐάν ἔχωμεν τὴν ἄλγεβρικήν ἐξίσωσιν.-
 $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, καὶ θέλωμεν νά προσδιορίσωμεν τὰς ρί-
 ζας αὐτῆς ρ_1, ρ_2 , ὥστε αὗται νά κεῖνται μεταξύ τῶν
 ἀριθμῶν $-1, +1$, θά πρέπει νά ἐξετάσωμεν ἐάν ἀληθεύουν
 καὶ πότε συναληθεύουν αἱ κάτωθι σχέσεις.-

$$\Delta > 0, \alpha\varphi(1) > 0, \alpha\varphi(-1) > 0, -1 < -\frac{\beta}{2\alpha}, 1 > -\frac{\beta}{2\alpha}$$

Ἐπομένως εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν θά ἔχωμεν.-

$$\Delta = (\mu+2)^2 + 8\mu^2 = 9\mu^2 + 4\mu + 4 > 0.$$

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι μιγαδικαί, ἐπομένως τὸ
 τριώνυμον ἔχει πάντοτε τὸ πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ
 τοῦ δευτεροβαθμίου ὅρου, εἶναι δηλαδή θετικόν.-

$$\alpha\varphi(1) = 2\mu \cdot 2(\mu+1) = 4\mu(\mu+1) > 0, \mu(\mu+1) > 0,$$

$$\text{ἄρα } \mu > 0, \mu < -1.$$

$$\alpha\varphi(-1) = 2\mu(-2) = -4\mu > 0, \text{ ἄρα } \underline{\mu < 0}$$

$$-1 < -\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta}{2\alpha} - 1 < 0, \frac{\mu+2}{4\mu} - 1 < 0, \frac{\mu+2}{4\mu} - 4\mu < 0,$$

$$(\mu+2 - 4\mu) 4\mu < 0, \mu(2-3\mu) < 0, \mu(3\mu-2) > 0, \mu > \frac{2}{3}, \mu < 0.$$

$$1 > -\frac{\beta}{2\alpha}, \frac{\beta}{2\alpha} + 1 > 0, \frac{\mu+2}{4\mu} + 1 > 0, \frac{\mu+2}{4\mu} + 4\mu > 0,$$

$$(5\mu+2) 4\mu > 0, \mu(5\mu+2) > 0, \text{ ἄρα } \mu > 0, \mu < -\frac{2}{5}.$$

Ἀπασαι αἱ ἀνωτέρω ἀνισότητες συναληθεύουν διὰ τὴν τι-
 μὴν $\mu < -1$, Ἄρα διὰ $\mu < -1$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις
 ἔχει δύο ρίζας παρειχομένας μεταξύ $-1 \dots \dots +1$.

425) Νά ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi} =$

$$= \frac{2\eta\mu^2 \frac{\chi}{2} + 2\eta\mu \frac{\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}}{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\chi}{2} + 2\eta\mu \frac{\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}} = \frac{2\eta\mu \frac{\chi}{2} (\eta\mu \frac{\chi}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2})}{2\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} (\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} + \eta\mu \frac{\chi}{2})}$$

$$= \frac{\eta\mu \frac{\chi}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}} = \epsilon\varphi \frac{\chi}{2}$$

426) Νά ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi}{1 - \sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi} =$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\chi}{2} - 2\eta\mu \frac{\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}}{2\eta\mu^2 \frac{\chi}{2} - 2\eta\mu \frac{\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}} = \frac{2\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} (\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} - \eta\mu \frac{\chi}{2})}{-2\eta\mu \frac{\chi}{2} (\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2} - \eta\mu \frac{\chi}{2})}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\chi}{2}}{-\eta\mu \frac{\chi}{2}} = -\sigma\varphi \frac{\chi}{2}$$

427) Νά ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\frac{\eta\mu 2\chi + \eta\mu 4\chi + \eta\mu 6\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi}$

$$= \frac{2\eta\mu \frac{(2\chi + 4\chi)}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{(2\chi - 4\chi)}{2} + 2\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu 3\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi - 1}$$

$$= \frac{2\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu(-\chi) + 2\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu 3\chi}{\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi} = \frac{2\eta\mu 3\chi (\sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi)}{2\sigma\upsilon\nu 2\chi (\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu 2\chi)}$$

$$= \frac{\eta\mu 3\chi \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu(-\chi)}{\sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot (\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + \sigma\upsilon\nu 2\chi)} = \frac{2\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu\chi}{2\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} + \chi) \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} - \chi)}$$

$$= \frac{\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu\chi}{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} + \chi) \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{6} - \chi)}$$

$$428) \text{ Νά άπλοποιηθῇ ἡ παράστασις } \frac{\eta\mu\chi + \eta\mu\phi}{\eta\mu(\chi + \phi)} =$$

$$\frac{2\eta\mu(-\frac{\chi + \phi}{2}) \sigma\upsilon\nu(-\frac{\chi - \phi}{2})}{2\eta\mu(-\frac{\chi + \phi}{2}) \sigma\upsilon\nu(-\frac{\chi + \phi}{2})} = \frac{\sigma\upsilon\nu(-\frac{\chi - \phi}{2})}{\sigma\upsilon\nu(-\frac{\chi + \phi}{2})}$$

$$429) \text{ Νά άπλοποιηθῇ ἡ παράστασις } \frac{\eta\mu\chi + \eta\mu\phi}{1 - \sigma\upsilon\nu(\chi - \phi)}$$

$$\frac{2\eta\mu(-\frac{\chi - \phi}{2}) \sigma\upsilon\nu(\frac{\chi + \phi}{2})}{2\eta\mu^2(-\frac{\chi - \phi}{2})} = \frac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\chi + \phi}{2})}{\eta\mu(-\frac{\chi - \phi}{2})}$$

$$430) \text{ Νά άπλοποιηθῇ ἡ παράστασις } \frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu 2\chi}{1 + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi} =$$

$$\begin{aligned} \frac{2(-\frac{1}{2} - \sigma\upsilon\nu 2\chi)}{2(-\frac{1}{2} + \sigma\upsilon\nu 2\chi)} &= \frac{\sigma\upsilon\nu 60^\circ - \sigma\upsilon\nu 2\chi}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 2\chi} = \frac{2\eta\mu(30 + \chi) \eta\mu(\chi - 30)}{2\sigma\upsilon\nu(30 + \chi) \sigma\upsilon\nu(30 - \chi)} \\ &= \varepsilon\varphi(30 + \chi) \varepsilon\varphi(30 - \chi) \end{aligned}$$

$$431) \text{ Νά άπλοποιηθῇ ἡ παράστασις } \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi - \sigma\upsilon\nu\eta}{\eta\mu(\varphi + \eta)} =$$

$$\frac{-2\eta\mu(-\frac{\varphi + \eta}{2}) \eta\mu(-\frac{\varphi - \eta}{2})}{2\eta\mu(-\frac{\varphi + \eta}{2}) \sigma\upsilon\nu(-\frac{\varphi + \eta}{2})} = \frac{\eta\mu \frac{\varphi - \eta}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\varphi + \eta}{2}}$$

$$432) \text{ Νά άπλοποιηθῇ ἡ παράστασις } \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi + \sigma\upsilon\nu\eta}{1 + \sigma\upsilon\nu(\varphi + \eta)} =$$

$$\frac{2\sigma\upsilon\nu(-\frac{\varphi + \eta}{2}) \sigma\upsilon\nu(\frac{\varphi - \eta}{2})}{2\sigma\upsilon\nu^2(-\frac{\varphi + \eta}{2})} = \frac{\sigma\upsilon\nu(-\frac{\varphi - \eta}{2})}{\sigma\upsilon\nu(-\frac{\varphi + \eta}{2})}$$

433) 'Αποδείξτε τόν τύπον. $\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}$

$$= \varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$$

$$= \frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} = \frac{2\eta\mu(\alpha + \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) + \sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}$$

$\alpha)$

$$\varepsilon\varphi 90^\circ + \varepsilon\varphi 810^\circ = \frac{2\eta\mu(90^\circ + 810^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(90^\circ + 810^\circ) + \sigma\upsilon\nu(9^\circ - 810^\circ)} = \frac{2\eta\mu 900^\circ}{\sigma\upsilon\nu 900^\circ + \sigma\upsilon\nu(-720^\circ)}$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{0 + \sigma\upsilon\nu 720^\circ} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 720^\circ} = \frac{2}{\eta\mu 180^\circ} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{8}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{8(\sqrt{5} + 1)}{5 - 1}$$

$$\frac{8(\sqrt{5} + 1)}{4} = 2(\sqrt{5} + 1).$$

$\beta)$

$$\varepsilon\varphi 270^\circ + \varepsilon\varphi 630^\circ = \frac{2\eta\mu(270^\circ + 630^\circ)}{\sigma\upsilon\nu(270^\circ + 630^\circ) + \sigma\upsilon\nu(270^\circ - 630^\circ)} =$$

$$\frac{2\eta\mu 900^\circ}{\sigma\upsilon\nu 900^\circ + \sigma\upsilon\nu 360^\circ} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu 360^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{5} + 1}{4}} = \frac{8}{\sqrt{5} + 1} =$$

$$= \frac{8(\sqrt{5} - 1)}{5 - 1} = 2(\sqrt{5} - 1)$$

434) Μετατρέψατε εις γινόμενον .-

$$\Sigma = \sigma\upsilon\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{4\chi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-2\chi}{2}\right) +$$

$$+ 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{6\chi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{-2\chi}{2}\right) = 2\sigma\upsilon\nu 2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi + 2\sigma\upsilon\nu 3\chi \sigma\upsilon\nu\chi$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\chi(\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 3\chi) = 2\sigma\upsilon\nu\chi \cdot 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\chi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\chi}{2}\right) =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\chi \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\chi}{2}\right) \sigma\upsilon\nu\frac{\chi}{2}.$$

435) Αί α καί β εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι. Δίδονται ἡμ $\alpha =$

$$= \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\beta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \quad \text{Νά εὐρεθῶσιν αἱ κυκλικάι}$$

συνάρτησεις $\alpha + \beta$ και $\alpha - \beta$. 'Εξ αὐτῶν νά ἐξαχθῇ ἡ τιμή τοῦ β .

$$\alpha) \quad \eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{6+2-2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{16-8+2\sqrt{6}\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{6+2+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{16}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{16}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\alpha) \quad \eta\mu(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2} + 3}{8} \sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu 45^\circ$$

$$\text{Άρα } \alpha + \beta = 45^\circ \text{ (I).}$$

$$\beta) \quad \eta\mu(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{18} - \sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{8} - \frac{\sqrt{18} + \sqrt{6}}{8} = \frac{2\sqrt{6} + \sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{8} =$$

$$= \frac{2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \eta\mu 30^\circ$$

$$\text{Άρα } \alpha - \beta = \beta \quad \eta \quad \alpha = 2\beta. \text{ Άντικαθιστώντες εἰς τήν (I) ἔχουμεν } 3\beta = 45^\circ, \quad \beta = 15^\circ$$

$$\gamma) \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta, \text{ ἀντικαθιστῶμεν}$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{8} - \\ &- \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8} = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sigma\upsilon\nu 45^\circ\end{aligned}$$

*Αρα $\alpha + \beta = 45^\circ$

$$\delta) \quad \sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta.$$

$$\begin{aligned}\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} \\ &= \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8} = \frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ\end{aligned}$$

$$\alpha - \beta = \beta \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varepsilon) \quad \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

$$\zeta) \quad \varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \frac{\eta\mu^2(\alpha - \beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} =$$

$$\frac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{6+2-2\sqrt{2}}{4} = \frac{8-4\sqrt{3}}{4} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\eta) \quad \sigma\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} =$$

$$\begin{aligned}\frac{\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta)}{\eta\mu(\alpha - \beta)} &= \frac{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} = \frac{6+2+2\sqrt{12}}{4} = \frac{8+4\sqrt{3}}{4} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

436) Δίδεται $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$. Νά εύρεθῇ $\sin 2\alpha$.

Γνωρίζομεν ὅτι $\sin 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha - 1$ ἐπομένως:

$$\sin 2\alpha = 2 \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{4} - 1 = \frac{2 + \sqrt{2} - 2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ἀλλὰ $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin 45^\circ$, ἄρα $\sin 2\alpha = \sin 45^\circ$

$$2\alpha = 45^\circ \quad \alpha = 22^\circ 30'.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{22 \cdot 30}{180}$

$$\eta \frac{\alpha}{\pi} = \frac{22,5}{180} = \frac{225}{1800} \quad \eta \quad \frac{\alpha}{\pi} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

$$\kappa \alpha \iota \quad \alpha = \frac{\pi}{8}.$$

437) Νά μετατραπῇ εἰς γινόμενον τό ἄθροισμα.-

$$\Sigma = \eta \mu \alpha + \eta \mu \beta + \eta \mu \gamma - \eta \mu (\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 2\eta \mu \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + 2\eta \mu \left(\frac{-\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) =$$

$$= 2\eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - 2\eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) =$$

$$= 2\eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \left[\sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) - \sin \left(\frac{\alpha + \beta + 2\gamma}{2} \right) \right] =$$

$$= 2\eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot 2\eta \mu \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} \right) \eta \mu \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right) = 4\eta \mu \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cdot$$

$$\eta \mu \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} \right) \eta \mu \left(\frac{\beta + \gamma}{2} \right).$$

$$438) \text{ Νά εκφρασθῇ ἡ } \gamma = \sqrt{\frac{5 + 3\eta\mu\chi + 4\sigma\upsilon\nu\chi}{2 - 2\sigma\upsilon\nu\chi}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 3 \frac{2\epsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\varphi \frac{2\chi}{2}} + 4 \frac{1 - \epsilon\varphi \frac{2\chi}{2}}{1 + \epsilon\varphi \frac{2\chi}{2}}}{2 - 2 \frac{1 - \epsilon\varphi \frac{2\chi}{2}}{1 + \epsilon\varphi \frac{2\chi}{2}}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5 + 5\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - 6\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} + 4 - 4\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{2 + 2\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - 2 + 2\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 6\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} + \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{4\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(3 + \epsilon\varphi \frac{\chi}{2})^2}{4\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}} = \frac{3 + 3\epsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{2\epsilon\varphi \frac{\chi}{2}}$$

439) Γνωρίζοντας ὅτι $\epsilon\varphi\chi = 2 - \sqrt{3}$, νά εὐρεθῶσιν $\sigma\upsilon\nu 2\chi$, $\eta\mu 2\chi$, $\epsilon\varphi 2\chi$. Νά γίνῃ ὁ προσδιορισμός ἀπάντων τῶν τόξων χ .

$$\epsilon\varphi\chi = 2 - \sqrt{3}, \quad \sigma\upsilon\nu 2\chi = ? , \quad \eta\mu 2\chi = ? , \quad \epsilon\varphi 2\chi = ?$$

$$\alpha) \quad \sigma\upsilon\nu 2\chi = \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \chi}{1 + \epsilon\varphi^2 \chi} = \frac{1 - (2 - \sqrt{3})^2}{1 + (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{1 - (4 + 3 - 4\sqrt{3})}{1 + 4 + 3 - 4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 - 7 + 4\sqrt{3}}{1 + 7 - 4\sqrt{3}} = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{8 - 4\sqrt{3}} = \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{(-3 + 2\sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})}{16 - 12}$$

$$= \frac{-12 + 8\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4 \cdot 3}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu 30^\circ$$

$$\beta) \eta_{\mu 2\chi} = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1+\varepsilon\varphi\chi} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1+(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1+4+3-4\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{8-4\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2(2-\sqrt{3})}{4(2-\sqrt{3})} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \eta_{\mu 300}$$

$$\gamma) \varepsilon\varphi 2\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{1-\varepsilon\varphi\chi} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(4+3-4\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{(4-2\sqrt{3})}{1-7+4\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-6+4\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{-3+2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(2-\sqrt{3})(3+2\sqrt{3})}{12-19} = \frac{6-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \varepsilon\varphi 300$$

440) Νά μετατραπῇ εἰς γινόμενον τό $A = \sin\chi - 2\sin 3\chi + \sin 5\chi$.

$$A = \sin\chi + \sin 5\chi - 2\sin 3\chi = 2\sin \frac{5\chi+\chi}{2} \sin \frac{5\chi-\chi}{2} -$$

$$- 2\sin 3\chi = 2\sin 3\chi \sin 2\chi - 2\sin 3\chi = 2\sin 3\chi (\sin 2\chi - 1) =$$

$$= 2\sin 3\chi (1 - 2\eta_{\mu}^2\chi - 1) = -4\sin 3\chi \eta_{\mu}^2\chi.$$

441) Νά παρασταθῇ ἡ $\sqrt{\frac{1+\eta_{\mu}\chi}{1-\eta_{\mu}\chi}}$

ἐν συνάρτησει πρὸς $\tau = \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}$.

$$\frac{1+\eta_{\mu}\chi}{1-\eta_{\mu}\chi} = \sqrt{\frac{1+\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{2\chi}{2}}}{1-\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{2\chi}{2}}}} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon\varphi^2\frac{\chi}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}{1+\varepsilon\varphi\frac{2\chi}{2}-2\varepsilon\varphi\frac{\chi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} + 1)^2}{(\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 1)^2}} = \frac{\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} + 1}{\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 1} \quad \text{ἐφ' ὅσον δὲ ἔχομεν}$$

$$\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \tau, \text{ τότε } \sqrt{\frac{1 + \eta\mu\chi}{1 - \eta\mu\chi}} = \frac{\tau + 1}{\tau - 1}$$

442) Νά υπολογισθῇ ἡ $\frac{3 + \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{1 + 3\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}$ ἐν συναρτήσει πρὸς $\tau = \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} 3 + \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} &= \\ 1 + 3 \frac{1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2}} &= \\ \frac{3 + 3\epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} + 3 - 3\epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}} &= \\ \frac{4 + 2\epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{4 - 2\epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - 2\epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 + \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}}{2 - \epsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} - \epsilon\varphi \frac{\alpha}{2}} &= \\ = \frac{2 + \tau^2 - \tau}{2 - \tau^2 - \tau} . \end{aligned}$$

443) Νά τεθῇ ὑπὸ μορφήν τετραγώνου ἡ $\frac{1 - \eta\mu\chi}{2(1 + \sigma\upsilon\nu\chi)}$

$$\begin{aligned}
 & 1 - \frac{2\epsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} = \frac{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - 2\epsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} \\
 & = \frac{2 + 2\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + 2 - 2\epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{2(1 + \epsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2})} = \frac{(\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 1)^2}{4} = \left(\frac{\epsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 1}{2} \right)^2
 \end{aligned}$$

444) Νά εὐρεθῶσιν ημ3α συναρτήσῃ τοῦ ημα, συν3α συναρτήσῃ τοῦ συνα, εφ3α συναρτήσῃ τῆς εφα.

α) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha \eta\mu\alpha = 2\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1 - 2\eta\mu^2\alpha) \eta\mu\alpha = 2\eta\mu\alpha (1 - \eta\mu^2\alpha) + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha.$

β) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha \eta\mu\alpha = (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1) \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) \sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha.$

γ) $\epsilon\varphi 3\alpha = \epsilon\varphi(2\alpha + \alpha) = \frac{\epsilon\varphi 2\alpha + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi 2\alpha \epsilon\varphi\alpha} =$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha} + \epsilon\varphi\alpha}{1 - \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha} \epsilon\varphi\alpha} = \frac{2\epsilon\varphi\alpha + \epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi^3\alpha}{1 - \epsilon\varphi^2\alpha - 2\epsilon\varphi^2\alpha} = \\
 & = \frac{3\epsilon\varphi\alpha - \epsilon\varphi^3\alpha}{1 - 3\epsilon\varphi^2\alpha}
 \end{aligned}$$

445) Νά 'επαληθευθοῦν .-

$$\alpha) \eta\mu 4\chi = 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 8\eta\mu^3\chi\sigma\upsilon\nu\chi.$$

$$\eta\mu 4\chi = 2\eta\mu 2\zeta\sigma\upsilon\nu 2\chi = 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi (1 - 2\eta\mu^2\chi) = 4\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - 8\eta\mu^3\chi\sigma\upsilon\nu\chi.$$

$$\beta) \sigma\upsilon\nu 4\chi = 8\sigma\upsilon\nu^4\chi - 8\sigma\upsilon\nu^2\chi + 1.$$

$$\sigma\upsilon\nu 4\chi = 2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi - 1 = 2(2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1)^2 - 1 = 8\sigma\upsilon\nu^4\chi - 8\sigma\upsilon\nu^2\chi + 1.$$

446) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι .-

$$(1 - \chi^2)\eta\mu 2\alpha - 2\chi\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \frac{2(\epsilon\varphi\alpha - \chi)(1 + \chi\epsilon\varphi\alpha)}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$$

$$(1 - \chi^2)\eta\mu 2\alpha - 2\chi\sigma\upsilon\nu 2\alpha = (1 - \chi^2) \frac{2\epsilon\varphi\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha} - \frac{2\chi(1 - \epsilon\varphi^2\alpha)}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$$

$$= \frac{2\epsilon\varphi\alpha - 2\chi^2\epsilon\varphi\alpha - 2\chi + 2\chi\epsilon\varphi^2\alpha}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha} = \frac{2[\epsilon\varphi\alpha - \chi + \chi\epsilon\varphi\alpha(\epsilon\varphi\alpha - \chi)]}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$$

$$= \frac{2(\epsilon\varphi\alpha - \chi)(1 + \chi\epsilon\varphi\alpha)}{1 + \epsilon\varphi^2\alpha}$$

447) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu 2\chi - \eta\mu\chi = 0$.

$$2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi - \eta\mu\chi = 0, \eta\mu\chi(2\sigma\upsilon\nu\chi - 1) = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀναλύεται εἰς τὰς .-

$$(1) \eta\mu\chi = 0, \eta\mu\chi = \eta\mu 0, \chi = K\pi.$$

$$(2) 2\sigma\upsilon\nu\chi - 1 = 0, \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}, \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}.$$

Αἱ λύσεις δέ δίδονται διὰ τῶν σχέσεων .- $\chi = \frac{\pi}{3} + 2K\pi, \chi = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi.$

448) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις .-

$$\eta\mu 3\chi - \eta\mu\chi = \eta\mu 2\chi.$$

$$\eta\mu 3\chi - \eta\mu 2\chi - \eta\mu\chi = 0, \quad 2\eta\mu\frac{3\chi-\chi}{2} \text{ συν } \frac{3}{2}\frac{\chi+\chi}{2} - \eta\mu 2\chi = 0.$$

$$2\eta\mu\chi\text{συν}2\chi - 2\eta\mu\chi\text{συν}\chi = 0, \quad 2\eta\mu\chi(\text{συν}2\chi - \text{συν}\chi) = 0.$$

Πρέπει ἢ $\eta\mu\chi = 0$, ὁπότε $\chi = \kappa\pi$, ἢ $\text{συν}2\chi - \text{συν}\chi = 0$,

$$2\text{συν}^2\chi - 1 - \text{συν}\chi = 0.$$

$$2\text{συν}^2\chi - \text{συν}\chi - 1 = 0, \quad \text{συν}\chi = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4},$$

$$1) \text{συν}\chi = 1, \quad 2) \text{συν}\chi = -\frac{1}{2}.$$

Διὰ $\text{συν}\chi = 1$. ἔχομεν $\text{συν}\chi = \text{συν}0$, $\chi = 2\kappa\pi$.

διὰ $\text{συν}\chi = -\frac{1}{2}$, ἔχομεν $\text{συν}\chi = \text{συν}\frac{2\pi}{3}$, ὁπότε $\chi = \frac{2\pi}{3} +$

$$+ 2\kappa\pi, \quad \chi = -\frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi.$$

449) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.-

$$\text{συν}2\chi - \text{συν}6\chi = \eta\mu 3\chi + \eta\mu 5\chi.$$

$$(\text{συν}2\chi - \text{συν}6\chi) - (\eta\mu 3\chi + \eta\mu 5\chi) = 0.$$

$$2\eta\mu\frac{6\chi+2\chi}{2} - \eta\mu\frac{6\chi-2\chi}{2} - \eta\mu\frac{3\chi+5\chi}{2} \text{ συν}\frac{5\chi-3\chi}{2} = 0.$$

$$2\eta\mu 4\chi\eta\mu 2\chi - 2\eta\mu 4\chi\text{συν}\chi = 0, \quad \text{ἢ } 2\eta\mu 4\chi(\eta\mu 2\chi - \text{συν}\chi) = 0,$$

$$2\eta\mu 4\chi(2\eta\mu\chi\text{συν}\chi - \text{συν}\chi) = 0, \quad 2\eta\mu 4\chi\text{συν}\chi(2\eta\mu\chi - 1) = 0.$$

Ὁπότε πρέπει ἢ $\eta\mu 4\chi = 0$, $\eta\mu 4\chi = \eta\mu 0$, $4\chi = \kappa\pi$, $\chi = \frac{\kappa\pi}{4}$

ἢ $\text{συν}\chi = 0$, $\text{συν}\chi = \text{συν}\frac{\pi}{2}$ καί $\chi = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$, $\chi = -\frac{\pi}{2} +$

$+ 2\kappa\pi$. ἢ $2\eta\mu\chi - 1 = 0$, $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}$, $\eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{6}$ καί

$$\chi = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi, \quad \chi = \frac{5\pi}{6} + 2\kappa\pi.$$

450) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. - $\epsilon\varphi\chi + \epsilon\varphi 2\chi = \epsilon\varphi 3\chi$.

Γνωρίζομεν ὅτι $\epsilon\varphi 3\chi = \epsilon\varphi(2\chi + \chi) = \frac{\epsilon\varphi 2\chi + \epsilon\varphi\chi}{1 - \epsilon\varphi 2\chi \epsilon\varphi\chi}$.

Ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἔχομεν. - $\epsilon\varphi 3\chi(1 - \epsilon\varphi 2\chi \epsilon\varphi\chi) = \epsilon\varphi 3\chi$ ἢ $\epsilon\varphi 3\chi(1 - \epsilon\varphi 2\chi \epsilon\varphi\chi) - \epsilon\varphi 3\chi = 0$, $\epsilon\varphi 3\chi(1 - \epsilon\varphi 2\chi \epsilon\varphi\chi - 1) = 0$, $-\epsilon\varphi\chi \epsilon\varphi 2\chi \epsilon\varphi 3\chi = 0$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν, ἢ $\epsilon\varphi\chi = 0$, ὁπότε $\chi = K\pi$, ἢ $\epsilon\varphi 2\chi = 0$, $\epsilon\varphi 2\chi = \epsilon\varphi 0$, $2\chi = K\pi$, $\chi = \frac{K\pi}{2}$, ἢ $\epsilon\varphi 3\chi = 0$, $3\chi = K\pi$, $\chi = \frac{K\pi}{3}$.

451) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. $\sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu 5\chi = \eta\mu 6\chi + \eta\mu 2\chi$

$\sigma\upsilon\nu 3\chi - \sigma\upsilon\nu 5\chi - (\eta\mu 6\chi + \eta\mu 2\chi) = 0$, $2\eta\mu \frac{3\chi + 5\chi}{2} \eta\mu \frac{5\chi - 3\chi}{2}$

$- 2\eta\mu \frac{6\chi + 2\chi}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{6\chi - 2\chi}{2} = 0$,

$2\eta\mu 4\chi \eta\mu \chi - 2\eta\mu 4\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$, $2\eta\mu 4\chi(\eta\mu \chi - \sigma\upsilon\nu 2\chi) = 0$,

$2\eta\mu 4\chi [\eta\mu \chi - (1 - 2\eta\mu^2 \chi)] = 2\eta\mu 4\chi (\eta\mu \chi + 2\eta\mu^2 \chi - 1) = 0$.

Ὁπότε ἢ $\eta\mu 4\chi = 0$, $\eta\mu 4\chi = \eta\mu 0$, $4\chi = K\pi$, $\chi = \frac{K\pi}{4}$

ἢ $2\eta\mu^2 \chi + \eta\mu \chi - 1 = 0$, ὁπότε $\eta\mu \chi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$

(1) $\eta\mu \chi = -1$, $\eta\mu \chi = \eta\mu \frac{3\pi}{2}$, $\chi = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$,

(2) $\eta\mu \chi = \frac{1}{2}$, $\eta\mu \chi = \eta\mu \frac{\pi}{6}$, $\chi = \frac{\pi}{6} + 2K\pi$, ἢ $\chi = \pi -$

$+ 2K\pi$, $= \frac{5\pi}{6} + 2K\pi$.

452) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. - $\sigma\upsilon\nu 2\chi = 5 - 6 \sigma\upsilon\nu^2 \chi$.

$2\sigma\upsilon\nu^2 \chi - 1 = 5 - 6 \sigma\upsilon\nu^2 \chi$, $8\sigma\upsilon\nu^2 \chi = 6$, $4\sigma\upsilon\nu^2 \chi - 3 = 0$

$(2\sigma\upsilon\nu \chi - \sqrt{3})(2\sigma\upsilon\nu \chi + \sqrt{3}) = 0$.

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀναλύεται εἰς τὰς δύο ἐπομένους.-

$$(1) 2\sigma\upsilon\nu\chi - \sqrt{3} = 0, \text{ ὁπότε } \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6},$$

$$\chi = \frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi, \chi = -\frac{\pi}{6} + 2\kappa\pi.$$

$$(2) 2\sigma\upsilon\nu\chi + \sqrt{3} = 0, \text{ ὁπότε } \sigma\upsilon\nu\chi = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6},$$

$$\chi = \frac{5\pi}{6} + 2\kappa\pi, \chi = -\frac{5\pi}{6} + 2\kappa\pi.$$

453) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu 2\chi - \epsilon\phi\chi = 0$.

$$\frac{2\epsilon\phi\chi}{1+\epsilon\phi^2\chi} - \epsilon\phi\chi = 0 \quad \text{τότε } 2\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi\chi - \epsilon\phi^3\chi = 0 \quad \eta$$

$$\epsilon\phi\chi - \epsilon\phi^3\chi = 0, \quad \epsilon\phi\chi(1-\epsilon\phi^2\chi) = 0 \quad \eta$$

$$\epsilon\phi\chi(\epsilon\phi\chi + 1)(\epsilon\phi\chi - 1) = 0$$

η α) $\epsilon\phi\chi = 0$, η β) $\epsilon\phi\chi + 1 = 0$, η γ) $\epsilon\phi\chi - 1 = 0$.

$$\chi = \kappa\pi$$

$$\epsilon\phi\chi = -1$$

$$\epsilon\phi\chi = 1$$

$$\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi 135 = \epsilon\phi - \frac{3\pi}{4} \quad \epsilon\phi\chi = \epsilon\phi - \frac{\pi}{4}$$

$$\chi = -\frac{3\pi}{4} + \kappa\pi. \quad \chi = -\frac{\pi}{4} + \kappa\pi.$$

454) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\chi + \eta\mu 3\chi + \eta\mu 5\chi = 0$.

$$2\eta\mu 3\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi + \eta\mu 3\chi = 0 \quad 2\eta\mu 3\chi(\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2}) = 0.$$

η α) $\eta\mu 3\chi = 0$ η β) $\sigma\upsilon\nu 2\chi + \frac{1}{2} = 0$

$$3\chi = \kappa\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\chi = \frac{\kappa\pi}{3}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{3}) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

1) $2\chi = \frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi$, η $\chi = \frac{\pi}{3} + \kappa\pi$.

2) $2\chi = -\frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi$, η $\chi = -\frac{\pi}{3} + \kappa\pi$.

$$455) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad \eta\mu 10\chi\eta\mu 6\chi + \sigma\upsilon\nu 10\chi \cdot \sigma\upsilon\nu 6\chi = 1$$

$$\sigma\upsilon\nu(10\chi - 6\chi) = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$$

$$(1) \quad 4\chi = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi \quad \eta \quad \chi = -\frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{2}$$

$$(2) \quad 4\chi = -\frac{\pi}{3} + 2K\pi \quad \eta \quad \chi = -\frac{\pi}{12} + \frac{K\pi}{2}$$

$$456) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.} - 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu 5\chi$$

$$\eta\mu 2\chi = \sigma\upsilon\nu 5\chi \quad \eta$$

$$\eta\mu 2\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2} - 5\chi\right).$$

$$(1) \quad 2\chi = \frac{\pi}{2} - 5\chi + 2K\pi, \quad \eta \quad 7\chi = \frac{\pi}{2} + 2K\pi,$$

$$\eta \quad \chi = \frac{\pi}{14} + \frac{2K\pi}{7}.$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} - 5\chi\right) + 2K\pi, \quad \eta \quad 3\chi = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$$

$$\eta \quad \chi = -\frac{\pi}{6} - \frac{2K\pi}{3}$$

$$457) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.} - I + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi = 0$$

$$\eta \quad \sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi = 0, \quad \eta \quad \sigma\upsilon\nu 2\chi (I + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi) = 0.$$

$$\eta \quad \alpha) \quad \sigma\upsilon\nu 2\chi = 0$$

$$\eta \quad \beta) \quad 2\sigma\upsilon\nu 2\chi = -I$$

$$2\chi = -\frac{\pi}{2} + K\pi$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\chi = -\frac{\pi}{4} + \frac{K\pi}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu \frac{2}{3}\pi$$

$$(1) \quad 2\chi = \frac{2\pi}{3} + 2K\pi, \quad \eta \quad \chi = \frac{\pi}{3} + K\pi$$

$$(2) \quad 2\chi = -\frac{2\pi}{3} + 2K\pi, \quad \eta \quad \chi = -\frac{\pi}{3} + K\pi.$$

$$458) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.} - \sin 5\chi - \sin \chi = \eta \mu 3\chi \quad \eta \\ -2\eta \mu 3\chi \eta \mu 2\chi = \eta \mu 3\chi \quad \eta \quad -2\eta \mu 3\chi \eta \mu 2\chi - \eta \mu 3\chi = 0 \quad \eta \\ -\eta \mu 3\chi (2\eta \mu 2\chi + 1) = 0.$$

Ἐπομένως.-

$$\eta \alpha) \quad \eta \mu 3\chi = 0. \quad \beta) \quad 2\eta \mu 2\chi + 1 = 0$$

$$\kappa \alpha \acute{\iota} \quad 3\chi = \kappa \pi. \quad 2\eta \mu 2\chi = -1$$

$$\chi = \frac{\kappa \pi}{3} \quad \eta \mu 2\chi = -\frac{1}{2}$$

$$\eta \mu 2\chi = \eta \mu \left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{Ἄρα (I)} \quad 2\chi = -\frac{\pi}{6} + 2\kappa \pi$$

$$(2) \quad 2\chi = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2\kappa \pi,$$

$$\kappa \alpha \acute{\iota} \quad (I) \quad \chi = -\frac{\pi}{12} + \kappa \pi$$

$$(2) \quad \chi = \frac{7\pi}{12} + \kappa \pi$$

$$459) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.} -$$

$$(\sqrt{3} + 1) \eta \mu^2 \chi - 2\sqrt{3} \eta \mu \chi \sin \chi + (\sqrt{3} - 1) \sin^2 \chi = 0$$

$$\eta \sqrt{3} \eta \mu^2 \chi + \eta \mu^2 \chi - 2\sqrt{3} \eta \mu \chi \sin \chi + \sqrt{3} \sin^2 \chi - \sin^2 \chi = 0$$

$$\eta \sqrt{3} (\eta \mu^2 \chi + \sin^2 \chi) + \eta \mu^2 \chi - 2\sqrt{3} \eta \mu \chi \sin \chi - \sin^2 \chi = 0$$

$$\eta \sqrt{3} + \frac{\varepsilon \varphi^2 \chi}{1 + \varepsilon \varphi^2 \chi} - 2\sqrt{3} \frac{\varepsilon \varphi \chi}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 \chi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon \varphi^2 \chi}} - \frac{1}{1 + \varepsilon \varphi^2 \chi} = 0.$$

$$\acute{\epsilon} \acute{\alpha} \nu \quad 1 + \varepsilon \varphi^2 \chi \neq 0.$$

$$\tau \acute{o} \tau \epsilon \quad \sqrt{3} + \sqrt{3} \varepsilon \varphi^2 \chi + \varepsilon \varphi^2 \chi - 2\sqrt{3} \varepsilon \varphi \chi - 1 = 0$$

$$(\sqrt{3} + 1) \varepsilon \varphi^2 \chi - 2\sqrt{3} \varepsilon \varphi \chi + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\kappa \alpha \acute{\iota} \quad \varepsilon \varphi \chi = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - (3 - 1)}}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - 3 + 1}}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$\alpha) \varepsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi 15^\circ \quad \chi = 150 + \kappa \cdot 180$$

$$\beta) \varepsilon\varphi\chi = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = 1, \quad \varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi 45^\circ \quad \chi = 450 + \kappa \cdot 180$$

460) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.-

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 6\chi = \eta\mu 3\chi - \eta\mu 5\chi \quad \eta$$

$$2\sigma\upsilon\nu 4\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi = 2\sigma\upsilon\nu 4\chi \eta\mu(-\chi) \quad \eta$$

$$\sigma\upsilon\nu 4\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi = -6\sigma\upsilon\nu 4\chi \eta\mu\chi$$

$$\sigma\upsilon\nu 4\chi \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu 4\chi \eta\mu\chi = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu 4\chi (\sigma\upsilon\nu 2\chi + \eta\mu\chi) = 0 \quad \text{καί τότε}$$

$$\eta \alpha) \sigma\upsilon\nu 4\chi = 0 \quad \eta \beta) \sigma\upsilon\nu 2\chi + \eta\mu\chi = 0$$

$$^{\text{Αρα}} 4\chi = \frac{\pi}{2} + \kappa\pi,$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = -\eta\mu\chi$$

$$\chi = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{2} + \chi\right)$$

$$^{\text{Αρα}} (1) 2\chi = \frac{\pi}{2} + \chi + 2\kappa\pi \quad \eta \chi = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$$

$$(2) 2\chi = -\left(\frac{\pi}{2} + \chi\right) + 2\kappa\pi \quad \eta 3\chi = -\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi$$

$$\eta \chi = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\kappa\pi}{3}$$

461) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.- $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = 1$, $\sigma\upsilon\nu\chi = 1 - \eta\mu\chi$

$$\sigma\upsilon\nu^2\chi = 1 - 2\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi, \quad 1 - \eta\mu^2\chi = 1 - 2\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi$$

$$-2\eta\mu^2\chi = -2\eta\mu\chi, \quad \eta\mu^2\chi = \eta\mu\chi, \quad \eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi = 0.$$

$$\eta\mu\chi(\eta\mu\chi - 1) = 0 \quad \text{Έκ τῆς ὁποίας ἡ}$$

$$\alpha) \quad \eta\mu\chi = 0 \quad \beta) \quad \eta\mu\chi - 1 = 0, \quad \eta\mu\chi = 1$$

$$\text{καί} \quad \chi = \kappa\pi \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2}$$

$$\chi = -\frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi.$$

$$462) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.} - 3\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi = 5.$$

$$3\sigma\upsilon\nu\chi = 5 - 4\eta\mu\chi, \quad 9\sigma\upsilon\nu^2\chi = 25 - 40\eta\mu\chi + 16\eta\mu^2\chi,$$

$$9 - 9\eta\mu^2\chi = 25 - 40\eta\mu\chi + 16\eta\mu^2\chi$$

$$-25\eta\mu^2\chi + 40\eta\mu\chi - 16 = 0$$

$$25\eta\mu^2\chi - 40\eta\mu\chi + 16 = 0$$

$$\eta\mu\chi = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 400}}{25}$$

$$\eta\mu\chi = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} = 0,8 > 0,70711 \rightarrow \chi > 45^\circ$$

$$\begin{aligned} d = 0,00136 & \left(\begin{array}{l} 0,79864 = \eta\mu(50^\circ 60') \\ 0,8 = ; \\ 0,80038 = \eta\mu(53^\circ 10') \end{array} \right) 10' \\ D = 0,00174 & \\ & \begin{array}{ll} 0,00174 & 10' \\ 0,00136 & \chi \end{array} \end{aligned}$$

$$\chi = 10', \quad \frac{136}{174} = \frac{1360}{174} = 7' 49''$$

$$\text{Άρα } \eta\mu\chi = \eta\mu(53^\circ 7' 49'')$$

$$\text{Επομένως (1) } \chi = (53^\circ 7' 49'') + \kappa 360^\circ$$

$$\text{" (2) } \chi = (126^\circ 52' 11'') + \kappa 360^\circ$$

$$463) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad 3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = \frac{7}{4}$$

$$12\sigma\upsilon\nu\chi + 4\eta\mu\chi = 7.$$

$$12 \cdot \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} + 4 \cdot \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} = 7$$

$$12 - 12 \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + 8\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 7 + 7\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}$$

$$12 - 12\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + 8\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 7 - 7\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} = 0$$

$$-19\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + 8\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} + 5 = 0$$

$$19\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - 8\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} - 5 = 0$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 95}}{19}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \frac{4 - \sqrt{111}}{19} = \frac{4 - 10,5356}{19}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \frac{14,5356}{19} = 0,76503 \quad 1 \text{ ---- } \chi \quad 450$$

$$0,76272 \quad \varepsilon\varphi(370 \ 20')$$

$$0,00231 \quad 0,76503 \quad \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} \quad 10'$$

$$D \quad 0,00461 \quad 0,76733 \quad \varepsilon\varphi(370 \ 30')$$

$$0,00461 \quad 10'$$

$$0,00231 \quad \chi$$

$$\chi \quad 10' \quad \frac{231}{431} = \frac{2310}{461} \quad 5'$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \varepsilon\varphi(370 \ 25')$$

$$\text{καί } \frac{\chi}{2} = (370 \ 25') \cdot 1800 \text{ ή } \chi (740 \ 50') \cdot 3600$$

Ὁμοίως εὐρίσκεται καί ἡ ἄλλη οἰκογένεια.

454) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.-
 $3\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi - \sqrt{2} = 0$

$$3 \cdot \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} + \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} - \sqrt{2} = 0$$

$$3 - 3\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} - \sqrt{2} - \sqrt{2} \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} = 0$$

$$-\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} (3 + \sqrt{2}) + 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} + (3 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} (3 + \sqrt{2}) - 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} - (3 - \sqrt{2}) = 0$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+9-2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{1 \pm 2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} &= \frac{1 - 2\sqrt{2}}{3 + \sqrt{2}} = \frac{(1-2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{3-6\sqrt{2}-\sqrt{2}+4}{7} = \\ &= \frac{7-7\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

$$(1) \quad \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} &= \frac{1+2\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{(1+2\sqrt{2})(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{3+6\sqrt{2}-\sqrt{2}-4}{7} = \\ &= \frac{5\sqrt{2}-1}{7} \end{aligned}$$

Ἀφοῦ εὑρωμεν τὰς τετραγωνικάς ρίζας ἐκ τῶν πινάκων
 ὑπολογίζωμεν κατὰ τόν γνωστόν τρόπον τὰς γωνίας καί
 κατόπιν τὰς λύσεις-τόξα.

465) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. - $4 \sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = 2$

$$4\sigma\upsilon\nu\chi = 2 - \eta\mu\chi$$

$$16\sigma\upsilon\nu^2\chi = 4 - 4\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi$$

$$16(1 - \eta\mu^2\chi) = 4 - 4\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi$$

$$16 - 16\eta\mu^2\chi - 4 + 4\eta\mu\chi - \eta\mu^2\chi = 0$$

$$-17\eta\mu^2\chi + 4\eta\mu\chi + 12 = 0$$

$$17\eta\mu^2\chi - 4\eta\mu\chi - 12 = 0$$

$$\eta\mu\chi = \frac{12 \pm \sqrt{4 + 204}}{17}$$

$$\eta\mu\chi = \frac{2 \pm \sqrt{-208}}{17}$$

Ἀφοῦ εὕρωμεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν, εὐρίσκομεν ἐκ τῶν πινάκων κατὰ τόν γνωστόν πλέον τρόπον τήν γωνίαν χ καί κατόπιν τά τόξα (λύσεις) τῆς ἐξισώσεως.

466) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. - $\sigma\upsilon\nu\chi + 3\eta\mu\chi = -1$

ἢ $3\eta\mu\chi + 1 = -\sigma\upsilon\nu\chi$ ὑψώνωμεν εἰς τό τετράγωνον

$$9\eta\mu^2\chi + 6\eta\mu\chi + 1 = \sigma\upsilon\nu^2\chi$$

ἢ $9\eta\mu^2\chi + 6\eta\mu\chi + 1 = 1 - \eta\mu^2\chi$

$$10\eta\mu^2\chi + 6\eta\mu\chi = 0 \quad \text{ἢ}$$

$$\eta\mu\chi(10\eta\mu\chi + 6) = 0 \quad \text{Ἐκ τῆς ὁποίας}$$

ἢ α) $\eta\mu\chi = 0$

$$\chi = K\pi$$

ἢ β) $10\eta\mu\chi + 6 = 0$

$$10\eta\mu\chi = -6$$

$$\eta\mu\chi = -\frac{6}{10} = -0,6,$$

$$\eta\mu(-\chi) = 0,6$$

$$\begin{array}{rcl}
 d = 0,00051 & \left(\begin{array}{l} 0,59949 = \eta\mu(360 \ 50') \\ 0,60000 = \eta\mu(-\chi) \\ 0,60182 = \eta\mu \ 370 \end{array} \right) & 10' \\
 D = 0,00233 & & \\
 & 0,00233 & 10' \\
 & 0,00051 & \chi
 \end{array}$$

$$\chi = 10 \cdot \frac{0,00051}{0,00233} = 2' \ 11''$$

$$\text{Άρα } \eta\mu(-\chi) = \eta\mu(360 \ 52' \ 11'')$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu(-360 \ 52' \ 11'')$$

$$\eta\chi = -(360 \ 52' \ 11'') + 3600 \cdot \kappa \quad (1)$$

$$\eta = 1800 - (-360 \ 52' \ 11'') + 3600 \cdot \kappa = (2160 \ 52' \ 11'') + 3600 \cdot \kappa \quad (2)$$

----- Επομένως αἱ λύσεις εἶναι.-----

$$(1) \chi = -(250 \ 22' \ 38'') + \kappa 3600 \quad \eta\chi = -(250 \ 22' \ 38'') + \kappa 3600.$$

$$(2) \chi = -(1540 \ 37' \ 22'') + \kappa 3600 \quad \eta\chi = -(1540 \ 37' \ 22'') + 3600.$$

467) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις .- $\sqrt{3} \sin\chi + \eta\mu\chi = 1$.

$$\eta\sqrt{3} \sin\chi = 1 - \eta\mu\chi \quad \eta$$

$$3\sin^2\chi = 1 - 2\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi \quad \eta$$

$$3(1 - \eta\mu^2\chi) = 1 - 2\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi$$

$$3 - 3\eta\mu^2\chi = 1 - 2\eta\mu\chi + \eta\mu^2\chi, \quad 3 - 3\eta\mu^2\chi - 1 + 2\eta\mu\chi - \eta\mu^2\chi = 0$$

$$-4\eta\mu^2\chi + 2\eta\mu\chi + 2 = 0$$

$$4\eta\mu^2\chi - 2\eta\mu\chi - 2 = 0$$

$$2\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi - 1 = 0$$

$$\eta\mu\chi = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}$$

$$\alpha) \eta\mu\chi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \beta) \eta\mu\chi = 1$$

$$\eta\mu\chi = -\eta\mu(300^\circ)$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu 300^\circ$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu(-300^\circ)$$

$$\chi = 900^\circ + K \cdot 360^\circ$$

Επομένως. - (1) $\chi = -300^\circ + K \cdot 360^\circ$

(2) $\chi = 210^\circ + K \cdot 360^\circ$

468) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. - $2\eta\mu\chi - 2\sigma\upsilon\nu\chi = 1 + \sqrt{3}$.

$$\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu\chi - \varepsilon\varphi 45^\circ \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2},$$

$$\eta\mu\chi - \frac{\eta\mu 450^\circ}{\sigma\upsilon\nu 450^\circ} \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, \quad \eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu 450^\circ - \eta\mu 450^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\eta\mu(\chi - 450^\circ) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = \eta\mu 750^\circ$$

Άρα, ἡ $\chi - 450^\circ = 750^\circ + 360^\circ K$, $\chi = 1200^\circ + 360^\circ K$.

καί ἡ $\chi - 450^\circ = 180^\circ - 750^\circ + 360^\circ \cdot K = 105^\circ + 360^\circ K$.

469) Νά λυθῇ ἡ $\mu\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi = 2\mu$.

Ἀντικαθιστῶμεν συναρτήσας τῆς $\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}$, καί ἔχομεν.

$$\mu \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} + \frac{2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}}{1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2}} = 2\mu$$

$$\mu \left(1 - \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} \right) + 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 2\mu \left(1 + \varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} \right)$$

$$2\mu + 2\mu\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} + \mu\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - \mu - 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = 0$$

$$3\mu\varepsilon\varphi^2 \frac{\chi}{2} - 2\varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} + \mu = 0. \quad \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 3\mu^2}}{3\mu}$$

Διὰ νά εἶναι δεκταί αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως θά πρέπει νά εἶναι πραγματικά. Ἐπομένως πρέπει $\Delta = 1 - 3\mu^2 > 0$
 ἢ $3\mu^2 - 1 < 0$ $(\sqrt{3}\mu + 1)(\sqrt{3}\mu - 1) < 0$

$$\alpha \rho \alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} < \mu < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

470) Νά εὐρεθῇ ημ3χ συναρτήσει τοῦ ημχ. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις ημ3χ=ημχ, ημ3χ=-ημχ, ημ3χ= $\frac{1}{2}$ ημχ. Νά μελετηθῇ ἡ ἐξίσωσις.- ημ3χ=μ . ημχ.

$$\begin{aligned} 1ον \quad \eta\mu 3\chi &= \eta\mu(2\chi+\chi) = \eta\mu 2\chi \sigma\upsilon\nu\chi + \sigma\upsilon\nu 2\chi \eta\mu\chi = \\ &= 2\eta\mu\chi \sigma\upsilon\nu^2\chi + (1-2\eta\mu^2\chi)\eta\mu\chi = 2\eta\mu\chi(1-\eta\mu^2\chi) + \eta\mu\chi - 2\eta\mu^3\chi = \\ &= 2\eta\mu\chi - 2\eta\mu^3\chi + \eta\mu\chi - 2\eta\mu^3\chi = 3\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2ον \quad \eta\mu 3\chi &= \eta\mu\chi, \quad \eta \quad 3\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi = \eta\mu\chi \quad \eta \\ 2\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi &= 0, \quad 2\eta\mu\chi(2\eta\mu^2\chi - 1) = 0. \end{aligned}$$

Ἄρα πρέπει ἡ ημχ=0, ὁπότε χ=κπ

$$\begin{aligned} \eta \quad 2\eta\mu^2\chi - 1 &= 0, \quad (\sqrt{2}\eta\mu\chi - 1)(\sqrt{2}\eta\mu\chi + 1) = 0, \quad \text{ὁπότε } \eta \\ 1) \quad \sqrt{2}\eta\mu\chi - 1 &= 0, \quad \eta\mu\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{4}, \quad \chi = \frac{\pi}{4} + 2κπ, \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{3\pi}{4} + 2κπ,$$

$$\eta \quad 2) \quad \sqrt{2}\eta\mu\chi + 1 = 0, \quad \eta\mu\chi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta\mu\chi = \eta\mu(-\frac{\pi}{4}),$$

$$\chi = -\frac{\pi}{4} + 2κπ, \quad \chi = \frac{5\pi}{4} + 2κπ.$$

$$\eta\mu 3\chi = -\eta\mu\chi \quad \eta \quad 3\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi + \eta\mu\chi = 0, \quad 4\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi = 0.$$

$$4\eta\mu\chi(\eta\mu^2\chi - 1) = 0. \quad \text{Ἄρα θὰ ἔχωμεν ἡ ημχ=0, χ=κπ,}$$

$$\eta \quad \eta\mu^2\chi - 1 = 0, \quad (\eta\mu\chi - 1)(\eta\mu\chi + 1) = 0. \quad \text{Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχομεν.-}$$

$$1) \quad \eta\mu\chi - 1 = 0, \quad \eta\mu\chi = 1, \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{\pi}{2}, \quad \chi = \frac{\pi}{2} + 2κπ.$$

$$2) \quad \eta\mu\chi + 1 = 0, \quad \eta\mu\chi = -1, \quad \eta\mu\chi = \eta\mu\frac{3\pi}{2}, \quad \chi = \frac{3\pi}{2} + 2κπ.$$

$$\eta\mu^3\chi = -\frac{1}{2}\eta\mu\chi \quad \eta$$

$$3\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi - \frac{1}{2}\eta\mu\chi = 0 \quad \eta \quad -\frac{5}{2}\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi = 0.$$

$$\eta \quad \eta\mu\chi(4\eta\mu^2\chi - \frac{5}{2}) = 0. \quad \text{'Οπότε θά ἔχωμεν } \eta \quad \eta\mu\chi = 0,$$

$$\chi = \kappa\pi \quad \eta \quad 4\eta\mu^2\chi - \frac{5}{2} = 0, \quad \eta\mu^2\chi = -\frac{5}{8} \quad \eta\mu\chi = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \pm \frac{\sqrt{5}/\sqrt{2}}{4} = \pm \frac{\sqrt{10}}{4}. \quad \text{Θά εὕρωμεν τήν ὀξεῖαν γωνίαν } \chi$$

$$\text{ὥστε } \eta\mu\chi = \frac{\sqrt{10}}{4} = 0,79056.$$

$$\begin{array}{l} d = 0,00077 \\ D = 0,00179 \end{array} \quad \left(\begin{array}{l} 0,78979 = \eta\mu(52^\circ 10') \\ 0,79056 = \eta\mu\chi \\ 0,79158 = \eta\mu(52^\circ 20') \end{array} \right) 10'$$

$$0,00179 \quad 10'$$

$$0,00077 \quad \chi$$

$$\chi = 10 \quad \frac{0,00077}{0,00179} = \frac{770}{179} = 4'18''$$

$$\text{"Αρα, ἡ ὀξεῖα γωνία } \chi = (52^\circ 10') + (4'18'') = 52^\circ 14'1''$$

"Αρα γενικῶς αἱ λύσεις τῆς δοθείσης ἐξιśώσεως δίδονται ὑπό τῶν τύπων. - $\chi = (52^\circ 14'18'') + 360^\circ \kappa$,

$$\chi = 180^\circ - (52^\circ 14'18'') + 360^\circ \kappa.$$

$$\text{Εἰς τήνπερίπτωσιν } \eta\mu\chi = -\frac{\sqrt{10}}{4}, \quad \text{θά ἔχωμεν. -}$$

$$\eta\mu\chi = \eta\mu(-52^\circ 14'18'') \quad \text{ἄρα } \eta \quad \chi = -(52^\circ 14'18'') + 360^\circ \kappa$$

$$\eta \quad \chi = 180^\circ + (52^\circ 14'18'') + 360^\circ \kappa.$$

$$3 \text{ ον.}) \quad \eta\mu^3\chi = \mu\eta\mu\chi, \quad \eta \quad 3\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi - \mu\eta\mu\chi = 0.$$

$$(3-\mu)\eta\mu\chi - 4\eta\mu^3\chi = 0 \quad \eta \quad \eta\mu\chi [4\eta\mu^2\chi - (3-\mu)] = 0$$

$$\text{"Αρα } \eta \quad \eta\mu\chi = 0, \quad \chi = \kappa\pi, \quad \eta$$

$$4\eta\mu^2\chi - (3-\mu) = 0, \quad \eta\mu^2\chi = \frac{3-\mu}{4}, \quad \eta\mu\chi = \pm \frac{\sqrt{3-\mu}}{2}$$

Δεχόμεθα τὰς λύσεις τῆς ἐξιśώσεως μόνον ὅταν .-

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3-\mu}}{2} \leq 1.$$

Θά ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν.-

$$-1 \leq \frac{\sqrt{3-\mu}}{2} \leq 1 \quad (\alpha)$$

Ἡ ὑπόρριζος ποσότης πρέπει νά ᾖναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός .- $3 - \mu \geq 0 \quad \mu \leq 3.$

Ἐάν συμβαίνει $\mu \leq 3$, τότε ἡ ἀνισότης $-1 < \frac{\sqrt{3-\mu}}{2}$ συμβαίνει πάντοτε. Θά ἐξετασθῇ ἡ ἀνισότης.-

$$\frac{\sqrt{3-\mu}}{2} \leq 1, \sqrt{3-\mu} \leq 2, 3 - \mu \leq 4,$$

$$3 - 4 \leq \mu, \mu \geq -1.$$

Ἄρα ἡ διπλῇ ἀνισότης (α) ἀληθεύει ὅταν $-1 \leq \mu \leq 3.$

$$-1 \leq -\frac{\sqrt{3-\mu}}{2} \leq 1 \quad (\beta). \text{ Καί ἐδῶ πρέπει } \mu \leq 3.$$

Τότε ἐπαληθεύει πάντα ἡ .- $-\frac{\sqrt{3-\mu}}{2} \leq 1.$

Ζητοῦμεν νά εὕρωμεν, πότε ἐπαληθεύεται ἡ ἀνισότης.-

$$-1 \leq -\frac{\sqrt{3-\mu}}{2}, -2 \leq -\sqrt{3-\mu},$$

$$2 \geq \sqrt{3-\mu}, 4 \geq 3 - \mu, \mu \geq -1.$$

Ἄρα διὰ νά ἀληθεύῃ ἡ διπλῇ ἀνισότης (β) θά πρέπει.-

$$-1 \leq \mu \leq 3$$

471) Νά λυθῇ ἡ ἐξιśωσις.- $2\epsilon\phi\chi\eta\mu\chi + \epsilon\phi\chi = 0.$

$$\epsilon\phi\chi(2\eta\mu\chi + 1) = 0. \text{ Ὅπότε ἢ 1) } \epsilon\phi\chi = 0,$$

$$\text{ἢ 2) } 2\eta\mu\chi + 1 = 0.$$

Ἐκ τῆς 1) ἔχομεν $\epsilon\phi\chi = \epsilon\phi 0$, $\chi = k\pi$, καί ἐκ τῆς

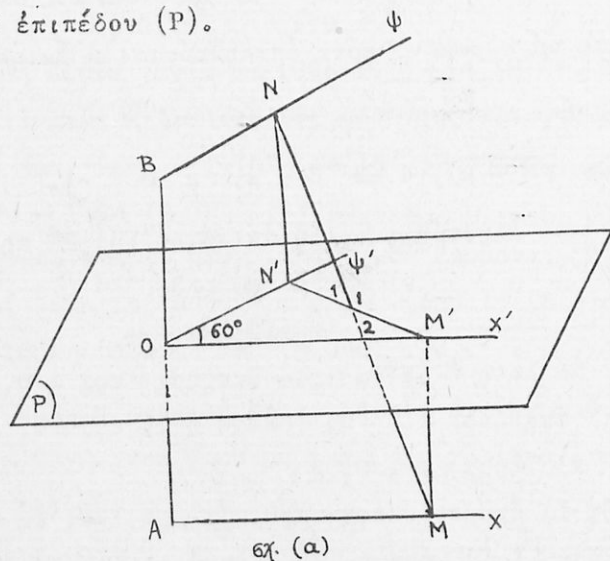
$$(2) 2\eta\mu\chi + 1 = 0, \eta\mu\chi = -\frac{1}{2}, \eta\mu\chi = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{Άρα } \chi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \text{ και } \chi = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$$

$$\chi = -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi.$$

472) Δίδονται: $AM = \chi$, $BN = y$, $\Psi' \hat{O} X' = 60^\circ$, $AB = \alpha$

Ι) α) 'Εάν φέρωμεν, ἐκ τῶν σημείων N, M , ἀντιχτοίχως, εὐθείας NN' , MM' , παραλλήλους πρὸς τὴν AB καὶ ἐνώσωμεν τὰ σημεῖα $N'M'$ δι' εὐθείας, τότε ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $NN'MM'$ σχηματίζονται δύο τρίγωνα $NN'I$, $MM'I$, ἐὰν I ἡ τομὴ τῶν MN καὶ $M'N'$. Λι NN' , MM' ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν AB θὰ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (P) ἄρα κάθετοι ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου διερχομένην ἀπὸ τὸν πόδα. Ἐπομένως τὰ τρίγωνα $NN'I$ καὶ $MM'I$ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὴν N' καὶ M' ἀφοῦ δὲ $OB = NN' = \frac{\alpha}{2}$ καὶ $OA = MM' = \frac{\alpha}{2}$ ἀκόμη δὲ $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ εἶναι ἴσα. Ἐπομένως τὸ I μέσον τοῦ $N'M'$ καὶ NM . Ἄρα τὸ μέσον I τοῦ MN καίται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P) .



β) -Τό σχῆμα (β) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (P). Ἔχομεν δὲ $\chi + \gamma = 2\alpha$ καὶ $\hat{\chi}'\phi' = 60^\circ$, $ON' = \gamma$, $OM' = \chi$. Ἐάν ἀπὸ τοῦ μέσον I τοῦ M'N' φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς γραμμὰς τῆς γωνίας, θά ἔχωμεν $IL = \frac{1}{2} (OM')$, $IK = \frac{1}{2} (ON')$.

Ἐπομένως $IK + IL = \alpha$. Ἀφοῦ τό $IK + IL = \alpha$ εἶναι δηλα-

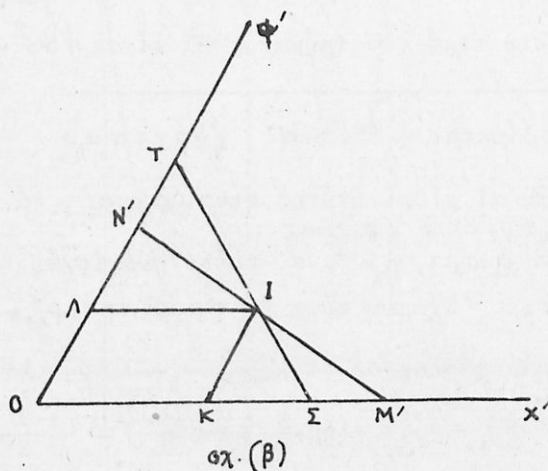
δῆ σταθερόν συνάγομεν τό συμπέρασμα ὅτι ἔχομεν ἓνα ἰσοσκελές τρίγωνον μέ ἴσα σκέλη πρὸς α , τότε ὁ τόπος τοῦ I θά εἶναι ἡ βάσις τοῦ τριγώνου αὐτοῦ. Ἐπομένως λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς οχ' τμήμα $OS = \alpha$, φέρομεν τήν ΣΙ, ἡ ὁποία τέμνει τήν οφ' εἰς τό T. Θά δείξωμεν ὅτι $OT = \alpha$.

Πράγματι, ἀφοῦ $IL + IK = \alpha$ καὶ $IL = OK$ θά εἶναι ἐκ τῆς $OK + KS = IL + IK$, $KS = KI$. Ἀρα $\hat{\Sigma}_I = \hat{I}_I$, ἀλλά $\hat{I}_I = \hat{T}_I$

ὡς ἐντὸς ἐκτός. Ἐπομένως $\hat{\Sigma}_I = \hat{T}_I$, δηλαδή ΣΟΤ εἶναι τρίγωνον ἰσοσκελές καὶ $OS = OT = \alpha$.

Ἐάν ἐκ τῶν σημείων τῆς βάσεως του φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἴσας πλευράς θά εἶναι $IL + IK = \alpha$.

Ὁ γ.τ τοῦ I εἶναι ἡ σταθερά εὐθεῖα ΣΤ.



2^{ον}) Έκ τοῦ σχήματος (α) ἔχομεν. - $(NM)^2 = 2(NI)^2$, $(NM)^2 = 4(NI)^2$, $(NI)^2 = (NN')^2 + (N'I)^2$, ἄρα $(MN)^2 = 4(NI')^2 = 4(NN')^2 + 4(N'I)^2 = 4 \cdot \frac{\alpha^2}{4} + 4 \cdot \frac{(N'M')^2}{4}$

Ἄρα $(MN)^2 = \alpha^2 + (N'M')^2$ (I)

Έκ τοῦ τριγώνου $N'OM'$ ἔχομεν $(N'M')^2 = (ON')^2 + (OM')^2 - 2(ON')(OM') \sin 60^\circ$ ἢ $(N'M')^2 = y^2 + x^2 - 2yx \cdot \frac{1}{2} = y^2 + x^2 - xy$

Δι' ἀντικατάστασews εἰς τὴν σχέσιν (I) ἔχομεν. -

$(N'M')^2 = \alpha^2 + x^2 + y^2 - xy$. Τό ἐλάχιστον MN , ἀντιστοιχεῖ εἰς τό ἐλάχιστον $(MN)^2$. Ἐπομένως πρέπει $\alpha^2 + x^2 + y^2 - xy = \text{ἐλάχιστον}$ ἢ $\alpha^2 + (x+y)^2 - 2xy - xy = 5\alpha^2 - 3xy$

νά εἶναι ἐλάχιστον. Ἐπειδὴ τό α εἶναι σταθερόν, πρέ

πει xy νά εἶναι μέγιστον. Ἐπειδὴ δέ $x+y=2\alpha$

εἶναι σταθερόν, τό xy γίνεται μέγιστον ὅταν $x=y=\alpha$

Ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ τμήματος MN εἶναι $\sqrt{5\alpha^2 - 3\alpha^2} = \alpha\sqrt{2}$

473) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $x^2 + px + q = 0$

Ιον) Ἐάν αἱ ρίζαι ταύτης εἶναι ρ_1, ρ_2 , θά ἔχωμεν. -

$\rho_1 + \rho_2 = -p$, $\rho_1 \rho_2 = q$

Ἴνα εἶναι $\rho_1 = \eta\mu\alpha$, $\rho_2 = \sigma\upsilon\nu\alpha$, πρέπει νά ἰσχύῃ ἡ σχέσηis

$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1$. Ἐχομεν τότε $(\rho_1 + \rho_2)^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + 2\rho_1\rho_2$,

δι' ἀντικατάστασews δέ θά λάβωμεν. - $p^2 = 1 + 2q$

2ον) $p = -(\rho_1 + \rho_2) = -(\eta\mu\frac{\pi}{6} + \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}) = -(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}) =$

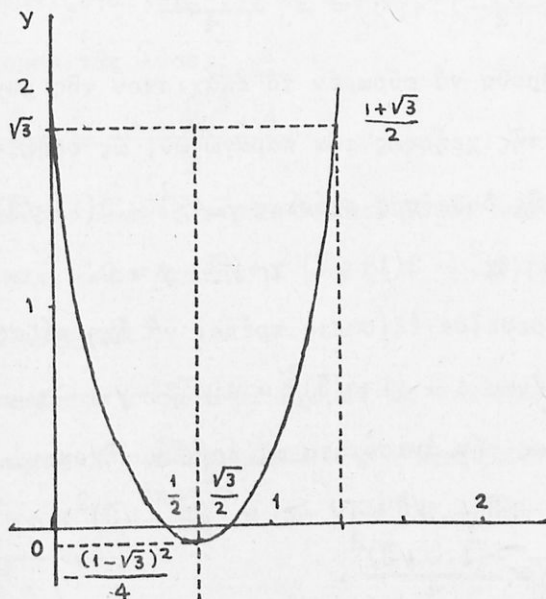
$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \alpha = \beta, \beta_2 = \eta \mu - \frac{\pi}{6} \quad \sigma \nu \nu - \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Άρα η εξίσωσις γίνεται, -

$$x^2 - \frac{1+\sqrt{3}}{2} x + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad \eta \quad 4x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$$

Θεωρούμεν τούς ὀρθογωνίους ἄξονας $Ox, O\phi$.

Ἡ ἐξίσωσις $\phi = 4x^2 - 2(1+\sqrt{3})x + \sqrt{3} = 0$, παριστᾷ παραβολήν. Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}$ ἀποτελοῦν τὰς τομὰς τῆς παραβολῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x . Διὰ $x=0$, ἔχομεν $\phi = \sqrt{3}$, ἄρα τό σημεῖον $(0, \sqrt{3})$ ἀποτελεῖ τομήν τῆς παραβολῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν ϕ . Διὰ νά εὕρωμεν ποῦ εὐρίσκεται τό μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς παραβολῆς ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς. -



Λαμβάνομεν τήν (α) παράγωγον τῆς συναρτήσεως .

$$y = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}. \text{ Αὕτη εἶναι } y' = 8x - 2(1 + \sqrt{3}).$$

Αἱ τιμαί τοῦ x αἱ μηδενίζουσai τήν παράγωγον ταύτην εἶναι ἐκεῖναι διὰ τὰς ὁποίας ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον ἢ ἐλάχιστον. Ἡ (β) παράγωγος τῆς y εἶναι .-

$y'' = 8 > 0$. Ἄρα ἡ συνάρτησις y ἔχει ἐλάχιστον. Τό ἐλάχιστον τοῦτο εὐρίσκεται ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό x ,

ἐκ τῆς ἐξισώσεως $8x - 2(1 + \sqrt{3}) = 0$ εἰς τήν y . Θά ἔχωμεν οὕτω $x = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

$$y = 4\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2(1 + \sqrt{3})\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right) + \sqrt{3} = \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} = -\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}.$$

Δυνάμεθα νά εὕρωμεν τό ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως ἄνευ τῆς χρήσεως τῶν παραγῶγων, ὡς ἐξῆς.-

Ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως $y = 4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3}$, ἔχομεν.- $4x^2 - 2(1 + \sqrt{3})x + \sqrt{3} - y = 0$.

Ἡ εὐρεθεῖσα ἐξίσωσις πρέπει νά ἔχη ρίζας πραγματικάς.

$$\text{Ἐπομένως } \Delta = (1 + \sqrt{3})^2 - 4(\sqrt{3} - y) \geq 0.$$

Λύοντες τήν ἀνισότητα ὡς πρός y ἔχομεν.-

$$1 + 3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 4y \geq 0, (1 - \sqrt{3})^2 + 4y \geq 0,$$

$$y \geq -\frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}.$$

Επομένως ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ συνάρτησις y εἶναι $y_{\text{ελαχ}} = - \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}$.

3ον) Ἐκ τῆς σχέσεως $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \mu$, ἔχομεν $\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} +$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \mu \quad \eta \quad \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha} = \mu \quad \eta \quad \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\alpha} = \mu.$$

Ἐπειδὴ $\eta\mu\alpha = \rho$, $\sigma\upsilon\nu\alpha = \rho_2$ καὶ $\rho_1\rho_2 = q$, θὰ ἔχωμεν:

$$\rho_1\rho_2 = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = q = \frac{1}{\mu}.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $\rho^2 = 1 + 2q$ ἔχομεν $\rho^2 = 1 + \frac{2}{\mu}$,

$$\rho = \pm \sqrt{1 + \frac{2}{\mu}}.$$

Διερεύνησις τῆς ἐξίσωσεως $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \mu$. Ἡ ἐξίσωσις

αὕτη μετασχηματίζεται εἰς τὴν $\epsilon\phi^2\alpha - \mu\epsilon\phi\alpha + 1 = 0$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὰς λύσεις .-

$$\epsilon\phi\alpha = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}$$

Αἱ δύο εὐρεθεῖσαι λύσεις εἶναι δεκταὶ μόνον ὅταν εἶ-

ναι πραγματικά. Ἄρα πρέπει $\mu^2 - 4 \geq 0$ $(\mu - 2)(\mu + 2) \geq 0$

καὶ $\mu \geq 2$ ἢ $\mu \leq -2$.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\epsilon\phi\alpha + \sigma\phi\alpha = \mu$, ἔχομεν ὡς ἄνωτέρω .-

$$\epsilon\phi^2\alpha + 1 = \mu\epsilon\phi\alpha, \quad \eta \quad \frac{\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = -\frac{1}{\mu}. \quad \text{Ἄρα .-}$$

$$\eta\mu 2\alpha = \frac{2\epsilon\phi\alpha}{1 + \epsilon\phi^2\alpha} = \frac{2}{\mu}.$$

$$\sin 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\mu}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{\mu^2 - 4}{\mu^2}} = \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{\mu}$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\frac{2}{\mu}}{\pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{\mu}} = \pm \frac{2}{\sqrt{\mu^2 - 4}}$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $q = -\frac{1}{\mu}$, ἔχομεν $\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha = -\frac{1}{\mu}$,

$$\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\alpha = \frac{1}{2} \quad \eta \quad \eta\mu^2\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) = \frac{1}{2} \quad \eta$$

$$\mu^2\eta\mu^4\alpha - \mu^2\eta\mu^2\alpha + 1 = 0 \quad (\alpha) \quad \text{ὁπότε}$$

$$\eta\mu^2\alpha = \frac{\mu^2 \pm \sqrt{\mu^4 - 4\mu^2}}{2\mu^2} = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$$

Ὅμοίως καταλήγομεν ὅτι $\sigma\upsilon\alpha^2 = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$

Ἄρα πρέπει νά ὑπάρχουν εἰς τήν ἐξίσωσιν (α) τά ἐξῆς ζεύγη λύσεων.

$$1) \quad \eta\mu^2\alpha = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$$

$$2) \quad \eta\mu^2\alpha = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$$

$$\sigma\upsilon\alpha^2 = \frac{\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$$

$$\sigma\upsilon\alpha^2 = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}}{2\mu}$$

Ἐάν λάβωμεν ἓν τῶν ζευγῶν τούτων, π.χ. τό 1), εὐρίσκομεν τά $\eta\mu 2\alpha$, $\sigma\upsilon\alpha$, $\varepsilon\varphi 2\alpha$ ὡς ἐξῆς. -

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\alpha = 2 \sqrt{\frac{(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4})(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4})}{4\mu^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\mu^2 - (\mu^2 - 4)}}{\mu} = \frac{2}{\mu}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\mu}\right)^2} = \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{\mu}, \quad \epsilon\phi 2\alpha = \frac{\frac{2}{\mu}}{\pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4}}{\mu}} =$$

$$\pm \frac{2}{\sqrt{\mu^2 - 4}}.$$

Καταλήγομεν εἰς τὰ αὐτὰ ἀποτελέσματα, ὅπως καὶ προηγουμένως, ὅπου ἐχρησιμοποιήσαμεν τὴν σχέσιν

$$\epsilon\phi\alpha + \sigma\upsilon\alpha = \mu.$$

474) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2\sigma\upsilon\alpha - 1) \chi^2 - 2\chi + \sigma\upsilon\alpha = 0$, καὶ $0 < \alpha < \pi$.

Ιον) Ἐάν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι χ' , χ'' θά ἔχω-

$$\mu\epsilon\gamma.- \chi', \chi'' = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (2\sigma\upsilon\alpha - 1)\sigma\upsilon\alpha}}{2\sigma\upsilon\alpha - 1} =$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\alpha}}{2\sigma\upsilon\alpha - 1}.$$

Ἡ διακρίνουσα εἶναι $\Delta = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\alpha$.

Ὅταν $\Delta = 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει 2 πραγματικὰς ρίζας ἴσας

$$\Delta = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\alpha < 0, \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\alpha - 1 > 0.$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}, \quad \sigma\upsilon\nu\alpha = 1, \quad \alpha = 0,$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}. \quad \text{"Όταν } \Delta < 0, \text{ ή έξίσωσις}$$

έχει 2 συζυγείς μιγαδικάς ρίζας.

$$\Delta = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha < 0, \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 1 > 0,$$

$$2(\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) \left(\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{1}{2}\right) > 0, \quad \text{ή } \sigma\upsilon\nu\alpha > 1$$

$$\text{ή } \sigma\upsilon\nu\alpha < -\frac{1}{2}.$$

Άλλά αι λύσεις $\sigma\upsilon\nu\alpha > 1$ άπορρίπτονται. Άρα μένουν $\sigma\upsilon\nu\alpha < -\frac{1}{2}$. Πρέπει όμως νά ήναι $-1 < \sigma\upsilon\nu\alpha$. Έπομένως θά είναι $-1 < \sigma\upsilon\nu\alpha < -\frac{1}{2}$. Άρα τά τόξα λύσεις είναι $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$.

Όταν $\Delta > 0$, ή έξίσωσις έχει πραγματικές καί άνίςους ρίζας. $\Delta = 1 - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha > 0, \quad 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 1 < 0, \quad 2(\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) \left(\sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{1}{2}\right) < 0, \quad -\frac{1}{2} < \sigma\upsilon\nu\alpha < 1,$
 άρα $0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Τό άθροισμα των ριζών είναι } \chi' + \chi'' = -\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}$$

$$\text{Διά νά έχωμεν } \chi' + \chi'' = \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} > 0, \text{ πρέπει } 2(2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1)$$

$$> 0, \text{ ή } \sigma\upsilon\nu\alpha > \frac{1}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{3}.$$

Διὰ νά ἔχωμεν $\chi' + \chi'' = \frac{2}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} < 0$, πρέπει.-

$2(2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) < 0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu\alpha < \frac{1}{2}$, ἄρα $\alpha > \frac{\pi}{3}$.

Ἐπειδὴ ὁμως αἱ πραγματικαὶ ρίζαι ὀρίζονται μεταξὺ

$0 \dots \dots \frac{2\pi}{3}$, θά πρέπει, διὰ νά ἔχωμεν ἄθροισμα

ριζῶν ἀρνητικόν, νά ἰσχύῃ ἡ ἀνισότης $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Τό γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι.- $\chi' \chi'' = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}$.

Διὰ νά ἔχωμεν $\chi' \chi'' = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} < 0$ πρέπει $\sigma\upsilon\nu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) < 0$, $0 < \sigma\upsilon\nu\alpha < \frac{1}{2}$ $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Ἐπίσης διὰ νά ἔχωμεν $\chi' \chi'' = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1} > 0$, πρέπει

$\sigma\upsilon\nu\alpha(2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1) > 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha > \frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\alpha < 0$, δηλαδή
 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων καταλήγωμεν εἰς τὰ ἐξῆς συμπεράσματα.-

Διὰ τόξον $\alpha = 0$, ἔχομεν εἰς τό τριώνυμον $\Delta = 0$, ἄρα τοῦτο, ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς ἴσας. Διὰ τόξον α ἐπαληθεῖον τὴν ἀνισότητα $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, ἔχομεν εἰς τό τριώνυμον ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, θετικὰς.

Διὰ τόξον α ἐπαληθεῖον τὴν ἀνισότητα $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, ἔχομεν εἰς τό τριώνυμον ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἑτεροσήμεους μέ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν ἀρνητικὴν

ρίζαν. Διά τόξον α επαληθεύον την ανισότητα $\frac{2\pi}{3} > \alpha > \frac{\pi}{3}$

έχομεν εἰς τό τριώνυμον ρίζας πραγματικές καί ἀνίσου
ἀρνητικές. Διά $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$, έχομεν ρίζας μιγαδικάς.

$$2ον) \quad \frac{1}{\chi'} + \frac{1}{\chi''} - 4\eta\mu\alpha = 0, \quad \frac{\chi' + \chi''}{\chi' \chi''} - 4\eta\mu\alpha = 0,$$

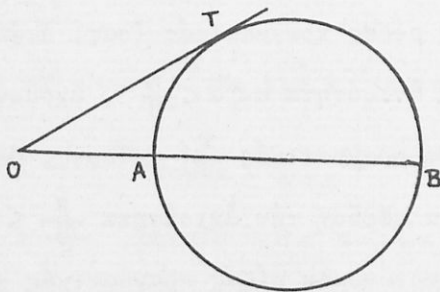
$$\frac{\frac{2}{2\sigma\upsilon\nu\alpha} - 1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - 4\eta\mu\alpha = 0, \quad \eta \quad \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - 4\eta\mu\alpha = 0 \quad \eta$$

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1 \quad \eta \quad 1 - 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 0, \quad \eta\mu 2\alpha = 1, \quad \eta\mu 2\alpha = \eta\mu \frac{\pi}{2}$$

$$\text{'Οπότε } 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\kappa\pi, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \kappa\pi.$$

Έφ' ὅσον έχομεν τόν περιορισμόν ὅτι $0 < \alpha < \pi$, έχομεν
μίαν λύσιν τῆς ἐξιśσεως $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

3ον) Δίδεται ὅτι $OA = \chi'$, $OB = \chi''$. Ἡ παράστασις ψ
εὐρίσκεται ὡς ἐξῆς $\psi = OT^2 = OA \cdot OB = \chi' \chi'' = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\sigma\upsilon\nu\alpha - 1}$



4ον) Θέτοντες $\sigma\upsilon\nu\alpha = \mu$, ἔχομεν $y = \frac{\mu}{2\mu-1}$. Ἡ συνάρτησις αὕτη γραφικῶς παριστᾷ τὴν ὑπερβολὴν τοῦ κατωτέρω σχήματος. Ἡ τομὴ τῆς ὑπερβολῆς αὐτῆς μετὰ τῶν ἀξόνων χ, ψ , εἶναι τό σημεῖον $(0,0)$. Αἱ ἀσύμβατοι τῆς ὑπερβολῆς εὐρίσκονται ὡς ἑξῆς. -

Διὰ $\mu \rightarrow \infty$, ἡ τιμὴ τῆς y εἶναι. -

$$y = \frac{\mu}{2\mu-1} = \frac{\frac{\mu}{\mu}}{2 - \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{2}.$$

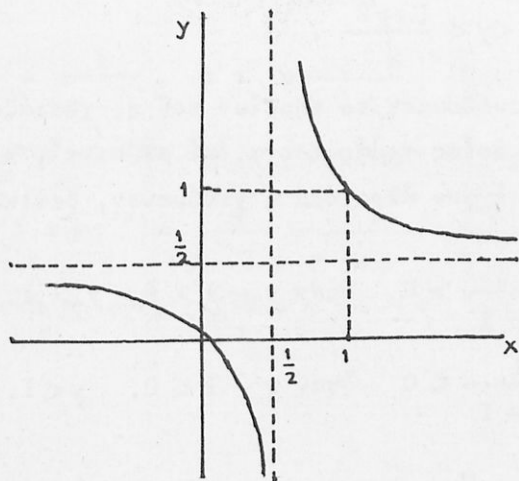
Διὰ $\mu = -\frac{1}{2}$, ἡ συνάρτησις καθίσταται ἄπειρος. Ἄρα αἱ

ἐξισώσεις τῶν ἀσυμβάτων τῆς ὑπερβολῆς εἶναι $y = -\frac{1}{2}$,

$\mu = -\frac{1}{2}$. Αἱ ἀσύμβατοι αὗται εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τυχόν σημεῖον τῆς καμπύλης, δίδεται ὑπὸ τῆς (α) παραγώγου τῆς συναρτήσεως. -

$$y' = \frac{(2\mu-1) \cdot 2 - 2\mu}{(2\mu-1)^2} = \frac{2\mu - 1 - 2\mu}{(2\mu-1)^2} = -\frac{1}{(2\mu-1)^2}$$



$$475) \quad y = \eta \mu \chi \sigma \nu \chi + \eta \mu^2 \chi.$$

$$1) \quad \Gamma \nu \omega \rho \acute{\iota} \zeta \omicron \mu \epsilon \nu \quad \delta \tau \iota \quad \eta \mu \chi = \frac{\epsilon \varphi \chi}{\pm \sqrt{1 + \epsilon \varphi^2 \chi}}, \quad \sigma \nu \chi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \epsilon \varphi^2 \chi}}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, θά ἔχω

$$\mu \epsilon \nu . - \quad y = \frac{\epsilon \varphi \chi}{1 + \epsilon \varphi^2 \chi} + \frac{\epsilon \varphi^2 \chi}{1 + \epsilon \varphi^2 \chi} = \frac{\epsilon \varphi^2 \chi + \epsilon \varphi \chi}{1 + \epsilon \varphi^2 \chi}$$

2) Ἡ εὐρεθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται. -

$$y (1 + \epsilon \varphi^2 \chi) = \epsilon \varphi^2 \chi + \epsilon \varphi \chi, \quad (y - 1) \epsilon \varphi^2 \chi - \epsilon \varphi \chi + y = 0$$

$$\delta \acute{\omicron} \tau \epsilon . - \quad \epsilon \varphi \chi = \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4y(y - 1)}}{2(y - 1)}$$

Δεχόμεθα τὰς εὐρεθείσας λύσεις μόνον ὅταν αὗται εἶναι πραγματικά. Δηλαδή μόνον ὅταν. - $1 - 4y(y - 1) \geq 0$

$$\eta \quad 4y(y - 1) \leq 1, \quad 4y^2 - 4y - 1 \leq 0,$$

$$\frac{1 - \sqrt{2}}{2} < y < \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

Διὰ τὴν σπουδάζωμεν τὸ σημεῖον τοῦ χ , χρειάζεται νά ἐρωτήσωμεν εἰς ποίας τιμὰς τοῦ y , αἱ ρίζαι τ' , τ'' , τῆς ἐξισώσεως ἔχουν ἄθροισμα ἢ γινόμενον, θετικόν ἢ ἀρνητικόν.

$$\tau' + \tau'' = \frac{1}{y - 1} > 0 \quad \delta \tau \alpha \nu \quad y - 1 > 0, \quad y > 1.$$

$$\tau' + \tau'' = \frac{1}{y - 1} < 0 \quad \delta \tau \alpha \nu \quad y - 1 < 0, \quad y < 1.$$

$$\tau' \tau'' = \frac{y}{y-1} > 0 \quad \text{ὅταν } y(y-1) > 0, y < 0, y > 1.$$

$$\tau' \tau'' = \frac{1}{y-1} < 0 \quad \text{ὅταν } y(y-1) < 0, 0 < y < 1.$$

ἐπομένως καταλήγομεν εἰς τὰ ἑξῆς συμπεράσματα.-

Διὰ $1 < y < \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας, ἀνίσους, θετικὰς.

Διὰ $0 < y < 1$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς ἀνίσους ρίζας, ἑτεροσήμους, μέ ἀπολύτως μεγαλυτέραν τὴν ἀρνητικὴν.

Διὰ $\frac{1-\sqrt{2}}{2} < y < 0$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς

ἀνίσους ρίζας, ἀρνητικὰς. Διὰ $y = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$.

ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς ἴσας ρίζας, ἐνῶ διὰ

$y > \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, $y < \frac{1-\sqrt{2}}{2}$, ἔχει μιγαδικὰς ρίζας.

$$\text{Θὼν) } \tau + \tau'' = \frac{1}{y-1}, \quad \tau' \tau'' = \frac{y}{y-1}. \quad \text{Ἐάν ἀφαιρέσω-}$$

μεν τὴν πρώτην σχέσιν ἀπὸ τὴν δευτέραν θά ἔχωμεν.-

$$\tau' \tau'' - (\tau + \tau'') = \frac{y}{y-1} - \frac{1}{y-1} = \frac{y-1}{y-1} = 1$$

Ἄρα ἡ ζητούμενη σχέσηις εἶναι $\tau' \tau'' = 1 + \tau' + \tau''$.

476) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις .- $x^2 - 2(\varphi-2)x - 4(\varphi-1) = 0$.

Ἐκ τῆς διδομένης ἐξισώσεως εὐρίσκομεν ὅτι .-

$$x, x' = \varphi - 2 \pm \sqrt{(\varphi-2)^2 + 4(\varphi-1)} = \varphi - 2 \pm \varphi.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ $\Delta = \varphi^2$, πάντοτε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς. Διὰ τὴν εἶναι ἴσαι αἱ ρίζαι πρέπει $\Delta = 0$, $\varphi^2 = 0$, $\varphi = 0$.

2ον) Ἐστωσαν $x' = \varepsilon\varphi\alpha$, $x'' = \varepsilon\varphi\beta$.

Διὰ τὴν ὑπολογίσωμεν τὴν συνάρτησιν $\eta = \varepsilon\varphi(\alpha + \beta)$, ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς.-

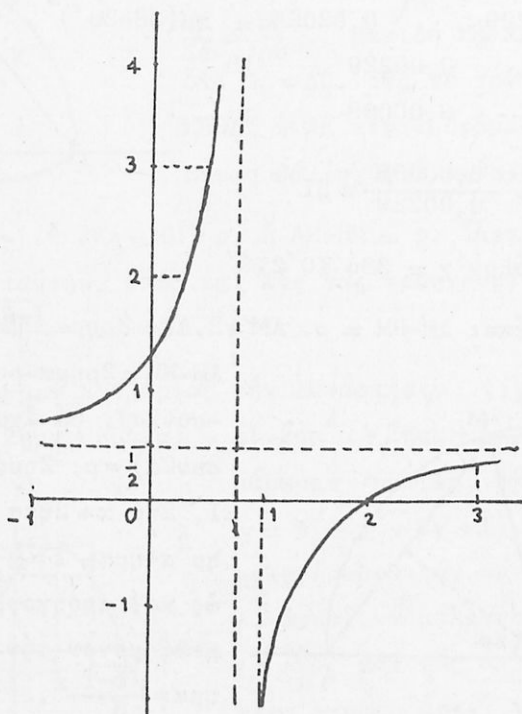
$$\eta = \varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = \frac{x' + x''}{1 - x'x''} = \frac{2(\varphi-2)}{1+4(\varphi-1)} = \frac{2(\varphi-2)}{4\varphi-3}$$

3ον) $\eta = \frac{2(\varphi-2)}{4\varphi-3}$. Ἡ δοθεῖσα παράστασις εἶναι ὠρσιμέδι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ φ πλὴν τῆς τιμῆς $\frac{3}{4}$, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν παρονομαστήν. Ἡ γραφικὴ παράστασις εἶναι ὑπερβολὴ ὅπως δεικνύει τὸ σχῆμα. Αἱ ἀσύμβατοι τῆς ὑπερβολῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι

$$\varphi = \frac{3}{4} \quad \text{καὶ} \quad \eta = \frac{2\varphi-4}{4\varphi-3} = \frac{2 - \frac{4}{\varphi}}{4 - \frac{3}{\varphi}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

(ὅταν $\varphi \rightarrow \infty$). Ἡ τομὴ τῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τοῦ η εἶναι τὸ σημεῖον $(0, \frac{4}{3})$. Ἡ τομὴ τῆς ὑπερβολῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν φ εἶναι τὸ σημεῖον $\varphi(2, 0)$. Ἡκλίσαις τῆς ἐφαπτομένης εἰς τυχόν σημεῖον τῆς ὑπερβολῆς δίδεται ἐκ τῆς (α) παραγώγου τῆς συναρτήσεως

$$\text{Πράγματι, } \eta' = \frac{(4\varphi-3) \cdot 2 - 4(2\varphi-4)}{4(\varphi-3)^2} = \frac{8\varphi-6-8\varphi+16}{(4\varphi-3)^2} = \frac{10}{(4\varphi-3)^2}$$



$$477) \quad \varepsilon\varphi\chi = \sigma\upsilon\chi, \quad \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \sigma\upsilon\nu\chi, \quad \eta\mu\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi, \quad \eta\mu\chi = 1 - \eta\mu^2\chi,$$

$$\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi - 1 = 0, \quad \eta\mu\chi = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad \text{Εκ τῶν}$$

$$\lambdaύσεων τούτων δεχόμεθα μόνον μίαν, τήν $\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$$

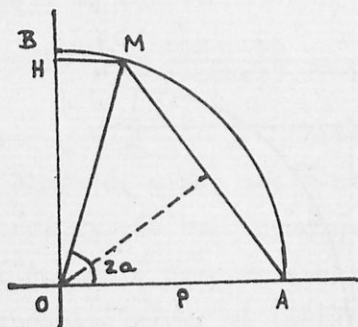
$$\eta\mu\chi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2,23606 - 1}{2} = \frac{1,23606}{2} = 0,61803$$

$$\begin{array}{lcl}
 d = 0,00008 & \left(\begin{array}{l} 0,61795 = \eta\mu(38010') \\ 0,61803 = \eta\mu\chi \\ 0,62024 = \eta\mu(38020') \end{array} \right) & 10' \\
 D = 0,00229 & & \\
 & 0,00229 & 10' \\
 & 0,00008 & \chi
 \end{array}$$

$$\chi = 10. \frac{0,00008}{0,00229} = 21''$$

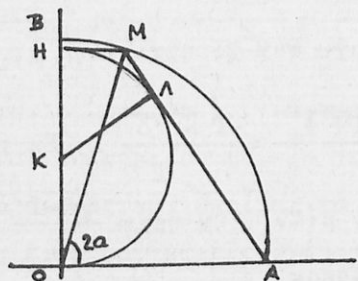
"Αρα τόξον $\chi = 380' 21''$

2ον Πρέπει $AM - HM = \rho$. $AM = 2$. $AI = 2\eta\mu\alpha$. $HM = \rho\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.



$$\begin{aligned}
 AM - HM &= 2\eta\mu\alpha - \rho\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \rho(2\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha). \text{ Θά ἔχωμεν } \rho(2\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha) = \rho. \\
 2\eta\mu\alpha - (1 - 2\eta\mu^2\alpha) &= 1. \\
 2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha - 2 &= 0. \\
 \eta\mu^2\alpha + \eta\mu\alpha - 1 &= 0 \quad (1). \text{ 'Οπότε } \\
 \text{ὡς καὶ προηγουμένως, δεχόμεθα μόνον τὴν ρίζαν} \\
 \eta\mu\alpha &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}.
 \end{aligned}$$

3ον) $MA - MH = MA - ML = AL = AO = \rho$. "Αρα καὶ εἰς τὴν



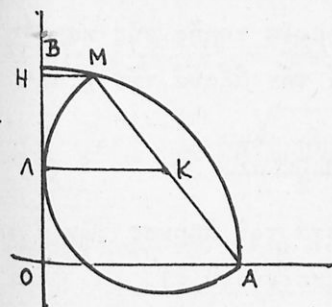
προκειμένην περίπτωσιν $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

$$OH = \rho\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \quad (2).$$

Ἐπειδὴ ἰσχύει ἡ ἐξίσωσις (1), θά ἔχωμεν $\eta\mu\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$. "Αρα ἡ σχέ-

σις (2) γράφεται ὡς ἑξῆς

$$\begin{aligned}
 OH &= 2\eta\mu\alpha \cdot \sqrt{\eta\mu\alpha} = 2\rho\sqrt{\eta\mu^3\alpha}. \quad OH = 2\rho\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3} = \\
 &= 2\rho\sqrt{\frac{5\sqrt{5}-3\cdot 5+3\sqrt{5}-1}{8}} = 2\rho\sqrt{\frac{8\sqrt{5}-16}{8}} = 2\rho\sqrt{\sqrt{5}-2}
 \end{aligned}$$



Τά εὐθύγραμμα τμήματα MH, KA, AO εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν OB . Ἄρα

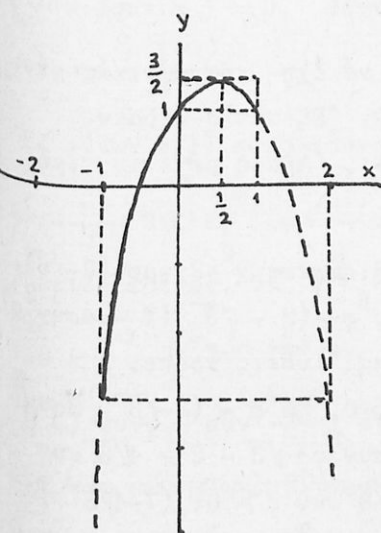
$$\frac{MK}{KA} = \frac{HA}{AO} \quad \text{Ἐπειδὴ } MK=KA \text{ ἔπεται}$$

ὅτι $HA=AO$. Εἰς τό τραπέζιον $MHOA$, ἡ AK εἶναι διάμεσος ἐπο-
μένως θά ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$$KA = \frac{HM + AO}{2} \quad \text{ἢ } 2KA = HM + \rho. \quad \text{ἢ } AM - HM = \rho. \quad \text{Ἄρα εἰς τὴν}$$

περίπτωσιν ταύτην, ὅπως καὶ εἰς τὰς προηγουμένας, ἔχο-
μεν $\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

4ον) Εὐρίσκομεν κατ'ἀρχάς τὴν συνάρτησιν $y: y = 2\rho\eta\mu\alpha +$
 $+\rho\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \rho(2\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha) = \rho(-2\eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha + 1)$. Ἄρα ὄνο-
μάσωμεν $\eta\mu\alpha = \chi$, θά ἔχωμεν



$y = \rho(-2\chi^2 + 2\chi + 1)$. Διὰ νά
μελετήσωμεν τὴν συνάρτησιν

y , ἀρκεῖ νά μελετήσωμεν τὴν
 $y_1 = \frac{y}{\rho}$ καὶ τὰς ἀντιστοι-
χους τιμάς, ἀρκεῖ νά τὰς
πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ ρ ($\rho > 0$).

Ἡ κλίσις τῆς ἐφαπτομένης εἰς
ἡ σημεῖον τῆς καμπύλης ἰσοῦ-
ται μέ τὴν (α) παράγωγον αὐ-
τῆς $y_1' = \rho(-4\chi + 2)$. εἰς τὰ
ἐπόμενα, θεωροῦμεν $\rho = +1$,

ὅποτε $y = y_1$, $y' = y_1' = -4\chi + 2$. Τό μέγιστον ἢ ἐλάχισ-
τον τῆς συναρτήσεως εὐρίσκεται διὰ $-4\chi + 2 = 0$, $\chi = \frac{1}{2}$.
Ἐπειδὴ $y'' = -4 < 0$, ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον, τό

όποιον έχει τιμήν: $y_{\mu} = -\frac{3}{2}$. Τά σημεία τομής της καμπύλης της εξίσωσης (παραβολής) με τον άξονα των x , δίδονται από τās λήσεις αὐτῆς

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{1+2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}.$$

Τό σημείον τομής της καμπύλης μετά τοῦ ἄξονος τῶν y δίδεται διά $x=0$, εἶναι δέ τό σημείον $(0,1)$.

Ἐπειδή τό x εἶναι ἡμίτονον τόξου τινός, θά πρέπει $-1 \leq x \leq 1$. Ἄρα ἐν τῆς παραβολῆς, δεχόμεθα ὡς παράστασιν τῆς συναρτήσεως τό τόξον τό περιεχόμενον μεταξύ $+1 \dots -1$. Δυνάμεθα μὰ εὖρωμεν τήν τιμήν τοῦ μεγίστου τῆς συναρτήσεως, ἄνευ χρήσεως τῶν παραγώγων, ὡς ἐξῆς. Ἐκ τῆς δοθείσης συναρτήσεως $y = -2x^2 + 2x + 1$, ἔχομεν $2x^2 - 2x + y - 1 = 0$.

Ἡ εὐρεθεῖσα ἐξίσωσις πρέπει νά ἔχῃ πραγματικάς ρίζας. Ἄρα $\Delta = 1 - 2(y - 1) \geq 0$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν $1 + 2 - 2y \geq 0$, $3 \geq 2y$, $y \leq \frac{3}{2}$. Ἄρα ἡ μέγιστη τιμή τοῦ y εἶναι $\frac{3}{2}$.

478) Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξίσωσης $x^2 - 2\chi\eta\mu\phi + (2 - \sqrt{3}) \cdot (1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\phi) = 0$ εἶναι $\Delta = \eta\mu^2\phi - (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\phi)$. Διὰ νά ὑπάρχουν δύο πραγματικάί λύσεις πρέπει $\Delta > 0$. $\eta\mu^2\phi - (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\phi) > 0$, $\eta\mu^2\phi - (2 - \sqrt{3} - 8\sigma\upsilon\nu^2\phi + 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2\phi) > 0$, $\eta\mu^2\phi + 8\sigma\upsilon\nu^2\phi + \sqrt{3} - 2 - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2\phi > 0$, $7\sigma\upsilon\nu^2\phi + 1 + \sqrt{3} - 2 - 4\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2\phi > 0$, $(7 - 4\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu^2\phi + \sqrt{3} - 1 > 0$, $(7 - 4\sqrt{3})\sigma\upsilon\nu^2\phi > -(\sqrt{3} - 1)$, $\sigma\upsilon\nu^2\phi > \frac{\sqrt{3} - 1}{7 - 4\sqrt{3}}$.

τό (β) μέλος τῆς ἀνισότητος εἶναι ἀρνητικόν, ἄρα πάντοτε μικρότερον τοῦ θετικοῦ πρώτου μέλους.

Αι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$\chi', \chi'' = \eta\mu\varphi \pm \sqrt{\eta\mu^2\varphi - (2-\sqrt{3})(1-4\sigma\upsilon\nu^2\varphi)}$$

Λαμβάνομεν τὴν μίαν ρίζαν.

$$\chi' = \eta\mu\varphi - \sqrt{\eta\mu^2\varphi - (2-\sqrt{3})(1-4\sigma\upsilon\nu^2\varphi)}$$

Διὰ νά ἴσοῦται αὕτη μὲ τό μηδέν πρέπει :

$$\eta\mu\varphi - \sqrt{\eta\mu^2\varphi - (2-\sqrt{3})(1-4\sigma\upsilon\nu^2\varphi)} = 0,$$

$$\eta\mu^2\varphi = \eta\mu^2\varphi - (2-\sqrt{3})(1-4\sigma\upsilon\nu^2\varphi) - (2-\sqrt{3}) \cdot (1-4\sigma\upsilon\nu^2\varphi) = 0, \quad 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1 = 0, \quad \sigma\upsilon\nu\varphi = \pm \frac{1}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἢ 1) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3}$, ἔχει ρίζας :

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi, \quad \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\kappa\pi.$$

Ἐπειδὴ πρέπει $0 < \varphi < 2\pi$, ἀπὸ τὰς λύσεις δεχόμεθα τὰς:

$$\varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$

Ἡ 2) $\sigma\upsilon\nu\varphi = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3}$, ἔχει ρίζας $\varphi = \frac{2\pi}{3} + 2\kappa\pi, \varphi = \frac{2\pi}{3} +$

$+2\kappa\pi$. Λόγω τοῦ περιορισμοῦ δεχόμεθα τὰς λύσεις: $\varphi = \frac{2\pi}{3}, \varphi = 2\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ προσήμου τῶν ριζῶν χ', χ'' , ἐξετάζομεν πότε τό γινόμενον καί τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι θετικόν ἢ ἀρνητικόν.

$\chi' + \chi'' = 2\eta\mu\varphi$. Εἶναι $\chi' + \chi'' = 2\eta\mu\varphi > 0$ ὅταν $\eta\mu\varphi > 0$,

Άρα $0 < \varphi < \pi$

$\chi' + \chi'' < 0$ όταν $\eta\mu\varphi < 0$, Άρα $\pi < \varphi < 2\pi$.

Τό γινόμενο ισοῦται μέ $(2 - \sqrt{3})(1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi)$.

$\chi'\chi'' = (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi) > 0$ όταν $1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi > 0$
 $4\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1 < 0, (\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2})(\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{1}{2}) < 0$, Άρα $-\frac{1}{2} < \sigma\upsilon\nu\varphi < \frac{1}{2}$

Άρα $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$, καί $\frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$

$\chi'\chi'' = (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi) < 0$ όταν $4\sigma\upsilon\nu^2\varphi - 1 > 0$,

$(\sigma\upsilon\nu\varphi - \frac{1}{2})(\sigma\upsilon\nu\varphi + \frac{1}{2}) > 0$, Άρα πρέπει $\sigma\upsilon\nu\varphi > \frac{1}{2}$

$\sigma\upsilon\nu\varphi < -\frac{1}{2}$, δηλαδή :

$0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3} < \varphi < \frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$.

Έκ τῶν ἀνωτέρω συνάγονται τά ἐξῆς συμπεράσματα.

Διὰ $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$, ἔχομεν $\chi'\chi'' < 0$, $\chi' + \chi'' > 0$. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει 2 ρίζας πραγματικές ἑτεροσήμους καί ἀπολύτως μεγαλυτέραν τήν θετικήν.

Διὰ $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{2\pi}{3}$, ἔχομεν $\chi'\chi'' > 0$, $\chi' + \chi'' > 0$.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικές, θετικές.

Διὰ $\frac{2\pi}{3} < \varphi < \pi$, ἔχομεν $\chi' \cdot \chi'' < 0$, $\chi' + \chi'' > 0$.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικές ἑτερόσήμους καί ἀπολύτως μεγαλυτέραν τήν θετικήν.

Διὰ $\pi < \varphi < \frac{4\pi}{3}$, ἔχομεν $\chi'\chi'' < 0$, $\chi' + \chi'' < 0$. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας ἑτεροσήμους καί ἀπολύτως μεγαλυτέραν τήν θετικήν.

τέραν τήν ἀρνητικήν.

Διά $\frac{4\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$, ἔχομεν $\chi' \chi'' > 0$, $\chi' + \chi'' < 0$. Ἡ

ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ἀρνητικάς.

Διά $\frac{5\pi}{3} < \varphi < 2\pi$, ἔχομεν $\chi' \chi'' < 0$, $\chi' + \chi'' < 0$.

Ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ρίζας πραγματικάς, ἑτερόσημους καί ἀπολύτως μεγαλυτέραν τήν ἀρνητικήν ρίζαν.

$$2\text{ου}) \quad \chi' + \chi'' = 2\eta\mu\varphi. \quad \chi' \cdot \chi'' = (2 - \sqrt{3}) (1 - 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων τούτων ἔχομεν :

$$4\eta\mu^2\varphi = (\chi' + \chi'')^2, \quad 4\sigma\upsilon\nu^2\varphi = 1 - \frac{\chi' \chi''}{2 - \sqrt{3}}.$$

Διά προσθέσεως κατά μέλη εὐρίσκομεν :

$$4(\eta\mu^2\varphi + \sigma\upsilon\nu^2\varphi) = (\chi' + \chi'')^2 + 1 - \frac{\chi' \chi''}{2 - \sqrt{3}},$$

$$3 = (\chi' + \chi'')^2 - \frac{\chi' \chi''}{2 - \sqrt{3}}$$

Ἡ εὐρεθεῖσα σχέσηis εἶναι ἡ ζητουμένη.

3ον) $OA = \chi'$, $OB = \chi''$. Τό μήκος τοῦ τμήματος AB

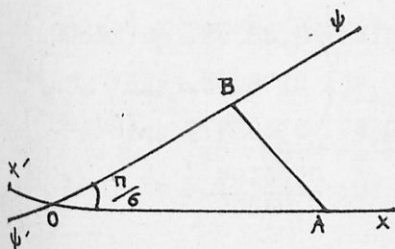
εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς .

$$AB^2 = \chi'^2 + \chi''^2 - 2\chi' \chi''$$

$$\cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} = (\chi' + \chi'')^2 -$$

$$2\chi' \chi'' - \frac{2\chi' \chi'' \sqrt{3}}{2} = 4\eta\mu^2\varphi -$$

$$-(2 + \sqrt{3}) (2 - \sqrt{3})$$

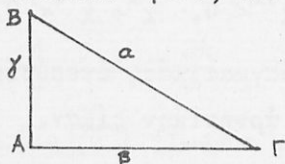


$$(1 - 4\sin^2 \varphi) = 4\eta\mu^2 \varphi - (4-3)(1-4\sin^2 \varphi) = 4\eta\mu^2 \varphi -$$

$$-1 + 4\sin^2 \varphi = 4(\eta\mu^2 \varphi + \sin^2 \varphi) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

$$\text{"Αρα } AB = + \sqrt{3}.$$

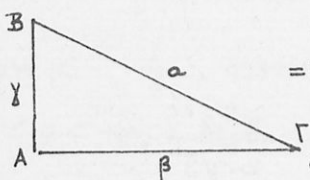
479) Δίδεται $\gamma = 3$, $\alpha = 6$. Ζητείται η γωνία B.



$$\sin B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{"Αρα } B = 60^\circ$$

480) Δίδονται $\gamma = 3,2$ και $\alpha = 5,6$. Ζητείται η γωνία B.



$$\sin B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3,2}{5,6} = \frac{4}{7} = 0,57143.$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,57358 = \sin 55^\circ \\ 0,57143 = \sin B \\ 0,57119 = \sin(55^\circ 10') \end{array} \right\} 10'$$

$$D = 0,00239$$

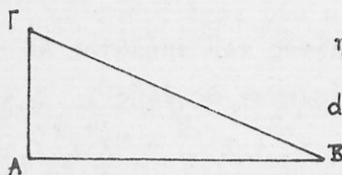
$$0,00239 \quad 10'$$

$$0,00215 \quad \chi$$

$$\chi = 10' \cdot \frac{0,00215}{0,00239} = 9'$$

Άρα η γωνία B = $55^\circ 9'$.

481) Δίδονται $\beta = 2,5$, $\alpha = 6,5$. Ζητείται η γωνία B.



$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2,5}{6,5} = 0,38462$$

$$\left. \begin{array}{l} 0,38268 = \eta\mu(22^\circ 30') \\ 0,38462 = \eta\mu B \\ 0,38537 = \eta\mu(22^\circ 40') \end{array} \right\} 10'$$

$$D = 0,00269$$

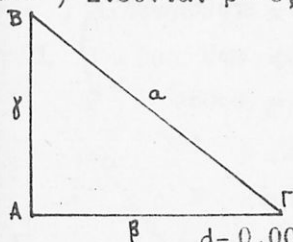
$$0,00269 \quad 10'$$

$$0,00194 \quad \chi;$$

$$\chi = 10' \cdot \frac{0,00194}{0,00269} = 7' 13''$$

Άρα η γωνία B = $22^\circ 37' 13''$.

482) Δίδονται $\beta=3,8$, $\alpha=4,8$. Ζητείται η γωνία B.



$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3,8}{4,8} = \frac{1,9}{2,4} = 0,79166$$

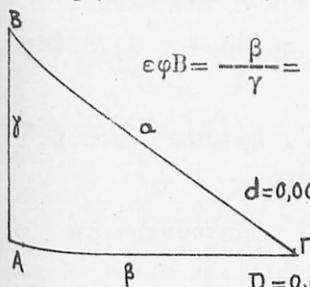
$$d = 0,00008 \left(\begin{array}{l} 0,79158 = \eta\mu(52^{\circ}20') \\ 0,79166 = \eta\mu B \\ 0,79335 = \eta\mu(52^{\circ}30') \end{array} \right) \downarrow 10'$$

$$0,00177 \quad 10'$$

$$0,00008 \quad \chi \quad \chi = 10 \cdot \frac{0,00008}{0,00177} = 27''$$

Άρα η γωνία B = $52^{\circ} 20' 27''$

483) Δίδονται $\beta=4$, $\gamma=3$. Ζητείται η γωνία B.



$$\epsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4}{3} = 1,33333$$

$$d = 0,00629 \left(\begin{array}{l} 1,32704 = \epsilon\varphi 52^{\circ} \\ 1,33333 = \epsilon\varphi B \\ 1,33511 = \epsilon\varphi(52^{\circ}10') \end{array} \right) \downarrow 10'$$

$$\begin{array}{ll} 0,00807 & 10' \\ 0,00629 & \chi; \end{array}$$

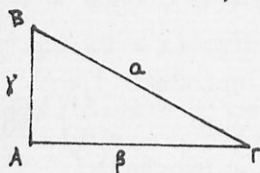
$$\chi = 10 \cdot \frac{0,00626}{0,00807} = 7' 45''$$

Άρα η γωνία B = $52^{\circ} 7' 45''$

484) Δίδονται $\beta=4,8$, $\gamma=2,5$. Ζητείται η γωνία B.

$$\epsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{4,8}{2,5} = 1,96000$$

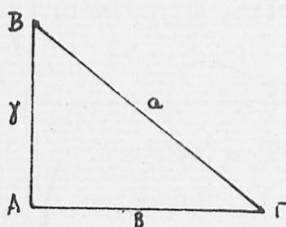
$$\begin{array}{l}
 d = 0,01142 \quad \left(\begin{array}{l} I,94858 = \varepsilon\varphi(62050') \\ I,96000 = \varepsilon\varphi B \\ I,96261 = \varepsilon\varphi 630 \end{array} \right) \quad IO \\
 D = 0,01403 \quad \begin{array}{ll} 0,01403 & IO' \\ 0,01142 & \chi \end{array}
 \end{array}$$



$$\chi = IO \cdot \frac{0,01142}{0,1403} = 8'8''$$

"Αρα η γωνία B = (62050') + (8'8'') = 620 58' 8''.

485) Δίδονται $\alpha = 4$, $\Gamma = 400$. Ζητούνται τά στοιχεῖα β , γ , B, τοῦ ὀρθογωνίου κατὰ τὴν A τριγώνου ABΓ.



$$B = A - \Gamma = 900 - 400 = 500.$$

$$\beta = \alpha \eta\mu B = 4 \cdot \eta\mu 500 = 4 \cdot 0,76604 = 3,06416.$$

$$\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma = 4 \cdot \eta\mu 400 = 4 \cdot 0,64279 = 2,57116.$$

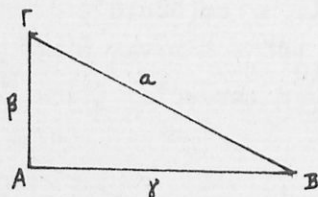
486) Δίδονται $\alpha = 160$, $\Gamma = 630 20'$. Ζητούνται τά

β , γ , B.

$$B = 900 - 630 20' = 260 40'.$$

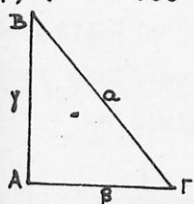
$$\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma = 160 \cdot \eta\mu(630 20') = 160 \cdot 0,89363 = 142,98$$

$$\beta = \alpha \sigma\upsilon\nu \Gamma = 160 \sigma\upsilon\nu(630 20') = 160 \cdot 0,44880 = 71,808.$$



487) Δίδονται $\alpha = 74,5$ $B = 380\ 45'$. Ζητούνται:

β, γ, Γ . $\Gamma = 900 - B = 900 (380\ 45') = 510\ 15'$



$$\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma = 74,5 \cdot \eta \mu (510\ 15')$$

$$\beta = \alpha \eta \mu B = 74,5 \cdot \eta \mu (380\ 45')$$

Ευρίσκομεν τὰ $\eta \mu (510\ 15')$,

$\eta \mu (380\ 45')$ ὡς ἐξῆς.

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta \mu (510\ 10') = 0,77897 \\ \quad \quad \quad + 0,00091 \\ \eta \mu (510\ 15') = ; 0,77988 \\ \eta \mu (510\ 20') = 0,78079 \end{array} \right) \quad D = 0,00182$$

$$0,00182 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5'$$

$$d = 0,00182 \cdot \frac{5}{10} = 0,00091$$

$$\text{Άρα } \eta \mu (510\ 15') = 0,77988$$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta \mu (380\ 40') = 0,62479 \\ \quad \quad \quad + 0,00113 \\ \eta \mu (380\ 45') = ; 0,62592 \\ \eta \mu (380\ 50') = 0,62706 \end{array} \right) D = 0,00227$$

$$0,00227 \quad 10' \quad d = ; \quad 5' \quad d = 0,00227 \cdot \frac{5}{10} = 0,00113$$

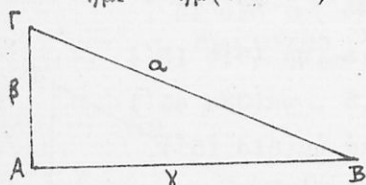
$$\text{Άρα } \eta \mu (380\ 45') = 0,62592.$$

$$\gamma = 74,5 \cdot 0,77988 = 58,1$$

$$\beta = 74,5 \cdot 0,62592 = 46,631.$$

488) Δίδονται $\gamma = 5$, $\Gamma = 650\ 30'$. Ζητούνται α, β, B .
 τῆς σχέσεως $\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma$, ἔχομεν :

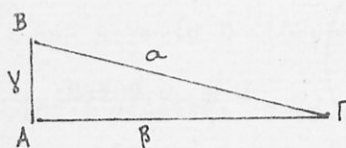
$$\alpha = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{5}{\eta\mu(65^{\circ}30')} = \frac{5}{0,90996} = 5,49$$



$$B = 90^{\circ} - (65^{\circ}30') = 24^{\circ}30'$$

$$\beta = \gamma \varepsilon\phi B = 5 \cdot \varepsilon\phi(24^{\circ}30') = 5 \cdot 0,45573 = 2,278$$

489) Δίδονται $\gamma = 45$, $B = 74^{\circ}45'$. Ζητούνται α, Γ, β .



$$\beta = \gamma \varepsilon\phi B = 45 \cdot \varepsilon\phi(74^{\circ}45')$$

Εύρισκομεν τὴν $\varepsilon\phi(74^{\circ}45')$ ὡς

ἑξῆς:

$$\varepsilon\phi(74^{\circ}40') = 3,64705$$

$$+ 0,02102$$

$$\varepsilon\phi(74^{\circ}45') = 3,66807$$

$$\varepsilon\phi(74^{\circ}50') = 3,68909$$

$$\left(\begin{array}{l} 5' \\ 10' \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} + 0,02102 \\ \varepsilon\phi(74^{\circ}45') = 3,66807 \\ \varepsilon\phi(74^{\circ}50') = 3,68909 \end{array} \right) D = 0,04204$$

$$0,04204 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5' \quad d = 0,04204 \cdot \frac{5}{10} = 0,02102$$

$$\text{Ἄρα } \beta = 45 \cdot 3,66807 = 165$$

$$\Gamma\omega\nu\acute{\iota}\alpha \Gamma = 90^{\circ} - (74^{\circ}45') = 15^{\circ}15'$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $\gamma = \alpha \eta\mu\Gamma$, ἔχομεν :

$$\alpha = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = \frac{45}{\eta\mu(15^{\circ}15')}$$

Εύρισκομεν τὸ $\eta\mu(15^{\circ}15')$ ὡς ἑξῆς.

$$\left(\begin{array}{l} 5' \\ 10' \end{array} \right) \left(\begin{array}{l} \eta\mu(15^{\circ}10') = 0,26163 \\ + 0,00140 \\ \eta\mu(15^{\circ}15') = 0,26303 \\ \eta\mu(15^{\circ}20') = 0,26443 \end{array} \right) D = 0,00280$$

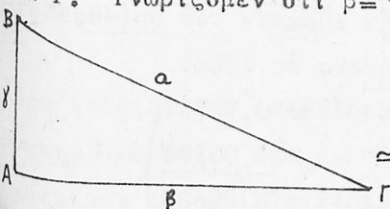
$$0,00280 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 5' \quad d = 0,00280 \cdot \frac{5}{10} = 0,00140$$

$$\text{"Αρα } \eta\mu(150 \ 15') = 0,26303$$

$$\text{"Επομένως } \alpha = \frac{45}{0,26303} \approx 171$$

490) Δίδονται $\beta = 9$, $\alpha = 10$, $A = 90^\circ$. Ζητείται η γωνία Γ . Γνωρίζομεν ότι $\beta = \eta\mu B = \alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma$.

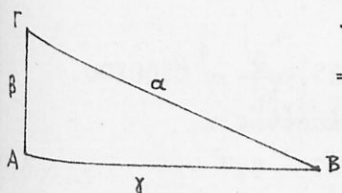


"Αρα :

$$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{9}{10} = 0,9 \quad \approx$$

$$\approx \sigma\upsilon\nu(250 \ 50')$$

491) Δίδονται $\beta = 5$, $\alpha = 12$, $A = 90^\circ$. Ζητείται η γωνία Γ . Γνωρίζομεν ότι $\beta = \eta\mu B = \alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma$.



$$\text{"Αρα } \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{12} = 0,41666.$$

$$\begin{aligned} d &= 0,00068 \\ D &= 0,00265 \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} 0,41734 &= \sigma\upsilon\nu(650 \ 20') \\ 0,41666 &= \sigma\upsilon\nu\Gamma \\ 0,41449 &= \sigma\upsilon\nu(650 \ 30') \end{aligned} \right) 10'$$

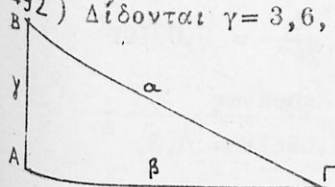
$$0,00265 \quad 10'$$

$$0,00068 \quad \chi$$

$$\chi = 10' \cdot \frac{0,00068}{0,00265} = 2'34''$$

$$\text{"Αρα τόξον } \Gamma = (650 \ 20') + (2'34'') = 650 \ 22' \ 34''$$

492) Δίδονται $\gamma = 3,6$, $\alpha = 7,2$. Ζητείται η γωνία Γ .

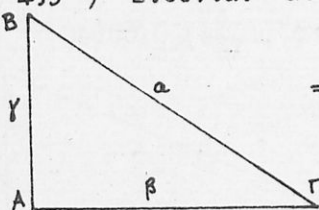


Γνωρίζομεν ότι $\gamma = \alpha \eta\mu\Gamma$,

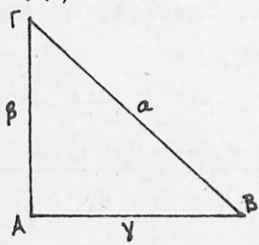
$$\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3,6}{7,2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{"Αρα γωνία } \Gamma = 30^\circ.$$

493) Δίδονται: $\alpha = 5$, $\Gamma = 360$. Ζητούνται αἱ β, γ .
 Γνωρίζομεν ὅτι: $\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma = 5 \eta \mu 360$
 $= 5 \cdot 0,58779 = 2,9389$.
 Ἐπίσης $\beta = \alpha \eta \mu B = \alpha \sigma \nu \Gamma = 5 \cdot \sigma \nu$
 $360 = 5 \cdot 0,80902 = 4,045$.



494) Δίδονται: $\alpha = 9,2$, $B = 460 45'$. Ζητούνται αἱ β .
 ἔχομεν $\beta = \alpha \eta \mu B = 9,2 \eta \mu(460 45')$
 Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ $\eta \mu(460 450)$
 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:



$\eta \mu(460 40') = 0,72737$
 $\eta \mu(460 45') = 0,72837$
 $\eta \mu(460 50') = 0,72937$

$$0,00200 \quad 10' \quad d = ; \quad 5' \quad d = 0,00200 \cdot \frac{5}{10} = 0,00100.$$

Ἄρα $\eta \mu(460 45') = 0,72837$. Ἐπομένως :

$$\beta = 9,2 \cdot 0,72837 = 6,7$$

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι: $\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma = \alpha \sigma \nu B$.

Ἄρα ἔχομεν: $\gamma = 9,2 \cdot \sigma \nu(460 45')$.

$$10' \left(\begin{array}{l} 5' \left(\begin{array}{l} \sigma \nu(460 40') = 0,68624 \\ -0,00106 \\ \sigma \nu(460 45') = 0,68518 \\ \sigma \nu(460 50') = 0,68412 \end{array} \right) \right) D = 0,00212$$

$$0,00212 \quad 10' \quad d = ; \quad 5' \quad d = 0,00212 \cdot \frac{5}{10} = 0,00106$$

Ἄρα $\sigma \nu(460 45') = 0,68518$ Ἐπομένως

$$\gamma = 9,2 \cdot 0,68518 = 6,3$$

495) Δίδονται: $\alpha = 60,5$, $\Gamma = 27034'$. Ζητούνται ατ β, γ .
 Έχομεν $\gamma = \alpha \eta\mu\Gamma = 60,5 \cdot \eta\mu(27034')$

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(27030') = 0,46175 \\ \quad \quad \quad + 0,00103 \\ \hline \eta\mu(27034') = ; 0,46278 \\ \eta\mu(27040') = 0,46433 \end{array} \right) D = 0,00258$$

$$0,00258 \quad 10'$$

$$d = ; \quad 4'$$

$$d = 0,00258 \cdot \frac{4}{10} = 0,00103$$

Άρα $\gamma = 60,5 \cdot 0,46278 = 28$ Έχομεν επίσης :

$\beta = \alpha \eta\mu B = \alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma$. Άρα $\beta = 60,5 \cdot \sigma\upsilon\nu(27034')$

Ορίσκομεν τό $\sigma\upsilon\nu(27034')$ ως εξής:

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma\upsilon\nu(27030') = 0,88701 \\ \quad \quad \quad - 0,00054 \\ \hline \sigma\upsilon\nu(27034') = ; 0,88647 \\ \sigma\upsilon\nu(27040') = 0,88566 \end{array} \right) D = 0,00135$$

$$0,00135 \quad 10' \quad d = 0,00135 \cdot \frac{4}{10} = 0,00054$$

$$d = ; \quad 4'$$

Άρα $\sigma\upsilon\nu(27034') = 0,88647$

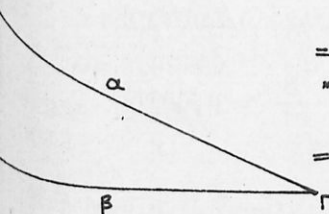
Επομένως $\beta = 60,5 \cdot 0,88647 \approx 53,63$

496) Δίδονται: $\gamma = 4,8$, $B = 720$. Ζητείται η υπότεινουσα

α . Γνωρίζομεν ότι $\gamma = \alpha \eta\mu\Gamma =$
 $= \alpha \sigma\upsilon\nu B$.

$$\text{Άρα } \alpha = \frac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu B} = \frac{4,8}{\sigma\upsilon\nu(720)} = \frac{4,8}{0,30902} =$$

$$= 15,5.$$



497) Δίδονται $\beta = 160$, $\Gamma = 350\ 24'$. Ζητείται ἡ ὑπο-

νύσσω α . Γνωρίζομεν ὅτι $\beta = \alpha \eta \mu \Gamma$.

$= \alpha \sigma \nu \Gamma$. Ἄρα .

$$\alpha = \frac{\beta}{\sigma \nu \Gamma} = \frac{160}{\sigma \nu (350\ 24')}$$

Εὐρίσκομεν τό $\sigma \nu (350\ 24')$ ὡς
ἐξῆς:

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma \nu (350\ 20') = 0,81580 \\ \sigma \nu (350\ 24') = ; 0,81513 \\ \sigma \nu (350\ 30') = 0,81412 \end{array} \right) \begin{array}{l} - 0,00067 \\ \hline \end{array} D = 0,00168$$

$$0,00168 \quad 10' \quad d = 0,00168 \cdot \frac{4}{10} = 0,00067$$

Ἄρα $\sigma \nu (350\ 24') = 0,81513$ αὐ ἐπομένως:

$$\alpha = \frac{160}{0,81513} = 196,4$$

498) Δίδονται $\gamma = 90$, $B = 420\ 18$. Ζητείται ἡ ὑπὸ τείνου

α . Γνωρίζομεν ὅτι $\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma = \alpha \sigma \nu B$.

$$\text{Ἄρα } \alpha = \frac{\gamma}{\sigma \nu B} = \frac{90}{\sigma \nu (420\ 18')}$$

Εὐρίσκομεν τό $\sigma \nu (420\ 18')$ κατὰ τὰ γνωστά:

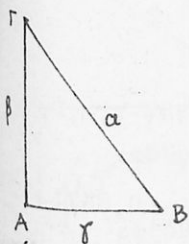
$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma \nu (420\ 10') = 0,74119 \\ \sigma \nu (420\ 18') = ; 0,73963 \\ \sigma \nu (420\ 20') = 0,73924 \end{array} \right) \begin{array}{l} - 0,00156 \\ \hline \end{array} D = 0,00195$$

$$0,00195 \quad 10' \quad d = 0,00195 \cdot \frac{8}{10} = 0,00156$$

Ἄρα $\sigma \nu (420\ 18') = 0,73963$.

$$\text{Ἐπομένως ἔχομεν } \alpha = \frac{90}{0,73963} \approx 121,6$$

499) Δίδονται $\beta = 4,5$, $\gamma = 3,5$, $A = 90^\circ$. Ζητούνται α, B, Γ . Γνωρίζομεν ὅτι $\epsilon\phi B = \frac{\beta}{\gamma}$.



$$\text{Άρα } \epsilon\phi B = \frac{4,5}{3,5} = 1,28571.$$

Υπολογίζομεν τὴν $\epsilon\phi B$ κατὰ τὰ γνωστά:

$$d = 0,00577 \left(\begin{array}{cc} 1,27994 & \epsilon\phi 52^\circ \\ 1,28571 & \epsilon\phi B \end{array} \right) 10'$$

$$D = 0,00770 \left(\begin{array}{cc} 1,27994 & \epsilon\phi 52^\circ \\ 1,28764 & \epsilon\phi(52^\circ 10') \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} 0,00770 \quad 10' \\ 0,00770 \quad \chi; \end{array}$$

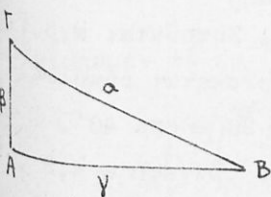
$$\chi = 10 \cdot \frac{0,00577}{0,00770} = 7'30''$$

$$\text{Άρα } B = 52^\circ 7'30''$$

$$\text{καὶ } \Gamma = 90^\circ - (52^\circ 7'30'') = 37^\circ 52'30''$$

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{4,5^2 + 3,5^2} = \sqrt{20,25 + 12,25} = \sqrt{32,5} = 5,7.$$

500) Δίδονται $\beta = 3$, $\gamma = 6,5$, $A = 90^\circ$. Ζητούνται τὰ α, B, Γ . Γνωρίζομεν ὅτι $\epsilon\phi B = \frac{\beta}{\gamma}$.



$$\text{Άρα, } \epsilon\phi B = \frac{3}{6,5} = 0,46154.$$

Υπολογίζομεν τὴν $\epsilon\phi B$ κατὰ τὰ γνωστά.

$$D = 0,00123 \left(\begin{array}{cc} 0,46277 = \epsilon\phi(24^\circ 50') \\ 0,46154 = \epsilon\phi B \\ 0,45924 = \epsilon\phi(24^\circ 40') \end{array} \right) 10'$$

$$d = 0,00230$$

$$\begin{array}{l} 0,00230 \quad 10' \\ 0,00123 \quad \chi; \end{array}$$

$$\chi = 10 \cdot \frac{0,00123}{0,00230} = 5'47''$$

$$\text{Άρα ἡ γωνία } B \text{ ἰσοῦται μέ } 24^\circ 45'47''$$

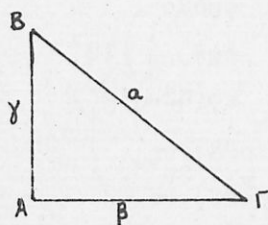
$$\text{Ἡ γωνία } \Gamma \text{ εὐρίσκεται ὡς ἑξῆς.}$$

$$\Gamma = 90^\circ - (24^\circ 45' 47'') = 65^\circ 14' 13''.$$

Ἡ ὑποτείνουσα εἶναι:

$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{3^2 + 6,5^2} = \sqrt{51,25} = 7,15$$

501) Δίδονται $\alpha = 5,6$, $\beta = 4,8$. Ζητοῦνται γ, B, Γ .



Ἔχομεν:

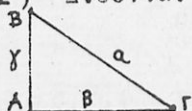
$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{4,8}{5,6} = \frac{6}{7} = 0,85714$$

$\approx \eta\mu 59^\circ$. Ἀρα $B = 59^\circ$, $\Gamma = 90^\circ -$

$$= 31^\circ, \gamma = \alpha \eta\mu \Gamma = 5,6 \cdot 0,51504$$

$$\approx 2,884.$$

502) Δίδονται $\beta = 7,5$, $\Gamma = 36^\circ$. Ζητοῦνται α, γ, B .



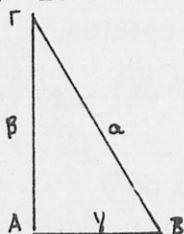
Ἔχομεν ὅτι $B = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

$$\gamma = \beta \epsilon\varphi \Gamma = 7,5 \cdot \epsilon\varphi 36^\circ = 7,5 \cdot$$

$$0,72654 = 5,45.$$

$$\beta = \alpha \eta\mu B, \alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{7,5}{\eta\mu 54^\circ} = \frac{7,5}{0,80902} = 7,26.$$

503) Δίδονται $\gamma = 4,2$, $B = 50^\circ 20'$. Ζητοῦνται α, β, Γ .



Ἡ γωνία Γ εὐρίσκεται εὐκόλως:

$$\Gamma = 90^\circ - 50^\circ 20' = 39^\circ 40'.$$

Ἐπίσης ἔχομεν: $\beta = \gamma \epsilon\varphi B = 4,2 \cdot$

$$\epsilon\varphi(50^\circ 20') = 4,2 \cdot 1,20593 = 5,064.$$

Ἐπίσης: $\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma,$

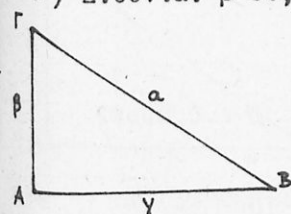
$$\alpha = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = \frac{4,2}{\eta\mu(39^\circ 40')} =$$

$$= \frac{4,2}{0,63832} = 6,58.$$

504) Δίδονται $\beta=36$, $\Gamma=590\ 7'$. Ζητούνται α, γ, B .

Έχομεν ότι $\gamma = \beta \epsilon\phi\Gamma = 36 \cdot \epsilon\phi(590\ 7')$
(590 7').

Εύρισκομεν τήν $\epsilon\phi\Gamma$ κατά τὰ γνω-
στά.



$$10' \left(\begin{array}{l} \epsilon\phi 590 = 1,66428 \\ \quad + 0,00771 \\ \hline \epsilon\phi(590 7') = 1,67199 \\ \epsilon\phi(590 10') = 1,67530 \end{array} \right) \quad D = 0,01102$$

$$0,01102 \quad 10' \quad d = 0,01102 \cdot \frac{7}{10} = 0,00771$$

Άρα, $\epsilon\phi(590 7') = 1,67199$. Έπομένως έχομεν:

$$\gamma = 36 \cdot 1,67199 \approx 60,2$$

Γνωρίζομεν ότι: $B = 900 - (590 7') = 300 53'$. Διά τὴν
εὐρωμεν τήν ὑποτείνουσα α , μεταχειριζόμεθα τὸν τύπον:

$$\beta = \alpha \eta\mu B, \quad \alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{36}{\eta\mu(300 53')}.$$

Εύρισκομεν τό $\eta\mu(300\ 53')$ κατά τὰ γνωστά.

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(300 50') = 0,51254 \\ \quad + 0,00075 \\ \hline \eta\mu(300 53') = 0,51329 \\ \eta\mu 310 = 0,51504 \end{array} \right) \quad D = 0,00250$$

$$0,00250 \quad 10' \quad d = 0,00250 \cdot \frac{3}{10} = \frac{0,00750}{10} =$$

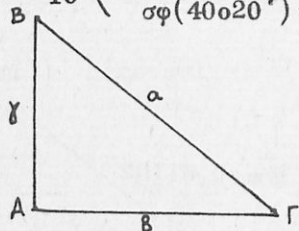
$$= 0,00075. \text{ Άρα } \alpha = \frac{36}{0,51329} \approx 70.$$

505) Δίδονται $\gamma=80$, $\Gamma=400\ 14'$. Ζητούνται α, β, B .

Έχομεν ότι $\beta = \gamma \epsilon\phi B = \gamma \sigma\phi\Gamma = 80 \cdot \sigma\phi(400 14')$.

Ευρίσκομεν τὴν σφΓ κατὰ τὰ γνωστά

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma\phi(40 \circ 10') = 1,18474 \\ - 0,00279 \\ \hline \sigma\phi(40 \circ 14') = 1,18195 \\ \sigma\phi(40 \circ 20') = 1,17777 \end{array} \right) \quad D = 0,00697$$



$$d = \frac{0,00697}{4'} \cdot \frac{10'}{10} = 0,002788 \quad \eta \quad 0,00279$$

Επομένως ἔχομεν $\beta = 80 \cdot 1,18195 = 94,556$.Ἡ γωνία $B = 90 - (40 \circ 14') = 49 \circ 46'$ Ἐκ τοῦ τύπου $\gamma = \alpha \eta \mu \Gamma$ ἔχομε $\alpha = \frac{\gamma}{\eta \mu \Gamma} = \frac{80}{\eta \mu(40 \circ 14')}$ Τό $\eta \mu \Gamma$ εὐρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά:

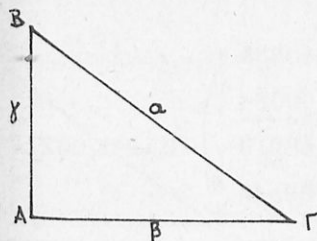
$$10' \left(\begin{array}{l} \eta \mu(40 \circ 10') = 0,64501 \\ + 0,00089 \\ \hline \eta \mu(40 \circ 14') = 0,64590 \\ \eta \mu(40 \circ 20') = 0,64723 \end{array} \right) \quad D = 0,00222$$

$$d = \frac{0,00222}{4'} \cdot \frac{10'}{10} = 0,000222 \quad \eta \quad 0,00089$$

$$\alpha = \frac{80}{0,64590} = 123,9$$

506) Δίδονται $\beta = 320$, $B = 52 \circ 47'$. Ζητοῦνται α, γ .Ἔχομεν ὅτι $\gamma = \beta \epsilon \phi \Gamma = \beta \sigma \phi B = 320$, $\sigma \phi(52 \circ 347')$

$$10' \left(\begin{array}{l} \sigma \phi(52 \circ 40') = 0,76272 \\ - 0,00322 \\ \hline \sigma \phi(52 \circ 47') = 0,75950 \\ \sigma \phi(52 \circ 50') = 0,75812 \end{array} \right) \quad D = 0,00460$$



$$0,00460 \quad 10' \\ d = ; \quad 7'$$

$$d = 0,00460 \cdot \frac{7}{10} = \frac{0,03220}{10} = 0,00322.$$

Άρα $\gamma = 320 \cdot 0,75950 \approx 243.$

Ἡ γωνία $\Gamma = 90^\circ - (52^\circ 47') = 37^\circ 13'$

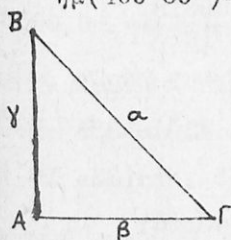
$$\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{320^2 + 243^2} = \sqrt{102400 + 59049} = \sqrt{161,449} = 401,8.$$

507) Δίδονται $\alpha=7,2, \Gamma=46^\circ 26'$. Ζητούνται β, γ, B .

Γνωρίζομεν ὅτι $\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma = 7,2 \cdot \eta\mu (46^\circ 26')$.

Εὐρίσκομεν τό $\eta\mu(46^\circ 26')$ κατὰ τὰ γνωστά:

$$10 \left(\begin{array}{l} \eta\mu(46^\circ 20') = 0,72337 \\ \eta\mu(46^\circ 26') = 0,72457 \\ \eta\mu(46^\circ 30') = 0,72537 \end{array} \right) \quad D = 0,00200$$



$$0,00200 \quad 10' \\ d = ; \quad 6'$$

$$d = 0,00200 \cdot \frac{6}{10} = \frac{0,01200}{10} = 0,00120$$

Επομένως, $\gamma = 7,2 \cdot 0,72457 \approx 5,217.$

Ἡ γωνία B ἴσοῦται μέ $90^\circ - (46^\circ 26') = 43^\circ 34'$

Ἡ πλευρά $\beta = \alpha \eta\mu B = 7,2 \cdot \eta\mu (43^\circ 34').$

Τό $\eta\mu(43^\circ 34')$ εὐρίσκεται κατὰ τὰ γνωστά :

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(430\ 30') = 0,68835 \\ \quad \quad \quad + 0,00084 \\ \eta\mu(430\ 34') = 0,68919 \\ \eta\mu(430\ 40') = 0,69046 \end{array} \right) \quad D = 0,00211$$

$$0,00211 \quad 10' \quad d = 0,00211 \cdot \frac{4}{10} = 0,000844 \quad \eta$$

$$d = ; \quad 4' \quad 0,00084.$$

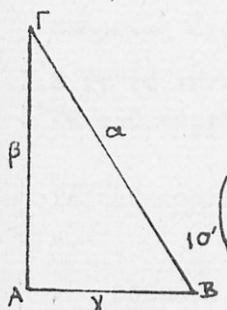
"Αρα $\beta = 7,2 \cdot 0,68919 = 4,962$.

508) Δίδονται $\alpha = 86,75$, $B = 560\ 42'$. Ζητούνται β, γ .

"Εχομεν $\beta = \alpha \eta\mu B = 86,75 \cdot \eta\mu(560\ 42')$.

Εύρισκομεν κατ'ἀρχάς

τό $\eta\mu B$.



$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(560\ 40') = 0,83549 \\ \quad \quad \quad + 0,00032 \\ \eta\mu(560\ 42') = ; 0,83581 \\ \eta\mu(560\ 50') = 0,83708 \end{array} \right) \quad D = 0,00159$$

$$0,00159 \quad 10' \quad d = 0,00159 \cdot \frac{2}{10} = \frac{0,00318}{10} = 0,000318$$

$$d = ; \quad 2' \quad 0,00032.$$

"Αρα $\beta = 86,75 \cdot 0,83581 \approx 72,5$

"Εχομεν επίσης ότι: $\Gamma = 900 - (560\ 42') = 330\ 18'$.

Η πλευρά γ ισοῦται μέ $\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma = 86,75 \cdot \eta\mu(330\ 18')$.

Εύρισκομεν τό $\eta\mu(330\ 18')$ κατά τά γνωστά:

$$10' \left(\begin{array}{l} \eta\mu(330\ 10') = 0,54708 \\ \quad \quad \quad + 0,00194 \\ \eta\mu(330\ 18') = ; 0,54902 \\ \eta\mu(330\ 20') = 0,54951 \end{array} \right) \quad D = 0,00243$$

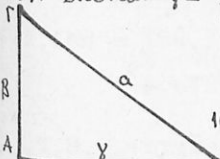
$$0,00243 \quad 10' \quad d = 0,00243 \cdot \frac{8}{10} = \frac{0,01944}{10} = 0,001944 \quad \eta$$

$$d = ; \quad 8' \quad 0,00194.$$

"Αρα $\gamma = 86,75 \cdot 0,54902 \approx 47,625$.

509) Δίδονται $\gamma = 34,6$, $\Gamma = 38^\circ 18'$. Ζητούνται τα α, β, B . Έχομεν δ-

$\pi \quad \beta = \gamma \epsilon\phi \beta = \gamma \epsilon\phi \Gamma = 34,6 \cdot \epsilon\phi (38^\circ 18')$
 $\epsilon\phi (38^\circ 10') = 1,27230$
 $\epsilon\phi (38^\circ 18') = 1,26623$
 $\epsilon\phi (38^\circ 20') = 1,26471$
 $D = 0,00759$

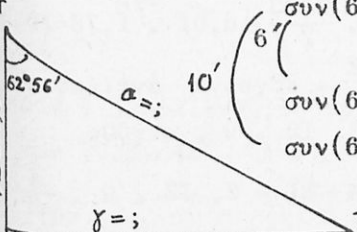


$d = 0,00759 \cdot \frac{10'}{8'} = \frac{0,06072}{10} = 0,006072$ ή $0,00607$. Άρα: $\beta =$
 $= 34,6 \cdot 1,26623 = 43,811$. Η γωνία $B = 90^\circ - (38^\circ 18') = 51^\circ 42'$.
 Η υπότεινους $\alpha = \sqrt{\beta^2 + \gamma^2} = \sqrt{43,8^2 + 34,6^2} = 55,82$.

510) Δίδονται $\beta = 276,5$, $\Gamma = 62^\circ 56'$. Ζητούνται α, γ, B . Έκ της σχέσεως $\beta = \alpha \sigma\upsilon\nu \Gamma$ έχομεν $\alpha = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$.

Άρα (I) $\alpha = \frac{276,5}{\sigma\upsilon\nu (62^\circ 56')}$. Υπολογίζομεν ἐκ τῶν πινά-

$\sigma\upsilon\nu (62^\circ 50') = 0,45658$
 $\sigma\upsilon\nu (62^\circ 56') = 0,45503$
 $\sigma\upsilon\nu (62^\circ 60') = 0,45399$
 $D = 0,00259$



$d = 0,00259 \cdot \frac{6}{10} = \frac{0,01554}{10} = 0,001554$

Δηλαδή $\sigma\upsilon\nu (62^\circ 56') = 0,45503$. Αντικαθιστῶμεν εἰς τὴν

(I) καὶ ἔχομεν :

$$\alpha = \frac{276,5}{0,45503} = 607,65$$

Έκ τῆς $\gamma = \beta \epsilon\phi \Gamma$ ἔχομεν $\gamma = 276,5 \cdot \epsilon\phi (62^\circ 56')$ (2)

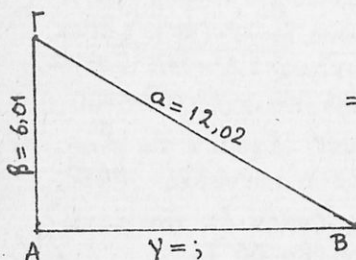
Έκ τῶν πινάκων ὑπολογίζομεν τὴν $\epsilon\phi (62^\circ 56')$.

$\epsilon\phi (62^\circ 50') = 1,94858$
 $\epsilon\phi (62^\circ 56') = 1,95700$
 $\epsilon\phi (62^\circ 60') = 1,96261$
 $D = 0,01403$

$d = 0,01403 \cdot \frac{6}{10} = \frac{0,08418}{10} = 0,008418$
 ή $0,00842$.

Δηλαδή $\epsilon\varphi(62^{\circ} 56') = 1,95700$ τήν ὁποίαν ἀντικαθιστῶ-
μεν εἰς τήν (2) καί ἔχομεν $\gamma = 276,5 \cdot 1,957 = 541,11$
καί $B = 90 - \Gamma \quad B = 90 - (62^{\circ} 56') = 27^{\circ} 4'$

511) Δίδονται $\beta = 6,01$, $\alpha = 12,02$. Ζητοῦνται γ, B, Γ .



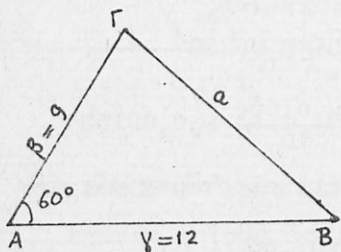
Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{6,01}{12,02} = \frac{1}{2}$. Ἐπομένως $\eta\mu B = \eta\mu 30^{\circ}$.

Ἀρα $B = 30^{\circ}$, $\Gamma = 90^{\circ} - B$ καί $\Gamma = 60^{\circ}$

Ἐν τῇς σχέσεως $\gamma = \alpha \eta\mu \Gamma$ ἔχομεν
 $\gamma = 12,02 \cdot \eta\mu 60^{\circ} = 12,02 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$= 12,02 \cdot \frac{1,73}{2} = 6,01 \cdot 1,73 = 10,41$$

512) Ἐκ τῇς σχέσεως $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\cos A$ ἀντικαθισ-
τῶντες ἔχομεν: $\alpha^2 = 12^2 + 9^2 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \cos 60^{\circ}$



$$\eta \alpha^2 = 144 + 81 - 2 \cdot 12 \cdot 9 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\eta \alpha^2 = 225 - 108$$

$$\eta \alpha^2 = 117$$

$$\alpha = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$$

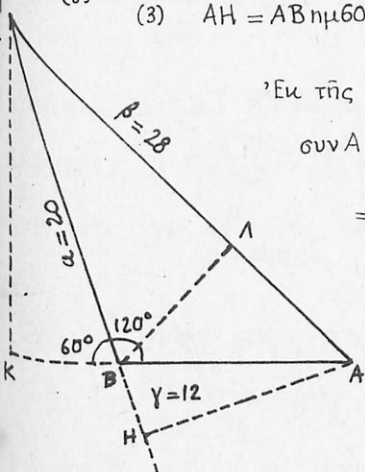
513) Δίδονται $\alpha = 20$, $\beta = 28$, $\gamma = 12$. $B = ;$, $\Gamma K = ;$
 $BA = ;$, $AI = ;$ Ἐκ τῇς σχέσεως $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\cos B$
ἔχομεν $2\alpha\gamma\cos B = \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2$ ἢ $\cos B = \frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$ καί

$$(I) \cos B = \frac{400 + 144 - 784}{2 \cdot 20 \cdot 12} = \frac{544 - 784}{480} = \frac{-240}{480} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos B = -\cos 60^{\circ} = \cos(180^{\circ} - 60^{\circ}) = \cos 120^{\circ} \quad B = 120^{\circ}$$

$$(2) \Gamma K = \Gamma B \eta \mu 60^\circ \quad \eta \quad \Gamma K = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$(3) \quad (3) \quad AH = AB \eta \mu 60^\circ \quad \eta \quad AH = 12 \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$



Ἐκ τῆς $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos A$ ἔχομεν

$$\cos A = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - a^2}{2\beta\gamma} \quad \cos A =$$

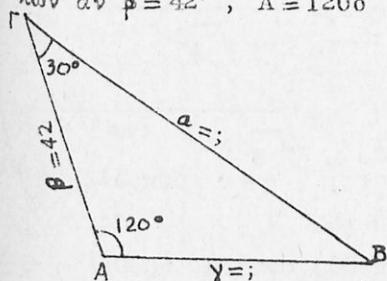
$$= \frac{784 + 144 - 400}{2 \cdot 28 \cdot 12} = \frac{928 - 400}{672} =$$

$$= \frac{598}{672} \quad \cos A = 0,88985 > 0,70711$$

→ $A < 45^\circ$. Ἐκ τῶν πινάκων ὑπολογίζομεν ὅτι $A = 38^\circ 19'$.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου BAH ἔχομεν $BL = BA \eta \mu (38^\circ 19') = 12 \cdot 0,62 = 7,44$

514) Νά ἐπιλυθῇ τό τρίγωνον ABΓ . ἄνευ χρήσεως πινάκων ἂν $\beta = 42^{\mu}$, $A = 120^\circ$ καί $\Gamma = 30^\circ$.



Λύσις.- Δίδονται $\beta = 42^{\mu}$

$A = 120^\circ$, $\Gamma = 30^\circ$. Ζητοῦνται:

α , β , B.

Ἐκ τῆς σχέσεως $B = 180 -$

$-(A + \Gamma)$ ἔχομεν $B = 180 -$

$-150^\circ = 30^\circ$.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\alpha}{\eta \mu A} = \frac{\beta}{\eta \mu B}$ ἔχομεν $\frac{\alpha}{\eta \mu 120^\circ} = \frac{42}{\eta \mu 30^\circ}$

$$\text{καί } \alpha = \frac{42 \cdot \eta \mu 120^\circ}{\eta \mu 30^\circ} \quad \eta \quad \alpha = \frac{42 \eta \mu 60^\circ}{\eta \mu 30^\circ} = \frac{42 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$\eta \quad \alpha = 42 \sqrt{3}$ Ἐπειδὴ δέ τό τρί-

γωνον εἶναι ἰσοσκελές θά εἶναι $\beta = \gamma = 42^{\mu}$.

515) Δίδονται $\gamma = \sqrt{6}$, $A = 45^\circ$, $B = 75^\circ$.

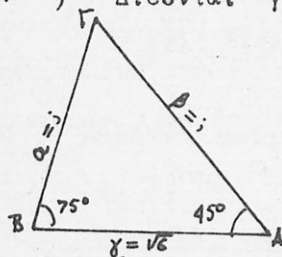
Ζητούνται α, β, Γ .

Λύσεις.

$$\Gamma = 180 - (A + B)$$

$$\Gamma = 180 - (120)$$

$$\Gamma = 60^\circ$$



ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{\alpha}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 60^\circ} \quad \text{ἔχομεν,}$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{6} \cdot \eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

ὁμοίως ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ἔχομεν

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\sqrt{6} \cdot \eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 60^\circ} = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4} = \frac{\sqrt{6} (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{2} (\sqrt{6} + \sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{12} + 2}{2} = \sqrt{3} + 1. \end{aligned}$$

$$\eta\mu 75^\circ = \eta\mu(45^\circ + 30^\circ) = \eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

516) Δίδονται $\alpha = 60$, $\beta = 60\sqrt{3}$, $B = 60^\circ$. Ζητούνται γ, A, Γ . Λύσεις.-

Ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{\alpha}{\eta\mu B} = \frac{\beta}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{ἔχομεν:}$$

$$\frac{60}{\eta\mu A} = \frac{60 \sqrt{3}}{\eta\mu B} \quad \text{Άρα } \eta\mu A = \frac{60 \eta\mu 60^\circ}{60 \sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

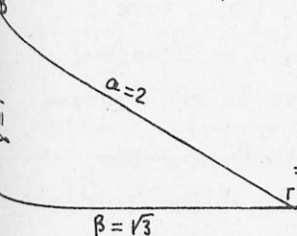
ή $\eta\mu A = \eta\mu 30^\circ$. Άρα $A = 30^\circ$ ή λύσεις $A = 150^\circ$ αποκλείεται. Η $\Gamma = 180 - (A + B) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

και τότε $\gamma = \frac{\alpha}{\eta\mu 30^\circ}$ ή $\gamma = \frac{60}{\frac{1}{2}} = 120^\mu$.

517) Δίδονται $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = 1$. Ζητούνται

A, B, Γ. Έκ τῆς $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\eta\Gamma$ έχουμε:

$$4 = 3 + 1 - 2\sqrt{3} \cdot 1 \sigma\upsilon\eta A \quad \text{ή } \sigma\upsilon\eta A = 0 \text{ και } A = 90^\circ.$$



Επομένως τό τρίγωνον θά εἶναι

ὀρθογώνιον στήν Α. Τότε $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\eta\mu B = \eta\mu 60^\circ$. Άρα $B = 60^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$

518) Δίδονται $\alpha = \sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{2}$, $A = 60^\circ$.

Ζητούνται β, Β, Γ. Λύσεις:

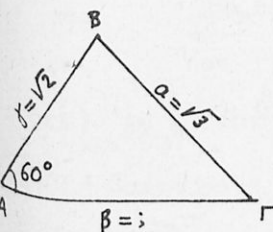
Έκ τῆς σχέσεως $\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

έχουμεν:

$$\eta\mu \Gamma = \frac{\gamma \eta\mu A}{\alpha} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$= \eta\mu 45^\circ$. Άρα $\Gamma = 45^\circ$ ή $\Gamma = 135^\circ$ απορ-

ρίπτεται.



$$\eta B = 180^\circ - (A + \Gamma) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

$$\text{Ἐκ τῆς σχέσεως } \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} \quad \text{ἔχομεν } \beta = \frac{\alpha \eta\mu B}{\eta\mu A} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} \eta\mu 75^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \quad \text{καί } \beta = 2\eta\mu 75^\circ = 2 \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

519) Ἐνός τριγώνου ABΓ αἱ γωνίαι του εἶναι **ἀνάλογοι** τῶν ἀριθμῶν 9,13,14, ἡ δέ πλευρά ἢ ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερας γωνίας ἴση πρὸς 150^μ. Νά ἐπιλυθῇ τό τρίγωνον.

Λύσις

Ἄν αἱ γωνίαι του εἶναι $9\chi^\circ$, $13\chi^\circ$, $14\chi^\circ$; τότε :

$9\chi^\circ + 13\chi^\circ + 14\chi^\circ = 180^\circ$, καί $\chi^\circ = 5^\circ$. Ἐπομένως αἱ γωνίαι του εἶναι 45°, 65°, 70°. Τότε ἐκ τῆς σχέσεως

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad \text{ἔχομεν ἂν } \alpha = 150^\mu, A = 70^\circ,$$

$$B = 65^\circ, \quad \Gamma = 45^\circ \quad \frac{150}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 65^\circ} = \frac{\Gamma}{\eta\mu 45^\circ} \quad \text{καί}$$

$$\beta = \frac{150 \eta\mu 65^\circ}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{150 \cdot 0,90631}{0,93969} = 144,68$$

$$\gamma = \frac{150 \eta\mu 45^\circ}{\eta\mu 70^\circ} = \frac{150 \cdot 0,70711}{0,93963} = 112,8$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΟΙ

520) Νά αποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις .

$\eta\mu^6 \chi + \sigma\upsilon\nu^6 \chi + 4\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τό-
ξου χ . Λῦσις .

$$\begin{aligned} & \text{Ἡ } \eta\mu^6 \chi + \sigma\upsilon\nu^6 \chi + 3\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi = (\eta\mu^2 \chi)^3 + (\sigma\upsilon\nu^2 \chi)^3 + 3\eta\mu^2 \chi \\ & \sigma\upsilon\nu^2 \chi (\eta\mu^2 \chi + \sigma\upsilon\nu^2 \chi)^3 - 3\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi (\eta\mu^2 \chi + \sigma\upsilon\nu^2 \chi) \\ & 3\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi \text{ I}^3 - 3\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi \text{ I} = 3\eta\mu^2 \chi \sigma\upsilon\nu^2 \chi \text{ I} . \end{aligned}$$

521) Νά ἀπλοποιηθῇ ἡ παράστασις .

$$\eta\mu(\pi - \alpha) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha)$$

$$\sigma\varphi(\pi + \alpha) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) . \text{ Λῦσις .}$$

$$\frac{\eta\mu(\pi - \alpha) \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sigma\upsilon\nu(\pi - \alpha)}{\sigma\varphi(\pi + \alpha) \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\eta\mu\alpha \cdot \sigma\varphi(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\sigma\varphi(\sigma\varphi\alpha) \eta\mu\alpha}$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\varphi\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$$

522) Ἐν $A+B+\Gamma = 180^\circ$ νά δειχθῇ ὅτι $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B +$

$$\sigma\upsilon\nu^2 \Gamma + 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 . \text{ Ἐκ τῆς } A+B+\Gamma = 180^\circ \text{ ἔχο-}$$

$$\mu\epsilon\nu A+B = 180 - \Gamma \text{ καί } \sigma\upsilon\nu(A+B) = \sigma\upsilon\nu(180 - \Gamma) = -\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

$$\text{ἢ } (\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A \eta\mu B - \sigma\upsilon\nu \Gamma \text{ καί } (\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma)^2$$

$$\eta\mu^2 A \eta\mu^2 B \text{ ἢ } \sigma\upsilon\nu^2 A \sigma\upsilon\nu^2 B \sigma\upsilon\nu^2 \Gamma - 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \sigma\upsilon\nu \Gamma (1 - \sigma\upsilon\nu^2 A) \\ (1 - \sigma\upsilon\nu^2 B) . \text{ Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εὐρίσκομεν τὸ ζη-}$$

τούμενον.

523) 'Ομοίως νά δειχθῇ ὅτι ἐάν $\alpha + \beta + \gamma$ θά εἶναι .
 $\text{syn}^2 \alpha + \text{syn}^2 \beta + \text{syn}^2 \gamma - 2 \text{syn} \alpha \text{syn} \beta \text{syn} \gamma = 1$. Λῦσις.-

'Αντικαθιστῶμεν τό γ μέ τό ἴσον του καί ἔχομεν .

$$\text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta \text{syn}^2 (\alpha \beta) - 2 \text{syn} \alpha \text{syn} \beta \text{syn} (\alpha \beta)$$

$$\text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta \text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta - 2 \text{syn} \alpha \text{syn} \beta \eta \mu \alpha \eta \mu \beta \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta -$$

$$- 2 \text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta \text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta - 2 \text{syn} \alpha \text{syn} \beta \eta \mu \alpha \eta \mu \beta \text{syn}^2 \alpha \text{syn}^2 \beta - \text{syn}^2 \alpha$$

$$\text{syn}^2 \beta \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta \text{syn}^2 \alpha (1 - \text{syn}^2 \beta) \text{syn}^2 \beta \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta$$

$$\text{syn}^2 \alpha \eta \mu^2 \beta \text{syn}^2 \beta \eta \mu^2 \alpha \eta \mu^2 \beta \eta \mu^2 \beta (\eta \mu^2 \alpha \text{syn}^2 \alpha) \text{syn}^2 \beta$$

$$\eta \mu^2 \beta \text{syn}^2 \beta = 1.$$

524) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $\eta \mu \chi + \eta \mu (1500 + \chi) + \eta \mu (210 - \chi) = \eta \mu$

Λῦσις.- Αὕτη δύναται νά γραφῇ $\eta \mu \chi \eta \mu 1500 \text{syn} \chi \text{syn} 1500$

$$\eta \mu \chi \eta \mu 2100 \text{syn} \chi - \text{syn} 210 \eta \mu \chi \eta \mu \chi \eta \mu 300 \text{syn} \chi - \text{syn} 300$$

$$\eta \mu \chi - \eta \mu 30 \text{syn} \chi \text{syn} 30 \eta \mu \chi \eta \mu \chi.$$

525) Νά δειχθῇ ὅτι .

$$\frac{\epsilon \varphi^2 2\chi - \epsilon \varphi^2 \chi}{1 - \epsilon \varphi^2 2\chi \epsilon \varphi^2 \chi} = \epsilon \varphi 3\chi \cdot \epsilon \varphi \chi$$

Λῦσις.-

$$\frac{\epsilon \varphi^2 2\chi - \epsilon \varphi^2 \chi}{1 - \epsilon \varphi^2 2\chi \epsilon \varphi^2 \chi} \cdot \frac{(\epsilon \varphi^2 \chi \epsilon \varphi \chi)(\epsilon \varphi 2\chi - \epsilon \varphi \chi)}{(1 - \epsilon \varphi 2\chi \epsilon \varphi \chi)(1 - \epsilon \varphi^2 \chi \epsilon \varphi \chi)} = \epsilon \varphi (2\chi \chi) \cdot \frac{\epsilon \varphi (2\chi \chi)}{-\chi}$$

$$\epsilon \varphi 2\chi \cdot \epsilon \varphi \chi.$$

526) Νά δειχθῇ ὅτι,

$$\frac{1 - \epsilon\phi^2(450 - \alpha)}{1 - \epsilon\phi^2(450 - \alpha)} = \eta\mu 2\alpha$$

Λύσις.-

$$\frac{1 - \epsilon\phi^2(450 - \alpha)}{1 - \epsilon\phi^2(450 - \alpha)} \quad \sigma\upsilon\nu 2(450 - \alpha) \quad \sigma\upsilon\nu(90 - 2\alpha) \quad \eta\mu 2\alpha.$$

527) Νά δειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις.-

α) $\eta\mu(600 - \alpha) \sigma\upsilon\nu(300 - \alpha) + \eta\mu(300 + \alpha) \sigma\upsilon\nu(600 - \alpha)$

β) $\sigma\upsilon\nu(\chi + \alpha) \sigma\upsilon\nu(\chi - \alpha) + \eta\mu(\chi + \alpha) \eta\mu(\chi - \alpha)$ εἶναι ἀνεξάρτητοι

ἢ πρώτη τοῦ τόξου α καί ἡ δευτέρα τοῦ τόξου χ .

Λύσις.- Ἡ α) γράφεται $\eta\mu(600 - \alpha) \sigma\upsilon\nu(300 - \alpha) + \eta\mu(300 + \alpha) \sigma\upsilon\nu(600 - \alpha)$

ἢ β) γράφεται $\sigma\upsilon\nu \chi \alpha - (\chi - \alpha) \sigma\upsilon\nu(\chi \alpha - \chi \alpha) \sigma\upsilon\nu 2\alpha.$

528) Ἄν $A+B+\Gamma = 180^\circ$ νά δειχθῇ ὅτι $\epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$

$\epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma$. Λύσις.-

Ἀφοῦ $A + B + \Gamma = 180^\circ$ τότε $\epsilon\phi(A + B) = \epsilon\phi(180 - \Gamma) = -\epsilon\phi \Gamma$ καί

$$\frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \epsilon\phi B} = -\epsilon\phi \Gamma \quad \eta\mu A \eta\mu B = -\epsilon\phi \Gamma \quad \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma \quad \eta\mu A \eta\mu B$$

$$\epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \epsilon\phi B \epsilon\phi \Gamma,$$

529) Ὁμοίως $\sigma\phi A \sigma\phi B + \sigma\phi B \sigma\phi \Gamma + \sigma\phi \Gamma \sigma\phi A = 1$

Λύσις.- Ἐκ τῆς $A + B + \Gamma = 180^\circ$ ἔχομεν $\sigma\phi(A + B) = \sigma\phi(180 - \Gamma)$

$$\Gamma) \quad -\sigma\phi \Gamma \quad \eta\mu A \eta\mu B = -\sigma\phi \Gamma \quad \eta\mu A \eta\mu B = 1$$

$$- \sigma\phi\Gamma\sigma\phi\Lambda - \sigma\phi\beta\sigma\phi\Gamma \quad \eta \quad \sigma\phi\Lambda\sigma\phi\beta \quad \sigma\phi\beta\sigma\phi\Gamma \quad \sigma\phi\Gamma\sigma\phi\Lambda \quad I.$$

$$530) \quad \text{Αν } A+B+\Gamma = 180^\circ \quad \theta\acute{\alpha} \quad \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad \eta\mu\Lambda \quad \eta\mu\beta \quad \eta\mu\Gamma$$

$$5\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad . \quad \Lambda\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma.-$$

$$\eta\mu\Lambda \quad \eta\mu\beta \quad \eta\mu\Gamma \quad 2\eta\mu\frac{A+B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad 2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad 2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad (\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}) \quad 2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad . \quad 2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2} \quad 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} \quad .$$

$$531) \quad \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2} \quad \eta\mu\frac{B}{2} \quad \eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad .$$

$$\Lambda\tilde{\upsilon}\sigma\iota\varsigma.- \quad \sigma\upsilon\nu A \quad \sigma\upsilon\nu B \quad \sigma\upsilon\nu \Gamma$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad 4 \quad -2\eta\mu\frac{2}{2} \quad \frac{\Gamma}{2} \quad 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad \sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}$$

$$-2\eta\mu\frac{2}{2} \quad \frac{\Gamma}{2} \quad I \quad 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad (\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} - \eta\mu\frac{\Gamma}{2}) \quad I$$

$$I \quad 2\eta\mu\frac{\Gamma}{2} \quad (\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} - \sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}) \quad I \quad 4\eta\mu\frac{A}{2} \quad \eta\mu\frac{B}{2} \quad \eta\mu\frac{\Gamma}{2}$$

$$532) \quad \text{'Ασκήσεις διαφοροί.-}$$

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ κατὰ τήν Α ἰσχύει .

$$\alpha) \quad \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \epsilon\phi\left(\frac{B}{2}\right) \quad \beta) \quad \frac{2\beta\gamma}{\gamma-\beta} = \epsilon\phi 2B$$

$$\alpha) \frac{\beta}{\alpha \gamma} = \frac{\alpha \eta \mu B}{\alpha \alpha \sigma \nu B} = \frac{\alpha 2 \eta \mu \frac{B}{2} \sigma \nu \frac{B}{2}}{\alpha (1 \sigma \nu B)} = \frac{2 \eta \mu \frac{B}{2} \sigma \nu \frac{B}{2}}{2 \sigma \nu^2 \frac{B}{2}}$$

$$\frac{\eta \mu \frac{B}{2}}{\sigma \nu \frac{B}{2}} \text{ εφ } \frac{B}{2} .$$

$$\beta) \frac{2 \beta \gamma}{\gamma - \beta^2} = \frac{2 \alpha \eta \mu B \cdot \alpha \sigma \nu B}{\alpha^2 \sigma \nu^2 B - \alpha^2 \eta \mu^2 B} = \frac{2 \alpha^2 \eta \mu B \sigma \nu B}{\alpha^2 (\sigma \nu^2 B - \eta \mu^2 B)} = \frac{\eta \mu 2 B}{\sigma \nu 2 B}$$

$$\text{εφ } 2 B$$

533.) "Αν εἰς τρίγωνον ABΓ ἰσχύει ἡ σχέσις $\sigma \nu A = \eta \mu B - \sigma \nu \Gamma$ τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀδεις.- Ἡ $\sigma \nu A \eta \mu B - \sigma \nu \Gamma$ γράφεται $\sigma \nu A \sigma \nu \Gamma \eta \mu B$ ἢ

$$(I) 2 \sigma \nu \frac{A}{2} \frac{\Gamma}{2} \sigma \nu \frac{A-\Gamma}{2} = 2 \eta \mu \frac{B}{2} \sigma \nu \frac{B}{2} . \text{ Ἀλλά } \sigma \nu \frac{A}{2} \frac{\Gamma}{2} \eta \mu \frac{B}{2} \text{ διότι } A B \Gamma \text{ } 180 \text{ καὶ } \frac{A}{2} \frac{\Gamma}{2} 90 - \frac{B}{2} .$$

Ἐπομένως ἡ (I) γίνεται $\sigma \nu \frac{A-\Gamma}{2} \sigma \nu \frac{B}{2} .$

Ἐθεν α) ἢ $\frac{A-\Gamma}{2} = \frac{B}{2}$ καὶ $A B \Gamma$ δηλαδή ἡ A ὀρθή.

β) $\frac{A-\Gamma}{2} = - \frac{B}{2}$ καὶ $\Gamma A B$ δηλαδή ἡ Γ ὀρθή.

534) Τί εἶδους τρίγωνον θά εἶναι τό ABΓ ἂν μεταξὺ τῶν γωνιῶν του ὑφίσταται ἡ σχέσις.-

$$\eta \mu A = \frac{\eta \mu B + \eta \mu \Gamma}{\sigma \nu B + \sigma \nu \Gamma}$$

Ἡ σχέσις αὕτη δύναται νά γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς.-

$$2\eta\mu\frac{A}{2} \text{ συν } \frac{A}{2} = \frac{2\eta\mu\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2} \text{ συν } \frac{B-\Gamma}{2}}{2\text{συν}\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2} \text{ συν}\frac{B-\Gamma}{2}} \quad \eta \quad 2\eta\mu\frac{A}{2} \text{συν}\frac{A}{2}$$

$$\frac{\eta\mu\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2}}{\text{συν}\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2}} \cdot \text{'Αλλά } \eta\mu\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2} \text{συν}\frac{A}{2} \text{ ως συμπληρωματικὰ}$$

καί $\text{συν}\frac{B}{2} \frac{\Gamma}{2} \eta\mu\frac{A}{2}$ ὁμοίως. Ἄρα ἡ τελευταία σχέσηis
γράφεται $2\eta\mu\frac{2A}{2} - I^2 \eta \eta\mu\frac{2}{2} \frac{A}{2} - \frac{I}{2}$, $\eta\mu\frac{A}{2} \sqrt{\frac{2}{2}}$
 $\eta\mu\frac{A}{2} \eta\mu 45^\circ$ καί $-\frac{A}{2} 45^\circ$, $A 90^\circ$.

F Διότι $\text{συν}\frac{A}{2} / 0$.

535) Νά ἐπιλυθῇ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι τρεῖς διαδοχικαὶ ἀριθμοί, ἡ δὲ μεγαλυτέρα γωνία εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας. Λῦσις.-

Ἄν $\chi - I$, χ , $\chi + I$ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ φ ἡ μικρότερα γωνία καὶ τότε ἡ μεγαλυτέρα 2φ , θά ἔχω-
μεν. $\frac{\chi - I}{\eta\mu\varphi} = \frac{\chi + I}{\eta\mu 2\varphi} \eta \frac{\chi - I}{\eta\mu\varphi} = \frac{\chi + I}{2\eta\mu\varphi \text{συν}\varphi}$ ἐκ τῆς

ὁποίας $\text{συν}\varphi = \frac{\chi + I}{2(\chi - I)}$. (I) Ἀλλὰ γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι

$$(\chi - I)^2 + \chi^2 + (\chi + I)^2 - 2\chi(\chi - I) \text{συν}\varphi \text{ καὶ}$$

$$\text{συν}\varphi = \frac{\chi^2 + (\chi + I)^2 - (\chi - I)^2}{2\chi(\chi - I)}$$

Ἐν τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν .

$$\frac{\chi^2 (\chi - 1)^2 - (\chi - 1)^2}{2\chi (\chi - 1)} \quad \frac{\chi - 1}{2(\chi - 1)} \quad \eta$$

$$\frac{\chi^2 \chi^2 - 2\chi - 1 - \chi^2 - 1}{2\chi(\chi - 1)} \quad \frac{2\chi}{2(\chi - 1)} \quad \frac{\chi^2 - 4\chi}{2\chi(\chi - 1)} \quad \frac{\chi - 1}{2(\chi - 1)}$$

ἢ $\chi(\chi - 5) = 0$. Ἐπειδὴ $\chi / 0$ εἶναι
 $\chi - 5 = 0$, καὶ $\chi = 5$, ἄρα $\beta = 5$,
 $\alpha = 6$, $\Gamma = 4$ αἱ τρεῖς πλευραὶ
 τοῦ τριγώνου.

Ἐν τῆς συνφ $\frac{\chi - 1}{2(\chi - 1)} \quad \frac{6}{2 \cdot 4}$

$\frac{6}{8} - \frac{3}{4} = 0,75$ διὰ τῶν πινάκων ἔχομεν τὴν γωνίαν

$\varphi = 45^\circ$ διότι $0,75 = 0,70711$.

$0,75088 = \sin(41^\circ 20')$

$0,0088 = 0,75 = 10'$

D $0,00192 = 0,74896 = \sin(41^\circ 30')$

$192 = 10'$

$88 = \chi = 10' \cdot \frac{88}{192} = \frac{880}{192} = 4'35''$

Ἐπομένως $\varphi = 41^\circ 24'35''$ καὶ $2\varphi = 82^\circ 49'10''$.

Ἀηλαδὴ $\Gamma = 41^\circ 24'35''$, $\Lambda = 82^\circ 49'10''$, $B = 55^\circ 46'15''$.

536) Ἄν τριγωνον ABΓ αἱ γωνίαι $\Lambda = \chi + \frac{\chi}{2}$, $\Gamma = 2\chi +$

$+\frac{\chi}{2}$, χ δέ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\sin^2 \chi = (\chi + \frac{\chi}{2})$, νά

εὐρεθοῦν αἱ πλευραὶ β , γ καὶ ἡ γωνία B ὅταν $\alpha = 10\sqrt{2}$ μ.

Λύσεις

Ἡ $\sin^2 \chi$ $\sin^2(\chi - \frac{\chi}{2})$ γράφεται $\sin 2\chi$ $\sin^2 \frac{3\chi}{2}$ ἢ

$$2\sin^2 \chi - 1 - \frac{1}{2} \sin^3 \chi \quad \text{ἢ} \quad 4\sin^2 \chi - 2 - 4\sin^3 \chi - 3\sin \chi$$

$$\text{ἢ} \quad 4\sin^3 \chi - 4\sin^2 \chi - 3\sin \chi \quad 3 \quad 0 \quad \text{ἢ} \quad 4\sin^2 \chi (\sin \chi - 1) -$$

$$3(\sin \chi - 1) \quad 0 \quad \text{ἢ} \quad (\sin \chi - 1) (4\sin \chi - 3) \text{ ἢ } \sin \chi$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ὁπότε } \chi = 30^\circ \text{ ἢ } \chi = 150^\circ \text{ ἐκ τῶν ὁποίων δεκτὴ}$$

$$\text{ἢ } \chi = 30^\circ. \text{ Ἐπομένως } A = 45^\circ, \Gamma = 75^\circ \text{ καὶ } B = 60^\circ$$

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$ ἔχομεν .

$$\beta = \frac{10 \sqrt{2} \cdot \eta\mu 60^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{10 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10 \sqrt{3}$$

$$\gamma = \frac{10 \sqrt{2} \cdot \eta\mu 75^\circ}{\eta\mu 45^\circ} = \frac{10 \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10 (\sqrt{6}) \sqrt{2}}{2}$$

$$5 (\sqrt{6} \sqrt{2}).$$

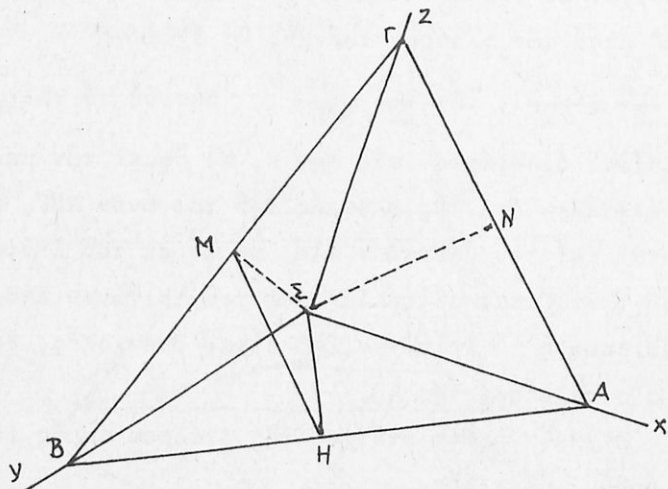
537) Ἄν τρίγωνον ABΓ ἰσχύει ἡ σχέσις $\alpha = 2B\sin \Gamma$ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

Λύσεις.

Ἡ ἀνωτέρω σχέσις δύναται νὰ γραφῇ $2B\eta\mu A = AB\eta\mu B\sin \Gamma$.
Ἐπειδὴ $A = 180^\circ - (B + \Gamma)$ γράφεται ἡ τελευταία ὡς ἐξῆς:

$\eta\mu(B - \Gamma) = 2\eta\mu B \sin \Gamma$ ή $\eta\mu B \sin \Gamma = \sin B \eta\mu \Gamma = 2\eta\mu B \sin \Gamma$
 ή $\eta\mu B \sin \Gamma - \sin B \eta\mu \Gamma = 0$ ή $\eta\mu(B - \Gamma) = 0$ και $B - \Gamma = 0$
 όποτε $B = \Gamma$.

538) Είς τό τρίγωνον ΣAB έχομεν:



$$\frac{AB}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{\Sigma A}{\eta\mu \left(\frac{180-120}{2} \right)}$$

$$\text{Άρα } AB = \frac{\Sigma A \cdot \eta\mu 120^\circ}{\eta\mu 30^\circ} = \frac{\alpha \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \alpha \sqrt{3}$$

Είς τό τρίγωνον $\Sigma A\Gamma$ έχομεν :

$$\Sigma A = A\Gamma \eta\mu 45^\circ, \quad A\Gamma = \frac{\Sigma A}{\eta\mu 45^\circ} = \alpha \sqrt{2}. \quad \Gamma B = \Sigma B = \Sigma \Gamma = \alpha.$$

$$\text{Έχομεν επίσης : } \hat{B\Gamma A} = \frac{\Gamma A^2 + \Gamma B^2 - AB^2}{2 \cdot \Gamma A \cdot \Gamma B} = \frac{2\alpha^2 + \alpha^2 - 3\alpha^2}{2 \cdot \alpha \sqrt{2} \cdot \alpha} = 0.$$

"Αρα ἡ γωνία BFA εἶναι ὀρθή.

2ον) Εἰς τό τετράεδρον ΣΑΒΓ, ἡ κορυφή Σ ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. "Αρα τό Σ κεῖται εἰς τήν τομήν τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων εἰς τάς ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ. 'Εάν Μ, Ν εἶναι αἱ τομαί τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων εἰς τάς ΒΓ, ΑΓ μετά τῶν πλευρῶν τούτων, θά ἔχωμεν:

$$FN = \frac{FA}{2} = \frac{\alpha \sqrt{2}}{2}, \quad FM = \frac{FB}{2} = \frac{\alpha}{2}. \quad \text{'Επειδή τό τρίγωνον}$$

ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τήν Γ, αἱ τομαί τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων ἐπί τάς πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θά κεῖνται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΣΑΒ, τό δέ ἐκ τοῦ Σ ὕψος τοῦ Σ.ΑΒΓ ταυτίζεται μέ τό ΣΗ ὕψος τοῦ τριγώνου ΣΑΒ. Τό Η, ἐπειδή τό τρίγωνον ΣΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, θά κεῖται εἰς τό μέσον τῆς ΑΒ.

3ον) 'Η γωνία ἡ ἀντίστοιχος πῆς διέδρου ἀκμῆς ΑΒ εἶναι ὀρθή. 'Επειδή

$$\text{συν } \widehat{\Sigma\text{NH}} = \frac{HN}{\Sigma\text{N}} = \frac{FM}{\Sigma\text{N}} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha \sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{θά ἔχωμεν } \widehat{\Sigma\text{NH}} = 45^\circ.$$

$$\text{συν } \widehat{\Sigma\text{MH}} = \frac{MH}{\text{M}\Sigma} = \frac{FN}{\text{M}\Sigma} = \frac{\alpha \sqrt{2}}{2 \cdot \alpha \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,81649.$$

$$d = 0,00099 \quad \left(\begin{array}{cc} 0,81748 & \text{συν}(35^\circ 10') \\ 0,81649 & \\ 0,81580 & \text{συν}(35^\circ 20') \end{array} \right) 10'$$

$$\begin{array}{cc} 0,00168 & 10' \\ 0,00099 & \chi \end{array} \quad \chi = 10 \cdot \frac{0,00099}{0,00168} = \frac{990}{168} \approx 6'$$

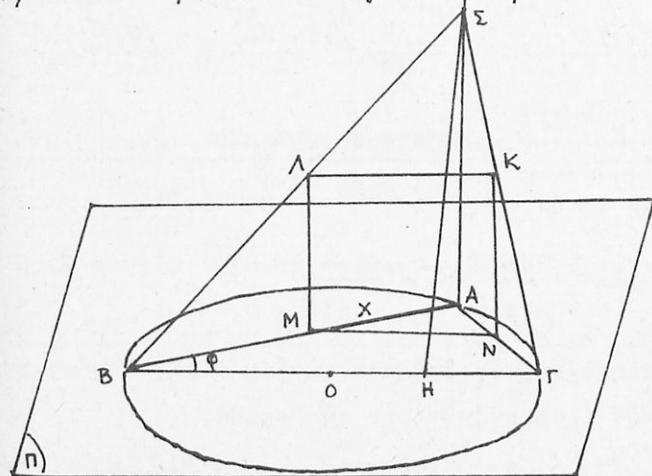
"Αρα $\widehat{\Sigma\text{MH}} = 35^\circ 16'$.

539) Ιον.- Τά μήκη τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου

$\Sigma AB\Gamma$ εἶναι $B\Gamma = 2R$, $A\Gamma = 2R\eta\mu\varphi$, $AB = 2R\sigma\upsilon\nu\varphi$ $\Sigma A = 2R$,

$$\Sigma\Gamma = \sqrt{4R^2\eta\mu^2\varphi + 4R^2} = 2R\sqrt{\eta\mu^2\varphi + 1}$$

$$\Sigma B = \sqrt{4R^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + 4R^2} = 2R\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\varphi}.$$



Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκμῶν εἶναι:

$$\Sigma A^2 + \Sigma B^2 + \Sigma\Gamma^2 + AB^2 + A\Gamma^2 + B\Gamma^2 = 4R^2 + 4R^2 + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi +$$

$$4R^2 + 4R^2\eta\mu^2\varphi + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2\varphi + 4R^2\eta\mu^2\varphi + 4R^2 = 16R^2 + 8R^2(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi) = 24R^2.$$

Εἰς τό τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τό ἐκ τοῦ A ὕψος AH . Συνδέομεν τό Σ μέ τό H . Ἐπειδή ἡ ΣA εἶναι κάθετος εἰς τό (Π) , καί ἡ AH κάθετος ἐπὶ τῆς $B\Gamma$, ἔπεται ὅτι ἡ ΣH εἶναι κάθετος ἐπὶ τῆς $B\Gamma$. Διὰ τὴν πρόσδιο-

ρίσωμεν τό σημεῖον H ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τήν BH .

$$BH = AB\sigma\upsilon\nu\varphi = 2R\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi = 2R\sigma\upsilon\nu^2\varphi = R(1 + \sigma\upsilon\nu^2\varphi)$$

2ον) $\varepsilon\phi\hat{\Sigma\text{H}\Lambda} = \frac{\Sigma\Lambda}{\text{H}\Lambda}$. Έχομεν $\Sigma\Lambda = 2R$ ἐκ κατασκευῆς.

Ἐπίσης εἰς τό ὀρθογώνιον τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$, μεταξύ τῶν καθέτων πλευρῶν $\text{AB}, \text{A}\Gamma$, καί τοῦ ὕψους $\text{H}\Lambda$, ἰσχύει ἡ σχέ-

$$\sigma\iota\varsigma. \frac{1}{\text{H}\Lambda^2} = \frac{1}{\text{AB}^2} + \frac{1}{\text{A}\Gamma^2} \quad \frac{1}{\text{H}\Lambda^2} = \frac{\text{A}\Gamma^2 + \text{AB}^2}{\text{AB}^2 \cdot \text{A}\Gamma^2} \cdot \text{H}\Lambda = \frac{\text{AB} \cdot \text{A}\Gamma}{\sqrt{\text{AB}^2 + \text{A}\Gamma^2}}$$

$$= \frac{2R\eta\mu\varphi \cdot 2R\sigma\upsilon\nu\varphi}{\sqrt{4R^2(\sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu^2\varphi)}} = \frac{2R\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi}{R\eta\mu 2\varphi}$$

$$\text{Ἄρα, } \varepsilon\phi\hat{\Sigma\text{H}\Lambda} = \frac{2R}{R\eta\mu 2\varphi} = \frac{2}{\eta\mu 2\varphi}$$

Ἡ ἐλαχίστη τιμή τῆς διέδρου γωνίας ἀκμῆς $\text{B}\Gamma$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν ἐλαχίστην τιμήν τῆς $\varepsilon\phi\hat{\Sigma\text{H}\Lambda}$.

Πρέπει λοιπόν $\varepsilon\phi\hat{\Sigma\text{H}\Lambda} = \frac{2}{\eta\mu 2\varphi}$ ἐλάχιστον ἢ $\eta\mu^2\varphi = \text{μέγιστον}$. Δηλαδή $\eta\mu^2\varphi = 1$, $\eta\mu 2\varphi = \eta\mu \frac{\pi}{2}$, $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Ἴνα ἔχωμεν $\varepsilon\phi\hat{\alpha} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ($\hat{\alpha} = \hat{\Sigma\text{H}\Lambda}$), πρέπει $\frac{2}{\eta\mu 2\varphi} = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

$\eta\mu 2\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 2\varphi = \eta\mu 60^\circ$, $2\varphi = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$. Ἐάν $\varphi = 60^\circ$,

$$\theta\acute{\alpha} \text{ ἔχωμεν } \varepsilon\phi\hat{\alpha} = \frac{2}{\eta\mu 2\varphi} = \frac{2}{\eta\mu 120^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

3ον) Ἐστω ὅτι ἡ τομή τοῦ ἐπιπέδου α μέ τό τετράεδρον εἶναι τό τετράπλευρο MNKL . Ἐπειδή τό ἐπίπεδον α εἶναι παράλληλον πρός τήν $\Sigma\Lambda$, αἱ ML , NK εἶναι παράλλη-

λοιπὸς πρὸς τὴν ΣΑ. Ἄρα $\hat{AMN} = \hat{KNM} = 90^\circ$. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Q εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἔπεται ὅτι ΑΚ, ΜΝ, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ. Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΜΝΚΛ εἶναι ὀρθογώνιον. Διὰ τὸν ὑπολογισμόν τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΜΑ, ΒΑΣ ἔχομεν.

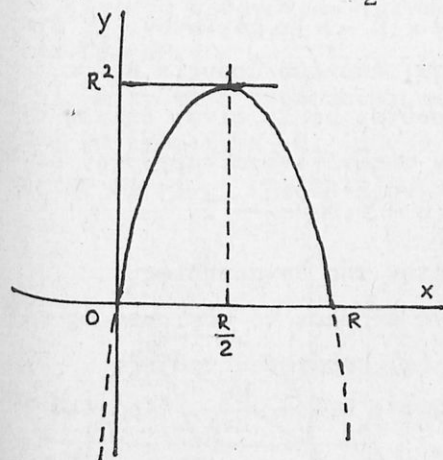
$$\frac{BM}{BA} = \frac{MA}{AS} \quad \eta \quad \frac{(AB - x)}{AB} = \frac{MA}{AS} \quad \eta \quad MA = \frac{AS(AB - x)}{AB} =$$

$$= \frac{2R(2R\sin\varphi - x)}{2R\sin\varphi} = \frac{2R(2R\sin 60^\circ - x)}{2R\sin 60^\circ} = \frac{(2R \cdot \frac{I}{2} - x)}{\frac{I}{2}} =$$

$= 2(R - x)$. Ἀπὸ τὰ τρίγωνα ΑΜΝ, ΑΒΓ ἔχομεν:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BG} \quad \eta \quad MN = \frac{BG \cdot AM}{AB} = \frac{2R \cdot x}{2R\sin\varphi} = \frac{2R \cdot x}{2R\sin 60^\circ} = \frac{x}{\frac{I}{2}} = 2x.$$

$y = AM$, $MN = 2(R - x)$, $2x = 4x(R - x)$ (I). Ὅταν τὸ Μ μεταβάλλεται ἐπὶ τῆς ΑΒ, τὸ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $2R\sin\varphi = 2R\sin 60^\circ = 2R \cdot \frac{I}{2} = R$.



Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς μεταβολῆς τῆς y ἐν συναρτήσει τῆς x δίδεται εἰς τὸ παραπλεύρως σχῆμα. Ἐάν θέσωμεν $x = 0$, εὐρίσκωμεν τὴν τομὴν τῆς καμπύλης (παραβολῆς) μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y . Τότε ἔχομεν $y = 0$.

Ἐάν $x=R$ ἔχομεν $y=0$. Εὐρίσκομεν δηλαδή τὴν τομὴν τῆς καμπύλης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x . Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τῆς y ἐκ τῆς σχέσεως $y=4xR-4x^2$ ἔχομεν: $4x^2-4xR+y=0$, Ἡδιακρίνουσα $\Delta=4R^2-4y$ πρέπει νὰ ᾖναι μεγαλυτέρα ἢ ἴση μὲ τὸ μηδέν $4R^2-4y \geq 0 \quad y \leq R^2$. Ἄρα τὸ μέγιστον τῆς συναρτήσεως εἶναι $y=R^2$. Ἡ τιμὴ αὕτη δίδεται εἰς τὴν y ὅταν $x=\frac{R}{2}$. Ἐπειδὴ τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως R , ἐκ τῆς γραφικῆς κατασκευῆς δεχόμεθα μόνον ἓν τμήμα καὶ ὄχι ὁλόκληρον τὴν καμπύλην. Τὸ τμήμα τὸ ὁποῖον δεχόμεθα εἶναι τὸ κείμενον ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν x .

Ἴνα ἔχωμεν $y=\mu^2$, πρέπει $4x(R-x)=\mu^2$. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἔχωμεν $4x^2-4xR+\mu^2=0$ (2).

$$\text{Ἄρα:} \quad x = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 4\mu^2}}{4} = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - \mu^2}}{2}$$

Ἡ σπουδὴ τῆς συναρτήσεως (2) εἶναι ὁμοία μὲ τὴν (I), ἔάν τὸν ἄξονα τὸ θεωρήσωμεν ἄξονα τῶν μ^2 .

Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $y=4x(R-x)$. Ἡ συνάρτησις αὕτη θὰ εἶναι μεγίστη ὅταν $x(R-x)=$ μέγιστον. Ἡ ἄνω-τέρω παράστασις ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ὅρους: $x, R-x$, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ R , εἶναι δηλαδή σταθερόν. Ἄρα, τὸ γινόμενον αὐτῶν γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ ἀριθμοὶ γίνουν ἴσοι $x=R-x, x=\frac{R}{2}$.

Σημείωσις.— Κατὰ τὴν μελέτην τῆς συναρτήσεως :

$y'=4xR-4x^2$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ μέγιστον ὡς ἐξῆς:

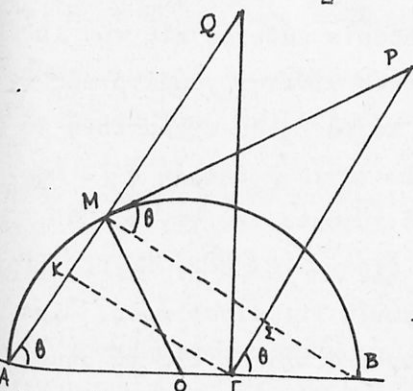
Εὐρίσκομεν κατ'ἀρχάς τὴν (α) παράγωγον ταύτης:

$y'=4R-8x$. Αὕτη μηδενίζεται διὰ $x=\frac{R}{2}$. Ἄρα διὰ τὴν

τιμήν ταύτην τοῦ x , ἡ παράστασις θὰ ἔχει μέγιστον καὶ εὐχάριστον. Ἡ (β) παράγωγος τῆς y εἶναι $y' = -8 < 0$. Ἐξ αὐτοῦ ἔπεται ὅτι ἡ y ἔχει μέγιστον. Τό μέγιστον τοῦτο εὐρίσκεται:

$$y_{\mu} = 4 \cdot \frac{R}{2} R - 4 \left(\frac{R}{2} \right)^2 = 2R^2 - R^2 = R^2.$$

540) Δίδονται $R = -\frac{AB}{2}$, $\widehat{BAM} = \theta$. $\alpha = AG$.



Αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου εἶναι $AG = \alpha$, $AM = 2R \sin \theta$.

Ἐπειδὴ αἱ MA, GP εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία PGB εἶναι ὀρθή. $GP = G\Sigma + P\Sigma = GB \sin \theta + P\Sigma = (2R - \alpha) \sin \theta + P\Sigma$.

Ἀλλὰ $P\Sigma = M\Sigma$ ἐφ' ὅτι $PM \perp MG$.

Ἄν φέρωμεν τὴν GK παράλληλον πρὸς τὴν MB θὰ ἔχωμεν $\Sigma = KG = \alpha \sin \theta$. Ἀρα $P\Sigma = \alpha \sin \theta$. Ἐπομένως $GP = (2R - \alpha) \sin \theta + \alpha \sin \theta$. Ἡ πλευρά $MP = \frac{M\Sigma}{\sin \theta} = \frac{\alpha \sin \theta}{\sin \theta} = \alpha$.

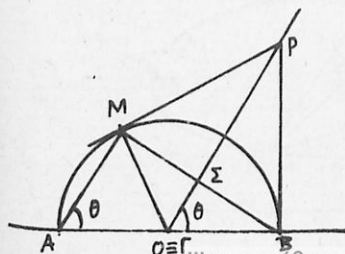
2ον) Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον QGA ἔχομεν $GQ = \alpha \cos \theta$.

Ἀρα $GQ = MP$.

3ον) Ὅταν τὸ G εὐρίσκεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ ἡμικυκλίου θὰ ἔχωμεν, $\alpha = R$. Ἀρα ὁ τύπος ὁ δίδων τὴν τιμὴν τῆς GP θὰ γίνῃ: $GP = (2R - R) \sin \theta + R \sin \theta = R \sin \theta + R \sin \theta$.

Διὰ μετασχηματισμοῦ τοῦ ἀνωτέρω τύπου ἔχομεν:

$$GP = R \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta} + R \frac{\eta \mu^2 \theta}{\sin \theta} =$$



λεύρου είναι:

$$MN = 2R, \quad AN = 2R\eta\mu\left(\frac{\pi - \vartheta}{2}\right) = 2R\sigma\upsilon\nu\frac{\vartheta}{2},$$

$$AM = 2R\eta\mu\frac{\vartheta}{2}, \quad \Gamma\Gamma' = 2R,$$

$$N = \sqrt{4R^2 + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2}} = 2R\sqrt{1 + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2}}$$

$$\Gamma M = \sqrt{4R^2 + 4R^2\eta\mu^2\frac{\vartheta}{2}} = 2R\sqrt{1 + \eta\mu^2\frac{\vartheta}{2}}.$$

ὁ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν εἶναι:

$$AN^2 + \Gamma M^2 + \Gamma N^2 + AM^2 + AN^2 + MN^2 = 4R^2 + 4R^2 + 4R^2\eta\mu^2\frac{\vartheta}{2} +$$

$$4R^2 + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2} + 4R^2\eta\mu^2\frac{\vartheta}{2} + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2} + 4R^2 =$$

$$16R^2 + 8R^2\left(\eta\mu^2\frac{\vartheta}{2} + \sigma\upsilon\nu^2\frac{\vartheta}{2}\right) = 24R^2.$$

ον) Ἡ τομή τοῦ τετραέδρου μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πα-
ράλληλου πρὸς τὴν $\Gamma\Gamma'$, MN εἶναι τὸ τετράπλευρον $PQRE$.

Περιοδὴ ΣP , RQ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν $\Gamma\Gamma'$ (ἀφοῦ αὐ-

εἶναι τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου $PQRE$ μετὰ τὰ ἐπίπεδα $\Gamma\Gamma M$,

ΓN τῶν ὁποίων τομή εἶναι ἡ $\Gamma\Gamma'$), θά εἶναι κάθετοι ἐπὶ

τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἐπίσης αἱ ΣR , PQ , ὡς κείμεναι

ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $PQRE$ παράλληλον πρὸς τὴν MN , καὶ εἶναι

ὁμοαὶ τούτου μετὰ τοῦ $\Gamma\Gamma N$, ΔMN ἐπιπέδων, θά εἶναι παράλ-

λοὶ πρὸς τὴν MN . Ἄρα $PQRE$ εἶναι ὀρθογώνιον. Γνωρίζο-

μεν ὅτι $\frac{PA}{PM} = K$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων APQ καὶ ΔMN ἔχο-

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{AM}{MN} \quad \eta \quad \frac{PA}{AM} = \frac{PQ}{MN} \quad \eta \quad \frac{PA}{AM-PA} = \frac{PQ}{MN-PQ} \quad \eta \quad \frac{PA}{PM} =$$

$$\frac{PQ}{MN-PQ} = K. \quad \text{Ἄρα } PQ = \frac{MN \cdot K}{1+K} = \frac{2R \cdot K}{1+K}$$

Ἐν τῶν ὁμοίων τριγώνων ΓΑΜ, ΣΡΜ ἔχομεν $\frac{ΡΣ}{ΑΓ} = \frac{ΜΡ}{ΜΑ}$ ἢ

$$\frac{ΡΣ}{ΑΓ-ΡΣ} = \frac{ΜΡ}{ΜΑ-ΜΡ} = \frac{ΜΡ}{ΡΑ} = \frac{Ι}{Κ}. \text{ Ἄρα } \frac{ΡΣ}{ΑΓ-ΡΣ} = \frac{Ι}{Κ} \text{ ἢ}$$

$$\text{ἢ } ΡΣ = \frac{ΑΓ}{Ι+Κ} = \frac{2R}{Ι+Κ}. \text{ Ἡ περίμετρος τοῦ } PQRS \text{ εἶναι}$$

$$2(PQ + ΡΣ) = 2 \left(\frac{2R \cdot Κ}{Ι+Κ} + \frac{2R}{Ι+Κ} \right) = 4R \left(\frac{Κ}{Κ+Ι} + \frac{Ι}{Κ+Ι} \right) =$$

$$= 4R \frac{Κ+Ι}{Κ+Ι} = 4R = \text{σταθερόν}.$$

3ον) Ἐχομεν ἤδη εὖρη συναρτήσεις τῆς γωνίας $\widehat{AOM} = \vartheta$, τὰ τμήματα ΑΜ, ΑΝ. Ἐάν ἐν τοῦ Α φέρωμεν τό ὕψος ΑΔ τοῦ ΑΜΝ τριγώνου καί ἐνώσωμεν τό Γ μέ τό Δ, συμφώνως πρὸς τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων τό ἐπίπεδον ΑΓΔ θά εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΜΝ. Ἄν εἰς τό τρίγωνον ΑΓΔ φέρωμεν τό ὕψος ΑΙ, τοῦτο θά εἶναι κάθετον ἐπὶ τό ἐπίπεδον ΓΜΝ. Ἄρα τό ζητούμενον τμήμα ΑΙ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τό ἐπίπεδον ΓΜΝ. Εἰς τό τρίγωνον ΑΙΓ θά ἔχωμεν :

$$ΑΙ = ΑΓ \eta \mu (\angle ΓΙ) = 2R \cdot \frac{ΑΔ}{ΓΔ} = 2R \cdot \frac{R \eta \mu \vartheta}{\sqrt{4R^2 + R^2 \eta \mu^2 \vartheta}}$$

$$= \frac{2R^2 \eta \mu \vartheta}{R \sqrt{4 + \eta \mu^2 \vartheta}} = \frac{2R^2 \cdot 2 \eta \mu \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu \frac{\vartheta}{2}}{R \sqrt{4 + 4 \eta \mu^2 \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu^2 \frac{\vartheta}{2}}} =$$

$$= \frac{4R^2 \eta \mu \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu \frac{\vartheta}{2}}{2R \sqrt{1 + \eta \mu^2 \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu^2 \frac{\vartheta}{2}}} = \frac{2R \eta \mu \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu \frac{\vartheta}{2}}{\sqrt{1 + \eta \mu^2 \frac{\vartheta}{2} \sigma \nu^2 \frac{\vartheta}{2}}}$$

ητεῖται νά ἐπαληθευθῇ ὁ τύπος: $\frac{I}{\Delta\Gamma^2} = \frac{I}{AM^2} + \frac{I}{AN^2} + \frac{I}{\Delta\Gamma^2}$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν, θά πρέπει νά ἐπαληθεύεται ὁ τύπος:

$$\frac{\frac{I}{4R^2} \frac{2\vartheta}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2}} \frac{2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}}}{\frac{I}{4R^2} \frac{2\vartheta}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2}} + \frac{I}{4R^2} \frac{2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} + \frac{I}{4R^2}} \quad \eta'$$

$$\left(\sqrt{1 + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} \right)^2 \quad \eta'$$

$$\frac{1 + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}}{4R^2 \frac{2\vartheta}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2} + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2}}{4R^2 \frac{2\vartheta}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} + \frac{I}{4R^2} \quad \eta'$$

$$\frac{1 + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} = \frac{I}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}} + I.$$

ὁποῖος πράγματι ἀληθεύει ἐκ ταυτότητος.

β) Ἡ γωνία α εἶναι εἰς τό σχῆμα ἡ γωνία ΓΔΑ ἀφοῦ
ὁ ἐπίπεδον ΓΔΑ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΕΝ. Ἐάν θέσωμεν
ν = νερμα, ν = εφφ, θά ἔχωμεν :

$$\eta\mu \hat{\Gamma\Delta\Delta} = \frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 + R^2 \eta\mu \vartheta}} = \frac{2R}{\sqrt{4R^2 \frac{2\vartheta}{\eta\mu \frac{2\vartheta}{2}} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2} + 4R^2}} =$$

$$\frac{2R}{\sqrt{1 + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}}} = \frac{I}{\sqrt{1 + \eta\mu \frac{2\vartheta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{2\vartheta}{2}}}$$

$$\nu = \varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu \varphi}}{\sigma\upsilon\nu \varphi}$$

Ευρίσκομεν τό συνφ ὡς ἐξῆς. $\text{συνφ} = \frac{\Gamma\text{M}^2 + \Gamma\text{N}^2 - \text{MN}^2}{2\Gamma\text{M} \cdot \Gamma\text{N}}$

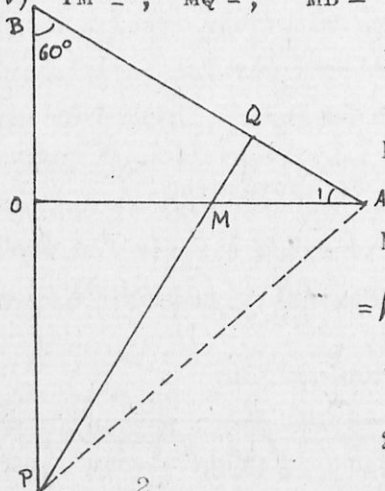
$$= \frac{4\text{R}^2 + 4\text{R}^2 \text{συν}^2 \frac{\theta}{2} + 4\text{R}^2 + 4\text{R}^2 \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - 4\text{R}^2}{2 \cdot 4\text{R}^2 \sqrt{1 + \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}} \sqrt{1 + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}} \sqrt{1 + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Δι' ἀντικαταστάσεως ἔχομεν: $v = \varepsilon\phi\phi = \sqrt{1 + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}}$

Ἄρα $\mu \cdot v = \frac{1}{\sqrt{1 + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}}} \cdot \sqrt{1 + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2} - \text{συν}^2 \frac{\theta}{2}} = 1$

542)

Ιον) $\text{PM} = ; \text{MQ} = ; \text{MB} = ;$ Ἡ γωνία $\widehat{\text{OPM}} = 30^\circ$. Ἄρα



$$\text{PM} = \frac{\text{OM}}{\eta\mu(\widehat{\text{OPM}})} = 2x$$

$$\text{MQ} = \text{MA} \eta\mu \text{A}_1 = (\alpha - x) \cdot \frac{1}{2}$$

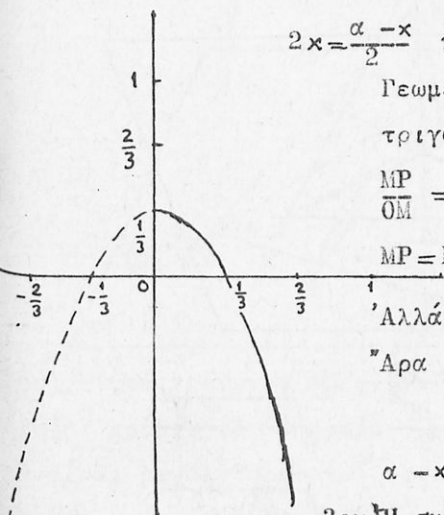
$$\begin{aligned} \text{MB} &= \sqrt{x^2 + \text{OB}^2} = \\ &= \sqrt{x^2 + (\text{OA} \varepsilon\phi 30^\circ)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{\alpha^2}{3}} \end{aligned}$$

Ἵνα ἔχωμεν $\text{MP} = \text{MB}$ πρέπει

$$2x = \sqrt{x^2 + \frac{\alpha^2}{3}} \quad \eta \quad 4x^2 = x^2 + \frac{\alpha^2}{3}$$

$\eta \quad 3x^2 = \frac{\alpha^2}{3}, \quad x = \frac{\alpha}{3}$. Γεωμετρικῶς, Ἵνα ἔχωμεν $\text{MP} = \text{MB}$ πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ OA νά εἶναι μεσοκάθετος ἐπὶ τῆς BP .
 $\text{OB} = \text{OP} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$. Τότε τό τρίγωνον ABP θά εἶναι ἰσόπλευρον
 ἡ δέ γωνία $\widehat{\text{OBM}} = 30^\circ$. Ἄρα $x = \text{OB} \varepsilon\phi 30^\circ = \frac{\text{OB}}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha}{3}$.

2ον) "Ινα εἶναι $MP = MQ$ πρέπει καί ἄρκει:



$$2x = \frac{\alpha - x}{2} \quad \eta \quad 4x = \alpha - x, \quad \eta \quad x = \frac{\alpha}{5}.$$

Γεωμετρικῶς ἐκ τῶν ὁμοίων
τριγώνων MQA , MOP ἔχομεν :

$$\frac{MP}{OM} = \frac{MA}{MQ}. \quad \text{Ἀντικαθιστῶμεν}$$

$$MP = MA \quad \text{καί} \quad \text{ἔχομεν} \quad MQ^2 = MA \cdot MO.$$

$$\text{Ἀλλά ἐπειδὴ} \quad A = 300 \quad MQ = \frac{MA}{2}.$$

$$\text{Ἄρα} \quad \frac{MA^2}{4} = MA \cdot MO, \quad MA = 4MO \quad \eta$$

$$\alpha - x = 4x \quad x = \frac{\alpha}{5}.$$

3ον) Η συνάρτησις y δίδεται ὑπό₂
τοῦ τύπου $y = MB^2 - MP^2 = x + \frac{2}{3}\alpha^2 - 4x^2 \quad \eta \quad y = -3x^2 + \frac{\alpha^2}{3}.$

Η συνάρτησις αὕτη ἀποτελεῖ παραβολήν συμμετρικὴν ὡς
τῶν ἄξονα τῶν y . Ἐὰν λύσωμεν ὡς πρὸς τό x ἔχομεν:

$$3x^2 = \frac{\alpha^2}{3} - y \quad \eta \quad x = \sqrt{\frac{\alpha^2 - 3y}{9}}. \quad \text{Πρέπει} \quad \alpha^2 - 3y \geq 0,$$

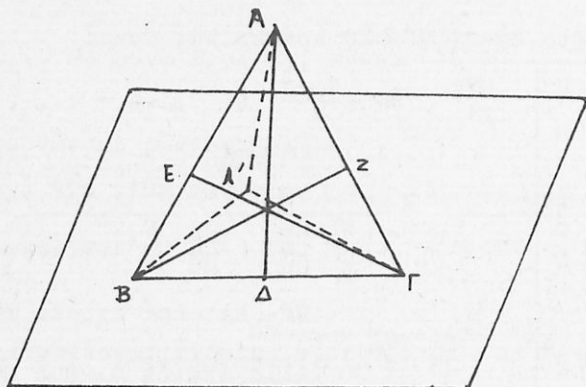
$$\text{Ἄρα} \quad y \leq \frac{\alpha^2}{3}. \quad \text{Ἐπειδὴ λαμβάνομεν} \quad \alpha = 1, \quad \text{πρέπει} \quad y \leq \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ἄρα} \quad y \text{ μέγιστον} = \frac{1}{3}. \quad \text{Τό μέγιστον λαμβάνεται διὰ} \quad x = 0.$$

$$\text{Διὰ} \quad y = 0 \quad \text{λαμβάνομεν} \quad x = \frac{1}{3}, \quad x = -\frac{1}{3}, \quad \text{δηλαδή τὰ ση-}$$

μεῖα τομῆς τῆς καμπύλης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν y .

Λεχόμεθα, ὅχι ὁλόκληρον τὴν καμπύλην, ἀλλὰ τό τμήμα
ταύτης τό περιεχόμενον μεταξύ $0 \dots 1$, συμφώνως μέ
τῶν τεθέντα περιορισμόν. $0 \leq x \leq 0A.$



543)

Ιον) Τό ὕψος ΑΔ ἰσοῦται μέ :

$$\sqrt{ΑΓ^2 - \left(\frac{ΒΓ^2}{2}\right)} = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\beta^2}{4}}.$$

$$\text{Τό ὕψος } ΓΕ = ΒΓ \eta \mu Β \beta. \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{\beta \sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha}$$

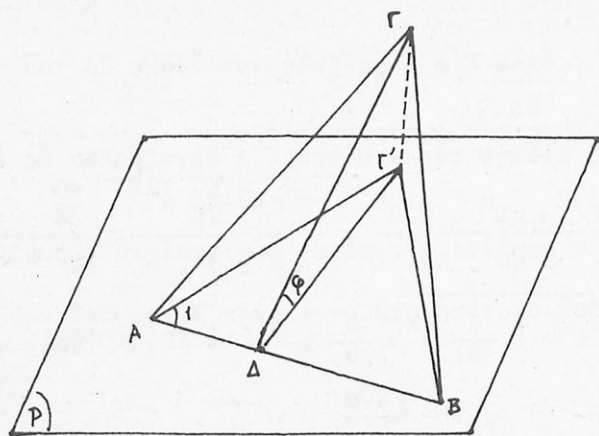
$$ΒΖ = ΕΓ = \frac{\beta}{2\alpha} \sqrt{4\alpha^2 - \beta^2} \quad \eta \mu Β = \frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha} = \eta \mu \Gamma$$

$$\sigma \nu \nu Β = \sigma \nu \nu \Gamma = \frac{ΔΒ}{ΑΒ} = \frac{\beta}{2\alpha}, \quad \eta \mu Α = \frac{ΓΕ}{ΑΓ} = \frac{\beta \sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha^2}$$

$$\sigma \nu \alpha = \sqrt{1 - \eta \mu^2 Α} = \frac{2\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha^2}, \quad \eta \mu \frac{Α}{2} = \frac{ΔΒ}{ΑΒ} = \frac{\beta}{2\alpha},$$

$$\sigma \nu \nu \frac{Α}{2} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{\sqrt{4\alpha^2 - \beta^2}}{2\alpha}. \text{ Έκ τῶν τριγώνων } ΑΛ'Β, ΑΛ'Γ$$

τά ὁποῖα ἔχουν ΑΛ' κοινήν, $\widehat{ΑΛ'Β} = \widehat{ΑΛ'Γ}$, $ΑΒ = ΑΓ$, εἶναι ἴσα, ἄρα $Α'Β = Α'Γ$, ἐπομένως τό $Α'ΒΓ$ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. Καί ἀντιστρόφως ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ($Α'Β = Α'Γ$, $ΑΛ'$ κοινή) εὐρίσκομεν ὅτι τό $ΑΒΓ$ εἶναι ἰσοσκελές.



2ον) Είς τό τρίγωνον $AB\Gamma$, ἵνα αἱ γωνίαι A, B, Γ εἶναι ὀξεῖαι πρέπει τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων 2 πλευρῶν νά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τετραγώνου τῆς τρίτης.

$$A\Gamma^2 + AB^2 = \left(-\frac{8\alpha}{5}\right)^2 + \alpha^2 > \left(-\frac{7\alpha}{5}\right)^2 = B\Gamma^2$$

$$AB^2 + B\Gamma^2 = \alpha^2 + \left(-\frac{7\alpha}{5}\right)^2 > \left(-\frac{8\alpha}{5}\right)^2 = A\Gamma^2$$

$$B\Gamma^2 + A\Gamma^2 = \left(-\frac{7\alpha}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8\alpha}{5}\right)^2 > \alpha^2 = AB^2$$

Εἰς τό τρίγωνον $AB\Gamma'$, ἡ γωνία $\widehat{\Gamma'AB} < \widehat{\Gamma AB}$, ἐφ' ὅσον ἡ ΓAB προβάλλεται ἐπί τό (P) κατὰ τήν $\Gamma'AB$, καί εἶναι ὀξεῖα. Ἐπειδή δέ τό τρίγωνον $AB\Gamma'$ εἶναι ἰσοσκελές ἔεται ὅτι αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ $\Gamma'AB$ εἶναι ὀξεῖαι.

$$\left. \begin{aligned} \Gamma\Gamma' &= \sqrt{\left(-\frac{8\alpha}{5}\right)^2 - \alpha^2} = \sqrt{\frac{39}{5}} \alpha, \\ B\Gamma' &= \sqrt{\left(-\frac{7\alpha}{5}\right)^2 - \frac{39\alpha^2}{25}} = \sqrt{\frac{10}{5}} \alpha \end{aligned} \right\}$$

$\epsilon\phi\phi = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'\Delta}$, όπου $\Gamma'\Delta$ ἡ προβολή τοῦ ὕφους $\Gamma\Delta$ τοῦ τρι-

γώνου $AB\Gamma$. Διάτῃν εὗρεσιν τοῦ $\Gamma'\Delta$ ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς.

$$\sigmaυν\Lambda_I = \frac{A\Gamma'^2 + AB^2 - \Gamma'B^2}{2 A\Gamma' \cdot AB} = \frac{\alpha^2 + \alpha^2 - \frac{10}{25} \alpha^2}{2 \cdot \alpha \cdot \alpha} = \frac{\frac{40}{25}}{2} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

$$\eta\mu\Lambda_I = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}. \text{ Ἀλλὰ } \Delta\Gamma' = A\Gamma' \eta\mu\Lambda = \frac{3\alpha}{5}$$

$$\text{Ἐπομένως } \epsilon\phi\phi = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma'\Delta} = \frac{\frac{\sqrt{39}\alpha}{5}}{\frac{3\alpha}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{3}.$$

Ἐάν τό ἐπίπεδον (P) στρέφεται περί τήν AB , τό $\Gamma'\theta\acute{\alpha}$ κεῖται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τήν AB εἰς τό σταθερό σημεῖον Δ . Ἐκίτοῦ ἐπιπέδου τούτου τό $\Gamma'\theta\acute{\alpha}$ κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου διαμέτρου $\Delta\Gamma$.

Διὰ νά ἔχῃ τό τρίγωνον $AB\Gamma'$ δύο πλευράς ἴσας, τάς AB , $A\Gamma'$ πρέπει $AB = A\Gamma'$ ἢ $AB^2 = A\Gamma'^2 = A\Gamma^2 - \Gamma\Gamma'^2$ ἄρα

$$\Gamma\Gamma' = \sqrt{A\Gamma^2 - AB^2}, \quad \Gamma\Gamma' = \sqrt{\left(\frac{8\alpha}{5}\right)^2 - \alpha^2} = \frac{\sqrt{39}}{5} \alpha.$$

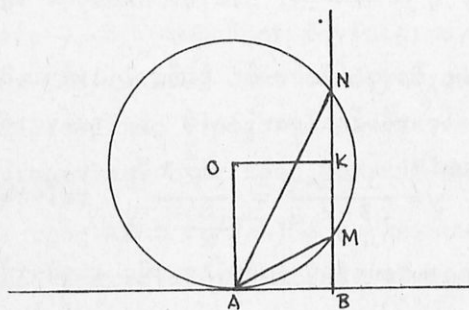
$$\text{ὁπότε } \eta\mu\phi = \frac{\Gamma\Gamma'}{\Gamma\Delta} = \frac{\frac{\sqrt{39}}{5} \alpha}{A\Gamma \eta\mu\Gamma AB}$$

$$\sigmaυν \Gamma AB = \frac{A\Gamma^2 + AB^2 - B\Gamma^2}{2 A\Gamma \cdot AB} = \frac{1}{2}, \quad \eta\mu\hat{\Gamma} AB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Αρα. } \eta\mu\phi = \frac{\frac{\sqrt{39}}{5} \alpha}{\frac{8\alpha}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{39}}{5}}{\frac{4\sqrt{3}}{5}} = \frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{3}}$$

Επομένως ἡ ἀντίστοιχος γωνία τῆς διέδρου τῶν δύο ἐπιπέδων ΓΑΒ καὶ Ρ πρέπει νά ἔχῃ ἡμίτονο ἴσον πρὸς $\frac{\sqrt{39}}{4\sqrt{3}}$.

544) Ιον.- Ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νά λάβῃ τό ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΒΧ εἶναι $x=0$.



Καθὼς τό Ν ἀπομακρύνεται ἀπό τό σημεῖον Β, ἡ ἀπόστασις $BN=y$ μεγαθύνεται καὶ τείνει εἰς τό ἄπειρον. Ἐπει-
δὴ ἡ γωνία $\widehat{MAN}=30^\circ$, ἡ μεγίστη τιμὴ τῆς γωνίας $\widehat{MAB}$ εἶναι 60° . Ἀρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην :

$$x = AB \varepsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3.$$

2ον) Ἐχομεν ὅτι $\varepsilon\phi 30^\circ = \varepsilon\phi \widehat{MAN} = \varepsilon\phi(\widehat{NAB} - \widehat{MAB}) =$

$$= \frac{\varepsilon\phi \widehat{NAB} - \varepsilon\phi \widehat{MAB}}{1 + \varepsilon\phi \widehat{NAB} \varepsilon\phi \widehat{MAB}} \quad \text{'Αλλά } \varepsilon\phi \widehat{MAN} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon\phi \widehat{NAB} = \frac{y}{\sqrt{3}},$$

$$\varepsilon\varphi\widehat{MAB} = \frac{x}{\sqrt{3}} \quad \text{Άρα} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{3}} - \frac{x}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{y}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{\sqrt{3}}} \quad \eta$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{y-x}{\sqrt{3}}}{\frac{3+xy}{\sqrt{3}-2}} \quad \eta \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{y-x}{3+3x} \quad \eta$$

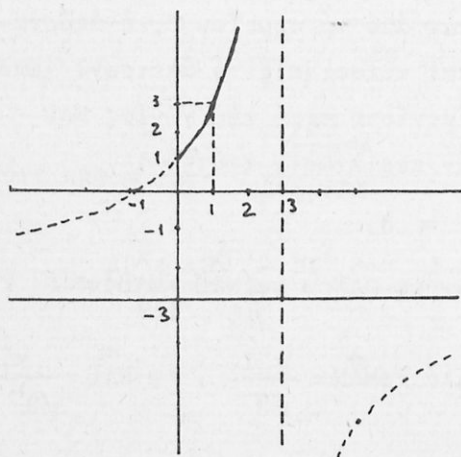
$$\frac{1}{3} = \frac{y-x}{3+xy} \quad \text{Αν λύσουμε ως προς } y \text{ θα έχουμε:}$$

$$3y - 3x = 3+xy \quad \eta \quad y = \frac{3+3x}{3-x} \quad \text{Διὰ τὴν σπουδὴν τῆς εὐρεθείας}$$

σης συναρτήσεως ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς. Διὰ $x=3$, ἡ τιμὴ τοῦ y τείνει εἰς τὸ ἄπειρον. Διὰ x τείνοτος εἰς τὸ ἄπειρον θα ἔχωμεν:

$$y = \frac{3+3x}{3-x} = \frac{\frac{3}{x} + 3}{\frac{3}{x} - 1} \quad \text{τείνει εἰς τὸ}$$

- 3. Ἡ ἀντιπροσωπευτικὴ καμπύλη τῆς συναρτήσεως εἶ-



ναί ὑπερβολὴ μέ-
 ἀσυμβάτους τάς
 εὐθείας τάς πα-
 αλλήλους πρὸς τοῦ
 ἄξονας OX, OY , α
 ὁποῖαι τέμνουν
 τούτους εἰς τὰ
 σημεῖα $(0, -3)$
 $(3, 0)$.

Εξ. ὅλης τῆς καμπύλης γίνεται δεκτόν τό τμήμα τό περι-
χόμενον μεταξύ τῶν τιμῶν τοῦ $x:0\ldots\ldots3$. Ἵνα εἴ-
ναι $NM=2$ πρέπει $y-x=2$ ἢ $y=x+2$,

Εάν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν σχέσιν $y=\frac{3+3x}{3-x}$,
τό y συναρτήσῃ τοῦ x θά ἔχωμεν $x+2=\frac{3+3x}{3-x}$ ἢ

$$3x+6-x^2-2x=3+3x \quad \text{ἢ} \quad 6-x^2-2x-3=0 \quad \text{ἢ}$$

$$x^2+2x-3=0. \quad \text{Ἄρα } x=-1 \pm \sqrt{1+3} \quad x=1, x=-3.$$

Ἡ ἀρνητική τιμή τοῦ x ἀπορρίπτεται, διότι τά θεωρού-
μενα τμήματα x, y λαμβάνονται θετικά, ἄρα ἔχομεν μόνον
 $x=1$, ὁπότε $y=3$. Θεωροῦμεν τόν περιγεγραμμένον περί
τό τρίγωνον AMN κύκλον. Ἐάν τά x, y ἔχουν προηγουμέ-
ως προσδιορισθείσας τιμάς, τό γινόμενον $x \cdot y=3$ ἀποτε-
λεῖ τήν δύναμιν τοῦ B ὡς πρός τόν κύκλον. Ἀλλά τοῦ-
το ἰσοῦται πρός $AB^2=(\sqrt{3})^2=3$, ἄρα συμπεραίνομεν
ὅτι ὁ κύκλος ἐφάπτεται τῆς AB εἰς τό σημεῖον A .

$$\begin{aligned} \text{Ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου ἰσοῦται μέ } R &= \sqrt{OK^2 + KM^2} = \\ &= \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + \left(-\frac{NM}{2}\right)^2} = \sqrt{3+1} = 2. \end{aligned}$$

Ἡ πλευρά MN τοῦ τριγώνου AMN εἶναι γνωστή ($MN=2$).

$$\text{Ἡ πλευρά } AM \text{ ἰσοῦται μέ } AM = \sqrt{MB^2 + AB^2} = \sqrt{1+3} = 2.$$

$$\text{Ἡ πλευρά } AN = \sqrt{BN^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Αἱ γωνίαι τοῦ $\triangle AMN$ τριγώνου εὐρίσκονται ὡς ἐξῆς.-

$$\frac{AM}{\eta\mu(\widehat{ANM})} = \frac{AN}{\eta\mu(\widehat{AMN})} = \frac{MN}{\eta\mu(\widehat{NAM})} = 2R = 4.$$

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω σχέσεως ἔχομεν:

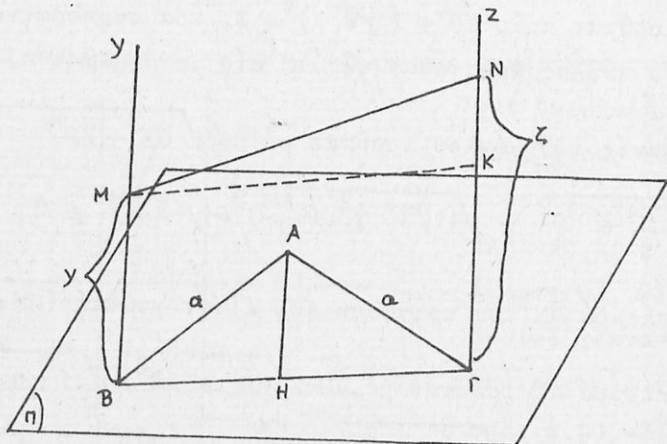
$$\eta\mu(\widehat{ANM}) = \frac{AM}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad \text{ἄρα } \widehat{ANM} = 30^\circ,$$

$$\eta\mu(\widehat{NAM}) = \frac{MN}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad (\widehat{NAM}) = 30^\circ.$$

$$\eta\mu(\widehat{AMN}) = \frac{AN}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \widehat{AMN} = 120^\circ.$$

$$545) \quad \text{Ιον.} - BG = 2BH = 2. \quad AB\eta\mu \frac{120^\circ}{2} = 2\alpha \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\alpha$$

$$AH = AB\eta\mu 30^\circ = \alpha \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



2ον) Ὡς γὰρ ἡ γωνία $MAN = I$ ὀρθή, πρέπει:

$$AM^2 + AN^2 = MN^2 \quad (I)$$

Ἄν MK παράλληλος πρὸς τὴν $BΓ$, θὰ ἔχωμεν

$$MN^2 = MK^2 + NK^2 = (f-y)^2 + 3a^2$$

$$MA^2 = AB^2 + y^2 = a^2 + y^2$$

$$NA^2 = AG^2 + f^2 = a^2 + f^2$$

Δι' ἀντικατάστασιν εἰς τὴν (I) ἔχομεν :

$$(f-y)^2 + 3a^2 = a^2 + y^2 + a^2 + f^2 \quad \text{ἢ} \quad f^2 - 2fy + y^2 + 3a^2 = 2a^2 + y^2 + f^2$$

$$\quad \text{ἢ} \quad a^2 = 2fy.$$

3ον) Ὡς εἶναι $2(BM + ΓN) = 3a$, πρέπει:

$$2(y+f) = 3a, \quad y+f = \frac{3a}{2}$$

4ον) Διὰ τὴν εὐρωμεν τὰς τιμὰς y, f , ἵνα ἔχωμεν ταυτοχρόνως :

$$y + f = \frac{3a}{2}, \quad a^2 = 2fy,$$

ἀρκεῖ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα : $y+f = \frac{3a}{2}, \quad a^2 = 2fy,$

$$(y+f)^2 = \left(\frac{3a}{2}\right)^2, \quad y^2 + f^2 + 2yf = \frac{9a^2}{4} \quad y^2 + f^2 = \frac{9a^2}{4} -$$

$$-a^2 = \frac{5a^2}{4}, \quad (y-f)^2 = y^2 + f^2 - 2yf = \frac{5a^2}{4} - a^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$\text{ἄρα ἡ } (y - f) = \frac{a}{2} \quad \text{ἢ} \quad f - y = \frac{a}{2}$$

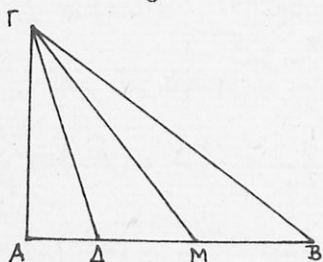
Ἐπειδὴ ὁμως δίδεται $BM < ΓN$, δηλαδή $y < f$, καὶ ὅλα τὰ θεωρούμενα τμήματα εἶναι θετικά, ἄρα $a > 0$, ἰσχύει μόνον ἡ σχέση $f - y = \frac{a}{2}$. Ἐπειδὴ ἔχομεν ἐπίσης

$$\text{ὅτι } y + f = \frac{3a}{2}, \quad \text{εὐρίσκομεν } f = a, \quad y = \frac{a}{2}.$$

546)

I.-) Εύρίσκομεν :

$$\eta\mu\hat{A}\Gamma B = -\frac{4}{5}, \quad \sigma\upsilon\nu\hat{A}\Gamma B = \frac{3}{5}, \quad \epsilon\varphi\hat{A}\Gamma B = \frac{4}{3}$$



$$\eta\mu\hat{A}\Gamma\Delta = \frac{A\Delta}{\sqrt{A\Delta^2 + \Gamma\Delta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A}\Gamma\Delta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \quad \epsilon\varphi\hat{A}\Gamma\Delta = \frac{1}{3}$$

$$\eta\mu\hat{B}\Gamma\Delta = ;$$

Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\eta\mu\frac{\Delta B}{\Gamma\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{\Gamma B}$$

$$\text{"Αρα } \eta\mu\hat{A}\Gamma B = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \eta\mu(\Gamma B A) = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5\sqrt{10}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{A}\Gamma B = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{5\sqrt{10}}\right)^2} = \sqrt{\frac{250-81}{250}} = \sqrt{\frac{169}{250}} = \frac{13}{5\sqrt{10}}$$

$$\epsilon\varphi\hat{A}\Gamma B = \frac{\eta\mu\hat{A}\Gamma B}{\sigma\upsilon\nu\hat{A}\Gamma B} = \frac{9}{13}$$

2ον) Δίδεται $AM = x$.

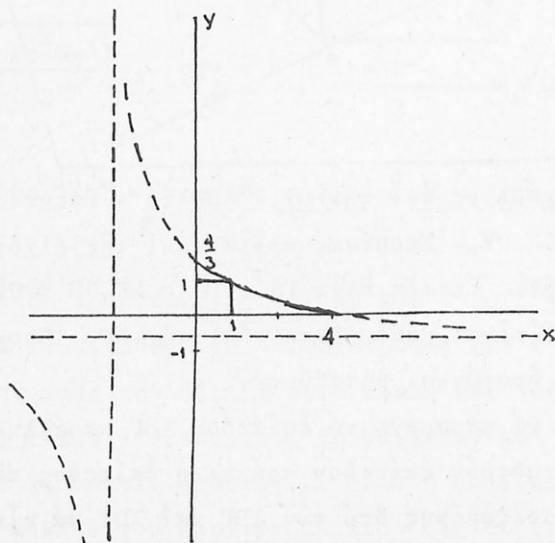
$$y = \epsilon\varphi\hat{B}\Gamma M = \epsilon\varphi(\hat{B}\Gamma A - \hat{M}\Gamma A) = \frac{\epsilon\varphi\hat{B}\Gamma A - \epsilon\varphi\hat{M}\Gamma A}{1 + \frac{\epsilon\varphi\hat{B}\Gamma A \epsilon\varphi\hat{M}\Gamma A}{\frac{4}{3} \cdot \frac{x}{3}}} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{x}{3}}{1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{x}{3}}$$

$$= \frac{\frac{4-x}{3}}{\frac{9+4x}{9}} = \frac{3(4-x)}{9+4x} \quad \text{Η γραφική παράστασις τῆς συναρ-}$$

τήσεως $y = \frac{3(4-x)}{9+4x}$ παριστᾷ

περβολήν. Ἡ ὑπερβολή αὕτη ἔχει τὴν μίαν ἀσύμβατον
παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y καὶ τέμονυσαν τὸν ἄξο-
να τῶν x εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{9}{4}$, ἔχει δὲ τὴν ἄλλην ἀσύμ-
βατον παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα τῶν x καὶ τέμνουσαν
τὸν ἄξονα τῶν y εἰς τὸ σημεῖον $-\frac{3}{4}$. Λι εὐρεθεῖσαι
καὶ τῶν ἀσυμβάτων ἐξηγήθησαν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως
εἰς τὴν θεωρουμένην συνάρτησιν $y = \infty$, $x = \infty$.

Ἐπειδὴ $0 \leq x \leq 4$, δεχόμεθα ὅχι ὁλόκληρον τὴν ὑπερβο-
λήν ἀλλὰ τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ περιεχόμενον μεταξύ 0 καὶ 4.



7) Τὰ τρίγωνα $\triangle AOF$, $\triangle AOB$, εἰναι ἰσα διότι OA εἶναι κοι-
νή, $\angle AOB = \angle AOF$, καὶ $\angle ABO = \angle AFO = 1$ ὁρθή. Ἄρα $AB = AF$.
Τὰ τρίγωνα $\triangle AA'B$, $\triangle AA'F$ ἔχουν τὴν AA' κοινήν, $AB = AF$,
καὶ εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ A' . Ἄρα $A'B = A'F$.

Ἐκ τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν καθέτων, ἐπειδὴ AA' κάθε-
τος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον XOY , AB κάθετος ἐπὶ τὴν OX , AF κά-
θετος ἐπὶ τὴν OY , ἔπεται ὅτι $A'B$ κάθετος ἐπὶ τὴν OX .

ταθερά.

$$\text{συν}\vartheta = \frac{OB}{OA} = \frac{OA' \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{OA \text{συν}\beta}{OA} = \frac{\text{συν}\beta}{\sqrt{2}}.$$

Ἐκ τῆς εὐρεθείσης σχέσεως ἔχομεν :

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\vartheta}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon\varphi^2\beta}} \quad \eta \quad \frac{2}{1 + \varepsilon\varphi^2\vartheta} = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2\beta}$$

$$\eta \quad 2(1 + \varepsilon\varphi^2\beta) = 1 + \varepsilon\varphi^2\vartheta.$$

$$\varepsilon\varphi\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon\varphi^2\vartheta - 1}{2}}, \quad \varepsilon\varphi\gamma = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon\varphi^2\vartheta - 1}{2}} = \sqrt{2(\varepsilon\varphi^2\vartheta - 1)}$$

$$\text{ἰά } \vartheta = 60^\circ, \quad \varepsilon\varphi\beta = \sqrt{\frac{\varepsilon\varphi^2 60^\circ - 1}{2}} = \sqrt{\frac{3 - 1}{2}} = 1.$$

ον) Εὐρέθη προηγουμένως ὅτι ἂν $\hat{A}OB$ $\hat{A}OG$, τὰ τμήματα OB καὶ GB εἶναι ὀρθογώνια. Ἀντιστρόφως ἐάν ἡ BG εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν OA , ἐφ' ὅσον εἶναι καὶ πρὸς AA' ὀρθογώνιος, εἶναι κάθετος πρὸς τὸ ἐπίπεδον AOA' . Ἄρα OA' καὶ GB τέμνονται καθέτως. Ἀλλά ἡ OA' εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὸ ἐγγράφιστον τετράπλευρον $OBA'G$. Ἐπομένως διέρχεται ἀπὸ τοῦ κέντρου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν GB . Ἄρα θά εἶναι ἐσοκάθετος ταύτης. Ἄρα τὸ τρίγωνον OBG εἶναι ἰσοσκελές. Συγκρίνοντας τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OBA , OGA ($OA = OA'$, $OB = OG$), συμπεραίνωμεν ὅτι $\hat{A}OB = \hat{A}OG$.

$\triangle ADB$ ἔχομεν $DE = AE$, ἄρα $\hat{ADE} = 45^\circ$. Ἐπίσης ἐπειδὴ
 $AE = EB$ καὶ DE κάθετος ἐπὶ τὴν AB , τὸ τρίγωνον $\triangle ADB$ εἶ-
 ναι ἰσοσκελές, ἐπομένως $\hat{ADB} = 2\hat{ADE} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$.
 Ἄρα τὸ τρίβρον $\triangle A.B\Gamma$ εἶναι τρισορθογώνιον εἰς τὸ Δ .
 Τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ Γ καὶ κάθετον ἐπὶ
 τὴν AB εἶναι κάθετον καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΓAB τὸ διε-
 ρχόμενον διὰ τοῦ AB . Εἰς τὸ ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον
 διὰ τοῦ Γ , κεῖνται τὸ Δ , διότι $\Gamma\Delta, AB$ ὀρθογώνιοι. Ἐάν
 διὰ τοῦ A φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον πρὸς τὴν ΓB , τὸ
 ἐπίπεδον τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον πρὸς τὸ $AB\Gamma$. Ἐπειδὴ
 δὲ AD ὀρθογώνιος πρὸς τὴν ΓB , ἔπεται ὅτι τὸ Δ κεῖται
 ἐπὶ τοῦ ἀγομένου ἐπιπέδου. Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ἐπὶ
 τὰς $AB, \Gamma B$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$. Ἐπειδὴ
 δὲ κεῖται εἰς τὴν τομὴν τῶν κορυφῶν $DE, A\Theta$ ἔπεται ὅτι
 εἶναι τὸ ὀρθόμεντρον H τοῦ $AB\Gamma$.

$$549) \quad y = \eta \mu x (1 + \sigma \nu x)$$

$$y' = (\eta \mu x)' (1 + \sigma \nu x) + \eta \mu x (1 + \sigma \nu x)' = \sigma \nu x (1 + \sigma \nu x) + \eta \mu x (-\eta \mu x) = \sigma \nu x + \sigma \nu^2 x - \eta \mu^2 x = \sigma \nu x + \sigma \nu 2x.$$

$$550) \quad y = (x^2 - 3x + \alpha) \sigma \nu x$$

$$y' = (x^2 - 3x + \alpha)' \sigma \nu x + (x^2 - 3x + \alpha) (\sigma \nu x)' = (2x - 3) \sigma \nu x + (x^2 - 3x + \alpha) (-\eta \mu x) = (2x - 3) \sigma \nu x - (x^2 - 3x + \alpha) \eta \mu x.$$

$$551) \quad y = x \varepsilon \phi x.$$

$$y' = (x)' \varepsilon \phi x + x (\varepsilon \phi x)' = \varepsilon \phi x + x (1 + \varepsilon \phi^2 x)$$

$$552) \quad y = \frac{1 - \eta \mu x}{1 + \eta \mu x}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \eta \mu x)(1 - \eta \mu x)' - (1 - \eta \mu x)'(1 + \eta \mu x)}{(1 + \eta \mu x)^2} = \\ &= \frac{(1 + \eta \mu x)(-\sigma \nu x) - \sigma \nu x(1 - \eta \mu x)}{(1 + \eta \mu x)^2} = \\ &= \frac{-\sigma \nu x - \sigma \nu x \eta \mu x - \sigma \nu x + \eta \mu x \sigma \nu x}{(1 + \eta \mu x)^2} = \frac{-2\sigma \nu x}{(1 + \eta \mu x)^2} \end{aligned}$$

$$553) \quad y = \frac{4\eta \mu^2 x + 1}{2(\alpha \eta \mu x + 1)} =$$

$$= \frac{2(\alpha \eta \mu x + 1)(4\eta \mu^2 x + 1)' - 2(\alpha \eta \mu x + 1)(4\eta \mu^2 x + 1)'}{4(\alpha \eta \mu x + 1)^2} =$$

$$= \frac{8(\alpha\eta\mu^2 x + 1)(\eta\mu^2 x)' - 2\alpha\sigma\upsilon\nu x (4\eta\mu^2 x + 1)}{4(\alpha\eta\mu^2 x + 1)^2} =$$

$$= \frac{16(\alpha\eta\mu^2 x + 1)\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - 2\alpha\sigma\upsilon\nu x (4\eta\mu^2 x + 1)}{4(\alpha\eta\mu^2 x + 1)^2} =$$

$$= \frac{16\alpha\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + 16\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - 8\alpha\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - 2\alpha\sigma\upsilon\nu x}{4(\alpha\eta\mu^2 x + 1)^2} =$$

$$= \frac{8\alpha\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + 16\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x - 2\alpha\sigma\upsilon\nu x}{4(\alpha\eta\mu^2 x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu x (4\alpha\eta\mu^2 x + 8\eta\mu^2 x - \alpha)}{4(\alpha\eta\mu^2 x + 1)^2} =$$

$$54) \quad y = \frac{2 + \sigma\upsilon\nu x}{1 - 2\sigma\upsilon\nu x} \quad y' = \frac{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)(2 + \sigma\upsilon\nu x)' - (1 - 2\sigma\upsilon\nu x)'}{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$= \frac{(2 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)(-\eta\mu x) - 2\eta\mu x (2 + \sigma\upsilon\nu x)'}{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2} =$$

$$= \frac{-\eta\mu x + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{-5\eta\mu x}{(1 - 2\sigma\upsilon\nu x)^2}$$

$$55) \quad y = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x} \quad y' = \frac{\eta\mu^2 x (\sigma\upsilon\nu x)' - \sigma\upsilon\nu x (\eta\mu^2 x)'}{\eta\mu^4 x} =$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\eta\mu^3 x - 2\sigma\nu^2 x \eta\mu x}{\eta\mu^4 x} = \frac{-\eta\mu x (\eta\mu^2 x + 2\sigma\nu^2 x)}{\eta\mu^4 x} = \\
 & = \frac{\eta\mu^2 x + \sigma\nu^2 x + \sigma\nu^2 x}{\eta\mu^3 x} = \frac{1 + \sigma\nu^2 x}{\eta\mu^3 x}
 \end{aligned}$$

$$556) y = \frac{\eta\mu^2 x}{1 + \sigma\nu x}$$

$$y' = \frac{(1 + \sigma\nu x)(\eta\mu^2 x)' - (1 + \sigma\nu x)' \eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\nu x)^2} =$$

$$= \frac{2(1 + \sigma\nu x) \sigma\nu^2 x - \eta\mu^2 x (-\eta\mu x)}{(1 + \sigma\nu x)^2} =$$

$$= \frac{2\sigma\nu^2 x + 2\sigma\nu x \sigma\nu^2 x + \eta\mu x \eta\mu^2 x}{(1 + \sigma\nu x)^2} = \frac{2(2\sigma\nu^2 x - 1) + 2\sigma\nu x(2\sigma\nu^2 x - 1) + 2\eta\mu^3 x}{(1 + \sigma\nu x)^2}$$

$$\frac{\sigma\nu x}{(1 + \sigma\nu x)^2} = \frac{4\sigma\nu^2 x - 2 + 4\sigma\nu^3 x - 2\sigma\nu x + 2\sigma\nu x - 2\sigma\nu^3 x}{(1 + \sigma\nu x)^2} =$$

$$= \frac{2(1 + \sigma\nu x)(\sigma\nu^2 x + \sigma\nu x + 1)}{(1 + \sigma\nu x)^2} = \frac{2(\sigma\nu^2 x + \sigma\nu x + 1)}{1 + \sigma\nu x}$$

$$557) y = \frac{1 - \sigma\nu x}{1 + \sigma\nu x}$$

$$y' = \frac{(1 + \sigma\nu x)(1 - \sigma\nu x)' - (1 + \sigma\nu x)'(1 - \sigma\nu x)}{(1 + \sigma\nu x)^2} =$$

$$= \frac{(1 + \sigma\nu x) \eta\mu x - (-\eta\mu x)(1 - \sigma\nu x)}{(1 + \sigma\nu x)^2} =$$

$$\frac{\eta\mu x + \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{2\eta\mu x}{(1 + \sigma\upsilon\nu x)^2}$$

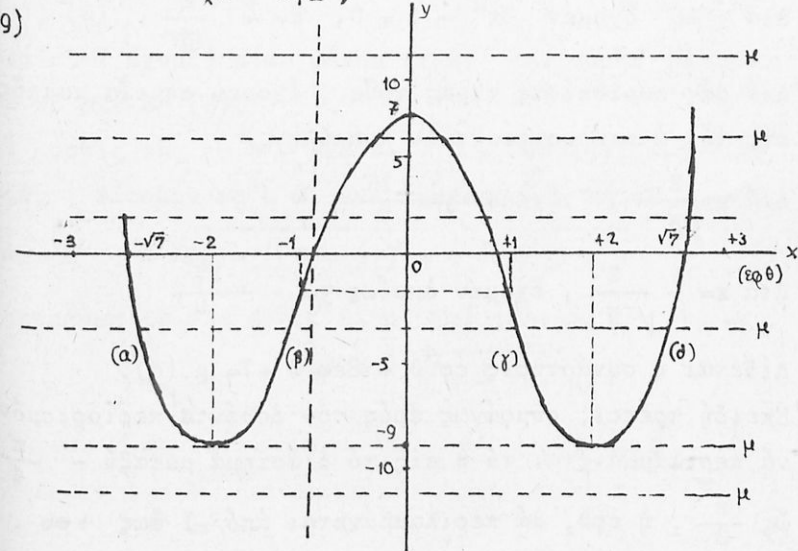
$$558) \quad y = \frac{1 + \varepsilon\varphi x}{1 - \varepsilon\varphi x}$$

$$y' = \frac{(1 - \varepsilon\varphi x)(1 + \varepsilon\varphi x)' - (1 - \varepsilon\varphi x)'(1 + \varepsilon\varphi x)}{(1 - \varepsilon\varphi x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - \varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)' + (\varepsilon\varphi x)'(1 + \varepsilon\varphi x)}{(1 - \varepsilon\varphi)^2} =$$

$$= \frac{(\varepsilon\varphi x)'(1 - \varepsilon\varphi x + 1 + \varepsilon\varphi x)}{(1 - \varepsilon\varphi x)^2} =$$

$$= \frac{2(1 + \varepsilon\varphi^2 x)}{(1 - \varepsilon\varphi x)^2}$$



Δίδεται ἡ συνάρτησις $y = x^4 - 8x^2 + 7$. Αἱ τομαί τῆς ἀντιπροσωπευτικῆς καμπύλης ταύτης μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν x , εὐρίσκονται διὰ $y = 0$, δηλαδή $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως ἔχομεν $x^2 = 4 \pm \sqrt{16-7} = 4 \pm 3$.

Ἄρα $x^2 = 7$, $x = \pm \sqrt{7}$, καὶ $x^2 = 1$ ἄρα $x = \pm 1$.

Ἡ (α) παράγωγος τῆς συναρτήσεως εἶναι $y' = 4x^3 - 16x$.

διὰ $y' = 0$ ἔχομεν τὰ μέγιστα ἢ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως $4x^3 - 16x = 0$ ἢ $4x(x^2 - 4) = 0$ ἢ $4(x-2)(x+2)x = 0$. Ἄρα $x=0$, $x=2$, $x=-2$.

Θέτοντες τὴν τιμὴν $x=0$ εἰς τὴν y , ἔχομεν $y=7$.

Θέτοντες τὰς τιμὰς $2, -2$ εἰς τὴν y ἔχομεν $y=-9$.

Ἡ τιμὴ 7 ἀποτελεῖ ἓν μέγιστον τῆς συναρτήσεως y , ἡ δὲ τιμὴ -9 , ἀποτελεῖ δύο ἐλάχιστα τῆς y , συμμετρικά ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν y .

Ἡ (β) παράγωγος τῆς y εἶναι $y'' = 12x^2 - 16 = 4(3x^2 - 4)$.

Διὰ $y'' \neq 0$ ἔχομεν $3x^2 - 4 = 0$, $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Διὰ τὰς εὐρεθείσας τιμὰς τοῦ x , ἔχομεν σημεῖα καμπῆς εἰς τὴν ἀντιπροσωπευτικὴν καμπύλην.

Διὰ $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$, ἔχομεν $y = -\frac{17}{9}$.

Διὰ $x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$, ἔχομεν ὁμοίως $y = -\frac{17}{9}$.

Δίδεται ἡ συνάρτησις $y = 8\epsilon\phi^2\theta - 8\epsilon\phi^4\theta + 7 = \mu(\alpha)$.

Ἐπειδὴ πρέπει, συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα περιορισμόν, νὰ περιλαμβάνεται τὸ θ εἰς τὸ διάστημα μεταξύ $-\frac{\pi}{4}$

ὡς $\frac{\pi}{2}$, ἡ $\epsilon\phi\theta$, θά περιλαμβάνεται ἀπὸ -1 ὥς $+\infty$.

Τό διάγραμμα τῆς καμπύλης $y = \varepsilon\varphi^4\vartheta - 8\varepsilon\varphi^2\vartheta + 7$ εἶναι τό
 αὐτό μέ τό διάγραμμα τῆς καμπύλης $y = x^4 - 8x^2 + 7$, ἐφ' ὅ-
 τον ἡ δευτέρα προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης διά $x = \varepsilon\varphi\vartheta$.

Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $y = \mu$. Ἡ γραφική παράστασις
 ταύτης εἶναι εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τόν ἄξονα τῶν
 x ($\varepsilon\varphi\vartheta$), ἔχουσα τεταγμένην ἴσην πρὸς τήν ἐκάστοτε τι-
 μήν τοῦ μ . Αἱ τομαί τῆς εὐθείας ταύτης μετά τῆς
 $y = x^4 - 8x^2 + 7$ δίδουν τάς ἀντιστοίχους τιμάς αἱ ὁποῖαι
 ἐπαληθεύουν τήν συνάρτησιν (α).

Ἐάν $\mu < -9$ δέν ἔχομεν τιμάς ἐπαληθευούσας τήν (α).

Ἐάν $-9 < \mu < 0$ ἔχομεν ἐν γένει τέσσαρας τιμάς, ἀλλά
 λόγῳ τοῦ περιορισμοῦ $-\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$, λαμβάνομεν
 ὀνόν δύο, δηλαδή τάς τομάς τῆς $y = \mu$ μετά τῶν σκελῶν
 (γ), (δ) τῆς καμπύλης. Διά $\mu = 0$, ἔχομεν τρεῖς ὁρισμέ-
 νας τιμάς τοῦ x : $-1, +1, \sqrt{7}$. Διά $7 > \mu > 0$ ἔχο-
 μεν τρεῖς τιμάς τάς τιμάς $y = \mu$ μετά τῶν σκελῶν (β),
 (γ), (δ).

Διά $\mu > 7$ ἔχομεν μίαν μόνην τιμήν τήν τομήν τῆς $y = \mu$
 ἐ τό σκέλος (δ).

Ἡ λύσεις τῆς $\varepsilon\varphi^4\vartheta - 8\varepsilon\varphi^2\vartheta + 7 = \mu$, ὑπολογίζονται ὡς
 ἑξῆς : θέτομεν $\varepsilon\varphi^2 = \omega$ καί ἔχομεν $\omega^2 - 8\omega + 7 - \mu = 0$.

$$\text{Ἀρα } \omega = 4 \pm \sqrt{16 - (7 - \mu)} = 4 \pm \sqrt{9 + \mu}$$

Ἐπομένως $\varepsilon\varphi^2\vartheta = 4 \pm \sqrt{9 + \mu}$. Καί τελικῶς

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \pm \sqrt{4 \pm \sqrt{9 + \mu}}$$

1ον) Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι : Διὰ νά δύναται αὐτή νά λάβῃ τήν μορφήν.-

$$y = f(x) = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

$$f(x) = (12x^2 - 4x - 3)(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta \quad \text{πρέπει νά συμβαίνει}$$

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (12x^2 - 4x - 3)(\alpha x + \beta) + \gamma x + \delta \quad \eta$$

$$4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 12\alpha x^3 - (4\alpha - 12\beta)x^2 - (3\alpha + 4\beta - \gamma)x + \delta - 3\beta.$$

Διὰ νά ἰσχύῃ ἡ ἀνωτέρω ταυτότης πρέπει οἱ συντελεσ-
ταί τῶν ὁμοιοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἴσοι:

$$4 = 12\alpha, \quad -2 = -(4\alpha - 12\beta), \quad -3 = -(3\alpha + 4\beta - \gamma),$$

$$1 = \delta - 3\beta.$$

$$\text{Ὀπότε } \alpha = \frac{1}{3}, \quad 12\beta = 4\alpha - 2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}, \quad \beta = -\frac{1}{18}$$

$$\gamma = 3\alpha + 4\beta - 3 = 3 \cdot \frac{1}{3} + 4 \left(-\frac{1}{18}\right) - 3 = 1 - \frac{4}{18} - 3 = -\frac{20}{9}.$$

$$\delta = 1 + 3\beta = 1 + \left(-\frac{1}{18}\right) = \frac{17}{18}.$$

Ἐπομένως ἡ συνάρτησις εἰς τήν νέαν της μορφήν γράφε-
ται: $y = f(x) = (12x^2 - 4x - 3)\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{18}\right) - \frac{20}{9}x + \frac{17}{18}$ (I)

2ον) Ἡ συνάρτησις $y=f(x)$ δέρεται διὰ μεγίστου ἢ ἐλαχί-
στου ὅταν $y' = f'(x) = 0$. Δηλαδή $y' = 12x^2 - 4x - 3 = 0$.

Ἐάν οἰαδήποτε ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς $y' = 0$ κληθῇ u
καί ἡ ἀντίστοιχος τιμή τῆς y κληθῇ v , δι' ἀντικαταστά-
σεως εἰς τήν συνάρτησιν (I), θά ἔχωμεν $v = -\frac{20}{9}u + \frac{17}{18}$

3ον) Ἡ ἐξίσωσις $y=f(x)$ γράφεται ὡς ἐξῆς: (ἴδε σήμα εἰς
σελ. 190)

$$y = f(x) = 4(x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)$$

Αί τομαί τῆς παραστατικῆς καμπύλης μετά τοῦ ἄξονος τῶν x δίδονται ἀπό τὰς τιμὰς:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-5}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 + \sqrt{-5}}{4}$$

Εἰς τὸν τύπον $v = -\frac{20}{9}u + \frac{5}{6}$ θέτοντες

$$u_1 = \frac{1 - \sqrt{10}}{6} \quad (\text{ὅπου } \frac{1 - \sqrt{10}}{6} \text{ εἶναι μία τῶν ριζῶν}$$

τῆς ἐξιśώσεως $y' = 12x^2 - 4x - 3 = 0$)

$$\text{ἔχωμεν} \quad v_1 = \frac{100 + 80\sqrt{10}}{6^3}.$$

$$\text{Ἄν θέσωμεν } u_2 = \frac{1 + \sqrt{10}}{6} \quad (\text{ὅπου } \frac{1 + \sqrt{10}}{6} \text{ ἀποτελεῖ}$$

τὴν ἐτέραν τῶν ριζῶν τῆς $y' = 0$.)

$$\text{Εὐρίσκομεν } v_2 = \frac{100 - 80\sqrt{10}}{6^3}. \quad \text{Ἡ τιμὴ } v_1, \text{ ἀποτελεῖ}$$

τόμέγιστον ἢ δὲ τιμὴ v_2 τό ἐλάχιστον τῆς συναρτήσεως τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$. Ἐπίσης ἔχομεν ὅτι $y' = 24x - 4$. Ἐάν $y' = 0$, θά ἔχωμεν $x = \frac{1}{6}$. Διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x , ἔχομεν σημεῖον καμπῆς. Ἡ τεταγμένη τῆς καμπύλης εἰς τό σημεῖον τοῦτο εἶναι $y = \frac{100}{216}$.

4ον) α) $\sin 3\theta = \sin 2\theta$. Ἄρα ἔχομεν ἢ $3\theta = 2\theta + 2k\pi$,

$$\theta = 2k\pi \quad \text{ἢ} \quad 3\theta = -2\theta + 2k\pi, \quad \theta = \frac{2k\pi}{5}$$

β) ἐκ τῆς $\sin 3\theta = \sin 2\theta$ ἔχομεν

$$4\sin^3\theta - 3\sin\theta = 2\sin^2\theta - 1 \quad \text{ἢ} \quad 4\sin^3\theta - 2\sin^2\theta - 3\sin\theta +$$

$$+ 1 = 0, \quad \text{Διὰ } \sin\theta = x, \text{ ἔχομεν } 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{ἢ}$$

$$4(x-1)\left(x + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(x + \frac{1-\sqrt{5}}{4}\right) = 0,$$

$$\text{ἄρα } x=1, \quad x = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}, \quad x = -\frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

Αἱ τιμαί $x=1$, $\sin \theta = 1$, ἀντιστοιχοῦν πρὸς τὰς τιμὰς $\theta = 2k\pi$, τοῦ ἐρωτήματος (α).

Ἡ τιμή $x = -\frac{1-\sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ μηδενός. Ἄρα διὰ θετικὰς τιμὰς τοῦ θ , ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν $\theta = -\frac{2\pi}{5}$, τὴν ὁποίαν εὐρίσκομεν διὰ $k=1$, εἰς τὸ ἐρώτημα (α).

$$\text{Ἄρα } \sin \theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \quad \eta \quad \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Ἡ τιμή $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἀντιστοιχεῖ

εἰς τὴν ἀμβλεῖαν γωνίαν $\theta = \frac{4\pi}{5}$, ἡ ὁποία εὐρίσκεται δι' ἀντικαταστάσεως $k=2$, εἰς τὸ ἐρώτημα (α).

$$\text{Ἄρα } \sin \frac{4\pi}{5} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{\pi}{5} = -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\sin \frac{4\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

$$\sin \frac{3\pi}{5} = -\sin\left(\pi - \frac{3\pi}{5}\right) = -\sin \frac{2\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\eta \mu \frac{\pi}{10} = \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-I}{4}}$$

$$\begin{aligned} \eta \mu \frac{3\pi}{10} &= \sqrt{\frac{1 - \sin \frac{3\pi}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{5}-1}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{5} - 1}{8}} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}. \end{aligned}$$

51) 1ον) 'Εκ τῆς δοθείσης παραστάσεως :

$$f(x) = 1 - \eta \mu x + \sigma \nu x$$

$$\begin{aligned} \text{ἔχομεν } f(x) &= 1 - 2\eta\mu\frac{x}{2} - \sigma\nu\frac{x}{2} + 2\sigma\nu^2\frac{x}{2} - 1 = \\ &= 2\sigma\nu\frac{x}{2} \left(\sigma\nu\frac{x}{2} - \eta\mu\frac{x}{2} \right) = 2\sigma\nu\frac{x}{2} \left[\sigma\nu\frac{x}{2} + \eta\mu\left(-\frac{x}{2}\right) \right] = \\ &= 2\sigma\nu\frac{x}{2} \left[\sigma\nu\frac{x}{2} + \sigma\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) \right] = 2\sigma\nu\frac{x}{2} \cdot 2\sigma\nu\frac{\pi}{4} \cdot \\ &\cdot \sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 2\sqrt{2} \sigma\nu\frac{x}{2} \sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

2ον) Ἐχομεν τόν περιορισμόν $0 \leq x \leq 2\pi$.

Ἡ (α) παράγωγος τῆς $f(x)$ εἶναι :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sqrt{2} \left(\sigma\nu\frac{x}{2} \right)' \sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + 2\sqrt{2} \sigma\nu\frac{x}{2} \\ &\left[\sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \right]' = -2\sqrt{2} \eta\mu\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \sigma\nu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \\ &- 2\sqrt{2} \sigma\nu\frac{x}{2} \eta\mu\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sqrt{2} \left[\eta\mu\frac{x}{2} \sigma\nu\right. \\ &\left. \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \sigma\nu\frac{x}{2} \eta\mu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] = -\sqrt{2} \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Διὰ $y' = 0$, δηλαδή διὰ $-\sqrt{2} \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, ἔχομεν

$$\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \eta\mu 0, \quad x + \frac{\pi}{4} = k\pi, \quad x = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Λόγῳ τοῦ ὑπάρχοντος περιορισμοῦ, δεχόμεθα τὰς τιμὰς

τοῦ x τὰς εὐρισκομένης διὰ $k=1, k=2$. Ὅποτε θά ἔχωμε

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad \text{καί} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

Δι' ἀντιπατάσεως εἰς τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν $f(x)$

$$\theta\acute{\alpha} \text{ ἔχωμεν: } (\alpha) f(x) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{8}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \sin \frac{3\pi}{8} \sin \frac{5\pi}{8} = \sqrt{2} (\sin \pi + \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2} + 1.$$

$$\beta) f(x) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{8} \sin \frac{9\pi}{8} = \sqrt{2} (\sin 2\pi + \sin \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} + 1.$$

Ἡ τιμὴ $f\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ ἀποτελεῖ ἐν μέγιστον τῆς $f(x)$ ἐνῶ ἡ

τιμὴ $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ἀποτελεῖ ἐν ἐλάχιστον ταύτης.

$$\Delta\iota\acute{\alpha} f''(x) = 0 \quad \text{δηλαδή} \quad \left[-\sqrt{2} \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] = 0 \quad \eta$$

$-\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ ἔχομεν τὰς τετμημένας τῶν σημείων καμπῆς τῆς συναρτήσεως. Αὗται δέ εἶναι :

$$x = \frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{5\pi}{4}. \quad \text{Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ } f(x) \text{ εἶναι } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1.$$

Αἱ τομαὶ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς $f(x)$ μετὰ τοῦ ὁξονος τῶν x δίδονται διὰ τῆς σχέσεως: $f(x) = 0$, δη-

$$\lambda\alpha\delta\eta: 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Εκ τῆς σχέσεως ταύτης καὶ ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τε-
θέντα περιορισμόν, θὰ ἔχωμεν $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$.

Αἱ τιμαὶ τῆς $f(x)$ διὰ $x = 0$, $x = 2\pi$, εἶναι:

$$f(0) = 2 \sqrt{2} \sin \sin \frac{\pi}{4} = 2, \quad f(2\pi) = 2 \sqrt{2} \sin(2\pi)$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = 2.$$

Βον) ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $y = \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$ (Ὡς σῆμα εἰς σελ. 191)

$$\text{εἶναι: } y' = \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)' - (1 - \sin x)'(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2} =$$

$$= \frac{(1 - \sin x)(-\cos x) - (-\cos x)(1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}$$

$$\text{διὰ } y' = 0, \text{ δηλαδή } \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2} = 0 \quad \text{μέ } \sin x \neq 1,$$

θὰ ἔχωμεν $\cos x = 0$, $x = k\pi$. Δεχόμεθα μόνον τὴν τιμὴν
 $x = \pi$, διὰ $k = 1$, διότι πρέπει $0 < x < 2\pi$. Αἱ ἄντικα-
στάσεως τοῦ $x = \pi$ εἰς τὴν δοθεῖσαν συνάρτησιν θὰ ἔχω-

μεν $y = \frac{1 - 1}{1 + 1} = 0$. Ἐπομένως τόσημεῖον $(\pi, 0)$ ἀποτε-
λεῖ τὸ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τῆς y . Ἐπειδὴ διὰ τὴν
τιμὴν $x = \pi$, ἡ y'' εἶναι θετικὴ ἔπεται ὅτι τὸ σημεῖον
 $(\pi, 0)$ ἀποτελεῖ ἐλάχιστον. Τὸ σημεῖον τοῦτο ἀποτελεῖ
συγχρόνως τὴν μοναδικὴν λῦσιν τῆς ἐξισώσεως $y = 0$ διὰ
 $0 < x < 2\pi$. Διὰ τὴν εὐκολωτέραν χάραξιν τῆς καμπύλης
ὁρίζομεν ὠρισμένα σημεῖα ταύτης:

$$\text{διὰ } x = \frac{\pi}{6} \quad \text{ἔχωμεν } y = \frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}, \text{ Διὰ } x = \frac{11\pi}{6}, y = \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}. \text{ Διὰ } x = -\frac{\pi}{4},$$

$$y = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}, \text{ 'Ομοίως διὰ } x = \frac{7\pi}{4}, y = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

$$\text{Διὰ } x = -\frac{\pi}{2}, \text{ καί } x = \frac{3\pi}{2}, \text{ ἔχομεν } y = 1.$$

$$\text{Διὰ } x = \frac{2\pi}{3} \text{ καί } x = \frac{4\pi}{3}, \text{ ἔχομεν } y = \frac{1}{3}.$$

Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα $x = 0$, $x = 2\pi$ εἶναι $-\infty$ καί $+\infty$ ἀντιστοίχως.

Γνωρίζομεν ὅτι $y' = \text{ἐφαπτομένη}$. Ἐπομένως διὰ τὴν εὐρεσιν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ σημεῖα $x = 0$, $x = 2\pi$, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν εἰς τὴν παράστασιν $y = \frac{2\eta\mu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2}$, τὰς

ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ x . Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ἡ y' λαμβάνει ἀπροσδιόριστον μορφήν εἰς τὴν περίπτωσηιν ταύτην, δηλαδή $y' = \frac{0}{0}$. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, συμφώνως μέ τον κανόνα τοῦ HOSPITAL, ὅτι ἂν ἓνα κλάσμα λαμβάνει ἀπροσδιόριστον τιμὴν δι' ὠρισμένην τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x , ἡ ἀληθὴς του τιμὴ εὐρίσκεται ὅταν λάβωμεν νέον κλάσμα μέ ὅρους τὰς παραγώγους τῶν ὁρῶν τοῦ δοθέντος καί ἀντικαταστήσωμεν τό μέ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς 0 , 2π . Τό νέον κλάσμα εἶναι:

$$\frac{(-2\eta\mu x)}{[(1 - \sigma\upsilon\nu x)^2]'} = \frac{-2\sigma\upsilon\nu x}{2(1 - \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = -\frac{\sigma\upsilon\nu x}{(1 - \sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}$$

Λαμβάνομεν δύο περιπτώσεις α) ἂν τό x μεταβάλλεται

κ τῆς τιμῆς $-\frac{\pi}{2}$ πρὸς τὴν τιμὴν 0, τότε τὸ $\sin x > 0$

αὶ $\eta \mu x > 0$. Τὸ $\sin x$ διὰ τιμὰς πλησίον τοῦ 0 τείνει εἰς 1, ἐνῶ ὁ παρανομαστής τοῦ κλάσματος τείνει, ἀπὸ θετικὰς τιμὰς εἰς τὸ 0. Ἀρα τὸ κλάσμα τείνει εἰς τὸ $-\infty$.

β) ἂν τὸ x μεταβάλλεται ἐκ τῆς τιμῆς $\frac{3\pi}{2}$ εἰς τὴν 2π , τὸ $\sin x$ εἰς τὴν μονάδα, τὸ $1 - \sin x$ τείνει πρὸς τὸ 0 ἀπὸ θετικὰς τιμὰς, ἐνῶ τὸ $\eta \mu x$ τείνει πρὸς τὸ 0 ἀπὸ ἀρνητικὰς τιμὰς. Ἀρα, τὸ κλάσμα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τείνει εἰς τὸ $-\infty$.

Ὅταν $y' < 0$ εἶναι $\varphi > \frac{\pi}{2}$ καὶ ὅταν $y' > 0$ τότε $\varphi < \frac{\pi}{2}$

Πίναξ μεταβολῆς

	0	π	2π
y'	$-\infty \rightarrow$	0	$+$
y	$+\infty \rightarrow$	0	$+\infty$

min

562) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(2\eta\mu\alpha - 1)x^2 - 2x + \eta\mu\alpha = 0$

ὅπου $0 < \alpha < \pi$ (α)

Ἡ διακρίνουσα ταύτης εἶναι $\Delta = 1 - (2\eta\mu\alpha - 1)\eta\mu\alpha$.

Ἡ εἰς τὴν $\Delta \geq 0$ ὅταν $1 - (2\eta\mu\alpha - 1)\eta\mu\alpha \geq 0$ ἢ

$1 - 2\eta\mu^2\alpha + \eta\mu\alpha \geq 0$ ἢ $2\eta\mu^2\alpha - \eta\mu\alpha - 1 \leq 0$.

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2\eta\mu^2\alpha - \eta\mu\alpha - 1 = 0$ εἶναι

α) $\eta\mu\alpha = 1$, $\eta\mu\alpha = -\frac{1}{2}$

Ἀρα αἱ λύσεις τῆς ἀνισότητος περιέχονται μεταξύ:

$1 \dots \dots -\frac{1}{2}$, δηλαδή $1 \geq \eta\mu\alpha \geq -\frac{1}{2}$

Ὁ τὸξον α πρέπει νὰ ἐπαληθεύει τὴν ἀνισότητα:

$$-\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{7\pi}{6} \quad (\beta)$$

Ἐπειδὴ ὁμως ὑπάρχει ὁ περιορισμός $0 < \alpha < \pi$, θά πρέπει νά ἐξετάσωμεν ποῦ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες (α), (β). Ἐκ τῆς συγκρίσεως ἔχομεν ὅτι πρέπει $0 < \alpha < \pi$.

Ἐάν x', x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἀρχικῆς ἐξίσωσως, τό ἄθροισμα τῶν ριζῶν τούτων εἶναι :

$$A = x' + x'' = \frac{2}{2\eta\mu\alpha - 1}$$

Ἰνα εἶναι $A > 0$, πρέπει $\frac{2}{2\eta\mu\alpha - 1} > 0$ ἢ

$$2(2\eta\mu\alpha - 1) > 0 \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\alpha > \frac{1}{2}$$

Ἄρα πρέπει $-\frac{\pi}{6} < \alpha < -\frac{5\pi}{6}$. Ἰνα εἶναι $A < 0$ πρέπει $\eta\mu\alpha < \frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ πρέπει νά ἰσχύῃ $0 < \alpha < \pi$,

ἔχομεν ὅτι εἶναι $A < 0$ ὅταν $0 < \alpha < \frac{\pi}{6}$ καί

$$-\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi.$$

Τό γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι :

$$\Gamma = x' \cdot x'' = \frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1}. \quad \text{Ἰνα εἶναι } \Gamma > 0, \text{ πρέπει:}$$

$$\frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1} > 0 \quad \text{ἢ} \quad \eta\mu\alpha(2\eta\mu\alpha - 1) > 0. \quad \text{Ἄρα, ἢ } \eta\mu\alpha < 0,$$

(ἢ ὁποία ἀπορρίπτεται διότι δέν συναληθεύει μετὰ τοῦ περιορισμοῦ $0 < \alpha < \pi$), ἢ $\eta\mu\alpha > \frac{1}{2}$, ἐπομένως :

$$-\frac{\pi}{6} < \alpha < -\frac{5\pi}{6}.$$

Γινα είναι $\Gamma < 0$ πρέπει $\eta\mu\alpha (2\eta\mu\alpha - 1) < 0$ ἄρα

$$0 < \eta\mu\alpha < \frac{1}{2}, \text{ ἑπομένως } 0 < \alpha < \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi.$$

Εξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω καταρτίζομεν τόν ἐπόμενον πίνα-

α	Δ	Γ	A	x', x''
0 . . . $\frac{\pi}{6}$	+	-	-	δύο ρίζαι, πραγματικάί ἑτερόσημοι, μέ ἀπολύτως μεγαλύτεραν τήν ἀρνητικήν.
. . . $\frac{5\pi}{6}$	+	+	+	2 ρίζαι πραγματικάί θετικάί.
. . . π	+	-	-	2 ρίζαι, πραγματικάί ἑτερόσημοι, μέ ἀπολύτως μεγαλύτεραν τήν ἀρνητικήν.

ον) ὅταν $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = 4\sigma\upsilon\nu\alpha$, θά ἔχωμεν $\frac{x' + x''}{x' x''} = 4\sigma\upsilon\nu\alpha$

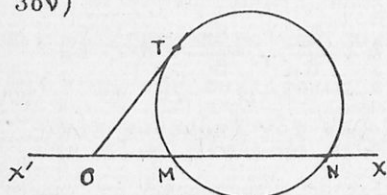
$$\eta \frac{\frac{2}{2\eta\mu\alpha-1}}{\eta\mu\alpha} = 4\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \eta \frac{2}{\eta\mu\alpha} = 4\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \eta 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = 1,$$

$$\eta\mu 2\alpha = 1. \quad \text{Ἄρα } \eta\mu 2\alpha = \eta\mu \frac{\pi}{2}, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$= -\frac{\pi}{4} + k\pi. \quad \text{Ἐπειδή πρέπει } 0 < \alpha < \pi, \text{ δεχόμεθα}$$

$$\delta\upsilon\omicron\nu\text{ον τήν λύσιν τήν εὕρισκομένην διά } k=0, \text{ ἄρα } \alpha = \frac{\pi}{4}$$

3ον)

Έχομεν $OM = x'$, $ON = x''$

$$y = OT^2 = OM \cdot ON = x' \cdot x'' =$$

$$\frac{\eta\mu\alpha}{2\eta\mu\alpha - 1}$$

4ον) Έάν θέσωμεν $\eta\mu\alpha = \mu$, θά ἔχωμεν $y = \frac{\mu}{2\mu - 1}$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως εἶναι ὑπερβολή.

Διὰ $\mu = \frac{1}{2}$ ἔχομεν $y \rightarrow \infty$.

$$\text{Διὰ } \mu \rightarrow \infty \text{ ἔχομεν } y = \frac{\frac{\mu}{\mu}}{2 - \frac{1}{\mu}} = \frac{1}{2}$$

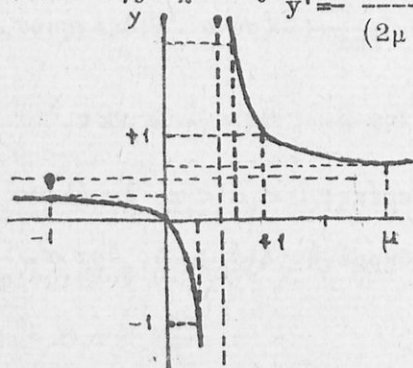
Ἀρα αἱ ἀσύμβατοι τῆς ὑπερβολῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι

$$y = \frac{1}{2}, \quad \mu = \frac{1}{2}. \quad \text{Διὰ } y = 0, \text{ ἔχομεν } \mu = 0. \text{ Ἀρα}$$

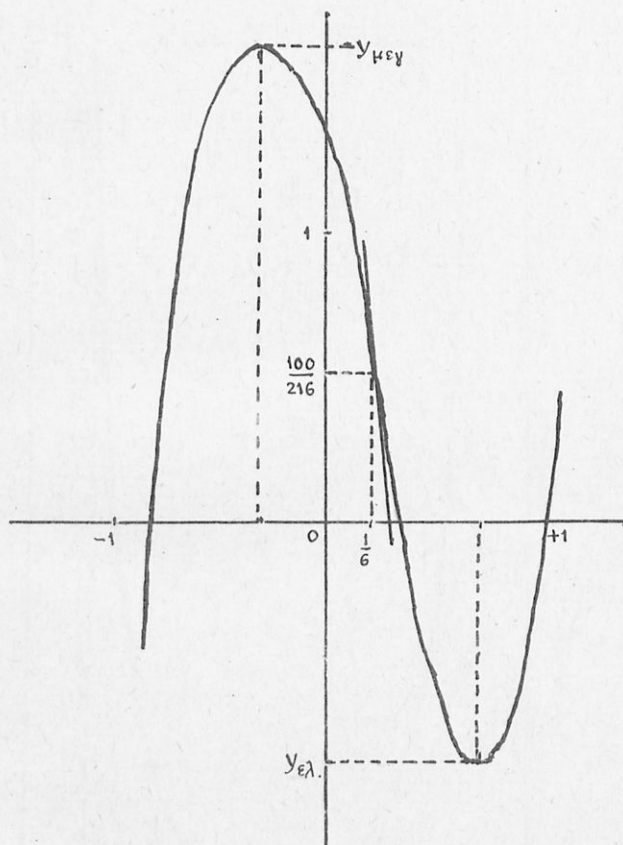
ἡ τομὴ τῶν ἀξόνων ἀποτελεῖ τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης.

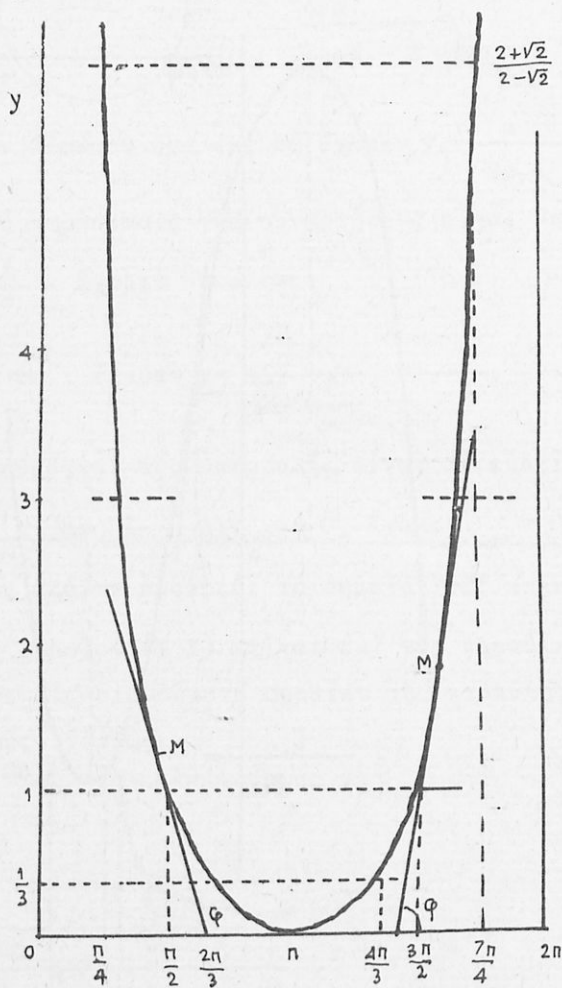
Ὁμοίως τὸ σημεῖον $(1,1)$ κεῖται ἐπὶ τῆς καμπύλης. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς οἰονδήποτε σημεῖον τῆς καμπύλης δίδεται ὑπὸ τῆς σχέσεως

$$y' = - \frac{1}{(2\mu - 1)^2}$$

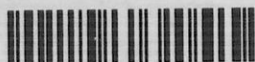


Σχήμα άεκτήσεως 560 - 3ον



Σχήμα άσκησης 561 - 3^{ου}





0020637612

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

