Δ 2

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ
οτύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως

Νικολάου (Νικολ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΗΣ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

(Ο. Ε. Σ. Β.)

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄

180

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ

ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΕΩΣ 1876

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΑΙ ΣΑΝΤΑΡΟΖΑ 1Δ

1958

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

Ἀριστοβαθμίου διδάκτορος καὶ τέως Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν ἐν τῇ προτύπῳ Βαρβακείῳ Σχολῇ τοῦ Διδασκαλείου τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΗΣ

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

(Ο. Ε. Σ. Β.)

ΝΙΚΟΛ. Δ. ΝΙΚΟΛΑΟΥ

ΕΚΔΟΣΙΣ Β΄

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ

ΔΗΜ. Ν. ΤΖΑΚΑ, ΣΤΕΦ. ΔΕΛΑΓΡΑΜΜΑΤΙΚΑ

ΕΤΟΣ ΙΔΡΥΣΕΩΣ 1876

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΚΑΙ ΣΑΝΤΑΡΟΖΑ 1Δ

1958

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τῶν ἐκδοτῶν.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΓΩΝΙΑΣ Η ΤΟΞΟΥ

§ 1. Γνωρίζομεν ὅτι $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$. (1)

Α΄) Ἂν δὲ $\mu = 40^\circ$, θὰ εἶναι $\dfrac{40}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$, ὅθεν $\beta = \dfrac{40}{180}$, $200 = 44^\gamma\ \dfrac{4}{9}$ καὶ $\alpha = \dfrac{40\pi}{180} = \dfrac{2\pi}{9}$ ἀκτίνια.

Β΄) Ὁμοίως διὰ $\mu = 30^\circ$ εὑρίσκομεν ὅτι $\beta = 33^\gamma\ \dfrac{1}{3}$ καὶ $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$.

§ 2. Α΄) Διὰ $\mu = 60^\circ$, αἱ ἀνωτέρω ἰσότητες (1) γίνονται $\dfrac{60}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$, ὅθεν $\beta = \dfrac{60}{180} \cdot 200 = 66^\gamma\ \dfrac{2}{3}$ καὶ $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ ἀκτίνια.

Β΄) Διὰ $\mu = 80^\circ$ εὑρίσκομεν ὅτι $\beta = 88^\gamma\ \dfrac{8}{9}$, $\alpha = \dfrac{4\pi}{9}$.

§ 3. Α΄) Διὰ $\beta = 50^\gamma$ αἱ προηγούμεναι ἰσότητες (1) γίνονται $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{50}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\mu = 180 . \dfrac{50}{200} = 45^\circ$ καὶ $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ ἀκτίνια.

Β΄) Διὰ $\beta = 30^\gamma$ εὑρίσκομεν ὁμοίως $\mu = 27^\circ$ καὶ $\alpha = \dfrac{3\pi}{20}$ ἀκτίνια.

§ 4. Διὰ $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ εἶναι $\alpha : \pi = \dfrac{3}{2}$, αἱ δὲ ἀνωτέρω ἰσότητες (1) γίνονται $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{3}{2}$. Ἄρα $\mu = 270^\circ$, $\beta = 300^\gamma$.

§ 5. Ἐπειδὴ $\mu = 40^\circ\ 20' = \left(40\dfrac{1}{3}\right)^\circ = \left(\dfrac{121}{3}\right)^\circ$ θὰ εἶναι $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{121}{3.180}$. Αἱ ἰσότητες (1) λοιπὸν γίνονται $\dfrac{121}{3.180} = \dfrac{\beta}{200} = \dfrac{\alpha}{\pi}$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\beta = \dfrac{121}{3.180} . 200 = \dfrac{121}{3.9} . 10 =$

$=44^{\gamma}.81$ καὶ $\alpha=\frac{121\pi}{540}$ ἀκτίνια.

§ 6. Πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $50^{0}\ 30'\ 40''=181840''$. Ἐπειδὴ δὲ $1^{0}=60\times60=3600''$, ἕπεται ὅτι $50^{0}\ 30'\ 40''=\left(\frac{181840}{3600}\right)^{0}=\left(\frac{2273}{45}\right)^{0}$. Αἱ ἰσότητες (1) γίνονται λοιπὸν

$$\frac{2273}{180.45}=\frac{\beta}{200}=\frac{\alpha}{\pi}.$$ Ἑπομένως

$$\beta=\frac{2273.200}{180.45}=57^{\gamma}\ \frac{29}{81} \text{ καὶ } \alpha=\frac{2273\pi}{180.45} \text{ ἀκτίνια.}$$

§ 7. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $37^{0}\ 58'\ 20''=\left(\frac{1367}{36}\right)^{0}$ καὶ εἶτα $\beta=\frac{1367.200}{36.180}=42^{\gamma}\ \frac{31}{162}$.

§ 8. Ἐπειδὴ $\frac{5\pi}{8}:\pi=\frac{5}{8}$, αἱ ἰσότητες (1) γίνονται

$$\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}=\frac{5}{8}.$$ Ἄρα $\mu=\frac{5}{8}\cdot 180=112^{0}\ 30'$ καὶ $\beta=\frac{5}{8}\cdot 200=125^{\gamma}$.

§ 9. Διὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν εἶναι $\mu=90^{0}$ καὶ ἑπομένως

$$\frac{90}{180}=\frac{\beta}{200}=\frac{\alpha}{\pi},$$ ὅθεν $\beta=100^{\gamma}$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ἀκτίνια.

§ 10. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἐννοοῦμεν ἀμέσως ὅτι $\frac{1}{2}$ ὀρθ. $=45^{0}=50^{\gamma}=\frac{\pi}{4}$ ἀκτίνια.

§ 11. Προφανῶς $\frac{1}{4}$ ὀρθ. $=\frac{45^{0}}{2}=22^{0}\,30'=\frac{50^{\gamma}}{2}=25^{\gamma}=\frac{\pi}{8}$ ἀκτίνια.

§ 12. Γνωρίζομεν ὅτι ἡ περιφέρεια ἑκάστου ὡρολογίου διαιρεῖται εἰς 60 ἴσα μέρη καὶ ὅτι τὸ ἄκρον τοῦ ὡροδείκτου διατρέχει 5 τοιαῦτα μέρη εἰς 1 ὥραν. Ὁ ὡροδείκτης λοιπὸν εἰς 1 ὥραν γράφει γωνίαν, ἥτις ἔχει μέτρον $\frac{5}{60}$ τῶν 360^{0} ἤτοι 30^{0}. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων

$\frac{30}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$ εὑρίσκομεν ὅτι ἡ αὐτὴ γωνία ἔχει μέτρον

$\beta = 33^{\gamma}\frac{1}{3}$ καὶ $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ἀκτίνια.

ΤΟ ΗΜΙΤΟΝΟΝ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 13. Α΄) Ἂν $\beta = 3$, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας Β ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $\eta\mu B = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

Β΄) Ἐπειδὴ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 5^2 - 3^2 = 16$, ἕπεται ὅτι $\gamma = 4$ καὶ

$\eta\mu\Gamma = \frac{4}{5} = 0{,}8$.

§ 14. Ἐπειδὴ $\alpha^2 = 12^2 + 9^2 = 225$, ἕπεται ὅτι $\alpha = 15$ καὶ

$\eta\mu B = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8$ καὶ $\eta\mu\,\Gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$.

§ 15. Α΄) Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου θὰ εἶναι $\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} =$

$= \frac{3}{4}\alpha : \alpha = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Β΄) Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\gamma^2 = \alpha^2 - \frac{9}{16}\alpha^2 = \frac{7\alpha^2}{16}$, $\gamma = \frac{\alpha}{4}\sqrt{7}$

Ἑπομένως $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

§ 16. Ἔστω $\gamma = \frac{2}{3}\beta$. Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εἶναι

$8^2 = \beta^2 + \frac{4}{9}\beta^2 = \frac{13\beta^2}{9}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι $\beta^2 = \frac{9.8^2}{13}$ καὶ

$\beta = \frac{24}{\sqrt{13}} = \frac{24\sqrt{13}}{13}$.

Ἑπομένως $\gamma = \frac{2}{3}\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{24\sqrt{13}}{13} = \frac{16\sqrt{13}}{13}$. Εἶναι λοιπὸν

$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{24\sqrt{13}}{13} : 8 = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

καὶ $\eta\mu\,\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{16\sqrt{13}}{13} : 8 = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

§ 17. Προφανῶς ἡμ $B = \frac{\alpha}{2} : \alpha = \frac{1}{2}$.

§ 18. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμω ἐννοοῦμεν τὴν ἀκόλουθον λύσιν. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὁρίζομεν δύο ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ, ΒΔ. Ἔπειτα γράφομεν περιφέρειαν μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΔ. Ἔστω δὲ Γ ἡ τομὴ τῆς ἄλλης πλευρᾶς καὶ τῆς περιφερείας. Ἂν φέρωμεν τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι

$$ἡμΓ = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB}{AB.2} = \frac{1}{2}.$$

Ἡ Γ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

§ 19. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν τὴν ἀκόλουθον λύσιν. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὁρίζομεν 6 ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα. Ἔστω δὲ ΑΒ τὸ ὑπὸ τῶν 5 πρώτων ἀποτελούμενον καὶ ΒΔ τὸ τελευταῖον. Ἔπειτα μὲ κέντρον Β καὶ ἀκτῖνα ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν, ἥτις τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν εἰς σημεῖον Γ. Ἂν φέρωμεν τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι ἡμ$\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{5}{6}$. Ἡ Γ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 20 Παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}25 = \frac{20}{100} = \frac{1}{4}$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τρίγωνον ΑΒΓ μὲ κάθετον πλευρὰν ΑΒ τυχοῦσαν καὶ ὑποτείνουσαν ΒΓ τετραπλασίαν τῆς ΑΒ. Οὕτω θὰ εἶναι ἡμ $\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB}{AB.4} = \frac{1}{4}$, ἤτοι Γ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

§ 21. Παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$ καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως.

§ 22. Ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ ὑποτείνουσαν ΒΓ διπλασίαν τῆς ΑΓ. Οὕτω θὰ εἶναι ἡμ$B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma.2} = \frac{1}{2}$ καὶ $B = 30^\circ$.

§ 23. Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}}$ καὶ ἑπομένως ἡμ $45^\circ = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{2}}$. Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι $\alpha\sqrt{2}$ εἶναι ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, ἂν ΑΒ=ΑΓ=α καὶ Α=ὀρθ.

§ 24. Ἐκ τῆς ἰσότητος ἡμ $B=$ ἡμ$60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ἡμ$B=\frac{\beta}{\alpha}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ $2\beta=\alpha\sqrt{3}$.

§ 25. Ἀπὸ τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος Ι εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι ἡμ $(18^\circ\ 40')=0{,}32006$, ἡμ $(42^\circ\ 10')=0{,}67129$.

§ 26. Ἀπὸ τὴν δεξιὰν σελ. τοῦ αὐτοῦ πίνακος εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $(54^\circ\ 30')=0{,}81412$, ἡμ $(78^\circ\ 40')=0{,}98050$.

§ 27. Ἀπὸ τὴν αὐτὴν σελίδα εὑρίσκομεν ὅτι
ἡμ $50^\circ=$ ἡμ $(49^\circ\ 60')=0{,}76604$, ἡμ $80^\circ=$ ἡμ $(79^\circ\ 60')=0{,}98481$.

§ 28. Ἐπειδὴ $27^\circ\ 10' < 27^\circ\ 15' < 27^\circ\ 20'$, ἔπεται ὅτι

ἡμ $(27^\circ\ 10') <$ ἡμ $(27^\circ\ 15') <$ ἡμ $(27^\circ\ 20')$.

Ἀπὸ δὲ τὸν πίνακα Ι εὑρίσκομεν ὅτι
ἡμ $(27^\circ\ 10')=0{,}45658$, ἡμ. $(27^\circ\ 20')=0{,}45917$. Ἑπομένως

$\Delta=0{,}45917-0{,}45658=0{,}00259$. Ὥστε

ἡμ $(27^\circ\ 10')=0{,}45658$

εἰς αὔξ. 5 ἀντιστοιχεῖ αὔξ. Δ : 2 $\quad =0{,}00129$

Ἄρα $\quad$ ἡμ $(27^\circ\ 15')=0{,}45787$

§ 29. Ἀπὸ τὸν πίνακα Ι εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $(46^\circ\ 30')=0{,}72537$.

§ 30. Προφανῶς εἶναι $20^\circ\ 30' < 20^\circ\ 34'\ 25'' < 20^\circ\ 40'$

ἡμ $(20^\circ\ 30') <$ ἡμ $(20^\circ\ 34'\ 25'') <$ ἡμ $(20^\circ\ 40')$ ἢ

$0{,}35021 <$ ἡμ $(20^\circ\ 34'\ 25'') < 0{,}35293$

καὶ $\Delta=0{,}35293-0{,}35021=0{,}00272$

Ἐπειδὴ δὲ $4'\ 25''=\left(4\frac{25}{60}\right)'=\left(4\frac{5}{12}\right)'=\left(\frac{53}{12}\right)'$ ἀπὸ τὴν διάταξιν εἰς 10′ ἀντιστ. 0,00272

εἰς $\left(\frac{53}{12}\right)$ » δ

εὑρίσκομεν ὅτι $\delta=0{,}00272.\ \frac{53}{120}=0{,}00120$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἡμ $(20^\circ\ 30')=0{,}35021$,

ἔπεται ὅτι ἡμ $(20^\circ\ 34'\ 25'')=0{,}35141$

§ 31. Προφανῶς ἡμ $(67^\circ 40') <$ ἡμ $(67^\circ 45' 40'') <$ ἡμ $(67^\circ 50')$ ἢ
$$0{,}92499 < \text{ἡμ}\,(67^\circ 45' 40'') < 0{,}92609$$
Εἰς αὔξ. $10'$ ἀντιστ. $\Delta = 0{,}00110$

εἰς $5'\,40''$ ἢ $5\,\frac{2}{3}$ » δ ὅθεν

$$\delta = 0{,}00110 \cdot \frac{17}{30} \qquad = 0{,}00060$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡμ $(67^\circ 40')$ $= 0{,}92499$

ἕπεται ὅτι ἡμ $(67^\circ 45' 40'')$ $= 0{,}92559$.

§ 32. Ἐπειδὴ $\frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{7}{10} \cdot 90^\circ = 63^\circ$, ἕπεται ὅτι

ἡμ $\left(\frac{7}{10}\right) =$ ἡμ $63^\circ =$ ἡμ $(62^\circ\, 60') = 0{,}89101$.

§ 33. Ἐπειδὴ $\frac{5}{8}$ ὀρθ. $= \frac{5}{8} \cdot 90^\circ = 56^\circ\, 15'$, ἕπεται ὅτι

ἡμ $\left(\frac{5}{8}\right.$ ὀρθ.$\left.\right) =$ ἡμ $(56^\circ\, 15') = 0{,}83147$.

§ 34. Ἂν x = ἡμ $(12^\circ\, 35')$, θὰ εἶναι λογ x = λογ ἡμ $(12^\circ\, 35') =$ $= \bar{1}{,}33818$. Ἀπὸ δὲ τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν x = ἡμ $(12^\circ\, 35') = 1{,}21786$.

§ 35. Ὁμοίως, ἂν x = ἡμ $(58^\circ\, 40')$, εὑρίσκομεν ὅτι

λογ x = λογ ἡμ $(58^\circ\, 40') = \bar{1}{,}93154$ καὶ

x = ἡμ $(58^\circ\, 40') = 0{,}85416$.

§ 36. Θέτοντες x = ἡμ $(34^\circ\, 25'\, 32'')$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ x = λογ ἡμ $(34^\circ\, 25'\, 32'') = \bar{1}{,}75231$ καὶ x $= 0{,}56534$.

§ 37. Ὁμοίως, ἂν x = ἡμ $(67^\circ\, 20'\, 40'')$, εὑρίσκομεν

λογ x = λογ ἡμ $(67^\circ\, 20' 40'') = \bar{1}{,}96512$, x $= 0{,}922825$.

§ 38. Γνωρίζομεν ὅτι λογ ἡμ x = λογ 3 — λογ 4 $= \bar{1}{,}87506$.

Β'. τρόπος. Ἐπειδὴ $\frac{3}{4} = 0{,}75$, ἕπεται ὅτι

λογ ἡμ x = λογ 0,75 $= \bar{1}{,}87506$.

§ 39. Ἐκ τῆς ἡμ $\omega = \frac{5}{7}$ ἕπεται ὅτι

λογ ἡμ ω = λογ 5 — λογ 7 $= \bar{1}{,}85387$.

§ 40. Ἐνθυμούμενοι ὅτι ἡμ $45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}70711 > 0{,}4$ ἐννοοῦμεν ὅτι $x > 45^\circ$. Πρέπει λοιπὸν νὰ ἀναζητήσωμεν τὸν ἀριθμὸν 0,4 εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος I.

Βλέπομεν δὲ ὅτι $0{,}39875 < 0{,}4 < 0{,}40141$

καὶ ἑπομένως $23^\circ\, 30' < x < 23^\circ\, 40'$.

Εἶναι δὲ $\Delta = 0{,}40141 - 0{,}39875 = 0{,}00266$ καὶ

$$\delta = 0{,}40000 - 0{,}39875 = 0{,}000125$$

Ἐκ δὲ τῆς διατάξεως

$$\begin{array}{ll} 0{,}00266 & 10' \\ 0{,}00125 & y \end{array}$$

εὑρίσκομεν $y = 10' . \frac{125}{266} = 4'\, 4'',9$.

Ἑπομένως $x = 23^\circ\, 34'\, 41'',9$.

Β' τρόπος. Ἐκ τῆς ἡμ $x = 0{,}4$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἡμ $x =$ λογ $0{,}4 = \bar{1}{,}60206$. Μετὰ δὲ ταῦτα κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $x = 23^\circ\, 34'\, 41'',9$.

§ 41. Ἐπειδὴ $\frac{3}{5} = 0{,}6$ καὶ ἡμ $\omega = 0{,}6 <$ ἡμ 45°, ἀναζητοῦμεν τὸν ἀριθμὸν 0,6 εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος I. Βλέπομεν δὲ ὅτι $0{,}59949 < 0{,}60000 < 0{,}60182$

καὶ ἑπομένως $36^\circ\, 50' < \omega < 37^\circ$.

Συνεχίζοντες δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\omega = 36^\circ\, 52'\, 11'',33$.

Β' τρόπος. Ἐκ τῆς ἡμ $\omega = \frac{3}{5} = 0{,}6$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἡμ $\omega = \bar{1}{,}77825$ καὶ ἔπειτα $\omega = 36^\circ\, 52'\, 11'',33$.

§ 42. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων ἡμ $\varphi = \frac{1}{2}$ καὶ ἡμ $30^\circ = \frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι

$$\varphi = 30^\circ.$$

§ 43. Εἰς τὸν πίνακα I βλέπομεν ὅτι

$$0{,}34748 < 0{,}35000 < 0{,}35021$$

καὶ ἑπομένως $20^\circ\, 20' < x < 20^\circ\, 30'$.

Ἐξακολουθοῦντες δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ὅτι $x = 20^\circ\, 29'\, 14''$.

Β' τρόπος. Εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἡμ$x = \bar{1}{,}54407$ καὶ ἔπειτα

$$x = 20^\circ\, 19'\, 14''.$$

§ 44. Προφανῶς ἡμ $y = \frac{48}{100} = \frac{4,8}{10}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ(ΑΓ)=4,8 ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ)=10 ἑκατ. Οὕτως εἶναι ἡμ $B = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{4,8}{10} = 0,48$. Ἡ Β λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘ. ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΑΒΓ ΕΚ ΤΗΣ α ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 45. Γνωστὰ στοιχεῖα $α=20$ μέτ, $Β=42^0\ 12'$.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Γ, β, γ, Ε.

Τύποι ἐπιλύσεως. $Γ=90^0-Β$, $β=α$ ἡμ Β, $γ=α$ ἡμ Γ, $Ε=\frac{1}{2}βγ$, ἢ $2Ε=βγ$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ.

$90^0=89^0\ 60'$
$Β=42^0\ 12'$
$Γ=47^0\ 48'$

Ὑπολογισμὸς τῆς β.

λογ β=λογ α+λογ ἡμ Β
λογ α=1,30103
λογ ἡμ Β=$\overline{1}$,82719
λογ β=1,12822
β=13,434 μέτ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι γ=14,816 μέτ.
Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε λογ (2Ε)=λογ β+λογ γ = 2,29895,
2 Ε=199,045, Ε=99,5275 τετ. μετ.

§ 46. Γνωστὰ στοιχεῖα $α=345$ μέτ. $Γ=54^0\ 20'\ 45''$.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, β, γ, Ε.
Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν
$Β=90^0-Γ=35^0\ 39'\ 15''$. Ἔπειτα ἐκ τῆς β=α ἡμ Β εὑρίσκομεν λογ β=λογ α+λογ ἡμ Β=2,30341 καὶ ἐξ αὐτῆς β=201,1 μέτ.
Ὁμοίως ἐκ τῆς γ=α ἡμ Γ εὑρίσκομεν γ=280,331 μέτ.
Τέλος ἐκ τῆς 2Ε=βγ, ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν
Ε=28186,875 τετ. μέτρα.

§ 47. Γνωστὰ στοιχεῖα $α=1565$ μέτ. $Γ=56^γ,25$.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, β, γ, Ε.
Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\frac{μ}{180}=\frac{β}{200}$ διὰ $β=56^γ,25$ γίνεται

$$\frac{μ}{180}=\frac{56,25}{200},\ \text{ὅθεν}\ μ = 50^0\ 37'\ 30'' = Γ.$$

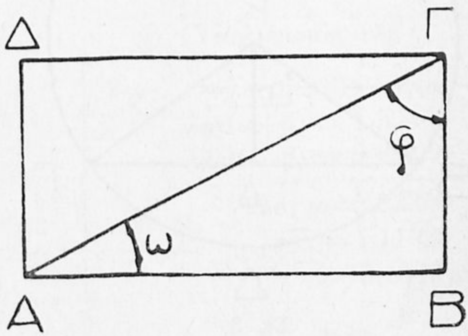
Μετὰ ταῦτα ἐξακολουθοῦμεν, ὡς προηγουμένως καὶ εὑρίσκομεν
$B = 39^\circ\ 22'\ 30''$, $\gamma = 1209,72$ μέτ. $\beta = 999^2,82$ μέτ. καὶ
$E = 600527,77$ τετ. μέτ.

§ 48. Γνωστὰ στοιχεῖα $\alpha = 475,50$, $B = \frac{3\pi}{8}$ ἀκτίνια.

Ἄγνωστα στοιχεῖα Γ, β, γ, Ε.

Ἡ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{B}{\pi}$ διὰ $B = \frac{3\pi}{8}$ γίνεται $\frac{\mu}{180} = \frac{3}{8}$.

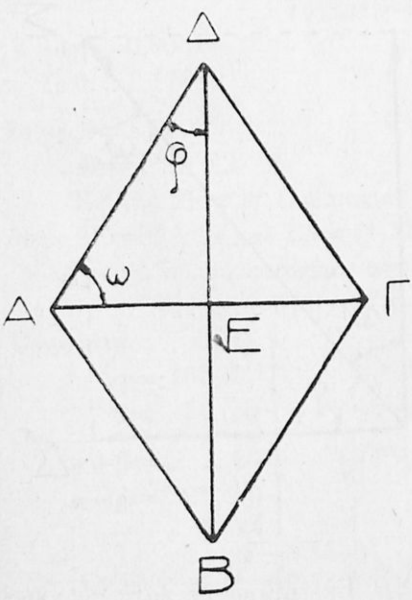
Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\mu = \frac{3}{8} \cdot 180 = 67^\circ\ 30'$, ἤτοι $B = 67^\circ 30'$. Ἐξακολουθοῦντες δέ, ὡς προηγουμένως (ἄσκ. 46) εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma = 22^\circ\ 30'$, $\beta = 439,31$ μέτ, $\gamma = 190,543$ μέτ, καὶ $E = 41853$ τετ. μέτ.



Σχ. 1

§ 49. Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ (Σχ. 1) γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα: $(A\Gamma) = 0,60$ μέτ. καὶ $\omega = 38^\circ 25'$. Ἐξ αὐτοῦ δὲ εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\varphi = 90^\circ - \omega = 51^\circ\ 35'$. Ἐκ δὲ τῆς $(AB) = (A\Gamma)$ ἡμ φ $= 0,60$ ἡμ $(51^\circ\ 35')$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ $(AB) =$ λογ$0,60 +$ λογ ἡμ $(51^\circ 35') = \overline{1},67220$, ὅθεν $(AB) = 0,4701$ μ.

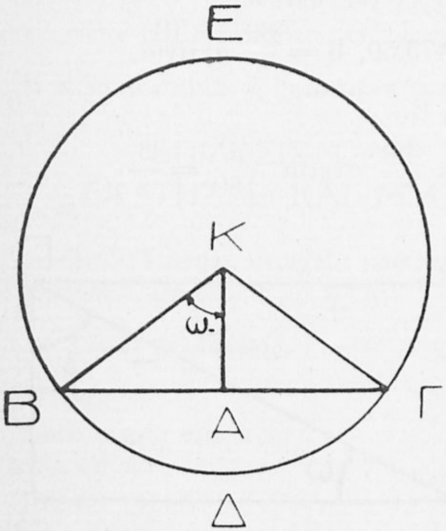
Ὁμοίως ἐκ τῆς $(B\Gamma = A\Gamma)$ ἡμω $= 0,60$ ἡμ $(38^\circ\ 25')$ εὑρίσκομεν $(B\Gamma) = 0,3728$ μέτ.



Σχ. 2

§ 50. Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΕ (σχ. 2) γνωρίζομεν ὅτι: $(A\Delta) = 15$ μέτ. καὶ $\omega = \frac{3}{5}$ ὀρθῆς $= \frac{3}{5} \cdot 90^\circ = 54^\circ$. Ἐπομένως

$\varphi=90^\circ-54^\circ=36^\circ$. Ἐκ δὲ τῆς (ΑΕ) = (ΑΔ) ἡμ $\varphi=15$ ἡμ 36° εὑρίσκομεν (ΑΕ) = 8,8168 καὶ (ΑΓ)=2 (ΑΕ) = 17,6336 μέτ. Ὁμοίως ἐκ τῆς (ΕΔ)=(ΑΔ) ἡμω εὑρίσκομεν (ΒΔ) = 24,2706.

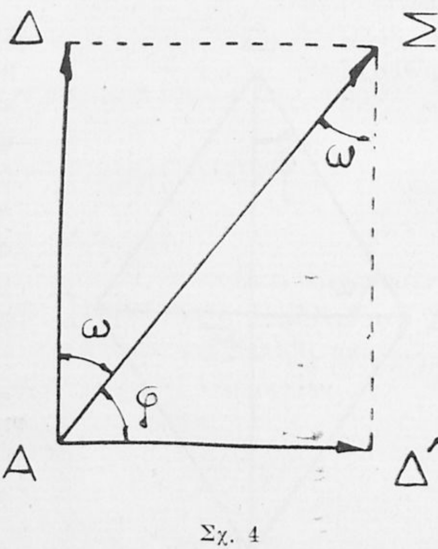


Σχ. 3

§ 51. Ἐπειδὴ (ΒΓ) = (ΒΑ). 2, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μῆκος (ΒΑ). Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι ω= $(\widehat{Β Δ})=(52^\circ 35'):2=26^\circ 17' 30''$ καὶ (ΒΑ) = (ΚΒ) ἡμω = 0,65 ἡμ$(26^\circ 17' 30'')$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν (ΒΑ)=0,2879 καὶ (ΒΓ)=0,2879.2=0,5758 μέτ. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς ἀποστάσεως ΚΑ, εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι Β=90° — ω= $90-(26^\circ 17' 30'')=63^\circ 42' 30''$. Ἔπειτα δὲ ἐκ τῆς (ΚΑ) = (ΚΒ). ἡμΒ = 0,65 ἡμ$(63^\circ\ 42'\ 30'')$ εὑρίσκομεν ὅτι (ΚΑ) = 0,58274 μέτ.

§ 52. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 1) βλέπομεν ὅτι (ΒΓ)=(ΑΓ) ἡμ ω = 0,25. ἡμ $(26^\circ\ 45'\ 50'')$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν (ΒΓ) = 0,11252 μέτ.

§ 53. Γνωρίζομεν ὅτι (ΑΣ)=15,6, καὶ ω=$35^\circ\ 20'$ (σχ. 4). Ἑπομένως $\varphi = 90^\circ-\omega=54^\circ 40'$ καὶ Δ = (ΑΣ) ἡμ φ = 15,6 ἡμ $(54^\circ\ 40')$,



Σχ. 4

Δ′ = (ΑΣ) ἡμ ω = 15, 6. ἡμ $(35^\circ 20')$. Ἐκ τούτων δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ὅτι Δ = 12,726 χιλιόγρ. Δ′ = 9,022 χιλιόγρ.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘ. ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΚ ΤΗΣ ΥΠΟΤΕΙΝΟΥΣΗΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΑΛΛΗΣ ΠΛΕΥΡΑΣ

§ 54. Γνωστὰ στοιχεῖα $\alpha=15$ μέτ, $\beta=6,4$ μέτ.

῎Αγνωστα στοιχεῖα Γ, Β, γ, Ε.

Τύποι ἐπιλύσεως $\gamma^2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)$, ἡμ$B=\frac{\beta}{\alpha}$,

$\Gamma=90^\circ-B$, $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$ ἢ $2E=\beta\gamma$.

Βοηθητικὸς πίναξ.

$\alpha=15$
$\beta=\ 6,4$

$\alpha+\beta=21,4$
$\alpha-\beta=\ 8,6$

῾Υπολογισμὸς τῆς γ.

$$2\lambda o\gamma.\,\gamma=\lambda o\gamma(\alpha+\beta)+\lambda o\gamma(\alpha-\beta)$$
$$\lambda o\gamma(\alpha+\beta)=1,30406$$
$$\lambda o\gamma(\alpha-\beta)=0,93450$$
$$2\lambda o\gamma\ \gamma=2,23856$$
$$\lambda o\gamma\ \gamma=1,11928$$
$$\gamma=13,1606 \text{ μέτ.}$$

῾Υπολογισμὸς τῆς Β. ᾿Εκ τῆς ἰσότητος ἡμ$B=\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν ὅτι,

λογἡμB=λογβ—λογα.

λογβ=0,80618
λογα=1,17609

λογἡμB=1,63009
B=65°15′22″

῾Υπολογισμὸς τῆς Γ

$90^\circ=89^\circ\ 59'\ 60''$
$B=65^\circ\ 15'\ 22''$

$\Gamma=24^\circ\ 44'\ 38''$

᾿Εκ τῆς $2E=\beta\gamma$ εὑρίσκομεν λογ $(2E)=$ λογβ$+$λογ $\gamma=1,92546$, ὅθεν $2E=82,268$ καὶ $E=41,134$ τετ. μέτρα.

§ 55. Γνωστὰ στοιχεῖα $\alpha=165,7$, $\beta=74,20$.

῎Αγνωστα στοιχεῖα γ, Β, Γ, **Ε**.

Βοηθητικὸς πίναξ
$\alpha=165,7$
$\beta=\ 74,20$

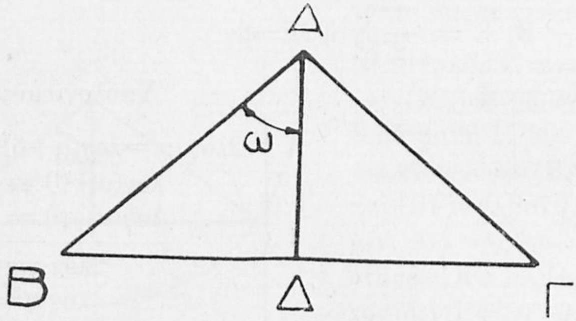
$\alpha+\beta=239,90$
$\alpha-\beta=\ 91,50$

᾿Εκ τῆς $\gamma^2=(\alpha+\beta)\ (\alpha-\beta)$ εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως λογ $\gamma=2,17072$, ὅθεν $\gamma=148,155$ μέτρ.

᾿Εκ τῆς ἡμ $B=\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως, λογἡμ$B=\overline{1},65108$, ὅθεν $B=26^\circ\ 36'\ 9''$ καὶ ὅτι $\Gamma=63^\circ\ 23'\ 51''$. Τέλος ἐκ τῆς $2E=\beta\gamma$

εὑρίσκομεν λογ(2Ε)=4,04112, ὅθεν 2Ε=10993,077 καὶ Ε=5496,538 τετ. μέτρα.

§ 56. Γνωρίζομεν ὅτι (ΒΔ)=(ΒΓ): 2 =5,60: 2 =2,80 μέτρα. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ βλέπομεν ὅτι $(ΑΔ)^2=(ΑΒ)^2-(ΒΔ)^2$ $=(ΑΒ+ΒΔ)(ΑΒ-ΒΔ)=7,80.2,20$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι



Σχ. 5

2λογ (ΑΔ) = λογ 7,80 + λογ2,20=1,23451, λογ (ΑΔ)=0,61725 καὶ (ΑΔ) = 4,1424 μέτ.

Ἐκ δὲ τῆς $ἡμΒ=\frac{ΑΔ}{ΑΒ}=\frac{4,1424}{5}$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἡμΒ=

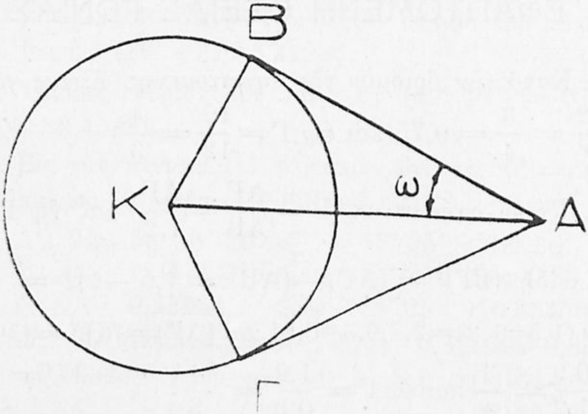
λογ.4,1424—λογ5=$\bar{1}$,91828, ὅθεν Β=Γ=55° 56′ 33″ καὶ ω=90° —Β=34° 3′ 27″, Α=2ω=68° 6′ 54″.

§ 57. Α′) Τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΔ γνωστὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα (ΑΔ)=8 μέτ. καὶ (ΑΕ)=5,30:2=2,65 μέτ. (Σχ.2).
Εἶναι δὲ $(ΕΔ)^2=8^2-2,65^2=(8+2,65).(8-2,65)=10,65\,.\,5,35$.
Ἐξακολουθοῦντες δέ, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν (ΕΔ)=7,5491 καὶ (ΒΔ)=15,09821 μέτ.

Β′) Ἐκ τῆς $ἡμ\,ω=\frac{ΕΔ}{ΑΔ}=\frac{7,5491}{8}$ εὑρίσκομεν

λογἡμω=λογ7,5491—λογ8=$\bar{1}$,97481, ὅθεν ω=70°40′36″, Α=Γ=2ω = 141° 21′ 12″. Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι Β = Δ = 180° — Α = 38° 38′ 48″.

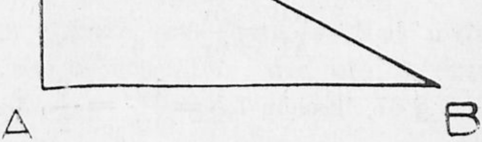
§ 58. Ἡ ζητουμένη γωνία εἶναι 2ω, καὶ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων ΑΒ, ΑΓ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΒ βλέπομεν ὅτι



Σχ. 6.

$$\eta\mu\omega = \frac{KB}{KA} = \frac{\varrho}{2\varrho} = \frac{1}{2} = \eta\mu 30^{\circ}.$$ Ἄρα $\omega = 30^{\circ}$ καὶ $2\omega = 60^{\circ}$.

§ 59. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu\, B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{0,28}{0,75} = \frac{28}{75}$. Ἑπομένως



Σχ. 7

λογ ἡμ $B =$ λογ $28 -$ λογ $75 = \overline{1},57210$ καὶ $B = 21^{\circ}\, 55'\, 17''$.

§ 60. Τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΚΑΒ (σχ. 3) γνωρίζομεν τὰ στοιχεῖα ($KB = 0,80$ μέτ. καὶ $(BA) = (B\Gamma) : 2 = 0,60 : 2 = 0,30$ μέτ. Ἑπομένως $(KA)^2 = (KB)^2 - (BA)^2 = 0,8^2 - 0,3^2 = (0,8 + 0,3)\,(0,8 - 0,3) = 1,1 . 0,5 = 0,55$ μέτ.

§ 61. Ἂν $\Delta' = 25$ χιλιόγρ., ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΣΔ (σχ. 4) εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta^2 = \Sigma^2 - \Delta'^2 = 40^2 - 25^2 = 65.15 = 5^2.3.13$. Ἑπομένως $\Delta = 5\sqrt{39} = 5.6,24 = 31,20$ χιλιόγρ.

'Επειδὴ δὲ ἡμ $\omega = \frac{\Delta'}{\Sigma} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8} = 0{,}625$,

ἔπεται ὅτι $\omega = 38^\circ\ 40'\ 56''$ καὶ $\varphi = 90^\circ - \omega = 51^\circ\ 19'\ 4''$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 62. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας εἶναι ἐφ $B = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ καὶ ἐφ $\Gamma = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$.

§ 63. Γνωρίζομεν ὅτι ἐφ $B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{A\Gamma}{1{,}2}$ καὶ ἐφ $\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1{,}2}{A\Gamma}$. 'Επειδὴ $(B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 - (AB)^2 = 1{,}5^2 - 1{,}2^2 = (1{,}5+1{,}2)\,(1{,}5-1{,}2) = 2{,}7 . 0{,}3 = 0{,}81$ καὶ $(A\Gamma) = \sqrt{0{,}81} = 0{,}9$, ἔπεται ὅτι ἐφ$B = \frac{0{,}9}{1{,}2} = \frac{3}{4}$ καὶ ἐφ $\Gamma = \frac{1{,}2}{0{,}9} = \frac{4}{3}$.

§ 64. Ἔστω $(AB) = (A\Gamma).4$. Ἑπομένως ἐφ$B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{(A\Gamma)}{(A\Gamma).4} = \frac{1}{4}$ καὶ ἐφ$\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = 4$

§ 65. Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς ΑΒ τυχοῦσαν καὶ $A\Gamma = AB.5$. Οὕτω θὰ εἶναι ἐφ $\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB}{AB.5} = \frac{1}{5}$. Ἡ γωνία Γ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη.

§ 66. Ὁρίζομεν τυχὸν εὐθ. τμῆμα τ· ἔπειτα κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον μὲ καθέτους πλευρὰς $AB = 5\tau$ καὶ $A\Gamma = 6\tau$. Οὕτω θὰ εἶναι ἐφ$\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{5\tau}{6\tau} = \frac{5}{6}$ κτλ.

§ 67. 'Επειδὴ $1{,}5 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς $AB = 3\tau$ καὶ $A\Gamma = 2\tau$. Οὕτω θὰ θὰ εἶναι ἐφ $\Gamma = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{3\tau}{2\tau} = \frac{3}{2}$ κτλ.

§ 68. Παρατηροῦμεν ὅτι $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ καὶ κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΒ) = 4 τ, (ΑΓ) = 5 τ.

Οὕτω θὰ εἶναι ἐφ Γ $= \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{5}$ κ.τ.λ.

§ 69. Εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος III εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ (12^o 30′) = 0,22169. Εἰς δὲ τὴν δεξιὰν σελίδα τοῦ αὐτοῦ πίνακος εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ (73^o 40′) = 3,41236.

§ 70. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ (42^o 10′) = 0,90669 καὶ ἐφ (67^o 50′) = 2,45451.

§ 71. Εἰς τὸν πίνακα III βλέπομεν ὅτι ἐφ 50^o = ἐφ (49^o 60′) = 1,19175 καὶ ἐφ 80^o = ἐφ (79^o 60′) = 5,67128.

§ 72. Α′) Ἐπειδὴ $18^o\,20' < 18^o\,25' < 18^o\,30'$, ἔπεται
ὅτι ἐφ (18^o 20′) < ἐφ (18^o 25′) < ἐφ (18^o 30′)
ἢ 0,33136 < ἐφ (18^o 25′) < 0,33459.

Ὥστε εἰς αὔξ. 10′ ἀντιστοιχεῖ αὔξ. ἐφαπ. 0,33459 − 0,33136
= 0,00323· ἑπομένως εἰς 5′ ἀντ. 0,00161

Ἐπειδὴ δὲ ἐφ (18^o 20′) = 0,33136

ἔπεται ὅτι ἐφ (18^o 25′) = 0,33297

Β′) Ὁμοίως βλέπομεν ὅτι ἐφ(53^o40′) < ἐφ(53^o47′) < ἐφ(53^o50′)
ἢ 1,35968 < ἐφ(53^o47′) < 1,36800.

Οὕτω Δ = 1,36800 − 1,35968 = 0,00832 εἰς αὔξ. 10′
X 7′

καὶ εὑρίσκομεν X = 0,00832 . $\frac{7}{10}$ = 0,00582

Ἐπειδὴ δὲ ἐφ (53^o 40′) = 1,35968

ἔπεται ὅτι ἐφ (53^o 47′) = 1,36550

§ 73. Ἐπειδὴ $23^o\,40' < 23^o\,43'30'' < 23^o\,50'$
ἔπεται ὅτι ἐφ (23^o40′) < ἐφ(23^o 43′30″) < ἐφ(23^o 50′)
ἢ 0,43828 < ἐφ(23^o 43′30″) < 0,44175

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν 10′ ἀντ. αὔξ. 0,00347

Εἰς 3′ 30″ ἢ 3 $\frac{1}{2}$ » » x

Ἑπομένως x = 0,00347 . $\frac{7}{20}$ = 0,00121

Ἐπειδὴ δὲ ἐφ(23^o 40′) = 0,43828

ἔπεται ὅτι ἐφ(23^o43′ 30″) = 0,43949

§ 74. Ἐπειδὴ $48^\circ 40' < 48^\circ 46' 40'' < 48^\circ 50'$, ἔπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}(48^\circ 40') < \text{ἐφ}(48^\circ 46' 40'') < \text{ἐφ}(48^\circ 50')$$

ἢ $$1{,}13694 < \text{ἐφ}(40^\circ 46' 40'') < 1{,}14363.$$

Οὕτω $\Delta = 1{,}14363 - 1{,}13694 = 0{,}00669$, $\quad 10' \qquad 0{,}00669$

$6'\,40'' = \left(6\,\frac{2}{3}\right) \qquad 6\,\frac{2}{3} \qquad x$

καὶ $x = 0{,}00669 \cdot \frac{20}{30} \quad = 0{,}00446$

Ἐπειδὴ δὲ ἐφ$(48^\circ 40')$ $\quad = 1{,}13694$

ἔπεται ὅτι ἐφ $(48^\circ 46' 40'')$ $\quad = 1{,}14140$

§ 75. Ἐπειδὴ $\frac{3}{10}$ ὀρθῆς $= 90^\circ \cdot \frac{3}{10} = 27^\circ$ ἔπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}\left(\frac{3}{10}\text{ ὀρθ.}\right) = \text{ἐφ } 27^\circ = 0{,}50953.$$

§ 76. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\frac{5}{8}$ ὀρθῆς $= 90^\circ \cdot \frac{5}{8} = 56^\circ 15'$ καὶ συνεχίζοντες, ὡς εἰς ἄσκ. 72, εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ$\left(\frac{5}{8}\text{ ὀρθ.}\right) = 1{,}49661$

§ 77. Α΄) Ἀπὸ τοὺς λογαριθμικοὺς τριγωνομετρικοὺς πίνακας εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι λογ ἐφ $(38^\circ 12') = \overline{1},89593$.

Β΄) Ἐπειδὴ $38^\circ 42' < 38^\circ 42' 30'' < 38^\circ 43'$, ἔπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}(38^\circ 42') < \text{ἐφ}(38^\circ 42' 30'' < \text{ἐφ}(38^\circ 43')$$

καὶ λογ ἐφ$(38^\circ 42') <$ λογἐφ$(38^\circ 42' 30'' <$ λογἐφ$(38^\circ 43')$

ἢ $\overline{1},90371 <$ λογἐφ $(38^\circ 42' 30'' < \overline{1},90397$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι $\Delta = 26$ μ.τ.δ.τ. εἰς αὔξ. $60''$

x » » $30''$

καὶ εὑρίσκομεν $\quad x = 26 \cdot \frac{30}{60} = \quad 13$

Ἐπειδὴ δὲ $\quad$ λογ ἐφ $(38^\circ 42') \quad = \overline{1},90371$,

ἔπεται ὅτι $\quad$ λογ ἐφ $(38^\circ 42' 30'') \quad = \overline{1},90384$

Γ΄) Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν ὅτι, ἐπειδὴ λογἐφ$(38^\circ 12') = \overline{1},89593$, εἶναι ἐφ $(38^\circ 12') = 0{,}78692$.

Δ΄) Ὁμοίως ἐκ τῆς λογἐφ $(38^\circ 42' 30'') = \overline{1},90384$ εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ $(38^\circ 42' 30'') = 0{,}80138$.

§ 78. Α΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφ $(51^{o}\ 23') = 0{,}09758$ καὶ ἐφ $(51^{o}\ 23') = 1{,}25194$.

Β΄) λογ ἐφ $(51^{o}\ 35'\ 28'') = 0{,}10081$, ὅθεν

ἐφ $(51^{o}\ 35'\ 28'') = 1{,}26124$.

§ 79. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφ $(41^{o}\ 57'\ 35'') = \overline{1},95383$. Ἐντεῦθεν δὲ ἐφ $(45^{o}\ 57'\ 35'')=0{,}89914$.

Β) λογ $(48^{o}\ 18'\ 52'') = 0{,}050{,}36$ καὶ ἐντεῦθεν ἐφ $(48^{o}\ 18'52'')=1{,}12295$.

§ 80. Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ διὰ $\beta=26{,}4$ γίνεται

$$\frac{\mu}{180} = \frac{26{,}4}{200} \text{ καὶ ἑπομένως } \mu=26{,}4\ \frac{180}{200}=26{,}4\ \frac{9}{10}=23^{o}45'36''.$$

Ἑπομένως λογ ἐφ $26^{\gamma},4=$ λογ ἐφ $(23^{o}\ 45'\ 36'')=\overline{1},64367$.

Ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν ὅτι ἐφ $26^{\gamma},4=0{,}44022$.

§ 81. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\mu=180^{o}.\ \frac{3}{8} = (67^{o}\ 30')$. Μεθ' ὃ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφ $\frac{3\pi}{8} =$ λογ ἐφ $(67^{o}\ 30') = 0{,}38278$ καὶ ἐφ $\frac{3\pi}{8} = 2{,}41422$.

§ 82. Ἐπειδὴ $\frac{2}{5} = 0{,}4$, ἕπεται ὅτι λογ ἐφ $x =$ λογ $0{,}4 = \overline{1},60206$.

§ 83. Λογ ἐφ $\omega=$ λογ $1{,}673=0{,}22350$.

§ 84. Λογ ἐφ $y=$ λογ $0{,}347=\overline{1},54033$.

§ 85. Ἐπειδὴ λογ ἐφ $x<0$, εἶναι ἐφ $x<1$ καὶ $x<45^{o}$. Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν δοθέντα λογάριθμον $\overline{1},89801$ εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων ἄνω καὶ εὑρίσκομεν

$$x=38^{o}\ 20'.$$

§ 86. Ἐπειδὴ λογ ἐφ $\omega>0$, εἶναι ἐφ $\omega>1$ καὶ $\omega>45^{o}$. Ἀναζητοῦμεν λοιπὸν τὸν $0{,}09396$ εἰς τὰς στήλας τῶν ἐφαπτομένων κάτω καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\omega=51^{o}\ 9'$.

§ 87. Ἐπειδὴ $0{,}532<1$, εἶναι $y<45^{o}$. Ἀναζητοῦντες τὸν $0{,}532$ εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος III βλέπομεν ὅτι

$$0{,}53171<0{,}53200<0{,}53545$$

καὶ $28^\circ < 0{,}53200 < 28^\circ\ 10'$

Οὕτως εἶναι $\Delta = 0{,}53545 - 0{,}53171 = 0{,}00374$

$\delta = 0{,}53200 - 0{,}53171 = 0{,}00029$.

Ἐπειδὴ δὲ εἰς αὔξ. 0,00374 ἀντιστ. αὔξ. 10′

» » 0,00029 » » x

καὶ εὑρίσκομεν $x = 10.\ \dfrac{0{,}00029}{0{,}00374} = 10'.\dfrac{29}{374} = 46''$.

Ἑπομένως $y = 28^\circ\ 0'\ 46''$.

Β′ τρόπος. Ἐκ τῆς ἐφ $y = 0{,}532$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἐφ $y = \overline{1},72591$ καὶ ἔπειτα $y = 28^\circ\ 0'\ 46''$.

§ 88. Ἀπὸ τὸν πίνακα ΙΙΙ κατὰ τὰ προηγούμενα εὑρίσκομεν

$x = 47^\circ\ 48'\ 14''$.

Β′ τρόπος. Ἐκ τῆς ἐφ $x = 1{,}103$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἐφ $x =$ λογ $1{,}103 = 0{,}04258$ καὶ εἶτα

$x = 47^\circ\ 48'\ 14''$

§ 89. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ἐφ $\vartheta = \dfrac{10}{8} = 1{,}25$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἐφ $\vartheta =$ λογ $1{,}25 = 0{,}09691$ καὶ ἐκ ταύτης $\vartheta = 51^\circ\ 20'\ 25''$.

§ 90. Ἐκ τῆς ἰσότητος ἐφ $\omega = 2{,}194$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφω$=$ $=$λογ $2{,}194 = 0{,}34134$ καὶ $\omega = 65^\circ\ 29'\ 49''$. Ἐπειδὴ δὲ $65^\circ\ 29'\ 49 = \left(\dfrac{235789}{3600}\right)^\circ$, ἡ γνωστὴ ἰσότης $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\beta}{200}$ γίνεται

$\beta = \dfrac{235789}{360} \cdot \dfrac{200}{180} = 72^{\gamma},774$.

§ 91. Ἐκ τῆς ἐφ $z = 0{,}923$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἐφ $z =$ λογ $0{,}923 = \overline{1},96520$ καὶ ἔπειτα

$z = 42^\circ\ 42'\ 24'' = \left(\dfrac{153744}{3600}\right)$. Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\dfrac{\mu}{180} = \dfrac{\alpha}{\pi}$

εὑρίσκομεν $z = \dfrac{3203\pi}{180.3600}$ ἀκτίνια.

§ 92. Ἐκ τῆς ἰσότητος ἐφ $x = 3{,}275$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ ἐφ $x =$ λογ $3{,}275 = 0{,}51455$ καὶ εἶτα $x = 72^\circ\ 59'\ 45''$.

§ 93. Ἐκ τῆς ἐφ $x = \dfrac{12}{5}$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφ $x =$ λογ $2{,}4 =$ $= 0{,}38021$ καὶ εἶτα $x = 67^\circ\ 22'\ 48''$

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘ. ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΚ ΤΩΝ ΚΑΘΕΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ

§ 94. Γνωστὰ στοιχεῖα $\beta = 18$ μέτ, $\gamma = 12$ μέτ.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, Γ, α, Ε.

Τύποι ἐπιλύσεως. $\text{ἐφ}\, B = \frac{\beta}{\gamma}$, $\Gamma = 90^0 - B$, $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\, B}$,
$E = \frac{\beta\gamma}{2}$.

Ὑπολογισμὸς τῆς Β. Ἐκ τῆς $\text{ἐφ}\, B = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ ἐφ Β=λογ 3—λογ 2=0,17609, ὅθεν Β=56° 18′ 35″, 5.

Ὑπολογισμὸς τῆς Γ. $\Gamma = 90^0 - 56^0 18' 35'',5 = 33^0 41' 24'',5$.

Ὑπολογισμὸς τῆς α. Ἐκ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}\, B}$ εὑρίσκομεν

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$\left.\begin{array}{l} \text{λογ}\ \alpha = \text{λογ}\ \beta - \text{λογ ἡμ}\ B \\ \text{λογ}\ \beta = 1,25527 \\ \text{λογ ἡμ}\ B = \overline{1},92015 \\ \hline \text{λογ}\ \alpha = 1,33512 \\ \alpha = 21,633\ \text{μέτ.} \end{array}\right\} \quad E = \frac{1}{2} \cdot 18.12 = 9.12 = 108\ \text{τ. μέτ.}$$

§ 95. Γνωστὰ στοιχεῖα $\beta = 256,25$, $\gamma = 348$.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, Γ, α, Ε.

Ἐπομένως $\text{ἐφ}\, B = \frac{256,25}{348}$, λογ ἐφ Β=λογ 256, 25—λογ 348 =
$= \overline{1},86708$, ὅθεν Β=36° 21′ 58″ καὶ

$$\Gamma = 90^0 - 36^0\ 21'\ 58'' = 53^0\ 38'\ 2''$$

Ἐκ τῆς $\alpha = \frac{\beta}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν λογ α = λογ β—λογ ἡμ Β = 2,63564, ὅθεν α=432,16 μέτ.

Τέλος ἐκ τῆς $E = \frac{\beta\gamma}{2}$ εὑρίσκομεν λογ Ε=λογ β+λογ γ—λογ 2 =4,64921, ὅθεν Ε=44587 τετ. μέτρα.

§ 96. Γνωστὰ στοιχεῖα $\beta = 3168,45$ μέτ, $\gamma = 2825,50$ μέτ.
Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, Γ, α, Ε.

Ἐκ τῆς ἐφ $B = \dfrac{3168,45}{2825,50}$ εὑρίσκομεν

λογ ἐφ B=λογ 3168,45—λογ 2825,50

=0,04975, ὅθεν $B=48^\circ\,16'\,29''$, $\Gamma=41^\circ\,43'\,31''$.

Ἐκ δὲ τῶν $\alpha = \dfrac{\beta}{\text{ἡμ.}B}$, $E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma$ εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ α =4245,3 μέτ. καὶ E=4476200 τετ. μέτρα.

§ 97. Ἂν (ΒΔ)=3,48 μέτ, (ΑΓ)=2,20 μέτ, θὰ εἶναι (ΔΕ) = 3,48 : 2 = 1,74 καὶ (ΑΕ)=2,20 : 2 = 1,10 (Σχ. 2).

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΔ βλέπομεν ὅτι ἐφω$=\dfrac{\Delta E}{AE}=\dfrac{1,74}{1,10}$, ὅθεν λογἐφω=λογ1,74—λογ 1,10=0,19916 καὶ $\omega = 57^\circ\,42'$. Ἄρα $A=\Gamma=2\omega=115^\circ\,24'$ καὶ $B=\Delta=180^\circ-A=64^\circ\,36'$. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ δὲ τριγώνου βλέπομεν ὅτι (ΔΕ) = (ΑΔ) ἡμω, ὅθεν (ΑΔ)$=\dfrac{(\Delta E)}{\text{ἡμω}}$,

λογ (ΑΔ)=λογ 1,74—λογ ἡμ (57°42′) = 0,31356

καὶ (ΑΔ) = 2,0586 μέτ.

§ 98. Ἂν ΒΓ : ΑΒ$=\dfrac{2}{3}$ (Σχ. 1), θὰ εἶναι ἐφ $\omega = \dfrac{2}{3}$, ὅθεν κατὰ τὰ γνωστὰ $\omega=33^\circ\,41'\,24''$ καὶ $\varphi=56^\circ\,18'\,36''$.

§ 99. Ἂν (ΚΑ)=8 μέτ. (ΒΓ)=12 μέτ. (Σχ. 3), θὰ εἶναι (ΒΑ)=6 καὶ ἐφ $\omega=\dfrac{BA}{KA}=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$. Ἐκ ταύτης δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\omega = 36^\circ\,52'\,12''$. Ἑπομένως $(B\widehat{\Delta}\Gamma)=2\omega=73^\circ\,44'\,24''$

$360^\circ=359^\circ\,59'\,60''$

καὶ $(B\widehat{E}\Gamma)=286^\circ\,15'\,36''$.

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΑΒ βλέπομεν ὅτι (ΑΒ)=R ἡμ ω, ὅθεν $R = \dfrac{6}{\text{ἡμ }\omega}$ καὶ λογ R=λογ 6—λογ ἡμ ω=1. Ἑπομένως R=10 μέτ.

§ 100. Ἂν β=260,40 μέτ., θὰ εἶναι

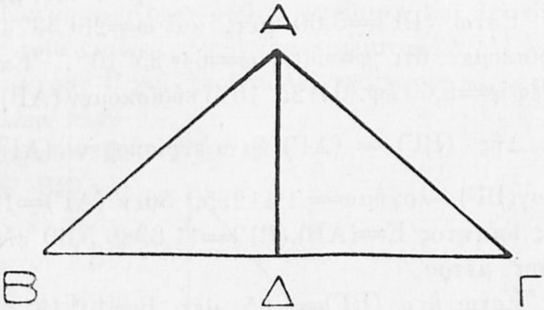
$940,50=\dfrac{1}{2}\cdot 260,40\ \gamma$, ὅθεν $\gamma=\dfrac{940,50}{130,20}=7,22$ μέτ.

Ἐκ δὲ τῆς ἐφ$B=\dfrac{\beta}{\gamma}=\dfrac{260,40}{7,22}$ εὑρίσκομεν $B=88^\circ\,34'\,42''$ καὶ εἶτα $\Gamma=1^\circ\,25'\,18''$.

Τέλος δὲ ἐκ τῆς $α = \dfrac{β}{ἡμΒ}$ εὑρίσκομεν $α = 260{,}50$ μέτ.

§ 101. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 8), τὸ ὁποῖον ἔχει $(ΑΒ) = (ΑΓ)$, $(ΒΓ) = 28{,}35$ καὶ ὕψος $(ΑΔ) = 3{,}46$ μέτ. Προφανῶς εἶναι $(ΒΔ) = 28{,}35 : 2 = 14{,}175$ μέτ. καὶ $εφΒ = \dfrac{3{,}46}{14{,}75}$, ὅθεν εὑρίσκομεν ὅτι $Β = Γ = 13^{\circ}\,12'\,6'',3$ καὶ εἶτα $Α = 180^{\circ} - (Β.2) - 153^{\circ}\,35'\,47'',4$.

Τέλος ἐκ τῆς $ἡμΒ = \dfrac{ΑΔ}{ΑΒ}$ εὑρίσκομεν $ΑΒ = \dfrac{3{,}46}{ἡμΒ}$ καὶ $(ΑΒ) = 15{,}15$ μέτ.



Σχ. 8

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΟΡΘ. ΤΡΙΓΩΝΩΝ ΕΚ ΜΙΑΣ ΚΑΘΕΤΟΥ ΠΛΕΥΡΑΣ ΚΑΙ ΜΙΑΣ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 102. Γνωστὰ στοιχεῖα $β = 47$ μέτ, $Β = 47^{\circ}$.

Ἄγνωστα στοιχεῖα Γ, γ, α, Ε.

Τύποι ἐπιλύσεως. $Γ = 90^{\circ} - Β$, $γ = βεφΓ$, $α = \dfrac{β}{ἡμΒ}$, $2Ε = β^2 εφΓ$,

$Γ = 90^{\circ} - 47^{\circ} = 43^{\circ}$.

Ἐκ τῆς $γ = 47εφΓ$ εὑρίσκομεν $λογ\,γ = λογ47 + λογεφ43^{\circ}$

$$λογ47 = 1{,}67210$$
$$λογεφ43^{\circ} = \bar{1}{,}96966$$
$$λογ\,γ = 1{,}64176$$
$$γ = 43{,}829 \text{ μετ}$$

Ἐκ τῆς $α = \dfrac{47}{ἡμ47^{\circ}}$ εὑρίσκομεν $λογ\,α = λογ47 - λογἡμ47^{\circ} = 1{,}80797$, ὅθεν $α = 64{,}2643$ μετ.

Τέλος ἐκ τῆς $2E=\beta^2 \grave{\varepsilon}\varphi\Gamma$ εὑρίσκομεν $\lambda o\gamma(2E)=2\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma$.

$$\left.\begin{aligned}2\lambda o\gamma\beta&=3,34420\\ \lambda o\gamma\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma&=\overline{1},96966\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&\lambda o\gamma(2E)=3,31386, \text{ ὅθεν}\\ &2E=2059,947 \text{ καὶ } E=1029,973 \text{ τετ. μετ.}\end{aligned}$$

§ 103. Γνωστὰ στοιχεῖα $\beta=125$ μέτ, $\Gamma=23^\circ 45' 22''$.

Ἄγνωστα στοιχεῖα Β, γ, α, Ε.

$B=90^\circ-\Gamma=66^\circ 14' 38''$. Ἐκ τῆς $\gamma=\beta\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma$ εὑρίσκομεν εὐκόλως $\gamma=55,0175$ μέτ.—Ἐκ τῆς $\beta=\alpha\,\dot{\eta}\mu B$ εὑρίσκομεν $\alpha=\dfrac{\beta}{\dot{\eta}\mu B}$, ὅθεν $\lambda o\gamma\,\alpha=\lambda o\gamma\,\beta-\lambda o\gamma\dot{\eta}\mu B=2,13536$ καὶ $\alpha=136,57$ μέτ.
Ἐκ δὲ τῆς $(2E)=\beta^2\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma(2E)=2\lambda o\gamma\beta+\lambda o\gamma\grave{\varepsilon}\varphi\Gamma=$ $=3,83741$, ὅθεν $2E=6877,17$ καὶ $E=3438,585$ τετ. μέτ.

§ 104. Ἔστω $(B\Gamma)=5,60$ μέτ. καὶ $\omega=25^\circ 33' 44''$ (Σχ. 1). Πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $\varphi=90^\circ-\omega=64^\circ 25' 16''$. Ἔπειτα ἐκ τῆς $(AB)=(B\Gamma)\grave{\varepsilon}\varphi\,\varphi=5,60\,\grave{\varepsilon}\varphi.(64^\circ 25' 16'')$ εὑρίσκομεν $(AB)=11,6989$μ.

Ἐκ δὲ τῆς $(B\Gamma)=(A\Gamma)\,\dot{\eta}\mu\,\omega$ εὑρίσκομεν $(A\Gamma)=\dfrac{(B\Gamma)}{\dot{\eta}\mu\omega}$, $\lambda o\gamma(A\Gamma)=\lambda o\gamma(B\Gamma)-\lambda o\gamma\dot{\eta}\mu\omega=1,11295$, ὅθεν $(A\Gamma)=12,9703$ μέτ. Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E=(AB).(B\Gamma)=11,6989.5,60$ εὑρίσκομεν ὅτι $E=65,515$ τετ. μέτρα.

§ 105. Ἔστω ὅτι $(B\Gamma)=1,65$ μέτ, $B=40^\circ 18' 38''$ (Σχ. 3)· Γνωρίζομεν ὅτι $(BA)=B\Gamma):2=0,825$ μέτ. καὶ ὅτι $(KA)=(BA)\grave{\varepsilon}\varphi B=$ $=0,825\,\grave{\varepsilon}\varphi B$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $(KA)=0,6999$ μέτ.

Ἐκ δὲ τῆς $(KA)=(KB)\,\dot{\eta}\mu\,B$ εὑρίσκομεν ὅτι $(KB)=\dfrac{KA}{\dot{\eta}\mu A}=$ $=\dfrac{0,6999}{\dot{\eta}\mu\,B}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $(KB)=1,0819$ μέτ.

Ἐπειδὴ $\quad B+\Gamma=B.2=80^\circ 37' 16''$
καὶ $\quad 180^\circ=179^\circ 59' 60''$

ἔπεται ὅτι $\quad (B\widehat{K\Gamma})=99^\circ 22'' 44''=(B\widehat{\Delta\Gamma})$.

Ἐπειδὴ δὲ $\quad 360^\circ=359^\circ 59' 60''$, ἔπεται

ὅτι $\quad (B\widehat{E\Gamma})=260^\circ 37' 16''$

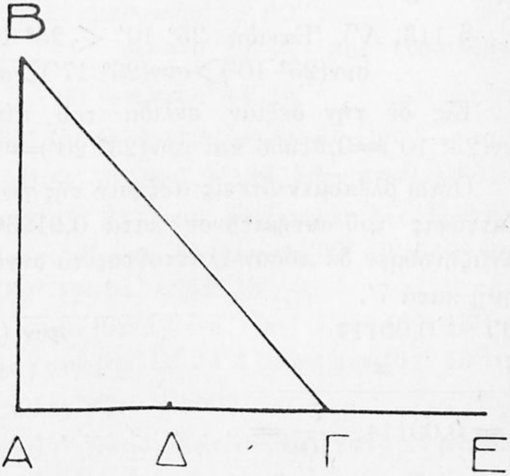
§ 106. Ἔστω ΒΓ ἡ πλευρὰ κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ $(KA)=0,80$ μέτ. (σχ. 3). Γνωρίζομεν ὅτι ἡ κεντρικὴ γωνία $(B\widehat{K\Gamma})=360^\circ:8=45^\circ$ καὶ ἑπομένως $\omega=22^\circ 30'$. Ἐκ δὲ τῆς $(BA)=$ $=(KA)\,\grave{\varepsilon}\varphi\omega=0,80\,\grave{\varepsilon}\varphi\,(22^\circ 30')$ εὑρίσκομεν ὅτι $(BA)=0,33137$ μέτ. καὶ $(B\Gamma)=0,66274$ μέτ.

§ 107. Ἂν $υ = 1,8$ μέτ, ἡ κλίσις $ω = 20^o$ καὶ $μ$ τὸ ζητούμενον μῆκος, θὰ εἶναι $υ = μ.ημ20^o$, ὅθεν

$μ = \frac{υ}{ημ20^o}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $μ = 5,263$ μέτρα.

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ ΚΑΙ ΣΥΝΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 108. Κατασκευάζομεν ὀρθὴν γωνίαν Α καὶ ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς ὁρίζομεν τρία διαδοχικὰ καὶ ἴσα τμήματα ΑΔ, ΔΓ, ΓΕ (σχ. 9). Ἔπειτα μὲ κέντρον Γ καὶ ἀκτῖνα ΑΕ γράφομεν περιφέρειαν. Αὕτη τέμνει τὴν ἄλλην πλευρὰν εἴς τι σημεῖον Β. Ἄγομεν τὴν ΒΓ καὶ σχηματίζομεν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐξ αὐτοῦ δὲ βλέπομεν ὅτι $συν\,Γ = ημ\,Β = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{2}{3}$. Ἡ γωνία Γ λοιπὸν εἶναι ἡ ζητουμένη.



Σχ. 9

§ 109. Ἐπειδὴ $συνω = \frac{45}{100} = \frac{4,5}{10}$ ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν (ΑΓ) = 4,5 ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ) = 10 ἑκατ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι $συνΓ = ημΒ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{4,5}{10} = 0,45$.

Εἶναι λοιπὸν $ω = Γ$.

§ 110. Ἐπειδὴ $συνy = 0,34 = \frac{3,4}{10}$, ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ μίαν πλευρὰν (ΑΓ) = 3,4 ἑκατ, καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ)=10 έκατ. Ούτως είναι συνΓ=ήμΒ= $\frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{3,4}{10}$ =0,34 καὶ ἐπομένως y=Γ.

§ 111. Ὁρίζομεν ἓν εὐθ. τμῆμα τ καὶ κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΒ)=2τ καὶ (ΑΓ)=5τ. Ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι σφΒ= $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{2τ}{5τ} = \frac{2}{5}$. Εἶναι λοιπὸν x=Β.

§ 112. Ἐπειδὴ σφω $= 0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, ὡς προηγουμένως, κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς (ΑΒ) = 3τ καὶ (ΑΓ) = 5τ. Βλέπομεν δὲ ὅτι σφΒ $= \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{3τ}{5τ} = \frac{3}{5} = 0,6$. Ἑπομένως ω=Β.

§ 113. Α'). Ἐπειδὴ $23^\circ\,10' < 23^\circ\,17' < 23^\circ\,20'$, ἕπεται ὅτι

συν$(23^\circ\,10')>$συν$(23^\circ\,17')>$συν$(23^\circ\,20')$.

Εἰς δὲ τὴν δεξιὰν σελίδα τοῦ πίνακος Ι εὑρίσκομεν ὅτι συν$(23^\circ\,10')=0,91936$ καὶ συν$(23^\circ\,20')=0,91822$.

Οὕτω βλέπομεν ὅτι εἰς αὔξησιν τῆς γωνίας κατὰ 10′ ἀντιστοιχεῖ ἐλάττωσις τοῦ συνημιτόνου κατὰ 0,91936 − 0,91822 = 0,00114. Ἀναζητοῦμεν δὲ πόσον ἐλαττοῦται τὸ συνημίτονον, ἂν ἡ γωνία αὐξηθῇ κατὰ 7′.

10′ 0,00114 συν $(23^\circ\,10')$ =0,91936

7′ x

$x = 0,00114 \cdot \frac{7}{10} =$ . . . . =0,000798

καὶ συν $(23^\circ\,17')$ =0,91856

Β'. Τρόπος. Θέτομεν x = συν$(23^\circ\,17')$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι λογ x = λογσυν$(23^\circ\,17')=\bar{1},96311$.

Ἀπὸ δὲ τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν βλέπομεν ὅτι

$$\underset{9185}{96308} < 96311 < \underset{9186}{96313}$$

Δ=5 μ.τ.δ.τ, δ=3 μ.τ.δ.τ, δ : Δ $= \frac{3}{5} = 0,6$.

καὶ ἐπομένως συν$(23^\circ\,27')$=0,91856.

Β΄) Εἰς τὴν ἀριστερὰν σελίδα τοῦ πίνακος Ι βλέπομεν

ὅτι $\sigma\upsilon\nu(49^0\ 30') < \sigma\upsilon\nu(49^0\ 23') < \sigma\upsilon\nu(49^0\ 20')$

ἢ $0{,}64945 < \sigma\upsilon\nu(49^0\ 23') < 0{,}65166.$

$\Delta = 0{,}65166 - 0{,}64945 = 0{,}00221$, ἤτοι αὐξανομένης τῆς γωνίας

κατὰ 10΄ τὸ συνημ. ἐλατ. κατὰ 0,00221

» 3΄ » » » x

$$x = 0{,}00221 \cdot \frac{3}{10} = 0{,}00066$$

$\sigma\upsilon\nu\ (49^0\ 20') = 0{,}65166$ Ἐπομένως

$\sigma\upsilon\nu\ (42^0\ 23') = 0{,}65100$

Β΄. Τρόπος. Θέτομεν $x = \sigma\upsilon\nu\ (49^0\ 23')$ καὶ εὑρίσκομεν

ὅτι $\lambda o\gamma\ x = \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu(49^0\ 23') = \bar{1},81358$, ὅθεν

$x = \sigma\upsilon\nu(49^0\ 23') = 0{,}65100.$

§ 114. Θέτομεν $90^0 = 89^0\ 59'\ 60''$

καὶ $\omega = 35^0\ 15'\ 45''$ καὶ εὑρίσκομεν

$90' - \omega = 54^0\ 44'\ 15''$

Ἐπομένως $x = \sigma\upsilon\nu\,(35^0\ 15'\ 45'') = \acute{\eta}\mu\ (54^0\ 44'\ 15'')$

καὶ $\lambda o\gamma\ x = \lambda o\gamma\ \acute{\eta}\mu\ (54^0\ 44'\ 15'') = \bar{1},91196$, ὅθεν $x = 0{,}8165$.

Β΄) Θέτομεν $y = \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'')$ καὶ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\ y = \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'')$. Πρὸς εὕρεσιν δὲ $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(62^0\ 12'\ 54'')$ παρατηροῦμεν ὅτι $62^0\ 12' < 62^0\ 12'\ 54' < 62^0\ 13'$,

$\sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12') > \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'') > \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 13')$

$\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12') > \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'') > \lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 13')$

ἢ $\bar{1},66875 > \lambda o\gamma\ y > \bar{1},66051.$

Οὕτω εἰς αὔξ. γωνίας κατὰ 60΄΄ ἀντισ. ἐλάτ. συνημ. κατὰ 24 μ.τ.δ.τ.

» » » » 54΄΄ » » » » x

καὶ εὑρίσκομεν $x = 24 \cdot \frac{54}{60} = 2 \cdot \frac{54}{5} = \frac{108}{5} = 22$ μ.τ.δ.τ.

Ἐπειδὴ $\lambda o\gamma\ \sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12') = \bar{1}.66875$

ἕπεται ὅτι $\lambda o\gamma y = \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'') = \bar{1},66853.$

Ἐντεῦθεν δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\ (62^0\ 12'\ 54'') = 0{,}466155.$

§ 115. Α΄) Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ διὰ $\beta = 43{,}6$ γίνεται

$\frac{\mu}{180} = \frac{43{,}6}{200}$ ὅθεν $\mu = 39^0\ 14'\ 24''$, Ἐπομένως συν $43^{\gamma},6$ =συν($39^{\circ}14'24''$)· κατὰ δὲ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ὅτι λογ συν ($39^{\circ}\,14'\,24''$)=$\overline{1},88902$ καὶ συν ($39^{\circ}\,14'\,24''$)= =συν $43^{\gamma}, 6$=0,7745.

Β′) Ἡ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha = \frac{3\pi}{8}$ γίνεται $\frac{\mu}{180} = \frac{3}{8}$ καὶ ἐπομένως $\mu = 180^{\circ}.\ \frac{3}{8} = 67^{\circ}\,30'$.

Ἐπομένως συν $\frac{3\pi}{8}$ = συν ($67^{\circ}\,30'$). Ἐπειδὴ δὲ

λογ συν ($67^{\circ}\,30'$)=$\overline{1},58284$, ἕπεται ὅτι

συν $\frac{3\pi}{8}$ =συν($67^{\circ}30'$)=0,38268.

§ 116. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $x = 0,795$ εὑρίσκομεν ὅτι λογ συν x=λογ 0,795 = $\overline{1},90037$, ὅθεν

$x = 37^{\circ}\,20'\,40''$

§ 117. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα συν ω=0,4675 εὑρίσκομεν ὅτι

λογ συν ω=λογ 0,4675 = $\overline{1},66978$ ὅθεν ω=$62^{\circ}\,7'\,40''$

§ 118. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα συν $y = \frac{5}{7}$ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ συν y = λογ 5—λογ 7= $\overline{1},85387$, ὅθεν

$y = 44^{\circ}\,24'\,55'', 5$

§ 119. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας ἡμx=0,41469,συνy=0,41469 ἕπεται ὅτι ἡμx=συνy. Ἐπομένως $x+y=90^{\circ}$.

§ 120. Ἐπειδὴ ἡμ x =0,92276>0,70711= ἡμ 45°, ἕπεται ὅτι $x>45^{\circ}$. Ἐπειδὴ δὲ συν y=0,67321<συν45°, ἕπεται ὅτι $y>45^{\circ}$. Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων λοιπὸν $x>45^{\circ}$, $y>45^{\circ}$ ἕπεται ὅτι $x+y>90^{\circ}$.

§ 121. Α′) Θέτοντες x =σφ ($15^{\circ}\,35'$) εὑρίσκομεν ὅτι

λογ x = λογ σφ ($15^{\circ}35'$)=0,55456, ὅθεν

x=σφ($15^{\circ}\,35'$)=3.58558

Β′). Θέτοντες y=σφ ($62^{\circ}\,46'$) εὑρίσκομεν ὅτι

λογ y=λογ σφ ($62^{\circ}\,46'$)= $\overline{1},71153$, ὅθεν

y=σφ ($62^{\circ}\,46'$)=0,514675.

§ 122. Α′) Θέτοντες x=($27^{\circ}\,32'\,50''$) εὑρίσκομεν ὅτι

λογ x = λογ σφ ($27^{\circ}\,32'\,50''$)=0,28265, ὅθεν

x=σφ ($27^{\circ}\,32'\,50''$)=1,91713.

Β′) Θέτομεν y=σφ ($70^{\circ}\,12'\,24''$) καὶ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\ y = \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ (70^\circ\ 12'\ 24'') = \bar{1},55617,\ \text{ὅθεν}$$
$$y = \sigma\varphi\ (70^\circ\ 12'\ 24') = 0,3598$$

Σημ. Οἱ μαθηταὶ ἂς λύσωσι τὰς ἀσκήσεις 121 καὶ 122 καὶ κατ' ἄλλους τρόπους.

§ 123. Α΄) Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ διὰ $\beta = 30^\gamma,5$ γίνεται $\frac{\mu}{180} = \frac{30,5}{200}$, ὅθεν $\mu = 180^\circ \cdot \frac{30,5}{200} = 27^\circ\ 27'$. Ἑπομένως $\sigma\varphi 30^\gamma,5 = \sigma\varphi(27^\circ\ 27')$. Ἂν δὲ θέσωμεν $x = \sigma\varphi(27^\circ\ 27')$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\ x = \lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ (27^\circ\ 27') = 0,28445,\ \text{ὅθεν}$$

$x = \sigma\varphi\ (27^\circ\ 27') = \sigma\varphi\ 30^\gamma,5 = 1,92508$.

Β΄) Ἡ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ γίνεται $\frac{\mu}{180} = \frac{2}{5}$ ὅθεν $\mu = 180^\circ \cdot \frac{2}{5} = 72^\circ$. Ἑπομένως $\sigma\varphi\ \frac{2\pi}{5} = \sigma\varphi\ 72^\circ =$ $= \sigma\varphi\ (71^\circ\ 60') = 0,32492$. (Πίναξ ΙΙΙ).

§ 124. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\varphi x = 2,34$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\ \sigma\varphi x = 0,36922,\ \text{ὅθεν}\ x = 23^\circ\ 8'\ 21''.$$

§ 125. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\varphi\omega = 0,892$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\omega = \lambda o\gamma\ 0,892 = \bar{1},95036$, ὅθεν $\omega = 48^\circ\ 16'\ 2''$.

§ 126. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\varphi\ y = \frac{15}{9}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\ \sigma\varphi\ y = \lambda o\gamma\ 15 - \lambda o\gamma 9 = 0,22185$, ὅθεν $y = 30^\circ\ 57'\ 40'',6$.

§ 127. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi x = 1,34 > 1$ ἢ $\sigma\varphi x > \sigma\varphi 45$, ἕπεται ὅτι $x < 45^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi\ y = 0,658 < 1$ ἢ $\varepsilon\varphi\ y < \varepsilon\varphi\ 45^\circ$, ἕπεται ὅτι $y < 45^\circ$. Ἀπὸ τὰς ἀνισότητας λοιπὸν $x < 45^\circ$, $y < 45^\circ$, ἕπεται ὅτι $x + y < 90^\circ$.

ΠΡΩΤΗ ΣΕΙΡΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

§ 128. Ἀπὸ τὴν γνωστὴν ταὐτότητα $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$ προκύπτουσιν εὐκόλως ὅτι $\eta\mu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$, $\sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \eta\mu^2\omega$.

§ 129. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi^2\omega = \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ καὶ ἑπομένως $1 + \varepsilon\varphi^2\omega = 1 + \frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega=1$, αὕτη γίνεται $1+\varepsilon\varphi^2\omega=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}$.

§ 130. Ἐκ τῆς ταυτότητος $\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$ ἕπεται ὅτι

$\sigma\varphi^2\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}$ καὶ ἑπομένως $\qquad 1+\sigma\varphi^2\omega=1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}$

$$=\frac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}=\frac{1}{\eta\mu^2\omega}.$$

Σημ. Τὰς ταὐτότητας 129 καὶ 130 ἀποδεικνύομεν εὐκόλως καὶ ἂν ἀρχίσωμεν ἀπὸ τὸ δεύτερον μέλος. Πρὸς τοῦτο εἰς αὐτὸ ἀντὶ 1 θέτομεν $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν σημειουμένην διαίρεσιν. Οὕτως

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega+\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}+\frac{\eta\mu^2\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}\,1=+\varepsilon\varphi^2\omega.$$

§ 131. Προφανῶς εἶναι $\sigma\varphi^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}-\sigma\upsilon\nu^2\omega=$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}-\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega\eta\mu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega\,\eta\mu^2\omega=\sigma\upsilon\nu^2\omega(1-\eta\mu^2\omega)$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\sigma\varphi^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega(1-\eta\mu^2\omega)}{\eta\mu^2\omega}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu^2\omega}\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$\sigma\varphi^2\omega-\sigma\upsilon\nu^2\omega=\sigma\varphi^2\omega\,.\,\sigma\upsilon\nu^2\omega.$$

§ 132. Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi\omega=\dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}$, $\sigma\varphi\omega=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,\omega}{\eta\mu\omega}$, ἕπεται ὅτι

$$\varepsilon\varphi\omega+\sigma\varphi\omega=\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\,\omega}+\frac{\sigma\upsilon\nu\,\omega}{\eta\mu\omega}=\frac{\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega}{\eta\mu\omega\,.\,\sigma\upsilon\nu\omega}=\frac{1}{\eta\mu\omega\,.\,\sigma\upsilon\nu\omega} \quad (1)$$

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ἀρχίσωμεν καὶ ἀπὸ τὸ β′ μέλος καὶ νὰ καταλήξωμεν εἰς τὸ α′. Τὴν πορείαν βλέπομεν εὐκόλως, ἂν ἀναγνώσωμεν ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τὴν σειράν (1).

§ 133. Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\varphi\alpha=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}$ καὶ $\sigma\varphi\beta=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\beta}$.

Ἑπομένως $\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta=\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}+\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\beta}=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta}$ καὶ

$$\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta(\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta)=\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta.\ \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha\,.\,\varepsilon\varphi\beta}=\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta.$$

§ 134. Ἡ ἀπόδειξις ἔγινεν εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν.

§ 135. Προηγουμένως ἀπεδείχθη ὅτι $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \dfrac{\dot{\varepsilon}\varphi\alpha + \dot{\varepsilon}\varphi\beta}{\dot{\varepsilon}\varphi\alpha . \dot{\varepsilon}\varphi\beta}$.

Ἂν δὲ τὰ μέλη αὐτῆς διαιρέσωμεν διὰ ($\dot{\varepsilon}\varphi\alpha + \dot{\varepsilon}\varphi\beta$), εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\dot{\varepsilon}\varphi\alpha + \dot{\varepsilon}\varphi\beta} = \frac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\alpha \,.\, \dot{\varepsilon}\varphi\beta}.$$

§ 136. Α') ***Εὕρεσις τοῦ συνω.*** Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \dot{\eta}\mu^2\omega}$ διὰ $\dot{\eta}\mu\omega = \dfrac{2}{5}$ γίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \dfrac{4}{25}} = \sqrt{\dfrac{21}{25}} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Β') ***Εὕρεσις τῆς ἐφω.*** Γνωρίζομεν ὅτι $\dot{\varepsilon}\varphi\omega = \dfrac{\dot{\eta}\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \dot{\eta}\mu^2\omega}$. Ἑπομένως $\dot{\varepsilon}\varphi\omega = \dfrac{\dot{\eta}\mu\omega}{\sqrt{1 - \dot{\eta}\mu^2\omega}}$.

Αὕτη δὲ διὰ $\dot{\eta}\mu\omega = \dfrac{2}{5}$ γίνεται

$$\dot{\varepsilon}\varphi\omega = \frac{{}^2/_5}{\sqrt{1 - {}^4/_{25}}} = \frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}.$$

Σημ. Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκομεν ἀμέσως, ἂν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας $\dot{\eta}\mu\omega = \dfrac{2}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$.

Γ') ***Εὕρεσις τῆς σφω.*** Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\dot{\eta}\mu\omega} = \dfrac{\sqrt{1 - \dot{\eta}\mu^2\omega}}{\dot{\eta}\mu\omega}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sqrt{1 - {}^4/_{25}}}{{}^2/_5} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$.

Σημ. Εἰς τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο φθάνομεν ταχύτερον ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\sigma\varphi\omega = \dfrac{1}{\dot{\varepsilon}\varphi\omega}$ καὶ $\dot{\varepsilon}\varphi\,\omega = \dfrac{2}{\sqrt{21}}$.

§ 137. Α') ***Εὕρεσις τοῦ συνω.*** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \dot{\eta}\mu^2\omega}$ διὰ $\dot{\eta}\mu\omega = \dfrac{1}{2}$ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{1 - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Β') ***Εὕρεσις τῆς ἐφω.*** Εὐκόλως βλέπομεν ὅτι $\dot{\varepsilon}\varphi\omega = \dfrac{\dot{\eta}\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} =$

$$=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\ }}{3}.$$

Γ′) ***Εὕρεσις τῆς σφω.*** Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$,

$\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi\omega=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

§ 138. Α′) ***Εὕρεσις τοῦ ἡμω.*** Ἐπειδὴ $\eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega=0{,}5$ ἕπεται ὅτι $\eta\mu\omega=\sqrt{1-0{,}25}=\sqrt{0{,}75}=\frac{\sqrt{75}}{10}=$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Σημ. Ἐπειδὴ $0{,}5=\frac{1}{2}$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu\omega=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Β′) ***Εὕρεσις τῆς ἐφω.*** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{{}^1/_2}=\sqrt{3}$.

Σημ. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν ἀμέσως ὅτι $\varepsilon\varphi\omega=\frac{\sqrt{\ }}{2}:\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2=\sqrt{3}$.

Γ′) ***Εὕρεσις τῆς σφω.*** Ἡ ἰσότης $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$ διὰ $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}$ γίνεται $\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{\ }}{3}$.

§ 139. Α′) ***Εὕρεσις τοῦ ἡμω.*** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\eta\mu\omega=\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}$ διὰ $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{2}{3}$ εὑρίσκομεν $\eta\mu\omega=\sqrt{1-\frac{4}{9}}$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Β′) ***Εὕρεσις τῆς ἐφω.*** Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\eta\mu\omega=\frac{\sqrt{5}}{3}$,

$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{2}{3}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \frac{\sqrt{5}}{3} : \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Γ′) ***Εὕρεσις τῆς σφω***. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\dot{\epsilon}\varphi\omega}$ **καὶ**

$$\dot{\epsilon}\varphi\omega = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ εὑρίσκομεν ὅτι } \sigma\varphi\omega = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

§ 140. Α′) ***Εὕρεσις τοῦ ἡμω***. Γνωρίζομεν ὅτι $\dot{\eta}\mu\omega = \frac{\dot{\epsilon}\varphi\omega}{\sqrt{1+\dot{\epsilon}\varphi^2\omega}}$.

Αὕτη διὰ $\dot{\epsilon}\varphi\omega = 1$ γίνεται $\dot{\eta}\mu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Β′) ***Εὕρεσις τοῦ συνω.*** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\epsilon}\varphi^2\omega}}$

εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Γ′) ***Εὕρεσις τῆς σφω.*** Ἐκ τῆς $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\dot{\epsilon}\varphi\omega}$ ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi\omega = 1$.

Σημ. Ἐπειδὴ $\dot{\epsilon}\varphi\varphi = 1 = \dot{\epsilon}\varphi 45^\circ$, ἕπεται ὅτι $\omega = 45^\circ$ καὶ ἑπομένως

$$\dot{\eta}\mu\omega = \sigma\upsilon\nu\omega 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sigma\varphi\omega = \sigma\varphi 45^\circ = 1.$$

§ 141. Α′) ***Εὕρεσις τοῦ ἡμω.*** Ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$\dot{\eta}\mu\omega = \frac{\dot{\epsilon}\varphi\omega}{\sqrt{1+\dot{\epsilon}\varphi^2\omega}}$ διὰ $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \sqrt{3}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\dot{\eta}\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Β′) ***Εὕρεσις τοῦ συνω.*** Γνωρίζομεν ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\dot{\epsilon}\varphi^2\omega}}$ καὶ ἑπομένως $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{2}$.

Γ′) ***Εὕρεσις τῆς σφω.*** Ἐπειδὴ $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\dot{\epsilon}\varphi\omega}$, ἕπεται ὅτι

$$\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Σημ. Ἐπειδὴ $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \sqrt{3} = \dot{\epsilon}\varphi 60^\circ$, ἕπεται ὅτι $\omega = 60^\circ$ καὶ ἑπομένως $\dot{\eta}\mu\omega = \dot{\eta}\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 142. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\sigma\varphi\omega = 1$, $\dot{\epsilon}\varphi\omega = \frac{1}{\sigma\varphi\omega}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$\grave{\epsilon}\varphi\omega = 1$ καὶ προχωροῦμεν ὡς εἰς (§ 140).

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἐφαρμόσωμεν τοὺς τύπους

$$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+σφ^2ω}}, \quad συνω = \frac{σφω}{\sqrt{1+σφ^2ω}} \quad (1).$$

§ 143. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $σφω = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $ἐφω = \frac{1}{σφω}$

εὑρίσκομεν ὅτι $ἐφω = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Ἀπὸ δὲ τὰς προηγουμένας ἰσότητας (1) εὑρίσκομεν ὅτι

$$ἡμω = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{12}}{12} = \frac{3.2\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$συνω = \frac{\sqrt{3}}{3} : \sqrt{1+\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3} : \frac{\sqrt{12}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

§ 144. Γνωρίζομεν ὅτι $συν^2ω = \frac{1}{1+ἐφ^2ω}$, $ἡμ^2ω = \frac{ἐφ^2ω}{1+ἐφ^2ω}$

Ἐκ τούτων δὲ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$συν^2ω - ἡμ^2ω = \frac{1-ἐφ^2ω}{1+ἐφ^2ω}$$

§ 145. Ἐπειδὴ $συν^2α = \frac{1}{1+ἐφ^2α}$, $ἡμ^2β = \frac{ἐφ^2β}{1+ἐφ^2β}$,

ἔπεται ὅτι $συνα^2 - ἡμ^2β = \frac{1}{1+ἐφ^2α} - \frac{ἐφ^2β}{1+ἐφ^2β}$

$$= \frac{1+ἐφ^2β-ἐφ^2β-ἐφ^2α.ἐφ^2β}{(1+ἐφ^2α)(1+ἐφ^2β)} = \frac{1-ἐφ^2α.ἐφ^2β}{(1+ἐφ^2α)(1+ἐφ^2β)} \quad (1)$$

Ἀπὸ δὲ τὰς ἰσότητας $ἡμ^2α = \frac{ἐφ^2α}{1+ἐφ^2α}$, $ἡμ^2β = \frac{ἐφ^2β}{1+ἐφ^2β}$

εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμ^2α.ἡμ^2β = \frac{ἐφ^2α.ἐφ^2β}{(1+ἐφ^2α)(1+ἐφ^2β)}$. (2)

Ἂν δὲ διαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{συν^2α - ἡμ^2β}{ἡμ^2α.ἡμ^2β} = \frac{1-ἐφ^2α\, ἐφ^2β}{(1+ἐφ^2α)(1+ἐφ^2β)} \cdot \frac{(1+ἐφ^2α)(1+ἐφ^2β)}{ἐφ^2α\, .\, ἐφ^2β}$

$$= \frac{1-ἐφ^2α\, .\, ἐφ^2β}{ἐφ^2α\, .\, ἐφ^2β}.$$

ΤΡΙΓΩΝ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

§ 146. Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - 2\ \eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ διὰ $\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{2}$ γίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega = 1 - 2.\ \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot$ Ἑπομένως ἡ ἰσότης $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega}$ γίνεται $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Β' Τρόπος. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \sqrt{1 - \eta\mu^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$

εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Μετὰ δὲ ταῦτα εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\eta\mu\omega = 2\eta\mu\left(\frac{\omega}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\omega}{2}\right) = 2.\frac{1}{2}.\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1 = 2\ .\frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}.$$

147. Ἡ ἰσότης $\sigma\upsilon\nu\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right) - 1$ διὰ $\sigma\upsilon\nu\left.\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

γίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega = 2\ .\ \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{2}$.

Ἑπομένως $\eta\mu\omega = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

§ 148. Ἡ ἰσότης $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{2\ \varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right)}{1 - \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ διὰ $\varepsilon\varphi\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$

γίνεται $\varepsilon\varphi\omega = 2.\ \frac{\sqrt{3}}{3} : \left(1 - \frac{3}{9}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\ \frac{9}{6} = \sqrt{3}\cdot$

Ἑπομένως $\sigma\varphi\omega = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 149. Ἡ ἰσότης $σφω = \dfrac{σφ^2\left(\dfrac{ω}{2}\right) - 1}{2σφ\left(\dfrac{ω}{2}\right)}$ διὰ $σφ\left(\dfrac{ω}{2}\right) = \sqrt{3}$

γίνεται $σφω = \dfrac{2}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Ἑπομένως $ἐφω = \dfrac{1}{σφω} = \sqrt{3}$.

ΤΡΙΓΩΝ. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΜΟΡΦΗΣ

§ 150. Ἡ ἐξίσωσις $5\,ἡμx = 3$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $ἡμx = \dfrac{3}{5}$. Ἑπομένως $λογἡμx = λογ3 - λογ5 = \bar{1},77815$ καὶ

$$x = 36^\circ\ 52'\ 10'',6.$$

§ 151. Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν $2ἡμω + 1 = 2$ πρὸς ἡμω, εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμω = \dfrac{1}{2} = ἡμ30^\circ$ καὶ ἐπομένως $ω = 30^\circ$.

§ 152. Ἡ ἐξίσωσις $9\,συνx + 2 = 17\,συνx - 2$ εἶναι κατὰ σειρὰν ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$9συνx - 17συνx = -2 - 2$, $-8συνx = -4$, $συνx = \dfrac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ $συν60^\circ = \dfrac{1}{2}$, συμπεραίνομεν ὅτι $συνx = συν60^\circ$ καὶ ἐπομένως $x = 60^\circ$.

§ 153. Ἂν ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς ἐξισώσεως $6ἐφx - \dfrac{1}{2} = \dfrac{12ἐφx}{5} + 1$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $60ἐφx - 5 = 24ἐφx + 10$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $60ἐφx - 24ἐφx = 10 + 5$ ἢ $36ἐφx = 15$ καὶ ἐπομένως $ἐφx = \dfrac{5}{12}$. Ἀπὸ αὐτὴν δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $λογἐφx = \bar{1},61979$ καὶ $x = 22^\circ\ 37'\ 12''$.

§ 154. Ἂν ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς τῆς ἐξισώσεως $2ἐφx + \dfrac{ἐφx}{5} - 5 = \dfrac{ἐφx}{4} - \dfrac{1}{8}$, εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $80ἐφx + 8ἐφx - 200 = 10ἐφx - 5$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν τὰς ἐξισώσεις $80ἐφx + 8ἐφx - 10ἐφx = 200 - 5$, $78ἐφx = 19$

$\dot{\varepsilon}\varphi x = \frac{195}{78}$. Ἑπομένως λογἐφx=λογ 195—λογ 78.

$$\begin{array}{l} \lambda o\gamma 195 = 2{,}29003 \\ \lambda o\gamma\ 78 = 1{,}89209 \\ \hline \lambda o\gamma \dot{\varepsilon}\varphi x = 0{,}39794 \end{array}$$ ὅθεν $x = 68^\circ\ 11'\ 55''$.

§ 155. Λύομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $4\sigma\upsilon\nu^2 x - 4\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ πρὸς συνx καὶ εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{4} = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu 60^\circ.$$ Ἑπομένως $x = 60^\circ$.

§ 156. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $15\sigma\upsilon\nu^2 x - 22\sigma\upsilon\nu x + 8 = 0$ εὑρίσκομεν

$$\sigma\upsilon\nu x = \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{15} = \begin{cases} \frac{4}{5} = 0{,}8 \\ \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Πρέπει λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὰς ἐξισώσεις

$$\sigma\upsilon\nu x = 0{,}8 \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu x = \frac{2}{3}.$$

Ἐκ τῆς α′ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu x = \bar{1},90309$ καὶ $x = 36^\circ\ 52'\ 12''$.

Ἐκ δὲ τῆς β′ εὑρίσκομεν ὅτι $\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu x = \bar{1},82391$ καὶ $x = 48^\circ\ 11'\ 21''$.

§ 157. Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\frac{5\sigma\varphi x}{2} - \frac{\sigma\varphi x}{4} = \frac{9}{2}$ εὑρίσκομεν $\sigma\varphi x = 2$, ὅθεν $\lambda o\gamma\sigma\varphi x = 0{,}30103$ καὶ $x = 26^\circ\ 33'\ 54''$.

§ 158. Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $4\sigma\varphi^2 x - 20\sigma\varphi x + 25 = 0$ εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\varphi x = \frac{5}{2}$, ὅθεν $\lambda o\gamma\sigma\varphi x = 0{,}39794$ καὶ $x = 21^\circ\ 48'\ 4'',86$.

Σημ. Τὴν ἐξίσωσιν $\sigma\varphi x = \frac{5}{2}$ λύομεν καὶ ἂν παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $\dot{\varepsilon}\varphi x = \frac{2}{5} = 0{,}4$ κ.τ.λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ ΤΟΥ Α′ ΒΙΒΛΙΟΥ

§ 159. Ἡ γνωστὴ ἰσότης $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ διὰ $\beta = 1$ γίνεται

$$\frac{\mu}{180} = \frac{1}{200} \text{ ὅθεν } \mu = \frac{180}{200} = \left(\frac{9}{10}\right)^\circ = 60'.\frac{9}{10} = 54'.$$

§ 160. Ἡ ἰσότης $\frac{\mu}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha=1$ γίνεται

$\frac{\mu}{180}=\frac{1}{\pi}\cdot$ Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\mu=\frac{180^\circ}{3,14159}$

$=57^\circ\,27'\,45''$ περίπου.

§ 161. Ἐπειδὴ 1° ἔχει $60'$, ὅλη ἡ περιφέρεια ἔχει $60.360=21600'$. Ἑπομένως τὸ $1'$ τῆς μοίρας εἶναι $\frac{1}{21600}$ τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ 1 βαθμὸς ἔχει 100 λεπτά, ἡ περιφέρεια ἔχει $100.400=40000$ τοιαῦτα λεπτά. Ἑπομένως ἓν τοιοῦτον λεπτὸν εἶναι $\frac{1}{40000}$ τῆς περιφερείας. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{21600}>\frac{1}{40000}$, ἐννοοῦμεν ὅτι $1'$ μοίρας >1 λεπτοῦ βαθμοῦ.

§ 162. Ἂν $B=25^\circ\,20'$, θὰ εἶναι $\Gamma=90^\circ-25^\circ\,20'=64^\circ\,40'=\left(64\frac{2}{3}\right)^\circ$. Ἡ δὲ ἰσότης $\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}$ διὰ $\mu=64\frac{2}{3}$ γίνεται

$$\frac{64\frac{2}{3}}{180}=\frac{\beta}{200},\quad \text{ὅθεν } \beta=64\frac{2}{3}\cdot\frac{10}{9}=71^\gamma,85.$$

§ 163. Ἂν $B=\frac{\Gamma}{3}$, θὰ εἶναι $B+\Gamma=\Gamma+\frac{\Gamma}{3}=\frac{4\Gamma}{3}$. Ἐπειδὴ δὲ $B+\Gamma=90^\circ$, ἕπεται ὅτι $\frac{4\Gamma}{3}=90^\circ$ καὶ $\Gamma=\frac{270^\circ}{4}=67^\circ\,30'$. Ἑπομένως $\frac{270/_4}{180}=\frac{\alpha}{\pi}$ ὅθεν $\alpha=\frac{270\pi}{4.180}=\frac{3\pi}{8}$ ἀκτίνια. Ἡ γωνία Γ εἶναι λοιπὸν $\frac{3\pi}{8}$ ἀκτινίων· ἑπομένως $B=\frac{\Gamma}{3}=\frac{\pi}{8}$ ἀκτίνια.

§ 164. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}\cdot$ Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=3\beta$, ἕπεται $\eta\mu B=\frac{\beta}{3\beta}=\frac{1}{3}\cdot$ Μετὰ ταῦτα δὲ εὑρίσκομεν $\sigma\upsilon\nu B=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$ $=\frac{\sqrt{8}}{3}$ καὶ $\varepsilon\varphi B=\frac{1}{3}:\frac{\sqrt{8}}{3}=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{8}}{8}=\frac{2\sqrt{2}}{8}=\frac{\sqrt{2}}{4}$,

$$\sigma\varphi B=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Β' τρόπος. Ἐπειδὴ $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 9\beta^2 - \beta^2 = 8\beta^2$, ἔπεται ὅτι $\gamma = \beta\sqrt{8}$. Ἑπομένως $\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta\sqrt{8}}{3\beta} = \frac{\sqrt{8}}{3}$, $\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\beta\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\sigma\varphi B = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

§ 165. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha = \frac{2\pi}{5}$ εὑρίσκομεν $\frac{B}{180} = \frac{2}{5}$, ὅθεν $B = 180^\circ . \frac{2}{5} = 72^\circ$, $\Gamma = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. Ἀπὸ δὲ τοὺς πίνακας I καὶ III εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\eta\mu B = \eta\mu 72^\circ = \eta\mu(71^\circ\ 60') = 0{,}95106 = \sigma\upsilon\nu\Gamma$$
$$\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu 72^\circ = \sigma\upsilon\nu(71^\circ\ 60') = 0{,}30902 = \eta\mu\Gamma$$
$$\varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi 72^\circ = \varepsilon\varphi(71^\circ\ 60') = 3{,}07768 = \sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi B = \sigma\varphi 72^\circ = \sigma\varphi(71^\circ\ 60') = 0{,}32492 = \varepsilon\varphi\Gamma.$$

§ 166. Ἂν $B = 57^\gamma{,}5$, εὑρίσκομεν ὅτι $B = 57{,}5 . \frac{9}{10} = (51{,}75)^\circ = 51^\circ\ 45'$ καὶ $\Gamma = 90^\circ - 51^\circ\ 45' = 38^\circ\ 15'$. Ἑπομένως

$$\eta\mu B = \eta\mu(51^\circ\ 45'),\ \lambda o\gamma\eta\mu B = \bar{1}{,}89504$$

ὅθεν $\eta\mu B = 0{,}78530 = \sigma\upsilon\nu\Gamma$

$\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu B = \bar{1}{,}79176$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu B = 0{,}61910 = \eta\mu\Gamma$,

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi B = 0{,}10329$, ὅθεν $\varepsilon\varphi B = 1{,}2685 = \sigma\varphi\Gamma$,

$\lambda o\gamma\sigma\varphi B = \bar{1}{,}89671$, ὅθεν $\sigma\varphi B = 0{,}68833 = \varepsilon\varphi\Gamma$.

§ 167. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $4\eta\mu x - 1 = \eta\mu x + \frac{1}{2}$ πρὸς **ἡμx** εὑρίσκομεν $\eta\mu x = \frac{1}{2}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. **τρί**γωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν ΑΒ καὶ ὑποτείνουσαν ΒΓ=(ΑΒ).2. Οὕτω θὰ εἶναι $\eta\mu\Gamma = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{AB}{AB.2} = \frac{1}{2}$. Ἑπομένως **x=Γ.**

§ 168. Ἡ ἐξίσωσις $\varepsilon\varphi^2\omega - 4\varepsilon\varphi\omega + 4 = 0$ **ἀληθεύει διὰ ἐφω=2.** **Ἂν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευ**ρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ=ΑΒ . 2, θὰ εἶναι $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{2.AB}{AB} = 2$ **καὶ ἑπο**μένως **ω=Β.**

§ 169. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν $7συν^2φ-12συνφ+5=0$ εὑρί-

σκομεν $συνφ=\dfrac{6\pm\sqrt{36-35}}{7}=\left\langle\begin{matrix}1\\ \dfrac{5}{7}\end{matrix}\right.$.

Ἡ ἐξίσωσις $συνφ=1$ ἀληθεύει διὰ $φ=0$. Ἀπὸ δὲ τὴν ἐξίσω-σιν $συνφ=\dfrac{5}{7}$ ὁδηγούμενοι κατασκευάζομεν ὀρθ. τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν $ΑΒ=5τ$ καὶ ὑποτείνουσαν $ΒΓ=7τ$, ἂν τ εἶναι εὐθ. τμῆμα. Οὕτως εἶναι $συνΒ=\dfrac{5τ}{7τ}=\dfrac{5}{7}$ καὶ ἑπομένως $φ=Β$.

§ 170. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $συν(90^\circ-x)=ἡμx$, $συν(90^\circ-x)=$ $=0{,}456$ ἐννοοῦμεν ὅτι $ἡμx=0{,}456=\dfrac{456}{1000}=\dfrac{4{,}56}{10}$. Πρέπει λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν $ΑΒ=4{,}56$ ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν $ΒΓ=10$ ἑκατ. Οὕτω θὰ εἶναι

$$ἡμΓ=\frac{ΑΒ}{ΒΓ}=\frac{4{,}56}{10}=0{,}456.\ \text{Ἑπομένως}\ x=Γ.$$

§ 171. Ἐπειδὴ $σφ(90^\circ-x)=ἐφx$ καὶ $σφ(90^\circ-x)=2{,}50$, ἕπεται ὅτι $ἐφx=2{,}5=\dfrac{25}{10}=\dfrac{5}{2}$. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ καθέτους πλευρὰς $ΑΒ=5τ$ καὶ $ΑΓ=2τ$. Οὕτω δὲ θὰ εἶναι $ἐφΓ=\dfrac{ΑΒ}{ΑΓ}=\dfrac{5τ}{2τ}=\dfrac{5}{2}$. Ἑπομένως $x=Γ$.

§ 172. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $συν(90^\circ-x)=\dfrac{3}{5}$, ἕπεται ὅτι

$$ἡμx=\frac{3}{5}.\ \text{Ἑπομένως}\ συνx=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\frac{4}{5},$$

$$ἐφx=\frac{3}{5}:\frac{4}{5}=\frac{3}{4}\ \text{καὶ}\ σφx=\frac{1}{ἐφx}=\frac{4}{3}.$$

§ 173. $\dfrac{1}{ἡμ^2ω}+\dfrac{1}{συν^2ω}=\dfrac{συν^2ω+ἡμ^2ω}{ἡμ^2ω\,.\,συν^2ω}=\dfrac{1}{ἡμ^2ω\,.\,συν^2ω}$.

§ 174. Ἐπειδὴ $Β+Γ=90^\circ$, ἕπεται ὅτι $συνΓ=ἡμΒ$ καὶ $ἡμΓ=συνΒ$. Ἑπομένως $\dfrac{ἡμΒ+συνΓ}{συνΒ+ἡμΓ}=\dfrac{2ἡμΒ}{2συνΒ}=ἐφΒ$.

§ 175. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi B = \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B}$, ἕπεται ὅτι

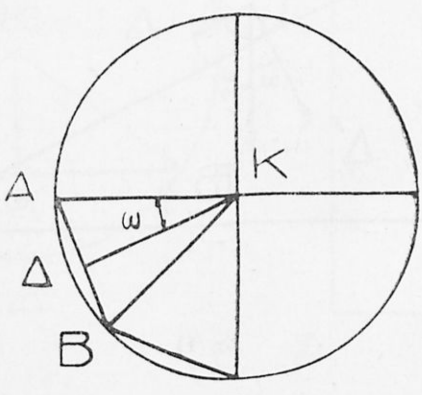
$$\frac{1}{\acute{\eta}\mu B} + \sigma\varphi B = \frac{1}{\acute{\eta}\mu B} + \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ καὶ $\acute{\eta}\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha}$, ἡ (1) γίνεται

$$\frac{1}{\acute{\eta}\mu B} + \sigma\varphi B = \frac{1+\dfrac{\gamma}{\alpha}}{\dfrac{\beta}{\alpha}} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}.$$

Β΄. Τρόπος. Ἂν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι $\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B$, $\beta = \alpha\acute{\eta}\mu B$, ἐννοοῦμεν ὅτι $\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta} = \dfrac{\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu B}{\alpha\acute{\eta}\mu B} = \dfrac{\alpha(1+\sigma\upsilon\nu B)}{\alpha\acute{\eta}\mu B} = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B} =$

$$= \frac{1}{\acute{\eta}\mu B} + \sigma\varphi B.$$



Σχ. 10

§ 176. Ἐπειδὴ $\omega+\varphi=90^\circ$, εἶναι $\acute{\eta}\mu\varphi=\sigma\upsilon\nu\omega$. Ἑπομένως $\acute{\eta}\mu^2\omega+\acute{\eta}\mu^2\varphi=\acute{\eta}\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$.

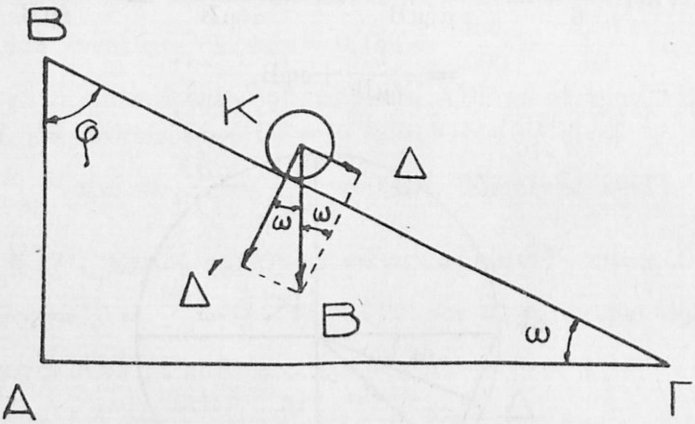
§ 177. Ἐπειδὴ $B+\Gamma=90$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu\Gamma=\acute{\eta}\mu B$ καὶ ἑπομένως

$$\acute{\eta}\mu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma=2\acute{\eta}\mu B=\frac{2\beta}{\alpha}.$$

§ 178. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $ἡμB = \frac{\beta}{\alpha}$, $ἡμΓ = \frac{\gamma}{\alpha}$ ἕπεται ὅτι

$$ἡμ^2B - ἡμ^2Γ = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}.$$

§ 179. Ἂν ΑΒ (σχ. 10) εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ὀκταγώνου καὶ ΚΔ τὸ ἀπόστημα αὐτοῦ, θὰ εἶναι (ΑΔ) = 4 μέτρα καὶ $\omega = \frac{\widehat{AKB}}{2} = \frac{4ὀρ.}{8} : 2 = \frac{1}{4}$ ὀρθῆς = 22° 30′. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΔ βλέπομεν ὅτι (ΑΔ)=(ΚΑ)ἡμω=Rἡμω καὶ ἑπομένως $R = \frac{(ΑΔ)}{ἡμω} = \frac{4}{ἡμ(22^o30')}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι



Σχ. 11

λογR=λογ4—λογἡμ(22°30′)=1,01922 καὶ R=10,4224 μέτρα.

§ 180. Ἂν ΑΒ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, θὰ εἶναι $2\omega = \frac{4}{15}$ ὀρθ.=90°. $\frac{4}{15}$ =24° καὶ ω = 12°. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΔ εὑρίσκομεν ὅτι (ΑΔ)=0,80ἡμ12°=0,16633 καὶ

(ΑΒ)=2(ΑΔ)=0,33266 μέτρα.

§ 181. Ἀναλύομεν τὸ βάρος Β εἰς τὰς συνιστώσας Δ καὶ Δ′, τὴν α′ παράλληλον πρὸς τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, τὴν δὲ β′ κάθετον ἐπ' αὐτὸ (σχ. 11).

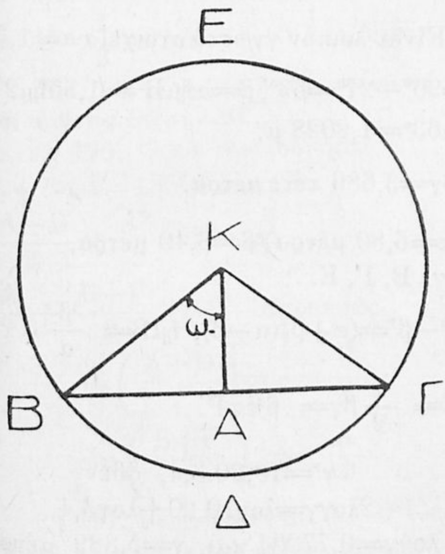
Ἐκ τούτων ἡ Δ κινεῖ τὸ σῶμα ἐπὶ τοῦ κεκλιμένου ἐπιπέδου, ἡ δὲ Δ' πιέζει αὐτό. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΒΔ βλέπομεν ὅτι

$$\Delta = \text{Β}\text{ἡμ}\ \omega = 25\text{ἡμ}\,(24^\circ\,40') = 10{,}433 \text{ χιλιόγρ.}$$

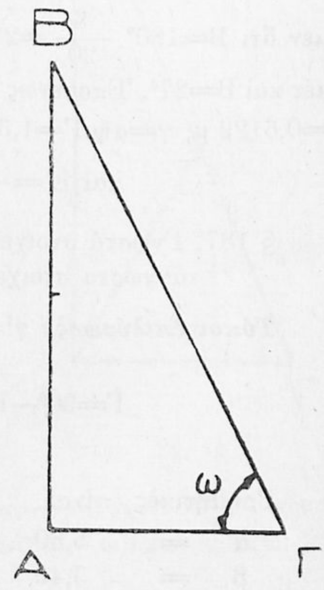
$$\text{καὶ } \Delta' = \text{Β}\text{συν}\omega = 25\text{συν}(24^\circ\,40') = 22{,}7184 \text{ χιλιόγρ.}$$

§ 182. Ἡ κινοῦσα δύναμις εἶναι $\Delta = \text{Β}\text{ἡμ}\omega = 20\text{ἡμ}\omega$ χιλγρ. καὶ τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι 0,85 μέτ. Ἂν δὲ Ε εἶναι τὸ παραχθὲν ἔργον, θὰ εἶναι $\text{Ε} = 0{,}85.20\text{ἡμ}(20^\circ 30' 40'') = 1{,}6818$ χιλιογραμμόμετ.

§ 183. Ἔστω $(\widehat{\text{ΒΔΓ}}) = 56^\circ 35' 18''$, (ΒΓ)=0,68 μέτ, καὶ ἑπομένως (ΑΒ)=0,34 μέτ, $\omega = 28^\circ\, 17'\, 39''$ (σχ. 12). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώ-



Σχ. 12



Σχ. 13

νου ΚΑΒ βλέπομεν ὅτι (ΚΑ)=(ΑΒ)σφω=0,34σφω, ὅθεν εὑρίσκομεν (ΚΑ)=0,6316 μέτρα.

Ἐπειδὴ $\text{ἡμ}\omega = \dfrac{\text{ΒΑ}}{\text{ΚΒ}} = \dfrac{0{,}34}{\text{R}}$, ἕπεται ὅτι $\text{R} = \dfrac{0{,}34}{\text{ἡμ}\omega} = 0{,}7175\mu.$

§ 184. Ἂν ΑΒ=ΑΓ.2 (σχ. 13), θὰ εἶναι $\text{ΑΒ}^2 + \dfrac{\text{ΑΒ}^2}{4} = (\text{ΒΓ})^2$

ὅθεν $(\text{ΒΓ})^2 = \dfrac{5(\text{ΑΒ})^2}{4}$, $(\text{ΒΓ}) = \dfrac{(\text{ΑΒ})\sqrt{5}}{2}$, καὶ $\text{ἡμ}\omega = \dfrac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} =$

$\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0,4\sqrt{5}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ω= 63°26′.

§ 185. Ἂν $AB = \frac{A\Gamma}{2}$, θὰ εἶναι $A\Gamma = AB.2$ καὶ $AB^2 + 4AB^2 = B\Gamma^2$, ὅθεν $5AB^2 = B\Gamma^2$, $B\Gamma = AB\sqrt{5}$. Ἑπομένως ἡμω$= \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ καὶ ἐπιτάχυν. $\gamma = 981.\frac{\sqrt{5}}{5} = 438,71$ ἑκατοστόμετρα.

§ 186. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha = \frac{3\pi}{20}$ εὑρίσκομεν ὅτι $B = 180^\circ.\frac{3}{20} = 27^\circ$. Εἶναι λοιπὸν γνωστὰ στοιχεῖα α=1,35 μέτ καὶ B=27°. Ἑπομένως $\Gamma = 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$, β=αἡμB = 1,35ἡμ27° =0,6129 μ, γ=αἡμΓ=1,35ἡμ63°=1,2028 μ.

καὶ $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = 3,686$ τετ. μέτρα.

§ 187. Γνωστὰ στοιχεῖα α=6,80 μέτρα. β=3,40 μέτρα, ἄγνωστα στοιχεῖα γ, B, Γ, E.

Τύποι ἐπιλύσεως : $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$, ἡμB$= \frac{\beta}{\alpha}$,

$\Gamma = 90^\circ - B$, $E = \frac{1}{2}\beta\gamma = \beta^2$ἐφΓ.

Βοηθητικὸς πίναξ

α	=	6,80
β	=	3,40
α+β	=	10,20
α−β	=	3,40

$\gamma^2 = 10,20.3,4$, ὅθεν 2λογγ=λογ10,20+λογ3,4, λογγ=0,77004 καὶ γ=5,889 μέτρα. Ἔπειτα εὑρίσκομεν ὅτι ἡμB$= \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3,4}{6,8} = \frac{1}{2}$ καὶ ἑπομένως B=30°, Γ=60°,

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $2E = \beta^2$ἐφΓ εὑρίσκομεν ὅτι

λογ(2E)=2λογβ+λογἐφΓ=1,30152, 2E=20,0227

καὶ E=10,0113 τετ. μέτρα.

§ 188. Ἡ συνθήκη A=2Δσυν $\frac{\omega}{2}$ διὰ $A = 30\sqrt{2}$ χιλ.καὶ ω=90° γίνεται $30\sqrt{2} = 2.\Delta.$συν$45^\circ = \Delta\sqrt{2}$ ὅθεν Δ=30 χιλιόγρ.

§ 189. Ἔστω (ΓΔ)=0,30 καὶ (ΒΔ)=0,4 (σχ. 14). Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι $\alpha=0,3+0,4=0,7$, $(\text{ΑΔ})^2=0,3.0,4$ καὶ $(\text{ΑΔ})=\sqrt{0,12}$.

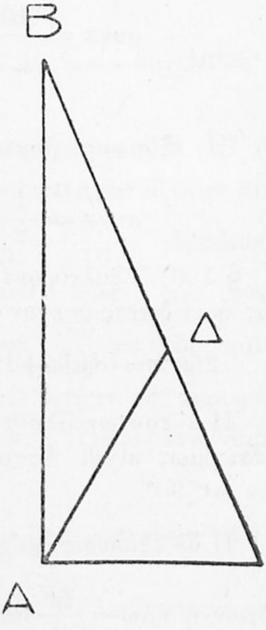
Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ βλέπομεν ὅτι $\text{εφΓ}=\dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΔΓ}}=\dfrac{\sqrt{0,12}}{0,3}$

$$=\sqrt{\frac{0,12}{0,09}}=\sqrt{\frac{12}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $\Gamma=49^0\,6'\,24''$, $B=40^0\,53'\,36''$ καὶ συνεχίζομεν τὴν ἐπίλυσιν διὰ τῶν ἰσοτήτων $\beta=\alpha\,\text{ημ}B=0,7\,\text{ημ}(40^0\,53'\,36'')$, $\gamma=0,7\,\text{ημ}(49^0\,6'24'')$

καὶ $E=\dfrac{1}{2}\,\alpha.(\text{ΑΔ})=\dfrac{1}{2}\,0,7\,.\sqrt{0,12}$.

ΣΗΜ. Εἰς τὸ σχ. 14 ἡ ΑΔ πρέπει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.



Σχ. 14

§ 190. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $A+B+\Gamma=180^0$ ἕπεται ὅτι

$$\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=90^0 \text{ καὶ}$$

$$\frac{A}{2}+\frac{B+\Gamma}{2}=90^0. \text{ Ἐπομένως}$$

$$\text{ημ}\left(\frac{A+B}{2}\right)=\text{συν}\,\frac{\Gamma}{2},$$

$$\text{εφ}\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)=\text{σφ}\,\frac{A}{2}.$$

§ 191. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ημ}(90^0-\omega)=\text{συν}\omega$ καὶ $\text{συν}(90^0-\omega)=\text{ημ}\omega$. Ἐπομένως $\text{ημ}(90^0-\omega)\text{συν}\omega=\text{συν}^2\omega$, $\text{συν}(90^0-\omega)\text{ημ}\omega=\text{ημ}^2\omega$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι:

$$\text{ημ}(90-\omega)\text{συν}\omega+\text{συν}(90^0-\omega)\text{ημ}\omega=\text{συν}^2\omega+\text{ημ}^2\omega=1.$$

Εἶναι λοιπὸν τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο ἀνεξάρτητον τῆς ω.

§ 192. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{εφ}(90^0-\omega)=\text{σφ}\omega$, $\text{σφ}(90^0-\omega)=\text{εφ}\omega$. Ἐπομένως $\text{εφ}(90^0-\omega)\,.\,\text{εφ}\omega=\text{σφ}\omega\,.\,\text{εφ}\omega=1$

καὶ $\text{σφ}(90^0-\omega)\,.\,\text{σφ}\omega=\text{εφ}\omega\,.\,\text{σφ}\omega=1$

§ 193. Ἀπαλείφομεν τὸν παρονομαστὴν κ.τ.λ. καὶ εὑρίσκομεν $\text{εφ}x=1=\text{εφ}45^0$. Ἄρα $x=45^0$.

§ 194. Ἀπαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν κ.τ.λ. καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{σφ}^2x-8\text{σφ}x+16=0$, ὅθεν $\text{σφ}x=4$. Αὕτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν ἐφx $= \frac{1}{4} = 0,25$ ὅθεν x$=14^\circ\, 2'\, 10''$.

§ 195. Ἀναπτύσσομεν τὸ α΄ μέλος κ.τ.λ. καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν 4συν²x—20συνx+9=0. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{συν}x = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{4} = \frac{10 \pm 8}{4} = \left\langle \begin{matrix} \frac{9}{2} \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right.$$

Ἡ ἐξίσωσις συνx $= \frac{9}{2}$ οὐδεμίαν ρίζαν ἔχει. Ἡ δὲ

$$\text{συν}x = \frac{1}{2} = \text{συν}60^\circ \text{ ἀληθεύει διὰ } x = 60^\circ.$$

§ 196. Ἐξαλείφοντες τὸν παρονομαστὴν κ.τ.λ. εὑρίσκομεν τὴν πρὸς ἡμω διτετράγωνον ἐξίσωσιν

$$2\text{ἡμ}^4\omega - 3\text{ἡμ}^2\omega + 1 = 0, \text{ ἐξ ἧς } \text{ἡμ}^2\omega = 1 \text{ καὶ } \text{ἡμ}^2\omega = \frac{2}{4}.$$

Ἡ α΄ τούτων ἀληθεύει διὰ ἡμω$=\pm 1$, ὅθεν ω$=90^\circ$ καὶ ω$=270^\circ$. Αὗται ὅμως εἶναι ἀπαράδεκτοι, διότι ἀντίκεινται εἰς τὸν περιορισμὸν ω$<90^\circ$.

Ἡ δὲ ἐξίσωσις ἡμ²ω $= \frac{2}{4}$ ἀληθεύει διὰ ἡμω $= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Τούτων ἡ ἡμω $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἀληθεύει διὰ ω$=45^\circ$· ἡ δὲ ἄλλη δὲν ἀληθεύει διὰ $0^\circ < \omega < 90^\circ$.

ΤΡΙΓΩΝ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΜΒΛΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

§ 197. Ἐπειδὴ $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι ἡμ$120^\circ$=ἡμ$60^\circ$= $= \frac{\sqrt{3}}{2}$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι συν120°=—συν60°=$-\frac{1}{2}$.

§ 198. Ἐπειδὴ $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι

ἡμ135°=ἡμ45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$, συν135° = — συν45°= $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 199. Α΄) Ἐπειδὴ $180^\circ - 95^\circ\, 20' = 84^\circ\, 40'$, ἕπεται ὅτι

ἡμ$(95^\circ\, 20')$=ἡμ$(84^\circ\, 40')$=0,99567 (Πίναξ I).

Β′) Ἐπειδὴ $180^\circ - 117^\circ 30' 40'' = 62^\circ 29' 20''$, ἕπεται ὅτι συν$(117^\circ 30' 40'') = -$συν $(62^\circ 29' 20'')$. Κατὰ μίαν δὲ τῶν γνωστῶν μεθόδων εὑρίσκομεν ὅτι συν$(62^\circ 29' 20'') = 0,46192$. Ἑπομένως συν$(117^\circ 30' 40'') = -0,46192$.

§ 200. Α′) Εὑρίσκομεν ὅτι $180^\circ - 125^\circ 40' = 54^\circ 20'$ καὶ ἑπομένως συν$(125^\circ 40') = -$συν$(54^\circ 20') = -0,58307$.

Β′). Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι συν$(163^\circ 15' 40'') = -$συν$(16^\circ 44' 20'')$ $= -0,95764$.

§ 201. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡμ$(180^\circ - ω) =$ ἡμω $= 0,55$ καὶ ὅτι ἡ γωνία $180^\circ - ω$ εἶναι ὀξεῖα καὶ γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν αὐτήν. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι $0,55 = \frac{55}{100} = \frac{5,5}{10}$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὀρθ. ΑΒΓ μὲ πλευρὰν (ΑΓ)=5,5 ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ)=10 ἑκατ. Οὕτως εἶναι ἡμΒ= $\frac{5,5}{10} = 0,55$ καὶ $B = 180^\circ - ω$. Ἂν δὲ προεκτείνωμεν τὴν ΑΒ πέραν τῆς κορυφῆς Β, σχηματίζομεν τὴν γωνίαν ΓΒΔ, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἀμβλεῖα γωνία ω.

§ 202. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα συνφ $= -\frac{3}{5}$ ἕπεται ὅτι συν$(180^\circ - φ)$ $= \frac{3}{5}$ καὶ ὅτι ἡ γωνία $180^\circ - φ$ εἶναι ὀξεῖα. Ἂν λοιπὸν κατασκευάσωμεν ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΓ μὲ πλευρὰν (ΑΒ=3 ἑκατ. καὶ ὑποτείνουσαν (ΒΓ)=5 ἑκατ., θὰ εἶναι συνΒ= $\frac{3}{5}$ καὶ ἑπομένως $180^\circ - φ = B$, ὅθεν $φ = 180^\circ - B$, ἥτις εὐκόλως κατασκευάζεται.

§ 203. Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς κλπ. καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν ἡμx $= \frac{1}{6}$, ὅθεν $x = 9^\circ 35' 38'',9$ καὶ $180^\circ - x =$ $170^\circ 24' 21'',1$.

§ 204. Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς κλπ. καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν συνx $= -\frac{1}{2}$, ὅθεν $x = 120^\circ$.

§ 205. Ἐπειδὴ $135^\circ + 45^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι
ἐφ$135^\circ = -$ἐφ$45^\circ = -1$, σφ$135^\circ = -$σφ$45^\circ = -1$.

§ 206. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\varepsilon\varphi 120^\circ = -\varepsilon\varphi 60^\circ = -\sqrt{3}$.

$$\sigma\varphi 120^\circ = -\sigma\varphi 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot$$

§ 207. Α′) Ἐπειδὴ $180^\circ - 135^\circ 35' = 44^\circ 25'$, ἕπεται ὅτι

$$\varepsilon\varphi(135^\circ 35') = -\varepsilon\varphi(44^\circ 25') = -0{,}97985$$

Β′) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\varepsilon\varphi(98^\circ 12' 30'') = -\varepsilon\varphi(81^\circ 47' 30'') = -6{,}93233.$$

§ 208. Α′) Εὑρίσκομεν ὅτι $180^\circ - 154^\circ 20' = 25^\circ 40'$ καὶ ἑπομένως

$$\sigma\varphi(154^\circ 20') = -\sigma\varphi(25^\circ 40') = -2{,}08094.$$

Β′) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\sigma\varphi(162^\circ 20' 45'') = -\sigma\varphi(17^\circ 39' 15'') = -3{,}14211$$

§ 209. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\varepsilon\varphi x = -1{,}50$ ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi(180^\circ - x) = 1{,}50 = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}\cdot$ Ἐπειδὴ δὲ $x > 90^\circ$, ἕπεται ὅτι $180 - x < 90^\circ$ καὶ γνωρίζομεν νὰ κατασκευάζωμεν ὀξεῖαν γωνίαν Β, τοιαύτην ὥστε νὰ εἶναι $\varepsilon\varphi B = \frac{3}{2}\cdot$ Μετὰ ταῦτα ἀρκεῖ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν παραπληρωματικὴν τῆς Β.

§ 210. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $\sigma\varphi(180^\circ - \omega) = 0{,}85$ καὶ ἐπειδὴ $\omega > 90^\circ$, θὰ εἶναι $180^\circ - \omega = B < 90^\circ$. Κατασκευάζομεν λοιπὸν τὴν Β καὶ εἶτα τὴν παραπληρωματικήν της.

§ 211. Ἐξαλείφομεν τοὺς παρονομαστὰς κ.τ.λ. καὶ καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\varepsilon\varphi x = -1$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi(180^\circ - x) = 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ$ καὶ ἑπομένως $180^\circ - x = 45^\circ$, ὅθεν $x = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

§ 212. Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, εὑρίσκομεν $\sigma\varphi x = -0{,}4$ ἑπομένως $\sigma\varphi(180^\circ - x) = 0{,}4 = \sigma\varphi(68^\circ\ 11'\ 55)$. Ἄρα

$$180^\circ - x = 68^\circ\ 11'\ 55'' \text{ καὶ } x = 111^\circ\ 48'\ 5''.$$

§ 213. Ἐπειδὴ $90^\circ < x < 180^\circ$, οἱ ζητούμενοι τριγ. ἀριθμοὶ εἶναι ἀρνητικοί. Οὕτω $\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{1} - \eta\mu^2 x = -\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{-\sqrt{1 - \eta\mu^2 x}} = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1,$$

$$\sigma\varphi x = \frac{1}{\varepsilon\varphi x} = -1.$$

§ 214. Ἐπειδὴ $90^\circ < \varphi < 180^\circ$, θὰ εἶναι $\eta\mu\varphi > 0$, $\varepsilon\varphi\varphi < 0$ καὶ $\sigma\varphi\varphi < 0$. Οὕτως εἶναι $\eta\mu\varphi = \sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\varphi}}{\sigma\upsilon\nu\varphi} = \frac{1}{2} : \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\sigma\varphi\varphi = 1 : \varepsilon\varphi\varphi = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

§ 215. Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi y = -1$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi(180^\circ - y) = 1 = \varepsilon\varphi 45^\circ$. Ἑπομένως $180^\circ - y = 45^\circ$, ὅθεν $y = 135^\circ$.. Εἶναι λοιπὸν $\eta\mu y = \eta\mu 135^\circ$ $= \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu y = \sigma\upsilon\nu 135^\circ = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\varphi y = \sigma\varphi 135 = -\sigma\varphi 45^\circ = -1$.

Β′ τρόπος. Δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν ἀμέσως τοὺς τύπους

$$\eta\mu y = \frac{\varepsilon\varphi y}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 y}}, \quad \sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 y}}, \quad \sigma\varphi y = \frac{1}{\varepsilon\varphi y}.$$

§ 216. Ἐκ τῆς $\sigma\varphi\omega = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\varepsilon\varphi\omega = -\sqrt{3}$. Ἔπειτα δὲ ἐφαρμόζομεν τοὺς προηγουμένους τύπους καὶ εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{1}{2}.$$

ΣΧΕΣΕΙΣ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 217. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ΑΒΔ βλέπομεν ὅτι $(\mathrm{B\Delta}) = (\mathrm{AB})\eta\mu\mathrm{A}. = \gamma\eta\mu\mathrm{A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\gamma = 2\mathrm{R}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι

$$(\mathrm{B\Delta}) = 2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\Gamma.$$

§ 218. Γνωρίζομεν ὅτι $\mathrm{E} = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu\mathrm{A}$. Ἐπειδὴ δὲ $\beta = 2\mathrm{R}\eta\mu\mathrm{B}$, $\gamma = 2\mathrm{R}\eta\mu\Gamma$, ἕπεται ὅτι $\mathrm{E} = 2\mathrm{R}^2\eta\mu\mathrm{A}\eta\mu\mathrm{B}\eta\mu\Gamma$.

§ 219. Ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = 2\mathrm{R}$ ἕπεται ὅτι $\eta\mu\mathrm{A} = \frac{\alpha}{2\mathrm{R}}$. Ὁμοίως $\eta\mu\mathrm{B} = \frac{\beta}{2\mathrm{R}}$ καὶ $\eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{2\mathrm{R}}$. Ἡ ἰσότης λοιπὸν

$ἡμ^2 Α = ἡμ^2 Β + ἡμ^2 Γ$ γίνεται $\frac{\alpha^2}{4R^2} = \frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2}$, ὅθεν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

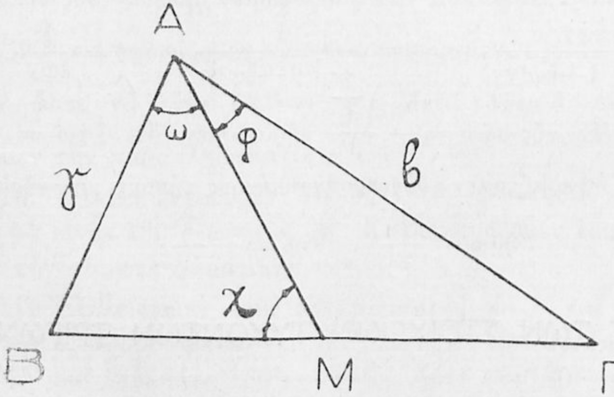
Τὸ τρίγωνον λοιπὸν εἶναι ὀρθογώνιον.

§ 220. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma συνΒ$ ἕπεται ὅτι $\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2 = 2\alpha\gamma συνΒ$. Ἀπὸ δὲ τὴν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma συνΑ$ ἕπεται ὅτι $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 2\beta\gamma\, συνΑ$. Ἐκ τούτων διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = \frac{2\alpha\gamma συνΒ}{2\beta\gamma συνΑ} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{συνΒ}{συνΑ}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{ἡμΑ}{ἡμΒ}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = \frac{ἡμΑ}{ἡμΒ} \cdot \frac{συν\, Β}{συν\, Α} = \frac{ἡμ\, Α}{συν\, Α} \cdot \frac{συν\, Β}{ἡμ\, Β} = ἐφ\, Α.\ σφ\, Β = \frac{ἐφ\, Α}{ἐφ\, Β}.$$



Σχ. 15.

§ 221. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΜ βλέπομεν ὅτι $\frac{\gamma}{ἡμx} = \frac{ΒΜ}{ἡμω}$.

Ἐκ δὲ τοῦ ΑΜΓ βλέπομεν ὅτι $\frac{\beta}{ἡμ(180^0 - x)} = \frac{ΜΓ}{ἡμφ}$ ἢ

$$\frac{\beta}{ἡμx} = \frac{ΒΜ}{ἡμφ}.$$

Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι $\gamma ἡμω = (ΒΜ) ἡμx$, $\beta ἡμφ = (ΒΜ) ἡμx$. Ἑπομένως $\gamma ἡμω = \beta ἡμφ$ καὶ $\gamma ἡμω - \beta ἡμφ = 0$.

§ 222. Κατὰ τὴν ἰσότητα $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\text{ἐφ}\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right)}$ εἶναι

$$\frac{37-13}{37+13}=\frac{\text{ἐφ}(24^0\ 13'\ 40'')}{\text{σφ}\ \frac{\Gamma}{2}},\ \text{ὅθεν}$$

$$\text{σφ}\ \frac{\Gamma}{2}=\frac{50}{24}\cdot\text{ἐφ}(24^0\ 13'\ 40'').$$

Ἐκ ταύτης κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν $\Gamma=93^0\ 41'\ 37'',6$.

ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 223. Γνωστὰ στοιχεῖα ἄγνωστα στοιχεῖα

$\alpha=5,\ B=25^0\ 20',\ \Gamma=32^0\ 53'$ $A,\ \beta,\ \gamma,\ E.$

Τύποι ἐπιλύσεως: $A=180^0-(B+\Gamma)$, $\beta=\frac{\alpha\text{ἡμ}\,B}{\text{ἡμ}A}$,

$$\gamma=\frac{\alpha\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A},\quad E=\frac{\alpha^2\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma}{2\text{ἡμ}A}.$$

Ὑπολογισμὸς τῆς Α.

$B=25^0\ 20'$	$180^0=179^0\ 60'$
$\Gamma=32^0\ 53'$	$B+\Gamma=\ 58^0\ 13'$
$B+\Gamma=58^0\ 13'$	$A=121^0\ 47'$

Ὑπολογισμὸς τῶν β καὶ γ. Ἐκ τῆς $\beta=\frac{\alpha\text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A}$, εὑρίσκομεν

$$\text{λογ}\beta=\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}B-\text{λογἡμ}A$$

$\text{λογ}\alpha=0{,}69897$	ἄθρ.$=0{,}33030$	
$\text{λογἡμ}B=\bar{1}{,}63133$	$\text{λογἡμ}A=\bar{1}{,}92944$	
ἄθρ.$=0{,}33030$	$\text{λογ}\beta=0{,}40086$,	$\beta=2{,}51688$ μέτ

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\gamma=\frac{\alpha\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ εὑρίσκομεν $\gamma=3{,}1935$ μέτρα.

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε. Ἐκ τῆς $2E=\frac{\alpha^2\text{ἡμ}B\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$ εὑρίσκομεν

$\text{λογ}(2E)=2\text{λογ}\alpha+\text{λογἡμ}B+\text{λογἡμ}\Gamma-\text{λογἡμ}\Gamma=0{,}83457$ ὅθεν

$2E=6{,}83233$ καὶ $E=3{,}41616$ τετ. μέτρα.

§ 224. Γνωστὰ στοιχεῖα

$\alpha=265{,}6$, $B=70^\circ\ 15'\ 20''$,

$\Gamma=48^\circ\ 44'\ 40''$,

ἄγνωστα Α, β, γ, Ε.

Διὰ τῶν προηγουμένων τύπων ἐπιλύσεως εὑρίσκομεν $A = 61$ λογβ$=2{,}45610$, λογγ$=2{,}35850$, ὅθεν $\beta=285{,}827$ μέτρα, $\gamma=228{,}2947$ μέτρα.

Τέλος $E=28535{,}71$ τετ. μέτ.

§ 225. Γνωστὰ $\beta=2667{,}65$, $A=58^\circ\ 15'\ 30''$. $B=20^\circ\ 20'\ 45''$

Ἄγνωστα Γ, α, γ, Ε.

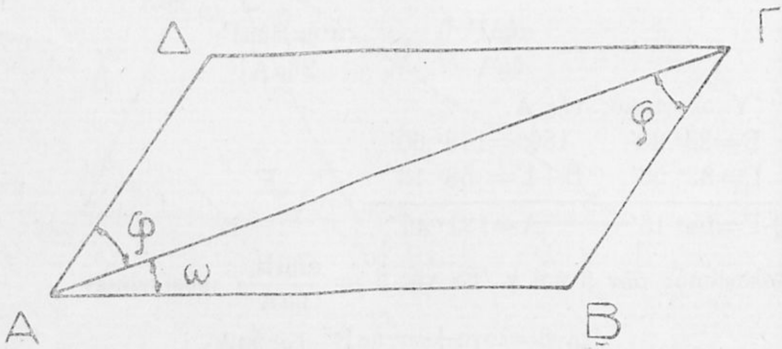
Ἐκ τῆς $\Gamma=180^\circ-(A+B)$ εὑρίσκομεν $\Gamma=101^\circ\ 23'\ 45''$.

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\alpha=\dfrac{\beta\ \text{ἡμ}A}{\text{ἡμ}B}$, $\gamma=\dfrac{\beta\ \text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν

$\alpha=6525{,}143$ μέτρα, $\gamma=7521{,}4$ μέτρα

Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $2E=\dfrac{\beta^2\text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}B}$ εὑρίσκομεν

$E=8531600$ τετ. μέτρα.



Σχ. 16.

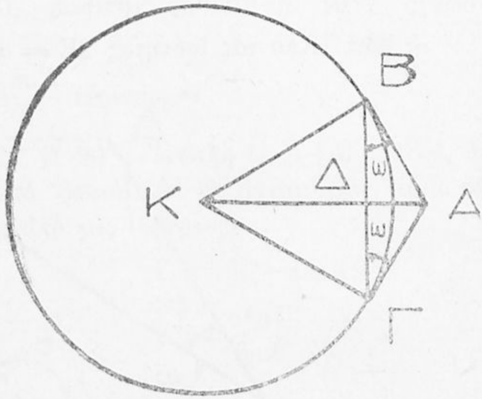
§ 226. Ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 16) ἐκ τῶν στοιχεί(ων) (ΑΓ)$=8$, $\omega=23^\circ\ 15'$, $\varphi=50^\circ\ 25'$, ὡς ἑξῆς. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅ(τι) $B=180^\circ-(\omega+\varphi)=106^\circ\ 20'$. Ἔπειτα θέτοντες (ΑΒ)$=\gamma$, (ΒΓ)$=$ καὶ (ΑΓ)$=\beta=8$ βλέπομεν ὅτι

$$\frac{\gamma}{\text{ἡμ}\varphi}=\frac{\alpha}{\text{ἡμ}\omega}=\frac{8}{\text{ἡμ}B},\quad \text{ὅθεν } \gamma=\frac{8\ \text{ἡμ}\varphi}{\text{ἡμ}B}=\frac{8\ \text{ἡμ}\varphi}{\text{ἡμ}(\varphi+\omega)}=$$

$6{,}42483$ μέτ, $\alpha=\dfrac{8\text{ἡμ}\omega}{\text{ἡμ}(\varphi+\omega)}=3{,}29077$ μέτ.

Τέλος εὑρίσκομεν ὅτι
$(ΑΒΓΔ) = 2(ΑΒΓ) = (ΑΒ).(ΒΓ)$ ἡμ$Β = αγ$ἡμ$(ω+φ) = 20{,}2848$ τετ. μέτ.

§ 227. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΒΔ βλέπομεν ὅτι $(ΒΔ) = R$ἡμ$(ΒΚΔ)$ (σχ. 17). Ἐπειδὴ δὲ $ΒΔ = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{R}{2}$, ἕπεται ὅτι $\frac{R}{2} = R$ ἡμ $(ΒΚΔ)$· ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ$(ΒΚΔ) = \frac{1}{2} =$ ἡμ30° καὶ ἑπομένως $ΒΚΔ = 30^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $\widehat{ΒΚΔ} = ω$, ἕπεται ὅτι $Α = 180^\circ - 2ω = 120^\circ$. Μετὰ ταῦτα ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΚΒ εὑρίσκομεν ὅτι $(ΑΒ) = $



Σχ. 17.

$(ΚΒ)$ἐφ$30^\circ = 0{,}7.\frac{\sqrt{3}}{3} = (ΑΓ)$. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ΑΒΓ εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ἰσότητος $Ε = \frac{1}{2}$ $(ΑΒ)$ $(ΑΓ)$ἡμ$Α$. Εἶναι λοιπὸν

$$Ε = \frac{1}{2}\left(0{,}7\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 . \text{ἡμ}\ 120^\circ = \frac{1}{2} 0{,}49 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{0{,}49\sqrt{3}}{12} \text{ τ. μέτ.}$$

§ 228. Ἐπειδὴ $Α + 2Β = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι

$$2Β = 180^\circ - Α = 63^\circ\ 25'\ 14'' \text{ καὶ } Β = Γ = 31^\circ\ 42'\ 37''.$$

Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα $β = \frac{α\text{ἡμ } Β}{\text{ἡμ}Α}$ εὑρίσκομεν $β = γ = 1{,}46923$ μέτρα.

Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα $Ε = \frac{1}{2}$ βγἡμ $Α = \frac{1}{2}$ $β^2$ἡμ$(2Β)$ εὑρίσκομεν

$$Ε = 0{,}9653 \text{ τετ. μέτρα.}$$

§ 229. Προφανῶς $ω + φ = Α = 64^\circ\ 20'\ 40''$

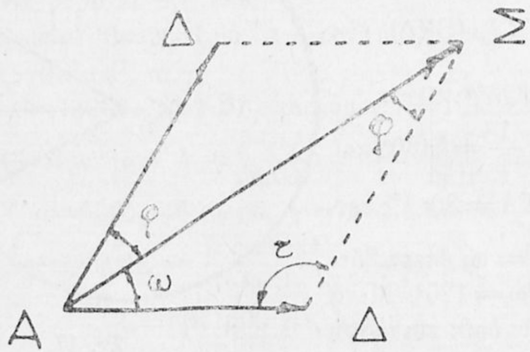
$$ω = 48^\circ\ 12'$$

καὶ ἑπομένως $\quad φ = 16^\circ\ 8'\ 40''$ (σχ. 18).

Ἐκ δὲ τοῦ τριγώνου ΑΔ΄Σ εὑρίσκομεν ὅτι

$\frac{\Delta}{ἡμω} = \frac{\Delta'}{ἡμφ} = \frac{45}{ἡμA}$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\Delta = \frac{45ἡμω}{ἡμA}$
$= 37,215$ χιλιόγρ, $\Delta' = \frac{45ἡμφ}{ἡμA} = 13,8813$ χιλιόγρ.

§ 230. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $2E = α.(AΔ)$, $2E = \frac{α^2 ἡμBἡμΓ}{ἡμA}$ εὑρί-



Σχ. 18.

σκομεν ὅτι $(AΔ) = \frac{αἡμBἡμΓ}{ἡμA}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὸ (ΑΔ), ἀφ' οὗ προηγουμένως εὕρωμεν ὅτι $A = 63^\circ\ 29'\ 30''$.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν καὶ τὸν τύπον
$$E = 2R^2 ἡμAἡμBἡμΓ \text{ κτλ.}$$

§ 231. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Α ἐκ τῆς ἰσότητος $A = 180 - (B + Γ)$ καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους $α = 2Rἡμ A$, $β = 2Rἡμ B$, $γ = 2Rἡμ Γ$, $E = 2R^2 ἡμAἡμBἡμΓ$.

§ 232. Γνωρίζομεν ὅτι $ἡμB = \frac{βἡμ A}{α}$. Ἂν δὲ $\frac{βἡμ A}{α} = 1$, θὰ εἶναι $ἡμB = 1$, καὶ ἑπομένως $B = 90^\circ$.

§ 233. Ἂν ἦτο $βἡμA > α$, θὰ ἦτο $\frac{βἡμ A}{α} > 1$, ἑπομένως $ἡμB > 1$ ὅπερ ἀδύνατον.

§ 234. Γνωστὰ στοιχεῖα $α = 95,6$, $β = 34,5$, $A = 30^\circ\ 15',\ 28''$ ἄγνωστα δὲ Β, Γ, γ, Ε.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $ἡμB = \frac{βἡμ A}{α}$ εὑρίσκομεν

$B = 27^\circ\ 10'\ 45''$ καὶ $B' = 152^\circ\ 49'\ 15''$. Ἐπειδὴ $A + B' > 180^\circ$, ἡ τιμὴ B' εἶναι ἀπαράδεκτος.

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\Gamma=180-(A+B)$, $\gamma=\dfrac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A}$, $E=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu A$

εὑρίσκομεν τὰ ἄλλα ἄγνωστα Γ, γ, Ε.

§ 235. Γνωστὰ $\alpha=500$, $\beta=640$, $A=40^\circ\ 20'\ 10''$, ἄγνωστα Β, Γ, γ, Ε.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\eta\mu B=\dfrac{\beta\,\eta\mu A}{\alpha}$ εὑρίσκομεν

$B=55^\circ\ 56'\ 40''$ καὶ $B'=124^\circ\ 3'\ 20''$. Ἐπειδὴ δὲ $A+B'<180^\circ$, ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι δεκταί. Αἱ δὲ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν ἄλλων στοιχείων εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς ἰσότητας :

$$\Gamma=180-(A+B) \qquad \Gamma'=180^\circ-(A+B')$$

$$\gamma=\frac{\alpha\,\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} \qquad \gamma'=\frac{\alpha\eta\mu\Gamma'}{\eta\mu A'}$$

$$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma \qquad E'=\frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma'$$

§ 236. Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 16) γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα : $(A\Gamma)=\beta=25{,}50$, $(AB)=\gamma=15{,}45$, $B=112^\circ$. Ἄγνωστα δὲ τὰ ἑξῆς : $(B\Gamma)=\alpha$, ω, φ.

Ἐκ τῆς $\dfrac{\gamma}{\eta\mu\varphi}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$ εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu\varphi=\dfrac{\gamma\,\eta\mu B}{\beta}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $\varphi=34^\circ\ 10'\ 43''$ καὶ $\varphi'=145^\circ\ 49'\ 17''$. Ἐπειδὴ δὲ $B+\varphi'>180^\circ$, ἡ τιμὴ φ΄ εἶναι ἀπαράδεκτος. Ἐκ δὲ τῆς

$\omega=180^\circ-(B+\varphi)$ εὑρίσκομεν $\omega=33^\circ\ 49'\ 17''$ καὶ ἐκ τῆς $\dfrac{\alpha}{\eta\mu\omega}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}$, εὑρίσκομεν $\alpha=\dfrac{\beta\eta\mu\omega}{\eta\mu 112^\circ}$ κ.τ.λ.

§ 237. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\dfrac{\mu}{180}=\dfrac{\alpha}{\pi}$ διὰ $\alpha=\dfrac{2\pi}{9}$ εὑρίσκομεν $\mu=180^\circ.\ \dfrac{2}{9}=40^\circ$. Ἂν ἑπομένως $(A\Delta)=20{,}35$, θὰ εἶναι $\omega=40^\circ$ (σχ. 18). Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{A\Delta}{\eta\mu\omega}=\dfrac{A\Sigma}{\eta\mu\tau}$, ἕπεται ὅτι $\eta\mu\tau=\dfrac{30{,}35\ \eta\mu\omega}{20{,}35}$.

Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν $\tau=73^\circ\ 28'\ 15''$, καὶ $\tau'=106^\circ\ 31'\ 45''$. Εἰς ἑκάστην δὲ τούτων ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τῆς φ καὶ μία τῆς ΑΣ ἢ τῆς Α΄. Ταύτας δὲ ὑπολογίζομεν ἀπὸ τοὺς τύπους

$$\varphi=180^\circ-(\tau+40^\circ),\ \varphi'=180^\circ-(\tau'+40^\circ) \text{ καὶ}$$

$$\Delta=\frac{20{,}35\,\text{ἡμ}\omega}{\text{ἡμ}40^\circ},\quad \Delta_1'=\frac{20{,}35\,\text{ἡμ}\omega'}{\text{ἡμ}40^\circ}.$$

§ 238. Γνωστὰ $\beta=300$, $\gamma=127$, $A=68^\circ\ 40'$. Ἄγνωστα B, Γ, α, E. Τύποι ἐπιλύσεως: $\text{ἐφ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\text{σφ}\left(\frac{A}{2}\right)$, $\alpha=\frac{\beta\,\text{ἡμ}A}{\text{ἡμ}B}$,

$$E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\text{ἡμ}A.$$

Ὑπολογισμὸς τῶν Β καὶ Γ.

$$\text{λογἐφ}\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\text{λογ}(\beta-\gamma)+\text{λογἐφ}\,\frac{A}{2}$$

Βοηθητικὸς πίναξ $\qquad -\text{λογ}(\beta+\gamma)=1{,}77320$, ὅθεν

$\beta=300$
$\gamma=127$
$\beta-\gamma=173$
$\beta+\gamma=427$

$\frac{A}{2}=34^\circ\ 20'$ $\Big\}$ $B-\Gamma=61^\circ\ 21'\ 10''$.

Ἐπειδὴ δὲ $B+\Gamma=111^\circ\ 20'$, ἕπεται εὐκόλως ὅτι $B=86^\circ\ 20'\ 35''$ καὶ $\Gamma=24^\circ\ 59'\ 25''$.

Μετὰ ταῦτα εὑρίσκομεν εὐκόλως τὰ στοιχεῖα α καὶ Ε.

§ 239. Βοηθητικὸς πίναξ

$\alpha=122{,}4$
$\beta=244{,}8$
$\beta-\alpha=122{,}4$
$\beta+\alpha=367{,}2$
$\frac{\Gamma}{2}=21^\circ 21' 21''$.

Ἐκ τῆς ἰσότητος $\text{ἐφ}\left(\frac{B-A}{2}\right)=\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}\,\text{σφ}\,\frac{\Gamma}{2}$ $=\frac{122{,}4}{367{,}2}\,\text{σφ}(21^\circ\ 21'\ 21'')$ εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω τὴν $(B-A)$· ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $B+A=180^\circ-\Gamma=137^\circ\ 17'\ 18''$, εὑρίσκομεν τὰς γωνίας Β καὶ Α. Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $\gamma=\frac{\alpha\,\text{ἡμ}\Gamma}{\text{ἡμ}A}$,

$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\text{ἡμ}\Gamma$ εὑρίσκομεν τὰ στοιχεῖα γ καὶ Ε.

§ 240. Βοηθητικὸς πίναξ.

$\beta = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$

$\gamma = \frac{5}{12}$

$\beta - \gamma = \frac{4}{12}$

$\beta + \gamma = \frac{14}{12}$

$\frac{A}{2} = 20^\circ$.

Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = \frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\,\frac{A}{2}$ εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι $B-\Gamma = 76^\circ\ 15'\ 46''$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $B+\Gamma = 140^\circ$, ἕπεται ὅτι $B = 108^\circ\ 7'\ 53''$, $\Gamma = 31^\circ\ 51'\ 7''$. Τέλος ἐφαρμόζομεν τοὺς τύπους

$\alpha = \frac{\beta\,\eta\mu A}{\eta\mu B}$ καὶ $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A =$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{12}\,\eta\mu 40^\circ = \frac{5}{32}\,\eta\mu 40^\circ$.

§ 241. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ω ἡ γωνία αὐτῶν, θὰ εἶναι (ΕΓ)=15, (ΕΒ)=7,5 καὶ $\omega = 45^\circ\ 20'$. Ἐπιλύομεν λοιπὸν τὸ τρίγωνον ΒΕΓ καὶ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος (ΒΓ), τὰ μέτρα τῶν εἰς αὐτὴν προσκειμένων γωνιῶν φ, θ, καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_1. Ὁμοίως ἐπιλύοντες τὸ τρίγωνον ΑΕΒ ἐκ τῶν (ΑΕ)=15, (ΕΒ)=7,5 καὶ τῆς γωνίας αὐτῶν $180^\circ - \omega$ εὑρίσκομεν τὸ μῆκος (ΑΒ), τὰς γωνίας φ′, θ′ καὶ τὸ ἐμβαδὸν E_2. Μεθ' ὃ προχωροῦμεν εὐκόλως.

§ 242. Ἐπειδὴ $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι 60°, $A = 30^\circ$, ἡ δὲ ἰσότης

$$\frac{-\gamma}{\beta+\gamma} = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)} \text{ γίνεται } \frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}\cdot\sigma\varphi 15^\circ = \varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ $\frac{4-2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$ καὶ

$$\sigma\varphi 15^\circ = \sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{1-\sigma\upsilon\nu 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{(2+\sqrt{3})^2}$$

$= 2+\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) = (2-\sqrt{3})^2.(2+\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\varepsilon\varphi 15^\circ = \frac{1}{\sigma\varphi 15^\circ} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$, εἶναι

$\varepsilon\varphi\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)=\varepsilon\varphi 15^\circ$, ὅθεν $B-\Gamma=60^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $B+\Gamma=150^\circ$, εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι $B=90^\circ$ καὶ $\Gamma=60^\circ$. Ἐκ τῆς $B=90^\circ$ ἐννοοῦμεν ὅτι $(A\Gamma)=2R$ ἢ $4=2R$ καὶ ἑπομένως $R=2$ μέτρα.

§ 243. Τοῦ σχήματος 18 γνωρίζομεν τὰ ἑξῆς στοιχεῖα: $A=56^\circ\ 30'$, $\Delta'=10$, $\Delta'\Sigma=\Delta=15$. Ἐκ τῆς $A=56^\circ\ 30'$ εὑρίσκομεν $\tau=123^\circ\ 30'$. Γνωρίζομεν ἑπομένως δύο πλευρὰς τοῦ τριγώνου $A\Delta\Sigma$ καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν. Ἐπιλύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν τὰς γωνίας ω, φ καὶ τὴν Σ.

§ 244. Κατὰ τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν ὅτι $\Gamma=180^\circ.\ \frac{5}{9}=100^\circ$. Μετὰ ταῦτα ἐπιλύομεν τὸ τρίγωνον γνωρίζοντες δύο πλευρὰς καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν.

§ 245. Τὸ ἀπεικονιζόμενον τρίγωνον ἔχει $\alpha=0{,}4.1000=400$ μέτ. $\beta=0{,}88.1000=880$ μέτ. καὶ γωνίαν αὐτῶν $\Gamma=40^\circ\ 30'$. Εἶναι λοιπὸν

$$E=\frac{1}{2}\alpha\beta\,\eta\mu\Gamma=\frac{1}{2}\cdot 400.880\,\eta\mu(40^\circ\ 30'')=400.400\,\eta\mu(40^\circ\ 30'') \text{ κτλ.}$$

§ 246. Τὸ τρίγωνον $A\Delta\Sigma$ (σχ. 18) ἔχει $\Sigma=10$, $\Delta'=6$ καὶ $\omega=30^\circ$. Ἀρκεῖ ὅθεν νὰ ἐπιλυθῇ τοῦτο.

§ 247. Κατὰ τὴν ἰσότητα $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu A$ εἶναι

$$64=81+100-180\,\sigma\upsilon\nu A, \text{ ὅθεν } \sigma\upsilon\nu A=\frac{117}{180}=\frac{13}{20}=0{,}65.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν τὴν Α. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν τὴν Β καὶ εὐκόλως εἶτα τὴν Γ. Τὸ δὲ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου

$$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \text{ ἢ τοῦ } E=\frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A.$$

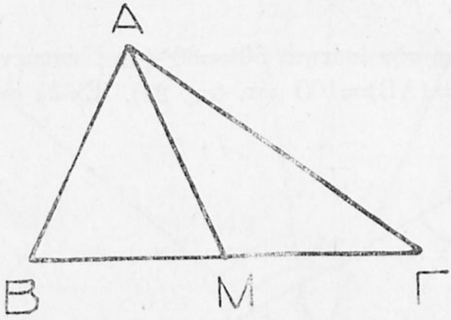
§ 248. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΜ βλέπομεν ὅτι

$$(AM)^2=(AB)^2+(BM)^2-2(AB)(BM)\,\sigma\upsilon\nu B$$

ἢ $400=144+64-2.12.8\,\sigma\upsilon\nu B$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu B=-1$ καὶ $B=180^\circ$, ὅπερ ἄτοπον διὰ τρίγωνον. Τὸ πρόβλημα λοιπὸν εἶναι ἀδύνατον.

Σημ. Τὸ ἀδύνατον τοῦ προβλήματος διακρίνομεν καὶ ἀμέσως παρατηροῦντες ὅτι $(AM)=(AB)+(BM)$.

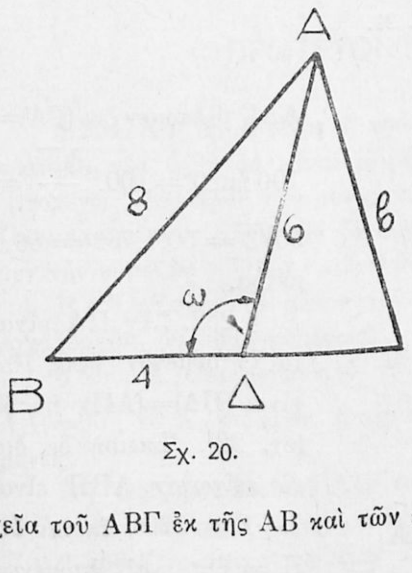
§ 249. Παρατηροῦντες ὅτι τὸ τρίγωνον μὲ πλευρὰς α, β, γ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ἔχον πλευρὰς 2, 3, 4 ἐννοοῦμεν ὅτι ἀρκεῖ νὰ ὑπολογί-



ΣΧ. 19.

σωμεν τὰς γωνίας τοῦ β′ τούτου τριγώνου. Οὕτω $4=9+16-2.3.4$συνA, ὅθεν συνA $= \frac{21}{24} = \frac{7}{8}$ κ.τ.λ.

§ 250. Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ (σχ. 20) βλέπομεν ὅτι



Σχ. 20.

$(B\Delta)^2 = 8^2+6^2-2.8.6$συν $\frac{A}{2}$,

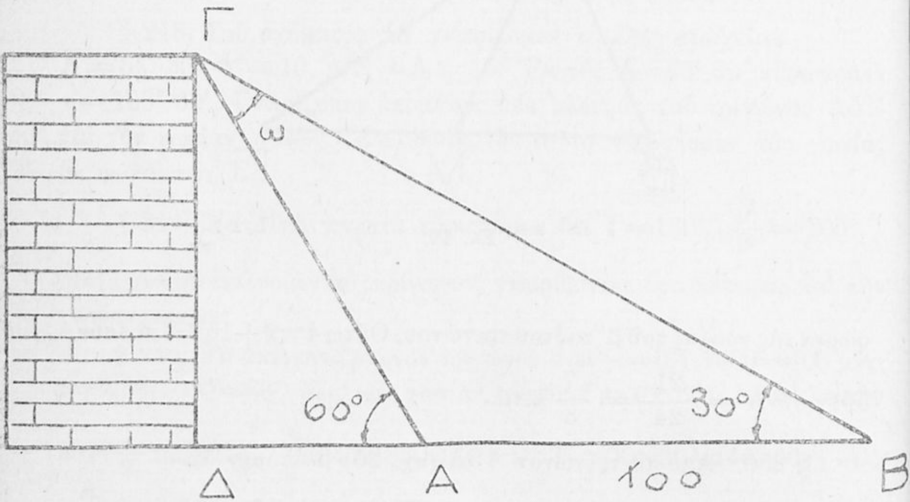
ὅθεν συν $\frac{A}{2} = \frac{7}{8}$. Ἐκ ταύτης δὲ ὁρίζομεν τὴν Α. Μετὰ ταῦτα ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ βλέπομεν ὅτι $\frac{6}{\text{ἡμ}B} = \frac{4}{\text{ἡμ}\frac{A}{2}}$

καὶ ἑπομένως ἡμB$= \frac{3}{2}$ ἡμ $\frac{A}{2}$.

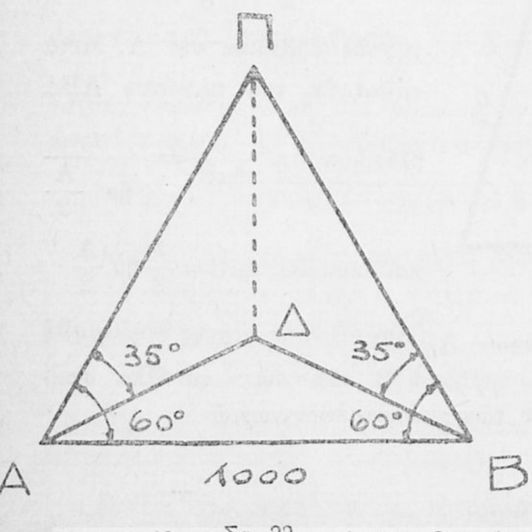
Ἀφ᾽ οὗ δὲ ἐκ ταύτης ὑπολογισθῇ ἡ Β, εὑρίσκομεν τὰ ἄλλα στοιχεῖα τοῦ ΑΒΓ ἐκ τῆς ΑΒ καὶ τῶν προσκειμένων γωνιῶν.

ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

§ 251. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $60^\circ = 30^\circ + \omega$ βλέπομεν ὅτι $\omega = 30^\circ$ καὶ ἑπομένως (ΑΓ)=(ΑΒ)=100 μέτ. (σχ. 21). Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου



Σχ. 21.



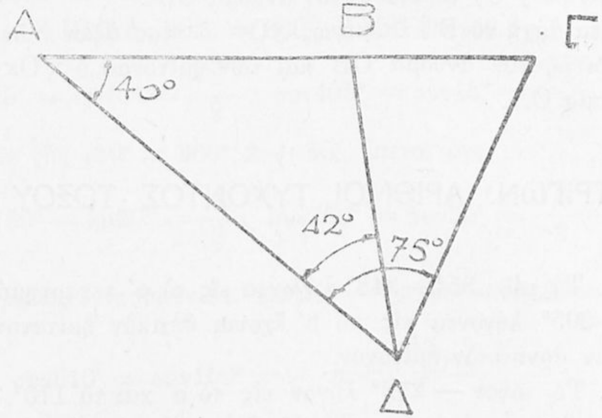
ΑΔΓ βλέπομεν ὅτι (ΓΔ)= $100\ \eta\mu 60^\circ = 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} = 50 \cdot 1{,}732 = 86{,}6$ μέτρα.

§ 252. Ἂν ΠΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εἶναι (ΠΔ)=(ΑΠ) ἡμ 35 (σχ. 22). Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΠ εἶναι $A + B = 120^\circ$, ἔπεται ὅτι $\Pi = 60^\circ$ καὶ ἑπομένως (ΑΠ)=(ΑΒ)=1000. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης

Σχ. 22.

γίνεται (ΠΔ) = 1000 ἡμ 35° = 1000.0,57358 = 573,58 μέτρα.

§ 253. Ἑκατέρου τῶν τριγώνων ΑΓΔ, ΑΔΒ (σχ. 23) εἶναι γνω-



Σχ. 23·

στὴ μία πλευρὰ (ΑΔ) = 600 καὶ αἱ εἰς αὐτὴν προσκείμεναι γωνίαι. Ἐκ τοῦ ΑΔΓ λοιπὸν εὑρίσκομεν τὸ μῆκος (ΑΓ), ἐκ δὲ τοῦ ΑΒΔ τὸ (ΑΒ). Ἑπομένως (ΒΓ)=(ΑΓ)—(ΑΒ).

ΠΡΩΤΕΥΟΝΤΕΣ ΑΞΟΝΕΣ

§ 254. Α′) Ἂν Α εἶναι ἡ πρώτη τῶν τόξων ἀρχὴ κατὰ τὸ δοθὲν σύστημα, νέα ἀρχὴ θὰ εἶναι τὸ μέσον A_1 τοῦ α′ τεταρτημορίου ΑΒ. Ἑπομένως νέος ἄξων τῶν συνημιτόνων θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $x_1'OA_1x_1$. Ἔπειτα ὁρίζομεν κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν τόξον $A_1B_1 = 90°$ καὶ ἄγομεν τὴν εὐθεῖαν $y'OB_1y_1$· αὕτη θὰ εἶναι ὁ νέος ἄξων τῶν ἡμιτόνων.

Β′) Ὁρίζομεν τὸ μέσον τοῦ A_2 τοῦ δ′ τεταρτημορίου ΑΒ′ καὶ ἐργαζόμεθα, ὡς προηγουμένως.

§ 255. Α′) Διαιροῦμεν τὸ τόξον ΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη, ἔστω δὲ $\widehat{AA_1} = 30°$, τὸ A_1 θὰ εἶναι ἡ νέα ἀρχὴ καὶ συνεχίζομεν ὡς προηγουμένως.

Β′) Ὁρίζομεν ἐπὶ τοῦ ΑΒ′ τόξον $(AA_1) = -30°$ καὶ θεωροῦντες τὸ A_1 ὡς νέαν ἀρχὴν συνεχίζομεν, ὡς προηγουμένως.

§ 256. Ὁρίζομεν ὡς νέαν ἀρχὴν τὸ Β εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν καὶ τὸ Β′ εἰς τὴν δευτέραν κτλ.

§ 257. Α΄) Νέα ἀρχὴ θὰ εἶναι τὸ Α΄· ἑπομένως x΄Οx εἶναι ὁ νέος ἄξων τῶν συνημιτόνων μὲ διεύθυνσιν ἄνυσμα ΟΑ΄. Νέος δὲ ἄξων τῶν ἡμιτόνων ὁ y΄Oy μὲ διευθύνον ἄνυσμα ΟΒ΄.

Β΄) Νέα ἀρχὴ τὸ Β΄, ἑπομένως yOy΄ ὁ νέος ἄξων τῶν συνημιτόνων μὲ διευθύνον ἄνυσμα ΟΒ΄ καὶ τῶν ἡμιτόνων ὁ x΄Οx μὲ διευθύνον ἄνυσμα ΟΑ.

ΤΡΙΓΩΝ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΤΟΞΟΥ

§ 258. Τὰ τόξα $35^\circ, -348^\circ$ λήγοντα εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον καὶ τὰ $127^\circ, -205^\circ$ λήγοντα εἰς τὸ β΄ ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον. Τὰ δὲ ἄλλα ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον.

§ 259. Τὸ τόξον -292° λῆγον εἰς τὸ α΄ καὶ τὰ 175°, 100° εἰς τὸ β΄ ἔχουσι θετικὸν ἡμίτονον. Τὰ δὲ ἄλλα ἔχουσιν ἀρνητικὸν ἡμίτονον. Ταῦτα ἀληθεύουσι καὶ διὰ τὰς εἰς αὐτὰ βαινούσας ἐπικέντρους γωνίας.

§ 260. Α΄) Προφανῶς $0 < \frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, ἄρα συν $\frac{\pi}{5} > 0$.

Β΄) Τὸ $-\frac{3\pi}{4}$ λήγει εἰς τὸ β΄ τεταρτημόριον, ἑπομένως

$$\text{συν}\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0.$$

Γ΄) Τὰ τόξα $\frac{5\pi}{2}$ καὶ $-\frac{7\pi}{2}$ λήγουσιν εἰς τὸ Β. Ἑπομένως

$$\text{συν}\,\frac{5\pi}{2} = \text{συν}\left(-\frac{7\pi}{2}\right) = 0.$$

Δ΄) $\frac{11\pi}{3} = 3\pi + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \pi + \frac{2\pi}{3}$. Τὸ τόξον λοιπὸν $\frac{11\pi}{3}$ λήγει εἰς τὸ γ΄ τεταρτημόριον· ἑπομένως συν $\frac{11\pi}{3} < 0$.

§ 261. Α΄) Θετικοὺς τοὺς δύο τούτους ἀριθμοὺς ἔχουσι τὰ λήγοντα μεταξὺ Α καὶ Β. Ἀρνητικοὺς δὲ τὰ λήγοντα μεταξὺ Α΄ καὶ Β΄.

§ 262. Εἶναι ἡμίτονον >0 καὶ συνημίτονον <0 διὰ τὰ λήγοντα μεταξὺ Β καὶ Α΄. Εἶναι δὲ ἡμ <0 καὶ συν >0 διὰ τὰ λήγοντα μεταξὺ Β΄ καὶ Α.

§ 263. Α΄) Ἐπειδὴ $405^\circ = 360^\circ + 45^\circ$, ἕπεται ὅτι

$$ἡμ405^\circ = ἡμ45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},\ συν405^\circ = συν45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

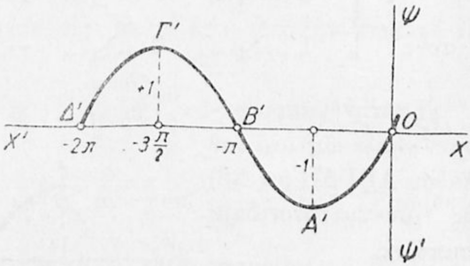
Β΄) Ἐκ τῆς $750^\circ = 360^\circ . 2 + 30^\circ$, ἕπεται ὅτι

$$ἡμ750^\circ = ἡμ30^\circ = \frac{1}{2},\ συν750^\circ = συν30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Γ΄) Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $ἡμ510^\circ = ἡμ150^\circ = ἡμ30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$συν510^\circ = συν150^\circ = -συν30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

§ 264. Ἂν τὸ πέρας Μ τοῦ τόξου διαγράφῃ τὸ τεταρτημόριον ΑΒ΄ κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, τὸ ἡμίτονον τοῦ τόξου ἀπὸ 0 βάνει ἐλαττούμενον ἕως -1. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:



Σχ. 24.

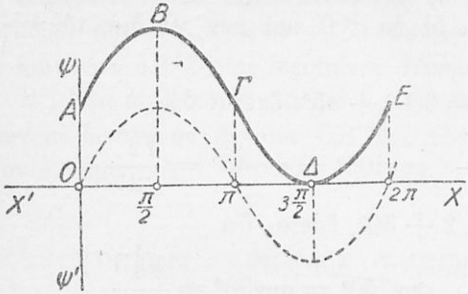
$$\left.\begin{array}{l} τ \\ ἡμτ \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0^\circ \ldots\searrow\ldots -90^\circ \ldots\searrow\ldots -180^\circ \ldots\searrow\ldots -270^\circ \ldots\searrow\ldots -360^\circ \\ 0 \ldots\searrow\ldots -1 \ldots\nearrow\ldots \quad 0 \ldots\nearrow\ldots +1 \ldots\searrow\ldots \quad 0. \end{array}$$

Τὰς μεταβολὰς ταύτας παριστάνομεν γραφικῶς διὰ τοῦ κλάδου 0 Α΄ Β΄ Γ΄ Δ΄ τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης (σχ. 24).

§ 265. Ἀρκεῖ εἰς ἑκάστην τιμὴν νὰ προσθέσωμεν 1. Οὕτω δὲ καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

$$\left.\begin{array}{r} x \\ ἡμx \\ 1 + ἡμx \end{array}\right\} \begin{array}{l} 0^\circ \ldots\nearrow\ldots 90^\circ \ldots\nearrow\ldots 180^\circ \ldots\nearrow\ldots 270^\circ \ldots\nearrow\ldots 360^\circ \\ 0 \ldots\nearrow\ldots 1 \ldots\searrow\ldots 0 \ldots\searrow\ldots -1 \ldots\nearrow\ldots 0 \\ 1 \ldots\nearrow\ldots 2 \ldots\searrow\ldots 1 \ldots\searrow\ldots 0 \ldots\nearrow\ldots 1. \end{array}$$

Διὰ τὴν γραφικὴν παράτασιν ἀρκεῖ νὰ αὐξήσωμεν κατὰ 1 τὴν



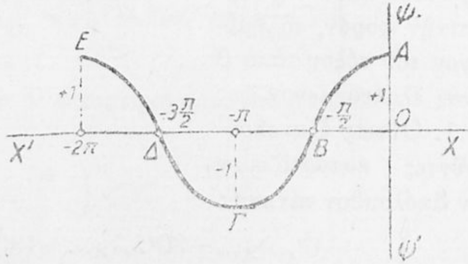
Σχ. 25.

τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς ἡμιτονοειδοῦς καμπύλης. Οὕτω προκύπτει ἡ καμπύλη ΑΒΓΔΕ (σχ 25).

§ 266. Ἂν τὸ πέρας Μ τόξου τ διαγράφῃ τὸ τόξον ΑΒ΄Α΄, ἡ προβολὴ Π αὐτοῦ ἐπὶ τὸν xx΄ διαγράφει τὸ ἄνυσμα ΑΑ΄. Ἑπομένως τὸ συν τ ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 ἕως — 1. Οὕτω, ἐξακολουθοῦντες καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

τ	0°...	↘	...—90°...	↘	...—180°...	↘	...—270°...	↘	...—360°
συντ	1 ...	↘	... 0 ...	↘	... —1 ...	↘	... 0° ...	↘	... 1.

Ταύτην παριστάνομεν γραφικῶς διὰ τοῦ κλάδου ΑΒΓΔΒ (σχ.26) τῆς συνημιτονοειδοῦς καμπύλης.



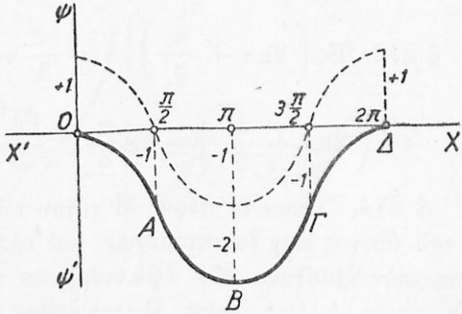
Σχ. 26.

§ 267. Ἀρκεῖ εἰς ἑκάστην τιμὴν οὗ συνx νὰ προσθέσωμεν — 1. Οὕτω δὲ καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα :

x	0°...	↗	...90°...	↗	...180°...	↗	...270°...	↗	...360°
συνx	1 ...	↘	... 0 ...	↘	...—1 ...	↗	... 0 ...	↗	... 1
— 1 + συνx	0 ...	↘	...—1 ...	↘	...—2 ...	↗	...—1 ...	↗	... 0.

Διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἀρκεῖ εἰς τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς συνημιτονοειδοῦς καμπύλης νὰ προσθέσωμεν — 1. Οὕτω ροκύπτει ἡ καμπύλη ΟΑΒΓΔ (σχ. 27).

§ 268. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα ἐφτ. σφτ=1 ἐννοοῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ φτ καὶ σφτ εἶναι ὁμόσημοι. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ ἴδωμεν οῖα τόξα ἔχουσι θετικὴν αὶ ποῖα ἀρνητικὴν ἐφαπτοένην.



Σχ. 27.

Οὕτω τὸ τόξον 68°, λῆον εἰς τὸ α' τεταρτημόριον χει θετικὴν ἐφαπτομένην. ὰ τόξα —68°, 300° λήγοντα ς τὸ δ', τὰ 135°, 125°, εἰς ὸ β', ἔχουσιν ἀρνητικὴν ἐαπτομένην. Τὸ δὲ — 136° λῆγον, εἰς τὸ γ' ἔχει θετικὴν ἐφαπτοένην.

§ 269. Ἐπειδὴ $\frac{1}{2} < \frac{5}{8} < 1$, $\frac{1}{2} < \frac{6}{7} < 1$, $\frac{1}{2} < \frac{5}{9} < 1$,

πεται ὅτι $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{8} < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{6\pi}{7} < \pi$, $\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{9} < \pi$. Ἑπομέως καὶ τὰ τρία τόξα λήγουσιν εἰς τὸ β' τεταρτημόριον καὶ ἔχουσιν ρνητικὴν ἐφαπτομένην καὶ συνεφαπτομένην.

§ 270. Τὰ λήγοντα εἰς τὸ α' καὶ γ' ἔχουσι θετικοὺς καὶ τοὺς δύο ύτους ἀριθμούς. Τὰ δὲ εἰς τὸ β' καὶ δ' ἀρνητικούς.

§ 271. Ἀπὸ τὸν κάτωθι πίνακα:

	α'	β'	γ'	δ'
ἐφτ	+	—	+	—
ἡμτ	+	+	—	—
συντ	+	—	—	+

βλέπομεν ὅτι

1) ἐφτ > 0, ἡμτ > 0, καὶ ἐφτ > 0, συντ > 0 ἂν τὸ τ λήγῃ εἰς τὸ ' τεταρτημόριον.

2) ἐφτ > 0, ἡμτ < 0 καὶ ἐφτ > 0, συντ < 0, ἂν τὸ τ λήγῃ εἰς τὸ ' τεταρτημόριον

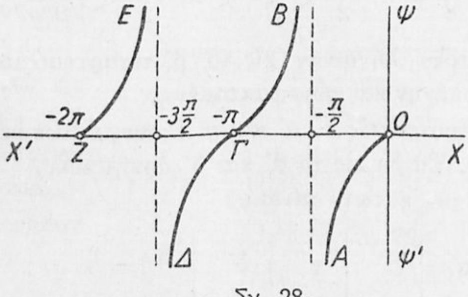
§ 272. Ἐφ $(360^\circ k + 45^\circ) =$ ἐφ$45^\circ = 1$, σφ $(360^\circ k + 30^\circ) =$ σφ$30^\circ = \sqrt{3}$.

§ 273. Ἐφ$\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) =$ ἐφ $\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}$,

σφ $\left(2k\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) =$ σφ $\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 274. Ὅταν τὸ πέρας Μ τόξου τ διανύῃ τὸ τόξον ΑΒ′, ἡ τομὴ Τ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῆς εὐθείας ΟΜ διαγράφει τὸν ἀρνητικὸν ἡμιάξονα τῶν ἐφαπτομένων κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν. Ἑπομένως ἡ ἐφτ βαίνει ἐλαττουμένη ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$. Καθ᾽ ἣν δὲ στιγμὴν τὸ Μ ὑπερβῇ κατ᾽ ἐλάχιστον τὸ Β′, ἡ ἐφτ μεταπηδᾷ εἰς τὸ $+\infty$ καὶ ἔπειτα βαίνει ἐλαττουμένη κ.τ.λ. Οὕτως ἐξακολουθοῦντες σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

τ	$0^\circ \ldots \searrow \ldots -90^\circ \ldots \searrow \ldots -180^\circ \ldots \searrow \ldots -270^\circ \ldots \searrow \ldots -360^\circ$
ἐφτ	$0 \ldots \searrow \ldots -\infty \mid +\infty \ldots \searrow \ldots 0 \ldots \searrow \ldots -\infty \mid +\infty \ldots \searrow \ldots \quad 0$



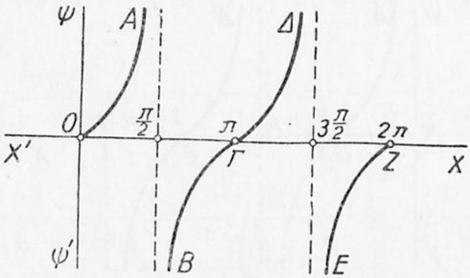
Σχ. 28.

Τὴν μεταβολὴν ταύτην παριστάνομεν γραφικῶς διὰ τῆς καμπύλης ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ. 28).

§ 275. Ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ ἑκάστης τιμῆς τῆς ἐφx. Οὕτω δὲ καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

x	$0^\circ .. \nearrow .. 45^\circ .. \nearrow \ldots \quad 90^\circ .. \nearrow .. 135^\circ .. \nearrow \ldots 180^\circ \ldots \nearrow \ldots 270^\circ .. \nearrow . 360^\circ$
ἐφx	$0 .. \nearrow .. \ 1 .. \nearrow .. +\infty \mid -\infty .. \nearrow .. -1 .. \nearrow .. 0 .. \nearrow .. +\infty \mid -\infty .. \nearrow . 0$
$\frac{1}{2}$ ἐφx	$0 .. \nearrow .. \frac{1}{2} .. \nearrow .. +\infty \mid -\infty .. \nearrow .. -\frac{1}{2} .. \nearrow .. 0 .. \nearrow . +\infty \mid -\infty .. \nearrow . 0.$

Διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν τὸ ἥμισυ ῆς τεταγμένης ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης, δι' ἧς παρίσταται ἡ

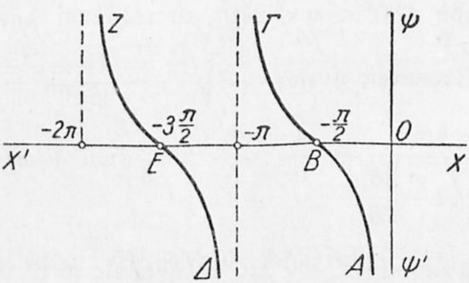


Σχ. 29.

εταβολὴ τῆς ἐφx. Οὕτω δὲ προκύπτει ἡ καμπύλη ΟΑΒΓΔΕΖ (σχ. 29).

§ 276. Ἐργαζόμενοι, ὡς προηγουμένως, σχηματίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{array}{l} 0^\circ .. \searrow ... -90^\circ ... \searrow ... -180^\circ ... \searrow ... -270^\circ ... \searrow ... -360 \\ \text{φx} \quad \infty | -\infty ... \nearrow ... 0 ... \nearrow ... +\infty | -\infty ... \nearrow ... 0 ... \nearrow ... +\infty \end{array}$$



Σχ. 30.

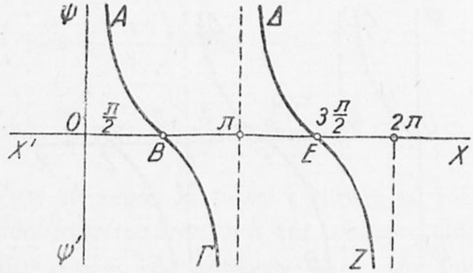
Τὴν μεταβολὴν ταύτην παριστάνομεν γραφικῶς διὰ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔΕ (σχ. 30).

§ 277. Ἀρκεῖ νὰ διπλασιάζωμεν ἑκάστην τιμὴν τῆς σφx.

Οὕτω δὲ καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

$$\begin{array}{l} 0^\circ ... \nearrow ... 45^\circ ... \nearrow ... 90^\circ ... \nearrow ... 180^\circ ... \nearrow ... 270^\circ ... \nearrow ... 360^\circ \\ \text{φx} \quad \infty .. \searrow ... 1 ... \searrow ... 0 ... \searrow -\infty | +\infty ... \searrow ... 0 ... \searrow ... -\infty \\ \text{φx} \quad \infty .. \searrow ... 2 ... \searrow ... 0 .. \searrow -\infty | +\infty ... \searrow ... 0 ... \searrow ... -\infty \end{array}$$

Διὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν ἀρκεῖ νὰ διπλασιάζωμεν τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης, δι᾽ ἧς παρίσταται ἡ μεταβολὴ τῆς σφx. Οὕτω δὲ προκύπτει ἡ καμπύλη ΑΒΓΔΕΖ (σχ. 31).



Σχ. 31.

§ 278. Ἐπειδὴ $90^\circ < \omega < 180^\circ$, τὸ τόξον ω λήγει εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον. Ἑπομένως $\text{συν}\omega = -\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\omega} = -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$,

$$\text{ἐφ}\omega = \frac{\text{ἡμ}\omega}{-\sqrt{1-\text{ἡμ}^2\omega}} = -\frac{3/5}{4/5} = -\frac{3}{4}, \quad \text{σφ}\omega = -\frac{4}{3}.$$

§ 279. Ἐπειδὴ $180^\circ < \omega < 270^\circ$, τὸ τόξον ω λήγει εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον. Ἑπομένως $\text{συν}\omega = -\sqrt{1-\frac{16}{25}} = -\frac{3}{5}$,

$$\text{ἐφ}\omega = \frac{-4/5}{-\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = \frac{4}{5} : \frac{3}{5} = \frac{4}{3} \text{ καὶ } \text{σφ}\omega = \frac{3}{4}$$

§ 280. Ἐπειδὴ $90^\circ < \omega < 180^\circ$, τὸ ω λήγει εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον.

$$\text{Ἑπομένως ἡμ}\omega = \sqrt{1-\text{συν}^2\omega} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{ἐφ}\omega = \frac{+\sqrt{1-\text{συν}^2\omega}}{\text{συν}\omega} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\text{καὶ σφ}\omega = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

§ 281. Ἐπειδὴ $270^\circ < \omega < 360^\circ$, τὸ ω λήγει εἰς τὸ δ′ τεταρτημόριον. Ἑπομένως ἡμω $= -\sqrt{1-\frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$,

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2\omega}}{\sigma\upsilon\nu\omega} = -\frac{4}{5} : \frac{3}{5} = -\frac{4}{3} \text{ καὶ } \sigma\varphi\omega = -\frac{3}{4}.$$

§ 282. Ἐπειδὴ $540^\circ = 360^\circ + 180^\circ$ καὶ $630^\circ = 360^\circ + 270^\circ$, τὸ μὲν τόξον 540° λήγει εἰς τὸ Α′, τὸ δὲ 630° εἰς τὸ Β′. Ἐπειδὴ δὲ $540^\circ < \omega < 630^\circ$, ἕπεται ὅτι τὸ ω λήγει εἰς τὸ γ′ τεταρτημόριον. Ἑπομένως

$$\eta\mu\omega = \frac{\varepsilon\varphi\omega}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}} = \frac{{}^2/_5}{-\sqrt{1+\frac{4}{25}}} = -\frac{2}{\sqrt{29}} = -\frac{2}{29}\sqrt{29},$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{1}{-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\omega}} = -\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{25}}} - = \frac{5}{\sqrt{29}} = -\frac{5}{29}\sqrt{29},$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{5}{2}$$

§ 283. Ἐπειδὴ $810^\circ = 360.2 + 90^\circ$, τὸ τόξον 810° λήγει εἰς τὸ Β. Ἐπειδὴ δὲ $900^\circ = 360^\circ.2 + 180$, τὸ τόξον 900° λήγει εἰς τὸ Α′. Ἐπειδὴ δὲ $810^\circ < \tau < 900^\circ$, τὸ τ λήγει εἰς τὸ β′ τεταρτημόριον. Ἐπομένως

$$\eta\mu\,\tau = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{3\sqrt{12}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu\tau = \frac{\sigma\varphi\tau}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\tau}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+{}^3/_9}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{12}} = -\sqrt{\frac{3}{12}}$$

$$= -\frac{1}{2}, \quad \varepsilon\varphi\tau = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}.$$

ΤΡΙΓΩΝ. ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΤΟΞΩΝ

§ 284. Α′) $\eta\mu(-30^\circ) = -\eta\mu 30^\circ = -\frac{1}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-30^\circ) = \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon\varphi(-30^\circ) = -\varepsilon\varphi 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sigma\varphi(-30^\circ) = -\sigma\varphi 30^\circ = -\sqrt{3}$.

Β′) $\eta\mu(-45^\circ) = -\eta\mu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(-45^\circ) = \sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\varepsilon\varphi(-45^\circ) = -\varepsilon\varphi 45^\circ = -1$, $\sigma\varphi(-45^\circ) = -\sigma\varphi 45^\circ = -1$.

Γ´) $ἡμ(-60^\circ) = -ἡμ60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν(-60^\circ) = συν60^\circ = \frac{1}{2}$,

$ἐφ(-60^\circ) = -ἐφ60^\circ = -\sqrt{3}$, $σφ(-60^\circ) = -σφ\,60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

§ 285. Α´) Γνωρίζομεν ὅτι τὰ τόξα $\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right)$ καὶ $-\frac{\pi}{6}$ ἔχουσι κοινὰ ὁμώνυμα ἄκρα. Ἐπομένως

$$ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = ἡμ\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$συν\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = συν\left(-\frac{\pi}{6}\right) = συν\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$ἐφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = ἐφ\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -ἐφ\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$σφ\left(2k\pi - \frac{\pi}{6}\right) = σφ\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -σφ\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

Γ´) Ὁμοίως $ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = ἡμ\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

Γ´) $ἡμ\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right) = ἡμ\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -ἡμ\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κτλ.

§ 286. Α´) Ἐπειδὴ $συν(-τ)\,συν\,τ = συν\,τ\,συν\,τ = συν^2 τ$, ἕπεται ὅτι $συν(-τ)\,συν\,τ + ἡμ^2 τ = συν^2 τ + ἡμ^2 τ = 1$.

Β´) Γνωρίζομεν ὅτι $σφ(-τ)\,ἐφτ = -σφτ.\,ἐφτ = -1$. Ἐπομένως $σφ(-τ)\,ἐφτ + 1 = -1 + 1 = 0$.

§ 287. Α´) Ἐπειδὴ $ἡμ(-τ)\,σφτ = -ἡμτ.\,\frac{συντ}{ἡμτ} = -συντ$, ἕπεται ὅτι $ἡμ(-τ)σφτ + συντ = -συντ + συντ = 0$.

Β´) Ὁμοίως $συν(-τ)\,ἐφ(-τ) = συντ.\left(-\frac{ἡμτ}{συντ}\right) = -ἡμτ$. Ἐπομένως $συν(-τ)\,ἐφ(-τ) + ἡμτ = -ἡμτ + ἡμτ = 0$.

§ 288. $ἡμτ.\,ἡμ(-τ) + συν^2τ = συν^2τ - ἡμ^2τ = 1 - ἡμ^2τ - ἡμ^2τ = 1 - 2ἡμ^2τ$.

§ 289. Α') Ἐπειδὴ $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι :

$$\text{ἡμ}120^\circ = \text{ἡμ}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{συν}120^\circ = -\text{συν}60^\circ = -\frac{1}{2} \text{ κ.τ.λ.}$$

$$\text{ἡμ}(-120^\circ) = -\text{ἡμ}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \text{συν}(-120^\circ) = \text{συν}120^\circ = -\frac{1}{2} \text{ κ.τ.λ.}$$

Β') Ὁμοίως $\text{ἡμ}135^\circ = \text{ἡμ}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{συν}135^\circ = -\text{συν}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ. τ. λ.

$$\text{ἡμ}(-135^\circ) = -\text{ἡμ}135^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{συν}(-135^\circ) = \text{συν}135^\circ = -\text{συν}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ κ. τ. λ.}$$

Γ') $\text{ἡμ}150^\circ = \text{ἡμ}30^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{συν}150^\circ = -\text{συν}30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ. τ. λ.

$$\text{ἡμ}(-150^\circ) = -\text{ἡμ}150^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \text{συν}(-150^\circ) = \text{συν}150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ κ.λ.π.}$$

§ 290. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἡμ}(180^\circ - \tau)\,\text{ἡμ}\,\tau = \text{ἡμ}\,\tau.\ \text{ἡμ}\,\tau = \text{ἡμ}^2\tau$
καὶ $\text{συν}(180^\circ - \tau)\text{συν}\,\tau = -\text{συν}\,\tau.\ \text{συν}\,\tau = -\text{συν}^2\tau$.

Ἑπομένως $\text{ἡμ}(180^\circ - \tau)\text{ἡμτ} - \text{συν}(180^\circ - \tau)\text{συντ} = \text{ἡμ}^2\tau + \text{συν}^2\tau = 1$.

§ 291. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἐφ}\,(\pi - \tau)\,\text{σφτ} = -\text{ἐφτ}.\ \text{σφτ} = -1$,
καὶ $\text{σφ}\,(\pi - \tau)\,\text{ἐφτ} = -\text{σφτ}.\ \text{ἐφτ} = -1$.

Ἑπομένως $\text{ἐφ}\,(\pi - \tau)\,\text{σφτ} - \text{σφ}(\pi - \tau)\,\text{ἐφτ} = -1 + 1 = 0$.

§ 292. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι

$x = \text{ἐφ}\,(180^\circ - \tau)\text{συντ} - \text{σφ}\,(180^\circ - \tau)\,\text{ἡμτ} = -\text{ἐφτ}.\ \text{συντ} + \text{σφτ}\ \text{ἡμτ} = \text{συντ} - \text{ἡμτ}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἡμτ} = \frac{1}{2}$ καὶ $0^\circ < \tau < 90^\circ$, θὰ εἶναι

$\text{συντ} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἑπομένως $x = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

§ 293. Ἐπειδὴ $-\text{σφ}(\pi - \tau)\,\text{ἡμτ} = \text{σφτ}.\ \text{ἡμτ} = \text{συντ}$ καὶ
$-\text{ἐφ}(\pi - \tau)\,\text{συντ} = \text{ἐφτ}.\ \text{συντ} = \text{ἡμτ}$, ἕπεται ὅτι
$-\text{σφ}(\pi - \tau)\,\text{ἡμτ} - \text{ἐφ}(\pi - \tau)\text{συντ} = \text{ἡμτ} + \text{συντ}$.

§ 294. Προφανῶς συν $(90^\circ - \omega) =$ ἡμω $= \frac{1}{2}$.

§ 295. Ἐπειδὴ $B + \Gamma = 90^\circ$, εἶναι συν$B =$ ἡμΓ καὶ ἑπομένως συν$^2B +$ συν$^2\Gamma =$ ἡμ$^2\Gamma +$ συν$^2\Gamma = 1$.

§ 296. Ἐπειδὴ $A + B + \Gamma = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\frac{A+B}{2} + \frac{\Gamma}{2} = 90^\circ$ $\frac{B+\Gamma}{2} + \frac{A}{2} = 90^\circ$, $\frac{A+\Gamma}{2} + \frac{B}{2} = 90^\circ$. Ἑπομένως

$$\text{ἡμ}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{συν}\,\frac{\Gamma}{2},\quad \text{ἐφ}\left(\frac{A+B}{2}\right) = \text{σφ}\left(\frac{\Gamma}{2}\right)\ \text{κ.τ.λ.}$$

§ 297. Ἐφ $(90^\circ - \alpha)$ ἐφα $=$ σφα. ἐφα $= 1$, σφ $(90^\circ - \alpha)$ σφα $=$ ἐφα. σφα $= 1$.

§ 298. Γνωρίζομεν ὅτι ἡμ $(90^\circ - \alpha)$ συνα $=$ συνα. συνα $=$ συν$^2\alpha$ καὶ συν $(90^\circ - \alpha)$ ἡμα $=$ ἡμα. ἡμα $=$ ἡμ$^2\alpha$.

Ἑπομένως ἡμ$(90^\circ - \alpha)$συνα $+$ συν$(90^\circ - \alpha)$ἡμα $=$ συν$^2\alpha +$ ἡμ$^2\alpha = 1$.

§ 299. Ἐπειδὴ ἐφ $\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ ἐφτ $=$ σφτ. ἐφτ $= 1$, σφ $\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right)$ σφ τ $=$ ἐφ τ. σφτ $= 1$, τὸ ζητούμενον εἶναι 0.

§ 300. Παρατηροῦμεν ὅτι $(90^\circ + \tau) + (-\tau) = 90^\circ$. Ἑπομένως ἡμ $(90^\circ + \tau) =$ συν $(-\tau) =$ συντ, συν $(90^\circ + \tau) =$ ἡμ $(-\tau) = -$ ἡμ τ.

§ 301. Ὁμοίως ἐφ $(90^\circ + \tau) =$ σφ $(-\tau) = -$ σφτ,
σφ $(90^\circ + \tau) =$ ἐφ $(-\tau) = -$ ἐφτ.

§ 302. Ἐπειδὴ ἡμ $(90^\circ + \tau)$ ἡμτ $=$ συν $(-\tau)$ ἡμτ $=$ συντ ἡμτ καὶ συν $(90^\circ + \tau)$ συντ $=$ ἡμ $(-\tau)$ συντ $= -$ ἡμτ συντ, ἕπεται ὅτι τὸ ζητούμενον εἶναι 0.

§ 303. Ἐπειδὴ σφ $\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right)$ σφω $=$ ἐφ$(-\omega)$ σφω $= -$ ἐφωσφω

$= -1$ καὶ ἐφ $\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$ ἐφω $=$ σφω. ἐφω $= 1$,

$$\text{ἕπεται ὅτι σφ}\left(\frac{\pi}{2}+\omega\right)\text{σφω} - \text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\text{ἐφω} = -1-1 = -2.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΩΝ ΔΙΑΦΕΡΟΝΤΩΝ ΚΑΤΑ 180°

§ 304. Α΄) Παρατηροῦμεν ὅτι $225^\circ - 45^\circ = 180^\circ$. Ἑπομένως

$$\text{ἡμ } 225^\circ = -\text{ἡμ } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \ \text{συν } 225^\circ = -\text{συν } 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\text{ἐφ}225^\circ = \text{ἐφ}45^\circ = 1$ κ.τ.λ.

Β΄) Ἐπειδὴ $210^\circ - 30^\circ = 180^\circ$, ἕπεται ὅτι $\text{ἡμ } 210^\circ = -\text{ἡμ}30^\circ =$

$$-\frac{1}{2}, \ \text{συν } 210^\circ = -\text{συν } 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \text{ἐφ } 210^\circ = \text{ἐφ } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ κ.τ.λ.}$$

Γ΄) Ἐπειδὴ $240^\circ - 60^\circ = 180^\circ$, εἶναι $\text{ἡμ}240^\circ = -\text{ἡμ}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κτλ.

§ 305. Α΄) $\text{ἡμ } (-225^\circ) = -\text{ἡμ } 225^\circ = \text{ἡμ}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\text{συν } (-225) = \text{συν } 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

Β΄) $\text{ἡμ } (-210^\circ) = -\text{ἡμ}210^\circ = \frac{1}{2}, \ \text{συν}(-210^\circ) = \text{συν}210$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}, \ \text{ἐφ}(-210^\circ) = -\text{ἐφ}210^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ κ.τ.λ.}$$

Γ΄) $\text{ἡμ } (-240^\circ) = -\text{ἡμ } 240^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

§ 306. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἡμ } (180^\circ + \tau) \text{ ἡμτ} = -\text{ἡμτ. ἡμτ} = -\text{ἡμ}^2\tau$ καὶ $\text{συν } (180^\circ + \tau) \text{ συντ} = -\text{συντ. συντ} = -\text{συν}^2\tau$.
Ἑπομένως τὸ ζητούμενον εἶναι $-\text{ἡμ}^2\tau - \text{συν}^2\tau = -1$.

§ 307. $\text{ἐφ}(\pi+\tau) \text{ σφτ} = \text{ἐφτ. σφτ} = 1, \ \text{σφ}(\pi+\tau) \text{ ἐφτ} = \text{σφτ ἐφτ} = 1$.

§ 308. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων εὑρίσκομεν 0.

§ 309. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἡμ } (\pi+\tau) \text{ συν } (\pi-\tau) = (-\text{ἡμτ}) (-\text{συντ})$ $= \text{ἡμτ συντ}$ καὶ $\text{συν } (\pi+\tau) \text{ ἡμ } (\pi-\tau) = (-\text{συντ}) \text{ ἡμτ} = -\text{ἡμτ συντ}$.
Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι 0.

§ 310. Ἐπειδὴ $ἐφ(180^\circ+ω)σφ(90^\circ+ω) = ἐφω\, ἐφ(-ω) = -ἐφ^2ω$ καὶ $ἐφ(180^\circ-ω)\, σφ(90^\circ-ω) = -ἐφω . ἐφω = -ἐφ^2ω$, ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 0.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΩΝ ΕΧΟΝΤΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑ 360°

§ 311. Ἐπειδὴ $300^\circ+60^\circ=360^\circ$, ἕπεται ὅτι:

$$ἡμ\, 300^\circ = -ἡμ\, 60 = -\frac{\sqrt{3}}{2},\quad συν\, 300^\circ = συν\, 60^\circ = \frac{1}{2}\ κ.τ.λ.$$

Ὁμοίως $ἡμ315^\circ = -ἡμ\, 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2},\quad συν\, 135^\circ = συν\, 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

$$ἡμ330^\circ = -ἡμ30^\circ = -\frac{1}{2},\quad συν\, 330^\circ = συν\, 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\ κ.τ.λ.$$

§ 312. $ἡμ(-300^\circ) = -ἡμ.\, 300^\circ = ἡμ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

$$ἡμ\,(-315^\circ) = -ἡμ\, 315^\circ = ἡμ\, 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\ κ.τ.λ.$$

$$ἡμ\,(-330^\circ) = -ἡμ\, 330^\circ = ἡμ\, 30^\circ = \frac{1}{2}\ κ.τ.λ.$$

§ 313. Ἐπειδὴ $ἡμ\,(360^\circ-α)\, ἡμ(-α) = (-ἡμα)\,(-ἡμα) = ἡμ^2α$ καὶ $συν\,(360^\circ-α)\, συν\,(-α) = συνα,\ συνα = συν^2α$, τὸ ζητούμενον εἶναι $ἡμ^2α+συν^2α = 1$.

§ 314. Ἐπειδὴ $ἐφ\,(360^\circ-α)\, σφ\,(180^\circ+α) = -ἐφα . σφα = -1$ καὶ $σφ(360^\circ-α)\, ἐφ\,(180^\circ-α) = (-σφα)\,(-ἐφα) = 1$, ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $-1-1 = -2$.

§ 315. Γνωρίζομεν ὅτι $ἡμ(2π-τ)\, συν\left(\frac{π}{2}+τ\right) = -ἡμτ ἡμ(-τ)$

$$= ἡμ^2τ \text{ καὶ } συν\,(2π-τ)\, ἡμ\left(\frac{π}{2}+τ\right) = συντ.συν(-τ) = συν^2τ.$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι $ἡμ^2τ+συν^2τ = 1$.

ΑΝΑΓΩΓΗ ΤΟΞΟΥ ΕΙΣ ΤΟ Α΄ ΤΕΤΑΡΤΗΜΟΡΙΟΝ

§ 316. Ἐπειδὴ $180^\circ - 132^\circ\,40' = 47^\circ\,20'$, ἕπεται ὅτι

$$\left.\begin{array}{l} \text{ἡμ}\,(132^\circ\,40') = \text{ἡμ}\,(47^\circ\,20') = 0,73531 \\ \text{συν}\,(132^\circ\,40') = -\text{συν}(47^\circ\,20') = -\,0,67773 \end{array}\right\}\ \text{ἀπὸ τὸν πίνακα I}$$

κ.τ.λ.

Ἐπειδὴ δὲ $180^\circ - (108^\circ\,25') = 71^\circ\,35'$, ἕπεται ὅτι

ἡμ$(108^\circ\,25')$ = ἡμ$(71^\circ\,35')$. ἡμ $(71^\circ\,30') = 0,94832$

Εἰς αὔξησιν κατὰ 5΄ ἀντιστοιχεῖ αὔξ. $= 0,00044$

Ἑπομένως ἡμ $(71^\circ\,35') = 0,94876$

Ὁμοίως εἶναι συν$(108^\circ\,25') = -$ συν$(71^\circ\,35') = -\,0,31595$

ἐφ$(108^\circ\,25') = -$ ἐφ $(71^\circ\,35') = -\,3,00325$

σφ$(108^\circ\,25') = -$ σφ $(71^\circ\,35') = -\,0,33298$.

§ 317. Ἐπειδὴ $(202^\circ\,20') - 180^\circ = 22^\circ\,20'$, θὰ εἶναι

ἡμ $(202^\circ\,20') = -$ ἡμ $(22^\circ\,20') = -\,0,37999$,

συν$(202^\circ\,20') = -$ συν$(22^\circ\,20') = -\,0,92499$ κ.τ.λ.

Ὁμοίως, ἐπειδὴ $(228^\circ\,45') - 180^\circ = 48^\circ\,45'$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡμ $(228^\circ\,45') = -$ ἡμ$(48^\circ\,45') = -\,0,75183$ κ.τ.λ.

§ 318. Ἐπειδὴ $360^\circ - (285^\circ\,50') = 74^\circ\,10'$, ἕπεται ὅτι ἡμ$(285^\circ\,50') = -$ ἡμ$(74^\circ\,10') = -\,0,96206$ κ.τ.λ.

Ἕνεκα δὲ τῆς $360^\circ - (305^\circ\,35') = 54^\circ\,25'$ εἶναι ἡμ$(305^\circ\,35') = -$ ἡμ$(54^\circ\,25') = -\,0,81326$ κ.τ.λ.

§ 319 Ἐπειδὴ $820^\circ\,40' = 360^\circ.2 + (100^\circ 40')$, ἕπεται ὅτι: ἡμ$(820^\circ 40')$=ἡμ$(100^\circ 40')$=συν$(-10^\circ 40')$=συν$(10^\circ 40')$=9,98272 κ.τ.λ.

Ἐπίσης ἕνεκα τῆς $1382^\circ\,25' = 360^\circ.3 + (303^\circ\,25')$ εἶναι ἡμ$(1382^\circ\,25')$=ἡμ$(302^\circ\,25')$= $-$ἡμ$(57^\circ\,35')$=$-$ 0,84416 κ.τ.λ.

§ 320. Γνωρίζομεν ὅτι ἡμ$(-167^\circ\,20') = -$ ἡμ$(167^\circ\,20') =$ $-$ ἡμ$(12^\circ\,40') = -\,0,21928$ κ.τ.λ.

Ἐπίσης ἡμ$(-\,265^\circ\,10') = -$ ἡμ$(265^\circ\,10') =$ ἡμ$(85^\circ\,10') =$ 0,96644 κ.τ.λ.

ἡμ$(-298^\circ\,15')$= $-$ἡμ$(298^\circ\,15')$=ἡμ$(61^\circ\,45')$=0,88088 κ.τ.λ.

§ 321. ἡμ $(-\,467^\circ\,50') = -$ ἡμ $(467^\circ\,50') = -$ ἡμ$(107^\circ\,50') =$ $-$ ἡμ $(72^\circ\,10') = -\,0,95195$ κ.τ.λ.

ἡμ$(-2572^\circ\,35') = -$ ἡμ$(2572^\circ\,35')$. Ἐπειδὴ δὲ $2572^\circ\,35' = 360^\circ.7 + 52^\circ 35'$, ἕπεται ὅτι ἡμ $(2572^\circ\,35')$=ἡμ$(52^\circ\,35')$ καὶ ἡμ$(-2572^\circ\,35')$= ἡμ$(52^\circ\,35')$ κ.τ.λ.

Ὁμοίως $ἡμ(-2724^o\,30') = -ἡμ(2724^o\,30') = -ἡμ(204^o\,30') = ἡμ(24^o\,30') = 0,41469$ κ.τ.λ.

§ 322. Ἐπειδὴ $180^o - 95^o = 85^o$, εἶναι $ἡμ95^o = ἡμ85^o$. Ἐπειδὴ δὲ $265^o - 180^o = 85^o$, εἶναι $ἡμ265^o = -ἡμ85^o$. Ἑπομένως $ἡμ95^o + ἡμ265^o = ἡμ85^o - ἡμ85^o = 0$.

§ 323. Ἐπειδὴ $642^o = 360^o + 282^o$, εἶναι $ἐφ642^o = ἐφ282^o = -ἐφ78^o$. Ἐπειδὴ δὲ $978^o = 360^o.2 + 258^o$, θὰ εἶναι $ἐφ978^o = ἐφ258^o = ἐφ78^o$. Ἑπομένως $ἐφ642^o + ἐφ978^o = -ἐφ78 + ἐφ78 = 0$.

§ 324. Ἐπειδὴ $820^o = 360^o.2 + 100^o$, εἶναι $συν820^o = συν100^o = -συν80^o$. Ἐπειδὴ δὲ $συν280^o = συν80^o$, ἕπεται ὅτι $συν820^o + συν280^o = -συν80^o + συν80^o = 0$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΤΟΞΩΝ

§ 325. Α΄) $ἡμ(α+β) = ἡμασυνβ + ἡμβσυνα$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ α καὶ β περιέχονται μεταξὺ 0^o καὶ 90^o, ἕπεται ὅτι

$$συνα = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \quad καὶ \quad ἡμβ = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Ἑπομένως } ἡμ(α+β) = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} + \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}.$$

Β΄) $συν(α+β) = συνασυνβ - ἡμαἡμβ = \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{25}$.

§ 326. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $ἡμ(α+β) = ἡμασυνβ + ἡμβσυνα$
καὶ $ἡμ(α-β) = ἡμασυνβ - ἡμβσυνα$

εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμ(α+β) + ἡμ(α-β) = 2ἡμασυνβ = 2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{24}{25}$.

§ 327. Ἐπειδὴ $συν(α+β) = συνασυνβ - ἡμαἡμβ$
καὶ $συν(α-β) = συνασυνβ + ἡμαἡμβ$, ἕπεται ὅτι

$$συν(α+β) + συν(α-β) = 2\,συνασυνβ = 2\cdot\frac{5}{8}\cdot\left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{5}{18}.$$

§ 328. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω (§ 326) ἰσότητας εὑρίσκομεν ὅτι

$$ἡμ(α+β) - ἡμ(α-β) = 2ἡμβσυνα = 2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2}{3}.$$

§ 329. Ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω (§ 327) ἰσότητας εὑρίσκομεν ὅτι

$συν(α-β) - συν(α+β = 2ημαημβ = 2.0,4.\frac{3}{4} = 0,6.$

§ 330. Ἀπὸ τὰ γνωστὰ ἀναπτύγματα τοῦ ἡμ(α+β), συν(α+β), εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{2ημ(α+β)}{συν(α+β)+συν(α-β)} = \frac{2ημασυνβ + 2ημβσυνα}{2συνασυνβ}$$

$$= \frac{ημασυνβ}{συνασυνβ} + \frac{ημβσυνα}{συνασυνβ} = εφα + εφβ.$$

§ 331. Ἀπὸ τὰ γνωστὰ ἀναπτύγματα τῶν ἡμ (α + β), ἡμ(α — β) εὑρίσκομεν ὅτι: $ημ^2(α+β) = ημ^2ασυν^2β + 2ημαημβσυνασυνβ + συν^2αημ^2β$

καὶ $ημ^2(α-β) = ημ^2ασυν^2β - 2ημαημβσυνασυνβ + συν^2αημ^2β$,

ὅθεν $ημ^2(α+β) + ημ^2(α-β) = 2(ημ^2ασυν^2β + ημ^2βσυν^2α)$.

§ 332. $Εφ(α+β) = \frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ} = \frac{2+1,5}{1-2.1,5} = \frac{3,5}{-2} = -1,75.$

$$εφ(α-β) = \frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ} = \frac{2-1,5}{1+2.1,5} = \frac{0,5}{4} = 0,125.$$

§ 333. Ἐπειδὴ $75^0 = 45^0 + 30^0$, θὰ εἶναι $εφ75^0 = εφ(45^0 + 30^0)$

$$= \frac{εφ45^0 + εφ30^0}{1 - εφ45^0.εφ30^0} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{2} = 2+\sqrt{3}.$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $15^0 = 45^0 - 30^0$, ἕπεται ὅτι $εφ15^0 =$

$$εφ(45^0 - 30^0) = \frac{εφ45^0 - εφ30^0}{1+εφ30^0.εφ45^0} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $75^0 + 15^0 = 90^0$, εἶναι $σφ75^0 = εφ15^0 = 2-\sqrt{3}$

καὶ $σφ15^0 = εφ75^0 = 2+\sqrt{3}$.

§ 334. Α') Κατὰ τὴν ὑπόθεσιν $(Α+Β)+Γ = 180^0$. Ἐπομένως

$$\varepsilon\varphi(A+B) = -\varepsilon\varphi\Gamma \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B} = -\varepsilon\varphi\Gamma.$$

Ἂν δὲ ἐξαλείψωμεν τὸν παρονομαστήν, εὑρίσκομεν $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = -\varepsilon\varphi\Gamma + \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$, ὅθεν $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma$.

Β') Ἐπειδὴ $\varepsilon\varphi A = \frac{1}{\sigma\varphi A}$ κ.τ.λ., ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{1}{\sigma\varphi A} + \frac{1}{\sigma\varphi B} + \frac{1}{\sigma\varphi\Gamma} = \frac{1}{\sigma\varphi A\sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma}.$$

Ἂν δὲ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστάς, εὑρίσκομεν $\sigma\varphi A\sigma\varphi B + \sigma\varphi B\sigma\varphi\Gamma + \sigma\varphi A\sigma\varphi\Gamma = 1$.

§ 335. Γνωρίζομεν ὅτι $\varepsilon\varphi(45^\circ - \omega) = \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ - \varepsilon\varphi\omega}{1+\varepsilon\varphi 45^\circ\varepsilon\varphi\omega}$

$$= \frac{1-\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}{1+\frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega - \eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega + \eta\mu\omega}.$$

§ 336. Α') Ἐπειδὴ $(\alpha+\beta)+\gamma = 90^\circ$, εἶναι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \sigma\varphi\gamma =$

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\gamma}$$

Ἂν δὲ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστάς, εὑρίσκομεν ὅτι
$\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma = 1 - \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta$, ὅθεν
$\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma + \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\gamma = 1$.

Β') Αὕτη γίνεται $\frac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta} + \frac{1}{\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma} + \frac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\gamma} = 1$.

Μετὰ δὲ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν εὑρίσκομεν ὅτι
$\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\gamma = \sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta\sigma\varphi\gamma$.

§ 337. Α') Γνωρίζομεν ὅτι $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{1}{\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)}$. Ἐπειδὴ δὲ

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}, \text{ ἕπεται ὅτι}$$

$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}$ Αὕτη διὰ $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{\sigma\varphi\alpha}$, $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{\sigma\varphi\beta}$ γίνεται

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \frac{1-\frac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta}}{\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}+\frac{1}{\sigma\varphi\beta}} = \frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}.$$

B) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\varphi\,(\alpha-\beta)=\dfrac{1}{\grave{\varepsilon}\varphi(\alpha-\beta)}=\dfrac{1+\grave{\varepsilon}\varphi\alpha\grave{\varepsilon}\varphi\beta}{\grave{\varepsilon}\varphi\alpha-\grave{\varepsilon}\varphi\beta}$

$$=\frac{1+\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta}}{\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}-\dfrac{1}{\sigma\varphi\beta}}=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΔΙΠΛΑΣΙΟΥ ΤΟΞΟΥ

§ 338. Γνωρίζομεν ὅτι $\acute{\eta}\mu 2\alpha=2\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$. Ἐπειδὴ δὲ $\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{3}{5}$, θὰ εἶναι $\acute{\eta}\mu\alpha=\pm\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}$ καὶ ἑπομένως

$$\acute{\eta}\mu 2\alpha=\pm\,2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}=\pm\frac{24}{25}\cdot$$ Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\sigma\upsilon\nu^2\alpha-1$ εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=2\cdot\dfrac{9}{25}-1=-\dfrac{7}{25}$.

339. $$\text{Ἐφ}2\alpha=\frac{2\grave{\varepsilon}\varphi\alpha}{1-\grave{\varepsilon}\varphi^2\alpha}=\frac{2\cdot\dfrac{3}{5}}{1-\dfrac{9}{25}}=\frac{30}{16}=\frac{15}{8}.$$

§ 340. Γνωρίζομεν ὅτι $\grave{\varepsilon}\varphi\,(45^0+\alpha)=\dfrac{\grave{\varepsilon}\varphi 45^0+\grave{\varepsilon}\varphi\alpha}{1-\grave{\varepsilon}\varphi 45^0\grave{\varepsilon}\varphi\alpha}=$

$$\frac{1+\dfrac{\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{1-\dfrac{\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\acute{\eta}\mu\alpha}.$$ Ὁμοίως (§ 335) εὑρίσκομεν ὅτι

$\grave{\varepsilon}\varphi\,(45^0-\alpha)=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\acute{\eta}\mu\alpha}$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\grave{\varepsilon}\varphi(45^0+\alpha)-\grave{\varepsilon}\varphi(45^0-\alpha)=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\acute{\eta}\mu\alpha}-\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\acute{\eta}\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\acute{\eta}\mu\alpha}$$

$$=\frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\acute{\eta}\mu\alpha)^2-(\sigma\upsilon\nu\alpha-\acute{\eta}\mu\alpha)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\acute{\eta}\mu^2\alpha}=\frac{4\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=2\cdot\frac{\acute{\eta}\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=2\grave{\varepsilon}\varphi 2\alpha.$$

§ 341. Προηγουμένως (§ 337) ἀπεδείχθη ὅτι :

$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$. Αὕτη διὰ $\beta=\alpha$ γίνεται $\sigma\varphi 2\alpha=\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}$.

§ 342. Προφανῶς εἶναι $\sigma\varphi\alpha-\dot{\varepsilon}\varphi\alpha=\sigma\varphi\alpha-\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}=\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{\sigma\varphi\alpha}$

$$=2\cdot\frac{\sigma\varphi^2\alpha-1}{2\sigma\varphi\alpha}=2\sigma\varphi 2\alpha.$$

§ 343. Ἐπειδὴ $\dot{\eta}\mu 2\alpha=2\dot{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ καὶ $\dot{\eta}\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$,

ἕπεται ὅτι $\dot{\eta}\mu 2\alpha=\dfrac{2\dot{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\dot{\eta}\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{2}{\dfrac{\dot{\eta}\mu^2\alpha}{\dot{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\dot{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\dfrac{2}{\dot{\varepsilon}\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha}$.

§ 344. Γνωρίζομεν ὅτι $\dot{\eta}\mu\omega=\dfrac{2\,\dot{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}$

καὶ $\sigma\upsilon\nu\omega=\dfrac{1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}{1+\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}$. Ἐκ τούτων διὰ $\dot{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{3}{5}$ εὑρίσκο-

μεν ὅτι $\dot{\eta}\mu\omega=\dfrac{\dfrac{6}{5}}{1+\dfrac{9}{25}}=\dfrac{30}{34}=\dfrac{15}{17}$ καὶ

$$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{1-\dfrac{9}{25}}{1+\dfrac{9}{25}}=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}.$$

§ 345. Εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους θέτομεν $\dot{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$ $=1,5$ καὶ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις.

§ 346. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῆς $\left|\dot{\varepsilon}\varphi\left(\dfrac{\omega}{2}\right)\right|<1$ ἕπεται ὅτι

$\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)<1$ καὶ $1-\dot{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)>0$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ

$+ ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right) > 0$, ἕπεται ὅτι $συνω > 0$.

§ 347. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κατὰ τὸν τύπον

$ημω = \dfrac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1 + ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$ τὸ ἡμω εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὴν $ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)$.

§ 348. Γνωρίζομεν ὅτι $ἐφα \, . \, ἐφ2α = ἐφα \cdot \dfrac{2ἐφα}{1 - ἐφ^2α} = \dfrac{2ἐφ^2α}{1 - ἐφ^2α}$.

Ἑπομένως $1 + ἐφα . ἐφ2α = 1 + \dfrac{2ἐφ^2α}{1 - ἐφ^2α} = \dfrac{1 + ἐφ^2α}{1 - ἐφ^2α}$. Ἐπειδὴ δὲ

$συν2α = \dfrac{1 - ἐφ^2α}{1 + ἐφ^2α}$, ἕπεται ὅτι $1 + ἐφα \, . \, ἐφ2α = \dfrac{1}{συν2α}$.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΥ ΗΜΙΣΕΟΣ ΤΟΞΟΥ

§ 349. Ἐπειδὴ $0^0 < \frac{ω}{2} < 90^0$, τὸ τόξον $\frac{ω}{2}$ λήγει εἰς τὸ α΄ τεταρτημόριον. Ἑπομένως ὅλοι οἱ τριγ. ἀριθμοὶ αὐτοῦ εἶναι θετικοί.

Εἶναι λοιπὸν $ημ\frac{ω}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - συνω}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{3}{8}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{6}$.

$συν\frac{ω}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + \frac{1}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{5}{8}} = \dfrac{1}{4}\sqrt{10}$, $ἐφ\frac{ω}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - {}^1/_4}{1 + {}^1/_4}} = \sqrt{\dfrac{3}{5}}$

$= \dfrac{1}{5}\sqrt{15}$.

§ 350. Παρατηροῦμεν ὅτι $23^0 \; 30' = 45^0 : 2$ καὶ κατὰ γνωστοὺς τύπους εἶναι $ημ(22^0 \; 30') = \sqrt{\dfrac{1 - συν45^0}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \text{συν}(22^\circ\ 30')=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$\text{ἐφ}(22^\circ\ 30')=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$=\sqrt{2}-1$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\text{σφ}(22^\circ\ 30')=\sqrt{2}+1$.

§ 351. Παρατηροῦμεν ὅτι $15^\circ=30^\circ:2$ καὶ ἐνθυμούμεθα ὅ

$\text{συν}\ 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Οὕτως εὑρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἡμ}15^\circ=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}},\ \text{συν}\ 15^\circ=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}},$$

$$\text{ἐφ}\ 15^\circ=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3},\ \text{σφ}\ 15^\circ=\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}.$$

§ 352. Παρατηροῦμεν ὅτι $7^\circ\ 30'=15^\circ:2$ καὶ εὑρίσκομεν ὅ

$$\text{ἡμ}(7^\circ\ 30')=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

κ.τ.λ.

§ 353. Ἐπειδὴ $270^\circ<\frac{\omega}{2}<360^\circ$, τὸ $\frac{\omega}{2}$ λήγει εἰς τὸ δ΄ τ

ταρτημόριον. Ἑπομένως ἔχει θετικὸν συνημίτονον καὶ ἀρνητικο τοὺς ἄλλους τριγ. ἀριθμούς. Κατὰ δὲ τοὺς γνωστοὺς τόπους εἶ

$$\text{ἡμ}\ \frac{\omega}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{3}}{2}}=-\sqrt{\frac{1}{6}}=-\frac{1}{6}\sqrt{6},$$

$$\text{συν}\ \frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{2}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{6}}=\frac{1}{6}\sqrt{30}\ \text{κ.τ.λ.}$$

§ 354. $\text{ἡμ}\ \frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+0,5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{3},\ \text{συν}\ \frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1-0,5}{2}}$

$\frac{1}{2}$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΛΑΣΣΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

§ 355. Γνωρίζομεν ὅτι $\varrho=\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$. Ἐπειδὴ

$\alpha=8$, $\beta=9$, $\gamma=10$, $2\tau=27$

$\tau=13{,}5$, $\tau-\alpha=5{,}5$, $\tau-\beta=4{,}5$, $\tau-\gamma=3{,}5$,

ἔπεται ὅτι $\varrho=\sqrt{\dfrac{5{,}5\,.\,4{,}5:3{,}5}{13{,}5}}=\sqrt{\dfrac{5{,}5\,.\,3{,}5}{3}}$

$=\sqrt{\dfrac{55\,.\,35}{300}}=\sqrt{\dfrac{11\,.\,7}{12}}=\dfrac{1}{12}\sqrt{11\,.\,7\,.\,12}=\dfrac{1}{12}\sqrt{4.231}$

$=\dfrac{1}{6}\cdot 15{,}19=2{,}53$ μέτ.

§ 356. Α') Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἐφ}\,\dfrac{A}{2}=\dfrac{\varrho}{\tau-\alpha}$ κ.τ.λ.,

$=\sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha=347$, $\beta=247$, $\gamma=147$

ἔπεται ὅτι $2\tau=741$, $\tau=370{,}5$

$\tau-\alpha=23{,}5$

$\tau-\beta=123{,}5$

$\tau-\gamma=223{,}5$ καὶ ἑπομένως

$$\lambda o\gamma\varrho=\frac{\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)-\lambda o\gamma\tau}{2}$$

λογ(τ—α)	=1,37107
λογ(τ—β)	=2,09167
λογ(τ—γ)	=2,34928
ἄθροισμα	=5,81202
λογ τ	=2,56879
διαφορὰ	=3,24323
λογρ	=1,62161

ὑπολογισμὸς τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ.

$$\lambda o\gamma\,\text{ἐφ}\,\frac{A}{2}=\lambda o\gamma\varrho-\lambda o\gamma(\tau-\alpha)$$

λογρ	=1,62161
λογ(τ—α)	=1,37107
λογ ἐφ $\frac{A}{2}$	=0,25054
$\frac{A}{2}$	$=60^\circ 40' 46''$
A	$=121^\circ 21' 32''$

λογρ	=1,62161
λογ(τ—β)	=2,09167
λογ ἐφ $\frac{B}{2}$	$=\bar{1},52994$
$\frac{B}{2}$	$=18^\circ 42' 57'',57$
B	$=37^\circ 25' 52'',14$

$$\lambda o\gamma \varrho = 1,62161$$
$$\lambda o\gamma(\tau-\gamma) = 2,34928$$
$$\lambda o\gamma\, \grave{\varepsilon}\varphi \frac{\Gamma}{2} = \bar{1},27233$$
$$\frac{\Gamma}{2} = 10^{\circ}\, 36'\, 12'',\, 85,$$

$\Gamma = 21^{\circ}\, 12'\, 25'',\, 70$

Δοκιμὴ

$A = 121^{\circ}\, 21'\, 32''$

$B = \ 37^{\circ}\, 25'\, 57'',14$

$\Gamma = \ 21^{\circ}\, 12'\, 25'',70$

$A+B+\Gamma = 179^{\circ}\, 59'\, 54'',84$

$180^{\circ} = 179^{\circ}\, 59'\, 60''$

διαφορὰ $= \quad 5'',16$

Ὑπολογισμὸς τοῦ Ε.

$$E = \sqrt{\tau\,(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}$$
$$\lambda o\gamma E = \frac{[\lambda o\gamma(\tau-\alpha)+\lambda o\gamma(\tau-\beta)+\lambda o\gamma(\tau-\gamma)]+\lambda o\gamma\tau}{2}$$

ἀθρ. ἐντὸς ἀγκυλῶν $= 5,81202$

$\lambda o\gamma\tau = 2,56879$

ἄθροισμα $= 8,38081$

$\lambda o\gamma E = 4,19040$

$E = 15502,5$ τ. μέτ.

Β') Ἐκ τοῦ τύπου $\varrho_\alpha = \sqrt{\dfrac{\tau(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$ εὑρίσκομεν

$2\,\lambda o\gamma\varrho_\alpha = \lambda o\gamma\tau + \lambda o\gamma(\tau-\beta) + \lambda o\gamma(\tau-\gamma) - \lambda o\gamma(\tau-\alpha) = 2,81933$ καὶ $\varrho_\alpha = 659,67$ μέτρα.

§ 357. Γνωρίζομεν ὅτι $\varrho = (\tau-\alpha)\grave{\varepsilon}\varphi \dfrac{A}{2}$ καὶ ἐπομένως

$$\lambda o\gamma\varrho = \lambda o\gamma(\tau-\alpha) + \lambda o\gamma\grave{\varepsilon}\varphi \frac{A}{2}\cdot$$

$\lambda o\gamma(\tau-\alpha) = 0,74036$

$\lambda o\gamma\grave{\varepsilon}\varphi \dfrac{A}{2} = \bar{1},34088$

$\lambda o\gamma\varrho = 0,08124$ καὶ

$\varrho = 1,205694$ μέτρα.

§ 358. Ἕνεκα τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ΑΚΕ, ΑΚ'Θ εἶναι $\varrho_\alpha : \varrho = A\Theta : AE$. Ἐπειδὴ $(A\Theta) = \tau$, $AE = \tau - \alpha$, ἔπεται ὅτι $\varrho_\alpha = \varrho \cdot \dfrac{\tau}{\tau-\alpha} = \sqrt{\dfrac{(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau}} \cdot \dfrac{\tau}{\tau-\alpha}$

$$= \sqrt{\frac{\tau\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}.$$

§ 359. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}$, $E = \tau\,(\tau-\alpha)$ ἔπεται ὅτι $\tau(\tau-\alpha) = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)\,(\tau-\beta)\,(\tau-\gamma)}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι

$$1=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}=\text{ἐφ}\,\frac{A}{2},\ \text{ὅθεν}\ \frac{A}{2}=45^0\ \text{καὶ}\ A=90^0.$$

Ἂν δὲ $A=90^0$, θὰ εἶναι $\text{ἐφ}\,\frac{A}{2}=\text{ἐφ}\,45^0=1=\sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}}$.
Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\tau(\tau-\alpha)$, ἡ δὲ ἰσότης $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ γίνεται $E=\tau(\tau-\alpha)$.

§ 360. Γνωρίζομεν ὅτι $\varrho_\alpha=\tau\ \text{ἐφ}\,\frac{A}{2}$ καὶ ἐπομένως $\text{ἐφ}\,\frac{A}{2}=\frac{\varrho_\alpha}{\tau}$, λογ ἐφ $\frac{A}{2}=$ λογ ϱ_α — λογ τ καὶ $A=28^0\ 57'\ 4'',76$.

§ 361. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=2R^2\,\text{ἡμ}A\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma$.

§ 362. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=\frac{\alpha^2\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma}{2\,\text{ἡμ}A}$.

§ 363. Γνωρίζομεν ὅτι $E=\alpha R\,\text{ἡμ}B\,\text{ἡμ}\Gamma$ κ.τ.λ.

§ 364. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=\tau(\tau-\alpha)\ \text{ἐφ}\,\frac{A}{2}$.

§ 365. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=\tau\varrho$.

§ 366. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $E=\sqrt{\varrho\,\varrho_\alpha\,\varrho_\beta\,\varrho_\gamma}$.

§ 367. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $E=\tau^2\,\text{ἐφ}\,\frac{A}{2}\,\text{ἐφ}\,\frac{B}{2}\,\text{ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\tau^2=\frac{8160}{\text{ἐφ}\,\frac{A}{2}\,\text{ἐφ}\,\frac{B}{2}\,\text{ἐφ}\,\frac{\Gamma}{2}}\ \text{κ.τ.λ.}$$

§ 368. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\alpha+\beta=130$ καὶ ἔπειτα $\gamma=2\tau-130=250-130=120$. Ἔπειτα δὲ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον $R=\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$.

ΛΟΓΙΣΤΑΙ ΔΙΑ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

§ 369. Ἂν $y=\text{ἡμ}(38^016')+\text{ἡμ}(52^024')$, τρέποντες τὸ β΄ μέλος εἰς γινόμενον εὑρίσκομεν $y=2\,\text{ἡμ}(45^020')\ \text{συν}\,(7^04')$, ὅθεν λογ$y=$λογ$2+$λογἡμ$(45^020')$ + λογ συν $(7^04')$ κ.τ.λ.

§ 370. Θέτοντες $x=\text{ἡμ}(64^040'20'')-\text{ἡμ}(28^016'8'')$ εὑρίσκομεν $x=2\,\text{ἡμ}(18^012'6'')\ \text{συν}(46^028'14'')$ κ.τ.λ. ὡς προηγουμένως.

§ 371. Ἂν $z=\text{συν}(18^046'54'')+\text{συν}(40^024'12'')$ εὑρίσκομεν ὅτι $z=2\ \text{συν}\,(29^035'33'')\ \text{συν}\,(10^048'39'')$ κ.τ.λ.

§ 372. Ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν
$x=2ἡμ\,(46^\circ\ 17'40'')\,ἡμ\,(12^\circ\ 1'4'')$ κ.τ.λ.

§ 373. Α΄) Θέτομεν $x=1+ἡμ(26^\circ22'40'')=ἡμ90^\circ+ἡμ(26^\circ22'40'')$ καὶ εὑρίσκομεν $x=2\ ἡμ(45^\circ+13^\circ11'20'')\ συν\ (45^\circ-13^\circ11'20'')$.

Ἐπειδὴ δὲ $(45^\circ+13^\circ11'20'')+(45^\circ-13^\circ11'20'')=90^\circ$, ἕπεται ὅτι $x=2ἡμ^2(45^\circ+13^\circ11'20'')=2ἡμ^2(58^\circ11'20'')$,
$λογ\ x=λογ2+2λογ\ ἡμ(58^\circ11'20'')$ κ.τ.λ.

Β΄) Ἂν $y=1-ἡμ\,(26^\circ22'40'')$ εὑρίσκομεν, ὡς προηγουμένως, ὅτι $y=2\ συν^2(58^\circ11'20'')$ κ.τ.λ.

§ 374. Α΄) Κατὰ τὸν τύπον $1+συνω=2συν^2\left(\dfrac{ω}{2}\right)$ εἶναι

$x=1+συν\,(32^\circ50'34'')=2\ συν^2\,(16^\circ25'17'')$ κ.τ.λ.

Β΄) Κατὰ δὲ τὸν τύπον $1-συνω=2\ ἡμ^2\left(\dfrac{ω}{2}\right)$ εἶναι

$v=1-συν\,(32^\circ50'34'')=2ἡμ^2\,(16^\circ25'17'')$ κ.τ.λ.

§ 375. Α΄) $x=ἡμ490^\circ+ἡμ350^\circ=2ἡμ420^\circ συν70^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ 420°

$=360^\circ+60^\circ$, εἶναι $ἡμ420^\circ=ἡμ60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ καὶ

$x=\sqrt{3}\ συν\,70^\circ$, ὅθεν $λογ\ x=\dfrac{λογ\ 3}{2}+λογσυν70^\circ$ κ.τ.λ.

Β΄). Ὁμοίως $y=ἡμ490^\circ-ἡμ350^\circ=2ἡμ70^\circ\ συν\ 420^\circ$
$=2συν20^\circ συν60^\circ=συν20^\circ=0{,}93969$.

§ 376. Α΄) Γνωρίζομεν ὅτι

$$ἡμΒ+ἡμΓ=2\ ἡμ\left(\frac{Β+Γ}{2}\right)συν\left(\frac{Β-Γ}{2}\right).$$

Ἐπειδὴ δὲ $Α=90^\circ$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{Β+Γ}{2}=45^\circ$ καὶ ἑπομένως

$$ἡμΒ+ἡμΓ=2.\frac{\sqrt{2}}{2}\ συν\left(\frac{Β-Γ}{2}\right)=\sqrt{2}.συν\left(\frac{Β-Γ}{2}\right).$$

Β΄) Ὁμοίως $ἡμΒ-ἡμΓ=2ἡμ\left(\dfrac{Β-Γ}{2}\right)συν\left(\dfrac{Β+Γ}{2}\right)$

$=\sqrt{2}\,ἡμ\left(\dfrac{Β-Γ}{2}\right)$.

§ 377. Ὁμοίως $\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right)$

$= \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right).$

$\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu\Gamma = 2\eta\mu\left(\frac{B+\Gamma}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right) = \sqrt{2}\,\eta\mu\left(\frac{\Gamma-B}{2}\right).$

§ 378. Κατὰ τὸν α′ τῶν προηγουμένων τύπων εἶναι $\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha = 2\sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$.

§ 379. Ἐπειδὴ $\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu 3\omega = 2\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu\omega$ εἶναι

$\upsilon\nu\omega + 2\sigma\upsilon\nu 2\omega + \sigma\upsilon\nu 3\omega = 2\sigma\upsilon\nu 2\omega + 2\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu\omega$

$= 2\sigma\upsilon\nu 2\omega(1+\sigma\upsilon\nu\omega) = 2\sigma\upsilon\nu 2\omega . 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right) = 4\sigma\upsilon\nu 2\omega\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\omega}{2}\right).$

§ 380. Κατὰ γνωστὸν τύπον εἶναι $\eta\mu\alpha + \eta\mu 5\alpha = 2\eta\mu 3\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$.

§ 381. Α′) Κατὰ τὸν τύπον $\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}$ εἶναι

$= \frac{\eta\mu(77^\circ\,10')}{\sigma\upsilon\nu(42^\circ 30')\sigma\upsilon\nu(34^\circ 40')}$ καὶ

$\text{ογ}x = \lambda o\gamma\eta\mu(77^\circ\,10') - [\lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(42^\circ 30') + \lambda o\gamma\sigma\upsilon\nu(34^\circ 30')]$ κ.τ.λ.

Β′) $y = \varepsilon\varphi(36^\circ 45') - \varepsilon\varphi(11^\circ 45') = \frac{\eta\mu 25^\circ}{\sigma\upsilon\nu(36^\circ\,45')\sigma\upsilon\nu(11^\circ\,45')}$ κ. τ. λ.

§ 382. Α′) Θέτομεν $x = 1 + \varepsilon\varphi(120^\circ\,30') = \varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi(120^\circ\,30')$

$= \frac{\eta\mu(165^\circ\,30')}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\,\sigma\upsilon\nu(120^\circ\,30')}$. Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu(165^\circ\,30') = \eta\mu(14^\circ\,30')$,

$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sigma\upsilon\nu(120^\circ\,30') = -\sigma\upsilon\nu(59^\circ\,30')$,

πεται ὅτι $x = -\frac{2\eta\mu(14^\circ\,30')}{\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(59^\circ\,30')}$ καὶ $(-x) = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(14^\circ\,30')}{\sigma\upsilon\nu(59^\circ\,30')}$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $(-x) = 0{,}69765$ καὶ πομένως $x = -0{,}69765$.

Β′) Ὁμοίως εὑρίσκομεν $y = 1 - \varepsilon\varphi(18^\circ 20') = \frac{\sqrt{2}\,\eta\mu(26^\circ\,40')}{\sigma\upsilon\nu(18^\circ\,20')}$

.τ.λ.

§ 383. Ἐπειδὴ $1120^\circ = 360^\circ . 3 + 40^\circ$ καὶ $3635^\circ = 360 . 10 + 35^\circ$

ὰ εἶναι $x = \varepsilon\varphi 1120^\circ + \varepsilon\varphi 3635^\circ = \varepsilon\varphi 40^\circ + \varepsilon\varphi 35^\circ = \frac{\eta\mu 75^\circ}{\sigma\upsilon\nu 40^\circ\sigma\upsilon\nu 35^\circ}$ κ.τ.λ.

§ 384. Θέτομεν $x = \dot{\epsilon}\varphi(-25^0\,42') - \dot{\epsilon}\varphi(-45^0)$ καὶ εὐκόλως ἐννοοῦμεν ὅτι $x = \dot{\epsilon}\varphi 45^0 - \dot{\epsilon}\varphi(25^0\,42')$ κ.τ.λ. κατὰ τὰ γνωστά.

§ 385. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\dot{\epsilon}\varphi B + \dot{\epsilon}\varphi\Gamma = \dfrac{\acute{\eta}\mu(B+\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, $B+\Gamma=90^0$ συμπεραίνομεν ὅτι $\dot{\epsilon}\varphi B + \dot{\epsilon}\varphi\Gamma = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \dfrac{2}{2\acute{\eta}\mu B\sigma\upsilon\nu B} = \dfrac{2}{\acute{\eta}\mu\, 2B}$.

§ 386. Ὁμοίως $\dot{\epsilon}\varphi B - \dot{\epsilon}\varphi\Gamma = \dfrac{\acute{\eta}\mu(B-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \dfrac{2\acute{\eta}\mu(B-\Gamma)}{2\acute{\eta}\mu B\sigma\upsilon\nu B}$ $= \dfrac{2\acute{\eta}\mu(B-\Gamma)}{\acute{\eta}\mu 2B}$.

§ 387. Βλέπομεν πρῶτον ὅτι

$\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \dfrac{1}{\dot{\epsilon}\varphi A} + \dfrac{1}{\dot{\epsilon}\varphi B} = \dfrac{\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B}{\dot{\epsilon}\varphi A\,.\,\dot{\epsilon}\varphi B}$. Ἐπειδὴ δὲ $\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B$ $= \dfrac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\,.\,\sigma\upsilon\nu B}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \dfrac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\acute{\eta}\mu A}\cdot\dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B}$ $= \dfrac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\acute{\eta}\mu A\,.\,\acute{\eta}\mu B}$.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων $\sigma\varphi A = \dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\acute{\eta}\mu B}$, $\sigma\varphi B = \dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\acute{\eta}\mu B}$.

§ 388. Ἐπειδὴ $\sigma\varphi A + \sigma\varphi B = \dfrac{1}{\dot{\epsilon}\varphi A} + \dfrac{1}{\dot{\epsilon}\varphi B} = \dfrac{\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B}{\dot{\epsilon}\varphi A\,.\,\dot{\epsilon}\varphi B}$, ἕπεται ὅτι $\dfrac{\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B}{\sigma\varphi A + \sigma\varphi B} = (\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B)\,.\,\dfrac{\dot{\epsilon}\varphi A\dot{\epsilon}\varphi B}{\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B} = \dot{\epsilon}\varphi A\dot{\epsilon}\varphi B$.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ἰσοτήτων $\dot{\epsilon}\varphi A + \dot{\epsilon}\varphi B = \dfrac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}$, $\sigma\varphi\, A + \sigma\varphi B = \dfrac{\acute{\eta}\mu(A+B)}{\acute{\eta}\mu A\,.\,\acute{\eta}\mu B}$.

§ 389. Α΄) Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $\dfrac{5\pi}{3} = 60^0.\,5 = 300^0$ καὶ $\dfrac{3\pi}{8} = (22^0\,30')\,.\,3 = 67^0\,30'$. Ἑπομένως $\dot{\epsilon}\varphi\,\dfrac{5\pi}{3} + \dot{\epsilon}\varphi\,\dfrac{3\pi}{8} =$ $\dot{\epsilon}\varphi 300^0 + \dot{\epsilon}\varphi(67^0\,30') = \dot{\epsilon}\varphi(67^0\,30') - \dot{\epsilon}\varphi 60^0 = \dfrac{\acute{\eta}\mu(7^0\,30')}{\frac{1}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu(67^0\,30')} =$ $\dfrac{2\acute{\eta}\mu(7^0\,3^{0\prime})}{\sigma\upsilon\nu(67^{0\prime}3^0)}$ κ.τ.λ.

B'). Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $y = \text{ἐφ}\,\frac{4\pi}{3} - \text{ἐφ}\,(268^\circ\ 12')$

$= +\,\text{ἐφ}60^\circ - \text{ἐφ}(88^\circ 12')$ καὶ $-\,y = \frac{\text{ἡμ}(28^\circ 12')}{{}^1/_2.\text{συν}(88^\circ\ 12')}$

$= \frac{2\text{ἡμ}(28^\circ 12')}{\text{συν}(88^\circ 12')}$ κ.τ.λ.

§ 390. Ἐπειδὴ $\text{συν}(24^\circ 20'30'') = \text{ἡμ}(65^\circ 39'30'')$, εἶναι $x = \text{ἡμ}(18^\circ 12'40'') + \text{συν}(24^\circ 20'30'') = \text{ἡμ}(18^\circ 12'40'') + \text{ἡμ}\,(65^\circ 39'30'') = 2\text{ἡμ}\,(41^\circ 56'5'')\,\text{συν}\,(23^\circ 43')$ κ.τ.λ.

§ 391. Ἐπειδὴ $-\,\text{συν}\,(106^\circ 30'42'') = \text{συν}\,(73^\circ 29'18'') = \text{ἡμ}\,(16^\circ 30'42'')$, εἶναι $y = \text{ἡμ}\,(72^\circ 24') - \text{συν}\,(106^\circ 30'42'') = \text{ἡμ}(72^\circ 24') + \text{ἡμ}(16^\circ 30'42'') = 2\text{ἡμ}(44^\circ 27'21'')\,\text{συν}(27^\circ 56'39'')$ κ.τ.λ.

§ 392. A') Εὑρίσκομεν ὅτι $\frac{3\pi}{8} = (22^\circ 30').\ 3 = 67^\circ 30'$ καὶ

$\frac{2\pi}{5} = 72^\circ$. Ἑπομένως $y = \text{ἡμ}\,\frac{3\pi}{8} + \text{συν}\,\frac{2\pi}{5} =$

$\text{ἡμ}\,(67^\circ 30') + \text{συν}\ 72^\circ = \text{ἡμ}\,(67^\circ 30') + \text{ἡμ}\ 18^\circ =$

$2\text{ἡμ}(42^\circ\ 45')\text{συν}(24^\circ\ 45')$ κ.τ.λ.

B') Παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{7} = \frac{3\pi}{14}$ καὶ

$\text{συν}\,\frac{2\pi}{7} = \text{ἡμ}\,\frac{3\pi}{14}$. Εἶναι λοιπὸν $y = \text{ἡμ}\,\frac{4\pi}{7} - \text{συν}\,\frac{2\pi}{7}$

$= \text{ἡμ}\,\frac{8\pi}{14} - \text{ἡμ}\,\frac{3\pi}{14} = 2\ \text{ἡμ}\,\frac{5\pi}{28}\ \text{συν}\,\frac{11\pi}{28}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{5\pi}{28}$

$= 180^\circ \cdot \frac{5}{28} = 32^\circ\ 8'\,34'',28$ καὶ $\frac{11\pi}{28} = 180^\circ\,\frac{11}{28} = 70^\circ\ 42^\circ\ 51'',43$,

ἕπεται ὅτι $y = 2\text{ἡμ}(32^\circ\ 8'\ 34'',\ 28)\text{συν}(70^\circ\ 42'\ 51'',\ 43)$ κ.τ.λ.

§ 393. A') Πρῶτον εὑρίσκομεν ὅτι $1925^\circ = 360^\circ.5 + 125^\circ$ καὶ $930^\circ = 360^\circ.2 + 210^\circ$. Ἑπομένως $y = \text{ἡμ}\ 1925^\circ + \text{συν}\ 930^\circ = \text{ἡμ}\ 125^\circ + \text{συν}\ 210^\circ = \text{ἡμ}\ 55^\circ - \text{συν}\ 30^\circ = \text{ἡμ}\ 55^\circ - \text{ἡμ}\ 60^\circ$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $-\,y = \text{ἡμ}\ 60^\circ - \text{ἡμ}\ 55^\circ = 2\text{ἡμ}(2^\circ\ 30')\text{συν}(57^\circ\ 30')$ κ.τ.λ.

B') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $x = \text{συν}\ 1128^\circ - \text{ἡμ}\ 1656^\circ = \text{συν}\ 48^\circ - \text{ἡμ}\ 216^\circ = \text{ἡμ}\ 42^\circ + \text{ἡμ}\ 36^\circ = 2\text{ἡμ}\ 39^\circ\ \text{συν}\ 3^\circ$ κ.τ.λ.

§ 394. A') Πρῶτον θὰ κάμωμεν λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων τὸ ἄθροισμα $\alpha + \beta$. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha+\beta=\alpha\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ λογβ $<$ λογα, εἶναι $\beta<\alpha$, $\frac{\beta}{\alpha}<1$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=$ συνω, ἡ δὲ (1) γίνεται

$$\alpha+\beta=\alpha\,(1+\text{συν}\omega)=2\alpha\,\text{συν}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (2).$$

Ἀπὸ δὲ τὴν ἰσότητα συνω $=\frac{\beta}{\alpha}$ εὑρίσκομεν $\omega=75^\circ\ 25'\ 31''$.

Μετὰ ταύτης ἐκ τῆς (2) εὑρίσκομεν ὅτι

$\text{λογ}(\alpha+\beta)=\text{λογ}2+\text{λογ}\alpha+2\text{λογσυν}\frac{\omega}{2}=3{,}45639$ καὶ ἐντεῦθεν $\alpha+\beta=2860{,}13$.

Β′) Ὁμοίως $\alpha-\beta=\alpha\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\alpha(1-\text{συν}\omega)=2\alpha.\text{ἡμ}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$,

$\text{λογ}(\alpha-\beta)=3{,}23305$, ὅθεν $\alpha-\beta=1710{,}2$.

Δεύτερος τρόπος. Θέτομεν $\frac{\beta}{\alpha}=\text{ἡμ}^2\omega$ καὶ εὑρίσκομεν

$\alpha-\beta=\alpha(1-\text{ἡμ}^2\omega)=\alpha\text{συν}^2\omega$ κ.τ.λ.

§ 395. Παρατηροῦμεν ὅτι $z=\frac{x-y}{x+y}=\frac{x\left(1-\frac{y}{x}\right)}{x\left(1+\frac{y}{x}\right)}$

$=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{y}{x}=$ ἐφω, εὑρίσκομεν ὅτι

$$z=\frac{1-\text{ἐφ}\omega}{1+\text{ἐφ}\omega}=\frac{\text{ἐφ}45^\circ-\text{ἐφ}\omega}{1+\text{ἐφ}45^\circ.\,\text{ἐφ}\omega}=\text{ἐφ}(45^\circ-\omega). \quad (1)$$

Ἔπειτα ἐκ τῆς ἐφω $=\frac{y}{x}$ εὑρίσκομεν $\omega=24^\circ\ 8'\ 21''$, ἡ δὲ (1) γίνεται $z=\text{ἐφ}(20^\circ\ 51'\ 39'')=0{,}381025$.

§ 396. Θέτομεν $y=\sqrt{2}+2\text{ἡμ}x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\text{ἡμ}\,x\right)$

Επειδὴ δὲ $\frac{\sqrt{2}}{2}=$ ἡμ45^0, αὕτη γίνεται $y=2($ἡμ45^0+ἡμ$x)$

$=4$ἡμ $\left(\frac{x+45^0}{2}\right)$συν $\left(\frac{x-45^0}{2}\right)=4$ἡμ$(46^0 37' 50'')$συν $(1^0 37' 50'')$

κ.τ.λ.

§ 397. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἐφ$x=\sqrt{2}+$ἡμ20^0 ἕπεται ὅτι

ἐφ$x=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right.$ἡμ$\left.20^0\right)$. Ἂν δὲ θέσωμεν $\frac{\text{ἡμ}20^0}{\sqrt{2}}=$ἐφ$^2\omega$, (1)

εὑρίσκομεν ἐφ$x=\sqrt{2}\,(1+$ἐφ$^2\omega)=\frac{\sqrt{2}}{\text{συν}^2\omega}$. (2)

Ἔπειτα ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\omega=26^0\ 11' 13''$ καὶ

ἔπειτα ἐκ τῆς (2) $x=60^0 20' 31''$.

§ 398. Α′) Ἂν $x=$συν$(67^0 30')$συν$(22^0\ 30')$, θὰ εἶναι

$2x=2$συν$(67^0\ 30')$συν$(22^0\ 30')=$ συν $(45^0+$ συν$90^0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ἑπομένως $x=\frac{\sqrt{2}}{4}$

Β′) Ἂν $y=$ἡμ15^0. ἡμ75^0, θὰ εἶναι $2y=2$ἡμ15^0 ἡμ$75^0=$

συν 60^0 — συν$90^0=\frac{1}{2}$ καὶ $y=\frac{1}{4}$

§ 399. Α′) Ἂν $x=$ἡμ$(82^0\ 30')$ συν$(37^0\ 30')$, θὰ εἶναι

$2x=2$ἡμ$(82^0\ 30')$ συν$(37^0\ 30')$. Κατὰ δὲ τὸν τύπον

2ἡμασυνβ$=$ἡμ$(\alpha+\beta)+$ἡμ$(\alpha-\beta)$ εὑρίσκομεν ὅτι

$2x=$ἡμ120^0+ἡμ$45^0=$ ἡμ60^0+ ἡμ$45^0=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}$, ὅθεν

$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$.

Β′) Ἂν $y=$συν$(52^0\ 30')$. ἡμ$(7^0\ 30')$, θὰ εἶναι

$2y=2$συν$(52^0\ 30')$ἡμ$(7^0\ 30')$. Κατὰ δὲ τὸν τύπον

2ἡμβσυνα$=$ἡμ$(\alpha+\beta)-$ἡμ$(\alpha-\beta)$, αὕτη γίνεται

$2y=$ἡμ60^0-ἡμ$45^0=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ καὶ $y=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$

§ 400. Προφανῶς $z=$ἡμ$7x-2$ἡμ$x($συν$2x+$συν$4x+$συν$6x)$

$=$ἡμ$7x-2$ἡμxσυν$2x-2$ἡμxσυν$4x-2$ἡμxσυν$6x$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $2ἡμx συν2x = ἡμ3x - ἡμx$, $2ἡμx συν4x = ἡμ5x - ἡμ3x$, $2ἡμx συν6x = ἡμ7x - ἡμ5x$, ἡ (1) γίνεται

$$z = ἡμ7x - ἡμ3x + ἡμx - ἡμ5x + ἡμ3x - ἡμ7x + ἡμ5x = ἡμx.$$

§ 401. Προφανῶς $y = ἡμ13x - 2ἡμ2x(συν3x + συν7x + συν11x)$

$$= ἡμ13x - 2ἡμ2x συν3x - 2ἡμ2x συν7x - 2ἡμ2x συν11x. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $2ἡμ2x συν3x = ἡμ5x - ἡμx$, $2ἡμ2x συν7x = ἡμ9x - ἡμ5x$, $2ἡμ2x συν11x = ἡμ13x - ἡμ9x$, ἡ (1) γίνεται

$$y = ἡμ13x - ἡμ5x + ἡμx - ἡμ9x + ἡμ5x - ἡμ13x + ἡμ9x = ἡμx.$$

§ 402. Καλοῦντες z τὴν δοθεῖσαν παράστασιν εὑρίσκομεν

$$2z = 2ἡμα ἡμ(β - γ) + 2ἡμβ ἡμ(γ - α) + 2ἡμγ ἡμ(α - β).$$

Ἐπειδὴ δὲ $2ἡμα ἡμ(β - γ) = συν(α - β + γ) - συν(α + β - γ)$,

$2ἡμβ ἡμ(γ - α) = συν(β - γ + α) - συν(β + γ - α)$,

$2ἡμγ ἡμ(α - β) = συν(γ - α + β) - συν(γ + α - β)$, ἕπεται ὅτι

$$2z = [συν(α - β + γ) - συν(γ + α - β)] + [συν(β - γ + α) - συν(α + β - γ)] + [συν(γ - α + β) - συν(β + γ - α)] = 0.$$

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 403. Α΄) Ἡ ἐξίσωσις $ἡμx = ἡμ23^\circ$ ἀληθεύει διὰ $x = 360^\circ k + 23^\circ$ καὶ διὰ $x = 360^\circ k + 180^\circ - 23^\circ = 360^\circ k + 157^\circ$.

Β΄) Ἡ ἐξίσωσις $συνx = συν15^\circ$ ἀληθεύει διὰ $x = 360^\circ k \pm 15^\circ$.

Γ΄) Ἡ ἐξίσωσις $ἐφx = ἐφ54^\circ$ ἀληθεύει διὰ $x = 180^\circ λ + 54^\circ$.

Δ΄) Ἡ ἐξίσωσις $σφx = σφ(37^\circ 20')$ ἀληθεύει διὰ

$$x = 180^\circ λ + 37^\circ 20'.$$

§ 404. Α΄) Ἡ ἐξίσωσις $ἡμx = ἡμ\frac{3π}{8}$ ἀληθεύει διὰ

$x = 2kπ + \frac{3π}{8} = \frac{(16k+3)π}{8}$ καὶ διὰ $x = 2kπ + π - \frac{3π}{8}$

$$= 2kπ + \frac{5π}{8} = \frac{(16k+5)π}{8}.$$

Β΄) Ἡ ἐξίσωσις $συνx = συν\frac{π}{5}$ ἀληθεύει διὰ $x = 2kπ \pm \frac{π}{5}$

$$\frac{(10k \pm 1)π}{5}$$

Γ') Ἡ ἐξίσωσις ἐφx $=$ ἐφ $\frac{7\pi}{12}$ ἀληθεύει διὰ $x = \lambda\pi + \frac{7\pi}{12}$ $= \frac{(12\lambda + 7)\pi}{12}$.

Δ') Ἡ ἐξίσωσις σφx $=$ σφ $\frac{4\pi}{9}$ ἀληθεύει διὰ $x = \lambda\pi + \frac{4\pi}{9}$ $= \frac{(9\lambda + 4)\pi}{9}$.

§ 405. Α') Ἡ ἐξίσωσις ἡμx $= \frac{\sqrt{3}}{2}$ ἢ ἡμx $=$ ἡμ $\frac{\pi}{3}$ ἀληθεύει διὰ $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{(6k+1)\pi}{3}$ καὶ διὰ $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{(6k+2)\pi}{3}$.

Β') Ἡ ἐξίσωσις συνx $= \frac{1}{2}$ ἢ συνx $=$ συν $\frac{\pi}{3}$ ἀληθεύει διὰ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}$.

Γ') Ἡ ἐξίσωσις ἐφx $= -1$ ἢ ἐφx $=$ ἐφ $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ ἀληθεύει διὰ $x = \lambda\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{(4\lambda - 1)\pi}{4}$.

Δ') Ἡ ἐξίσωσις σφx $= 0$ ἢ σφx $=$ σφ $\frac{\pi}{2}$ ἀληθεύει διὰ $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(2\lambda + 1)\pi}{2}$.

§ 406. Α') Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ἡμx $= 0{,}75$ εὑρίσκομεν ὅτι λογἡμx$=\bar{1},87506=$λογἡμ$(48^\circ\, 35'\, 25'')$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἡμx $=$ ἡμ$(48^\circ\, 35'\, 25'')$ καὶ ἀληθεύει διὰ

$x = 360^\circ k + 48^\circ\, 35'\, 25''$ καὶ διὰ $x = 360^\circ k + 180^\circ - 48^\circ\, 35'\, 25''$
$= 360^\circ k + 131^\circ\, 24'\, 35''$.

Β') Ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν συνx $= 0{,}825$ εὑρίσκομεν ὅτι λογσυνx $= \bar{1},91645 =$ λογσυν(55°3 , ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται συνx $=$ συν$(55^\circ\, 35'\, 15'')$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x = 360^\circ k \pm 55^\circ\, 35'\, 15''$.

Γ') Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἐφx $= 1{,}125$ γίνεται ἐφx$=$ἐφ$(48^\circ\, 21'\, 57'',7)$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x = 180^\circ\lambda + 48^\circ\, 21'\, 57'',7$.

Δ΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις σφx = 0,895 γίνεται σφx = σφ(48° 10′ 18″,5) καὶ ἀληθεύει διὰ x = 180°λ + 48° 10′ 18″,5.

§ 407. Α΄) Ἡ ἐξίσωσις $\text{συν}x = \text{συν}\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$ ἀληθεύει διὰ τὰς

τιμὰς τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι $x = 2k\pi \pm \left(\frac{x}{2} - \pi\right)$.

Ἀπὸ τὴν α΄ τούτων εὑρίσκομεν $x = 4k\pi - 2\pi = (2k - 1)2\pi$.

Ἐκ δὲ τῆς β΄ εὑρίσκομεν $3x = 4k\pi + 2\pi$ καὶ $x = \frac{(2k+1)2\pi}{3}$.

Β΄) Ἡ ἐξίσωσις $\text{εφ}\left(\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{8}\right) = \text{εφ}2x$ ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς

τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας εἶναι $\frac{x}{3} - \frac{3\pi}{8} = \lambda\pi + 2x$, ὅθεν

$x = -\frac{(9 + 24\lambda)\pi}{40}$.

§ 408. Α΄) Αὕτη ἀληθεύει, ἂν $\frac{2x}{5} + 30^\circ = 180^\circ\lambda + \frac{x}{3} + 30^\circ$,

ὅθεν $x = 180^\circ . 15\lambda$.

Β΄) Αὕτη ἀληθεύει, ἂν $2x + 50^\circ = 360^\circ k + x + 25^\circ$ καὶ ἂν $2x + 50^\circ = 360^\circ k + 180^\circ - x - 25^\circ$. Ἐκ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $x = 360^\circ k - 25^\circ$, ἐκ δὲ τῆς β΄ $x = 120^\circ k + 35^\circ$.

§ 409. Α΄) Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν $10\text{συν}x - 1 = 6\text{συν}x + 1$ πρὸς συνx καὶ εὑρίσκομεν, $\text{συν}x = \frac{1}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{3}$. Ἀληθεύει λοιπὸν διὰ

$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}$.

Β΄) Λύομεν πρὸς συνx τὴν ἐξίσωσιν $2\text{συν}^2x - 3\text{συν}x + 1 = 0$

καὶ εὑρίσκομεν $\text{συν}x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$. Οὕτω τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων

$\text{συν}x = 1 = \text{συν}0, \text{συν}x = \frac{1}{2} = \text{συν}\frac{\pi}{3}$. Ἡ α΄ ἀληθεύει

διὰ $x = 2k\pi$, ἡ δὲ β΄ διὰ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k \pm 1)\pi}{3}$.

§ 410. Α΄) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3ἡμx + 2 = 7ἡμx - 2$ εὑρίσκομεν

$ἡμx=1=ἡμ\frac{\pi}{2}$. Ἄρα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(4k+1)\pi}{2}$ καὶ

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(4k+1)\pi}{2}$$

Β΄) Μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν παρονομαστῶν κ.τ.λ. εὑρίσκομεν

$ἡμx = 1 = ἡμ\frac{\pi}{2}$ καὶ $ἡμx = \frac{1}{2} = ἡμ\frac{\pi}{6}$.

Ἐκ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $x= \frac{(4k+1)\pi}{2}$

ἐκ δὲ τῆς β΄ $x = \frac{(12k+1)\pi}{6}$ καὶ $x = \frac{(12k+5)\pi}{6}$.

§ 411. Α΄) Λύοντες ταύτην πρὸς ἐφx εὑρίσκομεν ὅτι ἀληθεύει διὰ ἐφx=2. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι λογἐφx = 0,30103 = λογἐφ(47° 2′ 43″) καὶ ἑπομένως ἐφx = ἐφ(47° 2′ 43″), ὅθεν $x = 180^\circ + 47^\circ$ 2′ 43″.

Β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $ἐφx = \sqrt{3} = ἐφ60^\circ$ καὶ ἐφx=3=ἐφ(71° 33′54″). Ἐκ τῆς α΄ εὑρίσκομεν $x=180^\circ)+60^\circ$ καὶ ἐκ τῆς β΄ $x=180^\circ\lambda+71^\circ$ 33′54″.

§ 412. Α΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι σφx=4 ἢ $ἐφx= \frac{1}{4} =0,25$.

Ἐπειδὴ δὲ 0,25 = ἐφ (14° 2′10″), αὕτη γίνεται ἐφx=ἐφ (14° 2′10″), ὅθεν $x=180^\circ\lambda+14^\circ$ 2′40″.

Β΄) Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ἐφx=2 κ.τ.λ. (§ 411).

§ 413. Α΄) Λύοντες πρὸς συνx εὑρίσκομεν $συνx= \frac{9}{2}$, ἥτις

εἶναι ἀδύνατος καὶ $συνx= \frac{1}{2} = συν\frac{\pi}{3}$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει

διὰ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{(6k\pm1)\pi}{3}$.

Β΄) Ὁμοίως εὑρίσκομεν $ἡμx=1=ἡμ\frac{\pi}{2}$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει

διὰ $x=\frac{(4k\pm1)\pi}{2}$.

§ 414. Α′) Γνωρίζομεν ὅτι ἡμ $\frac{x}{2} = $ συν $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις ἡμ $\frac{x}{2} = $ συνx γίνεται συν $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = $ συνx.

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = 2k\pi \pm x$, ὅθεν $\pi - x = 4k\pi \pm 2x$.

Ἐκ τῆς α′ τούτων εὑρίσκομεν $x = \frac{(1-4k)\pi}{3}$.

Ἐκ δὲ τῆς β′ εὑρίσκομεν $x = (4k-1)\pi$.

Β′) Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις ἡμ$x = $ συν $\frac{x}{3}$ γίνεται

συν $\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = $ συν $\frac{x}{3}$.

Ἑπομένως ἀληθεύει, ἂν $\frac{\pi}{2} - x = 2k\pi \pm \frac{x}{3}$ ἢ

$3\pi - 6x = 12k\pi \pm 2x$. Ἐκ τούτων εὑρίσκομεν $x = \frac{3(1-4k)\pi}{8}$, καὶ

$x = \frac{3(1-4k)\pi}{4}$.

Γ′) Ἡ ἐξίσωσις ἐφ$x = $σφ $\frac{x}{4}$ γίνεται ὁμοίως ἐφ$x = $ἐφ$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$,

ὅθεν $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}$ κ.λ.τ.

§ 415. Α′) Ἡ ἐξίσωσις ἡμ$^2x - $ συν$^2x = 0$ γίνεται κατὰ σειρὰν ἡμ$^2x = $συν$^2x$, ἡμ$x = \pm$συν$x$, ἐφ$x = \pm 1$. Ἐκ τῆς ἐφ$x = 1 = $ἐφ $\frac{\pi}{4}$ εὑρίσκομεν $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$ κ.τ.λ. Ἐκ δὲ τῶν ἐφ$x = -1 = $ἐφ $\frac{3\pi}{4}$ εὑρίσκομεν $x = \;\; + \frac{3\pi}{4}$ κ.τ.λ.

Β′ τρόπος. Ἐπειδὴ ἡμ$^2x = 1 - $συν$^2x$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $1 - 2$συν$^2x = 0$, ὅθεν $-$συν$2x = 0$, συν$2x = 0$ καὶ $2x = 2x\pi \pm \frac{\pi}{2}$ κ.τ.λ.

Γ′ τ ρ ό π ο ς. Ἐπειδὴ $ἡμ^2x - συν^2x = (ἡμx + συνx)(ἡμx - συνx)$, ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὰς ρίζας τῶν $ἡμx + συνx = 0$, $ἡμx - συνx = 0$, ἢ $ἐφx = 1$ καὶ $ἐφx = -1$ κ.τ.λ.

Β′) Ἐπειδὴ $ἡμ^2x = 1 - συν^2x$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$3συν^2x + 2συνx - 1 = 0.$$

Αὕτη ἀληθεύει διὰ $συνx = -1 = συνπ$ καὶ διὰ $συνx = \frac{1}{3}$, ἃς γνωρίζομεν νὰ λύωμεν.

§ 416. Α′) Ὡς προηγουμένως, δίδομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν μορφὴν $3 - 4συν^2x = 1$, ὅθεν $συν\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἢ $συνx = συν\frac{π}{4}$ καὶ $συνx = συν\frac{3π}{4}$, ἃς λύομεν κατὰ τὰ γνωστά.

Β′) Γνωρίζομεν ὅτι $συν2x = 2συν^2x - 1$. Ἑπομένως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $συν^2x - 1 = 0$, ὅθεν $συνx = \pm 1$ ἢ $συνx = συν0$ καὶ $συνx = συνπ$ κ.τ.λ.

§ 417. Μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τοῦ παρονομαστοῦ κ.τ.λ. εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $ἐφx = 1 = ἐφ\frac{π}{4}$ κ.τ.λ.

§ 418. Ἐπειδὴ $σφ(90^\circ - 3x) = ἐφ3x$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $ἐφ(x + 60^\circ) = -ἐφ3x = ἐφ(180^\circ - 3x)$. Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $x + 60^\circ = 180^\circ λ + 180^\circ - 3x$, ὅθεν $x = 45^\circ λ + 30^\circ$.

§ 419. Ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $ἡμx + \frac{1}{\sqrt{3}}συνx = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ἐφ\frac{π}{6}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$ἡμx + \frac{ἡμ\frac{π}{6}}{συν\frac{π}{6}}συνx = \frac{ἡμ\frac{π}{6}}{συν\frac{π}{6}}.$$ Ὅθεν κατὰ σειρὰν

$$ἡμx\,.\,συν\frac{π}{6} + ἡμ\frac{π}{6}συνx = ἡμ\frac{π}{6},\quad ἡμ\left(x + \frac{π}{6}\right) = ἡμ\frac{π}{6}.$$

Αὕτη δὲ ἀληθεύει, ἂν $x + \frac{π}{6} = 2kπ + \frac{π}{6}$ καὶ ἂν

$x+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$. Ἐκ τῆς α′ τούτων εὑρίσκομεν

$x=2k\pi$, ἐκ δὲ τῆς β′ $x=2k\pi+\frac{2\pi}{3}=\frac{(6k+2)\pi}{3}$.

§ 420. Ἐπειδὴ $1=\text{ἐφ}\,\frac{\pi}{4}=\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{4}}{\text{συν}\,\frac{\pi}{4}}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$\text{ἡμ}x-\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{4}}{\text{συν}\,\frac{\pi}{4}}\text{συν}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ὅθεν $\text{ἡμ}x\,\text{συν}\,\frac{\pi}{4}-\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{4}\,\text{συν}x=\frac{1}{2}$

ἢ $\text{ἡμ}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{6}$ κ.τ.λ.

§ 421. Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\text{ἡμ}3x+\frac{\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{4}}{\text{συν}\,\frac{\pi}{4}}\text{συν}3x=$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, ὅθεν $\text{ἡμ}\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{ἡμ}\,\frac{\pi}{6}$ κ.τ.λ.

§ 422. Ἐξαλείφομεν τὸν παρονομαστὴν κ.τ.λ. καταλήγομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\text{ἡμ}x+\text{συν}x=2$, ὅθεν, ὡς προηγουμένως,

$\text{ἡμ}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt{2}>1$, πρέπει νὰ εἶναι $\text{ἡμ}(x+45^0)>1$,

ἥτις εἶναι ἀδύνατος. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ x ἀληθεύει. Τὸ συμπέρασμα τοῦτο γίνεται ἀμέσως φανερὸν καὶ ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν $\text{ἡμ}x+\text{συν}x=2$.

§ 423. Διαιροῦντες τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 4 εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\text{ἡμ}x+\frac{5}{4}\text{συν}x=\frac{6}{4}$. (1)

Ἂν δὲ θέσωμεν $\text{ἐφ}\omega=\frac{5}{4}$, εὑρίσκομεν ὅτι $\omega=51^0\,20'\,25''$.

Θέτοντες δὲ τὴν (1) ὑπὸ τὴν μορφὴν $\text{ἡμ}x+\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\omega}\text{συν}x=\frac{6}{4}$

Εὑρίσκομεν κατὰ τὰ γνωστὰ τὴν ἐξίσωσιν $ἡμ(x+ω)=\frac{6}{4}συνω$.

Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $λογἡμ(x+ω)=λογ6+λογσυνω-λογ4$

$=\bar{1},97176=λογἡμ(69^0\ 33'\ 36'')$ καὶ ἑπομένως

$ἡμ(x+ω)=ἡμ(69^0\ 33'\ 36'')$ κ.τ.λ.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

§ 424. Ἐπειδὴ $ἡμx-ἡμy=2ἡμ\left(+\frac{x-y}{2}\right)συν\left(\frac{xy}{2}\right)$

αὶ $x+y=75^0$, ἡ β′ ἐξίσωσις γίνεται

$ἡμ\left(\frac{x-y}{2}\right)συν(37^0\ 30')=\frac{\sqrt{2}-1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}=ἡμ45^0-ἡμ30^0$

$=2ἡμ\frac{15^0}{2}συν\frac{75^0}{2}=2ἡμ(7^0\ 30')συν(37^0\ 30')$. Ἑπομένως

$ἡμ\left(\frac{x-y}{2}\right)=ἡμ(7^0\ 30')$. Ἐκ ταύτης ἔπεται ὅτι

$\frac{x-y}{2}=360^0k+7^0\ 30'$ καὶ $\frac{x-y}{2}=360^0k+180^0-7^0\ 30'=$

$360^0k+172^0\ 30'$.

Οὕτως ἀγόμεθα εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν συστημάτων

$x+y=75^0,\ x-y=720^0k+15^0$ καὶ $x+y=75^0,\ x-y=720^0k+345^0$.

Ἐκ τοῦ α′ π.χ. διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$2x=720^0k+90^0$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη

$2y=60^0-720^0k$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι

$x=360^0k+45^0$ καὶ $y=30^0-360^0k$. Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον λύεται

καὶ τὸ β′ σύστημα.

§ 425. Ἐπειδὴ $συνx+συνy=2συν\left(\frac{x+y}{2}\right)συν\left(\frac{x-y}{2}\right)$

καὶ $x-y=60^0$, ἡ β′ ἐξίσωσις γίνεται $2συν\left(\frac{x+y}{2}\right)συν30^0=0$,

ὅθεν $συν\left(\frac{x+y}{2}\right)=0=συν90^0$. Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι $\frac{x+y}{2} = 360^0 k \pm 90^0$ καὶ $x+y = 720^0 k \pm 180^0$. Οὕτω τὸ ζήτημ

ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἀλγεβρικῶν συστημάτων
$x-y=60^0$, $x+y=720^0k+180^0$ καὶ $x-y=60^0$, $x+y=720^0k-180$

Λύομεν δὲ ταῦτα ὡς προηγουμένως.

§ 426. Ἐκ τῆς β′ ἐξισώσεως προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\eta\mu x - \eta\mu y}{\eta\mu x + \eta\mu y} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{\ }+1} \ \text{ἢ} \ \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = 2-\sqrt{3}$$

$$=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $x-y=30^0$ καὶ $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu\ 30^0$, ἡ (1) γίνεται

$$\frac{\varepsilon\varphi 15^0}{\varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)} = 2(1-\sigma\upsilon\nu 30^0) = 4\eta\mu^2 15^0.$$ Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι

$$\varepsilon\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{\eta\mu 15^0}{\sigma\upsilon\nu 15^0}\cdot\frac{1}{4\eta\mu^2 15^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\eta\mu 15^0.\sigma\upsilon\nu 15^0} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\eta\mu 3}$$

$=1=\varepsilon\varphi 45^0$. Ἑπομένως $\frac{x+y}{2} = 180^0\lambda+45^0$ καὶ $x+y=360^0\lambda+90$

Τὸ ζήτημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀλγεβρικοῦ συ-
στήματος $x-y=30^0$, $x+y=360^0\lambda+90^0$ κ.τ.λ.

§ 427. Διὰ προσθέσεως καὶ εἶτα δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑ-
ρίσκομεν τὰς ἐξισώσεις $2\sigma\upsilon\nu x=0$ ἢ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}$ καὶ $2\sigma\upsilon\nu y=1$,

ὅθεν $\sigma\upsilon\nu y = \frac{1}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$. Ἡ α′ τούτων ἀληθεύει διὰ $x = 2k\pi \pm$

$\frac{\pi}{2}$, ἡ δὲ β′ διὰ $y=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}$. Πρέπει δὲ νὰ συνδυάσωμεν ἕκαστο

τύπον διὰ τὸν x μὲ ἕκαστον τύπον διὰ τὸν y. Οὕτως εὑρίσκομεν τὰς
ἀκολούθους λύσεις

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ y=2k\pi+\frac{\pi}{3}$ | $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ y=2k\pi+\frac{\pi}{3}$

$x=2k\pi+\frac{\pi}{2},\ y=2k\pi-\frac{\pi}{3}$ | $x=2k\pi-\frac{\pi}{2},\ y=2k\pi-\frac{\pi}{3}$

§ 428. Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\sqrt{3}-1)\ \text{συν}y=\frac{3-\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{3}-1)}{2},$$

ὅθεν $\text{συν}y=\frac{\sqrt{3}}{2}=\text{συν}\,\frac{\pi}{6}$.

Ἡ δὲ α′ ἐξίσωσις διὰ $\text{συν}y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ γίνεται $\text{ἡμ}x+\frac{3}{2}=1$, ὅθεν $\text{ἡμ}x=-\frac{1}{2}=\text{ἡμ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Λύοντες ἔπειτα τὰς ἐξισώσεις $\text{συν}y=\text{συν}\,\frac{\pi}{6}$ καὶ $\text{ἡμ}x=\text{ἡμ}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ συνδυάζομεν, ὡς προηγουμένως, τὰς τιμὰς τῶν x καὶ y.

§ 429. Οἱ ἄγνωστοι συνx, συνy εἶναι ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $k^2-\frac{1+\sqrt{2}}{2}k+\frac{\sqrt{2}}{4}=0$ ἤτοι 1ον) $\text{συν}x=\frac{1}{2}$, $\text{συν}y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 2ον) $\text{συν}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\text{συν}y=\frac{1}{2}$. Λύομεν μετὰ ταῦτα τὰς ἐξισώσεις $\text{συν}x=\frac{1}{2}=\text{συν}\,\frac{\pi}{3}$, $\text{συν}y=\frac{\sqrt{2}}{2}=\text{συν}\,\frac{\pi}{4}$ καὶ συνδυάζοντες καταλλήλως τὰς τιμὰς τοῦ x πρὸς τὰς τιμὰς τοῦ y.

Διὰ τὸ 2ον σύστημα ἀρκεῖ εἰς τὰς προηγουμένας λύσεις νὰ ἐναλλάξωμεν τὰ x καὶ y.

§ 430. Ἀπὸ τὴν β′ ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν $\frac{\text{ἐφ}x-\text{ἐφ}y}{\text{ἐφ}x+\text{ἐφ}y}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ $\text{ἐφ}x-\text{ἐφ}y=\frac{\text{ἡμ}(x-y)}{\text{συν}x.\text{συν}y}$ καὶ $\text{ἐφ}x+\text{ἐφ}y=\frac{\text{ἡμ}(x+y)}{\text{συν}x.\text{συν}y}$, αὕτη γίνεται $\frac{\text{ἡμ}(x-y)}{\text{ἡμ}(x+y)}=\frac{1}{2}$ ἤ, ἕνεκα τῆς α′, $\text{ἡμ}(x-y)=\frac{1}{2}=\text{ἡμ}30^\circ$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $x-y=360^\circ k+30^\circ$ καὶ $x-y=360^\circ k'+180^\circ-30^\circ=360^\circ k'+150^\circ$.

Οὕτω δὲ τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

$$x+y=90^\circ,\ x-y=360^\circ k+30^\circ$$
$$\text{καὶ}\ x+y=90^\circ,\ x-y=360^\circ k'+150^\circ.$$

§ 431. Ἡ β′ ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν

$$2\sigma\upsilon\nu x \sigma\upsilon\nu y=\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{\sqrt{12}}{2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

ἢ $\sigma\upsilon\nu(x-y)+\sigma\upsilon\nu(x+y)=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\cdot$ (1)

Ἐπειδὴ δὲ $x-y=15^\circ$, ἕπεται ὅτι $\sigma\upsilon\nu(x-y)=\sigma\upsilon\nu 15^\circ$

$$=\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$$

$\frac{\sqrt{3+1+2\sqrt{3.1}}}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (ὅρα Μεγάλην Ἄλγεβραν Νικ. Δ. Νικολάου σελ. 111).

Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται $\sigma\upsilon\nu(x+y)=\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}-\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ ἐμάθομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu 75^\circ=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$,

ἡ (2) γίνεται $\sigma\upsilon\nu(x+y)=\sigma\upsilon\nu 75^\circ$ καὶ ἐπομένως $x+y=360^\circ k\pm 75^\circ$. Μεθ' ὃ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι $x-y-15^\circ$ προχωροῦμεν κατὰ τὰ γνωστά.

§ 432. Ἐκ τῆς β′ ἐξισώσεως ἕπεται ὅτι $\varepsilon\varphi y=\frac{1}{\varepsilon\varphi x}=\sigma\varphi x=$ $\varepsilon\varphi(90^\circ-x)$ καὶ ἐπομένως $y=180^\circ\lambda+90^\circ-x$, ὅθεν $y+x=180^\circ\lambda+90^\circ$.

Ἀγόμεθα λοιπὸν εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος

$$x-y=30^\circ,\ x+y=180^\circ\lambda+90^\circ.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

§ 433. Α′) Ἐπειδὴ τόξημ$0{,}4=x$, ἕπεται ἡ ἐξίσωσις ἡμ$x=0{,}4$ ἣν λύομεν εὐκόλως καὶ κρατοῦμεν ἐκ τῶν τιμῶν τοῦ x μόνον τὰς μεταξὺ 0° καὶ 90°.

Β′) Ἐκ τῆς τόξσυν $0{,}6=x$ προκύπτει ἐξίσωσις συν$x=0{,}6$ κ.τ.λ.

Γ′) Ἐκ τῆς τόξεφ$2=x$, ἕπεται ὅτι εφ$x=2$ κ.τ.λ. (§ 411).

§ 434. Θέτομεν $z=$τόξημ$0{,}15-$τόξημ$0{,}12$, τόξημ$0{,}15=\alpha$ καὶ τόξημ$0{,}12=\beta$. Ἕπεται λοιπὸν ὅτι $z=\alpha-\beta$.

Ἐκ δὲ τῆς $\text{τόξημ}\,0{,}15=\alpha$ εὑρίσκομεν $\text{ημ}\alpha=0{,}15$ καὶ $\alpha=8^{\circ}\,37'\,37'',8$.

Ἐκ δὲ τῆς $\text{τόξημ}\,0{,}12=\beta$ εὑρίσκομεν $\text{ημ}\beta=0{,}12$ καὶ $\beta=6^{\circ}\,53'\,31'',4$. Ἄρα $z=\alpha-\beta=1^{\circ}\,44'\,6'',4$.

Β′ τρόπος. Ἐκ τῆς $z=\alpha-\beta$ εὑρίσκομεν $\text{ημ}z=\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\beta-\text{ημ}\beta\,\text{συν}\alpha=0{,}15\sqrt{1-0{,}12^2}-0{,}12\sqrt{1-0{,}15^2}=0{,}15\sqrt{0{,}9856}-0{,}12\sqrt{0{,}9775}$.

Ὑπολογίζοντες διὰ τῶν λογαρίθμων τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ημ}z=0{,}030273$, ὅθεν $z=1^{\circ}\,44'\,6'',4$.

§ 435. Θέτομεν $z=\text{τόξημ}\,x$, $\alpha=\text{τόξημ}\,\frac{2}{5}$ καὶ ἐνθυμούμεθα ὅτι $\text{τόξημ}\,1=\frac{\pi}{2}$. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις

$\text{τόξημ}\,x+2\,\text{τόξημ}\,\frac{2}{5}=\text{τόξημ}\,1$ γίνεται $z+2\alpha=\frac{\pi}{2}$. Ἐκ ταύτης δὲ δὲ ἕπεται ὅτι $\text{ημ}z=\text{συν}2\alpha$ ἢ $x=\text{συν}2\alpha=1-2\,\text{ημ}^2\alpha=$

$$1-2.\frac{4}{25}=\frac{17}{25}.$$

§ 436. Ἂν $\alpha=\text{τόξημ}\,\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}$ καὶ $\beta=\text{τόξσυν}\,\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$, ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης γίνεται $\alpha=\beta$.

Ἐπειδὴ δὲ $\text{ημ}\alpha=\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2+\nu^2}$ καὶ $\text{συν}\beta=\frac{2\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$, ἕπεται ὅτι $\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\beta=\frac{(\mu^2-\nu^2)+4\mu^2\nu^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}=\frac{(\mu^2+\nu^2)^2}{(\mu^2+\nu^2)^2}=1$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha=1$ ἕπεται ὅτι $\text{συν}^2\alpha=\text{συν}^2\beta$. Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν ὑπόθεσιν τὰ τόξα α καὶ β περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ $\frac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι $\alpha=\beta$.

§ 437. Ἂν $\beta=\text{τόξημ}\sqrt{\frac{x}{x+\alpha}}$ καὶ $\gamma=\text{τόξεφ}\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι $\beta=\gamma$. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων συνάγομεν ὅτι $\text{ημ}\beta=\sqrt{\frac{x}{x+\alpha}}$, $\text{εφ}\gamma=\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$,

Ἐκ τῆς α′ τούτων εὑρίσκομεν ὅτι $\text{εφ}\beta=\frac{\text{ημ}\beta}{\text{συν}\beta}=\sqrt{\frac{x}{x+\alpha}}:\sqrt{1-\frac{x}{x+\alpha}}$ $=\sqrt{\frac{x}{x+\alpha}:\frac{\alpha}{x+\alpha}}=\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$. Ἐκ ταύτης δὲ καὶ τῆς $\text{εφ}\gamma=\sqrt{\frac{x}{\alpha}}$

ἕπεται ὅτι ἐφβ$=$ἐφγ, ὅθεν $\beta-\gamma=\lambda\pi$. Ἐπειδὴ δὲ $0<\beta<\frac{\pi}{2}$ καὶ $0<\gamma<\frac{\pi}{2}$, ἕπεται ὅτι $|\beta-\gamma|<\frac{\pi}{2}$. Ὁ λ λοιπὸν μόνον τὴν τιμὴν 0 δύναται νὰ λάβῃ. Εἶναι λοιπὸν $\beta=\gamma$.

§ 438. Ἂν θέσωμεν z$=$τόξῆμ $\frac{1}{4}$ $+$ τόξῆμ $\frac{1}{5}$, α$=$τόξῆμ $\frac{1}{4}$, β$=$τόξῆμ $\frac{1}{5}$, θὰ εἶναι $z=\alpha+\beta$, ἡμα$=\frac{1}{4}$, ἡμβ $=\frac{1}{5}$.

Ἑπομένως θὰ εἶναι ἡμz$=$ἡμασυνβ$+$ἡμβσυνα$=$

$\frac{1}{4}$ συνβ$+$ $\frac{1}{5}$ συνα. Ἐπειδὴ δὲ συνα $=\sqrt{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{15}$ καὶ

συνβ $=\sqrt{1-\frac{1}{25}}=\frac{1}{5}\sqrt{24}$, αὕτη γίνεται ἡμz $=\frac{1}{20}\sqrt{24}+\frac{1}{20}\sqrt{15}$

$=\frac{\sqrt{24}+\sqrt{15}}{20}$ καὶ ἑπομένως z$=$τόξῆμ $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{15}}{20}$.

§ 439. Ἂν θέσωμεν z$=$τόξῆμx, α$=$τόξῆμ $\frac{1}{3}$, θὰ εἶναι ἡμz$=$ἡμx, ἡμα$=\frac{1}{3}$, ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται $z+\alpha=\frac{\pi}{4}$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι ἡμz$=$ἡμ $\frac{\pi}{4}$ συνα$-$ἡμασυν $\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\frac{1}{9}}-\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{6}(\sqrt{8}-1)$, ὅθεν x$=\frac{4-\sqrt{2}}{6}$.

§ 440. Ἂν θέσωμεν z$=$τόξῆμx καὶ z′$=$τόξσυν$\sqrt{1-x^2}$, θὰ εἶναι ἡμz$=$x καὶ συνz′$=\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\text{ἡμ}^2 z}=$συνz.

Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $z-z'=2k\pi$, ἡ δὲ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται $z+z-2k\pi=0$, ὅθεν $z=k\pi$. Ἄρα x$=$ἡμz$=$ἡμ$k\pi=0$.

§ 441. Ἂν θέσωμεν z$=$τόξῆμ $\frac{x}{\sqrt{5}}$, φ$=$τόξῆμ $\frac{y}{\sqrt{5}}$, θὰ εἶναι $z+\varphi=\frac{\pi}{2}$, ἡμz$=\frac{x}{\sqrt{5}}$, ἡμφ $=\frac{y}{\sqrt{5}}=$ συνz. Ἐκ τούτων δὲ ἕπεται ὅτι ἡμ^{2}z$+$συν^{2}z$=\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}$ ἢ $1=\frac{x^2+y^2}{5}$, ὅθεν $x^2+y^2=5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

§ 442. Προφανῶς $A = \frac{\pi}{2}$ ἀκτίνια, $\Gamma = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$ ἀκτ.

§ 443. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $A = 60,^{\gamma}54$, $B = \Gamma$, $A + B + \Gamma = 200^{\gamma}$ εὑρίσκομεν ὅτι $2B = 200 - 60,54 = 139,^{\gamma}46$ καὶ $B = \Gamma = 69,^{\gamma}73$.

§ 444. Πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4} = \lambda\pi + \frac{\pi}{4}$.

Δι᾽ ἀρτίας τιμὰς τοῦ λ, ἤτοι διὰ $\lambda = 2k$, εἶναι $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ καὶ ἑπομένως ἡμ $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4} =$ ἡμ $\left(2k\pi + \frac{\pi}{4}\right) =$ ἡμ $\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

Διὰ $\lambda = 2k+1$ εἶναι $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4} = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}$ καὶ ἑπομένως

ἡμ $\frac{(4\lambda+1)\pi}{4} =$ ἡμ $\left(2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) =$ ἡμ $\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -$ ἡμ $\frac{\pi}{4}$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2}$ κ.τ.λ.

§ 445. Ἂν ν ἄρτιος, θὰ εἶναι $(-1)^{\nu} = 1$, ἕκαστον δὲ τόξον ἔχει μέτρον $\frac{4\pi}{3}$ ἢ $\pi + \frac{\pi}{3}$. Ἑπομένως ἡμ $\frac{4\pi}{3} = -$ ἡμ $\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

Ἂν ν περιττός, θὰ εἶναι $(-1)^{\nu} = -1$, ἕκαστον δὲ τόξον ἔχει μέτρον $-\frac{2\pi}{3}$. Ἑπομένως ἡμ $\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -$ ἡμ $\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -$ ἡμ $\frac{\pi}{3} =$ $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$ κ.τ.λ.

§ 446. Τὸ ζήτημα ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος $B + \Gamma = 90^{\circ}$, ἐφ$B = 3$ἐφΓ. Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι, ἕνεκα τῆς α′ ἐξισώσεως εἶναι ἐφΓ$=$σφ$B = \frac{1}{\text{ἐφ} B}$. Ἡ β′ δὲ ἐξίσωσις γίνεται ἐφ$B = \frac{3}{\text{ἐφ} B}$, ὅθεν ἐφ$B = \pm\sqrt{3}$. Ἐπειδὴ δὲ $0^{\circ} < B < 90^{\circ}$ εἶναι ἐφ$B > 0$, ἑπομένως μόνον ἐφ$B = \sqrt{3} =$ ἐφ60° καὶ $B = 60^{\circ}$, $\Gamma = 90^{\circ} - B = 30^{\circ}$.

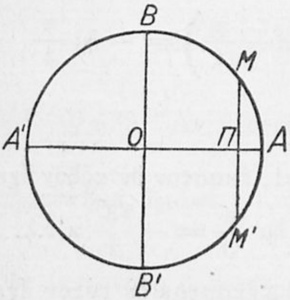
§ 447. Ἐκ τῆς $2ἡμ2A=\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι $ἡμ2A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$=ἡμ60^\circ=ἡμ120^\circ$. Εἶναι λοιπὸν $2A=60^\circ$ ἢ $2A=120^\circ$, ἐξ ὧν $A=30^\circ$ ἢ $A=60^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $B=Γ$ καὶ $A+B+Γ=180^\circ$, ἕπεται ὅτι $30^\circ+2B=180^\circ$, ὅθεν $B=Γ=75^\circ$ ἢ $60^\circ+2B=180^\circ$, ὅθεν $B=Γ=60^\circ$.

§ 448. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $B+Γ=90^\circ$ καὶ $Γ=2B$ ἕπεται ὅτι $3B=90^\circ$, ὅθεν $B=30^\circ$, $Γ=60^\circ$. Αἱ δὲ ἰσότητες $β=αἡμB$, $γ=αἡμΓ$ γίνονται ἀντιστοίχως $β=0,4\,.\,ἡμ30^\circ=0,4.\frac{1}{2}=0,2$ μέτ.

$γ=0,4ἡμ60^\circ=0,4\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2}=0,2\,.\,\sqrt{3}$ μέτ. Τέλος $E=\frac{1}{2}βγ=$

$\frac{1}{2}\,.\,0,2\,.\,0,2\,.\,\sqrt{3}=0,02\sqrt{3}$ τέτ. μέτρα.



Σχ. 32

§ 449. Ἔστω $(\widehat{AM})=τ$ καὶ $ἡμτ=(\overline{ΠM})$ (Σχ. 32). Ἂν προεκτείνωμεν τὴν MΠ μέχρι τοῦ M′, θὰ εἶναι $\widehat{M'A}=\widehat{AM}$

$\widehat{M'AM}=2τ$ καὶ $(\overline{ΠM})=\frac{(\overline{M'M})}{2}$ ἢ

$ἡμτ=\frac{(χορ.\,\widehat{2τ})}{2}$.

§ 450. Κατὰ τὰ προηγούμενα εἶναι $ἡμ\,18^\circ=\frac{(χορ.\,36^\circ)}{2}$. Ἐπειδὴ 36° εἶναι τὸ δέκατον τῆς περιφερείας, ἡ χορδὴ 36° εἶναι πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ δεκαγώνου, ἤτοι

$$(χορ.\,36^\circ)=\frac{R}{2}(-1+\sqrt{5}).$$

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τὸν τριγ. κύκλον εἶναι $R=1$, ἕπεται ὅτι $(χορ.\,36^\circ)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Ἑπομένως $ἡμ18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$,

$$συν18^\circ=\sqrt{1-ἡμ^2 18^\circ}=\sqrt{1-\frac{(-1+\sqrt{5}\,)^2}{16}}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,.$$

§ 451. Ἂν Οα εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ ΟΑ, ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΑα ἕπεται ὅτι $(Οα)=0,15συν(25^\circ\,20')$ κ.τ.λ.

§ 452. Ἂν ω εἶναι τὸ μέτρον τῆς ζητουμένης γωνίας, θὰ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα, 0,12=0,24συνω, ὅθεν συνω$=\dfrac{0,12}{0,24}=\dfrac{1}{2}$ $=$συν60°. Ἑπομένως ω=60°.

§ 453. Ἐπειδὴ σφχ$=\dfrac{1}{\text{ἐφ x}}$, ἡ ἐξίσωσις ἐφx=4σφx γίνεται ἐφ²x=4, ὅθεν ἐφx=±2. Πρέπει λοιπὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν ἐφαπτομένων νὰ ὁρίσωμεν ἀνύσματα $(\overline{AT})=2$, $(AT')=-2$ καὶ νὰ φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΤ ΟΤ′. Αἱ τομαὶ τῆς περιφερείας ὑπὸ τούτων εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.

§ 454. Α′) Ἐπειδὴ ἡμ(2kπ+x=ἡμx, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἡμx=συνx. Αὔτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐφx=1=ἐφ $\dfrac{\pi}{4}$ καὶ ἑπομένως $x=\lambda\pi+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{(4\lambda+1)\pi}{4}$.

Β′) Ἐπειδὴ ἐφ[(2k+1)π+x]=ἐφ(2kπ+π+x)=ἐφ(π+x) =ἐφx, ἡ ἐξίσωσις γίνεται ἐφx=σφx ἢ ἐφx$=\dfrac{1}{\text{ἐφ x}}$, ὅθεν ἐφ²x=1 καὶ ἐφx=±1. Ἡ α′ τούτων ἐλύθη προηγουμένως, ἡ δὲ ἐφx=−1 γίνεται ἐφx=ἐφ$\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$. Ἑπομένως $x=\lambda\pi-\dfrac{\pi}{4}$ κ.τ.λ.

§ 455. Ἐπειδὴ $\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+(-x)=\dfrac{\pi}{2}$, εἶναι ἐφ$\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=$ =σφ(−x)=−σφx. Ἡ δὲ ἐξίσωσις γίνεται −σφx=συνx ἢ συνx $+\dfrac{\text{συνx}}{\text{ἡμx}}=0$, ὅθεν συνx$\left(1+\dfrac{1}{\text{ἡμx}}\right)=0$. Αὔτη δὲ ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων συνx=0 καὶ $1+\dfrac{1}{\text{ἡμx}}=0$. Ἡ α′ τούτων γίνεται συνx=συν $\dfrac{\pi}{2}$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x=2k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(4k\pm1)\pi}{2}$.

Ἡ δὲ β′ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἡμx=−1=ἡμ $\dfrac{3\pi}{2}$ καὶ ἀληθεύει διὰ $x=2k\pi+\dfrac{3\pi}{2}$ καὶ διὰ $x=(2k+1)\pi-\dfrac{3\pi}{2}$ κ.τ.λ.

§ 456. Γνωρίζομεν ὅτι ἡμ$\left(\dfrac{\pi}{2}+\tau\right)=$συν(−τ)=συντ,

$\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)=-\text{ἡμ}\tau$. Ἑπομένως

$$\text{ἡμ}\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)\text{συν}\tau+\text{συν}\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)\text{ἡμ}(-\tau)=\text{συν}^2\tau+\text{ἡμ}^2\tau=1.$$

§ 457. Ἐπειδὴ $\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\text{σφ}\omega=\frac{\text{συν}\omega}{\text{ἡμ}\omega}$, $\text{σφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)=\text{ἐφ}\omega=\frac{\text{ἡμ}\omega}{\text{συν}\,\omega}$, ἕπεται ὅτι

$$\text{ἐφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\text{ἡμ}\omega+\text{σφ}\left(\frac{\pi}{2}-\omega\right)\text{συν}\omega=\text{συν}\omega+\text{ἡμ}\omega.$$

§ 458. Παρατηροῦμεν ὅτι $270^\circ-\tau=180^\circ+90^\circ-\tau$, ἐπομένως

Α΄) $\text{ἐφ}(270^\circ-\tau)=\text{ἐφ}(90^\circ-\tau)=\text{σφ}\tau$.

Β΄) Ὁμοίως $\text{σφ}(270^\circ-\tau)=\text{σφ}(90^\circ-\tau)=\text{ἐφ}\tau$.

Γ΄) Ἐπειδὴ $270^\circ+\tau=180^\circ+90^\circ+\tau$, εἶναι
$\text{ἡμ}(270^\circ+\tau)=-\text{ἡμ}(90^\circ+\tau)=-\text{συν}(-\tau)=-\text{συν}\tau$.

Δ΄) Ὁμοίως $\text{συν}(270^\circ+\tau)=-\text{συν}(90^\circ+\tau)=-\text{ἡμ}(-\tau)=\text{ἡμ}\tau$.

Ε΄) Ὁμοίως $\text{ἡμ}(270^\circ-\tau)=-\text{ἡμ}(90^\circ-\tau)=-\text{συν}\tau$.

Στ΄) Ἐπίσης $\text{συν}(270^\circ-\tau)=-\text{συν}(90^\circ-\tau)=-\text{ἡμ}\tau$.

§ 459. Ἐπειδὴ $\text{ἡμ}(270^\circ-\omega)=-\text{συν}\omega$, $\text{συν}(90^\circ+\omega)=\text{ἡμ}(-\omega)=-\text{ἡμ}\omega$, $\text{συν}(270^\circ+\omega)=\text{ἡμ}\omega$, $\text{ἡμ}(90^\circ-\omega)=\text{συν}\omega$, εἶναι
$\text{ἡμ}(270^\circ-\omega)\text{συν}(90^\circ+\omega)-\text{συν}(270^\circ+\omega)\text{ἡμ}(90^\circ-\omega)=$
$\text{ἡμ}\omega\text{συν}\omega-\text{ἡμ}\omega\text{συν}\omega=0$.

§ 460. Παρατηροῦμεν ὅτι $282^\circ=360^\circ-78^\circ$ καὶ $258^\circ=180^\circ+78^\circ$.
Ἑπομένως $\text{ἐφ}282^\circ=-\text{ἐφ}78^\circ$, $\text{ἐφ}258^\circ=\text{ἐφ}78^\circ$ καὶ
$\text{ἐφ}282^\circ+\text{ἐφ}258^\circ=-\text{ἐφ}78^\circ+\text{ἐφ}78^\circ=0$.

Β΄ τρόπος. Γνωρίζομεν ὅτι $\text{ἐφ}282^\circ+\text{ἐφ}258^\circ=\frac{\text{ἡμ}(282^\circ+258^\circ)}{\text{συν}282^\circ.\text{συν}258^\circ}$

$$=\frac{\text{ἡμ}540^\circ}{\text{συν}282^\circ.\text{συν}258^\circ}=\frac{\text{ἡμ}(360^\circ+180^\circ)}{\text{συν}282^\circ.\text{συν}258^\circ}=\frac{\text{ἡμ}180^\circ}{\text{συν}282^\circ.\text{συν}258^\circ}=0.$$

§ 461. Ἐπειδὴ $\frac{14\pi}{9}=\pi+\frac{5\pi}{9}$, εἶναι $\text{συν}\frac{14\pi}{9}=-\text{συν}\frac{5\pi}{9}$.

Ἑπομένω υν $\frac{5\pi}{\ }+\text{συν}\frac{14\pi}{9}=\text{συν}\frac{5\pi}{9}-\text{συν}\frac{5\pi}{9}=0$.

§ 462. Α΄) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\text{συν}(\alpha+\beta)=\text{συν}\alpha\text{συν}\beta-\text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta$,
$\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}\alpha\text{συν}\beta+\text{ἡμ}\alpha\text{ἡμ}\beta$,
εὑρίσκομεν $\text{συν}(\alpha+\beta)\,\text{συν}(\alpha-\beta)=\text{συν}^2\alpha\text{συν}^2\beta-\text{ἡμ}^2\alpha\text{ἡμ}^2\beta$

$=(1-ημ^2α)\ (1-ημ^2β)-ημ^2αημ^2β=1-ημ^2α-ημ^2β=συν^2α-ημ^2β.$

Β′) Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $ημ(α+β)=ημασυνβ+ημβσυνα$

$ημ(α-β)=ημασυνβ-ημβσυνα$

εὑρίσκομεν ὅτι $ημ(α+β)ημ(α-β)=ημ^2ασυν^2β-ημ^2βσυν^2α$
$=ημ^2α(1-ημ^2β)-ημ^2β(1-ημ^2α)=ημ^2α-ημ^2β.$

§ 463. Ἐπειδὴ $(α+β)+γ=π$, εἶναι $συν(α+β)=-συνγ$ ἢ $συνασυνβ-ημαημβ=-συνγ$. Ἑπομένως $συνασυνβ+συνγ=ημαημβ$ καὶ $συν^2ασυν^2β+2συνασυνβσυνγ+συν^2γ=ημ^2α.ημ^2β=$ $(1-συν^2α)(1-συν^2β)=1-συν^2α-συν^2β+συν^2ασυνβ$. Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι $συν^2α+συν^2β+2συνασυνβσυνγ=1$.

§ 464. Γνωρίζομεν ὅτι $εφ\left(45^0+\frac{α}{2}\right)=\dfrac{εφ45^0+εφ\frac{α}{2}}{1-εφ45^0εφ\frac{α}{2}}$

$$\frac{1+\dfrac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}}}{-\dfrac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}}}=\frac{συν\frac{α}{2}+ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{α}-ημ\frac{α}{2}}.$$ Ἐπειδὴ δὲ $σφ\left(45^2+\frac{α}{2}\right)$

$$=\frac{1}{εφ\left(45^0+\frac{α}{2}\right)}=\frac{συν\frac{α}{2}-ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}+ημ\frac{α}{2}},$$

ἕπεται ὅτι $εφ\left(45^0+\frac{α}{2}\right)+σφ\left(45^0+\frac{α}{2}\right)=$

$$\frac{συν\frac{α}{2}+ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}-ημ\frac{α}{2}}+\frac{συν\frac{α}{2}-ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}+ημ\frac{α}{2}}=$$

$$\frac{\left(συν\frac{α}{2}+ημ\frac{α}{2}\right)^2+\left(συν\frac{α}{2}-ημ\frac{α}{2}\right)^2}{συν^2\frac{α}{2}-ημ^2\frac{α}{2}}=\frac{2}{συνα}$$

§ 465. Γνωρίζομεν ὅτι $ἐφ45^\circ=1$ καὶ κατὰ τὸν τύπον $ἐφ(α-β)=\frac{ἐφα-ἐφβ}{1+ἐφαἐφβ}$ εὑρίσκομεν ὅτι $ἐφ(45^\circ-α)=\frac{1-ἐφα}{1+ἐφα}=\frac{1-\frac{ἡμα}{συνα}}{1+\frac{ἡμα}{συνα}}$, ὅθεν

$$ἐφ(45^\circ-α)=\frac{συνα-ἡμα}{συνα+ἡμα}.$$

Ἐπομένως $ἐφ^2(45^\circ-α)=\frac{συν^2α+ἡμ^2α-2ἡμασυνα}{συν^2α+ἡμ^2α+2ἡμασυνα}=\frac{1-ἡμ2α}{1+ἡμ2α}.$

§ 466. Ἐκ τῆς ἰσότητος $ἐφ2α=\frac{2ἐφα}{1-ἐφ^2α}$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$ἐφα.ἐφ2α=\frac{2ἐφ^2α}{1-ἐφ^2α} \text{ καὶ } 1+ἐφα.ἐφ2α=1+\frac{2ἐφ^2α}{1-ἐφ^2α}$$

$$=\frac{1+ἐφ^2α}{1-ἐφ^2α}=\frac{συν^2α+ἡμ^2α}{συν^2α-ἡμ^2α}=\frac{1}{συν2α}.$$

Ἐπομένως $\frac{ἐφ2α}{1+ἐφα\,.\,ἐφ2α}=ἐφ2α.συν2α=ἡμ2α.$

§ 467. Ἐκ τῆς ἰσότητος $ἐφω=\frac{2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)}{1-ἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)}$ εὑρίσκομεν κατὰ σειρὰν ὅτι $ἐφωἐφ^2\left(\frac{ω}{2}\right)+2ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)-ἐφω=0,$

$$ἐφ\left(\frac{ω}{2}\right)=\frac{-1\pm\sqrt{1+ἐφ^2ω}}{ἐφω}.$$

§ 468. Γνωρίζομεν ὅτι $ἡμα+ἡμ5α=2ἡμ3ασυν2α$· ἐπομένως $ἡμα+ἡμ3α+ἡμ5α=ἡμ3α(1+2συν2α)$. Ὁμοίως εἶναι $συνα+συν3α+συν5α=συν3α+2συν3ασυν2α=συν3α(1+2συν2α).$

Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη παράστασις ἰσοῦται πρὸς $\frac{ἡμ3α(1+2συν2α)}{συν3α(1+2συν2α)}=ἐφ3α.$

Σημ. Ὑποτίθεται ὅτι $1+2συν2α\neq0$· ἄλλως ἡ παράστασις λαμβάνει τὴν ἀόριστον μορφὴν $\frac{0}{0}$.

§ 469. Α′) Ἐκ τῆς γνωστῆς ἰσότητος $συν^2τ = \dfrac{1}{1+ἐφ^2τ}$ εὑρίσκομεν ὅτι $1 + ἐφ^2τ = \dfrac{1}{συν^2τ}$.

Β′ τρόπος. $1+ἐφ^2τ=1+\dfrac{ἡμ^2τ}{συν^2τ}=\dfrac{συν^2τ+ἡμ^2τ}{συν^2τ}=\dfrac{1}{συν^2τ}$.

Β′) Προφανῶς $ἡμ^2α-ἡμ^2β=(ἡμα+ἡμβ)(ἡμα-ἡμβ)=$
$2ἡμ\left(\dfrac{α+β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α-β}{2}\right)\cdot 2ἡμ\left(\dfrac{α-β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$ καὶ

$συνα+συνβ=2συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α-β}{2}\right)$. Ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

$$\frac{ἡμ^2α-ἡμ^2β}{(συνα+συνβ)^2}\ \frac{4ἡμ\left(\dfrac{α+β}{2}\right)ἡμ\left(\dfrac{α-β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α-β}{2}\right)}{4συν^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right)συν^2\left(\dfrac{α-β}{2}\right)}$$

$$=\frac{ἡμ\left(\dfrac{α+β}{2}\right)}{συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)}\cdot\frac{ἡμ\left(\dfrac{α-β}{2}\right)}{συν\left(\dfrac{α-β}{2}\right)}=ἐφ\left(\frac{α-β}{2}\right).ἐφ\left(\frac{α-β}{2}\right)$$

Β′ τρόπος. Ἐπειδὴ $ἡμ^2α=1-συν^2α$, $ἡμ^2β=1-συν^2β$, ὁ ἀριθμητὴς γίνεται $συν^2β-συν^2α$ ἢ $(συνβ+συνα)\ (συνβ--συνα)$.

Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται

$$\frac{συνβ-συνα}{συνβ+συνα}=\frac{2ἡμ\left(\dfrac{α-β}{2}\right)ἡμ\left(\dfrac{α+β}{2}\right)}{2συν\left(\dfrac{α-β}{2}\right)συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)}$$

$$=ἐφ\left(\frac{α+β}{2}\right)ἐφ\left(\frac{α-β}{2}\right).$$

§ 470. Παρατηροῦμεν ὅτι $σφ^2α-ἐφ^2α=(σφα+ἐφα(σφα-ἐφα).(1)$

Ἐπειδὴ δὲ $σφα+ἐφα=\dfrac{συνα}{ἡμα}+\dfrac{ἡμα}{συνα}=\dfrac{συν^2α+ἡμ^2α}{ἡμασυνα}=\dfrac{1}{ἡμασυνα}$

καὶ $σφα-ἐφα=\dfrac{συνα}{ἡμα}-\dfrac{ἡμα}{συνα}=\dfrac{συν^2α-ἡμ^2α}{ἡμασυνα}=\dfrac{συν2α}{ἡμασυνα}$, ἕπεται ὅτι $\sigma\varphi^2\alpha - \grave{\varepsilon}\varphi^2\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\acute{\eta}\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$.

§ 471. Θέτομεν $x = (\acute{\eta}\mu A + \acute{\eta}\mu B)^2 + (\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B^2)$ καὶ ἐνθυμούμενοι ὅτι $\acute{\eta}\mu A + \acute{\eta}\mu B = 2\acute{\eta}\mu\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$

εὑρίσκομεν ὅτι $x = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{A-B}{2}\right)\left[\acute{\eta}\mu^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\right]$.

ὅθεν $x = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$.

B′ τ ρ ό π ο ς. $x = \acute{\eta}\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A + \acute{\eta}\mu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2 B$ $+ 2(\acute{\eta}\mu A\acute{\eta}\mu B + \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B) = 2 + 2\sigma\upsilon\nu(A-B) = 2[(1 + \sigma\upsilon\nu(A-B)]$

$$= 2\,.\,2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right) = 4\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A-B}{2}\right).$$

§ 472. Γνωρίζομεν ὅτι $2\acute{\eta}\mu\alpha - \acute{\eta}\mu 2\alpha = 2\acute{\eta}\mu\alpha - 2\acute{\eta}\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ $= 2\acute{\eta}\mu\alpha(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)$ καὶ $2\acute{\eta}\mu\alpha + \acute{\eta}\mu 2\alpha = 2\acute{\eta}\mu\alpha(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)$.

Ἐπομένως $\dfrac{2\acute{\eta}\mu\alpha - \acute{\eta}\mu 2\alpha}{2\acute{\eta}\mu\alpha + \acute{\eta}\mu 2\alpha} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\grave{\varepsilon}\varphi\,\dfrac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}}$,

ἕπεται ὅτι $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \grave{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$. Ἄρα $\dfrac{2\acute{\eta}\mu\alpha - \acute{\eta}\mu 2\alpha}{2\acute{\eta}\mu\alpha + \acute{\eta}\mu 2\alpha} = \grave{\varepsilon}\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

§ 473. A′) Προφανῶς $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{1}{\acute{\eta}\mu\alpha} = \dfrac{\acute{\eta}\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}{\acute{\eta}\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ $\acute{\eta}\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha = \acute{\eta}\mu\alpha + \acute{\eta}\mu(90^\circ - \alpha) = 2\acute{\eta}\mu 45^\circ\sigma\upsilon\nu(45^\circ - \alpha)$ $= \dfrac{2\sqrt{2}}{2}\sigma\upsilon\nu(45^\circ - \alpha)$, ἡ (1) γίνεται $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{1}{\acute{\eta}\mu\alpha} = \dfrac{2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha)}{2\sigma\upsilon\nu\alpha\acute{\eta}\mu\alpha}$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu(45^\circ-\alpha)}{\acute{\eta}\mu 2\alpha} = \frac{2\sqrt{2}\,\acute{\eta}\mu(45^\circ+\alpha)}{\acute{\eta}\mu 2\alpha}.$$

§ 474. A′) Ἔστω $x = 1 + \grave{\varepsilon}\varphi 50^\circ = \grave{\varepsilon}\varphi 45^\circ + \grave{\varepsilon}\varphi 50^\circ = \dfrac{\acute{\eta}\mu 95^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\sigma\upsilon\nu 50^\circ}$

$= \dfrac{\sigma\upsilon\nu(-5^\circ)}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ.\sigma\upsilon\nu 50^\circ} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 5^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ\sigma\upsilon\nu 50^\circ}$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι

$\text{λογ}\,x = \text{λογσυν}5^\circ - (\text{λογσυν}45^\circ + \text{λογσυν}50^\circ) = 0,34078$ καὶ $x = 2,19175$.

Β΄) Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὴν διαφορὰν $1 - \text{ἐφ}50^\circ$. — Ταχύτερον δὲ εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν παραστάσεων τούτων, ἂν ἀπὸ τὸν πίνακα III εὕρωμεν ὅτι $\text{ἐφ}50^\circ = \text{ἐφ}(49^\circ 60') = 1,19175$. Ἑπομένως $1 - \text{ἐφ}50^\circ = 1 - 1,19175 = -0,19175$.

Γ΄) Ἐπειδὴ $\text{σφ}42^\circ + \text{σφ}25^\circ = \dfrac{1}{\text{ἐφ}42^\circ} + \dfrac{1}{\text{ἐφ}25^\circ} = \dfrac{\text{ἐφ}42^\circ + \text{ἐφ}25^\circ}{\text{ἐφ}42^\circ \,.\, \text{ἐφ}25^\circ}$,

ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται $x = (\text{ἐφ}42^\circ + \text{ἐφ}25^\circ) : \dfrac{\text{ἐφ}42^\circ + \text{ἐφ}25^\circ}{\text{ἐφ}42^\circ \,.\, \text{ἐφ}25^\circ}$

$= \text{ἐφ}42^\circ \,.\, \text{ἐφ}25^\circ$, ὅθεν $\text{λογ}x = \overline{1},62311$ καὶ $x = 0,41986$.

§ 475. Α΄) Ἡ ἐξίσωσις $\text{σφ}x = \dfrac{1}{2}$ γίνεται $\text{ἐφ}x = 2$ (§ 411 Α΄).

Β΄) Ἐπειδὴ $\text{ἡμ}(180^\circ + x) = -\text{ἡμ}x = \dfrac{5}{6}$, ἕπεται ὅτι

$\text{λογἡμ}(180^\circ + x) = \text{λογ}5 - \text{λογ}6 = \overline{1},92082$ καὶ

$\text{ἡμ}(180^\circ + x) = \text{ἡμ}(56^\circ\, 27'\, 33'')$ κ.τ.λ.

Γ΄) Ὁμοίως ἡ ἐξίσωσις $\text{συν}x = -0,6$ γίνεται $\text{συν}(180^\circ - x) = 0,6$ καὶ $\text{συν}(180^\circ - x) = \text{συν}(53^\circ\, 8'\, 10'',6)$ κ.τ.λ.

§ 476. Α΄) Κατὰ τὸν γνωστὸν τύπον $\dfrac{\text{ἡμ}A - \text{ἡμ}B}{\text{ἡμ}A + \text{ἡμ}B} = \dfrac{\text{ἐφ}\left(\dfrac{A-B}{2}\right)}{\text{ἐφ}\left(\dfrac{A+B}{2}\right)}$

εἶναι $x = \dfrac{\text{ἡμ}(80^\circ\, 15') - \text{ἡμ}(48^\circ\, 25')}{\text{ἡμ}(80^\circ\, 15') + \text{ἡμ}(48^\circ\, 25')} = \dfrac{\text{ἐφ}(15^\circ\, 55')}{\text{ἐφ}(64^\circ\, 20')}$. Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $\text{λογ}x = \text{λογἐφ}(15^\circ\, 55') - \text{λογἐφ}(64^\circ 20')$ κ.τ.λ.

Β΄) Γνωρίζομεν ὅτι $1 + \text{ἡμ}\alpha = \text{ἡμ}90^\circ + \text{ἡμ}\alpha$

$$= 2\text{ἡμ}\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\text{συν}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\text{ἡμ}^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$$

καὶ $1 - \text{ἡμ}\alpha = \text{ἡμ}90^\circ - \text{ἡμ}\alpha = 2\text{ἡμ}\left(45^\circ - \dfrac{\alpha}{2}\right)\text{συν}\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$

$$= 2\text{συν}^2\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Ἑπομένως $\dfrac{1 + \text{ἡμ}\alpha}{1 - \text{ἡμ}\alpha} = \text{ἐφ}^2\left(45^\circ + \dfrac{\alpha}{2}\right)$. Κατὰ ταῦτα

$$y = \frac{1 + ἡμ(48^\circ\ 15'\ 30'')}{1 - ἡμ(48^\circ\ 15'\ 30'')} = ἐφ^2(69^\circ\ 7'\ 45'')\ καὶ$$

$$λογy = 2λογἐφ(69^\circ\ 7'\ 45'')\ κ.τ.λ.$$

§ 477. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $β = αἡμB$, $γ = ασυνB$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\frac{β}{α+γ} = \frac{αἡμB}{α(1+συνB)} = \frac{2ἡμ\frac{B}{2}συν\frac{B}{2}}{2συν^2\frac{B}{2}} = ἐφ\frac{B}{2}.$$

B′ τρόπος. $Ἐφ\frac{B}{2} = \dfrac{ἡμ\frac{B}{2}}{συν\frac{B}{2}} = \dfrac{ἡμ\frac{B}{2}συν\frac{B}{2}}{2συν^2\frac{B}{2}}$

$= \dfrac{ἡμB}{1+συνB}$. Ἐπειδὴ δὲ $ἡμB = \dfrac{β}{α}$, $συνB = \dfrac{γ}{α}$, ἔπεται ὅτι

$$ἐφ\frac{B}{2} = \frac{\frac{β}{α}}{1+\frac{γ}{α}} = \frac{β}{α+γ}.$$

§ 478. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $ἐφ2B = \dfrac{2ἐφB}{1-ἐφ^2B}$ καὶ $ἐφB = \dfrac{β}{γ}$

ἔπεται ὅτι $ἐφ2B = \dfrac{2β/γ}{1-β^2/γ^2} = \dfrac{2βγ}{γ^2-β^2}$.

B′ τρόπος. Ἐπειδὴ $β = αἡμB$, $γ = ασυνB$, ἔπεται ὅτι

$$\frac{2βγ}{γ^2-β^2} = \frac{2α^2ἡμBσυνB}{α^2(συν^2B - ἡμ^2B)} = \frac{ἡμ2B}{συν2B} = ἐφ2B.$$

§ 479. Γνωρίζομεν ὅτι $συν(B-Γ) = συνBσυνΓ + ἡμBἡμΓ$. (1)

Ἐκ δὲ τῶν ἰσοτήτων $β = αἡμB = ασυνΓ$, $γ = αἡμΓ = ασυνB$

εὑρίσκομεν ὅτι $ἡμB = συνΓ = \dfrac{β}{α}$, $ἡμΓ = συνB = \dfrac{γ}{α}$. Ἡ (1) λοιπὸν

γίνεται $συν(B-Γ) = \dfrac{βγ}{α^2} + \dfrac{βγ}{α^2} = \dfrac{2βγ}{α^2}$.

§ 480. Ἐπειδὴ $συν2B = 2συν^2B - 1$, $συνB = \dfrac{γ}{α}$ ἔπεται ὅτι

$$\mathbf{συν2}B = 2\frac{γ^2}{α^2} - 1 = \frac{γ^2 + (γ^2 - α^2)}{α^2} = \frac{γ^2-β^2}{α^2}.$$

Β′ τρόπος. $\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$. Ἐπειδὴ δὲ $\frac{\gamma}{\alpha}=$ συνΒ, $\frac{\beta}{\alpha}=$ ἡμΒ, ἐννοοῦμεν ὅτι $\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}=$ συν²Β−ἡμ²Β=συν2Β.

§ 481. Ἐπειδὴ $E=\frac{1}{2}\beta\gamma$, β = αἡμΒ, γ = ασυνΒ, ἕπεται ὅτι

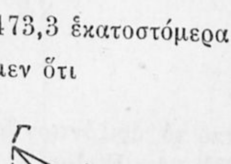
$$E=\frac{1}{2}\alpha^2\text{ἡμ}B\text{συν}B=\frac{1}{4}\alpha^2 2\text{ἡμ}B\text{συν}B=\frac{1}{4}\alpha^2\text{ἡμ}2B.$$

§ 482. Ἔστω ΓΑ ἡ ζητουμένη ἀπόστασις. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΓ βλέπομεν ὅτι (ΓΑ) = (ΒΓ) ἡμ20°. (1)

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἁμαξοστοιχία εἰς 60^{π} διανύει 40 χιλιόμετρα εἰς 3^{π} διανύει $\frac{40}{60}\cdot 3=2$ χιλιόμ. Εἶναι λοιπὸν (ΒΓ)=2000 μέτρα ἡ δὲ (1) γίνεται (ΑΓ) = 2000ἡμ20° = 2000. 0,34202 = 684,04 μέτρα.

§ 483. Ἔστω ΓΒ τὸ κεκλιμένον ἐπίπεδον, ΓΑ τὸ ὕψος καὶ ω ἡ κλίσις αὐτοῦ. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (ΓΑ) = (ΓΒ) ἡμω, $(\Gamma B)=\frac{1}{2}\gamma t^2$ εὑρίσκομεν ὅτι $(\Gamma A)=\frac{1}{2}\gamma t^2$ἡμω. Ἐπειδὴ δὲ γ=981ἡμω, αὕτη γίνεται $(\Gamma A)=\frac{981}{2}t^2$ ἡμ² ω. Αὕτη διὰ t=2 καὶ ω = 29° 25′ γίνεται (ΓΑ)=981 . 2ἡμ²(29°25′), ὅθεν εὑρίσκομεν (ΓΑ)=473,3 ἑκατοστόμετρα.

§ 484. Ἐπειδὴ Α = 30°, Β = 135° εὑρίσκομεν ὅτι ω=15° (σχ. 33). Ἐπειδὴ δὲ φ=ω+30°=45°, εἶναι (ΓΔ)=(ΔΒ)=(ΔΑ)−γ. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΔΓ βλέπομεν ὅτι (ΔΑ)=(ΔΓ)ἐφ60° =(ΓΔ).$\sqrt{3}$. Ἡ προηγουμένη λοιπὸν ἰσότης γίνεται (ΓΔ)=(ΓΔ)$\sqrt{3}$−γ, ὅθεν (ΓΔ) (1−$\sqrt{3}$) =−γ καὶ $(\Gamma\Delta)=\frac{-80}{1-\sqrt{3}}=\frac{-80(1+\sqrt{3})}{-2}$ = 40(1 + $\sqrt{3}$) ἑκατοστ.= 109,28 ἑκατ.

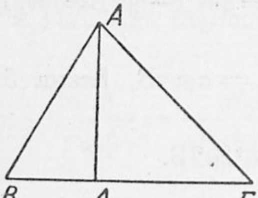


Σχ. 33.

§ 485. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι Α = 180°−(60°+ 45°) = 75°.

Ἔπειτα ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΒΔ βλέπομεν ὅτι (ΑΔ)=(ΑΒ)ἡμΒ ἢ 5 = γἡμ60°, ὅθεν $\gamma=\frac{5}{\text{ἡμ}60^{\circ}}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Ὁμοίως ἐκ τοῦ ΑΔΓ βλέπομεν ὅτι $5 = \beta \eta\mu 45^\circ = \beta \frac{\sqrt{2}}{2}$ καὶ



Σχ. 34.

$\beta = 5\sqrt{2}$. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ (ΒΓ) παρα τηροῦμεν ὅτι (ΒΓ)=(ΒΔ)+(ΔΓ). Ἐπει δὴ δὲ $(\widehat{ΒΑΔ}) = 30^\circ$, ἕπεται ὅτι

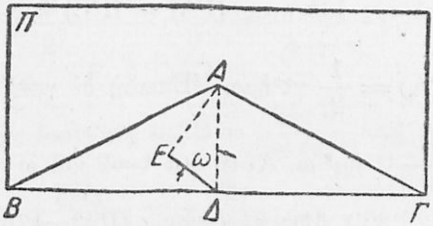
$$(ΒΔ) = \frac{(ΑΒ)}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

Ἕνεκα δὲ τῆ $Γ = 45^\circ$ εἶναι (ΔΓ)=(ΑΔ)=5 μέτ. Ἄρ

$$(ΒΓ) = \frac{5\sqrt{3}}{3} + 5 = \frac{5(3+\sqrt{3})}{3}.$$

Τέλος δὲ $Ε = \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΑΔ) = . \frac{25(3+\sqrt{3})}{6}$ τετ. μέτρα.

§ 486. Ἔστω ΑΒΓ ἡ τριγωνικὴ πλευρὰ τῆς στέγης, ΑΔ τὸ ὕψο τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ (ΑΕ)=1,8 μέτρα ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς



Σχ. 35.

ἀπὸ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ΒΓ (σχ 35). Ἂν Ε εἶναι τὸ ζητούμενον ἐμβαδόν, θὰ εἶναι

$$Ε = \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΑΔ) = 2{,}15\,(ΑΔ). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὸ Θ, τῶν 3 καθέτων ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος ἐπ τὴν ΒΓ, ἡ γωνία ω εἶναι ἡ δοθεῖσα κλίσις, ἤτοι $\omega = 25^\circ$. Ἐκ δ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΕΔ βλέπομεν ὅτι $(ΑΕ) = (ΑΔ)\,\eta\mu 25^\circ$, ὅθε

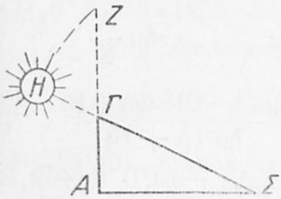
$(ΑΔ) = \frac{(ΑΕ)}{\eta\mu 25^\circ} = \frac{1{,}80}{\eta\mu 25^\circ}$. Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται $Ε = 2{,}15 \cdot \frac{1{,}80}{\eta\mu 25^\circ}$ κτλ

§ 487. Ἔστω ΑΓ ἡ κατακόρυφος ῥάβδος καὶ ΑΣ ἡ σκιὰ αὐτῆ

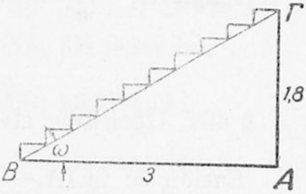
(σχ. 36). Τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι ἡ γωνία Σ. Εἶναι δὲ $ἐφΣ = \frac{(ΑΓ)}{(ΑΣ)}$

$=\frac{2,15}{6,45}=\frac{1}{3}$, ὅθεν $\Sigma = 18^{\circ}\, 26'\, 5'',7$.

§ 488. Ἔστω ΒΓ ἡ κλῖμαξ καὶ Α ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Γ ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ Β διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον (σχ. 37). Ἡ πλευρὰ



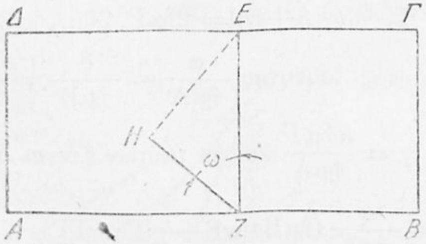
Σχ. 36.



Σχ. 37.

ΒΑ εἶναι ἄθροισμα τῶν προβολῶν τοῦ πλάτους τῶν βαθμίδων. Ἐπομένως εἶναι $(ΒΑ) = 0,30 \times 10 = 3$ μέτρα. Ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι $(ΑΓ)=0,18\times10=1,80$ μέτ. Εἶναι λοιπὸν ἐφω$=\frac{(ΑΓ)}{(ΒΑ)}=\frac{1,80}{3}=0,60$, ὅθεν $\omega = 30^{\circ}\, 57'\, 49'',65$.

§ 489. Ἔστω ΕΖ κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ καὶ ΕΗ κάθετος ἐπὶ τὸ διὰ τῆς ΑΒ διερχόμενον ὁριζόντιον ἐπίπεδον (σχ. 38). Κατὰ τὸ



Σχ. 38.

Θ. τῶν 3 καθέτων ἡ ΖΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ· ἐπομένως ἡ γωνία ω εἶναι ἡ ζητουμένη κλίσις. Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΕΖΗ βλέπομεν ὅτι ἡμω $=\frac{ΕΗ}{ΕΖ}=\frac{9}{15}$, ὅθεν $\omega = 36^{\circ}\, 52'\, 10'',58$.

§ 490. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\alpha = 2R$ἡμ$A = 4R$ἡμ $\frac{A}{2}$ συν $\frac{A}{2}$, $\beta = 2R$ἡμB, $\gamma = 2R$ἡμΓ εὑρίσκομεν ὅτι $\beta + \gamma = 2R($ἡμ$B +$ ἡμ$\Gamma) =$

$$4R\,\eta\mu\,\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}=4R\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}.$$

Ἑπομένως $\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}=\dfrac{4R\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}}{4\,R\eta\mu\,\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{A}{2}}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu\,\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\,\frac{A}{2}}$.

§ 491. Προφανῶς εἶναι $\dfrac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+}=\dfrac{\eta\mu(A-B)\eta\mu(A+B)}{\eta\mu^2(A+B)}$. (1

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu\,(A-B)\,\eta\mu\,(A+B)=\eta\mu^2A-\eta\mu^2B$ (§ 462 B

καὶ $\eta\mu(A+B)=\eta\mu\Gamma$, ἡ (1) γίνεται $\dfrac{\eta\mu(A-B)}{\eta\mu(A+B)}=\dfrac{\eta\mu^2A-\eta\mu^2B}{\eta\mu^2\Gamma}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\eta\mu A=\dfrac{\alpha}{2R}$ κ.τ.λ. αὕτη γίνεται

$$\frac{\eta\mu\,(A-B)}{\eta\mu(A+B)}=\left(\frac{\alpha^2}{4R^2}-\frac{\beta^2}{4R^2}\right)\frac{\gamma^2}{4R^2}=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\gamma^2}.$$

§ 492. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu 2A+\eta\mu 2B=2\eta\mu\,(A+B)\sigma\upsilon\nu\,(A-B$
$=2\eta\mu\,\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B)$

καὶ $\eta\mu 2\Gamma=2\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma$. Ἐκ τούτων δὲ εὑρίσκομεν ὅτι
$\eta\mu 2A+\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma=2\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B)+\sigma\upsilon\nu\Gamma]$
$=2\eta\mu\Gamma[\sigma\upsilon\nu(A-B)-\sigma\upsilon\nu(A+B)]=2\eta\mu\Gamma\,.\,2\eta\mu A\eta\mu B=4\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$

§ 493. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ εὑρίσκομεν

ὅτι $\beta=\dfrac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A}$, $\gamma=\dfrac{\alpha\eta\mu\,\Gamma}{\eta\mu A}$ καὶ ἐκ τούτων ἕπεται ὅτι

$$\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\alpha}{\eta\mu A}(\eta\mu B\sigma\upsilon\nu B+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma)$$

$$=\frac{\alpha}{2\,\eta\mu\,A}(\eta\mu 2B+\eta\mu 2\Gamma)=\frac{\alpha}{\eta\mu A}\,\eta\mu(B+\Gamma)\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)=\alpha\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma).$$

§ 494. Γνωρίζομεν ὅτι $\eta\mu A=\eta\mu(B+\Gamma)=\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B$,
ἡ δὲ ἰσότης $\eta\mu A=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$ γίνεται
$\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B=2\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$, ὅθεν $\eta\mu B\sigma\upsilon\nu\Gamma-\eta\mu\Gamma\sigma\upsilon\nu B=0$
ἢ $\eta\mu(B-\Gamma)=0$. Ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι $B-\Gamma=\lambda\pi$. Ἐπειδὴ δὲ $|B-\Gamma|<\pi$, θὰ εἶναι $\lambda=0$ καὶ ἑπομένως $B=\Gamma$.

§ 495. Ἂν $\beta=\gamma$ καὶ ΑΔ τὸ ὕψος, θὰ εἶναι $(B\Delta)=\dfrac{\alpha}{2}=\beta\eta\mu\,\dfrac{A}{2}$.

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha = \frac{\beta}{2}$, ἕπεται ὅτι $\frac{\beta}{4} = \beta ἡμ \frac{A}{2}$,

ὅθεν $ἡμ \frac{A}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$, $\frac{A}{2} = 14^\circ\, 28'\, 39''$, $A = 28^\circ\, 57'\, 18''$.

Μεθ' ὃ $2B = 180^\circ - 28^\circ\, 57'\, 18'' = 151^\circ\, 2'\, 42''$, $B = \Gamma = 75^\circ\, 31'\, 21''$.

§ 496. Ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΒΔ, βλέπομεν ὅτι

$$E = 2(AB\Delta) = 2 \cdot \frac{1}{2}(AB)(A\Delta)\, ἡμ A = (AB)(A\Delta)\, ἡμ A.$$

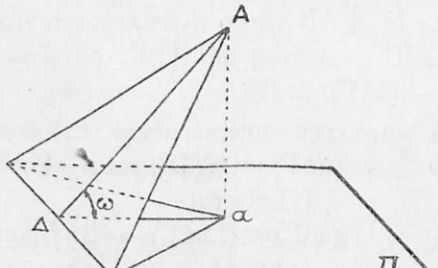
§ 497. Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν Γ καὶ εἶτα τὰς πλευρὰς ἐκ τῶν $\alpha = 2R ἡμ A = 16 ἡμ(35^\circ\, 15')$ κ.τ.λ. Τέλος ἐκ τῆς ἰσότητος $E = 2R^2 ἡμ A ἡμ B ἡμ \Gamma$ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδόν.

§ 498. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῆς τομῆς ΑΒΓ εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν διέδρων γωνιῶν, ἀρκεῖ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ. Πρὸς τοῦτο ἐκ τῶν ἰσοτήτων $\alpha = 12$, $\beta = 16$, $\gamma = 20$ εὑρίσκομεν $\tau = 24$, $\tau - \alpha = 12$, $\tau - \beta = 8$, $\tau - \gamma = 4$. Ἑπομένως

$$\varrho = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}} = \sqrt{\frac{12 \cdot 8 \cdot 4}{24}} = 4$$

καὶ $ἐφ \frac{A}{2} = \frac{\varrho}{\tau - \alpha} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ κ.τ.λ.

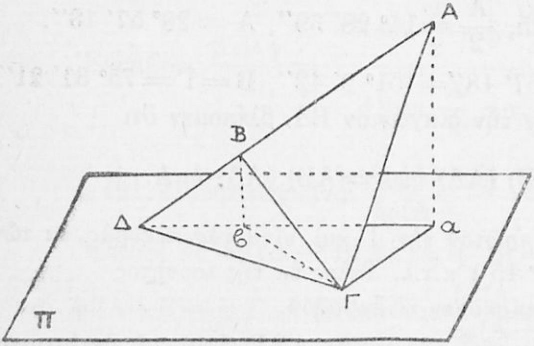
§ 499. Α') Ἂν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ



Σχ. 39 α'.

προβ. ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αβγ τοῦ τριγώνου εἶναι ἴση πρὸς αὐτό. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία αὐτῶν εἶναι 0° καὶ συν $0^\circ = 1$, εἶναι $(\alpha\beta\gamma) = (AB\Gamma) = (AB\Gamma)$ συν0°. Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ ἰδιότης εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

Β΄) Ἂν μία μόνον πλευρὰ π. χ. ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον, δυνάμεθα νὰ νοήσωμεν αὐτὸ μετατιθέμενον παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, μέχρις οὗ διέλθῃ διὰ τῆς ΒΓ· οὕτω δὲ δὲν μεταβάλλεται τὸ μέγεθος τῆς προβολῆς τοῦ ΑΒΓ. Ἔστω α λοιπὸν ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π διερχόμενον διὰ τῆς ΒΓ καὶ παράλληλον πρὸς τὸ προβ. ἐπίπεδον (σχ. 39 α΄). Ἂν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ΑΒΓ, αΔ θὰ εἶναι ὕψος τοῦ αΒΓ, κατὰ τὸ Θ. τῶν 3 καθέτων καὶ ω ἡ κλίσις τοῦ ΑΒΓ πρὸς τὸ Π.



Σχ. 39 β΄.

Ἑπομένως $(\alpha ΒΓ) = \frac{1}{2}(ΒΓ)(\alpha Δ)$. Ἐπειδὴ δὲ $(\alpha Δ) = (ΑΔ)$συνω,

ἕπεται ὅτι $(\alpha ΒΓ) = \frac{1}{2}(ΒΓ)(ΑΔ)$συνω $= (ΑΒΓ)$ συνω.

Γ΄) Ἂν τὸ προβ. ἐπίπεδον πρὸς οὐδεμίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου εἶναι παράλληλον, δυνάμεθα νὰ μεταθέσωμεν αὐτὸ παραλλήλως πρὸς ἑαυτό, μέχρις οὗ διέλθῃ διά τινος κορυφῆς π.χ. τῆς Γ χωρὶς νὰ τμήσῃ τὸ τρίγωνον. Ἂν δὲ ἡ ΑΒ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἴς τι σημεῖον Δ (σχ. 39 β΄), καὶ αβΓ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΒΓ, θὰ εἶναι
$(\alpha\beta Γ) = (\alpha ΔΓ) - (\beta ΔΓ)$. (1)

Ἐπειδὴ δὲ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι
$(\alpha ΔΓ) = (ΑΔΓ)$ συνω, $(\beta ΔΓ) = (ΒΔΓ)$ συνω,
ἡ (1) γίνεται
$(\alpha\beta Γ) = [(ΑΔΓ) - (ΒΔΓ)]$συνω $= (ΑΒΓ)$συνω.

Σχ. 40.

β΄) Ἂν τυχὸν εὐθ. σχῆμα ἀναλύσωμεν εἰς τρίγωνα καὶ ἐφαρμόσωμεν εἰς ἕκαστον τρίγωνον τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰδιότητα, βεβαιούμεθα ὅτι αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ τὸ σχῆμα τοῦτο.

§ 500. Τὸ ὕψος ΚΕ κανονικοῦ τετραέδρου Κ.ΑΒΓ τέμνει τὴν βάσιν ΑΒΓ εἰς τὸ κέντρον Ε αὐτῆς (σχ. 40). Ἑπομένως προβολὴ τῆς ἀκμῆς ΚΑ εἶναι ἡ ἀκτὶς ΕΑ τῆς βάσεως καὶ

$K\widehat{A}E = \omega$ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία. Εἶναι δὲ $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{EA}{KA} = \frac{EA}{\alpha}$. (1)

Καὶ ἐπειδὴ $\alpha = (EA)\sqrt{3}$, ἕπεται ὅτι $(EA) = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}$,

ἡ δὲ (1) γίνεται $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ὅθεν $\omega = 54^\circ\, 44'\, 7''$.

Β' τρόπος. Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΕΑ βλέπομεν ὅτι

$(KE) = (EA)\acute{\epsilon}\varphi\omega = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\cdot \acute{\epsilon}\varphi\omega$. Ἐπειδὴ δὲ $(KE)^2 = (KA)^2 - (EA)^2$

$= \alpha^2 - \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{6\alpha^2}{9}$, ἕπεται ὅτι $(KE) = \frac{\alpha}{3}\sqrt{6}$. Ἑπομένως

$\frac{\alpha\sqrt{6}}{3} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}\, \acute{\epsilon}\varphi\omega$, ὅθεν $\acute{\epsilon}\varphi\omega = \sqrt{2}$ κ.τ.λ.

§ 501. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας $\beta = 2R\acute{\eta}\mu B$, $\gamma = 2R\acute{\eta}\mu\Gamma$ εὑρίσκομεν ὅτι

$$\beta^2 + \gamma^2 = 4R^2(\acute{\eta}\mu^2 B + \acute{\eta}\mu^2\Gamma). \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $B = 90^\circ + \Gamma$, εἶναι $\acute{\eta}\mu B = \acute{\eta}\mu(90^\circ + \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(-\Gamma) = \sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $\beta^2 + \gamma^2 = 4R^2\,(\sigma\upsilon\nu^2\Gamma + \acute{\eta}\mu^2\Gamma) = 4R^2$.

§ 502. Ἡ β' ἐξίσωσις γίνεται $\frac{2}{\acute{\epsilon}\varphi x} + \frac{4}{\acute{\epsilon}\varphi y} = 1$, ὅθεν

$2\acute{\epsilon}\varphi y + 4\acute{\epsilon}\varphi x = \acute{\epsilon}\varphi x\, \acute{\epsilon}\varphi y$. (1). Ἐκ δὲ τῆς α' εὑρίσκομεν $\acute{\epsilon}\varphi y = 4 - 9\acute{\epsilon}\varphi x$ καὶ ἑπομένως ἡ (1) γίνεται $2\,(4 - 9\,\acute{\epsilon}\varphi x) + 4\,\acute{\epsilon}\varphi x = \acute{\epsilon}\varphi x\,(4 - 9\,\acute{\epsilon}\varphi x)$ ἢ $9\acute{\epsilon}\varphi^2 x - 18\acute{\epsilon}\varphi x + 8 = 0$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν

$$\acute{\epsilon}\varphi x = \frac{2}{3} \text{ καὶ } \acute{\epsilon}\varphi x = \frac{4}{3}.$$

Εἰς τὴν $\acute{\epsilon}\varphi x = \frac{2}{3}$ ἀντιστοιχεῖ $\acute{\epsilon}\varphi y = 4 - 9.\frac{2}{3} = -2$. Εἰς δὲ τὴν

$\acute{\epsilon}\varphi x = \frac{4}{3}$ ἀντιστοιχεῖ $\acute{\epsilon}\varphi y = 4 - 9.\frac{4}{3} = -8$. Τὸ ζήτημα λοιπὸν

ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν συστημάτων

1ον) $\acute{\epsilon}\varphi x = \frac{4}{3}$, $\acute{\epsilon}\varphi y = -8$ καὶ 2ον) $\acute{\epsilon}\varphi x = \frac{2}{3}$, $\acute{\epsilon}\varphi y = -2$.

Ἡ α' ἐξίσωσις τοῦ 1ου συστήματος ἀληθεύει διὰ $x = 180^\circ\lambda + 53^\circ\, 7'\, 48''$. Ἡ δὲ β' εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\acute{\epsilon}\varphi(180^\circ - y) = 8$, ἥτις ἀληθεύει, ἂν

$180° - y = 180°\lambda + 82° 52' 30''$, ὅθεν $y = -180°\lambda + 97° 7' 30''$.

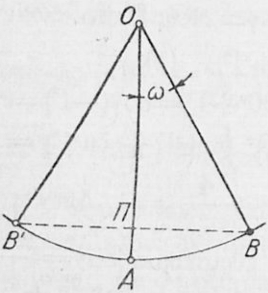
Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον λύομεν καὶ τὸ 2ον σύστημα.

§ 503. Ἐπειδὴ $\text{ἐφ}2x = \dfrac{2\,\text{ἐφ}x}{1 - \text{ἐφ}^2x}$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

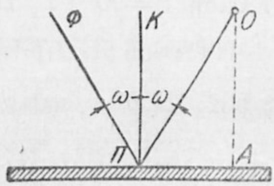
$\dfrac{2\,\text{ἐφ}x}{1 - \text{ἐφ}^2x} = 3\,\text{ἐφ}x$. Αὕτη δὲ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $3\,\text{ἐφ}^3x - \text{ἐφ}x = 0$ ἢ $\text{ἐφ}x(3\,\text{ἐφ}^2x - 1) = 0$ καὶ ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων $\text{ἐφ}x = 0 = \text{ἐφ}0$, $3\,\text{ἐφ}^2x - 1 = 0$. Ἡ α΄ τούτων ἀληθεύει διὰ $x = \lambda\pi$. Ἡ β΄ ἔχει τὰς ρίζας τῶν ἐξισώσεων

$\text{ἐφ}x = \pm \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ἢ $\text{ἐφ}x = \text{ἐφ}\dfrac{\pi}{6}$ καὶ $\text{ἐφ}x = \text{ἐφ}\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$ κ.τ.λ.

§ 504. Ἄγομεν τὴν ΒΠ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ καὶ βλέπομεν ὅτι (ΑΠ) = (ΟΑ) — (ΟΠ) (σχ. 41). Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΟΠΒ



Σχ. 41.



Σχ. 42.

εὑρίσκομεν ὅτι (ΟΠ) = (ΟΒ) συνω = (ΟΑ) συνω. Ἑπομένως

$(\text{ΑΠ}) = (\text{ΟΑ}) - (\text{ΟΑ})\,\text{συν}\omega = (\text{ΟΑ})\,(1 - \text{συν}\omega) = 2(\text{ΟΑ})\,\text{ἡμ}^2\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$

$= 2.0{,}50\ \text{ἡμ}^2(1°5') = \text{ἡμ}^2(1°5') = 0{,}03574538$ ἑκατοστόμ.

§ 505. Ἔστω ΦΠ ἡ προσπίπτουσα ἀκτίς, ΠΟ ἡ ἀνακλωμένη, Ο ὁ ὀφθαλμὸς τοῦ παρατηρητοῦ καὶ ἡ Α ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὸ κάτοπτρον Κ΄Κ (σχ. 42).

Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΑΟΠ βλέπομεν ὅτι

$\text{ἐφ}\varphi = \dfrac{\text{ΑΟ}}{\text{ΠΑ}} = \dfrac{0{,}38}{0{,}15}$. Ἐκ ταύτης δὲ ὑπολογίζομεν τὴν φ καὶ ἔπειτα τὴν ζητουμένην $\omega = 90° - \varphi$.

§ 506. Ἂν ω εἶναι ἡ γωνία προσπτώσεως καὶ δ τῆς διαθλάσεως, γνωρίζομεν ὅτι $\frac{ἡμω}{ἡμδ}=\frac{4}{3}$. Ἑπομένως ἡμδ $=\frac{3}{4}$ ἡμ $(38^{\circ}\,12')$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν $δ = 27^{\circ}\,38'$.

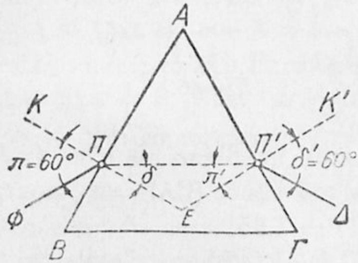
§ 507. Ἔστω π ἡ γωνία προσπτώσεως ἀκτῖνος ΦΠ, δ ἡ γωνία τῆς διαθλάσεως αὐτῆς, π΄ ἡ γωνία προσπτώσεως τῆς εἰσδυούσης ἀκτῖνος ΠΠ΄ καὶ δ΄ ἡ γωνία διαθλάσεως αὐτῆς (σχ. 43). Κατὰ τὰ γνωστὰ εἶναι $\frac{ἡμπ}{ἡμδ}=ν$ καὶ $\frac{ἡμπ'}{ἡμδ'}=\frac{1}{ν}$. Ἑπομένως $\frac{ἡμπ\,.\,ἡμπ'}{ἡμδ\,.\,ἡμδ'}=1$.

Ἂν δὲ $π=60^{\circ}$, $δ'=60^{\circ}$, αὕτη γίνεται $\frac{ἡμπ'}{ἡμδ}=1$ καὶ ἑπομένως $π'=δ$.

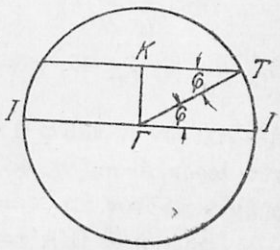
Ἐπειδὴ δὲ $π'+δ+Ε=180^{\circ}=Α+Ε$, ἕπεται ὅτι $Α=π'+δ$ ἢ $60^{\circ}=2δ$ καὶ ἑπομένως $δ=30^{\circ}$. Ἄρα $ν =$ ἡμπ. : ἡμδ $=$ ἡμ60° : ἡμ30°

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}:\frac{1}{2}=\sqrt{3}.$$

§ 508. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ παραλλήλου καὶ $φ=\widehat{ΤΓΙ}$ τὸ



ΣΧ. 43.



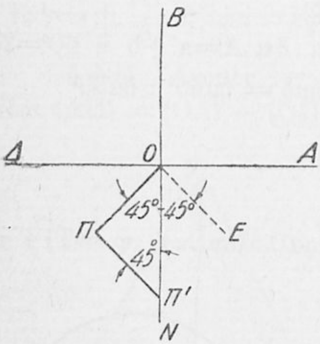
Σχ. 44.

γεωγ. πλάτος τοῦ παραλλήλου τούτου (σχ. 44). Ἐκ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΓΤ ἕπεται ὅτι

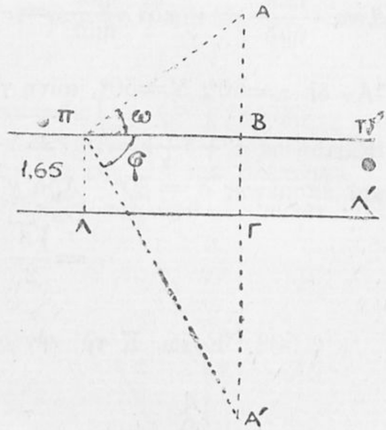
$$συνφ=\frac{ΚΤ}{ΓΤ}\frac{\frac{2}{3}R}{R}=\frac{2}{3}.$$ Ἐκ ταύτης δὲ ὑπολογίζεται ἡ φ κατὰ τὰ γνωστά.

§ 509. Τὸ πλοῖον πλέον ἐκ τοῦ Π πρὸς τὰ Ν — Α δηλ. παραλλήλως πρὸς τὴν ΟΕ διχοτόμον τῆς γωνίας ΑΟΝ ἔφθασε μετὰ 3 ὥρας εἰς τὸ Π′ ἐπὶ τῆς ΟΝ (σχ. 45). Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία ΟΠΠ′ εἶναι 90^o, εἶναι $(ΟΠ)=(ΟΠ')ἡμ45^o$ ἢ $30=(ΟΠ')\frac{\sqrt{2}}{2}$, ὅθεν $(ΟΠ')=\frac{30.2}{\sqrt{2}}=30\sqrt{2}$ χιλιόμ. Ἐπειδὴ δὲ εἰς 3 ὥρας διήνυσε $(ΠΠ')=(ΟΠ)=30$ χιλιόμ., ἡ ὡριαία ταχύτης του ἦτο $30:3=10$ χιλιόμ.

§ 510. Ἔστω ΛΛ′ ἡ ἐπιφάνεια τῆς λίμνης, Λ ἡ θέσις τοῦ παρατηρητοῦ, Π ὁ ὀφθαλμὸς αὐτοῦ, ω ἡ γωνία ὕψους, καθ᾽ ἣν βλέπει τὸ



Σχ. 45.



Σχ. 46.

ἀεροπλάνον Α καὶ φ ἡ γωνία βάθους, καθ᾽ ἣν βλέπει τὸ εἴδωλον Α′ τοῦ ἀεροπλάνου (σχ. 46). Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὕψους $(ΓΑ)=x$ παρατηροῦμεν πρῶτον ὅτι $x=(ΓΑ')=(ΒΑ')-1,65$.

Ἐπειδὴ δὲ $(ΒΑ')=(ΠΒ)\,ἐφφ$, $(ΠΒ)=(ΑΒ)σφω$, ἔπεται ὅτι $(ΒΑ')=(ΑΒ)\,ἐφφσφω$ καὶ $x=(ΑΒ)\,ἐφφσφω-1,65$. Ἐπειδὴ δὲ $(ΑΒ)=(ΑΓ)-1,65=x-1,65$, ἔπεται ὅτι
$x=(x-1,65)\,ἐφφσφω-1,65=x\,ἐφφσφω-1,65\,(ἐφφσφω+1)$.
Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $x(ἐφφσφω-1)=1,65\,(ἐφφσφω+1)$ καὶ ἑπομένως

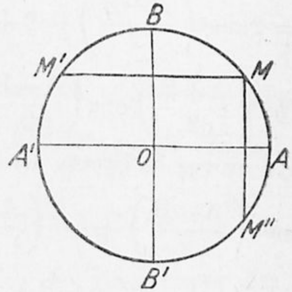
$$x=1,65.\frac{ἐφφσφω+1}{ἐφφσφω-1}=1,65\frac{ἐφφ\cdot\frac{1}{ἐφω}+1}{ἐφφ\cdot\frac{1}{ἐφω}-1}=1,65\cdot\frac{ἐφφ+ἐφω}{ἐφφ-ἐφω}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $ἐφφ+ἐφω=\frac{ἡμ(φ+ω)}{συνφσυνω}$ καὶ

$\dot{\varepsilon}\varphi\varphi - \dot{\varepsilon}\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu(\varphi-\omega)}{\sigma\upsilon\nu\varphi\sigma\upsilon\nu\omega}$, ἕπεται ὅτι $x = 1{,}65 \cdot \dfrac{\eta\mu(\varphi+\omega)}{\eta\mu(\varphi-\omega)}$. Αὕτη διὰ $\varphi=45^\circ30'$, $\omega=44^\circ30'$ γίνεται $x=1{,}65 \cdot \dfrac{\eta\mu\, 90^\circ}{\eta\mu\, 1^\circ}=1{,}65 \cdot \dfrac{1}{0{,}01745} \cdot 1{,}68$ $\dfrac{100000}{1745} \cdot 1{,}65$ μέτρ.

§ 511. Ἂν $x =$ τόξ ἐφα, $y =$ τόξ ἐφβ, θὰ εἶναι τόξ ἐφα + τόξ ἐφβ $= x + y$. Ἐπειδὴ δὲ ἐφ$x = \alpha$, ἐφ$y = \beta$, ἕπεται ὅτι ἐφ$(x+y) = \dfrac{\text{ἐφ}x + \text{ἐφ}y}{1 - \text{ἐφ}x\text{ἐφ}y} = \dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$. Ἄρα $x + y =$ τόξ ἐφ $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$ ἢ τόξ ἐφα + τόξ ἐφβ $=$ τόξ ἐφ $\dfrac{\alpha+\beta}{1-\alpha\beta}$.

§ 512. Ἂν τὸ τόξον Α λήγῃ εἰς τὸ Μ καὶ εἶναι ἡμΑ = ἡμΒ, τὸ τόξον Β θὰ λήγῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ′ (σχ. 47). Διὰ νὰ εἶναι δὲ καὶ συνΑ = συνΒ, πρέπει τὸ Β νὰ τελειώνῃ εἰς τὸ Μ ἢ εἰς τὸ Μ″. Ὥστε, ἂν εἶναι συγχρόνως ἡμΑ = ἡμΒ καὶ συν Α = συνΒ, τὸ Β θὰ τελειώνῃ εἰς τὸ Μ. Ἑπομένως θὰ εἶναι $A = 2k\pi + B$, ὅθεν $A - B = 2k\pi$.



Σχ. 47.

§ 513. Ἐκ τῶν ἐξισώσεων $x=\alpha\sigma\upsilon\nu\omega$, $y = \beta\eta\mu\omega$ ἕπονται αἱ ἐξισώσεις $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{x}{\alpha}$, $\eta\mu\omega = \dfrac{y}{\beta}$, ὅθεν $\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega = \dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2}$ ἢ $\dfrac{x^2}{\alpha^2} + \dfrac{y^2}{\beta^2} = 1$.

§ 514. Α′) Ἀπὸ τὰς δοθείσας ἰσότητας εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\alpha}{x}$, ἐφ$\omega = \dfrac{\beta}{y}$. Ἐκ τούτων διὰ πολ/σμοῦ κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ὅτι $\eta\mu\omega = \dfrac{\alpha\beta}{xy}$. Ἑπομένως $1 = \sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu^2\omega =$ $\dfrac{\alpha^2}{x^2} + \dfrac{\alpha^2\beta^2}{x^2y^2} = \dfrac{\alpha^2y^2 + \alpha^2\beta^2}{x^2y^2}$ καὶ ἑπομένως $\alpha^2(\beta^2 + y^2) = x^2y^2$.

Β′) Ἀπὸ τὰς δοθείσας εὑρίσκομεν ὅτι $\sigma\upsilon\nu\omega = \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{1/3}$,

$ημω = \left(\frac{y}{β}\right)^{1/3}$. Ἑπομένως $συν^2ω + ημ^2ω = \left(\frac{x}{α}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{β}\right)^{2/3}$

ὅθεν $\left(\frac{x}{α}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{β}\right)^{2/3} = 1.$

§ 515. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $ημ\,A + ημ\,B = ημ\,A\,ημ\,B$ ἔπεται ὅτι $2(ημ\,A + ημB) = 2ημAημB$. (1) Ἐπειδὴ δὲ

$$ημA + ημB = 2ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

καὶ $2ημAημB = συν(A - B) - συν(A + B) =$

$$2συν^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 - \left[1 - 2ημ^2\frac{A+B}{2}\right]$$

$= 2συν^2\left(\frac{A-B}{2}\right) - 2 + 2ημ^2\left(\frac{A+B}{2}\right)$ ἔπεται ὅτι ἡ (1) γίνεται

$$4ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2συν^2\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2ημ^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - 2.$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἔπεται ὅτι

$$συν^2\left(\frac{A-B}{2}\right) + ημ^2\left(\frac{A+B}{2}\right) - 2ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right) = 1$$

$$\text{ἢ}\quad \left[συν\left(\frac{A-B}{2}\right) - ημ\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]^2 = 1.$$

§ 516. Γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας ὅτι $BΔ : ΔΓ = AB : AΓ$ ἢ $BΔ : ΔΓ = γ : β$. Ἐπειδὴ $γ : β = ημΓ : ημB$, ἔπεται ὅτι $BΔ : ΔΓ = ημΓ : ημB$.

§ 517. Ἡ γνωστὴ ἰσότης $α^2 = β^2 + γ^2 - 2βγσυνA$ διὰ $A = \frac{π}{3}$ ἐπειδὴ $συν\frac{π}{3} = \frac{1}{2}$, γίνεται $α^2 = β^2 + γ^2 - βγ$.

Ἂν δὲ $A = \frac{2π}{3}$, θὰ εἶναι $συνA = συν\frac{2π}{3} = -συν\frac{π}{3} = -\frac{1}{2}$

καὶ ἐπομένως $\qquad α^2 = β^2 + γ^2 + βγ.$

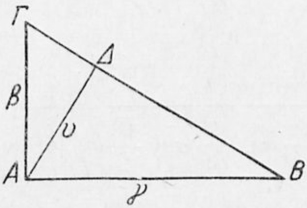
§ 518. Πρῶτον εὑρίσκομεν $Γ = 90^\circ - B = 64^\circ\,30'$. Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον ABΓ (σχ. 48) εὑρίσκομεν $(AΔ) = υ = γημB$, ὅθεν

$$γ = \frac{υ}{ημB} = \frac{20}{ημ(25^\circ 30')}$$

Ἐκ δὲ τοῦ AΓΔ εὑρίσκομεν ὅτι $υ = βημΓ = βσυνB$, ὅθεν $\beta = \dfrac{20}{συν(25^\circ\, 30')}$. Ἐκ δὲ τῆς $\beta = αἧμB$ εὑρίσκομεν

$$α = \frac{β}{ἧμB} = \frac{υ}{ἧμ BσυνB} = \frac{40}{ἧμ 2B} = \frac{40}{ἧμ 51^\circ}.$$

Ἐκ τῆς $E = \dfrac{1}{2}αυ$ εὑρίσκομεν $E = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{40}{ἧμ 51^\circ} \cdot 20 = \dfrac{400}{ἧμ 51^\circ}$.



Σχ. 48.

§ 519. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων $β = αἧμB$, $γ = αἧμΓ$ εὑρίσκομεν ὅτι $β + γ = α(ἧμB + ἧμΓ)$, ὅθεν $12 = 10 \,.\, 2ἧμ\left(\dfrac{B+Γ}{2}\right)συν\left(\dfrac{B-Γ}{2}\right)$ $= 10 \,.\, \sqrt{2}\, συν\left(\dfrac{B-Γ}{2}\right)$ καὶ $συν\left(\dfrac{B-Γ}{2}\right) = 0{,}6\sqrt{2}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $B - Γ = 63^\circ\, 54'$. Ἐπειδὴ δὲ $B + Γ = 90^\circ$ εὑρίσκομεν ὅτι $B = 76^\circ\, 57'$ καὶ $Γ = 13^\circ\, 3'$. Μετὰ ταῦτα ἀπὸ τὰς ἰσότητας $β = αἧμB$, $γ = αἧμΓ$ ὑπολογίζονται τὰ μήκη β καὶ γ. Τέλος τὸ Ε εὑρίσκομεν ἐκ τῆς

$$E = \frac{1}{2}βγ = \frac{1}{2}α^2ἧμBἧμΓ = \frac{1}{4}α2ἧμBσυνB = \frac{100}{4}ἧμ2B$$
$$= 25\, ἧμ(153^\circ\, 54') = 25ἧμ(26^\circ\, 6').$$

§ 520. Εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $A = 180^\circ - (B + Γ) = 105^\circ$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{α}{ἧμA} = \dfrac{β}{ἧμB} = \dfrac{γ}{ἧμΓ} = \dfrac{α+β+γ}{ἧμA+ἧμB+ἧμΓ} =$ $\dfrac{35}{ἧμA+ἧμB+ἧμΓ}$. Ἐκ τούτων βλέπομεν ὅτι

$$α = \frac{35\, ἧμA}{ἧμA+ἧμB+ἧμΓ},\; β = \frac{35\, ἧμB}{ἧμA+ἧμB+ἧμΓ},\; γ = \frac{35\, ἧμB}{ἧμA+ἧμB+ἧμΓ}.$$

Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν ὑπολογισμῶν κάμνομεν τὸν παρονομαστὴν λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς. Γνωρίζομεν ὅτι

$$ἧμA + ἧμB = 2ἧμ\left(\frac{A+B}{2}\right)συν\left(\frac{A-B}{2}\right) = 2συν\frac{Γ}{2}συν\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

καὶ $ἡμΓ = 2ἡμ \frac{Γ}{2} συν \frac{Γ}{2} = 2\, συν \left(\frac{Α+Β}{2} \right) συν \frac{Γ}{2}$.

Ἑπομένως $ἡμΑ+ἡμΒ+ἡμΓ=2συν \frac{Γ}{2} \left[συν \left(\frac{Α+Β}{2} \right) + συν \left(\frac{Α-Β}{2} \right) \right]$

$$= 2συν \frac{Γ}{2} \cdot 2συν \frac{Α}{2}\, συν \frac{Β}{2} = 4συν \frac{Α}{2}\, συν \frac{Β}{2}\, συν \frac{Γ}{2}.$$

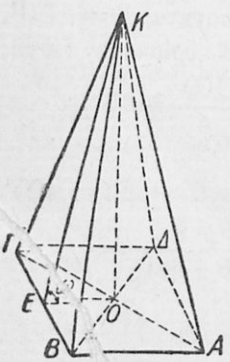
Ἑπομένως $α = \dfrac{35\, ἡμΑ}{4συν \frac{Α}{2}\, συν \frac{Β}{2}\, συν \frac{Γ}{2}} = \dfrac{35.\, 2ἡμ \frac{Α}{2}\, συν \frac{Α}{2}}{4συν \frac{Α}{2}\, συν \frac{Β}{2}\, συν \frac{Γ}{2}}$

$= \dfrac{35ἡμ \frac{Α}{2}}{2συν \frac{Β}{2}\, συν \frac{Γ}{2}}$. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν β καὶ γ.

Τὸ ἐμβαδὸν εὑρίσκομεν ἀμέσως ἐφαρμόζοντες τὸν γνωστὸν τύπον

$$Ε = τ^2 ἐφ \frac{Α}{2}\, ἐφ \frac{Β}{2}\, ἐφ \frac{Γ}{2}.$$

§ 521. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ καὶ Ε τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΚΒΓ, ΘΒΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, αἱ διάμεσοι ΚΕ, ΟΕ αὐτῶν εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ δὲ γωνία ΚΕΟ = ω εἶναι ἡ κλίσις τῆς ἕδρας ΚΒΓ πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ. Πρὸς ὑπολογισμὸν ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι $ἐφω = \frac{ΚΟ}{ΟΕ}$. (1)



Σχ. 49.

Ἐκ δὲ τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΚΟΒ εὑρίσκομεν ὅτι $(ΚΟ)^2 = (ΚΒ)^2 - (ΟΒ)^2 = 20^2 - (ΟΒ)^2$. Ἐπειδὴ $(ΒΓ)=12$, εἶναι $(ΒΔ)=12\sqrt{2}$ καὶ $(ΟΒ)=6\sqrt{2}$.

Ἑπομένως $(ΚΟ)^2 = 400 - 72 = 328$, ὅθεν $(ΚΟ)=\sqrt{328}=2\sqrt{82}$. — Τέλος ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΟΓ βλέπομεν ὅτι $(ΟΕ)=(ΒΓ) : 2 = 6$. Ἡ (1) λοιπὸν γίνεται $ἐφω = \frac{2\sqrt{82}}{6} = \frac{\sqrt{82}}{3}$. Ἐκ ταύτης δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $ω=71^{\circ}40'12'',56$.