Α. Γ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ
Ὑφηγητοῦ ἐν τῷ Ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ
# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ



ΕΚΔΟΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ

ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ "ΑΙ ΜΟΥΣΑΙ„ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
15—ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ—15
1905

Α. Γ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΟΥ
Ὑφηγητοῦ ἐν τῷ Ἐθνικῷ Πανεπιστημίῳ

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΕΚΔΟΤΗΣ
ΙΩΑΝΝΗΣ Ν. ΣΙΔΕΡΗΣ



ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ "ΑΙ ΜΟΥΣΑΙ„ ΙΩΑΝΝΟΥ Ν. ΣΙΔΕΡΗ
15—ΟΔΟΣ ΕΡΜΟΥ—15
1905

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἐν τῇ συντάξει τοῦ μετὰ χεῖρας συγγράμματος Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς σκοπὸν προεθέμην τὴν ἐντὸς τῶν ὑπὸ τοῦ προορισμοῦ αὐτοῦ διαγραφομένων ὁρίων μετάδοσιν παντὸς ὅ,τι ἄριστον καὶ χρήσιμον προσφέρει ἡ στοιχειώδης τῶν ἀριθμῶν ἐπιστήμη ὑπό τε θεωρητικὴν καὶ πρακτικὴν ἔποψιν ἐν σαφεῖ καὶ μεθοδικῇ ἐκθέσει, ἐν αὐστηρᾷ διατυπώσει καὶ ἐν ἀσφαλεῖ καὶ ἀκριβεῖ θεμελιώσει καὶ ἀναπτύξει. Διὰ τοῦτο δὲ ἔσχον πρὸ ὀφθαλμῶν τὰ ὅμοιον σκοπὸν διώκοντα συγγράμματα ἐν ξένῃ καὶ ἑλληνίδι γλώσσῃ γεγραμμένα, μάλιστα δὲ τὴν ὑπὸ τοῦ σεβαστοῦ μοι διδασκάλου Ι. Ν. Χατζιδάκη Θεωρητικὴν Ἀριθμητικὴν καὶ τὰ νεώτατα δοκιμώτατα ξένα ἐγχειρίδια Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς δρέψας ἐξ αὐτῶν ὅ,τι χρήσιμον καὶ ὠφέλιμον εὗρον· ἐν πολλοῖς δὲ καί πως ἐνεωτέρισα διά τινων προσθηκῶν περί τε τὴν διάταξιν τῆς ὕλης καὶ περὶ τὰς ἀποδείξεις (ἰδίᾳ ἐν τῇ θεωρίᾳ τῶν κοινῶν διαιρετῶν καὶ τῆς τροπῆς τῶν περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ κλάσματα), ὡς πείθεται ὁ εἰδήμων ἀναγνώστης ἐκ τῆς ἁπλῆς ἀναγνώσεως. Πολλῆς δὲ φροντίδος ἠξίωσα καὶ τὰ τῆς ἐκλογῆς ὅσον οἷόν τε πολλῶν καὶ ποικίλων προβλημάτων ἢ ζητημάτων λυθέντων ἢ πρὸς ἄσκησιν προταθέντων καὶ σποράδην ἐν τῷ κειμένῳ καταχωρισθέντων καὶ τὸ σύγγραμμα περαινόντων.

Ὑψηλὰ φρονῶν περί τε τῆς εὐμαθείας καὶ τῆς φιλομαθείας τῆς ἑλληνίδος νεότητος θαρρούντως παραδίδωμι αὐτῇ τὸ σύγγραμμα τόδε ἔχων δι' ἐλπίδος, ὅτι συμβάλλομαι διὰ τῆς αὐστηρότητος καὶ ἀκριβείας αὐτοῦ ὡς καὶ διὰ τῶν πολλῶν καὶ ποικίλων προβλημάτων εἰς ἐπίρρωσιν καὶ ἄσκησιν τῆς διανοίας αὐτῆς.

*Ἐν Ἀθήναις τῇ 20 Ἀπριλίου 1904.*

Α. Γ. ΚΑΡΑΓΙΑΝΝΙΔΗΣ

*Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως καὶ τὴν σφραγῖδα τοῦ ἐκδότου.*

ΙΩΑΝΝΗΣ Ν ΣΙΔΕΡΗΣ
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΗΣ ΚΑΙ ΕΚΔΟΤΗΣ
ΕΝ ΑΘΗΝΑΙΣ

# ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### Ὁρισμοί.

1. *Μαθηματικὰ* καλοῦμεν ἐν γένει τὰς ἐπιστήμας τὰς πραγματευομένας περὶ τῶν διαφόρων ποσῶν ἢ μεγεθῶν ὑπὸ πρακτικὴν ἢ θεωρητικὴν ἔποψιν· οἷον τὴν Ἀριθμητικήν, τὴν Γεωμετρίαν.

2. *Ποσὸν* ἢ *μέγεθος* ἢ *ποσότης* καλεῖται πᾶν τὸ ἐπιδεχόμενον αὔξησιν ἢ ἐλάττωσιν· ὡς τὰ βάρη, αἱ τιμαὶ τῶν διαφόρων πραγμάτων, ὁ χρόνος, ἡ ἔκτασις ὁδοῦ ἢ πεδιάδος ἢ σώματός τινος, τὸ πλῆθος τῶν κατοίκων χώρας τινός.

3. *Συνεχὲς* καλεῖται τὸ ποσὸν τὸ ἀποτελούμενον ἐκ μερῶν συνεχομένων πρὸς ἄλληλα πρὸς σχηματισμόν τινος ὅλου· ὡς ἡ ἔκτασις τόπου τινός, ὁ παρελθὼν καὶ ὁ μέλλων χρόνος.

4. *Ἀσυνεχὲς* καλεῖται τὸ ποσὸν τὸ συγκείμενον ἐκ μερῶν διακεκριμένων ἀπ' ἀλλήλων οὕτως, ὥστε ἕκαστον καθ' ἑαυτὸ ἀποτελεῖ ὅλον τι· ὡς ἀγέλη ζῴων, συστὰς δένδρων, ὅμιλος ἀνθρώπων, σωρὸς μήλων.

5. *Μονὰς* καλεῖται ἕκαστον μέρος, πρὸς ὃ συγκρίνονται τὰ λοιπὰ μέρη ποσοῦ τινος, ὡς καὶ αὐτὸ τὸ ποσόν. Ἐκ δὲ τῆς συγκρίσεως ταύτης λαμβάνεται ἡ ἔννοια τοῦ *ἑνὸς* καὶ τῶν *πολλῶν* ἢ τοῦ *πλήθους* ἀνεξαρτήτως τῆς ὁμοιότητος ἢ ἀνομοιότητος τῶν συγκρινομένων πραγμάτων.

6. *Ἀριθμὸς* καλεῖται τὸ σύνολον μονάδων ὡς καὶ αὐτὴ ἡ μονάς. Καὶ τοῦ μὲν ἀσυνεχοῦς ποσοῦ ἡ μονὰς ὁρίζεται ἀμέσως ὑπ' αὐτῆς τῆς φύσεως τῶν μερῶν, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται· τοῦ δὲ συνεχοῦς ποσοῦ ὁρίζεται κατὰ συνθήκην καὶ ὁμοειδής. Πλήθους ἀνθρώπων π. χ. ἕκαστος ἄνθρωπος λαμβάνεται ὡς μονάς· ἀποστάσεως δέ τινος λαμβάνεται ὡς μονὰς ἢ ὁ πῆχυς, ἢ ἡ ὀργυιά, ἢ τὸ στάδιον, ἢ τὸ μίλιον.

7. *Ἀριθμητικὴ* καλεῖται ἡ ἐπιστήμη ἡ πραγματευομένη περὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων καὶ ἰδιοτήτων ὑπό τε πρακτικὴν καὶ θεωρητικὴν ἔποψιν. Τῶν δὲ στοιχείων τῆς Θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς κύριον ἔργον ἡ *ἀρίθμησις*, αἱ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν *στοιχειώδης πράξεις* καὶ διάφοροι *ἰδιότητες*

ὡς καὶ αἱ διάφοροι *μέθοδοι* πρὸς λύσιν ἀριθμητικῶν προβλημάτων. Διακρίνεται δὲ ἡ *Θεωρητικὴ* Ἀριθμητικὴ τῆς *Πρακτικῆς* καλουμένης Ἀριθμητικῆς καὶ κατὰ τοῦτο, ὅτι ἡ πρώτη ἀσχολεῖται καὶ περὶ τὴν μεθοδικὴν εὕρεσιν καὶ ἀπόδειξιν ἢ ἐξήγησιν τοῦ διὰ τί ἢ τοῦ λόγου τῶν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητημάτων ἢ θεωρημάτων.

## Περὶ ἀριθμήσεως.

8. *Ἀρίθμησις* καλεῖται, τὸ μέρος τῆς Ἀριθμητικῆς, ὅπερ διδάσκει τὴν εὕρεσιν, ὀνομασίαν καὶ γραφὴν τῶν ἀριθμῶν δι' ὡρισμένων λέξεων καὶ συμβόλων ἢ ψηφίων, ὡς καὶ τὰ διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως.

9. *Τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον·* διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν πᾶς ἀριθμὸς εἶναι σύνολον μονάδων, αἱ δὲ μονάδες εἶναι ἄπειροι τὸ πλῆθος.

Ἡ μονὰς θεωρουμένη ὡς ἀριθμὸς ὀνομάζεται *ἓν* καὶ γράφεται διὰ τοῦ συμβόλου ἢ ψηφίου 1.

Ἐὰν εἰς τὴν μονάδα προσθέσωμεν καὶ ἄλλην μονάδα, παράγεται ἀριθμὸς ὀνομαζόμενος *δύο* καὶ γράφεται διὰ τοῦ 2.

Ἐὰν δὲ εἰς τὸν ἀριθμὸν δύο προσθέσωμεν τὴν μονάδα, παράγεται ἀριθμὸς ὀνομαζόμενος *τρία* καὶ γράφεται διὰ τοῦ 3.

Ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3 προστεθῇ ἡ μονάς, παράγεται ὁ ἀριθμὸς *τέσσαρα* (4). Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἤτοι διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος παράγεται ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τέσσαρα ὁ *πέντε* (5), ἐκ τούτου ὁ *ἓξ* (6), εἶτα ὁ *ἑπτὰ* (7), εἶτα ὁ *ὀκτὼ* (8), εἶτα ὁ *ἐννέα* (9)· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι ἐξ ἑκάστου ἀριθμοῦ παράγεται πάντοτε ἄλλος ἀριθμὸς ἔχων μίαν τοὐλάχιστον μονάδα περισσότερον· ἐπειδὴ ἄρα τὸ πλῆθος τῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον καθίσταται ἀδύνατος ἡ ὀνομασία καὶ γραφὴ πάντων τῶν ἀριθμῶν δι' ἰδιαιτέρων ὀνομάτων καὶ ψηφίων. Διὸ ἐπενοήθη τρόπος, καθ' ὃν ὀνομάζονται καὶ γράφονται οἱ ἀριθμοὶ διὰ συνδυασμοῦ ὡρισμένου καὶ πεπερασμένου πλήθους λέξεων καὶ ψηφίων· τοῦτο δὲ κατορθοῦται, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων φαίνεται.

**10.** *Ἀριθμοί τινες λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες καὶ ἐξ αὐτῶν συντίθενται οἱ ἄλλοι.* Οἱ ἀριθμοὶ ἓν (1), δύο (2), τρία (3), τέσσαρα (4), πέντε (5), ἓξ (6), ἑπτὰ (7), ὀκτὼ (8), ἐννέα (9) καλοῦνται *ἁπλαῖ μονάδες*, ἡ δὲ 1 *μονὰς πρώτης τάξεως·* ἐὰν εἰς τὸν ἀριθμὸν ἐννέα προστεθῇ ἡ μονὰς 1, παράγεται ὁ ἀριθμὸς *δέκα* (10) γραφόμενος διὰ τῆς μονάδος 1 καὶ τοῦ συμβόλου 0 ὀνομαζομένου *μηδὲν* ἢ *μηδενικὸν* ὡς δηλοῦντος ἔλλειψιν μονάδων.

Ὁ ἀριθμὸς 10 θεωρεῖται ὡς νέα *μονὰς* καλουμένη *δεκὰς* ἢ *μονὰς δευτέ-*

ρας τάξεως. Ὁ ἐκ δέκα δεκάδων συγκείμενος ἀριθμὸς ὀνομάζεται ἑκατὸν (100) γραφόμενος διὰ τῆς μονάδος 1 ἀκολουθουμένης ὑπὸ δύο μηδενικῶν.

Ὁ ἀριθμὸς ἑκατὸν θεωρεῖται ὡς *νέα μονὰς* καλουμένη *ἑκατοντὰς* ἢ *μονὰς τρίτης τάξεως*.

Ὁ ἐκ δέκα ἑκατοντάδων συγκείμενος ἀριθμός, ἤτοι ὁ *χίλια* (1000), θεωρεῖται ὡς *νέα μονὰς* καλουμένη *χιλιὰς* ἢ *μονὰς τετάρτης τάξεως*.

Ὁ ἐκ δέκα χιλιάδων συγκείμενος ἀριθμὸς ἤτοι ὁ *δέκα χιλιάδες* (10000) θεωρεῖται ὡς *νέα μονὰς* καλουμένη *δεκὰς χιλιάδων* ἢ *μυριὰς* ἢ *μονὰς πέμπτης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς *ἑκατὸν χιλιάδες* (100000) καλεῖται *ἑκατοντὰς χιλιάδων* ἢ *μονὰς ἕκτης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς *ἓν ἑκατομμύριον* (1000000) καλεῖται *μονὰς ἑκατομμυρίου* ἢ *μονὰς ἑβδόμης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς *δέκα ἑκατομμύρια* (10000000) καλεῖται ~~*μονὰς*~~ δεκὰς *ἑκατομμυρίου* ἢ *μονὰς ὀγδόης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς *ἑκατὸν ἑκατομμύρια* (100000000) καλεῖται *ἑκατοντὰς ἑκατομμυρίου* ἢ *μονὰς ἐνάτης τάξεως*.

Ὁ ἀριθμὸς *ἓν δισεκατομμύριον* (1000000000) καλεῖται *μονὰς δισεκατομμυρίου* ἢ *μονὰς δεκάτης τάξεως*· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι : *πᾶσα μονὰς τάξεώς τινος σύγκειται ἐκ δέκα μονάδων τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως*.

11. *Πᾶς ἀριθμὸς σύγκειται ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων περιέχει ὀλιγωτέρας τῶν δέκα*. Νοήσωμεν ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν (τὸν ἐκφράζοντα π. χ. τὸ πλῆθος τῶν κατοίκων πόλεώς τινος)· ἐὰν λάβωμεν δέκα μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, εἶτα ἄλλας δέκα καὶ εἶτα ἄλλας δέκα καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μερίζεται ὁ ἀριθμὸς εἰς δεκάδας καὶ ὑπολείπονται (ἐὰν ὑπολειφθῶσι) καὶ ἁπλαῖ τινες μονάδες ὀλιγώτεραι τῶν δέκα· τότε δὲ λέγομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων.

Ἐὰν λάβωμεν νῦν δέκα δεκάδας τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, εἶτα ἄλλας δέκα τοιαύτας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μερίζεται ὁ ἀριθμὸς εἰς ἑκατοντάδας καὶ ὑπολείπονται (ἐὰν ὑπολειφθῶσι) καὶ δεκάδες τινὲς ὀλιγώτεραι τῶν δέκα· τότε δὲ λέγομεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐξ ἑκατοντάδων δεκάδων καὶ μονάδων.

Ὁμοίως λαμβάνοντες δέκα ἑκατοντάδας τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατόν, τοῦ ἀριθμοῦ τούτου μερίζομεν αὐτὸν εἰς χιλιάδας, ἑκατοντάδας, δεκάδας καὶ μονάδας.

Ἐξακολουθοῦντες δὲ τοιουτοτρόπως φθάνομεν ἀναγκαίως εἰς τάξιν τινὰ μονάδων περιέχουσαν ὀλιγωτέρας τῶν δέκα καὶ ἑπομένως δὲν δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐξ αὐτῶν μονὰς ἀνωτέρας τάξεως. Τότε δὲ ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀναλελυμένος εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων, ἐξ ἑκάστης τῶν ὁποίων περιέχει ὀλιγωτέρας τῶν δέκα. Κατὰ ταῦτα ἀριθμός τις εἶναι ἐντελῶς γνωστὸς καὶ ὡρισμένος, ὅταν ἀποτελῆται π. χ. ἐκ τριῶν χιλιάδων, πέντε ἑκατοντάδων ἑπτὰ δεκάδων καὶ τεσσάρων μονάδων.

12. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται, ὅτι δυνάμεθα δι' ὀλίγων διαφόρων λέξεων νὰ ὀνομάσωμεν μέγα πλῆθος ἀριθμῶν, διότι ἀρκοῦσι τὰ ὀνόματα τῶν ἐννέα πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ἁπλῶν μονάδων, καὶ τὰ ὀνόματα τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων.

Ἀλλ' ὁ τρόπος τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς μονάδας διαφόρων τάξεων ὁδηγεῖ καὶ εἰς τὴν γραφὴν αὐτῶν διὰ τῶν ἐννέα ψηφίων, δι' ὧν παρίστανται οἱ ἐννέα πρῶτοι ἀριθμοὶ ἤτοι αἱ ἁπλαῖ μονάδες· πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ἡ ἑξῆς συνθήκη, ὅτι *ἕκαστον ψηφίον γεγραμμένον ἔμπροσθεν ἄλλου δηλοῖ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἢ τὸ ἄλλο ψηφίον*. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐκ πέντε ἑκατοντάδων δύο δεκάδων καὶ ἐννέα μονάδων γράφεται 529 καὶ ἀπαγγέλλεται συντόμως πεντακόσια εἴκοσιν ἐννέα. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐκ τριῶν ἑκατοντάδων χιλιάδων, πέντε χιλιάδων, δύο ἑκατοντάδων καὶ ἑπτὰ δεκάδων γράφεται 305270 καὶ ἀπαγγέλλεται συντόμως τριακόσιαι πέντε χιλιάδες διακόσια ἑβδομήκοντα· τὰ ἐλλείποντα ψηφία δεκάδων χιλιάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἐγράφησαν διὰ τοῦ μηδενικοῦ 0.

13. Τὰ ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, καλοῦνται *σημαντικὰ* ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸ μηδὲν 0, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει μόνον πρὸς ἀναπλήρωσιν τῆς θέσεως ψηφίων ἐλλειπουσῶν μονάδων ἐν τῇ γραφῇ τῶν ἀριθμῶν. Ἡ διὰ τῶν δέκα τούτων συμβόλων ἢ ψηφίων ἢ ἀραβικῶν χαρακτήρων γραφὴ τῶν ἀριθμῶν εἶναι μία τῶν εὐφυεστάτων ἐπινοήσεων τοῦ ἀνθρώπου ἀναγομένη εἰς τοὺς Ἰνδούς, παρ' ὧν ἔμαθον αὐτὴν οἱ Ἄραβες καὶ εἶτα ἡμεῖς περὶ τὸν 12ον αἰῶνα μ. Χ.

Ὁ δι' ἑνὸς ψηφίου γραφόμενος ἀριθμὸς καλεῖται μονοψήφιος, ὁ διὰ δύο διψήφιος καὶ ὁ διὰ πολλῶν πολυψήφιος.

14. Ἡ ὀνοματολογία τῶν ἀριθμῶν, ὡς ἐξετέθη ἐν τοῖς προηγουμένοις εἶναι μὲν θεωρητικῶς τελεία, ἀλλ' ἐν πάσῃ γλώσσῃ ὑπάρχουσι διαφοραί τινες ἢ συντομίαι περὶ τὴν ὀνομασίαν τῶν ἀριθμῶν. Παρ' ἡμῖν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ τῶν δεκάδων ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων λέξεων καὶ ψηφίων:

*δέκα* (10), *εἴκοσι* (20), *τριάκοντα* (30), *τεσσαράκοντα* (40), *πεντήκοντα* (50), *ἑξήκοντα* (60), *ἑβδομήκοντα* (70), *ὀγδοήκοντα* (80), *ἐνενήκοντα* (90).

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ τῶν ἑκατοντάδων διὰ τῶν ἑξῆς : *ἑκατὸν* (100), *διακόσια* (200), *τριακόσια* (300), *τετρακόσια* (400), *πεντακόσια* (500), *ἑξακόσια* (600), *ἑπτακόσια* (700), *ὀκτακόσια* (800), *ἐνεακόσια* (900).

Οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ ὡς συγκείμενοι ἐκ δεκάδων καὶ μονάδων ἀπαγγέλλονται διὰ τοῦ ὀνόματος τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων, ὡς τριάκοντα ἑπτὰ (37). Ἀντὶ δὲ δέκα ἕν, δέκα δύο λέγομεν *ἕνδεκα* (11), *δώδεκα* (12).

Οἱ τριψήφιοι ἀριθμοὶ ὡς συγκείμενοι ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ μονάδων ἀπαγγέλλονται διὰ τοῦ ὀνόματος τῶν ἑκατοντάδων, τῶν δεκάδων καὶ τῶν μονάδων, ὡς τριακόσια πεντήκοντα ἐννέα (359), ἑκατὸν ὀκτὼ (108), τρεῖς χιλιάδες (3000), παραλειπομένου τοῦ ὀνόματος τῶν μὴ ὑπαρχουσῶν μονάδων τάξεών τινων χάριν συντομίας. Γενικῶς οἱ πολυψήφιοι ἀριθμοὶ ὡς συγκείμενοι ἐκ μονάδων διαφόρων τάξεων ἀπαγγέλλονται διὰ τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τούτων, ὡς δύο ἑκατομμύρια ἐννέα ἑκατοντάδες χιλιάδων πέντε χιλιάδων ἑπτὰ ἑκατοντάδες καὶ ἑπτὰ μονάδες ἢ συντομώτερον δύο ἑκατομμύρια ἐνεακόσιαι πέντε χιλιάδες ἑπτακόσια ἑπτὰ (2905707), παραλειπομένου τοῦ ὀνόματος τῶν μονάδων τάξεών τινων καὶ θεωρουμένου τοῦ ἀριθμοῦ ὡς μεμερισμένου εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς, ὅτε τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο ἢ καὶ ἓν μόνον ψηφίον. Κατὰ δὲ τὸν τρόπον τοῦτον τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν θεωροῦνται οὗτοι ὡς συγκείμενοι ἐξ ἁπλῶν μονάδων, χιλιάδων, ἑκατομμυρίων κλπ, καὶ οἱ ἀριθμοὶ *ἕν*, *χίλια*, *ἑκατομμύριον* κλ. καλοῦνται *πρωτεύουσαι* μονάδες.

15. Τὸ ἀνωτέρω ἐκτεθὲν σύστημα ἀριθμήσεως, δι᾽ οὗ καὶ ἡ ἀπαγγελία καὶ ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν τοσοῦτον ἁπλοποιεῖται καλεῖται δεκαδικόν· διότι ἡ μονὰς ἑκάστης τάξεως ἀποτελεῖται ἐκ δέκα μονάδων τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ ἑπομένως ὡς *βάσις*, οὕτως εἰπεῖν, τῆς ἀριθμήσεως εἶναι ὁ ἀριθμὸς 10. Ἀλλ᾽ εἶναι δυνατὸν νὰ παραχθῶσιν ἄπειρα συστήματα ἀριθμήσεως διακρινόμενα ἀπ᾽ ἀλλήλων ἐκ τῆς βάσεως ἤτοι ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος, ὁπόσαι μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἑπομένης τάξεως. *Ἐν παντὶ δὲ συστήματι ἀριθμήσεως πάντες οἱ ἀριθμοὶ γράφονται διὰ τόσων ψηφίων, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τῆς βάσεως.* Ἐὰν π. χ. βάσις τῆς ἀριθμήσεως ληφθῇ ὁ ἀριθμὸς 8 ἀντὶ τοῦ 10, αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων παράγονται ἐκ τῆς ὀκτάδος, καθ᾽ ἣν ὀκτὼ μονάδες ἑκάστης τάξεως ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· διὰ δὲ τὴν γραφὴν

τῶν ἀριθμῶν ἐξαρκοῦσι μόνον τὰ ἑπτὰ σημαντικὰ ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 καὶ τὸ 0. Κατὰ ταῦτα ὁ ἀριθμὸς ὀκτὼ γράφεται ἐν τῷ ὀκταδικῷ συστήματι διὰ τοῦ 10, ὁ ἐννέα διὰ 11, ὁ δέκα διὰ 12, ὁ ὀκτάκις ὀκτὼ διὰ 100 κλ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς πέντε ἐν τῷ πενταδικῷ συστήματι γράφεται διὰ τοῦ 10, ὁ ἓξ διὰ τοῦ 11, ὁ ἑπτὰ διὰ τοῦ 12, ὁ ἑκατὸν διὰ τοῦ 400, κλ. Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς δύο ἐν τῷ δυαδικῷ συστήματι γράφεται διὰ τοῦ 10, ὁ ἕνδεκα διὰ τοῦ 1011, ὁ δώδεκα διὰ τοῦ 1100 κλ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς δώδεκα ἐν τῷ δωδεκαδικῷ συστήματι γράφεται διὰ τοῦ 10, ὁ δεκατρία διὰ τοῦ 11 ὁ τριάκοντα τέσσαρα διὰ τοῦ 2 καὶ δέκα ἁπλῶν μονάδων τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος, ὁ τριάκοντα πέντε διὰ τοῦ 2 καὶ ἕνδεκα ἁπλῶν μονάδων τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος, κλ.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν

1). Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ ἀπαγγελθῇ ὁ ἀριθμὸς 9675908503;

2). Πῶς γράφεται δι' ἀραβικῶν χαρακτήρων ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐκ δώδεκα ἑκατομμυρίων, ἐκ πεντακοσίων χιλιάδων, ἐκ τεσσάρων δεκάδων χιλιάδων, ἐκ τριακοσίων ἑκατοντάδων καὶ ἓξ δεκάδων ;

3). Πόσαι χιλιάδες, ἑκατοντάδες, δεκάδες καὶ ἁπλαῖ μονάδες ἀποτελοῦσι τὸ ἑκατομμύριον ἢ τὸν ἀριθμὸν 102030405 ;

4). Ποίαν μεταβολὴν ὑφίσταται ἀριθμός τις, ἐὰν γραφῶσιν ἓν ἢ πολλὰ μηδενικὰ ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν ἢ εἰς τὸ τέλος ἢ μεταξὺ τῶν σημαντικῶν ψηφίων αὐτοῦ ;

5). Πῶς καθίσταται ὁ ἀριθμὸς 527 χιλιάκις μείζων ἑαυτοῦ, ὁ δὲ 100000 μυριάκις ἐλάσσων ἑαυτοῦ ;

6). Πόσαι πεντάδες ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 100 ; Πόσαι δεκάδες τὸν 308000 ; Πόσαι ὀκτάδες τὸν 1000 ; Πόσαι τριάδες τὸν 9999 καὶ πόσαι δωδεκάδες τὸν 144000 ;

7) Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ ὀκταδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 1 μέχρι τοῦ 20 τοῦ δεκαδικοῦ ;

8). Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 25, 53, 55 τοῦ ἑξαδικοῦ ; ('Απ. 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17, 33, 35).

9) Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τοὺς 1,10, 110, 111, 10101, 111111 τοῦ δυαδικοῦ ; ('Απ. 1, 2, 20, 21, 210, 2100).

10). Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ δωδεκαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τοὺς 15, 27, 98, 105 τοῦ δεκαδικοῦ ; ('Απ. 13, 23, 82, 89).

11). Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τοὺς 30, 1000, 5937 τοῦ εἰκοσαδικοῦ. ('Απ. 60, 8000, 43667).

12). Τίνες ἀριθμοὶ τοῦ τριαδικοῦ συστήματος ἀντιστοιχοῦσι πρὸς τὰς 17, 25, 30 τοῦ δεκαπενταδικοῦ ; 'Απ. 211, 1022, 1200).

## Περὶ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν.

16. *Ἴσοι* πρὸς ἀλλήλους λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν ἑκάστη μονὰς τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἀντιστοιχῇ πρὸς μίαν μονάδα τοῦ ἑτέρου· καὶ τἀνάπαλιν. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων τῆς δεξιᾶς χειρὸς καὶ ὁ τῶν τῆς ἀριστερᾶς ἀρτιμελοῦς ἀνθρώπου εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Πρὸς παράστασιν τῆς ἰσότητος δύο ἀριθμῶν γράφεται μεταξὺ αὐτῶν τὸ σύμβολον $=$, ὡς $5=5$.

17. *Ἄνισοι* λέγονται δύο ἀριθμοὶ πρὸς ἀλλήλους, ἐὰν μονάδες τινὲς τοῦ ἑτέρου αὐτῶν δὲν ἔχωσιν ἀντιστοίχους τοῦ ἑτέρου. Καὶ ὁ μὲν ἔχων περισσοτέρας μονάδας καλεῖται *μείζων*, ὁ δὲ ὀλιγωτέρας *ἐλάσσων*. Π. χ. ὁ ἀριθμὸς 10 καλεῖται μείζων τοῦ 7.

Πρὸς παράστασιν δὲ τῆς ἀνισότητος δύο ἀριθμῶν γράφεται μεταξὺ αὐτῶν τὸ σύμβολον $<$, ὡς $10>5$, $8<12$, τοῦ ἐλάσσονος ἀριθμοῦ γραφομένου παρὰ τὴν κυρτὴν γωνίαν τοῦ συμβόλου τούτου.

18. Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν ἕπονται ἀμέσως αἱ ἀφ' ἑαυτῶν φανεραὶ προτάσεις:

1) *Οἱ τῷ αὐτῷ ἀριθμῷ ἴσοι καὶ ἀλλήλοις ἴσοι,*

2) *Ἐὰν εἰς ἑκάτερον τῶν δύο ἴσων ἀριθμῶν προστεθῇ μία μονάς, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.* Καὶ γενικῶς· *ἐὰν εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.*

3) *Οἱ διπλάσιοι τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.* Καὶ γενικῶς· *τὰ ἰσάκις πολλαπλάσια τῶν ἴσων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ ἴσοι.*

4) *Ἐὰν εἰς ἀνίσους ἀριθμοὺς προστεθῶσιν ἴσοι, οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ μένουσιν ἄνισοι.*

5) *Οἱ διπλάσιοι τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἀριθμοί.* Καὶ γενικῶς· τὰ *ἰσάκις πολλαπλάσια ἀνίσων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι ἀριθμοί.*

## Περὶ τῶν θεμελιωδῶν ἀρχῶν ἢ ὑποθέσεων τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ τῶν ἐξ αὐτῶν προτάσεων.

19. *Πρῶται ἔννοιαι* εἶναι ἐκεῖναι, ἃς ἔχομεν πάντες, ὡς π.χ. αἱ ἐκφερόμεναι διὰ τῶν λέξεων *ἕν*, *πολλά*.

20. *Πρότασις* εἶναι ἡ δι' ὡρισμένων καὶ ἁρμοδίων λέξεων ἔκφρασις διανοήματός τινος.

21. *Ἀξίωμα* καλεῖται πᾶσα πρότασις ἀφ' ἑαυτῆς φανερά, ὡς π. χ. *τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἴσα.*

20. *Θεώρημα* καλεῖται πᾶσα πρότασις, ἧς ἡ ἀλήθεια καθίσταται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως. Ἡ δὲ *ἀπόδειξις* εἶναι συλλογισμὸς ἢ σειρὰ συλλογισμῶν ἐκ γνωστῶν προτάσεων ἢ δεδομένων τινῶν, δι' ὧν πειθόμεθα περὶ τῆς ἀληθείας ἢ τοῦ ψεύδους προτάσεώς τινος. Διακρίνονται δὲ δύο εἰδῶν ἀποδείξεις ἡ *ἄμεσος* καὶ ἡ *ἔμμεσος* ἢ *διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς*. Ἡ μὲν πρώτη δεικνύει τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος ὡς συμπέρασμα ἐντελῶς γνωστῶν προτάσεων, ἡ δὲ δευτέρα δεικνύει τὴν ἀλήθειαν προτάσεώς τινος ἐκ τῆς παραδοχῆς ἀντιθέτων ἢ ἀντιφασκουσῶν προτάσεων ἐντελῶς γνωστῶν.

22. *Πόρισμα* καλεῖται πᾶσα πρότασις ποριζομένη ἀμέσως ἐκ μιᾶς ἢ πλειόνων προτάσεων ἢ θεωρημάτων.

23. *Πρόβλημα* καλεῖται πᾶσα πρότασις, ἐν ᾗ ζητεῖται νὰ τελεσθῇ τι ἢ διὰ τῆς λύσεως ἢ διὰ τῆς κατασκευῆς. Ἡ δὲ λύσις ἢ κατασκευὴ εἶναι ἡ εὕρεσις τοῦ ζητουμένου στηριζομένη ἐπὶ διαφόρων δεδομένων ἢ ἐπὶ τῶν ἐξαγομένων τῶν διαφόρων προτάσεων ἢ θεωρημάτων.

Ἐν πάσῃ προτάσει διακρίνονται ἐν γένει δύο τινα· ἡ *ὑπόθεσις* καὶ τὸ *συμπέρασμα*. Ἡ μὲν ὑπόθεσις ἀποτελεῖ τὸ ὑποτιθέμενον ἢ διδόμενον μέρος τῆς προτάσεως, τὸ δὲ συμπέρασμα ἀποτελεῖ τὸ ἀποδεικτέον ἢ ζητούμενον μέρος τῆς προτάσεως· οἷον *ἐὰν πολλοὶ ἀριθμοὶ προστεθῶσι καθ' οἱονδήποτε τάξιν* (ὑπόθεσις), τὸ *ἄθροισμα εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ* (συμπέρασμα).

24. *Ὁρισμὸς* δὲ καλεῖται πᾶσα τελεία, ἀκριβὴς καὶ σαφὴς διὰ λέξεων ἔκφρασις ἢ περιγραφὴ πρὸς χαρακτηρισμὸν καὶ διάκρισιν οἱουδήποτε πράγματος καθ' ἑαυτὸ καὶ πρὸς ἄλλα ὅμοια ἢ διάφορα : ὡς π. χ. *Πᾶς τριψήφιος ἀριθμὸς σύγκειται ἐξ ἑκατοντάδων, δεκάδων καὶ ἁπλῶν μονάδων.*

25. Οἱ ἀριθμοί, περὶ τῶν ὁποίων πραγματεύονται κυρίως τὰ στοιχεῖα τῆς θεωρητικῆς Ἀριθμητικῆς καλοῦνται *ἀκέραιοι καὶ κλασματικοὶ* ἢ *σύστημα ~~τῶν~~ ἀκεραίων καὶ ~~σύστημα τῶν~~ κλασματικῶν ἀριθμῶν*, ἐφ' ὧν ἰσχύουσιν ὡρισμένοι γενικοὶ ἀριθμητικοὶ νόμοι ἢ ἰδιότητες πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν δια-

φόρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ θεωριῶν. Οἱ μὲν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σύγκεινται ἐξ αὐτοτελῶν ἢ *ἀκεραίων* μονάδων, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἐκ *μερῶν* τῆς ἀκεραίας μονάδος μερισθείσης εἰς δύο, τρία, τέσσαρα,... ἴσα μέρη ὀνομαζόμενα *ἓν δεύτερον* (ἢ *ἥμισυ*), *ἓν τρίτον*, *ἓν τέταρτον* καὶ γραφόμενα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$,.. Οἱ μὲν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ ἀνωτέρω ἐκτεθέντες, οἱ δὲ κλασματικοὶ ἀπαγγέλλονται καὶ γράφονται ἕκαστος διὰ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὡς *δύο τρίτα* $\frac{2}{3}$, ὧν ὁ μὲν ἄνωθι τῆς γραμμῆς καλεῖται *ἀριθμητής*, ὁ δὲ ὑπὸ τὴν γραμμὴν *παρονομαστής*· διότι ὁ μὲν ὀνομάζει, εἰς ὁπόσα ἴσα μέρη μερίζεται ἡ ἀκεραία μονὰς 1, ὁ δὲ ἀριθμεῖ, ὁπόσα τοιαῦτα μέρη περιέχει ὁ κλασματικὸς ἀριθμός. Ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς *πέντε ἕβδομα* $\frac{5}{7}$ σύγκειται ἐκ τοῦ ἑβδόμου $\frac{1}{7}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 λαμβανομένου πεντάκις· καὶ οὕτω καθεξῆς.

26. *Συγκεκριμένος* λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν ὁρίζηται καὶ τὸ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον οὗτος παριστᾷ· ὡς πέντε ἄνθρωποι, ἑπτὰ ἔτη, 2 ὀκάδες.

27. *Ἀφηρημένος* δὲ λέγεται ἀριθμός τις, ἐὰν θεωρῆται ἀνεξαρτήτως τοῦ πράγματος, τὸ ὁποῖον παριστᾷ· ὡς δύο, ὀκτώ.

28. Ἐν τῇ θεωρητικῇ Ἀριθμητικῇ οἱ ἀριθμοὶ παρίστανται γενικῶς καὶ διὰ τῶν *γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου*, ὅταν οἱ συλλογισμοὶ οἱ γινόμενοι ἐπ' αὐτῶν πρὸς ἀπόδειξιν θεωρήματός τινος ἢ τῆς λύσεως προβλήματός τινος μένωσιν οἱ αὐτοί, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ὦσιν οἱ ἀριθμοί. Ἡ δὲ παράστασις αὕτη καθιστᾷ καὶ σαφεστέραν τὴν γενικότητα τῶν ἀποδείξεων παρεχουσῶν οὕτω *γενικοὺς τύπους*, καθ' οὓς δεικνύονται καὶ λύονται τὰ διάφορα ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν θεωρήματα καὶ προβλήματα· ἐὰν π. χ. θέλωμεν νὰ δηλώσωμεν γενικῶς τὴν σχέσιν ἰσότητος δύο ἀριθμῶν οἱωνδήποτε $\alpha$ καὶ $\beta$ γράφομεν $\alpha=\beta$, ὅπου τὸ μὲν $\alpha$ καλεῖται *πρῶτον μέλος* τῆς ἰσότητος ἢ σχέσεως ταύτης, τὸ δὲ $\beta$ *δεύτερον μέλος*. Ὁμοίως δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοὶ $\gamma$ καὶ $\delta$ ἄνισοι γράφονται $\gamma < \delta$ ἢ $\gamma > \delta$.

29. Διὰ δὲ τῶν τελευταίων γραμμάτων $\chi$, $\psi$, $\omega$, τοῦ ἀλφαβήτου παρίστανται συνήθως οἱ πρὸς εὕρεσιν *ἄγνωστοι* ἀριθμοὶ οἱ συνδεόμενοι πρὸς ἄλλους γνωστοὺς ἀριθμοὺς δι' ὡρισμένων ἀριθμητικῶν πράξεων ἢ σχέσεων.

30. Αἱ δὲ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν στοιχειώδεις πράξεις εἶναι *τέσσαρες*: ἡ *πρόσθεσις*, ἡ *ἀφαίρεσις*, ὁ *πολλαπλασιασμὸς* καὶ ἡ *διαίρεσις*.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄.

## Περὶ τῶν τεσσάρων πράξεων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

### Περὶ προσθέσεως.

31. *Ἡ πρόσθεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἄλλος ἀριθμὸς ἐκ πασῶν τῶν μονάδων αὐτῶν, καὶ μόνων τούτων.*

Οἱ διδόμενοι πρὸς πρόσθεσιν ἀριθμοὶ λέγονται *προσθετέοι*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται *κεφάλαιον* ἢ *ἄθροισμα* καὶ εὑρίσκεται προστιθεμένων εἰς ἕκαστον προσθετέον διαδοχικῶς πασῶν τῶν μονάδων τῶν λοιπῶν προσθετέων. Ἔστωσαν παραδείγματος χάριν προσθετέοι οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ 5, 3, 2. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων προστίθενται διαδοχικῶς εἰς τὸν 5 αἱ μονάδες τοῦ 3 καὶ εἶτα αἱ τοῦ 2, ἤτοι 5 καὶ 1 ἴσον 6 καὶ 1 ἴσον 7 καὶ 1 ἴσον 8 καὶ 1 ἴσον 9 καὶ 1 ἴσον 10 ἢ καὶ συντόμως ἀπὸ μνήμης 5 καὶ 3 ἴσον 8 καὶ 2 ἴσον 10. Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ ἄθροισμα ἄλλων ἀριθμῶν.

Σύμβολον τῆς προσθέσεως εἶναι τὸ $+$ γραφόμενον μεταξὺ τῶν κατὰ ὁριζοντίαν γραμμὴν προστιθεμένων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγελλόμενον *σύν*. ὡς $5+3=8$ πέντε σὺν τρία ἴσον ὀκτώ, $\alpha+\beta=\delta$ ἄλφα σὺν βῆτα ἴσον δέλτα κλ.

32. Αἱ δὲ θεμελιώδεις *ἰδιότητες* ἢ *νόμοι* τῆς προσθέσεως εἶναι οἱ ἑπόμενοι.

### Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.

α) *Καθ' οἱονδήποτε τάξιν καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ πρόσθεσις πολλῶν ἀριθμῶν, τὸ αὐτὸ πάντοτε εὑρίσκεται ἄθροισμα.* (Νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν προσθετέων).

Ἔστωσαν π. χ. προσθετέοι οἱ ἀριθμοὶ 3, 7, 12, 8· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 30 μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προστεθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ἐντελῶς ὡρισμένος· διότι εἶναι δεδομέναι πᾶσαι αἱ μονάδες αἱ ἀποτελοῦσαι αὐτό· ὥστε

$$3+7+12+8=7+8+3+12=30$$

Καὶ γενικῶς.

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\gamma+\alpha+\delta+\beta.$$

β) *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι πολλοὶ προσθετέοι ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. προσθετέοι οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 6, 5· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 17 μένει τὸ αὐτό, καὶ ὅταν ἀντὶ τῶν προσθετέων 4 καὶ 5 ληφθῇ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 9, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 2, 6, 9 ἔχουσι τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, οἷον καὶ οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$2+4+6+5=4+5+2+6, \text{ ἀλλὰ } 4+5=9\cdot$$

ὥστε

$$2+4+6+5=9+2+6.$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma,$$

ὅπου διὰ τῆς παρενθέσεως $(\beta+\delta)$ δηλοῦται εὑρεθὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν β καὶ δ.

γ) *Ἐν παντὶ ἀθροίσματι δύναται οἱοσδήποτε τῶν προσθετέων νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμῶν ἐχόντων αὐτὸν ἄθροισμα.*

Ἔστωσαν π. χ. προσθετέοι οἱ ἀριθμοὶ 5, 14, 9· λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 28 μένει τὸ αὐτό, καὶ ἐὰν ἀντὶ τοῦ προσθετέου 14 ληφθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ 8 καὶ 6 οἱ ἔχοντες αὐτὸν ἄθροισμα.

*Ἀπόδειξις*. Πᾶς προσθετέος εἶναι ἄθροισμα μονάδων ἢ καὶ ἄθροισμα δοθέντων ἀριθμῶν· ὥστε

$$5+14+9=6+8+6+9.$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha+\beta+\gamma=\alpha+\beta'+\beta''+\gamma, \text{ ὅπου } \beta'+\beta''=\beta.$$

δ) *Εἴτε εἰς ἄθροισμα προστίθεται ἀριθμὸς εἴτε εἰς ἕνα τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος, τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ αὐτό.*

Ἔστω π. χ. ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3 πρόκειται νὰ προστεθῇ εἰς τὸ ἄθροισμα $2+7+25=34$· λέγω, ὅτι καὶ ὅταν ὁ 3 προστεθῇ εἰς τὸ ἄθροισμα 34 τῶν ἀριθμῶν 2, 7, 25 καὶ ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν προσθετέον 7 τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τούτων, εὑρίσκεται τὸ αὐτὸ ἄθροισμα 37.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὴν ἀμέσως προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$34+3=2+7+25+3=37$$

Κατὰ δὲ τὴν ἰδιότητα β) εἶναι

$$2+7+25+3=2+10+25\cdot$$

ὥστε

$$(2+7+25)+3=2+10+25=37.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha+\beta+\gamma)+\delta=\alpha+(\beta+\delta)+\gamma.$$

ε) *Ἄθροισμα προστίθεται εἰς ἕτερον ἄθροισμα, καὶ ἂν προστεθῶσιν οἱ προσθετέοι ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων ἀλλεπαλλήλως.*

Ἔστω π. χ. τὸ ἄθροισμα $3+7=10$ καὶ τὸ ἄθροισμα $2+5+10=17\cdot$ λέγω, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων τούτων εἶναι

$$3+7+2+5+10.$$

*Ἀπόδειξις.* Κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα εἶναι

$$10+17=3+7+17 \text{ καὶ } 3+7+17=3+7+2+5+10\cdot$$

ὥστε

$$10+17 \text{ ἢ } (3+7)+(2+5+10)=3+7+2+5+10.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon.$$

*Σημείωσις.* Τὸ 0 ὡς προσθετέος ἀριθμὸς οὐδαμῶς μεταβάλλει τὸ ἄθροισμα· διότι ὡς ἐρρήθη ἐν τοῖς προηγουμένοις περὶ ἀριθμήσεως (σελ. 6 ) τὸ 0 σημαίνει ἔλλειψιν μονάδων· ὥστε

$$2+0+5=7,\ 8+0=8,\ 0+0=0$$

33. Ἡ εὕρεσις οἱουδήποτε ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε πολυψηφίων ἀριθμῶν γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐν τῇ Ἀριθμήσει περὶ μονάδων διαφόρων τάξεων, ῥηθέντων ὡς καὶ ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως κατὰ τὸν ἑπόμενον πρακτικὸν *κανόνα* :

## Κανὼν τῆς προσθέσεως.

*Ἵνα προστεθῶσι δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοί, γράφονται οὗτοι ὁ εἷς ὑπὸ τὸν ἄλλον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες ἑκάστης τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ ἄγεται ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντία εὐθεῖα γραμμή. Εἶτα προστίθενται τὰ ψηφία ἑκάστης στήλης ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφ' ἑξῆς· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων στήλης τινὸς δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφεται αὐτὸ ὑπὸ τὴν αὐτὴν στήλην, ἐὰν δὲ ὑπερβαίνῃ τὸν 9, γράφονται μόνον αἱ μονάδες αὐτοῦ ὑπὸ τὴν στήλην ταύτην, αἱ δὲ δεκάδες αὐτοῦ προστίθενται εἰς τὴν στήλην τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρι τῆς τελευταίας στήλης.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ προσθετέοι 40584,2957,63008,342 Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑπομένη :

$$\begin{array}{r} 40584 \\ 2957 \\ 63008 \\ 342 \\ \hline 106891 \end{array}$$

Ἐν τῇ ἀθροίσει τῶν ψηφίων τῆς στήλης τῶν ἁπλῶν μονάδων εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 21 παριστῶν ἁπλᾶς μονάδας καὶ ἑπομένως περιέχων 2 δεκάδας καὶ 1 μονάδα· καὶ ἡ μὲν 1 ἐγράφη ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ἁπλῶν μονάδων αἱ δὲ 2 δεκάδες, ἢ τὸ κρατούμενον 2, προσετέθη εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων καὶ ἐκ τῆς ἀθροίσεως τότε τῶν ψηφίων ταύτης εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 19 παριστῶν δεκάδας καὶ ἑπομένως περιέχων 1 ἑκατοντάδα καὶ 9 δεκάδας· ἡ 1 ἑκατοντὰς ἢ τὸ κρατούμενον 1 προσετέθη εἰς τὴν στήλην τῶν ἑκατοντάδων καὶ ἐκ τῆς ἀθροίσεως τότε τῶν ψηφίων ταύτης εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 18 παριστῶν ἑκατοντάδας καὶ ἑπομένως περιέχων 1 χιλιάδα καὶ 8 ἑκατοντάδας· ἡ 1 χιλιὰς ἢ τὸ κρατούμενον 1 προσετέθη εἰς τὴν στήλην τῶν δεκάδων χιλιάδων καὶ ἐκ τῆς ἀθροίσεως τότε τῶν ψηφίων αὐτῆς εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 6 παριστῶν χιλιάδας· τελευταῖον προσετέθησαν τὰ ψηφία τῆς στήλης τῶν δεκάδων χιλιάδων ἢ μυριάδων καὶ εὑρέθη ὁ ἀριθμὸς 10 παριστῶν δεκάδας χιλιάδων ἢ μυριάδας καὶ ἑπομένως περιέχων 1 ἑκατοντάδα χιλιάδων.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 106891 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν· διότι, ὡς εὑρέθη, περιέχει πάσας τὰς μονάδας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν καὶ μόνας αὐτάς.

Ἐλέγχεται δὲ τὸ ἀληθὲς τῆς εὑρέσεως τοῦ ἀθροίσματος 106891 ἤτοι ὅτι ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι τὸ ζητούμενον ἄθροισμα, ἐὰν ἐπαναληφθῇ ἡ πρόσθεσις τῶν ψηφίων ἑκάστης στήλης καθ' οἱανδήποτε τάξιν· ἐὰν ἐπανευρεθῇ τὸ αὐτὸ ἄθροισμα, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρόσθεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους. Τὸ τοιοῦτον καλεῖται *βάσανος* ἢ *δοκιμὴ* τῆς προσθέσεως.

34. *Βάσανος ἢ δοκιμὴ πράξεώς τινος λέγεται ἄλλη τις πρᾶξις, δι' ἧς ἐξελέγχεται, ἂν ἡ πρώτη ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

*Παρατήρησις*. Τῶν ὁμοειδῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδὲς τοῖς προσθετέοις· οἷον 20 ἄνθρωποι καὶ 10 ἄνθρωποι εἶναι τὸ ὅλον 30 ἄνθρωποι.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσα ψηφία δύναται νὰ ἔχῃ τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν;

2) Πότε ἡ πρόσθεσις δύο ἢ πολλῶν πολυψηφίων ἀριθμῶν γίνεται ἀδιαφόρως ἀρχομένης τῆς ἀθροίσεως ἀπὸ οἱασδήποτε κατακορύφου στήλης;

3) Πῶς μεταβάλλεται τὸ ἄθροισμα δεδομένων ἀριθμῶν αὐξανομένων αὐτῶν κατὰ 1, 2, 3, κλ. μονάδας τάξεώς τινος; Καὶ πότε τὸ ἄθροισμα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλ.;

4) Πότε τὸ ἄθροισμα δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν ἔχει τὰ αὐτὰ σημαντικὰ ψηφία, οἷα πάντες οἱ προσθετέοι;

5) Πότε τὰ ψηφία ἀθροίσματος εἶναι τὰ αὐτά;

6) Πότε τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε δεδομένων ἀριθμῶν εἶναι ἡ 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν;

7) Πότε δύνανται νὰ προστεθῶσιν οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί, καὶ πότε οἱ ἀφῃρημένοι;

8) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 45000 δρ. ἐδαπάνησε δὲ πρὸς ἐπισκευὴν μὲν 6385 δρ. εἰς ἀσφάλιστρα δὲ 65 δρ. Πόσον πρέπει νὰ πωλήσῃ αὐτήν, ἂν θέλῃ νὰ κερδήσῃ 3500 δρ. ἐκ τῆς πωλήσεως; (Ἀπ. 54950).

9) Ἄνθρωπός τις ἀπέθανεν ἑβδομηκοντούτης, ἐγεννήθη δὲ τῷ 1821. Κατὰ ποῖον ἔτος ἀπέθανεν; (Ἀπ. 1891).

10) Πατήρ τις εἶπεν· ὅτε ἐγεννήθη ὁ υἱός μου ἤμην 34 ἐτῶν, νῦν δὲ ἡ ἡλικία μου εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ μου. Πόσα ἔτη ἀποτελοῦσιν αἱ ἡλικίαι ἀμφοτέρων; (Ἀπ. 102).

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## Περὶ ἀφαιρέσεως.

35) *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦται δοθεὶς ἀριθμὸς κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἕτερος δοθεὶς ἀριθμός.*

Ὁ μὲν ἐλαττούμενος ἀριθμὸς λέγεται *μειωτέος*, ὁ δὲ ἕτερος *ἀφαιρετέος* καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀφαιρέσεως *ὑπόλοιπον* ἢ *διαφορὰ* ἢ *ὑπεροχή*. Ἔστω π. χ. μειωτέος ὁ 5 καὶ ἀφαιρετέος ὁ 3· πρὸς εὕρεσιν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν, ἤτοι κατὰ πόσας μονάδας διαφέρει ὁ 5 τοῦ 3, ἀφαιροῦνται διαδοχικῶς ἀπὸ τοῦ 5 αἱ μονάδες τοῦ 3 ὡς ἑξῆς : 5 πλὴν 1 ἴσον 4, 4 πλὴν 1 ἴσον 3, 3 πλὴν 1 ἴσον 2 ἢ συντόμως ἀπὸ μνήμης 5 πλὴν 3 ἴσον 2.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον τῆς ἀφαιρέσεως φανερόν, ὅτι ὁ *μειωτέος εἶναι ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, τοῦ ἀφαιρετέου καὶ τῆς διαφορᾶς*, καὶ ἑπομένως ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

*Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν δεύτερον δίδει ἄθροισμα τὸν πρῶτον·* ἢ δοθέντων δύο ἀνίσων ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος ἀριθμός, καθ' ὃν ὁ μείζων ὑπερέχει τοῦ ἐλάσσονος.

Σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τὸ — γραφόμενον μεταξὺ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ἀφαιρετέου (ὁ μειωτέος γράφεται πρῶτος) καὶ ἀπαγγελλόμενον *πλὴν* ἢ *μεῖον*, ὡς $8-5=3$ ὀκτὼ πλὴν πέντε ἴσον τρία.

36. Πρόδηλον δέ, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις εἶναι δυνατὴ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐὰν ὁ *ἀφαιρετέος ἐλάσσων τοῦ μειωτέου*. Ἐὰν δὲ ὁ μειωτέος *ἰσῶται* τῷ ἀφαιρετέῳ, ἡ διαφορὰ εἶναι 0, ὡς $5-5=0$, ὅθεν $5=5+0$ καὶ $5-0=5$· ἐντεῦθεν δὲ δῆλον, ὅτι ἡ *ἀφαίρεσις τοῦ 0 ἀπὸ ἀριθμοῦ οὐδαμῶς μεταβάλλει αὐτόν*.

37. *Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀριθμῶν ἀφαιρεθῶσιν ἴσοι ἀριθμοί, τὰ ὑπόλοιπα εἶναι ἴσα*. Διότι, ἐὰν εἰς τὰ ὑπόλοιπα προστεθῶσιν οἱ ἀφαιρεθέντες ἴσοι, πρέπει νὰ προκύπτωσιν ἴσοι ἀριθμοὶ (οἱ ἴσοι μειωτέοι)· ὅπερ ἀδύνατον, ἐὰν τὰ ὑπόλοιπα ἦναι ἄνισα.

38. Αἱ δὲ θεμελιώδεις *ἰδιότητες* ἢ *νόμοι* τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι οἱ ἑπόμενοι :

## Ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως.

α) *Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς τὸν μειωτέον καὶ εἰς τὸν ἀφαιρετέον, ἡ διαφορὰ δὲν μεταβάλλεται.*

Ἔστω π. χ. μειωτέος μὲν ὁ 8, ἀφαιρετέος δὲ ὁ 5, ὧν ἡ διαφορὰ 3· λέγω ὅτι, ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 2 εἴς τε τὸν 8 καὶ εἰς τὸν 5, ἡ διαφορὰ τῶν προκυπτόντων ἀριθμῶν 10 καὶ 7 εἶναι πάλιν ὁ ἀριθμὸς 3.

*Ἀπόδειξις*. Ἐν πάσῃ ἀφαιρέσει ὁ μειωτέος ἰσοῦται τῷ ἀφαιρετέῳ σὺν τῇ διαφορᾷ· ὥστε $8=5+3$. Ἐὰν δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 2, ἡ ἰσότης μένει καὶ εὑρίσκεται

$$8+2=(5+3)+2 \text{ ἢ } 10=7+3\cdot \text{ ὅθεν } 10-7=3.$$

Καὶ γενικῶς· ἐὰν $\alpha-\beta=\gamma$, ἕπεται $\alpha=\beta+\gamma$· προστιθεμένου δὲ εἰς ἀμ-

φότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης τοῦ ἀριθμοῦ $\delta$ προκύπτει
$$\alpha+\delta=(\beta+\gamma)+\delta \text{ ἢ } \alpha+\delta=(\beta+\delta)+\gamma\cdot \text{ ὅθεν } (\alpha+\delta)-(\beta+\delta)=\gamma.$$

β) *Ἀριθμὸς ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀθροίσματος ἄλλων ἀριθμῶν, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑνὸς τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου* (ἐὰν ἀφαιρῆται).

Ἔστω π. χ. μειωτέος μὲν τὸ ἄθροισμα $3+8+12$, ἀφαιρετέος δὲ ὁ 6· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης, εἶναι τὸ ἄθροισμα $3+2+12$, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται ἀφαιρουμένου τοῦ 6 ἀπὸ τοῦ προσθετέου 8 τοῦ ἀθροίσματος $3+8+12$.

*Ἀπόδειξις*. Ἐν πάσῃ ἀφαιρέσει ὁ μειωτέος ἰσοῦται τῷ ἀφαιρετέῳ σὺν τῷ ὑπολοίπῳ· εἶναι δὲ
$$(3+2+12)+6=3+8+12\cdot \text{ ὥστε } (3+8+12)-6=3+2+12$$
Καὶ γενικῶς
$$(\alpha+\beta+\gamma)-\delta=\alpha+\varepsilon+\gamma, \text{ ὅπου } \varepsilon=\beta-\delta \text{ καὶ } \delta<\beta.$$
Διότι
$$(\alpha+\varepsilon+\gamma)+\delta=\alpha+(\delta+\varepsilon)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma.$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰδιότητος ταύτης ἐξάγεται ἀμέσως ὡς πόρισμα ἡ μερικὴ ἰδιότης, καθ' ἣν *ἀπὸ ἀθροίσματος ἀφαιρεῖται εἷς τῶν προσθετέων αὐτοῦ, ἐὰν παραλειφθῇ ὁ προσθετέος οὗτος*, ὡς
$$(3+8+12)-8=3+12\cdot$$
διότι
$$(3+12)+8=3+12+8=3+8+12.$$
Καὶ γενικῶς
$$(\alpha+\beta+\gamma)-\gamma=\alpha+\beta\cdot \text{ διότι } (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma.$$

γ) *Ἄθροισμα ἀριθμῶν ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀλλεπαλλήλως οἱ προσθετέοι τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω π. χ. μειωτέος μὲν ὁ 28, ἀφαιρετέος δὲ τὸ ἄθροισμα $2+12+7$· λέγω, ὅτι ἀντὶ νὰ ἀφαιρῆται ἀμέσως τὸ ἄθροισμα 21 τῶν προσθετέων 2,12, 7 ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 28, δύναται νὰ ἀφαιρῆται ἀπ' αὐτοῦ πρῶτον ὁ 2, ἀπὸ τοῦ εὑρεθέντος ὑπολοίπου 26 ὁ 12, ἀπὸ τοῦ νέου ὑπολοίπου 14 ὁ 7.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς ἀφαιρέσεως, ἐὰν ἀπὸ τοῦ 28 ἀφαιρεθῶσιν ἀλλεπαλλήλως αἱ μονάδες τοῦ 21, εὑρίσκεται ὑπόλοιπον ὁ 7, ἤτοι $28=21+7$ Ἀλλ' εἶναι $21=2+12+7$ καὶ ἑπομένως $28=2+12+7+7$. Ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρεθῇ πρῶτον ὁ 2, εἶτα ὁ 12 καὶ εἶτα ὁ 7, προκύπτει $[(28-2)-12]-7=7$, ἤτοι προκύπτει ἡ αὐτὴ διαφορὰ 7, ἡ ὁποία προκύπτει, καὶ ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀμέσως ὁ 21 ἀπὸ τοῦ 28.

Καὶ γενικῶς· ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ Μ ἀφαιρεῖται τὸ ἄθροισμα $α+β+γ$, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ Μ ἀλλεπαλλήλως οἱ προσθετέοι α, β, γ, τοῦ ἀθροίσματος τούτου. Διότι ἔστω δ ἡ διαφορὰ τοῦ Μ καὶ τοῦ $α+β+γ$, ὅπου $(M>α+β+γ)$. Τότε εἶναι $M=(α+β+γ)+δ$ ἢ $M=α+β+γ+δ$. Ἐὰν δὲ ἀπὸ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ἀφαιρεθῇ πρῶτον ὁ α, εἶτα ὁ β, καὶ εἶτα ὁ γ, προκύπτει

$$[(M-α)-β]-γ=δ,$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

39. Ἐκ τῶν προηγουμένων ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως συνάγεται καὶ ἡ ἑπομένη:

*Διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ἀφαιρεῖται ἀπὸ ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν ἀφαιρεθῇ ὁ μειωτέος καὶ προστεθῇ ὁ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς ταύτης εἰς τὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω π. χ. μειωτέος μὲν ὁ 17, ἀφαιρετέος δὲ ἡ διαφορὰ 12—3· λέγω, ὅτι ἡ διαφορὰ τοῦ 17 καὶ τοῦ 12—3 εἶναι 17+3—12.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὴν ἰδιότητα α) τῆς ἀφαιρέσεως ἡ διαφορὰ τοῦ 17 καὶ τοῦ (12 – 3) δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, ἤτοι τοῦ 17 καὶ τοῦ (12—3) ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς 3. Ἀλλὰ τότε ὁ μὲν μειωτέος 17 γίνεται 17+3, ὁ δὲ ἀφαιρετέως (12—3) γίνεται (12—3+3), ἤτοι 12, καὶ ἑπομένως πρόκειται νῦν νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 17+3 ὁ 12, ὅπερ καθιστᾷ φανερὰν τὴν προκειμένην ἰδιότητα.

Καὶ γενικῶς

$$M-(α-β)=M-α+β\cdot$$

διότι

$$(M-α+β)+(α-β)=M-α+β+α-β=M.$$

40. Ἡ εὕρεσις τῆς διαφορᾶς πολυψηφίων ἀριθμῶν γίνεται ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἐν τῇ Ἀριθμήσει περὶ μονάδων διαφόρων τάξεων ῥηθέντων, τοῦ ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἀφαιρέσεως κατὰ τὸν ἑπόμενον πρακτικὸν κανόνα.

## Κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως.

*Ἵνα ἀφαιρεθῇ ἀριθμός τις ἀπὸ ἄλλου ἀριθμοῦ, γράφεται ὁ ἀφαιρετέος ὑπὸ τὸν μειωτέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγεται ὁριζοντία γραμμή. Εἶτα ἄρχεται ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφ' ἑξῆς ἀφαιρουμένου ἑκάστου ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ μειωτέου. Ἐὰν δὲ ψηφίον τι τοῦ μειωτέου ᾖναι μικρότερον τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τοῦ ἀφαιρετέου, προστίθεται εἰς αὐτὸ 10* (ἵνα καταστῇ δυνατὴ ἡ μερικὴ αὕτη ἀφαίρεσις)· *ἀλλ' εἶτα* (ἵνα μὴ μεταβληθῇ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον) *αὐξάνεται κατὰ μίαν μονάδα τὸ ἀμέσως κατόπιν πρὸς ἀφαίρεσιν ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου· καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ περατωθῇ ἡ πρᾶξις· τὰ ὑπόλοιπα τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ζητουμένου ὑπολοίπου.*

Ἔστω π.χ. μειωτέος ὁ 32078 καὶ ἀφαιρετέος ὁ 5903. Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑπομένη:

$$\begin{array}{r} 32078 \\ 5903 \\ \hline 26175 \end{array}$$

Κατὰ μὲν τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ψηφίων τῶν ἁπλῶν μονάδων εὑρέθη ἐξαγόμενον ὁ 5 καὶ ἐγράφη ὑπὸ τὴν στήλην τῶν μονάδων τούτων, κατὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάδων εὑρέθη ὁ 7· διότι 0 ἀφαιρούμενον ἀπὸ 7 ἀφίνει ὑπόλοιπον αὐτὸ τὸ 7. Κατὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν ψηφίων τῶν ἑκατοντάδων προσετέθη εἰς τὸ ψηφίον 0 τοῦ μειωτέου ὁ 10 καὶ οὗτος ἀφῃρέθη ὁ 9 ἀπὸ 10 ἀφήσας ὑπόλοιπον 1. Ἐπειδὴ δὲ προσετέθησαν 10 ἑκατοντάδες ἤτοι μία χιλιὰς εἰς τὸν μειωτέον, ὅπως μὴ μεταβληθῇ τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον προσετέθη 1 χιλιὰς εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ οὕτω τὸ ψηφίον 5 τῶν χιλιάδων αὐτοῦ ἐγένετο 6. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ 6 δὲν ἀφῃρεῖτο ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου 2 τοῦ μειωτέου προσετέθη 10 εἰς τὸ 2 καὶ ἐγένετο 12, ἐξ οὗ ἀφαιρεθὲν εἶτα τὸ 6 ἀφῆκε ὑπόλοιπον 6. Τελευταῖον ἡ προστεθεῖσα μία δεκὰς χιλιάδων εἰς τὸν μειωτέον ἀφῃρέθη ἀπὸ τοῦ ψηφίου 3 τῶν δεκάδων χιλιάδων αὐτοῦ καὶ ἀφῆκεν ὑπόλοιπον 2.

Ὁ δὲ ἀριθμὸς 26175, οὗ τὰ ψηφία εὑρέθησαν διὰ τῶν μερικῶν τούτων ἀφαιρέσεων, εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 32078 καὶ τοῦ 5903· διότι, ὡς εὑρέθη, περιέχει πάσας τὰς μονάδας, καθ' ἃς ὁ πρῶτος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου.

41. Ἐξελέγχεται δὲ ἡ ἀλήθεια τοῦ ἐξαγομένου τῆς ἀφαιρέσεως διὰ τῆς *βασάνου τῆς ἀφαιρέσεως*, καθ' ἣν ἵνα δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους προστίθεται ὁ ἀφαιρετέος εἰς τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον· ἐὰν ὡς ἄθροισμα εὑρεθῇ ὁ μειωτέος, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι κατὰ τὴν ἀφαίρεσιν οὐδὲν ἐγένετο λάθος.

*Σημείωσις*. Ἡ ἀφαίρεσις καλεῖται καὶ *ἀντίστροφος τῆς προσθέσεως πρᾶξις*· διότι, ἐν ᾧ ἐν τῇ προσθέσει αὐξάνεται ἀριθμός τις κατὰ τὰς μονάδας ἑτέρου (ἢ ἑτέρων ἀριθμῶν), ἐν τῇ ἀφαιρέσει ἐλαττοῦται ἀριθμός τις κατὰ τὰς μονάδας ἑτέρου ἀριθμοῦ. Τρέπεται δὲ ἡ ἀφαίρεσις δύο ἀριθμῶν εἰς πρόσθεσιν δύο ἀριθμῶν κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον: Ἐὰν ἀπὸ τῆς 1 ἀκολουθουμένης ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία δεδομένου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως ταύτης λέγεται *συμπλήρωμα* τοῦ δεδομένου ἀριθμοῦ. Εὑρίσκεται δε τὸ συμπλήρωμα ἀριθμοῦ τινος, καὶ ἐὰν ἀφαιρῶνται πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ 9 πλὴν τοῦ τῆς κατωτάτης τάξεως σημαντικοῦ ψηφίου, ὅπερ ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 10· ὡς 10000—3580=6420. Ὁ ἀριθμὸς 6420 λέγεται συμπλήρωμα τοῦ 3580.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, προστιθεμένου εἰς ἀμφοτέρους τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, δύναται νὰ προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τὸ συμπλήρωμα τοῦ ἀφαιρετέου. Ἀλλ' ὁ ἀφαιρετέος ἀριθμὸς αὐξανόμενος κατὰ τὸ συμπλήρωμα αὐτοῦ παρέχει τὴν 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία αὐτοῦ. Ἡ ἀφαίρεσις ἄρα ἀνάγεται εἰς τὴν παράλειψιν τῆς μονάδος ταύτης (ἧς ἡ τάξις ἀμέσως ἀνωτέρα τῆς τῶν ψηφίων τοῦ ἀφαιρετέου) ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ συμπληρώματος τοῦ ἀφαιρετέου.

Ἔστω π.χ. μειωτέος ὁ 67385 καὶ ἀφαιρετέος ὁ 3691. Τὸ συμπλήρωμα τοῦ 3691 εἶναι ὁ 6309· τὸ δὲ ἄθροισμα τοῦ 67385 καὶ τοῦ 6309 εἶναι ὁ 73694 ἐλαττουμένου δὲ τοῦ ψηφίου 7 τῶν δεκάδων χιλιάδων τοῦ ἀριθμοῦ 73694 κατὰ 1, εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 63694, ὅπερ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀριθμῶν 67385 καὶ 3691. Τοῦτο δὲ καταφαίνεται καὶ ἐκ τῆς ἑπομένης διατάξεως τῶν πράξεων·

$$\begin{array}{r} 67385 \\ 3691 \\ \hline 63694 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 67385 \\ \bar{1}6309 \\ \hline 63694 \end{array}$$

ὅπου $\bar{1}$ δηλοῖ ἀφαίρεσιν τῆς μονάδος 1.

*Παρατήρησις*. Τῶν ὁμοειδῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν ἡ διαφορὰ εἶναι ὁμοειδὴς τῷ μειωτέῳ καὶ ἀφαιρετέῳ· οἷον 15 δραχμαὶ ἀφαιρούμεναι ἀπὸ 25 δρ. δίδουσιν ὑπόλοιπον 10 δρ.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσα ψηφία δύναται νὰ ἔχῃ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ;

2) Πότε ἡ ἀφαίρεσις δύο ἀριθμῶν πολυψηφίων γίνεται ἀδιαφόρως ἀρχομένης τῆς πράξεως ἀπὸ οἱασδήποτε κατακορύφου στήλης ;

3) Πόσον μεταβάλλεται ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν αὐξανομένων ἢ ἐλαττου-

μένων αὐτῶν κατὰ 1,2,3, ... μονάδας τάξεώς τινος; καὶ πότε ἡ διαφορὰ διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται ... κ.λ;

4) Δεῖξαι, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο δεδομένων ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἐλαττουμένων ἀμφοτέρων κατὰ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

5) Πότε ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴση, μείζων ἢ ἐλάσσων τοῦ ἀφαιρετέου;

6) Πῶς εὑρίσκεται ὁ ἀφαιρετέος ἀφαιρέσεώς τινος ἐκ τοῦ μειωτέου καὶ τοῦ ὑπολοίπου;

7) Πῶς εὑρίσκεται ὁ μειωτέος ἢ ὁ ἀφαιρετέος ἀφαιρέσεώς τινος ἐκ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν;

8) Δοθέντων δύο ἀριθμῶν καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, τίς ἀριθμὸς προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον καὶ τίς ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ μειωτέου καθιστᾷ τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ἴσους, τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν μένοντος τοῦ αὐτοῦ:

9) Ποῖον τὸ ἐξαγόμενον ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ διπλασίου τοῦ μείζονος αὐτῶν καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν;

10) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ 42· τίς ὁ μείζων αὐτῶν;

11) Τίνες οἱ ἀριθμοὶ $\chi$, $\psi$, $\omega$, ἐὰν $\chi+\lambda=\alpha$, $\psi-\mu=\beta$ $\nu-\omega=\gamma$.

√ 12) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἡ προστιθέμενος εἰς δοθέντα ἀριθμὸν παρέχει ἐξαγόμενον ἔχον πάντα τὰ ψηφία αὐτοῦ ὅμοια.

13) Πότε δύνανται νὰ ἀφαιρεθῶσιν οἱ συγκεκριμένοι ἢ οἱ ἀφῃρημένοι ἀριθμοί;

14) Ἔμπορός τις ἔλαβεν ἐκ τῆς πωλήσεως πράγματός τινος 354 δρ. διὰ τὸ ὁποῖον ἐδαπάνησε πρὸς μεταφορὰν 28 δρ. καὶ διὰ φόρον 14 δρ. ἐκέρδησε δὲ ἐκ τῆς πωλήσεως 53 δρ. Πόση ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τοῦ πράγματος τούτου; (Ἀπ. 259).

15) Ἔν τινι αἰθούσῃ ἦσαν ἄνδρες καὶ γυναῖκες τὸ ὅλον 27, ἦσαν δὲ 3 ἄνδρες πλείονες τῶν γυναικῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

(Ἀπ. 12,15).

16) Οἰκογένειά τις ἀπετελεῖτο πρὸ τριῶν ἐτῶν ἐκ τοῦ πατρός, τῆς μητρὸς καὶ μιᾶς θυγατρός, αἱ δὲ ἡλικίαι τῶν τριῶν ὁμοῦ ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν 103· ἐφέτος ἐνυμφεύθη ἡ θυγάτηρ καὶ αἱ ἡλικίαι τοῦ πατρὸς καὶ τῆς μητρὸς αὐτῆς ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 85. Πόσον ἐτῶν ἦτο ἡ θυγάτηρ;

(Ἀπ. 21).

17) Πόσα ἔτη παρῆλθον ἀπὸ τῆς ἐν Σαλαμῖνι ναυμαχίας μέχρι τῆς ἁλώσεως τῆς Κωνσταντινουπόλεως καὶ μέχρι σήμερον καὶ πόσα ἔτη παρῆλθον

ἀπὸ τῆς ἁλώσεως τῆς Κων]πόλεως μέχρι τῆς ἑλληνικῆς ἐπαναστάσεως καὶ μέχρι σήμερον;

18) Ἀνήρ τις ἐρωτηθεὶς κατὰ ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ἡ σύζυγος αὐτοῦ πρὸ α ἐτῶν ἀπεκρίθη: ὅταν ἐνυμφεύθην, ἐγὼ μὲν ἤμην β ἐτῶν, αὐτὴ δὲ γ, νῦν δὲ ἡ ἡλικία μου εἶναι δ ἐτῶν. Κατὰ ποίαν ἡλικίαν ἀπέθανεν ἡ σύζυγος;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

### Περὶ πολλαπλασιασμοῦ.

42. *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἀριθμός τις ἐπαναλαμβάνεται ὡς προσθετέος πολλάκις καὶ εὑρίσκεται ἐξ αὐτοῦ ἄλλος ἀριθμός· ἢ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις εἶναι ἄθροισμα τοσούτων ἀριθμῶν ἴσων τῷ πρώτῳ, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ δευτέρου.*

Ὁ πρῶτος τῶν διδομένων ἀριθμῶν λέγεται *πολλαπλασιαστέος*, ὁ δεύτερος *πολλαπλασιαστὴς* καὶ ἀμφότεροι *παράγοντες*. Ὁ δὲ ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ προκύπτων ἀριθμός, λέγεται *γινόμενον*.

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 8 καὶ πολλασιαστὴς ὁ 3. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ γινομένου τῶν δύο τούτων παραγόντων λαμβάνεται ὁ 8 ὡς προσθετέος τρίς, ἤτοι τοσάκις ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ 3, ὅτε εὑρίσκεται $8+8+8=24$ ἢ συντόμως ἀπὸ μνήμης 8 ἐπὶ 3 ἴσον 24. Ὁ 24 εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ 8 ἐπὶ 3.

Κατὰ ταῦτα ὁ *πολλαπλασιασμὸς εἶναι σύντομος πρόσθεσις ἀριθμοῦ τινος εἰς ἑαυτὸν ἅπαξ ἢ πολλάκις.*

Σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι τὸ . γραφόμενον μεταξὺ τῶν ὁριζοντίως πολλαπλασιαζομένων ἀριθμῶν καὶ ἀπαγγελλόμενον *ἐπί* ὡς

$$8 . 3=24, \quad 9 . 9=81, \quad α . β=γ.$$

43. *Γινόμενον πολλῶν δεδομένων ἀριθμῶν* λέγεται τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένων ἀλλεπαλλήλως τῶν ἀριθμῶν, ὡς

$$5.3.7.4, \quad α. β. γ. δ. ε.$$

44. Ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε μονοψηφίων ἀριθμῶν γίνεται καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον Πυθαγόρειον πίνακα, ἐν ᾧ εὑρίσκονται τὰ γινόμενα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν ἀνὰ δύο καὶ τὰ ὁποῖα ἀπομνημονεύονται εὐκόλως.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Ἡ πρώτη ὁριζοντία ἢ κατακόρυφος σειρὰ τοῦ πίνακος τούτου περιέχει τὰ ἐννέα σημαντικὰ ψηφία ἀπὸ 1 μέχρι 9. Ἡ δευτέρα περιέχει τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 2, ἡ τρίτη τὰ γινόμενα αὐτῶν ἐπὶ 3, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ ἐν τῷ πίνακι τούτῳ τοῦ γινομένου δύο τυχόντων μονοψηφίων ἀριθμῶν, ὡς τοῦ 6 ἐπὶ 8, ζητεῖται ὁ ἀριθμός, ἐν ᾧ διασταυροῦται ἡ ἕκτη κατακόρυφος καὶ ἡ ὀγδόη ὁριζοντία σειρά, ἢ ἡ ὀγδόη κατακόρυφος καὶ ἡ ἕκτη ὁριζοντία σειρά, αἱ ἀρχόμεναι ἐκ τῶν ἀριθμῶν 6 καὶ 8· εἶναι δὲ ὁ ἀριθμὸς οὗτος ὁ 48.

*Σημείωσις 1.* Τὸ γινόμενον τῆς μονάδος ἐφ' ἑαυτὴν εἶναι ἡ μονάς, ἤτοι $1.1=1$ διότι ἡ μονὰς ἐπαναλαμβάνεται ἅπαξ ὡς προσθετέα. Τὸ γινόμενον τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν μονάδα εἶναι αὐτὸς ὁ ἀριθμὸς π. χ. $5.1=5$· διότι ὁ 5 ἐπαναλαμβάνεται ἅπαξ ὡς προσθετέος. Τὸ δὲ γινόμενον τῆς μονάδος ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν εἶναι πάλιν αὐτὸς ὁ ἀριθμός, π.χ. $1.5.=5$, διότι $1.5=1+1+1+1+1=5$.

*Σημείωσις 2.* Τὸ γινόμενον τοῦ 0 ἐπὶ τὸ 0 εἶναι πάλιν 0· διότι καὶ ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι 0. Τὸ δὲ *γινόμενον τοῦ 0 ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμὸν* εἶναι πάλιν 0, π. χ. $0.3=0$· διότι εἶναι $0.3=0+0+0=0$. Καὶ $3.0=0$· διότι ὁ πολλαπλασιαστὴς 0 δὲν παράγεται ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς μονάδος 1, ἑπομένως οὐδὲ τὸ γινόμενον 0 παράγεται ἐκ τῆς ἐπαναλήψεως τοῦ πολλαπλασιαστέου 3 ὡς προσθετέου. Ἐντεῦθεν ἕπεται, *ὅτι τὸ 0 μηδενίζει πᾶν γινόμενον, οὗτινος εἶναι παράγων.*

*Παρατήρησις.* Τὸ γινόμενον δύο συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἶναι *ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ.* Ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται πάντοτε ὡς ἀφηρημένος ἀριθμός· διότι σημαίνει μόνον, ποσάκις ὁ πολλαπλασιαστέος λαμβάνεται ὡς προσθετέος.

45. Αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἶναι κυρίως αἱ ἑπόμεναι δύο :

*1) Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν πολλαπλασιάζωνται οὗτοι,* ὡς α. β. γ=β. γ. α=γ. α. β. (νόμος ἀντιμεταθέσεως).

*2) Ἄθροισμα ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, ἐὰν ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος τούτου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσι πάντα τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα.* ὡς

$(\alpha+\beta+\gamma)\,\delta.=\alpha.\,\delta+\beta.\delta+\gamma.\,\delta.$ (νόμος ἐπιμεριστικός).

Αἱ ἰδιότητες αὗται συμπληροῦνται καὶ ἀποδεικνύονται διὰ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων.

## Θεωρήματα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

### Θεώρημα.

46. *Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν μεταβληθῇ ἡ τάξις τῶν παραγόντων, ἤτοι ἐὰν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστὴς ὁ πολλαπλασιαστέος· καὶ τἀνάπαλιν,*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 5 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3 λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων παραγόντων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ληφθῇ πολλαπλασιαστέος ὁ 3 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 5, ἤτοι 5.3=3.5.

*Ἀπόδειξις.* Αἱ μονάδες ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ὁ 5 γράφονται κατὰ σειρὰν ὁριζοντίαν τρίς, ὡς ἕπεται

1 1 1 1 1
1 1 1 1 1
1 1 1 1 1

Πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὸ πλῆθος τῶν οὕτω γεγραμμένων μονάδων, προστίθενται αὗται ἢ ὁριζοντίως ἢ κατακορύφως, ὅτε εὑρίσκεται ἢ 5+5+5=5.3 ἢ 3+3+3+3+3=3.5.

Ἐπειδὴ δὲ ἀμφότερα τὰ γινόμενα 5.3 καὶ 3.5 προκύπτουσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ πλήθους μονάδων, ἕπεται 5.3=3.5. Καὶ γενικῶς α. β=β. α.

### Θεώρημα.

47. *Ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἀλλεπαλλήλως ἐπὶ δύο ἄλλους ἀριθμούς, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἀμέσως ἐπὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5, ὅτι πρόκειται νὰ πολλαπλασιασθῇ ἀλλεπαλλως ἐπὶ τὸν 3 καὶ τὸν 4, ἤτοι πρῶτον ἐπὶ τὸν 3 καὶ εἶτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν 4· λέγω, ὅτι τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται γινόμενον, καὶ ἐὰν ὁ 5 πολλαπλασιασθῇ ἀμέσως ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν 3 καὶ 4, ἤτοι $5.3.4=5.12$.

*Ἀπόδειξις*. Ἐὰν τὸ γινόμενον 5.3, ἤτοι τὸ $5+5+5$, ληφθῇ τετράκις ὡς προσθετέος, εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα

$$(5+5+5)+(5+5+5)+(5+5+5)+(5+5+5)$$

ἢ
$$5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5+5$$

ὅπερ ἰσοῦται τῷ 5.12 καὶ ἑπομένως $5.3.4=5.12$

Καὶ γενικῶς· $α.β.γ=α.(β.γ)$, ὅπου διὰ τῆς παρενθέσεως (β.γ) δηλοῦται εὑρεθὲν τὸ γινόμενον τῶν παραγόντων β καὶ γ.

## Θεώρημα.

48. *Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντιμετατεθῶσι δύο ἐφεξῆς παράγοντες αὐτοῦ.*

Ἔστω π. χ. γινόμενον πολλῶν παραγόντων τὸ 5.7.3.8.4· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντιμετατεθῶσιν οἱ δύο ἐφεξῆς παράγοντες 3 καὶ 8, ἤτοι

$$5.7.3.8.4=5.7.8.3.4$$

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον 5.7.3.8.4 εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 5 ἐπὶ 7, ὅτε εὑρίσκεται τὸ γινόμενον 35, εἶτα ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 35 ἐπὶ 8 καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 3 καὶ τὸ οὕτως εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 4. Ἀλλ' ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ 35 ἀλλεπαλλήλωςἐπὶ 3 καὶ ἐπὶ 8, δύναται νὰ πολλαπλασιασθῇ καὶ ἀμέσως ἐπὶ τὸ γινόμενον 24 τοῦ 3.8 ἢ ἐπὶ τὸ ἴσον αὐτῷ 8.3 καὶ εἶτα τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ 4. Ὥστε

$$5.7.3.8.4=5.7.8.3.4.$$

Καὶ γενικῶς

$$α.β.γ.δ.ε=α.β.δ.γ.ε.$$

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου συνάγεται ὡς *πόρισμα* ἡ πρώτη θεμελιώδης ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, καθ' ἣν *τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων μένει τὸ αὐτό, καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν ληφθῶσιν οἱ παράγοντες αὐτοῦ*. Διότι δύνανται νὰ ἀντιμετατεθῶσιν δύο οἱοιδήποτε παράγοντες τοῦ γινομένου διὰ διαδοχικῆς ἀντιμεταθέσεως αὐτῶν μετὰ τοῦ προηγουμένου ἢ τοῦ ἑπομένου παράγοντος, μέχρις ὅτου τεθῶσι καθ' οἱανδήποτε ζητουμένην τάξιν ἐν τῷ γινομένῳ· ὡς

$$2.5.4.7.9=2.4.5.9.7=4.2.9.5.7, \text{ κλ.}$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta=\beta.\ \alpha.\ \delta.\ \gamma.=\beta.\ \delta.\ \alpha\ \gamma, \text{ κλ.}$$

## Θεώρημα.

**49.** *Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσιν ὅσοι δήποτε παράγοντες διὰ τοῦ εὑρεθέντος γινομένου αὐτῶν.*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον 6.4.7.12.3· λέγω, ὅτι οἱ παράγοντες 4,7,3 δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν (4.7.3), ἤτοι

$$6.4.7.12.3=6.(4.7.3).12.$$

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον 6.4.7.12·3 ἰσοῦται καὶ τῷ γινομένῳ 4.7.3.6.12, ἐν ᾧ οἱ παράγοντες 4,7,3 ἐτέθησαν πρῶτοι. Ἐὰν δὲ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον αὐτῶν (4.7.3), ἕπεται (4.7.3).6.13, ὅθεν καὶ 6.(4.7.3).12.

Ὥστε $\quad 6.4\ 7.12.3=6(4.7.3).12.$

Καὶ γενικῶς· $\quad \alpha.\beta.\gamma.\delta.\varepsilon=\alpha.(\beta.\delta).\gamma.\varepsilon.$

## Θεώρημα.

**50.** *Ἐν γινομένῳ πολλῶν παραγόντων δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ οἱοσδήποτε παράγων δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτὸν γινόμενον.*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον 5.7.24.9· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 5.7.2.3.4.9, ἀντικατασταθέντος τοῦ 24 διὰ τοῦ γινομένου 2.3.4.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον 5.7.24.9 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 24.5.7.9, ὅπερ εὑρίσκεται καὶ ἐκ τοῦ γινομένου 2.3.4.5.7.9, ἐν ᾧ ἐγένετο ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν τριῶν πρώτων παραγόντων 2,3,4 Εἶναι δὲ

$$2.3.4.5.7\ .9=5.7.2.3.4.9.$$

Ὥστε

$$5.7.24.9=5.7.2.3.4.9$$

Καὶ γενικῶς

$$\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta=\alpha.\ \beta'.\ \beta''.\ \beta'''.\ \gamma.\ \delta,$$

ὅπου

$$\beta=\beta'.\ \beta''.\ \beta'''.$$

Θεώρημα.

51. *Γινόμενον ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ εἷς μόνον παράγων τοῦ γινομένου ἐπὶ τὸν ἀριθμόν.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος τὸ γινόμενον 3.5.7 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 4· λέγω, ὅτι $(3.5.7).4=3.(5.4).7$.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον $(3.5.7).4$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 3.5.7.4 ἢ τῷ γινομένῳ 3.5 4.7 ἢ τῷ $3.(5.4).7$. Ὥστε

$$(3.5.7).4=3,(5.4).7.$$

Καὶ γενικῶς·

$$(\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta).\ \varepsilon=\alpha.\ \beta.\ \gamma,\ (\delta.\ \varepsilon).$$

Τὸ δὲ γινόμενον $\alpha.\ (\beta.\ \gamma.\ \delta)$ ἰσοῦται τῷ $(\beta.\ \gamma.\ \delta).\ \alpha$.

Θεώρημα.

52. *Γινόμενον παραγόντων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον γινόμενον, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀλλεπαλλήλως πάντες οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν γινομένων.*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον 2.5.7 καὶ τὸ γινόμενον 3.12· λέγω ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων γινομένων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ (3.12.) ἢ τῷ γινομένῳ 2.5.7.3.12.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον $(2.5.7).(3.12)$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 2.5.7.2.5.7.3.12. Ὥστε

$$(2.5.7).(3.12)=2.5.7.3.12.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha.\ \beta).\ (\gamma.\ \delta.\ \varepsilon)=\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta.\ \varepsilon.$$

Θεώρημα.

53. *Ἄθροισμα ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἂν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ προστεθῶσιν εἶτα τὰ μερικὰ γινόμενα.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος τὸ ἄθροισμα $2+5+16$ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3· λέγω, ὅτι·

$$(2+5+16).3=2.3+5.3+16.3$$

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον $(2+5+16).3$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$(2+5+16)+(2+5+16)+(2+5+16)$ ἢ τῷ ἀθροίσματι $2+5+16+2+5+16+2+5+16$, ἐξ οὗ $2.3+5.3+16.3$. Ὥστε

$$2+5+16).3=2.5+5.3+16.3$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha+\beta+\gamma).\,\delta=\alpha.\,\delta+\beta.\,\delta+\gamma.\,\delta.$$

Τὸ δὲ γινόμενον $\alpha.\,(\beta+\gamma+\delta)$ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ $(\beta+\gamma+\delta).\,\alpha$.

## Θεώρημα.

54. *Ἄθροισμα ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἄθροισμα ἀριθμῶν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος προσθετέος τοῦ ἑτέρου ἀθροίσματος ἐπὶ ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑτέρου ἀθροίσματος καὶ προστεθῶσιν εἶτα τὰ μερικὰ γινόμενα·* (γενικὸς ἐπιμεριστικὸς νόμος).

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος τὸ ἄθροισμα $2+6+8$ καὶ πολλαπλασιαστὴς τὸ ἄθροισμα $3+5$· λέγω, ὅτι

$$(2+6+8).(3+5)=2.3+6.3+8.3+2.5+6.5+8.5$$

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον $(2+6+8).(3+5)$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $2.(3+5)+6.(3+5)+8.(3+5)$.

Τοῦτο δὲ ἰσοῦται τῷ $2.3+2.5+6.3+6.5+8.3+8.5$. Ὥστε

$$(2+6+8).(3+5)=2.3+2.5+6.3+6.5+8.3+8.5.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha+\beta).\,(\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha.\,\gamma+\beta.\,\gamma+\alpha.\,\delta+\beta.\,\delta+\alpha.\,\varepsilon+\beta.\,\varepsilon.$$

## Θεώρημα.

55. *Διαφορὰ δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἀριθμόν, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ μειωτέος καὶ ἀφαιρετέος τῆς διαφορᾶς ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν καὶ εἶτα ἀπὸ τοῦ πρώτου γινομένου ἀφαιρεθῇ τὸ δεύτερον.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ἡ διαφορὰ $8-5$ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3· λέγω ὅτι $(8-5).3=8.3-5.3$.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ γινόμενον $(8-5).3$ ἰσοῦται τῷ ἑπομένῳ ἀθροίσματι $(8-5)+(8-5)+(8-5)$, ἐν ᾧ ὁ μὲν 8 προστίθεται τρίς, ὁ δὲ 5 ἀφαιρεῖται τρίς, ἤτοι ἀπὸ τοῦ γινομένου 8.3 ἀφαιρεῖται τὸ γινόμενον 5.3. Ὥστε

$$(8-5)\,3=8\,3-5.3.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha-\beta).\,\gamma=\alpha.\,\gamma-\beta.\,\gamma.$$

Τὸ δὲ γινόμενον α. (β—γ) ἰσοῦται τῷ γινομένῳ (β—γ). α, ἀντιμετατιθεμένων τῶν δύο παραγόντων (β—γ) καὶ α.

## Θεώρημα.

56. *Ἀριθμός τις λήγων εἰς μηδενικὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἄνευ τῶν μηδενικῶν καὶ εἶτα γραφῶσι τὰ παραλειφθέντα μηδενικὰ μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ γινομένου κατὰ σειράν.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 42000 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 275· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 42 ἐπὶ 275 καὶ εἶτα γραφῶσι κατὰ σειρὰν τὰ τρία παραλειφθέντα μηδενικὰ τοῦ πολλαπλασιαστέου μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ γινομένου.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον 42000. 275 ἰσοῦται τῷ ἑπομένῳ ἀθροίσματι 42000+42000+...+42000, ἐν ᾧ ὁ 42 λαμβάνεται ὡς προσθετέος τοσάκις, ὅσαι αἱ μονάδες τοῦ 275. Ἀλλ' ἡ πρόσθεσις αὕτη γίνεται προτιθεμένων τῶν ἁπλῶν μονάδων, τῶν δεκάδων, τῶν ἑκατοντάδων, ὧν τὰ ἀθροίσματα εἶναι 0· εἶτα δὲ προστιθεμένων τῶν 42 χιλιάδων, ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται τῷ 42.275. Ὥστε 42000.275=42.275 ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ τῶν τριῶν παραλειφθέντων μηδενικῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου 42000.

*Πόρισμα α'. Ἀριθμός τις πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 10, 100, 1000, κλ. ἐὰν γραφῶσι κατὰ σειρὰν μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ, ἕν, δύο, τρία, κλ. μηδενικά.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 372 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 100· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον 372.100 ἰσοῦται τῷ 37200.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον 372.100 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 100.372, ὅπερ ἰσοῦται τῷ 1.372 ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ τῶν δύο μηδενικῶν τοῦ πολλαπλασιαστέου 100. Εἶναι δὲ 1.372=372· ὥστε 372.100=37200.

*Πόρισμα β'. Ἀριθμός τις λήγων εἰς μηδενικὰ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον ἀριθμὸν λήγοντα ὡσαύτως εἰς μηδενικά, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οὗτοι ἄνευ τῶν μηδενικῶν καὶ εἶτα γραφῶσι τὰ παραλειφθέντα μηδενικὰ μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ γινομένου κατὰ σειράν.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 523000 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 3600· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ὁ 523 ἐπὶ 36 καὶ εἶτα γραφῶσι κατὰ σειρὰν τὰ πέντε παραλειφθέντα μηδενικὰ τῶν δύο παραγόντων μετὰ τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ γινομένου.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον 523000.3600 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 523.3600 ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ *τριῶν* μηδενικῶν, τὸ δὲ γινόμενον 523.3600 ἰσοῦται τῷ 523.36 ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ *δύο* μηδενικῶν· ὥστε τὸ γινόμενον 523000.3600 ἰσοῦται τῷ γινομένῳ 523.36 ἀκολουθουμένῳ ὑπὸ πέντε μηδενικῶν.

57. *Πολυψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ μονοψήφιον ἀριθμόν, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἕκαστον ψηφίον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα τῶν διαφόρων τάξεων μονάδων.*

Διότι πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων· π. χ. ὁ 7038 εἶναι ἄθροισμα 8 ἁπλῶν μονάδων καὶ 3 δεκάδων καὶ 0 ἑκατοντάδων καὶ 7 χιλιάδων. Ὥστε τὸ γινόμενον εὑρίσκεται κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον.

58. *Πολυψήφιος ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ ἕτερον πολυψήφιον, ἐὰν ἕκαστον ψηφίον τοῦ πρώτου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἕκαστον ψηφίον τοῦ δευτέρου καὶ προστεθῶσι τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα τῶν διαφόρων τάξεων μονάδων.*

Διότι ἀμφότεροι οἱ πολυψήφιοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀθροίσματα μονάδων διαφόρων τάξεων. Ὥστε τὸ γινόμενον εὑρίσκεται κατὰ τὸ Θεώρημα τοῦ ἐδαφ. 54.

Συντομίας δὲ χάριν ὁ πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε πολυψηφίων ἀριθμῶν γίνεται κατὰ τὸν ἑπόμενον κανόνα.

## Κανὼν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

59. *Ἵνα πολλαπλασιασθῶσι δύο οἱοιδήποτε ἀριθμοί, γράφεται ὁ πολλαπλασιαστὴς ὑπὸ τὸν πολλαπλασιαστέον οὕτως, ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ ὑπ' αὐτοὺς ἄγεται εὐθεῖα γραμμή. Εἶτα πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος διαδοχικῶς ἐπὶ ἕκαστον σημαντικὸν ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς καὶ γράφεται ἕκαστον μερικὸν γινόμενον οὕτως, ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον αὐτοῦ νὰ εὑρίσκηται ἐν τῇ στήλῃ τοῦ πολλαπλασιάζοντος σημαντικοῦ ψηφίου· μετὰ ταῦτα ἄγεται εὐθεῖα γραμμὴ καὶ προστίθενται τὰ μερικὰ γινόμενα. Τὸ δὲ οὕτω προκῦπτον ἄθροισμα εἶναι τὸ ζητούμενον γινόμενον.*

Ἔστω π. χ. πολλαπλασιαστέος ὁ 7068 καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 503. Κατὰ τὸν κανόνα ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑξῆς:

$$\begin{array}{r} 7068 \\ 503 \\ \hline 21204 \\ 35340\phantom{0} \\ \hline 3555204 \end{array}$$

Ἐν πρώτοις ἐπολλαπλασιάσθη ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου 7068 ἐπὶ τὸν 3, ἤτοι ἐπὶ τὰς ἁπλᾶς μονάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 503, καὶ εὑρέθη γινόμενον ὁ ἀριθμὸς 21204, ληφθέντος ὑπ' ὄψιν, ὅτι 10 μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Εἶτα ἐπολλαπλασιάσθη ἕκαστον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστέου 7068 ἐπὶ τὸν 5, ἤτοι ἐπὶ τὰς ἑκατοντάδας τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, καὶ οὕτως εὑρέθη ὁ 35340 γραφεὶς ὑπὸ τὸν 21204 οὕτως ὥστε αἱ μονάδες τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, ληφθέντος καὶ ὑπ' ὄψιν, ὅτι 10 μονάδες τάξεώς τινος ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Τέλος προσετέθησαν τὰ δύο ταῦτα μερικὰ γινόμενα 21204 καὶ 35340 καὶ εὑρέθη τὸ ἄθροισμα 3555204, ὅπερ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν.

*Σημείωσις* 1. Τὸ γινόμενον τοῦ 7068 ἐπὶ τὰς 0 δεκάδας τοῦ 503 εἶναι 0 καὶ ἑπομένως δὲν ἐγράφη.

*Σημείωσις* 2. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ 503 ἦτο πολλαπλασιαστὴς ὁ 3, τὸ γινόμενον 21204 εἶναι τὸ τοῦ πολυψηφίου 7068 ἐπὶ τὸν μονοψήφιον 3.

## Περὶ δυνάμεων τῶν ἀριθμῶν.

60. *Δύναμις* ἀριθμοῦ τινος λέγεται τὸ γινόμενον δύο ἢ πολλῶν παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ τούτῳ, ὡς 5.5.5. Καὶ ἐὰν μὲν οἱ ἴσοι παράγοντες ἦναι δύο, τὸ γινόμενον λέγεται *δευτέρα δύναμις* ἢ *τετράγωνον*, ἐὰν δὲ τρεῖς *τρίτη δύναμις* ἢ *κύβος*, ἐὰν δὲ τέσσαρες *τετάρτη δύναμις*, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς. Γράφεται δὲ χάριν συντομίας ἀντὶ τοῦ 5.5.5 τὸ $5^3$ καὶ λέγεται ὁ μὲν 5 *βάσις* τῆς δυνάμεως, ὁ δὲ 3 ὁ δεικνύων τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων *ἐκθέτης*. Ὁμοίως τὸ τετράγωνον του 7 γράφεται $7^2$, ὁ κύβος τοῦ 12 γράφεται $12^3$,

ἡ δεκάτη δύναμις τοῦ 6 γράφεται $6^{10}$, καὶ γενικῶς ἡ μυοστὴ δύναμις τοῦ α γράφεται $α^{μ}$ καὶ ἀπαγγέλλεται α εἰς τὴν μ δύναμιν.

Οἱ ἀριθμοὶ 10, 100, 1000, 1 0000, κλ. εἶναι αἱ διαδοχικαὶ δυνάμεις τοῦ 10, ἤτοι $10^1$, $10^2$, $10^3$, $10^4$. κλ. τουτέστι 10 εἰς τὴν πρώτην δύναμιν, 10 εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν ἢ εἰς τὸ τετράγωνον, 10 εἰς τὸν κύβον ἢ εἰς τὴν τρίτην δύναμιν, 10 εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, κλ.

61. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα παραγόντων, αἱ ἑπόμεναι ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἐκ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

*1) Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐκθετῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. αἱ δύο δυνάμεις $8^2$ καὶ $8^5$· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον αὐτῶν $8^2.8^5$ ἰσοῦται τῷ $8^7$. Διότι $8^2=8.8$ καὶ $8^5=8.8.8.8.8$ καὶ ἑπομένως $8^2.8^5=8.8.8.8.8.8.8.=8^7$.

Καὶ γενικῶς $α^{μ}.α^{ν}=α^{μ+ν}$

*2) Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ὑψωθῶσι πάντες οἱ παράγοντες αὐτοῦ εἰς την δύναμιν ταύτην.*

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον 2.5.7.4· λέγω, ὅτι ἡ τρίτη δύναμις αὐτοῦ εἶναι $2^3.5^3.7^3.4^3$. Διότι $(2.5.7.4)^3=(2.5.7.4).(2.5.7.4).(2.5.7.4)=$

$$2.5.7.4.2.5.7.4.2.5.7.4=2^3.5^3\,7^3.4^3.$$

Καὶ γενικῶς $(α.β.γ)^{ν}=α^{ν}.β^{ν}.γ^{ν}$

*3) Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἑτέραν δύναμιν, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται.*

Ἔστω π. χ. $7^3$· λέγω, ὅτι $(7^3)^2=7^6$. Διότι $(7^3)^2=7^3.7^3=7^{3+3}=7^6$.

Καὶ γενικῶς· $(α^{μ})^{ν}=α^{μν}$.

*Σημείωσις. Πᾶσα δύναμις* (πλὴν τοῦ 0) *ἔχουσα ἐκθέτην* 0 *ἰσοῦται τῇ μονάδι* 1. Διοτι, ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι $α^{μ}.α^{ν}=α^{μ+ν}$ τεθῇ ἀντὶ τοῦ ν τὸ 0, εὑρίσκεται $α^{μ}.α^0=α^{μ+0}$ ἢ $α^{μ}.α^0=α^{μ}$. Ἀλλὰ καὶ $α^{μ}.1=α^{μ}$, ὥστε $α^0=1$.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

Ἡ δὲ *βάσανος* τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, δι' ἧς ἐλέγχεται τὸ ἀληθές, ἤτοι ὅτι τὸ ζητούμενον γινόμενον εὑρέθη ἄνευ λάθους, συνίσταται εἰς τὴν ἐπανάληψιν τῆς πράξεως, λαμβανομένου τοῦ πολλαπλασιαστοῦ ὡς πολλαπλασιαστέου ἢ τἀνάπαλιν. Ἐὰν καὶ πάλιν εὑρεθῇ τὸ αὐτὸ ἐξαγόμενον, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ πρᾶξις ἐγένετο ἄνευ λάθους.

1) Πόσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ γινομένου δύο οἱωνδήποτε παραγόντων;

2) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων αὐξανομένου ἐλαττουμένου κατὰ 1,2,3, κλ. τοῦ ἑτέρου παράγοντος αὐτοῦ;

3) Πόσον μεταβάλλεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων αὐξανομένων ἢ ἐλαττουμένων ἀμφοτέρων κατὰ 1,2.3, κλ.;

4) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

5) Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ πολλαπλασιασθέντος ἑκάστου ἐπὶ ὡρισμένην δύναμιν τοῦ 10, ἢ τοῦ 2.5.

6) Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ καὶ τοῦ ἀθροίσματος ἑκάστου αὐτῶν πολλαπλασιασθέντος (ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς) ἐπὶ 0, $(10^1—1)$, $(10^2—1)$, $(10^3—1)$, ...

7) Πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων $10^1$, $10^2$, $10^3$, ... ἠλαττουμένον κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων $10^0$, $10^1$, $10^2$, ..., ὧν ἑκάστη πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον συμπλήρωμα ἑκάστου τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς· (τὰ συμπληρώματα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν πρὸς τὸ 10 εἶναι οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοί, οἵτινες προστιθέμενοι εἰς τοὺς πρώτους δίδουσιν ἄθροισμα τὸ 10· οἷον συμπλήρωμα τοῦ 7 εἶναι ὁ 3, καὶ τἀνάπαλιν).

8) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἴσου τῷ μικροτέρῳ παράγοντι τοῦ γινομένου. (Ἡ ἀπόδειξις καταφαίνεται ἐκ τῆς ἀποδείξεως τοῦ θεωρήματος τοῦ ἐδαφ. 46).

9) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 7685 ὀκάδας σίτου πρὸς 23 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Ἐξ αὐτῶν δὲ ἐπώλησε 5790 πρὸς 30 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, τὰς δὲ ἐπιλοίπους πρὸς 27. Πόσον ἐκέρδησεν ; (Ἀπ. 48110 λεπτά).

10) Ὑπάλληλός τις λαμβάνει μισθὸν 250 δραχμὰς κατὰ μῆνα. Ἐξ αὐτῶν δαπανᾷ κατὰ μῆνα διὰ τὸ ἐνοίκιον 50 δρ. καὶ δι' ὑπηρεσίαν 26 δρ. Πόσαι δρ. ὑπολείπονται αὐτῷ κατ' ἔτος ; (Ἀπ. 2088 δρ.).

11) Οἰκογένειά τις συνέκειτο ἐξ α ἀνθρώπων καὶ αἱ ἡλικίαι αὐτῶν ἀπετέλουν ποτὲ τὸν ἀριθμὸν β. Ὁ πατὴρ ἀπέθανε μετὰ γ ἔτη καὶ αἱ ἡλικίαι τῶν λοιπῶν ἀπετέλουν τὸν ἀριθμὸν δ. Τίς ἡ ἡλικία τοῦ πατρός ;

12) Ἀτμάμαξά τις διανύουσα α μέτρα εἰς τὸ δευτερόλεπτον φθάνει ἀπὸ πόλεώς τινος εἰς ἑτέραν εἰς β ὥρας. Πόσα μέτρα ἀπέχουσιν αἱ δύο πόλεις ἀπ' ἀλλήλων ; 21-3-14

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

### Περὶ διαιρέσεως.

62. *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται, ποσάκις ἀριθμός τις περιέχεται εἰς ἕτερον ἀριθμόν· ἢ*

*Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς μερίζεται ἀριθμός τις εἰς ἴσα μέρη.*

Κατ' ἀμφοτέρους τοὺς ὁρισμοὺς τούτους ἐν τῇ διαιρέσει δίδονται δύο ἀριθμοί, ὧν ὁ μὲν μείζων λέγεται *διαιρετέος*, ὁ δὲ ἐλάσσων *διαιρέτης*, τὸ δὲ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου διὰ τοῦ δευτέρου λέγεται *πηλίκον*. π. χ. ἐν τῇ διαιρέσει τοῦ 12 διὰ τοῦ 4 διαιρετέος εἶναι ὁ 12, διαιρέτης ὁ 4 καὶ πηλίκον ὁ 3, ὅστις δεικνύει, ὅτι ὁ 4 περιέχεται τρὶς εἰς τὸν 12. Ὥστε $12=4.3$.

Ἐν δὲ τῇ διαιρέσει τοῦ 25 διὰ τοῦ 7 διαιρετέος εἶναι ὁ 25 καὶ διαιρέτης ὁ 7· τὸ δὲ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ἀριθμὸς 3, ὅστις δεικνύει, ποσάκις ὁ 7 περιέχεται εἰς τὸν 25, ἢ ποσάκις ὁ 7 δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ 25· καὶ εὑρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης. Κατὰ δὲ τὴν ἀφαίρεσιν ταύτην μένει καὶ ὑπόλοιπον ὁ 4, ὅστις καλεῖται *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως τοῦ 25 διὰ τοῦ 7. Ὥστε $25=7.3+4$. Καὶ γενικῶς $\alpha=\beta.\gamma+\delta$, ὅπου $\alpha$ ὁ διαιρετέος, $\beta$ ὁ διαιρέτης, $\gamma$ τὸ πηλίκον καὶ $\delta$ τὸ ὑπόλοιπον.

63. Κατὰ ταῦτα *ἡ διαίρεσις εἶναι σύντομος ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ τινος ἀπὸ ἑτέρου τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατόν, καὶ ἐπομένως ὁ διαιρετέος εἶναι ἢ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἢ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ.* Ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει ἡ διαίρεσις λέγεται *τελεία*, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ *ἀτελὴς* ὡς ἀφίνουσα καὶ ὑπόλοιπον. (Γίνεται δὲ πάντοτε ἀκριβῶς ἢ τελεία ἡ διαίρεσις τῇ βοηθείᾳ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ὡς διαλαμβάνεται ἐν τοῖς ἑπομένοις).

Σύμβολον τῆς διαιρέσεως εἶναι τὸ : ἀπαγγελλόμενον *διὰ* καὶ γραφόμενον μεταξὺ τοῦ διαιρετέου καὶ τοῦ διαιρέτου ὡς $14:2$, $\alpha:\beta$.

64. *Ἐὰν ἴσοι ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἴσων ἀριθμῶν, καὶ τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα* (ἐὰν ὑπάρχωσιν) *εἶναι ἴσα.* Διότι, οἷον πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον δίδει ὁ ἕτερος τῶν ἴσων ἀριθμῶν διὰ τοῦ ἑτέρου τῶν ἴσων ἀριθμῶν, τὸ αὐτὸ πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον δίδει καὶ ὁ ἕτερος διὰ τοῦ ἑτέρου.

*Σημείωσις 1.* Ὅταν διαιρέτης ἦναι 1, τὸ πηλίκον εἶναι αὐτὸς ὁ διαιρετέος. Ὅταν δὲ ὁ διαιρετέος ἰσῶται τῷ διαιρέτῃ, τὸ πηλίκον εἶναι 1.

*Σημείωσις 2.* Ὅταν διαιρετέος ἦναι 0 καὶ διαιρέτης οἱοσδήποτε ἀριθμὸς *διάφορος* τοῦ 0, *τὸ πηλίκον εἶναι πάντοτε* 0 (ὡς καὶ τὸ ὑπόλοιπον)· διότι ἐν πάσῃ διαιρέσει ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ διαιρέτῃ ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ (ἐὰν ὑπάρχῃ). Ὅταν διαιρετέος ἦναι οἱοσδήποτε ἀριθμὸς διάφορος τοῦ 0 καὶ διαιρέτης 0, *ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος*· διότι ἀριθμὸς ἐπὶ 0 πολλαπλασιαζόμενος δίδει γινόμενον τὸ 0. Ὅταν δὲ καὶ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἦναι 0, *ἡ διαίρεσις εἶναι ἀόριστος*· διότι ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν διαιρέτην 0 δίδει γινόμενον τὸν διαιρετέον 0.

65. Αἱ δὲ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως ἐκφράζονται διὰ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων.

## Θεωρήματα τῆς διαιρέσεως.

### Θεώρημα.

66. *Πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ μὲν πηλίκον δὲν μεταβάλλεται, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 26 καὶ διαιρέτης ὁ 7. Τὸ μὲν πηλίκον εἶναι 3, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 5· λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ διαιρετέος 26 καὶ ὁ διαιρέτης 7 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 4, τὸ μὲν πηλίκον 3 μένει τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 5 πολλαπλασιάζεται ἐπὶ 4.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως εἶναι $26=7.3+5$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ἐπὶ τὸν 4, εὑρίσκεται $26.4=(7.4).3+5.4$· ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι πολλαπλασιασθέντος τοῦ 26 καὶ τοῦ 7 ἐπὶ 4 τὸ μὲν πηλίκον αὐτῶν 3 ἔμεινε τὸ αὐτό, τὸ δὲ ὑπόλοιπον 5 ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ 4.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha=\beta.\gamma+\delta$, εὑρίσκεται $\alpha.\varepsilon=(\beta.\varepsilon).\gamma+\delta.\varepsilon$, ὅπου ε δὲν εἶναι 0.

Ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις ἦναι τελεία, τὸ θεώρημα τοῦτο ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς· *Πολλαπλασιαζομένου διαιρετέου καὶ διαιρέτου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, τὸ πηλίκον δὲν μεταβάλλεται.* Ἡ δὲ ἀπόδειξις ὁμοία τῇ προηγουμένῃ.

### Θεώρημα.

67. *Γινόμενον πολλῶν παραγόντων διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ εἷς τῶν παραγόντων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου*· (τελεία διαίρεσις).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος τὸ γινόμενον 2.5.12.7 καὶ διαιρέτης ὁ 4· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ 2.5 12.7 διὰ τοῦ 4 εἶναι τὸ γινόμενον 2.5.3.7, διαιρεθέντος μόνον τοῦ 12 διὰ τοῦ 4.

*Ἀπόδειξις*. Ἐν πάσῃ τελείᾳ διαιρέσει ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ διαιρέτῃ ἐπὶ τὸ πηλίκον. Εἶναι δὲ $(2.5.3.7).4=2.5.12.7$. Ὥστε

$$(2.5.12.7) : 4=2.5.3.7.$$

Καὶ γενικῶς $(\alpha.\ \beta.\ \gamma) : \delta=\alpha.\ \varepsilon.\ \gamma$, ὅπου $\varepsilon=\beta : \delta$.

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἐξάγεται τὸ *πόρισμα*, ὅτι *γινόμενον διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἐὰν παραλειφθῇ ὁ παράγων οὗτος ἐκ τοῦ γινομένου*· οἷον

$$(5.7.16.4):7=5.16.4\cdot \text{ διότι } (5.16.4).7=5.7.16.4$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha.\ \beta.\ \gamma.\ \delta) : \gamma=\alpha.\ \beta.\ \delta.$$

## Θεώρημα.

68. *Ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου πολλῶν ἄλλων ἀριθμῶν, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ οὗτος ἀλλεπαλλήλως διὰ πάντων τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου*· (τελεία διαίρεσις).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 72 καὶ διαιρέτης τὸ γινόμενον 2.3.6· λέγω, ὅτι ἀντὶ νὰ διαιρεθῇ ἀμέσως ὁ 72 διὰ τοῦ γινομένου 36 τῶν παραγόντων 2,3,4, δύναται νὰ διαιρεθῇ πρῶτον διὰ τοῦ 2, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον 36 διὰ τοῦ 3, τὸ νέον πηλίκον 12 διὰ τοῦ 6.

*Ἀπόδειξις*. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῆς διαιρέσεως, ὁ 36 περιέχεται δὶς εἰς τὸν 72, ἤτοι $72=36.2$. Ἀλλ' εἶναι $36=2.3.6$ καὶ ἑπομένως $72=2.3.6.2$. Ἐὰν δὲ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διαιρεθῶσι πρῶτον διὰ 2, εἶτα διὰ 3 καὶ τέλος διὰ 6, προκύπτει $[(72:2):3]:6=2$, ἤτοι προκύπτει τὸ αὐτὸ πηλίκον 2, τὸ ὁποῖον προέκυψε, καὶ ὅτε διῃρέθη ὁ 72 ἀμέσως διὰ τοῦ 36.

Καὶ γενικῶς

$$M : (\alpha.\ \beta.\ \gamma)=[(M : \alpha) : \beta] : \gamma.$$

## Θεώρημα.

69. *Γινόμενον διαιρεῖται διὰ γινομένου, καὶ ἐὰν πᾶς παράγων τοῦ διαιρέτου διαιρέσῃ ἕνα μόνον παράγοντα τοῦ διαιρετέου* (ἐὰν διαιρῆται).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος τὸ γινόμενον 3.6.8.20 καὶ διαιρέτης τὸ γινόμενον 2.6.5· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι τὸ γινόμενον 3.4.4 τὸ εὑρισκόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως τοῦ 6 διὰ τοῦ 6 τοῦ 8 διὰ τοῦ 2 καὶ τοῦ 20 διὰ τοῦ 5.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον (3.4.4). (2.6.5) ἰσοῦται τῷ

$$3.4.4.2.6.5 \text{ ἢ τῷ } 3.6.8.20.$$

Ὥστε
$$(3.6.8.20) : (2.6.5)=3.4.4$$

## Θεώρημα.

70. *Ἄθροισμα ἀριθμῶν διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν προσθετέων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καὶ προστεθῶσι τὰ προκύπτοντα πηλίκα·* (διαίρεσις τελεία).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος τὸ ἄθροισμα $8+12+28$ καὶ διαιρέτης ὁ 4· λέγω, ὅτι τὸ πηλίκον τοῦ $8+12+28$ διὰ τοῦ 4 εἶναι τὸ ἄθροισμα $2+3+7$.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον $(2+3+7).4$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$2.4+3.4+7.4, \text{ ἢ τῷ } 8+12+28.$$

Ὥστε
$$(8+12+28) : 4=2+3+7.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta) : \varepsilon=(\alpha : \varepsilon)+(\beta : \varepsilon)+(\gamma : \varepsilon)+(\delta : \varepsilon).$$

## Θεώρημα.

71. *Διαφορὰ δύο ἀριθμῶν διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, καὶ ἐὰν διαιρεθῇ ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν ταύτων διὰ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ ἀπὸ τοῦ πηλίκου τοῦ μειωτέου ἀφαιρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ ἀφαιρετέου.* (τελεία διαίρεσις).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ἡ διαφορὰ 20—12 καὶ διαιρέτης ὁ 4· λέγω, ὅτι $(20-12) : 4=5-3$.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον $(5-3).4$ ἰσοῦται τῇ διαφορᾷ $5.4-3.4$, (ἰδὲ ἐδάφ. 55), ἢ τῇ διαφορᾷ 20—12.

Ὥστε

$$(20-12) : 4=5-3.$$

Καὶ γενικῶς

$$(\alpha-\beta) : \gamma=(\alpha : \gamma)-(\beta : \gamma).$$

## Θεώρημα.

72. *Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ*

*αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐκθετῶν·* (ἐν τῇ διαφορᾷ ταύτῃ μειωτέος μὲν εἶναι ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ τοῦ διαιρέτου).

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ $5^7$ καὶ διαιρέτης ὁ $5^3$· λέγω, ὅτι $5^7 : 5^3 = 5^4$.

*Ἀπόδειξις*. Διότι $5^4 . 5^3 = 5^7$.

Καὶ γενικῶς· $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$

*Σημείωσις*. Ἐὰν τεθῇ $\mu = \nu$, ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρου τύπου $1 = \alpha^0$. Ἐὰν δὲ τεθῇ $\mu = \nu + 1$, ἕπεται $\alpha^1 = \alpha$· οἷον $4^0 = 1, 5^1 = 5$.

73. *Πολυψήφιος ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' ἑτέρου, ὡς ἄθροισμα ἀριθμῶν δι' ἀριθμοῦ*. Διότι πᾶς πολυψήφιος ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα μονάδων διαφόρων τάξεων.

Πρὸς λεπτομερεστέραν δὲ καὶ ἀκριβεστέραν ἐξήγησιν τούτου καὶ πρὸς συντομωτέραν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου διακρίνονται δύο περιπτώσεις·

α') ὅταν τὸ πηλίκον ἦναι μονοψήφιον,

β') ὅταν τὸ πηλίκον ἦναι πολυψήφιον.

## Κανὼν τῆς διαιρέσεως ὅταν τὸ πηλίκον ἦναι μονοψήφιον.

74. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν, ὅταν ἦναι μονοψήφιον, λαμβάνεται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου καὶ δι' αὐτοῦ διαιρεῖται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρετέου* (ἂν ἦναι ἰσοψήφιοι) *ἢ τὸ πρῶτον διψήφιον τμῆμα αὐτοῦ* (ἂν ὁ διαιρετέος περιέχῃ ἓν ψηφίον πλέον τοῦ διαιρέτου)· *τὸ πηλίκον, ὅπερ οὕτως εὑρίσκεται, εἶναι ἴσον ἢ μεῖζον τοῦ ζητουμένου. Δοκιμάζεται δὲ τὸ εὑρεθὲν τοῦτο ψηφίον πολλαπλασιαζομένου τοῦ διαιρέτου ἐπ' αὐτό· καὶ ἂν μὲν τὸ προκῦπτον γινόμενον δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου, τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον· εἰ δὲ μή, δοκιμάζεται τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον, καὶ οὕτω καθεξῆς, ἕως οὗ εὑρεθῇ ἓν ψηφίον, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην νὰ περιέχηται εἰς τὸν διαιρετέον.*

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἕπεται :

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 36364 καὶ διαιρέτης ὁ 4543.

$$\begin{array}{r|l} 36364 & 4543 \\ \hline 20 & 8 \end{array}$$

Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον εἶναι μονοψήφιον· διότι τὸ δεκαπλάσιον τοῦ διαιρέτου δὲν περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον. Εὑρέθη δὲ τὸ πηλίκον διαιρεθεισῶν τῶν 36 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου διὰ τῶν 4 χιλιάδων τοῦ διαιρέτου, ὅτε προέκυψεν ἀπὸ μνήμης κατὰ τὸν Πυθαγόρειον πίνακα τὸ ψηφίον 9. ὅπερ ἕνεκα τοῦ κρατουμένου, τὸ ὁποῖον δίδει τὸ ψηφιον 5 τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 9, δὲν ἐγράφη, ἀλλ᾽ ἐγράφη τὸ ἀμέσως κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον 8· Ἐπολλαπλασιάσθη ὁ διαιρέτης ἐπὶ 8 καὶ ἀφῃρέθη τὸ προκῦψαν γινόμενον ἑκάστου ψηφίου τοῦ διαιρέτου ἐπὶ 8 ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τῆς αὐτῆς τάξεως τοῦ διαιρετέου. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ὑπόλοιπον 20 εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρέτου, ὁ ἀριθμὸς 8 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον.

## Κανὼν τῆς διαιρέσεως ὅταν τὸ πηλίκον ᾖναι πολυψήφιον.

75. *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ δι᾽ ἑτέρου, ὅταν ᾖναι πολυψήφιον, χωρίζονται ἀπ᾽ ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου τοσαῦτα ψηφία, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα τὸ πηλίκον ᾖναι μονοψήφιον* (πρὸς τοῦτο χωρίζονται ἢ τοσαῦτα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης ἢ ἓν ἐπὶ πλέον)· *διαιρεῖται τὸ οὕτω χωρισθὲν μέρος τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκεται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου. Πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ ψηφίον τοῦτο καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ διαιρεθέντος μέρους, μετὰ δὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ὑπολοίπου γράφεται τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ εὑρίσκεται τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου, ὅπερ γράφεται μετὰ τὸ εὑρεθὲν ψηφίον. Πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρέτης ἐπὶ τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ πηλίκου καὶ τὸ γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ διαιρεθέντος ἀριθμοῦ, μετὰ δὲ τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ ὑπολοίπου γράφεται τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον κατωτέρας τάξεως τοῦ διαιρετέου. Ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ γραφῶσι πάντα τὰ ψηφία τοῦ διαιρετέου μετὰ τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα. Ἐὰν δὲ εἰς μερικήν τινα διαίρεσιν δὲν διαιρῆται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διὰ τοῦ διαιρέτου, γράφεται 0 εἰς τὸ πηλίκον καὶ μετὰ τὸ ὑπόλοιπον τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον τοῦ διαιρετέου καὶ ἐξακολουθεῖται ἡ διαίρεσις.*

Συνήθως ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἕπεται :

Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 2313635 καὶ διαιρέτης ὁ 7843.

| | |
|---:|:---|
| 2313685 | 7843 |
| 74508 | 295 |
| 39215 | |
| 0 | |

Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον εἶναι τριψήφιον· διότι καὶ τὸ δεκαπλάσιον καὶ τὸ ἑκατονταπλάσιον τοῦ διαιρέτου περιέχεται εἰς τὸν διαιρετέον. Ἡ δὲ διαίρεσις ἀναλύεται εἰς μερικὰς ἄλλας διαιρέσεις, ὧν ἑκάστη ἔχει πηλίκον μονοψήφιον. Πρὸς τοῦτο δὲ λαμβάνονται ἀπ' ἀρχῆς τόσα μόνον ψηφία τοῦ διαιρετέου, ὅσα ἀπαιτοῦνται, ἵνα εὑρεθῇ πηλίκον μονοψήφιον. Τὰ τέσσαρα ἀπ' ἀρχῆς ψηφία τοῦ διαιρετέου ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν μικρότερον τοῦ διαιρέτου, τὸν 2313, διὰ τοῦτο χωρίζονται ἀπ' ἀρχῆς τοῦ διαιρετέου πέντε ψηφία καὶ ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς 23136 ὡς πρῶτος μερικὸς διαιρετέος. Ὁ 23 περιέχει τὸν 7 τρίς· γράφεται 2 ὡς πρῶτον ψηφίον τοῦ πηλίκου ἕνεκα τοῦ κρατουμένου, τὸ ὁποῖον δίδει ὁ 8 ἐπὶ 3· πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρέτης ἐπὶ 2 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀμέσως (ἀφαιρουμένου ἑκάστου ψηφίου τοῦ γινομένου τούτου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τῆς αὐτῆς τάξεως ψηφίου τοῦ διαιρετέου) ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 23136, μετὰ δὲ τὸ ψηφίον 0 τοῦ ὑπολοίπου γράφεται τὸ ἀμέσως ἑπόμενον ψηφίον 8 τοῦ διαιρετέου καὶ προκύπτει ὁ δεύτερος μερικὸς διαιρετέος 74508· ὁ 74 περιέχει τὸν 7 ἐννεάκις, πολλαπλασιάζεται δὲ ὁ διαιρέτης 7843 ἐπὶ 9 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀπὸ τοῦ 74508 καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 3921· μετὰ τὸ ψηφίον 1 τοῦ ὑπολοίπου τούτου γράφεται τὸ ἀμέσως ἀκόλουθον ψηφίον 5 τοῦ διαιρετέου καὶ ἀποτελεῖται ὁ τρίτος μερικὸς διαιρετέος 39215· ὁ 39 περιέχει τὸν 7 ἤτοι τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ διαιρέτου πεντάκις· πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρέτης ἐπὶ 5 καὶ τὸ προκῦπτον γινόμενον ἀφαιρεῖται ἀμέσως ἀπὸ τοῦ μερικοῦ διαιρετέου 39215 (ἀφαιρουμένου ἑκάστου ψηφίου τοῦ γινομένου τούτου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου ψηφίου τῆς αὐτῆς τάξεως) καὶ εὑρίσκεται ὑπόλοιπον 0. Ὁ δὲ ἀριθμὸς 295 εἶναι τὸ ζητούμενον πηλίκον, οὗ τὰ ψηφία ἐγράφησαν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο κατὰ τὴν τάξιν τῶν μερικῶν διαιρέσεων.—Ἡ διαίρεσις δύναται νὰ ἀφίνῃ καὶ ὑπόλοιπον διάφορον τοῦ 0.

*Σημείωσις* 1. Ὅταν τὸ δεύτερον ψηφίον τοῦ διαιρέτου ἦναι μεῖζον τοῦ 5, δύναται νὰ αὐξάνηται τὸ πρῶτον ψηφίον κατὰ μονάδα, πρὶν διαιρεθῇ δι' αὐτοῦ τὸ πρῶτον ἢ τὰ δύο πρῶτα ψηφία τοῦ διαιρετέου· διότι οὕτως εὑρίσκεται ταχύτερον τὸ πηλίκον. Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 6578 καὶ διαιρέτης ὁ 2981. Ἐπειδὴ ὁ διαιρέτης οὗτος ὀλίγον διαφέρει τοῦ 3000, διαιρεῖται τὸ πρῶτον ψηφίον 6 τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ 3 καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 2, τὸ δὲ ζητούμενον πηλίκον εἶναι τότε ἢ 2 ἢ μεῖζον τοῦ 2· διότι ὁ διαιρέτης 2981 εἶναι ἐλάσσων τοῦ 3000 καὶ ἑπομένως δύναται νὰ περιέχηται πλέον ἢ δίς εἰς τὸν διαιρετέον. Ἐνταῦθα τὸ πηλίκον εἶναι ὁ 2.

*Σημείωσις* 2. Ὅταν διαιρέτης ἦναι ἡ μονὰς 1 ἀκολουθουμένη ὑπὸ ἑνὸς ἢ πολλῶν μηδενικῶν, χωρίζονται ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικὰ ἔχει ὁ διαιρέτης· ὁ μὲν ὑπὸ τῶν λοιπῶν ψηφίων τοῦ διαιρετέου ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὸ πηλίκον, τὰ δὲ χωρισθέντα ψηφία εἶναι τὸ ὑπόλοιπον. Π. χ. ὁ 25987 διαιρούμενος διὰ 100 δίδει πηλίκον 259 καὶ ὑπόλοιπον 87. Διότι τὸ πηλίκον δεικνύει, ποσάκις ὁ 100 περιέχεται εἰς τὸν 25987, ἤτοι πόσας ἑκατοντάδας περιέχει οὗτος· φανερὸν δέ, ὅτι περιέχει 259 ἑκατοντάδας καὶ 87 ἁπλᾶς μονάδας.

*Σημείωσις 3.* Ὅταν ὁ διαιρέτης ἀκολουθῆται ὑπὸ μηδενικῶν, παραλείπονται αὐτά, χωρίζονται δὲ ἰσάριθμα ψηφία ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς τοῦ διαιρετέου. Τὸ πηλίκον τὸ οὕτως εὑρισκόμενον εἶναι τὸ ζητούμενον· τὸ δὲ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἐὰν μετὰ τὸ ὑπόλοιπον τῆς οὕτω συντομευθείσης διαιρέσεως γραφῶσι, καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν, τὰ χωρισθέντα ψηφία τοῦ διαιρετέου. Π. χ. ὁ 531987 διαιρούμενος διὰ 15000 δίδει πηλίκον τὸ τῆς διαιρέσεως τοῦ 531 διὰ 15, ἤτοι τὸ 35, καὶ ὑπόλοιπον τὸ 6, μεθ' ὃ γράφεται ὁ ἀριθμὸς 987, ἤτοι τὰ χωρισθέντα ψηφία καθ' ἣν ἔχουσι τάξιν ἐν τῷ διαιρετέῳ· τὸ ὑπόλοιπον ἄρα εἶναι ὁ 6987. Διότι πρὸς εὕρεσιν τοῦ πηλίκου ἀφαιροῦνται αἱ 15 χιλιάδες ἀπὸ τοῦ 531987 τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατόν. Ἐπειδὴ δὲ αἱ χιλιάδες δὲν ἀφαιροῦνται οὔτε ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων οὔτε ἀπὸ τῶν δεκάδων οὔτε ἀπὸ τῶν ἑκατοντάδων, ἀφαιροῦνται αἱ 15 χιλιάδες ἀπὸ τῶν 531 χιλιάδων τοῦ διαιρετέου τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατόν, ὅτε εὑρίσκεται πηλίκον 35 καὶ ὑπόλοιπον 6, μεθ' ὃ γράφεται καὶ ὁ 987, ἀπὸ τοῦ ὁποίου δὲν ἀφαιροῦνται αἱ 15 χιλιάδες.

*Σημείωσις 4.* Ὅταν τὰ ψηφία τοῦ διαιρέτου ἦναι πάντα 9, ἡ διαίρεσις συντομεύεται, ὡς ἕπεται: Ἔστω π. χ. διαιρετέος ὁ 16893 καὶ διαιρέτης ὁ 99. Ἐὰν ἀντὶ τοῦ διαιρέτου 99 ληφθῇ ὁ 99+1, ἤτοι ὁ 100, τὸ πηλίκον εἶναι 168 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 93 (Σημ. 2), Ἀλλ' ἐπειδὴ διαιρέτης ἐλήφθη ὁ 99 ηὐξημένος κατὰ 1, εἰς τὸ περισσεῦον πηλίκον 168 πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ ὑπόλοιπον 93, ὅτε εὑρίσκεται ὁ 261· οὗτος δὲ διαιρούμενος πάλιν διὰ τοῦ 99+1, ἤτοι τοῦ 100, δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 61. Ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐν τῇ διαιρέσει ταύτῃ διαιρέτης ἐλήφθη ὁ 99 ηὐξημένος κατὰ 1, εἰς τὸ περισσεῦον πηλίκον 1 πρέπει νὰ προστεθῇ τὸ ὑπόλοιπον 61, ὅτε εὑρίσκεται ὁ 63, ὁ ὁποῖος δὲν διαιρεῖται διὰ τοῦ 99 καὶ ἑπομένως εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 16893 διὰ τοῦ 99. Τὸ δὲ πηλίκον εἶναι προφανῶς τὸ 168+2, ἤτοι ὁ 170.

*Σημείωσις 5.* Ὅταν τὸ πηλίκον μέλλῃ νὰ ἔχῃ πολλὰ ψηφία καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι πολυψήφιος, πρὸς συντομωτέραν καὶ ἀσφαλεστέραν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως γράφεται πίναξ, ἐν ᾧ περιέχονται τὰ γινόμενα τοῦ διαιρέτου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἐννέα μονοψηφίων ἢ σημαντικῶν ψηφίων κατὰ σειράν· τότε δὲ διὰ τοῦ πίνακος τούτου εὑρίσκεται ἀμέσως εἰς ἑκάστην μερικὴν διαίρεσιν τὸ μέγιστον πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου τὸ περιεχόμενον εἰς τὸν διαιρετέον καὶ ἑπομένως τὸ ψηφίον τοῦ πηλίκου.

Τοῦτ' αὐτὸ δὲ γίνεται, καὶ ὅταν δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου πρόκειται νὰ διαιρεθῶσι πολλοὶ ἀριθμοί.

75. Ἡ *βάσανος* τῆς διαιρέσεως συνίσταται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ εὑρισκομένου πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην καὶ εἰς τὴν πρόσθεσιν εἰς τὸ γινόμενον τοῦτο τοῦ ὑπολοίπου (ἐὰν ὑπάρχῃ) τῆς διαιρέσεως. Ἐὰν τότε εὑρίσκηται ὁ διαιρετέος, τοῦτο εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους· διότι ὁ διαιρετέος εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον σὺν τῷ ὑπολοίπῳ (ἐὰν ὑπάρχῃ).

*Παρατήρησις. Τὸ πηλίκον δύο συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ, ἐὰν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ἑτεροειδεῖς·* οἷον πόσον τιμᾶται 1 πῆχυς ὑφάσματος, τοῦ ὁποίου 30 *πήχεις* τιμῶνται 90 *δραχμάς*; Ἐνταῦθα διαιρετέος εἶναι προφανῶς ὁ 90 δρ. καὶ διαιρέτης ὁ 30 πήχ. καὶ ἑπομένως τὸ πηλίκον 3 παριστᾷ δραχμάς· διότι, ὅταν 1 πῆχυς τιμᾶται 3 δρ., οἱ 30 πήχεις τιμῶνται προφανῶς 90 δραχ.

*Ὅταν δὲ διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἦναι συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ ὁμοειδεῖς, τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ ζητουμένῳ συγκεκριμένῳ ἀριθμῷ·* οἷον πόσοι πήχεις ὑφάσματός τινος ἀγοράζονται ἀντὶ 90 δραχμῶν, ἐὰν ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος τούτου πωλῆται ἀντὶ 30 δραχμῶν; Ἐνταῦθα ὁ διαιρετέος 90 δρ. καὶ ὁ διαιρέτης 30 δρ. εἶναι συγκεκρ. ὁμοειδεῖς· τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ ζητουμένῳ ἀριθμῷ πήχεων. Ὥστε τὸ πηλίκον 3 πήχεις εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός.

*Τὸ δὲ ὑπόλοιπον* (ἐὰν ὑπάρχῃ) *εἶναι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ.*

*Σημείωσις.* Ἐκ τῶν προηγουμένων πάντων συνάγεται, ὅτι αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν πηγάζουσιν ἅπασαι ἕνεκα τῆς ἀλληλουχίας τῶν πράξεων ἐκ τῶν γενικῶν νόμων τῆς *ἰσότητος*, τοῦ τῆς *ἀντιμεταθέσεως* καὶ τοῦ *ἐπιμεριστικοῦ*. Διὰ τοῦτο δὲ αἱ ἰδιότητες αὗται λέγονται *θεμελιώδεις* ἢ *ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων.*

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Πόσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν;

2) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον, ὅταν αὐξάνηται ἢ ἐλαττῶται κατὰ 1,2,3, ... ὁ διαιρετέος ἢ ὁ διαιρέτης;

3) Πόσα δύνανται νὰ ἦναι τὰ διάφορα ἀλλήλων ὑπόλοιπα διαιρέσεώς τινος, ὅταν διαιρέτης ἦναι ὁ 7, ἢ ὁ 12;

4) Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ καταστῇ τὸ πηλίκον διαιρέσεώς τινος τρὶς 3 μεῖζον ἢ ἔλασσν;

5) Πόσον μεταβάλλεται τὸ πηλίκον τελείας διαιρέσεως, ἐὰν ὁ μὲν διαιρετέος πολλαπλασιάζηται ἐπί τινα ἀριθμόν, ὁ δὲ διαιρέτης διαιρῆται διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ τἀνάπαλιν;

6) Πότε ἀριθμός τις προστιθέμενος εἰς τὸν διαιρετέον αὐξάνει μὲν τὸ ὑπόλοιπον, δὲν μεταβάλλει δὲ τὸ πηλίκον; καὶ πότε μεταβάλλει τὸ πηλίκον;

7) Διαιρεθεὶς ἀριθμός τις α ἔδωκε πηλίκον β καὶ ὑπόλοιπον γ· πῶς εὑρίσκεται ὁ διαιρέτης;

8) Ἐὰν ἔν τινι τάξει ἐκπαιδευτηρίου τινὸς τοποθετηθῶσι 12 μαθηταὶ εἰς ἕκαστον θρονίον, 17 μαθηταὶ μένουσιν ἄνευ θέσεως· ἐὰν δὲ τοποθετηθῶσι 15 μαθηταὶ εἰς ἕκαστον θρονίον, ἐν τῷ τελευταίῳ θρονίῳ ὑπάρχουσι μόνον 11 μαθηταί. Πόσα εἶναι τὰ θρονία καὶ πόσοι οἱ μαθηταί;

('Απ. 7 θρονία, 101 μαθηταί).

9) Ἡ φρουρὰ φρουρίου τινὸς σύγκειται ἐκ 310 στρατιωτῶν καὶ ἔχει τροφὰς 50 ἡμερῶν· ἐὰν ἦναι ἀνάγκη νὰ διαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ 12 ἡμέρας ἐπὶ πλέον, κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν;

('Απ. 60).

10) Τρεῖς ἔμποροι ἐδαπάνησαν δι' ἐπιχείρησίν τινα ὁ μὲν 1600, ὁ δὲ 1270, ὁ δὲ 1890· εἰς τὸ τέλος τῆς ἐπιχειρήσεως ἐπερίσσευσαν 950 δρ· Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος ἐκ τοῦ περισσεύματος τούτου, τῆς δαπάνης ἑκάστου οὔσης τῆς αὐτῆς;

('Απ. 350, 0,620).

11) Τίς ἀριθμὸς διαιρῶν τὸν 5338 δίδει πηλίκον, οὗ τινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 4;

('Απ. 1334,121,12)

12) Δύο ὅμιλοι ἐργατῶν ἀποτελοῦντες τὸν ἀριθμὸν 70 ἐκτελοῦσιν ἔργον 1920 μέτρων ἐπὶ 8 ἡμέρας. Οἱ ἐργάται τοῦ ἑνὸς ὁμίλου ἐκτελοῦσιν ἕκαστος καθ' ἡμέραν 4 μέτρα, ἕκαστος δὲ τοῦ ἑτέρου 3 μέτρα· ἐκ πόσων ἐργατῶν σύγκειται ἑκάτερος τῶν δύο ὁμίλων;

('Απ. 30,40).

13) Δεῖξαι τὰ θεωρήματα 67,68,69,70,71, ὅταν ἡ διαίρεσις ἦναι ἀτελής.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.

## Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

## Περὶ διαιρετότητος.

### Ὁρισμοί.

76. *Διαιρετὸς* λέγεται ἀριθμός τις δι' ἑτέρου, ἐὰν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἄνευ ὑπολοίπου (τοῦ ὑπολοίπου δηλ. τῆς διαιρέσεως ὄντος 0)· οἷον ὁ 12 εἶναι διαιρετὸς διὰ 4, ὁ 28 διαιρετὸς διὰ 7. Οἱ δὲ διαιροῦντες ἀριθμοὶ τοὺς διαιρετοὺς ἀριθμοὺς λέγονται *διαιρέται* αὐτῶν· οἷον ὁ 4 καὶ ὁ 7 εἶναι διαιρέται ὁ μὲν τοῦ 28, ὁ δὲ τοῦ 12.

Πᾶς διαιρετὸς ἀριθμὸς δι' ἑτέρου λέγεται καὶ *πολλαπλάσιον* αὐτοῦ· διότι παράγεται ἐκ τούτου διὰ πολλαπλασιασμοῦ· οἷον ὁ 6 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἢ τοῦ 2 (διότι $6=2.3$). Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ παράγων ἕτερον διὰ πολλαπλασιασμοῦ λέγεται *παράγων* ἢ *ὑποπολλαπλάσιον* αὐτοῦ, οἷον ὁ 4 εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 8, ὁ 5 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 15, ἢ παράγων αὐτοῦ.

Πάντα τὰ πολλαπλάσια ἀριθμοῦ τινος εἶναι διαιρετὰ δι' αὐτοῦ καὶ ἑπομένως οἱ διαιρέται παντὸς διαιρετοῦ ἀριθμοῦ εἶναι καὶ παράγοντες αὐτοῦ· οἷον $15=3.5$, $100=2^2.5^2$, $360=2^3.3^2.5$, $M=\alpha^\mu.\ \beta^\nu.\ \gamma$.

*Κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ πολλῶν διαιρετῶν ἀριθμῶν λέγεται πᾶς κοινὸς παράγων αὐτῶν· οἷον ὁ 5 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν 15, 100 καὶ 360, ὁ δὲ 3 τῶν 15 καὶ 360.

Ὅταν λέγηται, ὅτι ἀριθμός τις διαιρεῖ ἕτερον, ἐννοεῖται ἡ τελεία διαίρεσις, καθ' ἣν τὸ ὑπόλοιπον εἶναι 0.

Πολλάκις εἶναι ὠφέλιμον νὰ εὑρίσκηται ἀμέσως, ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς διά τινος διαιρέτου ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως· ἢ ἂν δὲν ἦναι διαιρετός, νὰ εὑρίσκηται ἀμέσως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Πρὸς τοῦτο δὲ χρησιμεύουσι τὰ ἑπόμενα θεωρήματα.

## Θεωρήματα περὶ τῆς διαιρετότητος.

### Θεώρημα.

77. *Ἐὰν δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοὶ ἦναι διαιρετοὶ διά τινος κοινοῦ διαιρέτου, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.*

Ἔστω π. χ. οἱ διὰ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου 7 διαιρετοὶ ἀριθμοὶ 21, 28, 42· λέγω, ὅτι καὶ τὸ ἄθροισμα $21+28+42=91$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ διαιρέτου 7.

*Ἀπόδειξις.* Ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν 21,28,42 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7· ἤτοι $21=7.3$, $28=7.4$, $42=7.6$

Ὥστε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 91 ἢ $7.3+7.4+7.6$ ἢ καὶ $7(3+4+6)$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 7 καὶ ἑπομένως διαιρετὸν δι' 7.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha=\delta.\ \alpha'$, $\beta=\delta.\ \beta'$, $\gamma=\delta.\ \gamma'$, ἕπεται

$$\alpha+\beta+\gamma=\delta.(\alpha'+\beta'+\gamma').$$

*Πόρισμα. Ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς δι' ἑτέρου, πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ πρώτου εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ δευτέρου.*

Ἔστω π. χ. ὁ 12 ὁ διαιρετὸς διὰ τοῦ 4· λέγω, ὅτι καὶ τὸ τριπλάσιον π. χ. τοῦ 12, ἤτοι τὸ $12.3=36$, εἶναι διαιρετὸν διὰ 4. Διότι

$$12.3=12+12+12$$

καὶ ἑπομένως κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὁ 36, εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha=\delta.\ \alpha'$, ἕπεται $\alpha.\ \beta=\delta.\ (\alpha'.\ \beta)$.

### Θεώρημα.

78. *Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἦναι διαιρετοὶ διὰ κοινοῦ τινος διαιρέτου, καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν εἶναι διαιρετὴ διὰ τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 16 καὶ 48, ὧν κοινὸς διαιρέτης ὁ 8· λέγω, ὅτι ὁ 8 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς $48-16=32$.

*Ἀπόδειξις.* Ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν 48 καὶ 16 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι

$$48=8.6,\ 16=8.2 \text{ καὶ ἑπομένως}$$

$$48-16=8.6-8.2=8.(6-2)=8.4$$

Ὥστε ὁ κοινὸς διαιρέτης 8 τῶν 48 καὶ 16 εἶναι διαιρέτης καὶ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἤτοι τοῦ 32.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν $\alpha=\delta.\ \alpha'$, $\beta=\delta.\ \beta'$, ἕπεται $\alpha-\beta=\delta.\ (\alpha'-\beta')$.

Τὸ θεώρημα τοῦτο δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς:

*Πᾶς διαιρέτης τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ ἑτέρου.*

Ὁ 8 π.χ. ὁ διαιρέτης τοῦ 48 καὶ τοῦ 16 ἢ τοῦ 32 εἶναι διαιρέτης, καὶ τοῦ 32 ἢ τοῦ 16· διότι 48=16+32. Ὅθεν

$$48-16=32 \text{ ἢ } 48-32=16,$$

## Θεώρημα.

79. *Το ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον ἢ ἀφαιρεθῇ ἀπ' αὐτοῦ πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.*

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εὑρίσκεται, ὅταν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ ὁ διαιρέτης τοσάκις, ὁσάκις εἶναι δυνατόν. Ἐὰν ἄρα προστεθῇ εἰς τὸν διαιρετέον πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου, μετά τινας ἀφαιρέσεις τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ διαιρετέου εὑρίσκεται ὁ ἀρχικὸς διαιρετέος καὶ ἑπομένως καὶ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον· Ἐὰν δὲ τοὐναντίον ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ διαιρετέου πολλαπλάσιόν τι τοῦ διαιρέτου (ἔλασσον τοῦ διαιρετέου), τοῦτο εἶναι μέρος τῆς πράξεως πρὸς εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

*Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσιν ἀλλήλων κατὰ πολλαπλάσιον ἑτέρου τινὸς ἀριθμοῦ καὶ διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι διὰ τούτου, δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 40 καὶ 25 οἱ διαφέροντες ἀλλήλων κατὰ τὸ πενταπλάσιον τοῦ 3, ἤτοι 40—25=3.5· οἱ ἀριθμοὶ 40 καὶ 25 διαιρούμενοι διὰ 3 δίδουσι τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον· διότι 40—3.5=25.

## Θεώρημα.

80. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ διὰ 2 ἢ 5.*

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 5947· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 (τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ) διὰ 2 ἢ 5.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ ἀριθμὸς 5947 σύγκειται ἐκ 594 δεκάδων καὶ 7 μονάδων. Ἀλλ' ἡ δεκάς, ἤτοι ὁ 10, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 ἢ 5, (10=2.5), ἑπομένως καὶ αἱ 594 δεκάδες, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 10, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 2 ἢ 5. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5947 πᾶσαι αἱ 594 δεκάδες αὐτοῦ, ὅτε εὑρίσκεται ὁ 7, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5947 διὰ 2 ἢ 5 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 διὰ 2 ἢ 5.

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται ἀμέσως, ὅτι *πάντες οἱ ἀριθμοί, ὧν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι 0,2,4,6,8, εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2* καὶ καλοῦνται *ἄρτιοι* ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς λοιποὺς ἀριθμούς, οἵτινες καλοῦνται *περιττοί*. Οἷον οἱ 32, 154, 216, 4528, 780, εἶναι ἄρτιοι.

*Πάντες δὲ οἱ ἀριθμοί, ὧν τὸ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι 0 ἢ 5, εἶναι διαιρετοὶ διὰ* 5. Οἷον οἱ 60, 395, 7400, 655.

## Θεώρημα.

81. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων αὐτοῦ ἀποτελουμένου διψηφίου ἀριθμοῦ διὰ 4 ἢ 25.*

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 73987· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 87 (τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ) διὰ 4 ἢ 25.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ ἀριθμὸς 73987 σύγκειται ἐξ 739 ἑκατοντάδων καὶ 87 μονάδων. Ἀλλ' ἡ ἑκατοντάς, ἤτοι ὁ 100, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ἢ 25 (4.25=100), ἑπομένως καὶ αἱ 739 ἑκατοντάδες, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 100, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 4 ἢ 25. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 73987 πᾶσαι αἱ 739 ἑκατοντάδες αὐτοῦ, ὅτε εὑρίσκεται ὁ 87, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 73987 διὰ 4 ἢ 25 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 87 διὰ 4 ἢ 25 (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται, ὅτι *ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25, ὅταν ὁ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων αὐτοῦ ἀποτελούμενος διψήφιος ἀριθμὸς ᾖναι διαιρετὸς διὰ 4 ἢ 25*· οἷον ὁ 624 διὰ 4, οἱ 700, 1325, 23750, 96675 διὰ 25.

## Θεώρημα.

82. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων αὐτοῦ ἀποτελουμένου τριψηφίου ἀριθμοῦ διὰ 8 ἢ 125.*

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς 85749· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 749 (τοῦ τριψηφίου ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ) διὰ 4 ἢ 125.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ ἀριθμὸς 85749 σύγκειται ἐξ 85 χιλιάδων καὶ 749 μονάδων. Ἀλλ' ἡ χιλιάς, ἤτοι ὁ 1000, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ἢ 125, $(1000=8.125)$, ἑπομένως καὶ αἱ 85 χιλιάδες, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ 1000, εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ 8 ἢ 125. Ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσιν ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 85749 πᾶσαι αἱ 85 χιλιάδες αὐτοῦ, ὅτε εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς 749, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 85749 διὰ 8 ἢ 125 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ 749 διὰ 8 ἢ 125· (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται, ὅτι *ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125, ὅταν ὁ ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων, τοῦ τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων αὐτοῦ ἀποτελούμενος τριψήφιος ἀριθμὸς ἦναι διαιρετὸς διὰ 8 ἢ 125*. Οἷον ὁ 67184 διὰ 8, ὁ 178375 διὰ 125.

## Θεώρημα.

83. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ 3 ἢ 9 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος πάντων τῶν ψηφίων αὐτοῦ διὰ 3 ἢ 9.*

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 5782· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ 3 ἢ 9 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $5+7+8+2$ (τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ) διὰ 3 ἢ 9.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ ἀριθμὸς 5782 σύγκειται ἐκ 5 χιλιάδων 7 ἑκατοντάδων, 8 δεκάδων καὶ 2 μονάδων, ἤτοι ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $5000+700+80+2$

ἢ τῷ $$5.(999+1)+7.(99+1)+8.(9+1)+2$$

ἢ τῷ $$5.999+7.99+8.9+5+7+8+2.$$

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 999, 99, 9 εἶναι ἕκαστος πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἢ 9,

$$(999=3.333=9.111, 99=3.33=9.11, 9=3.3)$$

ἑπομένως καὶ τὰ γινόμενα $5.999, 7.99, 8.9$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3 ἢ 9.

Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 5782 ἢ τοῦ ἴσου αὐτῷ

$$5.999+7.99+8.9+5+7+8+2$$

ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα $5.999+7.99+8.9$, ὅτε εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα $5+7+8+2$, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 5782 διὰ 3 ἢ 9 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων αὐτοῦ $5+7+8+2$ διὰ 3 ἢ 9· (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται, *ὅτι ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 3 ἢ 9, ἐὰν τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ψηφίων αὐτοῦ ᾖναι διαιρετὸν διὰ 3 ἢ 9*. Οἷον ὁ 25383 διὰ 3, ὁ 54684 διὰ 3 ἢ 9.

Φανερόν, ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοὶ οἱ διαιρετοὶ διὰ τοῦ 9 εἶναι διαιρετοὶ καὶ διὰ τοῦ 3· διότι $9=3.3$.

*Σημείωσις*. Καὶ ἐπὶ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ προκύπτοντος ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα πρὸς εὕρεσιν τοῦ διὰ 3 ἢ 9 ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως· καὶ δύναται νὰ γίνηται τοῦτο, μέχρις οὗ εὑρεθῇ μονοψήφιος ἀριθμός, ὅτε τὸ ὑπόλοιπον εὑρίσκεται ἀμέσως. Π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 167983 τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι ὁ 34 τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ 34 εἶναι ὁ 7, ἑπομένως τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 167983 διὰ μὲν τοῦ 3 εἶναι ὁ 1, διὰ δὲ τοῦ 9 ὁ 7.

## Θεώρημα.

84. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀριθμοῦ τινος διὰ τοῦ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀριθμοῦ εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς διὰ τοῦ* 11. (Τὸ τελευταῖον τμῆμα τῆς ἀναλύσεως ταύτης δυνατὸν νὰ ᾖναι μονοψήφιον).

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 8674958· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ τοῦ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $8+67+49+58$ (τῶν διψηφίων τμημάτων ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς, ὅπου τὸ τελευταῖον τμῆμα εἶναι μονοψήφιον, ὁ 8) διὰ τοῦ 11.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ ἀριθμὸς 8674958 ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$8000000+670000+4900+58$$

ἢ τῷ $$8.(999999+1)+67.(9999+1)+58$$

49(99+1)

ἢ τῷ $$8.999999+67.9999+49.99+8+67+49+58.$$

Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ 999999,9999,99 εἶναι ἕκαστος πολλαπλάσιον τοῦ 11,

$$(999999=11.90909, 9999=11.909, 99=11.9)$$

ἑπομένως καὶ τὰ γινόμενα $8.999999, 67.9999, 49.99$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 11. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 8674958 ἢ τοῦ ἴσου αὐτῷ

$$8.999999+67.9999+49.99+8+67+49+58$$

ἀφαιρεθῇ τὸ ἄθροισμα $8.999999+67.9999+49.99$, ὅτε εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα $8+67+49+58$, τότε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 8674958 διὰ τοῦ 11 εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος $8+67+49+58$ διὰ τοῦ 11· (ἰδὲ ἐδάφ. 79). Τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ 6.

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου ἕπεται, ὅτι *ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 11, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν διψηφίων ἀριθμῶν τῶν προκυπτόντων ἐκ τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀριθμοῦ ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 11*· π. χ. ὁ ἀριθμὸς 859584.

*Σημείωσις*. 1. Τὸ ἄθροισμα $8+67+49+58$ ἰσοῦται τῷ

$$8+6.(11-1)+7+4.(11-1)+9+5\,(11-1)+8$$

ἢ τῷ

$$6.11.+4.11+5.11+8+7+9+8-(6+4+5)$$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $6.11+4.11+5.11$ εἶναι προφανῶς πολλαπλάσιον τοῦ 11 καὶ ἑπομένως δύναται νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τοῦ $8+67+49+58$, ὅτε εὑρίσκεται τὸ $8+7+9+8-(6+4+5)$. Τότε δὲ οἷον ὑπόλοιπον παρέχει ὁ 8674958 διαιρούμενος διὰ τοῦ 11, τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον διὰ τοῦ 11 παρέχει καὶ ἡ διαφορὰ $(8+7+9+8)-(6+4+5)$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 8674958 τῶν ἐχόντων τάξιν περιττὴν καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων τῶν ἐχόντων τάξιν ἀρτίαν ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ συμβῇ τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου τῆς διαφορᾶς ταύτης νὰ ἦναι ἔλασσον τοῦ ἀθροίσματος τοῦ ἀφαιρετέου, προστίθεται εἰς τὸ πρῶτον ἄθροισμα ὁ 11 ἢ πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ὅπως καταστῇ μεῖζον τοῦ ἀφαιρετέου, (ἰδὲ ἐδάφ. 79) π. χ. ἐν τῷ ἀριθμῷ 2508371.

*Σημείωσις* 2. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐφαρμόζεται προφανῶς καὶ ἐπὶ τῶν διαιρέσεων διὰ τοῦ 33 ἢ 99.

## *Βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 9 ἢ τοῦ 11.

85. Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως δύναται νὰ γίνηται καὶ διὰ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως στηριζομένη ἐπὶ τῶν ἑξῆς θεωρημάτων.

### Θεώρημα.

86. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀθροίσματος ἀριθμῶν δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῇ ἕκαστος προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τυχὸν ἄθροισμα $14+27+35$· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τούτου διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ 6 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 6 τοῦ ἀθροίσματος $2+3+5$ τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως ἑκάστου τῶν προσθετέων 14,27,35 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 6.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ ἄθροισμα $2+3+5$ εὑρέθη ἐκ τοῦ ἀθροίσματος $14+27+35$ δι' ἀφαιρέσεως πολλαπλασίου τοῦ 6. Ὥστε ἡ διὰ τοῦ 6 διαίρεσις ἀμφοτέρων τῶν ἀθροισμάτων τούτων παρέχει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 4· (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

## Θεώρημα.

87. *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως γινομένου ἀριθμῶν δι' οἱουδήποτε ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῇ ἕκαστος παράγων τοῦ γινομένου διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἔστω τυχὸν γινόμενον $19.32$· λέγω, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου τούτου διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ 7 εἶναι τὸ αὐτὸ τῷ ὑπολοίπῳ τῆς διαιρέσεως διὰ τοῦ 7 τοῦ γινομένου $5.4$ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἑκατέρου τῶν παραγόντων 19 καὶ 32 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 7.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον $19.32$ ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι

$$19+19+19+19+\ldots+19$$

(οὗ οἱ προσθετέοι 32). Ἐὰν δὲ ἕκαστος προσθετέος τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ὑπολοίπου 5 τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ 7, ὅτε εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα $5+5+5+\ldots+5$, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ἀθροίσματος δὲν μεταβάλλεται. Ἀλλ' εἶναι

$$5+5+5+\ldots+5=5.32=32.5=32+32+32+32+32.$$

Ἐὰν δὲ καὶ τοῦ ἀθροίσματος $32+32+32+32+32$ διαιρεθῇ ἕκαστος προσθετέος διὰ τοῦ 7, εὑρίσκεται τὸ ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων

$$4+4+4+4+4=4.5.$$

Τὸ γινόμενον $4.5$ εὑρέθη τοιουτοτρόπως ἐκ τῆς ἀφαιρέσεως ἀπὸ τοῦ γινομένου $19.32$ πολλαπλασίου τοῦ 7. Ὥστε ἡ διὰ τοῦ 7 διαίρεσις ἀμφοτέρων τῶν γινομένων τούτων παρέχει τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 6.

Καὶ γενικῶς ἐν γινομένῳ ὅσωνδήποτε παραγόντων δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ἕκαστος παράγων διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως διά τινος ἀριθμοῦ· διότι τὸ οὕτω προκῦπτον γινόμενον διαφέρει τοῦ ἀρχικοῦ κατὰ πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τούτου· (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου φανερὰ ἡ ὀρθότης τοῦ ἑπομένου κανόνος:

88. *Ἡ βάσανος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ γίνεται, καὶ ἐὰν εὑρεθῶσι τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως τοῦ τε πολλαπλασιαστέου καὶ τοῦ πολλαπλασιαστοῦ διά τινος ἀριθμοῦ. Τότε δὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τούτων ὑπολοίπων καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον πρέπει νὰ ἔχωσιν ἴσα ὑπόλοιπα.*

Ἔστω π. χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς τοῦ 563 ἐπὶ 15, οὗ ἡ δοκιμὴ ἐγένετο διὰ τοῦ 9.

$$\begin{array}{r} 563 \\ 15 \\ \hline 2815 \\ 563\phantom{0} \\ \hline 8445 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} 5 & 6 \\ \hline 3 & 3 \end{array}$$

Εὑρέθη πρῶτον τὸ γινόμενον 8445 τῶν δύο ἀριθμῶν 563 καὶ 15 καὶ εἶτα χθησαν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἐν σχήματι σταυροῦ. Εἰς μὲν τὰς ἄνω δύο γωνίας ἐγράφησαν τὰ ὑπόλοιπα 5 καὶ 6 τῶν δύο παραγόντων, εἶτα ἐπολλαπλασιάσθησαν τὰ δύο ὑπόλοιπα ταῦτα, 5.6, καὶ ἐγράφη τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 30 ἤτοι τὸ 3 εἰς μίαν τῶν κάτω γωνιῶν· εἰς δὲ τὴν λοιπὴν γωνίαν ἐγράφη τὸ ὑπόλοιπον τοῦ γινομένου 8445, τὸ ὁποῖον ἦτο καὶ αὐτὸ 3, ὅπερ εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐγένετο ἄνευ λάθους.

Ὁμοία δοκιμὴ γίνεται καὶ τῆς διαιρέσεως δύο ἀριθμῶν. *Λαμβάνονται τὰ ὑπόλοιπα τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου, πολλαπλασιάζονται τὰ ὑπόλοιπα ταῦτα καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστίθεται τὸ ὑπόλοιπον τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως· ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πρέπει νὰ δίδῃ τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον καὶ ὁ διαιρετέος, ὅπερ εἶναι ἔνδειξις, ὅτι ἡ διαίρεσις ἐγένετο ἄνευ λάθους.*

Ἀνάγεται δὲ ἡ βάσανος τῆς διαιρέσεως εἰς τὴν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ἐὰν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου ἀφαιρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ), ὅτε ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον.

*Σημείωσις.* Ἡ βάσανος δύναται νὰ γίνηται, ὅπως διὰ τοῦ 9, οὕτω καὶ διὰ τοῦ 11 καὶ διὰ παντὸς ἄλλου διαιρέτου, δι' οὗ εὑρίσκονται ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον τὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως.—Ἐὰν ἐν τῷ ἀνωτέρω π. χ. εὑρεθέντι γινομένῳ 8445 ἀλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων, ὡς 4854, ἡ διὰ τοῦ 9 διαίρεσις ἀμφοτέρων τῶν ἀριθμῶν τούτων δίδει προδήλως τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον, εἰ καὶ ὁ 4854 δὲν εἶναι τὸ ἀληθὲς γινόμενον.

Ἡ διὰ τῶν ὑπολοίπων ἄρα βάσανος ἐν γένει μικρὰν ἔχει ἀξίαν· διὸ ἡ ἀρίστη δοκιμὴ πάσης ἀριθμητικῆς πράξεως εἶναι ἡ μετὰ προσοχῆς ἐπανάληψις αὐτῆς.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαιρεθῶσιν διὰ τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, δίδουσιν ἴσα ὑπόλοιπα· (ἰδὲ ἐδάφ. 79).

2) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 4, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων αὐτοῦ ἦναι διαιρετὸν διὰ 4. (Διότι $100=4.25, 10=4.2+2$).

3) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 8, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἦναι διαιρετὸν διὰ 8.

(Διότι $1000=8.125, 100=8.12+4, 10=8.1+2$).

4) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τετραπλασίου ἑκάστου τῶν λοιπῶν ψηφίων ἦναι διαιρετὸν διὰ 6. (Διότι οἱ ἀριθμοὶ 10,100,1000,...εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 6 ηὐξημένα κατὰ 4).

5) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 7, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τοῦ τριπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν δεκάδων αὐτοῦ ἦναι διαιρετὸν διὰ 7. (Διότι $10=7.1+3$).

6) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 37, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν τριψηφίων τμημάτων, εἰς ἃ ἀναλύεται ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς, ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 37. Τὸ τελευταῖον τμῆμα δυνατὸν νὰ ἔχῃ δύο ἢ ἓν ψηφίον. (Διότι $1000=37.27+1$).

7) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 7, ἐὰν ἑκάτερος τῶν ἀριθμῶν τούτων δὲν ἦναι διὰ τοῦ 7 διαιρετός· (ἰδὲ ἐδάφ. 86 καὶ 87· προσέτι δὲ παρατηρητέον, ὅτι δὲν ὑπάρχουσι δύο ἀριθμοὶ μικρότεροι τοῦ 7, ὧν τὰ τετράγωνα προστιθέμενα ἀποτελοῦσιν ἀριθμὸν διαιρετὸν διὰ τοῦ 7).

8) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 13, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων αὐτοῦ καὶ τοῦ ἐννεαπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 13.

9) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 17, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν

μονάδων αὐτοῦ καὶ τοῦ δεκαπενταπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν ἑκατοντάδων αὐτοῦ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 17.

10) Ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 19, ἐὰν τὸ ἄθροισμα τοῦ διψηφίου ἀριθμοῦ (τοῦ ἀποτελουμένου ἐκ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων καὶ τοῦ τῶν μονάδων) καὶ τοῦ πενταπλασίου ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων καὶ τοῦ δωδεκαπλασίου τοῦ ὅλου ἀριθμοῦ τῶν χιλιάδων αὐτοῦ ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ 19.

11) Τὸ γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄρτιος ἀριθμός.

12) Περιττὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ περιττὸν δίδει γινόμενον περιττὸν ἀριθμόν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β′.

### Περὶ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

### Ὁρισμοί.

89. *Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης* δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται ὁ μέγιστος ἐκ τῶν κοινῶν διαιρετῶν, οὓς δύνανται νὰ ἔχωσιν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 24,36,48 ἔχουσι κοινοὺς διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3,4,6,12 καὶ μόνους τούτους· ὁ δὲ μέγιστος τούτων 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 24,36,48.

*Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους* λέγονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1· π.χ. οἱ 3,4,15.

*Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο* λέγονται οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ἀνὰ δύο μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1.

Π. χ. οἱ 3,5,8 ἀνὰ δύο 3,5, 5,8, 3,8 εἶναι πρῶτοι.

### Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν διαιρετῶν.

#### Θεώρημα.

90. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν εἷς τῶν ἀριθμῶν τούτων προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν λοιπῶν καὶ εἰς ἑαυτόν.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ

40, 128, 320, 72

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν λόγου χάριν ὁ

40 προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν λοιπῶν 128,320,72 καὶ εἰς ἑαυτόν, ἤτοι ἀμφότεραι αἱ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν.

40, 128, 320, 72
80, 168, 360, 112

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

*Ἀπόδειξις*. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων ὡς διαιρῶν αὐτοὺς διαιρεῖ καὶ τὰ ἀθροίσματα (ἴδε ἐδ. 77)

$$40+40, \quad 128+40, \quad 320+40, \quad 72+40,$$

ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς 80,168,360,112. Καὶ πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων ὡς διαιρῶν αὐτοὺς καὶ τὸν 40 διαιρεῖ καὶ τὰς διαφορὰς 80—40,168—40,360—40,112—40 (ἐδ. 78) ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς

40, 128, 320, 72

Καὶ γενικῶς· πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$A, \; B, \; \Gamma, \; \Delta$$

εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν

$$A+B, \; B+B, \; \Gamma+B, \; \Delta+B$$

*Πόρισμα. Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν πολλαπλάσιόν τι ἑνὸς τῶν ἀμιθμῶν τούτων προστεθῇ εἰς ἑαυτὸν καὶ εἰς τοὺς λοιπούς.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ

4, 8, 12, 20

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν λόγου χάριν τὸ τριπλάσιον τοῦ 4, ἤτοι ὁ 12, προστεθῇ εἰς πάντας τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, ἤτοι ἀμφότεραι αἱ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν

4, 8, 12, 20
16, 20, 24, 32

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

*Ἀπόδειξις*. Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀθροισμάτων.

$$4+12, \quad 8+12, \quad 12+12, \quad 20+12$$

καὶ τἀνάπαλιν.

Καὶ γενικῶς· πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$A, \; B, \; \Gamma, \; \Delta$$

εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν (ὁ ν ἀκέραιος ἀριθμὸς)

$$A+\nu\Delta, \; B+\nu\Delta, \; \Gamma+\nu\Delta, \; \Delta+\nu\Delta$$

## Θεώρημα.

91. *Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν ὁ ἐλάχιστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ καὶ ἀπὸ ἑκάστου τῶν λοιπῶν.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ

40, 128, 320, 72

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται δὲν μεταβάλλονται, ἐὰν ὁ ἐλάχιστος 40 ἀφαιρεθῇ ἀφ' ἑαυτοῦ καὶ ἀπὸ ἑκάστου τῶν λοιπῶν 128, 320, 72, ἤτοι ἀμφότεραι αἱ σειραὶ τῶν ἀριθμῶν

40, 128, 320, 72
0, 88, 280, 32

ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς κοινοὺς διαιρέτας.

*Ἀπόδειξις.* Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν διαφορῶν (ἰδὲ ἐδ. 78)

40—40, 128—40, 320—40, 72—40

Καὶ πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν τῆς πρώτης (ἐδ. 77)· διότι ὡς διαιρῶν τοὺς 0,88,280,32 διαιρεῖ καὶ τὰ ἀθροίσματα 0+40,88+40,280+40,32+40 ἤτοι τοὺς ἀριθμοὺς

40, 128, 320, 72

Καὶ γενικῶς· πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

Α, Β, Γ

εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν

Α—Β, 0, Γ—Β

*Πόρισμα. Οἱ κοινοὶ διαιρέται ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν καὶ οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ὑπολοίπων αὐτῶν διαιρεθέντων διὰ τοῦ ἐλαχίστου αὐτῶν εἶναι οἱ αὐτοί.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ

432, 504, 324, 60

λέγω, ὅτι οἱ κοινοὶ αὐτῶν διαιρέται εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ οἱ τῶν ἀριθμῶν

12, 24, 24, 0

οἵτινες εἶναι τὰ ὑπόλοιπα τῶν δοθέντων ἀριθμῶν διαιρεθέντων διὰ τοῦ ἐλαχίστου αὐτῶν 60.

*Ἀπόδειξις.* Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς πρώτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς δευτέρας, ἧς οἱ ἀριθμοὶ εὑρέθησαν ἀφαιρεθέντος τοῦ 60 ἀπὸ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τῆς πρώτης ἅπαξ ἢ πολλάκις. Ἀλλ' ἐν ἑκάστῃ τῶν ἀφαιρέσεων τούτων οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλονται.

Καὶ γενικῶς· πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

Α, Β, Γ, Δ

εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν ἀριθμῶν

α, β, γ, 0

ἤτοι τῶν ὑπολοίπων διαιρέσεως τῶν Α, Β, Γ, Δ, διὰ τοῦ Δ.

## Θεώρημα.

92. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἐλάχιστος αὐτῶν, ἐὰν διαιρῇ πάντας τοὺς λοιπούς.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ

12, 48, 120, 240

ὧν οἱ 48,120,240 διαιρετοὶ διὰ τοῦ ἐλαχίστου αὐτῶν 12· λέγω, ὅτι ὁ 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ 12 εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν τούτων· διότι διαιρεῖ καὶ ἑαυτὸν καὶ πάντας τοὺς λοιπούς. Εἶναι δὲ ὁ 12 ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν· διότι ἄλλος μείζων αὐτοῦ ἀριθμὸς δυνατὸν μὲν νὰ διαιρῇ τοὺς λοιποὺς 48,120,240, οὐχὶ δὲ καὶ τὸν 12. Ὥστε ὁ 12 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 12,48,120,240.

## Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν.

93. Τῇ βοηθείᾳ τῶν προηγουμένων προτάσεων δύναται νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν κατὰ τοὺς δύο ἑπομένους κανόνας.

α'.) *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο ἀριθμῶν διαιρεῖται ὁ μεγαλείτερος διὰ τοῦ μικροτέρου· καὶ ἐὰν μὲν τὸ ὑπόλοιπον ᾖναι 0, ὁ μικρότερος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης· εἰ δὲ μή, διαιρεῖται ὁ μικρότερος διὰ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως. Καὶ οὕτω καθεξῆς· διαιρεῖται ἕκαστος διαιρέτης διὰ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος πρὸς αὐτὸν ὑπολοίπου, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ὑπόλοιπον 0· ὁ δὲ διαιρέτης τῆς τελευταίας ταύτης διαιρέσεως εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ δύο ἀριθμοὶ 736 καὶ 288, ὧν ζητεῖται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως συντομίας χάριν ὡς ἑξῆς :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 2 | 1 | 1 | 4 |
| 736 | 288 | 160 | 128 | 32 |
| 160 | 128 | 32 | 0 | |

Ἐν τῷ παραδείγματι τούτῳ διῃρέθη ὁ 736 διὰ τοῦ 288 καὶ εὑρέθη πηλίκον μὲν 2 (γραφὲν ἄνωθι τῆς ὁριζοντίας γραμμῆς), ὑπόλοιπον δὲ 160· εἶτα διῃρέθη ὁ 288 διὰ τοῦ 160 καὶ εὑρέθη πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 128· ὁ 160 διῃρέθη διὰ τοῦ 128 καὶ εὑρέθη πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 32· τέλος διῃρέθη ὁ 128 διὰ τοῦ 32 καὶ εὑρέθη πηλίκον 4 καὶ ὑπόλοιπον 0. Ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν 736 καὶ 288 εἶναι ὁ 32. Διότι οἱ ἀριθμοὶ 736 καὶ 288 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ 288 καὶ 160 κοινοὺς διαιρέτας (ἰδὲ ἐδ. 91)· ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ 288 καὶ 160 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ 160 καὶ 128 κοινοὺς διαιρέτας· οἱ δὲ 160 καὶ 128 ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ 128 καὶ 32 κοινοὺς διαιρέτας, ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, οὗτος δὲ εἶναι ὁ 32· διότι ὁ 128 διαιρετὸς διὰ 32·

*Σημείωσις.* Ἐφαρμοζομένου τοῦ κανόνος τούτου ἐπὶ δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν εὑρίσκεται πάντοτε μετά τινας διαιρέσεις ὑπόλοιπον 0· διότι τὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων βαίνουσιν ἐλαττούμενα. Ἀριθμὸς δὲ, ὅστις ἐξακολουθεῖ ἐλαττούμενος, μηδενίζεται ἐπὶ τέλους καὶ κατὰ μονάδα, ἐὰν γίνηται ἑκάστη ἐλάττωσις αὐτοῦ.

Ἐὰν δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εὑρεθῇ ἡ μονὰς 1, ἕπεται, ὅτι οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· οἷον οἱ 434 καὶ 75.

β΄.) *Πρὸς εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν διαιροῦνται πάντες διὰ τοῦ ἐλαχίστου αὐτῶν· καὶ ἐὰν μὲν τὰ ὑπόλοιπα ἦναι 0, ὁ ἐλάχιστος οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης· εἰ δὲ μή, διαιροῦνται πάντα τὰ οὕτως εὑρεθέντα ὑπόλοιπα διὰ τοῦ ἐλαχίστου ὑπολοίπου. Καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ διαιρέτης, δι' οὗ διαιρεθέντες οἱ οὕτως εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ δίδουσιν ὑπόλοιπα 0. Ὁ δὲ τελευταῖος οὗτος διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαι π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 432, 508, 342, 60, ὧν ζητεῖται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἕπεται.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 432, | 508, | 342, | 60 |
| 12, | 28, | 42, | 0 |
| 0, | 4, | 6, | 0 |
| 0, | 0, | 2, | 0 |

Ἐν τῇ πρώτῃ ὁριζοντίᾳ σειρᾷ ἐγράφησαν οἱ δοθέντες ἀριθμοί· ἐν τῇ δευτέρᾳ ἐγράφησαν τὰ ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα διὰ τοῦ 60. Ἐν τῇ τρίτῃ ἐγράφησαν τὰ ἀντίστοιχα νέα ὑπόλοιπα διὰ τοῦ 12. Ἐν τῇ τετάρτῃ τέλος ἐγράφησαν τὰ ἀντίστοιχα νέα ὑπόλοιπα διὰ τοῦ 4.

Ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 432,508,342,60 εἶναι ὁ 2. Διότι οἱ ἀριθμοὶ τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ τῆς δευτέρας κοινοὺς διαιρέτας (ἰδὲ ἐδ. 91) ἑπομένως καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην. Ὁμοίως οἱ ἀριθμοὶ τῆς δευτέρας σειρᾶς ἔχουσι τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ τῆς τρίτης κοινοὺς διαιρέτας· τέλος οἱ τῆς τρίτης τοὺς αὐτοὺς καὶ οἱ τῆς τετάρτης κοινοὺς διαιρέτας, ἑπομένως ἔχουσι καὶ τὸν αὐτὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην, οὗτος δὲ εἶναι ὁ 2· διότι πάντες οἱ λοιποὶ ἀριθμοὶ τῶν ὁριζοντίων σειρῶν εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2· (ἰδὲ ἐδ. 92).

*Σημείωσις*. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ εὑρίσκηται καὶ κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον. Εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης δύο τῶν ἀριθμῶν τούτων, εἶτα ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τοῦ εὑρεθέντος μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ ἑνὸς τῶν λοιπῶν δοθέντων ἀριθμῶν. Καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσιν οὕτω πάντες οἱ δοθέντες ἀριθμοί. Ὁ τελευταῖος οὕτως εὑρισκόμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ ζητούμενος μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν γενικῶς οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ. Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς·

$$
\begin{array}{cccc}
A, & B, & \Gamma, & \Delta \\
 & M, & \Gamma, & \Delta \\
 & & M', & \Delta \\
 & & & M''
\end{array}
$$

ὅπου Μ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β, Μ′ ὁ τῶν Μ καὶ Γ, Μ″ ὁ τῶν Μ′ καὶ Δ. Ὁ Μ″ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ. Διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης (ἑπομένως καὶ ὁ μέγιστος) τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῆς δευτέρας (ἰδὲ ἐδάφ. 93 β′). Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῆς δευτέρας σειρᾶς εἶναι τοιοῦτος καὶ τῆς τρίτης, καὶ πᾶς τῆς τρίτης εἶναι καὶ τῆς τετάρτης· ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται καὶ ἡ πρότασις :

94. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῶσι δύο οἱοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.* Καὶ γενικώτερον· *ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῶσιν ὁσοιδήποτε ἐξ αὐτῶν διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

## Ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου.

### Θεώρημα.

95. *Κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, ὧν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης Β″ εὑρίσκεται (ἰδὲ. ἐδ. 93 β′), ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\begin{array}{cccc} A, & B, & \Gamma, & \Delta \\ A', & B', & 0, & 6 \\ 0, & B'', & 0, & 0 \end{array}$$

λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ δὲν ἔχουσιν ἄλλους κοινοὺς διαιρέτας ἢ μόνον τοὺς διαιρέτας τοῦ Β″·

*Ἀπόδειξις.* Πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς εἶναι κοινὸς διαιρέτης καὶ τῶν τῆς δευτέρας (ἐδ. 91)· καὶ πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν τῆς δευτέρας εἶναι τοιοῦτος καὶ τῶν τῆς τρίτης, ἤτοι τοῦ ἀριθμοῦ Β″. Ὥστε οἱ κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι διαιρέται τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Β″.

Καὶ πάντες δὲ οἱ διαιρέται τοῦ Β″ εἶναι κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ· διότι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι πολλαπλάσια τοῦ Β″.

### Θεώρημα.

96. *Ἐὰν δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοὶ πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν*

*αὐτὸν ἀριθμόν, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, ὧν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης Β″ εὑρίσκεται, ὡς ἑξῆς φαίνεται

| | | | |
|---|---|---|---|
| Α, | Β, | Γ, | Δ |
| Α′, | Β′, | 0, | 0 |
| 0 | Β″, | 0, | 0 |

λέγω, ὅτι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Ε, τὰ γινόμενα Α.Ε, Β Ε, Γ.Ε, Δ.Ε ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ γινόμενον Β″.Ε.

*Ἀπόδειξις*. Πολλαπλασιαζομένων τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ τῆς πρώτης σειρᾶς ἐπὶ Ε καὶ τὰ ὑπόλοιπα Α′, Β′, 0, 0 αὐτῶν διαιρεθέντων διὰ τοῦ Δ πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν Ε, (ἐδ. 66). Ὁμοίως πολλαπλασιασθέντων τῶν ἀριθμῶν Α′, Β′, 0, 0 τῆς δευτέρας σειρᾶς ἐπὶ Ε πολλαπλασιάζονται καὶ οἱ τῆς τρίτης, ἤτοι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης Β″, ἐπὶ τὸν Ε.

## Θεώρημα.

97. *Ἐὰν δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοὶ διαιρεθῶσι δι' ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἔστωταν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ, ὧν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ Μ καὶ κοινός τις διαιρέτης αὐτῶν ὁ Ε· λέγω, ὅτι τὰ πηλίκα α, β, γ, δ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ διαιρεθέντων διὰ τοῦ Ε ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸ πηλίκον τοῦ Μ διὰ τοῦ Ε.

*Ἀπόδειξις*. Ἔστω τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, δ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ μ, τότε τῶν ἀριθμῶν α. Ε, β. Ε, γ. Ε, δ. Ε, ἤτοι τῶν Α, Β, Γ, Δ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα μέγιστος κοινὸς διαιρέτης εἶναι ὁ μ. Ε. Ἀλλ' οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν Μ. Ὥστε Μ=μ. Ε καὶ ἑπομένως Μ : Ε=μ, ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

*Σημείωσις*. Διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται νὰ συντομεύηται ἐνίοτε ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου. Ἐὰν π. χ. ζητῆται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 12000, 8800, 18000, εὑρίσκεται ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης 4 τῶν 120,88,180 καὶ εἶτα πολλαπλασιάζεται οὗτος ἐπὶ 100. Ὥστε ὁ 400 εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν δοθέντων ἀριθμῶν

### Θεώρημα.

98. *Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀριθμοὶ διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, τὰ προκύπτοντα πηλίκα εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Ἔστωσαν τρεῖς τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ὧν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ Μ. λέγω, ὅτι τὰ πηλίκα α, β, γ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ Μ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1.

*Ἀπόδειξις.* Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ διῃρέθησαν διὰ Μ καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν Μ διῃρέθη διὰ Μ καὶ ἑπομένως ἔδωκε πηλίκον 1. Ὥστε τὰ πηλίκα α, β, γ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν Μ εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ὡς ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1.

### Θεώρημα.

99. *Ἐὰν ἀριθμοὶ διαιρούμενοι διά τινος κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν δίδωσι πηλίκα πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ διαιρέτης οὗτος εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἔστωσαν οἱ Α, Β, Γ τυχόντες ἀριθμοὶ καὶ Δ κοινός τις αὐτῶν διαιρέτης· λέγω, ὅτι, ἐὰν τὰ πηλίκα α, β, γ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διὰ Δ ἦναι πρῶτα πρὸς ἄλληλα, ὁ Δ εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν Α, Β, Γ.

*Ἀπόδειξις.* Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ὁ 1, ἑπομένως οἱ ἀριθμοὶ α. Δ, β. Δ, γ. Δ, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 1.Δ, ἤτοι τὸν Δ.

*Σημείωσις.* Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀντίστροφον τοῦ ἀμέσως προηγουμένου· διότι ἡ ὑπόθεσις τούτου εἶναι συμπέρασμα ἐκείνου.

### Θεώρημα.

100. *Ἐὰν ἀριθμὸς διαιρῶν τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἦναι πρῶτος πρὸς τὸν ἕνα, διαιρεῖ τὸν ἕτερον.*

Ἔστω τὸ τυχὸν γινόμενον Α.Β διαιρετὸν διά τινος ἀριθμοῦ Δ πρώτου πρὸς τὸν ἕνα παράγοντα, λόγου χάριν τὸν Α· λέγω ὅτι ὁ Δ διαιρεῖ τὸν ἕτερον παράγοντα Β.

*Απόδειξις*. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Δ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὴν μονάδα 1, οἱ ἀριθμοὶ Α.Β καὶ Δ.Β ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 1.Β, ἤτοι τὸν Β (ἐδ. 96).

Ἀλλ' ὁ Δ διαιρεῖ τὸν μὲν Α.Β ἐξ ὑποθέσεως, τὸν δὲ Δ.Β ὡς πολλαπλάσιον αὐτοῦ, ἑπομένως διαιρεῖ καὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν, ἤτοι τὸν Β (ἐδ. 97).

*Σημείωσις*. Ἀριθμός τις δύναται νὰ διαιρῇ τὸ γινόμενον δύο ἄλλων ἐν ᾧ οὐδέτερος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Π. χ. ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον 6.4, ἐν ᾧ οὔτε ὁ 6 οὔτε ὁ 4 εἶναι διαιρετὸς δι' αὐτοῦ.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων γινομένου, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς αὐτὸ τὸ γινόμενον.

Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς ἀπαγωγῆς εἰς ἄτοπον.

2) Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς γινόμενον εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς ἕκαστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου.

3) Ἀριθμὸς πρῶτος πρὸς ἕτερον ἀριθμὸν εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς πᾶσαν δύναμιν τούτου.

4) Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐάν τινες ἐξ αὐτῶν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσι δι' ἀριθμοῦ πρώτου πρὸς ἕνα τῶν λοιπῶν.

5) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ οἱ διαιρέται αὐτῶν εἶναι ὡσαύτως πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

6) Τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι ἀριθμοὶ ἢ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἢ ἔχουσι μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τὸν 2.

7) Ἐὰν ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β καὶ ὁ τῶν Γ, Δ πολλαπλασιασθῶσι, τὸ προκῦπτον γινόμενον εἶναι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α.Γ, Α.Δ, Β.Γ, Β.Δ.

8) Ἐὰν ἐκ δοθέντων ἀριθμῶν εἷς ἢ πλείονες ἦναι διαιρετοὶ διά τινος τῶν λοιπῶν καὶ παραλειφθῶσιν, οἱ ὑπολειπόμενοι ἔχουσι τὸν αὐτὸν καὶ οἱ δοθέντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην.

9) Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν

πρὸς ἑκάτερον αὐτῶν εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ ἐὰν τὸ ἄθροισμα πρὸς ἕνα ἐξ αὐτῶν ἦναι πρῶτον, καὶ οἱ ἐξ ἀρχῆς ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

10) Ἐὰν περιττὸς ἀριθμὸς ἦναι πρῶτος πρός τινα ἀριθμόν, εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ διπλάσιον αὐτοῦ.

11) Δύνανται νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες μέγιστον κοινὸν διαιρέτην καὶ ἄθροισμα δοθέντας ἀριθμούς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

### Περὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου.

#### Ὁρισμοί.

101. *Κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται πᾶς ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων. Π. χ. ὁ 40 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν 2, 4, 5, 8, 10, 20· διότι ὁ 40 παράγεται ἐξ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ.

Τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν 2, 4, 5, 8, 10, 20 πολλαπλάσιον εἶναι καὶ τὸ διπλάσιον τοῦ 40, ἤτοι ὁ 80, καὶ τὸ τριπλάσιον τοῦ 40, ἤτοι ὁ 120, καὶ ἐν γένει πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ 40 εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν (ἐδ. 75).

*Ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον* δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν λέγεται τὸ ἐλάχιστον ἐκ πάντων τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων. Π. χ. τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4 ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 12· διότι οὐδεὶς μικρότερος τοῦ 12 ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ πάντων τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

Οἱοιδήποτε δὲ καὶ ἂν ἦναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ἔχουσι πάντοτε ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον· διότι οὐδὲν κοινὸν πολλαπλάσιον δύναται νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ μεγίστου ἐκ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν.

### Θεωρήματα περὶ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων ἐν γένει.

#### Θεώρημα.

102. *Τὰ κοινὰ πολλαπλάσια ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια*

*καὶ τῶν πηλίκων τῶν ἀριθμῶν τούτων διαιρεθέντων διά τινος κοινοῦ διαιρέτου.*

Ἔστωσαν π. χ. οἱ ἀριθμοὶ Κ, Λ, Μ, Ν κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια καὶ τῶν πηλίκων α, β, γ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ διαιρεθέντων διά τινος κοινοῦ αὐτῶν διαιρέτου δ.

*Ἀπόδειξις*. Οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ εἶναι πολλαπλάσια τῶν α, β, γ (διότι Α=α.δ, Β=β.δ. Γ=γ.δ), οἱ δὲ ἀριθμοὶ Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κοινὰ πολλαπλάσια τῶν Α, Β, Γ, ἑπομένως οἱ Κ, Λ, Μ, Ν εἶναι κοινὰ πολλαπλάσια καὶ τῶν α, β, γ.

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς: *Οἱ κοινοὶ διαιρέται δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρέται καὶ τῶν κοινῶν πολλαπλασίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

## Θεώρημα.

103. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν εἶναι ὁ μέγιστος ἐξ αὐτῶν, ἐὰν ἦναι διαιρετὸς διὰ πάντων τῶν λοιπῶν.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Κ, Λ, Μ, ὧν ὁ μέγιστος Μ διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν Κ, Λ· λέγω, ὅτι ὁ Μ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Κ, Λ, Μ.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ Μ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Κ, Λ, Μ· διότι εἶναι διαιρετὸς καὶ δι' ἑαυτοῦ καὶ διὰ τῶν λοιπῶν Κ, Λ. Εἶναι δὲ ὁ Μ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Κ, Λ, Μ· διότι ἄλλος ἐλάσσων αὐτοῦ ἀριθμὸς δυνατὸν μὲν νὰ ἦναι διαιρετὸς διὰ τῶν Κ καὶ Λ, οὐχὶ δὲ καὶ διὰ τοῦ Μ. Ὥστε ὁ Μ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Κ, Λ, Μ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

## Θεώρημα.

104. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο· λέγω, ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν Α. Β. Γ.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τοῦ Α καὶ Β εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν Α.Β· διότι ὁ ἐλάχιστος ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς διὰ δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν.

Τὸ δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν (Α.Β) καὶ Γ εἶναι ὁμοίως τὸ γινόμενον αὐτῶν Α.Β.Γ· διότι ὁ Γ ὡς πρῶτος καὶ πρὸς τὸν Α καὶ πρὸς τὸν Β εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸ γινόμενον αὐτῶν Α.Β· ἀλλ' ὅταν δύο ἀριθμοὶ Γ καὶ (Α.Β) ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενον αὐτῶν (Α.Β).Γ ἢ τὸ Α.Β.Γ.

Καθ' ὅμοιον τρόπον γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ὁσαιδήποτε καὶ ἂν ἦναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο.

*Σημείωσις.* Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ δὲν ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι ἔλασσον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

### Θεώρημα.

105. *Κοινὰ πολλαπλάσια δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν εἶναι μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.*

Ἔστω Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν τυχόντων ἀριθμῶν Α, Β, Γ· λέγω, ὅτι κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι μόνα τὰ πολλαπλάσια τοῦ Ε.

*Ἀπόδειξις.* Πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶναι προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ ὡς διαιρετὸν δι' αὐτῶν πάντων.

### Θεώρημα.

106. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντικατασταθῶσι δύο οἱοιδήποτε αὐτῶν διὰ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ αὐτῶν πολλαπλασίου.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β· λέγω, ὅτι

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| οἱ ἀριθμοὶ | Α, | Β, | Γ, | Δ |
| καί οἱ | Ε, | | Γ, | Δ |

ἔχουσιν ἓν καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

*Ἀπόδειξις.* Πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ ὡς κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α καὶ Β εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τοῦ Ε, ἑπομένως εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ.

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Ε, Γ, Δ, ὡς πολλαπλάσιον τοῦ Ε εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῶν ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ Α καὶ Β, ἑπομένως εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ.

Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, Δ
καὶ οἱ Ε, Γ, Δ

ἔχουσι τὰ αὐτὰ κοινὰ πολλαπλάσια· ἔχουσιν ἄρα καὶ τὸ αὐτὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον.

Τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου δύναται νὰ ἀναχθῇ ἡ εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου πολλῶν ἀριθμῶν εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν (ὡς καὶ εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου πολλῶν ἀριθμῶν). Διότι ὡς οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β ἀντικατεστάθησαν διὰ τοῦ Ε, οὕτως οἱ Ε καὶ Γ δύνανται νὰ ἀντικατασταθῶσι διὰ τοῦ Ε′, οἱ δὲ Ε′ καὶ Δ διὰ τοῦ Ε″, ἤτοι εὑρίσκεται κατὰ σειρὰν

Α, Β, Γ, Δ
Ε, Γ, Δ
Ε′, Δ
Ε″

Ὅτι δὲ τὸ Ε″ εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ ἀποδεικνύεται εὐκόλως. Διότι πᾶν κοινὸν πολλαπλάσιον τῆς πρώτης ὁριζοντίας σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι πολλαπλάσιον καὶ τῆς δευτέρας, ὁμοίως καὶ τῆς τρίτης καὶ τῆς τετάρτης. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ Ε″ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον καὶ τῆς τρίτης σειρᾶς τῶν ἀριθμῶν, ὁμοίως καὶ τῆς δευτέρας καὶ τῆς πρώτης.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ, Δ τινὲς πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἀριθμόν τινα Κ πρῶτον πρὸς ἕκαστον τῶν λοιπῶν, τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, Δ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ Κ.

2) Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσον τῷ γινομένῳ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἑτέρου διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν.

3) Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται ἐάν τινες αὐτῶν ἀντικατασταθῶσιν ὑπὸ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου αὐτῶν.

4) Τὸ γινόμενον τριῶν ἐφεξῆς ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

5) Τὸ γινόμενον δύο ἐφεξῆς ἀριθμῶν καὶ τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν δι' 6.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

## Περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

### Ὁρισμοί.

107. *Πρῶτος ἀριθμὸς* λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς μόνον δι' ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος 1. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί.

*Σύνθετος* ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς δι' ἑαυτοῦ καὶ τῆς μονάδος 1 καὶ δι' ἄλλου τινὸς ἢ τινῶν ἀριθμῶν. Π. χ. ὁ 12 εἶναι σύνθετος ἀριθμὸς ὡς διαιρετὸς διὰ 12, 1, 2, 3, 4, 6· ὁ 4 διὰ 4, 1, 2.

Δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ ἦναι *πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους*, ἐν ᾧ δὲν εἶναι *πρῶτοι καθ' ἑαυτούς*. Π. χ. οἱ ἀριθμοὶ 6, 25, 49 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἀλλ' οὐδεὶς ἐξ αὐτῶν καθ' ἑαυτὸν εἶναι πρῶτος.

Δύνανται δὲ πολλοὶ ἀριθμοὶ νὰ ἦναι πρῶτοι *πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο*. Οἱ δὲ *καθ' ἑαυτοὺς πρῶτοι ἀριθμοὶ* εἶναι προδήλως *καὶ πρὸς ἀλλήλους πρῶτοι*.

## Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1010.

108. Δύναται νὰ σχηματισθῇ πίναξ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξὺ τοῦ ἑνὸς 1 καὶ ὡρισμένου τινὸς ἀριθμοῦ, οἷον τοῦ 1010, κατὰ τὴν ἑξῆς μέθοδον, ἥτις λέγεται *κόσκινον* τοῦ *Ἐρατοσθένους*.

Γράφονται πάντες οἱ ἀριθμοὶ ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 1010 κατὰ τὴν διαδοχικὴν αὐτῶν τάξιν:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, ....., 1010

καὶ εἶτα διαγράφονται πάντες οἱ σύνθετοι ἀριθμοί, ἤτοι τὰ πολλαπλάσια ἀπὸ τοῦ 2 καὶ ἐφεξῆς τῶν εὑρισκομένων πρώτων ἀριθμῶν.

Ὁ 2 εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 διαγράφονται (διαγραφομένου ἀπὸ τοῦ 3 καὶ ἐφεξῆς παντὸς δευτέρου ἀριθμοῦ), ἤτοι οἱ 4, 6, 8, 10, 12, ....

Ὁ 3 εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρῶτος ἀριθμός. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3 διαγράφονται (διαγραφομένου ἀπὸ τοῦ 9 ἢ $3^2$ καὶ ἐφεξῆς παντὸς τρίτου ἀριθμοῦ), ἤτοι οἱ 9, 12, 15, 18, ...., ὧν τινες διεγράφησαν ἤδη ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2.

Ὁ μετὰ τὸν 3 ἀμέσως ἑπόμενος μὴ διαγραφεὶς ἀριθμὸς 5 εἶναι πρῶτος κατὰ τὸν ὁρισμόν. Ἀλλὰ τὰ πολλαπλάσια αὐτοῦ διαγράφονται (διαγραφομένου ἀπὸ τοῦ 25 ἢ $5^2$ καὶ ἐφεξῆς παντὸς πέμπτου ἀριθμοῦ), ἤτοι οἱ 25, 30, 35, 40,...., ὧν τινες διεγράφησαν ἤδη ὡς πολλαπλάσια τοῦ 2 ἢ τοῦ 3. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Παρατηρητέον ἐν γένει, ὅτι ἡ διαγραφὴ αὕτη τῶν ἀριθμῶν δύναται χάριν συντομίας νὰ ἄρχηται ἀπὸ τοῦ τετραγώνου ἑκάστου τῶν πρώτων ἀριθμῶν καὶ ἐφεξῆς· διότι οἱ πρὸ τῶν τετραγώνων τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὡς πολλαπλάσια μικροτέρων ἀριθμῶν, εἶναι ἤδη διαγεγραμμένοι.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι, ἵνα εὑρεθῶσι πάντες οἱ μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1010 πρῶτοι ἀριθμοί, ἀρκεῖ νὰ διαγραφῶσι κατὰ τὸν ἀνωτέρω τρόπον τὰ πολλαπλάσια πάντων τῶν πρώτων ἀριθμῶν μέχρι τοῦ 37, οὗ τὸ τετράγωνον $1369 > 1010$, ὥστε οἱ οὕτως εὑρισκόμενοι μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1010 πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ γεγραμμένοι ἐν τῷ ἑπομένῳ πίνακι.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 59 | 139 | 233 | 337 | 439 | 557 | 653 | 769 | 883 |
| 1 | 61 | 149 | 239 | 347 | 443 | 563 | 659 | 773 | 887 |
| 3 | 67 | 151 | 241 | 349 | 449 | 569 | 661 | 787 | 907 |
| 5 | 71 | 157 | 251 | 353 | 457 | 571 | 673 | 797 | 911 |
| 7 | 73 | 163 | 257 | 359 | 461 | 577 | 677 | 809 | 919 |
| 11 | 79 | 167 | 263 | 367 | 463 | 587 | 683 | 811 | 929 |
| 13 | 83 | 173 | 269 | 373 | 467 | 593 | 691 | 821 | 937 |
| 17 | 89 | 179 | 271 | 379 | 479 | 599 | 701 | 823 | 941 |
| 19 | 97 | 181 | 277 | 383 | 487 | 601 | 709 | 827 | 947 |
| 23 | 101 | 191 | 281 | 389 | 491 | 607 | 719 | 829 | 953 |
| 29 | 103 | 193 | 283 | 397 | 499 | 613 | 727 | 839 | 967 |
| 31 | 107 | 197 | 293 | 401 | 503 | 617 | 733 | 853 | 971 |
| 37 | 109 | 199 | 307 | 409 | 509 | 619 | 739 | 857 | 977 |
| 41 | 113 | 211 | 311 | 419 | 521 | 631 | 743 | 859 | 983 |
| 43 | 127 | 223 | 313 | 421 | 523 | 641 | 751 | 863 | 991 |
| 47 | 131 | 227 | 317 | 431 | 541 | 643 | 757 | 877 | 997 |
| 53 | 137 | 229 | 331 | 433 | 547 | 647 | 761 | 881 | 1009 |

## Θεωρήματα περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν.

### Θεώρημα.

109. *Πᾶς σύνθετος ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν.*

Ἔστω σύνθετος ἀριθμὸς ὁ Α· λέγω, ὅτι ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ πρώτων ἀριθμῶν, ἤτοι εἶναι γινόμενον αὐτῶν.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ Α ὡς σύνθετος ἀριθμὸς ἔχει ἕνα ἢ πολλοὺς διαιρέτας ἄλλους ἢ ἑαυτὸν καὶ τὴν μονάδα 1. Ἔστω Β εἷς τῶν διαιρετῶν τούτων καὶ Π τὸ πηλίκον. Τότε ὁ Α εἶναι τὸ γινόμενον Β.Π, $(\Pi>1,\ B>1)$. Ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ Β καὶ Π ἦναι πρῶτοι καθ' ἑαυτούς, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, τοῦ Α ἀναλυθέντος εἰς γινόμενον δύο πρώτων ἀριθμῶν. Ἐὰν δὲ ὁ εἷς τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν ἢ ἀμφότεροι ἦναι σύνθετοι, ἀναλύονται ὡσαύτως ἑκάτερος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων, ἤτοι $B=B'.B''$, $\Pi=\Pi'.\Pi''$, ὅτε

$$A=B'.B''\Pi'.\Pi''.$$

Καὶ ἐὰν μὲν οἱ ἀριθμοὶ $B',B'',\Pi',\Pi''$ ἦναι πρῶτοι καθ' ἑαυτούς, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη, τοῦ Α ἀναλυθέντος εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων πρώτων· ἐὰν δὲ πάντες ἢ τινὲς τῶν τεσσάρων τούτων παραγόντων ἦναι σύνθετοι ἀναλύονται καὶ οὗτοι ἕκαστος εἰς γινόμενον δύο παραγόντων· καὶ οὕτω καθεξῆς. Διὰ τῆς ἀναλύσεως δὲ ταύτης οἱ παράγοντες, ἐξ ὧν γίνεται ὁ Α, καθίστανται ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικρότεροι, οὐχὶ δὲ μικρότεροι τοῦ 2 (διότι ὑπερβαίνουσι πάντοτε τὴν μονάδα 1), ἑπομένως εὑρίσκονται ἐπὶ τέλους παράγοντες μὴ δυνάμενοι πλέον νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς ἄλλους μικροτέρους ἀριθμοὺς καὶ εἶναι πρῶτοι καθ' ἑαυτούς. Ὥστε ὁ σύνθετος ἀριθμὸς Α ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων ἀριθμῶν ἢ παραγόντων. Π. χ. ὁ 6 ἀναλύεται εἰς τὸ γινόμενον τῶν δύο πρώτων ἀριθμῶν 2 καὶ 3, ἤτοι $6=2.3$. Ὁ δὲ 24 εἰς τὸ γινόμενον 4 6· ἑκάτερος δὲ τῶν παραγόντων τούτων ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρώτων, ἤτοι $4=2.2=2^2$, $6=2.3$. Ὥστε $24=2^3.3$.

Ἐκ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου γίνεται φανερόν, ὅτι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ (ὡς καὶ τὸ ὄνομα αὐτῶν δηλοῖ) εἶναι οἱ ἁπλούστατοι ἀρχικοὶ ἀριθμοί, ἐξ ὧν γίνονται οἱ ἀριθμοὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ. Οἱ πρῶτοι ἄρα ἀριθμοὶ καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτῶν ἔχουσι μεγίστην ῥοπὴν εἰς τὴν θεωρίαν ἐν γένει τῶν ἀριθμῶν.

### Θεώρημα.

110. *Τὸ πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν ὑπερβαίνει πάντα ἀριθμόν,* ἤτοι

εὑρεθέντος πλήθους τινὸς πρώτων ἀριθμῶν εὑρίσκονται πλὴν τούτων καὶ ἄλλοι.

Τεθείσθω, ὅτι εὑρέθησαν οἱ πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοὶ Α, Β, Γ,.....Κ (ἕκαστος μείζων τῆς μονάδος 1)· λέγω, ὅτι πλὴν τούτων εὑρίσκονται καὶ ἄλλοι πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοί.

*Ἀπόδειξις*. Λαμβάνεται τὸ γινόμενον Α.Β.Γ.....Κ εἰς τοῦτο προστίθεται ἡ μονὰς 1 καὶ οὕτως εὑρίσκεται ἀριθμός τις Μ, ἤτοι

$$Α.Β.Γ.....Κ+1=Μ.$$

Ὁ ἀριθμὸς Μ εἶναι ἢ πρῶτος ἢ σύνθετος ἀριθμός. Ἐὰν μὲν ὁ Μ ᾖναι πρῶτος, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· διότι πλὴν τῶν προτεθέντων πρώτων ἀριθμῶν Α,Β,...,Κ εὑρέθη καὶ ὁ Μ. Ἐὰν δὲ ὁ Μ ᾖναι σύνθετος, ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων· ἀλλ' οἱ παράγοντες οὗτοι εἶναι ἄλλοι ἢ οἱ Α,Β,Γ,......,Κ· διότι πᾶς κοινὸς διαιρέτης τοῦ Μ καὶ τοῦ γινομένου Α.Β.Γ.....Κ εἶναι διαιρέτης τῆς διαφορᾶς αὐτῶν 1, ἡ δὲ 1 μόνον δι' ἑαυτῆς διαιρετή· εὑρίσκονται ἄρα καὶ ἄλλοι πρῶτοι καθ' ἑαυτοὺς ἀριθμοὶ πλὴν τῶν προτεθέντων Α,Β,Γ,......Κ, δηλαδὴ ἐκεῖνοι, εἰς οὓς ἀναλύεται ὁ Μ, ἐὰν δὲν ᾖναι πρῶτος.

## Θεώρημα.

**111.** *Πᾶς πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι πρῶτος πρὸς πάντα ἀριθμὸν μὴ διαιρετὸν δι' αὐτοῦ.*

Ἔστω ὁ τυχὼν πρῶτος ἀριθμὸς 5 καὶ ἄλλος τις οἱοσδήποτε ὁ Α μὴ διαιρετὸς διὰ τοῦ 5· λέγω, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ 5 εἶναι διαιρετὸς μόνον διὰ τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 5, ὁ δὲ Α δὲν εἶναι ἐξ ὑποθέσεως διαιρετὸς διὰ 5. Ὥστε ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν 5 καὶ Α εἶναι ὁ 1, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ 5 καὶ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

## Θεώρημα.

**112.** *Ἐὰν γινόμενον ἀριθμῶν ᾖναι διαιρετὸν διὰ πρώτου ἀριθμοῦ, καὶ εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἔστω τὸ γινόμενον Α.Β διαιρετὸν διὰ πρώτου τινὸς ἀριθμοῦ Π· λέγω, ὅτι ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων Α, Β εἶναι διαιρετὸς διὰ Π.

*Ἀπόδειξις*. Ἐὰν μὲν ὁ Α διαιρετὸς διὰ Π, τὸ θεώρημα ἀπεδείχθη· ἐὰν δὲ ὁ Α δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ Π, ὁ Π καὶ ὁ Α εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (ἐδ. 111) καὶ ἐπομένως ὁ Β διαιρετὸς διὰ Π (ἐδ. 100).

Ἔστω νῦν τὸ γινόμενον πλειόνων παραγόντων, π. χ. τριῶν Α. Β. Γ, διαιρετὸν διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Π· λέγω πάλιν, ὅτι εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων Α, Β, Γ εἶναι διαιρετὸς διὰ Π.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ γινόμενον Α.Β.Γ ἰσοῦται τῷ γινομένῳ Α.(Β.Γ), ἐπομένως ἢ ὁ παράγων Α ἢ ὁ παράγων (Β.Γ) εἶναι διαιρετὸς διὰ Π. Ἀλλ' ἐὰν ὁ (Β.Γ) ἦναι διαιρετὸς διὰ Π, ὁ ἕτερος τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων Β.Γ εἶναι διαιρετὸς διὰ Π. Ὥστε, ἐὰν τὸ γινόμενον Α.Β.Γ ἦναι διαιρετὸν διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Π, εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων Α,Β,Γ τοῦ γινομένου τούτου εἶναι διαιρετὸς διὰ Π.

Ὁμοίως γίνεται ἡ ἀπόδειξις καὶ περὶ πλειόνων παραγόντων.

*Πόρισμα 1. Ἐὰν ἀριθμὸς πρῶτος διαιρῇ δύναμιν ἀριθμοῦ τινος, διαιρεῖ καὶ αὐτὸν τὸν ἀριθμόν· καὶ τἀνάπαλιν.*

Ἔστω ὁ $A^3$ διαιρετὸς διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Π· λέγω ὅτι καὶ ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ Π. Διότι $A^3 = A.A.A$.

*Πόρισμα 2. Ἐὰν γινόμενον παραγόντων πρώτων καθ' ἑαυτοὺς ἦναι διαιρετὸν διὰ πρώτου ἀριθμοῦ, οὗτος εἶναι παράγων αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ γινόμενον Α.Β.Γ τῶν πρώτων παραγόντων Α,Β,Γ (ἕκαστος $>1$) διαιρετὸν διὰ τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ Π· λέγω, ὅτι ὁ Π εἶναι εἷς τῶν Α,Β,Γ. Διότι ὁ Π ὡς διαιρῶν τὸ γινόμενον Α.Β.Γ διαιρεῖ ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ, π. χ. τὸν Β, ἀλλὰ τὸ τοιοῦτον γίνεται ἐνταῦθα μόνον, ἐὰν $\Pi = B$.

## Θεώρημα.

113. *Ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοί· καὶ ἕκαστος περιέχεται εἰς ἀμφότερα ἰσάκις.*

Ἔστωσαν Μ καὶ Ν χάριν συντομίας δύο γινόμενα πρώτων παραγόντων τοιαῦτα, ὥστε $M = N$· λέγω, ὅτι πᾶς παράγων τοῦ Μ εἶναι καὶ τοῦ Ν παράγων καὶ ὁσάκις παράγων τις περιέχεται ἐν τῷ Μ, τοσάκις περιέχεται καὶ ἐν τῷ Ν.

*Ἀπόδειξις*. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἀμφότερα τὰ γινόμενα Μ καὶ Ν ἀποτελοῦνται ἐκ παραγόντων πρώτων καθ' ἑαυτοὺς καὶ εἶναι $M=N$, πᾶς πρῶτος παράγων α τοῦ M ὡς διαιρῶν αὐτὸ διαιρεῖ καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ, ἤτοι τὸ N, ἐπομένως ὁ α εἶναι καὶ τοῦ N πρῶτος παράγων (ἐδ. 112). Καὶ τἀνάπαλιν· πᾶς πρῶτος παράγων τοῦ N εἶναι καὶ τοῦ M πρῶτος παράγων.

Καὶ ἐὰν τὸ M περιέχῃ τὴν τρίτην δύναμιν πρώτου τινὸς παράγοντος β, ἤτοι τὸν $\beta^3$, καὶ τὸ N περιέχει τὸν $\beta^3$. Διότι, ἐὰν τὸ N περιέχῃ ἢ τὸν $\beta^2$ ἢ τὸν $\beta^7$ καὶ διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $M=N$ ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει διὰ $\beta^2$, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει διὰ $\beta^3$· τότε ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ M περιέχει τὸν πρῶτον παράγοντα β τὸν μὴ περιεχόμενον πλέον ἐν τῷ N, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τὸ N περιέχει τὸν β τὸν μὴ περιεχόμενον πλέον ἐν τῷ M· ἀμφότεραι ἄρα αἱ περιπτώσεις αὗται ἄγουσιν εἰς ἄτοπον καὶ ἐπομένως τὸ M καὶ τὸ N περιέχουσιν ἰσάκις, ἤτοι τρίς, τὸν παράγοντα τοῦτον β. Καὶ τἀνάπαλιν· πᾶσα δύναμις πρώτου τινὸς παράγοντος τοῦ N περιέχεται ἰσάκις καὶ ἐν τῷ M.

Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι, ἐὰν δύο γινόμενα παραγόντων πρώτων καθ' ἑαυτοὺς ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων εἶναι οἱ αὐτοὶ καὶ μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρωσιν ἀλλήλων.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι *καθ' οἱονδήποτε τρόπον καὶ ἂν ἀναλυθῇ ἀριθμός τις εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, πάντοτε οἱ αὐτοὶ παράγοντες εὑρίσκονται.*

**114.** Ἡ δὲ μέθοδος, δι' ἧς ἐκτελεῖται συνήθως ἡ ἀνάλυσις τῶν συνθέτων ἀριθμῶν εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας, φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ ἑπομένου παραδείγματος.

Ἔστω ὁ ἀριθμὸς 708 πρὸς ἀνάλυσιν εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας. Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 708 | 2 | | |
| 354 | 2 | ὅπου | $708=2.354$ |
| 177 | 3 | | $354=2.177$ |
| 59 | 59 | | $177=3.59$ |
| 1 | | ὅθεν | $708=2^2.3.59$ |

Ἄγεται κατακόρυφος γραμμή· καὶ εἰς μὲν τὸ ἕτερον μέρος τῆς γραμμῆς ταύτης γράφεται ὁ πρὸς ἀνάλυσιν ἀριθμὸς καὶ ὑπ' αὐτὸν τὰ διαδοχικὰ πηλίκα αὐτοῦ διὰ τῶν εὑρεθέντων κατὰ διαδοχικὴν τάξιν πρώτων παραγόντων, οἵτινες γράφονται εἰς τὸ ἕτερον μέρος τῆς ἀχθείσης κατακορύφου γραμμῆς.

Εὑρίσκονται δὲ οἱ ἀπὸ τοῦ 2 καὶ ἐφ' ἑξῆς διαδοχικοὶ πρῶτοι ἀριθμοὶ κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν ῥηθέντα (ἐδ. 80, κλ.) καὶ ἐκ τοῦ πίνακος τῆς σελίδος 72 τοῦ περιέχοντος τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς τοὺς περιλαμβανομένους μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 1010.

Αἱ δὲ δυνάμεις τοῦ 10 ἀναλύονται ἀμέσως εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας· διότι $10=2.5$. Π.χ.

$$1000=10^3=(2.5)^3=2^3.5^3$$
$$100000=10^5=(2.5)^5=2^5.5^5, \text{ κλ.}$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται ἀμέσως π.χ.

$$600=6.100=6.10^2=2.3.2^2.5^2=2^3.3.5^2$$
$$220000=2.11.2^4.5^4, 340=2.17.2.5=2^2.5.17. \text{ κλ.}$$

## Ἐφαρμογαὶ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας.

### α') Πολλαπλασιασμός.

Θεώρημα.

115. *Τὸ γινόμενον δύο ἢ πολλῶν ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν πρώτων παραγόντων τῶν ἀριθμῶν· ἕκαστος δὲ τῶν παραγόντων τούτων ἐν τῷ γινομένῳ ἔχει ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων τῶν δεδομένων ἀριθμῶν.*

Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοὶ $A=2^3.3^2.5$, $B=2^4.3.7$, $\Gamma=5^3.7.11^2$· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον $A.B.\Gamma$ ἰσοῦται τῷ $2^7.3^3.5^4.7^2.11^2$.

Διότι $A.B.\Gamma.=(2^3.3^2.5).(2^4.3.7).(5^3.7.11^2)=$

$$=2^3.3^2.5.2^4.3.7.5^3.7.11^2.=2^3.2^4.3^2.3.5.5^3.7.7.11^2=$$
$$=2^7.3^3.5^4.7^2.11^2.$$

*Πόρισμα. Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας ὑψοῦται εἰς οἱονδήποτε ἐκθέτην (ἢ δύναμιν), ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦτον.*

Ἔστω $A=2^3.3^5.7^2.19$· λέγω, ὅτι $A^2=2^6.3^{10}.7^4.19^2$

Διότι $A^2=(2^3.3^5.7^2.19)^2=(2^3.3^5.7^2.19).(2^3.3^5.7^2.19)=$

$$=2^3.3^5.7^2.19^1.2^3.3^5.7^2.19^1.=2^6.3^{10}.7^4.19^2.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται $A^3=2^9.3^{15}.7^6.19^3$. Καὶ γενικῶς· ἐὰν $A=\alpha^{\lambda}.\ \beta^{\mu}.\ \gamma^{\nu}$, εὑρίσκεται $A^{\rho}=\alpha^{\lambda\rho}.\ \beta^{\mu\rho}.\ \gamma^{\nu\rho}$.

Θεώρημα.

116. *Ἀριθμος εἶναι τετράγωνον, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἦναι διαιρετοὶ πάντες διὰ τοῦ 2· κύβος δέ, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἦναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3.* Καὶ γενικῶς· *ἀριθμὸς εἶναι μυοστὴ δύναμις, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ ἦναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μ.*

Ἔστω τυχὼν ἀριθμὸς τὸ γινόμενον $2^4.3^8.7^6.11^2$, τοῦ ὁποίου πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες ἔχουσιν ἐκθέτας ἀρτίους, ἤτοι διαιρετοὺς διὰ 2· λέγω, ὅτι τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $2^2.3^4.7^3.11$, ὅπερ εὑρίσκεται διὰ διαιρέσεως πάντων τῶν ἐκθετῶν 4,8,6,2 διὰ 2.

Διότι $(2^2.3^4.7^3.11)^2=2^4.3^8.7^6.11^2$

Τοὐναντίον δὲ ὁ ἀριθμὸς $2^3.5^2.7^4$, οὗ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων δὲν εἶναι πάντες ἄρτιοι (ὁ παράγων 2 ἔχει ἐκθέτην 3), δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου. Διότι παντὸς τετραγώνου οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ ἔχουσι τοὺς ἐκθέτας πάντας ἀρτίους ὡς προκύπτοντας ἐξ ἄλλων ἐκθετῶν διὰ διπλασιασμοῦ.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $2^{12}.3^3.5^9.7^6$ εἶναι ὁ κύβος τοῦ $2^4.3.5^3.7^2$. Καὶ οὕτω καθεξῆς.

Καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον $\alpha^{\lambda}.\ \beta^{\rho}.\ \gamma^{\mu}$ εἶναι ἡ νυοστὴ δύναμις τοῦ $\alpha^{\lambda'}.\ \beta^{\rho'}.\ \gamma^{\mu'}$, ὅπου $\lambda'=\lambda:\nu$, $\rho'=\rho:\nu$, $\mu$, $\mu'=\mu:\nu$.

## β΄) Διαίρεσις.

Θεώρημα.

117. *Ἀριθμὸς ἀναλελυμένος εἰς πρώτους παράγοντας εἶναι διαιρετὸς δι᾿ ἄλλου ἀναλελυμένου ὡσαύτως, ἐὰν περιέχῃ πάντας τοὺς παράγοντας τούτου καὶ ἕκαστον μετ᾿ ἐκθέτου μὴ ἐλάσσονος ἢ τοὐλάχιστον ἴσου· τοῦτο δὲ καὶ ἀρκεῖ.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ $A=2^4.3^2.5.7^3.11^2$ καὶ $B=2^3.3^2.5.7^2$, ἀναλελυμένοι ἀμφότεροι εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας· λέγω, ὅτι ὁ A εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ B.

*Απόδειξις.* Ὡς γνωστόν, ἐν πάσῃ τελείᾳ διαιρέσει ὁ διαιρετέος ἰσοῦται τῷ διαιρέτῃ ἐπὶ τὸ πηλίκον, ἤτοι εἶναι γινόμενον πάντων τῶν παραγόντων καὶ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ πηλίκου. Ἀλλ' ὁ Α περιέχει προφανῶς πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ Β καὶ ἕκαστον τούτων μετ' ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος (τοὺς παράγοντας 2 καὶ 7) ἢ τοὐλάχιστον ἴσου (τοὺς παράγοντας 3 καὶ 5)· περιέχει δὲ πρὸς τούτοις καὶ τὸν παράγοντα $11^2$ τὸν μὴ περιεχόμενον ἐν τῷ Β. Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· δηλαδὴ ἐὰν ὁ Α περιέχῃ πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας τοῦ Β καὶ ἕκαστον μετ' ἐκθέτου οὐχὶ ἐλάσσονος ἢ τοὐλάχιστον ἴσου, ὁ Α εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ Β. Διότι, ἐὰν ἀπὸ τῶν παραγόντων τοῦ Α παραλειφθῶσι πάντες οἱ τοῦ Β καὶ ἰσάκις ἕκαστος, οἱ μένοντες παράγοντες τοῦ Α, ἤτοι οἱ $2.7.11^2$, ἀποτελοῦσι τὸ πηλίκον Π τοῦ Α διὰ τοῦ Β, τουτέστιν

$$A = B.\Pi \text{ ἢ } 2^4.3^2.5.7^3.11^2 = (2^3.3^2.5.7^2).(2.7.11^2)$$

Τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ θεωρήματος τούτου δύνανται νὰ εὑρεθῶσι πάντες οἱ διαιρέται δοθέντος ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτοῦ κατὰ τὸν ἑξῆς κανόνα.

118. *Πρὸς εὕρεσιν πάντων τῶν διαιρτεῶν δοθέντος ἀριθμοῦ, ἀναλύεται οὗτος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας καὶ σχηματίζεται ἐξ αὐτῶν πίναξ συγκείμενος ἐκ τόσων ὁριζοντίων σειρῶν, ὅσοι εἶναι οἱ διάφοροι ἀλλήλων πρῶτοι παράγοντες τοῦ ἀριθμοῦ. Ἑκάστη δὲ τῶν σειρῶν τούτων περιέχει τὴν 1 καὶ τὰς διαδοχικὰς δυνάμεις ἑνὸς πρώτου ἀριθμοῦ ἀπὸ τῆς πρώτης καὶ ἐφεξῆς μέχρι τῆς ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ περιεχομένης. Μετὰ ταῦτα πολλαπλασιάζεται ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς πρώτης σειρᾶς ἐφ' ἕκαστον τῆς δευτέρας, εἶτα ἕκαστον τῶν οὕτως εὑρεθέντων γινομένων ἐφ' ἕκαστον ἀριθμὸν τῆς τρίτης· καὶ οὕτω καθεξῆς. Τὰ τελευταῖα γινόμενα, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς τῆς τελευταίας σειρᾶς, εἶναι πάντες οἱ διαιρέται τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ.*

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ἐὰν π. χ. ληφθῇ ὁ 120, ἤτοι τὸ $2^3.3.5$, εὑρίσκεται διαδοχικῶς

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3 \\ 1, & 3 & & \\ 1, & 5 & & \end{array}$$

εἶτα

$$\begin{array}{llll} 1, & 2, & 2^2, & 2^3. \\ 1.3, & 2.3, & 2^2.3, & 2^3.3 \end{array}$$

εἶτα

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, | 2 , | $2^2$ , | $2^3$ |
| 1.3, | 2.3 , | $2^2.3$ , | $2^3.3$ |
| 1.5 , | 2.5 , | $2^2.5$ , | $2^3.5$ |
| 1.3.5, | 2.3.5, | $2^2.3.5$, | $2^3.3.5$ |

ἢ μετὰ τὰς πράξεις

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1, | 2, | 4, | 8 |
| 3, | 6, | 12, | 24 |
| 5, | 10, | 20, | 40 |
| 15, | 30, | 60, | 120 |

Ὁ δὲ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τούτων εἶναι προφανῶς $4.2.2=16$.

Καὶ γενικῶς, ἐὰν $A=\alpha^{\lambda}.\beta^{\mu}.\gamma^{\nu}.\delta^{\rho}$, δύναται νὰ εὑρεθῇ εὐκόλως τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ Α. Κατὰ τὴν εὕρεσιν πάντων τῶν διαιρετῶν τοῦ Α, ἡ μὲν πρώτη ὁριζοντία σειρὰ περιέχει $(\lambda+1)$ διαιρέτας, ἡ δὲ δευτέρα $(\mu+1)$, ἡ δὲ τρίτη $(\nu+1)$ καὶ ἡ τετάρτη $(\rho+1)$. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ἕκαστος ἀριθμὸς (ἢ ὅρος) τῆς πρώτης σειρᾶς ἐπὶ ἕκαστον τῆς δευτέρας, ὁ ἀριθμὸς τῶν γινομένων εἶναι $(\lambda+1).(\mu+1)$· ἐὰν δὲ πολλαπλασιασθῶσιν ἕκαστον των γινομένων τούτων ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τῆς τρίτης, ὁ ἀριθμὸς τῶν γινομένων εἶναι $(\lambda+1).(\mu+1).(\nu+1)$· ἐὰν δὲ τέλος πολλαπλασιασθῶσιν ἕκαστον τῶν γινομένων τούτων ἐπὶ ἕκαστον ὅρον τῆς τετάρτης σειρᾶς, ὁ ἀριθμὸς τῶν τελευταίων τούτων γινομένων, ἤτοι ὁ ἀριθμὸς τῶν διαιρετῶν τοῦ Α, εἶναι $(\lambda+1).(\mu+1).(\nu+1).(\rho+1)$. Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ πάντων τῶν διαιρετῶν ἀριθμοῦ τινος, *ἀναλύεται οὗτος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, αὐξάνεται κατὰ 1 ἕκαστος τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων τούτων καὶ εὑρίσκεται τὸ γινόμενον πάντων τῶν οὕτω προκυπτόντων ἀριθμῶν.*

## γ΄) Πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοί.

Θεώρημα.

119. *Οἱ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ οὐδένα ἔχουσι πρῶτον παράγοντα κοινόν.* Καὶ ἀντιστρόφως· *οἱ ἀριθμοὶ οἱ οὐδένα ἔχοντες πρῶτον παράγοντα κοινὸν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι οἱ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ οὐδένα δύνανται νὰ ἔχωσι κοινὸν διαιρέτην. Οἷον οἱ $2.3^2.5$, $2^2.7^3$, $7.11^2$.

### Θεώρημα.

120. *Ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους καὶ αἱ δυνάμεις εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.*

Διότι, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ μηδένα ἔχωσι πρῶτον παράγοντα κοινόν, οὐδὲ αἱ δυνάμεις αὐτῶν ἔχουσι κοινὸν παράγοντα. Οἷον αἱ δυνάμεις $2^5$, $5^3$, $6^4$, $7^2$, τῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν 2, 5, 6, 7, εἶναι ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

### Θεώρημα.

121. *Ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς δι' ἄλλων ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν.*

Τεθείσθω, ὅτι ἀριθμός τις Δ εἶναι διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν $\alpha=2^3.5$, $\beta=3^2.7.11$, $\gamma=17^2.29$, οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο ὡς ἀποτελούμενοι ἐκ παραγόντων ὅλως διαφερόντων ἀλλήλων (τοῦ αὐτοῦ πρώτου παράγοντος μὴ εὑρισκομένου εἰς δύο ἀριθμούς)· λέγω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς Δ εἶναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν $\alpha.\beta\,\gamma$.

*Ἀπόδειξις*. Ὁ ἀριθμὸς Δ ὡς διαιρετὸς δι' ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν α, β, γ περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας $2^3$, 5, $3^2$, 7, 11, $17^2$, 29 αὐτῶν (ἐδ. 117), ἤτοι περιέχει πάντας τοὺς παράγοντας τοῦ γινομένου $\alpha.\beta.\gamma$ τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ ἑπομένως ὁ Δ εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ $\alpha.\beta.\gamma$.

*Σημείωσις*. Ὅταν ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς διὰ δύο ἄλλων μὴ πρώτων πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, δυνατὸν νὰ μὴ ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν. Π. χ. ὁ 28 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 14 καὶ διὰ τοῦ 7, ἀλλ' οὐχὶ καὶ διὰ τοῦ γινομένου αὐτῶν 14.7.

Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι διὰ τοῦ θεωρήματος τούτου εὐκολύνεται ἡ εὕρεσις τῶν γνωρισμάτων τῆς διαιρετότητος τῶν ἀριθμῶν, ὅταν διαιρέτης τις ἦναι σύνθετος ἀριθμός. Ἵνα π. χ. ἀριθμός τις ἦναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 6, ἤτοι διὰ 2. 3, ἀνάγκη νὰ ἦναι διαιρετὸς καὶ διὰ τοῦ 2 καὶ διὰ τοῦ 3· διότι οἱ ἀριθμοὶ 2 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὁμοίως διὰ τοῦ 24 εἶναι διαιρετὸς πᾶς ἀριθμὸς ὁ διαιρετὸς διὰ τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 8, κλ.

## δ') Εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.

Θεώρημα.

122. *Ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εἶναι τὸ γινόμενον τὸ περιέχον μόνον τοὺς κοινοὺς αὐτῶν πρώτους παράγοντας ἕκαστον μετὰ τοῦ ἐλαχίστου ἐκθέτου, ὃν ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τούτοις.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ ἀναλελυμένοι ἕκαστος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἤτοι ἔστω

$$A = 2^4 . 3^2 . 5$$
$$B = 2^3 . 3^2 . 5^2$$
$$\Gamma = 2^5 . 3^2 . 7^2\ 11$$

Οἱ κοινοὶ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι ὁ 2 (τρὶς) καὶ ὁ 3 (δὶς)· λέγω, ὅτι ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ εἶναι τὸ γινόμενον $2^3 . 3^2$, ἤτοι ὁ 72.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ ἀριθμὸς $2^3 . 3^2$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ· διότι πάντες οἱ πρῶτοι παράγοντες αὐτοῦ περιέχονται εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ καὶ ἢ ἰσάκις (ὡς ὁ 3) ἢ πλεονάκις (ὡς ὁ 2)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $2^3 . 3^2$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς $2^3 . 3^2$ εἶναι καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχῃ ἀνωτέραν τινὰ δύναμιν τοῦ 2 ἢ τοῦ 3, π.χ. τὸν $2^4$, ὁ Β δὲν εἶναι διαιρετὸς δι' αὐτοῦ ὡς περιέχων τὸν 2 μόνον εἰς τὴν τρίτην δύναμιν· ἐὰν δὲ περιέχῃ παράγοντά τινα π. χ. τὸν $7^2$ ἢ τὸν 11, ὁ Α καὶ ὁ Β δὲν εἶναι διαιρετοὶ δι' αὐτοῦ ὡς μὴ περιέχοντες τοὺς παράγοντας τούτους. Ὁ ἀριθμὸς ἄρα $2^3 . 3^2$, ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν Α, Β, Γ, περιέχων πάντας τοὺς κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν καὶ οὐδεμίαν ἐπὶ πλέον αὔξησιν ἐπιδεχόμενος, εἶναι καὶ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

*Σημείωσις.* Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ δὲν ἔχωσι πρώτους παράγοντας κοινούς, τότε λαμβάνεται ὡς κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ μονὰς 1 καὶ ἐπομένως εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

## ε΄) Εὕρεσις τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας.

Θεώρημα.

123. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας εἶναι τὸ γινόμενον τὸ περιέχον πάντας τοὺς πρώτους αὐτῶν παράγοντας (κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς) ἕκαστον μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου, ὃν ἔχει ἐν τοῖς ἀριθμοῖς τούτοις.*

Ἔστωσαν οἱ τυχόντες ἀριθμοὶ Α, Β, Γ ἀναλελυμένοι ἕκαστος εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, ἤτοι ἔστω

$$
\begin{aligned}
A &= 2^3 . 3^2 . 5^2 \\
B &= 2^4 . 3^3 . 5^2 . 7^3 \\
\Gamma &= 2 . 3^2 . 5^2 . 11
\end{aligned}
$$

Οἱ πρῶτοι παράγοντες τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι οἱ 2, 3, 5, 7, 11. Μέγιστος δὲ ἐκθέτης τοῦ μὲν 2 εἶναι ὁ 4, τοῦ δὲ 3 εἶναι ὁ 3, τοῦ δὲ 5 ὁ 2, τοῦ δὲ 7 ὁ 3 καὶ τοῦ 11 ὁ 1· λέγω, ὅτι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ εἶναι τὸ γινόμενον $2^4.3^3.5^2.7^3.11$.

*Ἀπόδειξις.* Ὁ ἀριθμὸς $2^4.3^3.5^2.7^3.11$ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ· διότι περιέχει πάντας τοὺς πρώτους παράγοντας αὐτῶν καὶ ἢ ἰσάκις (ὡς τὸν 5) ἢ πλεονάκις (ὡς τὸν 2, τὸν 3, τὸν 7 καὶ τὸν 11· οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β περιέχουσιν ὁ μὲν τὸν 11, ὁ δὲ τὸν 11 καὶ τὸν 7 εἰς τὴν 0 δύναμιν)· ὥστε ὁ ἀριθμὸς $2^4.3^3.5^2.7^3.11$ εἶναι κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς $2^4\ 3^3.5^2.7^3.\ 11$ εἶναι καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ. Διότι, ἐὰν μὲν ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχῃ κατωτέραν τινὰ δύναμιν τῶν παραγόντων αὐτοῦ, π. χ. τὸν $2^2$, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ Α, οὐδὲ διὰ τοῦ Β ὡς περιεχόντων τὸν 2, τοῦ μὲν εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν, τοῦ δὲ εἰς τὴν τρίτην· ἐὰν δὲ δὲν περιέχῃ παράγοντάς τινας, π. χ. τὸν 11, δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ Γ ὡς περιέχοντος τὸν παράγοντα τοῦτον.

Ὁ ἀριθμὸς ἄρα $2^4.3^4.5^2.7^3.\ 11$, τὸ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν Α, Β, Γ, ὁ περιέχων πάντας τοὺς κοινοὺς καὶ μὴ κοινοὺς παράγοντας αὐτῶν καὶ οὐδεμίαν ἄλλην ἐλάττωσιν ἐπιδεχόμενος, εἶναι καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν Α, Β, Γ.

*Σημείωσις.* Όταν οἱ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ ἦναι καθ' ἑαυτοὺς πρῶτοι, τότε λαμβάνεται ὡς κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ μονὰς 1 καὶ ἑπομένως τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενον Α. Β. Γ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

## στ') Σχέσις μεταξὺ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου δύο ἀριθμῶν.

### Θεώρημα.

124. *Τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον δύο ἀριθμῶν πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν ἰσοῦται τῷ γινομένῳ αὐτῶν.*

Ἔστωσαν Α καὶ Β δύο τυχόντες ἀριθμοί, Μ ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης αὐτῶν καὶ Ε τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν· λέγω, ὅτι εἶναι

$$M.E = A.B.$$

*Ἀπόδειξις.* Οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β δύνανται νὰ ἀναλυθῶσιν εἰς πρώτους παράγοντας καὶ ἔστω :

$$A = 2^3 \cdot 3^2.5$$
$$B = 2^2.\ 3.7^2$$

Ὁ μὲν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης Μ τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον $2^2.3$, ἤτοι $M = 2^2.3$, (ἐδ. 122), τὸ δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον Ε τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον $2^3.3^2.5.7^2$ ἤτοι

$$E = 2^3.3^2.5.7^2, \text{ (ἐδ. 123).}$$

Ἐὰν δὲ ὁ Μ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ Ε, εὑρίσκεται τὸ γινόμενον Α.Β· διότι

$$M.E = (2^2.3).(2^3.3^2.5.7^2) = 2^5.3^3.5.7^2$$
$$A.B = (2^3.3^2.5).(2^2.3.7^2) = 2^5.3^3.5.7^2$$

ὥστε (ἐδ. 18).

$$M.E = A.B, \quad \text{ὅπερ ἔδει δεῖξαι.}$$

Ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης ἕπεται, ὅτι $M = (A.B) : E$ καὶ $E = (A.B) : M$

*Σημείωσις.* Όταν οἱ δύο ἀριθμοὶ Α καὶ Β ἦναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, τότε λαμβάνεται κοινὸς παράγων αὐτῶν ἡ 1 καὶ ἑπομένως

$$M = 1 \text{ καὶ } E = A.\ B.$$

*Παρατήρησις.* Διὰ τῆς ἀναλύσεως τῶν ἀριθμῶν εἰς πρώτους παράγοντας δύνανται νὰ δειχθῶσι πάντα τὰ περὶ αὐτῶν θεωρήματα.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τίνες οἱ μικρότεροι τοῦ 28 ἀριθμοὶ οἱ πρῶτοι πρὸς αὐτόν;

2) Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, πλὴν τοῦ 2, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ 1,

3) Πᾶς πρῶτος ἀριθμός, πλὴν τοῦ 2 καὶ τοῦ 3, εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 ηὐξημένον ἢ ἠλαττωμένον κατὰ 1.

4) Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διὰ 30 διαιρέσεως παντὸς πρώτου ἀριθμοῦ εἶναι ἀριθμὸς πρῶτος.

5) Τὸ διπλάσιον τετραγώνου δὲν εἶναι τετράγωνον, οὐδὲ τὸ τριπλάσιον. Καὶ γενικῶς τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ μὴ τετραγώνου ἐπὶ ἄλλον, ὅστις εἶναι τετράγωνον, δὲν δύναται νὰ ἦναι τετράγωνον.

6) Ἐὰν πάντες οἱ διαιρέται ἀριθμοῦ γραφῶσιν εἰς μίαν σειρὰν κατὰ τάξιν μεγέθους, τὸ γινόμενον δύο διαιρετῶν ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἰσοῦται πάντοτε τῷ ἀριθμῷ.

7) Πότε ἀριθμός τις εἶναι διαιρετὸς διὰ 12, 15, 18, 20, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 30;

8) Τίνες οἱ κοινοὶ διαιρέται καὶ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 360, 900, 672;

9) Ποῖον τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$;

10) Ποῖος ὁ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν

$$\alpha^2.\beta^3.\gamma^3,\ \alpha^5.\beta^2.\gamma^3.\delta,\ \alpha^3.\beta.\gamma^3.\varepsilon.$$

καὶ τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν;

11) Τίνες οἱ διαιρέται τῆς δυνάμεως $(1-2\alpha)^3$, καὶ τοῦ γινομένου

$$(\alpha^2-\beta^2).(\alpha+\beta).(\alpha-\beta);$$

12) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν ὁ μὲν μέγιστος κοινὸς διαιρέτης ὁ 12, τὸ δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον ὁ 120.

13) Ἐὰν ἀριθμὸς δὲν ἦναι διαιρετὸς διὰ μηδενὸς τῶν πρώτων ἀριθμῶν, ὧν τὰ τετράγωνα περιέχει, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος. Ἡ ἀπόδειξις διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

14) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν γινόμενον ἢ 12 ἢ 24 ἢ 15 ἢ 40 ἢ 35 ἢ 159, τὸ δὲ ἄθροισμα ἀντιστοίχως ἢ 7 ἢ 11 ἢ 7 ἢ 13 ἢ 12 ἢ 56.

15) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ μὲν γινόμενον α, ὁ δὲ μέγιστος κοινὸς διαιρέτης β, ἢ ὧν τὸ μὲν γινόμενον α, τὸ δὲ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον γ.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'

## Περὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

### Ὁρισμοί.

125. *Κλασματικὴ μονὰς* λέγεται ἓν τῶν ἴσων μερῶν, εἰς ἃ δύναται νὰ διαιρῆται ἡ ἀκεραία μονὰς ποσοῦ τινος. Π. χ. ὁ πῆχυς ὁ μικρὸς τῆς Κωνσταντινουπόλεως διαιρεῖται εἰς 8 ἴσα μέρη καλούμενα *ὄγδοα* (ρούπια), ὧν ἕκαστον ἀπαγγέλλεται *ἓν ὄγδοον* καὶ γράφεται $\frac{1}{8}$. Ἡ ὀκᾶ διαιρεῖται εἰς τετρακόσια ἴσα μέρη (δράμια) ὧν ἕκαστον ἀπαγγέλλεται *ἓν τετρακοσιοστὸν* καὶ γράφεται $\frac{1}{400}$. Καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Τὸ *ἥμισυ ἢ ἓν δεύτερον*, τὸ *τρίτον*, τὸ *τέταρτον*, κ.λ. τῆς ἀκεραίας μονάδος 1 γράφονται $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ...

*Κλασματικὸς ἀριθμὸς* λέγεται τὸ σύνολον κλασματικῶν μονάδων, ἢ γενικώτερον τὸ σύνολον ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν μονάδων. Π. χ. ὁ ἐκ τριῶν ὀγδόων ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἶναι κλασματικὸς καὶ γράφεται $\frac{3}{8}$, ὁμοίως ὁ $\frac{7}{3}$ (ἐδ. 25). Οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ ἁπλῶς *κλάσματα*· Οἱ δὲ δύο ἀριθμοί, δι' ὧν ἀπαγγέλλονται καὶ γράφονται τὰ κλάσματα, ἤτοι ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς παντὸς κλάσματος λέγονται *ὅροι τοῦ κλάσματος*.

*Ὁμώνυμα* λέγονται δύο ἢ πολλὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν ἢ τὰ παραγόμενα ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος ὡς $\frac{5}{23}$, $\frac{20}{23}$, $\frac{1}{23}$. *Ἑτερώνυμα* δὲ λέγονται, ὅταν ἔχωσι διαφόρους ἀλλήλων παρονομαστάς, ἢ τὰ παραγόμενα ἐκ διαφόρων κλασματικῶν μονάδων, ὡς $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{8}{26}$, $\frac{5}{4}$.

*Μικτὸς* λέγεται ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος καὶ ἐξ ἀκεραίων καὶ ἐκ κλασματικῶν μονάδων, ὡς ὁ $5+\frac{3}{4}$. Πᾶν κλάσμα δύναται νὰ ἦναι ἢ ἴσον ἢ ἔλασσον ἢ μεῖζον τῆς μονάδος 1. Καὶ τὸ μὲν κλάσμα τὸ ἔχον ἀμφοτέρους αὐτοῦ τοὺς ὅρους ἴσους πρὸς ἀλλήλους, οἷον τὸ $\frac{5}{5}$, ἰσοῦται τῷ 1, τὸ δὲ ἔχον τὸν ἀριθμητὴν ἐλάσσονα τοῦ παρονομαστοῦ οἷον τὸ $\frac{3}{5}$ εἶναι ἔλασσον τῆς 1, καὶ τὸ ἔχον τὸν ἀριθμητὴν μείζονα τοῦ παρονομαστοῦ, οἷον τὸ $\frac{7}{5}$, εἶναι μεῖζον τῆς 1. Διότι ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τὸ $\frac{1}{5}$ λαμβάνεται πεντάκις καὶ ἐπομένως ἀποτελεῖ μίαν ἀκεραίαν μονάδα, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ τὸ $\frac{1}{5}$ λαμβάνεται μόνον τρὶς καὶ ἐπομένως ἀποτελεῖ ἀριθμὸν ἐλάσσονα τῆς ἀκεραίας μονάδος, ἐν δὲ τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει τὸ $\frac{1}{5}$ λαμβάνεται ἑπτάκις, ἤτοι πλέον ἢ πεντάκις, καὶ ἐπομένως ἀποτελεῖ ἀριθμὸν μείζονα τῆς ἀκεραίας μονάδος.

*Ἴσα* ἢ *ἰσοδύναμα* λέγονται δύο κλάσματα, πρὸς ἄλληλα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους. Π. χ. τὰ δύο κλάσματα $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{4}$ εἶναι ἴσα· διότι τὸ μὲν $\frac{1}{2}$ παράγει τὴν 1, ἐὰν ληφθῇ *δίς*, ἤτοι $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{1}{2}$ ἴσον 1· τὸ δὲ $\frac{2}{4}$ ἤτοι $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$, ἐὰν ληφθῇ ὁμοίως *δίς*, ἤτοι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$, παράγει ὡσαύτως 1.

*Ἄνισα* δὲ λέγονται δύο κλάσματα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν ἰσάκις λαμβανόμενα γίνωνται ἀκέραιοι ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους· καὶ μεῖζον μὲν λέγεται τὸ παράγον τὸν μείζονα, ἔλασσον δὲ τὸ παράγον τὸν ἐλάσσονα ἀκέραιον. Π. χ. τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{1}{2}$ εἶναι ἄνισα καὶ $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$· διότι, ἐὰν ληφθῶσι ἀμφότερα ἑξάκις, γίνονται τὸ μὲν $\frac{2}{3}$ ἢ τὸ $\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=4,$$

τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ γίνεται $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=3$

Ὁ ἀριθμὸς ὡς παριστῶν τὸ πλῆθος μονάδων λέγεται καὶ *ἀξία* ἢ *τιμὴ* αὐτοῦ.

## Τροπὴ ἀκεραίων ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

126. *Ἀκέραιος ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν μὲν οἱονδήποτε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἀριθμητὴν δὲ τὸ γινόμενον τοῦ παρονομαστοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.*

Π. χ. Ὁ ἀκέραιος 7 τρέπεται εἰς τρίτα, ἤτοι εἰς κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὸν ἀκέραιον 3, ἐὰν ὁ 7 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3 καὶ ληφθῇ τὸ μὲν προκῦπτον γινόμενον 21 ὡς ἀριθμητής, ὁ δὲ 3 ὡς παρονομαστής, τουτέστιν

$$7=\frac{21}{3}.$$

Διότι ἡ 1 ἔχει $\frac{3}{3}$ καὶ ἑπομένως ὁ 7 ἔχει ἑπτάκις τὰ $\frac{3}{3}$, ἤτοι ὁ 7 ἔχει $\frac{21}{3}$.

Καὶ γενικῶς $\alpha=\frac{\alpha\,\lambda}{\lambda}$

## Τροπὴ μικτῶν ἀριθμῶν εἰς κλάσματα.

127. *Μικτὸς ἀριθμὸς τρέπεται εἰς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τοῦ ἀκεραίου τοῦ μικτοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ κλάσματος αὐτοῦ ηὐξημένον κατὰ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος, παρονομαστὴν δὲ τὸν τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ.*

Ἔστω π. χ. ὁ μικτὸς $3+\frac{5}{8}$. Οὗτος τρέπεται εἰς κλάσμα, ἐὰν ὁ ἀκέραιος 3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 8 τοῦ κλάσματος, εἰς τὸ προκῦπτον γινόμενον 24 προστεθῇ ὁ ἀριθμητὴς 5 καὶ εἶτα τὸ μὲν ἄθροισμα 29 ληφθῇ ὡς ἀριθμητής, παρονομαστὴς δὲ ὁ 8, ὁ τοῦ κλάσματος τοῦ μικτοῦ.

Τουτέστιν $3+\frac{5}{8}=\frac{24}{8}+\frac{29}{8}$

Διότι ἡ 1 ἔχει $\frac{8}{8}$, ἑπομένως ὁ 3 ἔχει $\frac{24}{8}$, προστιθέμενα δὲ ταῦτα εἰς τὰ $\frac{5}{8}$ ἀποτελοῦσιν $\frac{29}{8}$.

Καὶ γενικῶς $\alpha+\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\alpha.\gamma+\beta}{\gamma}$.

## Ἐξαγωγὴ τῶν ἀκεραίων μονάδων κλάσματος.

128. *Πρὸς ἐξαγωγὴν τῶν εἰς κλάσμα περιεχομένων ἀκεραίων μονάδων διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ εἰς τὸ κλάσμα περιεχόμενος ἀκέραιος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον αὐτῆς (ἐὰν ὑπάρχῃ) εἶναι ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ὑπολειπομένου κλάσματος.*

Ἐὰν π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{29}{8}$, οὗ ὁ ἀριθμητὴς μείζων τοῦ παρονομαστοῦ. Αἱ ἐν αὐτῷ περιεχόμεναι ἀκέραιαι μονάδες ἐξάγονται, ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς 29 διαιρεθῇ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 8, ὅτε εὑρίσκεται πηλίκον 3 καὶ ὑπολείπονται $\frac{5}{8}$. Τουτέστιν $\frac{29}{8}=3+\frac{5}{8}$. Διότι τὰ ἀποτελοῦσιν 1, ἐπομένως τὰ $\frac{29}{8}$ ἀποτελοῦσι τοσάκις 1, ὁσάκις τὰ $\frac{8}{8}$ περιέχονται εἰς τὰ $\frac{29}{8}$, ἤτοι ὁσάκις τὸ 8 περιέχεται εἰς τὸν 29. Ἀλλὰ τὰ $\frac{8}{8}$ περιέχονται εἰς τὰ $\frac{29}{8}$ τρὶς καὶ ὑπολείπονται $\frac{5}{8}$. Ὥστε

$$\frac{29}{8}=3+\frac{5}{8}.$$

Καὶ γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma+\frac{\alpha'}{\beta}$, (ὅπου $\alpha>\beta$ καὶ $\alpha'<\beta$)

## Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων.

129. *Πᾶν κλάσμα πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.*

Ἔστω τὸ τυχὸν κλάσμα $\frac{2}{3}$ λέγω, ὅτι, ἐὰν τὸ κλάσμα τοῦτο πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 3, δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ 2, ἤτοι $\frac{2}{3}.\ 3=2$.

*Ἀπόδειξις*. Τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἶναι τὸ σύνολον $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. Τοῦτο δὲ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ 3, ἢ ληφθὲν ὡς προσθετέος τρίς, δίδει

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\text{ ἤτοι } 2\cdot\text{ ὥστε } \frac{2}{3}.\ 3=2$$

Καὶ γενικῶς $\frac{\alpha}{\beta}.\ \beta=\alpha$.

Ἐντεῦθεν δὲ ἕπεται, ὅτι *πᾶν κλάσμα εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ*. Διότι πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν δίδει γινόμενον τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα ἡ *διαίρεσις καθίσταται πάντοτε δυνατὴ διὰ τοῦ συστήματος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν*, ἤτοι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρῆται εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη. Διότι τὸ πηλίκον δύναταί νὰ παρασταθῇ διὰ κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· π. χ. τὸ πηλίκον τοῦ 4 διὰ 9 εἶναι $\frac{4}{9}$, τοῦ 20 διὰ 7 εἶναι $\frac{20}{7}$ ἢ $2+\frac{6}{7}$. Ὁμοίως 7 δρ. μερίζονται εἰς 3 ἀνθρώπους· διότι ἕκαστος ἄνθρωπος λαμβάνει 2 δρ. καὶ $\frac{1}{3}$ τῆς δραχμῆς· ἐν ᾧ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἕκαστος ἄνθρωπος λαμβάνει 2 δρ. καὶ ὑπολείπεται 1 δρ.

Ὥστε, ὅταν ἡ διαίρεσις ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀφίνῃ ὑπόλοιπον, τὸ ἀκριβὲς πηλίκον σύγκειται ἐκ τοῦ ἀκεραίου πηλίκου καὶ ἐκ τοῦ κλάσματος, ὅπερ ἔχει ἀριθμητὴν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην.

Παρατηρητέον δέ, ὅτι τὸ εἶδος ἢ ἡ φύσις τῶν ποσῶν εἶναι πολλάκις τοιαύτη, ὥστε μόνον τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ ἐφαρμόζηται ἐπὶ ζητημάτων ἀναγομένων εἰς τὴν διαίρεσιν, ὡς ὅταν ζητῆται π. χ. νὰ εὑρεθῇ, πόσοι ἦσαν οἱ ἄνθρωποι οἱ διανεμηθέντες 500 δρ. καὶ λαβόντες ἕκαστος 30 δρ. Οἱ ζητούμενοι ἄνθρωποι εἶναι $16+\frac{2}{3}$, ὅπερ ἀδύνατον. Ἐπειδὴ ὅμως ἡ Ἀριθμητικὴ χάριν τῆς γενικότητος ἀσχολεῖται περὶ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, πλῆθος δὲ ἄλλων προβλημάτων εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν ἀναγόμενα ἐπιδέχονται τὴν κλασματικὴν λύσιν $16+\frac{2}{3}$, διὰ τοῦτο εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχῃ ἡ Ἀριθμητικὴ γενικόν τι σύστημα ἀριθμῶν, ἐνῷ δύνανται νὰ λύωνται δι' ἀριθμῶν τὰ διάφορα ζητήματα διατηρουμένων τῶν ἀριθμητικῶν γενικῶν νόμων τῆς ἰσότητος καὶ τῶν τεσσάρων πράξεων.

## Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων.

**130.** *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον.*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ ὁ ἀριθμητὴς 5 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{15}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τρὶς μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{7}$. Διότι ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{7}$ περιέχεται δεκαπεντάκις ἐν τῷ $\frac{15}{7}$ καὶ πεντάκις ἐν τῷ $\frac{5}{7}$ κλάσμα. Ὥστε τὸ $\frac{15}{7}$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $\frac{5}{7}$.

*Σημείωσις.* Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος αὐξάνηται, καὶ τὸ κλάσμα αὐξάνεται· διότι περιέχει τότε πλείονα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

**131.** *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ὁ παρονομαστὴς 3 πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{12}$, τὸ ὁποῖον εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{2}{3}$. Διότι τὸ $\frac{1}{12}$ εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{1}{3}$ (τῆς ἀκεραίας μονάδος διαιρεθείσης εἰς 12 ἴσα μέρη τετράκις πλείονα τῶν 3), ἐπομένως καὶ τὸ $\frac{2}{12}$ εἶναι τετράκις μικρότερον τοῦ $\frac{2}{3}$.

*Σημείωσις*. Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος αὐξάνηται, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· διότι περιέχει τότε μικρότερα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

132. *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{5}{6}$ πολλαπλασιασθῇ καὶ ὁ ἀριθμητὴς 5 καὶ ὁ παρονομαστὴς 6 ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{15}{18}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ $\frac{5}{6}$· διότι πολλαπλασιασθέντων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ $\frac{5}{6}$ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν 3 τὸ κλάσμα τοῦτο ἐπολλαπλασιάσθη καὶ διῃρέθη συγχρόνως διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου (ἐδ. 130, 131).

133. *Ἐὰν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος διαιρεθῇ δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα διαιρεῖται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{4}{7}$ ὁ ἀριθμητὴς 4 διαιρεθῇ διὰ 2, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$, τὸ ὁποῖον εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{4}{7}$· διότι ἡ κλασματικὴ μονὰς $\frac{1}{7}$ περιέχεται τετράκις ἐν τῷ $\frac{4}{7}$ καὶ δὶς ἐν τῷ $\frac{2}{7}$. Ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ εἶναι δὶς μικρότερον τοῦ $\frac{4}{7}$.

*Σημείωσις*. Ἐν γένει, ὅταν ὁ ἀριθμητὴς κλάσματος ἐλαττῶται, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται· διότι περιέχει τότε ὀλιγώτερα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

134. *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος διαιρεθῇ δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ, τὸ κλάσμα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τοῦτον,*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ὁ παρονομαστὴς 8 διαιρεθῇ διὰ 4, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{5}{2}$, τὸ ὁπεῖον εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{8}$· διότι τὸ $\frac{1}{2}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{1}{8}$ (τῆς ἀκεραίας μονάδος διαιρεθείσης εἰς 2 ἴσα μέρη τετράκις μείζονα τῶν 8), ἑπομένως καὶ τὸ $\frac{5}{2}$ εἶναι τετράκις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{5}{8}$.

*Σημείωσις.* Ἐν γένει, ὅταν ὁ παρονομαστὴς κλάσματος ἐλαττῶται, τὸ κλάσμα αὐξάνεται· διότι περιέχει τότε μεγαλείτερα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

135. *Ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι κλάσματος διαιρεθῶσι διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρὸς αὐτό.*

Ἐὰν π. χ. τοῦ κλάσματος $\frac{4}{6}$ διαιρεθῇ καὶ ὁ ἀριθμητὴς 4 καὶ ὁ παρονομαστὴς 6 διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2, προκύπτει τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον τῷ $\frac{4}{6}$· διότι διαιρεθέντων ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ $\frac{4}{6}$ διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ 2, τὸ κλάσμα τοῦτο διῃρέθη καὶ ἐπολλαπλασιάσθη συγχρόνως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (ἐδ. 133, 134).

Ἐκ δὲ τῆς ἰδιότητος ταύτης γίνεται φανερόν, ὅτι δοθέντος κλάσματός τινος δύναται νὰ εὑρεθῇ ἕτερον κλάσμα ἁπλούστερον ἔχον ὅρους μικροτέρους καὶ ἰσοδύναμον αὐτῷ.

Ἡ δὲ *ἁπλοποίησις* αὕτη κατορθοῦται διὰ τῆς διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος διὰ κοινοῦ τινος διαιρέτου ἢ μᾶλλον διὰ τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου αὐτῶν, ὅτε τὸ προκῦπτον ἰσοδύναμον κλάσμα λέγεται *ἀνάγωγον* ἢ *ἀνηγμένον εἰς τοὺς ἐλαχίστους ὅρους*, ὡς πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

136. *Ἐὰν κλάσμα ᾖναι ἰσοδύναμον πρὸς ἀνάγωγον κλάσμα, ἔχει ὅρους παραγομένους ἐκ τῶν τοῦ ἀναγώγου διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀνάγωγον $\frac{5}{8}$, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{5}{8}$· λέγω, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ παράγονται ἀντιστοίχως ἐκ τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{5}{8}$ διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀκέραιον ἀριθμόν, ἤτοι εἶναι ἰσάκις πολλαπλάσια αὐτῶν.

*Ἀπόδειξις.* Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$

ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν 8 τοῦ ἑτέρου καὶ ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{5}{8}$ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν β τοῦ ἑτέρου, ἐπειδὴ τὰ δύο ταῦτα κλάσματα ὑποτίθενται ἴσα πρὸς ἄλληλα, ἕπεται

(1) $$\frac{\alpha.8}{\beta.8}=\frac{5.\beta}{8.\beta}$$

Ἀλλ' ὅταν δύο κλάσματα ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ ἔχωσι τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, καὶ οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους, ἤτοι ἐκ τῆς ἰσότητος (1) ἕπεται

(2) $$\alpha.8=5.\beta$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ 8 διαιρεῖ τὸ γινόμενον α.8, διαιρεῖ ὡσαύτως καὶ τὸ ἴσον αὐτῷ 5.β, ὢν δὲ πρῶτος πρὸς τὸν 5 διαιρεῖ τὸν β (ἐδ. 100) καὶ ἔστω π τὸ πηλίκον, ἤτοι ἔστω

(3) $$\beta=8.\pi$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ ἰσότητι (2) τεθῇ ἀντὶ β τὸ ἴσον αὐτῷ 8.π, προκύπτει α.8=5.8.π· ἐκ δὲ τῆς ἰσότητος ταύτης (διαιρεθέντων ἀμφοτέρων τῶν μελῶν αὐτῆς διὰ τοῦ 8) προκύπτει

(4) $$\alpha=5.\pi$$

Ἐδείχθη ἄρα, ὅτι α=5.π καὶ β=8.π, ἤτοι οἱ ὅροι τοῦ τυχόντος κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἰσοπολλαπλάσιοι τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{5}{8}$ τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς αὐτό.

136. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς π δύναται νὰ ἦναι εἷς τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,3,4,.....ἕπεται, ὅτι *πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα προκύπτουσιν ἐξ ἑνὸς ἀναγώγου κλάσματος, ἐὰν ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ πολλαπλασιασθῶσιν ἐφ' ἕκαστον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν* 1,2,3,4,....

Ἰδίᾳ δέ, ἐὰν π=1, ἕπεται ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) α=5 καὶ β=8. Τουτέστιν, *ἐὰν δύο ἀνάγωγα κλάσματα ἦναι ἴσα πρὸς ἄλληλα, οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν, ὡς καὶ οἱ παρονομασταί, εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.*

## Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

137. Ἡ τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ἰσοδύναμα (ἓν πρὸς ἓν) ὁμώνυμα ἢ *ἡ ἀναγωγὴ δύο ἢ πολλῶν κλασμάτων εἰς τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν* στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἰδιότητος τοῦ ἐδ. 135 καὶ γίνεται κατὰ τοὺς ἑξῆς κανόνας.

1) *Δύο ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑκατέρου αὐτῶν ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ ἑτέρου.* Οὕτω δὲ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν προκυπτόντων ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δύο ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ δύο κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{5}{8}$. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκεται

$$\frac{2}{3}=\frac{2.8}{3.8}=\frac{18}{24}$$
$$\frac{5}{8}=\frac{5.3}{8.3}=\frac{15}{24}$$

2) *Ὁσαδήποτε ἑτερώνυμα κλάσματα τρέπονται εἰς ὁμώνυμα, ὅταν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἑκάστου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν πάντων τῶν λοιπῶν.* Οὕτω δὲ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν προκυπτόντων ὁμωνύμων κλασμάτων εἶναι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων.

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$. Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκεται

$$\frac{4}{5}=\frac{4.7.8}{5.7.8}=\frac{224}{280}$$
$$\frac{3}{7}=\frac{3.5.8}{7.5.8}=\frac{120}{280}$$
$$\frac{5}{8}=\frac{5.5.7}{8.5.7}=\frac{175}{280}$$

3) *Ἐὰν οἱ παρονομασταὶ ἑτερωνύμων κλασμάτων ἔχωσι κοινόν τι πολλαπλάσιον, δύναται νὰ καταστῇ αὐτὸ κοινὸς παρονομαστής. Πρὸς τοῦτ[ο] διαιρεῖται τὸ κοινὸν αὐτὸ πολλαπλάσιον δι' ἑκάστου τῶν παρονομαστῶ[ν] καὶ ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν ἀντίστοιχον πηλίκον πολλαπλασιάζονται ἀμφότεροι [οἱ] ὅροι τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος.*

Ἔστωσαν π. χ. τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{12}$. Ὁ ἀριθμὸς 36 εἶναι κο[ι]νὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν 2,3,9,12, ἑπομένως κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον εὑρίσκεται

$$36 : 2 = 18, \quad \frac{1}{2} = \frac{1.18}{2.18} = \frac{18}{36}$$

$$36 : 3 = 12, \quad \frac{2}{3} = \frac{2.12}{3.12} = \frac{24}{36}$$

$$36 : 9 = 4, \quad \frac{5}{9} = \frac{5.4}{9.4} = \frac{20}{36}$$

$$36 : 12 = 3, \quad \frac{7}{12} = \frac{7.3}{12.3} = \frac{21}{36}$$

Πάντα ἄρα τὰ οὕτω προκύπτοντα κλάσματα ἔχουσι τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν 36· διότι ἕκαστος τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀντιστοίχων ἑτερωνύμων κλασμάτων ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως, ἧς αὐτὸς μὲν εἶναι διαιρέτης, διαιρετὸς δὲ ὁ 36.

Ἰδίᾳ δὲ ὅταν εἷς τῶν παρονομαστῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων ἦναι διαιρετὸς διὰ τῶν λοιπῶν, ὁ παρονομαστὴς οὗτος καθίσταται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὁ κοινὸς παρονομαστής.

*Σημείωσις.* Ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ κανόνι περιέχονται καὶ οἱ δύο πρῶτοι· διότι τὸ γινόμενον πάντων τῶν παρονομαστῶν εἶναι προφανῶς κοινὸν πολλαπλάσιον αὐτῶν.

138. *Ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστής, ὃν δύνανται νὰ ἔχωσι δύο ἢ πολλὰ ἀνάγωγα κλάσματα εἶναι τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν.*

Διότι κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν ὁμωνύμων, τῶν ἰσοδυνάμων (ἓν πρὸς ἓν) πρὸς τὰ ἑτερώνυμα ἀνάγωγα, εἶναι ἐξ ἀνάγκης κοινὸν πολλαπλάσιον πάντων τῶν παρονομαστῶν τῶν ἑτερωνύμων ἀναγώγων κλασμάτων (ἐδ. 136). Ἐὰν ἄρα καταστῇ κοινὸς παρονομαστὴς τὸ ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἑτερωνύμων ἀναγώγων κλασμάτων, αὐτὸς εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινὸς παρονομαστὴς τῶν προκυπτόντων ὁμωνύμων.

Π. χ. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀναγώγων κλασμάτων

$$\frac{3}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{7}{9},\ \frac{11}{12},\ \frac{17}{18}$$

ἐλάχιστον κοινὸν πολλαπλάσιον εἶναι ὁ 36, ἑπομένως τὰ ἀντίστοιχα ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι

$$\frac{27}{36}, \frac{30}{36}, \frac{28}{36}, \frac{33}{36}, \frac{34}{36}$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἐκ πάντων τῶν ὁμωνύμων, τῶν ἴσων πρὸς τὰ δοθέντα ἑτερώνυμα ἀνάγωγα κλάσματα, τὰ ἔχοντα τὸν ἐλάχιστον κοινὸν παρονομαστήν.

*Παρατήρησις*. Ἡ τροπὴ τῶν ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα χρησιμεύει 1) εἰς τὸ νὰ διακρίνηται εὐκόλως ἡ ἰσότης ἢ ἀνισότης τῶν κλασμάτων πρὸς ἄλληλα· διότι ἐκ δύο κλασμάτων ἐχόντων τὸν αὐτὸν παρονομαστὴν μεγαλείτερον εἶναι τὸ ἔχον τὸν μεγαλείτερον ἀριθμητήν, 2) εἰς τὴν πρόσθεσιν καὶ εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν κλασμάτων.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν προστεθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους κλάσματος, τὸ κλάσμα αὐξάνεται μέν, ἐὰν ἦναι μικρότερον τῆς 1· ἐλαττοῦται δέ, ἐὰν ἦναι μεγαλείτερον τῆς 1.

2) Ἐὰν ἀφαιρεθῇ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων κλάσματος ὁ αὐτὸς ἀριθμός, τὸ κλάσμα ἐλαττοῦται μέν, ἐὰν ἦναι μικρότερον τῆς 1· αὐξάνεται δέ, ἐὰν ἦναι μεγαλείτερον τῆς 1.

3) Δοθέντων δύο ἀναγώγων κλασμάτων, τὸ κλάσμα τὸ ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καὶ παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός· ἐκτὸς ἐὰν ὁ παρονομαστὴς ἑκατέρου αὐτῶν διαιρῇ τὸν ἀριθμητὴν τοῦ ἑτέρου.

4) Πόσα τρίτα καὶ εἰκοστὰ περιέχουσιν οἱ ἀριθμοὶ 3,5,7,10,15;

5) Τρέψαι τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{15}$ εἰς ἑκατοστὰ εἰκοστά.

6) Εὑρεῖν πάντα τὰ ἴσα ἀλλήλοις κλάσματα τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τοῦ $\frac{15}{40}$ καὶ τοῦ $\frac{36}{96}$.

7) Ποῖον εἶναι τὸ κλάσμα τὸ καθιστάμενον $\frac{1}{17}$, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 4;

8) Ποῖος εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ὁ καθιστάμενος $\frac{3}{17}$, ἐὰν διαιρεθῇ διὰ 228;

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

### Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν ἀριθμῶν.

139. Ἡ παραδοχὴ τοῦ συστήματος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐν ᾧ περιέχεται τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἐγένετο, ὅπως καταστῇ δυνατὴ πάντοτε ἡ διαίρεσις δύο ἀριθμῶν, τοὐλάχιστον ἀριθμητικῶς, ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως τῶν ποσῶν, ἅτινα παριστῶσιν οἱ ἀριθμοὶ (ἐδ. 129).

Διὰ τῆς παραδοχῆς δὲ ταύτης καὶ γενικεύσεως τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, ἐν ᾧ περιέχονται οἱαιδήποτε μονάδες ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί, οὐ μόνον *διατηροῦνται ἀναλλοίωτοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος, ἀλλὰ καὶ τρέπεται ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ τινος α ἐπὶ κλασματικήν τινα μονάδα* $\frac{1}{\mu}$ *εἰς διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διὰ μ·* καὶ τἀνάπαλιν *ἡ διαίρεσις τοῦ α διὰ* $\frac{1}{\mu}$ *τρέπεται εἰς πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ μ.*

Καὶ ὅτι μὲν τὸ γινόμενον $\alpha.\frac{1}{\mu}$ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ μ, ἤτοι $\frac{\alpha}{\mu}$, ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς. Διότι $\left(\alpha.\frac{1}{\mu}\right).\,\mu=\alpha.\left(\frac{1}{\mu}.\mu\right)=\alpha.1=\alpha$, ἤτοι τὸ $\alpha.\frac{1}{\mu}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ μ δίδει α, ἑπομένως εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{\alpha}{\mu}$ (ἐδ. 162)· π.χ. $5.\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$.

Ὅτι δὲ τὸ πηλίκον $\alpha:\frac{1}{\mu}$ εἶναι τὸ γινόμενον τοῦ α ἐπὶ μ, ἤτοι α.μ, ἀποδεικνύεται ἀμέσως ὡς ἑξῆς. Διότι

$(\alpha.\,\mu).\,\frac{1}{\mu}=\alpha.\left(\mu.\,\frac{1}{\mu}\right)=\alpha.\left(\frac{1}{\mu}.\mu\right)=\alpha.\,1=\alpha$, ἤτοι τὸ α.μ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{1}{\mu}$ δίδει τὸν διαιρετέον α, ἑπομένως εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ τοῦ $\frac{1}{\mu}$. Π. χ. $5:\frac{1}{3}=5.3$. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{\mu}$ λέγεται *ἀντίστροφος* τοῦ μ, ὁ δὲ $\frac{\beta}{\alpha}$ *ἀντίστροφος* τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$· καὶ τἀνάπαλιν. Κατὰ δὲ τὰ ἀνωτέρω ἡ διαίρεσις τρέπεται εἰς πολλαπλασιασμὸν τοῦ διαιρετέου ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

Οἱ δὲ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων ἀριθμητικῶν πράξεων ἐκφράζονται νῦν ὡς ἑξῆς.

1) *Ἡ πρόσθετος εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς εὑρίσκεται ἀριθμὸς ἐκ πασῶν τῶν μονάδων, ἃς ἔχουσι δύο ἢ πολλοὶ ἀριθμοί, καὶ μόνων τούτων.*

Αἱ μονάδες ἃς ἔχουσιν οἱ *προσθετέοι* δύνανται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί· τὸ δὲ *ἄθροισμα* δύναται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

2) *Ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἐλαττοῦται δοθεὶς ἀριθμὸς κατὰ τόσας μονάδας, ὅσας ἔχει ἕτερος δοθεὶς ἀριθμός· ἢ ἡ ἀφαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀφαιρετέον δίδει ἄθροισμα τὸν μειωτέον.*

Αἱ μονάδες τοῦ *μειωτέου* καὶ τοῦ *ἀφαιρετέου* δύνανται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί. Ἡ δὲ *διαφορὰ* ἢ τὸ *ὑπόλοιπον* τῆς ἀφαιρέσεως δύναται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

3) *Ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς ἀριθμός τις ἢ μέρος αὐτοῦ λαμβάνεται ὡς προσθετέος πολλάκις καὶ εὑρίσκεται οὕτως ἄλλος ἀριθμός· ἢ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἐκ τοῦ ἑτέρου αὐτῶν τρίτος ἀριθμός, ὡς ὁ ἕτερος εὑρίσκεται ἐκ τῆς ἀκεραίας μονάδος ἢ τῶν μερῶν αὐτῆς· ἢ ὁ πολλαπλασιασμὸς εἶναι διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ τοῦ ἀντιστρόφου ἑτέρου ἀριθμοῦ.*

Αἱ μονάδες τοῦ *πολλαπλασιαστέου* καὶ τοῦ *πολλαπλασιαστοῦ* δύνανται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί. Τὸ δὲ *γινόμενον* δύναται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

4) *Ἡ διαίρεσις εἶναι πρᾶξις, δι' ἧς δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται τρίτος, ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν ἕτερον αὐτῶν δίδει γινόμενον τὸν ἕτερον· ἢ ἡ διαίρεσις εἶναι πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον ἑτέρου ἀριθμοῦ.*

Αἱ μονάδες τοῦ *διαιρετέου* καὶ τοῦ *διαιρέτου* δύνανται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιαι ἢ κλασματικαί. Τὸ δὲ *πηλίκον* δύναται νὰ ἦναι ἢ ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός.

Ἐκτελοῦνται δὲ αἱ τέσσαρες πράξεις κατὰ πάσας τὰς περιπτώσεις ὡς ἑξῆς φαίνεται (διατηρουμένων ἀναλλοιώτων τῶν γενικῶν νόμων ἢ ἰδιοτήτων τῶν πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος, ὡς ἐξετέθησαν (ἰδὲ Βιβλίον Α') ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν).

## Πρόσθεσις.

**140.** Ἐν τῇ προσθέσει τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶε διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις: 1) *πρόσθεσις κλασμάτων ὁμωνύμων*. 2) *πρόσθεσις κλασμάτων ἑτερωνύμων*, 3) *πρόσθεσις μικτῶν ἐν γένει*.

Πρὸς ἑκάστην δὲ τῶν περιπτώσεων τούτων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος κανών.

1) *Ἵνα προστεθῶσι κλάσματα ὁμώνυμα, προστίθενται μόνον οἱ ἀριθμηταὶ αὐτῶν καὶ ὑπὸ τὸ ἄθροισμα γράφεται ὁ κοινὸς παρονομαστής*. Π. χ.

$$\frac{1}{7}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}=\frac{8}{7}=1+\frac{1}{7}$$

Διότι 1 ἕβδομον καὶ 4 ἕβδομα καὶ 3 ἕβδομα ἀποτελοῦσιν (1+4+3) ἕβδομα ἢ 8 ἕβδομα.

2). *Ἵνα προστεθῶσι κλάσματα ἑτερώνυμα, τρέπονται πρῶτον εἰς ὁμώνυμα* (137) *καὶ εἶτα προστίθενται ὡς ἀνωτέρω*. Διότι, ἵνα προστεθῶσι τὰ κλάσματα, πρέπει νὰ γίνωνται πάντα ἐκ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος, ὅτε καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἀποτελεῖ ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης. Π. χ.

$$\frac{7}{8}+\frac{5}{3}+\frac{11}{16}=\frac{42}{28}+\frac{80}{48}+\frac{33}{48}=\frac{155}{48}=3+\frac{11}{48}$$

3). *Ἵνα προστεθῶσι μικτοὶ ἐν γένει ἀριθμοί, προστίθενται χωριστὰ οἱ ἀκέραιοι καὶ τὰ κλάσματα αὐτῶν πρὸς ἀποτέλεσιν τοῦ ὅλου ἀθροίσματος, ἢ τρέπονται οἱ μικτοὶ εἰς κλάσματα* (127) *καὶ εἶτα προστίθενται ταῦτα ὡς ἀνωτέρω*. Π. χ.

$$\left(2+\frac{5}{7}\right)+\left(4+\frac{2}{3}\right)=2+4+\frac{5}{7}+\frac{2}{3}=6+\frac{29}{21}=7+\frac{8}{21}$$

$$\left(5+\frac{1}{3}\right)+10=15+\frac{1}{3},\quad \frac{2}{5}+\left(1+\frac{7}{12}\right)=1+\frac{59}{12},$$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(2+\frac{2}{5}\right)+\left(3+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{3}+\frac{12}{5}+\frac{7}{2}=\frac{40}{30}+\frac{72}{30}+\frac{105}{30}=\frac{217}{30}$$

*Παρατήρησις*. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι ἡ πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) ἀνάγεται πάντοτε εἰς πρόσθεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν· διότι πάντες οἱ προσθετέοι δύνανται νὰ γίνωνται κλάσματα καὶ μάλιστα ὁμώνυμα· τότε δὲ ἡ πρόσθεσις αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τῶν ἀριθμητῶν αὐτῶν. Διὰ τοῦτο ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῆς προσθέσεως τῶν ἀκεραίων, ἤτοι ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν προσθετέων, καὶ αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι λοιπαὶ ἰδιότητες μένουσιν ἀναλλοίωτοι ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀποδεικνύονται ὡς καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

## Ἀφαίρεσις.

**141.** Ἐν τῇ ἀφαιρέσει τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις: 1) *Ἀφαίρεσις κλασμάτων ὁμωνύμων*, 2) *Ἀφαίρεσις κλασμάτων ἑτερωνύμων καὶ* 3) *Ἀφαίρεσις μικτῶν ἐν γένει.*

Πρὸς ἑκάστην δὲ τῶν περιπτώσεων τούτων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος κανών.

**1)** *Ἵνα ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ὁμωνύμου, ἀφαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ μειωτέου καὶ ὑπὸ τὴν διαφορὰν γράφεται ὁ κοινὸς παρονομαστής.* Π. χ.

$$\frac{11}{12}-\frac{5}{12}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

**Διότι**, ἐὰν ἀπὸ 11 δωδέκατα ἀφαιρεθῶσι 5 δωδέκατα, ὑπολείπονται 6 δωδέκατα.

**2)** *Ἵνα ἀφαιρεθῇ κλάσμα ἀπὸ ἄλλου ἑτερωνύμου, τρέπονται πρῶτον τὰ δύο ταῦτα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ εἶτα ἀφαιροῦνται ὡς ἀνωτέρω.* Π. χ.

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{5}=\frac{11}{20}$$

**Διότι, ἵνα ἀφαιρεθῶσι τὰ κλάσματα, πρέπει νὰ γίνωνται ἀμφότερα ἐκ τῆς αὐτῆς κλασματικῆς μονάδος, ὅτε καὶ ἡ διαφορὰ αὐτῶν ἀποτελεῖ ἀριθμὸν τῆς μονάδος ταύτης.**

**3)** *Ἵνα ἀφαιρεθῇ μικτὸς ἀπὸ μικτοῦ, ἀφαιροῦνται χωριστὰ οἱ ἀκέραιοι καὶ τὰ κλάσματα πρὸς ἀποτέλεσιν τῆς ὅλης διαφορᾶς, ἢ τρέπονται οἱ μικτοὶ εἰς κλάσματα καὶ εἶτα ἀφαιροῦνται ὡς ἀνωτέρω.* Π. χ.

$$\left(8+\frac{6}{7}\right)-\left(2+\frac{2}{5}\right)=8-2+\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=6+\frac{16}{35}$$

$$\left(5+\frac{1}{3}\right)-2=3+\frac{1}{3},\left(2+\frac{3}{4}\right)-\frac{1}{7}=2+\frac{17}{28}$$

**Ἐὰν δὲ τὸ κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου ἦναι μεγαλείτερον τοῦ κλάσματος τοῦ μειωτέου** *λαμβάνεται μία ἀκεραία μονὰς ἐκ τοῦ ἀκεραίου τοῦ μειωτέου καὶ* *προστίθεται εἰς τὸ κλάσμα αὐτοῦ, ἀφ' οὗ τραπῇ εἰς κλάσμα ὁμώνυμον αὐτῷ.* Π. χ.

$$\left(9+\frac{2}{7}\right)-\left(5+\frac{5}{6}\right)=\left(8+\frac{7}{7}+\frac{2}{7}\right)-\left(5+\frac{5}{6}\right)=$$

$$=\left(8+\frac{9}{7}\right)-\left(5+\frac{5}{6}\right)=8-5+\frac{9}{7}-\frac{5}{6}=3+\frac{19}{35}$$

*Παρατήρησις.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι ἡ ἀφαίρεσις οἱωνδήποτε ἀριθμῶν (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) ἀνάγεται εἰς τὴν ἀφαίρεσιν ἀκεραίων. Διὰ τοῦτο αἱ γενικαὶ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀληθεύουσι καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

## Πολλαπλασιασμός.

142. Ἐν τῷ πολλαπλασιασμῷ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις· 1) *πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ ἀκέραιον ἢ ἀκέραιον ἐπὶ κλάσμα,* 2) *πολλαπλασιασμὸς κλάσματος ἐπὶ κλάσμα καὶ* 3) *πολλαπλασιασμὸς μικτοῦ ἐπὶ μικτὸν ἐν γένει.*

Πρὸς ἑκάστην δὲ τῶν περιπτώσεων τούτων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος κανών.

1) *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ κλάσμα ἐπὶ ἀκέραιον ἢ ἀκέραιος ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζεται ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ὑπὸ τὸ γινόμενον γράφεται παρονομαστὴς ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος.* Π. χ. ἐὰν $\frac{5}{7}$ ἦναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ 3 ὁ πολλαπλασιαστής, εὑρίσκεται·

$$\frac{5}{7}.3=\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}=\frac{5.3}{7}=\frac{15}{7}$$

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ὁ πολλαπλασιαστέος πρέπει νὰ ληφθῇ τοσάκις ὡς προσθετέος, ὅσαι εἶναι αἱ μονάδες τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Ἐὰν δὲ ὁ 3 ἦναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ ὁ $\frac{5}{7}$ ὁ πολλαπλασιαστής, εἶναι

$$3.\frac{5}{7}=\frac{3}{7}.5=\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=\frac{3.5}{7}=\frac{15}{7}.$$

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς εὑρίσκεται ἐκ τῆς μονάδος (σ.98). Ἐνταῦθα ἄρα ἐλήφθη τὸ ἕβδομον τοῦ 3 καὶ ἐπανελήφθη ὡς προσθετέος πεντάκις, ὡς ἐλήφθη τὸ ἕβδομον τῆς μονάδος 1 καὶ ἐπανελήφθη ὡς προσθετέος πεντάκις.

Φανερὸν δέ, ὅτι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται γινόμενον καὶ ἑπομένως τὸ γινόμενον δύο παραγόντων (ὧν ὁ εἷς ἀκέραιος καὶ ὁ ἕτερος κλάσμα) δὲν μεταβάλλεται καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν ἀντιμετατεθῶσιν οἱ δύο παράγοντες αὐτοῦ.

2) *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ κλάσμα ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζεται ἀριθμητὴς ἐπὶ ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴς ἐπὶ παρονομαστήν· καὶ τὸ μὲν γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν τίθεται ἀριθμητής, τὸ δὲ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστής.*

Π. χ. ἐὰν $\frac{3}{4}$ ἦναι ὁ πολλαπλασιαστέος καὶ $\frac{5}{7}$ ὁ πολλαπλασιαστής, εὑρίσκεται

$$\frac{3}{4}.\ \frac{5}{7}=\frac{3}{4.7}\,5=\frac{3.5}{4.7}=\frac{15}{28}$$

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν πρέπει νὰ εὑρεθῇ τὸ ἕβδομον τοῦ πολλαπλασιαστέου $\frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{3}{4.7}$, καὶ τοῦτο νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 5, ἤτοι $\frac{3.5}{4.7}$. Τουτέστι τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος 1.

Ἐὰν δὲ πολλαπλασιαστέος ἦναι ὁ $\frac{5}{7}$ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ $\frac{3}{4}$ εὑρίσκεται ὁμοίως

$$\frac{5}{7}.\frac{3}{4}=\frac{5}{7.4}.3=\frac{5.3}{7.4}=\frac{3.5}{4.7}=\frac{15}{28}$$

Ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις ταύτας τὸ αὐτὸ εὑρίσκεται γινόμενον. Ὥστε τὸ γινόμενον δύο κλασμάτων δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν ἀντιμετατεθῶσι ταῦτα.

3) *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ μικτὸς ἐπὶ μικτόν, ἢ τρέπονται ἀμφότεροι οἱ μικτοὶ εἰς κλάσματα, ἢ πολλαπλασιάζονται οἱ δύο μικτοὶ ὡς ἄθροισμα ἐπὶ ἄθροισμα κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον τὸν ἰσχύοντα καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.*

Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος 1.

Ἐὰν π. χ. πολλαπλασιαστέος ἦναι ὁ $5+\frac{2}{3}$ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ $2+\frac{4}{7}$, ἐπειδὴ ὁ πολλαπλασιαστὴς εὑρίσκεται ἐκ τῆς 1 ληφθείσης δὶς καὶ ἐκ τοῦ $\frac{1}{7}$

αὐτῆς ληφθέντος τετράκις, ἕπεται, ὅτι τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἐκ τοῦ διπλασίου τοῦ πολλαπλασιαστέου καὶ ἐκ τοῦ ἑβδόμου αὐτοῦ ληφθέντος τετράκις, ἤτοι

$$\left(5+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{7}\right)=\left(5+\frac{2}{3}\right).2+\left(5+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{1}{7}.4=$$

$$=5.2+\frac{2.2}{3}+\left(\frac{5}{7}+\frac{2}{3.7}\right).4=5.2+\frac{2.2}{3}+\frac{5.4}{7}+\frac{2.4}{3.7}=$$

$$=10+\frac{4}{3}+\frac{20}{7}+\frac{8}{21}=\frac{201}{21}$$

ἢ καὶ

$$\left(5+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(2+\frac{4}{7}\right)=\frac{17}{3}\cdot\frac{18}{7}=\frac{17.18}{3.7}=\frac{306}{21}$$

Ὁμοιως εὑρίσκεται

$$\left(5+\frac{1}{7}\right).2=10+\frac{2}{7},\ 3.\left(1+\frac{2}{3}\right)=3+2.$$

$$\left(1+\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}+\frac{10}{21},\ \frac{4}{5}\cdot\left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{5}+\frac{4}{15}$$

Ἐκ δὲ τῆς περιπτώσεως ταύτης καταδεικνύεται καὶ ἡ *ἀλήθεια τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος* τῆς ἰσχυούσης καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

## Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.

143. *Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν οἱωνδήποτε* (ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν) λέγεται, ὡς καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ πρώτου παράγοντος ἐπὶ τὸν δεύτερον τὸ εὑρεθὲν γινόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον, τὸ νέον γινόμενον ἐπὶ τὸν τέταρτον, καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ ληφθῶσι πάντες οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ πρὸς ἀποτέλεσιν τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Π. χ. τὸ γινόμενον τῶν κλασμάτων.

$$\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{6}{17},\frac{3}{5}$$

εἶναι

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{17}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2.5.6.3}{3.7.17.5}=\frac{2.6}{7.17}=\frac{12}{119}$$

Ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ γινομένου πολλῶν κλασμάτων εἶναι γινόμενα ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐπειδὴ δὲ καθ' οἱανδήποτι τάξιν καὶ ἐὰν πολλαπλασιάζωνται οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, τὸ γινόμενον αὐτῶν δὲν μεταβάλλεται, ἕπεται, ὅτι *ἡ γενικὴ αὕτη ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων γινομένου ἰσχύει καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ὡς καὶ πᾶσαι αἱ ἐξ αὐτῆς πηγάζουσαι*, ὧν ἡ ἀλήθεια ἀπεδείχθη ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (Βιβλ. Α', Κεφ. Γ.)

## Δυνάμεις τῶν κλασμάτων.

144. Αἱ δυνάμεις τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁριζονται ὡς καὶ αἱ τῶν ἀκεραίων (ἐδ. 60) καὶ σημειοῦνται ὁμοίως. Οἷον τὸ τετράγωνον ἢ ἡ δευτέρα δύναμις τοῦ $\frac{3}{5}$ εἶναι $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, ἡ πέμπτη δύναμις τοῦ $\frac{6}{7}$ εἶναι $\left(\frac{6}{7}\right)^5$, ἡ νυοστὴ δύναμις τοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$.

*Ἵνα δὲ ὑψωθῇ κλάσμα εἰς δύναμιν, ὑψοῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.*

Π. χ. Τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{5}{7}$ εἶναι $\frac{5^2}{7^2}$. Διότι κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{5}{7}\cdot\frac{5}{7}=\frac{5.5}{7.7}=\frac{5^2}{7^2}$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ὅτι

$$\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{7^3}{8^3}$$

Διότι
$$\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{7}{8}=\frac{7.7.7}{8.8.8}=\frac{7^3}{8^3}$$

Καὶ γενικῶς
$$\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^\nu=\frac{\alpha^\nu}{\gamma^\nu}.$$

Ἡ δὲ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν δυνάμεων ἀκεραίων ἀριθμῶν, καθ' ἣν *γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ* *ἔχουσα ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν δύο δυνάμεων*, ἀποδεικνύεται ὡς καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἔστω π. χ. τὸ γινόμενον $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4$. λέγω, ὅτι τὸ γενόμενον τοῦτο εἶναι $\left(\frac{3}{5}\right)^6$. Διότι

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \text{καὶ} \left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}, \text{ ἑπομένως}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3.3.3.3.3.3}{5.5.5.5.5\ 5} = \frac{3^6}{5^6}$$

## Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

**145**. *Ἴσοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσι γινόμενα ἴσα πρὸς ἄλληλα.*

Ἔστω $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$· λέγω, ὅτι καὶ $\alpha.\gamma = \beta.\delta$. Διότι, ἐὰν ὑποτεθῇ, ὅτι οἱ μὲν ἴσοι πρὸς ἀλλήλους ἀριθμοὶ α καὶ β ἑξάκις λαμβανόμενοι γίνονται ἀμφότεροι 3, οἱ δὲ ἴσοι πρὸς ἀλλήλους γ καὶ δ ἑπτάκις λαμβανόμεναι γίνονται ἀμφότεροι 4, ἕπεται, ὅτι τὰ δύο γινόμενα α. β καὶ γ. δ πολλαπλασιαζόμενα ἐπὶ (6.7) γίνονται ἀμφότερα 3.4, ἤτοι ἀκέραιοι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους (σ. 87)

Ὥστε τὰ δύο γινόμενα α. γ καὶ β. δ εἶναι ἴσα, ὅταν $\alpha = \beta$ καὶ $\gamma = \delta$.

Ὁμοίως δεικνύεται, ὅτι *ἄνισοι ἀριθμοὶ ἐπὶ ἴσους πολλαπλασιαζόμενοι μένουσιν ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους*.

*Παρατήρησις*. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουσι καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ὁ πολλαπλασιασμὸς ἀριθμοῦ ἐπὶ κλασματικήν τινα μονάδα σημαίνει διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῆς.

## Διαίρεσις.

**146.** Ἐν τῇ διαιρέσει τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνονται τρεῖς περιπτώσεις· 1) *Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου ἢ ἀκεραίου διὰ κλάσματος*, 2) *Διαίρεσις κλάσματος διὰ κλάσματος* καὶ 3) *Διαίρεσις μικτοῦ διὰ μικτοῦ ἐν γένει*.

Πρὸς ἑκάστην δὲ τῶν περιπτώσεων τούτων ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένος κανών·

1) *Ἵνα διαιρεθῇ κλάσμα δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἢ ἀκέραιος διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου* (σ. 97)

Ἐὰν π. χ. διαιρετέος ἦναι ὁ $\frac{3}{4}$ καὶ διαιρέτης ὁ 5, εὑρίσκεται

$$\frac{3}{4}:5=\frac{3}{4}.\ \frac{1}{5}=\frac{3}{4.5}$$

Διότι τὸ $\frac{3}{4.5}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην 5 δίδει γινόμενον $\frac{3.5}{4.5}$ ἢ $\frac{3}{4}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

Ἐὰν δὲ διαιρετέος ἦναι ὁ 5 καὶ διαιρέτης ὁ $\frac{3}{4}$, εὑρίσκεται

$$5:\frac{3}{4}=5.\frac{4}{3}=\frac{5.4}{3}$$

Διότι $\frac{5.4}{3}\cdot\frac{3}{4}$ εἶναι 5, ἤτοι ὁ διαιρετέος.

2). *Ἵνα διαιρεθῇ κλάσμα διὰ κλάσματος, πολλαπλασιάζεται ὁ διαιρετέος ἐπὶ τὸν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου, ὡς καὶ ἐν τῇ πρώτῃ περιπτώσει.*

Ἐὰν π. χ. διαιρετέος ἦναι ὁ $\frac{3}{4}$ καὶ διαιρέτης ὁ $\frac{7}{8}$, εὑρίσκεται

$$\frac{3}{4}:\frac{7}{8}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8}{7}=\frac{3.8}{4.7}$$

Διότι τὸ $\frac{3.8}{4.7}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸν διαιρέτην $\frac{7}{8}$ δίδει γινόμενον $\frac{3.8}{4.7}$ ἢ $\frac{3}{4}$, ἤτοι τὸν διαιρετέον.

3) *Ἵνα διαιρεθῇ μικτὸς διὰ μικτοῦ ἐν γένει, τρέπονται ἀμφότεροι (ἢ μόνον ὁ διαιρέτης) εἰς κλάσματα καὶ ἡ διαίρεσις ἀνάγεται οὕτως εἰς τὰς προηγουμένας περιπτώσεις.*

Ἐὰν π. χ. διαιρετέος ἦναι ὁ $5+\frac{2}{7}$ καὶ διαιρέτης ὁ $4+\frac{1}{3}$, εὑρίσκεται

$$\left(5+\frac{2}{7}\right):\left(4+\frac{1}{3}\right)=\frac{37}{7}:\frac{13}{3}=\frac{37}{7}\cdot\frac{3}{13}=\frac{37.3}{7.13}$$

ἢ καὶ

$$\left(5+\frac{2}{7}\right):\left(4+\frac{1}{3}\right)=\left(4+\frac{2}{7}\right):\frac{13}{3}=\left(5+\frac{2}{7}\right)\cdot\frac{3}{13}=\frac{5.3}{13}=\frac{2.\ 3}{7.13}.$$

Ἐντεῦθεν δὲ φανερόν, ὅτι *ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύει καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.*

Ὁμοίως εὑρίσκεται

$$\left(3+\frac{1}{7}\right):5=\left(3+\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{7\ 5}$$

$$8:\left(6+\frac{2}{3}\right)=8:\frac{20}{3}=8.\frac{3}{20}=\frac{8.3}{20}$$

$$\left(5+\frac{1}{3}\right):\frac{2}{7}=\left(5+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{5.7}{2}+\frac{7}{3.2}$$

$$\frac{6}{17}:\left(1+\frac{2}{5}\right)=\frac{6}{17}:\frac{7}{5}=\frac{6}{17}\cdot\frac{5}{7}=\frac{6.5}{17\ 7}$$

## Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

147. *Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τῶν ἐκθετῶν·* (ἐν ἧ μειωτέος μὲν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου, ἀφαιρετέος δὲ ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρέτου).

Ἐὰν π. χ. διαιρετέος ὁ $\left(\frac{4}{5}\right)^8$ καὶ διαιρέτης ὁ $\left(\frac{4}{5}\right)^6$, τὸ πηλίκον

εἶναι $\left(\frac{4}{5}\right)$. Διότι $\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^6=\left(\frac{4}{5}\right)^{2+6}.$

## Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.

148. *Ἴσοι ἀριθμοὶ δι' ἴσων διαιρούμενοι δίδουσιν πηλίκα ἴσα πρὸς ἄλληλα.*

Λέγω δηλαδή, ὅτι, ἐὰν α=β καὶ γ=δ, εἶναι καὶ α : γ=β : δ. Διότι, ἐ τὰ πηλίκα $\alpha : \gamma$ καὶ $\beta : \delta$ πολλαπλασιασθῶσιν ἑκάτερον ἐπὶ ἑκάτερον τῶν ἴσων πρὸς ἀλλήλους ἀριθμῶν $\gamma$ καὶ $\delta$, δίδουσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα γινόμενα $\alpha$ καὶ $\beta$. Ἀλλ' ἀριθμοί, οἵτινες ἐπὶ ἴσους πρὸς ἀλλήλους πολλαπλασιαζόμενοι δίδουσιν ἴσα πρὸς ἄλληλα γινόμενα, εἶναι ἴσοι πρὸς ἀλλήλους.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι *ἄνισοι ἀριθμοὶ δι' ἴσων διαιρούμενοι δίδουσιν ἄνισα πρὸς ἄλληλα πηλίκα, τὸ μεγαλείτερον ὁ μεγαλείτερος διαιρετέος.*

*Παρατήρησις.* Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξάγεται καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ὅτι πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσχύουσι καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἐν ᾧ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ διὰ κλασματικῆς τινος μονάδος σημαίνει πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν αὐτῆς.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

### Περὶ κλασμάτων ἐχόντων ὅρους οἱουσδήποτε ἀριθμοὺς (ἀκεραίους ἢ κλασματικούς). Λόγοι καὶ ἀναλογίαι.

149. Κατὰ τὴν θεμελιώδη ἰδιότητα τῶν κλασμάτων (129), τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ παρασταθῇ ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν τὸν διαιρετέον, παρονομαστὴν δὲ τὸν διαιρέτην· οἷον τὸ πηλίκον τοῦ 7 διὰ τοῦ 8 παρίσταται διὰ τοῦ $\frac{7}{8}$.

Ἐὰν δὲ χάριν τῆς γενικότητος παρασταθῇ οὕτως οἱονδήποτε πηλίκον δύο ἀριθμῶν ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν δύνανται νὰ θεωρῶνται καὶ κλάσματα, καλούμενα *σύνθετα κλάσματα*, οἷα τὰ ἑξῆς:

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}},\quad \frac{5}{\frac{2}{3}},\quad \frac{\frac{7}{8}}{2},\quad \frac{2+\frac{1}{5}}{4},\quad \text{κλ.}$$

ὧν ἡ σημασία οὐδεμία ἄλλη εἶναι ἢ τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῶν καὶ ἑπομένως ἔχουσι τὰ κλάσματα ταῦτα πάσας τὰς γενικὰς ἰδιότητας τῶν ἁπλῶν κλασμάτων.

**Κατὰ ταῦτα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, οἱοιδήποτε καὶ ἂν ἦναι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha$ καὶ $\beta$,**

σημαίνει τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διὰ τοῦ β. Ἐκ δὲ τῆς σημασίας ταύτης ἕπεται ἀμέσως ἡ θεμελιώδης ἰδιότης τῶν κλασμάτων, καθ' ἣν

$$\frac{\alpha}{\beta}\beta=\alpha.$$

Ὁμοίως εὑρίσκεται, ἀμέσως ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τελείας διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ὅτι

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha.\gamma}{\beta.\gamma}=\frac{\alpha:\gamma}{\beta:\gamma}$$ οἱουδήποτε ὄντος τοῦ γ (πλὴν τοῦ 0)

καὶ ὅτι, ἐὰν δοθῶσι τὰ ἑτερώνυμα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$, εὑρίσκονται τὰ ὁμώνυμα

$$\frac{\alpha.\delta}{\beta.\delta} \text{ καὶ } \frac{\gamma.\beta}{\delta.\beta}$$

καὶ πᾶσαι αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κοινῶν ἢ ἁπλῶν κλασμάτων γίνονται καὶ ἐπὶ συνθέτων κλασμάτων κατὰ τοὺς αὐτοὺς κανόνας.

Ἐπὶ τῶν τοιούτων δὲ κλασμάτων ὡς καὶ ἐπὶ τῶν κοινῶν ἰσχύουσι καὶ οἱ ἑπόμενοι ὁρισμοὶ καὶ προτάσεις.

150. Τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμοῦ α διὰ τοῦ β λέγεται καὶ *λόγος* τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν ἀριθμὸν β καὶ δεικνύει, πῶς ἀποτελεῖται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ. Ὁ λόγος σύγκειται ἐκ τῆς μονάδος 1 καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, καθ' ὃν τρόπον σύγκειται ὁ α ἐκ τοῦ β καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτοῦ. Π. χ. ἐὰν $\alpha=\beta+\beta+\beta+\frac{\beta}{2}+\frac{\beta}{5}$, ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τοῦ β εἶναι ὁ ἀριθμὸς $1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, ἤτοι ὁ $3+\frac{7}{10}$.

Ὁμοίως ὁρίζεται καὶ ὁ *λόγος δύο οἱωνδήποτε ὁμοειδῶν ποσῶν μεμετρημένων διὰ τοῦ αὐτοῦ ὁμοειδοῦς ποσοῦ*. *Μέτρησις* δὲ ποσοῦ τινος λέγεται ἡ σύγκρισις αὐτοῦ πρὸς ἄλλο ὁμοειδὲς ὡρισμένον καὶ κατὰ συνθήκην γνωστόν, τὸ ὁποῖον λέγεται *μονάς*. Ἐκ τῆς συγκρίσεως δὲ ταύτης εὑρίσκεται, πόσαι μονάδες καὶ πόσα καὶ ποῖα μέρη τῆς μονάδος ἀποτελοῦσι τὸ ποσόν, ἤτοι πῶς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς. Ὁ δὲ ἀριθμὸς ὁ ἀποτελούμενος ἐκ τῆς μονάδος καὶ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῆς, ὡς ἀποτελεῖται τὸ ποσὸν ἐκ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς, λέγεται, ὅτι παριστᾷ τὸ ποσόν. Ἐὰν π. χ. εὑρεθῇ, ὅτι ποσόν τι ἀποτελεῖται ἐκ τῆς μονάδος αὐτοῦ τρὶς ληφθείσης, ὁ παριστῶν αὐτὸ ἀριθμὸς εἶναι ὁ 3· ἐὰν δὲ ἀποτελῆται ἐκ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ ἡμίσεως αὐτῆς καὶ ἐκ τοῦ πέμπτου αὐτῆς, ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν αὐτὸ εἶναι ὁ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$, ἤτοι ὁ $2+\frac{2}{5}$.

151. Ὡς δὲ τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β εἶναι ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β, οὕτως ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β. Διότι, ἐὰν π. χ. ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β ἦναι ὁ ἀριθμὸς $3+\frac{2}{5}$, τοῦτο σημαίνει, ὅτι εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν

$$\alpha=\beta+\beta+\beta+\frac{\beta}{5}+\frac{\beta}{5}$$

ἢ
$$\alpha=\beta.\left(1+1+1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)$$

Ὅθεν διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ β εὑρίσκεται

$$\frac{\alpha}{\beta}=1+1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=4+\frac{2}{5}$$

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ α διὰ β. Ὁ δὲ λόγος $\frac{\beta}{\alpha}$ λέγεται *ἀντίστροφος* τοῦ λόγου $\frac{\alpha}{\beta}$.

152. *Ὁ λόγος δύο ποσῶν ἢ μεγεθῶν ὁμοειδῶν ἰσοῦται τῷ λόγῳ τῶν μετρούντων αὐτὰ ἀριθμῶν* (διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος). Καὶ τἀνάπαλιν.

Ἐὰν π. χ. ὁ λόγος δύο ποσῶν ἢ μεγεθῶν ὁμοειδῶν Α καὶ Β ἦναι ὁ ἀριθμὸς $3+\frac{2}{5}$, ἤτοι ἐὰν $\frac{A}{B}=3+\frac{2}{5}$, ἢ

(1)
$$A=B+B+B+\frac{B}{5}+\frac{B}{5},$$

καὶ ὁ λόγος τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β τῶν μετρούντων τὰ δύο ποσὰ Α καὶ Β εἶναι ὡσαύτως ὁ $3+\frac{2}{5}$

Διότι, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὸ ποσὸν Α εἶναι ὁ α, ὁ δὲ παριστῶν τὸ ποσὸν Β εἶναι ὁ β, ἕπεται ἐκ τῆς ἰσότητος (1), ὅτι

$$\alpha = \beta + \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5}$$

Ὅθεν $$\alpha = \beta . \left(1 + 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right)$$

καὶ ἑπομένως $$\frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 3 + \frac{2}{5}$$

Ὥστε ὁ λόγος τοῦ ποσοῦ A πρὸς τὸ ὁμοειδὲς αὐτῷ ποσὸν B ἰσοῦται τῷ λόγῳ τοῦ ἀριθμοῦ α, τοῦ παριστῶντος τὸ ποσὸν A, πρὸς τὸν ἀριθμὸν β, τὸν παριστῶντα τὸ ποσὸν B, τουτέστιν $\frac{A}{B} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν ἀριθμὸν β ἦναι ὁ $3 + \frac{2}{5}$, καὶ ὁ λόγος τῶν παρισταμένων δύο ποσῶν A καὶ B ὑπὸ τῶν δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς $3 + \frac{2}{5}$. Διότι, ἐπειδὴ

(2) $$\alpha = \beta + \beta + \beta + \frac{\beta}{5} + \frac{\beta}{5},$$

ἐὰν τὸ κοινὸν μέτρον ἢ μονὰς τῶν δύο ὁμοειδῶν ποσῶν A καὶ B ἦναι τὸ M, ἕπεται ἐκ τῆς ἰσότητος (2)

(3) $$M\alpha = M\beta + M\beta + M\beta + \frac{M\beta}{5} + \frac{M\beta}{5}$$

Ἀλλὰ Mα εἶναι αὐτὸ τὸ ποσὸν A καὶ Mβ αὐτὸ τὸ ποσὸν B· ὥστε ἐκ τῆς ἰσότητος (3) δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ μὲν Mα διὰ A, τοῦ δὲ Mβ διὰ B ἕπεται

$$A = B + B + B + \frac{B}{5} + \frac{B}{5}$$

Ὥστε τὸ ποσὸν A παράγεται ἐκ τοῦ ποσοῦ B ληφθέντος ὡς προσθετέου τρὶς καὶ τοῦ πέμπτου τοῦ B ληφθέντος ὡς προσθετέου δὶς καὶ ἑπομένως

$$\frac{A}{B} = 3 + \frac{2}{5},$$ ὅπερ ἔδει δεῖξαι

153. *Μεταβλητὸν ποσὸν* λέγεται τὸ διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις ἐπιδεχόμεον. Δύο δὲ ποσὰ λέγεται, ὅτι ἐξαρτῶνται ἀπ' ἀλλήλων, ὅταν μεταβαλλομένου τοῦ ἑνὸς αὐτῶν μεταβάλλεται καὶ τὸ ἕτερον.

Δύο ποσὰ λέγονται *ἀνάλογα* ἢ ὅτι *μεταβάλλονται ἀναλόγως*, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται καὶ τὸ ἕτερον πάντοτε ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· τουτέστιν, ἐὰν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἔχωσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν καὶ αἱ ἀντιχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου.

Δύο δὲ ποσὰ λέγονται *ἀντίστροφα* ἢ ὅτι *μεταβάλλονται ἀντιστρόφως*, ἐὰν πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, διαιρεῖται τὸ ἄλλο διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· τουτέστιν, ἐὰν δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ ἑνὸς ἔχωσι λόγον ἀντίστροφον τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν τοῦ ἄλλου.

Ποσὸν δέ τι λέγεται, ὅτι μεταβάλλεται *ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως πρὸς πολλὰ ἄλλα*, ἐὰν μεταβάλληται ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως πρὸς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν, ὅταν τὰ λοιπὰ δὲν μεταβάλλωνται.

*Σημείωσις*. Αἱ τιμαὶ τῶν ποσῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας μία πρὸς μίαν.

154. *Δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως, ἐὰν διπλασιαζομένου τοῦ ἑνὸς αὐτῶν διπλασιάζεται καὶ τὸ ἕτερον, καὶ τριπλασιαζομένου τριπλασιάζεται· καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁσαπλάσιον γίνηται τὸ ἓν αὐτῶν, τοσαπλάσιον γίνεται καὶ τὸ ἕτερον·* (αἱ τιμαὶ αὐτῶν ἀντιστοιχοῦσι πρὸς ἀλλήλας, μία πρὸς μίαν).

Ἔστωσαν α καὶ β δύο ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν Α καὶ Β λέγω, ὅτι, ἐὰν ἡ α πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν τυχόντα ἀριθμόν, οἷον τὸν $3+\frac{2}{5}$, καὶ ἡ β ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Διότι πρὸς τὴν τιμὴν α τοῦ ποσοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ β τοῦ ποσοῦ Β· ὥστε πρὸς τὴν τιμὴν 3α τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ 3β τοῦ Β. Πρὸς δὲ τὴν τιμὴν $\frac{\alpha}{5}$ τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{\beta}{5}$ τοῦ Β (διότι πενταπλασιαζομένης τῆς $\frac{\alpha}{5}$ καὶ γινομένης α, πενταπλασιάζεται καὶ ἡ $\frac{\beta}{5}$ καὶ γίνεται β)· ὥστε πρὸς τὴν τιμὴν $\frac{2\alpha}{5}$ τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ $\frac{2\beta}{5}$ τοῦ Β. Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι καὶ πρὸς τὴν ὅλην τιμὴν $\left(3+\frac{2}{5}\right).\alpha$ τοῦ ποσοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἡ ὅλη τιμὴ $\left(3+\frac{2}{5}\right).\beta$ τοῦ ποσοῦ Β· διότι πενταπλασιαζομένης τῆς $\left(3+\frac{2}{5}\right).\alpha$ καὶ γινομένης $17\alpha$ πενταπλασιάζεται καὶ ἡ $\left(3+\frac{2}{5}\right).\beta$ καὶ γίνεται $17.\beta$, πρὸς δὲ τὸ 17πλάσιον τοῦ α ἀντιστοιχεῖ τὸ 17πλάσιον τοῦ β καὶ ἑπομένως τὰ δύο ποσὰ Α καὶ Β μεταβάλλονται ἀναλόγως.

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος πρότασις περὶ ἀντιστρόφως μεταβαλλομένων ποσῶν.

Κατὰ ταῦτα εὐκολύνεται μεγάλως τὸ ζήτημα, ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως ἢ ἀντιστρόφως ἢ οὔ· διότι ἀρκεῖ νὰ δεικνύηται, ὅτι πᾶς ἀκέραιος πολλαπλασιασμὸς τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἐπιφέρει τὸν αὐτὸν ἀκέραιον πολλαπλασιασμὸν ἢ διαίρεσιν καὶ τοῦ ἑτέρου, ἵνα ἐκ τούτου συμπεραίνηται, ὅτι καὶ πρὸς πάντα πολλαπλασιασμὸν συμβαίνει τὸ αὐτό. Ἡ δὲ εὐκολία αὕτη γίνεται φανερὰ κατὰ τὴν λύσιν τῶν ἐν τοῖς ἑπομένοις προβλημάτων.

155. *Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν ἔχουσι τὸν αὐτὸν λόγον, ὃν ἔχουσι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἑτέρου.*

Ἔστωσαν α καὶ α′ δύο τυχοῦσαι τιμαὶ τοῦ ποσοῦ Α, καὶ β καὶ β′ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἀναλόγως πρὸς τὸ Α μεταβαλλομένου ποσοῦ Β· λέγω, ὅτι εἶναι

$$\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$$

Διότι, ἵνα ἡ τιμὴ α μεταβληθῇ εἰς τὴν τιμὴν α′, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον $\frac{\alpha'}{\alpha}$, ὅστις παρασταθήτω διὰ λ· τότε δὲ καὶ ἡ τιμὴ β πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ καὶ γίνεται β′, ἤτοι εἶναι

$$\alpha'=\alpha.\lambda,\ \beta'=\beta.\lambda$$

Ὅθεν εὑρίσκεται

$$(1)\qquad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$$

Καὶ τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως

Ἡ ἰσότης δύο λόγων πρὸς ἀλλήλους λέγεται *ἀναλογία*. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) ἀποτελεῖ ἀναλογίαν. Καὶ οἱ μὲν ἀριθμοὶ α καὶ β λέγονται *ἡγούμενοι*, οἱ δὲ α′ καὶ β′ *ἑπόμενοι*· οἱ μὲν α καὶ β′ λέγονται *ἄκροι*, οἱ δὲ β καὶ α′ *μέσοι*. Πάντες δὲ οἱ ἀριθμοὶ α,β,α′,β′ λέγονται, *ὅροι* τῆς ἀναλογίας.

156. *Ἐὰν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἀναλόγως, ὁ λόγος αὐτῶν μένει πάντοτε ὁ αὐτός.*

Ἔστωσαν α, α′, α″, α‴,...,.καὶ β, β′, β″, β‴,....αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ δύο ποσῶν Α καὶ Α μεταβαλλομένων ἀναλόγως. Κατὰ τὴν προηγουμένην πρότασιν εἶναι

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'},\ \frac{\alpha}{\alpha''}=\frac{\beta}{\beta''},\ \frac{\alpha}{\alpha'''}=\frac{\beta}{\beta'''},\ldots.$$

Ἐκ δὲ τῶν ἀναλογιῶν τούτων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἑκάστης ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον γινόμενον τῶν ἑπομένων εὑρίσκεται

$$(2) \qquad \alpha.\beta'=\beta.\alpha',\ \alpha.\beta''=\beta.\alpha'',\ \alpha.\beta'''=\beta.\alpha''',\ldots..$$

ἤτοι *ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων*. Ἀλλ᾽ ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) ἕπεται καὶ

$$(2) \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'},\ \frac{\alpha}{\alpha}=\frac{\alpha'}{\beta''},\ \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'''}{\beta'''},\ldots...$$

ἤτοι *ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ δύνανται νὰ ἀντιμετατεθῶσιν οἱ μέσοι, ὡς καὶ οἱ ἄκροι.*

Ἐκ δὲ τῶν ἀναλογιῶν (3), ἐπειδὴ εἷς λόγος εἶναι κοινός, ἕπεται

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{\alpha'''}{\beta'''}=\ldots...$$

157. *Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν γεγραμμένοι ἦναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν μέσων, οἱ τέσσαρες οὗτοι ἀριθμοί, ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν.*

Ἔστωσαν τέσσαρες τυχόντες ἀριθμοὶ α,β,γ,δ τοιοῦτοι, ὥστε

$$(1) \qquad \alpha.\delta=\beta.\gamma$$

Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ β.δ, προκύπτει ἡ ἰσότης

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta},\ \text{ὅ. ἔδ. δ.}$$

Ἐὰν δὲ ὁ λόγος $\frac{\alpha}{\beta}$ τεθῇ ἴσος τῷ λ, ἕπεται ἐκ τῆς ἰσότητος (2)

$$\alpha=\beta.\lambda$$
$$\gamma=\delta.\lambda$$

Ἐὰν δὲ προστεθῶσιν ἢ ἀφαιρεθῶσιν κατὰ μέλη αἱ ἰσότητες αὗται, προκύπτει

$$\alpha\pm\gamma=(\beta\pm\delta).\lambda$$

Ὅθεν καὶ $\dfrac{\alpha\pm\gamma}{\beta\pm\delta}=\lambda=\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}$

ἤτοι *ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἑπομένων ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον.*

158. *Ἐν πάσῃ σειρᾷ ἴσων λόγων τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἑπομένων, ὡς εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον.*

Ἔστω π. χ.

$$\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}=\lambda$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$\begin{array}{c}\alpha=A.\lambda\\ \beta=B.\lambda\\ \gamma=\Gamma.\lambda\\ \delta=\Delta.\lambda\\ \hline \alpha+\beta+\gamma+\delta=(A+B+\Gamma+\Delta).\lambda\end{array}$$

Ὅθεν καὶ

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{A+B+\Gamma+\Delta}=\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\delta}{\Delta}=\lambda, \text{ὅ. ἔ.δ.}$$

159. *Δοθέντων τῶν τριῶν ὅρων ἀναλογίας εὑρεῖν τὸν τέταρτον.*

Ἔστωσαν $\alpha,\beta,\gamma$ οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι τῆς ἀναλογίας καὶ $x$ ὁ ἄγνωστος τέταρτος. Κατὰ τὴν πρότασιν (τοῦ ἐδ. 156) εἶναι

$$\alpha.x=\beta.\gamma$$

καὶ ἑπομένως

$$x=\frac{\beta.\gamma}{\alpha}$$

Ὥστε ὁ ζητούμενος τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ γινομένου τῶν γνωστῶν μέσων διὰ τοῦ γνωστοῦ ἄκρου.

160. *Δοθέντων δύο ἀριθμῶν εὑρεῖν τὸν μέσον ἀνάλογον αὐτῶν. Μέσος*

*ἀνάλογος* δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ κατέχων τὰς θέσεις ἀμφοτέρων τῶν μέσων ἀναλογίας ἐχούσης ἄκρους τοὺς δοθέντας ἀριθμούς.

Κατὰ ταῦτα εἶναι, ἐὰν α καὶ δ ἦναι οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ $x$ ὁ ἄγνωστος μέσος ἀνάλογος

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{x}{\delta}$$

καὶ ἑπομένως

$$x^2=\alpha.\delta$$

ἤτοι τὸ τετράγωνον τοῦ ζητουμένου μέσου ἀναλόγου εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν.

161. *Ἐὰν δύο λόγοι ἦναι ἴσοι καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι λόγοι ἴσοι* (ὡς καὶ πᾶσα δύναμις).

Ἐὰν π. χ.

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}, \text{εἶναι καὶ} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^2, \text{καὶ} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu=\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^\nu$$

## Προβλήματα.

162. Ἐν τῇ λύσει ἁπλῶν ἢ στοιχειωδῶν προβλημάτων δίδονται κυρίως δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες δύο ποσὰ ἐξαρτώμενα ὁπωσδήποτε ἀπ' ἀλλήλων καὶ ζητεῖται τρίτος ἀριθμός, ὅστις εὑρίσκεται ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλησιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιαῦτα λόγου χάριν εἶναι γενικῶς τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα.

α) *Εὑρεῖν τὴν τιμὴν ἢ ἀξίαν πολλῶν μονάδων πράγματός τινος, ὅταν εἶναι γνωστὴ ἡ τῆς μιᾶς μονάδος αὐτοῦ.*

β) *Εὑρεῖν τὴν τιμὴν ἢ ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος πράγματός τινος, ὅταν ἦναι γνωστὴ ἡ τῶν πολλῶν μονάδων αὐτοῦ.*

Διότι τὸ μὲν πρῶτον λύεται δι' ἑνὸς πολλαπλασιασμοῦ, τὸ δὲ δεύτερον διὰ μιᾶς διαιρέσεως.

*Ὅροι* τοῦ προβλήματος λέγονται αἱ ἀπαιτήσεις, ἃς πρέπει νὰ πληρῶσι τὰ ζητούμενα, ἵνα λύηται τὸ πρόβλημα. Αἱ κυριώτεραι τῶν ἀπαιτήσεων τούτων γίνονται γνωσταὶ ἐν αὐτῇ τῇ ἐκφράσει τοῦ προβλήματος καὶ ὁρίζουσι τὰς ἀριθμητικὰς σχέσεις, ἃς πρέπει νὰ ἔχωσι τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ διδόμενα. Αἱ δὲ ἀπαιτήσεις αὗται λέγονται καὶ *ἐπιτάγματα* τοῦ προβλήματος.

Πλὴν δὲ τῶν ἀπαιτήσεων τούτων, ὅταν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς δὲν ἦναι ἀφῃρημένος, ἀλλὰ παριστᾷ ποσόν τι, ὡς ἐκ τῆς φύσεως τοῦ παριστωμένου ποσοῦ καὶ ἀσχέτως πρὸς τὸ πρόβλημα ὑπόκειται συνήθως εἰς δευτερεύοντάς τινας ὅρους ἢ *περιορισμούς*, οὓς ὀφείλει νὰ πληροῖ ὡσαύτως. (129)

Ἡ δὲ λύσις παντὸς ἀριθμητικοῦ προβλήματος συνίσταται κυρίως ἐκ τῶν ἑξῆς δύο· 1) ἐκφράζονται διὰ τῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων οἱ ὅροι τοῦ προβλήματος, ἤτοι οἱ τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα συνδέουσαι σχέσεις καὶ 2) εὑρίσκονται ἐκ τῶν σχέσεων τούτων οἱ ζητούμενοι ἢ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ὁ παριστῶν τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὑπὸ τοὺς ἐκ τῆς φύσεως τῶν ζητουμένων ἐνδεχομένους περιορισμούς.

Καὶ διὰ μὲν τὴν λύσιν τῶν ἀριθμητικῶν προβλημάτων ὑπάρχουσιν, ὡς καὶ ἐν τοῖς ἑπομένοις γενήσεται δῆλον, ὡρισμένοι κανόνες ἢ μέθοδοι, διὰ δὲ τὴν εὕρεσιν τῶν σχέσεων τῶν συνδεουσῶν τὰ ζητούμενα πρὸς τὰ δεδομένα οὐδεὶς δύναται νὰ δοθῇ ὡρισμένος κανὼν ἕνεκα τῆς ποικιλίας τῶν προβλημάτων· κατορθοῦται δ' ὅμως καὶ τοῦτο διὰ τῆς ἀσκήσεως καὶ τῆς δεξιότητος τοῦ νοῦ.

Ἕπονται ἀριθμητικά τινα προβλήματα, δι' ὧν καθοδηγεῖται ἡ εὕρεσις τῶν σχέσεων μεταξὺ δεδομένων καὶ ζητουμένων καὶ ἡ δι' αὐτῶν λύσις.

1) *Τίς ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ πέμπτον εἶναι ὁ* 24; Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 24, τὰ $\frac{5}{5}$ αὐτοῦ, ἤτοι αὐτὸς οὗτος, εἶναι πεντάκις μεγαλείτερος τοῦ 25. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $24.5=120$.

2) *Τὰ* $\frac{3}{4}$ *πίθου πληροῦνται δι'* 120 *ὀκάδων· τίς ἡ χωρητικότης τοῦ πίθου.*

Ἐπειδὴ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ πίθου εἶναι 120 ὀκ.

τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ πίθου εἶναι τρὶς ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{3}{4}$, ἤτοι $\frac{120}{3}$

τὰ $\frac{4}{4}$ τοῦ πίθου ἢ ὅλος ὁ πίθος εἶναι 4κις περισσότερον τοῦ $\frac{1}{4}$, ἤτοι

$$\frac{120.4}{3}=160 \text{ ὀκ.}$$

1) *Τὰ* $\frac{2}{7}$ *καὶ* $\frac{1}{5}$ *ὑφάσματός τινος ἀποτελοῦσιν ὁμοῦ* 34 *πήχ. Πόσους πήχεις ἀποτελεῖ ὅλον τὸ ὕφασμα;*

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο κλασμάτων εἶναι

$$\frac{2}{7}+\frac{1}{5}=\frac{17}{35}$$

τὰ $\frac{17}{35}$ τοῦ ὑφάσματος εἶναι 34 πήχ.

$\frac{1}{35}$ » » » 17κις ὀλιγώτερον τῶν $\frac{17}{35}$, ἤτοι $\frac{34}{17}$ πηχ.

$\frac{35}{35}$ » » » 35κις περισσότερον τοῦ $\frac{1}{35}$, » $\frac{34.35}{17}=70$ πήχ.

4) Ἡ διαφορὰ τῶν $\frac{3}{4}$ καὶ τῶν $\frac{2}{5}$ ἀριθμοῦ τινος εἶναι 14. Τίς ὁ ἀριθμὸς οὗτος;

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο κλασμάτων εἶναι

$$\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{7}{20}$$

5/7 - 4 = 12

8

5/7

τὰ $\frac{7}{20}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 14

$\frac{1}{20}$ » » » 7κις μικρότερον τῶν $\frac{7}{20}$, ἤτοι $\frac{14}{7}$

$\frac{20}{20}$ » » » 20κις μεγαλείτερον τοῦ $\frac{1}{20}$, » $\frac{14.20}{7}=40$

5) Ἐρωτηθείς τις περὶ τῆς ἡλικίας αὐτοῦ εἶπε· τὰ πέντε ἕβδομα τῆς ἡλικίας μου ἠλαττωμένα κατὰ τέσσαρα ἔτη ἀποτελοῦσι τὴν ἡλικίαν, ἣν εἶχον πρὸ δώδεκα ἐτῶν. Τίς ἡ ἡλικία;

Τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἡλικίας ἀποτελοῦσι τὴν ἡλικίαν, ἣν εἶχε πρὸ 12-4 ἤτοι πρὸ 8 ἐτῶν.

Ὥστε εἰς τὰ $\frac{5}{7}$ τῆς ἡλικίας πρέπει νὰ προστεθῶσιν 8 ἔτη πρὸς ἀποτέλεσιν τῆς ἡλικίας, ἤτοι τὸ $\frac{7}{7}$ αὐτῆς.

τὰ $\frac{2}{7}$ τῆς ἡλικίας εἶναι 8ἔτ.

τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς ἡλικίας εἶναι δὶς μικρότερον τῶν $\frac{2}{7}$, ἤτοι $\frac{8}{2}$

τὰ $\frac{7}{7}$ τῆς ἡλικίας εἶναι 7κις μεγαλείτερα τοῦ $\frac{1}{7}$, ἤτοι $\frac{8.7}{2}=28$ ἔτη

6) *Τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ τινος προστιθέμενον εἰς τὰ δύο τρίτα αὐτοῦ ἀποτελεῖ τὸν 72. Τίς ὁ ἀριθμός;*

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει $\frac{3}{3}$, τὸ δὲ διπλάσιον αὐτοῦ ἔχει $\frac{6}{3}$ καὶ ἑπομένως

$$\frac{6}{3}+\frac{2}{3}=\frac{8}{3} \text{ τοῦ ἀριθμοῦ.}$$

$\frac{8}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 72

$\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι 8κις μικρότερον τῶν $\frac{8}{3}$, ἤτοι $\frac{72}{8}=9$

$\frac{3}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι τρὶς μεγαλείτερα τοῦ $\frac{1}{3}$, ἤτοι $9.3=27$.

7) *Ταμίας τις ἔδωκε τὰ δύο πέμπτα, τῶν ὅσα εἶχεν ἐν τῷ ταμείῳ χρημάτων· ἔλαβε δ' ἔπειτα 2662 δρ. καὶ οὕτως ἡ ἀρχικὴ ἀξία τῶν ἐν τῷ ταμείῳ χρημάτων ηὐξήθη κατὰ ἓν τρίτον. Πόσα χρήματα εἶχεν κατ' ἀρχὰς ἐν τῷ ταμείῳ;*

Αἱ 2662 δρ. κατατεθεῖσαι ἐν τῷ ταμείῳ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{2}{5}$, ἃ ἔδωκε, καὶ τὸ $\frac{1}{3}$, ὅπερ ἔχει ἐπὶ πλέον. Ἀλλὰ

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$$

τὰ $\frac{11}{15}$ τῶν χρημάτων εἶναι 2662 δρ.

$\frac{1}{15}$ τῶν χρημάτ. εἶναι 11κις ὀλιγώτερον τῶν $\frac{11}{15}$, ἤτοι $\frac{2662}{11}$

$\frac{15}{15}$ τῶν χρημάτ. εἶναι 15κις περισσότερα τοῦ $\frac{1}{15}$, ἤτοι $\frac{2662.15}{11}=3630$ δρ.

8) *Τρεῖς συνέταιροι ἐμοίρασαν τὰ κέρδη αὐτῶν. Ὁ μὲν πρῶτος ἔλαβε τὰ $\frac{2}{7}$, ὁ δὲ δεύτερος τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου. Ποῖον τὸ μερίδιον, τὸ ὁποῖον ἔλαβεν ἕκαστος;*

Ὁ πρῶτος λαβὼν τὰ $\frac{2}{7}$ ἀφῆκε τὰ $\frac{5}{7}$

Ὁ δεύτερος ἔλαβε τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου τούτου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ κέρδους. Ἀλλὰ

$\frac{1}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου εἶναι $\frac{1}{5}$ τῶν $\frac{5}{7}$ ἤτοι $\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{7}$

$\frac{3}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου » τρὶς περισσότερα τοῦ $\frac{1}{5}$, ἤτοι $\frac{1.3}{7} = \frac{3}{7}$

Ὥστε ὁ πρῶτος καὶ ὁ δεύτερος ἔλαβον

$$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7} \text{ τοῦ κέρδους}$$

καὶ ἐπομένως ὁ τρίτος ἔλαβε

$$\frac{7}{7} - \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \text{ τοῦ κέρδους}$$

9) *Ποιμὴν ἐρωτηθεὶς πόσους ἀμνοὺς ἔχει, εἶπεν· ἐὰν εἶχον ἐπὶ πλέον τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀμνῶν καὶ 12, οἱ ἀμνοὶ ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 132. Τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀμνῶν;*

Τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀμνῶν προστιθέμενα εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ ἀποτελοῦσι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀμνῶν, ταῦτα δὲ προστιθέμενα εἰς τὸν 12 ἀποτελοῦσι τὸν ἀριθμὸν 132. Ὥστε

τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀμνῶν εἶναι 132—12, ἤτοι 120

$\frac{1}{3}$ » » » » 4κις μικρότερον τῶν $\frac{4}{3}$, ἤτοι $\frac{120}{4}$

$\frac{3}{3}$ » » » » $\frac{120 \, . \, 3}{4}$, ἤτοι 90 ἀμνοί.

10) *Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ* $2+\frac{3}{5}$ *πήχ. ἔργου τινὸς ἐργαζόμενος ἐπὶ* $2+\frac{1}{4}$ *ὥρ. Πόσους πήχεις τοῦ ἔργου τούτου ἐκτελεῖ ἐπὶ* $5+\frac{1}{2}$ *ὥρ.;*

$$2+\frac{3}{5}=\frac{13}{5},\ 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4},\ 5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$$

ἐπὶ $\frac{9}{4}$ ὥρ. ὁ ἐργάτης ἐκτελεῖ $\frac{13}{5}$ πήχ.

» $\frac{1}{4}$ » » » $\frac{13}{5.9}$

» $\frac{4}{4}$ ἢ 1, » » » $\frac{13.4}{5.9}$

» $\frac{1}{2}$ » » » $\frac{13.4}{5.9.2}$

» $\frac{11}{2}$ » » » $\frac{13.4.11}{5.9.2}=6+\frac{16}{45}$ πήχ.

11) *Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα πληρωθῇ δεξαμενή τις ὑπὸ δύο κρηνῶν ρεουσῶν ὁμοῦ, ἐὰν ἡ μὲν πληροῖ τὴν δεξαμενὴν μόνη ρέουσα ἐπὶ 4 ὥρ., ἡ δὲ ἐπὶ 6 ὥρ.;*

Ἐπειδὴ ἡ πρώτη πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς 4 ὥρ., εἰς 1 ὥρ. πληροῖ τὸ $\frac{1}{4}$ αὐτῆς. Ὁμοίως ἡ δευτέρα εἰς 1 ὥρ. πληροῖ μόνη τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς δεξαμενῆς. Ὥστε ἀμφότεραι αἱ κρῆναι πληροῦσιν εἰς μίαν ὥραν ὁμοῦ ρέουσαι

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{10}{24}\text{ τῆς δεξαμενῆς}$$

τὰ $\frac{10}{24}$ πληροῦνται εἰς 1 ὥρ.

τὸ $\frac{1}{24}$ πληροῦται εἰς $\frac{1}{10}$ ὥρ.

τὰ $\frac{24}{24}$ πληροῦνται εἰς $\frac{24}{10}=2+\frac{2}{5}$ ὥρ.

12) *Τρεῖς κρῆναι ῥέουσιν εἰς δεξαμενήν. Ἡ μὲν πρώτη πληροῖ αὐτὴν εἰς* $1+\frac{2}{5}$ *ὥρ., ἡ δὲ δευτέρα εἰς* $2+\frac{3}{4}$ *καὶ ἡ τρίτη εἰς* $4+\frac{5}{8}$ *ὥρ., διὰ τετάρτης δὲ κρήνης κενοῦται ἡ δεξαμενὴ εἰς* $1+\frac{2}{3}$ *ὥρ. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται, ἵνα πληρωθῇ ἡ δεξαμενή, ἐὰν πᾶσαι αἱ τέσσαρες κρῆναι ῥέωσι συγχρόνως ;*

Ἡ πρώτη κρήνη πληροῖ τὴν δεξαμενὴν εἰς $\frac{7}{5}$ ὥρ.

ἡ δευτέρα » » » $\frac{11}{4}$ ὥρ.

ἡ τρίτη » » » $\frac{37}{8}$ ὥρ.

ἡ τετάρτη » κενοῖ » $\frac{5}{3}$ ὥρ.

Ἡ πρώτη κρήνη πληροῖ εἰς $\frac{1}{5}$ ὥρ. τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς μίαν 1 ὥρ. 5κις περισσότερον, ἤτοι $\frac{1.5}{7}=\frac{5}{7}$ τῆς δεξαμενῆς.

Ὁμοίως ἡ δευτέρα εἰς 1 ὥρ. πληροῖ τὰ $\frac{4}{11}$ τῆς δεξαμ.

» ἡ τρίτη » » » $\frac{8}{37}$ » »

» ἡ τετάρτη » κενοῖ » $\frac{3}{5}$ » »

Αἱ τέσσαρες ἄρα κρῆναι ὁμοῦ ῥέουσαι πληροῦσι καὶ κενοῦσιν εἰς 1 ὥρα

$\frac{5}{7}+\frac{4}{11}+\frac{8}{37}-\frac{3}{5}=\frac{3687}{2849}-\frac{3}{5}=\frac{9888}{14245}$ τῆς δεξαμενῆς

Ἵνα πληρωθῶσι $\frac{9888}{14245}$ τῆς δεξαμ. ἀπαιτεῖται 1 ὥρ.

» » $\frac{1}{14245}$ » » » $\frac{1}{9888}$ ὥρ.

» » $\frac{14245}{14245}$ » » » $\frac{1.14245}{9888}=1+\frac{4357}{9888}$

13) *Ποία εἶναι ἡ ὥρα, ὅταν ὁ παρελθὼν χρόνος τῆς ἡμέρας ᾖναι τὰ τρία πέμπτα τοῦ ὑπολειπομένου χρόνου τῆς ἡμέρας;*

Ὁ ὑπόλοιπος χρόνος τῆς ἡμέρας ἔχει $\frac{5}{5}$, ὁ δὲ διαρρεύσας χρόνος ἔχει $\frac{3}{5}$ αὐτοῦ καὶ ἑπομένως ἡ ἡμέρα ἀποτελεῖται ἐκ

$$\frac{5}{5}+\frac{3}{5}=\frac{8}{5} \text{ τοῦ ὑπολοίπου χρόνου τῆς ἡμέρας}$$

Τὰ $\frac{8}{5}$ τοῦ ὑπολοίπου τῆς ἡμέρας εἶναι 24 ὥρ.

Τὸ $\frac{1}{5}$ » » » » $\frac{24}{8}$

Τὰ $\frac{3}{5}$ » » » » $\frac{24.3}{8}=9$ ὥρ. π. μ.

14) *Ποία εἶναι ἡ ὥρα, ὅταν οἱ δύο δεῖκται (τῶν ὡρῶν καὶ τῶν πρώτων λεπτῶν) συμπίπτωσι μεταξὺ 1 καὶ 2 ὡρῶν.*

Εἰς μίαν ὥραν ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν προηγεῖται τοῦ τῶν λεπτῶν κατὰ 5 λεπτά. Πρέπει ἄρα νὰ ζητηθῇ ὁ χρόνος, ὃν ἀπαιτεῖ ὁ δείκτης τῶν λεπτῶν πρὸς ἄρσιν τῆς διαφορᾶς ταύτης τῶν 5 λεπτῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἰς μίαν ὥραν διατρέχει οὗτος 55 λεπτὰ ἐπὶ πλέον ἢ ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν.

Ἵνα προηγῆται κατὰ 55 λεπτά, ὁ δείκτης τῶν λεπτῶν ἀπαιτεῖ 60λ.

» » » 1 » » » » $\frac{60}{55}$λ.

» » » 5 » » » » $\frac{60.5}{55}=5+\frac{5}{11}$λ.

15) *Ποία εἶναι ἡ ὥρα, ὅταν ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν καὶ ὁ τῶν πρώτων λεπτῶν ᾖναι ἡ προέκτασις ἀλλήλων μεταξὺ 3 καὶ 4 ὡρῶν;*

Τὸ σημεῖον τὸ ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον (ἐν τῷ κύκλῳ τοῦ ὡρολογίου) τῶν 3 ὡρῶν εἶναι αἱ 9 ὧραι. Ὁ δείκτης ἄρα τῶν πρώτων λεπτῶν τότε μόνον εὑρίσκεται εἰς τὴν προέκτασιν τοῦ τῶν ὡρῶν, ὅταν διατρέξῃ τὰ 45 λεπτά, τὰ ὁποῖα προηγοῦνται μέχρι τῶν 3 ὡρῶν.

Πρὸς τὰ 55 λ. ἀντιστοιχοῦσι 60 λ.

» τὸ 1 » $\frac{60}{54}$λ.

» τὰ 45 » $\frac{60.45}{55}=49+\frac{1}{11}$ λ.

Ὥστε ἀμφότεροι οἱ δεῖκται εὑρίσκονται εἰς τὴν προέκτασιν ὁ εἷς τοῦ ἑτέρου κατὰ τὴν $3^{\text{ωρ.}}+49+\frac{1}{11}^{\lambda}$

16) *Κύων διώκει λαγὸν πηδήσαντα ἤδη 95 πηδήματα δρόμον κατ' εὐθεῖαν. Ὁ κύων πηδᾷ 6 πηδήματα, ἐν ᾧ χρόνῳ ὁ λαγὸς πηδᾷ 8, καὶ 4 πηδήματα τοῦ κυνὸς ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 7 τοῦ λαγοῦ. Μετὰ πόσα πηδήματα ὁ κύων καταφθάνει τὸν λαγόν ;*

Ὁ κύων πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ διάστημα τῶν 95 πηδημάτων, καθ' ἃ προηγεῖται αὐτοῦ ὁ λαγός.

4 πηδήματα τοῦ κυνὸς εἶναι 7 πηδήμ. τοῦ λαγοῦ

1 » » » » $\frac{7}{4}$ » »

6 » » » » $\frac{7.6}{4}$ » » ἤτοι $10+\frac{1}{2}$ πηδ.

Ὅτε δὲ ὁ κύων πηδᾷ 6 πηδ., ὁ λαγὸς πηδᾷ 8, ὥστε 6 πηδήμ. τοῦ κυνὸς ἀντιστοιχοῦσι πρὸς $10+\frac{1}{2}-8=\frac{5}{2}$ πηδήμ. τοῦ λαγοῦ.

Πρὸς τὰ $\frac{5}{2}$ πηδήμ. λαγ. ἀντιστοιχοῦσιν 6 πηδ. κυνός

» τὸ $\frac{1}{2}$ » » » $\frac{6}{5}$ » »

» τὸ 1 » » » $\frac{6.2}{5}$ » »

» τὰ 95 » » » $\frac{6.2.95}{5}=228$ πηδ. κυνός

17) *Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀναπηδᾷ εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ πίπτει· πεσοῦσα δὲ ἀπό τινος ὕψους καὶ ἀναπηδήσασα τρίς, ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν εἰς ὕψος $\frac{1}{10}$ τοῦ πήχεως. Ἐκ πόσου ὕψους ἔπεσε τὸ πρῶτον.*

Κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀναπήδησιν ὑψώθη ἡ σφαῖρα κατὰ τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους ἐξ οὗ κατέπεσε· κατὰ τὴν δευτέραν ὑψώθη κατὰ τὰ $\frac{2}{9}$ τῶν $\frac{2}{9}$, ἤτοι $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}$, καὶ κατὰ τὴν τρίτην ὑψώθη κατὰ τὰ $\frac{2}{9}$ τῶν $\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}$, ἤτοι

$$\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{8}{729}\text{ τοῦ ὕψους}=\frac{1}{10}\text{ πήχ.}$$

Τὰ $\frac{8}{729}$ τοῦ ὕψους εἶναι $\frac{1}{10}$ πήχ.

τὸ $\frac{1}{729}$ » » $\frac{1}{10.8}$ »

τὰ $\frac{729}{729}$ » » $\frac{1.729}{10.8}=\frac{729}{80}=9+\frac{9}{80}$ πήχ·

18) *Ἐκ πίθου περιέχοντος 300 ὀκάδας οἴνου ἀφαιροῦνται 15 ὀκάδες καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· ἐκ τοῦ κράματος ἀφαιροῦνται πάλιν 15 ὀκ. καὶ ἀναπληροῦνται δι' ὕδατος· τὸ αὐτὸ γίνεται καὶ ἐκ τρίτου. Πόσος οἶνος περιέχεται τότε ἐν τῷ κράματι;*

Εἰς ἑκάστην ἀφαίρεσιν ἀφαιροῦνται 15 ὀκ. ἤτοι τὸ $\frac{1}{20}$ τοῦ 300. Ὥστε κατὰ μὲν τὴν πρώτην ἀφαίρεσιν ἔμειναν $\frac{19}{20}$ γνησίου οἴνου, ἤτοι $\frac{19.300}{20}$, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἔμειναν πάλιν τὰ $\frac{19}{20}$ τοῦ $\frac{19.300}{20}$ τοῦ γνησίου οἴνου, ἤτοι $\frac{19.19.300}{20.20}$, καὶ κατὰ τὴν τρίτην τὰ $\frac{19}{20}$ τοῦ $\frac{19.19.300}{20.20}$, ἤτοι $\frac{19.19.19.300}{20.20.20}=257+\frac{17}{80}$ ὀκ. γνησίου οἴνου.

19) *Ταχυδρόμος τις ἀναχωρεῖ ἐκ πόλεώς τινος διανύων 7 στάδια εἰς 3 ὥρας,* $4+\frac{3}{4}$ *ὥρας μετὰ τὴν ἀναχώρησιν αὐτοῦ πέμπεται ἕτερος ταχυδρόμος διανύων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ 5 στάδια εἰς 2 ὥρας. Μετὰ πόσας ὥρας ὁ δεύτερος ταχυδρόμος καταφθάνει τὸν πρῶτον; Καὶ πόσα στάδια διήνυσεν ἑκάτερος αὐτῶν;*

Ἐπειδὴ ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διανύει 7 στάδια εἰς 3 ὥρ., εἰς μίαν ὥραν διανύει $\frac{7}{3}=2+\frac{1}{3}$ στάδια καὶ ἐπειδὴ ἀνεχώρησε $4+\frac{3}{4}$ ὥρ. πρὸ τοῦ δευτέρου ταχυδρόμου, πρὸς εὕρεσιν τῶν σταδίων, καθ' ἃ ἀπέχει τοῦ δευτέρου κατὰ τὴν ἐκκίνησιν αὐτοῦ, πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ τὸ $2+\frac{1}{3}$ ἐπὶ $4+\frac{3}{4}$ ὅτε εὑρίσκεται $11+\frac{1}{12}$, ἤτοι ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διήνυσεν ἤδη $11+\frac{1}{12}$ στάδια, ὅτε ἐξεκίνησεν ὁ δεύτερος. Ὁ δεύτερος ταχυδρόμος διανύει 5 στάδια εἰς 2 ὥρας, ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν διανύει $2+\frac{1}{2}$ στάδια. Ὥστε κατὰ τὸ διάστημα μιᾶς ὥρας ὁ δεύτερος ταχυδρόμος πλησιάζει πρὸς τὸν πρῶτον κατὰ $\left(2+\frac{1}{2}\right)-\left(2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{6}$ στάδ. Ὅθεν, ἵνα εὑρεθῇ, εἰς πόσον χρονικὸν διάστημα ὁ δεύτερος καταφθάνει τὸν πρῶτον, ἀρκεῖ νὰ διαιρεθῇ τὸ $11+\frac{1}{12}$ διὰ $\frac{1}{6}$, ὅτε εὑρίσκεται $66+\frac{1}{2}$ ὧραι. Ὥστε ὁ δεύτερος καταφθάνει τὸν πρῶτον μετὰ $66+\frac{1}{2}$ ὥρ. Ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος ἐκφράζει τὸν χρόνον τῆς πορείας τοῦ δευτέρου ταχυδρόμου. Πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου τῆς πορείας καὶ τοῦ πρώτου ταχυδρόμου ἀρκεῖ νὰ προστεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς τὸν $4+\frac{3}{4}$, ὅτε εὑρίσκεται $71+\frac{1}{4}$ ὧραι.

Πρὸς εὕρεσιν τέλος καὶ πόσα στάδια διήνυσεν ἑκάτερος τῶν ταχυδρόμων πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν διανυσθέντων ὑπὸ ἑκατέρου αὐτῶν σταδίων κατὰ τὸ διάστημα μιᾶς ὥρας ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὡρῶν τῆς πορείας ἑκατέρου, ὅτε εὑρίσκεται

$$\left(2+\frac{1}{3}\right).\left(71+\frac{1}{4}\right)=166+\frac{1}{4}\text{στάδ.}$$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right).\left(66+\frac{1}{2}\right)=166+\frac{1}{4}\text{στάδ.}$$

Ἐπειδὴ ἄρα εὑρίσκεται ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς σταδίων συμπεραίνεται, ὅτι ἡ λύσις ἐγένετο ἄνευ λάθους καὶ ἑπομένως ὁ δεύτερος ταχυδρόμος καταφθάνει τὸν πρῶτον μετὰ $66+\frac{1}{2}$ ὥρ. καὶ ἑκάτερος αὐτῶν διήνυσε $166+\frac{1}{4}$ στάδια.

20) *Ἄνθρωπός τις ἔδωκε διὰ διαθήκης τῷ μὲν πρώτῳ κληρονόμῳ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς περιουσίας αὐτοῦ, τῷ δὲ δευτέρῳ τὸ $\frac{1}{3}$, τῷ δὲ τρίτῳ τὸ $\frac{1}{4}$. Ἀλλὰ συνέβη, ὅτε οἱ δύο πρῶτοι κληρονόμοι ἔλαβον τὰ μερίδια, αὐτῶν, νὰ λίπωσι τῷ τρίτῳ 6500 δρ. Τότε συνεφώνησαν οἱ τρεῖς οὗτοι κληρονόμοι νὰ μερίσωσι τὴν διαφορὰν ταύτην κατὰ τὴν ὁρισθεῖσαν ἀναλογίαν ὑπὸ τοῦ διαθέτου. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου κληρονόμου καὶ ἡ περιουσία τοῦ διαθέτου;*

Διὰ προσθέσεως τῶν $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ εὑρίσκεται ὁ $\frac{13}{12}$, ἐξ οὗ συνάγεται, ὅτι ὁ διαθέτης διέθηκε $\frac{1}{12}$ τῆς περιουσίας αὐτοῦ ἐπὶ πλέον, τοῦθ᾽ ὅπερ λείπει τῷ τρίτῳ κληρονόμῳ, ἤτοι αἱ 6500 δρ. Πρὸς εὕρεσιν ἄρα τούτου πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ 6500 διὰ $\frac{1}{12}$, ὅτε εὑρίσκεται 78000 δρ. ἤτοι ἡ ὅλη περιουσία. Πρὸς διόρθωσιν δὲ τῆς διαθήκης οὕτως, ὥστε νὰ μὴ παραβλαβῶσι τὰ ἀνάλογα μερίδια φανερόν, ὅτι, ἐπειδὴ ὁ διαθέτης διέθηκε 13 μέρη τῆς περιουσίας αὐτοῦ, ἤτοι $\frac{6}{12}$ εἰς τὸν πρῶτον κληρονόμον, $\frac{4}{12}$ εἰς τὸν δεύτερον καὶ $\frac{3}{12}$ εἰς τὸν τρίτον, τὸ λᾶθος αὐτοῦ ἦτο, τὸ νὰ καλέσῃ δωδέκατα τὰ μέρη ταῦτα, ἀντὶ νὰ καλέσῃ αὐτὰ δέκατα τρίτα. Ὥστε εἰς μὲν τὸν πρῶτον κληρονόμον ἀναλογοῦσι $\frac{6}{13}$, εἰς τὸν δεύτερον $\frac{4}{13}$ καὶ εἰς τὸν τρίτον $\frac{3}{13}$ τῆς περιουσίας τοῦ διαθέτου, ἤτοι

$$78000.\frac{6}{13}=36000,\ 78000.\frac{4}{13}=24000,\ 78.000.\frac{3}{13}=18000$$

21) *Δύο ἄνθρωποι ἔχουσιν ἡλικίαν ὁ μὲν 50 ἐτῶν, ὁ δὲ 14. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς τοῦ πρεσβυτέρου;*

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἡλικιῶν εἶναι προφανῶς 36, Ὅταν δὲ ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου ἦναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς τοῦ πρεσβυτέρου, ἡ διαφορὰ τῶν δύο ἡλικιῶν εἶναι τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρεσβυτέρου. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{4}{7}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πρεσβυτέρου εἶναι 36 ἔτη, τὸ $\frac{1}{7}$ αὐτῆς εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ 36 καὶ τὰ $\frac{7}{7}$, ἤτοι ἡ ἡλικία τοῦ πρεσβυτέρου, εἶνα. $\frac{36}{4}.7=63$. Ἀλλ' ἡ ἡλικία τοῦ πρεσβυτέρου εἶναι τόρα 50 ἔτη. Ὥστε μετὰ 13 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ νεωτέρου εἶναι τὰ $\frac{3}{7}$ τῆς τοῦ πρεσβυτέρου.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐὰν δύο ἢ πολλῶν κλασμάτων προστεθῶσιν οἱ ὁμώνυμοι ὅροι, προκύπτει κλάσμα, ὅπερ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ μεγίστου καὶ τοῦ ἐλαχίστου αὐτῶν.

2) Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ δύο ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ διαφέρουσιν ἀλλήλων, δὲν δύναται νὰ ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

3) Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗτινος τὸ ἥμισυ καὶ τὸ τρίτον καὶ τὰ δύο πέμπτα ἀποτελοῦσιν ἄθροισμα, τὸ ὁποῖον ἐλαττούμενον κατὰ 175 παρέχει τὸν ἀριθμὸν 417. (Ἀπ. 480).

Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὰ $\frac{3}{8}$ καὶ τὸ $\frac{1}{9}$ αὐξανόμενα κατὰ 1 δίδουσι τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. ('Απ. 72).

5) Ὑφαντὴς ὑφαίνει $1+\frac{2}{3}$ πηχ. τὴν ὥρ. Πόσον ὑφαίνει ἐπὶ $5+\frac{3}{4}$ ὥρ.;

('Απ. $9+\frac{7}{12}$ πήχ.)

6) Δύο κρουνοὶ πληροῦσιν ὁμοῦ δεξαμενήν τινα ρέοντες ἐπὶ 10 ὥρ. Ἐπὶ πόσον χρόνον πληροῖ μόνος ὁ μικρότερος τὴν δεξαμενήν, ἐὰν ὁ μεγαλείτερος πληροῖ αὐτὴν ρέων ἐπὶ 18 ὥρ. ('Απ. $22+\frac{1}{2}$ ὥρ.)

7) Τρεῖς ἐργάται ἐκτελοῦσιν ἔργον τι, ἐὰν ἐργασθῇ ἕκαστος αὐτῶν μόνος, ὁ μὲν ἐπὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς ἡμέρας, ὁ δὲ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{4}$, ὁ δὲ ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$. Ἐὰν ἐργασθῶσιν ὁμοῦ οἱ τρεῖς οὗτοι ἐργάται, πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου τούτου τῆς ἐργασίμου ἡμέρας οὔσης δεκαώρου; ('Απ. 50 λ.)

8) Κρήνη τις πληροῖ δεξαμενὴν ρέουσα ἐπὶ $6+\frac{3}{4}$ ὥρ. ἑτέρα κρήνη πληροῖ αὐτὴν ρέουσα ἐπὶ $3+\frac{3}{8}$ ὥρ. Ἐπὶ πόσον χρόνον ρέουσαι ὁμοῦ αἱ δύο αὗται κρῆναι πληροῦσι τὴν αὐτὴν δεξαμενήν. ('Απ. $2+\frac{1}{4}$ ὥρ.)

9) Δύο ὁμάδες ἐργατῶν ἐκτελοῦσιν ἔργον τι ἐργαζόμεναι ἡ μὲν μόνη ἐπὶ 7 ἡμέρας, ἡ δὲ μόνη ἐπὶ 5 ἡμέρας. Ἐὰν ληφθῇ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς πρώτης ὁμάδος καὶ τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς δευτέρας, ἐπὶ πόσον χρόνον ἐκτελεῖται τὸ ἔργον; ('Απ. $5+\frac{5}{83}$ ἡμ.)

10) Δύο πράγματα τιμῶνται ὁμοῦ 42 δρ. Ἀλλὰ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς τιμῆς τοῦ ἑνὸς εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς τιμῆς τοῦ ἑτέρου. Ποία ἡ τιμὴ τῶν πραγμάτων τούτων.

('Απ. 18 δρ. 24 δρ.)

11) Πατήρ τις εἶναι 40 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱός αὐτοῦ 20 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ἡλικίας τοῦ πατρός; ('Απ. μετὰ 30 ἔτη).

12) Κατὰ τὴν διάρκειαν τριῶν ἐτῶν ἡ περιουσία ἐμπόρου τινὸς ἐγένετο 54000 δρ. αὐξανομένη κατ' ἔτος κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ ὅ,τι ἦτο κατὰ τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους. Τίς ἦτο ἡ ἀρχικὴ αὐτοῦ περιουσία; ('Απ. 16000 δρ).

13) Σιδηρόδρομος ἀνεχώρησεν ἀπὸ πόλεώς τινος πρὸ $1+\frac{1}{2}$ ὥρ. καὶ διανύει 33 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ἕτερος σιδηρόδρομος ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς αὐτῆς πόλεως καὶ διανύει 54 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Πότε ὁ δεύτερος καταφθάνει τὸν πρῶτον; ('Απ. μετὰ $2+\frac{5}{14}$ ὥρ.)

14) Ἐδαπανήθησαν 26208000 δρ. διὰ πυρίτιδα καὶ σίδηρον κατά τινα πολιορκίαν διαρκέσασαν 50 ἡμέρας. Τὰ πυροβόλα ἔβαλλον μόνον ἐπὶ 10 ὥρ. καθ' ἑκάστην 3 βολὰς καθ' ἕκαστον πρῶτον λεπτόν. Ἡ πυροβολαρχία συνέκειτο ἐκ 4 πυροβόλων τῶν 48, ἐκ 4 τῶν 24 καὶ ἐκ 4 τῶν 12. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ λίτρα τοῦ σιδήρου τιμᾶται 20 λεπτὰ καὶ ὅτι καθ' ἑκάστην γόμωσιν ἡ πυρῖτις εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ βάρους τῆς σφαίρας, ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς λίτρας τῆς πυρίτιδος. ('Απ. 2 δρ.)

15) Κάλπη τις περιέχει λευκά, κυανᾶ καὶ ἐρυθρὰ σφαιρίδια· τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν σφαιριδίων εἶναι κυανᾶ, τὸ $\frac{1}{4}$ λευκὰ καὶ 35 εἶναι ἐρυθρά. Πόσα εἶναι τὰ σφαιρίδια ἑκάστου χρώματος; ('Απ. 28 κυανᾶ, 21 λευκά).

16) Τάγμα στρατιωτῶν ἀναχωρεῖ τὴν 12 ἡμέραν καὶ πρέπει νὰ φθάσῃ τὴν 29 εἰς τὸν προορισμὸν αὐτοῦ. Ἀλλὰ κατὰ τὴν στιγμὴν τῆς ἀναχωρήσεως διετάχθη αὐτῷ νὰ φθάσῃ τὴν 23, οὕτω δὲ ἑκάστη ἡμέρα πορείας ηὐξήθη κατὰ $2+\frac{1}{2}$ λεύγας. Ζητεῖται πόσας λεύγας πρέπει νὰ διανύσῃ τὸ τάγμα καὶ πόσα, διανύει καθ' ἑκάστην; ('Απ. 90 λεύγας, 5 λεύγας).

17) Ἐκ δύο πύργων πλησίον ἀλλήλων κειμένων ὁ εἷς εἶναι τὰ $\frac{5}{7}$ τοῦ ἑ-

τέρου ὑπερέχοντος κατὰ 18 πόδας. Ποῖον τὸ ὕψος ἑκατέρου τῶν πύργων ; ('Απ. 45 ποδ. 63 ποδ.)

18) Ἄνθρωπός τις θέλει νὰ πωλήσῃ τὴν οἰκίαν αὐτοῦ διὰ λαχείων. Ἐὰν ἡ τιμὴ ἑκάστου λαχείου ὁρισθῇ πρὸς 40 δρ. ζημιοῦται 1000 δρ. ἐπὶ τῆς ἀξίας τῆς οἰκίας, ἐὰν δὲ ἡ τιμὴ ἑκάστου λαχείου ἦναι 48 δρ. κερδαίνει $\frac{1}{11}$ πλέον τῆς τιμῆς τῆς οἰκίας. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν λαχείων καὶ ἡ τιμὴ τῆς οἰκίας. ('Απ. 250 λαχεῖα, 11000 δρ.)

19) Σύγγραμμά τι ἀποτελεῖται ἐξ 6 τόμων, ἕκαστος δὲ τόμος ἔχει 864 σελ. Μαθητής τις ἀνέγνωσεν ἤδη τοὺς δύο πρώτους τόμους καὶ 240 σελ. ἐκ τοῦ τρίτου. Πόσον μέρος τοῦ συγγράμματος ἀνέγνωσεν ἤδη καὶ πόσας σελίδας πρέπει νὰ ἀναγνώσῃ ἀκόμη, ἵνα διέλθῃ οὕτω τὰ $\frac{7}{9}$ τοῦ συγγράμματος ;

('Απ. τὰ $\frac{41}{108}$, 2064 σελ.)

20) Ἔμπορός τις ἀγοράζει ᾠὰ πρὸς 5 λεπτὰ ἕκαστον καὶ πωλεῖ ἑκάστην δωδεκάδα πρὸς 90 λεπτά· οὕτως ἐκέρδησε 15 δρ. Ζητεῖται πόσα ᾠὰ ἠγόρασε, γνωστοῦ οὔτος ὅτι ἡ δαπάνη τῆς μεταφορᾶς εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ φόρου, οὗτος δὲ τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς ; ('Απ. 750 ᾠά.)

21) Σωματάρχης τις ἐπανερχόμενος ἐκ τῆς μάχης μετὰ 27 ἀνδρῶν τοῦ σώματος αὐτοῦ ἠρωτήθη πόσους ἄνδρας εἶχε κατὰ τὴν ἔναρξιν τῆς μάχης καὶ εἶπεν. Ἐκ τῶν ἀνδρῶν οὓς εἶχον τὸ $\frac{1}{4}$ ἐφονεύθη, τὸ $\frac{1}{6}$ νοσηλεεύται τὸ $\frac{1}{8}$ ἠχμαλωτίσθη καὶ τὸ $\frac{1}{12}$ ἀπέθανεν ἐξ ἀσθενειῶν. Ἐκ πόσων ἀνδρῶν ἀπετελεῖτο τὸ σῶμα τοῦτο ; ('Απ. 72 ἄνδρες).

22) Πέντε ἄνδρες, τρεῖς γυναῖκες καὶ ὀκτὼ παιδία ἐδαπάνησαν ἐν ταξειδίῳ ὁμοῦ 3952 δρ. Ἕκαστον παιδίον ἐπλήρωσε τὰ $\frac{3}{11}$ τῶν ὅσα ἐπλήρωσεν ἕκαστος ἀνήρ, ἑκάστη δὲ γυνὴ τὰ $\frac{3}{5}$ τῆς πληρωμῆς ἑκάστου ἀνδρός. Ζητεῖται

ἡ δαπάνη ἑκάστου ἀνδρός, ἑκάστης γυναικὸς καὶ ἑκάστου παιδίου ;
(᾿Απ. 440, 264, 120).

23) Ἔμπορός τις ἠγόρασεν ἀμνοὺς ἀντὶ 1210 δρ. Ἠγόρασε δὲ τὸ τρίτον αὐτῶν πρὸς 18 δρ. ἕκαστον, τὸ τέταρτον πρὸς 20 δρ. καὶ τοὺς λοιποὺς πρὸς 22 δρ. Ζητεῖται πρὸς πόσον ἠγόρασεν ἕκαστον εἶδος ; (᾿Απ.20,15,25).

24) Ἄνθρωπός τις κατέλιπε διαθήκην, δι' ἧς τὰ $\frac{3}{10}$ τῆς περιουσίας αὐτοῦ λαμβάνει ἡ σύζυγος αὐτοῦ τὸ $\frac{1}{8}$ οἱ πτωχοὶ καὶ τὸ $\frac{1}{20}$ φίλος τις αὐτοῦ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον λαμβάνουσιν ἐξ ἴσου τὰ τέκνα αὐτοῦ, ὧν ἕκαστον λαμβάνει τὰ $\frac{7}{40}$ τῆς ὅλης κληρονομίας. Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν τέκνων. (᾿Απ. 3 τέκνα.)

25) Ἔμπορός τις ἔχει δύο εἴδη ὑφάσματός τινος $115+\frac{7}{10}$ πηχ. ἐν συνόλῳ. ᾿Αφ' οὗ δὲ ἐπώλησε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ πρώτου καὶ τὸ ἥμισυ τοῦ δευτέρου εἴδους ὑπελείφθησαν μόνον $50+\frac{1}{6}$ πήχ. ἐν συνόλῳ. Πόσοι πήχεις ἀπετέλουν ἕκαστον εἶδος ; (᾿Απ. $46+\frac{1}{10}$, $65+\frac{3}{5}$).

26) Δύο ἐργάται ἔλαβον 360 δρ. ἐργασθέντες ὁμοῦ πρὸς ἐκτέλεσιν ἔργου τινός. Ἐὰν ὁ εἷς αὐτῶν ἐργάζηται μόνος, ἐκτελεῖ τὸ αὐτὸ ἔργον εἰς 80 ἡμέρας, ὁ δὲ ἄλλος εἰς 120 ἡμέρας. Ζητεῖται εἰς πόσας ἡμέρας ἐξετελέσθη τὸ ἔργον καὶ πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἑκάτερος τῶν ἐργατῶν :
(᾿Απ. 48 ἡμέρας, 216, 144).

27. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι ὁσωνδήποτε ἀναλογιῶν, προκύπτει ἀναλογία.

28) Ἐὰν οἱ ὁμοταγεῖς ὅροι δύο ἀναλογιῶν προστεθῶσιν ἢ ἀφαιρεθῶσι, πότε προκύπτει ἀναλογία ἀληθής ;

29) Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι πρὸς τὸν δεύτερον, ὡς τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν δύο τελευταίων ὅρων πρὸς τὸν τέταρτον.

30) Ἐὰν δύο ἀναλογίαι ἔχωσι τοὺς αὐτοὺς ἄκρους, οἱ μέσοι αὐτῶν ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν, ἧς οἱ μέσοι τῆς μιᾶς εἶναι οἱ ἄκροι καὶ οἱ μέσοι τῆς ἑτέρας εἶναι οἱ μέσοι.

# ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'

## Περὶ δεκαδικῶν καὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

### Δεκαδικοὶ ἀριθμοί.

### Ὁρισμοί.

163. *Δεκαδικαὶ μονάδες* λέγονται αἱ κλασματικαὶ μονάδες, ὧν παρονομαστὴς εἶναι ἢ 10, ἢ 100, ἢ 1000, .... καὶ γενικῶς δύναμίς τις τοῦ 10· οἷον

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\cdots\frac{1}{10^v},$$

*Δεκαδικὸς ἀριθμὸς* λέγεται τὸ σύνολον δεκαδικῶν μονάδων· οἷον

$$\frac{3}{10},\ \frac{7}{100},\ \frac{3252}{1000},\ \frac{19}{100000},$$

Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὑπάγονται εἰς τὰ κλάσματα καὶ ἑπομένως ὅ,τι ἐρρήθη περὶ τῶν κλασμάτων ἀληθεύει καί περὶ τῶν δεκαδικῶν. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουσι παρονομαστὰς ἢ 10, ἢ 100, ἢ 1000, κλ., ἤτοι τὴν 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις γίνονται εὐκολώτερον ἢ ἐπὶ τῶν ἄλλων κλασμάτων, τὰ ὁποῖα πρὸς διάκρισιν λέγονται κοινά. Διὰ τοῦτο καὶ γίνεται λόγος περὶ αὐτῶν ἰδιαιτέρως.

### Γραφὴ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

164. Ἐὰν γραφῶσι κατὰ σειρὰν αἱ ἀκέραιαι μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ὡς καὶ αἱ δεκαδικαὶ κλασματικαὶ μονάδες, ὡς ἑξῆς

$$\ldots.1000,\ 100,\ 10,\ 1,\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\cdots$$

φανερόν, ὅτι ἑκάστη τῶν μονάδων τούτων εἶναι δεκαπλασία τῆς ἀμέσως ἑπομένης. Διὰ τοῦτο πᾶς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀποτελεσθῇ ἐκ τῶν μονάδων τούτων καὶ ἐξ ἑκάστης νὰ μὴ περιέχῃ πλείονας τῶν 9. Οἷον ὁ ἀριθμὸς $\frac{179}{1000}$

περιέχει $\frac{1}{10}$ καὶ $\frac{7}{100}$ καὶ $\frac{9}{1000}$.

Ἐὰν δὲ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν καὶ ἐν τῷ συστήματι τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν, ὡς καὶ ἐν τῷ τῶν ἀκεραίων, ἡ συνθήκη, *ὅτι πᾶν ψηφίον γραφόμενον κατόπιν ἄλλου σημαίνει μονάδας τῆς ἀμέσως ἑπομένης τάξεως*, δύνανται νὰ γράφωνται καὶ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς καὶ οἱ ἀκέραιοι, ἀρκεῖ μόνον πρὸς διάκρισιν μετὰ τὰς ἀκεραίας μονάδας νὰ γράφηται ὑποδιαστολὴ καὶ εἶτα τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, μετὰ τοῦτο τὸ τῶν ἑκατοστῶν, μετὰ τοῦτο τὸ τῶν χιλιοστῶν, καὶ οὕτω καθεξῆς· (αἱ ἐλλείπουσαι μονάδες γράφονται καὶ ἐνταῦθα διὰ τοῦ 0)· οἷον

$$3,52,\ 0,5,\ 152,90,\ 0,0001,5,03$$

ἀντὶ $$\frac{352}{100},\ \frac{5}{10},\ \frac{1529}{10},\ \frac{1}{10000},\ \frac{503}{100}$$

## Ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

165. Πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἀπαγγέλληται κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους.

1) Ἀπαγγέλλεται χωριστὰ ἕκαστον ψηφίον καὶ τὸ ὄνομα τῶν μονάδων αὐτοῦ. Οἷον ὁ 7,32 ἀπαγγέλλεται : 7 ἀκέραια 3 δέκατα καὶ 2 ἑκατοστά.

2) Ἀπαγγέλλονται τὰ ψηφία, ὡς ἐὰν ἀπετέλουν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν (ἀνεξαρτήτως τῆς ὑποδιαστολῆς) καὶ προσαρτᾶται κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου· οἷον ὁ 5,69 ἀπαγγέλλεται 569 ἑκατοστά· διότι ὁ ἀριθμὸς οὗτος σύγκειται ἐκ τῶν ἑξῆς·

$$5+\frac{6}{10}+\frac{9}{100} \text{ ἢ } \frac{500}{100}+\frac{60}{100}+\frac{9}{100}=\frac{569}{100}$$

Ὁμοίως ὁ ἀριθμὸς 0,503 ἀπαγγέλλεται 503 χιλιοστά· διότι

$$\frac{5}{10}+\frac{3}{1000}=\frac{500}{1000}+\frac{3}{1000}=\frac{503}{1000}$$

Οἱ δύο ἀνωτέρω τρόποι ἀπαγγελίας εἶναι χρήσιμοι μόνον ὅταν τὰ ψηφία ἦναι ὀλίγα· ὅταν δὲ ἦναι πολλά, ἡ ἀπαγγελία γίνεται κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

3) Ἀναλύεται ὁ ἀριθμὸς εἰς ὁσαδήποτε τμήματα καὶ ἀπαγγέλλονται αὐτὰ κατὰ σειράν, ἕκαστον χωριστά, ὡς ἐὰν ἦτο ἀκέραιος ἀριθμός· προσαρτᾶται δὲ κατόπιν τὸ ὄνομα τῶν μονάδων τοῦ τελευταίου ψηφίου τοῦ τμή-

ματος. Οἷον ὁ 52,107358 ἀπαγγέλλεται π. χ. ὡς ἑξῆς· 52 ἀκέραια 107 χιλιοστὰ 358 ἑκατομμυριοστά· διότι

$$\frac{1}{10}+\frac{7}{1000}=\frac{107}{1000},\frac{3}{10000}+\frac{5}{100000}+\frac{8}{1000000}=\frac{358}{1000000}$$

ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀπαγγέλλεται καὶ ὡς ἑξῆς·

52 ἀκέραια 10 ἑκατοστὰ 73 μυριοστὰ ἢ δεκάκις χιλιοστὰ καὶ 58 ἑκατομμυριοστά, ἢ καὶ ὡς ἑξῆς

52 ἀκέραια καὶ 107358 ἑκατομμυριοστά.

*Σημ.* Συνήθως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς χωρίζεται εἰς δύο τμήματα, τὸ ἀκέραιον καὶ τὸ δεκαδικόν, καὶ ἀπαγγέλλεται ἕκαστον χωριστὰ οἷον ὁ 107,05 ἀπαγγέλλεται 107 ἀκέραια καὶ 5 ἑκατοστά.

Ἐκ δὲ τῶν ἀνωτέρω καταφαίνεται, ὅτι οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ παρίστανται καὶ διὰ κλασμάτων ἐχόντων παρονομαστὴν τὴν μονάδα ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν. Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κλάσμα ἔχον παρονομαστὴν τὴν 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν, εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμός. Οἷον

$$35,107=\frac{35107}{1000}$$

Διότι

$$35,107=35+\frac{1}{10}+\frac{7}{1000}=\frac{3500}{1000}+\frac{100}{1000}+\frac{7}{1000}=\frac{35107}{1000}$$

Καὶ ἀντιστρόφως·

$$\frac{35107}{1000}=35,107$$

Διότι διαιρούμενος ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δίδει 35 ἀκέραια καὶ 107 χιλιοστά.

## Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

166. *Ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν γραφῶσιν ὁσαδήποτε μηδενικὰ μετὰ τὸ ψηφίον τῆς κατωτάτης τάξεως αὐτοῦ.*

Οἷον ὁ ἀριθμὸς 5,107 εἶναι ὁ αὐτὸς τῷ 5,10700. Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου παντὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολὴν (ἐδ. 164)· ἡ δὲ θέσις αὕτη δὲν ἀλλάσσει διὰ τῆς γραφῆς ταύτης τῶν μηδενικῶν καὶ ἐπομένως ἕκαστον ψηφίον διατηρεῖ τὴν ἀξίαν αὐτοῦ.

Τοῦτο δὲ φαίνεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς παραστάσεως τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὡς κλασματικῶν ἀριθμῶν. Διότι π. χ. 2,7 εἶναι

$$\frac{27}{10}=\frac{270}{100}=\frac{2700}{1000}=\frac{27000}{1000}=\ldots$$

ὁμοίως εἶναι καὶ $5=\frac{50}{10}=\frac{500}{100}=\ldots$

167. *Δεκαδικὸς ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπὶ* 10, 100, 1000, κλ. *ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν, δύο, τρεῖς, κλ. θέσεις μετὰ τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων αὐτοῦ.*

*Διαιρεῖται δὲ διὰ* 10, 100, 1000, κλ., *ἐὰν μετατεθῇ ἡ ὑποδιαστολὴ μίαν, δύο, τρεῖς, κλ. θέσεις πρὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάτων*

Παραδείγματος χάριν εἶναι·

$$\begin{aligned} 3{,}75.10 &= 37{,}5 \\ 65{,}83.100 &= 6583 \\ 3{,}16.1000 &= 3160 \\ 108{,}37:100 &= 1{,}0837 \\ 108{,}37:10000 &= 0{,}010837 \end{aligned}$$

Διότι ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου παντὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως αὐτοῦ ὡς πρὸς τὴν ὑποδιαστολήν· ἐὰν ἄρα ἡ ὑποδιαστολὴ μετατεθῇ μίαν π.χ. θέσιν μετὰ τὸ ψηφίον τῶν δεκάτων, ἡ ἀξία ἑκάστου τῶν ψηφίων γίνεται δεκάκις μεγαλειτέρα τῆς ἀρχικῆς καὶ ἑπομένως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς δεκαπλασιάζεται· ἐὰν δὲ μετατεθῇ δύο θέσεις πρὸ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάτων, ἡ ἀξία ἑκάστου ψηφίου γίνεται ἑκατοντάκις μικροτέρα τῆς ἀρχικῆς καὶ ἑπομένως ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖται δι' 100· τοῦτο δὲ φαίνεται καὶ ἀμέσως διὰ τῆς παραστάσεως τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ὡς κλασμάτων.

*Σημ.* Ὅταν ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχῃ ἀρκοῦντα ψηφία κατὰ τὴν μετάθεσιν τῆς ὑποδιαστολῆς, γράφονται μηδενικὰ εἰς τὸ τέλος ἢ εἰς τὴν ἀρχὴν αὐτοῦ, ὅπερ δὲν μεταβάλλει τὸν δεκαδικὸν ἀριθμόν.

## Τροπὴ τῶν κοινῶν κλασμάτων εἰς δεκαδικά.

168. Ἐπειδὴ πᾶν κλάσμα εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ (ἐδ. 129), δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸν ἑπόμενον τρόπον. Ἐὰν μὲν ὁ παρονομαστὴς ἦναι ἡ μονὰς ἀκολουθουμένη ὑπὸ μηδενικῶν, τὸ κλάσμα τρέπεται ἀμέσως εἰς δεκαδικὸν κατὰ τὸν ὁρισμόν. (164) *Ἐὰν δὲ ὁ παρονομαστὴς ἦναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός, τρέπεται τὸ κλάσμα εἰς ἀνάγωγον καὶ εἶτα διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς διὰ τοῦ*

παρονομαστοῦ αὐτοῦ· καὶ τὸ μὲν πηλίκον εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ 0, καθ' ὅσον ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ εἶναι μεγαλείτερος ἢ μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ καὶ μετ' αὐτὸ γράφεται ὑποδιαστολή, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ) τρέπεται εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς δέκατα (διότι ἡ 1 ἔχει 10 δέκατα) καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον αὐτῆς (ἐὰν ὑπάρχῃ) τρέπεται εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως, ἤτοι εἰς ἑκατοστὰ (διότι 1 δέκατον ἔχει 10 ἑκατοστὰ) καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρεῖται πάλιν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· καὶ οὕτω καθεξῆς. Κατὰ δὲ τὴν δεκαδικὴν ταύτην διαίρεσιν ἢ εὑρίσκεται ὡς πηλίκον πεπερασμένος ἀριθμὸς ψηφίων, ἢ δὲν εὑρίσκεται πεπερασμένος ἀριθμὸς ψηφίων, τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἐπανευρισκομένων τῶν αὐτῶν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Ἔστω π. χ. τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{3}{8}$. Ἵνα τραπῇ τὸ κλάσμα τοῦτο εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα, ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$(1)\qquad \begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \hline 30 & 0,375 \\ \;\;60 & \\ \;\;\;\;40 & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$$

Ὅθεν $\frac{3}{8}=0,375.$

Κατὰ τὴν διαίρεσιν ταύτην ἐγράφη πηλίκον 0 ὡς ἀκέραιος (διότι $3<8$) καὶ μετ' αὐτὸ ἐγράφη ὑποδιαστολή· εἶτα αἱ 3 μονάδες ἐτράπησαν εἰς δέκατα καὶ ἐγένοντο 30 δέκατα καὶ ὁ 30 διῃρέθη διὰ 8 καὶ εὑρέθη πηλίκον 3 δέκατα· τὸ νέον ὑπόλοιπον 6 δέκατα ἐτράπη εἰς ἑκατοστὰ καὶ ἐγένετο 60· τοῦτο διῃρέθη διὰ 8 καὶ ἔδωκε πηλίκον 7 ἑκατοστά· τὸ νέον πάλιν ὑπόλοιπον 4 ἑκατοστὰ ἐτράπη εἰς χιλιοστὰ καὶ ἐγένετο 40· τοῦτο διῃρέθη πάλιν διὰ 8 καὶ ἔδωκε πηλίκον μὲν 5 χιλιοστά, ὑπόλοιπον δὲ 0.

Ὁμοίως τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{37}{25}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ὡς ἑξῆς:

(2)
$$\begin{array}{r|l} 37 & 25 \\ \cline{2-2} 120 & 1,48 \\ 200 & \\ 0 & \end{array}$$

Ὅθεν $\frac{37}{25}=1,48$

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{2}{3}$ τρέπεται ὁμοίως κατὰ τὸν προηγούμενον κανόνα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν κατὰ τὴν ἑπομένην διάταξιν τῆς πράξεως·

(3)
$$\begin{array}{r|l} 2 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0,666\ldots \\ 20 & \\ 20 & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Ὅθεν $\frac{2}{3}=0,666\ldots.$

Ὁμοίως καὶ τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{5}{7}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν. ὡς ἑξῆς

(4)
$$\begin{array}{r|l} 6 & 7 \\ \cline{2-2} 60 & 0,857142\ldots. \\ 40 & \\ 50 & \\ 10 & \\ 30 & \\ 20 & \\ 60 & \\ \cdot & \\ \cdot & \end{array}$$

Ὅθεν $\frac{6}{7}=0,857142\ldots$

Ἐκ δὲ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων καταφαίνεται, ὅτι πᾶν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα ἢ πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων (1ον καὶ 2ον παράδειγμα) ἢ οὐχὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων ἐπαναλαμβανομένων ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς κατά τὴν αὐτὴν τάξιν (3ον καὶ 4ον παράδειγμα).

*Σημ.* 1. Τὰ δεκαδικὰ ψηφία εἶναι προφανῶς τὸ πλεῖστον τόσα, ὅσαι αἱ μονάδες 1 τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ εἰς δεκαδικὸν τρεπομένου ἀναγώγου κλάσματος· διότι οὐδέποτε τὸ ὑπόλοιπον ὑπερβαίνει τὸν διαιρέτην.

*Σημ.* 2. Ὅταν τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπηται εἰς δεκαδικὸν ἔχον οὐχὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἡ δεκαδικὴ διαίρεσις τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δὲν ἔχει τέλος. Διὰ τῆς ἐξακολουθήσεως ὅμως αὐτῆς τὸ πηλίκον πλησιάζει ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὴν ἀκριβῆ ἀξίαν τοῦ κλάσματος· δύναται δηλαδὴ νὰ εὑρεθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαφέρων τοῦ δοθέντος κοινοῦ κλάσματος ὀλιγώτερον πάσης δοθείσης δεκαδικῆς μονάδος. Ἐὰν π. χ. πρέπῃ νὰ εὑρεθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διαφέρων τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{1000}$, ἀρκεῖ νὰ γίνηται ἡ διαίρεσις, μέχρις οὗ εὑρεθῶσι τὰ χιλιοστὰ τοῦ πηλίκου· διότι τότε εὑρίσκεται $\frac{2}{3}=0,666+\frac{2}{3}$ τοῦ χιλιοστοῦ. Ὥστε τὸ δεκαδικὸν 0,666 διαφέρει τοῦ κοινοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον ἑνὸς χιλιοστοῦ.

Ὁμοίως τὸ 0,6666 διαφέρει τοῦ $\frac{2}{3}$ ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{10000}$

» » 0,66666 » » » » » $\frac{1}{100000}$

» » 0,666666 » » » » » $\frac{1}{1000000}$

καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι τὸ κοινὸν κλάσμα $\frac{2}{3}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτελούμενον ἐξ ἀπείρου πλήθους δεκαδικῶν μονάδων ἐντελῶς ὡρισμένων· τὸ αὐτὸ δὲ δύναται νὰ λεχθῇ καὶ περὶ παντὸς κλάσματος μὴ δυναμένου νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἔχοντα πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων· διότι τὰ δεκαδικὰ ψηφία τὰ εὑρισκόμενα διὰ τῆς τροπῆς αὐτοῦ εἰς δεκαδικὰ εἶναι ἅπαντα ἐντελῶς ὡρισμένα.

Ὥστε ἄλλα μὲν τῶν κοινῶν κλασμάτων τρέπονται εἰς δεκαδικὰ ἔχοντα πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἄλλα δὲ τρέπονται εἰς δεκαδικά, τῶν δεκαδικῶν ψηφίων ἐπαναλαμβανομένων τῶν αὐτῶν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς.

169. *Περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα* λέγεται τὸ ἔχον οὐχὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων ἐπαναλαμβανομένων τούτων ἐπ' ἄπειρον τῶν αὐτῶν καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς. Τὸ σύνολον τῶν οὕτως ἐπαναλαμβανομένων ψηφίων λέγεται *περίοδος*· οἷον ὁ 6,575757..... εἶναι περιοδικὸν δεκαδικόν, οὗ ἡ περίοδος ὁ 57.

Τὸ περιοδικὸν λέγεται *ἁπλοῦν* μέν, ἐὰν ἡ περίοδος ἄρχηται ἀμέσως μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν· οἷον 0, 352 352 352......, *μικτὸν* δέ, ἐὰν ἡ πρώτη περίοδος ἄρχηται μετά τινα δεκαδικὰ ψηφία· οἷον 0,67145145..... ὅπου ὁ 67 εἶναι τὸ μὴ περιοδικὸν μέρος τοῦ δεκαδικοῦ· τὸ δὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ δύναται νὰ ἦναι ἢ οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμὸς ἢ 0.

Διακρίνονται δὲ τὰ κοινὰ κλάσματα τὰ τρεπόμενα εἰς δεκαδικὰ ἔχοντα πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων ἀπὸ τῶν λοιπῶν τῶν τρεπομένων ἐν γένει εἰς περιοδικὰ δεκαδικὰ διὰ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

## Θεώρημα

170. *Πᾶν κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ δὲν περιέχῃ ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τοῦ 2 καὶ τοῦ 5. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω τυχὸν ἀνάγωγον κλάσμα τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ τεθείσθω, ὅτι ὑπάρχει δεκαδικόν τι κλάσμα ἴσον αὐτῷ, τὸ $\frac{A}{1000}$ ἢ $\frac{A}{10^3}$, ἤτοι ἔστω $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{10^3}$· λέγω, ὅτι ὁ παρονομαστὴς β τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5.

*Ἀπόδειξις*. Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον καὶ ἴσον τῷ $\frac{A}{10^3}$, οἱ ὅροι α καὶ β εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ἀντιστοίχων ὅρων A καὶ $10^3$ (ἐδ. 136), ὅπερ σημαίνει, ὅτι ὁ $10^3$ διαιρετὸς διὰ β καὶ ἑπομένως ὁ β δὲν δύναται νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας πλὴν τῶν 2 καὶ 5 (διότι $10^3=(2.5)^3$).

Τοῦτο δὲ ἀρκεῖ· διότι ἔστω π. χ. τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{2^2.5}$, οὗ ὁ παρονομαστὴς δὲν περιέχει ἄλλον πρῶτον παράγοντα πλὴν τῶν 2 καὶ 5. Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος τούτου ἐπὶ $5^2$ (ὅτε ἀμφότερει οἱ παράγοντες 2 καὶ 5 τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ ἔχουσι τὸν αὐτὸν ἐκθέτην), προκύπτει

$$\frac{\alpha}{2^3.5}=\frac{\alpha.\ 5^2}{2^3.5^3}=\frac{\alpha.\ 5_2}{(2.5)^3}=\frac{\alpha\ 5^2}{10^3}$$

τρέπεται ἄρα τὸ $\frac{\alpha}{2^3.5}$ εἰς δεκαδικὸν ἔχον 3 (ὅσαι αἱ μονάδες 1 τοῦ μεγαλειτέρου ἐκθέτου τοῦ ἑτέρου τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ) μόνον δεκαδικὰ ψηφία.

Ὁμοίως τὸ κλάσμα $\frac{3}{8}$ τρέπεται εἰς δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἔχοντα τρία δεκαδικὰ ψηφία· διότι

$$\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3.\ 5^3}{2^3.5^3}=\frac{3.125}{(2.5)^3}=\frac{375}{1000}=0{,}375$$

Ὁμοίως καὶ

$$\frac{7}{25}=\frac{7.\ 2^2}{5^2.2^2}=\frac{7.4}{(5.2)^2}=\frac{28}{100}=0{,}28$$

Τὸ δὲ κλάσμα $\frac{4}{15}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικὸν ἔχοντα οὐχὶ πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων·

διότι $\frac{4}{15}=\frac{4}{3.5}$ ἤτοι ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ἔχει καὶ τὸν παράγοντα 3 (διάφορον τῶν 2 καὶ 5).

Καὶ ἀντιστρόφως· *πᾶς δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἔχων πεπερασμένον ἀριθμὸν δεκαδικῶν ψηφίων τρέπεται εἰς κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα, οὗ ὁ παρονομαστὴς οὐδένα ἄλλον πρῶτον παράγοντα περιέχει πλὴν τῶν 2 καὶ 5.*

Ἔστω π.χ. ὁ 2,58· οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς

$$\frac{258}{100}=\frac{129}{50}=\frac{129}{2.25}=\frac{129}{2.5^2}$$

ἤτοι ὁ παρονομαστὴς 50 τοῦ ἀναγώγου κλάσματος $\frac{129}{50}$, εἰς ὃ τρέπεται ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς 2,58 ἔχει μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5.

## Τροπὴ περιοδικῶν δεκαδικῶν κλασμάτων εἰς κοινὰ κλάσματα.

### Θεώρημα.

171. *Πᾶν ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα τρέπεται εἰς κοινὸν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν μὲν μίαν περίοδον, παρονομαστὴν δὲ τὸν ἀριθμὸν τὸν ἔχοντα μόνον τόσα ψηφία 9, ὅσα τὰ ψηφία τῆς περιόδου. Καὶ ἀντιστρόφως.*

Ἔστω οἱονδήποτε ἁπλοῦν περιοδικὸν κλάσμα ἄνευ ἀκεραίου μέρους, οἷον τὸ 0,37373737.... λέγω, ὅτι

$$0,37373737\ldots\ldots=\frac{37}{99}$$

*Ἀπόδειξις*. Φανερόν, ὅτι

$$\frac{37}{100}<\frac{37}{99}$$

$$\frac{3737}{10000}<\frac{3737}{9999}$$

$$\frac{373737}{1000000}<\frac{373737}{999999}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ἀλλ' αἱ ἀνισότητες αὗται τείνουσιν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον νὰ καταστῶσιν ἰσότητες· διότι ἡ διαφορὰ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῶν ἀνισοτήτων τούτων τείνει νὰ καταστῇ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον μικροτέρα πάσης δεκαδικῆς μονάδος, ἤτοι εἶναι·

$$\frac{37}{99}-\frac{37}{100}=\frac{37}{9900}<\frac{1}{100}$$

$$\frac{3737}{9999}-\frac{3737}{10000}=\frac{3737}{99990000}<\frac{1}{10000}$$

$$\frac{373737}{999999}-\frac{373737}{1000000}=\frac{373737}{999999000000}<\frac{1}{1000000}$$

.................................................

Ὥστε δύναται ἐπὶ τέλους νὰ ληφθῇ

$$\frac{373737\ldots\ldots}{1000000\ldots\ldots}=\frac{373737\ldots\ldots}{999999\ldots\ldots}$$

Ἀλλ' εἶναι (ἐδ. 158)

$$\frac{37}{99}=\frac{3700}{9900}=\frac{3700+37}{9900+99}=\frac{3737}{9999}=\frac{373700}{999900}=\frac{373737}{999999}=\ldots\ldots$$

Ὅθεν ἕπεται

$$\frac{373737\ldots\ldots}{1000000\ldots\ldots}=\frac{37}{99}$$

ἢ

$$0{,}373737\ldots=\frac{37}{99}, \quad \text{ὅ ἔ. δ.}$$

Καὶ ἀντιστρόφως· τὸ κλάσμα $\frac{37}{99}$ ἰσοῦται τῷ 0,373737.... ὡς φαίνεται ἀμέσως διὰ τῆς διαιρέσεως ἢ διὰ τῆς τροπῆς τοῦ κλάσματος τούτου εἰς δεκαδικόν.

*Σημ.* 1. Ὅταν πάντα τὰ ψηφία τοῦ ἁπλοῦ περιοδικοῦ κλάσματος ἄνευ ἀκεραίου μέρους ἦναι 9, εὑρίσκεται προδήλως οὐχὶ κλασματικὸς ἀριθμὸς ἀλλ' αὐτὴ ἡ 1· οἷον

$$0{,}9999\ldots\ldots=1=\frac{9}{9}=\frac{99}{99}=\frac{999}{999}=\ldots\ldots$$

*Σημ*, 2. Τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρισκόμενον κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν περιοδικὸν δὲν εἶναι ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ ἀνάγωγον. Ἀλλ' ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ ὡς ἔχων ἁπλᾶς μονάδας τὸν 9 δὲν ἔχει οὔτε τὸν παράγοντα 2 οὔτε τὸν παράγοντα 5. Οὐδὲ δύναται νὰ λάβῃ τοὺς παράγοντας τούτους κατὰ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος· διότι τότε διαιρεῖται διά τινος τῶν παραγόντων αὐτοῦ.

*Σημ.* 3 Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται εὐκόλως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν ἁπλοῦν περιοδικὸν ἔχον καὶ ἀκέραιον μέρος· οἷον τὸ 2,525252....

Διότι

$$2+0{,}525252\ldots=2+\frac{52}{99}$$

τὸ δὲ $16{,}9999\ldots=17.$

*Σημ.* 4. Εἰς τὰ προηγούμενα ἀνάγεται ὁμοίως καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικὸν μετὰ ἢ ἄνευ ἀκεραίου μέρους· οἷον τὸ 3,18738738738....

Διότι διὰ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ δεκαδικοῦ τούτου ἐπὶ 100 προκύπτει τὸ

$$318{,}738738738\ldots=318+\frac{738}{999}$$

καὶ διὰ διαιρέσεως δι' ἑκατὸν εὑρίσκεται

$$3{,}18738738738\ldots=\frac{318}{100}+\frac{738}{99900}=\frac{318.999+738}{99900}$$

Τὸ δὲ $7{,}25999\ldots=7{,}26$

Ἐντεῦθεν δὲ συνάγεται, ὅτι, *ἵνα εὑρεθῇ τὸ κοινὸν κλάσμα, ἐξ οὗ παράγεται δοθὲν μικτὸν περιοδικόν, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ οὕτως, ὥστε νὰ καταστῇ αὐτὸ ἁπλοῦν· εὑρίσκεται ὁ ἀριθμὸς ἐξ οὗ τὸ ἁπλοῦν τοῦτο παράγεται καὶ εἶτα διαιρεῖται διὰ τῆς 1 ἀκολουθουμένης ὑπὸ τόσων μηδενικῶν, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ.*

*Σημ* 5. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κοινοῦ κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικὸν οὐδέποτε λήγει εἰς 0, ὡς φαίνεται καὶ ἐκ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος (ἵνα λήγῃ εἰς 0, πρέπει τὸ τελευταῖον ψηφίον τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους νὰ ἦναι ἴσον τῷ τελευταίῳ ψηφίῳ τῆς περιόδου· τότε δὲ καὶ τὸ ψηφίον τοῦτο περιλαμβάνεται εἰς τὴν περίοδον)· ὁ δὲ παρονομαστὴς αὐτοῦ ὡς γινόμενον ἀριθμοῦ, οὗ πάντα τὰ ψηφία 9, ἐπὶ τὴν 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ μηδενικῶν ἔχει τοὺς παράγοντας 2καὶ 5 καὶ ἑκάτερον τοσάκις, ὅσα εἶναι τὰ μὴ περιοδικὰ ψηφία τοῦ μικτοῦ περιοδικοῦ. Κατὰ δὲ τὴν ἁπλοποίησιν τοῦ κλάσματος δύναται νὰ ἐξαλειφθῇ ἢ ὁ παράγων 2 (ἅπαξ ἢ πολλάκις) ἢ ὁ παράγων 5(ὡσαύτως), ἀλλ' οὐχὶ ἀμφότεροι· διότι ἄλλως διαιροῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος διὰ 10 ὅπερ ἀδύνατον, τοῦ ἀριθμητοῦ μὴ λήγοντος εἰς 0.

Ὥστε ὁ παρονομαστὴς τοῦ προκύπτοντος ἀναγώγου κλάσματος διατηρεῖ τὸν ἕνα τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μετὰ τοῦ ἐκθέτου, ὃν ἔχει πρὸ τῆς ἁπλοποιήσεως. Ὅθεν συνάγεται, *ὅτι ὁ παρονομαστὴς τοῦ κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος, ἐξ οὗ παράγεται μικτὸν περιοδικὸν περιέχει τὸν ἕνα τῶν παραγόντων 2 ἢ 5 μετὰ ἐκθέτου δεικνύοντος τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ μὴ περιοδικοῦ μέρους. Δύναται δὲ νὰ περιέχῃ καὶ τὸν ἄλλον μετὰ τοῦ αὐτοῦ ἢ μικροτέρου ἐκθέτου.*

172. Ἐὰν δὲ συνοψισθῶσιν ἅπαντα τὰ περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀνωτέρω εἰρημένα, συνάγονται τὰ ἑξῆς·

1) *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ μόνον τοὺς παράγοντας 2 καὶ 5 (ἢ τὸν ἕνα μόνον αὐτῶν, ἢ ἀμφοτέρους), τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς δεκαδικὸν μετὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ δεκαδικῶν ψηφίων·*

2). *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος δὲν περιέχῃ μήτε τὸν παράγοντα 2 μήτε τὸν παράγοντα 5, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα.*

3) *Ἐὰν ὁ παρονομαστὴς κοινοῦ ἀναγώγου κλάσματος περιέχῃ τὸν ἕτερον τῶν παραγόντων 2, 5 ἢ καὶ ἀμφοτέρους, περιέχῃ δὲ πλὴν αὐτῶν καὶ ἄλλους παράγοντας, τὸ κλάσμα τοῦτο τρέπεται εἰς μικτὸν περιοδικόν.*

4) *Πᾶν περιοδικὸν δεκαδικὸν κλάσμα παράγεται ἔκ τινος κοινοῦ κλάσματος, ὅπερ ἀποτελοῦσιν ἅπασαι αἱ μονάδες αὐτοῦ ὁμοῦ λαμβανόμεναι· ἐξαιροῦνται μόνον ἐκεῖνα, ὧν πάντα τὰ περιοδικὰ ψηφία εἶναι 9· διότι ταῦτα ἐξ οὐδενὸς κοινοῦ κλάσματος παράγονται· ἀλλὰ καὶ τούτων αἱ μονάδες, ἅπασαι ληφθεῖσαι, συναποτελοῦσιν ἀριθμὸν ἀκέραιον μὲν τῶν ἁπλῶν, δεκαδικὸν δὲ τῶν μικτῶν περιοδικῶν.*

## Πράξεις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.

### Πρόσθεσις.

173. *Ἵνα προστεθῶσι δεκαδικοὶ ἀριθμοί, γράφονται ὑπ' ἀλλήλους οὕτως ὥστε τὰ ψηφία τῶν μονάδων τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ, γράφεται ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντία γραμμὴ καὶ εἶτα ἄρχεται ἡ πρόσθεσις ἐκ τῶν ψηφίων τῆς κατωτάτης τάξεως τῶν προσθετέων καὶ ἑκάστου ἀθροίσματος γράφονται μόνον αἱ μονάδες ὑπὸ τὴν ἀντίστοιχον στήλην, αἱ δὲ δεκάδες προστίθενται εἰς τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τῆς στήλης*

*τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Γράφεται δὲ ἐν τῷ ἀθροίσματι ἡ ὑποδιαστολὴ ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν προσθετέων.* π. χ.

| |
|---:|
| 3579,25 |
| 4682,05 |
| 573,754 |
| 7856,8025 |
| 16691,8565 |

## Ἀφαίρεσις.

174. *Ἵνα ἀφαιρεθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς ἀπὸ δεκαδικοῦ, γράφεται ὁ ἀφαιρετέος ὑπὸ τὸν μειωτέον καὶ ὑπ' αὐτοὺς ὁριζοντία γραμμὴ καὶ εἶτα ἄρχεται ἡ ἀφαίρεσις ἀπὸ τῆς κατωτάτης τάξεως τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν καὶ γίνεται, ὡς ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ ἦσαν ἀκέραιοι. Ἐν δὲ τῇ διαφορᾷ ἡ ὑποδιαστολὴ γράφεται ὑπὸ τὴν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν τῶν δύο ἀριθμῶν.* Π. χ.

| |
|---:|
| 3456,7 |
| 2985,354 |
| 471,346 |

## Πολλαπλασιασμός.

175. *Ἵνα πολλαπλασιασθῶσι δύο δεκαδικοὶ ἀριθμοί, πολλαπλασιάζονται, ὡς ἐὰν ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐν δὲ τῷ οὕτως εὑρισκομένῳ γινομένῳ χωρίζονται δι' ὑποδιαστολῆς ἀπὸ τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς τόσα ψηφία, ὅσα δεκαδικὰ ψηφία ἔχουσιν ἀμφότεροι οἱ πολλαπλασιαζόμενοι ἀριθμοί.* Π. χ.

| | |
|---:|---:|
| 4,35 | 0,054 |
| 8,26 | 0,56 |
| 2610 | 324 |
| 870 | 270 |
| 3480 | |
| 35,9310 | 0,03024 |

Διότι $4.35=\frac{435}{100}$, $8,26=\frac{826}{100}$. Ὅθεν

$$4,35\ 8,26=\frac{435}{100}\cdot\frac{826}{100}=\frac{435.826}{10000}=\frac{359310}{10000}=35,9310.$$

Ὁμοίως $0,054=\frac{54}{1000}$, $0,056=\frac{56}{1000}$. Ὅθεν

$$0,054.0,56=\frac{54}{1000}\cdot\frac{56}{100}=\frac{54.56}{100000}=\frac{3024}{100000}=0,03024.$$

*Σημ.* Ὁ κανὼν οὗτος ἐφαρμόζεται προφανῶς, καὶ ὅταν εἷς τῶν παραγόντων ἦναι ἀκέραιος ἀριθμός.

## Διαίρεσις.

176. Ἐν τῇ διαιρέσει τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνονται κυρίως δύο περιπτώσεις 1) Διαίρεσις δεκαδικοῦ δι' ἀκεραίου καὶ 2) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διὰ δεκαδικοῦ.

1) *Ἵνα διαιρεθῇ δεκαδικὸς δι' ἀκεραίου, ἐκτελεῖται ἡ πρᾶξις, ὡς ἐὰν μὴ ὑπῆρχεν ἡ ὑποδιαστολή, ἤτοι ὡς ἐὰν ἦτο ὁ διαιρετέος ἀκέραιος ἀριθμός· καὶ ὅσα μὲν ψηφία τοῦ πηλίκου προέρχονται ἐκ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ διαιρετέου εἶναι ἀκέραια, τὰ δὲ λοιπὰ εἶναι δεκαδικά.* Π. χ.

```
1302,72 | 24
 102    |------
   67   | 54,28
   192
     0
```

Διότι $1302,72=\frac{130272}{100}$, ὅθεν

$$\frac{130272}{100}:24=\frac{130272}{100}\cdot\frac{1}{24}=\frac{5428}{100}=54,28$$

*Σημ.* Ὅταν δὲν εὑρίσκηται ὑπόλοιπον 0, δύναται νὰ παρατείνηται ἡ διαίρεσις πρὸς εὕρεσιν καὶ ἄλλων δεκαδικῶν μονάδων τοῦ πηλίκου (168). π.χ.

$$
\begin{array}{r|l}
31,4 & 7 \\ \cline{2-2}
34 & 4,4857142\ldots \\
60 & \\
40 & \\
50 & \\
10 & \\
30 & \\
20 & \\
6 &
\end{array}
$$

2). *Ἵνα διαιρεθῇ δεκαδικὸς ἀριθμὸς διὰ δεκαδικοῦ, μετατίθεται ἡ ὑποδιαστολὴ εἴς τε τὸν διαιρετέον καὶ τὸν διαιρέτην τόσας θέσεις, ὥστε νὰ καταστῇ ὁ διαιρέτης ἀκέραιος ἀριθμός.* Π. χ. ἔστω διαιρετέος ὁ 25,16 καὶ διαιρέτης ὁ 3,2. Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι.

$$
\begin{array}{r|l}
251,6 & 32 \\ \cline{2-2}
276 & 7,8625\ldots \\
200 & \\
80 & \\
160 &
\end{array}
$$

Διότι $25,16=\frac{2516}{100},\ 3,2=\frac{32}{10}$, ὅθεν

$$25,16:3,2=\frac{2516}{100}:\frac{32}{10}=\frac{2516}{100}\cdot\frac{10}{32}=\frac{2516}{10}\cdot\frac{1}{32}=251,6:32$$

Ἔστω νῦν διαιρετέος ὁ 0,3 καὶ διαιρέτης ὁ 2,48

$$
\begin{array}{r|l}
30 & 248 \\ \cline{2-2}
300 & 0,120\ldots \\
520 & \\
240 & \\
\cdot & \\
\cdot &
\end{array}
$$

Διότι $0,3=\frac{3}{10},\ 2,48=\frac{248}{100}$, ὅθεν

$$0,3:2,48=\frac{3}{10}:\frac{248}{100}=\frac{3}{10}\cdot\frac{100}{248}=\frac{30}{248}=30:248.$$

Ἔστω τέλος διαιρετέος ὁ 21,75 καὶ ὁ 3,21

$$\begin{array}{r|l} 2175 & 321 \\ \cline{2-2} 2490 & 6,77\ldots \\ 2430 & \end{array}$$

Διότι $21,75=\frac{2175}{100},\ 3,21=\frac{321}{100}$, ὅθεν

$$21,75:3,21=\frac{2175}{100}:\frac{321}{100}=\frac{2175}{100}\cdot\frac{100}{321}=\frac{2175}{321}=2175:321.$$

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἐκ τίνων κοινῶν κλασμάτων δύναται νὰ παραχθῇ τὸ δεκαδικὸν 0,727272... καὶ τὸ 1,212121. . καὶ τὸ 2,32121212...,

2). Πᾶς ἀριθμὸς Α μὴ ἔχων τὸν παράγοντα 2 μηδὲ τὸν παράγοντα 5 διαιρεῖ ἀριθμόν τινα, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία 9, ἤτοι δύναμις τοῦ 10 ἠλλαττωμένη κατὰ 1· ἐὰν δὲ ἐκ πασῶν τῶν τοιούτων δυνάμεων τοῦ 10 ληφθῇ ἡ ἐλαχίστη, ὁ ἐκθέτης αὐτῆς δεικνύει τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τῆς περιόδου ἐν τῷ περιοδικῷ κλάσματι τῷ παραγομένῳ ἐκ τοῦ κλάσματος $\frac{I}{A}$ ἢ ἐκ παντὸς ἀναγώγου κλάσματος $\frac{B}{A}$.

3). Ἀξιωματικός τις ἀναχωρῶν ὡς ἀπόσπασμα λαμβάνει 331,20 δρ. πρὸς πληρωμὴν ἐπὶ 23 ἡμέρας τῶν στρατιωτῶν αὐτοῦ, ἑκάστου λαμβάνοντος 0.30 δρ. καθ' ἑκάστην ἡμέραν. Μετὰ 11 ἡμέρας ἀπώλεσε τὸ ἀπόσπασμα ἀριθμόν τινα στρατιωτῶν. Τότε ὁ ἀξιωματικὸς διένειμε τὰς ὑπολειφθείσας δραχμὰς καὶ ἔλαβεν ἕκαστος στρατιώτης 0,72 δρ. Τίς ὁ ἀρχικὸς ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν καὶ πόσοι ἀπωλέσθησαν ἐξ αὐτῶν; (Ἀπ. 48,8).

3). Ἔμπορός τις ἠγόρασε 4 κιβώτια φιαλῶν οἰνοπνεύματος ἀντὶ 928 δρ. καὶ ἐπλήρωσε διὰ φόρον μὲν 272 δρ., διὰ μεταφορὰν δὲ 50 δρ. Ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως ἑκάστης φιάλης, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκέρδησεν ἐν συνόλῳ 425 δρ. καὶ ὅτι ἕκαστον κιβώτιον περιέχει 125 φιάλας (Ἀπ. 3,35 δρ.).

5). Ἐργάτης τις ἐκτελεῖ ἔργον τι ἐπ 25 ἡμέρας· ἀλλὰ τὰς τελευταίας 15 ἡμέρας ἠναγκάσθη νὰ προσλάβῃ καὶ σύντροφον πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ ἔργου. Ἐκτελεσθέντος δὲ τοῦ ἔργου ἔλαβον ἀμφότεροι ὁμοῦ 210 δρ. Ζητεῖται πόσον ἐκέρδησαν ἑκάτερος τὴν ἡμέραν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ἐὰν ὁ πρῶτος μόνος ἐξετέλει τὸ ἔργον, ἤθελε κερδήσει 2,60 δρ. ἐπὶ πλέον τὴν ἡμέραν. (Ἀπ' ὁ πρῶτος 6 δρ. ὁ δεύτερος 4 δρ.)

6). Ἀξιωματικός τις ἀναχωρεῖ ὡς ἀπόσπασμα καὶ λαμβάνει ἐκ τοῦ στρατοπέδου 189 δρ. πρὸς πληρωμὴν τῶν στρατιωτῶν αὐτοῦ ἐπὶ 18 ἡμέρας λαμβάνοντος ἑκάστου 0,30 λεπ. τὴν ἡμέραν. Ὀκτὼ ἡμέρας μετὰ τὴν ἀναχώρησιν διετάχθη νὰ παρατείνῃ τὴν ὑπηρεσίαν αὐτοῦ ταύτην ἐπὶ πέντε εἴσέτι ἡμέρας. Ἐπειδὴ δὲ δὲν ἐστάλησαν αὐτῷ ἄλλα χρήματα διένειμε τὰ ὑπολειφθέντα αὐτῷ οὕτως ὥστε νὰ ἐπαρκέσωσι πρὸς πληρωμὴν τῶν στρατιωτῶν μέχρι τῆς ἐπανόδου· ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν στρατιωτῶν· πόσον ἔλαβεν ἕκαστος τούτων τελευταῖον (Ἀπ. 35 στρ. 0,20 δρ.)

7). Ἔμπορός τις ἐπώλησεν ἴσην ποσότητα καφὲν καὶ ζάχαριν καὶ τὸν μὲν καφὲν ἐπώλησε πρὸς 6,50 δρ. κατ' ὀκᾶν, τὴν δὲ ζάχαριν πρὸς 2,10 δρ, τὴν ὀκᾶν· ἔλαβε δὲ ἐκ τῆς πωλήσεως 70,25 δρ. Πόσας ὀκάδας καφὲν ἐπώλησε καὶ πόσας ζάχαριν; (Ἀπ. $8+\frac{100}{400}$ ὀκ.)

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## Περὶ συμμιγῶν ἀριθμῶν

### Ὁρισμοί.

177. Πρὸς ἀποφυγὴν τῶν κλασμάτων κατὰ τὴν μέτρησιν τῶν διαφόρων ποσῶν καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων ὠνομάσθησαν ὡρισμένα τινὰ μέρη τῶν κατὰ συνθήκην ληφθεισῶν μονάδων τῶν διαφόρων ποσῶν δι' ἰδιαιτέρων ὀνομάτων, ἤτοι κλασματικαί τινες μονάδες ἢ πολλαπλασιά τινα αὐτῶν φέρουσιν ἴδιον ὄνομα καὶ λαμβάνονται ὡς νέαι μονάδες. Π. χ. τὸ $\frac{1}{400}$ τῆς ὀκᾶς ὀνομάζεται *δράμιον*, τὸ $\frac{1}{100}$ τῆς δραχμῆς ὀνομάζεται *λεπτόν*, τὸ $\frac{1}{24}$ τῆς ἡμέρας ὀνομάζεται *ὥρα*, τὸ $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας ὀνομάζεται *πρῶτον λεπτόν*, τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ ἔτους ὀνομάζεται *μήν*, τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς ὀνομάζεται *πούς*, καὶ τὰ τοι-

αὐτα. Ὥστε ἀντὶ νὰ λέγωμεν, ὅτι βάρος τι εἶναι 7 ὀκ. καὶ $\frac{180}{400}$ τῆς ὀκᾶς λέγομεν, ὅτι εἶναι 7 ὀκ. καὶ 180 δράμια· ὁμοίως ἀντὶ νὰ λέγωμεν 3 ἔτη καὶ $\frac{7}{12}$ τοῦ ἔτους λέγομεν 3 ἔτη καὶ 7 μῆνες. Ὁμοίως ἀντὶ νὰ λέγωμεν 8 ἡμέραι $\frac{5}{24}$ τῆς ἡμέρας καὶ $\frac{20}{60}$ τῆς ὥρας καὶ $\frac{45}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ λέγομεν 8 ἡμέραι, 5 ὧραι, 20 πρῶτα λεπτὰ καὶ 45 δεύτερα λεπτά.

Ἐπίσης πρὸς ἀποφυγὴν τῶν μεγάλων ἀριθμῶν, οἵτινες προκύπτουσιν, ὅταν τὰ μετρούμενα ποσὰ ἦναι λίαν μεγάλα ὡς πρὸς τὴν ἀρχικὴν μονάδα ἑκάστου αὐτῶν ἐλήφθησαν ὡρισμένα τινὰ πολλαπλάσια αὐτῆς ὡς νέαι μονάδες καὶ ὠνομάσθησαν δι' ἰδιαιτέρων ὀνομάτων. Π. χ. ὅταν μὲν πρόκειται νὰ μετρηθῇ ὕφασμά τι, ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο ὁ πῆχυς, ἀλλ' ὅταν πρόκειται νὰ μετριθῇ ἡ ἀπόστασις πόλεων λαμβάνονται λόγου χάριν 1000 πήχεις ὡς μία μονὰς ὀνομαζομένη *στάδιον* καὶ διὰ αὐτοῦ μετροῦνται αἱ μεγάλαι ἀποστάσεις κ.λ.

Τοιουτοτρόπως ποσόν τι δύναται νὰ παρίσταται διὰ πολλῶν ἀριθμῶν ὁμοειδῶν μὲν ἀλλ' ἐχόντων διαφόρους μονάδας καὶ διάφορα ὀνόματα.

*Συμμιγὴς ἀριθμὸς λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἐξ ἄλλων, ὧν αἱ μονάδες εἶναι πολλαπλάσια μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος ἢ μέρη αὐτῆς ἔχοντα ἴδιον ὄνομα ἕκαστον.*

Οἷον 5 ἔτη 3 μῆνες 17 ἡμέραι 8 ὧραι 15 πρῶτα λεπτὰ καὶ 20 δεύτερα λεπτὰ εἶναι συμμιγὴς ἀριθμὸς ὡς συγκεκριμένος καὶ συγκείμενος ἐξ ἄλλων πολλαπλασίων ἢ μερῶν μιᾶς ἀρχικῆς μονάδος (π. χ. ἢ τοῦ δευτέρου λεπτοῦ ἢ τῆς ὥρας) ἐχόντων ἴδιον ὄνομα.

Ὁμοίως ὁ 60 ὀκάδες καὶ 250 δράμια εἶναι συμμιγὴς ἀριθμός, κλ.

*Σημ.* Ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς δύναται νὰ ἔχῃ καὶ κλάσμα τι τῆς κατωτάτης ἐν αὐτῇ ὑποδιαιρέσεως, ὡς 2 στατ. 20ὀκ ,285δρ. $+\frac{3}{7}$ δρ. Τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουσι διάφορα εἴδη πρὸς παράστασιν τοῦ αὐτοῦ ποσοῦ· διότι τὰ διάφορα ἔθνη ἔχουσιν ἐν γένει διαφόρους ἀρχικὰς μονάδας καὶ ὑποδιαιρέσεις αὐτῶν πρὸς μέτρησιν τῶν ποσῶν. Διὰ τοῦτο ἐν τοῖς ἑπομένοις ἐκτίθενται τὰ κυριώτερα εἴδη τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

## Μονάδες διάφοροι καὶ ὀνόματα αὐτῶν.

Μονάδες μήκους.

178. Ἡ κυριωτέρα μονὰς τοῦ μήκους, ἧς ἡ χρῆσις ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον ἐπικρατεστέρα, εἶναι τὸ γαλλικὸν *μέτρον*. Ἡ μονὰς αὕτη εἶναι τοιαύτη, ὥστε ἡ περιφέρεια τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς νὰ ἔχῃ μῆκος 40000000 μέτρα.

Παρ' ἡμῖν τὸ γαλλικὸν μέτρον ὠνομάσθη *βασιλικὸς πῆχυς*, καὶ ὑποδιαιρεῖται ὡς ἑξῆς :

1) *Τὸ μέτρον ἢ βασιλικὸς πῆχυς* ἀρχικὴ μονάς$=1^{\mu}$.

*ἡ παλάμη*$=\frac{1}{10}$τοῦ μέτρου ἢ ὑποδεκάμετρον$=0,1$

*ὁ δάκτυλος*$=\frac{1}{10}$τῆς παλάμης ἢ ὑφεκατόμετρον$=0,01$

*ἡ γραμμὴ*$=\frac{1}{10}$τοῦ δακτύλου ἢ ὑποχιλιοστόμετρον$=0,001$

Ὥστε εἶναι $1^{\mu}=10$παλ.$=100$δάκτ.$=10000$γρ.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 10 & = & 100 \\ & & 1 & = & 10 \end{array}$$

καὶ ἑπομένως ἡ ὑποδιαίρεσις αὕτη εἶναι δεκαδική, ἤτοι π. χ. $15^{\mu}$ μέτρα 4δακτ.8γραμ.$=15,238$.

2) *Ὁ μικρὸς πῆχυς* Κωνσταντινουπόλεως ἢ τοῦ ἐμπορίου (ἐνδεζὲ)$=0,648^{\mu}$· καὶ ὁ μεγαλείτερος (ἀρσὶν)$=0,669^{\mu}$·

Διαιρεῖται ἑκάτερος τούτων εἰς 8 *ρούπια*.

3) *Ὁ τεκτονικὸς πῆχυς*$=0,75^{\mu}$·, πρὸς μέτρησιν οἰκοδομῶν καὶ οἰκοπέδων.

4) Ἡ *ὀργυιά*, ἡ παλαιοτέρα ἀρχικὴ μονὰς μήκους, καὶ ὑποδιαιρεῖται ὡς ἑξῆς.

*ὀργυιὰ* ἀρχικὴ μονάς$=1,94904^{\mu}$.

*πούς*$=\frac{1}{6}$ τῆς ὀργυιᾶς

*δάκτυλος*$=\frac{1}{12}$τοῦ ποδὸς

*γραμμὴ*$=\frac{1}{12}$τοῦ δακτύλου

5) *Υάρδα* (ἀγγλική)$=0,91438^{\mu}$,

*πούς*$=\frac{1}{3}$τῆς ὑάρδας

*δάκτυλος*$=\frac{1}{12}$τοῦ ποδός

6) *στάδιον*$=1000^{\mu}$.

7) *λεύγα*$=5556^{\mu}$.

8) *Μίλιον γεωγραφικὸν* ἢ Γερμανικὸν$=7420,4407^{\mu}$.

9) *Μίλιον ναυτικὸν ἀγγλικὸν*$=1760$ὑάρδ.$=1609,3295^{\mu}$.

10) *Μίλιον ναυτικὸν* $=1854,965^{\mu}$.

## Μονάδες ἐπιφανείας.

179. Μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν λαμβάνεται τὸ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση τῇ μονάδι τοῦ μήκους. Εἶναι δὲ τὸ τετράγωνον ἐπιφάνεια ἐπίπεδος περικλειομένη ὑπὸ τεσσάρων ἴσων εὐθειῶν σχηματιζουσῶν ὀρθὰς γωνίας.

1) *Τετραγωνικὸν μέτρον* λέγεται τὸ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ ἴση πρὸς ἓν μέτρον.

*Τετραγωνικὴ παλάμη* εἶναι τὸ τετράγωνον οὗ ἡ πλευρὰ μία παλάμη $\left(\frac{1}{10}\text{ τοῦ μέτρου}\right)=\frac{1}{100}$τετρ. μέτρου.

*Τετραγωνικὸς δάκτυλος* εἶναι τὸ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἷς δάκτυλος $\left(\frac{1}{10}\text{τῆς παλάμης}=\frac{1}{100}\text{τοῦ μέτρου}\right)=\frac{1}{100}$τετρ. παλάμης$=\frac{1}{10000}$τετραγ. μέτρου.

2) *Τεκτονικὸς τετραγωνικὸς πῆχυς* λέγεται τὸ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ εἷς τεκτονικὸς πῆχυς$=\frac{9}{16}$ τοῦ τετραγ. μέτρου

3) *ἄρ* (are) λέγεται τὸ τετράγωνον, οὗ ἡ πλευρὰ 10 μέτρα$=100$ τετραγωνικὰ μέτρα.

4) *Ἑκτάριον*$=100$ ἄρ

5) *Στρέμμα*=1000 τετραγ. μέτρα

6) *Παλαιὸν στρέμμα*=1,27 τοῦ στρέμματος.

## Μονάδες ὄγκου ἢ χωρητικότητος.

180. Μονὰς τῶν ὄγκων λαμβάνεται ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ ἡ μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν. Εἶναι δὲ ὁ κύβος στερεὸν περικλειόμενον ὑπὸ ἕξ τετραγώνων ἴσων ὑπὸ ὀρθὰς γωνίας.

1) *Τὸ κυβικὸν μέτρον* εἶναι ὁ κύβος, οὗ ἡ πλευρὰ τὸ τετραγωνικὸν μέτρον.

*Κυβικὴ παλάμη*$=\frac{1}{1000}$ κυβικοῦ μέτρου

*Κυβικὸς δάκτυλος* $=\frac{1}{1000}$ κυβικῆς παλάμης

2) *Ἡ λίτρα* εἶναι ἡ χωρητικότης τῆς κυβικῆς παλάμης, ἤτοι ἓν κυβικὸν μέτρον περιέχει 1000 λίτρας. Ἡ λίτρα εἶναι ἐν χρήσει πρὸς μέτρησιν τῶν ὑγρῶν.

3) Τὸ *κοιλὸν* εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ κυβικοῦ μέτρου ἤτοι 100 κυβικαὶ παλάμαι.

*Σημ.* Τὴν μέτρησιν πάσης ἐπιφανείας καὶ παντὸς ὄγκου διδάσκει ἡ Γεωμετρία διὰ τῆς καταμετρήσεως ὡρισμένων τινῶν εὐθειῶν γραμμῶν καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται διὰ τοῦ λογισμοῦ, πόσας μονάδας ἔχει ἡ ἐπιφάνεια ἢ ὁ ὄγκος.

## Μονάδες βάρους.

181. Αἱ μονάδες βάρους εἶναι αἱ ἑξῆς·

1) Τὸ *Γραμμάριον* (gramme) εἶναι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ δακτύλου ὕδατος ἀπεσταγμενου καὶ θερμοκρασίας 4,1 βαθμῶν τοῦ κοινοῦ θερμομέτρου.

2) Τὸ *χιλιόγραμμον*=1000 γραμμάρια εἶναι τὸ βάρος μιᾶς κυβικῆς παλάμης ὕδατος, ἤτοι τὸ βάρος μιᾶς λίτρας ὕδατος ὡς ἀνωτέρω.

3) Ὁ *τόννος*=1000 χιλιόγραμμα, ἤτοι τὸ βάρος ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου ὕδατος ὡς ἀνωτέρω.

4) Τὸ *φούντιον* (Pfund, γερμανικόν)=500 γραμμάρια.

5) Ἡ *ὀκᾶ*=1280 γραμμάρια=400 δράμια.

Τὸ *δράμιον*=$3+\frac{1}{5}$ γραμμάρια.

Τὸ *χιλιόγραμμον*=312 1|2 δράμια.

6) Ἡ *Ἐνετικὴ λίτρα*=149 δράμια=477 περίπου γραμμάρια.

7) Ἡ *Ἀγγλικὴ λίτρα* (ἐν Ἑπτανήσῳ)=142 1|2 δράμ.=436 γραμμάρια.

8) Ὁ *στατὴρ*=44 ὀκάδες.

Διὰ δὲ τὰ φάρμακα εἶναι ἐν χρήσει αἱ ἑξῆς μονάδες βάρους.

9) Ἡ *λίτρα* τῶν φαρμακείων=112 1|2 δράμ.=360 γραμμάρια.

10) Ἡ *οὐγγία*=$\frac{1}{12}$τῆς λίτρας.

11) Ἡ *δραχμὴ*=$\frac{1}{8}$τῆς οὐγγίας.

12) Τὸ *σκρούπουλον*=$\frac{1}{3}$τῆς δραχμῆς.

13) Ὁ *κόκκος*=$\frac{1}{20}$τοῦ σκρουπούλου.

## Μονάδες νομισμάτων.

182. Τὸ παρ' ἡμῖν ἰσχῦον νομισματικὸν σύστημα εἶναι τὸ τῆς καλουμένης *λατινικῆς νομισματικῆς συμβάσεως* ἢ *ἑνώσεως* μεταξὺ Γαλλίας, Ἰταλίας, Ἑλβετίας, Βελγίου, Ὁλλανδίας καὶ Ἑλλάδος. Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ συστήματος τούτου ὡρίσθη τὸ *φράγκον* (ἡ παρ' ἡμῖν *δραχμὴ*) εἶναι δὲ τοῦτο νόμισμα ἀργυροῦν ἔχον βάρος 5 γραμμαρίων ($1+\frac{9}{16}$δράμια)), οὗ ὁ βαθμὸς καθαρότητος) εἶναι 0,835, ἤτοι μόνον τὰ 0,835 εἶναι καθαρὸς ἄργυρος τὰ δὲ λοιπὰ 0,165 εἶναι χαλκὸς ἢ καὶ ἄλλα μέταλλα.

Διαιρεῖται δὲ τὸ φράγκον εἰς 100 ἴσα μέρη, ὧν ἕκαστον λέγεται παρ' ἡμῖν *λεπτόν*. Τὰ δὲ νομίσματα τῆς εἰρημένης ἑνώσεως εἶναι χαλκᾶ, νικέλινα, ἀργυρᾶ καὶ χρυσᾶ.

## Νομίσματα ἑλληνικά.

### 1) Ἀργυρᾶ.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ἡ *δραχμὴ* | =100 λεπτὰ= | 5 γραμμ. βάρος | |
| τὸ *εἰκοσάλεπτον* | = 20 » = | 1 » » | |
| τὸ *πεντηκοντάλεπτον* | = 50 » = | 25 » » | |
| τὸ *δίδραχμον* | = 2 δραχ.= | 10 » » | |
| τὸ *πεντάδραχμον* | = 5 » = | 25 » » | =0,900β.καθ. |

### 2) Χρυσᾶ

| | | | |
|---|---|---|---|
| τὸ *πεντάδραχμον* | = 5 » | = 1,61290 » » | » |
| τὸ *δεκάδραχμον* | = 10 » | = 3,22580 » » | » |
| τὸ *εἰκοσάδραχμον* | = 20 » | = 6,45161 » » | » |
| τὸ *πεντηκοντάδραχμον* | = 50 » | =16,12903 » » | » |
| τὸ *ἑκατοντάδραχμον* | =100 » | =32,25806 » » | » |

### 3) Χαλκᾶ

| | | | |
|---|---|---|---|
| τὸ *διώβολον* | = 10 λεπτὰ= | 10 » » | » |
| ὁ *ὀβολὸς* | = 5 » = | 5 » » | » |

### 4) Νικέλινα.

| | |
|---|---|
| τὸ *εἰκοσάλεπτον* | = 20 λεπτὰ |
| τὸ *δεκάλεπτον* | = 10 » |
| τὸ *πεντάλεπτον* | = 5 » |

*Σημ.* τὸ πεντάδραχμον λέγεται καὶ *τάλληρον*.

## Νομίσματα διαφόρων κρατῶν.

### Ἀγγλικά.

Ἀρχικὴ μονὰς ἡ *ἀγγλικὴ λίρα* (στερλίνα), τὸ δὲ βάρος αὐτῆς 7,988 γραμ.

| | | |
|---|---|---|
| ἡ *λίρα* | =20 σελλίνια | =25 δραχμαὶ |
| τὸ *σελλίνιον* | =12 πένναι | = 1,25 δραχ. |
| ἡ πέννα | = 4 φαρδίνια | = 10 5/12 λεπτὰ |

Γερμμανικά.

Ἐν Γερμανίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ *μάρκον*, οὗ τὸ βάρος 5,55 γραμ.
τὸ *μάρκον*=100πφένιγ=1,25 δρ.

Αὐστριακά.

Ἐν Αὐστρίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ *φιορίνιον*
τὸ *φιορίνιον*=100κρόϊτσερ=2 μάρκα=2,50 δραχ.

Τουρκικά.

Ἐν Τουρκίᾳ μονὰς τῶν νομισμάτων εἶναι τὸ *γρόσιον*
τὸ *γρόσιον*=40 παράδες=20 λεπτὰ περίπου
ὁ *παρᾶς*=3 ἄσπρα.

Ῥωσσικά.

Ἐν Ῥωσσίᾳ ἀρχικὴ μονὰς νομισμάτων τὸ *ρούβλιον*
τὸ *ρούβλιον*=100 καπίκια=4 δραχ.

Τῶν Ἡνωμένων Πολιτειῶν.

Ἐν ταῖς Ἡνωμέναις πολιτείαις μονὰς τοῦ νομίσματος εἶναι τὸ *δολλάριον* =5,18 δραχ.

## Μονάδες χρόνου.

180. Ἀρχικὴ μονὰς τοῦ χρόνου εἶναι ἡ ἡμέρα ἢ τὸ ἡμερονύκτιον
ἡ *ἡμέρα*=24 ὧραι
ἡ *ὥρα* =60′ (πρῶτα λεπτὰ)
τὸ 1′ =60″ (δεύτερα λεπτὰ)
ὁ *μὴν*=30 ἡμέραι
τὸ *ἔτος*=12 μῆνες.

*Σημ.* Οἱ μῆνες ἔχουσιν ἄλλοι μὲν 30, ἄλλοι δὲ 31 ἡμέρας. Ὁ δὲ Φεβρουάριος ἔχει 28 διὰ τὰ κοινὰ καὶ 29 διὰ τὰ ἐμβόλιμα ἢ δίσεκτα ἔτη, ἅτινα ἔχουσι 366 ἡμέρας, ἐν ᾧ τὰ κοινὰ ἔχουσι 365.

## Διαίρεσις τῆς περιφερείας κύκλου.

184. Πᾶσα περιφέρεια κύκλου διαιρεῖται εἰς 360 μέρη ἴσα ὀνομαζόμενα *μοῖραι*.

Ἡ *μοῖρα* ἢ ἁπλῶς $1^o = 60$ πρῶτα λεπτὰ ἢ ἁπλῶς $60'$

τὸ $1' = 60$ δεύτερα λεπτὰ ἢ ἁπλῶς $60''$.

*Παρατήρησις*. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνεται εὐκόλως, ὅτι, ὅσα εἴδη συμμιγῶν ἀριθμῶν ἔχουσι μονάδας μετὰ δεκαδικῶν ὑποδιαιρέσεων ἀντὶ τῶν λοιπῶν ἀνωμάλων ὑποδιαιρέσεων, δύνανται νὰ γράφωνται ὡς δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν μονάδων αὐτῶν καὶ ἑπομένως αἱ ἐπ' αὐτῶν πράξεις ἀνάγονται εἰς τὰς τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καθιστάμεναι οὕτω πολλῷ εὐχερέστεραι. Τὸ δὲ προτέρημα τοῦτο ἔχει τὸ γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα, ὅπερ σύμπαν βασίζεται ἐπὶ τῆς μονάδος τοῦ μήκους, τοῦ μέτρου, τῆς ἐχούσης σχέσιν πρὸς τὸ μέγεθος τῆς γῆς καὶ ἑπομένως δυναμένης νὰ εὑρίσκηται πάντοτε. Διὰ τοῦτο τὸ γαλλικὸν μετρικὸν σύστημα ἐπεκράτησεν οὐ μόνον καθ' ἅπασαν τὴν Γαλλίαν, ἀλλὰ καὶ ἐν ἄλλοις ἔθνεσι (Βελγίῳ, Ὀλλανδίᾳ, Ἑλβετίᾳ)· εἰσήχθη δὲ καὶ παρ' ἡμῖν διὰ Βασιλικοῦ διατάγματος τοῦ 1836, ἀλλ' ἡ ὁλοσχερὴς αὐτοῦ παραδοχὴ δὲν κατωρθώθη εἰσέτι.

Ἐπειδὴ δὲ περὶ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων διαλαμβάνει τὸ προηγούμενον κεφάλαιον ἐν τοῖς ἀμέσως ἑπομένοις λαμβάνονται μᾶλλον ὑπ' ὄψιν τὰ εἴδη τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν τῶν μὴ ἐχόντων δεκαδικὰς ὑποδιαιρέσεις καὶ ἐπ' αὐτῶν γίνονται αἱ διάφοροι ἀριθμητικαὶ πράξεις.

## Τροπὴ συμμιγοῦς εἰς ἀριθμὸν μιᾶς τῶν μονάδων αὐτοῦ.

185. Πᾶς συμμιγὴς ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ ἢ εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ἢ εἰς ἕνα κλασματικὸν ἀριθμόν.

1) *Ἵνα τραπῇ συμμιγὴς ἀριθμὸς εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τρέπεται εἰς μονάδας τοῖς ἐν αὐτῷ κατωτάτης ὑποδιαιρέσεως.*

Ἔστω π.χ. ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 2 στατ. 25 ὀκ. 200 δραμ. Ἵνα τραπῇ οὗτος εἰς ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν, τρέπεται εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ τάξεως, ἤτοι εἰς δράμια.

Πρὸς τοῦτο τρέπονται πρῶτον οἱ 2 στατῆρες εἰς ὀκάδας καὶ γίνονται $2.44 = 88$ ὀκ. (διότι εἷς στατὴρ ἔχει 44 ὀκάδας)· εἰς τὰς οὕτως εὑρεθείσας 88 ὀκ. προστίθενται αἱ 25 ὀκ. καὶ ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς 113 ὀκ, Αἱ 113 ὀκ. τρέπονται εἰς δράμια καὶ γίνονται $113.400 = 45200$ δραμ. (διότι

1 όκ.=400 δραμ.)· εἰς τὰ οὕτως εὑρεθέντα 45200 δράμ. προστίθενται τὰ 200δραμ. καὶ ἀποτελεῖται ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 45400δραμ.

Ὥστε 2στατ. 25όκ. 200δραμ.=45400δράμ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται συνήθως ὡς ἑξῆς

2στατ. 25οκ. 200δράμ.

| |
|---|
| 44 |
| 88 |
| 25 |
| 113 |
| 400 |
| 45200 |
| 200 |
| 45400 |

2) *Ἵνα τραπῇ συμμιγὴς ἀριθμὸς εἰς ἓν κοινὸν κλάσμα ἢ εἰς ἕνα μικτόν, τρέπεται οὐχὶ εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης ἐν αὐτῷ τάξεως, ἀλλ' εἰς μονάδας ἄλλης ἐν αὐτῷ ἀνωτέρας τάξεως.*

Ἔστω π. χ. ὁ συμμιγὴς ἀριθμὸς 5ἡμ. 10ὧρ. 15′30″. Ἵνα τραπῇ οὗτος εἰς ἓν κλάσμα, τρέπεται οὐχὶ εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης αὐτοῦ τάξεως, ἤτοι εἰς δεύτερα λεπτά, ἀλλ' εἰς μονάδας ἄλλης ἐν αὐτῷ ἀνωτέρας τάξεως, λόγου χάριν εἰς ὥρας· πρὸς τοῦτο τρέπονται πρῶτον αἱ 5ἡμ. εἰς ὥρ. καὶ γίνονται 5.24=120ὧρ. (διότι 1ἡμ.=24ὧρ.)· εἰς τὰς 120ὥρ. προστίθενται αἱ 10ὧρ. καὶ ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς 130ὧρ.

Εἶτα τρέπονται τὰ λοιπὰ μέρη τοῦ συμμιγοῦς, ἤτοι τὰ 15′30″ εἰς μέρη τῆς ὥρας. Πρὸς τοῦτο τρέπονται τὰ 15′ εἰς δεύτερα λεπτὰ καὶ γίνονται 15.60=900″ (διότι 1′=60″)· εἰς δὲ τὰ 900″ προστίθενται τὰ 30″ καὶ ἀποτελεῖται ὁ ἀριθμὸς

$$930', \text{ ἤτοι } \frac{930}{3600} (\text{διότι } 1\text{ὥρ.}=60'=60''.60=3600'')$$

$$\text{Ὥστε } 5\text{ἡμ. } 10\text{ὧρ. } 15'30''=130\text{ὧρ.}+\frac{930}{3600}\text{ὥρ.}=130+\frac{31}{120}=$$

$$=\frac{130.120+31}{120}=\frac{15631}{120}\text{ὥρ.}$$

Ὁμοίως τρέπεται ὁ συμμιγὴς 7οκ. 352δρ. $+\frac{1}{2}$δρ. εἰς ὀκάδας καὶ γίνεται

$$7\text{όκ}+\frac{705}{800}\text{όκ.}=\frac{1261}{160}\text{όκ.}$$

## Τροπὴ κλασματικοῦ ἀριθμοῦ εἰς συμμιγῆ.

186. *Ἵνα τραπῇ κλασματικὸς ἀριθμὸς εἰς συμμιγῆ, διαιρεῖται ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ κλασματικῷ ἀριθμῷ, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ) τρέπεται εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ· τὸ πηλίκον τῆς νέας ταύτης διαιρέσεως παριστᾷ μονάδας τῆς τάξεως ταύτης, τὸ δὲ ὑπόλοιπον (ἐὰν ὑπάρχῃ) τρέπεται εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ ἐξαγόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ, καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρι τῶν μονάδων τῆς τελευταίας τάξεως.*

Ἔστω π. χ. ὁ συγκεκριμένος κλαματικὸς ἀριθμὸς $\frac{15}{7}$στατ. Ἵνα τραπῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἰς συμμιγῆ ἀριθμόν, διαιρεῖται πρῶτον ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 2 στατ. (ὁμοειδὲς τῷ κλάσματι). τὸ δὲ ὑπόλοιπον 1 στατ. τρέπεται εἰς ὀκάδας καὶ γίνεται 44 ὀκ. αὗται διαιροῦνται διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 7 καὶ δίδουσι πηλίκον 6 ὀκ. καὶ ὑπόλοιπον 2 ὀκ. τοῦτο δὲ τρέπεται εἰς δράμια καὶ γίνεται 800 δραμ. ἅτινα διαιρούμενα διὰ 7 δίδουσι πηλίκον 128 δραμ. καὶ ὑπόλοιπον 4.

Ἔστω $\frac{15}{7}$ στατ. $=$2 στατ. 6 ὀκ. 115$+\frac{2}{7}$δραμ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

```
15όκ.    15στατ.   | 7
 ‾7        1       |------------------
          44       | 2στ.6όκ.114+²⁄₇δρ.
        -----      |
          44
           2
          400
        -----
          800
          10
          30
           2
```

Ὁμοίως εὑρίσκεται $\frac{7}{8}$ ἡμ. $=21$ ὧραι

καὶ $\frac{3}{5}$ ὀργ $=3$ πόδ. $7$ δακτ. $2+\frac{2}{5}$ γρ.

## Πράξεις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν.

### Πρόσθεσις.

187. *Ἡ πρόσθεσις τῶν συμμιγῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· προστίθενται οἱ ἀριθμοὶ ἑκάστης τάξεως ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως καὶ ἐφεξῆς. Καὶ ὅταν μὲν τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων τάξεώς τινος δὲν περιέχῃ καὶ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, γράφεται ὅλον, ὅταν δὲ περιέχῃ, τότε διαιρεῖται αὐτὸ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος πόσαι μονάδες τῆς τάξεως ταύτης ἀποτελοῦσι μίαν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας. καὶ τὸ μὲν ὑπόλοιπον γράφεται εἰς τὴν θέσιν τοῦ ἀθροίσματος, τὸ δὲ πηλίκον προστίθεται εἰς τὰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἕπεται.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 17ὧρ. | 20′ | 30″ | 15στ. | 30ὀκ. | 250δρ. |
| 5 | 0 | 45 | | 25 | 100 |
| | 15 | 35 | 42 | 0 | 300 |
| 1 | 18 | | | | |
| 23ὧρ. | 53′ | 110″ | 57στ. | 55ὀκ. | 650δρ. |
| ἢ 23ὧρ. | 54′ | 50 | ἢ 58στ. | 12ὀκ. | 250 |
| (Διότι 1ὧρ.=60′,1′=60′) | | | (Διότι 1στ.=44ὀκ.,1ὀκ.=400δρ.) | | |

### Ἀφαίρεσις.

188. *Ἡ ἀφαίρεσις τῶν συμμιγῶν γίνεται ὡς καὶ ἡ τῶν ἀκεραίων· ἀφαιρεῖται ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τοῦ ἀντιστοίχου τῆς αὐτῆς τάξεως ἀριθμοῦ τοῦ μειωτέου ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς κατωτάτης τάξεως καὶ ἐφεξῆς. Ἐὰν δὲ ἀριθμός τις τοῦ μειωτέου ἦναι μικρότερος τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τοῦ ἀφαιρετέου, αὐξάνεται κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι ἀποτελοῦσι μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἵνα μὴ δὲ μεταβληθῇ ἡ ζητουμένη διαφορά, προστίθεται ἡ μονὰς αὕτη καὶ εἰς τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως ἐν τῷ ἀφαιρετέῳ* (κατὰ τὴν γενικὴν ἰδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως, σελ. 19).

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἕπεται.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 50όρ. | 4πόδ. | 3δακ. | 8γρ | 153στ. | 15όκ. | 300δρ. |
| 6 | 5 | 7 | 5 | | 32 | 150 |
| 43όργ. | 4πόδ. | 8δακ. | 3γρ. | 152στ. | 27όκ. | 150 |

(Διότι 1όργ.=6πόδ., 1π.=12δακ.) (Διότι 1στ.=44όκ.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5ημ. | 0ὥρ. | 0′ | 0″ |
| | 12 | 20 | 15 |
| 4ημ. | 11ὥρ. | 39′ | 45″ |

(Διότι 1ἡμ.=24ὥρ., 1ὥρ.=60′, 1′=60″)

## Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις.

### 1) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν.

189. *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμόν, πολλαπλασιάζεται ἕκαστον τῶν μερῶν αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον ἀριθμὸν* (διότι ὁ συμμιγὴς εἶναι ἄθροισμα τῶν μερῶν αὐτοῦ). *Ἐὰν δὲ εἰς μερικόν τι γινόμενα περιέχωνται μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ἐξάγονται αὗται καὶ προστίθενται εἰς τὸ μερικὸν γινόμενον τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, ὡς καὶ ἐν τῇ προσθέσει.*

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται, ὡς ἐκ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων φαίνεται.

1) *Ἔχει τις 12 σάκκους σίτου, ὧν ἕκαστος περιέχει 1 στ. 23 όκ. 300δρ. πόσον σῖτον περιέχουσι πάντες οἱ σάκκοι;*

Φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς

1στ. 23όκ. 300δρ. ἐπὶ τὸν 12, ἤτοι

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 1στ. | 23όκ. | 300δρ. |
| | | | 12 |
| | 12στ. | 276όκ. | 3600δρ. |
| ἢ | 18στ. | 21όκ. | |

Τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο εὑρίσκεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὅστις καλεῖται *μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν*. Ἀναλύεται δηλαδὴ ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ συμμιγοῦς εἰς ὑποπολλαπλάσια τῆς μονάδος τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως καὶ εἶτα πολλαπλασιάζονται ταῦτα ἐπὶ τὸν ἀκέραιον καὶ ἀθροίζονται τὰ μερικὰ γινόμενα. Τοιουτοτρόπως ἀντὶ νὰ πολλαπλασιασθῇ ὡς ἀνωτέρω ὁ συμμιγὴς 1στ. 23όκ. 300δρ. ἐπὶ 12 πολλαπλασιάζεται πρῶτον ὁ 1στ. καὶ εὑρίσκεται γινόμενον 12στ. Εἶτα ἀναλύονται αἱ 23όκ. εἰς 22όκ.$=\frac{1}{2}$ τοῦ στατ. καὶ εἰς 1όκ $=\frac{1}{44}$τοῦ στατῆρ.$=\frac{1}{22}$τῶν 22όκ. καὶ πολλαπλασιάζεται ἑκάτερον τῶν μερῶν τούτων ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκεται γινόμενον τοῦ μὲν $\frac{1}{2}$στ. ἐπὶ12 τὸ 6στ., τοῦ δὲ $\frac{1}{44}$τοῦ στατ. ἢ $\frac{1}{22}$τῶν 22όκ. ἐπὶ 12 τὸ 12όκ. (διότι 6στατ. =264όκ.καὶ264όκ.:22=12όκ).Εἶτα ἀναλύονται τὰ300δρ.εἰς200δρ.$\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς καὶ εἰς 100δρ.$=\frac{1}{2}$τῶν 200δρ. καὶ πολλαπλασιάζεται ἑκάτερον τῶν μερῶν τούτων ἐπὶ 12 καὶ εὑρίσκεται γινόμενον τοῦ μὲν $\frac{1}{2}$τῆς ὀκᾶς ἐπὶ 12 τὸ 6οκ. (διότι διὰ μίαν ὀκᾶν εὑρέθη 12), τοῦ δὲ $\frac{1}{2}$τῶν200δραμ. ἐπὶ 12 τὸ 3όκ. (διότι διὰ 200δρ. εὑρέθη 6). Προστιθέμενα δὲ πάντα ταῦτα τὰ μερικὰ γινόμενα ἀποτελοῦσι τὸν ζητούμενον συμμιγῆ 18στ. 21όκ.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑξῆς

$$
\begin{array}{ll|lll}
 & & 1\text{στ.} & 23\text{όκ.} & 300\text{δράμ.} \\
 & & 12 & & \\
\hline
 & & 12 & & \\
23\text{όκ.} & 22\text{όκ.}=\frac{1}{2}\text{στ.} & 6 & & \\
 & 1=\frac{1}{22}.22 & 0 & 12 & \\
300\ \text{δρ.} & 200=\frac{1}{2}\ \text{όκ.} & & 6 & \\
 & 100=\frac{1}{2}.200 & & 3 & \\
\hline
 & & 18\text{στ.} & 21\text{όκ.} &
\end{array}
$$

2) *Τὸ ἓν στάδιον διανύει τις ἐπὶ* 1ὥρ.15′25″· *ἐπὶ πόσον χρόνον διανύει τὰ* 30 *στάδια ;*

| | | 1ὥρ. | 15′ | 25″ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 30 | | | |
| | | 30 | | | |
| | $15' = \frac{1}{4}$ τῶν 60′ | 7 | 30 | | |
| 25″ | $20'' = \frac{1}{3}$ τοῦ 1′ | 0 | 10 | | (δι' $1' = \frac{1}{15}$.15′ τὸ γινόμενον ἐπὶ 30 εἶναι 30′) |
| | $5'' = \frac{1}{4}$ τῶν 20″ | 0 | 2 | 30 | |
| | | 37ὥρ. | 42′ | 30″ | |

3) *Ἐὰν ἀντὶ 1 λίρας ἀγοράζῃ τις* 27ὀργ.4πόδ.8δακ.10γρ. *ὑφάσματός τινος, ἀντὶ 482 λιρῶν πόσον ἀγοράζει;*

| | | 27ὀργ. | 4ποδ. | 8δακ. | 10γρ. |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 482 | | | |
| | | 54 | | | |
| | | 216 | | | |
| | | 108 | | | |
| 4 πόδ. | 3 π. $= \frac{1}{2}$ ὀρ. | 241 | | | |
| | 1 π. $= \frac{1}{3}$ τῶν 3π. | 80 | 2 | | |
| 8 δακ. | 6 δ. $= \frac{1}{2}$ ποδ. | 40 | 1 | | |
| | 2 δ. $= \frac{1}{3}$ τῶν 6δ. | 13 | 2 | 4 | |
| 10 γρ. | 6 γ. $= \frac{1}{4}$ τῶν 2δ. | 3 | 2 | 1 | |
| | 3 γ. $= \frac{1}{2}$ τῶν 6γ. | 1 | 4 | 0 | 6 |
| | 1 γ. $= \frac{1}{3}$ τῶν 3γ. | 0 | 3 | 4 | 2 |
| | | 13394ὀρ. | 2π. | 9δ. | 8γ. |

*Σημ.* Ἡ μέθοδος τῶν ἁπλῶν μερῶν προτιμᾶται ἰδίᾳ, ὅταν ὁ ἀκέραιος πολλαπλασιαστὴς ἦναι πολυψήφιος ἀριθμός.

## 2) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

**190.** *Ἵνα διαιρεθῇ συμμιγὴς δι' ἀκεραίου, διαιρεῖται ἕκαστον τῶν μερῶν* αὐτοῦ διὰ τοῦ ἀκεραίου (κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα τῆς διαιρέσεως). Ὅταν δὲ ἡ διαίρεσις ἀριθμοῦ τινος τοῦ συμμιγοῦς ἀφήσῃ ὑπόλοιπον, τρέπεται αὐτὸ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ προστίθενται αὗται εἰς τὰς ὁμοίας μονάδας τοῦ συμμιγοῦς, πρὶν διαιρεθῶσιν. Διὰ τοῦτο δὲ ἡ διαίρεσις ἄρχεται ἀπὸ τῶν μονάδων τῆς ἀνωτάτης τάξεως καὶ ἐφεξῆς.

Κατὰ τὸν κανόνα τοῦτον, ἐὰν πρόκειται νὰ διανεμηθῶσιν ἐξ ἴσου 280στ. 16ὀκ. 300δρ. εἰς 18 ἀνθρώπους, κατὰ πρῶτον διαιροῦνται οἱ 280στ. διὰ 18 καὶ εὑρίσκεται πηλίκον 15στ. ὑπόλοιπον δὲ 10στ. Οἱ 10στ. τρέπονται εἰς 440ὀκ., εἰς ἃς προστίθενται καὶ αἱ 16ὀκ. τοῦ συμμιγοῦς· διαιροῦνται αἱ 456ὀκ. διὰ 18 καὶ εὑρίσκεται πηλίκον μὲν 25ὀκ. ὑπόλοιπον 6ὀκ., αἵτινες τρέπονται εἰς 2400δρ., εἰς ἃ προστίθενται τὰ 300δρ. τοῦ συμμιγοῦς καὶ τὸ ἄθροισμα 2700δρ. διαιρεῖται διὰ 18, ὅτε εὑρίσκεται 150δρ.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

$$
\begin{array}{r|l}
280\text{στ. } 16\text{οκ. } 300\text{δρ.} & 18 \\ \cline{2-2}
100 & 15\text{στ. } 25\text{ὀκ. } 150\text{δρ.} \\
10 & \\
44 & \\ \cline{1-1}
440 & \\
16 & \\ \cline{1-1}
456 & \\
96 & \\
6 & \\
400 & \\ \cline{1-1}
2400 & \\
300 & \\ \cline{1-1}
2700 & \\
90 &
\end{array}
$$

### 3) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ κλασματικὸν ἢ ἐπὶ μικτὸν ἀριθμόν.

191. *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ συμμμιγὴς ἐπὶ κλάσμα, πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν ἀριθμητὴν καὶ εἶτα διαιρεῖται τὸ γινόμενον διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος· ἐπὶ μικτὸν δὲ πολλαπλασιάζεται, καὶ ἐὰν πολλαπλασιασθῇ*

*ἐπὶ τὸν ἀκέραιον τοῦ μικτοῦ καὶ ἐπὶ τὸ κλάσμα αὐτοῦ καὶ εἶτα προστεθῶσι τὰ δύο ταῦτα μερικὰ γινόμενα.*

Π.χ. *Ἐργάτης τις, ὅπως ὑφάνῃ ἕνα πῆχυν ὑφάσματός τινος, χρειάζεται* 15 *ὥρ.* 37′ 30″, *πόσον χρόνον χρειάζεται, ἵνα ὑφάνῃ* 49 *πήχεις καὶ* $\frac{3}{4}$ *τοῦ πήχεως;* Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ συμμιγὴς 15ωρ.37′,30″ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 49 καὶ εἶτα ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Ἀμφότεραι δὲ αἱ πράξεις αὗται ἀνάγονται εἰς τὰς ἀνωτέρω ἤδη ἐκτελεσθείσας, ἤτοι εἰς πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ ἀκέραιον καὶ εἰς διαίρεσιν συμμιγοῦς δι' ἀκεραίου. Τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς ἕπεται.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 15ὥρ. | 37′ | 30″ |
| | $49+\frac{3}{4}$ | | |
| | 135 | | |
| | 60 | | |
| 37′ $30' = \frac{1}{2}$ ὥρ. | 24 | 30 | |
| $6 = \frac{1}{5}$ τῶν 30′ | 4 | 54 | |
| $1 = \frac{1}{6}$ τῶν 6′ | 0 | 49 | |
| $30'' = \frac{1}{2}$ τοῦ 1′ | 0 | 24 | 30 |
| $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ τῆς 1 | 7 | 48 | 45 |
| $\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ τοῦ $\frac{1}{2}$ | 3 | 54 | $22+\frac{1}{2}$ |
| | 777ὥρ. | 20′ | 37″,5 |

Τουτέστιν ἐπολλαπλασιάσθη πρῶτον ὁ συμμιγὴς 15ωρ.37′30″ ἐπὶ τὸν ἀκέραιον 49 ὡς ἀνωτέρω (189) καὶ εἶτα ἐπὶ τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἀναλυθὲν εἰς ἀπλᾶ μέρη τῶν $\frac{4}{4}$, ἤτοι τῆς μονάδος 1, ἅτινα εἶναι τὸ $\frac{2}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ἑπομένως ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 15ὥρ.37′30″ καὶ τοῦ εὑρεθέντος ἐξαγομένου 7ὥρ. 48′45″ ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ καὶ εὑρέθη 3ὥρ.54′22″ $+\frac{1}{2}$. Μετὰ δὲ ταῦτα προσετέθησαν τὰ μερικὰ γινόμενα καὶ εὑρέθη τὸ ζητούμενον γινόμενον 777ὥρ.20′37″,5.

### 4) **Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ κλάσματος**

192. *Ἵνα διαιρεθῇ συμμιγὴς διὰ κλάσματος, ἀντιστρέφονται οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος καὶ εἶτα πολλαπλασιάζεται ὁ συμμιγὴς ἐπὶ τὸ ἀντεστραμμένον κλάσμα* (διότι ἡ διαίρεσις διὰ κλάσματος σημαίνει πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον κλάσμα ἐδ. 139).

*Ἵνα διαιρεθῇ δὲ διὰ μικτοῦ, τρέπεται πρῶτον ὁ μικτὸς εἰς κλάσμα.*

Π. χ. *Ἐὰν εἰς $\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας ὑφαίνῃ τις* 1όρ.2π.7δ.10δρ. *ὑφάσματός τινος, πόσον ὑφαίνει ἐπὶ μίαν ὥραν ;*

Φανερόν, ὅτι πρέπει νὰ διαιρεθῇ ὁ συμμιγὴς 1όρ.2π.7δ.10δκ. διὰ τοῦ $\frac{2}{5}$ ἤτοι πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $\frac{5}{2}$.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν ὡς ἑξῆς.

| | 1όρ. | 2π. | 7δ. | 10γ. |
|---|---|---|---|---|
| $1+\frac{2}{5}$ | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 7 | 10 |
| $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$ | 0 | 1 | 8 | $9+\frac{1}{5}$ |
| $\frac{1}{5}$ | 0 | 1 | 8 | $9+\frac{1}{5}$ |
| | 2όρ. | 0π. | 1δ. | $4+\frac{2}{5}$ γρ. |

### 5) Πολλαπλασιασμὸς συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ.

193. *Ἵνα πολλαπλασιασθῇ συμμιγὴς ἀριθμὸς ἐπὶ ἕτερον συμμιγῆ, ἢ τρέπεται ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς ἰσοδύναμον κλασματικόν, ἐφ' ὃν πολλαπλασιάζεται ὁ πολλαπλασιαστέος ὡς ἀνωτέρω* (191), *ἢ ὁ πολλαπλασιασμός γίνεται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν ἁπλῶν μερῶν.* Π.χ.

1) *Ἐργάται τινὲς ὑφαίνουσι ἐπὶ μίαν ὥραν* 16 *ὀργυιὰς* 4 *πόδας* 7 *δακτύλους* 6 *γρ. ὑφάσματός τινος· πόσον ὑφαίνουσιν οἱ αὐτοὶ ἐργάται ἐπὶ* 28 *ὥρας* 35′ 40″,

Φανερόν, ὅτι ὁ μὲν συμμιγὴς 16ορ.4π.7δ.6γρ. εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος, ὁ δὲ συμμιγὴς 28ὥρ.35′40″ ὁ πολλαπλασιαστής, ἤτοι ὁ πρῶτος καὶ μέρη αὐτοῦ πρέπει νὰ ἐπαναληφθῶσιν ὡς προσθετέοι τοσάκις, ὅσας ὥρας καὶ μέρη τῆς ὥρας περιέχει ὁ δεύτερος. Ἀλλ' ὁ δεύτερος περιέχει 28ὥρ. καὶ $\frac{35}{60}$ τῆς ὥρας καὶ $\frac{40}{3600}$ τῆς ὥρας (διότι 1ὥρ.=60′=3600″)· ὥστε τὸ γινόμενον εὑρίσκεται, ὡς εὑρίσκεται τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ ἄθροισμα ἄλλων ἀριθμῶν, πολλαπλασιαζομένου τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπὶ 27, εἶτα ἐπὶ $\frac{35}{60}$ καὶ τέλος ἐπὶ $\frac{40}{3600}$ καὶ ἀθροιζομένων τῶν μερικῶν τούτων γινομένων.

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο δύναται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἀμέσως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 16 όρ. | 4π. | 7δ. | 6γρ. |
| | 28ὤρ. | 35′ | 40″ | |
| | 128 | | | |
| | 32 | | | |
| 4π. { $3π. = \frac{1}{2}$ ὀργ. | 14 | | | |
| 4π. { $1π. = \frac{1}{3}$ τῶν3π. | 4 | 4 | | |
| 7δ. { $6δ. = \frac{1}{2}$ ποδ. | 2 | 2 | | |
| 7δ. { $1δ. = \frac{1}{6}$ τῶν6π. | 0 | 2 | 4 | |
| $6γρ. = \frac{1}{2}$ δακτ. | 0 | 1 | 2 | |
| 35′ { $30' = \frac{1}{2}$ ὥρ. | 8 | 2 | 3 | 9 |
| 35′ { $5' = \frac{1}{6}$ τῶν30′ | 1 | 2 | 4 | $7 + \frac{1}{2}$ |
| $1' = \frac{1}{5}$ τῶν 5′ | (0) | (1) | (8) | $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ βοηθ.γινόμ |
| 40″ { $30'' = \frac{1}{2}$ τοῦ 1′ | 0 | 0 | 10 | $0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ |
| 40″ { $10'' = \frac{1}{3}$ τῶν30″ | 0 | 0 | 3 | $4 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$ |
| | 479όρ. | 3π. | 3δ. | $9 + \frac{1}{2}$ γρ. |

ἤτοι ἐπολλαπλασιάσθη ὁ 16όρ.4π.7δ.6γρ. πρῶτον ἐπὶ 28 ὡς ἀνωτέρω (189), εἶτα ἐπὶ 35′ ἀναλυθέντα εἰς 30′ καὶ 5′, ἅτινα εἶναι ὑποπολλαπλάσια τῆς ὥρας (διότι $30' = \frac{1}{2}.60$ καὶ $5' = \frac{1}{6}\ 30'$) ἤτοι ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ 16όρ. 4π.8δ.6γρ. καὶ τοῦ ἐξαγομένου 8ορ.2π.3δ.9γ. ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{6}$ καὶ εὑρέθη 1ορ.2π.4δ. $7 + \frac{1}{2}$ γρ. Εἶτα ἐγένετο ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ 40″ ἀναλυθέντα εἰς 30″ καὶ εἰς10″, ἅτινα εἶναι ὑποπολλαπλάσια τοῦ 1′(διότι $1'=60'', 30''=\frac{1}{2}\cdot 60''$, $10''=\frac{1}{2}\cdot 30''$), ἤτοι ἐλήφθη τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ μερικοῦ βοηθητικοῦ γινομένου ἐπὶ 1′ $\left(\text{ὅπερ εἶναι } 1\pi.8\delta.1\gamma\rho.+\frac{1}{2}\right)$ καὶ εὑρέθη 10δ. καὶ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ τῆς γραμ. τοῦ δὲ ἐξαγομένου τούτου ἐλήφθη τέλος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ εὑρέθη 3δ.4γρ.$+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$. Μετὰ ταῦτα προσετέθησαν πάντα τὰ μερικὰ ταῦτα γινόμενα (πλὴν τοῦ βοηθητικοῦ γινομένου) καὶ εὑρέθη τὸ ζητούμενον γινόμενον 479ορ. 3π.3δ.9γρ.$+\frac{1}{2}$.

*Σημ.* Τὸ βοηθητικὸν γινόμενον εὑρέθη, ὅπως γνωσθῇ τὸ γινόμενον ἐπὶ $1'=60''$ καὶ καταστῇ εὐκολώτερος ὁ πολλαπλασιασμὸς ἐπὶ $30''=\frac{1}{2}\cdot 1'$

2) *Ἐργάτης τις ὑφαίνει μίαν ὀργυιὰν ὑφάσματός τινος ἐπὶ* 28ὥρ.35′40″. *Μετὰ πόσον χρόνον ὑφαίνει* 16ὀρ.4π.7δ.6γρ.

Φανερόν, ὅτι πολλαπλασιαστέος εἶναι ὁ 28ὥρ.35′40″ καὶ πολλαπλασιαστὴς ὁ 16ὀρ.4π.8δ. Τὸ γινόμενον εὑρίσκεται ἀμέσως διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἁπλῶν μερῶν.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 28ὥρ. | 35′ | 40″ |
| | | 16ὀρ. | 4π. | 7δ. 6γρ. |
| | | 168 | | |
| | | 28 | | |
| 35′ | $30' = \frac{1}{2}$ ὥρ. | 8 | | |
| | $5' = \frac{1}{6}$ τῶν 30′ | 1 | 20 | |
| 40″ | $30'' = \frac{1}{10}$ τῶν 5′ | 0 | 8 | |
| | $10 = \frac{1}{3}$ τῶν 30″ | 0 | 2 | 40 |
| 4π. | 3 π. $= \frac{1}{2}$ ὀρ. | 14 | 17 | 50 |
| | 1 π. $= \frac{1}{3}$ τῶν 3π. | 4 | 45 | $56+\frac{2}{3}$ |
| 7δ. | 6δ. $= \frac{1}{2}$ ποδ. | 2 | 22 | $58+\frac{1}{3}$ |
| | 1δ. $= \frac{1}{6}$ τῶν 6δ. | 0 | 23 | $49+\frac{2}{3}+\frac{1}{18}$ |
| | 6γρ. $= \frac{1}{2}$ δακ. | 0 | 11 | $54+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{36}$ |
| | | 479 | 33 | $9+\frac{7}{12}$ |

*Σημ.* Ἐνταῦθα δὲν ἐλήφθη βοηθητικὸν γινόμενον ἐπὶ 1′, ἀλλ' ἐλήφθη ἀμέσως τὸ $\frac{1}{10}$ τοῦ γινομένου ἐπὶ 5′· διότι $30'' = \frac{1}{2}$ τοῦ $1' = \frac{1}{10}$ τῶν 5′.

*Παρατήρησις.* Οἱ παράγοντες ἀμφοτέρων τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων εἰ καὶ εἶναι οἱ αὐτοί, ἐν τούτοις τὰ εὑρεθέντα γινόμενα διαφέρουσι κατὰ τὰς μονάδας τῶν κατωτέρων τάξεων. Τοῦτο δὲ ἐννοεῖται εὐκόλως· διότι, ἐὰν κλατραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς εἰς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς (ὁ μὲν εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν ὀργυιῶν, ὁ δὲ εἰς κλασματικὸν ἀριθμὸν ὡρῶν), τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ὁ αὐτὸς ἀριθμός, οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν καὶ ἂν ληφθῇ ὡς πολλαπλασιαστέος. Ἀλλὰ κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ γινόμενον εἶναι ἀριθμὸς ὀργυιῶν, κατὰ δὲ τὴν δευτέραν ἀριθμὸς ὡρῶν. Διὰ τοῦτο τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ γινομένου εἶναι τὸ αὐτὸ κατ' ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις· ἀλλὰ τὸ ὑπολειπόμενον κλάσμα ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει τρέπεται εἰς πόδας, δακτύλους καὶ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει τρέπεται αὐτὸ εἰς πρῶτα καὶ εἰς δεύτερα λεπτὰ τῆς ὥρας. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ὑποδιαιρέσεις τῆς ὀργυιᾶς εἶναι ὅλως διάφοροι τῶν τῆς ὥρας, προκύπτουσι προφανῶς διάφορα ἐξαγόμενα.

*Σημ.* 1. Δυνατὸν ὁ πολλαπλασιαστέος νὰ ἦναι ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμός, ὁ δὲ πολλαπλασιαστὴς συμμιγὴς ἀριθμός· ἀλλ' ἡ περίπτωσις αὕτη ὑπάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν συμμιγοῦς ἐπὶ συμμιγῆ, ἀρκεῖ ὁ συγκεκριμένος ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς πολλαπλασιαστέος νὰ θεωρηθῇ ὡς συμμιγὴς ἔχων μόνον μίαν τάξιν μονάδων. Π. χ.

1) *Ἐργάτης τις λαμβάνει δι' ἑκάστην ὥραν ἐργασίας* 5δρ., *πόσον ἔλαβεν, ἐὰν εἰργάσθη* 8ὥρ.40′ ;

$$
\begin{array}{l|ll}
 & 5\delta\rho. & \\
 & 8\tilde{\omega}\rho. & 40' \\
\hline
 & 40 & \\
40'\left\{\begin{array}{l} 30' = \frac{1}{2}\,\tilde{\omega}\rho. \\ 10' = \frac{1}{3}\,30' \end{array}\right. & 2 & 50 \\
 & 0 & 83 + \frac{1}{3} \\
\hline
 & 43\delta\rho. & 33\lambda. + \frac{1}{3}
\end{array}
$$

2) *Ἐργάτης τις κτίζει τὰ* $\frac{27}{32}$ *τῆς ὀργυιᾶς τοίχου ἐπὶ μίαν ὥραν, πόσας ὀργυιὰς κτίζει ἐπὶ* 3ὥρ.6′40″ ; Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τρέπεται ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς κλάσμα καὶ εὑρίσκεται $\frac{28}{9}$ καὶ εἶτα εὑρίσκεται τὸ γινόμενον $\frac{27}{32} \cdot \frac{28}{9}$, ἤτοι $\frac{21}{8}$ τῆς ὀργυιᾶς.

*Σημ.* 2. Τὸ γινόμενον δύο συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἶναι ὁμοειδὲς τῷ πολλαπλασιαστέῳ, ἐν ᾧ ὁ πολλαπλασιαστὴς θεωρεῖται ὡς ἀφῃρημένος ἀριθμός· διότι τὸ γινόμενον παράγεται ἐκ τοῦ πολλαπλασιαστέου, ὡς ὁ πολλαπλασιαστὴς ἐκ τῆς μονάδος καὶ τῶν μερῶν αὐτῆς.

### 6) Διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς.

194. Ἐν τῇ διαιρέσει συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς διακρίνονται δύο περιπτώσεις, ἢ *εἶναι ὁμοειδεῖς διαιρετέος τε καὶ διαιρέτης ἢ εἶναι ἑτεροειδεῖς.*

Ἐν μὲν τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν εἶναι ὁμοειδεῖς ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης, *τρέπονται ἀμφότεροι εἰς μονάδας τῆς κατωτάτης τάξεως καὶ ἑπομένως ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁμοειδῶν, τὸ δὲ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ἐν τῷ διδομένῳ προβλήματι.*

Ἐν δὲ τῇ περιπτώσει, καθ' ἣν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς, *τρέπεται μόνον ὁ διαιρέτης εἰς ἀριθμὸν μιᾶς μονάδος, ἣν ὁρίζει τὸ διδόμενον πρόβλημα καὶ ἑπομένως ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς διὰ συμμιγοῦς ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ ἀκεραίου. Τὸ δὲ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ.* Π. χ.

1) *Ἐργάτης τις λαμβάνει καθ' ἡμέραν* 4δρ.50λ. *Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη, ἵνα λάβῃ* 280δρ.25λ. ;

Ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν, ἐὰν πολλαπλασιάσῃ τὸν συμμιγῆ 4δρ.50λ., δίδει γινόμενον τὸν συμμιγῆ 280δρ.25λ.

Ἐὰν τραπῶσιν ἀμφότεροι οἱ συμμιγεῖς οὗτοι εἰς λεπτά, τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν τοῦ 28025λ. διὰ τοῦ 450λ., ἤτοι εἰς τὴν διαίρεσιν ἀκεραίου δι' ἀκεραίου, ὁμοειδῶν ἀμφοτέρων. Ὥστε τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{28025}{450}$ τῆς ἡμέρας, ὅπερ τρέπεται εἰς συμμιγῆ ὡς ἀνωτέρω (ἐδ. 186).

2) *Πράγματός τινος οἱ* 2στ.18ὀκ.300δρ. *ἠγοράσθησαν ἀντὶ* 60δρ.40λ. *Πρὸς πόσον ἠγοράσθη ὁ στατήρ ;*

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός, ἤτοι ἡ τιμὴ τοῦ στατῆρος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν συμμιγῆ 2 στ. 18 ὀκ. 300 δρ., δίδει γινόμενον τὸν συμμιγῆ 60 δρ. 40 λ. τουτέστι τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ 60 δρ. 40 λ.

Πρὸς εὕρεσιν δὲ τοῦ πηλίκου τρέπεται μόνον ὁ διαιρέτης 2 στ. 15 ὀκ. 300 δρ. εἰς ἀριθμὸν στατήρων (διότι ἡ τιμὴ τοῦ στατῆρος ζητεῖται ἐν τῷ προβλήματι) καὶ εὑρίσκεται $2+\frac{7500}{17600}$ ἢ $2+\frac{75}{176}$ ἢ $\frac{427}{176}$ τοῦ στατῆρος καὶ οὕτω τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὴν διαίρεσιν συμμιγοῦς διὰ κλάσματος ἢ μικτοῦ (ἐδ. 192).

*Σημ.* Ἐν παντὶ προβλήματι λυομένῳ διὰ τῆς διαιρέσεως συμμιγοῦς ἀριθμοῦ δι' ἄλλου ἀριθμοῦ ὁ εἷς τῶν διδομένων ἀριθμῶν (ὁ διαιρετέος) εἶναι γινόμενον τοῦ ἄλλου (τοῦ διαιρέτου) ἐπὶ τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν (τὸ πηλίκον). Ἀλλ' ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς (τὸ πηλίκον) δύναται ἐν τῷ γινομένῳ τούτῳ νὰ ἦναι ἢ πολλαπλασιαστέος ἢ πολλαπλασιαστής. Ἐν μὲν τοῖς προβλήμασιν, ἐν οἷς ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοὶ (ὅτε ἡ διαίρεσις λέγεται καὶ *μερισμός*), τὸ πηλίκον εἶναι πολλαπλασιαστέος· διότι τοῦτο πρέπει νὰ ἐπαναληφθῇ ὡς προσθετέος πρὸς παραγωγὴν τοῦ διαιρετέου τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ· ἐν δὲ τοῖς προβλήμασιν, ἐν οἷς ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ (ὅτε ἡ διαίρεσις λέγεται καὶ *μέτρησις*), τὸ πηλίκον (ἢ ὁ λόγος) εἶναι πολλαπλασιαστής· διότι ὁ διαιρετέος παράγεται ἐκ τοῦ διαιρέτου τοῦ ὁμοειδοῦς αὐτῷ, ἐν ᾧ τὸ εἶδος τοῦ πηλίκου ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ προβλήματος. Ἐν τῇ διαιρέσει ἄρα συγκεκριμένων ἀριθμῶν ἰσχύει ἐν γένει ὁ ἑξῆς κανών· *ὅταν μὲν ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί, τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ διαιρετέῳ· ὅταν δὲ ὁ διαιρετέος καὶ ὁ διαιρέτης ἦναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί, τὸ πηλίκον εἶναι ὁμοειδὲς τῷ ποσῷ τῷ ζητουμένῳ ἐν τῷ προτεινομένῳ προβλήματι.* (σελ. 45).

## Προβλήματα τῶν μέτρων καὶ τῶν σταθμῶν.

1) *Τροπὴ* $35+\frac{3}{8}$ *μικρῶν πήχεων Κωνσταντινουπόλεως εἰς μέτρα γαλλικά.*

Ἐπειδὴ εἷς μικρὸς πῆχυς εἶναι 0,648μ., οἱ $35+\frac{3}{8}$ μικροὶ πήχεις εἶναι $0{,}648.\left(35+\frac{3}{8}\right)$ μέτρα.

2) *Τροπὴ 58,7 μέτρων εἰς μικροὺς πήχεις.*

Ἐπειδὴ τὰ $\frac{648}{1000}$ τοῦ μέτρου εἶναι 1 μικρὸς πῆχυς τὸ $\frac{1}{1000}$ μέτρου εἶναι τὸ $\frac{1}{648}$ τοῦ μικροῦ πήχεως καὶ τὰ $\frac{1000}{1000}$ τοῦ μέτρου (ἢ τὸ μέτρον) εἶναι τὰ $\frac{1000}{648}$ τοῦ μικροῦ πήχεως καὶ τὰ 58,7 μέτρα εἶναι $\frac{1000.58{,}7}{648}=\frac{58{,}7}{0{,}648}$ μικροὶ πήχεις.

3) *Τροπὴ* 3στ.18ὀκ.300δρ. *εἰς τόννους, χιλιόγραμμα καὶ γραμμάρια.*

Ἐπειδὴ 3στ.18ὀκ.=150ὀκ. καὶ 1ὀκ =1280γρ., εἶναι 1280.150 γραμμάρια. Τὸ 1δρ.=3,2 γραμμάρια καὶ τὰ 300δρ.=3,2.300γραμ.

4) *Τροπὴ* 5τον.186χιλιογ. *καὶ* 530γραμ. *εἰς στατῆρας, ὀκάδας καὶ δράμια.*

Ἐπειδὴ 5τον.186χιλιογ.530γραμ =5186530 γραμμάρια καὶ 1δρ.=3,2 γραμμ., ἔπεται $\frac{5186530}{3,2}$δράμια.

5) *Τροπὴ* 18ὀρ.2π.7δ. *εἰς μέτρα.*

Ἐπειδὴ 1ὀρ =1,94904 μέτρα, ἔπεται (1,94904).(18ὀρ.2π.7δ.) μέτρα.

6) *Τροπὴ* 485 *παλαιῶν στρεμμάτων εἰς βασιλικά.*

Ἐπειδὴ 1 παλαιὸν στρέμμα εἶναι 1,27 βασιλικά, τὰ 485 παλαιὰ εἶναι 1,27.485 βασιλικά.

7) *Τροπὴ* 535 *τεκτονικῶν τετραγ. πήχεων εἰς τετραγωνικὰ μέτρα.*

Ἐπειδὴ εἷς τεκτ. τετραγ. πῆχυς εἶναι $\frac{9}{16}$τοῦ τετραγ. μέτρου, οἱ 535τεκ. τετραγ. πήχ. εἶναι $\frac{9}{16}$.535 τετραγ. μέτρα.

8). Τροπὴ 52,6 μέτρων εἰς τεκτονικοὺς πήχεις.

9). Τροπὴ $158+\frac{2}{3}$τεκτον. πήχεων εἰς μέτρα.

10). Τροπὴ 670 σταδίων εἰς γεωγραφικὰ μίλια.

11). Τροπὴ 585 γεωγραφικῶν μιλίων εἰς λεύγας καὶ εἰς στάδια.

12). 1250 λευγῶν εἰς στάδια καὶ εἰς γεωγραφικὰ μίλια.

13). Τροπὴ 678 γεωγραφικῶν μιλίων εἰς λεύγας καὶ εἰς στάδια.

14). Τροπὴ 52 ναυτικῶν μιλίων εἰς στάδια καὶ εἰς ναυτικὰ ἀγγλικὰ μίλια

15). Τροπὴ 530 λευγῶν εἰς ναυτικὰ μίλια καὶ εἰς στάδια.

16). Τροπὴ 1258 ναυτικῶν μιλίων εἰς ἀγγλικὰ ναυτικὰ μίλια,

17). Τροπὴ 258 στ. 35 ὀκ. 350 δρ, εἰς ἐνετικὰς λίτρας.

18). Τροπὴ 52675 δρ. εἰς λίρας στερλίνας

19). Τροπὴ 638 λιρῶν στερλινῶν εἰς δραχμάς.

20). Τροπὴ 20930 μάρκων εἰς δραχμὰς καὶ εἰς δολλάρια.

21). Τροπὴ 572 δολλαρίων εἰς δραχμὰς καὶ εἰς μάρκα.

22). Τροπὴ 1000 φιορινίων εἰς δραχμὰς καὶ εἰς μάρκα.

23). Τροπὴ 785 ρουβλίων εἰς δραχμὰς καὶ εἰς φιορίνια.

24). Τροπὴ 738 δραχμῶν εἰς γρόσια καὶ εἰς δολλάρια.

25). Τροπὴ 1700 δολλαρίων εἰς δραχμὰς καὶ εἰς γρόσια.

26). Τροπὴ 537 σελλινίων εἰς μάρκα, εἰς φιορίνια καὶ εἰς δραχμάς.

27). Τροπὴ $15^0,7$ βαθμῶν θερμομέτρου Κελσίου εἰς βαθμοὺς θερμομέτρου Ρεωμύρου. (100 βαθμοὶ Κελσίου=80 βαθμ. Ρεωμύρου).

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1). Ἐργάτης τις πρέπει νὰ ἐργασθῇ ἐπὶ 57 ὥρας, εἰργάσθη ἤδη 21 ὥρ. 53′ 12″. Πόσον χρόνον πρέπει νὰ ἐργασθῇ ἀκόμη πρὸς ἐκτέλεσιν τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔργου αὐτοῦ. ( Ἀπ. 16 ὥρ. 6′48″).

2). Ἡ ἀπόστασις τῶν Παρισίων ἀπὸ τῆς Γενεύης εἶναι 504000 μέτρα. Σιδηρόδρομος μεταξὺ τῶν δύο τούτων πόλεων διατρέχει 1008 μέτρα εἰς τὸ πρῶτον λεπτόν· ἀναχωρεῖ δὲ τὴν 6ὥρ. 30″μ.μ. ἀπὸ Γενεύης καὶ τὴν 8ὥρ.μ.μ. ἀπὸ Παρισίων· ζητεῖται ἡ ὥρα τῆς ἀφίξεως εἰς Παρισίους καὶ Γενεύην, ἡ ὥρα τῆς συναντήσεως καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως ἀπὸ τῶν δύο τούτων πόλεων. (Ἀπ. ἄφιξις εἰς Παρισίους τὴν 2 ὥρ. 50′ π.μ. εἰς Γενεύην τὴν 4 ὥρ.20′ π.μ. συνάντησις τὴν 11 ὥρ. 30′ ἀπόστασις τῆς συναντήσεως ἀπὸ μὲν Γενεύης 295360 μ. ἀπὸ δὲ Παρισίων 206640 μ )

3) Σῶμα 18000 στρατιωτῶν πρέπει νὰ παρελάσῃ πρὸ τοῦ διοικητοῦ αὐτοῦ ἀνὰ τετράδας κατὰ τὸ σύνηθες βῆμα 2 ποδῶν τὸ δευτερόλεπτον. Πόσον χνόνον διαρκέσει ἡ παρέλασις, τῆς ἀποστάσεως τῶν τετράδων ἀνὰ δύο οὔσης 3 ποδῶν, συμπεριλαμβανομένων τῶν στρατιωτῶν. Ἀπ. 1ὥρ.52′,30″).

4) Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μεγάλου τροχοῦ ἁμάξης εἶναι 17πόδ. 5δακ.5γρ., ἐν ᾧ δὲ ὁ μικρὸς τροχὸς τῆς ἁμαξης τελεῖ $3+\frac{1}{2}$ περιστροφάς, ὁ μέγας τροχὸς αὐτῆς τελεῖ 2 περιστροφάς. Ποῖον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ μικροῦ τροχοῦ ; (Ἀπ. 9πόδ.11δακ.8γρ.)

5) Πόσαι ἡμέραι εἶναι ἀπὸ τῆς 21 Μαρτίου 1892 (ἑσπέρας) μέχρι τῆς 31 Ἰανουαρίου 1810. (Ἀπ. 30000 ἡμέραι).

6) Ὁ ἄνθρωπος ἀναπνέει καθ' ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν 17κις περίπου. Καθ' ἑκάστην δὲ ἀναπνοὴν εἰσέρχονται εἰς τοὺς πνεύμονας αὐτοῦ τὰ $\frac{5}{7}$ μιᾶς

λίτρας ἀέρος (1 λίτρα ἀέρος εἶναι τὸ $\frac{1}{770}$ μιᾶς λίτρας ὕδατος ἢ τὸ $\frac{1}{770}$ τοῦ χιλιογράμμου). Πόσος ὄγκος ἀέρος εἰσέρχεται εἰς τοὺς πνεύμονας αὐτοῦ κατὰ τὸ διάστημα 24 ὡρῶν, καὶ πόσον βάρος ἔχει ὁ ἀὴρ οὗτος ;

('Απ. ὄγκος 17485 λίτρ. καὶ $\frac{5}{7}$, βάρος δὲ 17όκ. 296 δράμια).

7) Τὰ $\frac{21}{100}$ τοῦ ὄγκου ἀέρος εἶναι ὀξυγόνον· πόσος ὄγκος ὀξυγόνου περιέχεται εἰς 300 κυβικὰ μέτρα ;

('Απ. 66 κ. μ. 875 λίτρ.).

8) Αἱ Πάτραι ἀπέχουσι τῶν 'Αθηνῶν 221 στάδια· ἐὰν ὁ σιδηρόδρομος τῆς Πελοποννήσου ἀναχωρῇ ἀπ' 'Αθηνῶν τὴν 7 ὥραν π. μ. καὶ διατρέχῃ 35 στάδια τὴν ὥραν, πότε φθάνει εἰς Πάτρας ; ('Απ. 1μ.μ.18′,51″...).

9) Ἡ Μόσχα ἀπέχει τῆς Πετρουπόλεως 604 βέρστια (1 βέρστιον= 1067 μέτρ.). Πόσα στάδια εἶναι ἡ ἀπόστασις αὕτη ;

('Απ. 644 στάδια 468 μέτ.).

10) 'Εὰν εἷς ἄνθρωπος δύναται νὰ μεταφέρῃ βάρος 70 όκ. Πόσα χρυσᾶ εἰκοσόφραγκα δύναται νὰ μεταφέρῃ ;

(1 εἰκοσόφ. ἔχει βάρος 6,45161 γραμμαρίων. "Απ. 13888 εἰκοσόφρ.)

11) Ἡ διὰ τοῦ σιδηροδρόμου μεταφορὰ ἑνὸς στατῆρος εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου στοιχίζει 5 λεπτὰ τῆς δραχμῆς. Πόσον στοιχίζει ἡ μεταφορὰ 80στ. 17όκ.350δρ. εἰς ἀπόστασιν 15 σταδίων καὶ 550 μέτρων ; (Εὑρίσκεται πρῶτον πόσον στοιχίζει ἡ μεταφορὰ τῶν 80στ.17όκ.350δρ. εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου καὶ εἶτα ἡ μεταφορὰ αὐτῶν εἰς ἀπόστασιν 15σταδ.550 μ.).

12) 'Επλήρωσέ τις 158δρ.30λ. πρὸς μεταφορὰν 105στ.23όκ.250δρ. ἐμπορευμάτων. 'Εκ πόσης ἀποστάσεως μετέφερεν αὐτά, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι δι' ἕκαστον στατῆρα μεταφερόμενον εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς σταδίου πληρώνει τις 5λ. ; (Εὑρίσκεται πρῶτον πόσον πληρώνει δι' ἕκαστον στατῆρα καὶ εἶτα εἰς ποίαν ἀπόστασιν μεταφέρεται ὁ στατήρ).

# ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'

## Περὶ τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ῥίζης.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

## Περὶ τετραγωνικῆς ῥίζης.

### Ὁρισμοί.

195. *Τετράγωνον* ἀριθμοῦ ἢ *δευτέρα δύναμις* αὐτοῦ λέγεται (ἐδ. 60) τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ· οἷον

$$5.5=5^2=25, 11.11=11^2=121, \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}.$$

Τὰ τετράγωνα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12 εἶναι κατὰ σειρὰν τὰ ἑξῆς :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ἀριθμοὶ | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, | 11, | 12 |
| τετράγωνα | 1, | 4, | 9, | 16, | 25, | 36, | 49, | 64, | 81, | 100, | 121, | 144, |
| ἢ | 1, | $2^2$, | $3^2$, | $4^2$, | $5^2$, | $6^2$, | $7^2$, | $8^2$, | $9^2$, | $10^2$, | $11^2$, | $12^2$ |

*Τετραγωνικὴ ῥίζα* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ τετράγωνον ἰσοῦται τῷ δοθέντι ἀριθμῷ· οἷον ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 64 εἶναι ὁ 8· διότι $8^2=64$, ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι τὸ $\frac{2}{3}$ · διότι $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$.

Ἡ μὲν εὕρεσις τοῦ τετραγώνου δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων τῷ δοθέντι ἀριθμῷ, καὶ καλεῖται *ὕψωσις αὐτοῦ εἰς τὸ τετράγωνον*.

Ἡ δὲ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται ἄλλος ἀριθμός, οὗτινος τὸ τετράγωνον εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμός, καὶ καλεῖται *ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης* αὐτοῦ.

Φανερόν, ὅτι οἱ δύο αὗται πράξεις εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων. Καὶ τὸ μὲν σύμβολον τῆς πρώτης εἶναι ὁ *ἐκθέτης* 2, τῆς δὲ δευτέρας τὸ $\sqrt[2]{\phantom{x}}$ ἢ ἁπλῶς $\sqrt{\phantom{x}}$ καλούμενον ἐκ τοῦ *δείκτου* 2 δεύτερον *ῥιζικὸν* ἢ δευτέρα *ῥίζα* ἢ τετραγωνικὴ ῥίζα. Οἷον $6^2=36$, $\sqrt{36}=6$. $\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25}, \sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$

Ἐκ τῆς εὑρέσεως δὲ τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 12, καταφαίνεται ἤδη, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι τὰ τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν (ὡς οἱ 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, κλ.)· ὡς ἐπίσης ὑπάρχουσιν ἀντιστρόφως καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι ἄλλων ἀριθμῶν. Ἀλλὰ καὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων εὑρίσκονται κατὰ προσέγγισιν οἱανδήποτε τὰ τετράγωνα ἢ αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι.

*Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1 λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, οὗ τὸ τετράγωνον περιέχεται ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ. Οἷον ἡ $\sqrt{58}$ κατὰ προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ ἀριθμὸς 7· διότι $7^2=49$, ὁ δὲ 49 περιέχεται ἐν τῷ 58, ἐν ᾧ τὸ $8^2=64$ δὲν περιέχεται ἐν αὐτῷ· ἡ $\sqrt{18+\frac{3}{4}}$ εἶναι ὁ 4· διότι $4^2=16$, ὁ δὲ 16 περιέχεται ἐν τῷ $18+\frac{3}{4}$, ἐν ᾧ $5^2=25$ δὲν περιέχεται ἐν αὐτῷ. *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν 1 λαμβάνεται ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρους αὐτοῦ.*

*Τετραγωνικὴ ῥίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος* $\frac{1}{\nu}$ λέγεται ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν τὸ μέγιστον, οὗ τὸ τετράγωνον περιέχεται ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ. Οἷον ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι τὸ $\frac{14}{10}$· διότι $\left(\frac{14}{10}\right)^2=\frac{196}{100}$, τὸ δὲ $\frac{196}{100}$ περιέχεται ἐν τῷ ἀριθμῷ 2, ἐν ᾧ τὸ $\left(\frac{15}{10}\right)^2=\frac{225}{100}$ δὲν περιέχεται ἐν τῷ 2.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἄρα ὁρισμῶν καὶ παραδειγμάτων καθίσταται φανερόν, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι *τέλεια* τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν, ἀλλ' εἶναι τετράγωνα ἄλλων ἀριθμῶν εὑρισκομένων καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι δὲν εἶναι οὔτε ἀκέραιοι οὔτε κλασματικοὶ καὶ καλοῦνται *ἀσύμμετροι ἀριθμοί*.

*Οἱ ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ παριστῶνται διὰ δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά.* Οἷον ὁ 4,25507510012 5...

Ὅτι δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ πράγματι ὑπάρχουσι δεικνύεται καὶ διὰ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων.

### Θεώρημα

196. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν ᾖναι τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, οὐδὲ κλάσματος εἶναι τετράγωνον.*

Ἔστω τυχὼν ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, οἷος ὁ 15· λέγω, ὅτι ὁ 15 οὐδὲ κλάσματος εἶναι τετράγωνον.

*Ἀπόδειξις.* Τεθείσθω, ὅτι κλάσμα τι $\frac{\alpha}{\beta}$ (δυνάμενον νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγον) ἔχει τετράγωνον τὸν 15, ἤτοι ὅτι

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=15 \text{ ἢ } \frac{\alpha^2}{\beta^2}=15.$$

Ἐπειδὴ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον, ἤτοι οἱ ὅροι αὐτοῦ $\alpha$ καὶ $\beta$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι ὡσαύτως ἀνάγωγον (ἐδ. 120) καὶ ἐπομένως εἶναι ἀδύνατον ὁ ἀριθμητὴς αὐτοῦ νὰ ᾖναι διαιρετὸς διὰ τοῦ παρονομαστοῦ. Τὸ ἄτοπον τοῦτο προέκυψε· διότι ὑπετέθη, ὅτι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=15$· ὁ 15 ἄρα οὐδενὸς κλάσματος εἶναι τετράγωνον.

*Παρατήρησις.* Καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνατὸν νὰ διακρίνηται, ἐὰν ἀριθμός τις ᾖναι τέλειον τετράγωνον ἢ μή, οἷα τὰ ἑξῆς·

1) *Ἐὰν ἀναλυθῇ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων τούτων πρέπει νὰ ᾖναι ἄρτιοι ἀριθμοί, ἵνα ᾖναι τέλειον τετράγωνον* (ἐδ. 116).

2) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων ἓν τῶν ἑξῆς:*

$$2, \quad 3, \quad 7, \quad 8$$

*δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.* Διότι ἐκ τοῦ τρόπου, καθ' ὃν εὑρίσκεται τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν συμπεραίνεται ἀμέσως, ὅτι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου ἔχει ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τὸ αὐτὸ καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ. Οἷον τὸ τετράγωνον τοῦ 157 (ἤτοι $157^2=157.157$) ἔχει προφανῶς ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων τὸ 9, τοῦθ' ὅπερ ἔχει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ψηφίου 7 (ἤτοι $7^2=7.7=49$) τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ 157.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν οὐδὲν τῶν ψηφίων 2,3,7,8 ἔχουσιν ὡς ψηφίον ἁπλῶν μονάδων, συνάγεται, ὅτι οὐδὲν τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει ψηφίον τῶν ἁπλῶν μονάδων αὐτοῦ, ἓν τῶν ψηφίων τούτων.

3) *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς ἦναι τὸ γινόμενον ἀκεραίου ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10 ἔχουσαν περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.* Οἷον οἱ 10, 30, 5000 δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Διότι τὸ τετράγωνον ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι ἐν γένει γινόμενον ἀκεραίου ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10, εἶναι γινόμενον ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν 1 ἀκολουθουμένην ὑπὸ ἀρτίου ἀριθμοῦ μηδενικῶν· οἷον $50^2=(5.10)^2=25.100$, $3000^2=(3.1000)^2=9000000$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς ὁ ὢν γινόμενον ἀκεραίου ἐπὶ δύναμίν τινα τοῦ 10 ἔχουσαν περιττὸν ἀριθμὸν μηδενικῶν δὲν δύναται νὰ ἦναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ, ὅστις εἶναι γινόμενον ἀκεραίου ἐπὶ δύναμιν τοῦ 10.

## Θεώρημα

197. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, πλὴν ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων αὐτοῦ ἦναι τέλειον τετράγωνον.*

Ἔστω τυχὸν κλάσμα ἀνάγωγον τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$· λέγω, ὅτι τὸ κλάσμα τοῦτο εἶναι τετράγωνον ἄλλου κλάσματος, ἐὰν οἱ ὅροι α καὶ β ἦναι τέλεια τετράγωνα.

*Ἀπόδειξις.* Τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ἐὰν ἦναι τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ, ὁ ἄλλος οὗτος ἀριθμὸς εἶναι κλάσμα καὶ οὐχὶ ἀκέραιος· διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός. Τεθείσθω ἄρα, ὅτι τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$, ἤτοι

$$(1) \qquad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu^2}{\nu^2}$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$ δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἀνάγωγον καὶ τὸ $\frac{\mu^2}{\nu^2}$ εἶναι ἀνάγωγον(ἐδ. 120)· ἀλλὰ καὶ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑπετέθη ἀνάγωγον. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) τότε μόνον ὑπάρχει, ὅταν (ἐδ. 136)

$$\alpha=\mu^2,\ \beta=\nu^2 \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

*Σημ.* Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ ἦναι τέλειον τετράγωνον, ἐν ᾧ οἱ ὅροι αὐτοῦ δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα. Οἷον

$$\frac{2}{50}=\frac{1}{15}=\left(\frac{1}{5}\right)^2,\ \frac{12}{27}=\frac{4}{9}=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

## Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1.

198. Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν τῶν μικροτέρων τοῦ 100 (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1) εἶναι μικροτέρα τῆς τετραγ. ῥίζης τοῦ 100, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10 (διότι $10^2=100$· εἶναι ἄρα μονοψήφιος ἀριθμὸς) καὶ εὑρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ μνήμης· διότι ἐκ τοῦ πυθαγορείου πίνακος ἀπομνημονεύονται ἀμέσως τὰ τετράγωνα πάντων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Οἷον $\sqrt{64}=8,\ \sqrt{72}=8,\ \sqrt{15+\frac{1}{8}}=3,\ \sqrt{25+\frac{1}{5}}=5.$

Ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλειτέρων τοῦ 100 (ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1) εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10 καὶ ἑπομένως περιέχει καὶ δεκάδας. Ἡ εὕρεσις δὲ τῶν ῥιζῶν τούτων στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

### Θεώρημα.

199. *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων καὶ τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.*

Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $\alpha+\beta$ τὸ δὲ τετράγωνον τοῦ $\alpha+\beta$, ἤτοι, τὸ $(\alpha+\beta)^2$, λέγω ὅτι εἶναι ἴσον τῷ ἀθροίσματι $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$.

*Ἀπόδειξις.* Ἐπειδὴ $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)$ καὶ

$$(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha.\beta+\alpha.\beta+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \text{ (ἐδ. 54).}$$

ἕπεται

$$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2, \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Π. χ. ὁ 31 εἶναι ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν τοῦ 30 καὶ 1, ἤτοι $31=30+1$. Ὥστε

$$31^2=(30+1)^2=30^2+2.30.1+1^2=900+60+1=961$$

Ὁμοίως $103^2=100^2+2.100.3+3^2=10000+600+9=10609$

*Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ 1, τὰ τετράγωνα αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Διότι, ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ α, ὁ μεγαλείτερος εἶναι $\alpha+1$. Τὰ δὲ τετράγωνα τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι

$$\alpha^2 \text{ καὶ } (\alpha+1)^2=\alpha^2+2\alpha+1. \text{ Ὥστε}$$

$$(\alpha+1)^2-\alpha^2=\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=2\alpha+1=(\alpha+1)+\alpha$$

200. Τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δύναται νῦν νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἡ ἀκριβής, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦναι τέλειον τετράγωνον· εἰ δὲ μή, ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1).

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 6758, ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 100, ἡ τετρ. ρίζα αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 περιέχει καὶ δεκάδας (διότι $10^2=100$) καὶ ἑπομένως σύγκειται αὕτη ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ, ἤτοι εἶναι τὸ ἄθροισμα $\delta.10+\mu$· τὸ δὲ τετράγωνον τῆς ρίζης ταύτης κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$(\delta.10+\mu)^2=\delta^2.100+2\delta..10.\mu+\mu^2$$

ὁ ἀριθμὸς ἄρα 6758 ὡς περιέχων τὸ τετράγωνον τῆς ρίζης αὐτοῦ, σύγκειται ἐκ τοῦ $(\delta.10+\mu)^2$ καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου υ (ἐὰν δὲν ἦναι τέλειον τετράγωνον), ἤτοι εἶναι

(1) $$6758=\delta.^2100+2\,\delta.10.\mu+\mu^2+\upsilon$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι αἱ $\delta^2$ ἑκατοντάδες τῆς ζητουμένης ρίζης περιέχονται εἰς τὰς 67 ἑκατοντάδας τοῦ 6758· τὸ δὲ μέγιστον τετράγωνον τὸ περιεχόμενον ἐν τῷ 67 εἶναι τὸ $64=8^2$· ὥστε $\delta^2=64=8^2$ καὶ ἑπομένως $\delta=8$ (εἶναι δὲ προφανῶς $6400<6758<8100$).

Ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) ἀφαιρεθῶσιν αἱ 64 ἑκατοντάδες ($6400=\delta.^2100$), προκύπτει

(2) $$358=2.\delta.10.\ \mu+\mu^2+\upsilon$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι αἱ 2.δ δεκάδες περιέχονται εἰς τὰς 35 δεκάδας τοῦ 358. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς 35 δεκάδας δυνατὸν νὰ περιέχωνται καὶ δεκάδες προερχόμεναι ἐκ τοῦ τετραγώνου [illegible] ονάδων μ, ἤτοι τοῦ $\mu^2$, καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου υ (ἐὰν ὑπάρχῃ), ἕπεται, ὅτι

$$35 \geqq 2\,8\,\mu$$

Ἐὰν δὲ διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος ἢ ἰσότητος ταύτης διὰ 2.8 (ἢ 16), ἤτοι διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων τῆς ῥίζης, ὅτε προκύπτει $\frac{35}{16} \geqq \mu$, φανερόν, ὅτι τὸ ψηφίον μ τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης ῥίζης δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ ψηφίον 2 τὸ εὑρισκόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν 35 δεκάδων τοῦ ὑπολοίπου 358 διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων 2.8 τῆς ῥίζης. Πρὸς δοκιμὴν δὲ τούτου παρατηρεῖται, ὅτι εἰς τὸν 358 πρέπει νὰ περιέχηται κατὰ τὴν ἰσότητα (2) τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν 8 δεκάδων ἐπὶ τὰς 2 μονάδας, ἤτοι τὸ γινόμενον 160.2 καὶ τὸ τετράγωνον τῶν 2 μονάδων, ἤτοι τὸ $2^2$, ὥστε πρέπει νὰ περιέχηται τὸ $160.2+2^2=(160+2).2=162.2$· τοῦ δὲ γινομένου τούτου ὁ μὲν εἷς παράγων 2 εἶναι τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2, ὁ δὲ ἄλλος παράγων 162 εὑρίσκεται, ἐὰν διπλασιασθῶσιν αἱ εὑρεθεῖσαι 8 δεκάδες, ὅτε εὑρίσκεται ὁ 16, καὶ κατόπιν τοῦ 16 γραφῇ τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον 2. Τὸ γινόμενον τοῦτο $162.2=324$ περιέχεται προφανῶς ἐν τῷ 358. Ἐὰν δὲ τέλος ἀφαιρεθῇ ὁ 324 ἀπὸ τοῦ 358, προκύπτει καὶ τὸ ὑπόλοιπον υ τῆς πράξεως, ὅπερ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 34.

Ὥστε ἡ $\sqrt{6758}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 82.

Ἡ δὲ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l}
67'58 & \;82 \\ \cline{2-2}
64 & 162 \\ \cline{1-1}
35'8 & \;\;\;2 \\ \cline{2-2}
324 & 324 \\ \cline{1-1}
34 &
\end{array}$$

Ὁμοίως ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ. Ἔστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς 78993.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 100 ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα αὐτοῦ περιέχει καὶ δεκάδας. Ἵνα δὲ εὑρεθῶσιν αὗται, ἐξάγεται ἡ τετρ. ῥίζα τῶν ἑκατοντάδων 785 τοῦ ἀριθμοῦ, ὡς ἀνωτέρω, ἤτοι

```
  7′89  | 28
        |------
 38′9   | 48
    5   |  8
        -----
         384
```

Ὥστε αἱ δεκάδες τῆς τετραγ. ρίζης τοῦ 78993 εἶναι 28. Πρὸς εὕρεσιν καὶ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων τῆς τετραγ. ρίζης διαιροῦνται διὰ τοῦ διπλασίου τῶν δεκάδων 28.2=56 αἱ δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ 78993 μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ τετραγώνου τῶν 28 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο εἶναι 5 ἑκατοντάδες (αἵτινες ἔμειναν ἐκ τῶν 789 ἑκατοντάδων, ἀφ' ὧν ἀφῃρέθη τὸ τετράγωνον τῶν 28 δεκάδων) καὶ 93 μονάδες, ἤτοι εἶναι 593. Ἐὰν ἄρα διαιρεθῶσιν αἱ 59 δεκάδες τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ 56, εὑρίσκεται πηλίκον 1· ὥστε τὸ ψηφίον τῶν μονάδων τῆς τετρ. ρίζης εἶναι 1, τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως εἶναι ὁ 312. Ὅθεν ἡ $\sqrt{78993}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 281.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς.

```
 7′89′93 | 281
         |---------------
 38′9    | 48     561
   59′3  |  8       1
     32   ----   -----
          384     561
```

Ὁμοίως εὑρίσκεται

```
 8′32  | 28            75′37  | 86
       |------                |------
 43′2  | 48           113′7   | 166
   48     8             141      6
       -----                  -----
        384                    996
```

```
 70′56 | 84        27′35′29 | 523                 9′44′00 | 307
       |------              |-----------------            |------
 65′6  | 164       23′5     | 102    1043,       440′0   | 607
    0     4          312′9      2       3            151      7
       ------                 -----  -------              ------
         656               0   204    3129                 4249
```

201. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης·

*Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ* (ἀκριβῶς, ἐὰν ἦναι τέλειον τετράγωνον, εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1) *χωρίζεται* αὐτὸς εἰς διψήφια τμήματα ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς· ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ ἀριθμοῦ τμήματος (τὸ ὁποῖον δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ μονοψήφιον), ἥτις εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιρεῖται τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ κατόπιν τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζεται τὸ ἀμέσως ἑπόμενον τμῆμα, ὅτε ἀποτελεῖται ἀριθμός, οὗτινος χωρίζονται αἱ δεκάδες καὶ διαιροῦνται διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ εὑρεθέντος ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφεται κατόπιν τοῦ διαιρέτου αὐτῆς καὶ ὁ οὕτω προκύπτων ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ (οὗ διῃρέθησαν αἱ δεκάδες), τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης, εἰ δὲ μή, δοκιμάζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ψηφίον, οὗτινος τὸ γινόμενον δύναται νὰ ἀφαιρῆται· τὸ ψηφίον τοῦτο εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ῥίζης· καὶ ἂν ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεσις καὶ κατόπιν τοῦ ὑπολοίπου καταβιβασθῇ τὸ ἀμέσως ἑπόμενον τμῆμα, εὑρίσκεται δεύτερός τις ἀριθμός.

Καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου διαιροῦνται αἱ δεκάδες διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς ῥίζης, καὶ γράφεται το πηλίκον κατόπιν τοῦ διαιρέτου καὶ πολλαπλασιάζεται ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ἐπ' αὐτὸ τὸ πηλίκον· καὶ ἂν μὲν τὸ γινόμενον ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ δευτέρου εὑρεθέντος ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν ψηφίον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὸ τοιοῦτον γίνεται, μέχρις οὗ καταβιβασθῶσι πάντα τὰ διψήφια τμήματα. Τὸ πρὸς τὸ τελευταῖον τμῆμα ἀντιστοιχοῦν πηλίκον εἶναι τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης· τὸ δὲ πρὸς αὐτὸ ἀντιστοιχοῦν ὑπόλοιπον εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως. Καὶ ἂν μὲν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ἦναι 0, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον καὶ οὕτως εὑρίσκεται ἡ ῥίζα αὐτοῦ ἀκριβῶς· εἰ δὲ μή, εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1.

*Σημ.* 1. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς τετρ. ῥίζης εἶναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ ἀριθμός.

*Σημ.* 2. Δυνατὸν μία τῶν διαιρέσεων τῶν γιγνομένων πρὸς εὕρεσιν τοῦ δευτέρου, τρίτου, κλ. ψηφίου τῆς ῥίζης νὰ δίδῃ πηλίκον μεγαλείτερον τοῦ 9· τότε ἄρχονται αἱ δοκιμαὶ ἀπὸ τοῦ 9· (τοῦτο συνέβη ἀνωτέρω ἐν τῇ ἐξαγωγῇ τῆς τετρ. ῥίζης τοῦ 832).

*Σημ.* 3. Δυνατὸν μία τῶν διαιρέσεων τούτων νὰ δίδῃ πηλίκον 0· τότε τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ρίζης εἶναι 0· γράφεται τὸ ἑπόμενον τμῆμα καὶ ἐξακολουθεῖται ἡ πρᾶξις κατὰ τὸν κανόνα· τοῦτο συνέβη ἀνωτέρω ἐν τῇ ἐξαγωγῇ τῆς ρίζης τοῦ 94400).

*Σημ.* 4. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον τῆς ρίζης· διότι εἶναι ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν (ἐδ.199). Ἐὰν π.χ. εὑρεθῇ ρίζα ἀριθμοῦ τινος ὁ 12, τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν 24· διότι, ἐὰν ἔμενεν ὑπόλοιπον 25 ἢ μεγαλείτερον τούτου, ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς περιέχει τότε τὸ τετράγωνον τοῦ 12 καὶ τὸ ἄθροισμα $12+13=25$, ἤτοι περιέχει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ κατὰ μονάδα μεγαλειτέρου τοῦ 12 ἀριθμοῦ, ἤτοι τοῦ 13, ὅπερ εἶναι $(12+1)^2=12^2+2.12+1^2=12^2+12+13$. Ὥστε τότε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα δὲν εἶναι ὁ 12, ἀλλ' ὁ 13, ἢ καὶ ἄλλος μεγαλείτερος ἀριθμός. Ἐντεῦθεν ἄρα ἕπεται, ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς ρίζης δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ διπλάσιον αὐτῆς.

## Ἐξαγωγὴ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{\nu}$.

202. *Ἡ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος* $\frac{1}{\nu}$ *ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1. Τοῦτο δὲ γίνεται, ὡς ἑξῆς φαίνεται.

Τεθείσθω, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἤτοι νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον, οὗ τὸ τετράγωνον περιέχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α· ἔστω τοιοῦτον τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, ἤτοι

$$\left(\frac{\rho}{\nu}\right)^2 \leqq A < \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^2$$

ἢ

$$\frac{\rho^2}{\nu^2} \leqq A < \frac{(\rho+1)^2}{\nu^2}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

(1) $$\rho^2 \leqq A.\nu^2 < (\rho+1)^2$$

Αἱ δὲ σχέσεις αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ εἶναι ὁ μέγιστος, οὗ τὸ τετράγωνον περιέχει ὁ ἀριθμὸς $A.\nu^2$, ἤτοι ὁ ρ εἶναι ἡ $\sqrt{A.\nu^2}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1. Ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἕπεται καὶ

$$\rho \leqq \sqrt{A.\nu^2} < \rho+1$$

καὶ $\frac{\rho}{\nu} \leqq \frac{\sqrt{A.\nu^2}}{\nu} < \frac{\rho+1}{\nu}$ Ὥστε

*Πρὸς εὕρεσιν τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ πολλαπλασιάζεται αὐτὸς ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ ν, ἤτοι ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς προσεγγίσεως, καὶ ἐξάγεται ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου $A.\nu^2$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1· ἡ δὲ ῥίζα αὕτη διαιρεῖται εἶτα διὰ ν.* Π. χ.

1) Ἔστω πρὸς εὕρεσιν ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3 κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{20}$.

Παλλαπλασιάζεται ὁ 3 ἐπὶ $20^2$ καὶ γίνεται 1200· ἡ δὲ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 1200 κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι 34. Ὥστε ἡ $\sqrt{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{20}$ εἶναι $\frac{34}{20}$ Καὶ τῷ ὄντι $\left(\frac{34}{20}\right)^2 = 2+\frac{89}{100}$, ἐν ᾧ $\left(\frac{35}{20}\right)^2 = 3+\frac{1}{16}$.

2). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{2+\frac{7}{8}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα $\left(2+\frac{7}{8}\right).\ 15^2 = 646+\frac{7}{8}$ καὶ $\sqrt{646+\frac{7}{8}}$ ἢ $\sqrt{646}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι 25. Ὅθεν $\sqrt{2+\frac{7}{8}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ ἰσοῦται τῷ $1+\frac{2}{3}$.

3). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{\frac{5}{8}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{8}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα

$\frac{5}{8}.\ 64=40$ καὶ $\frac{\sqrt{40}}{8}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

4). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{\frac{7}{8}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$.

$\frac{7}{8}\cdot 144=126, \sqrt{126}=11$ καὶ $\frac{\sqrt{126}}{12}=\frac{11}{12}$.

5). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001

$7.1000^2=7000000, \sqrt{7.1000^2}=2645$ καὶ $\frac{\sqrt{7.1000^2}}{1000}=2,645$

6). Εὑρεῖν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ 3,425 κατὰ προσέγγισιν 0,01.

$3,425.100^2=34250, \sqrt{34250}=185$ καὶ $\frac{\sqrt{34250}}{100}=1,85$.

7). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{13,753}$ κατὰ προσέγγισιν 0,1

$\sqrt{13,753.10^2}=\sqrt{1375,3}=\sqrt{1375}=37$ καὶ $\frac{\sqrt{13,755}}{10}=3,7$.

8). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{\frac{5}{7}}$ κατὰ προσέγγισιν 0,01 Ἐπειδὴ $\frac{5}{7}=0,7142$, εἶναι

$0,7142.100^2=7142$ καὶ $\frac{\sqrt{7142}}{100}=0,84$.

9). Εὑρεῖν τὴν $\sqrt{\frac{5}{3}}$ κατὰ προσέγγισιν 0,01. Ἐπειδὴ $\frac{5}{3}=\frac{15}{9}$ ἐξάγεται τοῦ ἀριθμητοῦ 15 ἡ ρίζα κατὰ προσέγγιν 0,01 καὶ διαιρεῖται αὕτη διὰ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 9, ἤτοι τοῦ 3.

10). $\sqrt{\frac{4}{15}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}$, $\sqrt{0,0064}=0,08$, $\sqrt{0,000004}=0,002$

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἔχει ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ, ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν ᾖναι ἄρτιον· ἢ τὸ ἥμισυ τῶν ψηφίων αὐτοῦ ἓν ἔτι προσλαβόντων, ἂν τὸ πλῆθος αὐτῶν ᾖναι περιττόν

2) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 5, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων δὲν ᾖναι 2· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ᾖναι ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 1,4,9, τὸ ψηφίον τῶν δεκαδων ᾖναι περιττόν.

3) Ἐὰν κλάσμα τι ᾖναι τέλειον τετράγωνον, καὶ τὸ γινόμενον τῶν ὅρων αὐτοῦ εἶναι ἐπίσης τέλειον τετράγωνον. Καὶ ἀντιστρόφως. (Διότι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda^2$ ἢ $\lambda^2.\delta$, καθ' ὅσον εἶναι ἀνάγωγον ἢ οὔ)

4) Παντὸς περιττοῦ ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνον εἶναι πολλαπλασιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατὰ μονάδα 1. (Ἡ πρότασις αὕτη στηρίζεται ἐπὶ τουτου, ὅτι πᾶς περιττὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $2\lambda\pm1$).

5) Πᾶς περιττὸς ἀριθμός, ὅστις εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 4 ηὐξημένον κατὰ μονάδα 1.

6) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν, ὧν οὐδέτερος εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, εἶναι πάντοτε διαιρετὴ διὰ 3.

7) Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχει πάντοτε τόσους διαιρέτας μικροτερους τῆς τετραγ. αὐτοῦ ρίζης, ὅσοι εἶναι οἱ διαιρέται οἱ μεγαλείτεροι τῆς ρίζης ταυτης.

Ἔστω Α ἀκέραιός τις ἀριθμὸς καὶ δ εἷς τῶν διαιρετῶν αὐτοῦ· εκ. παρασταθῇ διὰ π τὸ πηλίκον Α : δ εἶναι $A=\delta.\pi.$ ἢ $\delta.\pi=\sqrt{A}.\sqrt{A}$ ἢ καὶ $\delta:\sqrt{A}=\sqrt{A}:\pi$. Ἡ δὲ ἀναλογία αὕτη δεικνύει, ὅτι, ὅταν $\delta<\sqrt{A}$, τότε $\pi>\sqrt{A}$· καὶ ὅταν $\delta>\sqrt{A}$, τότε $\pi<\sqrt{A}$.

8) Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἀκέραιός τις ἀριθμὸς δὲν ἔχει διαιρέτην οὐδένα τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 2 μέχρι τοῦ ἀκεραίου μερους τῆς ρίζης αὐτοῦ, ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι πρῶτος.

9) Ὁ μέσος ἀνάλογος εἶναι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄκρων (ἐδ. 160).

10) Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἡ τετραγ. ρίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἑπομένων, οἷον εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον ἐν αὐτῇ.

11) Δεῖξαι, ὅτι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=..=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+..}}{\sqrt{A^2+B^2+..}}$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

### Περὶ κυβικῆς ρίζης.

### Ὁρισμοί.

203. *Κύβος ἀριθμοῦ ἢ τρίτη δύναμις* αὐτοῦ λέγεται (ἐδ. 60) τὸ γινόμενον τριῶν παραγόντων ἴσων τῷ ἀριθμῷ· οἷον

$$2.2.2=2^3=8, 4.4.4=4^3=64, \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{8}{27}.$$

Οἱ κύβοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10 εἶναι κατὰ σειρὰν οἱ ἑξῆς:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ἀριθμοὶ | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10 |
| κύβοι | 1, | 8, | 27, | 64, | 125, | 216, | 343, | 512, | 729, | 1000. |
| ἢ | 1, | $2^3$, | $3^3$, | $4^3$, | $5^3$, | $6^3$, | $7^3$, | $8^3$, | $9^3$, | $10^3$, |

Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν δύναται νὰ ἔχωσιν ἁπλᾶς μονάδας οἱονδήποτε ψηφίον.

*Κυβικὴ ρίζα* δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, οὗτινος ὁ κύβος ἰσοῦται τῷ δοθέντι ἀριθμῷ· οἷον ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ 8 εἶναι ὁ 2· διότι $2^3=8$, ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ $\frac{64}{343}$ εἶναι τὸ $\frac{4}{7}$ διότι $\left(\frac{4}{7}\right)^3=\frac{64}{343}$

Ἡ μὲν εὕρεσις τοῦ κύβου δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται τὸ γινόμενον δύο παραγόντων ἴσων τῷ δοθέντι ἀριθμῷ καὶ καλεῖται *ὕψωσις* αὐτοῦ εἰς τὸν κύβον. Ἡ δὲ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι ἡ πρᾶξις, δι' ἧς ὁρίζεται ἄλλος ἀριθμός, οὗτινος ὁ κύβος εἶναι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ καλεῖται *ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ρίζης* αὐτοῦ. Αἱ δύο αὗται πράξεις εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων. Καὶ τὸ μὲν σύμβολον τῆς πρώτης εἶναι ὁ ἐκθέτης 3, τῆς δὲ δευτέρας τὸ $\sqrt[3]{\ }$ καλούμενον ἐκ τοῦ *δείκτου* 3 τρίτον ριζικὸν ἢ τρίτη ρίζα ἢ κυβικὴ ρίζα· οἷον

$$5^3 = 125,\ \sqrt[3]{125} = 5,\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27},\ \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

Ἐκ τῆς εὑρέσεως δὲ τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 10 καταφαίνεται ἤδη, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι οἱ κύβοι ἄλλων ἀριθμῶν (ὡς οἱ 2, 3, 4, 5, 7, $\frac{1}{2}$, $\frac{}{3}$, $\frac{2}{3}$ κλ.), ὡς ἐπίσης ὑπάρχουσιν ἀντιστρόφως καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι αἱ κυβικαὶ ρίζαι ἄλλων ἀριθμῶν. Ἀλλὰ καὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων εὑρίσκονται κατὰ προσέγγισιν οἱανδήποτε οἱ κύβοι ἢ αἱ κυβικαὶ ρίζαι.

*Κυβικὴ ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1 λέγεται ὁ μέγιστος ἀκέραιος, οὗτινος ὁ κύβος περιέχεται ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ· οἷον ἡ $\sqrt{70}$ εἶναι ὁ 4· διότι $4^3 = 64$, ὁ δὲ 64 περιέχεται ἐν τῷ 70, ἐν ᾧ τὸ $5^3 = 125$ δὲν περιέχεται ἐν αὐτῷ. Ὁμοίως ἡ $\sqrt[3]{10+\frac{2}{3}}$ εἶναι ὁ 2 διότι $2^3 = 8$, ὁ δὲ 8 περιέχεται ἐν τῷ $10+\frac{2}{3}$, ἐν ᾧ $3^3 = 27$ δὲν περιέχεται ἐν αὐτῷ. *Ἡ κυβικὴ ρίζα ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1 *λαμβάνεται ἐκ τοῦ ἀκεραίου μέρος αὐτοῦ.*

*Κυβικὴ ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος* $\frac{1}{\nu}$ λέγεται τὸ μέγιστον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων παρονομαστὴν ν, οὗτινος ὁ κύβος περιέχεται ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ. Οἷον ἡ $\sqrt[3]{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι 1,2· διότι $\left(\frac{12}{10}\right)^3 = 1,728$ ὁ δὲ 1,728 περιέχεται ἐν τῷ 2, ἐν ᾧ $\left(\frac{13}{10}\right)^3 = 2,197$ δὲν περιέχεται ἐν αὐτῷ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν καὶ παραδειγμάτων καθίσταται φανερόν, ὅτι ὑπάρχουσι καὶ ἀριθμοί, οἵτινες δὲν εἶναι τέλειοι κύβοι ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν ἀριθμῶν, ἀλλ' εἶναι κύβοι ἄλλων ἀριθμῶν εὑρισκομένων καθ' οἱανδήποτε προσέγγισιν· οἱ δὲ ἀριθμοὶ οὗτοι καλοῦνται *ἀσύμμετροι ἀριθμοί*.

Ὅτι δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ πράγματι ὑπάρχουσι δεικνύεται καὶ διὰ τῶν ἑπομένων δύο θεωρημάτων, ὧν ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὡς καὶ ἀνωτέρω (ἐδ. 196,197) ὡς καὶ γενικῶς περὶ πάσης δυνάμεως.

## Θεωρήματα.

104. *Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν ἦναι κύβος ἀκεραίου τινὸς ἀριθμοῦ, οὐδὲ κλάσματος εἶναι κύβος.*

*Παρατήρησις*. Καὶ δι' ἄλλων τινῶν γνωρισμάτων δυνατὸν ἐνίοτε νὰ διακρίνηται, ἐὰν ἀριθμός τις ἦναι τέλειος κύβος ἢ μή.

1) Ἐὰν ἀναλυθῇ ὁ δοθεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς εἰς τοὺς πρώτους αὐτοῦ παράγοντας, οἱ ἐκθέται τῶν παραγόντων τούτων πρέπει νὰ ἦναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ 3.

2) Ἐὰν ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγῃ εἰς μηδενικά, ὧν ὁ ἀριθμὸς δὲν εἶναι διαιρετὸς διὰ 3, δὲν εἶναι τέλειος κύβος.

Διότι ὁ κύβος ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικὰ εἶναι ἀριθμὸς λήγων εἰς ἀριθμὸν μηδενικῶν διαιρετὸν διὰ τοῦ 3· οἷον $20^3=8000$, $300^3=27000000$, κλ ὥστε ὁ ἀριθμὸς ὁ λήγων εἰς ἀριθμὸν μηδενικῶν μὴ διαιρετὸν διὰ 3 δὲν εἶναι κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ.

205. *Κλάσμα ἀνάγωγον δὲν δύναται νὰ ἦναι κύβος, πλὴν ἐὰν ἑκάτερος τῶν ὅρων αὐτοῦ ἦναι κύβος.*

*Σημ.* Κλάσμα μὴ ἀνάγωγον δύναται νὰ ἦναι κύβος, ἐν ᾧ οἱ ὅροι αὐτοῦ δὲν εἶναι κύβοι· οἷον $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

## Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1.

206. Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης τῶν μικροτέρων τοῦ 1000 ἀριθμῶν ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι μικροτέρα τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ 1000, ἤτοι μικροτέρα τοῦ 10 (διότι $10^3=1000$· εἶναι ἄρα μονοψήφιος

ἀριθμὸς) καὶ εὑρίσκεται εὐκόλως. Οἷον ἡ $\sqrt[3]{141}$ εἶναι 5· διότι $5^3=125$, ἐνῷ $6^3=216$.

Ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλειτέρων τοῦ 1000 ἀκριβῶς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1 εἶναι μεγαλειτέρα τοῦ 10 καὶ ἑπομένως περιέχει καὶ δεκάδας. Ἡ εὕρεσις δὲ τῶν ῥιζῶν τούτων στηρίζεται ἐπὶ τοῦ ἑξῆς θεωρήματος.

## Θεώρημα.

207. Ὁ *κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ ἄθροισμα ἐκ τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν δεύτερον καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου γινομένου τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου.*

Ἔστωσαν δύο τυχόντες ἀριθμοὶ α καὶ β· τὸ μὲν ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι $\alpha+\beta$, ὁ δὲ κύβος τοῦ $\alpha+\beta$, ἤτοι $(\alpha+\beta)^3$, λέγω, ὅτι ἰσοῦται τῷ ἀθροίσματι $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

*Ἀπόδειξις.* Ἐπειδὴ $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta).(\alpha+\beta)\,(\alpha+\beta)$ καὶ

$$(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2).(\alpha+\beta)=$$

$$=\alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3,$$ ἕπεται

$$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta+\beta^3$$ ὅ. ἔ. δ.

Π.χ. ὁ 11 εἶναι ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν τοῦ 10 καὶ 1, $11=10+1$. Ὥστε $11^3=(10+1)^3=10^3+3.10^2.1+3.10.1^2+1^3=1000+300+30+1=1331$

*Πόρισμα.* Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ διαφέρωσι κατὰ 1, οἱ κύβοι αὐτῶν διαφέρουσι κατὰ τὸ τριπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ τὸ τριπλάσιον αὐτοῦ τοῦ μικροτέρου καὶ κατὰ 1.

Διότι, ἐὰν ὁ μικρότερος τῶν δύο ἀριθμῶν παρασταθῇ διὰ α, ὁ μεγαλείτερος εἶναι $\alpha+1$· οἱ δὲ κύβοι τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι
$\alpha^3$ καὶ $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$. Ὥστε
$(\alpha+1)^3-\alpha^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1-\alpha^3=3\alpha^2+3\alpha+1$

208. Τῇ βοηθείᾳ δὲ τοῦ ἀνωτέρου θεωρήματος δύναται νῦν νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ (ἡ ἀκριβής, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς ἦναι τέλειος κύβος· εἰ δὲ μή, ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1).

Ἔστω π. χ. ὁ 421875. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ περιέχει καὶ δεκάδας (διότι $10^3=1000$) καὶ ἑπομένως σύγκειται αὕτη ἐκ δεκάδων δ καὶ ἐκ μονάδων μ, ἤτοι εἶναι τὸ ἄθροισμα $\delta.10+\mu$· ὁ δὲ κύβος τῆς ρίζης ταύτης κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι

$$(\delta.10+\mu)^3=\delta^3.1000+3.\delta^2.100.\mu+3.\delta.10.\mu^2+\mu^3$$

ὁ ἀριθμὸς ἄρα 421875 ὡς περιέχων τὸν κύβον τῆς ρίζης αὐτοῦ σύγκειται ἐκ τοῦ $(\delta\cdot 10+\mu)^3$ καὶ ἔκ τινος ὑπολοίπου υ (ἐὰν δὲν ἦναι τέλειος κύβος), ἤτοι εἶναι

(1) $\quad 421875=\delta^3.1000+3.\delta.^2100.\mu+3\,\delta.10.\mu^2+\mu^3+\upsilon$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι αἱ $\delta^3$ χιλιάδες τῆς ζητουμένης ρίζης περιέχονται εἰς τὰς 421 χιλιάδας τοῦ 421875. Ὁ δὲ μέγιστος κύβος ὁ περιεχόμενος ἐν τῷ 421 εἶναι ὁ $343=7^3$· ὥστε $\delta^3=343=7^3$ καὶ ἑπομένως $\delta=7$ (εἶναι δὲ προφανῶς $343000<421875<512000$).

Ἐὰν δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος (1) ἀφαιρεθῶσιν αἱ 343 χιλιάδες ($343000=\delta^3.1000$), προκύπτει

$$78875=3.\delta.^2100.\mu+3.\delta.10.\mu^2+\mu^3+\upsilon$$

Ἡ δὲ ἰσότης αὕτη δεικνύει, ὅτι αἱ $3.\delta^2$ ἑκατοντάδες περιέχονται εἰς τὰς 788 ἑκατοντάδας τοῦ 78875. Ἐπειδὴ δὲ εἰς τὰς 788 ἑκατοντάδας δυνατὸν νὰ περιέχωνται καὶ ἑκατοντάδες προερχόμεναι ἐκ τοῦ $3.\delta.10.\mu^2$ καὶ ἐκ τοῦ $\mu^3$ καὶ ἐκ τοῦ ὑπολοίπου υ (ἐὰν ὑπάρχῃ), ἕπεται, ὅτι

$$788\geqq 3.7^2.\mu$$

ἐὰν δὲ διαιρεθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς σχέσεως ταύτης διὰ $3.7^2$ (ἢ147), ἤτοι διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων τῆς κυβικῆς ρίζης, ὅτε προκύπτει

$$\frac{788}{147}\geqq\mu$$

φανερόν, ὅτι τὸ ψηφίον μ τῶν μονάδων τῆς ζητουμένης ρίζης δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸ ψηφίον 5 τὸ εὑρισκόμενον διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν 788 ἑκατοντάδων τοῦ ὑπολοίπου 78875 διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων $3.7^2$ τῆς ρίζης. Πρὸς δοκιμὴν δὲ τούτου εὑρίσκεται ὁ κύβος τοῦ 75, ἤτοι $75^3=421875$, ὅστις εἶναι αὐτὸς ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς καὶ ἑπομένως ἡ κυβικὴ ρίζα αὐτοῦ εἶναι ὁ 75. Ἐὰν ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς δὲν ἦτο τέλειος κύβος, τότε διὰ τῆς προηγουμένης πράξεως λαμβάνεται ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ μεγίστου ἀκεραίου κύβου τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ δοθέντι ἀριθμῷ· τὸ δὲ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως πρέπει νὰ ἦναι μικρότερον τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῆς ρίζης ταύτης ηὐξημένον κατὰ τριπλάσιον αὐτῆς· διότι τοῦτο εἶναι ἔλασσον τῆς διαφορᾶς τῶν κύβων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν (ἐδ.207).

Ἡ δὲ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑπομένη

| | |
|---|---|
| 421′875 | 75 |
| 343 | $3.7^2=147$ |
| 788′75 | $75^3=421875$ |

Ὁμοίως ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα οἱουδήποτε ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1. Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 259837984. Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς οὗτος εἶναι μεγαλείτερος τοῦ 1000, ἡ κυβικὴ ῥίζα αὐτοῦ περιέχει καὶ δεκάδας, ὧν ὁ κύβος περιέχεται εἰς τὰς 259837 ἑκατοντάδας τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Ἡ δὲ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 259837 ἐξάγεται ὡς προηγουμένως, ἤτοι

| | |
|---|---|
| 259′837 | 63 |
| 216 | $3\ 6^2=108$ |
| 438′37 | $63^3=250047$ |

Ὥστε αἱ δεκάδες τῆς κυβικῆς ῥίζης τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ 259837984 εἶναι 63. Πρὸς εὕρεσιν καὶ τῶν ψηφίων τῶν μονάδων τῆς ῥίζης ταύτης διαιροῦνται διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τῶν δεκάδων (ἤτοι διὰ 11907) αἱ ἑκατοντάδες τοῦ ὑπολοίπου, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τοῦ κύβου τῶν 63 δεκάδων· τὸ ὑπόλοιπον δὲ τοῦτο εἶναι 9790 χιλιάδες (αἱ ὑπολειφθεῖσαι ἐκ τοῦ 259837) καὶ 984 μονάδες, ἤτοι 9790984· Τούτων ἄρα, ἐὰν διαιρεθῶσιν αἱ ἑκατοντάδες 97909 διὰ τοῦ 11907, εὑρίσκεται πηλίκον 8. Πρὸς δοκιμὴν ὑψοῦται ὁ 638 εἰς τὸν κύβον, ἤτοι $638^3=259694072$. Ὁ δὲ ἀριθμὸς οὗτος περιέχεται προφανῶς ἐν τῷ δοθέντι 259837984 μετὰ ὑπολοίπου 133912. Ὥστε ὁ 638 εἶναι ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 259837984 κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἑξῆς·

| | |
|---|---|
| 259′837′984 | 638 |
| 216 | 108 |
| 438 | 23814 |
| 250047 | |
| 9790984 | |
| 259694072 | |
| 133912 | |

**209.** Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

*Πρὸς ἐξαγωγὴν τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ* (ἀκριβῶς, ἐὰν ἦναι κύβος· εἰ δὲ μή, κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1) *χωρίζεται αὐτὸς εἰς τριψήφια τμήματα ἀπὸ τῶν ἁπλῶν μονάδων καὶ ἐφεξῆς. Ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ πρώτου τμήματος* (ὅπερ δυνατὸν νὰ ἦναι καὶ μονοψήφιον ἢ διψήφιον) *τὸ ὁποῖον εἶναι ἐν τῇ ἀρχῇ τοῦ ἀριθμοῦ· ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ τμήματος τούτου εἶναι τὸ πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης. Ἀφαιρεῖται ὁ κύβος τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης ἀπὸ τοῦ τμήματος, ἐξ οὗ εὑρέθη, καὶ κατόπιν τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζεται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ δευτέρου τμήματος, ὁ δὲ οὕτως εὑρισκόμενος ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης. Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γράφεται κατόπιν τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ῥίζης καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς ὑψοῦται εἰς τὸν κύβον. Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος ἀφαιρῆται ἀπὸ τοῦ ἐκ τῶν δύο πρώτων τμημάτων ἀποτελουμένου ἀριθμοῦ, τὸ εὑρεθὲν πηλίκον εἶναι τὸ δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης ῥίζης· εἰ δὲ μή, δοκιμάζεται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον ψηφίον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ ἀριθμὸς δυνάμενος νἀφαιρεθῇ.*

*Κατόπιν τοῦ ὑπολοίπου καταβιβάζεται τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τρίτου τμήματος καὶ ὁ προκύπτων ἀριθμὸς διαιρεῖται διὰ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ, ὃν ἀποτελοῦσι τὰ δύο πρῶτα ψηφία τῆς ῥίζης.*

*Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον δοκιμάζεται γραφόμενον κατόπιν τῶν ἤδη εὑρεθέντων ψηφίων τῆς ῥίζης καὶ ὑψοῦται ὁ οὕτως ἀποτελούμενος ἀριθμὸς εἰς τὸν κύβον.*

*Ἐὰν ὁ κύβος οὗτος δὲν ὑπερβαίνῃ τὸν ἐκ τῶν τριῶν πρώτων τμημάτων ἀποτελούμενον ἀριθμόν, τὸ δοκιμαζόμενον ψηφίον εἶναι τὸ τρίτον ψηφίον τῆς ῥίζης· εἰ δὲ μή· δοκιμάζεται τὸ κατὰ μονάδα μικρότερον· καὶ οὕτω καθεξῆς, μέχρις οὗ εὑρεθῇ τὸ ἀληθὲς ψηφίον.*

*Τοῦτο δὲ γίνεται, μέχρις οὗ καταβιβασθῇ καὶ τὸ πρῶτον ψηφίον τοῦ τελευταίου τμήματος καὶ εὑρεθῇ τὸ τελευταῖον ψηφίον τῆς ῥίζης,*

*Σημ.* 1. Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς κυβ. ῥίζης ἰσοῦται τῷ ἀριθμῷ τῶν τμημάτων, εἰς ἃ χωρίζεται ὁ δοθεὶς ἀριθμός.

*Σημ.* 2. Ἐὰν ἔν τινι τῶν διαιρέσεων, δι' ὧν εὑρίσκονται τὰ ψηφία τῆς ῥίζης, εὑρεθῇ πηλίκον μεγαλείτερον τοῦ 9, ἄρχονται αἱ δοκιμαὶ ἀπὸ τοῦ 9.

*Σημ.* 3. Ἐὰν ἔν τινι τῶν διαιρέσεων τὸ πηλίκον ἦναι 0, καὶ τὸ ἀντίστοιχον ψηφίον τῆς ῥίζης εἶναι 0.

*Σημ.* 4. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς πράξεως δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ τὸν ἀριθμὸν τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τριπλασίου τῆς ῥίζης καὶ ἐκ τοῦ τριπλασίου τοῦ τετραγώνου αὐτῆς, ὡς ἐξάγεται ἐκ τοῦ *ἐδ.* 207.

## Ἐξαγωγὴ τῆς κυβικῆς ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{\nu}$.

210. *Ἡ εὕρεσις τῆς κυβ. ῥίζης οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν οἱασδήποτε κλασματικῆς μονάδος $\frac{1}{\nu}$ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς κυβ. ῥίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1. *Τοῦτο δὲ γίνεται, ὡς ἑξῆς φαίνεται.*

Τεθείσθω, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ Α κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἤτοι νὰ εὑρεθῇ ἐκ τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσι παρονομαστὴν ν, τὸ μέγιστον, οὗ τὸ τετράγωνον περιέχει ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς Α· ἔστω τοιοῦτον τὸ $\frac{\rho}{\nu}$, ἤτοι ἔστω

$$\left(\frac{\quad}{\nu}\right)^3 \leqq A < \left(\frac{\rho+1}{\nu}\right)^3$$

ἢ

$$\frac{{}^3}{\nu^3} = A < \frac{(\rho+1)^3}{\nu^3}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται

$$(1) \qquad \rho^3 \leqq A.\nu^3 < (\rho+1)^3$$

Αἱ δὲ σχέσεις αὗται δεικνύουσιν, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς ρ εἶναι ὁ μέγιστος, οὗ τὸν κύβον περιέχει ὁ ἀριθμὸς $A.\nu^3$, ἤτοι ὁ ρ εἶναι ἡ $\sqrt[3]{A.\nu^3}$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος 1. Ἀλλ' ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἕπεται καὶ

$$\rho \leqq \sqrt[3]{A.\nu^3} < \rho+1$$

καὶ

$$\frac{\rho}{\nu} \leqq \frac{\sqrt[3]{A.\nu^3}}{\nu} < \frac{\rho+1}{\nu}$$

*Ὥστε πρὸς εὕρεσιν τῆς κυβικῆς ῥίζης, οἱουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν* $\frac{1}{\nu}$ *πολλαπλασιάζεται αὐτὸς ἐπὶ* $\nu^3$ *καὶ ἐξάγεται ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ γινομένου* $A.\nu^3$ *κατὰ προσέγγισιν μονάδος* 1· *ἡ δὲ ῥίζα αὕτη διαιρεῖται εἶτα διὰ* $\nu$. Π.χ.

1) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{6}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{4}$. Κατὰ τὸν ἀνωτέρω κανόνα εἶναι

$6.4^3=384$, $\sqrt[3]{384}=7$. Ὅθεν $\sqrt[3]{6}=\frac{7}{4}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{4}$.

2) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{12+\frac{8}{9}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

$\left(12+\frac{8}{9}\right).\ 7^3=4420+\frac{8}{9}$, $\sqrt[3]{4420}=16$. Ὅθεν $\sqrt[3]{12+\frac{8}{9}}=\frac{16}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

3) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$

$\frac{5}{12}.12^3=720$, $\sqrt[3]{720}=8$. Ὅθεν $\sqrt[3]{\frac{5}{12}}=\frac{2}{3}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{12}$.

4) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{20}$. $\frac{5}{7}.20^3=5714+\frac{2}{7}$,

$\sqrt[3]{5714}=17$. καὶ $\sqrt[3]{\frac{5}{7}}=\frac{17}{20}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{20}$.

5) $\sqrt[3]{7}$ κατὰ προσέγγισιν 0,001.

$7.100^3=7000000000$, $\sqrt[3]{7000000000}=1912$ καὶ $\sqrt[3]{7}=1{,}912$ κατὰ προσέγγισιν $0{,}001$.

6) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{9{,}73457}$ κατὰ προσέγγισιν $0{,}1 \cdot 9{,}73457.10^3=9734{,}57$,

$\sqrt[3]{9734}=21$ καὶ $\sqrt[3]{9{,}73457}=2{,}1$ κατὰ προσέγγισιν $0{,}1$.

7) Εὑρεῖν τὴν $\sqrt[3]{\frac{11}{12}}$ κατὰ προσέγγισιν $0{,}00001$.

$\frac{11}{12}=0{,}91666666666666....$, $\sqrt[3]{916666666666666}=97142$ καὶ

$\sqrt[3]{\frac{11}{12}}=0{,}97142$ κατὰ προσέγγισιν $0{,}00001$.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων τῆς κυβικῆς ῥίζης ἀριθμοῦ ἔχοντος $3\nu$ ἢ $3\nu-1$ ἢ $3\nu-2$ ψηφία εἶναι ὁ $\nu$.

2) Ἀκέραιος ἀριθμὸς δὲν δύναται νὰ ἦναι κύβος, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων ὄντος 2 ἢ 6, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι ἄρτιον· ἤ, ἐάν, τοῦ ψηφίου τῶν μηνάδων ὄντος 4 ἢ 8, τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων ἦναι περιττόν.

3) Ἀκέραιος ἀριθμὸς λήγων εἰς 5 δὲν δύναται νὰ ἦναι κύβος, ἐὰν τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων αὐτοῦ δὲν ἦναι μήτε 2 μήτε 7.

4) Ἡ διαφορὰ τῶν κύβων δύο ἐφεξῆς ἀκεραίων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 ηὐξημένον κατὰ 1.

5) Ἐν πάσῃ ἀναλογίᾳ ἡ κυβικὴ ῥίζα τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἡγουμένων ἔχει λόγον πρὸς τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ ἀθροίσματος τῶν κύβων τῶν ἑπομένων, οἷον εἷς ἡγούμενος πρὸς τὸν ἑπόμενον.

6) Δεῖξαι ὅτι $\frac{\alpha}{A}=\frac{\beta}{B}=..=\frac{\sqrt[3]{\alpha^3+\beta^3+...}}{\sqrt[3]{A^3+B^3+...}}$

# ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ'

## Περὶ Μεθόδων πρὸς λύσιν ἀριθμητικῶν προβλημάτων.

### ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'.

### Μέθοδος τῶν τριῶν, σύνθετος καὶ συνεζευγμένη

**Ὁρισμοί.**

211. *Μέθοδος* πρὸς λύσιν ἀριθμητικῶν προβλημάτων λέγεται τρόπος τις γενικός, δι' οὗ λύονται εἴδη τινα ἀριθμητικῶν προβλημάτων περιεχόντων ἐν γένει ποσὰ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα. (ἐδ. 153).

*Στοιχειώδη* προβλήματα λέγονται ἐκεῖνα, ἐν οἷς δίδονται δύο ἀριθμοὶ καὶ ζητεῖται τρίτος εὑρισκόμενος ἐκ τῶν δοθέντων διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἢ διὰ διαιρέσεως· τοιοῦτον πρόβλημα εἶναι ἐν γένει τὸ ἑξῆς·

*Πολλαπλασιαζομένης τῆς τιμῆς ἢ ἀξίας ποσοῦ τινος, πολλαπλασιάζεται ἢ διαιρεῖται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἑτέρου ποσοῦ ἀναλόγου ἢ ἀντιστρόφου πρὸς αὐτό· καὶ διαιρουμένης τῆς τιμῆς ἢ ἀξίας ποσοῦ τινος διαιρεῖται ἢ πολλαπλασιάζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ ἑτέρου ποσοῦ ἀναλόγου ἢ ἀντιστρόφου πρὸς αὐτό.*

*Π.χ. Ἐὰν ὁ* 1 *πῆχυς ὑφάσματός τινος τιμᾶται* 5 *δρ., οἱ* 2 *πήχεις τιμῶνται* $5.2=10$ *δρ., οἱ* 3 *πήχεις τιμῶνται* $5.3=15$ *δρ., οἱ* 4 *πήχεις τιμῶνται* $5.4=20$ *δρ., καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς*· πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων ἐπί τινα ἀριθμὸν πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν καὶ ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τῶν δραχμῶν· καὶ τἀνάπαλιν. Ἐνταῦθα τὰ δύο ποσά, πήχεις καὶ δραχμαί, εἶναι *ἀνάλογα*.

*Σημ.* Ὅταν δύο ποσὰ συναυξάνωνται, δὲν εἶναι πάντοτε καὶ ἀνάλογα· π.χ. τὸ ἀνάστημα τοῦ παιδίου καὶ τὰ ἔτη αὐτοῦ συναυξάνονται, ἀλλ' ὅμως τὰ δύο ταῦτα ποσὰ δὲν εἶναι ἀνάλογα.

*Ἐὰν δὲ* 1 *ἐργάτης ἐκτελῇ ἔργον τι εἰς* 15 *ἡμ., οἱ δύο ἐργάται ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον τοῦτο εἰς* $\frac{15}{2}$ *ἡμ., οἱ* 3 *ἐργάται εἰς* $\frac{15}{3}$, *οἱ* 4 *ἐργάται εἰς* $\frac{15}{4}$ *ἡμέρας καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς*· πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐργατῶν ἐπί τινα ἀριθμόν, διαιρεῖται ὁ ἀντίστοιχος ἀριθμὸς τῶν ἡμερῶν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ· καὶ τἀνάπαλιν. Ἐνταῦθα τὰ δύο ποσά, ἐργάται καὶ ἡμέραι, εἶναι *ἀντίστροφα ἢ ἀντιστρόφως ἀνάλογα.*

*Σημ.* Ὅταν δύο ποσὰ ἦναι τοιαῦτα, ὥστε αὐξανομένου τοῦ ἑνὸς ἐλαττοῦται τὸ ἄλλο, δὲν εἶναι πάντοτε καὶ ἀντίστροφα. Ἐὰν π.χ. ἅμαξά τις συρομένη ὑπὸ 2 ἵππων διατρέχῃ ἀπόστασίν τινα εἰς 3 ὥρας, συρομένη ὑπὸ 4 ἵππων δὲν διατρέχει ἐν γένει εἰς $\frac{3}{4}$ τῆς ὥρας τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν.

## 1). Μέθοδος τῶν τριῶν.

212. *Ἡ μέθοδος τῶν τριῶν* λύει τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, ἐν οἷς δίδονται αἱ τιμαὶ δύο ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν ἡ τιμὴ τοῦ ἄλλου μεταβληθῇ. Ὅταν π. χ. διδωνται αἱ τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) α καὶ β καὶ ἡ τιμὴ τοῦ πρώτου μεταβληθῇ ἀπὸ α εἰς γ, τότε ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τῆς β.

Λέγεται δὲ ἡ μέθοδος αὕτη μέθοδος τῶν τριῶν· διότι ἐν αὐτῇ δίδονται προφανῶς τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ καὶ ἐξ αὐτῶν εὑρίσκεται ὁ ἄγνωστος, ὃν παριστῶμεν διὰ τοῦ γράμματος $x$. Τὸ τοιοῦτον πρόβλημα λύεται ἢ διὰ τῆς πράξεως, ἣν καλοῦμεν *ἀναγωγὴν εἰς τὴν μονάδα*, καθ' ἣν ἐκ τῆς εὑρέσεως τῆς τιμῆς τῆς μιᾶς μονάδος εὑρίσκεται ἡ τιμὴ τῶν πολλῶν μονάδων, ἢ *ἀμέσως διὰ τῆς γενικῆς ἰδιότητος τῶν ἀναλογιῶν, καθ' ἣν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται τῷ γινομένῳ τῶν ἄκρων* (ἐδ. 156). Π. χ.

1) *Ἐὰν 15 πήχεις ὑφάσματος τιμῶνται 60δρ., πόσον τιμῶνται 35 πήχεις τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος;*

Ἐνταῦθα δίδονται προφανῶς δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες δύο ἀνάλογα ποσά. 15 πήχεις καὶ 60 δραχμαί, καὶ μεταβάλλεται ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων ἀπὸ 15πήχ. εἰς 35πήχ., ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δραχμῶν.

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ

οἱ 15πήχ. τιμῶνται 60δρ.,

ὁ 1πῆχ. τιμᾶται $\frac{60\text{δρ.}}{15}$

καὶ οἱ 35π. τιμῶνται $\frac{60.\ 35\ \text{δρ.}}{15} = 140\text{δρ.}$

*Λύσις διὰ τῆς ἀναλογίας.* Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα, ἕπεται, ὅτι οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ 15πηχ., 60δρ., 35πηχ. καὶ ὁ ἄγνωστος $x$ ἀποτελοῦσιν ἀναλογίαν (ἐδ. 155).

$$15 : 60 = 35 : x$$

ἐξ $$15 . x = 60 . 35$$

κα $$x = \frac{60 . 35}{15} = 140\text{δρ.}$$

2) *Ἐργάται τινὲς ἐργαζόμενοι 8ὥρας καθ' ἡμέραν ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς 12ἡμέρας· ἐὰν ἐργάζωνται 10ὥρας καθ' ἡμέραν, εἰς πόσας ἡμέρας ἐκτελοῦσι τὸ ἔργον;*

Ἐνταῦθα δίδονται προφανῶς δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες δύο ἀντίστροφα ποσά, 8ὧραι καὶ 12ἡμέραι, καὶ μεταβάλλεται ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ἀπὸ 8ὥρ. εἰς 10ὥρ., ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἡμερῶν.

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ

| | | | |
|---|---|---|---|
| πρὸς | 8ὥρ. | ἀντιστοιχοῦσιν | 12ἡμ. |
| » | 1ὥρ. | » | 12.8ἡμ. |
| » | 10ὥρ. | » | $\frac{12.8}{10}$ἡμ. $= 9 + \frac{3}{5}$ἡμ. |

*Λύσις διὰ τῆς ἀναλογίας.* Ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα, ἔπεται, ὅτι ὁ λόγος 8 : 10 ἰσοῦται τῷ ἀντιστρόφῳ τοῦ λόγου 12 : $x$, ἤτοι

$$8 : 10 = x : 12$$

ἐξ ἧς $$10 . x = 8 . 12$$

καὶ $$x = \frac{8 . 12}{10} = 9 + \frac{3}{5}\text{ἡμ.}$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς μεθόδου τῶν τριῶν:

213. Γράφονται εἰς ἕνα στίχον αἱ πρῶται τιμαὶ τῶν δύο ποσῶν, εἶτα εἰς δεύτερον στίχον ἡ νέα τιμὴ τοῦ ἑνὸς καὶ ἡ ζητουμένη νέα τιμὴ τοῦ ἄλλου, ἥτις παρίσταται διὰ τοῦ $x$, οὕτως, ὥστε οἱ ὁμοειδεῖς ἀριθμοὶ νὰ εὑρίσκωνται ἐν τῇ αὐτῇ κατακορύφῳ στήλῃ καὶ χωρίζονται αὐτοὶ διὰ γραμμῆς ὁριζοντίας. Τούτων γενομένων, *πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀγνώστου ἀριθμοῦ $x$ πολλαπλασιάζεται ὁ ὑπεράνω αὐτοῦ ἀριθμὸς (ὁ ὁμοειδὴς αὐτῷ) ἐπὶ τὸ κλάσμα, ὅπερ ἀποτελεῖται ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὡς εἶναι γεγραμμένοι, ἐὰν τὰ ποσὰ ἦναι ἀντίστροφα, ἢ ἐπὶ τὸ αὐτὸ κλάσμα ἀντεστραμμένον, ἐὰν τὰ ποσὰ ἦναι ἀνάλογα.*

Παραδείγματος χάριν πρὸς λύσιν τοῦ 1ου προβλήματος γράφονται τὰ διδόμενα καὶ τὸ ζητούμενον ὡς ἑξῆς:

$$\frac{15\pi\eta\chi.}{35} \qquad \frac{60\delta\rho.}{x}$$

Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα

$$x=\frac{35}{15}.60=140$$

Πρὸς λύσιν δὲ τοῦ 2ου προβλήματος γράφονται πάλιν οἱ δοθέντες ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{8}{10} \qquad \frac{12}{x}$$

Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα

$$x=\frac{8}{10}.12=9+\frac{3}{5}.$$

Ὁμοίως πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος· *Ταχυδρόμος βαδίζων* 6 $^1/_2$ *ὥρας καθ' ἡμέραν διανύει ἀπόστασίν τινα εἰς* 25 *ἡμέρας· πόσας ὥρας πρέπει νὰ βαδίζῃ καθ' ἡμέραν, ἵνα διανύσῃ τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν εἰς* 20 *ἡμέρας;*

Γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς·

$$\begin{array}{cc} \text{ὧραι ὁδοιπ.} & \text{ἡμέραι} \\ \frac{6^1/_2}{x} & \frac{25}{20} \end{array}$$

Ὅθεν ἐπειδὴ τὰ δύο ποσὰ εἶναι ἀντίστροφα

$$x=6^1/_2.\frac{25}{20}=8\frac{1}{8}\text{ ὥρ.}$$

Ὁμοίως πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος· *Ἀντὶ* 25 *δραχμῶν καὶ* 80 *λεπτὰ ἀγοράζει τις* $5\frac{1}{2}$ *ὀκάδας βουτύρου· πόσον ἀγοράζει ἀντὶ* 158 *δραχμῶν καὶ* 40 *λεπτῶν.*

Γράφονται οἱ ἀριθμοὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{cc} \delta\rho\alpha\chi. & \text{ὀκ.} \\ \frac{25,80}{158,40} & \frac{5^1/_2}{x} \end{array}$$

Ὅθεν, ἐπειδὴ τὰ ποσὰ εἶναι ἀνάλογα,

$$x=5^1/_2.\frac{158,40}{25,80}=33\frac{33}{43}\text{ ὀκ.}$$

*Σημ* Διὰ τῆς τοιαύτης γραφῆς τῶν τριῶν δεδομένων καὶ τοῦ ζητουμένου εὑρίσκεται ἀμέσως ἡ ἀναλογία μεταξὺ τῶν τεσσάρων τούτων ποσοτήτων.

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἓν βαρέλιον οἴνου περιέχον 280 φιάλας ἠγοράσθη ἀντὶ 266 δρ., ἕτερον βαρέλιον οἴνου τῆς αὐτῆς ποιότητος ἠγοράσθη ἀντὶ 237,50 δρ., πόσας φιάλας περιεῖχε τὸ δεύτερον βαρέλιον; ('Απ. 250 φιάλας).

2) Ὑπηρέτης λαμβάνει ἐτήσιον μισθὸν 292 δρ., πόσας ἔλαβεν ὑπηρετήσας 125 ἡμέρας; ('Απ. 100 δρ.)

3) Δεκαπέντε στρατιῶται ἀποσπάσματός τινος ἔλαβον μισθοὺς ἐπὶ 17 ἡμέρας 63 δρ. καὶ 75 λ. τὸ ἀπόσπασμα ηὐξήθη εἰς 23 στρατιώτας καὶ ζητεῖται, πόσον ἔλαβον ἐπὶ 13 ἡμέρας; ('Απ. 74,75,δρ.)

4) 'Εκάησαν 8975,7 γραμμάρια ἐλαίου ἐπὶ 7ὥρ. 35′ 12″ πόσον ἐκάη ἐπὶ 26ὥρ. 33′ 12″; ('Απ. 314149,5 γραμμ.)

5) Φρουρὰ 1250 ἀνδρῶν ἐνεκλείσθη ἔν τινι φρουρίῳ καὶ ὑπολογίζεται, ὅτι, λαμβάνοντος ἑκάστου ἀνδρὸς 18 οὐγγίας ἄρτου καθ' ἡμέραν, τὸ ἄλευρον ἐπαρκεῖ ἐπὶ 150 ἡμέρας. 'Αλλ' ηὐξήθη ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν οὕτως, ὥστε ἐὰν δίδηται ἡ αὐτὴ ποσότης ἄρτου, τὸ ἄλευρον ἐπαρκεῖ μόνον ἐπὶ 125 ἡμέρας. Κατὰ πόσους ἄνδρας ηὐξήθη ἡ φρουρὰ αὕτη; ('Απ. κατὰ 250 ἄνδρας).

6) 'Εὰν ὁ καθαρὸς χρυσὸς τιμᾶται 3444 δρ. καὶ 44 λεπ. τὸ χιλιόγραμμον, ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς οὐγγίας, δεκτοῦ γενομένου, ὅτι 81 γράμμα ἀποτελοῦσι 1525 κόκκους; ('Απ. 105 δρ. 38 λ....)

7) Ἑκατὸν λίτραι θαλασσίου ὕδατος ἔχουσι βάρος 103 χιλιογράμμων. Πόσον βάρος ἔχει τὸ ἑκατοστὸν τῆς λίτρας τοῦ αὐτοῦ ὕδατος, καὶ τίς ἡ ἀναλογία μεταξὺ τοῦ θαλασσίου καὶ τοῦ γλυκέος ὕδατος;

('Απ. 10,3 γρ., 103 : 100).

8) 'Ατμόπλοιόν τι διανύει 80 μίλια εἰς $10\,^1/_2$ ὥρας· εἰς πόσας ὥρας διανύει 150 μίλια; ('Απ. $19\frac{11}{16}$ὥρ.)

9) Δύο συνέταιροι κατέθηκαν πρὸς ἐπιχείρησίν τινα κατὰ τὸ αὐτὸ χρονικὸν διάστημα ὁ μὲν 6637,05 δρ. καὶ ἐκέρδησεν 948,15 δρ., ὁ δὲ 2960,51δρ. καὶ ἐκέρδησε 503δρ. Ζητεῖται τίς τῶν δύο ἐκέρδησε περισσότερον ἀναλόγως τῶν κατατεθέντων χρημάτων.

('Απ. ὁ δεύτερος ὡς ἔχων λαμβάνειν μόνον 422,93δρ.)

## 2) Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν.

214. *Ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν* λύει τὰ ἀριθμητικὰ προβλήματα, ἐν οἷς δίδονται αἱ τιμαὶ πολλῶν ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ ζητεῖται ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν, ὅταν ἡ τιμὴ πάντων τῶν λοιπῶν μεταβληθῇ. Ὅταν π.χ. δίδωνται αἱ τιμαὶ α, β, γ, δ τεσσάρων ποσῶν (ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων) καὶ αἱ τιμαὶ α, β, γ μεταβληθῶσιν εἰς α′, β′, γ′, τότε ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τῆς δ.

Λέγεται δὲ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν· διότι τὰ δι' αὐτῆς λυόμενα ἀριθμητικὰ προβλήματα ἀναλύονται εἰς δύο ἢ πολλὰ προβλήματα τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἥτις καλεῖται καὶ *ἁπλῆ* πρὸς διάκρισιν.

Ὁ δὲ τρόπος τῆς λύσεως τῶν τοιούτων προβλημάτων καθίσταται φανερὸς διὰ τῶν ἑπομένων παραδειγμάτων.

1) 15 *ἐργάται ἐργαζόμενοι* 8*ὥρ. καθ' ἡμέραν ἐκτελοῦσιν ἔργον τι εἰς* 20 *ἡμέρας· πόσας ὥρας καθ' ἡμέραν πρέπει νὰ ἐργάζωνται* 40 *ἐργάται πρὸς ἐκτέλεσιν τοῦ αὐτοῦ ἔργου εἰς* 16 *ἡμέρας ;*

Ἐνταῦθα δίδονται προφανῶς οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ παριστῶντες τρία ποσὰ ἐξαρτώμενα ἀπ' ἀλλήλων 15ἐργ. 8ὥρ. 20ἡμ. καὶ μεταβάλλονται οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἐργατῶν καὶ τῶν ὡρῶν ἀπὸ 15ἐρ. καὶ 20ἡμ. εἰς 40ἐρ. καὶ 16ἡμ., ζητεῖται δὲ ἡ ἀντίστοιχος μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ὡρῶν.

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως γίνεται ὡς ἑξῆς·

| | | |
|---|---|---|
| 15ἐρ. | 20ἡμ. | 8ὥρ. |
| 40 | 16 | $x$ |

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| αἱ | 15ἐρ. | χρειάζονται | 20ἡμ. | ἐργαζόμενοι | 8ὥρας |
| ὁ | 1 | χρειάζεται | 1 | ἐργαζόμενος | 8.15.20ὥρας |
| καὶ οἱ | 40 | χρειάζονται | 16 | ἐργαζόμενοι | $\frac{8.15.20}{40.16}$ ὥρας. |

*Λύσις δι' ἀναλογιῶν.* Ἐπειδὴ ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν ἀναλύεται εἰς ἁπλᾶς, ἕπεται (τῶν ποσῶν ὄντων ἀντιστρόφων).

$$\frac{40}{15}=\frac{8}{x}$$

$$\frac{16}{20}=\frac{x}{y},$$ (ὅπου ὁ $x$ θεωρεῖται γνωστὸς ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας).

Ὅθεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων

$$\frac{40.16}{15.20}=\frac{8.x}{x.y}=\frac{8}{y}$$

καὶ

$$\frac{8.15.20}{40.16}=3+\frac{3}{4}\text{ὥρας}$$

2) 30 ἐργάται ἐργαζόμενοι 7ὥρας καθ' ἡμέραν χρειάζονται 25ἡμ., ἵνα σκάψωσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 150 πήχεων, πλάτος 4 καὶ βάθος 3. Εἰς πόσας ἡμέρας 40 ἐργάται ἐργαζόμενοι 9ὥρας καθ' ἡμέραν σκάπτουσι τάφρον ἔχουσαν μῆκος 90 πήχεων, πλάτος 7 καὶ βάθος 2;

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως γίνεται ὡς ἑξῆς :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30ἐργ. | 150μῆκ. | 4πλάτ. | 3βάθ. | 7ὧρ. | 25ἡμ. |
| 40 | 90 | 7 | 2 | 9 | $x$ |

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 30ἐρ. | 150μῆκ. | 4πλ. | 3βάθ. | 7ὧρ.ἐπὶ | 25ἡμ. |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 » | $\frac{25.30.7}{150.4.3}$ |
| 40 | 90 | 7 | 2 | 9 » | $\frac{25.30.7.90.7.2}{150.4.3.40.9}$ |

*Λύσις δι' ἀναλογιῶν.* Ἐπειδὴ ἡ σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν ἀναλύεται εἰς ἁπλᾶς, ἕπεται (τινῶν τῶν ποσῶν ὄντων ἀναλόγων ἢ ἀντιστρόφων).

$\frac{40}{30}=\frac{25}{x}$

$\frac{150}{90}=\frac{x}{x'}$ ὅπου ὁ $x$ θεωρεῖται γνωστὸς ἐκ τῆς πρώτης ἀναλογίας

$\frac{4}{7}=\frac{x'}{x''}$ » $x'$ » » » δευτέρας »

$\frac{3}{2}=\frac{x''}{x'''}$ » $x''$ » » » τρίτης »

$\frac{9}{7}=\frac{x'''}{y}$ » $x'''$ » » » τετάρτης »

Ὅθεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων (ὅτε ἐξαλείφονται τὰ $x$, $x'$, $x''$, $x'''$) προκύπτει

$$\frac{40.150\;4.3.9}{30.\;90.\;7\;2.7}=\frac{25}{y} \text{ καὶ } y=\frac{25.\;30.\;90\;7.2\;7}{40.150.4.3\;9}=2\frac{1}{24}\text{ ἡμέρας}$$

215. Ἐκ τῆς διατάξεως τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

*Πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ἀγνώστου πολλαπλασιάζεται ὁ ὑπεράνω αὐτοῦ ὁμοειδὴς ἀριθμὸς ἀλλεπαλλήλως ἐφ' ἕκαστον τῶν κλασμάτων, ἅτινα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν δύο τιμῶν ἑκάστου ποσοῦ· ἀντιστρέφεται δ' ὅμως προηγουμένως τὸ κλάσμα, ἐὰν τὸ ποσὸν αὐτοῦ ἦναι ἀνάλογον πρὸς τὸ ποσὸν τοῦ ἀγνώστου.*

## Ζητήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ἕξ ἄνδρες ἐπὶ 24 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐξετέλεσαν ἔργον τι ἐκ 456 μέτρων. Ζητεῖται πόσον ἔργον ἐκτελοῦσι 5 ἄνδρες ἐπὶ 20 ἡμέρας ἐργαζόμενοι 10 ὥρας καθ' ἡμέραν. ('Απ. 395,83 μέτ.).

2) Ἐὰν 9 ἐργάται ἐργαζόμενοι 13 ὥρας καθ' ἡμέραν χρειάζωνται 48 ἡμέρας, ἵνα σκάψωσι τάφρον 65 μέτρων μήκους, 12 πλάτους καὶ 5 βάθους· πόσας ἡμέρας χρειάζονται 24 ἐργάται τῆς αὐτῆς δυνάμεως καὶ οἱ πρῶτοι ἐργαζόμενοι 11 ὥρας καθ' ἡμέραν, ἵνα σκάψωσι τάφρον 154 μέτρων μήκους, 25 πλατους καὶ 6 βάθους; ('Απ. 126ἡμ.).

3) Ἐπὶ 24 ἡμέρας τῶν 9 ἐργασίμων ὡρῶν ὅμιλος 135 ἐργατῶν ἔσκαψαν τάφρον ἔχουσαν μῆκος 180 μέτρων, πλάτος 4 καὶ βάθος 3. Ἐπὶ 30 δὲ ἡμέρας τῶν 8 ἐργασίμων ὡρῶν ἕτερος ὅμιλος 150 ἐργατῶν ἔσκαψε τάφρον ἐπὶ ὁμοίου ἐδάφους ἔχουσαν μῆκος 200 μέτρων, πλάτος 4 καὶ βάθος $2^1/_2$. Ζητεῖται, ποία πρέπει νὰ ἦναι ἡ ἀναλογία τοῦ ἡμερομισθίου ἑκάστης ἐργασίμου ὥρας δι' ἕκαστον ἐργάτην τῶν δύο ὁμίλων. ('Απ. 4 : 3).

4) Κιβώτιόν τι ἔχει μῆκος 8 ποδῶν καὶ 3 δακτύλων, πλάτος 5 ποδῶν καὶ 4 δακτύλων καὶ βάθος 3 ποδῶν καὶ 2 δακτύλων. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ εἰς λίτρας, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 880 κυβικὰ μέτρα ἰσοδυναμοῦσι πρὸς 25673 κυβικοὺς πόδας. ('Απ. 4776,02...λίτραι).

5) Δύο ἀντλίαι λειτουργοῦσαι ἐπὶ 8 ἡμέρας 7 ὥρας καθ' ἡμέραν κατεβίβασαν κατὰ 6 πόδας τὴν ἐπιφάνειαν ὕδατος δεξαμενῆς τινος. Πόσας ὥρας χρειάζονται 3 ἀντλίαι (τοῦ αὐτοῦ εἴδους καὶ αἱ πρῶται) λειτουργοῦσαι ἐπὶ 5 ἡμέρας, ὅπως ἐπιφέρωσι τὴν αὐτὴν ἐλάττωσιν τῆς δεξαμενῆς;

('Απ. 7ὥρ.28').

### 3) Συνεζευγμένη μέθοδος.

216. Ὡς σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν δύναται νὰ θεωρῆται καὶ ἡ καλουμένη *συνεζευγμένη μέθοδος*. Π. χ.

1) *Εὑρεῖν πόσα ρωσσικὰ ρούβλια ἀποτελοῦσι 2500 τουρκικαὶ λίραι γνωστοῦ ὄντος, ὅτι*

12τουρκ. λίρ. = 11 ἀγγλ. λίρ.
26ἀγγλ. = 165 ρούβλια.

*Λύσις*. Ἐπειδὴ

26ἀγγλ. λ.=165ρούβ.

$$1 \quad =\frac{165}{26},$$

$$11 \quad =\frac{165.11}{26}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$12\text{τουρκ. λ.}=\frac{165.11}{26}\text{ρούβ.}(=11\text{ἀγγ. λ.})$$

$$1 \quad =\frac{165.11}{26.12},$$

$$2500 \quad =\frac{165.11.2500}{26.12}$$

2) *Ἔμπορος ἔφερεν ἐκ Παρισίων εἰς Ἀθήνας 3000 πήχεις ὑφάσματός τινος, τὸ ὁποῖον ἠγόρασε πρὸς 2,50 φρ. τὸ μέτρον ἐδαπάνησε δὲ διὰ ναῦλον καὶ δασμὸν 28 ἐπὶ τοῖς 100 (ἤτοι διὰ πρᾶγμα ἀξίας 100 δρ. ἐδαπάνησεν 28 δρ.). Πόσον τιμᾶται ὁ μικρὸς πῆχυς ἐν Ἀθήναις, ἐὰν ἡ τιμὴ τοῦ εἰκοσαφράγκου ἦναι 31δρ. χάρτιναι;*

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἑξῆς:

Γράφονται τὰ δεδομένα καὶ τὸ ἄγνωστον ὡς ἑξῆς·

$x$ δραχ. =1μικ. πῆχ.
1μικ.πῆχ. =0,648 μέτ.
1μέτ. =2,50φρ,
20φρ. =31δρ. χάρτ.
πρὸ τῶν ἐξόδων 100δρ. =128 δρ. μετὰ τὰ ἔξοδα.

*Λύσις*. Ἐπειδή

$$100\delta\rho.\ \text{ἐν Παρισ.} = 128\ \delta\rho.\ \text{ἐν Ἀθήν.}$$

$$1 \quad = \frac{128}{100}$$

$$31 \quad = \frac{128\ 31}{100}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$20\varphi\rho. \quad = \frac{128.31}{100} (= 31\delta\rho.$$

$$1 \quad = \frac{128.31}{100.20}$$

$$2{,}50 \quad = \frac{128.31.2{,}50}{100.20}$$

καὶ ἐπειδὴ

$$1\mu\epsilon\tau. \quad = \frac{128.31.2{,}50}{100.20}, \ (= 2{,}50\varphi\rho.)$$

ἔπεται

$$0{,}648\mu\epsilon\tau. \quad = \frac{128.31.2{,}50\ 0{,}648}{100.20} = x.\delta\rho.$$

217. Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῆς λύσεως ταύτης πρὸς τὰ δεδομένα, ὡς εἶναι διατεταγμένα, συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

Γράφεται κατὰ πρῶτον τὸ γράμμα, δι' οὗ παρίσταται ὁ ἄγνωστος μετ' αὐτὸ δὲ ὁ ἰσοδύναμος ἀριθμός. Ὑπ' αὐτοὺς γράφονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον πάντα τὰ ζεύγη τῶν ἰσοδυνάμων ἀριθμῶν ἕκαστον εἰς ἕνα στίχον καὶ οὕτως, ὥστε ἕκαστος στίχος ἄρχεται ἀπὸ τοῦ εἴδους, εἰς ὃ λήγει ὁ ἀμέσως προηγούμενος· πρέπει δὲ τότε νὰ συμβαίνῃ, ὥστε ὁ τελευταῖος ἀριθμὸς τοῦ τελευταίου στίχου νὰ ἦναι ὁμοειδὴς τῷ ἀγνώστῳ (ὅπερ συμβαίνει πάντοτε, ἐὰν τὰ δεδομένα ἦναι ἐπαρκῆ πρὸς λύσιν τοῦ προβλήματος). Τούτων δὲ γενομένων, *πολλαπλασιάζονται πάντες οἱ μετὰ τὸν ἄγνωστον εὑρισκόμενοι ἀριθμοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν ὑποκάτω τοῦ ἀγνώστου εὑρισκομένων ἀριθμῶν· τὸ πηλίκον εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμός*.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

## Περὶ τόκου καὶ ὑφαιρέσεως.

### Ὁρισμοί.

100 1 ἔτος

218. *Τόκος* λέγεται τὸ κέρδος, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ὁ δανείζων χρήματα.

*Ἐπιτόκιον* λέγεται ὁ τόκος τῶν 100 δραχμῶν ἐπὶ ἓν ἔτος. Ὁρίζεται δὲ τὸ ἐπιτόκιον δι' ἰδιαιτέρας συμφωνίας μεταξὺ δανείζοντος καὶ δανειζομένου.

*Κεφάλαιον* λέγεται τὸ ποσὸν τῶν δανειζομένων χρημάτων.

Ὁ τόκος ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ κεφαλαίου, ἐκ τοῦ ἐπιτοκίου καὶ ἐκ τοῦ χρόνου, καθ' ὃν διαρκεῖ τὸ δάνειον.

Ὁ τόκος εἶναι ἢ *ἁπλοῦς* ἢ *σύνθετος*. Καὶ ἁπλοῦς μὲν λέγεται ὁ τόκος, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου· σύνθετος δέ, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστου ἔτους δίδῃ καὶ αὐτὸς τόκον κατὰ τὰ ἑπόμενα ἔτη· ὥστε εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους ὁ τόκος προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐκ τῆς προσθέσεως προκῦπτον ποσὸν λαμβάνεται ὡς κεφάλαιον κατὰ τὸ ἑπόμενον ἔτος.

Ἐὰν π. χ. δανεισθῇ τις 400 δραχ. πρὸς 10 ἐπὶ τοῖς 100, ἢ 10 % (οὕτω γράφεται τὸ ἐπιτόκιον), μετὰ ἁπλοῦ τόκου, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ὀφείλει 440 δρ. (400 κεφάλ. καὶ 40 τόκ.), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους 520, καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ἀλλ' ἐὰν ὁ τόκος ἦναι σύνθετος, εἰς μὲν τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους ὀφείλει 440 δραχ. (400 κεφ. καὶ 40 τόκ.), εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ δευτέρου 584 (540 κεφ. καὶ 44 τόκ.)· καὶ οὕτω καθεξῆς.

Ὁ σύνθετος τόκος λέγεται καὶ *ἀνατοκισμός*, τὸ δὲ ἐπὶ συνθέτῳ τόκῳ δανειζόμενον ποσὸν λέγεται, ὅτι *ἀνατοκίζεται*.

Ἐνταῦθα διαλαμβάνεται μόνον περὶ τοῦ ἁπλοῦ τόκου.

Ἐν παντὶ προβλήματι τόκου ὑπάρχουσι *τέσσαρα ποσά*, τὸ *κεφάλαιον*, ὁ *τόκος*, τὸ *ἐπιτόκιον*, ὁ *χρόνος*. Τὰ ποσὰ ταῦτα εἶναι ἀνὰ δύο ἢ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα· *ὁ τόκος εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων*. Διότι εἶναι φανερόν, ὅτι πολλαπλασιαζομένου ἢ τοῦ κεφαλαίου, ἢ τοῦ ἐπιτοκίου, ἢ τοῦ χρόνου καὶ τῶν λοιπῶν μενόντων τῶν αὐτῶν, πολλαπλασιάζεται καὶ ὁ τόκος.

*Τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος εἶναι ποσὰ ἀντίστροφα*· διότι, πολλαπλασιαζομένου τοῦ κεφαλαίου καὶ μένοντος τοῦ τόκου καὶ τοῦ ἐπιτοκίου τῶν αὐτῶν, διαιρεῖται ὁ χρόνος.

219. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται, ὅτι τὰ προβλήματα τοῦ τόκου λύονται κατὰ τὴν μέθοδον τῶν τριῶν (ἁπλῆν ἢ σύνθετον). Ἐπειδὴ δὲ ἐν παντὶ προβλήματι τόκου δίδονται τρία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ποσῶν καὶ ζητεῖται τὸ τέταρτον, τὸ δὲ ζητούμενον δύναται νὰ ἦναι ἢ ὁ τόκος, ἢ τὸ κεφάλαιον, ἢ τὸ ἐπιτόκιον, ἢ ὁ χρόνος, ἕπεται, ὅτι *τὰ προβλήματα τοῦ τόκου εἶναι τεσσάρων εἰδῶν*. Ἐν τοῖς ἑπομένοις λύεται ἓν ἐξ ἑκάστου εἴδους.

### 1ον) Ἄγνωστος ὁ τόκος.

*Πόσον τόκον φέρουσι 4500 δρ. ἐπὶ 6 ἔτη πρὸς 5 %;*

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἑξῆς·

| κεφ. | ἔτ. | τόκ. |
|---|---|---|
| 100 | 1 | 5 |
| 4500 | 6 | $x$ |

Ὅθεν κατὰ τὸν κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν (ἐδ. 215).

$$x=\frac{5.4500.6}{100}=1350 \text{ δρ.}$$

Ὥστε *πρὸς εὕρεσιν τοῦ τόκου πολλαπλασιάζονται τὰ λοιπὰ τρία δεδομένα (κεφάλαιον, ἐπιτόκιον, καὶ χρόνος) καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται δι᾽100.*

### 2ον) Ἄγνωστον τὸ κεφάλαιον.

*Ποῖον εἶναι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκιζόμενον ἐπὶ 4 ἔτη πρὸς 5 %, φέρει τόκον 1200 δρ.;*

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἑξῆς·

| κεφ. | ἔτ. | τόκ. |
|---|---|---|
| 100 | 1 | 5 |
| $x$ | 4 | 1200 |

Ὅθεν

$$x=\frac{100.1200}{5.4}=6000 \text{δρ.}$$

Ὥστε *πρὸς εὕρεσιν τοῦ κεφαλαίου πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ* 100 *καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο λοιπῶν δεδομένων (ἐπιτοκίου καὶ χρόνου).*

3ον) Ἄγνωστον τὸ ἐπιτόκιον.

*Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον τοκισθεῖσαι* 5000 *δρ. ἐπὶ* 4 *ἔτη ἔφερον τόκον* 1200 δρ. ;

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἑξῆς·

| κεφ. | ἔτ. | τόκ. |
|---|---|---|
| 5000 | 4 | 1200 |
| 100 | 1 | $x$ |

Ὅθεν

$$x=\frac{100.1200}{5000.4}=6\%$$

Ὥστε *πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἐπιτοκίου πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ* 100 *καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο λοιπῶν δεδομένων (κεφαλαίου καὶ χρόνου).*

4ον) Ἄγνωστος ὁ χρόνος.

*Ἐπὶ πόσα ἔτη τοκιζόμεναι* 4500 *δρ. πρὸς* 6 % *φέρουσι τόκον* 630 *δρ.;*

Ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι ἡ ἑξῆς·

| κεφ. | ἔτ. | τόκ. |
|---|---|---|
| 100 | 1 | 6 |
| 1000 | $x$ | 630 |

Ὅθεν

$$x=\frac{100.630}{4500.6}=2\frac{1}{3}\text{ἔτ.}$$

Ὥστε *πρὸς εὕρεσιν τοῦ χρόνου πολλαπλασιάζεται ὁ τόκος ἐπὶ* 100 *καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν δύο λοιπῶν δεδομένων (κεφαλαίου καὶ ἐπιτοκίου).*

*Παρατήρησις.* Οἱ ἀνωτέρω εὑρεθέντες τέσσαρες κανόνες τῶν τεσσάρων εἰδῶν προβλημάτων τοῦ τόκου περιλαμβάνονται εἰς ἕνα κανόνα, τὸν ἑξῆς·

*Ἐὰν μὲν ζητῆται ὁ τόκος, πολλαπλασιάζονται τὰ λοιπὰ τρία δεδομένα καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται δι'* 100· *ἐὰν δὲ ζητῆται ἄλλο τι, πολλαπλασιά-*

*ζεται ὁ τόκος ἐπὶ* 100 *καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ γινομένου τῶν λοιπῶν δύο δεδομένων.*

## Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Ποῖος ὁ τόκος κεφαλαίου 6217,60δρ. ἐπὶ 1 ἔτος πρὸς $3\frac{3}{4}$ %;

('Απ. 233,16 δρ.).

2) Ποῖον τὸ κεφάλαιον τὸ τοκιζόμενον ἐπὶ 292 ἡμέρας πρὸς 5 % καὶ φέρει τόκον 387,30 δρ.; (1ἔτ.=365ἡμ.). ('Απ. 9682,50 δρ.).

3) Ποῖος ὁ τόκος κεφαλαίου 9682,50 δρ. τοκισθέντος πρὸς 5 % ἀπὸ τῆς 6 Μαρτίου μέχρι τῆς 23 Δεκεμβρίου τοῦ αὐτοῦ ἔτους; ('Απ. 387,30 δρ.).

4) 'Επὶ πόσον χρόνον τοκιζόμενον τὸ κεφάλαιον 4502,25δρ. πρὸς $3\frac{7}{8}$ % φέρει τόκον $930,46\frac{1}{2}$ δρ.; ('Απ. 5 ἔτη καὶ 4 μῆν.)

5) Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ τὴν 13 Μαΐου μετοχή τις ἀγορασθεῖσα τὴν 1ην Μαρτίου ἀντὶ 525 δρ., ἵνα φέρῃ κέρδος 15%;

('Απ. 540,75δρ.).

6) 'Ηγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 120000δρ. μετά τινα χρόνον ἐπώλησεν αὐτὴν μετὰ κέρδους 12 % καὶ ἐτόκισε τὸ ὅλον ποσὸν πρὸς 4 %. Ζητεῖται τὸ ἐτήσιον κέρδος. ('Απ. 5376 δρ.)

7) Οἰκία τις φέρει ἐνοίκιον ἐτήσιον 2358 δρ.· πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ, ὅπως τὸ κέρδος ᾖναι $4\,^1/_2$ %; ('Απ. 52400 δρ.)

## 2) Περὶ ὑφαιρέσεως.

### Ὁρισμοί.

220. *Ὑφαίρεσις ἢ ἔκπτωσις* λέγεται τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐκπίπτεται ἔκ τινος χρέους ἢ γραμματίου ἐξοφλουμένου πρὸ τῆς προθεσμίας αὐτοῦ.

*Προεξόφλησις* δὲ εἶναι τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον μένει μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῆς ἐκπτώσεως ἀπὸ τῆς ἐν τῷ γραμματίῳ ποσότητος.

Ἡ ὑφαίρεσις εἶναι δύο εἰδῶν *ἐξωτερικὴ* καὶ *ἐσωτερική*.

1) *Ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις* εἶναι ὁ τόκος ὅλου τοῦ ποσοῦ τοῦ περιεχομένου ἐν τῷ χρεωστικῷ γραμματίῳ ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι

τῆς λήξεως αὐτοῦ. Διὸ τὰ *προβλήματα τῆς ἐξωτερικῆς ὑφαιρέσεως κατ' οὐδὲν διαφέρουσι τῶν προβλημάτων τοῦ ἁπλοῦ τόκου*· Π.χ.

*Τὴν 12ην Μαρτίου πρόκειται νὰ προεξοφληθῇ πρὸς* 6°/₀ *χρεωστικὸν γραμμάτιον* 3528 *δρ. πληρωτέον τὴν 28ην Ἰουνίου. Ποία εἶναι ἡ ἔκπτωσις καὶ ἡ προεξόφλησις;*

*Λύσις*. Ἀπὸ τῆς 12ης Μαρτίου μέχρι τῆς 28ης Ἰουνίου εἶναι 108 ἡμέραι. Ὅθεν ἡ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι κατὰ τὸν ὁρισμὸν ἡ ἑξῆς.

| | | |
|---|---|---|
| 100δρ. | 360ἡμ. | 6τοκ. |
| 3528 | 108 | $x$ |

καὶ ἑπομένως (ἐδ. 215)

$$\text{ἡ ἔκπτωσις} = \frac{3528.6.108}{100.360} = 63{,}50\text{δρ.}$$

ἡ δὲ προεξόφλησις=3528—63,50=3464,50δρ.

*Παρατήρησις*. Ἐκ τῶν 3528 δρ. πληρώνονται μόνον αἱ 3464,50δρ. Καὶ ἐν τούτοις κρατεῖται ὁ τόκος τῶν 3528δρ. Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις δὲν εἶναι δικαία· οἱ δὲ ἐμπορευόμενοι ποιοῦνται χρῆσιν αὐτῆς δικαιολογουμένης διὰ τῆς ἀμοιβαιότητος.

2) Ἡ *ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις* εἶναι ὁ τόκος τῆς προεξοφλήσεως ἀπὸ τῆς ἡμέρας, καθ' ἣν αὕτη γίνεται, μέχρι τῆς λήξεως τοῦ χρεωστικοῦ γραμματίου, ἢ ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου κατὰ τὸ χρονικὸν τοῦτο διάστημα· Π. χ.

*Γραμμάτιον* 699,70 *δρ. εἶναι πληρωτέον μετὰ* 9 *μῆνας· τίς ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ πρὸς* 5°/₀;

*Λύσις*. Ἐν πρώτοις εὑρίσκεται ὁ τόκος τῶν 100 δρ. ἐπὶ 9 μῆνας πρὸς 5°/₀. Εἶναι δὲ οὗτος $\frac{5.9}{12}$=3,75δρ. καὶ ἑπομένως αἱ 100 δρ. μετὰ 9 μῆνας γίνονται 103,75. Ἡ δὲ διάταξις τῆς λύσεως εἶναι εἶτα ἡ ἑξῆς·

| γραμ. | προεξ. | | γραμ. | ἐσωτ. ὑφ. |
|---|---|---|---|---|
| 103,75 | 100 | ἢ | 103,75 | 3,75 |
| 699,70 | $x$ | | 699,70 | $x$ |

Κατὰ μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν εὑρίσκεται ἡ προεξόφλησις, ἥτις εἶναι (ἐδ. 213)

$$\frac{100.699{,}70}{103{,}75} = 674{,}40$$

κατὰ δὲ τὴν δευτέραν περίπτωσιν εὑρίσκεται ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις, ἥτις εἶναι

$$\frac{3{,}75\ 699{,}70}{103{,}75}=25{,}30$$

*Σημ.* Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εὑρίσκεται καὶ ἀμέσως δι' ἀφαιρέσεως τῆς εὑρεθείσης προεξοφλήσεως ἀπὸ τῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου.

221. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ὁ ἑξῆς κανὼν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως *Πρὸς εὕρεσιν τῆς ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως πολλαπλασιάζεται τὸ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσὸν ἐπὶ τὸν τόκον τῶν* 100 *δραχμῶν διὰ τὸν χρόνον τὸν παρερχόμενον ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου καὶ τὸ γινόμενον διαιρεῖται διὰ τοῦ τόκου τούτου σὺν τῷ* 100.

*Σημ.* Ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις εἶναι μὲν ἀνάλογος τοῦ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσοῦ, ἀλλὰ δὲν εἶναι ἀνάλογος οὔτε τοῦ χρόνου οὔτε τοῦ ἐπιτοκίου. Διότι, ὡς φαίνεται εὐκόλως καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρου προβλήματος, διπλασιαζομένου τοῦ χρόνου ἢ τοῦ ἐπιτοκίου δὲν διπλασιάζεται ἡ ὑφαίρεσις, ἀλλὰ γίνεται ἐν μὲν τῇ πρώτῃ περιπτώσει κατά τι μικροτέρα ἢ διπλασία, ἐν δὲ τῇ δευτέρᾳ περιπτώσει κατά τι μεγαλειτέρα ἢ διπλασία.

222. Τὰ προβλήματα, ἐν οἷς *ἡ ὑφαίρεσις εἶναι γνωστὴ* καὶ ζητεῖται ἢ ὁ χρόνος ἢ τὸ ἐπιτόκιον ἢ τὸ ἐν τῷ γραμματίῳ ποσὸν *ἀνάγονται εὐκόλως εἰς προβλήματα τόκου·* διότι ἡ ὑφαίρεσις εἶναι ὁ τόκος τῆς παρούσης ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπὸ τῆς ἡμέρας τῆς προεξοφλήσεως μέχρι τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Π.χ.

1) *Γραμμάτιόν τι ἐξωφλήθη* 7 *μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς* 8 % *δι' ὑφαιρέσεως* 80 *δρ. Πόσον εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου;*

Ἐν πρώτοις εὑρίσκεται τὸ κεφάλαιον τὸ φέρον εἰς 9 μῆνας πρὸς 8 % τόκον 80 δρ. Τὸ δὲ κεφάλαιον τοῦτο εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία τοῦ γραμματίου, εἰς ἣν προστιθεμένης τῆς ὑφαιρέσεως προκύπτει τὸ ὅλον ποσὸν τοῦ γραμματίου.

2) *Γραμματίου* 2500 *δρ. ἐξοφληθέντος* 18 *μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ἐγένετο ὑφαίρεσις* 230 *δρ. Πρὸς πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις;*

Φανερόν, ὅτι αἱ 230 δρ. εἶναι ὁ τόκος τῶν 2500— 230=2270 δρ., δι' ὧν ἐξωφλήθη τὸ γραμμάτιον εἰς 18 μῆνας· ζητεῖται δὲ τὸ ἐπιτόκιον.

## Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Εὑρεῖν τὴν ἐξωτ. ὑφαίρεσιν γραμματίου 500 δρ. εἰς 6 μῆνας πρὸς 5 %. (Ἀπ. 12,50 δρ.).

2) Εὑρεῖν τὴν ἐσωτ. ὑφαίρεσιν γραμματίου 1500 δρ. πληρωτέου μετὰ 4 μῆνας πρὸς 5,50 %. ('Απ. 270,491 δρ.),

3) Τίς ἡ παροῦσα ἀξία γραμματίου 3118, 50 δρ. πληρωτέου μετὰ 5 μῆνας πρὸς 3 % ; (ἐσωτ. καὶ ἐξωτ. ὑφαίρεσις).

('Απ. 3080 δρ. $3079,51\frac{7}{8}$ δρ.)

4) Ἔλαβέ τις κεφάλαιον καὶ τόκους 885000 δρ. ποσοῦ τινος τοκισθέντος ἐπὶ 14 ἔτη πρὸς $5\frac{1}{2}$ %. Ποῖον τὸ ποσὸν τοῦτο; ('Απ. 500000 δρ.).

5) Ἠγόρασέ τις 10 κιβώτια σάπωνος ζυγίζοντα 3925 λίτρας (ἡ τάρα εἶναι 8 %) πρὸς 55 δρ. τὸ ἑκατόλιτρον πληρωτέας μετὰ 5 μῆνας. Ἐπλήρωσε δὲ μετὰ $1\frac{1}{2}$ μῆνα μετὰ τῆς ἐξωτ. ἐκπτώσεως $\frac{1}{2}$ % κατὰ μῆνα. Ζητεῖται, πόσον ὤφειλεν. ('Απ. 1951, 30δρ.).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'.

## **Περὶ μερισμοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.**

### Προβλήματα ἑταιρίας, ἀναμίξεως καὶ ἀριθμητικῶν μέσων.

### **Ὁρισμοί.**

223. *Μερισμὸς ἀριθμοῦ τινος εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμοὺς* λέγεται ὁ μερισμὸς αὐτοῦ εἰς μέρη τοιαῦτα, ὥστε οἱ λόγοι αὐτῶν πρὸς τοὺς δοθέντας ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς νὰ ἦναι ἴσοι.

Ἔστω ὁ τυχὼν ἀριθμὸς N, οὗτινος τὰ μέρη $x$, $y$, $z$ ἀνάλογα πρὸς τοὺς δοθέντας ἀντιστοίχους ἀριθμοὺς α, β, γ. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι (ἐδ. 158).

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{x+y+z}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{N}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Ὅθεν

$$(1)\qquad x=\frac{N.\alpha}{\alpha+\beta+\gamma},\ y=\frac{N.\beta}{\alpha+\beta+\gamma},\ z=\frac{N.\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

Τουτέστιν, *ἵνα μερισθῇ ἀριθμὸς εἰς μέρη ἀνάλογα δοθέντων ἀριθμῶν,* *πολλαπλασιάζεται αὐτὸς ἐπὶ ἕκαστον τῶν δοθέντων ἀριθμῶν καὶ τὰ γινόμενα διαιροῦνται διὰ τοῦ ἀθροίσματος τῶν αὐτῶν ἀριθμῶν.*

224. *Ἐὰν οἱ ἀριθμοί, ἀναλόγως τῶν ὁποίων μερίζεται ἀριθμός τις, πολλαπλασιασθῶσι πάντες ἢ διαιρεθῶσι πάντες διὰ τοῦ τυχόντος ἀριθμοῦ, τὰ μέρη τοῦ ἀριθμοῦ δὲν μεταβάλλονται.* Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως καὶ ἐκ τῶν τιμῶν (1) τῶν μερῶν τοῦ ἀριθμοῦ· διότι, ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἢ διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων τῶν τιμῶν τούτων διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, αἱ τιμαὶ αὗται δὲν μεταβάλλονται.

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἀριθμός τις πρόκειται νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{11}{6}$, ἀρκεῖ νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 11, οἵτινες εὑρίσκονται ἐκ τῶν πρώτων πολλαπλασιασθέντων πάντων ἐπὶ 6.

Ὁμοίως ἀντὶ νὰ μερισθῇ ἀριθμός τις εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 200, 300, 700, ἀρκεῖ νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 7, οἵτινες εὑρίσκονται ἐκ τῶν πρώτων διαιρεθέντων πάντων δι' 100. Π. χ.

1) *Μερισμὸς τοῦ* 100 *εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* 1, 2, 3. Τὰ μέρη ταῦτα εἶναι·

$$\frac{100}{1+2+3}, \frac{100.2}{1+2+3}, \frac{100.3}{1+2+3}$$

ἢ $$\frac{100}{6}, \frac{200}{6}, \frac{300}{6}$$

ἢ καὶ $$\frac{50}{3}, \frac{100}{3}, 50$$

2) *Μερισμὸς τοῦ* 10 *εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$. Τὰ μέρη ταῦτα εἶναι·

$$\frac{10.4}{15}, \frac{10.6}{15}, \frac{10.5}{15} \text{ ἢ } \frac{8}{3}, 4, \frac{10}{3}$$

3) *Μερισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ* 20 *εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν* 30, 60, 120. Τὰ μέρη ταῦτα εἶναι·

$$\frac{20}{7}, \frac{20.2}{7}, \frac{20.4}{7} \text{ ἢ } \frac{20}{7}, \frac{40}{7}, \frac{80}{7}$$

4) *Μερισμὸς τοῦ* 100 *ἀναλόγως τῶν ἀριθμῶν* $\frac{1}{3}, 2, \frac{1}{5}, 0,1$. Τὰ ζητούμενα μέρη εἶναι·

$$\frac{1000}{379}, \frac{6000}{379}, \frac{600}{379}, \frac{300}{379}$$

## 1) Προβλήματα ἑταιρίας.

225. *Προβλήματα ἑταιρίας* λέγονται ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται νὰ μερισθῇ τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία ἐπιχειρήσεώς τινος ἀναλόγως τῶν χρηματικῶν ποσῶν τῶν ἀναλαβόντων αὐτήν.

Τὰ τοιαῦτα ἄρα προβλήματα ἀνάγονται εἰς τὸν μερισμὸν εἰς μέρη ἀνάλογα. Ἐὰν π.χ. δύο ἢ πολλοὶ ἄνθρωποι συνεταιρισθῶσιν, ὅπως ἀναλάβωσιν ἐπιχείρησίν τινα, συμφωνοῦσι γενικῶς νὰ μοιράζωσι τὸ κέρδος ἢ τὴν ζημίαν αὐτῶν *ἀναλόγως πρὸς τὰς χρηματικὰς καταθέσεις αὐτῶν*.

Ἐὰν δὲ αἱ καταθέσεις αὗται τῶν συνεταίρων μένουσιν ἀνίσους χρόνους ἐν τῇ ἐπιχειρήσει, τὸ κέρδος ἢ ἡ ζημία μοιράζεται *ἀναλόγως τῶν γινομένων τῶν καταθέσεων ἐπὶ τοὺς ἀντιστοίχους χρόνους*· διότι ἐν ἴσοις χρόνοις τὰ μερίδια πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογα τῶν καταθέσεων. Π. χ.

1) *Τρεῖς ἔμποροι ἀνέλαβον ἐπιχείρησίν τινα καὶ ἐκέρδησαν* 1800*δρ. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἕκαστος αὐτῶν, ἐὰν ὁ μὲν πρῶτος κατέθηκε διὰ τὴν ἐπιχείρησιν* 2000*δρ., ὁ δεύτερος* 4000*δρ. καὶ ὁ τρίτος* 6000 ;

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἡ ὅλη κατάθεσις τῶν ἐμπόρων διὰ τὴν ἐπιχείρησιν εἶναι

$$2000+4000+6000=12000\text{δρ.}$$ ὥστε

αἱ 12000δρ. φέρουσι κέρδος 1800δρ.

ἡ 1 φέρει » $\frac{1800}{12000}$

καὶ ἑπομένως αἱ 2000,4000,6000 φέρουσι κέρδη

$$\frac{1800.2000}{12000}, \frac{1800.4000}{12000}, \frac{1800.6000}{12000}$$

*Λύσις δι' ἀναλογιῶν.* Ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 1800, οὗτινος τὰ μέρη πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2000,4000,6000 ἢ τῶν ἀριθμῶν 1,2,3 (ἐδ. 158, 219), ἤτοι

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}=\frac{x+y+z}{6}=\frac{1800}{6}=300$$

ὅθεν $x=300, y=600, z=900$

2) *Τρεῖς συνέταιροι ἀνέλαβον ἐπιχείρησίν τινα καὶ ἐκέρδησαν 6000δρ. Ὁ πρῶτος κατέθηκε διὰ τὴν ἐπιχείρησιν ταύτην 3000δρ. ἐπὶ 2μην., ὁ δεύτερος 750δρ. ἐπὶ 10μην. καὶ ὁ τρίτος 500δρ. ἐπὶ 6μην. Πόσον κέρδος ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕκαστον τῶν συνεταίρων τούτων;*

Αἱ καταθέσεις τῶν τριῶν συνεταίρων εἶναι 3000.12,750.10,500.6. Διότι αἱ καταθέσεις 3000δρ. ἐπὶ 2μην., 750δρ. ἐπὶ 10μην., 500δρ. ἐπὶ 6μην. εἶναι αἱ καταθέσεις 3000.2,750.10,500.6 ἐπὶ 1μην. Εἶναι δὲ 3000.2=6000,750.10=7500,3000 καὶ 6000+7500+3000=16500.

*Λύσις διὰ τῆς ἀναγωγῆς εἰς τὴν μονάδα.* Ἐπειδὴ

αἱ 16500δρ. φέρουσι κέρδος 6000δρ.

ἡ 1 φέρει » $\frac{6000}{16500}$

καὶ ἐπομένως αἱ 6000,7500,3000 φέρουσι κέρδη

$$\frac{6000.6000}{16500}, \frac{6000.7500}{16500}, \frac{6000.3000}{16500}.$$

*Λύσις δι' ἀναλογιῶν.* Ὁ μεριστέος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 6000, οὗ τὰ μέρη πρέπει νὰ ἦναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 6000,7500,3000 ἢ τῶν ἀριθμῶν 4,5,2 (ἐδ. 219), ἤτοι

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{2}=\frac{x+y+z}{11}=\frac{6000}{11}$$

ὅθεν $x=\frac{6000.4}{11}, y=\frac{6000.5}{11}, z=\frac{6000.2}{11}.$

ἢ $x=2181,81\ldots y=2727,27\ldots z=1090,90\ldots$

## Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Τρεῖς συνέταιροι ἔχουσι νὰ μοιρασθῶσιν 835,40 δρ., αἱ δὲ καταθέσεις αὐτῶν εἶναι 350δρ.,540δρ.,840δρ. Ποῖα τὰ μερίδια αὐτῶν;

(Ἀπ. $169{,}01\frac{27}{173}, 260{,}76\frac{12}{173}, 405{,}62\frac{134}{173}$)

2) Πρόκειται νὰ μοιρασθῶσι 4320δρ. οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον μερίδιον

νὰ ἦναι τὰ $\frac{6}{7}$ τοῦ πρώτου, καὶ τὸ τρίτον μερίδιον τὰ $\frac{5}{6}$ τοῦ δευτέρου. Ποῖα τὰ μερίδια ταῦτα; ('Απ. 1680,1440,1200).

3) Τρεῖς κληρονόμοι διανέμονται κληρονομίαν τινὰ καὶ λαμβάνουσιν ὁ πρῶτος τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ὅλης κληρονομίας, ὁ δεύτερος τὸ $\frac{2}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τὸ $\frac{1}{4}$ τῶν μεριδίων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου· τὸ δὲ ὑπόλοιπον ἐδαπανήθη διὰ διάφορα ἔξοδα. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὰ τρία μερίδια ἀποτελοῦσιν 7525δρ., ποῖα τὰ μερίδια καὶ τὸ ὑπόλοιπον;

('Απ. 3512δρ.2408δρ.1505δρ. ὑπόλοιπον 3311δρ.).

4) Πρὸς κατασκευὴν τῆς πυρίτιδος λαμβάνονται συνήθως 16 μέρη νίτρου, 3 μέρη ἄνθρακος καὶ 2 μέρη θείου· πόσαι ὀκάδες ἐξ ἑκάστης τῶν ὑλῶν τούτων χρειάζονται πρὸς κατασκευὴ 420 ὀκ. πυρίτιδος ; (Απ. 320,60,40).

5) Ἔμπορός τις ἀνέλαβεν ἐπιχείρησίν τινα καταθέσας 10000 δρ.· μετὰ 4 μῆνας προσέλαβε καὶ συνέταιρον, ὅστις κατέθεσε 3000 δρ., δύο δὲ ἔτη μετὰ ταῦτα εὗρον, ὅτι ἐκέρδησαν 5000 δρ. Πόσας πρέπει νὰ λάβῃ ἑκάτερος αὐτῶν;

('Απ. 1400,3600).

6) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ δύο ἐργατῶν, ὧν ὁ μὲν πρῶτος εἰργάσθη 7 ἡμέρας ἐπὶ 12 ὥρας καθ' ἡμέραν, ὁ δὲ δεύτερος 12 ἡμέρας ἐπὶ 8 ὥρας. Ἔλαβον δὲ εἰς πληρωμὴν 150 δραχμάς· πόσας ἔλαβεν ἑκάτερος ; ('Απ. 70,80).

## 2) Προβλήματα ἀναμίξεως :

226. Τὰ προβλήματα τῆς ἀναμίξεως εἶναι δύο εἰδῶν.

α') *Ἐκεῖνα, ἐν οἷς ζητεῖται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος τοῦ μίγματος πραγμάτων, ὧν δίδονται αἱ ποσότητες καὶ ἡ τιμὴ τῆς μονάδος ἑκάστου.*

β') *Ἐκεῖνα, ἐν οἷς δίδονται αἱ τιμαὶ τῆς μονάδος δύο πραγμάτων καὶ ζητεῖται, πόσον πρέπει νὰ ληφθῇ ἐξ ἑκατέρου πρὸς ἀποτέλεσιν μίγματος ὡρισμένου καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μονὰς ἔχει δεδομένην τιμήν.*

### Παραδείγματα τοῦ πρώτου εἴδους.

1) *Ἀνέμιξε τις τριῶν εἰδῶν οἴνους· ἐκ τοῦ πρώτου εἴδους, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 40 λεπτά, ἔλαβεν 100 ὀκ., ἐκ τοῦ δευτέρου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 50 λεπτά, ἔλαβε 200 ὀκ. καὶ ἐκ τοῦ τρίτου, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ τι-*

*μᾶται* 80 *λεπτά, ἔλαβε* 40 *ὀκάδας· ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος;*

*Λύσις.* Ἐν πρώτοις εὑρίσκεται ἡ ἀξία ἑκάστου τῶν ἀναμιχθέντων οἴνων, αἵτινες εἶναι

40λ. 100= 4000λ.
50λ. 200 =10000λ.
80λ. 50 = 4000λ.

εἶτα εὑρίσκεται τὸ μῖγμα, ὅπερ εἶναι

100+200+50=350ὀκ.

καὶ οὗ ἡ ἀξία εἶναι

4000+10000+4000=18000λ.

Ἐπειδὴ δὲ αἱ 350ὀκ. τοῦ μίγματος τιμῶνται 18000λ.

ἡ 1ὀκ. » » τιμᾶται $\frac{18000}{350}=51\frac{3}{7}$ λ.

2) *Συνεχωνεύθησαν* 30 *γραμμάρια ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος* 0,900 *μετὰ* 20 *γραμμαρίων ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος τοῦ κράατος.*

*Σημ.* Ὅταν λέγηται, ὅτι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ ἀργύρου εἶναι 0,900, τοῦτο σημαίνει, ὅτι μόνον τὰ 0,900 αὐτοῦ εἶναι καθαρὸς ἄργυρος, τὰ δὲ λοιπὰ 0,100 εἶναι ἄλλα μέταλλα εὐτελέστερα.

Λύσις. Ἐν πρώτοις εὑρίσκεται ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἑκατέρου τῶν συγχωνευθέντων ἀργύρων, οἵτινες εἶναι

0,900.30=27γρ.
0,840.20=16,80γρ.

εἶτα εὑρίσκεται τὸ μῖγμα, ὅπερ εἶναι

30+20=50γρ.

καὶ οὗ ὁ καθαρὸς ἄργυρος

27+16,80=43,80γρ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ 50γρ. τοῦ μίγματος ἔχουσι 43,80γρ. καθαρὸν ἄργυρον

τὸ 1 » » ἔχει $\frac{43,80}{50}$=0,876ἄρ. » »

## Παραδείγματα τοῦ δευτέρου εἴδους.

1) *Οἰνοπώλης τις ἔχει δύο εἴδῶν οἶνον· τοῦ πρώτους εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶ-*

*ται 80λ., καὶ τοῦ δευτέρου 40λ., θέλει δὲ νὰ ἔχῃ ἐξ αὐτῶν κρᾶμα 800 ὀκάδων, οὗ ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 65 λεπτά. Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους ;*

*Λύσις.* Ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ πρώτου εἴδους ἦτο 80λ , ἐν δὲ τῷ κράματι εἶναι 65λ., ἤτοι 15λ. ἐπὶ ἔλαττον· ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ δευτέρου εἴδους ἦτο 40λ., ἐν δὲ τῷ κράματι εἶναι 65λ. ἤτοι 25λ. ἐπὶ πλέον.

Ὥστε, ἐπειδὴ ἐν τῷ κράματι ἡ μὲν 1ὀκ. τοῦ πρώτου εἴδους τιμᾶται 25λ. ἐπὶ ἔλαττον, ἡ δὲ 1ὀκ. τοῦ δευτέρου εἴδους τιμᾶται 25λ. ἐπὶ πλέον, δὲν ὑπάρχει οὔτε κέρδος οὔτε ζημία, ἐὰν ἀναμιχθῶσιν

25ὀκ. τοῦ πρώτου εἴδους μετὰ 15ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου

ἤτοι, ὅπως μὴ ὑπάρχῃ μήτε κέρδος μήτε ζημία,

πρὸς κρᾶμα 40ὀ. ἀντιστοιχοῦσιν 25ὀ. τοῦ πρώτου καὶ 15ὀκ. τοῦ δευτέρου εἴδ.

» » 1ὀκ. » $\frac{25}{40}$ » » $\frac{15}{40}$ » »

» » 800ὀκ. » $\frac{25.800}{40}$ » » $\frac{15.800}{40}$ » »

ἤτοι, πρέπει νὰ ληφθῶσι 500ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 300ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου εἴδους.

2) *Ἔχει τις δύο ὄγκους ἀργύρου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,940, τοῦ δὲ δευτέρου 0,820· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου, ἵνα ἀποτελεσθῇ μῖγμα 7 ὀκάδων ἀργύρου ἔχοντος βαθμὸν καθαρότητος 0,900 ;*

*Λύσις.* Ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ πρώτου ἦτο 0,940, ἐν δὲ τῷ μίγματι εἶναι 0,900, ἤτοι 0,060 ἐπὶ ἔλαττον· ὁ δὲ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ δευτέρου ἦτο 0,820, ἐν δὲ τῷ μίγματι εἶναι 0,900, ἤτοι 0,080 ἐπὶ πλέον.

Ἐπειδὴ ἄρα ἐν τῷ μίγματι ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ πρώτου εἶναι 0,060 ἐπὶ ἔλαττον, ὁ δὲ ἀριθμὸς τῆς καθαρότητος τοῦ δευτέρου 0,080 ἐπὶ πλέον, δὲν ὑπάρχει οὔτε προσθήκη οὔτε ἀπώλεια καθαροῦ ἀργύρου, ἐὰν ἀναμιχθῶσιν. 60ὀκ. τοῦ πρώτου μετὰ 80ὀκ. τοῦ δευτέρου

ἤτοι, ὅπως μὴ ὑπάρχῃ μήτε προσθήκη μήτε ἀπώλεια καθαροῦ ἀργύρου,

πρὸς μῖγμα 140ὀκ. ἀντιστοιχοῦσι 60ὀκ. τοῦ πρώτου καὶ 80ὀκ. τοῦ δευτέρου

» 1 » $\frac{60}{140}$ » $\frac{80}{140}$ »

» 7 » $\frac{60.7}{140}$ » $\frac{80.7}{140}$ »

ἤτοι πρέπει νὰ ληφθῶσι 3ὀκ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 4ὀκ. ἐκ τοῦ δευτέρου.

## Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν.

1) Σιτέμπορός τις ἔχει τρία εἴδη σίτου· 6 σάκκους πρὸς 4δρ., 8 πρὸς 5 καὶ 11 πρὸς 6· πόση εἶναι ἡ μέση τιμὴ τοῦ σάκκου. ('Απ. 5,50).

2) Οἰνοπώλης τις ἔχει οἶνον τῶν 55 λεπτῶν καὶ τῶν 80 λεπτῶν ἑκάστην λίτραν ; Πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα ἀποτελέσῃ κρᾶμα, οὗ ἡ λίτρα νὰ τιμᾶται 70 λεπτά ; ('Απ. 10,15).

3) Παντοπώλης τις ἔχει καφὲ τῶν 3,60δρ. καὶ 2,80δρ. ἐπώλησε δὲ 96 χιλιόγρ. ἀναμεμιγμένον πρὸς 3 δρ. πόσον ἀνέμιξεν ἐξ ἑκατέρου εἴδους ;
('Απ. 24χ.,72χ.)

4) Ἔχει τις 14,4 γρ. χρυσοῦ τῶν 0,900 βαθ. καθ. πόσον χρυσὸν τῶν 0,750 β. καθ. πρέπει νὰ προσθέσῃ, ἵνα ἔχῃ χρυσὸν τοῦ 0,830 β. καθ. ;
('Απ. 12,6.γρ.).

5) Ἔμπορός τις ἔχει τέϊον πρώτης ποιότητος τιμώμενον 8,97δρ. τὸ χιλιόγραμμον καὶ δευτέρας ποιότητος τιμώμενον 5,19δρ. τὸ χιλιόγ. θέλει δὲ νὰ ἔχῃ μῖγμα 567 χιλιογρ. οὕτως ὥστε πωλῶν πρὸς 8,50δρ. τὸ χιλιόγρ. νὰ ἔχῃ κέρδος 36 %. Πόσον πρέπει νὰ ἔχῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους;
('Απ. 159,408)

### 3) Περὶ τῶν ἀριθμητικῶν μέσων.

227. *Ἀριθμητικὸν μέσον* ἢ *μέσος ὅρος* διαφόρων ποσῶν ὁμοειδῶν λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ παριστῶντος τὸ πλῆθος αὐτῶν. Π. χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 5,7,8,6 εἶναι τὸ πηλίκον $\frac{5+7+8+6}{4}=6^1/_2$ Ὁμοίως λύονται καὶ τὰ ἑξῆς προβλήματα·

1) *Γραμμή τις μετρηθεῖσα τρὶς εὑρέθη ἔχουσα μῆκος* 4,7μ.,4,8μ.,4,759μ· *ἕνεκα λαθῶν τινων προερχομένων ἐκ διαφόρων λόγων· τίς ἡ πιθανωτέρα τιμὴ τοῦ μήκους τῆς γραμμῆς;*

'Απ. $\frac{4{,}7+4{,}8+4{,}759}{3}=4{,}786\frac{1}{3}$μέτρα.

2) *Τὰ εἰσοδήματα τῶν τελωνείων κράτους τινὸς ἦσαν*

τῷ 1890 δραχμαὶ 8600518
τῷ 1891 » 8350957
τῷ 1892 » 9110200
τῷ 1893 » 7980998

*τίς ὁ μέσος ὅρος τῶν εἰσοδημάτων τῶν τελωνείων κατὰ τὰ τέσσαρα ταῦτα ἔτη;* 'Απ. $\frac{34042673}{4}=8510668\frac{1}{4}$

## * ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'.

## Μέθοδος τῶν ἐξισώσεων.

### Ὁρισμοί.

228. *Ἐξίσωσις* λέγεται ἡ ἰσότης ἡ συνδέουσα πρὸς ἀλλήλους γνωστοὺς καὶ ἀγνώστους ἀριθμούς. Π. χ. ἡ ἰσότης $2x+1=9$ ἡ συνδέουσα τὸν ἄγνωστον ἀριθμὸν $x$ πρὸς τοὺς γνωστοὺς 2,1,9 εἶναι ἐξίσωσις.

Ὁμοίως ἡ ἰσότης $3+\frac{x}{2}=x-1$ εἶναι ἐξίσωσις.

Καὶ ἡ ἰσότης $5x-2y=1$ ἡ συνδέουσα πρὸς ἀλλήλους τοὺς ἀγνώστους ἀριθμοὺς $x$ καὶ $y$ καὶ τοὺς γνωστοὺς 5,2,1 εἶναι ὡσαύτως ἐξίσωσις.

*Λύσις* ἐξισώσεώς τινος λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων τῶν ἐν αὐτῇ, ἤτοι ἡ εὕρεσις τοῦ ἀριθμοῦ ἢ τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες τιθέμενοι ἀντὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύουσι τὴν ἐξίσωσιν καθιστῶντες τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον μέλος αὐτῆς ἀριθμοὺς ἴσους.

Οἱ δὲ ἀριθμοὶ οἱ ἀντικαθιστῶντες τοὺς ἀγνώστους λέγονται καὶ *τιμαὶ* αὐτῶν.

Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων στηρίζεται ἐπὶ τῶν ἰδιοτήτων τῆς ἰσότητος καὶ ἐπὶ τῶν γενικῶν ἰδϊοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος, ἐφ' ὧν στηρίζεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων εἶναι αἱ ἑξῆς:

1) Ἐὰν εἰς ἴσα προστεθῶσιν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.

2) Ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἀφαιρεθῶσιν ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα.

3) Ἐὰν ἴσα πολλαπλασιασθῶσιν ἐπὶ ἴσα, προκύπτουσιν ἴσα,

4) Ἐὰν ἴσα διαιρεθῶσι δι' ἴσων, προκύπτουσιν ἴσα

## Λύσις ἐξισώσεων ἐχουσῶν ἕνα ἄγνωστον.

229. Ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τῶν ἐχουσῶν ἕνα μόνον ἄγνωστον διδάσκεται ἀλλαχοῦ λεπτομερέστερον. Ἐνταῦθα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς ἁπλᾶ παραδείγματα.

1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x=15$

Ἐκ ταύτης διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ 3 προκύπτει

$$x=5$$

Ὥστε ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι ὁ εὑρεθεὶς ἄγνωστος· διότι οὗτος τιθέμενος ἀντὶ τοῦ $x$ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3x=5$ δίδει $3.5=15$, ἤτοι ἐπαληθεύει αὐτήν.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $2x-5=21$. Διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ 5 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προκύπτει

$$2x-5+5=21+5$$

ἢ $$2x=26$$

καὶ $$x=13$$

Ὥστε ὁ μόνος ἀριθμὸς ὁ ἐπαληθεύων τὴν ἐξίσωσιν $2x-5=21$ εἶναι ὁ 13· διότι $2.13-5=21$.

3) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3x+1=2x+3$. Δι' ἀφαιρέσεως τοῦ $2x$ καὶ τοῦ 9 ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει

$$3x+1-2x-1=2x+3-2x-1$$

ἢ $$3x-2x=3-1$$

ἢ $$x=2$$

Ὁ 2 ἄρα εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ ἀγνώστου $x$ ἡ ἐπαληθεύουσα τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

4) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2}+1=x-\frac{1}{3}$. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπὶ 6 προκύπτει

$$\frac{6.x}{2}+6.1=6.x-\frac{6.1}{3}$$

ἢ $$3x+6=6x-2$$

Διὰ ἀφαιρέσεως δὲ τοῦ $3x$ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν προκύπτει

$$3x+6-3x=6x-2-3x$$

ἢ $$6=3x-2$$

Διὰ προσθέσεως δὲ τοῦ 2 εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προκύπτει

$$6+2=3x-2+2$$

ἢ $$8=3x$$

καὶ $$x=\frac{8}{3}$$

ὁ ἀριθμὸς ἄρα $\frac{8}{3}$ ἐπαληθεύει τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

*Σημ.* Πᾶσα ἐξίσωσις μεθ' ἑνὸς ἀγνώστου (εἰς τὴν πρώτην δύναμιν) μίαν μόνον τιμὴν τοῦ ἀγνώστου δύναται νὰ ὁρίσῃ.

Πᾶσα δὲ ἐξίσωσις περιέχουσα δύο ἀγνώστους (εἰς τὴν πρώτην δύναμιν ἕκαστον) δύναται νὰ ἀληθεύῃ δι' ὁσασδήποτε τιμὰς τῶν δύο ἀγνώστων· διότι ὁ εἷς τῶν ἀγνώστων δύναται νὰ λαμβάνῃ οἱασδήποτε καὶ ὁσασδήποτε τιμάς, ὅτε εὑρίσκονται καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ἄλλου ἀγνώστου.

Ἔστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις $x-y=2$.

Πρὸς τὰς τιμὰς λ. χ. 1,2,3,... τοῦ $y$ ἀντιστοιχοῦσιν αἱ τιμαὶ 3,4,5,... τοῦ $x$.

Δύνανται ὅμως νὰ ὁρίζωνται καὶ αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων πολλῶν ἐξισώσεων, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀγνώστων ἦναι ἴσος τῷ ἀριθμῷ τῶν ἐξισώσεων· οἷον δύο ἐξισώσεις μετὰ δύο ἀγνώστων λαμβανόμεναι δύνανται νὰ ὁρίζωσι τὰς τιμὰς τῶ ύο ἀγνώστων.

## Λύσις δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.

230. *Σύστημα* δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων (εἰς τὴν πρώτην δύναμιν ἑκάστου) λέγονται αἱ δύο ἐξισώσεις, αἵτινες ἐπαληθεύονται ὑπὸ τῶν αὐτῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων, Καὶ ἡ λύσις συστήματος ἐξισώσεων διδάσκεται ἀλλαχοῦ λεπτομερέστερον. Ἐνταῦθα ἔστωσαν τὰ ἑξῆς ἁπλᾶ παραδείγματα.

1) Ἔστω τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων

$$x+y=26$$
$$x-y=8$$

Αἱ δύο αὗται ἐξισώσεις σημαίνουσιν, ὅτι πρέπει νὰ εὑρεθῶσι δύο ἀριθμοί, ὧν τὸ μὲν ἄθροισμα εἶναι 26, ἡ δὲ διαφορὰ 8.

Διὰ προσθέσεως τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη προκύπτει

$$x+y+x-y=26+8$$

ἢ $$2x=34$$

καὶ $$x=17$$

Ἐὰν δὲ ἐν τῇ πρώτῃ λ. χ. τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων τεθῇ ἀντὶ $x$ ἡ εὑρεθεῖσα τιμὴ αὐτοῦ 17, προκύπτει

$$17+y=26$$

Δι' ἀφαιρέσεως δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης τοῦ 17 προκύπτει

$$17+y-17=26-17$$

ἢ $$y=9$$

Ὥστε αἱ δύο τιμαὶ τῶν ἀγνώστων $x$ καὶ αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ δοθὲν σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 17 καὶ 9.

2) Ἔστω τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων μετὰ δύο ἀγνώστων.

$$2x-y=1$$
$$x+3y=4$$

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 3, προκύπτει τὸ σύστημα

$$6x-3y=3$$
$$x+3y=4$$

διὰ προσθέσεως δὲ τῶν ἐξισώσεων τούτων κατὰ μέλη προκύπτει

$$7x=7$$

ἢ $$x=1$$

Ἐὰν δὲ ἡ εὑρεθεῖσα αὕτη τιμὴ τοῦ $x$ τεθῇ ἀντ' αὐτοῦ ἐν τῇ πρώτῃ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων, προκύπτει

$$2-y=1$$

Διὰ προσθέσεως δὲ τοῦ $y$ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης προκύπτει

$$2-y+y=1+y$$

ἢ $$2=1+y$$

δι' ἀφαιρέσεως δὲ τοῦ 1 ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης εὑρίσκεται

$$2-1=1+y-1$$

ἢ $$1=y$$

Ὥστε $x=1$ καὶ $y=1$ εἶναι ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος,

*Σημ.* Ἐν γένει, ἵνα διὰ τῆς προσθέσεως ἢ ἀφαιρέσεως τῶν δύο ἐξισώσεων κατὰ μέλη ἐξαλείφηται εἷς ἄγνωστος, πολλαπλασιάζονται ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων ἐπὶ ἀριθμὸν τοιοῦτον, ὥστε ὁ ἄγνωστος οὗτος νὰ ἔχῃ τὸν αὐτὸν πολλαπλασιαστὴν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις.

## Ἐφαρμογαὶ τῶν ἐξισώσεων.

1) *Ἐὰν 3 πήχεις πράγματός τινος τιμῶνται 15 δραχ., πόσον τιμῶνται 10 πήχεις τοῦ αὐτοῦ πράγματος;*

Ἐὰν παρασταθῇ διὰ $x$ ἡ τιμὴ τῶν 10πήχεων, ἡ τιμὴ τοῦ πήχ. εἶναι $\frac{x}{10}$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ οἱ 3πήχ. τιμῶνται 15δρ., ὁ εἷς πῆχυς τιμᾶται $\frac{15}{3}=5$δρ. Ἐὰν ἄρα ἐξισωθῶσιν αἱ δύο αὗται τιμαὶ τοῦ πήχεως, προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{10}=5$$

καὶ $$x=50$$

2) *Πόσον τόκον φέρουσι 500δρ. τοκιζόμεναι ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 8 %;*

Ἔστω $x$ ὁ τόκος· ἐπειδὴ αἱ 100 δραχμαὶ φέρουσι τόκον 8,

$$\text{ἢ} \quad 1 \text{ δραχ. φέρει} \quad » \quad \frac{8}{100}$$

$$\text{καὶ αἱ } 500 \text{δρ. ἐπὶ } 3 \text{ ἔτη φέρουσι} \quad » \quad \frac{8.500.3}{100}$$

$$\text{ὥστε } x = \frac{8.500.3}{100} = 120$$

3) *Ἔχει τις δύο εἰδῶν οἶνον· τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 50 λεπτά, τοῦ δὲ δευτέρου 80. Πόσας ὀκάδας πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου εἴδους, ἵνα ἀποτελεσθῇ κρᾶμα 200 ὀκ., οὗ ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 60 λεπτά;*

Ἔστωσαν $x$ καὶ $y$ αἱ ὀκάδες, αἵτινες πρέπει νὰ ληφθῶσιν ἐξ ἑκατέρου τῶν εἰδῶν. Τότε εἶναι

$$x+y=200$$

Ἡ δὲ ἀξία τοῦ κράματος εἶναι $60.200=12000$ λεπτὰ καὶ ἑκατέρας τῶν ληφθεισῶν ποσοτήτων εἶναι $50x$ καὶ $80y$

$$\text{ὅθεν} \qquad 50x+80y=12000$$

Πρὸς λύσιν ἄρα τοῦ προβλήματος ἀρκεῖ νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$x+y=200$$
$$50x+80y=12000$$

Ἐὰν πολλαπλασιασθῶσιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 50, προκύπτει τὸ σύστημα

$$50x+50y=10000$$
$$50x+80y=12000$$

ἐὰν δὲ ἀφαιρεθῶσι κατὰ μέλη αἱ ἐξισώσεις αὗται, προκύπτει

$$30y=2000$$

$$\text{καὶ } y=66\frac{2}{3}$$

$$\text{Ὅθεν καὶ } x=200-66\frac{2}{3}=133\frac{1}{3}$$

4) *Εὑρεῖν τὰ δύο μέρη τοῦ ἀριθμοῦ 50, ὧν ἡ διαφορὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 8.* Ἐὰν παρασταθῶσι διὰ $x$ καὶ $y$ τὰ δύο μέρη, εὑρίσκεται

$$x+y=50$$
$$x-y=8$$

Ὅθεν διὰ προσθέσεως

$$2x=58$$

ἢ $x=29$

καὶ $y=50-29=21$

5) *Εὑρεῖν ἀριθμόν, οὗ τὸ* $\frac{1}{2}$ *διαφέρει τοῦ* $\frac{1}{8}$ *κατὰ* 3.

Ἔστω $x$ ὁ ἀριθμός. Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$\frac{x}{2}-\frac{x}{8}=3$$

ὅθεν $4x-x=24$

ἢ $3x=24$

καὶ $x=8$

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΤΟΥ ΣΤ' ΒΙΒΛΙΟΥ

## Περὶ συνεχῶν κλασμάτων.

231. *Συνεχὲς κλάσμα* καλεῖται ὁ ἀριθμὸς ὁ συγκείμενος ἔκ τινος ἀκεραίου (ὅστις ἐνίοτε εἶναι 0) καὶ ἔκ τινος κλάσματος, οὗτινος ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀκέραιος ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ κλάσμα, οὗτινος ὁ μὲν ἀριθμητὴς εἶναι 1, ὁ δὲ παρονομαστὴς ἀκέραιος ἀριθμὸς ηὐξημένος κατὰ κλάσμα, καὶ οὕτω καθεξῆς. Παραδείγματος χάριν ὁ ἀριθμὸς

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$$

εἶναι συνεχὲς κλάσμα.

Δύναται πάντοτε νὰ τραπῇ τὸ συνεχὲς κλάσμα εἰς κοινὸν κλάσμα. Ἐν τῷ προηγουμένῳ παραδείγματι εἶναι $\frac{1}{2+\frac{1}{3}}=\frac{3}{7}$. Ὥστε

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}=3+\cfrac{1}{4+\frac{3}{7}}$$

Ὁμοίως εἶναι $\frac{1}{4+\frac{3}{7}}=\frac{7}{31}$ καὶ $3+\frac{7}{31}=\frac{100}{31}$.

Ὅθεν

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}=\frac{100}{31}$$

Καὶ ἀντιστρόφως· πᾶν κοινὸν κλάσμα τρέπεται εἰς συνεχὲς κλάσμα. Ἔστω ὡς παράδειγμα τὸ κλάσμα $\frac{100}{31}$. Ἐκ τοῦ κλάσματος τούτου εὑρίσκεται ὁ μικτὸς $3+\frac{7}{31}$. Ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{7}{31}$ δι' 7, εἶναι $\frac{7}{31}=\frac{1}{\left(\frac{31}{7}\right)}=3+\cfrac{1}{4+\frac{3}{7}}$

Ὁμοίως, ἐὰν διαιρεθῶσιν ἀμφότεροι οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{3}{7}$ δι' 3, ὅτε

$\frac{3}{7}=\frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)}=\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}$, εὑρίσκεται

$$\frac{100}{31}=3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{3}}}$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν συνεχῶν κλασμάτων, αἵτινες δεικνύονται λεπτομερέστερον ἀλλαχοῦ, ἔχουσι μεγάλην ἐφαρμογὴν ἐν τοῖς λογισμοῖς. Διότι παρέχουσι καὶ τὸν κανόνα πρὸς εὕρεσιν κατὰ προσέγγισιν τῶν τιμῶν τῶν κοινῶν ἀναγώγων κλασμάτων, ὧν οἱ ὅροι εἶναι πολὺ μεγάλοι ἀριθμοί, καὶ πρὸς παράστασιν αὐτῶν δι' ἁπλουστέρων ὅρων.

Ἐὰν παρασταθῶσι γενικῶς διὰ $\frac{A}{B}$ ἡ τιμὴ συνεχοῦς κλάσματος ἀνηγμένου εἰς κοινὸν κλάσμα καὶ διὰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ περιεχόμενοι ἐν αὐτῷ, ὑπάρχει

$$\frac{A}{B}=\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\ldots}}}$$

οἱ μὲν ἀκέραιοι ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ οἵτινες εἶναι ἴσοι ἢ μείζονες τῆς μονάδος 1 (πλὴν τοῦ πρώτου $\alpha_1$, ὅστις δύναται νὰ ἦναι 0) λέγονται *ἀτελῆ πηλίκα*, τὰ δὲ συνεχῆ κλάσματα

$$\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\ldots}, \quad \alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3+\cfrac{1}{\alpha_4+\ldots}}$$

λέγονται *τέλεια πηλίκα*.

*Συντετμημέναι* δὲ τιμαὶ τοῦ συνεχοῦς κλάσματος λέγονται τὰ ἐξαγόμενα τὰ εὑρισκόμενα ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου μέχρις ἀτελοῦς τινος πηλίκου· οὕτως ἡ πρώτη συντετετμημένη τιμὴ τοῦ $\frac{A}{B}$ εἶναι ἡ $\alpha_1$, ἡ δευτέρα συντετμημένη εἶναι ἡ $\alpha_1+\frac{1}{\alpha_2}$ ἢ $\frac{\alpha_1\alpha_2+1}{\alpha_2}$. Πρὸς εὕρεσιν τῆς τρίτης συντετμημένης ἐν τῇ δευτέρᾳ τίθεται $\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}$ ἀντὶ $\alpha_2$, ἤτοι

$$\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cfrac{1}{\alpha_3}}=\frac{\alpha_1\left(\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}\right)+1}{\alpha_2+\frac{1}{\alpha_3}}=\frac{(\alpha_1\alpha_2+1)\,\alpha_3+\alpha_1}{\alpha_2\alpha_3+1}$$

Καλέσωμεν νῦν γενικῶς $\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}$ τὴν συντετμημένην τῆς τάξεως ν· τεθείσθω δέ, ὅτι

$$\rho_\nu=\rho_{\nu-1}\,\alpha_\nu+\rho_{\nu-2} \qquad \sigma_\nu=\sigma_{\nu-1}\,\alpha_\nu+\sigma_{\nu-2}.$$

Ἐὰν ἐν τῇ ἰσότητι

$$\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}=\frac{\rho_{\nu-1}\alpha_\nu+\rho_{\nu-2}}{\sigma_{\nu-1}\alpha_\nu+\sigma_{\nu-2}}$$

τεθῇ $\alpha_\nu+\frac{1}{\alpha_\nu+1}$ ἀντὶ $\alpha_\nu$, λαμβάνομεν τὴν ἑπομένην συντετμημένην

$$\frac{\rho_{\nu+1}}{\sigma_{\nu+1}}=\frac{\rho_{\nu-1}\left(\alpha_\nu+\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}\right)+\rho_{\nu-2}}{\sigma_{\nu-1}\left(\alpha_\nu+\dfrac{1}{\alpha_{\nu+1}}\right)+\sigma_{\nu-2}}=\frac{(\rho_{\nu1}-\alpha_\nu+\rho_{\nu-2})\alpha_{\nu+1}+\rho_{\nu-1}}{\sigma_{-1}\alpha_\nu+\sigma_{\nu-2})\alpha_{\nu+1}+\rho_{\nu-1}}$$

$$=\frac{\rho_\nu\alpha_{\nu+1}+\rho_{\nu-1}}{\sigma_\nu\alpha_{\nu+1}+\sigma_{\nu-1}}$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται, ὅτι ὁ *ἀριθμητὴς οἱασδήποτε συντετμημένης εὑρίσκεται πολλαπλασιαζομένου τοῦ ἀριθμητοῦ τῆς προηγουμένης ἐπὶ τὸ ἀτελὲς πηλίκον, εἰς ὃ καταλήγει ἡ θεωρουμένη καὶ προστιθεμένου τοῦ τῆς προηγουμένης. Ὁμοίως εὑρίσκεται καὶ ὁ παρονομαστής.*

*232. Ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$\rho_\nu=\rho_{\nu-1}\alpha_\nu+\rho_{\nu2},\sigma_{\nu1}\alpha_\nu+\sigma_{\nu-2}$$

ἕπεται $\rho_\nu>\rho_{\nu-1},\sigma_\nu>\sigma_{\nu-1}$, ἤτοι, ἐὰν τὸ συνεχὲς κλάσμα ᾖναι ἀπεριόριστον, $\rho_\nu$ καὶ $\sigma_\nu$ αὐξάνονται ἐπ' ἄπειρον μετὰ τοῦ ν.

Ἐκ τῶν αὐτῶν ἰσοτήτων ἕπεται καὶ

$$\rho_\nu\sigma_{\nu-1}\sigma_\nu\rho_{\nu-1}=-(\rho_{\nu-1}\sigma_{\nu-2}-\sigma_{\nu-1}\rho_{\nu-2}).$$

Ἐὰν ἄρα τεθῇ $k_\nu=\rho_\nu\sigma_{\nu-1}-\sigma_\nu\rho_{\nu-1}$,

ἔχομεν $k_\nu=-k_{\nu-1},k_{\nu-1}=-k_{\nu-2},\ldots,k_3=-k_2$.

Ἀλλὰ $k_2=\rho_2\sigma_1-\sigma_2\rho_1=(\alpha_1\alpha_2+1)-\alpha_1\alpha_2=1\cdot$

ὥστε $\qquad k_\nu=(-1)^\nu=\rho_\nu\sigma_{\nu-1}-\sigma_\nu\rho_{\nu-1}.$

Ἐντεῦθεν φανερόν, ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ $\rho_\nu$ καὶ $\sigma_\nu$ ὡς καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\rho_\nu$ καὶ $\rho_{\nu-1}$, $\sigma_\nu$ καὶ $\sigma_{\nu-1}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Εἶναι δὲ προφανῶς:

$$\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}-\frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}}=\frac{(-1)^\nu}{\sigma_\nu\sigma_{\nu-1}}$$

καὶ

$$\frac{\sigma_\nu}{\rho_\nu}-\frac{\sigma_{\nu-1}}{\rho_{\nu-1}}=\frac{(-1)^\nu}{\rho_\nu\rho_{\nu-1}}$$

Ἐὰν ἄρα τεθῇ

$$T_\nu-T_{\nu-1}=\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}-=\frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}}=\frac{(-1)^\nu}{\sigma_\nu\sigma_{\nu-1}},$$

ἕπεται

$$T_\nu=T_1+\frac{1}{\sigma_1\ \sigma_2}-\frac{1}{\sigma_2\ \sigma_3}+\ldots+(-1)^\nu\frac{1}{\sigma_\nu\sigma_{\nu-1}}$$

Ἐκ τῆς διαφορᾶς

$$\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}-\frac{\rho_\nu-_1}{\sigma_\nu-_1}=\frac{(-1)^\nu}{\sigma\,\sigma_\nu-_1}$$

φαίνεται, ὅτι πᾶσα συντετμημένη ἀρτίας τάξεως εἶναι μείζων τῆς προηγουμένης, πᾶσα δὲ περιττῆς τάξεως ἐλάσσων ταύτης. Καὶ αἱ μὲν συντετμημέναι ἀρτίας τάξεως βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, αἱ δὲ περιττῆς αὐξανόμεναι.

*233. Ἔστω $T_\mu$ ἡ συντετμημένη οἱασδήποτε τάξεως μ μείζονος τῆς ν, ἔστω δὲ καὶ

$$\beta=\alpha_\nu+_1+\cfrac{1}{\alpha_\nu+_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_\mu}}$$

Ἡ τιμὴ τῆς $T_\mu$ εὑρίσκεται ἀντικαθισταμένου ἐν τῇ ἰσότητι

$$\frac{\rho_\nu+_1}{\sigma_\nu+_1}=\frac{\rho_\nu\alpha_\nu+_1+\rho_\nu-_1}{\sigma_\nu\alpha_\nu+_1+\sigma_\nu-_1}$$

τοῦ ἀτελοῦς πηλίκου $\alpha_\nu+_1$ ὑπὸ τοῦ τελείου τοιούτου β· οὕτως ἔχομεν

$$T_\mu=\frac{\rho_\nu\beta+\rho_\nu-_1}{\sigma_\nu\beta+\sigma_\nu-_1},$$

Ὅθεν $$T_\mu-\frac{\rho_\nu-_1}{\sigma_8-_1}=\frac{(-1)^\nu\beta}{\sigma_\nu-_1(\sigma_\nu\beta+\sigma_\nu-_2)}$$

$$T_\mu-\frac{\rho_\nu}{\sigma}=-\frac{(-1)^\nu\beta}{\sigma_\nu(\sigma_\nu\beta+\sigma_\nu-_1)}$$

Ὥστε ἡ συντετμημένη $T_\mu$ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν $T_\nu-_1$ καὶ $T_\nu$, ἀλλ' ἐγγύτερον τῆς ἐχούσης ἀνωτέραν τάξιν. Ἐὰν δὲ τὸ συνεχὲς κλάσμα ἦναι πεπερασμένον, ἡ τελευταία συντετμημένη εἶναι αὐτὴ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος.

*234. Ἐπειδὴ πᾶσα συντετμημένη $T_\mu$ ἀνωτέρας τῆς νῆς τάξεως περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν $T_\nu$ καὶ $T_\nu+_1$, ἐὰν λαμβάνηται ἡ τιμὴ $T_\nu$, τὸ λάθος εἶναι ἔλασσον τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\sigma_\nu\sigma_\nu+_1}$, ἢ τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{1}{\sigma_\nu{}^2}$. Τὸ λάθος τοῦτο εἶναι καθ' ὑπεροχὴν ἢ κατ' ἔλλειψιν, καθ' ὅσον ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός.

Πᾶν σύνηθες κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπερ ἔχει τιμὴν ἐγγυτέραν τοῦ συνεχοῦς ἢ συντετμημένη τις $\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}$, ἔχει καὶ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἀμοιβαίως μείζονας τῶν τῆς συντετμημένης. Καὶ ὄντως, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο διαδοχικῶν συντετμημένων

$$\frac{\rho_\nu-1}{\sigma_\nu-1} \text{ καὶ } \frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}.$$

Ἐὰν π. χ. ὁ ν ἦναι ἄρτιος ἀριθμός, ἔχομεν

$$\frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}$$

ὅθεν

$$\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}}<\frac{\rho_\nu}{\sigma_\nu}-\frac{\rho_{\nu-1}}{\sigma_{\nu-1}}$$

ἤτοι

$$\frac{\alpha\sigma_{\nu-1}-\beta\rho_{\nu-1}}{\beta\sigma_{\nu-1}}<\frac{1}{\sigma_\nu\sigma_{\nu-1}}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀριθμητὴς $\alpha\sigma_{\nu-1}-\beta\rho_{\nu-1}$ εἶναι ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός, ὁ παρονομαστὴς $\beta\sigma_{\nu-1}$ εἶναι μείζων τοῦ παρονομαστοῦ $\sigma_\nu{+}_1$· ὥστε $\beta>\sigma_\nu$

Ὁμοίως δείκνυται θεωρουμένων τῶν ἀνισοτήτων

$$\frac{\sigma_\nu}{\rho_\nu}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\sigma_{\nu-1}}{\rho_{\nu-1}}$$

ὅτι καὶ $\alpha>\rho_\nu$.

Ἐντεῦθεν δ' ἕπεται, ὅτι, ἐὰν δύο συνήθη κλάσματα $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{a'}{b'}$, ἦναι τοιαῦτα, ὥστε

$$ab'-ba'=\pm1,$$

πᾶν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν $\frac{a}{b}$ καὶ $\frac{a'}{b'}$, ἔχει τοὺς ὅρους αὐτοῦ μείζονας τῶν ἀντιστοίχων ἑκατέρου τῶν κλασμάτων τούτων.

*Σημ.* Ὅταν τὰ ἀτελῆ πηλίκα παράγωνται περιοδικῶς ἀπό τινος καὶ ἐφ' ἑξῆς τάξεως, τὸ συνεχὲς κλάσμα καλεῖται *περιοδικόν*. Καὶ ἐὰν μὲν τὰ πηλίκα ταῦτα ἄρχωνται παραγόμενα ἀπὸ τοῦ πρώτου, τὸ κλάσμα καλεῖται *ἁπλοῦν περιοδικόν*, ἐὰν δὲ μετά τινα πηλίκα ἄρχηται ἡ περίοδος τὸ κλάσμα λέγεται *μικτόν*,

235. Ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ συνεχοῦς κλάσματος ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου κοινοῦ κλάσματος συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών·

*Τὸ συνεχὲς κλάσμα τὸ παραγόμενον ἐκ τοῦ ἀντιστοίχου κοινοῦ κλάσμα-*

*τος ἔχει ὡς ἀτελῆ πηλίκα τὰ πηλίκα τὰ εὑρισκόμενα κατὰ τὴν ἀναζήτησιν τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου τῶν ὅρων τοῦ κοινοῦ τούτου κλάσματος, συμπεριλαμβανομένου καὶ τοῦ πηλίκου τῶν ὅρων αὐτοῦ, ὅπερ δύναται νὰ ἦναι* 0.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\frac{64}{81}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}}}$$

Ἐὰν δὲ οἱ ὅροι κοινοῦ ἀνκγώγου κλάσματος ἦναι ἀρκούντως μεγάλοι, εἶναι δύσκολον νὰ ληφθῇ τις ἰδέα περὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ. Τῇ βοηθείᾳ ὅμως τῶν συνεχῶν κλασμάτων εὑρίσκεται αὕτη κατὰ προσέγγισιν, ἀρκεῖ νὰ τραπῇ τὸ κοινὸν ἀνάγωγον κλάσμα εἰς συνεχὲς κλάσμα καὶ νὰ ληφθῶσιν ὑπ' ὄψιν πᾶσαι αἱ συντετμημέναι τιμαὶ αὐτοῦ. Ἐκλέγεται δὲ μεταξὺ τῶν συντετμημένων τούτων τιμῶν ἡ δίδουσα ἐπαρκῆ προσέγγισιν.

Ἔστω, ὅτι πρόκειται νὰ εὑρεθῇ κατὰ προσέγγισιν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{759}{866}$. Τρέπεται τοῦτο εἰς τὸ συνεχὲς κλάσμα

$$\frac{759}{866}=0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}}}$$

ὅπερ ἄγει εἰς τὰς συντετμημένας τιμὰς

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{7}{8},\ \frac{71}{81},\ \frac{78}{89},\ \frac{227}{259},\ \frac{759}{866}$$

Ἐκ δὲ τῶν τιμῶν τούτων ἡ $\frac{7}{8}$ εἶναι ἤδη ἀρκούντως προσεγγίζουσα πρὸς τὸ δοθὲν κλάσμα· διότι ἡ διαφορὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{648}$. Ἡ δὲ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $\frac{71}{81}$ καὶ τοῦ δοθέντος κλάσματος εἶναι μικροτέρα τοῦ $\frac{1}{7209}$.

## Προβλήματα διάφορα μετὰ τῶν λύσεων.

1) Ἔν τινι πανηγύρει ἦσαν 40 ἄνδρες καὶ γυναῖκες, ὧν 8 ἄνδρες πλείονες τῶν γυναικῶν. Πόσαι αἱ γυναῖκες ; ('Απ. 24,16).

2) Ἐὰν οἱ μαθηταὶ τάξεώς τινος λάβωσιν ἕκαστος 3 φύλλα χάρτου, ἀπαιτοῦνται εἰσέτι 20 φύλλα· ἐὰν δὲ 2, περισσεύουσιν 20. Πόσοι ἦσαν οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως ; ('Απ. 40).

3) Δύο συνέταιροι ἠγόρασαν οἰκόπεδον ἀντὶ 2768 δρ., ἀλλ' ὁ πρῶτος ἐπλήρωσε διπλάσια τοῦ δευτέρου. Πόσον ἐπλήρωσεν ἑκάτερος ;
('Απ. 1840,920).

4) Μερίσαι 30 δρ. οὕτως, ὥστε τὸ ἕτερον μέρος νὰ περιέχῃ δίδραχμα, ὅσα τὸ ἕτερον πεντηκοντάλεπτα. (Απ. 12).

5) Ἔν τινι πανηγύρει ἦσαν ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία τὸ ὅλον 266. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀνδρῶν ἦτο διπλάσιος τοῦ τῶν γυναικῶν, ὁ δὲ τῶν γυναικῶν διπλάσιος τοῦ τῶν παίδων. Πόσοι ἦσαν οἱ παῖδες, αἱ γυναῖκες καὶ οἱ ἄνδρες : ('Απ. 38,76,152).

6) Στρατόπεδον σύγκειται ἐκ 2600 στρατιωτῶν· ἀλλὰ τὸ πεζικὸν εἶναι ἐννεαπλάσιον τοῦ ἱππικοῦ, τὸ δὲ πυροβολικὸν τριπλάσιον τοῦ ἱππικοῦ. Πόσοι ἦναι οἱ ἄνδρες ἑκάστου ὅπλου ; ('Απ. 200, 600, 1800).

7) Τίς ὁ ἀριθμὸς ὁ πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 4 καὶ τὸ εὑρεθὲν γινόμενον διαιρούμενον διὰ 3 δίδει πηλίκον 24 ; ('Απ. 18).

8) Τρεῖς ἄνθρωποι ἔχουσι 1520δρ. Τούτων ὁ δεύτερος ἔλαβεν 100 περισσοτέρας τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος 270 περισσοτέρας τοῦ δευτέρου. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος ; ('Απ. 350, 450, 720).

9) Ἔν τινι ἑσπερίδι ἐκλήθησαν τὸ ὅλον 90 πρόσωπα· ἀλλὰ 4 ἄνδρες πλέον ἢ κυρίαι καὶ 10 νέοι πλέον ἢ ἄνδρες. Πόσοι ἦσαν κυρίαι, κύριοι καὶ νέοι ;
('Απ. 28, 24, 38).

10) Πατὴρ δαπανᾷ πρὸς διατροφὴν τῶν 5 τέκνων αὐτοῦ 1000 δρ. τὸν μῆνα ἀλλ' οὕτως, ὥστε ἕκαστον πρεσβύτερον λαμβάνει 20 δρ. πλέον ἢ τὸ νεώτερον αὐτοῦ. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου; ('Απ. 160,180,200,220,240).

11) Δύο κληρονόμοι πρόκειται νὰ λάβωσι 36000, ἀλλ' ὁ εἷς τούτων 8000 δρ. περισσοτέρας τοῦ ἑτέρου. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκατέρου ;
('Απ. 140000, 22000.

12) Τέσσαρες κληρονόμοι ἔλαβον 2520 δρ. οὕτως, ὥστε ὁ πρῶτος δὶς τόσας, ὅσας ὁ δεύτερος μεῖον 1000 δρ., ὁ δεύτερος ὅσας ὁ τρίτος καὶ ὁ τέταρτος καὶ ὁ τρίτος 360 δρ. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου ;
(Απ. 760, 880, 360, 520).

13) Ἔμπορος ἔχει δύο τεμάχια ὑφάσματος 40 πήχ., τὸ ἓν μεῖζον τοῦ ἑτέρου κατὰ 8 πήχ. Πόσους πήχ. ἔχει ἑκάτερον τεμάχιον ; (Ἀπ. 16, 24).

14) Εἶχέ τις 42 δρ., ἐξ ὧν ἐδαπάνησε μέρος καὶ ἔμειναν τριπλάσιαι τῶν δαπανηθεισῶν. Πόσα ἐδαπάνησε καὶ πόσον ἔμεινεν ; (Ἀπ. 10,50,31,50).

15) Τίς ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ 7 καὶ εἰς τὸ γινόμενον προστεθῇ 3 καὶ τὸ προκῦπτον διαιρεθῇ διὰ τοῦ 2 καὶ ἐκ τοῦ πηλίκου ἀφαιρεθῇ ὁ 4, εὑρίσκεται ὁ 15 : (Ἀπ. 5).

16) Εὑρεῖν τρεῖς ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα 70 καὶ τοιούτους, ὥστε ὁ πρῶτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 1· ὁ δὲ τρίτος διαιρούμενος διὰ τοῦ δευτέρου δίδει πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 3.
(Ἀπ. 11, 23, 36).

17) Ὁδοιπόρος ἀναχωρεῖ 10 ἡμέρας μετὰ τὴν ἀναχώρησιν ἑτέρου πρὸς συνάντησιν αὐτοῦ· ἀλλ' ὁ πρῶτος διανύει 4 στάδια τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ δεύτερος 9. Μετὰ πόσας ἡμέρας, γενήσεται ἡ συνάντησις ; (Ἀπ. 8).

18) Γίνεται ἔν τινι συναναστροφῇ ἔρανος ὑπὲρ τῶν πτωχῶν· καὶ ἐὰν μὲν προσφέρῃ ἕκαστος 16 δρ., περισσεύουσι 240 δρ., ἐὰν δὲ 10, ἀπαιτοῦνται 300. Πόσοι ἦσαν οἱ ἐν τῇ συναναστροφῇ καὶ πόσον συνεισέφερον ;
(Ἀπ. 90, 1200).

19) Ἐκτίθεται εἰς λαχεῖον ὡρολόγιον· ἐὰν ἕκαστον λαχεῖον πωληθῇ πρὸς 4 δρ. ἡ ζημία εἶναι 30 δρ., ἐὰν δὲ πρὸς 5, τὸ κέρδος εἶναι 50. Πόσα τὰ λαχεῖα καὶ ἡ τιμὴ τοῦ ὡρολογίου ; (Ἀπ. 80, 350).

20) Ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τυχὼν ἀριθμὸς ἐπὶ 5 καὶ ἐπὶ 7, εὑρίσκονται δύο γινόμενα ὑπερβαίνοντα τρίτον ἀριθμὸν κατὰ 10 καὶ 34. Τίνες οἱ δύο ἀριθμοί ; (Ἀπ. 50, 12).

21) Πρόκειται νὰ πληρωθῇ κεφάλαιον ὡς ἑξῆς· 1376 δρ. εἰς 5 μῆνας, 2560 μετὰ 3 μῆνας βραδύτερον καὶ τὸ ὑπόλοιπον 5 μῆνας μετὰ ταῦτα· διὰ μιᾶς δὲ δόσεως ἡ πληρωμὴ γίνεται μετὰ 10 μῆνας. Ποῖον τὸ κεφάλαιον ;
(Ἀπ. 7936).

22) Χωρικὸς φέρει εἰς τὴν ἀγορὰν ᾠὰ πρὸς πώλησιν ἀντὶ 7 λεπτῶν ἕκαστον, ἀλλ' ἐθραύσθησαν 5 καὶ ὑπελόγισεν, ὅτι πωλῶν πρὸς 8 λεπτὰ ἕκαστον δὲν ζημιοῦται. Πόσα ᾠὰ ἔφερεν ; (Ἀπ. 40).

23) Ἠγόρασέ τις πορτοκάλια ἀντὶ 90 λεπτῶν τὴν δωδεκάδα, ἐὰν δὲ ἠγό-

ραζε διὰ τῶν αὐτῶν χρημάτων 4 περισσότερα, ἡ δωδεκὰς εἶναι κατὰ 10 λεπτὰ εὐθηνοτέρα. Πόσα πορτοκάλια ἠγόρασεν ; ('Απ. 32).

24) Ἔμπορος ἔχει πρὸς ἐξόφλησιν τρία συναλλάγματα τὸ πρῶτον 2832 δρ. μετὰ τρεῖς μῆνας τὸ δεύτερον 2560 μετὰ 9 καὶ τὸ τρίτον 1450 μετὰ 16. Μετὰ πόσον χρόνον ἐξοφλεῖ αὐτὰ ἐφάπαξ ; ('Απ. μετὰ 8 μῆνας).

25) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις αὐξανόμενος κατὰ τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτοῦ δίδει ἐξαγόμενον 486. ('Απ. 378).

26) Ἔμπορος πωλήσας διάφορα ἐμπορεύματα ἔλαβεν 628 δρ., ἐὰν ἐλάμβανεν ἔτι 72 δρ., τὸ κέρδος εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς τιμῆς τῆς ἀγορᾶς. Πόσον ἐπλήρωσε πρὸς ἀγορὰν αὐτῶν ; ('Απ. 525).

27) Λοχαγὸς ἐπέστρεψεν ἐκ τοῦ πολέμου ἔχων 30 ἄνδρας. Τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ λόχου ἐφονεύθη κατὰ τὰς μάχας, τὸ $\frac{1}{5}$ ἠχμαλωτίσθη, τὸ $\frac{1}{6}$ νοσηλεύεται καὶ τὸ $\frac{1}{12}$ ἀπέθανεν ἐκ διαφόρων ἀσθενειῶν. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες τοῦ λόχου ; ('Απ.80).

28) Ἐλαστικὴ σφαῖρα ἀφεθεῖσα ἀπό τινος ὕψους ἀνεπήδησε τρίς· καθ' ἑκάστην τῶν ἀναπηδήσεων τούτων ἔφθανεν εἰς τὰ $\frac{2}{9}$ τοῦ ὕψους, ὅθεν ἔπιπτεν, κατὰ δὲ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν ἔφθασεν εἰς ὕψος $\frac{5}{12}$ τοῦ πήχεως. Ἐκ πόσου ὕψους ἀφέθη κατ' ἀρχάς ; $\left('\text{Απ. } 37+\frac{31}{32}\right)$.

29) Τὴν μεσημβρίαν ράβδου κατακορύφου καὶ μήκους $5\frac{3}{4}$ πήχ. ἡ σκιὰ εἶναι $2\frac{7}{9}$ πήχ. Πόσον τὸ ὕψος κωδονοστασίου, οὗτινος ἡ σκιὰ κατὰ τὸν αὐτὸν χρόνον εἶναι 78 πήχ; $\left('\text{Απ. } 159\frac{3}{25}\right)$.

30) Τὸ πλήρωμα πλοίου ἔχει τροφὰς μόνον ἐπὶ 20 ἡμέρας. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττωθῇ τὸ σιτηρέσιον ἑκάστου ναύτου, ὅπως ἐξαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ ἐπὶ 35 ἡμέρας ; $\left('\text{Απ.}\frac{4}{7}\right)$.

31) Ἀντηλλάχθησαν 57ὑάρδ. 2πόδ. 11δακ. 10γρ. ὑφάσματός τινος ἀντὶ 352ὑαρδ. 10ποδ. 5δακ. 6γρ. ἑτέρου ὑφάσματος. Πόσον ἀντηλλάχθη ἀντὶ ἑκάστης ὑάρδας τοῦ πρώτου; (Ἀπ. 6ὑάρ. 0πόδ. 2δακ. $9\frac{7809}{12527}$γρ.)

32) Ὀκάδες 37 καὶ 250δρ. πράγματός τινος τιμῶνται 5 εἰκοσάδρ. 3τάλ. 2δρ. 80λεπ. Πόσον τιμᾶται ὁ στατήρ;

(Ἀπ. 6εἰκοσ. 3ταλλ. 2δρ. $75\frac{285}{301}$λεπ.).

33) 57στατ. 35ὀκ. 300δρ. πράγματός τινος τιμῶνται 20δρ, Πόσον τιμῶνται 147στατ. 40ὀκ. 250δρ; (Ἀπ. 2εἰκοσ. 2τάλλ. 1δρ. $17\frac{705}{2035}$ λεπ.)

34) Ἐν ἴσῳ ὄγκῳ τὸ καθαρὸν ὕδωρ εἰς θερμοκρασίαν $4^0$ εἶναι 773κις βαρύτερον τοῦ ἀέρος (ὑπὸ θλῖψιν 0,76 καὶ θερμοκρασίαν $0^0$). Πόσον εἶναι τὸ βάρος 1λίτρας ἀέρος; (Ἀπ. 1,2936....δράμ.).

35) Ἡ πυκνότης τοῦ θαλασσίου ὕδατος εἶναι 1,0263. Πόσον βάρος ἔχουσι 345 λίτραι θαλασσίου ὕδατος; (Ἀπ. 354073,5 γραμ.)

36) Σύνταγμα στρατιωτῶν περιέχει τριῶν ὅπλων στρατιώτας. Πόσοι εἶναι οἱ στρατιῶται, ἐὰν τὸ μὲν πρῶτον ὅπλον περιέχῃ τὸ $\frac{1}{3}$ τῶν στρατιωτῶν, τὸ δεύτερον τὰ $\frac{3}{5}$ καὶ τὸ τρίτον 80 στρατιώτας: (Ἀπ. 1200).

37) Ἐκ τίνος ἀριθμοῦ τοῦ $\frac{1}{4}$ πενταπλασιαζομένου καὶ ἐκ τοῦ γινομένου λαμβανομένων τῶν $\frac{2}{3}$ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 20; (Ἀπ. 24).

38) Εὑρεῖν δύο ἀριθμούς, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι 210 καὶ ὁ εἷς εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἑτέρου. (Ἀπ. 120,90).

39) Τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν ἔν τινι θυλακίῳ δραχμῶν ἀποτελοῦσι 2,25 δρ. Πόσαι αἱ ἐν τῷ θυλακίῳ δραχμαί; (Ἀπ. 5).

40) Δύο ἔμποροι προτίθενται νὰ ἀγοράσωσιν ἵππον· ἀλλ' ὁ μὲν ἔχει τὸ 1/5 καὶ ὁ δὲ τὸ 1/7 τῆς ἀξίας τοῦ ἵππου· ἐὰν δὲ πληρώσωσιν, ὅσα χρή-

ματα ἔχουσιν, ἀπαιτοῦνται εἰσέτι 276δρ. Τίς ἡ ἀξία τοῦ ἵππου; (Ἀπ.420).

41) Τίνος ἀριθμοῦ τὰ $\frac{5}{8}$ ὑπερβαίνουσι τὰ $\frac{2}{7}$ αὐτοῦ κατὰ 114; (Ἀπ. 336).

42) Διήνυσέ τις 3040 χιλιόμετρα· ἀλλὰ $3\frac{1}{2}$κις πλέον διὰ θαλάσσης ἢ ἔφιππος καὶ $2\frac{1}{3}$ ,κις πλέον πεζὸς ἢ διὰ θαλάσσης. Πόσα χιλιόμετρα διήνυσε διὰ θαλάσσης, ἔφιππος καὶ πεζός; (Ἀπ 840, 240, 1960).

43) Ἄνθρωπός τις ἐκ τῶν κερδῶν αὐτοῦ δαπανᾷ τὸ $\frac{1}{3}$ διὰ τροφήν, τὸ $\frac{1}{8}$ δι' ἐνδυμασίαν καὶ ἐνοίκιον καὶ τὸ 1/10 διὰ διαφόρους ἐκτάκτους δαπάνας, ἔχει δὲ κατ' ἔτος περίσσευμα 318 δρ. Πόσον τὸ ἐτήσιον κέρδος; (Ἀπ 720).

44) Ἔμπορος πωλεῖ τὴν αὐτὴν ἡμέραν τριῶν εἰδῶν ἐμπορεύματα· ἐκ μὲν τοῦ πρώτου ζημιοῦται τὸ 1/6, ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου τὸ 1/10 τῆς ἀξίας, ἐκ δὲ τοῦ τρίτου κερδαίνει τὸ 1/3· οὕτω δὲ τὸ ὁλικὸν κέρδος εἶναι 3 δρ. Πόσων δραχμῶν ἐμπορεύματα ἐπωλήθησαν; (Ἀπ 45).

45) Ἀποθνήσκων τις διατάσσει ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ λάβῃ ἡ μὲν σύζυγος τὸ 1/2 τῆς περιουσίας, ἑκάτερον δὲ τῶν δύο τέκνων τὸ 1/6, τὸ 1/12 ὁ ὑπηρέτης καὶ 600 δρ. οἱ πτωχοί. Τίς ἡ περιουσία; (Ἀπ. 7200 δρ.).

46) Ὡρολόγιον δεικνύει 3 1/2 ὥρ. Ζητεῖται ποίαν ὥραν ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν συμπίπτει τὸ πρῶτον τῷ δείκτῃ τῶν ὡρῶν:

(Ἀπ. 4ὥρ. 21′ 49″ 1/11).

47) Ἁμάξης ὁ ἐμπρόσθιος τροχὸς ποιεῖ 2000 στροφὰς πλέον τοῦ ὀπισθίου, ἡ δὲ περιφέρεια τοῦ ἐμπροσθίου τροχοῦ εἶναι 1 3/4 μέτρα, ἡ δὲ τοῦ ὀπισθίου 2 3/8. Ζητεῖται εἰς μέτρα τὸ μῆκος τῆς διανυομένης ὁδοῦ.

(Ἀπ. 13300).

48) Δεξαμενὴ πληροῦται ὑπὸ τριῶν βρύσεων εἰς 1 1/3, 3 1/3 καὶ 5ὥρας. Εἰς πόσον χρόνον πληροῦται ὑπὸ τῶν τριῶν ὁμοῦ; (Ἀπ. 48′).

49) Ἀρχιτέκτων συνεφώνησε νὰ δίδῃ εἰς ἐργάτην ἑκάστην ἐργάσιμον ἡμέραν 1,50 δρ., νὰ λαμβάνῃ δὲ διὰ τροφὴν παρὰ τοῦ ἐργάτου ἑκάστην ἡμέραν ἀργίας 60 λεπ., μετὰ 50 ἡμέρας ὁ ἐργάτης ἔλαβε 49,80 Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καὶ πόσας δὲν εἰργάσθη; (Ἀπ. 38, 12).

50) Ταμιεύει τις τὸ $\frac{1}{7}$ τῶν ἐτησίων ἐσόδων καὶ δαπανᾷ τὰ λοιπά· ἐὰν

εἶχε 400 δρ. ἐπὶ πλέον ἔσοδον, ἠδύνατο νὰ ταμιεύῃ τὸ 1 1/5 καὶ νὰ προσθέσῃ εἰς τὰς δαπάνας 160 δρ. εἰσέτι. Τίς ἡ ἐτησία πρόσοδος ; ('Απ. 2800).

51) Δύο κρῆναι πληροῦσι δεξαμενὴν ἡ μὲν εἰς 3 1/5 ὥρας, ἡ δὲ εἰς 4 1/5 ὥρ. Ἐὰν ρέωσιν ἀμφότεραι ἐπὶ μίαν ὥραν, πόσον μέρος τῆς δεξαμενῆς πληροῦσιν ; ('Απ. 25/48).

52) Τίς ὁ ἀριθμός, οὗτινος τὸ τέταρτον αὐξηθὲν κατὰ τὸ τρίτον καὶ τοῦ ἀθροίσματος τούτου ἐλαττουμένου κατὰ τὸ 5/9 τοῦ ἀριθμοῦ δίδει διαφορὰν 10 ; ('Απ. 360).

53) Μοῖρα στρατοῦ ἐξεκίνησε 2 ἡμέρας πρὸ τῆς ἐκκινήσεως τῆς καταδιωκούσης αὐτὴν καὶ διήνυσε 4 1/2 στάδια τὴν ἡμέραν, ἡ δὲ καταδιώκουσα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ὁδοῦ κατέφθασεν αὐτὴν τὴν ἕκτην ἡμέραν. Πόσα στάδια τὴν ἡμέραν διήνυσεν ἡ διώκουσα ; ('Απ. 6).

54) Τὰ 4/5 τῶν χρημάτων τινὸς ἐτοκίσθησαν πρὸς 4 % καὶ τὸ 1/5 πρὸς 5 %. Ἐλήφθη δὲ τόκος ἐν συνόλῳ 2940 δρ. Πόσον τὸ τοκισθὲν κεφάλαιον ; ('Απ. 70000).

55) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 25000 δρ., ἓν μὲν μέρος αὐτοῦ πρὸς 4 %, τὸ δὲ ἕτερον πρὸς 5 % καὶ ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 1100 δρ. Ποῖα τὰ τοκισθέντα μέρη ; ('Απ. 15000, 10000).

56) Ἠγόρασέ τις ζάκχαριν ἀντὶ 113 δρ. τὰς 100 ὀκ., ἔδωκε δὲ διὰ μεσιτείαν 1/2 ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν καὶ θέλει νὰ κερδήσῃ 10 %. Πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν; ('Απ. 1,25...).

57) Ἠγόρασέ τις 100 ὀκάδ. ἐλαίου ἀντὶ 161,25 δρ., ὁ δὲ πωλητὴς ἐπλήρωσεν ἥμισυ % προμήθειαν καὶ 7 % ἔξοδα μεταφορᾶς. Ποία ἡ ἀρχικὴ τιμὴ τῶν 100 ὀκάδων ; ('Απ. 150).

58) Ἐὰν τὰ 5 % χρεώγραφα ἐκπέσωσιν 80 λεπτά, πόσον ἐκπίπτουσι τὰ 8 %. ('Απ. 48 λεπτά).

59) Ἠγοράσθησαν χρεώγραφα δίδοντα τόκον 5000 τῶν 5 % καὶ εἰς τιμὴν 121,50 καὶ μετεπωλήθησαν μετὰ κέρδους 360 δραχ. Πόσον ἀνέβησαν τὰ χρεώγραφα ; ('Απ. 0,35).

60) Ἠγόρασέ τις τὴν 10 Φεβρουαρίου ἐμπορεύματα ἀξίας 3600 δρ. καὶ ὑπέγραψε συναλλαγματικὴν πληρωτέαν τὴν 15 Σεπτεμβρίου· ἀλλὰ τὴν 15 Μαρτίου ἐπλήρωσεν εἰς λογαριασμὸν τῆς συναλλαγματικῆς 1500 δρ. Μετὰ πόσον χρόνον ἐξοφλεῖται τὸ ὑπόλοιπον ; ('Απ. μετὰ 348 ἡμέρας περίπου).

61) Τραπεζίτης ἐξέδωκε τρεῖς συναλλαγματικὰς τὴν μὲν 800 δρ. πληρωτέαν μετὰ τρεῖς μῆνας, τὴν δὲ 900 μετὰ 6, τὴν δὲ 1000 μετὰ 9· θέλει

δὲ νὰ ἀντικκαταστήσῃ αὐτὰς διὰ μιᾶς μόνης δραχμῶν 2700. Μετὰ πόσον χρόνον γενήσεται ἡ πληρωμὴ αὐτῆς ; ('Απ. μετὰ 6 $^2/_9$ μῆνας).

62) Πρόκειται νὰ μερισθῶσιν 8745 δρ. εἰς τέσσαρας ἀνθρώπους ὡς ἑξῆς, ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου, ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ τῶν μεριδίων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου, ὁ δὲ τέταρτος τὸ τρίτον τῶν μεριδίων τῶν τριῶν πρώτων. Ποῖα τὰ μερίδια ;

('Απ. 1457,50, 2915, 2186,25, 2186,25).

63) Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον ὁ μὲν 80000 δρ. ἐπὶ 8 μῆνας καὶ ἔλαβε κέρδος 6000 δρ , ὁ δὲ 60000 δρ. ἐπὶ 10 μῆνας, ὁ δὲ 100000 δρ. ἐπὶ 4 μῆνας. Πόσον τὸ ὅλον κέρδος καὶ τὰ μερίδια τῶν δύο ἑταίρων;

('Απ. 15370, 5625, 3750).

64) Ἠγόρασέ τις ἐθνικὰ δάνεια δίδοντα τόκον 4500 δρ. τῶν 4,50 %, εἰς τρέχουσαν τιμὴν 116 δρ., μεταπωλήσας δὲ αὐτὰ ἐζημιώθη 800 δρ. Ποία ἡ τρέχουσα τιμὴ κατὰ τὴν πώλησιν ; ('Απ. 115,20).

65) Πρόκειται νὰ διανεμηθῇ τὸ ποσὸν 755 δρ. εἰς τρία πρόσωπα οὕτως, ὥστε ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $^2/_3$ τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τὰ $^3/_4$ τῶν μεριδίων τῶν δύο ἑτέρων. Ποῖα τὰ μερίδια ; ('Απ. 252, 168, 315).

66) Τρεῖς συνέταιροι κατέβαλον ὁμοῦ 28350 δρ. ὁ πρῶτος ἔλαβεν ἐκ τοῦ κέρδους 3600 δρ., ὁ δεύτερος τὰ $^3/_4$ τοῦ πρώτου καὶ ὁ τρίτος τὸ ἥμισυ τῶν ὅσων ἔλαβον οἱ δύο ἕτεροι. Τίς ἡ προκαταβολὴ ἑκάστου τούτων ;

('Απ. 10800, 8100, 9450).

67) Οἰνοπώλης ἠγόρασε 15 βαρέλια οἴνου πρὸς 75 δρ. ἕκαστον συμφωνήσας νὰ πληρώσῃ μετὰ ἓν ἔτος· ἐὰν δὲ ἀγοράσῃ τὸ ἥμισυ τοῖς μετρητοῖς μετὰ πόσον χρόνον γενήσεται ἡ πληρωμὴ τοῦ ἑτέρου ἡμίσεως ;

('Απ. μετὰ 24 μῆνας).

68) Ἠγόρασέ τις ἀντὶ 24 δρ. τριῶν εἰδῶν καφέν, ὧν ἡ πρώτη ποιότης τιμᾶται 2,90, ἡ δευτέρα 2,60 καὶ ἡ τρίτη 2,50 δρ , ἠγόρασε δὲ ἴσην ποσότητα ἐκ τῶν τριῶν τούτων εἰδῶν. Πόσον ἐπλήρωσε δι' ἕκαστον εἶδος ;

('Απ. 8,70, 7,80. 7,50).

69) Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν σῖτον, ὧν τὸ ἑκατόλιτρον ἠγόρασε πρὸς 18,17 καὶ 15 δρ. Ἐὰν λάβῃ ἐκ τοῦ πρώτου 20 ἑκατ., ἐκ τοῦ δευτέρου 30 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 40 καὶ ἀναμίξῃ αὐτά, πόσον τιμᾶται τὸ ἑκατόλιτρον τοῦ μίγματος ; ('Απ. 16, 33 $^1/_3$).

70) Ἔχει τις τριῶν εἰδῶν σῖτον πρὸς 24, 30 καὶ 32 δρ. τὸ ἑκατόλιτρον. Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμίξῃ τὰ τρία εἴδη ταῦτα, ἵνα ἀποτε-

λεσθῇ τέταρτον εἶδος τιμώμενον 26 δρ. τὸ ἑκατόλιτρον ; ('Απ. 7 : 2 : 1).

71) Ἐτόκισέ τις 5500 δρ. πρὸς 4 $^0/_0$ καὶ 800 δρ. πρὸς 5 $^0/_0$, ταύτας δὲ 4 $^1/_2$ ἔτη πρὸ τῶν πρώτων. Ἐπὶ πόσον χρόνον τοκιζόμεναι αἱ 8000 δρ. δίδουσι τὸν αὐτὸν τόκον, ὃν καὶ αἱ 5500 δρ.

('Απ. τὸ δεύτερον 5 $^1/_2$ ἔτη καὶ τὸ πρῶτον 10).

72) Οἰνοπώλης ἠγόρασεν 136 ὀκ. οἴνου πρὸς δύο δρ. τὴν ὀκᾶν, θέλει δὲ νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν πρὸς 1,60 ἄνευ ζημίας. Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετὰ τοῦ οἴνου ; ('Απ. 34 ὀκ.).

73) Ἔχει τις 35 χιλιόγραμμα χρυσοῦ καθαρότητος 0,900. Πόσος χαλκὸς πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ, ἵνα ὁ βαθμὸς καθαρότητος ὑποβιβασθῇ εἰς 0,787 $^1/_2$;

('Απ. 5 χιλ.).

74) Ἠγόρασέ τις πρᾶγμά τι, οὗτινος δὲν ἐνθυμεῖται οὔτε τὸ βάρος οὔτε τὴν τιμὴν τῆς ἀγορᾶς, μόνον γνωστὸν εἶναι, ὅτι κατὰ βάρος ἠλαττώθη 20 $^0/_0$, καὶ ἐκ τῆς πωλήσεως αὐτοῦ εἰσεπράχθησαν 160 δρ. Ποία ἡ τιμὴ τῆς ἀγορᾶς ; ('Απ. 200 δρ.)

75) Ἀγρὸς ἔχων μῆκος 146,75μ. καὶ πλάτος 64,80μ. ἐπωλήθη πρὸς 3642,80 δρ. τὸ ἑκτάριον. Πόσον πρέπει νὰ πωληθῇ τοῖς μετρητοῖς δι' ἔκπτωσιν 3,25 $^0/_0$ ; ('Απ. 3351,36 δρ.).

76) Τριῶν ἑταίρων ὁ β' κατέβαλε τὸ ἥμισυ ἐπὶ πλέον τοῦ μεριδίου τοῦ πρώτου καὶ ὁ γ', 300 δρ. ἐπὶ πλέον τῶν ὅσα κατέβαλον οἱ δύο πρῶτοι· ὁ τρίτος ἔλαβε κέρδος 2570 δρ. ἐπὶ ὁλικοῦ κέρδους 5020 δρ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον ἑκάστου ; ('Απ. 2450, 3675, 6425).

77) Ἀνεμίχθη οἶνος 34 ὀκ. πρὸς 0,85 δρ. τὴν ὀκᾶν μετὰ ἑτέρου 28 ὀκ. πρὸς 0,45 δρ. τὴν ὀκᾶν. Ποία ἡ τιμὴ βαρελίου χωρητικότητος 225 ὀκάδων;

('Απ. 150,60).

78) Ἠσφάλισέ τις τὴν μὲν οἰκίαν αὐτοῦ ἀξίας 8500 δρ. ἀντὶ 0,90 $^0/_0$, τὰ δὲ ἔπιπλα ἀντὶ 1,25 $^0/_0$ ἀξίας 2600 δρ. Πόσα τὰ ἐτήσια ἀσφάλιστρα ;

('Απ. 10,90 δρ.)

79) Ἔμπορός τις αὐξάνει κατ' ἔτος τὴν περιουσίαν αὐτοῦ κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$ λαμβάνει δὲ ἐξ αὐτῆς κατ' ἔτος 1000 δρ. διὰ δαπάνας, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους εὑρέθη ἔχων περιουσίαν διπλασίαν. Πόσην εἶχε κατ' ἀρχάς ;

('Απ. 11100).

80) Τριῶν πίθων ὁ α'. ἔχει τὴν χωρητικότητα τοῦ β'. μεῖον τὰ $^2/_9$ αὐτῆς, ὁ β' τὴν τοῦ γ' μεῖον τὸ $^1/_4$ καὶ ὁ γ' τὴν τοῦ α' καὶ 50 λίτρας εἰσέτι. Πόση ἡ χωρητικότης ἑκάστου πίθου ; ('Απ. 70, 90, 120).

81) Ἠγόρασέ τις 36,75 πήχ. ὑφάσματος ἀντὶ 520 δρ. Ἐὰν θελήσῃ νὰ κερδήσῃ 5,80 δρ. ἐπὶ τῶν 40 δρ., τίς ἡ τιμὴ τῆς πωλήσεως τοῦ πήχεως; ('Απ. 16,20).

82) Δύο συνέταιροι κατέβαλον ὁμοῦ 9000 δρ. καὶ ἐκέρδησαν 3400 δρ. ἐπὶ 2 ἔτη· ἀλλ' ὁ πρῶτος καταβαλὼν 5000 δρ. ἔλαβε κέρδος 2000 δρ.. Πότε κατέβαλε τὸ ποσὸν αὐτοῦ ὁ δεύτερος; ('Απ. 3 μῆνας μετὰ τὸν πρῶτον).

83) Ἐὰν ἀναμιχθῇ οἶνος τῶν 1,80 τὴν ὀκᾶν μετὰ οἴνου τῶν 0,60, τίς ἡ τιμὴ τῆς ὀκᾶς τοῦ μίγματος; ('Απ. 1,20).

84) Τίς ἡ κοινὴ λῆξις τριῶν συναλλαγῶν ἀξίας 2000, 3000 καὶ 4000 δρ. ληγουσῶν τῆς μὲν πρώτης μετὰ 3 μῆνας, τῆς δευτέρας μετὰ 4 καὶ τῆς τρίτης μετὰ 6; ('Απ. 4 $^2/_3$).

85) Ἠγόρασέ τις ἐμπορεύματα ἀξίας 6000 δρ. πληρωτέων μετὰ 18 μῆνας, ἀλλὰ μετὰ 6 μῆνας ἐπλήρωσε 2000 δρ. Πότε πρέπει νὰ πληρώσῃ τὸ ὑπόλοιπον; ('Απ. Μετὰ 24 μῆνας).

86) Ἠγόρασέ τις ἐπὶ πιστώσει ἐμπορεύματα ἀξίας 5000 δρ. πληρωτέων μετὰ 15 μῆνας, ἀλλὰ τὰ $^3/_4$ ἐπλήρωσε πρὸ τῆς προθεσμίας, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρόκειται νὰ πληρώσῃ μετὰ 2 ἔτη καὶ 6 μῆνας. Πόσους μῆνας ἀπὸ τῆς ἀγορᾶς ἐπλήρωσε τὰ $^3/_4$; ('Απ. 10 μῆνας).

87) Τρεῖς ἐργάται εἰργάσθησαν εἰς ἐκτέλεσιν ἔργου ὁ μὲν 5 ὥρας, ὁ δὲ 6, ὁ δὲ 9, ἀλλ' ὁ πρῶτος ἔλαβε μερίδιον 2,50 δρ. Ποῖον ποσὸν διενεμήθη; ('Απ. 10 δρ.)

88) Πόσον ὕδωρ πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ μετὰ 100 λιτ. οἴνου, ὅταν αἱ 100 λίτ. τιμῶνται 60 δρ., ἡ δὲ ὀκᾶ τοῦ μίγματος πρέπει νὰ πληρωθῇ πρὸς 0,50 δρ. ('Απ. 20 λίτρ.)

89) Πῶς πρέπει νὰ πληρωθῶσιν 107 δρ. διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ νομισμάτων τῶν 5 καὶ 2 δραχμῶν; ('Απ. 17 τῶν 5 καὶ 11 τῶν 2).

90) Πῶς πρέπει νὰ πληρωθῶσιν 105 δρ. διὰ νομισμάτων τῶν 5 καὶ 2 δρ., ὧν τὰ δίδραχμα 15κις πλείονα τῶν πενταδράχμων; ('Απ. 3πεντ.45δίδ.)

91) Κατὰ ποίαν ἀναλογίαν πρέπει νὰ ἀναμιχθῇ οἶνος τῶν 50 λεπτῶν μετ' οἴνου τῶν 65 λ., ἵνα ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τιμᾶται 55 λ.; ('Απ. 2: 1).

92) Μετὰ οἴνων τῶν 24,30 καὶ 32 λεπ. νὰ ἀποτελεσθῇ οἶνος 100 ὀκ. τῶν 26 λεπ. ('Απ. τὸ 100 ἀναλόγως τῶν 7,2 καὶ 1.)

93) Ποσόν τι ἐτοκίσθη πρὸς 4 $^1/_2$ $^0/_0$· εὑρέθη δὲ κεφάλαιον καὶ τόκος ὁμοῦ 3167 δρ. Ποῖον τὸ κεφάλαιον; ('Απ. 12600).

94) Πωλῶν τις οἶνον πρὸς 1,80 τὴν ὀκᾶν ἔχει κέρδος 12 $^1/_2$ $^0/_0$. Τίς ἡ ἄνευ κέρδους τιμὴ τῶν 100 ὀκάδων; ('Απ. 160).

95) 520 στρατιῶται ἔχουσι 9000 σιτηρέσια ἐπὶ 21 ἡμέρας. Πόσον ἀναλογεῖ εἰς ἕνα στρατιώτην καθ' ἡμέραν; ('Απ. $^{75}/_{91}$ τοῦ σιτηρεσίου).

96) Γλεῦκος πωλεῖται πρὸς 40 λεπ. τὴν ὀκᾶν, μετὰ 4 ἔτη πωλεῖται ὡς οἶνος πρὸς 1 δρ. τὴν ὀκᾶν. Πόσον τὸ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν κέρδος κατ' ἔτος; ('Απ. 37,50).

97) Ἡ πραγματικὴ ἀξία τῆς ἀγγλικῆς λίρας εἶναι 28,12 δρ. Ἀγοράζων τις συναλλαγματικὴν ἐπὶ Λονδῖνον πληρωτέαν μετὰ 3 μῆνας πρὸς 27,60 δρ. τὴν λίραν, πόσον ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ὠφελεῖται κατ' ἔτος; ('Απ. 7,53...)

98) Ἠσφάλισέ τις τὴν οἰκίαν αὐτοῦ ἀξίας 7500 δρ. πρὸς 1,40 ἐπὶ τοῖς χιλίοις κατ' ἔτος, ἀλλ' ἐπλήρωσεν εὐθὺς 52,50 δρ. Πόσων ἐτῶν ἀσφάλιστρα ἐπλήρωσεν; ('Απ. 5 ἐτ.)

99) Ἀντηλλάχθη συνάλλαγμα 380 δρ. πληρωτέον μετὰ 5 μῆνας δι' ἑτέρου 400 δρ. πληρωτέον μετα 15 μῆνας, τοῦ αὐτοῦ 5 % ἐπιτοκίου τὸ ἔτος. Ζητεῖται, ἐὰν ὑπάρχῃ κέρδος ἢ ζημία; ('Απ. κέρδος 2,91).

100) Ἔμπορος ἔχει τρία γραμμάτια, τὸ μὲν 620 δρ· πληρωτέον μετὰ 8 μῆνας, τὸ δὲ 940 μετὰ 14, τὸ δὲ 1410 μετὰ 20· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὰ ἀνθ' ἑνὸς πληρωτέου μετὰ 17 μῆνας, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 9 %; ('Απ. 3001,04).

## Προβλήματα πρὸς λύσιν.

### Ἀκέραιοι ἀριθμοί.

1) Δύο συνέταιροι κατέθηκαν πρὸς ἐπιχείρησίν τινα 11800δρ. Ὁ εἷς κατέθηκε μόνον 2560δρ. Πόσαι δραχμαὶ ἀπαιτοῦνται, ὅπως ἡ κατάθεσις αὐτοῦ ἰσοῦται τῇ τοῦ ἑτέρου;

2) Θέλει τις νὰ διανείμῃ 4590δρ. εἰς τρία μέρη οὕτως, ὥστε τὸ δεύτερον νὰ ἦναι κατὰ 150 δρ. ὀλιγώτερον τοῦ πρώτου, ὅπερ εἶναι 1850δρ. Ποῖον εἶναι τὸ τρίτον μέρος;

3) Ὅμιλος 450 ἐργατῶν ἔλαβον χρηματικόν τι ποσόν. 20 ἐξ αὐτῶν ἔλαβον ὁμοῦ 1000δρ. οἱ δὲ λοιποὶ ἔλαβον τὸ ὑπόλοιπον, ἕκαστος 30δρ. Ποῖον τὸ διανεμηθὲν ποσόν;

4) Ἐάν τις ἔχῃ 400δρ. ἐπὶ πλέον δύναται νὰ πληρώσῃ τὸ ἐξ 850δρ. χρέος αὐτοῦ καὶ ὑπολείπονται αὐτῷ 67δρ. ἀκόμη. Πόσα χρήματα ἔχει;

5) Βιβλίον τι σύγκειται ἐξ ἓξ τόμων ἐκ 560 σελίδων. Ἑκάστη σελὶς ἔχει 42 στίχους καὶ ἕκαστος στίχος 40 γράμματα. Πόσα γράμματα περιέχει

τὸ βιβλίον τοῦτο, ἐὰν περιέχῃ 60 κεφάλαια καὶ ἕκαστον κεφάλαιον ἔχῃ 5 στίχους ὀλιγώτερον;

6) Ἐδαπάνησέ τις 375δρ. καὶ εὗρεν, ὅτι ὑπολείπονται αὐτῷ τετράκις πλείονα τῶν ὅσων δὲν ἐδαπάνησεν. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

7) Φρουρίου τινός, ἐὰν ὑπάρχωσι 275 στρατιῶται ὀλιγώτεροι καὶ ἐξέλθωσιν 976, μένωσιν ἐν αὐτῷ 676. Πόσοι στρατιῶται ὑπάρχουσιν ἐν τῷ φρουρίῳ;

8) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 85, ὁ δὲ εἷς ὑπερέχει τοῦ ἑτέρου κατὰ 11. Τίνες οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί;

9) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀριθμὸν 2798 δίδει ἄθροισμα, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 8.

10) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ 3678 δίδει ὑπόλοιπον, οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 4.

11) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις διαιρῶν τὸν ἀριθμὸν 7891 δίδει πηλίκον οὗτινος τὰ ψηφία εἶναι πάντα 6.

12) Εὑρεῖν ἀριθμόν, ὅστις πολλαπλασιάζων τὸν 80 δίδει γινόμενον οὗτινος πάντα τὰ ψηφία εἶναι 7.

## Κλασματικοὶ ἀριθμοί.

13) Ἡ ἡλικία ἀνθρώπου τινὸς εἶναι τοιαύτη, ὥστε τὰ $\frac{3}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτῆς ἀποτελοῦσι τὸ διπλάσιον μεῖον 11. Τίς ἡ ἡλικία αὐτοῦ;

14) Δαπανήσας τις τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ $\frac{1}{5}$ τῶν χρημάτων αὐτοῦ καὶ ἀκόμη 5δρ. εὗρεν, ὅτι ὑπολείπονται αὐτῷ τὸ ἥμισυ τῶν ὅσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς. Πόσα εἶχεν;

15) Ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν ἐκπαιδευτηρίου τινὸς εἶναι τοιοῦτος ὥστε, ἐὰν ὑπάρχωσιν ἀκόμη τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὅσων ὑπάρχουσι καὶ προσέτι 15, εἶναι ἐν συνόλῳ 165 μαθηταί. Τίς ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν;

16) Εἰς δεξαμενήν τινα ρέουσι τρεῖς κρῆναι· ἡ πρώτη πληροῖ αὐτὴν εἰς $1\frac{1}{4}$ ὥρας, ἡ δευτέρα εἰς $2\frac{2}{3}$ καὶ ἡ τρίτη εἰς $4\frac{4}{7}$ ὥρας· σωλὴν δέ τις κενοῖ αὐτὴν εἰς $2\,{}^1/_2$ ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθῶσι συγχρόνως αἱ τρεῖς κρῆναι καὶ ὁ σωλήν, εἰς πόσον χρόνον πληροῦται ἡ δεξαμενή;

17) Δύο μαθηταὶ ἀντέγραψαν ὁμοῦ σελίδας τινὰς βιβλίου εἰς $4\frac{3}{4}$ ὥρας. Ἐὰν ὁ εἷς ἀντιγράφῃ αὐτὰς μόνος εἰς $6\frac{1}{2}$ ὥρας, εἰς πόσας ὥρας ἀντιγράφει αὐτὰς μόνος ὁ ἕτερος;

18) Σφαῖρά τις ἔπεσεν ἐξ ὕψους 80 ὑφεκατομέτρων· ἀναπηδήσασα δὲ τρὶς ὑψοῦτο εἰς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ ὕψους, ἐξ οὗ ἔπιπτεν· εἰς ποῖον ὕψος ὑψώθη κατὰ τὴν τρίτην ἀναπήδησιν;

19) Τέσσαρες ὀδοντωτοὶ τροχοὶ τίθενται διαδοχικῶς εἰς ἐπαφήν· ἕκαστος δὲ τῶν τροχῶν τούτων ἔχει τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν ὀδόντων τοῦ ἀμέσως προηγουμένου. Ἐὰν ὁ πρῶτος τροχὸς ἔχῃ 162 ὀδόντας, πόσους ἔχει ὁ μικρότερος τῶν τεσσάρων τροχῶν;

20) Φρουρά τις ἔχει τροφὰς ἐπὶ 121 ἡμέρας· ἐὰν αὐξηθῇ ἡ φρουρὰ αὕτη κατὰ τὸ $\frac{1}{3}$, πόσον εἶναι τὸ σιτηρέσιον;

21) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 90 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλείτερον διαιρούμενον διὰ τοῦ μικροτέρου νὰ δίδῃ πηλίκον $3\,^1/_2$.

22) Ὡρολόγιον δεικνύον τὴν ἀληθῆ ὥραν τὴν μεσημβρίαν ὑστερεῖ κατὰ 2 λεπτὰ ἐπὶ τρεῖς ὥρας. Ποία εἶναι ἡ ἀληθὴς ὥρα, ὅταν τὸ ὡρολόγιον τοῦτο δεικνύῃ $9\frac{1}{2}$ ὥρας;

23) Τίς ὁ ἀριθμός, ὅστις ἐλαττοῦται κατὰ 12 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ $^3/_5$;

24) Ποία εἶναι ἡ ὥρα, ὅταν ὁ παρελθὼν χρόνος τῆς ἡμέρας ᾖναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ μέλλοντος χρόνου αὐτῆς;

25) Ὅπως καταστῶσι δύο ἀριθμοὶ ἴσοι, πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς τὸν μικρότερον ἐξ αὐτῶν τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ μεγαλειτέρου· ποῖον μέρος τοῦ μεγαλειτέρου εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμός;

26) Δύο ἁτμάμαξαι ἀναχωροῦσι συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων ἀντιθέτως. Ἡ πρώτη διατρέχει τρία χιλιόμετρα πλέον τῆς δευτέρας τὴν ὥραν, μετὰ 12 δὲ ὥρας συναντῶνται κατὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ὁδοῦ· τίς ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων;

27) Οἱ δύο δεῖκται ὡρολογίου τινὸς ἀποτελοῦσι μίαν εὐθεῖαν γραμμήν. Μετὰ πόσον χρόνον ἀποτελοῦσι πάλιν μίαν εὐθεῖαν γραμμήν;

28) Ἔμπορός τις ἐπώλησε 222 μέτρα ὑφάσματός τινος δύο ποιοτήτων ἐξ ἴσου, ἔλαβε δὲ ὁμοῦ ἐκ τῆς πωλήσεως 1998δρ. Τίς ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκατέρας ποιότητος, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι 11 μέτρα τῆς δευτέρας τιμῶνται, ὅσον 7 μέτρα τῆς πρώτης;

29) Δύο ἄνθρωποι ἔχουσιν ἡλικίαν ὁ μὲν 44 ἔτη, ὁ δὲ 30. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου ἦτο διπλασία τῆς τοῦ δευτέρου;

30) Ἔπιέ τις τὸ $\frac{1}{3}$ ποτηρίου καθαροῦ οἴνου καὶ ἐπλήρωσεν εἶτα αὐτὸ ὕδατος· ἔπιε τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ἐπλήρωσε πάλιν αὐτὸ ὕδατος, ὅτε ἔπιε πάλιν τὸ ἥμισυ. Πόσος οἶνος καθαρὸς ἔμεινεν ἐν τῷ ποτηρίῳ;

31) Τρεῖς ἄνθρωποι διανέμονται μῆλα. Ὁ 1ος λαμβάνει τὰ $\frac{2}{5}$ καὶ 6, ὁ 2ος τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ 9 καὶ ὁ 3ος λαμβάνει τὰ ὑπολειφθέντα 33 μῆλα. Πόσα ἦσαν τὰ μῆλα καὶ πόσα ἔλαβεν ἑκάτερος τῶν δύο πρώτων;

32) Ἄνθρωπός τις ἐξελθὼν ἐκ τῆς οἰκίας ἔφερε μεθ' ἑαυτοῦ χρηματικόν τι ποσόν. Ἐδάνεισε δὲ 345δρ. καὶ ἐπλήρωσε χρέος 845δρ., ἔλαβεν ὀφειλόμενα 625δρ. καὶ ἐπανῆλθεν εἰς τὴν οἰκίαν φέρων 295δρ., δαπανήσας μόνον 9,75δρ. Πόσα χρήματα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

33) Ἐμίσθωσέ τις ὑπηρέτην ἐπὶ 90 ἡμέρας συμφωνήσας νὰ δίδῃ αὐτῷ 3,50δρ. τὴν ἡμέραν ἄνευ τροφῆς καὶ 2δρ. μετὰ τροφῆς. Κατὰ τὴν ἐποχὴν τῆς πληρωμῆς ὁ ὑπηρέτης ἔλαβε 270δρ. Ἐπὶ πόσας ἡμέρας ἐτρέφετο;

34) Ἔδωκέ τις 2308δρ. πράγματα καὶ ἓν συνάλλαγμα 1000δρ. πρὸς ἀπόσβεσιν χρέους, ἐδόθησαν δὲ αὐτῷ 669,95δρ. Πόσα ὤφειλεν;

35) Ποσὸν ἐκ 4587 σύγκειται ἐξ ἴσων ἀριθμῶν 20δρ., 10δρ., 5δρ., 1δρ., 0,50δρ. καὶ 0,20δρ. Πόσα εἶναι ἐξ ἑκάστου εἴδους;

36) Δύο ὁδοιπόροι ἀναχωροῦσιν ὁ μὲν ἐκ Παρισίων, ὁ δὲ ἐκ Ῥώμης. Καὶ ὁ μὲν πρῶτος διανύει 45 χιλιόμετρα τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ δεύτερος 40. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο τούτων πόλεων, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι οἱ δύο οὗτοι ὁδοιπόροι συναντῶνται μετὰ 20 ἡμέρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως αὐτῶν.

37) Ζητεῖται ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τάξεώς τινος ἐκπαιδευτηρίου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι, ἐὰν ἦναι 11 μαθηταὶ ἐπὶ πλέον, ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν αὐξάνεται κατὰ τὸ δέκατον.

38) Πέντε δεσμίδες ὑφάσματος τοῦ αὐτοῦ μήκους ἐπωλήθησαν πρὸς 2,50δρ. τὸ μέτρον. Ποῖον τὸ μῆκος ἑκάστου, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ μέτρον ἐστοίχιζε 1,90δρ., τὸ δὲ ὁλικὸν κέρδος ἦτο 45δρ.;

39) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασε 4 βυτία οἴνου πρὸς 630δρ. ἕκαστον, ἐπώλησε δὲ 55 λίτρας πρὸς 36,30δρ. καὶ ἐκέρδησε 0,03δρ. τὴν λίτραν. Πόσον οἶνον περιέχει ἕκαστον βυτίον;

40) Πρὸς κατασκευὴν τείχους τινὸς ἀπαιτοῦνται 23935,72δρ. Καὶ τὸ μὲν ὕψος τοῦ τείχους πρέπει νὰ ἦναι 4,50 μέτρα, τὸ δὲ πάχος 0,90 μέτρα, ποῖον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ τείχους ἐὰν τὸ κυβικὸν μέτρον τιμᾶται 2,75δρ,;

41) Ἠγόρασέ τις οἰκόπεδον πρὸς 85δρ. τοὺς 6τετρ. πήχεις καὶ ἐπώλησεν αὐτὸ πρὸς 106δρ. τοὺς 4τετρ. πήχεις, ἐκέρδησε δὲ 5270δρ. Πόσον ἦτο τὸ οἰκόπεδον;

42) Ὑαλέμπορος ἠγόρασε 2500 ποτήρια πρὸς $3^5/_7$δρ. τὴν δωδεκάδα. Ἀλλὰ κατὰ τὴν μεταφορὰν ἐθραύσθησαν 127· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ ἕκαστον ποτήριον, ὅπως κερδήσῃ ἐκ τῆς πωλήσεως 200δρ.;

43) Ἔν τινι ἐργοστασίῳ ἐργάζονται ἄνδρες, γυναῖκες καὶ παιδία· τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης γυναικὸς εἶναι τὰ $^2/_3$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν ἀνδρῶν, τὸ δὲ ἡμερομίσθιον ἑκάστου παιδίου εἶναι τὸ $^1/_2$ τοῦ ἡμερομισθίου τῶν γυναικῶν· 25 ἄνδρες, 17 γυναῖκες καὶ 30 παιδία ἐπληρώθησαν διὰ μίαν ἑβδομάδα 897 δρ. Ποῖον τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστου;

44) Ἔμπορος ἠγόρασε σάκκους τινὰς καφὲ πρὸς $78^7/_5$δρ. τὸν σάκκον. Ἐκ τούτων ἐπώλησε μέρος πρὸς $81^1/_2$ καὶ ἔλαβεν, ὅσα χρήματα ἔδωκε καὶ ἐπὶ πλέον 120δρ., ἔμειναν δὲ πρὸς πώλησιν καὶ 15 ἀκόμη σάκκοι. Πόσους σάκκους εἶχεν ἀγοράσει;

45) Ὑπάλληλός τις ἀποταμιεύει τὸ $^1/_6$ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματος αὐτοῦ, καὶ δαπανᾷ τὰ $^3/_5$ πρὸς συντήρησιν αὐτοῦ. Ἐὰν ἔχῃ ἀκόμη 350 δραχ. ἐπὶ πλέον εἰσόδημα κατ' ἔτος, δύναται νὰ ἀποταμιεύῃ τὸ $^1/_4$ τοῦ εἰσοδήματος καὶ νὰ δαπανᾷ, ὅσα καὶ τόρα. Ποῖον τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα;

46) Ὁδοιπόρος τις διανύει $8^1/_3$ στάδια τὴν ὥραν, ἐξεκίνησε $2^3/_4$ ὥρας ὕστερον ἄλλος, ἔφθασε δὲ συγχρόνως μετ' αὐτοῦ εἰς πόλιν ἀπέχουσαν 87 στάδια, ποία ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου καὶ πόσον χρόνον διήρκεσεν ἡ ὁδοιπορία;

47) Σιδηρόδρομός τις εἰσπράττει κατὰ μῆνα παρὰ μὲν ἐπιβατῶν 32600δρ. διὰ μεταφορᾶς δὲ ἐμπορευμάτων 3205· τὰ δὲ διάφορα ἔξοδα αὐτοῦ εἶναι $3^1/_2$ ἑκατομμυρίων διηρημένα εἰς 20000 μετοχάς· πόσον μέρισμα δύναται νὰ δώσῃ πρὸς ἑκάστην μετοχὴν καθ' ἑξαμηνίαν;

## Συμμιγεῖς ἀριθμοί.

48) Ἀντὶ ἑνὸς ταλλήρου ἀγοράζει τις 2στ. 13ὀκ. 250δρ.· ἀντὶ πόσων δραχμῶν ἀγοράζει τις 80στ.300δρ.;

49) Μία μοῖρα περιφερείας τινὸς ἔχει μῆκος 1ποδ. 3δακ. 5γρ. πόσον μῆκος ἔχουσιν $102^{0},47'35''$;

50) Πόσος χρόνος εἶναι ἀπὸ τῆς 25 Μαρτίου 1821 μέχρι τῆς 27 Ἀπριλίου 1903;

51) Ἀτμόπλοιόν τι διήνυσεν $228^{2}/_{3}$ μίλια εἰς 2ἡμ. 7ὧρ. 55″. Πόσα μίλια διήνυσε καθ' ὥραν;

53) Σιδηροῦ τινος ἐλάσματος μία παλάμη ἔχει βάρος 6ὀκ. 369δρ., πόσον βάρος ἔχουσι $2^{5}/_{8}$ μέτρα τοῦ αὐτοῦ ἐλάσματος;

54) Πόσον τιμῶνται 25στ. 18ὀκ. 230δρ. ἀνθράκων πρὸς 6 $^{3}/_{5}$ δρ. τὸν στατῆρα.

55) Πόσον τιμᾶται τὸ μέτρον ὑφάσματος, οὗτινος 15 $^{3}/_{8}$ ὁ πῆχεις (ἐνδεζὲ) ἐπωλήθησαν ἀντὶ 57 $^{2}/_{8}$ δρ;

## Τετραγωνικὴ καὶ κυβικὴ ῥίζα.

56) Τίς ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ ἥμισυ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τρίτον δίδει γινόμενον 864 ;

57) Τίς ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ $^{1}/_{7}$ καὶ τὸ $^{1}/_{8}$ πολλαπλασιασθέντα δίδουσι γινόμενον, τὸ ὁποῖον διαιρούμενον διὰ 3 δίδει πηλίκον 298 $^{2}/_{3}$ ;

58) Τίς ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ $^{1}/_{3}$ πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ τὸ τετράγωνον δίδει γινόμενον 1944 ;

59) Τίς ὁ ἀριθμός, οὗ τὸ $^{1}/_{2}$, τὸ $^{1}/_{3}$ καὶ τὸ $^{1}/_{4}$ πολλαπλασιασθέντα δίδουσι γινόμενον 4608 ;

60) Τίς ὁ ἀριθμός, ὅστις διαιρεθεὶς διὰ 4 δίδει πηλίκον τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης αὐτοῦ ;

## Μέθοδος τῶν τριῶν ἁπλῆ καὶ σύνθετος.

61) Ἐχρειάσθησαν εἴκοσιν ἐργάται, οἵτινες ἐπὶ 15 ἡμέρας ἐξετέλεσαν ἔργον 450 μέτρων. Πόσον ἔργον ἐκτελοῦσιν 24 ἐργάται ἐργαζόμενοι ἐπὶ 25 ἡμέρας ;

62) Ἐπὶ 18 ἡμέρας καὶ 8 ὥρας καθ' ἡμέραν 14 ἐργάται ἐξετέλεσαν ἔργον 136,5 μέτρων μήκους καὶ 9,2 πλάτους. Πόσον ἔργον ἐκτελοῦσι. 36 ἐργάται ἐργαζόμενοι ἐπὶ 7 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐπὶ 14 ἡμέρας;

63) Ἰδιωτικόν τι Λύκειον συγκείμενον ἐξ 120 μαθητῶν (ἐσωτερικῶν)

δαπανᾷ 1280 δρ. πρὸς συντήρησιν ἐπὶ 15 ἡμέρας. Ποία εἶναι ἡ δαπάνη τῆς συντηρήσεως ἐπὶ 45 ἡμέρας, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν αὐξηθῇ κατὰ 25 ἐσωτερικούς ;

64) Ἐργάτης τις πρέπει νὰ ἐκτελέσῃ δύο ἔργα· ἡ δυσκολία τοῦ πρώτου πρὸς τὴν τοῦ δευτέρου εἶναι ὡς ὁ 12 πρὸς τὸν 17. Ζητεῖται, πόσα μέτρα ἐκτελεῖ ἐκ τοῦ πρώτου ἐπὶ 538 ὥρας, γνωσσοῦ ὄντος, ὅτι ἐκτελεῖ ἐκ τοῦ πρώτου 508 μέτρα ἐπὶ 20 ἡμέρας τῶν 8 ὡρῶν.

65) Ἔν τινι φρουρίῳ ὑπάρχουσι τροφαὶ διὰ 50 ἡμέρας· ἐὰν ἦναι ἀνάγκη νὰ ἐπαρκέσωσιν αἱ τροφαὶ ἐπὶ 75 ἡμέρας, πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νὰ λαμβάνῃ ἕκαστος ἄνθρωπος ἐν αὐτῷ;

56) Ὡρολόγιόν τι ὑστεροῦν 7 λεπτὰ εἰς 15 ὥρας ἐτέθη συμφώνως πρὸς ἕτερον δεικνύον ἀκριβῶς τὰς ὥρας, καθ' ἣν στιγμὴν τοῦτο ἐδείκνυε μεσημβρίαν· τίς ἡ ἀκριβὴς ὥρα ὅταν τὸ πρῶτον ὡρολόγιον δεικνύει 5 μ. μ.;

67) Ἔν τινι φρουρίῳ ἦσαν 520 στρατιῶται καὶ εἶχον τὴν 1 Ἀπριλίου τροφὰς δι' ὅλον τὸν μῆνα τοῦτον· τὴν νύκτα τῆς 20 Ἀπριλίου γινομένης ἐξόδου ἐφονεύθησαν 36 στρατιῶται· ἐπὶ πόσας ἡμέρας ὑπάρχουσι τότε τροφαί;

68) Ἐκ δύο ταπήτων τῆς αὐτῆς ποιότητος, ὁ μὲν ἔχων 6 πήχ. μῆκος καὶ 3 πλάτος τιμᾶται 380 δρ., ὁ δὲ ἔχων μῆκος 7 $^3/_4$ καὶ πλάτος 5 $^1/_4$ τιμᾶται 425 δρ. τίς ὁ εὐθυνότερος, καὶ κατὰ πόσον ;

60) Ἐὰν 170 ὀκ. σταφίδος χρειάζωνται, ὅπως παραχθῶσιν 98 ὀκάδες οἴνου· πόση σταφὶς χρειάζεται, ὅπως παραχθῇ οἶνος 35 βαρελίων, ὧν ἕκαστον περιέχει 375 ὀκ. ;

70) Ἔργον τι πρέπει νὰ ἐκτελεσθῇ εἰς 27 ἡμέρας· ἀνέλαβον δὲ νὰ ἐκτελέσωσιν αὐτὸ 14 ἐργάται ἐργαζόμενοι 8 ὥρας καθ' ἡμέραν· ἀλλὰ μετὰ 20 ἡμερῶν ἐργασίαν εἶδον, ὅτι μόνον τὰ $^4/_7$ τοῦ ἔργου εἶχον ἐκτελεσθῆ· ἐὰν προσλάβωσι 4 ἐργάτας, πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται τὴν ἡμέραν, ὅπως ἐκτελεσθῇ τὸ ἔργον ἐντὸς τῆς τεταγμένης προθεσμίας ;

## Προβλήματα τόκου καὶ ὑφαιρέσεως.

71) Εἰς πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι τοκιζόμενον πρὸς 12 % διπλασιάζεται;

72) Ὅπως ἀσφαλίσῃ τις τὸ φορτίον πλοίου τινός, πρέπει νὰ πληρώσῃ $^3/_7$ ἐπὶ τοῖς ἑκατὸν ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ φορτίου οὔσης 72526 δρ. Ποσα εἶναι τὰ ἀσφάλιστρα ;

73) Ἔχει τις οἰκίαν, ἧς ἡ ἀξία 45000 δρ. Τὸ ἐνοίκιον τῆς οἰκίας ταύτης εἶναι 220 δρ. κατὰ μῆνα. τὰ δὲ ἔξοδα πρὸς ἐπισκευήν, ὕδωρ, φύρον κλ. εἶναι 480 δρ. κατ' ἔτος. Πόσον % εἶναι τὸ κέρδος τὸ ἐκ τῆς οἰκίας ταύτης κατ' ἔτος ;

74) Ἔμπορός τις ἠγόρασε 3520 ὀκ. ἐλαίου πρὸς 85 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν. Πόσον $^0/_0$ ἐκέρδησε κατ' ἔτος ;

75) Σιτέμπορός τις ἠγόρασε σῖτον πρὸς 32 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν· μετὰ 4 μῆνας καὶ 17 ἡμέρας ἐπώλησεν αὐτὸν κερδήσας 15 $^0/_0$. Πόσον ἐπώλησε τὴν ὀκᾶν τὸν σῖτον ;

76) Ἠγόρασέ τις οἰκίαν ἀντὶ 54000 δρ. καὶ κτῆμά τι ἀντὶ 37500 δρ.· ἐκ μὲν τῆς οἰκίας τὸ ἐτήσιον κέρδος εἶναι 2850 δρ., ἐκ δὲ τοῦ κτήματος 985. Πόσον $^0/_0$ εἶναι τὸ κέρδος ἀμφοτέρων τούτων ;

77) Μεσίτης τις ἐπώλησε 12 μετοχὰς τῆς Ἐθνικῆς Τραπέζης πρὸς 3675 δρ. καὶ 25 μετοχὰς σιδηροδρόμου πρὸς 87 δρ.· ἐὰν ἔλαβε διὰ μεσιτείαν $^2/_{10}$ $^0/_0$, πόσον ἔλαβεν;

78) Κράτος τι ἐδανείσθη 100000 πρὸς 5 $^1/_2$ $^0/_0$, ἔλαβεν ὅμως μόνον τὰ 7800000. Πρὸς πόσον $^0/_0$ ἐδανείσθη ;

79) Οἰνοπώλης τις ἠγόρασε 4950 ὀκ. οἴνου πρὸς 42 λεπτὰ τὴν κᾶν. ἐκ τούτων 850 ὀκ. μετεβλήθησαν εἰς ὄξος. Μετὰ 5 μῆνας καὶ 16 ἡμέρας ἐπώλησε τὸν μὲν οἶνον πρὸς 60 λ., τὸ δὲ ὄξος 8 $^2/_3$ λ. Ζητεῖται, ἐὰν ἐκέρδησε καὶ πόσον $^0/_0$ ἐκέρδησεν ;

80) Πόση εἶναι ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 540,80 λ. προεξοφλουμένου 1 ἔτος καὶ 5 μῆνας καὶ 18 ἡμέρας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ;

81) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐγένετο ἡ ὑφαίρεσις γραμματίου 2500 δρ. ἐξαργυρωθέντος διὰ 2248 δρ. 7 $^1/_2$ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ ;

82) Μετὰ πόσον χρόνον λήγει γραμμάτιον 2700 δρ. τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται πρὸς 9 $^1/_2$ $^0/_0$ διὰ 2400 δρ. ;

83) Ἔμπορός τις ἔχει τρία γραμμάτια τὸ μὲν 570 δρ. πληρωτέον μετὰ 7 μῆνας, τὸ δὲ 680 δρ. πληρωτέον μετὰ 16 μῆνας, τὸ δὲ 2150 δρ. πληρωτέον μετὰ 22 μῆνας. Ἐὰν ἀνταλλαχθῶσι τὰ τρία ταῦτα γραμμάτια ἀντὶ ἑνὸς πληρωτέου μετὰ 18 μῆνας, πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 8 $^0/_0$ ;

84) Ἔμπορός τις ἠγόρασε παρ' ἄλλου πράγματα ἀξίας 4518 . μὴ δυνάμενος δὲ νὰ πληρώσῃ ἀμέσως ὑπέγραψε συνάλλαγμα πληρωτέον μετὰ 7 μῆνας πρὸς 9 $^0/_0$. Πόσας δρ. πρέπει νὰ φέρῃ τὸ γραμμάτιον τοῦτο ;

85) Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς ἐξωτερικῆς καὶ ἐσωτερικῆς ὑφαιρέσεως γραμματίου τινος πρὸς 8 $^0/_0$ εἶναι 50 δρ. δι' ἓν ἔτος. Ποῖον τὸ ποσὸν τοῦ γραμματίου ;

86) Ἔχει τις δύο συναλλάγματα, τὸ μὲν ἐκ 1600 δρ. λῆγον μετὰ 5 μῆνας, τὸ δὲ ἐκ 2780 λῆγον μετὰ 14 μῆνας· ἐὰν θέλῃ νὰ ἀνταλλάξῃ αὐτὰ

δι' ἑνὸς συναλλάγματος 4680 δρ.; πόση εἶναι ἡ προθεσμία αὐτοῦ;

## Προβλήματα μερισμοῦ ἢ ἑταιρείας.

87) Τρία χωρία πληρώνουσι φόρον 5700 δρ.· τὸ πρῶτον ἔχει 150 κατοίκους, τὸ δεύτερον 320 καὶ τὸ τρίτον 500. Ποῖος ὁ φόρος ἀναλόγως τοῦ πληθυσμοῦ;

88) Διέταξέ τις ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μοιρασθῶσι τὴν περιουσίαν ἐκ 55900 δρ. οἱ τέσσαρες αὐτοῦ υἱοὶ ὡς ἑξῆς· ὁ δεύτερος νὰ λάβῃ τὰ $^3/_5$ τῆς μερίδος τοῦ πρώτου, ὁ τρίτος τὰ $^3/_7$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μερίδων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ δευτέρου καὶ ὁ τέταρτος τὰ $^3/_8$ τῶν μερίδων τοῦ πρώτου καὶ τοῦ τρίτου. Πόσον ἔλαβεν ἕκαστος;

89) Ἔργον τι ἐξετελέσθη ὑπὸ 2 ἐργατῶν, ὧν ὁ μὲν εἰργάσθη 8 ἡμέρας ἐπὶ 9 ὥρας τὴν ἡμέραν, ὁ δὲ 15 ἡμέρας ἐπὶ 7 ὥρας τὴν ἡμέραν. Ἔλαβον δὲ ὁμοῦ 86 δρ. Πόσας ἔλαβεν ἕκαστος;

90) Διέταξέ τις ἐν τῇ διαθήκῃ αὐτοῦ νὰ μοιρασθῶσι τὴν ἐκ 50000 δρ. περιουσίαν οἱ τρεῖς υἱοὶ αὐτοῦ· διέταξε δὲ νὰ λάβῃ ἕκαστος τόσα, ὥστε τὰ μερίδια αὐτῶν κατατιθέμενα εἰς τὴν Τράπεζαν ἐπὶ τόκῳ ἁπλῷ 4 $^0/_0$ νὰ γίνωνται ἴσα, ὅταν συμπληρώνωσι τὸ 21 ἔτος τῆς ἡλικίας αὐτῶν· ὁ πρῶτος εἶναι 14 ἐτῶν, ὁ δεύτερος 8 καὶ ὁ τρίτος 5. Ποῖα τὰ μερίδια;

91) Παρὰ πτωχεύσαντος ἐμπόρου πληρώσαντος 45 $^0/_0$ ἐκ τῶν χρεῶν αὐτοῦ ἔλαβεν ὁ μὲν πρῶτος δανειστὴς 2580 δρ., ὁ δεύτερος 3200 δρ. καὶ ὁ τρίτος 1580 δρ. Πόσα εἶχε νὰ λάβῃ ἕκαστος;

92) Διαλυθείσης ἑταιρείας τινος ἐκ 4 συνεταίρων ἔλαβεν ὁ μὲν 12500 δρ. ὁ δὲ 3200 δρ. ὁ δὲ 5630 ὁ δὲ 5700. Ἡ κατάθεσις τοῦ πρώτου ἦτο 3000 δρ. ποῖαι αἱ καταθέσεις τῶν ἄλλων;

## Προβλήματα ἀναμίξεως.

93) Σιτέμπορος ἀνέμιξε τρία εἴδη σίτου· καὶ ἐκ μὲν τοῦ πρώτου εἴδους ἔλαβεν 750όκ., ἐκ δὲ τοῦ δευτέρου 1200 καὶ ἐκ τοῦ τρίτου 1800· πρὸ τῆς ἀναμίξεως ἐπώλει τὸ πρῶτον εἶδος πρὸς 40λ. τὴν ὀκᾶν, τὸ δεύτερον πρὸς 35 καὶ τὸ τρίτον, πρὸς 30· πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος, ἵνα κερδήσῃ 10$^0/_0$ ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ.

94) Ἔχει τις 80 δράμια ἀργύρου, οὗ ὁ βαθμὸς τῆς καθαρότητος εἶναι 0,900 καὶ θέλει νὰ καταβιβάσῃ τὸν βαθμὸν τῆς καθαρότητος αὐτοῦ εἰς 0,875 Πόσον βάρος εὐτελῶν μετάλλων πρέπει νὰ ἀναμίξῃ μετ' αὐτοῦ;

95) Ἠγόρασέ τις 780όκ. ἐλαίου πρὸς 90 λεπτὰ τὴν ὀκᾶν, εἶτα 2500όκ. πρὸς 95λ καὶ τέλος 1500όκ. πρὸς 1,05. Ἐὰν ἀναμίξῃ τὸ ἔλαιον τοῦτο καὶ

ἐκ τῆς πωλήσεως κερδήσῃ 25% ἐπὶ τῆς ἀξίας αὐτοῦ, πρὸς πόσον πρέπει νὰ πωλῇ τὴν ὀκᾶν τοῦ μίγματος;

96) Οἰνοπώλης ἔχει δύο εἴδη οἴνου· τοῦ μὲν πρώτου εἴδους ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 85λ. τοῦ δὲ δευτέρου 60· ἐὰν λάβῃ ἐξ αὐτῶν μῖγμα 3500ὀκ. οὗτινος ἡ ὀκᾶ νὰ τιμᾶται 55λ. καὶ νὰ κερδήσῃ 8% ἐπὶ τῆς ἀξίας τοῦ μίγματος· πόσον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκατέρου τῶν οἴνων;

97) Ἀνέμιξέ τις 16ὀκ. χαλκοῦ, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 3,50δρ. μετὰ 25ὀκ. ἄλλου χαλκοῦ, οὗτινος ἡ ὀκᾶ τιμᾶται 4,80δρ. Πόσου τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

98) Πρὸς κατασκευὴν ὀρειχάλκου ἀναμιγνύουσι 3 μέρη ψευδαργύρου καὶ 7 μέρη χαλκοῦ· ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ χαλκοῦ τιμᾶται 4,60δρ. καὶ ἡ τοῦ ψευδαργύρου 7.80· πόσου τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ ὀρειχάλκου;

99) Ἀνέμιξέ τις οἶνον τῶν 85 λεπτῶν μετὰ τριπλασίας ποσότητος ἄλλου οἴνου· ἐὰν ἡ ὀκᾶ τοῦ κράματος τιμᾶται 65 λεπτῶν, πόσου τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ δευτέρου οἴνου;

100) Ἀνέμιξέ τις 1500 κοιλὰ σίτου μετὰ 2500 κοιλῶν ἄλλου εἴδους σίτου, οὗτινος τὸ κοιλὸν τιμᾶται 80 λεπτὰ ὀλιγώτερον· τοῦ μίγματος τὸ κοιλὸν τιμᾶται 17δρ, Πόσον τιμᾶται τὸ κοιλὸν ἑκάστου τῶν ἀναμιχθέντων σίτων;

---

## Παροραμάτων διόρθωσις.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Σελὶς | 7 | στίχος | 14 | ἀνάγνωθι | δεκὰς ἀντὶ μονὰς |
| » | 12 | » | 31 | » | Σύστημα ἀκεραίων καὶ κλασμ. ἀριθμῶν. |
| » | 23 | » | 5 | » | τελευταίου |
| » | 25 | » | 26 | » | 9.9 |
| » | 32 | » | 13 | » | ὁ 42 χιλιάδες |
| » | 46 | » | 27 | » | 330 |
| » | 52 | » | 28 | » | 49.(99+1) |
| » | 63 | » | 19 | » | 0 ἀντὶ 6 |
| » | 88 | » | 15 | » | $^5/_8$= |
| » | 117 | » | 11 | » | συνδεουσῶν |
| » | 155 | » | 15 | » | ἰσχῦον |
| » | 160 | » | 19 | » | ὥστε ἀντὶ ἔστω |
| » | 179 | » | 23 | » | ἄλλων ἀκεραίων ἢ κλασματικῶν |

*Σημ.* Ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ σελὶς 126 ἀνάγνωθι διανύει εἰς χρόνον $\frac{x}{53}$ τὰ $x$ χιλιόμετρα....εἰς χρόνον $\frac{221-x}{35}$ τὰ $221-x$ χιλιόμετρα.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ



ΒΙΒΛΙΟΝ Α'.



ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.



ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.



ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.



ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.



ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ'.