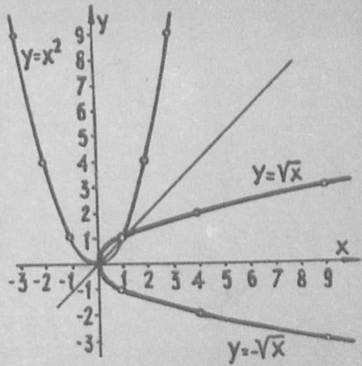
ΣΤΕΦΑΝΟΥ Γ. ΒΙΤΖΗΛΑΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ, ΑΡΣΑΚΕΙΩ, ΨΥΧΙΚΟΥ



ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
"Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ"
ΑΘΗΝΑΙ

ΤΕΥΧΟΣ Α'

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΣΤΕΦΑΝΟΥ Γ. ΒΙΤΖΗΛΑΙΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩ ΑΡΣΑΚΕΙΩ ΨΥΧΙΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΛΓΕΒΡΑ - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ - ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Διὰ τὴν Γ'. τάξιν τοῦ Γυμνασίου
(Συμφώνως πρὸς τὸ νέον ἀναλυτ. πρόγραμμα)

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ "Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ„
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 44 — ΑΘΗΝΑΙ

ΑΘΗΝΑΙ 1966

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως.

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ :

1) ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Θεωρία—Ἀσκήσεις) Τόμος I
2) ΔΙΑΦΟΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ (Θεωρία—Ἀσκήσεις) Τόμος II (ἐκτυποῦται)

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΑΛΓΕΒΡΑ

1. Συναρτήσεις πραγματικῶν μεταβλητῶν

1.1 Συναρτήσεις :

Εἶναι γνωστὸν ὅτι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον καλεῖται καὶ ***συνάρτησις***. Ἡ μονοσήμαντος π. χ. ἀπεικόνισις

$$f : x \in P \rightarrow y \in Q$$

τοῦ συνόλου P εἰς τὸ σύνολον Q, ἴσου ἢ διαφόρου τοῦ P, λέγομεν ὅτι ὁρίζει μίαν συνάρτησιν f *. Τὸ σύνολον P καλεῖται τότε ***πεδίον ὁρισμοῦ*** τῆς συναρτήσεως τὸ δὲ σύνολον Q ***πεδίον τιμῶν*** αὐτῆς. Τὸ στοιχεῖον $x \in P$ τὸ ὁποῖον μὲ τὴν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν ἀπεικονίζεται εἰς ἓν στοιχεῖον $y \in Q$ καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ*** τὸ δὲ στοιχεῖον $y \in Q$ δηλ. ἡ εἰκὼν τοῦ $x \in P$ καλεῖται ***ἐξηρτημένη μεταβλητὴ*** ἢ ***συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς*** x.

Παράδειγμα.

Ἂν ὡς σύνολον P θεωρήσωμεν τὸ σύνολον A τῶν ἀκεραίων καὶ ὡς Q ἐπίσης τὸ σύνολον A, τότε μὲ τὴν συνάρτησιν

$$f : x \in A \rightarrow y = f(x) = 2x \in A$$

εἰς κάθε ἀκέραιον ἀντιστοιχοῦμεν τὸν διπλάσιον του. Τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν γράφομεν συντόμως ὡς ἑξῆς :

$$y = 2x \text{ ἢ } f(x) = 2x$$

Ἂν ὁ $x = 3$ τότε ἡ συνάρτησις $y = 2x$ ὁρίζει ὡς εἰκόνα αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν $y = 2 \cdot 3 = 6$ δηλ $f(3) = 6$

---

* Μὲ τὸ γράμμα f συμβολίζομεν τὴν λέξιν συνάρτησιν ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ τῆς λέξεως fonction ποὺ σημαίνει συνάρτησις.

Ἂν $x=4$ τότε θὰ ἔχωμεν ὡς εἰκόνα αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν $y=2\cdot 4=8$ δηλ. $f(4)=8$ κ. ο. κ.

Οἱ ἀριθμοὶ 6, 8 κ.τ.λ. τοὺς ὁποίους λαμβάνομεν ὡς εἰκόνας τοῦ x ὅταν ὁ x διατρέχῃ τὸ σύνολον Α, καλοῦνται ***τιμαὶ τῆς συναρτήσεως***.

1.2 Συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλ. τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς αὐτὸ ἔχει ὁρισθῆ καὶ ἂς λάβωμεν ὡς Ρ τὸ σύνολον $K \subseteq \Pi$ καὶ ὡς Q τὸ σύνολον Π.

Τότε ἂν εἰς κάθε ἀριθμὸν $x \in K$ ἀντιστοιχήσωμεν ὡς εἰκόνα αὐτοῦ τὸν ἀριθμὸν $y=2x^3 \in \Pi$, θὰ ὁρίσωμεν οὕτω τὴν συνάρτησιν·

$$f: \quad x \in K \rightarrow y = 2x^3 = f(x) \in \Pi$$

ἢ συντόμως τὴν

$$(1) \qquad y = 2x^3$$

Ἂν ὁ $x=-3 \in K$ τότε μὲ τὴν συνάρτησιν (1) ὁρίζεται ὡς εἰκὼν αὐτοῦ ὁ: $y=2(-3)^3=2(-27)=-54$ δηλ. $f(-3)=-54 \in \Pi$

Ἂν ὁ $x=+2 \in K$ θὰ ἔχωμεν

$y=2(+2)^3=2(+8)=+16$ δηλ. $f(+2)=+16 \in \Pi$.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως $y = 2x^3$ διὰ $x=-3, +2$ εἶναι ἀντιστοίχως -54 καὶ $+16$.

Ἔστω ἀκόμη ἡ συνάρτησις

$$f: \quad x \in \Pi \rightarrow y = -2x+3 = f(x) \in \Pi$$

ἢ συντόμως $\qquad (2) \quad y=-2x+3$

Τότε ἂν $x = -1$ ἡ εἰκὼν αὐτοῦ ποὺ ὁρίζει ἡ (2) εἶναι $y=-2(-1)+3=+2+3=+5$ δηλ. $f(-1)=+5 \in \Pi$

Ἂν $x = +5$ θὰ ἔχωμεν $y=-2(+5)+3=-10+3=-7$ δηλ. $f(+5)=-7 \in \Pi$ κ. ο. κ.

Συναρτήσεις ὡς αἱ ἀνωτέρω τῶν ὁποίων τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι ἓν σύνολον $K \subseteq \Pi$, τὸ δὲ πεδίον τιμῶν των εἶναι τὸ σύνολον Π καὶ μὲ τὰς ὁποίας εἰς κάθε $x \in K$ ἀντιστοιχοῦμεν ἕναν πραγματικὸν ἀριθμὸν $y \in \Pi$ καλοῦνται ***συναρτήσεις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς.***

1.3 Συναρτήσεις δύο ἢ περισσοτέρων πραγματικῶν μεταβλητῶν.

Ἃς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν:

$$(1) \qquad f: \ (x,y) \in \Pi X \Pi \rightarrow z = f(x,y) \in \Pi.$$

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι μὲ τὴν συνάρτησιν (1) εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν $(x, y) \in \Pi X \Pi$ ἀντιστοιχεῖ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς $z \in \Pi$.

Συναρτήσεις ὡς ἡ (1) καλοῦνται ***συναρτήσεις δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν.***

Παράδειγμα.

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$(2) \ f: \ (x,y) \in \Pi X \Pi \rightarrow z = 3x^2 + 4xy^2 - 1 = f(x,y) \in \Pi$$

καὶ ἄς λάβωμεν τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(+3, -2)$ τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὴν εἰκόνα τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ (2). Θὰ ἔχωμεν τότε:

$z = 3(+3)^2 + 4(+3)(-2)^2 - 1 = 3(+9) + 4(+3)(+4) - 1 = 27 + 48 -$
$- 1 = +74$. δηλ. $f(+3, -2) = +74 \in \Pi$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι εἰς τὰ διατεταγμένα ζεύγη $(-1, +2)$ καὶ $(+2, -4)$ ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀριθμοὶ $z_1 = -14$ καὶ $z_2 = +139$ κ. ο. κ.

Ἀναλόγως πρὸς τὴν συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν ὁρίζεται καὶ ἡ συνάρτησις τριῶν ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Π. χ. Ἡ συνάρτησις:

$f: (x,y,\omega) \in \Pi^3 \rightarrow z = 4x^3 + 3x^2y\omega - y^2 = f(x,y,\omega) \in \Pi$ θὰ καλῆται ***συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν.***

Ἡ $f: \ (\varphi, x, y, \omega) \in \Pi^4 \rightarrow z = 3x^2\varphi - 2xy + 3\omega^2 = f(\varphi, x, y, \omega) \in \Pi$ θὰ καλῆται ***συνάρτησις τεσσάρων μεταβλητῶν*** κ. ο. κ.

2. Μονώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς

2.1 Ὁρισμοί :

2.1.1 Ὁρισμὸς μονωνύμου.

Ἔστω ἡ συνάρτησις $f(x)=\alpha x^{\nu}$ τῆς πραγματικῆς μεταβλητῆς x, ὅπου α σταθερὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ν φυσικός. Κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς αὐτῆς θὰ καλῆται ***ἀκέραιον μονώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς*** (τῆς μεταβλητῆς x).

Παραδείγματα τοιούτων μονωνύμων εἶναι αἱ συναρτήσεις $-2x^{3}$, $+\frac{2}{3}x^{4}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}x^{5}$, $+4x^{5}$ κ. λ. π.

Εἰς τὸ μονώνυμον αx^{ν} ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς α καλεῖται ***συντελεστὴς*** αὐτοῦ, ἐνῶ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν, ὁ ἐκθέτης δηλ. τῆς μεταβλητῆς καλεῖται ***βαθμὸς*** τοῦ μονωνύμου τούτου.

Γενικῶς ἕνα μονώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς τοῦ ὁποίου ὁ βαθμὸς εἶναι ν, θὰ καλῆται ***μονώνυμον νυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν αὐτήν.***

Παραδείγματα:

Τὸ μονώνυμον	$-3x^{5}$	εἶναι	πέμπτου	βαθμοῦ	ὡς	πρὸς	x	μὲ	συν/στὴν	-3
Τὸ	»	$-\frac{1}{3}z^{4}$	»	τετάρτου	»	»	»	z »	»	$-\frac{1}{3}$
Τὸ	»	$2y$	»	πρώτου	»	»	»	y »	»	2
Τὸ	»	$-x^{3}$	»	τρίτου	»	»	»	x »	»	-1
Τὸ	»	x^{6}	»	ἕκτου	»	»	»	x »	»	$+1$

2.1.2 Μονώνυμα ὅμοια — ἴσα — ἀντίθετα

I ***Δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα θὰ καλοῦνται ὅμοια τότε καὶ μόνον τότε, ἂν εἶναι τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.***

Π. χ. τὰ $-\alpha x^{3}$, βx^{3}, $\frac{\sqrt{2}}{3}x^{3}$, $5x^{3}$, $-\frac{3}{5}x^{3}$ κ. τ. λ.

εἶναι ὅμοια μονώνυμα.

II Δύο ἢ περισσότερα ὅμοια μονώνυμα μὲ ἴσους συντελεστὰς καλοῦνται ***ἴσα***.

III Δύο μονώνυμα θὰ καλοῦνται ***ἀντίθετα*** τότε καὶ μόνον τότε, ἂν εἶναι ὅμοια καὶ οἱ συντελεσταί των εἶναι ἀντίθετοι.

Π. χ. τὰ $-5x^4$ καὶ $5x^4$ εἶναι δύο ἀντίθετα μονώνυμα.

Παρατηρήσεις.

1η. Ἀπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς μονωνύμου ἕπεται ὅτι τὰ στοιχεῖα ποὺ συνθέτουν αὐτό, δηλ. ὁ συντελεστής του καὶ ἡ δύναμις τῆς μεταβλητῆς ἡ ὁποία καλεῖται καὶ ***κύριον ποσὸν*** συνδέονται μεταξύ των μόνον διὰ τῆς πράξεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

2α. Ὁ χαρακτηρισμὸς ἑνὸς μονωνύμου αx^ν ὡς ***ἀκεραίου*** ὀφείλεται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ ἐκθέτης ν εἶναι ἕνας φυσικὸς ἀριθμός. Ἂν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, ἂν δηλ. $\nu \notin \Phi$, τότε τὸ μονώνυμον δὲν λέγεται ἀκέραιον. Π. χ. τὰ μονώνυμα $5x^{-1}, -3x^{\frac{2}{3}}, 7x^{\frac{1}{4}}$ κ.λ.π. δὲν εἶναι ἀκέραια.

Εἰδικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου ὁ ν εἶναι μηδὲν τὸ μονώνυμον καλεῖται ***μηδενικοῦ βαθμοῦ*** καὶ διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἴσην πρὸς τὸν συντελεστήν του. ($\alpha x^0 = \alpha \cdot 1 = \alpha$).

3η. Ἓν μονώνυμον θὰ λέγεται ***μηδενικὸν*** τότε καὶ μόνον τότε ἂν ὁ συντελεστής του εἶναι τὸ μηδέν. Π.χ. τὸ μονώνυμον $0x^6$ εἶναι μηδενικὸν μονώνυμον. Παρατηροῦμεν δηλ. ὅτι δι' οἱανδήποτε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς τὸ μηδενικὸν μονώνυμον ἰσοῦται πάντα μὲ μηδέν.

2.2 Πράξεις μέ μονώνυμα τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς.

Ἂν θεωρήσωμεν τὸ μονώνυμον αx^ν παρατηροῦμεν ὅτι διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x, τοῦτο παριστᾷ ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν.

Εἶναι φανερὸν λοιπὸν ὅτι μεταξὺ μονωνύμων εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν ὅλαι αἱ πράξεις ποὺ ὁρίζονται μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

2.2.1 Πρόσθεσις

Γενικῶς ὡς ἄθροισμα μονωνύμων μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, ὁρίζομεν μίαν νέαν συνάρτησιν τῆς ἰδίας μεταβλητῆς

καὶ ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὰ δοθέντα μονώνυμα ἂν συνδέσωμεν αὐτὰ μεταξύ των διὰ τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως (+)

Π. χ. ἂν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν τὰ μονώνυμα:

$-2x^3$, $+3x^5$, $-\frac{1}{4}x$, $-\sqrt{2}x^2$ τότε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν θὰ εἶναι ἡ συνάρτησις:

$$(-2x^3)+(+3x^5)+(-\frac{1}{4}x)+(-\sqrt{2}x^2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: Κατὰ τὸν σχηματισμὸν τοῦ ἀθροίσματος δὲν ἐνδιαφέρει ἡ σειρὰ κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν τὰ δοθέντα μονώνυμα.

Ἐπίσης, δυνάμεθα νὰ παραλείψωμεν τὰς παρενθέσεις, ὁπότε ταῦτα θὰ συνδέωνται διὰ τῶν σημείων τῶν συντελεστῶν των. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

$$-2x^3+(+3x^5)+\left(-\frac{1}{4}x\right)+\left(-\sqrt{2}x^2\right)=-2x^3+3x^5-\frac{1}{4}x-\sqrt{2}x^2$$

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ὅπου τὰ προστιθέμενα μονώνυμα εἶναι ***ὅμοια,*** τότε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν λαμβάνει ἁπλουστέραν μορφήν.

Ἀποδεικνύεται τότε ὅτι: ***Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστὴς εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν αὐτῶν.***

Πράγματι: Ἔστω ὅτι ἔχομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ μονώνυμα αx^ν, βx^ν, γx^ν, δx^ν.

Συμφώνως τότε πρὸς τὸν ὁρισμὸν ἀθροίσματος μονωνύμων καὶ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha x^\nu+\beta x^\nu+\gamma x^\nu+\delta x^\nu=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^\nu$$

Ὁπότε παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)x^\nu$ εἶναι ἓν μονώνυμον ὅμοιον πρὸς τὰ προτιθέμενα, μὲ συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν αὐτῶν.

Παράδειγμα:

$$-2y^2+\left(+\frac{3}{7}y^2\right)+\left(-\frac{2}{3}y^2\right)+\left(+3y^2\right)=-2y^2+\frac{3}{7}y^2-\frac{2}{3}y^2+$$

$$+3y^2=\left(-2+\frac{3}{7}-\frac{2}{3}+3\right)y^2=\left(-\frac{42}{21}+\frac{9}{21}-\frac{14}{21}+\frac{63}{21}\right)y^2=\frac{16}{21}y^2$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν προσθέσεως μονωνύμων ὅπου δὲν εἶναι ὅλα ὅμοια ἀλλὰ μεταξὺ αὐτῶν ὑπάρχουν καὶ ὅμοια τοιαῦτα, διὰ νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν πρόσθεσιν χωρίζομεν αὐτὰ εἰς ὁμάδας ὁμοίων μονωνύμων. Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων ἑκάστης ὁμάδος καὶ προσθέτομεν κατὰ τὰ γνωστὰ ὅλα τὰ μερικὰ ἀθροίσματα.

Ἡ μορφὴ ποὺ θὰ λάβη τὸ τελικὸν τοῦτο ἄθροισμα καλεῖται συνεπτυγμένη μορφὴ αὐτοῦ.

Προφανῶς ἡ συνεπτυγμένη μορφὴ δὲν περιέχει ὅμοια μονώνυμα.

Παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-7x, +5x^3$, $-6x^4, +2x, -x^3$. Τότε συμφώνως πρὸς τ᾽ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν: $-7x+5x^3-6x^4+2x-x^3=(-7x+2x)+(5x^3-x^3)-6x^4=-5x+$ $+4x^3-6x^4$.

Παρατήρησις.

Ἡ εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται καὶ ***ἀναγωγὴ*** ὁμοίων μονωνύμων.

2.2.2 Ἀφαίρεσις.

Ἡ ἀφαίρεσις δύο μονωνύμων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς ὁρίζεται μὲ τὴν βοήθειαν τῆς προσθέσεως ὡς ἑξῆς: ***Θὰ καλοῦμεν διαφορὰν δύο μονωνύμων*** αx^ν ***καὶ*** βx^μ ***καὶ θὰ γράφωμεν αὐτὴν*** $\alpha x^\nu - \beta x^\mu$ ***τὸ ἄθροισμα τοῦ μονωνύμου*** αx^ν ***καὶ τοῦ*** $-\beta x^\mu$ ***δηλ. τοῦ ἀντιθέτου τοῦ*** βx^μ.

Δηλαδὴ ἐξ ὁρισμοῦ θά εἶναι:

$$\alpha x^\nu - \beta x^\mu = \alpha x^\nu + (-\beta x^\mu)$$

Παραδείγματα:

α) $6x^3-2x^3=6x^3+(-2x^3)=4x^3$

β) $-7x^4-\left(-\frac{3}{2}x\right)=-7x^4+\left(+\frac{3}{2}x\right)=-7x^4+\frac{3}{2}x$

γ) $2x^3-(-\sqrt{3}x^3)=2x^3+(+\sqrt{3}x^3)=2x^3+\sqrt{3}x^3=(2+\sqrt{3})x^3$

2.2.3 Πολλαπλασιασμός.

Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν μονωνύμων τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, προκύπτει μία νέα συνάρτησις τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς ἡ ὁποία καλεῖται γινόμενον τῶν μονωνύμων τούτων.

Μὲ τὴν βοήθειαν δὲ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ προσεταιριστικῆς ἰδιότητος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὡς καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως ἀποδεικνύεται ὅτι:

Τὸ γινόμενον μονωνύμων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς εἶναι μονώνυμον τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, μὲ συντελεστὴν ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων καὶ βαθμὸν ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν αὐτῶν.

Πράγματι ἂν π. χ. ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μονώνυμα αx^{ν}, βx^{μ}, γx^{ϱ} τότε

$$(\alpha x^{\nu})(\beta x^{\mu})(\gamma x^{\varrho})=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma x^{\nu}\cdot x^{\mu}\cdot x^{\varrho}=\alpha\beta\gamma x^{\nu+\mu+\varrho}$$

Παραδείγματα:

α) $(5x^3)\cdot(-2x^2)=-10x^5$

β) $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(-6x)(2x^3)=-6x^8$

γ) $\left(-\frac{1}{3}x\right)(5x^2)\left(-\frac{7}{4}x^4\right)(-x^5)=-\frac{35}{12}x^{12}$

Παρατήρησις.

Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ποὺ τὰ δοθέντα μονώνυμα εἶναι ὅλα ἴσα μεταξύ των, τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μία δύναμις μὲ βάσιν μονώνυμον ἴσον πρὸς αὐτὰ καὶ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν μονωνύμων τούτων.

Π. χ. $(-2x^2)(-2x^2)(-2x^2)=(-2x^2)^3$

καὶ δι' ἐφαρμογῆς τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων ἡ τελικὴ μορφὴ τοῦ γινομένου εἶναι:

$$(-2x^2)^3=(-2)^3\cdot(x^2)^3=-8x^6$$

Ὁμοίως $\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\left(-\frac{1}{3}x^3\right)\left(-\frac{1}{3}x^3\right)=\left(-\frac{1}{3}x^3\right)^4=$

$=\left(-\frac{1}{3}\right)^4\left(x^3\right)^4=\frac{1}{81}x^{12}$

2.2.4 Διαίρεσις.

Ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ διαίρεσις μεταξὺ δύο μονωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς, ὁρίζεται μόνον ὅταν τὸ μονώνυμον διαιρέτης εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Μὲ τὴν βοήθειαν καὶ πάλιν τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων ἀποδεικνύεται ὅτι:

Τὸ πηλίκον $(\alpha x^\nu):(\beta x^\mu)$ δύο μονωνύμων αx^ν καὶ βx^μ (μὲ $\beta x^\mu \neq 0$) τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι ἓν νέον μονώνυμον τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς, τοῦ ὁποίου συντελεστὴς μὲν εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\beta}$ τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καὶ βαθμὸς ἡ διαφορὰ ν-μ τῶν βαθμῶν των.

Δηλαδὴ $(\alpha x^\nu):(\beta x^\mu)=\frac{\alpha}{\beta}x^{\nu-\mu}$

Παραδείγματα:

α) $(-8x^3):(+2x)=\frac{-8}{+2}x^{3-1}=-4x^2$

β) $\left(-\frac{2}{3}x^5\right):\left(-\frac{1}{5}x^2\right)=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{1}{5}}x^{5-2}=\frac{10}{3}x^3$

γ) $(-4x^3):(+2x^2)=\frac{-4}{+2}x^{3-2}=-2x^1=-2x$

Ἐκεῖνο ποὺ πρέπει νὰ τονίσωμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς διαιρέσεως εἶναι ὅτι τὸ πηλίκον δύο ***ἀκεραίων*** μονωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε ***ἀκέραιον*** μονώνυμον.

Πράγματι ὅταν ὁ βαθμὸς ν τοῦ διαιρεταίου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν βαθμὸν μ τοῦ διαιρέτου, τότε ὁ βμθμὸς ν-μ τοῦ πηλίκου εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἄρα ὄχι φυσικός. Ἀλλὰ τότε συμφώνως πρὸς τὸν δοθέντα ὁρισμὸν τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου τὸ πηλίκον δὲν θὰ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καλεῖται ***κλασματικόν.***

Παραδείγματα :

α) $(-4x^2):(-4x^5)=\dfrac{-4}{-4}x^{2-5}=x^{-3}$

Τὸ πηλίκον $x^{-3}=\dfrac{1}{x^3}$ εἶναι ἕν κλασματικὸν μονώνυμον.

β) $(3x):(-5x^3)=\dfrac{3}{-5}x^{1-3}=-\dfrac{3}{5}x^{-2}=-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{x^2}=-\dfrac{3}{5x^2}$

Εἰδικῶς ὅταν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν ὅμοια μονώνυμα τὸ πηλίκον εἶναι ***μηδενικοῦ βαθμοῦ.***

Παραδείγματα :

α) $(-7x^4):(x^4)=-\dfrac{7}{1}x^{4-4}=-7x^0=-7.$

β) $(15x^3):(-3x^3)=\dfrac{15}{-3}x^{3-3}=-5x^0=-5.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἐξηγηθῇ διατὶ ἕν μηδενικὸν μονώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὅμοιον πρὸς κάθε ἀκέραιον μονώνυμον.

2. Νὰ ἐξηγηθῇ διατὶ κάθε σταθερὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μονώνυμον μηδενικοῦ βαθμοῦ.

3. Ἐξετάσατε ἐὰν δύο ἀντίθετα μονώνυμα εἶναι ὅμοια καὶ ἐὰν δύο ὁποιαδήποτε ὅμοια μονώνυμα εἶναι ἀντίθετα.

4. Δίδονται τὰ κάτωθι μονώνυμα.

$$\alpha x^4,\quad -\frac{2}{5}x^6,\quad \gamma x^7,\quad -\alpha x^4,\quad -\gamma x^7,\quad 3x^4,\quad -\frac{3}{5}x^6$$

Νὰ εὑρεθῇ· α) Ὁ συντελεστὴς ἑκάστου, β) ὁ βαθμός του, γ) τὰ ἐξ αὐτῶν ὅμοια, δ) τὰ ἐξ αὐτῶν ἀντίθετα.

5. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κάτωθι μονωνύμων.

α) $-5x^2,\ 2x,\ -7,\ 3x^2,\ 5x,\ -x^3,\ -x^2,\ 4x^3$

β) $-2\alpha x^3,\ 7\beta x^2,\ 3\gamma x^4,\ -3\alpha x^3,\ -\beta x^3,\ x^2,\ \gamma x^4,\ -\beta x^4$

γ) $\dfrac{y}{2},\ 3y^2,-\dfrac{2}{9}y^2,\ y,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{4}y,-\dfrac{5}{4}y,\ 2y^3.$

6. Νὰ εὑρεθοῦν ὑπὸ συνεπτυγμένην μορφὴν τὰ κάτωθι ἀθροίσματα.

α) $12+8y-3y^2+y^4-6y-7-5y^2+y^3-3y^4$.
β) $6x^2-3x^3+2x^4+3x-5x^2+6x^4+2x^3+3x$
γ) $\alpha x^2-3\beta x^2+6\beta x+2x-2\alpha x^2+8-3x$.

7. Ἐξετάσατε εἰς ποίαν περίπτωσιν ἡ διαφορὰ δύο ὁμοίων μονωνύμων μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς εἶναι μηδενικὸν μονώνυμον καὶ εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι μονώνυμον ὅμοιον πρὸς αὐτὰ μὲ συντελεστὴν ὁπωσδήποτε πολλαπλάσιον τοῦ 2.

8. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι διαφοραί :

$$3x^2-\left(-\frac{2}{3}x^2\right),\ \frac{3}{4}x^3-\left(+\frac{1}{2}x^3\right),\ 5y^3-\frac{5}{2}y^3.$$

$$1-(-2x),\ 5x^3-(-6x^3),\ -\frac{1}{2}y-\left(-\frac{2}{3}y^4\right)$$

9. Ἐξετάσατε εἰς ποίαν περίπτωσιν τὸ γινόμενον μονωνύμων : α) Εἶναι μηδενικὸν μονώνυμον, β) ὁ βαθμὸς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν ἑνὸς ἑκάστου τῶν πολλαπλασιαζομένων (παραγόντων), γ) ὁ βαθμὸς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν βαθμὸν ἑνὸς μόνον ἐξ αὐτῶν.

10. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα.

$$(3x^2)(-2x^3),\ \left(\frac{2}{3}x^2\right)\left(-\frac{3}{2}x\right)\left(-x^4\right),\ \left(\frac{\alpha}{2}x\right)\left(\frac{2\alpha}{3}x\right)\left(-3\right),$$

$$\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\left(-2x^3\right),\ \left(x^2\right)\left(\frac{2}{3}x^5\right)\left(-x^2\right)\left(x^3\right).$$

11. Δείξατε ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ γινομένου μονωνύμων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς θὰ εἶναι θετικός ἀριθμὸς τότε καὶ μόνον τότε, ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν συντελεστῶν εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος ἢ μηδέν, ἐνῷ θὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἂν τὸ πλῆθος αὐτὸ εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

12. Νὰ γίνουν αἱ κάτωθι διαιρέσεις.

$$(12x^3):(-4x),\ (-3x^2):(5x),\ (\alpha x^3):(-\beta x^2)$$
$$(9x^2):(-6x^2),\ (2x^2):(-5x^5),\ (-6x^2):(-3x^3),\ (3x^2):(-x^2)$$

13. Δείξατε ὅτι αἱ πράξεις τῆς διαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ δύο μονωνύμων εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι.

3. Πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

3.1 Ὁρισμοί.

Μὲ τὸν ὅρον ***πολυώνυμον*** θὰ ἐννοοῦμεν κάθε συνάρτησιν μιᾶς μεταβλητῆς, ἡ ὁποία προκύπτει ὡς ***ἄθροισμα*** μονωνύμων τῆς μεταβλητῆς αὐτῆς.

Π. χ. αἱ συναρτήσεις $f(x)=2x^5+3x^2-7x^2+3x+5$, $\varphi(x)=$ $=x+3x^3-1$ κ.λ.π. εἶναι πολυώνυμα. Ἂν λάβωμεν δὲ ὑπ' ὄψιν μας ὅτι κάθε μονώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τοῦ ἑαυτοῦ του καὶ τοῦ μηδενικοῦ μονωνύμου, συμπεραίνομεν ὅτι κάθε μονώνυμον δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς πολυώνυμον. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν λοιπὸν αὐτὴν τὸ πολυώνυμον ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἐννοίας τοῦ μονωνύμου.

Ὅρος πολυωνύμου καλεῖται ἕκαστον ἐκ τῶν μονωνύμων τὰ ὁποῖα σχηματίζουν αὐτό.

Βαθμὸς πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς θὰ καλῆται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου τούτου.

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $5x^3+\frac{3}{4}x^4-3x$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Τὸ » $3y^2-4y^5+2$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y.

Ἂν οἱ ὅροι ἑνὸς πολυωνύμου ἔχουν διαταχθῆ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε προχωροῦντες ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ νὰ συναντῶμεν κάθε φορὰν καὶ ὅρον μὲ μικρότερον βαθμόν, θὰ λέγωμεν τότε ὅτι τὸ πολυώνυμον εἶναι ***διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.***

Ἀντιθέτως ἂν ἡ διάταξις τῶν ὅρων ἔχῃ γίνει κατὰ τὴν ἀντίστροφον σειρὰν θὰ λέγωμεν ὅτι τοῦτο εἶναι ***διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.***

Παραδείγματα:

α) Τὸ πολυώνυμον $-2x^4+3x^3+5x-1$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x.

β) Τὸ $5-x+5x^2-x^5$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x.

Τέλος, ἂν ἡ μορφή, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ἐμφανίζεται ἓν πολυώνυμον θεωρούμενον ὡς ἄθροισμα μονωνύμων εἶναι συνεπτυγμένη, θὰ καλῆται τοῦτο ***συνεπτυγμένον.***

Π.χ. τὸ πολυώνυμον $\frac{1}{2}x^3+x-4x^2+2$ εἶναι συνεπτυγμένον.

3.2 Πράξεις μὲ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Εἶναι προφανές, ὅτι ἓν πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς παριστᾷ διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς ἕνα πραγματικὸν ἀριθμόν, ὅπως συμβαίνει καὶ μὲ τὰ μονώνυμα. Ἑπομένως δυνάμεθα καὶ μεταξὺ τῶν πολυωνύμων νὰ ὁρίσωμεν ὅλας τὰς πράξεις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

3.2.1 Πρόσθεσις πολυωνύμων.

Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἀθροίσματος πολυωνύμων τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς γίνεται κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μονωνύμων. Δηλαδὴ ἄθροισμα πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς θὰ εἶναι ἓν νέον πολυώνυμον τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς καὶ τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὰ δοθέντα ἂν συνδέσωμεν αὐτὰ μὲ τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως (+).

Παράδειγμα :

Τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $\varphi(x)=3x^3-5x^2-6x+1$, $\sigma(x)=-2x^3+6x+5$ καὶ $\pi(x)=2x^2-5x+6$ θὰ εἶναι ἡ συνάρτησις $k(x)=\varphi(x)+\sigma(x)+\pi(x)=(3x^3-5x^2-6x+1)+(-2x^3+6x+5)+$ $+(2x^2-5x+6)=3x^3-5x^2-6x+1-2x^3+6x+5+2x^2-5x+6$.

Ὑπὸ συνεπτυγμένην δὲ μορφὴν γράφεται :

$$k(x)=x^3-3x^2-5x+12.$$

Χάριν εὐκολίας κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως ἀκολουθοῦμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον. Κατ' ἀρχὴν ἐλέγχομεν ἐὰν ἕκαστον ἐκ τῶν δοθέντων πολυωνύμων περιλαμβάνῃ ὅρους ὁμοίους πρὸς τοὺς ὅρους τῶν ἄλλων. Ἂν διαπιστώσωμεν ὅτι εἰς ἓν ἐξ αὐτῶν λείπει π.χ. ὁ ὅρος αx^ν ποὺ ὑπάρχει εἰς κάποιο ἄλλο, συμπληροῦμεν τότε αὐτὸ μὲ τὸ μηδενικὸν μονώνυμον $0x^\nu$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἐπιτυγχάνομεν νὰ ἔχωμεν πολυώνυμα μὲ ὁμοίους ὅρους ἀντιστοίχως. Ἐν συνεχείᾳ διατάσσομεν αὐτὰ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς. Τέλος γράφομεν τὰ πολυώνυμα τὸ ἓν κάτωθεν τοῦ ἄλλου, κατὰ τρόπον ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι αὐτῶν νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν ἰδίαν στήλην καὶ προσθέτομεν αὐτούς.

Παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι δίδονται τὰ πολυώνυμα: $f(x)=4x^3-2x^2+x-5$, $g(x)=6x^4-3x-3x^3+1$ καὶ $\varphi(x)=x^4-7x-3x^2$ καὶ ζητεῖται τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ταῦτα καταλλήλως συμπληρούμενα καὶ διατασσόμενα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$f(x)=0x^4+4x^3-2x^2+x-5$, $g(x)=6x^4-3x^3+0x^2-3x+1$,

$\varphi(x)=x^4+0x^3-3x^2-7x+0$.

Τοποθετοῦμεν τώρα αὐτὰ ὡς κάτωθι καὶ ἐκτελοῦμεν τὴν πρόσθεσιν τῶν ὁμοίων ὅρων.

$$\begin{aligned} f(x) &= 0x^4+4x^3-2x^2+x-5 \\ g(x) &= 6x^4-3x^3+0x^2-3x+1 \\ \varphi(x) &= x^4+0x^3-3x^2-7x+0 \\ \hline f(x)+g(x)+\varphi(x) &= 7x^4+x^3-5x^2-9x-4. \end{aligned}$$

3.2.2 Ἀφαίρεσις πολυωνύμων.

Κατ' ἀρχὴν δύο πολυώνυμα $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ θὰ καλοῦνται ἀντίθετα τότε καὶ μόνον τότε, ἂν διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς τὸ ἄθροισμα $\varphi(x)+\sigma(x)$ αὐτῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδὲν $[\varphi(x)+\sigma(x)=0]$.

Τὸ ἀντίθετον πολυώνυμον ἑνὸς πολυωνύμου $\varphi(x)$ θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ $-\varphi(x)$. Π.χ. τὸ ἀντίθετον τοῦ $\varphi(x)=5x^2-2x+1$ εἶναι τὸ $-\varphi(x)=-(5x^2-2x+1)=-5x^2+2x-1$.

Παρατηροῦμεν ὅτι: Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὰ περὶ παρενθέσεων πρὸ τῶν ὁποίων ὑπάρχει τὸ σημεῖον «—» ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τῶν ἀντιθέτων πολυωνύμων εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν ἑξῆς:

Δύο πολυώνυμα θὰ καλοῦνται ἀντίθετα, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν οἱ ὅροι καθενὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀντίθετοι τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου.

Π.χ. τὰ $8x^3-2x^2+x$ καὶ $-8x^3+2x^2-x$ εἶναι ἀντίθετα. Μετὰ ταῦτα: ***Ὁρίζομεν ὡς διαφορὰν*** $f(x)-g(x)$ ***δύο πολυωνύμων*** $f(x)$ ***καὶ*** $g(x)$ ***τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς τὸ ἄθροισμα*** $f(x)+[-g(x)]$.

Παραδείγματα:

α) Ἔστω τὰ πολυώνυμα $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$ καὶ $g(x)=$ $=x^2-7x+5$ τῶν ὁποίων ζητοῦμεν τὴν διαφορὰν $f(x)-g(x)$. Ἔχομεν τότε : $f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)] = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 +$ $+(-x^2 + 7x - 5) = x^3 - 2x^2 + 5x - 1 - x^2 + 7x - 5 = x^3 - 3x^2 + 12x - 6.$

β) Ὁμοίως τὴν διαφορὰν τῶν πολυωνύμων $f(x) = x^4 - 2x^3 + x - 2$ καὶ $g(x) = x^3 - x^2 + 2x$ δυνάμεθα νὰ λάβωμεν καὶ ὡς ἑξῆς, ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὴν γνωστὴν μέθοδον προσθέσεως πολυωνύμων.

$$\begin{array}{rl} f(x) = & x^4 - 2x^3 + 0x^2 + x - 2 \\ -g(x) = & 0x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 0 \\ \hline f(x) - g(x) = f(x) + [-g(x)] = & x^4 - 3x^3 + x^2 - x - 2 \end{array}$$

Παρατήρησις.

Ἐπειδὴ ὡς εἴδομεν, πολλάκις γίνεται χρῆσις παρενθέσεων ποὺ περικλείουν πολυώνυμα ὑπενθυμίζομεν ὅτι:

1ον. Ἂν μία παρένθεσις ἡ ὁποία περικλείει ἓν πολυώνυμον ἔχῃ πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον «+», τότε δυνάμεθα νὰ τὴν παραλείψωμεν χωρὶς ν' ἀλλάξῃ τὸ ἐντὸς αὐτῆς πολυώνυμον.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως ἓν πολυώνυμον δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς μιᾶς παρενθέσεως μὲ πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον «+» χωρὶς αὐτὸ νὰ μεταβληθῇ.

Παραδείγματα :

α) $+(5x^2 - 2x + 7) = 5x^2 - 2x + 7,$

β) $-3x^2 + 2x - 1 = +(-3x^2 + 2x - 1).$

2ον. Ἂν μία παρένθεσις ποὺ περικλείει ἓν πολυώνυμον ἔχῃ πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον «—», τότε δύναται νὰ παραλειφθῇ, ἀρκεῖ κάθε ὅρος τοῦ περικλειομένου πολυωνύμου νὰ γραφῇ μὲ τὸ ἀντίθετόν του σημεῖον.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἓν πολυώνυμον δύναται νὰ εἰσαχθῇ ἐντὸς μιᾶς παρενθέσεως μὲ πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον «—», ἀφοῦ συγχρόνως κάθε ὅρος αὐτοῦ γραφῇ μὲ τὸ ἀντίθετόν του σημεῖον.

Παραδείγματα :

α) $-(3x^3 + 7x^2 - 2x - 1) = -3x^3 - 7x^2 + 2x + 1$

β) $5x^4 - 2x^3 + 7x - 2 = -(-5x^4 + 2x^3 - 7x + 2).$

3.2.3 Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις πολυωνύμου μὲ μονώνυμον.

Γνωρίζομεν ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν. Ἐπειδὴ δὲ κάθε πολυώνυμον παριστᾷ διὰ κάθε $x \in \Pi$ ἓν ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν, συνάγομεν τοὺς ἑξῆς κανόνας διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν διαίρεσιν πολυωνύμου μὲ μονώνυμον.

1. ***Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἓν πολυώνυμον μὲ ἓν μονώνυμον πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου μὲ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.***

Παράδειγμα :

$(3x^2+4x-2)\cdot 2x^2=(3x^2)\cdot(2x^2)+(4x)\cdot(2x^2)+(-2)\cdot(2x^2)=6x^4+$ $+8x^3-4x^2$.

2. ***Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἓν πολυώνυμον μὲ ἓν μονώνυμον, διαιροῦμεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου μὲ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα***

Παρατήρησις.

Εἰς τὴν διαίρεσιν πολυωνύμου διὰ μονωνύμου, θὰ πρέπῃ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ μονώνυμα τὰ ὁποῖα εὑρίσκομεν ὡς πηλίκα τῆς διαιρέσεως κάθε ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου, θὰ εἶναι ἄλλοτε μὲν ἀκέραια μονώνυμα, ἄλλοτε δὲ κλασματικά, ἀναλόγως τοῦ ἂν ὁ βαθμὸς τοῦ διαιρουμένου ὅρου εἶναι μεγαλύτερος ἢ μικρότερος ἀπὸ τὸ βαθμὸν τοῦ διαιρέτου.

Π.χ. ἂν ἔχωμεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ $\Delta(x)=9x^3-6x^2+3x-1$ διὰ τοῦ $\delta(x)=3x^2$, δὲν θὰ προκύψουν παντοῦ ἀκέραια μονώνυμα. Διὰ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν:

$$(9x^3-6x^2+3x-1):3x^2=\frac{9x^3}{3x^2}+\frac{-6x^2}{3x^2}+\frac{3x}{3x^2}+\frac{-1}{3x^2}=3x-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{3x^2}$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως ὅπου ὁ διαιρέτης ἔχει βαθμὸν μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον πρὸς τὸν βαθμὸν κάθε ὅρου τοῦ διαιρετέου καὶ ὁ συντελεστής του διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, θὰ προκύψῃ ὡς πηλίκον ἓν πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι θὰ εἶναι ἀκέραια μονώνυμα μὲ συντελεστὰς ἀκεραίους. Ἐπειδὴ δὲ προφανῶς τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς τέτοιας διαιρέσεως θὰ εἶναι μηδέν, διὰ τοῦτο καὶ ἡ διαίρεσις αὕτη θὰ καλῆται ***τελεία***. Εἰς μίαν τελείαν διαίρεσιν θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας ὅτι ὁ διαιρετέος παρίσταται ὡς γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

Παράδειγμα:

Ἔστω $\Delta(x) = -15x^4 + 10x^3 - 5^2x + 20x$ καὶ $\delta(x) = 5x$. Τὸ πηλίκον τότε τῆς διαιρέσεως τοῦ $\Delta(x)$ διὰ τοῦ $\delta(x)$ θὰ εἶναι τὸ πολυώνυμον $\pi(x) = -3x^3 + 2x^2 - x + 4$ καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) \quad \text{ἢ}$$

$$-15x^4 + 10x^3 - 5x^2 + 20x = 5x(-3x^3 + 2x^2 - x + 4).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ διαιρέτης καλεῖται ***κοινὸς παράγων*** τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου, ἡ πρᾶξις δὲ μὲ τὴν ὁποίαν ὁ διαιρετέος ἐγράφη ὑπὸ μορφὴν γινομένου τοῦ κοινοῦ παράγοντος καὶ τοῦ πηλίκου, καλεῖται ***ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος***.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ὁ κοινὸς παράγων τῶν ὅρων ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἓν μονώνυμον μὲ τὰς ἑξῆς ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν καὶ τὸ κριτήριον τῆς ὑπάρξεως καὶ προσδιορισμοῦ αὐτοῦ.

α) ***Ὁ συντελεστὴς του διαιρεῖ ἀκριβῶς τοὺς συντελεστὰς ὅλων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου.***

β) ***Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως κάθε ὅρου τοῦ πολυωνύμου δι' αὐτοῦ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον.***

Παραδείγματα:

1ον. Διὰ τὸ πολυώνυμον $27x^5 - 18x^3 + 9x^2$, συμφώνως πρὸς τ' ἀνωτέρω ὑπάρχει κοινὸς παράγων καὶ εἶναι ὁ $9x^2$.

Ἂν τώρα δέ, διαιρέσωμεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον δι' αὐτοῦ, θὰ προκύψῃ πηλίκον τὸ $3x^3 - 2x + 1$ καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$27x^5 - 18x^3 + 9x^2 = 9x^2(3x^3 - 2x + 1).$$

2ον. Διὰ τὸ πολυώνυμον $-4x^3 + 8x^2 - 20x + 4$ κοινὸς παράγων εἶναι τὸ μονώνυμον μηδενικοῦ βαθμοῦ 4.

Ἄρα: $\quad -4x^3 + 8x^2 - 20x + 4 = 4(-x^3 + 2x^2 - 5x + 1)$.

3ον. Διὰ τὸ πολυώνυμον $5x^2 - 7x + 13$ δὲν ὑπάρχει κοινὸς παράγων μὲ τὴν ἀνωτέρω ἔννοιαν παρὰ μόνον τὸ μονώνυμον «1».

3.2.4 Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμων.

Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τότε ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ γινόμενον $\varphi(x) \cdot f(x)$ δύο πολυωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$, εἶναι ἓν πολυώνυμον ποὺ θὰ προκύψῃ ἂν πολλαπλασιάσωμεν κάθε ὅρον τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν μὲ κάθε ὅρον τοῦ ἄλλου, καὶ προσθέσωμεν τὰ μερικὰ γινόμενα.

Παράδειγμα :

$$(3x^3-5x^2)\cdot(x^2-x)=3x^3\cdot x^2+(-5x^2)\cdot x^2+(3x^3)\cdot(-x)+$$
$$+(-5x^2)\cdot(-x)=3x^5-5x^4-3x^4+5x^3=3x^5-8x^4+5x^3.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον εἶναι δυσχερὴς ἰδίως ὅταν τὰ πολυώνυμα περιλαμβάνουν πολλοὺς ὅρους.

Πρὸς εὐκολίαν λοιπὸν χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἑξῆς μέθοδον: Τοποθετοῦμεν τὸ ἓν πολυώνυμον, (συνήθως ἐκεῖνο ποὺ ἔχει ὀλιγωτέρους ὅρους) κάτωθεν τοῦ ἄλλου. Ἐν συνεχείᾳ πολλαπλασιάζομεν τὸν πρῶτον ὅρον τούτου μὲ κάθε ὅρον τοῦ ἄνωθεν αὐτοῦ εὑρισκομένου πολυωνύμου, ὁπότε προκύπτει ἓν πολυώνυμον τὸ ὁποῖον καλεῖται ***μερικὸν γινόμενον.*** Ἐπαναλαμβάνομεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τοὺς ὑπολοίπους ὅρους τοῦ κάτω πολυωνύμου ἐνῷ φροντίζομεν νὰ τοποθετοῦμεν τὰ μερικὰ γινόμενα ποὺ προκύπτουν τὸ ἓν κάτωθεν τοῦ ἄλλου, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς στήλης. Τέλος προσθέτομεν καὶ ἔχομεν τὸ ζητούμενον ὁλικὸν γινόμενον.

Παράδειγμα :

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\varphi(x)\cdot f(x)$ ἔνθα $\varphi(x)=$ $=4x^3+5x^2+x-3$ καὶ $f(x)=3x^2-2x+1$. Γράφομεν αὐτὰ τὸ ἓν κάτωθεν τοῦ ἄλλου κ.λ.π.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
 & & 4x^3 & +5x^2 & +x & -3 & \\
 & & & 3x^2 & -2x & +1 & \\
\hline
12x^5 & +15x^4 & +3x^3 & -9x^2 & & & (=\text{μερικὸν γινόμενον μὲ } 3x^2) \\
 & -8x^4 & -10x^3 & -2x^2 & +6x & & (=\text{μερικὸν γινόμενον μὲ } -2x) \\
 & & 4x^3 & +5x^2 & +x & -3 & (=\text{μερικὸν γινόμενον μὲ } 1) \\
\hline
12x^5 & +7x^4 & -3x^3 & -6x^2 & +7x & -3 & (=\text{ὁλικὸν γινόμενον } \varphi(x)\cdot f(x)).
\end{array}$$

Παρατηρήσεις :

1η. Ὅταν ἔχωμεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν περισσότερα ἀπὸ δύο πολυώνυμα, εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν, ἐν συνεχείᾳ τὸ γινόμενον αὐτοῦ καὶ ἑνὸς ἄλλου ἀπὸ τὰ δοθέντα κ.ο.κ. μέχρι τέλους.

2α. Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν καθενὸς ἐκ τῶν παραγόντων.

3η. Ὁ συντελεστὴς τοῦ ὅρου, μὲ τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν εἰς τὸ γινόμενον, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῶν παραγόντων.

Ἀνάλογα ἰσχύουν καὶ διὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου μὲ τὸν μικρότερον βαθμόν.

3.2.5 Διαίρεσις δύο πολυωνύμων.

1. Ὁρισμοί.

Κατ' ἀρχὴν ὁρίζομεν ἓν πολυώνυμον $f(x)$ ὡς ***μηδενικὸν*** τότε καὶ μόνον τότε, ἂν οἱ ὅροι αὐτοῦ, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς, εἶναι μηδενικὰ μονώνυμα.

Δι' ἓν μηδενικὸν πολυώνυμον $f(x)$ θὰ γράφωμεν $f(x) = 0$.

Μετὰ ταῦτα, ἂν δοθοῦν δύο πολυώνυμα $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$, ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως $\Delta(x):\delta(x)$ μεταξὺ αὐτῶν ὁρίζεται τότε καὶ μόνον τότε ἂν τὸ $\delta(x)$ δὲν εἶναι μηδενικόν. Μὲ τὴν προϋπόθεσιν αὐτήν, κατὰ τὴν διαίρεσιν θὰ προσδιορίζωνται μονοσημάντως δύο νέα πολυώνυμα $\pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ τοιαῦτα ὥστε, διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :
$$\Delta(x) = \delta(x) \cdot \pi(x) + \upsilon(x).$$

Ἐκ τῶν πολυωνύμων αὐτῶν :

Τὸ $\Delta(x)$ ***θὰ καλῆται διαιρετέος, τὸ*** $\delta(x)$ ***διαιρέτης, τὸ*** $\pi(x)$ ***πηλίκον καὶ τὸ*** $\upsilon(x)$ ***ὑπόλοιπον***.

Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα καὶ τὴν παρατήρησιν ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν αὐτῶν, προκύπτει ὅτι ἂν ὁ διαιρέτης $\delta(x)$ ἔχῃ βαθμὸν μεγαλύτερον τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου $\Delta(x)$, τότε ὑποχρεωτικῶς διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς x θὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις : $\pi(x) = 0$ καὶ $\upsilon(x) = \Delta(x)$.

Ἡ περίπτωσις αὕτη δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐπὶ τοῦ παρόντος.

Κατωτέρω θὰ προσδιορίζωμεν πηλίκα καὶ ὑπόλοιπα διαιρέσεων διὰ τὰς ὁποίας ὁ διαιρέτης ἔχει βαθμὸν μικρότερον ἀπὸ τὸν διαιρετέον. Τὸ ὑπόλοιπον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως θὰ εἶναι ὁπωσδήποτε ἓν πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Εἰδικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τοῦτο εἶναι ἴσον πρὸς μηδὲν ἡ διαίρεσις θὰ καλῆται *τελεία*. Ἐνῷ διὰ τὸ $\Delta(x)$ θὰ λέγωμεν ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $\delta(x)$.

2. Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.

Διὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως δύο ὡς ἄνω πολυωνύμων ἀκολουθοῦμεν πορείαν πράξεων ἡ ὁποία γίνεται φανερὴ ἀπὸ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον παράδειγμα.

Δίδεται ἡ διαίρεσις $(6x^5+2x^4+16x^2+12x-8):(3x^3-5x^2-1)$. Ζητοῦνται τὸ πηλίκον $\pi(x)$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon(x)$ αὐτῆς. Κατ' ἀρχὴν συμπληρώνομεν τὸν διαιρετέον (μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ μηδενικοῦ μονωνύμου) ὥστε νὰ ἐμφανίζωνται εἰς αὐτὸν ὅλαι αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας πρὸς τὴν μικροτέραν καὶ διατάσσομεν τοῦτον ἀλλὰ καὶ τὸν διαιρέτην κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις.

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\Delta(x)=6x^5+2x^4+0x^3+16x^2+12x-8$$
$$\delta(x)=3x^3-5x^2-1.$$

Ἐν συνεχείᾳ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου $6x^5$ διὰ τοῦ πρώου ὅρου τοῦ διαιρέτου $3x^3$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ μονώνυμον $2x^2$. (Βλ. § 2.2.4). Τοῦτο θὰ εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζομεν τὸν ὅρον αὐτὸν μὲ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον $6x^5-10x^4-2x^2$, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον ὡς κάτωθι:

$$\begin{array}{r}
6x^5+\ 2x^4+0x^3+16x^2+12x-8\\
-6x^5+10x^4\qquad\quad+\ 2x^2\qquad\qquad\\
\hline
12x^4+0x^3+18x^2+12x-8
\end{array}$$

Τὸ νέον τοῦτο πολυώνυμον ποὺ εὑρίσκομεν καλεῖται πρῶτον μερικὸν ὑπόλοιπον (1ον μ.υ.).

Ἡ πρᾶξις συνεχίζεται μὲ τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ 1ου μ.υ. $12x^4$ διὰ τοῦ πρώτου ὅρου (πάντοτε) τοῦ διαιρέτου $3x^3$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ μονώνυμον $4x$ (2ος ὅρος τοῦ πηλίκου). Πολλαπλασιάζομεν αὐτὸ μὲ τὸν διαιρέτην καὶ εὑρίσκομεν τὸ πολυώνυμον $12x^4-20x^3-4x$ τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ 1ον μ.υ. ὡς κάτωθι καὶ εὑρίσκομεν τοιουτοτρόπως τὸ 2ον μ.υ.

$$
\begin{array}{lr}
 & 12x^4+0x^3+18x^2+12x-8 \\
 & -12x^4+20x^3\qquad\quad +4x \\
\hline
2ον\ μ.υ. = & 20x^3+18x^2+16x-8
\end{array}
$$

Ἡ πρᾶξις θὰ συνεχίζεται κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον μέχρις ὅτου εὕρωμεν μερικὸν ὑπόλοιπον μὲ βαθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου. Τοῦτο θὰ εἶναι καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, ἐνῷ τὸ πηλίκον θὰ εἶναι ἓν πολυώνυμον τὸ ὁποῖον θὰ ἔχῃ ὡς ὅρους τὰ μονώνυμα τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται διαδοχικῶς ἀπὸ τὴν διαίρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου καὶ τῶν μερικῶν ὑπολοίπων διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Ἡ ὅλη διάταξις τῶν πράξεων φαίνεται κατωτέρω.

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 6x^5+2x^4+0x^3+16x^2+12x-8 & 3x^3-5x^2-1 \\
\cline{3-3}
 & -6x^5+10x^4\qquad\qquad +2x^2 & \pi(x)=2x^2+4x+\frac{20}{3} \\
\cline{2-2}
1ον\ μ.υ. = & 12x^4+0x^3+18x^2+12x-8 & \\
 & -12x^4+20x^3\qquad\quad +4x & \\
\cline{2-2}
2ον\ μ.υ. = & 20x^3+18x^2+16x-8 & \\
 & -20x^3+\frac{100}{3}x^2\qquad +\frac{20}{3} & \\
\cline{2-2}
υ(x) = & \frac{154}{3}x^2+16x-\frac{4}{3} &
\end{array}
$$

Διὰ τὸ παράδειγμα λοιπὸν αὐτὸ εἶναι :

$$\text{πηλίκον } \pi(x) = 2x^2+4x+\frac{20}{3} \text{ καὶ}$$

$$\text{ὑπόλοιπον } υ(x) = \frac{154}{3}x^2+16x-\frac{4}{3}.$$

Διὰ τὸν ἔλεγχον τῆς πράξεως θὰ ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας ὅτι, ἂν εἰς τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον προσθέτωμεν τὸ ὑπόλοιπον θὰ πρέπῃ νὰ εὑρίσκωμεν τὸν διαιρετέον.

Πράγματι, διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔχομεν : $\delta(x)\cdot\pi(x)+υ(x)=$

$$=(3x^3-5x^2-1)\cdot(2x^2+4x+\frac{20}{3})+\frac{154}{3}x^2+16x-\frac{4}{3}=6x^5-10x^4-$$

$$-2x^2+12x^4-20x^3-4x+20x^3-\frac{100}{3}x^2-\frac{20}{3}+\frac{154}{3}x^2+16x-\frac{4}{3}=$$

$$=6x^5+2x^4+16x^2+12x-8=\Delta(x).$$

Παράδειγμα:

Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $(6x^3-x^2-13x+3):(2x+3)$.

Γράφομεν τὰ πολυώνυμα ὡς ἀνωτέρω καὶ ἔχομεν:

$$\begin{array}{rrl|l}
 & 6x^3- & x^2-13x+3 & 2x+3 \\
 & -6x^3- & 9x^2 & \pi(x)=3x^2-5x+1 \\ \cline{2-3}
1\text{ον } \mu.\upsilon.= & & -10x^2-13x+3 & \\
 & & +10x^2+15x & \\ \cline{2-3}
2\text{ον } \mu.\upsilon.= & & 2x+3 & \\
 & & -2x-3 & \\ \cline{2-3}
 & \upsilon(x)= & 0 &
\end{array}$$

Τῆς διαιρέσεως αὐτῆς τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον πρὸς μηδὲν ἄρα εἶναι διαίρεσις τελεία. Διὰ τὸν ἔλεγχον ἔχομεν:
$\delta(x)\cdot\pi(x)+\upsilon(x)=(2x+3)\cdot(3x^2-5x+1)+0=6x^3-10x^2+2x+$
$+9x^2-15x+3=6x^3-x^2-13x+3=\Delta(x)$.

Διαίρεσις μὲ $\alpha x+\beta$.

Ὅταν ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι πολυώνυμον τῆς μορφῆς $\delta(x)=\alpha x+\beta$ μὲ $\alpha\neq 0$ (διώνυμον 1ου βαθμοῦ) τότε δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως.

Πράγματι παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρέτης εἶναι πρώτου βαθμοῦ ἄρα τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ, δηλ. σταθερὸς ἀριθμὸς (ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς).

Ἑπομένως ἡ ἰσότης τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διὰ κάθε τιμὴν τῆς μεταβλητῆς θὰ ἔχῃ τὴν μορφήν:

$$\Delta(x)=(\alpha x+\beta)\pi(x)+\upsilon.$$

Ἡ ἰσότης αὐτη διὰ τὴν τιμὴν τῆς μεταβλητῆς $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$, ποὺ μηδενίζει τὸν διαιρέτην $\left(\text{ἐκ τῆς ἐξισώσεως } \alpha x+\beta=0 \Rightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)$

γίνεται $$\Delta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0\cdot\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon$$

ἐξ αὐτῆς δὲ ἕπεται $$\upsilon=\Delta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$ δηλαδή:

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνὸς πολυωνύμου διὰ διωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$, ***ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὴν τιμὴν ποὺ λαμβάνει αὐτό, ὅταν ἡ μεταβλητὴ λάβῃ τὴν τιμὴν*** $x=-\frac{\beta}{\alpha}$ ***ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην.***

Παραδείγματα :

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\Delta(x)=7x^4-2x^3+5x^2-3x+1$ διὰ τοῦ $2x-4$.

Θέτομεν $2x-4=0 \Rightarrow x=2$. Ἄρα $\upsilon=\Delta(2)=7\cdot2^4-2\cdot2^3+5\cdot2^2-3\cdot2+1=7\cdot16-2\cdot8+5\cdot4-3\cdot2+1=112-16+20-6+1=111$.

2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$$\Delta(x)=x^3-x^2+x+1 \quad \text{διὰ τοῦ } x+\frac{1}{3}.$$

Θέτομεν $x+\frac{1}{3}=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$. Ἄρα $\upsilon=\Delta\left(-\frac{1}{3}\right)=$

$$=\left(-\frac{1}{3}\right)^3-\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)+1=\left(-\frac{1}{27}\right)-\left(+\frac{1}{9}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)+1=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1=-\frac{1}{27}-\frac{3}{27}-\frac{9}{27}+\frac{27}{27}=\frac{14}{27}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ $\Delta(x)$ θὰ εἶναι ***διαιρετὸν*** διὰ τοῦ $\alpha x+\beta$ τότε καὶ μόνον τότε ἄν :

$$\upsilon=\Delta\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδονται τὰ πολυώνυμα $f(x)=3x-4x^3+5x-2x^2+9x^3-12x+7$, $q(x)=2-5x^2+2x-7x^2-6x+12$, $h(x)=\frac{2}{3}x^5-\frac{1}{7}x+\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}x^4-x^2+x^3$.

Ζητεῖται : α) Νὰ τεθοῦν ὑπὸ συνεπτυγμένην μορφήν.

β) Νὰ εὑρεθῇ ὁ βαθμὸς ἑκάστου.

γ) Νὰ διαταχθοῦν κατὰ τὰς κατιούσας καὶ ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς.

2. Ἂν τὰ πολυώνυμα f(x) καὶ q(x) εἶναι νυοστοῦ βαθμοῦ, νὰ δικαιολογηθῇ διατὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ αὐτῶν θὰ εἶναι πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου ἢ ἴσου τοῦ ν.

3. Δύο πολυώνυμα μὲ ἀκεραίους ὅρους (ἀκέραια πολυώνυμα) θὰ χαρακτηρίζωνται ὡς ἴσα τότε καὶ μόνον τότε ἂν εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ καὶ οἱ ὁμοιοβάθμιοι ὅροι των ἔχουν ἴσους συντελεστάς.

Μετὰ ταῦτα νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ λ τὰ πολυώνυμα $x^3+5x^2-(5\lambda+1)x+3$ καὶ x^3+5x^2-4x+3 εἶναι ἴσα.

4. Δίδονται τὰ πολυώνυμα $\varphi(x)=5x^3-3x^2+2x-1$, $f(x)=$ $=4x^2-3x+2$ καὶ $q(x)=2x+3$. Νὰ δειχθῇ ὅτι :

α. $\varphi(x)+f(x)=f(x)+\varphi(x)$ (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης).

β. $[\varphi(x)+f(x)]+q(x)=\varphi(x)+[f(x)+q(x)]$ (προσεταιριστικὴ ἰδιότης).

γ. $[\varphi(x)-f(x)]-q(x)=\varphi(x)-[f(x)+q(x)]$.

δ. $[f(x)-q(x)]+\varphi(x)=f(x)-[q(x)-\varphi(x)]$.

ε. $[q(x)+\varphi(x)]-f(x)=q(x)+[\varphi(x)-f(x)]$.

5. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$f(x)=3x^4-2\alpha x^3+5\beta x^2-4\gamma x+2\delta$$
$$q(x)=5x^4+7\alpha x^3-8\beta x^2-5\gamma x-3\delta$$
$$k(x)=10x^4-2\alpha x^3-11\beta x^2+9\gamma x-7\delta$$

Νὰ εὑρεθοῦν τά :

α. $f(x)+q(x)-k(x)$, β. $f(x)-q(x)+k(x)$

γ. $-f(x)+q(x)+k(x)$, δ. $-f(x)-q(x)-k(x)$.

6. Εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα νὰ τεθοῦν οἱ ὅροι ἐκτὸς παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν καὶ νὰ γίνῃ σύμπτυξις αὐτῶν.

α. $2-[3x^3+1-(2x^2-x-7)-(x+5x^3)]$

β. $x^2-[\alpha x-(3\alpha+\beta)-(3\beta+2x^2)-1]$

γ. $(5x^2-3\alpha x+\beta)-[4x^2-5\alpha x-(3x^2-7\alpha x+5\beta)]-7x^2$

δ. $3x-[[3x^2-(-4x^3+7)]-[x^3-(4x^2-4x)-2]]$

ε. $11x^4-[-2-[5x^3-(2x^2+x-1)]]-[7x^3+2x^2-(3x-1)]$

7. Εἰς τὰ πολυώνυμα $5x^3-6x^2-2x+1$, $4x^3+5x^2+x-3$ νὰ τεθοῦν οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι ἐντὸς παρενθέσεως πρὸ τῆς ὁποίας νὰ ὑπάρχῃ α. σημεῖον «+», β. σημεῖον «—».

8. Ἂν $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$, $q(x) = 2x^2 - x + 3$ καὶ $h(x) =$ $= 3x + 2$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α. $f x) \cdot q(x) = q(x) \cdot f(x)$ (ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης)

β. $[f(x) \cdot q(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot [q(x) \cdot h(x)]$ (προσεταιριστικὴ ἰδιότης)

γ. $[f(x) \pm q(x)] \cdot h(x) = f(x) \cdot h(x) \pm q(x) \cdot h(x)$ (ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης)

9. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $q(x) = x - 1$.

Νὰ εὑρεθοῦν τά :

α. $h_1(x) = \varphi(x) \cdot f(x) \cdot q(x)$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ $h_1(1)$.

β. $h_2(x) = 5\varphi(x) \cdot f(x) + 7f(x) \cdot q(x) - f(x) - q(x)$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ $h_2(-2)$.

γ. $h_3(x) = [f(x) - q(x)]\,\varphi(x) + [q(x) - \varphi(x)]f(x) + [\varphi(x) - f(x)]q(x)$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ $h_3(-1)$.

10. Ἂν $f(x) = 3x^5 + 7x^2 - 3x + 2$, $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 + x$ καὶ $q(x) = 7x + 6$, νὰ εὑρεθῇ τὸ πολυώνυμον $h(x)$ ἀπὸ τὴν σχέσιν :

$$[f(x) - q(x)]\varphi(x) = \varphi(x) + h(x)$$

11. Ἂν $f(x) = 16x^4 - 8x^3 + 1$ καὶ $q(x) = 4x^2 - 4x + 1$, νὰ εὑρεθῇ τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)$ ἀπὸ τὴν σχέσιν $q(x)\varphi(x) = f(x)$.

12. Μιᾶς διαιρέσεως ὁ διαιρέτης εἶναι $\delta(x) = 3x^2 + 5x$, τὸ πηλίκον $\pi(x) = 4x^2 - 2x + 1$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon(x) = x$.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ διαιρετέος $\Delta(x)$ χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις.

13. Μιᾶς διαιρέσεως ὁ διαιρετέος εἶναι $\Delta(x) = x^4 + 5x^2 + 3$, ὁ διαιρέτης $\delta(x) = 2x^2 + 1$ καὶ τὸ πηλίκον $\pi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^2 + \dfrac{9}{2}\right)$.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον χωρὶς νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις.

14. Μιᾶς διαιρέσεως ὁ διαιρετέος εἶναι $\Delta(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2 +$ $+ 7x - 1$, καὶ ὁ διαιρέτης $\delta(x) = x^2 - x + 1$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον καὶ τὸ πηλίκον.

15. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιαιρέσεις :

α. $(12x^3 + 7x^2 - 4x + 4) : (4x + 5)$.

β. $\left(4x^5 - 2x^4 - \dfrac{3}{4}x^3 + 6x^2 + \dfrac{3}{2}x\right) : \left(6x^2 + \dfrac{3}{2}x\right)$.

γ. $(32x^5 - 1) : (16x^4 + 8x^3 + 4x^2 + 2x + 1)$.

δ. $(x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1) : (x^2 + x + 1)$.

ε. $[x^2 + 5x - 3)(x^2 - x + 3)] : [(x - 2)(x + 1)]$.

16. Εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα νὰ γίνῃ ἐξαγωγὴ τοῦ κοινοῦ παράγοντος.

α. $(\alpha+\beta)x^2-(\alpha+\beta)x$ β. $25x^4+5x^3-10x^2$
γ. $2x^8-4x^7+3x^5-x^4$ δ. $-3x^5+12x^4-6x^3-9x^2$
ε. $5x^7-20x^6+10x^5-5x^4+15x^3$, στ. $\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x$
ζ. $\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4$, η. $2\alpha+4\alpha x^2+6\alpha x^3-8\alpha x^4$
ϑ. $\alpha(x-1)-\beta(x-1)$, ι. $2x^2+(2\alpha-1)x-\alpha$.

17. Τῶν κάτωθι διαιρέσεων νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα χωρὶς νὰ γίνῃ ἐκτέλεσις τῆς πράξεως :

α. $(5x^3-2x^2+7x-1):(3x+4)$
β. $(-7x^4+5x^2-2x+3):(4x-1)$
γ. $(9x^3-5x^2+7x-2):x$
δ. $(x^3-3x^2+3x-1):(x-1)$
ε. $(x^4+4x^3+6x^2+4x+1):(x+1)$.

18. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

α. Τὸ $14x^4+21x^3+10x^2+29x+21$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $2x+3$.

β. Τὸ $2x^3-13x^2+23x-12$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x-4$.

γ. Τὸ x^6-1 εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ $x+1$.

19. Εἰς τὸ πολυώνυμον $x^3+\alpha x^2-2x+1$ νὰ προσδιορισθῇ ὁ συντελεστὴς α διὰ νὰ εἶναι τοῦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ $2x-1$.

20. Εἰς τὸ πολυώνυμον $\alpha^3x^3+\frac{2\alpha^3}{\beta^2}x^2+\frac{\alpha}{\beta}x+\beta^3$, $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, νὰ προσδιορισθῇ τὸ α ὥστε νὰ εἶναι τοῦτο διαιρετὸν διὰ τοῦ $\alpha x+\beta$ ἀνεξαρτήτως τῆς τιμῆς τοῦ β.

4. Μετασχηματισμός μερικῶν πολυωνύμων $2^{ου}$ βαθμοῦ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Γενικῶς πολυώνυμον ἐκαλέσαμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων μονωνύμων καὶ τὰ ὁποῖα ἐχαρακτηρίσαμεν ὡς ὅρους αὐτοῦ. Εἰδικῶς εἰς τὴν περίπτωσιν ὅπου τὸ πολυώνυμον ἔχει δύο ὅρους θὰ καλῆται τοῦτο ***διώνυμον***, ἐνῷ ἂν ἔχῃ τρεῖς ὅρους ***τριώνυμον***.

Τὰ διώνυμα καὶ τριώνυμα $2^{ου}$ βαθμοῦ ἂν πληροῦν ὡρισμένας προϋποθέσεις δύνανται νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων διωνύμων ***(παραγόντων).***

Ἡ ἀνάλυσις αὕτη καλεῖται μετασχηματισμὸς τοῦ πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

4.1 Μετασχηματισμὸς τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμοῦ εἰς τετράγωνον πρωτοβαθμίου διωνύμου.

Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς διωνύμου $1^{ου}$ βαθμοῦ εἶναι $\alpha x+\beta$ ἢ $\alpha x-\beta$, ἔνθα α καὶ β σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός.

Ἂς λάβωμεν τὸ τετράγωνον τοῦ $\alpha x+\beta$ δηλ. τὴν συνάρτησιν $(\alpha x+\beta)^2$. Τότε συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων θὰ ἔχωμεν:

$$(\alpha x+\beta)^2=(\alpha x+\beta)(\alpha x+\beta)$$

ἢ

$$(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+\alpha\beta x+\alpha\beta x+\beta^2$$

ὁπότε τελικῶς

$$(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2 \qquad (1)$$

Ἀναλόγως προκύπτει καὶ ἡ:

$$(\alpha x-\beta)^2=\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2 \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι: ***Ἂν δοθῇ ἓν τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha^2x^2\pm2\alpha\beta x+\beta^2$ τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς τετράγωνον ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου τῆς μορφῆς $(\alpha x\pm\beta)^2$ ἀναλόγως ἂν πρὸ τοῦ ὅρου $2\alpha\beta x$ ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον «+» ἢ «—».***

Παραδείγματα:

1. Ἔστω τὸ τριώνυμον $9x^2+30x+25$ διὰ τὸ ὁποῖον ζητεῖται νὰ

γραφῇ ὑπὸ μορφὴν τετραγώνου ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου.

Τοῦτο γράφεται ὡς ἑξῆς : $(3x)^2+2\cdot3x\cdot5+5^2$.

Ἄρα ὑφίσταται τὸν μετασχηματισμὸν

$$9x^2+30x+25=(3x+5)^2$$

Ὁμοίως ἔχομεν :

2. $25x^2-40x+16=(5x)^2-2.5x\cdot4+4^2=(5x-4)^2$

3. $x^2+\frac{4x}{3}+\frac{4}{9}=x^2+2\cdot x\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2$

4. $x^2-x+\frac{1}{4}=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

4.2 Μετασχηματισμὸς διωνύμου 2ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\alpha^2x^2-\beta^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ γινόμενον $(\alpha x+\beta)(\alpha x-\beta)$ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων γίνεται ἴσον πρὸς $\alpha^2x^2-\beta^2$. Δηλ.

$$\alpha^2x^2-\beta^2=(\alpha x+\beta)(\alpha x-\beta).$$

Ἄρα ἂν ἓν διώνυμον εἶναι διαφορὰ τῶν τετραγώνων ἑνὸς μονωνύμου πρώτου βαθμοῦ καὶ ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ, τότε μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον δύο διωνύμων πρώτου βαθμοῦ, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι τὸ ἄθροισμα τοῦ μονωνύμου καὶ τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ ἐνῷ τὸ ἄλλο ἡ διαφορὰ αὐτῶν.

Παραδείγματα :

Διὰ τὰ διώνυμα $36x^2-49$, x^2-1, $x^2-\frac{1}{16}$, $3x^2-7$

πληροῦνται αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι, καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν :

1. $36x^2-49=(6x)^2-7^2=(6x+7)(6x-7)$
2. $x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$
3. $x^2-\frac{1}{16}=x^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$
4. $3x^2-7=(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{7})^2=(\sqrt{3}x+\sqrt{7})(\sqrt{3}x-7)$

Εἰς τὴν αὐτὴν περίπτωσιν ὑπάγεται καὶ τὸ τριώνυμον τῆς μορφῆς. $(\alpha x \pm \beta)^2 - \gamma^2 = \alpha^2 x^2 \pm 2\alpha\beta x + \beta^2 - \gamma^2$.

Μὲ τὰς αὐτὸς ὡς ἄνω σκέψεις εὑρίσκομεν ὅτι τοῦτο δύναται νὰ μετασχηματισθῇ ὡς ἑξῆς :

$$(\alpha x \pm \beta)^2 - \gamma^2 = [(\alpha x \pm \beta) + \gamma]\,[(\alpha x \pm \beta) - \gamma] = (\alpha x \pm \beta + \gamma)(\alpha x \pm \beta - \gamma)$$

Παραδείγματα :

1. $(x-5)^2 - 3^2 = (x-5+3)(x-5-3) = (x-2)(x-8)$
2. $(2x+1)^2 - 16 = (2x+1)^2 - 4^2 = (2x+1+4)(2x+1-4) = (2x+5)\cdot$ $\cdot(2x-3)$
3. $9x^2 + 12x - 12 = (3x)^2 + 2.3x.2 + 4 - 16 = (3x)^2 + 2.3x.2 + 2^2 -$ $-4^2 = (3x+2)^2 - 4^2 = (3x+2+4)(3x+2-4) = (3x+6)(3x-2)$
4. $4x^2 - 4x - 8 = 4x^2 - 4x + 1 - 9 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 - 3^2 = (2x-$ $-1)^2 - 3^2 = (2x-1+3)(2x-1-3) = (2x+2)(2x-4)$.

4.3 Τριώνυμον 2ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς $\mathbf{x^2+px+q}$.

Διὰ κάθε τριώνυμον τῆς μορφῆς αὐτῆς παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει :

$$x^2+px+q = x^2 + 2\,\frac{p}{2}\,x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$$

$$\text{ἢ}\quad x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2-4q}{4}$$

Μετὰ ταῦτα διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

i) ***Ἔστω*** $\mathbf{p^2-4q>0}$. Τότε ὑπάρχει ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\dfrac{p^2-4q}{4}$ Δηλ. ὑπάρχει ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς k τοιοῦτος ὥστε :

$$k^2 = \frac{p^2-4q}{4} \quad \left(k = \frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

Ἑπομένως διὰ τὸ δοθὲν τριώνυμον θὰ ἔχωμεν $x^2+px+q =$ $= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 - k^2$ καὶ ἄρα συμφώνως πρὸς τὴν § 4.2 θὰ ἔχωμεν τὴν ἀνάλυσιν.

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}+k\right)\left(x+\frac{p}{2}-k\right)$$

Παραδείγματα :

1. Διὰ τὸ τριώνυμον $x^2-7x+12$ ἔχομεν $p=-7, q=12$.

Ἄρα $x^2-7x+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{(-7)^2-4\cdot 12}{4}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-$
$-\frac{49-48}{4}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\left(x-\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot$
$\cdot\left(x-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{6}{2}\right)\left(x-\frac{8}{2}\right)=(x-3)(x-4)$

2. Ὁμοίως $x^2+6x+8=\left(x+\frac{6}{2}\right)^2-\frac{6^2-4\cdot 8}{4}=(x+3)^2-1^2=$
$=(x+3+1)(x+3-1)=(x+4)(x+2)$

3. Ὁμοίως $x^2+4x-2=\left(x+\frac{4}{2}\right)^2-\frac{4^2-4\cdot(-2)}{4}=(x+2)^2-$
$-6=(x+2)^2-(\sqrt{6})^2=(x+2+\sqrt{6})(x+2-\sqrt{6})$.

ii) *Ἔστω ὅτι* $p^2-4q<0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\frac{p^2-4q}{4}$ (οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν τετραγωνικὴν ρίζαν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν).

Ἑπομένως τὸ τριώνυμον δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων διωνύμων ὄχι μόνον κατὰ τὸν ἀνωτέρω, ἀλλ' οὔτε καθ' οἱονδήποτε ἄλλον τρόπον.

Παρατηροῦμεν μόνον ὅτι τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἄθροισμα τετραγώνου ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου καὶ ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ.

Πράγματι ἔχομεν

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}$$

καὶ ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς $\frac{p^2-4q}{4}$ εἶναι ἀρνητικὸς ἕπεται ὅτι ὁ $\frac{4q-p^2}{4}=-\frac{p^2-4q}{4}$ θὰ εἶναι θετικὸς ἄρα ὑπάρχει $s\in\Pi$ μὲ

$$s^2=\frac{4q-p^2}{4}\quad\left(s=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}\right)$$

καὶ συνεπῶς $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+s^2$.

Παράδειγμα:

Διὰ τὸ τριώνυμον x^2+4x+6 ἔχομεν $p=4$, $q=6$ ἄρα

$\frac{p^2-4q}{4}=\frac{16-4\cdot 6}{4}=\frac{16-24}{4}=-\frac{8}{4}=-2<0$. Ἄρα τοῦτο δὲν ὑφίσταται ἀνάλυσιν, γράφεται ὅμως ὡς κάτωθι :

$$x^2+4x+6=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=(x+2)^2+2=(x+2)^2+(\sqrt{2})^2$$

Γράφεται δηλ. ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

iii) *Τέλος ἂν* $p^2-4q=0$, $(p^2=4q)$ τότε τὸ τριώνυμον ἔχει τὴν ἤδη γνωστήν μας ἀνάλυσιν

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$$

4.4 Τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ μὲ $\alpha,\beta,\gamma\neq 0$ καὶ $\alpha\neq 1$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διὰ τὸ τριώνυμον ἰσχύει

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)$$

δηλ. τίθεται ὑπὸ μορφὴν γινομένου τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ α καὶ ἑνὸς τριωνύμου τῆς μορφῆς x^2+px+q $\left(p=\frac{\beta}{\alpha}, q=\frac{\gamma}{\alpha}\right)$.

$$\text{Ἄρα } \alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left\{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}{4}\right\}=$$

$$=\alpha\left\{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right\}$$

Συνεπῶς :

i) *Ἂν* $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ τότε ὑπάρχει $k\in\Pi$ μὲ

$k^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ $\left(k=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)$ ὁπότε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left\{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-k^2\right\}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+k\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-k\right).$$

Παράδειγμα :

Διὰ τὸ τριώνυμον $3x^2-9x+6$ ἔχομεν $\alpha=3$, $\beta=-9$, $\gamma=6$

ἄρα $\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\dfrac{(-9)^2-4\cdot3\cdot6}{4\cdot3^2}=\dfrac{81-72}{36}=\dfrac{9}{36}>0$

Ἑπομένως :

$$3x^2-9x+6=3\left\{\left(x-\frac{9}{2\cdot3}\right)^2-\frac{9}{36}\right\}=$$
$$=3\left\{\left(x-\frac{9}{6}\right)^2-\left(\frac{3}{6}\right)^2\right\}=$$
$$=3\left(x-\frac{9}{6}+\frac{3}{6}\right)\left(x-\frac{9}{6}-\frac{3}{6}\right)=$$
$$=3\left(x-\frac{6}{6}\right)\left(x-\frac{12}{6}\right)=$$
$$=3(x-1)(x-2)=$$
$$=(3x-3)(x-2)=$$
$$=(x-1)(3x-6)$$

ii) *Ἂν* $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$ τότε τὸ τριώνυμον δὲν ὑφίσταται ἀνάλυσιν ἀλλὰ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\alpha\left\{\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2+s^2\right\}$

ἔνθα $s=\dfrac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}$

Παράδειγμα :

Διὰ τὸ τριώνυμον $2x^2+6x+5$ ἔχομεν $\alpha=2$, $\beta=6$, $\gamma=5$,

ἄρα $\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\dfrac{6^2-4\cdot2\cdot5}{4\cdot2^2}=\dfrac{36-40}{16}=-\dfrac{4}{16}=-\dfrac{1}{4}<0.$

Ἑπομένως τοῦτο δὲν ὑφίσταται ἀνάλυσιν εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων. Ἰσχύει ὅμως

$$2x^2+6x+5=2\left\{\left(x+\frac{6}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}=$$
$$=2\left\{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

iii) *Ἂν* $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$ $(\beta^2=4\alpha\gamma)$ τότε

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

Παράδειγμα :

Διὰ τὸ τριώνυμον $5x^2-20x+20$ ἔχομεν $\alpha=5$, $\beta=-20$, $\gamma=20$, ἄρα $\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{(-20)^2-4\cdot5\cdot20}{4\cdot5^2}=\frac{400-400}{100}=0$.

Ἑπομένως θὰ ἔχομεν

$$5x^2-20x+20=5\left(x-\frac{20}{2\cdot5}\right)^2=5(x-2)^2.$$

4.5 Διώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x$ μὲ $\alpha, \beta\neq0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν παρατηροῦμεν ὅτι τὸ μονώνυμον x εἶναι κοινὸς παράγων τῶν ὅρων ὁπότε θὰ ἔχωμεν :

$$\alpha x^2+\beta x=x(\alpha x+\beta).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ κάτωθι τριώνυμα :

α) $25x^2+20x+4$ β) $16x^4-24x+9$
γ) $9x^2-6x+1$ δ) $4x^2+16x+16$
ε) $100x^2-100x+25$ στ) $x^2+34x+289$

2. Ὁμοίως τὰ διώνυμα :

α) $25x^2-16$ β) $81x^2-49$ γ) $36x^2-9$
δ) $3x^2-1$ ε) $7x^2-18$ στ) $2x^2-5$
ζ) $(2x+3)^2-81$ η) $(5x-2)^2-225$ ι) $(7x+4)^2-(3x+5)^2$

3. Τὰ κάτωθι τριώνυμα νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων ἢ νὰ τεθοῦν ὑπὸ μορφὴν ἀθροίσματος δύο τετραγώνων ἀναλόγως τῶν περιπτώσεων :

α) $x^2+12x+3$ β) $x^2-8x+15$ γ) x^2+4x+5
δ) $x^2-5x+10$ ε) x^2+7x+9 στ) x^2-3x+4

4. Ὁμοίως διὰ τὰ κάτωθι τριώνυμα :

α) $2x^2-8x+3$ β) $5x^2+7x+2$ γ) $3x^2-x+7$
δ) $5x^2-3x+45$ ε) $4x^2-3x+4$ στ) $7x^2-9x+1$

5. Ὁμοίως διὰ τὰ κάτωθι διώνυμα :

α) $8x^2+5x$ β) $4x^2-7x$ γ) $6x^2-x$

δ) $3x^2+2x$ ε) $5x^2+11x$ στ) $9x^2-3x$

6) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

α) $9x^2-30x+25-(2x+5)(2x-5)$ β) $2x^3-x-x$

γ) $3x^3-27x$ δ) $x^2+4\alpha x-21\alpha^2$

7. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ λ ὥστε τὸ τριώνυμον $x^2+(2\lambda+1)x+\lambda^2$ νὰ εἶναι τετράγωνον ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου.

8. Δίδεται τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$. Ἂν μεταξὺ τῶν συντελεστῶν α,β καὶ γ ἰσχύουν αἱ σχέσεις $\alpha>0$, $\beta=2\alpha$ καὶ $\gamma-\frac{\beta}{2}=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον τοῦτο δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ μορφὴν τετραγώνου ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου.

9. Ἂν $2\alpha+5=11$, $3\beta+4=-5$ καὶ $\gamma+\beta=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ τίθεται ὡς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

10. Τοῦ τριωνύμου x^2+px+q νὰ προσδιορισθοῦν τὰ p καὶ q οὕτως ὥστε τοῦτο νὰ ὑφίσταται τὴν ἀνάλυσιν $x^2+px+q=(x-p_1)\cdot(x-p_2)$ ἔνθα p_1 καὶ p_2 δύο δοθέντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.

5. Πολυώνυμα μὲ δύο ἢ τρεῖς μεταβλητάς.

5.1 Μονώνυμα δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Θὰ καλοῦμεν μονώνυμον δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y κάθε συνάρτησιν τῆς μορφῆς

$$\varphi(x,y) = \alpha x^{\nu} y^{\mu}$$

ἔνθα α σταθερὸς πραγματικός, ἐνῷ ν καὶ μ ἀκέραιοι μὴ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.

Ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μονωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς ὁ σταθερὸς α καλεῖται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου, ὁ σταθερὸς ν βαθμὸς τοῦ μονωνύμου ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x, ἐνῷ ὁ μ βαθμὸς αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν y.

Βαθμὸς τοῦ μονωνύμου ὡς πρὸς τὰς μεταβλητὰς x ***καὶ*** y ὁρίζεται τὸ ἄθροισμα ν+μ τῶν βαθμῶν αὐτοῦ ὡς πρὸς κάθε μίαν τῶν μεταβλητῶν. Π.χ. τὸ $3x^2y^3$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Δύο ἢ περισσότερα τοιαῦτα μονώνυμα θὰ καλοῦνται ὅμοια τότε καὶ μόνον τότε, ἂν εἶναι τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν καὶ οἱ βαθμοί των ὡς πρὸς κάθε μίαν τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν εἶναι ἴσοι.

Π. χ. τὰ μονώνυμα $-\frac{2}{3}x^2y^3$ καὶ $5x^2y^3$ εἶναι δύο ὅμοια μονώνυμα.

Οἱ ὁρισμοὶ τῶν ἴσων, ἀντιθέτων, μηδενικῶν, καὶ μηδενικοῦ βαθμοῦ μονωνύμων δύο μεταβλητῶν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ὁρισμοὺς οἱ ὁποῖοι ἐδόθησαν εἰς τὴν § 2.1.1 καὶ 2.1.2 διὰ μονώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Παραδείγματα :

Τὸ μονώνυμον $5x^2y^6$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς y καὶ ὀγδόου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Τὰ $3x^3y^5$ καὶ $-3x^3y^5$ εἶναι ἀντίθετα μονώνυμα.

Τὸ $0x^5y^6$ εἶναι μηδενικὸν μονώνυμον.

Τὸ $5x^0y^3 = 5y^3$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἐνῷ τὸ $5x^0y^0 = 5$ εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Ἀναλόγως πρὸς τ' ἀνωτέρω θὰ ὁρίζωμεν ὡς μονώνυμον τριῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x, y, z κάθε συνάρτησιν τῆς μορφῆς $\alpha x^{\nu} y^{\mu} z^{\varrho}$, ἐνῷ ἡ συνάρτησις $\alpha x^{\nu} y^{\mu} z^{\varrho} \omega^{\kappa}$ θὰ εἶναι μονώνυμον τεσσάρων μεταβλητῶν κ.ο.κ.

5.2 Πολυώνυμα δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν.

Ὡς πολυώνυμον δύο μεταβλητῶν ὁρίζομεν τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων μονωνύμων τῶν αὐτῶν μεταβλητῶν.

Π.χ. τὸ $-5x^3y^2+3xy^3-\frac{1}{2}x+3$ εἶναι ἓν πολυώνυμον τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Διὰ τὰ πολυώνυμα αὐτὰ δίδονται ἀνάλογοι ὁρισμοὶ ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Οὕτω :

Ὅρος ἑνὸς πολυωνύμου δύο μεταβλητῶν καλεῖται ἕκαστον τῶν μονωνύμων αὐτοῦ.

Βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς μίαν τῶν μεταβλητῶν, καλεῖται ὁ βαθμὸς τοῦ ὅρου αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν αὐτήν.

Π. χ. τὸ $3xy^4-7x^2y+5x^5$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ τετάρτου ὡς πρὸς y.

Βαθμὸς τοῦ πολυωνύμου ὡς πρὸς ἀμφοτέρας τὰς μεταβλητάς, καλεῖται ὁ βαθμὸς τοῦ ὅρου αὐτοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν ὡς πρὸς τὰς αὐτὰς μεταβλητάς.

Π. χ. τὸ $5x^3y^2+5x^4-2xy^3$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y, ἐνῷ τὸ $4x^3y^2-7x^6+2x^3y$ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Τέλος ἐὰν ἡ μορφὴ ἑνὸς πολυωνύμου δὲν περιέχῃ ὁμοίους ὅρους θὰ καλῆται αὕτη συνεπτυγμένη.

Π. χ. τὸ πολυώνυμον $2x^3y-5x^4y^2+5x-2y$ ἔχει συνεπτυγμένην μορφήν, ἐνῷ τὸ $4x^3y^4-7x^2y+5x^2y-2x^3y^4$ ὄχι.

• Ἀναλόγως ὁρίζονται τὰ πολυώνυμα περισσοτέρων τῶν δύο μεταβλητῶν καὶ ἀνάλογοι εἶναι οἱ ὁρισμοὶ ποὺ δίδονται δι' αὐτά.

Π.χ. τὸ $\frac{2}{3}x^4y^2z-2xy^3z^2+5x^6yz^2-2x^3+z$ εἶναι ἓν πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν (τῶν x, y, z) συνεπτυγμένης μορφῆς.

Τοῦτο εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, τρίτου ὡς πρὸς y, δευτέρου ὡς πρὸς z καὶ ἐνάτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, y καὶ z.

Ἐπὶ τοῦ παρόντος θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ πολυώνυμα δύο ἢ καὶ περισσοτέρων μεταβλητῶν πρώτου βαθμοῦ, τῶν ὁποίων ἡ γενικὴ μορφὴ εἶναι

$$\varphi(x,y)= \alpha x+\beta y+\gamma$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ α, β, καὶ γ εἶναι ὁποιοιδήποτε σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοί, μὲ τὸν περιορισμὸν ὅτι ἐκ τῶν α καὶ β ὁ ἕνας τοὐλάχιστον εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός.
(Θὰ ἰσχύῃ δηλ. διὰ τοὺς α καὶ β ἡ σχέσις $|\alpha|+|\beta|>0$).

Ἀναλόγως ἡ μορφὴ ἑνὸς πολυωνύμου πρώτου βαθμοῦ τριῶν μεταβλητῶν x, y, z εἶναι

$$\varphi(x,y,z)= \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$$

μὲ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν α, β καὶ γ διάφορον τοῦ μηδενός.

(Δηλ. $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0$).

5.3 Πράξεις μὲ πολυώνυμα περισσοτέρων τῆς μιᾶς μεταβλητῶν.

Αἱ πράξεις μὲ πολυώνυμα δύο ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν ὁρίζονται κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ὡς καὶ διὰ τὰ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς (§ 3). Δὲν θὰ δώσωμεν συνεπῶς ἰδιαιτέρους ὁρισμούς, ἀλλὰ θ' ἀναφέρωμεν ὑπὸ μορφὴν παραδειγμάτων μόνον τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν πολυωνύμων πρώτου βαθμοῦ.

Παραδείγματα:

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων $\varphi(x,y)=2x-5y+1$, $f(x,y)=-4x+2y-2$, $\sigma(x,y)=x-y+3$.

Πρὸς τοῦτο γράφομεν τὰ πολυώνυμα ὡς κάτωθι καὶ προσθέτομεν κατὰ στήλας.

$$\begin{array}{rr} \varphi(x,y)= & 2x-5y+1 \\ f(x,y)= & -4x+2y-2 \\ \sigma(x,y)= & x-\ y+3 \\ \hline \varphi(x,y)+f(x,y)+\sigma(x,y)= & -x-4y+2 \end{array}$$

2. Ὁμοίως διὰ τὰ πολυώνυμα $f(x,y,z)=4x+2y-3z+5$, $g(x,y,z)=2x+5y-3$ καὶ $h(x,y,z)=5y-3z+7$ ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} f(x,y,z)=4x+2y\ -3z+5 \\ g(x,y,z)=2x+5y\ +0z-3 \\ h(x,y,z)=0x+5y\ -3z+7 \\ \hline f(x,y,z)+g(x,y,z)+h(x,y,z)=6x+12y-6z+9 \end{array}$$

3. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ $\varphi(x,y)-f(x,y)$ τῶν πολυωνύμων $\varphi(x,y)=3x-2y+1$ καὶ $f(x,y)=-x+3y-5$

Πρὸς τοῦτο ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} \varphi(x,y)=3x-2y+1 \\ -f(x,y)=x-3y+5 \\ \hline \varphi(x,y)-f(x,y)=4x-5y+6 \end{array}$$

4. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν $f(x,y,z)-g(x,y,z)$ τῶν $f(x,y,z)=5x-3y-2z-8$ καὶ $g(x,y,z)=5x+5y+2z-15$

Ἔχομεν :

$$\begin{array}{r} f(x,y,z)=\ 5x-3y-2z-8 \\ -g(x,y,z)=-5x-5y-2z+15 \\ \hline f(x,y,z)-g(x,y,z)=\ 0x-8y-4z+7 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Τὰ κάτωθι πολυώνυμα νὰ τεθοῦν ὑπὸ συνεπτυγμένην μορφήν.

α) $3x+y-\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-z+1\right)$

β) $x+\frac{1}{2}z-[3x+y-(x+\frac{z}{2}+3)-(z+1)]$

γ) $3x+[2x-(3z+y)]-[3z-2(3x-y)]$

2. Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x,y)=2x+4y-5$.

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς κάθε ζεῦγος $(x_0,y_0)\in\Pi X\Pi$ ἀντιστοιχεῖ μονοσημάντως εἷς ἀριθμὸς $\lambda_0\in\Pi$ τοιοῦτος ὥστε $\lambda_0=2x_0+4y_0-5$. Καὶ ἀντιστρόφως, διὰ κάθε $\lambda_0\in\Pi$ ὑπάρχει ζεῦγος $(x_0,y_0)\in\Pi X\Pi$ τοιοῦτον ὥστε $\lambda_0=2x_0+4y_0-5$, ὁπότε τὸ πολυώνυμον $f(x,y)$ ἐκφράζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ ΠΧΠ ἐπὶ τοῦ Π.

3. Δίδονται τὰ πολυώνυμα $\varphi_1(x,y)=3x-2y+1$ $\varphi_2(x,y)=$
$=\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}y-3$, $\varphi_3(x, y, z)=5x+3y-z+1$.

Νὰ εὑρεθοῦν τά :

α) $\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)$

β) $\varphi_1(x,y)-\varphi_3(x,y,z)$

γ) $\varphi_2(x,y)+\varphi_3(x,y,z)$

δ) $\varphi_3(x,y,z)-[\varphi_1(x,y)+\varphi_2(x,y)]$

4. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$f_1(x,y,z)=3x+2(y-z)+3$, $f_2(x,y,z)=3[x-(2y+1)]$.
$f_3(x,y,z)=2(x-y)+3(y-z+4)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τά :

α) $f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)$

β) $f_1(x,y,z)+[f_3(x,y,z)-f_2(x,y,z)]$

γ) $f_2(x,y,z)-f_1(x,y,z)$

6. Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

6.1 Ἡ ἔννοια τῆς ἐξισώσεως.

Ἔστω $f(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma_1$ τὸ πρωτοβάθμιον πολυώνυμον δύο πραγματικῶν μεταβλητῶν x καὶ y μὲ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν α καὶ β διάφορον τοῦ μηδενός.

Παρατηροῦμεν τότε ὅτι εἰς κάθε ζεῦγος $(x,y)\in \Pi X \Pi$ ἀντιστοιχεῖ εἷς καὶ μόνον εἷς ἀριθμὸς $\lambda \in \Pi$ τοιοῦτος ὥστε :

$$\alpha x+\beta y+\gamma_1=\lambda \qquad (1).$$

Ἀντιστρόφως δὲ ἂν δοθῇ εἷς ἀριθμὸς $\lambda \in \Pi$, τότε ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη $(x,y)\in \Pi X \Pi$ καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἰσότητα (1).

Θὰ πρέπῃ ὅμως νὰ τονίσωμεν ὅτι ἡ ἰσότης αὕτη δὲν ἀληθεύει διὰ κάθε $(x,y)\in \Pi X \Pi$.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν τὸ ὁποῖον τίθεται εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι «νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ ζεύγη (x, y) τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα».

Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν κάθε ἰσότης τῆς μορφῆς (1) θὰ καλῆται ***ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους (x καὶ y).***

Κάθε ζεῦγος (x,y) τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν καλεῖται ***λύσις*** τῆς ἐξισώσεως, ἐνῷ ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων καλεῖται ***ἐπίλυσις*** αὐτῆς.

Διὰ κάθε δεδομένον $\lambda \in \Pi$ ἡ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς (1) γράφεται :

$$\alpha x+\beta y+\gamma_1-\lambda=0$$

Ἂν τώρα τεθῇ $\gamma_1-\lambda=\gamma$ τότε ἔχομεν τὴν μορφὴν

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0 \qquad (2)$$

ὑπὸ τὴν ὁποίαν συναντᾶται συνήθως μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους.

6.2 Ἐπίλυσις τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ $(|\alpha|+|\beta|>0)$

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ μὲ $(|\alpha|+|\beta|>0)$ διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

i) $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$. Τότε ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως λαμβάνομεν τήν :

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta} \qquad \text{(i)}.$$

Ἐκ ταύτης παρατηροῦμεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ y εἶναι συνάρτησις τῆς x, καὶ μάλιστα εἰς κάθε τιμὴν τοῦ x ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσημάντως μία καὶ μόνον μία τιμὴ τοῦ y, τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἂν εἰς τὴν (i) ἀντικαταστήσωμεν τὸ x μὲ τὴν ἀντίστοιχον τιμήν του.

Ἑπομένως τὰ ζεύγη ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\left(x,\ y = -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}\right) \text{ μὲ } x \in \Pi$$

Ἐνῷ κάθε ζεῦγος τῆς μορφῆς $\left(x,\ y \neq -\frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\gamma}{\beta}\right)$ δὲν εἶναι λύσις αὐτῆς.

Παράδειγμα :

Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-6x + 2y + 8 = 0$.

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $y = 3x - 4$, καὶ ἄρα τὰ ζεύγη ποὺ ἐπαληθεύουν αὐτὴν θὰ ἔχουν τὴν μορφὴν

$$(x, y = 3x - 4),\ x \in \Pi$$

Π.χ. ἂν ὁ x λάβῃ τὰς τιμὰς 1,2,3, κ.λ.π τότε αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y θὰ εἶναι $-1, 2, 5$ κ.λ.π.

Ὥστε μερικὰ ἀπὸ τὰ ζεύγη ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἶναι τὰ $(1, -1)$, $(2, 2)$, $(3, 5)$ κ.λ.π., ἐνῷ κάθε ζεῦγος $(x, y \neq 3x - 4)$ δὲν εἶναι λύσις αὐτῆς.

Π.χ. τὰ ζεύγη $(1, y \neq -1)$ δὲν εἶναι λύσεις.

ii) $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν

$$\beta y + \gamma = 0$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι διὰ κάθε $x \in \Pi$ ἡ τιμὴ τῆς y εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς $y = -\frac{\gamma}{\beta}$.

Ἄρα τὰ ζεύγη ***λύσεις*** τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι $\left(x, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$

$x \in \Pi$, ἐνῷ κάθε ζεῦγος $\left(x, y \neq -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ δὲν εἶναι λύσις αὐτῆς.

Παράδειγμα :

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$0x+5y-15=0.$$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $5y-15=0 \Leftrightarrow y=3$.

Ἄρα ὡς λύσεις αὐτῆς θὰ ἔχωμεν τὰ ζεύγη $(x,3)$ μὲ $x \in \Pi$.

Π.χ. ἂν ὁ x λάβῃ τὰς τιμὰς $-\frac{2}{3}, -1, 0$ κ.λ.π θὰ ἔχωμεν τὰ ζεύγη $\left(-\frac{2}{3}, 3\right)$, $(-1,3)$, $(0,3)$ τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις αὐτῆς, ἐνῷ τὰ $\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$, $(-1,1)$, $(0,1)$ δὲν εἶναι.

iii) $\boldsymbol{\beta=0, \alpha\neq 0}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\alpha x+\gamma=0$$

Ἐκ ταύτης δὲ ἕπεται ὅτι διὰ κάθε $y \in \Pi$ ἡ τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x εἶναι σταθερὰ καὶ δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$x=-\frac{\gamma}{\alpha}$$

Ἑπομένως τὰ ζεύγη **λύσεις** τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι τὰ $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, y\right)$ μὲ $y \in \Pi$ καὶ μόνον αὐτά.

Παράδειγμα :

Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x+0y+27=0$

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν

$$3x+27=0 \Leftrightarrow x=-9$$

Ἄρα αἱ λύσεις αὐτῆς εἶναι τὰ ζεύγη $(-9,y)$ μὲ $y \in \Pi$.

Π.χ. διὰ $y=1$, $y=2$, $y=-\frac{1}{2}$, $y=\sqrt{3}$ θὰ ἔχωμεν τὰ ζεύγη $(-9,1)$, $(-9,2)$, $\left(-9, -\frac{1}{2}\right)$, $(-9, \sqrt{3})$, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $3x+27=0$.

6.3 Γραφικὴ ἢ Γεωμετρικὴ παράστασις τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

Εἶναι ἤδη γνωστὸν ὅτι ἂν ἔχωμεν ἓν σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων Ox καὶ Oy τότε εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(x,y)\in \Pi X \Pi$ δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχήσωμεν ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἓν καὶ μόνον ἓν διατεταγμένον ζεῦγος $(x,y)\in \Pi X \Pi$.

Ἃς θεωρήσωμεν τώρα τὰ ζεύγη $(x,y)\in \Pi X \Pi$, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ καὶ εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου.

Εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν εἰς κάθε ἓν ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχήσωμεν τὸ σημεῖον του, τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσημάντως εἰς ἓν σύνολον σημείων (σημειοσύνολον) τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν μίαν γραμμήν. Ἡ γραμμὴ αὕτη εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι εὐθεῖα, καλεῖται δέ, ***γραφικὴ ἢ γεωμετρικὴ παράστασις*** τῆς ἐξισώσεως ἢ καὶ ***διάγραμμα αὐτῆς***.

i) ***Ἔστω*** $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$, $\gamma\neq 0$. Τότε ὡς εἰς τὴν § 6.2 ἐδείχθη, τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως περιλαμβάνει τὰ ζεύγη :

$$\left(x, y=-\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\gamma}{\beta}\right) \quad x\in \Pi.$$

Εἶναι γνωστὸν ὅμως ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν, ἡ χάραξις τῆς ὁποίας ἐπιτυγχάνεται ἂν προσδιορίσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα της. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν προσδιορίζομεν κατὰ προτίμησιν τὰ σημεῖα M καὶ N, εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη τέμνει ἀντιστοίχως τοὺς ἄξονας Ox καὶ Oy.

α) ***Προσδιορισμὸς τοῦ M.*** Τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Ox θὰ ἔχῃ τεταγμένην $y=0$, ἐνῷ ἡ τετμημένη του x προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν $y=0$.

Δηλ. $\quad \alpha x+\beta 0+\gamma=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\gamma}{\alpha}.$

Ἄρα διὰ τὸ σημεῖον M ἔχομεν :

$$x=-\frac{\gamma}{\alpha} \text{ καὶ } y=0$$

β) ***Προσδιορισμὸς τοῦ N.*** Τὸ σημεῖον τοῦτο ὡς κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Oy θὰ ἔχῃ τετμημένην $x=0$, ἐνῷ ἡ τεταγμένη του y προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν, ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν διὰ τὸ x τὴν τιμὴν 0. Δηλ. $\alpha 0+\beta y+\gamma=0 \Leftrightarrow y=-\frac{\gamma}{\beta}$.

Ἄρα διὰ τὸ σημεῖον N ἔχομεν :

$$x=0 \text{ καὶ } y=-\frac{\gamma}{\beta}$$

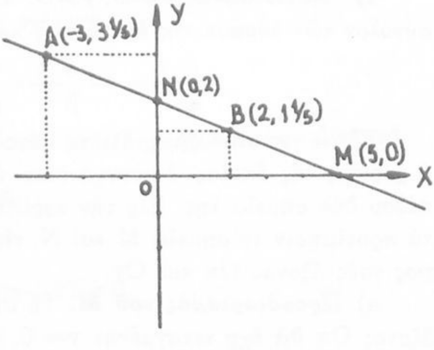
Βεβαίως διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς εὐθείας δὲν εἶναι ἀπαραίτητον νὰ προσδιορίζωμεν ὁπωσδήποτε τὰ δύο ὡς ἄνω σημεῖα. Ὁ προσδιορισμὸς αὐτῆς δύναται νὰ γίνῃ τῇ βοηθείᾳ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων αὐτῆς $A(x_1,y_1)$ καὶ $B(x_2,y_2)$, ὅπου αἱ τετμημέναι x_1 καὶ x_2 λαμβάνονται αὐθαιρέτως, ἐνῷ αἱ τεταγμέναι y_1 καὶ y_2 προσδιορίζονται ἀπὸ τὴν ἐξίσωσιν, ἂν εἰς αὐτὴν θέσωμεν διὰ τὸ x τὰς τιμὰς x_1 καὶ x_2 ἀντιστοίχως.

Παράδειγμα :

Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς $2x+5y-10=0$.

Κατ' ἀρχὴν προσδιορίζομεν τὰ σημεῖα M καὶ N. Διὰ τὸ M ἔχομεν $y=0$ ὁπότε $x=5$, ἐνῷ διὰ τὸ N, $x=0$ ὁπότε $y=2$.

Σημειοῦμεν λοιπὸν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὰ σημεῖα αὐτὰ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν τὴν ὁποίαν ὁρίζουν. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι προφανῶς ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. (Σχ. 1)



Σχ. 1

Τὴν ἰδίαν εὐθεῖαν θὰ λάβωμεν ἂν ἀντὶ τῶν σημείων M καὶ N προσδιορίσωμεν δύο ἄλλα σημεῖα $A(x_1,y_1)$ μὲ $2x_1+5y_1-10=0$ καὶ $B(x_2,y_2)$ μὲ $2x_2+5y_2-10=0$.

Εἰς τὸ σχῆμα ἔχει προσδιορισθῆ τὸ A διὰ $x_1=-3$ ὁπότε $y_1=\frac{16}{5}=3\frac{1}{5}$ καὶ τὸ B διὰ $x_2=2$ ὁπότε $y_2=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}$

ii) *Ἔστω ὅτι α = O ὁπότε β ≠ O.* Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἐδείχθη ὅτι τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως περιλαμβάνει τὰ ζεύγη

$$\left(x, -\frac{\gamma}{\beta}\right) \quad x \in \Pi.$$

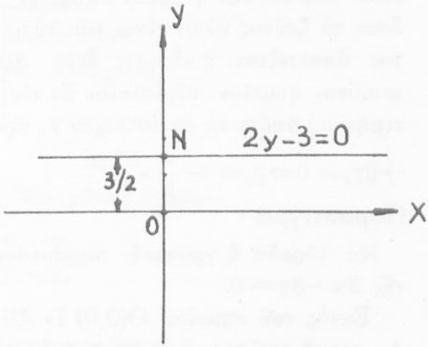
Καὶ πάλιν τὸ σύνολον αὐτὸ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν ἡ ὁποία ἔχει τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα, ὅλα τὰ σημεῖα της νὰ ἔχουν ***σταθερὰν*** τεταγμένην ἴσην πρὸς $-\frac{\gamma}{\beta}$.

Τοῦτο σημαίνει ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς θὰ ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων Ox, ἄρα ἡ εὐθεῖα θὰ εἶναι ***παράλληλος*** πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον. Ὁπότε διὰ τὸν προσδιορισμόν της ἀρκεῖ νὰ καθορίσωμεν ἓν σημεῖον της, π.χ $N\left(0, -\frac{\gamma}{\beta}\right)$ κατὰ τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα Oy, καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὸν ἄλλον ἄξονα Ox. Ἡ παράλληλος αὕτη θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη εὐθεῖα.

Παράδειγμα:

Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς $2y - 3 = 0$.

Πρὸς τοῦτο προσδιορίζομεν τὸ σημεῖον $N\left(0, \frac{3}{2}\right)$ καὶ ἐξ αὐτοῦ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν Ox. Ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη (Σχ. 2).



Σχ. 2

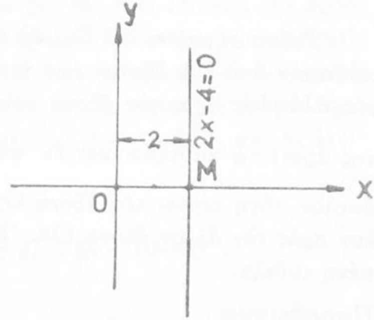
iii) *Ἔστω ὅτι β = O ὁπότε α ≠ O.* Τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἐδῶ περιλαμβάνει τὰ ζεύγη $\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, y\right)$ $y \in \Pi$. Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως θὰ εἶναι εὐθεῖα τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν ***τετμημένην*** ἴσην πρὸς $-\frac{\gamma}{\alpha}$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα αὕτη θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων Oy.

Πρὸς τὸν καθορισμόν της ἀπαιτεῖται λοιπὸν ὁ προσδιορισμὸς ἑνὸς μόνον σημείου της καὶ κατὰ προτίμησιν τοῦ σημείου Μ κατὰ τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὸν ἄξονα Ox. Τὸ σημεῖον τοῦτο προφανῶς ἔχει ὡς συντεταγμένας τὸ ζεῦγος $\left(-\frac{\gamma}{\alpha},0\right)$.

Παράδειγμα:

Ζητεῖται ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $2x-4=0$.

Πρὸς τοῦτο προσδιορίζομεν τὸ ὡς ἄνω σημεῖον Μ. Προφανῶς τοῦτο ἔχει συντεταγμένας $x=2$ ($2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$) καὶ $y=0$. Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὸν Oy ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη γραφικὴ παράστασις τῆς $2x-4=0$. (Σχ. 3)



Σχ. 3

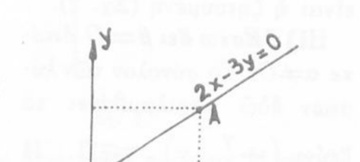
iv) $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \gamma=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha x+\beta y=0$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς εἶναι μία εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καθ' ὅσον τὸ ζεῦγος (0,0) εἶναι μία λύσις της. Ἄρα διὰ τὸν προσδιορισμόν της ἀπαιτεῖται ἡ εὕρεσις ἑνὸς ἄλλου σημείου $A(x,y)$ αὐτῆς. Ἓν τοιοῦτον σημεῖον εὑρίσκεται ἂν εἰς τὸ x δώσωμεν μίαν αὐθαίρετον τιμὴν x_0 ὁπότε τὸ ἀντίστοιχον y_0 προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\alpha x_0+\beta y_0=0 \Leftrightarrow y_0=-\frac{\alpha}{\beta}x_0$.

Παράδειγμα:

Νὰ εὑρεθῇ ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $2x-3y=0$.

Ἐκτὸς τοῦ σημείου $O(0,0)$ ἓν ἄλλο Α, προσδιορίζεται ἂν λάβωμεν ὡς τετμημένην αὐτοῦ π.χ $x=3$, ὁπότε ἡ τεταγμένη του προσδιορίζεται ἀπὸ τὴν $2\cdot 3-3y=0$ ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται $y=2$.



Σχ. 4

Ἄρα ἡ ζητουμένη γραφικὴ παράστασις θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα τῶν σημείων Ο καὶ Α. (Σχ. 4)

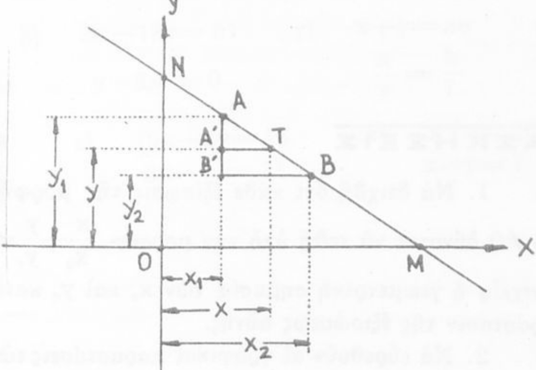
6.4 Ἐξίσωσις εὐθείας.

Ἐξ ὅσων ἀνεφέρθησαν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον συνάγομεν ὅτι εἰς κάθε ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον μία εὐθεῖα ὡς διάγραμμα αὐτῆς. Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε εὐθεῖαν ἀντιστοιχεῖ μία καὶ μόνον μία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$.

Ἑπομένως τίθεται τὸ πρόβλημα.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις μιᾶς εὐθείας ἂν γνωρίζομεν δύο σημεῖα αὐτῆς $A(x_1,y_1)$ καὶ $B(x_2,y_2)$.

Πρὸς τοῦτο. Ἂν $T(x,y)$ εἶναι ἓν τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας αὐτῆς (Σχ. 5) τότε τὰ τρίγωνα $AA'T$ καὶ $AB'B$ εἶναι ὅμοια ὁπότε θὰ ὑφίσταται ἡ ἀναλογία τῶν πλευρῶν $\frac{(A'T)}{(B'B)}=\frac{(AA')}{(AB')}$. Εἶναι ὅμως $(A'T)=x-x_1$, $(B'B)=x_2-x_1$,



Σχ. 5

$(AA')=y_1-y$ καὶ $(AB')=y_1-y_2$. Ἑπομένως ἔχομεν

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y}{y_1-y_2}.$$

Ἐκ ταύτης ἕπεται τελικῶς ἡ

$$(E):\ \mathbf{(y_1-y_2)x+(x_2-x_1)y+(x_1y_2-x_2y_1)=0}$$

Ἡ ἐξίσωσις (Ε) ἡ ὁποία προφανῶς ὁρίζεται μονοσημάντως, εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Παράδειγμα :

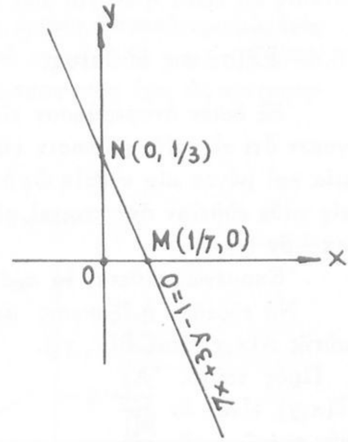
Μιᾶς εὐθείας δίδονται τὰ σημεῖα $A(-2,5)$ καὶ $B(1,-2)$.

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις αὐτῆς.

Ἐδῶ ἔχομεν $x_1 = -2, y_1 = 5$ $x_2 = 1$ καὶ $y_2 = -2$. Ἄρα $y_1 - y_2 = 5 - (-2) = 7$, $x_2 - x_1 = 1 - (-2) = 3$, $x_1 y_2 - x_2 y_1 = (-2)(-2) - 1 \cdot 5 = -1$.

Ἑπομένως ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι :

$7x + 3y - 1 = 0$ (Σχ. 6).



Σχ. 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ δειχθῇ ὅτι κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ μὲ $\gamma \neq 0$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{x}{x_0} + \dfrac{y}{y_0} = 1$. Νὰ εὑρεθῇ ἐν συνεχείᾳ ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῶν x_0 καὶ y_0 κατὰ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

2. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν κάτωθι ἐξισώσεων :

α) $2x - 3y - 9 = 0$, β) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} - 1 = 0$, γ) $-3x + 4y - 12 = 0$

δ) $2x + 6 = 0$, ε) $3y + 9 = 0$, στ) $\dfrac{3}{5}x - y = 0$.

3. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $x - y = 0$ καὶ $x + y = 0$.

Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις αὐτῶν καὶ νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ σημασία ἑκάστης τῶν εὐθειῶν ποὺ θὰ προκύψουν.

4. Δίδονται αἱ ἐξισώσεις $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ καὶ $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$, μὲ τοὺς συντελεστὰς $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2$ καὶ γ_2 διαφόρους τοῦ μηδενός. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἂν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ τότε ἔχουν τὰς ἰδίας ἀκριβῶς λύσεις, ἐνῷ ἂν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$ δὲν ἔχουν οὐδεμίαν κοινὴν λύσιν.

Νὰ ἐξετασθῇ ἡ γεωμετρικὴ σημασία τῶν εὐθειῶν ποὺ θὰ προκύψουν ἀπὸ τὰς γραφικὰς παραστάσεις αὐτῶν εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

5. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α(—3,—5) καὶ Β(—1,—1).

6. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α(—1,—2).

7. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Ox καὶ τέμνει τὸν Oy εἰς σημεῖον Ν τεταγμένης ἴσης μὲ —3.

8. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα Oy καὶ συναντώσης τὸν Ox εἰς σημεῖον **Μ** τετμημένης ἴσης πρὸς —2.

α) $\begin{cases} 9x - y = 41 \\ y = 3x - 11 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3x - 18y = 51 \\ y - 3x = 0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x + y = 36 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{5}{7} \end{cases}$

δ) $\begin{cases} 26x - 75y = 29 \\ 25y + 13x = 77 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} 19x + 4y = 18 \\ 3x - y = 11 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 7 \end{cases}$

7. Συστήματα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Γραφικὴ καὶ ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις αὐτῶν.

7.1 Σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἂς λάβωμεν δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

Εἶναι γνωστὸν τότε (βλ. § 6), ὅτι δι' ἑκάστην ἐξ αὐτῶν ὑπάρχουν ἄπειρα ζεύγη $(x,y) \in \Pi \times \Pi$ τὰ ὁποῖα τὴν ἐπαληθεύουν καὶ ἕκαστον τῶν ὁποίων ἔχομεν καλέσει λύσιν αὐτῆς.

Ἂς καλέσωμεν λοιπὸν A_1 τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς πρώτης ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων καὶ A_2 τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς δευτέρας. Δηλαδὴ

$$A_1 = \{(x,y) \mid x \in \Pi, \quad y \in \Pi \ \text{μὲ} \ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0\}$$
$$A_2 = \{(x,y) \mid x \in \Pi, \quad y \in \Pi \ \text{μὲ} \ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0\}$$

καὶ ἄς προσπαθήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν ποία ἢ ποῖαι ἐκ τῶν λύσεων τῆς μιᾶς ἐκ τῶν δύο ἐξισώσεων εἶναι καὶ λύσις τῆς ἄλλης. Δηλαδὴ ἔχομεν πρὸς λύσιν τὸ ἑξῆς πρόβλημα :

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κοιναὶ λύσεις τῶν δύο ἀνωτέρω ἐξισώσεων ἢ μὲ ἄλλους λόγους, νὰ προσδιορισθῇ ἡ τομὴ $A_1 \cap A_2$ τῶν δύο συνόλων A_1 καὶ A_2.

Ἂν τὸ σύνολον $A_1 \cap A_2$ δὲν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ἂν δηλαδὴ $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, τότε προφανῶς θὰ ὑπάρχῃ ἓν τοὐλάχιστον ζεῦγος (x_0, y_0) πραγματικῶν ἀριθμῶν διὰ τὸ ὁποῖον θὰ ἰσχύῃ :

$$\alpha_1 x_0 + \beta_1 y_0 + \gamma_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2 x_0 + \beta_2 y_0 + \gamma_2 = 0$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ζεῦγος (x_0, y_0) ***εἶναι λύσις τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων :***

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$$

Ἡ εὕρεσις δὲ τοῦ συνόλου τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (δηλ.

ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν κοινῶν λύσεων τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ), καλεῖται ἐπίλυσις τοῦ συστήματος.

Εἰς τὸ ἑξῆς τὸ σύνολον τῶν λύσεων ἑνὸς συστήματος θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ S.

Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ***δυνατὸν*** τότε καὶ μόνον τότε ἂν $S \neq \varnothing$.

Γενικῶς τὸ σύνολον S εἶναι ἓν ὑποσύνολον τοῦ $\Pi X \Pi = \Pi^2$. Ἂν συμβῇ νὰ εἶναι $S = \Pi^2$ τότε λέγομεν ὅτι τὸ σύστημα ἀποτελεῖ ***ταυτότητα*** ἐπὶ τοῦ ΠΧΠ.

Θὰ λέγωμεν ἀκόμη ὅτι :

α. Τὸ σύστημα εἶναι ***ὡρισμένον*** ἂν τὸ S περιέχῃ πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων.

β. Τὸ σύστημα εἶναι ***ἀόριστον*** ἂν τὸ S εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον μὲ $S \neq \Pi^2$.

γ. Τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον*** ἂν $S = \varnothing$.

7.2 Γραφικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\Sigma) : \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0 & (1) \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

καὶ ἂς ὀνομάσωμεν (ε_1) καὶ (ε_2) τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν γραφικῶς εἰς τὸ ἐπίπεδον τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2) τοῦ συστήματος (Σ) ἀντιστοίχως.

Εἶναι τότε γνωστὸν ὅτι ἑκάστη λύσις τῶν ἐξισώσεων (1) ἢ (2) θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ζεύγους τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου τῶν εὐθειῶν (ε_1) ἢ (ε_2) ἀντιστοίχως.

Ἑπομένως ἂν $(x_0, y_0) \in \Pi X \Pi$ εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος (κοινὴ λύσις τῶν (1) καὶ (2)), αὕτη θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ ζεύγους συντεταγμένων ἑνὸς σημείου ἔστω M_0, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2). Δηλαδὴ $M_0(x_0, y_0) \in (\varepsilon_1) \cap (\varepsilon_2)$.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν $M_0(x_0, y_0)$ εἶναι ἓν κοινὸν σημεῖον τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) μὲ συντεταγμένας $x = x_0$ καὶ $y = y_0$ τότε τὸ ζεῦγος τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ (x_0, y_0), θὰ εἶναι μία κοινὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) δηλαδὴ μία λύσις τοῦ (Σ).

Ἐπειδὴ ὅμως γνωρίζομεν ὅτι δύο συνεπίπεδοι εὐθεῖαι εἶναι δυνατόν :

α. Νὰ τέμνωνται, δηλαδὴ νὰ ἔχουν ἓν μόνον κοινὸν σημεῖον (ἡ τομή των εἶναι ἓν μονομελὲς σύνολον).

β. Νὰ εἶναι παράλληλοι, δηλαδὴ νὰ μὴν ἔχουν οὐδὲν κοινὸν σημεῖον (ἡ τομή των εἶναι τὸ κενὸν σύνολον) καὶ

γ. Νὰ συμπίπτουν (παράλληλοι μὲ εὐρεῖαν σημασίαν) ὁπότε θὰ ἔχουν ἀπειράριθμα κοινὰ σημεῖα (ἡ τομή των εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον), συμπεραίνομεν ὅτι :

Ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ ***μίαν λύσιν*** (περίπτωσις α), νὰ μὴν ἔχῃ ***οὐδεμίαν λύσιν*** (περίπτωσις β), ἢ νὰ ἔχῃ ***ἀπειραρίθμους λύσεις*** (περίπτωσις γ).

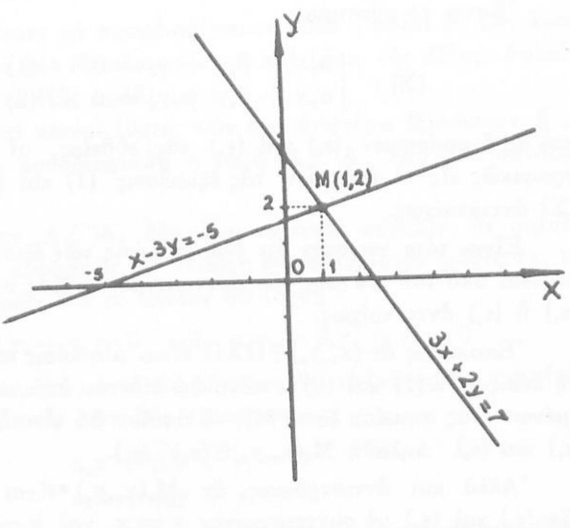
Κατωτέρω δίδονται παραδείγματα δι' ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων.

Παραδείγματα :

1. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\Sigma_1): \begin{cases} 3x+2y-7=0 \\ x-3y+5=0 \end{cases}$$

Διὰ τὸ σύστημα αὐτὸ παρατηροῦμεν (σχ. 7) ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι παριστοῦν γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M(1,2) καὶ ἄρα τὸ σύστημα (Σ_1) ἔχει μίαν μόνον λύσιν τὴν (1,2). Ἄρα διὰ τὸ (Σ_1) θὰ ἔχωμεν :



Σχ. 7

$$S=\{(x,y) : x=1 \ y=2\}=\{(1,2)\}.$$

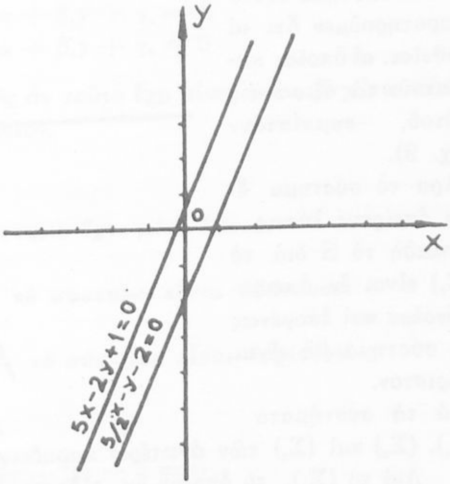
Πρὸς διαπίστωσιν αὐτοῦ θέτομεν εἰς τὰς δοθείσας ἐξισώσεις, $x=1$ καὶ $y=2$, ὁπότε βλέπομεν ὅτι αὗται ἐπαληθεύονται.

Πράγματι : $3\cdot1+2\cdot2-7=0$ καὶ $1-3\cdot2+5=0$.

2. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma_2): \begin{aligned} &\frac{5}{2}x-y-2=0 \ (1)\\ &5x-2y+1=0 \ (2)\end{aligned}$$

Ἂν γράψωμεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις τοῦ (Σ_2) θὰ παρατηρήσωμεν (σχ. 8) ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι καὶ ἄρα τὸ σύστημα δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν.



Σχ. 8

Διὰ τὴν ἐπαλήθευσιν αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμος μέ :

$$\frac{5}{2}x-y-2=0 \Leftrightarrow 5x-2y-4=0 \Leftrightarrow 5x-2y=4.$$
$$5x-2y+1=0 \Leftrightarrow 5x-2y=-1,$$

καὶ ἄρα τὸ σύστημα (Σ_2) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$\begin{aligned} 5x-2y &= 4\\ 5x-2y &= -1\end{aligned}$$

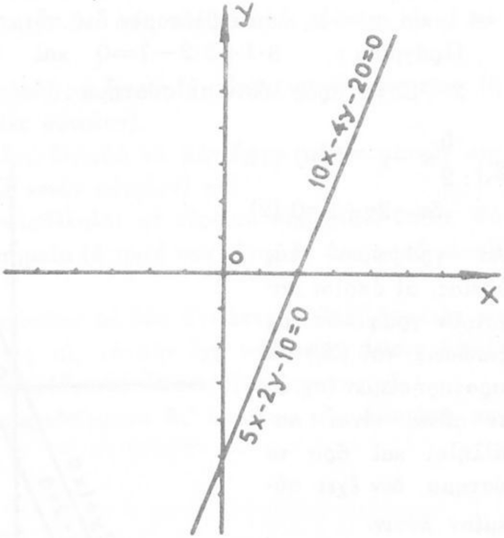
Διὰ νὰ εἶχεν λύσιν λοιπὸν τὸ σύστημα θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπῆρχεν ἕν ζεῦγος $(x,y)\in ΠΧΠ$ τὸ ὁποῖον νὰ καθίστα τὴν διαφορὰν $5x-2y$ ἴσην μὲ 4 καὶ -1 συγχρόνως. Τοιοῦτον ζεῦγος ὅμως δὲν ὑπάρχει.

Ἄρα διὰ τὸ σύστημα (Σ_2) θὰ ἔχωμεν $S=\varnothing$ δηλαδὴ τὸ σύστημα εἶναι **ἀδύνατον**.

Αἱ ἐξισώσεις αὐτοῦ ὀνομάζονται **ἀσυμβίβαστοι**.

3. Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\Sigma_3): \begin{cases} 5x-2y-10=0 \\ 10x-4y-20=0 \end{cases}$$



Σχ. 9

Διὰ τὸ σύστημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι παριστοῦν τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, συμπίπτουν (σχ. 9).

Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

Δηλαδὴ τὸ S διὰ τὸ (Σ_3) εἶναι ἓν ἀπειροσύνολον καὶ ἑπομένως τὸ σύστημα θὰ εἶναι ἀόριστον.

Διὰ τὰ συστήματα (Σ_1), (Σ_2) καὶ (Σ_3) τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων παρατηροῦμεν ὅτι :

Διὰ τὸ (Σ_1), τὸ ὁποῖον ὡς εἴδομεν, ἔχει μίαν λύσιν, οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων x καὶ y εἰς μίαν τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ δὲν εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀντιστοίχους συντελεστὰς εἰς τὴν ἄλλην.

Δηλαδὴ $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{-3}$

Διὰ τὸ (Σ_2), τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἀνάλογοι. Δηλαδὴ $\dfrac{\frac{5}{2}}{5} = \dfrac{-1}{-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, ἐνῷ ὁ λόγος αὐτῶν $\dfrac{1}{2}$, εἶναι διάφορος τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων σταθερῶν ὅρων δηλ. $\dfrac{1}{2} \neq \dfrac{-2}{1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \neq -2$.

Τέλος διὰ τὸ (Σ_3), τὸ ὁποῖον εἶναι ἀόριστον, παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀντίστιχοι συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ σταθεροὶ ὅροι εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις εἶναι ἀνάλογοι.

Δηλαδή : $\frac{5}{10} = \frac{-2}{-4} = \frac{-10}{-20} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Δυνάμεθα λοιπὸν δι' ἓν σύστημα τῆς γενικῆς μορφῆς,

$$\begin{aligned} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

νὰ διαπιστώσωμεν ἐξ ἀρχῆς ἂν τοῦτο ἔχῃ μίαν λύσιν, ἂν εἶναι ἀδύνατον ἢ ἂν τοῦτο εἶναι ἀόριστον.

Τοιουτοτρόπως ἄν :

i. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \frac{\beta_1}{\beta_2}$ ***τὸ σύστημα ἔχει μίαν λύσιν.***

ii $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} \neq \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ***τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.***

iii. $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$ ***τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον.***

Π. χ. διὰ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 3x + 2y - 5 &= 0 \\ 12x + 8y - 4 &= 0 \end{aligned}$$

ἐπειδὴ $\frac{3}{12} = \frac{2}{8} \neq \frac{-5}{-4}$ συμπεραίνομεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

7.3 Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

7.3.1 Ὁρισμοί.

Ι. Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, τότε καὶ μόνον τότε, ἂν ἔχουν τὰς ἰδίας λύσεις.

ΙΙ. Ἔστω $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$ (1) καὶ $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$ (2) δύο ἐξισώσεις τῶν ἀγνώστων x καὶ y.

Ἡ ἐξίσωσις τότε : $\mu(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1)+\nu(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2)=0$ ὅπου μ καὶ ν εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοὶ μὲ $\nu\neq 0$, θὰ λέγεται **γραμμικὸς συνδυασμὸς** τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

Ἀποδεικνύεται τότε ὅτι :

Ἕν σύστημα δύο ἐξισώσεων

$$(\Sigma):\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 & (1)\\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0 & (2)\end{cases}$$

εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$(\Sigma'):\begin{cases}\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 & (1)\\ \mu(\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1)+\nu(\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2)=0 & (2')\end{cases}$$

Ἀπόδειξις : Τοῦτο εἶναι προφανὲς καθ' ὅσον πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (Σ) ὡς μηδενίζουσα τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2), θὰ μηδενίζῃ καί τὴν (2′) καὶ ἄρα θὰ εἶναι καὶ λύσις τοῦ συστήματος (Σ′).

Ἀντιστρόφως δέ, πᾶσα λύσις τοῦ (Σ′) ὡς μηδενίζουσα τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ, θὰ μηδενίζῃ καὶ τὴν (2′) καὶ ἐπειδὴ $\nu\neq 0$ θὰ μηδενίζῃ καὶ τὴν $\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2$, δηλαδὴ θὰ εἶναι λύσις καὶ τοῦ (Σ).

7.3.2 Μέθοδοι ἀριθμητικῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος.

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους βασικὸς σκοπός μας θὰ εἶναι νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἕν ἄλλο ἰσοδύναμον μὲ αὐτὸ καὶ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ μία τῶν ἐξισώσεων νὰ περιέχῃ μόνον ἕνα ἄγνωστον.

Ἡ ἐργασία αὕτη καλεῖται **ἀπαλοιφὴ** τοῦ ἐν λόγῳ ἀγνώστου εἰς τὸ σύστημα.

Κατωτέρω ἀναφέρονται τρεῖς κλασσικαὶ μέθοδοι ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος.

I. Μέθοδος τῆς συγκρίσεως.

Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(\Sigma):\begin{cases}y=2x-7\\ y=x-5\end{cases}$$

Ἐὰν ἐξισώσωμεν τὰς τιμὰς τοῦ **y** ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ (Σ) λαμβάνομεν, $2x - 7 = x - 5$ καὶ ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ 2x - 7 = x - 5 \end{cases}$$

Εἰς τὸ τελευταῖον σύστημα ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει μόνον τὸν ἄγνωστον x. Λυομένης λοιπὸν αὐτῆς ὡς πρὸς x λαμβάνομεν:

$$2x-7 = x-5 \Leftrightarrow 2x-x = 7-5 \Leftrightarrow x = 2$$

Τὸ σύστημα λοιπὸν (Σ) εἶναι τώρα ἰσοδύναμον μὲ τό:

$$\begin{cases} y = 2x - 7 \\ x = 2 \end{cases}$$

Καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ τελευταίου συστήματος τὸ x μὲ τὴν τιμήν του 2, λαμβάνομεν τελικῶς τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot 2 - 7 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ (Σ) καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει προφανῶς τὴν μοναδικὴν λύσιν (2, —3).

Ἄρα διὰ τὸ σύστημα (Σ) ἔχομεν:

$$S = \{(x, y) : x = 2, \ y = -3\} = \{(2, -3)\}$$

Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ἦσαν λελυμέναι ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον (τὸν y). Ἂν δὲν συβαίνῃ τοῦτο, τότε λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον (x ἢ y), δηλαδὴ ἐκφράζομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον ὡς συνάρτησιν τοῦ ἄλλου καὶ ἀκολουθοῦμεν τὴν αὐτὴν πορείαν ὡς ἀνωτέρω.

Ἔστω π.χ. πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 26 &= 0 \\ -3x + 4y + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Ἔχομεν τότε τὰς ἰσοδυναμίας:

$$\begin{cases} 3x+7y-26 = 0 \\ -3x+4y+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 26-7y \\ -3x = -4y-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26-7y}{3} \\ x = \dfrac{4y+4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{26-7y}{3} \\ \dfrac{26-7y}{3} = \dfrac{4y+4}{3} \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος περιέχει μόνον τὸν ἄγνωστον y καὶ ἄρα λυομένη δίδει:

$$\frac{26-7y}{3}=\frac{4y+4}{3}\Leftrightarrow 26-7y=4y+4\Leftrightarrow -7y-4y=-22\Leftrightarrow -11y=$$
$$=-22\Leftrightarrow y=2.$$

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό:

$$\begin{cases} x=\dfrac{26-7y}{3} \\ y=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{26-7\cdot 2}{3}=4 \\ y=2 \end{cases}$$

Ἑπομένως διὰ τὸ δοθὲν σύστημα λαμβάνομεν τὴν μοναδικὴν λύσιν $(x=4,\ y=2)$.

Δηλαδή: $S=\{(x,y): x=4,\ y=2\}=\{(4,2)\}$

II. *Μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.*

Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2=0 \end{aligned}$$

Τοῦτο συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν τῆς § 7.3.1 εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό:

$$\begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0 \\ \mu(\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1)+\nu(\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2)=0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1=0 \\ (\mu\alpha_1+\nu\alpha_2)x+(\mu\beta_1+\nu\beta_2)y+\mu\gamma_1+\nu\gamma_2=0 \end{cases}$$

Ἂν οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ ν ἐκλεγοῦν οὕτως ὥστε ὁ εἷς τῶν συντελεστῶν $\mu\alpha_1+\nu\alpha_2$ ἢ $\mu\beta_1+\nu\beta_2$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν, τότε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος θὰ περιέχῃ ἕνα μόνον ἄγνωστον καὶ ἄρα δυνάμεθα νὰ προχωρήσωμεν συμφώνως πρὸς τὴν μέθοδον I.

Τὸ ἑπόμενον παράδειγμα μᾶς δεικνύει τὴν πορείαν ποὺ ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος μὲ τὴν μέθοδον τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα:

$$(\Sigma):\begin{cases} 3x+7y-26=0 & (1) \\ 8x-14y-4=0 & (2) \end{cases}$$

Ἔστω τώρα ὅτι διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ (Σ) θέλομεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον y. Εἶναι γνωστὸν ὅτι ἂν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρὸς αὐτήν.

Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) μὲ καταλλήλους ἀριθμοὺς ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ y εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις νὰ γίνουν ἀντίθετοι.

Δύο τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι π.χ ὁ 2 καὶ ὁ 1.

Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὴν (1) ἐπὶ 2 καὶ τὴν (2) ἐπὶ 1 ὁπότε λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰς ἐξισώσεις :

$$6x+14y-52=0 \text{ καὶ } 8x-14y-4=0.$$

Προσθέτομεν αὐτὰς καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{rl} & 6x+14y-52=0 \\ + & 8x-14y-4=0 \\ \hline & 14x+0y-56=0 \quad (3) \end{array}$$

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύστημα :

$$\begin{array}{ll} 3x+7y-26=0 & (1) \\ 14x \quad\quad -56=0 & (3) \end{array}$$

καὶ ἑπομένως θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 3x+7y-26=0 \\ 14x \quad -56=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7y=26 \\ x=\dfrac{56}{14} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+7y=26 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\cdot 4+7y=26 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=14 \\ x=4 \end{cases}$$

Τὸ τελευταῖον σύστημα ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $(x=4, y=2)$.

Ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (Σ) εἶναι τὸ μονομελὲς σύνολον :

$$S=\{(x,y) : x=4,\ y=2\}=\{(4,2)\}$$

Τὸ σύστημα (Σ) δύναται νὰ ἐπιλυθῇ καὶ ἂν ἀφοῦ ἀπαλείψωμεν τὸν ἕνα ἄγνωστον, ἐν συνεχείᾳ μὲ τὴν αὐτὴν μέθοδον ἀπαλείψωμεν καὶ τὸν ἄλλον. Οὕτως ἔχομεν :

Εὕρεσις τοῦ x.

$$\begin{array}{lrl|l} (1) & 3x+7y & =26 & \cdot 2 \\ (2) & 8x-14y & =4 & \cdot 1 \end{array}$$

(πολλαπλασιάζομεν μὲ 2 καὶ 1 διὰ ν' ἀπαλείψωμεν τὸν y)

$$\begin{array}{ll} (1\alpha) & 6x+14y=52 \\ (2\alpha) & 8x-14y=\ 4 \end{array} \Bigg\} \quad (\text{Προσθέτομεν})$$

$$(1\alpha)+(2\alpha) \quad 14x+0y=56 \Leftrightarrow 14x=56 \Leftrightarrow x=4.$$

Εὕρεσις τοῦ y.

$$\begin{array}{lll} (1) & 3x+7y=26 & \cdot 8 \\ (2) & 8x-14y=\ 4 & \cdot(-3) \end{array} \quad \begin{array}{l} (\text{Πολλαπλασιάζομεν μὲ 8 καὶ} \\ -3 \text{ διὰ ν' ἀπαλείψωμεν τὸν x}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} (1\beta) & 24x+56y=\ 208 \\ (2\beta) & -24x+42y=-12 \end{array} \Bigg\} \quad (\text{Προσθέτομεν})$$

$$(1\beta)+(2\beta) \quad 0x+98y=196 \Leftrightarrow 98y=196 \Leftrightarrow y=2.$$

Ἄρα καὶ πάλιν εὕρομεν ὡς σύνολον λύσεων τοῦ (Σ) τὸ :

$$S=\{(x,y): x=4,\ y=2\}=\{(4,2)\}$$

Παρατηρήσεις.

1. Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος καλεῖται καὶ μέθοδος τῶν ***ἀντιθέτων συντελεστῶν*** ἢ καὶ μέθοδος τῆς ***προσθέσεως***.

2. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ καταλλήλου ἀριθμοῦ μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάζωμεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων προκειμένου ν' ἀπαλείψωμεν τὸν ἕνα ἄγνωστον καλὸν θὰ εἶναι νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὴν ἑξῆς πρακτικὴν μέθοδον.

«Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν συντελεστὴν (ἀπολύτως λαμβανόμενον) τὸν ὁποῖον ἔχει ὁ πρὸς ἀπαλοιφὴν ἄγνωστος εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν, ἀφοῦ προηγουμένως θέσωμεν πρὸ αὐτοῦ τὸ κατάλληλον σημεῖον ὥστε μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ὑπ' ὄψιν ἀγνώστου εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις νὰ εἶναι ἀντίθετοι».

Ἢ ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου τοὺς ὁποίους θέλομεν ν' ἀπαλείψωμεν δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, «εὑρίσκομεν τὸ ε.κ.π. τῶν συντελεστῶν αὐτῶν (ἀπολύτως λαμβανομένων) καὶ ἐν συνεχείᾳ πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη ἑκάστης ἐξισώσεως μὲ τὸ ἀντίστοιχον πηλίκον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν ἂν διαιρέσωμεν τὸ ε.κ.π. μὲ τὸν ἀντίστοιχον συντελεστήν τοῦ ὑπ' ὄψιν ἀγνώστου καὶ εἰς τὸ ὁποῖον πηλίκον, ἔχομεν θέσει τὸ κατάλληλον πρόσημον».

Π.χ ἂν εἰς τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 3x-6y&=3 \\ x-9y&=4. \end{aligned}$$

θέλωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον y μὲ τὴν δευτέραν μέθοδον εὑρίσκομεν τὸ ε.κ.π. τοῦ 6 καὶ 9, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ 18.

Ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὰ πηλίκα τοῦ 18 διὰ τοῦ 6 καὶ 9 τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως 3 καὶ 2.

Πολλαπλασιάζομεν τώρα καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ —3 καὶ τῆς (2) ἐπὶ 2 καὶ ἔχομεν :

$$\begin{array}{lll} (1) & 3x-6y=3 & \cdot(-3) \\ (2) & x-9y=4 & \cdot 2 \\ \hline (1\alpha) & -9x+18y=-9 & \\ (2\alpha) & 2x-18y=\ \ 8 & \\ \hline (1\alpha)+(2\alpha) & -7x \qquad =-1 & \end{array} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} (\text{Προσθέτομεν})$$

III Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἡ πορεία τὴν ὁποίαν ἀκολουθοῦμεν διὰ τὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς συστήματος μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν γίνεται φανερὰ ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 1ον

Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν τὸ σύστημα :

$$(\Sigma): \begin{cases} 3x+y=14 & (1) \\ -x+y=-2 & (2) \end{cases}$$

Ἂν λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) ὡς πρὸς y λαμβάνομεν :

$$-x+y=-2 \Leftrightarrow y=x-2$$

Ἀντικαθιστῶμεν τὴν εὑρεθεῖσαν τιμὴν τοῦ y εἰς τὴν (1) τοῦ (Σ) καὶ ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 3x+x-2=14 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=16 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=4-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$$

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα θὰ ἔχῃ τὴν μοναδικὴν λύσιν

(x=4, y=2) δηλ.

$$S=\{(x,y): x=4,\ y=2\}=\{(4,2)\}$$

Παράδειγμα 2ον

Ἔστω τὸ σύστημα

$$7y-15x=95 \qquad (1)$$
$$5x+8y=20 \qquad (2)$$

Λύομεν τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν :

$$5x+8y=20 \Leftrightarrow 5x=20-8y \Leftrightarrow x=\frac{20-8y}{5}$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ x συναρτήσει τοῦ y ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) καὶ λαμβάνομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 7y-15x=95 \\ 5x+8y=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y-15\cdot\dfrac{20-8y}{5}=95 \\ x=\dfrac{20-8y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y-60+24y=95 \\ x=\dfrac{20-8y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 31y=155 \\ x=\dfrac{20-8y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=\dfrac{20-8y}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=\dfrac{20-8\cdot 5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ x=-4 \end{cases}$$

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $(x=-4,\ y=5)$

Δηλ. $S=\{(x,y): x=-4,\ y=5\}=\{(-4,5)\}$

7.4 Συστήματα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

7.4.1 Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ὡς καὶ διὰ τὴν περίπτωσιν τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους (βλ. § 6), ὁρίζομεν ὡς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ τρεῖς ἀγνώστους (μὲ τρεῖς μεταβλητὰς x,y,z) κάθε ἰσότητα τῆς μορφῆς,

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \qquad (1)$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει δι' ἀπειραρίθμους διατεταγμένας τριάδας (x,y,z) πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὄχι ὅμως καὶ διὰ πᾶσαν τριάδα.

Ἐκ τῶν συντελεστῶν α, β καὶ γ τῆς (1) ὁ εἷς τοὐλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Θὰ πρέπῃ δηλ. $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0$.

Ἔστω τώρα ὅτι $\alpha \neq 0$.

Ἂν τότε ἐπιλύσωμεν τὴν (1) ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x λαμβάνομεν :

$$x = -\frac{\beta y + \gamma z + \delta}{\alpha}$$

Δίδοντες ἐν συνεχείᾳ εἰς τὰς μεταβλητὰς y καὶ z δύο τυχούσας τιμὰς ἔστω τὰς y_0 καὶ z_0, λαμβάνομεν μίαν τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν (1).

$$\left(x = -\frac{\beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha}, y_0, z_0\right)$$

ἐνῷ ἡ τριὰς

$$\left(x \neq -\frac{\beta y_0 + \gamma z_0 + \delta}{\alpha}, y_0, z_0\right)$$

δὲν ἐπαληθεύει αὐτήν.

Ὁμοίως ἂν $\beta \neq 0$ καὶ ἐπιλύσωμεν τὴν (1) ὡς πρὸς y θὰ ἔχωμεν $y = -\frac{\alpha x + \gamma z + \delta}{\beta}$ ὁπότε ἂν δώσωμεν εἰς τὰς μεταβλητὰς x καὶ z δύο τυχούσας τιμὰς x_0 καὶ z_0, θὰ λάβωμεν μίαν τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία καὶ πάλιν θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν (1).

$$\left(x_0, y = \frac{\alpha x_0 + \gamma z_0 + \delta}{\beta}, z_0\right)$$

Παράδειγμα :

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $4x + 2y - 5z - 1 = 0$

Ἂν ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ὡς πρὸς x λαμβάνομεν :

$$x = -\frac{2y - 5z - 1}{4}$$

Ἄρα ἂν αἱ μεταβληταὶ y καὶ z λάβουν τὰς τιμὰς ἔστω $y = 2$ καὶ $z = -1$, μία διατεταγμένη τριὰς $(x, y, z) \in \Pi^3$ ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἶναι ἡ $\left(x = -\frac{2\cdot 2 - 5\cdot(-1) - 1}{4}, y = 2, z = \right.$ $\left. = -1\right)$ δηλ. ἡ $(-2, 2, -1)$.

Ὁμοίως διὰ $y = 1$ καὶ $z = 4$ λαμβάνομεν ὡς μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τὴν τριάδα πραγματικῶν ἀριθμῶν $\left(\frac{19}{4},1,4\right)$

Κάθε τριὰς $(x,y,z)\in \Pi^3$ ἡ ὁποία ἐπαληθεύει μίαν ἐξίσωσιν μὲ τρεῖς ἀγνώστους, ὀνομάζεται ***λύσις*** αὐτῆς, ἐνῷ ἡ εὕρεσις τῶν λύσεων καλεῖται ***ἐπίλυσις*** τῆς ἐξισώσεως.

7.4.2 Σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

1. Γενικά.

Ἂν λάβωμεν τρεῖς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους

$$(\Sigma):\quad \begin{array}{ll} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z+\delta_1=0 & (1)\\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z+\delta_2=0 & (2)\\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z+\delta_3=0 & (3)\end{array}$$

καὶ ζητήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν κοινὴν ἢ κοινὰς λύσεις αὐτῶν, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Κάθε κοινὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καὶ (3) καλεῖται ***λύσις*** τοῦ συστήματος αὐτῶν, ἐνῷ ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν λύσεων τοῦ (Σ) λέγεται ***ἐπίλυσις*** τοῦ συστήματος.

2. Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Τὸ γενικὸν πρόβλημα τῆς ἐπιλύσεως ἑνὸς συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ γενικῶς ἑνὸς συστήματος ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους δὲν θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐπὶ τοῦ παρόντος. Διὰ τοῦτο θ' ἀρκεσθῶμεν εἰς τὸ νὰ ἀναφέρωμεν πῶς ἠμποροῦμεν νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν τοιοῦτον σύστημα μὲ μίαν τῶν μεθόδων αἱ ὁποῖαι ἀνεφέρθησαν εἰς τὴν § 7.3.3

Ἔστω π.χ. τὸ σύστημα

$$(\Sigma_1)\quad \begin{array}{ll} 5x+3y-4z=17 & (\alpha)\\ 4x-7y+3z=1 & (\beta)\\ 6x+5y+2z=30 & (\gamma)\end{array}$$

τὸ ὁποῖον ἂς ἐπιλύσωμεν μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως.

Ἂν ἐπιλύσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ (Σ_1) ἔστω τὴν (α) ὡς πρὸς x καὶ ἐν συνεχείᾳ ἀντικαταστήσωμεν τὴν εὑρεθεῖσαν ἔκφρασιν τοῦ x συναρτήσει τῶν y καὶ z εἰς τὰς δύο ἄλλας, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 5x+3y-4z=17 \\ 4x-7y+3z=1 \\ 6x+5y+2z=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17-3y+4z}{5} \\ 4\cdot\dfrac{17-3y+4z}{5}-7y+3z=1 \\ 6\cdot\dfrac{17-3y+4z}{5}+5y+2z=30 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17-3y+4z}{5} \\ -47y+31z=-63 \\ 7y+34z=48 \end{cases}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν μορφὴν τοῦ συστήματος συμπεραίνομεν ὅτι, διὰ νὰ ἔχῃ λύσιν τὸ (Σ_1) θὰ πρέπῃ νὰ ἔχῃ λύσιν τό :

$$(\Sigma_1') : \begin{cases} -47y+31z=-63 \\ 7y+34z=48 \end{cases}$$

Ἂν ἐπιλύσωμεν τὸ (Σ_1') μὲ τὴν μέθοδον τῆς συγκρίσεως ἢ μὲ ὁποιανδήποτε ἄλλην μέθοδον λαμβάνομεν ὡς λύσιν αὐτοῦ τὴν $(y=2,\ z=1)$.

Ἄρα τελικῶς θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} x=\dfrac{17-3y+4z}{5} \\ -47y+31z=-63 \\ 7y+34z=48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17-3y+4z}{5} \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17-3\cdot2+4\cdot1}{5} \\ y=2 \\ z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ z=1 \end{cases}$$

Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει μίαν λύσιν τὴν (3,2,1)

Δηλ. τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (Σ_1) εἶναι τό :

$$S=\{\,(x,y,z) : x=3,\ y=2,\ z=1\,\}=\{\,(3,2,1)\,\}.$$

Ἂς λύσωμεν τώρα τὸ ἴδιον σύστημα μὲ τὴν μέθοδον τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν συστημάτων μὲ δύο ἐξισώσεις, ἀπαλείφομεν τὸν ἕνα ἄγνωστον ἔστω τὸν z μεταξὺ τῶν (α), (γ) καὶ (β), (γ) καὶ ἔχομεν :

(α) $5x+3y-4z=17 \quad \cdot 1$

(γ) $6x+5y+2z=30 \quad \cdot 2$

(δ) $17x+13y \quad =77$

(Πολλαπλασιάζομεν τὴν (α) ἐπὶ 1 καὶ τὴν (γ) ἐπὶ 2 καὶ προσθέτομεν)

Ὁμοίως ἂν πολλαπλασιάσωμεν τὴν (β) ἐπὶ —2 καὶ τὴν (γ) ἐπὶ 3 καὶ προσθέσωμεν, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν (ε).

(β) $4x-7y+3z=1 \quad \cdot(-2)$

(γ) $6x+5y+2z=30 \quad \cdot 3$

(ε) $10x+29y \quad =88$

Οὕτω τὸ σύστημα (Σ_1) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τό :

$$\begin{aligned} 5x+3y-4z&=17 \quad (\alpha)\\ 17x+13y \quad &=77 \quad (\delta)\\ 10x+29y \quad &=88 \quad (\varepsilon)\end{aligned}$$

Ἂν τώρα ἐργασθῶμεν ὡς καὶ προηγουμένως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ δοθὲν σύστημα (Σ_1) ἔχει μίαν λύσιν τὴν (3,2,1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐπιλύσατε γραφικῶς τὰ κάτωθι συστήματα :

α) $4x-6y=16$, $2x-\frac{y}{2}=3$ β) $2x+2y=3$, $x+y=1$ γ) $x-\frac{y}{3}-\frac{2}{3}=0$, $3x-y-12=0$

δ) $2x+2y=-4$, $x-y=3$ ε) $\frac{3}{2}x+y=1$, $3x+2y=2$ στ) $\frac{x}{3}-2y=2$, $x-6y=3$

2. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς τὰ κάτωθι συστήματα :

α) $9x-y=41$, $y=3x-11$ β) $3x-18y=51$, $y-3x=0$ γ) $x+y=36$, $\frac{x}{y}=\frac{5}{7}$

δ) $26x-75y=29$, $25y+13x=77$ ε) $19x+4y=18$, $3x-y=11$ στ) $x+y=32$, $x-y=7$

ζ) $9x-2y=5$ $\quad$ η) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=4$ $\quad$ ϑ) $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=5$

$5x-2y=1$ $\quad$ $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=8$ $\quad$ $\frac{x}{4}=\frac{2y}{3}+4$

3. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς τὰ κάτωθι συστήματα :

α) $\frac{7x+4y}{5}=\frac{5x+1}{2}$ $\quad$ β) $\frac{15x+13y}{8}=\frac{7x-1}{5}$

$\frac{5x+1}{3}=\frac{3y+10}{8}$ $\quad$ $\frac{11x+6y}{9}=\frac{14x+13y}{13}$

γ) $\frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{4}=1$ $\quad$ δ) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{4}+1$

$\frac{3x-1}{5}+\frac{2y-3}{4}=6$ $\quad$ $\frac{2x-y}{3}=\frac{y+x}{2}-3$

ε) $\frac{x+1}{y+5}=\frac{1}{3}$ $\quad$ στ) $4x+\frac{y}{3}=1$ $\quad$ ζ) $\frac{3}{2}(x+2)-\frac{6}{5}(y+3)=0$

$3(y-3)=2(x+2)$ $\quad$ $x=\frac{y-1}{4}$ $\quad$ $\frac{1}{6}(x-2)+\frac{1}{2}(y+2)=2$

4. Ἐπιλύσατε ἀριθμητικῶς τὰ συστήματα :

α) $(x+14)(y+2)-(x-2)(y+3)=200$ $\quad$ β) $(9x-5)(4y-3)=$

$9x+10=8y+12$ $\quad$ $=(3x+1)(12y-19)$

$27x+25=26y$

γ) $(6x-7)(4y-11)-(8x-14)(3y-4)+95=0$

$(9x+2)(6y+5)-(3x+1)(18y+19)+39=0$

5. Χωρὶς νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα, νὰ εὑρεθῇ ποῖα ἔχουν μίαν λύσιν, ποῖα ἔχουν ἀπειραρίθμους λύσεις καὶ ποῖα δὲν ἔχουν οὐδεμίαν λύσιν.

α) $4x+2y=6$ $\quad$ β) $3x-4y=12$ $\quad$ γ) $8x-4y=1$

$2x+y=3$ $\quad$ $9x-12y=5$ $\quad$ $6x-3y=\frac{3}{4}$

δ) $35x+7y-21=0$ $\quad$ ε) $12x=4+3y$ $\quad$ στ) $12x+3y=7$

$5x+y-3=0$ $\quad$ $60x=3+15y$ $\quad$ $3x+4y=6$

6. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $5x-3y=4$.

Νὰ εὑρεθῇ μία ἄλλη ἐξίσωσις, ἡ ὁποία μὲ τὴν δοθεῖσαν νὰ σχηματίζῃ σύστημα τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ α) μίαν λύσιν, β) ἀπειραρίθμους λύσεις καὶ γ) νὰ μὴν ἔχῃ οὐδεμίαν λύσιν.

7. Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα·

α) $x+y=2$, $x-z=1$, $z-y=3$

β) $2x+3y=12$, $5y+6z=16$, $3x-4z=5$

γ) $x+3y-2z=2$, $3x+2y+z=2$, $y+3z=5$

δ) $5x+4y+2z=11$, $4x-5y+3z=24$, $3x-2y=5$

ε) $4x-3y+2z=10$, $5x+6y-7z=4$, $10x-2y-3z=7$

στ) $3x-2y+4z=2$, $5x+3y-6z=16$, $4x+7y-9z=27$

ζ) $6x+9y+4z=7$, $5x+12y+6z=8$, $3x-6y+10z=2$

8. Προβλήματα λυόμενα μὲ τὴν βοήθειαν συστημάτων πρώτου βαθμοῦ.

8.1 Γενικά.

Μέχρι τώρα ἔχομεν μάθει νὰ ἐπιλύωμεν προβλήματα μὲ ἕνα ἄγνωστον, δηλ. προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα αἱ σχέσεις αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καὶ τὸν ἄγνωστον εἶναι ἐν γένει μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ.

Τώρα θὰ ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἓν πρόβλημα εἰς τὸ ὁποῖον οἱ ἄγνωστοι εἶναι περισσότεροι τοῦ ἑνὸς μὲ τὴν βοήθειαν τῶν συστημάτων.

Ὡς καὶ εἰς τὰ προβλήματα μὲ ἕνα ἄγνωστον, αἱ σχέσεις αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ δεδομένα (ἀριθμοὺς) τοῦ προβλήματος μὲ τοὺς ἀγνώστους, καὶ αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ προβλήματος, θὰ εἶναι πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι θὰ σχηματίζουν ἓν σύστημα ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τοῦ ὁποίου θὰ προκύπτῃ καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος.

Παραδειγματα :

Πρόβλημα 1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν ἑνὸς πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ του εἶναι σήμερον 74 ἔτη. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι μετὰ 3 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ.

Ἐπίλυσις : Ἂν παραστήσωμεν μὲ x τὴν σημερινὴν ἡλικίαν τοῦ πατρὸς καὶ y τὴν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ, τότε ἐπὶ τῇ βάσει τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν σχέσιν ἥτις συνδέει τὰς ἡλικίας αὐτῶν τὴν ἐξίσωσιν :

$$x+y=74 \qquad (1)$$

Ὁμοίως ἡ σχέσις ἡ ὁποία θὰ συνδέῃ τὰς ἡλικίας αὐτῶν μετὰ 3 ἔτη θὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις :

$$x+3=3(y+3) \qquad (2)$$

Δεδομένου ὅτι μετὰ τρία ἔτη ἀπὸ σήμερον ὁ πατὴρ θὰ ἔχῃ ἡλικίαν $x+3$ ἐτῶν, ἐνῷ ὁ υἱὸς $y+3$ ἐτῶν.

Αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) σχηματίζουν ἓν σύστημα ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ ὁποίου θὰ προκύψουν καὶ αἱ ζητούμεναι ἡλικίαι.

Ἐπιλύομεν λοιπὸν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2).

$$\begin{cases} x+y=74 \\ x+3=3(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=74 \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=74-y \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=74-y \\ 74-y-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=74-y \\ y=17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=57 \\ y=17 \end{cases}$$

Ἄρα ἡ σημερινὴ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι 57 ἔτη, ἐνῷ τοῦ υἱοῦ 17.

Ἐπαλήθευσις : Πράγματι ἂν λάβωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν σημερινῶν ἡλικιῶν εὑρίσκομεν $57+17=74$.

Ἐνῷ μετὰ τρία ἔτη, ὁ πατὴρ ὁ ὁποῖος θὰ εἶναι $57+3=60$ ἐτῶν, θὰ ἔχῃ πράγματι τριπλασίαν ἡλικίαν ἀπὸ τὸν υἱόν, ἡ ἡλικία τοῦ ὁποίου θὰ εἶναι $17+3=20$ ἐτῶν.

Πρόβλημα 2ον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ μία εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης καὶ ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι 30m.

Ἐπίλυσις : Ἂν καλέσωμεν x τὴν μεγάλην διάστασιν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου καὶ y τὴν μικράν, τότε ἐκ τοῦ ὅτι ἡ μία εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης θὰ ἔχωμεν ὅτι αὗται θὰ συνδέωνται μεταξύ των μὲ τὴν ἐξίσωσιν :

$$x=4y \qquad (1)$$

Ἐκ τοῦ ὅτι δὲ ἡ περίμετρος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 30m, συνάγομεν ὅτι μία δευτέρα ἐξίσωσις ἡ ὁποία θὰ συνδέῃ τὰς διαστάσεις αὐτοῦ θὰ εἶναι ἡ :

$$2x+2y=30 \qquad (2)$$

Ἂν ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν :

$$\begin{cases} x=4y \\ 2x+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ 2\cdot 4y+2y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4y \\ y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=12 \\ y=3 \end{cases}$$

Ἄρα αἱ ζητούμεναι διαστάσεις εἶναι 12m καὶ 3m.

Πρόβλημα 3ον. Νὰ εὑρεθῇ ἓν κλάσμα ἂν γνωρίζωμεν ὅτι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἔχουν ἄθροισμα 7, ἂν δὲ προσθέσωμεν 3 εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ 2 εἰς τὸν παρονομαστήν του, τὸ κλάσμα γίνεται ἴσον μὲ 1.

Ἐπίλυσις : Ἂν καλέσωμεν x τὸν ἀριθμητὴν καὶ y τὸν παρονομαστὴν τοῦ ζητουμένου κλάσματος, τότε ἡ σχέσις ἡ ὁποία θὰ συνδέῃ αὐτοὺς θὰ εἶναι ἡ ἐξίσωσις : $x+y=7$ (1)

Ἐκ τῶν δεδομένων δὲ τοῦ προβλήματος ἕπεται καὶ ἡ σχέσις $\frac{x+3}{y+2}=1$ (2) Ἄρα ἡ ἐπίλυσις τοῦ προβλήματος θὰ προκύψῃ ἀπὸ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος :

$$\begin{cases} x+y=7 \\ \frac{x+3}{y+2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x+3=y+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4. \end{cases}$$

Ἑπομένως τὸ ζητούμενον κλάσμα εἶναι τὸ $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$

Ἐπαλήθευσις : Πράγματι τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων εἶναι $3+4=7$ Ἐξ ἄλλου ἂν προσθέσωμεν 3 καὶ 2 ἀντιστοίχως εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν τοῦ $\frac{3}{4}$ λαμβάνομεν : $\frac{3+3}{4+2}=\frac{6}{6}=1$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α' 1. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἂν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 70 καὶ ἡ διαφορά των 20.

2. Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 240. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν μεγαλύτερον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ μικροτέρου προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 385. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

3. Ἡ ἁπλοποιημένη μορφὴ ἑνὸς κλάσματος εἶναι $\frac{2}{3}$. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ κατὰ 5 καὶ τὸν παρονομαστὴν κατὰ 9 λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{3}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κλάσμα.

4. Ἕνας διψήφιος ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ τὸ 7—πλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμὸν κατὰ 27 θὰ προκύψῃ ἕνας νέος ἀριθμὸς μὲ ἀντίστροφον σειρὰν ψηφίων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

5. Ἕνας τριψήφιος περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 5. Ἐὰν ἀντιστρέψωμεν τὰ δύο του πρῶτα ψηφία, προκύπτει ἕνας νέος ἀριθμὸς πρὸς τὸν ὁποῖον ἔχει σχέσιν ὁ πρῶτος 7:3. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 180. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

'Ομὰς Β' (Γεωμετρίας). 6. Εἰς ἓν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ∢Α=56° καὶ ἡ ∢Β εἶναι κατὰ 42° μεγαλυτέρα τῆς ∢Γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ∢Β καὶ ∢Γ.

7. Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 39 cm. Ἡ μία πλευρὰ εἶναι κατὰ 6 cm μεγαλυτέρα τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

8. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν μίαν κάθετον πλευρὰν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ 4 cm καὶ αὐξήσωμεν τὴν ἑτέραν κατὰ 6 cm, ἡ ὑποτείνουσα παραμένει ἡ ἰδία. Ὁμοίως παραμένει ἡ ἰδία, ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν πρώτην κάθετον κατὰ 7cm καὶ ἐλαττώσωμεν τὴν δευτέραν κατὰ 17cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ τριγώνου. (Ἐφαρμόσατε τὸ πυθαγόρειον θεώρημα).

9. Ἐὰν αὐξήσωμεν κατὰ 9 m τὴν μικρὰν πλευρὰν ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 54 m καὶ ἐλαττώσωμεν τὴν ἄλλην κατὰ 4 m, αὐξάνεται ἡ ἐπιφάνεια του κατὰ 12 m². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

10. Ἐὰν αὐξήσωμεν καὶ τὶς δύο πλευρὲς ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου κατὰ 1cm, αὐξάνεται ἡ ἐπιφάνεια του κατὰ 13 cm². Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν μικροτέραν πλευρὰν κατὰ 2 cm, ἐλαττώνεται ἡ ἐπιφάνεια του κατὰ 8 cm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

'Ομὰς Γ' (Φυσικῆς). 11. Ἐκ τῶν ἄκρων ἑνὸς μοχλοῦ μήκους 45 cm εἶναι ἀνηρτημένα βάρη, ἔχοντα λόγον 7:2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῶν βραχιόνων τοῦ μοχλοῦ.

12. Οἱ βραχίονες ἑνὸς μοχλοῦ ἔχουν λόγον 5:9. Τὰ ἀνηρτημένα ἐκ τῶν ἄκρων τοῦ μοχλοῦ βάρη, ζυγίζουν συνολικῶς 154 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ ἕκαστον βάρος.

13. Ἓν μεταλλικὸν ἀντικείμενον ἀποτελεῖται ἐκ κασσιτέρου καὶ χαλκοῦ. Τοῦτο ζυγίζει 500 gr* καὶ ἐντὸς τοῦ ὕδατος 441 gr*. Νὰ εὑρεθῇ πόσον κασσίτερον καὶ πόσον χαλκὸν περιέχει, ἐὰν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ κασσιτέρου εἶναι 7,29 gr*/cm³ καὶ τοῦ χαλκοῦ 8,88 gr*/cm³.

14. 8 m³ ξύλου φιλύρας ζυγίζουν ὅσον καὶ 5 m³ ξύλου ὀξυᾶς. 7 dm³ ξύλου φιλύρας καὶ 9 dm³ ξύλου ὀξυᾶς ζυγίζουν μαζὶ 10,7 kgr*. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ζυγίζει 1 dm³ ἐξ ἑκάστου εἴδους.

15. Ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν Ἱέρων διέταξε τὸν περίφημον

μαθηματικὸν Ἀρχιμήδην (287—221 π.Χ) νὰ καθορίσῃ πόσον χρυσὸν καὶ πόσον ἄργυρον περιεῖχεν τὸ ἐκ 10 kgr* στέμμα του, χωρὶς νὰ τὸ καταστρέψῃ.

Ὁ γνωστὸς Ρωμαῖος ἀρχιτέκτων Βιτρούβιος (100 μ.Χ) παρέχει τὴν πληροφορίαν ὅτι τὸ στέμμα ἔχανε ἐντὸς τοῦ ὕδατος 0, 625 kgr* καὶ ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει ἐντὸς τοῦ ὕδατος τὸ $\frac{1}{19}$ τοῦ βάρους του καὶ ὁ ἄργυρος τὸ $\frac{1}{10}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐκ πόσου χρυσοῦ καὶ ἐκ πόσου ἀργύρου ἀπετελεῖτο τὸ στέμμα.

Ὁμὰς Δ' (Διάφορα). 16. Ἕνα ἠλεκτρόφωνον καὶ 5 δίσκοι μουσικῆς κοστίζουν 2765 δρχ. Διὰ τὸ ἴδιον ἠλεκρόφωνον καὶ 12 δίσκους πληρώνομεν 3.040 δρχ.

Νὰ εὑρεθῇ πόσον κοστίζει τὸ ἠλεκτρόφωνον καὶ πόσον ἕκαστος δίσκος.

17. Μία μητέρα ἔχει τὴν διπλασίαν ἡλικίαν ἀπὸ τὶς δύο κόρες της μαζί. Ἡ μεγαλυτέρα ἔχει τὴν διπλασίαν ἡλικίαν τῆς νεωτέρας. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστης, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι μετὰ ἀπὸ 9 ἔτη ἡ ἡλικία τῆς μητέρας θὰ εἶναι τριπλασία τῆς νεωτέρας κόρης.

18. Ἡ Μαριάνα ψώνισε γιὰ τὴν μητέρα της καὶ τὴν θεία της. Ἀγόρασε πρῶτον 4 kgr* ζάχαρι καὶ 3 kgr* μακαρόνια καὶ ἔδωσε 63 δρχ. καὶ δεύτερον 3 kgr* ζάχαρι καὶ 8 kgr* μακαρόνια καὶ ἔδωσε 76 δρχ.

Νὰ εὑρεθῇ πόσον τιμᾶται τὸ kgr* ἑκάστου εἴδους.

19. Ἕνας γεωργὸς ἀγόρασε εἰς μίαν ζωοπανύγηριν 2 μόσχους πρὸς 1.800 δρχ. Ἀργότερα τοὺς ἐπώλησε. Διὰ τὸν ἕνα μόσχο ἔλαβεν μόνον τὰ $\frac{9}{10}$ τῆς τιμῆς του διὰ δὲ τὸν δεύτερον τὰ $\frac{5}{4}$. Συνολικῶς ἐκέρδισεν 100 δρχ.

Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἀγόρασε ἕκαστον μόσχον.

20. Εἰς μίαν ἀγροικίαν ὑπάρχουν ὄρνιθες καὶ κουνέλια. Νὰ εὑρεθῇ πόσες ὄρνιθες καὶ πόσα κουνέλια ὑπάρχουν ἂν ὅλα τὰ ζῶα ἔχουν συνολικῶς 35 κεφαλὲς καὶ 19 πόδες.

21. Ἕνα σῶμα κεντρικῆς θερμάνσεως περιέχει 184 lit νεροῦ καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ γεμίσῃ διὰ δύο ἀγωγῶν κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: Ἐὰν ὁ πρῶτος ἀγωγὸς παρέχει ὕδωρ ἐπὶ 28' καὶ ὁ δεύτερος ἐπὶ 20' λεπτά,

ἢ ἐὰν 8′ λεπτὰ ὁ πρῶτος καὶ 32′ ὁ δεύτερος. Νὰ εὑρεθῇ πόσα λίτρα ὕδατος ρέουν ἐξ ἑκάστου ἀγωγοῦ ἀνὰ λεπτόν.

Ὁμὰς Ε′ 22. Ἕνας διψήφιος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ 3. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι κατὰ $1\frac{5}{6}$ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ καὶ κατὰ 11 ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν ψηφίων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

23. Ἕνας τριψήφιος ἀριθμὸς εἶναι κατὰ 180 μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν ποὺ προκύπτει ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων ψηφίων του ἀριστερὰ καὶ κατὰ 36 μικρότερος ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων δεξιά. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐξωτερικῶν ψηφίων εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ μεσαίου ψηφίου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

24. Μία δεξαμενὴ γεμίζει διὰ τριῶν ἀγωγῶν Α, Β, Γ. Οἱ Α καὶ Β τὴν γεμίζουν εἰς 45′ λεπτά, οἱ Α καὶ Γ εἰς μίαν ὥραν καὶ οἱ Β καὶ Γ εἰς $1\frac{1}{2}$ ὥραν.

Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσην ὥραν γεμίζει τὴν δεξαμενὴν ἕκαστος ἀγωγὸς χωριστά, καὶ εἰς πόσην ὥραν καὶ οἱ τρεῖς μαζί.

9. Πρωτοβάθμιοι ἀνισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους.

9.1 Θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος ἐπιπέδου ὡς πρὸς εὐθεῖαν

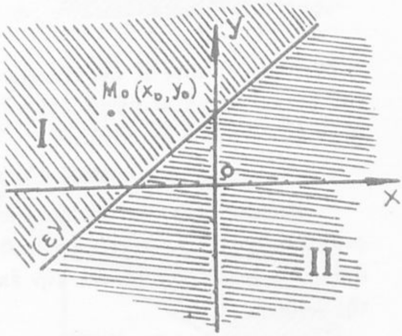
Ὡς εἰς τὴν § 6 ἐμάθομεν κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (1) μὲ $|\alpha|+|\beta|>0$ παριστᾷ εἰς τὸ ἐπίπεδον μίαν εὐθεῖαν γραμμήν.

Ἔστω λοιπὸν (ε) ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποίᾳ παριστᾷ γραφικῶς τὴν (1) εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Ox καὶ Oy.

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον τοῦτο εἰς δύο ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα ἔστω τὰ I καὶ II. (σχ. 10).

Ἀποδεικνύεται τότε ὅτι :

Ἂν ἓν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου καθιστᾷ τὸ $\alpha x+\beta y+\gamma$ θετικόν, τότε ὅλα τὰ σημεῖα αὐτοῦ θὰ τὸ καθιστοῦν θετικόν, τὰ δὲ σημεῖα τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου θὰ καθιστοῦν αὐτὸ ἀρνητικόν.



Σχ. 10

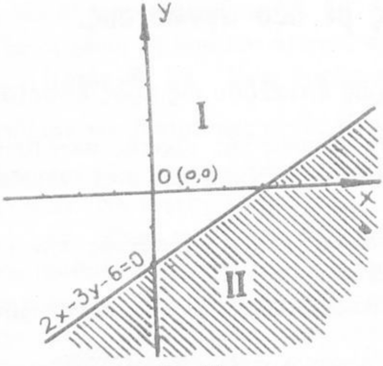
Κατόπιν τῆς ἀνωτέρω προτάσεως εἶναι εὔκολον νὰ εὕρωμεν τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος ἑνὸς ἐπιπέδου ὡς πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἀρχικῶς κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν καὶ ὁρίζομεν οὕτω τὰ δύο ἀνοικτὰ ἡμιεπίπεδα I καὶ II. Ἐν συνεχείᾳ λαμβάνομεν ἓν σημεῖον π.χ $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ ἑνὸς ἡμιεπιπέδου ἔστω τοῦ I καὶ βλέπομεν ἂν αἱ συντεταγμέναι αὐτοῦ καθιστοῦν τὸ $\alpha x+\beta y+\gamma$ θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Καὶ ἂν μὲν τὸ $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma>0$ τότε τὸ ἡμιεπίπεδον I εἶναι τὸ θετικὸν καὶ τὸ II τὸ ἀρνητικόν. Ἐνῷ ἂν τὸ $\alpha x_0+\beta y_0+\gamma<0$ τότε ἀρνητικὸν εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον I καὶ θετικὸν τὸ II.

Παράδειγμα :

Νὰ ὁρισθῇ τὸ θετικὸν καὶ ἀρνητικὸν μέρος τοῦ ἐπιπέδου ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν $2x-3y-6=0$.

Κατ' ἀρχὴν κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν. Ἂς λάβωμεν τώρα ἀντὶ ἄλλου σημείου τὸ σημεῖον O(0,0) τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τὸ ἡμιεπίπεδον I. Τὸ σημεῖον τοῦτο καθιστᾷ τὸ $2x-3y-6$ ἴσον πρὸς -6



Σχ. 11

δηλ. ἀρνητικὸν καὶ ἄρα συνάγομεν ὅτι τὸ ἀρνητικὸν ἡμιεπίπεδον ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν μὲ ἐξίσωσιν $2x-3y-6=0$ εἶναι τὸ I καὶ θετικὸν τὸ II. (σχ. 11)

9.2 Πρωτοβάθμιος ἀνίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἐξ ὅσων εἰς τὴν § 9.1 ἀνεφέρθησαν γίνεται φανερὸν ὅτι ἂν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου θεωρήσωμεν μίαν εὐθεῖαν ἔστω (ε) μὲ ἐξίσωσιν $\alpha x+\beta y+\gamma=0$, τότε αἱ συντεταγμέναι (x_0,y_0) τυχόντος σημείου $M_0(x_0,y_0)$ τοῦ ἐπιπέδου μὴ κειμένου ἐπὶ τῆς εὐθείας $(M\notin(\varepsilon))$ θὰ ἐπαληθεύουν μίαν ἐκ τῶν δύο ἀνισοτήτων :

$$\alpha x_0+\beta y_0+\gamma>0 \text{ ἢ } \alpha x_0+\beta y_0+\gamma<0$$

Ἐπειδὴ δι' ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων ὑπάρχουν ἀπειράριθμα ζεύγη (x,y) σχετικῶν ἀριθμῶν τὰ ὁποῖα τὴν ἐπαληθεύουν καὶ ἀπειράριθμα τὰ ὁποῖα δὲν τὴν ἐπαληθεύουν, διὰ τοῦτο αἱ ἀνισότητες τῆς μορφῆς

$$\alpha x+\beta y+\gamma>0 \quad (\alpha) \quad \text{καὶ} \quad \alpha x+\beta y+\gamma<0 \quad (\beta)$$

ὀνομάζονται **ἀνισώσεις** πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους. Κάθε ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει μίαν τοιαύτην ἀνίσωσιν, λέγεται **λύσις** αὐτῆς.

Π.χ διὰ τὴν ἀνίσωσιν $2x-3y-6>0$ ἓν ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύει αὐτὴν εἶναι τὸ $(x=4,\ y=y_0)$ ὅπου $y_0<\frac{2}{3}$ (δηλ. ὁ y_0 δύναται νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε σχετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $\frac{2}{3}$). Πράγματι $2\cdot4-3\cdot y_0-6>8-3\cdot\frac{2}{3}-6=0$

9.3 Γραφικὴ (ἢ γεωμετρικὴ) παράστασις μιᾶς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους.

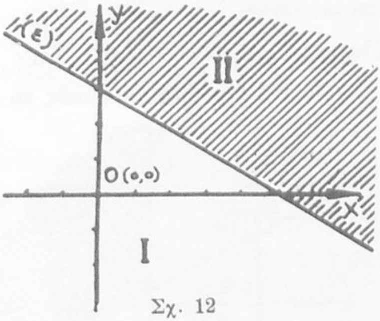
Ἂν τὸ ζεῦγος (x,y) τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι λύσις τῆς ἀνισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma>0$ ἢ $\alpha x+\beta y+\gamma<0$ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ζεῦγος συντεταγμένων ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τότε εἶναι προφανὲς (βλ. § 9.1 καὶ 9.2) ὅτι τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ εὑρίσκεται εἰς ἓν ἐκ τῶν δύο ἀνοικτῶν ἡμιεπιπέδων (θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ) εἰς τὰ ὁποῖα ἡ εὐθεῖα $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων. Καὶ ἂν μὲν τὸ (x,y) εἶναι λύσις τῆς ἀνισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma>0$ τότε τὸ ἀντίστοιχον σημεῖον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ θετικὸν ἡμιεπίπεδον ἐνῷ ἂν εἶναι λύσις τῆς $\alpha x+\beta y+\gamma<0$ τὸ ἐν λόγῳ σημεῖον θὰ εὑρίσκεται εἰς τὸ ἀρνητικὸν ἡμιεπίπεδον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma>0$ ἢ $\alpha x+\beta y+\gamma<0$ θὰ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ ὁλοκλήρου τοῦ θετικοῦ ἢ ἀρνητικοῦ ἡμιεπιπέδου ἀντιστοίχως, ἂν τὰ δύο ὡς ἄνω ἡμιεπίπεδα τὰ θεωρήσωμεν ὡς σημειοσύνολα μὲ ἀπειράριθμον πλῆθος στοιχείων.

Παράδειγμα :

Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ ἀνίσωσις $6x+10y-30>0$

Κατασκευάζομεν ἀρχικῶς τὴν εὐθεῖαν (ε) μὲ ἐξίσωσιν $6x+10y-30=0$ (σχ. 12). Αὕτη χωρίζει τὸ ἐπίπεδον (βλ. § 9.1) εἰς τὸ θετικὸν ἡμιεπίπεδον II καὶ τὸ ἀρνητικὸν I. Ἄρα ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς δοθείσης ἀνισώσεως εἶναι τὸ θετικὸν ἡμιεπίπεδον II, ἐνῷ τὸ ἀρνητικὸν ἡμιεπίπεδον I, εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $6x+10y-30<0$



Σχ. 12

9.4 Συστήματα δύο πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἂν λάβωμεν τὰς δύο ἀνισώσεις

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1>0 \qquad (\alpha)$$
$$\alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2>0 \qquad (\beta)$$

καὶ ζητήσωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς κοινὰς λύσεις αὐτῶν, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν ἓν ***σύστημα*** δύο πρωτοβαθμίων ἀνισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους (μεταβλητάς).

Διὰ τὴν γραφικὴν ἐπίλυσιν ἑνὸς τοιούτου συστήματος κατασκευάζομεν ἀρχικῶς τὰς εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) τῶν ὁποίων αἱ ἐξισώσεις εἶναι ἀντιστοίχως

$$\alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \text{ καὶ } \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2=0$$

καὶ ἐν συνεχείᾳ προσδιορίζομεν τὴν τομὴν τῶν ἡμιεπιπέδων, ἕκαστον τῶν ὁποίων παριστᾷ γραφικῶς τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῶν ἀνισώσεων (α) ἢ (β).

Ἂν αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) δὲν εἶναι παράλληλοι ἡ τομὴ αὕτη θὰ εἶναι γενικῶς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς κυρτῆς γωνίας.

Ἐνῷ ἂν αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι, τότε τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι :

α. Τὸ κενὸν σύνολον.

β. Ἓν ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον.

γ. Τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς ταινίας.

Κατωτέρω ἀναφέρονται παραδείγματα δι' ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων.

Παραδείγματα :

1. Νὰ ἐπιλυθῇ γραφικῶς τὸ σύστημα :

$$2x+4y-8>0$$
$$x-3>0$$

Σχ. 13

Κατ' ἀρχὴν φέρομεν τὰς εὐθείας αἱ ὁποῖαι παριστοῦν γραφικῶς τὰς ἐξισώσεις $2x+4y-8=0$ καὶ $x-3=0$ (σχ. 13)

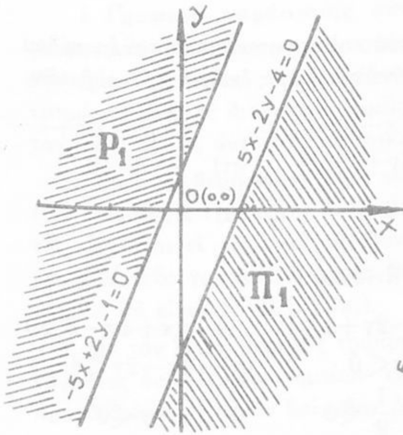
Τότε τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς πρώτης ἀνισώσεως παρίσταται ἀπὸ τὸ ἡμιεπίπεδον ἄνω τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $2x+4y-8=0$ ἐνῷ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς δευτέρας ἀπὸ τὸ ἡμιεπίπεδον δεξιὰ τῆς εὐθείας μὲ ἐξίσωσιν $x-3=0$.

Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν ἡμιεπιπέδων εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κυρτῆς γωνίας $\sphericalangle$(Γα, Γβ) τὸ ὁποῖον παριστᾷ καὶ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ συστήματος.

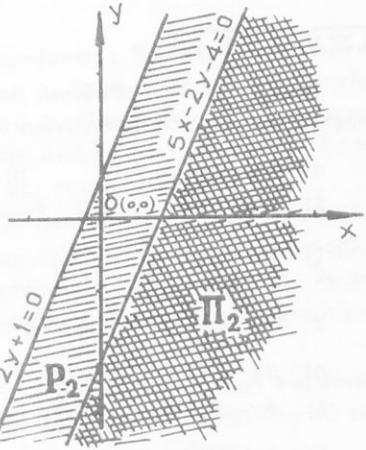
2. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα :

$$(\Sigma_1): \begin{cases} -5x+2y-1>0 \\ 5x-2y-4>0 \end{cases} \qquad (\Sigma_2): \begin{cases} 5x-2y+1>0 \\ 5x-2y-4>0 \end{cases}$$

$$(\Sigma_3): \begin{cases} 5x-2y+1>0 \\ -5x+2y+4>0 \end{cases}$$

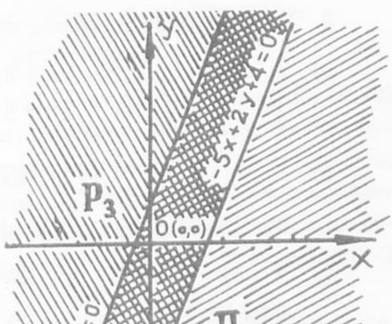


Σχ. 14



Σχ. 15

Ἡ γραφικὴ ἐπίλυσις τῶν ἀνωτέρω συστημάτων φαίνεται εἰς τὰ σχήματα 14, 15 καὶ 16 ἀντιστοίχως.



Σχ. 16

Διὰ τὸ (Σ_1) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ πρώτη ἀνίσωσις αὐτοῦ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἡμιεπιπέδου P_1 ἐνῷ ἡ δευτέρα ὑπὸ τοῦ Π_1 τοῦ σχήματος 14. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν ἡμιεπιπιπέδων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον καὶ ἄρα τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (Σ_1) θὰ εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.

Μὲ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω συλλογισμοὺς συμπεραίνομεν ὅτι :

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (Σ_2) εἶναι τὸ ἡμιεπίπεδον Π_2 τοῦ σχήματος 15, ἐνῷ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τοῦ (Σ_3) εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ταινίας ποὺ σχηματίζεται ὑπὸ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν μὲ ἐξισώσεις $5x-2y+1=0$ καὶ $-5x+2y+4=0$ (σχ. 16).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ θετικὰ καὶ ἀρνητικὰ μέρη τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς συστήματος δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν εὐθειῶν.

α) $2x-4y+1=0$ β) $x+3y=6$ γ) $y=2x+4$

δ) $2x-6=0$ ε) $2x-6y+3=0$ στ) $x-1=0$

ζ) $2x+3y=\frac{1}{2}$ η) $x=3$ θ) $4y=1$

2. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς αἱ ἀνισώσεις.

α) $3x-2y-6<0$ β) $4x-2y+1>0$ γ) $2x+4y-3>0$

δ) $4x-2y>0$ ε) $x+y<0$ στ) $3x-2y<6$

ζ) $6x>12$ η) $x-\frac{1}{2}<0$ θ) $x-y<0$

3. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ κάτωθι συστήματα.

α) $x>2y-1$, $2x-3y-2>0$ β) $2x+3y-10>0$, $2x+3y-10<0$ γ) $-x+2y-4<0$, $x+y-2<0$

δ) $x+\frac{3}{2}y>0$, $3x-3y+6>0$ ε) $-2x+y<0$, $2-y+3>0$ στ) $3x-3y+3>0$, $x+y-1<0$

ζ) $x-3y+5>0$, $3x+2y>7$ η) $2x-3y-6>0$, $x-4>0$ θ) $x+2y-4>0$, $x-2<0$

10. Τετραγωνική συνάρτησις $y=x^2$ καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῆς.

10.1 Γενικά.

i ***Γραφικὴ παράστασις συναρτήσεως***: Καλοῦμεν γραφικὴν ἢ γεωμετρικὴν παράστασιν συναρτήσεως μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς, τὴν γραμμὴν ἐκείνην τοῦ ἐπιπέδου, τὰ σημεῖα τῆς ὁποίας ἔχουν ὡς τετμημένας μὲν τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, ὡς τεταγμένας δὲ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως.

Ἂν π.χ. θερήσωμεν τὴν συνάρτησιν $x\in\Pi\rightarrow y=f(x)=2x\in\Pi$, τότε ἐπειδὴ εἰς τὴν τιμὴν ἔστω $x=x_0\in\Pi$ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ὡς τιμὴ τῆς συναρτήσεως ἡ $f(x_0)=2x_0\in\Pi$, ἓν σημεῖον M_0 τῆς γραμμῆς ἡ ὁποία θὰ παριστᾷ γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $y=2x$ θὰ εἶναι τὸ $M_0(x_0,2x_0)$.

Μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας ὁσωνδήποτε σημείων τῆς ἐν λόγῳ γραμμῆς καὶ ἄρα νὰ τὴν προσδιορίσωμεν εἰς ἓν ἐπίπεδον δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων.

ii ***Ἀντίστροφοι συναρτήσεις***: Ἔστω ἡ συνάρτησις:

$$(1) \qquad f:\ x\in P\rightarrow y\in Q$$

μὲ τὴν ὁποίαν ὡς γνωστὸν (βλ. § 1.1) τὸ σύνολον P ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ Q. Ἂν ἡ ἀπεικόνισις αὕτη εἶναι ***ἀμφιμονοσήμαντος***, ἂν δηλ. διὰ κάθε $x\in P$ ἠμποροῦμεν νὰ ἀντιστοιχήσωμεν ἓν καὶ μόνον ἓν $y\in Q$ ὡς εἰκόνα αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, διὰ κάθε $y\in Q$ νὰ ἠμποροῦμεν νὰ ἀντιστοιχήσωμεν ἓν καὶ μόνον ἓν $x\in P$ ὡς εἰκόνα αὐτοῦ, τότε δυνάμεθα νὰ ἀπεικονίσωμεν μονοσημάντως ὄχι μόνον τὸ P ἐπὶ τοῦ Q ἀλλὰ καὶ τὸ Q ἐπὶ τοῦ P.

Ἡ ἀντίστροφος αὕτη ἀπεικόνισις καλεῖται τότε ***ἀντίστροφος συνάρτησις*** τῆς f καὶ συμβολίζεται μὲ f^{-1}.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι ἂν ἔχωμεν δύο ἀντιστρόφους συναρτήσεις f καὶ f^{-1} τότε τὸ πεδίον ***τιμῶν*** τῆς f θὰ εἶναι πεδίον ***ὁρισμοῦ*** τῆς f^{-1} ἐνῷ τὸ πεδίον ***ὁρισμοῦ*** τῆς f θὰ εἶναι πεδίον ***τιμῶν*** διὰ τὴν f^{-1}.

Εἰς τὰς § 10.2 καὶ 10.3 θὰ ἴδωμεν δύο ἐφαρμογὰς τῶν ὅσων εἰς τὸ παρὸν ἐδάφιον ἀνεφέρθησαν.

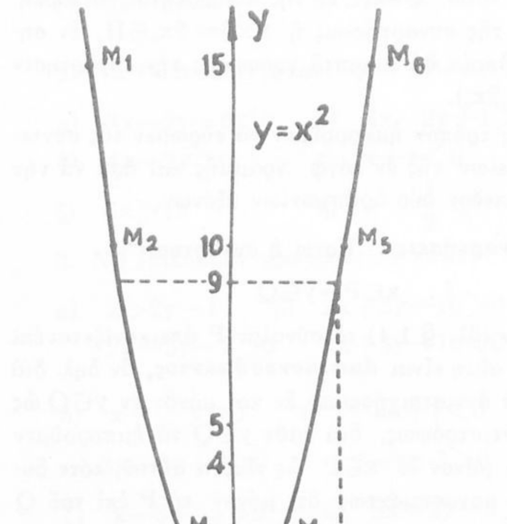
10.2 Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=x^2$.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$(1) \qquad f: \quad \Pi \ni x \rightarrow y = x^2 \in \Pi^{\geq 0}$$

τῆς ὁποίας τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὸ δὲ πεδίον τιμῶν αὐτῆς εἶναι τὸ σύνολον $\Pi^{\geq 0} = \Pi^{+} \cup \{0\}$ δηλ. τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενός.

Ἡ συνάρτησις αὕτη, ἡ ὁποία ὁρίζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του ἢ μὲ ἄλλους λόγους μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ Π ἐπὶ τοῦ γνησίου ὑποσυνόλου αὐτοῦ $\Pi^{\geq 0}$ ὀνομάζεται ***τετραγωνικὴ συνάρτησις***.



Σχ. 17

Ἂς προσπαθήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν αὐτῆς.

Πρὸς τοῦτο (βλ. § 10.1) σχηματίζομεν ἕνα πίνακα ὁ ὁποῖος θὰ περιέχῃ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς συναρτήσεως.

x	—5	—4	—3	—2	—1	0	1	2	3	4	5
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

Ἂν ἐν συνεχείᾳ τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη (x_0, y_0) τοῦ πίνακος τὰ θεωρήσωμεν ὡς ζεῦγος συντεταγμένων σημείων τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων Ox καὶ Oy καὶ ἑνώσωμεν αὐτὰ κατὰ σειράν, λαμβάνομεν μίαν καμπύλην γραμμὴν (σχ. 16) ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***παραβολὴ*** καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἓν μέρος τῆς ***γραφικῆς παραστάσεως*** τῆς τετραγωνικῆς συναρτήσεως.

Διὰ τὴν χάραξιν τῆς ἐν λόγῳ καμπύλης δὲν εἶναι βεβαίως δυνατὸν νὰ προσδιορίσωμεν ὅλα τὰ σημεῖα αὐτῆς. Διὰ τοῦτο προσδιορίζομεν κατ' ἀρχὴν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου μερικὰ ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτῆς π.χ. M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, καὶ ἐν συνεχείᾳ ἑνοῦμεν αὐτὰ κατὰ σειρὰν μὲ μίαν ὡς λέγομεν ὁμαλὴν καμπύλην γραμμήν*.

Διὰ τὴν εἰς τὸ σχ. 16 εἰκονιζομένην παραβολήν, ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι αὕτη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων εἰς τὸ σημεῖον O(0,0) καὶ ὅτι ὡς εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ἡ καμπύλη αὕτη ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων Oy.

10.3 Γραφικὴ παράστασις τῆς $y = \pm\sqrt{x}$

Ἔστω αἱ συναρτήσεις

$$f_1 : \quad \Pi^{\geq 0} \ni x \rightarrow y = x^2 \in \Pi^{\geq 0} \qquad (1)$$

$$f_2 : \quad \Pi^{\leq 0} \ni x \rightarrow y = x^2 \in \Pi^{\geq 0} \qquad (2)$$

αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν ἀντιστοίχως μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀπεικόνισιν ἡ μὲν (1) τοῦ συνόλου $\Pi^{\geq 0} = \Pi^{+} \cup \{0\}$ ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του, ἡ δὲ (2) τοῦ συνόλου $\Pi^{\leq 0} = \Pi^{-} \cup \{0\}$ (μὲ τὸ Π^{-} συμβολίζομεν τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν) ἐπὶ τοῦ $\Pi^{\geq 0}$.

Ἂν λάβωμεν τὰς ἀντιστρόφους συναρτήσεις τῶν (1) καὶ (2) (βλ. § 10.1) θὰ ἔχωμεν τάς :

$$f_1^{-1} : \quad \Pi^{\geq 0} \ni x \rightarrow y = \sqrt{x} \in \Pi^{\geq 0} \qquad (1')$$

$$f_2^{-1} : \quad \Pi^{\geq 0} \ni x \rightarrow y = -\sqrt{x} \in \Pi^{\leq 0} \qquad (2')$$

---

* Διὰ τὴν χάραξιν ὁμαλῶν καμπύλων γραμμῶν μᾶς ὑποβοηθεῖ εἰδικὸν ὄργανον τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται «καμπυλόγραμμος κανών».

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν (1′) ἀπεικονίζει τὸ σύνολον $\Pi^{\geqslant 0}$ ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του ἡ δὲ (2′) τὸ σύνολον $\Pi^{\geqslant 0}$ ἐπὶ τοῦ $\Pi^{\leqslant 0}$.

Ἄς προσπαθήσωμεν τώρα νὰ εὕρωμεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν (1′) καὶ (2′). Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν § 10,2.

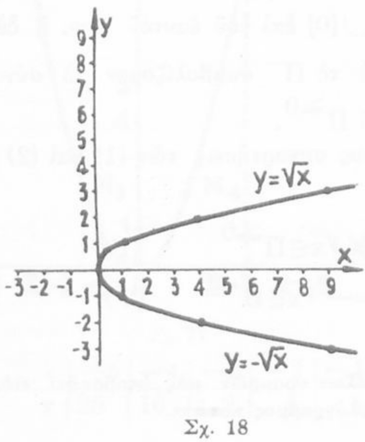
Ἀρχικῶς σχηματίζομεν ἕνα πίνακα ὁ ὁποῖος νὰ περιέχῃ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς μεταβλητῆς καὶ τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν συναρτήσεων (1′) καὶ (2′) ἀντιστοίχως.

Ἄν π.χ. ὁ x διατρέχῃ τὸ κλειστὸν διάστημα $0 \leqslant x \leqslant 6$ θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

x	0	0,5	1	2	3	4
$y=\sqrt{x}$	0	$\sqrt{0,5}=0,7$	1	$\sqrt{2}=1,4$	$\sqrt{3}=1,7$	2
$y=-\sqrt{x}$	0	$-\sqrt{0,5}=-0,7$	-1	$-\sqrt{2}=-1,4$	$-\sqrt{3}=-1,7$	2

x	5	6
$y=\sqrt{x}$	$\sqrt{5}=2,2$	$\sqrt{6}=2,4$
$y=-\sqrt{x}$	$-\sqrt{5}=-2,2$	$-\sqrt{6}=-2,4$

Ἄν καὶ πάλιν ὡς καὶ εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον τὰ ἀντίστοιχα ζεύγη (x_0, y_0) τοῦ πίνακος τὰ θεωρήσωμεν ὡς ζεύγη συντεταγμένων σημείων τοῦ ἐπιπέδου κ.λ.π. θὰ λάβωμεν τὴν εἰς τὸ σχ. 18 κατὰ προσέγγισιν χαραχθεῖσαν καμπύλην, ἡ ὁποία εἶναι μία παραβολὴ μὲ ἄξονα συμμετρίας τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων. Τὸ ἄνωθεν τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων τμῆμα αὐτῆς εἶναι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς (1′) ἐνῷ τὸ κάτωθεν αὐτοῦ τῆς (2′).



Σχ. 18

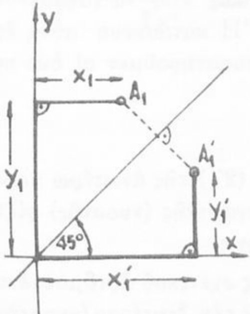
Παρατηροῦμεν τώρα

ὅτι διὰ τὰς συναρτήσεις (1′) καὶ (2′) ὡς καὶ διὰ τὴν τετραγωνικὴν συνάρτησιν ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί : (Βλ. παρατήρησιν εἰς τὸ τέλος τῆς παραγράφου).

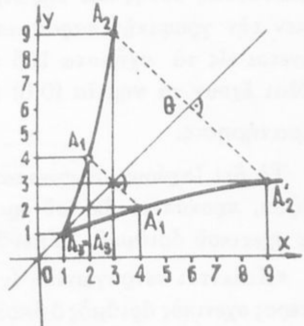
$$y=\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x\Rightarrow y^2-x=0 \qquad (1'')$$
$$y=-\sqrt{x}\Rightarrow y^2=x\Rightarrow y^2-x=0 \qquad (2'')$$
$$y=x^2\Rightarrow \qquad y-x^2=0 \qquad (3'')$$

ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων συνάγομεν ὅτι ἡ εἰς τὸ σχῆμα 17 εἰκονιζομένη παραβολὴ εἶναι μέρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς δευτεροβαθμίου* ἐξισώσεως $y-x^2=0\Leftrightarrow y=x^2$ (α)
ἐνῷ ἡ εἰς τὸ σχῆμα 18 εἶναι μέρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς ἐπίσης δευτεροβαθμίου* ἐξισώσεως $y^2-x=0\Leftrightarrow y^2=x$ (β)

Ἀλλὰ ἐπειδὴ διὰ τὰς (α) καὶ (β) παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη ἐξ αὐτῶν προκύπτει ἐκ τῆς ἄλλης ἂν εἰς τὴν θέσιν τοῦ x θέσωμεν τὸ y καὶ εἰς τὴν τοῦ y τὸ x, συμπεραίνομεν ὅτι ἂν $x=x_0$ καὶ $y=y_0$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου Α τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (α), ἓν ἀντίστοιχον σημεῖον Α′ τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς (β) θὰ ἔχῃ συντεταγμένας $x=y_0$ καὶ $y=x_0$.



Σχ. 19α

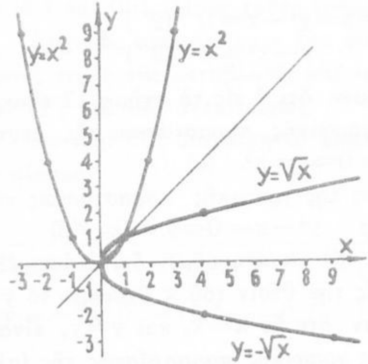


Σχ. 19β

Εἰς τὸ σχῆμα 19α ἐμφαίνεται ἡ κατασκευὴ ἑνὸς σημείου $A_1\ (x_1 y_1)$

* Ἐπειδὴ εἰς αὐτὴν ἐμφανίζεται ἡ δευτέρα δύναμις μιᾶς μεταβλητῆς.

τῆς (α) καὶ ἑνὸς ἄλλου $A'_1(x'_1, y'_1)$ τῆς (β), μὲ $x'_1 = y_1$ καὶ $y'_1 = x_1$.



Σχ. 19γ

Τὰ δύο αὐτὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐνηλλαγμένας τὰς δύο συντεταγμένας των εἶναι συμμετρικὰ τὸ ἓν τοῦ ἄλλου ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς $\sphericalangle xOy$. Τὸ αὐτὸ θὰ διαπιστώσωμεν ἂν ἐργασθῶμεν καὶ μὲ ὁποιοδήποτε ἄλλο ζεῦγος ἀντιστοίχων σημείων. Ἄρα αἱ γραφικαὶ παραστάσεις τῶν (α) καὶ (β) θὰ εἶναι παραβολαὶ συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν ἀνωτέρω διχοτόμον δηλ. ἴσαι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ἀκόμη, ὅτι ἂν ἔχωμεν παραστήσει γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $y=x^2$ τότε δυνάμεθα ἐκ τῆς γραφικῆς παραστάσεως αὐτῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας xOy νὰ κατασκευάσωμεν τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς $y^2=x$. Ἡ κατασκευὴ αὕτη ἐμφαίνεται εἰς τὰ σχήματα 19β καὶ 19γ. Ὡς παρατηροῦμεν αἱ δύο καμπύλαι ἔχουν τὰ σημεῖα (0,0) καὶ (1,1) κοινά.

Παρατήρησις.

Τὸ ὅτι ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαὶ (1″) καὶ (2″) τῆς ἀνωτέρω παραγράφου, προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς (νυοστῆς) ρίζης ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Ὑπενθυμίζομεν τοῦτον :

«Καλεῖται τετραγωνικὴ (νυοστὴ) ρίζα ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ, ἕνας δεύτερος σχετικὸς ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἂν ὑψωθῇ εἰς τὴν δευτέραν (νυοστὴν) δύναμιν δίδει τὸν πρῶτον».

Π.χ. διὰ τοὺς $\alpha, \beta \in \Pi$ θὰ ἔχωμεν $\sqrt{\alpha} = \beta$ **τότε καὶ μόνον τότε**, ἂν : $\beta^2 = \alpha$.

Μετὰ ταῦτα εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι : $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$.

Πράγματι ἐκ τῆς $(\sqrt{\alpha})=\beta \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2=\beta^2$ ἀλλὰ ἐπειδὴ $\beta^2=\alpha$ ἐξ ὁρισμοῦ, ἔχομεν $(\sqrt{\alpha})^2=\beta^2 \Rightarrow (\sqrt{\alpha})^2=\alpha$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω διὰ τὰς συνεπαγωγὰς (1'') καὶ (2'') λαμβάνομεν :

$y=\sqrt{x} \Rightarrow y^2=(\sqrt{x})^2 \Rightarrow y^2=x$ καὶ

$y=-\sqrt{x} \Rightarrow y=-1\cdot\sqrt{x} \Rightarrow y^2=(-1)^2\cdot(\sqrt{x})^2 \Rightarrow y^2=1\cdot(\sqrt{x})^2 \Rightarrow y^2=x.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=f(x)=2x^2$ $(x\in\Pi)$

2. Νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $y=f(x)=x^3-x$ ὅταν ὁ x διατρέχῃ τὸ διάστημα $-3\leq x\leq 3$

3. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς εἰς τὸ αὐτὸ σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων αἱ συναρτήσεις :

$$y=\frac{1}{x^2}\quad (x\in\Pi^+\cup\Pi^-),\qquad y=\frac{1}{\sqrt{x}}\quad (x\in\Pi^+)$$

4. Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ συναρτήσεις α) $y=x^3$ $(x\in\Pi)$

$$\beta)\ y=\frac{1}{\sqrt{x^3}}\quad (x\in\Pi^+)\qquad \gamma)\ y=\sqrt{x^3}\quad (x\in\Pi^{\geq 0})$$

11. Ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀριθμητικὴ καὶ γραφικὴ ἐπίλυσις αὐτῶν.

11.1 Γενικά :

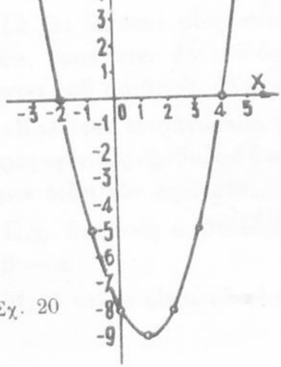
Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ μὲ α, β, γ, σταθεροὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ $\alpha \neq 0$. Ἡ συνάρτησις αὕτη παρίσταται ἐν γένει εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ὑπὸ μιᾶς καμπύλης γραμμῆς.

Ἐὰν ἀναζητήσωμεν τὰ σημεῖα τομῆς τῆς καμπύλης αὐτῆς μετὰ τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων, διὰ τὰ σημεῖα αὐτὰ θὰ ἔχωμεν $y = 0$, ὁπότε ἡ ἀνωτέρω συνάρτησις γράφεται ὡς ἑξῆς :

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \qquad (1)$$

Ἡ ἰσότης (1) τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἓν δευτεροβάθμιον πολυώνυμον ὡς πρὸς τὴν μεταβλητὴν x καλεῖται ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον (τὸν x). Αἱ τιμαὶ τοῦ x διὰ τὰς ὁποίας ἐπαληθεύεται ἡ (1) καλοῦνται ***λύσεις*** αὐτῆς, ἐνῷ ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν τιμῶν τούτων καλεῖται ***ἐπίλυσις*** τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Παράδειγμα :



Σχ. 20

Ἔστω ἡ συνάρτησις $y = x^2 - 2x - 8$. Ἡ συνάρτησις αὕτη παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τῆς παραβολῆς τοῦ σχήματος 20, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς ὁποίας ἐχρησιμοποιήθη ὁ κάτωθι πίναξ ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καὶ y.

x	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5
y	+7	0	−5	−8	−9	−8	−5	0	+7

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων εἰς τὰ σημεῖα $A(x = -2, y = 0)$ καὶ $B(x = 4, y = 0)$ ὁπότε αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 2x - 8 = 0$ εἶναι αἱ :

$$x_1 = -2 \text{ καὶ } x_2 = 4$$

11.2 Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Ἐξ ὅσων εἰς τὴν § 11.1 ἀνεφέρθησαν, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμὸν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως :

«Καλοῦμεν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ ἕνα ἄγνωστον τὴν ἐξίσωσιν τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ἐὰν θέσωμεν ἓν δευτεροβάθμιον πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς ἴσον μὲ μηδὲν καὶ ἀναζητήσωμεν τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν αὐτήν».

Ἂς λάβωμεν λοιπὸν μίαν τοιαύτην ἐξίσωσιν ἡ γενικὴ μορφὴ τῆς ὁποίας μετὰ ἐνδεχομένην ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων εἶναι

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \qquad (1)$$

ἔνθα α,β,γ σταθεροὶ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μὲ $\alpha\neq 0$ καὶ ἂς ζητήσωμεν νὰ ἐπιλύσωμεν αὐτὴν ἀριθμητικῶς.

Ἐπειδὴ $\alpha\neq 0$ ἡ (1) ἰσοδυνάμως γράφεται :

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

καὶ ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=p$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}=q$ λαμβάνομεν :

$$x^2+px+q=0 \qquad (1')$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1′) συμφώνως πρὸς τὴν § 4.3 γράφεται ἰσοδυνάμως :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}$$

Ἄρα τελικῶς ἔχομεν πρὸς ἐπίλυσιν τὴν ἰσοδύναμον τῆς (1) ἐξίσωσιν :

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=0 \qquad (\mathrm{I})$$

Διακρίνομεν ἤδη τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

i) ***Ἔστω $p^2-4q>0$.*** Τότε ὑπάρχει (βλ. § 4.3 περιπτ. (i)) $k\in\Pi$ τοιοῦτος ὥστε $k^2=\frac{p^2-4q}{4}$ δηλ. $k=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$ καὶ ἄρα ἡ (I) γράφεται :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-k^2=0 \quad ἢ$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-k^2=\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)+k\right]\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)-k\right]=0$$

Διὰ νὰ ἔχωμεν ὅμως $\left(x+\frac{p}{2}+k\right)\left(x+\frac{p}{2}-k\right)=0$ θὰ πρέπῃ ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.

Δηλ. ἢ $x+\frac{p}{2}+k=0$ ἢ $x+\frac{p}{2}-k=0$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν δύο ἀνωτέρω πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Δηλ. διὰ τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς (1) θὰ ἔχωμεν :

$$\{x \mid \alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad x\in\Pi\}=\left\{x \mid x+\frac{p}{2}+k=0\right\}\cup\left\{x \mid x+\frac{p}{2}-k=0\right\}$$

Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν $p^2-4q>0$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ***δύο διακεκριμένας λύσεις*** τὰς $x_1=-\frac{p}{2}-k$ καὶ $x_2=-\frac{p}{2}+k$

Καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸ $k=\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$ λαμβάνομεν :

$$x_1=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_2=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Παράδειγμα :

Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν ἡ ἐξίσωσις : $20x^2+7x-6=0$

Αὕτη ἰσοδυνάμως γράφεται : $x^2+\frac{7}{20}x-\frac{3}{10}=0$

Ἄρα διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἶναι $p=\frac{7}{20}$ καὶ $q=-\frac{3}{10}$

καὶ ἐπειδὴ $p^2-4q=\frac{49}{400}-4\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)=\frac{529}{400}>0$ αὕτη θὰ ἔχῃ δύο

διακεκριμένας λύσεις, αἱ ὁποῖαι θὰ δίδωνται ἐκ τῶν τύπων :

$$x_1=-\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2} \text{ καὶ } x_2=-\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

Ἂν εἰς τοὺς τύπους αὐτοὺς θέσωμεν $p=\frac{7}{20}$, $q=-\frac{3}{10}$ καὶ

$p^2-4q=\frac{529}{400}$ λαμβάνομεν :

$$x_1=-\frac{7}{40}-\frac{\sqrt{\frac{529}{400}}}{2}=-\frac{7}{40}-\frac{\frac{23}{20}}{2}=-\frac{7}{40}-\frac{23}{40}=$$
$$-\frac{30}{40}=-\frac{3}{4}$$

$$x_2=-\frac{7}{40}+\frac{\sqrt{\frac{529}{400}}}{2}=-\frac{7}{40}+\frac{\frac{23}{20}}{2}=-\frac{7}{40}+\frac{23}{40}=\frac{16}{40}=\frac{2}{5}$$

Δηλ. τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι :

$$\{x|20x^2+7x-6=0,\quad x\in\Pi\}=\left\{-\frac{3}{4}, \frac{2}{5}\right\}$$

ii) *Ἔστω* $p^2-4q<O$**.** Τότε δὲν ὑπάρχει (βλ. § 4.3 περιπτ. (ii)) $k\in\Pi$ τοιοῦτος ὥστε $k^2=\frac{p^2-4q}{4}$ καὶ ἄρα τὸ πρῶτον μέλος τῆς (I) δὲν ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων. Δύναται νὰ γραφῇ ὅμως ὡς ἄθροισμα τοῦ τετραγώνου ἑνὸς πρωτοβαθμίου διωνύμου καὶ ἑνὸς σταθεροῦ ἀριθμοῦ. Δηλ.

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+s^2$$

ἔνθα $s^2=\frac{4q-p^2}{4}=-\frac{p^2-4q}{4}>0$

῎Αρα ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι τώρα ἰσοδύναμος μὲ τήν :

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+s^2=0 \qquad \text{(II)}$$

Διὰ νὰ ἐπαληθεύεται ὅμως ἡ (II) καὶ ἄρα ἡ (1), θὰ πρέπῃ ὁ x νὰ λάβῃ τιμὰς αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν ἴσον πρὸς μηδὲν τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς. Δεδομένου ὅμως ὅτι ἐν τῷ συνόλῳ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἐξ ὧν ὁ εἷς τουλάχιστον $\neq 0$ εἶναι πάντοτε ἀριθμὸς διάφορος τοῦ μηδενός, ἕπεται ὅτι δὲν ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ $x \in \Pi$ ἐπαληθεύουσαι τὴν (II) καὶ ἑπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην $(p^2-4q<0)$ ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ***δὲν ἔχει λύσεις ἐν*** τῷ συνόλῳ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παράδειγμα :

῎Εστω πρὸς ἐπίλυσιν ἡ ἐξίσωσις : $x^2+4x+6=0$.

Δι' αὐτὴν ἔχομεν $p=4$, $q=6$ καὶ $p^2-4q=16-24=-8<0$

῎Αρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἰσοδυνάμως γράφεται :

$$x^2+4x+6=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}=\left(x+\frac{4}{2}\right)^2+\frac{24-16}{4}=(x+2)^2+2=0$$

Διὰ νὰ εἶχεν λύσιν λοιπὸν ἡ $x^2+4x+6=0$ θὰ ἔπρεπε νὰ ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ $x \in \Pi$ αἱ ὁποῖαι νὰ ἐμηδένιζον τὸ ἄθροισμα $(x+2)^2+2$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, καθ' ὅσον μὲ ὁποιονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν x θὰ εἶναι πάντοτε $(x+2)^2 \geq 0$ καὶ $(x+2)^2+2 \geq 2>0$. ῎Αρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν ἐν Π. Δηλ. τὸ σύνολον τῶν λύσεων αὐτῆς εἶναι : $\{x \mid x^2+4x+6=0,\ x \in \Pi\}=\varnothing$

iii) *῎Εστω* $p^2-4q=0$. Τότε ἡ ἐξίσωσις (I) ἰσοδυνάμως γράφεται :

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0 \quad \text{ἢ}$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$$

Διὰ νὰ εἶναι ὅμως τὸ ἀνωτέρω γινόμενον ἴσον πρὸς μηδὲν πρέπει ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων νὰ εἶναι ἴσος μὲ μηδέν.

Δηλ. ἢ $x+\frac{p}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{p}{2}$ ἢ $x+\frac{p}{2}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{p}{2}$

Ἄρα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ($p^2-4q=0$) ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν ἐν Π ἢ ὡς λέγομεν ἔχει τὴν διπλῆν λύσιν :

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}$$

Παράδειγμα :

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $5x^2-20x+20=0$

Αὕτη ἰσοδυνάμως γράφεται : $x^2-\frac{20}{5}x+\frac{20}{5}=0$

Ὁπότε διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἔχομεν $p=-\frac{20}{5}=-4$

$q=\frac{20}{5}=4$ καὶ $p^2-4q=16-16=0$.

Ἄρα αὕτη γράφεται ἰσοδυνάμως :

$$5x^2-20x+20=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{4}{2}\right)^2=(x-2)^2=0$$

Δηλ. $5x^2-20x+20=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-2)=0$

Αἱ δύο πρωτοβάθμιοι ὅμως ἐξισώσεις $x-2=0$ καὶ $x-2=0$ ἔχουν τὴν ἰδίαν λύσιν $x=+2$

Ὁπότε καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν διπλῆν λύσιν τὴν $x_{1,2}=2$. Δηλ. τὸ σύνολον τῶν λύσεων αὐτῆς εἶναι :

$$\{x \mid 5x^2-20x+20=0 \quad x\in\Pi\}=\{+2\}$$

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΙΣ

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ κάτωθι :

Ἡ ἐξίσωσις $x^2+px+q=0$ εἰς τὴν ὁποίαν μετασχηματίζεται πάντοτε μία ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἂν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=p$ καὶ $\frac{\gamma}{\alpha}=q$ ἔχει :

1. *Ἂν* $\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}>0$ δύο διακεκριμένας πραγματικὰς λύσεις τάς:

$$\mathbf{x}_1=-\frac{\mathbf{p}}{2}+\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{x}_2=-\frac{\mathbf{p}}{2}-\frac{\sqrt{\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}}}{2}$$

2. *Ἂν* $\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}<0$ οὐδεμίαν πραγματικὴν λύσιν.

3. *Ἂν* $\mathbf{p}^2-4\mathbf{q}=0$ μίαν διπλῆν πραγματικὴν λύσιν τήν:

$$\mathbf{x}_{1,2}=-\frac{\mathbf{p}}{2}$$

11.3 Γραφικὴ ἐπίλυσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\alpha\mathbf{x}^2+\beta\mathbf{x}+\gamma=0$$

Εἰς τὴν § 11.1 εἴδομεν ἓν πρῶτον παράδειγμα γραφικῆς ἐπιλύσεως μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἡ μέθοδος ὅμως αὕτη προσδιορισμοῦ τῶν λύσεων μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως δὲν εἶναι βεβαίως ἡ ἐνδεικνυομένη καθ' ὅσον δίδει τὰς λύσεις μόνον κατὰ προσέγγισιν.

Ἡ γραφικὴ αὕτη μέθοδος δύναται νὰ χρησιμοποιηθῇ ὅμως εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν θέλομεν νὰ δείξωμεν κατὰ τρόπον παραστατικὸν τὰς τρεῖς περιπτώσεις τὰς ὁποίας ἀνεφέραμεν εἰς τὴν § 11.2, δηλ. τὰς περιπτώσεις ὅπου ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο διακεκριμένας λύσεις, μίαν (διπλῆν) λύσιν καὶ οὐδεμίαν λύσιν ἐν τῷ συνόλῳ Π.

Ἔστω λοιπὸν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ μὲ $\alpha\neq 0$.

Αὕτη συμφώνως πρὸς τὴν § 11.2, ἂν θέσωμεν $p=\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ $q=\frac{\gamma}{\alpha}$, γράφεται ἰσοδυνάμως: $x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=0$

Καὶ ἐὰν θέσωμεν $x+\frac{p}{2}=x'$ καὶ τὴν ποσότητα $\frac{p^2-4q}{4}$ τὴν παραστήσωμεν ἔστω μὲ c δηλ. $\frac{p^2-4q}{4}=c$ τότε ἡ ἐξίσωσις $x^2+px+q=0$ γράφεται: $x'^2-c=0$

Μετὰ τὸν ἀνωτέρω μετασχηματισμὸν εἶναι προφανὲς ὅτι αἱ λύσεις τῆς $x^2+px+q=0$ καὶ ἄρα τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ θὰ δίδωνται ἐκ τῶν λύσεων τῆς $x'^2-c=0$ ἐὰν εἰς ἑκάστην λύσιν αὐτῆς προσθέσωμεν τὸ $-\frac{p}{2}$ καθ' ὅσον ἐκ τῆς $x+\frac{p}{2}=x' \Leftrightarrow x=x'-\frac{p}{2}$

Διὰ τὸ σύνολον δηλ. τῶν λύσεων τῆς $x^2+px+q=0$ θὰ ἔχωμεν :

$$\{x|x^2+px+q=0\}=\left\{x|x=x'-\frac{p}{2} \text{ καὶ } x'^2-c=0\right\}$$

Ἄς ἴδωμεν τώρα πῶς θὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὴν

$$x'^2-c=0$$

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν, $f: x' \rightarrow y=x'^2-c$ μὲ $x \in \Pi$ καὶ διακρίνομεν τὰς κάτωθι περιπτώσεις :

i) *Ἔστω c>O.* Τότε $\frac{p^2-4q}{4}>0 \Leftrightarrow p^2-4q>0$ καὶ ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο διακεκριμένας λύσεις (βλ. § 11.2 περιπτ. (i)) αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν σημείων τομῆς τῆς παραβολῆς τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ $y=x'^2-c$ εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων.

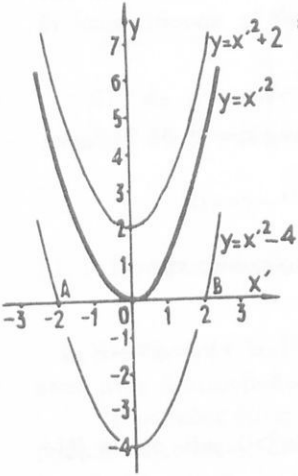
Π.χ. ἐὰν $c=4>0$ τότε ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $f: x' \rightarrow y=x'^2-4$ μὲ $x \in \Pi$ προκύπτει ἀπὸ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς $y=x'^2$ ἂν προσθέσωμεν εἰς τὴν τεταγμένην ἑκάστου σημείου αὐτῆς τὸν ἀριθμὸν -4.

Τοῦτο σημαίνει παράλληλον μετατόπισιν τῆς παραβολῆς $y=x'^2$ κατὰ 4 μονάδες μήκους κατὰ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων Oy καὶ κατὰ φορὰν ἀντίθετον τῆς θετικῆς φορᾶς αὐτοῦ. (σχ. 21). Ἡ μετατοπισμένη αὕτη παραβολὴ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων Ox' εἰς τὰ σημεῖα A(—2,0) καὶ B(2,0) ὁπότε συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x'^2-4=0$ ἔχει τὰς διακεκριμένας πραγματικὰς λύσεις $x'_1=-2$ καὶ $x'_2=2$.

ii) *Ἔστω c<O.* Τότε $\frac{p^2-4q}{4}<0 \Leftrightarrow p^2-4q<0$ καὶ ἄρα ἡ ἐξίσωσις (βλ. §11.2 περιπτ. (ii)) δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν ἐντὸς τοῦ Π.

Ἡ παραβολὴ τότε $y=x'^2-c$ δὲν τέμνει τὸν ἄξονα Ox'.

Π.χ. ἐὰν $c=-2<0$ τότε ἡ ἐξίσωσις $x'^2-c=0$ γίνεται $x'^2+2=0$. Μὲ τὰς ἰδίας ὡς προηγουμένως σκέψεις συνάγομεν ὅτι ἡ γρα-



Σχ. 21

φικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = x'^2 + 2$ εἶναι ἡ παραβολὴ τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ $y = x'^2$ μετατοπισμένη κατὰ 2 μονάδας μήκους παραλλήλως τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων Oy (σχ. 21) καὶ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν αὐτοῦ. Ἡ παραβολὴ αὕτη δὲν τέμνει τὸν ἄξονα Ox' καὶ ἄρα ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν ἐν Π.

iii) ***Ἔστω*** **$c = 0$** Τότε $\frac{p^2 - 4q}{4} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow p^2 - 4q = 0$ καὶ ἄρα ἡ ἐξίσωσις (βλ. §11.2 περιπτ.(iii)) ἔχει μίαν (διπλῆν) λύσιν. Ἡ παραβολὴ τότε $y = x'^2$ ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος Ox' εἰς τὸ σημεῖον O(0,0) (σχ. 21) δηλ. ἡ ἐξίσωσις εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχει μίαν λύσιν (διπλῆν) τὴν $x'_{1,2} = 0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $x^2 - 16 = 0$ β) $x^2 + x = 0$ γ) $9x^2 - 25 = 0$

δ) $4x^2 - x = 0$ ε) $4x^2 - 36 = 0$ στ) $x^2 - 1 = 0$

ζ) $\frac{x^2}{4} - \frac{1}{4} = 0$ η) $3x^2 - 9 = 0$

2. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $x^2 - x - 6 = 0$ β) $x^2 - 4x + 3 = 0$ γ) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 4 = 0$

δ) $x^2 - 6x + 8 = 0$ ε) $x^2 + 5x + 4 = 0$ στ) $\frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 0$

ζ) $\frac{1}{3}x^2 + 2x + 3 = 0$ η) $x^2 + 5x + 6 = 0$ ϑ) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

ι) $2x^2 + 6x + 9 = 0$ κ) $x^2 - 6x + 9 = 0$ λ) $x^2 - 2x + 1 = 0$

3. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $9x^2 - (2x+1)^2 = 0$ β) $(3x-2)^2 - 4 = 0$ γ) $(2x-3)^2 - 1 = 0$

δ) $(3x+4)^2-(x-2)^2$ ε) $(2x-5)^2-25x^2$ στ) $(4x+3)^2-$
$-(2x-1)^2$

4. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $\frac{3}{x-1}+\frac{2x}{3}=8$ β) $x^2-3x=\frac{3x}{4}+1$ γ) $\frac{1}{3}x^2+\frac{8}{3}x+$
$+5=0$ δ) $\frac{x+1}{3}=\frac{3}{x+1}$ ε) $\frac{x+2}{2x+1}=\frac{1}{x}$ ζ) $\frac{(x-2)}{2x}=\frac{1}{x}$

5. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $5(x^2-3)+4x=0$ β) $3x(x+2)+2=11x$ γ) $x(x-2)=\frac{3}{2}$

δ) $x^2=\frac{4(x+7)}{7}$ ε) $x(5x-8)+2(x+1)=3x^2+7$

6. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς καὶ ἀριθμητικῶς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις :

α) $4x^2-9=0$ β) $2x^2-4x-2=0$ γ) $x^2+2x-3=0$

δ) $\frac{1}{2}x^2-x-4=0$ ε) $x^2+2x=0$ στ) $(x-3)^2=0$

ζ) $(x-3)^2-4=0$

Σχηματίζοντες ἐξίσωσιν 2ου βαθμοῦ ἐπιλύσατε τὰ κάτωθι προβλήματα.

7. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ τὸ τέταρτόν του λαμβάνομεν τὸν ἀριθμὸν 16. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

8. Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ 96 λαμβάνομεν 321. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

9. Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμὸς ἀπὸ τὸ τετράγωνον τοῦ ὁποίου ἂν ἀφαιρέσωμεν 53 λαμβάνομεν 236.

10. Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμὸς ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι :

α) Τὸ ἄθροισμα τοῦ τετάρτου τοῦ τετραγώνου του καὶ τοῦ τρίτου τοῦ τετραγώνου του εἶναι 225.

β) Προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 21 ἐὰν εἰς τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου του προσθέσωμεν τὸ τρίτον τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ.

11. Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι διαδοχ. ἀριθμοὶ ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ γινόμενον των εἶναι κατὰ 17424 μεγαλύτερον τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ.

12. Ἕνα παράθυρον ἔχει ὕψος διπλάσιον τοῦ μήκους του καὶ ἐπιφάνεια 0,98m². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος καὶ ὕψος αὐτοῦ.

13. Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαγώνιος ἑνὸς τετραγώνου ἐὰν ἡ περίμετρος αὐτοῦ εἶναι 256cm.

14. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἂν τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι 45cm².

15. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 9cm καὶ 12cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

16. Νὰ ὁρισθῇ ἓν τετράγωνον διαγωνίου 12m.

12. Ἀκολουθία ἀριθμῶν

12.1 Γενικὰ περὶ ἀκολουθίας.

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$f: \quad \Phi \ni \nu \to f(\nu) = \alpha_\nu \in k$$

μὲ τὴν ὁποίαν ἀπεικονίζομεν τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐπὶ ἑνὸς ὑποσυνόλου k τῶν ἀριθμῶν.

Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ ν λαμβάνει κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $1, 2, 3, \ldots, \nu, \nu+1, \ldots\ldots$ τότε αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί :

$$f(1) = \alpha_1, \quad f(2) = \alpha_2, \; \ldots \; f(\nu) = \alpha_\nu, \quad f(\nu+1) = \alpha_{\nu+1} \ldots$$

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον μὲ τὴν ἀνωτέρω συνάρτησιν ὡς νόμον ἀντιστοιχίας εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν διατεταγμένων κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους φυσικὸν ἀριθμὸν $1, 2, \ldots \nu, \nu+1 \ldots$ ἀντιστοιχοῦν κατὰ σειρὰν οἱ ἀριθμοί :

$$\alpha_1, \; \alpha_2, \; \alpha_3, \; \ldots, \; \alpha_\nu, \; \alpha_{\nu+1}, \; \ldots$$

Αἱ διαδοχικαὶ αὗται ἄπειροι τὸ πλῆθος εἰκόνες (ἀριθμοὶ) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots$ τῶν διατεταγμένων φυσικῶν ἀριθμῶν $1, 2, \ldots \ldots \nu, \nu+1 \ldots\ldots$ γραμμέναι κατὰ τὴν ὡρισμένην αὐτὴν τάξιν, λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ***ἀπέραντον ἀριθμητικὴν ἀκολουθίαν*** ἢ ἁπλῶς ***ἀκολουθίαν***.

Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots\ldots$ οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ἀναγκαῖον νὰ εἶναι ὅλοι διάφοροι μεταξύ των, ὀνομάζονται ***ὅροι*** ἢ ***στοιχεῖα*** τῆς ἀκολουθίας. Ὁ α_1 θὰ λέγεται πρῶτος ὅρος ὁ α_2 δεύτερος κ.ο.κ.

Παραδείγματα :

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$f: \quad \Phi \ni \nu \to \alpha_\nu = 2\nu \in \Phi$$

μὲ τὴν ὁποίαν εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3 \ldots, \nu, \nu+1, \ldots$ ἀντιστοιχοῦμεν τὸν διπλάσιον του. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπον δημιουργοῦμεν τὴν ἀκολουθίαν : $2, 4, 6, \ldots, 2\nu, 2(\nu+1), \ldots$

Μίαν ἀκολουθίαν τὴν συμβολίζομεν συντόμως μὲ τὸν ὅρον αὐτῆς α_ν, τὸν κατέχοντα τὴν ν τάξιν (νυοστόν). Π.χ. ἂν θέλαμεν νὰ συμβολίσωμεν συντόμως τὴν ἀκολουθίαν τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος θὰ ἐγράφαμεν : $\alpha_\nu = \{2\nu\}$. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ὅταν γράφωμεν $\alpha_\nu =$ $= \left\{\frac{1}{\nu}\right\}$ ἢ $\alpha_\nu = \{\nu^2\}$ θὰ ἐννοοῦμεν ἀντιστοίχως τὰς ἀκολουθίας :

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu+1}, \ldots \text{ καὶ } 1,4,9, \ldots, \nu^2, (\nu+1)^2 \ldots$$

τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἂν εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3, ...ν.... ἀντιστοιχήσωμεν τὸν ἀντίστροφον, ἢ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ἀντιστοίχως.

Ἂν κατὰ τὸν σχηματισμὸν μιᾶς ἀκολουθίας σταματήσωμεν εἰς ἕνα ὡρισμένον ὅρον της, π.χ. τὸν κατέχοντα τὴν ν τάξιν, τότε ἡ ἀκολουθία ποὺ θὰ ἔχωμεν σχηματίσει θὰ λέγεται ***πεπερασμένη*** καὶ θὰ συμβολίζεται $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$.

Π.χ. ἂν σταματήσωμεν εἰς τὸν ὅρον τὸν κατέχοντα τὴν τάξιν 10 θὰ ἔχωμεν σχηματίσει τὴν πεπερασμένην ἀκολουθίαν : $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{10}$

Διὰ μίαν ἀκολουθίαν δίδομεν καὶ τοὺς ἑξῆς ὁρισμούς :

Μία ἀκολουθία θὰ καλῆται ***αὔξουσα*** τότε καὶ μόνον τότε, ἂν κάθε ὅρος αὐτῆς εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος ἀπὸ τὸν προηγούμενόν του. Ἐνῷ ἂν ἕκαστος ὅρος αὐτῆς εἶναι μικρότερος ἢ ἴσος τοῦ προηγουμένου του αὕτη θὰ καλῆται ***φθίνουσα***.

Δηλαδή :

Διὰ τὴν ἀκολουθίαν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \ldots$ ἂν $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \ldots \leqq \alpha_\nu \leqq \ldots$ θὰ λέγωμεν ὅτι αὕτη εἶναι αὔξουσα.

Ἐνῷ ἂν $\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \alpha_3 \geqq \ldots \geqq \alpha_\nu \geqq \ldots$ θὰ εἶναι φθίνουσα.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία $2, 4, 6, \ldots, 2\nu \ldots$ ἐπειδὴ $2 < 4 < 6 < \ldots \ldots < 2\nu < \ldots$ εἶναι αὔξουσα.

Ἐνῷ ἡ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{\nu} \ldots$ ἐπειδὴ $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \ldots > \frac{1}{\nu} \ldots$ εἶναι φθίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 10ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας :

$$\frac{3}{2}, 2, \frac{9}{4}, \frac{12}{5}, \ldots\ldots, \frac{3\nu}{\nu+1}$$

2. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $8^{ος}$ καὶ $15^{ος}$ ὅρος τῶν ἀκολουθιῶν :

α) $-1, 1, 3, 5, \ldots$ β) $-3, -2, -1, 0, 1, \ldots$

3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ νυοστὸς ὅρος τῶν ἀκολουθιῶν :

α) $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ β) $0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \ldots$

4. Χαρακτηρίσατε τὰς κάτωθι ἀκολουθίας καὶ εὕρατε τὸν γενικὸν ὅρον ἑκάστης :

α) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots$ β) $\frac{3}{5}, 1, \frac{7}{5}, \frac{9}{5}, \frac{11}{5}, \ldots$

13. Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι.

13.1 Ὁρισμοί.

Καλοῦμεν ἀριθμητικὴν πρόοδον μίαν ἀριθμητικὴν ἀκολουθίαν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots$ ὅταν ἡ διαφορὰ $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$ δύο τυχόντων διαδοχικῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πάντοτε μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς καλεῖται **διαφορὰ** τῆς προόδου καὶ θὰ τὸν συμβολίζωμεν δὲ δ. Ἐκ τῆς σχέσεως $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \delta$, ἥτις συνδέει δύο τυχόντας διαδοχικοὺς ὅρους τῆς προόδου, λαμβάνομεν :

$$\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \delta$$

Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν :
Ἀριθμητικὴ πρόοδος θὰ καλῆται μία ἀριθμητικὴ ἀκολουθία εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος ὅρος προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθήκης πάντοτε τοῦ αὐτοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ (δηλ. τῆς διαφορᾶς δ τῆς προόδου).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω γίνεται φανερὸν ὅτι μία πρόοδος εἶναι ὡρισμένη, ἂν δοθῇ ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῆς. Καὶ ἂν μὲν ἡ διαφορὰ $\delta > 0$, τότε ἡ πρόοδος ὡς ἀκολουθία θεωρουμένη θὰ εἶναι **αὔξουσα**, ἐνῷ ἂν $\delta < 0$ ἡ πρόοδος θὰ εἶναι **φθίνουσα**.

Παράδειγμα :

Εἰς τὰς ἀκολουθίας 2,4,6,8,10, . . . καὶ 5,2,—1,—4,—7,—10, . . . ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ δύο τυχόντων διαδοχικῶν ὅρων ἑκάστης ἐξ αὐτῶν εἶναι σταθερά, διὰ τοῦτο αὗται λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὰς προόδους. Ἡ διαφορὰ τῆς πρώτης προόδου εἶναι : $\delta_1 = 4-2 = 6-4 = 8-6 = \ldots = 2$. Ἐνῶ τῆς δευτέρας : $\delta_2 = 2-5 = -1-2 = -4-(-1) = -7-(-4) = \ldots = -3$. Ὡς παρατηροῦμεν ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν προόδων, ἐπειδὴ $\delta_1 > 0$ εἶναι αὔξουσα, ἐνῷ ἡ δευτέρα ἐπειδὴ $\delta_2 < 0$ εἶναι φθίνουσα.

13.2. Ὑπολογισμὸς τοῦ νυοστοῦ ὅρου ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἂν μὲ α_1 παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου καὶ μὲ δ τὴν διαφορὰν αὐτῆς, τότε ὁ δεύτερος ὅρος θὰ εἶναι $\alpha_1 + \delta$, ὁ τρίτος $(\alpha_1 + \delta) + \delta = \alpha_1 + 2\delta$, ὁ τέταρτος $(\alpha_1 + 2\delta) + \delta = \alpha_1 + 3\delta$

καὶ ἄρα ὁ νυοστὸς $\alpha_1+(\nu-1)\delta$. Δηλαδὴ ὁ νυοστὸς ὅρος μιᾶς προόδου δίδεται ἐκ τῆς σχέσεως :

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\delta \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) παρατηροῦμεν ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν ποῖος ἀριθμὸς εἶναι ὁ νυοστὸς ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, θὰ πρέπη νὰ γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν α_1 (πρῶτος ὅρος), ν (πλῆθος τῶν ὅρων) καὶ δ (διαφορὰ τῆς προόδου). Ἀλλὰ ἐκ τῆς (1) ἡ ὁποία ὡς παρατηροῦμεν εἶναι μία ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ἑκάστην τῶν μεταβλητῶν α_1, α_ν, ν καὶ δ, ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν ὄχι μόνον τὸν α_ν, ἀλλὰ καὶ μίαν οἱανδήποτε ἐκ τῶν ἀνωτέρω μεταβλητῶν, ἂν μᾶς εἶναι γνωσταὶ αἱ τιμαὶ τῶν τριῶν ἄλλων.

Παραδείγματα :

1ον Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 12ος ὅρος τῆς προόδου :

$$1,4,7,10,13,16,\ldots$$

Ὁ νυοστὸς ὅρος τῆς προόδου θὰ δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\delta$$

Ἐπειδὴ διὰ τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα ἔχομεν, $\alpha_1=1$, $\nu=12$ καὶ $\delta=3$ λαμβάνομεν :

$$\alpha_{12}=1+(12-1)\cdot 3\Leftrightarrow\alpha_{12}=34$$

2ον Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δ μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι 80 καὶ ὁ 25ος ὅρος αὐτῆς εἶναι 8.

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\delta$ θέσωμεν $\alpha_1=80$, $\nu=25$ καὶ $\alpha_\nu=8$ λαμβάνομεν :

$$8=80+(25-1)\cdot\delta\Leftrightarrow\delta=-3$$

3ον Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἐὰν ἡ διαφορὰ αὐτῆς εἶναι 7 καὶ ὁ 21ος ὅρος της εἶναι ὁ 125.

Ἂν καὶ πάλιν εἰς τὸν τύπον $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\delta$ θέσωμεν $\delta=7$, $\nu=21$ καὶ $\alpha_\nu=125$ λαμβάνομεν :

$$125=\alpha_1+(21-1)\cdot 7\Leftrightarrow\alpha_1=-15$$

13.3 Ὑπολογισμὸς τοῦ ἀθροίσματος τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἀρχικῶς θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

Εἰς πᾶσαν ἀριθμητικὴν πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων αὐτῆς, ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὅρους της, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων.

Ἀπόδειξις. Ἂς θεωρήσωμεν τὴν πρόοδον $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu \ldots$

Τότε συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῆς προόδου (βλ. §13.1) θὰ ἔχωμεν : $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = \delta \qquad (1)$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) λαμβάνομεν :

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} \Leftrightarrow \alpha_2 + \alpha_{\nu-1} = \alpha_1 + \alpha_\nu .$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\alpha_3 + \alpha_{\nu-2} = \alpha_1 + \alpha_\nu$ κ.ο.κ.

Ἂς ζητήσωμεν τώρα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἄθροισμα $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu$ τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου. Τὸ ἄθροισμα Σ_ν γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$\Sigma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1$. Δηλ. ἔχωμεν :

$$\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} + \alpha_\nu \quad \text{καὶ}$$
$$\Sigma_\nu = \alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} + \ldots + \alpha_2 + \alpha_1$$

καὶ διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$2\Sigma_\nu = (\alpha_1 + \alpha_\nu) + (\alpha_2 + \alpha_{\nu-1}) + \ldots + (\alpha_{\nu-1} + \alpha_2) + (\alpha_\nu + \alpha_1)$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω ἰσότητα παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἀθροισμάτων εἶναι ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου δηλ. ν. Ἐξ ἄλλου συμφώνως πρὸς τὴν πρότασιν τὴν ὁποίαν ἀπεδείξαμεν, ἕκαστον ἐκ τῶν ἀθροισμάτων αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων τῆς προόδου δηλ. ἴσον μὲ $\alpha_1 + \alpha_\nu$.

Ἄρα τελικῶς ἔχομεν : $2\Sigma_\nu = \nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)$ ὁπότε

$$\Sigma_\nu = \frac{\nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)}{2}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μᾶς παρέχει τὴν δυνατότητα νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν γνωρίζωμεν τὰς τιμὰς τῶν ν, α_1 καὶ α_ν.

Παράδειγμα :

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων τῆς προόδου : 2, 5, 8, 11, 13. . . .

Ἐπειδὴ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἀθροίσματος πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὸν $15^{ον}$ ὅρον τῆς προόδου, ὑπολογίζομεν αὐτόν.

$$\alpha_{15}=2+(15-1)\cdot 3 \Leftrightarrow \alpha_{15}=44$$

Ἄρα διὰ τὸ παράδειγμά μας ἔχομεν $\alpha_1=2$, $\nu=15$ καὶ $\alpha_\nu=44$.

ὁπότε : $$\Sigma_{15}=\frac{15\cdot(2+44)}{2} \Leftrightarrow \Sigma_{15}=345$$

Παρατηρήσεις.

1η. Ἐὰν μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχῃ περιττὸν τὸ πλῆθος ὅρων, τότε προφανῶς θὰ ὑπάρχῃ κάποιος μεσαῖος ὅρος ἔστω ὁ α_μ, ὁ ὁποῖος θὰ ἀπέχῃ ἰσάκις τῶν δύο ἄκρων ὅρων. Ἔστω $\alpha_{\mu-1}$ καὶ $\alpha_{\mu+1}$ οἱ ἑκατέρωθεν τοῦ α_μ ὅροι τῆς προόδου. Τότε θὰ ἔχωμεν : $\alpha_\mu=\alpha_{\mu-1}+\delta$ (1) καὶ $\alpha_\mu=\alpha_{\mu+1}-\delta$ (2) Ἂν προσθέσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μελη λαμβάνομεν : $2\alpha_\mu=\alpha_{\mu-1}+\alpha_{\mu+1}$ καὶ ἐπειδὴ $\alpha_{\mu-1}+\alpha_{\mu+1}=\alpha_1+\alpha_\nu$ ὡς ἰσάκις τῶν ἄκρων ὅρων ἀπέχοντες, ἔχομεν τελικῶς :

$$2\alpha_\mu=\alpha_1+\alpha_\nu \text{ καὶ ἄρα } \alpha_\mu=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}$$

Δηλαδὴ ὁ μεσαῖος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων αὐτῆς ὅταν ἡ πρόοδος ἔχῃ περιττὸν τὸ πλῆθος ὅρων.

2α. Ἂν εἰς τὸν τύπον $\Sigma_\nu=\frac{\nu(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ α_ν μὲ τὸ ἴσον του $\alpha_1+(\nu-1)\delta$ λαμβάνομεν :

$$\Sigma_\nu=\frac{\nu[\alpha_1+\alpha_1+(\nu-1)\delta]}{2} \text{ καὶ μετὰ τὰς πράξεις}$$

$$\Sigma_\nu=\frac{\nu[2\alpha_1+(\nu-1)\delta]}{2}$$

Ὁ τελευταῖος τύπος ὅστις δίδει μίαν ἔκφρασιν τοῦ Σ_ν συναρτήσει τῶν ν, α_1 καὶ δ μᾶς παρέχει τὴν εὐχέρειαν νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ Σ_ν, ὅταν ἀντὶ τοῦ νυοστοῦ ὅρου μιᾶς προόδου γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν αὐτῆς δ.

13.4 Παρεμβολὴ ὅρων.

Δοθέντων δύο ἀριθμῶν α καὶ β καλοῦμεν ***ἀριθμητικὴν παρεμ-***

βολὴν ἢ ἁπλῶς ***παρεμβολήν,*** τὴν εὕρεσιν ὡρισμένου πλήθους ἀριθμῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν α καὶ β καὶ τοιούτων, ὥστε οὗτοι μετὰ τῶν δύο δοθέντων, ν' ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ πρῶτον ὅρον τὸν α καὶ τελευταῖον τὸν β. Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται ***μέσοι ἀριθμητικοί.***

Ἔστωσαν λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β μεταξὺ τῶν ὁποίων θέλομεν νὰ παρεμβάλωμεν ἔστω μ τὸ πλῆθος ἀριθμητικοὺς μέσους $x_1, x_2, \ldots \ldots, x_\mu$.

Ἐπειδή, ὡς γνωρίζωμεν, μία πρόοδος εἶναι ὡρισμένη, ἂν δοθοῦν ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς καὶ ἡ διαφορά της, εἶναι προφανὲς ὅτι διὰ τὴν ἐπίτευξιν τοῦ ἀνωτέρω, ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν δ' τῆς προόδου, τὴν ὁποίαν θὰ σχηματίσωμεν.

Ἀλλὰ εἰς τὴν πρόοδον αὐτὴν ἡ ὁποία θὰ ἔχῃ $\mu+2$ τὸ πλῆθος ὅρων (μ οἱ παρεμβαλλόμενοι καὶ 2 οἱ δοθέντες) ὁ κατέχων τὴν $\mu+2$ τάξιν ὅρος εἶναι ὁ β. Ἄρα οὗτος θὰ δίδεται ἐκ τοῦ τύπου (βλ. § 13.2):

$$\beta=\alpha+(\mu+2-1)\delta' \Leftrightarrow \beta=\alpha+(\mu+1)\delta' \Leftrightarrow \beta-\alpha=(\mu+1)\delta'$$

ὁπότε τελικῶς λαμβάνομεν :

$$\delta'=\frac{\beta-\alpha}{\mu+1}$$

Ἀκ τῆς τελευταίας σχέσεως προσδιορίζομεν τὴν διαφορὰν δ' τῆς ζητουμένης προόδου καὶ ἄρα τοὺς ζητουμένους ἀριθμοὺς $x_1\, x_2, \ldots \ldots, x_\mu$ οἱ ὁποῖοι θὰ εἶναι ἀντιστοίχως :

$$\alpha+\delta',\ \alpha+2\delta', \ldots\ \alpha+\mu\delta'$$

Παραδείγματα :

*1ον. **Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ 32 νὰ παρεμβληθοῦν 8 ἀριθμοὶ ὥστε μετὰ τῶν 5 καὶ 32 νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.***

Ἡ πρόοδος ἡ ὁποία θὰ σχηματισθῇ, θὰ ἔχῃ διαφορὰν δ' ἡ ὁποία θὰ δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $\delta'=\dfrac{\beta-\alpha}{\mu+1}$

Ἐπειδὴ εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι $\alpha=5$, $\beta=32$ καὶ $\mu=8$ θὰ ἔχωμεν : $\delta'=\dfrac{32-5}{8+1} \Leftrightarrow \delta'=3$

Ἄρα ἡ πρόοδος θὰ εἶναι ἡ 5,8,11,14,17,20,23,26,29,32 ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ τοὺς ὁποίους παρενεβάλαμεν εἶναι οἱ 8,11,14,17,20,23, 26,29.

2ον. *Νὰ παρεμβληθοῦν 3 κατὰ σειρὰν ἀριθμοὶ μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 5,13,21,29. . . οὕτως ὥστε ἡ προκύπτουσα νέα ἀκολουθία νὰ εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.*

Διὰ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν τῆς νέας προόδου. Πρὸς τοῦτο σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς :

Οἱ παρεμβαλλόμενοι ἀριθμοὶ καὶ οἱ ὅροι τῆς δοθείσης προόδου θὰ ἀποτελοῦν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν πρόοδον.

Διὰ τὸν προσδιορισμὸν λοιπὸν τῆς διαφορᾶς αὐτῆς δ΄, ἄρκεῖ νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ δύο τυχόντων διαδοχικῶν ὅρων τῆς δοθείσης προόδου τρεῖς ἀριθμητικοὺς μέσους καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν διαφορὰν τῆς προόδου ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ.

Ἡ διαφορὰ αὔτη θὰ εἶναι καὶ ἡ διαφορὰ τῆς ζητουμένης προόδου. Παρεμβάλλομεν λοιπὸν μεταξὺ τῶν ὅρων 5 καὶ 13 τρεῖς ἀριθμητικοὺς μέσους. Ἡ διαφορὰ τῆς προόδου, ἡ ὁποία οὕτως προκύπτει

εἶναι : $\delta' = \dfrac{13-5}{3+1} \Leftrightarrow \delta' = \dfrac{8}{4} \Leftrightarrow \delta' = 2$

Ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι :

5,7,9,11,13,15,17,19,21,23,25,27,29, . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σχηματίσατε τὰς ἀριθμητικὰς προόδους, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἔχουν :

α) πρῶτον ὅρον 4 καὶ διαφορὰν 2

β) πρῶτον ὅρον $\frac{1}{2}$ καὶ διαφορὰν 1

γ) πρῶτον ὅρον -2 καὶ διαφορὰν $-\frac{1}{2}$

2. Ἐξετάσατε ἐὰν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ μὲ τὴν σειρὰν ποὺ εἶναι γραμμένοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

α) $3x+2y,\ 5x+3y,\ 7x+4y$ β) $4x-y,\ 2x+y,\ 3y$

γ) $x-3y,\ x,\ x+3y$ δ) $2x-y,\ 3x,\ 2x+6y$

3. Προσδιορίσατε ποίαν τιμὴν πρέπει νὰ λάβῃ ὁ λ ὥστε οἱ κά-

τωθι ἀριθμοὶ ν' ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον :

α) $2\lambda+1,\ \lambda-2,\ \lambda+3$ β) $4\lambda-1,\ -3(\lambda+2),\ 3\lambda$ γ) $2\lambda,\ 4\lambda-1,\ 5\lambda$

4. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 21ος ὅρος τῆς προόδου : $3, 1, -1, -3, -5, \ldots$

5. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 200ος περιττὸς διαδοχικὸς ἀριθμός.

6. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ 21ον πολλαπλάσιον τοῦ 9

7. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ πλῆθος ν τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι, ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς α_1, ἡ διαφορά της δ καὶ ὁ τελευταῖος της ὅρος α_ν εἶναι :

α) $\alpha_1 = 5,\ \delta = 7,\ \alpha_\nu = 145$ β) $\alpha_1 = 80,\ \delta = -3,\ \alpha_\nu = 8$

γ) $\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \delta = 3,\ \alpha_\nu = 15\frac{1}{2}$ δ) $\alpha_1 = 1,\ \delta = \frac{1}{5},\ \alpha_\nu = 3$

8. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι, ὁ 12ος ὅρος εἶναι ὁ 37 καὶ διαφορὰ τῆς προόδου εἶναι 3.

9. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δ μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς α_1, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων αὐτῆς ν καὶ ὁ νυοστὸς ὅρος αὐτῆς α_ν εἶναι :

α) $\alpha_1 = \frac{1}{2},\ \nu = 10,\ \alpha_\nu = 5$ β) $\alpha_1 = 2,\ \nu = 20,\ \alpha_\nu = 135$

γ) $\alpha_1 = 3,\ \nu = 6,\ \alpha_\nu = 23$ δ) $\alpha_1 = 5,\ \nu = 25,\ \alpha_\nu = 101$

10. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ πρόοδος εἰς τὴν ὁποίαν ὁ ἕκτος ὅρος εἶναι $-\frac{2}{3}$ καὶ ὁ δέκατος τρίτος -3. (Σχηματίσατε σύστημα)

11. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων τῆς προόδου:

$$1,\ 1\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{3},\ 3,\ 3\frac{2}{3},\ 4\frac{1}{3},\ \ldots$$

12. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

α) τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν
β) τῶν ν πρώτων ἀρτίων ἀριθμῶν
γ) τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν

13. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 20 πρώτων πολλαπλασίων τοῦ 11.

14. Ἐμπόρευμα πληρώνεται εἰς 20 δόσεις. Ἡ πρώτη δόσις εἶναι

300 δρχ. ἡ δευτέρα 400 ἡ τρίτη 500 κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος.

15. Ὡρολόγιον σημαίνει τὰς ἀκεραίας ὥρας ἀπὸ τῆς πρώτης μέχρι τῆς δωδεκάτης μὲ ἰσάριθμα δι' ἑκάστην ὥραν κτυπήματα. Νὰ ὑπολογισθῇ πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἡμερονυκτίου.

16. Ἐκ τῆς φυσικῆς γνωρίζομεν ὅτι ἂν ἓν σῶμα πίπτῃ εἰς τὸ κενόν, διανύει κατὰ τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς πτώσεώς του 4,9m καὶ καθ' ἕκαστον ἐκ τῶν ἑπομένων δευτερολέπτων 9,8m περισσότερον ἀπὸ ὅσα διήνυσε εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον sec. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῶν διανυομένων διαστημάτων.

α) κατὰ τὸ $4^{ον}$, κατὰ τὸ $7^{ον}$, κατὰ τὸ $15^{ον}$ sec.

β) κατὰ τὰ πέντε, κατὰ τὰ δέκα, κατὰ δέκα πέντε πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς πτώσεως.

17. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ δέκα ὅρους εἶναι 165. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ πρῶτος ὅρος καὶ ἡ διαφορὰ τῆς προόδου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὁ 30.

18. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ πρῶτος ὅρος $α_1$ καὶ τελευταῖος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἂν γνωρίζωμεν ὅτι :

α) $δ=4,\ ν=15,\ Σ_ν=450$ β) $δ=\frac{1}{2},\ ν=10,\ Σ_ν=62{,}5$

γ) $δ=-2,\ ν=12,\ Σ_ν=-96$ δ) $δ=4,\ ν=7,\ Σ_ν=119$

19. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ δ καὶ τὸ ἄθροισμα $Σ_ν$ μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ἂν γνωρίζωμεν ὅτι :

α) $α_1=3,\ ν=9,\ α_ν=43$ β) $α_1=\frac{1}{6},\ \ ν=5,\ α_ν=5\frac{1}{6}$

20. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 8 καὶ 43 ἑπτὰ ἀριθμητικοὶ μέσοι. Ποῖοι εἶναι αὐτοί ;

21. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 82 ἀριθμοί, οὕτως ὥστε ἡ πρόοδος ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ νὰ ἔχῃ 10 ὅρους. Ποῖοι εἶναι οἱ παρεμβαλλόμενοι ἀριθμοί ;

22. Μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου $α_1,\ α_2,\ α_3,\ \ldots, α_ν\ ,\ α_{ν+1}, \ldots$ νὰ παρεμβληθῇ ἕνας νέος ὅρος οὕτως ὥστε ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία νὰ εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

23. Μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 5, 30, 55, . . . νὰ παρεμβληθοῦν 4 κατὰ σειρὰν ἀριθμοὶ οὕτως ὥστε ἡ προκύπτουσα νέα ἀκολουθία νὰ εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος.

14 Γεωμετρικαὶ πρόοδοι.

14.1 Ὁρισμοί.

Γεωμέτρικὴ πρόοδος καλεῖται μία ἀριθμητικὴ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}$ εἰς τὴν ὁποίαν τό πηλίκον $\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu$ δύο τυχόντων διαδοχικῶν ὅρων αὐτῆς εἶναι σταθερόν. Τὸ σταθερὸν αὐτὸ πηλίκον καλεῖται **λόγος** τῆς γ. προόδου καὶ θὰ τὸ συμβολίζωμεν μὲ λ.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \lambda \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \lambda$ ἐξ ἧς ἕπεται ὅτι ἕκαστος ὅρος τῆς γ. προόδου προκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ πολλαπλασιασμοῦ αὐτοῦ ἐπὶ τὸν λόγον λ τῆς προόδου.

Ἂν εἰς μίαν γ. πρόοδον ὁ λόγος λ εἶναι ἀπολύτως μεγαλύτερος τοῦ 1 δηλ. $|\lambda| > 1$ τότε οἱ ὅροι αὐτῆς θὰ βαίνουν ἀπολύτως αὐξανόμενοι, ἐνῷ ἂν $|\lambda| < 1$ τότε οἱ ὅροι αὐτῆς θὰ βαίνουν ἀπολύτως ἐλαττούμενοι. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ($|\lambda| > 1$) ἡ πρόοδος θὰ καλεῖται **ἀπολύτως αὔξουσα**, ἐνῷ εἰς τὴν δευτέραν ($|\lambda| < 1$) ἡ πρόοδος καλεῖται **ἀπολύτως φθίνουσα.**

Παραδείγματα :

Ἔστω αἱ ἀκολουθίαι :

α) $2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$ β) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots$

γ) $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$ δ) $1, 10, 100, 1000, \ldots$

Παρατηροῦμεν ὅτι αὗται ἀποτελοῦν γεωμετρικὰς προόδους μὲ λόγους ἀντιστοίχως : $\lambda_1 = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = 2$, μὲ $\nu \in \Phi$ $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = -\frac{1}{3}$, $\lambda_4 = 10$

Ἐξ αὐτῶν δὲ ἐπειδή : $|\lambda_1| = |2| = 2 > 1$, $|\lambda_2| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, $|\lambda_3| = |-\frac{1}{3}| = \frac{1}{3} < 1$, $|\lambda_4| = |10| = 10 > 1$ ἕπεται ὅτι αἱ μὲν (α) καὶ (δ) εἶναι ἀπολύτως αὔξουσαι αἱ δὲ (β) καὶ (γ) ἀπολύτως φθίνουσαι.

14.2 Ὑπολογισμὸς τοῦ νυοστοῦ ὅρου μιᾶς γεωμ. προόδου.

Θεωροῦμεν τὴν γ. πρόοδον $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots$ λόγου λ.

Εἰς τὴν § 12.1 εἴδομεν ὅτι ἕκαστος ὅρος τῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ προηγουμένου του ἐπὶ τὸν λόγον λ. Ἄρα διὰ τὴν ἀνωτέρω πρόοδον ὁ δεύτερος ὅρος θὰ ἰσοῦται μὲ $\alpha_1\lambda$ ὁ τρίτος μὲ $\alpha_1\lambda^2$, ὁ τέταρτος μὲ $\alpha_1\lambda^3$ καὶ ἄρα ὁ νυοστὸς $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

Δηλ. ἔχομεν τὸν τύπον :

$$\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος δίδει τὸν νυοστὸν (α_ν) ὅρον συναρτήσει τῶν α_1, λ καὶ ν καὶ ἄρα ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίζωμεν αὐτὸν ὅταν δίδωνται αἱ τιμαὶ τῶν α_1, λ, ν.

Παράδειγμα :

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 8ος ὅρος τῆς προόδου : 3,6,12,24,48, . . .

Ἐὰν εἰς τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ θέσωμεν $\alpha_1 = 3$, $\lambda = 2$, $\nu = 8$ ἔχομεν : $\alpha_8 = 3 \cdot 2^{8-1} = 3 \cdot 2^7 = 3 \cdot 128 = 384$

14.3 Ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

Ἔστω ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος λόγου λ, α_1, $\alpha_2 = \alpha_1\lambda$, $\alpha_3 = \alpha_1\lambda^2, \ldots$
$\ldots \alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Σ_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς θὰ ἔχωμεν : $\Sigma_\nu = \alpha_1 + \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \ldots + \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ (1)
καὶ ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (1) ἐπὶ λ λαμβάνομεν:

$$\lambda\Sigma_\nu = \alpha_1\lambda + \alpha_1\lambda^2 + \alpha_1\lambda^3 + \ldots + \alpha_1\lambda^\nu \qquad (2)$$

Ἂν ἀφαιρέσωμεν τὴν ἰσότητα (1) ἐκ τῆς (2) καὶ ἐκτελέσωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων προκύπτει :

$$\lambda\Sigma_\nu - \Sigma_\nu = \alpha_1\lambda^\nu - \alpha_1 \Leftrightarrow \Sigma_\nu(\lambda-1) = \alpha_1(\lambda^\nu - 1)$$

καὶ ἄρα τελικῶς διὰ $\lambda \neq 1$ λαμβάνομεν τὸν τύπον :

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_1(\lambda^\nu - 1)}{\lambda - 1} \qquad (\mathrm{I})$$

Ἂν τώρα εἰς τὸν τύπον (I) θέσωμεν ἀντὶ $\alpha_1\lambda^\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}\cdot\lambda = \alpha_\nu\lambda$ λαμβάνομεν καὶ τὸν τύπον :

$$\Sigma_\nu = \frac{\alpha_\nu\lambda - \alpha_1}{\lambda - 1} \qquad (\mathrm{II})$$

Ἐκ τῶν τύπων (I) ἢ (II) δυνάμεθα νὰ ὑπολογίζωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γ. προόδου ἀναλόγως τῶν δεδομένων.

Παραδείγματα :

1. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἓξ πρώτων ὅρων τῆς προόδου : 1,3,9,27,81,243, . . .

Διὰ τὴν ἀνωτέρω πρόοδον ἔχομεν $\alpha_1 = 1$, $\lambda = 3$, $\nu = 6$

$$\text{Ἄρα} : \Sigma_6 = \frac{1\cdot(3^6-1)}{3-1} = \frac{729-1}{2} = \frac{728}{2} = 364$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ διὰ τὴν ἀνωτέρω πρόοδον $\alpha_6 = 243$, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (II) ἔχομεν :

$$\Sigma_6 = \frac{243\cdot3-1}{3-1} = \frac{728}{2} = 364$$

2. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ Σ_{10} τῆς προόδου : 1,—2,4,—8, . . .

Ἔχομεν : $\alpha_1 = 1$, $\lambda = -2$, $\nu = 10$. Ὁπότε δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου (I) λαμβάνομεν :

$$\Sigma_{10} = \frac{1\cdot((-2)^{10}-1)}{-2-1} = \frac{1024-1}{-3} = -341$$

14.4 Παρεμβολὴ ὅρων.

Ἔστω ἡ γεωμ. πρόοδος : $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, \ldots$

Ζητεῖται νὰ παρεμβληθῇ μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων αὐτῆς ἕνας θετικὸς ἀριθμός, οὕτως ὥστε ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία νὰ εἶναι γεωμ. πρόοδος.

Εἰς τὴν πρόοδον ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ καὶ τῆς ὁποίας ἔστω λ_1 ὁ λόγος, ὁ α_1 θὰ εἶναι πρῶτος ὅρος καὶ ὁ α_2 τρίτος. Ἄρα $\alpha_2 = \alpha_1\lambda_1^2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda_1^2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \Leftrightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \sqrt{\lambda}$. Ὁπότε ὁ ὅρος ὅστις παρεμβάλλεται μεταξὺ τῶν α_1 καὶ α_2 εἶναι : $\alpha_1\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_2\alpha_1^2}{\alpha_1}} = \sqrt{\alpha_1\alpha_2}$

Μὲ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω συλλογισμοὺς ἕπεται ὅτι ὁ ὅρος ὁ παρεμβαλλόμενος μεταξὺ τῶν α_2 καὶ α_3 εἶναι ὁ $\sqrt{\alpha_2\alpha_3}$, μεταξὺ α_3 καὶ α_4 ὁ $\sqrt{\alpha_3\alpha_4}$ κ.ο.κ.

Ἄρα ἡ νέα πρόοδος θὰ εἶναι :

$$\alpha_1,\ \sqrt{\alpha_1\alpha_2},\ \alpha_2,\ \sqrt{\alpha_2\alpha_3},\ \alpha_3,\ \sqrt{\alpha_3\alpha_4},\ \alpha_4,\ \sqrt{\alpha_4\alpha_5},\ \alpha_5,\ \dots$$

Ἂν εἰς τὴν νέαν αὐτὴν πρόοδον ἐπαναλάβωμεν τὴν παρεμβολὴν μεταξὺ κάθε ζεύγους διαδοχικῶν της ὅρων, ἐπιτυγχάνομεν ὥστε νὰ ἔχωμεν παρεμβάλει τρεῖς ἐνδιαμέσους ὅρους εἰς κάθε δύο διαδοχικοὺς ὅρους τῆς ἀρχικῆς. Μία νέα παρεμβολὴ θὰ μᾶς δώσῃ ἑπτὰ ἐνδιαμέσους διὰ τὴν ἀρχικὴν κ.ο.κ.

Παράδειγμα :

Νὰ παρεμβληθῇ μεταξὺ κάθε ζεύγους διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 3, 27, 243, 2187, . . . ἕνας νέος ἀριθμὸς ὥστε ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία νὰ ἀποτελῇ γεωμ. πρόοδον.

Συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ὁ λόγος λ_1 τῆς νέας προόδου θὰ εἶναι : $\lambda_1 = \sqrt{\lambda}$ ἢ $\lambda_1 = \sqrt{9}$ $(\lambda = 9)$ καὶ ἄρα $\lambda_1 = 3$.

Ἄρα ἡ νέα πρόοδος εἶναι ἡ :

$$3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243,\ 729,\ 2187,\ \dots$$

Οἱ δὲ παρεμβαλλόμενοι ἀριθμοὶ οἱ 9, 81, 729, . . .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἐξετάσατε ἐὰν οἱ κάτωθι ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν γ. πρόοδον :

α) $x+1,\ 3x+3,\ 9x+9$ β) $2+x,\ 1+\frac{x}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{x}{4}$ γ) $3x+2,\ 6x+4,\ 18x+8$

2. Προσδιορίσατε τὸν x ὥστε οἱ ἀριθμοί : $4,\ x+1,\ x$ νὰ ἀποτελοῦν γ. πρόοδον.

3. Νὰ ὑπολογισθῇ :

α) Ὁ 5ος ὅρος τῆς προόδου : 3,6,12, . . .

β) Ὁ 10ος » » » $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \dots$

γ) Ὁ 6ος » » » $2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{8},\ \dots$

4. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς γ. προόδου ἐάν :

α) $\lambda = \frac{1}{2},\ \nu = 7,\ \alpha_\nu = \frac{1}{128}$ β) $\lambda = -2,\ \nu = 5,\ \alpha_\nu = 48$

γ) $\lambda = 4, \nu = 7, \alpha_\nu = 2048$ δ) $\lambda = -\frac{1}{3}, \nu = 6, \alpha_\nu = -\frac{1}{243}$

5. Ὁ λόγος μιᾶς γ. προόδου εἶναι ἡ μικροτέρα ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2 - 4x + 3 = 0$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ 1ος ὅρος αὐτῆς ἂν $\nu = 9$, $\alpha_\nu = \frac{1}{256}$.

6. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων τῶν προόδων : α) 3, 6, 12, 24, . . . β) $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$
γ) 1, —2, 4, —8, 16, . . .

7. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ νυοστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου ἂν δίδωνται :

α) $\alpha_1 = 2, \lambda = 3, \nu = 6$ β) $\alpha_1 = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}, \nu = 8$

γ) $\alpha_1 = -2, \lambda = -2, \nu = 8$ δ) $\alpha_1 = 8, \lambda = -\frac{1}{4}, \nu = 5$

8. Νὰ ὑπολογισθοῦν ὁ πρῶτος ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γ. προόδου ἂν δίδωνται :

α) $\lambda = 2, \nu = 9, \alpha_\nu = 512$ β) $\lambda = -\frac{1}{3}, \nu = 7, \alpha_\nu = \frac{2}{743}$

γ) $\lambda = -3, \nu = 5, \alpha_\nu = -405$ δ) $\lambda = \frac{1}{4}, \nu = 5, \alpha_\nu = \frac{1}{768}$

9. Εἰς μίαν γ. πρόοδον μὲ λόγον $\lambda = 1$ ὁ τύπος (I) ἢ (II) ὅστις δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ. Δικαιολογήσατε διατὶ καὶ ἐν συνεχείᾳ εὕρετε ἕνα τύπον ὅστις θὰ δίδῃ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς τοιαύτης προόδου.

10. Νὰ παρεμβληθῇ ἕνας ἀριθμὸς μεταξὺ κάθε δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 5, 80, 1280, . . . ὥστε ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία νὰ ἀποτελῇ γ. πρόοδον.

11. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γ. πρόοδον ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι 5 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι 155.

12. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες γ. πρόοδον ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι $-\frac{1}{2}$ τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων της εἶναι $-\frac{7}{8}$.

13. Νὰ εὑρεθῇ γεωμετρικὴ πρόοδος, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι ὁ 3 τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων της εἶναι ἴσον μὲ 9.

15 Ἡ ἔννοια τοῦ λογαρίθμου

15.1 Γενικά.

Θεωροῦμεν τὰ σύνολα

$A=\{0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\ldots\}$ καὶ $\Gamma=\{\omega \mid \omega=2^{\alpha}, \alpha\in A\}$

καὶ ἀπεικονίζομεν (ἀμφιμονοσημάντως) τὸ σύνολον Γ ἐπὶ τοῦ συνόλου Α ἀφοῦ προηγομένως διατάξωμεν τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων κατ' αὔξάνον μέγεθος ὡς κάτωθι :

$$\begin{array}{cccccccccc} \ldots, & 2^{-3}, & 2^{-2}, & 2^{-1}, & 2^{0}, & 2^{1}, & 2^{2}, & 2^{3}, & \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ \ldots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3, & \ldots \end{array} \qquad (1)$$

Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη μὲ τὴν ὁποίαν εἰς τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ($2^0=1$) ἀντιστοιχοῦμεν τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον τῆς προσθέσεως (0) καὶ γενικῶς εἰς τὸ στοιχεῖον $\omega=2^{\alpha}\in\Gamma$ ἀντιστοιχοῦμεν τὸ $\alpha\in A$, ἔχει τὰς ἑξῆς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας :

i) «Τὸ γινόμενον $\omega_1\cdot\omega_2$ δύο τυχόντων στοιχείων $\omega_1,\omega_2\in\Gamma$, ἀπεικονίζεται εἰς τὸ ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2$, ἔνθα α_1 καὶ α_2 εἶναι αἱ εἰκόνες τῶν ω_1 καὶ ω_2 ἐν Α».

Π.χ. διὰ $\omega_1=2^{-3}$ καὶ $\omega_2=2^{-1}$ ὁπότε $\alpha_1=-3$ καὶ $\alpha_2=-1$ ἔπεται $\omega_1\cdot\omega_2=(2^{-3})(2^{-1})=2^{-4}$ καὶ $\alpha_1+\alpha_2=(-3)+(-1)=-4$. Προφανῶς δὲ λόγῳ τῆς (1) τὸ $2^{-4}\in\Gamma$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $-4\in A$.

ii) «Τὸ πηλίκον $\omega_1:\omega_2$ μὲ $\omega_1,\omega_2\in\Gamma$ ἀπεικονίζεται εἰς τὴν διαφορὰν $\alpha_1-\alpha_2$ ἔνθα α_1 καὶ α_2 εἶναι αἱ ἀντίστοιχοι εἰκόνες τῶν ω_1 καὶ ω_2 ἐν Α».

Π.χ. διὰ $\omega_1=2^{-3}$ καὶ $\omega_2=2^{-1}$ ὁπότε $\alpha_1=-3$ καὶ $\alpha_2=-1$ ἕπεται $\omega_1:\omega_2=(2^{-3}):(2^{-1})=2^{-2}$ καὶ $\alpha_1-\alpha_2=-3-(-1)=-2$. Προφανῶς δὲ λόγῳ τῆς (1) τὸ $2^{-2}\in\Gamma$ ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $-2\in A$.

iii) «Ἐὰν $\omega\in\Gamma$ καὶ $\nu\in A$ τότε ἡ δύναμις ω^{ν} ἀπεικονίζεται εἰς τὸ γινόμενον $\nu\cdot\alpha$ ἔνθα α ἡ εἰκὼν τοῦ ω ἐν Α».

Π χ. διὰ $\omega=2^{-2}$ καὶ $\nu=3$ ὁπότε $\alpha=-2$ ἕπεται ὅτι $\omega^{\nu}=$ $=(2^{-2})^3=2^{-6}$ καὶ $\nu\cdot\alpha=3(-2)=-6$. Προφανῶς ὅμως λόγῳ τῆς (1) τὸ 2^{-6} ἀπεικονίζεται εἰς τὸ $-6\in A$.

Ἐκ τῶν ἰδιοτήτων (i),(ii) καὶ (iii) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις (1) ἀντικαθιστᾷ τὰς πράξεις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, διαιρέσεως καὶ ὑψώσεως εἰς δύναμιν μὲ τὰς τρεῖς ἁπλουστέρας πράξεις τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως καὶ πολλαπλασιασμοῦ ἀντιστοίχως, γεγονὸς τὸ ὁποῖον καθιστᾷ προφανῆ τὴν πρακτικὴν σημασίαν αὐτῆς.

Παρατήρησις.

Σύνολα ὡς τὰ ἀνωτέρω Γ,(Α) μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ὁποίων ὡς εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ ἰσχύουν τὰ ἑξῆς,

α) τὸ γινόμενον (ἄθροισμα) δύο οἱωνδήποτε στοιχείων τοῦ Γ,(Α) εἶναι στοιχεῖον τοῦ ἰδίου συνόλου,

β) μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Γ,(Α) ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν (πρόσθεσιν),

γ) ὑπάρχει τὸ οὐδέτερον στοιχεῖον διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν (τὴν πρόσθεσιν) καὶ

δ) διὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου ὑπάρχει τὸ ἀντίστροφον (ἀντίθετον) στοιχεῖον αὐτοῦ,

λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ***ὁμάδα*** ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (τῆς προσθέσεως).

15.2 Λογάριθμος μὲ βάσιν 2

Καλοῦμεν ***λογάριθμον μὲ βάσιν 2,*** τὴν εἰκόνα $\alpha \in A$ τοῦ στοιχείου $\omega = 2^{\alpha} \in \Gamma$ τὴν ὁποίαν ὁρίζει ἡ ἀπεικόνισις (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Γράφομεν δὲ $\lambda o\gamma_2 \omega = \lambda o\gamma_2(2^{\alpha}) = \alpha$ ἢ συντόμως $\lambda o\gamma_2 2^{\alpha} = \alpha$.

Π.χ. $\lambda o\gamma_2(2^{-3}) = \lambda o\gamma_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$, $\lambda o\gamma_2(2^2) = \lambda o\gamma_2 4 = 2$, $\lambda o\gamma_2 2^0 = \lambda o\gamma_2 1 = 0$

Μετὰ τὸν ἀνωτέρω ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου μὲ βάσιν 2, ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν

$$f: \quad \Gamma \ni x \rightarrow y = (\lambda o\gamma_2 x) \in A \qquad (I)$$

τῆς ὁποίας τὸ πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον Γ τῶν δυνάμεων 2^{α} ἔνθα $\alpha \in A$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $A = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \ldots\}$, αἱ ἰδιότητες (i), (ii) καὶ (iii) τῆς παραγράφου 15.1 διατυποῦνται ὡς ἑξῆς.

i) $\lambda o\gamma_2(x_1 \cdot x_2) = \lambda o\gamma_2 x_1 + \lambda o\gamma_2 x_2$ μὲ $x_1, x_2 \in \Gamma$

ii) $\lambda o\gamma_2(x_1 : x_2) = \lambda o\gamma_2 x_1 - \lambda o\gamma_2 x_2$ μὲ $x_1, x_2 \in \Gamma$

iii) $\lambda o\gamma_2 x^{\nu} = \nu \cdot \lambda o\gamma_2 x$ μὲ $x \in \Gamma$ καὶ $\nu \in A$

Διὰ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ $\Gamma = \{ x | x = 2^\alpha$ μὲ $\alpha \in A \}$ τῆς συναρτήσεως (I) καθὼς καὶ διὰ τὸ πεδίον τιμῶν αὐτῆς $A = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \}$ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα αὐτῶν μὲ τὴν διάταξιν κατ' αὐξάνον μέγεθος $\ldots, 2^{-3} = \frac{1}{8}, 2^{-2} = \frac{1}{4}, 2^{-1} = \frac{1}{2}, 2^0 = 1, 2^1 = 2,$ $2^2 = 4, 2^3 = 8, \ldots$ καὶ $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ ἀντιστοίχως, ἀποτελοῦν τὸ μὲν πρῶτον γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον 2 τὸ δὲ δεύτερον ἀριθμητικὴν μὲ διαφορὰν 1. Δυνάμεθα ἑπομένως, παρεμβάλλοντες μεταξὺ κάθε ζεύγους διαδοχικῶν ὅρων ἑκάστης προόδου ὡρισμένον πλῆθος ἐνδιαμέσων ὅρων (βλ. § 13.4 καὶ § 14.4) νὰ ἐπεκτείνωμεν τόσον τὸ πεδίον ὁρισμοῦ ὅσον καὶ τὸ πεδίον τιμῶν τῆς συναρτήσεως (I).

Ἡ μέθοδος ὅμως αὕτη ἐπεκτάσεως τῶν πεδίων ὁρισμοῦ καὶ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y = \lambda o\gamma_2 x$ δὲν εἶναι ἡ ἐνδεικνυομένη.

Μὲ μεθόδους ἀνωτέρων μαθηματικῶν δυνάμεθα πάντως νὰ ἐπιτύχωμεν ὥστε ἡ συνάρτησις $y = \lambda o\gamma_2 x$ νὰ ὁρίζεται εἰς τὸ σύνολον Π^+ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, καὶ ἑπομένως νὰ καταρτίσωμεν πίνακας ἐκ τῶν ὁποίων νὰ ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίζωμεν τὸν λογάριθμον παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ μὲ τὴν ἀπαιτουμένην ἑκάστοτε προσέγγισιν.

15.3 Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \lambda o\gamma_2 x, x \in \Pi^+$

Εἰς τὸ σχῆμα 22 δίδεται ἓν μέρος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = \lambda o\gamma_2 x$ μὲ $x \in \Pi^+$. Ἀπὸ τὴν μορφὴν τῆς καμπύλης ἥτις παριστᾷ γραφικῶς τὴν συνάρτησιν $y = \lambda o\gamma_2 x$ δυνάμεθα εὐκόλως νὰ συμπεράνωμεν ἐκτὸς τῶν ἄλλων ὅτι :

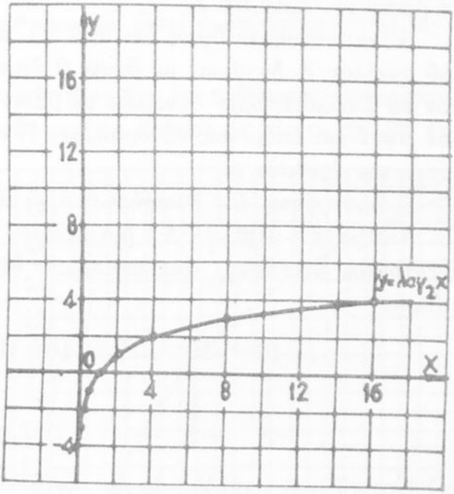
α) Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τοῦ 1 εἶναι θετικοί.

β) Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 0 καὶ 1 εἶναι ἀρνητικοί.

γ) Διὰ ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ x δὲν ὑπάρχουν πραγματικοὶ λογάριθμοι.

Ἀκόμη ἀπὸ τὴν γραφικὴν αὐτὴν παράστασιν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν μὲ προσέγγισιν δεκάτου, διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ x τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ $\lambda o\gamma_2 x$.

Οὕτως ἂν π.χ. ὁ x διατρέχῃ τὸ διάστημα $1 \leq x \leq 12$ δυνάμεθα νὰ καταρτήσωμεν τὸν κάτωθι πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν



Σχ. 22

x=	1,5	3	5	6	7	9	10	11	12
$\lambda o\gamma_2 x \simeq$	0,6	1,6	2,3	2,7	2,8	3,2	3,3	3,5	3,7

τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁποίου δυνάμεθα νὰ δείξωμεν καὶ τὸ πόσον ἡ χρησιμοποίησις τῶν λογαρίθμων ἁπλουστεύει τὰς διαφόρους ἀριθμητικὰς πράξεις.

Ἔστω π.χ. ὅτι ἔχομεν νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν 5:9

Ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν μας τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων (βλ. § 15.2) ἔχομεν : $\lambda o\gamma_2(5:9) = \lambda o\gamma_2 5 - \lambda o\gamma_2 9 = 2{,}3 - 3{,}2 = -1{,}1$

Ἐκ τῆς καμπύλης ὅμως τοῦ σχήματος 22 προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος εἶναι $-1{,}1$ εἶναι ὁ 0,5 ὁπότε λαμβάνομεν $\lambda o\gamma_2(5:9) = \lambda o\gamma_2(0{,}5) \Leftrightarrow 5:9 = 0{,}5$ ἀποτέλεσμα, τὸ ὁποῖον ἐπαληθεύεται ἂν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $5:9 = 0{,}555\ldots$

15.4 Λογάριθμοι μὲ βάσιν 10 ἢ δεκαδικοὶ λογάριθμοι.

Εἰς τὴν § 15.2 εἴδομεν ὅτι διὰ νὰ ὁρίσωμεν τὸν λογάριθμον μὲ βάσιν 2 ἀπεικονίσαμεν εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $\Gamma = \{x \mid x = 2^\alpha \text{ μὲ } \alpha \in A\}$ δηλ. ἐθεωρήσαμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A ὡς εἰκόνας τῶν δυνάμεων τοῦ 2. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἔχομεν ὁρίσει ἓν λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν 2.

Εἶναι εὐνόητον ὅμως ὅτι ἀντὶ νὰ ἀπεικονίσωμεν εἰς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A δυνάμεις μὲ βάσιν 2 ἠμποροῦμεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον νὰ ἀπεικονίσωμεν δυνάμεις μὲ βάσιν ὁποιονδήποτε θετικὸν ἀριθμὸν $\rho \neq 1$ καὶ ἑπομένως νὰ ὁρίσωμεν ἓν νέον λογαριθμικὸν σύστημα μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν ρ.

Τοιουτρόπως ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ σύνολα $A = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ καὶ $\Delta = \{x / x = 10^{\alpha}, \alpha \in A\}$ διατάξωμεν τὰ στοιχεῖα αὐτῶν κατὰ τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους, ἀπεικονίσωμεν δὲ τὸ σύνολον Δ ἐπὶ τοῦ A ὡς κάτωθι

$$\begin{array}{cccccccc} \ldots, & 10^{-3}, & 10^{-2}, & 10^{-1}, & 10^{0}, & 10^{1}, & 10^{2}, & 10^{3}, \ldots \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \ldots, & -3, & -2, & -1, & 0, & 1, & 2, & 3 \end{array} \qquad (1)$$

καὶ ἐργασθῶμεν ἀκριβῶς ὡς εἰς τὴν § 15.1 καὶ 15.2 θὰ δυνηθῶμεν νὰ δώσωμεν τὸν ἑπόμενον ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων μὲ βάσιν 10, οἱ ὁποῖοι εἶναι καὶ οἱ πλέον ἐν χρήσει.

«Καλοῦμεν λογάριθμον μὲ βάσιν τὸν ἀριθμὸν 10 τὴν εἰκόνα $\alpha \in A$ τοῦ στοιχείου $10^{\alpha} \in \Delta$ καὶ γράφομεν $\lambda o\gamma_{10} 10^{\alpha} = \alpha$ ἢ $\lambda o\gamma 10^{\alpha} = \alpha$»*.

Οὕτω π.χ. ἔχομεν $\lambda o\gamma 10^{-3} = \lambda o\gamma \dfrac{1}{1000} = -3$, $\lambda o\gamma 10^{0} = \lambda o\gamma 1 = 0$, $\lambda o\gamma 10^{2} = \lambda o\gamma 100 = 2$ κ.ο.κ.

Ἐπίσης εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες :

i) $\lambda o\gamma(x_1 \cdot x_2) = \lambda o\gamma x_1 + \lambda o\gamma x_2$ μὲ $x_1, x_2 \in \Delta$

ii) $\lambda o\gamma(x_1 : x_2) = \lambda o\gamma x_1 - \lambda o\gamma x_2$ μὲ $x_1, x_2 \in \Delta$

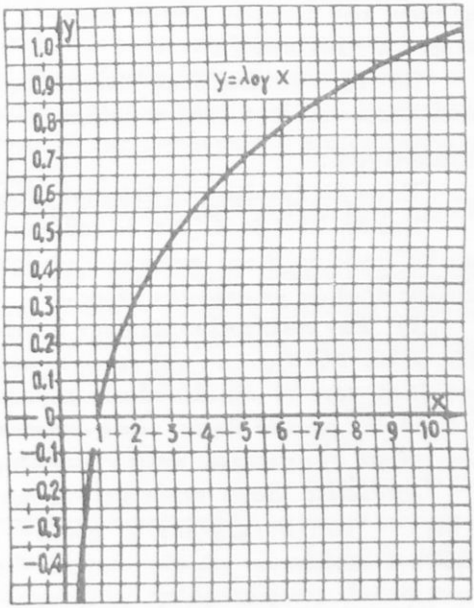
iii) $\lambda o\gamma x^{\nu} = \nu \lambda o\gamma x$ μὲ $x_1, x_2 \in \Delta$ $\nu \in A$

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, διὰ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $f : \Delta \ni x \rightarrow y = \lambda o\gamma x \in A$ τὰ ὁποῖα μὲ τὴν ἀνωτέρω διάταξιν (1) ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν καὶ ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον 10 καὶ διαφορὰν 1 ἀντιστοίχως, ἰσχύουν τὰ αὐτὰ ὡς καὶ διὰ τὰ πεδία ὁρισμοῦ καὶ τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y = \lambda o\gamma_2 x$ (βλ. §15.2).

* Εἰς τὰ ἑπόμενα ἀντὶ $\lambda o\gamma_{10} x$ θὰ γράφωμεν $\lambda o\gamma x$

Δηλαδὴ δύνανται καὶ αὐτὰ ἐκτὸς τῆς γνωστῆς μεθόδου ἐπεκτάσεώς των διὰ διαδοχικῶν παρεμβολῶν ἐνδιαμέσων ὅρων μεταξὺ κάθε ζεύγους διαδοχικῶν ὅρων τῶν προόδων, νὰ ἐπεκταθοῦν μὲ μεθόδους ποὺ διδάσκουν τὰ ἀνώτερα μαθηματικὰ ὥστε ἡ συνάρτησις y=λογx νὰ ὁρισθῇ ἐντὸς τοῦ Π^+.

Ἐν τῷ συνόλῳ τούτῳ ἡ συνάρτησις y=λογx δύναται νὰ παρασταθῇ γραφικῶς εἰς σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων ὡς εἰς τὸ σχ. 23 ἐμφαίνεται. Ἐκ τῆς γραφικῆς αὐτῆς παραστάσεως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 1 ἕως 10 μὲ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ. Πρὸς τοῦτο ἡ μονὰς μήκους ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων ἔχει ληφθῆ δεκαπλασία τῆς μονάδος μήκους τοῦ ἄξονος τῶν τετμημένων.



Σχ. 23

Τοιουτοτρόπως π.χ. εὑρίσκομεν.

λογ2=0,30

λογ4,5=0,65

λογ6,3=0,80

Προκειμένου ὅμως διὰ πρακτικὰς ἐφαρμογὰς τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων, ἡ ἀνωτέρω προσέγγισις τοῦ ἑνὸς ἑκατοστοῦ κρίνεται ἐντελῶς ἀνεπαρκής. Διὰ τοῦτο ἔχουν καταρτισθῆ εἰδικοὶ πίνακες παρέχοντες τοὺς δ. λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10.000 μὲ προσέγγισιν 5 ἕως 7 δεκαδικῶν ψηφίων ἀναλόγως τῆς ἑκάστοτε ἐπιδιωκομένης προσεγγίσεως.

Ἤδη μελετῶντες τὴν καμπύλην τοῦ σχήματος 23 καὶ λαμβανομένων ὑπ' ὄψιν τοῦ ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ λογx ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς :

i) ***Τὸ ἀκέραιον μέρος* τοῦ δ. λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἔχει τόσας ἀκεραίας μονάδας ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα.***

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ὁ ἀριθμὸς $x>1$ τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὸν λογάριθμον ἔχει ἀκέραιον μέρος μὲ α τὸ πλῆθος ψηφία. Εἶναι προφανὲς τότε ὅτι ὁ ἐν λόγῳ ἀριθμὸς θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $10^{\alpha-1}$ καὶ 10^{α} δηλαδὴ $10^{\alpha-1} \leq x < 10^{\alpha}$ ὁπότε ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν $\lambda o\gamma 10^{\alpha-1} = \alpha - 1$, $\lambda o\gamma x$ καὶ $\lambda o\gamma 10^{\alpha} = \alpha$ θὰ ἔχωμεν : $\alpha - 1 \leq \lambda o\gamma x < \alpha$

Ἐκ τῆς τελευταίας ὅμως ἀνισότητος συμπεραίνομεν ὅτι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογx εἶναι ὁ ἀριθμὸς α—1.

Παράδειγμα:

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ 34,8.

Ἐπειδὴ $10^1 < 34{,}8 < 10^2$ ἂν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους εὑρίσκωμεν $1 < \lambda o\gamma 34{,}8 < 2$ καὶ συνεπῶς ὁ λογάριθμος τοῦ 34,8 θὰ εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς μὲ ἀκέραιον μέρος 1.

ii) ***Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἢ διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμὸν μὲ 10, 100, 1000, . . . , καὶ γενικῶς μὲ μίαν δύναμιν 10^{ν} $(\nu \in \Phi)$ τοῦ δέκα, τότε τὸ μὲν δεκαδικὸν μέρος τοῦ δ. λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ αὐξάνει ἢ ἐλαττοῦται ἀντιστοίχως κατὰ ν μονάδας.***

Ἀπόδειξις Ἔστω τυχὼν θετικὸς ἀριθμὸς k. Παρατηροῦμεν τότε ὅτι : $\lambda o\gamma(10^{\nu} \cdot k) = \lambda o\gamma 10^{\nu} + \lambda o\gamma k = \nu \cdot \lambda o\gamma 10 + \lambda o\gamma k$ καὶ ἐπειδὴ $\lambda o\gamma 10 = 1$ λαμβάνομεν τελικῶς : $\lambda o\gamma(10^{\nu} \cdot k) = \nu + \lambda o\gamma k$ (1)

Ὁμοίως $\lambda o\gamma\left(\dfrac{k}{10^{\nu}}\right) = \lambda o\gamma k - \lambda o\gamma 10^{\nu} = \lambda o\gamma k - \nu \cdot \lambda o\gamma 10 =$

$= \lambda o\gamma k - \nu$

δηλ. $\lambda o\gamma\left(\dfrac{k}{10^{\nu}}\right) = \lambda o\gamma k - \nu$ (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) ἕπεται καὶ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως (ii).

Π.χ. ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ 34,8 διὰ νὰ

* Τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ καλεῖται καὶ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου.

εὕρωμεν τὸν $λογ(34,8 \cdot 10^2) = λογ3480$ ἀρκεῖ εἰς τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογ34,8 νὰ προσθέσωμεν δύο μονάδας καθ' ὅσον :

$$λογ(34,8 \cdot 10^2) = λογ34,8 + λογ10^2 = λογ34,8 + 2$$

Ὁμοίως διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν $λογ(34,8 : 10^2)$ ἀρκεῖ ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ λογ34,8 δύο μονάδας :

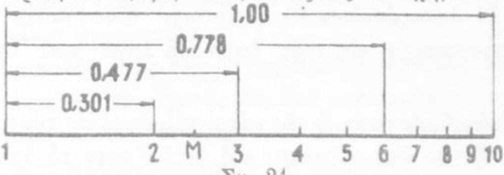
Πράγματι : $λογ(34,8 : 10^2) = λογ34,8 - λογ10^2 = λογ34,8 - 2$

15.5 Λογαριθμικὴ κλῖμαξ.

i) *Λογαριθμικὴ κλῖμαξ.* Ἐκ μιᾶς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = λογx$ (σχ. 23) ἢ ἐκ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων οἱ ὁποῖοι μᾶς δίδουν τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως $y = λογx$ τοῦ x μεταβαλλομένου π.χ. εἰς τὸ διάστημα $1 \leq x \leq 10$.

Τοιουτοτρόπως ἔχομεν π.χ. λογ1 = 0, λογ2 = 0,30, λογ3 = 0,77, ... , λογ10 = 1,00.

Ἐν συνεχείᾳ ἀφοῦ ἐκλέξωμεν μίαν ἀρκετὰ μεγάλην μονάδα μήκους, ἐπὶ μιᾶς ἡμιευθείας καὶ μὲ ἀρχὴν πάντα τὸ ἀριστερὸν ἄκρον αὐτῆς (σχ. 24) λαμβάνομεν τμήματα μὲ μήκη ἴσα πρὸς τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 1,2,3, . . . ,10 ὡς εἰς τὸ σχῆμα 24 ἐμφαίνεται.



Σχ. 24

Ἐὰν τώρα θέσωμεν εἰς τὰ δεξιὰ ἄκρα τῶν τμημάτων αὐτῶν τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3,.. . . . 10 ἀντιστοίχως, θὰ λάβωμεν μίαν ἀνομοιομόρφως βαθμολογημένην ἡμιευθεῖαν (τῆς ὁποίας αἱ ὑποδιαιρέσεις καλοῦνται ***ἀριθμόσημα***) ἡ ὁποία καλεῖται ***λογαριθμικὴ κλῖμαξ.*** Ἐννοεῖται ὅτι ἡ κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον βαθμολογία τῆς ἡμιευθείας δύναται νὰ συνεχισθῇ καὶ πέραν τοῦ ἀριθμοσήμου 10, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν πρὸς τοῦτο ἐπ' αὐτῆς τμήματα μὲ μήκη ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν π.χ. 10 ἕως 100.

Ἐννοεῖται ἐπίσης ὅτι εἰς τυχὸν σημεῖον **M** τῆς ἀνωτέρω ἡμιευθείας ἀντιστοιχεῖ ἓν ὡρισμένον ἀριθμόσημον x τοιοῦτον ὥστε ὁ λογx = μὲ τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἐκ τοῦ ἀριστεροῦ ἄκρου τῆς ἡμιευθείας καὶ τοῦ τυχόντος σημείου M.

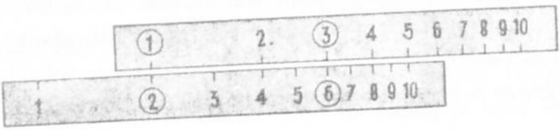
ii) *Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις διὰ δύο λογαριθμικῶν κλιμάκων*.

Λαμβάνομεν δύο ἴσας λογαριθμικὰς κλίμακας καὶ τοποθετοῦμεν τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν κατὰ μῆκος τῆς ἄλλης, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 25 ἐμφαίνεται, οὕτως ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ σύρωμεν τὴν μίαν ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Ἔστω τώρα ὅτι θέλωμεν νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ γινόμενον 2·3

Τοῦτο εὑρίσκεται ἐὰν προσθέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα διαστήματα τῆς κλίμακος, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς λογ2 καὶ λογ3 καθ' ὅσον λογ(2·3)= λογ2+λογ3.

Φέρομεν λοιπὸν τὸ ἀριθμόσημον 1 τῆς ἄνω κλίμακος εἰς σύμπτωσιν μὲ τὸ ἀριθμόσημον 2 τῆς κάτω κλίμακος καὶ διαβάζομεν τὸ ἀποτέλεσμα 6 (συμπίπτει μὲ τὸ ἀριθμόσημον 3 τῆς ἄνω κλίμακος) ἐπὶ τῆς κάτω κλίμακος.



Σχ. 25

Μὲ ἀναλόγους ὡς ἄνω σκέψεις δυνάμεθα τῇ βοηθείᾳ τῶν δύο λογαριθμικῶν κλιμάκων νὰ εὕρωμεν π.χ. τὸ πηλίκον 6:3

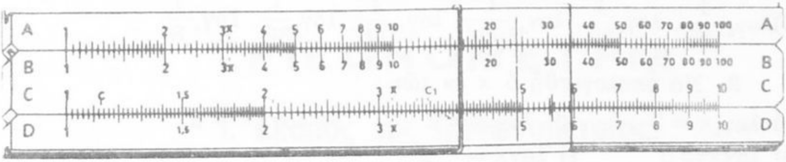
Τοῦτο εὑρίσκεται ἂν ἀφαιρέσωμεν τὰ ἀντίστοιχα διαστήματα τῆς κλίμακος τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς λογ6 καὶ λογ3 καθ' ὅσον λογ(6:3)= λογ6—λογ3.

Φέρομεν λοιπὸν τὸ ἀριθμόσημον 6 τῆς κάτω κλίμακος εἰς σύμπτωσιν μὲ τὸ ἀριθμόσημον 3 τῆς ἄνω κλίμακος καὶ διαβάζομεν τὸ ἀποτέλεσμα 2 (συμπίπτει μὲ τὸ ἀριθμόσημον 1 τῆς ἄνω κλίμακος) ἐπὶ τῆς κάτω κλίμακος (σχ. 25).

15.6 Λογαριθμικὸς κανὼν (περιγραφή).

Μίαν ἁπλῆν μορφὴν λογαριθμικοῦ κανόνος ἀποτελεῖ ἡ ἐν συνδυασμῷ χρῆσις τῶν δύο λογαριθμικῶν κλιμάκων, τὴν ὁποίαν εἴδομεν εἰς τὴν § 15.5. Ἐδῶ δίδομεν μίαν ἐκτενεστέραν περιγραφὴν αὐτοῦ.

Οὗτος κατασκευάζεται ἐκ πλαστικῆς ὕλης ἢ ἐξ εἰδικοῦ ξύλου ἐνισχυομένου δι' ἀτσαλίνων ἐλασμάτων πρὸς ἀποφυγὴν οἱασδήποτε μεταβολῆς τοῦ μήκους αὐτοῦ. Ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἀκίνητα καὶ ἓν κινητὸν στέλεχος. Ἐπὶ τοῦ ὅλου δύναται νὰ κινῆται διαφανὴς δρομεὺς φέρων μίαν χαραγὴν ἡ ὁποία διευκολύνει εἰς τὴν ἀνάγνωσιν κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς (σχ. 26).



Σχ. 26

Ὁ λογαριθμικὸς κανὼν φέρει τέσσαρας λογαριθμικὰς κλίμακας τὰς ὁποίας χαρακτηρίζομεν μὲ τὰ γράμματα A, B, C, D. Αἱ κλίμακες A καὶ D εἶναι γεγραμμέναι ἐπὶ τοῦ κανόνος, αἱ δὲ B καὶ C αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς A καὶ D, ἐπὶ τοῦ κινητοῦ στελέχους αὐτοῦ τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***σύρτης***.

Διὰ τὰς κλίμακας C καὶ D (1 ἕως 10) ἔχει ληφθῆ μονὰς μήκους διπλασία τῆς μονάδος ἡ ὁποία ἔχει ληφθῆ διὰ τὰς κλίμακας A καὶ B (1 ἕως 100).

Τὰς κλίμακας τὰς χρησιμοποιοῦμεν κατὰ ζεύγη (A—B καὶ C—D) συνήθως ὅμως προτιμοῦμεν τὸ ζεῦγος C—D διὰ τὸ ὁποῖον ἡ μονὰς μήκους εἶναι μεγαλυτέρα.

Ἡ σπουδαιότης τοῦ λογαριθμικοῦ κανόνος ὡς λογιστικοῦ ὀργάνου ἔγκειται εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι διὰ μετακινήσεως τοῦ σύρτου αὐτοῦ εἰς καταλλήλους θέσεις, δυνάμεθα νὰ ἐκτελοῦμεν διαφόρους ἀριθμητικὰς πράξεις π.χ. πολλαπλασιασμὸν καὶ διαίρεσιν (βλ. § 15.5), ἐνῷ ὁ συσχετισμὸς τῶν κλιμάκων αὐτοῦ ἀνὰ δύο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκτελοῦμεν καὶ διαφόρους ἄλλους ὑπολογισμούς, ἡ περιγραφὴ ἐκτελέσεως τῶν ὁποίων ἐκφεύγει τῶν πλαισίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ὁρίσατε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν μὲ βάσιν:

α) ***2*** : $2, 8, 64, 512, \frac{1}{16}, \frac{1}{128}$ β) ***3*** : $3, 9, 81, 243, \frac{1}{27}, \frac{1}{729}$

β) ***4*** : $16, 64, 1024, \frac{1}{4}, \frac{1}{256}, \frac{1}{4096}$ γ) ***10*** : $10, 1000, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000000}$.

2. Ὁρίσατε τοὺς ἀκολούθους λογαρίθμους :

α) $λογ_5 25$, $λογ_7 49$, $λογ_9 81$, $λογ_6 216$, $λογ_4 64$, $λογ_7 243$, $λογ_4 256$.

β) $λογ_5 \frac{1}{125}$, $λογ_2 \frac{1}{32}$, $λογ_4 \frac{1}{1024}$, $λογ_{11} \frac{1}{11}$, $λογ_6 \frac{1}{36}$, $λογ_8 \frac{1}{8}$

3. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x ἐκ τῶν :

α) $λογ_4 x = 3$ β) $λογ_7 x = 2$ γ) $λογ_{20} x = 3$
δ) $λογ x = 5$ ε) $λογ x = -2$

4. Νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ ποίων ἀκεραίων ἀριθμῶν περιέχονται οἱ λογάριθμοι :

α) λογ45 β) λογ7 γ) λογ3470 δ) λογ0,07 ε) λογ0,002
στ) λογ0,4

5. Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως $y = λογx$ (σχ. 23) νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x ἂν γνωρίζωμεν ὅτι κατὰ προσέγγισιν ἑκατοστοῦ εἶναι :

α) $λογx = 0,34$ β) $λογx = 0,40$ γ) $λογx = 0,58$ δ) $λογx = 0,69$
ε) $λογx = 0,74$ στ) $λογx = -0,30$

6. Εἶναι κατὰ προσέγγισιν $λογ2 = 0,3010$ καὶ $λογ3 = 0,4771$. Μὲ τὴν βοήθειαν αὐτῶν νὰ εὑρεθοῦν οἱ δεκαδικοὶ λογάριθμοι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :

α) 4 β) 6 γ) 9 δ) 12 ε) 18 στ) 27 ζ) 32 η) 20 ι) 30
κ) 5 λ) 400 μ) 0,2 ν) 0,004 ξ) 0,9 ο) 1,5 π) 0,75

7. Νὰ γραφοῦν ὑπὸ μορφὴν λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ :

α) λογ2+λογ3 β) λογ6+λογ10 γ) λογ7—λογ10 δ) 2—λογ25
ε) 3—λογ20 στ) λογ5+1 ζ) λογ2+2 η) λογ70—1 ϑ) λογ60—2

ΜΕΡΟΣ Β'

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

1. Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας.

1.1 Γενικά.

Ἡ γεωμετρία μελετᾶ τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑφίστανται μεταξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου (πλευραί, ὕψη, διχοτόμοι, διάμεσοι κ.τ.λ.) καὶ παρέχει τύπους τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ γραμμικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ ὅταν δίδωνται ὡρισμένα ἐξ αὐτῶν. Π.χ. ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ ὑπόλοιπα γραμμικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ.

Γενικῶς ὅμως μὲ γεωμετρικοὺς τύπους δὲν δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς γωνίας ἑνὸς τριγώνου ὅταν δίδωνται γραμμικὰ στοιχεῖα αὐτοῦ ἐξαιρέσει ὡρισμένων εἰδικῶν περιπτώσεων (ὀρθογώνια, ἰσοσκελῆ, ἰσόπλευρα τρίγωνα).

Βεβαίως δυνάμεθα καὶ εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον γεωμετρικῶς καὶ νὰ μετρήσωμεν τ' ἄγνωστα στοιχεῖα αὐτοῦ τῇ βοηθείᾳ ὀργάνων (μοιρογνωμόνιον), πλὴν ὅμως αἱ μέθοδοι αὗται δὲν εἶναι πρόσφοροι ὡς εἰσάγουσαι σημαντικὰ σφάλματα κατὰ τὴν μέτρησιν.

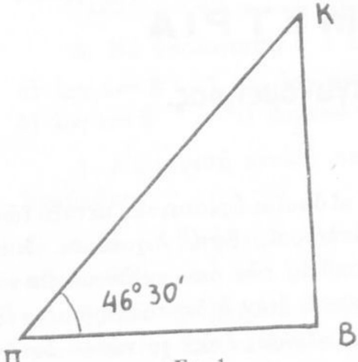
Ἔστω π.χ. πρὸς ἐπίλυσιν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα :

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος κωδωνοστασίου ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ὁριζον. ἀπόστασις παρατηρητοῦ ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 100m ἡ δὲ γωνία (μετρηθεῖσα μὲ κατάλληλον ὄργανον) ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῶν εὐθειῶν τῶν συνδεουσῶν τὸ σημεῖον στάσεως τοῦ παρατηρητοῦ μετὰ τῆς κορυφῆς καὶ βάσεως τοῦ κωδωνοστασίου εἶναι 46°30'.

Γεωμετρικὴ ἐπίλυσις.

Τὸ ζητούμενον ὕψος εἶναι ἡ μία κάθετος πλευρὰ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἑτέρα κάθετος ἔχει μῆκος 40m ἡ δὲ εἰς αὐτὴν προσκειμένη ὀξεῖα γωνία ἔχει μέτρον 46°30'.

Κατασκευάζομεν λοιπὸν ὑπὸ κλίμακα ἔστω $\frac{1}{1000}$ (σχ. 1) ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΚΠ μὲ ΒΠ = 0,04m = 4cm καὶ γωνίαν ∢ΚΠΒ = = 46°30′. Ἐπειδὴ τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον καὶ τὸ πραγματικὸν τοιοῦτον εἶναι ὅμοια μὲ λόγον ὁμοιότητος (λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν) $\frac{1}{1000}$, ἕπεται ὅτι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΒΚ ἐπὶ 1000 θὰ μᾶς δώσῃ τὸ ζητούμενον ὕψος.



Σχ. 1

Μετροῦμεν λοιπὸν τὴν πλευρὰν ΒΚ καὶ εὑρίσκομεν (ΒΚ) = 4,2 cm. Ἄρα τὸ ζητούμενον ὕψος θὰ εἶναι:

$$4{,}2 \cdot 1000\text{cm} = 4.200\text{cm} = 42\text{m}$$

Ὁ ὑπολογισμὸς ὅμως οὗτος εἰσάγει σημαντικὰ σφάλματα ὀφειλόμενα εἴτε εἰς τὴν ἀτέλειαν τῶν χρησιμοποιουμένων ὀργάνων εἴτε εἰς ἄλλους παράγοντας.

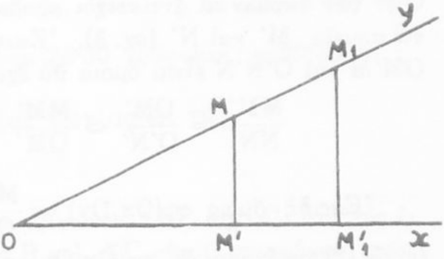
Διὰ νὰ καταστῇ ἀκριβὴς ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμὸς καὶ γενικῶς ὁ ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου ὅταν δίδωνται ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα, ἐπενοήθησαν μέθοδοι καθαρῶς ὑπολογιστικαὶ τὰς ὁποίας ἐξετάζει ἰδιαίτερος κλάδος τῆς Μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται ***Τριγωνομετρία.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καθίσταται προφανὲς ὅτι :

Σκοπὸς τῆς Τριγωνομετρίας εἶναι ὁ διὰ λογιστικῶν μεθόδων ὑπολογισμὸς τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου κυρίων (πλευρῶν, γωνιῶν, ἐμβαδοῦ) ἢ δευτερευόντων (ὑψῶν, διχοτόμων, διαμέσων κ.τ.λ) ὅταν δίδωνται ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα.

2. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας

Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ὀξεῖαν γωνίαν $\sphericalangle(Ox, Oy)$ σχ. 2 καὶ ἔστωσαν M καὶ M_1 δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy αὐτῆς. Ἐὰν προβάλωμεν τὰ σημεῖα M καὶ M_1 ἐπὶ τῆς Ox σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $OM'M$ καὶ OM'_1M_1 τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ὡς ἔχοντα μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτῶν ἴσην ($\sphericalangle(Ox, Oy)$ κοινήν).



Σχ. 2

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν :

$$\frac{MM'}{M_1M'_1} = \frac{OM'}{OM'_1} \Leftrightarrow \frac{MM'}{OM'} = \frac{M_1M'_1}{OM'_1} \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς σχέσεως (1) προκύπτει ὅτι ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox, Oy)$ διατηρῆται σταθερόν, ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\dfrac{MM'}{OM'}$ παραμένει ἀμετάβλητος, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου M ἐπὶ τῆς Oy καὶ ἄρα εἰς δεδόμενον μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox, Oy)$ ἀντιστοιχεῖ εἷς ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμὸς $K \geq 0$ (ἡ τιμὴ τοῦ λόγου $\dfrac{MM'}{OM'}$).

Ὁ ἀριθμὸς αὐτός, ὁ ὁποῖος ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μέτρον τῆς γωνίας καὶ μόνον ἀπὸ αὐτό, καλεῖται ***ἐφαπτομένη*** τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox, Oy)$ καὶ συμβολίζεται εφ(Ox, Oy)*.

Ἂν π.χ. $MM' = 1{,}5\text{cm}$ καὶ $OM' = 3\text{cm}$ τότε εφ$(Ox, Oy) =$

$$= \frac{MM'}{OM'} = \frac{1{,}5\text{cm}}{3\text{cm}} = \frac{1}{2}$$

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ εἶναι εὔκολον νὰ δείξωμεν ὅτι :

α) Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι. Ἀντιστρόφως δὲ

* Διεθνῶς ἡ εφ(Ox, Oy) συμβολίζεται tg(Ox, Oy) ἐκ τῆς λέξεως tangens = ἐφαπτομένη.

β) Ἐὰν αἱ ἐφαπτόμεναι δύο γωνιῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ γωνίαι θὰ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. α) Ἔστωσαν αἱ δύο ἴσαι γωνίαι $\sphericalangle(Ox,Oy)$ καὶ $\sphericalangle(O'x',O'y')$.

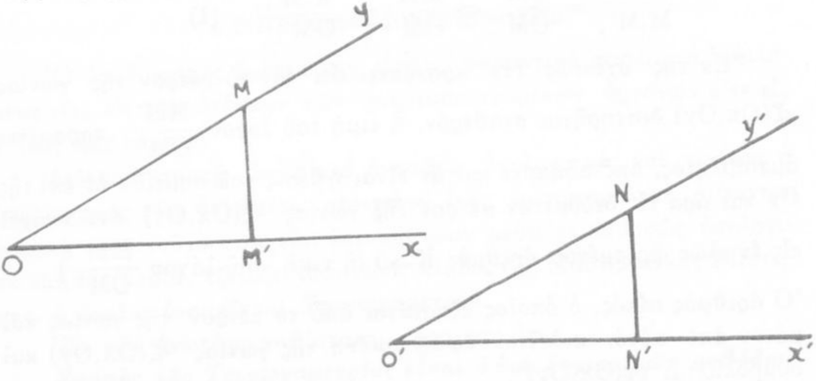
Ἔστωσαν ἀκόμη Μ καὶ Ν δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν Oy καὶ $O'y'$ τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστιχοι προβολαὶ ἐπὶ τῶν Ox καὶ $O'x'$ εἶναι τὰ σημεῖα M' καὶ N' (σχ. 3). Ἐπειδὴ τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα $OM'M$ καὶ $O'N'N$ εἶναι ὅμοια θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν :

$$\frac{MM'}{NN'}=\frac{OM'}{O'N'} \Leftrightarrow \frac{MM'}{OM'}=\frac{NN'}{O'N'} \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ ὅμως $\varepsilon\varphi(Ox,Oy)=\dfrac{MM'}{OM'}$ καὶ $\varepsilon\varphi(O'x',O'y')=\dfrac{NN'}{O'N'}$

ἐκ τῆς (2) συνάγομεν ὅτι $\varepsilon\varphi(Ox,Oy)=\varepsilon\varphi(O'x',O'y')$.

β) Ἔστωσαν δύο γωνίαι $\sphericalangle(Ox,Oy)$ καὶ $\sphericalangle(O'x',O'y')$ μὲ $\varepsilon\varphi(Ox,Oy)=\varepsilon\varphi(O'x',O'y')$. (σχ. 3)



Σχ. 3

Ἐὰν καὶ πάλιν λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν Oy καὶ $O'y'$ τὰ Μ καὶ Ν καὶ προβάλωμεν αὐτὰ ἐπὶ τῶν Ox καὶ $O'x'$, θὰ σχηματισθοῦν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $OM'M$ καὶ $O'N'N$. Ἐπειδὴ ὅμως $\varepsilon\varphi(Ox,Oy)=\varepsilon\varphi(O'x',O'y')$ καὶ ἄρα $\dfrac{MM'}{OM'}=\dfrac{NN'}{O'N'} \Leftrightarrow \dfrac{MM'}{NN'}=$

$=\dfrac{OM'}{O'N'}$, τὰ τρίγωνα $OM'M$ καὶ $O'N'N$ ὡς ἔχοντα τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτῶν ἀναλόγους θὰ εἶναι ὅμοια καὶ ἑπομένως αἱ γωνίαι αὐτῶν $\sphericalangle$ M'OM καὶ $\sphericalangle$N'O'N θὰ εἶναι ἴσαι.

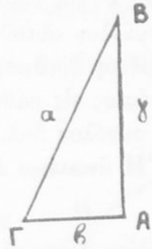
Δηλ. $\sphericalangle(Ox,Oy) = \sphericalangle(O'x',O'y')$.

Μετὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν ἀνωτέρω προτάσεων, καθίσταται προφανὲς ὅτι ἠμποροῦμεν τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς γωνίας νὰ τὴν γράφωμεν καὶ ὡς ἐφαπτομένην τοῦ μέτρου αὐτῆς. Ἐὰν π.χ. τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ τοῦ σχήματος 2 εἶναι $26^o30'$ γράφομεν : $εφ26^o30' = \frac{1}{2}$

2.1 Προσδιορισμὸς μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης της.

Θεωροῦμεν τυχὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 4). Διὰ τὰς ἐφαπτομένας τῶν ὀξειῶν γωνιῶν $\sphericalangle$Β καὶ $\sphericalangle$Γ αὐτοῦ συμφώνως πρὸς τὴν § 2 θὰ ἔχωμεν :

$$εφ\widehat{B} = \frac{β}{γ} \quad καὶ \quad εφ\widehat{Γ} = \frac{γ}{β}$$



Σχ. 4

Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν ἕπεται ὅτι ἂν μία ὀξεῖα γωνία θεωρηθῇ ὡς γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸν λόγον τῆς ἀπέναντι (ἀντικειμένης) καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκειμένην κάθετον.

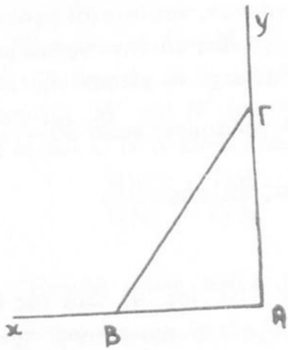
Ἤτοι διὰ τὴν γωνίαν $\widehat{B}$ ἔχομεν :

$$εφ\widehat{B} = \frac{\text{ἀντικειμένη κάθετος ΑΓ}}{\text{προσκειμένη κάθετος ΑΒ}} = \frac{β}{γ}$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ἀκόλουθον πρόβλημα : «Δίδεται $εφω^o = K$ ἔνθα $0^o \leq ω^o < 90^o$ καὶ $K \in Π^{\geq 0}$ Ζητεῖται ἡ ὀξεῖα γωνία $ω^o$».

Ἐπίλυσις. Θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν $\sphericalangle$xAy (σχ. 5). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ax λαμβάνομεν τυχὸν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ τυχόντος μήκους (π.χ. ΑΒ = 2cm).

Ἂν ἐν συνεχείᾳ ἐπὶ τῆς Ay λάβωμεν τμῆμα ΑΓ τοσοῦτον ὥστε ΑΓ=Κ·ΑΒ συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 5

$$\varepsilon\varphi\widehat{B} = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{K \cdot AB}{AB} = K$$

Ἄρα εφ$\widehat{B}$= εφω° ὁπότε (βλ. § 2) ∢Β=∢ω°. Ἐὰν μὲ τὴν βοήθειαν λοιπὸν τοῦ μοιρογνωμονίου εὕρωμεν τὸ μέτρον τῆς ∢Β θὰ ἔχωμεν καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω°.

2.2 Μεταβολὴ τῆς ἐφαπτομένης μιᾶς ὀξείας γωνίας.

Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν μέτρου x° καὶ τοιούτων ὥστε $0^\circ \leq x^\circ < 90^\circ$. Τότε εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου αὐτοῦ βάσει τῶν προηγουμένων ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐντελῶς ὡρισμένος ἀριθμὸς $K \geq 0$ (ἡ ἐφαπτομένη τῆς γωνίας ταύτης) καὶ ἀντιστρόφως εἰς κάθε ἀριθμὸν $K \geq 0$ ἀντιστοιχεῖ ἓν στοιχεῖον τοῦ ἀνωτέρω συνόλου δηλ. μία ὀξεῖα γωνία x° τοιαύτη ὥστε εφx°=K.

Ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία ὁρίζει μίαν συνάρτησιν

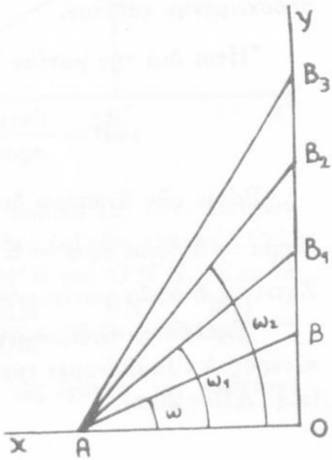
$$\varepsilon\varphi\colon \Gamma \ni x^\circ \rightarrow y = \varepsilon\varphi x^\circ = K \in \Pi^{\geq 0}$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον τῶν γωνιῶν $\Gamma = \{x^\circ\ 0^\circ \leq x^\circ < 90^\circ\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον $\Pi^{\geq 0}$.

Ἡ συνάρτησις αὕτη ὡς εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ εἶναι αὔξουσα. Δηλ. αὐξανομένου τοῦ μέτρου μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐξάνει καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς.

Πράγματι: Θεωροῦμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν xOy καὶ ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν πλευρῶν Ox καὶ Oy (σχ. 6).

Ἂν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{OB}{OA}$ (1)



Σχ. 6

Ἂν ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τοῦ A παραμένοντος ἀκινήτου τὸ σημεῖον B διατρέχει τὴν πλευρὰν Oy καὶ μὲ φορὰν ἐκ τοῦ O πρὸς τὸ y, εἶναι προφανὲς ὅτι τοῦ B κινουμένου τοιουτοτρόπως, ἡ AB θὰ καταλαμβάνῃ τὰς θέσεις AB_1, AB_2, AB_3, . . . ἐνῷ καὶ ἡ γωνία ω αὐξανομένη θὰ λάβῃ τὰς τιμὰς $ω_1$, $ω_2$, . . . Καὶ ἐπειδὴ διὰ μίαν τυχοῦσαν θέσιν τοῦ B π.χ. τὴν B_1 ἔχομεν $OB_1 > OB$, ἔπεται ὅτι καὶ $\frac{OB_1}{OA} > \frac{OB}{OA}$ δηλ. $εφω_1 > εφω$. Πράγματι λοιπὸν αὐξανομένης μιᾶς ὀξείας γωνίας αὐξάνει καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἐνῷ ἐλαττουμένης τῆς γωνίας ἐλαττοῦται καὶ ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς.

Ἂν π.χ. $0^\circ \leq x^\circ \leq 45^\circ$ τότε $0 \leq εφx^\circ \leq 1$ καθ' ὅσον ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης ὡς εἶναι εὔκολον νὰ διαπιστωθῇ $εφ0^\circ = 0$ καὶ $εφ45^\circ = 1$.

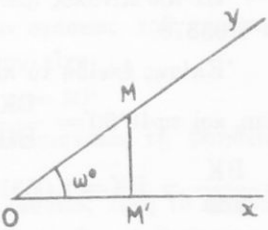
Ὁμοίως τοῦ x° μεταβαλομένου εἰς τὸ διάστημα $45^\circ < x^\circ < 90^\circ$ θὰ εἶναι $εφx^\circ > 1$.

2.3 Ὑπολογισμὸς τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ μέτρον $ω^\circ$ μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τῆς $εφω^\circ$.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μὲ τὴν βοήθειαν μοιρογνωμωνίου μίαν ὀξεῖαν γωνίαν $x\widehat{O}y$ μέτρου $ω^\circ$ (σχ. 7)

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς Oy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ προβάλλομεν αὐτὸ ἐπὶ τῆς Ox. Μετροῦμεν τὰ μήκη MM′ καὶ OM′ ὁπότε $εφ(Ox, Oy) = εφω^\circ = \frac{MM'}{OM'}$



Σχ. 7

Παράδειγμα:

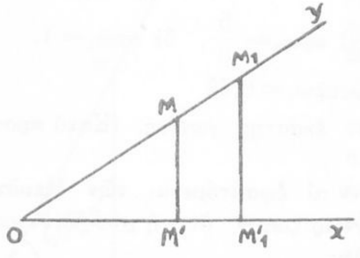
Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εφ60°50′

Κατασκευάζομεν γωνίαν ∢(Ox, Oy) μέτρου 60°50′ (σχ. 8). Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον N ἐπὶ τῆς Oy καὶ φέρομεν τὴν $NN' \perp Ox$. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν $NN' = 2{,}7cm$, $ON' = 1{,}5cm$ καὶ ἄρα

$$εφ60^\circ 50' = \frac{NN'}{ON'} = \frac{2{,}7cm}{1{,}5cm} = 1{,}8$$

3. Ἡμίτονον καὶ συνημίτονον ὀξείας γωνίας

3.1. Ὁρισμοί.



Σχ. 9

Θεωροῦμεν τυχοῦσαν ὀξεῖαν γωνίαν $\sphericalangle(Ox,Oy)$ καὶ ἔστωσαν δύο τυχόντα σημεῖα M καὶ M_1 ἐπὶ τῆς Oy. Ἂν προβάλωμεν τὰ σημεῖα ταῦτα ἐπὶ τῆς Ox σχηματίζονται τὰ ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα OM′M, OM'_1M_1 (σχ. 9). Ἐκ τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν ἔχομεν :

$$\frac{MM'}{M_1M'_1}=\frac{OM}{OM_1} \Leftrightarrow \frac{MM'}{OM}=\frac{M_1M'_1}{OM_1} \qquad (1)$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{OM'}{OM'_1}=\frac{OM}{OM_1} \Leftrightarrow \frac{OM'}{OM}=\frac{OM'_1}{OM_1} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συμπεραίνομεν ὅτι ἐὰν τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ διατηρῆται σταθερόν, οἱ λόγοι $\frac{MM'}{OM}$ καὶ $\frac{OM'}{OM}$ παραμένουν ἀμετάβλητοι, ὁποιαδήποτε καὶ ἐὰν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου M ἐπὶ τῆς Oy καὶ ἄρα εἰς δεδόμενον μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ ἀντιστοιχοῦν δύο ἐντελῶς ὡρισμένοι ἀριθμοὶ λ_1 καὶ λ_2 (αἱ τιμαὶ τῶν λόγων $\frac{MM'}{OM}$ καὶ $\frac{OM'}{OM}$ ἀντιστοίχως), τοιοῦτοι ὥστε $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1$.

Οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι οἱ ὁποῖοι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ μέτρον τῆς γωνίας καὶ μόνον ἀπὸ αὐτό, ὀνομάζονται ἀντιστοίχως ***ἡμίτονον*** καὶ ***συνημίτονον*** τῆς δοθείσης γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ καὶ συμβολίζονται ημ(Ox,Oy)* καὶ συν(Ox,Oy)*.

---

* Τὸ ημ(Ox,Oy) καὶ συν(Ox,Oy) διεθνῶς συμβολίζονται μὲ sin(Ox,Oy) καὶ cos(Ox,Oy) ἐκ τῶν λέξεων sinus=ἡμίτονον καὶ cosinus=συνημίτονον.

Τοιουτοτρόπως ἐὰν (σχ. 9) $OM' = 2{,}2cm$, $MM' = 1{,}4cm$ καὶ $OM = 2{,}6cm$ θὰ ἔχωμεν: $ημ(Ox,Oy) = \frac{MM'}{OM} = \frac{1{,}4}{2{,}6} \simeq \frac{1}{2}$ καὶ

$$συν(Ox,Oy) = \frac{OM'}{OM} = \frac{2{,}2}{2{,}6} \simeq 0{,}8.$$

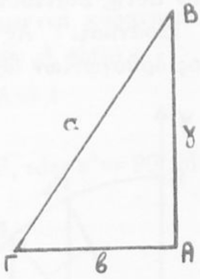
Ἀκόμη ἐπειδὴ ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας εὐκόλως συνάγεται ὅτι δύο ἴσαι γωνίαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας νὰ τὸ γράφωμεν ὡς ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τοῦ μέτρου της.

Οὕτω ἂν τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\sphericalangle(Ox,Oy)$ εἶναι $29^\circ\ 30'$ γράφομεν: $ημ29^\circ30' \simeq \frac{1}{2}$ καὶ $συν29^\circ30' \simeq 0{,}8$

Εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ γωνία θεωρεῖται ὡς ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 10), τότε ἐκ τοῦ σχήματος λαμβάνομεν:

$$ημ\widehat{Γ} = \frac{γ}{α} = \frac{\text{ἀντικειμένη κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}}$$

$$συν\widehat{Γ} = \frac{β}{α} = \frac{\text{προσκειμένη κάθετος}}{\text{ὑποτείνουσα}}$$



Σχ. 10

Ἀναλόγως εὑρίσκομεν τὸ $ημ\widehat{B}$ καὶ $συν\widehat{B}$.

Παρατήρησις.

Τὸ ὅτι τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς ὀξείας γωνίας εἶναι πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος, συνάγεται ἐκ τοῦ ὅτι εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ εἶναι πάντοτε μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν του. Ἐπειδὴ λοιπὸν $OM > OM', MM' \Rightarrow \frac{OM'}{OM} < 1$ καὶ $\frac{MM'}{OM} < 1$.

3.2 Μεταβολὴ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας.

Ἐκ τῶν ὅσων εἰς τὴν § 3.1 ἀνεφέρθησαν συνάγομεν ὅτι εἰς ἑκάστην ὀξεῖαν γωνίαν μέτρου x^0 ἀντιστοιχοῦν δύο ἐντελῶς ὡρισμένοι ἀριθμοὶ $0 \leq \lambda_1 < 1$ καὶ $0 \leq \lambda_2 < 1$ τοιοῦτοι ὥστε $\eta\mu x^0 = \lambda_1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x^0 = \lambda_2$. Καὶ ἀντιστρόφως ἐὰν δοθοῦν δύο ἀριθμοὶ λ_1 καὶ λ_2 μὲ $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1$ τότε ὑπάρχει μία ὀξεῖα γωνία μέτρου x^0 καὶ τοιαύτη ὥστε $\eta\mu x^0 = \lambda_1$ καὶ $\sigma\upsilon\nu x^0 = \lambda_2$.

Αἱ ἀνωτέρω ἀντιστοιχίαι ὁρίζουν τὰς κάτωθι συναρτήσεις

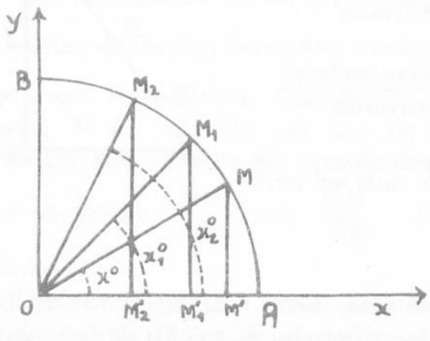
$$\eta\mu : A \ni x^0 \rightarrow y = \eta\mu x^0 \in B$$
$$\sigma\upsilon\nu : A \ni x^0 \rightarrow y = \sigma\upsilon\nu x^0 \in B$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ $A = \{ x^0 \mid 0^0 \leq x^0 < 90^0 \}$

καὶ πεδίον τιμῶν $B = \{ y \mid 0 \leq y < 1 \}$

Ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων ἡ μὲν $y = \eta\mu x^0$ μὲ $0^0 \leq x^0 < 90^0$ εἶναι ὡς κατωτέρω θὰ δειχθῇ αὔξουσα, ἐνῶ ἡ $y = \sigma\upsilon\nu x^0$ μὲ $0^0 \leq x^0 < 90^0$ εἶναι φθίνουσα, δηλ. αὐξανομένου τοῦ μέτρου τῆς γωνίας τὸ συνημίτονον αὐτῆς ἐλαττοῦται καὶ ἀντιστρόφως.

Πράγματι : Ἂς λάβωμεν δύο καθέτους ἡμιάξονας ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων ἀρχῆς O.



Σχ. 11

Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν μονάδα μετρήσεως, γράφομεν τεταρτημόριον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τοὺς δύο ἡμιάξονας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B (σχ. 11). Μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον O καὶ ἀρχικὴν πλευρὰν τὴν OA σχηματίζομεν τὴν γωνίαν $A\widehat{O}M$, ἔστω δὲ OM′ ἡ προβολὴ τῆς πλευρᾶς OM ἐπὶ τῆς OA.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OMM′ ἔχομεν :

$$\eta\mu x^0 = \frac{MM'}{OM = 1} = MM' \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \sigma\upsilon\nu x^0 = \frac{OM'}{OM = 1} = OM' \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω σχέσεων (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν συναρτήσεων $y = ημx^0$ καὶ $y = συνx^0$ εἶναι εὐθέως ἀνάλογοι πρὸς τὰ μεγέθη MM′ καὶ OM′ ἀντιστοίχως.

Ἃς ὑποθέσωμεν ἐν συνεχείᾳ ὅτι τὸ σημεῖον M διατρέχει τὸ τόξον $\widehat{AB}$ κατὰ τὴν θετικὴν φορὰν (ἀντίθετον τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου). Εἶναι προφανὲς τότε ὅτι ὅταν τὸ σημεῖον M καταλαμβάνῃ τὰς θέσεις $M, M_1, M_2, \ldots$ ἡ κινητὴ πλευρὰ τῆς γωνίας $A\widehat{O}M$ θὰ καταλαμβάνῃ διαδοχικῶς τὰς θέσεις $OM, OM_1, OM_2, \ldots$ θὰ εἶναι δέ:

$$\left.\begin{array}{l} x^0 < x^0_1 < x^0_2 < \ldots \\ MM' < M_1M'_1 < M_2M'_2 < \ldots \\ OM' > OM'_1 > OM'_2 > \ldots \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} x^0 < x^0_1 < x^0_2 < \ldots \\ ημx^0 < ημx^0_1 < ημx^0_2 < \ldots \\ συνx^0 > συνx^0_1 > συνx^0_2 > \ldots \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀνισοτήτων γίνεται φανερὸν ὅτι ἡ συνάρτησις $y = ημx^0$ εἶναι αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $0^0 \leq x^0 < 90^0$ ἐνῷ ἡ $y = συνx^0$ εἶναι φθίνουσα εἰς τὸ αὐτὸ διάστημα.

Χαρακτηριστικῶς ἐκ τοῦ σχήματος 11 ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ἂν τὸ σημεῖον M συμπίπτῃ μετὰ τοῦ σημείου A εἶναι :

$$x^0 = 0^0 \quad MM' = 0 \text{ καὶ } OM' = OA = 1$$

Ὁπότε λαμβάνομεν : $ημ0^0 = 0$ καὶ $συν0^0 = 1$

Ἐνῷ ἂν τὸ σημεῖον M συμπίπτῃ μετὰ τοῦ B, τότε $x^0 = 90^0$, $MM' = OB = 1$ καὶ $OM' = 0$ καὶ ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$ημ90^0 = 1 \text{ καὶ } συν90^0 = 0$$

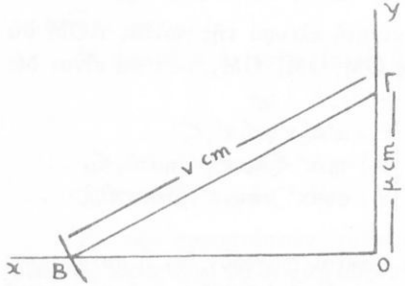
3.3 Προσδιορισμὸς τοῦ μέτρου μιᾶς ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ ἡμιτόνου της.

Ἔστω ὅτι δίδεται $ημω = \frac{μ}{ν}$ ἔνθα $0 \leq \frac{μ}{ν} < 1$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν $x\widehat{O}y$ (σχ. 12). Ἐπὶ μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτῆς ἔστω τῆς Oy ὁρίζομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα $OΓ = μ$ μονάδων μήκους, π.χ. $OΓ = μ$ cm. Ἐν συνεχείᾳ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ν μονάδας μήκους (ν cm) γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox (καθ᾽ ὅσον $\nu > \mu$) εἰς τὸ σημεῖον B.

Διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $\widehat{B}$ θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu\widehat{B} = \frac{O\Gamma}{B\Gamma} = \frac{\mu cm}{\nu cm} = \frac{\mu}{\nu}$$



Σχ. 12

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ $\eta\mu\omega = \frac{\mu}{\nu}$ ἕπεται ὅτι :

$$\eta\mu\widehat{B} = \eta\mu\omega \Leftrightarrow \widehat{B} = \omega$$

Ἂν λοιπὸν μὲ τὴν βοήθειαν μοιρογνωμονίου προσδιορίσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\widehat{B}$ θὰ ἔχωμεν προσδιορίση καὶ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Παράδειγμα :

Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω ἐὰν $\eta\mu\omega = 0,46$

Ἐπειδὴ $\eta\mu\omega = 0,46 = \frac{46}{100}$, συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ γωνία ω θὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν 100 μονάδων μήκους καὶ ἀπέναντι τῆς γωνίας ω κάθετον πλευρὰν 46 μονάδων μήκους.

Ἂν κατασκευάσωμεν λοιπὸν ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὰ στοιχεῖα αὐτὰ μὲ τὴν ἀνωτέρω ὑποδειχθεῖσαν μέθοδον, θὰ δυνηθῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Ἐὰν βεβαίως τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὑπὸ κατασκευὴν τριγώνου εἶναι τοιαῦτα ὥστε νὰ μὴ χωροῦν εἰς τὸν χάρτην σχεδιάσεως, κατασκευάζομεν αὐτὰ ὑπὸ κλίμακαν π.χ. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κ.λ.π.

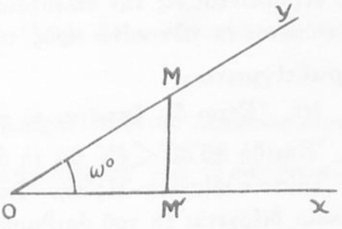
3.4 Ὑπολογισμὸς τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ μέτρον ω^0 μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ $\eta\mu\omega^0$.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν $x\widehat{O}y$ μέτρου ω^0 (σχ. 13). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς Oy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ φέρομεν τὴν $MM' \perp Ox$.

Μετροῦμεν τὰ μήκη MM′ καὶ OM ὁπότε $\eta\mu x\widehat{O}y =$

$$=\eta\mu\omega^0 = \frac{MM'}{OM}$$



Σχ. 13

Παράδειγμα :

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ημ 30°

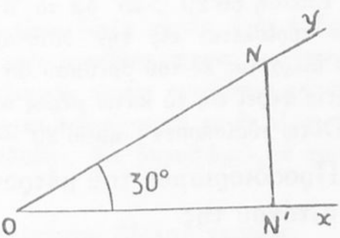
Κατασκευάζομεν γωνίαν $x\widehat{O}y$ μέτρου 30° (σχ. 14).

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον N ἐπὶ τῆς Oy καὶ φέρομεν τὴν $NN' \perp Ox$. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν :

$NN' = 2cm$ καὶ $ON = 4cm$

Ἄρα $\quad \eta\mu 30^0 = \dfrac{NN'}{ON} =$

$$= \frac{2cm}{4cm} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



Σχ. 14

Ἡ προσέγγισις ὅμως ἡ ὁποία ἐπιτυγχάνεται κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς μὲ τὴν ἀνωτέρω γραφικὴν μέθοδον δὲν εἶναι ἐπαρκὴς διὰ τὰς ἐφαρμογὰς τῆς Τριγωνομετρίας. Διὰ τοῦτο ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας, ἔχουν ὑπολογισθῆ καὶ διαταχθῆ εἰς πίνακας τὰ ἡμίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι προχωροῦν ἀνὰ 10′ μὲ ἀρκετὰ μεγάλην προσέγγισιν. Δύο τοιοῦτοι πίνακες οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου μὲ προσέγγισιν 0,00001 παρέχονται εἰς τὸ τέλος τοῦ παρόντος μέρους.

Ἐξ αὐτῶν ὁ πίναξ III δίδει τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τῶν μικροτέρων τῶν 45°, ἐνῷ ὁ πίναξ IV δίδει τὰς τιμὰς τοῦ ἡμιτόνου διὰ ὀξείας γωνίας μεγαλυτέρας τῶν 45°.

Ἀκόμη διὰ τοὺς πίνακας αὐτοὺς θὰ πρέπῃ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἰς τὸν πιν. III αἱ ἀκέραιαι μοῖραι εὑρίσκονται εἰς τὴν πρώτην ἐξ ἀριστερῶν στήλην καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, ἐνῷ εἰς τὸν πίνακα IV αἱ ἀκέραιαι μοῖραι (προκειμένου διὰ τὸ ἡμίτονον) εὑρίσκονται εἰς τὴν τελευταίαν ἐξ ἀριστερῶν στήλην καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Παραδείγματα :

1ον. Ἔστω ὅτι ζητεῖται τὸ ημ36°30′.

Ἐπειδὴ $36°30' < 45°$ θὰ τὸ ἀναζητήσωμεν εἰς τὸν πίνακα III.

Τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 36 τῆς πρώτης στήλης καὶ τῆς στήλης ἥτις φέρει εἰς τὸ ἄνω μέρος αὐτῆς τὸ 30′

Οὕτω εὑρίσκομεν : $ημ36°30' = 0,59482$

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ημ66°20′

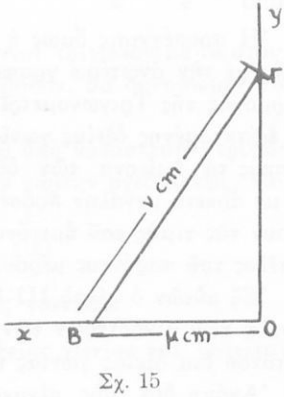
Ἐπειδὴ $66°20' > 45°$ θὰ τὸ ἀναζητήσωμεν εἰς τὸν πίνακα IV. Τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς, ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 66 τῆς τελευταίας στήλης καὶ τῆς στήλης ἥτις φέρει εἰς τὸ κάτω μέρος αὐτῆς τὸ 20′.

Οὕτω εὑρίσκομεν : $ημ66°20' = 0,91589$

3.5 Προσδιορισμὸς τοῦ μέτρου ὀξείας γωνίας ἐκ τοῦ συνημιτόνου της.

Ἔστω ὅτι δίδεται $συνω = \frac{μ}{ν}$ ἔνθα $0 \leq \frac{μ}{ν} < 1$ καὶ ζητεῖται νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν ὀρθὴν γωνίαν $x\widehat{O}y$ (σχ. 15). Ἐπὶ τῆς μιᾶς τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτῆς ἔστω τῆς Ox ὁρίζομεν ἓν εὐθύγραμμον τμῆμα OB= μ μονάδων μήκους π.χ. OB= μ cm. Ἐν συνεχείᾳ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον B καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ ν μονάδας μήκους (ν cm) γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy (καθ' ὅσον ν>μ) εἰς τὸ σημεῖον Γ.



Σχ. 15

Διὰ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν $\widehat{B}$ θὰ ἔχωμεν τότε :

$$\text{συν}\,\widehat{B} = \frac{OB}{B\Gamma} = \frac{\mu\,cm}{\nu\,cm} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐπειδὴ ὅμως καὶ συνω $= \frac{\mu}{\nu}$ ἕπεται ὅτι συν$\widehat{B}$ = συνω καὶ

ἄρα $\widehat{B} = \omega$

Ἂν λοιπὸν μὲ τὴν βοήθειαν μοιρογνωμονίου προσδιορίσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας $\widehat{B}$ θὰ ἔχωμεν προσδιορίσῃ καὶ τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

Παράδειγμα :

Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας ω ἐὰν συνω = 0,75

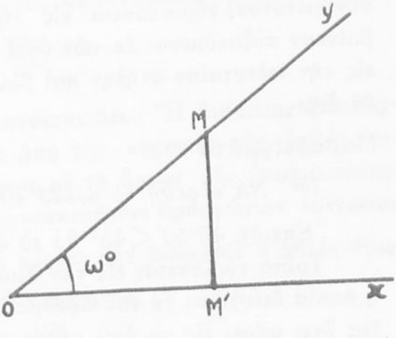
Ἐπειδὴ συνω $= 0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ συμφώνως πρὸς τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ γωνία ω θὰ εἶναι ὀξεῖα γωνία ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου μὲ ὑποτείνουσαν τεσσάρων μονάδων μήκους, καὶ προσκειμένην εἰς τὴν γωνίαν ω κάθετον πλευρὰν τριῶν μονάδων μήκους. Ἂν λοιπὸν κατασκευασθῇ ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ τὰ ἐν λόγῳ στοιχεῖα μὲ τὴν ὡς ἄνω ὑποδειχθεῖσαν μέθοδον, θὰ δυνηθῶμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ μέτρον τῆς γωνίας ω.

3.6 Ὑπολογισμὸς τοῦ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὅτι δίδεται τὸ μέτρον ω^0 μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ ζητεῖται ὁ προσδιορισμὸς τοῦ συνω^0.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν $x\widehat{O}y$ μέτρου ω^0 (σχ. 16). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς Oy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ φέρομεν τὴν $MM' \perp Ox$.

Μετροῦμεν τὰ μήκη OM' καὶ OM ὁπότε συν$x\widehat{O}y$ = συν$\omega^0 = \frac{OM'}{OM}$

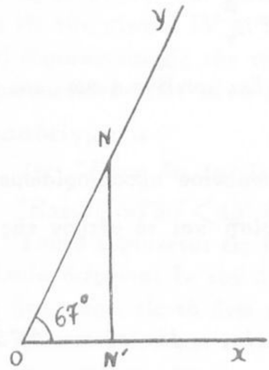


Σχ. 16

Παράδειγμα :

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ συν67^0

Κατασκευάζομεν γωνίαν $\widehat{xOy}$ μέτρου 67° (σχ. 17).



Σχ. 17

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον N ἐπὶ τῆς Oy καὶ φέρομεν τὴν NN′⊥Ox. Διὰ μετρήσεως εὑρίσκομεν ON′=1,2cm καὶ ON=2,9cm.

Ὁπότε $\text{συν}67° = \frac{ON'}{ON} = \frac{1,2}{2,9} \simeq 0,4$

Διὰ τὴν ἀνωτέρω μέθοδον ὑπολογισμοῦ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν, ὅ,τι καὶ διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ ἡμιτόνου. Δηλ. ἡ προσέγγισις ἡ ὁποία τοιουτοτρόπως ἐπιτυγχάνεται δὲν εἶναι ἐπαρκής.

Διὰ τοῦτο καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἔχουν καταρτισθῆ εἰδικοὶ πίνακες, παρέχοντες τὰ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν μὲ ἀρκετὰ μεγάλην προσέγγισιν.

Οἱ γνωστοί μας ἤδη πίνακες III καὶ IV μᾶς δίδουν τὸ συνημίτονον μὲ προσέγγισιν 0,00001.

Ἐξ αὐτῶν ὁ πίναξ IV δίδει τὰς τιμὰς τοῦ συνημιτόνου τῶν γωνιῶν τῶν μικροτέρων τῶν 45° ἐνῷ ὁ πίναξ III τὰς τιμὰς διὰ ὀξείας γωνίας μεγαλυτέρας τῶν 45°.

Εἰς τὸν πίνακα IV αἱ ἀκέραιαι μοῖραι (προκειμένου περὶ τοῦ συνημιτόνου) εὑρίσκονται εἰς τὴν πρώτην ἐξ ἀριστερῶν στήλην καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν ἄνω πρὸς τὰ κάτω, εἰς δὲ τὸν πίνακα III εἰς τὴν τελευταίαν στήλην καὶ βαίνουν αὐξανόμεναι ἐκ τῶν κάτω πρὸς τὰ ἄνω.

Παραδείγματα :

1ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν43°40′.

Ἐπειδὴ 43°40′<45° θὰ τὸ ἀναζητήσωμεν εἰς τὸν πίνακα IV.

Τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς ἡ ὁποία διέρχεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 43 τῆς πρώτης στήλης καὶ τῆς στήλης ἥτις φέρει εἰς τὸ ἄνω μέρος αὐτῆς τὸ 40′.

Οὕτω εὑρίσκομεν : συν43°40′=0,72337.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ συν82°20′.

Ἐπειδὴ 82°20′ > 45° θὰ τὸ ἀναζητήσωμεν εἰς τὸν πίνακα ΙΙΙ.

Τοῦτο εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίου γραμμῆς αὐτοῦ, ἥτις διέρχεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 82 τῆς τελευταίας στήλης καὶ τῆς στήλης ἥτις φέρει εἰς τὸ κάτω μέρος αὐτῆς τὸ 20′.

Οὕτω εὑρίσκομεν : συν82°20′=0,13341.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ κατασκευάσετε ὀξείας γωνίας μὲ τὰ ἀκόλουθα ἡμίτονα καὶ συνημίτονα :

α) $ημω_1=\frac{3}{5}$, β) $ημω_2=\frac{3}{4}$, γ) $ημω_3=\frac{3}{6}$, δ) $ημω_4=\frac{1}{4}$

ε) $συνω_5=\frac{5}{6}$, στ) $συνω_6=\frac{4}{5}$, ζ) $συνω_7=\frac{2}{3}$, η) $συνω_8=0{,}5$

2. Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 10) δίδονται :

i) β= 4m, γ=6m ii) β= 3m γ= 4m

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ἡμίτονον καὶ συνημίτονον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

3. Εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ= ΑΓ) δίδονται : ΑΒ= 5 cm, ΒΓ= 8 cm καὶ τὸ ὕψος αὐτοῦ ΑΔ= 3 cm. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὸ ἡμίτονον, συνημίτονον καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῶν ὀξειῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

4. Κατασκευάσατε ἓν ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^\circ,\ AB=A\Gamma\right)$. Τῇ βοηθείᾳ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος δείξατε ὅτι : $ημ45^\circ=συν45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Εἰς τὴν γεωμετρίαν ἀποδεικνύεται ὅτι : Ἡ διάμεσος ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν, ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης. Βάσει αὐτοῦ ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευάσετε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90^\circ \text{ καὶ } \widehat{B}=30^\circ\right)$ καὶ φέρετε τὴν διάμεσον ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ὑποτείνουσαν αὐτοῦ δείξατε ὅτι :

$ημ30^\circ=\frac{1}{2}$, $συν30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $ημ60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν60^\circ=\frac{1}{2}$

6. Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 10) τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου καὶ συνημιτόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ τοῦ πυθαγορείου θεωρήματος δείξατε ὅτι :

$$\left(\eta\mu\,\widehat{B}\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu\,\widehat{B}\right)^2=1,\ \left(\eta\mu\,\widehat{\Gamma}\right)^2+\left(\sigma\upsilon\nu\,\widehat{\Gamma}\right)^2=1$$

Γενικῶς δείξατε :

$$(\eta\mu\omega^0)^2+(\sigma\upsilon\nu\omega^0)^2=1 \quad \delta\iota\grave{\alpha} \quad 0^0<\omega^0<90^0$$

7. Κατασκευάσατε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 10).

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης ἡμιτόνου καὶ συνιμη-.τόνου μιᾶς ὀξείας γωνίας δείξατε ὅτι :

$$\frac{\eta\mu\widehat{\Gamma}}{\sigma\upsilon\nu\widehat{\Gamma}}=\varepsilon\varphi\widehat{\Gamma},\quad \frac{\eta\mu\widehat{B}}{\sigma\upsilon\nu\widehat{B}}=\varepsilon\varphi\,\widehat{B}$$

Γενικῶς δείξατε ὅτι ἂν $0^0<\omega^0<90^0$ τότε θὰ ἰσχύῃ :

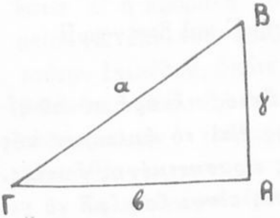
$$\frac{\eta\mu\omega^0}{\sigma\upsilon\nu\omega^0}=\varepsilon\varphi\omega^0$$

4. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων (ἐφαρμογαί)

4.1 Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν.

Εἰς τὰς § 2 καὶ 3 εἴδομεν ὅτι ἡ ἐφαπτομένη, τὸ ἡμίτονον καὶ τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας ὡρίσθησαν ὡς λόγοι δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Διὰ τοῦτο καὶ οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὀνομάζονται ***τριγωνομετρικοὶ λόγοι*** ἢ καὶ ***τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ*** τῆς γωνίας.

Ἂς θεωρήσωμεν τώρα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ $\left(\widehat{A}=90\right)$ καὶ ἂς παραστήσωμεν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ τῶν κειμένων ἀπέναντι τῶν γωνιῶν $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ μὲ α, β καὶ γ ἀντιστοίχως (σχ. 18).



Σχ. 18

Συμφώνως πρὸς τοὺς δοθέντας ὁρισμοὺς ἂν μὲ B καὶ Γ παραστήσωμεν τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha} \qquad \eta\mu\Gamma=\frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma}{\alpha} \qquad \sigma\upsilon\nu\Gamma=\frac{\beta}{\alpha} \qquad (1)$$

$$\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma} \qquad \varepsilon\varphi\Gamma=\frac{\gamma}{\beta}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων προκύπτει :

$$\eta\mu B=\sigma\upsilon\nu\Gamma \text{ καὶ } \eta\mu\Gamma=\sigma\upsilon\nu B \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν σχέσεων (2) δεδομένου ὅτι αἱ ὀξεῖαι γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι συμπληρωματικαὶ ($B+\Gamma=90^{\circ}$) ἕπεται ὅτι : ***Ἐὰν δύο γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαὶ τὸ ἡμίτονον τῆς μιᾶς ἰσοῦται μὲ τὸ συνημίτονον τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως.***

Γενικῶς δηλαδὴ ἐὰν ω καὶ 90—ω, εἶναι ἀντιστοίχως τὰ μέτρα μιᾶς ὀξείας γωνίας καὶ τῆς συμπληρωματικῆς της θὰ ἔχωμεν :

$$\eta\mu\omega=\sigma\upsilon\nu(90^{\circ}-\omega) \text{ καὶ } \sigma\upsilon\nu\omega=\eta\mu(90^{\circ}-\omega)$$

Π.χ. ἐπειδὴ $65^{\circ}+25^{\circ}=90^{\circ}$ θὰ εἶναι :

$\eta\mu 65^\circ = \sigma\upsilon\nu(90^\circ - 65^\circ) = \sigma\upsilon\nu 25^\circ$ καὶ $\sigma\upsilon\nu 65^\circ = \eta\mu(90^\circ - 65^\circ) = \eta\mu 25^\circ$

4.2 Σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ὡς ἔχομεν ἤδη μάθει μεταξὺ τῶν πλευρῶν α, β καὶ γ, ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 18) καὶ τῶν γωνιῶν αὐτοῦ ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ σχέσεις (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου.

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν :

Ἐκ τῆς $\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \beta = \alpha \cdot \eta\mu B$ (i)

Ἐκ τῆς $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B$ (ii)

Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma} \Rightarrow \beta = \gamma \cdot \varepsilon\varphi B$ (iii)

Ἐπειδὴ ὅμως αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$ εἶναι συμπληρωματικαὶ καὶ ἑπομένως $\eta\mu B = \sigma\upsilon\nu\Gamma$ καὶ $\sigma\upsilon\nu B = \eta\mu\Gamma$ ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων (i) (ii) καὶ (iii) λαμβάνομεν :

$$\beta = \alpha \cdot \eta\mu B = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma, \quad \gamma = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu B = \alpha \cdot \eta\mu\Gamma \text{ καὶ } \beta = \gamma \cdot \varepsilon\varphi B$$

Ὁπότε τελικῶς συμπεραίνομεν ὅτι :

Εἰς ἓν ὀρθογώνιον τρίγωνον κάθε κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτεινούσης ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἢ ἐπὶ τὸ συνημίτονον τῆς προσκειμένης γωνίας, καθὼς καὶ ὅτι κάθε κάθετος πλευρὰ αὐτοῦ, εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι πρὸς τὴν πρώτην κάθετον πλευρὰν ὀξείας γωνίας.

4.3 Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων.

Ἐκ τῶν ὅσων εἰς τὴν § 4.2 ἀνεφέρθησαν καθίσταται φανερὸν ὅτι ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος μιᾶς πλευρᾶς καὶ τὸ μέτρον μιᾶς τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τῇ βοηθείᾳ τῶν πινάκων οἱ ὁποῖοι δίδουν τὰς ἐφαπτομένας ἡμίτονα καὶ συνημίτονα τῶν ὀξειῶν γωνιῶν, τὰ ὑπόλοιπα κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου (πλευράς, γωνίας, ἐμβαδόν).

Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν τὸν ὑπολογισμὸν αὐτὸν ἐὰν δοθοῦν τὰ μήκη δύο πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἡ ἐργασία αὕτη κατὰ τὴν ὁποίαν ἐπιτυγχάνεται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ὅταν δοθοῦν ἐπαρκῆ πρὸς τοῦτο στοιχεῖα ὀνομάζεται ***ἐπίλυσις τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου***.

Κατωτέρω δίδονται προβλήματα ἡ ἐπίλυσις τῶν ὁποίων ἀνάγεται τελικῶς εἰς τὴν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίων τριγώνων.

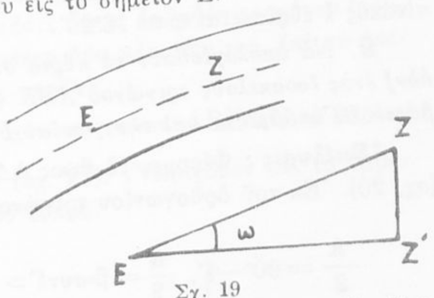
Ἐφαρμογαί :

1. ***Κλίσις ὁδοῦ.*** Ἐὰν θεωρήσωμεν ἐπί τινος ὁδοῦ τὴν γραμμὴν ἐκείνην τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων τοῦ ὁδοστρώματος, ἡ γραμμὴ αὕτη καλεῖται μεσαία γραμμὴ τῆς ἐπιφανείας τῆς ὁδοῦ.

Ἐὰν λάβωμεν ἓν μικρὸν τμῆμα ΕΖ (σχ. 19) τῆς ἐν λόγω γραμμῆς, τοῦτο ἄνευ αἰσθητοῦ σφάλματος δύναται νὰ θεωρηθῇ εὐθύγραμμον.

Ἡ διεύθυνσις τοῦ εὐθυγράμμου τούτου τμήματος ΕΖ εἰς τὸν χῶρον καλεῖται διεύθυνσις τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Θεωρήσωμεν ἤδη τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον τὸ διερχόμενον διὰ τοῦ σημείου Ε, καὶ ἔστω Ζ′ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου Ζ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου τούτου ἐπιπέδου, ὁπότε ἡ προβολὴ τοῦ ΕΖ θὰ εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ′. (σχ. 19).



Σχ. 19

Καλοῦμεν ***γωνίαν κλίσεως*** τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ω τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΖ μετὰ τῆς προβολῆς του ΕΖ′ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ σημείου Ε.

Κλίσιν δὲ τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε καλοῦμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας κλίσεως τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

Ἐπειδὴ ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς γωνίας ὡς γνωρίζομεν εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως, διὰ τοῦτο κατὰ τὴν κατασκευὴν τῶν ὁδῶν ἀντὶ γωνίας κλίσεως χρησιμοποιοῦμεν τὴν κλίσιν τῆς ὁδοῦ ἡ ὁποία εἶναι ἀριθμὸς μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς μονάδος μετρήσεως.

Πρὸς κατανόησιν τῶν ἀνωτέρω δίδομεν τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα.

Εἰς εὐθύγραμμον ὁδὸν δύο σημεῖα τῆς μεσαίας γραμμῆς αὐτῆς, Ε καὶ Ζ, ἔχουν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν 254 m ἡ δὲ ὑψομετρικὴ δια-

φορὰ αὐτῶν εἶναι 84 m. Ζητεῖται ἡ γωνία κλίσεως καὶ ἡ κλίσις τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

Ἐπίλυσις: Συμφώνως πρὸς τὰ δεδόμενα τοῦ προβλήματος ἡ ὁριζοντία ἀπόστασις ΕΖ′ (σχ. 19) τῶν σημείων Ε καὶ Ζ εἶναι ΕΖ′=254m καὶ ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ αὐτῶν ΖΖ′=84m.

Ἡ ἐπίλυσις λοιπὸν τοῦ προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὸν προσδιορισμὸν τῆς γωνίας ω. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΖ′Ζ ἔχωμεν :

$$\text{εφ}\omega = \frac{ZZ'}{EZ'} = \frac{84}{254} \simeq 0{,}33$$

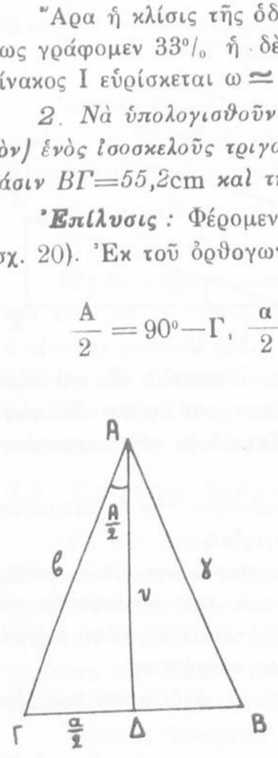
Ἄρα ἡ κλίσις τῆς ὁδοῦ εἰς τὸ σημεῖον Ε εἶναι 0,33 ἢ ὡς συνήθως γράφομεν 33°/₀ ἡ δὲ γωνία κλίσεως ω προσδιοριζομένη ἐκ τοῦ πίνακος Ι εὑρίσκεται $\omega \simeq 18^\circ 20'$.

2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κύρια στοιχεῖα (πλευραί, γωνίαι, ἐμβαδὸν) ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν ΒΓ=55,2cm καὶ τὴν γωνίαν Γ=53°20′.

Ἐπίλυσις: Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 20). Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν :

$$\frac{A}{2} = 90^\circ - \Gamma,\quad \frac{\alpha}{2} = \beta\cdot\text{συν}\Gamma \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{\text{συν}\Gamma},\quad \upsilon = \frac{\alpha}{2}\,\text{εφ}\Gamma$$

$$E = \frac{\alpha.\upsilon}{2} \Rightarrow E = \frac{1}{4}\alpha^2\text{εφ}\Gamma$$

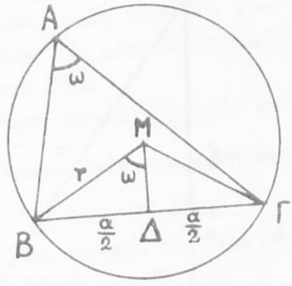


Σχ. 20

Ὁπότε διὰ α=55,2cm καὶ Γ=53°20′ εὑρίσκομεν : Α=73°20′, β=46,22cm υ=37,08cm καὶ $E=1023cm^2$

***3.** Γράφομεν περιφέρειαν ἀκτῖνος r καὶ ἔστω ΒΓ μία χορδὴ αὐτῆς μήκους ΒΓ=α. Ἔστω ω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν χορδὴν $\overline{ΒΓ}$. Δείξατε ὅτι τὸ μῆκος τῆς χορδῆς $\overline{ΒΓ}$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τῆς περιφερείας ἐπὶ τὸ ημω. Δηλ. α=2r·ημω*

᾿Απόδειξις ῎Εστω (Μ,r) περιφέρεια κέντρου Μ καὶ ἀκτῖνος r (σχ. 21). Φέρομεν τὰς ΜΒ καὶ ΜΓ καὶ τὴν $Μ\Delta \perp \overline{ΒΓ}$. ῎Εστω ἀκόμη $\widehat{ΒΑΓ}$ μία ἐγγεγραμμένη γωνία ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν χορδὴν $\overline{ΒΓ}$. ᾿Επειδὴ $\widehat{ΒΜΓ} = 2\widehat{ΒΑΓ}$



Σχ. 21

ἔπεται ὅτι $\widehat{ΒΑΓ} = \dfrac{\widehat{ΒΜΓ}}{2} = \widehat{ΒΜΔ}$.

᾿Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΜΔ λαμβάνομεν :

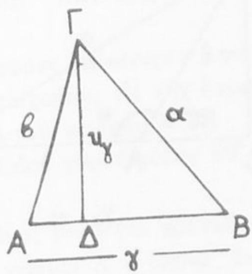
$$\frac{α}{2} = rημω \text{ καὶ ἄρα } α = 2r \cdot ημω$$

4. **᾿Εμβαδὸν τριγώνου** : *Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται πάντοτε μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.*

᾿Απόδειξις α) Θεωροῦμεν τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι $\widehat{Α}, \widehat{Β}$ καὶ $\widehat{Γ}$ εἶναι ὀξεῖαι (σχ. 22). Γνωρίζομεν ὅτι τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγώνου δίδεται ἐκ τοῦ τύπου.

$$Ε = \frac{1}{2} γ \cdot υ_γ \qquad (1)$$

ὅπου $υ_γ$ τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ὕψος αὐτοῦ.



Σχ. 22

᾿Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ($Δ = 90^\circ$) λαμβάνομεν :

$$υ_γ = βημΑ \qquad (2)$$

᾿Εὰν εἰς τὴν (1) ἀντικαταστήσωμεν τὴν τιμὴν τοῦ $υ_γ$ ἐκ τῆς (2), λαμβάνομεν:

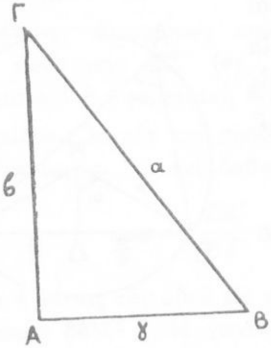
$$Ε = \frac{1}{2} βγημΑ. \qquad (3)$$

β) ῎Εστω τώρα ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον ($Α = 90^\circ$) σχ. 23. Τότε ἔχομεν :

$$Ε = \frac{1}{2} β \cdot γ \qquad (4)$$

καθ' ὅσον ἡ ΑΒ εἶναι βάσις τοῦ τριγώνου καὶ ἡ ΑΓ ὕψος αὐτοῦ.

Δεδομένου ὅμως ὅτι ημΑ= ημ90°=1 ἡ (4) γράφεται :



Σχ. 23

$$Ε=\frac{1}{2}\ βγημΑ$$

καὶ ἄρα ἰσχύει καὶ πάλιν ὁ τύπος (3).

γ) Ἔστω ἤδη ὅτι ἡ γωνία $\widehat{Α}$ εἶναι ἀμβλεῖα.

Τότε τὸ ὕψος ΓΔ τέμνει τὴν βάσιν ΑΒ πέραν τοῦ Α (σχ. 24) ἔχομεν δέ :

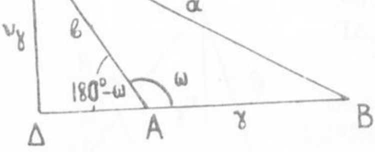
$$Ε=\frac{1}{2}\ γ\cdot υ_γ \qquad (5)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΔΑ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία $Γ\widehat{Α}Δ=180°—ω$ εἶναι ὀξεῖα ὡς παραπληρωματικὴ τῆς ἀμβλείας γωνίας $\widehat{Α}=ω$ προκύπτει ὅτι :

$$υ_γ=βημ(180—ω)$$

Ἄρα ἡ σχέσις (5) γράφεται :

$$Ε=\frac{1}{2}\ β\cdot γημ(180—ω)$$



Σχ. 24

Ἐπειδὴ ὅμως ὡς ἀποδεικνύεται τὸ ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς της ἡ ὁποία εἶναι ὀξεῖα θὰ ἔχωμεν :

$$ημ\,(180—ω)=ημω=ημΑ$$

Ὁπότε τελικῶς λαμβάνομεν :

$$Ε=\frac{1}{2}\ βγημΑ$$

Πράγματι λοιπὸν ἀνεξαρτήτως τοῦ μέτρου τῆς γωνίας τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου ἰσοῦται πάντοτε πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπὶ τὸ ἡμίτονον τῆς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ὁρίσατε τὴν γωνίαν κλίσεως τῆς εὐθείας

α) $y=0,5x-2$ β) $y=2,5x+3$, $y=1,2x-4$ μετὰ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος τῶν x ἑνὸς συστήματος ὀρθογωνίων ἀξόνων.

2. Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία κλίσεως καὶ ἡ κλίσις μιᾶς ὁδοῦ ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ὑψομετρικὴ διαφορὰ δυὸ σημείων τῆς μεσαίας γραμμῆς αὐτῆς, ἀπεχόντων τὸ ἓν τοῦ ἄλλου 520m, εἶναι 25m.

3. Ὑπολογίσατε τῇ βοηθείᾳ τῆς ἐπικέντρου γωνίας (ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ $\frac{1}{12}$ τῆς περιφερείας) τὴν πλευρὰν ἑνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος α) 3cm β) 10cm.

4. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ αἱ ἴσαι πλευραί του ἔχου μήκη $ΑΒ=ΑΓ=82$cm καὶ ἡ βάσις του $ΒΓ=38$cm.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ΑΔ αὐτοῦ καὶ τὸ μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν του.

5. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 54 cm χορδὴ $\overline{AB}$ τόξου $\widehat{AB}$ ἔχει μῆκος 44 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ τόξου $\widehat{AB}$.

6. Εἰς ἰσοσκελὲς τραπέζιον αἱ δύο βάσεις αὐτοῦ ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη $α=15$ cm καὶ $β=8$ cm. Ἡ γωνία ω τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ἓν σκέλος τοῦ τραπεζίου μὲ τὴν βάσιν α εἶναι $52°30'$. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

i) Τὸ ὕψος ii) αἱ πλευραὶ iii) αἱ γωνίαι iiii) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

7. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος $r=3,4$ cm ἐγγράφομεν ἐπίκεντρον γωνίαν $ω=85°$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν χορδῆς καὶ ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τοῦ κέντρου.

8. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον χορδὴ τόξου 69° ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν 38 cm.

9. Ὑπολογίσατε ἐκ τοῦ μήκους τῆς ἀκτῖνος $r=9$ cm καὶ τοῦ μήκους τῆς χορδῆς $α=12$ cm τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν Α ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν α.

10. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ὡς τὸ 9 μὲ $r=10,8$ cm καὶ $α=15$ cm.

11. Μιὰ χορδὴ κύκλου ἔχει μῆκος 10,4 m καὶ ἀπέχει ἐκ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου 0,5 m. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τόξα τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν.

12. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος μιᾶς χορδῆς ἑνὸς τόξου 60° καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ ἀ-

κτὶς τοῦ κύκλου εἶναι 0,6 m.

13. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς δένδρου ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι τὸ μῆκος τῆς σκιᾶς αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου ἐκ τῆς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 56 m τὸ δὲ ὕψος τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν ἰδίαν στιγμὴν εἶναι $40^{\circ}30'$. (Ὕψος τοῦ ἡλίου κατά τινα στιγμὴν καλεῖται, ἡ γωνία ἡ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ὀπτικῆς ἀκτῖνος τῆς διερχομένης ἐκ τοῦ σημείου τῆς παρατηρήσεως καὶ τοῦ κέντρου τοῦ ἡλιακοῦ δίσκου, καὶ τῆς προβολῆς αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου).

14. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις ἑκάστης ἐκ τῶν δύο καθέτων συνιστωσῶν δυνάμεων F_1 καὶ F_2, εἰς τὰς ὁποίας ἀναλύεται μία δύναμις F ἐντάσεως 90 kgr*, ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ δύναμις F σχηματίζει μὲ τὴν συνιστῶσαν F_1 γωνία $20^{\circ}30'$

15. Δύο δυνάμεις $F_1 = 20$ kgr* καὶ $F_2 = 15$ kgr* ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔντασις τῆς συνισταμένης δυνάμεως αὐτῶν, ὡς καὶ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ συνισταμένη μὲ ἑκάστην τῶν συνιστωσῶν.

ΠΙΝΑΞ Ι

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Πρῶτα λεπτὰ μοίρας →

Μοῖραι ↓	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02620	0,02910	0,03201
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04950
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360
16	0,28675	0,28989	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33459	0,33783	0,34108
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35739	0,36068
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41421	0,41763	0,42105
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587
27	0,50953	0,51319	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56952	0,57348
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211
36	0,72654	0,73099	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661
38	0,78125	0,78598	0,79060	0,79544	0,80019	0,80498
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92169	0,92709
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008
44	0,96569	0,97133	0,97699	0,98270	0,98843	0,99419
45	1,00000					

ΠΙΝΑΞ II

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

Μοίραι ↓ Πρῶτα λεπτὰ μοίρας ←	60′	50′	40′	30′	20′	10′
89		343,77371	171,88540	114,58865	85,93979	68,75009
88	57,28996	49,10388	42,96408	38,18846	34,37060	31,24115
87	28,63625	26,43160	24,54176	22,90377	21,47060	20,20655
86	19,08114	18,07498	17,16934	16,34986	15,60478	14,92442
85	14,30067	13,72674	13,19688	12,70621	12,25051	11,82617
84	11,43005	11,05943	10,71191	10,38540	10,07803	9,78817
83	9,51436	9,25530	9,00983	8,77689	8,55555	8,34496
82	8,14435	7,95302	7,77035	7,59575	7,42871	7,26873
81	7,11537	6,96823	6,82694	6,69116	6,56055	6,43484
80	6,31375	6,19703	6,08444	5,97576	5,87080	5,76937
79	5,67128	5,57638	5,48451	5,39552	5,30928	5,22566
78	5,14455	5,06584	4,98940	4,91516	4,84300	4,77286
77	4,70463	4,63825	4,57363	4,51071	4,44942	4,38969
76	4,33148	4,27471	4,21933	4,16530	4,11256	4,06107
75	4,01078	3,96165	3,91364	3,86671	3,82083	3,77595
74	3,73205	3,68909	3,64705	3,60588	3,56557	3,52609
73	3,48741	3,44951	3,41236	3,37595	3,34023	3,30524
72	3,27085	3,23714	3,20406	3,17159	3,13972	3,10842
71	3,07768	3,04749	3,01783	2,98868	2,96004	2,93189
70	2,90421	2,87700	2,85023	2,82391	2,79802	2,77254
69	2,74748	2,72281	2,69853	2,67462	2,65109	2,62791
68	2,60509	2,58261	2,56046	2,53865	2,51715	2,49597
67	2,47509	2,45451	2,43422	2,41421	2,39449	2,37504
66	2,35585	2,33693	2,31826	2,29984	2,28167	2,26374
65	2,24604	2,22857	2,21132	2,19430	2,17749	2,16090
64	2,14451	2,12832	2,11232	2,09654	2,08094	2,06553
63	2,05030	2,03526	2,02039	2,00569	1,99116	1,97680
62	1,96261	1,94858	1,93470	1,92098	1,90741	1,89400
61	1,88073	1,86760	1,85462	1,84177	1,82906	1,81649
60	1,80405	1,79174	1,77955	1,76749	1,75556	1,74375
59	1,73205	1,72047	1,70901	1,69766	1,68643	1,67530
58	1,66428	1,65337	1,64256	1,63185	1,62125	1,61074
57	1,60033	1,59002	1,57981	1,56969	1,55966	1,54972
56	1,53987	1,53010	1,52043	1,51084	1,50133	1,49190
55	1,48256	1,47330	1,46411	1,45501	1,44598	1,43703
54	1,42815	1,41934	1,41061	1,40195	1,39336	1,38484
53	1,37638	1,36800	1,35968	1,35142	1,34323	1,33511
52	1,32704	1,31904	1,31110	1,30323	1,29541	1,28764
51	1,27994	1,27230	1,26471	1,25717	1,24969	1,24227
50	1,23490	1,22758	1,22031	1,21310	1,20593	1,19882
49	1,19175	1,18474	1,17777	1,17085	1,63981	1,15715
48	1,15037	1,14363	1,13694	1,13029	1,12369	1,11713
47	1,11061	1,10414	1,09770	1,09131	1,08496	1,07864
46	1,07237	1,06613	1,05994	1,05378	1,04766	1,04158
45	1,03553	1,02952	1,02359	1,01761	1,01170	1,00583

ΗΜΙΤΟΝΟΝ

Πρῶτα λεπτὰ μοίρας →

Μοῖραι ↓	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01454	0,01454	89
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03200	88
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943	87
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685	86
4	0,06976	0.07266	0,07556	0,07846	0'08136	0,08426	85
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0.10164	84
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0.11609	0,11898	83
7	0,12187	0,12476	0'12764	0,13053	0,13341	0.13629	82
8	0,13917	0,14205	0,14493	0.14781	0,15069	0,15356	81
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078	80
10	0,17365	0,17651	0.17937	0,18224	0.18509	0,18795	79
11	0.19081	0,19366	0,19652	0,19937	0.20222	0,20507	78
12	0,20791	0,21076	0,21359	0,21644	0,21928	0,22212	77
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910	76
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601	75
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284	74
16	0,27556	0,27843	0,28123	0.28402	0.28680	0,28959	73
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625	72
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0.32282	71
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929	70
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565	69
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191	68
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0.38805	67
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40141	0,40408	66
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998	65
25	0,42263	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575	64
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45139	63
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690	62
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226	61
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748	60
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254	59
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745	58
32	0,52982	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220	57
33	0,54464	0.54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678	56
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0.57119	55
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543	54
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949	53
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337	52
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706	51
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056	50
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386	49
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697	48
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987	47
43	0,68199	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256	46
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505	45
45	0,70711						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοῖραι ↑

← Πρῶτα λεπτὰ μοίρας

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΝ

Πρῶτα λεπτὰ μοίρας →

Μοίραι ↓	0′	10′	20′	30′	40′	50′	
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99995	0,99992	0,99988	89
1	0,99984	0,99980	0,99973	0,99965	0,99958	0,99950	88
2	0,99940	0,99928	0,99917	0,99905	0,99892	8,99878	87
3	0,99863	0,99848	0,99831	0,99814	0,99795	0,99776	86
4	0,99756	0,99735	0,99714	0,99692	0,99669	0,99644	85
5	0,99618	0,99594	0,99567	0,99539	0,99511	0,99482	84
6	0,99452	0,99421	0,99389	0,99357	0,99324	0,99289	83
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067	82
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814	81
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531	80
10	0,98481	0,98429	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218	79
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875	78
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97629	0,97566	0,97502	77
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97099	76
14	0,97029	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667	75
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206	74
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715	73
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195	72
18	0,95106	0,95015	0,94921	0,94832	0,94739	0,94646	71
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068	70
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462	69
21	0,93358	0,93253	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827	68
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164	67
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91589	0,91472	66
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753	65
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007	64
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232	63
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431	62
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603	61
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748	60
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866	59
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959	58
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025	57
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066	56
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082	55
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072	54
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038	53
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78979	52
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897	51
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791	50
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661	49
41	0,75471	0,75279	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509	48
42	0,74314	0,74119	0,73924	0,73728	0,73531	0,73332	47
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136	46
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916	45
45	0,70711						
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	Μοίραι ↑

← Πρῶτα λεπτὰ μοίρας

ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

1. Εὐθεῖαι, ἐπίπεδα καὶ αἱ σχετικαὶ θέσεις αὐτῶν

1.1 Γενικά.

Τὰ διάφορα σώματα τὰ ὁποῖα ὑποπίπτουν εἰς τὴν ἀντίληψίν μας χαρακτηρίζονται ἀπὸ ὡρισμένας ἰδιότητας.

Ἐπὶ παραδείγματι : καθὲν ἐξ αὐτῶν χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ ὑλικοῦ ποὺ ἔχει κατασκευασθῆ, ἀπὸ τὴν μορφήν του, τὴν ἔκτασιν ποὺ καταλαμβάνει ἐντὸς τοῦ περιβάλλοντος χώρου κ.λ.π.

Ἓν σῶμα λοιπόν, τὸ ὁποῖον ἐξετάζεται ὡς πρὸς ὅλας τὰς ὡς ἄνω ἰδιότητας θὰ καλῆται ***φυσικὸν στερεὸν σῶμα.***

Ἡ Γεωμετρία μελετᾶ τὰ φυσικὰ στερεὰ ἀλλὰ μόνον ὅσον ἀφορᾷ τὴν ***ἐξωτερικὴν μορφήν, τὴν ἔκτασιν αὐτῶν καὶ τὴν δυνατότητα μετατοπίσεώς των ἐντὸς τοῦ χώρου χωρὶς νὰ μεταβάλλεται ἡ μορφὴ καὶ ἡ ἔκτασίς των.***

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν δηλαδὴ κάθε στερεόν, θεωρεῖται ἀπηλλαγμένον ἀπὸ τὸ βάρος του, τὸ χρῶμά του καὶ γενικῶς ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας ἰδιότητας αὐτοῦ, πλὴν τῶν τριῶν ἀνωτέρω.

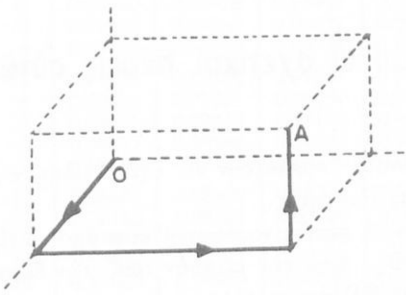
Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἐξεταζόμενα τὰ στερεά, θὰ καλοῦνται ***Γεωμετρικὰ στερεά.***

Χαρακτηριστικῶς το τμῆμα αὐτὸ τῆς Γεωμετρίας ποὺ ἀσχολεῖται μὲ τὰ Γεωμετρικὰ στερεὰ θὰ λέγεται ***Στερεομετρία***. Ἡ Στερεομετρία ἢ ὅπως ἄλλως λέγεται ***Γεωμετρία εἰς τὸν χῶρον,*** θὰ μᾶς ἀπασχολήσῃ ἐν συνεχείᾳ.

1.2 Χῶρος, Γεωμετρικὸν σχῆμα, σχεδίασις στερεοῦ.

Κατ' ἀρχὴν ὁ ἀπέραντος χῶρος ἐντὸς τοῦ ὁποίου νοοῦνται ὡς εὑρισκόμενα τὰ διάφορα γεωμετρικὰ στερεά, θὰ θεωρῆται ὡς ἓν ἀπέραντον σύνολον σημείων (σημειοσύνολον).

Ἂς λάβωμεν ἐντὸς τοῦ χώρου δύο σημεῖα, Ο καὶ Α (σχ. 1). Ἂς προσπαθήσωμεν τώρα νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ σημείου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α. Τοῦτο εἶναι δυνατὸν νὰ τὸ ἐπιτύχωμεν ἀκολουθοῦντες διαφόρους πορείας. Εἶναι ὅμως ἐξ ἴσου βέβαιον ὅτι ὁπωσδήποτε θὰ ἐπιτύχωμεν τοῦτο, δηλ. νὰ μεταβῶμεν ἐκ τοῦ Ο εἰς τὸ Α, ἂν ἀκολουθήσωμεν διαδοχικῶς τρεῖς καθέτους μεταξύ των διευθύνσεις, ὡς εἰς τὸ σχῆμα 1 φαίνεται.



Σχ. 1

Αἱ τρεῖς διευθύνσεις τοῦ εἴδους αὐτοῦ ὁρίζουν εἰς τὸν χῶρον τρεῖς ἀντιστοίχους διαστάσεις κατὰ τὴν ἔννοιαν τῶν ὁποίων γίνεται ἡ ἔκτασις τῶν διαφόρων στερεῶν (μῆκος, πλάτος, ὕψος).

Διὰ τοῦτο καὶ ὁ περιβάλλων ἡμᾶς χῶρος χαρακτηρίζεται καὶ ὡς χῶρος τῶν τριῶν διαστάσεων.

Ἐξ ἄλλου θὰ θεωροῦμεν ὅτι τὰ γεωμετρικὰ στερεὰ ἀποτελοῦνται καθ' ὅλην τὴν ἔκτασιν αὐτῶν ἀπὸ σημεῖα. Θὰ τὰ θεωροῦμεν δηλαδὴ ὡς σημειοσύνολα καὶ μάλιστα μὴ πεπερασμένα, ὡς εὑρισκόμενα δὲ ἐντὸς τοῦ ἀπεράντου χώρου θὰ λαμβάνωνται ὡς ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τούτου.

Θὰ παρατηρήσωμεν τώρα ὅτι ἡ ἔκτασις ἑκάστου στερεοῦ περιορίζεται εἴτε ἀπὸ ἐπιφανείας, εἴτε ἀπὸ γραμμὰς εἴτε ἀκόμη καὶ ἀπὸ μεμονωμένα σημεῖα.

Τὸ εἶδος τῶν συνόρων αὐτῶν ἑνὸς γεωμετρικοῦ στερεοῦ ὡς καὶ ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον αὐτὰ εἶναι τοποθετημένα μεταξύ των καὶ ἐν σχέσει πρὸς τὸν ἀπέραντον χῶρον καθορίζουν αὐτὸ ποὺ λέγεται ***Γεωμετρικὸν σχῆμα*** τοῦ στερεοῦ.

Τὸ γεωμετρικὸν δηλ. σχῆμα ἑνὸς στερεοῦ δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἡ μορφὴ ὑπὸ τὴν ὁποίαν τοῦτο ὑποπίπτει εἰς τὴν ἀντίληψίν μας.

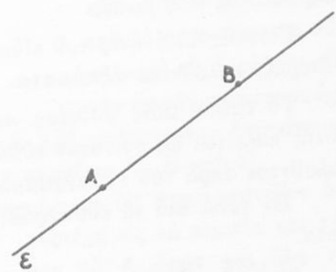
Τὸ γεωμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς στερεοῦ θὰ λέγεται καὶ στερεὸν σχῆμα.

Βεβαίως τὰ στερεὰ σχήματα θὰ νοοῦνται εἰς τὸν χῶρον. Διὰ τὴν συστηματικὴν ὅμως μελέτην αὐτῶν, θὰ σχεδιάζωνται ἐπάνω εἰς ἐπιπέδους ἐπιφανείας, ὅπως π. χ. εἶναι ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πίνακος, τοῦ χάρτου σχεδιάσεως κ.λ.π. Ἡ σχεδίασις αὕτη ἐπιτυγχάνεται συνήθως διὰ τῆς χαράξεως ὡρισμένων χαρακτηριστικῶν γραμμῶν αὐτῶν. Διὰ νὰ δίδῃ δὲ τὸ σχέδιον ἱκανοποιητικὴν ἐποπτικὴν εἰκόνα τοῦ πρὸς μελέτην σχήματος, χαράσσομεν τὰς γραμμὰς αὐτοῦ ποὺ ἀπὸ μίαν ὡρισμένην θέσιν εἶναι ὁραταὶ μὲ πλήρη γραμμήν, ἐνῷ ἐκείνας ποὺ δὲν φαίνονται ἀλλὰ νοοῦνται, μὲ διακεκομμένην.

Εἰς τὴν ἐπὶ μέρους μελέτην τῶν διαφόρων σχημάτων θὰ ἴδωμεν πῶς γίνεται τὸ σχέδιον ἑκάστου ἐξ αὐτῶν.

1.3 Καθορισμὸς εὐθείας εἰς τὸν χῶρον.

Ἤδη εἶναι γνωστὸν ὅτι ὅταν δοθοῦν δύο διαφορετικὰ σημεῖα π.χ. τὰ Α καὶ Β (σχ. 2), τότε δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν μίαν καὶ μόνον μίαν εὐθεῖαν ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά. Ἑπομένως ὁ καθορισμὸς μιᾶς εὐθείας γίνεται μονοσημάντως (κατὰ ἕνα καὶ μόνον τρόπον) ὅταν δοθοῦν δύο διακεκριμένα (διαφορετικὰ) σημεῖα αὐτῆς.



Σχ. 2

Μία εὐθεῖα θὰ σημειώνεται ἐπὶ τοῦ σχεδίου διὰ δύο σημείων της π. χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἢ καὶ δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου π.χ. ἡ εὐθεῖα ε (σχ. 2).

Κατωτέρω ὑπενθυμίζομεν τὰς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῆς εὐθείας.

α) Κάθε εὐθεῖα (ὅπως καὶ κάθε ἄλλη γραμμὴ) ἔχει μίαν μόνον διάστασιν.

β) Κάθε σημεῖον μιᾶς εὐθείας ὁρίζει ἐπ' αὐτῆς δύο κατευθύνσεις (φοράς). Τὴν πρὸς τ' ἀριστερὰ καὶ τὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ σημείου τούτου.

Κάθε λοιπὸν εὐθεῖα δύναται νὰ προεκταθῇ ἀπεριορίστως εἴτε πρὸς τὴν μίαν εἴτε πρὸς τὴν ἄλλην εἴτε καὶ πρὸς τὰς δύο τῶν κατευθύνσεων αὐτῶν.

Ἂς σημειωθῇ ὅτι κάθε εὐθεῖα ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπὸ ἓν σημεῖον καὶ ἐκτείνεται μόνον κατὰ τὴν μίαν τῶν ὡς ἄνω κατευθύνσεων καλεῖται ἡμιευθεῖα.

γ) Κάθε εὐθεῖα μετακινουμένη ἀπὸ τῆς θέσεώς της δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ πάσης ἄλλης.

δ) Ἂν δύο εὐθεῖαι ἔχουν περισσότερα τοῦ ἑνὸς κοινὰ σημεῖα, τότε θὰ ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα των κοινὰ καὶ ἄρα θεωρούμεναι ὡς σημειοσύνολα, θὰ εἶναι σύνολα ἴσα.

Συνέπεια τούτου εἶναι ὅτι δύο διακεκριμέναι εὐθεῖαι δύνανται νὰ ἔχουν τὸ πολὺ ἓν κοινὸν σημεῖον.

Παρατηρήσεις.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ποὺ ἀποδίδονται εἰς μίαν εὐθεῖαν γίνονται παραδεκταὶ χωρὶς ὅμως νὰ ἐξηγηθοῦν διὰ λογικῶν συμπερασμάτων (νὰ ἀποδειχθοῦν). Βεβαίως ἡ παραδοχή των δὲν ὁδηγεῖ εἰς ἀντιφάσεις καὶ παραλογισμούς.

Γενικῶς ἰδιότητες τοῦ εἴδους αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀφ' ἑαυτῶν φανεραί, καλοῦνται **ἀξιώματα.**

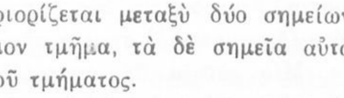
Τὸ τμῆμα μιᾶς εὐθείας ποὺ περιορίζεται μεταξὺ δύο σημείων αὐτῆς καλεῖται ὡς γνωστὸν εὐθύγραμμον τμῆμα, τὰ δὲ σημεῖα αὐτὰ καλοῦνται ἄκρα τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

Ἐν γένει διὰ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ἰσχύουν τὰ κάτωθι ἀξιώματα.

α) Κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει ἓν ὡρισμένον μῆκος, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁ λόγος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος πρὸς τὴν μονάδα μετρήσεως.

β) Κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχει ἓν καὶ μόνον ἓν μέσον. Δηλ. ἐπὶ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ μεταξὺ τῶν ἄκρων του ὑπάρχει ἓν καὶ μόνον ἓν σημεῖον ποὺ τὸ χωρίζει εἰς δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα μὲ ἴσα μήκη (μετρούμενα μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα).

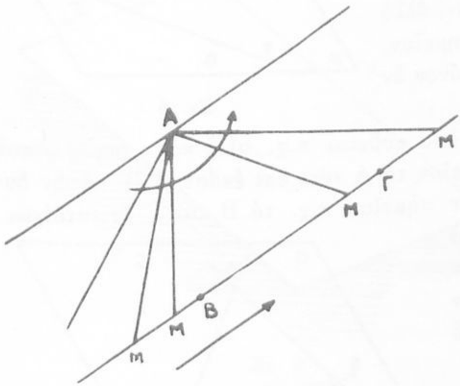
γ) Ἐξ ὅλων τῶν τμημάτων τῶν διαφόρων γραμμῶν τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα τὸ μικρότερον εἶναι τὸ εὐθύγραμμον (Σχ. 3).



Σχ. 3

1.4 Καθορισμὸς ἐπιπέδου.

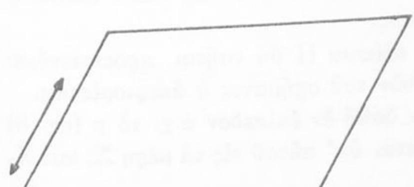
Θὰ λέγωμεν ὅτι : τρία σημεῖα π.χ. τὰ Α,Β καὶ Γ (σχ. 4) τὰ ὁποῖα δὲν εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὁρίζουν ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον. Διὰ νὰ ἐννοήσωμεν τὸν τρόπον κατὰ τὸν ὁποῖον καθορίζεται τὸ ἐπίπεδον αὐτό, ἂς φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν τῶν δύο ἐκ τῶν ὡς ἄνω σημείων ἔστω π.χ. τῶν Β καὶ Γ. Ἂς φαντασθῶμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἓν σημεῖον Μ μετακινούμενον ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά. Ἐν συνεχείᾳ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΜ. Τότε κατὰ τὴν ὡς ἄνω μετακίνησιν τοῦ Μ θὰ στρέφεται αὕτη περὶ τὸ Α μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν περιστροφῆς.



Σχ. 4

Κατὰ τὴν περιστροφήν της αὐτὴν ἡ ΑΜ γράφει μίαν ἐπιφάνειαν ἡ ὁποία ἀκριβῶς εἶναι τὸ ἐπίπεδον τῶν σημείων Α, Β καὶ Γ.

Προφανῶς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο θεωρούμενον ὡς σημειοσύνολον θὰ περιέχῃ εἰς τὰ σημεῖα του τόσον τὸ Α ὅσον καὶ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ΒΓ.

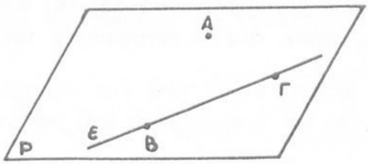


Σχ. 5

Εἰς τὸν πίνακα σχεδιάσεως τὸ ἐπίπεδον θὰ παρίσταται δι' ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ θὰ σημειοῦται δι' ἑνὸς μικροῦ γράμματος τοῦ λατινικοῦ ἀλφαβήτου, π.χ. τὸ ἐπίπεδον q (σχ. 5).

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῇ βοηθείᾳ τριῶν σημείων δὲν εἶναι ὁ μοναδικός. Τοῦτο δύναται νὰ ὁρισθῇ ἐπίσης ὅταν ἔχωμεν ὡς δεδομένα : α) Μίαν εὐθεῖαν καὶ ἓν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπ' αὐτῆς.

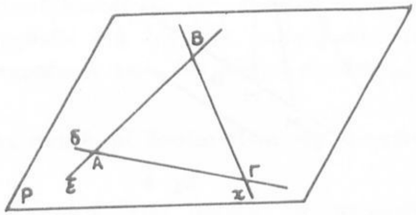
Τοῦτο εἶναι προφανές, διότι ἂν ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας (σχ. 6) λάβωμεν δύο διαφορετικὰ σημεῖα, τότε αὐτὰ ὁμοῦ μετὰ τοῦ δοθέντος θὰ ἀποτελοῦν ἓν σύστημα τριῶν σημείων μὴ εὑρισκομένων ἐπὶ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἄρα θὰ ὁρίζουν μονοσημάντως ἓν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον προφανῶς θὰ περιέχῃ ὁλόκληρον τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, ἀλλὰ καὶ τὸ ἐκτὸς αὐτῆς δοθὲν σημεῖον.



Σχ. 6

β) Δύο εὐθείας ποὺ ἔχουν μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον.

Πράγματι ἂν δοθοῦν δύο εὐθεῖαι π.χ. αἱ δ καὶ ε (σχ. 7), ποὺ ἔχουν μοναδικὸν κοινὸν σημεῖον τὸ Α τότε ἐπὶ ἑκάστης ἐξ αὐτῶν δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἀνὰ ἓν σημεῖον π.χ. τὰ Β καὶ Γ ἀντιστοίχως. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ Α, Β καὶ Γ θὰ ὁρίζουν ἓν μοναδικὸν ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον θὰ περιέχῃ προφανῶς τὰς δ καὶ ε.



Σχ. 7

Τὰ ἀξιώματα ποὺ γίνονται παραδεκτὰ διὰ τὸ ἐπίπεδον εἶναι τὰ ἑξῆς:

I) Κάθε ἐπίπεδον ἐκτείνεται εἰς τὸν χῶρον κατὰ δύο μόνον διαστάσεις (μῆκος, πλάτος).

II) Κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν διαστάσεων αὐτῶν κάθε ἐπίπεδον δύναται νὰ προεκταθῇ ἀπεριορίστως.

Βεβαίως συμφώνως πρὸς τὸ ἀξίωμα II θὰ νοῆται προεκτεινόμενον κατὰ τὰς διευθύνσεις τῶν βελῶν τοῦ σχήματος 5 ἀπεριορίστως.

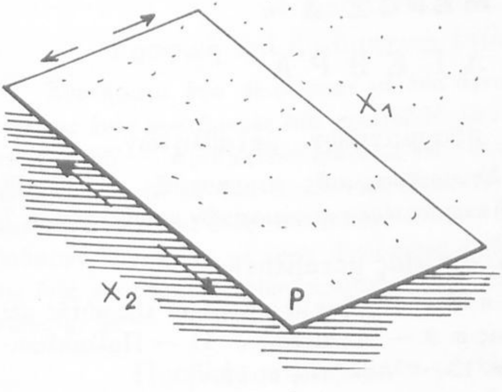
Εἶναι προφανὲς τώρα ὅτι ἂν δοθῇ ἓν ἐπίπεδον π.χ. τὸ p (σχ. 8) τότε ὁ ἀπέραντος χῶρος διαχωρίζεται ὑπ' αὐτοῦ εἰς τὰ μέρη X_1 καὶ X_2 ὡς φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον τὸ σημειοσύνολον ***χῶρος*** διαμερίζεται εἰς τρία ὑποσύνολα αὐτοῦ τὰ X_1, p καὶ X_2 ξένα μεταξύ των.

Ἐξ αὐτῶν τὰ X_1 καὶ X_2 καλοῦνται ***ἀνοικτοὶ ἡμιχῶροι*** ἐνῷ τὸ p καλεῖται ***σύνορον*** αὐτῶν.

Τὰ σύνολα $\overline{X}_1 = X_1 \cup p$ καὶ $\overline{X}_2 = X_2 \cup p$, δηλ. τὰ σύνολα ἕκαστον τῶν ὁποίων περιλαμβάνει τὰ σημεῖα τοῦ ἀντιστοίχου ἀνοικτοῦ ἡμιχώρου καὶ τοῦ συνόρου του, καλοῦνται ***κλειστοὶ ἡμιχῶροι.***

Διὰ τὰ ὡς ἄνω σύνολα X_1, p, X_2, $\overline{X}_1$ καὶ $\overline{X}_2$ ἔχομεν νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι εἶναι κυρτά. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἂν A καὶ B εἶναι δύο σημεῖα κάποιου ἐξ αὐτῶν, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB θὰ ἀνήκῃ ὁλόκληρον εἰς τὸ σύνολον τοῦτο. Προκειμένου δὲ διὰ τὸ p ὄχι μόνον τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα, ἀλλὰ καὶ ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα AB προφανῶς θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦτο.



Σχ. 8

Ἂν ὅμως $A \in X_1$ καὶ $B \in X_2$ τότε τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB καὶ τὸ p ἔχουν ἓν καὶ μόνον ἓν κοινὸν σημεῖον. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ἢ καὶ ἡ εὐθεῖα AB τέμνει (διαπερνᾷ) τὸ ἐπίπεδον p.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ Α΄

ΑΛΓΕΒΡΑ

Συναρτήσεις πραγματικῶν μεταβλητῶν.

Μονώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

Μετασχηματισμὸς μερικῶν πολυωνύμων 2ου βαθμοῦ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Πολυώνυμα μὲ δύο ἢ τρεῖς μεταβλητάς.

Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

Συστήματα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

Γραφικὴ καὶ ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις αὐτῶν.

Προβλήματα λυόμενα μὲ τὴν βοήθειαν συστημάτων πρώτου βαθμοῦ.

Πρωτοβάθμιοι ἀνισώσεις μὲ δύο ἀγνώστους.

Τετραγωνικὴ συνάρτησις $y=x^2$ καὶ αἱ ἀντίστροφοι αὐτῆς.

Ἐξισώσεις 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀριθμητικὴ καὶ γραφικὴ ἐπίλυσις αὐτῶν.

Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων
(Ἐφαρμογαί)

ΜΕΡΟΣ Γ΄
ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

Εὐθεῖαι ἐπίπεδα καὶ αἱ σχετικαὶ θέσεις των.