ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Θ΄ Γυμνασίου Ἀθηνῶν

ΛΥΣΕΙΣ

ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ

ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΕΛΛΗΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΕΙΩΝ ΚΑΙ ΑΣΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & ΣΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
50—Ὁδὸς Σταδίου—50

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουν τὴν σφραγῖδα τοῦ βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

ΤΥΠΟΙΣ ΠΑΡΑΣΚΕΥΑ ΛΕΩΝΗ

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΣΤΟΙΧ. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΝ

Ι. ΧΑΤΖΙΔΑΚΗ

Σελ. 13.—1.—α) Χιλίας μονάδας, ἑκατὸν δεκάδας, δέκα ἑκατοντάδας.

β) Δέκα χιλιάδας μονάδας, χιλίας δεκάδας, ἑκατὸν ἑκατοντάδας.

γ) Ἑκατὸν χιλιάδας μονάδας, δέκα χιλιάδας δεκάδας, χιλίας ἑκατοντάδας.

2.—α) Ἑκατὸν δεκάδραχμα, δέκα ἑκατοντάδραχμα.

β) Δέκα χιλιάδας δεκάδραχμα, χίλια ἑκατοντάδραχμα.

γ) Ἑκατὸν χιλιάδας δεκάδραχμα, δέκα χιλ. ἑκατοντάδραχμα.

3.—Ἑκατόν.

4.—α) 76, β) 454, γ) 608, δ) 2039, ε) 30017, στ) 800003, ζ) 7000103

5.—Πεντήκοντα ἐννέα, ὀκτακόσια πεντήκοντα, χίλια ἑξακόσια πεντήκοντα, δώδεκα χιλιάδες ἑκατὸν ἑπτά, τριάκοντα πέντε χιλιάδες ἕνδεκα, ὀγδοήκοντα χιλ. ἑπτά, πεντήκοντα χιλ. ὀκτακόσια, ὀκτακόσιαι χιλ. ἑκατὸν ἑπτά, χίλια ἕνα, ἑκατὸν χιλ. ἕνα, ἕνα ἑκατομμύριον δέκα χιλ. ἑκατὸν ἕνα, τρεῖς χιλ. πέντε, τριάκοντα χιλ. πέντε, τριακόσιαι χιλ. πέντε, τριακόσιαι χιλ. πεντήκοντα, τριακόσιαι χιλ. πεντακόσια, τριακόσια ἑκατομμ. πεντακόσιαι χιλ., τριακόσια πέντε ἑκατομ., ἓξ ἑκατομ. ἓξ χιλ. ἕξ, ἓξ ἑκατομ. ἑξήκοντα χιλ. ἑξήκοντα.

6.—α) 127, β) 1207, γ) 12007, δ') 30520, ε) 4000040.

7.—1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429.

8.—Ὁ 1252 ἔχει ἐν ὅλῳ 125 δεκάδας 12 ἑκατοντ. 1 χιλιάδ., ὁ 37206 ἔχει ἐν ὅλῳ 3720 δεκάδας 372 ἑκατ. 37 χιλ., ὁ 705040 ἔχει ἐν ὅλῳ 70504 δεκάδας 7050 ἑκατ. 705 χιλ. καὶ 7 ἑκατ. χιλ., ὁ 3604809 ἔχει ἐν ὅλῳ 360480 δεκάδας 36048 ἑκατ. 3604 χιλ. καὶ 36 ἑκατ. χιλ.

Σελ. 20—15.—1542, 13122, 190023, 717605, 2838379.

16.—Προσθέτομεν εἰς τὸν 1838 τὸν 75 καὶ εὑρίσκομεν ὅτι κατὰ τὸ ἔτος 1913 ἦτο 75 ἐτῶν.

17.—Προσθέτομεν τὰς 967 δρχ. εἰς τὰς 5075. Ἀπ. 6042.

18.—Προσθέτομεν εἰς τὰς 2115 δραχ. τὰς 892. Ἀπ. 3007.

19.—Εἰς τὰ 1270 ἔτη π. Χ. προσθέτομεν τὰ 1928 ἔτη μ. Χ. Ἀπ. 3198.

20.—Προσθέτομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, 1050, 822, 2500. Ἀπ. 4372.

21.—Προσθέτομεν τοὺς τρεῖς ἀριθμούς, 87540, 27765, 8780, Ἀπ. 124085.

22.—Προσθέτομεν τοὺς δεδομένους ἀριθμοὺς ἐν τῷ προβλήματι. Ἀπ. 8328.

23.—Προσθέτομεν χωριστὰ τοὺς ἀριθμοὺς 370, 725, 1095, 1810 καὶ χωριστὰ τοὺς 3320, 7975, 8760, 12670. Ἀπ. Ἐπώλησεν ὀκάδας 4000 καὶ εἰσέπραξε 32725 δραχ.

24.—Διὰ τὴν βαν δόσιν ἐπλήρωσε 1275+375 ἤτοι 1650 δρ. καὶ διὰ τὴν γην δόσιν ἐπλήρωσε 1650+680 ἤτοι 2330 δραχ. Ὥστε διὰ τὰς τρεῖς δόσεις ἐπλήρωσε 1275+1650+2330 ἤτοι 5255 δραχ.

25.—Οἱ πέντε ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 53482, 57489, 61496, 65503, 69510 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 307480.

26.—Οἱ ὀκτὼ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3969, 6675, 9381, 12087, 14793, 17499, 20205, 22911 καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 107520.

Σελ. 26. 32. — Ἀπ. 3198, 28727, 4068, 15956, 478386, 3582875, 876590, 1230748, 2104629, 4281893.

33. — 757+ 3708= 4465   98769+ 82442=181211.
23062+17479=40541   260368+194681=455049.
87308+ 8786=96094   698409+201991=900400.

34.—48712 — (3038 + 26406 + 9268)=48712—38712==10000.

35.—48201+(8300—7019)=48201+1281=49482

36.—1284—(918—662)=1284—256=1028.

37.—(219+528+311)—(737—329)=1058—408=650.

38.—(2112—946)+(4500—3321)=1166+1179=2345.

39.—Ἐκέρδισεν 8517 δρ.—7720 δρ. ἤτοι 797 δραχ.

40.—Ἐπλήρωσεν 63750 δρ.—14875 δρ. ἤτοι 48875 δρ.

41.—Ἐγεννήθη εἰς τὸ ἔτος (1879—85)=1794.

42.—Τὸ ἠγόρασεν ἀντὶ 9587 δραχ. αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἂν ἀπὸ τὰς 12075 δραχ. ἀφαιρέσωμεν τὰς 2488.

43.—Εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐκτελοῦντες τὴν ἀφαίρεσιν 1928—1453. Ἀπ. 475.

44.—Ἀπ. 1413 μ.—1110 μ.=303 μ.

45.—Προσθέτομεν πρῶτον τὰς 2148 ὀκ. καὶ 3679 ὀκ. καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 9645 ὀκ. Ὥστε ἔχομεν 2148 ὀκ.+3679 ὀκ.=5827 καὶ 9645 ὀκ.—5827 ὀκ.=3818 ὀκ.

46.—Ὁ ἄλλος ἐκέρδισεν 1932 δρ.—807 δρ.=1125 δραχ., ἐπὶ πλέον δὲ τοῦ πρώτου 1125 δρ.—807 δρ.=318 δρ.

47.—Ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς εἶναι ἡ διαφορὰ 1890—684 =1206· ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι ἡ 1206—684 =522

48.—Ἀπὸ τῆς 9ης π. μ. μέχρι τῆς μεσημβρίας μεσολαβοῦσι 3 ὧραι. Ὥστε τὸ ζητούμενον εἶναι τὸ ἄθροισμα 3 ὥρ.+11 ὥρ. =14 ὥρ.

49.—Ἀπὸ τῆς 2ας μ.μ. τῆς μιᾶς ἡμέρας μέχρι τῆς 2ας μ.μ. τῆς ἑπομένης εἶναι 24 ὧραι καὶ ἄλλαι 7 ὧραι μέχρι τῆς 9ης μ.μ. ἤτοι ἐν ὅλῳ 31 ὧραι.

50.—Ἐκ τῶν 1245 δραχ. ὁ χωρικὸς ἐπλήρωσε τὰς 1245—17 =1228 δραχ. Ἐπειδὴ ὅμως ἔμεινε καὶ χρεώστης 76 δραχ. ἔπεται, ὅτι ἠγόρασε πράγματα ἀξίας 1228 δρ.+76 δρ.=1304 δραχ.

51.—Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ ἀπὸ 14 ἔτ. 37 ἔτ. πρέπει νὰ περάσουν 23 ἔτη. Ὥστε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τότε 48+23=71 ἔτη.

52.—Ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι σήμερον 36+17=53 ἔτη. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ ὁ υἱὸς 40 ἐτῶν πρέπει νὰ παρέλθουν 40—17

=23 ἔτη. Ἄρα ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τότε 53+23 =76 ἔτη.

53.—Ἀφοῦ ἡ θυγάτηρ εἶναι 23 ἐτῶν, ὁ πατὴρ εἶναι 28+23=51 ἐτῶν καὶ προφανῶς ὁ υἱὸς 24 ἐτῶν.

54.—Εἰς τὴν δευτέραν τάξιν φοιτῶσι 27+14=41 μαθηταί. Ὥστε εἰς τὴν πρώτην φοιτῶσιν 120—(27+41)=120—68=52 μαθηταί.

55.—Αἱ δαπάναι τοῦ 2ου μηνὸς εἶναι 5764—325=5439 δρ. αἱ δὲ δαπάναι τοῦ 1ου καὶ 2ου μηνὸς εἶναι 5764+5439= 11203 δραχ. Ὥστε ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰς 11203 δραχ. ἀπὸ τὰς 15291 δραχ. εὑρίσκομεν τὰς δαπάνας τοῦ τρίτου μηνὸς αἱ ὁποῖαι εἶναι 4088 δραχ.

56.—Προσθέτομεν χωριστὰ τὰ κέρδη 102500 δρ., 145850 δρ. 69200 δραχ. καὶ εὑρίσκομεν 317550 δραχ. καὶ χωριστὰ τὰς δαπάνας 72000, 80500 δρ. 73000, αἱ ὁποῖαι ἐν ὅλῳ ἀνέρχονται εἰς 225500 δραχ. Ἀλλ᾿ ἐπειδὴ τὰ κέρδη εἶναι περισσότερα τῶν δαπανῶν, ηὐξήθησαν τὰ κεφάλαια τοῦ ἐμπόρου κατὰ 317550— 225500=92050 δραχμάς. Ἄρα ἔγειναν τὰ κεφάλαια 398000+ 92050=490050 δρ.

57.—Ἀφοῦ πέρυσιν αἱ ἡλικίαι τῶν τεσσάρων ὁμοῦ ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 127, ἐφέτος ἤτοι μετὰ ἓν ἔτος, αἱ ἡλικίαι αὐτῶν ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 127+4=131. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἡλικίαι τῆς μητρὸς καὶ τῶν δύο τέκνων ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸν 72, ἂν ἀφαιρέσωμεν αὐτὸν (δηλ. τὸν 72) ἀπὸ τὸν 131 εὑρίσκομεν τὴν ἡλικίαν τοῦ πατρός· ἤτοι 131—72=59.

58.—Ἡ γυνὴ εἶναι τώρα 62 ἐτῶν καὶ χήρα πρὸ 3 ἐτῶν. Ὥστε ὅταν ἀπέθανεν ὁ σύζυγός της, ἦτο αὕτη 59 ἐτῶν (62—3). Ἐπειδὴ δὲ ὅταν ἐνυμφεύθη ἦτο 20 ἐτῶν, ἕπεται ὅτι ἀπὸ τοῦ γάμου της μέχρι τοῦ θανάτου τοῦ συζύγου της, παρῆλθον 39 ἔτη (59—20). Ὥστε ὁ σύζυγος ὁ ὁποῖος ἐνυμφεύθη εἰς ἡλικίαν 30 ἐτῶν, ἀπέθανεν εἰς τὴν ἡλικίαν τῶν 69 ἐτῶν (30+39).

Σελ. 38—62.—Ἀπ. 123168, 372957, 142480, 305640, 167485, 1333696, 19145700, 11026346, 8321105, 190524005.

Σελ. 42—63.—

Ἀπ. $3\times5\times7=15\times7=105$ $\quad 4\times25\times30=100\times30=3000$

$6\times8\times2=48\times2=96$ $\quad 4\times29\times25=100\times29=2900$

$5\times4\times12=20\times12=240$ $\quad 50\times78\times2=100\times78=7800$

$8\times4\times30=32\times30=960$ $\quad 50\times49\times4=200\times49=9800$

$5\times8\times9\times10=40\times90=3600$ $\quad 4\times21\times125=500\times21=10500$

64.— $5\times7\times9\times13=35\times9\times13=315\times13=4095$

$13\times17\times55\times46=221\times55\times46=12155\times46=559130$

$38\times4\times77\times8=152\times616=93632$

$8\times7\times4\times30\times5\times2=224\times300=67200$

$50\times25\times19\times2\times10=50\times50\times190=2500\times190=475000$

$101\times21\times37\times4\times15=101\times777\times60=6060\times777=4708620$

65.— $41\times11=410+41=451$

$75\times11=750+75=825$

$3212\times11=32120+3212=35332$

$2140\times12=21400+4280=25680$

$4245\times12=42450+8490=50940$

$28\times101=2800+28=2828$

$93\times101=9300+93=9393$

$150\times101=15000+150=15150$

$1170\times102=117000+2340=119340$

$2489\times102=248900+4978=253878$

66.— $31\times9=310-31=279$

$43\times99=4300-43=4257$

$5125\times9=51250-5125=46125$

$7018\times9=70180-7018=63162$

$719\times99=71900-719=71181$

$872\times99=87200-872=86328$

$460\times98=46000-920=45080$

$223\times999=223000-223=222777$

$1037\times999=1037000-1037=1035963$

$6208\times999=6208000-6208=6201792$

$520\times998=520000-1040=518960$

$2490\times998=2490000-4980=2485020$

7.—$57+24\times3=57+72=129$

$98+19\times4=98+76=174$

$9\times23+76=207+76=283$

$11\times92+147=1012+147=1159$

$15\times74+205=1110+205=1315$

$13\times7+25\times7=91+175=266=(13+25)\times7=38\times7$

$81\times4+95\times4=324+380=704=(81+95)\times4=176\times4$

$9\times8+15\times8+24\times8=72+120+192=384=(9+15+24)\times8=48\times8$

$43+20\times11+35\times11=43+220+385=648=43+(20+35)\times11=$
$=43+55\times11$

$101+17\times15+51\times15=101+255+765=1121=101+(17+51)\times15=$
$=101+68\times15$

68.— $10^2=100$, $10^3=1000$, $10^4=10000$, $10^5=100000$, $10^6=1000000$, $10^7=10000000$, $10^8=100000000$.

69.—$13^2=13\times13=169$, $14^2=196$, $15^2=225$, $16^2=256$, $17^2=289$, $18^2=324$, $19^2=361$, $20^2=400$.

70.—$1^3=1\times1\times1=1$, $2^3=2\times2\times2=8$, $3^3=27$, $4^3=64$, $5^3=125$, $6^3=216$, $7^3=343$, $8^3=512$, $9^3=729$, $10^3=1000$.

71.—$2^3\times2^4\times3^2\times3^3=2^7\times3^5=128\times243=31104$.

Σελ. 43—72.—Ἀφοῦ ἡ 1 ἑβδομὰς ἔχει 7 ἡμέρας πολλαπλασιάζομεν τὰς 7 ἡμ. ἐπὶ 18. Ἀπ. 7 ἡμ.×18=126 ἡμ.

73.—Ἡ 1 δραχμὴ ἔχει 100 λεπτά. Ὥστε αἱ 72 δραχμαὶ ἔχουσι 100 λ.×72=7200 λεπτά. Ἐκ τούτου βλέπω, ὅτι διὰ νὰ τρέψω τὰς δραχμὰς εἰς λεπτά, γράφω εἰς τὸ τέλος δύο μηδενικά.

74.—Κάμνουσι 375 δρ.×82=30750 δραχ.

75.—Ἀφοῦ τὸ 1 ἔτος ἔχει 12 μῆνας, τὰ 18 ἔτη ἔχουσι 12 μ.×18=216 μ.

76.—Εἰς 20 μέρη (5×4).

77.—Ἀφοῦ ὁ 1 ἄνθρωπος ἔλαβεν 850 δραχ., οἱ 15 ἄνθρωπ. ἔλαβον 850 δρ.×15=12750 δρ.

78.—Θὰ ἐργασθῇ 8 ὥρ.×175=1400 ὧραι.

79.—Χωροῦν 1125 ὀκ.×16=18000 ὀκ..

80.—Ἀφοῦ εἰς 1″ ὁ ἦχος διατρέχει 340 μ., εἰς 12″, διατρέχει 340 μ.×12 ἤτοι 4080 μέτρα ἦτο μακρὰν τὸ σύννεφον.

81.—Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζουν αἱ 725 ὀκ. καὶ ἀπὸ τὴν ἀξίαν αὐτῶν, ἀφαιροῦμεν τὰς πληρωθείσας 2585 δρ. Ὥστε ἔχομεν 5 δρ.$\times$725=3625 δραχ. ἀξίαν ὀκάδων καὶ 3625 δρ.—2585 δρ.=1040 δραχ. ὑπόλοιπον ποὺ χρεωστεῖ.

82.—Εἰς τὸν κάθε σάκκον κερδίζει 320 δρ.—240 δρ.=80 δραχ. Ὥστε εἰς τοὺς 70 σάκκους κερδίζει 80 δρ.$\times$70=5600 δρ.

83.—Αἱ 6252 ὀκ. ἀξίζουν 25 δρ.$\times$6252=156300 δρ. Εἰσέπραξε δὲ ἀπὸ μὲν τὰς 5480 ὀκ., 30 δρ.$\times$5480=164400 δραχ. καὶ ἀπὸ τὰς ὑπολοίπους 772 ὀκ. (6252—5480), 28 δρ.$\times$772=21616 δραχ. ἤτοι εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ ἀπὸ τὴν πώλησιν, 164400 δραχ.+21616 δραχ.=186016 δραχμαί· ἄρα ἐκέρδισεν 186016 δρ.—156300 δρ.=29716 δραχ.

Τὸ πρόβλημα τοῦτο ἠμπορεῖ νὰ λυθῇ καὶ ὡς ἑξῆς: Τὴν πρώτην φορὰν ἐπώλησε 5480 ὀκ. καὶ ἐκέρδισεν ἀπὸ κάθε ὀκᾶν 5 δραχ. ἤτοι ἐκέρδισεν ἀπὸ αὐτὰς (5$\times$5480) 27400 δραχ. Τὴν δευτέραν φορὰν ἐπώλησεν 772 ὀκ. καὶ ἐκέρδισεν ἀπὸ κάθε μίαν 3 δραχ. Ὥστε ἀπὸ αὐτὰς ἐκέρδισε (3$\times$772) 2316 δρ. Ἤτοι ἐν ὅλῳ ἐκέρδισε δρ. 27400+2316=29716.

84.—Ἀπὸ τὰ 12, τὰ ὁποῖα ἀπέθανον, ἔχασεν 220 δρ.$\times$12=2640 δραχ. Ἀπὸ τὰ 116 (128—12), τὰ ὁποῖα ἐπώλησεν, ἐκέρδισεν εἰς τὸ καθὲν 50 δραχ.· ὥστε διὰ τὰ 116 ἐκέρδισε 50 δρ.$\times$116=5800 δρ. ἑπομένως τὸ κέρδος του εἶναι 5800 δραχ.—2640 δρ.=3160 δραχ.

85.—Εἰς τοὺς γονεῖς του καὶ τὴν ἀδελφήν του στέλλει κατὰ μῆνα 200 δρ.+150 δρ.=350 δρ. ὥστε κατὰ μῆνα τοῦ μένουν 480 δραχ.—350 δραχ.=130 δραχ. καὶ ὅλον τὸ ἔτος τοῦ μένουν 130 δρ.$\times$12=1560 δρ.

86.—Μετὰ 30 ἔτη αἱ ἡλικίαι τῶν πέντε ἀνθρώπων ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 98+30$\times$5=98+150=248. Ὥστε ἂν ἀφαιρέσωμεν τὸν ἀριθμὸν 165, τὸν ὁποῖον ἀπετέλουν αἱ ἡλικίαι τῶν ἄλλων τεσσάρων, ἀπὸ τὸν 248 εὑρίσκομεν τὴν ἡλικίαν ποὺ εἶχεν ὁ πατήρ, ὅταν ἀπέθανεν.

87.—Ὅλος ὁ οἶνος ἐστοίχισε 13 δρ.$\times$238+11 δρ.$\times$386=3094 δρ.+4246 δρ.=7340 δρ.

88.—Ἀφοῦ ἑκάστη σελὶς ἔχει 35 στίχους, τὸ βιβλίον ἔχει ἐν ὅλῳ στίχους 35$\times$120 (4200)· καὶ ἐπειδὴ ἕκαστος στίχος ἔχει 40 γράμματα, οἱ 35$\times$120 στίχοι ἔχουσι γράμματα 40$\times$35$\times$120=168000.

89.—Ἔχουσι δράμια $400 \times 44 \times 8 = 140800$.

90.—Οἱ 8 στατῆρες ἔχουσιν ὀκ. 44×8 καὶ μὲ 50 δραχ. τὴν ὀκᾶν ἀξίζουν 50 δρ.$\times 44 \times 8 = 17600$ δρ. καὶ μὲ 10 δρ. τὴν ὀκᾶν ἀξίζουν 10 δρ.$\times 44 \times 8 = 3520$ δρ.

91.—Ὁ ἄνθρωπος αὐτὸς ἔζησεν ἡμέρας $365 \times 80 + 20$ (διότι 20 δίσεκτα ἔτη ὑπάρχουν εἰς 80 ἔτη) ἢ 29220 ἡμ. ὥστε ἔζησεν ὥρας 24×29220 ἢ 701280.

92.—Εἰς 30 ἡμ. κάμνει ταξείδια $8 \times 30 (= 240)$· ὥστε ἄτομα μεταφέρει εἰς τὰς ἡμέρας αὐτὰς $16 \times 8 \times 30 = 3840$.

93.—Ἡ 1 ὥρα ἔχει 60′, ὥστε αἱ 5 ὧραι ἔχουσι $60' \times 5$ $(= 300')$· τὸ 1′ ἔχει 60″, ὥστε τὰ $60' \times 5 (= 300')$ ἔχουσι $60'' \times 60 \times 5 (= 18000'')$· ἐπομένως ἀφοῦ ἡ ἀτμάμαξα διατρέχει 10 μ. εἰς 1″, εἰς τὰ $60'' \times 60 \times 5 (= 18000'')$ θὰ διατρέξει 10 μ.$\times 60 \times 60 \times 5 = 180000$ μέτρα.

94.—Ἔδωκε διὰ τὴν ἀγορὰν 128 δρ.$\times 20 = 2560$ δραχμάς. Εἰσέπραξε δὲ ἀπὸ τὴν πώλησιν τῶν $12 \times 20 (= 240)$ μανδυλίων δραχμὰς $12 \times 12 \times 20 = 2880$. Ὥστε ἐκέρδισε 2880 δρ.$- 2560$ $= 320$ δραχ.

95.—Ἔχει ἐν ὅλῳ δραχμὰς $1000 \times 18 + 5000 \times 9 + 500 \times 24 + 100 \times 115 + 25 \times 208 + 50 \times 121 = 18000 + 45000 + 12000 + 11500 + 5200 + 6050 = 97750$.

Σελ. 66. 105.—Ἀπ. 1037, 907, 75, 84 καὶ ὑπ. 20, πηλ. 205, 8, 9, 16 καὶ ὑπόλ. 14419, 543 καὶ ὑπόλ. 12111, 24 καὶ ὑπόλ. 150000.

Σελ. 67—106.—Ἀπ. Εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 1411 διὰ τοῦ 83 ἤτοι ὁ 17.

107.—Ἀπ. Ὁ ἄλλος εἶναι τὸ πηλ. τῆς διαιρέσεως τοῦ 48118 διὰ τοῦ 491 ἤτοι ὁ 98.

108.—Ἀπ. Εἰς μίαν ὥραν διέτρεξε 162 χιλ. : $18 = 9$ χιλ.

109.—Ἀπ. Ὁ καθεὶς ἐργάτης ἔλαβε 22715 δραχ. : $59 = 385$ δραχμάς.

110.—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον διαιροῦμεν τὰ 78955 λεπτ. διὰ τοῦ 100 καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι κάμνουν τὰ 78955 λεπτ. 789 δραχ. καὶ περισσεύουν 55 λεπτ. Ὥστε διὰ νὰ τρέψω λεπτὰ εἰς δραχμὰς (ὅταν εἶναι περισσότερα ἀπὸ 100) χωρίζω τὰ δύο τελευταῖα ψηφία· ὁ ἀριθμὸς τὸν ὁποῖον τὰ ἄλλα σχηματίζουσιν· εἶναι δραχμαί.

111.—Διαιροῦμεν τὸν 97870 διὰ τοῦ 400 διότι μία ὀκᾶ ἔχει 400 δραμ. καὶ εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ δοθέντα δράμια κάμνουν 244 ὀκ. καὶ περισσεύουν καὶ 270 δραμ.

112.—Διαιροῦμεν τὸν 18000 δραχ. διὰ 12 καὶ ἔχομεν 18000 δρ. : 12=1500 δραχ.

113.—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 879 εἰς τὸν 24612, εἰς τόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἡ δεξαμενὴ ἤτοι εἰς 24612 : 879=28 ὥρας.

114.—Τὸ πρῶτον διανύει (90 μιλ. : 8) 11 μίλια καὶ ὀλίγον τι εἰς κάθε ὥραν, ἐνῷ τὸ δεύτερον δὲν διανύει (250 μ. : 28) οὔτε 9 μίλια. Ὥστε ταχύτερον εἶναι τὸ πρῶτον.

115.—Ἐκ τῆς πωλήσεως τοῦ ἐλαίου θὰ λάβῃ 37 δρ.×167 =6179 δραχ. (διότι ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει 37 δραχ.)· ἐπειδὴ δὲ μὲ τὰς 6179 δραχ. θέλει νὰ ἀγοράσῃ σῖτον πρὸς 5 δραχ. ἡ ὀκᾶ, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 5 εἰς τὸν 1679, τόσας ὀκάδας θὰ ἀγοράσῃ· ἤτοι 1235 ὀκ. καὶ θὰ τοῦ μείνουν καὶ 4 δραχ.

116.—Τὸ ὅλον κέρδος τοῦ ἐμπόρου εἶναι 3570 δρ.—2975 δρ.=595 δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ κέρδος εἰς ἕνα πῆχυν εἶναι 7 δρ. ὅσας φορὰς ὁ 7 χωρεῖ εἰς τὸν 595 τόσους πήχεις ἠγόρασεν· ἤτοι 595 : 7=85 πήχ.

117.—Ὁ ὑπάλληλος οἰκονομεῖ κατὰ μῆνα 4680—3540 δρ. =1140· ὥστε εἰς μίαν ἡμέραν οἰκονομεῖ 1140 δρ. : 30=38 δρ.

117.—Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἀναχωρεῖ ὁ ἱππεὺς ἀπέχει ἀπὸ τοῦ πεζοῦ 120 χιλ. (διότι ὁ πεζὸς διατρέχει εἰς 20 ὥρας, 6 χιλ. ×20=120 χιλ.)· ἀφοῦ δὲ ἀναχωρήσῃ, κάθε ὥραν πλησιάζει τὸν πεζὸν κατὰ 4 χιλ. ὥστε ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 4 εἰς τὸν 120, τόσαι ὧραι χρειάζονται· ἤτοι 120 : 4=30 ὧραι.

118.—Οἱ 8 σάκκοι ἠγοράσθησαν ἀντὶ 1440 δραχ.—120 δρ. =1320 δραχ. Ὥστε ὁ εἷς σάκκος ἠγοράσθη ἀντὶ 1320 δρ. : 8 =165 δραχ.

119.—Αἱ 15 ὀκάδ. βούτυρον ἀξίζουν 85 δραχ.×15=1275 δραχ. ὥστε ἂν ἀπὸ τὰς 4223 δραχ. ἀφαιρέσωμεν τὰς 1275 δραχ. ἤτοι τὴν ἀξίαν τοῦ βουτύρου θὰ μᾶς μείνῃ ἡ ἀξία τοῦ ὅλου ἐλαίου· δηλ. ἡ ἀξία 67 ὀκ. ἐλαίου εἶναι 4223 δρ.—1275 δρ.=

2948 δραχ. καὶ ἡ ἀξία τῆς 1 ὀκ. ἐλαίου εἶναι 2948 δρ. : 67=44 δραχμαί.

120.—Κατὰ τὰς 3 πρώτας ὥρας ἡ ἁμαξοστοιχία διέτρεξε 29 χιλ.×3=87 χιλ.· ὥστε εἰς τὰς ὑπολοίπους 6 ὥρας διέτρεξε 309 χιλ.—87 χιλ.=222 χιλ.· ἄρα εἰς κάθε ὥραν ἀπὸ αὐτὰς ἔτρεχε 222 χιλ. : 6=37 χιλ.

121.—Ἐκ τῶν 14 ἀνθρώπων ἔλαβεν ὁ καθεὶς 2100 δρ. : 14 =150 δραχ. Ἐπειδὴ δὲ ὅλοι ἔλαβον τὸ αὐτὸ ποσὸν δραχμῶν ἕπεται ὅτι οἱ ἄλλοι 4 (18—14=4) ἔλαβον 150 δραχ.×4=600 δραχ. ὥστε τὰ μοιρασθέντα χρήματα ἦσαν 2100 δραχ.+600 δραχ.=2700 δραχ. καὶ ὁ καθεὶς ἔλαβεν 150 δραχ.

122.—Ἐπειδὴ θέλει νὰ κερδίσῃ 12000 δραχμὰς ἀπὸ τὰ 240 πρόβατα πρέπει νὰ κερδίσῃ ἀπὸ τὸ καθὲν 12000 δρ. : 240=50 δραχ. ἤτοι πρέπει νὰ πωλῇ τὸ καθὲν πρὸς 280 δραχ.+50 δραχ. =330 δραχ.

123.—Ἀπὸ τὰς 26000 δραχμὰς ἐξόφλησε μὲ πρόβατα 26000 δραχ.—7300 δραχ.=18700 δραχ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ καθὲν πρόβατον ἤξιζε 275 δραχμὰς ἕπεται ὅτι ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 275 εἰς τὸν 18700, τόσα πρόβατα ἔδωκε· ἤτοι 18700 : 275=68 πρόβατα.

124.—Ἀφοῦ ὁ ὑπάλληλος οὗτος οἰκονομεῖ εἰς ἓν ἔτος ἤτοι εἰς 365 ἡμέρας 4380 δραχμὰς εἰς μίαν ἡμέραν οἰκονομεῖ 4380 δραχ. : 365=12 δραχμάς. Ἄρα ὁ μισθὸς τῆς μιᾶς ἡμέρας εἶναι 68 δραχ.+12 δραχ.=80 δρ. καὶ τοῦ ἑνὸς μηνὸς εἶναι 80 δρ.× 30=2400 δραχ.

125.—Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο τὸ ἡμερομίσθιον τοῦ ἐργάτου νὰ διορθωθῇ εἰς 49 δραχμάς. Λύομεν δὲ αὐτὸ ὡς ἑξῆς. Εἰς μίαν ἑβδομάδα λαμβάνει ἀπὸ τὰ ἡμερομίσθιά του 49 δρ.×6= 294 δραχμάς, ἐξοδεύει δὲ 32 δραχ.×7=224 δραχ. ὥστε εἰς μίαν ἑβδομάδα οἰκονομεῖ 294 δραχ.—224 δραχ.=70 δραχ. καὶ εἰς μίαν ἡμέραν 10 δραχ. ἄρα διὰ νὰ οἰκονομήσῃ 1350 δραχ. πρέπει νὰ περάσουν 1350 : 10=135 ἡμέραι.

126.—Εἰς τὰς 365 ἡμέρας τοῦ ἔτους ἐξώδευσε 39 δρ.×365 =14235 δραχ. καὶ τοῦ ἐπερίσσευσαν 2085 δραχμαί· λοιπὸν καθ' ὅλον τὸ ἔτος εἰσέπραξε 14235 δραχ.+2085 δραχ.=16320 δραχ. καὶ ἐπειδὴ ἐργάζεται μίαν ἡμέραν διὰ νὰ λάβῃ 60 δραχ., διὰ νὰ λάβῃ τὰς 16320 δραχ., πρέπει νὰ εἰργάσθῃ τόσας ἡμέρας ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 60 εἰς τὸν 16320 ἤτοι 272 ἡμέρας, ἑπομένως ἄεργος ἔμεινε 365—272=93 ἡμέρας εἰς τὸ διάστημα ἑνὸς ἔτους.

127.—Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσας ὀκάδας ἠγόρασε μὲ τὰς 18288 δραχ. πρὸς 9 δραχ. τὴν μίαν ὀκᾶν. Εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἠγόρασε 18288 : 9=2032 ὀκ. Μετήγγισε δὲ τὸν οἶνον τοῦτον εἰς τόσα βαρέλια, ὅσας φορὰς εὑρίσκομεν ὅτι χωρεῖ ὁ 127 εἰς τὸν 2032 ἤτοι εἰς (2032 : 127=) 16 βαρέλια.

Εὑρίσκομεν τὸ ζητούμενον ἐργαζόμενοι καὶ ὡς ἑξῆς: ἡ ἀξία τοῦ οἴνου ποὺ περιέχεται εἰς ἓν βαρέλιον εἶναι 9 δρ.×127=1143 δραχ. ὅσας δὲ φορὰς χωρεῖ ὁ 1143 εἰς τὸν 18288 τόσα εἶναι τὰ βαρέλια εἰς τὰ ὁποῖα θὰ μεταγγισθῇ ὁ ἀγορασθεὶς οἶνος ἤτοι 18288 : 1143=16 βαρέλια.

128.—Οἱ 19 πήχ. τῆς πρώτης ποιότητος ἀξίζουν 87 δραχ. ×19=1653 δραχ. οἱ δὲ 28 πήχ. τῆς δευτέρας ἀξίζουν 78 δραχ. ×28=2184 δραχ.· οἱ πήχεις ἄρα τῶν δύο πρώτων ποιοτήτων ἀξίζουν 1653 δραχ.+2184 δραχ.=3837 δραχ. Ὥστε ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰς 3837 δραχ. ἀπὸ τὰς 5349 δραχ. εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 24 πήχεων τῆς τρίτης ποιότητος ἤτοι 5349 δραχ.—3837 δραχ.=1512 δραχ. Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ 24 πήχεις τῆς τρίτης ποιότητος τιμῶνται 1512 δραχ., ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται 1512 δρ. : 24 =63 δραχ.

129.—Διὰ νὰ φθάσῃ ὁ ἄνθρωπος οὗτος εἰς τὸν ἀριθμὸν 1000000000 πρέπει νὰ παρέλθουν 1000000000″. Ἐπειδὴ δὲ 60″ κάμνουσι 1′, τὸ πηλίκον τοῦ 1000000000 διὰ τοῦ 60 θὰ μᾶς δώσῃ τὸν ἀριθμὸν τῶν πρώτων λεπτῶν εἰς ὃν τρέπεται ὁ εὑρεθεὶς ἀριθμὸς τῶν δευτέρων λεπτῶν· θὰ παρέλθουν δὲ 16666666′ καὶ 40″· ἐπειδὴ δὲ 60′ κάμνουν 1 ὥραν διαιροῦντες τὸν 16666666 διὰ τοῦ 60, εὑρίσκομεν τὸν χρόνον ποὺ παρέρχεται εἰς ὥρας αἱ ὁποῖαι ἀνέρχονται εἰς 277777 (καὶ 46′)· ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν ὡρῶν διαιρούμενος δι' 24 θὰ μᾶς δώσῃ τὸν χρόνον εἰς ἡμέρας ἤτοι 11574 ἡμ. (καὶ 1 ὥραν)· ὥστε θὰ παρέλθουν 11574 ἡμ. 1 ὥρ. 46′ καὶ 40″ ἢ περίπου 31 ἔτη.

130.—Ἂν ὅλοι οἱ πήχεις ἦσαν βαμβακεροὶ θὰ ἐλάμβανε 50 δρ.×48=2400 δραχ. Ἀλλὰ ἔλαβε 3000 δραχ. ἤτοι 600 δραχμὰς περιπλέον· αὗται ὅμως προέρχονται ἀπὸ τὸ μάλλινον ὕφασμα· καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ κάθε πῆχυν μαλλίνου ὑφάσματος λαμβάνει περιπλέον 100 δραχ.—50 δραχ.=50 δραχ., διὰ νὰ λάβῃ τὰς 600 δρ. περιπλέον, πρέπει νὰ πωλήσῃ τόσους πήχεις μαλλίνου ὑφάσματος, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 600 τὸν 50· ἤτοι 12· ὥστε οἱ μὲν πήχεις τοῦ μαλλίνου ὑφάσματος εἶναι 12, οἱ δὲ τοῦ βαμβακεροῦ 48—12=36.

Σελ.74—131.—Οἱ 298 καὶ 3262 εἶναι διαιρετοὶ μόνον διὰ τοῦ 2 ἐκ τῶν δεδομένων, οἱ 25700 καὶ 16000 εἶναι διαιρετοὶ δι' ὅλων, ὁ 140 διὰ τῶν 2, 5 καὶ 10, ὁ 10425 διὰ τοῦ 5 καὶ ὁ 453 μὲ κανένα.

132.—Οἱ 608, 1400, 10392 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4
» 975, 1400, 18250 » » » 25

133.—Οἱ 891, 6273, 8604, 16326, 315783 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 3 καὶ 9, ὁ δὲ 206007 εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 μόνον.

134.—Διὰ 12 καὶ δι' 6 εἶναι διαιρετοὶ οἱ 3072, 7500, 12096, 7008· ὁ δὲ 6162 εἶναι διαιρετὸς δι' 6 μόνον.

Σελ. 78—136.—Ἀπ. α) 2, β) 12, γ) 84, δ) 19, ε) 256, στ) 3, ζ) 43, η) 2453, θ') 940, ι) 101.

137.—Ἀπ. α) 87, β) 36, γ) 10, δ) 5, ε) 300, στ) 100.

138.—Ἀπ. α) 42, β) 105, γ) 78, δ) 60, ε) 90, στ) 120, ζ) 504.

Σελ.82—139.—Ἐλάβομεν τὸ $\frac{1}{15}$ τοῦ ὅλου οἴνου.

140.—Θὰ λάβωμεν τὰ $\frac{4}{9}$ τῆς μονάδος.

141.—Ἀπ. $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{12}{60}$. $\frac{39}{125}$, $\frac{11}{600}$, $\frac{3}{1000}$, $\frac{105}{1029}$.

142.—Ἀπ. Διὰ τῆς διαιρέσεως τῆς μονάδος εἰς τόσα ἴσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ παρονομαστὴς ἑκάστου κλάσματος ἀπὸ τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν τόσα μέρη, ὅσα δεικνύει ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ·

143.—Ἀπ. Οἱ 7 ἐκ τῶν καλλιεργητῶν ἔλαβον τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ὅλου κτήματος.

144.—Τὸ 1 λεπτὸν εἶναι τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς, τὰ 5 εἶναι τὰ $\frac{5}{100}$, τὰ 20 εἶναι τὰ $\frac{20}{100}$, τὰ 50 εἶναι τὰ $\frac{50}{100}$ καὶ τὰ 85 εἶναι τὰ $\frac{85}{100}$ τῆς δραχμῆς.

145.—Ἡ 1 ὥρα εἶναι τὸ $\frac{1}{24}$ τοῦ ἡμερονυκτίου καὶ αἱ 7 ὧραι εἶναι τὰ $\frac{7}{24}$ αὐτοῦ.

146.—Ἡ 1 ἡμέρα εἶναι τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ἑβδομάδος, καὶ αἱ 3, τὰ $\frac{3}{7}$ αὐτῆς.

147.—Ὁ 1 μὴν εἶναι τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους, καὶ οἱ 5, τὰ $\frac{5}{12}$ αὐτοῦ.

148.—Αἱ 15 ὀκάδες εἶναι τὰ $\frac{15}{44}$ τοῦ στατῆρος, καὶ τὰ 90 δράμια εἶναι τὰ $\frac{90}{400}$ τῆς ὀκᾶς.

149.—Τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι τὰ $\frac{7}{8}$ τῆς δραχμῆς.

150.—Τὸ μερίδιον ἑκάστου εἶναι τὰ $\frac{25}{8}$ τοῦ πήχεως ἢ $3\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως.

151.—Τὰ ἀκριβῆ πηλίκα τῶν διαιρέσεων εἶναι $\frac{3}{7}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{21}{3}$ ἢ 7, $\frac{42}{5}$ ἢ $8\frac{2}{5}$, $\frac{65}{12}$ ἢ $5\frac{5}{12}$, $\frac{120}{9}$ ἢ $13\frac{3}{9}$.

152.—Τὸ $\frac{7}{9}$ σημαίνει ἢ ὅτι ἡ 1 ἀκεραία μονὰς διῃρέθη εἰς 9 ἴσα μέρη ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἐλάβομεν τὰ 7 ἢ ὡς παριστὸν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 δι' 9 δεικνύει τὸ ἔνατον μέρος τοῦ 7.

Σελ. 86—153.—Μικρότερα τῆς ἀκεραίας μονάδος εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{106}{160}$, $\frac{8003}{8998}$, ἴσα πρὸς αὐτὴν εἶναι τὰ $\frac{4}{4}$, $\frac{17}{17}$, $\frac{545}{545}$ καὶ μεγαλύτερα αὐτῆς τὰ $\frac{6}{5}$, $\frac{32}{31}$.

154.—Ὁ ἀκέραιος 9 τρέπεται εἰς $\frac{45}{5}$, εἰς $\frac{81}{9}$ ἢ εἰς $\frac{108}{12}$.

155.—Ὁ ἀκέραιος 18 τρέπεται εἰς $\frac{270}{15}$, ὁ 25 εἰς $\frac{525}{21}$ καὶ ὁ 198 εἰς $\frac{7326}{37}$.

156.—5 πηχ.$=\frac{40}{8}$ π., 2 ὥρ.$=\frac{120}{60}$ ὥρ., 6 ὀκ.$=\frac{2400}{400}$ ὀκ.

157.—$3\frac{3}{8}=\frac{27}{8}$, $6\frac{4}{9}=\frac{58}{9}$, $5\frac{7}{12}=\frac{67}{12}$, $18\frac{8}{15}=\frac{278}{15}$, $68\frac{9}{20}=$ $=\frac{1369}{}$, $99\frac{85}{97}=\frac{9688}{97}$, $13\frac{767}{1003}=\frac{13806}{1003}$, $1508\frac{15}{26}=\frac{39223}{26}$, $36\frac{40}{54}$ $=\frac{1984}{54}$, $351\frac{44}{55}=\frac{15839}{45}$, $1041\frac{1037}{2143}=\frac{2231900}{2143}$.

158.—Οἱ $15\frac{9}{8}$ πηχ. ἀποτελοῦνται ἀπὸ 129 ὄγδοα, αἱ $9\frac{3}{4}$ ὧραι ἀπὸ 39 τέταρτα καὶ αἱ $23\frac{350}{400}$ ἀπὸ 9550 τετρακοσιοστά.

159.—$\frac{21}{7}=3$, $\frac{72}{9}=8$, $\frac{81}{27}=3$, $\frac{240}{12}=20$, $\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}$, $\frac{19}{8}$ $=2\frac{3}{8}$, $\frac{75}{6}=12\frac{3}{6}$, $\frac{89}{5}=17\frac{4}{5}$, $\frac{123}{8}=15\frac{3}{8}$.

160.—$\frac{631}{9}=70\frac{1}{9}$, $\frac{916}{7}=130\frac{6}{7}$, $\frac{497}{40}=12\frac{17}{40}$, $\frac{819}{13}=63$, $\frac{5400}{25}=216$, $\frac{10000}{35}=285\frac{25}{35}$, $\frac{37009}{522}=70\frac{469}{522}$, $\frac{199415}{1080}=184\frac{695}{1080}$.

Σελ.90—161.—$\frac{2}{64}$, $\frac{13}{64}$, $\frac{17}{64}$, $\frac{25}{64}$, $\frac{31}{64}$, $\frac{39}{64}$, $\frac{45}{64}$, $\frac{51}{64}$.

162.—$\frac{108}{120}$, $\frac{108}{130}$, $\frac{108}{184}$, $\frac{108}{196}$, $\frac{108}{260}$.

163.—Διπλασιάζομεν, τριπλασιάζομεν κ.τ.λ. τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου κλάσματος, ἢ διαιροῦμεν διὰ 2, 3, 4, κ.τ.λ. τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ, ἐὰν διαιρεῖται.

164—Διαιροῦμεν διὰ 2, 3, 4, κ.τ.λ. τὸν ἀριθμητὴν ἑκάστου κλάσματος ἐὰν διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζομεν τὸν παρονομαστὴν αὐτοῦ ἐπὶ 2, 3, 4, κ.τ.λ.

165.—$\frac{5}{6}=\frac{25}{30}$, $\frac{4}{9}=\frac{16}{36}$, $\frac{19}{24}=\frac{95}{120}$, $\frac{7}{8}=\frac{21}{24}$, $\frac{2}{9}=\frac{14}{63}$, $\frac{3}{4}=\frac{144}{192}$.

166.—$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$, $\frac{9}{11}=\frac{45}{55}$, $\frac{19}{24}=\frac{95}{120}$, $\frac{5}{8}=\frac{45}{72}$, $\frac{7}{17}=\frac{28}{68}$, $\frac{9}{2}=\frac{135}{375}$.

167.— $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$, $\frac{44}{77}=\frac{4}{7}$, $\frac{35}{50}=\frac{7}{10}$, $\frac{15}{40}=\frac{3}{8}$, $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $\frac{132}{156}=\frac{11}{13}$.

168.— $\frac{15:5}{20:5}=\frac{3}{4}$, $\frac{20:10}{30:10}=\frac{2}{3}$, $\frac{16:2}{18:2}=\frac{8}{9}$, $\frac{36:12}{48:12}=\frac{3}{4}$, $\frac{60:12}{72:12}=\frac{5}{6}$, $\frac{48:16}{64:16}=\frac{3}{4}$, $\frac{35:7}{49:7}=\frac{5}{7}$, $\frac{39:13}{91:13}=\frac{3}{7}$, $\frac{38:19}{57:19}=\frac{2}{3}$

169.— $\frac{70:14}{84:14}=\frac{5}{6}$, $\frac{39:39}{117:39}=\frac{1}{3}$, $\frac{95:19}{133:19}=\frac{5}{7}$, $\frac{825:75}{975:75}=\frac{11}{13}$, $\frac{108:36}{396:36}=\frac{3}{11}$, $\frac{2568:24}{7680:24}=\frac{107}{320}$, $\frac{10200:3400}{47600:3400}=\frac{3}{14}$, $\frac{20020:2860}{14300:2860}=\frac{7}{5}$.

Σελ.95. 170.—α) $\frac{1\times4}{3\times4}=\frac{4}{12}$, $\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{3}{12}$, β) $\frac{2\times7}{3\times7}=\frac{14}{21}$, $\frac{5\times3}{7\times3}=\frac{15}{21}$, γ) ἐ.κ.π. τῶν παρ. 8, $\frac{3\times2}{4\times2}=\frac{6}{8}$, $\frac{7\times1}{8\times1}=\frac{7}{8}$, δ) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 36, $\frac{7\times3}{12\times3}=\frac{21}{36}$, $\frac{5\times2}{18\times2}=\frac{10}{36}$, ε) $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$ ὥστε ἔχομεν $\frac{3}{5}$, $\frac{9}{20}$, ἐ. κ. π. τῶν παρ. 20, $\frac{3\times4}{5\times4}=\frac{12}{20}$, $\frac{9\times1}{20\times1}=\frac{9}{20}$ στ) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 70, $\frac{13\times2}{35\times2}=\frac{26}{70}$, $\frac{5\times5}{14\times5}=\frac{25}{70}$.

171.—α) $\frac{2\times4\times5}{3\times4\times5}=\frac{40}{60}$, $\frac{3\times3\times5}{4\times4\times5}=\frac{45}{60}$. $\frac{4\times3\times4}{5\times3\times4}=\frac{48}{60}$.

β) ἐ.κ.π. τῶν παρ. 60, $\frac{1\times15}{4\times15}=\frac{15}{60}$ $\frac{2\times12}{5\times12}=\frac{24}{60}$, $\frac{5\times10}{6\times10}=\frac{50}{60}$.

γ) ἐ.κ.π. τῶν παρον. εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $5\times3\times7$ $\frac{3\times3\times7}{5\times3\times7}=\frac{63}{105}$, $\frac{2\times5\times7}{3\times5\times7}=\frac{70}{105}$, $\frac{6\times5\times3}{7\times5\times3}=\frac{90}{105}$.

δ) ἐ.κ.π. τῶν παρ. 24, $\frac{5\times2}{12\times2}=\frac{10}{24}$, $\frac{7\times3}{8\times3}=\frac{21}{24}$, $\frac{13\times1}{24\times1}=\frac{13}{24}$.

ε) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 180, $\frac{7\times20}{9\times20}=\frac{140}{180}$, $\frac{4\times12}{15\times12}=\frac{48}{180}$, $\frac{13\times9}{20\times9}=\frac{117}{180}$.

στ) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 60, $\frac{3\times15}{4\times15}=\frac{45}{60}$, $\frac{5\times10}{6\times10}=\frac{50}{60}$, $\frac{3\times6}{10\times6}=\frac{18}{60}$.

172.—α) ἐ.κ.π. τῶν παρ. 36, $\frac{5\times6}{6\times6}=\frac{30}{36}$, $\frac{11\times3}{12\times3}=\frac{33}{36}$, $\frac{7\times4}{9\times4}=\frac{28}{36}$, $\frac{13\times2}{18\times2}=\frac{26}{36}$.

β) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 120. $\frac{1\times15}{8\times15}=\frac{15}{120}$, $\frac{4\times24}{5\times24}=\frac{96}{120}$, $\frac{7\times10}{12\times10}=\frac{70}{120}$, $\frac{19\times4}{30\times4}=\frac{76}{120}$.

γ) ἐ. κ. π. τῶν παρ. 300, $\frac{13\times5}{60\times5}=\frac{65}{300}$, $\frac{8\times12}{25\times12}=\frac{96}{300}$, $\frac{21\times6}{50\times6}=\frac{126}{300}$, $\frac{11\times25}{12\times25}=\frac{275}{300}$, $\frac{7\times10}{30\times10}=\frac{70}{300}$.

δ) ἐ.κ.π. τῶν παρ. εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν $2\times7\times5\times3$, $\frac{1\times7\times5\times3}{2\times7\times5\times3}=\frac{105}{210}$, $\frac{3\times2\times5\times3}{7\times2\times5\times3}=\frac{90}{210}$, $\frac{2\times2\times7\times3}{5\times2\times7\times3}=\frac{84}{210}$, $\frac{1\times2\times7\times5}{3\times2\times7\times5}=\frac{70}{210}$.

173.—Τρέπομεν τὰ κλάσματα $\frac{13}{15}$, $\frac{19}{25}$ εἰς ὁμώνυμα· ἤτοι τὸ $\frac{13}{15}=\frac{65}{75}$ καὶ $\frac{19}{25}=\frac{57}{75}$· ὥστε ἐδαπάνησε τὰ περισσότερα, ὁ ἐξοδεύσας τὰ $\frac{13}{15}$ τῶν χρημάτων του.

174.—Τρέπομεν τὰ διδόμενα εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ λαμβάνομεν $\frac{3}{5}=\frac{45}{75}$, $\frac{16}{25}=\frac{48}{75}$, $\frac{2}{3}=\frac{50}{75}$· ὥστε ὑπερτερεῖ ὁ ἔχων ἐπίδοσιν $\frac{2}{3}$.

175.—Τρέπομεν τὰ διδόμενα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα· ἔχομεν δὲ $\frac{3}{7}=\frac{45}{105}$, $\frac{2}{5}=\frac{42}{105}$, $\frac{7}{15}=\frac{49}{105}$, $\frac{2}{3}=\frac{70}{105}$· ὥστε ἐκ τῶν δοθέντων κλασμάτων μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{2}{3}$ καὶ μικρότερον τὸ $\frac{2}{5}$.

176.—Τρέπομεν τὰ κλάσματα ἑκάστης δοθείσης σειρᾶς εἰς ὁμώνυμα.

α) $\frac{3}{4} = \frac{135}{180}$, $\frac{13}{18} = \frac{130}{180}$, $\frac{8}{15} = \frac{96}{180}$, $\frac{5}{9} = \frac{100}{180}$, $11 = \frac{165}{180}$· ὥστε τὰ δοθέντα κατὰ τὴν ζητουμένην σειρὰν γράφονται ὡς ἑξῆς $\frac{8}{15}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{13}{18}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$.

β) $\frac{11}{15} = \frac{110}{150}$, $\frac{9}{10} = \frac{135}{150}$, $\frac{14}{25} = \frac{84}{150}$, $\frac{17}{30} = \frac{85}{150}$, $\frac{}{5} = \frac{90}{150}$· ὥστε λαμβάνομεν τὴν ἑξῆς ζητουμένην σειρὰν $\frac{14}{25}$, $\frac{17}{30}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{9}{10}$.

Σελ. 100. 179—α) $\frac{3}{4} + \frac{9}{10} = \frac{15}{20} + \frac{18}{20} = \frac{33}{20} = 1\frac{13}{20}$.

β) $\frac{13}{16} + \frac{7}{12} = \frac{39}{48} + \frac{28}{48} = \frac{67}{48} = 1\frac{19}{48}$.

γ) $\frac{7}{8} + \frac{3}{15} = \frac{105}{120} + \frac{24}{120} = \frac{129}{120} = 1\frac{3}{40}$.

δ) $\frac{8}{9} + \frac{2}{15} + \frac{2}{3} = \frac{40}{45} + \frac{6}{45} + \frac{30}{45} = \frac{76}{45} = 1\frac{31}{45}$.

ε) $\frac{5}{12} + \frac{2}{15} + \frac{9}{10} + \frac{3}{5} = \frac{25}{60} + \frac{8}{60} + \frac{54}{60} + \frac{36}{60} = \frac{123}{60} = 2\frac{1}{20}$.

στ) $\frac{7}{12} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} + \frac{3}{4} + \frac{11}{14} = \frac{49}{84} + \frac{56}{84} + \frac{72}{84} + \frac{63}{84} + \frac{66}{84} = \frac{306}{84} = 3\frac{9}{14}$.

180 —α) $7\frac{4}{15} + 3\frac{1}{8} + \frac{2}{3} + 6\frac{3}{4} = 16 + 1\frac{97}{120} = 17\frac{97}{120}$ $\left(7+3+6=16,\ \frac{4}{15} + \frac{1}{8} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{32}{120} + \frac{15}{120} + \frac{80}{120} + \frac{90}{120} = \frac{217}{120} = 1\frac{97}{120}\right)$.

β) $13\frac{1}{4} + 7\frac{11}{12} + 2\frac{25}{36} + 8\frac{7}{9} = 30 + 2\frac{23}{36} = 32\frac{23}{36}$ $\Big(13 + 7 + 2 + 8 = 30,\ \frac{1}{4} + \frac{11}{12} + \frac{25}{36} + \frac{7}{9} = \frac{9}{36} + \frac{33}{36} + \frac{25}{36} + \frac{28}{36} = \frac{95}{36} = 2\frac{23}{36}\Big)$.

γ) $14\frac{1}{9}+12\frac{3}{5}+3\frac{2}{7}=29\frac{314}{315}$ $\left(14+12+3=29,\ \frac{1}{9}\right.$ $\left.+\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{35}{315}+\frac{189}{315}+\frac{90}{315}=\frac{314}{315}\right)$.

δ) $2\frac{2}{3}+5\frac{1}{7}+1\frac{4}{21}+\frac{3}{5}=8+1\frac{3}{5}=9\frac{3}{5}$ $\left(2+5+1\right.$ $=8,\ \frac{2}{3}+\frac{1}{7}+\frac{4}{21}+\frac{3}{5}=\frac{70}{105}+\frac{15}{105}+\frac{20}{105}+\frac{63}{105}=\frac{168}{105}$ $\left.=1\frac{3}{5}\right)$.

ε) $15\frac{2}{3}+29\frac{4}{9}+48\frac{10}{11}+32+75\frac{1}{2}=199+2\frac{103}{198}$ $=201\frac{103}{198}$ $\left(15+29+48+32+75=199,\ \frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{10}{11}+\right.$ $\left.\frac{1}{2}=\frac{132}{198}+\frac{88}{198}+\frac{180}{198}+\frac{99}{198}=\frac{499}{198}=2\frac{103}{198}\right)$.

στ) $115\frac{3}{14}+208\frac{5}{21}+193\frac{11}{28}+305\frac{7}{9}=821+1\frac{157}{252}$ $=822\frac{157}{252}$ $\left(115+208+193+305=821,\ \frac{3}{14}+\frac{5}{21}+\frac{11}{28}+\frac{7}{9}\right.$ $\left.=\frac{54}{252}+\frac{60}{252}+\frac{99}{252}+\frac{196}{252}=\frac{409}{252}=1\frac{157}{252}\right)$.

Σελ. 100—181.—Προσθέτομεν καὶ ἔχομεν $\frac{4}{5}$ ὀκ. $+\frac{3}{4}$ ὀκ. $+\frac{9}{10}$ ὀκ. $=\frac{16}{20}$ ὀκ. $+\frac{15}{20}$ ὀκ. $+\frac{18}{20}$ ὀκ. $=\frac{49}{20}$ ὀκ. $=2\frac{9}{20}$ ὀκ.

182.—Προσθέτομεν καὶ εὑρίσκομεν $87\frac{1}{8}$ πήχ. $+75\frac{3}{4}$ πήχ. $=162+\frac{1}{8}+\frac{6}{8}=162\frac{7}{8}$ πήχ.

183.—Εἶχεν ἀρχικῶς τὸ ἄθροισμα τῶν χρημάτων ποὺ ἐξόδευσε καὶ ἐκείνων ποὺ τοῦ ἔμειναν ἤτοι τό: $37\frac{1}{4}$ δρ. $+108\frac{4}{5}$ δρ. $=145$ δρ. $+\frac{5}{20}$ δρ. $+\frac{16}{20}$ δρ. $=145$ δρ. $+1\frac{1}{20}$ δρ. $=146\frac{1}{20}$ δρ.

184.—Ἡ πόλις Α ἀπέχει ἀπὸ τῆς Β, τὸ ἄθροισμα τῶν χιλιομ. ποὺ διέτρεξεν ὁ σωφὲρ καὶ ἐκείνων ποὺ ἔχει νὰ διατρέξῃ ἀκόμη· ἤτοι τὸ $28\frac{7}{12}$ χιλ.$+13\frac{2}{3}$ χιλ.$=41+\frac{15}{12}=42\frac{1}{4}$ χιλ.

185.—Θὰ προσθέσωμεν τοὺς $3\frac{5}{8}$ πήχεις τῆς μητρός, τοὺς $2\frac{1}{4}$ πήχ. τῆς μιᾶς κόρης καὶ τοὺς $2\frac{1}{4}$ πήχ. τῆς ἄλλης, ὁπότε ἔχομεν $3\frac{5}{8}$ πήχ.$+2\frac{1}{4}$ πήχ.$+2\frac{1}{4}$ πήχ.$=7$ πήχ.$+\frac{9}{8}$ πήχ.$=$ $8\frac{1}{8}$ πήχ.

186.—Ἡ πρώτη φιάλη περιεῖχε $2\frac{3}{8}$ ὀκ., ἐνῷ ἡ ἄλλη περιεῖχε $2\frac{3}{8}$ ὀκ.$+\frac{1}{2}$ ὀκ. τώρα προσθέτομεν τὸ περιεχόμενον τῶν δύο φιαλῶν· ἔχομεν ἄρα $2\frac{3}{8}$ ὀκ. $+2\frac{3}{8}$ ὀκ.$+\frac{1}{2}$ ὀκ.$=4$ ὀκ.$+$ $\frac{10}{8}$ ὀκ. $=5\frac{1}{4}$ ὀκ.

187.—Ἡ μία ἐνδυμασία στοιχίζει $628\frac{3}{4}$ δραχ., ἐνῶ ἡ ἄλλη $628\frac{3}{4}$ δρ.$+57\frac{4}{5}$ δρ. Ὥστε ἐν ὅλῳ ἔδωκεν $628\frac{3}{4}$ δραχμὰς $+$ $628\frac{3}{4}$ δρ.$+57\frac{4}{5}$ δρ.$=1313$ δρ.$+\frac{46}{20}$ δρ.$=1315\frac{3}{10}$ δραχ.

188.—Τὸ τεμάχιον ἀπετελεῖτο ἀπὸ τὰ μέτρα ποὺ ἐπώλησεν αἱ τὰς δύο φορὰς καὶ ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ τοῦ ἔμειναν· ἤτοι ἀπὸ ὰ $18\frac{2}{3}$ μ.$+5\frac{1}{6}$ μ. $+37\frac{1}{2}$ μ.$=60$ μ.$+\frac{8}{6}$μ.$=61\frac{1}{3}$μ.

189.—Προσθέτομεν ὅλα τὰ ἔξοδα καὶ ἔχομεν $48\frac{3}{4}$ δραχμῆς $+18\frac{4}{5}$ δρ.$+9$ δρ.$+12\frac{1}{2}$ δρ.$+16\frac{9}{20}$ δραχ.$=103$ δραχ.$+\frac{50}{20}$ δραχ.$=105\frac{1}{2}$ δραχ.

190.—Ὁ 1ος ἤνοιξε $12\frac{7}{20}$ μ., ὁ 2ος $15\frac{7}{20}$ μ. καὶ ὁ 3ος ἤνοιξε $15\frac{7}{20}+1\frac{3}{4}$ ἤτοι $17\frac{2}{20}$ μ. ὥστε τὸ μῆκος τοῦ χάνδακος ἦτο $12\frac{7}{20}$ μ. $+15\frac{7}{20}$ μ. $+17\frac{2}{20}$ μ. $=44\frac{4}{5}$ μέτρ.

Σελ. 105—193— α) $\frac{11}{12}-\frac{4}{7}=\frac{77}{84}-\frac{48}{84}=\frac{29}{84}$

β) $\frac{19}{18}-\frac{11}{12}=\frac{38}{36}-\frac{33}{36}=\frac{5}{36}$

γ) $10\frac{9}{10}-6\frac{11}{12}=10\frac{54}{60}-6\frac{55}{60}=9\frac{114}{60}-6\frac{55}{60}=3\frac{59}{60}$

δ) $28\frac{14}{25}-9\frac{13}{15}=28\frac{42}{75}-9\frac{65}{75}=27\frac{117}{75}-9\frac{65}{75}=18\frac{52}{75}$

ε) $17\frac{29}{35}-12\frac{41}{42}=17\frac{174}{210}-12\frac{205}{210}=17\frac{384}{210}-13\frac{205}{210}=4\frac{179}{210}$

στ) $15\frac{4}{21}-\left(3\frac{5}{7}+8\frac{2}{3}\right)=15\frac{4}{21}-\left(3\frac{15}{21}+8\frac{14}{21}\right)=$

$=15\frac{4}{21}-12\frac{8}{21}=15\frac{25}{21}-13\frac{8}{21}=2\frac{17}{21}$

ζ) $7\frac{1}{8}-\left(4\frac{5}{12}+1\frac{1}{6}\right)=7\frac{1}{8}-\left(4\frac{5}{12}+1\frac{2}{12}\right)=$

$=7\frac{1}{8}-5\frac{7}{12}=7\frac{3}{24}-5\frac{14}{24}=6\frac{27}{24}-5\frac{14}{24}=1\frac{13}{24}$

η) $18\frac{11}{16}-\left(3\frac{7}{48}+5\frac{1}{}+2\frac{7}{8}\right)=18\frac{11}{16}-11\frac{17}{48}=$

$=18\frac{33}{48}-11\frac{17}{48}=7\frac{16}{48}=7\frac{1}{3}$

θ) $\left(13\frac{7}{8}+8\frac{2}{3}\right)-\left(7\frac{12}{16}+5\frac{4}{9}+3\frac{5}{12}\right)=\left(13\frac{126}{144}+8\frac{96}{144}\right)-$

$-\left(7\frac{108}{144}+5\frac{64}{144}+3\frac{60}{144}\right)=21\frac{222}{144}-16\frac{88}{144}=5\frac{134}{144}=5\frac{67}{72}$

Σελ. 105—194)—Όλα τὰ χρήματά του παρίστανται διὰ τοῦ $\frac{5}{5}$· ὥστε τοῦ ἔμειναν $\frac{3}{5}$.

195)—Τοῦ ἔμεινεν ἡ διάφορὰ τῶν $4\frac{3}{8}$ πηχ. ἀπὸ τῶν 18 πήχ. ἤτοι 18 π.—$4\frac{3}{8}$ πήχ. $=17\frac{8}{8}$ π. — $4\frac{3}{8}$ π. $=13\frac{5}{8}$ πήχ.

196)—Οἰκονομεῖ $52\frac{1}{2}$ δρ. — $30\frac{3}{5}$ δρ. $=52\frac{5}{10}$ δρ. — $30\frac{6}{10}$ δρ. $=51\frac{15}{10}$ δρ. — $30\frac{6}{10}$ δρ. $=21\frac{9}{10}$.

197)—Ἀφαιροῦμεν τὸ βάρος τοῦ κενοῦ δοχείου ἤτοι τὰς

$2\frac{13}{16}$ ὀκ., ἀπὸ τὸ μικτὸν βάρος ἤτοι ἀπὸ τὰς $11\frac{1}{2}$ ὀκ. καὶ ἔχομεν $11\frac{1}{2}$ ὀκ. $-2\frac{13}{16}$ ὀκ $= 11\frac{8}{16}$ ὀκ. $- 2\frac{13}{16}$ὀκ. $- 10\frac{24}{16}$ὀκ. $-$ $- 2\frac{13}{16}$ ὀκ. $= 8\frac{11}{16}$ ὀκ.

198)—Τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὰ $\frac{5}{12}$ τοῦ χρέους ἀποτελοῦν τὰ $\frac{1}{3} + \frac{5}{12}$ $= \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$ τοῦ χρέους ἤτοι τὰ $\frac{3}{4}$ · ἀλλὰ τὸ ὅλον χρέος παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{4}{4}$, ὥστε τοῦ ὑπολείπεται τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ χρέους νὰ πληρώσῃ

199) — Αἱ τρεῖς ὁμάδες ὁμοῦ ἐπεσκεύασαν δρόμον $17\frac{4}{}$ χιλ. $+ 17\frac{1}{2}$ χιλ. $+ 17\frac{2}{5}$ χιλ. ἤτοι $52\frac{7}{10}$ χιλ. ὥστε : ἡ δη ὁμὰς ἀνέλαβεν νὰ ἐπισκευάσῃ δρόμον $70\frac{7}{10}$ χιλ, $-$ $52\frac{7}{10}$ χιλ. ἤτοι 18 χιλ.

200)—Προσθέτομεν ὅλα τὰ ἔξοδα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὰς 500 δραχ. ἤτοι ἔχομεν $57\frac{1}{2}$ δρ. $+ 78\frac{3}{4}$ δρ. $+ 46$ δρ. $+ 113\frac{2}{5}$ δρ. $+ 86\frac{1}{4}$ δρ. $= 381\frac{9}{10}$ δρ. καὶ 500 δρ. $- 381\frac{9}{10}$ δρ. $= 118\frac{1}{10}$ δραχ.

201)—Μέχρι τῆς μεσημβρίας τῆς αὐτῆς ἡμέρας μεσολαβοῦσιν 12 ὥρ $- 6\frac{3}{4}$ ὥρ. $= 5\frac{1}{4}$ ὥρ. Ὥστε ἀπὸ τῆς μεσημβρίας τὸ ταξείδιον ἐξηκολούθησεν ἐπὶ $12\frac{1}{3}$ ὥρ. $- 5\frac{1}{4}$ ὥρ. $= 7\frac{1}{12}$ ὥρ. ὥστε ἔφθασεν εἰς τὸν λιμένα Β τὴν $7\frac{1}{12}$ μ. μ.

202.—Ἀπὸ τῆς $9\frac{1}{4}$ π. μ. τῆς μιᾶς ἡμέρας μέχρι τῆς $9\frac{1}{4}$ π. μ. τῆς ἐπομένης μεσολαβοῦσιν 24 ὧραι καὶ ἀπὸ αὐτῆς μέχρι τῆς $11\frac{43}{60}$ π. μ. μεσολαβοῦσιν $11\frac{43}{60}$ ὥρ. $- 9\frac{1}{4}$ ὥρ. $= 2\frac{28}{60}$ ὥρας. Ὥστε ἐταξείδευσεν ἐπὶ 24 ὥρ. $+ 2\frac{28}{60}$ ὥρ. $= 26\frac{7}{15}$ ὥρ.

203.—Εἰς τὸ ἓν βαρέλιον ἔμειναν 375 ὀκ.—75 $\frac{1}{4}$ ὀκάδ. $=$ $= 299\frac{3}{4}$ ὀκ. καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἔμειναν $215\frac{1}{4}$ ὀκ.$-43\frac{2}{5}$ ὀκ.$=$ $=171\frac{17}{20}$ ὀκάδες. Ὥστε εἰς τὸ α΄ βαρέλιον ἔμειναν περισσότεραι $299\frac{3}{4}$ ὀκ. $-171\frac{17}{20}$ ὀκ.$=127\frac{9}{10}$ ὀκ.

Σελ.109—204.—$\frac{7}{24}\times 6=\frac{7}{4}=1\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}\times 21=\frac{63}{8}=7\frac{7}{8}$, $\frac{5}{12}\times 41=\frac{205}{12}=17\frac{1}{12}$, $\frac{15}{16}\times 35=\frac{525}{16}=32\frac{13}{16}$, $3\frac{4}{11}\times 5=3\times 5+\frac{4}{11}\times 5=15+\frac{20}{11}=16\frac{9}{11}$ ἢ $\frac{37}{11}\times 5=\frac{185}{11}=16\frac{9}{11}$, $18\frac{5}{6}\times 25=18\times 25+\frac{5}{6}\times 25=450+\frac{125}{6}=470\frac{5}{6}$, $29\frac{7}{9}\times 53=29\times 53+\frac{7}{9}\times 53=1537+\frac{371}{9}=1578\frac{2}{9}$, $71\frac{15}{28}\times 19=71\times 19+\frac{15}{28}\times 19=1349+\frac{285}{28}=1359\frac{5}{28}$.

205.—$\frac{7}{9}:9=\frac{7}{81}$, $\frac{16}{17}:8=\frac{2}{17}$, $\frac{49}{60}:7=\frac{7}{60}$, $\frac{13}{15}:30=\frac{13}{450}$, $\frac{64}{85}:48=\frac{64}{4080}=\frac{4}{255}$, $4\frac{8}{25}:36=\frac{108}{25}:36=\frac{3}{25}$, $18\frac{3}{16}:15=\frac{291}{16}:15=\frac{291}{240}=1\frac{51}{240}=1\frac{17}{80}$, $79\frac{3}{5}:14=\frac{398}{5}:14=\frac{398}{70}=$ $=5\frac{24}{35}$, $17\frac{17}{24}:16=\frac{425}{24}:16=\frac{425}{384}=1\frac{41}{384}$, $118\frac{1}{3}:45=\frac{355}{3}:45=\frac{355}{135}=2\frac{17}{27}$.

Σελ. 112—206.—Ἡ 1 ὀκᾶ βουτύρου ἢ τὰ $\frac{8}{8}$ αὐτῆς τιμῶνται 84 δραχ. τὸ $\frac{1}{8}$ ὀκ. τιμᾶται $\frac{84}{8}$ δρ. καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ ὀκ. τιμῶνται $\frac{84\times 5}{8}$ δρ. $=\frac{420}{8}$ δρ. $=52\frac{1}{2}$ δρ.

207)—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἀξίαν τῶν 3 ὀκ. ἡ ὁποία εἶναι 44 δρ. $\times$ 3=132 δρ. καὶ ἔπειτα τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{5}$ ὀκ. ἡ ὁποία ἀφοῦ διὰ τὰ $\frac{5}{5}$ ὀκ. εἶναι 44 δρ. διὰ τὸ $\frac{1}{5}$ ὀκ. εἶναι

$\frac{44}{5}$ δρ. καὶ διὰ τὰ $\frac{3}{5}$ ὀκ. εἶναι $\frac{44 \times 3}{5}$ δρ. $=\frac{132}{5}$ δρ. $= 26\frac{2}{5}$ δρ.
Ὥστε αἱ $3\frac{3}{5}$ ὀκ. ἀξίζουν 132 δρ. $+ 26\frac{2}{5}$ δρ. $=158\frac{2}{5}$ δραχ.

208)—Ἀφοῦ ὁ ἐργάτης τελειώνει εἰς 5 ὥρας ὅλον τὸ ἔργον τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τῆς 1 εἰς 1 ὥραν ἤτοι εἰς $\frac{4}{4}$ ὥρ. τελειώνει τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς $\frac{1}{4}$ ὥρ. τελειώνει τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ ἔργου· ἄρα εἰς $2\frac{3}{4}$ ὥρας ἤτοι εἰς $\frac{11}{4}$ ὥρας τελειώνει τὰ $\frac{11}{20}$ τοῦ ἔργου.

209)—Οἱ 18 πήχ. πρὸς 20 δρ. ἀξίζουν 20 δρ. $\times 18 = 360$ δρ.
» » » » $\frac{2}{5}$ δρ. ἀξίζουν 18 φορὰς τὰ $\frac{2}{5}$ ἤτοι $\frac{36}{5}$ δρ. $= 7\frac{1}{5}$ δραχ. ὥστε οἱ 18 πήχεις πρὸς $20\frac{2}{5}$ δρ. τὸν πῆχυν ἀξίζουν 360 δρ. $+ 7\frac{1}{5}$ δραχ. $= 367\frac{1}{5}$ δραχ.

Τώρα ὑπολείπεται νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῶν $\frac{3}{10}$ τοῦ πήχεως· ἀλλὰ ἀφοῦ τὰ $\frac{10}{10}$ πήχ. ἀξίζουν $20\frac{2}{5}$ δρ. τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχ. ἀξίζει τὸ δέκατον τῶν $20\frac{2}{5}$ δρ. ἢ τῶν $\frac{102}{5}$ ἤτοι ἀξίζει $\frac{102}{50}$ δρ. καὶ τὰ $\frac{3}{10}$ τοῦ πήχ. ἀξίζουν $\frac{102 \times 3}{50}$ δρ. $=\frac{306}{50}$ δρ. $=6\frac{6}{50}$ δρ. Ἄρα οἱ $18\frac{3}{10}$ πήχ ἀξίζουν $367\frac{10}{50}$ δρ. $+6\frac{6}{50}$ δρ. $=373\frac{16}{50}$ δρ.

210)— Μὲ $6\frac{4}{5}$ δρ. ἤτοι μὲ $\frac{34}{5}$ δρ. ἀγοράζω 1 ὀκᾶν, μὲ $\frac{1}{5}$ δρ. ἀγοράζω $\frac{1}{34}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $\frac{5}{5}$ δρ. ἤτοι μὲ 1 δρ. ἀγοράζω $\frac{5}{34}$ τῆς ὀκᾶς. Λοιπὸν μὲ 86 δραχ. ἀγοράζω $\frac{5}{34} \times 86$ τῆς ὀκᾶς ἤτοι $\frac{430}{34}$ ὀκ.

Ἐπειδὴ δὲ μὲ 1 δρ. ἀγοράζω $\frac{5}{34}$ τῆς ὀκ. μὲ $\frac{1}{10}$ τῆς δραχμ.

ἀγοράζω $\frac{5}{340}$ τῆς ὀκ. καὶ μὲ $\frac{7}{10}$ τῆς δραχ. ἀγοράζω $\frac{35}{340}$ τῆς ὀκᾶς.

Ὥστε μὲ 86 $\frac{7}{10}$ δρχ. ἀγοράζω $\frac{430}{34}$ ὀκ. $+ \frac{35}{340}$ ὀκ. $= \frac{4300}{340}$ ὀκ. $+$ $+ \frac{35}{340} = \frac{4335}{340}$ ὀκ. $= 12\frac{255}{340}$ ὀκ. $= 12\frac{3}{4}$ ὀκ.

211)—Ἡ ὀκᾶ ἔχει 400 δράμια τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς ὀκᾶς ἔχει δράμια $\frac{400}{10}$ καὶ τὰ $\frac{7}{10}$ ἔχουσι δράμια $\frac{400 \times 7}{10}$ ἢ $40 \times 7 = 280$ δράμια.

212)—Οἱ 17 πήχ. τσόχας ἀξίζουν 120 δρ. $\times 17 = 2040$ δραχ. ἐπειδὴ δὲ τὸ μεταξωτὸν ὕφασμα ἀξίζει 80 δρχ. κατὰ πῆχυν, θὰ λάβῃ τόσους πήχεις τοιούτου ὑφάσματος, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 2040 τὸν 80 ἤτοι $2040 : 80 = 25\frac{1}{2}$ πήχ.

213)—Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν ὅλου τοῦ ἔργου ἤτοι τῶν $\frac{4}{4}$ αὐτοῦ θὰ λάβῃ 700 δρ., διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τοῦ $\frac{1}{4}$ θὰ λάβῃ $\frac{700}{4}$ δρ. $=$ $=175$ δρ. καὶ διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔργου θὰ λάβῃ 175 δρ. $\times 3 = 525$ δρχ.

214)—Διὰ τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ ἔργου ἔχει λαμβάνειν 261 δραχ., διὰ τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτοῦ θὰ λάβῃ $\frac{261}{3}$ δραχ. καὶ διὰ τὰ $\frac{8}{8}$ τοῦ ἔργου ἤτοι δι' ὅλον τὸ ἔργον θὰ λάβῃ $\frac{261 \times 8}{3}$ δραχ. ἢ 87×8 δραχ. $= 696$ δραχμάς.

215)—Αἱ 460 ὀκ. τυροῦ ἀξίζουν 43 δρ. $\times 460 = 19780$ δραχ. ἐπειδὴ δὲ μὲ τὰς 460 ὀκ. τυροῦ ἤτοι μὲ τὰς 19780 δραχ. ἔλαβεν 780 ὀκ. λίπους, ἕπεται ὅτι ἡ 1 ὀκᾶ λίπους ἀξίζει $\frac{19780}{780}$ δρχ., ἤτοι $25\frac{14}{39}$ δραχ.

216)—Τὰ $\frac{8}{8}$ τῆς ἡμέρας εἶναι 24 ὧραι, τὸ $\frac{1}{8}$ αὐτῆς εἶναι $\frac{24}{8}$ ὥρ. $=3$ ὥρ. καὶ τὰ $\frac{5}{8}$ εἶναι 3 ὥρ. $\times 5 = 15$ ὥρ. ἐπειδὴ δὲ ἡ 1 ὥρα ἔχει 60′ αἱ 15 ὧραι ἔχουσι $60' \times 15 = 900'$.

217)—Τὸ δεύτερον ἀτμόπλοιον διέτρεξεν εἰς 5 ὥρας τόσα μίλια ὅσα διέτρεξε τὸ πρῶτον εἰς 7 ὥρας, ἤτοι 7 φορὰς $8\frac{1}{2}$ μίλια, δηλαδὴ 56 μίλια καὶ $\frac{7}{2}$ τοῦ μιλίου ἢ $59\frac{1}{2}$ μίλια· διὰ νὰ εὕρω λοιπόν, πόσα μίλια διήνυσεν εἰς 1 ὥραν (διότι τοῦτο λέγεται ταχύτης τοῦ ἀτμοπλοίου) πρέπει νὰ διαιρέσω τὸ $59\frac{1}{2}$ εἰς 5 ἴσα μέρη· οὕτως εὑρίσκω, ὅτι τὸ δεύτερον διήνυε καθ' ὥραν 11 μίλια καὶ $\frac{4}{5}+\frac{1}{10}$ τοῦ μιλίου $\left(59\frac{1}{2}:5=\frac{59}{5}+\frac{1}{10}=11+\frac{4}{5}+\frac{1}{10}\right)$ ἤτοι $11\frac{9}{10}$ μίλια.

218)—Τὸ κεφάλαιον ἔχει $\frac{5}{5}$, καὶ εἰς αὐτὸ προσετέθησαν τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ· ὥστε αἱ 11800 δραχ. εἶναι τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ κεφαλαίου· ἀφοῦ δὲ τὰ $\frac{7}{5}$ τοῦ κεφαλαίου εἶναι 11800 δραχ., τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ εἶναι $\frac{11800}{7}$ καὶ τὰ $\frac{5}{5}$, ἤτοι ὅλον τὸ κεφάλαιον εἶναι $\frac{11800\times5}{7}$ δρ. ἤτοι $8428\frac{4}{7}$.

Σελ. 120—219)—$45\times\frac{1}{3}=\frac{45}{3}=15$, $15\times\frac{7}{15}=7$, $72\times\frac{8}{9}=8\times8=64$, $60\times\frac{25}{36}=\frac{1500}{36}=41\frac{2}{3}$, $88\times\frac{17}{33}=\frac{1496}{33}=45\frac{1}{3}$, $28\times2\frac{4}{7}=28\times2+28\times\frac{4}{7}=56+16=72$, $16\times4\frac{5}{16}=16\times4+16\times\frac{5}{16}=64+5=69$, $93\times8\frac{5}{6}=93\times8+93\times\frac{5}{6}=744+\frac{465}{6}=821\frac{1}{2}$, $225\times1\frac{1}{9}=225\times1+225\times\frac{1}{9}=225+25=250$, $437\times5\frac{11}{12}=\frac{43.\times71}{12}=2585\frac{7}{12}$.

220)—$\frac{7}{9}\times\frac{8}{11}=\frac{56}{99}$, $\frac{3}{4}\times\frac{8}{17}=\frac{3\times8}{4\times17}=\frac{3\times2}{17}=\frac{6}{17}$, $\frac{17}{24}\times\frac{13}{25}=\frac{17\times13}{24\times25}=\frac{221}{600}$, $1\frac{27}{40}\times\frac{19}{35}=\frac{67\times19}{40\times35}=\frac{1273}{1400}$, $\frac{3}{7}\times6\frac{5}{12}=\frac{3}{7}\times\frac{77}{12}=\frac{3\times77}{7\times12}=\frac{11}{4}=2\frac{3}{4}$, $8\frac{3}{8}\times8\frac{3}{4}=\frac{67}{8}\times\frac{35}{4}=\frac{67\times35}{8\times4}=\frac{2345}{32}=$

$=73\frac{9}{32}$ ἢ $8\frac{3}{8}\times 8\frac{3}{4}=8\times8+8\times\frac{3}{4}+\frac{3}{8}\times8+\frac{3}{8}\times\frac{3}{4}=$

$=64+6+3+\frac{9}{32}=73\frac{9}{32}$, $10\frac{7}{13}\times5\frac{11}{20}=\frac{137}{13}\times\frac{111}{20}=\frac{137\times111}{13\times20}=$

$=\frac{15207}{260}=58\frac{127}{260}$, $28\frac{1}{2}\times49\frac{2}{3}=\frac{57}{2}\times\frac{149}{3}=\frac{19\times149}{2}=\frac{2831}{2}=$

$=1415\frac{1}{2}$.

221) — $\frac{3}{8}\times\frac{7}{9}\times\frac{6}{11}=\frac{3\times7\times6}{8\times9\times11}=\frac{7}{4\times11}=\frac{7}{44}$, $\frac{8}{9}\times\frac{3}{5}\times\frac{15}{16}=$

$=\frac{8\times3\times15}{9\times5\times16}=\frac{1}{2}$, $\frac{15}{16}\times\frac{4}{9}\times\frac{6}{17}\times\frac{51}{60}=\frac{15\times4\times6\times51}{16\times9\times17\times60}=\frac{1}{8}$,

$3\frac{1}{3}\times1\frac{1}{4}\times5\frac{1}{2}=\frac{10}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{11}{2}=\frac{10\times5\times11}{3\times4\times12}=\frac{5\times5\times11}{3\times2\times12}=\frac{275}{72}=$

$=3\frac{59}{72}$, $2\frac{3}{4}\times3\frac{2}{5}\times3\frac{5}{7}=\frac{11}{4}\times\frac{17}{5}\times\frac{26}{7}=\frac{11\times17\times26}{4\times5\times7}=$

$=\frac{11\times17\times13}{2\times5\times7}=\frac{2431}{70}=34\frac{51}{70}$, $8\frac{3}{4}\times2\frac{1}{7}\times\frac{2}{9}=\frac{35}{4}\times\frac{15}{7}\times\frac{2}{9}=$

$=\frac{35\times15\times2}{4\times7\times9}=\frac{5\times5}{2\times3}=\frac{25}{6}=4\frac{1}{6}$.

Σελ. 123—222) — $12:\frac{4}{5}=12\times\frac{5}{4}=15$, $36:\frac{9}{11}=36\times\frac{11}{9}=44$,

$21:\frac{28}{41}=21\times\frac{41}{28}=\frac{21\times41}{28}=\frac{3\times41}{4}=\frac{123}{4}=30\frac{3}{4}$, $7:3\frac{1}{3}=$

$=7:\frac{10}{3}=7\times\frac{3}{10}=\frac{21}{10}=2\frac{1}{10}$, $25:3\frac{3}{8}=25:\frac{27}{8}=25\times\frac{8}{27}=$

$\frac{200}{27}=7\frac{11}{27}$, $41:62\frac{5}{6}=41:\frac{377}{6}=41\times\frac{6}{377}=\frac{246}{377}$, $8\frac{9}{16}:\frac{13}{16}=$

$\frac{137}{16}:\frac{13}{16}=\frac{137}{16}\times\frac{16}{13}=\frac{137}{13}=10\frac{7}{13}$, $\frac{21}{50}:\frac{16}{25}=\frac{21}{50}\times\frac{25}{16}=\frac{21}{2\times16}=\frac{21}{32}$,

$\frac{117}{300}:\frac{59}{200}=\frac{117}{300}\times\frac{200}{59}=\frac{39\times2}{59}=\frac{78}{59}=1\frac{19}{59}$, $8\frac{8}{25}:11\frac{3}{25}=\frac{208}{25}:$

$\frac{278}{25}=\frac{208}{25}\times\frac{25}{278}=\frac{208}{278}=\frac{104}{139}$, $16\frac{4}{7}:3\frac{11}{28}=\frac{116}{7}:\frac{95}{28}=\frac{116}{7}\times\frac{28}{95}=$

$=\frac{116\times4}{95}=\frac{464}{95}=4\frac{84}{95}$, $15\frac{5}{6}:4\frac{1}{4}=\frac{95}{6}:\frac{17}{4}=\frac{95}{6}\times\frac{4}{17}=$

$=\frac{95\times2}{3\times17}=\frac{190}{51}=3\frac{37}{51}$.

223)— $\dfrac{\frac{11}{14}}{5} = \dfrac{11}{14\times5} = \dfrac{11}{70}$, $\dfrac{5\frac{1}{7}}{9} = \dfrac{\frac{36}{7}}{9} = \dfrac{36}{7\times9} = \dfrac{4}{7}$, $\dfrac{15}{\frac{1}{8}} =$

$= \dfrac{15\times8}{\frac{1}{8}\times8} = 120$, $\dfrac{42}{4\frac{7}{9}} = \dfrac{42}{\frac{43}{9}} = \dfrac{42\times9}{\frac{43}{9}\times9} = \dfrac{42\times9}{43} = \dfrac{378}{43}$, $\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{14}{15}} = \dfrac{\frac{13}{15}\times15}{\frac{14}{15}\times15} =$

$= \dfrac{13}{14}$, $\dfrac{\frac{49}{50}}{3\frac{17}{25}} = \dfrac{\frac{49}{50}}{\frac{92}{25}} = \dfrac{\frac{49}{50}\times50}{\frac{92}{25}\times50} = \dfrac{49}{92\times2} = \dfrac{49}{184}$, $\dfrac{4\frac{3}{8}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{\frac{35}{8}}{\frac{5}{4}} =$

$= \dfrac{\frac{35}{8}\times8}{\frac{5}{4}\times8} = \dfrac{35}{5\times2} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{7}{2}$, $\dfrac{12\frac{3}{4}}{26\frac{1}{2}} = \dfrac{\frac{51}{4}}{\frac{53}{2}} = \dfrac{\frac{51}{4}\times4}{\frac{53}{2}\times4} = \dfrac{51}{53\times2} = \dfrac{51}{106}$,

$\dfrac{43\frac{1}{8}}{5\frac{11}{18}} = \dfrac{\frac{345}{8}}{\frac{101}{18}} = \dfrac{\frac{345}{8}\times72}{\frac{101}{18}\times72} = \dfrac{345\times9}{101\times4} = \dfrac{3105}{404}$, $\dfrac{40\frac{1}{5}}{14\frac{14}{25}} = \dfrac{\frac{201}{5}}{\frac{364}{25}} = \dfrac{\frac{201}{5}\times25}{\frac{364}{25}\times25} =$

$= \dfrac{201\times5}{364} = \dfrac{1005}{364}$.

Σελ. 126—224)— Ἀφοῦ μὲ 80 δρ. ἀγοράζει $\frac{5}{9}$ τοῦ πήχ. μὲ 1 δραχ. ἀγοράζει $\frac{5}{9\times80}$ πήχ. καὶ μὲ 450 δραχμ. ἀγοράζει $\frac{5\times450}{9\times80}$ πήχ. $= \frac{5\times5}{8}$ πήχ. $= \frac{25}{8}$ πήχ. $= 3\frac{1}{8}$ πήχ.

225)—Ἐνταῦθα ἔχομεν τὴν ἀξίαν μονάδων τινῶν (τῶν $\frac{3}{5}$ τοῦ τεμαχίου) καὶ θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος (ὅλου τοῦ τεμαχίου)· ἑπομένως θὰ διαιρέσωμεν τὴν ἀξίαν τῶν μονάδων ἤτοι τὰς 1320 δραχ. διὰ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτῶν (Ἀριθ. σελ. 124, β΄,)· ὥστε ἔχομεν 1320 δρ. : $\frac{3}{5} = \frac{1320\times5}{3}$ δρ. $=$ 2200 δρχ.

226)—Ἐνταῦθα ζητοῦμεν δοθέν τι μέρος (τὰ $\frac{2}{5}$) τοῦ ἀριθμοῦ 52· ἑπομένως θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν 52 ἐπὶ τὸ $\frac{2}{5}$ ('Αριθ. σελ. 125, α) ἤτοι $52 \times \frac{2}{5} = \frac{104}{5} = 20\frac{4}{5}$.

227)—Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $6\frac{1}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{19}{3} \times \frac{5}{8} = \frac{95}{24} = 3\frac{23}{24}$.

228)—Ἐνταῦθα θὰ διαιρέσωμεν τὸν 40 διὰ $\frac{2}{5}$ ('Αριθμ σελ. 125, β'), ἤτοι $40 : \frac{2}{5} = \frac{40 \times 5}{2} = 100$.

229) — Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν ἀριθμόν, τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ εἶναι ὁ 120· εὑρίσκομεν δὲ $120 : \frac{3}{4} = 120 \times \frac{4}{3} = 160$· καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 160 εὑρίσκομεν τὰ $\frac{5}{8}$, εἶναι δὲ $160 \times \frac{5}{8} = 100$.

230)—Ἀφοῦ εἰς 40' ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔργου εἰς 1', ἐκτελεῖ τὸ $\frac{1}{12 \times 40}$ τοῦ ἔργου καὶ εἰς 120' ποῦ ἔχουσιν αἱ 2 ὧραι, θὰ ἐκτελέσῃ $\frac{120}{12 \times 40}$ τοῦ ἔργου ἤτοι τὸ $\frac{1}{4}$.

231)—Ἀφοῦ εἰς $6\frac{1}{4}$ ὥρ. ὑφαίνει $8\frac{1}{3}$ πήχ. εἰς 1 ὥρ. ὑφαίνει $8\frac{1}{3}$ πήχ. : $6\frac{1}{4} = \frac{25}{3}$ πήχ.: $\frac{25}{4} = \frac{25}{3} \times \frac{4}{25}$ πηχ. $= 1\frac{1}{3}$ πήχ.

232)—Κενὸν εἶναι τὸ βαρέλιον κατὰ τὰ $\frac{4}{7}$ αὐτοῦ, τὰ ὁποῖα χωροῦσι 66 ὀκ. ἑπομένως ὅλον τὸ βαρέλιον χωρεῖ 66 ὀκ. : $\frac{4}{7} = 66 \times \frac{7}{4}$ ὀκ. $= 115\frac{1}{2}$ ὀκ.

233)—Ἀφοῦ εἰς 1 ὥραν καίει $28\frac{1}{2}$ δράμια, ἐπὶ μίαν ἡμέ ραν ἤτοι ἐπὶ $5\frac{3}{4}$ ὥρας καίει $28\frac{1}{2}$ δρμ. ✓ , $\frac{3}{4}$ καὶ ἐπὶ 6 ἡμέρας θὰ καύσῃ $28\frac{1}{2}$ δρμ. $\times 5\frac{3}{4} \times 6 = \frac{57}{2} \times \frac{23}{4} \times 6 = 983\frac{1}{4}$ δραμ.

234)—Ἡ χωρητικότης τοῦ ἑνὸς βαρελίου εἶναι 1 ἢ $\frac{7}{7}$ ἐνῷ τοῦ ἄλλου εἶναι $\frac{3}{7}$. Ὥστε τὰ ἐπὶ πλέον $\frac{4}{7}$ ἀντιστοιχοῦσι εἰς 252 ὀκ. καὶ τὰ $\frac{7}{7}$, ἀντιστοιχοῦσιν εἰς 252 ὀκ. : $\frac{4}{7} = \frac{252 \times 7}{4}$ ὀκ$=$ $=441$ ὀκ. καὶ τὰ $\frac{3}{7}$ ἀντιστοιχοῦσιν εἰς 441 ὀκ.$\times \frac{3}{7} = 189$ ὀκ.

235)—Αἱ $47\frac{3}{4}$ ὀκ. καφὲ ἀξίζουν $92\frac{1}{2}$ δρ. $\times 47\frac{3}{4} =$ $= \frac{185 \times 191}{2 \times 4}$ δρ. $=4416\frac{7}{8}$ δραχ. Ζάχαριν ὅμως ἠγόρασεν $47\frac{3}{4}$ ὀκ.$\times 2 = 95\frac{1}{2}$ ὀκ. τῆς ὁποίας ἡ τιμὴ κατ' ὀκᾶν εἶναι $92\frac{1}{2}$ δρ.$\times \frac{1}{5} = \frac{185}{10}$ δρ.$=\frac{37}{2}$. Ὥστε ἡ ἀξία ὅλης τῆς ζαχάρεως εἶναι $\frac{37}{2}$ δρ.$\times 95\frac{1}{2} = 1766\frac{3}{4}$ δρχ. Ἄρα ἔδωκεν ἐν ὅλῳ $4416\frac{7}{8} = 1766\frac{3}{4}$ δρ. $=6183\frac{5}{8}$ δραχ.

236)—Ἀφοῦ οἱ 6 πήχ. στοιχίζουν 310 δραχ ὁ εἷς πῆχυς στοιχίζει $\frac{310}{6}$ δρ.$=51\frac{2}{3}$ δρ. Ἐπίσης ἀφοῦ τοὺς 8 πήχ. πωλεῖ πρὸς 456 δραχ. τὸν 1 πῆχυν πωλεῖ πρὸς $\frac{456}{8}$ δρ. $=57$ δραχ. Ὥστε εἰς τὸν 1 πῆχυν κερδίζει 57 δρ.$-51\frac{2}{3}$ δρ.$=5\frac{1}{3}$ δρ. καὶ εἰς τοὺς 30 πήχ. κερδίζει $5\frac{1}{3}$ δρ.$\times 30 = 160$ δρχ.

237)—Ἀφοῦ διὰ νὰ λάβῃ $\frac{3}{5}$ τοῦ 25δράχμου, πρέπει νὰ ἐργασθῇ 1 ὥραν, διὰ νὰ λάβῃ 30, 25δραχμα πρέπει νὰ ἐργασθῇ πόσας ὥρας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 30 τὸν $\frac{3}{5}$ ἤτοι $30 : \frac{3}{5} =$ $30 \times \frac{5}{3} = 50$ ὥρας

238)—Ἀφοῦ $18\frac{2}{5}$ ὀκ. καφὲ ἐπωλήθησαν ἀντὶ $1389\frac{1}{5}$ δρχ., ἡ 1 ὀκᾶ ἐπωλήθη πρὸς $1389\frac{1}{5}$ δρ. : $18\frac{2}{5} = \frac{6946}{5}$ δρ. : $\frac{92}{5} = \frac{6946}{92}$ δρ. $= 75\frac{1}{2}$ δρχ.

239)—Τὰ μέρη τῆς περιουσίας τὰ ὁποῖα ἔλαβον, ὁ υἱὸς καὶ καὶ ἡ κόρη εἶναι $\frac{2}{5}+\frac{4}{9}=\frac{18}{45}+\frac{20}{45}=\frac{38}{45}$· ὥστε ἡ σύζυγος ἔλαβεν τὰ $\frac{45}{45}-\frac{38}{45}=\frac{7}{45}$ μέρη τῆς περιουσίας· ἀλλὰ τὰ $\frac{7}{45}$ μέρη τῆς περιουσίας εἶναι 7500 δραχ. ὥστε ὁλόκληρος ἡ περιουσία εἶναι 7500 δρ. : $\frac{7}{45}=\frac{7500\times45}{7}$ δρ. $= 48214\frac{2}{7}$· ὁ υἱὸς ἔλαβε $48214\frac{2}{7}\times\frac{2}{5} = 19285\frac{5}{7}$ δραχμ. καὶ ἡ κόρη ἔλαβε δραχμ. $48214\frac{2}{7}\times\frac{4}{9} = 21428\frac{4}{7}$.

240.—Ὅλον τὸ χρέος ἦτο $\frac{5}{5}$ καὶ ἐχάρισεν $\frac{1}{5}$ χρέους καὶ 100 δραχ. ἀκόμη· ὥστε ἂν ἐχάριζεν μόνον τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ χρέους θὰ ἐλάμβανεν 1660 δραχ. Ὥστε τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ χρέους ἦσαν 1660 δραχ. ἄρα ὅλον τὸ χρέος ἦτο 1660 δρχ. : $\frac{4}{5}=\frac{1660\times5}{5}$ δρ.$=2075$ δρ. καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ εἶναι $\frac{2075}{5}$ δρ.$=415$ δρ. Ὥστε ἐχάρισεν 415 δραχ. $=515$ δρχ.

241.—Διὰ τὰς 1200 ὀκ. σίτου ἐπλήρωσεν 4 δρ.$\times1200=4800$ δραχ. ἀπὸ τὰς 850 ὀκ. ἔλαβεν 5 δρ.$\times850=4240$ δρ. Ὥστε αἱ 1200 ὀκ.—850 ὀκ. ἤτοι αἱ 350 ὀκ. τοῦ κοστίζουν 4800 δρ.— 4250 δρ. ἤτοι 550 δρ. ἄρα ἡ 1 ὀκᾶ κοστίζει $\frac{550}{350}$ δρ. ἢ $\frac{11}{7}$ δρ $=$ $1\frac{4}{7}$ δρχ.

242.—Τὸ πρῶτον· διότι ἀφοῦ τὰ $\frac{2}{3}$ ἐπωλήθησαν 14400 δρ., τὸ $\frac{1}{3}$ ἔπρεπε νὰ πωληθῇ $\frac{14400}{2}$ δρ.$=7200$ δρ. ἐπωλήθη δὲ πρὸς 7250.

243.—Ἀφοῦ τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ, σὺν 30 μονάδας ἀποτελεῖ τὸ $\frac{1}{8}$ τοῦ ζητουμένου, ἔπεται ὅτι, τὰ μέρη ποῦ μένουν, ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{8}$ τὸ $\frac{1}{20}$, θὰ ἀντιστοιχοῦσιν πρὸς τὸν 30. Ὥστε $\frac{1}{8}-\frac{1}{20}=\frac{3}{40}$ ἤτοι τὰ $\frac{3}{40}$ τοῦ ζητουμένου εἶναι ὁ 30 καὶ ὅλος οὗτος εἶναι $30:\frac{3}{40}=\frac{30\times40}{3}=400$.

244)—Βλέπε σελ 128. Ἀριθ.

245)—Ὅταν ἀνεχώρησε τὸ καταδιῶκον ἀτμόπλοιον, τὸ πρῶτον εἶχε διατρέξει $6\frac{1}{2}$ μ.$\times15=\frac{13\times15}{2}$μ.$=97\frac{1}{2}$ μιλ.· ἀλλὰ τὸ καταδιῶκον ἀτμόπλοιον εἰς ἑκάστην ὥραν πλησιάζει τὸ πρῶτον κατὰ 8 μ.—$6\frac{1}{2}$ μ.$=1\frac{1}{2}$ μ. Ἑπομένως διὰ νὰ τὸ φθάση, θὰ περάσουν τόσαι ὧραι, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $1\frac{1}{2}$ εἰς τὸν $97\frac{1}{2}$ ἤτοι $97\frac{1}{2}:1\frac{1}{2}=\frac{195}{2}:\frac{3}{2}=\frac{195}{3}=65$ ὧραι.

246)—Ὁ ὁδοιπόρος οὗτος ἔχει νὰ διατρέξῃ εἰς 30 ἡμ.—12 ἡμ.$=18$ ἡμέρας, στάδια $700-350=350$. Ὥστε εἰς 1 ἡμέραν θὰ διατρέχει $\frac{350}{18}$ στάδ.$=19\frac{4}{9}$.

247)—Τὸ ἄθροισμα τοῦ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{1}{4}$ εἶναι $\frac{13}{12}$. Ὥστε θὰ εἶχε $\frac{13}{12}$ τῶν ὅσων ἔχει, τὰ ὁποῖα εἶναι $\frac{12}{12}$· ἤτοι θὰ εἶχεν ἐπὶ πλέον $\frac{1}{12}$ τῶν ὅσων ἔχει· ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦτο εἶναι 20 δραχμ. ὥστε τὰ ὅλα χρήματα ποῦ εἶχεν εἶναι 20 δρ. : $\frac{1}{12}=20$ δρ.$\times12=240$ δρχ.

248)—Τὸ α΄. ὑπόλοιπον εἶναι $\frac{2}{5}$· αὐτοῦ δὲ ἐδαπάνησεν τὸ $\frac{1}{4}$ ἤτοι $\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$. Ὥστε τὸ β΄. ὑπόλοιπον εἶναι

$\frac{2}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$. Ἀλλὰ καὶ αὐτοῦ ἐδαπάνησε τὰ $\frac{2}{7}$ ἤτοι $\frac{3}{10}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{35}$.

Ὥστε τὸ γ΄. ὑπόλοιπον εἶναι $\frac{3}{10}-\frac{3}{35}=\frac{21}{70}-\frac{6}{70}=\frac{15}{70}=\frac{3}{14}$.

Ἀλλὰ κατὰ τὸ πρόβλημα τὰ $\frac{3}{14}$ εἶναι 48 δρχ. ὥστε ὅλον τὸ ποσὸν εἶναι 48 δρ. : $\frac{3}{14}=\frac{48\times14}{3}$ δρ. $=16\times14=224$.

Σελ. 134)—249. Τὸ ἓν χιλιοστὸν κάμνει 10 δεκάκις χιλιοστά, τὸ ἓν ἑκατοστὸν 100 καὶ τὸ ἓν δέκατον 1000.

250)—Τὸ κατέχον τὴν 3ην θέσιν παριστᾷ χιλιοστά, τὴν 4ην δεκάκις χιλιοστά, τὴν 5ην ἑκατοντάκις χιλιοστὰ καὶ τὴν 6ην ἑκατομμυριοστά.

251)—4 ἁπλαῖ μονάδες κάμνουν 400 ἑκατοστά, 4000 χιλιοστὰ καὶ 40000 δεκάκις χιλιοστά.

252)—α) 0,348 β) 0,037 γ) 0,0405 δ) 0,00025 ε) 108,000205 στ) 71,26.

254)—$0,6=\frac{6}{10}$: $0,18=\frac{18}{100}$; $0,608=\frac{608}{1000}$; $0,005=\frac{5}{1000}$: $4,25=\frac{425}{100}$: $0,00175=\frac{175}{100000}$: $18,008=\frac{18008}{1000}$.

255)—Ὁ $7,012\times10=70,12$, $7,012\times100=701,2$, $7,012\times1000=7012$ καὶ οἱ ἄλλοι ὁμοίως.

256)—10,4 : 10=1,04, 10,4 : 100=0,104, 10,4 : 1000=0,0104 καὶ οἱ ἄλλοι ὁμοίως.

Σελ. 136) — 257) — α) = 184,326, β) = 127,83241, γ) =424,065129.

258)—Προσθέτομεν καὶ εὑρίσκομεν 1347,50 δρ.+1445,75 δρ. +2500 δρ.+987,25 δρ.=6280,50 δρ.

259)—Εἶχε τὸ ἄθροισμα τῶν ποσῶν ποῦ ἐπληρώθησαν καὶ ἐκείνου ποῦ τοῦ ἔμεινεν εἰς τὸ ταμεῖον του ἤτοι 15171,80 δρ.

260)—Θὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα 45,75 δρ. + 53,35 δρ. + +60 δρ.+54,45 δρ.+54,45 δρ.+54,45 δρ.=322,45 δρ.

261)—Τὸ ἡμερομίσθιον τῆς πρώτης ἡμέρας εἶναι 35,60 δρ.+ +17,15 δρ. = 52,75 δρ., τῆς δευτέρας εἶναι 33,75 δρ.+ 16,25 δρ. = 50 δρ. καὶ τῆς τρίτης ἡμέρας εἶναι 37,8 δρ. + +18,85 δρ.=56,65 δρ.— Ἐν ὅλῳ δὲ ἐδαπάνησε 35,60 δρ.+

+33,75 δρ.+37,8 δρ.=107,15 δρ. καὶ ἐξοικονόμησε 17,15 δρ.+ +16,25 δρ.+18,85 δρ.=52,25 δραχ.

Σεκ. 137 — 262. 1 — 0,008 = 0,992, 15—6,072=8,928, 8,9—3,569=5,331, 0,75—0,075=0,675, 25,0378 — 18,127= =6,9108, 462—268,846=193,154, 0,005—0,00059=0,00441, 1000—775,0998=224,9002.

263) 160,75 —(15,408 + 3,5157 + 103,64) = 160,75 — 122,5637 = 38,1863, 1115 — (69,07 +462,4+56+3,0005)= = 1115 — 590,4705 = 524,5295. (3109,8 + 214,527) — —(375,198+2115,0019)=3324,327—2490,1999=834,1271.

264)—Χρεωστεῖ ἀκόμη 1812,25 δρ.—697,90 δρ.=1114,35 δρ.

265) — Ὁ ἄλλος κατέθεσεν 64500 δρ.—37500,75 δρ. = =26999,25 δρ.

266)—Ἔδωκεν 200 δραχ. ἄρα ὡς ὑπόλοιπον ἔλαβεν 200 δρ,—(18,65 δρ.+78,45 δρ.+27,75 δρ.)=200 δρ.—124,85 δρ.= 75,15 δρ.

267)—Ἔδωκεν ἐν ὅλῳ 2125,50 δρ.+900 δρ.+1775,75 δρ.+ +1320,25 δρ.=6121,50 δ. Ὥστε χρεωστεῖ ἀκόμη 7105,35 δρ. 6121,50 δρ.=983,85 δρ.

268)—Ὁλικὸν κόστος τῆς οἰκίας 125000 δρ.+8164,65δρ.= = 133164,65 δρ. Ἐπώλησεν αὐτὴν ἀντὶ 107500,50 δρ. + +43325,75 δρ.=150826,25. Ὥστε κέρδος ἐκ τῆς μεταπωλήσεως 150826,25 δρ.—133164,65 δρ.=17661,60 δρχ.

269) — Πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν 1000 — 465,1578=534 8422.

270)—Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα 0,097+0,00346=0,10046.

Σελ. 139—271.

15, 747×36=566, 892	84, 86×3, 5 =297,010
68,0705×13=884,9165	5, 79×4,45 = 25,7655
768×82,003 =62978,304	2,003×1,01 = 2,02303
4×17,04285=68,17140	0, 38×0,0049= 0,001862.

272)--358, 7×0,2 =71,74 358,7×0,02=7,174 358,7× ×0,002=0,7174, 358,7×0,003=1,0761,358,7×0,03=10,761 358,7×0,3=107,61

5819,58×0, 2 = 1163, 916 κ.ο.κ. ὡς ἄνω
5819,58×0,003= 17,45874 » »
0562 ×0, 2 =14112,4 » »
5 ; = 211,686 » »

273—Ἐπλήρωσεν 4,75 δρ.×2158=10250,50 δρ.

274—Εἰς ἕνα μῆνα θὰ οἰκονομήσῃ 25,25 δρ.×30=757,50 καὶ εἰς ἓν ἔτος 25,25 δρ.×365=9216,25 δρ.

275—Ἀξίζουν 37,4 δρ.×64,5=2412,30 δρ.

276—Θὰ διανύσῃ 37,7 χιλ.×16,8=633,36 χιλ.

277—Ἐδαπάνησε 376,4 δρ.×0,35=131,74 δρ. καὶ τοῦ ἔμειναν 376,4×0,65=244,66 δρχ.

278—Ἐπώλησεν 534,50 ἑκατοντάδας πορτοκάλια καὶ εἰσέπραξεν ἀπὸ αὐτὰς 175,45 δρ.×534,5=93778,02 δρχ.

279—Πληρώνει διὰ τοὺς ἐργάτας 52,75δρ.×45=2373,75δρ. καὶ διὰ τὰς ἐργάτιδας 38,25 δρ.×63=2409,75· ὥστε ἐν ὅλῳ δι' ἡμερομίσθια μιᾶς ἡμέρας πληρώνει 2373,75 δρ.+2409,75 δρ.= =4783,50 δρ.

280—Εἰς 1 ἡμέραν οἰκονομεῖ 77,45δρ.—58,80δρ.=18,65 δρ. ὥστε εἰς ἓν ἔτος οἰκονομεῖ 18,65 δρ.×365=6807,25 δρ.

281—Οἱ 5 σάκκοι ζυγίζουσιν 31,6 ὀκ.×5=158 ὀκ.· ἄρα ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 19,65 δρ.×158=3104,70 δρ.

82 — Ἐκ τῶν 12000 χρ. δραχμ. ἐπλήρωσεν ὡς τοιαύτας 12000 δρ.×0,35=4200 χρ. δραχ. καὶ δι' αὐτὰς ἐπλήρωσεν εἰς χαρτίνας δραχμὰς 15,03 δρ.×4200=63126· ἐπλήρωσεν ὅμως καὶ 12000—4200=7800 χαρ. δραχ· ὥστε ἐν ὅλῳ ἐπλήρωσε χαρτίνας δραχμὰς 63126+7800=70926.

Σελ. 143—283.

9,09 : 9=1,01	83,5128 : 36=2,3198
0,121 :11=0,011	5,705 : 35=0,163
0,0035: 7=0,0005	0,3465 : 231=0,0015
5,0024: 8=0,6253	9,765 : 1050=0,0093

284— 0,569 : 21=0,027 3,4 : 701=0,005 $\left(0,004\frac{596}{701}\right)$

73,18 :137=0,534 76,5 : 859=0,089.

285— 24, 8 : 7=3,5429 (καθ.ὑπερ.) 206,7 :419=0,4933
142,56 :23=6,1983 » 0,572:303=0,0019
(καθ. ὑπερ.).

286— $\frac{1}{2}=0,5$, $\frac{3}{4}=0,75$, $\frac{2}{5}=0,4$, $\frac{7}{8}=0,875$, $\frac{11}{16}=0,6875$,

$\frac{9}{25}=0,36$, $\frac{19}{32}=0,59375$, $\frac{13}{40}=0,325$, $\frac{27}{64}=0\ 421875$, $\frac{111}{125}=0,888$.

287—$2\frac{3}{8}=2,375$, $3\frac{3}{12}=3\frac{1}{4}=3,25$, $7\frac{9}{20}=7,45$,

$11\frac{21}{80}=11,2625$, $5\frac{121}{200}=5,605$.

288—Σελ. 143. Ἀριθμ.

289—Ἐπώλησε τὴν μίαν ὀκᾶν 3677,20 δρ.: 232=15,85 δρ.

290—Οἱ ἐργάται ἦσαν ἐν ὅλῳ 9×7=63. Ὥστε τὸ ἡμερομίσθιον ἑνὸς ἐργάτου ἦτο 3008,25 : 63=47,75 δρ.

291—Τὰ φύλλα τοῦ βιβλίου ἦσαν 320 : 2=160· βλέπε διὰ τὰ λοιπὰ σελ. 143.

292— $\frac{3}{4}=0,75$· ὥστε 0,75+0,275=1,025.

293—$2\frac{1}{2}=2,5$. Ὥστε ἔχομεν 2,5×4,8=12.

Σελ. 145—294

0,35 : 0,7 =3,5 : 7=0,5	2 : 0,5 = 20 : 5=4
0,45 : 0,15= 45 :15=3	3 : 0,25 = 300 : 25=12
0,006 : 0,06=0,6 : 6=0,1	72 : 0,09 =7200 : 9=800
0,072 : 0,4 =0,72 : 4=0,18	144 : 0,012=144000 :12=12000

295—Διορθωτέον εἰς 2875 : 2,875 = 2875000 : 2875 = 1000
819 : 0, 0819=8190000 : 819=10000
8675,6 : 0,001=8657600 8,5604 : 0,4=85,604 : 4=21,401
345,6 : 0,064=345600 : 64=5400, 0,00027 : 11,07=0,027 : 1107=0,00002.

296—Πρέπει νὰ ἐργασθῇ 638,75:8,75=63875:875=73 ὥρας.

297—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 0,75 εἰς τὸν 2085 ἤτοι 2085:0,75==208500 : 75=2780 σωλ.

298—Ἔλαβε 884,25 δραχ. πωλήσας 884,25:7, 86=112,5 ὀκ. ὥστε ὅλος ὁ οἶνος ἦτο 112,5 ὀκ.×2=225 ὀκ.

299—Εἰς ἕκαστον πῆχυν ἐκέρδισε 57 δρ.—48,75 δρ.=8,25δρ.

ὅσας δὲ φορὰς χωρεῖ ὁ 8,25 εἰς τὸν 693 τόσους πήχεις ἐπώλησε ἤτοι 693 : 8,25=69300 : 825=84 πηχ.

300—Ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 208,80 δρ. : $5\frac{1}{2}$ = 208,8 : 5,5 = =2088 : 55=37,96 περίπου.

301—Ἐπειδὴ αἱ χάρτιναι δραχμαὶ 300,40 ἰσοδυναμοῦν πρὸς 20 χρυσᾶς, ἡ 1 χαρτίνη ἰσοδυναμεῖ πρὸς $\frac{20}{300,40}$ καὶ αἱ 1000 ἰσο δυναμοῦν πρὸς $\frac{20\times1000}{300,40}=\frac{200000}{3004}=66,57\ldots\ldots$

302—Ἐκ τῆς κριθῆς τὴν ὁποίαν ἐπώλησεν ἔλαβε $3\frac{1}{2}$ δρ.× $\times 50\frac{3}{4}$=3,5 δρ.×50,75=177,625 δρ. Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐζημιώθη 40,6 δρχ. ἔπεται ὅτι τὴν ἠγόρασεν ἀντὶ 177,625 δρ.+40,6 δρ.= =218,225 δρ. ὥστε ἠγόρασε τὴν 1 ὀκᾶν κριθῆς πρὸς 218,225δρ: 50,75=21822,5 : 5075=4,30 δρ.

Σελ, 151—303—Εἶναι οἱ

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)

304—$\sqrt{18}=4$ κατὰ προσέγ. 1 $\sqrt{64}=8$
$\sqrt{26}=5$ » » 1 $\sqrt{75}=8$ κατὰ προσέγ. 1.
$\sqrt{38}=6$ » » 1 $\sqrt{86}=9$ » » 1
$\sqrt{48}=6$ » » 1 $\sqrt{99}=9$ » » 1
$\sqrt{100}=10$.

305—$\sqrt{28}=5,2$ $\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{0,60}=0,7$.

$\sqrt{3,05}=1,7$ $\sqrt{\frac{36}{400}}=\sqrt{\frac{9}{100}}=0,3$.

306—$\sqrt{8,34}=2,8$ $\sqrt{47\frac{2}{3}}=\sqrt{47,67}=6,9$

$\sqrt{9432}=97,11$ $\sqrt{\frac{9}{7}}\doteq\sqrt{1,2857}=1,13$

307—Εἶναι ἡ $\sqrt{575}=23,97$ κατὰ προσέγ. 0,01.

308—Ἐκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ· ἤτοι ἐνταῦθα μὲ τὸ

$12^2+6^2=144+36=180$. Ἑπομένως τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούση ἰσοῦται μὲ $\sqrt{180}=13{,}41$ μ. κατὰ προσέγ. 0,01.

309—Αἱ 400 δρ. κάμνουν 40000 λεπτά, ἡ τετρ. ρίζα δὲ τοῦ 40000 δίδει τὸ ζητούμενον· εἶναι δὲ $\sqrt{40000}=200$. Ὥστε ἠγόρασε 200 ὀκ. πρὸς 200 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν.

Σελ. 156—310. Ἀφοῦ ὁ 1 μικρὸς πῆχυς=0,64 μ. οἱ 158 μικροὶ πήχεις κάμνουν 0,64 μ.×158=101,12 μέτρα.

311—1 τεκ. πῆχ. = 0,75 μ. ἄρα ἔχομεν 0,75 μ. × 285 = =213,75 μ.

312—1 μ. π.=0,64· ἄρα ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 0,64 εἰς τὸν 464 τόσους μ. πήχεις θὰ λάβωμεν ἤτοι 464 : 0,64=46400:64=725 πήχεις.

313—Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν 261 : 0,75 = 26100 : 75 = =348 τεκ. πήχεις.

314—α) $768{,}5 : 0{,}914=768500 : 914= 840\frac{370}{457}$ ὑάρδαι

β) $768{,}5 : 0{,}669=768500 : 669=1148\frac{488}{669}$ ἀρσίν.

315—Τρέπομεν πρῶτον τὰς 105,5 ὑάρδ. εἰς μέτρα εἶναι δὲ 0,914 μ.×105,5 καὶ τὰ μέτρα ταῦτα εἰς μικροὺς πήχεις ἤτοι $\frac{0{,}914\times105{,}5}{0{,}64}=\frac{91{,}4\times105{,}5}{64}=150{,}67$ μικροὶ πήχεις.

164—Οἱ 312 μικροὶ πήχεις τρέπονται εἰς μέτρα 0,64×312· ταῦτα δὲ εἰς ὑάρδας $\frac{0{,}64\times312}{0{,}914}=\frac{640\times312}{914}=218\frac{114}{457}$ ὑάρδ.

317—1 ναυτ. μίλ=1,852 χιλ. ὥστε ἔχομεν 1,852 χιλ.×117,25= =217,147 χιλ.

318—Διαιροῦμεν καὶ ἔχομεν 468,750:1,852=468750:1852= =253,10 ναυτ. μίλια περίπου.

Σελ. 157—319.— Ἕκαστον οἰκόπεδον ἀποτελεῖται ἀπὸ 1840 τ.π.:10=184 τ.π. Τρέπομεν αὐτοὺς εἰς τεκτ. τετρ. πήχ. πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ $\frac{16}{9}$· οὕτω ἔχομεν $\frac{16}{9}\times184=327\frac{1}{9}$ τεκτ. τετρ. πήχ.

320—1 ἑκτ. =10000 τετ. μέτρ.=10 στρεμ. ὥστε 25,4 ἑκτάρια ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 στρ.×25,4=254 στρεμ.

321.—15,48 βασιλ. στρέμ. ἰσοδυναμοῦσι μὲ 1000 τετραγ.

μέτρ.×15,48=15480 τετρ. μέτρα καὶ αὐτὰ ἰσοδυναμοῦσιν πρὸς 15480 : 10000=1,548 ἑκτάρια.

322.—1 παλ. στρέμμα=1,27 βασιλ. στρέμ. ὥστε 6,75 παλ. στρέμματα = 1,27 βασιλ. στρ. × 6,75 = 8,5725 βασιλ. στρεμ. Τώρα 1 βασιλ. στρ. ἐπωλήθη πρὸς 2500 δραχ.· ἄρα τὰ 8,5725 βασιλ. στρέμ. ἐπωλήθησαν πρὸς 2500 δρ.×8,5725=21431 25 δραχ.

323.—1 τετρ. πῆχεις ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τετρ. παλάμας· ὥστε τὸ δάπεδον ἀποτελεῖται ἀπὸ 100 τετρ. παλ. × 20 = 2000 τετρ. παλ. Ἐπειδὴ δὲ ἑκάστη πλὰξ ἔχει ἐπιφάνειαν 2 τετρ. παλ. ἕπεται ὅτι διὰ τὸ δάπεδον ἐχρειάσθη 2000 : 2=1000 πλάκας καὶ πρὸς 0,75 δραχ. ἡ 1 αἱ 1000 πλάκες ἀξίζουν 0,75 δρ.×1000 =750 δραχ.

Σελ. 158. 324.—α) 1 κυβ. μέτρ.=1000 κυβ. παλ.· ὥστε αἱ 7000 κυβ. παλ. ἀποτελοῦσιν 7 κυβ. μέτρα. β) 1 κυβ. μέτρον=1000000 κυβ. δάκτ. ὥστε οἱ 35000000 κυβ. δάκτ. ἀποτελοῦσιν 35 κυβ. μέτρα.

325.—1 κυβ. παλάμη=1000 κυβ. δάκτυλοι· ὥστε $1\frac{1}{4}$ κυβ. παλ. περιέχουσι 1000 κυβ. δάκ.×$1\frac{1}{4}$=1250 κυβ. δακτ. β) 1 κυβ. μέτρ.=1000000 κυβ. δάκτ. ἄρα $\frac{2}{5}$ κυβ. μέτρ. = 1000000 κυβ. δάκτ.×$\frac{2}{5}$=400000 κυβ. δάκτ.

326.—1 κυβ. μέτρον γεμίζει μὲ 1000 λίτρας· ὥστε τὰ 7,45 κυβ. μέτρ. γεμίζουν μὲ 1000 λίτ.×7,45=7450 λίτρας.

327.—1 κοιλὸν=100 κυβ. παλ.=$\frac{1}{10}$ κυβ. πήχεως· ὥστε 260 κοιλὰ καταλαμβάνουσι χῶρον $\frac{260}{10}$ κυβ. πήχ.=26 κυβ. πήχεις.

Σελ. 160—328.—α) 1 δράμιον=3,2 γραμ. ἄρα 150 δραμ.=3,2 γραμ.×150=480 γραμ. β) 1 ὀκᾶ=1280 γραμ. ἄρα $\frac{5}{8}$ τῆς ὀκᾶς =1280 γραμ.×$\frac{5}{8}$=800 γραμ.

329.—Ἀφοῦ τὰ $\frac{32}{10}$ γραμ.=1 δραμ. τὸ $\frac{1}{10}$ γραμ. = $\frac{1}{32}$

τοῦ δραμ. καὶ τὰ $\frac{10}{10}$ γραμ. ἢ 1 γραμμ $= \frac{1}{32} \times 10$ δράμ. $= \frac{10}{32}$ δράμια.

330.—Ἀφοῦ 1 γραμ. $= \frac{10}{32}$ δραμ. τὰ 320 γραμ. $= \frac{10 \times 320}{:2}$ δραμια $=100$ δραμ.

331.—Αἱ 15 ὀκ. κάμνουν 400 δραμ. $\times 15 = 6000$ δραμ. ἄρα ἔχομεν ἐν ὅλῳ 6000 δραμ. $+250$ δραμ. $=6250$ δραμ. Τώρα τὸ 1 δραμ. $=3{,}2$ γραμ ὥστε 6250 δραμ. $=3{,}2$ γραμ. $\times 6250 = 20000$ γραμ. ἤτοι 20 χιλιόγραμμα

332.—Τρέπομεν πρῶτον τὰς 48 ὀκ. εἰς χιλιόγραμμα· 1 ὀκ $=$ 1 28 χιλ. ἄρα 48 ὀκ. $=1{,}28$ χιλ. $\times 48 = 61{,}44$ χιλιόγρ. ἐπειδὴ δὲ δι' 1 χιλιόγρ. ἐπλήρωσε δασμὸν 1242,50 δραχ. διὰ τὰ 61,44 χιλιόγρ. ἐπλήρωσε δασμὸν 1242,50 δραχ. $\times$ 61,44 $=$ 76339,20 δραχμάς.

333.—1 στατ. $=44$ ὀκ. $=400$ δραμ. $\times 44 = 17600$ δραμ.· 1 χιλιόγρ. $=312{,}5$ δραμ. ἄρα ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 312,5 εἰς τὸν 17600 τόσα χιλιόγραμμα κάμνουν ἕνα στατῆρα ἤτοι 17600 $: 312{,}5 = 176000 : 3125 = 56\frac{8}{25}$ χιλ.

334.—1 πφούντιον $=500$ γραμ. ἤτοι $\frac{1}{2}$ χιλιόγρ. ὥστε 180 πφ ἰσοδυναμοῦσι μὲ 90 χιλιόγρ. Ἐπειδὴ δὲ 1 ὀκ. $=1{,}28$ χιλ., ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 1,28 εἰς τὸν 90, εἰς τόσας ὀκάδας τρέπονται τὰ 180 πφούντια· ἔχομεν ἐπομένως $90 : 1{,}28 = 9000 : 128 = 70\frac{5}{16}$ ὀκ.

335.—Τὰ 8 χιλιόγραμ. καὶ 562 γραμμ. κάμνουν 8562 γραμμ. ἐπειδὴ δὲ 1280 γραμμ. κάμνουν 1 ὀκᾶν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 1280 εἰς τὸν 8562, τόσας ὀκάδας θὰ λάβωμεν· ἤτοι $8562 : 1280 = 6\frac{441}{640}$ ὀκάδ.

336.—Ἀφοῦ ἡ λίτρα τῶν φαρμακείων εἶναι περίπου 115 δράμια· τὸ 1 δραμ. $= \frac{1}{115}$ τῆς λίτρας· ἐπίσης ἀφοῦ 1 λίτρα $=12$ οὐγγίαι, τὸ $\frac{1}{115}$ τῆς λίτρας $= \frac{12}{115}$ τῆς οὐγγίας· ἀφοῦ πάλιν ἡ 1 οὐγγία=8 δραχ. τὰ $\frac{12}{115}$ τῆς οὐγγίας=$\frac{8\times12}{115}$ δραχ. ἐπίσης 1 δραχμὴ =60 κόκκοι αἱ $\frac{8\times12}{115}$ δραχμαὶ=$\frac{60\times8\times12}{115}=50\frac{2}{23}$ κόκκοι.

Σελ. 163—337.—Τρέπονται εἰς 375 δρ.×87,25=32718,75 δρ.

338.—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 375 εἰς τὸν 55687,50· ἤτοι 55687,50 : 375=148,50 λίρας.

339.—Κάμνουσι 18,35 δρχ.×124,8=2290,08 δραχμάς.

340.—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 7345 τὸν 18,35 ἤτοι 7345 : 18,35=400,27 μάρκα περίπου.

341.—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 39,60 εἰς τὸν 6276,60 ἤτοι 6276,60 : 39,60=158,5 λίρας.

342.—α) Κάμνουσι 10,85 δρ.×1648,4=17885,14 δραχ. β) Κάμνουσι 77,25 δρ.×750=57937,50 δραχ.

343.—Κάμνουσι κορώνας Αὐστ. 11718 : 10,85 =1080, καὶ δολλάρια 11718 : 77,25=151,69.

344.—Κάμνουσι 3,02 δρ.×2147,6=6285,75 δραχ.

345.—Κάμνουσι 14,87 δρ.×1050=15613,50 δραχ.

346.—Ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 3,02 εἰς τὸν 9375,55 ἤτοι 9375,55 : 3,02=3104,48 φραγ. περίπου.

347.—Κάμνουσι 6256 : 1,36=4600 δηνάρια.

348.— » 2704,80 : 0,48=5635 λέϋ.

349.— » 12800 : 0,64=20000 λέβι.

350.— » 4,04 δρ.×7345,8=29677,03 δραχμάς.

Σελ. 167—351)—α) 15μ.=150 παλ. 150 παλ.+7 παλ.=157 παλ., 157 παλ.=1570 δακ. καὶ 1570 δακ+4δακ =1574 δακτ. β) 7238 ὀκ.=400 δρμ. × 7238=2895200 δρμ, ὥστε ἐν ὅλῳ 2895200 δρμ.+300 δρμ=2895500 δρμ. γ) 34 λίρ.=20 σελ.×34 =680 σελ., 680 σελ.+15 σελ.=695 σελ., 695 σελ.=12 πεν.×695 =8340 πεν., ὥστε ἔχομεν 34 λίρ. 15 σελ. 8 πεν.=8348 πεν. δ) 65 πηχ.=8 ρ.×65=520 ρ. ὥστε 65 πηχ. 6. ρ.=526 ρ.

352)—α) 4°=60′×4 = 240′, 240′+7′ = 247′, 247′ = 60″ ×247=14820″ ὥστε· 4° 7′ 40″ = 14860″ β) 6 ἡμ.=24 ὥρ. ×6 = 144 ὥρ., 144 ὥρ.+10 ὥρ. = 154 ὥρ., 154 ὥρ. = 60′ ×154 = 9240′, 9240′+25′ = 9265′, 9265′ = 60″×9265 = 555900″· ὥστε 6 ἡμ. 10 ὥρ. 25′ 40″ = 555940″.

353)—12 σελ.$=\frac{12}{20}$τῆς λίρας $= \frac{3}{5}$ λίρ. ὥστε 7 λίρ. 12 σελ. $=7\frac{3}{5}$ λίρ.

354)—α) εἰς λίρας.—40 γρόσια $=$ 40 παρ.$\times$40 $=$1600παρ. καὶ 1600 παρ.$+$15 παρ.$=$1615 παρ. ἐπειδὴ δὲ 1 λίρ τ. $=$ 4000 παρ˙, οἱ 1615 παράδες εἶναι τὰ $\frac{1615}{4000}$ τῆς λίρ. ἢ $\frac{323}{800}$˙ ὥστε 3 λίρ. τ. 40 γρ. 15 παρ.$=3\frac{323}{800}$ λιρ.. β) εἰς γρ. 3 λίρ.Τουρ.$=$100 γρ.$\times$ $\times$ 3 $=$ 300 γρ., καὶ 300 γρ.$+$40 γρ. $=$ 340 γρ., 15 παρ. $=$ $=\frac{15}{40}$ γρ. $=\frac{3}{8}$ γρ. ὥστε 3 λ. τ. 40 γρ.15 παρ.$=340\frac{3}{8}$ γρ.

355—Ἐπειδὴ 3 ρ.$=\frac{3}{8}$ πήχ. οἱ 20 πήχ, 3 ρ $=20\frac{3}{8}$ πήχ.

356—Ἐπειδὴ ἡ παλάμη εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ μέτρου, ὁ δάκτυλος τὸ $\frac{1}{100}$ αὐτοῦ καὶ ἡ γραμμὴ τὸ $\frac{1}{1000}$ ἔχομεν 42 μ. 8 παλ. 6 δ. 5 γρ.$=$42,865 μέτρα.

357—50′$=$60″$\times$50$=$3000″, 3000″$+$20″$=$3020″˙ ἀλλὰ 1ὥρ. $=$60″$\times$60$=$3600″˙ ὥστε 3020″ $=\frac{3020}{3600}$ ὥρ. ἢ $\frac{151}{180}$ ὥρ. καὶ ἐπομένως 5 ὥρ. 50′20″ $=5\frac{151}{180}$ ὥρ.

358—19 ὀκ.$=$400 δρμ.,$\times$19$=$7600 δρμ., 7600 δρμ.$+$250 δρμ.$=$7850 δρμ. ἀλλὰ 1 στατ.$=$400 δρμ.$\times$44$=$17600 δρμ.˙ ὥστε 7850 δρμ.$=\frac{7850}{17600}$ ὀκ. ἢ $\frac{157}{352}$ στατ.˙ καὶ ἐπομένως 3 στ. 50 δρμ.$=3\frac{157}{352}$ στατ.

359—Ἐπειδὴ 1 σελ. $=$12 πέν. τὰ 2347 πέννυ περιέχουσι σελλίνια 2347 : 12$=$195 σελλ. καὶ περισσ. 7 πέν.

360—Ἐπειδὴ 1 λίρ. ἀγγλ. $=$20 σελ., τὰ 195 σελ. περιέχουσι λίρας 195 : 20$=$9 λίρ. καὶ περισσεύουσι 15 σελ.

361—Εὕρωμεν ὅτι 2347 πέν.$=$195 σελ. 7 πέν. καὶ 195 σελ. 9 λίρ. 15 σελ. ὥστε 2347 πέν. $=$9 λίρ. 15 σελ. 7 πέν.

362—Ὁ ζητούμενος κανὼν ἀφορᾶ διδόμενον συγκεκριμμένον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Κανών. Διὰ νὰ τρέψωμεν δοθέντα συγκεκριμμένον ἀριθμόν, ὅστις ἀποτελεῖται ἀπὸ μονάδας τάξεώς τινος εἰς συμμιγῆ, τρέπομεν αὐτὸν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως διαιροῦντες διὰ τοῦ ἀριθμοῦ ὅστις δεικνύει πόσαι μονάδες τῆς δοθείσης τάξεως κάμνουν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας καὶ τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης παριστᾷ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπον μονάδας τῆς δοθείσης τάξεως· τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, τρέπομεν καθ' ὅμοιον τρόπον, εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ ἐξακολουθοῦμεν οὕτω, μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον τοῦ ὁποίου αἱ μονάδες δὲν περιέχουσι μονάδας ἀνωτέρας τάξεως. Ὁ ζητούμενος δὲ συμμιγὴς ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ τελευταῖον πηλίκον καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων.

363—α) 36 ρ=4 πήχ. 4 ρ. β) 900 δρμ.=2 ὀκ. 100 δρμ. γ) 42 σελ. = 2 λίρ. 2 σελ. δ) 108 παλ. = 1 δεκάμ. 8 παλ. ε) 468′=7 ὥρ. 48′.

364—α) 16765 δράμ.$=\frac{16765}{400}$ὀκ. ἢ 41 ὀκ. 365 δρμ. β) 10174 πέν.$=\frac{10174}{12}$σελ. ἢ 847 σελ. καὶ ὑπόλ. 10 πέν., 847 σελ.$=\frac{847}{20}=$ $=$42 λίρ. καὶ ὑπόλ. 7 σελ. ὥστε 10174 σελ. = 42 λίρ. 7 σελ. 10 πέν. γ) 232465″$=\frac{232465}{60}=$ 8874′ καὶ ὑπόλ. 25″, 3874′ = $=\frac{3874}{60}=$64 ὥρ. καὶ ὑπόλ. 34′, 64 ὥρ.$=\frac{64}{24}=$ 2 ἡμ. καὶ ὑπόλ. 16 ὥρ.· ὥστε 232465″=2 ἡμ. 16 ὥρ. 34′ 25″.

365—214816″$=\frac{214816}{60}$ ἢ 3580′ καὶ ὑπόλ. 16″, 3580′$=\frac{3580^{o}}{60}$ ἢ 59° καὶ ὑπόλ. 40′ ὥστε 214816″ = 59° 40′ 16″, β) 15311 φαρδ.$=\frac{15311}{4}$ ἢ 3827 πέν. καὶ ὑπ. 3 φ. 3827 πέν.$=\frac{3827}{12}$ σελ. ἢ 318 σελ. καὶ ὑπόλ. 11 πέν., 318 σελ.$=\frac{318}{20}$ λίρ. ἢ 15 λίρ. καὶ ὑπ. 18 σελ. ὥστε 15311 φαρ.=15 λίρ. 18 σελ. 11 πέν. 3 φαρ. γ) 45350 δράμ.$=\frac{45350}{400}$ ὀκ. ἢ 113 ὀκ. καὶ ὑπ. 150 δρμ., 113 ὀκ. $=\frac{113}{44}$ στ. ἢ 2 στ. καὶ ὑπόλ. 25 ὀκ. ὥστε 45350 δρ.=2 στ. 25 ὀκ. 150 δρμ.

Σελ. 169—366— α) $2\frac{3}{4}$ ὀκ.=2 ὀκ. 300 δρμ, β) $8\frac{1}{4}$ πήχ. = =8 πήχ. 2 ρ. γ) $6\frac{7}{12}$ ὥρ.=6 ὥρ. 35′ δ) $9\frac{3}{4}$ λίρ. ἀγγλ.=9 λ. 15 σελ.

367—α) $\frac{19}{5}$ στ. =$3\frac{4}{5}$ στ., $\frac{4}{5}=\frac{44\times4}{5}$ ὀκ. =$\frac{176}{5}$ ὀκ.=$35\frac{1}{5}$ ὀκ., $\frac{1}{5}$ ὀκ.=$\frac{400}{5}$ δρμ.=80 δρμ.· ὥστε $\frac{19}{5}$ στατ.=3 στατ. 35 ὀκ 80 δρ. β) $\frac{37}{9}$ ἡμ.=$4\frac{1}{9}$ ἡμ. ἀλλὰ $\frac{1}{9}$ ἡμ.=$\frac{24}{9}$ ὥρ.=$2\frac{6}{9}$ ὥρ. καὶ $\frac{6}{9}$ ὥρ.= =$\frac{60\times6'}{9}$=40′ ὥστε $\frac{37}{9}$ ἡμ.=4 ἡμ. 2 ὥρ. 40′, γ) $\frac{53}{15}$ ἔτη = =$3\frac{8}{15}$ ἔτη· ἀλλὰ $\frac{8}{15}$ ἔτη=$\frac{12\times8}{15}$ μην. =$6\frac{6}{15}$ μην., καὶ $\frac{6}{15}$ μην. =$\frac{30\times6}{15}$ ἡμ.=12 ἡμ. ὥστε $\frac{53}{15}$ ἔτη=3 ἔτ. 6 μην. 12 ἡμ.

368)— α) $\frac{239}{32}$ λίρ. ἀγγ. =$7\frac{15}{32}$ λίρ. ἀγγ., καὶ $\frac{15}{32}$ λίρ. ἀγγ. = =$\frac{20\times15}{32}$ σελ. =$9\frac{12}{32}$ σελ. καὶ $\frac{12}{32}$ σελ. =$\frac{12\times12}{32}$ πέν. =$4\frac{16}{32}$ πέν. καὶ $\frac{16}{32}$ πέν.=$\frac{4\times16}{32}$ φαρ.=2 φαρ. ὥστε $\frac{239}{32}$ λίρ. = 7 λίρ. 9 σελ. 4 πέν. 2 φαρ. β) $\frac{139^0}{45}=3\frac{4^0}{45}$ ἀλλὰ $\frac{4^0}{45}=\frac{60\times4'}{45}=5\frac{15'}{45}$ καὶ $\frac{15'}{45}$= =$\frac{60\times15''}{45}$=20″· ὥστε $\frac{139^0}{45}=3^0\ 5'\ 20''$.

369)—α) 4,25 ὥρ.=$4\frac{1}{4}$ ὥρ.=4 ὥρ. 15′, β) 8,375 πήχ.= =$8\frac{3}{8}$ πήχ.=8 πήχ. 3 ρ. γ) 0,45 λίρ.=45 γρ. δ) Τὰ 0,1875 τῆς ἡμέρας=24×0,1875 ὥρ.=4 καὶ 0,5 ὥρ. ἤτοι 4 ὥρ. καὶ 30′ ὥστε 15,1875 ἡμ.=15 ἡμ. 4 ὥρ. 30′.

Σελ. 170—370)—α) 1 ὀκ. 300 δρμ.+4 ὀκ. 200 δρμ.=5 ὀκ. 500 δρμ.=6 ὀκ. 100 δρμ. β) 6 πηχ. 5 ρ.+3 πηχ. 4 ρ.=9 πηχ. 9 ρ. = 10 πηχ. 1 ρ. γ) 2 λίρ. 8 σελ. 5 πέν.+3 λίρ. 7 σελ. 9 πέν.=5 λίρ. 15 σελ. 14 πέν.=5 λίρ. 16 σελ. 2 πέν.

371)—α) 3 ὑαρ. 2 ποδ. 10 δακ.+5 ὑαρ. 1 ποδ. 8 δακ.+1 ὑαρ. 7 δακ.=9 ὑαρ. 3 π. 25 δ.=10 ὑαρ. 2 ποδ. 1 δακ. β) 2 ὀργ.

3 πόδ. 7 δακ. 5 γρ.+6 ὀργ. 5 π. 9 δ. 10 γρ. = 8 ὀργ. 8 πόδ. 16 δακ. 15 γρ.=9 ὀρ. 3 π. 5 δ. 3 γρ.

372) — α) 7 δρ. 45 λ. + 3 δρ. 50 λ.+3 δρ. 20 λ.=13 δρ. 115 λ. = 14 δρ. 15 λ. β) 3 στ. 17 ὀκ. 200 δρ. +8 στ. 38 ὀκ. 200 δρμ.+3 ὀκ. 160 δρμ. = 11 στ. 58 ὀκ. 560 δρμ. = 12 στ. 15 ὀκ. 160 δρμ.

373)—Προσθέτομεν: 14 λίρ. 8 σελ. 5 πέν.+23 λίρ. 1 σελ. 11 πέν.+45 λίρ. 14 σελ. 7 πέν. 2 φαρ.+101 λίρ. 8 σελ. 2 φαρ, =183 λίρ. 26 σελ. 18 π. 4 φαρ.=184 λ. 7 σελ. 7 πέν.

374)—Μέχρι τῆς 6 Δ. 1884 παρῆλθον ἀπὸ τῆς γενν. τοῦ Χρ. 1883 ἔτ. 11 μῆν. 6 ἡμ. εἰς αὐτὰ προσθέτομεν 42 ἔτ. 5 μῆν. 12 ἡμ. καὶ εὑρίσκομεν 1926 ἔτ. 4 μῆν. 18 ἡμ. ἤτοι εἰς τὰς 18 Μαΐου 1927.

375)—Τὴν βαν ἡμέραν μετέφερε 64 στ. 25 ὀκ.+15 στ. 30 ὀκ.=79 στ. 55 ὀκ.=80 στ. 11 ὀκ., ἐνῷ τὴν γην μετέφερε 64 στ. 25 ὀκ.+80 στ. 11 ὀκ.=144 στ. 36 ὀκ. Ὥστε ἐν ὅλῳ μετέφερε 64 στ. 25 ὀκ.+80 στ. 11 ὀκ.+144 στ. 36 ὀκ. = 288 στ. 72 ὀκ. = 289 στ. 28 ὀκ.

Σελ.172—376)—α) 3 ὀκ. 200 δρμ.—2 ὀκ. 300 δρμ.=300 δρμ. β) 5 στ. — 3 στ. 15 ὀκ.= 1 στ. 29 ὀκ. γ) 23 πηχ. 3 ρ.—14 πηχ. 5 ρ. = 8 πηχ. 6 ρ. δ) 35 λίρ. Τ. 40 γρ. 20 π. — 17 λ. 60 γρ. 30 π. = 17 λ. 79 γρ. 30 π.

377)—α) 62 λίρ. ἀγγ. 10 σελ. 9 π.—29 λ. 12 σ. 7 π. 2 φ. =32 λ. 18 σελ. 1 π. 2 φ. β) 47 στ. 300 δρ.—28 στ. 25 ὀκ. =18 στ. 19 ὀκ. 300 δρ. γ) 9 ἡμ. 7 ὥρ. 35′ 15″—2 ἡμ. 14 ὥρ. 50′ 20″=6 ἡμ. 16 ὥρ. 44′ 40″.

378)—Τὸ ἠγόρασεν ἀντὶ 5 ταλ. 3 δρ. 50 λ.—1 ταλ. 4 δρ. 60 λ.=3 ταλ. 3 δρ. 90 λ.

379)—Τοῦ ἀπέμειναν 7 ὑαρ. 1 ποῦς. 7 δακ.—3 ὑαρ. 2 ποδ. 10 δ.=3 ὑαρ. 1 π. 9 δ.

380)—Ἔχομεν 1927 ἔτ. 7 μ. 11 ἡμ.—1891 ἔτ. 1 μην. 28 ἡμ.=36 ἔτ. 5 μ. 13 ἡμ. Ἀπέθανε λοιπὸν εἰς ἡλικίαν 36 ἔτ. 5 μ. 13 ἡμ.

381)—Μέχρι τῆς μεσημβρίας τὸ ταξείδιον διαρκεῖ 12 ὥρ.— 7 ὥρ. 15′=4 ὥρ. 45′ καὶ ἄλλας 4 ὥρ. 18′ μ. μ. ἐν ὅλῳ 4 ὥρ. 45′+4 ὥρ. 18=9 ὥρ. 3 .

382)—Ἀπὸ τῆς 6 ὥρ. 25′ π. μ. τῆς μιᾶς ἡμέρας μέχρι τῆς 6 ὥρ. 25′ π.μ. τῆς ἑπομένης μεσολαβοῦσιν 24 ὥρ. καὶ μέχρι τῆς 7 ὥρ. 40′ π. μ. μεσολαβοῦσιν 7 ὥρ. 40′—6 ὥρ. 25′=1 ὥρ. 15′· ἤτοι ἐν ὅλῳ 25 ὥρ. 15′.

383)—Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα 14 λ. 8 σελ. 7 πέν.+13 λίρ. 3 σελ.+48 λίρ. 15 σελ.+76 λίρ. 15 σελ. 9 πέν. =152 λ. 2 σελ. 4 πέν., ἀλλ' ἀπὸ αὐτὸ θὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἔκπτωσιν 5 λιρ. 18 σελ. 4 πέν. καὶ θὰ ἔχωμεν 152 λ. 2 σελ. 4 π —5 λ. 18 σελ. 4 πέν. =146 λ. 4 σελ.

Σελ. 173 — 384)—3 ὥρ. 15′ 44″×4 = 12 ὥρ. 60′ 176″= =13 ὥρ. 2′ 56″.

9 στ. 35 ὀκ, 240 δρμ.×9=81 στ. 315 ὀκ. 2160 δρμ. ἀλλὰ 2160 δρμ.=5 ὀκ. 160 δρ. 315 ὀκ.+5 ὀκ.=320=7 στ. 12 ὀκ. ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι 88 στ. 12 ὀκ. 160 δρμ.

2 λίρ. 17 σελ. 4 πεν. 2 φαρ.×8=16 λίρ. 136 σελ. 32 πεν. 16 φαρ.=22 λίρ. 19 σελ. διότι 16 φαρ.=4 πεν. 32 πεν+4 πέν. =36 πεν.=3 σελ., 136 σελ.+3 σελ.=139 σελ.=6 λίρ. 19 σελ.

385)—9 ἡμ. 5 ὥρ. 52′ 35″×18=162 ἡμ. 90 ὥρ. 936′ 630″ = 166 ἡμ. 9 ὥρ. 46′ 30″ διότι 630″ = 10′ 30″, 936′+ +10′=946′=15 ὥρ. 46′, 90 ὥρ. + 15 ὥρ.=105 ὥρ. = 4 ἡμ. 9. ὥρ.

12 πηχ. 6 ρ.×45=540 πηχ. 270 ρ.=573 πηχ. 6 ρ. διότι 270 ρ.=33 πηχ. 6 ρ., 14 ὑάρ. 7 δακ.×16=184 ὑάρ. 112 δακ. =187 ὑάρ. 4 δακ. διότι 112 δ.=9 π. 4 δ.=3 ὑαρ. 4 δ.

386)—Θὰ τὸ μετατρέψῃ εἰς 2 ὥρ. 25′×5=10 ὥρ. 125′= =12 ὥρ. 5′ διότι 125′=2 ὥρ. 5′.

387)—Ζυγίζουν 1 στ. 15 ὀκ. 250 δρ.×15=15 στ. 225 ὀκ. 3750 δρμ. = 20 στ. 14 ὀκ. 150 δρμ. διότι 3750 δρμ.=9 ὀκ. 150 δρ., 225 ὀκ.+9 ὀκ.=234 ὀκ.=5 στ. 14 ὀκ.

388) — Στοιχίζουν 10 λίρ. 16 σελ. 8 πεν.×21 = 210 λίρ. 336 σελ. 168 πέν.=227 λίρ. 10 σελ, διότι 168 πέν.=14 σελ., 336 σελ.+14 σελ.=350 σελ.=17 λίρ. 10 σελ.

389)—Χρειάζεται ὕφασμα 2 ὑαρ. 1 ποδ. 7 δ.×24=48 ὑαρ. 24 π. 168 δ.=60 ὑαρ. 2 π. διότι 168 δ.=14 π., 24π.+14 π.= =38 π.=12 ὑαρ. 2 π.

390)—Εἰς 1 πῆχυν ἐκέρδισε 1 λίρ. 6 σελ. 1 π.—1 λίρ. 5 σελ.

10 π.=3 πεν. ὥστε εἰς 400 πήχ. ἐκέρδισε 3π.×400=1200 π. Ἀλλὰ 240 πεν.=1 λίρ., ὥστε 1200 : 240=5 λίρ.

Σελ. 176—391—28 πηχ. 4 ρ. : 6=4 πηχ. 6 ρ. διότι 280 : 6=4 πήχ. καὶ ὑπόλ. 4 πήχ. ἀλλὰ 4 πήχ.=8 ρ.×4=32 ρ., καὶ 32 ρ.+4. ρ.=36 ρ. ὥστε 36 ρ. : 6=6 ρ.

72 λ. 7 σελ. 6 πεν. : 15=4 λ. 16 σελ. 6 πέν.

24 στ. 17 ὀκ 300 δρμ : 16=1 στ. 23 ὀκ. $43\frac{3}{4}$ δρμ.

392)—88 λίρ. 17 σελ. $1\frac{1}{2}$π. : 63 = 1 λ. 8 σελ. 2 π. 2 φ.

56 ὑάρ. 9 δ. : 30 = 1 ὑάρ. 2 π. $7\,{}^1/_2$ δ.

5 ὥρ. 37′ 12″ : 72 = 4′ 41″.

393)—Ἡ 1 ὑάρ. ἀξίζει 12 λ. 7 σελ. 10 π. : 8=1 λ. 10 σελ. 11 π. 3 φ.

394)—1 χιλιόμ. τὸ διατρέχει εἰς 1 ὥρ. 20′ : 64=1′ 15″.

395)—Ὁ 1 σάκκος ζυγίζει 10 στ. 28 ὀκ. 300 δρ. : 25=18 ὀκ. 300 δρμ.

396)—Τὸ 1 τεμάχ. ζυγίζει 1 τον. 330 χιλ. : 175 = 7 χιλ 600 γραμ.

397)—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ ἄθροισμα 40 λ. 10 σελ. 7 πεν.+65 λιρ. 19 σελ. 8 πεν.=105 λ. 29 σελ. 15 πεν.=106 λ. 10 σελ. 3 π. καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν τὸ εὑρεθὲν ἄθροισμα δι' 6 106 λ. 10 σελ. 3 π. : 6=17 λίρ. 15 σελ. 2 φ.

398)—α) 9 ὥρ. 35′ 12″×360=3451 ὥρ. 12′ διότι

ἔχομεν 9 ὥρ.×360 = 3240 ὥρ.

35′ $\begin{cases} 30' = \frac{1}{2} \text{τῆς ὥρας} = 180 \text{ ὥρ.} \\ 5' = \frac{1}{6} \text{τῶν } 30' = 30 \text{ ὥρ.} \end{cases}$

(1′ δίδει 6 ὥρας).

12″ $\left\{ \frac{1}{5} \right.$ τοῦ 1′ = $\dfrac{1 \text{ ὥρ. } 12'}{3451 \text{ ὥρ. } 12'}$

β) 4 στ. 33 ὀκ. 320 δρμ.×160=762 στ. 40 ὀκ

4 στ.×160 = 640 στατ.

: 3 ὀκ. $\begin{cases} 22 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{2} \text{ στατ.} = 80 \text{ »} \\ 11 \text{ ὀκ.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν 22 ὀκ.} = 40 \text{ »} \end{cases}$

(1 ὀκᾶ δίδει 3 στ. 28 ὀκ.)

$$320 \text{ δρ.} \left\{ \begin{array}{llr} 200 \text{ δρμ.} = \frac{1}{2} \text{ ὀκ.} & = & 1 \text{ στ.} 36 \text{ ὀκ.} \\ 100 \text{ » } = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 200 \text{ δρμ.} & = & 40 \text{ ὀκ.} \\ 20 \text{ » } = \frac{1}{5} \text{ τῶν } 100 \text{ δρμ.} & = & 8 \text{ ὀκ.} \end{array} \right.$$

$$\overline{761 \text{ στ.} 84 \text{ ὀκ.}}$$

γ) 7 λίρ. 16 σελ. 8 πέν. $\times$ 210 = 1645 λίρ.

7 λίρ. $\times$ 210 = 1470 λ.

$$16 \text{ σελ.} \left\{ \begin{array}{llll} 10 \text{ σελ.} = \frac{1}{9} \text{ λίρ.} & = & 105 \text{ »} & \\ 5 \text{ σελ.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 10 \text{ σελ.} & = & 52 \text{ »} & 10 \text{ σελ.} \\ 1 \text{ σελ.} = \frac{1}{5} \text{ τῶν } 5 \text{ σελ.} & = & 10 \text{ »} & 10 \text{ σελ.} \end{array} \right.$$

$$8 \text{ πέν.} \left\{ \begin{array}{llll} 6 \text{ πέν.} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ } 1 \text{ σελ.} & = & 5 \text{ »} & 5 \text{ σελ.} \\ 2 \text{ » } = \frac{1}{3} \text{ τῶν } 6 \text{ π.} & = & 1 \text{ »} & 15 \text{ σελ.} \end{array} \right.$$

$$\overline{1645 \text{ λίρ.}}$$

δ) 12 τάλ. 4 δρχ. 80 λεπτ. $\times$ 420 = 5443 ταλ. 1 δρχ,

12 ταλ. $\times$ 420 = 5040 τάλ.

$$4 \text{ δραχ.} \left\{ \begin{array}{lll} 2\frac{1}{2} \text{ δρ.} = \frac{1}{2} \text{ τοῦ ταλ.} & = & 210 \text{ »} \\ 1\frac{1}{4} \text{ δρ.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 2\frac{1}{2} \text{ δρ.} & = & 105 \text{ »} \\ \frac{1}{4} \text{ δρ.} = \frac{1}{5} \text{ τοῦ } 1\frac{1}{4} \text{ δρ,} & = & 21 \text{ »} \end{array} \right.$$

(1 δραχ. δίδει 84 ταλ.).

$$80 \text{ λεπ} \left\{ \begin{array}{llll} 50 \text{ λ.} = \frac{1}{2} \text{ τῆς δραχ.} & = & 42 \text{ »} & \\ 25 \text{ λ.} = \frac{1}{2} \text{ τῶν } 50 \text{ λ.} & = & 21 \text{ »} & \\ 5 \text{ λ.} = \frac{1}{5} \text{ τῶν } 25 \text{ λ.} & = & 4 \text{ »} & 1 \text{ δρ.} \end{array} \right.$$

$$\overline{5443 \text{ » } 1 \text{ δρ.}}$$

Σελ. 182—399)— α) 17 πηχ. 3 ρ.$\times\frac{3}{4}=\frac{(17\ \pi.\ 3\ \rho.)\times 3}{4}=$

$=\frac{52\ \pi.\ \ 1\ \rho.}{4}=13\ \pi\ \frac{1}{4}\ \rho,$

β) 22 ὀρ. 5 ποδ.$\times\frac{4}{5}=\frac{22\ \text{ὀρ.}\ 5\ \text{ποδ.}\times 4}{5}=\frac{91\ \text{ὀρ.}\ 2\ \pi.}{5}=18$ ὀρ.

1 π. 7 δ. $2\frac{2}{5}$ γρ.

γ) $35^{0}\,45'\,20''\times 3\frac{1}{3}=119^{0}\ 11''\ 6\frac{2''}{3}$ διότι

$35^{0}\ 45'\ 20''\times 3=107^{0}\ 16'$ καὶ $35^{0}\ 45'\ 20''\times\frac{1}{3}=11^{0}$

$55'\ 6\frac{2''}{3}$ καὶ $107^{0}\ 16'+11^{0}\ 55'\ 6\frac{2''}{3}=119^{0}\ 11'\ 6\frac{2''}{3}$.

δ) 40 στ. 32 ὀκ. 200 δρ.$\times 7\frac{9}{16}=308$ στ. 3 ὀκ. $312\frac{1}{2}$ δρμ

διότι

40 στ. 32 ὀκ 200 δρ.$\times 7=285$ στ. 7 ὀκ. 200 δρμ., 40 στ.

32 ὀκ. 200 δρ.$\times\frac{9}{16}=\frac{366\ \text{στ.}\ 28\ \text{ὀκ.}\ 200\ \text{δρ.}}{16}=22$ στ. 40 ὀκ.

$112\frac{1}{2}$ δρμ. καὶ 285 στ. 7 ὀκ. 200 δρμ. + 22 στ. 40 ὀκ.

$112\frac{1}{2}$ δρ.=308 στ. 3 ὀκ. $312\frac{1}{2}$ δρμ.

400)—α) 15 μ. 6 π. 9 δ. : $\frac{3}{5}=15$ μ. 6 π. 9 δ.$\times\frac{5}{3}=$

$=\frac{78\ \mu.\ 4\ \pi.\ 5\ \delta.}{3}=26$ μ. 1 π. 5 δ.

β) 46 τ. 3 δρ. 20 λ. : 0,8 $=\frac{46\ \tau.\ 3\ \text{δρ.}\ 20\ \lambda.\times 10}{8}=\frac{466\tau.\ 2\ \text{δρ.}}{8}=$

$=58$ τ. 1 δρ. 50 λ.

γ) 75 λίρ. 18 σελ. 60 πεν.: $2\frac{1}{2}=\frac{75\ \text{λίρ.}\ 18\ \text{σελ.}\ 6\ \pi.\times 2}{5}=$

$=\frac{151\ \lambda.\ 17\ \text{σελ.}}{5}=30$ λ. 7 σελ. 4 πέν. $3\frac{1}{2}$ φ.

δ) 3 τον. 200 χιλ. 150 γρ. : 4,5=3200,150 χιλ. : 4,6 =695,684 χιλ. περίπου.

Σελ. 191—401.—Εἶναι προβλ. πολ]σμοῦ· πολ]στέος εἶναι αἱ 80 δραχ. καὶ 75 λ. καὶ πολ]στὴς ὁ 10 πηχ. 6 ρ. ὅστις ἐπειδὴ ἐδόθη ἡ ἀξία τοῦ πήχεως τρέπεται εἰς $10\frac{6}{8}$ ἢ $10\frac{3}{4}$· ὥστε ἔχομεν $80{,}75$ δρ.$\times 10\frac{3}{4}=868$ δρ. 6 λ. $\frac{1}{4}$ λ.

402.—Οἱ πολλοὶ στατῆρες ἀξίζουν 5 δρ. 20 λ.$\times 16\frac{10240}{17600}$ ἢ $\left(16\frac{32}{55}\right)=86$ δρ. 22 λ. $\frac{6}{11}$ λ.

403.—Θὰ διατρέξῃ $14\frac{1}{2}$ μιλ.$\times 8\frac{920}{3600}$ ἢ $\left(8\frac{23}{90}\right)=119$μιλ. $\frac{127}{180}$ τοῦ μιλ.

404.—Θὰ χωρέσουν 320 ὀκ. 300 δρ.$\times 8=2566$ ὀκ.

405.-Θὰ καύσῃ 2 τ. 500 χιλ.$\times 7=17\frac{1}{2}$ τον.

406.—Ἐνταῦθα ἔχομεν πρόβλημα μετρήσεως· Οἱ 5 π. 6 δ. καὶ 5 γρ. κάμνουν 797 γρ., αἱ δὲ 120 ὀρ. τρέπονται εἰς 103680 γρ. Ὥστε ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 797 εἰς τὸν 103680, εἰς τόσας ὥρας θὰ κτίσῃ 120 ὀργυιάς· διαιροῦντες εὑρίσκομεν 130 ὥρας 5′ 16″ $\frac{148}{797}$,,.

407.—Εἶναι πρόβλημα μερισμοῦ· τρέπομεν τοὺς 18 πηχ. 3 ρ.$=18\frac{3}{8}$ π. καὶ ἔχομεν 2241 δρ. 75 λ. : $18\frac{3}{8}=\frac{2241{,}75 \text{ δρ.}\times 8}{147}$ $=122$ δραχ.

408.—Διὰ τὸν α′ ἔμπορον εὑρίσκομεν ὅτι ἐπώλησεν τὴν 1 ὀκᾶν 5,60 δρ. : $15\frac{3}{4}=3$ δρ. 33 λ. $\frac{61}{63}$ λ. καὶ διὰ τὸν β′ ὅτι ἐπώλησεν αὐτὴν 500 δρ. : $152\frac{5}{8}=3$ δρ. 27 λ. $\frac{733}{1221}$.

409.—Ἔζησεν 1869 ἔτη 6 μ. 14 ἡμ.—1854 ἔτη 21 μ.=15 ἔτη 5 μ. 23 ἡμ.

410.—Μένει ὀπίσω εἰς κάθε ὥραν 8′ 40″ : $24=21''\frac{2}{3}$.

411.—Οἱ 2 π. 6 ρ. ἔχουσι βάρος 90 ὀκ. 150 δρ.$\times 2\frac{3}{4}=248$ ὀκ. $212\frac{1}{2}$ δρ.

412.—(Διορθωτέον εἰς 42 ὀκ. 200 δρ.)—Ἀφοῦ εἰς 5 μ. καὶ 20 ἡμ. ἢ εἰς 170 ἡμ. ἐξοδεύει 42 ὀκ. 200 δρ. ζ. εἰς 1 ἡμέραν ἐξοδεύει 42 ὀκ. 200 δρ. : 170=100 δρμ. εἰς 1 μην. ἐξοδεύει 100 δρμ.×30=7 ὀκ. 200 δρ. καὶ εἰς 1 ἔτος ἐξοδεύει 7 ὀκ. 200 δρ.×12=90 ὀκ.

413.—Ἐπειδὴ ὁ μ. πῆχυς εἶναι τὰ 0,64 τοῦ μέτρου, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ τιμὴ αὐτοῦ εἶναι τὰ 0,64 τῆς τιμῆς τοῦ 1 μέτρου ἤτοι 23,44 δρ.×0,64=15 δραχ. περίπου.

414.—Αἱ 108 ὀκ. 150 δραμ. ἀξίζουν 88,80 δραχ.$\times 10\frac{3}{8}=$ =9623,70 δρ.· ὥστε θὰ πληρώσῃ ἀκόμη 9623,70 δρ.—6785,80 δρ.=2837,90.

415.—Ἀφοῦ μὲ 14490 λ. ἀγοράζει 7 ὀκ. 250 δραμ. μὲ 1 λεπτὸν ἀγοράζει $\frac{7\text{ ὀκ. }250\text{ δρ.}}{14490}$ καὶ μὲ 61870 λεπτὰ ἀγοράζει $\frac{7\text{ ὀκ. }250\text{ δ.}\times 61870}{14490}$=32 ὀκ. 223 δρμ.

Σελ. 204—415.—Ἐνταῦθα τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ἔχομεν λοιπὸν $X=\frac{112{,}50\text{ δρ.}\times 13}{3}$=37,50 δρ.×13=487,50 δραχ.

416.—Δηλαδὴ ἐὰν ἠργάζετο 15 ἡμ.+6 ἡμ.=21 ἡμ. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ἔχομεν ἑπομένως $X=\frac{845{,}25\text{ δρ.}\times 21}{15}=$ $\frac{845{,}25\text{ δρ.}\times 7}{5}$=169,05 δρ.×7=1183,35 δραχ.

417.—Ἀφοῦ εἰς 12 μ. χρειάζεται 428 ὀκ. εἰς 8 μ. χρειάζεται : $X=\frac{428\text{ ὀκ.}\times 8}{12}$ (τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα)$=\frac{428\text{ ὀκ.}\times 2}{3}=$ $\frac{856\text{ ὀκ.}}{3}$=285 ὀκ. $133\frac{1}{3}$ δρ.

418.—Τὰ 12 μανδ.=1 δωδεκάς· ὥστε ἔχομεν 65 δρ.×8,5= 552,50 δρ. ἢ $X=\frac{65\times 102}{12}$.

419.—Αἱ 2 ὀκ. 150 δρ.=950 δρμ. καὶ ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα ἔχομεν $X=\frac{125\times 950}{50}$=125 δρ.×19=2375 δρχ.

420.—Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ὥστε $X=\frac{5\frac{1}{2}\text{ ὀκ.}\times 1252{,}5}{400}$ $=\frac{11\times 1252{,}5}{800}$ ὀκ.=17 ὀκ. 88 δρ. $\frac{3}{4}$.

421.—Τὰ ποσὰ ἀνάλογα· ὥστε $X=\frac{408 \text{ χιλ.} \times 20}{12}=\frac{408\times5}{3}=$ $136\times5=680$ χιλ.

422.—62 χιλ. 400 μ.$=62{,}4$ χιλ. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ὥστε $X=5$ ὥρ.$\times\frac{62{,}4}{26}=12$ ὥρας.

423.—Τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα· ἔχομεν $X=12$ ἡμ.$\times\frac{5}{6}$ $=10$ ἡμ.

424.—Τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα· ὥστε $X=38$ ἐρ.$\times\frac{18}{12}$ $=57$ ἐργ.

425.—$\frac{7}{8}$ ὀκ.$=350$ δράμ. Τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα· ὥστε $X=27{,}50$ δραχ.$\times\frac{350}{250}=27{,}50$ δραχ.$\times\frac{7}{5}=38{,}50$ δρ.

426.—Οἱ 68 πτωχοὶ θὰ ἐλάμβανον 17,50 δρ.$\times68=1190$ δρ.· ἀλλ' αὗται ἐμοιράσθησαν εἰς 70 πτωχούς· ὥστε ἕκαστος τούτων ἔλαβε 1190 δρ. : $70=17$ δραχ.

427.—Ἡ σκιὰ τοῦ κωδωναστασίου εἶναι 22 μ. καὶ 88 ἑκατοστά· ἔχομεν λοιπὸν $X=1{,}8$ μ $\times\frac{22{,}88}{3{,}12}=13$ μ. 20 ἑκ.

428.—Τὸ πλάτος τοῦ ὑφάσματος καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ποὺ χρειάζονται διὰ τὴν ἐνδυμασίαν τῶν 80 ἀνθρώπων εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα· ἔχομεν οὕτω $X=234\ \frac{3}{16}$ πηχ. ἢ 234 πηχ. $1\ \frac{1}{2}$ ρούπια.

429.—Βλέπε σελ. 205 Ἀριθμ.

430.—Ὁ πρῶτος δι' ἓν στρέμμα πληρώνει φόρον 300 δρ. : $14=21$ δρ. 42 λεπ. $\frac{6}{7}$· ὁ δὲ δεύτερος πληρώνει 195 δρ : $7\frac{1}{2}=26$ δραχ. ὥστε βαρύτερον φορολογεῖται ὁ δεύτερος.

Σελ. 207. 431.—Τὸ 1% τῶν 200 δρ. εἶναι 2, τῶν 700 7, τῶν 450 δρ. 4,50, τῶν 50 δρ. 0,50, τῶν 25 δρ. 0,25, τῶν 20 δρ. 0,20, τῶν 10 δρ. 0,10 καὶ τῆς 1 δραχ. 0,01· τῶν 305,7 δρ. εἶναι 3,057, τῶν 428,60 4,286, τῶν 1658,5 μετρ. 16,585 καὶ τῶν 3487,5 ὀκ. 34,875.

432.—Τὸ 2% εἶναι κατὰ σειρὰν 16 δρ., 30 δρ., 5 δολ., 7,2 ὀκ., 9,72 Λ. Τ. Τὸ 3% εἶναι κατὰ σειρὰν 24 δρ., 45 δρ., 7,5 δολ., 10,8 ὀκ., 14,58 Λ. Τ. Τὸ 12% εἶναι κατὰ σειρὰν 96 δρ., 180 δρ., 30 δολ., 43,2 ὀκ., 58,32 Λ. Τ.

433.—Τὸ $\frac{1}{2}\%$ εἶναι κατὰ σειρὰν 0,50 δρ., 2 δρ., 2,40 δρ., 6,25 πηχ., 10,93 ὀκ. Ἐνῷ τὸ $1\frac{1}{2}\%$ εἶναι κατὰ σειρὰν 1,50 δρ., 6 δρ., 7,20 δρ., 18,75 πηχ., 32,79 ὀκ.

434.—Τὸ $\frac{3}{4}\%$ εἶναι κατὰ σειρὰν $\frac{3\times3}{4}=2\frac{1}{4}$ δρ., $\frac{32\times3}{4}$ $=24$ δρ. $\frac{0,80\times3}{4}=0,60$ δρ. $\frac{12,575\times3}{4}=9,43125$ λίρ. ἀγ. καὶ $\frac{10,864\times3}{4}=8,398$ ὀκ. Τὸ δὲ $3\frac{3}{4}\%$ εἶναι ἐπίσης κατὰ σειρὰν $11\frac{1}{4}$ δρ., 120 δρ., 3 δρ., 47,15625 λίρ. ἀγ., 40,990 ὀκ.

435.—Τὸ $\frac{1}{3}\%$ εἶναι κατὰ σειρὰν 3 δρ., 3,20 δρ., 1,60 δρ., 16,072 δρ., 24,131 δρ., τὸ $\frac{2}{3}\%$ εἶναι 6 δρ., 6,40 δρ., 3,20 δρ., 32,144 δρ., 48,262 δρ. καὶ τὰ $4\frac{1}{3}\%$ εἶναι 39 δρχ., 41,60 δρχ., 20,80 δρ., 208,936 δρ., 313,703 δρ.

436.—Τὰ 50% εἶναι κατὰ σειράν, 12 δρ., 40 δρ., 74,50 δρ., 129,2 δρ., 396,82 δρ. Τὰ 100% εἶναι κατὰ σειράν, 24 δρ., 80 δρ., 149 δρ., 258,4 δρ., 793,64 δρ. Τὰ 150% εἶναι κατὰ σειράν, 36 δρ., 120 δρ., 223,50 δρ., 387,6 δρ., 1190,46 δρ. Τὰ 125% εἶναι κατὰ σειράν, 30 δραχ., 100 δραχ., 186,25 δραχ., 323 δρχ. 992,05 δρ.

437.—Τὸ 1‰ εἶναι κατὰ σειρὰν 10 δρ., 25 δρ., 4,656 δρ.
» 2‰ » » » 20 δρ., 50 δρ.. 9,312 δρ.
» $2\frac{1}{2}$‰ » » 25 δρ., 62,50δρ., 11,64 δρ.

438.—Ἐκέρδισεν $\frac{8 \text{ δρ.}\times78500}{100}=8\text{δρ.}\times785=6280$ καὶ τὴν ἐπώλησε 78500 δρ.+6280 δρ.=84780 δρ.

439.—Εἰς ἕνα πῆχυν κερδίζει 60,75 δρ.—56,25 δρ.=4,50 δρ.· ἀφοῦ λοιπὸν εἰς 56,25 δραχ. κερδίζει 4,50 δρ. εἰς τὰς 100 δρ. κερδίζει ; $X=4,50 \text{ δρ.}\times\frac{100}{56,25}=8$ δρ. ἤτοι 8%.

440.—Ἀφοῦ διὰ 1000 δραχ. πληρώνει ἀσφάλιστρα $2\frac{3}{4}$ δραχ. ἐτησίως διὰ 225000 δραχ. πληρώνει ἐτησίως $2\frac{3}{4}$ δραχ. $\times\frac{225000}{1000}=618,75$ δραχ.

441.—Ἐὰν ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ἦτο 100 δραχ. θὰ ἐπλήρωνε $3\frac{1}{2}$ δραχ. ὡς ἀσφάλιστρα, ἐνῷ τώρα ποὺ ἐπλήρωσεν 896 δραχ. ἡ ἀξία τῶν ἐμπορευμάτων ἦτο 100 δραχ. $\times\frac{896}{3,5}=$ $=25600$ δραχ.

442.—Τὸ ἐνοίκιον ἑνὸς ἔτους ἦτο 2500 δραχ. $\times 12=30000$ δραχ. Ἑπομένως ἡ μεσιτεία πρὸς $2\frac{1}{4}$ δραχ. εἰς τὰς 100 ἦτο $2\frac{1}{4}$ δραχ. $\times\frac{30000}{100}=675$ δραχ.

443.—Ἐὰν ἐχρεώστει 100 δραχ. θὰ ἐπλήρωνε 55· ἀλλὰ χρεωστεῖ 400000 δραχ. ἄρα θὰ πληρώσῃ 55 δρ. $\times\frac{400000}{100}=220000$ δραχμάς.

444.—Ἐπειδὴ εἰς τὰς 100 δραχ. ἀξίαν ἐμπορεύματος ἐζημιώθη $7\frac{1}{2}$ δραχ. ἔπεται ὅτι ἐμπόρευμα ἀξίας 100 δραχ. θὰ τὸ ἐπώλει $100-7\frac{1}{2}=92\frac{1}{2}$ δρ. καὶ ἑπομένως ὅτι, τὸ ὕφασμα τὸ ὁποῖον ἐπώλησεν ἀντὶ 789,95 δραχ. εἶχεν ἀξίαν 100 δραχ. $\times\frac{789,95}{92,5}=854$ δραχ.

445.—Εἰς 100 ὀκ. μικτὸν βάρος τὸ καθαρὸν βάρος εἶναι $95\frac{1}{2}$ ὀκ. $\left(100-4\frac{1}{2}\right)$ ἄρα εἰς 875 ὀκ. μικτὸν βάρος, τὸ καθαρὸν εἶναι $95\frac{1}{2}$ ὀκ. $\times\frac{875}{100}=835$ ὀκ. 250 δρμ.

446.—Ἐὰν τὸ καθαρὸν βάρος ἦτο 96 ὀκ. (100—4), τὸ μικτὸν θὰ ἦτο 100 ὀκ.· τώρα ὅμως τὸ καθαρὸν βάρος εἶναι 609 ὀκ. 240 δρμ., ἄρα τὸ μικτὸν εἶναι 100 ὀκ. $\times\frac{609,6}{96}=635$ ὀκ (609 ὀκ. 240 δρ. $=609\frac{240}{400}$ ὀκ. $=609\frac{3}{5}$ ὀκ. $=609,6$ ὀκ.).

447.—Ἐὰν ὤφειλεν 100 δραχ. θὰ ἐπλήρωνεν 75 δραχ. (100—25), ἐνῷ τώρα ποὺ ἐπλήρωσεν 2625 δραχ. ὤφειλε 100 δραχ. $\times \frac{2625}{75} = 3500$ δραχ.

448. - Διὰ μεσιτείαν καὶ διὰ φόρον ὑπερτιμήματος ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 15%· ἑπομένως ἐὰν ἐπώλει τὴν οἰκίαν ἀντὶ 100 δρ θὰ τοῦ ἀπέμεινον 85 δρ. ἄρα τώρα ποὺ τοῦ ἀπέμεινον 327500 δραχ. τὴν ἐπώλησεν ἀντὶ 100 δραχ. $\times \frac{327500}{85} = 385000$ δραχ.

449.—Ἐὰν ἐχρησιμοποίει ἄλευρον 100 ὀκ. θὰ παρεσκεύαζεν ἄρτον 123 ὀκ. (100+23)· τώρα ποὺ παρεσκεύασεν ἄρτον 984 ὀκ. ἐχρησιμοποίησεν ἄλευρν 100 ὀκ. $\times \frac{984}{123} = 800$ ὀκ.

450.—Αἱ 450 ὀκ. καφὲ ἀξίζουν 68,70 δρ. $\times 450 = 30915$ δρ. καὶ ἐπ' αὐτῶν εὑρίσκομεν τὸ κέρδος πρὸς 9% ὅπερ εἶναι 9 δρ. $\times \frac{30915}{100} = 2782,35$ δρχ. καὶ διὰ τὸ κέρδος ἀπὸ τὴν ζάχαρην ἐργαζόμεθα ὁμοίως ἤτοι ἀξία ζαχάρεως 18,40 δρ. $\times 1250 = 23000$ δρ. καὶ κέρδος πρὸς 12,5% $= 12,5$ δραχ. $\times \frac{23000}{100} = 2875$ δραχ. ἤτοι ἐν ὅλῳ κέρδος 2782,35 δραχ. $+ 2875$ δρ. $= 5657,35$ δραχ.

Ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ εὕρωμεν τὸ ἀντιστοιχοῦν κέρδος εἰς τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς καὶ τοῦτο νὰ τὸ πολ]μεν ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀντιστοίχων ὀκάδων· οὕτω διὰ τὸ κέρδος τῆς ζαχάρεως θὰ εἴχομεν 12,5 δρ. $\times \frac{18,4}{100} = 2,30$ δραχ. καὶ 2,30 δρχ. $\times 1250$ $= 2875$ δραχ.

451.—Οἱ φόροι τῶν οἰκοδομῶν καὶ τῶν ὁδοστρωμάτων ἀνέρχονται εἰς 15,5%· ἄρα πληρώνει ἐπὶ τοῦ ἐνοικίου τῶν 38000 δραχ. 15,5 δραχ. $\times \frac{38000}{100} = 5890$ δραχ. Δι' ἀσφάλιστρα πληρώνει 2,5 δραχ. $\times \frac{500000}{1000} = 1250$ δραχ. Ὥστε ἐν ὅλῳ πληρώνει 5890 δρ. $+ 1250$ δραχ. $= 7140$ δραχ. Ὥστε τὸ φορολογητέον εἰσόδημα πρὸς 4% εἶναι 38000 δραχ — 7140 δραχ. $= 30860$ δραχ· ἑπομένως πληρώνει φόρον εἰσοδήματος 4 δραχ. $\times \frac{30860}{100} =$

$=1234,40$ δραχ. ὥστε τὸ καθαρὸν εἰσόδημα εἶναι 30680 δραχ. $-1234,40$ δραχ. $=29625,60$ δραχ.

Σελ. 213—452. Κατατάσσομεν τὰ δεδομένα καὶ τὸν ἄγνωστον καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον χωριστὰ τῶν ποσῶν τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ἡμερῶν πρὸς τὸ κέρδος εἶναι ἀνάλογα.

15 ἐρ. κερδίζ. 12000 δραχ. ἐργαζ. 20 ἡμ.
12 » X » 35 »

$$X=12000 \text{ δρ.}\times\frac{12}{15}\times\frac{35}{20}=12000 \text{ δρ.}\times\frac{7}{5}=16800 \text{ δρ.}$$

453.—Κατάταξις· 7 ἐρ. ἐργαζ. 10 ὥρ. χρειάζονται 28 ἡμ. διὰ νὰ τελ. ἓν ἔργον· 49 » » 8 » X

$$X=28 \text{ ἡμ.}\times\frac{7}{49}\times\frac{10}{8}=28 \text{ ἡμ.}\times\frac{5}{7\times4}=5 \text{ ἡμ.}$$

(ἐργάται καὶ ἡμέραι ποσὰ ἀντίστροφα ὡς καὶ αἱ ὧραι πρὸς τὰς ἡμέρας.)

454.—Μὲ 12 ὀκ. νήμ. κατασκ. 27 μ. μῆκ. καὶ 0,75 μ. πλάτ.
» 15 » » » X » » 0,8 »

$$X=\frac{27 \text{ μ.}\times15\times0,75}{12\times0,8}=31,64$$ μέτρα περίπου (νῆμα καὶ μῆκος ποσὰ ἀνάλογα, πλάτος καὶ μῆκος ἀντίστροφα.)

455.—Ταχ. βαδ. 5 ὥρας διέτρ. εἰς 12 ἡμ. 420 στάδ.
» » 8 » » » X 1200 »

$$X=12 \text{ ἡμ.}\times\frac{5}{8}\times\frac{1200}{420}=21\frac{3}{7} \text{ ἡμ.}$$

456.—Τάπης ἔχων 8 π. μῆκος 4,5 π. πλ. ἀξίζει 350 δρ.
» » 6,5 » 5 » » X

$$X=350 \text{ δρ.}\times\frac{6,5}{8}\times\frac{5}{4,5}=315,97\frac{2}{5} \text{ δρχ.}$$

457.—42 ἐργ. ἐργ. 8 ὥρ. ἐξετ. εἰς 15 ἡμ. τὰ $\frac{2}{5}$ ἔργ. τινὸς
οἱ αὐτοὶ ἐργάται » X » 18 τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἰδ. ἔργ.

$$X=8 \text{ ὥρ.}\times\frac{15}{18}\times\frac{3/5}{2/5}=\frac{8\times5\times3}{6\times2} \text{ ὥρ.}=10 \text{ ὥρας.}$$

458.—Ἀντεγ. εἰς 12 ἡμ. ἐργ. 10 ὥρ. 180 σελ. ἀπὸ 48 στ. ἀπὸ 45 γρ.
» » X » 8 270 » 50 » 48

$$X=12 \text{ ἡμ.}\times\frac{10}{8}\times\frac{270}{180}+\frac{50}{48}\times\frac{48}{45}=25 \text{ ἡμ.}$$

459.—Πλὰξ ἔχ. 1,20π.μκ.0,43π.πλ.0,025π.παχ. ζυγ. $72\frac{1}{8}$ ὀκ.
» » 1,70 » 0,65 » 0,018 » » X

$$X = 72\frac{1}{8} \text{ ὀκ.} \times \frac{17}{12} \times \frac{65}{43} \times \frac{18}{25} = 111 \text{ ὀκ. } 82 \text{ δραμ.}$$

460.—Οἱ 700 στρ. ἔχουν σιτηρέσια (σιτηρέσιον ἡ τροφὴ 1 ἡμέρας) 700×50=35000. Οἱ δὲ 240 στρατιῶται οἱ ὁποῖοι ἔφυγον ἀπὸ τὸ φρούριον συναπεκόμησαν 720 σιτηρέσια· ὥστε οἱ ἀπομείναντες 700 στρ.—240 στρ.=460 στρ. ἔχουσιν 35000 σιτ.—720 σιτ.=34280 σιτηρέσια· ὥστε θὰ καταναλώσωσι 460 σιτηρέσια τὴν ἡμέραν· θὰ ἐπαρκέσωσι λοιπὸν αἱ τροφαὶ διὰ τόσας ἡμέρας ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 460 εἰς τὸν 34280 ἤτοι 34280 : 460 =74 ἡμέραι καὶ θὰ περισεύσωσι 240 σιτηρέσια.

Σελ. 216.—461.—

Κατάταξις X ; δολ. κάμν. 900 λίρ. Τ.
ὅταν 18 λ.Τ. » 2 Ἀγγ.
καὶ 25 Ἀγγ. » 112 δολ.

ὥστε $X = \frac{112 \times 2 \times 900}{25 \times 18}$ δολ. =448 δολ.

462.—

Κατάταξις X δρ. στοιχ. 3000 ὀκ.ἄρ.
ὅταν 135 ὀκ.ἄρ.παρ.ἐξ 100 ὀκ.ἀλ.
» 180 ὀκ.ἀλ.δίδ.αἱ 225 ὀκ.σιτ.
» 1 ὀκ.σίτου ἀξ. 4,14 δρ.

ὥστε $X = \frac{4,14 \times 225 \times 100 \times 3000}{180 \times 135} =$ =11500 δραχ.

463.—

X δρ. στοιχ. 450 ὀκ. νήμ.
ὅταν 1 ὀκ. ἰσοδ.πρ. 1,28 χιλ.
» 1 χιλιογ. ἀξίζ. 5 σελλ.
» 20 σελ. κάμν. 1 λίρ.
» 1 λίρ. τιμᾶτ.375 δραχ.
»100 πρὸ τῶν ἐξ. 132 δρ. μετὰ τὰ ἔξ.

ὥστε $X = \frac{132 \times 375 \times 5 \times 1,28 \times 450}{100 \times 20} =$ =71280 δραχ,

Σελ.223—464.—Τόκος$=\frac{7875 \times 4}{100}=315$ δρ.

465.—Τόκος$=\frac{12590 \times 7 \times 8}{1200}=587$ δρ. $53\frac{1}{3}$ λ.

466.—Τόκος$=\frac{3278 \times 4,5 \times 15}{1200}=184,38$ δραχ.

467.—Βλέπε ἀριθ. σελ. 223.

468.—Τόκος$=\frac{185 \text{ λ. } 13 \text{ σελ. } 4 \text{ π.} \times 3 \times 10}{1200}=\frac{185 \text{ λ. } 13 \text{ σελ. } 4 \text{ π.}}{40}$
$=4$ λ. 12 σελ. 10 πεν.

469.—Κεφ.$=\frac{637,5 \times 1200}{9 \times 20}=4250$ δραχ.

470.—Κεφ.$=\frac{1105,50 \times 36000}{7,5 \times 165}=32160$ δραχ.

471.—Χρ.$=\frac{759,15 \times 100}{9640 \times 6,75}=1$ ἔτος 2 μῆν.

472.—Ἡμ.$=\frac{2710,80 \times 36000}{75300 \times 12}=108$ ἡμ.

473.—Ἔτ.$=\frac{500 \times 100}{500 \times 8}=\frac{100}{8}=12\frac{1}{2}$ ἔτη.

Σημ. Οἱονδήποτε κεφ. πρὸς 8%, διπλασιάζεται εἰς $12\frac{1}{2}$ ἔτη.

474.—Ἐπιτ.$=\frac{75 \text{ δρ.} \times 1200}{5000 \times 3}=6\,\%$.

475.—Ἐπιτ.$=\frac{1120 \times 100}{9600 \times 3\frac{1}{3}}=\frac{1120 \times 100 \times 3}{9600 \times 10}=3\frac{1}{2}\,\%$

476.—Ἐπιτ.$=\frac{82,50 \times 36000}{4800 \times 75}=8,25\,\%$.

477.—Βλέπε ἀριθ, σελ, 224.

478.—Βλέπε ἀριθ. σελ. 224.

479.—Τόκος τῶν 20 δραχ. εἰς 6 μ. πρὸς 7 %$=\frac{20 \times 7 \times 6}{1200}=$
$=0,7$ δραχ. ὥστε ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως$=20$ δραχ.$+0,7$ δραχ.$=$
$=20,70$ δραχ.

480,—Ἀξία οἴνου 6,25 δραχ.$\times 5500=34375$ δραχ. Εἰσέπραξε ἀπὸ τὸ ὄξος 3,5 δραχ.$\times 1250=4375$. Ἐπώλησεν οἶνον 5500 ὀκ.—(150 ὀκ.+1250 ὀκ.)=5500 ὀκ.—1400 ὀκ.=4100 ὀκ. πρὸς 8,40 δραχ. καὶ εἰσέπραξεν 8,40 δραχ.$\times 4100=34440$ δρ. Ὥστε εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 34440 δραχ.+4375 δραχ.=38815 δρ. ἄρα ἐκέρδισεν 38815 δραχ.—34375 δραχ.=4440 δραχ. Ἄρα ἐπιτ.$=\frac{4440 \times 1200}{34375 \times 8}=19,37\ldots\,\%$.

481.—Βλέπε ἀριθ. σελ. 224.

482.—Βλέπε ἀριθ. σελ. 225.

483.—Θὰ εὕρωμεν πρῶτον πόσον στοιχίζει ἡ 1 ὀκᾶ ἤτοι 1,28 χιλιόγρ. εὑρίσκομεν δὲ ὅτι ἡ ἀξία μιᾶς ὀκᾶς=5,60 δραχ. ×1,28=7,168 δραχ. Διὰ δὲ τὴν πώλησιν λέγομεν,

ἀφοῦ ἐμπόρ. ἀξίας 100 δραχ. πωλεῖται 109 δραχ.

» » 7,168 » X

$$X = 109 \text{ δραχ.} \times \frac{7{,}168}{100} = 7{,}81\ldots \text{ δραχ.}$$

484.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ κεφ. τὸ ὁποῖον τοκιζόμενον πρὸς 6 $/_0$ φέρει τόκον κατὰ μῆνα 125 δραχμάς: εἶναι δὲ $K = \frac{125 \times 1200}{6 \times 1} = 25000$. Τὸ κεφάλαιον δὲ τοῦτο πρὸς 7,5°/₀ φέρει εἰς ἕνα μῆνα τόκον$=\frac{25000 \times 7{,}5 \times 1}{1200} = 156{,}25$ δρσχ,

485.—Ἀφοῦ τὰ ἀσφάλιστρα ἦταν $\frac{3}{4}$°₀₀ κατ᾽ ἔτος ἤτοι 0,75 κατ᾽ ἔτος, ἐὰν τὸ ποσὸν διὰ τὸ ὁποῖον θὰ ἠσφάλιζεν τὴν οἰκίαν ἦτο 1000 δραχ. διὰ 4 ἔτη θὰ ἐπλήρωνε 0,75 δραχ.×4=3 δρ. ἐὰν ἡ οἰκία ἠσφαλίζετο διὰ 1000 δραχ. Ἀλλ᾽ ἐπλήρωσεν ἀσφάλιστρα 105 δραχ. διὰ 4 ἔτη· ἑπομένως ἡ οἰκία ἠσφαλίσθη διὰ τόσας χιλιάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 3 εἰς τὸν 105 ἤτοι 105 : 3=35000 δραχμάς.

486.—Εὑρίσκομεν τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. εἰς 2 ἔτη καὶ 6 μῆν. πρὸς 9°/₀· εἶναι δὲ $T = \frac{9 \times 30}{12} = 22{,}50$ δραχ. Ὥστε αἱ 100 δραχ. μετὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας γίνονται μετὰ τοῦ τόκου των 122,50 δραχ.· ἑπομένως πόσαι δρχ. μετὰ τὸν αὐτὸν χρόνον γίνονται 1500 δρ.· καὶ εὑρίσκομεν $X = 100 \text{ δρ.} \times \frac{1500}{122{,}5} = 1224{,}49$ δραχ.

487.—Εἰς τὰ 100 ἑκατομμύρια ἐκρατήθησαν 11 ½ ἑκατομ. ὥστε πραγματικῶς ἐδανείσθη πρὸς 13 °/₀ περίπου.

Σελ. 229—488.—Θὰ εὕρωμεν τὸν τόκον τῆς ὀνομ. ἀξίας 4200 δραχ. πρὸς 8,5°/₀ ἐπὶ 50 ἡμ. ἤτοι ἐξ. ὑφ.$=\frac{4200 \times 8{,}5 \times 50}{36000}$ $= \frac{7 \times 8{,}5 \times 5}{6} = 49{,}58$ δραχμαί.

489.—Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι$=\frac{12500 \times 5 \times 7{,}5}{1200} = 390{,}62$

δραχ.· ἡ δὲ προμήθεια εἶναι$=\frac{12500\times1,5}{100}=187,5$ δραχ. ὥστε τοῦ ἐκρατήθησαν 390,62 δραχ.$+$187,5 δραχ.$=$578,12 δραχ. εἰσέπραξεν ἄρα 12500 δραχ.$-$578,12 δραχ.$=$11921,88 δραχ.

490.—Ὀν. ἀξ.$=\frac{3173,36\times36000}{160\times9}=\frac{3173,36\times100}{4}=79334$ δρ.

491.—Ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις εἶναι 3781,25 δραχ.$-$3720,75 δρ. $=$60,50 δραχ. Ἔχομεν ἄρα Ἡμ.$=\frac{60,50\times36000}{3871,25\times8}=72$ ἡμέρ. ἢ 2 μήν. καὶ 12 ἡμέρ.

492.—Ἡ ἐξ. ὑφαίρεσις εἶναι 27675 δραχ.—27416,70 δραχ. $=$258,30 δραχ. Μεσολαβοῦσι δὲ ἀπὸ τῆς 2ας Ἀπριλίου μέχρι τῆς 28ης Μαΐου 56 ἡμέραι. Ὥστε ἔχομεν Ε$=\frac{258,30\times36000}{27675\times56}$ $=6\ ^0/_0$.

493.—Ἀφοῦ αἱ 100 δραχ. γίνονται μετὰ τοῦ τόκου αὐτῶν 112 δραχ. (μετὰ 2 ἔτη πρὸς $6^0/_0$) πόσαι δραχμαὶ γίνονται μετὰ τοῦ τόκου αὐτῶν 560 δρ.; Εὑρίσκομεν δὲ Κ$=\frac{100\times560}{112}=500$ δραχ. καὶ Τ$=$560 δραχ.—500 δραχ.$=$60 δραχ.

494.—Εὑρίσκομεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχ. πρὸς 6,75 $^0/_0$ ἐπὶ 5 μῆν. 10 ἡμ.· εἶναι δὲ Τ$=\frac{100\times6,75\times160}{36000}=3$ δραχμαί. Ὥστε ἂν γραμμάτιόν τι προεξοφλεῖτο πρὸ 5 μην. 10 ἡμ. πρὸς 6,75$^0/_0$ ἀντὶ 97 δραχ. (100—3) θὰ εἶχεν ὀν. ἀξ. 100 δραχμῶν· ἄρα τὸ γραμμάτιον ποὺ ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὅρους προεξοφλήθη ἀντὶ 6596 δραχ. θὰ ἔχῃ ὀν. ἀξ.$=\frac{100\times6596}{97}=6800$ δρ. (Ἴδε πρόβλημα ὅμοιον σελ. ἀριθ. 227).

495.—Θὰ εὕρωμεν πρῶτον τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν διὰ 2 μ. καὶ 10 ἡμ. ἢ 70 ἡμ. πρὸς 6$^0/_0$· εἶναι δὲ οὗτος $\frac{100\times6\times70}{36000}$ $=\frac{7}{6}$ δραχμαὶ $=1\frac{1}{6}$ δραχ. Ὥστε ὅταν ἔχῃ τις μετὰ 2 μῆνας καὶ 10 ἡμ. $101\frac{1}{6}$ δραχ. ($100+1^1/_6$) καὶ προεξοφλήσῃ σήμερον τὸ γραμμάτιόν του θὰ λάβῃ μόνον 100 δραχμὰς καὶ θὰ πληρώσῃ $1\frac{1}{6}$ δραχμάς· ὅταν ὅμως ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 2 μ. 10 ἡμ.

710 δραχμὰς θὰ πληρώση $1\frac{1}{6}\times\frac{710}{101\frac{1}{6}}=\frac{7\times710\times6}{6\times607}=8,18$ δραχ. περ. (ἢ ἀκριβέστερον 8,1878).

496.—Τοῦ γραμματίου τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίραισις εἶναι $\frac{710\times70\times6}{36000}=8,2833$, ἡ δὲ διαφορὰ τῆς ἐσωτερικῆς ἀπὸ τῆς ἐξωτ. ὑφαιρέσεως εἶναι $8,2833-8,1878=$ $=0,0955$ τῆς δραχ. Τώρα ὁ τόκος τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πρὸς 6°/₀ διὰ 2 μήν. καὶ 10 ἡμέρας εἶναι $\frac{8,1878\times70\times6}{36000}=$ $=0,0955$ ἤτοι ἴσος μὲ τὴν εὑρεθεῖσαν διαφορὰν τῆς ἐσωτ. ἀπὸ τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως.

497.—Ἐξ. ὑφ. α) γραμμ. $\frac{4000\times45\times6}{36000}=30$ δραχμαί· ὥστε παροῦσα ἀξία αὐτοῦ 4000 δραχ.—30 δραχ.=3970 δραχ. β) γραμμ. ἐξ. ὑφ. $=\frac{7500\times72\times6}{36000}=90$ δραχ. καὶ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ 7500 δραχμαὶ—90 δραχμαὶ=7410 δραχ. γ) γραμματίου ἐξωτερικὴ ὑφαιρέσις $=\frac{5000\times90\times6}{36000}=75$ δραχ. καὶ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ 5000 δραχ.—75 δραχ.=4925 δραχ. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παρ. ἀξιῶν εἶναι 3970 δραχ.+7410 δραχ.+4925 δραχ.=16305 δρ.· ἐπειδὴ δὲ ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου θὰ εἶναι 4000 δραχ.+7500 δραχ.+5000 δραχ.=16500 δραχ.· ἕπεται ὅτι ἡ διαφορά 16500 δραχ.—16305 δραχ.=195 δραχ. εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις πρὸς 6°/₀ τῶν 16500 δραχμῶν· ὁ ζητούμενος ἄρα χρόνος εἶναι $\frac{195\times36000}{16500\times6}=70$ ἡμ. ἢ 71 ἡμ.

498.—Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ κοινοῦ γραμματίου εἶναι 16305 δραχμάς. Εὑρίσκομεν δὲ τὸν τόκον τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 6 °/₀ δι᾽ 60 ἡμέρας· εἶναι δὲ οὗτος $\frac{100\times60\times6}{36000}=1$ δρχ.· ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία τῶν 99 δραχμῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὀνομαστικὴν τῶν 100 δραχμῶν· ἑπομένως ἡ παροῦσα ἀξία τῶν 16305 δραχμῶν ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὀνομαστικὴν $\frac{100\times16305}{99}=16469,69$ ἢ 16469,70.

Σελ. 233—500.—Ἔχομεν $7+9+5=21$ καὶ α) $\frac{987\times7}{21}=47$ $\times7=329$ β) $\frac{987\times9}{21}=47\times9=423$ γ) $\frac{987\times5}{21}=47\times5=235$ εἶναι δὲ $329+423+235=987$.

501.—Ἔχομεν $3+7+8+11=29$ καὶ α) $\frac{3944}{29}\times3=136\times$ $\times3=408$ β) $\frac{3944}{29}\times7=136\times7=952$ γ) $\frac{3944}{29}\times8=136\times8$ $=1088$ δ) $\frac{3944}{29}\times11=136\times11=1496$· εἶναι δὲ $408+952+$ $+1088+1496=3944$.

502.—Τοὺς ἀριθμοὺς 3, $\frac{3}{5}$, $1\frac{3}{4}$ ἢ $\frac{7}{4}$ τρέπομεν εἰς κλάσματα ὁμώνυμα $\frac{60}{20}$, $\frac{12}{20}$, $\frac{35}{20}$, τὰ ζητούμενα δὲ μέρη δὲν βλάπτονται, ἂν ἀντὶ νὰ μερίσωμεν τὸν 2675 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3, $\frac{3}{5}$, $1\frac{3}{4}$, μερίσωμεν αὐτὸν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 60, 12, 35. Οὕτω ἔχομεν $60+12+35=107$ καὶ α) $\frac{2675}{107}\times60=$ $=25\times60=1500$ β) $\frac{2675}{107}\times12=25\times12=300$ γ) $\frac{2675}{107}\times35$ $=25\times35=875$ ἄθροισμα δὲ μερῶν $1500+300+875=2675$.

503.—Τὰ ζητούμενα μέρη θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· ἤτοι τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{3}$ ἢ τῶν $\frac{6}{12}$, $\frac{3}{12}$, $\frac{20}{12}$ ἢ τῶν 6, 3, 20· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $6+3+20=29$ ἔχομεν α) $\frac{4350}{29}\times6=150\times6=900$ β) $\frac{4350}{29}\times3=150\times3=450$ γ) $\frac{4350}{29}\times20=150\times20=3000$ καὶ $900+450+3000=4350$.

504.—Βλέπε σημ. σελ. ἀριθ. 233.

505.—Ἕκαστος θὰ πληρωθῇ ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν ποὺ εἰργάσθη· θὰ μοιράσωμεν ἄρα τὰς 1200 δραχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 12, 18, 10, 8 ἢ τῶν 6, 9, 5, 4· εἶναι δὲ $6+9+5+4=24$ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ α) $\frac{1200}{24}\times6=50\times6=$

$=300$ δρ. τοῦ β) $\frac{1200}{24}\times 9=50\times 9=450$ δρ. τοῦ γ) $\frac{1200}{24}\times 5=$ $=50\times 5=250$ δρ. καὶ τοῦ δ) $\frac{1200}{24}\times 4=200$ δρ.

506)—Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον θὰ μοιράσωμεν τὰς 2000 ὀκ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 16, 3 καὶ 2, ἔχομεν διὰ τὸ νίτρον $\frac{16\times 2000}{21}=\frac{32000}{21}=1523\frac{17}{21}$ ὀκ., διὰ τὸν ἄνθρακα $\frac{3\ \ 2000}{21}=\frac{6000}{21}=285\ \frac{15}{21}$, καὶ διὰ τὸ θεῖον $\frac{2\times 2000}{21}=\frac{4000}{21}=$ $=190\frac{10}{21}$. Ἔχομεν δὲ ἄθροισμα τῶν εἰδῶν ποὺ θὰ λάβωμεν $1523\ \frac{17}{21}+285\frac{15}{21}+190\frac{10}{21}=2000$.

507)—Τὸ μερίδιον ἑκάστου θὰ εἶναι ἀνάλογον πρὸς τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν ποῦ ἔχει νὰ λάβῃ. Θὰ μοιράσωμεν ἄρα τὰς 52000 δρχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 40000, 24000, 80000 ἢ τῶν 40, 24, 80 ἢ τῶν 5, 3, 10· οὕτω ὁ α) θὰ λάβῃ $\frac{52000}{5+3+10}\times 5=\frac{130000}{9}=14444\frac{4}{9}$ ὁ β) $\frac{52000}{5+3+10}\times 3=\frac{78000}{9}=$ $=8666\frac{6}{9}$ καὶ ὁ γ) $\frac{52000}{5+3+10}\times 10=\frac{260000}{9}=28888\frac{8}{9}$· εἶναι δὲ $14444\frac{4}{9}+8666\frac{6}{9}+28888\frac{8}{9}=52000$.

508)—Τὸ ζητούμενον εὑρίσκεται ἐὰν μοιράσωμεν τὸν 24000 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 9, 15, 24 ἢ τῶν 3, 5, 8. Οὕτω ἔχομεν α) $\frac{24000}{3+5+8}\times 3=1500\times 3=4500$ δρ. β) $\frac{24000}{3+5+8}\times 5=1500\times 5=$ $=7500$ δρ. γ) $\frac{24000}{3+5+8}\times 8=1500\times 8=12000$ δρ.

509)—Ὁ γ΄ ἤνοιξε 72 μ.—(22 μ.+27 μ.)=72 μ.—49 μ.= =23 μ.· αἱ δὲ 900 δραχ. θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων ποῦ ἤνοιξεν ἕκαστος ἐργάτης· οὕτω ὁ α΄ ἔλαβεν $\frac{900}{72}\times 22=\frac{25}{2}\times 22=275$ δρ. ὁ β) $\frac{900}{72}\times 27=\frac{25}{2}\times 27=337{,}50$ δρ. καὶ ὁ γ) $\frac{900}{72}\times 23=\frac{25}{2}\times 23=287{,}50$ δρ.

510)—Τὸ φορτίον τοῦ α) αὐτοκινήτου παριστῶμεν διὰ τοῦ 1 τοῦ β) κατὰ τὸ πρόβλημα παρίσταται πάλιν διὰ τοῦ 1, τοῦ γ) διὰ τοῦ 2 καὶ τοῦ δ) διὰ τοῦ $2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$. Εὑρίσκομεν δὲ ἤδη τὸ ζητούμενον μερίζοντες τὰς 4800 ὀκ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 1, 1, 2, $\frac{4}{3}$ ἢ τῶν $\frac{3}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{4}{3}$ ἢ τῶν 3, 3, 6, 4. Εἶναι δὲ τὸ φορτίον τοῦ α) $\frac{4800}{3+3+6+4}\times 3=\frac{4800}{16}\times 3=300\times 3=900$ὀκ. τοῦ β′ πάλιν 900 ὀκ. τοῦ γ′ $\frac{4800}{3+3+6+4}\times 6=\frac{4800}{16}\times 6=300\times 6=$ $=1800$ ὀκ. καὶ τοῦ δ) $\frac{4800}{3+3+6+4}\times 4=300\times 4=1200$ ὀκ.

511)—Διένειμον δηλαδὴ τὴν κληρονομίαν ἀναλόγως τῶν $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{10}$ ἢ τῶν $\frac{10}{180}$, $\frac{19}{180}$, $\frac{15}{180}$, $\frac{18}{180}$ ἢ τῶν 10, 12, 15 18. Ἔλαβεν δὲ ὁ α′ $\frac{165000}{55}\times 10=3000\times 10=30000$ δραχ. ὁ β′) $\frac{165000}{55}\times 12=36000$ δρχ. ὁ γ) $\frac{165000}{55}\times 15=45000$ δρ. καὶ ὁ δ) $\frac{165000}{55}\times 18=54000$ δρχ.

512)—Ὁ α′. μετέφερεν 800 ὀκ. ἐξ ἀποστάσεως 8 σταδίων ἢ ὡς νὰ μετέφερεν 6400 ὀκ. ἐξ ἀποστάσεως 1 σταδίου, ὁμοίως ὁ β) 5000 ὀκ. ἐξ ἀποστάσεως 1 σταδίου καὶ ὁ γ) 8000 ὀκ.· αἱ δὲ 2500 δραχ. θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν 6400, 5000, 8000 (δηλ. ἀναλόγως τῶν γινομ. 800×8, 1000×5, 2000×4) ἢ τῶν 32, 25, 40· ἔλαβεν δὲ ὁ α) $\frac{2500\times 32}{97}=\frac{80000}{97}=824\frac{72}{97}$ ὁ β) $\frac{2500\times 25}{97}=\frac{62500}{97}=644\frac{32}{97}$ καὶ ὁ γ) $\frac{2500\times 40}{97}=\frac{100000}{97}=1030\frac{90}{97}$.

513)—Ἕκαστος ἐκ τῶν 10 ἐργατῶν εἰργάσθη 12 ἡμ. ὥστε οἱ 10 ἐργάται ἔλαβον 120 ἡμερομίσθια· ἐκ τῶν 9 ἐργατῶν εἰργάσθη ὁ καθεὶς 11 ἡμέρας· ὥστε οἱ 9 ἐργάται ἔλαβον 99 ἡμερομίσθια· οἱ δὲ 4 ἐργάται ἔλαβον 40 ἡμερομ. Τώρα θὰ μοιράσωμεν τὰς 5180 δραχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 120, 99 καὶ 40, ὁπότε θὰ εὕρωμεν πόσα θὰ λάβῃ ἑκάστη ὁμὰς ἐργατῶν· θὰ λάβῃ δὲ ἡ α′. ὁμὰς $\frac{5180}{120+99+40}\times 120=20\times 120=2400$ δμαχ. ἡ β′. $\frac{5180}{120+99+40}\times 99=1980$ δραχ. καὶ ἡ γ′. $\frac{5180}{120+99+40}\times 40=800$ δρχ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἡ α′ ὁμὰς ἀπετελεῖτο ἀπὸ 10 ἐργ., οἱ ὁποῖοι ἔλαβον 2400 δρχ., ἕκαστος τούτων θὰ λάβῃ 2400 δρ. : 10=240 δρ., ἕκαστος τῆς β' ὁμάδος θὰ λάβῃ 1980 δρ. : 9 =220 δρ. καὶ ἕκαστος τῆς γ' ὁμάδος θὰ λάβῃ 800 δρ.: 4=200 δρχ.

Σελ. 237—514)—Εὑρίσκομεν τὸ κέρδος ἑκάστου μερίζοντες τὰς 8920 δρχ. ἀναλόγως τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δραχμῶν ποῦ κατέθεσεν ἕκαστος ἤτοι τῶν 45000, 40000, 55000 ἢ τῶν 9, 8, 11, ἔλαβεν δὲ ὁ α) $\frac{8920\times9}{28}=\frac{80280}{28}=2867{,}14$ δρ. ὁ β) $\frac{8920\ 8}{28}=$ $=\frac{71360}{28}=2548{,}57$ δρ. καὶ ὁ γ) $\frac{8920\times11}{28}=\frac{98120}{28}=3504{,}29$ δρχ.

515)—Ἡ κατάθεσις ἑκάστου ἦτο ἀνάλογος τῶν κερδῶν ποῦ ἔλαβεν. Θὰ μερίσωμεν λοιπὸν τὰς 60000 δραχ. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 3000, 2500, 2000 ἢ τῶν 6, 5, 4. Κατέθεσεν δὲ ὁ α) $\frac{60000}{15}\times6=24000$ δρ., ὁ β) $\frac{60000}{15}\times5=20000$ δραχμ. καὶ ὁ γ) $\frac{60000}{15}\times4=16000$ δρ.

516)—Ἐκ τῶν ἐμπόρων ὁ γ) κατέθεσεν 120000 δραχ.—78000 δραχ. = 42000 δραχ. Ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως ἐκέρδισαν $\frac{8\times120000}{100}$ δρ.=9600 δραχ., ὁ δὲ πληρωθεὶς φόρος ἐπὶ τοῦ κέρδους $\frac{3\times9600}{100}$ δρ.=288 δρχ. ὥστε τὸ ὁλικὸν καθαρὸν κέρδος εἶναι 9600 δρ.—288=9312 δρχ., ὅπερ θὰ μοιρασθῇ ἀναλόγως τῶν καταθέσεων 45000, 33000, 42000 ἢ τῶν 15, 11, 14· ἔλαβεν δὲ ὁ α) $\frac{9312}{40}\times15=232{,}8\times15=3492$ δραχ., ὁ β) $\frac{9312}{40}\times11=$ $=232{,}8\times11=2560{,}8$ δρ. καὶ ὁ γ) $\frac{9312}{40}\times14=232{,}8\times14=$ $=3259{,}2$ δρχ.

517)—Βλέπε σημ. σελ. Ἀριθμ. 237· ἔλαβεν ὁ α' $\frac{5000\times4}{7}=$ $=\frac{20000}{7}=2857\frac{1}{7}$ δρ. καὶ ὁ β' $\frac{5000\times3}{7}=\frac{15000}{7}=2142\frac{6}{7}$ δρ.

518)—Ἀφοῦ ὁ καταθέσας 8000 δρχ. ἔλαβεν κέρδος 400 δρ.
» » 5000 » » » » »

$\times=400$ δρ. $\times\frac{5000}{8000}=250$ δραχ.· ὁμοίως καὶ διὰ τὸν γ' ομεν ὅτι ἔλαβεν 400 δρχ. $\times\frac{3500}{8000}=175$ δρχ.

519)—Τὸ κέρδος ἦτο 1200 δραχ. ὁ δὲ α' ἔλαβεν 100 δραχ. περισσοτέρας τοῦ β' ἤτοι ὁ α' ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους 650 δρχ καὶ ὁ β' 550 δρχ.· ἀλλὰ 100 δρχ. κέρδους ἀντιστοιχοῦν εἰς 560 δραχμὰς κεφάλαιον, ἑπομένως αἱ 650 δρχ. κέρδος ἀντιστοιχοῦν εἰς κεφ. 560 δρχ. $\times\frac{650}{100}=3640$ δρ. ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ β) κατέθεσεν 560 δρχ. $\times\frac{550}{100}=3080$ δραχ.

520.—

Ἀφοῦ ὁ λαβὼν κέρδος	3000 δρχ.	κατέθεσεν	26000 δρ.
οἱ λαβόντες	» 2000 »	»	$\times$

$$\times=26000 \text{ δρ.}\times\frac{2000}{3000}=17333\frac{1}{3} \text{ δραχ.}$$

521.—Αἱ πρῶται 7000 δραχμαὶ τοῦ ἐμπόρου παρέμεινον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 6 ἔτη, ἐνῷ αἱ ἄλλαι 4000 δραχμαὶ παρέμεινον ἐπὶ 1 ἔτος· αἱ δὲ 12000 δραχμαὶ τοῦ συνεταίρου παρέμεινον εἰς τὴν ἐπιχείρησιν 4 ἔτη· ἐπειδὴ δὲ $7000\times6=42000$, $4000\times1=4000$ καὶ $12000\times4=48000$· ὁ α' ἔμπορος θὰ λάβῃ 46000 μερ. καὶ ὁ β' 48000· καὶ θὰ μοιράσωμεν ἤδη τὰς 20000 δρχ. ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 46000, 48000 ἢ τῶν 23, 24· θὰ λάβῃ δὲ ὁ α' $\frac{20000\times23}{47}=9787\frac{11}{47}$ δραχ. καὶ ὁ β' $\frac{20000\times24}{47}=10212\frac{36}{47}$ δραχ.

Σελ. 241 – 522.—

Ἀξία 175 ὀκ.	6,40 δρ. $\times175=1120$ δρ.		ἄρα ἀξία 1 ὀκ.
» 215 ὀκ.	5,80 δρ. $\times215=1246$ δρ.		$\frac{3159}{500}=6{,}32$ δρ.
» 110 ὀκ.	7,20 δρ. $\times110=\ \ 792$ δρ		
» 500 ὀκ.	μίγματος 3159 δρ.		

523.—Τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν 450 ὀκ. εἶναι $\frac{450\times2}{3}=300$ ὀκάδ. καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν 300 ὀκ. εἶναι $\frac{300}{5}=60$ ὀκ.

τώρα ἀξία 300 ὀκ. 33δρ. $\times300=9900$ δραχ.
» 60 » 22,50 $\times$ $60=1350$ δραχ.
καὶ ἀξία 360 ὀκ. μίγματος 11250 δραχ.

ἤτοι ἀξία 1 ὀκᾶς 11250 δρ. : 360=31,25 δραχ.

524.—Ἀφοῦ εἰς 360 ὀκ. θέλει νὰ κερδίσῃ 1350 δραχ. εἰς 1 ὀκ. θὰ κερδίζει 1350 δρ. : 360=3,75 δραχ.· ἄρα θὸ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος 31,25 δρ.+3,75 δρ.=35 δρ.

525.—

Οἰνόπνευμα ἔρριψεν $\frac{5\times2340}{100}$ =117 ὀκάδας· ἔχομεν λοιπὸν

ἀξίαν 2340 ὀκ.οἴν. 6,80δρ.×2340=15912 δραχ.
» 117 » οἰνοπν.18δρ.× 117= 2106 δραχ.
» 380 » ὕδατ. 0 × 380= 0 »
καὶ ἀξ.2837 » μίγματος 18018 »· ἄρα ἀξία 1 ὀκ. μίγματος 18018 δραχ. : 2837=6,35 δρ. περίπου.

526.—Τὸ οἰνόπνευμα τῶν 85° περιέχει εἰς 100 λίτρ. 85 λίτρ. καθ. οἰνόπ. ἑπομένως οἰνόπνευμα τῶν 85° περιέχει εἰς 120 λίτρ. × λίτρ. καθαρ. οἰνοπν.; ἤτοι 85 λ.×$\frac{120}{100}$=102 λίτρ. καθ. οἰν. τὸ δὲ οἰνόπνευμα τῶν 40° ὅπερ εἶναι 240 λιτρῶν εὑρίσκεται ὁμοίως ὅτι περιέχει 40 λ.×$\frac{240}{100}$=96 λίτρ. καθαρὸν οἰνόπνευμα· ἑπομένως τὸ μῖγμα τῶν 120 λ.+240 λ.+630 λ. ἢ τῶν 990 λ. περιέχει καθαρὸν οἰνόπνευμα 198 λίτρας· ἄρα ἡ 1 λίτρα περιέχει τοιοῦτον $\frac{198}{990}$ τῆς λίτρας ἤτοι 0,20 αὐτῆς ἤτοι εἶναι 20°.

527.—

Ὁ καθαρὸς ἄργυρος τοῦ α′ εἶναι 0,920×220=202,4 δράμ.
» » » » β′ » 0,785×320=251,2 »

ὥστε τὸ κρᾶμα τῶν 540 δραμ. περιέχει καθαρὸν ἄργυρον 453,6 δραμ.· ἄρα εἰς 1 δραμ. περιέχεται καθαρὸς ἄργυρος $\frac{453,6}{540}$= =0,840 δρ. ἤτοι ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἶναι 0.840.

528.—Τὰ 385 γραμ. χρυσοῦ τίτλου 0,880, περιέχουν καθαρὸν χρυσὸν 0,880×385=338,8 γραμ.· ἄρα τὸ κρᾶμα τῶν 385 γρ.+140 γρ.+35 γρ. ἢ τῶν 560 γραμ. περιέχει καθαρὸν χρυσὸν 338,8 γρ.+140 γρ.=478,8 γραμ.· ἑπομένως τὸ κρᾶμα τοῦ 1 γραμ. περιέχει καθαρὸν χρυσὸν 478,8 : 560=0,855 γρ. ἤτοι ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἶναι 0,855.

529.—Ἡ ἀξία τοῦ καφὲ εἶναι 85 δρ.×158=13430 δραχ. Τὸ μῖγμα ἦτο 158 ὀκ.+39 ὀκ.=197 ὀκ. καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ αὐτοῦ ἐτιμᾶτο 69.40 δρ. ἕπεται ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ὅλου μίγματος ἦτο 69,40 δραχ. ×197=13671,80 δραχ. Ἐὰν ἤδη ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν ἀξίαν τοῦ ὅλου μίγματος τὴν ὅλην ἀξίαν τοῦ καφὲ εὑρίσκομεν τὴν ἀξίαν τῶν 39 ὀκ. κριθῆς, ἥτις εἶναι 13671,80 δρ.—13430 δραχ.=241,80 δραχ.· ἄρα ἡ 1 ὀκ. κριθῆς τιμᾶται 241,80 δρ. : 39=6,20 δραχ.

530.—Τὰ 52 γραμ. χρυσοῦ τίτλου 0,895 περιέχουν καθαρὸν χρυσὸν 0,895×52=46,54 γραμ. Τὸ κρᾶμα τῶν 52 γρ.+76 γρ. +32 γρ.=160 γρ. τίτλου 0,640 περιέχει καθαρὸν χρυσὸν 0,640 ×160=102,40 γραμ. Ἐπομένως ἂν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν καθαρὸν χρυσὸν ποὺ περιέχεται εἰς τὸ ὅλον κρᾶμα, τὸν καθαρὸν χρυσὸν ποὺ περιέχεται εἰς τὰ 52 γραμ. θὰ εὕρωμεν τὸν καθαρὸν χρυσὸν ποὺ περιέχεται εἰς τὰ 76 γραμ. (διότι ὁ χαλκὸς δὲν περιέχει χρυσόν)· ὥστε εἰς τὰ 76 γραμ. περιέχεται καθαρὸς χρυσὸς 102,40 γρ.—46,54 γρ.=55,86 γρ.· ὥστε εἰς τὸ 1 γραμ. περιέχεται καθαρὸς χρυσὸς 55,86 γραμ. : 76=0,735 γραμ.· ἤτοι ὁ ἄγνωστος τίτλος εἶναι 0,735.

531.—

Κατάξις α) δρ. 5,40   0,60 ἢ 12 α) $\frac{2480\times12}{31}=960$ ὀκ.

τιμὴ μίγματος   4,45

β) δρ. 3,85   0,95 $\frac{19}{31}$ β) $\frac{2480\times19}{31}=1520$ ὀκ.

2480 ὀκ.

532.—

Κατ. α) ἄν. οἶν. 100^0 16 ἢ 1 α) $\frac{450\times1}{4}=112\frac{1}{2}$ ὀκ.

μῖγμα   52

β)   36   48 $\frac{3}{4}$ β) $\frac{450\times3}{4}=337\frac{1}{2}$ ὀκ.

450

533.—Ἡ ἀξία τοῦ μίγματος κατ' ὀκᾶν εἶναι 10080 δραχ. : : 144=70 δραχ.

Κατάτ. α) βούτ. 84δρ.   34 ἢ 17 α) $\frac{144\times 17}{24}=102$ ὀκ.

μῖγμα 70 δρ.

β) λῖπος 36δρ.   14 $\frac{7}{24}$ β) $\frac{144\times 7}{24}=42$ ὀκ.

$\overline{144}$ ὀκ.

534.—Βλέπε Ἀριθ. σελ. 243.

535.—Βλέπε Ἀριθ. σελ. 243.

536.—Ἡ τιμὴ τοῦ α′ εἴδους διορθωτέα εἰς 5,20 δρ.

Κατάτ. α) 5,20   0,40 ἢ 1

μῖγμα 4 δρ.

β) 3,60   1,20   3

ἀμέσως δὲ βλέπομεν ὅτι ἡ ποσότης ποὺ λαμβάνει ἐκ τοῦ α′ εἴδους εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ποσότητος ποὺ λαμβάνει ἐκ τοῦ β′ εἴδους· καὶ ἀφοῦ ἐξ αὐτοῦ θὰ λάβῃ 1200 ὀκ. ἕπεται ὅτι ἐκ τοῦ α′ εἴδους θὰ λάβῃ 1200 ὀκ. : 3=400 ὀκ.

537.—Ὁ ἔμπορος οὗτος ἐκ τῶν 1200 ὀκ., ποὺ θέτει εἰς τὸ μῖγμα κερδίζει 480 δραχ. διότι εἰς τὴν 1 ὀκᾶν ἔχει κέρδος 4 δρ.—3,60 δραχ.=0,40 δραχ.· Ὥστε ἐπειδὴ θέλει νὰ κερδίσῃ 300 δραχ. πρέπει νὰ βάλῃ εἰς τὸ μῖγμα ἐκ τοῦ α′ εἴδους τόσας ὀκάδας, ὥστε νὰ ἔχῃ ἀπὸ αὐτὰς ζημίαν μόνον 180 δραχ. (διότι 480 δραχ.—300 δραχ.=180 δραχ.)· ἀλλὰ ἀπὸ τὴν 1 ὀκᾶν τοῦ α′ εἴδους χάνει εἰς τὸ μῖγμα 5,20 δραχ.—4 δραχ.=1,20 δρ. Ἄρα θὰ βάλῃ ἐκ τοῦ α′ εἴδους τόσας ὀκάδας, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 1,20 εἰς τὸν 180 ἤτοι 180 : 1,20=150 ὀκ.

538.—Κατάτ. α) βούτυρον 76 δρ.   31,40 ἢ 157

μῖγμα 55,40δρ.

β) λίπος 24 δρ.   20,60   103

ὥστε ἐὰν βάλῃ 157 ὀκ. βούτυρον θὰ βάλῃ λίπος 103 ὀκ.

τώρα ὅμωςποὺ θὰ» 200 »   »   »   »   »   X

$$X=103 \text{ ὀκ.}\times\frac{200}{157}=131 \text{ ὀκ. } 84 \text{ δράμ.}$$

Σελ. 245 - 539.—Τὰς ἑπομένας 10 ἡμέρας διέτρεξε 40 μιλ.· ὥστε εἰς τὰς 13 ἡμ. διέτρεξε 10 μ.+8 μ.+7 μ.+40 μ.=65 μ.·

ἑπομένως καθ' ἑκάστην διέτρεχε κατὰ μέσον ὅρον 65μ. : 13=5μ.

540.—Ὁ μέσος ὅρος εἶναι (42000 δρ.+40000 δρ.+45000 δρ.) : 3=127000 δρ. : 3=42333 $\frac{1}{3}$ δρ.

541.—Κατὰ τοὺς 3 μῆνας τοῦ θέρους ἔλαβεν ἐνοίκια 650 δραχ.×3=1950 δραχ. καὶ κατὰ τοὺς ἐπιλοίπους 9 μῆνας ἔλαβεν 550 δραχ.×9=4950 δραχ.· ἄρα κατὰ τοὺς 12 μῆνας ἔλαβεν ἐνοίκια 1950 δραχ.+4950 δραχ.=6900 δραχ. καὶ καθ' ἕκαστον μῆνα ἔλαβεν κατὰ μέσον ὅρον ἐνοίκιον 6900 δρ. : 12=575 δραχ.

542.—Κατὰ τὰ 4 ταξείδια μετέφερεν ἐν ὅλῳ ξυλάνθρακας 105 στ. 30 ὀκ.+95 στ. 15 ὀκ.+120+75 στ. 28 ὀκ.=396 στ. 29 ὀκ.· ἄρα εἰς ἕκαστον ταξείδιον μετέφερεν κατὰ μέσον ὅρον ξυλάνθρακας 396 στ. 29 ὀκ. : 4=99 στ. 7 ὀκ. 100 δράμ.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΗΝ ΠΡ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΝ

Ι. ΧΑΤΖΗΔΑΚΗ 7η ΕΚΔΟΣΙΣ

Σελ. 4—1) καὶ 2)—Ὁ κύβος ἔχει 8 κορυφὰς καὶ 12 ἀκμάς.

Σελ. 7 1)—Τὸ Ι παριστᾶ εὐθεῖαν, τὰ Γ, Δ, Ζ Λ ,Μ, Ν, Π, Σ, Χ παριστῶσι τεθλασμένας γραμμάς, τὸ Ο καμπύλην καὶ τὰ Ρ καὶ Ω μικτάς γραμμάς.

2)—Τὸ σχῆμα τῆς μικτῆς γραμμῆς.

3)—Ὅταν περικλείει ἓν μέρος ἐπιφανείας τὸ ὁποῖον τελειώνει πανταχόθεν εἰς τὴν τεθλασμένην ἢ καμπύλην γραμμήν· ἄλλως λέγεται ἀνοικτή.

Σελ. 20—1)—Αἱ ἀπέναντι.

2)—Αἱ δύο εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας κόπτει τὸ πάτωμα καὶ τὴν ὀροφὴν καθὼς καὶ αἱ ἄλλαι δύο εὐθεῖαι εἰς τὰς ὁποίας κόπτει τοὺς ἄλλους τοίχους.

3)—Τοιαῦται ἀκμαὶ εἰς τὸν κύβον ὑπάρχουν εἰς τὰς ἀπέναντι ἕδρας, ὧν ἡ μία κόπτει τὰς πρὸς τὴν ἄλλην παραλλήλους ἀκμάς,

4)—Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $^2/_3$ τῆς ὀρθῆς εἶναι ἡ γωνία β (σχ. 31)· τότε ἡ α ἡ ὁποία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς β ($\alpha+\beta=$ 2 ὀρθαὶ) εἶναι $^4/_3$ τῆς ὀρθῆς $\left(\frac{6}{3}-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\right)$· ὥστε $\beta=\delta=\zeta=\vartheta$ $=^2/_3$ τῆς ὀρθῆς (σημ. σελ. 19) καὶ $\alpha=\gamma=\varepsilon=\eta=^4/_3$ τῆς ὀρθῆς.

Σελ. 21—1)—12 διέδρους καὶ 8 τριέδρους.

2)—4 διέδρους.

3)—Προσθέτομεν δύο διέδρους γωνίας ἐὰν θέσωμεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης, οὕτως ὥστε νὰ συμπέσωσιν αἱ ἀκμαὶ καὶ δύο ἕδραι αὐτῶν, ἐνῷ αἱ ἄλλαι δύο ἕδραι νὰ εὑρίσκωνται εἰς δια φορετικὰ μέρη τῆς κοινῆς· τότε ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι ἡ δίεδρος γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἄκρας ἕδρας (αἱ ὁποῖαι τελειώνουν εἰς τὴν κοινὴν ἀκμήν).

Διὰ τὴν διαφορὰν δύο διέδρων γωνιῶν, ἐφαρμόζομεν τὰς ἀκμάς των καὶ μίαν ἕδραν τῆς μιᾶς μὲ μίαν ἕδραν τῆς ἄλλης· ἀλλ' ἡ δευτέρα ἕδρα τῆς μικροτέρας διέδρου νὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς μεγαλυτέρας· τότε δὲ ἡ δίεδρος γωνία ποὺ σχηματίζουν αἱ δεύτεραι ἕδραι (ποὺ δὲν συνέπεσαν), εἶναι ἡ διαφορὰ αὐτῶν.

Σελ. 24 —2)—Ἡ τομὴ δύο τοίχων δωματίου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ πάτωμα.

3)—Ἡ γραφὶς ἢ τὸ μολυβδοκόνδυλον εἶναι πλαγία ὡς πρὸς τὸ τετράδιον, ὅταν γράφωμεν.

4)—Ἡ τομὴ τῆς ὀροφῆς καὶ ἑνὸς τοίχου εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ πάτωμα.

5)—Αἱ ἀκμαὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ κύβου αἱ ὁποῖαι εἶναι ἐμπρός ὀπίσω, δεξιὰ καὶ ἀριστερὰ εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν κάτω ἕδραν αὐτοῦ, καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτὴν εἶναι αἱ ἀκμαὶ τῆς ἄνω ἕδρας τοῦ κύβου.

Σελ. 25—1)—Οἱ τοῖχοι ἑνὸς δωματίου ἔχουσι διεύθυνσιν κατακόρυφον.

2)—Αἱ ἀκμαὶ τῆς ὀροφῆς καὶ τοῦ πατώματος δωματίου εἶναι ὁριζόντιαι, ἐνῷ αἱ ἄλλαι εἶναι κατακόρυφοι.

3)—Ὅταν κρέμαται εἰς τὸν τοῖχον ἔχει κατακόρυφον διεύθυνσιν καὶ πλαγίαν ὅταν στηρίζεται ἐπὶ τοῦ τρίποδος.

4)— Οἱ τηλ/κοὶ στῦλοι ἔχουσι διεύθυνσιν κατακόρυφον, καὶ τὰ τηλ/κὰ σύρματα ὁριζόντιον

5) — Αἱ στέγαι τῶν οἰκιῶν ἔχουσι διεύθυνσιν πλαγίαν, ὡς καὶ αἱ πλευραὶ σκάφης.

Σελ. 28) — 1 καὶ 2 βλέπε Πρ. Γεωμ.

Σελ. 29) — Ὁριζοντίαν.

2)—Αἱ ἄλλαι ἕδραι καὶ αἱ ἄλλαι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος ἔχουσιν ἐν γένει πλαγίαν διεύθυνσιν· ἀπὸ δὲ τὰς ἕδρας αὐτὰς καὶ τὰς ἀκμάς, μόνον δύο ἕδραι καὶ μία ἀκμὴ δύνανται νὰ εἶναι κατακόρυφοι.

Σελ 34)— 1 — Αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι τοῦ ὀρθ. τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα 1 ὀρθὴν ἢ $\frac{3}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἀφοῦ λοιπὸν ἡ μία ἀπ' αὐτὰς εἶναι $\frac{2}{3}$, ἡ ἄλλη εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

2)— Ὅλαι αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρ. ἢ $\frac{14}{7}$ τῆς ὀρθῆς.' ὥστε αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα $\frac{14}{7}-\frac{6}{7}=\frac{8}{7}$ τῆς ὀρθῆς· καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι μεταξύ των (διότι εἶναι γωνίαι, ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγώνου) ἡ κάθε μία ἀπ' αὐτὰς εἶναι $\frac{4}{7}$ τῆς ὀρθῆς.

3)— Αἱ δύο μαζὺ ἴσαι γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα $\frac{10}{8}$ τῆς ὀρθῆς καὶ ἐπειδὴ αἱ 3 γωνίαι τοῦ τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα $\frac{16}{8}$ τῆς ὀρθῆς, ἔπεται ὅτι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς εἶναι $\frac{16}{8}-\frac{10}{8}=\frac{6}{8}$ ἢ $\frac{3}{4}$ τῆς ὀρθῆς.

4)— Εἰς τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον γνωρίζομεν, ὅτι αἱ 3 γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ ἀφοῦ αἱ 3 μαζὺ κάμνουν 2 ὀρθάς, ἡ 1 κάμνει $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς.

5)— Ἀφοῦ ἡ μία γωνία εἶναι $\frac{3}{8}$ τῆς ὀρθῆς, ἡ ἄλλη εἶναι $\frac{3}{8}$ τῆς ὀρθῆς : 3 ἤτοι $\frac{1}{8}$ τῆς ὀρθῆς, ἤτοι αἱ δύο μαζὺ κάμνουν $\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{4}{8}$ ἢ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ὥστε ἡ τρίτη γωνία εἶναι 2 ὀρ. $-\frac{1}{2}$ ὀρ. $= 1\frac{1}{2}$ ὀρ.

6)— Ἡ τρίτη γωνία εἶναι $\frac{14}{7}-\frac{9}{7}=\frac{5}{7}$ τῆς ὀρθῆς.

7)— Ὅταν προεκταθῶσιν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου σχηματίζονται, περὶ κάθε κορυφὴν τοῦ τριγώνου 4 γωνίαι, ἀπὸ τὰς ὁποίας δύο εἶναι ἐξωτερικαί, ἡ μία ἐσωτερικὴ γωνία καὶ ἡ ἄλλη κατὰ κορυφὴν αὐτῆς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν 4 αὐτῶν εἶναι 4 ὀρθαὶ γωνίαι. Ἔχομεν λοιπὸν 12 ἐν ὅλῳ γωνίας, αἱ ὁποῖαι ἔχουσιν ἄθροισμα 12 ὀρθῶν. Ἀλλ' ἐκ τῶν 12 γωνιῶν αἱ 3, αἱ ἐσωτερικαὶ γωνίαι καὶ αἱ 3, αἱ κατὰ κορυφὴν αὐτῶν ἔχουσιν ἄθροισμα

4 ὀρθῶν· ὥστε αἱ ἄλλαι 6 γωνίαι ἔχουσιν ἄθροισμα 12 ὀρ.— 4 = 8 ὀρ.

Σελ 39—1) — Ἂν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ Ε, Ζ, Η, Θ, τὰ τρίγωνα ΑΘΕ, ΕΒΖ, ΖΓΗ, ΗΔΘ εἶναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, διότι καθενός, ἡ μὲν μία κάθετος πλευρὰ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου (ΑΒ), ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρά, τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τῆς καθέτου πρὸς τὴν πρώτην (ΑΔ)· ὥστε ἔχομεν ΕΖ = ΖΗ = ΗΘ = ΘΕ· αἱ δὲ ἀντικριναὶ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου εἶναι παράλληλοι· διότι ἂν φέρωμεν τὴν διαγώνιον ΕΗ, αὕτη διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο τρίγωνα ἰσοσκελῆ καὶ ἴσα τὰ ΘΕΗ καὶ ΕΗΖ (γν. 1ον σελ. 35)· ἐπομένως αἱ περὶ τὴν κοινὴν βάσιν ΕΗ γωνίαι εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ δύο εὐθεῖαι ὡς αἱ ΘΕ καὶ ΗΖ ἢ αἱ ΘΗ καὶ ΕΖ, αἵτινες ὅταν κόπτωνται ὑπὸ τρίτης σχηματίζουν δύο ὀξείας γωνίας ἴσας κ.τ.λ. εἶναι παράλληλοι (ἴδ. β. σελ. 19) Ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ῥόμβος.

2)— Ἡ ἀπέναντι πρὸς τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εἶναι $\frac{3}{5}$ τῆς ὀρθῆς· (§. 41, β) καὶ αἱ δύο μαζὺ εἶναι $\frac{6}{5}$ τῆς ὀρθῆς· ἀλλ' αἱ 4 γωνίαι τοῦ παρλ/μου εἶναι 4 ὀρθαὶ ἢ $\frac{20}{5}$ ὀρ.· ἄρα αἱ ἄλλαι 2 εἶναι $\frac{20}{5}-\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$ ὀρ., καὶ κάθε μία τῶν ἴσων τούτων γωνιῶν εἶναι $\frac{7}{5}$ ὀρθῆς

3)— Τραπέζιον, διότι μόνον δύο ἀπέναντι πλευραὶ αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι.

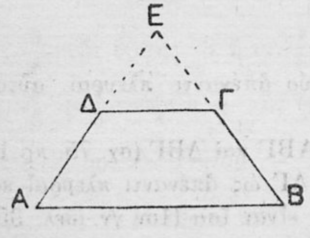
Σελ. 41 – 1) Διότι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΒΓ (σχ. 75. πρ.1.) ἔχουν τὴν ΒΓ κοινὴν τὴν ΑΒ = ΔΓ ὡς ἀπέναντι πλευραὶ καὶ τὴν ΑΓ = ΒΔ ὡς μᾶς ἐδόθη· ἄρα εἶναι ἴσα (1ον γν. σελ. 35). Καὶ ἐπομένως γων. Β = γων. Γ· ἀλλὰ γων. Β = γων. Δ καὶ γων. Γ = γων. Α (σελ. 40 πρ. Γ,). Ἤτοι καὶ αἱ 4 γωνίαι τοῦ παρλ/μου αὐτοῦ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπειδὴ ἔχουσιν ἄθροισμα 4 ὀρθάς, ἕπεται ὅτι κάθε μία ἰσοῦται μὲ μίαν ὀθὴν δηλ. τὸ παραλ/μον τοῦτο εἶναι ὀρθογώνιον.

2)— Διότι τὰ τρίγωνα ΑΔΚ καὶ ΔΚΓ (σχ. 76) εἶναι ἴσα ἐπειδὴ ΔΚ κοινή, ΑΚ = ΚΓ καὶ αἱ περὶ τὸ Κ γωνίαι ὀρθαί, ἄρα ΑΔ = ΔΓ, ἀλλὰ ΑΔ = ΒΓ καὶ ΔΓ = ΑΒ ἤτοι ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΑ.

3)— Διότι ἡ διαγώνιος ΑΓ (σχ. 73) σχηματίζει τὰ ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, διότι ΑΓ κοινή, ΑΒ = ΔΓ καὶ ΑΔ = ΒΓ ὡς ἐδόθη· ἀλλὰ τότε γων. ε = γων. ζ καὶ ἑπομένως αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι (ἰδ. β σελ. 19) καὶ γων. η=γων. θ· ἄρα καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

4)— Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 65) δίδεται γων. Α = γων. Γ καὶ γων. Δ = γων. Β· ἀλλὰ γων. Α + γων. Β + γων. Γ + γων. Δ = γων. Α + γων. Β + γων. Α + γων. Β = 4 ὀρ. ἤτοι 2 γων. Α + 2 γων. Β = 4 ὀρ. καὶ γων. Α + γων. Β = 2 ὀρθαί. Ἀλλ' αἱ γωνίαι Α καὶ Β σχηματίζονται ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ αἱ ὁποῖαι κόπτονται ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἐπειδὴ δὲ δὲν εἶναι αἱ γωνίαι αὗται ἐφεξῆς καὶ ἔχουσιν ἄθροισμα 2 ὀρθῶν, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι· ὁμοίως εὑρίσκεται γων. Α + γων Δ = 2 ὀρ.
ἄρα αἱ ΔΓ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλα ἤτοι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

5) Εἰς τὸ τραπέζιον ἂν Α = Β ἢ ΑΔΓ = ΒΓΔ θὰ εἶναι ΑΔ = ΓΒ· διότι ἂν προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς αὐτοῦ μέχρις ὅτου συναντηθοῦν εἰς τὸ Ε, σχηματίζεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΕΑΒ· διότι ἂν δοθῇ Α = Β εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι ἰσοσκελές· ἂν δὲ δοθῇ ΑΔΓ = ΒΓΔ αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων αὐτῶν, ΕΔΓ καὶ ΕΓΔ εἶναι ἴσαι, ἄρα εἶναι ἴσαι μεταξύ των καὶ αἱ Α καὶ Β, διότι αἱ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι· ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ φαίνεται ὅτι καὶ τὸ τρίγωνον ΕΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· ἂν δὲ ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ΕΑ καὶ ΕΒ ἀφαιρεθῶσιν αἱ ἴσαι ΕΔ καὶ ΕΓ μένουν αἱ ἴσαι ΔΑ καὶ ΓΒ ἤτοι τὸ τραπέζιον τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές.



Σελ. 43 — 1 — Ἔχει 6 στερεάς, 10 διέδρους καὶ 10 ἀκμάς.

2) — 12 διέδρους καὶ 7 στερεάς.

3) — Τὴν τετραπλευρικὴν εἰς 2, τὴν πενταγωνικὴν εἰς 3 καὶ τὴν ἑξαγωνικὴν εἰς 4.

4) — Βλ. πρ. Γ.

Σελ. 45 — 1) — $2\times8-4=16-4=12$ ὀρθάς.

2) — $2\times10-4=20-4=16$ ὀρθάς.

3) — $2\times16-4=32-4=28$ ὀρθάς.

4) — Ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα εἶναι 14 ὀρθ., ἕπεται ὅτι ἂν ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ ζητουμένου πολυγώνου φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους του, θὰ σχηματισθῶσιν 7 τρίγωνα· καὶ ἐπειδὴ γνωρίζωμεν, ὅτι μὲ τὸν τρόπον αὐτόν, σχηματίζονται 2 τρίγωνα ὀλιγώτερα, ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν, ἕπεται ὅτι τὸ πολύγωνον τοῦτο ἔχει $7+2=9$ πλ.

5) — Ὡς προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι ἔχει $(12:2)+2=6+2=8$ πλευράς.

6) — Αἱ 5 γωνίαι τοῦ πενταγώνου ἔχουσιν ἄθροισμα $2\times5-4=10-4=6$ ὀρθάς· ἄρα ἡ 5η γωνία εἶναι 6 ὀρ. $-5\frac{1}{2}$ ὀρ. $=\frac{1}{2}$ ὀρθῆς.

7) — Τὸ ἄθροισμα τῶν 7 γων. τοῦ ἑπταγώνου εἶναι $2\times7-4=10$ ὀρ.· ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἄλλων 3 γωνιῶν του εἶναι 10 ὀρ. — 6 ὀρ $=4$ ὀρθ.

Σελ. 53 — 1) — Ἡ γωνία διπλασιάζεται τριπλασιάζεται κτλ.

2) — Μία ὀρθὴ ἐγγεγραμμένη γωνία βαίνει εἰς τὸ ἥμισυ τῆς περιφερείας. (§ 72)

3) — βλ. § 73.

4) — Ἀφοῦ ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος εἶναι $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς· ἀλλὰ τὸ τόξον ποὺ βαίνει 1 ὀρθὴ ἐπίκεντρος γωνία ἢ $\frac{3}{3}$ εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς περιφερείας ἑπομένως ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἥτις εἶναι τὰ $\frac{4}{3}$ τῆς ὀρθῆς ἢ ἡ ἀντίστοιχος ἐγγεγραμμένη ἥτις εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς βαίνει εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς περιφερείας.

5) — Ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος ἡ ὁποία βαίνει εἰς τὸ $\frac{1}{8}$ τῆς περιφερείας εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς· ἄρα ἡ ἐγγεγραμμένη ἥτις εἶνε τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου ταύτης εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς ὀρθῆς.

Σελ. 93—1)—Ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν χάρτην μὲ μῆκος $\frac{8000}{30000}$ μ. $=\frac{4}{15}$ τοῦ μέτρου.

2) — Εἰς τὸ ἔδαφος ἀντιστοιχεῖ μὲ 40χιλ.$\times$5000=200000 χιλ. ἢ 200 μέτρα.

3) — Τὸ μὲν μῆκος θὰ ἔχει εἰς τὸν χάρτην $\frac{48}{2000}=24$ χιλ τοῦ μέτρου. τὸ δὲ πλάτος $\frac{15}{2000}=7^1/_2$ χιλιοστὰ αὐτοῦ.

Σελ. 108) — 1) — Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ οἰκοπέδου εἶναι 7$\times$16 =112 τετρ. τεκτ. πήχεις.

2) — Τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο βάσεων τοῦ τραπεζίου εἶναι 123μ.+232,6μ. : 2=355,6 : 2=177,8μ. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 177,8$\times$85=15113 τετρ. μέτρα ἢ 15 βασιλ. στρέμματα καὶ 113 τετρ. μέτρα.

3) — Τὸ δωμάτιον ἔχει ἐμβαδὸν 5$\times$3=15 τετρ. μέτρα· κάθε δὲ σανὶς ἔχει ἐμβαδὸν 2,5$\times$0,8=2 τετρ. μέτρα· ἄρα ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 2 εἰς τὸν 15, τόσας σανίδας θὰ χρειασθῶμεν, ἤτοι $7^1/_2$ σαν.

4) — Ἡ αὐλὴ ἔχει ἐμβαδὸν 18$\times$7,2=129,6 τετρ. μέτρα· ἑκάστη δὲ τετραγωνικὴ πλὰξ ἔχει ἐμβαδὸν 0,25$\times$0,25=0,0625 τοῦ τετρ. μέτρου. Ὥστε θὰ χρειασθῶμεν πλάκας 129,6 : 0,0625 =2073,6 πλ. ἢ 2074

5)— Τὸ οἰκόπεδον εἶχεν ἐμβαδὸν 18,3$\times$12=219,6 τετρ. τεκτ. πήχεις· καὶ ἀφοῦ ὅλοι αὐτοὶ ἐπωλήθησαν ἀντὶ 25000 δρχ., ὁ 1 ἐπωλήθη ἀντὶ 25000 : 219,6=113,84 δρχ.

6) — Τὸ χωράφιον σχήματος τετραγώνου εἶχεν ἐμβαδὸν 18 $\times$18=324 τετρ. μέτρα. Ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου ἦτο 18μ. $\times$4=72μ.· ἤτοι ἡ ἡμιπερίμετρος 72μ. : 2=36μ, δηλ. τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου· ἀλλ' ἀφοῦ τὸ πλάτος ἦτο 10 μέτρα, τὸ μῆκος ἦτο 26 μ. ἤτοι τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ ἦτο 26$\times$

10=260 τετρ.μέτρα. Ὥστε ἡ ἀνταλλαγὴ δὲν ἔγεινε δικαίως καὶ ἐζημιώθη ὁ λαβὼν τὸ ὀρθογώνιον κατὰ 324 τ. μ.—260 τ. μ.= 64 τετρ. μέτρα.

7)—Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ λιβαδίου αὐτοῦ εἶναι 185×78 : 2=7215 τετρ. μέτρ. ἢ βασ. στρέμματα 7 καὶ 215 τ. μ.

8)—Ὅλος ὁ κῆπος ἔχει ἐμβαδὸν 25×14,8=270 τετρ. μέτρα· ὁ εἷς δρόμος ἔχει μῆκος 25μ. καὶ πλάτος 1μ. ἤτοι ἐμβαδὸν 25 τετρ. μέτρα, ἐνῷ ὁ ἄλλος ἔχει μῆκος 14,8μ. καὶ πλάτος 1μ. ἤτοι ἐμβαδὸν 14,8 τετρ. μέτρα· ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῶν δύο δρόμων εἶναι 25 τ. μ. + 14,8 τ. μ. — 1 τ. μ = 38,8 τ. μ (ἀφαιροῦμεν τὸ 1 τ. μ. τοῦ κοινοῦ ἐμβαδοῦ τῆς διασταυρώσεως, διότι ὑπελογίσθη δίς). ὥστε τὰ 4 ἴσα μέρη τοῦ κήπου ἔχουσιν ἐμβαδὸν 370 τ. μ.— 38,8 τ. μ = 331,2 τ. μ.· ἄρα τὸ 1 μέρος ἔχει ἐμβαδὸν 331,2 τ. μ. : 4=82,8 τετρ. μέτρα.

9)— Ὁ τοῖχος ἔχει ἐμβαδὸν 12×8=96 τ. μ. ἡ δὲ θύρα 1,2×3=3,6 τ. μ. ὥστε ἐχρωματίσθησαν 96 τ. μ.—3,6 τ. μ.= 92,4 τ, μ. ἄρα τὸ χρωμάτισμα τοῦ τοίχου ἐστοίχισε 7,50 δρχ. × 92,4=693 δρχ.

10) — Ἀποτελεῖται ἀπὸ 19,2×58=1113,6 τετρ. μέτρα.

Σελ. 112 — 1)— Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτεινούσης εἶναι $8^2+6^2=64+36=100$ τετρ. μέτρα (§156)· ἄρα τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης εἶναι $\sqrt{100}=10$ μέτρα.

2)— Τὸ τετρ. τῆς ὑποτεινούσης ἔχει ἐμβαδὸν $15^2=225$ τ. μ. ἀλλὰ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἔχουν καὶ τὰ δύο τετρ. ὁμοῦ τῶν ἄλλων πλευρῶν, καὶ ἐπειδὴ αὗται εἶναι ἴσαι. τὸ τετρ. κάθε μιᾶς ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἔχει ἐμβαδὸν 112,5 τ. μ. ὥστε κάθε μία κάθετος πλευρὰ ἔχει μῆκος $\sqrt{112,5}=10,6$ περίπου μέτρα.

3) — Τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου γνωρίζομεν, ὅτι κόπτει εἰς δύο ἴσα μέρη τὴν βάσιν του καὶ τὸ ἴδιον τὸ τρίγωνον (§ 46 σελ. 32). Ὥστε ἕνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἀπὸ τὸ ὕψος του, ἔχει ὑποτείνουσαν (τὸ ἓν σκέλος) 5 μέτρων καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν 4 μ. (τὸ ἥμισυ τῆς βάσεως). Ἀλλὰ ἂν ἀπὸ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτεινούσης ἀφαιρέσωμεν τὸ τετράγωνον τῆς γνωστῆς καθέτου πλευρᾶς, θὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου, δηλ. τοῦ ὕψους· ἔχομεν λοιπὸν 25—16=9. ὥστε τὸ ὕψος ἔχει μῆκος

$\sqrt{9}=3$ μέτρα. Εὑρεθέντος τοῦ ὕψους εὑρίσκεται τώρα τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι $\frac{8\times3}{2}=12$ τετρ, μέτρα

4)—Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου γνωρίζομεν ὅτι εἶναι ἴσαι (Ἰδ. δ.σελ. 41) μία δὲ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ὀρθογώνια τρίγωνα, ἔχοντα ὑποτείνουσαν τὴν διαγώνιον, εἶναι δὲ αὐτη. ἴση μὲ $\sqrt{14^2+8^2}=\sqrt{196+64}=\sqrt{260}=16{,}1$ μέτρα,

5)—Τὸ μῆκος τῆς κλίμακος εἶναι $\sqrt{10^2+3^2}=\sqrt{109}=10{,}44$μ.

Σελ. 116—1)—Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ τροχοῦ τῆς ἁμάξης εἶναι $2\times0{,}45\times3{,}1415=2{,}82735$ μ. ἑπομένως ὅλον τὸ διανυθὲν διάστημα εἶναι $2{,}82735\times128=361{,}9$ μέτρα.

2)— α) Ἡ ἀκτὶς εἶναι (§ 160) $40000000:6{,}283=6366385$ περίπου μέτρα. β) Κάθε ὥραν διατρέχει $40000000:24=166$ 6666 μέτρα περίπου καὶ γ) Ὁλόκληρος ἡ περιφέρεια ἔχει $360\times60=21600$ πρῶτα λεπτά· ἄρα τὸ μῆκος 1 πρώτου λεπτοῦ τῆς μοίρας εἶναι $40000000:21600=1852$ μέτρα περίπου.

3) — Ἡ διάμετρος εἶναι τὸ διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος ἤτοι $\frac{15\times2}{6{,}283}=\frac{15}{3{,}1415}=4{,}77$ μέτρα.

4) — Ἡ δεξαμενὴ ἔχει ἀκτῖνα $\frac{15}{6{,}283}\left(\frac{15}{2\pi}\right)$· ὥστε ἡ ἐπιφάνειά της εἶναι $3{,}1415\times\left(\frac{15}{6{,}283}\right)^2=\frac{3{,}1415\times15^2}{4\times3{,}1415^2}=\frac{15^2}{4\times3{,}1415}$ $=17{,}9$ τετρ. μ. περίπου.

5) καὶ 6) Βλ. πρ. Γεωμ.

Σελ. 119 — 1) — Ἔχει ὄγκον $12\times0{,}75\times3=27$ κυβ. μέτρα· διότι ὁ τοῖχος ἔχει σχῆμα ὀρθογ. παραλληλεπιπέδου.

2) — Η δεξ. αὕτη ἔχει σχῆμα ὀρθ. παρλ δου· χωρεῖ ἑπομένως $15\times4\times6{,}5=390$ κυβ. μέτρα.

Σελ. 123 — 1)— Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $(0{,}45)^2=0{,}2025$ τ. μ. ὥστε ὁ ὄγκος εἶναι $(0{,}45)^2\times0{,}86=0{,}2025\times0{,}86=0{,}17415$ κυβ. μέτρα.

2) — Βλ. πρ. Γεωμ.

Σελ. 125 — 1) — Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $5\times3:2=7{,}5$ τ. μ. ὥστε ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $7{,}5\times6{,}5:3=16{,}25$ κυβ. μέτρα.

2) — Βλ. πρ. Γεωμ.

3) — Τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβ. τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος εἶναι τὸ 3πλάσιον τοῦ ὄγκου της· ἤτοι $40 \times υ = 1200 \times 3 = 3600$· ἄρα τὸ ὕψος εἶναι $3600 : 40 = 90$ μέτρα.

4) — Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν ἐμβ. βάσ. $\times 30 = 2400$ καὶ ἐμβ. βάσ. $= 2400 : 30 = 80$ τ. μ.

Σελ. 127 — 1) — Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι 0,2 μ. : 2=0,1μ. τὸ ἐμβαδὸν αὐτῆς εἶναι $3,1415 \times (0,1)^2 = 3,1415 \times 0,01 = 0,031415$ καὶ ὁ ὄγκος αὐτῆς εἶναι $0,031415 \times 10 = 0,31415$ κυβ. μέτρα.

2) — Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως εἶναι $2 \times 3,1415 \times 0,6 = 3,7698$, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας εἶναι $3,7698 \times 4 = 15,0792$ τετρ. μ. καὶ ἑπομένως ὁ χρωματισμός του θὰ στοιχίσῃ 3 δρ. $\times 15,0792 = 45,2376$ δρχ. ἢ 45,24.

3) Ὁ σωλὴν αὐτὸς εἶναι κυλινδρικός· ἔχομεν λοιπὸν μῆκος περιφερείας βάσεως $0,3 \times 3,1415 = 0,94245$ μέτρ ὥστε ἐμβ. κυρτῆς ἐπιφανείας βάσεως $10 \times 0,94245 = 9,4245$ τετρ· μέτρα.

4) — Τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως $3,1415 \times (0,5)^2 = 3,1415 \times 0,25$· ἐπειδὴ δὲ $3,1415 \times 0,25 \times υ = 3,1415$, ἕπεται ὅτι $υ = 3,1415 : 3,1415 \times 0,25 = 1 : 0,25 = 100 : 25 = 4$ μέτρα.

5) — Ἐμβ. βάσ.$\times 5 = 80$ κυβ. μ. ὥστε ἐμβ. βάσ. $= 80 : 5 = 16$ τ. μ.

Σελ. 131 — 1) — Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι $3 \times 3,1415 = 9,4245$ μ. καὶ τὸ ἥμισυ αὐτῆς εἶναι $9,4245 : 2 = 4,71225$ μ. ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου εἶναι $4,71225 \times 5 = 23,56125$ τετρ. μέτρα.

2) — Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τῆς κωνικῆς σκηνῆς εἶναι $8 \times 15 = 120$ τετρ. μέτρα, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι καὶ ἐμβαδὸν τοῦ ὑφάσματος ποὺ θὰ χρησιμοποιήσωμεν· δηλ. θὰ εἶναι $0,8 \times$ μῆκος $= 120$ τ. μ. ὥστε τὸ μῆκος τοῦ ὑφάσματος εἶναι $120 : 0,8 = 150$ μέτρα.

3) — Ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως εἶναι $31,415 : 6,283 = 5$ μ. ὁ τύπος τῆς εὑρέσεως τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου εἶναι (§ 183) $\frac{1}{3} \times π \times α^2 \times υ$ ἤτοι $\frac{1}{4} \times 3,1415 \times 5^2 \times 8 = 628,3 : 3 = 209,43$ τετρ. μέτρα περίπου.

4)— Τὸ ὕψος τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι τριπλάσιον τοῦ ὄγκου του· ἔχομεν λοιπὸν $\upsilon \times 8 = 90$ ἄρα ὕψος $= 90 : 8 = 11{,}25$ μέτρα.

5) — Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας κολούρου κώνου δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\pi \times \tau \times (\alpha + \beta)$ ἤτοι $3{,}1415 \times 3 \times (5+2) = 3{,}1415 \times 3 \times 7 = 65{,}9715$ τετρ. μέτρα.

6) — Ἡ ἀκτὶς τῆς ἄνω βάσεως εἶναι $6{,}283 : 6{,}283 = 1$. μ. ἡ δὲ τῆς κάτω βάσεως εἶναι $9{,}4225 : 6{,}283 = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ μέτρ. ὁ τύπος τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου εἶναι: $\frac{1}{3} \times \pi \times \upsilon \times (\alpha^2 + \beta^2 + \alpha \times \beta)$ ἢ $\frac{1}{3} \times 3{,}1415 \times 4 \times \left(1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 1 \times \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} \times 3{,}1415 \times 4 \times \left(1 + \frac{9}{4} + \frac{6}{4}\right) = {}^1/_3 \times 3{,}1415 \times 4 \times \frac{19}{4} = \frac{3{,}1415}{3} \times \times 19 = 19{,}8961$ κυβ. μέτρα περίπου.

Σελ 136—1)— Τὸ ἐμβ. τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου· $4 \times \pi \times \alpha^2$ ἢ $4 \times 3{,}1415 \times 20^2 = 4 \times 3{,}1415 \times 400 = 1600 \times 3{,}1415 = 5026{,}4$ τετ. μ.

2, 3, 4 καὶ 5) — Βλ. πρ. Γεωμ.

Σελ. 138 — 1) — Βλ. ἄσκ. 1 σελ. 119 καὶ 2) — Βλ. ἄσκ. 2 σελ. 119.

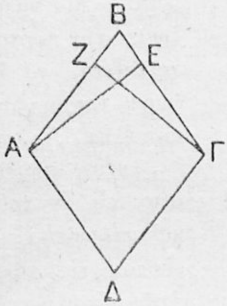
3)— Βλ. ἄσκ. 1 σελ 127 καὶ 4) — Βλ. πρ. Γεωμ.

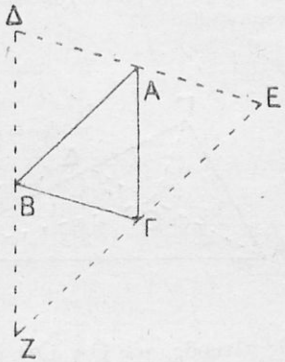
6) — Ὄγκος βαρελίου $0{,}262 \times (\Delta^2 + \delta^2) \times M$ ἤτοι ὄγ. βαρ. $= 0{,}262 \times (0{,}7^2 + 0{,}6^2) \times \frac{3}{2} = 0{,}262 \times (0{,}49 + 0{,}36) \times \frac{3}{2} = 0{,}131 \times 0{,}85 \times 3 = 0{,}33405$ κυβ. μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ

Σελ. 139. —1.—Εἰς τὸν ῥόμβον ΑΒΓΔ, (σχ. σελ. 83) αἱ περὶ ὧν πρόκειται ἀποστάσεις εἶναι αἱ κάθετοι ΑΕ καὶ ΓΖ· ἀλλὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΓΒΖ ἔχουν τὴν ΑΒ=ΒΓ, τὴν γων. Β κοινὴν καὶ ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια ἔχουν καὶ γων. ΒΑΕ =γων. ΒΓΖ ('Ιδ. 4 σελ. 34)· ἄρα εἶναι ἴσα (γν. 3 σελ. 35)· ἄρα εἶναι ΑΕ=ΓΖ.

2.—Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν ΔΑΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, τὴν ΔΒΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ καὶ τὴν ΖΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἀλλὰ τὸ τετράπλευρον ΔΑΓΒ εἶναι παραλληλόγραμμον· ἄρα ΑΓ=ΔΒ καὶ ΔΑ=ΒΓ· ὁμοίως καὶ τὸ ΑΒΖΓ, ἄρα ΑΓ=ΒΖ καὶ ΑΒ=ΖΓ, ὁμοίως καὶ τὸ ΑΒΓΕ· ἄρα ΑΒ=ΓΕ καὶ ΒΓ=ΑΕ ἤτοι





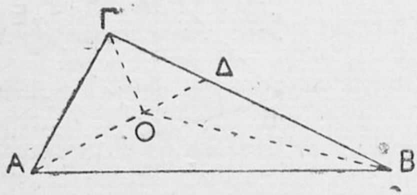
ΑΓ=ΔΒ καὶ ΑΓ=ΒΖ ἤτοι ΔΖ=ΔΒ+ΒΖ=2ΑΓ
ΒΓ=ΔΑ καὶ ΒΓ=ΑΕ ἤτοι ΔΕ=ΔΑ+ΑΕ=2ΒΓ
ΑΒ=ΖΓ καὶ ΑΒ=ΓΕ ἤτοι ΖΕ=ΖΓ+ΓΕ=2ΑΒ.

ἤτοι κάθε πλευρὰ τοῦ νέου τριγώνου ΖΔΕ εἶναι διπλασία ἀπὸ τὴν παράλληλόν της τοῦ πρώτου τριγώνου.

Ὅτι δὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι 4πλάσιον τοῦ ΑΒΓ φαίνεται ἐκ τῆς ἰσότητος πρὸς ἄλληλα τῶν 4 τριγώνων ποὺ ἔχουν σχηματισθῇ.

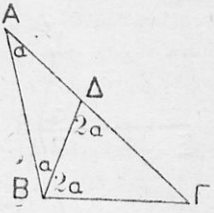
3.—Τὸ ὕψος τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. προηγούμενον) εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΔΕ τοῦ ἄλλου τριγώνου, διότι αἱ ΒΓ καὶ ΔΕ εἶναι παράλληλοι· ὁμοίως καὶ τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Β εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΔΖ καὶ τὸ ἐκ τῆς Γ κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΕΖ· ἀλλ' αἱ τρεῖς αὗται κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΔΕΖ, ἤτοι τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, διέρχονται ὅλαι ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Ζ (πρβλ. 14ον σελ. 74), ἤτοι κόπτονται εἰς ἓν σημεῖον.

4.—Ἔστωσαν αἱ ἴσαι χορδαὶ ΑΒ καὶ ΓΔ τοῦ κύκλου Κ· τὰ τρίγωνα ΑΚΒ καὶ ΓΚΔ εἶναι ἴσα (1ον γν. σελ. 35) καὶ ἰσοσκελῆ, τὰ δὲ ὕψη ΚΕ καὶ ΚΖ κόπτουν τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἰς 4 ἴσα τρίγωνα πρὸς ἄλληλα (Ἰδ. α. σελ. 32)· ἄρα $ΚΕ=ΚΖ$· ἀλλ' αἱ ΚΕ καὶ ΚΖ εἶναι αἱ ἀποστάσεις τῶν δοθεισῶν χορδῶν ἀπὸ τοῦ κέντρου· ὥστε αἱ ἴσαι χορδαὶ ἑνὸς κύκλου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον.

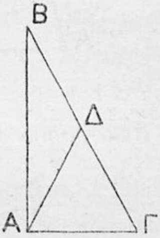


5.—Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὴν πρότασιν 5, χρειάζεται νὰ ἀποδείξωμεν προηγουμένως τὴν ἑξῆς. Ἂς λάβωμεν ἓν τυχὸν σημεῖον Ο μέσα εἰς ἓν τρίγωνον καὶ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ εὐθείας εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς, τὰς ΟΑ, ΟΒ, τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ τριγώνου· ἤτοι εἶναι $ΑΟ+ΟΒ<ΑΓ+ΓΒ$· διότι ἂν προεκτείνομεν τὴν ΑΟ μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν ΓΒ εἰς τὸ Δ, ἔχομεν $ΑΔ<ΑΓ+ΓΔ$ (ε' ἰδιότης σελ. 8) ἢ $ΑΟ+ΟΔ<ΑΓ+ΓΔ$ καὶ $ΑΟ+ΟΔ+ΔΒ<ΑΓ+ΓΔ+ΔΒ$, ἀλλὰ πάλιν $ΟΒ<ΟΔ+ΔΒ$ καὶ κατὰ ἰσχυρότερον λόγον $ΑΟ+ΟΒ<ΑΓ+ΓΒ$· ὁμοίως εἶναι $ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΑΓ$ καὶ $ΟΓ+ΟΑ<ΑΒ+ΒΓ$. Ἐὰν τώρα τὰ τρεῖς τελευταίας ἀνισότητας προσθέσωμεν κατὰ μέλη, ἔχομεν $ΟΑ+ΟΒ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΓ+ΟΑ<ΑΓ+ΓΒ+ΑΒ+ΑΓ+ΑΒ+ΒΓ$ ἢ $2ΟΑ+2ΟΒ+2ΟΓ<2ΑΒ+2ΒΓ+2ΑΓ$· ἤτοι $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ<ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ$· καὶ οὕτως ἀπεδείχθη τὸ πρῶτον μέρος τῆς προτάσεως 5. Διὰ τὸ ἄλλο μέρος ἔχομεν $ΟΑ+ΟΒ>ΑΒ$ (ε. ἰδ. σελ. 8) $ΟΒ+ΟΓ>ΓΒ$ καὶ $ΟΓ+ΟΑ>ΑΓ$ καὶ $ΟΑ+ΟΒ+ΟΒ+ΟΓ+ΟΓ+ΟΑ>ΑΒ+ΓΒ+ΑΓ$ ἢ $2ΟΑ+2ΟΒ+2ΟΓ>ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ$ ἢ $ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ>\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ}{2}$.

6.—Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γων. Β εἶναι τριπλασία τῆς Α, δηλ. ἂν τὴν γωνίαν Α παραστήσωμεν διὰ τοῦ α, ἡ Β παρίσταται διὰ τοῦ 3α· φέρομεν τὴν ΒΔ οὕτως ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΒΑ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν α· τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι ἰσοσκελές· ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγωνον ΒΔΓ εἶναι ἰσοσκελές· διότι ἡ μὲν γωνία ΔΒΓ γνωρίζομεν, ὅτι ἰσοῦται μὲ 2α, ἡ δὲ ΒΔΓ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα α+α=2α (Σημ. σελ. 33).

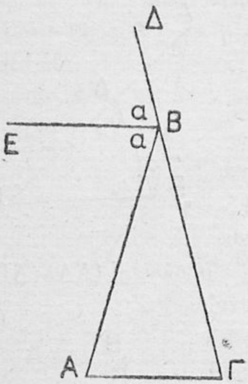


7.—Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α φέρομεν τὴν ΑΔ, οὕτως ὥστε νὰ σχηματίσῃ μετὰ τῆς ΑΒ τὴν γωνίαν ΒΑΔ ἴσην μὲ τὴν Β· τὸ τρίγωνον ΑΔΒ εἶναι ἰσοσκελές· ἀλλὰ καὶ τὸ τρίγ. ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΔ=ΔΓ), διότι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἰσοῦται μὲ 1ὀρθήν· ἤτοι Β+Γ=1 ὀρθ. ἢ ΒΑΔ + Γ = 1 ὀρθ., ἀλλὰ καὶ ΒΑΔ+ΔΑΓ=1 ὀρθ.· ἄρα ΒΑΔ+Γ=ΒΑΔ+ΔΑΓ ἑπομένως εἶναι ΔΑΓ=Γ.



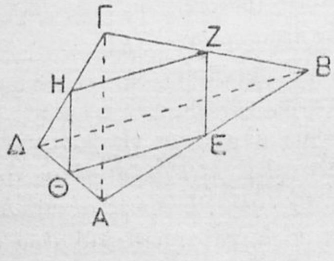
8.—Ἂν τὸ σημεῖον ποὺ εἶναι μέσα εἰς τὴν περιφέρειαν εἶναι τὸ Ο καὶ αἱ τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι φέρονται εἰς τὴν περιφέρειαν εἶναι κατὰ σειρὰν αἱ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἰσοσκελῆ, μὲ κοινὴν κορυφὴν τὸ Ο· ἂν δὲ ἑνώσωμεν μὲ εὐθείας τὴν κορυφὴν Ο μὲ τὰ μέσα τῶν δύο βάσεων ΑΒ καὶ ΒΓ, αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις (§ 46 ἰδ. β)· ἀλλ' αἱ βάσεις αὗται ΑΒ, ΒΓ εἶναι χορδαὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ κάθετοι εἰς τὰ μέσα αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ Ο (§ 83 σελ. 62).

9.—Ἡ ΒΕ κόπτει τὴν ἐξ. γωνίαν ΑΒΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς δύο ἴσας γωνίας α καὶ α καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ. Αἱ δύο παράλληλοι ΕΒ, ΑΓ κόπτονται ἀπὸ τὴν τρίτην ΒΑ καὶ σχηματίζουν 4 ὀξείας γωνίας ἴσως καὶ 4 ἀμβλείας ἴσας (Ἰδ.α. σελ. 18)· ἄρα (ΕΒΑ=)α=Α· ἀλλ' αἱ ἴδιαι παράλληλοι κόπτονται καὶ ἀπὸ τὴν ΔΓ· ἄρα (ΕΒΔ=)α=Γ· ὥστε εἶναι καὶ Α=Γ ἤτοι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΒ=ΒΓ).—Ἀντιστρόφως δὲ ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τρίγ. ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἄνισον πλευράν. Διότι γνωρίζομεν ὅτι $ΑΒΔ = Α + Γ$ (σελ. 33 σημ.)· ἤτοι $ΑΒΔ = 2Α$ ἢ $2Γ$ (διότι $Α = Γ$)· ἀλλ' ἕνεκα τῆς διχοτομούσης τὴν γωνίαν ΑΒΔ, ΒΕ εἰς δύο ἴσας γωνίας α καὶ α, ἔχομεν $2α = 2Α$ ἢ $2Γ$ ἤτοι $α = Α$ ἢ $α = Γ$.



Ἀλλ' αἱ δύο εὐθεῖαι ΕΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖαι κόπτονται ὑπὸ τῆς τρίτης ΒΑ καὶ σχηματίζουν τὰς ὀξείας γωνίας ΕΒΑ (α) καὶ Α ἴσας (ὄχι κατὰ κορυφὴν) εἶναι παράλληλοι (Ἰδ. β. σελ. 19).

10. – Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ διαιρεῖ ἡ διαγώνιος ΔΒ εἰς δύο τρίγωνα ΔΒΓ καὶ ΔΒΑ· πρὸς τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ὅμοιον τὸ ΗΖΓ, διότι ἡ ΓΔ εἶναι διπλασία τῆς ΓΗ· ἐπίσης καὶ ἡ ΓΒ εἶναι διπλασία τῆς ΓΖ, ἤτοι αἱ δύο πλευραὶ τοῦ ἑνὸς ΔΓ καὶ ΒΓ εἶναι ἀνάλογοι κατὰ σειρὰν μία πρὸς μίαν πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἄλλου ΗΓ καὶ ΖΓ· ἐπειδὴ δὲ ἔχουν τὰς γωνίας ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἀναλόγους πλευρὰς ἴσας (ἐδῶ εἶναι κοινὴ ἡ Γ), ἕπεται ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΗΖ καὶ ΓΔΒ εἶναι ὅμοια· ἄρα αἱ ὀξ. γωνίαι ΓΗΖ καὶ ΓΔΒ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ τότε αἱ εὐθεῖαι ΗΖ καὶ ΔΒ εἶναι παράλληλοι· ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ αἱ ΘΕ, ΔΒ εἶναι παράλληλοι, ἄρα εἶναι παράλληλοι καὶ αἱ ΗΖ καὶ ΘΕ· ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ αἱ εὐθεῖαι ΘΗ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον ΓΑ, ἄρα καὶ μεταξύ των παράλληλοι· ἤτοι ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.



Σελ. 141.—1.—Συνδέομεν τὰ μέσα τῶν χορδῶν τούτων δι' εὐθειῶν μετὰ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου· ἀλλ' αἱ εὐθεῖαι αὗται γνωρίζομεν ὅτι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τῶν χορδῶν καὶ ἴσαι· (ἄσ. 4 σελ. 132). Τὰ μέσα λοιπὸν τῶν χορδῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ περιφε-

ρείας ὁμοκέντρου μὲ ἀκτῖνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου ἀπὸ μιᾶς τῶν χορδῶν· ἤτοι ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος. Εὐκόλως δὲ φαίνεται ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημεῖον αὐτῆς χορδὴ τῆς δοθείσης περιφερείας ἰσοῦται πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

2.—Ἂν ἀπὸ ἓν σημεῖον Μ τῆς δοθείσης περιφερείας φέρωμεν εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΜΑ καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον Κ αὐτῆς φέρομεν τὴν ΚΛ παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν ΛΑ, φέρομεν δὲ τὰς ΚΜ καὶ ΛΑ, σχηματίζεται τὸ τετράπλευρον ΚΜΑΛ, ὅπερ εἶναι παραλληλόγραμμον (παρ. ἄσκ 2) ἄρα ΚΜ=ΛΑ καὶ τὸ Α ὅπερ σημεῖον τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Λ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΛΑ, ἥτις περιφέρεια εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· διότι ἂν λάβωμεν ἓν τυχὸν σημεῖον αὐτῆς Β ὅπερ ἑνοῦμεν μὲ τὸ Λ διὰ τῆς ΒΛ, καὶ φέρομεν ἐξ αὐτοῦ παράλληλον πρὸς τὴν ΚΛ καὶ ἐκ τοῦ Κ παράλληλον πρὸς τὴν ΛΒ, αὗται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ν ὅπερ κεῖται ἐπὶ τῆς πρώτης περιφερείας Κ· διότι τὸ τετράπλευρον ΚΛΒΝ εἶναι παραλληλόγραμμον. ΚΝ=ΛΒ ἤτοι ΚΝ ἴση πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΜ· ὥστε τὸ Β εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· ὥστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν μὲ κέντρον τὸ Λ.

3)— Ἀπὸ τὰ τυχόντα σημεῖα Μ, Ν τῆς δοθείσης περιφερείας Κ, φέρομεν ἐφαπτομένας εἰς αὐτὴν τὰς ΜΑ, ΜΒ, ἴσας πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὡς καὶ τὰς ΚΜ, ΚΝ, ΚΑ, ΚΒ, ὁπότε σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΜΑ καὶ ΚΝΒ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα (γν. 2ον σελ. 35)· ἄρα ΚΑ = ΚΒ· τὰ σημεῖα λοιπὸν Α, Β, τὰ ὁποῖα εἶναι σημεῖα τοῦ ζητουμένου τόπου κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας μὲ κέντρον Κ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΚΑ, ἥτις εἶναι καὶ ὁ ζητούμενος τόπος· διότι ἂν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Γ φέρομεν ἐφαπτομένην μέχρι τῆς πρώτης τὴν ΓΛ, αὕτη εἶναι ἴση πρὸς τὴν ΜΑ, διότι τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΚΜΑ καὶ ΚΛΓ εἶναι ἴσα (παρ. ἄσκ. 3). Ὥστε ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι περιφέρεια ὁμόκεντρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν μὲ ἀκτῖνα τὴν ὑποτείνουσαν ὀρθογωνίου τριγώνου, ἔχοντος καθέτους πλευρὰς τὴν ἀκτῖνα τοῦ δοθέντος κύκλου, καὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Ἡ ὑπ. δὲ ὀρθ. τρ. ἔχοντος κάθετον πλευρὰν τὴν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ ἀπέναντι γω-

νίαν τὸ $^1/_2$ τῆς δοθείσης εἶναι γεωμ. τόπος τῶν περὶ οὗ ὁ λόγος
σημείων, ὅταν δίδεται γωνία.

4)— Ἔστω δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, Ο τὸ σημεῖον ἐκτὸς αὐ-
τῆς, ΟΑ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν καὶ Γ τὸ μέσον τῆς ΟΑ. φέρομεν
δὲ ἤδη καὶ τὴν ΟΒ μέσον τῆς ὁποίας εἶναι τὸ Δ· τὰ τρίγωνα
ΟΓΔ καὶ ΟΑΒ εἶναι ὅμοια, διότι αἱ πλευραί του σχηματίζουν
τὴν κοινὴν γωνίαν αὐτῶν Ο εἶναι ἀνάλογοι· ἄρα ἡ ΓΔ εἶναι πα-
ράλληλος τῇ ΑΒ· ἀλλὰ τὰ Γ καὶ Δ εἶναι σημεῖα τοῦ ζητουμένου
τόπου. Ὥστε ἡ παράλληλος πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἐκ τοῦ
μέσου τῆς καθέτου ΟΑ, εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος· διότι ἓν τυ-
χὸν σημεῖον αὐτῆς τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἥτις ἀρχο-
μένη ἀπὸ τὸ Ο καὶ διερχομένη διὰ τοῦ Ε καταλήγει εἰς τὸ Ζ ση-
μεῖον τῆς ΑΒ. διότι τὰ τρίγωνα ΟΒΕ καὶ ΟΑΖ εἶναι ὅμοια
(παρ. ἀσκ. 4) καὶ ἀφοῦ ἡ ΟΑ εἶναι διπλασία τῆς ΟΒ, ἕπεται
ὅτι καὶ ἡ ΟΖ εἶναι διπλασία τῆς ΟΕ· ἤτοι τὸ Ε εἶναι σημεῖον
τοῦ τόπου·

5) —Αἱ ἀκτῖνες αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι
κάθετοι ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας· ὥστε αὗται δίδουν τὰς
ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τῶν πλευρῶν τῆς δοθείσης γωνίας
αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι· ὥστε ὁ τόπος τῶν κέντρων εἶναι ὁ τόπος
τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς δο-
θείσης γωνίας, ὅστις εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας (παραδ. 4
σελ. 140).

6)— Ἔστω Κ. ἡ δοθεῖσα περιφέρεια καὶ Λ ἡ περιφέρεια
ποὺ ἐφάπτεται τῆς πρώτης ἐξωτερικῶς καὶ Α τὸ σημεῖον ἐπα-
φῆς· ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α,
αὕτη θὰ εἶναι κάθετος καὶ πρὸς τὴν ἀκτῖνα ΚΑ καὶ πρὸς τὴν
ΛΑ (§ 99,3) Ἤτοι ἡ ΚΑΛ εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ καὶ ἡ ἀπόστα-
σις τοῦ κέντρου Λ ἀπὸ τοῦ Κ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτί-
νων ΚΑ καὶ ΛΑ· ἀλλὰ τότε ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν ἴσων κύ-
κλων κ.τ.λ. εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ὡρι-
σμένην ἀπόστασιν ἀπὸ ἓν δοθὲν σημεῖον (Κ) καὶ εἶναι οὗτος μί-
περιφέρεια κύκλου (παρδ. 1 σελ 140). Ὥστε ὁ ζητούμενος τό-
πος εἶναι ὁμόκεντρος περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα τὸ ἄθροισμα τῶν δύο
ἀκτίνων ἢ μὲ τὴν διαφορὰν αὐτῶν, ἐὰν οἱ ἴσοι κύκλοι ἐφάπτον-
ται τῆς δοθείσης περιφερείας ἐξωτερικῶς.

ΤΕΛΟΣ

Ἀριθ. { *Πρωτ.* 21715. / *Διεκ.* }

Ἐν Ἀθήναις τῇ 17 Ἰουλίου 1928

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟΝ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

Πρὸς

τοὺς ἐκδότας κ. κ. Ἰωαν. Δ. Κολλάρον καὶ Σίαν

Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψει τὸ ἄρθρον 8 τοῦ νόμου 3438 περὶ διδακτικῶν βιβλίων καὶ τὴν ἀπὸ 31 Μαΐου 1928 πρᾶξιν τῆς οἰκείας ἐπὶ τῆς ἀναθεωρήσεως τῶν ἐγκεκριμένων διδακτικῶν βιβλίων ἐπιτροπῆς ἐγκρίνομεν διὰ τὸ ἀπὸ σήμερον μέχρι τέλους τοῦ σχολικοῦ ἔτους 1929—1930 χρονικὸν διάστημα τὸ ὑφ᾽ ὑμῶν ἐκδοθὲν καὶ ὑπὸ ***Σπυρίδωνος Δάλλα*** συγγραφὲν διδακτικὸν βιβλίον ὑπὸ τὸν τίτλον ***«Ἀναγνώσματα ἕκτης Δημοτικοῦ, βιβλίον μεθοδικὸν διὰ τὴν διδασκαλίαν τῆς καθαρευούσης»*** ὑπὸ τὸν ὅρον ὅπως ἐν μελλούσῃ ἐκδόσει τοῦ βιβλίου ἐπιφέρητε τὰς ὑπὸ τῆς ἐπιτροπῆς ὑποδεικνυομένας τροποποιήσεις.

Ὁ Ὑπουργὸς
Κ. ΓΟΝΤΙΚΑΣ

Ὁ Τμηματάρχης
Κ. Καμπέρης

Συνεπείᾳ τῆς ὑπ᾽ ἀριθ. 51739 τῆς 17 Σεπτεμβρίου 1926 πράξεως τοῦ Ὑπουργείου τῆς Παιδείας καὶ τῶν Θρησκευμάτων αὐξάνεται ἡ τελικὴ τιμὴ τῶν διδακτικῶν βιβλίων τῶν σχολείων τῆς μέσης καὶ δημοτικῆς ἐκπαιδεύσεως κατὰ 20 % ἐφ᾽ ὅσον ταῦτα μεταφέρονται ἐκ τῆς πόλεως ἐν ᾗ ἐξεδόθησαν εἰς ἄλλας πόλεις.

ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
Καθηγητοῦ τῶν Μαθηματικῶν τοῦ Θ΄. Γυμνασίου Ἀθηνῶν

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΝ ΤΗ, ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ, ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ,

Ι. Ν. ΧΑΤΖΗΔΑΚΙ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΚΑΙ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΑΙ: Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σ^ΙΑ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ «ΕΣΤΙΑΣ»
50—ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ—50
1929

Τὰ γνήσια ἀντίτυπα φέρουσι τὴν σφραγῖδα τοῦ «Βιβλιοπωλείου τῆς «Ἑστίας».

Τύποις Π. ΧΑΛΚΙΟΠΟΥΛΟΥ Γερανίου 11

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Σελ. 13—1). Οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ ἐν τῷ δεκαδικῷ συστήματι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 10 μέχρι τοῦ 99· εἶναι λοιπὸν τοιοῦτοι 100—10=90 ἢ 9 δεκάδες· οἱ τριψήφιοι εἶναι ἀπὸ τοῦ 100 μέχρι τοῦ 999· ἔχομεν λοιπὸν τριψηφίους 1000—100=900 ἢ 9 ἑκατοντάδας· τετραψήφιοι εἶναι οἱ ἀπὸ τοῦ 1000 μέχρι τοῦ 9999· ἤτοι ἐν ὅλῳ 10000—1000=9000 ἢ 9 χιλιάδες· καὶ γενικῶς ὑπάρχουσι $10^{\nu}-10^{\nu-1}=10^{\nu-1}.(10-1)=9.10^{\nu-1}$ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι γράφονται διὰ ν ψηφίων· ἤτοι τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι 9 μονάδες ν τάξεως.

2). Ὁ ἀριθμὸς 3652, ὅταν παρεμβάλωμεν 1 μηδενικὸν γράφεται 36052· παρατηροῦμεν ἑπομένως ὅτι ἑκάστη ἑκατοντὰς ἔγινε χιλιάς, ἤτοι ηὐξήθη κατὰ 900· ὥστε διὰ τὰς 36 ἑκατοντάδες ἔχομεν αὔξησιν 36.900· ἐὰν παρεμβάλωμεν δύο μηδενικὰ ἑκάστη ἑκατοντὰς γίνεται δεκὰς χιλιὰς καὶ ἑπομένως δι᾽ ἑκάστην ἑκατοντάδα, ἔχομεν αὔξησιν 9900 καὶ διὰ τὰς 36 ἑκατοντάδας, ἔχομεν αὔξησιν 36.9900· ὁμοίως δὲ σκεπτόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι, ἐὰν παρεμβάλωμεν ν μηδενικά, ἑκάστη ἑκατοντὰς αὐξάνεται κατὰ $\overbrace{99\ldots 9}^{\nu}00$ κ. ο. κ.

3). Αἱ 8 μονάδες τοῦ 12, ἀποτελοῦσι μίαν ὀκτάδα καὶ μένουν καὶ 4 μονάδες· ὁμοίως αἱ 16 μονάδες τοῦ 17 ἀποτελοῦσι δύο ὀκτάδας· μένει δὲ μία μονάς· αἱ δὲ 40 μονάδες τοῦ 40 ἀποτελοῦσι πλήρεις 5 ὀκτάδας· ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 12, 17, 40 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος, τρέπονται εἰς τὸ ὀκταδικὸν σύστημα εἰς τοὺς 14, 21, 50.

4). Ὁ 70 περιέχει 7 μόνον μονάδας δευτέρας τάξεως ἢ ὀκτάδας· ὥστε περιέχει μονάδας ἁπλᾶς τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος $8\times 7=56$· ὁ 107 περιέχει 7 ἁπλᾶς μονάδας καὶ 1 μονάδα τρίτης τάξεως ἤτοι $1\times 8\times 8=64$· ὥστε περιέχει ἐν ὅλῳ ἁπλᾶς μονάδας $64+7=71$· ὁ δὲ 43 περιέχει $4\times 8+3=35$.

5). Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς :

1000	2								
0	500	2							
	0	250	2						
		0	125	2					
			1	62	2				
				0	31	2			
					1	15	2		
						1	7	2	
							1	3	2
								1	1

ἤτοι ὁ ἀριθμὸς 1000 ἐν τῷ δυαδικῷ συστήματι γράφεται 1111101000.

6). Ἔχομεν 1 μονάδα δευτέρας τάξεως, 1 τετάρτης καὶ 1 ἕκτης· ὥστε ἔχομεν ἐν ὅλῳ ἁπλᾶς μονάδας

$$2+2.\,2.\,2+2.\,2.\,2.\,2.\,2=2+8+32=42.$$

7). Τρέπομεν αὐτοὺς πρῶτον εἰς ἀριθμοὺς τοῦ δεκαδικοῦ καὶ ὁ μὲν 100 ἔχει 1 μονάδα τρίτης τάξεως· ἤτοι ἔχει 9 ἁπλᾶς μονάδας, ὁ 200 ἔχει δύο τοιαύτας ἢ 18 ἁπλᾶς καὶ ὁ 210 ἔχει ἐπὶ πλέον καὶ 1 μονάδα δευτέρας τάξεως ἤτοι 18+3=21 ἁπλᾶς. Ἤδη τοὺς ἀριθμοὺς 9, 18, 21 τοῦ δεκαδικοῦ, τρέπομεν εἰς τοιούτους τοῦ πενταδικοῦ. Ἀπὸ τὰς μονάδας λοιπὸν τοῦ 9, αἱ 5 κάμνουν 1 μονάδα δευτέρας τάξεως καὶ μένουν καὶ 4· ἤτοι ὁ 9 γράφεται εἰς τὸ πενταδικὸν ὡς 14· αἱ δὲ 15 μονάδες τοῦ 18 κάμνουν 3 μονάδας δευτέρας τάξεως· ὥστε ὁ 18 γράφεται εἰς τὸ πενταδικὸν ὡς 33 καὶ ὁ 21, τοῦ ὁποίου αἱ 20 μονάδες, ἀποτελοῦν 4 πεντάδας, γράφεται ὡς 41.

Σελ. 21—9). Τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ $10+20+\ldots+90+2\times10$· ἀλλὰ $10+90=100$, $20+80=100$ κ. ο. κ.· ἔχομεν λοιπὸν $4\times100+50+2\times10=470$.

10). Αὐξάνεται κατὰ τὸ ἄθροισμα $12+9+14$· διότι ἔχομεν $(25+12)+(32+9)+(11+14)$ ἢ $25+12+32+9+11+14$ (ἐδ. 20, 5) ἢ $25+32+11+12+9+14$ (ἐδ. 20, 1) ἢ $(25+32+11)+(12+9+14)$ (ἐδ. 20, 2).

11). Αὐξάνεται κατὰ $10\times\nu$.

12). Θέτομεν τοὺς δοθέντας τὸν ἕνα κάτωθεν τοῦ ἄλλου καὶ προσθέτομεν· ἔχομεν δὲ $7+3+6=16$ μονάδας ἁπλᾶς· ἀλλ' αὗται κάμνουσι δύο πλήρεις μονάδας δευτέρας τάξεως· αὗται δὲ μετὰ τῶν $1+7+5=13$ κάμνουσι 15 μονάδας δευτέρας τάξεως ἢ 1 μονάδα τρίτης καὶ περισσεύουσι 7 μονάδες δευτέρας· ἀλλ' ἔχομεν ἀκόμη $1+3+2=6$ μονάδας τρίτης τάξεως ἤτοι ἐν ὅλῳ 7 μονάδας τρίτης τάξεως· ἤτοι τὸ ἄθροισμα εἶναι 770.

13). Ἔστωσαν ν οἱ προσθετέοι καὶ τὰ ψηφία μιᾶς στήλης ὅλα 9· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι $9\times\nu$· ὁ δὲ ἀριθμὸς $9\times\nu$ εἶναι φανερὸν ὅτι δὲν δύναται νὰ ἀποτελέσῃ ν μονάδας, τάξεως ἀνωτέρας, τῆς τάξεως εἰς ἣν ἀνήκουσι τὰ προστεθέμενα ψηφία· ὥστε τὸ κρατούμενον θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ν.

15). α) Ἂς παραστήσωμεν τὸν ἀριθμὸν ὅστις εὑρίσκεται ἐν τῇ μ γραμμῇ καὶ ν στήλῃ διὰ τοῦ α^{ν}_{μ}· παρατηροῦμεν δέ, ὅτι συμφώνως πρὸς τὸν σχηματισμὸν τοῦ τριγώνου τοῦ Pascal, τὸ ν δὲν δύναται νὰ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μ καὶ ὅτι εἶναι $\alpha^{1}_{\mu}=1$ καὶ $\alpha^{\mu}_{\mu}=\alpha^{\nu-1}_{\mu-1}=\alpha^{\nu-2}_{\mu-2}=1$· ἀλλ' ὁ α^{ν}_{μ} εἶναι κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς ἀσκήσεως 14 εἶναι ἴσος μὲ $\alpha^{\nu}_{\upsilon-,}+\alpha^{\nu-1}_{\mu-1}$ ἤτοι εἶναι $\alpha^{\nu}_{\mu}=\alpha^{\nu}_{\mu-1}+\alpha^{\nu-1}_{\mu-1}$ καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὸ μ την τιμὴν 6 καὶ εἰς τὸ ν τὴν τιμὴν 4, θὰ ἔχομεν :

$\alpha^{4}_{6}=\alpha^{4}_{5}+\alpha^{3}_{5}$ ἀλλ' εἶναι

$\alpha^{4}_{5}=\alpha^{4}_{4}+\alpha^{3}_{4}$ καὶ

$\alpha^{4}_{4}=\alpha^{3}_{3}$

καὶ ἐὰν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας κατὰ μέλη καὶ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν προκύπτουσαν τὰ ἴσα, λαμβάνομεν

$\alpha^{4}_{6}=\alpha^{3}_{5}+\alpha^{3}_{4}+\alpha^{3}_{3}$ κ. ο. κ.

β) Οἱ ἀριθμοὶ π. χ. τῆς γραμμῆς 5 εἶναι οἱ

$\alpha^{1}_{5},\ \alpha^{2}_{5},\ \alpha^{3}_{5},\ \alpha^{4}_{5},\ \alpha^{5}_{5}$ καὶ οἱ τῆς 4 εἶναι οἱ

$\alpha^{1}_{4},\ \alpha^{2}_{4},\ \alpha^{3}_{4},\ \alpha^{4}_{4}$· ἔχομεν δὲ κατὰ τὴν παρατήρησιν τῆς ἀσκήσεως 14

$\alpha^{5}_{5}=\alpha^{4}_{4}$

$\alpha^{4}_{5}=\alpha^{4}_{4}+\alpha^{3}_{4}$

$$\alpha_5^3 = \alpha_4^3 + \alpha_4^2$$
$$\alpha_5^2 = \alpha_4^2 + \alpha_4^1$$
$$\alpha_5^1 = \alpha_4^1$$

προσθέτοντες δὲ ταύτας κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\alpha_5^1 + \alpha_5^2 + \alpha_5^3 + \alpha_5^4 + \alpha_5^5 = 2\,(\alpha_4^1 + \alpha_4^2 + \alpha_4^3 + \alpha_4^4)$· καὶ γενικῶς ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς ν γραμμῆς παραστήσωμεν διὰ Κν καὶ τῶν ἀριθμῶν τῆς ν—1 γραμμῆς παραστήσωμεν διὰ $Κ_{ν-1}$, ἀποδεικνύεται ὁμοίως, ὅτι εἶναι $Κ_ν = 2\, Κ_{ν-1}$.

γ) Χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον $\alpha_\mu^\nu = \alpha_{\mu-1}^\nu + \alpha_{\mu-1}^{\nu-1}$· ἢ τὸν $\alpha_6^4 = \alpha_5^4 + \alpha_5^3$ καὶ ἔχομεν

$$\alpha_6^1 = \alpha_5^1 \qquad \alpha_6^2 = \alpha_5^2 + \alpha_5^1$$
$$\alpha_6^3 = \alpha_5^3 + \alpha_5^2 \qquad \alpha_6^4 = \alpha_5^4 + \alpha_5^3$$
$$\alpha_6^5 = \alpha_5^5 + \alpha_5^4 \qquad \alpha_6^6 = \alpha_5^5$$

καὶ διὰ τῆς προσθέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $\alpha_6^1 + \alpha_6^3 + \alpha_6^5 = \alpha_6^2 + \alpha_6^4 + \alpha_6^6$

Σελ. 28—16). Ἐπειδὴ 999=1000—1 ἔχομεν 4895—(1000—1)= 4896—1000· ὁμοίως ἔχομεν 83453—(10000—3)=83456—10000 καὶ 2156865—(1000000—3)=2156868—1000000.

17). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α, β ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι α—β. θὰ ἔχομεν δὲ (α+18)—(β+13)=(α—β)+(18—3)=(α—β)+5· ἤτοι ἡ διαφορὰ αὐτῶν αὐξάνεται κατὰ 5. Ἐπίσης θὰ ἔχωμεν (α+13)—(β+18)· ἐὰν δὲ καὶ ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 13, θὰ ἔχωμεν α—(β+5)=(α—β)—5 ἤτοι ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἐλαττοῦται κατὰ 5.

18). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α, β θὰ ἔχωμεν (α—15)—(β—23)= (α—15)+23—β=(α+23—15)—β=(α+8)—β=(α—β)+8 ἤτοι ἡ διαφορὰ αὐξάνεται κατὰ 8 (ἢ ἐλαττοῦται κατὰ 8).

19). Ἤτοι θὰ εἶναι (α+17)—(β—8)=(α+17+8)—β=(α—β)+ 25 ἢ (α—17)—(β+8)=(α—β)—25.

20). Θέτομεν τὸν 165 κάτωθεν τοῦ 254 καὶ λέγομεν· 5 ἀπὸ 4 δὲν ἀφαιρεῖται· λαμβάνομεν δὲ 1 μονάδα δευτέρας τάξεως, ἥτις περιέχει 8 ἁπλᾶς μονάδας· καὶ ἔχομεν $4+8=12$· ὥστε 5 ἀπὸ $12=7$· ἀλλ' 1 τὸ δανεισθὲν καὶ $6=7$· 7 δὲ ἀπὸ 5 δὲν ἀφαιρεῖται· δανειζόμεθα μίαν μονάδα τρίτης τάξεως, ἥτις περιέχει 8 μονάδας δευτέρας καὶ ἔχομεν $8+5=13$· ὥστε 7 ἀπὸ $13=6$ καὶ κατόπιν $1+1=2$ καὶ 2 ἀπὸ $2=0$· ὥστε ἡ διαφορὰ εἶναι 67.

21). Παρελείψαμεν δηλαδὴ 1 δεκάδα, 1 ἑκατοντάδα καὶ 1 χιλιάδα· ἤτοι ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 1110.

22). Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ καὶ $α>β$· ἐὰν θέσωμεν $α+β=γ$ καὶ $α-β=δ$ καὶ προσθέσωμεν ταύτας κατὰ μέλη ἔχομεν $α+β+α-β=γ+δ$ ἢ $2α=γ+δ$· ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν αὐτὰς κατὰ μέλη, λαμβάνομεν $(α+β)-(α-β)=γ-δ$ ἢ $α+β+β-α=γ-δ$ ἢ $2β=γ-δ$.

23). Ἔστω α τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων ἑνὸς τῶν δύο ἀριθμῶν, β τὸ τῶν δεκάδων καὶ γ τὸ τῶν μονάδων καὶ ἔστω $α>β$· ὥστε ὁ μεγαλύτερος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $100α+10β+γ$ καὶ ὁ μικρότερος εἶναι ὁ $100γ+10β+α$, ἡ δὲ διαφορά των εἶναι $100\,(α-γ)-(α-γ)$· ἀλλ' ἡ διαφορὰ $α-γ$, εἶναι εἷς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ τῶν ἀριθμῶν εἶναι

99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891.

Κατ' ἄλλον τρόπον, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀφαιρετέου, εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου· τὸ δὲ ψηφίον τῶν δεκάδων, εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς· ἐπομένως, ἀπὸ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ἁπλῶν μονάδων θὰ ἔχωμεν πάντοτε κρατούμενον 1, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ ἀφαιρετέου, θὰ δίδῃ ἀριθμὸν πάντοτε κατὰ μονάδα μεγαλύτερον, ἀπὸ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τοῦ μειωτέου, καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι πάντοτε 9.

Σελ. 46—24). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι α καὶ β, θὰ ἔχωμεν $α\times γ+β\times γ=(α+β)\times γ$ ἢ $α\times γ-β\times γ=(α-β)\times γ$· ἤτοι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

25). Εἶναι $18\times 17-18\times 9=18\times(17-9)$

$29\times 12-12=(29-1)\times 12$ καὶ $4\times 5\times 7-7=(4\times 5-1)\times 7$.

26). Εἶναι $45000+4500+450+45=45\times 1000+45\times 100+45\times 10+45=45\times(1000+100+10+1)=45\times 1111$.

27). Ἔχομεν

$$\begin{array}{r} 542 \\ 23 \\ \hline 2510 \\ 1524 \\ \hline 22150 \end{array}$$

28). Ἔστω $\alpha > \beta$· ἔχομεν δὲ

$(\alpha+3)\times(\beta-3)=(\alpha+3)\times\beta-(\alpha+3)\times3=\alpha\times\beta+3\times\beta-(\alpha+3)\times3$· ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἐδαφίου 27 ἔχομεν· $\alpha\times\beta-[(\alpha+3)\cdot 3-3\beta]$ $=\alpha\times\beta+3\beta-(\alpha+3)\times3$· ὥστε τὸ γινόμενον $(\alpha+3)\times(\beta-3)=\alpha\times\beta$ $-3\,(\alpha+3-\beta)=\alpha\times\beta-3\,(\alpha-\beta+3)$· ἐπομένως ἐλαττοῦται κατὰ $3\cdot(\alpha-\beta+3)$.

29). Θὰ ἔχωμεν $(\alpha+\gamma)\times(\beta+\gamma)=\alpha\times\beta+\alpha\times\gamma+\beta\times\gamma+\gamma^2$ ἤτοι αὐξάνεται κατὰ $(\alpha+\beta+\gamma)\times\gamma$.

30). Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β ηὐξήθη κατὰ $(\alpha+\beta+5)\times5=(\alpha+\beta)\times5+25$· ὥστε εἶναι $(\alpha+\beta)\times5=310-25=285$· καὶ ἐπομένως τὸ πηλίκον τοῦ 285 διὰ τοῦ 5 εἶναι τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ ἤτοι εἶναι $\alpha+\beta=57$· ἐὰν δὲ εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν προσθέσω τὴν διαφοράν των 7, θὰ εὕρω τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου α (ἄσκ. 22) ἤτοι θὰ εὕρω $2\alpha=64$ καὶ $\alpha=32$· ὥστε ὁ β εἶναι $57-32=25$.

31). Διότι τὸ γινόμενον θὰ εἶναι μεγαλύτερον μὲν τοῦ 100.10000 ἤτοι τοῦ 1000000 (ἢ τοὐλάχιστον ἴσον πρὸς τοῦτο), μικρότερον δὲ τοῦ 1000.100000 ἤτοι τοῦ 100000000· ἄρα θὰ ἔχῃ τοὐλάχιστον 7 ψηφία· δὲν δύναται ὅμως νὰ ἔχῃ 9.

32). Τὸν ἀναφερόμενον πίνακα χωρίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{lllllllllll} 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & 1 \end{array}$$

Ἔχομεν δὲ $1+2+3+4+5=5+4+3+2+1=$ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου 6×5· καὶ γενικῶς δεικνύεται ὁμοίως, ὅτι $1+2+3+4+\ldots+\nu$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου $\nu\,(\nu+1)$.

33). Ἐὰν ἔχωμεν τὸ γινόμενον $\alpha \times \beta$ καὶ προσθέσωμεν εἰς τὸν α, 1, 2, 3, . . . θὰ ἔχωμεν $(\alpha+1)\times\beta=\alpha\times\beta+\beta$

$$(\alpha+2)\times\beta=\alpha\times\beta+2\beta$$

$$(\alpha+3)\times\beta=\alpha\times\beta+3\beta$$

ἤτοι εἰς τὸ γινόμενον $\alpha\times\beta$ προστίθεται μίαν φορὰν ὁ β, δύο φοράς, τρεῖς κ.τ.λ.

34). Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως συνάγεται, ὅτι πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸν μικρότερον.

35. Ἔστω $\alpha>\beta$· τότε θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha-1)\times(\beta+1) = \alpha\times(\beta+1)-(\beta+1) = \alpha\times\beta+(\alpha-\beta)-1$$

ἤτοι αὐξάνεται κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν τούτων ἠλαττωμένην κατὰ μονάδα.

36). Ἐὰν τὸ γινόμενον εἶναι $\alpha\times\beta$, θὰ ἔχωμεν $(\alpha\times\gamma)\times(\beta\times\gamma) = \alpha\times\gamma\times\beta\times\gamma = \alpha\times\beta\times\gamma^2$ ἤτοι πολλαπλασιάζεται ἐπὶ γ^2 καὶ γενικῶς ἐπὶ γ^ν.

37). Εἶναι $(\alpha+\beta)\times(\alpha-\beta) = (\alpha+\beta)\times\alpha-(\alpha+\beta)\times\beta = (\alpha^2+\alpha\times\beta)-(\alpha\times\beta+\beta^2)$· ἀφαιροῦμεν ἤδη ἀπὸ τὸν μειωτέον καὶ τὸν ἀφαιρετέον τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\alpha\times\beta$ καὶ λαμβάνομεν $\alpha^2-\beta^2$.

Σελ. 63—38). Ὁ 298—22=276 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ ζητουμένου διαιρέτου δ· ἐπειδὴ δὲ εἶναι 276=12. δ ἕπεται ὅτι εἶναι δ= 276 : 12=23.

39). Ἐὰν α καὶ β εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ τὸ ἄθροισμα α+β, εἶναι ἴσον μὲ τὸν 659 ἀπὸ τὸν ὁποῖον ἀφηρέσαμεν τὸ ἄθροισμα 8+15=23· ἤτοι εἶναι α+β=636· ἀλλ' εἶναι α=8β+15· ὥστε ὁ 636 ἀποτελεῖται ἀπὸ 9.β σὺν τῷ ὑπολοίπῳ 15 καὶ ἑπομένως ὁ 9β ἰσοῦται μὲ τὸν 636—15 ἢ μὲ τὸν 621· ἤτοι ἔχομεν β=621 : 9=69 καὶ ἑπομένως εἶναι α=636—69=567.

40). Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν 97 φορὰς τὸ πηλίκον εὑρίσκομεν 17, ἐνῷ ἂν τὸ ἀφαιρέσωμεν 91 φοράς, εὑρίσκομεν 77· ἑπομένως ἡ διαφορὰ 77—17 ἰσοῦται μὲ 6 φορὰς τὸ πηλίκον· ἤτοι τὸ πηλίκον εἶναι ὁ 10 (60 : 6=10)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς εἶναι 97. 10+17 =987 ἢ 91. 10+77=987.

41). Ἔστω α ὁ διαιρετέος καὶ β ὁ διαιρέτης· ἀπὸ τὴν πρώτην διαίρεσιν ἔχομεν α=β. 40+64· ἀλλ' ἐὰν προσθέσω εἰς τὸν διαιρετέον τὸν 179, ἡ διαίρεσις γίνεται τελεία καὶ τὸ πηλίκον γίνεται μεγαλύτερον κατὰ 1· ὥστε τὸ ἄθροισμα 197+64 ἢ ὁ 243 ἀποτελεῖ τὸν διαιρέτην· εἶναι ἑπομένως α=243. 40+64=9784.

42) Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑξῆς :

$$\begin{array}{r|l} 4\acute{5}\acute{3} & 36 \\ \cline{2-2} -63 & 11 \\ 24 & \end{array}$$

(Ἐπειδὴ τὸ 6 δὲν ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ 5, λαμβάνομεν 1 μονάδα τῆς ἀνωτέρας τάξεως ἢ 7 τῆς κατωτέρας της καὶ κάμνομεν 12· κ. ο. κ.).

43). Ἐὰν α ὁ διαιρετέος, β ὁ διαιρέτης π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον ἔχομεν α=β. π+υ καὶ β>υ· ἐπειδὴ δὲ τὸ π εἶναι τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τὴν 1 ἔχομεν β.π $\geqq$ β καὶ κατὰ μείζονα λόγον

β.π>υ· ἑπομένως εἶναι καὶ

β.π+υ>υ+υ ἢ α>2.υ.

44). Ὅταν χωρίσωμεν ἀπ' ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου, τόσα ψηφία ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, τὰ ἀπομένοντα εἶναι τόσα ὅσα ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα τοῦ διαιρέτου· εἰς καθ' ἓν δὲ ἀπὸ αὐτὰ ἀντιστοιχεῖ ἓν ψηφίον τοῦ πηλίκου· ἐὰν δὲ ὁ ἀριθμὸς τῶν χωρισθέντων ψηφίων περιέχει τὸν διαιρέτην, θὰ ἔχωμεν ἓν ἀκόμη ψηφίον.

45). Ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ ὑπολοίπου ἀπὸ τοῦ διαιρέτου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, ἢ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν προστιθεμένων μονάδων· ἐὰν προσθέσωμεν ἀριθμὸν τοὐλάχιστον ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν ταύτην καὶ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς διαφορᾶς αὐτῆς καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου ἀπὸ τὸν διαιρέτην.

46). Ἔχομεν α=β.π+υ καὶ α.ρ=β×(π×ρ)+υ . ρ· ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως α.ρ : β εἶναι π×ρ σὺν τῷ πηλίκῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ υ.ρ διὰ τοῦ β· τὸ ὑπόλοιπον δὲ τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι καὶ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως α.ρ : β.

47). Ἔχομεν α=β.π+υ (1) καὶ υ<β· διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (1) διὰ π· καὶ θὰ ἔχωμεν α : π=β.π : π+υ : π= β+υ : π· ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως α : π, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν β καὶ ἀπὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως υ : π· ἐὰν υ>π ἢ μόνον ἀπὸ τὸν β ἐὰν υ<π· (εἰς τὸν στιχ. 4 τῆς ἀσκήσεως ταύτης ἡ λέξις διαιρετέου νὰ διορθωθῇ εἰς διαιρέτου).

48). Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $α^9$ διὰ τοῦ $α^5$. ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha^5 . \alpha^4 = \alpha^9$, ἔπεται ὅτι $\alpha^9 : \alpha^5 = \alpha^4 = \alpha^{9-5}$. Γενικῶς δὲ εἶναι $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$.

Σελ. 75—50). ἀπ. 116568.

51). Ἀφοῦ ὁ α διαιρεῖ τὸν ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος α+24 (τοῦ α), ἵνα διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦτο, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 24· ὥστε ὁ α πρέπει νὰ λάβῃ μίαν τῶν κάτωθι τιμῶν :

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24.

52). Τὸ α+31 γράφεται α—1+32 καὶ οὕτω ἐρχόμεθα εἰς τὴν προηγουμένην ἄσκησιν· πρέπει λ ιπὸν ὁ α νὰ λάβῃ μίαν τῶν κάτωθι τιμῶν :

2, 3, 5, 9, 17, 33.

54). Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 6573· οὗτος εἶναι ἄθροισμα 65 ἑκατοντάδων 7 δεκάδων καὶ 3 μονάδων· παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ ἑκατοντάδες εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 4, καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτὰς χωρὶς τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ δοθέντος διὰ 4, νὰ μεταβληθῇ· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν 7 δεκ. καὶ 3 μονάδας· ἂν δὲ ἀπὸ 1 δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 4, θὰ μᾶς μείνουν 2 μονάδες· ἄρα ἀπὸ τὰς 7 δεκάδας, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν, ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 4, θὰ μᾶς μείνουν 7×2 μονάδες· ἤτοι θὰ ἔχωμεν μόνον τὰς μονάδας 7×2+3. Ἐὰν λοιπὸν τὸ ἄθροισμα τοῦτο, ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων, εἶναι διαιρετὸν διὰ 4 καὶ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4.

55). Αἱ χιλιάδες ἀριθμοῦ τινος εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 8· ἐπομένως δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν αὐτάς· ἐὰν δὲ ἀπὸ μίαν ἑκατοντάδα τοῦ ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 8, θὰ μᾶς μείνουν 4 μονάδες· ὥστε ἂν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων εἶναι α, ἀπὸ τὰς α ἑκατοντάδας θὰ μᾶς μείνουν 4×α μονάδες ἐπίσης ἐὰν ἀπὸ 1 δεκάδα ἀφαιρέσωμεν τὸν 8 θὰ μᾶς μείνουν 2 μονάδες· ὥστε ἂν β εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, ἀπὸ τὰς β δεκάδας θὰ μᾶς μείνουν 2×β μονάδες· ἐπομένως μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 8, θὰ μᾶς μείνουν 8×α +2×β+γ μονάδες (γ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν μοναδων)· ὥστε ἂν τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ 8 καὶ ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8.

56) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 5375 οὗτος γράφεται 5000+300+70+5= πολ. 6+4×5 + πολ. 6+4×3 + πολ. 6+4×7+5= πολ.6+4×5+4

$\times 3+4\times 7+5$˙ ἐὰν δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 6, μᾶς μένει ὁ ἀριθμὸς $4\times 5+4\times 3+4\times 7+5$˙ ἐντεῦθεν προκύπτει ἡ πρότασις.

58). Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 6484˙ ἐπειδὴ $10=7+3$, $20=2\times 7+3\times 2$ κ.τ.λ. θὰ εἶναι καὶ $648=$ πολ. $7+648\times 3$ ἤτοι εἶναι $6483=$ πολ. $7+648\times 3+4$˙ ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὰ πολλαπλάσια τοῦ 7, θὰ μᾶς μείνῃ ὁ ἀριθμὸς $648\times 3+4$˙ ἐντεῦθεν δὲ ἡ πρότασις.

59). Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 346257819˙ ἐπειδὴ δὲ εἶναι $1000=$ πολ. $37+1$, $1000000=$ πολ. $37+1$, ἕπεται ὅτι $257=$ πολ. $37+257$ καὶ $346=$ πολ. $37+346$˙ ἔχομεν λοιπὸν $346257819=$ πολ. $37+346+257+819$˙ ἐὰν δὲ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀφαιρέσωμεν, ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 37, θὰ μᾶς μείνῃ τὸ ἄθροισμα $346+257+819$˙ ἐντεῦθεν δὲ ἡ πρότασις.

60). Ἔστω α ἀριθμός τις μὴ διαιρετὸς δι᾽ 7˙ τότε ὁ α εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ 7 ηὐξημένον δι᾽ ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6˙ ὥστε καὶ $\alpha\times\alpha$ ἢ α^2 θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον ἑνὸς τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, 5, 6, ἢ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τετραγώνου τούτου διὰ τοῦ 7 ἤτοι κατὰ ἕνα τῶν ἀριθμῶν.

1, 4, 2, 2, 4, 1˙ ὥστε εἶναι

$\alpha^2=$ πολ. $7+1$ ἢ $+2$ ἢ $+4$˙ καὶ

$\beta^2=$ πολ. $7+1$ ἢ $+2$ ἢ $+4$˙ ἄρα εἶναι

$\alpha^2+\beta^2=$ πολ. $7+2$ ἢ $+4$ ἢ $+8$

ἀλλ᾽ οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 8 εἶναι διαιρετὸς διὰ 7˙ ἑπομένως καὶ τὸ $\alpha^2+\beta^2$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ 7.

61) Ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων ὁ εἷς εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιον τοῦ 2 καὶ ὁ ἄλλος (ἢ καὶ ὁ ἴδιος) πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἀναλύομεν λοιπὸν αὐτοὺς καὶ σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον πέντε παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων δύο εἶναι ὁ 2 καὶ 3˙ ἀντικαθιστῶμεν δὲ ἔπειτα αὐτοὺς διὰ τοῦ γινομένου των 6˙ ὥστε τὸ δοθὲν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6˙ ἄρα διαιρεῖται διὰ 6.

62) Κατὰ πρῶτον παρατηροῦμεν ὅτι ὁ εἷς τούτων εἶναι ἄρτιος. Ἔστω δὲ ὅτι οὐδεὶς τῶν α καὶ $\alpha+1$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3˙ τότε θὰ εἶναι $\alpha=$ πολ. $3+1$ καὶ $\alpha+1=$ πολ. $3+2$˙ ἄρα $\alpha+\alpha+1=$ πολ. $3+3=$ πολ. 3˙ ὥστε τοῦ γινομένου $\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)$˙ ὁ μὲν πα-

ράγων 2α+1 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3· ὥστε ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ 3 ἐπί τινα ἀριθμόν· ἐπειδὴ δὲ καὶ ὁ εἷς τῶν ἄλλων εἶναι ἄρτιος, ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ 2 ἐπί τινα ἄλλον· ὥστε τὸ δοθὲν γινόμενον ἀναλύεται εἰς ἄλλο, ὅπερ ἔχει τοὺς παράγοντας 2 καὶ 3 ἢ τὸν 6· ἄρα διαιρεῖται διὰ 6.

63) Ἔστω α, β οἱ ἀριθμοὶ π τὸ πηλίκον καὶ υ τὸ ὑπόλοιπον· ἄρα ἔχομεν α — β×π=υ· ἐὰν δὲ ἀριθμὸς γ διαιρεῖ τὸν α καὶ τὸν β, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸ γινόμενον β×π· ἄρα διαιρεῖ καὶ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμῶν α καὶ β×π ἤτοι διαιρεῖ τὸ υ.

64) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ εἰς τοὺς δύο ἀριθμούς· ἑπομένως τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ τοῦ 9, τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶνε ἴσα· ἄρα ἡ διαφορὰ αὐτῶν διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 9 ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9.

Σελ. 88—67). Ὁ 12 εἶναι ὁ τελευταῖος διαιρέτης· ἑπομένως ὁ τελευταῖος διαιρετέος εἶναι ὁ 12×9=108· ἀλλ' ὁ 108 διαιρέσας τὸν πρὸ αὐτοῦ, ἔδωκε πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 12· ἑπομένως ὁ πρὸ τοῦ 108 εἶναι ὁ 108×2+12 = 228· ὁ δὲ πάλιν 228 διαιρέσας τὸν προηγούμενόν του ἔδωκε πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 108. Εἶναι ἑπομένως ὁ 228×5+108=1248· Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 1248, 228.

68). Οἱ ἀριθμοὶ 7428—1 καὶ 1404—4 ἢ οἱ 7427 καὶ 1400 εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ ζητουμένου· εἶναι λοιπὸν οὗτος κοινός τις διαιρέτης αὐτῶν, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερος τῶν ὑπολοίπων· ἤτοι μεγαλύτερος τοῦ 4· ἀλλ' ὁ μέγιστος κ. δ. τῶν 7427 καὶ 1400 εἶναι ὁ 7· ὁ 7 λοιπὸν εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

69). Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ δ, δ' οἱ ἀντίστοιχοι διαιρέται αὐτῶν, οἵτινες ἔχουσι μ. κ. δ. τοῦ ε =/= 1 ἀλλ' ἀφοῦ ὁ ε διαιρεῖ τὸν δ, θὰ διαιρεῖ καὶ τὸν α, ὅστις εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ δ (ἐδ. 77)· ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ε θὰ διαιρῇ καὶ τὸν β· ἤτοι οἱ α καὶ β ἔχουσι κοινὸν διαιρέτην τὸν ε· ὅπερ ἀδύνατον, διότι οἱ α καὶ β ἐδόθησαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

70). Ἐὰν ἀριθμός τις διαιρῇ τοὺς Α+Β καὶ Α—Β θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 2Α ὡς καὶ τὴν διαφοράν των 2Β· ἀλλὰ τοὺς 2Α καὶ 2Β διαιρεῖ μόνον ὁ 2· ὥστε οἱ Α+Β καὶ Α—Β μόνον τὸν 2 δύνανται νὰ ἔχωσι μ. κ. δ. ἀλλ' ἐὰν Α εἶναι περιττὸς καὶ Β εἶναι ἄρτιος ἢ ἀντιστρόφως οἱ $A+B$ καὶ $A-B$ θὰ εἶναι περιττοὶ καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τὴν 1, ἐνῷ ἐὰν ἀμφότεροι οἱ A καὶ B εἶναι περιττοί, οἱ $A+B$ καὶ $A-B$ θὰ εἶναι ἄρτιοι καὶ θὰ ἔχωσι μ. κ. δ. τοῦ 2.

71). Ἔστω μ. κ. δ. τῶν A, B ὁ α καὶ ἔστω $A=\alpha\times\varkappa$ καὶ $B=\alpha\times\varrho$ εἶναι δὲ $\varkappa$ καὶ ϱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἔστω δὲ ἐπίσης μ. κ. δ. τῶν Γ, Δ ὁ β· ἀλλὰ $\Gamma\times A$, $\Delta\times A$, ἔχουσι μ.κ.δ. τῶν $\beta\times A$ (ἐδ. 105), οἱ δὲ $\Gamma\times B$, $\Delta\times B$ ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν $\beta\times B$· ἀλλ' οἱ $\beta\times A$ καὶ $\beta\times B$ ἢ οἱ $\beta\times\alpha\times\varkappa$ καὶ $\beta\times\alpha\times\varrho$ ἔχουσι μ. κ. δ. τὸν $\beta\times\alpha$ (ἐδ. 108)· ἑπομένως ὁ $\beta\times\alpha$ διαιρεῖ τοὺς $\Gamma\times A$, $\Delta\times A$, $\Gamma\times B$, $\Delta\times B$· εἶναι δὲ καὶ μ. κ. δ.· διότι ἂν μ καὶ ν εἶναι τὰ πηλίκα τῶν Γ καὶ Δ διὰ τοῦ β, οἱ ἀριθμοὶ $\Gamma\times A$, $\Delta\times A$, $\Gamma\times B$, $\Delta\times B$ γράφονται $\beta\times\mu\times\alpha\times\varkappa$, $\beta\times\nu\times\alpha\times\varkappa$, $\beta\times\mu\times\alpha\times\varrho$, $\beta\times\nu\times\alpha\times\varrho$· διαιρούμενοι δὲ οὗτοι διὰ τοῦ $\beta\times\alpha$, δίδουσι πηλίκα $\mu\times\varkappa$ $\nu\times\varkappa$, $\mu\times\varrho$, $\nu\times\varrho$ τὰ ὁποῖα εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα· διότι $\mu\times\varkappa$ καὶ $\nu\times\varrho$ εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ἀφοῦ καὶ οἱ $\varkappa$, ϱ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ μ, ν εἶναι ὁμοίως.

72). Ἀφοῦ ὁ 15 διαιρεῖ τοὺς ζητουμένους θὰ διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 120· ἐὰν δὲ π καὶ π' εἶναι τὰ πηλίκα τῶν ζητουμένων διὰ τοῦ 15, πρέπει νὰ εἶναι $\pi+\pi'=8$ $(120:15=8)$· ἀλλὰ τὰ π, π' εἶναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα· ὥστε ταῦτα θὰ εἶναι ἢ 1 καὶ 7 ἢ 3 καὶ 5· ὥστε οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ἢ $1\times15=15$ καὶ $7\times15=105$ ἢ $3\times15=45$ καὶ $5\times15=75$.

73). Ἐὰν A καὶ B εἶναι οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ καὶ π, π' τὰ πηλίκα αὐτῶν διὰ τοῦ 31, θὰ ἔχωμεν $A=31\times\pi$ καὶ $B=31\times\pi'$· ἄρα εἶναι $A\times B=13^2\times\pi\times\pi'$· ἢ $\frac{A\times B}{13^2}=\pi\times\pi'$· πρέπει δὲ τὸ πηλίκον $\frac{A\times B}{13^2}$ νὰ ἀναλυθῇ εἰς δύο παράγοντας πρώτους πρὸς ἀλλήλους· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{14415}{961}=15$ (τὸ 6615 νὰ διορθωθῇ εἰς 14415)· τότε ἀναλύομεν τὸν 15 εἰς 3 καὶ 5 ἢ εἰς 1 καὶ 15· ὥστε οἱ ζητούμενοι εἶναι ἢ οἱ $3\times31=93$ καὶ $5\times31=155$ ἢ οἱ $1\times31=31$ καὶ $15\times31=465$.

74). Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ 12, τὸ μικρότερον τοῦ 100 εἶναι ὁ 96· σκεπτόμενοι δὲ ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 72, εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ζητούμενοι εἶναι οἱ 12, 84 ἢ οἱ 36, 60.

Σελ. 110—75). $540=2^2.3^3.5$, $3465=3^2.5.7.11$,

$1950=2.3.5^2.13$, $12155=5.11.13.17$,

$441000=2^3.3^2.5^3.7^2$.

76). $A.B.\Gamma=2^4.3^6.5^4.7^3.11^3$.

77). Ὁ Α εἶναι τετράγωνον τοῦ $2^2.3^3.5$ καὶ ὁ Γ τοῦ $3^3.7.11^2$ ἐνῷ ὁ Β δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου, διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν διαιροῦνται διὰ 2.

78). Ὁ Α δὲν εἶναι κύβος ἄλλου, διότι οἱ ἐκθέται αὐτοῦ δὲν διαιροῦνται διὰ 3, ἐνῷ ὁ Β εἶναι κύβος τοῦ $2.3^2.5.11^3$ καὶ ὁ Γ εἶναι κύβος τοῦ $2^4.3^3.11$.

79). Εἶναι διαιρετοὶ οἱ Α καὶ Β καὶ τὰ ἀντίστοιχα πηλίκα εἶναι $2^2.3$ καὶ $2.5.11$.

80). Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ἐὰν οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha\beta$ δὲν ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους θὰ εἶχον ἕνα κοινὸν διαιρέτην πρῶτον· οὗτος δὲ ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον $\alpha.\beta$ θὰ διαιρῇ ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ· ἔστω τὸν α· ὁ αὐτὸς δὲ κοινὸς διαιρέτης ὡς διαιρῶν τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ καὶ τὸν α, θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha+\beta-\alpha$ ἢ τὸν β· ἀλλὰ τότε οἱ α καὶ β δὲν θὰ ἦσαν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

81). Ἔχομεν $8400=2^4.3.5^2.7$ καὶ $29400=2^3.3.5^2.7^2$· ἄρα εἶναι μ. κ. δ.$=2^3.3.5^2.7$ καὶ ε. κ. π.$=2^4.3.5^2.7^2$.

82). Εἶναι $3375=3^3.5^3$, $5625=3^2.5^4$, $121275=3^2.5^2.7^2.11$· εἶνα ἄρα μ. κ. δ.$=3^2.5^2$ καὶ ε. κ. π.$=3^3.5^4.7^2.11$.

83). Εἶναι τὸ $5.7.8.9$.

84). Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῆς σειρᾶς 6ν, $6\nu+1$, $6\nu+2$, $6\nu+3$, $6\nu+4$, $6\nu+5$, ὅπου ν εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ 0.

Ἀλλ' ἐκ τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς, οἱ τῆς μορφῆς 6ν, $6\nu+2$, $6\nu+3$, $6\nu+4$ δὲν εἶναι πρῶτοι, διότι ἐξ αὐτῶν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2 ἢ διὰ 3 τοὐλάχιστον· οἱ πρῶτοι λοιπὸν ἀριθμοὶ περιέχονται εἰς τοὺς $6\nu+1$ καὶ $6\nu+5$· ἀλλ' ὁ $6\nu+5$ γράφεται $6\nu+6-1$ ἤτοι εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 ἠλαττωμένον κατὰ μονάδα, ὅπως εἶναι καὶ ὁ $6\nu+1$ πολλαπλάσιον τοῦ 6 ηὐξημένον κατὰ μονάδα.

85). Εἶναι οἱ 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19.

86). Εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ μ. κ. δ. αὐτῶν· π. χ. τῶν ἀριθμῶν 4720 καὶ 2520 μ. κ. δ. εἶναι ὁ 40· οἱ δὲ διαιρέται τοῦ 40, οἵτινες εἶναι οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων εἶναι οἱ

1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

87). Ἀριθμός τις διαιρεῖται διὰ 45, ὅταν διαιρεῖται διὰ 5 καὶ 9 καὶ διὰ 18 ὅταν διαιρεῖται διὰ 2 καὶ 9· διότι οἱ 5 καὶ 9 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὡς καὶ οἱ 2 καὶ 9.

88). Γνωρίζομεν ὅτι ἀριθμός τις εἶναι τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιροῦνται πάντες διὰ 2· ἀλλ᾽ ἐὰν τὸν ἀριθμὸν τοῦτον πολλλαπλασιάσωμεν π. χ. ἐπὶ 2, 3, κ. τ. λ. ὁ νέος ἀριθμὸς θὰ περιέχῃ τὸν παράγοντα μὲ ἐκθέτην περιττὸν καὶ ἑπομένως μὴ διαιρούμενον διὰ 2.

89). Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος τοῦ ἐδ. 104· ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $A=2^3.5^2.7.11$, $B=2^4.3^2.5^3$, $\Gamma=2^3.3^4.5.11$· μ. κ. δ. αὐτῶν εἶναι ὁ $2^3.5^4$· διαιρέται δὲ τοῦ μ. κ. δ. οἱ

$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 5,\ 2.5,\ 2^2.5,\ 2^3.5$· πάντες δὲ οὗτοι εἶναι καὶ κοινοὶ διαιρέται τῶν δοθέντων Α, Β, Γ, διότι (ἐδ. 124) οὗτοι περιέχουσι πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τῶν διαιρετῶν τούτων κ.τ.λ.

90) Ἔστω ὅτι ὁ γ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν α καὶ πρὸς τὸν β· ἀφοῦ οἱ α καὶ γ ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1 εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ οἱ α. β καὶ γ ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1 ἤτοι : ὁ γ ὢν πρῶτος πρὸς ἕκαστον παράγοντα τοῦ α.β εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον τοῦτο· ἐὰν δὲ καὶ ὁ δ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν γ· οἱ δὲ αβ καὶ γ ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1 καὶ οἱ αβδ καὶ γ ἔχουσι μ. κ. δ. τὴν 1· ἐὰν δὲ καὶ ὁ ε εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν γ. ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι καὶ οἱ α. β. δ. ε καὶ γ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους κ. ο. κ.· ἀντιστρόφως δὲ ἐὰν ὁ γ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ γινόμενον α. β. δ. ε, ὁ δὲ γ δὲν ἦτο πρῶτος πρὸς ἕνα τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἔστω πρὸς τὸν α, τότε οἱ α καὶ γ θὰ εἶχον παράγοντα κοινόν, ἑπομένως τὸν παράγοντα τοῦτον, θὰ εἶχον κοινὸν καὶ οἱ γ καὶ α. β. δ. ε· ἀλλὰ τοῦτο κατὰ τὸ ἐδ. 127 δὲν εἶναι δυνατόν.

92). Ἔστω Μ ὁ ἀριθμὸς καὶ οἱ διαιρέται αὐτοῦ κατὰ τάξιν μεγέθους, οἱ $1, \alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda, \nu, M$· εἶναι δὲ $1 < \alpha < \beta < \gamma < \delta \ldots \pi < \lambda < \nu < M$ (1) καὶ ἑπομένως τὰ πηλίκα :

$\frac{M}{M}, \frac{M}{\nu}, \frac{M}{\lambda}, \frac{M}{\sigma} \ldots \frac{M}{\gamma}, \frac{M}{\beta}, \frac{M}{\alpha}, \frac{M}{1}$ ἀκολουθοῦσι τὴν αὐτὴν τάξιν μεγέθους, ἀφοῦ οἱ διαιρέται $N, \nu, \lambda, \ldots \gamma, \beta, \alpha, 1$ βαίνουσιν ἐλαττούμενοι· ἤτοι εἶναι

$$\frac{M}{M} < \frac{M}{\nu} < \frac{M}{\lambda} \ldots < \frac{M}{\gamma}, < \frac{M}{\beta} < \frac{M}{\alpha} < \frac{M}{1}.$$

Ἀλλὰ προδήλως εἶναι ἕκαστος ὅρος τῆς σειρᾶς ταύτης, ἴσος πρὸς τὸν ὅρον τῆς αὐτῆς τάξεως τῆς σειρᾶς (1)· ἤτοι εἶναι

$\frac{M}{M} = 1$ ἄρα καὶ $M = 1.\,M$

$\frac{M}{\nu} = \alpha$ » » $M = \alpha.\nu$

$\frac{M}{\lambda} = \beta$ » » $M = \beta.\lambda$

. . . .

$\frac{M}{\gamma} = \sigma$ » » $M = \sigma.\gamma$·

$\frac{M}{\beta} = \lambda$ » » $M = \lambda.\beta$

$\frac{M}{\alpha} = \nu$ » » $M = \nu.\alpha$

$\frac{M}{1} = M$ » » $M = M.1$

94). Εἶναι οἱ 3 καὶ 8.

Σελ. 126—96). Ἔχομεν $\frac{85:5}{115:5} = \frac{17}{23} = \frac{17\times 3}{23\times 3} = \frac{51}{69}$· ἄρα εἶναι $\frac{85}{115} = \frac{51}{69}$.

97). Ὁμοίως ἔχομεν $\frac{99}{117} = \frac{11}{13} = \frac{11\times 7}{13\times 7} = \frac{77}{91}$.

98). Τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{3\times\alpha}{5\times\alpha}$· ὅταν $3\times\alpha + 5\times\alpha = 72$ ἢ $(3+5)\times\alpha = 72$ ἢ $\alpha = \frac{72}{8} = 9$· εἶναι λοιπὸν τὸ $\frac{27}{45}$.

99). Τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι $\frac{7\times\alpha}{11\times\alpha}$, ὅταν $11\times\alpha - 7\times\alpha = 28$ ἢ $(11-7)\times\alpha = 28$ ἢ $\alpha = \frac{28}{4} = 7$· εἶναι ἄρα τὸ $\frac{49}{77}$.

100). Εἶναι $\frac{57}{93}=\frac{19}{31}$ καὶ τὸ $\frac{19\times8}{31\times8}=\frac{152}{248}$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

101). Τὰ ζητούμενα ἔστω ὅτι εἶναι τὰ $\frac{3\times\alpha}{4\times\alpha}$, $\frac{8\times\beta}{27\times\beta}$, $\frac{12\times\gamma}{19\times\gamma}$· πρέπει δὲ νὰ εἶναι $4\times\alpha=8\times\beta$· καὶ $27\times\beta=12\times\gamma$ ἢ $\beta=\frac{\alpha}{2}$ καὶ $\gamma=\frac{27\times\beta}{12}$· ἀφοῦ δὲ τὸ β, ὅπερ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ τὸ $\frac{\alpha}{2}$, πρέπει ὁ α νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος· ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ γ πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ἡ μικροτέρα τιμὴ τοῦ β, ἥτις δίδει τὸ γ ἀκέραιον εἶναι ὁ 4· ἔχομεν λοιπὸν $\gamma=9$ καὶ $4=\frac{\alpha}{2}$ ἤτοι $\alpha=8$·

Ὥστε τὰ ζητούμενα κλάσματα εἶναι $\frac{24}{32}$, $\frac{32}{108}$, $\frac{108}{161}$.

102). α) Τὰ διδόμενα κλάσματα ἁπλοποιοῦνται καὶ γίνονται $\frac{7}{15}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ καὶ τρέπονται εἰς τὰ $\frac{28}{60}$, $\frac{20}{60}$, $\frac{15}{60}$.

β) τὰ $\frac{19}{120}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{9}{14}$ τρέπονται εἰς τὰ $\frac{133}{840}$, $\frac{120}{840}$, $\frac{540}{840}$.

103). α) Ἔχομεν $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{13}{50}$ καὶ τρέπονται εἰς τὰ $\frac{150}{200}$, $\frac{175}{200}$, $\frac{52}{200}$.

β) ἔχομεν $\frac{2}{5}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{11}{30}$, $\frac{20}{33}$ καὶ τρέπονται εἰς τὰ $\frac{264}{660}$, $\frac{363}{660}$, $\frac{242}{660}$, $\frac{400}{660}$.

104). Τὰ τρέπομεν εἰς τὰ $\frac{2486}{791}$, $\frac{2485}{791}$· ὥστε μεγαλύτερον εἶναι τὸ πρῶτον.

105) Ἀφοῦ οἱ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ β-α καὶ β εἶναι ὡσαύτως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ἐὰν δὲν ἦσαν, θὰ εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην, ὅστις ὡς διαιρῶν αὐτούς, θὰ διαιρεῖ καὶ τὴν διαφοράν των $\beta-(\beta-\alpha)=\beta-\beta+\alpha=\alpha$· ἑπομένως θὰ διήρει τοὺς α καὶ β καὶ δὲν θὰ ἦσαν οὗτοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

106). Ἐὰν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\delta+\beta\gamma}{\beta\delta}$ δὲν ἦτο ἀνάγωγον, οἱ ὅροι αὐτοῦ θὰ εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην πρῶτον ἀριθμὸν μ, ὅστις ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον β.δ θὰ διαιρῇ ἕνα ἐξ αὐτῶν, ἀφοῦ οἱ β, δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔστω τὸν β· ἀλλὰ διαιρεῖ καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha\delta+\beta\gamma$· ἐπειδὴ δὲ διαιρεῖ καὶ τὸν βγ θὰ διαιρῇ καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha\delta+\beta\gamma-\beta\gamma=\alpha\delta$· ἤτοι θὰ διαιρῇ τὸν α· ἀλλ' οἱ α καὶ β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ὥστε δὲν δύναται νὰ διαιρῇ τὸν αδ· ἤτοι τὸ κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον· ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ μ διαιρεῖ τὸν δ, ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν ὅτι πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν γ.

Σελ. 150—108). α) $\frac{1890}{6.15}+\frac{1080}{6615}+3\,\frac{1323}{6615}+\frac{8505}{6615}-\frac{4900}{6615}=4\,\frac{1283}{6615}$· $\left(\text{τὸ } \frac{36}{28} \text{ ἡπλοποιήθη προηγουμένως}\right)$.

β) Εἶναι $34\,\frac{3}{4}-7\,\frac{15}{16}=34\,\frac{12}{16}-7\,\frac{15}{16}=34\,\frac{28}{16}-8\,\frac{15}{16}=26\,\frac{13}{16}$ καὶ $9\,\frac{2}{3}-6\,\frac{11}{12}=9\,\frac{8}{12}-6\,\frac{11}{12}=8\,\frac{20}{12}-6\,\frac{11}{12}=2\,\frac{9}{12}=2\,\frac{12}{16}$· ὥστε εἶναι $26\,\frac{13}{16}-2\,\frac{12}{16}=24\,\frac{1}{16}$.

109). Εἶναι $\frac{57}{95}\times\frac{242}{363}\times\frac{1080}{1260}=\frac{1}{5}\times 2\times\frac{6}{7}=\frac{12}{35}$.

110). Εἶναι $\frac{1210}{2421}:\frac{4840}{9681}=\frac{1210}{2421}\cdot\frac{9681}{4840}=\frac{1}{807}\cdot\frac{3227}{4}:\frac{3227}{3228}$.

111). Ὁ 1 πῆχυς ἀξίζει $\frac{700}{18\frac{1}{2}}$ ἢ $\frac{1400}{37}$ τῆς δραχμῆς καὶ ἑπομένως οἱ $10\,\frac{2}{5}$ ἀξίζουν $\frac{1400}{37}\left(10\,\frac{2}{5}\right)$ ἤτοι $\frac{1400\,.\,52}{5\,.\,37}=\frac{280\,.\,52}{37}=393\frac{19}{37}$ δραχ.

112). Μὲ 1 δραχ. ἀγοράζει $\frac{2}{12\frac{1}{2}}$ τῆς ὀκᾶς καὶ μὲ $40\,\frac{1}{5}$ ἀγοράζει $2\cdot\frac{40\frac{1}{5}}{12\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{402}{125}=6\,\frac{54}{125}$ ὀκ.

113) Τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 14—8 ἤτοι 6 καὶ τὰ $\frac{3}{3}$ ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς εἶναι 6 . 3=18.

114). Τὰ δύο τέκνα ἔλαβον ὁμοῦ τὰ $\frac{2}{5}+\frac{3}{8}$ τῆς περιουσίας, ἤτοι τὰ $\frac{31}{40}$ αὐτῆς· ἄρα ἡ σύζυγος ἔλαβε τὰ $\frac{40}{40}-\frac{31}{40}$ ἤτοι τὰ $\frac{9}{40}$· ταῦτα δὲ ἦσαν 9000 δραχ. ἄρα ἡ περιουσία ἦτο $\frac{9000\,.\,40}{9}=40000$ δραχμ. καὶ ὁ μὲν υἱὸς ἔλαβε 15000, ἡ δὲ θυγάτηρ 16000.

115). Εἰς 1 ὥραν πληροῖ ἡ πρώτη κρήνη τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς δεξαμενῆς, ἡ δὲ δευτέρα τὸ $\frac{1}{15}$ ἄρα ὁμοῦ πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν τὰ $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$

τῆς δεξαμενῆς· ἤτοι τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{3}{20}$ χρειάζονται 1 ὥραν, ἵνα πληρωθῶσι, τὸ $\frac{1}{20}$ χρειάζεται $\frac{1}{3}$ τῆς ὥρας καὶ τὰ $\frac{20}{20}$, ἤτοι ὅλη ἡ δεξαμενὴ χρειάζεται $\frac{20}{3}$ τῆς ὥρας, ἤτοι $6\frac{2}{3}$ τῆς ὥρας.

116). Ὁ πρῶτος, ἐπειδὴ εἰς 8 ἡμέρας ἐκτελεῖ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}$ αὐτοῦ. Ὁ δεύτερος, ἐπειδὴ ἐκτελεῖ εἰς 5 ἡμέρας τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ἔργου, θὰ ἐκτελέσῃ εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{2}{45}$ αὐτοῦ· ἂν λοιπὸν εἰργάζοντο ὁμοῦ, θὰ ἐξετέλουν εἰς μίαν ἡμέραν τὰ $\frac{3}{40}+\frac{2}{45}$ ἤτοι τὰ $\frac{43}{360}$ τοῦ ἔργου· καὶ ἑπομένως τὸ ὅλον ἔργον εἰς $\frac{360}{43}$ τῆς ἡμέρας (ἰδὲ προηγούμενον πρόβλημα).

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἔχουσιν ἐκτελεσθῇ τὰ $\frac{2}{9}+\frac{3}{5}$ τοῦ ἔργου, ἤτοι τὰ $\frac{37}{45}$ αὐτοῦ, μένουσιν πρὸς ἐκτέλεσιν τὰ $\frac{8}{45}$ τοῦ ἔργου· ἑπομένως οἱ δύο ἐργάται χρειάζονται πρὸς τοῦτο ἡμέρας $\frac{360}{43}\cdot\frac{8}{45}$ ἢ $\frac{64}{43}$ ἢ $1\frac{21}{43}$.

117) Τὴν στιγμὴν καθ' ἣν ἐξεκίνησεν ὁ ἱππεύς, ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πεζοῦ ἦτο 85 στάδια (διότι τόσα διατρέχει ὁ πεζὸς εἰς 10 ὥρας)· ἐπειδὴ δὲ καθ' ἑκάστην ὥραν ἡ ἀπόστασις αὕτη ἐλαττοῦται κατὰ $\frac{28}{3}-\frac{17}{2}$ (διότι ὁ μὲν ἱππεὺς διανύει $\frac{28}{3}$ στάδια τὴν ὥραν, ὁ δὲ πεζὸς $\frac{17}{2}$) ἤτοι κατὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ σταδίου, ἕπεται, ὅτι τόσαι ὧραι θὰ περάσουν, ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ $\frac{5}{6}$ εἰς τὸν 85 ἤτοι $85:\frac{5}{6}$ ἢ $85\times\frac{6}{5}=17\times6=102$ ὧραι.

118) Τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν δευτέραν ἀναπήδησιν εἶναι $\frac{1}{8}$ τοῦ πήχεως· ἄρα τὸ ῥηθὲν ὕψος εἶναι $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}$· τὸ δὲ ὕψος τοῦτο εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, εἰς ὃ ὑψώθη κατὰ τὴν πρώτην ἀναπήδησιν· ἄρα τὸ ὕψος τῆς πρώτης ἀναπηδήσεως εἶναι $\frac{1}{8}\times\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}$·

τέλος τὸ ὕψος τοῦτο εἶναι τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπεσε· κατὰ πρῶτον ἡ σφαῖρα· ἄρα τὸ ἀρχικὸν ὕψος εἶναι

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}\cdot\frac{9}{2}=11\,\frac{25}{64}\ \text{πήχεις.}$$

119) Τὰ $\frac{3}{8}+\frac{1}{6}$ ἢ τὰ $\frac{21}{40}$ τοῦ ζητουμένου ἰσοῦνται μὲ 30—9 ἢ 21· ἄρα ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ $21:\frac{21}{40}=21\times\frac{40}{21}=40$.

120) Τὸ $\frac{1}{6}$ νὰ διορθωθῇ εἰς $\frac{1}{9}$. Τὰ $\frac{3}{8}+\frac{1}{9}$ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{35}{72}$ τοῦ ἀριθμοῦ, ἐὰν δὲ εἰς τὰ $\frac{35}{72}$ προστεθῇ ἢ ἡ 1 ἢ τὸ $\frac{1}{72}$ θὰ λάβωμεν τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ· ἄρα εἶναι τὸ $\frac{1}{72}$ τοῦ ζητουμένου ἴσον μὲ 1 καὶ ἑπομένως τὰ $\frac{72}{72}$ ἤτοι ὅλος ὁ ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ 72.

121) Ἡ α΄ κρήνη πληροῖ εἰς 1 ὥραν τὸ $\frac{1}{40}$ τῆς δεξαμένης· ἡ β΄ τὸ $\frac{1}{30}$ αὐτῆς καὶ ἡ γ΄ τὸ $\frac{1}{20}$. ἄρα αἱ τρεῖς κρῆναι εἰς 1 ὥραν πληροῦσι τὰ $\frac{1}{40}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}$ ἢ τὰ $\frac{26}{240}$ ἢ $\frac{13}{120}$ τῆς δεξαμενῆς· ἄρα ὅλην τὴν δεξαμενὴν θὰ γεμίσωσιν εἰς 1 ὥρ. : $\frac{13}{120}=1\times\frac{120}{13}=9\,\frac{3}{13}$.

122) Εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται τὰ $\frac{20}{100}$ ἢ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος οἴνου (διότι ἐκ τῶν 100 ὀκάδων τοῦ ἐν τῷ πίθῳ ὑπάρχοντος ὑγροῦ ἀφαιροῦνται αἱ 20)· ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἦτο οὗτος 100 ὀκάδες καὶ ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ, ἄρα ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι ἔμεινεν $100\times\frac{4}{5}$· εἰς τὴν δευτέραν ἀφαίρεσιν ἀφῃρέθη τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ $100\times\frac{4}{5}$, ὥστε ἔμειναν τὰ $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$· ὁμοίως ἔμειναν μετὰ τὴν τρίτην ἀφαίρεσιν $100\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}$, τουτέστιν ὀκ. $51\,\frac{1}{5}$.

125) Ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}<1$· ἄρα εἶναι $\frac{\gamma}{\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν θὰ εἶναι $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}$.

Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\gamma}{\gamma}$ καὶ ἑπομένως $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}$.

126) Τὸ κλάσμα $\frac{M\delta-\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀνάγωγον· διότι ἂν δὲν ἦτο οἱ ὅροι αὐτοῦ θὰ εἶχον κοινόν τινα διαιρέτην ε· ὁ ε ὡς διαιρῶν τὸν ἀριθμητὴν πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸ γ· ἀλλ' ὁ ε διαιρεῖ καὶ τὸν παρονομαστὴν δ· ἀλλὰ τότε τὸ $\frac{\gamma}{\delta}$ δὲν θὰ ἦτο ἀνάγωγον.

127) Ἔστωσαν δύο ἀνάγωγα κλάσματα τὰ $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀκέραιον N· ἤτοι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\delta} = N$ ἢ $\frac{\alpha}{\beta} = N + \frac{\gamma}{\delta} = \frac{N\delta+\gamma}{\delta}$ (1)· ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον· διότι ἂν δὲν ἦτο, ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν ὅρων αὐτοῦ, θὰ διῄρει καὶ τὸν δ καὶ τὸν γ, ὅπερ ἀδύνατον διότι τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀνάγωγον· ἄρα ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἀδύνατος διότι οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ εἶναι διάφοροι (ἐδ. 152).

128) Ἔστωσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$ ἵνα δὲ τοῦτο εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος, εἶναι φανερόν, ὅτι ὁ β πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν γ καὶ ὁ δ τὸν α.

129) Τὸ πηλίκον τῶν ἀνωτέρω κλασμάτων εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta}$ ἢ $\frac{\alpha.\delta}{\beta.\gamma}$ ἵνα δὲ τοῦτο εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος πρέπει ὁ β νὰ διαιρεῖ τὸν δ καὶ ὁ γ τὸν α.

130) Ἔστω $\beta < \alpha$· τότε εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} > 1$ καὶ $\frac{\beta}{\alpha} < 1$. ἤδη ἀφαιροῦμεν τὴν 1 ἀπὸ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ τὸ $\frac{\beta}{\alpha}$ ἀπὸ τὴν μονάδα καὶ ἔχωμεν $\frac{\alpha}{\beta} - 1$ ἢ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ καὶ $1 - \frac{\beta}{\alpha}$ ἢ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$· ἀλλ' ἐκ τῶν $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ παρατηροῦμεν ὅτι μεγαλύτερον εἶναι τὸ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$· ἄρα δυνάμεθα ἀπὸ τὴν διαφορὰν $\frac{\alpha}{\beta} - 1$ νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν $1 - \frac{\beta}{\alpha}$· ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$\left(\frac{\alpha}{\beta}-1\right)-\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\alpha-\beta}{\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$ ἢ $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)-2=$ $\frac{\alpha-\beta}{\beta}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha}$· ἐντεῦθεν συνάγομεν ὅτι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$.

Σελ. 179—123). $5{,}25=\frac{525}{100}=\frac{21}{4}$, $4{,}04=4\frac{4}{100}=4\frac{1}{25}=\frac{101}{25}$ $0{,}875=\frac{7}{8}$, $0{,}0084=\frac{21}{2500}$.

124). Ἐπὶ α) 0,75 β) 0,875 γ) 0,888.

125). Διὰ α) 0,375 β) 0,44 γ) 0,4992.

126). $\frac{21}{35}=\frac{3}{5}=0{,}6$, $\frac{31}{250}=0{,}124$, $\frac{102}{340}=0{,}3$, $\frac{125}{32}=3{,}90625$.

127) 7 : 11=0,64, 281 : 28=10,04
23 : 15=1,53, 175 : 37= 4.73.

128) Τὰ $\frac{13}{40}$, $\frac{461}{625}$ τρέπονται εἰς ἀκριβῆ δεκαδικὰ διότι εἶναι ἀνάγωγα καὶ εἶναι $40=2^3.5$, $625=5^4$.

Τὸ $\frac{17}{101}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, διότι εἶναι ἀνάγωγον καὶ ὁ 101 δὲν περιέχει οὔτε τὸν 2, οὔτε τὸν 5· ἐνῷ τὰ $\frac{151}{240}$, $\frac{85}{175}=\frac{17}{35}$, $\frac{13}{66}$, $\frac{31}{88}$ τρέπονται εἰς μικτὰ περιοδικά, διότι εἶναι $240=2^4.3.5$, $66=2.3.11$, $88=2^3.11$.

129). Ἔστωσαν τὰ ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταὶ β, καὶ δ δὲν περιέχουσιν οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5· ἀλλὰ τ τε ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha.\delta+\beta.\gamma}{\beta.\delta}$· ἐὰν ἤδη τὸ $\frac{\alpha.\delta+\beta.\gamma}{\beta.\delta}$ ὑποτεθῇ ὅτι εἶναι καὶ τοῦτο ἀνάγωγον, ὁ παρονομαστὴς β.δ, ὅστις εἶναι γινόμενον παραγόντων ὧν οὐδέτερος περιέχει τὸν 2 ἢ 5, δὲν θὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 καὶ ἑπομένως τὸ κλάσμα $\frac{\alpha.\delta+\beta.\gamma}{\beta.\delta}$ παράγει ἁπλοῦν περιοδικόν· ἂν ὅμως ὑποτεθῇ, ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι ἀνάγωγον, ἀλλ' ἁπλοποιούμενον γίνει $\frac{\mu}{\nu}$ (ἀνάγωγον), ὁ παρονομαστὴς ν ὡς ὑποπολλαπλάσιον τοῦ β.δ, δὲν θὰ περιέχῃ προφανῶς οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5· ὥστε τὸ $\frac{\mu}{\nu}$ τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν. Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ διὰ τὸ $\frac{\alpha.\delta-\beta.\gamma}{\beta.\delta}$.

130). Ἔστωσαν $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ κοινὰ ἀνάγωγα κλάσματα ὧν οἱ παρονομασταὶ β, δ δὲν περιέχουσιν οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν 5. Τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$, ὅπερ ἢ εἶναι ἀνάγωγον ἢ ὄχι· ἀλλ' ἐὰν εἶναι ἀνάγωγον, τρέπεται τοῦτο εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, διότι ὁ παρονομαστὴς β.δ δὲν περιέχει οὔτε τὸν 2 οὔτε τὸν 5· ἐὰν ὅμως τὸ $\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\delta}$ δὲν εἶναι ἀνάγωγον, πάλιν τοῦτο τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν, διότι τὸ ἀνάγωγον $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπερ προκύπτει ἐκ τούτου δι' ἁπλοποιήσεως, καὶ τοῦ ὁποίου ὁ ν, ὢν διαιρέτης τοῦ β.δ, δὲν περιέχει τὸν 2 ἢ 5, τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

131) Ἔστωσαν, ὡς ἄνω τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶναι $\frac{\alpha.\delta}{\beta.\gamma}$, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἢ εἰς μικτὸν ἢ εἰς ἀκριβὲς δεκαδικόν, διότι περὶ τῶν παραγόντων τῶν α, δ ἢ τῶν β, γ δὲν γνωρίζομεν τίποτε· εἶναι ἑπομένως δυνατὸν ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀναγώγου κλάσματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ $\frac{\alpha.\delta}{\beta.\gamma}$, ἢ νὰ μὴ περιέχῃ τὸν 2 ἢ 5 ἢ νὰ περιέχῃ τὸν 2 ἢ 5 μετ' ἄλλων, ἢ μόνον τὸν 2 ἢ 5, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων:

1) $\frac{27}{31} : \frac{63}{67} = \frac{27}{31} . \frac{67}{63} = \frac{201}{217}$ ἁπλ. περ.

2) $\frac{2}{19} : \frac{12}{23} = \frac{2}{19} . \frac{23}{12} = \frac{23}{114}$ μικ. περιοδ.

3) $\frac{4}{7} : \frac{16}{21} = \frac{4}{7} \times \frac{21}{16} = \frac{3}{4}$ ἀκρ. δεκ.

132) Ὁ Α ὢν πρῶτος πρὸς τὸν 10 εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὰς δυνάμεις αὐτοῦ· ὥστε τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ τοῦ Α, τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀπεριορίστου σειρᾶς $10, 10^2, 10^3, 10^4 \ldots 10^\nu \ldots$ εἶναι ὅλα μικρότερα τοῦ Α καὶ Α—1 τὸ πολύ· ἔστω δὲ 10^π, 10^ϱ αἱ δυνάμεις τοῦ 10, αἵτινες διαιρούμεναι δι' Α δίδουσι τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα καὶ ἔστω $\pi > \varrho$· ἀλλ' ἵνα αἱ 10^π, 10^ϱ δίδουσι τὰ αὐτὰ ὑπόλοιπα, πρέπει ἡ διαφορὰ αὐτῶν $10^\pi - 10^\varrho$ νὰ διαιρῆται δι' Α· ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὕτη γράφεται $10^\varrho . (10^{\pi-\varrho} - 1)$ καὶ ἐπειδὴ ὁ Α δὲν διαιρεῖ

τὸν 10^{ϱ}, διαρεῖ τὸ $10^{\pi-\varrho}-1$ ἢ ἐὰν $\pi-\varrho=\mu$, διαιρεῖ τὸ $10^{\mu}-1$· Ἐὰν δὲ ὁ μ εἶναι ὁ μικρότερος ἐκθέτης τῆς δυνάμεως τοῦ 10, δι' ἣν ὁ Α διαιρεῖ τὸ $10^{\mu}-1$ ἔχομεν $10^{\mu}-1=A.\sigma$ καὶ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{B}{A}$ ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{B\sigma}{A\sigma}$ ἢ $\frac{B}{A}=\frac{B\sigma}{10_{\mu}-1}$· εἶναι δὲ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἁπλοῦν περιοδικόν, οὗ ὁ παρονομαστὴς ἀποτελεῖται ἀπὸ μ 9· δηλαδὴ ἡ περίοδος αὐτοῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ μ ψηφία.

133) Ἔχομεν $\frac{58}{99}=0,585858\ldots\ldots$· ἀλλὰ τούτου ὡς περίοδον δυνάμεθα νὰ λάβωμεν 5858· παράγεται ἑπομένως ἐκ τοῦ $\frac{5858}{9999}$. ἄρα εἶναι $\frac{58}{99}=\frac{5858}{9999}$.

Σελ. 208—134) Ἀγοράζει $\frac{72\text{στ.}}{2\text{στ. } 15\text{ὀκ. } 300}=\frac{1267200}{41500}$ λίρας $=30\,\frac{222}{415}$ λίρας.

135) Θὰ ἐργασθῇ 15 ταλ. 1 δρ. 50 λ. : $\frac{7}{8}$ ἢ $15\,\frac{3}{10}:\frac{7}{8}=17$ ὥρ. 29′ $\frac{1}{7}$.

136) 1 δακ. 8 γρ. = 28 γραμ. $32^{\circ}\,6'\,20''=32\,\frac{19}{180}$ μοῖραι. Ὥστε τὸ ζητούμενον μῆκος εἶναι 20 γρ. $\times\,32\,\frac{19}{180}=4$ πόδες 5 δακ. 6 γρ. $\frac{1}{9}$.

137) Εἶναι 1886 ἔτ. 4 μην. 21 ἡμ.—1843 ἔτη 3 μην. = 43 ἔτη 1 μ. 21 ἡμ.

138) Διήνυσε 120 μ. : $56\,\frac{3}{4}=2\,\frac{22}{227}$ μίλια.

139) Διανύει $35,8\times 12\,\frac{77}{180}=444,91\ldots$ στάδια.

140) Ἔχει βάρος 5 ὀκ. 250 δραμ. $\times$ 21,8 = 120 ὀκ. 250 δραμ.

141) Ἀξίζουν 60,2 δρ. $\times\,12\,\frac{3}{8}=744,9$ δραχ.

Σελ. 209—142) 1 πήχ· ἐνδεζὲ = 0,648 μ. ἄρα ἔχομεν 0,648 μ. $\times\,23\,\frac{3}{8}$ πολ/ντες τὸν δεκαδικὸν ἐπὶ 23 καὶ ἔπειτα ἐπὶ $\frac{3}{8}$, εὑρίσκομεν, ὅτι $23\,\frac{3}{8}$ πηχ. ἐνδ. = 15 μ. 147.

143) Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἂν πολ/σθῇ ἐπὶ 0,648 θὰ δώσῃ 67,8 μ. ἄρα εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{67,8}{0,648}$.

144) Οἱ 2 στ. 18 ὀκ. γίνονται 106 όκ. καὶ ἐπειδὴ ἡ ὀκᾶ ἔχει 1280 γραμ. αἱ 106 ὀκ. γίνονται $1280 \times 106 = 135680$ γραμ. Ἀλλ' εἶναι 1 δράμ.$=3,2$ γραμ. ἄρα ἔχομεν 250 δραμ. $= 3,2$ γρ. $\times 250 = 800$ γραμ. καὶ ἑπομένως ὁ δοθεὶς συμμιγὴς γίνεται τὸ ὅλον 136480 γραμ. ἤτοι 136 χιλιόγ. καὶ 480 γραμ.

145) Ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τὸ ὅλον 2152620 γραμ. ἄρα εἶναι δράμια $\frac{2152620}{3,2} = 672693 \frac{3}{4}$ δραμ. $= 38$ στατ. 9 ὀκ. $293 \frac{3}{4}$ δράμια.

146) 1 ὀργ. $= 1,94904$ μέτ. ἄρα $25 \frac{1}{3}$ ὀργ. $= 1,94904 \times 25 \frac{1}{3} = 49,37568$ μέτρα.

147) 1 παλ. στρέμμα $= 1,27$ βασιλικά· ἄρα 582 παλ. $= 1,27 \times 582 = 739,14$ βασιλικά.

148) 1 τεκ. τετρ. πήχ. $= \frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου· ἄρα 620 τεκ. τετρ. πήχ. $= \frac{9}{16} \times 620 = 348,75$ τετρ. μ.

Σελ. 224—149). Ἵνα τετράγωνον ἀριθμοῦ λήγῃ εἰς 5 πρέπει καὶ ὁ ἀριθμὸς νὰ λήγῃ εἰς 5· ἐὰν δὲ τοῦ ἀριθμοῦ Α τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι δ ἔχομεν $A = 10.\delta + 5$ καὶ $A^2 = 100.\delta^2 + 100\delta + 25$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἀριθμὸς λήγων εἰς δύο μηδενικά· ἑπομένως ὅλον τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀριθμὸς λήγων εἰς 25 καὶ ἑπομένως τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι 2

150). Ἔχομεν ὡς ἀνωτέρω $A^2 = 100\delta^2 + 100\delta + 25$· ἢ $A^2 = 100\delta(\delta + 1) + 25$· ἀλλ' οἱ δ καὶ $\delta + 1$ εἶναι δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι πάντοτε ἄρτιον· ἑπομένως τὸ πρῶτον, ἐκ δεξιῶν, σημαντικὸν ψηφίον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο πρώτων ὅρων τοῦ A^2, δὲν δύναται νὰ λήγῃ εἰς 1.

151). Τοῦτο συνάγεται ἐκ τῆς ἀνωτέρω γραφείσης ἰσότητος $A^2 = 100\delta(\delta + 1) + 25$.

152). Ἐὰν τέλειον τετράγωνον λήγει εἰς 6, ὁ ἀριθμὸς λήγει εἰς 6 ἢ εἰς 4· ἔχομεν λοιπὸν $A = 10\delta + 4$ ἢ $A = 10\delta + 6$ καὶ $A^2 = 100\delta^2 + 80\delta + 16$· ἢ $A^2 = 100\delta^2 + 120\delta + 36$· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $100\delta^2 + 80\delta$ ἢ τὸ $100\delta^2 + 120\delta$, εἶναι ἀριθμὸς λήγων εἰς 0 καὶ ἔχων εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις τὸ δεύτερον ψηφίον ἄρτιον· εἰς αὐτὸ δὲ προστίθεται πάντοτε ἢ 1 ἢ 3· ὥστε τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων τοῦ A^2 εἶναι πάντοτε περιττόν.

153). Ὁμοίως ὅταν τέλειον τετράγωνον λήγει εἰς 9, ὁ ἀριθμὸς λήγει εἰς 3 ἢ εἰς 7· ὥστε ἔχομεν $A=10\delta+3$ ἢ $A=10\delta+7$ καὶ $A^2 = 100\delta^2+60\delta+9$ ἢ $A^2 = 100\delta^2+140\delta+49$· ἀλλὰ τὸ $100\delta^2+60\delta$ ἢ τὸ $100\delta^2+140\delta$, εἶναι ἀριθμὸς λήγων εἰς 0 καὶ οὗ τὸ δεύτερον ψηφίον εἶναι ἄρτιον· εἰς αὐτὸ δὲ προστίθεται ἢ τὸ 0 ἢ ὁ 4 καὶ ἔχομεν πάντοτε αὐτὸ ἄρτιον.

154). Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α καὶ α+1 ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $2\alpha+1$· ἑπομένως εἶναι $2\alpha=134$ καὶ $\alpha=67$· ὥστε οἱ ζητούμενοι εἶναι οἱ 67, 68.

155). Ἐὰν ὁ εἷς εἶναι ὁ $2\alpha+1$, ὁ ἄλλος εἶναι ὁ $2\alpha+3$ ἡ δὲ διαφορὰ τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι $8\alpha+8$· ὥστε εἶναι $\alpha=14$ καὶ ἑπομένως οἱ ζητούμενοι εἶναι οἱ 29, 31.

156). $\sqrt{361}=19$, $\sqrt{1156}=36$, $\sqrt{12321}=111$, $\sqrt{56369}=237$, $\sqrt{73984}=272$, $\sqrt{870884}=933$.

157). $\sqrt{3}=1,73$ κ.ο.κ. $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{0,7500}=0,86\ldots$ κ.ο.κ.

158). Ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος εἶναι 487 καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι 671· ἀλλὰ $(487+1)^2 = 487^2 + 2.487 + 1 = 487^2+975$ ὁ δὲ δοθεὶς εἶναι 487^2+671, ὥστε πρέπει νὰ προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῶν ἤτοι 304.

159). Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεω .

160). Ἔχομεν $53880=2^3.3.5.449$· πρέπει λοιπὸν νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 2 . 3 . 5 . 449.

161). Διότι ἂν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τετράγωνον, ἂν μὲν εἶναι ἀνάγωγον θὰ εἶναι $\alpha=\mu^2$, $\beta=\nu^2$· ἄρα καὶ $\alpha.\beta=\mu^2.\nu^2=(\mu.\nu)^2$· ἂν δὲν ἔχουσιν οἱ ὅροι του κοινόν τινα διαιρέτην δ, μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τούτου, θὰ γίνωσιν ἀμφότεροι τέλεια τετράγωνα, ὥστε θὰ εἶναι $\alpha=\mu^2.\delta$ καὶ $\beta=\nu^2.\delta$· ἄρα καὶ $\alpha.\beta=\mu^2.\nu^2.\delta^2=(\mu.\nu.\delta)^2$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἂν τὸ γινόμενον τῶν δύο ὅρων α. β εἶναι ἴσον τῷ τετραγώνῳ ϱ^2, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον· διότι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\times\beta}{\beta\times\beta}=\frac{\varrho^2}{\beta^2}=\left(\frac{\varrho}{\beta}\right)^2$.

162) Διότι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $2\nu+1$, ὅπου

ν ἀκέραιος ἀριθμός· ἑπομένως τὸ τετράγωνόν του εἶναι $4.\nu^2+4.\nu+1$ ἢ $4\nu.(\nu+1)+1$. Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν ν καὶ ν+1, ὁ ἕτερος εἶναι πάντοτε ἄρτιος, τὸ γινόμενον $4\nu.(\nu+1)$ διαιρεῖται διὰ τοῦ 8.

163) Ἔστω ὁ περιττὸς ἀριθμὸς $2\nu+1$, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὧν ὁ εἷς εἶναι ἄρτιος καὶ ἑπομένως εἶναι τῆς μορφῆς 2μ καὶ ὁ ἄλλος περιττός, ἔστω ὁ $2\varrho+1$· εἶναι ἄρα $2\nu+1=4\mu^2+4\varrho^2+4\varrho+1=4.(\mu^2+\varrho^2+\varrho)+1$. ἀλλὰ ὁ $4\cdot(\mu^2+\varrho^2+\varrho)$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4.

164) Ἔστωσαν οἱ α καὶ β, ἐξ ὧν οὐδεὶς διαιρεῖται διὰ 3· ἀλλ' εἶναι $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$· ἀλλὰ τότε ἢ ὁ $\alpha+\beta$ ἢ $\alpha-\beta$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3· διότι ἐὰν εἶναι $\alpha=$ πολ. $3+1$ καὶ $\beta=$ πολ. $3+2$ θὰ εἶναι $\alpha+\beta=$ πολ. $3+3=$ πολ. 3 ἢ ἐὰν εἶναι $\alpha=$ πολ. $3+1$ καὶ $\beta=$ πολ. $3+1$, θὰ εἶναι καὶ $\alpha-\beta=$ πολ. 3· κ.ο.κ. ἄρα τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ ἢ ἡ διαφορὰ $\alpha^2-\beta^2$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 3.

Σελ 230—166) $X=\frac{0,28.9}{2,1}=1,2$, $X=\frac{3,5.1,5}{12}=,04375$.

167) Εἶναι α) $\sqrt{88.22}=44$, β) $\sqrt{\frac{10}{81}\cdot\frac{2}{5}}=\frac{2}{9}$ καὶ γ) $\sqrt{2,5.90}=15$.

168) Εἶναι $\frac{8}{12}=\frac{8.3}{12.3}$, $\frac{6}{9}=\frac{6.4}{9.4}$, $\frac{10}{15}=\frac{10.7}{15.7}$. καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{10}{15}$ ἕπεται ὅτι εἶναι καὶ $\frac{8.3}{12.3}=\frac{6.4}{9.4}=\frac{10.7}{15.7}=\frac{8.3+6.4+10.7}{12.3+9.4+15.7}=\frac{10}{15}=\frac{6}{9}=\frac{8}{12}$.

169) Ἐὰν εἶναι οἱ ζητούμενοι οἱ α καὶ β ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{3}{7}$ καὶ $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{3+7}{7}$ ἢ $\frac{60}{\beta}=\frac{10}{7}$ καὶ $\beta=\frac{60.7}{10}=42$· ὥστε εἶναι $\alpha=60-42=18$.

170) Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{13}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta-\alpha}=\frac{4}{13-4}$ ἢ $\frac{\alpha}{22,5}=\frac{4}{9}$ καὶ $\alpha=\frac{22,5.4}{9}=10$· ἄρα εἶναι $\beta=10+22,5=32,5$.

171). Ἔστω ὅτι εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\zeta}$· τότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ ἤτοι $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$.

172) Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\gamma'}{\delta'}$, $\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\gamma''}{\delta''}\ldots$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη, ἔχομεν $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'}\cdot\frac{\alpha''}{\beta''}\ldots=\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\gamma'}{\delta'}\cdot\frac{\gamma''}{\delta''}\ldots$ ἢ $\frac{\alpha.\,\alpha'.\,\alpha''..}{\beta.\,\beta'.\,\beta''..}=\frac{\gamma.\,\gamma'.\,\gamma''..}{\delta.\,\delta'.\,\delta''..}$

173) Λαμβάνομεν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν $\frac{\alpha.\alpha}{\beta.\beta}=\frac{\gamma.\gamma}{\delta.\delta}$ ἢ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}$.

174) Ἔστωσαν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{A}$, $\frac{\beta}{B}$, $\frac{\gamma}{\Gamma}$, ... $\frac{\mu}{M}$ οἵτινες εἶναι ἴσοι ἀντιστοίχως πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots. \varrho^{\nu}$ καὶ ἐξ ὧν ὁ ρ εἶναι ὁ μικρότερος καὶ ϱ^{ν} ὁ μεγαλύτερος· ἔχομεν τότε

$\alpha = A.\,\varrho$

$\beta > B.\,\varrho$

$\gamma > \Gamma.\,\varrho$ ἄρα εἶναι $\alpha+\beta+\gamma\ldots+\mu > (A+B+\Gamma\ldots+M)\,\varrho$

. . . . .

$\mu > M\,\varrho$

ἢ $\frac{\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\mu}{A+B+\Gamma+\ldots+M} > \varrho$ ἢ τοῦ $\frac{\alpha}{A}$.

ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ δεύτερον μέρος τῆς προτάσεως.

175) Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha.\,\varrho}{\beta.\,\varrho}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\gamma.\,\varrho}{\delta.\,\varrho}$.

176) Εἰς $9\frac{1}{2}$ ὥρ. διανύει 70 μ.
» × » 125 μ.

$X = 9\frac{1}{2}$ ὥρ. $\times\frac{125}{70} = 16$ ὥρ. $57'\frac{6}{7}$

177) Ὁμοίως ἔχομεν $X = 3\frac{1}{2}$ π. $\times\frac{1\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}} = 5\frac{1}{2}$ πήχεις.

178) Τὸ πάτωμα ἔχει ἐμβαδὸν 20 τετ. πήχεις· ὥστε χρειάζονται πήχεις $20 : 1\frac{2}{3} = 16$ πήχ.

179) Τὰ $\frac{45}{60}$ ἢ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀρχικοῦ.

180) Εἰς τὸ πλοῖον ὑπῆρχον 750×50=37500 σιτηρέσια· ἀλλ' οἱ ἄνδρες ἔγειναν 785· ἑπομένως αἱ τροφαὶ θὰ διαρκέσωσι 37500 : 785 =47 ἡμέρας καὶ θὰ περισσεύσωσιν 605 σιτηρέσια· ἂν ὅμως θέλωσι νὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 50 ἡμέρας, παρατηροῦμεν ὅτι τὰ 37500 σιτη-

ρέσια, πρέπει νὰ γίνωσιν $785 \times 50 = 39250$ μερίδες· ὥστε θὰ λαμβάνῃ ἕκαστος τὰ $\frac{37500}{39250}$ ἢ τὰ $\frac{150}{157}$ τοῦ ἀρχικοῦ.

182) Τὸ ὡρολόγιον ὅταν δεικνύει 11 ὥρας 57′ ἡ ἀληθὴς ὥρα εἶναι 12· ὥστε ὅταν δεικνύει 8 ὥρας, ἡ ἀληθὴς θὰ εἶναι 8 ὥρ. $2' \frac{2}{239}$.

181) Ἡ πρώτη ἀτμάμαξα, ἀφ᾽ ἧς στιγμῆς ἀνεχώρησεν ἡ δευτέρα ἔχει νὰ διανύσῃ ἀκόμη 260 στάδια· θὰ χρειασθῇ δὲ δι᾽ αὐτὰ $260 : 30 = 8 \frac{2}{3}$ ὥρας. Ἡ δευτέρα ἀτμάμαξα διὰ τὰ 350 στάδια θὰ χρειασθῇ $350 : 37 \frac{1}{2} = 9 \frac{1}{3}$ ὥρας· ὥστε ἡ πρώτη ἀτμάμαξα θὰ φθάσῃ 40′ πρὸ τῆς δευτέρας.

183) Εἰς τὸ φρούριον ὑπῆρχον σιτηρέσια $810 \times 31 = 25110$· ἐξ αὐτῶν δὲ κατηναλώθησαν $810 \times 7 = 5670$ σιτηρέσια· ἀπέμειναν λοιπὸν 19440 διὰ τοὺς 730 στρατιώτας, τὰ ὁποῖα θὰ ἐξαρκέσουν δι᾽ 27 περίπου ἡμέρας ἀκόμη.

Σελ. 239—184). Ἐπλήρωσε τὸν πῆχυν πρὸς 138 δραχμ. καὶ ἑπομένως ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 119232 δραχμάς· εἰσέπραξε δὲ ἀπὸ τοὺς 540 πήχεις $\left(\text{τὰ } \frac{5}{8} \text{ τῶν } 864\right)$ τοὺς ὁποίους ἐπώλησε πρὸς 158,70 δραχμὰς τὸν πῆχυν 85698 δραχ. ἤτοι ἐν ὅλῳ εἰσέπραξε 133698 δραχ. ὥστε τὸ κέρδος ἦτο 14466 δραχ.

185). Δηλαδὴ πρᾶγμα ἀξίας 100 δραχμῶν τὸ ἐπώλησεν 75 δραχ. ἑπομένως ἐστοίχιζε $\frac{273,75 \times 100}{75} = 365$ δρ.

186). Ἐὰν πρᾶγμα ἐπώλει πρὸς 100 δραχμάς, θὰ εἶχε κέρδος 16 δραχμάς· ὥστε ἐπώλησε πρᾶγμα ἀντὶ $\frac{100 \times 1200}{16} = 7500$ δραχμῶν διὰ νὰ κερδίσῃ 1200 δραχμὰς καὶ τὸ ἐμπόρευμα ἐστοίχιζε $7500 - 1200 = 6300$ δραχμάς· ἀφοῦ δὲ εἰς τὰς 6300 δραχ. κερδίζει 1200 εἰς τὰς 100 κερδίζει $\frac{1200 \times 100}{6300} = 19$ δραχ. καί τι πλέον.

187). Ἐμπόρευμα τὸ ὁποῖον ἀγοράζει ἀντὶ 100 δραχ. τὸ πωλεῖ ἀντὶ 125 δραχ. ἑπομένως ὅταν τὸ πωλῇ πρὸς 127,50 τὸ ἀγοράζει ἀντὶ $\frac{100 \times 127,50}{125} = 102$ δραχ. ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ πῆχυς στοιχίζει $\frac{100 \times 102}{120} = 85$ δραχμάς.

188). Ἐπλήρωσε διὰ τὴν ἀγορὰν 113750 δραχ. θέλει δὲ νὰ κερδίση ἐπ' αὐτῶν 15 % ἤτοι δραχ. 17062,50 καὶ νὰ εἰσπράξῃ ἐκ τῆς πωλήσεως καὶ τοὺς πληρωθέντας φόρους, οἵτινες ἀνέρχονται εἰς 5118,75 δραχμάς· ὥστε τὰς 3500 ὀκάδας ἐλαίου πρέπει νὰ πωλήσῃ ἀντὶ 135931,25 δραχ. ἤτοι τὴν 1 ὀκ. ἀντὶ 38,83 . . . δραχ.

189). Θὰ φθάσουν ἡμέρας $25 \times \frac{8510}{1850} \times \frac{16}{40} = 46$.

190). Θὰ ἐργάζηται καθ' ἡμέραν ὥρας

$$6 \times \frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{5}} \times \frac{25}{15} = 15.$$

191). Ἀποτελεῖται ἀπὸ σελίδας $250 \times \frac{32}{36} \times \frac{40}{45} = 197$ καί τι πλέον.

192). Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἔργου εἰς 2 ἡμέρας θὰ τελειώσωσιν ἐργάται $15 \times \frac{1/4}{3/4} \times \frac{5}{2} = 25$· ἤτοι πρέπει νὰ μισθωθῶσιν ἀκόμη 10 ἐργάται.

193). Ἡ ἀξία τῶν πέντε κενῶν βαρελίων ἦτο 1250 δραχμαὶ καὶ ἑπομένως ὁ οἶνος ὁ περιεχόμενος εἰς αὐτὰ ἐπωλήθη ἀντὶ 5506 δραχμάς· ὁ οἶνος ἄρα τῶν 4 βαρελίων ἀξίζει $5506 \times \frac{350}{420} \times \frac{4}{5} = 3670\frac{2}{3}$ δραχμάς· ἡ δὲ ἀξία τῶν κενῶν βαρελίων εἶναι 880 δραχμάς· ἄρα τὰ 4 βαρέλια θὰ πωληθῶσιν ἀντὶ $4550\frac{2}{3}$ δραχμῶν.

195). Ἂν τὰ 360 βαρέλια οἴνου ἤξιζον 126000 δραχ., τὰ 90 βαρέλια ποὺ ἀπέμειναν θὰ ἤξιζον 31500 δραχμάς· ἂν δὲ τὰ 540 βαρέλια ἐλαίου ἤξιζον 126000 δραχ., τὰ 120 θὰ ἤξιζον 28000 δραχμάς· ὥστε ἡ ἀξία τοῦ μείναντος φορτίου εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 28000 δραχμῶν καὶ μικροτέρα τῶν 31500.

196). Οἱ 150 στρατιῶται ἐξόδευσαν εἰς ἓν ἔτος διὰ τὴν ἐνδυμασίαν των καὶ διὰ τὴν τροφήν των ἐν ὅλῳ δραχμ. 571200· θὰ δαπανήσωσι δὲ διὰ τὰς αὐτὰς ἀνάγκας δραχμὰς 342720, στρατιῶται $\frac{150 \times 342720}{571200} = 90$.

Σελ. 246—197). Ἀξίζουν δραχμὰς $\frac{3500 \times 3 \times 3 \times 15}{28 \times 5} = 3375$.

198). Ἐστοίχισε δραχμὰς $\frac{132 \times 375 \times 5 \times 1,28 \times 450}{100 \times 20} = 71280$.

199). Ἔχομεν $T = \frac{1527,80 \times 8 \times 7}{100 \times 12} = 71,29 \ldots$ δραχ.

200). Ἔχομεν $K = \frac{270 \times 100}{7,5 \times 3} = 1200$ δραχμάς.

201). Ἤτοι α δραχμαὶ κεφάλαιον φέρουσιν α δραχμὰς τόκον. Ἔχομεν λοιπὸν $X = \frac{\alpha \times 100}{\alpha \times 8} = \frac{100}{8} = 12$ ἔτη 6 μῆνας.

202). Τὸ $\frac{1}{2}$ %₀ τῶν 85000 δραχμῶν εἶναι $\frac{85000}{100} \times \frac{1}{2} = 425$ δρ.

203). Τὸ καθαρὸν εἰσόδημα εἶναι $180 \times 12 - 300 = 1860$ δραχμαί. Κερδίζει λοιπὸν ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν δραχμὰς $\frac{1860 \times 100}{25000} = 7,44$.

204) Ἔδωσε διὰ τὴν ἀγορὰν $0,90 \times 7500 = 6750$ δραχμ. καὶ εἰσέπραξε δραχμὰς $1,10 \times 7500 = 8250$· ὥστε εἰς τοὺς τρεῖς μῆνας ἐκέρδισε 1500 δραχμάς· ἔχομεν λοιπὸν $E = \frac{1500 \times 1200}{6750 \times 3} = 88 \frac{8}{9}$.

205) Εἰς 3, 60 δραχμὰς θὰ κερδίζῃ 0,21 δραχμάς· ὥστε πρέπει νὰ πωλῇ 3,81 δραχμάς.

206) Εἰς κεφάλαιον 108800 δραχμῶν κερδίζει 5700 δραχμάς ὥστε ἀπολαμβάνει κέρδος 5.24 $^{6}/_{0}$.

207) Εἶναι $T = \frac{\kappa. \frac{\eta}{360} . 6}{100} = \frac{\kappa.\ \eta.\ 6}{36000} = \frac{\kappa.\ \eta.}{6000}$ ὁμοίως εἶναι $T = \frac{\kappa. \frac{\eta}{360}\ 4,50}{100} = \frac{\kappa.\ \eta.\ 4,50}{36000} = \frac{\kappa.\ \eta.}{8000}$ καὶ $T = \frac{\kappa. \frac{\eta}{360} . 5}{100} = \frac{\kappa.\ \eta.\ 5}{36000} = \frac{\kappa.\ \eta.}{7200}$.

Σελ. 255—209) Ἔχομεν $\frac{1872, 25 \times 8 \times 3}{1200} = 37,44..$ δραχ.

210) Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 350 δραχμαί. ἔχομεν λοιπὸν $E = \frac{350 \times 1200}{1500 \times 14} = 12$.

211) Δηλαδὴ ἂν τὴν ἠγόραζε πρὸς 100 θὰ τὴν ἐπώλει ἀντὶ 109· τὴν ἠγόρασε λοιπὸν πρὸς $\frac{32700 \times 100}{109} = 30000$ δραχ.

212) Ἡ ὑφαίρεσις ἐνταῦθα εἶναι 343 δραχμάς. Ὥστε ἔχομεν $\frac{343 \times 100}{1400 \times 7} = 3 \frac{1}{2}$ ἔτη.

213) Ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν πρὸς 8 %₀ εἰς $4 \frac{1}{2}$ μῆνας εἶναι 3 δραχμαί· ἔχομεν λοιπὸν $\frac{103 \times 3890}{100} = 4006, 70$.

214) Εἰς τὸ α΄. γραμμάτιον θὰ προστεθῇ ὁ τόκος τῶν 4 μηνῶν ἤτοι δραχμαὶ 200· ἀπὸ τὸ β΄. γραμμάτιον θὰ ἀφαιρεθῇ ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις τῶν 3 μηνῶν, ἥτις εἶναι 94 $\frac{2}{7}$ ὥστε ἔχομεν 7500+200+4800—94 $\frac{2}{17}$ = 12405 $\frac{15}{17}$.

215) Θὰ προσθέσῃ εἰς τὰς 3816 δραχμάς, τὸν τόκον τούτων ἐπὶ 5 μῆνας πρὸς 8 ₀/₀ · ἤτοι 127,20 δραχμάς· ὥστε τὸ γραμμάτιον θὰ φέρῃ 3943,20 δραχμάς.

Σελ. 261—216) Τὰ μερίδια εἶναι $\frac{2941}{17}\times 2=346$, $\frac{2941}{17}\times 3=519$, $\frac{2941}{17}\times 5=865$ καὶ $\frac{2941}{17}\times 7=1211$.

117) Θὰ μοιράσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{4}{7}$ ἢ τῶν 21, 70, 74· ὥστε τὰ μερίδια εἶναι $\frac{1725}{115}\times 21=15\times 21=315$, $15\times 70=1050$ καὶ $15\times 24=360$.

218) Αἱ τιμαὶ δηλαδὴ τῶν πήχεων εἶναι α×8, α×5, α×4· ἑπομένως ἡ ἀξία τῶν πήχεων εἶναι α×8×16, α×5×24, α×4×32 ἢ α×128, α×120, α×128· ἔχομεν λοιπὸν α×128+α×120+α×128=8272 ἢ α×(128+120+128)=8272 καὶ α=22· ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν πήχεων εἶναι 176, δρ, 110 δρ, 88 δρ.

219) Χρειάζονται ὀκάδες $\frac{840}{21}\times 16=640$ νίτρου, $\frac{840}{21}\times 3=120$ ἄνθρακος καὶ $\frac{840}{21}\times 2=80$ θείου.

220) Θὰ λάβῃ ἕκαστος $\frac{12000}{22800}\times 5800=3052\frac{36}{57}$, $\frac{12000}{22800}\times 7600=4000$, $\frac{12000}{22800}\times 9400=4947\frac{21}{57}$.

221) Τοῦ α΄. ἔμειναν τὰ κεφάλαια ἐπὶ 32 μῆνας καὶ τοῦ β΄. ἐπὶ 24. Ὥστε αἱ 2900 δραχμαὶ θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν 10000×32=320000, 60000×24=144000· θὰ λάβῃ δὲ ὁ μὲν α΄. 2000 δραχμάς, ὁ δὲ β΄. 900.

222) Ἂν ὁ α΄. υἱὸς λάβῃ 1 μερίδιον, ὁ β΄. θὰ λάβῃ τὰ $\frac{5}{6}$ αὐτοῦ καὶ ἡ κόρη θὰ λάβῃ $1+\frac{5}{12}$· ἢ ὁ α΄. θὰ λάβῃ 12 μερίδια, ὁ β΄. 10 καὶ ἡ κόρη 17. Θὰ μοιρασθῶσιν ἄρα αἱ 78000 δραχμαὶ ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 12, 10, 17 καὶ θὰ λάβωσι 24000, 20000, 34000 δραχμάς.

223) Ἐὰν τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου ἀνεψιοῦ εἶναι α, ὁ τόκος πρὸς 5 % ἐπὶ 9 ἔτη εἶναι $\frac{45\times\alpha}{100}$ καὶ ἑπομένως τὸ μερίδιόν του θὰ γίνῃ εἰς τὸ 21ον ἔτος $\alpha+\frac{45\times\alpha}{100}$ ἢ $\frac{145\alpha}{100}$· ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν, ὅτι τὰ μερίδια τῶν ἄλλων θὰ γίνωσι εἰς τὸ 21ον ἔτος $\frac{160\times\beta}{100}$, $\frac{180\times\gamma}{100}$· πρέπει ὅμως νὰ εἶναι ἴσα ταῦτα· δηλαδὴ νὰ εἶναι $\frac{145\times\alpha}{100}=\frac{160\times\beta}{100}=\frac{180\times\gamma}{100}$ ἢ νὰ εἶναι $145\times\alpha=160\times\beta=180\times\gamma$· ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὸ τοῦ δευτέρου εἶναι, ὡς ὁ 160 πρὸς τὸν 145 ἢ ὡς 32 πρὸς τὸν 29 καὶ τὸ τοῦ δευτέρου, πρὸς τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου, εἶναι ὡς ὁ 9 πρὸς τὸν 8· Ἔχομεν δηλαδὴ

1ον	2ον	3ον	
32	29		
	9	8	ἢ
288	261		
	261	232	

Ὥστε θὰ μερίσωμεν τὸν ἀριθμὸν 9372 ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν 288, 261, 232 καὶ θὰ ἔχομεν $\frac{9372}{781}\times 288=3456$, $\frac{9372}{781}\times 261=3132$ καὶ $\frac{9372}{781}\times 232=2784$.

224) Ὁ πρῶτος ἐργάτης εἰργάσθη ἐπὶ 42 ὥρας καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 48. Ὥστε αἱ 450 δραχμαὶ θὰ μοιρασθῶσιν ἀναλόγως τῶν ὡρῶν ἐργασίας· καὶ θὰ λάβῃ ὁ πρῶτος 210 δραχμὰς καὶ ὁ δεύτερος 240.

Σελ. 266 – 227) Τὰ 85 δράμια περιέχουσιν ἤδη καθαρὸν ἄργυρον $0{,}900\times 85=76{,}5$· ἀλλ' ἐπειδὴ θὰ ἀνέλθῃ ὁ βαθμὸς αὐτοῦ εἰς 0,975, πρέπει νὰ προστεθῶσι εἰς αὐτὸν 6,375 καθαροῦ ἀργύρου· ὥστε ὁ καθαρὸς ἄργυρος ποῦ περιέχουν τὰ 85 δράμια, ἤτοι τὰ 76,5 δράμια μὲ τὰ δράμια τοῦ καθαροῦ ἀργύρου τὰ ὁποῖα θὰ προστεθῶσι, εἶναι τὰ 0,975 τῶν 85 δραμίων καὶ τὰ 0,975 τῶν προστεθέντων· ἑπομένως τὰ 6,375 εἶναι τὰ 0,025 τῶν προστεθέντων· ἄρα ἐκεῖνα ποῦ προσετέθησαν εἶναι $\frac{6,375}{0,025}=255$ δράμια

228) Θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς 29,50 ἐπὶ 850, τὰς 26,50 ἐπὶ 2800 καὶ τὰς 20 ἐπὶ 1890 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν γενομένων θὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὀκάδων· τὸ δὲ πηλίκον θὰ παριστᾷ τὴν ἀξίαν τῆς 1 ὀκᾶς ὅταν δὲν θὰ πρόκειται νὰ προκύψῃ ζημία ἢ κέρδος· καὶ κατόπιν εὑρίσκομεν πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν 1 ὀκᾶν, διὰ νὰ κερδίσῃ 30 %.

Σελ. 278—229) Παρατηροῦμεν κατὰ πρῶτον ὅτι αἱ περιτταὶ δυνάμεις τοῦ 1000 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 7 ἢ 13 ἠλαττωμένα κατὰ 1 καὶ ὅτι αἱ ἄρτιαι δυνάμεις τοῦ 1000 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 7 ἢ τοῦ 13 ηὐξημένα κατὰ 1. Ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 ἢ τοῦ 13 πλέον τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία τελευταῖα ψηφία (ἐκ δεξιῶν) μεῖον τοῦ ἀριθμοῦ τὸν ὁποῖον ἀποτελοῦν τὰ τρία προηγουμένα ψηφία, πλέον τοῦ ἀριθμοῦ κ. ο. κ. ὥστε ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 7 ἢ 13 ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριψηφίων τμημάτων εἰς ἃ διαιρεῖται ὁ ἀριθμὸς ἐκ δεξιῶν τάξεως ἀρτίας, ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τμημάτων τάξεως περιττῆς εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ 7 ἢ 13.

230). Ἐκ τῶν πέντε διαδοχικῶν ἀριθμῶν, ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ 3· ἐπειδὴ δὲ μεταξὺ αὐτῶν εἶναι δύο ἄρτιοι ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιρεῖται διὰ 8 καὶ ἐπειδὴ πάλιν ὁ εἷς ἐκ τούτων εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, ἕπεται ὅτι τὸ γινόμενον τούτων διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου $3\times5\times8=120$.

231). Τὸ πηλίκον τοῦ 1000 διὰ τοῦ 7 εἶναι 142 κατὰ προσέγγισιν· ἐν τῷ γινομένῳ λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1000, ὑπάρχουσι παράγοντες $7, 2\times7, 3\times7, 4\times7 \ldots 141\times7, 142\times7$· ὥστε τὸ γινόμενον εἶναι $7^{142}\times1\times2\times3\times4\times\ldots\times142$· ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ γινομένῳ $1\times2\times3\times4\times\ldots\times142$ παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 142 διὰ τοῦ 7 εἶναι 20· ἑπομένως ἐν αὐτῷ ὑπάρχουσιν οἱ παράγοντες $7, 2\times7, 3\times7, \ldots 20\times7$ καὶ ἑπομένως τοῦτο εἶναι $7^{20}\times$

$1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20$· ἐργαζόμενοι δὲ ὁμοίως, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ γινόμενον $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 20$ περιέχει τὸ 7^2· ἑπομένως, ἡ μεγίστη δύναμις τοῦ 7, ἐν τῷ δοθέντι γινομένῳ εἶναι ἡ $7^{142+20+2}=7^{164}$.

232). Ὁ πρῶτος ἀριθμὸς τῆς σειρᾶς $A, A\times2, A\times3 \ldots$ ὅστις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ Β εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν Α. καὶ Β· ἐὰν δὲ π εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Β διὰ τοῦ μ.κ.δ. Δ τῶν Α καὶ Β, τὸ $A\times\pi$ εἶναι ε.κ π. τῶν Α καὶ Β· οἱ ἀριθμοὶ ἑπομένως τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς οἱ $A\times\pi$, $A\times2\pi$, $A\times3\pi, \ldots$ α.$\Delta\times\pi$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ Β: ἡ τελευταία δὲ αὕτη σειρὰ περιέχει Δ ἀριθμούς· διὰ νὰ ἴδωμεν δὲ ἂν ἐν τῇ σειρᾷ ὑπάρχουσιν ἄλλοι διαιρέται τοῦ Β, ζητοῦμεν τότε τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων διὰ τοῦ Β, δύο ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς, τῶν $A\times\mu$, $A\times(\mu+\nu)$ τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα· διὰ νὰ συμβαίνῃ δὲ τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα ὁ $A\times\mu$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ Β, δηλαδὴ ἵνα ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ π· ὥστε τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν π πρώτων ἀριθμῶν τῆς πρώτης σειρᾶς, εἶναι τὰ αὐτὰ κατὰ σειρὰν μὲ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων τῶν π ἑπομένων κ.ο.κ. Οἱ ἀριθμοὶ λοιπὸν τῆς δευτέρας σειρᾶς, εἶναι οἱ μόνοι τῆς πρώτης, οἵτινες εἶναι διαιρετοὶ διὰ Β καὶ ὁ ἀριθμός των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν μ. κ. δ. τῶν Α. καὶ Β.

233) Ἔστωσαν δύο ἀριθμοὶ οἱ Α καὶ Β καὶ μ. κ. δ. αὐτῶν ὁ Δ· τὸ ε. κ. π. αὐτῶν εἶναι ὁ $\frac{A\times B}{\Delta}$· ἐὰν δὲ τοῦτο διαιρέσωμεν πρῶτον διὰ Α καὶ ἔπειτα διὰ Β λαμβάνω πηλίκα $\frac{B}{\Delta}$, $\frac{A}{\Delta}$, ἅτινα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

234) Ἔστω Α ἀριθμὸς τις πρῶτος· ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς πλὴν τῶν 2 καὶ 3, εἶναι τῆς μορφῆς $6\mu+1$ ἢ $6\mu-1$· ὥστε ἔχομεν $A^2 = (6\mu+1)^2 = 36\mu^2+12\mu+1=12\mu.(3\mu+1)+1$ ἢ $A^2 = (6\mu-1)^2 = 36\mu^2 - 12\mu+1 = 12\mu\,(3\mu-1)+1$· ἀλλ' ἐκ τῶν ἀριθμῶν μ καὶ $3\mu+1$ ἢ $3\mu-1$, ὁ εἷς εἶναι ἄρτιος· ὥστε ὁ A^2 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 24 ηὐξημένον κατὰ 1.

235) Ὁ α ὅστις δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ ἕνα τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 4, 5, 7, 8· τὸ α^2 ἑπομένως εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον ἢ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, τοῦ τετραγώνου ἑνὸς τῶν ἀνωτέρω ἀρι-

θμῶν 1, 2, 4, 5, 7, 8 διὰ 9 ἅτινα εἶναι 1, 4, 7, 7, 4, 1· ὁμοίως ὁ α^4 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον ἢ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ τετραγώνου ἑνὸς τῶν 1, 4, 7, 7, 4, 1, ἅτινα εἶναι 1, 7, 4, 4, 7, 1· ὁ δὲ $\alpha^4 \times \alpha^2$ ἢ ὁ α^6 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 9 ηὐξημένον κατὰ τὸ γινόμενον ἢ κατὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τοῦ γινομένου τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως διὰ 9 τῶν α^4 καὶ α^2 δηλαδὴ κατὰ 1, 1, 1, 1, 1, 1. Ὁμοίως καὶ ὁ β^6, ὅταν ὁ β δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3· ἔχομεν λοιπὸν

$$\alpha^6 = \text{πολ. } 9+1$$

$$\beta^6 = \text{πολ. } 9+1 \quad \text{καὶ } \alpha^6-\beta^6 = \text{πολ. } 9.$$

236) Γνωρίζομεν ὅτι ὅταν οἱ α καὶ β εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha.\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' εἶναι $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$· ὥστε πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν $\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta$ καὶ $\alpha+\beta$, πρέπει νὰ διαιρῇ καὶ τὸν $3\alpha\beta$· ἀλλ' ἀφοῦ οἱ $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὁ κοινὸς οὗτος διαιρέτης δὲν εἶναι ἄλλος ἀπὸ τὸν 3.

237) Ἀναλύομεν τὸν 180 εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. ἔχομεν δὲ οὕτω $180=2\times2\times3\times3\times5$, καὶ τοὺς παράγοντας τούτους ἠλαττωμένους κατὰ μονάδα, θέτομεν εἰς ἀριθμοὺς πρώτους, κατὰ σειρὰν ἀρχόμενοι ἀπὸ τὸν μικρότερον· εἰς τοὺς μικροτέρους δὲ παράγοντας θέτομεν τοὺς μεγαλυτέρους ἐκθέτας· κατὰ ταῦτα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $2^4\times3^2\times5^2\times7\times11$.

238) Ἔστω $N=\alpha^\mu \,.\, \beta^\varrho \,.\, \gamma^\sigma \ldots \tau^\varkappa$; ὅπου οἱ παράγοντες α, β, ... τ εἶναι ν τὸ πλῆθος· καὶ ἄς τεθῇ $\alpha^\mu=\lambda_1$, $\beta^\varrho=\lambda_2$, $\gamma^\sigma=\lambda_3 \ldots \tau^\varkappa=\lambda_\nu$. Ἐὰν εἶναι $\nu=2$, τότε παρατηροῦμεν ὅτι ὁ Ν ἀναλύεται εἰς γινόμενα δύο παραγόντων, πρώτων πρὸς ἀλλήλους κατὰ δύο τρόπους ἤτοι εἰς τὰ $1\times\lambda_1\lambda_2$ καὶ $\lambda_1\times\lambda_2$.

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ὑπάρχουσι $2^{\nu-2}$ τρόποι ἀναλύσεως τοῦ γινομένου $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_{\nu-1}$, εἰς ἓν γινόμενον δύο παραγόντων πρώτων πρὸς ἀλλήλους· ἀλλ' ἐὰν Α καὶ Β εἶναι οἱ δύο παράγοντες ἑνὸς τοιούτου γινομένου, εἰς τὸ γινόμενον $A\times B$, ἀντιστοιχοῦσι τὰ γινόμενα $A\lambda_\nu\times B$ καὶ $A\times B\lambda_\nu$ ἀμφότερα ἴσα πρὸς τὸ Ν. Οὕτω εἰς πάντα τρόπον τοιαύτης ἀναλύσεως τοῦ γινομένου $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \ldots \lambda_{\nu-1}$ ἀντιστοιχοῦσι δύο τρόποι ἀναλύσεως τοῦ Ν καὶ οὐχὶ ἄλλος. Ἑπομένως ὁ Ν. ἀναλύεται κατὰ τρόπον $2^{\nu-1}\times2=2^{\nu-1}$.

239) Ἀφοῦ αἱ διαφοραὶ $\alpha\beta-\alpha'\beta'$ καὶ $\alpha-\alpha'$ εἶναι διαιρεταὶ διὰ τοῦ $\varkappa$, θὰ εἶναι διαιρετὴ καὶ ἡ $\alpha\beta-\alpha'\beta'-\beta(\alpha-\alpha')=\alpha'(\beta-\beta')$· ἀλλ' ὁ $\varkappa$, ὅστις διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\alpha'(\beta-\beta')$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν α', διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\beta-\beta'$.

240) Ἵνα ὁ $\frac{ΑΒΓΔ'''}{ΔΔ'Δ''}$ εἶναι τὸ ε. κ. π. τῶν Α, Β, Γ πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν Α, Β, Γ καὶ ἕκαστον μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην καὶ ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος παράγων τοῦ Α. εἶναι ὁ α καὶ μ εἶναι ὁ ἐκθέτης αὐτοῦ ἐν τῷ Α, ν ἐν τῷ Β καὶ λ, ἐν τῷ Γ, ἔστω δὲ ὅτι $\mu>\nu>\lambda$, τὰ ν καὶ λ δυνάμενα νὰ εἶναι καὶ Δ· ἀλλὰ ὁ α^{μ}, πρέπει νὰ περιέχηται εἰς τὸ ε. κ. π. τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἀλλ' ὁ μὲν Δ ἔχει τὸν α μὲ ἐκθέτην ν, ὁ Δ' μὲ ἐκθέτην λ καθὼς καὶ οἱ Δ'' καὶ Δ''' ὥστε ὁ $\frac{ΑΒΓΔ'''}{ΔΔ'Δ''}$ περιέχει τὸν α μὲ ἐκθέτην $(\mu+\nu+\lambda+\lambda)-(\nu+\lambda+\lambda)=\mu$· ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ὁ $\frac{ΑΒΓΔ'''}{ΔΔ'Δ''}$ περιέχει καὶ τοὺς ἄλλους πρώτους παράγοντας τῶν δοθέντων μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην ἕκαστον· εἶναι ἄρα τὸ ἐ. κ. π. αὐτῶν.

241) Ἔστωσαν $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, $\frac{\alpha''}{\beta''}$ ἀνάγωγα κλάσματα· τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha'}{\beta'}+\frac{\alpha''}{\beta''}$ ἢ τὸ $\frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'}+\frac{\alpha''}{\beta''}$ ἢ ἐὰν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{\alpha\beta'+\alpha'\beta}{\beta\beta'}$, παραστήσω διὰ τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$, θὰ ἔχω $\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\alpha''}{\beta''}$ ἀλλ' ὡς γνωρίζωμεν τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα δὲν δύναται νὰ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ ἐὰν εἶναι $\delta=\beta''$ ἤτοι ἐὰν οἱ παράγοντες τοῦ β'' εὑρίσκονται ἢ εἰς τὸν β ἢ εἰς τὸν β', διότι ὁ δ διαιρεῖ τὸ γινόμεαον $\beta.\beta'$.

242). Ἔστωσαν τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$, $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ κ.τ.λ. τὰ ὁποῖα εἶναι ἀνάγωγα καὶ ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$ τὸ ἐλάχιστον ἀνάγωγον κλάσμα, ὅπερ διαιρούμενον δι' ἑκάστου τῶν δοθέντων, δίδει πηλίκα ἀκέραια. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν $\frac{\mu}{\nu}:\frac{\alpha}{\beta}=Α$, $\frac{\mu}{\nu}:\frac{\gamma}{\delta}=Β$, $\frac{\mu}{\nu}:\frac{\varepsilon}{\zeta}=Γ$ κ. ο. κ. ἤτοι $\frac{\mu.\beta}{\nu.\alpha}=Α$, $\frac{\mu.\delta}{\nu.\gamma}=Β$, $\frac{\mu.\zeta}{\nu.\varepsilon}=Γ$ κ.ο.κ., ὅπου Α, Β, Γ κ.τ.λ. εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι· ἀλλ' ἵνα τὸ $\frac{\mu.\beta}{\nu.\alpha}$ εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ ἐπειδὴ οἱ μ καὶ ν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. ὡς καὶ οἱ α καὶ β πρέπει ὁ μὲν ν νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ α ὁ δὲ β νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ν, ἤτοι ὁ ν νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ β· ὁμοίως εἰς τὸ $\frac{\mu.\delta}{\nu.\gamma}$ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μ πρέπε νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ γ καὶ ὁ δ πολλαπλάσιον τοῦ ν, ἤτοι, ὁ ν πρέπει νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ δ· ἐκ δὲ τοῦ $\frac{\mu.\zeta}{\nu.\varepsilon}$ συνάγομεν ὡσαύτως ὅτι ὁ μ πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ε καὶ ὁ ν διαιρέτης τοῦ ζ· ὁ μ λοιπὸν πρέπει νὰ εἶναι ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν α, γ, ε κ.τ.λ. ἤτοι τῶν ἀριθμητῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων, ὁ δὲ ν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν β, δ, ζ κ.τ.λ. ἤτοι τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.

243) Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν 17 ἐπὶ τὸν 12 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ 40· ἔχομεν δὲ $17\times12=5\times40+4$ καὶ $\frac{17}{40}=\frac{5}{12}+\frac{4}{12.40}$. Τὸν ἀριθμητὴν τοῦ $\frac{4}{40}$ ἢ τοῦ $\frac{1}{10}$ πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ 12 καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του· ἔχομεν λοιπὸν

$1\times12=1\times10+2$ ἢ $\frac{1}{10}=\frac{1}{12}+\frac{2}{12.10}$ καὶ $\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{12.40}$ $=\frac{1}{12^2}+\frac{2}{12^2.10}$. ὥστε εἶναι $\frac{17}{40}=\frac{5}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{2}{12^2.10}$. (1)

Εἰς τὸ $\frac{2}{10}$ ἢ $\frac{1}{5}$ ἐργαζόμεθα ὁμοίως καὶ εὑρίσκομεν $\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{2}{10}=\frac{2}{12}$ $+\frac{2}{12.5}$ καὶ $\frac{2}{12^2.10}=\frac{2}{12^3}+\frac{2}{12^3.5}$ (2)· εὑρίσκομεν δὲ ὁμοίως ὅτι $\frac{2}{12^3.5}=\frac{4}{12^4}+\frac{2}{12^4.5}$ (3) συνδυάζοντες δὲ τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) εὑρίσκομεν $\frac{17}{40}=\frac{5}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{2}{12^3}+\frac{4}{12^4}+\frac{4}{12^4.5}$ ἡ ἐργασία δὲ αὕτη θὰ τερματισθῇ ὅταν εἴς τινα τῶν διαιρέσεων ποὺ κάμνομεν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0· ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει τὸ τελευταῖον κλάσμα θὰ προχωρεῖ ἐλαττούμενον καὶ θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{12^\varrho}$, ὅπερ ρ αὐξάνει ἀπεριορίστως, καὶ συνεπῶς θὰ τείνῃ πρὸς τὸ 0· ἐν τῇ τοιαύτῃ περιπτώσει θὰ λάβωμεν μίαν σειρὰν ἐξ ἀπείρου πλήθους κλασμάτων.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τοῦ κλάσματος $\frac{17}{81}$ εὑρίσκομεν $\frac{17}{81}=$ $\frac{1}{12}+\frac{6}{12^2}+\frac{2}{12^3}+\frac{8}{12^4}$.

244) Ἔστω ὁ ἀριθμὸς Α, δι' ὃν ἔχομεν $A=\mu^2+\nu^2$· ἵνα ὁ Α εἶναι ἄρτιος δέον νὰ εἶναι οἱ μ καὶ ν ἢ ἀμφότεροι περιττοὶ ἢ ἀμφότεροι ἄρτιοι· ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει θὰ ἔχωμεν $\mu=2\rho+1$ καὶ $\nu=2\sigma+1$· ἤτοι θὰ εἶναι $A=4\rho(\rho+1)+4\sigma(\sigma+1)+2$· ἀλλὰ τὰ γινόμενα $\rho(\rho+1)$ καὶ $\sigma(\sigma+1)$ εἶναι ἄρτια ἐπειδὴ ρ, ρ+1 εἶναι διαδοχικαὶ ἀριθμοὶ ὡς καὶ οἱ σ, σ+1 ὥστε οἱ $4\rho(\rho+1)$, $4\sigma(\sigma+1)$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 8 καὶ ὁ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένου κατὰ 2· ἐὰν οἱ μ καὶ ν εἶναι ἄρτιοι θὰ εἶναι $\mu=2\rho$ καὶ $\nu=2\sigma$· ὥστε θὰ ἔχωμεν $A=4\rho^2+4\sigma^2$· ἐξετάζωμεν τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ρ εἶναι ἄρτιος καὶ ὁ σ περιττὸς ἤτοι τῆς μορφῆς $2\lambda+1$· τότε ὁ $4\rho^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 καὶ ὁ $4\sigma^2$ εἶναι $4(4\lambda^2+4\lambda+1)$ ἢ $16\lambda(\lambda+1)+4$ ἤτοι τὸ Α εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένου κατὰ 4.

245) Ἔχομεν τὴν σειρὰν 1, 3, 5 . . . λ, ὧν τὸ πλῆθος εἶναι ν τότε εἶναι $\lambda=2\nu-1$ εἶναι δὲ $1+\lambda=3+(\lambda-2)=5+(\lambda-4)$ κ. ο. κ. τοιαῦτα δὲ ἀθροίσματα εἶναι $\frac{\nu}{2}$· ὥστε ἔχομεν $\frac{(1+\lambda).\nu}{2}$. ἀλλὰ $1+\lambda=2\nu$· ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι $\frac{2.\nu.\nu}{2}=\nu^2$.

246). Ἔστω $A=\alpha^2+\beta^2$ καὶ $B=\gamma^2+\delta^2$· τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι $\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2$ εἰς ὅ προσθέτομεν τὸ $2\alpha\beta\gamma\delta$ ὅπερ ἀφαιροῦμεν συγχρόνως· ἔχομεν ἑπομένως $A.B=\alpha^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2+\beta^2\gamma^2+\beta^2\delta^2+2\alpha\beta\gamma\delta-2\alpha\beta\gamma\delta$ ἢ $A.B=(\alpha\gamma+\beta\delta)^2+(\alpha\delta-\beta\gamma)^2$· ἐὰν δὲ καὶ τὸ Γ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ἀποδεικνύεται ὁμοίως ὅτι τὸ γινόμενον (Α.Β).Γ εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων κ. ο. κ.

247). Ἔστω ὁ ἄρτιος ἀριθμὸς 2Α δι' ὃν ἔχομεν $2A=\alpha^2+\beta^2$ ἢ $A=\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\beta^2}{2}$ ἢ $A=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{\beta^2}{4}$· ἐὰν ἤδη εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν τὸ $\frac{\alpha.\beta}{2}$ λαμβάνομεν.

$$A = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha\beta}{2} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\beta}{2}\right) + \frac{\beta^2}{4} \quad \text{ἢ}$$

$$A = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

248). Ἔστω ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5Α δι' ὃν ἔχομεν $5A = \alpha^2 + \beta^2$ ἢ

$$A = \frac{\alpha^2}{5} + \frac{\beta^2}{2} \text{ ἢ } A = \frac{\alpha^2}{25} + \frac{4\alpha^2}{25} + \frac{\beta^2}{25} + \frac{4\beta^2}{25}.$$

Εἰς τὸ τελευταῖον τοῦτο προσθέτομεν καὶ ἀφαιροῦμεν τὸ $\frac{4\alpha\beta}{25}$ ὁπότε ἔχομεν

$$A = \frac{\alpha^2}{25} + \frac{4\alpha\beta}{25} + \frac{4\beta^2}{25} + \frac{4\alpha^2}{25} - \frac{4\alpha\beta}{25} + \frac{\beta^2}{25} \quad \text{ἢ}$$

$$A = \left(\frac{\alpha+2\beta}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha-\beta}{5}\right)^2.$$

249). Ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$· ἐὰν οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν β καὶ γ δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 5, οἱ ἀριθμοὶ β^2 καὶ γ^2 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5 ηὐξημένα κατὰ 1 ἢ 4. Ἀλλ' ἐὰν ἀμφότεροι οἱ β^2 καὶ γ^2 εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5 ηὐξημένα κατὰ 1 τό ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 ηὐξημένον κατὰ 2 καὶ κατὰ συνέπειαν δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου· ὁμοίως ἐὰν οἱ β^2 καὶ γ^2 ἀμφότεροι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5 ηὐξημένα κατὰ 4 τὸ ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 ηὐξημένον κατὰ 3· ὥστε καὶ πάλιν δὲν δύναται νὰ εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου. Πρέπει ἑπομένως νὰ εἶναι ὁ εἷς τούτων (ὁ β^2 ἢ ὁ γ^2) πολλαπλάσιον τοῦ 5 ηὐξημένον κατὰ 1 καὶ ὁ ἄλλος πολλαπλάσιον τοῦ 5 ηὐξημένον κατὰ 4, ὁπότε τὸ ἄθροισμα $\beta^2 + \gamma^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 5 καὶ ὁ α^2.

250). α) Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς πράξεως ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν· ἤτοι εἶναι $\alpha^2 + \upsilon = N$ καὶ ἑπομένως εἶναι $\alpha^2 + \upsilon + \frac{\upsilon^2}{4\alpha^2} > N$· ἀλλὰ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης γράφεται $\left(\alpha + \frac{\upsilon}{2\alpha}\right)^2$· ὥστε ἔχομεν $\left(\alpha + \frac{\upsilon}{2\alpha}\right)^2 > N$ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $\alpha + \frac{\upsilon}{2\alpha} > \sqrt{N}$.

β) Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι εἶναι $\alpha^2 + \upsilon = N$ (1) καὶ $\alpha^2 + \upsilon +$

$\frac{\upsilon^2}{4\alpha^2} > N$· ἀλλὰ τὸ $\frac{\upsilon^2}{4\alpha^2}$ ἢ τὸ $\left(\frac{\upsilon}{2\alpha}\right)^2$ ὅπερ προσθέτομεν εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης εἶναι τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὴν 1, διότι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως υ εἶναι τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ 2α· ἑπομένως τὸ $\alpha^2 + \upsilon + \frac{\upsilon^2}{4\alpha^2}$ ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha + \frac{\upsilon}{2\alpha}$ εἶναι κατὰ μονάδα τὸ πολὺ μεγαλύτερον τοῦ N.

251). Ἔστω ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ καὶ ἔστω ὅτι εἶναι $\alpha > \beta > \gamma > \delta$· τότε ἔχομεν $\frac{\alpha-\beta}{\alpha} = \frac{\gamma-\delta}{\gamma}$· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha > \gamma$, πρέπει ἵνα ὑπάρχῃ ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης νὰ εἶναι καὶ $\alpha-\beta > \gamma-\delta$· ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ταύτης προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\beta+\delta$, λαμβάνομεν $\beta+\delta+\alpha-\beta > \beta+\delta+\gamma-\delta$ ἤτοι $\alpha+\delta > \beta+\gamma$.

253). Ἐὰν εἶναι $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$ θὰ εἶναι κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῆς ἀναλογίας καὶ $(\alpha-\beta)\,\gamma = \alpha\,(\beta-\gamma)$ ἢ $\alpha.\gamma-\beta\gamma = \alpha\beta-\alpha\gamma$ ἢ $\alpha.\gamma+\alpha.\gamma = \beta\gamma+\alpha\beta$ ἢ $2\alpha\gamma = \beta\gamma+\alpha\beta$. Τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη διὰ 2.α.β.γ, ὁπότε ἔχομεν $\frac{2\alpha\gamma}{2\alpha\,\beta.\gamma} = \frac{\beta\gamma}{2\alpha\,\beta.\gamma} + \frac{\alpha\beta}{2\alpha\,\beta.\gamma}$ ἢ $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2\gamma}$ ἢ $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}.\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{2}.\frac{1}{\gamma}$ ἢ $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}\right)$.

253). Εἶναι π. χ. $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{20}} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$ ὡς καὶ $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{3}$· ὥστε εἶναι $\dfrac{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{5}}$.

ΤΕΛΟΣ

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ ΔΑΛΛΑ

ΑΝΑΓΝΩΣΜΑΤΑ

ΕΚΤΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΜΕΘΟΔΙΚΟΝ
ΔΙΑ ΤΗΝ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΝ ΤΗΣ ΚΑΘΑΡΕΥΟΥΣΗΣ

Οὐκ ἀλλοτρίοις ὑμῖν χρωμένοις παραδείγμασιν, ἀλλ' οἰκείοις, ὦ ἄνδρες Ἀθηναῖοι, εὐδαίμοσιν ἔξεστι γενέσθαι.
(Δημοσθ. Ὀλυνθ. 3, 24).

ΕΚΔΟΣΙΣ ΤΡΙΤΗ

Τιμᾶται δρ. 10.45
Ἀριθμὸς ἐγκριτικῆς ἀποφάσεως 21715
Ἀριθμὸς ἀδείας κυκλοφορίας 41617, 15 Ὀκτωμβρίου 1928

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΕΚΔΟΤΑΙ: ΙΩΑΝΝΗΣ Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΣ & Σ^{ΙΑ}
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ" ΣΤΑΔΙΟΥ 50
1928

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ ΤΗΣ "ΕΣΤΙΑΣ„ Ι. Δ. ΚΟΛΛΑΡΟΥ & Σ^ΙΑΣ

ΑΘΗΝΑΙ ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 50

ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΑ ΕΡΓΑ

ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Ἀναθεωρηθέντα καὶ συμπληρωθέντα συμφώνως πρὸς τὰς ὑποδείξεις τῆς κριτικῆς ἐπιτροπείας ὑπὸ

Χ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Καθηγητοῦ τοῦ Θ΄ Γυμνασίου Ἀθηνῶν.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ πρὸς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ πρὸς χρῆσιν τῶν Γυμνασίων.
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ » » » »
ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑ » » » »
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ » » »
ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ πρὸς χρῆσιν τῶν Ἑλληνικῶν Σχολείων.

Ἀναθεωρηθεῖσα καὶ συμπληρωθεῖσα ὑπὸ

Ν. Ι. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ

Καθηγητοῦ τοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν.

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ ΕΙΣ ΤΑ ΑΝΑΘΕΩΡΗΘΕΝΤΑ ΕΡΓΑ

Ι. ΧΑΤΖΙΔΑΚΙ ὑπὸ

Χ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ

Καθηγητοῦ τοῦ Θ΄ Γυμνασίου Ἀθηνῶν.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ Στοιχειώδους Ἀριθμητικῆς καὶ Πρακτικῆ
μετρίας.
» » Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς.
» » Γεωμετρίας Γυμνασίου.
» » Ἀλγέβρας.
» » Τριγωνομετρίας.