Μ. ΚΟΥΤΑΒΑΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μαθηματικά

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΤΕΥΧΟΣ Α'

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"

Μ Α Θ Η Μ Α Τ Ι Κ Α

ΤΗΣ Γ′ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΑΡΙΝΟΥ Ν. ΚΟΥΤΑΒΑ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ Γ' ΤΑΞΙΝ ΤΟΥ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Σύμφωνως πρὸς τὸ νέον ἀναλυτικὸν πρόγραμμα

(Β. Διάταγμα ἀριθ. 425/4/5/1966–Φ.Ε.Κ 110 τ. Α΄.)

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 56 - ΤΗΛ. 612.412

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγίδα τοῦ ἐκδότου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

Α Λ Γ Ε Β Ρ Α

§ 1. Ἀκέραια μονώνυμα μὲ μίαν μεταβλητὴν

1.1. Μονώνυμα μὲ μίαν μεταβλητήν.

Συναρτήσεις τῆς μορφῆς

$$f : x \xrightarrow{f} \alpha x^{\nu} = y,$$

ὅπου α μία σταθερά, $\nu \in \Phi$ καὶ $x \in \Pi$, λέγονται εἰς τὴν Ἄλγεβραν ἀκέραια μονώνυμα καί, συντόμως, μονώνυμα μὲ μίαν μεταβλητήν.

Ἡ σταθερὰ α λέγεται συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου καί, ἂν $\alpha \neq 0$, ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ν λέγεται βαθμὸς τοῦ μονωνύμου.

Π.χ.

$-\frac{3}{4}x$	ἀκέραιον μονώνυμον	βαθμοῦ	1ου	μὲ συντελεστὴν	$-\frac{3}{4}$
$-\frac{2}{5}x^2$	»	»	2ου	»	$-\frac{2}{5}$
$-x^5$	»	»	5ου	»	-1
$2\pi x$	»	»	1ου	»	2π
πx^2	»	»	2ου	»	π
$-\frac{3}{2}\alpha x^3$	»	»	3ου	»	$-\frac{3}{2}\alpha$
$\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta x^4$	»	»	4ου	»	$\frac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta.$

Τὰ ἀνωτέρω μονώνυμα εἶναι μιᾶς μεταβλητῆς, τῆς $x \in \Pi$ (σύνολον πραγματικῶν ἀριθμῶν).

Παρατήρησις. Ὡς γνωστόν, μίαν σταθερὰν α δυνάμεθα νὰ τὴν γράψωμεν καὶ μὲ τὴν μορφὴν αx^0 (διὰ κάθε τιμὴν τῆς $x \neq 0$), διὰ τοῦτο συμφωνοῦμεν νὰ θεωροῦμεν καὶ κάθε σταθερὰν α ὡς μονώνυμον, ***μηδενικοῦ βαθμοῦ*** ὅταν $\alpha \neq 0$, ἄνευ βαθμοῦ ὅταν $\alpha = 0$.

Δύο μονώνυμα κx^{ν} καὶ λx^{ν} τῆς ἰδίας μεταβλητῆς καὶ τοῦ ἰδίου βαθμοῦ λέγονται ὅμοια. Τὸ *«μηδενικὸν»* μονώνυμον 0 εἶναι ὅμοιον μὲ κάθε μονώνυμον. Τὰ μονώνυμα αx^ν καὶ $-\alpha x^\nu$ λέγονται ἀντίθετα.

Παραδείγματα ὁμοίων μονωνύμων.

Τὰ $-18x^3$, $-12\alpha^2\beta x^3$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha x^3$, $-x^3$, $\frac{4}{3}\pi x^3$ εἶναι ὅμοια μονώνυμα τῆς μεταβλητῆς x, διότι ὅλα εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Ὁμοίως τὰ μονώνυμα: $-8\omega^2$, $3\alpha\omega^2$, $2\omega^2$, ω^2, $-\frac{\omega^2}{4}$, $0{,}2\omega^2$ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι τῆς ἰδίας μεταβλητῆς ω καὶ τοῦ ἰδίου βαθμοῦ (2ου).

Ἀσκήσεις

1. Εὕρετε τὸν βαθμὸν καὶ τὸν συντελεστὴν εἰς καθένα ἀπὸ τὰ ἑπόμενα μονώνυμα τῆς μεταβλητῆς x ἢ y ἢ ω.

α) $-3\alpha^3x$, $\frac{-2}{5}x^2$, $-\frac{8\alpha x^3}{\beta}$, $\frac{-0{,}2x^8}{3}$, x, $-x^2$, $\frac{-3x^{10}}{\alpha\beta}$

β) $-5\beta y^8$, $-0{,}333\ldots y^9$, $-\frac{2{,}44\ldots}{3{,}55\ldots}y^{12}$, $-\frac{y}{0{,}666\ldots}$, $\alpha^3\beta^2y^5$

γ) $-\omega^3$, ω^6, $-\frac{3}{4}\alpha\omega$, $-\frac{2}{5}\alpha$, $-6\alpha\beta^2\omega^{20}$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\omega^8$, $-\frac{\omega^7}{8}$

2. Εὕρετε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι μονωνύμων εἶναι ὅμοια.

$\frac{3}{4}x^3$, $-\frac{4}{5}x$, $-7x^3$, $-\frac{2}{5}\omega^3$, $-\frac{6\alpha}{\beta}x^2$, $2x^3$, $8\omega^4$, $-3\omega^3$,

$14x^2$, $-\frac{6}{5}x$, $-\frac{3}{7}\omega$, $\frac{9}{17}x^2$, $-17\omega^3$, $-8\omega^2$, $-6\omega^4$, $-x$, $-14x^2$,

$-12x$, $-32x^2$, $-\frac{3}{11}x^3$, $-\frac{12}{25}\omega$, $-\frac{13}{27}\omega^2$, ω^3, $-\omega^4$.

3. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι μονωνύμων εἶναι ἀντίθετα;

$-\frac{3}{7}x^6$, $\frac{3}{4}x^5$, $\frac{6}{14}x^6$, $-\frac{9}{8}x^5$, $-\frac{0{,}22\ldots}{0{,}55\ldots}x^7$, $\frac{2}{5}x^7$,

$-\frac{3{,}66\ldots}{2{,}33\ldots}\omega^2$, $\frac{11}{7}\omega^2$, $-\frac{7{,}511\ldots}{2{,}377\ldots}x^3$, $\frac{338}{107}x^3$.

1.2. Πράξεις μὲ μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς.

Εἰς ἕνα μονώνυμον αx^ν ἡ μεταβλητὴ x ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἡ δὲ σταθερὰ α εἶναι ἐπίσης ἕνας ὡριθμένος πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ φυσικὸς ν ἐκφράζει τὴν δύναμιν τῆς μεταβλητῆς x, συνεπῶς τὸ μονώνυμον αx^ν διὰ τὰς διαφόρους πραγματικὰς τιμὰς τῆς x ἐκφράζει ἐπίσης πραγματικοὺς ἀριθμούς. Εἰς τὸ σύνολον δὲ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἔχουν ὁρισθῆ αἱ τέσσαρες πράξεις (πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις) μὲ τὰς γνωστάς των ἰδιότητας, αἱ ὁποῖαι ἀσφαλῶς θὰ ἔχουν ἐφαρμογὴν καὶ ἐπὶ τῶν μονωνύμων.

α) Πρόσθεσις μονωνύμων.

Διὰ νὰ προσθέσωμεν δύο ἢ περισσότερα μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, τὰ γράφομεν τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου, ὁπότε προκύπτει μία συνάρτησις τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, ἡ ὁποία καλεῖται ***πολυώνυμον.*** Τὰ μονώνυμα ποὺ ἀπαρτίζουν τὸ πολυώνυμον λέγονται ***ὅροι*** αὐτοῦ, ὁ μεγαλύτερος δὲ ἐκθέτης εἰς τοὺς ὅρους του ὀνομάζεται ***βαθμὸς*** τοῦ πολυωνύμου.

Π.χ. Ἄθροισμα τῶν μονωνύμων $-3x^3$, $+\frac{3}{4}x^4$, $-2x$, $+3x^2$, $+5x^0$ εἶναι τὸ πολυώνυμον:

$$-3x^3+\frac{3}{4}x^4-2x+3x^2+5,$$

τὸ ὁποῖον εἶναι 4ου βαθμοῦ.

Ἂς προσθέσωμεν ὁμοίως τὰ μονώνυμα:

$$-\frac{2}{5}x^3, +3x^3, -2x^3, +7x^3, -8x^3.$$

Ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$-\frac{2}{5}x^3+3x^3-2x^3+7x^3-8x^3,$$

σύμφωνα δὲ μὲ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν ἔχομεν:

$$\left(-\frac{2}{5}+3-2+7-8\right)x^3=-\frac{2}{5}x^3.$$

Ἐπίσης διὰ τὰ μονώνυμα

$$-\frac{\alpha}{3}x^2, -\frac{2\alpha}{5}x^2, +\frac{3\alpha}{10}x^2, +\frac{5\alpha}{3}x^2, -\alpha x^2, -2\alpha x^2$$

ἔχομεν:

$$-\frac{\alpha}{3}x^2-\frac{2\alpha}{5}x^2+\frac{3\alpha}{10}x^2+\frac{5\alpha}{3}x^2-\alpha x^2-2x^2=$$

$$\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{2\alpha}{3}+\frac{3\alpha}{10}+\frac{5\alpha}{3}-\alpha-2\alpha\right)x^2=-\frac{53\alpha}{30}x^2.$$

Επομένως, **ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον, ὅμοιον μὲ αὐτά, ποὺ ἔχει συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν προσθετέων μονωνύμων.**

Ἀσκήσεις

4. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:

α) $-2{,}5x^3,\ -\frac{3}{4}x^3,\ -0{,}6x^3,\ +\frac{7}{5}x^3,\ -2\frac{1}{3}x^3,\ -x^3,\ 7x^3,$

β) $-2\alpha\omega^2,\ -3\alpha\omega^2,\ -\frac{3}{4}\alpha\omega^2,\ -0{,}8\alpha\omega^2,\ -5\frac{2}{3}\alpha\omega^2,\ \omega^2,$

γ) $-7{,}22\ldots y,\ -3{,}55\ldots y,\ -\frac{0{,}88\ldots}{0{,}44\ldots}y,\ \frac{4{,}33\ldots}{15{,}11\ldots}y,\ \frac{12{,}322\ldots}{11{,}733\ldots}y.$

5. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:

α) $-\frac{\sqrt{2}}{3}x^2,\ +5\sqrt{2}\,x^2,\ \frac{-6\sqrt{2}}{8}x^2,\ \sqrt{2}\,x^2,\ -7\sqrt{2}\,x^2,$

β) $\alpha\sqrt{3}\,\omega^4,\ -2\alpha\sqrt{3}\,\omega^4,\ +6\alpha\sqrt{3}\,\omega^4,\ -7\alpha\sqrt{3}\,\omega^4,\ \alpha\sqrt{3}\,\omega^4$

γ) $0{,}012\,y^3,\ 7{,}05\,y^3,\ -9{,}2\,y^3,\ -12{,}65\,y^3,\ 0{,}03\,y^3,\ -y^3.$

β) Ἀφαίρεσις μονωνύμων.

Ἀφαίρεσις ἑνὸς μονωνύμου αx^ν ἀπὸ ἕνα ἄλλο βx^μ καλεῖται ἡ πρᾶξις, διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὸ βx^μ προσθέτομεν τὸ ἀντίθετον τοῦ αx^ν.

Ἤτοι: $\beta x^\mu-\alpha x^\nu=\beta x^\mu+(-\alpha x^\nu)$

Κατὰ ταῦτα

$$-\frac{3}{4}x^3-\left(-\frac{2}{5}x^3\right)=-\frac{3}{4}x^3+\frac{2}{5}x^3=\left(-\frac{3}{4}+\frac{2}{5}\right)x^3=-\frac{7}{20}x^3.$$

Ὁμοίως,

$$-\frac{2\alpha\sqrt{5}}{3}x^4-\left(+\frac{8\alpha\sqrt{5}}{5}x^4\right)=-\frac{2\alpha\sqrt{5}}{3}x^4+\left(-\frac{8\alpha\sqrt{5}}{5}x^4\right)=\left(-\frac{2\alpha\sqrt{5}}{3}-\frac{8\alpha\sqrt{5}}{5}\right)x^4=-\frac{34\alpha\sqrt{5}}{15}x^4.$$

γ) Πολλαπλασιασμὸς μονωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς.

Ἔστω, ὅτι ἔχομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ μονώνυμα $-6x^3$ καὶ $\frac{3}{8}x^2$. Ἐκ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῶν δυνάμεων ἠμποροῦμεν νὰ γράψωμεν:

$$-6x^3 \cdot \frac{3}{8}x^2 = -6 \cdot \frac{3}{8} \cdot x^3x^2 = -\frac{18}{8}x^5 = -\frac{9}{4}x^5.$$

Ὁμοίως διὰ τὰ μονώνυμα $-\frac{3}{4}x^4$, $-\frac{2}{5}x^3$ καὶ $-x$ ἔχομεν:

$$-\frac{3}{4}x^4 \cdot \left(-\frac{2}{5}x^3\right) \cdot (-x) = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot (-1) \cdot x^4 \cdot x^3 \cdot x =$$

$$-\frac{6}{20}x^8 = -\frac{3}{10}x^8.$$

Ἤτοι: **Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν μονώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς αὐτῶν καὶ τὰς δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς καί, ἔτσι σχηματίζεται ἕνα νέον μονώνυμον τῆς ἰδίας μεταβλητῆς, μὲ συντελεστὴν τὸ γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν παραγόντων καὶ ἐκθέτην τῆς μεταβλητῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν της εἰς τὰ δοθέντα μονώνυμα.**

Ἀσκήσεις

6. Νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις τῶν κάτωθι μονωνύμων:

α) $8x^3 - (-0{,}5x^2)$ β) $16x^4 - \left(+\frac{3}{7}x^3\right)$ γ) $12{,}3x^2 - (-0{,}2x^2)$

δ) $0{,}66\ldots x^5 - (0{,}77\ldots x^5)$, ε) $3{,}22\ldots x^3 - (-4{,}33\ldots x^3)$.

7. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί:

α) $-\frac{2}{5}\omega^3 - \left(-\frac{3}{4}\omega^3\right)$, β) $-\frac{\sqrt{2}}{3}\omega^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\omega^2\right)$

γ) $-\frac{\sqrt{3}}{4}\omega^5 - \left(+\frac{3}{5}\sqrt{3}\,\omega^5\right)$, δ) $-\frac{8\alpha}{3}\omega^6 - \left(-\frac{4\alpha}{5}\omega^6\right)$

ε) $0{,}25\omega^7 - (+0{,}6\omega^7)$.

8. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραὶ τῶν μονωνύμων:

α) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}y^2 - \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{3}y^2\right)$, β) $\frac{\sqrt{3}+2}{3}y^3 - \left(+\frac{2\sqrt{3}-1}{4}y^3\right)$

γ) $8y - 0{,}8y$, δ) $\frac{\alpha\sqrt{2}-1}{3}y^4 - \left(+\frac{3\alpha\sqrt{2}+1}{6}y^4\right)$,

ε) $\frac{\beta\sqrt{5}+5}{4}y^5 - \left(-\frac{6\sqrt{5}-3}{5}y^5\right)$.

9. Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοὶ τῶν μονωνύμων:

α) $-\frac{3}{4}x \cdot \left(-\frac{2}{5}x^2\right)$, β) $\frac{7}{5}x^2 \cdot \frac{3}{8}x^3$, γ) $-0{,}6x \cdot 0{,}5x^3$,

δ) $-\frac{2}{5}x \cdot 0{,}2x^2 \cdot \left(-\frac{7}{2}x^3\right)$ ε) $-\frac{4}{3}x \cdot (-0{,}3x^3) \cdot \left(-\frac{2}{5}x^3\right) \cdot (-x)$, στ) $-0{,}5252\ldots x \cdot (-7{,}1212\ldots x^2)$, ζ) $-\dfrac{4{,}522\ldots}{0{,}33\ldots}x^2 \cdot \left(+\dfrac{3{,}22\ldots}{5{,}111\ldots}x^2\right)$.

10. Νὰ πολλαπλασιάσετε κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ μονώνυμα :

$$-\frac{\sqrt{2}}{3}x^3,\ \frac{\sqrt{5}}{4}x^2,\ -\frac{3\sqrt{2}}{7}x$$

μὲ κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ

$$\sqrt{6}x^2,\ -\frac{\sqrt{5}}{3}x,\ \frac{\sqrt{2}}{0{,}32\ldots}x \quad \text{(ἐννέα πολλαπλασιασμοί).}$$

δ) Δύναμις μονωνύμου.

Αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων σχετικῶν ἀριθμῶν, ἐφαρμόζονται καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν μονωνύμων.

Π.χ. $(-3x)^2=(-3)^2\cdot x^2=9x^2$,

$$\left(-\frac{2}{5}x^2\right)^3=\left(-\frac{2}{5}\right)^3(x^2)^3=-\frac{8}{125}x^6,$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{5}x^3\right)^4=\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)^4\cdot(x^3)^4=\frac{(\sqrt{2})^4}{5^4}x^{12}=\frac{4}{625}x^{12},$$

$$(3\alpha x^2)^3=3^3\cdot\alpha^3\cdot(x^2)^3=27\alpha^3x^6,$$

$$\left(-\frac{2\alpha\sqrt{5}}{3}x^3\right)^2=\frac{(-2\alpha\sqrt{5})^2}{3^2}\cdot(x^3)^2=\frac{4\cdot\alpha^2\cdot 5}{9}x^6=\frac{20\alpha^2}{9}x^6,$$

$$\left[\left(-\frac{2}{3}x^2\right)^3\right]^2=\left(-\frac{2}{3}x^2\right)^6=\left(-\frac{2}{3}\right)^6\cdot(x^2)^6=\frac{64}{729}x^{12}.$$

Ἀσκήσεις

11. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ σημειούμεναι πράξεις τῶν κάτωθι μονωνύμων :

α) $\left(-\dfrac{5}{7}x^2\right)^3$, $(-2\alpha x^3)^2$, $\left(-\dfrac{3}{8}\alpha^2x^2\right)^3$, $(-0{,}03x)^2$,

β) $\left(\dfrac{5\alpha\sqrt{3}}{2}x^2\right)^2$, $\left(-\dfrac{2\alpha\sqrt{2}}{3}x^3\right)^2$, $\left(-\dfrac{3\alpha\sqrt{7}}{2}x\right)^3$, $(-0{,}03\,x)^2$,

$\left(\dfrac{0{,}22\ldots}{2}x^2\right)^2$,

γ) $\left(-\dfrac{2}{3}\alpha x\right)^2\cdot\alpha x^3$, $\left(-\dfrac{2\alpha\sqrt{2}}{3}x^2\right)^3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}^2x^2\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3}{2}^2x\right)^2$,

δ) $\left(-\dfrac{7^2}{3}\alpha\omega^2\right)^3\cdot\left(-\dfrac{3}{7^2}\alpha^2\omega^3\right)^2$, $\left(-\dfrac{5}{3}\alpha\beta\omega^3\right)^2\cdot\left(-\dfrac{9}{4}\alpha^2\beta\omega^2\right)^3$,

ε) $-[(-5\alpha\omega^2)^3]^2\cdot\left(-\dfrac{3}{5^2}\alpha^2\omega\right)^4\cdot(-\alpha\omega)^2$.

12. Ὁμοίως νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

α) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha y^2\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2 y\right)^2$, β) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3^2}\alpha y\right)^3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{-2^3}\alpha y^2\right)^1 \cdot \sqrt{2}\,\alpha y^3$

γ) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\alpha^2 y\right)^0 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\alpha^2 y\right)^3 \cdot \left(\frac{2^2}{-\sqrt{2}}\alpha^3 y\right)$.

ε) Διαίρεσις μονωνύμων.

Ὀνομάζομεν διαίρεσιν ἑνὸς μονωνύμου $\alpha\chi^\rho$ (διαιρετέου), δι' ἑνὸς ἄλλου μονωνύμου $\beta\chi^\lambda$ ($\beta\neq 0$, $x\neq 0$) (διαιρέτου), τὸ μονώνυμον, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον μὲ τὸ δεύτερον δίδει τὸ πρῶτον.

Ἤτοι: $\alpha x^\rho : \beta x^\lambda = \frac{\alpha}{\beta} x^{\rho-\lambda}$, $(\rho,\lambda \in \Phi)$

Πράγματι, $\frac{\alpha}{\beta} x^{\rho-\lambda} \cdot \beta x^\lambda = \frac{\alpha\,\beta}{\beta} \cdot x^{\rho-\lambda} \cdot x^\lambda = \alpha \cdot x^{\rho-\lambda+\lambda} = \alpha x^\rho$

Παράδειγμα:

$$-\frac{3}{7}x^6 : \frac{2}{5}x^4 = \left(-\frac{3}{7} : \frac{2}{5}\right) x^{6-4} = \left(-\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{2}\right) x^2 = -\frac{15}{14}x^2.$$

Παρατήρησις. Ἂν εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha x^\rho : \beta x^\lambda = \frac{\alpha}{\beta} x^{\rho-\lambda}$ εἶναι $\rho \geq \lambda$, τότε τὸ πηλίκον εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον τῆς μεταβλητῆς x, ἄλλως δὲν εἶναι ἀκέραιον καὶ ὀνομάζεται ***κλασματικὸν*** μονώνυμον.

Π.χ. $2x^3 : 7x^5 = \frac{2}{7}x^{3-5} = \frac{2}{7}x^{-2} = \frac{2}{7}\cdot\frac{1}{x^2}$

Ἀσκήσεις

13. Ἐκτελέσατε τὰς διαιρέσεις τῶν μονωνύμων:

α) $-9x^3 : 4x^2$, $-12x^5 : \frac{3}{4}x^3$, $\frac{7}{5}x^5 : \frac{8}{3}x$,

β) $15x^7 : 5x^6$, $-\frac{3}{5}x^8 : x^8$, $0{,}35x^2 : 0{,}5x$,

γ) $135x^{12} : 0{,}25x^6$, $4{,}22\ldots x^9 : \frac{4}{9}x^5$, $\frac{7}{99}x^8 : 0{,}1212\ldots x^6$

14. Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι διαιρέσεις καὶ ἐξετάσατε, ποῖαι ἐξ αὐτῶν δίδουν πηλίκον ἀκέραιον μονώνυμον καὶ ποῖαι κλασματικόν.

α) $-\frac{13}{4}x^8 : \frac{7}{8}x^3$, $14\alpha^3x^7 : -2\alpha^2x^4$, $-\frac{9}{5}\alpha^4\beta^2x^9 : \frac{4}{25}\alpha^3\beta^2x^6$, β) $4{,}5\,\alpha^2x^{10} : 10\alpha x^3$, $17x^3 : -\frac{34}{5}x^5$, $10\alpha^2x^4 : -2\alpha x^5$,

γ) $-\frac{2}{5}(\alpha+\beta)x^3 : \frac{4}{7}x^2$, $\frac{12}{5}(\alpha^2+\beta^2)x^3 : \frac{3}{11}(\alpha^2+\beta^2)x^6$, $\frac{-3^2}{4^2}x^8 : \frac{9}{-2^3}x^5$.

§2. Πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

2.1. α) Πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς.

Καλοῦμεν πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς ἕνα ἄθροισμα μονωνύμων τῆς ἰδίας μεταβλητῆς.

Π.χ. $-2x^3+(-3x^2)+5x+2$ ἢ ἁπλούστερον

$-2x^3-3x^2+5x+2$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον τῆς μεταβλητῆς x. Γενικώτερον, ἕνα πολυώνυμον (ἀκέραιον) μὲ μίαν μεταβλητὴν δύναται νὰ λάβῃ τὴν μορφήν:

$$\alpha_0x^\nu+\alpha_1x^{\nu-1}+\alpha_2x^{\nu-2}+\ldots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu,$$

ὅπου $x\in\Pi$, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{\nu-1}$, α_ν σταθεροὶ ἀριθμοὶ καὶ $\nu\in\Phi$ μὲ $\nu-1>0, \nu-2>0, \ldots$

Σημείωσις: Ὀνομάζομεν ***βαθμὸν*** ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν § 1.2.α, τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην τῆς μεταβλητῆς, ποὺ ὑπάρχει εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

Θὰ λέγωμεν, ὅτι ἕνα πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον ***κατὰ τὰς ἀνιούσας ἢ κατιούσας*** (ἀνερχομένας ἢ κατερχομένας) δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς, ὅταν οἱ ἐκθέται τῆς μεταβλητῆς εἰς τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου βαίνουν διαδοχικῶς αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι ἀντιστοίχως.

Π.χ., τὸ πολυώνυμον

$$3+2x-5x^2-6x^3+7x^4+x^5$$

εἶναι βαθμοῦ 5ου καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x.

Ὁμοίως τὸ πολυώνυμον

$$-x^4-3x^3+2x^2+x-3$$

εἶναι 4ου βαθμοῦ καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x.

β) Ἕνα πολυώνυμον τῆς μεταβλητῆς x δύναται νὰ συμβολίζεται διὰ τῶν συμβόλων φ(x), π(x), Π(x), ρ(x), f(x) κ.λ.π. Π.χ.

$$x^2+x+1=\varphi(x)$$
$$3x^3-2x^2-x-6=\sigma(x)$$
$$10x^6-8x^3+2=f(x) \text{ κ.λ.π.}$$

Ὁμοίως, ὅταν τὸ πολυώνυμον εἶναι μιᾶς ἄλλης μεταβλητῆς y, ω, z κ,λ.π. δύναται ἐπίσης νὰ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς :

$$y^2-12y+1=\rho(y)$$
$$\omega^3-2\omega^2+\omega+3=\Pi(\omega)$$
$$z^4+3z^2-z+7=\varphi_1(z) \quad \text{κ.λ.π.}$$

γ) **Καλοῦμεν ἀνηγμένον (ἢ συνεπτυγμένον) τὸ πολυώνυμον ποὺ προκύπτει ἀπὸ ἕνα ἄλλο, ἀφοῦ προηγουμένως ἐκτελεσθοῦν αἱ προσθέσεις μεταξὺ τῶν ὁμοίων ὅρων του.**

Π.χ. $12x^3-7x^2-6x-10x^2+7x^3-12=12x^3+7x^3-7x^2-10x^2-6x-12=$
$=(12+7)x^3+(-7-10)x^2-6x-12=19x^3+(-17x^2)-6x-12=$
$=19x^3-17x^2-6x-12$,

τὸ τελευταῖον αὐτὸ πολυώνυμον, εἶναι τὸ ἀνηγμένον πολυώνυμον τοῦ δοθέντος.

δ) Δύο πολυώνυμα $\rho(x)$ καὶ $\lambda(x)$ λέγονται *ἴσα*, ἂν ἔχουν τὴν ἰδίαν ἀνηγμένην μορφήν· ἤτοι, ἄν οἱ ὁμοβάθμιοι ὅροι αὐτῶν ἔχουν ἴσους συντελεστὰς μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων των.

Π.χ.
$$\rho(x)=\frac{7}{8}x^3-\frac{3}{5}\chi^2-6x-3$$
$$\lambda(x)=-\frac{3}{5}x^2+\frac{7}{8}x^3-6x-3$$

εἶναι ἴσα πολυώνυμα. Δυνάμεθα δὲ νὰ γράψωμεν συμβολικῶς

$$\rho(x)=\lambda(x).$$

Εἶναι προφανές, ὅτι ἡ ἰσότης μεταξὺ τῶν πολυωνύμων εἶναι ταὐτότης, ἀφοῦ ἐπαληθεύεται μὲ κάθε τιμὴ τοῦ $x \in \Pi$.

Ἀσκήσεις

15. Ποίου βαθμοῦ εἶναι τὰ κάτωθι πολυώνυμα :

α) $-6x^3-5x^2+\frac{3}{4}x-\frac{3}{4}x^2-x-1$, β) $-12\alpha x^8+3\alpha x^6-3\alpha x-1$,

γ) $18x^6-3$, δ) $0x^3+0x^2+x+1$, ε) $0x^5+0x^2+0x+1$, στ) $0x^{10}+0$.

16. Εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ κάτωθι πολυώνυμα εὕρετε τὸ ἀνηγμένον πολυώνυμον καὶ διατάξετε αὐτὸ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς **x**.

α) $13x^6-3x^5-2x^2+x^7-5x^4-10x^5-3x^2+6x-2-x^3-x$.

β) $12\alpha x^2-13\alpha x^3+8\alpha x^2-4\alpha x-9\alpha x^2-7\alpha x-6\alpha x-8\alpha$,

γ) $\alpha\sqrt{3}x^6-3\alpha\sqrt{3}x^7+7\alpha\sqrt{3}x^3-12\alpha\sqrt{3}x^2-12\alpha\sqrt{3}x^5-11\alpha\sqrt{3}x^6-$
$-\alpha\sqrt{3}x^4-2$.

δ) $\frac{\alpha^2\sqrt{5}}{3}x+\frac{2\alpha^2\sqrt{5}}{4}x^2+\frac{2\alpha^2\sqrt{5}}{5}x+\frac{3\alpha^2\sqrt{5}}{8}x^3-\frac{6\alpha^2\sqrt{5}}{5}x^4-\frac{9\alpha^2\sqrt{5}}{4}x^3-\frac{\alpha^2\sqrt{5}}{3}x^3.$

17. Εὕρετε εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ κάτωθι πολυώνυμα τὸ ἀνηγμένον πολυώνυμον καὶ διατάξετε αὐτὸ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς y.

α) $0{,}5y^3-4{,}6y^2+2{,}5y-12{,}7y^3+2{,}5y-9{,}4y^2-10{,}8y-7{,}5-5y^3.$

β) $4{,}2.10^3y^5-9{,}5.10^{-2}y+7{,}5y^4-2{,}5.10^2y^5-4{,}5.10^{-2}y+7{,}2.10^2y^3-8{,}2.$

γ) $\sqrt{2}\,y^3-4\sqrt{2}\,y^2+8\sqrt{2}\,y-9\sqrt{2}-7\sqrt{2}\,y+6\sqrt{2}\,y^3-10\sqrt{2}\,y^4-\sqrt{2}.$

2.2. Πράξεις μὲ πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς.

α) Πρόσθεσις πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς.

Εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν πολυωνύμων καθὼς καὶ εἰς τὰς ἄλλας τρεῖς πράξεις ἰσχύουν αἱ γνωσταὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων διὰ τοὺς ἰδίους λόγους ποὺ ἐξεθέσαμεν εἰς τὴν παράγραφον 1.2.

Ἔστω, ὅτι δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$\varphi(x)=-6x^3+7x^2-2x+1$$

$$\sigma(x)=8x^3-12x^2+7x+8$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμά των.

Ἔχομεν

$$\varphi(x)+\sigma(x)=(-6x^3+7x^2-2x+1)+(8x^3-12x^2+7x-8)=$$

$$=-6x^3+7x^2-2x+1+8x^3-12x^2+7x-8=$$

$$-6x^3+8x^3+7x^2-12x^2-2x+7x+1-8=(-6+8)x^3+(7-12)x^2+$$

$$+(-2+7)x+(1-8)=2x^3-5x^2+5x-7.$$

Ὁμοίως, ἂς προσθέσωμεν καὶ τὰ ἀκόλουθα πολυώνυμα :

$$\Pi_1(x)=3\alpha x^6-6\alpha\beta x^2+7\alpha^2x^5-8\alpha\beta^2x^3-7x-6$$

$$\Pi_2(x)=-12\alpha\beta x^2-8\alpha x^6+6\alpha^2x^5+11x+12\alpha\beta^2x^3+10$$

$$\Pi_3(x)=\alpha\beta x^2-\alpha x^6-\alpha^2x^5+2\alpha\beta^2x^3+12x+2.$$

Χάριν εὐκολίας διατάσσομεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς ματαβλητῆς x καὶ ἀκολούθως τὰ προσθέτομεν. Ἤτοι,

$$\begin{array}{r}
\Pi_1(x)=3\alpha x^6+7\alpha^2x^5-8\alpha\beta^2x^3-6\alpha\beta x^2-7x-6\\
\Pi_2(x)=-8\alpha x^6+6\alpha^2x^5+12\alpha\beta^2x^3-12\alpha\beta x^2+11x+10\\
\Pi_3(x)=-\alpha x^6-\alpha^2x^5+2\alpha\beta^2x^3+\alpha\beta x^2+12x+2\\
\hline
\Pi_1(x)+\Pi_2(x)+\Pi_3(x)=-6\alpha x^6+12\alpha^2x^5+6\alpha\beta^2x^3-17\alpha\beta x^2+16x+6
\end{array}$$

β) Ἀφαίρεσις.

Καλοῦμεν ***μηδενικὸν πολυώνυμον***, τὸ πολυώνυμον, τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων του εἶναι μηδέν.

Π.χ. τὸ

$$0x^4+0x^3+0x^2+0x+0$$

εἶναι ἕνα μηδενικὸν πολυώνυμον.

Δύο πολυώνυμα $\varphi(x)$ καὶ $\sigma(x)$ λέγονται ἀντίθετα, ἂν τὸ ἄθροισμά των $\varphi(x)+\sigma(x)$ εἶναι μηδενικὸν πολυώνυμον.

Π.χ.

$$\begin{array}{r} \varphi(x)=6x^3-5x^2+7x-2 \\ \sigma(x)=-6x^3+5x^2-7x+2 \\ \hline \varphi(x)+\sigma(x)=0x^3+0x^2+0x+0 \end{array}$$

Σημείωσις. Τὸ $\sigma(x)$ δύναται νὰ συμβολισθῇ καὶ μὲ τὸ $-\varphi(x)$.

Καλοῦμεν ἀφαίρεσιν ἑνὸς πολυωνύμου $\varphi(x)$ ἀπὸ ἕνα ἄλλο $\rho(x)$, τὴν πρᾶξιν μὲ τὴν ὁποίαν προσθέτομεν εἰς τὸ $\rho(x)$ τὸ ἀντίθετον τοῦ $\varphi(x)$.

Π.χ. ἂν $\rho(x)=7x^3-6x^2+17x-12$

καὶ $\varphi(x)=-4x^3+2x^2-6x+10$ ἔχομεν:

$$\rho(x)-\varphi(x)=\rho(x)+[-\varphi(x)]=(7x^3-6x^2+17x-12)+(4x^3-2x^2+6x-10)=$$
$$=11x^3-8x^2+23x-22.$$

Τὸ πολυώνυμον $\rho(x)-\varphi(x)=11x^3-8x^2+23x-22$ λέγεται καὶ ***διαφορὰ*** τοῦ $\varphi(x)$ ἀπὸ τὸ $\rho(x)$.

Προφανῶς, ἂν εἰς τὸ ὑπόλοιπον $\rho(x)-\varphi(x)$ προσθέσωμεν τὸ ἀφαιρετέον πολυώνυμον εὑρίσκομεν τὸ μειωτέον πολυώνυμον.

Πράγματι,

$$(11x^3-8x^2+23x-22)+(-4x^3+2x^2-6x+10)=$$
$$=(11-4)x^3+(-8+2)x^2+(23-6)x+(-22+10)=$$
$$=7x^3-6x^2+17x-12$$

Ἀσκήσεις

18. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$\varphi_1(x)=-\frac{3}{4}x^2+2x-6$

$\varphi_2(x)=\frac{5}{3}x^3-x^2+6x-2$

$\varphi_3(x)=x^2-x-1$

καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τά,

α) $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)$, β) $[\varphi_1(x)-\varphi_2(x)]-\varphi_3(x)$

γ) $\varphi_1(x)-[\varphi_2(x)-\varphi_3(x)]$, δ) $\varphi_1(x)+\varphi_3(x)-\varphi_2(x)$.

19. Δίδονται τὰ πολυώνυμα

$$f(\omega)=-\alpha\omega^4+3\alpha\omega^3+4\alpha\omega^2-6\alpha\omega-2\alpha$$

$$g(\omega)=-\frac{2}{3}\alpha\omega^4+\frac{12}{5}\alpha\omega^3-6\alpha\omega^2+12\alpha\omega+\frac{3}{4}\alpha$$

$$z(\omega)=3\alpha\omega^4-\frac{6}{5}\alpha\omega^3-\frac{1}{2}\alpha\omega^2+6\alpha\omega-\frac{2}{3}\alpha$$

καὶ ζητεῖται νὰ ὑπαλογισθοῦν τά,

α) $f(\omega)+g(\omega)+z(\omega)$,

β) $f(\omega)-g(\omega)-z(\omega)$,

γ) $-f(\omega)+g(\omega)-z(\omega)$,

δ) $f(\omega)-[g(\omega)-z(\omega)]$.

20. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$\rho_1(y)=\frac{2\sqrt{3}}{5}y^3-\frac{3\sqrt{3}}{4}y^2-\frac{5\sqrt{3}}{3}y+\sqrt{3}.$$

$$\rho_2(y)=-\frac{3\sqrt{3}}{4}y^3+\frac{7\sqrt{3}}{3}y^2-\frac{\sqrt{3}}{5}y-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαφοραί,

α) $\rho_1(y)-\rho_2(y)$

β) $\rho_2(y)-\rho_1(y)$

γ) $30\rho_1(y)-20\rho_2(y)$.

γ) Πολλαπλασιασμὸς πολυωνύμων τῆς ἰδίας μεταβλητῆς.

Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα τῆς ἰδίας μεταβλητῆς ἐφαρμόζομεν τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσιν καὶ πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ ἑνὸς μὲ κάθε ὅρον τοῦ ἄλλου καὶ ἀκολούθως προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα :

Π.χ. 1) $\varphi(x)=3x^2-6x$

$\sigma(x)=2x-3$

$$\varphi(x)\cdot 6(x)=(3x^2-6x)\cdot(2x-3)=3x^2\cdot 2x-6x\cdot 2x+3x^2\cdot(-3)-$$
$$-6x\cdot(-3)=6x^3-12x^2-9x^2+18x=6x^3-21x^2+18x.$$

Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ διαταχθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\begin{array}{r} \varphi(x)=3x^2-6x \\ \sigma(x)=2x-3 \\ \hline 6x^3-12x^2 \\ -9x^2+18x \\ \hline \varphi(x)\cdot\sigma(x)=6x^3-21x^2+18x \end{array}$$

Ὁμοίως, ἂς πολλαπλασιάσωμεν τὰ πολυώνυμα :

$$
\begin{array}{rl}
f(x)= & -\dfrac{3}{4}x^3-6x^2-7x+2 \\
g(x)= & 4x-2 \\
\hline
 & -3x^4-24x^3-28x^2+8x \\
 & \qquad \dfrac{3}{2}x^3+12x^2+14x-4 \\
\hline
f(x)\,.\,g(x)= & -3x^4-22\dfrac{1}{2}x^3-16x^2+22x-4\,.
\end{array}
$$

Ἔστωσαν ἐπίσης τὰ πολυώνυμα :

$$
\begin{array}{rl}
\Pi_1(x)= & \dfrac{\sqrt{3}}{2}x^3+\sqrt{3}\,x^2-2\sqrt{3}\,x-\sqrt{3} \\
\Pi_2(x)= & \sqrt{3}\,x-2\sqrt{3} \\
\hline
 & \dfrac{3}{2}x^4+3x^3-6x^2-3x \\
 & \qquad -3x^3-6x^2+12x+6 \\
\hline
\Pi_1(x)\,.\,\Pi_2(x)= & \dfrac{3}{2}x^4+0x^3-12x^2+9x+6= \\
= & \dfrac{3}{2}x^4-12x^2+9x+6.
\end{array}
$$

Εἰς ἕνα πολλαπλασιασμὸν δύο ἢ περισσοτέρων πολυωνύμων δυνατὸν αὐτὰ νὰ εἶναι ἴσα, ὁπότε εὑρίσκομεν τύπους, μὲ τοὺς ὁποίους διευκολυνόμεθα εἰς τὴν ταχυτέραν εὕρεσιν τοῦ ἀποτελέσματος. Π.χ. $(2x+3)\,.\,(2x+3)=(2x+3)^2$

ἀλλὰ

$$
\begin{array}{l}
2x+3 \\
2x+3 \\
\hline
4x^2+6x \\
\qquad +6x+9 \\
\hline
4x^2+12x+9=(2x)^2+2\,.\,3\,.\,(2x)+3^2
\end{array}
$$

ἄρα $\quad (2x+3)^2=(2x)^2+2\,.\,(2x)\,.\,3+3^2=4x^2+12x+9$

καὶ γενικώτερον :

$$(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

ὁμοίως $\quad (\alpha x-\beta)^2=\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2.$

Τὸ πολυώνυμον $\alpha x+\beta$ λέγεται καὶ διώνυμον, ἐπειδὴ ἔχει δύο ὅρους.

Δυνάμεθα ἐκ τῶν ἀνωτέρω νὰ διατυπώσωμεν τὴν πρότασιν :

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ τετράγωνον ἑνὸς διωνύμου, εὑρίσκομεν τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου, τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν ὅρων του καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου ὅρου καὶ προσθέτομεν αὐτὰ ἀλγεβρικῶς.

Εἰς παρομοίους τύπους καταλήγομεν, ὅταν ζητοῦμεν τὴν 3ην, 4ην κ.λ.π. δὺναμιν ἑνὸς διωνύμου.

Π.χ. $(\alpha x+\beta)^3=(\alpha x+\beta)^2.(\alpha x+\beta)=(\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2).(\alpha x+\beta)$

ἀλλὰ

$$\begin{array}{r}
\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2 \\
\alpha x+\beta \\
\hline
\alpha^3x^3+2\alpha^2\beta x^2+\alpha\beta^2x \qquad\qquad \\
\alpha^2\beta x^2+2\alpha\beta^2x+\beta^3 \\
\hline
\alpha^3x^3+3\alpha^2\beta x^2+3\alpha\beta^2x+\beta^3
\end{array}$$

ἄρα $(\alpha x+\beta)^3=\alpha^3x^3+3\alpha^2\beta x^2+3\alpha\beta x^2+\beta^3$

ὁμοίως $(\alpha x-\beta)^3=\alpha^3x^3-3\alpha^2\beta x^2+3\alpha\beta^2x-\beta^3$

Ἤτοι: **Ὁ κύβος ἑνὸς διωνύμου ἰσοῦται μὲ τὸν κύβον τοῦ πρώτου ὅρου σὺν τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου μὲ τὸν δεύτερον** (λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν καὶ τὸ σημεῖον), **σὺν τὸ τριπλάσιον γινόμενον τοῦ πρώτου μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου σύν τὸν κύβον τοῦ δευτέρου.**

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν:

$(\alpha x+\beta)^4=\alpha^4x^4+4\alpha^3\beta x^3+6\alpha^2\beta^2x^2+4\alpha\beta^3x+\beta^4$

$(\alpha x-\beta)^4=\alpha^4x^4-4\alpha^3\beta x^3+6\alpha^2\beta^2x^2-4\alpha\beta^3x+\beta^4$

$(\alpha x+\beta)^5=\alpha^5x^5+5\alpha^4\beta x^4+10\alpha^3\beta^2x^3+10\alpha^2\beta^3x^2+5\alpha\beta^4x+\beta^5$

$(\alpha x-\beta)^5-\alpha^5x^5=5\alpha^4\beta x^4+10\alpha^3\beta^2x^3-10\alpha^2\beta^3x^2+5\alpha\beta^4x-\beta^5$.

Οἱ ἀνωτέρω τύποι γίνονται ἁπλούστεροι ἂν $x=1$ $(\alpha,\ \beta\neq 0)$

ἤτοι

$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$

$(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$

$(\alpha\pm\beta)^4=\alpha^4\pm4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2\pm4\alpha\beta^3+\beta^4$

$(\alpha\pm\beta)^5=\alpha^5\pm5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2\pm10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4\pm\beta^5$

κ.ο.κ.

Ὁμοίως ἂν τὰ διώνυμα εἶναι ὡς τὰ κάτωθι, εὑρίσκομεν:

$$(\alpha x+\beta).(\alpha x-\beta)=\alpha^2x^2-\beta^2$$

καὶ ἂν $x=1$ $\quad(\alpha+\beta).(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$.

Παρατήρησις. Ἂν τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο πολυώνυμα ἔχῃ ἕνα μόνον ὅρον, εἶναι δηλ. μονώνυμον, πολλαπλασιάζομεν κάθε ὅρον τοῦ πολυωνύμου μὲ τὸ μονώνυμον καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα μονώνυμα.

Π.χ. $\varphi_1(x)=(3x^2-6x+3)$

καὶ $\varphi_2(x)=-2x$

$$\varphi_1(x).\varphi_2(x)=(3x^2-6x+3).(-2x)=-6x^3+12x^2-6x$$

Ἀσκήσεις

21. Δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$\varphi_1(x)=x^3-5x^2+x-2$

$\varphi_2(x)=x^2-3x+1$

$\varphi_3(x)=x-2$

$\varphi_4(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{3}{4}x+1$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα μὲ τὴν συνεπτυγμένην των μορφὴν διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

α) $\varphi_1(x).\varphi_2(x)$, β) $\varphi_1(x).\varphi_3(x)$, γ) $\varphi_1(x).\varphi_4(x)$, δ) $\varphi_2(x).\varphi_3(x)$,

ε) $\varphi_2(x).\varphi_3(x).\varphi_4(x)$.

22. Δίδονται τὰ πολαώνυμα.

$f_1(\omega)=\omega^2-\omega+1$

$f_2(\omega)=3\omega-4$

$f_3(\omega)=2\omega^3-\omega^2-\omega+1$.

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων μὲ τὴν συνεπτυγμένην των μορφήν.

α) $f_1(\omega).f_2(\omega)-f_3(\omega)$

β) $[f_2(\omega)]^2-3f_1(\omega)$

γ) $[f_2(\omega)]^3-2f_3(\omega)$

δ) $[f_1(\omega)]^2+[f_2(\omega)]^4$

ε) $f_1(\omega).f_3(\omega)-[f_2(\omega)]^5$.

23. Δίδονται τὰ πολυώνυμα

$g_1(y)=3y^2-y+2$

$g_2(y)=\frac{2}{3}y$

$g_3(y)=-3y^2$ καὶ $g_4(y)=y^4-3y^3-6y^2+2$

νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων.

α) $g_1(y).g_2(y)+g_1(y)g_3(y)-g_4(y)$

β) $g_1(y).g_2(y).g_3(y)-g_4(y).g_2(y)$

γ) $g_4(y)-g_1(y).g_3(y)$

δ) $[g_1(y)]^2+[g_2(y)]^4+[g_3(y)]^2+g_4(y)$.

24 Εὕρετε τύπους διὰ τά,

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^2$

β) $(\alpha+\beta+\gamma)^3$

γ) $(\alpha+\beta)^6$

25. Ἐφαρμόσατε τοὺς τύπους τῆς ἀσκήσεως 24 διὰ νὰ εὕρετε ἀπ' εὐθείας τὰ ἐξαγόμενα τῶν

α) $(2x^2-3x+1)^2$

β) $(x^2+2x-1)^3$

γ) $(x+3)^6$

26. Εὕρετε τὰ ἀποτελέσματα τῶν κάτωθι πράξεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται :

α) $(3x+2)(3x-2)$

β) $(2\alpha x-\beta)(2\alpha x+\beta)$

γ) $(3\alpha^2x+\beta^2)(3\alpha^2x-\beta^2)$

δ) $(\sqrt{2}x-\sqrt{3})(\sqrt{2}x+\sqrt{3})$.

ε) $(\alpha\sqrt{5}x+9)(\alpha\sqrt{5}x-9)$.

στ) $(\alpha^2\sqrt{3}\omega^2+10)(\alpha^2\sqrt{3}\omega^2-10)$

ζ) $(\omega^3+2)(\omega^3-2)$

η) $(\omega^6-1)(\omega^6+1)$

δ) Διαίρεσις πολυωνύμου μὲ πολυώνυμον.

Δίδονται δύο πολυώνυμα (ἀκέραια) $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)\neq 0$ τῆς μεταβλητῆς x καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν δύο ἄλλα ἀκέραια πολυώνυμα—ἂν ὑπάρχουν—$\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$, ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης,

$$\Delta(x)\equiv\delta(x)\cdot\Pi(x)+\upsilon(x), \quad (1)$$

ὅπου τὸ $\upsilon(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ $\delta(x)$.

Ἡ πρᾶξις ποὺ ὁδηγεῖ εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν πολυωνύμων $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ καλεῖται διαίρεσις μὲ διαιρετέον πολυώνυμον τὸ $\Delta(x)$ καὶ διαιρέτην τὸ $\delta(x)$.

Τὸ $\Pi(x)$ ὀνομάζεται πηλίκον καὶ τὸ $\upsilon(x)$ ὑπόλοιπον τῶν $\Delta(x)$ καὶ $\delta(x)$.

Π.χ. $$\Delta(x)=2x^3-6x^2-4x+2$$
$$\delta(x)=x-3 \qquad (x\neq 3)$$

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἂν τὸ $\Pi(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, ἐπειδὴ θὰ ἰσχύῃ ἡ ταυτότης (1), πρέπει τὸ $\Pi(x)$ νὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ καὶ τὸ $\upsilon(x)$ μηδενικοῦ βαθμοῦ (δηλ. μία σταθερὰ) καὶ θὰ ἔχουν τὴν μορφὴν

$$\Pi(x)\equiv\alpha x^2+\beta x+\gamma \quad \text{καὶ} \quad \upsilon(x)=\upsilon=\text{σταθ.}$$

ἄρα ἔχομεν :

$$2x^3-6x^2-4x+2 \equiv (x-3)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+\upsilon$$

ἢ
$$2x^3-6x^2-4x+2 \equiv \alpha x^3+(\beta-3\alpha)x^2+(\gamma-3\beta)x+(-3\gamma+\upsilon)$$

καὶ ἂν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι δύο πολυώνυμα εἶναι ἴσα, ὅταν οἱ ὁμοβάθμιοι ὅροι των ἔχουν ἴσους συντελεστάς, προκύπτουν αἱ ἰσότητες:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta-3\alpha=-6\\ \gamma-3\beta=-4\\ -3\gamma+\upsilon=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta-3\cdot2=-6\\ \gamma-3\beta=-4\\ -3\gamma+\upsilon=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=0\\ \gamma-3\cdot0=-4\\ -3\gamma+\upsilon=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=0\\ \gamma=-4\\ -3\cdot(-4)+\upsilon=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l}\alpha=2\\ \beta=0\\ \gamma=-4\\ \upsilon=-10\end{array}$$

Ἄρα $\Pi(x)=2x^2+0.x-4=2x^2-4$ καὶ $\upsilon(x)=\upsilon=-10$. Ἡ πρᾶξις δύναται νὰ ἐκτελεσθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l} 2x^3-6x^2-4x+2 & x-3 \\ \cline{2-2} -2x^3+6x^2 \qquad\quad & 2x^2-4=\Pi(x) \\ \cline{1-1} 0-4x+2 & \\ +4x-12 & \\ \cline{1-1} \upsilon= \quad -10 & \end{array}$$

Ὁμοίως διὰ τὰ πολυώνυμα $\Delta(x)=7x^5-6x^4-2x^3+4x^2-x+1$
καὶ $\delta(x)=x^2-3x+5$

σκεπτόμενοι ὅπως προηγουμένως εὑρίσκομεν:

$$\Pi(x)=7x^3+15x^2+8x-47$$

καὶ $\upsilon(x)=-182x+236.$

Σημείωσις: Ἂν τὸ $\delta(x)$ εἶναι μονώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $\Delta(x)$, τότε τὸ $\Pi(x)$ εὑρίσκεται διὰ διαιρέσεως ὅλων τῶν ὅρων τοῦ $\Delta(x)$ ποὺ ἔχουν βαθμὸν μεγαλύτερον ἢ ἴσον μὲ τὸ $\delta(x)$, τὸ δὲ $\upsilon(x)$ εἶναι οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ $\Delta(x)$.

Ἤτοι: ἂν $\Delta(x)=18x^3-6x^2-12x+20$
καὶ $\delta(x)=2x$

τότε $\Pi(x)=9x^2-3x-6$ καὶ $\upsilon(x)=20$.

ὁμοίως ἂν $\Delta(x)=20x^7-14x^6+30x^5+21x^4-16x^3-8x^2-18x-40$
καὶ $\delta(x)=7x^3$

εἶναι:

$$\Pi(x)=\frac{20}{7}x^4-2x^3+\frac{30}{7}x^2+3x-\frac{16}{7}$$

καὶ $\quad \upsilon(x)=-8x^2-18x-40$

Παρατήρησις: Ἂν εἰς μίαν διαίρεσιν εἶναι $\upsilon(x)=0$ ἡ διαίρεσις λέγεται τελεία καὶ ἡ ταὐτότης τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων γράφεται:

$$\Delta(x)=\delta(x)\,.\,\Pi(x).$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ $\Delta(x)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο ἄλλων πολυωνύμων.

Π.χ. $\quad \Delta(x)=-6x^4+19x^3-15x^2+x+6$

$\quad\quad \delta(x)=-2x^2+3x-2$

εὑρίσκομεν $\Pi(x)=3x^2-5x-3$ καὶ $\upsilon(x)=0$

ἄρα $-6x^4+19x^3-15x^2+x+6=(-2x^2+3x-2)\,(3x^2-5x-3)$.

Ὁμοίως, ἂν $\Delta(x)=6x^3-22x^2+30x$

$\quad$ καὶ $\delta(x)=2x$

εὑρίσκομεν $\Pi(x)=3x^2-11x+15$ καὶ $\upsilon(x)=0$

ἑπομένως, $\quad 6x^3-22x^2+30x=2x\,.\,(3x^2-11x+15)$.

Ἀσκήσεις

27. Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

α) $12x^5+4x^4-32x^2-24x+16)\,:\,(3x^3-5x^2-1)$

β) $(x^3-8x^2+7x+1)\,:\,(x+3)$

γ) $(x^4-12x^3+10x^2-6x-8)\,:\,(x^2-x+1)$

δ) $(x^5-1)\,:\,(x+1)$

ε) $(64x^6+729)\,:\,(2x+3)$

στ) $\left(8x^5-4x^4-\frac{3}{2}x^3+12x^2+3x\right):\left(6x^2+\frac{3}{2}x\right)$.

28. Ἀναλύσετε εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ πολυώνυμα:

α) $25x^4+20x^2$, β) $36y^4-16y^2$, γ) $\omega^4-\omega^2$, δ) $100y^4-y^2$,

ε) $16\omega^3+32\omega^2-12\omega$, στ) $10y^4-40y^2-50y$.

29. Εὕρετε τὸ πηλίκον καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

α) $(25x^5-36x^4+12x^3+5x^2+7x-3)\,:\,5x^3$

β) $\left(-\frac{4}{3}x^6-\frac{3}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4-10x^3+6x^2+\frac{3}{7}x-20\right):-\frac{2}{5}x^4$

γ) $(0{,}7x^4+0{,}8x^3-9x^2-0{,}4x-6)\,:\,-0{,}2x^2$.

30. Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αἱ κάτωθι ταὐτότητες τῶν πολυωνύμων ἀντιστοιχοῦν εἰς διαιρέσεις μὲ $\delta(x)$ τὰ πολυώνυμα x^2+8, x^2-1, x^3-2 καὶ x^3-1 ἀντιστοίχως:

α) $3x^5+7x^3+4x^2-40x+8\equiv(4x^3-5x+1)\,(x^2+8)+(-2x^3+3x^2)$,

β) $5x^5+2x^4-3x^3-3x^2+x-3\equiv(5x^3+2x^2+x-1)\,(x^2-1)+(2x-4)$,

γ) $x^9+x^7-2x^6+2x^4+2x^3-2\equiv(x^6+x^4+1)\,(x^3-2)+(4x^4+x^3)$,

δ) $x^7-x^4+x^3+x^2+x+1\equiv(x^4+1)\,(x^3-1)+(x^2+x+2)$.

§ 3. Περὶ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν

α) Ἔστω, ὅτι δίδονται τὰ πολυώνυμα :

$$\varphi_1(x)=5x^2-3x-6$$
$$\varphi_2(x)=-3x^2+7x+8$$

καὶ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν τὰ $\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ καὶ $\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$. Ὡς ἐμάθομεν εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ ἀφαίρεσιν τῶν πολυωνύμων, εἶναι :

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)=(5x^2-3x-6)+(-3x^2+7x+8)=$$
$$5x^2-3x-6-3x^2+7x+8=2x^2+4x+2$$

ἤτοι, ἀπαλείφομεν τὰς παρενθέσεις χωρὶς νὰ μεταβάλωμεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τῶν πολυωνύμων.

Ἐξ ἄλλου

$$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=(5x^2-3x-6)-(-3x^2+7x+8)=$$
$$=(5x^2-3x-6)+(3x^2-7x-8)=5x^2-3x-6+3x^2-7-8=$$
$$=8x^2-10x-14.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ μειωτέον πολυώνυμον ἐντὸς τῆς παρενθέσεως εἶχε πρόσημον + (ἐννοεῖται) καὶ ἐπαλείφοντες τὴν παρένθεσιν, οὐδεμία ἀλλαγὴ εἰς τὰ πρόσημα τῶν ὅρων του ἐπῆλθεν, εἰς τὸ ἀφαιρετέον ὅμως πολυώνυμον, μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῆς παρενθέσεως, ἤλλαξαν τὰ πρόσημα ὅλων τῶν ὅρων του ἕνεκα τοῦ ἀρνητικοῦ προσήμου ποὺ ὑπῆρχε πρὸ αὐτῆς. Ἡ παρατήρησις εἶναι γενικωτέρα καὶ ἰσχύει δι᾽ ὁσασδήποτε παρενθέσεις καὶ ἀγκύλας.

Π.χ. $2-[3x^2-(6x+2)-5x^3+(16x^2-5)]=$
$2-3x^2+(6x+2)+5x^3-(16x^2-5)=$
$2-3x^2+6x+2+5x^3-16x^2+5=$
$9-19x^2+6x+5x^3=5x^3-19x^2+6x+9.$

Ὁμοίως,

$$-[(3x^2-4x)-(5x^2+7x+1)-2x]-[-2x-(3x^2-6x+2)]=$$
$$=-(3x^2-4x)+(5x^2+7x+1)+2x+2x+(3x^2-6x+2)$$
$$=-3x^2+4x+5x^2+7x+1+4x+3x^2-6x+2=5x^2+9x+3.$$

Ἐξ ἄλλου, ἂν θέσωμεν ἐντὸς παρενθέσεως ὡρισμένους ὅρους ἑνὸς πολυωνύμου μὲ πρόσημον πρὸ αὐτῆς θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἀφήνομεν τοὺς ὅρους ὅπως ἔχουν ἢ ἀλλάζομεν τὰ πρόσημα αὐτῶν.

Π.χ. $7x^3-6x^2+6x-3=7x^3-6x^2+(6x-3)$.
ἐνῶ $7x^3-6x^2+6x-3=7x^3-6x^2-(-6x+3)$.

Ἀσκήσεις

30. Εἰς τὰ κάτωθι πολυώνυμα νὰ ἀπαλειφθοῦν αἱ ἀγκύλαι καὶ αἱ παρενθέσεις, ἀκολούθως νὰ συμπτυχθοῦν καὶ νὰ διαταχθοῦν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς **x** ἢ ω.

α) $12-[4x^2+8-(7x^2-6x+3)+(x^3-2x+1)-8x+2]$,

β) $x^3-[-(2x^2-6x+1)-3x^3]-[(x^2+x+1)-(x^3+2x)-5x]]$

γ) $x^2-6x+2-[-[(x^2+8x-12)-x^3+x]+[\bar{x}^3-(x^2-1)]]$

δ) $-(\omega^2-\omega)-[-(3\omega^2-2\omega+1)+(5\omega+2)]-(7\omega^2-8\omega-6)$.

31. Νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεως οἱ τρεῖς τελευταῖοι ὅροι τῶν κάτωθι πολυωνύμων καὶ μὲ πρόσημον ἀρνητικὸν πρὸ αὐτῆς.

α) $18x^3-12x^2-6x+8$ β) $\omega^4+12\omega^3-18\omega^2-\omega+12$,

γ) $20y^5-22y^4+19y^3-7y^2-y$. δ) $\frac{3}{4}\omega^3-\frac{5}{7}\omega^2-\frac{4}{5}\omega-8$.

ε) $\alpha\omega^7-2\alpha\omega^5+7\alpha\omega^3-6\alpha\omega$.

§ 4. Μετασχηματισμὸς μερικῶν τριωνύμων 2ου βαθμοῦ εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

α') Τριώνυμα 2ου βαθμοῦ ποὺ συμπτύσσονται εἰς τέλεια τετράγωνα.

Ἐμάθομεν ὅτι :

$$(\alpha x+\beta)^2=\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$$

$$(\alpha x-\beta)^2=\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2$$

καὶ κατὰ τὴν συμμετρικὴν ἰδιότητα τῆς ἰσότητος ἔχομεν :

$$\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2=(\alpha x+\beta)^2=(\alpha x+\beta)\ (\alpha x+\beta),$$

$$\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2=(\alpha x-\beta)^2=(\alpha x-\beta)\ (\alpha x-\beta).$$

Ἄρα τὰ τριώνυμα $\alpha^2x^2+2\alpha\beta x+\beta^2$ καὶ $\alpha^2x^2-2\alpha\beta x+\beta^2$ ἀνελύθησαν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παραδείγματα : $4x^2-28x+49=(2x)^2-2(2x)\ .\ 7+7^2=(2x-7)^2$.

β) $$4x^2-\frac{12}{5}x+\frac{9}{25}=(2x)^2-2\ .\ 2x\ .\ \frac{3}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^2=\left(2x-\frac{3}{5}\right)^2,$$

γ) $$\frac{9\alpha^2x^2}{4}+\frac{12\alpha x}{5}+\frac{16}{25}=\left(\frac{3\alpha x}{2}\right)^2+2\ .\ \frac{3\alpha x}{2}\ .\ \frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2=$$

$$\left(\frac{3\alpha x}{2}+\frac{4}{5}\right)^2.$$

β) Δευτεροβάθμιον διώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha^2x^2-\beta^2$.

Εἴδομεν ἐπίσης ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότης,

$$(\alpha x+\beta)\ .\ (\alpha x-\beta)=\alpha^2x^2-\beta^2$$

τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^2x^2-\beta^2=(\alpha x+\beta)\ (\alpha x-\beta),$$

δηλαδὴ τὸ δευτεροβάθμιον διώνυμον $\alpha^2x^2-\beta^2$ ἀνελύθη εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

Παραδείγματα:

1ον $4x^2-36=(2x+6)\ (2x-6)$,

2ον $5x^2-12=(\sqrt{5}\,x+\sqrt{12})\ (\sqrt{5}\,x-\sqrt{12})=(\sqrt{5}\,x+2\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}\,x-2\sqrt{3})$,

3ον $x^2-4=(x+2)\ (x-2)$

4ον $\omega^2-\frac{3}{4}=\left(\omega+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\omega-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5ον $16y^2-\frac{1}{9}=\left(4y+\frac{1}{3}\right)\left(4y-\frac{1}{3}\right)$

6ον $(x+2)^2-16=[(x+2)+4]\ [(x+2)-4]=(x+6)\ (x-2)$

7ον $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{4}=\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\right]\left[\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right]=\left(x+\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}\right)$

8ον $(x+5)^2-3=[(x+5)+\sqrt{3}\,]\ [(x+5)-\sqrt{3}\,]=(x+5+\sqrt{3})\cdot(x+5-\sqrt{3})$.

γ) Δευτεροβάθμια τριώνυμα τῆς μορφῆς $x^2+kx+\lambda$.

Τὸ τριώνυμον $x^2+kx+\lambda=x^2+2\cdot\frac{k}{2}x+\frac{k^2}{4}-\frac{k^2}{4}+\lambda=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+\lambda=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2-4\lambda}{4}$

καὶ ἂν $k^2-4\lambda\geq 0$, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$\frac{k^2-4\lambda}{4}=\tau^2,\quad \text{ὁπότε}\ \tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}.$$

Ἐξ αὐτῶν ἕπεται:

$$x^2+kx+\lambda=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\tau^2$$

καὶ κατὰ τὴν παράγραφον 4,β, εὑρίσκομεν τελικῶς.

$$\boxed{x^2+kx+\lambda=\left[\left(x+\frac{k}{2}\right)+\tau\right]\cdot\left[\left(x+\frac{k}{2}\right)-\tau\right]}$$

Παρατήρησις: Ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει, ἐφ' ὅσον $k^2-4\lambda \geq 0$, ἄλλως, ἂν $k^2-4\lambda<0$, δὲν ἀναλύεται τὸ τριώνυμον $x^2+kx+\lambda$ εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων μέσα εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παραδείγματα:

1ον) x^2+3x-7, $\begin{matrix} k=3 \\ \lambda=-7 \end{matrix}$ $k^2-4\lambda=9+28=37>0$

$$\tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{3^3-4.(-7)}}{2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$$

ἄρα $x^2+3x-7=\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)+\frac{\sqrt{37}}{2}\right].\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)-\frac{\sqrt{37}}{2}\right]=$

$$=\left(x+\frac{3+\sqrt{37}}{2}\right).\left(x+\frac{3-\sqrt{37}}{2}\right).$$

2ον) $x^2-11x+1$ $\begin{matrix} k=-11 \\ \lambda=1 \end{matrix}$ $k^2-4\lambda=121-4=117>0$

$$\tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{(-1)^2-4.1}}{2}=\frac{\sqrt{121-4}}{2}=\frac{\sqrt{117}}{2}$$

ἄρα $x^2-11x+1=\left[\left(x+\frac{-11}{2}\right)+\frac{\sqrt{117}}{2}\right].\left[\left(x+\frac{-11}{2}\right)-\right.$

$$\left.-\frac{\sqrt{117}}{2}\right]=\left(x-\frac{11-\sqrt{117}}{2}\right).\left(x-\frac{11+\sqrt{117}}{2}\right).$$

3ον) $x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x-3$ $k=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\lambda=-3$

$$\tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-4.(-3)}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{25}{2}}}{2}=\frac{5}{2\sqrt{2}}$$

ἄρα $x^2-\frac{\sqrt{2}}{2}x-3=\left[\left(x+\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)+\frac{5}{2\sqrt{2}}\right].\left[\left(x+\frac{-\sqrt{2}}{4}\right)-\right.$

$$\left.-\frac{5}{2\sqrt{2}}\right]=\left(x+\frac{-\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{4}\right).\left(x+\frac{-\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{4}\right)=$$

$$=\left(x+\frac{4\sqrt{2}}{4}\right).\left(x+\frac{-6\sqrt{2}}{4}\right)=(x+\sqrt{2})\left(x-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$$

δ) Τριώνυμα 2ου βαθμοῦ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ $(\alpha\neq o)$.

Ὁ τρόπος ἀναλύσεως αὐτῶν εἰς γινόμενον ἠμπορεῖ νὰ ἀναχθῆ εἰς τὴν περίπτωσιν γ.

Πράγματι $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=\alpha(x^2+kx+\lambda)$

$$\text{ὅπου } k=\frac{\beta}{\alpha} \text{ καὶ } \lambda=\frac{\gamma}{\alpha}, \text{ ὁπότε}$$

$$\tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-4\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}}{2}=\frac{\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{4\gamma}{\alpha}}}{2}=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha},$$

ἐδῶ θὰ ἔχωμεν ἀνάλυσιν, ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma\geqq 0$.

Παραδείγματα: 1ον. Νὰ ἀναλυθῆ τὸ τριώνυμον

$$2x^2-8x-42$$

εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων:

Παρατηροῦμεν ὅτι $\beta^2-4\alpha\gamma=(-8)^2-4\cdot2(-42)=64+336=400>0$

$$\text{καὶ } k=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{8}{2}=-4,\ \lambda=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{42}{2}=-21$$

$$\text{καὶ } \tau=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{400}}{2\cdot2}=\frac{20}{4}=5$$

$$\text{ἄρα } 2x^2-8x-42=2(x^2-4x-21)=2\left[\left(x-\frac{4}{2}\right)+5\right]\left[\left(x-\frac{4}{2}\right)-5\right]$$

$$=2(x-2+5)\ (x-2-5)\ =\ 2(x+3)\ (x-7)\ =\ (2x+6)\ (x-7)$$

2ον. $5x^2-20x-22,5$

Ἔχομε: $\beta^2-4\alpha\gamma=(-20)^2-4\cdot5\,.\,(-22,5)=400+450=850>0$

$$k=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-20}{5}=-4,\ \lambda=\frac{\gamma}{\alpha}=-\frac{22,5}{5}=-4,5$$

$$\text{καὶ } \tau=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{850}}{2\cdot5}=\frac{\sqrt{850}}{10}$$

$$5x^2-20x-22,5=5(x^2-4x-4,5)=5\left[\left(x+\frac{-4}{2}\right)+\frac{\sqrt{850}}{10}\right]\left[\left(x+\frac{-4}{2}\right)-\frac{\sqrt{850}}{10}\right]=5\left(x-\frac{4}{2}+\frac{\sqrt{850}}{10}\right)\left(x-\frac{4}{2}-\frac{\sqrt{850}}{10}\right)=\left(5x\cdot10+\frac{\sqrt{850}}{2}\right)$$

$$\left(x-2-\frac{\sqrt{850}}{10}\right)$$

3ον. $4x^2+4\sqrt{7}\,x+7$

$$\beta^2-4\alpha\gamma=(4\sqrt{7})^2-4\cdot4\cdot7=112-112=0,\ k=\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{7}$$

$$\text{καὶ } \tau=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{0}{2\alpha}=0$$

Ἔχομεν:

$$4x^2+4\sqrt{7}\,x+7=4\left(x^2+\sqrt{7}x+\frac{7}{4}\right)=4\left[\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)+0\right]$$

$$\left[\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)-0\right]=4\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)=(2x+\sqrt{7})(2x+\sqrt{7})$$

$$=(2x+\sqrt{7})^2$$

Ἀσκήσεις

32. Ἐξετάσατε ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι δευτεροβαθμίων τριωνύμων ἀναλύονται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων μέσα εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

α) x^2-3x+8 β) $2x^2-7x+6$ γ) $3x^2+x-1$, δ) x^2+x+1

ε) $\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x+5$ στ) $7x^2-3x+20$ ζ) $6x^2-12x-15$ η) x^2+2x+1

θ) $9x^2-36x+36$ ί) $25x^2+10x+1$, ια) $5x^2-\sqrt{2}\,x-3$, ιβ) $\sqrt{2}\,x^2-\sqrt{5}\,x+2\sqrt{2}$

33. Ἀναλύσατε εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ τριώνυμα.

α) x^2+2x+1 β) $\alpha^2x^2+4\alpha\beta x+4\beta^2$ γ) $(x-1)^2-8(x-1)+16$

δ) $16x^2-24x+9$ ε) $(2x+3)^2+10(2x+3)+25$ στ) $\omega^2-18\omega+81$

ζ) $\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{15}x+\frac{1}{25}$, η) $4\alpha^2x^2-20\alpha x+25$ θ) $\mu^2x^2-2\mu\nu x+\nu^2$

ι) $9\beta^2\omega^2-3\beta\omega+\frac{1}{4}$, ια) $3x^2-10\sqrt{3}\,x+25$ ιβ) $5x^2+3\sqrt{5}\,x+\frac{9}{4}$.

34. Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τὰ διώνυμα.

α) $100x^2-25$ β) $625x^2-49$ γ) $64\alpha^2x^2-36$

δ) $225x^2-1$ ε) $8x^2-11$ στ) $10x^2-81$

ζ) $\alpha^2x^2-9\beta^2$ η) $16\alpha^4x^2-36\beta^4$ θ) $2\alpha^2x^2-3\beta^2$

35. Ἀναλύσατε τὰ κάνωθι δευτεροβάθμια, τριώνυμα, χρησιμοποιοῦντες τὰς μεθόδους τῶν περιπτώσεων γ′ καὶ δ′ τῆς παραγρ. 4.

α) x^2+7x-3, β) x^2-x-5, γ) $x^2-9x-12$

δ) $x^2+20x+80$, ε) $x^2+15x+40$ στ) $x^2-4x-10$

ζ) $2x^2-7x+3$ η) $\frac{2}{3}x^2-7x-1$ θ) $x^2+\frac{3}{4}x-2$

ι) $5x^2-x-6$ ια) $\frac{3}{4}x^2+12x-5$ ιβ) $\frac{49}{25}x^2+\frac{21}{5}x+\frac{9}{4}$

5. Πολυώνυμα δύο ἢ τριῶν μεταβλητῶν

5. 1. Μονώνυμα καὶ πολυώνυμα δύο ἢ τριῶν μεταβλητῶν.

Ὀνομάζομεν μονώνυμον δύο μεταβλητῶν x καὶ y μίαν συνάρτησιν τῆς μορφῆς

$$f(x,y)=\alpha x^{\nu}y^{\mu} \text{ ἢ } (f:(x,y)\xrightarrow{f}\alpha x^{\nu}y^{\mu}=z)$$

ὅπου α εἶναι ἕνας ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμός, καλούμενος συντελεστής, ν καὶ μ φυσικοὶ ἀριθμοί, αἱ δὲ μεταβληταὶ x καὶ y ἔχουν πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι:

$$(x\in\Pi \text{ καὶ } y\in\Pi)\Longleftrightarrow(x,y)\in\Pi\times\Pi=\Pi^2.$$

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν x καὶ y δυνατὸν νὰ περιορίζεται ἀναλόγως μὲ τὸ τί ἐκφράζουν αἱ μεταβληταὶ αὐταί.

Π.χ. $(x\in\Pi^+ \text{ καὶ } y\in\Pi^+)\Longleftrightarrow(x,y)\in\Pi^+\times\Pi^+$

Ὀνομάζομεν **βαθμὸν** ἑνὸς μονωνύμου δύο μεταβλητῶν x καὶ y ὡς πρὸς τὰς δύο αὐτὰς μεταβλητάς, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν μεταβλητῶν εἰς τὸ μονώνυμον.

Π.χ. $\frac{3}{4}x^6y^2$ εἶναι βαθμοῦ 8ου ὡς πρὸς x καὶ y

$\frac{-9\alpha^2}{5}xy^3$ » » 4ου » » » » »

Ἕνα μονώνυμον δύο μεταβλητῶν ἔχει βαθμὸν καὶ ὡς πρὸς μίαν μόνον μεταβλητήν.

Τὸ $5x^3y$ εἶναι 3ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ 1ου ὡς πρὸς y.

Δύο μονώνυμα δύο μεταβλητῶν x καὶ y θὰ λέγωμεν, ὅτι **εἶναι ὅμοια,** ἂν ἔχουν τοὺς ἰδίους ἐκθέτας αἱ μεταβληταὶ αὐτῶν.

Π.χ. $12x^6y^2$ καὶ $-\frac{3}{4}x^6y^2$ εἶναι ὅμοια.

τὰ $-3x^3y^5$ καὶ $8x^5y^3$ δὲν εἶναι ὅμοια.

Ἄθροισμα δύο ὁμοίων μονονύμων $\kappa x^{\nu}y^{\mu}$ καὶ $\lambda x^{\nu}y^{\mu}$ εἶναι μονώνυμον ὅμοιον μὲ αὐτά, ποὺ ἔχει συντελεστὴν τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων.

Ἤτοι, $\kappa x^{\nu}y^{\mu}+\lambda x^{\nu}y^{\mu}=(\kappa+\lambda)x^{\nu}y^{\mu}$.

Π.χ. $-\frac{3}{4}x^3y^2+\frac{7}{5}x^3y^2=\left(-\frac{3}{4}+\frac{7}{5}\right)x^3y^2=\frac{13}{20}x^3y^2.$

Φυσικὰ τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ ἄθροισμα περισσοτέρων τῶν δύο ὁμοίων μονωνύμων τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

$$-6x^3y^2+12x^3y^2-14x^3y^2=(-6+12-14)x^3y^2=-8x^3y^2,$$
$$-7x^5y^4+\;\;7x^5y^4=(-7+7)x^5y^4=0x^5y^4=0.$$

Τὰ δύο αὐτὰ τελευταῖα ὅμοια μονώνυμα εἶναι ἀντίθετα, τὸ δὲ ἄθροισμά των ἀποτελεῖ τὸ **μηδενικὸν** μονώνυμον τῶν δύο μεταβλητῶν x καὶ y.

5. 2. Ὀνομάζομεν πολυώνυμον δύο μεταβλητῶν ἕνα ἄθροισμα μονωνύμων ἐκ τῶν μεταβλητῶν αὐτῶν.

Π.χ. $13x^5y-12x^3y^2+7xy-2$

εἶναι ἕνα πολυώνυμον τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Δυνατὸν εἰς ἕτα πολυώνυμον Π(x,y), νὰ ὑπάρχουν μερικοὶ ὅροι αὐτοῦ, οἱ ὁποῖοι νὰ εἶναι ὅμοιοι, τότε συνηθίζομεν νὰ κάνωμεν **ἀναγωγὴν** τῶν ὁμοίων αὐτῶν ὅρων καὶ νὰ εὑρίσκωμεν τὸ συνεπτυγμένον ἢ ἀνηγμένον πολυώνυμον.

Π.χ. $-2x^3y+6x^2y^2-15x^3y+12xy^2=\Pi(x,y)$, ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν τὸ συνεπτυγμένον:

$$\Pi(x,y)=-17x^3y+6x^2y^2+12xy^2$$

Βαθμὸς ἑνὸς πολυωνύμου τῶν μεταβλητῶν x καὶ y λέγεται ὁ βαθμὸς τοῦ μεγιστοβαθμίου ὅρου του.

Π.χ. $\Phi(x,y)=6x^4y-5x^3y^2-9x^3y$ εἶναι 5ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

$P(x,y)=9x^7-7xy^5+4xy-6$ εἶναι 7ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

Προφανῶς, τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα περὶ μονωνύμων καὶ πολυωνύμων δύο μεταβλητῶν ἐπεκτείνονται καὶ εἰς μονώνυμα καὶ πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν.

Π.χ. τὸ $6x^2yz$ εἶναι μονώνυμον 4ου βαθμοῦ ὡς πρὸς x,y καὶ z, τὸ $f(x,y,z)=16x^3y^2z-12x^2+16z^3+17xyz$ εἶναι ἕνα πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν x,y καὶ z, βαθμοῦ 6ου ὡς πρὸς x,y καὶ z.

5. 3. Πρωτοβάθμια πολυώνυμα δύο ἢ τριῶν μεταβλητῶν.

Κάθε πολυώνυμον τῆς μορφῆς:

$$\varphi(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$$

ὅπου α,β,γ σταθεροὶ ἀριθμοὶ μὲ $|\alpha|+|\beta|>0$ (δηλ. νὰ μὴ εἶναι συγχρόνως τὰ α καὶ β μηδέν), λέγεται πρωτόβαθμιον πολυώνυμον τῶν μεταβλητῶν x καὶ y.

Ὁμοίως ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν x, y, z εἶναι γενικῶς τῆς μορφῆς.

$$\sigma(x,y,z)=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$$

ὅπου α,β,γ,δ σταθεραὶ ποσότητες μὲ $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0$ (δηλ. μία τοὐλάχιστον τῶν σταθερῶν α,β,γ νὰ εἶναι $\neq 0$.

Ἀσκήσεις

36) Δίδονται τὰ κάτωθι πολυώνυμα:

α) $\varphi(x,y) = 3x^3y - \frac{7}{3}x^2y^3 + \frac{2}{5}x^2y - 4x^2y^3 - 8x^2y^2 + \frac{4}{5}x^2y^2 - xy + 2,$

β) $\sigma(x,y) = 9x^3y + 12x^2y^2 - 9{,}5y^3 - \frac{3}{5}x^3y - 7x^2y^2 - 7,$

γ) $f(x,y) = x^5 - \frac{3}{4}x^4y + \frac{1}{4}x^3y^2 - \frac{2}{5}x^2y^3 - 5xy^4 - 7y^5 + \frac{8}{5}x^4y - \frac{5}{5}x^3y^2,$

δ) $g(x,y) = 5x^3 + 8x^2y - 12xy^2 + \frac{2}{3}y^5 - 10x^2y + 5xy^2 - x^3,$

ε) $p(x,y,z) = x^3y^2z - 5x^2y^3z^2 + 14xy^4z^3 - 9x^2y^3z^2 - 6x^3y^2z.$

Εὕρετε τὰς συνεπτυγμένας αὐτῶν μορφὰς καθὼς καὶ τὰς ἀριθμητικὰς τιμὰς ὡς κάτωθι:

α) $\varphi(1,2)$, β) $g(2,1)$, γ) $\sigma(-2,1)$ δ) $p(-1,-2,1)$, ε) $f(-1,0)$.

6. Πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

6. 1. Κάθε πρωτοβάθμιον πολυώνυμον μὲ δύο μεταβλητὰς x,y ἐξισούμενον μὲ τὸ μηδέν, λέγεται πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

Ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι

(1) $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ ($|\alpha| + |\beta| > 0$ ($x \in \Pi$ καὶ $y \in \Pi$).

Ἡ ἐξίσωσις αὐτη ἀληθεύει δι' ἀπειρίαν ζευγῶν $(x,y) \in \Pi^2$, ὄχι ὅμως καὶ δι' ὅλα τὰ ζεύγη $(x,y) \in \Pi^2$.

Καλοῦμεν μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς ζεύγους $(x,y) \in \Pi \times \Pi$ ποὺ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν (1).

Π.χ. $$3x - 6y - 2 = 0,$$

μία λύσις αὐτῆς, εἶναι τὸ ζεῦγος $(x,y) = (1, \frac{1}{6})$, διότι ἂν θέσωμεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν ὅσπου $x = 1$ καὶ $y = \frac{1}{6}$ ἀληθεύει.

Πράγματι, $3x - 6y - 2 = 3 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{1}{6} - 2 = 3 - 1 - 2 = 3 - 3 = 0,$

ἐνῶ τὸ ζεῦγος (5,4) δὲν ἀποτελεῖ λύσιν, διότι

$$3x - 6y - 2 = 3\ 5 - 6\ 4 - 2 = 15 - 26 = -11 \neq 0$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ σύνολον τῶν ζευγῶν ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Γράφομεν τὰς ἰσοδυναμίας

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

$$\iff \quad \beta y=-\alpha x-\gamma \qquad (\beta\neq 0)$$

$$\iff \quad y=-\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\gamma}{\beta}$$

Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ x μίαν **ὁποιανδήποτε** τιμὴν x_0 καὶ εἰς τὸ y τὴν ἀντίστοιχον $y_0=-\frac{\alpha}{\beta}x_0-\frac{\gamma}{\beta}$ τὸ ζεῦγος (x_0, y_0), θὰ ἀποτελῇ μίαν λύσιν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἐνῶ ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ y τὴν τιμὴν $y_1\neq y_0$ τὸ ζεῦγος (x_0, y_1) δὲν ἀποτελεῖ λύσιν.

Κατὰ συνέπειαν τὸ σύνολον Α τῶν λύσεων τῆς δοθείσης θὰ παριστάνεται ὡς ἑξῆς:

$$A=\{(x,y)\mid x\in\Pi \text{ καὶ } y\in\Pi,\ \alpha x+\beta x+\gamma=0\}$$

$$\text{ἢ} \quad A=\left\{(x,y)\mid x\in\Pi,\ y=-\frac{\alpha}{\beta}x-\frac{\gamma}{\beta}\right\}$$

Ἐὰν $\beta=0$ ἡ (1) γράφεται

$$\alpha x+0.y+\gamma=0$$

$$\iff \quad \alpha x+\gamma=0 \qquad \left(\begin{array}{l}\text{κατ' ἀνάγκην } \alpha\neq 0 \text{ ἀφοῦ}\\ \text{ὑπεθέσαμεν } |\alpha|+|\beta|>0\end{array}\right)$$

$$\iff \quad x=-\frac{\gamma}{\alpha},$$

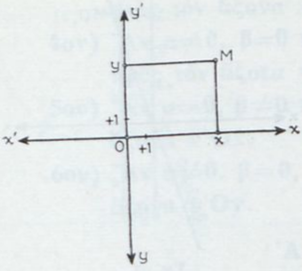
ἄρα τὸ σύνολον Α τῶν λύσεων τῆς $\alpha x+0.y+\gamma=0$ θὰ εἶναι:

$$A=\{(x, y)\mid x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ \alpha x+0y+\gamma=0\} \quad \text{ἢ}$$

$$A=\{(x, y)\mid x=-\frac{\gamma}{\alpha},\ y\in\Pi\}$$

6. 2. Γραφικὴ παράστασις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ (1).

Ἐὰν ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου P λάβωμεν ἕνα σημεῖον O ὡς ἀρχὴν δύο ὀρθογωνίων ἀξόνων x΄Ox καὶ y΄Oy, καὶ ἐπ' αὐτῶν ὁρίσωμεν τὰ μοναδιαῖα διαστήματα, τότε λέγομεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον P ἔχει διαμορφωθῆ ἔτσι ὥστε, ἂν θεωρήσωμεν τυχὸν σημεῖον M τοῦ



Σχ. 1

ἐπιπέδου δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν εἰς αὐτὸ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος (x, y) ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(x, y) \in \Pi \times \Pi$ δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἕνα καὶ **μόνον** ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου P.

Κατὰ συνέπειαν μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ συνόλου Σ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου P, ὑπάρχει **ἀμφιμονοσήμαντος** ἀντιστοιχία (ἀπεικόνισις) f.

Ἤτοι $\Pi \times \Pi \equiv \Pi^2 = \{(x, y) \mid x \in \Pi,\ y \in \Pi\}$

καὶ $\Sigma = \{x \mid x \text{ σημεῖον M τοῦ P}\}$

$$f : \ \Pi^2 \xrightarrow{f} \Sigma.$$

Ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1), θὰ παρίστανται γεωμετρικῶς ἐπὶ τοῦ διαμορφουμένου ἐπιπέδου P καὶ ἡ παράστασις των αὐτὴ θὰ εἶναι μία εὐθεῖα γραμμή.

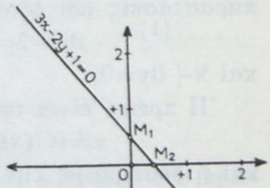
Παραδείγματα: 1ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως

$$3x + 2y - 1 = 0.$$

Ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας,

$$3x + 2y - 1 = 0 \iff 2y = -3x + 1$$

$$\iff y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}.$$



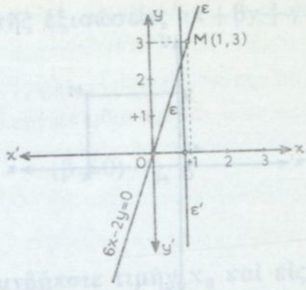
Σχ. 2

Διὰ $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, τὸ ζεῦγος $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον M_1 (σχ. 2), ὁμοίως διὰ $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$ καὶ τὸ ζεῦγος $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ M_2. Ἡ ἐξίσωσις λοιπὸν $3x - 2y - 1 = 0$ ἔχει γεωμετρικὴν παράστασιν τὴν εὐθεῖαν ε.

2ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ἐξισώσεως

$6x-2y=0.$

Ἐργαζόμενοι, ὅπως καὶ εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα, εὑρίσκομεν δύο σημεῖα τῆς ζητουμένης εὐθείας τὰ Ο (0,0) καὶ Μ (1,3) καὶ ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ ε (σχ. 3).



Σχ. 3

3ον) Νὰ εὑρεθῇ ἡ εὐθεῖα ποὺ παριστάνει ἡ ἐξίσωσις $8x-7=0$.

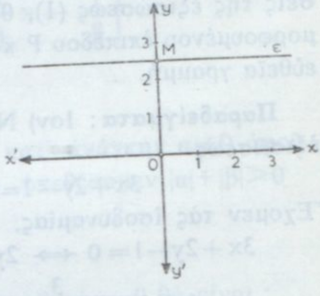
Ἡ ἐξίσωσις $8x-7=0$ ἠμπορεῖ νὰ γραφῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

$8x+0y-7=9$, δηλαδὴ ὁ συντελεστὴς τοῦ y εἶναι μηδέν.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ παριστάνει εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y΄Oy, εἶναι δὲ ἡ ε΄ (σχ. 3).

4ον) Νὰ εὑρεθῇ τῆς ἐξισώσεως $2y-5=0$ ἡ γεωμετρικὴ παράστασις.

Ἡ εὐθεῖα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα x΄Ox δηλ. ἡ ε (σχ. 4). Παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι τέμνει τὸν ἄξονα yOy΄ εἰς τὸ σημεῖον $M\left(0, \frac{5}{2}\right)$.



Σχ. 4

5ον) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γεωμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων

$$0x+2y=0$$

καὶ $x+0y=0$.

Ἡ πρώτη εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν

$$y=0 \quad (x\in\Pi)$$

καὶ ἡ δευτέρα μὲ τὴν $x=0$ $(y\in\Pi)$.

Ἐπομένως ἡ $y=0$ παριστάνει τὸν ἄξονα x΄Ox καὶ ἡ $x=0$ τὸν ἄξονα y΄Oy.

Συμπέρασμα: Κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ἔχει γεωμετρικὴν παράστασιν εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων x΄Ox καὶ y΄Oy μίαν εὐθεῖαν καί:

1ον) Ἂν $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ καὶ $\gamma\neq0$, ἡ εὐθεῖα τέμνει τοὺς ἄξονας εἰς σημεῖα διάφορα τῆς ἀρχῆς.

2ον) Ἂν $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ καὶ $\gamma=0$, ἡ εὐθεῖα διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο.

3ον) Ἂν $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ καὶ $\gamma\neq 0$, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα x΄Ox.

4ον) Ἂν $\alpha\neq 0$, $\beta=0$ καὶ $\gamma\neq 0$, ἡ εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξοεα y΄Oy.

5ον) Ἂν $\alpha=0$, $\beta\neq 0$ καὶ $\gamma=0$, ἡ εὐθεῖα συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα x΄Ox.

6ον) Ἂν $\alpha\neq 0$, $\beta=0$, καὶ $\gamma=0$, ἡ εὐθεῖα συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα y΄Oy.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

37. Εὕρετε τὰς γεωμετρικὰς παραστάσεις τῶν ἐξισώσεων:
α) $3x-7y+1=0$, β) $2x+y-8=0$, γ) $x+y=0$, δ) $x-6=0$,
ε) $y+2=0$, στ) $2y=0$, ζ) $5x-0y+3=0$, η) $8x+0y=0$.

38. Ὁμοίως τῶν ἐξισώσεων:

α) $\frac{3}{4}x-\frac{2}{5}y+1=0$, β) $0{,}7x-0{,}8y=0$, γ) $3\frac{1}{2}x-4\frac{1}{5}y+1=0$,

δ) $\frac{2}{5}x=0{,}2$ ε) $\frac{x-1}{2}+\frac{y-3}{4}+1=0$ στ) $\frac{2x-3}{3}-2\frac{y-4}{4}-1=0$.

§ 7. Σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Γραφικὴ καὶ ἀριθμητικὴ ἐπίλυσίς του.

7. 1. Ἔστωσαν αἱ δύο πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις :

$$\begin{aligned} 4x+y-2&=0 \\ 3x-2y-7&=0 \qquad (1) \end{aligned}$$

καὶ τὰ ἀπειροσύνολα τῶν λύσεών των,

$$A=\{(x,y) \mid x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 4x+y-2=0\}$$
$$B=\{(x,y) \mid x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 3x-2y-7=0\}.$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν σύστημα δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

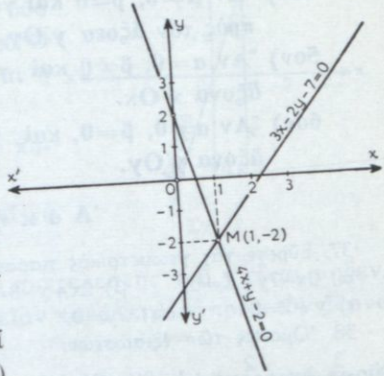
Ζητοῦμεν ἤδη τὰς κοινὰς λύσεις τῶν ἐξισώσεων (1), ἤτοι τὸ σύνολον

$$\Gamma = A\cap B,$$

ἡ εὕρεσις τοῦ ὁποίου ἀποτελεῖ τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος.

Παρατήρησις: Τὸ σύνολον Γ δυνατὸν νὰ εἶναι μονομελές, κενὸν ἢ ἀπειροσύνολον, ὁπότε τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, καμμίαν ἢ ἀπείρους. Ἐξ ἄλλου τὸ σύνολον Γ ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ γεωμετρικῶς ἢ καὶ ἀριθμητικῶς.

7. 2. **Γεωμετρική ἐπίλυσις τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων** (1). Ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν § 6. 2 κάθε πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους ἔχει γεωμετρικὴν εἰκόνα μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων xOy. Ἄν, ἑπομένως, γράψωμεν τὰς εὐθείας τῶν ἐξισώσεων (1), ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι εἶναι ἕνα σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου μὲ συντεταγμένας (x_0, y_0), αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος.



Σχ. 5

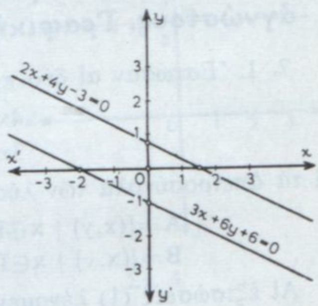
Ἀπὸ τὸ σχ. 5 βλέπομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ M(1,−2) ἑπομένως εὕρομεν γεωμετρικῶς τὴν ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος (1). Ἄρα:

$$\Gamma = \{(1, -2)\}.$$

Παρατήρησις: Ἄν σχηματίσωμεν τοὺς λόγους τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἰς τὸ σύστημα (1), ἔχομεν $\dfrac{4}{3} \neq \dfrac{1}{-2}$.

7. 3. **Ἄς ἐπιλύσωμεν γεωμετρικῶς τὸ σύστημα**:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+6y+6=0 \\ 2x+4y-3=0 \end{array}\right\} \quad (2)$$



Σχ. 6

Ἐκ τοῦ σχήματος 6 παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἄρα $\Gamma = \varnothing$ καὶ τὸ σύστημα δὲν ἔχει καμμίαν λύσιν. Ὡς πρὸς τοὺς λόγους τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν σταθερῶν ὅρων παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4} \neq \frac{6}{-3}.$$

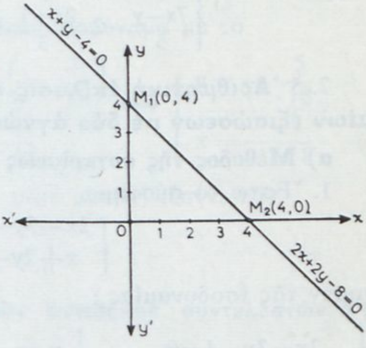
7. 4. **Ἔστω ἀκόμη τὸ σύστημα**:

$$\left.\begin{array}{l} x+\ y-4=0 \\ 2x+2y-8=0 \end{array}\right\} \quad (3)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα $M_1(0,4)$ καὶ $M_2(4,0)$ (σχ. 7) ἀνήκουν καὶ εἰς τὰς δύο εὐθείας, ἑπομένως αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν καὶ τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

Οἱ συνελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἰς τὸ σύστημα (3) σχηματίζουν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{-4}{-8}.$$



Σχ. 7

Γενικὴ παρατήρησις

Ὅταν δίδεται ἕνα σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma=0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1=0 \end{cases}$$

πρὶν ἀκόμη λύσωμεν αὐτὸ (γραφικῶς ἢ ἀριθμητικῶς), δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν, ἂν τοῦτο ἔχῃ μίαν λύσιν, οὐδεμίαν ἢ ἀπείρους λύσεις. Πράγματι,

1ον) Ἂν $\frac{\alpha}{\alpha_1}\neq\frac{\beta}{\beta_1}$, ἔχει μίαν μόνον λύσιν.

2ον) Ἂν $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}\neq\frac{\gamma}{\gamma_1}$, οὐδεμίαν ἔχει λύσιν, (ἀδύνατον).

καὶ 3ον) Ἂν $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{\gamma}{\gamma_1}$, ὑπάρχουν ἄπειροι λύσεις τοῦ συστήματος (ἀπροσδιόριστον).

Ἀσκήσεις

39. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x-y+1=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x-3y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ x+y+1=0 \end{cases}$

δ) $\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{3y-2}{3}=0 \\ \frac{y-2}{3}+\frac{5x-1}{5}-1=0 \end{cases}$ ε) $\begin{cases} \frac{2x-3}{3}+4\frac{y-1}{2}+3=0 \\ \frac{x+1}{2}-3\frac{y-3}{4}+1=0 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} 0,2x+1,2y=0 \\ 3,4x-3y-1=0 \end{cases}$

40. Ποῖα τῶν κάτωθι συστημάτων ἔχουν μίαν, καμμίαν, ἢ ἀπείρους λύσεις καὶ διατί;

α) $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 3x+2y-1=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x-y-5=0 \\ 3x-3y+2=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 5x-y=0 \end{cases}$ δ) $\begin{cases} 2x+3y=9 \\ 10x+15y=45 \end{cases}$

ε) $\begin{cases} \frac{2}{3}x-\frac{x+y}{2}=2 \\ \frac{x-y}{3}-\frac{1}{2}-1=0 \end{cases}$ στ) $\begin{cases} \frac{2x-3y}{4}+\frac{5x-3y}{5}-1=0 \\ x+\frac{2x+y}{6}-\frac{7}{8}=0 \end{cases}$

$$\zeta)\ \begin{cases} \dfrac{x-y}{7}+2\,\dfrac{x-3y}{8}=0 \\ \dfrac{7x-y}{5}-2\,\dfrac{2x+1}{3}=0 \end{cases} \qquad \eta)\ \begin{cases} 5x-y=2 \\ 15x-3y=6 \end{cases}$$

7.5 Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.

α) Μέθοδος τῆς συγκρίσεως :

1. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases}$$

ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 2x-3y-1=0 \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ x=-2y+5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ \dfrac{3y+1}{2}=-2y+5 \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου συστήματος, εἶναι ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον. Λύομεν αὐτὴν

$$\frac{3y+1}{2}=-2y+5 \Longleftrightarrow 3y+1=-4y+10 \Longleftrightarrow 7y=10-1 \Longleftrightarrow y=\frac{9}{7}.$$

Τὸ δοθέν, λοιπόν, σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον (ἔχει τὰς ἰδίας λύσεις) μὲ τὸ σύστημα :

$$\begin{cases} x=\dfrac{3y+1}{2} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{3\cdot\dfrac{9}{7}+1}{2} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{34}{14} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{17}{7} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{cases}$$

Τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν τὴν $\left(\dfrac{17}{7}, \dfrac{9}{7}\right)$.

II. Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{cases} 5x-y=0 \\ 2x-4y-1=0 \end{cases}$$

ἔχομεν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$\begin{cases} 5x-y=0 \\ 2x-4y-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=5x \\ y=\dfrac{2x-1}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=5x \\ 5x=\dfrac{2x-1}{4} \end{cases}$$

Εἰς τὴν τρίτην μορφὴν τοῦ συστήματος ἡ β΄ ἐξίσωσις περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον τὸν x, θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὰς ἰσοδυναμίας :

$$5x = \frac{2x-1}{4} \Longleftrightarrow 20x=2x-1 \Longleftrightarrow 18x=-1 \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{18}$$

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὸ

$$\begin{cases} y=5x \\ x=-\dfrac{1}{18} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=5\cdot\left(-\dfrac{1}{18}\right) \\ x=-\dfrac{1}{18} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{18} \\ x=-\dfrac{1}{18} \end{cases}$$

Τὸ σύστημα, ἑπομένως, ἔχει μίαν μόνον λύσιν, τὴν $\left(-\dfrac{1}{18}, \dfrac{-5}{18}\right)$.

β) Μέθοδος ἀπαλοιφῆς διὰ τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν ἢ μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ.

Ἔστω τὸ σύστημα :

$$(1) \quad \begin{cases} 5x+\ y-20=0 \\ 3x-4y+11=0 \end{cases}$$

Ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως συστήματος διὰ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ, συνίσταται εἰς τὴν εὕρεσιν καταλλήλων σταθερῶν, μὲ τὰς ὁποίας πολλαπλασιαζόμεναι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, προκύπτει ἰσοδύναμον μὲ αὐτό, τοῦ ὁποίου ὅμως οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἀντίθετοι. Προσθέτοντες ἀκολούθως τὰς ἐξισώσεις τοῦ νέου συστήματος, εὑρίσκομεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον, ὁπότε διευκολυνόμεθα εἰς τὴν λύσιν τοῦ ἀρχικοῦ.

Εἰς τὸ σύστημα (1) οἱ κατάλληλοι ἀριθμοὶ εἶναι τὸ -3 καὶ 5 ἔχομεν λοιπόν :

$$\begin{cases} 5x+y-20=0 \\ 3x-4y+11=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -15x-\ 3y+60=0 \\ 15x-20y+55=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x+y-20=0 \\ -23y+115=0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 5x+y-20=0 \\ y=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x+5-20=0 \\ y=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$$

Ἐπειδὴ μὲ τὴν μέθοδον αὐτὴν εὕρομεν ἐξίσωσιν μὴ περιέχουσαν τὸν ἄγνωστον x, δι' αὐτὸ λέγομεν ὅτι ἐκάμομεν **ἀπαλοιφὴν** τοῦ ἀγνώστου x.

Παρατήρησις : Οἱ ἀριθμοὶ -3 καὶ 5 μὲ τοὺς ὁποίους ἐπολλαπλασιάσαμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι οἱ ἀντίθετοι συντελεσταὶ τοῦ x εἰς τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος.

Θὰ ἠμπορούσαμεν νὰ κάμωμεν καὶ ἀπαλοιφὴν τοῦ y, ὁπότε οἱ κατάλληλοι ἀριθμοὶ θὰ ἦσαν τὸ 4 καὶ 1.

γ) **Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως:**

Ἔστω τὸ σύστημα

$$(1)\quad \begin{cases} x-3y+1=0 \\ 2x-7y-1=0 \end{cases}$$

Ἐὰν λύσωμεν τὴν πρώτην ὡς πρὸς x, λαμβάνομεν $x=3y-1$. Ἐὰν τώρα τὴν τιμὴν $x=3y-1$ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν β΄ τῶν ἐξισώσεων, εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰ ἰσοδύναμα συστήματα:

$$\begin{cases} x-3y+1=0 \\ 2x-7y-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ 2x-7y-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ 2(3y-1)-7y-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=3y-1 \\ 6y-2-7y-1=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ -y=3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=3y-1 \\ y=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x=3\,.\,(-3)-1 \\ y=-3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=-10 \\ y=-\ 3. \end{cases}$$

Προφανῶς εἰς τὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα θὰ κατελήγομεν, ἐὰν ἐλύομεν τὴν α΄ ἢ β΄ τῶν ἐξισώσεων (1) ὡς πρὸς y καὶ συνεχίζομεν ὡς προηγουμένως.

Ἀσκήσεις

41. Ἐπιλύσατε μὲ τὴν μέθοδον τῆς συγκρίσεως τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} 7x-3y-5=0 \\ 4x+2y-1=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y-8=0 \\ 3x+\dfrac{7}{3}y-22=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} 4x-3y=0 \\ 5x-4y+3=0. \end{cases}$

42. Ὁμοίως μὲ τὴν μέθοδον τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x+\dfrac{x-y}{2}-17=0 \\ 7x-\dfrac{x+y}{3}-33=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{7}+3x=30 \\ 3x-4y+1=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{3}{4}x+\dfrac{2}{5}y-2=0 \\ \dfrac{x+y}{4}+\dfrac{3(x-4)}{5}=0 \end{cases}$

43. Ὁμοίως μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως τὰ συστήματα:

α) $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ \dfrac{x+y}{5}+\dfrac{y-x}{9}+1=0 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 4x+3y+1=0 \\ 7x+5y+\dfrac{4x-3y}{2}+1=0 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{3}-\dfrac{3y-x}{2}-\dfrac{3}{4}=0 \\ \dfrac{x+2y}{5}+\dfrac{5x-y}{4}+2=0. \end{cases}$

§ 8. Σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους. Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις αὐτοῦ.

α) Ὀνομάζομεν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ τρεῖς ἀγνώστους, ἕνα πρωτοβάθμιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν, τὸ ὁποῖον θέτομεν ἴσον μὲ μηδέν.

Ἤτοι:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \qquad (|\alpha|+|\beta|+|\gamma|>0)$$

εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως με τρεῖς ἀγνώστους.

β) Σύστημα τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους ὀνομάζεται ὁ συνδυασμός τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.

Ἡ γενικὴ μορφὴ αὐτοῦ εἶναι

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \delta_1 = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + \delta_2 = 0. \end{cases}$$

Λύσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ καλεῖται ἡ εὕρεσις μιᾶς διατεταγμένης τριάδος ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν (x_0, y_0, z_0), ποὺ ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα.

γ) Ὅταν δίδεται μία πρωτοβάθμιος ἐξίσωσις

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0,$$

ὑπάρχει ἀπειρία τριάδων ἀριθμῶν (x,y,z) ποὺ ἐπαληθεύουν αὐτήν, ὄχι ὅμως ὅλαι αἱ τριάδες, ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τὸ σύνολον λοιπὸν A τῶν λύσεων αὐτῆς συμβολίζεται:

$$A = \{(x,y,z) \,/\, x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ z\in\Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\}$$

καὶ εἶναι προφανῶς

$$A \subset \Pi\times\Pi\times\Pi=\Pi^3.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἐξισώσεων (1) θὰ ἔχωμεν τὰ σύνολα τῶν λύσεων ἑκάστης:

$$A=\{(x,y,z)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ z\in\Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0\}$$

$$B=\{(x,y,z)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ z\in\Pi,\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1=0\}$$

$$\Gamma=\{(x,y,z)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ z\in\Pi,\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2=0\}$$

Ἡ λύσις τοῦ συστήματος (1) παρίσταται συμβολικῶς:

$$E = A\cap B\cap\Gamma=\left\{(x,y,z)/x\in\Pi, y\in\Pi, z\in\Pi,\ \begin{matrix} \alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0 \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 z+\delta_1=0 \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 z+\delta_2=0 \end{matrix}\right\}$$

Ἡ ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις ἑνὸς συστήματος τριῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἀκολουθεῖ γενικῶς τὴν πορείαν τοῦ κατωτέρου παραδείγματος.

Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$(2)\begin{cases} 2x+3y-z-2=0 \\ x+y-z+9=0 \\ 3x+2y-z-4=0 \end{cases}$$

ἔχομεν τὰς ἰσοδυμίας :

$$\begin{cases} 2x+3y-z-2=0 \\ x+y-z+9=0 \\ 3x+2y-z-4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ x+y-z+9=0 \\ 3x+2y-z-4=0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ \dfrac{-3y+z-2}{2}+y-z+9=0 \\ 3\left(\dfrac{-3y+z+2}{2}\right)+2y-z-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ -y-z+20=0 \\ -5y+z-2=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ y=-z+20 \\ y=\dfrac{z-2}{5} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ y=-z+20 \\ -z+20=\dfrac{z-2}{5} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ y=-z+20 \\ z=17 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3y+z+2}{2} \\ y=3 \\ z=17 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-3.3+17+2}{2} \\ y=3 \\ z=17 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=17. \end{cases}$$

Ἄρα τὸ σύστημα (2) ἔχει λύσιν τὴν (5, 3, 17) καὶ συμβολικῶς:

$$E=\left\{(x,y,z)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ z\in\Pi,\ \begin{matrix} 2x+3y-z-2=0 \\ x+y-z+9=0 \\ 3x+2y-z-4=0 \end{matrix}\right\}=\{(5,\ 3,\ 17)\}$$

Ἀσκήσεις

44. Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

α) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 3x-y-z=8 \\ x-2y+5z=-20 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=0 \\ \dfrac{x-1}{3}-\dfrac{y}{2}+z=-18 \\ \dfrac{x+1}{2}+\dfrac{y}{3}-z=2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ x+y+52=-12 \\ 2x-3y+6z=5. \end{cases}$

§ 9. Προβλήματα ποὺ λύονται μὲ τὴν βοήθειαν συστημάτων.

Ἃς λύσωμεν τὰ ἑξῆς προβλήματα :

I. Δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε, τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου ἰσοῦται μὲ 52, ἐὰν δὲ ἀφαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ δευτέρου εὑρίσκομεν 16. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί ;

Λύσις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸν α΄ καὶ μὲ y τὸν β΄ θὰ ἔχωμεν σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x+3y=52 \\ 2y-x=16 \end{cases}$$

Χρησιμοποιοῦντες τὴν μέθοδον τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ εὑρίσκομεν :

$$\begin{cases} 2x+3y=52 \\ 2y-x=16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=52 \\ -x+2y=16 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=52 \\ -2x+4y=32 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=52 \\ 7y=84 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=52 \\ y=12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x+3\,.\,12=52 \\ y=12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x=52-36 \\ y=12 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=12 \end{cases}$$

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι ὁ 8 καὶ ὁ 12.

II. **Ἐὰν ἀγοράσωμεν 20 μ. ἐξ ἑνὸς ὑφάσματος καὶ 16 μ. ἐξ ἑνὸς ἄλλου, πληρώνομεν 1240 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἀγοράσωμεν 26 μ. ἐκ τοῦ α΄ ὑφάσματος καὶ 24 μ. ἐκ τοῦ δευτέρου πληρώνομεν 1740 δρχ. Ποία ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου ὑφάσματος ;**

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν τιμὴν εἰς δρχ. τοῦ μέτρου τοῦ πρώτου ὑφάσματος καὶ μὲ y τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων :

$$\begin{cases} 20x+16y=1240 \\ 26x+24y=1740 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20x+16y=1240 \\ 26x+24y=1740 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5x+4y=310 \\ 13x+12y=870 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{310-4y}{5} \\ x=\dfrac{870-12y}{13} \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{310-4y}{5} \\[2ex] \dfrac{310-4y}{5} = \dfrac{870-12y}{13} \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει ἕνα μόνον ἄγνωστον, λύοντες αὐτὴν ἔχομεν:

$$\frac{310-4y}{5} = \frac{870-12y}{13} \Longleftrightarrow 4030-52y=4350-60y \Longleftrightarrow$$

$$-52y+60y=4350-4030 \Longleftrightarrow 8y=320 \Longleftrightarrow y=\frac{320}{8} \Longleftrightarrow y=40.$$

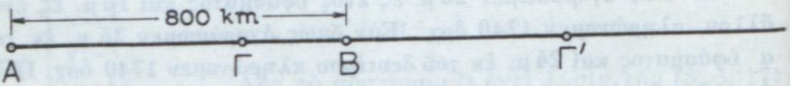
Συνεπῶς ἡ τελευταία μορφὴ τοῦ συστήματος γίνεται:

$$\begin{cases} x = \dfrac{310-4y}{5} \\[1ex] y = 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{310-4 \,.\, 40}{5} \\[1ex] y = 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{150}{5} \\[1ex] y = 40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 30 \\ y = 40. \end{cases}$$

Ὥστε λοιπὸν τὸ μέτρον τοῦ α΄ ὑφάσματος ἀξίζει 30 δρχ. καὶ τοῦ β΄ 40 δρχ.

III. **Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν 800 km. Ἐκ τῶν πόλεων αὐτῶν ἀναχωροῦν δύο κινητὰ κινούμενα μὲ σταθερὰν ταχύτητα. Ἐὰν τὰ κινητὰ αὐτὰ κινοῦνται ἀντιθέτως συναντῶνται μετὰ 8 h, ἐνῶ ἂν κινοῦνται πρὸς τὴν αὐτὴν φορὰν συναντῶνται μετὰ 20 h. Ποία ἡ ταχύτης ἑκάστου κινητοῦ;**

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν ταχύτητα τοῦ πρώτου



Σχ. 8

καὶ μὲ y τὴν ταχύτητα τοῦ δευτέρου καὶ ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ κατὰ δὲ τὴν δευτέραν εἰς τὸ Γ′ θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} A\Gamma &= 8x \\ B\Gamma &= 8y \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\Gamma+B\Gamma=8x+8y \Rightarrow 800=8x+8y$$

$$\left.\begin{aligned} A\Gamma' &= 20x \\ B\Gamma' &= 20y \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\Gamma'-B\Gamma'=20x-20y \Rightarrow 800=20x-20y$$

Ἔχομεν λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 8x+8y=800 \\ 20x-20y=800 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ x-y=40 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ (x+y)+(x-y)=140 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} x+y=100 \\ 2x=140 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=100 \\ x=70 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 70+y=100 \\ x=70 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=30 \\ x=70. \end{cases}$$

Ἡ ταχύτης λοιπὸν τοῦ πρώτου κινητοῦ εἶναι 70 km/h καὶ τοῦ δευτέρου 30 km/h.

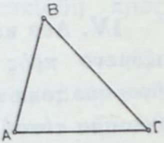
IV. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ γωνία $\widehat{A}=85^0$, ἡ γωνία Β εἶναι μεγαλυτέρα κατὰ 5^0 τῆς $\widehat{\Gamma}$. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι $\widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Gamma}$.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὸ μέτρον τῆς γωνίας Β καὶ μὲ y τῆς Γ, ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου εἶναι 180° θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$85^o+x+y=180^o$$

καὶ ἐπειδὴ ἡ $\widehat{B}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $\widehat{\Gamma}$ κατὰ 5° θὰ ἔχωμεν τὴν β΄ ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος.

$$x-y=5^o.$$



Σχ. 9

Ἔχομεν λοιπὸν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 85+x+y=180 \\ x-y=5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=180-85 \\ x-y=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=95 \\ x-y=5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=95 \\ (x+y)+(x-y)=100 \end{cases}$$

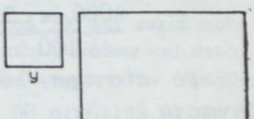
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=95 \\ 2x=100 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=95 \\ x=50 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 50+y=95 \\ x=50 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=95-50 \\ x=50 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=45^o \\ x=50^o \end{cases}$$

Ἡ Γωνία $\widehat{B}=50$ καὶ ἡ $\widehat{\Gamma}=45^o$.

V. Ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν δύο τετραγώνων εἶναι 72 m², τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν βάσεών των εἶναι 12 m. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ καθενός.

Λύσις. Ἐὰν x εἶναι τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου καὶ y τοῦ μικροτέρου, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν:



Σχ. 10

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2-y^2=72 \end{cases}$$

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις δύναται νὰ γραφῇ $x^2-y^2=72 \Longleftrightarrow (x+y)(x-y)=72$. Ἐπειδὴ δὲ $x+y=12$ θὰ γίνῃ

$$12(x-y)=72 \iff x-y=6$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2-y^2=72 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=12 \\ (x+y)(x-y)=72 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=12 \\ x-y=6 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x+y=12 \\ (x+y)+(x-y)=18 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=12 \\ 2x=18 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=12 \\ x=9 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 9+y=12 \\ x=9 \end{cases} \iff \begin{cases} y=3 \\ x=9 \end{cases}$$

Τὰ τετράγωνα λοιπὸν ἔχουν πλευρὰς 9 m τὸ ἕνα καὶ 3 m τὸ ἄλλο.

IV. Δύο κεφάλαια τὸ ἓν 5000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο 8000 δρχ. τοκιζόμενα πρὸς ὡρισμένον ἐπιτόκιον ἕκαστον φέρουν μετὰ 5 ἔτη ἄθροισμα τόκων 2000 δρχ. Ἐὰν ἐναλλάξωμεν τὰ ἐπιτόκια φέρουν ἄθροισμα τόκων 2225 δρχ. εἰς τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη ἕκαστον;

Λύσις. Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ τόκος Τ ποὺ δίδει ἕνα κεφάλαιον Κ τοκιζόμενον μὲ ἐπιτόκιον Ε εἰς Χ ἔτη εὑρίσκεται ἀπὸ τὸν τύπον:

$$T = \frac{K.E.X}{100}.$$

Ἐὰν T_1 καὶ T_2 εἶναι οἱ τόκοι τῶν κεφαλαίων εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, T'_1, T'_2 εἰς τὴν δευτέραν καὶ x τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου καὶ y τοῦ δευτέρου θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \frac{5000 \cdot x \cdot 5}{100} \\ T_2 &= \frac{8000 \cdot y \cdot 5}{100} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T_1+T_2=\frac{5000 \cdot x \cdot 5}{100}+\frac{8000 \cdot y \cdot 5}{100} \Rightarrow 2000=250x+400y$$

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$\left.\begin{aligned} T'_1 &= \frac{5000 \cdot y \cdot 5}{100} \\ T'_2 &= \frac{8000 \cdot x \cdot 5}{100} \end{aligned}\right\} \Rightarrow T'_1+T'_2=\frac{5000 \cdot y \cdot 5}{100}+\frac{8000 \cdot x \cdot 5}{100} \Rightarrow 2225=250y+400x.$$

Τὸ σύστημα λοιπόν, τοῦ ὁποίου ἡ λύσις θὰ μᾶς δώσῃ τὰ ἄγνωστα ἐπιτόκια θὰ εἶναι:

$$\begin{cases} 250x+400y=2000 \\ 400x+250y=2225 \end{cases} \iff \begin{cases} 5x+8y=40 \\ 16x+10y=89 \end{cases} \iff \begin{cases} y=\dfrac{40-5x}{8} \\ y=\dfrac{89-16x}{10} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{40-5x}{8} \\ \dfrac{40-5x}{8}=\dfrac{89-16x}{10} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{40-5x}{8} \\ 78x=312 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{40-5x}{8} \\ x=4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\dfrac{40-5\,.\,4}{8} \\ x=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{20}{8} \\ x=4 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y=2,5 \\ x=4 \end{cases}$$

Ὥστε τὸ πρῶτον κεφάλαιον τῶν 5000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς $4^0/_0$, καὶ τὸ δεύτερον τῶν 8000 δρχ. πρὸς $2,5^0/_0$.

Παρατήρησις. Ἀνάλογον πρὸς τὴν φύσιν τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ εἶναι καὶ τὸ ἀποτέλεσμα διὰ νὰ ἔχωμεν λύσιν ἀποδεκτήν· Ἑπομένως, δυνάμεθα νὰ θέτωμεν ἑκάστοτε περιορισμοὺς εἰς τὸ πρόβλημα. Π.χ. ἐὰν εἰς τὸ πρόβλημα VI εὑρίσκομεν ἀρνητικὰ ἐπιτόκια, τότε τὸ πρόβλημα θὰ ἦτο ἀσυμβίβαστον, ὁ περιορισμὸς τοῦ προβλήματος αὐτοῦ θὰ ἦτο $x>0$ καὶ $y>0$ διὰ νὰ εἶναι ἡ λύσις του ἀποδεκτή.

Ἀσκήσεις

45) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαφορὰν 9 καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου μεῖον τὸ διπλάσιον τοῦ μικροτέρου νὰ δίδουν τὸν ἀριθμὸν 32.

46) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί, ὥστε ὁ λόγος αὐτῶν νὰ εἶναι 1 : 4, ἐὰν δὲ εἰς τὸν μεγαλύτερον προσθέσωμεν τὸν 8 νὰ εὑρίσκωμεν τὸ πενταπλάσιον τοῦ μικροτέρου.

47) Νὰ εὑρεθῆ διψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος ὥστε, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ ψηφίον τῶν μονάδων ἀπὸ τοῦ τῶν δεκάδων, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 5, τὸ ἄθροισμα δὲ τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ καὶ ἐκείνου ποὺ προκύπτει δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του εἶναι 99.

48) Νὰ εὑρεθῆ τριψήφιος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 300 καὶ μικρότερος τοῦ 400 τοιοῦτος ὥστε, τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῶν δεκάδων καὶ μονάδων του νὰ εἶναι 7, ἐὰν δὲ ἐναλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν ψηφίων του προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 99 μικρότερος.

49) Χωρικὸς ἐρωτηθεὶς πόσα πρόβατα καὶ πόσα παιδιὰ ἔχει, ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς. «Πρόβατα καὶ παιδιὰ ἔχουν 36 κεφαλὰς καὶ 132 πόδια». Πόσα πρόβατα καὶ πόσα παιδιὰ εἶχεν ὁ χωρικός;

50. Χωρικὴ ἠγόρασε δύο εἴδη ὑφάσματος, ἀπὸ τὸ πρῶτον 10 μέτρα καὶ ἀπὸ τὸ δεύτερον 28 μέτρα καὶ ἐπλήρωσεν 710 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἠγόρα-

ζεν 28 μέτρα ἀπὸ τὸ πρῶτον ὕφασμα καὶ 10 ἀπὸ τὸ δεύτερον θὰ ἐπλήρωνε 580 δρχ. Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον κάθε ὑφάσματος;

51. Ἕνα κλάσμα ἔχει τιμὴν ἴσην μὲ $\frac{1}{7}$. Ἂν ἐλαττώσωμεν τὸν ἀριθμητήν του κατὰ 5 καὶ αὐξήσωμεν τὸν παρονομαστήν του κατὰ 9, τότε ἡ τιμή του γίνεται ἴση μὲ $\frac{1}{3}$ · Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ποῖος ὁ παρανομαστὴς τοῦ κλάσματος.

52. Δύο πόλεις Α καὶ Β ἀπέχουν μεναξύ των 900 Km. Ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινεῖ ὄχημα μὲ ταχύτητα ἄγνωστον, δύο ὧρες δὲ βραδύτερον ἐκκινεῖ ἐκ τῆς πόλεως Β ἄλλο ὄχημα, τοῦ ὁποίου ἐπίσης ἡ ταχύτης εἶναι ἄγνωστος. Ἂν τὰ ὀχήματα διευθυνθοῦν κατ' ἀντίθετον φορὰν συναντῶνται μὲ 8 ὧρες ἀπὸ τὴν ἀναχώρησιν τοῦ πρώτου, ἂν δὲν διευθυνθοῦν πρὸς τὴν ἰδίαν φορὰν συναντῶνται μετὰ 30 ὧρες ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες τῶν ὀχημάτων

53. Ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον ἔχει περίμετρον 120 m, ἡ διαφορὰ δὲ δύο προσκειμένων πλευρῶν του εἶναι 4 m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

54. Δύο κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 48.000 δρχ. Τὸ πρῶτον τοκίζεται ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 5% καὶ τὸ δεύτερον ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 5% καὶ δίδουν ἄθροισμα τόκων 10.440 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

55. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει περίμετρον 85 m. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὴν βάσιν του ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς ἄλλας πλευράς του εὑρίσκομεν διαφορὰν 5m. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραί του.

56. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι: α) τὸ ἐμβαδόν του παραμένει σταθερόν, ἂν τὸ μῆκος του ἐλαττωθῇ κατὰ 5 m καὶ τὸ πλάτος του αὐξηθῇ κατὰ 6 m. β) τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐξάνει κατὰ 136 m² ἂν τὸ μῆκος του ἐλαττωθῇ κατὰ 2 m καὶ τὸ πλάτος του αὐξηθῇ κατὰ 8 m.

57. Παντοπώλης ἔχει βούτυρον τῶν 55 δρχ. τὸ κιλὸν καὶ λῖπος τῶν 25 δρχ. τὸ κιλόν. Πόσα κιλὰ πρέπει νὰ λάβῃ ἀπὸ κάθε εἶδος ὥστε νὰ σχηματίσῃ μεῖγμα 200 κιλῶν μὲ τιμὴν 43 δρχ. τὸ κιλὸν (χωρὶς κέρδος ἢ ζημίαν);

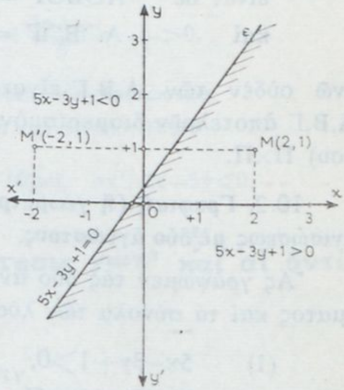
58. Ἔδωσε κάποιος εἰς χρυσοχόον 800 gr. καθαροῦ χρυσοῦ διὰ νὰ τοῦ κατασκευάσῃ χρυσοῦν ἀντικείμενον. Ἐπειδὴ ὅμως ὑποπτεύθη ὅτι ὁ χρυσοχόος ἐνόθευσε τὸν χρυσὸν μὲ ἄργυρον, ἐβύθισε τὸ ἀντικείμενον εἰς τὸ ὕδωρ καὶ ἔχασε 52 gr ἀπὸ τὸ βάρος του. Πόσος ἦτο ὁ χρυσὸς καὶ πόσος ὁ ἄργυρος τοῦ ἀντικειμένου, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ χρυσὸς χάνει εἰς τὸ ὕδωρ τὰ 0,05 καὶ ὁ ἄργυρος τὰ 0,09 τοῦ βάρους του;

§ 10. Πρωτοβάθμιος ἀνίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

10.1. Εἴδομεν εἰς τὴν § 6, ὅτι εἰς κάθε πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους,

π.χ. τὴν $5x-3y+1=0$ (1),

ὑπάρχει ἀπειρία ζευγῶν $(x,y)\in\Pi\times\Pi$, τὰ ὁποῖα ἀληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν αὐτήν, ὅλα δὲ τὰ ζεύγη αὐτὰ ἔχουν γεωμετρικὴν εἰκόνα τὰ σημεῖα μιᾶς εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων xOy.



Σχ. 11

Τὸ σύνολον τῶν λύσεων τῆς (1) συμβολίζεται ὡς εἴδομεν μὲ
$A=\{(x,y,/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 5x-3y+1=0\}$
εἶναι δὲ

$$A\subset\Pi\times\Pi.$$

Ἐξ αὐτῶν συμπεραίνομεν, ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία διατεταγμένων ζευγῶν (x,y), τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον A καὶ ἑπομένως δὲν ἀληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1).

Τὰ ἄπειρα αὐτὰ ζεύγη χωρίζονται εἰς δύο σύνολα τὰ

$$B=\{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 5x-3y+1>0\}$$
$$\Gamma=\{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 5x-3y+1<0\}.$$

Κάθε μία τῶν σχέσεων $5x-3y+1>0$ καὶ $5x-3y+1<0$ καλεῖται πρωτοβάθμιος ἀνίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.

Θὰ ὀνομάζωμεν λοιπὸν πρωτοβάθμιον ἀνίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους κάθε σχέσιν τῆς μορφῆς

$$\alpha x+\beta y+\gamma>0 \quad ἢ \quad \alpha x+\beta y+\gamma<0 \quad (|\alpha|+|\beta|>0).$$

Λύσεις μιᾶς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους, ὀνομάζομεν τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x,y) ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν αὐτήν.

Αἱ λύσεις τῶν $\alpha x+\beta y+\gamma>0$
καὶ $\alpha x+\beta y+\gamma<0$

εἶναι τὰ σύνολα:

$$B=\{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma>0\}$$

καὶ $\Gamma = \{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma<0\}$,

ἐνῶ $A = \{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ \alpha x+\beta y+\gamma=0\}$.

Προφανῶς $B \subset \Pi \times \Pi$

$\Gamma \subset \Pi \times \Pi$

καθὼς καὶ $A \subset \Pi \times \Pi$,

εἶναι δὲ $A\cup B\cup\Gamma = \Pi\times\Pi$

καὶ $A\cap B\cap\Gamma = \varnothing$

ἐνῶ οὐδὲν τῶν A,B,Γ εἶναι κενόν. Κατὰ συνέπειαν τὰ σύνολα A,B,Γ ἀποτελοῦν διαμερισμὸν τοῦ συνόλου (καρτεσιανοῦ γινομένου) $\Pi\times\Pi$.

10.2. **Γραφικὴ (ἢ γεωμετρικὴ) παράστασις μιᾶς πρωτοβαθμίου ἀνισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους.**

Ἂς γράψωμεν τὰς δύο ἀνισώσεις τοῦ προηγουμένου παραδείγματος καὶ τὰ σύνολα τῶν λύσεών των.

(1) $5x-3y+1>0$, $\qquad 5x-3y+1<0$ (2)

$B=\{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 5x-3y+1>0\}$,

$\Gamma=\{(x,y)/x\in\Pi,\ y\in\Pi,\ 5x-3y+1<0\}$

Ἐὰν τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x,y) ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν θεωρήσωμεν ὡς ζεῦγος συντεταγμένων ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τότε κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου B θὰ ἔχῃ εἰκόνα ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου xOy, ὁμοίως καὶ διὰ τὸ σύνολον Γ.

Π.χ. Τὸ ζεῦγος (2,1) τὸ ὁποῖον εἶναι λύσις τῆς $5x-3y+1>0$ (διότι $5.2-3.1+1=10-3+1=11-3=8>0$), παριστάνει τὸ σημεῖον M(2,1) τοῦ ἐπιπέδου, ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ εἰς κάθε ἄλλην λύσιν τῆς ἀνισώσεως (1), ἀντιστοιχεῖ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, κείμενον δεξιὰ τῆς εὐθείας ε, ἐνῶ κάθε λύσις τῆς ἀνισώσεως (2) παριστάνει σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου κείμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς εὐθείας ε. Σχ. 11.

Π.χ. τὸ ζεῦγος (−2,1) εἶναι λύσις τῆς $5x-3y+1<0$ (διότι, $4(-2)-3.1+1=-10-3+1=-12<0$), καὶ παριστάνει τὸ σημεῖον M′(−2,1), κείμενον εἰς τὸ ἀριστερὸν μέρος τῆς εὐθείας ε.

Ἄρα, ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῆς ἀνισώσεως (1) εἶναι τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον τὸ κείμενον δεξιὰ τῆς εὐθείας ε καί, τῆς (2) τὸ ἀνοικτὸν ἡμιεπίπεδον τὸ κείμενον ἀριστερὰ τῆς ε.

59. Εὕρετε μερικὰς λύσεις τῶν ἀνισώσεων:

α) $x-\frac{1}{2}y>0$, β) $x-y+1<0$, γ) $x+y-5>0$, δ) $x-y<0$.

ε) $\frac{2}{5}x+\frac{x+y}{2}+1>0$ στ) $\frac{x-2y}{3}+\frac{x+y}{4}-1<0$,

ζ) $\frac{x-y}{1}-\frac{2x+y}{2}+1>0$ η) $\frac{5x-3y}{3}+\frac{2x+y}{5}-\frac{1}{3}>0$.

60. Εὕρετε τὰς γεωμετρικὰς παραστάσεις τῶν ἀνισώσεων.

α) $4x-3y+12>0$, β) $3x+8y+24>0$, γ) $x-5y+10>0$

δ) $\frac{7x-3y}{2}-\frac{2x+3y}{3}<0$, ε) $5x-2y+10\geqslant 0$, στ΄) $2x-5y\leqslant 0$.

§ 11. Ἡ τετραγωνικὴ συνάρτησις $y=x^2$ καὶ αἱ ἀντίστροφοί της.

11.1. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν

$$f : x \xrightarrow{f} x^2 = y, \quad (x \in \Pi),$$

ἡ ὁποία ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ πεδίον τιμῶν τὸ $\Pi^{\geqq 0}$ ($\Pi^{\geqq 0} \subset \Pi$).

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ ὀνομάζεται **τετραγωνική**.

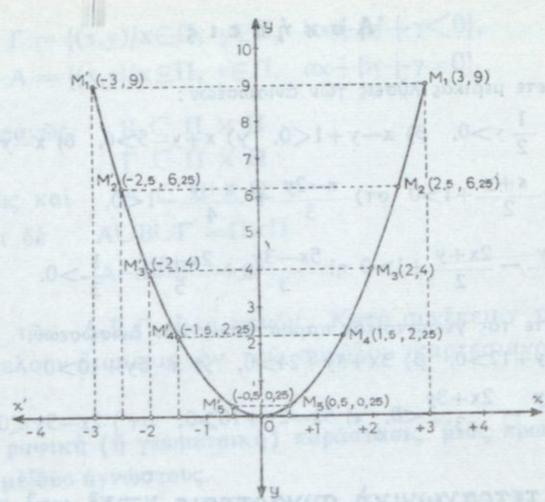
Ἂς εὕρωμεν μερικὰ ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν:

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	625	9

Ἐὰν τὰ διατεταγμένα αὐτὰ ζεύγη παραστήσωμεν διὰ σημείων ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων xOy καὶ συνδέσωμεν αὐτὰ καταλλήλως, θὰ προκύψῃ μία καμπύλη, ἡ ὁποία λέγεται **παραβολή**, ποὺ ἀποτελεῖ τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τῆς τετραγωνικῆς συναρτήσεως.

Τὸ σχῆμα 12 παριστάνει τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τῆς τετραγωνικῆς συναρτήσεως εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $-3\leq x\leq 3$.

Τὸ τμῆμα αὐτὸ τῆς καμπύλης ἔχει ἄξονα συμμετρίας ἕνα



Σχ. 12

τμῆμα τοῦ ἡμιάξονος Oy καὶ εἶναι προφανές, ὅτι ὁλόκληρος ἡ καμπύλη ποὺ παριστάνει ἡ $y=x^2$ $(x\in\Pi)$, θὰ ἔχῃ ὡς ἄξονα συμμετρίας ὁλόκληρον τὸν ἡμιάξονα Oy.

11.2. Ἡ συνάρτησις:

$$g_1 : x \xrightarrow{g_1} \sqrt{x}=y, \quad (x\in\Pi^{\geqslant 0}, \quad y\in\Pi^{\geqslant 0})$$

λέγεται ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως

$$f_1 : x \xrightarrow{f_1} x^2=y, \quad (x\in\Pi^{\geqslant 0}, \quad y\in\Pi^{\geqslant 0})$$

καὶ ἡ συνάρτησις

$$g_2 : x \xrightarrow{g_2} -\sqrt{x}=y, \quad (x\in\Pi^{\geqslant 0}, \quad y\in\Pi^{\leqslant 0})$$

ἀντίστροφος τῆς συναρτήσεως

$$f_2 : x \xrightarrow{f_2} x^2=y, \quad (x\in\Pi^{\leqslant 0}, \quad y\in\Pi^{\geqslant 0})$$

Ἡ γεωμετρικὴ παράστασις τῶν ἀντιστρόφων g_1 καὶ g_2 εἶναι ὁμοίως παραβολὴ μὲ ἄξονα συμμετρίας τὸν θετικὸν ἡμιάξονα τῶν x.

Ἀσκήσεις

61. Δίδονται αἱ συναρτήσεις

$$\varphi_1 : x \xrightarrow{\varphi_1} x^2-1=y, \quad (x\in\Pi)$$

$$\varphi_2 : x \xrightarrow{\varphi_2} x^2+4=y, \quad (x\in\Pi)$$

$$\varphi_3 : x \xrightarrow{\varphi_3} x^3 = y, \quad (x \in \Pi)$$

$$\varphi_4 : x \xrightarrow{\varphi_4} x^3 + 1 = y, \quad (x \in \Pi)$$

εὕρετε τὰς ἀντιστρόφους αὐτῶν καὶ τὰ πεδία ὁρισμοῦ τῶν ἀντιστρόφων των.

62. Εὕρετε τῶν συναρτήσεων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως τὰς γεωμετρικὰς παραστήσεις εἰς τὸ κλειστὸν διάστημα $-3 \leqq x \leqq 3$.

63. Εὕρετε τὰς γεωμετρικὰς παραστάσεις τῶν συναρτήσεων.

α) $y = x^2 - 8x + 1$ $(x \in \Pi)$, β) $y = 2x^2 - 7x + 3$ $(x \in \Pi)$, γ) $y = x^2 - 2x + 1$ $(x \in \Pi)$

§12. Ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀριθμητικὴ καὶ γραφικὴ ἐπίλυσίς της.

12.1. Κάθε δευτεροβάθμιον πολυώνυμον ἴσον μὲ μηδὲν τῆς μορφῆς

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0,$$

ὅπου α,β,γ δεδομέναι σταθεραὶ $(\alpha \neq 0)$, λέγεται ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Λύσις (ἢ ρίζα) τῆς ἐξισώσεως λέγεται κάθε τιμὴ τῆς μεταβλητῆς x ποὺ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν.

Π.χ. αἱ ἐξισώσεις

$$x^2 - 6x + 2 = 0, \quad x^2 - 5x + 4 = 0, \quad 5x^2 - 3x - 7 = 0$$
$$4x^2 + 8x = 0, \quad 10x^2 - 25 = 0, \quad x^2 - 16 = 0$$

εἶναι 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

12.2. Ἀριθμητικὴ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

Παραδείγματα :

1ον. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$x^2 - 5x = 0. \quad (1).$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἤτοι:

$$x(x-5) = 0$$

Αἱ ζητούμεναι λοιπὸν τιμαὶ τῆς x ποὺ μηδενίζουν τὴν (1), πρέπει νὰ μηδενίζουν τὸ γινόμενον x(x—5), καὶ αὐτὸ συμβαίνει, **ὅταν καὶ μόνον ὅταν** ἢ $x=0$ ἢ $x=5$.

Τὸ σύνολον λοιπὸν τῶν λύσεων τῆς (1) εἶναι

$$A = \{x / x \in \Pi, \quad x^2 \quad 5x = 0\} = \{0, \ 5\}$$

2ον. Ἔστω ἐπίσης πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$4x^2 - 25 = 0 \quad (2).$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, σύμφωνα μὲ τὰ λεχθέντα εἰς τὴν § 4, β, ἤτοι ἔχομεν:

$$(2x+5)(2x-5)=0.$$

Αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως (2), εὑρίσκονται ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων:

$$2x+5=0 \Longleftrightarrow 2x=-5 \Longleftrightarrow x=-\frac{5}{2},$$

$$2x-5=0 \Longleftrightarrow 2x=5 \quad \Longleftrightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Τὸ σύνολον λοιπὸν Β τῶν λύσεων τῆς (2) θὰ εἶναι:

$$B=\{x/x\in\Pi,\ 4x^2-25=0\}=$$
$$=\{x/x\in\Pi,\ 2x+5=0\}\cup\{x/x\in\Pi,\ 2x-5=0\}$$
$$=\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup\left\{\frac{5}{2}\right\}=\left\{-\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right\}.$$

3ον Ἂς λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν.

$$9x^2+6x+1=0 \quad (3).$$

Τὸ α΄ μέρος τῆς (3) ἀναλύεται εἰς γινόμενον σύμφωνα μὲ § 4, α, ἤτοι ἔχομεν

$$9x^2+6x+1=(3x)^2+2.3x+1^2=(3x+1)^2.$$

Θὰ ἔχωμεν ἑπομένως τὰς ἰσοδυναμίας:

$$9x^2+6x+1=0 \Longleftrightarrow (3x+1)^2=0$$
$$\Longleftrightarrow (3x+1).(3x+1)=0$$

Τὸ σύνολον Γ τῶν λύσεων τῆς (3) εἶναι:

$$\Gamma=\{x/x\in\Pi,\ 9x^2+6x+1=0\}=\{x/x\in\Pi,\ 3x+1=0\}$$

Ἡ $3x+1=0$ δίδει $x=-\frac{1}{3}$,

ἄρα $\Gamma=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ ρίζα $-\frac{1}{3}$ εἶναι διπλῆ.

4ον Ἔστω ἀκόμη πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις,

$$x^2-12x+35=0 \quad (4).$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (4) εἶναι δευτεροβάθμιον τριώνυμον τῆς μορφῆς $x^2+kx+\lambda$, ἑπομένως δυνάμεθα (παρ. 4.γ) νὰ τὸ ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἐφ' ὅσον $k^2-4\lambda \geq 0$.

Ἐπειδὴ $k=-12$, $\lambda=35$ καὶ $k^2-4\lambda=(-12)^2-4.35=144-$ $-140=4>0$ ἔχομεν, $\tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{4}}{2}=\frac{2}{2}=1$

καὶ $x^2-12x+35=\left[\left(x+\frac{-12}{2}\right)+1\right]\left[\left(x+\frac{-12}{2}\right)-1\right]=0$

$$\Longleftrightarrow [(x-6)+1]\,.\,[(x-6)-1]=0 \Longleftrightarrow$$

$$(x-5)(x-7)=0 \Longleftrightarrow x=5 \text{ καὶ } x=7.$$

Ἤτοι, τὸ σύνολον Δ τῶν λύσεων τῆς (4) εἶναι:

$\Delta=\{x/x\in\Pi,\ x^2-12x+35=0\}=\{x/x\in\Pi,\ x-5=0\}\cup\{x/x\in\Pi,$ $x-7=0\}=\{5\}\cup\{7\}=\{5,7\}$.

5ον. Ζητεῖται νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$10x^2-x-2=0 \qquad (5).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πρῶτον μέλος τῆς (5) εἶναι τριώνυμον τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τοῦτο, ὡς γνωστόν, ἀναλύεται (§ , δ) εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἐφ' ὅσον $\beta^2-4\alpha\gamma\geq 0$.

Εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=(-1)^2-4.10.(-2)=1+80=81>0$, ἐξ ἄλλου

$$\frac{k}{2}=-\frac{1}{20},\ \lambda=-\frac{2}{10} \text{ καὶ } \tau=\frac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{\left(-\frac{1}{10}\right)^2-4\left(-\frac{2}{10}\right)}}{2}=$$

$$=\frac{\sqrt{81}}{20}=\frac{9}{20}, \quad \text{ἄρα:} \quad 10x^2-x-2=0 \Longleftrightarrow$$

$$10\left(x^2-\frac{1}{10}x-\frac{2}{10}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$10\left[\left(x-\frac{1}{20}\right)+\frac{9}{20}\right]\left[\left(x-\frac{1}{20}\right)-\frac{9}{20}\right]=0 \Longleftrightarrow$$

$$10\left(x+\frac{8}{20}\right)\left(x-\frac{10}{20}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\left(10x+4\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$10x+4=0 \text{ καὶ } x-\frac{1}{2}=0$$

$$10x+4=0 \iff 10x=-4 \iff x=-\frac{4}{10}=-\frac{2}{5}.$$

$$x-\frac{1}{2}=0 \iff x=\frac{1}{2}.$$

Τὸ σύνολον Ε τῶν λύσεων τῆς (5) εἶναι :

$$E=\{x/x\in\Pi, \quad 10x^2-x-2=0\}=\{x/x\in\Pi, \quad 10x+4=0\}\cup$$
$$\left\{x/x\in\Pi, \ x-\frac{1}{2}=0\right\}=\left\{-\frac{2}{5}\right\}\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}=\left\{-\frac{2}{5}, \ \frac{1}{2}\right\}.$$

6ον. Ἔστωσαν ἀκόμη πρὸς λύσιν αἱ ἐξισώσεις :

$$x^2+2x+10=0 \quad (6)$$

$$\text{καὶ} \quad 3x^2-4x+5=0 \quad (7).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι διὰ τὴν (6) εἶναι $k^2-4\lambda=4-4.10=-36<0$ καὶ διὰ τὴν (7) $\beta^2-4\alpha\gamma=(-4)^2-4.3.5=15=-44<0$.

Ἑπομένως τὰ τριώνυμα $x^2+2x+10$ καὶ $3x^2-4x+5$ δὲν ἀναλύονται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων, ἄρα δὲν ὑπάρχουν λύσεις τῶν ἐξισώσεων (6) καὶ (7) μέσα εἰς τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἀσκήσεις

64. Νὰ εὑρεθῇ ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ἔχουν ρίζας καὶ ποῖαι ὄχι :

α) $3x^2-5=0$, β) $x^2-1=0$ γ) $x^2+1=0$ δ) $9x^2+25=0$,
ε) $9x^2+x=0$, στ) $8x^2-7x=0$, ζ) $12x^2+100x=0$,
η) $x^2+6x+9=0$, θ) $4x^2-4x+1=0$, ι) $x^2-10x+25=0$,
ια') $x^2+x+1=0$, ιβ) $3x^2-2x+8=0$, ιγ) $5x^2-5x-7=0$.

65. Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

α) $12x^2+x=0$, β) $x^2+7x=0$, γ) $x^2-6x=0$,
δ) $15x^2-35x=0$, ε) $\frac{(x+1)^2}{8}-\frac{3(x-1)^2}{7}+\frac{17}{56}=0$.

στ) $\frac{2x^2-3}{7}+\frac{4x^2-5}{3}-\frac{x^2+7}{21}=x^2-\frac{13}{7}$.

65. Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ νὰ παρασταθοῦν συμβολικῶς τὰ σύνολα τῶν λύσεών των.

α) $49x^2-36=0$, β) $12x^2-7=0$ γ) $x^2-64=0$, δ) $100x^2-49=0$.
ε) $\frac{2(x+1)(x-1)}{3}-\frac{4(x^2-5)}{4}+3=0$ στ) $\frac{x^2-6}{3}-\frac{2x^2+4}{5}-\frac{x^2-1}{6}-1=0$.

67. Ὁμοίως αἱ ἐξισώσεις:

α) $4x^2-12x+9=0$, β) $x^2-5x+\frac{25}{4}$, γ) $49x^2-42x+9$.
δ) $x^2-9x-22$, ε) x^2+x-56, στ) x^2+5x+4, ζ) $x^2-11x+30$,
η) $x^2+x-156$, θ) $x^2+0,1x-0,2$, ι) $15x^2+19x+6=0$,
ια) $22x^2-78x-14=0$, ιβ) $10x^2-11x+3=0$.

12.3. Προβλήματα ποὺ λύονται μὲ τὴν βοήθειαν ἐξισώσεων 2ου βαθμοῦ.

Παραδείγματα :

I. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἐὰν ἐλαττωθῇ κατὰ 120, δίδει τὸ διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ.

Λύσις : Ἂν x εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός, τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ εἶναι x^2 καὶ κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$x^2-120=2x$$

$$\Longleftrightarrow x^2-2x-120=0 \quad (1)$$

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως εἶναι τῆς μορφῆς $x^2+k\chi+\lambda$ καὶ ἐπομένως χρησιμοποιοῦμεν τὸν τύπον :

$$x^2+kx+\lambda=\left[\left(x+\frac{k}{2}\right)+\tau\right]\left[\left(x+\frac{k}{2}\right)-\tau\right].$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι $k^2-4\lambda=(-2)^2-4(-120)=4+480=484>0$ ἄρα, τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἀναλύεται εἰς γινόμενον.

Ἔχομεν :

$$\frac{k}{2}=\frac{-2}{2}=-1,\ \tau=\frac{\sqrt{k^2-2\lambda}}{2}=\frac{\sqrt{(-2)^2-4(-120)}}{2}=\frac{\sqrt{484}}{2}=\frac{22}{2}=11$$

ἤτοι :

$$x^2-2x-120=[(x-1)+11]\,[(x-1)-11]=(x+10)(x-12),$$

$$x^2-2x-120=0 \Longleftrightarrow (x+10)(x-12)=0,$$

καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως θὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ τὴν λύσιν τῶν

$$x+10=0 \Longleftrightarrow x=-10$$

$$x-12=0 \Longleftrightarrow x=12.$$

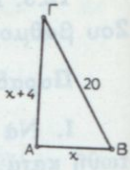
Ὑπάρχουν λοιπὸν δύο ἀριθμοὶ ποὺ ἱκανοποιοῦν τὰ ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος, ὁ $x=-10$ καὶ $x=12$.

II. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάθετοι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 20 cm καὶ ἡ μία τῶν καθέτων πλευρῶν 4 cm μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης.

Λύσις.

Ἐὰν x εἶναι ἡ μικροτέρα κάθετος πλευρά, ἡ ἄλλη θὰ εἶναι

$x+4$ καὶ ἐφαρμόζοντες τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα εὑρίσκομεν,



Σχ. 13

$$x^2+(x+4)^2 = 20^2 \iff$$
$$x^2+x^2+8x+16=400 \iff$$
$$2x^2+8x-384=0 \iff$$
$$x^2+4x-192=0 \quad (1)$$

$k^2-4\lambda=4^2-4.(-192)=16+768=784>0$

ἄρα $\tau=\dfrac{\sqrt{k^2-4\lambda}}{2}=\dfrac{\sqrt{784}}{2}=\dfrac{28}{2}=14$

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{4}{2}=2.$

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν

$$x^2+4x-192=0 \iff$$
$$[(x+2)+14]\quad[(x+2)-14]=0 \iff$$
$$(x+16)\quad(x-12)=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (1) εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς

$$x+16=0 \iff x=-16$$
$$x-12=0 \iff x=\ \ 12$$

Ἡ ρίζα $x=-16$ ἀπορρίπτεται, διότι τὸ μῆκος πλευρᾶς τριγώνου δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ἀρνητικόν, ἄρα ἡ μικροτέρα κάθετος πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $x=12$ cm καὶ ἡ ἄλλη $x=12+4=16$ cm.

ΙΙΙ. Χωρικὸς ἠγόρασεν ζάχαριν καὶ ἐπλήρωσε 750 δρχ. καὶ ἔλαιον καὶ ἐπλήρωσε 660 δρχ. Ἡ ζάχαρις ἦτο κατὰ 20 kgr* περισσοτέρα τοῦ ἐλαίου. Πόσον ἐκόστιζε τὸ χιλιόγραμμον τῆς ζαχάρεως, ἐὰν τοῦ ἐλαίου ἐκόστιζε 7 δρχ. ἐπὶ πλέον;

Λύσις. Ἐὰν x ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογράμμου τῆς ζαχάρεως, ἡ τιμὴ τοῦ ἐλαίου θὰ εἶναι $x+7$. Ἀφοῦ ἔδωσε 750 δρχ. διὰ τὴν ζάχαρι, θὰ ἠγόρασεν $\dfrac{750}{x}$ χιλιόγραμμα καὶ $\dfrac{660}{x+7}$ χιλ. ἐλαίου. Ἐπειδὴ τὰ χιλιόγραμμα τῆς ζαχάρεως ἦσαν 20 ἐπὶ πλέον τοῦ ἐλαίου ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{750}{x}-\frac{660}{x+7}=20 \quad (1)$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς μὲ τὸ γινόμενον $x(x+7)$ θὰ εὕρωμεν τὴν ἰσοδύναμόν της:

$$750(x+7)-660x=20.x.(x+7)$$

$\Longleftrightarrow \quad 75(x+7) - 66x = 2x(x+7)$

$\Longleftrightarrow \quad 75x + 525 - 66x = 2x^2 + 14x$

$\Longleftrightarrow \quad 75x - 66x - 2x^2 - 14x + 525 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad -5x - 2x^2 + 525 = 0$

$\Longleftrightarrow \quad 2x^2 + 5x - 525 = 0$ (μορφῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$)

$$\Longleftrightarrow 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{525}{2}\right) = 0.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 5^2 - 4.2.(-525) = 25 + 4200 = 4425 > 0$ ὑπάρχουν λοιπὸν λύσεις τῆς δοθείσης.

Συνεχίζοντες ἔχομεν

$$\Longleftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{525}{2} = 0 \text{ (τῆς μορφῆς } x^2 + kx + \lambda = 0)$$

$$\frac{k}{2} = \frac{5}{4},\ \lambda = -\frac{525}{2},\ \tau = \frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda}}{2} = \frac{\sqrt{4225}}{4} = \frac{65}{4}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\left(x + \frac{5}{4}\right) + \frac{65}{4}\right]\left[\left(x + \frac{5}{4}\right) - \frac{65}{4}\right] = 0.$$

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι $x = -\frac{70}{4}$ καὶ $x = \frac{60}{4} = 15$.

Ἡ λύσις $x = -\frac{70}{4}$ ἀπορρίπτεται, ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ χιλιογράμμου τῆς ζαχάρεως εἶναι 15 δρχ.

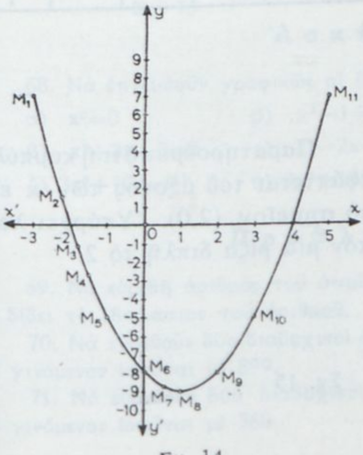
12.4. Γραφικὴ ἐπίλυσις ἐξισώσεως 2ου βαθμοῦ.

Παραδείγματα :

1ον. Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \quad (1)$$

μὲ τὴν βοήθειαν τῆς γραφικῆς παραστάσεως.



Σχ. 14

Ἐὰν θέσωμεν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) ἴσον μὲ y, προκύπτει ἡ συνάρτησις

$f: x \xrightarrow{f} x^2 - 2x - 8 = y \quad (x \in \Pi)$.

Ἡ συνάρτησις αὐτὴ παριστάνει εἰς τὸ ἐπίπεδον xOy μίαν καμπύλην (ἐδῶ παραβολήν). Γράφομεν τὴν καμπύλην αὐτὴν καὶ εἰς τὰ σημεῖα ποὺ τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x, εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ἄς ὁρίσωμεν μερικὰ σημεῖα τῆς καμπύλης.

Διά :	$x=-3$	$y=7$	$M_1(-3,7)$
»	$x=-2,25$	$y=1,56$	$M_2(-2,25,\ 1,56)$
»	$x=-1,8$	$y=-1,16$	$M_3(-1,8,\ -1,16)$
»	$x=-1,5$	$y=-2,75$	$M_4(-1,5,\ -2,75)$
»	$x=-1$	$y=-5$	$M_5(-1,\ -5)$
»	$x=0$	$y=-8$	$M_6(0,\ -8)$
»	$x=\frac{1}{2}$	$y=-8\frac{3}{4}$	$M_7\left(\frac{1}{2},\ -8\ \frac{3}{4}\right)$
»	$x=1$	$y=-9$	$M_8(1,\ -9)$
»	$x=2$	$y=-8$	$M_9(2,\ -8)$
»	$x=3$	$y=-5$	$M_{10}(3,\ -5)$
»	$x=5$	$y=7$	$M_{11}(5,\ 7)$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ καμπύλη τέμνει τὸν ἄξονα τῶν x εἰς τὰ σημεῖα (—2, 0) καὶ (4, 0). Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι αἱ −2 καὶ 4 σχ. 14.

2ον. Νὰ λυθῆ ἐπίσης γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις:

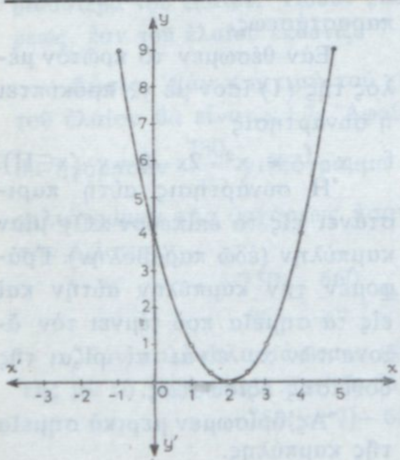
$$x^2-4x+4=0 \quad (2),$$

ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἔχομεν :

$$g : x \xrightarrow{g} x^2-4x+4=y \quad (x\in\Pi)$$

Ἡ ὁποία παριστάνει γραφικῶς τὴν καμπύλην τοῦ κάτωθι σχήματος 15.

x	—1	0	1	1,5	2	2,5	3	4	5	...	...
y	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9	...	...



Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος τῶν x εἰς τὸ σημεῖον (2,0). Ὑπάρχει λοιπὸν μία ρίζα διπλῆ τὸ 2.

Σχ. 15

3ον. Νὰ εὑρεθοῦν γραφικῶς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

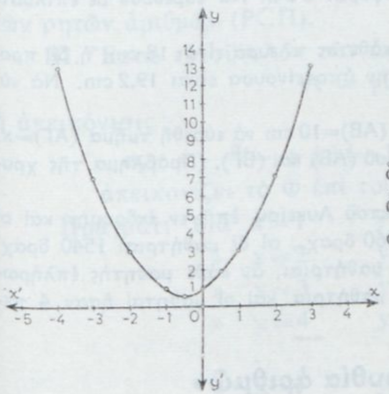
$$x^2+x+1=0 \qquad (3).$$

Ἂν τὸ πρῶτον μέλος τῆς (3) τεθῇ ἴσον μὲ y, προκύπτει:

$$\varphi: \; x \xrightarrow{\varphi} x^2+x+1=y, \qquad (x \in \Pi).$$

Κατασκευάζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν x καὶ y.

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	.	...
y	13	7	3	1	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{7}{4}$	3	7	13	.	...



Σχ. 16

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ καμπύλη δὲν συναντᾷ τὸν ἄξονα τῶν x, ἄρα ἡ ἐξίσωσις (3) δὲν ἔχει λύσιν (σχ. 16).

Ἀσκήσεις

68. Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις:

α) $x^2=0$ β) $x^2-1=0$ γ) $2x^2+3=0$

β) $x^2+2x+2=0$ ε) $x^2-2x-15=0$ στ) $x^2-6x+9=0$

ζ) $3x^2+10x=0$ η) $8x^2+14x-15=0$ θ) $6x^2+10x-1=0$.

Προβλήματα:

69. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἐλαττούμενον κατὰ 80 δίδει τὸ 18πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ.

70. Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι περιττοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ 899.

71. Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀκέραιοι ἄρτιοι ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ 360.

72. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τετραγώνου του ἐλαττούμενα κατὰ τὸ 5πλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ δίδουν τὸν ἀριθμὸν 8.

73. Ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει ὑποτείνουσαν 12 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν του.

74. Ἐὰν AB=26 cm εἶναι διάμετρος ἡμιπεριφερείας, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ε τῆς διαμέτρου τοιοῦτον ὥστε, τὸ κάθετον μὲ τὴν AB εὐθύγραμμον τμῆμα ΕΓ, ὅπου Γ σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας, νὰ ἔχῃ μῆκος 12 cm.

75. Τὸ ἐμβαδὸν ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $4\sqrt{3}$ cm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

76. Ὀρθογωνίου τριγώνου ἡ μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 15 cm, ἡ δὲ ὑποτείνουσα εἶναι κατὰ 5 cm μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ἡ ἄλλη κάθετος.

77. Ὀρθογώνιον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον διαμέτρου 10 cm, αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχουν διαφορὰν 2 cm. Νὰ εὑρεθοῦν μὲ ἐπίλυσιν ἐξισώσεως αἱ διαστάσεις αὐτοῦ.

78. Ὀρθογωνίου τριγώνου μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 18 cm, ἡ δὲ προβολὴ τῆς ἄλλης καθέτου ἐπάνω εἰς τὴν ὑποτείνουσα εἶναι 19,2 cm. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑποτείνουσα τοῦ τριγώνου.

79. Ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος (AB)=10 cm νὰ εὑρεθῇ τμῆμα (ΑΓ)=x, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον τοῦ (AB) καὶ (ΒΓ). (Πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς).

80. Ἡ τελευταία τάξις ἑνὸς μεικτοῦ Λυκείου ἐπῆγεν ἐκδρομὴν καὶ οἱ μὲν μαθηταὶ ἐπλήρωσαν συνολικὰ 2.160 δραχ., αἱ δὲ μαθήτριαι 1540 δραχ. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ καὶ πόσαι αἱ μαθήτριαι, ἂν κάθε μαθητὴς ἐπλήρωσεν 10 δραχ. περισσότερον ἀπὸ κάθε μαθήτρια καὶ οἱ μαθηταὶ ἦσαν 4 περισσότεροι τῶν μαθητριῶν.

§ 13. Ἀκολουθία ἀριθμῶν

13.1. Ὀνομάζομεν ἀπέραντον ἀριθμητικὴν ἀκολουθίαν ἢ συντόμως ἀκολουθίαν, μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐντὸς τοῦ συνόλου Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Π.χ. Ι. Ἔστω τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

$$\Phi=\{1,2,3,4,5,6, \ldots\ldots, \nu, \nu+1, \ldots\}$$

καὶ τὸ σύνολον

$$A=\{0, 3, 8, 24, \ldots, \nu^2-1, \ldots\}$$

ὅπου $A\subset\Pi$.

Ἡ ἀπεικόνισις

$$\sigma_1 : x \xrightarrow{\sigma_1} x^2-1=y, \ (x\in\Phi,\ y\in\Pi)$$

εἶναι μία ἀπέραντος ἀριθμητικὴ ἀκολουθία, ἀποτελουμένη ἀπὸ τούς ἀριθμοὺς

$$0, 3, 8, 24, \ldots, \nu^2-1, \ldots$$

II. Ἡ ἀπεικόνισις

$$\sigma_2 : x \xrightarrow{\sigma_2} \frac{1}{x} = y, \quad (x \in \Phi,\ y \in P),$$

δίδει:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\ldots, \frac{1}{\nu}, \ldots$$

Αὐτὴ ἡ διαδοχὴ τῶν εἰκόνων (ἀριθμῶν) $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots,$ $\frac{1}{\nu}, \ldots$ εἶναι μία ἀκολουθία ἐκ ῥητῶν ἀριθμῶν, ὁριζομένη διὰ τῆς ἀπεικονίσεως σ_2 τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἐντὸς τοῦ συνόλου P, τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν ($P \subset \Pi$).

III. Ἔστω τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν

$$A = \{0,2\}$$

ἡ ἀπεικόνισις:

$$\sigma_3 : x \xrightarrow{\sigma_3} 1+(-1)^x = y, \ (x \in \Phi,\ y \in A)$$

ἀπεικονίζει τὸ Φ ἐπὶ τοῦ συνόλου A.

Πράγματι διὰ $x=1$ $\quad y_1=0$

» $x=2$ $\quad y_2=2$

» $x=3$ $\quad y_3=0$

» $x=4$ $\quad y_4=2$

. . . .

» $x=\nu$ $\quad y_\nu = 1+(-1)^\nu$ (ἴσον μὲ 2 ἂν ν=ἄρτιος, 0 ἂν ν=περιττός).

Ἡ προκύπτουσα ἀκολουθία εἶναι

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_{\nu=(\text{ἄρτιος})}, y_{\nu+1}, \ldots$$

δηλ. $\quad 0,\ 2,\ 0, \ldots, 2, \quad 0, \ldots\ldots$

IV. Ἔστω ἡ ἀπεικόνισις

$$\sigma_4 : x \xrightarrow{\sigma_4} x\sqrt{2} = y \quad (x \in \Phi,\ \ y \in \Pi)$$

ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ ἀκολουθία ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς

$$\sqrt{2},\ 2\sqrt{2},\ 3\sqrt{2}, \ldots, \nu\sqrt{2}, \ldots$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων αὐτῶν γίνεται φανερόν, ὅτι μία ἀκολουθία δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου Φ ἐντὸς τοῦ συνόλου Π. (Τὸ Π, ὡς γνωστόν, περιέχει καὶ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς καὶ τοὺς σχετικοὺς ῥητοὺς καὶ τοὺς σχετικοὺς ἀρρήτους).

18.2. Καλοῦμεν πεπερασμένην ἀκολουθίαν, μίαν ἀπεικόνισιν ἑνὸς πεπερασμένου ὑποσυνόλου τοῦ Φ ἐντὸς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Π.χ. Ι ἔστω τὸ σύνολον $\Phi_1=\{1, 2, 3, 4, \cdots 50\}$,

ἡ ἀπεικόνισις:

$$f_1 : x \xrightarrow{f_1} 2x+\sqrt{2}=y, \quad (x\in\Phi_1, \quad y\in\Pi),$$

μᾶς ὁρίζει τὴν ἀκολουθίαν

$$2+\sqrt{2}, \ 4+\sqrt{2}, \ 6+\sqrt{2}, \ldots, 100+\sqrt{2}.$$

Ἡ ἀκολουθία αὐτὴ ἀποτελεῖται ἀπὸ 50 πραγματκοὺς ἀριθμοὺς (ὅρους), εἶναι δηλ. πεπερασμένη.

ΙΙ Ἔστω τὸ σύνολον $\Phi_2=\{1, 2, 3, \ldots, 500\}$,

ἡ ἀπεικόνισις

$$f_2 : x \xrightarrow{f_2} 5+3(x-1)\ 3=y \ (x\in\Phi_2, \ y\in\Pi)$$

μᾶς ὁρίζει τὴν ἑξῆς πεπερασμένην ἀκολουθίαν:

$$5, \ 8, \ 11, \ 14, \ 17, \ldots, 1502.$$

Ἀσκήσεις

81. Εὕρετε τὰς ἀκολουθίας ποὺ ὁρίζουν αἱ κάτωθι ἀπεικονίσεις:

α) $\varphi_1 : x \xrightarrow{\varphi_1} x^2+x-1=y, \quad (x\in\Phi, \ y\in\Pi)$

β') $\varphi_2 : x \xrightarrow{\varphi_2} x\sqrt{5}=y, \quad (x\in\Phi, \ y\in\Pi)$

γ') $\varphi_3 : x \xrightarrow{\varphi_3} 3.2^{x-1}=y, \quad (x\in\Phi, \ y\in\Pi)$

δ') $\varphi_4 : x \xrightarrow{\varphi_4} 2+(x-1)=y, \quad (x\in\Phi, \ y\in\Pi)$

ε') $\varphi_5 : x \xrightarrow{\varphi_5} 1+3(x-1)=y, \quad (x\in\Phi_1, y\in\Pi)$ μὲ $\Phi_1=\{1,2,3,\ldots,20\}$

στ') $\varphi_6 : x \xrightarrow{\varphi_6} 2^{x-1}=y, \quad (x\in\Phi_2, y\in\Pi)$ μὲ $\Phi_2=\{1, 2,\ldots, 8\}$

ζ') $\varphi_7 : x \xrightarrow{\varphi_7} \frac{1}{2}+\frac{3}{5}(x-1)=y, \quad (x\in\Phi_1, \ y\in\Pi)$, Φ_1 τὸ ἴδιον τῆς ἀσκήσεως ε'.

η') $\varphi_8 : x \xrightarrow{\varphi_8} \frac{64}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}=y, \ (x\in\Phi_2, y\in\Pi)$ μὲ $\Phi_2=\{1, 2, 3,\ldots, 6\}$.

13.3 Ἀριθμητικὴ πρόοδος.

Μία ἀκολουθία ἀπὸ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α_1, α_2, $\alpha_3 \ldots$, α_ν, $\alpha_{\nu+1}$, ... λέγεται ἀριθμητικὴ πρόοδος, ἂν ἡ διαφορὰ δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της $\alpha_{\nu+1}$ α_ν εἶναι ἀριθμὸς σταθερός.

Ὁ σταθερὸς αὐτὸς ἀριθμὸς λέγεται διαφορὰ ἢ λόγος τῆς προόδου καὶ θὰ τὸν συμβολίζωμεν μὲ τὸ γράμμα ω.

Π.χ. ἡ ἀκολουθία :

$3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11, \ldots, 3+(\nu-1)\,2, \ldots \qquad (\nu \in \Phi)$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $5-3=2$.

Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία :

$-10, -7, -4, -1, 2, \ldots, -10+(\nu-1)\ 3, \ldots, \quad (\nu \in \Phi)$

εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος μὲ λόγον $-7-(-10)=-7+10=3$.

Ἐὰν ὁ λόγος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς ἡ πρόοδος λέγεται **αὔξουσα**, ἂν δὲ ἀρνητικὸς λέγεται **φθίνουσα.** Ἂς ὀνομάσωμεν μὲ α_1 τὸν πρῶτον ὅρον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μὲ λόγον ω καὶ μὲ α_ν τὸν νυοστὸν ὅρον της, τότε ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς προόδου ἔχομεν :

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega} \qquad (1)$$

Μὲ τὸν τύπον (1) ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν νυοστὸν ὅρον μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α_1, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων (ἀπὸ τὸν πρῶτον μέχρι καὶ τοῦ α_ν) καὶ τὸν λόγον ω.

Παραδείγματα : 1ον **Νὰ εὑρεθῇ ὁ 30ὸς ὅρος τῆς ἀριθμ. προόδου**

4, 7, 10, 13, 16, . . .

Ἔχομεν : $\alpha=4, \quad \nu=30, \quad \omega=3$

$$\alpha_{30}=4+(30-1).3=4+29.3=4+87=91, \text{ ἄρα}$$

ὁ 30ὸς ὅρος της εἶναι ὁ 91.

2ον **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος μιᾶς ἀριθ. προόδου, τῆς ὁποίας ὁ 91ος ὅρος εἶναι 440 καὶ ὁ πρῶτος −10.**

Ἔχομεν :

$$\alpha_\nu = 440, \quad \alpha_1 = -10, \quad \nu = 91$$

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega \iff 440 = -10 + (91-1)\,\omega \iff 440 = -10 + 90\omega$$

$$\iff 440 + 10 = 90\,\omega \iff \omega = \frac{450}{90} = 5.$$

Ὁ λόγος λοιπὸν τῆς προόδου εἶναι 5 καὶ ἡ πρόοδος εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$-10, \ -5, \ 0, \ 5, \ 10, \ 15, \ldots, 440.$$

3ον **Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ 61ος ὅρος εἶναι** −177 **καὶ ὁ λόγος −3**.

Ἔχομεν, $\alpha_\nu = \alpha_{61} = -177, \quad \nu = 61, \quad \omega = -3,$

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega \iff -177 = \alpha_1 + (61-1)\,.\,(-3) \iff$$

$$\iff -177 = \alpha_1 + 60\,.\,(-3) \iff -177 = \alpha_1 - 180 \iff \alpha_1 = 180 - 177 = 3.$$

Ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\alpha_1 = 3$.

4ον **Νὰ εὑρεθῆ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον 8, τελευταῖον ὅρον 200 καὶ λόγον 6.**

Ἔχομεν:

$$\alpha_\nu = 200,\ \alpha_1=8 \text{ καὶ } \omega=6$$

$$\alpha_\nu = \alpha_1+(\nu-1)\omega \text{ ἢ } 200=8+(\nu-1)\,6 \iff$$

$$200=8+6\nu-6 \iff 6\nu=200-8+6 \iff$$

$$6\nu=198 \iff \nu=\frac{198}{6} \iff \nu=33.$$

Ἡ πρόοδος λοιπὸν αὐτὴ ἔχει 33 ὅρους.

Ἀσκήσεις

82. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἀκολουθιῶν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὰς προόδους καὶ ποῖαι ὄχι, εὕρετε τὸν λόγον ω αὐτῶν.

α) $1, 6, 11, 16, 21, \ldots$

β) $-12{,}5,\ -10,\ -7{,}5,\ -5,\ -2{,}5, \ldots$

γ) $1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, \ldots$

δ) $\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \ldots$

ε) $0{,}111\ldots,\ 0{,}222\ldots,\ 0{,}333\ldots,\ \ldots$

83. Εὕρετε τὸν 66ον ὅρον τῶν ἀριθ. προόδων :

α) $-1, \frac{1}{2}, 2, 3\frac{1}{2}, \ldots$

β) $-11{,}6,\ -10,\ -8{,}4, \ldots$

γ) $2{,}55\ldots,\ 2{,}66\ldots,\ 2{,}77\ldots,\ \ldots$

δ) $1+\sqrt{2},\ 1+2\sqrt{2},\ 1+3\sqrt{2}, \ldots$

84. Νὰ εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, ὅταν δίδωνται τὰ κάτωθι στοιχεῖα :

α) $\alpha_1=\sqrt{5}$ καὶ ὁ 55ος εἶναι $217\sqrt{5}$.

β) $\alpha_1=0{,}75$ καὶ $\alpha_{16}=5{,}25$.

γ) $\alpha_1=-\frac{35}{11}$ καὶ $\alpha_{11}=\frac{735}{11}$.

85. Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρόοδοι ἐκ τῶν κάτωθι δεδομένων :

α) $\alpha_{21}=48$ καὶ $\omega=4$.

β) $\alpha_{29}=\frac{19}{2}$ καὶ $\omega=\frac{1}{2}$.

γ) $\alpha_{16}=16\sqrt{3}+14$ καὶ $\omega=\sqrt{3}+1$.

86. Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῶν ἀριθμητικῶν προόδων, τῶν ὁποίων δίδονται τὰ στοιχεῖα :

α) Ὁ τελευταῖος εἶναι $-9\sqrt{7}$, $\alpha_1=\sqrt{7}$, $\omega=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$.

β) Ὁ τελευταῖος εἶναι $\frac{77\sqrt{2}-73}{6}$, $\alpha_1=\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ καὶ $\omega=\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

γ) Ὁ τελευταῖος εἶναι 11,5, $\alpha_1=17{,}5$ καὶ $\omega=-\frac{1}{2}$.

87. Νὰ προσδιορισθῆ ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος εἰς τὴν ὁποίαν ὁ 21ος ὅρος εἶναι 4 καὶ ὁ 29ος εἶναι 8.

13.4. Ἄθροισμα τοῦ ν πρώτων ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.

Ἔστω, ὅτι μᾶς δίδεται ἡ ἀριθμητικὴ πρόοδος

(1) 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34,

ἡ ὁποία ἔχει 12 ὅρους καὶ τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὸ ἄθροισμα τῶν 12 αὐτῶν ὅρων. Ἕνας ἁπλοῦς τρόπος εἶναι νὰ προσθέσωμεν αὐτοὺς μὲ τὴν συνηθισμένη μέθοδον ποὺ διδάσκει ἡ Ἀριθμητική, ἐπειδὴ ὅμως πολλάκις ἡ πρόσθεσις αὐτὴ γίνεται ἐπίπονος, λόγῳ τῶν πολλῶν ὅρων ποὺ ἐνδεχομένως θὰ ἔχη, δι' αὐτὸ σκόπιμον εἶναι, νὰ εὕρωμεν ἕνα γενικὸν τύπον ποὺ νὰ μᾶς δίδη ἀμέσως τὸ ζητούμενον ἄθροισμα.

Πρὸς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι,

$$\begin{aligned} 1+34&=35\\ 4+31&=35\\ 7+28&=35\\ 10+25&=35\\ 13+22&=35\\ 16+19&=35 \end{aligned}$$

ἤτοι, **τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου ποὺ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τῶν ἄκρων ὅρων, εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.**

Γενικῶς, ἂν παραστήσωμεν μὲ A_ν τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-2}, \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ θὰ εἶναι:

$$A_\nu=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-2}+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu$$

Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\begin{aligned} A_\nu&=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-2}+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu\\ A_\nu&=\alpha_\nu+\alpha_{\nu-1}+\alpha_{\nu-2}+\ldots+\alpha_3+\alpha_2+\alpha_1 \end{aligned}$$

$$A_\nu+A_\nu=(\alpha_1+\alpha_\nu)+(\alpha_2+\alpha_{\nu-1})+(\alpha_3+\alpha_{\nu-2})+\ldots+(\alpha_{\nu-2}+\alpha_3)+(\alpha_{\nu-1}+\alpha_2)+(\alpha_\nu+\alpha_1).$$

Ἕκαστον ἄθροισμα ποὺ εὑρίσκεται μέσα εἰς τὰς παρενθέσεις εἶναι ἴσον μὲ τὸ $(\alpha_1+\alpha_\nu)$, σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ἰδιότητα.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$2\ A_\nu = (\alpha_1+\alpha_\nu) + (\alpha_1+\alpha_\nu) + (\alpha_1+\alpha_\nu) + \ldots\ldots + (\alpha_1+\alpha_\nu) + (\alpha_1+\alpha_\nu) + (\alpha_1+\alpha_\nu)$$

ἢ $2\ A_\nu = \nu\,(\alpha_1+\alpha_\nu)$

ἢ $A_\nu = \dfrac{\nu\,(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2} \iff \boxed{A_\nu = \dfrac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\,.\,\nu}$

Εἰς τὸ παράδειγμα (1) θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$A_{12} = \frac{12(1+34)}{2} = 6.35 = 210.$$

Ἄς εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν 100 πρώτων ὅρων τῆς προόδου:

$$\frac{1}{2},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{6},\ \frac{3}{2},\ \frac{11}{6},\ \ldots,$$

τῆς ὁποίας ὁ τελευταῖος εἶναι $\frac{67}{2}$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον τοῦ ἀθροίσματος εὑρίσκομεν:

$$A_{100} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{67}{2}}{2}\,.\,100 = \frac{68}{4}\,.\,100 = 17.100 = 1700.$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος τοῦ ἀθροίσματος δύναται νὰ λάβῃ καὶ μίαν ἄλλην μορφήν, ὥστε νὰ δυνάμεθα νὰ εὑρίσκωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ὅταν δίδωνται ὁ πρῶτος α_1, ὁ λόγος ω καὶ τὸ πλῆθος ν.

Ἔχομεν εὕρει τοὺς τύπους

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\,\omega$$

καὶ $$A_\nu = \frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\nu,$$

ἂν τὴν τιμὴν τοῦ α_ν ἐκ τοῦ πρώτου τύπου ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν δεύτερον θὰ ἔχωμεν:

$$A_\nu = \frac{\alpha_1 + [\alpha_1 + (\nu-1)\,\omega]}{2}\,.\,\nu = \frac{2\,\alpha_1 + (\nu-1)\,\omega}{2}\,.\,\nu$$

ἤτοι $$\boxed{A_\nu = \frac{2\,\alpha_1 + (\nu-1)\,\omega}{2}\,.\,\nu}$$

Ἐφαρμογαί. 1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 150 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθ. προόδου:

$$-20,\ -17,\ -14,\ \ldots$$

Παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι, ω=3, $\alpha_1=-20$ καὶ ν=150, ἄρα ἐκ τοῦ τύπου $A_\nu = \dfrac{2\alpha_1+(\nu-1)\,\omega}{2}\nu$ ἔχομεν,

$$A_{150}=\frac{2\,.\,(-20)+(150-1)\,.\,3}{2}\,.\,150=\frac{-40+149\,.\,3}{2}\,.\,150=$$

$$=\frac{-40+447}{2}\,.\,150=\frac{407}{2}\,.\,150=30525.$$

2. Κατὰ τὴν πτῶσιν τῶν σωμάτων εἰς τὸ κενόν, τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον (sec) διανύουν διάστημα 4,9 m καὶ εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἑπόμενα δευτερόλεπτα 9,8 m περισσότερα ἀπὸ ὅ,τι εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον διήνυσεν ἕνα σῶμα πῖπτον εἰς τὸ κενὸν ἐπὶ 20 sec.

Λύσις. Ἔχομεν τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον

$$4{,}9,\quad 14{,}7,\quad 24{,}5,\ \ldots$$

μὲ $\alpha_1=4{,}9$ $\omega=9{,}8$ καὶ $\nu=20$

ἄρα ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον

$$A_\nu=\frac{2\alpha_1+(\nu-1)\,\omega}{2}\,.\,\nu$$

εὑρίσκομεν :

$$A_{20}=\frac{2.4{,}9+(20-1)9{,}8}{2}\,.\,20=\frac{9{,}8+19\,.\,9{,}8}{2}\,.\,20=1960.$$

Τὸ σῶμα λοιπὸν διέτρεξε κατὰ τὰ 20 πρῶτα δευτερόλεπτα τῆς πτώσεώς του διάστημα 1960 m.

3ον. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα −265, πρῶτον ὅρον 20 καὶ τελευταῖον −46,5.

Ἔχομεν τὸν τύπον

$$A_\nu=\frac{\alpha_1+\alpha_\nu}{2}\cdot\nu$$

καὶ δι᾽ ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν

$$-265=\frac{20+(-46{,}5)}{2}\nu \iff$$

$$-530=-26{,}5\cdot\nu \iff$$

$$\nu=\frac{530}{26{,}5}=20.$$

Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς προόδου εἶναι 20.

4ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της εἶναι 66, ὁ πρῶτος −9 καὶ ὁ λόγος 3.

Χρησιμοποιοῦντες τὸν τύπον $A_\nu = \frac{2\alpha_1 + (\nu-1)\omega}{2} \cdot \nu$ ἔχομεν:

$$66 = \frac{2(-9) + (\nu-1)3}{2} \cdot \nu \iff$$

$$132 = -18\nu + 3\nu^2 - 3\nu \iff$$

$$3\nu^2 - 21\nu - 132 = 0 \iff$$

$$\nu^2 - 7\nu - 44 = 0.$$

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον αὐτὴν ἐξίσωσιν, ἔχομεν:

$k = -7$, $\lambda = -44$, $k^2 - 4\lambda = (-7)^2 - 4.(-44) = 49 + 176 = 225 > 0$

καὶ $\tau = \frac{\sqrt{k^2 - 4\lambda}}{2} = \frac{\sqrt{225}}{2} = \frac{15}{2}$, ἄρα

$$\nu^2 - 7\nu - 44 = \left[\left(\nu + \frac{-7}{2}\right) + \frac{15}{2}\right]\left[\left(\nu + \frac{-7}{2}\right) - \frac{15}{2}\right] = 0$$

$$\iff \left(\nu + \frac{8}{2}\right)\left(\nu - \frac{22}{2}\right) = 0 \iff (\nu + 4)(\nu - 11) = 0 \iff$$

$$\nu + 4 = 0 \iff \nu = -4$$

$$\nu - 11 = 0 \iff \nu = 11.$$

Ἡ λύσις —4 ἀπορρίπτεται, διότι ὁ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός. Ἄρα τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἐν λόγῳ προόδου εἶναι $\nu = 11$.

Ἀσκήσεις

88. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 120 πρώτων ὅρων τῶν κάτωθι ἀριθμητικῶν προόδων:

α) $1, 2, 3, 4, \ldots$ β) $3, 4, 5, \ldots$

γ) $2, 4, 6, 8, \ldots$ δ) $-1, -2, -3, -4, \ldots$

ε) $-2, -4, -6, -8, \ldots$ στ) $-30, -25, -20, \ldots$

ζ) $-\frac{3}{4}, -\frac{2}{4}, -\frac{1}{4}, \ldots$ η) $-10, -9{,}5, -9, \ldots$

θ) $-\frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{5}, \ldots$ ι) $-6\alpha, -2\alpha, 2\alpha, \ldots$

ια) $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}, \sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}-1}{2}, \ldots$ ιβ) $7, 7+\sqrt{3}, 7+2\sqrt{3}, \ldots$

89. Μία ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχει $\alpha_1 = 6\sqrt{5}$, $\alpha_{29} = 34\sqrt{5} + 28$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 29 πρώτων ὅρων της.

90. Ἕνα αὐτοκίνητον κινεῖται ἔτσι ὥστε τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον,

ἀφ' ἧς ἐτέθη εἰς κίνησιν διέτρεξε 2,5 m καὶ εἰς κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ ἑπόμενα δευτερόλεπτα 18 m περισσότερα ἀπὸ ὅ,τι εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον διήνυσε κατὰ τὴν πρώτην ὥραν τῆς κινήσεώς του.

91. Ἕνα σῶμα ποὺ ρίπτεται ἄνω κατακορύφως εἰς τὸ κενὸν κάθε δευτερόλεπτον διατρέχει διάστημα κατὰ 9,8 m ὀλιγώτερον ἀπὸ ὅ,τι εἰς τὸ ἀμέσως προηγούμενον δευτερόλεπτον. Εἰς πόσον ὕψος θὰ φθάσῃ τὸ σῶμα ἂν τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον διέτρεξε διάστημα 25 m ;

92. Ὡρολόγιον κτυπᾷ τὰς ὥρας ἀπὸ τῆς 1ης ἕως τῆς 24ης ὥρας. Πόσα κτυπήματα κάνει τὸ 24ωρον ;

93. Πόσον εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ πρῶτον ὅρον $\alpha_1=13$, τελευταῖον ὅρον 107 καὶ μὲ ἄθροισμα ὅρων 5400 ;

94. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου μὲ ἄθροισμα ὅρων 112, πρῶτον ὅρον — 8 καὶ λόγον 2.

13.5. Παρεμβολὴ ὅρων.

Ἔστω ὅτι θέλομεν μεταξὺ τοῦ 2 καὶ 98 νὰ παρεμβάλωμεν 31 ἀριθμοὺς ὥστε μαζὶ μὲ τοὺς δοθέντας νὰ ἀποτελέσουν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον δὲν γνωρίζομεν εἰς τὴν προκειμένην περίπτωσιν εἶναι ὁ λόγος τῆς προόδου.

Προφανῶς τὸ 2 εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου καὶ ὁ 98 ὁ τελευταῖος, τὸ δὲ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu+2=31+2$, ἄρα θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸν τύπον $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$.

$$\alpha_{\nu+2}=\alpha_1+[(\nu+2)-1]\omega$$
$$98=2+[(31+2)-1]\omega \iff$$
$$98=2+32\omega \iff$$
$$32\omega=96 \iff \omega=3.$$

Ἡ πρόοδος λοιπὸν εἶναι :

$$2,\ 5,\ 8,\ 11, \ldots,\ 98,$$

Γενικῶς λοιπόν, ἐὰν θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ ἑνὸς ἀριθμοῦ α_1 καὶ ἑνὸς ἄλλου τ, ν ὅρους ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μετὰ τῶν δοθέντων ἀριθ. πρόοδον, ἔχομεν :

$$\alpha_{\nu+2}=\alpha_1+[(\nu+2)-1]\omega$$
$$\tau=\alpha_1+(\nu+1)\omega$$

καὶ $$\boxed{\omega=\frac{\tau-\alpha_1}{\nu+1}}\ .$$

Ὁ τύπος αὐτὸς λέγεται τύπος παρεμβολῆς.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

95. Μεταξὺ τοῦ $-\frac{3}{4}$ καὶ $85\frac{1}{4}$ νὰ παρεμβληθοῦν 42 ἀριθμοί, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μετὰ τῶν δοθέντων ἀριθ. πρόοδον. Γράψατε αὐτήν.

96. Μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 2 νὰ παρεμβληθοῦν 149 ἀριθμοί, ὥστε μετὰ τῶν δοθέντων νὰ ἀποτελέσουν ἀριθ. πρόοδον.

97. Μεταξὺ τοῦ 0,75 καὶ —9,25 νὰ παρεμβληθοῦν 19 ἀριθμοί, ὥστε μὲ τοὺς δοθέντας νὰ ἀποτελέσουν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Σχηματίσατε αὐτήν.

13.6. Γεωμετρικὴ πρόοδος.

Ὀνομάζομεν γεωμετρικὴν πρόοδον μίαν ἀριθμητικὴν ἀκολουθίαν, τῆς ὁποίας ὁ λόγος $\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu$ δύο ὁποιωνδήποτε διαδοχικῶν ὅρων της εἶναι σταθερὸς ἀριθμός. Τὸ πηλίκον $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$ λέγεται λ ό γ ο ς τῆς προόδου.

Π.χ. α) 1, 2, 4, 8, 16,..., $2^{\nu-1}$,... εἶναι γ. πρόοδος μὲ λόγον 2.

β) $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ \frac{1}{8},...$ εἶναι γ. πρόοδος μὲ λόγον $-\frac{1}{2}$.

γ) 1, 10, 100, 1000,..., $10^{\nu-1}$,... εἶναι γ. πρόοδος μὲ λόγον 10.

Προφανῶς εἰς μίαν γεωμετρικὴν πρόοδον κάθε ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν προηγούμενόν του πολλαπλασιασμένον μὲ τὸν λόγον

$$\omega = \frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$$

Ἑπομένως μία γεωμετρικὴ πρόοδος, ὅπως ἡ

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,...,\ \alpha_\nu\ ,\ \alpha_{\nu+1},...$$

μὲ λόγον ω, ἠμπορεῖ νὰ παρασταθῆ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_1,\ \alpha_1\omega,\ \alpha_1\omega,\ \alpha_1\omega^2,...\ \alpha_1\omega^{\nu-1}\ ,\ \alpha_1\omega^\nu\ ,...$$

Ἡ σχέσις $\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$ ποὺ συνδέει τὰς μεταβλητὰς α_ν (τελευταῖος ὅρος ἢ νυοστὸς ὅρος), α_1 (πρῶτος ὅρος), ω (λόγος) καὶ ν (πλῆθος πρώτων ὅρων) ἀποτελεῖ ἕνα πρῶτον τύπον τῆς γ. προόδου.

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}} \qquad (1)$$

Ἐφαρμογαὶ τοῦ τύπου (1)

I. Νὰ εὑρεθῆ ὁ 8ος ὅρος τῆς γ. προόδου:

$$-\frac{5}{3},\ \frac{5}{6},-\frac{5}{12},...$$

Ἔχομεν $\alpha_1 = -\frac{5}{3}$, $\omega = -\frac{1}{2}$, $\nu=8$, ἄρα ὁ 8ος ὅρος της εἶναι:

$$\alpha_8 = -\frac{5}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{8-1} = -\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2^7}\right) = -\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{1}{128}\right) = \frac{5}{384}$$

II. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου μὲ 10ον ὅρον $\frac{1}{10^9}$ καὶ λόγον $\frac{1}{10}$.

Ἔχομεν:

$$\alpha_{10} = \alpha_1\,\omega^{10-1}$$

$$\frac{1}{10^9} = \alpha_1\left(\frac{1}{10}\right)^9 \iff \alpha_1 = 10^9\cdot\frac{1}{10^9} = 1$$

ὥστε ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ἡ μονάδα.

III. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος γ. προόδου τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 1 καὶ 6ος ὁ 243.

Ἔχομεν:

$$\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$$

καὶ ἀντικαθιστῶντες ὅπου $\alpha_\nu = \alpha_6 = 243$, $\alpha_1 = 1$ καὶ $\nu = 6$ εὑρίσκομεν:

$$\alpha_6 = \alpha_1\omega^{6-1} \iff$$

$$243 = 1\cdot\omega^5 \iff$$

$$3^5 = \omega^5 \iff \omega = 3,$$

ὁ λόγος λοιπὸν τῆς προόδου εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3.

IV. Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μιᾶς γ. προόδου μὲ πρῶτον ὅρον $\frac{1}{2}$ λόγον 2 καὶ τελευταῖον ὅρον 32.

Ἔχομεν τὸν τύπον

$$\alpha_\nu = \alpha_1\omega^{\nu-1}$$

ἀντικαθιστῶντες ὅπου $\alpha_\nu = 32$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\omega=2$ εὑρίσκομεν:

$$32 = \frac{1}{2}\cdot 2^{\nu-1} \iff$$

$$64 = 2^{\nu-1} \iff 2^6 = 2^{\nu-1} \iff \nu - 1 = 6 \iff \nu = 7$$

Ἄρα ἡ γ. πρόοδος ἔχει 7 ὅρους.

Ἀσκήσεις

98. Νὰ εὑρεθῇ ὁ 6ος ὅρος τῶν κάτωθι γ. προόδων:

α) $-40, -20, -10, \ldots$

β) $-\frac{3}{9}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \ldots$

γ) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{10}$, $4\sqrt{5}$,...

99. Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ 4ος ὅρος εἶναι $\frac{1}{226}$ καὶ ὁ λόγος της $\frac{1}{3}$.

100. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος γ. προόδου τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 3 καὶ ὁ 5ος 729.

13. 7. Ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.

Ἂς λάβωμεν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον

$$4,\ 4\cdot 3,\ 4\cdot 3^2,\ 4\cdot 3^3,\ldots,\ 4\cdot 3^9,$$

ἡ ὁποία ἔχει 10 ὅρους καὶ ἂς προσπαθήσωμεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων της.

Συμβολίζομεν μὲ A_{10} τὸ ζητούμενον ἄθροισμα καὶ γράφομεν:

$$A_{10}=4+4\cdot 3+4\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\ldots+4\cdot 3^9 \qquad (1)$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐπιμεριστικῶς καὶ τὰ δύο μέλη τῆς σχέσεως αὐτῆς μὲ τὸν λόγον $\omega=3$ εὑρίσκομεν:

$$3\cdot A_{10}=4\cdot 3+4\cdot 3^2+4\cdot 3^3+4\cdot 3^4+\ldots+4\cdot 3^{10} \qquad (2)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) τὴν (1), ἔχομεν:

$$3A_{10}-A_{10}=-4+0+0+\ldots+4\cdot 3^{10}$$

$$\text{ἢ}\quad A_{10}(3-1)=4\cdot 3^{10}-4 \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_{10}=\frac{4\cdot 3^{10}-4}{3-1}=118.096$$

Γενικῶς λοιπὸν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν διὰ κάθε γεωμετρικὴν πρόοδον,

$$\alpha_1,\ \alpha_1\omega,\ \alpha_1\omega^2,\ \alpha_1\omega^3,\ldots,\ \alpha_1\omega^{\nu-1}$$, τὸ ἄθροισμα.

$$A_\nu=\alpha_1+\alpha_1\omega+\alpha_1\omega^2+\alpha_1\omega^3+\ldots+\alpha_1\omega^{\nu-1} \qquad (3)$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς μὲ τὸν λόγον ω εὑρίσκομεν:

$$\omega A_\nu=\alpha_1\omega+\alpha_1\omega^2+\alpha_1\omega^3+\alpha_1\omega^4+\ldots+\alpha_1\omega^\nu \qquad (4)$$

Ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὴν (4) τὴν (3) λαμβάνομεν:

$$\omega A_\nu - A_\nu=-\alpha_1+o+o+\ldots+\alpha_1\omega^\nu \quad \Longleftrightarrow$$

$$A_\nu(\omega-1)=\alpha_1\omega_\nu-\alpha_1$$

$$\boxed{A_\nu=\frac{\alpha_1\omega^\nu-\alpha_1}{\omega-1}} \qquad (\omega\neq 1)$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος ποὺ μᾶς δίδει τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου.

'Εφαρμογαί.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὅρων (A_8) τῆς γ. προόδου:

$$20, 10, 5, \frac{5}{2}, \ldots$$

ἔχομεν: $$A_8 = \frac{20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 - 20}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{20 \cdot \frac{1}{256} - 20}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= -2 \cdot 20 \cdot \left(\frac{1}{256} - 1\right) = -2 \cdot 20 \cdot \left(\frac{1}{256} - \frac{256}{256}\right) =$$

$$= 40 \cdot \frac{255}{256} = 67\frac{31}{32}.$$

2ον. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 15 πρώτων ὅρων (A_{15}) τῆς γ. προόδου,

$$\frac{1}{2}, 1, 2, 4, 8, \ldots$$

Ἔχομεν: $$A_{15} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2^{15} - \frac{1}{2}}{2-1} = \frac{2^{15}-1}{2} = \frac{32768-1}{2} = \frac{32767}{2} =$$

$$= 16383{,}5,$$

3ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $9+99+999+9999+99999$ χρησιμοποιοῦντες τοὺς τύπους τοῦ ἀθροίσματος γ. προόδου.

Εἶναι $9+99+999+9999+99999 = (10-1)+(100-1)+$
$+(1000-1)+(10.000-1)+(100.000-1) = (10+100+1000+10000$
$+100000) - 5 = 10(1+10+10^2+10^3+10^4) - 5 =$

$$= 10\,\frac{1 \cdot 10^5 - 1}{10-1} - 5 = 111105$$

4ον. Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 6 πρώτων ὅρων τῆς γ. προόδου.

$$6, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}, \ldots$$

ἔχομεν: $\alpha_1 = 6$, $\omega = -\frac{1}{2}$ καὶ $\nu = 6$,

ἄρα

$$A_6 = \frac{6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 - 6}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{6 \cdot \frac{1}{64} - 6}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{32} - 6}{-\frac{3}{2}} = \frac{\frac{-189}{32}}{-\frac{3}{2}} =$$

$$= \frac{189 \cdot 2}{32 \cdot 3} = \frac{63}{16}.$$

13.8 Παρεμβολὴ ὅρων.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν μεταξὺ τοῦ 5 καὶ 320 νὰ παρεμβάλωμεν ἕνα ἀριθμὸν (γεωμετρικὸς μέσος), ὥστε μαζὶ μὲ αὐτοὺς νὰ ἀποτελέσουν γεωμετρικὴν πρόοδον.

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γεωμ. πρόοδος θὰ ἔχῃ πρῶτον ὅρον $\alpha_1=5$, τελευταῖον $\alpha_3=320$ καὶ πλῆθος ὅρων $\nu=3$

Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον $\alpha_\nu = \alpha_1 \omega^{\nu-1}$ εὑρίσκομεν :

$$320 = 5 \cdot \omega^{3-1} \iff$$
$$320 = 5 \cdot \omega^2 \iff \omega^2 = 64 \iff \omega^2 - 64 = 0 \iff (\omega+8) \cdot (\omega-8) = 0,$$
$$\omega+8=0 \iff \omega=-8 \text{ καὶ } \omega-8=0 \iff \omega=8,$$

ἄρα, ὁ ζητούμενος λόγος ω ἔχει δύο τιμὰς $\omega_1=8$ καὶ $\omega_2=-8$. Ἐὰν ὅμως θέλωμεν ἡ προκύπτουσα πρόοδος νὰ ἔχῃ ὅρους θετικοὺς τὸν $\omega_2=-8$ ἀπορρίπτομεν.

Εὕρομεν λοιπὸν τὴν πρόοδον

$$5, \quad 40, \quad 320 \quad \text{μὲ } \omega=8$$

Ἐὰν τώρα μεταξὺ τοῦ 5 καὶ 40 καθὼς καὶ μεταξὺ τοῦ 40 καὶ 320 παρεμβάλωμεν ἕνα ἀκόμη ἀριθμὸν θὰ εὕρωμεν τὴν πρόοδον μὲ θετικοὺς ὅρους

5, 20, 40, 160, 320. Ὁμοίως, ἐὰν συνεχίσωμεν,

θὰ εὕρωμεν :

5, 10, 20, 40, 80, 160, 320.

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἠμποροῦμεν νὰ παρεμβάλωμεν καὶ ἄλλους γεωμετρικοὺς μέσους ἔτσι ὥστε, ἡ διαφορὰ ἡ ὁποία παρουσιάζεται ἀρχικῶς μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν νὰ γίνεται ὁλονὲν καὶ μικροτέρα, πρᾶγμα ποὺ εἶναι χρήσιμον διὰ διαφόρους ἐφαρμογὰς τῶν προόδων.

Παρατήρησις. Ἐὰν οἱ ἀρχικῶς δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι ἑτερόσημοι, δὲν δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν γεωμετρικοὺς μέσους μέσα εἰς τὸ σύστημα Π τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐφαρμογαί. 1ον Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 486 νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἀριθμοὶ ποὺ μαζὶ μὲ τοὺς δοθέντας νὰ ἀποτελέσουν γ. πρόοδον μὲ ὅρους θετικούς.

Πρῶτον παρεμβάλλομεν ἕνα μεταξὺ τῶν 6 καὶ 486,

ἔχομεν :

$$\alpha_3 = \alpha_1\, \omega^{3-1}$$

$$\text{ἢ } 486 = 6 \cdot \omega^2 \Longleftrightarrow$$

$$\omega^2 = 81 \Longleftrightarrow \omega^2 - 81 = 0$$

$\Longleftrightarrow (\omega+9)\,(\omega-9) = 0$ ἄρα ἔχομεν τοὺς λόγους $\omega' = -9$ καὶ $\omega = 9$ ($\omega' = -9$ ἀπορρίπτεται, ἂν θέλωμεν ἡ γ. πρόοδος νὰ ἔχῃ ὅρους θετικούς).

Θὰ σχηματισθῇ λοιπὸν ἡ πρόοδος:

$$6,\ 54,\ 486.$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$54 = 6 \cdot \omega_1^2$$

$$\Longleftrightarrow \omega_1 = 3$$

τελικῶς θὰ ἔχωμεν

$$6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486$$

2ον Μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 156 νὰ παρεμβληθοῦν 7 ἀριθμοί, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν γεωμ. πρόοδον μὲ ὅρους θετικούς.

Κατὰ πρῶτον παρεμβάλλομεν ἕνα καὶ ἔχομεν

$$\alpha_3 = \alpha_1\, \omega^{3-1} \Longleftrightarrow$$

$$256 = 1 \cdot \omega^2 \Longleftrightarrow \omega^2 - 256 = 0$$

$\Longleftrightarrow \omega' = -16$ καὶ $\omega = 16$ ($\omega' = -16$ ἀπορρίπτεται)

ἔχομεν λοιπὸν τὴν πρόοδον

$$1,\ 16,\ 256$$

Τώρα παρεμβάλλομεν ἕνα μεταξὺ τοῦ 1 καὶ 16 καὶ ἕνα μεταξὺ 16 καὶ 256, ἔχομεν:

$$\alpha_3 = \alpha_1 \omega^{3-1}$$

$$16 = 1\, \omega_1^2 \Longleftrightarrow \omega_1^2 - 16 = 0$$

καὶ $\omega_1 = 4$ (τὸ -4 ἀπορρίπτεται), ἄρα ἔχομεν:

$$1,\ 4,\ 16,\ 64,\ 256.$$

ὁμοίως ἐργαζόμενοι εὑρίσκομεν:

$$\alpha_3 = \alpha_1\, \omega_2^2 \Longleftrightarrow 4 = \omega_2^2 \Longleftrightarrow \omega_2^2 - 4 = 0$$

$(\omega_2 + 2)\,(\omega_2 - 2) = 0 \Longleftrightarrow \omega_2 - 2$ ($\omega_2 = -2$ ἀπορρίπτεται)

Ἡ ζητουμένη λοιπὸν γ. πρόοδος εἶναι ἡ

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ 256$$

Ἀσκήσεις

101. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπτὰ πρώτων ὅρων τῶν κάτωθι γ. προόδων.

α) $1, 2, 4, 8, \ldots$ β) $-4, 8, -16, \ldots$

γ) $5, 10, 20, \ldots$ δ) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots$

ε) $1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \ldots$ στ) $\frac{3}{7}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{21}, -\frac{1}{63}, \ldots$

ζ) $\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt{2}$, 4,... η) $\frac{4}{5}$, $\frac{2}{25}$, $\frac{1}{125}$, ...

102. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα ἐκ 10 προσθετέων τῶν κάτωθι ἀριθμῶν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων γ. προόδου:

α) $1+11+111+1111+\ldots$
β) $2+22+222+2222+\ldots$
β) $3+33+333+3333+\ldots$
δ) $4+44+444+4444+\ldots$
ε) $5+55+555+5555+\ldots$
στ) $6+66+666+6666+\ldots$
ζ) $7+77+777+7777+\ldots$
η) $8+88+888+8888+\ldots$

103. Μεταξὺ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν νὰ παρεμβληθοῦν 3 γεωμετρικοὶ μέσοι:

α) 8 καὶ 648, β) 2 καὶ 8, γ) 3 καὶ 75,
δ) 7 καὶ 28, ε) $\frac{3}{4}$ καὶ 24 στ) $\frac{1}{5}$ καὶ $\frac{1}{405}$.

104. Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ τῶν κάτωθι ἀριθμῶν 7 γεωμ. μέσοι.

α) 5 καὶ 80, β) 1 καὶ $\frac{1}{128}$, γ) 2 καὶ 162,
δ) 1 καὶ 625 ε) 1 καὶ $\frac{1}{16}$, στ) $\frac{1}{4}$ καὶ $\frac{1}{81}$.

§ 14. Ἡ ἔννοια τοῦ λογαρίθμου θετικοῦ ἀριθμοῦ.

14. 1. Ἄς γράψωμεν τὰ δύο ἑπόμενα σύνολα ἀριθμῶν κατὰ τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους:

$\Theta=\{\ldots 3^{-5}, 3^{-4}, 3^{-3}, 3^{-2}, 3^{-1}, 3^{0}, 3^{1}, 3^{2}, 3^{3}, 3^{4}, 3^{5}, \ldots\}$

$A=\{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$

Τὸ σύνολον Θ ἀποτελεῖται ἀπὸ θετικοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦν μίαν ἀπέραντον γ. πρόοδον μὲ λόγον 3.

Τὸ Α εἶναι τὸ σύνολον τῶν σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ποὺ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ὁρίζομεν τὴν ἀπεικόνισιν

$$f : x \xrightarrow{f} f(x)=y, \quad (x\in\Theta,\ y\in A),$$

τῆς ὁποίας ἀρχέτυπα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Θ καὶ εἰκόνες τῶν ἀρχετύπων τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α. Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ εἰς τὸ τυχὸν στοιχεῖον $x=3^{\alpha}\in\Theta$, ἀντιστοιχίζεται τὸ $y=\alpha\in A$, δηλ. εἰς τὸ $3^{-5}\longrightarrow -5$, εἰς τὸ $3^{0}\longrightarrow 0$ κ.ο.κ. Ἐπίσης ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ διατηρεῖ τὴν διάταξιν κατ' αὐξάνον μέγεθος τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων Θ καὶ Α καὶ ἔχει τὰς ἑξῆς τρεῖς σπουδαίας ἰδιότητας.

1η Ἰδιότης. Τὸ γινόμενον δύο ὁποιωνδήποτε στοιχείων τοῦ Θ ἔχει εἰκόνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστοίχων εἰκόνων τῶν παραγόντων εἰς τὸ σύνολον Α.

Π.χ. τὸ γινόμενον $3^{-3} \cdot 3^{4}=3^{-3+4}$ ἔχει εἰκόνα τὸ ἄθροισμα $-3+4$ τῶν -3 καὶ 4, ποὺ εἶναι εἰκόνες τῶν 3^{-3} καὶ 3^4 ἀντιστοίχως εἰς τὸ σύνολον Α,

καὶ γενικῶς, $3^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2}=3^{\alpha_1+\alpha_2} \longrightarrow \alpha_1+\alpha_2 \in A$.

2α ἰδιότης. Τὸ πηλίκον δύο ὁποιωνδήποτε στοιχείων ἀπὸ τὸ σύνολον Θ ἔχει εἰκόνα τὴν διαφορὰν τῶν εἰκόνων των εἰς τὸ σύνολον Α.

Π.χ. $3^3 : 3^2 = 3^{3-2} = 3^1 \longrightarrow 1 \in A$

καὶ γενικῶς $3^{\alpha_1} : 3^{\alpha_2} = 3^{\alpha_1-\alpha_2} \longrightarrow \alpha_1-\alpha_2 \in A$

3η ἰδιότης. Ἡ μυοστὴ δύναμη $(3^\alpha)^\mu$ ἑνὸς ὁποιουδήποτε στοιχείου 3^α τοῦ συνόλου Θ ἔχει εἰκόνα τὸ γινόμενον $\mu \cdot \alpha \in A$.

Π.χ. ἡ $(3^3)^2 = 3^6$ ἔχει εἰκόνα τὸν $6 \in A$

$(3^{-2})^3=3^{-6}$ » » » $-6 \in A$

Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις μὲ τὰς ἰδιότητάς της εἶναι φανερόν, ὅτι ἀντικαθιστᾷ τὰς τρεῖς πράξεις: πολλαπλασιασμόν, διαίρεσιν καὶ ὕψωσιν εἰς δύναμιν μὲ τὰς τρεῖς ἁπλουστέρας: πρόσθεσιν, ἀφαίρεσιν καὶ πολλαπλασιασμὸν ἀντιστοίχως.

14. 2. Λογάριθμος μὲ βάσιν 3.

Ὀνομάζομεν λογάριθμον μὲ βάσιν 3 τοῦ στοιχείου 3^α ἀπὸ τὸ σύνολον Θ τὴν εἰκόνα α τοῦ στοιχείου αὐτοῦ εἰς τὸ σύνολον Α καὶ συμβολίζομεν:

$$\lambda o \gamma_3 (3^\alpha) = \alpha$$

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\lambda o \gamma_3 (3^{-3}) = -3, \quad \lambda o \gamma_3 (3^0)=0 \text{ κ.λ.π.}$$

Ἐφαρμόζοντες τὰς τρεῖς προηγουμένας ἰδιότητας εὑρίσκομεν:

$$\lambda o \gamma_3 \cdot (3^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2})=\lambda o \gamma_3 (3^{\alpha_1+\alpha_2})=\alpha_1+\alpha_2=\lambda o \gamma_3 3^{\alpha_1}+\lambda o \gamma_3 3^{\alpha_2}$$

καὶ γενικώτερον ἂν $x_1, x_2 \in \Theta$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\lambda o \gamma_3 (x_1 \cdot x_2) = \lambda o \gamma_3 x_1 + \lambda o \gamma_3 x_2,$$

ὁμοίως $\lambda o \gamma_3 (x_1 : x_2)=\lambda o \gamma_3 x_1-\lambda o \gamma_3 x_2$, $(\lambda o \gamma_3 x_1, \lambda o \gamma_3 x_2 \in A)$

καὶ $\lambda o \gamma_3 (x)^\mu = \mu \cdot \lambda o \gamma_3 x$ $(x \in \Theta, \lambda o \gamma\, x \in A)$

ἐνῶ μ εἶναι ἕνας σταθερὸς ἀκέραιος ἀριθμός.

14.3. Ἐπέκτασις τῶν λογαρίθμων.

Ἡ ἀπεικόνισις τῆς § 14.1

$$f: x \xrightarrow{f} f(x)=y, \qquad (x \in \Theta, y \in A)$$

δύναται νὰ λάβη τὴν μορφὴν

(1) $f: x \xrightarrow{f} \lambda o\gamma_3 x = y, \ (x \in \Theta, \ y \in A)$

αὐτή, ὡς γνωστόν, λέγεται καὶ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον Θ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον Α.

Τὸ σύνολον Θ ἐκ θετικῶν ἀριθμῶν ποὺ ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, δύναται νὰ ἐπεκταθῇ διὰ παρεμβολῆς ὅρων ποὺ νὰ ἀποτελοῦν μὲ τοὺς ὑπάρχοντας νέαν γεωμετρικὴν πρόοδον, ὁπότε καὶ τὸ σύνολον Α ἐπεκτείνεται, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων των.

Μία πρώτη ἐπέκτασις τοῦ συνόλου Θ γίνεται διὰ παρσμβολῆς μεταξὺ τῶν στοιχείων του ἑνὸς μόνον γεωμετρικοῦ μέσου.

Ἤτοι ἐκ τοῦ τύπου $\alpha_\nu = \alpha_1 \omega^{\nu-1}$ διὰ $\alpha_3 = 3^2$, $\alpha_1 = 3^1$ εὑρίσκομεν:

$3^2 = 3^1 \omega^{3-1} \Longleftrightarrow 9 = 3\omega^2 \Longleftrightarrow 3 = \omega^2 \Longleftrightarrow \omega^2 - 3 = 0 \Longleftrightarrow (\omega - \sqrt{3})(\omega + \sqrt{3}) = 0$

$\omega = \sqrt{3}$ ($\omega = -\sqrt{3}$ ἀπορρίπτεται ἀφοῦ τὸ Θ θέλομεν νὰ εἶναι σύνολον θετικῶν ἀριθμῶν).

Ἄρα τὸ νέον σύνολον Θ_1 θὰ εἶναι:

$$\Theta_1 = \{\ldots 3^{-5}, \sqrt{3}.3^{-5}, 3^{-4}, \sqrt{3}.3^{-4}, 3^{-3}, \sqrt{3}\,3^{-3}, 3^{-2}, \sqrt{3}.3^{-2}, 3^{-1}, \sqrt{3}.3^{-1}, 3^0, \sqrt{3}.3^0, 3^1, \sqrt{3}.3^1, 3^2, \sqrt{3}.3^2, 3^3 \ldots\} \quad \text{ἤ}$$

$$\Theta_1 = \left\{\ldots 3^{-5}, 3^{-\frac{9}{2}}, 3^{-4}, 3^{-\frac{7}{2}}, 3^{-4}, 3^{-\frac{5}{2}}, 3^{-2}, 3^{-\frac{3}{1}}, 3^{-1}, 3^{-\frac{1}{2}}, 3^0, 3^{\frac{1}{2}}, 3^1, 3^{\frac{3}{2}}, 3^2, 3^{\frac{5}{2}}, 3^3 \ldots\right\}$$

καὶ τὸ Α ἐπεκτείνεται εἰς ἕνα νέον σύνολον A_1 τό,

$$A_1 = \{\ldots -5, -\frac{9}{2}, -4, -\frac{7}{2}, -3, -\frac{5}{2}, -2, -\frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5, \ldots\},$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν πάλιν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἡ συνάρτησις (1) ἐπεκτείνεται ἤδη εἰς τὴν

$$f: x \xrightarrow{f} \lambda o\gamma_3 x = y, \ (x \in \Theta_1, \ y \in A_1).$$

Ὁμοίως, τὸ σύνολον Θ_1 διὰ νέας παρεμβολῆς δύναται νὰ ἐπεκταθῇ ἐκ νέου εἰς Θ_2 καὶ τὸ A_1 εἰς A_2 κ.ο.κ. Ἡ ἐπέκτασις αὐτὴ δύναται νὰ συνεχισθῇ ἐπ' ἄπειρον ὥστε τὸ μὲν ἀρχικὸν σύνολον Θ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ σύνολον Π^+ τὸ δὲ Α μὲ τὸ Π.

Παρατήρησις: Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων εἶναι φανερόν, ὅτι λογάριθμος ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ὑπάρχει.

Σημείωσις. Εἰς τὰ λεχθέντα ἀνωτέρω παραδεχόμεθα, ὅτι $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{4}}$ κ.ο.κ.

14.4. Λογάριθμοι μὲ βάσιν 10.

Ἐὰν τὴν γεωμετρικὴν πρόοδον $\ldots 3^{-5}, 3^{-4}, 3^{-3}, \ldots$, οἱ ὅροι τῆς ὁποίας ἀποτελοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Θ, ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῆς γεωμετρικῆς προόδου:

$$\ldots 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, \ldots$$

προκύπτει μία νέα ἀπεικόνισις τῶν συνόλων:

$\Theta' = \{\ldots 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-2}, 10^{-0}, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-}{}_{3}, 10^{-4}, \ldots\}$

$A = \{\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$

ἢ $f : x \xrightarrow{f} \lambda o\gamma_{10}\, x = y,\ (x \in \Theta',\ y \in A)$.

Τὰ σύνολα Θ′ καὶ Α δύνανται νὰ ἐπεκταθοῦν ὡς καὶ ἀνωτέρω, ὁπότε θὰ προκύψῃ ἡ συνάρτησις

$$f : x \xrightarrow{f} \lambda o\gamma_{10}\, x = y,\ (x \in \Pi^{+},\ y \in \Pi),$$

καὶ οὕτω ὁρίζονται οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν 10.

Ὥστε, καλοῦμεν λογάριθμον ἀριθμοῦ $x \in \Pi^{+}$ μὲ βάσιν 10 τὸν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως τοῦ 10, ἡ ὁποία ἰσοῦται μὲ x.

Π.χ. $\lambda o\gamma_{10}\ 2 = \alpha \iff 10^{\alpha} = 2$

ὁμοίως $\lambda o\gamma_{10}\ 1000 = 3$ διότι $10^{3} = 1000$.

$\lambda o\gamma_{10} 0{,}0001 = -4$ διότι $10^{-4} = 0{,}0001$.

Γενικῶς, ἡ εὕρεσις τῶν λογαρίθμων ἀποτελεῖ ἐπίπονον ἐργασίαν, εὑρίσκονται δὲ συντομώτερον μὲ μεθόδους τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν. Οὕτω τὰ ἀποτελέσματα γράφονται εἰς πίνακας, τοὺς λογαριθμικοὺς πίνακας, ἡ χρῆσις τῶν ὁποίων μᾶς διευκολύνει εἰς πολλὰς ἐφαρμογὰς καὶ λύσεις προβλημάτων.

Σημείωσις: Ἀντὶ τοῦ συμβολισμοῦ $\lambda o\gamma_{10} x$ δυνάμεθα νὰ γράφωμεν ἁπλούστερον λογx.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων συνάγεται, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ x, οἱ εὑρισκόμενοι εἰς τὸ ἀνοικτὸν διάστημα $0 < x < 1$, ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, οἱ εὑρισκόμενοι εἰς τὸ $1 < x < 10$ θετικούς, ἀλλὰ μικροτέρους τῆς μονάδος, οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 10 ἔχουν λογαρίθμους μεγαλυτέρους τῆς μονάδος, τὸ 1 ἔχει λογάριθμον μηδὲν καὶ τὸ 10 λογάριθμον 1.

Π.χ. $\lambda o\gamma \dfrac{1}{100} = \lambda o\gamma\ 10^{-2} = -2$

$$
\begin{aligned}
\lambda o\gamma\, 1 &= \lambda o\gamma\, 10^{0} &&= 0\\
\lambda o\gamma\, 2 &= \lambda o\gamma\, 10^{0{,}30103} &&= 0{,}30103\\
\lambda o\gamma\, 10 &= \lambda o\gamma\, 10^{1} &&= 1\\
\lambda o\gamma\, 100 &= \lambda o\gamma\, 10^{2} &&= 2 \text{ κ.ο.κ.}
\end{aligned}
$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι

$$\lambda o\gamma\ 0{,}02 = \lambda o\gamma\,(2.10^{-2}) = \lambda o\gamma 2 + \lambda o\gamma\ 10^{-2} = -2 + 0{,}30103$$

ὁμοίως $\lambda o\gamma\ 2000 = \lambda o\gamma\ (2 \cdot 1000) = \lambda o\gamma\, 2 + \lambda o\gamma 1000 = \lambda o\gamma\, 2 +$
$+ \lambda o\gamma\ 10^{3} = 3 + 0,\ 30103 = 3{,}30103$

Κατὰ συνέπειαν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν 2, 0,02, 2000, 20000, κ.λ.π. ἔχουν τὸ αὐτὸ δεκαδικὸν μέρος καὶ διαφέρουν μόνον ὡς πρὸς τὸ ἀκέραιον μέρος. Τὸ ἀκέραιον αὐτὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου λέγεται καὶ **χαρακτηριστικὸν** αὐτοῦ.

Π ί ν α ξ

τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1—100

α	λογα	α	λογα	α	λογα	α	λογα	α	λογα
1	00 000	21	32 222	41	61 278	61	78 533	81	90 849
2	30 103	22	34 242	42	62 325	62	79 239	82	91 381
3	47 712	23	36 173	43	63 347	63	79 934	83	91 908
4	60 206	24	38 021	44	64 345	64	80 616	84	92 428
5	69 897	25	39 794	45	65 321	65	81 291	85	92 942
6	77 815	26	41 497	46	66 276	66	81 954	86	93 450
7	84 510	27	43 136	47	67 210	67	82 607	87	93 952
8	90 309	28	44 716	48	68 124	68	83 251	88	94 448
9	95 424	29	46 240	49	69 020	69	83 885	89	94 939
10	00 000	30	47 712	50	69 897	70	84 510	90	95 424
11	04 139	31	49 136	51	70 757	71	85 126	91	95 904
12	07 918	32	50 515	52	71 600	72	65 733	92	96 379
13	11 394	33	51 851	53	72 428	73	86 332	93	96 848
14	14 613	34	53 148	54	73 239	74	87 923	94	97 313
15	17 609	35	54 407	55	74 036	75	88 506	95	97 772
16	20 412	36	55 630	56	74 819	76	88 081	96	98 227
17	23 045	37	56 820	57	75 587	77	88 649	97	98 677
18	25 527	38	57 978	58	76 343	78	89 209	98	99 123
19	27 875	39	59 106	59	77 085	79	89 763	99	99 564
20	30 103	40	60 206	60	77 815	80	90 309	100	00 000

Ἐφαρμογαί. 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ $\lambda o\gamma\ (11 \cdot 13 \cdot 25)$

ἔχομεν $\lambda o\gamma\ (11 \cdot 13 \cdot 25) = \lambda o\gamma\, 11 + \lambda o\gamma 13 + \lambda o\gamma 25 =$

$$= 1{,}04139 + 1{,}11394 + 1{,}39794 =$$

$$= 3{,}55327.$$

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίσης ὁ λογ $(0,05 \cdot 7 \cdot 68)=$

$=$λογ $(0,05)+$λογ $7+$λογ$68=$

$=-2+0,69897+0,84510+1,83251=1,37658.$

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ $\sqrt[5]{88}=\frac{1}{5}$ λογ $88=\frac{1,94448}{5}=0,38889$

4ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ $2^{11}=11$ λογ $2=11 \cdot 0,30103=3,31133$

5ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογ $\frac{2^5 \cdot 3^4}{5^6}=$λογ $(2^5 \cdot 3^4)-$λογ $(5^6)=$

$=$λογ 2^5+λογ 3^4-λογ $5^6=5$ λογ $2+4$ λογ $3-6$ λογ $5=$

$=5 \cdot 0,30103+4 \cdot 0,47712-6 \cdot 0,69897=$

$=1,50515+1,90848-4,19382=-0,78019=$

$-1+1+(-0,78019)=-1+(1-0,78019)=-1+0,21981=$

$=\bar{1},21981.$

Ἀσκήσεις

105. Χρησιμοποιοῦντες τὸν πίνακα τῆς προηγουμένης σελίδος εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν :

α) 35, β) 3,5, γ) 350, δ) 0,35, ε) 0,0035, ζ) 8,
η) 0,8, θ) 0,08, ι) 0,08, ια) 0,008, ιβ) 80, ιγ) 800.

106. Ὁμοίως τοὺς λογαρίθμους τῶν γινομένων:

α) $(3\ 18.64)$, β) $(2^6.3^5.7^3)$, γ) $(2,5^2.3,4^2.6,5^3)$,
δ) $(2^6.0,02^5.0,013^6)$, ε) $(0,75^4.0,91^3.0,68)$, στ) $(3,1^6.7.2.3^4)$.

107. Ὁμοίως τοὺς λογαρίθμους τῶν

α) $\frac{2.17}{31}$, β) $\frac{19.29}{15}$, γ) $\frac{2^2.0,5^4.0,2^3}{4.5}$,

δ) $\frac{3,1^2.12^4.0,52^2}{8.0,3^4.7^2}$, ε) $\frac{3,7^4.2,5^2.20^3}{15^2.17^2}$ στ) $\frac{85^2.7,7^3.8,2}{3,7^2.7,2^3}$

108. Ὁμοίως τῶν ριζῶν :

α) $\sqrt{12}$, β) $\sqrt{39}$, γ) $\sqrt{58}$, δ) $\sqrt{0,32}$, ε) $\sqrt{5,7}$,

στ) $\sqrt[3]{85}$, $\sqrt[3]{31}$, $\sqrt[4]{48}$, $\sqrt[5]{95}$, $\sqrt[6]{4,8}$.

109. Εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν κλασμάτων :

α) $\frac{\sqrt[3]{5}.0,7^2.\sqrt[2]{0,32}}{\sqrt{2}.5^2.0,02^3}$ β) $\frac{\sqrt{7}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{0,06}}{0,5^2.\sqrt{0,03}.\sqrt{4,9}}$

110. Ὁμοίως τῶν παραστάσεων :

α) $\frac{0,8^{-2}.4,3^2.\sqrt[3]{88}}{0,02^{-3}.40^{-2}}$ β) $\frac{8,9^3.14,7^4.2,2^{-3}}{10^{-2}.5^{-3}.6^2}$

ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

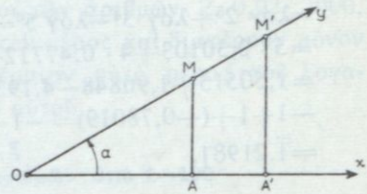
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

§ 1. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας

1. 1. Ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας.

Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ἡ προσανατολισμένη ὀξεῖα γωνία $\sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἶναι ὁ θετικὸς ἀριθμὸς α ποὺ ἐκφράζει μοίρας ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0.

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς $\overrightarrow{Oy}$ τῆς γωνίας αὐτῆς τυχὸν σημεῖον M (διάφορον τῆς κορυφῆς) καὶ προβάλωμεν τὸ M ἐπάνω εἰς τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν $\overrightarrow{Ox}$, σχηματίζεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΜ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία α εἶναι μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας του (σχ. 1).



Σχ. 1

Σχηματίζομεν τὸν λόγον $\dfrac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})}$ καὶ ὀνομάζομεν αὐτὸν **ἐφαπτομένην τῆς γωνίας α**, συμβολίζομεν δέ:

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})},$$

ὅπου, $(\overline{AM})$ καὶ $(\overline{OA})$ εἶναι τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν $\overline{AM}$ καὶ $\overline{OA}$ τοῦ ὀρθογ. τριγώνου ΟΑΜ ποὺ ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μήκους.

Ὥστε, ὀνομάζομεν ἐφαπτομένην τῆς ὀξείας γωνίας α τὸν λόγον τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν προσκειμένην τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ.

Παρατήρησις: Ὁ λόγος $\dfrac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})}$ εἶναι σταθερὸς καὶ δὲν μεταβάλλεται, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ σημεῖον M ἐπάνω εἰς τὴν τελικὴν πλευρὰν $\overrightarrow{Oy}$ τῆς ὀξείας γωνίας α.

Πράγματι, ἐὰν λάβωμεν ὁποιοδήποτε ἄλλο σημεῖον M′ ἐπάνω εἰς τὴν $\overrightarrow{Oy}$ καὶ εὕρωμεν τὴν προβολὴν A′ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ εἶναι ὅμοια (ἐπειδὴ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν α κοινήν).

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν προκύπτει

$$\frac{(\overline{A'M'})}{(\overline{OA'})}=\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})}=\text{εφ}\alpha$$

Συμπέρασμα. Κάθε ὀξεῖα γωνία α ἔχει μίαν καὶ μόνον μίαν ἐφαπτομένην.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ γωνία α αὐξάνει ἀπὸ μηδὲν καὶ πλησιάζει τὰς 90^0, ὁ λόγος $\dfrac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})}$ αὐξάνει συνεχῶς ἀπὸ μηδὲν καὶ τείνει νὰ λάβη ἀρκούντως μεγάλας τιμάς. Ἐκ τοῦ παραπλεύρως σχήματος βλέπομεν ὅτι:

$$\text{εφ}\alpha_1=\frac{(\overline{AM_1})}{(\overline{OA})}=\frac{3\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{3}{15}$$

$$\text{εφ}\alpha_2=\frac{(\overline{AM_2})}{(\overline{OA})}=\frac{7\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{7}{15}$$

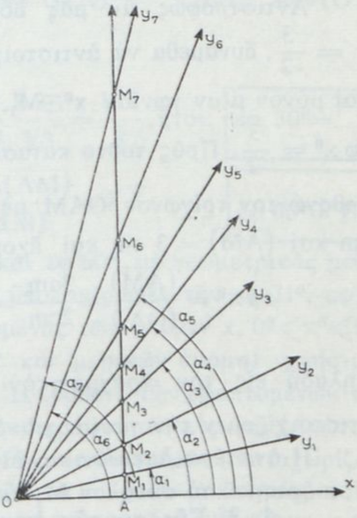
$$\text{εφ}\alpha_3=\frac{(\overline{AM_3})}{(\overline{OA})}=\frac{13\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{13}{15}$$

$$\text{εφ}\alpha_4=\frac{(\overline{AM^4})}{(\overline{OA})}=\frac{18\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{18}{15}$$

$$\text{εφ}\alpha_5=\frac{(\overline{AM^5})}{(\overline{OA})}=\frac{23\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{23}{15}$$

$$\text{εφ}\alpha_6=\frac{(\overline{AM^6})}{(\overline{OA})}=\frac{35\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{35}{15}$$

$$\text{εφ}\alpha_7=\frac{(\overline{AM_7})}{(\overline{OA})}=\frac{55\text{mm}}{15\text{mm}}=\frac{55}{15}\ \text{κ.ο.κ.}$$



Σχ. 2

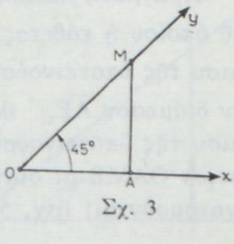
Διὰ τὴν γωνίαν τῶν 45^0 ἔχομεν:

$$\text{εφ}\ 45^0=\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})}=1,$$ διότι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OAM εἶναι ἰσοσκελὲς (σχ. 3).

$$\boxed{\text{εφ}\ 45^0=1}$$

$$\boxed{\text{εφ}\ 0^0=0}$$

Ὁμοίως εφ $0^0=\dfrac{(\overline{0})}{(\overline{OA})}=0$



Σχ. 3

1. 2. Ἡ συνάρτηση y=εφx.

Ἂς θεωρήσωμεν τὰ ἑξῆς σύνολα:

$$M_1 = \{x/x \text{ ὀξεῖα γωνία } 0 \leqq x < 90^0\}$$

καὶ $\Pi_1 = \{y/y \in \Pi^+ \cup \{o\}\}$

῾Η ἀπεικόνισις

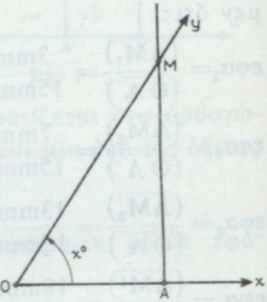
$$f : x^0 \xrightarrow{f} \text{εφ}x^0 = y, \ (x^0 \in M_1, \ y \in \Pi_1)$$

ἀπεικονίζει τὰ στοιχεῖα τοῦ M_1 ἐπὶ τοῦ Π_1, εἶναι δὲ καὶ ἀμφιμονοσήμαντος.

Πράγματι, ὅπως εἴδομεν, εἰς κάθε γωνίαν $x^0 \in M_1$ ὑπάρχει μία καὶ μόνον εφx^0, δηλ. ἕνας καὶ μόνον πραγματικὸς ἀριθμὸς $y \in \Pi_1$.

᾿Αντιστρόφως, ἂν μᾶς δοθῆ ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς π.χ. $y = \frac{3}{2}$, δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μίαν καὶ μόνον μίαν γωνίαν $x^0 \in M_1$, τέτοια ὥστε εφ $x^0 = \frac{3}{2}$. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΜ μὲ $(\overline{OA}) = 2$ cm καὶ $(\overline{AM}) = 3$ cm καὶ ἔχομεν (σχ. 4):

$$\text{εφ}\, x^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})} = \frac{3\text{cm}}{2\text{cm}} = \frac{3}{2}$$



Σχ. 4

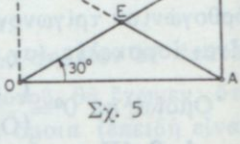
Δηλαδὴ εἰς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν $\frac{3}{2}$ ἀτιστοιχίζομεν τὴν γωνίαν $x^0 = 56^0\ 18'\ 35''$.

῾Η ἀνωτέρω ἀπεικόνισις εἶναι ἡ συνάρτησις $y =$ εφx μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον M_1 καὶ πεδίον τιμῶν τὸ Π_1.

1. 3. Εὕρεσις τῆς ἐφαπτομένης ὀξείας γωνίας.

Εἶναι δυνατὸν ἀπὸ ὅσα γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας τῆς Β΄ τάξεως νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας τῶν 30^0 καθὼς καὶ ἐκείνην τῶν 60^0.

Πράγματι, κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΜ, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος πλευρὰ $\overline{AM}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης ΟΜ, ἂν δὲ φέρωμεν τὴν διάμεσον $\overline{AE}$, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης (διότι εἰς τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΜΒ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι καὶ διχοτομοῦνται) (σχ. 5).



Σχ. 5

Τὸ τρίγωνον ΑΜΕ εἶναι ἰσόπλευρον, διότι $AM = \frac{OM}{2}$, $\overline{AE} =$

$\frac{\overline{OM}}{2}$ καὶ $\overline{ME} = \frac{\overline{OM}}{2}$, ἄρα ἡ γωνία $A\widehat{M}E = 60^0$ καὶ ἐπομένως $A\widehat{O}M = 30$.

Ἐφαρμόζοντες τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης γωνίας καθὼς καὶ τὸ πυθαγόρειον θεώρημα εὑρίσκομεν :

$$\text{εφ } 30^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})} \quad (1)$$

καὶ $(\overline{OA})^2 = (\overline{OM})^2 - (\overline{AM})^2 \Longleftrightarrow (\overline{OA})^2 = 2^2.(\overline{AM})^2 - (\overline{AM})^2$ $\Longleftrightarrow (\overline{OA})^2 = 4(\overline{AM})^2 - (\overline{AM})^2 \Longleftrightarrow (\overline{OA})^2 = 3(\overline{AM})^2 \Longleftrightarrow (\overline{OA}) = \sqrt{3}\,(\overline{AM})$.

Ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\text{εφ } 30^0 = \frac{(\overline{AM})}{\sqrt{3}(\overline{AM})} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ἤτοι: } \boxed{\text{εφ } 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

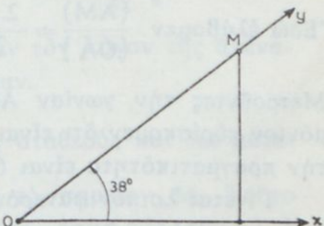
$$\text{Ὁμοίως εφ } 60^0 = \frac{(\overline{OA})}{(\overline{AM})} = \frac{\sqrt{3}.(\overline{AM})}{(\overline{AM})} = \sqrt{3} \quad . \quad \boxed{\text{εφ } 60^0 = \sqrt{3}}$$

Εὕρομεν λοιπὸν τὴν εφ 30^0 καὶ εφ 60^0 μὲ γεωμετρικὰς μεθόδους. Φυσικά, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν εφ 21^0, εφ33^0 εφ $11^0\ 20'$ καὶ γενικῶς τὰς ἐφαπτομένας τῶν γωνιῶν x, $0^0 < x^0 < 90^0$ (πλὴν τῶν εφ 30^0, εφ 45^0, εφ 60^0 καὶ μερικῶν ἀκόμη) χρησιμοποιοῦντες γεωμετρικὰς μεθόδους. Ἡ εὕρεσις τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν γίνεται μὲ μεθόδους ποὺ περιγράφονται εἰς τὰ Ἀνώτερα Μαθηματικά, τὰ ἀποτελέσματα τῶν ὑπολογισμῶν καταχωρίζονται εἰς πίνακας, ἀπὸ ὅπου δυνάμεθα νὰ τὰ χρησιμοποιήσωμεν.

Παρατήρησις: Ἕνας πρακτικὸς τρόπος διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς ὀξείας γωνίας, εἶναι ἡ γραφικὴ μέθοδος, ἡ ὁποία ὅμως δὲν δίδει ἀκριβῆ ἀποτελέσματα.

Παράδειγμα: Ἂς ὑπολογίσωμεν γραφικῶς τὴν ἐφαπτομένην τῶν 38^0.

Κατασκευάζομεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὴν γωνίαν $\sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$ μὲ μέτρον 38^0. Ἐκ τοῦ τυχόντος σημείου M τῆς πλευρᾶς $\overrightarrow{Oy}$ φέρομεν τὴν κάθετον $\overline{AM}$. Ἔχομεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἐφαπτομένης (σχ. 6) :



$$\text{εφ } 38^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})},$$

Σχ. 6

ἀκολούθως μετροῦμεν μετὰ πάσης δυνατῆς ἀκριβείας τὰς πλευρὰς $\overline{AM}$ καὶ $\overline{OA}$ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OAM καὶ εὑρίσκομεν: $(\overline{AM}) = 39$ mm, $(\overline{OA}) = 50$ mm, ὁπότε

$$\text{εφ } 38^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})} = \frac{39 \text{ mm}}{50 \text{ mm}} = \frac{39}{50} = 0{,}78,$$

ἐνῶ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι εφ $38^0 = 0{,}78801$.

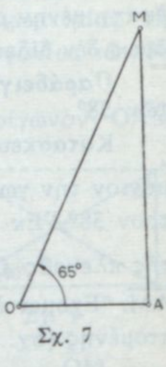
Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι ἡ γραφικὴ μέθοδος δὲν εἶναι ἀσφαλὴς διὰ τὴν εὕρεσιν τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν, διότι προκαλοῦνται πολλὰ σφάλματα ὀφειλόμενα καὶ εἰς τὴν κατασκευὴν τῆς γωνίας καὶ εἰς τὴν μέτρησιν τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἀκόμη δὲ καὶ εἰς τὴν ἀτελῆ κατασκευὴν τῶν ὀργάνων ποὺ χρησιμοποιοῦμεν.

1. 4. Εὕρεσις τῆς γωνίας ἐκ τῆς ἐφαπτομένης.

Ἐπειδὴ μεταξὺ τῶν συνόλων M_1 καὶ Π_1 ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία, δυνάμεθα ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς $y \in \Pi_1$, νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν $x^0 \in M$. Αὐτὸ δύναται νὰ γίνῃ ἀμέσως ἐκ τῶν πινάκων τῶν ἐφαπτομένων τῶν γωνιῶν. Ἂς χρησιμοποιήσωμεν ὅμως τὴν γραφικὴν μέθοδον διὰ προχείρους ὑπολογισμούς.

Παράδειγμα: Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{5}$ καὶ μᾶς ζητεῖται νὰ εὕρωμεν γραφικῶς στὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας οὗτος εἶναι ἡ ἐφαπτομένη της.

Εὑρίσκομεν, ὅτι $\sqrt{5} = 2{,}23 = \frac{223}{100}$. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν 223 mm καὶ τὴν ἄλλην 100 mm ἢ 22,3 mm καὶ 10 mm, ἂς εἶναι τοῦτο τὸ OAM (σχ. 7).



Σχ. 7

Ἐδῶ ἐλάβομεν $\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OA})} = \frac{2.22{,}3\text{mm}}{2.10\text{mm}} = \frac{44{,}3\text{mm}}{20\text{mm}}$.

Μετροῦντες τὴν γωνίαν $A\widehat{O}M$ μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι περίπου 65^0 ἐνῶ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι $65^0\ 54'\ 17''$.

Γίνεται λοιπὸν φανερόν, ὅτι ἡ γραφικὴ μέθοδος εἶναι ἐντελῶς ἀνεφάρμοστος καὶ μάλιστα ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν γωνίαν μὲ ἀκρίβειαν δευτερολέπτου.

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὕρετε μὲ τὴν γραφικὴν μέθοδον τὰς ἐφαπτομένας τῶν κάτωθι γωνιῶν καὶ ἀκολούθως νὰ συγκρίνετε τὰ ἀποτελέσματα τῶν μετρήσεών σας μὲ τὰ ἀναγραφόμενα εἰς τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

α) εφ32^0, β) εφ48^0, γ) εφ12^0, δ) εφ18^0,
ε) εφ25^0, στ) εφ50^0, ζ) εφ65^0, η) εφ75^0.

2. Δίδονται οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{2}$, $\frac{4}{7}$, 1,19, $\sqrt{10}$, 6,3 καὶ $2\sqrt{3}$. Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτούς, ὡς ἐφαπτομένας, ἀκολούθως νὰ συγκριθοῦν τὰ ἀποτελέσματα μὲ ἐκεῖνα τῶν πινάκων.

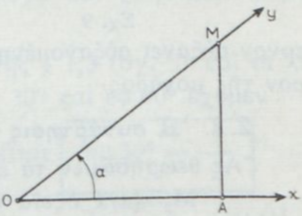
§ 2. Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας.

2. 1. Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται πάλιν ἡ προσανατολισμένη ὀξεῖα γωνία $\sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον εἰς μοίρας εἶναι α (σχ. 8).

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς $\overrightarrow{Oy}$ τῆς γωνίας τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρωμεν τὴν κάθετον $\overline{MA}$, θὰ σχηματισθῇ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΜ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία $\widehat{\alpha}$ γίνεται μία ἀπὸ τὰς ὀξείας γωνίας του.

Σχηματίζομεν τὸν λόγον $\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})}$, δηλ. τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν. Τὸν λόγον αὐτὸν καλοῦμεν **ἡμίτονον** τῆς ὀξείας γωνίας α καὶ συμβολίζομεν

$$\eta\mu\alpha = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})}.$$



Σχ. 8

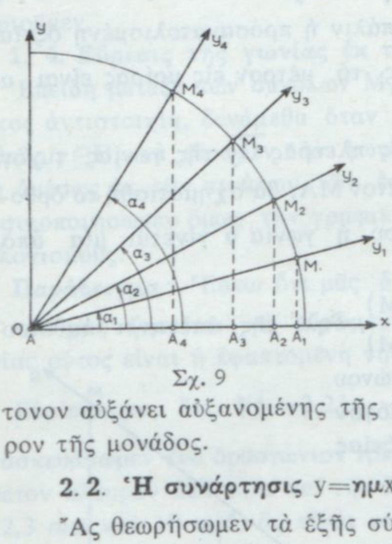
Ὥστε ἡμίτονον τῆς ὀξείας γωνίας α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ ὀνομάζομεν τὸν λόγον τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

Παρατήρησις: Ὁ λόγος $\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})}$ εἶναι σταθερὸς καὶ δὲν μεταβάλλεται, ὁποιανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχῃ τὸ σημεῖον Μ. Τοῦτο ἀποδεικνύεται μὲ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, ὅπως εἰς τὴν § 1. 1 διὰ τὴν ἐφαπτομένην.

Ἑπομένως, **κάθε ὀξεῖα γωνία α ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἡμίτονον.**

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ γωνία αὐξάνη ἀπὸ 0^0 ἕως 90^0, τὸ ἡμίτονον αὐξάνει ἀπὸ μηδὲν καὶ πλησιάζει συνεχῶς τὴν μονάδα, οὐδέποτε δὲ ὑπερβαίνει αὐτήν. Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ σχήματος 9.

Ἐὰν μὲ κέντρον Ο καὶ μὲ ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε, π.χ. 50mm, γράψωμεν περιφέρειαν σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἡμιτόνου θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια τρίγωνα OA_1M_1, OA_2M_2, OA_3M_3, OA_4M_4 . . .καὶ διὰ τὰς ὀξείας γωνίας αὐτῶν α_1, α_2, α_3, α_4, . .



Σχ. 9

$$\eta\mu\alpha_1 = \frac{(\overline{A_1M_1})}{(\overline{OM_1})} = \frac{12mm}{50mm} = \frac{12}{50}$$

$$\eta\mu\alpha_2 = \frac{(\overline{A_2\,M_2})}{(\overline{OM_2})} = \frac{23mm}{50mm} = \frac{23}{50}$$

$$\eta\mu\alpha_3 = \frac{(\overline{A_3\,M_3})}{(\overline{O_3M})} = \frac{33mm}{50mm} = \frac{33}{50}$$

$$\eta\mu\alpha_4 = \frac{(\overline{A_4\,M_4})}{(\overline{O_4M})} = \frac{42mm}{50mm} = \frac{42}{50}$$

. . . .

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ ἡμίτονον αὐξάνει αὐξανομένης τῆς γωνίας καὶ εἶναι πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος.

2. 2. Ἡ συνάρτησις y=ημx.

Ἄς θεωρήσωμεν τὰ ἑξῆς σύνολα :

$M_2 = \{x/x$ ὀξεῖα γωνία $0^0 \leqq x \leqq 90^0\}$

καὶ $\Pi_2 = \{y/y \in \Pi,\ 0 \leqq y \leqq 1\}$.

Ἡ ἀπεικόνισις

$$g : x^0 \xrightarrow{g} \eta\mu\, x^0 = y, \quad (x^0 \in M_2,\ y \in \Pi_2)$$

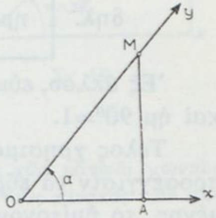
ἀπεικονίζει τὸ σύνολον M_2 ἐπὶ τοῦ Π_2 καὶ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

Πράγματι, εἰς κάθε γωνίαν $x \in M_2$ ἀντιστοιχεῖ, ὅπως εἴδομεν ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἡμίτονον, ἡμ$x = y \in \Pi_2$ καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς $y \in \Pi_2$, π.χ. $\frac{1}{2}$, δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ποὺ νὰ ἔχῃ αὐτὸν ὡς ἡμίτονον, ὡς ἑξῆς.

Κατασκευάζομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΑΜ μὲ κάθετον πλευρὰν $\overline{AM}$ ἴσην μὲ μίαν μονάδα μετρήσεως καὶ ὑποτείνουσαν $\overline{OM}$ δύο μονάδας (σχ. 10).

Ἐκ τοῦ σχήματος 10 ἔχομεν :

$$\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})} = \frac{1}{2} = \text{ημ}\alpha.$$



Σχ. 10.

Δηλ. εἰς τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{2}$ ἀντιστοιχίζομεν μονοσημάντως τὴν γωνίαν $\alpha=30^0$. Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις λέγεται, ὡς γνωστὸν καὶ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ M_2 καὶ πεδίον τιμῶν τὸ Π_2.

2. 3. Εὕρεσις τοῦ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας.

Ὑπάρχουν μερικαὶ γωνίαι, ὅπως αἱ 0^0, 30^0, 45^0, 60^0 καὶ 90^0 ποὺ δυνάμεθα μὲ γεωμετρικὰς μεθόδους νὰ εὕρωμεν τὰ ἡμίτονά των. Γενικῶς, ὅμως, δὲν ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν γεωμετρικῶς τὰ ἡμίτονα τῶν γωνιῶν, αὐτὰ δὲ ὑπολογίζονται, ὅπως εἴδομεν καὶ διὰ τὰς ἐφαπτομένας, μὲ Ἀνώτερα μαθηματικά. Τὰ ἀποτελέσματα γράφονται εἰς πίνακας, τοὺς ὁποίους καὶ χρησιμοποιοῦμεν εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς.

Ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸ σχῆμα τῆς § 1,3 (σχ. 5) καὶ τὰ λεχθέντα σχετικῶς μὲ τὴν εὕρεσιν τῆς εφ 30^0 καὶ εφ 60^0 ἔχομεν :

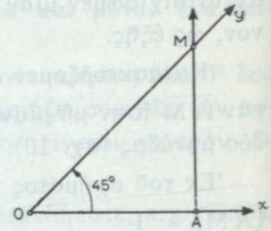
$$\text{ημ}\,30^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})} = \frac{(\overline{AM})}{2(\overline{AM})} = \frac{1}{2}, \text{ ἤτοι } \boxed{\text{ημ}\,30^0 = \frac{1}{2}}$$

Ὁμοίως $$\text{ημ}\,60^0 = \frac{(\overline{OA})}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{(\overline{OM})^2-(\overline{AM})^2}}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{(\overline{OM})^2-\frac{(\overline{OM})^2}{4}}}{(\overline{OM})} =$$

$$\frac{(\overline{OM})\sqrt{\frac{3}{4}}}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ ἄρα } \boxed{\text{ημ}\,60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}},$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΟΑΜ (σχ. 11) ἔχομεν :

$$\eta\mu\ 45^0=\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})}=\frac{(\overline{AM})}{\sqrt{(\overline{AM})^2+(\overline{OA})^2}}=$$



Σχ. 11

$$=\frac{(\overline{AM})}{\sqrt{2(\overline{AM})^2}}=\frac{(\overline{AM})}{(\overline{AM})\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

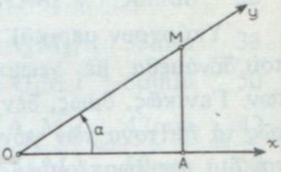
δηλ. $\boxed{\eta\mu\ 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}}$

Ἐξ ἄλλου, εὐκόλως εὑρίσκομεν ημ $0^0=0$ καὶ ἡμ $90^0=1$.

Τέλος χρησιμοποιοῦντες γραφικὰς μεθόδους ἠμποροῦμεν κατὰ προσέγγισιν νὰ εὕρωμεν, ὅπως καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐφαπτομένης, τὸ ἡμίτονον μιᾶς γωνίας, μόνον ποὺ δὲν ὁδηγούμεθα εἰς ἀκριβῆ ἀποτελέσματα.

Παράδειγμα. Νὰ εὑρεθῆ γραφικῶς τὸ ημ 20^0.

I. Κατασκευάζομεν μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον τὴν γωνίαν $\sphericalangle(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy},)=20^0$, φέρομεν κατόπιν ἀπὸ τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς $\overrightarrow{Oy}$ κάθετον πρὸς τὴν $\overrightarrow{Ox}$, τὴν $\overline{AM}$. Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ἡμιτόνου, ἔχομεν (Σχ. 12),



Σχ. 12

$$\eta\mu\ 20^0=\frac{\overline{AM}}{\overline{OM}}$$

Μετροῦμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\overline{AM}$ καὶ $\overline{OM}$ μὲ κάθε δυνατὴν ἀκρίβειαν καὶ εὑρίσκομεν $(\overline{AM})=14mm$ καὶ $(\overline{OM})=42mm$,

ἄρα: $$\eta\mu\ 20^0=\frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})}=\frac{14mm}{42mm}=0{,}33333,$$

ἐνῶ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι ημ$20^0=0{,}34\ 202$.

II. Δίδεται ὁ μικρότερος τῆς μονάδος ἀριθμὸς 0,64 καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῆ ποία γωνία ἔχει αὐτὸν ὡς ἡμίτονον.

Ἐὰν x εἶναι ἡ ζητουμένη ὀξεῖα γωνία, θὰ ἔχωμεν:

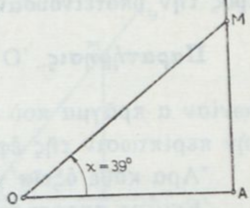
$$\eta\mu x=0{,}64=\frac{64}{100}$$

Θὰ κατασκευάσωμεν λοιπὸν ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν 64 μονάδας καὶ ὑποτείνουσαν 100 μονάδας, ἡ γωνία δὲ τοῦ τριγώνου ἡ εὑρισκομένη ἀπέναντι τῆς καθέτου πλευρᾶς τῶν 64 μονάδων θὰ εἶναι ἡ ζητουμένη.

Μετροῦντες μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον εὑρίσκομεν

$$\sphericalangle (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x = 39^0,$$

ἐνῶ εἰς τὴν πραγματικότητα εἶναι 39^0 47′32″.



Σχ 13

Ἀσκήσεις

1. Νὰ εὕρετε μὲ τὴν γραφικὴν μέθοδον τὰ ἡμίτονα τῶν κάτωθι γωνιῶν καὶ ἔπειτα νὰ τὰ συγκρίνετε μὲ τὰ ἀναγραφόμενα εἰς τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

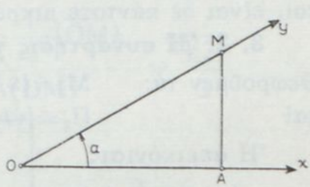
α) ημ 17^0 β) ημ 22^0 γ) ημ 34^0 δ) ημ 55^0 ε) ημ 64^0
στ) ημ 70^0 ζ) ημ 77^0 η) ημ 82^0 θ) ημ 85^0 ι) ημ 88^0

2. Δίδονται οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἀριθμοί.

$\frac{3}{5}$, 0,62, $\frac{2}{7}$, $\frac{8}{9}$, 0,92, $\frac{1}{4}$. Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτοὺς ὡς ἡμίτονα καὶ ἔπειτα νὰ συγκριθοῦν τὰ ἀποτελέσματα μὲ ἐκεῖνα τῶν πινάκων.

§ 3. Συνημίτονον ὀξείας γωνίας.

3. 1. Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ἡ προσανατολισμένη ὀξεῖα γωνία $\sphericalangle (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy})$, ἡ ὁποία εἶναι α μοιρῶν. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς τελικῆς πλευρᾶς $\overrightarrow{Oy}$ τῆς γωνίας τυχὸν σημεῖον Μ καὶ προβάλλομεν αὐτὸ ἐπὶ τῆς $\overrightarrow{Ox}$, ἔστω Α ἡ προβολὴ αὐτοῦ (σχ. 14).



Σχ. 14

Σχηματίζομεν τὸν λόγον $\frac{(\overline{OA})}{(\overline{OM})}$, δηλαδὴ τῆς προσκειμένης μὲ τὴν γωνίαν α καθέτου πλευρᾶς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ, πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν. Τὸν λόγον αὐτὸν καλοῦμεν **συνημίτονον** τῆς ὀξείας γωνίας α καὶ συμβολίζομεν :

$$\text{συν}\, \alpha = \frac{(\overline{OA})}{(\overline{OM})}.$$

῞Ωστε, συνημίτονον τῆς ὀξείας γωνίας α τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΜ, ὀνομάζομεν τὸν λόγον τῆς προσκειμένης καθέτου πλευρᾶς πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν.

Παρατήρησις. Ὁ λόγος $\frac{(\overline{OA})}{(\overline{OM})}$ εἶναι καὶ ἐδῶ σταθερὸς διὰ τὴν γωνίαν α πρᾶγμα ποὺ ἀποδεικνύεται μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἐφαπτομένης (§ 1. 1).

῎Αρα κάθε ὀξεῖα γωνία α ἔχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα συνημίνονον.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν ἡ γωνία α αὐξάνῃ ἀπὸ 0^0, ἕως 90^0, τὸ συνημίτονόν της συνεχῶς ἐλαττοῦται ἀπὸ 1 ἕως μηδέν. Ἐκ τοῦ σχήματος 9 (§ 2.1) λαμβάνομεν διὰ τὸ συνημίτονον τῶν ὀξειῶν γωνιῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \ldots$

$$\text{συν}\,\alpha_1 = \frac{(\overline{OA_1})}{(\overline{OM_1})} = \frac{47\text{mm}}{50\text{mm}} = \frac{47}{50}$$

$$\text{συν}\,\alpha_2 = \frac{(\overline{OA_2})}{(\overline{OM_2})} = \frac{44\text{mm}}{50\text{mm}} = \frac{44}{50}$$

$$\text{συν}\,\alpha_3 = \frac{(\overline{OA_3})}{(\overline{OM_3})} = \frac{38\text{mm}}{50\text{mm}} = \frac{38}{50}$$

$$\text{συν}\,\alpha_4 = \frac{(\overline{OA_4})}{(\overline{OM_4})} = \frac{26\text{mm}}{50\text{mm}} = \frac{26}{50} \text{ κλπ·}$$

῞Οταν λοιπὸν ἡ γωνία αὐξάνῃ τὸ συνημίτονόν της ἐλαττοῦται, εἶναι δὲ πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος.

3. 2. Ἡ συνάρτησις y=συν x.

Θεωροῦμεν τά: $M_3 = \{x/x$ ὀξεῖα γωνία $0^0 \leqq x \leqq 90^0\}$
καὶ $\Pi_3 = \{y/y\ \Pi,\ 1 \geqq y \geqq 0\}$.

Ἡ ἀπεικόνισις

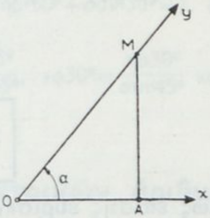
$$t : x \xrightarrow{t} \text{συν}x = y,\ (x \in M_3,\ y \in \Pi_3)$$

ἀπεικονίζει τὸ σύνολον M_3 ἐπὶ τοῦ συνόλου Π_3 καὶ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

Πράγματι, εἰς κάθε γωνίαν $x \in M_3$ ἀντιστοιχεῖ, ὅπως εἴδομεν προηγουμένως, ἕνα μόνον συνημίτονον συν $x=y \in \Pi_3$, ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ὅταν μᾶς δοθῇ ἕνας θετικὸς πραγματικὸς ἀριθμὸς μικρότερος ἢ ἴσος τῆς μονάδος, π.χ. $\frac{2}{3}$, δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ποὺ νὰ ἔχῃ αὐτὸν ὡς συνημίτονον.

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν διὰ τὸ παράδειγμά μας, ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μὲ μίαν κάθετον πλευρὰν 2 μονάδες μήκους καὶ ὑποτείνουσα 3 μοναδ. μήκους (σχ. 15).

Θὰ ἔχωμεν συν α $= \frac{2}{3}$, $\alpha = 48_0 11'$ $25''$. Ἡ γωνία α ἐκ τοῦ τρόπου κατασκευῆς εἶναι μία καὶ μόνη ποὺ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κατασκευὴν αὐτήν, ἄρα εἰς ἕνα ἀριθμὸν $y \in \Pi_3$ ἀντιστοιχεῖ μία μόνον γωνία $x \in M_3$.



Σχ. 15

Ἡ ἀνωτέρω ἀπεικόνισις λέγεται, ὡς γνωστόν, καὶ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ M_3 καὶ πεδίον τιμῶν τὸ Π_3.

3.3. Εὕρεσις τοῦ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας.

Ὅπως εἰς τὰς περιπτώσεις τῆς ἐφαπτομένης καὶ ἡμιτόνου ὀξείας γωνίας, οὕτω καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ συνημιτόνου ἠμποροῦμεν γεωμετρικῶς νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ συνημίτονον μερικῶν γωνιῶν, ὡς 0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0. Γενικῶς, ὅμως, δὲν εὑρίσκονται τὰ συνημίτονα τῶν γωνιῶν μὲ γεωμετρικὰς μεθόδους, ἀλλὰ μὲ μεθόδους ποὺ διδάσκουν τὰ ἀνώτερα Μαθηματικά.

Ἂς ὑπολογίσωμεν ἐδῶ τὰ συν30^0, συν45^0, συν60^0, συν0^0, συν90^0.

Ἀπὸ τὸ σχῆμα 5 τῆς παραγράφου 1.3 λαμβάνομεν :

$$\text{συν}30^0 = \frac{(\overline{OA})}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{3}(\overline{AM})}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2}(\overline{OM})}{(\overline{OM})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\boxed{\text{συν}30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Ὁμοίως $\text{συν}60^0 = \frac{(\overline{AM})}{(\overline{OM})} = \frac{\frac{1}{2}(\overline{OM})}{(\overline{OM})} = \frac{1}{2}$

$$\boxed{\text{συν}\ 60^0 = \frac{1}{2}}$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸ σχῆμα 11 τῆς § 2 . 3 ἔχομεν διὰ τὸ συν 45^0 :

$$\text{συν } 45^0 = \frac{(OA)}{(OM)} = \frac{(OA)}{\sqrt{(AM)^2+(OA)^2}} = \frac{(OA)}{\sqrt{2(OA)^2}} = \frac{(OA)}{(OA)\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\boxed{\text{συν } 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

Εὐκόλως ἐπίσης εὑρίσκομεν, ὅτι συν $0^0 = 1$ καὶ συν $90^0 = 0$.

Ἐπίσης μὲ τὴν γραφικὴν μέθοδον δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν κατὰ προσέγγισιν τὸ συνημίτονον μιᾶς γωνίας καθὼς καὶ ἐκ τοῦ συνημιτόνου τὴν γωνίαν.

Ἀσκήσεις

5. Νὰ εὕρετε μὲ τὴν γραφικὴν μέθοδον τὰ συνημίτονα τῶν κάτωθι γωνιῶν καὶ νὰ συγκρίνετε μὲ ἐκεῖνα τῶν πινάκων:

α) συν10^0 β) συν13^0 γ) συν15^0 δ) συν24^0
ε) συν39^0 στ) συν44^0 ζ) συν53^0 η) συν68^0
θ) συν72^0 ι) συν85^0

6. Δίδονται οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος θετικοὶ ἀριθμοί:

$$\frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ 0{,}66,\ 0{,}75,\ \frac{4}{5},\ 0{,}777\ldots$$

Νὰ εὑρεθοῦν διὰ τῆς γραφικῆς μεθόδου αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν αὐτοὺς ὡς συνημίτονα καὶ νὰ συγκριθοῦν μὲ τὰς ἀντιστοίχους γωνίας τῶν πινάκων.

3. Νὰ κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διὰ τὰ ὁποῖα $\widehat{A} = 90^0$ καὶ

1ον. ημ$\widehat{A} = \frac{3}{4}$ καὶ $(\overline{ΒΓ}) = 60$ mm.

2ον. ημ$\widehat{B} = \frac{2}{7}$ καὶ $(\overline{ΑΒ}) = 28$ mm.

3ον. ημΒ $= \frac{\sqrt{5}}{3}$ καὶ $(\overline{ΑΓ}) = 70$ mm.

7. Ὁμοίως νὰ κατασκευάσετε εἰς χιλιοστομετρικὸν χαρτὶ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\widehat{A} = 90^0$.

1ον. συν$\widehat{Γ} = 0{,}6$ καὶ $(\overline{ΑΓ}) = 42$ mm, 2ον. συνΓ $= 0{,}82$ καὶ $(\overline{ΑΒ}) = 55$ mm.

8. Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ $(\widehat{A} = 90^0)$ ἐκ τῶν στοιχείων:

1ον. εφ$\widehat{B} = \frac{3}{4}$ καὶ $(\overline{ΒΓ}) = 45$ mm, 2ον. εφ$\widehat{B} = \frac{7}{4}$ καὶ $(\overline{ΑΓ}) = 40$ mm.

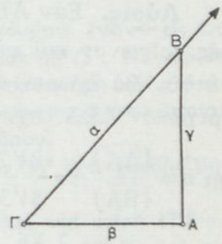
9. Ἀποδείξατε ὅτι $\eta\mu x^0 = \sigma\upsilon\nu(90^0 - x^0)$ διὰ $0^0 < x^0 < 90^0$.

10. Ἀποδείξατε ὅτι $\eta\mu^2 45^0 + \sigma\upsilon\nu^2 45^0 = 1$, $\eta\mu^2 30^0 + \sigma\upsilon\nu^2 30^0 = 1$, ὁμοίως ὅτι $\eta\mu^2 x^0 + \sigma\upsilon\nu^2 x^0 = 1$ διὰ $0^0 < x < 90^0$.

11. Ὁμοίως ἀποδείξατε ὅτι $\epsilon\varphi 45^0 = \frac{\eta\mu 45^0}{\sigma\upsilon\nu 45^0}$, $\epsilon\varphi 30^0 = \frac{\eta\mu 30^0}{\sigma\upsilon\nu 45^0}$ καὶ $\epsilon\varphi 60^0 = \frac{\eta\mu 60^0}{\sigma\upsilon\nu 60^0}$ καὶ γενικῶς $\epsilon\varphi x^0 = \frac{\eta\mu x^0}{\sigma\upsilon\nu x^0}$.

§ 4. Ἐφαρμογὴ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν ἐπίλυσιν προβλημάτων.

Ἡ ἀπόστασις $(\overline{B\Gamma})$ δύο σημείων Β καὶ Γ εὑρισκομένων ἐπὶ τῆς μεσαίας γραμμῆς κατωφερικοῦ δρόμου εἶναι 90m, ἡ δὲ ὁριζοντία ἀπόστασίς του $(\overline{A\Gamma})$ εἶναι 60m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις τοῦ δρόμου ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.



Σχ. 16

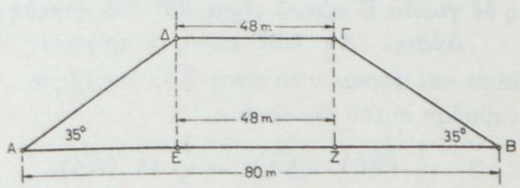
Λύσις. Χάριν ἁπλότητος θέτομεν $(\overline{B\Gamma}) = \alpha$, $(\overline{AB}) = \gamma$, $(\overline{A\Gamma}) = \beta$, $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Gamma}$, $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{A}$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{B}$ καὶ θὰ ἔχωμεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνημιτόνου (σχ. 16).

$$\sigma\upsilon\nu\,\widehat{\Gamma} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{60m}{90m} = \frac{2}{3} = 0{,}666.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας δὲ τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν $\widehat{\Gamma} = 48^0\,11'25''$.

Ἑπομένως ἡ κλίσις τοῦ δρόμου, ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι $48^0 11'25''$.

4. 2. Αἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 35^0 ἑκάστη, ἡ μεγάλη βάσις αὐτοῦ εἶναι 80m καὶ ἡ μικρὴ 48m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.



Σχ. 17

Λύσις. Ἂν φέρωμεν τὰ ὕψη ΔΕ καὶ ΓΖ ἐκ τοῦ σχήματος 17, βλέπομεν ὅτι $(\overline{AE}) = (\overline{ZB}) = 16m$.

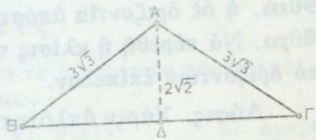
Ἐργαζόμεθα εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΔ, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν (ΔΕ), ἡ ὁποία εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἐφαπτομένης ἔχομεν, $\varepsilon\varphi\ 35^0 = \frac{(\overline{\Delta E})}{(\overline{AE})}$ $= \frac{\upsilon}{16} \Longleftrightarrow \upsilon = 16\ \varepsilon\varphi\ 35^0 = 16 . 0,70021 = 11,20336.$

Ἄρα τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τραπεζίου εἶναι $E = \frac{B+\beta}{2} . \upsilon = \frac{80+48}{2}$. $11,20336 = 717,01504\ m^2$.

4. 3. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἔχει ὕψος $2\sqrt{2}$ cm καὶ κάθε μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευράς του εἶναι $3\sqrt{3}$ cm. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας τῆς βάσεώς του.

Λύσις. Ἐὰν ΑΒΓ εἶναι τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ φέρωμεν τὸ ὕψος ΑΔ αὐτοῦ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ (σχ. 18):



Σχ. 18

$$\eta\mu\ \widehat{B} = \frac{(\overline{\Delta A})}{(\overline{BA})} = \frac{2\sqrt{2}cm}{3\sqrt{3}cm} = \frac{2\sqrt{2} . \sqrt{3}}{3\sqrt{3} . \sqrt{3}} =$$

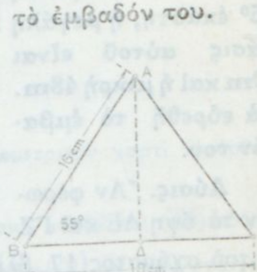
$$= \frac{2\sqrt{6}}{9} = \frac{2\ 2,4495}{9} = \frac{4.8990}{9} = 0,54433.$$

Ἀπὸ τοὺς πίνακας τῶν φυσικῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0,54433 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἡμίτονον τῆς γωνίας $\widehat{B} = 32^0\ 58'\ 43''$.

Κάθε λοιπὸν γωνία τῆς βάσεως τοῦ δοθέντος τριγώνου εἶναι $32^0 58' 43''$.

4. 4. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει πλευρὰς $(\overline{AB}) = 16$m καὶ $(\overline{B\Gamma}) = 18$m, ἡ δὲ γωνία $\widehat{B}$ αὐτοῦ εἶναι 55^0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

Λύσις. Ἂν ΑΒΓ εἶναι τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ φέρωμεν τὸ ὕψος $\overline{A\Delta}$, (σχ. 19, τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ θὰ εἶναι:



Σχ. 19

$$E = \frac{1}{2} (\overline{B\Gamma}) \cdot (\overline{\Delta A}) . = \frac{1}{2}\ 18 . (\overline{A\Delta}).$$

Ἄγνωστον λοιπὸν στοιχεῖον εἶναι τὸ ὕψος $(\overline{A\Delta})$, τὸ ὁποῖον ἠμποροῦμεν νὰ ὑπολογίσωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ.

Πράγματι, γράφομεν $ημ\,\widehat{B} = \frac{(\overline{ΑΔ})}{(\overline{ΒΑ})} \Longleftrightarrow ημ\,55^0 = \frac{(\overline{ΑΔ})}{16} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\overline{ΑΔ}) = 16$ ἡμ 55^0m, τὸ ἐμβαδὸν ἑπομένως εἶναι:

$$E = \frac{1}{2} . 18 . 16 . ημ\,55^0 = 144 . ημ\,55^0 = 144 . 0,81915 = 117,9576\ m^2.$$

Ἀσκήσεις

12. Ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν (ΒΓ)=28,5 m καὶ περίμετρον 108,5 m. Νὰ εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία ἀπὸ τὶς γωνίες του.

13. Κεκλιμένον ἐπίπεδον ἔχει μῆκος 7 m καὶ ὕψος 5 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ κλίσις του ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

14. Κύκλος ἔχει ἀκτῖνα $6\sqrt{2}$ m, νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος χορδῆς αὐτοῦ ποὺ συνδέει τὰ ἄκρα ἑνὸς τόξου του 65^0.

15. Μία σκάλα εἶναι τοποθετημένη, ὥστε νὰ ἀκουμπᾷ ἐπάνω εἰς ἕνα τοῖχον σχηματίζουσα μὲ τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον γωνίαν $68^025'$. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον ὕψος εὑρίσκεται τὸ ἐπάνω ἄκρον της, ἂν ἡ σκάλα ἔχῃ μῆκος 8 m.

16. Δένδρον ρίχνει σκιὰν μήκους 45 m τὴν στιγμὴν κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ ἥλιος ἔχει ὕψος $40^030'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ δένδρου.

17. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου, τοῦ ὁποίου τόξον 36^0 ἔχει χορδὴν μήκους 15 cm.

18. Ἰσοσκελὲς τραπέζιον ἔχει μεγάλη βάσιν 35,8 m καὶ μικρὴ 17,8 m. Ἂν μία γωνία αὐτοῦ προσκειμένη στὴν μεγάλη βάσιν εἶναι $50^0\,30'$, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

19. Μαρμάρινη στήλη ὕψους 12 m ρίχνει κατὰ τινα στιγμὴν σκιὰν μήκους 5m. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ἡλίου κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτήν.

20. Κάθε μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 20 cm, ἡ δὲ γωνία τῆς κορυφῆς του $58^0\,35'$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδόν του.

21. Εὐθὺς ἀνωφερικὸς δρόμος μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς θαλάσσης καταλήγει εἰς ὕψωμα. Ἐὰν ὁ δρόμος ἔχει μῆκος 8 km καὶ ἡ κλίσις του ὡς πρὸς τὸ ὁριζόντιον ἐπίπεδον εἶναι 10^0, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ ὑψώματος.