ΙΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

Μπαρμπαστάθη (Χ.)

ΛΥΣΕΙΣ

ΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΙΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

εριέχουν ἐπίσης παρατηρήσεις, ὁδηγίας, πρακτικοὺς κανόνας καὶ τύπους.

Ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν

ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ"

ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.

38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38

1949

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ

ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΥ ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΥ ΕΚΔΟΣΕΩΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ

Περιέχουν ἐπίσης παρατηρήσεις, ὁδηγίας, πρακτικοὺς κανόνας καὶ τύπους.

Ὑπὸ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν
ἐν τῷ Πειραματικῷ Σχολείῳ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ
ΙΩΑΝΝΟΥ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & ΣΙΑΣ Α. Ε.
38 - ΟΔΟΣ ΤΣΩΡΤΣΙΛ - 38
1949

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΕΣΤΙΑΣ
Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΑΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

Τυπογραφεῖον Ἀδ/φῶν Γ. Ρόδη, Κεραμεικοῦ 42

ΓΕΝΙΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

Ἡ πρακτικὴ γεωμετρία ἔχει πλείστας ἐφαρμογὰς εἰς τὴν τοπογραφίαν, τὴν ναυτιλίαν, τὴν βιομηχανίαν, εἰς τὰς τέχνας, τὸ σχέδιον καὶ εἰς ἄλλας ἐκδηλώσεις τῆς νεωτέρας ζωῆς.

Διὰ νὰ ὠφεληθῇ ὁ μαθητὴς ἀπὸ τὴν διδασκαλίαν τῆς Πρακτικῆς Γεωμετρίας, πρέπει πρῶτον νὰ κατανοήσῃ καλῶς τοὺς ὁρισμοὺς τῶν γεωμετρικῶν ἐννοιῶν καὶ τὰς ἰδιότητας τῶν σχημάτων καὶ δεύτερον νὰ ἐργάζεται ἐπὶ σχημάτων, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχῃ κατασκευάσῃ μὲ ἀκρίβειαν.

Ὄργανα τὰ ὁποῖα πρέπει πάντοτε νὰ ἔχῃ εἰς τὴν διάθεσίν του εἶναι :

Ὁ κανών, τὸ ὑποδεκάμετρον, ὁ διαβήτης, ἕνας γνώμων μὲ γωνίας 30°, 60° καὶ 90° καὶ εἷς ἄλλος μὲ γωνίας 45°, 45° καὶ 90° τὸ ταῦ, τὸ μοιρογνωμόνιον, μετροταινίαν.
Ἀκόμη πρέπει νὰ ἔχῃ εἰς τὴν διάθεσίν του χάρτην τετραγωνισμένον, καρτόνια, γόμαν, πηλόν.

Εἰς τὰ γεωμετρικὰ ζητήματα ποὺ ἀπαιτοῦν ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, ὁ μαθητὴς θὰ χρησιμοποιῇ τὰς γνώσεις του ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, ἐν συνδυασμῷ μὲ τοὺς κανόνας καὶ τοὺς τύπους τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας, τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ γνωρίζῃ ἀπὸ μνήμης.

Κάθε ἄσκησις τῆς Πρακτικῆς Γεωμετρίας, φέρει ἕνα αὔξοντα ἀριθμόν. Εἰς τὸν ἴδιον αὔξοντα ἀριθμὸν τοῦ παρόντος βιβλίου δίδεται καὶ ἡ λύσις της. Αἱ παράγραφοι (§) δὲ ποὺ σημειοῦνται εἰς αὐτὸ εἶναι αἱ παράγραφοι τῆς Πρακτικῆς Γεωμετρίας.

Ἀπαντήσεις εἰς τὰς ἐρωτήσεις δὲν δίδονται, διότι περιέχονται εἰς τὴν διδασκομένην ὕλην τῆς πρακτικῆς γεωμετρίας.

ΛΥΣΕΙΣ
τῶν ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων τῆς ἐγκεκριμένης Πρακτικῆς Γεωμετρίας.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αἱ πρῶται γεωμετρικαὶ ἔννοιαι προῆλθον ἀπὸ τὴν παρατήρησιν τῶν σωμάτων τῆς φύσεως καὶ τῶν ἀντικειμένων τοῦ περιβάλλοντος ἡμᾶς κόσμου. Ἀλλὰ τὰ σχήματα αὐτῶν διαφέρουν πολὺ μεταξύ των καὶ τὰ πλεῖστα εἶναι ἀκανόνιστα. Ἡ Γεωμετρία ὅμως ἐργάζεται ἐπὶ ἁπλῶν σχημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ξεχωρίζει τὰ γεωμετρικά των στοιχεῖα καὶ εὑρίσκει τὰς ἰδιότητας αὐτῶν. Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ αὐτῶν ἐπιτυγχάνει τὸν σκοπόν της.

Ἔτσι ἔχομεν **τὸ σῶμα.** Κάθε δὲ σῶμα ἔχει **τρεῖς** διαστάσεις: μῆκος, πλάτος, ὕψος.

Τὴν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἔχει **δύο** διαστάσεις: μῆκος πλάτος.

Τὴν γραμμήν, ἡ ὁποία ἔχει **μίαν** διάστασιν: μῆκος, καὶ **τὸ σημεῖον,** τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει **καμμίαν** διάστασιν.

Ἀσκήσεις — Λύσεις.

Σελίδες 7 - 16.

1) Τοῦ φύλλου εἶναι ἐπίπεδος καὶ τῆς θήκης τεθλασμένη.

2) Καμπύλη.

3) Κυτίον σπίρτων (ἐπιφάνεια τεθλασμέμη).
Ὑδραγωγὸς σωλὴν (» καμπύλη).
Ταμπὸν γραφείου (» μεικτή).

4) Τελειώνει εἰς τεθλασμένην γραμμήν.

5) Τὰ Δ καὶ Σ σχηματίζουν τεθλασμένην γραμμήν, τὸ Ο καμπύλην καὶ τὸ Ω μεικτήν.

6) Σχηματίζει γραμμὴν καμπύλην.

7) Εἶναι στερεὰ σχήματα.

8) Εἶναι σχήματα ἐπίπεδα. ***9)*** Εἶναι στερεόν.

10) καὶ ***11)*** Ἕδραι 6. Κορυφαὶ 8. Ἀκμαὶ 12.

12) Ἀληθεύουν καὶ δι' ἕνα κύβον.

13) Ἡ πυραμὶς Δ ἔχει ἕδρας 4, κορυφὰς 4 καὶ ἀκμὰς 6.
Ἡ πυραμὶς Ε ἔχει ἕδρας 5, κορυφὰς 5 καὶ ἀκμὰς 8.

14) Θὰ κατασκευάσητε μὲ τὸν κηρὸν τὸ σχῆμα 91 σελὶς 110 τοῦ βιβλίου σας. Ἔπειτα ἀφοῦ χαράξετε διὰ μαχαιρίου τὰς πλευρὰς τοῦ δευτέρου καὶ τρίτου ὀρθογωνίου (ἐξ ἀριστερῶν) θὰ διπλώσετε τὰ μέρη κατὰ τὰς γραμμὰς ποὺ ἐχαράξατε καὶ ἔτσι θὰ σχηματισθῇ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.

15) καὶ *16)* Θὰ δείξῃ τὰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας (τὰς βάσεις, ὅπως εἶναι αἱ Α, Β, Γ, Β καὶ β τῶν σχημάτων τῆς σελίδος 14 τοῦ βιβλίου), τὰς κυρτὰς ἐπιφανείας αὐτῶν, ἰδιαίτερα δὲ διὰ τὸν κῶνον θὰ δείξῃ καὶ τὴν κορυφήν του (Α). Τὰ ὕψη ὅμως αὐτῶν (τὰ ΒΑ, ΑΓ καὶ β Β) θὰ δείξῃ ὅτι τὰ ἐννοεῖ.

17) Ἐφαρμόζει κατὰ μίαν διεύθυνσιν, ἡ ὁποία εἰς μὲν τὸν κῶνον περνᾷ ἀπὸ τὴν κορυφὴν καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς βάσεως εἰς δὲ τὸν κόλουρον κῶνον περνᾷ ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς μιᾶς βάσεως καὶ ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης.

18) Ἀποτελεῖ γραμμὴν καμπύλην.

19) Εἶναι στερεὰ σχήματα.

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΑΙ ΓΡΑΜΜΑΙ

Παρατήρησις.—Ἀπὸ ὅλα τὰ εἴδη τῶν γραμμῶν ἡ ἁπλουστέρα εἶναι ἡ εὐθεῖα. Ὅπως δὲ θὰ εἴδωμεν κατωτέρω, ὅλαι αἱ μετρήσεις οἱωνδήποτε γραμμῶν, ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων ἀνάγονται εἰς τὴν μέτρησιν εὐθειῶν.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 18 - 23.

20) καὶ *21)* Θὰ ἐργασθῆτε ὡς λέγει ἡ § 12 καὶ § 13, Β΄.

22) Ἂν τὰ σημεῖα ποὺ θὰ ὁρίσητε τὰ ὀνομάσητε Α, Β, Γ θὰ γράψητε μὲ τὸν κανόνα, τῆς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ καὶ ΓΑ.

23) Θὰ γράψητε πρῶτον δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα αβ καὶ γδ καὶ ἔστω ὅτι αβ > γδ. Τότε διὰ νὰ σχηματίσητε τὸ ἄθροισμά των, θὰ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ μὲ τὸν διαβήτην θὰ ὁρίσητε εἰς αὐτὴν ἕνα τμῆμα ΑΒ ἴσον μὲ τὸ αβ καὶ ἕνα ἄλλο ΒΔ ἴσον μὲ τὸ γδ. Ἔτσι τὸ τμῆμα ΑΒΔ εἶναι τὸ ἄθροισμα αβ+γδ. Τώρα διὰ νὰ σχηματίσητε τὴν διαφορὰν αβ—γδ, θὰ ὁρίσητε εἰς τὸ μεγαλύτερον τμῆμα αβ, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ α, ἕνα τμῆμα αε ἴσον μὲ τὸ γδ. Ἔτσι τὸ τμῆμα εβ, εἶναι ἴσον μὲ αβ—γδ.

24) Ἀφοῦ γράψητε τὰς τρεῖς πλευράς, ὡς ὁρίζει ἡ ἄσκησις, θὰ τὰς προσθέσητε, μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἐκάματε τὴν πρόσθεσιν τῶν τμημάτων αβ καὶ γδ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

25) Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων πλευρῶν, θὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὴν τρίτην πλευράν.

26) Τὸ τμῆμα ΓΕ θὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΒΔ.

27) 7 μέτρα = 70 παλ. = 700 δάκτ. = 7000 γραμ. (§20)
12 μέτρα = 120 παλ. = 1200 δάκτ. = 12000 γραμ.
3,45 μ. = 34,5 παλ. = 345 δάκτ. = 3450 γραμ.

28) Ἐπειδὴ ἡ 1 παλ. $= \frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, αἱ 8,4 παλάμαι εἶναι $8{,}4 \times \frac{1}{10} = 0{,}84$ τοῦ μέτρου ἢ 0,840 τοῦ μέτρου. Ὥστε αἱ 8,4 παλάμαι ἔχουν 84 ἑκατοστόμετρα ἢ 840 χιλιοστόμετρα.

29) Ἀφοῦ 10 παλάμαι κάμνουν 1 μέτρον, αἱ 30 παλάμαι κάμνουν 30 : 10 = 3 μέτρα, καὶ αἱ 15 παλάμαι κάμνουν 15 : 10 = 1,5 μέτρα, ἢ ἀλλέως: ἀφοῦ 1 παλάμη = 0,1 τοῦ μέτρου, θὰ εἶναι 30 παλ. = 0,1 × 30 = 3 μέτρα καὶ 15 παλάμαι = = 0,1 × 15 = 1,5 μέτρα.

30) Ἀφοῦ 100 ἑκατοστόμετρα κάμνουν 1 μέτρον, τὰ 500 ἑκατοστόμετρα κάμνουν 500 : 100 = 5 μέτρα, τὰ 425 κάμνουν 425 : 100 = 4,25 μέτρα καὶ τὰ 3167,4 ἑκατοστόμετρα κάμνουν 3167,4 : 100 = 31,674 μέτρα.

31) Ἡ 1 παλάμη ἔχει 100 χιλιοστόμετρα. Ὥστε τὰ 800 χιλιοστόμετρα κάμνουν 800 : 100 = 8 παλάμας, τὰ 64 κάμνουν 64 : 100 = 0,64 παλάμας καὶ τὰ 7 χιλιοστόμετρα κάμνουν 7 : 100 = 0,07 παλ.

32) Τὰ πρῶτον θὰ εἶναι 0,05 μ., τὸ δεύτερον 0,12 μ. καὶ τὸ τρίτον 0,13 μ. Τὰ ὁρίζομεν δὲ μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Α΄ Κεφαλαίου.

33) ἕως ***38)*** Θὰ μετρήσητε μὲ τὸ ὑποδεκάμετρον ὅταν ἀρκεῖ ἢ μὲ τὴν μετροταινίαν.

39) Ἡ α΄ = 0,05 μ. Ἡ β΄ = 0,05 × 2 = 0,10 μ. καὶ ἡ γ΄ = 0,05 × 3 = 0,15 μ. Ὥστε ἡ τεθλασμένη γραμμὴ θὰ ἔχῃ μῆκος = 0,05 + 0,10 + 0,15 = 0,30 μ.

40) α΄=0,60 μ., β΄=0,60 μ. : 4=0,15 μ., γ΄=0,60 μ. : 3=0,20 μ. καὶ δ΄=0,60 μ.

Μῆκος περιμέτρου 0,60+0,15+0,20+0,60=1,55 μ.

41) 56—30=26 ἑκατοστόμετρα=τὸ μῆκος τῶν δύο ἄλλων. Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς εἶναι 26 : 2=13 ἑκατ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΓΩΝΙΑΙ. ΚΑΘΕΤΟΙ ΚΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 27 - 36.

40) Ἂν ἡ γωνία ποὺ θὰ σχηματίσητε ἔχει κορυφὴν Α καὶ πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, θὰ τὴν ὀνομάσητε Α, ἢ ΒΑΓ ἢ ΓΑΒ ἢ μὲ ἓν μικρὸν γράμμα α ποὺ θὰ γράψητε μέσα εἰς τὴν γωνίαν.

44) Τὸ + τῆς προσθέσεως μὲ καθέτους εὐθείας καὶ τὸ × τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς καὶ τὸ < ἢ > τῆς ἀνισότητος μὲ πλαγίας.

45) Μὲ καθέτους τὰ Γ, Ε, Η, Π, Τ. Μὲ πλαγίας τὰ Α, Δ, Ζ, Λ, Μ, Ν, Χ.

46) καὶ ***47)*** Εἶναι ὀρθαί.

48) ἕως ***51)*** Θὰ φέρητε τὰς καθέτους μὲ τὸν γνώμονα (§ 24) καὶ θὰ συγκρίνητε μὲ τὸν διαβήτην.

52) Ὄχι. Διότι αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας αἱ ὁποῖαι συναντῶνται θὰ ἦσαν κάθετοι εἰς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (§ 25 Β΄).

53) Ἀφοῦ γράψητε μίαν εὐθεῖαν ΑΒ ἴσην μὲ 0,05 μ. θὰ φέρητε κάθετον ἐπ᾽ αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Β.

54) Ἢ θὰ εἶναι ὅλαι ὀρθαί, ἢ αἱ δύο θὰ εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀμβλεῖαι.

55) Θὰ εἶναι ὀρθή.

56) Θὰ εἶναι ἀμβλεῖα.

57) Ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ ποὺ θὰ ὁρίσητε θὰ ὁρίσητε δύο εὐθείας ἑκατέρωθεν αὐτῆς, τὰς ΑΓ καὶ ΑΔ. Ἔτσι αἱ γωνίαι ΒΑΓ καὶ ΒΑΔ εἶναι ἐφεξῆς.

58) Ἂν αἱ εὐθεῖαι ποὺ θὰ γράψητε εἶναι αἱ ΑΒΓ καὶ ΔΒΕ τὰ ζεύγη τῶν ἐφεξῆς γωνιῶν θὰ εἶναι τὰ 1) ΑΒΔ, ΔΒΓ 2) ΔΒΓ, ΓΒΕ 3) ΓΒΕ, ΕΒΑ καὶ 4) ΕΒΑ, ΑΒΔ.

59) Διαδοχικαί.

60) Ὄχι. Διότι αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ ΕΖ καὶ ΕΗ εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΕΔ.

61) Θὰ σχηματίσητε π. χ. τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ΑΒΓ καὶ ἔπειτα θὰ φέρητε κάθετον τὴν ΒΔ ἐπὶ τὴν ΒΑ εἰς τὸ Β πρὸς τὸ μέρος τῆς ΒΓ. Ἔτσι ἡ γωνία ΔΒΓ εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ΑΒΓ.

62) Ἔχει $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς.

63) Θὰ σχηματίσητε π. χ. τὴν γωνίαν ΑΒΓ καὶ ἔπειτα θὰ προεκτείνητε πέραν τῆς κορυφῆς Β μίαν πλευρὰν αὐτῆς π. χ. τὴν ΑΒ. Ἂν δὲ ἡ προέκτασις εἶναι ἡ ΒΔ, ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ΑΒΓ.

64) Ἔχει $2 - \frac{3}{8} = 1\frac{5}{8}$ τῆς ὀρθῆς.

65) Ἔχει $2 - 1\frac{3}{8} = \frac{5}{8}$ τῆς ὀρθῆς.

66) Ὀξεῖα. Διότι διὰ νὰ ἔχωμεν ἄθροισμα 1 ὀρθήν, πρέπει νὰ προσθέσωμεν γωνίαν μικροτέραν τῆς ὀρθῆς.

67) Ἡ παραπληρωματικὴ ὀξείας εἶναι ἀμβλεῖα καὶ ἡ ἀμβλείας εἶναι ὀξεῖα, διότι πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν μεγαλυτέραν τῆς ὀρθῆς, εἰς δὲ τὴν ἀμβλεῖαν μικροτέραν τῆς ὀρθῆς.

68) Αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι μεταξύ των ἴσαι, κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι 2 ὀρ. : $3 = \frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

69) Αἱ δύο ἄλλαι ἰσοῦνται μὲ 2 ὀρ. $-\frac{3}{8}$ ὀρ. $=\frac{13}{8}$ ὀρθῆς καὶ κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς ἰσοῦται μὲ $\frac{13}{8}:2=\frac{13}{16}$ ὀρθ.

70) Αἱ τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθὰς (§ 29, Β΄). Ὥστε κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς ἰσοῦται μὲ

$$4 \text{ ὀρθ.} : 3=\frac{4}{3}=1\frac{1}{3} \text{ ὀρθ.}$$

71) Θὰ προεκτείνητε τὰς πλευρὰς τῆς σχηματισθείσης γωνίας πέραν τῆς κορυφῆς καὶ θὰ σχηματισθῇ ἔτσι, γωνία κατὰ κορυφὴν τῆς πρώτης (§ 32).

72) Τῆς ὀξείας γωνίας ἡ κατὰ κορυφὴν εἶναι ὀξεῖα, τῆς ὀρθῆς εἶναι ὀρθὴ καὶ τῆς ἀμβλείας, ἀμβλεῖα.

73) Ἂν (σχ. 24) εἶναι $\eta=\frac{1}{2}$ ὀρθ. θὰ εἶναι $\vartheta=\frac{1}{2}$ ὀρθ., διότι αὗται εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ $\eta+\varkappa=2$ ὀρ. θὰ εἶναι $\varkappa=2$ ὀρ. $-\frac{1}{2}$ ὀρ. $=1\frac{1}{2}$ ὀρ. Ὥστε καὶ $\lambda=1\frac{1}{2}$ ὀρ.

74) Ἡ ΒΑ θὰ εὑρεθῇ εἰς τὴν θέσιν τῆς ΒΓ, διότι αἱ γωνίαι η καὶ ϑ, ὡς ἴσαι, θὰ ἐφαρμόσουν.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ Κεφαλαίου

75) Θὰ φέρητε πρῶτον τὴν κάθετον ἀπὸ τοῦ σημείου εἰς τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν ἔπειτα θὰ μετρήσετε.

76) Θὰ λάβητε δύο σημεῖα τῆς μιᾶς καθέτου, ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου τῆς τομῆς εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ σημείου αὐτοῦ 3 ἑκατοστῶν.

77) Θὰ φέρητε τὴν κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Β. Τότε τὸ Δ θὰ εἶναι τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος αὐτὴ θὰ συναντήσῃ τὴν ἄλλην πλευράν, διότι τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ΔΒ εἰς τὸ μέσον Β τῆς εὐθείας ΑΒΓ (§ 25, Δ΄).

Σημείωσις.—Τὰ ἀνωτέρω ὑποθέτουν τὴν γωνίαν Α ὀξεῖαν. Ἐὰν ὅμως ἡ Α εἶναι ἀμβλεῖα, τὸ Δ θὰ κεῖται εἰς τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης πλευρᾶς, ἐνῷ ὅταν ἡ Α εἶναι ὀρθὴ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒΓ εἰς τὸ Β δὲν συναντᾷ τὴν ἄλλην πλευράν, καὶ ἑπομένως τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

78) Θὰ φέρητε τὴν κάθετον εἰς τὴν μίαν πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον τῆς κορυφῆς τῆς ἀμβλείας γωνίας, καὶ ἐντὸς τῆς γωνίας. Τότε ἡ γωνία τῆς καθέτου αὐτῆς μὲ τὴν ἄλλην πλευρὰν εἶναι ἡ ζητουμένη διαφορά.

79) Ἡ συμπληρωματικὴ εἶναι 1 ὀρ.— $\frac{1}{5}$ ὀρ.= $\frac{4}{5}$ ὀρθ.

Τότε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $\frac{4}{5}$ ὀρ.— $\frac{1}{5}$ ὀρ.= $\frac{3}{5}$ ὀρθῆς.

80) Ἂν ἡ παραπληρωματικὴ γωνία εἶναι α, ἡ πρώτη γωνία εἶναι δύο φορὰς α. Ὥστε αἱ δύο ὁμοῦ εἶναι 3 φορὰς α. Ἀλλ' αὐταί, ὡς παραπληρωματικαὶ ἔχουν ἄθροισμα 2 ὀρθάς. Ἀφοῦ λοιπὸν 3 × α = 2 ὀρθαί, ἡ α εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς καὶ ἡ διπλασία της εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς.

81) Ἡ παραπληρωματικὴ εἶναι 2 ὀρ.— $\frac{3}{4}$ ὀρ.= $\frac{5}{4}$ ὀρθ.

καὶ ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $\frac{5}{4}$ ὀρ.— $\frac{3}{4}$ ὀρ.= $\frac{2}{4}$ ὀρ.= $\frac{1}{2}$ ὀρ.

82) Θὰ εἶναι ὀξεῖα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 40-43.

83) Θὰ ἐργασθῆτε ὡς λέγει ἡ § 34.

84) Ἂν τὰ τρία σημεῖα ποὺ θὰ ὁρίσητε εἶναι τὰ Α, Β, Γ, θὰ φέρητε τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ, Α, Β θὰ φέρητε παραλλήλλους πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως.

85) Θὰ εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

86) Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΒ, (σχ. 29) ἐπὶ τῆς ἄλλης εὐθείας ΑΕ θὰ ὁρίσητε δύο ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα καὶ ἔπειτα θὰ ἐργασθῆτε ὅπως εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 37.

87) Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ὅπου τὸ τμῆμα ΑΓ λαμβάνομεν τὸ διαδοχικὸν τμῆμα ΓΖ ἴσον μὲ τὸ ΑΓ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΖΒ καὶ ἐκ τοῦ Γ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΖΒ. Τότε ἡ παράλληλος αὕτη θὰ συναντήση τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Δ μέσον τῆς ΑΒ. Ἐὰν τώρα φέρωμεν τὴν ΒΓ καὶ ἐκ τοῦ Δ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, αὕτη θὰ συναντήση τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε μέσον τῆς ΑΓ.

88) Ἡ ΒΓ θὰ εἶναι διπλασία τῆς ΔΕ καὶ παράλληλος πρὸς αὐτήν.

89) Θὰ μετρήσητε τὴν κάθετον ἐπὶ τὰς παραλλήλους μεταξὺ αὐτῶν.

90) Θὰ ἐργασθῆτε ὡς ἀνωτέρω.

91) Εἰς σημεῖον Α τῆς εὐθείας θὰ φέρητε κάθετον ἐπ᾿ αὐτήν, τὴν ΑΒ μήκους 3 ἑκατοστῶν. Ἔπειτα δὲ θὰ φέρητε κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Β.

92) Θὰ φέρητε τὴν κάθετον μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς θὰ φέρητε δευτέραν κάθετον.

93) Εἶναι $\alpha=\gamma=\varepsilon=\vartheta=\frac{1}{2}$ ὀρθῆς καὶ

$$\beta=\delta=\eta=\iota=2 \text{ ὀρ.}-\frac{1}{2} \text{ ὀρ.}=1\frac{1}{2} \text{ ὀρ.}$$

94) Κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀμβλείας γωνίας θὰ εἶναι $1\frac{1}{4}$ ὀρ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς ὀξείας θὰ εἶναι $2 \text{ ὀρ.}-1\frac{1}{4} \text{ ὀρ.}=\frac{3}{4}$ ὀρ.

95) Κάθε μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀμβλείας εἶναι $\frac{4}{3}$ ὀρ. (Βλέπε ἄσκ. 80).

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ΄ Κεφαλαίου.

96) Εἶναι κάθετοι.

97) Βλέπε § 34.

98) Θὰ ἐργασθῆτε ὅπως εἰς τὴν ἄσκησιν 91, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ἐπὶ τῆς καθέτου θὰ λάβητε δύο τμήματα ἑκατέρωθεν τῆς ΑΒ ἴσα τὸ καθὲν μὲ 4 ἑκατοστά.

99) Θὰ εἶναι 8 ἑκατοστά.

100) Ἔστω παράλληλοι εὐθεῖαι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῶν ἡ ΕΖ. Τότε ἐπὶ τῆς εὐθείας ΕΒ λαμβάνομεν τρία ἴσα καὶ διαδοχικὰ τμήματα ΕΗ, ΗΘ, ΘΙ. Φέρομεν ἔπειτα τὴν ΙΖ καὶ παραλλήλους πρὸς αὐτὴν ἀπὸ τὰ σημεῖα Θ καὶ Η, ὁπότε αὗται διαιροῦν τὴν ἀπόστασιν ΕΖ εἰς τρία ἴσα μέρη.

101) Εἶναι δύο ὀρθαὶ γωνίαι.

102) Κάθε μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας εἶναι 0,4 ὀρ. καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἀμβλείας εἶναι 2 ὀρ.—0,4 ὀρ.=1,6 ὀρ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

Ο ΚΥΚΛΟΣ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 45 - 55.

103) Διάμετρος=8 ἑκατοστ. *104)* Διάμετρος=0,6 μ.

105) ΚΑ μικροτέρα καὶ ΚΒ μεγαλυτέρα τῆς ἀκτῖνος.

106) Μὲ κέντρα τὰ ἄκρα τῶν δύο καθέτων διαμέτρων καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, θὰ φέρητε τόξα ποὺ θὰ τελειώνουν εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἔπειτα θὰ φέρητε τὰς χορδάς.

107) Ἔχει μίαν χορδήν.

108) Θὰ γράψητε τὴν περιφέρειαν καὶ θὰ λάβητε ἔπειτα δύο σημεῖα της, μὲ τὸν διαβήτην ὁ ὁποῖος θὰ ἔχει ἄνοιγμα 6 ἑκατοστῶν, δηλαδὴ τὰ ἄκρα τῶν σκελῶν του θὰ ἀπέχουν 6 ἑκατοστά.

109) Εἰς 4 τομεῖς.

110) Ἀφοῦ ὁρίσητε τὴν χορδήν, θὰ φέρητε ἀκτῖνας εἰς τὰ ἄκρα της.

111) Εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος, ὡς διάμετρος.

112) Ἔχει ἕξ. *113)* Εἶναι ἴσαι.

114) Ἡ χορδὴ ΑΓ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ΑΒ.

115) Ἐὰν τὸ σημεῖον ποὺ θὰ ὁρίσητε εἶναι π. χ. τὸ Θ (σχ. 36) θὰ φέρητε τὴν ἀκτῖνα ΚΘ καὶ ἔπειτα τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΚΘ εἰς τὸ Θ.

116) Εἶναι παράλληλοι.

117) Θὰ φέρητε ἀπὸ τὸ Κ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἂν δὲ αὕτη τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ, θὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΓ.

118) Θὰ φέρητε κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ καὶ θὰ λάβητε ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς ἑκατέρωθεν τοῦ Γ δύο σημεῖα Δ καὶ Ε, εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ Γ ἴσην μὲ 2 ἑκατοστόμετρα. Τέλος θὰ φέρητε δύο περιφερείας μὲ κέντρα τὰ Δ καὶ Ε καὶ μὲ ἀπόστασιν ἴσην μὲ ΔΓ (ἢ ΕΓ).

119) Ὁ ἕνας κύκλος εἶναι ἔξω ἀπὸ τὸν ἄλλον, ὡς εἰς τὸ σχ. 37, α΄.

120) Οἱ δύο κύκλοι τέμνονται.

121) Ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Α θὰ λάβητε δύο τμήματα (ΑΒ)=1 παλ. καὶ (ΑΓ)=5 ἑκ. Ἔπειτα δὲ μὲ κέντρον τὸ Β καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΒ καὶ μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΓ θὰ γράψητε δύο περιφερείας.

122) Ἐφάπτονται ἐντὸς εἰς τὸ Β.

123) Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα εἶναι τὸ ΑΒ θὰ εὕρητε τὸ μέσον αὐτοῦ Δ καὶ ἔπειτα θὰ γράψητε περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Δ καὶ ἀκτῖνα ΔΑ (ἢ ΔΒ).

124) Θὰ τὸ διαιρέσητε πρῶτον εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἔπειτα καθὲν ἀπὸ αὐτὰ θὰ τὸ διαιρέσητε πάλιν εἰς δύο ἴσα μέρη.

125) Θὰ ἐργασθῆτε ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 124.

126) Ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας καὶ τὰ δύο σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν της δὲν κεῖνται εἰς μίαν εὐθεῖαν. Θὰ ἐργασθῆτε λοιπὸν ὡς λέγει τὸ πρόβλημα ΙΙΙ § 51.

127) Ἡ ΒΓ θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἀκτῖνος.

Ἐπίκεντροι καὶ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 58—63.

128) Θὰ διχοτομήσητε τὴν ὀρθὴν γωνίαν (Βλέπε § 55).

129) Θὰ διχοτομήσητε πρῶτον τὴν γωνίαν καὶ ἔπειτα θὰ διχοτομήσητε κάθε μίαν ἀπὸ τὰς δύο ἴσας γωνίας ποὺ θὰ εὕρητε.

130) Θὰ διαιρέσητε τὴν ὀρθὴν εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ θὰ λάβητε τὴν γωνίαν ποὺ σχηματίζουν τρία ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη.

131) ἕως **132)** Βλέπε § 57.

133) 1 ὀρθὴ $= 90^\circ$, $\frac{1}{2}$ ὀρ. $=45^\circ$ καὶ $\frac{1}{3}$ ὀρ. $=30^\circ$.

134) $\frac{2}{5}$ ὀρ. $=90^\circ \times \frac{2}{5} = 36^\circ$ καὶ $1\frac{5}{8}$ ὀρ. $=90^\circ \times \frac{13}{8} = 146^\circ \frac{1}{4}$

135) $40^\circ = \frac{40}{90}$ ὀρ. $= \frac{4}{9}$ ὀρ., $65^\circ = \frac{65}{90} = \frac{13}{18}$ ὀρ., $120^\circ = 1\frac{1}{3}$ ὀρ.

136) $50^\circ\ 30' = 50^\circ \frac{1}{2} = 50\frac{1}{2} : 90 = \frac{101}{2} : 90 = \frac{101}{180}$ ὀρ.

137) Δύο διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου κάθετοι μεταξύ των διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα. Ἡ ἐπίκεντρος λοιπὸν γωνία, ἡ ὁποία βαίνει εἰς ἓν τεταρτημόριον περιφερείας εἶναι ὀρθὴ ἢ 90°. Ὥστε ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἡ ὁποία βαίνει εἰς τεταρτημόριον περιφερείας ἔχει μέτρον $90^\circ : 2 = 45^\circ$.

138) Εἶναι α′) $(42^\circ\ 30') : 2 = 21^\circ\ 15'$ καὶ
β′) $(54^\circ\ 24'\ 40'') : 2 = 27^\circ\ 12'\ 20''$.

139) Εἶναι $\frac{2}{3}$ ὀρ. $\times 2 = \frac{4}{3}$ ὀρ. $=90^\circ \times \frac{4}{3} = 120^\circ$.

140) Εἶναι $(25^\circ\ 30') \times 2 = 51^\circ = \frac{51}{90}$ ὀρ. $= \frac{17}{30}$ ὀρ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Δ′ Κεφαλαίου.

141) Τὸ τμῆμα ποὺ περιέχεται εἶναι $5-2=3$ ἑκατ.

142) Ἀπέχει 0,06 μ. : 2=0,03 μ. (ἀκτὶς τοῦ κύκλου).

143) Ὁ κύκλος Λ εἶναι ὅλος μέσα εἰς τὸν Κ.

144) Θὰ λάβητε ἐπὶ τοῦ τόξου τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ θὰ φέρητε καθέτους εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν ΑΒ καὶ ΒΓ. Τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ κάθετοι αὗται εἶναι τὸ κέντρον.

145) Εἶναι ἴσαι. **146)** Εἶναι ἄνισοι. **147)** 60°.

148) Εἶναι $(18^\circ\ 38'\ 35'') \times 2 = 37^\circ\ 17'\ 10''$.

149) Εἶναι ἴσαι. **150)** Εἶναι εὐθεῖα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Α΄. ΤΡΙΓΩΝΑ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 65—73.

151) ἕως ***153)*** Αἱ ἀσκήσεις αὗται λύονται εὐκόλως.

154) $0{,}03\times3=0{,}09$ μ. ***155)*** Περ. 0,13. Γωνίαι ὀξεῖαι.

156) Πρέπει νὰ εὕρητε 5 ἑκατοστὰ τοῦ μέτρου.

157) Εἶναι 182,25 μ. : 3 = 60,75 μ.

158) Ἡ ἄλλη πλευρὰ εἶναι 36,75 μ. Ἐπειδὴ δὲ αἱ δύο ἴσαι πλευραὶ ἔχουν μῆκος 36,75 μ. ×2=73,50 μ. ἡ τρίτη πλευρὰ ἔχει μῆκος 93,80 μ.— 73,50 μ.= 20,30 μ.

159) Ἔχει τρία ὕψη καὶ τρεῖς διαμέσους.

160) Θὰ εὕρητε 2 ἑκατοστά.

161) Εἶναι ΑΜ > ΑΔ (§ 25, Γ΄).

162) Ἡ διάμεσος εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

163) Ἐπειδὴ $\mathrm{A}+\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ$ καὶ $\mathrm{A}=90^\circ$, θὰ εἶναι $\mathrm{B}+\Gamma=90^\circ$. Ὥστε κάθε μία τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι μικροτέρα τῶν 90°, ἤτοι ὀξεῖα.

164) Ἐπειδὴ $\mathrm{B}=90^\circ\times\frac{4}{5}=72^\circ$, καὶ $\mathrm{B}+\Gamma=90^\circ$, θὰ εἶναι $\Gamma=90^\circ-\mathrm{B}=90^\circ-72^\circ=18^\circ$.

165) Εἶναι $\Gamma=90^\circ-38^\circ\,15'\,20''$
ἤτοι $89^\circ\,59'\,60''-38^\circ\,15'\,20''=51^\circ\,44'\,40''$

166) Εἶναι $\mathrm{B}+\Gamma=180^\circ-\mathrm{A}=180^\circ-46^\circ\,18'\,20''=$ $=133^\circ\,41'\,40''$. Ὥστε $\mathrm{B}=\Gamma=(133^\circ\,41'\,40''):2=66^\circ\,50'\,50''$.

167) Διὰ τὸ τετράπλευρον εὑρίσκομεν $4\times2-4=8-4=$ $=4$ ὀρ.$=90^\circ\times4=360^\circ$, διὰ δὲ τὸ πεντάγωνον εὑρίσκομεν
$5\times2-4=6$ ὀρ.$=90^\circ\times6=540^\circ$.

168) α) $6\times2-4=8$ ὀρ.$=720^\circ$
β) $8\times2-4=12$ ὀρ.$=1080^\circ$ καὶ
γ) $10\times2-4=16$ ὀρ.$=1440^\circ$.

169) Ἔχει $(10+4):2=7$ πλευράς.

170) Θὰ εἶναι ἴσαι. *171)* Θὰ εἶναι ἴσα.

172) Θὰ εἶναι ἴσα. *173)* Θὰ εἶναι ἴσα.

174) 1. Κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν μίαν ἀπὸ τὰς γωνίας του π. χ. τὴν Α, ἡ ὁποία εἶναι 60° (§ 66). 2. Ἔπειτα φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Α (πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ) τὴν ΑΔ. Τότε ἡ γωνία ΔΑΒ εἶναι 90° καὶ ἑπομένως ἡ γωνία ΔΑΓ εἶναι 30°.

175) Ἐὰν συνεχίζοντες τὴν προηγουμένην κατασκευὴν διχοτομήσωμεν τὴν γωνίαν ΓΑΒ, διὰ τῆς ΑΕ, αἱ ΑΕ καὶ ΑΓ διαιροῦν τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΔΑΒ εἰς τρία ἴσα μέρη, διότι ἑκάστη τῶν γωνιῶν ΔΑΓ, ΓΑΕ καὶ ΕΑΒ εἶναι 30°.

176) Θὰ εἶναι ἴσαι.

177) Ἐὰν εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, βάσις εἶναι ἡ ΒΓ, θὰ εἶναι γωνία $Α=30^\circ$, γων. $Β=$ γων. Γ καὶ $Β+Γ=$ $=180^\circ-Α=180^\circ-30^\circ=150^\circ$. Ὥστε εἶναι $Β=Γ=75^\circ$.

178) Ἐδῶ βάσις εἶναι ἡ ΑΓ καὶ γων. $Α=$ γων. Γ. Ἐπειδὴ δὲ $Β=40^\circ$, εἶναι $Α+Γ=180^\circ-Β=180^\circ-40^\circ=$

$$=140^\circ \text{ καὶ } Α=Γ=70^\circ.$$

179) Ἡ ΑΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

180) Εἶναι $Γ=Α=50^\circ$ (βλέπε ἄσκησιν 178) $Α+Γ=$ $=100^\circ$ καὶ $Β=180^\circ-(Α+Γ)=180^\circ-100^\circ=80^\circ$.

Β'. ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 74 - 83.

181) ἕως *184)* Αἱ ἀσκήσεις αὐταὶ λύονται εὐκόλως.

185) **Ὁμοιότητες:** Εἶναι παραλληλόγραμμα. Καθὲν τούτων ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας.

Διαφοραί: Τοῦ τετραγώνου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί. Τοῦ ρόμβου δύο γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ἀμβλεῖαι.

186) **Ὁμοιότητες:** Εἶναι παραλληλόγραμμα. Αἱ προσκείμεναι πλευραί των εἶναι ἄνισοι.

Διαφοραί: Τοῦ ὀρθογωνίου ὅλαι αἱ γωνίαι εἶναι ὀρθαί, ἐνῷ τοῦ ρομβοειδοῦς δύο γωνίαι εἶναι ἀμβλεῖαι καὶ αἱ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι.

187) **Ὁμοιότητες:** Εἶναι παραλληλόγραμμα· καθὲν τούτων ἔχει δύο ἀμβλείας γωνίας καὶ δύο ὀξείας.

Διαφοραί: Αἱ πλευραὶ τοῦ ρόμβου εἶναι μεταξύ των ἴσαι, ἐνῷ τοῦ ρομβοειδοῦς αἱ προσκείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι.

188) **Ὁμοιότητες:** Εἶναι παραλληλόγραμμα.

Διαφοραί: Τοῦ τετραγώνου αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἐνῷ τοῦ ρομβοειδοῦς καὶ αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι εἶναι ἄνισοι.

189) Εἶναι (ΓΔ)=0,35 μ. καὶ (ΔΑ)=0,12 μ. Ὥστε ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος $0{,}35\times2+0{,}12\times2=0{,}70+0{,}24=0{,}94$ μ.

190) Ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως πλευρὰ εἶναι 7 ἑκατοστ., αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 24—14=10 ἑκατ. καὶ ἑπομένως τὸ ὕψος εἶναι 10 : 2=5 ἑκατοστ.

191) Ἔχει ὕψος $(87{,}20-25{,}40\times2):2=$
$=(87{,}20-50{,}80):2=36{,}40:2=18{,}20$ μ.

192) Ἡ ἄμπελος ἔχει περίμετρον $(68{,}80+24{,}20)\times2=$ $=93\times2=186$ μέτρα. Ὥστε ἡ περίφραξις αὐτῆς θὰ στοιχίσῃ 20000 δρχ.$\times$186=3 720 000 δρχ.

193) Ἂν ὁ ρόμβος εἶναι ὁ ΑΒΓΔ καὶ Α=45°, θὰ ἔχῃ περίμετρον $4\times4=16$ ἑκατοστ. αἱ δὲ γωνίαι του θὰ ἔχουν μέτρα ἡ Γ=45°· ἐπειδὴ δὲ Β=Δ καὶ Β+Δ=360°—90°=270°, θὰ εἶναι Β=Δ=135°.

194) Ἀφοῦ ὁρίσητε τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ τμῆμα ΑΒ, θὰ φέρητε τὴν εὐθεῖαν ΒΓ, ἔπειτα ἐκ τοῦ Γ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ τέλος ἐκ τοῦ Α παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ.

195) Κατασκευάζετε πρῶτον τὴν γωνίαν Κ=45° καὶ προεκτείνετε ἔπειτα τὰς πλευράς της, ὥστε νὰ σχηματισθῇ ἡ κατακορυφή της. Ἔπειτα ἑκατέρωθεν τοῦ Κ λαμβάνετε ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας τμήματα ΚΑ=ΚΓ=6 ἑκατ. καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης εὐθείας τὰ τμήματα ΚΒ=ΚΔ=4 ἑκατ. Τέλος φέρετε τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

196) Αἱ διαγώνιοι θὰ εἶναι μεταξύ των ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι των ὀρθαί.

197) Αἱ διαγώνιοι θὰ εἶναι μεταξύ των ἄνισοι καὶ αἱ γωνίαι των ὀρθαί.

198) Καὶ εἰς τὰ δύο αὐτὰ σχήματα αἱ διαγώνιοι τέμνονται καθέτως, ἐνῷ αὗται εἰς τὸ τετράγωνον εἶναι μεταξύ των ἴσαι, εἰς δὲ τὸν ρόμβον ἄνισοι.

199) Εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον.

200) Εἶναι ρομβοειδές.

201) Θὰ φέρητε δύο διαμέτρους μεταξύ των καθέτους καὶ θὰ ἑνώσητε τὰ ἄκρα αὐτῶν δι᾽ εὐθειῶν.

202) Θὰ φέρητε δύο διαμέτρους καθέτους μεταξύ των καὶ εἰς τὰ ἄκρα των θὰ φέρητε ἐφαπτομένας. Ἡ πλευρά του εἶναι ἴση πρὸς τὴν διάμετρον.

203) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὀκταγώνου εἶναι $8\times2-4=12$ ὀρθαί. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ ὀκτάγωνον εἶναι κανονικόν, αἱ γωνίαι του εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Ὥστε μία τούτων εἶναι $12:8=\frac{3}{2}$ ὀρθ.$=90^\circ\times\frac{3}{2}=135^\circ$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $(6\times2-4):6=8:6=\frac{4}{3}$ ὀρθ.$=90^\circ\times\frac{4}{3}=120^\circ$.

204) Ἡ πλευρὰ τοῦ περιγεγραμμένου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ ἐγγεγραμμένου.

205) Εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἄλλου.

206) Θὰ διαιρέσητε τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη (§ 74). Ἔπειτα μὲ κέντρα τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου θὰ γράψητε ἓξ τόξα ἐντὸς τοῦ κύκλου ποὺ νὰ τελειώνουν εἰς τὴν περιφέρειαν. Ἔτσι θὰ γίνῃ τὸ σχῆμα μὲ τὰ ἓξ φύλλα. Διὰ τὸ ἄλλο σχῆμα, ἀφοῦ διαιρέσητε πάλιν τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη θὰ ἐγγράψητε δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα, ὡς εὐκόλως φαίνεται.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Ε΄ Κεφαλαίου.

207) Ἡ ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς 3 γωνία θὰ εἶναι ἀμβλεῖα αἱ δὲ ἄλλαι δύο ὀξεῖαι.

208) Ἡ μικροτέρα διαγώνιος θὰ εἶναι 3 ἑκατ. καὶ ἡ μεγα-

λυτέρα 5,2 ἑκατ.περίπου. Αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ θὰ ἔχουν μέτρα
60°, 120°, καὶ 120°.

209) Αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μῆκος

$$(68{,}40-18{,}60) : 2 = 49{,}80 : 2 = 24{,}90 \text{ μ.}$$

210) Αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Κάθε μία λοιπὸν ἀπὸ αὐτὰς ἔχει μέτρον

$$(180^{\circ}-86^{\circ}\ 20'\ 18'') : 2 = (93^{\circ}\ 39'\ 42'') : 2 = 46^{\circ}\ 49'\ 51''.$$

211) Θὰ φέρητε δύο εὐθείας μεταξύ των καθέτους καὶ ἀπὸ τὴν τομήν των θὰ ὁρίσητε τέσσαρα τμήματα καθένα ἴσον μὲ 0,03 τοῦ μέτρου καὶ ἔπειτα τὰ ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν θὰ τὰ ἑνώσητε μὲ εὐθείας.

212) Θὰ ἐπαναλάβητε τὴν ἰδίαν ἐργασίαν, ἀλλὰ καθένα τῶν τμημάτων τῆς μιᾶς εὐθείας θὰ εἶναι ἴσον μὲ 0,04 τοῦ μέτρου, ἐνῷ καθένα τῶν τμημάτων τῆς ἄλλης θὰ εἶναι 0,03 τοῦ μέτρου.

213) Αἱ ἀποστάσεις σημείου τῆς διχοτόμου γωνίας ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

214) καὶ ***215)*** Ὄχι.

216) Θὰ ἐγγράψητε πρῶτον εἰς τὸν κύκλον τετράγωνον καὶ ἔπειτα ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου θὰ φέρητε καθέτους ἐπὶ τὰς πλευράς του, τὰς ὁποίας νὰ προεκτείνητε μέχρι τῆς περιφερείας. Ἔτσι κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς θὰ διαιρέσῃ τὸ τέταρτον τῆς περιφερείας εἰς δύο ἴσα μέρη καὶ ἡ περιφέρεια θὰ εἶναι διῃρημένη εἰς 8 ἴσα τόξα. Αἱ χορδαὶ λοιπὸν τῶν τόξων αὐτῶν θὰ εἶναι πλευραὶ κανονικοῦ ὀκταγώνου.

217) Θὰ διαιρέσητε τὴν περιφέρειαν εἰς ἓξ ἴσα μέρη (§ 74) καὶ εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως θὰ φέρητε ἐφαπτομένας.

218) Εἶναι

$$(12\times 2-4) : 12 = 20 : 12 = \frac{5}{3} \text{ ὀρθ.} = 90^{\circ} \times \frac{5}{3} = 150^{\circ}.$$

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Τύποι: 1) **Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου,**
Ε = βάσις × ὕψος = Β × υ.

2) **Ἐμβαδὸν τετραγώνου,** Ε = πλευρὰ τοῦ τετραγώνου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της = α × α = $α^2$.

3) **Παραλληλογράμμου,** Ε = βάσις × ὕψος = Β × υ.

4) **Τριγώνου,** Ε = (βάσις × ὕψος) : 2 = $\frac{Β \times υ}{2}$.

5) **Τραπεζίου,** Ε = ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων × ὕψος = $\frac{Β + β}{2} \times υ$.

6) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τὴν βάσιν του, εὑρίσκομεν τὸ **ὕψος** αὐτοῦ, ὅταν **διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τῆς βάσεως,** ἤτοι εἶναι $υ = \frac{Ε}{Β}$.

7) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τὸ ὕψος του, εὑρίσκομεν τὴν **βάσιν** του, **ὅταν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν διὰ τοῦ ὕψους,** ἤτοι εἶναι $Β = \frac{Ε}{υ}$.

8) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, εὑρίσκομεν τὴν πλευράν του, ὅταν **ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ,** ἤτοι εἶναι $α = \sqrt{Ε}$.

9) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου καὶ τὴν βάσιν του (ἢ τὸ ὕψος) εὑρίσκομεν **τὸ ὕψος** αὐτοῦ (ἢ τὴν βάσιν), **ὅταν διπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ τὸ γινόμενον διαιρέσωμεν διὰ τῆς βάσεως** (ἢ διὰ τοῦ ὕψους)·

ἤτοι εἶναι $υ = \frac{Ε \times 2}{Β}$ ἢ $Β = \frac{Ε \times 2}{υ}$.

10) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεών του, εὑρίσκομεν **τὸ ὕψος** αὐτοῦ **ὅταν διπλασιάσωμεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ διαιρέσωμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο βάσεων·**

ἤτοι εἶναι $υ = \frac{Ε \times 2}{Β + β}$.

12) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου, τὸ ὕψος του καὶ μίαν τῶν βάσεών του, εὑρίσκομεν τὴν **ἄλλην βάσιν** ἐργαζόμενοι ὡς ἑξῆς: **Διαπλασιάζομεν τὸ ἐμβαδὸν καὶ διαιροῦμεν τὸ γινόμενον διὰ τοῦ ὕψους,** τότε τὸ πηλίκον παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων.

Ἐὰν κατόπιν ἀπὸ τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα ἀφαιρέσωμεν τὴν γνωστὴν βάσιν θὰ εὕρωμεν τὴν ἄλλην.

Ἤτοι εὑρίσκομεν πρῶτον ὅτι $B+\beta=\frac{E\times 2}{\upsilon}$

καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν $(B+\beta)-\beta=B$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν β ἢ $(B+\beta)-B=\beta$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν B.

Παρατήρησις. Εἰς τοὺς προηγουμένους τύπους τῶν ἐμβαδόν, ὑποτίθεται, ὅτι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος μετροῦνται μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα. Π. χ. Ἐὰν δοθῇ ὅτι ἡ βάσις ὀρθογωνίου εἶναι π. χ. 4 μέτρα, τὸ δὲ ὕψος αὐτοῦ 5 παλάμαι, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ πρέπει ἢ νὰ τρέψωμεν τὰ μέτρα εἰς παλάμας, ἢ τὰς παλάμας εἰς μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ 4 μέτρα = 40 παλάμαι, ἢ 5 παλάμαι = 0,5 μέτρα θὰ ἔχωμεν

$E=40\times 5=200$ τετ. παλάμαι $=2$ τ. μ.
ἢ $E=4\times 0{,}5=2$ τ. μ. $=200$ τ. παλάμαι.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 86—73.

219) Ἐμβαδὸν $=25{,}40\times 10=254$ τ. μ.

220) Ἐμβαδὸν $=100\times 32{,}25=3225$ τ. μ.

221) Ἐμβαδὸν $=204\times 33=6732$ τ. μ.

222) Πλάτος $=600:30=20$ μέτρα (τύπος 6 διότι ἐδῶ τὸ μῆκος παριστάνει τὴν βάσιν τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ δὲ πλάτος ποὺ ζητεῖται, εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ).

223) Ἐμβ. $=50\times 30=1500$ τ. μ. $=1{,}5$ βασ. στρέμματα (§ 77). Ἔδωκεν 1 350 000 δρχ. $\times 1{,}5=2\,025\,000$ δρχ.

224) Ἐμβ. $=16{,}40\times 16{,}40=268{,}96$ τ. μ.

225) Πλευρὰ $=209{,}50:4=52{,}375$ μ.
Ἐμβαδὸν $=52{,}375\times 52{,}375=2743{,}140625$ τ. μ.

226) Ἐμβ. αἰθούσης $= 5 \times 4 = 20$ τ. μ. Θὰ ἀγοράσῃ $20 : 2 = 10$ μ. (τύπος 7).

227) Ἐμβ. $= 12{,}5 \times 5{,}7 = 71{,}25$ τ.μ.

228) Ἐμβ. $= 56{,}4 \times 23{,}70 = 1336{,}68$ τ.μ.

229) Ἡ μία τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι $28{,}45 : 2 = 14{,}225$ μ. Ἐμβ. $= 14{,}225 \times 8{,}5 = 120{,}9125$ τ.μ.

230) 5 βασ. στρέμματα $= 1000 \times 5 = 5000$ τ.μ.

Ὕψος $= 5000 : 100 = 50$ μ. (τύπος 6).

231) Ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ἐὰν λάβωμεν τὴν μίαν ὡς βάσιν, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ὥστε εἶναι ἐμβ. $= (4 \times 3) : 2 = 6$ τετρ. ἑκατοστόμετρα.

232) Ὁ γνώμων ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου τριγώνου. Ὥστε εἶναι ἐμβ. $= (0{,}3 \times 0{,}15) : 2 = 0{,}0450 : 2 = 0{,}0225$ τ. μ.

233) Ἐμβ. οἰκοπέδου $= (40{,}80 \times 28{,}60) : 2$

$$= 1166{,}88 : 2 = 583{,}44 \text{ τ. μ.}$$

Ἀξία $= 25\,000$ δρχ. $\times\, 583{,}44 = 14\,586\,000$ δρχ.

234) Ἐμβ. $= \dfrac{5+3}{2} \times 2 = 4 \times 2 = 8$ τετρ. ἑκατοστόμετρα.

235) Ἐμβ. $= \dfrac{85+62{,}5}{2} \times 20 = (85 + 62{,}5) \times 10$ $= 1475$ τετρ. μέτρα $= 1475 : 1000 = 1{,}475$ βασιλ. στρέμματα.

236) Ἐπειδὴ $\dfrac{B+\beta}{2} = \dfrac{60{,}40 + 40{,}80}{2} = \dfrac{101{,}20}{2} = 50{,}60$ μ. καὶ $50{,}60 \times \upsilon = 1265$ τ. μ., εἶναι $\upsilon = 1265 : 50{,}60 = 25$ μ. (τύπος 10).

237) Ἐμβ. οἰκοπέδου $= \dfrac{40+30}{2} \times 20 = 700$ τ.μ.

Ἀξία $= 18\,000$ δρχ. $\times\, 700 = 12\,600\,000$ δρχ.

238) Ἡ μεγαλυτέρα διαγώνιος χωρίζει τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα μὲ κοινὴν βάσιν 80 μ. Ὥστε:

Ἐμβ α΄ τριγ. $= \dfrac{80 \times 5}{2} = 200$ τ.μ. Ἐμβ. β΄ τριγ. $= \dfrac{80 \times 35}{2}$ $= 1400$ τ. μ. καὶ ἐμβ. τετραπλεύρου $= 200 + 1400 = 1600$ τ. μ.

239) Ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας φέρομεν ἀκτῖνας ἕως τὰς κορυφὰς τοῦ ἑξαγώνου. Ἔτσι διαιρεῖται τοῦτο εἰς ἕξ ἴσα τρίγωνα μὲ βάσιν τὸ καθένα 0,30 μ. καὶ ὕψος 0,26 μ. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ἰσοῦται μὲ

$$\frac{0,30\times 0,26}{2}\times 6=0,30\times 0,26\times 3=0,2340 \text{ τ. μ.}$$

240) Εἰς τὰ ἄκρα διαμέτρου θὰ φέρητε ἐφαπτομένας καὶ ἔπειτα δύο ἄλλας ἐφαπτομένας μὴ παράλληλους ἑκατέρωθεν τῆς ἄνω διαμέτρου. Τὰ σημεῖα εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ τέσσαρες αὐταὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι κορυφαὶ τραπεζίου περιγεγραμμένου.

Τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ α, καὶ τὰς καθέτους αὐτοῦ πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ μὲ β καὶ γ ἀντιστοίχως, ἤτοι ἐὰν θέσωμεν (ΒΓ)=α, (ΑΓ)=β καὶ (ΑΒ)=γ, ἔχομεν τοὺς κάτωθι τύπους οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τὸν τύπον (1) σελὶς 92 Πρακτικῆς Γεωμετρίας $α^2=β^2+γ^2$ $β^2=α^2-γ^2$ $γ^2=α^2-β^2$ καὶ ἐξ αὐτῶν τοὺς

$$α=\sqrt{β^2+γ^2},\quad β=\sqrt{α^2-γ^2} \text{ καὶ } γ=\sqrt{α^2-β^2}$$

Μὲ τὸν πρῶτον ἐκ τῶν τελευταίων τύπων εὑρίσκομεν τὴν ὑποτείνουσαν ὅταν γνωρίζωμεν τὰς δύο καθέτους πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Π. χ. ἐὰν β=9 καὶ γ=12, θὰ εἶναι

$$α=\sqrt{9^2+12^2}=\sqrt{81+144}=\sqrt{225}=15$$

Μὲ τὸν δεύτερον τῶν ἄνω τύπων, εὑρίσκομεν τὴν κάθετον πλευρὰν β, ὅταν γωρίζωμεν τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν γ καὶ τὴν ὑποτείνουσαν α. Π. χ. ἐὰν α=15 καὶ γ=12, θὰ εἶναι

$$β=\sqrt{15^2-12^2}=\sqrt{225-144}=\sqrt{81}=9$$

Τέλος μὲ τὸν τρίτον τύπον εὑρίσκομεν, τὴν κάθετον πλευρὰν γ, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν β καὶ τὴν ὑποτείνουσαν α. Π. χ. ἐὰν α=15 καὶ β=9, θὰ εἶναι

$$γ=\sqrt{15^2-9^2}=\sqrt{225-81}=\sqrt{144}=12.$$

Ἀσκήσεις.

241) Μῆκος ὑποτ.$=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{144+81}=\sqrt{225}=15$ μ.
(Πυθαγόρ. θεώρημα 1ος τύπος).

242) Ἀπ. $\sqrt{20^2-16^2}=\sqrt{400-256}=\sqrt{144}=12$ ἑκατ.
(Πυθαγόρ. θεώρημα 2ος τύπος).

243) Ἐμβ. τριγ. $\frac{\beta \times \upsilon}{2} = 150$ τ. μ. ἤτοι $\frac{20 \times \upsilon}{2} = 150$

ἢ $10 \times \upsilon = 150$ καὶ $\upsilon = 150 : 10 = 15$ μ. ἢ $\upsilon = \frac{150 \times 2}{20} = 15$ μ.

(Τύπος 9).

Ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος 15 μ. ἡ δὲ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος $\sqrt{20^2+15^2} = \sqrt{400+225} = \sqrt{625} = 25$ μ.

244) Τὸ ἄνω τρίγωνον, ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν καὶ ὕψος τὰς καθέτους πλευράς του, ἔχει ἐμβαδὸν $E = \frac{20 \times 15}{2} = 150$ τ. μ.

Τὸ ἴδιον τρίγωνον, ἐὰν λάβωμεν ὡς βάσιν τὴν ὑποτείνουσαν, θὰ ἔχῃ ὕψος υ, ἤτοι τὴν ζητουμένην ἀπόστασιν καὶ ἑπομένως θὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν $E = \frac{25 \times \upsilon}{2} = 12{,}5 \times \upsilon$. Ἀλλὰ καὶ μὲ τὸν ἕνα τρόπον καὶ μὲ τὸν ἄλλον, τὸ ἐμβαδὸν εἶναι τὸ αὐτό. Ὥστε ἔχομεν $12{,}5 \times \upsilon = 150$ καὶ $\upsilon = 150 : 12{,}5 = 12$ μ.

245) Ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΓ, ἡ ἀπέναντι τῆς γωνίας Β θὰ εἶναι ἴση μὲ 5 ἑκατ. Ἑπομένως ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ΑΒ θὰ εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{10^2-5^2} = \sqrt{100-25} = \sqrt{75} = 8{,}66$ ἑκατ. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΚ θὰ εἶναι $E = \frac{8{,}66 \times 5}{2} = 21{,}65$ τετρ. ἑκατ. Τέλος ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης θὰ εἶναι $\upsilon = \frac{21{,}65 \times 2}{10} = 4{,}33$ ἑκατ. (τύπος 9).

246) Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, ΑΒ ἡ χορδὴ καὶ ΚΓ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου Κ ἀπὸ τὴν χορδὴν ΚΓ. Ὥστε τὸ τρίγωνον ΚΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ ὑποτείνουσαν τὴν ἀκτῖνα ΚΑ. Ἐπειδὴ δὲ (ΚΑ) = 15 ἑκατοστ. καὶ (ΑΓ) = 9 ἑκατοστ. $\left(= \frac{(AB)}{2}\right)$ ἔχομεν $(K\Gamma) = \sqrt{15^2-9^2} = \sqrt{225-81} = \sqrt{144} = 12$ ἑκ.

(Πυθ. θεώρημα. 2ος τύπος).

247) Ἐὰν ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τὸ προηγούμενον σχῆμα, εἶναι (ΚΓ) = 16 ἑκατοστ., (ΑΓ) = 12 ἑκατοστ. Ὥστε εἶναι $(KA) = \sqrt{16^2+12^2} = \sqrt{256+144} = \sqrt{400} = 20$ ἑκατοστ.

(Πυθ. θεώρημα. 1ος τύπος).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ

Τύποι: 1) **Μῆκος περιφερείας κύκλου,** Γ=διάμετρος× π, ἤτοι $Γ=δ\times π$ ἢ $Γ=2\times α\times π$, ὅπου α εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου καὶ π σταθερὸς ἀριθμὸς καὶ ἴσος μὲ 3,14.

2) **Μῆκος τόξου μ μοιρῶν,** τ=μῆκος τῆς περιφερείας × $\frac{μ}{360}$, ἤτοι $τ=Γ\times\frac{μ}{360}$ ἢ ἐπειδὴ $Γ=2\times α\times π$,

$$τ=2\times α\times π\times\frac{μ}{360},\ \text{δηλαδὴ}\ τ=\frac{α\times π\times μ}{180}.$$

2) **Ἐμβαδὸν κύκλου,** Ε = ἡμιπεριφέρεια × ἀκτῖνα, ἤτοι

$$Ε=\frac{Γ}{2}\times α\ \text{ἢ ἐπειδὴ}\ Γ=2\times α\times π,$$

$$Ε=\frac{2\times α\times π}{2}\times α,\ \text{δηλαδὴ}\ Ε=α^2\times π=π\times α^2.$$

3) **Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως μ μοιρῶν,** ε = ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου × $\frac{μ}{360}$ ἤτοι $ε=Ε\times\frac{μ}{360}$ ἢ ἐπειδὴ $Ε=α^2\times π$

$$ε=\frac{α^2\times π\times μ}{360}\ \text{ἢ ἀκόμη}$$

$$ε=\text{μῆκος τοῦ τόξου}\ μ^0\times\frac{α}{2},\ \text{ἤτοι}\ ε=\frac{τ\times α}{2}.$$

4) Ἐκ τοῦ τύπου (1) $Γ=2\times α\times π$ εὑρίσκομεν $α=\frac{Γ}{2\times π}$ ἤτοι ἡ **ἀκτὶς κύκλου, ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ πηλίκον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας του διὰ 2×π.**

6) Ἐκ τοῦ τύπου (2) $τ=Γ\times\frac{μ}{360}$, εὑρίσκομεν $Γ=\frac{360\times τ}{μ}$ ἤτοι **εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, ὅταν γνωρίζομεν τὸ μῆκος τ τόξου μ°,** καὶ τὰς μοίρας μ.

7) Ἐκ τοῦ τύπου (3) $Ε=α^2\times π$, εὑρίσκομεν $α^2=\frac{Ε}{π}$ καὶ $α=\sqrt{\frac{Ε}{π}}$, ἤτοι **εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.**

'Ασκήσεις.

Σελίδες 94—100.

248) Εἶναι $Γ = 1 \times 3,14 = 3,14$ μ.

249) Εἶναι $Γ = 2 \times 0,8 \times 3,14 = 1,6 \times 3,14 = 5,024$ μ.

250) Εἶναι $α = \frac{15,70}{2 \times 3,14} = \frac{15,70}{6,28} = 2,5$ μ. (τύπ. 4).

251) 'Εδῶ εἶναι $Γ = 2,512$ μ. Ὥστε εἶναι $α = \frac{2,512}{2 \times 3,14} =$

$= \frac{2,512}{6,28} = 0,4$ μ. (τύπος 4).

252) 'Εδῶ εἶναι $Γ = 48$ καὶ $μ = 15$. Ὥστε εἶναι,

$$τ = 48 \times \frac{15}{360} = 48 \times \frac{1}{24} = \frac{48}{24} = 2 \text{ μ.}$$

253) 'Εδῶ εἶναι $Γ = 2 \times 2,5 \times 3,14$ καὶ $μ = 28$. Ὥστε εἶναι

$$τ = 2 \times 2,5 \times 3,14 \times \frac{28}{360} = \frac{2,5 \times 3,14 \times 28}{180} =$$

$$= \frac{3,14 \times 70}{180} = \frac{3,14 \times 7}{18} = \frac{21,98}{18} = 1,221 \text{ μ.}$$

254) Εὑρίσκομεν τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐκ τοῦ τύπου (6) $Γ = \frac{360 \times τ}{μ}$. 'Αλλ' ἐδῶ ἔχομεν $τ = 2$ καὶ $μ = 35$. Ὥστε εἶναι

$Γ = \frac{360 \times 2}{35} = \frac{720}{35} = 20,57$ μ. (περίπου).

255) Εἶναι $Ε = 3^2 \times 3,14 = 9 \times 3,14 = 28,26$ τ. μ.

256) Εἶναι $Ε = 5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,50$ τ. μ.

257) Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. 'Επειδὴ δὲ $2 \times 3,14 \times α = 15,70$, ἤτοι $6,28 \times α = 15,70$, θὰ εἶναι $α = \frac{15,70}{6,28} = 2,5$ μ. 'Επομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου εἶναι $Ε = 2,5^2 \times 3,14 = 6,25 \times 3,14 = 19,6250$ τ. μ.

258) 'Εδῶ εἶναι $α = 19,61 : 2 = 9,805$ μ. Ὥστε εἶναι $Γ = 2 \times 3,14 \times 9,805 = 61,5754$ μ. καὶ $Ε = 9,805^2 \times 3,14 =$ $= 96,138\,025 \times 3,14 = 301,87\,339\,850$ τ. μ.

259) Εἶναι $E = 28,16 \times \frac{100}{360} = \frac{2816}{360} = 7,8222$ τ.μ.

260) Ἑκάστη τῶν γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 60^0. Ἐδῶ λοιπὸν ὁ κυκλικὸς τομεὺς εἶναι 60^0 καὶ ἀνήκει εἰς κύκλον ἀκτῖνος 3 ἑκατοστομέτρων. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον ἐμβαδὸν εἶναι $E = \frac{3,14 \times 3^2 \times 60}{360} = \frac{3,14 \times 9}{6} = \frac{3,14 \times 3}{2} = 4,71$ τ. ἑκατ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ βιβλίου.

261) Εἶναι $E = 69,51 \times 30,86 = 2145,0786$ τ.μ.

262) Εἶναι $E = 31,77 \times 13,73 = 436,2021$ τ.μ.

263) Τὸ ὕψος εἶναι $= 3675,6 : 100 = 36,756$ μ.

Περίμετρος $100 \times 2 + 36,756 \times 2 = 200 + 73,512 = 273,512$ μ.

264) Ἐμβ. ὀρθογ. διαδρόμου, $8 \times 5 = 40$ τ.μ.

Ἐμβ. μιᾶς πλακός, $0,2 \times 0,2 = 0,04$ τ.μ.

Ὥστε ὁ διάδρομος ἔχει $40 : 0,04 = 1000$ πλάκας.

265) Ἐμβ. οἰκοπέδου $150 \times 63 = 9450$ τ. μ.

Ἀλλὰ 1 τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς $= \frac{16}{9}$ τ. μ. Ὥστε τὰ 9450 τ.μ. κάμνουν $\frac{16}{9} \times 9450 = 16 \times 1050 = 16800$ τεκτ. τ. πήχεις, ἡ ἀξία τῶν ὁποίων εἶναι 30 000 δρχ. $\times 16800 = 504\,000\,000$ δρχ.

266) Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ εἶναι $4 \times 4 = 16$ τ. ἑκατοστ. Ἀλλὰ τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΕΘ, ΕΒΖ, ΖΓΗ καὶ ΗΔΘ εἶναι ὀρθογώνια καὶ μεταξύ των ἴσα (§ 65, Α΄) καὶ ἰσοσκελῆ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΕ = ΑΘ = 2 ἑκατοστόμετρα, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΕΘ εἶναι $\frac{2 \times 2}{2} = 2$ τ. μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων ὡς ἄνω τριγώνων εἶναι $2 \times 4 = 8$ τ. μ. Ἂν δὲ ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων τριγώνων, θὰ εὕρωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ΕΖΗΘ. Ὥστε εἶναι ἐμβ. ΕΖΗΘ $= 16 - 8 = 8$ τ. μ.

267) Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ ἁλωνίου, $3,5^2 \times 3,14 = 12,25 \times 3,14 = 38,4650$ τ.μ. Ὥστε ἐξώδευσε:

10 000 δρχ. $\times 38,4650 = 384650$ δρχ.

268) Ἐμβ. πρώτου κύκλου, $5^2 \times 3,14 = 25 \times 3,14 = 78,50$ τ. ἑκ.

Ἐμβ. δευτέρου » $3^2 \times 3,14 = 9 \times 3,14 = 28,26$ τ. ἑκ.

Ζητούμενον ἐμβαδόν, $78,50 - 28,26 = 50,24$ τ. ἑκ.

269) Ἐμβ. δωματίου $5 \times 3,60 = 18$ τ. μ.

Ἐμβ. σανίδος $1,80 \times 0,25 = 0,45$ τ. μ.

Θὰ χρειασθοῦν $18 : 0,45 = 40$ σανίδες

270) Τὸ μῆκος μιᾶς στροφῆς, εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ. Ἀλλὰ μία στροφὴ ἰσοῦται μὲ $3140 : 1000 = 3,14$ μ. Ὥστε εἶναι $2 \times 3,14 \times \alpha = 3,14$ καὶ

$$\frac{2 \times 3,14 \times \alpha}{3,14} = \frac{3,14}{3,14}, \text{ ἤτοι } 2 \times \alpha = 1 \text{ καὶ } \alpha = \frac{1}{2} \text{ μ.}$$

271) Μῆκος περιφερείας τραπέζης $1,95 \times 3,14 = 6,123$ μ. Εἰς κάθε ἄνθρωπον ἀναλογοῦν $8,123 : 8 = 3,765$ μ. (περίπου).

272) Ἐμβαδὸν ἀμπέλου $\frac{30+36}{2} \times 45 = \frac{66}{2} \times 45 =$

$= 33 \times 45 = 1485$ τ. μ. $= 1,485$ βασ. στρέμ.

Ὥστε ἔδωκεν 620 000 δρχ. $\times 1,485 = 920\,700$ δρχ.

273) Μῆκος βάσεως $\frac{3,14 \times 0,25 \times 150}{180} = \frac{3,14 \times 0,25 \times 5}{6} =$

$= \frac{3,9250}{6} = 0,654$ (περ.)

Ἐμβαδὸν τομέως $\frac{0,654 \times 0,25}{2} = 0,327 \times 0,25 = 0,081750$ τ. μ.

274) Μῆκος α΄ περιφερείας $2 \times 3,14 \times 0,25 = 1,57$ μ.

Μῆκος β΄ περιφερείας $2 \times 3,14 \times 0,50 = 3,14$ μ.

Μῆκος β΄ περ. : μήκους α΄ περ. $= 3,14 : 1,57 = 2$.

Ὥστε τὸ μῆκος τῆς β΄ περιφερείας εἶναι διπλάσιον τοῦ μήκους τῆς α΄ περιφερείας.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ

Ἀσκήσεις

Σελίδες 101—106.

275) Αἱ ἀκμαὶ τῆς ὀροφῆς εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ πάτωμα. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ ἑνὸς τοίχου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸν ἀπέναντι αὐτοῦ τοῖχον.

276) Τὸ τεντώνομεν, ὥστε νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς εὐθεῖαν τοῦ πατώματος ἢ ἑνὸς τοίχου.

277) Τὸν τοποθετοῦμεν ὥστε ἡ ὑποτείνουσα νὰ εἶναι 1) παράλληλος πρὸς εὐθεῖαν τοῦ πίνακος καὶ 2) νὰ διευθύνεται πρὸς τὸν πίνακα.

278) Αἱ ἀκμαὶ τῶν τοίχων τέμνουν τὸ πάτωμα καὶ τὴν ὀροφήν. Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πατώματος καὶ τῆς ὀροφῆς τέμνουν τοὺς τοίχους.

279) Αἱ ἀκμαὶ τῶν τοίχων εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ πάτωμα (καὶ ἐπὶ τὴν ὀροφήν). Αἱ ἀκμαὶ τοῦ πατώματος καὶ τῆς ὀροφῆς, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν δεξιὰν πλευράν, εἶναι κάθετοι ἐπ' αὐτήν.

280) Τὸν τοποθετοῦμεν ὥστε ἡ ὑποτείνουσα 1) νὰ ἐφαρμόσῃ εἰς μίαν ἀκμὴν ἑνὸς τοίχου καὶ 2) νὰ εἶναι κάθετος εἰς δύο εὐθείας τοῦ πίνακος τεμνομένας καὶ εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον των.

281) Ἡ πλάγιος τοποθέτησις εἶναι εὔκολος.

282) Ἡ ὀροφὴ καὶ τὸ πάτωμα εἶναι ἐπίπεδα παράλληλα, ὡς καὶ δύο ἀπέναντι τοῖχοι.

283) Τὸν τοποθετοῦμεν 1) ὥστε αἱ δύο πλευραὶ τοῦ γνώμονος νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ πάτωμα, καὶ 2) ὥστε μία κάθετος πλευρὰ τοῦ γνώμονος νὰ ἔχῃ κατακόρυφον διεύθυνσιν.

284) Καὶ αἱ ἀκμαὶ καὶ δίεδροι γωνίαι τῆς αἰθούσης εἶναι 12.

285) Τὸ πάτωμα καὶ ἕνας τοῖχος σχηματίζουν δίεδρον γωνίαν. Ἡ ἀκμὴ αὐτῆς συναντᾷ πρὸς τὸ ἕνα μέρος (ἢ πρὸς τὸ ἄλλο) μίαν πλευρὰν τοῦ πατώματος καὶ μίαν πλευρὰν τοῦ τοίχου ἡ γωνία δὲ τῶν πλευρῶν αὐτῶν εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου.

286) Οἱ τοῖχοι εἶναι ἐπίπεδα κατακόρυφα, ἐνῷ τὸ πάτωμα καὶ ἡ ὀροφὴ εἶναι ἐπίπεδα ὁριζόντια. Τὸ πάτωμα ἢ ἡ ὀροφὴ καὶ ἕνας τοῖχος εἶναι κάθετα ἐπίπεδα, καθὼς καὶ δύο τοῖχοι ποὺ τέμνονται.

287) 1) Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα, μὲ τὴν μίαν κάθετον πλευράν του κατακόρυφον. 2) Ἐφαρμόζομεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ πίνακος εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν πίνακα (ἢ πλαγία πρὸς αὐτόν).

288) Αἱ στερεαὶ γωνίαι τῆς αἰθούσης εἶναι ὀκτώ, ἤτοι τέσσαρες ἄνω εἰς τὴν ὀροφὴν καὶ τέσσαρες κάτω εἰς τὸ πάτωμα.

289) Εἶναι αἱ ΑΚΒ, ΒΚΓ, ΓΚΔ καὶ ΔΚΑ.

290) Ἀκμαὶ εἶναι αἱ ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ. Μὲ αὐτὰς δὲ ἠμποροῦμεν νὰ ὀνομάσωμεν ἀντιστοίχως καὶ τὰς διέδρους γωνίας ΒΚΑΔ, ΓΚΒΑ, ΔΚΓΒ καὶ ΑΚΔΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Α΄. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 108—110.

291) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν τῆς βάσεώς του.

292) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του.

293) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν πρίσματος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς του σὺν δύο.

294) Ἓν ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, εἶναι ὀρθὸν πρῖσμα, διότι αἱ παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ εἶναι ὀρθογώνια.

295) Ἓν ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον εἶναι δυνατὸν νὰ μὴ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Διότι εἶναι δυνατὸν αἱ βάσεις αὐτοῦ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμα (ρομβοειδῆ ἢ ρόμβοι).

296) Αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου (μῆκος, πλάτος, ὕψος) εἶναι μεταξύ των ἴσαι. Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν αὐτῶν εἶναι $5 \times 3 = 15$ ἑκατοστόμετρα.

297) Αἱ ἀκμαὶ τοῦ κύβου εἶναι 12 (βλ. ἄσκ. 292) καὶ μεταξύ των ἴσαι. Ὥστε τὸ μῆκος μιᾶς τῶν ἀκμῶν του εἶναι $0{,}60 : 12 = 0{,}05$ τοῦ μέτρου.

298) καὶ *299)* Βλέπε ἄσκησιν 14.

Β΄. ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 113—114.

300) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν τῆς βάσεώς της, ηὐξημένον κατὰ 1.

301) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της, ηὐξημένον κατὰ 1.

302) **Κανών:** Τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν πυραμίδος ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της.

303) Ἡ δίεδρος γωνία τῆς βάσεως πυραμίδος μετὰ μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας αὐτῆς, εἶναι μικροτέρα ὀρθῆς διέδρου γωνίας.

304) Δὲν ἀρκεῖ. Διότι εἶναι δυνατὸν τὸ ὕψος πυραμίδος νὰ μὴ συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ κέντρον της.

305) Εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

306) Εἶναι μεταξύ των ἴσαι.

307) Τὸ τετράεδρον εἶναι τριγωνικὴ πυραμίς. Ὥστε αἱ ἀκμαί της εἶναι 6 (ἄσκ. 302) καὶ ἐπειδὴ τὸ τετράεδρον εἶναι κανονικὸν αἱ ἀκμαί του εἶναι ἴσαι (ἄσκ. 306). Τὸ μῆκος λοιπὸν μιᾶς ἀκμῆς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ 0,30 μ. : $6 = 0{,}05$ τοῦ μέτρου.

308) Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ γίνεται μὲ τρόπον ὅμοιον μὲ τὴν κατασκευὴν τῆς ἀσκήσεως 298 ἢ 299.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΠΡΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΥΡΑΜΙΔΩΝ

Ἐμβαδά.

Τύποι: 1) **Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας ὀρθοῦ πρίσματος,** ε = περίμετρος τῆς βάσεώς του × ὕψος του, ἤτοι $\varepsilon = \Pi \times \upsilon$.

2) **Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος,** ε = περίμετρος τῆς βάσεώς της × ἥμισυ τοῦ ὕψους μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας της, ἤτοι $\varepsilon = \Pi \times \frac{\upsilon}{2}$.

3) Ἐκ τοῦ τύπου (1) $\varepsilon = \Pi \times \upsilon$ εὑρίσκομεν $\upsilon = \frac{\varepsilon}{\Pi}$ (ι) καὶ $\Pi = \frac{\varepsilon}{\upsilon}$ (ί), ἤτοι ἐκ τοῦ τύπου (ι) **εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦ ὀρθοῦ πρίσματος ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε καὶ τὴν περίμετρον Π, ἐκ δὲ τοῦ τύπου (ί) εὑρίσκομεν τὴν περίμετρον Π τῆς βάσεως ὀρθοῦ πρίσματος, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ε καὶ τὸ υ.**

4) Ἐκ τοῦ τύπου (2) $\varepsilon = \Pi \times \frac{\upsilon}{2}$, εὑρίσκομεν $\upsilon = \frac{2 \times \varepsilon}{\Pi}$ (ι) καὶ $\Pi = \frac{2 \times \varepsilon}{\upsilon}$ (ί) ἤτοι **εὑρίσκομεν τὸ ὕψος υ παραπλεύρου ἕδρας κανονικῆς πυραμίδος** (ἐκ τοῦ τύπου ι) καὶ **τὴν περίμετρον Π τῆς βάσεώς της** (ἐκ τοῦ τύπου ί).

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 114.

309) Περίμετρος βάσεως, $\Pi = 4 \times 4 = 16$ ἑκατοστά. Ὕψος $\upsilon = 7$ ἑκατοστά.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας, $\varepsilon = 16 \times 7 = 112$ τ.ἑκ.

Ἐμβαδὸν βάσεως, $\beta = 4 \times 4 = 16$ τετρ. ἑκατοστ.

Ἐμβαδὸν ὅλης ἐπιφανείας, $E = 112 + 16 \times 2 = 112 + 32 =$
$= 144$ τετρ. ἑκατοστ.

310) Ἐδῶ εἶναι $\Pi = 6 \times 2 + 4 \times 2 = 12 + 8 = 20$ ἑκατοστ. Ὥστε εἶναι $E = 20 \times 5 + (6 \times 4) \times 2 = 100 + 48 = 148$ τ. ἑκατ.

311) Εἶναι $Π = 0,50 \times 4 = 2$ μέτρα.
$ε = 2 \times 2,5 = 5$ τ. μ.

Ὥστε ὁ ὑδροχρωματισμὸς θὰ στοιχίσῃ:
1600 δρχ. $\times 5 = 8000$ δρχ.

312) Τὸ σχῆμα ποὺ θὰ γίνῃ θὰ εἶναι ὀρθογώνιον μὲ βάσιν $2+4+2+3=11$ ἑκατ. καὶ ὕψος 5 ἑκατ.

Ὄγκος πρίσματος.

Τύποι: 1) **Ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.**

Θ=μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων αὐτοῦ α, β, γ ἤτοι $Θ=α\timesβ\timesγ$.

2) **Ὄγκος κύβου ἀκμῆς α,** $Θ=α^3$.

3) **Ὄγκος παντὸς πρίσματος.**

Θ=ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του ×τὸ ὕψος του, ἤτοι $Θ=Β\timesυ$.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 120 - 124.

313) Χωρεῖ $6\times4\times5=120$ κ. μ. ἀέρος.

314) Ὁ ὄγκος του εἶναι $20\times9,5\times8,5=1615$ κυβ. ἑκατ.

315) Χωρεῖ $3\times5\times3,5=52,500$ κ. μ.

316) Θὰ χρειασθοῦν $80\times80\times0,30=1920$ κ. μ. σκύρων.

317) Ὄγκος εἰς κυβ. μέτρα $6\times4\times3=72$. Ἐπειδὴ δὲ 1 κυβικὸν μέτρον $=10$ κοιλά, ἡ ἀποθήκη χωρεῖ $10\times72=720$ κοιλὰ σίτου.

318) Ἡ αἴθουσα χωρεῖ $6\times5,5\times5=165$ κ. μ. ἀέρος. Ὥστε ἀπὸ τὸν ἀέρα αὐτὸν ἀναλογοῦν $165 : 40=4,125$ κ. μ.

319) Ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι $10\times8\times15=1200$ κυβ. ἑκατοστ. Χωρεῖ λοιπὸν τοῦτο 1200 γραμμάρια ὕδατος (§ 105, Α΄).

320) Ἡ χωρητικότης τῆς ὑδαταποθήκης εἶναι 960 κυβ. παλάμαι (§ 105 Β΄). Ἀλλ' ἀφοῦ ἡ χωρητικότης αὐτῆς δίδεται εἰς κυβ. παλάμας, τὰς διαστάσεις της πρέπει νὰ τὰς ἐκφράσωμεν εἰς παλάμας. Ἔτσι θὰ ἔχωμεν 1,20 μ.=12 παλ., 0,80 μ.=8 παλ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν βάσεως τῆς ὑδαταποθήκης εἶναι $12\times8=96$

τ. παλάμαι. Τώρα παρατηροῦμεν ὅτι ἐμβαδὸν βάσεως $\times$ βάθος (ὕψος)=χωρητικότης τῆς ὑδαταποθήκης. Ὥστε χωρητικότης τῆς ἀποθήκης : ἐμβαδὸν βάσεως=βάθος αὐτῆς. Τοῦτο λοιπὸν εἶναι 960 : 96=10 παλάμαι ἢ 1 μέτρον.

321) Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω, εὑρίσκομεν 15 ἑκατοστόμετρα=1,5 παλάμαι. Ἐμβαδὸν βάσεως=1,5$\times$1,5=2,25 τ. παλάμαι καὶ ζητούμενον βάθος 4,5 : 2,25=2 παλάμαι.

322) Ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι $0,5^3$=0,5$\times$0,5$\times$0,5=0,125 κ. μ. Ἐὰν λοιπὸν περιεῖχε τοῦτο ὕδωρ τὸ βάρος τοῦ ὕδατος θὰ ἦτο 0,125 τοῦ τόννου=125 χιλιόγραμμα. Ἀλλ' ἐπειδὴ περιέχει ὑδράργυρον, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ βάρος τοῦτο, ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ὑδραργύρου, ἤτοι ἐπὶ 13,59 (§ 106). Τὸ ζητούμενον λοιπὸν βάρος εἶναι 125$\times$13,59=1698,75 χιλιόγραμμα.

323) Ὄγκος βάθρου, 1,5$\times$1$\times$0,5=0,75 κ. μ.

Βάρος βάθρου, 2,65$\times$0,75=1,9875 τόννοι.

324) Τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων τῆς αἰθούσης ἐπὶ τὸ εἰδικὸν βάρος 0,0013 τοῦ ἀτμοσφαιρικοῦ ἀέρος θὰ δώσουν τὸ ζητούμενον βάρος τοῦ ἀέρος.

325) Ὄγκος=26,8 : 0,56=47,857 κυβ. ἑκατοστ. (περ.).

326) Ὄγκος σιδηροῦ κύβου 2^3= 8 κυβ. ἑκατοστόμετρα. Θὰ χυθῇ λοιπὸν ἔλαιον 8$\times$0,92=7,36 γραμμάρια.

327) Ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἶναι 4^3=64 κυβ. ἑκατοστόμετρα. Τώρα ἐπειδὴ $Β=Θ\times ε$ (§ 107) ἕπεται ὅτι $Β : Θ=ε$. Τὸ ζητούμενον λοιπὸν εἰδικὸν βάρος εἶναι ε=60,8 : 64 = 0,95.

328) Ὄγκος, Θ=20$\times$10,5=210 κυβ. ἑκατοστόμετρα.

329) Ἐμβαδὸν βάσεως, $Β=4^2$=16 τ. μ.

Ὄγκος βάθρου Θ=16$\times$3 = 48 κ. μ.

330) Ἐμβαδὸν βάσεως, $Θ=\dfrac{0,5\times 0,5}{2}=0,125$ τ. μ.

Ὄγκος τοῦ μαρμάρου 0,125$\times$2,5=0,3125 κ. μ.

Βάρος » μαρμάρου 0,3125$\times$2,65=0,828125 τοῦ τόννου = 828,125 χιλιόγραμμα.

331) Ἐπειδὴ 250 κυβ. παλ. = 250000 κυβ. ἑκ., τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι 250000 : 1000=250 ἑκατοστόμετρα=2,5 μ.

332) Ἐμβαδὸν βάσεως $B = 34,5 : 10 = 3,45$ τετρ. ἑκατοστόμετρα.

Ὄγκος πυραμίδος.

Τύπος: Ὄγκος πυραμίδος, $\Theta = \dfrac{\text{ἐμβαδὸν βάσεως} \times \text{ὕψος}}{3}$

$$\text{ἤτοι} \quad \Theta = \frac{B \times \upsilon}{3}$$

Ἀσκήσεις.

Σελ. 124.

333) Ἐμβαδὸν βάσεως, $B = 0,12 \times 0,30 = 0,0360$ τ. μ.

Ὄγκος πυραμίδος, $\Theta = \dfrac{0,0360 \times 0,20}{3} = \dfrac{0,007200}{3} =$
$= 0,002400$ κ. μ.

334) Ἐμβαδὸν βάσεως, $B = 0,6 \times 0,6 = 0,36$ τ. μ.

Ὄγκος πυραμίδος, $\Theta = \dfrac{0,36 \times 1,5}{3} = \dfrac{0,540}{3} =$
$= 0,180$ κ. μ.

335) Ἐμβαδὸν βάσεως $B = \dfrac{4 \times 3}{2} = 6$ τ. ἑκατ.

Ὄγκος πυραμίδος $\Theta = \dfrac{6 \times 6}{3} = 12$ κ. ἑκατοστ.

Τὸ βάρος τῆς πυραμίδος ἰσοῦται μὲ $12 \times 0,56 = 6,72$ γραμ.

336) Εἰς τὸν τύπον τοῦ ὄγκου πυραμίδος $\Theta = \dfrac{B \times \upsilon}{3}$ ἀντικαθιστῶμεν τὸ Θ μὲ 50 καὶ τὸ Β μὲ 20.

Ἑπομένως εἶναι $50 = \dfrac{20 \times \upsilon}{3}$

$$50 \times 3 = \frac{20 \times \upsilon}{3} \times 3, \quad \text{ἤτοι} \quad 50 \times 3 = 20 \times \upsilon,$$

$$\frac{50 \times 3}{20} = \frac{20 \times \upsilon}{20} \qquad \text{ἤτοι} \quad \frac{50 \times 3}{20} = \upsilon, \text{ δηλαδὴ}$$

$$\upsilon = \frac{150}{20} = 7,5 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Β΄ κεφαλαίου.

337) Ἡ κατασκευή του εἶναι εὔκολος.

338) Ἡ στήλη ἔχει σχῆμα πρίσματος. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας αὐτῆς ἰσοῦται μὲ τὴν περίμετρον Π τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\Pi = 0{,}40 \times 4 = 1{,}60$ μ., ἔχομεν $E = 1{,}60 \times 2{,}50 = 4$ τ. μ. Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι $4 : 0{,}40 = 10$ μέτρα.

339) Τὸ στόμιον τῆς δεξαμενῆς ἔχει ἐμβαδὸν $3{,}5 \times 2{,}5 = 8{,}75$ τ. μ. Ἑπομένως τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς πρέπει νὰ εἶναι $3{,}5 : 8{,}75 = 0{,}4$ τοῦ μέτρου.

340) Ἡ χωρητικότης τοῦ κιβωτίου εἶναι $2{,}20 \times 1 \times 0{,}70 = 1{,}540$ κ. μ., ὁ δὲ ὄγκος μιᾶς πλακὸς εἶναι $0{,}14 \times 0{,}05 \times 0{,}05 = 0{,}00035$ κ. μ. Ὥστε τὸ κιβώτιον ἔχει $1{,}540 : 0{,}00035 = 4400$ πλάκας σάπωνος.

341) Ὁ χάλκινος κύβος ἔχει ὄγκον $3^3 = 27$ κυβ. ἑκατοστ. Ὥστε τὸ βάρος ὕδατος τὸ ὁποῖον θὰ χυθῇ εἶναι 27 γραμμάρια. (§ 105, Α΄).

342) Οἱ ἐργάται ἔσκαψαν $40 \times 0{,}80 \times 2 = 64$ κυβ. μέτρα. Ὥστε ἔλαβον 10 000 δρχ. $\times 64 = 640\,000$ δραχμάς.

343) Ἡ πυραμὶς καὶ τὸ πρῖσμα ἔχουν βάσεις μὲ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν Β. Ὥστε οἱ ὄγκοι αὐτῶν εἶναι: τοῦ πρίσματος ἴσος μὲ $B \times 3$ καὶ τῆς πυραμίδος $\frac{B \times \upsilon}{3}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχουν ἴσα βάρη καὶ εἶναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ ξύλον τοῦ ὁποίου τὸ εἰδικὸν βάρος τὸ παριστῶμεν μὲ ε, ἔχομεν (§ 107) $B \times 3 \times \varepsilon = \frac{B \times \upsilon \times \varepsilon}{3}$.

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς μὲ τὸ γινόμενον $B \times \varepsilon$ εὑρίσκομεν.

$$\frac{B \times 3 \times \varepsilon}{B \times \varepsilon} = \frac{B \times \upsilon \times \varepsilon}{3 \times B \times \varepsilon}, \text{ ἤτοι } 3 = \frac{\upsilon}{3} \text{ ἢ}$$

$$3 \times 3 = \frac{\upsilon}{3} \times 3, \text{ δηλαδὴ } \upsilon = 9 \text{ ἑκατοστόμετρα.}$$

Τὸ πρόβλημα τοῦτο λύεται καὶ ὡς ἑξῆς: ἀφοῦ ἡ πυραμὶς καὶ τὸ πρῖσμα ἔχουν ἴσα βάρη καὶ εἶναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ ξύλον, ἔχουν ἴσους ὄγκους. Ἀλλ' ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος εἶναι $B \times 3$, ὁ δὲ ὄγκος τῆς πυραμίδος εἶναι $\frac{B \times \upsilon}{3}$. Ἀλλ' ἵνα τὸ ἐξαγόμενον $\frac{B \times \upsilon}{3}$ γίνῃ ἴσον μὲ $B \times 3$, πρέπει τὸ υ νὰ εἶναι ἴσον μὲ 9. Καὶ πράγματι, διότι εἶναι $\frac{B \times 9}{3} = B \times 3$.

344) Ὁ τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας κανονικῆς πυραμίδος εἶναι (§ 102) $\varepsilon = \Pi \times \frac{\upsilon}{2}$ (1). Ἐδῶ εἶναι $\varepsilon = 14{,}4$ τ. ἑκατ. Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν τὴν βάσιν τῆς πυραμίδος τετράγωνον, εἶναι $\Pi = 2 \times 4 = 8$ ἑκατ. Ὥστε ὁ τύπος (1) γίνεται $14{,}4 = 8 \times \frac{\upsilon}{2}$ ἤτοι $14{,}4 = 4 \times \upsilon$ καὶ $\upsilon = 14{,}4 : 4 = 3{,}6$ ἑκατ.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν ἀπόστασις εἶναι 3,6 ἑκατοστόμετρα.

345) Ἡ χωρητικότης τῆς δεξαμενῆς εἶναι,

$3{,}5 \times 3 \times 2{,}5 = 26{,}25$ κυβ. μέτρα $= 26\,250\,000$ κυβ. ἑκατ.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν χρόνος εἶναι,

$26\,250\,000 : 2 = 13\,125\,000$ δ $= 3645$ ὥρ. 50 π.

346) Θὰ χρειασθοῦν 3000 δρχ. $\times\, 26{,}25 = 78750$ δρχ.

347) Θὰ διαιρέσωμεν τὸ βάρος 24,84 διὰ τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ θείου, τὸ ὁποῖον εἶναι 2,07. Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ τεμαχίου αὐτοῦ εἶναι $24{,}84 : 2{,}07 = 12$ κ. παλάμαι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΣΤΕΡΕΑ ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ

Α΄. ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Τύποι 1) **Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου.**

$\varepsilon = 2 \times \pi \times \alpha \times \upsilon$, ὅπου $\alpha =$ ἀκτὶς βάσεως τοῦ κυλίνδρου
ἢ $\varepsilon = \delta \times \pi \times \upsilon$ $\quad\quad \delta =$ διάμετρος τῆς βάσεως
καὶ $\upsilon =$ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

2) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε καὶ τὴν ἀκτῖνα α **εὑρίσκομεν τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε διὰ $2 \times \pi \times \alpha$,** δηλαδὴ εἶναι $\upsilon = \frac{\varepsilon}{2 \times \pi \times \alpha}$.

3) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε καὶ τὸ ὕψος υ **εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα βάσεως τοῦ κυλίνδρου, ὅταν διαιρέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ε διὰ 2×π×υ,** δηλαδὴ εἶναι $\alpha = \frac{\varepsilon}{2\times\pi\times\upsilon}$.

4) **Ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου**

$$E = 2\times\pi\times\alpha\,(\alpha+\upsilon).$$

5) **Ὄγκος κυλίνδρου,** $\Theta = \beta\times\upsilon = \pi\times\alpha^2\times\upsilon$.

6) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον κυλίνδρου καὶ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του, **εὑρίσκομεν τὸ ὕψος του, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ὄγκον Θ διὰ π×α²**, δηλαδὴ εἶναι $\upsilon = \frac{\Theta}{\pi\times\alpha^2}$.

7) Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν ὄγκον κυλίνδρου καὶ τὸ ὕψος του, **εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του, ὅταν διαιρέσωμεν τὸν ὄγκον Θ διὰ π×υ καὶ ἔπειτα εὕρωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πηλίκου,** δηλαδὴ εἶναι $\alpha = \sqrt{\frac{\Theta}{\pi\times\upsilon}}$.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 129—130.

348) Μῆκος περιφερείας βάσεως

$$2\times3{,}14\times2 = 4\times3{,}14 = 12{,}56 \text{ ἑκ.}$$

Ἐμβαδὸν κυρ. ἐπιφανείας, $\varepsilon = 12{,}56\times8 = 100{,}48$ τ. ἑκ.

ἢ ἀπ᾿ εὐθείας $\varepsilon = 2\times3{,}14\times2\times8 = 32\times3{,}14 = 100{,}48$ τ. ἑκ.

Ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας, $E = 2\times3{,}14\times2\times(2+8)$

ἤτοι $E = 4\times4{,}14\times10 = 40\times3{,}14 = 125{,}60$ τ. ἑκ.

349) Ἐμβ. κυρ. ἐπιφανείας,

$$\varepsilon = 2\times3{,}14\times0{,}30\times2{,}5 = 4{,}71 \text{ τ. μ.}$$

Ὥστε ὁ ὑδροχρωματισμὸς θὰ στοιχίσῃ 1600 δρχ. ×4,71=7536 δρ.

350) Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον 2 ἔχομεν

$$\upsilon = \frac{314}{2\times3{,}14\times5} = \frac{314\times100}{2\times314\times5} = \frac{100}{2\times5} = \frac{100}{10} = 10 \text{ ἑκατ.}$$

351) Ἐμβ. κυρ. ἐπιφ. $\varepsilon = \delta\times\pi\times\upsilon$

ἤτοι $\varepsilon = 7{,}40\times3{,}14\times2{,}80 = 65{,}0608$ τ. μ.

352) Ὄγκος
$\Theta = 3{,}14 \times 2{,}4^2 \times 4 = 3{,}14 \times 5{,}76 \times 4 = 72{,}3456$ κ. ἑκατ.

353) Ἀκτὶς βάσεως 20 : 2 = 10 ἑκατ.
Χωρητικότης δοχείου $\Theta = 3{,}14 \times 10^2 \times 20 = 6280$ κ. ἑκατ.
Βάρος ἐλαίου $6280 \times 0{,}92 = 5777{,}60$ γραμμάρια.

354) Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως δίδεται εἰς τετρ. παλάμας, τὸ ὕψος θὰ παριστᾷ παλάμας. Ἐπειδὴ δὲ 70,65 κυβ. μέτρα $= 70{,}65 \times 1\,000 = 70\,650$ κυβ. παλάμαι, (καὶ $\pi \times \alpha^2 = 7{,}85$ τετραγ. παλάμαι. εὑρίσκομεν (τύπος 6) $\upsilon = \dfrac{70\,650}{7{,}85} = 9\,000$ παλάμαι = 900 μέτρα.

Σημείωσις. Ἠμποροῦμεν νὰ τρέψωμεν τὰς 7,85 τετρ. παλάμας εἰς τετρ. μέτρα, ὁπότε τὸ ὕψος θὰ παριστᾷ μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ 7,85 τετραγων. παλάμαι = 7,85 : 100 = 0,0785 τετραγωνικὰ μέτρα, ἔχομεν

$$\upsilon = \frac{70{,}65}{0{,}0785} = \frac{706\,500}{785} = 900 \text{ μέτρα.}$$

355) Ὄγκος κυλίνδρου $\Theta = 3{,}14 \times 1{,}5^2 \times 3 = 3{,}14 \times 2{,}25 \times 3 = 21{,}195$ κ. ἑκατ.

Βάρος φελλοῦ $21{,}195 \times 0{,}24 = 5{,}0868$ γραμ.

356) Ἀκτὶς πυθμένος 1,20 : 2 = 0,60 μ.
Ὄγκος ὕδατος $\Theta = 3{,}14 \times 0{,}6^2 \times 2{,}30 = 3{,}14 \times 0{,}36 \times 2{,}30 = 2{,}599920$ κ. μ.

357) Ἔχομεν (τύπος 6) $\upsilon = \dfrac{5{,}65}{3{,}14 \times 0{,}6^2} = \dfrac{5{,}65}{1{,}1304} = 5$ μέτρα (περίπου).

Β΄. ΚΩΝΟΣ

Τύποι: 1) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, ε = μῆκος περιφερείας βάσεώς του × ἥμισυ τῆς πλευρᾶς του, ἤτοι $\varepsilon = \Gamma \times \dfrac{\lambda}{2}$ ἢ ἐπειδὴ $\Gamma = 2 \times \pi \times \alpha$, $\varepsilon = \pi \times \alpha \times \lambda$.

2) **Ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου ἐπιφανείας κώνου,** Ε = ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας του + ἐμβαδὸν βάσεως, ἤτοι $E = \pi \times \alpha \times \lambda + \pi \times \alpha^2$, δηλαδὴ $E = \pi \times \alpha \times (\alpha + \lambda)$.

3) **Ὄγκος κώνου,** Θ = ἐμβαδὸν βάσεώς του × ὕψος του διὰ 3 ἤτοι, $\Theta = \dfrac{\beta \times \upsilon}{3}$ ἢ ἐπειδὴ $\beta = \pi \times \alpha^2$, $\Theta = \dfrac{\pi \times \alpha^2 \times \upsilon}{3}$.

'Ασκήσεις.

Σελίδες 133-134.

358) Εὑρίσκομεν (τύπος 1) $Ε=3,14\times5\times10=157$ τ. ἑκ.

359) Εὑρίσκομεν (τύπος 2) $Ε=3,14\times30\times(30+50)$ ἤτοι $Ε=3,14\times30\times80=3,14\times2400=7536$ τ. ἑκ.

360) Ἐκ τοῦ τύπου (1) $ε=π\timesα\timesλ$, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη του διὰ $π\timesα$, εὑρίσκομεν $\frac{ε}{π\timesα}=\frac{π\timesα\timesλ}{π\timesα}$ ἤτοι

$$λ=\frac{ε}{π\timesα}.$$

Ὥστε εἶναι $λ=\frac{31,4}{3,14\times2}=\frac{3140}{314\times2}=\frac{10}{2}=5$ παλάμαι.

361) Ἔχομεν (τύπος 3), $Θ=\frac{β\timesυ}{3}=\frac{28,26\times1,2}{3}$

ἤτοι $Θ=28,26\times0,4=11,304$ κ. παλ.

362) Ἐκ τοῦ τύπου $Θ=\frac{β\timesυ}{3}$, εὑρίσκομεν $3\timesΘ=β\timesυ$

καὶ $\frac{3\timesΘ}{β}=\frac{β\timesυ}{β}$ ἤτοι $υ=\frac{3\timesΘ}{β}$.

Ὥστε εἶναι $υ=\frac{3\times94,2}{28,26}=\frac{94,2}{9,42}=\frac{9420}{942}=10$ παλάμαι.

363) Ὄγκος κώνου, $Θ=\frac{π\timesα^2\timesυ}{3}$ ἤτοι $Θ=\frac{3,14\times2^2\times4}{3}$

ἢ $Θ=\frac{3,14\times4\times4}{3}=\frac{3,14\times16}{3}=16,747$ κυβ. ἑκατ.

Βάρος κώνου $16,747\times7,79=130,459$ γραμ. (περίπου).

364) Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸν ὄγκον τοῦ κώνου ἐκ τοῦ τύπου (§ 107) $Θ=\frac{Β}{ε}$, ἐπειδὴ δὲ ἐδῶ εἶναι $Β=23843$ καὶ $ε=11,35$ εὑρίσκομεν $Θ=\frac{23843}{11,35}=2100,7$ κ. ἑκατ. Τώρα τὸ ὕψος θὰ τὸ εὕρωμεν ἐκ τοῦ τύπου (ἄσκ. 362) $υ=\frac{3\timesΘ}{β}$. Ἀλλὰ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως (ἐπειδὴ $α=10$ ἑκατ.) εἶναι $β=3,14\times10^2=$ $=314$ τ. ἑκ. Ὥστε ἔχομεν $υ=\frac{3\times2100,7}{314}=\frac{6302,1}{314}=20,07$ ἑκ.

365) Θὰ τρέψωμεν πρῶτον τὰς 25,12 παλάμας εἰς ἑκατοστόμετρα· εἶναι δὲ 25,12 παλ.=251,2 ἑκατ. Κατόπιν ἐκ τοῦ τύπου $\Gamma=2\times\pi\times\alpha$ εὑρίσκομεν τὴν ἀκτῖνα α, εἶναι δὲ $\alpha=\frac{\Gamma}{2\times\pi}$ ἤτοι $\alpha=\frac{251,2}{2\times3,14}=\frac{251,2}{6,28}=40$ ἑκατ. Ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται μὲ $\Theta=\frac{3,14\times40^2\times20}{3}$, ἤτοι

$$\Theta=\frac{3,14\times1600\times20}{3}=\frac{100480}{3}=33493,33 \text{ κ. ἑκ.}$$

Γ΄. ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Τύποι: 1) **Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου.** Ε = ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν δύο βάσεών του × τὴν πλευρὰν αὐτοῦ × π, ἤτοι $E=(A+\alpha)\times\lambda\times\pi$.

2) **Ἐμβαδὸν ὁλοκλήρου τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου.** Ε = τὸ ἄνω ἐμβαδὸν + τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων, ἤτοι $E=(A+\alpha)\times\lambda\times\pi+(A^2+\alpha^2)\times\pi$.

3) **Ὄγκος κολούρου κώνου ὕψους υ.**

$\Theta=\frac{1}{3}\times(A^2+A\times\alpha+\alpha^2)\times\upsilon\times\pi$.

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 135.

366) Ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας, $E=(12+3)\times5\times3,14$ ἤτοι $E=15\times5\times3,14=75\times3,14=235,50$ τ. ἑκ.

Τώρα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο βάσεων ἰσοῦται μὲ $(12^2+3^2)\times3,14=(144+9)\times3,14=153\times3,14=480,42$ τ. ἑκ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας του ἰσοῦται μὲ

$$E=235,50+480,42=715,92 \text{ τ. ἑκ.}$$

367) Ὄγκος κώνου, $\Theta=\frac{1}{3}\times(0,6^2+0,6\times0,3+0,3^2)\times$ $\times0,4\times3,14$, ἤτοι $\Theta=\frac{1}{3}\times(0,36+0,18+0,09)\times1,256$

$$\Theta=\frac{1}{3}\times0,63\times1,256=0,21\times1,256=0,263760 \text{ κ. μ.}$$

368) Ὁ κουβᾶς ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, μὲ ἀκτῖνας βάσεων Α=3 παλ., α=1 παλ. καὶ ὕψος (βάθος)$=\frac{4}{3}$ παλ. Ὁ ὄγκος λοιπὸν αὐτοῦ εἶναι $\Theta = \frac{1}{3} \times (3^2+3\times1+1^2) \times \frac{4}{3} \times 3{,}14$

ἤτοι $\Theta = \frac{1}{3} \times (9+3+1) \times \frac{4}{3} \times 3{,}14$

$$\Theta = \frac{1}{3} \times 13 \times \frac{4}{3} \times 3{,}14 = \frac{13\times4\times3{,}14}{9} = \frac{163{,}28}{9} =$$

$=18{,}142$ κ. παλάμαι. Τὸ βάρος λοιπὸν τοῦ ὕδατος ποὺ χωρεῖ εἶναι 18,142 χιλιόγραμμα.

Δ΄. ΣΦΑΙΡΑ

Τύποι: 1) **Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας σφαίρας** $E=4\times\pi\times\alpha^2$.

2) **Ὄγκος σφαίρας,** $\Theta = \frac{4}{3} \times\pi\times\alpha^3$.

Ἀσκήσεις.

Σελίδες 139—141.

369) Ἐμβαδὸν ἐπιφανείας $E=4\times3{,}14\times0{,}10^2=4\times3{,}14\times 0{,}01=3{,}14\times0{,}04=0{,}1256$ τ. μ.

Ὄγκος $\Theta = \frac{4}{3} \times 3{,}14\times0{,}1^3 = \frac{4}{3}\times3{,}14\times0{,}001 = \frac{3{,}14\times0{,}004}{3}$

ἤτοι $\Theta = \frac{0{,}012560}{3} = 0{,}004186$ κ. μ. (περ.).

370) Ὄγκος σφαίρας $\Theta = \frac{4}{3}\times3{,}14\times0{,}3^3 = \frac{4}{3}\times3{,}14\times \times0{,}027=4\times3{,}14\times0{,}009$ ἤτοι $\Theta=3{,}14\times0{,}036=0{,}113040$ κ.μ.

Βάρος σφαίρας $0{,}113040\times11{,}35=1{,}283004$ τόν.

371) Ὄγκος σφαίρας $\Theta = \frac{4}{3}\times3{,}14\times1^3 = \frac{4}{3}\times3{,}14\times 1=4{,}187$ κ. ἑκατοστόμετρα (περ.).

Βάρος ἐλαίου ποὺ θὰ χυθῇ$=4{,}187\times0{,}92=3{,}852$ γραμμάρ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν τοῦ Γ΄ κεφαλαίου.

372) Ἀκτὶς βάσεως κυλίνδρου, $\alpha=0{,}2:2=0{,}1$ μ.

Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφανείας κυλίνδρου $\varepsilon=2\times3{,}14\times0{,}1\times0{,}2$

ἤτοι $\varepsilon=0{,}1256$ τ. μ.

Ἐμβαδὸν ὅλης ἐπιφανείας κυλίνδρου

$E=0{,}1256+3{,}14\times0{,}1^2\times2=0{,}1256+0{,}0680$

ἤτοι $E=0{,}1884$ τ. μ.

373) Ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφανείας κώνου, $E'=3,14\times0,1\times0,2$. ἤτοι $E'=0,0628$ τ. μ.

Λόγος ἐπιφανειῶν $\frac{E}{E'}=\frac{0,1256}{0,0628}=2$

ἢ $\frac{E}{E'}=\frac{2\times3,14\times0,1\times0,2}{3,14\times0,1\times0,2}=2$

Ὥστε ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου εἶναι διπλασία τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

374) Ἐκ τοῦ τύπου τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου $\Theta=\beta\times\upsilon$ εὑρίσκομεν $\upsilon=\frac{\Theta}{\beta}$. Ἀλλ' ἡ χωρητικότης τοῦ κάδου, ἤτοι ὁ ὄγκος τοῦ ὕδατος, πρέπει νὰ τραπῇ εἰς τόννους, διότι ἡ βάσις μᾶς δίδεται εἰς τ. μέτρα. Ἔτσι δὲ τὸ ὕψος θὰ παριστάνει μέτρα. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀκ.$=1,28$ χιλιογρ. $=0,00128$ τόν. εὑρίσκομεν ὅτι 5000 ὀκ. ὕδατος $=0,00128\times5000=6,4$ τόννοι. Ὥστε εἶναι $\upsilon=\frac{6,4}{3,2}=\frac{64}{32}=2$ μέτρα.

375) Ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου θὰ ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κώνου. Εἶναι δὲ

Ὄγκος κυλίνδρου, $\Theta=3,14\times0,425^2\times0,15$

Ὄγκος κώνου $\Theta'=\frac{3,14\times0,425^2\times0,15}{3}$

Διαφορὰ $\Theta-\Theta'=\frac{3,14\times0,425^2\times0,15\times2}{3}=0,05671625$ κ. μ.

376) Ὅταν τὸ ΑΒΓΔ γυρίσῃ εἰς τὴν πρώτην θέσιν του τοῦτο ὡς ὀρθογώνιον, θὰ γράψῃ κύλινδρον μὲ ἀκτῖνα βάσεως ΑΒ καὶ ὕψος ΑΔ, κατὰ τὴν ἰδίαν δὲ περιστροφὴν τὸ ἡμικύκλιον ΑΕΔ θὰ γράψῃ σφαῖραν μὲ ἀκτῖνα $\frac{A\Delta}{2}=2$ ἑκατοστόμετρα. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας, θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ὄγκον. Εἶναι δὲ

ὄγκος κυλίνδρου $\Theta=3,14\times2^2\times4=3,14\times4\times4=50,240$ κ.ἑκ.

» σφαίρας $\Theta'=\frac{4}{3}\times3,14\times2^3=33,493$ κ. ἑκ.

Ζητούμενος ὄγκος $\Theta-\Theta'=50,240-33,493=16,747$ κ. ἑκ.

377) Ἐμβαδὸν βάσεως κώνου $=3,14\times10^2=314$ τ. ἑκ.

ὕψος κώνου $=$ ἀκτὶς σφαίρας $=10$ ἑκ.

ὄγκος κώνου $\Theta = \frac{1}{3} \times 314 \times 10 = \frac{3140}{3} = 1046,666$ κ. ἑκ.

378) Ἡ πλευρὰ τοῦ κώνου = ἀκτὶς σφαίρας = 15 ἑκ. Ζητούμενον ἐμβαδὸν $\varepsilon = 3,14 \times 8 \times 15 = 3,14 \times 120 = 376,80$ τ.ἑκ.

379) Ζητούμενον ἐμβαδὸν $\varepsilon = 3,14 \times (24+12) \times 15$. ἤτοι $\varepsilon = 3,14 \times 36 \times 15 = 3,14 \times 540 = 1695,60$ τ. ἑκ.

380) Ἡ εὐθεῖα ΚΛ ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ κέντρον Κ τῆς σφαίρας μὲ τὸ κέντρον Λ τοῦ μικροῦ κύκλου, εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ μικροῦ κύκλου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Ἤτοι εἶναι (ΚΛ) = 6 ἑκ. Ἐὰν δὲ φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα ΚΜ τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τοῦ μικροῦ κύκλου, τὸ τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ὀρθογώνιον, μὲ ὑποτείνουσαν τὴν (ΚΜ) = 10 ἑκ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον δὲ αὐτὸ τρίγωνον εὑρίσκομεν τὴν κάθετον πλευράν του ΛΜ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μικροῦ κύκλου. Εἶναι δὲ

(Πυθ. θεώρημα, τύπος 2ος)

$(\text{ΛΜ}) = \sqrt{(\text{ΚΜ})^2 - (\text{ΚΛ})^2}$ ἤτοι $(\text{ΛΜ}) = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100-36}$ ἢ $(\text{ΛΜ}) = \sqrt{64} = 8$. Ἔτσι τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι

$$\Gamma = 2 \times 3,14 \times 8 = 3,14 \times 16 = 50,24 \text{ ἑκ.}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΚΛΙΜΑΚΕΣ

Ἀσκήσεις.

Σελὶς 145.

381) Σύμφωνα μὲ τὴν § 126 οἱ ἀριθμοὶ τῆς κλίμακος τοῦ σχήματος 113, θὰ διαιρεθοῦν διὰ 10, ὅταν πρόκειται νὰ σχηματισθῇ κλῖμαξ 1 : 100 καὶ θὰ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 10, ὅταν πρόκειται νὰ σχηματισθῇ κλῖμαξ 1 : 10000.

382) Θὰ λάβωμεν ἐπὶ τοῦ χάρτου ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα 10 000 φορὰς μικρότερον τῶν 200 μέτρων, ἤτοι θὰ ἔχῃ τοῦτο μῆκος 200 : 10 000 = 0,02 τοῦ μέτρου.

383) Μετροῦμεν τὴν αβ ἐπὶ τοῦ σχήματος καὶ εὑρίσκομεν (αβ) = 0,035 μ. Ὥστε εἶναι (ΑΒ) = 0,035 × 1000 = 35 μ.

384) Κάθε πλευρὰ θὰ ἔχῃ μῆκος 1200 : 1000 = 1,2 μ.

385) Μετροῦμεν ἐπὶ τοῦ σχήματος τὴν βάσιν ΒΓ καὶ τὸ ὕψος ΔΑ. Εὑρίσκομεν δὲ (ΒΓ) = 0,03 μ. καὶ (ΔΑ) = 0,02 μ. Ὥστε ἡ ἄμπελος ἔχει βάσιν 0,03 × 1000 = 30 μ., ὕψος 0,02 × × 1000 = 20 μ. καὶ ἐμβαδὸν 30 × 20 = 600 τ.μ.

Σημείωσις.—Ἡ κλῖμαξ 1 : 100 νὰ διορθωθῇ εἰς 1 : 1000.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν.

Σελίδες 146 - 149.

386) Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν μικροτέραν γωνίαν μὲ α, ἡ διπλασία της εἶναι $2 \times α$ καὶ αἱ δύο μαζὺ ἔχουν ἄθροισμα $3 \times α$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμά των εἶναι 90°, ἀφοῦ εἶναι συμπληρωματικαί. Ὥστε ἔχομεν $3 \times α = 90^\circ$ καὶ $α = 90^\circ : 3 = 30^\circ$.

Ὥστε αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι ἔχουν μέτρα $30^\circ \times 2 = 60^\circ$ καὶ 30°.

387) Τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι $90^\circ \times \frac{1}{4} = 22^\circ\ 30'$.

Ἔστω δὲ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΑΔ ἐντὸς τῆς γωνίας αὐτῆς, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΑΒ γωνίαν $22^\circ\ 30'$, ἤτοι ἡ ΑΔ τὴν γωνίαν αὐτὴν ΒΑΔ ἀποχωρίζει ἀπὸ τῆς ὀρθῆς.

1η περ. Τώρα ἐὰν προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ τῆς ὀρθῆς γωνίας μέχρι τοῦ Ε, ἡ εὐθεῖα ΑΔ μὲ τὴν προέκτασιν ΑΕ σχηματίζει τὴν γωνίαν ΔΑΕ. Αὕτη δὲ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν γωνίαν ΔΑΓ ἡ ὁποία εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς (διότι $ΔΑΓ = ΒΑΓ - ΒΑΔ = 1$ ὀρ. $- \frac{1}{4}$ ὀρ. $= \frac{3}{4}$ ὀρ.) καὶ ἀπὸ τὴν ὀρθὴν γωνίαν ΓΑΕ. Ὥστε εἶναι $ΔΑΕ = ΔΑΓ + ΓΑΕ$ ἤτοι

$$(ΔΑΕ) = (22^\circ\ 30') \times 3 + 90^\circ = 67^\circ\ 30' + 90^\circ = 157^\circ\ 30'$$

2α περ. Ἀλλὰ ἠμποροῦμεν νὰ προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΓΑ τῆς ὀρθῆς γωνίας μέχρι τοῦ Ζ. Τότε δὲ θὰ εἶναι:
$ΔΑΖ = ΔΑΒ + ΒΑΖ$ ἤτοι $(ΔΑΖ) = 22^\circ\ 30' + 90^\circ = 112^\circ\ 30'$.

388) Διαιρεῖται εἰς τμήματα μεταξύ των ἴσα.

389) Ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ εἶναι διπλασία τῆς μικροτέρας ($6 : 3 = 2$).

390) Εἶναι παράλληλοι.

391) Ἡ γωνία Δ θὰ εἶναι $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ καὶ τὰ τμήματα ΔΑ καὶ ΔΒ εἶναι μεταξύ των ἴσα.

392) Ἔστω ὅτι ἡ ΚΓ καὶ ἡ προέκτασίς της τέμνουν τὴν περιφέρειαν Κ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ἐὰν τώρα διὰ τῶν σημείων τούτων Δ καὶ Ε, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΚΕ, αἱ κάθετοι αὗται θὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΒ.

393) Ἡ γωνία τῶν διχοτόμων εἶναι ὀρθή, ἤτοι 90°.

394) Ἡ πλευρὰ τοῦ οἰκοπέδου εἶναι $122 : 4 = 30{,}5$ μ.

Ἐμβαδὸν οἰκοπέδου $30{,}5^2 = 930{,}25$ τ. μ. $= 930{,}25 \times \dfrac{16}{9}$ τ. τ. π.

Ἀξία οἰκοπέδου $18\,000$ δρχ. $\times 930{,}25 \times \dfrac{16}{9} =$

$2\,000$ δρχ. $\times 930{,}25 \times 16 = 2\,000 \times 14\,884$ ἤτοι $29\,768\,000$ δρχ.

395) Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν ἴσας βάσεις (2 ἑκ. τὸ καθένα) καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος (4 ἑκ.). Ὥστε εἶναι ἰσοδύναμα.

396) Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει βάσιν (ΑΒ) $= 6$ ἑκ. καὶ ὕψος (ΔΕ) $= 4$ ἑκ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E = 6 \times 4 = 24$ τ. ἑκ.

Ἔπειτα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία του Α εἶναι 45° καὶ ἡ γωνία του ΑΔΕ εἶναι 45° (διότι ἡ γωνία του ΑΕΔ εἶναι 90°). Ὥστε τὸ τρίγωνον αὐτὸ ΑΔΕ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΕ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν ΔΕ, ἤτοι εἶναι (ΑΕ) $=$ (ΔΕ) $= 4$ ἑκ. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὡς βάσιν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ τὴν ΑΕ, ὕψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ΔΕ. Ἑπομένως τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΔΕ εἶναι $\dfrac{4 \times 4}{2} = 8$ τ. ἑκ.

397) Ἡ πλευρὰ α τοῦ τετραγώνου ἰσοῦται μὲ τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἐμβαδοῦ του. Ὥστε ἐδῶ εἶναι $\alpha = \sqrt{225} = 15$ μ. Τὸ οἰκόπεδον λοιπὸν ἔχει περίμετρον $15 \times 4 = 60$ μ., ἡ δὲ περίφραξις αὐτοῦ ἐστοίχισεν 30000 δρχ. $\times 60 = 1\,800\,000$ δρχ.

398) Ἐμβαδὸν τῆς ἀμπέλου $E = \dfrac{127 \times 40}{2} = 127 \times 20 = 2540$ τ. μ. Ἐπειδὴ δὲ 1 παλαιὸν στρέμμα $= 1270$ τ. μ. (§ 77), ἡ ἄμπελος αὕτη εἶναι $2540 : 1270 = 2$ παλαιῶν στρεμμάτων. Ἀξίζει δὲ $1\,200\,000$ δρχ. $\times 2 = 2\,400\,000$ δρχ.

399) Ἐμβαδὸν οἰκοπέδου, $E = 25 \times 8{,}20 = 205$ τ. μ. $= 205 \times \dfrac{16}{9}$ τ. τ. π.

Ἀξία οἰκοπέδου $= 38500 \times 205 \times \dfrac{16}{9}$ δρχ. $= \dfrac{38500 \times 3280}{9}$ δρχ. $=$

$$= \frac{126\,280\,000}{9} = 14\,033\,333 \text{ δρχ.}$$

400) Δίδεται $3,14 \times \alpha^2 = 113,04$ τ. μ.

Ὥστε $\sqrt{\frac{113,04}{3,14}} = \sqrt{36} = 6.$ μ.

Τὸ μῆκος λοιπὸν τῆς περιφερείας τοῦ ἁλωνίου εἶναι

$\Gamma = 2 \times 3,14 \times 6 = 12 \times 3,14 = 37.68$ μ.

401) Ἡ ἄσκησις αὕτη λύεται εὐκόλως.

402) Ἐπειδὴ 1 κοιλὸν $= \frac{1}{10}$ τοῦ κυβ. μέτρ. (ἄσκησις 317), ἕπεται ὅτι 810 κοιλὰ $= 810 \times \frac{1}{10} = 81$ κ. μ. Ἡ χωρητικότης λοιπὸν τῆς σιταποθήκης εἶναι $\beta \times \upsilon = 81$ κ. μ. ἤτοι $\beta \times 4 = 81$ καὶ $\beta = \frac{81}{4}$ τ. μ. Ὥστε ἡ βάσις τῆς σιταποθήκης ἔχει ἐμβαδὸν $\frac{1}{4}$ τ. μ. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι τετράγωνος, ἡ πλευρά της α, ἰσοῦται μὲ $\alpha = \sqrt{\frac{81}{4}} = \frac{9}{2} = 4,5$ μ.

403) Ἡ ταράτσα ἔχει ἐμβαδὸν $4,5 \times 3,5 = 15,75$ τ. μ.

Τὸ σκιροκονίαμα ἔχει ὄγκον $15,75 \times 0,20 = 3,150$ κ. μ. ἐστοίχισε δὲ τοῦτο 500 000 δρχ. $\times 3,150 = 1\,575\,000$ δρχ.

404) Ὁ πάγος ἔχει ὄγκον $0,06 \times 1,2 = 0,072$ κ. μ. $=$ $= 0,072 \times 1000 = 72$ κυβ. παλάμας. Τὸ δὲ βάρος αὐτοῦ εἶναι (§ 106) $72 \times 0,9167 = 66,0024$ χιλιόγραμμα.

405) Αἱ διαστάσεις τοῦ σχήματος αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι 3 ἑκ. καὶ 6 ἑκ. καὶ αἱ πραγματικαὶ εἶναι $3 \times 10 = 30$ ἑκ. καὶ $6 \times 10 = 60$ ἑκ. Ὥστε ἡ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $30 \times 60 =$ 1800 τ. ἑκ.

406) Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἔχει ἐμβαδὸν $6,28 \times 1 = 6,28$ τ. μ. Ὥστε εἶναι $2 \times 3,14 \times \alpha \times 2 = 6,28$ ἢ $6,28 \times \alpha \times 2 = 6,28$ ἢ $\alpha \times 2 = 1$ καὶ $\alpha = \frac{1}{2}$ μ. Ὥστε ἡ ἀκτὶς α τῆς περιφερείας τῆς βάσεως εἶναι $\frac{1}{2}$ μ. $= 0,5$ μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $\pi \times \alpha^2 =$ $= 3,14 \times 0,5^2 = 3,14 \times 0,25 = 0,7850$ τ. μ.

Ἑπομένως ἡ στήλη ἔχει ὄγκον $0,7850 \times 2 = 1,570$ κ. μ.

407) Ἡ μαρμαρίνη πλὰξ ἔχει ὄγκον $1 \times 0,80 \times 0,02 =$ $= 0,016$ κ.μ. $= 0,016 \times 1000 = 16$ παλάμας καὶ βάρος $16 \times 2,65 =$ $= 42,400$ χιλιόγραμμα.

408) Ἡ βάσις τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται μὲ τὴν μικροτέραν βάσιν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἐφαρμόζει ἐπ' αὐτῆς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου θὰ εὕρωμεν τὸν ζητούμενον ὄγκον. Εἶναι δὲ ὁ ὄγκος κολ. κώνου $\Theta = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (6^2 + 6 \times 3 + 3^2) \times 4$ ἤτοι

$$\Theta = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times (36 + 18 + 9) \times 4 = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 63 \times 4 \text{ ἢ}$$

$$\Theta = 3{,}14 \times 21 \times 4 = 263{,}760 \text{ κ. ἑκ.}$$

ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$\Theta' = 3{,}14 \times 3^2 \times 4 = 3{,}14 \times 9 \times 4 = 113{,}040 \text{ κ. ἑκ.}$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος ὄγκος εἶναι

$$\Theta - \Theta' = 263{,}760 - 113{,}040, \text{ ἤτοι } \Theta - \Theta' = 150{,}720 \text{ κ. ἑκ.}$$

409) Αἱ διαστάσεις αβ καὶ αδ τῆς βάσεως ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι (αβ)=3 ἑκ. καὶ (αδ)=2 ἑκ. ἡ δὲ τρίτη διάστασις (τὸ ὕψος) εζ ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι (εζ)=4 ἑκ. Ὥστε αἱ πραγματικαὶ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι $3 \times 10 = 30$ ἑκ., $2 \times 10 = 20$ ἑκ. καὶ $4 \times 10 = 40$ ἑκ. Ἑπομένως ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $\Theta = 30 \times 20 \times 40 = 24000$ κ. ἑκ.

410) Ἡ πλευρὰ αβ ἐπὶ τοῦ σχεδίου εἶναι 2 ἑκ. καὶ ἡ πραγματικὴ $2 \times 10 = 20$ ἑκ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τοῦ κύβου εἶναι $20 \times 20 = 400$ τ. ἑκ. Τὸ ἐμβαδὸν ὅλης τῆς ἐπιφανείας τοῦ κύβου εἶναι $400 \times 6 = 2400$ τ. ἑκ., ὁ δὲ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι $20^3 = 8000$.

411) Ἡ βάσις αβγδ εἶναι τετράγωνον, ἡ δὲ πλευρά της αβ ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι 2,2 ἑκ. καὶ ἡ πραγματικὴ $2{,}2 \times 5 = 11$ ἑκ. Ἡ παράπλευρος ἕδρα εζη ἔχει βάσιν τὴν εη τὸ δὲ ὕψος αὐτῆς (ἐκ τοῦ ζ) εἶναι ἐπὶ τοῦ χάρτου 3 ἑκ. καὶ τὸ πραγματικὸν εἶναι $3 \times 5 = 15$ ἑκ.

Ὥστε ἡ περίμετρος τῆς βάσεως εἶναι $11 \times 4 = 44$ ἑκ. τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς ὅλης ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος εἶναι (σελ. Πρακτ. Γεωμ. 117) $E = 44 \times \frac{15}{2} + 11^2 = 22 \times 15 + 121 = 330 + 121 = 451$ τ. ἑκ.

412) Ἡ διάμετρος τοῦ κύκλου ἐπὶ τοῦ χάρτου εἶναι 2,5 ἑκ., ἤτοι ἡ ἀκτίς του εἶναι 1,25 ἑκ. Τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι τὸ αδ (αβ = διάμετρος τοῦ κύκλου) καὶ ἴσον μὲ 3,5 ἑκ. Ὥστε ἡ πραγματικὴ ἀκτὶς εἶναι,

125 ἑκ. = 1,25 μ. καὶ τὸ ὕψος 350 ἑκ. = 3,50 μ.

Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου εἶναι

$$E = 2 \times 3,14 \times 1,25 \times 3,50 = 2,50 \times 3,14 \times 3,50 \text{ ἤτοι}$$

$$E = 7,85 \times 3,50 = 27,4750 \text{ τ.μ.}$$

Ὁ δὲ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου εἶναι,

$$\Theta = 3,14 \times 1,25^2 \times 3,50 = 3,14 \times 1,5625 \times 3,50 \text{ ἤτοι}$$

$$\Theta = 4,90625 \times 3,50 = 17,171875 \text{ κ.μ.}$$

413) Διὰ νὰ ἀπεικονίσωμεν μέγιστον κύκλον σφαίρας πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα του.

Κατόπιν τούτου, ἔστω Κ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ Λ τὸ κέντρον τοῦ μικροῦ κύκλου αὐτῆς, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του. Ὥστε ἡ ΚΛ (ἴση μὲ 12 μέτρα) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ μικροῦ κύκλου. Ἐὰν δὲ Μ εἶναι σημεῖον τῆς περιφερείας του (τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ σημεῖον τῆς σφαίρας) τὸ τρίγωνον ΚΛΜ εἶναι ὀρθογώνιον. Εἰς αὐτὸ δὲ ἡ μὲν ΛΜ εἶναι ἡ ἀκτὶς τοῦ μίκροῦ κύκλου, ἡ δὲ ΚΛ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ αὐτήν, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὴν ΛΜ. Θὰ τὴν εὕρωμεν ἐκ τοῦ μήκους τῆς περιφερείας 56,52 μ. Διότι εἶναι $2 \times 3,14 \times (\text{ΛΜ}) = 56,52$ ἤτοι $6,28 \times (\text{ΛΜ}) = 56,52$

$$\text{καὶ } (\text{ΛΜ}) = \frac{56,52}{6,28} = 9 \text{ μ.}$$

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΛΜ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ εἶναι (ΚΛ) = 12 μ. καὶ (ΛΜ) = 9 μ. Ὥστε ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ ΚΜ (ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας) εἶναι $(\text{ΚΜ}) = \sqrt{12^2 + 9^2}$

$$\text{ἤτοι } (\text{ΚΜ}) = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15 \text{ μ.}$$

Θὰ ἀπεικονίσωμεν λοιπὸν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας αὐτῆς, ἐὰν κατασκευάσωμεν κύκλον μὲ ἀκτῖνα 15 : 100 = 0,15 μ.

ΤΕΛΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΕΝ ΤΩι ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΩι ΣΧΟΛΕΙΩι ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ

1. ΜΕΘΟΔΟΙ ΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΠΡΟ-ΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ.—Περιέχει ὅλας τὰ Γεωμετρικὰς μεθόδους αἱ ὁποῖαι μὲ τὰς ὁδηγίας δι τὴν χρησιμοποίησιν αὐτῶν δίδουν εἰς τὸν μαθητὴ τὴν ἱκανότητα νὰ λύῃ μὲ εὐχέρειαν καὶ δυσκόλου ἀσκήσεις Ἐπιπεδομετρίας καὶ Στερεομετρίας.
2. ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Ἤ ΜΕΓΑΛΗ ΑΛΓΕΒΡΑ.— Πε-ριέχει ὅλην τὴν ὕλην τὴν ἀπαραίτητον εἰς τοὺς μαθ τὰς τῶν Γυμνασίων καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους διὰ τ ἀνωτέρας σχολάς.
3. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ.— Τὸ βιβλίον τοῦ συμπληροῖ τὴν ὕλην τῆς Ἀλγέβρας τοῦ Γυμνασί τοῦ ἰδίου συγγραφέως.
4. ΠΙΝΑΚΕΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΩΝ (νέα ἔκδοσις) τῶν ἀριθμ καὶ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων. Ἐκτ τούτων περιέχει καὶ 29 ἄλλους χρησίμους πίνακ καὶ μέγαν ἀριθμὸν τύπων ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, Ἀλ-βρας, Γεωμετρίας, Τριγωνομετρίας (ἐπιπέδου κ σφαιρικῆς) Μηχανικῆς, Φυσικῆς καὶ Κοσμογραφί Ἀκόμη δὲ περιέχει παραγώγους καὶ ἀρχικὰς συνα-τήσεις.