Δ 2 Μαι

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΣΧΟΛΩΝ ΝΤΙΖΕΛ

Δ. ΠΑΤΡΩΝΗ — Δ. ΧΙΟΥΡΕΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Πατρώνη (Δ.) Χιουρέα (Δ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

(ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ)

Πρὸς χρῆσιν τῶν Μαθητῶν
τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν

Κατὰ τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα
τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΑΘΗΝΑΙ 1951

Δ. ΠΑΤΡΩΝΗ-Δ. ΧΙΟΥΡΕΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Κατὰ τὸ ἀναλυτικὸν πρόγραμμα τοῦ Ὑπουργείου Βιομηχανίας

ΜΕΡΟΣ Α'
ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΑΘΗΝΑΙ
1951

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Ὕλην ἤ ὑλικόν σῶμα καλοῦμεν κάθε τι πού ἐρεθίζει τάς αἰσθήσεις μας (τό βλέπομεν, τό ἐγγίζομεν κλπ.)

2. Διάστημα λέγεται ἡ ἀπέραντη ἔκτασις ἐντός τῆς ὁποίας εὑρίσκονται ὅλα τά σώματα τῆς φύσεως.

3. Ὄγκος σώματος λέγεται ὁ χῶρος τόν ὁποῖον καταλαμβάνει τό σῶμα αὐτό ἐντός τοῦ διαστήματος.

4. Διαστάσεις καλοῦμεν τάς τρεῖς διευθύνσεις κατά τάς ὁποίας ἐκτείνεται ἕνα σῶμα. Δηλ. α) ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, β) ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω καί γ) ἐκ τῶν ὄπισθεν πρός τά ἔμπροσθεν.

5. Ἐπιφάνεια σώματος λέγεται τό σύνολον τῶν ἄκρων ἑνός σώματος, ὅταν τό παρατηρήσωμεν ἀπό ὅλας τάς ὄψεις του. Η ἐπιφάνεια ἔχει δύο διαστάσεις.

6. Γραμμή λέγεται τό σύνολον τῶν ἄκρων ἑνός σώματος ὅταν τό παρατηρήσωμεν ἀπό ἕνα μέρος μόνον (ἤ ἡ τομή δύο ἐπιφανειῶν). Η γραμμή ἔχει μίαν διάστασιν.

7. Σημεῖον λέγεται τό ἄκρον μιᾶς γραμμῆς (ἤ ἡ τομή δύο γραμμῶν). Τό σημεῖον θεωροῦμεν ὅτι δέν ἔχει καμμίαν διάστασιν καί τό σημειώνομεν μέ μίαν τελείαν στιγμήν καί παραλεύρως ἕνα γράμμα.

ΣΧΗΜΑ

1. Σχῆμα σώματος λέγεται ὁ τρόπος κατά τόν ὁποῖον ἐμφανίζε-

ται ἡ ἐξωτερική του ὄψις.

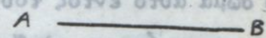
2. Ἴσα σχήματα λέγονται ἐκεῖνα τά ὁποῖα ἄν τά τοποθετήσωμεν καταλλήλως τό ἕνα ἐπάνω εἰς τό ἄλλο ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς.

3. Ἰσοδύναμα σχήματα λέγονται ἐκεῖνα τά ὁποῖα δέν ἐφαρμόζουν ἀκέραια τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου, ἀλλά ἐάν τά κόψωμεν καταλλήλως εἰς κομμάτια ἐφαρμόζουν.

4. Ἄνισα σχήματα λέγονται ἐκεῖνα τά ὁποῖα τό ἕνα εἶναι ἴσον μέ μέρος τοῦ ἄλλου.

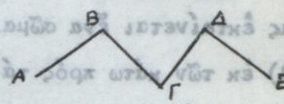
ΕΙΔΗ ΓΡΑΜΜΩΝ

1. Εὐθεῖα γραμμή λέγεται τό σχῆμα τοῦ ὁποίου τήν ἔννοιαν μᾶς δίδει ἕνα νῆμα τεντωμένο (σχ.1).



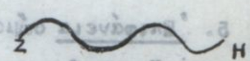
Σχ. 1

2. Τεθλασμένη γραμμή λέγεται ἡ γραμμή πού ἀποτελεῖται ἀπό εὐθείας αἱ ὁποῖαι ὅμως δέν ἀποτελοῦν μίαν ὁλόκληρην εὐθεῖαν (Σχ.2).



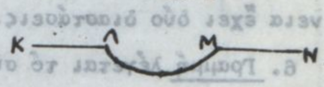
Σχ. 2

3. Καμπύλη γραμμή λέγεται ἡ γραμμή τῆς ὁποίας κανένα μέρος δέν εἶναι εὐθεῖα (Σχ.3).



Σχ. 3

4. Μικτή λέγεται ἡ γραμμή πού ἀποτελεῖται ἀπό εὐθείας καί καμπύλας γραμμάς (Σχ.4).



Σχ. 4

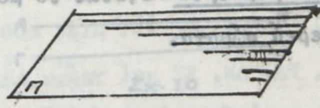
Ἄσκησις

1) Νά εὕρετε παραδείγματα διαφόρων εἰδῶν γραμμῶν.

ΕΙΔΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

1. Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἤ ἐπίπεδον λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ἐπί τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει ἀκριβῶς καί πρός ὅλας τάς κατευθύνσεις ἡ εὐ-

θεῖα γραμμή (σχ.5).



Σχ.5

2. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπίπεδα χωρίς νά εἶναι ὁλόκληρη ἕνα ἐπίπεδον (σχ.6)

Σχ.6

3. Καμπύλη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας κανένα μέρος δέν εἶναι ἐπίπεδον.

4. Μικτή ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια πού ἀποτελεῖται ἀπό ἐπιπέδους καί καμπύλας ἐπιφανείας (σχ.8).

Σχ.7

Ἄσκησις

1) Νά εὕρετε παραδείγματα διαφόρων εἰδῶν ἐπιφανειῶν.

Σχ.8

ΕΙΔΗ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1. Ἐπίπεδον σχῆμα λέγεται κάθε σχῆμα τοῦ ὁποίου ὅλα τά σημεῖα εὑρίσκονται ἐπάνω εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον.

2. Στερεόν σχῆμα λέγεται κάθε σχῆμα τοῦ ὁποίου τά σημεῖα δέν εὑρίσκονται ὅλα ἐπάνω εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Γεωμετρία λέγεται ἡ ἐπιστήμη πού ἐξετάζει τά σώματα ὡς πρός τό σχῆμα καί τήν ἔκτασιν αὐτῶν (χωρίς νά ἐνδιαφέρεται διά τήν ὕλην μέ τήν ὁποίαν εἶναι κατασκευασμένα).

Ἐπιπεδομετρία λέγεται τό μέρος τῆς Γεωμετρίας πού ἐξετάζει τά ἐπίπεδα σχήματα.

Στερεομετρία λέγεται τό μέρος τῆς Γεωμετρίας πού ἐξετάζει τά στερεά σώματα.

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

1. Εὐθύγραμμον τμῆμα λέγεται τό μεταξύ δύο ὡρισμένων σημείων εὐθείας περιεχόμενον μέρος αὐτῆς (σχ.1) (Συνήθως λέγομεν εὐθεῖαν καί ἐννοοῦμεν εὐθύγραμμον τμῆμα).

2. Χάραξις εὐθείας. Διά νά χαράξωμεν εὐθεῖαν γραμμήν, μεταχειριζόμεθα τό γνωστόν ὄργανον τόν κ α ν ό ν α (χάρακα) κατά μῆκος τοῦ ὁποίου σύρομεν τό μολῦβι, τήν κιμωλίαν κλπ.

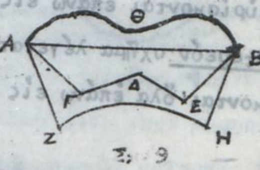
3. Μέτρησις εὐθείας (Βλέπε Πρακτικήν Ἀριθμητικήν 1) ποσόν 2) μονάς 3) μέτρησις 4) Γαλλικόν μέτρον).

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Ἀπό ἕνα σημεῖον είς ἄλλο μίαν καί μόνην εὐθεῖαν μποροῦμε νά γράψωμεν.

2. Ἡ εὐθεῖα ἐκτείνεται ἀπεριορίστως (δηλ.αὐξάνει ὅσο θέλομε).

3. Ἀπό ὅλας τάς γραμμάς πού μποροῦμε νά χαράξωμε μεταξύ δύο σημείων, ἡ μικροτέρα εἶναι ἡ εὐθεῖα (σχ.9). Π.χ. μεταξύ Α καί Β τό εὐθ.τμῆμα ΑΒ εἶναι μικρότερον ἀπό τάς γραμμάς ΑΘΒ, ΑΓΔΕΒ, ΑΖΗΒ.

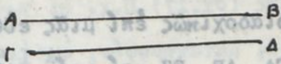


Σχ.9

Ἀπόστασις δύο σημείων λέγεται τό εὐθ.τμῆμα πού τά ἑνώνει.

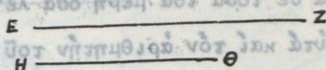
ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΔΥΟ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἴσα λέγονται δύο εὐθ.τμήματα, ἐάν τοποθετούμενα τό ἕνα ἐπάνω εἰς τό ἄλλο συμπίπτουν καί κατά τά ἄκρα αὐτῶν καί ἀποτελοῦν ἕνα εὐθ.τμῆμα (σχ.10). Π.χ.Τό ΑΒ καί τό ΓΔ εἶναι ἴσα καί σημειώνομεν ΑΒ=ΓΔ.



Σχ. 10

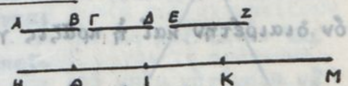
"Ανισα λέγονται δύο εὐθ.τμήματα, ἐάν τοποθετούμενα τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου καί συμπίπτοντος τοῦ ἑνός ἄκρου αὐτῶν, δέν συμπίπτει καί τό ἄλλο (σχ.11) Π.χ. ἐάν τό Η συμπέση μετά τοῦ Ε, τό Θ, δέν θά συμπέση μετά τοῦ Ζ καί σημειώνομεν ΕΖ > ΗΘ.



Σχ. 11

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΕΥΘ.ΤΜΗΜΑΤΩΝ

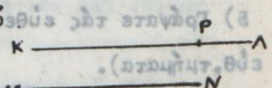
"Αθροισμα πολλῶν εὐθ.τμημάτων λέγομεν ἕνα εὐθ.τμῆμα, πού ἀποτελεῖται ἀπό αὐτά ἐάν τά θέσωμεν τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐπάνω εἰς μίαν εὐθεῖαν (σχ.12). Π.χ.διά νά προσθέσω τά εὐθ.τμήματα ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, τά τοποθετῶ ἐπί τῆς εὐθείας ΗΜ, τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ΗΘ, ΘΙ, ΙΚ, καί τότε τό εὐθ.τμῆμα ΗΚ εἶναι τό ἄθροισμα αὐτῶν καί γράφομεν ΑΒ+ΓΔ+ΕΖ = ΗΚ.



Σχ. 12

ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΑΝΙΣΩΝ ΕΥΘ. ΤΜΗΜΑΤΩΝ

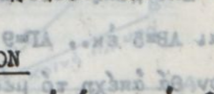
Διαφορά δύο ἀνίσων εὐθ.τμημάτων λέγεται τό εὐθ.τμῆμα τό ὁποῖον μένει, ἐάν ἀπό τό μεγαλύτερον καί ἀπό τό ἕνα ἄκρον αὐτοῦ ἀποκοπῆ εὐθ.τμῆμα ἴσον πρός τό μικρότερον (σχ.13) Π.χ. ἀπό τό ΚΛ ἀποκόπτω τμῆμα ΚΡ ἴσον μέ τό ΜΝ, τό ΡΛ τό ὁποῖον μένει εἶναι ἡ διαφορά τῶν ἀνίσων εὐθειῶν ΚΛ καί ΜΝ καί γράφομεν ΚΛ-ΜΝ=ΡΛ.



Σχ. 13

ΠΟΛ/ΣΜΟΣ ΕΥΘ.ΤΜΗΜΑΤΟΣ ΕΠΙ ΑΡΙΘΜΟΝ

Διά νά πολλαπλασιάσω ἕνα εὐθ.τμῆμα ἐπί ἕναν ἀκέραιον ἀριθμόν, σχηματίζω ἐπί μιᾶς εὐθείας τό ἄθροισμα τόσων εὐθ.τμημάτων ἴσων μέ τό δοθέν, ὅσον



Σχ. 14

πλῆθος μονάδων περιέχει ὁ ἀριθμός (σχ.14) ΑΒx3, σημαίνει νά πάρω διαδοχικῶς ἐπί μιᾶς εὐθείας τρία τμήματα ἴσα μέ τό ΑΒ, δηλ. ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ καί γράφω ΑΒx3 = ΓΖ.

ΣΗΜ. Ἐάν ὁ ἀριθμός εἶναι κλασματικός, χωρίζω τό δοθέν εὐθ. τμῆμα σέ τόσα ἴσα μέρη ὅσα λέγει ὁ παρονομαστής καί μέ τό ἕνα ἀπ'αὐτά καί τόν ἀριθμητήν τοῦ κλάσματος σχηματίζω γινόμενον ἐργαζόμενος ὅπως προηγουμένως (σχ.14) Π.χ.διά νά πολλαπλασιάσω τό εὐθ. τμῆμα ΓΖx $\frac{1}{3}$, χωρίζω τήν εὐθεῖαν ΓΖ εἰς τρία ἴσα μέρη ΓΔ,ΔΕ,ΕΖ (ὅσο λέγει ὁ παρονομαστής). Καί γράφω ΓΖx$\frac{1}{3}$=ΑΒ.

Διαίρεσις δι'ἀριθμοῦ γίνεται πολλαπλασιασμός ἐάν ἀντιστρέψω τόν διαιρέτην καί ἡ πρᾶξις γίνεται κατά τά γνωστά.

Ἀσκήσεις

1) Γράψατε εὐθείας α) 0,15μ. β) 0,025μ. γ) 0,035μ.

2) Εὕρετε τό ἄθροισμα τῶν εὐθειῶν τῆς προηγουμένης.

3) Γράψατε μίαν εὐθεῖαν 0,055 μ. καί μία ἄλλην 0,030μ. καί κατόπιν νά εὕρετε τήν διαφοράν αὐτῶν.

4) Γράψατε τρεῖς εὐθείας ΑΒ=0,032μ., ΓΔ=0,058μ. καί ΕΖ=0,052μ., κατόπιν νά εὕρετε α) τό ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ καί β) τήν διαφοράν (ΑΒ+ΓΔ)-(ΕΖ).

5) Γράψατε τάς εὐθείας ΑΒx4 καί ΓΔx5 (ὅπου ΓΔ καί ΑΒ δοθέντα εὐθ.τμήματα).

6) Εὕρετε τό ἄθροισμα καί τήν διαφοράν τῶν εὐθειῶν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, ἐάν ΓΔ > ΑΒ.

7) Ἐπί μιᾶς εὐθείας εἶναι κατά σειράν τρία σημεῖα Α,Β,Γ καί εἶναι ΑΒ=5 ἑκ., ΑΓ=9 ἑκ. Νά εὑρεθῇ α) τό μῆκος τῆς ΒΓ καί β) πόσον θά ἀπέχῃ τό μέσον Δ τῆς ΒΓ ἀπό τό Α καί ἀπό τό Β.

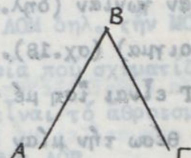
8) Ἐπί μιᾶς εὐθείας εἶναι κατά σειράν τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ καί εἶναι ΑΔ=12 ἑκ. καί ΒΓ = 5 ἑκ. Πόσον εἶναι τό ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ;

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΠΕΡΙ ΓΩΝΙΩΝ

Γωνία λέγεται τό σχῆμα πού σχηματίζουν δύο εὐθεῖαι ὅταν ἀρχίζουν ἀπό τό αὐτό σημεῖον καί δέν ἀποτελοῦν μίαν ὁλόκληρον εὐθεῖαν.

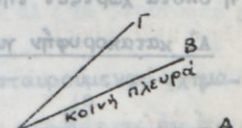


Σχ. 15

Αἱ εὐθεῖαι πού τήν σχηματίζουν λέγονται πλευραί καί τό σημεῖον ἀπό τό ὁποῖον ἀρχίζουν κορυφή. Τήν γωνίαν τήν ὀνομάζομεν ἤ μέ ἕνα γράμμα πού θέτομεν πλησίον τῆς κορυφῆς ἤ μέ τρία γράμματα ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα τῆς κορυφῆς τά δέ δύο ἄλλα πλησίον τῶν πλευρῶν. Προσέχομεν ὅμως πάντοτε νά θέτωμεν ἀπαραιτήτως τό γράμμα τῆς κορυφῆς εἰς τό μέσον (σχ.15). Π.χ. λέγομεν ἡ γωνία Β ἤ ἡ γωνία ΑΒΓ ἤ ἡ γωνία ΓΒΑ. Τό μέγεθος τῆς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν καί ὄχι ἀπό τό μῆκος των, δηλ.μποροῦμε νά αὐξήσωμε ὅσο θέλομεν τάς πλευράς χωρίς ἡ γωνία νά αὐξάνη.

ΓΩΝΙΑΙ ΕΦΕΞΗΣ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ

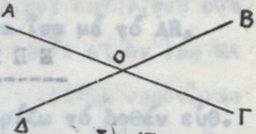
1. Ἐφεξῆς λέγονται δύο γωνίαι, ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν κορυφήν, κοινήν μίαν πλευράν καί τάς ἄλλας δύο πλευράς ἀπό τό ἕνα μέρος καί ἀπό τό ἄλλο τῆς κοινῆς των πλευρᾶς (σχ.16).Π.χ. αἱ γωνίαι ΓΟΒ καί ΒΟΑ εἶναι ἐφεξῆς.



Σχ. 16

2. Κατακορυφήν λέγονται δύο γωνίαι ἐάν ἔχουν τήν αὐτήν κορυφήν καί αἱ πλευραί τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς

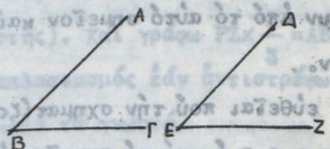
ἄλλης (σχ.17) Π.χ. αἱ γωνίαι ΑΟΒ καί ΔΟΓ εἶναι κατακορυφήν, ὁμοίως αἱ γωνίαι ΑΟΔ καί ΒΟΓ. Δηλ.δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουν δύο ζεύγη κατακορυφήν γωνιῶν.



Σχ. 17

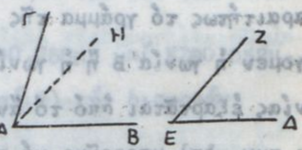
ΣΥΓΚΡΙΣΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Ἴσαι λέγονται δύο γωνίαι ἐάν τοποθετούμεναι ἡ μία ἐπί τῆς ἄλλης ἐφαρμόζουν καί ἀποτελοῦν μίαν γωνίαν (δηλ.ἔχουν τό ἴδιο ἄνοιγμα) (σχ.18). Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἴση μέ τήν ΔΕΖ, διότι ἄν θέσω τήν μίαν ἐπί τῆς ἄλλης θά ἐφαρμόσουν (δέν ἐνδιαφερόμεθα ἄν τά ἄκρα τῶν πλευρῶν δέν συμπέσουν).



Σχ. 18

Ἄνισοι λέγονται δύο γωνίαι ὅταν τοποθετούμεναι οὕτως ὥστε αἱ κορυφαί των καί ἡ μία τῶν πλευρῶν των νά συμπίπτουν, αἱ ἄλλαι δύο δέν συμπίπτουν εὑρισκόμεναι πρός τό αὐτό μέρος τῆς κοινῆς (σχ.19). Αἱ γωνίαι ΓΑΒ καί ΔΕΖ εἶναι ἄνισοι $\widehat{ΓΑΒ} > ΔΕΖ$.



Σχ. 19

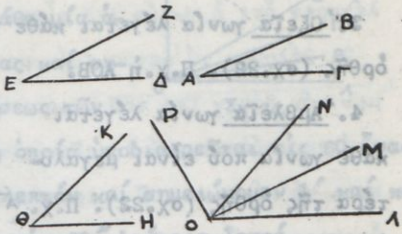
ΔΙΧΟΤΟΜΟΣ ΓΩΝΙΑΣ

Διχοτόμος γωνίας λέγεται ἡ ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας εὐθεῖα, ἡ ὁποία χωρίζει τήν γωνίαν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Αἱ κατακορυφήν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΓΩΝΙΩΝ

Ἄθροισμα πολλῶν γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἄκραι μή κοιναί πλευραί, ἐάν τοποθετήσωμεν τάς γωνίας οὕτως ὥστε νά ἔχουν κοινήν κορυφήν καί ἡ πρώτη νά γίνεται ἐφεξῆς τῆς δευτέρας κλπ.(σχ.20). Π.χ.διά νά προσθέσωμεν τάς γων. ΒΑΓ, ΔΕΖ, ΗΘΚ, πέρνομεν πρῶτον τήν ΓΑΒ καί τήν θέτομενείς τήν θέσιν ΛΟΜ, κατόπιν πέρνομεν τήν ΔΕΖ καί τήν κάνομεν ἐφεξῆς μέ τήν ΛΟΜ δηλ. τήν ΜΟΝ, ὁμοίως καί τήν ΗΘΚ εἰς τήν θέσιν ΝΟΡ. Ἡ γωνία πού σχηματίζουν αἱ ἄκραι πλευραί ΟΛ καί ΟΡ δηλ.ἡ γωνία ΛΟΡ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν καί σημειώνομεν $\hat{ΛΟΜ}+\hat{ΜΟΝ}+\hat{ΝΟΡ} = \hat{ΛΟΡ}$.



Σχ. 20

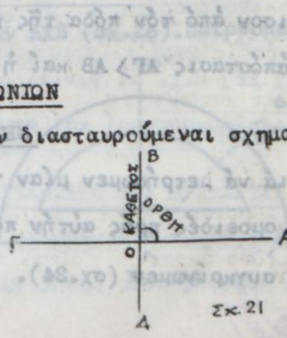
ΔΙΑΦΟΡΑ ΔΥΟ ΑΝΙΣΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Διαφορά δύο ἀνίσων γωνιῶν λέγεται ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μή κοιναί πλευραί δύο γωνιῶν, ἄν τάς τοποθετήσω οὕτως ὥστε νά ἔχουν κοινήν κορυφήν, κοινήν μίαν πλευράν καί νά πέσουν αἱ μή κοιναί πλευραί πρός τό αὐτό μέρος τῆς κοινῆς (σχ. 19). Π.χ. πέρνομεν τήν γωνίαν ΔΕΖ καί τήν τοποθετοῦμεν οὕτως ὥστε ἡ κορυφή Ε νά πέση ἐπί τῆς Α, ἡ πλευρά ΕΔ ἐπί τῆς ΑΒ καί ἡ ΕΖ πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΑΒ πρός τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἡ ΑΓ, νά πάρῃ τήν θέσιν ΑΗ. Ἡ γωνία ΗΑΓ εἶναι ἡ διαφορά τῶν δύο γωνιῶν καί σημειώνει ΒΑΓ-ΒΑΗ = ΗΑΓ.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΘΕΤΟΙ - ΕΙΔΗ ΓΩΝΙΩΝ

1. Κάθετοι λέγονται δύο εὐθεῖαι ὅταν διασταυρούμεναι σχηματίζουν τέσσαρας ἴσας γωνίας.

2. Ὀρθή γωνία λέγεται μία ἐκ τῶν τεσσάρων ἴσων γωνιῶν τάς ὁποίας σχηματίζουν δύο εὐθεῖται

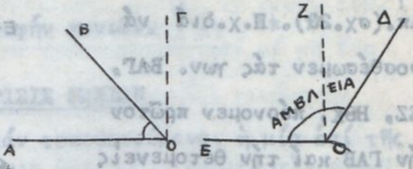


Σχ. 21

κάθετοι (σχ.21). Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΒΔ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΑΓ. Αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ,ΔΟΑ εἶναι ὀρθαί.

3. Ὀξεῖα γωνία λέγεται κάθε γωνία πού εἶναι μικροτέρα τῆς ὀρθῆς (σχ.22). Π.χ.ἡ ΑΟΒ.

4. Ἀμβλεῖα γωνία λέγεται κάθε γωνία πού εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ὀρθῆς (σχ.22). Π.χ. ἡ ΔΟΕ.



Σχ. 22

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΛΑΓΙΑΙ

Μία εὐθεῖα λέγεται πλαγία πρός ἄλλην, ὅταν τήν τέμνει καί δέν σχηματίζει μέ αὐτήν ὀρθάς γωνίας.

Ποῦς μιᾶς εὐθείας λέγεται τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον τέμνει μίαν ἄλλην εὐθεῖαν.

Ἐάν ἀπό ἕνα σημεῖον Ο ἐκτός εὐθείας ΚΛ (σχ.23) φέρομεν τήν κάθετον ΟΑ καί τάς πλαγίας ΟΔ, ΟΒ, ΟΓ θά παρατηρήσωμεν

Σχ. 23

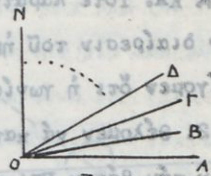
α) Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπό ὅλας τάς πλαγίας.

β) Αἱ πλάγιαι ΟΔ καί ΟΒ τῶν ὁποίων οἱ πόδες Β καί Δ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου Α εἶναι ἴσαι.

γ) Αἱ πλάγιαι ΟΒ καί ΟΓ τῶν ὁποίων αἱ πόδες Β καί Γ ἀπέχουν ἄνισον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου Α εἶναι ἄνισοι. Δηλ. ἐπειδή ἡ ἀπόστασις ΑΓ > ΑΒ καί ἡ πλαγία ΟΓ > ΟΒ.

ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΓΩΝΙΩΝ

Διά νά μετρήσωμεν μίαν γωνίαν πρέπει νά λάβωμεν ὡς μονάδα ἕνα ὁμοειδές πρός αὐτήν ποσόν δηλ. μίαν ἄλλην γωνίαν καί νά τάς συγκρίνωμεν (σχ.24).

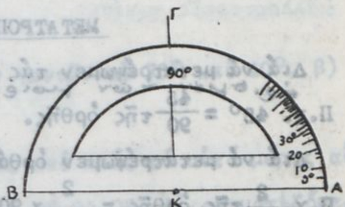


Σχ. 24

Μοῖρα λέγεται ἡ γωνία ἡ ὁποία εἶναι τό $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς. Δηλαδή διαιροῦμεν τήν ὀρθήν εἰς 90 ἴσας γωνίας καί κάθε μία ἀπό αὐτάς εἶναι γωνία μιᾶς μοίρας καί σημειώνομεν 1^o. Ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνομεν τήν μοῖραν ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 60 ἴσας γωνίας πού ἡ κάθε μία λέγεται λεπτόν καί σημειώνομεν 1΄ καί κάθε πρῶτον λεπτόν ὑποδιαιρεῖται εἰς 60΄΄ δεύτερα λεπτά.

ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟΝ

Τό μοιρογνωμόνιον εἶναι ἕνα γεωμετρικόν ὄργανον ἀπό μέταλλον ἤ ζελατίνα μέ τό ὁποῖον μετροῦμεν τάς γωνίας. Ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι εὐθεῖα γραμμή (σχ.25). Ἐάν ἀπό τό μέσον Κ τῆς βάσεως φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν τήν ΚΓ,

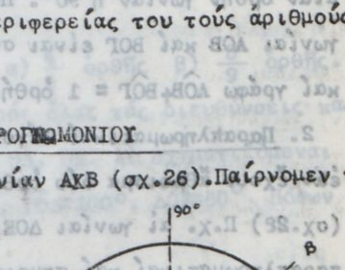


Σχ. 25

σχηματίζονται δύο ὀρθαί γωνίαι ΑΚΓ καί ΒΚΓ, ἐπειδή κάθε μία εἶναι 90^o καί αἱ δύο θά εἶναι 180^o, διά τοῦτο τό μοιρογνωμόνιον ἔχει χαραγμένους ἐπί τῆς ἡμιπεριφερείας του τούς ἀριθμούς ἀπό 0^o μέχρι 180^o.

ΧΡΗΣΙΣ ΤΟΥ ΜΟΙΡΟΓΝΩΜΟΝΙΟΥ

1. Θέλομεν νά μετρήσωμεν τήν γωνίαν ΑΚΒ (σχ.26). Παίρνομεν τό μοιρογνωμόνιον καί τό τοποθετοῦμεν οὕτως ὥστε τό μέσον τῆς βάσεως Κ νά πέσῃ ἐπί τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καί ἡ βάσις του νά συμπέσῃ μετά τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς.



Σχ. 26

τῆς ΚΑ. Τότε παρατηροῦμεν ἡ ἄλλη πλευρά τῆς γωνίας ἡ ΚΒ μέ ποίαν διαίρεσιν τοῦ ἡμικυκλίου συμπίπτει καί διαβάζομεν 50^o, τότε λέγομεν ὅτι ἡ γωνία $\hat{AKB}$ εἶναι 50^o.

2. Θέλομεν νά κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν π.χ. 50^o. Τοποθετοῦμεν τήν βάσιν ΓΚΑ τοῦ μοιρογνωμονίου (σχ.26) ἐπί μιᾶς εὐθείας καί σημειώνομεν τό σημεῖον Κ τῆς εὐθείας μετά τοῦ ὁποίου συμπίπτει τό κέντρον τοῦ μοιρογνωμονίου. Κατόπιν εὑρίσκομεν ἐπί τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ μοιρογνωμονίου τήν διαίρεσιν 50^o καί τήν σημειώνομεν ἐπί τοῦ χάρτου δι' ἑνός σημείου Β. Παραμερίζομεν τό ὄργανον καί φέρομεν τήν ΟΒ, τότε ἡ γωνία ΑΚΒ = 90^o.

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ ΜΟΙΡΩΝ ΕΙΣ ΟΡΘΑΣ

Διά νά μετατρέψωμεν τάς μοίρας εἰς ὀρθάς διαιροῦμεν τόν
ἀριθμόν τῶν μοιρῶν διά 90:

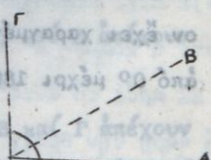
Π.χ. $45^o = \frac{45}{90}$ τῆς ὀρθῆς.

Διά νά μετατρέψωμεν ὀρθάς εἰς μοίρας πολλαπλασιάζομεν αὐτάς ἐπί 90.

Π.χ. $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς = $\frac{2}{3} \times 90$ μοίρας = 60^o.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΚΑΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

1. Συμπληρωματικαί λέγονται δύο γωνίαι ἐάν ἔχουν ἄθροισμα μίαν ὀρθήν γωνίαν ἤ 90^o. Π.χ. (σχ.27) αἱ γωνίαι ΑΟΒ καί ΒΟΓ εἶναι συμπληρωματικαί καί γράφω $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 1$ ὀρθή.



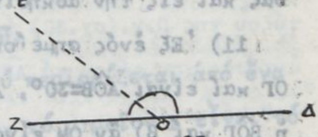
Σχ. 27

2. Παραπληρωματικαί λέγονται δύο γωνίαι ἐάν ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθάς γωνία ἤ 180^o (σχ.28) Π.χ. αἱ γωνίαι ΔΟΕ καί ΕΟΖ εἶναι παραπληρωματικαί καί σημειώνομεν $\widehat{\Delta OE} + \widehat{EOZ} = 2$ ὀρθαί ἤ 180^o.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Διά νά κατασκευάσωμεν δύο συμπληρωματικάς γωνίας, φέρομεν ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καί ἐντός αὐτῆς μίαν εὐθεῖαν, αἱ

δύο γωνίαι εἰς τάς ὁποίας ἐχωρίσθη ἡ ὀρθή εἶναι συμπληρωματικαί
Διά νά κατασκευάσωμεν δύο παραπληρωματικάς γωνίας, φέρομεν ἔκ τινος σημείου εὐθείας μίαν οἱανδήποτε εὐθεῖαν, αἱ δύο γωνίαι πού ἐσχηματίσθησαν εἶναι παραπληρωματικαί (Βλέπε σχήματα 27 καί 28).



Σχ. 28

Ἀσκήσεις

1) Κατασκευάσατε γωνίας α) 30°, β) 65°, γ) 120°.

2) Κατασκευάσατε μίαν γωνίαν ἴσην μέ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α) 30° καί 60°, β) 20°, 40° καί 50°.

3) Κατασκευάσατε τήν διαφοράν τῶν γωνιῶν α) 70° καί 40°, β) 150° καί 60°.

4) Ἐξ ἑνός σημείου Ο μιᾶς εὐθείας καί πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς, φέρομεν κατά σειράν τάς εὐθείας ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι $\widehat{ΒΟΓ} = 30^{\circ}$, $\widehat{ΓΟΔ} = 40^{\circ}$, $\widehat{ΔΟΕ} = 50^{\circ}$. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ $\widehat{ΕΟΒ}$;

5) Πρός πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι ἴσαι αἱ γωνίαι α) 30°, β) 60°, γ) 45°.

6) Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ γωνίαι α) $\frac{4}{5}$ ὀρθῆς β) $\frac{5}{9}$ ὀρθῆς.

7) Ἐξ ἑνός σημείου Ο φέρομεν πρός ὅλας τάς διευθύνσεις κατά σειράν τάς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι $\widehat{ΑΟΒ} = 40^{\circ}$, $\widehat{ΒΟΓ} = 70^{\circ}$, $\widehat{ΓΟΔ} = 100^{\circ}$, $\widehat{ΔΟΕ} = 60^{\circ}$. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ γωνία $\widehat{ΕΟΑ}$;

8) Μία γωνία εἶναι 40°, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ συμπληρωματική της καί πόσων ἡ παραπληρωματική.

9) Μία γωνία εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, νά εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματική καί ἡ παραπληρωματική αὐτῆς.

10) Εἰς τήν ἄσκησιν 8 νά ὑπολογισθοῦν τά ζητούμενα εἰς ὀρθάς καί εἰς τήν ἄσκησιν 9 εἰς μοίρας.

11) Ἐξ ἑνός σημείου φέρομεν κατά σειράν τάς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καί εἶναι $\widehat{AOB}=30^o$, $\widehat{AO\Gamma}=80^o$. Νά εὑρεθῇ α) πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ $\widehat{BO\Gamma}$ καί β) ἄν ΟΜ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$, πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ $\widehat{AOM}$;

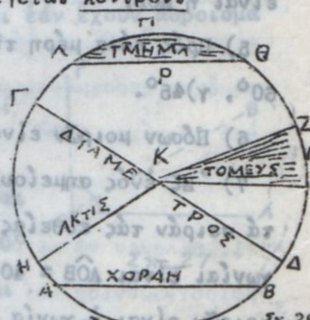
12) Δύο παραπληρωματικαί γωνίαι ἔχουν διαφοράν 30^o. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε μία;

13) Δύο εὐθεῖαι διασταυρούμεναι σχηματίζουν μίαν γωνίαν 45^o. Πόσων μοιρῶν καί πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς εἶναι κάθε μία ἀπό τάς ἄλλας τρεῖς γωνίας;

ΠΕΡΙ ΚΥΚΛΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Περιφέρεια λέγεται ἡ ἐπίπεδος κλειστή καμπύλη γραμμή τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἔχουν τήν ἰδιότητα νά ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό ἕνα σταθερόν σημεῖον, τό ὁποῖον λέγεται κέντρον.



Σχ.29

Κύκλος λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περικλείεται ἀπό τήν περιφέρειαν.

Ἀκτίς λέγεται ἡ ἀπόστασις ἑνός σημείου τῆς περιφερείας ἀπό τό κέντρον.

Τόξον λέγεται ἕνα τμῆμα τῆς περιφερείας.

Χορδή λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά ἄκρα ἑνός τόξου ἤ δύο σημεῖα τῆς περιφερείας.

Διάμετρος λέγεται ἡ χορδή πού διέρχεται ἀπό τό κέντρον ἤ ἡ εὐθεῖα πού ἀρχίζει ἀπό ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας διέρχεται ἀπό τό κέντρον καί καταλήγει πάλιν είς τήν περιφέρειαν.

Τομεύς λέγεται τό μέρος τοῦ κύκλου πού περιορίζεται ἀπό ἕνα τόξον καί τάς ἀκτῖνας είς τά ἄκρα αὐτοῦ.

Τμῆμα λέγεται τό μέρος τοῦ κύκλου πού περιορίζεται ἀπό ἕνα τόξον καί τήν χορδήν αὐτοῦ (σχ.29) Π.χ. τό σημεῖον Κ εἶναι τό κέντρον, ἡ ΚΗ εἶναι ἀκτίς, τό ΑΜΒ εἶναι τόξον, ἡ ΑΒ εἶναι χορδή, ἡ ΓΔ εἶναι διάμετρος, τό ΚΖΝΚ εἶναι τομεύς, τό ΛΠΘΡ εἶναι τμῆμα.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ

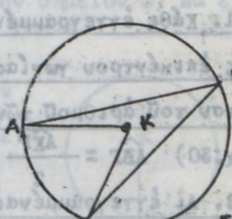
1. Ἀπό τόν ὁρισμόν τῆς περιφερείας βγάζομεν τό συμπέρασμα ὅτι ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι. Ἐπειδή κάθε διάμετρος κύκλου ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἀκτῖνες, ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἰναι ἴσαι.

2. Ἡ διάμετρος χωρίζει τήν περιφέρειαν είς δύο ἴσα μέρη κάθε ἕνα τῶν ὁποίων λέγεται ἡμιπεριφέρεια καί τόν κύκλον ἐπίσης είς δύο ἴσα μέρη κάθε ἕνα τῶν ὁποίων λέγεται ἡμικύκλιον.

ΕΠΙΚΕΝΤΡΟΙ ΚΑΙ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

1. Ἐπίκεντρος γωνία λέγεται ἡ γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι κέντρον ἑνός κύκλου, αἱ δέ πλευραί της ἀκτῖνες αὐτοῦ.

2. Ἐγγεγραμμένη είς κύκλον γωνία λέγεται ἡ γωνία τῆς ὁποίας ἡ κορυφή εἶναι σημεῖον περιφερείας, αἱ δέ πλευραί της χορδαί αὐτῆς.



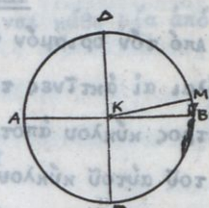
Σχ 30

3. Ἀντίστοιχον τόξον ἐπικέντρου ἤ ἐγγεγραμμένης γωνίας λέγεται τό τόξον πού περιέχεται μεταξύ τῶν πλευρῶν μιᾶς ἐπικέντρου ἤ ἐγγεγραμμένης γωνίας. Π.χ. (Σχ.30) τό τόξον ΑΓ εἶναι ἀντίστοιχον

τῆς ἐπικέντρου $\widehat{ΑΚΓ}$ ἤ τῆς ἐγγεγραμμένης $\widehat{ΑΒΓ}$. Συνήθως λέγομεν ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη ἤ ἡ ἐπίκεντρος βαίνει ἐπί τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της Π.χ.(σχ.30) ἀντί νά λέγωμεν ὅτι ἡ $\widehat{ΑΚΓ}$ ἤ ἡ $\widehat{ΑΒΓ}$ ἔχει ἀντίστοιχον τόξον τό $\widehat{ΑΓ}$, λέγομεν ὅτι ἡ $\widehat{ΑΚΓ}$ ἤ ἡ $\widehat{ΑΒΓ}$ βαίνει ἐπί τοῦ τόξου $\widehat{ΑΓ}$.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΟΞΩΝ

Ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν τόξων πέρνομεν τό τόξον τό ὁποῖον ἰσοῦται μέ τό $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας καί τό ὀνομάζομεν <u>μοῖραν</u>. Τήν μοῖραν τήν ὑποδιαιροῦμεν εἰς 60΄ καί τό κάθε 1΄ εἰς 60΄΄



Σχ.31

Εἰς κάθε κύκλον παρατηροῦμεν ὅτι ἐπίκεντρος γωνία 90^{o} ἔχει ἀντίστοιχον τόξον 90^{o}, ἄρα ἐπίκεντρος 1^{o} ἔχει ἀντίστοιχον τόξον 1^{o}. Ἐξ αὐτοῦ συμπεραίνομεν ὅτι μία ἐπίκεντρος γωνία καί τό ἀντίστοιχον τόξον της ἐκφράζονται μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν μοιρῶν. Π.χ.(σχ.31) αἱ κάθετοι διάμετροι ΑΒ καί ΓΔ χωρίζουν τήν περιφέρειαν εἰς 4 ἴσα τόξα, ἄρα τόξον ΔΒ$=90^{o}$ ἀλλά καί γωνίαν $\widehat{ΔΚΒ}=1$ ὀρθή $= 90^{o}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

<u>1. Κάθε ἐγγεγραμμένη εἰς κύκλον γωνία εἰναι ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ἐπικέντρου γωνίας πού βαίνει ἐπί τοῦ αὐτοῦ τόξου ἤ μέ τό ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μοιρῶν τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της.</u> Π.χ. (σχ.30) $\widehat{ΑΒΓ} = \frac{\widehat{ΑΚΓ}}{2}$

<u>2. Αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι πού βαίνουν εἰς τό αὐτό τόξον ἤ εἰς ἴσα τόξα εἰναι ἴσαι</u> Π.χ. (σχ.31)

$\widehat{ΑΒΓ}=\widehat{ΑΔΓ}=\widehat{ΓΕΑ}$ διότι $\widehat{ΑΒΓ} = \frac{\widehat{ΑΚΓ}}{2}$

$\widehat{ΑΔΓ} = \frac{\widehat{ΑΚΓ}}{2}$ καί $\widehat{ΑΕΓ} = \frac{\widehat{ΑΚΓ}}{2}$

Σχ. 32

3. Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση πρός μίαν ὀρθήν ἐάν βαίνει ἐπί ἡμιπεριφερείας. Εἶναι ὀξεῖα ἐάν βαίνει ἐπί τόξου μικροτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας καί εἶναι ἀμβλεῖα ἐάν βαίνει ἐπί τόξου μεγαλυτέρου τῆς ἡμιπεριφερείας. Π.χ.(σχ.33) $\widehat{ΑΒΓ} = 90^o$ διότι τό ἀντίστοιχον τόξον τῆς $\widehat{ΑΔΕΖΓ}$ ἰσοῦται μέ 180^o. Ἡ $\widehat{ΔΕΖ} > 90^o$ διότι τό ἀντίστοιχον τόξον της $\widehat{ΔΑΒΓΖ} > 180^o$. Ἡ $\widehat{ΑΒΓ} < 90^o$ (σχ.32) διότι τό ἀντίστοιχον τόξον της $\widehat{ΑΓ} < 180^o$.

Σχ. 33

Ἀσκήσεις

1) Ἕνα τόξον περιφερείας κύκλου εἶναι 60^o, πόσων μοιρῶν θά εἶναι ἡ ἐπίκεντρος καί πόσων αἱ ἐγγεγραμμέναι πού βαίνουν ἐπ'αὐτοῦ ;

2) Μία ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι 40^o. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐπίκεντρος πού βαίνει ἐπί τοῦ αὐτοῦ τόξου καί πόσων τό ἀντίστοιχον αὐτῆς τόξον ;

ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΠΡΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΝ

Μία εὐθεῖα καί μία περιφέρεια μποροῦν 1) νά μήν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον 2) νά ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον 3) Νά ἔχουν δύο κοινά σημεῖα.

1) Ἐάν δέν ἔχουν κανένα κοινόν σημεῖον τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τήν εὐθεῖαν εἶναι μεγαλύτερη ἀπό τήν ἀκτῖνα καί ἡ εὐθεῖα λέγεται ἐξωτερική. Π.χ. (σχ.34α') η ΑΒ εἶναι ἐξωτερική εὐθεῖα καί ἡ ἀπόστασις ΚΓ > ΚΔ.

α'

2) Ἐάν ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέν-

τρου ἀπό τήν εὐθεῖαν εἶναι ἴση μέ τήν ἀκτῖνα.

<u>Ἐφαπτομένη</u> περιφερείας λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἔχει ἕνα κοινόν σημεῖον μέ τήν περιφέρειαν.

<u>Σημεῖον ἐπαφῆς</u> λέγεται τό κοινόν σημεῖον ἐφαπτομένης καί περιφερείας.

Ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τό κέντρον περιφερείας μέ τό σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ἐφαπτομένης, εἶναι ἀκτίς κάθετος ἐπί τήν ἐφαπτομένην.

Σχ. 34

Π.χ.(σχ.34β΄) ἡ ΖΗ εἶναι ἐφαπτομένη, τό Θ σημεῖον ἐπαφῆς καί ἡ ΚΘ εἶναι ἀπόστασις καί ἀκτίς.

3. Ἐάν ἔχουν δύο κοινά σημεῖα ἡ εὐθεῖα μέ τήν περιφέρειαν, τότε ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τήν εὐθεῖαν εἶναι μικρότερη ἀπό τήν ἀκτῖνα καί ἡ εὐθεῖα λέγεται τέμνουσα. Π.χ.(σχ.34γ΄) ἡ ΛΜ εἶναι τέμνουσα καί ἡ ἀπόστασις ΚΡ < ΚΠ.

ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ

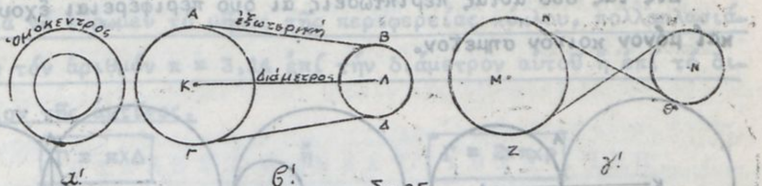
ΟΡΙΣΜΟΙ

<u>Ὁμόκεντροι</u> λέγονται δύο περιφέρειαι ὅταν ἔχουν τό αὐτό κέντρον Π.χ.(Σχ.35α΄).

<u>Διάκεντρος</u> δύο περιφερειῶν λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά κέντρα των Π.χ.(Σχ.35β΄) ἡ ΚΛ.

<u>Κοινή ἐφαπτομένη</u> δύο περιφερειῶν, λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἐφάπτεται καί τῶν δύο περιφερειῶν.

<u>Ἐξωτερική κοινή ἐφαπτομένη</u> λέγεται ἡ κοινή ἐφαπτομένη, ὅταν οἱ δύο κύκλοι εἰς τούς ὁποίους ἐφάπτεται εὑρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς Π.χ.(Σχ.35β΄) αἱ ΑΒ καί ΓΔ.



Σχ. 35

Εσωτερική κοινή έφαπτομένη λέγεται ή κοινή έφαπτομένη,όταν οί δύο κύκλοι είς τούς οποίους έφάπτεται εύρίσκονται έκατέρωθεν αύτής. Π.χ.(σχ.35γ΄) αί ΕΖ καί ΗΘ.

Εφαπτόμεναι περιφέρειαι λέγονται δύο περιφέρειαι πού έχουν ένα καί μόνον κοινόν σημείον.

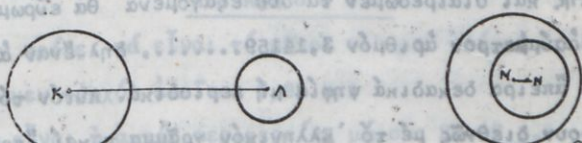
Καί λέγομεν ότι έφάπτονται έ ξ ω τ ε ρ ι κ ω ς μέν άν όλα τά άλλα σημεία τής μιάς κείνται έκτός τής άλλης (σχ.37α΄). έ σ ω τ ε ρ ι κ ω ς δέ άν όλα τά άλλα σημεία τής μιάς εύρίσκονται έντός τής άλλης (σχ.37β΄).

ΣΧΕΤΙΚΑΙ ΘΕΣΕΙΣ ΔΥΟ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ

Δύο περιφέρειαι μπορούν νά καταλάβουν μεταξύ των πέντε θέσεις.

1) Νά είναι ή μία έκτός τής άλλης (Σχ.36α΄)

2) Νά είναι ή μία έντός τής άλλης (Σχ.36β΄).



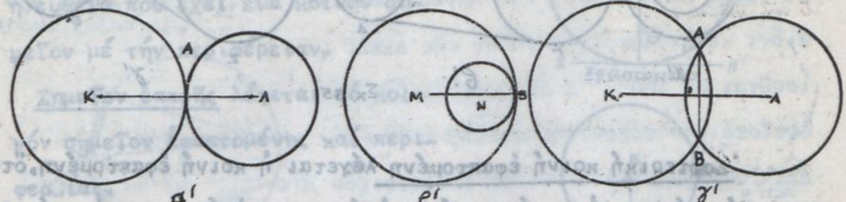
Σχ. 36

Είς τάς δύο αύτάς περιπτώσεις αί περιφέρειαι δέν έχουν κανένα κοινόν σημείον.

3) Νά έφάπτωνται έξωτερικώς (Σχ.37α΄)

4) Νά ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς (σχ.37β΄).

Εἰς τάς δύο αὐτάς περιπτώσεις αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουν ἕνα καί μόνον κοινόν σημεῖον.



Σχ. 37

5) Νά τέμνωνται δηλ. νά ἔχουν δύο κοινά σημεῖα, ὁπόταν ἡ διάκεντρος εἶναι κάθετος εἰς τό μέσον τῆς χορδῆς πού συνδέει τά κοινά σημεῖα. Π.χ. (Σχ.37 γ΄) ἡ ΚΛ εἶναι κάθετος εἰς τό μέσον Ο τῆς ΑΒ ἡ ὁποία λέγεται κοινή χορδή τῶν 2 κύκλων.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

Ἔχομεν μίαν περιφέρειαν ἀπό σύρμα (στεφάνι), τήν κόπτομεν εἰς ἕνα σημεῖον καί τήν τεντώνομεν, τό εὐθύγραμμον τμῆμα πού θά λάβωμεν λέγεται ἀ ν ά π τ υ γ μ α τῆς περιφερείας.

Μῆκος περιφερείας λέγεται τό μῆκος τοῦ ἀναπτύγματος αὐτῆς.

Ο ΑΡΙΘΜΟΣ $\pi = 3,14$

Ἐάν μετρήσωμεν τό ἀνάπτυγμα μιᾶς περιφερείας καί τήν διάμετρον αὐτῆς καί διαιρέσωμεν τά δύο ἐξαγόμενα θά εὕρωμεν πηλῖκον τόν ἀσύμμετρον ἀριθμόν 3,14159......., δηλ.ἕναν ἀριθμόν πού ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά. Αὐτόν τόν ἀριθμόν τόν γράφουν διεθνῶς μέ τό Ἑλληνικόν γράμμα π καί ἐπειδή ἔχει ἄπειρα ψηφία,διά νά διευκολυνώμεθα εἰς τούς ὑπολογισμούς μας ὅταν δέν θέλομεν μεγάλην ἀκρίβειαν χρησιμοποιοῦμεν τόν $\pi=3,14$.

Ὁ ἀριθμός $\pi=3,14$ εἶναι ὁ λόγος(δηλ.τό πηλῖκον) τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου, πρός τήν διάμετρόν του.

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ

Διά νά εὕρωμεν τό μῆκος τῆς περιφερείας κύκλου, πολλαπλασιάζομεν τόν ἀριθμόν π = 3,14 ἐπί τήν διάμετρον αὐτοῦ ἤ ἐπί τό διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος.

$\boxed{Γ = π \times Δ}$ ἤ $\boxed{Γ = 2 \times π \times ρ}$

Π.χ. ἄν ἡ ἀκτίς κύκλου εἶναι 5 μ. τό μῆκος τῆς περιφερείας του θά εἶναι $Γ = 3,14 \times 10$ ἤ $Γ = 3,14 \times 2 \times 5$

ΕΥΡΕΣΙΣ ΤΟΥ ΜΗΚΟΥΣ ΤΟΞΟΥ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ

Ἐάν ἡ ἀκτίς ἑνός κύκλου εἶναι ρ τό μῆκος τῆς περιφερείας αὐτοῦ θά εἶναι $2 \times π \times ρ$

Ὅλη ἡ περιφέρεια εἶναι 360° καί ἔχει μῆκος $2 \times π \times ρ$

ἄρα ἡ 1° θά ἔχῃ μῆκος $\frac{2 \times π \times ρ}{360}$

καί ἕνα τόξον μ° " " " $\frac{2 \times π \times ρ \times μ}{360}$

Διά νά εὕρωμεν τό μῆκος τόξου, πολλαπλασιάζομεν τό μῆκος τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει ἐπί τόν ἀριθμόν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου καί τό γινόμενον διαιροῦμεν διά 360.

$$\boxed{M = \frac{2 \times π \times ρ \times μ}{360}}$$

Π.χ. τόξον 60° καί ἀκτίς 5μ. $M = \frac{2 \times 3,14 \times 5 \times 60}{360} = 5,23$ μ.

Ἀσκήσεις

1) Πόσον πρέπει νά εἶναι τό μῆκος σιδηροῦ ἐλάσματος διά νά περιτυλίξωμεν τροχόν ἀκτῖνος 0,85 μ.;

2) Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς περιφερείας μήκους 25,12 μ.;

3) Ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ ἑνός ποδηλάτου εἶναι 0,75 μ. Πόσας στροφάς θά κάνῃ ὁ τροχός τοῦ ποδηλάτου, ἄν ὁ ποδηλάτης διανύσῃ ἀπόστασιν 9420μ.;

4) Πόσον εἶναι τό μῆκος τόξου 30°, κύκλου ἀκτῖνος 3μ.;

5) Πόσων μοιρῶν εἶναι τόξον μήκους 1,57 μ. ὅταν ἡ ἀκτίς τοῦ

κύκλου πού ἀνήκει εἶναι 10μ.;

6) Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς περιφερείας τῆς ὁποίας τόξον 60^{o} ἔχει μῆκος 4,186μ.;

ΠΕΡΙ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Εὐθύγραμμον σχῆμα λέγεται ἕνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου πού περικλείεται ἀπό εὐθύγραμμα τμήματα.

2) Πλευραί τοῦ εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ εὐθεῖαι πού τό περικλείουν.

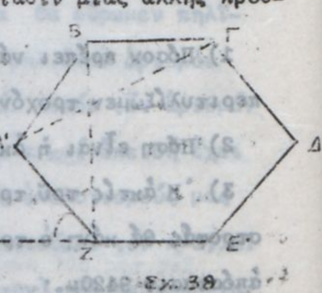
3) Γωνίαι εὐθυγράμμου σχήματος λέγονται αἱ γωνίαι πού σχηματίζονται ἀπό τάς πλευράς του.

4) Κορυφαί εὐθ.σχήματος λέγονται αἱ κορυφαί τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Κάθε εὐθύγραμμον σχῆμα ἔχει ἴσον ἀριθμόν πλευρῶν καί γωνιῶν.

5) Περίμετρος εὐθ.σχήματος λέγεται τό ἄθροισμα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

6) Διαγώνιος εὐθ.σχήματος λέγεται κάθε εὐθεῖα πού συνδέει δύο κορυφάς του χωρίς νά εἶναι πλευρά.

7) Ἐξωτερική γωνία εὐθ.σχήματος λέγεται ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό μίαν πλευράν του καί τήν προέκτασιν μιᾶς ἄλλης προσκειμένης. Π.χ.(σχ.38) αἱ ΑΒ,ΒΓ,........ εἶναι πλευραί. Αἱ $\widehat{ΑΒΓ}$, $\widehat{ΒΓΔ}$,........ εἶναι γωνίαι. Αἱ Α,Β,Γ,........ εἶναι κορυφαί. Η ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΖ+ΖΑ περίμετρος. Αἱ ΒΖ,ΑΓ....... διαγώνιοι. Ἡ $\widehat{ΑΖΗ}$ ἐξωτερική γωνία.

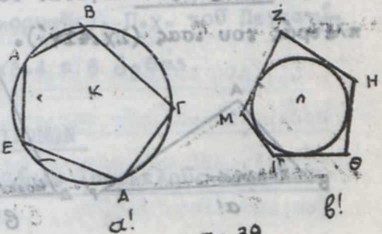


Σχ.38

Ἐάν τό εὐθ.σχῆμα ἔχει 3 πλευράς,λέγεται τρίγωνον, 4 τετράπλευρον, 5 πεντάγωνον, 6 ἑξάγωνον.... Τά πεντάγωνα, ἑξάγωνα... λέγονται πολύγωνα.

8) Ἐγγεγραμμένον εὐθ.σχῆμα εἰς κύκλον λέγεται τό εὐθ.σχῆμα τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας του καί αἱ πλευραί του χορδαί αὐτοῦ Π.χ. (Σχ.39α΄) τό ΑΒΓΔΕ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τόν κύκλον Κ καί ὁ κύκλος εἶναι περιγεγραμμένος.

9) Περιγεγραμμένον εὐθ.σχῆμα περί κύκλον, λέγεται τό εὐθ.σχῆμα πού αἱ πλευραί του εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου. Π.χ.(Σχ.39β΄)τό ΖΗΘΙΜ εἶναι περιγεγραμμένον εἰς τόν κύκλον Κ.



Σχ. 39

ΤΡΙΓΩΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τρίγωνον λέγεται τό εὐθ.σχῆμα πού ἔχει τρεῖς πλευράς.

2. Κύρια στοιχεῖα τριγώνου λέγονται αἱ τρεῖς πλευραί του καί αἱ τρεῖς γωνίαι του.

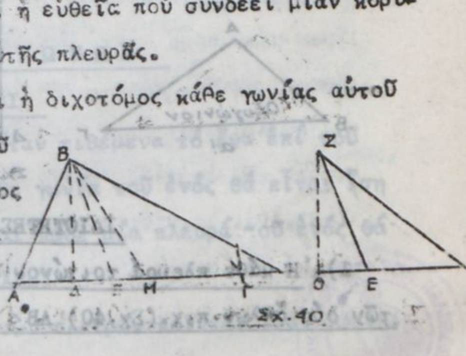
3. Βάσις τριγώνου λέγεται μιά ὁποιαδήποτε πλευρά του.

4. Ὕψος τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος ἀπό μιά κορυφή του μέχρι τήν ἀπέναντι αὐτῆς πλευράν.

5. Διάμεσος τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα πού συνδέει μίαν κορυφήν μέ τό μέσον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς πλευρᾶς.

6. Διχοτόμος τριγώνου λέγεται ἡ διχοτόμος κάθε γωνίας αὐτοῦ Π.χ.(Σχ.40) ἡ ΒΔ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καί ἡ ΖΘ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΕΖΗ.

Ἡ ΒΜ εἶναι διάμεσος καί ΒΕ εἶναι διχοτόμος.



Σχ.40

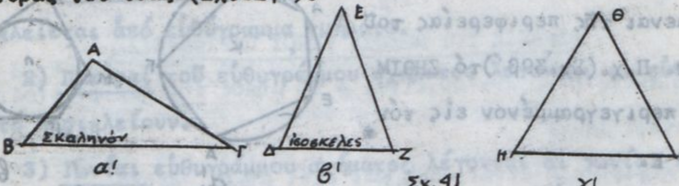
ΕΙΔΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Α΄) Ἐκ τῶν πλευρῶν

1) Σκαληνόν λέγεται τό τρίγωνον πού ἔχει καί τάς τρεῖς πλευράς του ἀνίσους (Σχ.41α΄)

2) Ἰσοσκελές λέγεται τό τρίγωνον πού ἔχει δύο πλευράς του ἴσας. Ἡ τρίτη ἄνισος πλευρά λέγεται βάσις αὐτοῦ (Σχ.41β΄).

3) Ἰσόπλευρον λέγεται τό τρίγωνον πού ἔχει καί τάς τρεῖς πλευράς του ἴσας (Σχ.41γ΄).



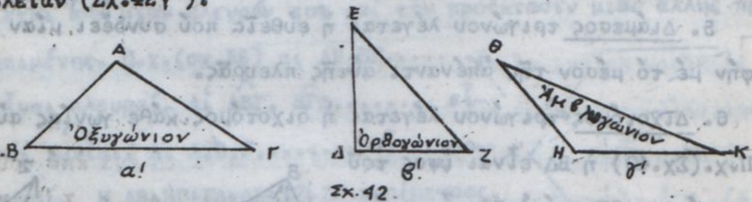
Σχ.41

Β΄) Ἐκ τῶν γωνιῶν

1) Ὀξυγώνιον λέγεται τό τρίγωνον πού εἶναι ὅλαι αἱ γωνίαι του ὀξεῖαι.

2) Ὀρθογώνιον λέγεται τό τρίγωνον πού ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν (Σχ.42β΄). Ἡ πλευρά πού εὑρίσκεται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς του γωνίας λέγεται ὑποτείνουσα.

3) Ἀμβλυγώνιον λέγεται τό τρίγωνον πού ἔχει μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν (Σχ.42γ΄).



Σχ.42

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1) Ἡ κάθε πλευρά τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων π.χ.(Σχ.40) $AB < A\Gamma + \Gamma B$.

2) Εἰς κάθε τρίγωνον τό ἄθροισμα καί τῶν τριῶν γωνιῶν του ἰσοῦται μέ δύο ὀρθάς ἤ 180°. Π.χ. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}$ = 2 ὀρ.

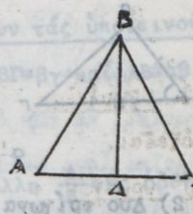
3) Ἡ κάθε ἐξωτερική γωνία τριγώνου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἐντός καί ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ Π.χ.(Σχ.40) $\Theta\hat{E}Z = E\hat{Z}H + Z\hat{H}E$.

Σ Η Μ. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε πολυγώνου εἶναι τόσαι ὀρθαί γωνίαι, ὅσον τό διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἠλαττωμένον κατά 4 (Αὐτό εὑρίσκεται ἄν διαιρέσωμεν τό πολύγωνον εἰς τρίγωνα διά διαγωνίων ἐκ μιᾶς κορυφῆς). Π.χ. τοῦ Πενταγώνου τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 2x5-4 = 6 ὀρθάς.

ΙΣΟΣΚΕΛΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1) Αἱ γωνίαι πού εἶναι παρά τήν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι (Σχ.43) $\hat{A}=\hat{\Gamma}$.

2) Τό ὕψος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καί διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας (Σχ.43). ἡ ΒΔ εἶναι ὕψος, διάμεσος καί διχοτόμος γων.$A\hat{B}\Delta$ = γων.$\Delta\hat{B}\Gamma$ καί ΑΔ = ΔΓ.



Σχ. 43

ΙΣΟΠΛΕΥΡΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Τά ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι καί ἰσογώνια. Δηλ. ἄν αἱ πλευραί ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσαι, θά εἶναι ἴσαι καί αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

Ι Σ Ο Τ Η Σ Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ω Ν

ΟΡΙΣΜΟΙ

1) Ἴσα λέγονται δύο τρίγωνα ὅταν τιθέμενα τό ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν ἀκριβῶς. Δηλ.κάθε γωνία τοῦ ἑνός θά εἶναι ἴση μέ μίαν ἄλλην γωνίαν τοῦ ἄλλου καί κάθε μία πλευρά τοῦ ἑνός θά εἶναι ἴση μέ μίαν πλευράν τοῦ ἄλλου.

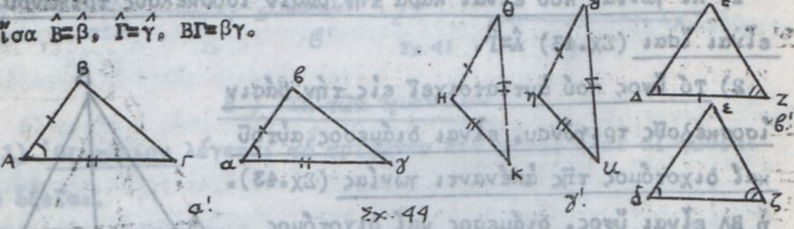
Εἰς ἴσα τρίγωνα ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι καί ἀντιστρόφως.

2) Περιεχομένη γωνία ὑπό δύο πλευρῶν τριγώνου λέγεται ἡ γωνία πού σχηματίζεται ἀπό τάς πλευράς αὐτάς. (Σχ.41α΄) ἡ γων. Α εἶναι περιεχομένη τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ.

3) Προσκείμεναι γωνίαι εἰς πλευράν τριγώνου λέγονται αἱ γωνίαι πού ὑπάρχουν εἰς τά ἄκρα αὐτῆς (Σχ.41α΄) Αἱ γων.Α καί Γ εἶναι προσκείμεναι εἰς τήν πλευράν ΑΓ.

ΑΙ ΤΡΕΙΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1) Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα,ἐάν ἔχουν δύο πλευράς ἴσας μίαν πρός μίαν καί τήν περιεχομένην ὑπ᾽αὐτῶν γωνίαν ἴσην Π.χ.(Σχ.44α΄) τά τρίγ.ΑΒΓ καί αβγ, ἔχουν ΑΒ=αβ, ΑΓ=αγ καί $\hat{A}=\hat{α}$, ἄρα θά εἶναι ἴσα $\hat{B}=\hat{β}$, $\hat{Γ}=\hat{γ}$, ΒΓ=βγ.



Σχ. 44

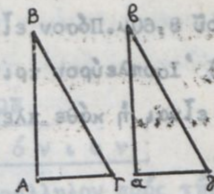
2) Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐάν ἔχουν μίαν πλευράν ἴσην καί τάς προκειμένας εἰς αὐτήν γωνίας ἴσας μίαν πρός μίαν. Π.χ.(Σχ.β΄) τά τρίγ.ΔΕΖ καί δεζ ἔχουν ΔΖ=δζ, Δ=δ, Ζ=ζ, ἄρα εἶναι ἴσα, δηλ. θά ἔχουν ΕΖ=εζ, ΔΕ=δε, καί Ε=ε.

3) Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐάν ἔχουν καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν. Π.χ.(Σχ.γ΄) τά τρίγωνα ΗΘΙ καί ηθι, ἔχουν ΗΘ=ηθ, ΘΚ=θκ, ΗΚ=ηκ, ἄρα εἶναι ἴσαι καί θά ἔχουν $\hat{H}=\hat{η}$, $\hat{K}=\hat{κ}$, $\hat{θ}=\hat{θ}$ διότι ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι διά νά εἶναι δύο τρίγωνα ἴσα εἶναι ἀρκετόν νά ἔχουν τρία στοιχεῖα των ἴσα, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα ἀπαραιτήτως πλευρά.

ΑΙ ΤΕΣΣΑΡΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ

Ἐπειδή τά ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τήν ὀρθήν γωνίαν ἴσην, διά τοῦτο ἀρκεῖ νά ἔχουν δύο ἀκόμη στοιχεῖα των ἴσα ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα πλευρά.



Σχ. 45

1) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐάν ἔχουν τάς δύο καθέτους πλευράς ἴσας, μίαν πρός μίαν. Π.χ. εἰς τά τρίγ. ΑΒΓ καί αβγ, ἔχουν ΑΒ=αβ καί ΑΓ=αγ.

2) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐάν ἔχουν μίαν κάθετον πλευράν ἴσην καί μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην Π.χ. ΑΒ=αβ καί $\hat{B}=\hat{\beta}$.

3) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐάν ἔχουν τήν ὑποτείνουσαν καί μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην. Π.χ. ΒΓ=βγ καί $\hat{B}=\hat{\beta}$.

4) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα ἐάν ἔχουν τάς ὑποτεινούσας ἴσας καί μίαν κάθετον πλευράν ἴσην. Π.χ. ΒΓ=βγ καί ΑΒ=αβ.

Ἀσκήσεις

1) Ἡ μία γωνία τριγώνου εἶναι 35° καί ἡ ἄλλη $\frac{4}{5}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ τρίτη γωνία αὐτοῦ;

2) Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε μία γωνία ὀρθογωνίου καί ἰσοσκελοῦς τριγώνου;

3) Ἡ γωνία τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $\frac{8}{9}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι αἱ παρά τήν βάσιν γωνίαι αὐτοῦ;

4) Ἡ ἐξωτερική γωνία παρά τήν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 130°, νά ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι αὐτοῦ.

5) Ἡ μία ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς, πόσον εἶναι αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ;

6) Ἡ κάθετος ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου ἐπί χορδήν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τό τόξον καί τήν χορδήν. Διατί;

7) Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἐξωτερική γωνία ἑνός ἰσοπλεύρου τρι-

γώνου;

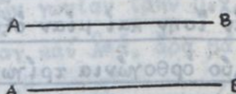
8) Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δεκαγώνου.

9) Η περίμετρος ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 20μ.καί ἡ βάσις αὐτοῦ 8,60μ.Πόσον εἶναι κάθε μία ἀπό τάς ἄλλας πλευράς αὐτοῦ;

10) Ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ περίμετρος εἶναι 12 τ.π.,πόσα μέτρα εἶναι ἡ κάθε πλευρά αὐτοῦ;

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

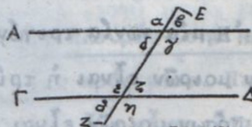
Εὐθεῖαι παράλληλοι λέγονται δύο εὐθεῖαι πού κεῖνται ἐπί τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου καί ὅσον καί ἄν τάς προεκτείνωμεν δέν συναντῶνται Π.χ. αἱ ΑΒ καί ΓΔ εἶναι παράλληλοι.



Σχ. 46

ΤΟΜΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ ΥΠΟ ΤΡΙΤΗΣ

Ἐά κόψωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας ὑπό τρίτης σχηματίζονται 8 γωνίαι, ἐκ τῶν ὁποίων 4 ὀξεῖαι γωνίαι ἴσαι μεταξύ των καί 4 ἀμβλεῖαι ἴσαι μεταξύ των.Π.χ. αἱ παράλληλοι ΑΒ καί ΓΔ τεμνόμεναι ὑπό τῆς ΕΖ σχηματίζουν τάς γωνίας α=γ=ε=η ἀμβλείας καί β=δ=ζ=θ ὀξείας (Σχ.47). Αἱ γωνίαι γ καί ε, καθώς καί δ καί ζ, λέγονται ἐντός ἐναλλάξ.



Σχ. 47

Αἱ γωνίαι ε καί α, ζ καί θ, δ καί η, γ καί κ λέγονται ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη.

Αἱ γωνίαι ε καί δ, καθώς καί ζ καί γ, λέγονται ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη.

Ἐάν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι κοποῦν ὑπό τρίτης σχηματίζουν.

1) Τάς ἐντός ἐναλλάξ γωνίας ἴσας γ=ε, δ=ζ.

2) Τάς ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας ἴσας ε=α.

β=ζ, δ=θ, γ=κ.

3) Τάς ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη γωνίας παραπληρωματικάς

δ+ε=2 ὀρθ., γ+ζ = 2 ὀρθ.

Καί ἀντιστρόφως.

ΧΑΡΑΞΙΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

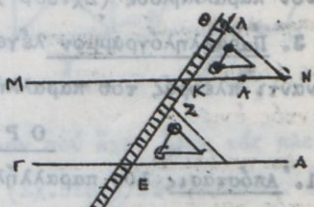
1. Μέ τό Μοιρογνωμόνιον

Θέλομεν νά φέρωμεν ἐκ τοῦ σημείου Η παράλληλον πρός τήν ΓΔ (Σχ.48). Ἀπό τό Η φέρομεν μίαν εὐθεῖαν π.χ. τήν ΕΖ ἡ ὁποία τέμνει τήν ΓΔ εἰς τό θ. Μετροῦμεν μέ τό μοιρογνωμόνιον τήν γωνίαν ν καί κατασκευάζομεν μέ κορυφήν τό Η, πλευράν τήν Ηθ καίπρός τό ἄλλο μέρος αὐτῆς γων.ρ=ν. Ἡ πλευρά ΑΗ τῆς γωνίας αὐτῆς θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΓΔ,διότι αἱ σχηματιζόμεναι ἐντός ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Σχ. 48

2. Μέ τόν γνώμονα καί τόν κανόνα.

Θέλομεν νά φέρωμεν ἀπό τό σημεῖον Α εὐθεῖαν παράλληλον πρός τήν ΓΔ (Σχ.49). Τοποθετοῦμεν τόν γνώμονα οὕτως ὥστε ἡ ὑποτείνουσά του νά ἐφαρμόση ἐπί τῆς ΓΔ καί τόν κανόνα ΘΗ οὕτως ὥστε ἡ κόψις του νά ἐφαρμόση ἐπί τῆς καθέτου πλευρᾶς ΕΖ τοῦ γνώμονος. Κατόπιν ὀλισθαίνομεν τόν γνώμονα ἐπί τοῦ κανόνος μέχρις ὅτου ἡ ὑποτείνουσα διέλθη ἀπό τό σημεῖον Α. Τότε χαράσσομεν μέ τό μολύβι κατά μῆκος τῆς ὑποτεινούσης τήν εὐθεῖαν ΜΝ, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη παράλληλος. Διότι αἱ ἐντός ἐκτός καί ἐπί τά αὐτά



Σχ 49

τά αὐτά μέρη γωνίαι σ=π.

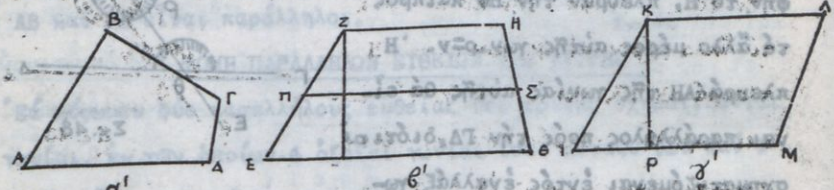
"Α σ κ η σ ι ς

1) Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται ὑπό τρίτης. Ἄν μία ἐκ τῶν 8 σχηματιζομένων γωνιῶν εἶναι $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, νά ὑπολογισθοῦν ὅλαι αἱ ἄλλαι γωνίαι.

Τ Ε Τ Ρ Α Π Λ Ε Υ Ρ Α

ΕΙΔΗ ΑΥΤΩΝ

1. Τραπεζοειδές λέγεται τό τετράπλευρον πού δέν ἔχει πλευράς παραλλήλους (Σχ.50α΄) τό ΑΒΓΔ.



Σχ. 50

2. Τραπέζιον λέγεται τό τετράπλευρον πού ἔχει δύο πλευράς μόνον παραλλήλους (Σχ.50β΄) τό ΕΖΗΘ.

3. Παραλληλόγραμμον λέγεται τό τετράπλευρον πού ἔχει τάς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους (Σχ.50γ΄).

Ο Ρ Ι Σ Μ Ο Ι

1. Ἀπόστασις δύο παραλλήλων εὐθειῶν λέγεται τό μεταξύ αὐτῶν περιεχόμενον μέρος εὐθείας καθέτου πρός αὐτάς.

2. Βάσις παραλληλογράμμου λέγεται μία πλευρά του.

3. Ὕψος παραλληλογράμμου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

4. Βάσεις τραπεζίου λέγονται αἱ παράλληλοι πλευραί του.

5. Ὕψος τραπεζίου λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεών του.

6) Διάμεσος τραπεζίου λέγεται ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά μέσα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ.

7) Ἰσοσκελές λέγεται τό τραπέζιον τοῦ ὁποίου, αἱ μή παράλληλοι πλευραί εἶναι ἴσαι.

Ἡ ΖΝ (Σχ.β΄) εἶναι ὕψος τοῦ τραπεζίου, αἱ ΖΗ καί ΕΘ βάσεις αὐτοῦ, ἡ ΣΠ διάμεσος. Ἄν ΕΖ=ΗΘ τότε εἶναι ἰσοσκελές.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον.

1) Αἱ ἀπέναντι πλευραί του εἶναι ἴσαι. ΑΒ=ΓΔ, ΑΔ=ΒΓ.

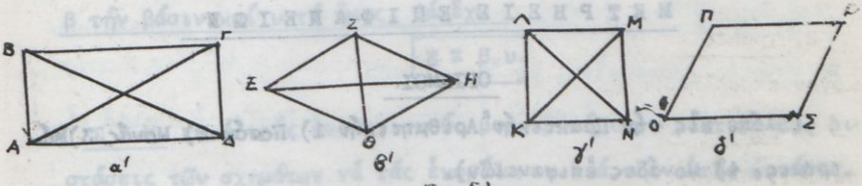
2) Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι $\hat{A}=\hat{\Gamma}$, $\hat{B}=\hat{\Delta}$.

3) Ἡ μία διαγώνιος τέμνει τήν ἄλλην εἰς τό μέσον ΟΒ=ΟΔ, ΟΑ=ΟΓ.

ΕΙΔΗ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

1. Ὀρθογώνιον λέγεται τό παραλληλόγραμμον πού ἔχει ὅλας τάς γωνίας του ὀρθάς (Σχ.51α΄) Α=Β=Γ=Δ=1 ὀρθή.

Τοῦ ὀρθογωνίου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι (Σχ.α΄) ΑΓ=ΒΔ.



Σχ. 51

2. Ρόμβος λέγεται τό παραλληλόγραμμον πού ἔχει ὅλας τάς πλευράς του ἴσας καί τάς γωνίας μή ὀρθάς (Σχ.51β΄) ΕΖ=ΖΗ=ΗΘ=ΘΕ. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως καί διχοτομοῦν τάς γωνίας αὐτοῦ.

3. Τετράγωνον λέγεται τό παραλληλόγραμμον πού ἔχει καί τάς πλευράς του ἴσας καί τάς γωνίας ὀρθάς (Σχ.51γ΄) ΚΛ=ΛΜ=ΜΝ=ΝΚ καί $\hat{K}=\hat{\Lambda}=\hat{M}=\hat{N}$ = 1 ὀρθή.

Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσαι, τέμνονται καθέτως καί διχοτομοῦν τάς γωνίας αὐτοῦ.

4. Πλάγιον λέγεται τό παραλληλόγραμμον τοῦ ὁποίου αἱ προσκείμεναι πλευραί εἶναι ἄνισοι καί αἱ γωνίαι του μή ὀρθαί (Σχ.51δ΄) ΟΣ > ΣΡ, $\widehat{\text{ΠΟΣ}}$ < 1 ὀρθή.

Ἀσκήσεις

1) Μία γωνία παραλληλογράμμου εἶναι 50^o. Πόσων μοιρῶν εἶναι αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ;

2) Παραλληλόγρ. ἡ μία πλευρά εἶναι 5μ. καί ἡ περίμετρος αὐτοῦ 30μ. Πόσον εἶναι τό μῆκος τῶν πλευρῶν;

3) Ἡ μία διαγώνιος ρόμβου μετά μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ σχηματίζουν γωνίαν $\frac{1}{3}$ τῆς ὀρθῆς. Πόσον εἶναι αἱ ἄλλαι γωνίαι αὐτοῦ;

4) Ἰσοσκελοῦς τραπεζίου αἱ παρά τήν βάσιν γωνίαι εἶναι $\frac{1}{2}$ τῆς ὀρθῆς κάθε μία, ἡ μία βάσις του 10μ. καί ἡ ἄλλη 6μ. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος αὐτοῦ.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

(Βλέπε εἰς τήν Πρακτικήν Ἀριθμητικήν 1) Ποσόν 2) Μονάς 3) Μέτρησις, 4) Μονάδες ἐπιφανειῶν).

Ἐμβαδόν μιᾶς ἐπιφανείας λέγεται τό ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς πρός τήν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν. Δηλ. ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἐκφράζει πόσας φοράς ἡ μονάς τῶν ἐπιφανειῶν ἤ τά μέρη αὐτῆς, χωροῦν εἰς τήν ἐπιφάνειαν.

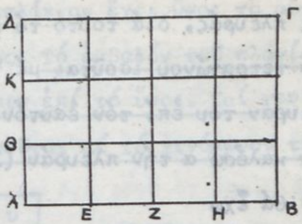
Ἰσοδύναμα σχήματα (βλέπε ὁρισμόν σελ.1) λέγονται τά σχήματα τά ὁποῖα ἔχουν τό αὐτό ἐμβαδόν ἀλλά δέν εἶναι ἴσα.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

(Βλέπε περί εὐθυγράμμων σχημάτων)

ΕΜΒΑΔΟΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Πέρνομεν ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον τό ΑΒΓΔ (Σχ.52) τοῦ ὁποίου ἡ βάσις ΑΒ=4μ.καί τό ὕψος ΑΔ=3μ. Ἐάν διαιρέσωμεν τήν βάσιν εἰς 4 ἴσα μέρη, τό κάθε ἕνα θά εἶναι 1μ. Ὁμοίως ἄν διαιρέσωμεν τό ὕψος εἰς 3 ἴσα μέρη τό κάθε ἕνα θά εἶναι 1μ. Ἀπό



Σχ. 52

τά σημεῖα διαιρέσεως Ε,Ζ,Η φέρομεν παραλλήλους πρός τό ὕψος καί ἀπό τά σημεῖα Θ,Κ, φέρομεν παραλλήλους πρός τήν βάσιν,τότε παρατηροῦμεν ὅτι τό ὀρθογώνιον ἐχωρίσθη εἰς 12 ἴσα τετράγωνα. Ἐπειδή ἡ πλευρά τῶν ἴσων τετραγώνων εἶναι 1μ., τό κάθε ἕνα εἶναι 1 τ.μ., ἑπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι 12 τ.μ. ἤ 4x3 τ.μ., ἤτοι.

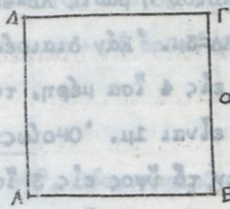
<u>Τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ. Ἐάν καλέσω Ε τό ἐμβαδόν β τήν βάσιν καί υ τό ὕψος, θά ἔχω</u>

$$\boxed{E = \beta\,\upsilon}$$

<u>Σ Η Μ.</u> Κατά τούς ὑπολογισμούς μας προσέχομεν πάντοτε τάς διαστάσεις τῶν σχημάτων νά τάς ἐκφράζωμεν διά τῆς αὐτῆς μονάδος. Ἄν δηλ.ἡ βάσις ἐκφράζεται εἰς μέτρα καί τό ὕψος πρέπει νά τό ἐκφράσωμεν εἰς μέτρα, διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν εἰς τετραγ.μέτρα. Ἄν αἱ διαστάσεις ἐκφράζωνται εἰς διαφορετικάς μονάς,τότε τάς μετατρέπω εἰς τήν αὐτήν μονάδα. Π.χ. ἄν ἡ βάσις εἶναι 12 τεκ.πήχ.καί τό ὕψος 6 μ., τότε ἤ θά τρέψωμεν τούς τεκτ.πήχ.εἰς μέτρα $12\times\frac{3}{4} = 9$ μ, καί θά ἔχω $E = 9\times6 = 54$ τ.μ. ἤ θά τρέψωμεν τά μέτρα εἰς πήχεις $6\times\frac{4}{3} = 8$ τεκτ.πήχ. καί θά ἔχω $E = 8\times12 = 96$ τ.τ.π.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Ἐπειδή τό τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καί αὐτό, μέ ἴσας ὅμως πλευράς, διά τοῦτο τό ἐμβαδόν τετραγώνου ἰσοῦται μέ τήν πλευράν του ἐπί τόν ἑαυτόν της.



Σχ. 53

Ἐάν καλέσω α τήν πλευράν (Σχ. 53) θά ἔχω

$$\boxed{Ε = α χ α}$$

Ἐάν ἡ πλευρά εἶναι 3 μ. θά ἔχω Ε = 3χ3.

Ἀσκήσεις

1) Ἡ βάσις ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 5,6μ. καί τό ὕψος 3,4μ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν του;

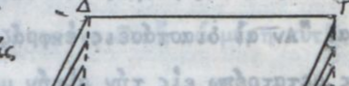
2) Ἡ βάσις ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 24 τεκ.πήχ.καί τό ὕψος 12 μ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν του α) εἰς τετραγ.μέτρα β) εἰς τετραγ.τεκτ.πήχεις;

3) Ἡ βάσις ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι 15 μ. καί τό ἐμβαδόν του 90 τεκτ.μ. Πόσον εἶναι τό ὕψος αὐτοῦ;

4) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ πλευρά εἶναι 3,15 μ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΛΑΓΙΟΥ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟΥ

Ἔχομεν τό πλάγιον παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ.54) καί ἀπό τάς κορυφάς Δ καί Γ φέρομεν τά ὕψη ΔΕ καί ΓΖ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐσχηματίσθη τό ὀρθογώνιον ΔΕΖΓ.



Σχ. 54

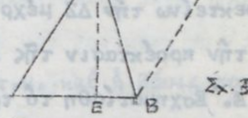
Τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καί τό ὀρθογώνιον ΔΕΖΓ ἀποτελοῦνται ἀπό τό αὐτό μέρος τό τραπέζιον ΒΓΔΕ καί ἀπό τά ἴσα τρίγωνα.

ΑΕΔ καί ΒΓΖ, ἐπομένως ἔχουν τό αὐτό ἐμβαδόν (ἰσοδύναμα). Τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ΓΔΕΖ γνωρίζομεν ὅτι ἰσοῦται μέ τήν βάσιν του ΕΖ ἐπί τό ὕψος ΔΕ, ἀλλά καί τό πλάγιον ἔχει ὕψος το αὐτό ΔΕ καί τήν βάσιν του ΑΒ=ΕΖ, ἐπομένως: Τό ἐμβαδόν τοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τήν βάσιν ἐπί τό ὕψος. Καί γενικῶς: Τό ἐμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος του.

$$\boxed{E = \beta\, \upsilon}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

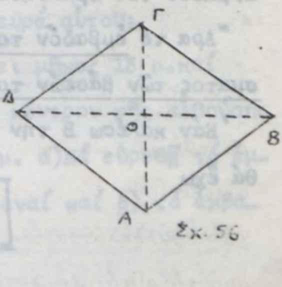
Ἔχομεν τό τρίγωνον ΑΒΓ, ἄν ἀπό τάς κορυφάς Β καί Γ φέρομεν παραλλήλους πρός τάς ἄλλας πλευράς σχηματίζεται τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου τό τρίγωνον εἶναι τό ἥμισυ (σχ.55). Τό ἐμβαδόν τοῦ παραλληλογράμμου ἰσοῦται μέ ΑΒ×ΓΕ, ἐπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ. Δηλ. ἄν 6 μ. εἶναι ἡ βάσις καί 3 μ. τό ὕψος τότε $E = \frac{6 \times 3}{2} = 9$ τ.μ.


Σχ. 55

$$\boxed{E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΡΟΜΒΟΥ

Ἐπειδή ὁ ρόμβος (Σχ.56) ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἴσα τρίγωνα τά ΑΒΔ καί ΒΓΔ, τό ἐμβαδόν του θά ἰσοῦται μέ δύο φορές τό ἐμβαδόν τοῦ ἑνός δηλαδή $E = \frac{2 \times (O\Gamma) \times (\Delta B)}{2}$ ἀλλά 2 ΟΓ = ΑΓ. Ἐπομένως Τό ἐμβαδόν ρόμβου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν διαγωνίων του διά 2.


Σχ. 56

$$\boxed{E = \frac{(A\Gamma) \times (\Delta B)}{2}}$$

Π.χ. ἄν ἡ μία διαγώνιος εἶναι 8μ. καί ἡ ἄλλη 5μ. θά εἶναι

$E = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ τ.μ.

Ἀσκήσεις

1) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 10 ὑάρδες καί τό ὕψος 3 μέτρα.

2) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τριγώνου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 2,25 μ.καί τό ὕψος 1,4 μ.

3) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν ρόμβου τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι $2\frac{3}{4}$ μ. καί ἡ ἄλλη 4,6μ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΑΠΕΖΙΟΥ

Ἔχομεν τό τραπέζιον ΑΒΓΔ (σχ.57), ἑνώνω τήν κορυφήν Δ μέ τό μέσον Ζ τῆς πλευρᾶς ΒΓ καί προεκτείνω τήν ΔΖ μέχρι νά κόψῃ τήν προέκτασιν τῆς ΑΒ εἰς τό Ε. Ἐσχηματίσθη τό τρίγωνον ΑΕΔ τό ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό τραπέζιον ΑΒΓΔ,διότι ἀποτελοῦνται ἀπό τό αὐτό μέρος ΑΒΖΔ καί τά ἴσα τρίγωνα ΒΕΖ καί ΓΔΖ.Τό τρίγωνον αὐτό ἔχει ὕψος ΔΗ τό αὐτό μέ τό τραπέζιον καί βάσιν ΑΕ ἴσην μέ τό ἄθροισμα τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου, διότι ΒΕ=ΓΔ. Ἐπομένως τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου πού εἶναι ἴσον μέ τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου εἶναι $E = \frac{(AB+\Gamma\Delta)\times(\Delta H)}{2}$ ἤ $\frac{(AB+\Gamma\Delta)\times(\Delta H)}{2}$

Σχ. 57

Ἄρα τό ἐμβαδόν τοῦ τραπεζίου ἰσοῦται μέ ὁ μισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν βάσεών του ἐπί τό ὕψος.

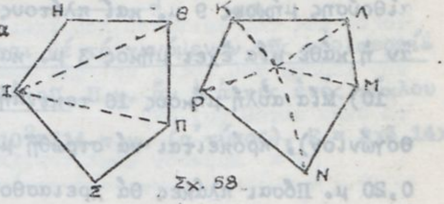
Ἐάν καλέσω Β τήν μεγάλην βάσιν, β τήν μικρή καί υ τό ὕψος θά ἔχω

$$\boxed{E = \frac{B+\beta}{2} \times \upsilon}$$

Π.χ.ἐάν ἡ μία βάσις εἶναι 10μ., ἡ ἄλλη 6μ.καί τό ὕψος 5 μ.θά ἔχω $E = \frac{10+6}{2} \times 5 = \frac{16}{2} \times 5 = 40$ τ.μ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

Διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν τυχόντος πολυγώνου (σχ.58),τό χωρίζομεν εἰς τρίγωνα,τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν μᾶς δίδει τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου.



Σχ. 58

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1)῾Η περίμετρος ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου εἶναι 39μ. καί ἡ βάσις του 14,5 μ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν αὐτοῦ;

2) Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν ἑνός τετραγώνου τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 44,8 μ.

3) Τό ἐμβαδόν ἑνός τριγώνου εἶναι 20 τ.μ. καί ἡ βάσις του 10 μ. Πόσον εἶναι τό ὕψος του;

4) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τραπεζίου τοῦ ὁποίου ἡ μία βάσις εἶναι 12μ. ἡ ἄλλη τά $\frac{2}{3}$ αὐτῆς καί τό ὕψος 8 τεκτον.πήχεις.

5) Ἕνα οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μήκους 21μ. καί πλάτους 20 τεκτ.πήχ.ἐπωλήθη ἀντί 280 λιρῶν. Πρός πόσον τόν τ.τ.πήχ.ἐπωλήθη;

6) ῾Ενός ρόμβου ἡ μία διαγώνιος εἶναι 14 μ. καί ἡ ἄλλη 8μ. τό δέ ὕψος αὐτοῦ 7 μ.Πόσα μέτρα εἶναι ἡ πλευρά αὐτοῦ;

7) Τό μηχανοστάσιον ἑνός ἐργοστασίου ἔχει μῆκος 15 μ.καί πλάτος 8 μ., αἱ δέ μηχαναί του κατέχουν τό κέντρον τῆς αἰθούσης καί ἀφήνουν γύρω γύρω διάδρομον πλάτους 1 μ. α)Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ χώρου τόν ὁποῖον κατέχουν αἱ μηχαναί καί β) τό ἐμβαδόν τοῦ διαδρόμου.

8) ῾Ενός ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ἡ μίαβάσις εἶναι 10 μ.,ἡ ἄλλη

μ. καί τό ὕψος 4 μ. Ἄν ἀπό τάς κορυφάς τῆς μικρῆς βάσεως φέρομεν τά ὕψη, νά εὐρεθοῦν τί ἐμβαδά ὅλων τῶν σχηματιζομένων σχημάτων.

9) Ἕνας μαραγκός ἀνέλαβε τήν κατασκευήν τοῦ πατώματος μιᾶς αἰθούσης μήκους 9 μ. καί πλάτους 4μ. Πόσας σανίδας θά χρειασθῇ ἄν ἡ κάθε μία ἔχει μῆκος 3 μ. καί πλάτος 0,25;

10) Μία αὐλή μήκους 16 τεκτ.πήχ. καί πλάτους 7 τεκτ.πήχ.(ὀρθογώνιον), πρόκειται νά στρωθῇ μέ τετραγωνικάς πλάκας πλευρᾶς 0,20 μ. Πόσαι πλάκες θά χρειασθοῦν;

11) Ἕνας θέλει νά περιφράξῃ μέ δικτυωτό συρματόπλεγμα πλάτους 0,60μ., ἐπιφάνειαν διαστάσεων 3μ.καί 5μ. Πόσα μέτρα συρματόπλεγμα θά χρειασθῇ;

12) Ἕνας καταστηματάρχης διά νά προφυλάσσῃ τά εἴδη πού ἔχει εἰς τήν βιτρίναν του ἀπό τόν ἥλιο, θέλει νά τήν καλύπτῃ ἐπί ὡρισμένας ὥρας μέ ὕφασμα. Ἄν ἡ βιτρίνα ἔχῃ πλάτος 2 μ.καί ὕψος 3 μ. καί τό ὕφασμα ἔχει πλάτος 0,75 μ.Πόσους πήχεις ὕφασμα πρέπει νά ἀγοράσῃ;

13) Ἤθελε ἕνας νά περιφράξῃ τό οἰκόπεδόν του σχήματος τετραγώνου μέ συρματόπλεγμα πρός 300 δρχ.τό μέτρον καί ἔδωσεν συνολικῶς 126.000 δρχ. Ἐπειδή ὅμως ἔλαβεν ἀνάγκην χρημάτων ἐπώλησε τό συρματόπλεγμα εἰς ἄλλον ὁ ὁποῖος εἶχεν οἰκόπεδον σχήματος ὀρθογωνίου ἐμβαδοῦ 8400 τ.μ. καί μέ τήν μίαν πλευράν ἴσην μέ τήν πλευράν τοῦ προηγουμένου τετραγώνου οἰκοπέδου. Ζητεῖται νά εὐρεθῇ α) τό ἐμβαδόν τοῦ τετραγωνικοῦ οἰκοπέδου καί β) πόσον συρματόπλεγμα ἐπερίσσευσε ἤ ἐχρειάσθη ὁ δεύτερος.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΟΥ

Τό ἐμβαδόν παντός κύκλου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἀριθμοῦ 3,14, ἐπί τό τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Ἐάν καλέσω Ε τό ἐμβαδόν καί ρ τήν ἀκτῖνα θά ἔχω

$$\boxed{E = \pi \times \rho^2}$$

Ἐπειδή αὐτός ὁ τύπος γράφεται καί ὡς ἐξῆς.

$$\boxed{E = 2\times\pi\times\frac{\rho}{2}\times\rho}$$

Τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς περιφερείας ἐπί τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος αὐτοῦ. Π.χ. ἄν ἡ ἀκτίς ἑνός κύκλου εἶναι ρ=10 μ. θά ἔχω $E=3,14\times10^2=314$ τ.μ. (α' τύπος), $E = 2\times3,14\times10\times\frac{10}{2}$ (β')

Σ Η Μ. Διά νά εὕρωμεν τήν ἀκτῖνα ὅταν γνωρίζωμεν τό ἐμβαδόν, διαιροῦμεν τό ἐμβαδόν διά 3,14 καί τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου ἐξάγομεν τήν τετρ.ρίζαν.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Ἡ ἀκτίς ἑνός κύκλου εἶναι 0,35μ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν αὐτοῦ;

2) Ἡ διάμετρος ἑνός κύκλου εἶναι $2\frac{4}{5}$μ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν αὐτοῦ;

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΟΜΕΩΣ

Τό ἐμβαδόν κυκλικοῦ τομέως ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου του, ἐπί τό ἥμισυ τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου ἤ μέ τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἐπί τόν ἀριθμόν τῶν μοιρῶν τοῦ τόξου διά 360.

$$\boxed{E = \text{Μῆκος τόξου}\times\frac{\text{ἀκτῖνα}}{2}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{E = \frac{\pi\,\rho^2\times\mu}{360}}$$

Π.χ. ἄν ἡ ἀκτίς ρ=20μ., τό τόξον μ=36° θά ἔχω $E=12,56\times\frac{20}{2}$ (α' τύπος) (τό μῆκος τοῦ τόξου $= \frac{2\times3,14\times20\times36}{360}$) $E=\frac{1256\times36}{360}$ (β' τύπος) (τό ἐμβαδόν $= 3,14\ 20^2 = 1256$).

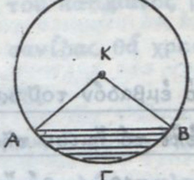
Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν κυκλικοῦ τομέως τόξου 60°, ἄν ἡ ἀκτίς

του κύκλου εις τόν όποΐον ανήκει είναι 0,40 μ.

ΕΜΒΑΔΟΝ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Τό έμβαδόν κυκλικοΰ τμήματος ίσοΰται μέ τήν διαφοράν τών έμβαδών τοΰ τομέως πού έχει βάσιν τό αύτό τόξον καί τοΰ τριγώνου πού έχει πλευράς τήν χορδήν τοΰ τόξου καί τάς άκτίνας εις τά άκρα αύτοΰ (σχ.59)


σχ 59

$$\boxed{E = \text{Έμβαδόν κυκλ.τομ.ΚΑΓΒ-έμβαδ.τριγ.ΑΒΚ}}$$

Άσκησις

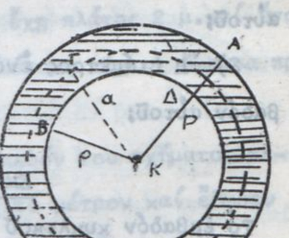
1) Νά εύρεθή τό έμβαδόν κυκλικοΰ τμήματος τόξου 120°, χορδής $2\sqrt{3}$μ., έάν ή άκτίς τοΰ κύκλου είναι 4 μ.καί τό ΰψος τοΰ τριγώνου είναι 2 μ.

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΕΜΒΑΔΟΝ ΣΤΕΦΑΝΗΣ

Στεφάνη λέγεται τό μέρος τοΰ έπιπέδου τό περιεχόμενον μεταξύ δύο όμοκέντρων περιφερειών.

Μέση άκτίς στεφάνης λέγεται τό ήμιάθροισμα τών άκτίνων τών περιφερειών αί όποΐαι τήν όρίζουν.

Μέση περιφέρεια στεφάνης λέγεται ή περιφέρεια ή όποία έχει άκτίνα ίσην μέ τήν μέσην άκτίνα τής στεφάνης καί κέντρον τό κέντρον αύτής.


Σχ. 60

Πάχος τής στεφάνης λέγεται ή διαφορά τών άκτίνων αί όποΐαι τήν όρίζουν (τών περιφερειών). Π.χ. (σχ.60) ΚΑ=Ρ ή άκτίς τής έξωτερικής περιφερείας, ΚΒ=ρ ή άκτίς τής έσωτερικής περιφερείας, $ΚΓ=α=\frac{Ρ+ρ}{2}$ ή μέση άκτίς, ΔΑ=κ=Ρ-ρ τό πάχος.

Τό ἐμβαδόν τῆς στεφάνης ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῆς μέσης περιφερείας ἐπί τό πάχος αὐτῆς.

Διότι τό ἐμβαδόν αὐτῆς εἶναι διαφορά τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων δηλ. $E = \pi \times P^2 - \pi \times \rho^2 = \pi \times (P^2 - \rho^2)$ αὐτό ὅμως γράφεται $E = \pi \times (P + \rho) \times (P - \rho)$, ἄρα

$$\boxed{E = 2 \times \pi \times \frac{(P+\rho)}{2}\,(P-\rho)}$$

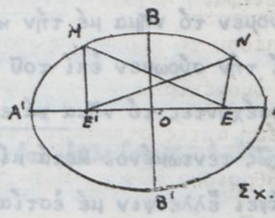
Ἄσκησις

1) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν στεφάνης ἀκτίνων 4,2 καί 2,8 μ.

ΠΕΡΙ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Ἔλλειψις λέγεται ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἡ ὁποία περικλείεται ἀπό μίαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν τῆς ὁποίας τά σημεῖα ἔχουν τήν ἰδιότητα τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών των ἀπό δύο σταθερά σημεῖα νά εἶναι τό αὐτό πάντοτε.



Σχ.61

Ἑστίαι ἐλλείψεως λέγονται τά δύο σταθερά σημεῖα.

Μέγας ἄξων ἐλλείψεως λέγεται τό εὐθ.τμῆμα πού διέρχεται ἀπό τάς ἑστίας καί περατοῦται εἰς τήν καμπύλην πού τήν περικλείει.

Περιφέρεια τῆς ἐλλείψεως λέγεται ἡ κλειστή καμπύλη γραμμή πού τήν περικλείει.

Μικρός ἄξων ἐλλείψεως λέγεται τό εὐθ.τμῆμα τό κάθετον εἰς τό μέσον τοῦ μεγάλου ἄξονος καί περατούμενον εἰς τήν περιφέρειαν αὐτῆς.

ΣΗΜ. Τά ἡμίση τῶν ἀξόνων τά λέγομεν ἡμιάξονας.

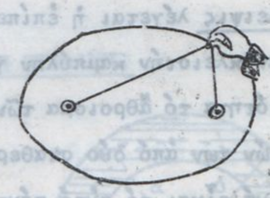
<u>Κέντρον</u> ἐλλείψεως λέγομεν τό σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἀξόνων.

Π.χ. Τά σημεῖα Ε καί Ε΄(σχ.61) εἶναι αἱ ἑστίαι, ἡ εὐθεῖα Α΄Α εἶναι ὁ μέγας ἄξων καί ἡ Β΄Β εἶναι ὁ μικρός ἄξων, τό σημεῖον Ο εἶναι τό κέντρον.

Ἐπειδή Α΄Ε΄=ΑΕ ἕπεται ὅτι Α΄Ε΄+ ΕΑ΄= ΑΑ΄καί ἐπειδή κατά τόν ὁρισμόν ΜΕ΄+ ΜΕ = ΝΕ΄+ ΝΕ = ... = Α΄Ε΄+ Α΄Ε = Α΄Α, ἄρα αἱ ἀποστάσεις τοῦ τυχόντος σημείου τῆς ἐλλείψεως ἀπό τάς ἑστίας ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μέ τόν μέγαν ἄξονα αὐτῆς.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ

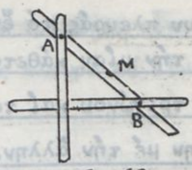
Πέρνομεν ἕνα νῆμα μήκους ὅσον θέλομεν νά εἶναι τό μῆκος τοῦ μεγάλου ἄξονος καί τά ἄκρα του τά στηρίζομεν ἐπί τοῦ πίνακος (μέ πινέζες κλπ.). Κατόπιν τεντώνομεν τό νῆμα μέ τήν κιμωλίαν καί τήν σύρωμεν ἐπί τοῦ πίνακος, προσέχοντες τό νῆμα νά εἶναι συνεχῶς τεντωμένο. Μετά μίαν πλήρη περιφοράν ἡ κιμωλία θά ἔχη γράψει ἔλλειψιν μέ ἑστίας τά σημεῖα στηρίξεως τοῦ νήματος (σχ.62).



Σχ. 62

Ε Λ Λ Ε Ι Ψ Ο Γ Ρ Α Φ Ο Σ

Ἄλλος τρόπος κατασκευῆς τῆς ἐλλείψεως εἶναι διά τοῦ ἐλλειψογράφου. Ὁ ἐλλειψογράφος ἀποτελεῖται ἀπό ἕνα σταυροειδῆ γνώμονα, ὁ ὁποῖος ἔχει δύο εὐθεῖς αὔλακας καθέτους μεταξύ των. Εἰς αὐτόν ὀλισθαίνουν δύο ἀκίδες Α καί Β στηριγμέναι εἰς τά ἄκρα ἑνός κανόνος. Εἰς ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖον τοῦ κανόνος Μ, στερεώνομεν γραφίδα, ἡ ὁποία γράφει τόξον ἐλλείψεως ὅταν τά ἄκρα



Σχ. 63

τοῦ κανόνος ὁλισθαίνουν ἐντός τῶν αὐλάκων.

ΜΗΚΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ

Διά νά εὕρωμεν κατά προσέγγισιν τό μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ἐλλείψεως, πολλαπλασιάζομεν τό 3,14 ἐπί τό ἄθροισμα τῶν ἡμιαξόνων ἤ ἀκριβέστερον τό 3,14 ἐπί τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἀξόνων αὐτῆς.

Δηλ. ἐάν καλέσωμεν α καί β τά μήκη τῶν ἀξόνων

$$\boxed{\text{Μῆκος} = \pi \times \frac{(\alpha+\beta)}{2}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{\text{Μῆκος} = \pi \times \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}}}$$

ΕΜΒΑΔΟΝ ΕΛΛΕΙΨΕΩΣ

Διά νά εὕρωμεν τό ἐμβαδόν ἐλλείψεως πολλαπλασιάζομεν τό 3,14 ἐπί τό γινόμενον τῶν δύο ἡμιαξόνων

$$\boxed{E = \pi \times \frac{\alpha}{2} \times \frac{\beta}{2}}$$

Ἀσκήσεις

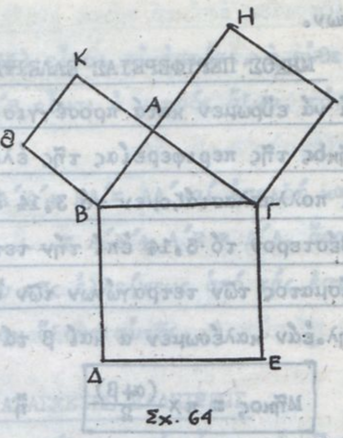
1) Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς περιφερείας ἐλλείψεως, ἡ ὁποία ἔχει ἄξονας 6 μ. καί 4μ.

2) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ἐλλείψεως ἡ ὁποία ἔχει ἄξονας 6μ. καί 10μ.

3) Τό μῆκος τῆς περιφερείας ἐλλείψεως εἶναι 18,84μ. καί ὁ μέγας ἄξων αὐτῆς 7 μ. Πόσον μῆκος ἔχει ὁ μικρός ἄξων αὐτῆς καί πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν της;

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΑ

Τό τετράγωνον πού ἔχει πλευράν τήν ὑποτείνουσαν ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου, εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό ἄθροισμα δύο τετραγώνων



<u>πού ἔχουν πλευράς τό ἕνα ἴσην μέ τήν μίαν κάθετον πλευράν τριγώνου καί τό ἄλλο ἴσην μέ τήν ἄλλην.</u> (Σχ.64). Π.χ.τό τετράγωνον ΒΔΕΓ πού ἔχει πλευράν τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ, εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ΑΓΖΗ καί ΑΒΘΚ πού ἔχουν πλευράς τάς καθέτους πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒ καί ΑΓ Δηλ.(ΒΔΕΓ) = (ΑΓΖΗ)+(ΑΒΘΚ) ἤ $(ΒΓ)^2=$ $=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2$.

$$\boxed{(ΒΓ)^2=(ΑΒ)^2+(ΑΓ)^2}$$

Ἄν ἡ μία κάθετος πλευρά ΑΒ=3μ. καί ἡ ἄλλη ΑΓ=4μ., τότε θά ἔχω $(ΒΓ)^2=3^2+4^2=9+16=25$ ἤ ΒΓ=5.

<u>Σ Η Μ.</u> Τήν πρότασιν αὐτήν τήν ἀπέδειξεν ὁ περίφημος Ἕλλην σοφός τῆς ἀρχαιότητος Πυθαγόρας ὁ Σάμιος καί διά τοῦτο τήν ὀνομάζομεν Πυθαγόρειον θεώρημα.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι <u>Τό τετράγωνον πού ἔχει πλευράν τήν μίαν κάθετον πλευράν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό τετράγωνον πού ἔχει πλευράν τήν ὑποτείνουσαν μεῖον τό τετράγωνον πού ἔχει πλευράν τήν ἄλλην κάθετον πλευράν.</u> Δηλ. (ΑΓΖΗ)=(ΒΔΕΓ)+(ΑΒΘΚ) ἤτοι

$$\boxed{(ΑΓ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΒ)^2}$$

καί

$$\boxed{(ΑΒ)^2=(ΒΓ)^2-(ΑΓ)^2}$$

Π.χ. ἐάν ἡ ὑποτείνουσα ἑνός ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 5μ. καί ἡ μία κάθετος 3μ., τότε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρά θά εἶναι $\sqrt{5^2-3^2}=$ $=\sqrt{25-9}=4$ μ.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ δύο ἴσαι πλευραί εἶναι 10 μ. ἡ κάθε μία καί ἡ βάσις αὐτοῦ 12 μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τοῦ ὕψους πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν βάσιν.

Λ ύ σ ι ς

Σχ. 65

Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ΑΒ=ΒΓ=10μ. καί ΑΓ=12μ., ἄρα ΑΔ=6μ.(σχ.65). Ἐκ τοῦ σχηματισθέντος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΔ ἔχομεν $(ΒΔ)^2=(ΑΒ)^2-(ΑΔ)^2$ ἤ $(ΒΔ)^2=10^2-6^2=100-36$ ἤ $(ΒΔ)^2=64$ μ. ἄρα $(ΒΔ)^2=8$μ.

Σ Η Μ. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

2) Ἡ μία κάθετος πλευρά ὀρθογ.τριγώνου εἶναι 8 μ. καί ἡ ἄλλη 6μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς ὑποτεινούσης.

3) Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογ.τριγώνου εἶναι 32μ. καί ἡ μία κάθετος πλευρά 24 μ. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν αὐτοῦ.

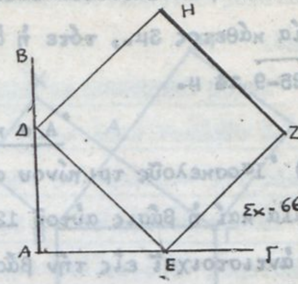
4) Ἑνός τετραγώνου ἡ πλευρά εἶναι 6,5μ. Πόσον μῆκος ἔχει ἡ διαγώνιος αὐτοῦ;

5) Ἡ περίμετρος ἑνός ρόμβου εἶναι 100 μ. καί ἡ μία διαγώνιος αὐτοῦ 30μ. Πόσον εἶναι τό μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου αὐτοῦ;

6) Ἑνός ὀρθογωνίου τραπεζίου ἡ μία βάσις εἶναι 15 μ. ἡ ἄλλη 10μ. καί ἡ κάθετος ἐπ' αὐτάς πλευρά 12μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς τετάρτης πλευρᾶς.

7) Ἡ μία γωνία πλαγίου παραλληλογράμμου εἶναι $1/2$ τῆς ὀρθῆς. τό ἐμβαδόν του 200 τ.μ. καί ἡ βάσις του 20μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς περιμέτρου αὐτοῦ.

8) Νά κατασκευασθῆ τετράγωνον διπλάδιον δοθέντος τετραγώνου (σχ.66)



Λύσις.

Ἐπί μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ πέρνομεν ἐκ τῆς κορυφῆς Α δύο τμήματα ΑΕ=ΑΔ=μέ τήν πλευράν τοῦ δοθέντος τετραγώνου. Ἄν ἑνώσωμεν τό Δ μέ τό Ε, ἡ ΔΕ θά εἶναι ἡ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου πλευρά. Διότι $(ΔΕ)^2=(ΑΕ)^2+(ΑΔ)^2=2(ΑΕ)^2$.

9) Ὀρθογωνίου παραλλ. ἡ διαγώνιος εἶναι 30 μ. καί ἡ μία πλευρά 24μ. Νά εὑρεθῆ ἡ περίμετρος αὐτοῦ.

ΠΕΡΙ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ

Κανονικόν λέγεται ἕνα πολύγωνον ὅταν ἔχῃ τάς πλευράς του ἴσας καί τάς γωνίας του ἴσας.

Σχ. 67

Κάθε κανονικόν πολύγωνον μποροῦμε νά τό ἐγγράψωμεν ἤ νά τό περιγράψωμεν εἰς κύκλον.

Κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, λέγεται τό κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου ἤ περιγεγραμμένου εἰς αὐτό κύκλου.

Ἀπόστημα κανονικοῦ πολυγώνου, λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπό τῆς πλευρᾶς.

Τό ἀπόστημα συνδέει τό κέντρον μέ τό μέσον τῆς πλευρᾶς.

Ἀκτίς κανονικοῦ πολυγώνου, λέγεται ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου εἰς αὐτό κύκλου.

Κεντρική γωνία κανονικοῦ πολυγώνου, λέγεται ἡ γωνία πού σχηματίζουν δύο ἀκτῖνες εἰς τά ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς. Π.χ. (σχ.67) τό ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ εἶναι κανονικόν διότι ἔχει τάς πλευράς ΑΒ= =ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΕΖ=ΖΑ καί τάς γωνίας $\hat{A}=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{\Delta}=\hat{E}=\hat{Z}$. Αἱ ΚΑ, ΚΖ κλπ. εἶναι ἀκτῖνες αὐτοῦ καί ὁ κύκλος πού γράφεται μέ ἀκτῖνα μίαν ἀπ' αὐτάς εἶναι περιγεγραμμένος εἰς αὐτό. Ἡ ΚΗ εἶναι ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου καί ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτό κύκλου. Ἡ γωνία ΖΚΗ εἶναι κεντρική γωνία τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου. Τό σημεῖον Κ εἶναι τό κέντρον τοῦ πολυγώνου.

Διά νά εὕρωμεν πόσον εἶναι ἡ κεντρική γωνία ἑνός πολυγώνου, διαιροῦμεν τό 360° ἤ τάς 4 ὀρθάς διά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου.

Π.χ. ἄν τό πολύγωνον ἔχει 6 πλευράς θά ἔχω κεντρική γωνία = $=\frac{4}{6}$ τῆς ὀρθῆς ἤ $\frac{360}{6}=60°$.

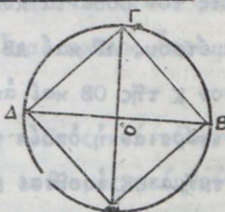
Τό ἐμβαδόν κανονικοῦ πολυγώνου ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπί ἐπί τό ἀπόστημα αὐτοῦ. Π.χ. (σχ.67)

$$E = \frac{(AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta E+EZ+ZA)\ (KH)}{2}$$

ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

Τετράγωνον. Νά ἐγγραφῇ τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον.

Κατασκευή



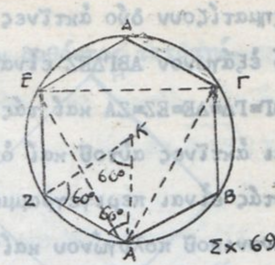
Σχ. 68

φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους εἰς τόν κύκλον (σχ.68) τάς ΒΔ καί ΑΓ καί ἡ περιφέρεια διηρέθη εἰς 4 ἴσα τόξα $\widehat{AB}=\widehat{B\Gamma}=\widehat{\Gamma\Delta}=\widehat{\Delta A}$. Ἄν φέρωμεν τάς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ἐσχηματίσθη ἕνα τετράγωνον ἐγγεγραμμένον.

Ἑξάγωνον. Νά ἐγγραφῇ κανονικόν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον (Σχ.60).

Κατασκευή

Ἐπειδή ἡ κεντρική γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 60°, τό



Σχ.69

τρίγωνον ΚΖΑ είναι ἰσόπλευρον, ἄρα ἡ πλευρά ΑΖ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου θά ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου. Μετρῶμεν μέ τόν διαβήτην τήν ἀκτῖνα καί κατόπιν πέρνομεν διαδοχικῶς ἐπί τῆς περιφερείας τμήματα ἴσα μέ αὐτήν, τοιουτοτρόπως ἡ περιφέρεια διαιρεῖται εἰς 6 ἴσα τόξα αἱ χορδαί τῶν ὁποίων σχηματίζουν ἕνα κανονικόν ἐγγεγραμμένον ἑξάγωνον.

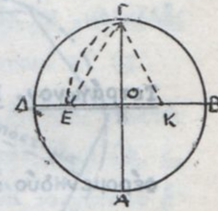
Τρίγωνον. Νά ἐγγραφῆ εἰς δοθέντα κύκλον ἰσόπλευρον τρίγωνον (Σχ.69).

Κατασκευή

Ἐγγράφομεν πρῶτον ἕνα κανονικόν ἑξάγωνον καί κατόπιν ἑνοῦμεν τάς κορυφάς αὐτοῦ ἐναλλάξ. Τό σχηματισθέν τρίγωνον ΑΓΕ εἶναι ἰσόπλευρον.

Δεκάγωνον καί πεντάγωνον. Νά ἐγγραφῆ εἰς δοθέντα κύκλον δεκάγωνον καί πεντάγωνον.

Κατασκευή



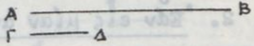
Σχ.70

Εἰς τόν δοθέντα κύκλον φέρω δύο καθέτους διαμέτρους ΑΓ καί ΔΒ (σχ.70) μέ κέντρον τό μέσον Κ τῆς ΟΒ καί ἀκτῖνα τήν ΚΓ, γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τήν ΔΟ εἰς τό Ε.

Τό τμῆμα ΟΕ ἰσοῦται μέ τήν πλευράν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου καί ἡ χορδή ΕΓ ἰσοῦται μέ τήν πλευράν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πενταγώνου. Μετρῶμεν μέ τόν διαβήτην τμῆμα ἴσον μέ τό ΟΕ καί πέρνομεν διαδοχικῶς ἐπί τῆς περιφερείας τόξα ἴσα μέ τό ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, ἡ περιφέρεια θά χωρισθῆ εἰς 10 ἴσα τόξα, τῶν ὁποίων αἱ χορδαί σχηματίζουν ἕνα κανονικόν ἐγγεγραμμένον δεκάγωνον. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τό πεντάγωνον λαμβάνοντες ἄνοιγμα διαβήτου ἴσον μέ ΕΓ.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ



Σχ. 71.

Λόγος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ πρός ἕνα ἄλλο εὐθ.τμῆμα ΓΔ, λέγεται ὁ ἀριθμός πού μᾶς δεικνύει πόσες φορές χωρεῖ τό ΓΔ ἤ μέρος αὐτοῦ εἰς τό ΑΒ.

Λόγος γενικῶς δύο ὁμοειδῶν ποσῶν ἤ δύο ἀριθμῶν λέγεται τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν. Π.χ.(σχ.71) ἡ εὐθεῖα ΑΒ=6 ἑκ.καί ἡ εὐθεῖα ΓΔ=2 ἑκ.ὁ λόγος αὐτῶν θά εἶναι $\frac{6}{2}=3$.

Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.Π.χ. ἡ ἰσότης $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}$ εἶναι μία ἀναλογία καί ἀπαγγέλλεται: ὁ λόγος τοῦ δέκα πρός τόν πέντε, ἰσοῦται μέ τόν λόγον τοῦ ὀκτώ πρός τόν τέσσερα.

Ὅροι τῆς ἀναλογίας λέγονται οἱ ἀριθμοί πού τήν σχηματίζουν. Π.χ. εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{12}{3}=\frac{20}{5}$ οἱ ἀριθμοί 12,3,20,5 λέγονται ὅροι αὐτῆς. Ὁ ἀριθμητής τοῦ πρός τά ἀριστερά λόγου τῆς ἀναλογίας λέγεται πρῶτος ὅρος αὐτῆς καί ὁ παρονομαστής δεύτερος ὅρος. Ὁ ἀριθμητής τοῦ πρός τά δεξιά τῆς ἀναλογίας λόγου, λέγεται τρίτος ὅρος τῆς ἀναλογίας καί ὁ παρονομαστής τέταρτος ὅρος αὐτῆς. Π.χ. εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$, οἱ 8 καί 10 εἶναι ἄκροι ὅροι καί οἱ 20 καί 4 μέσοι ὅροι. Ὁ 8 εἶναι πρῶτος ὅρος, ὁ 20 δεύτερος, ὁ 4 τρίτος καί ὁ 10 τέταρτος.

Ἄκροι ὅροι τῆς ἀναλογίας λέγονται ὁ πρῶτος καί τέταρτος.

Μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας λέγονται ὁ δεύτερος καί τρίτος.

Συνεχής λέγεται μία ἀναλογία ἄν οἱ μέσοι ὅροι αὐτῆς εἶναι ἴσοι. Π.χ. $\frac{18}{6}=\frac{6}{2}$ εἶναι συνεχής ἀναλογία.

Μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας, λέγεται ὁ μέσος ὅρος αὐτῆς. Π.χ. ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τοῦ 18 καί 2 εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{18}{6}=\frac{6}{2}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

1. Είς κάθε ἀναλογίαν τό γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς, ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της. Π.χ. είς τήν ἀναλογίαν $\frac{10}{5}=\frac{8}{4}$ θά ἔχωμεν $10\times4 = 5\times8$.

2. Ἐάν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἐναλλάξωμεν τούς μέσους ὅρους αὐτῆς ἤ τούς ἄκρους της, προκύπτει πάλι ἀναλογία. Π.χ. εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$ ἐάν ἐναλλάξωμεν τούς ἄκρους θά προκύψη ἡ ἀναλογία $\frac{10}{20}=\frac{4}{8}$ ἤ ἐάν ἐναλλάξωμεν τούς μέσους θά προκύψη ἡ ἀναλογία $\frac{8}{4}=\frac{20}{10}$

3. Ἐάν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἀντιστρέψωμεν τούς ὅρους αὐτῆς, προκύπτει πάλιν ἀναλογία. Π.χ. ἐάν τήν ἀναλογίαν $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}$ τήν ἀντιστρέψωμεν θά προκύψη πάλιν ἡ ἀναλογία $\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

4. Ὁ λόγος κάθε ἀναλογίας ἰσοῦται μέ τόν λόγον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμητῶν διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν παρονομαστῶν. $\frac{8}{4}=\frac{12}{6}=\frac{8+12}{4+6}=\frac{20}{10}=2$.

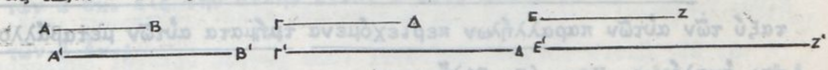
5. Ὅταν δίδωνται τρεῖς ὅροι μιᾶς ἀναλογίας καί ζητεῖται νά εὕρωμεν τόν τέταρτον ὅρον αὐτῆς, τότε πολλαπλασιάζομεν τούς δύο γνωστούς πού εὑρίσκονται διαγωνίως καί διαιροῦμεν διά τοῦ τρίτου. Π.χ. $\frac{X}{20}=\frac{4}{10}$ θά ἔχωμεν $X=\frac{20\times4}{10}=8$ ἄρα $\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$. Ὁμοίως ἐάν $\frac{4}{8}=\frac{X}{12}$ ἤ $X=\frac{4\times12}{8}=6$ ἄρα $\frac{4}{8}=\frac{6}{12}$.

6. Ὅταν δίδωνται δύο ὅροι μιᾶς συνεχοῦς ἀναλογίας καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος αὐτῆς, πολλαπλασιάζομεν τούς γνωστούς καί τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τήν τετραγωνική ρίζαν Π.χ. $\frac{18}{X}=\frac{X}{2}$ ἤ $X=\sqrt{18\times2}$.

ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΑ

Δύο ἤ περισσότερα ποσά λέγονται ἀνάλογα πρός ἄλλα ἰσάριθμα καί ὁμοειδῆ, ἄν γίνωνται ἐξ αὐτῶν διά πολλαπλασιασμοῦ ἐπί τόν

τόν αὐτόν ἀριθμόν. Π.χ. ἔχομεν τρεῖς εὐθείας ΑΒ,ΓΔ,ΕΖ (σχ.72 ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τάς ΑΒx2, ΓΔx2, ΕΖx2, θά ἔχωμεν τάς εὐθείας ΑΒx2 = Α΄Β΄, ΓΔx2 = Γ΄Δ΄, ΕΖx2 = Ε΄Ζ΄.



Σχ. 72

Αἱ εὐθεῖαι Α΄Β΄, Γ΄Δ΄, Ε΄Ζ΄, λέγονται ἀνάλογοι πρός τάς εὐθείας ΑΒ,ΓΔ,ΕΖ, διότι ἔγιναν ἀπό αὐτάς διά πολλαπλασιασμοῦ ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν.2. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί 2, 4, 5 εἶναι ἀνάλογοι πρός τούς ἀριθμούς 6, 12, 15 διότι ἡ δευτέρα σειρά ἔγινε ἀπό τήν πρώτην διά τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν $6=2x3$, $12=4x3$, $15=5x3$.

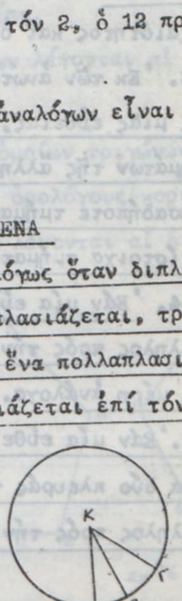
Ἀντίστοιχα ἤ ὁμόλογα ποσά λέγονται δύο ποσά, ὅταν τό ἕνα γίνεται ἀπό τό ἄλλο διά πολλαπλασιασμοῦ Π.χ.(σχ.72) ἡ εὐθεῖα Α΄Β΄ εἶναι ὁμόλογος πρός τήν ΑΒ, ἡ Γ΄Δ΄πρός τήν ΓΔ, ἡ Ε΄Ζ΄ πρός τήν ΕΖ.

Ὁμοίως ὁ ἀριθμός 6 εἶναι ὁμόλογος πρός τόν 2, ὁ 12 πρός τόν 4 καί ὁ 15 πρός τόν 5.

Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ποσῶν δύο σειρῶν ἀναλόγων εἶναι ὁ αὐτός. Π.χ. (σχ.72) $\frac{Α΄Β΄}{ΑΒ} = \frac{Γ΄Δ΄}{ΓΔ} = \frac{Ε΄Ζ΄}{ΕΖ} = 2$.

ΠΟΣΑ ΑΝΑΛΟΓΩΣ ΜΕΤΑΒΑΛΛΟΜΕΝΑ

Δύο ποσά λέγομεν ὅτι μεταβάλλονται ἀναλόγως ὅταν διπλασιαζομένου, τριπλασιαζομένου κλπ.τοῦ ἑνός, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. τό ἄλλο. Καί γενικῶς ὅταν τό ἕνα πολλαπλασιάζεται ἐπί ἕναν ἀριθμόν καί τό ἄλλο πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν.Π.χ.(σχ.73) μία ἐπίκεντρος γωνία καί τό ἀντίστοιχον τόξον της μεταβάλλονται ἀναλόγως, δηλ.ὅταν τό τόξον $\widehat{ΑΒ}$ γίνει διπλάσιον $\widehat{ΑΓ}$ καί ἡ ἐπίκεντρος γω-



Σχ. 73

νία $\widehat{AKB}$ γίνεται διπλασία $\widehat{AK\Gamma}$ κλπ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ

1. Ἐάν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν τά μεταξύ τῶν αὐτῶν παραλλήλων περιεχόμενα τμήματα αὐτῶν μεταβάλλονται ἀναλόγως. Π.χ. (Σχ.74) ἔχομεν δύο εὐθείας τάς ΚΛ καί ΜΝ τάς ὁποίας τέμνομεν μέ τάς παραλλήλους ΑΕ καί ΒΖ, τά μεταξύ τῶν παραλλήλων περιεχόμενα τμήματα τῶν εὐθειῶν ΚΛ καί ΜΝ, εἶναι τά ΑΒ καί ΕΖ (ἀντίστοιχα) τά ὁποῖα μεταβάλλονται ἀναλόγως. Δηλ. ἐάν τό ΑΒ τό κάνωμεν διπλάσιον, τριπλάσιον κλπ. καί τό ΕΖ θά γίνῃ διπλάσιον τριπλάσιον κλπ. Πέρνομεν τμῆμα ΒΓ= 2×ΑΒ, τότε καί ΖΗ=2×ΕΖ κλπ.

Σχ 74

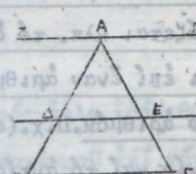
Σ Η Μ. Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος ἦτο ἕνας ἐκ τῶν ἑπτά σοφῶν τῆς ἀρχαιότητος καί ὁ πρῶτος Γεωμέτρης Ἕλλην κατά χρονολογίαν.

2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι ὁ λόγος δύο τμημάτων τῆς μιᾶς εὐθείας, εἶναι ἴσος μέ τόν λόγον τῶν δύο ἀντιστοίχων τμημάτων τῆς ἄλλης. Π.χ. $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=\frac{ΖΗ}{ΕΖ}$ (διότι $\frac{ΒΓ}{ΑΒ}=2$ καί $\frac{ΖΗ}{ΕΖ}=2$).

3. Ὁσαδήποτε τμήματα τῆς μιᾶς εὐθείας, εἶναι ἀνάλογα πρός τά ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης. Δηλ. $\frac{ΑΒ}{ΕΖ}=\frac{ΒΓ}{ΖΗ}=\frac{ΓΠ}{ΗΡ}=$ κλπ.

4. Ἐάν μία εὐθεῖα τέμνῃ δύο πλευρ ίς τριγώνου καί εἶναι παράλληλος πρός τήν τρίτην, θά τέμνῃ αὐτάς εἰς μέρη ἀνάλογα. Π.χ.(Σχ.75) $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ}$

5. Ἐάν μία εὐθεῖα τέμνῃ εἰς μέρη ἀνάλογα δύο πλευράς τριγώνου θά εἶναι παράλληλος πρός τήν τρίτην.



Σχ 75

Ἀσκήσεις

1) Δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπό τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν, τά δύο τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι 2 ἑκ. καί 3 ἑκ. Ἐάν τό ἀντίστοιχον τῶν 2 ἑκ. εἰς τήν ἄλλην εἶναι 4 ἑκ., πόσον εἶναι τό ἀντίστοιχον τῶν 3 ἑκ.;

2) Ἐάν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν καί ἡ μία τέμνεται εἰς μέρη ἴσα, τότε θά τέμνεται καί ἡ ἄλλη εἰς μέρη ἴσα. Διατί;

3) Ἐάν ἀπό τό μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου φέρομεν παράλληλον πρός μίαν ἄλλην πλευράν αὐτοῦ αὐτή θά τέμνη τήν τρίτην πλευράν εἰς τό μέσον. Διατί;

ΟΜΟΙΑ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ

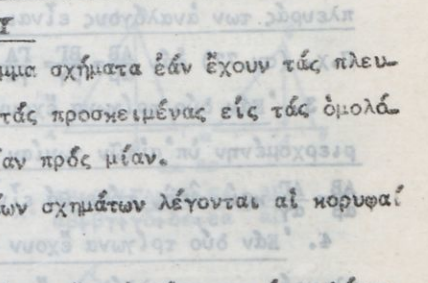
1. Ὅμοια λέγονται δύο εὐθύγραμμα σχήματα ἐάν ἔχουν τάς πλευράς των ἀναλόγους καί τάς γωνίας τάς προσκειμένας εἰς τάς ὁμολόγους πλευράς κατά σειράς ἴσας, μίαν πρός μίαν.

2. Ὁμόλογοι κορυφαί δύο ὁμοίων σχημάτων λέγονται αἱ κορυφαί τῶν ἴσων γωνιῶν.

3. Ὁμόλογοι διάμεσοι καί ὁμόλογα ὕψη ὁμοίων τριγώνων λέγονται αἱ διάμεσοι καί τά ὕψη πού ἄγονται ἀπό ὁμολόγους κορυφάς.

4. Ὁμόλογοι διαγώνιοι ὁμοίων σχημάτων, λέγονται αἱ διαγώνιοι πού ἑνώνουν δύο ὁμολόγους κορυφάς.

5. Λόγος τῆς ὁμοιότητος δύο ὁμοίων σχημάτων λέγεται ὁ λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν αὐτῶν. Π.χ. (σχ.76) τά ὅμοια σχήματα ΑΒΓΔΕ καί αβγδε, θά ἔχουν τάς πλευράς των ἀναλόγους δηλ. $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma\Delta}{\gamma\delta}=\frac{\Delta E}{\delta\varepsilon}=\frac{EA}{\varepsilon\alpha}$



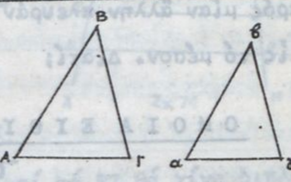
σχ. 76

καί τάς γωνίας των ἴσας Α=α, Β=β, Γ=γ, Δ=δ, Ε=ε. Αἱ διαγώνιοι ΑΓ καί αγ, ΒΔ καί βδ κλπ. εἶναι ὁμόλογοι. Αἱ πλευραί ΑΒ καί αβ ΓΔ καί γδ κλπ. εἶναι ὁμόλογοι. Αἱ κορυφαί Α καί α, Β καί β κλπ. εἶναι ὁμόλογοι. Ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος εἶναι $\frac{AB}{\alpha\beta}$ ἤ $\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}$ κλπ.

6. Εἰς ὅμοια τρίγωνα ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν κεῖνται ὁμόλογοι πλευραί καί ἀπέναντι ὁμολόγων πλευρῶν κεῖνται ἴσαι γωνίαι Π.χ. (σχ.77) αἱ πλευραί ΑΒ καί αβ εἶναι ὁμόλογοι καί αἱ γων. $\hat{\Gamma}=\hat{\gamma}$.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τάς γωνίας των ἴσας μίαν πρός μίαν, εἶναι ὅμοια Π.χ.(σχ.77) ἐάν $\hat{A}=\hat{\alpha}$, $\hat{B}=\hat{\beta}$, $\hat{\Gamma}=\hat{\gamma}$ θά εἶναι καί $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma A}{\gamma\alpha}$

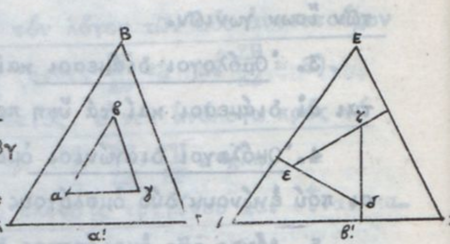


Σχ.77.

2. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τάς πλευράς των ἀναλόγους εἶναι ὅμοια Π.χ. (σχ.77) ἐάν $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma A}{\gamma\alpha}$ θά εἶναι καί $\hat{A}=\hat{\alpha}$, $\hat{B}=\hat{\beta}$, $\hat{\Gamma}=\hat{\gamma}$.

3. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς ἀναλόγους καί τήν περιερχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην, εἶναι ὅμοια. Π.χ.(σχ.78) ἐάν $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{A\Gamma}{\alpha\gamma}$ καί $\hat{A}=\hat{\alpha}$, τότε θά εἶναι $\frac{AB}{\alpha\beta}=\frac{B\Gamma}{\beta\gamma}=\frac{\Gamma A}{\gamma\alpha}$ καί $\hat{A}=\hat{\alpha}$, $\hat{B}=\hat{\beta}$, $\hat{B}=\hat{\gamma}$.

4. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν τάς πλευράς των παραλλήλους ἤ καθέτους μίαν πρός μίαν εἶναι ὅμοια. Π.χ.(σχ.78α΄) τά τρίγ.ΑΒΓ καί αβγ εἶναι ὅμοια διότι ΑΒ//αβ, ΒΓ//βγ, ΓΑ//γα. Ὁμοίως τά τρίγωνα ΔΕΖ καί δεζ εἶναι ὅμοια διότι ΔΕ⊥δε, ΕΖ⊥εζ, ΖΔ⊥ζδ.



σχ.78

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

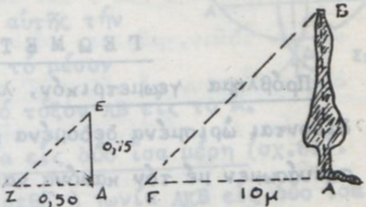
1) Ἑνός τριγώνου αἱ πλευραί εἶναι 4 ἑκ., 6 ἑκ., 8ἑκ. Πόσον εἶναι τό μῆκος τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρός αὐτό καί τοῦ ὁποίου ἡ ἀντίστοιχος πλευρά τῶν 4 ἑκ. εἶναι 2 ἑκ.;

2) Αἱ δύο κάθετοι πλευραί ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 4 ἑκ.

καί 3 έκ. καί ή άντίστοιχος πλευρά τῶν 3 έκ. ἄλλου ὀρθογ. τριγ. ὁμοίου πρός αὐτό εἶναι 6 έκ. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι πλευραί.

3) Ἡ εὐθεῖα πού ἑνώνει τά μέσα δύο πλευρῶν ἑνός τριγώνου, εἶναι παράλληλος πρός τήν τρίτην καί ἰσοῦται μέ τό ἥμισυ αὐτῆς. Διατί;

4) Νά ὑπολογισθῆ τό ὕψος ἑνός κυπαρισσιοῦ, ἐάν ἡ σκιά του εἶναι 10 μ. καί μία ράβδος κατακόρυφα μήκους 0,75μ. τήν ἰδίαν ὥραν, ρίπτει σκιάν 0,50μ.

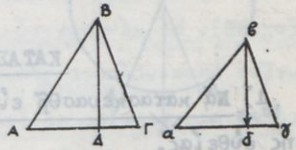


Σχ. 79

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΕΥΘΥΓΡΑΜ. ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1) Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν δύο ὁμοίων τριγώνων ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν.

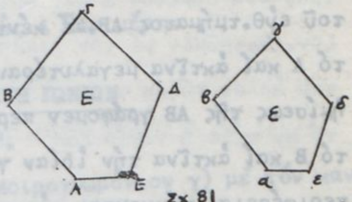
Π.χ. (σχ. 80) $\frac{ΑΒ}{αβ}=\frac{ΒΔ}{βδ}$



Σχ. 80

2. Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων εὐθ. σχημάτων, ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν. Π.χ. $\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ}{αβ+βγ+γδ+δε+εα}=\frac{ΑΒ}{αβ}$

3. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν Π.χ. (σχ. 81) $\frac{Ε}{ε}=\left(\frac{ΑΒ}{αβ}\right)^2$



Σχ 81

Ἀσκήσεις

1) Ἡ μία ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 10μ. καί ἡ βάσις αὐτοῦ 12μ. Πόσον εἶναι τό ὕψος αὐτοῦ καί πόσον αἱ πλευραί καί τό ὕψος ἄλλου ἰσοσκελοῦς ὁμοίου πρός αὐτό μέ βάσιν 24μ.;

2) Τριγώνου αἱ πλευραί ἔχουν μήκη 3μ., 5μ., 7μ. Νά εὑρεθοῦν τά μήκη τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρός αὐτό καί ἔχοντος

περίμετρον 45 μ.

3) Ἑνός τριγώνου ἡ βάσις εἶναι 15μ. καί τό ὕψος 12μ. Ἐάν ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός τήν βάσιν καί ἀπέχουσα ἐκ τῆς κορυφῆς 8 μ., πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τῶν σχημάτων εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται τό τρίγωνον;

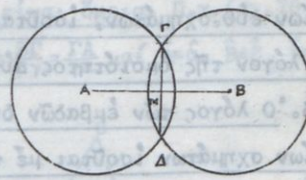
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Πρόβλημα γεωμετρικόν, λέγεται μία πρότασις εἰς τήν ὁποίαν δίδονται ὡρισμένα δεδομένα καί ζητεῖται δυνάμει αὐτῶν νά κατασκευάσωμεν μέ τόν κανόνα καί διαβήτην ἕνα γεωμετρικόν σχῆμα. (θεωρητική λύσις).

ΣΗΜ. Ἐάν χρησιμοποιήσωμεν ἐκτός τοῦ κανόνος καί διαβήτου τό μοιρογνωμόνιον, γνώμονα κλπ. τότε ἡ λύσις λέγεται πρακτική.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΚΑΘΕΤΩΝ ΕΥΘΕΙΩΝ

1) Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα κάθετος εἰς τό μέσον μιᾶς δοθείσης εὐθείας.



Σχ. 82

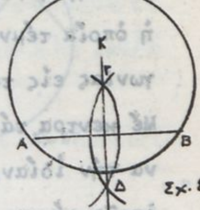
Κατασκευή (Σχ.82). Ζητεῖται νά φέρωμεν κάθετον εἰς τό μέσον τοῦ εὐθ.τμήματος ΑΒ. Μέ κέντρον τό Α καί ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεως τῆς ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ὁμοίως μέ κέντρον τό Β καί ἀκτῖνα τήν ἰδίαν γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν, αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς τά σημεῖα Γ καί Δ.

Ἡ κοινή χορδή ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπί τήν ΑΒ καί τό σημεῖον Μ τό μέσον αὐτῆς.

2) Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα κάθετος ἐπί δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἐκ σημείου κειμένου ἐκτός ἤ ἐπ' αὐτῆς (λύεται εὐκόλως μέ τόν γνώμονα).

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΣ ΕΙΣ ΔΥΟ ΙΣΑ ΜΕΡΗ

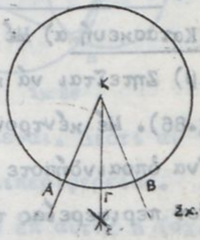
1) Νά διαιρεθῆ δοθέν τόξον είς δύο ἴσα μέρη (σχ.83).


Σχ. 83

Κατασκευή. Ζητεῖται νά διαιρέσωμεν τό τόξον ΑΒ είς δύο ἴσα μέρη. Φέρομεν τήν χορδήν ΑΒ καί κατά τήν προηγουμένην κατασκευήν τήν κάθετον είς τό μέσον αὐτῆς τήν ΓΔ. Ἡ ΓΔ ἀφοῦ εἶναι κάθετος είς τό μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ θά διχοτομῆ καί τό τόξον ΑΒ είς τό Μ.

2) Νά διαιρεθῆ δοθεῖσα γωνία είς δύο ἴσα μέρη (σχ.84).

Κατασκευή. Ζητεῖται νά διαιρεθῆ ἡ γωνία ΑΚΒ είς δύο ἴσα μέρη. Μέ κέντρον τήν κορυφήν Κ καί ἀκτῖνα οἱανδήποτε γράφομεν μίαν περιφέρειαν, ὁπόταν ἡ γων.ΑΚΒ ἔγινε ἐπίκεντρος. Εὑρίσκομεν τό μέσον Γ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της ΑΒ καί ἡ ΚΓ εἶναι ἡ ζητουμένη διχοτόμος.


Σχ.84

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Νά διαιρεθῆ δοθεῖσα εὐθεῖα είς 4 ἴσα μέρη.

2) Νά διαιρεθῆ δοθέν τόξον είς 4 ἴσα μέρη.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΓΩΝΙΩΝ

1. Νά κατασκευασθῆ γωνία 90^{0}.

α) Μέ τόν γνώμονα β) Μέ τό Μοιρογνωμόνιον γ) μέ τόν κανόνα καί τόν διαβήτην (Πρόβλημα 1).

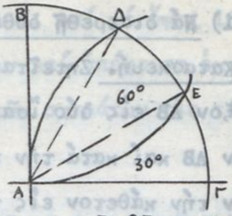
2. Νά κατασκευασθῆ γωνία 45^{0}.

α) Μέ τό μοιρογνωμόνιον.

β) Διχοτομοῦμεν μίαν ὀρθήν γωνίαν.

3. Νά κατασκευασθῆ γωνία α) 30^{0} β) 60^{0} (σχ.85)

Κατασκευή. Παίρνομεν μίαν ὀρθήν γωνίαν καί μέ κέντρον τήν κορυφήν της καί ἀκτῖνα ὁποιαδήποτε γράφομεν μίαν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τάς πλευράς τῆς γωνίας εἰς τά σημεῖα Β καί Γ. Μέ κέντρα τά Β καί Γ καί ἀκτῖνα τήν ἰδίαν, γράφομεν τόξα τά



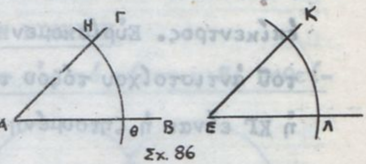
Σχ. 85

ὁποῖα τέμνουν τό τόξον ΒΓ εἰς τά σημεῖα Ε καί Δ. Φέρομεν τάς εὐθείας ΑΔ καί ΑΕ, αἱ γων. $\hat{ΓΑΕ} = \hat{ΕΑΔ} = \hat{ΔΑΒ} = 30^o$ ἄρα γων. $\hat{ΔΑΓ} = 60^o$.

4) <u>Νά κατασκευασθῇ μία γωνία ἴση πρός δοθεῖσαν.</u>

<u>Κατασκευή</u> α) Μέ τό μοιρογνωμόνιον.

β) Ζητεῖται νά κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν ἴσην μέ τήν ΒΑΓ (σχ.86). Μέ κέντρον τό Α καί ἀκτῖνα ὁποιανδήποτε γράφομεν ἕνα τόξον περιφερείας τό ὁποῖον τέμνει τάς πλευράς τῆς γων. ΒΑΓ εἰς τά σημεῖα Θ καί Η. Ὁμοίως μέ κέν-



Σχ. 86

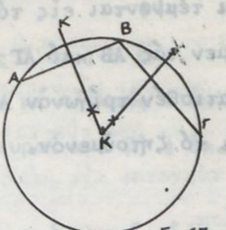
τρον ἕνα σημεῖον Ε καί ἀκτῖνα τήν ἰδίαν κατασκευάζομεν ἕνα τόξον. Μετρῶμεν μέ τόν διαβήτην τό τόξον ΗΘ καί παίρνομεν ἐπί τοῦ ἄλλου τόξου τμῆμα $\hat{ΚΛ} = \hat{ΗΘ}$. Ἑνώνομεν τά σημεῖα Κ καί Λ μέ τό Ε, τότε ἡ γωνία $\hat{ΚΕΛ} = \hat{ΒΑΓ}$.

<u>ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΩΝ</u>

1. <u>Νά κατασκευασθῇ περιφέρεια διερχομένη διά τριῶν σημείων, τά ὁποῖα δέν κεῖνται εἰς μίαν εὐθεῖαν.</u>

<u>Κατασκευή.</u> Ζητεῖται νά κατασκευάσωμεν μίαν περιφέρειαν πού νά διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ. Ἑνώνομεν τό Α μέ τό Β καί τό Β μέ τό Γ καί φέρομεν τάς καθέτους εἰς τά μέσα τῆς ΑΒ καί ΒΓ (σχ.87), ἡ τομή αὐτῶν Κ εἶναι τό κέντρον τοῦ κύκλου. Μέ

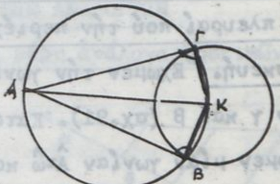
κέντρον Κ καί ἀκτῖνα τήν ΚΓ-ΚΒ-ΚΑ γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία θά διέρχεται ἀπό τά σημεῖα Α,Β,Γ.



Σχ. 87

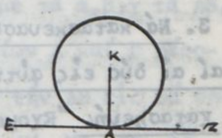
2. Νά ἀχθῆ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας α) ἀπό δοθέν σημεῖον ἐκτός αὐτῆς β) ἀπό δοθέν σημεῖον κείμενον ἐπ' αὐτῆς (σχ.88).

Κατασκευή. α) Ἔχομεν τήν περιφέρειαν Κ καί τό σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Ἑνώνομεν τό Α μέ τό Κ καί μέ διάμετρον τήν ΑΚ γράφομεν περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τήν Κ εἰς τά σημεῖα Β καί Γ. Φέρομεν τάς ΑΓ καί ΑΒ, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ ζητούμεναι τῆς περιφερείας ἐφαπτόμεναι. Διότι αἱ γωνίαι ΑΓΚ καί ΑΒΚ εἶναι ὀρθαί ὡς βαίνουσαι ἐπί ἡμιπεριφερείας.



Σχ. 88

β) Ἔχομεν τήν περιφέρειαν Α καί σημεῖον ἐπ' αὐτῆς Δ (σχ.89). Φέρομεν τήνάκτῖνα ΑΔ καί εἰς τό σημεῖον Δ αὐτῆς φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν ΕΖ, αὐτή εἶναι ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη.



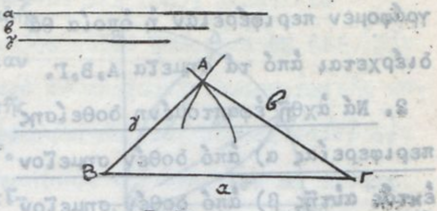
Σχ. 89

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

1. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ τρεῖς πλευραί (σχ.90).

Κατασκευή. Ἔχομεν τάς τρεῖς πλευράς α, β, γ, (μέ περιορισμόν ἡ κάθε πλευρά νά εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, ειδάλλως ἡ κατασκευή δέν εἶναι δυνατή).

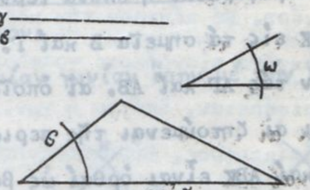
Παίρνομεν εὐθ.τμῆμα ΒΓ = α καί μέ κέντρον τό Β καί ἀκτῖνα ἴσην μέ τήν γ γράφομεν περιφέρειαν. Ὁμοίως μέ κέντρον Γ καί ἀκτῖνα ἴσην μέ τήν β γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται εἰς τό Α. φέρομεν τάς ΑΒ καί ΑΓ τό σχηματισθέν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.



Σχ.90

2. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται μία γωνία καί αἱ δύο πλευραί πού τήν περιέχουν.

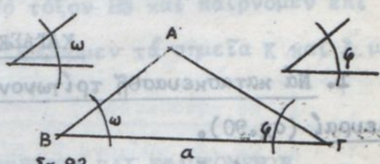
Κατασκευή. Ἔχωμεν τήν γωνίαν ω, καί τάς πλευράς πού τήν περιέχουν γ καί β (σχ.91). Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν $\hat{A}=\hat{\omega}$ καί ἐπί τῶν δύο πλευρῶν της παίρνομεν τμήματα ΑΓ=β καί ΑΒ=γ. Ἑνώνομεν τό Β μέ τό Γ, τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.



Σχ 91

3. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδονται μία πλευρά καί αἱ δύο εἰς αὐτήν προσκείμεναι γωνίαι (Σχ.92).

Κατασκευή. Ἔχομεν τήν πλευράν α καί τάς προσκειμένας εἰς αὐτήν γωνίας ω καί φ (μέ τόν περιορισμόν $\omega+\varphi<2$ όρ.). Παίρνομεν εὐθ. τμῆμα ΒΓ=α καί μέ κορυφήν τά Β καί Γ καί πλευράν τήν ΒΓ κατασκευάζομεν πρός τό αὐτό μέρος τῆς ΒΓ δύο γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας μέ τήν $\hat{\omega}$ καί $\hat{\varphi}$, τῶν ὁποίων αἱ πλευραί τέμνονται εἰς τό Α. Τό σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον.



Σχ.92

Ἀσκήσεις

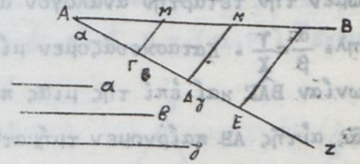
1) Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον μέ πλευράς 3 ἑκ., 5 ἑκ.

2) Νά κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ πλευράς 4 ἑκ.,6 ἑκ. (Ἄν α) 4 ἑκ.καί 6 ἑκ. εἶναι κάθετοι πλευραί καί β) 4 ἑκ.ἡ μία κάθετος καί 6 ἑκ.ἡ ὑποτείνουσα).

3) Νά κατασκευασθῇ τρίγωνον μέ πλευράν 5 ἑκ. καί τάς προσκειμένας εἰς αὐτήν γωνίας 45° καί 60°.

ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ - ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

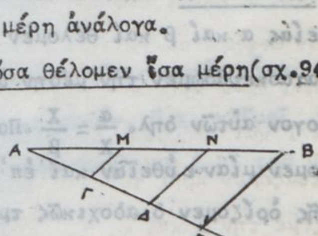
1. Νά διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς μέρη ἀνάλογα δοθειςῶν εὐθειῶν (σχ.93).



Σχ. 93

Κατασκευή. Ἔχομεν τήν εὐθεῖαν ΑΒ καί θέλομεν νά τήν διαιρέσωμεν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν εὐθειῶν α, β,γ. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΖ καί ἐπ'αὐτῆς παίρνομεν διαδοχικῶς τμήματα ἴσα ἀντιστοίχως μέ τά α,β,γ τά ΑΒ, ΓΔ,ΔΕ. Ἑνώνομεν τό Β μέ τό Ε καί ἐκ τῶν σημείων Δ καί Γ φέρομεν παραλλήλους πρός τήν ΒΕ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τήν ΑΒ εἰς τά σημεῖα Μ καί Ν καί διαροῦν αὐτήν εἰς τά τμήματα ΑΜ, ΜΝ, ΝΒ, τά ὁποῖα εἶναι τά ζητούμενα,διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καί ΑΖ τεμνόμεναι ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

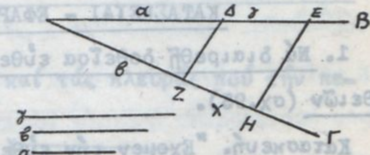
2. Νά διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα εἰς ὅσα θέλομεν ἴσα μέρη(σχ.94).



Σχ. 94

Κατασκευή. Ἔχομεν τήν εὐθεῖαν ΑΒ καί θέλομεν νά τήν διαιρέσωμεν εἰς τρία ἴσα μέρη. Ἐκ τοῦ ἄκρου Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΖ καί ἐπ'αὐτῆς παίρνομεν διαδοχικῶς τρία οἱαδήποτε ἴσα τμήματα ΑΓ. ΓΔ, ΔΕ. Ἑνώνομεν τό Ε μέ τό Β,καί ἐ. τῶν σημείων Δ καί Γ φέρομεν παραλλήλους πρός τήν ΕΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τήν ΑΒ εἰς τά σημεῖα Μ καί Ν καί διαιροῦν αὐτήν εἰς τά τμήματα ΑΜ, ΜΝ, ΝΒ, τά ὁποῖα εἶναι τά ζητούμενα, διότι(ἄσκησις σελ.) ἄν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν καί ἡ μία τέμνεται εἰς μέρη ἴσα, τότε θά τέμνεται καί ἡ ἄλλη εἰς μέρη ἴσα.

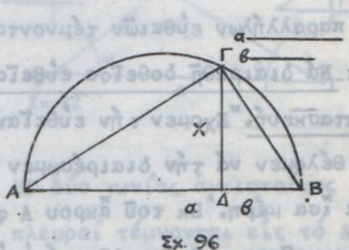
3. Νά κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν (σχ.95).



Σχ. 95

Κατασκευή. Ἔχομεν τάς εὐθείας α, β, γ καί θέλομεν νά κατασκευάσωμεν τήν τετάρτην ἀνάλογον αὐτῶν δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{X}$. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΒÂΓ καί ἐπί τῆς μιᾶς πλευρᾶς αὐτῆς ΑΒ παίρνομεν τμήματα διαδοχικῶς ΑΔ=α, ΔΕ=γ καί ἐπί τῆς ἄλλης ΑΖ=β. Ἑνώνομεν τό Δ μέ τό Ζ καί ἐκ τοῦ Ε φέρομεν παράλληλον πρός τήν ΔΖ, ἡ ὁποία τέμνει τήν ΑΓ εἰς τό Η, τό τμῆμα ΖΗ εἶναι τό ζητούμενον, διότι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καί ΑΓ τεμνόμεναι ὑπό παραλλήλων εὐθειῶν τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ἄρα $\frac{ΑΔ}{ΑΖ}=\frac{ΔΕ}{ΖΗ}$ ἤ $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{ΖΗ}$.

4. Νά κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν(σχ.96).



Σχ. 96

Κατασκευή. Ἔχομεν δύο εὐθείας α καί β καί θέλομεν νά κατασκευάσωμεν τήν μέσην ἀνάλογον αὐτῶν δηλ. $\frac{\alpha}{X}=\frac{X}{\beta}$. Παίρνομεν μίαν εὐθεῖαν καί ἐπ᾽αὐτῆς ὁρίζομεν διαδοχικῶς τμήματα ΑΔ=α καί ΔΒ=β. Μέ διάμετρον τήν ΑΒ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν καί ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν κάθετον ἐπί τήν ΑΒ τέμνουσαν τήν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τό Γ, ἡ ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη. διότι ἄν φέρωμεν τάς ΓΑ καί ΓΒ τό τρίγωνον ΑΓΒ εἶναι ὀρθογώνιον διότι ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ἑπομένως $(ΓΔ)^2 = (ΑΔ).(ΔΒ)$ ἤ $(ΓΔ)^2 = α.β$ ἄρα $\frac{α}{(ΓΔ)} = \frac{(ΓΔ)}{β}$

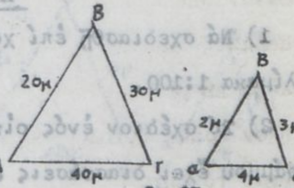
Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Νά διαιρεθῇ εὐθεῖα 12 ἑκ., εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν 1 ἑκ.,2 ἑκ., 3 ἑκ.

2) Νά εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν 4,2,6 ἑκ.

ΚΛΙΜΑΞ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΣ

Κλῖμαξ σμικρύνσεως λέγεται ἡ κλασματική μονάς ἐπί τήν ὁποίαν πολλαπλασιάζομεν τάς πλευράς ἑνός σχήματος, διά νά κατασκευάσωμεν ἕνα ἄλλο μικρότερον ὅμοιον πρός αὐτό. Π.χ.(σχ.97). Ἔχομεν τό τρίγ.ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί εἶναι ΑΒ=20μ.,ΒΓ=30μ.,ΓΑ=40μ.καί θέλομεν νά κατασκευάσωμεν ὅμοιον πρός αὐτό ὑπό κλίμακα $\frac{1}{10}$. Κατασκευάζομεν εὐθ.τμήματα $αβ=20 \times \frac{1}{10} = 2$ μ., $βγ = 30 \times \frac{1}{10} = 3μ$, $αγ = 40 \times \frac{1}{10} = 4μ.$ καί μέ πλευράς 2μ.,3μ.,4μ., κατασκευάζομεν τό τρίγ.αβγ τό ὁποῖον εἶναι τό ζητούμενον.



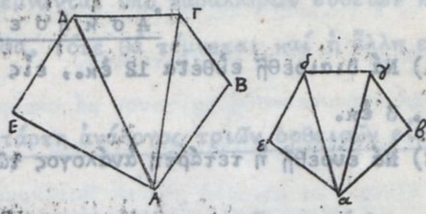
Σχ. 97

Εἰς τά σχέδια καί τούς χάρτας συνήθως χρησιμοποιοῦνται κλίμακες δεκαδικαί $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ κ.λ.π.

Ὁ παρανομαστής τῆς κλίμακος δεικνύει πόσες φορές εἶναι πιό μεγάλο τό ἀρχικό σχῆμα ἀπό τό κατασκευασθέν. Π.χ. κλῖμαξ $\frac{1}{10}$ σημαίνει ὅτι τά 10μ. τοῦ ἀρχικοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ 1 μ. τοῦ κατασκευασθέντος καί ἀντιστρόφως.

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΟΙΩΝΔΗΠΟΤΕ ΕΥΘΥΓΡ.ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Ἔχομεν πρός ἀπεικόνισιν τό εὐθ.σχῆμα ΑΒΓΔΕ, μετροῦμεν τάς πλευράς καί τάς διαγωνίους πού ἄγονται ἀπό μίαν κορυφήν Α αὐτοῦ καί κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ πού ἔχει τάς πλευράς του ἴσας πρός π.χ. τό $\frac{1}{100}$ τῶν ΑΒ,ΒΓ καί ΑΓ. Κατόπιν πρός τό ἄλλο μέρος τῆς αγ κατασκευάζομεν τρίγ.γαδ ἔχον πλευράς τήν αγ καί δύο ἄλλας αδ καί αγ ἀντιστοίχως ἴσας πρός τό $\frac{1}{100}$ τῶν ΑΔ καί ΔΓ. Ὁμοίως κατασκευάζομεν καί τό αεδ. Τό κατασκευασθέν αβγδε εἶναι τό ζητούμενον.



Σχ. 98

Ἀσκήσεις

1) Νά σχεδιασθῇ ἐπί χάρτου ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς σας, ὑπό κλίμακα 1:100.

2) Τό σχέδιον ἑνός οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει διαστάσεις 8 ἑκ. καί 12 ἑκ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ οἰκοπέδου, ἄν ἡ κλῖμαξ τοῦ σχεδίου εἶναι 1:1000 ;

Λιθογραφεῖον Β.Α.ΠΕΤΡΗ
Χαριλ.Τρικούπη 79
Τηλέφ.62.566
ΑΘΗΝΑΙ

πλευράς καί τάς διαγωνίους πού ἄγονται ἀπό μίαν κορυφήν Δ αὐτοῦ καί κατασκευάζομεν τρίγωνον αβγ πού ἔχει τάς πλευράς του ἴσας πρός π.χ. τό $\frac{1}{100}$ τῶν ΑΒ,ΒΓ καί ΑΓ. Κατόπιν πρός τό ἄλλο μέρος τῆς αγ κατασκευάζομεν τρίγ.γαδ ἔχον πλευράς τήν αγ καί δύο ἄλλας αδ καί γδ ἀντιστοίχως ἴσας πρός τό $\frac{1}{100}$ τῶν ΑΔ καί ΔΓ. Ὁμοίως κατασκευάζομεν καί τό γεδ. Τό κατασκευασθέν αβγδε εἶναι τό ζητούμενον.

Σχ. 98

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Νά σχεδιασθῇ ἐπί χάρτου ἡ αἴθουσα τῆς τάξεώς σας, ὑπό κλίμακα 1:100.

2) Τό σχέδιον ἑνός οἰκοπέδου σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχει διαστάσεις 8 ἑκ. καί 12 ἑκ. Πόσον εἶναι τό ἐμβαδόν τοῦ οἰκοπέδου, ἄν ἡ κλῖμαξ τοῦ σχεδίου εἶναι 1:1000 ;

Πολυγραφεῖον Β. Α. ΠΕΤΡΗ
Χαριλ. Τρικούπη 7
Τηλεφ. 62.588
ΑΘΗΝΑΙ