ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ
ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΥΠΟ
ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΑΘΗΝΑΙ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ

ΥΠΟ
ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ
Ὑφηγητοῦ Πανεπιστημίου Ἀθηνῶν

Τύποις : Ν. ΠΟΤΑΜΙΤΗ
ΜΕΝΑΝΔΡΟΥ 13 — Τηλ. 56.882

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

῾Ο παρών πρῶτος τόμος περιέχει τά θεμελιώδη μέρη τῆς ᾿Αλγέβρας καί τάς ἐπ᾿αὐτῶν στηριζομένας διαφόρους μορφάς ᾿Αλγεβρικοῦ λογισμοῦ μεταξύ πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Τό ὅλον βιβλίον : «Μαθήματα ᾿Αλγέβρας» ἀποτελεῖται ἀπό δύο τόμους περιλαμβάνοντας ὁλόκληρον τήν ὕλην τῆς ᾿Αλγέβρας ἡ ὁποία ἀπαιτεῖται κατά τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις τοῦ Πανεπιστημίου, τοῦ Πολυτεχνείου καί τῶν λοιπῶν ᾿Ανωτάτων Σχολῶν τοῦ Κράτους.

᾿Οκτώβριος 1954

Σ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΠΡΩΤΟΥ ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

Α΄. ΟΙ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ

1. Ἡ Ἄλγεβρα ὅπως καί ἡ Ἀριθμητική ἀσχολεῖται μέ τούς ἀριθμούς. Τούτους ἐρευνᾶ, συνδυάζει καί συσχετίζει ἀναπτύσσουσα ἰδικάς της μεθόδους καί ἰδικήν της τεχνικήν διά τόν χειρισμόν ἀριθμητικῶν ζητημάτων.

Ἡ Ἄλγεβρα εἶναι ἐπέκτασις τῆς Ἀριθμητικῆς. Τά σημεῖα τῶν πράξεων τῆς Ἀριθμητικῆς χρησιμοποιοῦνται ὅλα καί εἰς τήν Ἄλγεβραν διατηροῦντα τήν σημασίαν των.

Τό ὑλικόν τό ὁποῖον χειρίζεται ἡ Ἄλγεβρα, δηλ. οἱ ἀριθμοί της, κατασκευάζεται ἀπό τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς. Ὡς ἐκ τούτου οἱ ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς ἀποτελοῦν τό θεμέλιον τῆς Ἀλγέβρας. Διά τόν λόγον τοῦτον θεωροῦμεν σκόπιμον ν'ἀφιερώσωμεν τό πρῶτον κεφάλαιον τοῦ βιβλίου τούτου εἰς τήν ἀνασκόπησιν τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς καί τήν διατύπωσιν τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων των. Πᾶσαι αἱ ἀριθμητικαί πράξεις θά ὑποτεθοῦν γνωσταί.

2. **Οἱ φυσικοί ἀριθμοί καί αἱ τρεῖς νόμοι τῶν πράξεων.** Οἱ ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς:

$$1,2,3,4,5,6,7,\ldots \tag{1}$$

λέγονται φυσικοί ἀριθμοί ἤ θετικοί ἀκέραιοι καί ἀποτελοῦν τόν πυρῆνα τοῦ ὅλου συστήματος τῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀριθμοί (1) λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν μίαν ἀπέραντον ἀκολουθίαν τῆς ὁποίας πρῶτος "ὅρος" εἶναι ὁ 1 καί τελευταῖος δ έ ν ὑ π ά ρ χ ε ι.

Τό πλῆθος τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀπεράντου ἀκολουθίας (1) λέγομεν ὅτι εἶναι ἄ π ε ι ρ ο ν. Τουναντίον κάθε πλῆθος ἀντικειμένων τό ὁποῖον (ἀφοῦ καταμετρηθῆ), παρίσταται μέ ἕνα φυσικόν ἀριθμόν, λέγεται π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν πλῆθος.

Γενικῶς, κάθε μ ή πεπερασμένον πλῆθος λέγεται ἄπειρον πλῆθος.

Αἱ ἁπλούσταται πράξεις μεταξύ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως καί ἡ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Γνωρίζομεν ὅτι δοθέντος ἑνός ζεύγους φυσικῶν ἀριθμῶν α,β κατασκευάζεται ἐκ τῶν α καί β τό ἄθροισμά των $\alpha+\beta$ καί τό γινόμενόν των $\alpha\cdot\beta$ καί ὅτι τόσον τό $\alpha+\beta$ ὅσον καί τό $\alpha\cdot\beta$ εἶναι πάλιν φυσικοί ἀριθμοί.

Οἱ θεμελιώδεις νόμοι οἱ διέποντες τάς ἀνωτέρω πράξεις εἶναι οἱ ἑξῆς τρεῖς:

i) Ἀντιμεταθετικός νόμος

Διά τήν πρόσθεσιν: $\alpha+\beta=\beta+\alpha$

Διά τόν πολ/σμόν: $\alpha\beta=\beta\alpha$

ii) Προσεταιριστικός νόμος:

Διά τήν πρόσθεσιν: $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$

Διά τόν πολ/σμόν: $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$

iii) Ἐπιμεριστικός νόμος.

Καί διά τάς δύο πράξεις: $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$

ὅπου αἱ παρενθέσεις εἰς τόν 2ον καί 3ον νόμον σημαίνουν ὅτι ἡ ἐντός αὐτῶν σημειουμένη πρᾶξις ἔχει ἐκτελεσθῆ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. Ἡ ἰσότης $7(3\cdot6)=6(3\cdot7)$ ἰσχύει. Διότι ἐφαρμόζοντες τόν προσεταιριστικόν νόμον λαμβάνομεν $7(3\cdot6)=(7\cdot3)6$. Ἐφαρμόζοντες κατόπιν τόν ἀντιμεταθετικόν νόμον ἔχομεν $(7\cdot3)6=(3\cdot7)6$· καί πάλιν μέ τόν ἀντιμεταθετικόν, φθάνομεν εἰς τό $6(3\cdot7)$.

Ὁμοίως, ἄν α,β,γ εἶναι ἀκέραιοι ἰσχύει ὅτι

$$\alpha(\beta+\gamma)=\gamma\alpha+\alpha\beta$$

Διότι ἐφαρμόζοντες τόν ἐπιμεριστικόν καί ἀντιμεταθετικόν νόμον λαμβάνομεν κατά σειράν:

$$\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha\gamma + \alpha\beta = \gamma\alpha + \alpha\beta$$

3. Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς. Μετά τούς φυσικούς ἀριθμούς εἰσάγεται εἰς τήν ἀριθμητικήν καί ὁ ἀριθμός μ η δ έ ν παριστώμενος διά τοῦ συμβόλου 0. Οὗτος καθορίζεται ὡς ἕνας νέος ἀριθμός πληρῶν τήν ἰσότητα

(1) $$\alpha + 0 = \alpha$$

ὅπου α οἱοσδήποτε φυσικός. Ἐπίσης ὁ μηδέν πληροῖ καί τήν ἰσότητα

(2) $$\alpha \cdot 0 = 0$$

Αἱ ἰσότητες (1) καί (2) ἰσχύουν καί ὅταν $\alpha = 0$

Οἱ ἀριθμοί $0, 1, 2, 3, \cdots \nu \ldots$

λέγονται ἀ κ έ ρ α ι ο ι ἀ ρ ι θ μ ο ί τ ῆ ς ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ῆ ς. Ὥστε πᾶς ἀκέραιος τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἤ φυσικός ἤ μηδέν. Εἰς ὁλόκληρον τό παρόν κεφάλαιον, μέ τήν λέξιν ἀκέραιος θά ἐννοοῦμεν ἀκέραιον τῆς Ἀριθμητικῆς.

4. Ἀνισότητες. Λέγομεν ὅτι ὁ ἀκέραιος α εἶναι μικρότερος τοῦ ἀκεραίου β καί γράφομεν $\alpha < \beta$ ὅ τ α ν ὑ π ά ρ χ ε ι φ υ σ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς x τ ο ι ο ῦ τ ο ς ὥ σ τ ε $\alpha + x = \beta$. Τουναντίον λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β καί γράφομεν $\alpha > \beta$ ὅταν ὑπάρχει φυσικός ἀριθμός τοιοῦτος ὥστε $\beta + x = \alpha$.

Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι ὁ x καλεῖται δ ι α φ ο ρ ά. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν, x = διαφορά τοῦ β μεῖον α δηλ. $x = \beta - \alpha$, εἰς δέ τήν δευτέραν, φυσικά, $x = \alpha - \beta$

Ὥστε μεταξύ δύο τυχόντων ἀκεραίων α καί β θά ὑπάρχη μ ί α ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων (μεγέθους):

$$\alpha = \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha < \beta \quad \text{ἤ} \quad \alpha > \beta$$

'Εάν μεταξύ τῶν ἀριθμῶν α καί β ὑφίσταται ἤ ἡ πρώτη ἤ ἡ δευτέρα ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω σχέσεων τότε γράφομεν

$\alpha \leqslant \beta$ (μικρότερον ἤ ἴσον)

'Εάν ὑφίσταται ἤ ἡ πρώτη ἤ ἡ τρίτη γράφομεν

$\alpha \geqslant \beta$ (μεγαλύτερον ἤ ἴσον)

'Εάν ὑφίσταται ἤ ἡ δευτέρα ἤ ἡ τρίτη γράφομεν

$\alpha \neq \beta$ (διάφορον)

'Εάν ἰσχύουν συγχρόνως αἱ δύο σχέσεις: $x \leqslant y$ καί $y \geqslant x$ τότε προφανῶς θά εἶναι $x = y$.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω ὁρισμῶν ἀποδεικνύονται εὐκόλως αἱ ἑξῆς ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων ἐξ ὧν ἡ τρίτη ἰσχύει μόνον ὅταν ὁ γ εἶναι θετικός ἀκέραιος:

i) 'Εάν $\alpha < \beta$ καί $\beta < \gamma$ τότε $\alpha < \gamma$

ii) 'Εάν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$

iii) 'Εάν $\alpha < \beta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

1. 'Αποδείξατε τάς κάτωθι ἰσότητας μεταβαίνοντες ἐκ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τό δεύτερον διά διαδοχικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ ἀντιμεταθετικοῦ, προσεταιριστικοῦ καί ἐπιμεριστικοῦ νόμου:

α) $(3 + 5) + 6 = 3 + (5 + 6)$ β) $2(3\cdot5) = 5(2\cdot3)$

γ) $6(8 + 4) = 4\cdot6 + 6\cdot8$ δ) $6(8\cdot4) = (4\cdot6)8$

ε) $3(7 + 5) = 5\cdot3 + 7\cdot3$ στ) $5(6 + 3) = 3\cdot5 + 5\cdot6$

ζ) $6(5\cdot3) = (3\cdot6)5$ η) $4\cdot6 + 7\cdot4 = 4(7 + 6)$

θ) $\alpha[\beta + (\gamma + \delta)] = (\alpha\beta + \alpha\gamma) + \alpha\delta$ ι) $(\alpha\beta)(\gamma\delta) = (\beta\gamma)(\alpha\delta)$

ια) $\alpha[\beta(\gamma\delta)] = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ιβ) $(\alpha\delta + \gamma\alpha) + \alpha\beta = \alpha[(\beta+\gamma)+\delta]$

2. Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀνισότητος μεταξύ δύο ἀκεραίων ἀποδείξατε τάς ἰδιότητας i), ii), iii) τῆς παραγρ. 4. 'Επίσης δείξατε ὅτι ἄν $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta$ τότε καί $\alpha + \gamma < \beta + \delta$.

5. Διαιρετότης μεταξύ ἀκεραίων. Ἕνας ἀκέραιος α λέγομεν ὅτι ε ἶ ν α ι δ ι α ι ρ ε τ ό ς δι'ἑνός ἄλλου ἀκεραίου β ὅταν ὑπάρχει ἕνας τρίτος ἀκέραιος γ τοιοῦτος ὥστε $\alpha = \beta\gamma$. ὁ β λέγεται τότε δ ι α ι ρ έ τ η ς τοῦ α καί τό α π ο λ λ α π λ ά σ ι ο ν τοῦ β. Φυσικά, καί ὁ γ εἶναι διαιρέτης τοῦ α, τό δέ α εἶναι πολ/σιον καί τοῦ γ. Ἐπίσης ἀντί ὁ β εἶναι διαιρέτης τοῦ α λέγομεν ὁ β δ ι α ι ρ ε ῖ τ ό ν α. Γράφοντες $\beta|\alpha$ ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ β εἶναι διαιρέτης τοῦ α. Διά κάθε θετικόν ἀκέραιον α ἰσχύει ὅτι $\alpha|\alpha$, $1|\alpha$.

Ἐκ τῆς ἰδιότητος $0 = \alpha\, 0$ ἰσχυούσης δι'ὅλους τούς ἀκεραίους α ἕπεται ὅτι π ᾶ ς ἀ κ ε ρ α ι ο ς ε ἶ ν α ι δ ι α ι ρ έ τ η ς τ ο ῦ μ η δ ε ν ό ς. Ὅλα τά πολ/σια τοῦ 0 εἶναι ἴσα μέ 0. Ἐκ τῆς προφανοῦς ἰσότητος

$$\beta k_1 + \beta k_2 + \ldots + \beta k_\rho = \beta(k_1 + k_2 + \ldots + k_\rho)$$

γίνεται φανερόν ὅτι τό ἄθροισμα πολ/σίων τοῦ β εἶναι πολ/σιον τοῦ β. Ὁμοίως ἡ διαφορά.

Πρῶτοι. Ἕνας φυσικός ἀριθμός p λέγεται π ρ ῶ τ ο ς ὅταν δέν εἶναι μονάς (δηλ. $p \neq 1$) καί ὅταν οἱ μόνοι διαιρέται αὐτοῦ εἶναι ὁ 1 καί ὁ p.

Τέλειος ἀριθμός λέγεται ἕνας φυσικός ἀριθμός ὅστις ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος ὅλων τῶν διαιρετῶν του. (« Στοιχεῖα » τοῦ Εὐκλείδου, βιβλίον IX). Τοιοῦτος εἶναι π.χ. ὁ 6.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3. Εὕρετε ὅλους τούς διαιρέτας τοῦ 24. Δείξατε ὅτι ὁ 28 εἶναι τέλειος ἀριθμός.

4. Καταγράφατε τούς 15 πρώτους τούς ὁποίους κατά πρῶτον συναντῶμεν διατρέχοντες τήν ἀκολουθίαν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1,2,3,...

5. Εὕρετε τούς πρώτους διαιρέτας τοῦ 112.

6. Ποία εἶναι τά πολ/σια τοῦ 5 τά μή ὑπερβαίνοντα τό 30 καί ποιά τά μή ὑπερβαίνοντα τό 34;

7. Ἐάν $\beta|\alpha$ τότε $\beta|\alpha\gamma$. ~~Ἀντιστρόφως~~ δηλαδή, ἄν εἷς τῶν παραγόντων ἑνός γινομένου διαιρεῖται διά β, τό γινόμενον εἶναι πολ/σιον τοῦ β.

πρῶτος διαιρεῖ τόν ἀκέραιον

8. 'Εάν $\beta|\alpha$ καί $\alpha \neq 0$ δείξατε ὅτι τότε $\beta \leqslant \alpha$.

9. 'Εάν $\beta|\alpha$ καί $\alpha < \beta$ δείξατε ὅτι τότε $\alpha = 0$

10. Δείξατε ὅτι ἄν $\alpha|\beta$ καί $\alpha|\gamma$ τότε καί $\alpha|(\beta\mu + \gamma\nu)$ ὅπου α, β, γ, μ, ν ἀκέραιοι καί $\alpha \neq 0$

6. **Ὑπόλοιπα.** "Ας ἀναχωρήσωμεν ἀπό ἕν ἀριθμητικόν παράδειγμα. Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί 33 καί 7. "Ας γράψωμεν ὅλα τά πολ/σια τοῦ 7 τά μή ὑπερβαίνοντα τόν 33. Ταῦτα εἶναι: $0, 7\cdot1, 7\cdot2, 7\cdot3, 7\cdot4$, Ἐξ αὐτῶν ἄς λάβωμεν τό μεγαλύτερον δηλ. τό $7\cdot4$. Τοῦτο διαφέρει τοῦ 33 ὀλιγώτερον τοῦ 7 διότι τό ἀμέσως ἑπόμενόν του $7\cdot5$ ὑπερβαίνει τό 33. Ἡ διαφορά $33 - 7\cdot4 = 5$ εἶναι τό λεγόμενον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ 33 διά τοῦ 7. Ἡ ἰσότης $33 = 7\cdot4 + 5$ ἀναλύει τόν 33 εἰς δύο μέρη, ἐξ ὧν τό ἕν εἶναι πολ/σιον τοῦ 7 τό δέ ἄλλο (τό ὑπόλοιπον) εἶναι μικρότερον τοῦ 7.

Γενικῶς ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα.

Θεώρημα. "Δοθέντων δύο ἀκεραίων α καί β ὅπου $\beta \neq 0$, ὑπάρχει ἕνα καί μοναδικόν ζεῦγος ἀκεραίων π καί υ τοιούτων ὥστε $\alpha = \beta\pi + \upsilon$ ὅπου $0 \leqslant \upsilon < \beta$".

Πρός ἀπόδειξιν, θεωροῦμεν ὅλα τά πολ/σια τοῦ β τά ὁποῖα δέν ὑπερβαίνουν τόν α καί ἔστω $\beta\cdot\pi$ τό μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν (ἴδε, ἀνωτέρω, τό ἀριθμητικόν παράδειγμα). Τοῦτο θά διαφέρη προφανῶς τοῦ α κατά ποσότητα μικροτέραν τοῦ β δηλ. θά εἶναι $\alpha - \beta\pi < \beta$ ἐνῶ συγχρόνως $\alpha - \beta\pi \geqslant 0$. 'Εάν λοιπόν καλέσωμεν υ τήν διαφοράν ταύτην θά ἔχωμεν $\alpha - \beta\pi = \upsilon$ ἤτοι

$$\alpha = \beta\pi + \upsilon \quad \text{ὅπου} \quad 0 \leqslant \upsilon < \beta \tag{1}$$

Ἑπομένως ἡ ὕπαρξις τῶν δύο ἀνωτέρω ἀκεραίων π καί υ ἀπεδείχθη.

Ἡ (1) λέγεται *ἰσότης τῆς διαιρέσεως*.

Παρατηρήσεις. Τό υ λέγεται *ὑπόλοιπον* τῆς διαιρέσεως τοῦ α διά τοῦ β ὁ δέ α διαιρετέος. Τό υ δύναται νά ὁρισθῆ ὡς ὁ μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς ἀ κ ε ρ α ι ο ς ὅ σ τ ι ς ἀ φ α ι ρ ο ύ μ ε ν ο ς ἀ π ό τ ό ν α τ ό ν κ α θ ι-σ τ ᾶ δ ι α ι ρ ε τ ό ν δ ι ά τ ο ῦ β.

Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρεσέως τοῦ α διά τοῦ β δέν βλάπτεται ἄν ὁ α αὐξηθῆ ἤ ἐλαττωθῆ κατά πολ/σιον τοῦ β. Διότι ἐκ τῆς $\alpha = \beta\pi + \upsilon$ λαμβάνομεν

$$\alpha + \beta k = \beta(\pi + k) + \upsilon$$

ὅπου διαιρετέος εἶναι ὁ $\alpha + \beta k$ καί ὑπόλοιπον πάλιν τό υ $(\upsilon < \beta)$. Ἐάν τό υ εἶναι μηδέν τότε καί μόνον ὁ α διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διά τοῦ β καί ἡ διαίρεσις λέγεται τ ε λ ε ί α. Ἐάν $\upsilon \neq 0$ τότε ἡ διαίρεσις τοῦ α διά τοῦ β λέγεται μ ή τ ε λ ε ί α καί τό π μ ή τ έ λ ε ι ο ν π η λ ί κ ο ν.

Ἡ ἀνάλυσις τοῦ α εἰς δύο προσθετέους βπ καί υ ἐξ ὧν ὁ πρῶτος εἶναι πολ/σιον τοῦ β καί ὁ δεύτερος μικρότερος τοῦ β λέγεται εἰς τήν βιβλιογραφίαν "ἀ λ γ ο ρ ι θ μ ι κ ή δι α ί ρ ε σ ι ς τ ο ῦ α δ ι ά τ ο ῦ β". Τό π δύναται νά ὀνομασθῆ καί "ἀ λ γ ο ρ ι θ μ ι κ ό ν π η λ ῖ κ ο ν" τοῦ α διά τοῦ β. Συνήθως λέγεται (κακῶς) πηλῖκον τέλειον ἤ μή τέλειον καθ'ὅσον ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία ἤ ὄχι.

Ἐάν $\alpha < \beta$ ἡ (ἀλγοριθμική) διαίρεσις τοῦ α διά τοῦ β δίδει πηλῖκον μηδέν καί ὑπόλοιπον τό α:

$$\alpha = \beta \cdot 0 + \alpha \quad \text{ὅπου} \quad 0 \leqslant \alpha < \beta$$

Οὕτω π.χ. τό πηλῖκον τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ 3 διά τοῦ 8 εἶναι τό 0 τό δέ ὑπόλοιπον εἶναι ὁ 3.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

11. Ἐάν τό ὑπόλοιπον τοῦ α διά τοῦ β εἶναι υ τότε τό ὑπόλοιπον τοῦ λα διά τοῦ λβ εἶναι λυ ἐνῶ τό πηλῖκον εἶναι τό αὐτό.

12. Δύο ἀριθμοί διαφέροντες κατά πολ/σιον τοῦ β δίδουν τό αὐτό ὑπόλοιπον διαιρούμενοι διά β.

13. Ἐάν δύο ἀριθμοί δίδουν τό αὐτό ὑπόλοιπον ὡς πρός β,τότε διαφέρουν κατά πολ/σιον τοῦ β.

14. Πᾶς ἀκέραιος διαιρούμενος διά 2 θά δίδη ὑπόλοιπον ἤ 0 ἤ 1 σύμφωνα μέ τήν (4). Ἐκ τούτου, οἱ ἀκέραιοι χωρίζονται

εἰς δύο "κλάσεις": εἰς τούς διαιρετούς διά 2 οἱ ὁποῖοι λέγονται "ἄρτιοι" καί εἰς τούς μή διαιρετούς διά δύο οἱ ὁποῖοι λέγονται "περιττοί". Πᾶς ἄρτιος εἶναι τῆς μορφῆς 2k ὅπου k τυχών ἀκέραιος καί πᾶς περιττός τῆς μορφῆς 2k + 1. Δείξατε ὅτι ἄν δύο ἀκέραιοι ἔχουν ἄθροισμα ἄρτιον θά ἔχουν καί διαφοράν ἀρτίαν· ἄν δέ ἔχουν ἄθροισμα περιττόν θά ἔχουν καί διαφοράν περιττήν.

15. Ἐάν k τυχών ἀκέραιος δείξατε ὅτι τό γινόμενον $k(k + 1)$ εἶναι ἄρτιον καί ὅτι τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν ἀρτίων ($2k$ καί $2k + 2$) εἶναι πάντοτε πολ/σιον τοῦ 8.

16. Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον ν διαδοχικῶν ἀκεραίων (ν, φυσικός ἀριθμός) εἶναι διαιρετόν διά ν.

17. Νά δειχθῇ ὅτι δέν ὑπάρχει ἀκέραιος ὅστις διαιρούμενος διά 12 νά δίδῃ ὑπόλοιπον 5 καί συγχρόνως διαιρούμενος διά 15 νά δίδῃ ὑπόλοιπον 4.

7. **Μέγιστος κοινός διαιρέτης.** Ἐάν ἀκέραιος δ διαιρεῖ καί τόν α καί τόν β τότε λέγεται κοινός διαιρέτης (κ.δ.) τῶν α καί β. Δύο ἀκέραιοι α, β ἔχουν ἐν γένει ἕνα πεπερασμένον πλῆθος κοινῶν διαιρετῶν· ἐξ ὅλων τῶν κ. διαιρετῶν ὁ μέγιστος καλεῖται μέγιστος κοινός διαιρέτης (Μ.Κ.Δ.) τῶν α καί β. Συνήθως ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν α καί β παρίσταται διά τοῦ συμβόλου (α, β). Διά νά εὕρωμεν τόν Μ.Κ.Δ. βοηθούμεθα ἀπό τά δύο ἑπόμενα βοηθητικά θεωρήματα (ἤ λήμματα).

Θεώρημα Ι. "Ἐάν ὁ β διαιρεῖ τόν α τότε ὁ ΜΚΔ τῶν α καί β εἶναι ὁ β".

Διότι ὁ β διαιρεῖ καί τόν ἑαυτόν του ἄρα εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν α καί β. Μεγαλύτερος κ.δ. ἀπό τόν β δέν δύναται νά ὑπάρχῃ διότι δέν θά διήρει τόν β. Διά τῶν εἰς τά προηγούμενα εἰσαχθέντων συμβόλων τό ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νά διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

Ἐάν $\beta | \alpha$ τότε $(\alpha, \beta) = \beta$.

Θεώρημα ΙΙ. "Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων δέν βλάπτεται ἐάν ὁ μεγαλύτερος ἐξ αὐτῶν ἀντικατασταθῆ διά τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρός τόν μικρότερον ".

'Απόδειξις: Ἔστω $\alpha > \beta$. 'Εάν ἐκτελέσωμεν τήν (ἀλγοριθμικήν) διαίρεσιν τοῦ α διά τοῦ β θά ἔχωμεν

$$\alpha = \beta\cdot\pi + \upsilon \quad , \quad 0 \leqslant \upsilon < \beta$$

καί λύοντες ὡς πρός υ λαμβάνομεν

$$\upsilon = \alpha - \beta\pi$$

Πᾶς κ.δ. τῶν α καί β διαιρεῖ (ἀκριβῶς) καί τόν α καί τόν βπ, ἄρα καί τήν διαφοράν των α - βπ δηλ. τό υ. Ὥστε πᾶς κ.δ. τῶν α καί β εἶναι καί κ.δ. τῶν β καί υ. 'Αντιστρόφως, πᾶς κ.δ. τῶν β καί υ διαιρεῖ καί τόν βπ καί τόν υ, ἄρα καί τό ἄθροισμά των βπ + υ δηλ. τόν α, ὥστε θά εἶναι καί κ.δ. τῶν α καί β. Ὥστε τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν α καί β ἔχει τούς αὐτούς κ.δ. μέ τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν β καί υ. Συνεπῶς θά ἔχη καί τόν αὐτόν Μ.Κ.Δ. Ὥστε Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β = Μ.Κ.Δ. τῶν β καί υ ἤ $(\alpha,\beta) = (\beta,\upsilon)$

Εὐκλείδιος ἀλγόριθμος. Οὕτω καλεῖται ἡ μέθοδος εὑρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν δι' ἀλλεπαλήλων (ἀλγοριθμικῶν) διαιρέσεων. Ἡ μέθοδος αὕτη εὑρίσκεται εἰς τά " Στοιχεῖα " τοῦ Εὐκλείδου, Βιβλίον 7ον, ὠνομάσθη δέ οὕτω ὑπό τῶν μεταγενεστέρων. Διά νά ἐννοήσωμεν τήν μέθοδον ἄς ἀρχίσωμεν μέ ἕν ἀριθμητικόν παράδειγμα.

Ἔστω ὅτι ζητοῦμεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν 595 καί 252. Κατά τό θεώρημα II δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν τόν 595 διά τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρός 252. 'Εκτελοῦμεν λοιπόν τήν διαίρεσιν: $595 = 252\cdot 2 + 91$ ἥτις δίδει ὑπόλ. 91. Ὥστε ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 91 καί 252. Εὑρίσκομεν πάλιν τό ὑπόλοιπον τοῦ 252 ὡς πρός 91: $252 = 91\cdot 2 + 70$. Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν

91 καί 252 εἶναι, κατά τό Θεώρ. II, ὁ αὐτός μέ τόν Μ.Κ.Δ. τῶν 91 καί 70. Ἡ νέα διαίρεσις $91 = 70\cdot 1 + 21$ δίδει ὑπόλ. 21. Εἰς τό ζεῦγος λοιπόν τῶν ἀριθμῶν 91,70 θέτομεν ἀντί τοῦ 91 τό ὑπόλοιπόν του 21 καί λαμβάνομεν τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν 21 και 70 τό ὁποῖον ἔχει τόν αὐτόν Μ.Κ.Δ. μέ τά προηγούμενα ζεύγη. Ὁμοίως ἔχομεν: $70 = 21\cdot 3 + 7$ καί φθάνομεν εἰς τό ζεῦγος 21 καί 7. Ἐκ τούτων ὁ 7 διαιρεῖ τόν 21, ἄρα κατά τό Θεώρ. I εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 21 καί 7 ἄρα εἶναι καί ὁ Μ.Κ.Δ. ὅλων τῶν προηγουμένων ζευγῶν ἄρα καί τῶν 595 καί 252. Ἐπί πλέον, ὡς εἴδομεν εἰς τήν ἀπόδειξιν τοῦ Θεώρ. II ὄχι μόνον ὁ Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ αὐτός καί εἰς τά δύο ζεύγη (595,252) καί (21,7) ἀλλά καί πάντες οἱ κ.δ. ἑκάστου ζεύγους εἶναι οἱ ἴδιοι μέ τούς τοῦ ἄλλου.

Γενικῶς: Ἔστωσαν δύο φυσικοί ἀριθμοί α καί β ὅπου $\alpha>\beta$ Πρός εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β ἐκτελοῦμεν τάς ἑπομένας ἀλεπαλλήλους διαιρέσεις*:

$$
(1)\quad
\begin{array}{lll}
\underline{\alpha} = \underline{\beta}\pi + \upsilon & \text{ὅπου} & 0 \leqslant \upsilon < \beta \\
\underline{\beta} = \underline{\upsilon}\pi_1 + \upsilon_1 & \text{"} & 0 \leqslant \upsilon_1 < \upsilon \\
\underline{\upsilon} = \underline{\upsilon}_1\pi_2 + \upsilon_2 & \text{"} & 0 \leqslant \upsilon_2 < \upsilon_1 \\
\underline{\upsilon}_1 = \underline{\upsilon}_2\pi_3 + \upsilon_3 & \text{"} & 0 \leqslant \upsilon_3 < \upsilon_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \\
\underline{\upsilon}_{\nu-2} = \underline{\upsilon}_{\nu-1}\pi_\nu + \upsilon_\nu & & 0 \leqslant \upsilon_\nu < \upsilon_{\nu-1}
\end{array}
$$

σταματῶμεν δέ ὅταν φθάσωμεν εἰς τήν διαίρεσιν ἐκείνην ἡ ὁποία δίδει ὑπόλοιπον μηδέν. Τοῦτο ἐξάπαντος θά συμβῇ διότι τά ὑπόλοιπα εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί διηνεκῶς ἐλαττούμενοι ὅ-

---

*Ἐνταῦθα, πρός παράστασιν τῶν διαδοχικῶν πηλίκων καί ὑπολοίπων μεταχειριζόμεθα δείκτας. Ἴδε παράγρ. 25.

πως φαίνεται ἀπό τάς παραπλεύρως ἀνισότητας. Ἔστω ὅτι ἡ τελευταία ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφομένων διαιρέσεων, δίδει ὑπόλοιπον μηδέν δηλ. $\upsilon_\nu = 0$. Τότε ὁ $\upsilon_{\nu-1}$ εἶναι ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. Διότι σύμφωνα μέ τό θεώρ. II ἔχομεν: $(\alpha,\beta) = (\upsilon,\beta) = (\upsilon,\upsilon_1) = (\upsilon_2, \upsilon_1) = (\upsilon_2, \upsilon_3) = \cdots = (\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1})$. Ἐπειδή ὅμως τό $\upsilon_{\nu-1}$ διαιρεῖ τό $\upsilon_{\nu-2}$ ἔπεται κατά τό θεώρ. I ὅτι $(\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1}) = \upsilon_{\nu-1}$ Ὥστε $(\alpha,\beta) = \upsilon_{\nu-1}$

Ἰδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ.: 1) Ὅπως φαίνεται ἀπό τήν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρημ. II πάντες οἱ κ.δ. τοῦ ζεύγους (α,β) εἶναι καί κ.δ. τοῦ τελευταίου ζεύγους $(\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1})$ καί ἀντιστρόφως. Ἀλλά πάντες οἱ κ.δ. τῶν $(\upsilon_{\nu-2}, \upsilon_{\nu-1})$ διαιροῦν τόν $\upsilon_{\nu-1}$ δηλ. τόν Μ.Κ.Δ. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν ὅτι "π ά ν τ ε ς ο ἱ κ.δ. δ ύ ο ἀ ρ ι θ μ ῶ ν ε ἶ ν α ι κ α ί δ ι α ι ρ έ τ α ι τ ο ῦ Μ.Κ.Δ. καί ἀντιστρόφως.

2) Ἐάν πολ/σωμεν ἀμφότερα τά μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων (1) τοῦ Εὐκλειδίου ἀλγορίθμου ἐπί τυχόντα φυσικόν ἀριθμόν k αἱ προκύπτουσαι ἰσότητες

$$(k\alpha) = (k\beta)\pi + (k\upsilon) \quad , \quad 0 \leqslant k\upsilon \leqslant k\beta$$
$$(k\beta) = (k\upsilon)\pi_1 + (k\upsilon_1) \quad , \quad 0 \leqslant k\upsilon_1 < k\upsilon$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(k\upsilon_{\nu-2}) = (k\upsilon_{\nu-1})\pi_\nu + (k\upsilon_\nu) \quad , \quad (k\upsilon_\nu) = 0$$

δεικνύουν ὅτι ὁ Εὐκλείδιος ἀλγόριθμος ἐφαρμοζόμενος εἰς τούς ἀριθμούς $k\alpha$ καί $k\beta$ δίδει ὡς Μ.Κ.Δ. τόν $k\upsilon_{\nu-1}$. Δηλαδή: "Ἐ ά ν δ ύ ο φ υ σ ι κ ο ί ἀ ρ ι θ μ ο ί α κ α ί β π ο λ/σ θ ο ῦ ν ἀ μ φ ό τ ε ρ ο ι ἐ π ί τ υ χ ό ν τ α φ υ σ ι κ ό ν k, τ ό τ ε κ α ί ὁ Μ.Κ.Δ. τ ω ν π ο λ/ ζ ε τ α ι ἐ π ί k".

Περίπτωσις περισσοτέρων τῶν δύο ἀριθμῶν. Κοινούς διαιρέτας καί Μ.Κ.Δ. ἔχουν καί κάθε ὁμάς ἀκεραίων: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$

Πρός εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τριῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ἀντικαθιστῶμεν τούς δύο ἔστω τούς α_1, α_2 διά τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν δ κ κατόπιν εὑρίσκομεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν δ καί α_3. Ἡ περίπτωσι τεσσάρων ἀριθμῶν ἀνάγεται εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν κ.οκ.

Αἱ ἰδιότητες α) καί β) του Μ.Κ.Δ. ἰσχύουν καί διά τή περίπτωσιν περισσοτέρων τῶν δύο, ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

18. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν οἱ α καί β διαιρεθοῦν ἀμφότεροι δι τινος κ.δ. των, ἔστω τοῦ λ, καί ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν διαιρεῖται διά

19 Εὕρετε τόν Μ.Κ.Δ. τῶν 288 καί 158. Ὁμοίως τῶν 163 34 Ὁμοίως τῶν 3456 καί 7234.

20. Νά εὑρεθῆ ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος α ὅστις διαιρῶν τό 4373 δίδει ὑπόλοιπον 8 καί διαιρῶν τόν 826 δίδει ὑπόλοιπο

21. Νά εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοί x καί y ἔχοντες Μ.Κ.Δ. τόν ὅταν τα διαδοχικά πηλίκα τά ἀνευρισκόμενα κατά τήν ἀναζήτ σιν τοῦ Μ.Κ.Δ. εἶναι 8,2,7.

8. **Ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον.** Δοθέντων ν φυσικῶν ριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ πᾶς ἀριθμός Μ ὅστις διαιρεῖται καί διά καί διά $\alpha_2 \ldots$ καί διά α_ν καλεῖται κοινόν πολλαπλάσιον (κ. τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Ἕνα προφανές κ.π. τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ εἶνα τό γινόμενόν των, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\nu$. Καί ἐπειδή καί ὁ ἀριθμός $\lambda\cdot\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\nu$ εἶναι κ.π. τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ (λ οἱοσδήποτε φυσικ ἀριθμός) ἕπεται ὅτι ὑπάρχουν ἄπειρα κ.π. τῶν δοθέντων ἀρι μῶν.

Τό μικρότερον ἐξ ὅλων τῶν κ.π. καλεῖται ἐλάχιστον κο νόν πολλαπλάσιον (Ε.Κ.Π.) τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. Τό Ε.Κ.Π. τ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ παρίσταται συνήθως διά τοῦ συμβόλου $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots$

Διά τό Ε.Κ.Π. ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα. <u>Ὅλα τά κ.π. τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ εἶναι πολλαπλάσια τοῦ Ε.Κ.Π.</u>

{'Η ἄλλως τό Ε.Κ.Π. εἶναι διαιρέτης ὅλων τῶν κ.π.}

Εἶναι φανερόν ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά δύο κ.π. εἶναι πάλιν κ.π. (ἴδε παράγρ. 5). Ἔστω, τώρα μ τό Ε.Κ.Π. καί Μ τυχόν κ.π. Ἐάν διαιρέσωμεν τό Μ διά μ λαμβάνομεν $M = \mu \cdot \rho + \upsilon$ ὅπου $0 \leqslant \upsilon < \mu$ ἤ ἀκόμη $\upsilon = M - \mu \cdot \rho$.

Ἐπειδή, τώρα, τό $\mu \cdot \rho$ εἶναι κ.π. καί τό Μ ἐπίσης θά εἶναι· ὁμοίως καί ἡ διαφορά των υ. Ἐπειδή ὅμως τό υ εἶναι μικρότερον τοῦ Ε.Κ.Π. ἔπεται ὅτι θά εἶναι ὁ ἀριθμός 0 δηλ. ὁ μόνος μικρότερος τοῦ μ ὅστις διαιρεῖται ἀπό ὅλους τούς ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_\nu$ Ἐκ τούτου ἔπεται $M = \mu \cdot \rho$ δηλ. τό Μ εἶναι πολ/σιον τοῦ μ.

Προκειμένου περί δύο φυσικῶν ἀριθμῶν α καί β ἀποδεικνύεται ὅτι <u>τό γινόμενον τοῦ ΕΚΠ ἐπί τόν ΜΚΔ ἰσοῦται μέ αβ.</u>

9. Σχετικῶς πρῶτοι ἀριθμοί. Δύο φυσικοί ἀριθμοί α καί β λέγονται σ χ ε τ ι κ ῶ ς π ρ ῶ τ ο ι ἤ π ρ ῶ τ ο ι π ρ ό ς ἀ λ λ ή λ ο υ ς ὅταν ἔχουν Μ.Κ.Δ. ἴσον πρός τήν μονάδα. Δηλ. $(\alpha,\beta) = 1$.

Πολλοί ἀριθμοί λέγονται πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀνά δύο ὅταν ἀνά δύο λαμβανόμενοι εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Π.χ. οἱ α,β,γ,δ θά εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀνά δύο ἄν $(\alpha,\beta) = (\alpha,\gamma) = (\alpha,\delta) = (\beta,\gamma) = (\beta,\delta) = (\gamma,\delta) = 1$.

Θεώρημα Ι. <u>Ἐάν ὁ γ διαιρεῖ τό γινόμενον $\alpha \cdot \beta$ καί εἶναι σχετικῶς πρῶτος πρός τόν α, τότε ὁ γ θά διαιρεῖ τόν β</u> (α,β,γ φυσικοί ἀριθμοί).

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ὁ γ καί α ἔχουν ΜΚΔ = 1 ἔπεται ὅτι οἱ γβ καί αβ θά ἔχουν Μ.Κ.Δ. $= 1 \cdot \beta = \beta$. Ἀφοῦ ὅμως ὁ γ διαιρεῖ καί τόν γβ καί τόν αβ ἔπεται ὅτι θά διαιρεῖ καί τόν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν δηλ. τόν β.

Θεώρημα ΙΙ. <u>Ἐάν φυσικός ἀριθμός διαιρεῖται ὑπό</u>

διαφόρφν ἄλλων πρώτων πρός ἀλλήλους ἀνά δύο, τότε διαιρεῖται καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν.

Ἀπόδεεξις. Ἔστω ὅτι ὁ k διαιρεῖται διά α διά β καί δι γ ὅπου α,β,γ πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀνά δύο. Ἀφοῦ διαιρεῖται διά α θά εἶναι $k = \alpha\pi_1$ (π_1 φυσικός). Ὁ β διαιρῶν τόν k διαιρεῖ καί τό ἴσον του $\alpha\pi_1$ καί ὤν πρῶτος πρός τόν α θά διαιρεῖ τόν π_1 δηλ. $\pi_1 = \beta\pi_2$. Ὁμοίως ὁ γ διαιρεῖ τόν π_1 ἄρα καί τόν ἴσον του $\beta\pi_2$ καί ὤν πρῶτος πρός τόν β θά διαιρεῖ τ π_2. Ἄρα $\pi_2 = \gamma\cdot\pi_3$ Ἔχομεν λοιπόν $k = \alpha\cdot\pi_1, \pi_1 = \beta\cdot\pi_2, \pi_2 = \gamma\cdot\pi$ ἄρα $k = \alpha\beta\gamma\pi_3$ δηλ. ὁ k διαιρεῖται διά τοῦ αβγ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ἐάν ἀριθμός διαιρεῖται χωριστά διά τοῦ 3 διά τοῦ 5 καί διά τοῦ 8 τότε θά διαιρεῖται καί διά τοῦ 12 Ἐάν ἀριθμός διαιρεῖται διά τοῦ 2,5 καί 12 δέν ἕπεται ὅτι θ διαιρεῖται διά τοῦ 2·5·12 δηλ. διά τοῦ 120. Διότι εἰς τήν περίπτωσιν οἱ 2,5,12 δέν εἶναι σχετικῶς πρῶτοι ἀνά δύο. Οὕτω π.χ. ὁ 60 διαιρεῖται διά 2,5,12 ἀλλά ὄχι δια 2·5·12 = 12

Θεώρημα III. Ἐάν δύο φυσικοί ἀριθμοι α,β διαιρεθοῦν διά τοῦ Μ.Κ.Δ. των δ τότε καθίστανται σχετικῶς πρῶτοι.

Διότι καί ὁ Μ.Κ.Δ. των διαιρεῖται διά δ καί καθίστατα 1 (ἴδε ἀσκ. 17).

10. Πρῶτοι παράγοντες. Θεώρημα I. Ἐάν ὁ πρῶτος ἀριθμός διαιρεῖ τό γινόμενον αβ ὅπου α,β φυσικοί ἀριθμοί, τότε ὁ θά διαιρεῖ τόν ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο παραγόντων α καί β

Διότι, ἄν ὁ p δέν διαιρεῖ τόν α τότε οἱ p καί α θά εἶναι π ρ ῶ τ ο ι πρός ἀλλήλους. Ἄρα κατά τό θεώρημα I τῆ παραγρ. 9 ὁ p θά διαιρῆ τόν β.

Πόρισμα «Ἐάν πρῶτος p διαιρεῖ γινόμενον πολλῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, αβγδ... τότε ὁ p θά διαιρῆ ἕνα τουλάχιστον ἐκ τῶν παραγόντων α,β,γ,...»

Ὁρισμός. Πᾶς μή πρῶτος φυσικός ἀριθμός ≠ 1 λέγεται σ ύ ν θ ε τ ο ς. Ὁ σύνθετος δηλ. ἀριθμός δέχεται καί ἄλλο διαιρέτας ἐκτός τῆς μονάδος καί τοῦ ἑαυτοῦ του. Ὁ ἀμέσως μετά τήν μονάδα διαιρέτης τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ λέγεται δεύτερος διαιρέτης. Ὁ δεύτερος διαιρέτης εἶναι δηλ. ὁ μικρότερος ἐκ τῶν διαιρετῶν τοῦ συνθέτου ἀριθμοῦ οἱ ὁποῖοι εἶναι $\neq 1$. Ἐάν α εἶναι ἕνας σύνθετος ἀριθμός καί δ ὁ δεύτερος διαιρέτης του, τότε ὁ δ εἶναι ἀριθμός πρῶτος. Διότι ἄν δέν ἦτο πρῶτος, θά ἦτο σύνθετος καί συνεπῶς θά εἶχε ἕνα δεύτερον διαιρέτην $\delta_1 < \delta$. Ὁ δ_1 θά ἦτο τότε καί αὐτός διαιρέτης τοῦ α. Ἄρα θά ὑπῆρχεν διαιρέτης τοῦ α μικρότερος τοῦ δ καί $\neq 1$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον ἀφοῦ ὁ δ εἶναι δεύτερος διαιρέτης τοῦ α. Ὥστε ὁ δ εἶναι πρῶτος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι πᾶς σύνθετος ἀριθμός ἔχει ἕνα τουλάχιστον διαιρέτην, πρῶτον.

Θεώρημα II. (<u>Θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀριθμητικῆς</u>). <u>Πᾶς φυσικός ἀριθμός ν (> 1) ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Ἡ ἀνάλυσις αὐτή εἶναι μονότροπος (δηλ. γίνεται κατά ἕνα καί μόνον τρόπον), μή λαμβανομένης ὑπ' ὄψιν τῆς τάξεως τῶν παραγόντων.</u>

Θά δείξωμεν κατ' ἀρχάς <u>τό δυνατόν</u> τῆς ἀναλύσεως παντός φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων.

Ἡ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον «πρώτων» εἶναι φανερά διά μικρούς ἀριθμούς ὅπως π.χ. $3 = 3$, $4 = 2\cdot2$, $5 = 5$, $6 = 2\cdot3$, $7 = 7$, $8 = 2\cdot2\cdot2$, $9 = 3.3$, $10 = 2.5$ οὕτω δέ προχωροῦντες φθάνομεν εἰς τό συμπέρασμα ὅτι ὅλοι οἱ φυσικοί οἱ μικρότεροι κάποιου φυσικοῦ α, ἀναλύονται εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. (Τό α καθορίζεται κατά βούλησιν. Ἐάν π.χ. ἀρκεσθῶμεν εἰς τά ἀναγραφέντα παραδείγματα ἔχομεν ἀποδείξει ὅτι οἱ μικρότεροι τοῦ 11 ἀναλύονται εἰς γινόμενον πρώτων, ἄρα $\alpha = 11$).

Ἔστω τώρα τυχών φυσικός ἀριθμός $\nu > \alpha$. Ἐάν ὁ ν εἶναι πρῶτος, τό θεώρημα ἰσχύει. (Τό «γινόμενον» τότε ἔχει ἕνα μόνον παράγοντα, συμβατικόν γινόμενον). Ἐάν ὁ ν εἶναι σύνθετος θά ἔχη ὅπως εἴδομεν, ἀμέσως ἀνωτέρω, ἕνα πρῶτον διαιρέτην p_1 καί θα εἶναι $\nu = p_1\nu_1$ ὅπου $\nu_1 < \nu$. Ἐάν ὁ ν_1 εἶναι πρῶτος τό ἀποδεικτέον ἰσχύει. Ἄν ὁ ν_1 εἶναι σύνθετος θά ἔχη ἕνα διαιρέτην, πρῶτον, ἔστω τόν p_2 ὁπότε $\nu_1 = p_2\ \nu_2$ καί $\nu = p_1 p_2 \nu_2$ ὅπου $\nu_2 < \nu_1$. Ὁμοίως ἄν ὁ ν_2 δέν εἶναι πρῶτος θ'ἀναλύεται εἰς $p_3\nu_3$ ὁπότε $\nu = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3\ \nu$ ὅπου $\nu_3 < \nu_2 < \nu_1$ κ.ο.κ. Οὕτω προχωροῦντες φθάνομεν εἰς τήν ἀνάλυσιν $\nu = p_1 p_2 \ldots p_\kappa \nu_\kappa$ ὅπου ἤ ὁ ν_κ θά εἶναι πρῶτος καί τό θεώρημα ἰσχύει ἤ, ἐπειδή οἱ φυσικοί ἀριθμοί ν_1, ν_2, $\nu_3 \ldots$ βαίνουν ἐλαττούμενοι, θά εἶναι $\nu_\kappa < \alpha$ ὁπότε πάλιν ὁ ν_κ θ'ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρώτων, $\nu_\kappa = q_1 q_2 \cdot\cdot q_\lambda$. Ὥστε τελικῶς $\nu = p_1 p_2 \ldots p_\kappa q_1 q_2 \ldots q_\lambda$

Τό μονότροπον τῆς ἀναλύσεως ἀποδεικνύεται βάσει τοῦ προηγουμένου πορίσματος. Ἔστω ὅτι ὁ ν ἠδύνατο ν'ἀναλυθῆ καί κατ'ἄλλον τρόπον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων δηλ. $\nu = p'_1 p'_2 \ldots p'_\rho$ Τότε θά ἔχωμεν

$$p_1 p_2 \ldots p_\kappa q_1 q_2 \ldots q_\lambda = p'_1 p'_2 \ldots p'_\rho$$

Ὁ πρῶτος ἀριθμός p_1 ὡς διαιρῶν τό πρῶτον μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος θά διαιρεῖ καί τό δεύτερον ἄρα θά διαιρεῖ ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ δευτέρου. Ἐπειδή ὅμως ὅλοι οἱ παράγοντες τοῦ δευτέρου μέλους εἶναι πρῶτοι ὁ p_1 θά εἶναι ἴσος μέ τόν παράγοντα πού διαιρεῖ, ἔστω τόν p'_1. Εἶναι λοιπόν $p_1 = p'_1$ ἄρα καί $p_2 p_3 \cdot\cdot p_\kappa q_1 q_2 \cdot\cdot q_\lambda = p'_2 p'_3 \ldots p'_\rho$. Ὁμοίως θά εἶναι $p_2 = p'_2$ κ.ο.κ. Ὥστε οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους εἶναι οἱ ἴδιοι μέ τούς τοῦ δευτέρου.

Παρατηρήσεις: α) Εἰς τό γινόμενον $p_1 p_2 p_3 \ldots$ εἰς ὅ ἀναλύεται ὁ ν, εἶναι δυνατόν ἕνας πρῶτος παράγων νά ἐμφανίζεται πολλάς φοράς. Ἑπομένως ἡ γενική μορφή τήν ὁποίαν λαμβάνει ὁ ν ἀναλυόμενος εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων εἶναι ἡ κάτωθι:

$$\nu = (p_1)^{\alpha_1}(p_2)^{\alpha_2}\ldots(p_\kappa)^{\alpha_\kappa} \tag{6}$$

ὅπου τόσον αἱ βάσεις p_1, $p_2 \ldots p_\kappa$ ὅσον καί οἱ φυσικοί ἀριθμοί (ἐκθέται) α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_\kappa$ εἶναι πλήρως ὡρισμένοι ὅταν δοθῇ ὁ ν.

Ὑπενθυμίζομεν τόν γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς τρόπον ἀναλύσεως ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων:

Ἔστω πρός ἀνάλυσιν ὁ 80262. Οὗτος εἶναι ἄρτιος ἄρα περιέχει τόν πρῶτον παράγοντα 2. Ἔχομεν λοιπόν

$$80262 = 2 \times 40131$$

Ὁ 40131 εἶναι περιττός, συνεπῶς δέν περιέχει τόν παράγοντα 2. Δοκιμάζοντες μέ τόν ἑπόμενον πρῶτον, ἀριθμόν, δηλ. τόν 3 εὑρίσκομεν:

$$40131 = 3 \times 13377$$

ἐξετάζομεν ἄν ὁ 13377 διαιρεῖται πάλιν μέ 3 καί εὑρίσκομεν:

$$13377 = 3 \times 4459 \; .$$

Εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 3 δέν εἶναι, πλέον, διαιρέτης τοῦ 4459. Ὁ ἀμέσως ἑπόμενος πρῶτος εἶναι ὁ 5 ἀλλά οὗτος δέν εἶναι διαιρέτης τοῦ 4459. Ὁ ἀμέσως ἑπόμενος πρῶτος εἶναι ὁ 7. Εὑρίσκομεν δέ:

$$4459 = 7 \times 637$$

Προχωροῦντες ὁμοίως εὑρίσκομεν:

$$637 = 7 \times 91$$
$$91 = 7 \times 13$$

Συνδυάζοντες τ' ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$80262 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 13$$

Ἡ διάταξις τῶν πράξεων γίνεται ὡς κάτωθι:

$$\begin{array}{r|l} 80262 & 2 \\ 40131 & 3 \\ 13377 & 3 \\ 4459 & 7 \\ 637 & 7 \\ 91 & 7 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array} \qquad 80262 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13$$

β) Μέθοδος εὑρέσεως Ε.Κ.Π. Ἐάν ἕκαστος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ν_1, ν_2,... ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τῆς μορφῆς (6) τό Ε.Κ.Π. τῶν ν_1, ν_2,... εὑρίσκεται ἄν μορφώσωμεν γινόμενον ἐξ ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζονται καί μέ ἕκαστον ὑψωμένον εἰς τόν μέγιστον ἐκθέτην μέ τόν ὁποῖον ἀπαντᾶται.

Οὕτω π.χ. διά νά εὕρωμεν τό Ε.Κ.Π. τῶν 15,22,36, ἀναλύομεν: $15 = 3\cdot 5$, $22 = 2\cdot 11$, $36 = 2^2\cdot 3^2$ ὁπότε τό Ε.Κ.Π. = $= 3^2\cdot 5\cdot 2^2\cdot 11 = 1980$.

γ) Μεθοδος εὑρέσεως τοῦ Μ.Κ.Δ. Διά νά εὕρωμεν τόν Μ.Κ.Δ. ἀριθμῶν ἀναλελυμένων εἰς πρώτους παράγοντας σχηματίζομεν τό γινομενον ἐξ ὅλων τῶν κ ο ι ν ῶ ν εἰς τούς ἀριθμούς πρώτων παραγοντων, ὑψωμένον ἕκαστον εἰς τόν μικρότερον ἐκθέτην μέ τον ὁποῖον ἀπανταται.

Π.χ. ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $5^3\cdot 11$, $2^4\cdot 11\cdot 5$, $17\cdot 11\cdot 5^4$ εἶναι ὁ $5\cdot 11 = 55$

δ) Δύο τυχοῦσαι δυνάμεις ἀριθμῶν πρώτων πρός ἀλλήλους. Ἐάν οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους (σχετικῶς πρῶτοι) καί ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων $\alpha = p_1p_2\cdots p_\kappa$, $\beta = q_1q_2\cdots q_\lambda$ (ὅπου εἷς πρῶτος παράγων δύναται νά ἐπαναλαμβάνεται μέσα εἰς τό γινόμενον), τότε οὐδείς ἐκ τῶν $p_1, p_2, .., p_\kappa$ θά εὑρίσκεται μέσα εἰς τούς παράγοντας $q_1, q_2, \ldots q_\lambda$ τοῦ δευτέρου γινομένου, δηλ. τά δύο γινόμενα δέν θά ἔχουν κοινόν παράγοντα. Ἄρα καί δ ύ ο ο ἱ α ι δ ή π ο τ ε δ υ ν ά μ ε ι ς τῶν α καί β αἱ $\alpha^\mu = p_1^\mu p_2^\mu \ldots$, $\beta^\nu = q_1^\nu q_2^\nu \ldots$ θ ά ε ἶ ν α ι π ά λ ι ν ἀ ρ ι θ μ ο ί π ρ ῶ τ ο ι π ρ ό ς ἀ λ λ ή λ ο υ ς (οὐδένα κοινόν πρῶτον παράγοντα ἔχουσαι).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

21. Τρία γεγονότα ἐμφανίζονται περιοδικῶς, τό πρῶτον ἀνά 15 ἡμέρας, τό δεύτερον ἀνά 22 ἡμέρας καί τό τριτον ἀνά 36 ἡμέρας. Ἐάν ταῦτα ἐμφανισθοῦν συγχρόνως μίαν Κυριακήν ζητεῖ-

ται μετά πόσας ἡμέρας θά ἐμφανισθοῦν πάλιν Κυριακήν;

22. Δύο κινητά κινούμενα ὁμορρόπως ἐπί περιφερείας διανύουν αὐτήν τό μέν πρῶτον εἰς 72 ὥρας τό δέ δεύτερον εἰς 108 ὥρας. Ἐάν κατά τινα στιγμήν εὑρίσκονται συγχρόνως εἰς ἕν σημεῖον Α τῆς περιφερείας, μετά πόσον χρόνον θά εὑρίσκωνται πάλιν συγχρόνως εἰς τό Α;

11. **Συστήματα ἀριθμήσεως.** Γνωρίζομεν ὅτι κάθε φυσικός ἀριθμός δύναται νά παρασταθῇ μέ τήν βοήθειαν τῶν 10 ψηφίων, 0,1,2,...,9, εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως.

Π.χ. ὁ ἀριθμός $\alpha = 9 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 1000 = 9 + 5 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3$ γράφεται συντόμως 3459 καί ἔχει 9 μονάδας, 5 δεκάδας κτλ. Γενικῶς, κάθε φυσικός ἀριθμός α ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς δύναται πάντοτε νά λάβῃ τήν μορφήν:

$$(1) \qquad \alpha = \psi_1 + \psi_2 \cdot 10 + \psi_3 \cdot 10^2 + \psi_4 \cdot 10^3 + \ldots + \psi_\nu \cdot 10^{\nu-1}$$

ὅπου οἱ ἀκέραιοι $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \ldots \psi_\nu$ εἶναι ὅλοι <10 καί λέγονται «ψηφία» τοῦ α εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως (ψ_1 τῶν μονάδων, ψ_3 τῶν ἑκατοντάδων κτλ.) γράφεται δέ τότε ὁ α συντόμως: $\psi_\nu \psi_{\nu-1} \ldots \psi_4 \psi_3 \psi_1$.

Ἐάν εἰς τήν ἰσότητα (1) ἀντί τοῦ 10 ὑπάρχει ἕνας οἱοσδήποτε φυσικός ἀριθμός $\beta > 1$ ὅλα δέ τά $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ εἶναι $<\beta$ δηλαδή ἄν ὁ φυσικός ἀριθμός α ἀναλύεται εἰς τήν μορφήν:

$$(2) \qquad \alpha = \psi_1 + \psi_2 \beta + \psi_3 \beta^2 + \psi_4 \beta^3 + \ldots + \psi_\nu \beta^{\nu-1}$$

ὅπου $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_\nu$ εἶναι ἀκέραιοι $<\beta$, τότε λέγομεν ὅτι ὁ α ἀναφέρεται εἰς σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάσιν β καί ἔχει ψηφία, ὡς πρός βάσιν τό β, τά $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \ldots \psi_\nu$ γράφομεν δέ τήν (2) συντόμως ὡς ἑξῆς:

$$\alpha = \psi_\nu \psi_{\nu-1} \ldots \psi_4 \psi_3 \psi_2 \psi_1 {}_{<\beta>}$$

Οὕτω π.χ. ἡ ἰσότης $\alpha = 3256_{<7>}$ σημαίνει ὅτι

$$\alpha = 6 + 5\cdot 7 + 2\cdot 7^2 + 3\cdot 7^3$$

Βλέτομεν ὅτι ἡ (2) εἶναι μία γενίκευσις τῆς (1)(δηλ. περιέχει καί τήν (1) ὡς μερικήν περίπτωσιν).

Θεώρημα. «Δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\beta > 1$, ὁ τυχών φυσικός ἀριθμός α δύναται πάντοτε νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν:

$$\alpha = \psi_1 + \psi_2\beta + \psi_3\beta^2 + \ldots + \psi_\nu\beta^{\nu-1},$$

ὅπου ψ_1, ψ_2, $\psi_3 \ldots \psi_\nu$ εἶναι ἀκέραιοι $< \beta$ ».

Διά τοῦ θεωρήματος τούτου ἀποδεικνύεται τό δυνατόν τῆς ἀναλύσεως παντός φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τήν μορφήν (2).

Πρός ἀπόδειξιν διαιροῦμεν (ἀλγοριθμικῶς) τόν α διά τοῦ β καί λαμβάνομεν $\alpha = \beta\pi_1 + \psi_1$. Ἐάν ὁ π_1 εἶναι $> \beta$ διαιροῦμεν πάλιν τόν π_1 διά β καί λαμβάνομεν $\pi_1 = \beta\,\pi_2 + \psi_2$ ὁπότε ὁ ἀριθμός α γράφεται: $\alpha = \beta(\beta\pi_2 + \psi_2) + \psi_1 = \pi_2\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1$. Ἐάν ὁ π_2 εἶναι πάλιν $> \beta$ θά ἔχωμεν ὁμοίως $\pi_2 = \beta\pi_3 + \psi_3$ καί ὁ ἀριθμός α γράφεται: $\alpha = (\beta\pi_3 + \psi_3)\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1 = \pi_3\beta^3 + \psi_3\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1$

Ἐπειδη οἱ ἀκέραιοι π_1, π_2, $\pi_3 \ldots$ βαίνουν ἐλαττούμενοι, θά φθάσωμεν ἐξακολουθοῦντες οὕτω εἰς τήν μορφήν:

$$\alpha = \pi_{\nu-1}\beta^{\nu-1} + \psi_{\nu-2}\beta^{\nu-2} + \ldots + \psi_3\beta^2 + \psi_2\beta + \psi_1,$$

ὅπου $\pi_{\nu-1} < \beta$ ἐνῶ συγχρόνως καί ὅλοι οἱ ἄλλοι ἀκέραιοι $\psi_{\nu-2} \ldots \psi_3$, ψ_2, ψ_1 θά εἶναι $< \beta$ ὡς ὑπόλοιπα διαιρέσεων διά β. ὅ.ἔ.δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Ἔστω $\beta = 5$ καί $\alpha = 723$. Διά νά δώσωμεν εἰς τόν 723 τήν μορφήν (2) ἐκτελοῦμεν τάς ἑπομένας διαιρέσεις: $723 = 5\cdot 124 + 3$, $124 = 5\cdot 24 + 4$, $24 = 5\cdot 4 + 4$. Ἔτσι, ἡ πρώτη ἰσότης γράφεται $723 = 5(5\cdot 24 + 4) + 3 = 24\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 3$ καί αὐτή, λόγω τῆς τρίτης: $723 = (5\cdot 4 + 4)5^2 + 4\cdot 5 + 3 =$ $= 4\cdot 5^3 + 4\cdot 5^2 + 4\cdot 5 + 3$. Ὥστε: $723 = 4443_{\langle 5\rangle}$

Πρός εὐκολίαν κατατάσσομεν τάς πράξεις ὡς κάτωθι:

$$\begin{array}{r|r|r|l}
723 & 5 & & \\
\underline{3} & 124 & 5 & \\
 & \underline{4} & 24 & 5 \\
 & & \underline{4} & \underline{4}
\end{array}$$

Τά εὑρισκόμενα ὑπόλοιπα, 3,4,4 εἶναι,κατά σειράν, τά ψ_1, ψ_2, ψ_3 καί τό τελευταῖον πηλίκον (τό <5) εἶναι τό ψ_4.

Οὕτω, διά νά γράψωμεν τόν ἀριθμόν 10792 εἰς τό ἑπταδικόν σύστημα (δηλ. ὡς πρός βάσιν τό 7), θά ἐκτελέσωμεν τάς διαιρέσεις

$$\begin{array}{r|r|r|r|l}
10792 & 7 & & & \\
37 & 1541 & 7 & & \\
29 & 14 & 220 & 7 & \\
12 & \underline{1} & 10 & 31 & 7 \\
\underline{5} & & \underline{3} & \underline{3} & 4
\end{array}$$

Θά εἶναι δέ $10792 = 43315_{<7>}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23. Ποῖον ἀριθμόν παριστάνει τό $323_{<4>}$ ἤ τό $333_{<5>}$ ἤ τό $335_{<6>}$;

24. Πῶς παρίσταται ὁ ἀριθμός 27 ὡς πρός βάσιν 2 ἤ 3 ἤ 4 ἤ 5 ἤ 9 ἤ 12;

25. Προσδιορίσατε τούς ἀκεραίους x, y, ω, φ γνωστοῦ ὄντος ὅτι εἶναι πάντες <4 καί ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$x + y\cdot 4 + \omega\cdot 4^2 + \varphi\cdot 4^3 = 210$$

26. Ὁ ἀριθμός $7842_{<9>}$ (τοῦ ἐννεαδικοῦ συστήματος) νά γραφῆ εἰς τό σύστημα μέ βάσιν 7.

Β΄. ΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

12. **Τά ἀριθμητικά κλάσματα.** α)΄Η ΄Αριθμητική ἐπεκτείνει τ σύστημα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν διά τῆς εἰσαγωγῆς καί νέων ἀ ριθμῶν οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται κ λ α σ μ α τ ι κ ο ί ἤ κ λ ά σ μ α τ α. ΄Η ἔννοια τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν καί αἱ πράξεις ἐπ'αὐτῶν προϋποτίθενται γνωστοί εἰς τόν ἀναγνώστην τοῦ βιβλίου τούτου.

΄Εν τούτοις δέν θεωροῦμεν ἄσκοπον νά συνοψίσωμεν τούς θ μελιώδεις ὁρισμούς τῶν κλασμάτων καί τῶν πράξεων ἐπ'αὐτῶν:

(1) Τό κλάσμα κατασκευάζεται ἀπό ἕν ζεῦγος ἀκεραίων μ κα ν ($\nu \neq 0$) ἐξ ὧν ὁ πρῶτος καλεῖται ἀριθμητής καί ὁ δεύτερος π ρονομαστής. Τό ζεῦγος τοῦτο δηλ. τό κλάσμα παρίσταται μέ $\frac{\mu}{\nu}$ ἤ μ/ν καί θεωρεῖται ὡς εἷς ἀριθμός. Οἱ μ καί ν λέγονται ὅρ τοῦ κλάσματος.

(2) **΄Ορισμός τῆς ἰσότητος.** Δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται σα ὅταν $\alpha\delta = \beta\gamma$. ῎Αμεσον πόρισμα εἶναι ὅτι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha k}{\beta k}$, ὅπου k τυχών ἀκέραιος.

(3) **΄Ορισμός τῆς προσθέσεως.** Καλεῖται ἄθροισμα δύο κλασμά των $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}$ τό κλάσμα $\frac{\alpha\delta + \beta\gamma}{\beta\delta}$. ΄Ως διαφορά δύο κλασμάτων $\frac{\alpha}{\beta}$ $- \frac{\gamma}{\delta}$ ὁρίζεται τό κλάσμα τό ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τό δεύ τερον μᾶς δίδει τό πρῶτον. Τοῦτο εἶναι τό $\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\beta\delta}$

(4) **΄Ορισμός τοῦ πολ/σμοῦ.** Καλεῖται γινόμενον δύο κλασμάτ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ τό κλάσμα $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$.

(5) **Διαίρεσις.** Καλεῖται πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ κλ σματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διά τοῦ $\frac{\gamma}{\delta}$ ἕνα κλάσμα τό ὁποῖον πολλαπλασιαζόμ νον ἐπί τό δεύτερον μᾶς δίδει τό πρῶτον. Τοῦτο εἶναι τό κλ σμα $\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$.

(6). ΄Εξ ὁρισμοῦ, κλάσμα ἔχον παρ/στήν τήν μονάδα ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμητήν αὐτοῦ δηλ. ἰσοῦται μέ ἀκέραιον ἀριθμόν.

(7). Ἐάν ὁ ἀριθμητής τοῦ κλάσματος διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ παρ/στοῦ τότε τό κλάσμα ἰσοῦται πρός τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης δηλ. ἰσοῦται μέ ἀκέραιον ἀριθμόν.

Τά κλάσματα ἐντάσσονται εἰς τό σύστημα τῶν ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς διότι ὑπακούουν εἰς τούς τρεῖς θεμελιώδεις νόμους τῶν πράξεων (παράγρ. 2). Ὅτι οἱ τρεῖς θεμελιώδεις νόμοι τῆς παράγρ. 2 ἰσχύουν καί διά τά κλάσματα δύναται νά ἐλεγχθῇ εὐκόλως, βάσει τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων (2) ἕως (4).

Τέλος, οἱ κλασματικοί ἀριθμοί περιέχουν ὡς μερικήν περίπτωσιν καί τούς ἀκεραίους ἀριθμούς, ὅπως φαίνεται ἀπό τάς ἰδιότητας (6) καί (7). Τοῦτο ἐκφράζεται καί ὡς ἑξῆς: τό σύνολον τῶν ἀκεραίων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν κλασματικῶν.

β) Κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ καλεῖται ἀ ν ά γ ω γ ο ν ὅταν οἱ ὅροι του α καί β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Κάθε κλάσμα μή ἀνάγωγον $\frac{\mu}{\nu}$ δύναται νά μετατραπῇ εἰς ἴσον ἀνάγωγον ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του διαιρεθοῦν διά τοῦ Μ.Κ.Δ. των ὁπότε καθίστανται πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

Θεώρημα. «Ἐάν τυχόν κλάσμα ἰσοῦται πρός ἀνάγωγον οἱ ὅροι τοῦ πρώτου εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ δευτέρου.» Δηλ. ἄν $\mu/\nu = \alpha/\beta$ ὅπου $(\alpha,\beta) = 1$ τότε $\mu = \alpha\lambda$, $\nu = \beta\lambda$, ὅπου λ ἀκέραιος.

Διότι θά εἶναι $\mu\beta = \nu\alpha$ καί ὁ β ὡς διαιρῶν τό γινόμενον $\nu\cdot\alpha$ καί ὤν πρῶτος πρός τόν α θά διαιρεῖ τόν ν. Ὥστε $\nu = \beta\lambda$. Ἡ ἰσότης $\mu\beta = \nu\alpha$ γίνεται τώρα $\mu\beta = \beta\lambda\alpha$ ἤ $\mu = \alpha\lambda$.

γ) Μία ἄλλη γραφή τῶν κλασμάτων εἶναι ἡ δ ε κ α δ ι κ ή. Οὕτω π.χ. τό κλάσμα $\frac{7}{8}$ δύναται νά γραφῇ ὡς 0,875 ὅπου

$$0{,}875 = \frac{8}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} = \frac{875}{1000}$$

Ὑπό τήν μορφήν ταύτην γεγραμμένον τό κλάσμα καλεῖται δεκαδικόν κλάσμα. Ἡ μετατροπή αὐτή ἐπιτυγχάνεται δι'ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως τοῦ 7 διά τοῦ 8 κατά τόν γνωστόν ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς τρόπον. Δυνατόν ἡ διαίρεσις αὐτή νά μή περατοῦται ποτέ, ὁπότε τό κλάσμα λαμβάνει μορφήν ἀτέρμονος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ὅπως π.χ. $\frac{1}{3} = 0,33333\ldots$ (δεκαδικόν κλάσμα μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

27. Νά γίνη ἀνάγωγον τό κλάσμα $\frac{9409}{10767}$

28. Ἐάν α ἀκέραιος δείξατε ὅτι τά κλάσματα $\frac{17\alpha + 1}{18\alpha + 1}$ καί $\frac{\alpha}{15\alpha + 1}$ εἶναι ἀνάγωγα.

29. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός νά δειχθῆ ὅτι τό κλάσμα $\frac{\nu(2\nu+1)}{\nu + 1}$ εἶναι ἀνάγωγον.

30. Ἐάν $(\alpha,\beta) = 1$ δείξατε ὅτι τό κλάσμα $\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἀνάγωγον.

12. **Οἱ σύμμετροι ἀριθμοί.** Πᾶς ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ὁ ὁποῖος δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν κλάσματος:

$$\frac{\mu}{\nu} \tag{1}$$

ὅπου μ καί ν ἀκέραιοι καί $\nu \neq 0$, λέγεται σύμμετρος ἀριθμός.

Ὁ ἀριθμός μηδέν εἶναι, κατά ταῦτα, σύμμετρος, διότι ἰσοῦται μέ $\frac{0}{1}$ ἤ $\frac{0}{2}\ldots$, δηλ. δύναται νά λάβη τήν μορφήν (1).

Πάντες οἱ φυσικοί ἀριθμοί εἶναι σύμμετροι διότι δύνανται νά λάβουν την μορφήν (1), Π.χ. ὁ ἀριθμός 5 δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν ἰσοδύναμον μορφήν $\frac{5}{1}$ ἤ $\frac{10}{2}\ldots$ καί ὁ τυχών φυσικός ν νά γραφῆ ὡς $\frac{2\nu}{2}$ κτλ.

Μέ ἄλλας λέξεις, τό σύνολον τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων τά ὁποῖα περιεγράφησαν εἰς τήν παράγρ. 11 (καί τά ὁποῖα ὡς εἴδομεν περιέχουν καί τούς ἀκεραίους ὡς μερικήν περίπτωσιν) συμπίπτει μέ τό σύνολον τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν.

Αἱ τέσσαρες πράξεις ἐκτελούμεναι μεταξύ συμμέτρων δίδουν πάντοτε ὡς ἐξαγόμενον, σύμμετρον ἀριθμόν. Τοῦτο γίνεται φανερόν ἀπό τάς ἰδιότητας 3), 4), καί 5) τῆς παραγρ. 11 α'.

13. Τό δεκαδικόν ἀνάπτυγμα τῶν συμμέτρων. Ἔστω ὁ σύμμετρος ἀριθμός 1/7. Ἐάν ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ 1 διά τοῦ 7 εὑρίσκομεν κατά σειράν ὑπόλοιπα: 3,2,6,4,5,1 καί μετά τό 1 ἐπανευρίσκομεν τά ἴδια: 3,2,6,4,5,1 κ.ο.κ. ἐπ'ἄπειρον.

```
10      | 7
 30     |-----------
  20    | 0,14285714
   60
    40
     50
      10
       30
        20
```

Δηλαδή ἡ διαίρεσις αὐτή δέν τελειώνει ποτέ καί ὡς πηλίκον της προκύπτει ὁ ἀτέρμων ἀριθμός:

0,142857142857142857....

ὅστις λέγεται καί <u>δεκαδικόν ἀνάπτυγμα</u> τοῦ 1/7.

Εἰς τόν ἀριθμόν αὐτόν ὑπάρχει μία ὁμάς ψηφίων ἡ 142857 ἡ ὁποία διηνεκῶς ἐπαναλαμβάνεται. Αὕτη καλεῖται περίοδος καί ὁ ἀτέρμων ἀριθμός, π ε ρ ι ο δ ι κ ό ς (ἤ π ε ρ ι ο δ ι κ ό ν δ ε κ α δ ι κ ό ν κ λ ά σ μ α). Ὥστε ὁ σύμμετρος ἀριθμός 1/7 γραφόμενος ὡς δεκαδικόν κλάσμα λαμβάνει περιοδικήν μορφήν (ἤ ἔχει περιοδικόν δεκαδικόν ἀνάπτυγμα). Τοῦτο εἶναι μία γενική ἰδιότης τῶν συμμέτρων ὡς θά δείξωμεν εἰς τά ἀμέσως ἑπόμενα.

Ἔστω τώρα ὁ σύμμετρος 3/8. Ἐάν ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ 3 διά τοῦ 8 εὑρίσκομεν 3/8 = 0,375. Δυνάμεθα ὅμως νά γράψωμεν:

$$\frac{3}{8} = 0{,}37500000\ldots$$

ὁπότε πάλιν ἔχομεν ὡς δεκαδικόν ἀνάπτυγμα τοῦ 3/8 ἕνα ἀτέρμονα δεκαδικόν περιοδικόν μέ περίοδον τό 0.

Γενικῶς, ἔστω ὁ σύμμετρος μ/ν. Ἐάν ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ ἀκεραίου μ διά τοῦ φυσικοῦ ν θά εὕρωμεν μίαν σειραν ὑπολοίπων υ_1, υ_2, $\upsilon_3 \ldots$ υ_κ, $\upsilon_{\kappa+1} \ldots$ καί μίαν ἀντίστοιχον σειράν δεκαδικῶν ψηφίων είς τό πηλῖκον, τά ψ_1, ψ_2, $\psi_3, \ldots,$ ψ_κ, $\psi_{\kappa+1}, \ldots$

$$\begin{array}{l|l}
\mu & \nu \\ \hline
\ldots & \mathrm{A},\ \psi_1\psi_2\ldots\psi_\kappa\psi_{\kappa+1}\ldots\ \psi_\lambda\psi_\kappa\psi_{\kappa+1}\ldots \\
\quad \upsilon_1 0 & \\
\qquad \upsilon_2 0 & \\
\qquad \ldots & \\
\qquad\quad \upsilon_\kappa 0 & \\
\qquad\qquad \upsilon_{\kappa+1} 0 & \\
\qquad\qquad \ldots. & \\
\qquad\qquad\quad \upsilon_\lambda 0 & \\
\qquad\qquad\qquad \upsilon_\kappa 0 & \\
\qquad\qquad\qquad\quad \upsilon_{\kappa+1} 0 &
\end{array}$$

Ἐάν κάποιο ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν, ἡ διαίρεσις τερματίζεται καί τό πηλίκον εἶναι ἕνας ἀριθμός μέ πεπερασμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων. Νοοῦντες κατόπιν τοῦ τελευταίου δεκαδικοῦ ψηφίου, ἀπέραντον σειράν μηδενικῶν λαμβάνομεν ἕνα ἀπέραντον δεκαδικόν περιοδικόν μέ περίοδον 0 ὅστις εἶναι τό δεκαδικόν ἀνάπτυγμα τοῦ συμμέτρου μ/ν.

Ἐάν ὅμως δέν ἐμφανισθῆ μηδενικόν ὑπόλοιπον τότε ἀναγκαστικῶς τά ὑπόλοιπα ἀπό τινος τάξεως καί κάτω θά ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς. Διότι ὅλα τά ὑπόλοιπα υ_1, υ_2, $\upsilon_3 \ldots$ εἶναι μικρότερα τοῦ ν δηλ. θά εἶναι ἤ 1 ἤ 2 ἤ 3...ἤ ν-1 συνεπῶς δέν εἶναι δυνατόν νά ἐμφανίζωνται διαρκῶς νέα ὑπόλοιπα. Ἐάν δέ προχωρήσωμεν μέχρι τοῦ νυοστοῦ ὑπολοίπου, τοῦτο θά εἶναι ἀσφαλῶς ἕνα ἀπό τά προηγουμένως παρουσιασθέντα. Ἀφοῦ λοιπόν θά έπανεύρωμεν ἕνα προηγουμένως ἐμφανισθέν ὑπόλοιπον, ἔστω τό $υ_κ$ θά ἐπανεύρωμεν καί ὅλην τήν σειράν $υ_κ, υ_{κ+1} \ldots υ_λ$. Ἡ ὁμάς αὐτή τῶν ὑπολοίπων θά ἐπαναλαμβάνεται προφανῶς ἐπ' ἄπειρον καί τ' ἀντίστοιχα ψηφία τοῦ πηλίκου θά ἐπαναλαμβάνωνται καί αὐτά περιοδικῶς μέ περίοδον $ψ_κ ψ_{κ+1} \ldots ψ_λ$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συναγομεν ὅτι «π ᾶ ς σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς τ ρ έ π ε τ α ι ε ἰ ς δ ε κ α δ ι κ ό ν π ε ρ ι ο δ ι κ ό ν κ λ ά σ μ α» ἤ ἄλλως: ἔχει δεκαδικόν ἀνάπτυγμα περιοδικόν.

Ἀντιστρόφως, πᾶς δεκαδικός περιοδικός εἶναι σύμμετρος δηλ. εἶναι τό δεκαδικόν ἀνάπτυγμα κάποιου κλάσματος $μ/ν$ ὅπου $μ, ν$, ἀκέραιοι, $ν \neq 0$. Τοῦτο ἀποδεικνύεται λεπτομερῶς είς τήν Ἀριθμητικήν. Θά ἴδωμεν ὅμως τόν τρόπον τῆς εὑρέσεως τοῦ $μ/ν$ ὅταν δίδεται τό δεκαδικόν ἀνάπτυγμά του μέ μερικά παραδείγματα:

α) Ἐάν καλέσωμεν x τόν δεκαδικόν περιοδικόν $0,\overline{273}\,\overline{273}\,\overline{273}\ldots$ θά ἔχωμεν κατά σειράν

$$\begin{aligned} x &= 0,273273273\ldots \\ 1000x &= 273,273273273\ldots \\ 1000x &= 273 + 0,273273\ldots \\ 1000x &= 273 + x \\ 999x &= 273 \end{aligned}$$

καί τέλος

$$x = \frac{273}{999} = \frac{\text{μία περίοδος}}{\text{τόσα 9 ὅσα ψηφία ἔχει ἡ περίοδος}}$$

β) Ἔστω ἀκόμη ὁ δεκαδικός περιοδικός $y = 20,12\overline{71}\,\overline{71}\ldots$ εἰς τόν ὁποῖον ἡ περίοδος ἀρχίζει εὐθύς μετά τό 2ον δεκαδικόν ψηφίον. Πρός εὕρεσιν τοῦ ἰσοδυνάμου κλάσματος χρησιμοποιοῦμεν τάς ἰσότητας:

$$100y = 2012,717171\ldots = 2012 + 0,717171\ldots = 2012 + \frac{71}{99} =$$

$$= \frac{2012 \cdot 99 + 71}{99} = \frac{199188}{99} \quad \text{καί} \quad y = \frac{199188}{9900}$$

14. Ρητοί ἀριθμοί. Ἐνίοτε οἱ σύμμετροι ἀριθμοί ὀνομάζονται καί «ρητοί».

15. **Ἀνισότης μεταξύ δύο συμμέτρων τῆς Ἀριθμητικῆς**: α) ὁ σύμμετρος σ λέγεται μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τοῦ συμμέτρου σ΄ ἄν ὑπάρχει σύμμετρος $x \neq 0$ τοιοῦτος ὥστε $\sigma + x = \sigma'$. Τότε γράφομεν $\sigma < \sigma'$ ἤ $\sigma' > \sigma$ (σ΄ μεγαλύτερος τοῦ σ).

β) Ἡ **ἐνδιαμεσότης**: Ἐάν α καί β δύο σύμμετροι τοιοῦτοι ὥστε $\alpha < \beta$ τότε πᾶς σύμμετρος x μεγαλύτερος μέν τοῦ α, μικρότερος δέ τοῦ β λέγομεν ὅτι π ε ρ ι έ χ ε τ α ι μ ε τ α ξ ύ α κ α ί β. Γράφομεν τότε

$$\alpha < x < \beta \quad ,$$

ὁ x εἶναι ἕνας ἐ ν δ ι ά μ ε σ ο ς τῶν α καί β ἀριθμός. Μεταξύ δύο ἀνίσων συμμέτρων α καί β π ε ρ ι έ χ ε τ α ι ἄ π ε ι ρ ο ν π λ ῆ θ ο ς ἐ ν δ ι α μ έ σ ω ν σ υ μ μ έ τ ρ ω ν. Οὕτω π.χ. ἄν $\alpha < \beta$ εἶναι εὔκολον νά ἴδωμεν ὅτι

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta$$

δηλ. τό **ἡμιάθροισμα** τῶν α και β περιέχεται μεταξύ τῶν α καί β. Μεταξύ τοῦ $\frac{\alpha+\beta}{2}$ καί β θά περιέχεται κατά συνέπειαν, τό ἡμιάθροισμα τῶν $\frac{\alpha+\beta}{2}$ καί β ἔστω τό x_2. Μεταξύ τῶν x_2 καί β θά περιέχεται τό ἡμιάθροισμα τῶν x_2 καί β ἔστω τό x_3 κ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον.

γ) Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων αἱ ἰσχύουσαι διά τούς ἀκεραίους (ἴδε παράγρ. 4) ἰσχύουν καί διά τάς ἀνισότητας μεταξύ συμμέτρων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

31. Παραστήσατε τούς συμμέτρους $\frac{33}{40}$, $\frac{43}{1250}$, $\frac{738933}{99900}$ ὑπό τήν μορφήν δεκαδικῶν περιοδικῶν.

32. Παραστήσατε τούς συμμέτρους ἀριθμούς

$0,\overline{871}871871\ldots$, $1,43\overline{27}2727\ldots$, $0,00\overline{431}431\ldots$

ὑπό τήν μορφήν κλασμάτων μ/ν ὅπου μ, ν φυσικοί ἀριθμοί.

33. Πόσα κλάσματα ὑπάρχουν, ἴσα πρός τό $\frac{21}{35}$ ἀλλά ἔχοντα ὅρους μικροτέρους;

34. Νά καθορισθῆ κλάσμα ἴσον πρός τό $\frac{378}{630}$ καί τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ὅρων νά εἶναι 40.

35. Σχηματίζομεν ἀπέραντον δεκαδικόν ἀριθμόν γράφοντες μετά τήν ὑποδιαστολήν, 1 ἀκολουθούμενον ἀπό 2 μηδενικά, κατόπιν 1 ἀκολουθούμενον ἀπό τρία μηδενικά κ.ο.κ.:

$$A,1001000100001000001000001\ldots$$

Νά δειχθῆ ὅτι ὁ δεκαδικός αὐτός δέν εἶναι περιοδικός.

Γ΄ ΟΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

16. Οἱ σύμμετροι ἀριθμοί δέν ἀρκοῦν δι'ὅλας τάς ἀνάγκας τῶν Μαθηματικῶν. Οὕτω π.χ. εἶναι δυνατόν, τό μῆκος ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ μετρουμένου μέ μίαν μονάδα ἔστω τήν ΟΑ νά μή εἶναι σύμμετρος ἀριθμός· καί τότε γεννᾶται τό ζή-

Σχ. 1

τημα, μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά παραστήσωμεν τό μῆκος τούτο; Διά τήν τακτοποίησιν τοῦ ζητήματος τούτου καί πλείστων ἄλλων ὁμοίων τά ὁποῖα παρουσιάζονται συχνά, ἡ 'Αριθμητική εἰσάγει καί νέους ἀριθμούς, δ ι α φ ό ρ ο υ ς τῶν συμμέτρων οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ι. Κάθε ἀσύμμετρος ἀριθμός δύναται νά παρασταθῆ ὡς δεκαδικός μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία, μ ή π ε ρ ι ο δ ι κ ά. Οὕτω π.χ. ἄν ἐκτελέσωμεν τήν μέτρησιν τοῦ ΒΓ μέ μονάδα τήν ΟΑ κατά τόν γνωστόν τρόπον, ἡ μέτρησις αὕτη δυνατόν νά μή τελειώνη ποτέ καί νά δημιουργηθῆ ἕνας ἀτέρμων δεκαδικός:

(1) $$\alpha,\psi_1\psi_2\psi_3\ldots\psi_\nu\ldots$$

μέ ἄπειρα δεκαδικά ψηφία ψ_1, ψ_2, ψ_3,... ψ_ν,... μή παρουσιαζόμενα περιοδικῶς ἀλλ'ἀτάκτως. ('Η μονάς ΟΑ χωρεῖ α φοράς εἰς τό ΒΓ καί ὑπολείπεται τό μέρος ΔΓ <1. Τό δέκατον τῆς μονάδος χωρεῖ εἰς τό ΔΓ, ψ_2 φοράς καί ὑπολείπεται τό μέρος ΕΓ$<\frac{1}{10}$. Τό ἑκατοστόν τῆς μονάδος χωρεῖ εἰς τό ΕΓ, ψ_3 φοράςκ.ο.κ. ἐπ' ἄπειρον. 'Ως ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως θεωρεῖται ὁ ἀριθμός(1) ὅστις και παριστάνει τό μῆκος τοῦ ΒΓ).

Γενικῶς, ἕνας ἀκέραιος α ἀκολουθούμενος ἀπό ἄπειρον πλῆθος δεκαδ. ψηφίων μή περιοδικῶν λέγομεν ὅτι παριστάνει ἕνα ἀριθμόν. 'Ο ἀριθμός οὗτος δ έ ν ε ἶ ν α ι σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς διότι ἄν ἦτο τά δεκαδικά ψηφία του θά ἦσαν ἀπό τινος καί ἔπειτα περιοδικά (ἴδε παράγρ. 13). Εἶναι λοιπόν ἀσύμμετρος.

17. **Ρηταί προσεγγίσεις ἑνός ἀσυμμέτρου.** Κάθε ἀσύμμετρος ἀριθμός εἶναι διάφορος παντός συμμέτρου. ('Ο πρῶτος ἔχει δεκαδ. ἀνάπτυγμα μή περιοδικόν ἐνῶ ὁ δεύτερος ἔχει περιοδικόν. ῎Αν α ἀσύμμετρος ἡ ἰσότης $\alpha = \frac{\mu}{\nu}$ ὅπου μ,ν ἀκέραιοι καί $\nu \neq 0$ ε ἶ ν α ι ἀ δ ύ ν α τ ο ς. Θά εἶναι λοιπόν πάντοτε $\alpha \neq \frac{\mu}{\nu}$. 'Εν τούτοις κάθε ἀσύμμετρος προσεγγίζεται ὅσον θέλομεν στενῶς ἀπό συμμέτρους ἀριθμούς.

῎Ας θεωρήσωμεν ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν π.χ. τόν $\alpha = 17,034127601425577 62...$ Οὗτος προσεγγίζεται ὁλονέν καί στενότερον ἀπό τούς συμμέτρους (ρητούς) ἀριθμούς:

(1) 17. 17,03. 17,034. 17,0341. 17,03412.
17,034127, 17,0341276. 17,034127601,....

Κάθε ἀριθμός τῆς ἀπεράντου ἀκολουθίας (1) εἶναι μία ρ η τ ή π ρ ο σ έ γ γ ι σ ι ς (= σύμμετρος προσέγγισις) τοῦ ἀσυμμετρου α. 'Ακριβέστερον, δεχόμεθα ὅτι ὁ ἀσύμμετρος α πληροῖ τάς διαδοχικάς ἀνισότητας:

$$17 < \alpha < 18\ ,\ 17,0 < \alpha < 17,1\ ,\ 17,03 < \alpha < 17,04\ ,$$
$$17,034 < \alpha < 17,035,\ 17,0341 < \alpha < 170342$$

κ.ο.κ. ἐπ'ἄπειρον. Δηλ. ὁ α νοεῖται περιεχόμενος μεταξύ δύο συμμέτρων οἱ ὁποῖοι ὁλοέν πλησιάζουν πρός ἀλλήλους χωρίς νά συμπίπτουν ποτέ. Οἱ ἀριθμοί (1) εἶναι προσεγγίσεις τοῦ α κ α τ ' ἔ λ λ ε ι ψ ι ν (ἤ ἐκ τῶν κάτω) ἐνῶ οἱ ἀριθμοί 18, 17,1 17,04 17,035... εἶναι προσεγγίσεις τοῦ α κ α θ' ὑ π ε ρ ο χ ή ν (ἤ ἐκ τῶν ἄνω).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Δυνάμεθα νά ἐξακριβώσωμεν ὅτι δέν ὑπάρχει σύμμετρος ὅστις ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον νά γίνεται ἴσος μέ 2.

Πράγματι, κάθε σύμμετρος $\neq 0$ δύναται νά παρασταθῇ μέ ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα μ/ν (ἴδε παράγρ.12). Ἔστω λοιπόν ὅτι ὑπῆρχε ἀνάγωγον κλάσμα μ/ν τοιοῦτον ὥστε:

(3) $$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 = 2$$

(ὅπου μ,ν φυσικοί ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους). Θά εἴχομεν τότε $\mu^2 = 2\nu^2$ ἄρα $\mu^2 =$ ἄρτιος καί συνεπῶς καί $\mu =$ ἄρτιος. Ἄρα δυνάμεθα νά θέσωμεν $\mu = 2\rho$ ὅπου ρ ἀκέραιος. Συνεπῶς ἡ ἰσότης $\mu^2 = 2\nu^2$ γίνεται $(2\rho)^2 = 2\nu^2$ ἤ $4\rho^2 = 2\nu^2$ ἤ $\nu^2 = 2\rho^2$. Ὥστε ὑποχρεωτικῶς θά εἶναι καί $\nu^2 =$ ἄρτιος καί συνεπῶς $\nu =$ ἄρτιος δηλ. $\nu = 2k$ ὅπου k ἀκέραιος. Αἱ δύο ἰσότητες $\mu = 2\rho$ καί $\nu = 2k$ δεικνύουν ὅτι οἱ μ καί ν ἔχουν κοινόν διαιρέτην τόν 2. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον διότι οἱ μ καί ν εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Ἄρα ἡ ἰσότης (3) ὁδηγεῖ εἰς ἄτοπον καί συνεπῶς εἶναι ἀδύνατος ἰσότης. Ὥστε, μή ὑπάρχοντος συμμέτρου μ/ν ὅστις ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον νά γίνεται ἴσος μέ 2 ἕπεται ὅτι ὁ 2 δέν ἔχει τετραγωνικήν ρίζαν σύμμετρον. Μέ ἄλλας λέξεις ἡ $\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός. Ἡ Ἀριθμητική ὅμως διδάσκει μεθόδους διά νά εὑρίσκομεν κατά προσέγγισιν τήν $\sqrt{2}$ μέ ὅσα δεκαδικά ψηφία θέλομεν. Ἡ $\sqrt{2}$ προσεγγίζεται διαδοχικῶς ἀπό τούς ἀριθμούς 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, οἱ ὁποῖοι τετραγωνιζόμενοι δίδουν: 1,96 , 1,9881 , 1,999396 , 1,99996164,... ἀντιστοίχως. Ἐάν ἡ ἐργασία αὐτή νοηθῇ ἐξακολουθοῦσα ἄνευ τέλους θά προκύψη ἕνας ἀτέρμων ἀριθμός 1,4142135624.... ὅστις θά ἐκφράζει τήν $\sqrt{2}$. Ὁ ἀριθμός αὐτός δέν θά εἶναι περιοδικός διότι τότε ἡ $\sqrt{2}$ θά ἦτο σύμμετρος.

Οὕτω, ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμός $\sqrt{2}$ εἶναι πλήρως καθωρισμένος, διότι ὁλόκληρος ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία τῶν ψηφίων του εἶναι καθωρισμένη ἄν καί δέν μᾶς εἶναι γνωστή παρά μόνον κατά τά ἀρχικά ψηφία αὐτῆς.

18. Ρίζαι ἀσύμμετροι. Θεώρημα. «Ἐάν ὁ φυσικός ἀριθμός Α

δέν εἶναι νυοστή δύναμις ἀκεραίου τότε ἡ $\sqrt[\nu]{A}$ εἶναι ἀριθμός ἀσύμμετρος.»

Θά δείξωμεν ὅτι ἡ $\sqrt[\nu]{A}$ δέν εἶναι σύμμετρος. Πράγματι, ἄν ἡ $\sqrt[\nu]{A}$ ἦτο σύμμετρος ἀριθμός, θά ἰσοῦτο πρός κάποιο ἀ ν ά γ ω γ ο ν κλάσμα k/λ καί θά εἴχομεν

$$\sqrt[\nu]{A} = \frac{k}{\lambda} \qquad A = \left(\frac{k}{\lambda}\right)^{\nu} \qquad A = \frac{k^{\nu}}{\lambda^{\nu}} \qquad A\lambda^{\nu} = k^{\nu}$$

'Εκ τῆς τελευταίας ἰσότητος βλέπομεν ὅτι ὁ λ διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν k^{ν}, ἄρα ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν λ καί k^{ν} εἶναι ὁ λ. 'Εξ ἄλλου ἐπειδή οἱ k καί λ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, ἐξ ὑποθέσεως, διά τοῦτο καί οἱ ἀριθμοί λ καί k^{ν} θά εἶναι ἐπίσης πρῶτοι πρός ἀλλήλους (ἴδε παράγρ.10, παρατ. δ΄) ἄρα ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν εἶναι ὁ 1. Ὥστε λ = 1. 'Αλλά τότε ἐκ τῆς ἰσότητος $A = k^{\nu}/\lambda^{\nu}$ ὁ A θά ἦτο νυοστή δύναμις τοῦ ἀκεραίου k, ὅπερ ἀντίκειται πρός τήν ὑπόθεσιν. Ἡ ἀντίφασις αὐτή δεικνύει ὅτι ἡ ἰσότης $\sqrt[\nu]{A} = k/\lambda$ εἶναι ἀδύνατος.

'Εξ ἄλλου ἡ $\sqrt[\nu]{A}$ εἶναι ὡς γνωστόν ἐκ τῆς 'Αριθμητικῆς ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός $\beta, y_1y_2y_3$ .... καί ἀφοῦ οὗτος δέν εἶναι σύμμετρος, θά εἶναι ἀσύμμετρος.

'Εκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἕπεται ὅτι ἀπό τούς ἀριθμούς $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{A}, \ldots$ σύμμετροι (καί μάλιστα ἀκέραιοι) εἶναι μόνον ἐκεῖνοι εἰς τούς ὁποίους τό ὑπόρριζον εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, δηλ. οἱ $\sqrt{1}, \sqrt{4}, \sqrt{9}, \ldots$ πάντες δέ οἱ ἄλλοι εἶναι ἀσύμμετροι.

'Ομοίως, ἀπό τούς ἀριθμούς $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \ldots \sqrt[3]{A}, \ldots$ σύμμετροι εἶναι μόνον ἐκεῖνοι τῶν ὁποίων τό ὑπόρριζον εἶναι τέλειος κύβος δηλ. οἱ $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{27}, \ldots$ πάντες δέ οἱ λοιποί, ἀσύμμετροι κ.ο.κ.

19. **Αἱ πράξεις μεταξύ ἀσυμμέτρων.** Ἄς λάβωμεν ἕν συγκεκριμένον παράδειγμα, μέ τούς δύο ἀσυμμέτρους ἀριθμούς $\sqrt{2}$ καί $\sqrt{3}$

Τί θά καλέσωμεν ἄθροισμα $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; Ἐπειδή ὁ $\sqrt{2}$ περιέχεται μεταξύ 1,4 καί 1,5 ὁ δέ $\sqrt{3}$ μεταξύ 1,7 καί 1,8 τό ἄθροισμα $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ἔχομεν βεβαίως τήν ἀπαίτησιν νά εἶναι ἀριθμός περιεχόμενος μεταξύ 1,4 + 1,7 καί 1,5 + 1,8. Τοῦτο ἄς γραφῆ μέ τά σύμβολα τῶν ἀνισοτήτων: $3{,}1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}3$. Ὁμοίως ἐξακολουθοῦντες λαμβάνομεν διαδοχικάς προσεγγίσεις τοῦ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$:

$1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$	$1{,}73<\sqrt{3}<1{,}74$	$3{,}14<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}16$
$1{,}414<\sqrt{2}<1{,}415$	$1{,}732<\sqrt{3}<1{,}733$	$3{,}146<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}148$
$1{,}4142<\sqrt{2}<1{,}4143$	$1{,}7320<\sqrt{3}<1{,}7321$	$3{,}1462<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}1463$
$1{,}41421<\sqrt{2}<1{,}41422$	$1{,}73205<\sqrt{3}<1{,}73206$	$3{,}14626<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3{,}14628$

....

Οὕτω πῶς προχωροῦντες, ἄνευ τέλους δημιουργοῦμεν ἕνα ἀτέρμονα δεκαδικόν ἀριθμόν $3{,}1462\psi_5\psi_6\psi_7\ldots$ ὅστις θά κληθῆ ἄθροισμα τῆς $\sqrt{2}$ καί τῆς $\sqrt{3}$.

Κατ'ἀνάλογον τρόπον νοοῦμεν τήν διαφοράν $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ὡς ἀριθμόν προσεγγιζόμενον διαρκῶς καί περισσότερον ἀπό τήν διαφοράν ὁλοέν καί καλλιτέρων ρητῶν προσεγγίσεων τῶν $\sqrt{3}$ καί $\sqrt{2}$. Ὁμοίως τό γινόμενον $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ ὡς ἀριθμόν προσεγγιζόμενον ὁλοέν καί περισσότερον ἀπό τά γινόμενα ρητῶν προσεγγίσεων τοῦ $\sqrt{2}$ καί $\sqrt{3}$, ὁμοίως δέ καί τό πηλίκον $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Τά ἀνωτέρω γενικεύονται διά δύο τυχόντας ἀσυμμέτρους ἀριθμούς α καί α΄. Ἐπίσης, ἐντελῶς ἀναλόγως ὁρίζεται καί τό ἄθροισμα ἤ διαφορά συμμέτρου καί ἀσυμμέτρου, τό γινόμενόν των καί τό πηλίκον. Ἐν γένει, ἀριθμητικαί παραστάσεις περιέχουσαι ἀσυμμέτρους ἀριθμούς ὑπολογίζονται μέ πᾶσαν ἐπιθυμητήν προσέγγισιν ὅταν οἱ ἀσύμμετροι ἀντικατασταθοῦν δι'ἐπαρκῶν (ρητῶν) προσεγγίσεών των.

Ὁ προορισμός τοῦ παρόντος βιβλίου δέν μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐπεκταθῶμεν πέραν τῆς ἀνωτέρω ἀτελοῦς περιγραφῆς τῶν πράξεων μεταξύ ἀσυμμέτρων, ἀρκετῆς πάντως διά τάς πρακτικάς ἀνάγκας τοῦ λογισμοῦ.

'Αποδεικνύεται ἐπίσης ὅτι οἱ τρεῖς θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων, ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικός καί ἐπιμεριστικός (ἴδε παράγρ. 2) ἰσχύουν καί διά τάς πράξεις μεταξύ ἀσυμμέτρων.

20. Διά τάς ἀποδείξεις μερικῶν προτάσεων σχετικῶν μέ τούς ἀσυμμέτρους ἀριθμούς εἶναι χρήσιμον τό ἑπόμενον ἁπλούστατον θεώρημα:

Θεώρημα: «'Εάν α ἀσύμμετρος καί σ καί σ΄ σύμμετροι ἀριθμοί πληροῦται δέ ἡ σχέσις $\alpha\cdot\sigma = \sigma'$ τότε θά εἶναι $\sigma = 0$ καί $\sigma' = 0$ ».

'Εάν ἦτο $\sigma \neq 0$ τότε διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha\sigma = \sigma'$ διά σ θά ἐλαμβάνομεν $\alpha = \frac{\sigma'}{\sigma}$ δηλ. ὅτι ἕνας ἀσύμμετρος α ἰσοῦται μέ ἕνα σύμμετρον $\frac{\sigma'}{\sigma}$. Τοῦτο εἶναι ἄτοπον συνεπῶς ἀποκλείεται νά εἶναι $\sigma \neq 0$. 'Επομένως δέν μένει παρά νά εἶναι $\sigma = 0$. 'Αλλά τότε θά εἶναι καί $\sigma' = \alpha\cdot 0 = 0$. Πράγματι δέ διά $\sigma = 0$ καί $\sigma' = 0$ ἡ σχέσις $\alpha\sigma = \sigma'$ πληροῦται.

21. **'Ανισότητες μεταξύ ἀσυμμέτρων.** Ὅπως ἀνεπτύχθη εἰς τήν παράγρ.17, κάθε ἀσύμμετρος Α εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ μεγαλύτερος κάθε ρητῆς κατ'ἔλλειψιν προσεγγίσεώς του καί μικρότερος κάθε ρητῆς καθ'ὑπεροχήν προσεγγίσεώς του. Ἄν π.χ. $A = \alpha,\psi_1\psi_2\psi_3\cdots\psi_\nu\ldots$ ἕνας ἀσύμμετρος τότε θεωρεῖται ὅτι

$$A > \alpha + \frac{\psi_1}{10}\quad,\qquad A > \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2}{100}\quad \text{κ.ο.κ.}$$

καί
$$A < \alpha + 1\qquad A < \alpha + \frac{\psi_1 + 1}{10}\qquad A < \alpha + \frac{\psi_1}{10} + \frac{\psi_2 + 1}{100}$$

κ.ο.κ. 'Εάν τώρα, Α τυχών ἀσύμμετρος καί σ τυχών σύμμετρος θά λέγωμεν ὅτι $\sigma < A$ ὅταν $\sigma < \sigma'$ ὅπου σ΄ ρητή προσέγγισις τοῦ A κατ'ἔλλειψιν.

Θά λέγωμεν δέ ὅτι $\sigma > A$ ὅταν $\sigma > \sigma''$, ὅπου σ'' ρητή προσέγγισις τοῦ A καθ'ὑπεροχήν. (Τ'ἀνωτέρω γράφονται ἀντιστοίχως $A > \sigma$, $A < \sigma$) Π.χ. $0{,}97 < \sqrt{2}$ διότι $0{,}97 < 1{,}4$ ὅπου $1{,}4 < \sqrt{2}$ καί $\frac{3}{2} > \sqrt{2}$ διότι $\frac{3}{2} > 1{,}42$ ὅπου $1{,}42 > \sqrt{2}$.

Τέλος ἄν A καί A΄ δύο ἀσύμμετροι θά λέγωμεν ὅτι $A < A'$ ἄν ὑπάρχει σύμμετρος σ τοιοῦτος ὥστε $A < \sigma$ καί $\sigma < A'$(Τοῦτο γράφεται καί $A' > A$).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36. Δείξατε διά μεθόδου ὁμοίας πρός τήν τοῦ παραδείγματος τῆς παραγρ.16 ὅτι ἡ $\sqrt[3]{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός,

37. Ἐάν σ εἶναι σύμμετρος $\neq 0$ καί α ἀσύμμετρος, δείξατε διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι τό ἄθροισμα $\alpha + \sigma$, τό γινόμενον $\sigma \cdot \alpha$ καί τό πηλίκον α/σ εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

38. Δείξατε διά παραδειγμάτων ὅτι τό ἄθροισμα δύο ἀσυμμέτρων δύναται νά εἶναι σύμμετρος ἀριθμός. Ὁμοίως καί τό γινόμενον καί τό πηλίκον.

39. Προσδιορίσατε τούς συμμέτρους ἀριθμούς α καί β γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ ἀριθμός $(\alpha - \beta)\cdot\sqrt{2} - (\beta - 7)$ ἰσοῦται μέ μηδέν.

40. Δείξατε ὅτι τό πηλίκον $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός.

41. Ἐάν β καί γ σύμμετροι, πληροῦται δέ ἡ σχέσις $\beta\cdot\sqrt{2} = \gamma\cdot\sqrt{3}$ τότε θά εἶναι $\beta = 0$ καί $\gamma = 0$.

42. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἕκαστον δέ τῶν δύο ἴσων κλασμάτων εἶναι σύμμετρος ἀριθμός τότε καί ὁ ἀριθμός

$$\frac{\alpha\sqrt[3]{2} + \gamma}{\beta\sqrt[3]{2} + \delta}$$

εἶναι ἐπίσης σύμμετρος.

43. Ποῖος εἶναι μεγαλύτερος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\sqrt{6{,}6666\ldots}$ καί $\frac{5}{2}$;

44. Ν' ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

22. **Οἱ σχετικοί ἀριθμοί.** Διά τήν εὐκολίαν καί ἁπλούστευσιν τῶν ὑπολογισμῶν ἡ Ἄλγεβρα δημιουργεῖ ἀπό τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς νέους ἀριθμούς: τούς θετικούς καί τούς ἀρνητικούς.

Ὁρισμοί: «Καλεῖται θετικός ἀριθμός, σύμβολον ἀποτελούμενον ἀπό ἕνα ἀριθμόν τῆς Ἀριθμητικῆς, διάφορον τοῦ μηδενός, φέροντα πρό αὐτοῦ τό διακριτικόν σημεῖον (ἤ πρόσημον) + ».

«Καλεῖται ἀρνητικός ἀριθμός, σύμβολον ἀποτελούμενον ἀπό ἕνα ἀριθμόν τῆς Ἀριθμητικῆς διάφορον τοῦ μηδενός, φέροντα πρό αὐτοῦ τό διακριτικόν σημεῖον ἤ (πρόσημον) −.»

Οὕτω π.χ. τά σύμβολα $+7$, $+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $+\frac{3}{5}$, $+0,12574$ παριστάνουν θετικούς ἀριθμούς, ἐνῶ τά -12, $-\sqrt{3}$, $-4,18$ παριστάνουν ἀρνητικούς ἀριθμούς. Τά πρόσημα ἤ σημεῖα + καί − (σύν καί πλήν) λέγονται *ἀντίθετα* μεταξύ των.

Οἱ θετικοί καί οἱ ἀρνητικοί ἀριθμοί λέγονται, ὅλοι μαζί, *σχετικοί ἀριθμοί*, ἐν ἀντιθέσει πρός τούς (ἄνευ σημείων) ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς οἱ ὁποῖοι λέγονται *ἀπόλυτοι*.

Ἕκαστος σχετικός ἀριθμός συνίσταται ὡς βλέπομεν ἀπό δύο οὕτως εἰπεῖν συστατικά: ἀπό ἕνα πρόσημον (ἤ σημεῖον) καί ἀπό ἕνα ἀριθμόν τῆς Ἀριθμητικῆς ὅστις ἀκολουθεῖ τό πρόσημον. Καλεῖται δέ *ἀπόλυτος τιμή σχετικοῦ ἀριθμοῦ* ὁ ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς ὁ προκύπτων ὅταν παραλειφθῆ τό πρόσημον τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Οὕτω, ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ +3 εἶναι ὁ 3 ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή τοῦ −3 εἶναι πάλιν ὁ 3. Τοῦτο συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$|+3| = 3 \quad , \quad |-3| = 3$$

Διά νά παραστήσωμεν δηλαδή τήν ἀπόλυτον τιμήν ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ γράφομεν αὐτόν μεταξύ δύο κατακορύφων γραμμῶν Τό σύμβολον $|\alpha|$ παριστᾶ λοιπόν τήν ἀπόλυτον τιμήν τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ α.

Ἔχομεν π.χ. $|-1,5| = 1,5$ $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}$, $|+2/5| = 2/5$ κ.ο.κ. Ὁ ἀριθμός 0 (μηδέν) τῆς Ἀριθμητικῆς χρησιμοποιεῖται καί εἰς τήν Ἄλγεβραν (ὡς ἀριθμός ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕνα ἄλλον δέν τόν μεταβάλλει. Ἴδε παράγρ.26) ἔχει δέ ἐξ ὁρισμοῦ ἀπόλυτον τιμήν ἴσην μέ μηδέν, δηλ. $|0| = 0$.

Δύο σχετικοί ἀριθμοί α καί β λέγονται ἴ σ ο ι ὅταν ἔχουν ἴσας ἀπολύτους τιμάς καί τό αὐτό σημεῖον. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει λέγονται ἄ ν ι σ ο ι ἤ διάφοροι μεταξύ των. Ἡ ἰσότης καί ἡ μή ἰσότης μεταξύ σχετ. ἀριθμῶν ἐκφράζονται μέ τά συνήθη σύμβολα = καί $\neq$ ἀντιστοίχως.

Ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος ἔχει τάς τρεῖς ἑπομένας ἰδιότητας.

1ον) $\alpha = \alpha$ (εἶναι αὐτοπαθής)

2ον) Ἐάν $\alpha = \beta$ τότε καί $\beta = \alpha$ (εἶναι συμμετρική)

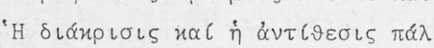
3ον) Ἐάν $\alpha = \beta$ καί $\beta = \gamma$ τότε καί $\alpha = \gamma$ (εἶναι μεταβατική).

Ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι λέγονται δύο σχετικοί ἀριθμοί ὅταν ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν ἀλλ' ἀντίθετα σημεῖα. Οὕτω π.χ. ἀντίθετοι εἶναι ὁ +7 καί ὁ −7 ἤ ὁ +12/5 καί ὁ −12/5.

23. Οἱ σχετικοί ἀριθμοί εἶναι κατάλληλοι διά τήν παράστασιν πλείστων Γεωμετρικῶν καί Φυσικῶν μεγεθῶν ἀφοῦ προηγουμένως συμφωνηθῇ ἡ ἔννοια τοῦ προσήμου + καί ἡ τοῦ −. Οὕτω π.χ. ἄν κατά σύμβασιν αἱ ὑπεράνω τοῦ μηδενός θερμοκρασίαι παρασταθοῦν μέ θετικούς ἀριθμούς καί αἱ κάτω τοῦ μηδενός μέ ἀρνητικούς, τότε ἡ θερμοκρασία ἑνός τόπου παρίσταται ἀνά πᾶσαν στιγμήν ὑπό ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ ἤ τοῦ μηδέν). Λέγοντες π.χ. ὅτι ἡ θερ/α εἶναι +15 βαθμῶν Κελσίου ἐννοοῦμεν ὅτι

εἶναι 15 βαθμῶν Κελσίου ὑπεράνω τοῦ μηδενός· ἐνῶ λέγοντες ὅτι εἶναι -4 βαθμῶν Κελσίου ἐννοοῦμεν ὅτι εἶναι τεσσάρων βαθμῶν κάτω τοῦ μηδενός. Ἐνταῦθα τό προτασσόμενον σημεῖον + ἔχει τήν ἔννοιαν τοῦ διακριτικοῦ ὑπεράνω τοῦ μηδενός καί τό -, κάτω τοῦ μηδενός. Φυσικά, θά ἠδύνατο νά συμφωνηθῆ καί τό ἀντίθετον, ἤτοι αἱ ἄνω τοῦ μηδενός θερ/αι νά παρίστανται μέ ἀρνητικούς ἀριθμούς καί αἱ κάτω τοῦ μηδενός μέ θετικούς. Ἡ διάκρισις καί ἡ ἀντίθεσις πάλιν ὑπάρχει.

Ἄλλο παράδειγμα χρήσεως τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἔστω τό ἑξῆς: Ἐπί δοθείσης εὐθείας x΄x ὁρίζομεν σταθερόν σημεῖον O καί συμφωνοῦμεν ὅπως ἡ ἀπόστασις ἀπό τοῦ O, παντός σημείου τῆς εὐθείας τό ὁποῖον κεῖται πρός τά δεξιά τοῦ O



νά παρίσταται μέ θετικόν ἀριθμόν ἐνῶ ἡ ἀπόστασις ἀπό τοῦ O παντός σημείου τῆς εὐθείας κειμένου πρός τ' ἀριστερά τοῦ O νά παρίσταται μέ ἀρνητικόν ἀριθμόν (νά λογίζεται ἀρνητική). Τότε ἡ θέσις παντός σημειου τῆς εὐθείας xx΄καθορίζεται πλήρως ὑπό ἑνός σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Λέγοντες π.χ. ὅτι τό A ἀπέχει τοῦ O, +7 μέτρα ἐννοοῦμεν ὅτι τό A εὑρίσκεται 7 μέτρα δεξιά τοῦ O. Λέγοντες δέ ὅτι τό B ἀπέχει τοῦ O, -8 μέτρα ἐννοοῦμεν ὅτι τό B εὑρίσκεται 8 μέτρα ἀριστερά τοῦ O. Ἐνταῦθα τό πρόσημον + εἶναι διακριτικόν τοῦ «δεξιά» καί τό - τοῦ «ἀριστερά». Ἐάν δύο σημεῖα τῆς x΄x εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό O τότε αἱ ἀποστάσεις των ἀπό τοῦ O ἐκφράζονται μέ ἀντιθέτους ἀριθμούς.

Ἐν γένει, μεγέθη δυνάμενα νά λάβουν δύο ἀντιθέτους προσανατολισμούς ἤ φοράς ἐκφράζονται (ἀφοῦ μετρηθῶσι διά συμφωνηθείσης μονάδος) μέ σχετικούς ἀριθμούς. (Π.χ. τόξα διανυόμενα ὑπό σημείου κινουμένου ἐπί περιφερείας ἤ διαστήματα δια νυόμενα ἐπί εὐθείας, ἤ ποσόν χρημάτων εἰσπραττόμενον - ἐξοδευόμενον κτλ.).

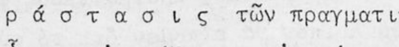
Ἐκτός τῆς χρησιμότητός των διά τήν παράστασιν προσανατολισμένων μεγεθῶν, οἱ σχετικοί ἀριθμοί εἰσάγονται εἰς τήν Ἄλγεβραν καί διά καθαρῶς λογιστικούς σκοπούς. Πράγματι, ὡς θά εἴδομεν εἰς τά ἑπόμενα, μέ τήν βοήθειαν τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν καθιστῶμεν πᾶσαν ἀφαίρεσιν δυνατήν, ἐνῶ τοῦτο δέν συμβαίνει εἰς τήν Ἀριθμητικήν. Οὕτω π.χ. εἰς τήν Ἀριθμητικήν δέν δυνάμεθα ν'ἀφαιρέσωμεν τόν 9 ἀπό τόν 7 ἤ ἀπό τόν 0 ν'ἀφαιρέσωμεν τόν 5, ἐνῶ εἰς τήν Ἄλγεβραν δυνάμεθα μέ χρῆσιν σχετικῶν ἀριθμῶν. Συνεπῶς ἀριθμητικαί παραστάσεις μή ἔχουσαι νόημα, ἀποκτοῦν τοιοῦτον, ὅπως λ.χ. ἡ παράστασις $7 - 9 + 2 - 5 + 10$ δέν ἔχει ἔννοιαν εἰς τήν στοιχειώδη Ἀριθμητικήν, ἐνῶ εἰς τήν Ἄλγεβραν ἰσοῦται μέ 5.

Οὕτω, οἱ ὑπολογισμοί γίνονται μέ μεγαλυτέραν ἐλευθερίαν, εὐχέρειαν καί γενικότητα.

24. **Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί.** Τό σύνολον τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν μαζί μέ τόν ἀριθμόν μηδέν (ὅστις δέν ἔχει σημεῖον) ἀποτελοῦν τό σύνολον τῶν *πραγματικῶν ἀριθμῶν*.

Λέγοντες λοιπόν ὅτι ὁ ἀριθμός α εἶναι πραγματικός θά ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ α εἶναι ἤ θετικός ἤ ἀρνητικός ἤ μηδέν.

Ἀξιοσημείωτος καί λίαν χρήσιμος εἶναι ἡ *γεωμετρική παράστασις* τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν διά τῆς ὁποίας οὗτοι εἰκονίζονται εἰς τά σημεῖα μιᾶς ἀπεράντου εὐθείας. Τοῦτο γίνεται ἄν ἐπί τῆς ἀπεράντου εὐθείας x'x λάβωμεν ἕνα σταθερόν σημεῖον O, μίαν μονάδα μήκους OA, καί παραστήσωμεν κάθε θετικόν ἀριθμόν +α (α ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς) μέ ἕν σημεῖον P τῆς x'x κείμενον δεξιά τοῦ O



Σχ. 2

καί τοιοῦτον ὥστε τό τμῆμα OP νά ἔχη μῆκος ἴσον μέ α, κάθε δέ ἀρνητικόν ἀριθμόν −α μέ ἕν σημεῖον P΄κείμενον ἀριστερά τοῦ O καί τοιοῦτον ὥστε τό τμῆμα OP΄νά ἔχη μῆκος ἴσον μέ α. ('Εννοεῖται ὅτι αἱ ἀποστάσεις μετροῦνται μέ μονάδα τήν OA). Τό μηδέν θά παρίσταται ὑπό τοῦ σημείου O (ἀρχῆς).

Οὕτω π.χ. οἱ ἀριθμοί +1, +2, +3,... θά παρίστανται ἀπό τά σημεῖα A, B, Γ... τοῦ σχήμ. (2) οἱ δέ −1, −2, −3,... ἀπό τά συμμετρικά τῶν A, B, Γ... ὡς πρός τό O δηλ. τά A΄, B΄, Γ΄...

'Ο ἀριθμός +1,5 θά παρίσταται ὑπό τοῦ σημείου M, μέσου τῆς AB, ὁ ἀριθμός $-\sqrt{2}$ ὑπό ἑνός ὡρισμένου σημείου N, κειμένου μεταξύ A΄ καί B΄ καί ἀπέχοντος τοῦ O ἀπόστασιν (OM) = $= \sqrt{2} = 1,41\ldots$ κ.ο.κ.

Τοιουτοτρόπως κάθε πραγματικός ἀριθμός παρίσταται ἀπό ἕν καί μόνον ἕν σημεῖον τῆς ἀπεράντου εὐθείας.

'Αλλά καί ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον k τῆς εὐθείας x΄x παρίσταται ἀπό ἕνα πραγματικόν ἀριθμόν ὅστις ἔχει ἀπόλυτον μέν τιμήν τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος OK μετρηθέντος μέ μονάδα τήν OA πρόσημον δέ τό + ἤ τό − καθ'ὅσον τό k κεῖται δεξιά ἤ ἀριστερά τοῦ O.

Τοιουτοτρόπως καί ἕκαστον σημεῖον τῆς x΄x παρίσταται ἀπό ἕνα καί μόνον πραγματικόν ἀριθμόν.

(**Τ'ἀνωτέρω ἀποτελοῦν τήν λεγομένην ἀ ρ χ ή ν τ ῆ ς ἀ μ φ ι μ ο ν ο σ η μ ά ν τ ο υ ἀ ν τ ι σ τ ο ι χ ί α ς τῶν σημείων τοῦ ἄξονος μέ τούς πραγματικούς ἀριθμούς**).

Δυνάμεθα λοιπόν νά εἴπομεν ὅτι τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν παρίσταται γεωμετρικῶς ἀπό σημεῖα τά ὁποῖα "γεμίζουν" ὁλόκληρον τήν ἀπέραντον εὐθεῖαν.

Παρατήρησις. 'Εκάστη εὐθεῖα, ὅπως ἡ x΄x δύναται νά διαγραφῆ ὑπό κινητοῦ σημείου κατά δύο ἀντιθέτους φοράς: ἤ ἐκ τοῦ x΄ πρός τό x ἤ ἐκ τοῦ x πρός τό x΄. Τήν μίαν ἐκ τῶν δύο τούτων φορῶν καλοῦμεν θ ε τ ι κ ή ν τήν δέ ἀντίθετόν της ἀ ρ ν η τ ι κ ή ν. Εἰς τήν ἀνωτέρω εὐθεῖαν x΄x ἡ πρός τά δεξιά φορά ἔχει ληφθῆ ὡς θετική.

ΑΣΚΗΣΙΣ

45. Εὕρετε μέ τήν βοήθειαν τοῦ κανόνος καί διαβήτου τά σημεῖα τοῦ ἄξονος τά ὁποῖα παριστάνουν οἱ ἀριθμοί $+3, -5, +\sqrt{2}$ $-\sqrt{2}/2$.

25. **Τά γράμματα ὡς σύμβολα ἀριθμῶν.** α) Εἰς τήν στοιχειώδη 'Αριθμητικήν ἐργαζόμεθα μέ συγκεκριμμένους ἀριθμούς. Εἰς τήν Ἄλγεβραν ὅμως δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς πολύ γενικώτερα ἐξαγόμενα ἐξετάζοντες σχέσεις μεταξύ ἀριθμῶν τούς ὁποίους δέν γνωρίζομεν συγκεκριμένως δηλ. τῶν ὁποίων δέν γνωρίζομεν τήν ἀκριβῆ ἀριθμητικήν ἔκφρασιν. 'Αφήνομεν δέ τούς ἀριθμαύς ἐφ ὧν σκεπτόμεθα ἀπροσδιορίστους (ἀφηρημένους) εἴτε διότι δέν θέλομεν εἴτε διότι δέν δυνάμεθα νά καθορίσωμεν ἀκριβεῖς ἀριθμητικάς τιμάς, χωρίς τοῦτο νά μᾶς ἐμποδίζη νά κερδίζωμεν γενικά συμπεράσματα. Ἡ γενικότης αὐτή τοῦ σκέπτεσθαι ὑποβοηθεῖται πολύ ἄν χρησ/ήσωμεν γράμματα λ.χ. τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου α,β,γ,...x,y, ω (ἤ τοῦ Λατινικοῦ ,a,b,c..z, t,u,v,) διά νά παραστήσωμεν ἀριθμούς δεδομένους ἤ ζητουμένους ἀλλά μή ἀριθμητικῶς καθωρισμένους ἐν γένει.

Οὕτω, οἱ συλλογισμοί καί αἱ πράξεις τάς ὁποίας καμνομεν ἐπί τῶν γραμμάτων μᾶς ὁδηγοῦν εἰς ἐξαγόμενα (τύπους) τά ὁποῖα ἰσχύουν δι'ὁλόκληρον κατηγορίαν προβλημάτων. Συνάμα καί αἱ ἀποδείξεις ἀποκτοῦν ἁπλότητα καί γενικότητα.

Τά εἰς τήν Ἄλγεβραν λοιπόν χρησιμοποιούμενα χάριν γενικότητος γράμματα εἶναι σύμβολα ἀριθμῶν καί συνεπῶς πάντες οἱ κανόνες τῶν πράξεων θά ἐφαρμόζωνται καί διά τά γράμματα.

Δεῖκται. Ἕνα ὡρισμένον πλῆθος ἀριθμῶν παρίσταται πολλάκις μέ τήν βοήθειαν ἰσαρίθμων δ ε ι κ τ ῶ ν 1,2,3,...

γραφομένων κάτω δεξιά ἑνός γράμματος. Π.χ. παριστάνομεν δύο ἀριθμούς μέ $α_1$, $α_2$ (ἄλφα ἕν, ἄλφα δύο). Τρεῖς ἀριθμούς μέ $α_1$ $α_2$, $α_3$ ἤ μέ x_1, x_2, x_3 κ.ο.κ. Ὅταν δέν θέλομεν νά περιορισθῶμεν εἰς ἕνα συγκεκριμμένον πλῆθος ἀριθμῶν, ὁμιλοῦμεν περί ν ἀριθμῶν $α_1$, $α_2$, $α_3$... $α_ν$ (ἄλφα ἕν κτλ. ἄλφα νί) ὅπου, τό ν τυχών **φυσικός ἀριθμός ἐκφράζων τό πλῆθος τῶν ὑπ' ὄψει ἀριθμῶν**.

Τόννοι. Ἐνίοτε παριστῶμεν τούς ἀριθμούς μας μέ γράμματα φεροντα τόννους: $α'$, $α''$, $α'''$ (ἄλφα τονούμενον, ἄλφα δίς τονούμενον κτλ.)

26. Ἡ πρόσθεσις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

α) **Πρόσθεσις δύο ἀριθμῶν. Ὁρισμός:** Δοθεντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν καλοῦμεν ἄθροισμα αὐτῶν τόν πραγματικόν ἀριθμόν ὅστις προκύπτει ἐκ τῶν δύο δοθέντων ὡς ἑξῆς:

« Ἐάν οἱ δύο ἀριθμοί ἔχουν τό αὐτό πρόσημον, σχηματίζομε τό ἀριθμητικόν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καί εἰς αὐτό προτάσσομεν τό κοινόν πρόσημον τῶν δύο ἀριθμῶν.

Ἐάν ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ μηδέν, τό ἄθροισμά των ἰσοῦται πρός τόν ἄλλον.

Ἐάν οἱ δύο ἀριθμοί ἔχουν ἀντίθετα πρόσημα σχηματίζομεν τήν ἀριθμητικήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν των καί εἰς αὐτήν δίδομεν τό πρόσημον ἐκείνου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν ὅστις ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν. Ἐν ᾗ περιπτώσει οἱ δύο ἀριθμοί ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν, δηλ. εἶναι ἀντίθετοι ὡς ἄθροισμα των λαμβάνεται τό μηδέν».

Ἡ πρᾶξις δι' ἧς εὑρίσκομεν τό ἄθροισμα λέγεται πρόσθεσις. Ὡς σύμβολον τῆς προσθέσεως θά μεταχειριζόμεθα τό σημεῖον +.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : $(+7) + (+8) = +15$, $(-5) + (-3) = -8$, $(+18,5) + (-0,5) = +18$, $(+6) + (-20) = -14$, $(+9)+(-9) = 0$

$(-2) + 0 = -2$.

β') **Ὁ ἀντιμεταθετικός** νόμος διά δύο προσθετέους ἰσχύει, δηλ. ἡ τάξις τῶν προσθετέων δέν ἐπιδρᾶ ἐπί τοῦ ἀθροίσματος. Διότι εἰς τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν δέν ἐλήφθη ὑπ'ὄψιν ποῖος ἐκ τῶν δύο προσθετέων ἀριθμῶν δίδεται πρῶτος καί ποῖος δεύτερος τό δέ ἀριθμητικόν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν δέν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τάξεως τῶν προσθετέων. Ἑπομένως ἄν εἰς τόν α προστεθῆ ὁ β τοῦτο ἔχει τήν ἰδίαν σημασίαν μέ τό νά προστεθῆ εἰς τόν β ὁ α καθ'ὅσον εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις σχηματίζομεν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν α καί β ὥστε

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

γ') **Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν**. Ὁ**ρισμός**: Δοθέντων ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν α,β,γ,δ... καλοῦμεν ἄ θ ρ ο ι σ μ α αὐτῶν α + β + γ + δ +... τόν ἀριθμόν τόν ὁποῖον εὑρίσκομεν προσθέτοντες πρῶτον τόν α μέ τόν β καί εἰς τό προκῦπτον ἄθροισμα προσθέτοντες τόν γ καί εἰς τό νέον ἄθροισμα προσθέτοντες τόν δ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου προσθέσωμεν καί τόν τελευταῖον.

Οὕτω, ἄν παραστήσωμεν μέ (α + β) τό ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως τῶν α καί β, δηλ. τό ἐκτελεσθέν ἄθροισμα α + β, καί μέ (α + β + γ) τό ἐκτελεσθέν ἄθροισμα α + β + γ θά ἔχωμεν:

$$\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta) + \gamma$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \{(\alpha + \beta) + \gamma\} + \delta = (\alpha + \beta + \gamma) + \delta$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : $(+5) + (-7) + (+8) + (-9) = \{(+5) + (-7)\} + (+8) + (-9) = (-2) + (+8) + (-9) = \{(-2) + (+8)\} + (-9) = (+6) + (-9) = -3$.

Σύμβασις. Ὅταν οἱ προσθετέοι δέν παρίστανται μέ γράμματα δυνάμεθα νά παραθέσωμεν αὐτούς τόν ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου παραλείποντες τό ἐνδιάμεσον +. Π.χ. τό προηγούμενον ἄθροισμα γράφεται:

$$+5-7+8-9$$

Παρατήρησις: Οὕτω ὁρισθέν τό ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπακούει εἰς τούς τρεῖς θεμελιώδεις νόμους τῶν πράξεων (παράγρ. 2) δηλ. τόν ἀντιμεταθετικόν, προσεταιριστικόν καί ἐπιμεριστικόν ὡς θά ἴδομεν εἰς τά ἑπόμενα.

ΑΣΚΗΣΙΣ

46. Ἐπαληθεύσατε τήν ἰσότητα: $+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} =$ $= +1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$.

27. Ἰδιότητες τῶν ἀθροισμάτων. i) «Εἰς πᾶν ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα ν'ἀλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν προσθετέων χωρίς τό συνολικόν ἄθροισμα νά μεταβληθῇ» (Ἀντιμεταθετικός νόμος).

ii) «Εἰς πᾶν ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε προσθετέους διά τοῦ ἀθροίσματός των ἤ ἕνα τῶν προσθετέων ὑπό ἄλλων ἐχόντων αὐτόν ὡς ἄθροισμα».

iii) «Διά νά προσθέσωμεν ἄθροισμα, ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν προσθετέων».

iv) «Διά νά λάβωμεν τό ἄθροισμα πολλῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀρκεῖ νά σχηματίσωμεν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν θετικῶν προσθετέων, κατόπιν ὅλων τῶν ἀρνητικῶν καί νά προσθέσωμεν τά δύο ἀθροισματα».

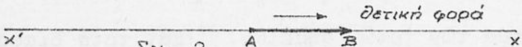
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) $+7-11+15+1=-11+1+15+7$

2) $-4-6-5+7+2=-4-5+3$ διότι ἀντικατεστήσαμεν τόν 2ον, 4ον καί 5ον προσθετέον διά τοῦ ἀθροίσματός των $+3$.

3) $+7+(-9+4-3)=(+7)+(-9)+(+4)+(-3)=+7-9+$ $+4-3=-2+4-3=+2-3=-1$

4) $-3+\frac{12}{5}-9+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}=\left(+\frac{12}{5}+\frac{1}{2}\right)+\left(-3-9-\frac{3}{10}\right)=$ $=+\frac{29}{10}-\frac{123}{10}=-\frac{94}{10}=-9{,}4$

28.* Ἀπόδειξις τῶν νόμων τῆς προσθέσεως. α) Σχετικόν μέτρον. Καλεῖται ἄ ξ ω ν ἀπέραντος εὐθεῖα $x'x$ ἐφ'ἧς ἔ χ ε ι ὁ ρ ι σ θ ῆ θ ε τ ι κ ή καί ἀ ρ ν η τ ι κ ή φ ο ρ ά καθώς καί ἡ μ ο ν ά ς τ ο ῦ μ ή κ ο υ ς διά τῆς ὁποίας μετροῦνται πάντα τά εὐθύγραμμα τμήματα τά κείμενα ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης.



Σχ. 3

Ἐάν εὐθύγραμμον τμῆμα AB κείμενον ἐπί τοῦ ἄξονος θεωρεῖται διαγραφέν ὑπό σημείου κινουμένου (ἐπί τοῦ ἄξονος) κατά τήν φοράν ἐκ τοῦ A πρός τόν B τότε τό (προσανατολισμένον) τμῆμα τοῦτο καλεῖται δ ι ά ν υ σ μ α ἐπί τοῦ ἄξονος καί παρίσταται μέ $\overline{AB}$. Τό διάνυσμα $\overline{BA}$ ἐκφράζει τό αὐτό τμῆμα ἀλλά διαγραφέν κατ'ἀντίθετον φοράν, εἶναι δέ τό διάνυσμα $\overline{BA}$ διάφορον τοῦ $\overline{AB}$ (καί δή τό ἀντίθετον τοῦ $\overline{AB}$).

Κάθε διάνυσμα ἐπί τοῦ ἄξονος ἔχει λοιπόν μίαν ὡρισμένην φ ο ρ ά ν, τήν φοράν καθ'ἥν διεγράφη καί ἥτις εἶναι ἀναπόσπαστον χαρακτηριστικόν τοῦ διανύσματος. Αὕτη συμπίπτει ἤ μέ τήν θετικήν φοράν τοῦ ἄξονος ἐφ'οὗ κεῖται τό διάνυσμα ἤ μέ τήν ἀρνητικήν φοράν τοῦ ἄξονος τούτου.

Καλεῖται σ χ ε τ ι κ ό ν μ έ τ ρ ο ν (ἤ ἀ λ γ ε β ρ ι κ ή τ ι μ ή) ἑνός διανύσματος $\overline{\Gamma\Delta}$ τοῦ ἄξονος $x'x$, ὁ σχετικός ἀριθμός ὁ ἔχων ἀπόλυτον τιμήν τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΓΔ μετρηθέντος μέ τήν μονάδα τοῦ ἄξονος καί πρόσημον τό + ἤ τό - καθ'ὅσον ἡ φορά τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ συμπίπτει μέ τήν θετικήν ἤ τήν ἀρνητικήν φοράν τοῦ ἄξονος $x'x$. Τό σχετικόν μέτρον τοῦ $\overline{\Gamma\Delta}$ παρίσταται μέ $(\overline{\Gamma\Delta})$. Οὕτω π.χ. εἰς

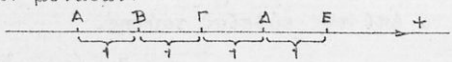
---

* Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι'ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

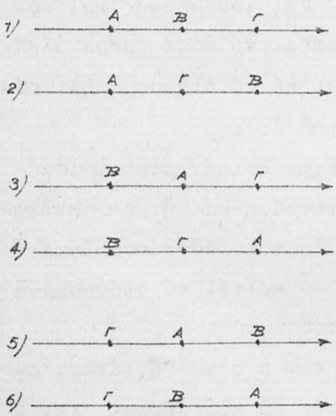
τό σχ. 4 εἶναι $(\overline{A\Gamma}) = 12$ $(\overline{EB}) = -3$ $(\overline{BA}) = -1$. Εἶναι ἀκόμη $(\overline{\Gamma A}) + (\overline{A\Delta}) = +1 = (\overline{\Gamma\Delta})$. Ὁμοίως εἶναι $(\overline{BE}) + (\overline{E\Delta}) = (\overline{B\Delta})$.

Τό σχετικόν μέτρον μᾶς πληροφορεῖ διά τοῦ προσήμου του περί τῆς φορᾶς τοῦ διανύσματος καί διά τῆς ἀπολύτου τιμῆς του περί τοῦ μήκους τοῦ διανύσματος. Οὕτω π.χ. ἄν $(\overline{\Gamma\Delta}) = -3$ ἕπεται ὅτι τό ΓΔ φέρεται πρός τ'ἀρνητικά τοῦ ἄξονος καί ὅτι ἔχει μῆκος τριῶν μονάδων.

Σχ. 4



β) <u>Θεώρημα τῶν τριῶν σημείων.</u> «<u>Ἐάν τρία διαφορετικά σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπί ἄξονος (καθ'οιανδήποτε τάξιν) τότε τά σχετικά μέτρα τῶν διανυσμάτων $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$ καί $\overline{A\Gamma}$ πληροῦν τήν σχέσιν:</u> $(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{A\Gamma})$.»



Σχ. 5

Τά τρία σημεῖα θά ἔχουν μίαν ἀπό τάς 6 διατάξεις τοῦ σχ. (5). Ἐάν ἔχουν τήν πρώτην, προφανῶς τό ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν $(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma})$ ἰσοῦται πρός τόν θετικόν ἀριθμόν $(\overline{A\Gamma})$, ἐάν δέ τήν ἕκτην, τό ἄθροισμα τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν $(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma})$ ἰσοῦται πρός τόν ἀρνητ. ἀριθμόν $(\overline{A\Gamma})$ σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῆς προσθέσεως ὁμοσήμων ἀριθμῶν. Ὥστε διά τάς περιπτώσεις (1) καί (6) τό θεώρημα ἰσχύει. Ἄν ἔχουν τήν διάταξιν (2) τότε σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῆς προσθέσεως ἑτεροσήμων ἀριθμῶν, τό ἄθροισμα τοῦ θετικοῦ $(\overline{AB})$ καί τοῦ ἀρνητικοῦ $(\overline{B\Gamma})$ θά ἰσοῦται μέ τόν θετικόν $(\overline{A\Gamma})$ καί τό θεώρημα ἰσχύει. Ὁμοίως, ἄν ἔχουν τήν διάταξιν (3), τό ἄθροισμα τοῦ ἀρνητικοῦ $(\overline{AB})$ καί τοῦ θετικοῦ $(\overline{B\Gamma})$ θά ἰσοῦται μέ τόν θετικόν $(\overline{A\Gamma})$ κ.ο.κ. Εἰς πάσας τάς περιπτώσεις ἐλέγχεται εὐκόλως ὅτι $(\overline{AB}) + (\overline{B\Gamma}) = (\overline{A\Gamma})$

γ) Ὁ προσεταιριστικός νόμος ἰσχύει κατά τήν πρόσθεσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἔστωσαν α,β,γ τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί. Θά δείξωμεν ὅτι (ἴδε παράγρ. 2)

(1) $$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$

Ἐάν εἷς ἐκ τῶν τριῶν εἶναι ὁ μηδέν ἡ (1) προφανῶς ἰσχύει. Ἐάν εἶναι πάντες $\neq 0$ τότε δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐπί τοῦ ἄξονος τρία διαδοχικά διανύσματα $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ ἔχοντα σχετικά μέτρα ἀντιστοίχως, α,β,γ δηλ. νά εἶναι $(\overline{AB}) = \alpha$, $(\overline{B\Gamma}) = \beta$, $(\overline{\Gamma\Delta}) = \gamma$. Τό πρῶτον μέλος τῆς (1) γράφεται τότε $\{(\overline{AB})+(\overline{B\Gamma})\} + (\overline{\Gamma\Delta})$ καί λόγω τοῦ θεωρήματος τῶν τριῶν σημειων ἰσοῦται μέ $(\overline{A\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta})$ καί τοῦτο πάλιν λόγω τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος ἰσοῦται μέ $(\overline{A\Delta})$.

Τό δεύτερον μέλος τῆς (1) γράφεται διαδοχικῶς, βάσει τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος

$$(\overline{AB}) + \{(\overline{B\Gamma}) + (\overline{\Gamma\Delta})\} = (\overline{AB}) + (\overline{B\Delta}) = (\overline{A\Delta})$$

Ὥστε τά δύο μέλη τῆς (1) εἶναι ἴσα.

δ) **Ἀπόδειξις τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀθροισμάτων.** Ἤδη, εἴμεθα εἰς θέσιν νά δώσωμεν ἀπόδειξιν τῶν τεσσάρων ἰδιοτήτων τῆς **παράγρ.** 27.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (i). Ἔστω τό ἄθροισμα:

(2) $$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots + \eta$$

Θά δείξωμεν πρῶτον ὅτι τό ἄθροισμα (2) δέν μεταβάλλεται ἄν ἀντιμεταθέσωμεν δ ύ ο δ ι α δ ο χ ι κ ο ύ ς προσθετέους, ἔστω τούς γ καί δ δηλαδή ὅτι

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \cdots + \eta = \alpha + \beta + \delta + \gamma + \varepsilon + \ldots + \eta$$

Πρός τοῦτο παριστῶμεν διά τοῦ k τό ἄθροισμα (α + β) καί ἐφαρμόζομεν τόν ὁρισμόν τῆς παράγρ. 26γ', τόν προσεταιριστικόν νόμον καί τόν ἀντιμεταθετικόν (§ 26β') (διά δύο προσθετέους), ὁπότε πράγματι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+\eta = k+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+\eta =$$
$$= \{(k+\gamma)+\delta\}+\varepsilon+\ldots+\eta = \{k+(\gamma+\delta)\}+\varepsilon+\ldots+\eta =$$
$$=\{k+(\delta+\gamma)\}+\varepsilon+\ldots+\eta = \{(k+\delta)+\gamma\}+\varepsilon+\ldots+\eta =$$
$$= k+\delta+\gamma+\varepsilon+\ldots+\eta = \alpha+\beta+\delta+\gamma+\varepsilon+\ldots+\eta$$ ὅ.ἔ.δ.

Θά δείξωμεν τώρα ὅτι εἰς τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+$ $\ldots+\eta$ δυνάμεθα ν'ἀντιμεταθέσωμεν δ ύ ο τ υ χ ό ν τ α ς προσθετέους π.χ. τόν β καί ε, δηλ. ὅτι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+\eta = \alpha+\varepsilon+\gamma+\delta+\beta+\ldots+\eta$$

Πρός τοῦτο ἐκτελοῦμεν ἀντιμεταθέσεις διαδοχικῶν προσθετέων ὡς ἔχομεν δικαίωμα καί λαμβάνομεν κατά σειράν:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\ldots+\eta = \alpha+\beta+\gamma+\varepsilon+\delta+\ldots+\eta =$$
$$\alpha+\beta+\varepsilon+\gamma+\delta+\ldots+\eta = \alpha+\varepsilon+\beta+\gamma+\delta+\ldots+\eta =$$
$$\alpha+\varepsilon+\gamma+\beta+\delta+\ldots+\eta = \alpha+\varepsilon+\gamma+\delta+\beta+\ldots+\eta$$ ὅ.ἔ.δ.

Κατόπιν τούτου γίνεται φανερόν ὅτι δυναμεθα ν'ἀνακατατάξωμεν τούς ὅρους τοῦ (15) καθ'ἥν σειράν θέλομεν χωρίς νά μεταβληθῆ τό ἀποτέλεσμα τοῦ ἀθροίσματος.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (ii). Ἔστω τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+$ $+\gamma+\delta+\varepsilon$ καί ἔστω ὅτι $(\beta+\gamma+\delta)=\sigma$. Θά δείξωμεν ὅτι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha+\sigma+\varepsilon$$

Ἐπειδή ἡ τάξις τῶν προσθετέων δύναται νά μεταβληθῆ, θά ἔχωμεν χάρις εἰς τόν ὁρισμόν (παράγρ.26γ) ὅτι:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \beta+\gamma+\delta+\alpha+\varepsilon =$$
$$(\beta+\gamma+\delta)+\alpha+\varepsilon = \sigma+\alpha+\varepsilon = \alpha+\sigma+\varepsilon$$ ὅ.ἔ.δ.

Ἀντιστρόφως, θά ἰσχύη: $\alpha+\sigma+\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.
Διότι $\alpha+\sigma+\varepsilon = \sigma+\alpha+\varepsilon = (\beta+\gamma+\delta)+\alpha+\varepsilon =$
$$=\beta+\gamma+\delta+\alpha+\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$$ ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρησις. Οἱ προσθετέοι τούς ὁποίους ἀντικαθιστῶμεν διά τοῦ ἀθροίσματός των δέν εἶναι ἀνάγκη νά εἶναι διαδοχικοί, ἀφοῦ ἡ τάξις τῶν προσθετέων εἶναι ἀδιάφορος.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (iii). Ἔστω π.χ. τό ἐκτελεσθέν ἄθροισμα $(\alpha + \beta + \gamma)$ καί ὁ ἀριθμός k. Ἔχομεν νά δείξωμεν ὅτι:

$$k + (\alpha + \beta + \gamma) = k + \alpha + \beta + \gamma$$

Πράγματι, βάσει τῆς προηγουμένης ἰδιότητος (ii), μεταβαίνομεν ἐκ τοῦ πρώτου μέλους εἰς τό δεύτερον ἀντικαθιστῶντες τόν ἀριθμόν $(\alpha + \beta + \gamma)$ διά τριῶν προσθετέων $\alpha + \beta + \gamma$ οἵτινες ἔχουν αὐτήν ὡς ἄθροισμα.

Ἀπόδειξις τῆς ἰδιότητος (iv). Βάσει τῆς (ii) δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν ὅλους τούς θετικούς διά τοῦ ἀθροίσματός των Κ καί ὅλους τούς ἀρνητικούς ὁμοίως διά τοῦ Λ ὁπότε θά ἔχωμεν τελικῶς δύο μόνον προσθετέους Κ + Λ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

74. Ὑπολογίσατε τά ἀθροίσματα: $(-2) + (-4) + (-7) + (+2) + (+5)$, $+ 9 + [- 4 + 6 + (-7 + 3 + 8) + 5]$, $(-7,5 + 3,4 - 2,3) + (4,6 - 8,1) + (+5,8 + 6,2 - 9,6)$, $+|-3| - \sqrt{2} + |-\sqrt{2}|$

48. Δείξατε ὅτι ἐάν τό ἄθροισμα ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ μηδέν οὐδείς δέ προσθετέος εἶναι ἀρνητικός, τότε ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν τούτων ἰσοῦται μέ τό μηδέν.

49. Διά ποίους ἀριθμούς x ἰσχύει ἡ ἰσότης $+|x| = x$ καί διά ποίους ἡ $-|x| = x$;

50. Ἐάν ἐπί ἄξονος τό σημεῖον Α παριστᾷ (ἤ ἀντιστοιχεῖ πρός) τόν ἀριθμόν +5 καί τό Β παριστᾷ τόν +11, εὕρετε τό σχετικόν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overline{AB}$. Ὁμοίως εὕρετε τό $(\overline{AB})$ καί $(\overline{BA})$ ὅταν τό Α ἀντιστοιχῇ πρός −5 καί τό Β πρός −11, ἤ τό Α εἰς τό −5 καί τό Β εἰς τό +4 ἤ τό Α εἰς τόν +4 καί τό Β εἰς τόν 0.

√51. Ἀφοῦ διαπιστωθοῦν αἱ ἀριθμητικαί ἰσότητες
$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ καί γενικῶς

$\frac{1}{\nu(\nu+1)} = \frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1}$, νά ὑπολογισθῆ βάσει αὐτῶν τό ἄθροισμα τῶν εἴκοσι κλασμάτων $+\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{20.21}$

29. Ἡ ἀφαίρεσις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. α) Θεώρημα: «Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ὑπάρχει πάντοτε τρίτος ὅστις προστιθέμενος εἰς τόν β δίδει τόν α. Εἷς μόνος δ τοιοῦτος ἀριθμός ὑπάρχει».

Ἔστωσαν α καί β δύο πραγματικοί ἀριθμοί. Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ x τόν τρίτον ἀριθμόν θά ἔπρεπε νά ἀληθεύη ἡ ἰσότης:

$$x + \beta = \alpha$$

Ἐάν δέ καλεσωμεν β΄ τόν ἀ ν τ ί θ ε τ ο ν τοῦ β καί προσθέσωμεν αὐτόν εἰς τά δύο μέλη τῆς ἰσότητος θά ἔπρεπε νά ἔχωμεν

$$(x + \beta) + \beta' = \alpha + \beta'$$

ἤ
$$x + (\beta + \beta') = \alpha + \beta'$$

ἤ
$$x + 0 = \alpha + \beta'$$

ἤ
$$x = \alpha + \beta'$$

Ὥστε ἄν ὑπάρχη ὁ τρίτος ἀριθμός x δέν δύναται νά εἶναι ἄλλος ἀπό τόν α + β΄. Ὁ ἀριθμός ὅμως α + β΄, πράγματι προστιθέμενος εἰς τόν β δίδει τόν α, διότι

$$(\alpha + \beta') + \beta = \alpha + (\beta' + \beta) = \alpha + 0 = \alpha$$

β) Ὁρισμός. «Καλεῖται διαφορά μεταξύ α καί β καί παρίσταται μέ α − β ὁ ἀριθμός ὅστις προστιθέμενος εἰς τόν β παρέχει τόν α».

Σύμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα ἡ διαφορά ὑπάρχει πάντοτε καί μάλιστα εἶναι ὁ ἀριθμός α + β΄, ὅπου β΄ ὁ ἀντίθετος τοῦ β. Ὥστε

$$\alpha - \beta = \alpha + \beta'$$

δηλ. διά νά εὕρωμεν τήν διαφοράν α - β ἀρκεῖ εἰς τόν α νά προσθέσωμεν τόν ἀντίθετον τοῦ β ('Η ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τήν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου).

Παραδείγματα: $(+4) - (+2) = (+4) + (-2) = +2$, $(-7) - (-5) = (-7) + (+5) = -2$, $(-6) - 0 = -6 + 0 = -6$.

γ') Παράστασις τοῦ ἀντιθέτου ἀριθμοῦ. Κατά συνθήκην τό σύμβολον $+\alpha$ παριστάνει τόν ἀριθμόν α τό δέ σύμβολον $-\alpha$ τόν ἀντίθετον τοῦ α. 'Η παραδοχή αὕτη παρέχει π.χ. τάς ἰσότητας:

$$+(+3) = +3 \ , \ -(+2) = -2 \ , \ +(-7) = -7 \ , \ -(-8) = +8$$

καί δύναται νά διατυπωθῆ ὡς ἑξῆς:

« Δύο πρόσημα διαδοχικά ἰσοδυναμοῦν μέ ἕν πρόσημον τό ὁποῖον εἶναι τό + ἤ τό - καθ'ὅσον τά διαδοχικά πρόσημα εἶναι τά αὐτά ἤ ἀντίθετα ».

30. **'Αλγεβρικόν ἄθροισμα**. Οὕτω καλεῖται μία διαδοχή προσθέσεων καί ἀφαιρέσεων ἐκτελουμένων μεταξύ δεδομένων ἀριθμῶν Οὕτω π.χ. ἡ παράστασις

$$(+7) + (-10) - (-20) - (+25)$$

εἶναι ἕνα ἀ λ γ ε β ρ ι κ ό ν ἄ θ ρ ο ι σ μ α εἰς τό ὁποῖον ὁ (-10) προστίθεται εἰς τόν (+7) καί ἀπό τό ἐξαγόμενον ἀφαιρεῖται ὁ -20 καί ἀπό τό νέον ἐξαγόμενον ἀφαιρεῖται ὁ +25. 'Επειδή ὅμως ἡ ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀνάγεται εἰς τήν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου, τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα δύναται νά θεωρηθῆ ὡς σύνηθες ἄθροισμα πραγματικῶν ἀριθμῶν:

$$(+7) + (-10) + (+20) + (-25).$$

Γενικῶς, καλοῦνται ὅ ρ ο ι τοῦ ἀλγ. ἀθροίσματος οἱ ἀποτελοῦντες αὐτό ἀριθμοί μέ τά σημεῖα των. Οὕτω π.χ. οἱ ὅροι τοῦ ἀλγ. ἀθροίσματος $\alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon$ εἶναι οἱ ἀριθμοί $\alpha, -\beta, \gamma, -\delta, \varepsilon$. Δύναται δέ το ἀνωτέρω ἀλγεβρικόν ἄθροισμα, κατόπιν τῆς παραδοχῆς τῶν σημείων (ἐδαφ. γ΄) νά γραφῆ ὡς σύνηθες ἄθροισμα:

$$\alpha + (-\beta) + \gamma + (-\delta) + \varepsilon$$

῞Ωστε πᾶν ἀλγεβρικόν ἄθροισμα εἶναι ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων του: ῎Αρα ἰσχύουν καί δι'αὐτό αἱ ἰδιότητες (i) ἕως (iv) τῆς παράγρ. 27.

'Ισχύει ἀκόμη διά τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τό ἑξῆς θεώρημα:

Θεώρημα: «<u>Διά ν'ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρικόν ἄθροισμα ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν διαδοχικῶς ἕκαστον τῶν ὅρων του μέ ἀλλαγμένον τό σημεῖον του</u>».

'Εάν α,β,γ,δ οἱ ὅροι ἑνός ἀθροίσματος θά δείξωμεν ὅτι

$$k - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = k - \alpha - \beta - \gamma - \delta$$

'Αρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τό ἀντίθετον ἑνός ἀθροίσματος εὑρίσκεται ἄν ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του. Πράγματι, τά ἀθροίσματα

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta \qquad \text{καί} \qquad -\alpha - \beta - \gamma - \delta$$

εἶναι ἀριθμοί ἀντίθετοι διότι ἔχουν ἄθροισμα μηδέν:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta) + (-\alpha - \beta - \gamma - \delta) =$$
$$= (\alpha - \alpha) + (\beta - \beta) + (\gamma - \gamma) + (\delta - \delta) = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

'Επομένως ἀντί ν'ἀφαιρέσωμεν τό $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, προσθέτομεν τό $-\alpha - \beta - \gamma - \delta$ δηλ. τό ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.

'Εφαρμογαί: 1) $\alpha + (\beta + \gamma - \delta) = \alpha + \beta + \gamma - \delta$

Δηλαδή, ἄν ἄθροισμα εὑρίσκεται ἐντός παρενθέσεως φερούσης προτεταγμένον τό + δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τήν παρένθεσιν (παράγρ. 27, ii)

2) $\alpha - (\beta + \gamma - \delta) = \alpha - \beta - \gamma + \delta$

Δηλαδή, ὅταν ἄθροισμα εὑρίσκεται ἐντός παρενθέσεως φερούσης προτεταγμένον τό σημεῖον −, τότε δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τήν παρένθεσιν ἀλλάζοντες συγχρόνως τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἐν τῇ παρενθέσει ἀθροίσματος (Συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα).

3) $\alpha - \beta - \gamma + \delta = \alpha - (\beta + \gamma - \delta)$

Δηλαδή, ὁσουσδήποτε ὅρους ἑνός ἀθροίσματος δυνάμεθα νά ταύς εἰσαγάγωμεν ἐντός παρενθέσεως φερούσης πρό αὐτῆς τό − ἀφοῦ ὅμως ἀλλάξωμεν τά σημεῖα τῶν ὅρων τούτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

52. Ὑπολογίσατε τ'ἀλγεβρικά ἀθροίσματα:

$(+3) - (+10) + (-4) - (-9) - (+3) + (+5)$,

$+\frac{1}{4} - (-\frac{3}{16} + \frac{2}{9} - \frac{4}{3} + 2) - (-\frac{5}{18} + \frac{3}{8}) + 2 - 7 -$

$- \left[+8 - 5 + (+5 - 2 + 4) - (+6 - 1 + 3)\right]$,

$+ |-6 + 8| - |4 - 9|$

53. Δείξατε ὅτι ἄν ὑφίσταται ἰσότης μεταξύ ἀλγεβρικῶν ἀθροισμάτων, κάθε ὅρος τοῦ ἑνός μέλους τῆς ἰσότητος δύναται νά μεταφερθῇ εἰς τό ἄλλο μέλος ἀλλά μέ τό ἀντίθετον σημεῖον. Π.χ. ἄν $\alpha + \beta + \gamma = \delta + \varepsilon$ τότε $\alpha + \gamma = \delta + \varepsilon - \beta$ κ.ο.κ. Ἀκολούθως εὕρετε τόν x ἄν $x - 7 = +11$ ἤ $x + 4 = -12$ ἤ $+|x| - 90 = -85$

54. Ἐκτελέσατε τάς πράξεις:

α) $+3 + |-5| - \left[+|-10| + |+7 + (-2)| + |-2| - \left\{19 - \left[23 |-22|\right]\right\}\right]$

β) $\alpha - \left[\beta - \left\{\gamma - (\delta - \varepsilon - \eta)\right\}\right]$

γ) $(\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_3) + (\alpha_3 - \alpha_4) + (\alpha_4 - \alpha_5) + (\alpha_5 - \alpha_6) + (\alpha_6 - \alpha_7) + (\alpha_7 - \alpha_8)$ ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_7$ τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί.

31. Ὁ πολλαπλασιασμός τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

α) Γινόμενον δύο ἀριθμῶν. Ὁρισμός. «Καλεῖται γινόμενον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἷς τρίτος ἀριθμός ἔχων ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν καί ἔχων πρόσημον + ἤ − καθ'ὅσον οἱ δύο δοθέντες ἀριθμοί ἔχουν

τό αὐτό πρόσημον ἤ ἀντίθετα πρόσημα. Ὅταν ὁ εἷς τῶν δύο ἀ-
ριθμῶν εἶναι τό μηδέν τό γινόμενον ἰσοῦται μέ μηδέν ».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ $(+2)(+3) = +6$, $(+5)(-3) = -15$, $(-9)($
$= -36$, $(+8)(-5) = -40$.

Τό σημεῖον τοῦ γινομένου δύο σχετικῶν ἀριθμῶν παρέχετ
σύμφωνα μέ τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν ὑπό τοῦ πίνακος:

1ος	2ος	Γινόμενον
+	+	+
+	−	−
−	+	−
−	−	+

(Κανών τῶν σημείων

Ἡ πρᾶξις δι'ἧς εὑρίσκομεν τό γινόμενον τῶν α καί β λέ
ται πολλαπλασιασμός, οἱ α καί β παράγοντες τοῦ γινομένου
δέ γινόμενον παρίσταται μέ $(\alpha \times \beta)$ ἤ $(\alpha\cdot\beta)$ ἤ $(\alpha\beta)$ καί τό
ἐκτελεσθέν διά τοῦ αβ ἁπλῶς. Ἐν ᾗ περιπτώσει ὁ εἷς μόνον
ράγων εἶναι γράμμα ὁ δέ ἕτερος, συγκεκριμμένος θετικός ἀρ
μός παραλείπομεν συνήθως τό πρόσημον +. Οὕτω π.χ. τά γινόμ

$$+2\alpha \ , \ +\frac{3}{7}\alpha \ , \ +1{,}05\alpha \ , \ +\sqrt{3}\alpha$$

γράφονται ἁπλῶς:

$$2\alpha \ , \quad \frac{3}{7}\alpha \ , \quad 1{,}05\alpha \ , \quad \sqrt{3}\alpha$$

β) **Γινόμενον ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν. Ὁρισμός.** «Δοθέντων τῶν πρ
ματικῶν ἀριθμῶν α,β,γ,... τ παριστάνομεν διά τοῦ συμβόλου
$\alpha \times \beta \times \gamma \times \ldots \times \tau$ ἤ ἁπλούστερον διά τοῦ αβγ...τ τόν ἀρι
μόν ὅστις προκύπτει ἄν πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο πρώτους
καί β καί τό γινόμενον αὐτῶν ἐπί τόν τρίτον καί τό γινόμεν
αὐτῶν ἐπί τόν τέταρτον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου συμπεριλάβωμεν κ
τόν τελευταῖον». Ὁ ἀριθμός αβγ...τ εἶναι τό γινόμενον τῶν α,β
..,τ. Ἐάν εἷς παράγων τοῦ γινομένου εἶναι συγκεκριμένος ἀρι
μός οἱ δέ λοιποί γράμματα, τότε ὁ ἀριθμητικός παράγων λέγε

ται **ἀριθμητικός συντελεστής** τοῦ γινομένου. Οὕτω π.χ. τά γινόμενα $+5\alpha$, $-7\beta\gamma$, $-\frac{2}{3}xy\omega$ ἔχουν ἀριθμητικούς συντελεστάς ἀντιστοίχως, $+5$, -7, $-\frac{2}{3}$.

γ) Ἰδιότητες τοῦ γινομένου. Θεώρημα Ι. « Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων »

Προκειμένου διά δύο παράγοντας τό θεώρημα γίνεται φανερόν ἐξ αὐτοῦ τούτου τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ γινομένου δύο παραγόντων π.χ. $|(+8)(-7)| = 8\cdot 7 = |+8|\cdot|-7|$. Ὥστε θά εἶναι

$$|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta| \tag{1}$$

Ἔστω τώρα τό γινόμενον αβγ. Ἐπειδή ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $\alpha\beta\gamma = (\alpha\beta)\gamma$ θά ἔχωμεν συμφώνως πρός τήν (1)

$$|\alpha\beta\gamma| = |(\alpha\beta)\gamma| = |\alpha\beta|\cdot|\gamma| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|$$

Ἀκολούθως ἐπεκτείνεται διά τέσσαρας παράγοντας:

$$|\alpha\beta\gamma\delta| = |(\alpha\beta\gamma)\cdot\delta| = |\alpha\beta\gamma|\cdot|\delta| = |\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\gamma|\cdot|\delta| \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Θεώρημα ΙΙ. « Τό πρόσημον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων εἶναι τό + ἤ τό - καθόσον τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον (ἤ μηδέν) ἤ περιττόν.»

Ἔστω τό γινόμενον αβγδ...τ. Ἐπειδή $(+1)\alpha = \alpha$ δυνάμεθα νά γράψωμεν τό γινόμενον: $(+1)\alpha\beta\gamma\delta\ldots\tau$. Δηλαδή ἔχομεν νά πολ/μεν τό +1 ἐπί α, τό γινόμενον αὐτῶν ἐπί β, τό γινόμενον αὐτῶν αὐτῶν ἐπί γ κ.ο.κ.

Συμφώνως πρός τόν κανόνα τῶν προσήμων ὁσάκις πολ/μεν ἐπί ἀρνητικόν παράγοντα τό γινόμενον ἀλλάσσει πρόσημον. Ἑπομένως τό γινόμενον θ'ἀλλάξη τόσας φοράς πρόσημον, ὅσοι ἀρνητικοί παράγοντες ὑπάρχουν. Ἐάν δέν ὑπάρχη κανείς ἀρνητικός, δέν θ'ἀλλάξη, ἄρα θά ἔχη τό πρόσημον τοῦ +1 δηλ. τό +. Ἄν ὑπάρχουν 2 ἀρνητικοί θ'ἀλλάξη δύο φοράς ἄρα θά ἐπανέλθη εἰς τό πρόσημον τοῦ πρώτου δηλ. εἰς τό +. Ἄν ὑπάρχουν 4 ἀρνητικοί θ'ἀλλάξῃ τέσσαρας φοράς ἄρα θά ἐπανέλθῃ εἰς τό + και

Τέλος ἄν ὑπάρχει περιττόν πλῆθος ἀρνητικῶν παραγόντων τότε κατά τήν ἐκτέλεσιν τῶν διαδοχικῶν πολ/σμῶν θά γίνουν 1 ἤ 3 ἤ 5 ... ἀλλαγαί προσήμου καί ἑπομένως τό τελικόν γινόμενον (+1)αβγ...τ θά ἔχῃ ἀντίθετον πρόσημον τοῦ (+1) δηλ. τό –.

Κανών. « Τό γινόμενον πολλῶν παραγόντων εὑρίσκεται ἄν σχηματίσωμεν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων καί προτάξωμεν εἰς αὐτό τό πρόσημον + ἤ τό – καθ'ὅσον τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον (ἤ μηδέν) ἤ περιττόν. Ἐάν εἷς παράγων ἰσοῦται μέ μηδέν καί τό γινόμενον ἰσοῦται μέ μηδέν ».

Θεώρημα ΙΙΙ. « Τό γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων δέν βλάπτεται ἐάν ἀλλάξῃ ἡ τάξις τῶν παραγόντων ».

Διότι τό σημεῖον τοῦ γινομένου δέν θ'ἀλλάξῃ, ὡς ἐξαρτώμενον μόνον ἐκ τοῦ πλήθους τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων. Κατ'ἀπόλυτον τιμήν ἐπίσης δέν θ'ἀλλάξῃ τό γινόμενον διότι αὕτη ἰσοῦται συμφώνως πρός τό θεώρημα Ι μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν, ὅπερ ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς (διότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαί εἶναι ἀριθμοί τῆς Ἀριθμητικῆς) δέν θ'ἀλλάξῃ διά τῆς ἀντιμεταθέσεως τῶν παραγόντων.

Θεώρημα ΙV. « Εἰς πᾶν γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν ὁσουσδήποτε παράγοντας διά τοῦ γινομένου αὐτῶν ἤ ἕνα παράγοντα δι'ἄλλων ἐχόντων αὐτόν ὡς γινόμενον ».

Θά εἶναι π.χ.: αβγδε = α(βγ)δε

Διότι αβγδε = βγ αδε = α(βγ)δε. Καί ἀντιστρόφως.

Θεώρημα V. « Γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπί ἀριθμόν ἐάν εἷς τῶν παραγόντων του πολ/σθῇ ἐπί τόν ἀριθμόν τοῦτον ».

Θά δείξωμεν ὅτι: $(\alpha\beta\gamma\delta)\cdot\lambda = \alpha(\beta\lambda)\cdot\gamma\delta$.

Διότι $(\alpha\beta\gamma\delta)\,\lambda = \alpha\beta\gamma\delta\lambda = \alpha(\beta\lambda)\,\gamma\delta$ κατά τό προήγουμενον.

Θεώρημα VI. « Ὁ προσεταιριστικός νόμος ἰσχύει κατά τόν πολ/σμόν πραγματικῶν ἀριθμῶν »

Θά ἰσχύη δηλ. (ἴδε παράγρ. 2) ὅτι $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

Τοῦτο εἶναι συνέπεια τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

Θεώρημα VII. « Ὁ ἐπιμεριστικός νόμος ἰσχύει, δηλ.

$(\alpha + \beta)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda$ ». (ἴδε παράγρ. 2)

Ἐφ' ὅσον ὁ ἐπιμεριστικός νόμος ἰσχύει διά δύο προσθετέους $\alpha + \beta$ θά ἰσχύη καί διά τρεῖς δηλ. $(\alpha + \beta + \gamma)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda$. Πράγματι

$$(\alpha + \beta + \gamma)\lambda = [(\alpha + \beta) + \gamma]\lambda = (\alpha + \beta)\lambda + \gamma\lambda = \alpha\lambda+\beta\lambda+\gamma\lambda$$

Ἐκ τῶν τριῶν μεταβαίνομεν εἰς τούς τέσσαρας:

$$(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\lambda = [(\alpha + \beta + \gamma) + \delta]\lambda =$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma)\lambda + \delta\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda + \delta\lambda \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται καί ὁ κανών: "Ἄθροισμα πολ/ζεται ἐπί ἄθροισμα ἐάν κάθε ὅρος τοῦ ἑνός πολλαπλασιασθῇ ἐπί ὅλους τούς ὅρους τοῦ ἄλλου καί προστεθοῦν τά προκύπτοντα μερικά γινόμενα.

Π.χ. $(\alpha + \beta + \gamma)(\delta + \varepsilon) = \alpha(\delta + \varepsilon) + \beta(\delta + \varepsilon) +$
$+ \gamma(\delta + \varepsilon) = \alpha\delta + \alpha\varepsilon + \beta\delta + \beta\varepsilon + \gamma\delta + \gamma\varepsilon$

(ὅπου ἐθεωρήθη κατ' ἀρχάς τό $(\delta + \varepsilon)$ ὡς εἷς ἀριθμός καί ἔγινε ἐπανειλλημένη ἐφαρμογή τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου).

Ἀπόδειξις τοῦ Ἐπιμεριστικοῦ νόμου. Διά τήν εὐκολίαν τῆς ἀποδείξεως θά εἰσάγωμεν τό σύμβολον « σημ » (= σημεῖον) Διά τοῦ σημ(α) θά ἐννοοῦμεν τόν ἀριθμόν +1 ἄν ὁ α εἶναι θετικός καί τόν −1 ἄν ὁ α εἶναι ἀρνητικός καί τόν 0 ἄν ὁ α=0 Οὕτω π.χ.

$$\text{σημ}(-3) = -1\ ,\ \text{σημ}(+2) = +1\ ,\ \text{σημ}\{(+7)+(-8)\} = -1$$
$$\text{σημ}\{(+7)(-8)\} = -1\ ,\ \text{σημ}\{(+4)0\} = 0$$

Ὁ κανών τῶν σημείων ὁ δοθείς εἰς τήν παρ. 28α΄δίδει τήν ἰσότητα $\sigma\eta\mu(\alpha\beta) = \sigma\eta\mu(\alpha)\ \sigma\eta\mu(\beta)$.

Πρός ἀπόδειξιν, τώρα τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου:

(2) $$(\alpha+\beta)\lambda = \alpha\lambda + \beta\lambda$$

ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τά δύο μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος (2) ἔχουν τό ἴδιον πρόσημον καί την ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν. Πρός τοῦτο διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον Ἄς εἶναι οἱ α καί β ὁμόσημοι ἀριθμοί. Τότε

$$\sigma\eta\mu\{(\alpha+\beta)\lambda\} = [\sigma\eta\mu(\alpha+\beta)]\cdot[\sigma\eta\mu(\lambda)] = \sigma\eta\mu(\alpha)\ \sigma\eta\mu\lambda$$

$$\sigma\eta\mu(\alpha\lambda+\beta\lambda) = \sigma\eta\mu(\alpha\lambda) = \sigma\eta\mu(\alpha)\ \sigma\eta\mu(\lambda)$$

ὥστε τά δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν τό αὐτό σημεῖον (πρόσημον). Ἐξ ἄλλου ἄν $|\alpha| = A$, $|\beta| = B$, $|\lambda| = \Lambda$ θά ἔχωμεν:

$$|(\alpha+\beta)\lambda| = |\alpha+\beta|\cdot|\lambda| = (A+B)\Lambda = A\Lambda + B\Lambda$$

(διότι διά τούς ἀριθμούς τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχύει ὁ ἐπιμεριστικός νόμος:

$$(A+B)\Lambda = A\Lambda + B\Lambda)$$

Ἐπίσης ἐπειδή οἱ ἀριθμοί αλ καί βλ εἶναι ὁμόσημοι θά εἶναι:

$$|\alpha\lambda+\beta\lambda| = |\alpha\lambda| + |\beta\lambda| = A\Lambda + B\Lambda$$

Ὥστε τά δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν καί ἴσας ἀπολύτους τιμάς.

2ον Ἄς εἶναι οἱ α καί β ἑτερόσημοι. Ἔστω ἀκόμη ὅτι $A > B$ δηλ. ὁ α ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν ἤ ὁ β. Τότε θά εἶναι καί $A\Lambda > B\Lambda$ δηλ. ὁ αλ ἔχει μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν τῆς τοῦ βλ.

Τότε θά ἔχωμεν:

$$\sigma\eta\mu\{(\alpha+\beta)\lambda\} = \{\sigma\eta\mu(\alpha+\beta)\}\sigma\eta\mu(\lambda) = \sigma\eta\mu(\alpha)\ \sigma\eta\mu(\lambda)$$

$$\sigma\eta\mu(\alpha\lambda+\beta\lambda) = \sigma\eta\mu\alpha\lambda = \sigma\eta\mu(\alpha)\ \sigma\eta\mu(\lambda)$$

Ἐπίσης θά ἔχωμεν:

$$|(\alpha+\beta)\lambda| = |\alpha+\beta|\cdot|\lambda| = (A-B)\Lambda = A\Lambda - B\Lambda$$

(διότι ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς εἶναι γνωστόν ὅτι $(A-B)\Lambda = A\Lambda$). Ἐπειδή δέ οἱ αλ καί βλ εἶναι ἑτερόσημοι καί μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν ἔχει ὁ αλ θά εἶναι

$$|\alpha\lambda+\beta\lambda| = A\Lambda - B\Lambda$$

Ὥστε τα δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν καί ἴσας ἀπολύτους τιμάς.

3ον Οἱ α καί β εἶναι ἀντίθετοι: Τότε καί οἱ αλ καί βλ εἶναι ἀντίθετοι καί ἡ (2) προφανῶς ἰσχύει.

δ) Ἐφαρμογαί. i) Κατά τό τελευταῖον ἐκ τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων δυνάμεθα νά γράφωμεν

$$(3) \qquad \alpha\lambda + \beta\lambda + \gamma\lambda = \lambda(\alpha + \beta + \gamma)$$

Ἡ μετατροπή (3) λέγεται ἐ ξ α γ ω γ ή κ ο ι ν ο ῦ π α ρ ά γ ο ν τ ο ς ἐ κ τ ό ς π α ρ ε ν θ έ σ ε ω ς. Ὁ ἐκτός παρενθέσεως ἐξαχθείς κοινός παράγων εἶναι ὁ λ.

Διά τῆς ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος, ὡρισμένα ἀθροίσματα μετατρέπονται εἰς γινόμενα. Π.χ.

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \delta\beta + \delta\gamma = \alpha(\beta + \gamma) + \delta(\beta + \gamma) = (\beta + \gamma)(\alpha + \delta)$$

(Ἐνταῦθα ἐξήχθη κοινός παράγων ὁ $\beta + \gamma$).

ii) Δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν πολλούς ὁμοίους ὅρους διά τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν. Π.χ. τό ἄθροισμα $+ 5\alpha - 3\beta + 4\alpha + 4\beta - 7\alpha - 6\beta$ δύναται νά γραφῇ $+ 5\alpha + 9\alpha - 7\alpha - 3\beta + 4\beta - 6\beta = (+ 5 + 9 - 7)\alpha + (- 3 + 4 - 6)\beta = + 7\alpha - 5\beta$.

Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται ἀ ν α γ ω γ ή ὁ μ ο ί ω ν ὅ ρ ω ν. Ἐνταῦθα ὅμοιοι ὅροι εἶναι, οἱ 5α, 9α, -7α διαφέροντες δηλαδή μόνον κατά τόν ἀριθμητικόν συντελεστήν, ὅπως ἐπίσης καί οἱ -3β, 4β, -6β.

Διά τῆς ἀναγωγῆς ἁπλουστεύονται σημαντικῶς διάφοροι ἀλγεβρικαί ἐκφράσεις. Οὕτω π.χ. Τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα

$$+ 7\alpha + 2\left[+ 3\alpha - \left\{\alpha - (\beta + 2\alpha)\right\} - 4(\alpha - 2\beta)\right]$$

ἁπλουστεύεται ὅταν ἐξαλειφθοῦν πρῶτον αἱ παρενθέσεις (ἴδε § 27 ε', ἐφαρμογή I καί II) καί κατόπιν γίνῃ ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων. Τό ἀνωτέρω γράφεται διαδοχικῶς

$$\begin{aligned} & 7\alpha + 2\left[+ 3\alpha - \left\{\alpha - \beta - 2\alpha\right\} - 4\alpha + 8\beta\right] \\ = \; & 7\alpha + 2\left[+ 3\alpha - \alpha + \beta + 2\alpha - 4\alpha + 8\beta\right] \\ = \; & 7\alpha + 6\alpha - 2\alpha + 2\beta + 4\alpha - 8\alpha + 16\beta \end{aligned}$$

$= 7\alpha + 18\beta$

Ἔστω ἐπίσης τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα

$+5 - 6\alpha + 3\beta - xy\omega + 2\alpha - 3 + 7xy\omega - 8\beta + \alpha + 4 - 2\beta$

Τοῦτο γράφεται

$$(+5 - 3 + 4) + (-6\alpha + 2\alpha + \alpha) + (3\beta - 8\beta - 2\beta) + \\ + (-xy\omega + 7xy\omega) = 6 - 3\alpha - 7\beta + 6xy\omega$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

55. Ὑπολογίσατε τά γινόμενα: $(-2)(+4)(+3)(-7)$, $(+\frac{2}{3})(-5)(-\frac{3}{8})(-2)(+\frac{3}{4})$, $(-\frac{2}{3})(-\frac{3}{7})(-\frac{1}{8})$, $(-9)(-\frac{5}{36})(-0,6)$

$(-2 + 4 - 7)(-5)$ $\quad(+3 - 6 + 8 - 2)(+7)$

$(-2 + \frac{7}{4} - 1)\left[(+\frac{1}{2} - \frac{1}{3})(+\frac{2}{5} - 1) - (-3)(+\frac{5}{3} - \frac{9}{4})(+2 + \frac{6}{7})\right]$

56. Ἐκτελέσατε ἐπιμεριστικῶς τούς πολ/σμούς $3x(2 - y)$, $(x - y)(2\alpha - 3\beta)$, $-6(-3\alpha)(\beta - 2)$, $(6\alpha - 2\beta + 4)(5 - \gamma)$. Δεί- ξατε ἐπίσης τήν ἰσότητα: $|xy\omega| = |3x - 5x|\cdot|y - \frac{y}{2}|\cdot|10\omega - 11\omega|$

57. Ἐξαλείψατε παρενθέσεις καί ἐκτελέσατε ἀναγωγάς ὁμοίων ὅρων εἰς τά ἀλγ. ἀθροίσματα:

α) $4\alpha - [2\alpha + \beta - (-\alpha + \beta - \gamma) + 2\gamma]$

β) $2x - (3x - 2y) - [-2x + y - (2y - x)]$

γ) $7\alpha + [-\alpha - (-5\alpha + 4x) + 3x] - (6\alpha - x)$

δ) $(\alpha + \beta - \gamma) - (\alpha - \beta + \gamma) - [(\beta - \gamma + \alpha) - (\beta + \gamma - \alpha)]$

ε) $3(x - y + 8) - 4(x - 5y + 3) + 6(x - 2y - 1)$

58. Ἐξάγετε κοινούς παράγοντας καί τρέψατε εἰς γινόμενα

α) $\alpha x - \beta x + \gamma x$ β) $2\gamma k + 3\gamma - 6k - 9$ γ) $4x - 4y - \alpha x + \alpha y$

32. **Δυνάμεις**. Τό γινόμενον ν παραγόντων ἴσων πρός α καλεῖται νυοστή δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ α καί παρίσταται διά τοῦ συμβόλου α^ν (α εἰς τήν ν).

Οὕτω ἔχομεν ἐξ ὁρισμοῦ:

$\alpha\cdot\alpha = \alpha^2$, $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^3$, $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^4$ κ.ο.κ.

Εἰς τό σύμβολον α^ν, τό α καλεῖται β ά σ ι ς καί ὁ ν ἐ κ θ έ τ η ς τῆς δυνάμεως.

Τό σύμβολον α^1 λέγεται κατ'ἐπέκτασιν π ρ ώ τ η δ ύ ν α μ ι ς τοῦ α (ἐκθέτης = 1) καί εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ $\alpha^1 = \alpha$.

Πρός τό παρόν θεωροῦμεν δυνάμεις α^{ν} μέ ἐκθέτην ν, φυσικόν ἀριθμόν, 1,2,3,...

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. i) «Πᾶσα δύναμις θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετική».

Διότι τό γινόμενον θετικῶν παραγόντων εἶναι θετικόν.

ii) «Δύναμις ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ μέ ἄρτιον ἐκθέτην εἶναι θετική, μέ περιττόν δέ ἐκθέτην, ἀρνητική».

Διότι τό σημεῖον ἑνός γινομένου εἶναι τό + ἤ τό − καθ' ὅσον τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι ἄρτιον ἤ περιττόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(-1)^{\nu} = +1$ ὅταν ν ἄρτιος

$(-1)^{\nu} = -1$ ὅταν ν περιττός

$(-2)^5 = -2^5 = -32$ $\qquad (-\frac{1}{3})^4 = (\frac{1}{3})^4 = \frac{1}{81}$

iii) «Τό γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσα ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν».

Δηλ. $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$. Διότι τό $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}$ εἶναι γινόμενον τοῦ $\underbrace{\alpha\,\alpha\,\alpha\ldots\alpha}_{\mu\ \text{φοράς}}$ ἐπί τό $\underbrace{\alpha\,\alpha\,\ldots\,\alpha}_{\nu\ \text{φοράς}}$. Συνεπῶς εἶναι γινόμενον μ+ν παραγόντων ἴσων πρός α καί ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοῦται μέ $\alpha^{\mu+\nu}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\alpha^3\cdot\alpha^7 = \alpha^{10}$, $\alpha^2\cdot\alpha^5\cdot\alpha^8 = \alpha^{15}$, $(x^2y^5)(x^3y^2) = (x^2x^3)(y^5y^2) = x^5y^7$

iv) «Δύναμις ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν ἄν πολλαπλασιάσωμεν τόν ἐκθέτην τῆς δυνάμεως ἐπί τόν νέον ἐκθέτην».

Δηλαδή $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ Διότι

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \underbrace{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\mu}\ldots\,\alpha^{\mu}}_{\nu\ \text{φοράς}}$$

ἄρα ἡ $(\alpha^{\mu})^{\nu}$ εἶναι γινόμενον εἰς $\underbrace{\mu+\mu+\mu+\ldots+\mu}_{\nu\ \text{φοράς}} = \mu\nu$ παραγόντων ἴσων πρός α. Ἄρα σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν ἡ $(\alpha^{\mu})^{\nu}$ θά ἰσοῦται μέ $\alpha^{\mu\nu}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(\alpha^3)^2 = \alpha^6$, $(x^3)^5 = x^{15}$, $\beta^4 = (\beta^2)^2$

ν) «Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἄν ἕκαστος τῶν παραγόντων ὑψωθῇ εἰς τήν δύναμιν ταύτην».

Δηλ. $(\alpha\beta\gamma)^\nu = \alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu$. Διότι $(\alpha\beta\gamma)^\nu = \underbrace{(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\gamma)\ldots(\alpha\beta\gamma)}_{\nu \text{ φοράς}}$ $= (\underbrace{\alpha\alpha\alpha\ldots\alpha}_{\nu})(\underbrace{\beta\beta\ldots\beta}_{\nu})(\underbrace{\gamma\gamma\ldots\gamma}_{\nu}) = \alpha^\nu\beta^\nu\gamma^\nu$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(-2\delta)^5 = (-2)^5\delta^5 = -2^5\delta^5 = -32\delta^5$

$(3x^2y^3)^4 = 3^4\cdot(x^2)^4\cdot(y^3)^4 = 81x^8y^{12}$

Αἱ λοιπαί δύο ἰδιότητες τῶν δυνάμεων ἐκτίθενται εἰς τή παράγρ. 82

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

59. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ δυνάμεις: $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-1)^7$, (-1) $(-\frac{1}{0,5})^3$, $(-0,3)^3$, $|(-1)^{2\nu+5}|$ ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

60. Νά εὑρεθοῦν τά γινόμενα: x^5x^2, x^3x, $(\alpha x^2)(\alpha^4x)$, $(2\alpha^3\beta^2\gamma)(3\alpha^2\beta\gamma^3)$, $(3\alpha^4\beta)(-4\alpha\beta^2\gamma)$, $(-\frac{1}{2}x^3yz)(\frac{1}{3}x^2yz^3)$, $(\frac{3}{4}x^4y^2z^3)(-\frac{1}{9}x^2z)$, $(-4xyz^2)(-\frac{3}{2}x^2yz)(\frac{2}{3}x^2y^3z)(-5xz)$.

61. Νά γίνουν αἱ ὑψώσεις εἰς δύναμιν: $(2\alpha^3\beta^2\gamma)^2$, $(-\frac{1}{3}x^2y^3z)^3$, $(-\alpha\beta^4\gamma)^4$

62. Νά δειχθῇ ὅτι $|\omega^\nu| = |\omega|^\nu$ ὅπου ν φυσικός

63. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$-(\frac{1}{0,5})^2 + (\frac{1}{0,2})^3 - \left\{|5 - \sqrt{80}| + |16 - \sqrt{80}|\right\}^2$$

64. Ν'ἀπλουστευθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις δι'ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων:

α) $kx^2 - 3k^2x^2 + 6k^2x + 2x - 2kx^2 + 8 - 3x$

β) $2x^3y - 3x^4 + 4x^2y^2 - xy^3 + 7x^4 - 3x^3y + x^2y^2 - 5xy^3$

γ) $12 + 8y - 3y^2 + y^4 - 6y - 7 - 5y^2 + y^3 - 3y^4$

δ) $5\alpha^2\varphi - \varphi^3 + 4\alpha\varphi^2 + 2\alpha^3 + 3\varphi^3 - 2\alpha^2\varphi - 8\alpha\varphi^2 + \alpha^3$

33. Ἡ διαίρεσις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. α' Ὁρισμός. «Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ἔνθα $\beta \neq 0$ καλεῖται πηλῖκον τοῦ α (διαιρετέου) διά τοῦ β (διαιρέτου), ὁ ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό γινόμενον ἐπί β ἰσοῦται μέ τόν α»

Τό ἀνωτέρω πηλῖκον παρίσταται ὅπως εἰς τήν ἀριθμητικήν μέ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἤ α/β ἤ $\alpha:\beta$ ἡ δέ πρᾶξις καθ'ἥν εὑρίσκομεν τό πηλῖκον τοῦ α διά τοῦ β καλεῖται δ ι α ί ρ ε σ ι ς τοῦ α διά β.

β') Θεώρημα: «Τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διά β ἔνθα $\beta \neq 0$ ὑπάρχει, εἶναι ἕν μόνον ἔχει δέ ἀπόλυτον τιμήν ἴσην μέ τό πηλῖκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν α καί β καί πρόσημον τό + ἄν οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι ἤ τό − ἄν εἶναι ἑτερόσημοι. Ὅταν ὁ διαιρετέος α εἶναι ἴσος μέ μηδέν καί τό πηλῖκον α/β ἰσοῦται μέ μηδέν».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\frac{+8}{-2} = -4$ (Διότι $(-4)(-2) = +8$), $\frac{-20}{-5} = +4$ (Διότι $(+4)(-5) = -20$), $\frac{-5}{+3} = -\frac{5}{3}$ (Διότι $(-\frac{5}{3})(+3) = -(\frac{5}{3}\cdot 3) = -5$), $\frac{0}{+7} = 0$ (Διότι $(+7)\cdot 0 = 0$)

Ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος: Ἔστω x ἀριθμός τοιοῦτος ὥστε $|x| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ καί σημ(x) = σημ(α) σημ(β).

Θά δείξωμεν ὅτι ἰσχύει:

$$x\beta = \alpha \tag{1}$$

Ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι τά δύο μέλη τῆς (1) ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόλυτον τιμήν καί τό ἴδιο πρόσημον.

Πράγματι:

$$|x\beta| = |x|\cdot|\beta| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}\cdot|\beta| = |\alpha|$$

(Σύμφωνα μέ τήν Ἀριθμητικήν) καί

$$\text{σημ}(x\beta) = \{\text{σημ}(x)\}\cdot\{\text{σημ}(\beta)\} = \{\text{σημ}(\alpha)\}\cdot\{\text{σημ}(\beta)\}\cdot\{\text{σημ}(\beta)\} = \text{σημ}(\alpha)$$

Ὥστε ἡ (1) ἀληθεύει καί συνεπῶς ὁ x εἶναι τό πηλῖκον τοῦ α διά β.

Ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλο πηλῖκον x' θά εἴχομεν $x'\beta = \alpha$ ἄρα $x'\beta = x\beta$ ἤ $x'\beta - x\beta = 0$ ἤ $\beta(x' - x) = 0$ καί ἐπειδή $\beta \neq 0$ θά εἶναι κατ'ἀνάγκην $x' - x = 0$ δηλ. $x' = x$

Ὥστε τό πηλῖκον ὑπάρχει καί εἶναι ἕν μόνον, προσδιορίζεται δέ σύμφωνα μέ τό ἀνωτέρω θεώρημα.

Πόρισμα: «Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ το πηλῖκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν

Δηλ. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$. Τοῦτο συνάγεται ἐμέσως ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

γ) Ἡ διαίρεσις διά τοῦ μηδενός. Εἰς τόν ὁρισμόν τοῦ πηλίκου α/β καθώς καί εἰς τό ἀνωτέρω θεώρημα τοῦ ἐδαφίου β) ὑπεθέσαμεν ὅτι ὁ διαιρέτης β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός. Καί τοῦτο διότι εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ὁ διαιρέτης β εἶναι μηδέν τό πηλῖκον α/β εἶναι ἤ ἀ ν ύ π α ρ κ τ ο ν ἤ ἀ ό ρ ι σ τ ο ν.

Πράγματι ἄν $\alpha \neq 0$ καί $\beta = 0$ τό πηλῖκον θά ἔπρεπε νά εἶναι ἀριθμός x τοιοῦτος ὥστε $x \cdot \beta = \alpha$· δηλ. ὁ x θά ἔπρεπε πολλαπλασιαζόμενος ἐπί μηδέν νά δίδη γινόμενον διάφορον τοῦ μηδενός. Τοιοῦτος ὅμως ἀριθμός δ έ ν ὑ π ά ρ χ ε ι σύμφωνα μέ τά γνωστά ἐκ τοῦ πολ/σμοῦ (**παράγρ.31**). Ὥστε εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν δέν ὑπάρχει πηλῖκον α/β δηλ. ἡ παράστασις $\frac{\alpha}{0}$ ὅταν $\alpha \neq 0$ δ έ ν ἔ χ ε ι ν ό η μ α.

Ἐάν πάλιν εἶναι καί ὁ διαιρετέος $\alpha = 0$ καί ὁ διαιρέτης $\beta = 0$ τότε ὡς πηλῖκον τοῦ α διά β ἠμπορεῖ νά ληφθῆ π ᾶ ς ἀ ρ ι θ μ ό ς. Διότι πᾶς πραγματικός ἀριθμός πολλαπλασιαζόμενος ἐπί μηδέν (δηλ. ἐπί τόν διαιρέτην) δίδει γινόμενον μηδέν (δηλ. τόν διαιρετέον). Συνεπῶς τό πηλῖκον εἶναι κάθε ἀριθμός, δηλαδή ἀ ό ρ ι σ τ ο ν. Ἐξ αὐτοῦ ἡ ἀριθμητική παράστασις $\frac{0}{0}$ λέγεται ἀ π ρ ο σ δ ι ό ρ ι σ τ ο ς μ ο ρ φ ή.

Εἰς τά ἑπόμενα ὁσάκις γράφομεν τό σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ θά ὑποθέτωμεν ὅτι $\beta \neq 0$ διότι ἄλλως τό σύμβολον τοῦτο δέν ἐκφράζει ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν.

δ) Ἀντίστροφοι ἀριθμοί. Δύο ἀριθμοί α καί α' λέγονται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ι ὅταν ἔχουν γινόμενον ἴσον μέ +1. Δηλ. $\alpha\alpha' = +1$. Συνεπῶς $\alpha' = \frac{+1}{\alpha}$ δηλ. ὁ ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ς τ ο ῦ α εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{+1}{\alpha}$

Ἡ διαίρεσις τοῦ α διά τοῦ β ἰσοδυναμεῖ μέ τόν πολ/σμόν τοῦ α ἐπί τόν ἀντίστροφον τοῦ β. Πράγματι τό γινόμενον $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$ πολ/μενον ἐπί β δίδει τόν α

$$\left(\left(\alpha\cdot\frac{1}{\beta}\right)\beta = \alpha\left(\frac{1}{\beta}\cdot\beta\right) = \alpha\cdot 1 = \alpha\right)$$

Ὥστε τό $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$ ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διά τοῦ β δηλ. μέ $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι «Ἀλγεβρικόν ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἄν ἕκαστος τῶν ὅρων του διαιρεθῇ διά τοῦ ἀριθμοῦ». Π.χ.

$$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta}$$

(Διότι $$\frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta} = (\alpha + \alpha' + \alpha'')\cdot\frac{1}{\beta} =$$

$$= \alpha\cdot\frac{1}{\beta} + \alpha'\cdot\frac{1}{\beta} + \alpha''\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta}\,)$$

34. **Ἀλγεβρικά κλάσματα καί ἰδιότητες αὐτῶν.** Τό σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$ τό ἐκφρᾶζον τό πηλίκον δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β καλεῖται ἀ λ γ ε β ρ ι κ ό ν κ λ ά σ μ α. Ὁ α καλεῖται ἀριθμητής καί ὁ β παρονομαστής. Δύο ἀλγεβρικά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ λέγονται ἴ σ α ὅταν τό πηλῖκον τοῦ α διά β εἶναι ἴσον μέ τό πηλῖκον τοῦ γ διά δ.

Πᾶς πραγματικός ἀριθμός δύναται νά θεωρηθῇ ὡς κλάσμα μέ παρονομαστήν τήν μονάδα. Πράγματι, $\frac{\alpha}{+1} = \alpha$.

Ἐπίσης πᾶν κλᾶσμα τοῦ ὁποίου οἱ δύο ὅροι (δηλ. ἀριθμητής καί παρ/στής) εἶναι ἴσοι, ἰσοῦται μέ +1 δηλ. $\frac{\alpha}{\alpha} = 1$ διότι $\alpha\cdot 1 = \alpha$. Τέλος παρατηροῦμεν ὅτι πᾶν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ α ἐπί τόν ἀντίστροφον τοῦ β δηλ. $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha\cdot\frac{1}{\beta}$. Διότι ὡς εἴδομεν εἰς τήν § 33 δ', τό γινόμενον

$\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τοῦ α διά τοῦ β δηλ. μέ τό κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἐξ αὐτοῦ δέ προκύπτει καί ὁ κ α ν ώ ν τ ῆ ς π ρ ο σ θ έ σ ε ω ς ὁ μ ω ν ύ μ ω ν ἀ λ γ ε β ρ ι κ ῶ ν κ λ α σ μ ά τ ω ν : $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta}$. Διότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha'}{\beta} + \frac{\alpha''}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha' \cdot \frac{1}{\beta} + \alpha'' \cdot \frac{1}{\beta} = (\alpha + \alpha' + \alpha'') \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \alpha' + \alpha''}{\beta}$$

Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων συμπίπτουν μέ τάς τῶν κλασμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς καί ἀποδεικνύονται ἐντελῶς ὁμοίως, βάσει τῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι δέ αἱ ἑπόμεναι:

i) «Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους ἑνός κλάσματος ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται».

Δηλ. ἄν $\gamma \neq 0$ τότε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}}$$

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\alpha/\beta = x$. Τότε $\alpha = \beta x$ καί συνεπῶς $\alpha\gamma = (\beta x)\gamma$ ἤ $\alpha\gamma = (\beta\gamma)x$, ἄρα $\alpha\gamma/\beta\gamma = x = \alpha/\beta$.

Πόρισμα: «Δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τά πρόσημα τῶν δύο ὅρων ἑνός κλάσματος χωρίς ἡ ἀξία του νά μεταβληθῆ».

Διότι ἡ ἀλλαγή προσήμου ἰσοδυναμεῖ μέ πολ/σμόν ἐπί -1.

Ἐφαρμογή 1η: Δυνάμεθα ν' ἁ π λ ο π ο ι ή σ ω μ ε ν ἀλγεβρικά κλάσματα. Π.χ.

$$\frac{-24}{-8} = \frac{+3}{+1}, \quad \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta\beta\gamma} = \frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{-10\alpha^2\beta}{-15\alpha\beta^2} = \frac{2\alpha}{3\beta}, \quad \frac{-8x^4y^{11}}{x^6y^3} = \frac{-8y^8}{x^2}$$

Ἐφαρμογή 2α : Δυνάμεθα νά καταστήσωμεν ὁ μ ώ ν υ μ α (δηλ. μέ τόν αὐτόν παρονομαστήν) ὁσαδήποτε κλάσματα ἀλγεβρικά. Οὕτω π.χ. τά κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha'}{\beta'}$, $\frac{\alpha''}{\beta''}$ μετατρέπονται ἀντιστοίχως είς τά

$$\frac{\alpha\beta'\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \quad \frac{\alpha'\beta\beta''}{\beta\beta'\beta''}, \quad \frac{\alpha''\beta\beta'}{\beta\beta'\beta''}$$

ἔχοντα τόν αὐτόν παρονομαστήν.

Κατά συνέπειαν, δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν τό ἄθροισμα ὁσωνδήποτε κλασμάτων μέ ἕν κλάσμα, ἀφοῦ προηγουμένως τά καταστήσωμεν ὁμώνυμα καί ἐφαρμόσωμεν τόν κανόνα τῆς προσθέσεως τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\frac{11+5\alpha}{5} - \frac{7-4\alpha}{2} + \frac{15+20\alpha}{-7} = \frac{11+5\alpha}{5} + \frac{4\alpha-7}{2} + \frac{15+20\alpha}{-7} =$$

$$= \frac{(11+5\alpha)\cdot 2\cdot(-7)}{5\cdot 2\cdot(-7)} + \frac{(4\alpha-7)\cdot 5\cdot(-7)}{2\cdot 5\cdot(-7)} + \frac{(15+20\alpha)\cdot 5\cdot 2}{(-7)\cdot 5\cdot 2} =$$

$$= \frac{(11+5\alpha)(-14) + (4\alpha-7)\cdot(-35) + (15+20\alpha)\cdot 10}{-70} =$$

$$= \frac{-154 - 70\alpha - 140\alpha + 245 + 150 + 200\alpha}{-70} =$$

$$= \frac{-154 + 245 + 150 - 70\alpha - 140\alpha + 200\alpha}{-70} =$$

$$= \frac{241 - 10\alpha}{-70} = \frac{10\alpha - 241}{70}$$

ii) « Τό γινόμενον δύο ἀλγεβρ. κλασμάτων ἰσοῦται μέ κλάσμα ἔχον ἀριθμητήν τό γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καί παρ/στήν τό γινόμενον τῶν παρ/στῶν ». Δηλαδή

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'}, \quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\gamma = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\beta}(-1) = \frac{-\alpha}{\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\frac{\alpha x}{\beta y}\cdot\frac{\beta\omega}{\gamma x}\cdot\frac{\gamma y}{\alpha\omega} = \frac{(\alpha x)(\beta\omega)(\gamma y)}{(\beta y)(\gamma x)(\alpha\omega)} = \frac{\alpha\beta\gamma x y\omega}{\beta\gamma\alpha y x\omega} = 1$$

$$\frac{-3\alpha^2\beta}{2\gamma\delta}\cdot\frac{-8\gamma^3\delta^2}{12\alpha\beta^2} = \frac{3\cdot 8\cdot\alpha^2\beta\gamma^3\delta^2}{2\cdot 12\gamma\delta\alpha\beta^2} = \frac{\alpha\gamma^2\delta}{\beta}$$

Ἀπόδειξις τῆς ii) . Ἔστω $\alpha/\beta = x$ καί $\alpha'/\beta' = x'$. Τότε $\alpha = \beta x$ καί $\alpha' = \beta' x'$. Διά πολ/σμοῦ κατά μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha\alpha' = (\beta x)(\beta' x') \quad \text{ἤ} \quad \alpha\alpha' = \beta\beta' \cdot x x'$$

"Αρα $\alpha\alpha'/\beta\beta' = xx' = \alpha/\alpha' \cdot \beta/\beta'$.

iii) «Διά νά διαιρέσωμεν ἀριθμόν διά κλάσματος πολλαπλασιάζομεν τόν ἀριθμόν ἐπί τό κλάσμα ἀνεστραμμένον».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}} = \alpha \cdot \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta}, \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}.$$

$$\frac{+1}{\frac{\alpha}{\beta}} = (+1) \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha}{\beta}}{\frac{\gamma}{+1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{+1}{\gamma} = \frac{\alpha}{\beta\gamma}$$

$$\frac{24\alpha^2\beta^3}{5x} : \frac{8\alpha\beta}{10x^4} = \frac{24\alpha^2\beta^3}{5x} \cdot \frac{10x^4}{8\alpha\beta} = \frac{24 \cdot 10 \cdot \alpha^2\beta^3 x^4}{8 \cdot 5 \cdot \alpha\beta x} = 6\alpha\beta^2 x^3$$

'Απόδεεξις τῆς iii) : "Εστω $\beta/\gamma = x$. Τότε $\beta = \gamma x$. Θέλομεν νά δειξωμεν ὅτι:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}}$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας γράφεται:

$$\frac{\alpha\gamma}{\gamma x} = \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{\frac{\beta}{\gamma}}$$

iv) « Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἐάν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του ὑψωθοῦν εἰς τήν δύναμιν ταύτην». Δηλαδή:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$$

'Απόδειξις τῆς **iv**) 'Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως καί μέ ἐφαρμογήν τῆς ii θά εἶναι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \underbrace{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdots \frac{\alpha}{\beta}}_{\nu \text{ φοράς}} = \frac{\alpha \cdot \alpha \cdots \alpha}{\beta \cdot \beta \cdots \beta} = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\left(\frac{2\alpha^3 x y^4}{3\alpha x^2 y^2}\right)^2 = \left(\frac{2\alpha^2 y^2}{3x}\right)^2 = \frac{(2\alpha^2 y^2)^2}{(3x)^2} =$$

$$= \frac{2^2 \cdot (\alpha^2)^2 \cdot (y^2)^2}{3^2 \cdot x^2} = \frac{4\alpha^4 y^4}{9x^2}$$

$$\left(\frac{x^3y}{\alpha\beta^2}\right)^3\left(\frac{\alpha^3\cdot\beta^2}{xy^2}\right)^2=\frac{(x^3y)^3}{(\alpha\beta^2)^3}\cdot\frac{(\alpha^3\beta^2)^2}{(xy^2)^2}=\frac{x^9y^3\alpha^6\beta^4}{\alpha^3\beta^6x^4y^4}=\frac{\alpha^3x^5}{\beta^2y}$$

ν) Τό πηλῖκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ:

1ον) Ἐάν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ παρονομαστοῦ, ἰσοῦται μέ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τήν (ἀριθμητικήν) διαφοράν τῶν ἐκθετῶν.

2ον) Ἐάν ὁ ἐκθέτης τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ παρονομαστοῦ, ἰσοῦται μέ τό ἀντίστροφον δυνάμεως τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἐχούσης ἐκθέτην τήν (ἀριθμητικήν) διαφοράν τῶν ἐκθετῶν.

3ον) Ἐάν οἱ ἐκθέται τοῦ ἀριθμητοῦ καί παρονομαστοῦ εἶναι ἴσοι, ἰσοῦται μέ 1.

Ἀπόδειξις: Ἔστω τό πηλίκον $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}$. Ἐάν ὁ φυσικός ἀριθμός μ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τότε θά ἔχωμεν $\mu=\nu+k$ ὅπου k φυσικός τις ἀριθμός καί συνεπῶς:

$$\alpha^\mu=\alpha^{\nu+k}=\alpha^\nu\cdot\alpha^k \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\frac{\alpha^\nu\cdot\alpha^k}{\alpha^\nu}=\alpha^k=\alpha^{\mu-\nu}$$

Ἐάν πάλιν ὁ ν ὑπερβαίνη τόν μ ἔστω κατά k θά ἔχωμεν κατά σειράν:

$$\nu=\mu+k \quad , \quad \alpha^\nu=\alpha^{\mu+k}=\alpha^\mu\cdot\alpha^k \quad , \quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu\cdot\alpha^k}=\frac{1}{\alpha^k}=\frac{1}{\alpha^{\nu-\mu}}$$

Τέλος ἄν $\mu=\nu$ τότε $\alpha^\mu=\alpha^\nu$ καί συνεπῶς $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=1$. ὅ.ἔ.δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$\frac{(+5)^8}{(+5)^6}=(+5)^2 \quad , \quad \frac{(-3)^2}{(-3)^3}=\frac{1}{-3}=-\frac{1}{3} \quad , \quad \frac{(-4)^3}{(-4)^3}=1$$

$$\frac{x^7}{x^3}=x^4 \qquad \frac{x^5y^2}{xy^4}=\frac{x^4}{y^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65. Ποῖοι ἀριθμοί ἰσοῦνται ἕκαστος μέ τόν ἀντίστροφόν του;

66. Ποῖος ἀριθμός δέν ἔχει ἀντίστροφον;

67. Εὕρετε τούς ἀντιστρόφους τῶν κάτωθι ἀριθμῶν:

$-\frac{3}{8}$, $-0{,}125$, $+0{,}001$, $\frac{-8x}{5y}$, $\frac{-6}{3x+y}$

68. Εὕρετε τό ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

$$\left(\frac{-\frac{8}{3}}{+\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}+\frac{+\frac{4}{6}-2}{+\frac{7}{6}}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{7}{10}+\frac{1}{3}}{+\frac{11}{15}}-\frac{+\frac{3}{4}+1}{+\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\right)=;$$

69. Ἐκτελέσατε τάς σημειουμένας πράξεις ἁπλοποιοῦντες τά τελικά ἐξαγόμενα:

$$\left(\frac{3x^2y^3}{2xy^4}\right)^2 : (-xy^3)^3 \;, \quad (-5x^2y)^3 : \left(\frac{10x^4y^2}{3\,xy}\right)^2$$

70. Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu$ εἶναι ν πραγματικοί ἀριθμοί $\neq 0$ εὕρετε το γινόμενον τῶν ν κλασμάτων:

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\cdot\frac{\alpha_2}{\alpha_3}\cdot\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\cdots\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}\,.$$

71. Ἐπαληθεύσατε ὅτι, ἄν $x=\frac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha}$, $y=\frac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta}$ θά ἔχωμεν: $\frac{x+\alpha}{y+\beta}=\frac{\beta}{\alpha}$

35. Ἀναλογίαι. Καλεῖται ἀ ν α λ ο γ ί α ἡ ἰσότης δύο ἀλγεβρικῶν κλασμάτων (ἤ λόγων), δηλ. ἡ σχέσις $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$. Εἰς τήν σχέσιν αὐτήν οἱ α καί δ καλοῦνται ἄ κ ρ ο ι ἐνῶ οἱ β καί δ, μ έ σ ο ι. Οὕτω π.χ. ἡ ἰσότης $\frac{8}{-2}=\frac{-12}{3}$ εἶναι μία ἀναλογία· ἐπίσης ἡ $\frac{\alpha}{\beta}=\gamma$, διότι γράφεται $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{1}$.

Ε ἰ ς κ ά θ ε ἀ ν α λ ο γ ί α ν ἰ σ χ ύ ο υ ν τ ά ἑ π ό μ ε ν α θ ε ω ρ ή μ α τ α (ὑπό τόν γενικόν περιορισμόν ὅτι πάντες οἱ παρονομασταί τόσον τῆς δοθείσης, ὅσον καί τῶν ἀποδεικτέων ἀναλογιῶν εἶναι $\neq 0$).

1) «Τό γινόμενον τῶν μέσων ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν ἄκρων».

Δηλαδή, ἄν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε $\beta\gamma=\alpha\delta$

Πράγματι, ἐκ τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἕπεται ἡ ἰσότης

$$\frac{\alpha}{\beta}\cdot(\beta\delta)=\frac{\gamma}{\delta}\cdot(\beta\delta) \quad ἤ \quad \frac{\alpha\beta\delta}{\beta}=\frac{\gamma\beta\delta}{\delta} \quad ἤ \quad \alpha\delta=\beta\gamma$$

Ἀντίστροφον. Ἐ ά ν $\beta\gamma=\alpha\delta$ τότε θά εἶναι καί

$$\frac{\beta\gamma}{\beta\delta}=\frac{\alpha\delta}{\beta\delta} \quad ἤ \quad \frac{\gamma}{\delta}=\frac{\alpha}{\beta}$$

δηλ. οἱ α,β,γ,δ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

Δηλ. πᾶσα ἰσότης τῆς μορφῆς $\alpha\beta = \gamma\delta$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta \neq 0)$ δύναται νά γραφῆ ὡς ἀναλογία.

ii) «Δυνάμεθα νά ἐναλλάξωμεν τούς μέσους ἤ τούς ἄκρους».

Δηλ., ἄν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε καί $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ καθώς καί $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Πρός ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος $\alpha\delta = \beta\gamma$ διά τοῦ γινομένου $\gamma\delta$ ἤ τοῦ $\beta\alpha$

iii) «Δυνάμεθα ν' ἀντιστρέψωμεν τά δύο μέλη τῆς ἀναλογίας».

Δηλ. ἄν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε καί $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$

Διότι ἐκ τῆς δοθείσης λαμβάνομεν $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$ (ἐναλλαγή τῶν ἄκρων). Καί ἐκ τῆς νέας, δι'ἐναλλαγῆς τῶν μέσων, λαμβάνομεν $\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}$ ἤτοι $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$.

iv) «Δυνάμεθα εἰς τούς ἀριθμητάς νά προσθέσωμεν ἤ ἀφαιρέσωμεν τούς παρονομαστάς ἤ εἰς τούς παρονομαστάς νά προσθέσωμεν ἤ ἀφαιρέσωμεν τούς ἀριθμητάς».

Δηλαδή, ἄν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε θά ἰσχύουν ἐπίσης αἱ ἀναλογίαι:

(1) $$\frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

(2) $$\frac{\alpha-\beta}{\beta} = \frac{\gamma-\delta}{\delta}$$

(3) $$\frac{\alpha}{\beta+\alpha} = \frac{\gamma}{\delta+\gamma}$$

(4) $$\frac{\alpha}{\beta-\alpha} = \frac{\gamma}{\delta-\gamma}$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (1) προσθέτομεν τό 1 εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς δοθείσης ὁπότε:

$$1 + \frac{\alpha}{\beta} = 1 + \frac{\gamma}{\delta} \quad ἤ \quad \frac{\beta}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\delta} + \frac{\gamma}{\delta} \quad ἤ \quad \frac{\alpha+\beta}{\beta} = \frac{\gamma+\delta}{\delta}$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (2) ἀφαιροῦμεν τήν μονάδα ἀπό τά δύο μέλη τῆς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$. Διά νά δειχθῆ ἡ (3) ἀντιστρέφομεν τήν δοθεῖσαν, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ὁπότε λαμβάνομεν

(5) $$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$$

Κατόπιν ἐφαρμόζομεν εἰς τήν (5) τήν ἰδιότητα (1) καί λ
βάνομεν:

$$\frac{\beta + \alpha}{\alpha} = \frac{\delta + \gamma}{\gamma}$$

Ἀντιστρέφομεν, τέλος τήν τελευταίαν ταύτην καί λαμβάνο
τήν (3).

Ἀναλόγως ἀποδεικνύεται καί ἡ (4).

ν) «Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε καί $\frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta}$».

Πρός ἀπόδειξιν, διαιροῦμεν κατά μέλη τάς (1) καί (2).

Ὁρισμοί: Σ υ ν ε χ ή ς ἀ ν α λ ο γ ί α καλεῖται μία
ρά ἰσοτήτων μεταξύ κλασμάτων τοιούτων ὥστε ὁ παρ/στής ἑκάσ
νά ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμητήν τοῦ ἑπομένου. Π.χ.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

Ἐάν μία (συνεχής) ἀναλογία εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ τότ
ὁ β καλεῖται μ έ σ ο ς ἀ ν ά λ ο γ ο ς τῶν α καί γ. Θά ε
ναι δέ τότε, (ἰδιότης i).

(6) $$\beta^2 = \alpha\gamma$$

Ἐκ τῆς (6) ἕπεται ὅτι ὁ μέσος ἀνάλογος δύο δοθέντων ἀρ
μῶν εἶναι ἀριθμός τοῦ ὁποίου τό τετράγωνον ἰσοῦται πρός τό
νόμενον τῶν δύο θοθέντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : Ὁ 6 εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν 4 καί 9 διότ
$6^2 = 4 \cdot 9$ ἤ διότι $4/6 = 6/9$. Καί ὁ -6 εἶναι ἐπίσης μέσος ἀν
λογος τῶν 4 καί 9.

Μία ἄλλη ὀνομασία τοῦ μέσου ἀναλόγου εἶναι «μ έ σ ο ς
γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ό ς».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

72. Εἰς πᾶσαν ἀναλογιαν, ἕκαστος μέσος ἰσοῦται μέ τό γινόμ

νον τῶν δύο ἄκρων διά τοῦ ἄλλου μέσου· ἕκαστος ἄκρος ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν δύο μέσων διά τοῦ ἄλλου ἄκρου. Ἐφαρμόσατε τοῦτο πρός ἄμεσον εὕρεσιν τοῦ x ἐκ τῆς

$$\frac{20}{x} = \frac{5}{3} \quad \text{ἤ τῆς} \quad \frac{20}{5} = \frac{12}{x}$$

73. Βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν δείξατε ὅτι ἄν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε θά εἶναι καί:

$$\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta} = \frac{\beta}{\alpha}\ , \quad (\alpha+\beta)(\gamma-\delta) = (\alpha-\beta)(\gamma+\delta)\ ,$$

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma^2}\ , \quad \frac{2\alpha-4\beta}{5\beta} = \frac{2\gamma-4\delta}{5\delta}$$

74. Ἐάν $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος

$$\frac{7x-4y}{3x+y} \quad \text{καθώς καί τοῦ} \quad \frac{3xy-y^2}{x^2+y^2}$$

75. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε θά εἶναι καί

$$\frac{\pi\alpha^2+k\beta^2}{\pi\alpha^2-k\beta^2} = \frac{\pi\gamma^2+k\delta^2}{\pi\gamma^2-k\delta^2}$$

ὅπου π, k τυχόντες καί $(\pi\alpha^2-k\beta^2)(\pi\gamma^2-k\delta^2) \neq 0$

76. Ἐάν ὁ β εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν α καί γ δείξατε ὅτι:

$$\frac{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}} = \beta^4$$

77. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ νά δειχθῇ ἡ ἰσότης $\alpha+\delta = \beta+\gamma+\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{\alpha}$

78. Ἐάν οἱ α,β,γ,δ εἶναι σύμμετροι, ὁ x ἀσύμμετρος καί ὁ ἀριθμός

$$\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$$

ἰσοῦται πρός σύμμετρον ἀριθμόν σ, δείξατε ὅτι οἱ α,β,γ,δ ἀποτελοῦν ἀναλογίαν (ἴδε παράγρ. 20).

79. Χρησιμοποιοῦντες ἰδιότητας τῶν ἀναλογιῶν δείξατε ὅτι ἐάν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$(2\mu\alpha+6\mu\beta+3\nu\gamma+9\nu\delta)(2\mu\alpha-6\mu\beta-3\nu\gamma+9\nu\delta) =$$
$$= (2\mu\alpha-6\mu\beta+3\nu\gamma-9\nu\delta)(2\mu\alpha+6\mu\beta-3\nu\gamma-9\nu\delta)$$

ὅπου $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$ τότε οἱ α,β,γ,δ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

36. Μία ἰδιότης τῶν ἴσων κλασμάτων: Θεώρημα: "Ἐάν ὁσα-

δήποτε ἀλγεβρικά κλάσματα εἶναι ἴσα τότε τό κλάσμα τό ἔχον ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἴσων κλασμάτων καί παρονομαστήν τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἴσον πρός τά κλάσματα ταῦτα».

Φυσικά τό ἄθροισμα τῶν παρ/στῶν ὑποτίθεται $\neq 0$.

'Απόδειξις: Ἔστωσαν π.χ. τά ἴσα κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$. παραστήσωμεν μέ λ τήν κοινήν τιμήν τῶν ἴσων τούτων κλασμάτ δηλ. λ θά εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ α διά β ἀλλ καί τοῦ α΄ διά β΄ κ.ο.κ. Κατά τόν ὁρισμόν τῆς διαιρέσεως ϑ ἔχωμεν λοιπόν $\alpha=\beta\lambda$, $\alpha'=\beta'\lambda$, $\alpha''=\beta''\lambda$ καί διά προσθέσεω κατά μέλη τῶν ἰσοτήτων τούτων:

$$\alpha+\alpha'+\alpha''=\beta\lambda+\beta'\lambda+\beta''\lambda \quad \text{ἤ} \quad \alpha+\alpha'+\alpha''=(\beta+\beta'+\beta'')$$

Τό τελευταῖον τοῦτο δεικνύει ὅτι τό λ εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\alpha+\alpha'+\alpha''$ διά τοῦ $\beta+\beta'+\beta''$ δηλαδή ὅτ

$$\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\beta+\beta'+\beta''}=\lambda=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. $\frac{-1}{2}=\frac{2}{-4}=\frac{-8}{16}=\frac{3}{-6}=\frac{-1+2-8+3}{2-4+16-6}=\frac{-4}{8}$

2. 'Εάν $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}$ τότε καί $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\delta}=\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha-\beta+\alpha+\beta}{\gamma-\delta+\gamma+\delta}$

Παρατήρησις 1η. Ἄν τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν εἶνα ἴσον μέ μηδέν, τότε ἡ ἀνωτέρω ἰσότης $\alpha+\alpha'+\alpha''=\lambda(\beta+\beta'+$ δεικνύει ὅτι καί τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν ἴσων κλασμάτων θά εἶνα ἐπίσης μηδέν.

Πόρισμα: «'Εάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\lambda$ τότε καί $\frac{k\alpha+\lambda\alpha'+\mu\alpha''}{k\beta+\lambda\beta'+\mu\beta''}$ $=\lambda$ ὅπου k,λ,μ τυχόντες ἀριθμοί πάντες δέ οἱ παρ/σταί $\neq 0$

Διότι πρίν προσθέσωμεν τους ἀριθμητάς καί τούς παρ/στ δυνάμεθα προηγουμενως νά πολ/σωμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τῶ ἴσων κλασμάτων ἐπί τόν αὐτόν, τυχόντα ἀριθμόν $\neq 0$. Οὕτω θά μεν κατά σειράν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}=\frac{k\alpha}{k\beta}=\frac{\lambda\alpha'}{\lambda\beta'}=\frac{\mu\alpha''}{\mu\beta''}=\frac{k\alpha+\lambda\alpha'+\mu\alpha''}{k\beta+\lambda\beta'+\mu\beta''}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 'Εάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}=\frac{\alpha''}{\beta''}$ τότε καί τά κλάσματα:

$$\frac{\alpha-\alpha'-\alpha''}{\beta-\beta'-\beta''}\ ,\quad \frac{\alpha-\alpha'+\alpha''}{\beta-\beta'+\beta''}\ ,\quad \frac{\alpha+\alpha'-\alpha''}{\beta+\beta'-\beta''}$$

εἶναι ὅλα ἴσα πρός τά ἀρχικά.

Διότι δυνάμεθα νά λάβωμεν $k = 1$, $\lambda = -1$, $\mu = -1$ κ.τ.λ.

4. 'Εάν $\frac{x+2}{x+3}=\frac{x-1}{x-7}$ τότε $\frac{x+2}{x+3}=\frac{x+2-x+1}{x+3-x+7}=\frac{3}{10}$

5. 'Εάν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{x^3+y^3+z^3}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}=\frac{(x+y+z)^3}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}$

'Απόδειξις: Θά ἔχωμεν: $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{x+y+z}{\alpha+\beta+\gamma}$ (1)

'Επίσης καί οἱ κύβοι τῶν ἴσων κλασμάτων θά εἶναι ἴσοι συνεπῶς

$$\frac{x^3}{\alpha^3}=\frac{y^3}{\beta^3}=\frac{z^3}{\gamma^3}=\frac{x^3+y^3+z^3}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}$$

Ἔχομεν λοιπόν (λαμβάνοντες ὑπ'ὄψιν καί τήν (1)):

$$\frac{x^3+y^3+z^3}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}=\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3=\left(\frac{x+y+z}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^3=\frac{(x+y+z)^3}{(\alpha+\beta+\gamma)^3}$$

Παρατήρησις 2α: Διά τῆς μεθόδου δι'ἧς ἀπεδείξαμεν τό θεώρημα τῶν ἴσων κλασμάτων δυνάμεθα ν'ἀποδείξωμεν καί διαφόρους ἄλλας σχέσεις ἀπορρεούσας ἀπό τήν ἰσότητα δεδομένων κλασμάτων:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 5.«'Εάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ νά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{\alpha^3\beta+2\gamma^2\varepsilon-3\alpha\varepsilon^2\zeta}{\beta^4+2\delta^2\zeta-3\beta\zeta^3}=\frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$$ ».

Λύσις: Παριστάνομεν τήν κοινήν τιμήν τῶν ἴσων κλασμάτων μέ λ, δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\lambda$ ὁπότε θά εἶναι $\alpha=\beta\lambda$, $\gamma=\delta\lambda$ $\varepsilon=\zeta\lambda$.

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος τά $\alpha, \gamma, \varepsilon$ διά τῶν ἴσων των, $\beta\lambda$, $\delta\lambda$, ζk ἀντιστοίχως ὁ-πότε τοῦτο γράφεται διαδοχικῶς:

$$\frac{(\beta\lambda)^3\beta + 2(\delta\lambda)^2(\zeta\lambda) - 3(\beta\lambda)(\zeta\lambda)^2\zeta}{\beta^4 + 2\delta^2\zeta - 3\beta\zeta^3} =$$

$$= \frac{\beta^3\lambda^3\beta + 2\delta^2\lambda^2\zeta\lambda - 3\beta\lambda\zeta^2\lambda^2\zeta}{\beta^4 + 2\delta^2\zeta - 3\beta\zeta^3} = \frac{\beta^4\lambda^3 + 2\delta^2\zeta\cdot\lambda^3 - 3\beta\zeta^3\lambda^3}{\beta^4 + 2\delta^2\zeta - 3\beta\zeta^3} =$$

$$= \frac{\lambda^3(\beta^4 + 2\delta^2\zeta - 3\beta\zeta^3)}{\beta^4 + 2\delta^2\zeta - 3\beta\zeta^3} = \lambda^3 = \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha\gamma\varepsilon}{\beta\delta\zeta}$$

δηλ. ἰσοῦται μέ τό δεύτερον μέλος.

6. «Ἐάν $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x^2 + \alpha^2}{x + \alpha} + \frac{y^2 + \beta^2}{y + \beta} + \frac{z^2 + \gamma^2}{z + \gamma} = \frac{(x + y + z)^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2}{(x + y + z) + (\alpha + \beta + \gamma)}$$ ».

Λύσις: Θέτομεν πάλιν, $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \lambda$ ὅτε $x = \alpha\lambda$, $y = \beta\lambda$, $z = \gamma\lambda$ καί ἀντικαθιστῶμεν τά x, y, z εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ὁπότε τοῦτο γίνεται:

$$\frac{\alpha^2\lambda^2 + \alpha^2}{\alpha\lambda + \alpha} + \frac{\beta^2\lambda^2 + \beta^2}{\beta\lambda + \beta} + \frac{\gamma^2\lambda^2 + \gamma^2}{\gamma\lambda + \gamma} = \frac{\alpha^2(\lambda^2 + 1)}{\alpha(\lambda + 1)} + \frac{\beta^2(\lambda^2 + 1)}{\beta(\lambda + 1)} + \frac{\gamma^2(\lambda^2 + 1)}{\gamma(\lambda + 1)} =$$

$$= \frac{\alpha(\lambda^2 + 1)}{\lambda + 1} + \frac{\beta(\lambda^2 + 1)}{\lambda + 1} + \frac{\gamma(\lambda^2 + 1)}{\lambda + 1} = \frac{\alpha\lambda^2 + \alpha + \beta\lambda^2 + \beta + \gamma\lambda^2 + \gamma}{\lambda + 1} =$$

$$= \frac{\lambda^2(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)}{\lambda + 1} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\lambda^2 + 1)}{\lambda + 1}$$

Ἐξ ἄλλου, τό δεύτερον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος γίνεται κατόπιν ἀντικαταστάσεως τῶν x, y, z ὑπό τῶν ἰσοτήτων

$$\frac{(\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma)^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2}{\lambda\alpha + \lambda\beta + \lambda\gamma + \alpha + \beta + \gamma} = \frac{[\lambda(\alpha + \beta + \gamma)]^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2}{\lambda(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)} =$$

$$= \frac{\lambda^2(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha + \beta + \gamma)^2}{\lambda(\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)^2(\lambda^2 + 1)}{(\alpha + \beta + \gamma)(\lambda + 1)} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\lambda^2 + 1)}{\lambda + 1}$$

Ὥστε τό δεύτερον μέλος ἰσοῦται μέ τήν ἰδίαν ποσότητα μέ τήν όποίαν ἰσοῦται καί τό πρῶτον. Ὥστε ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι ἀληθής.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

80. Ἐάν $\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$ δείξατε ὅτι τότε

$$\frac{x^4+y^4+z^4}{\alpha^4+\beta^4+\gamma^4}=\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2}$$

81. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ δείξατε ὅτι τότε

$$\frac{2\alpha^4\beta^2+3\alpha^2\gamma^2+5\gamma^4\delta}{2\beta^6+3\beta^2\delta^2+5\delta^5}=\frac{\alpha^4}{\beta^4}$$

82. Ἐάν ὑφίστανται αἱ ἰσότητες:

$$\frac{x}{k+\rho-\pi}=\frac{y}{\rho+\pi-k}=\frac{z}{\pi+k-\rho}$$

ἀποδείξατε ὅτι τότε θά εἶναι: $(k-\rho)x+(\rho-\pi)y+(\pi-k)z = 0$.

83. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ δείξατε ὅτι τότε θά ἀληθεύῃ καί ἡ:

$$\frac{\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2}{\beta^2\delta+\beta\delta^2}=\frac{(\alpha+\gamma)^3}{(\beta+\delta)^3}$$

84. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$ δείξατε ὅτι τότε:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta)^2$$

Καί γενικῶς, ἐάν $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{\alpha_2}{\alpha_3}=\frac{\alpha_3}{\alpha_4}=\ldots=\frac{\alpha_{\nu-1}}{\alpha_\nu}=\frac{\alpha_\nu}{\alpha_{\nu+1}}$ ὅπου α_1, α_2, α_3 $\ldots\alpha_\nu$ τυχόντες ἀριθμοί $\neq 0$ τότε θά ἔχωμεν καί

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2+\ldots+\alpha_{\nu+1}^2)=$$
$$=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu\alpha_{\nu+1})^2$$

85. Ἐάν $\frac{\mu}{x}=\frac{\nu}{y}=\frac{\rho}{z}$ καί $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ δείξατε ὅτι τότε

$$\frac{\mu^2}{\alpha^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}+\frac{\rho^2}{\gamma^2}=\frac{\mu^2+\nu^2+\rho^2}{x^2+y^2+z^2}$$

37. Ταυτότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μέ τάς ἀπολύτους τιμάς των. α) Ἐάν συγκρίνωμεν ὑπολογισμούς ἐκτελουμένους μεταξύ ἀριθμῶν τῆς Ἀριθμητικῆς καί ὁμοίους ὑπολογισμούς ἐκτελουμένους μεταξύ τῶν ἀντιστοίχων θετικῶν ἀριθμῶν διαπιστοῦμεν ὅτι δέν ὑπάρχει οὐδεμία οὐσιαστική διαφορά. Οὕτω π.χ.

$$2 + 5 + 7 = 14 \quad \text{ἐνῶ} \quad (+2) + (+5) + (+7) = +14$$
$$12 - 7 = 5 \quad \text{"} \quad (+12) - (+7) = +5$$
$$3 \cdot 7 = 21 \quad \text{"} \quad (+3)(+7) = 3 \cdot 7 = +21$$
$$\frac{12}{3} = 4 \quad \text{"} \quad \frac{+12}{+3} = +4$$

Δηλαδή τά ἀνωτέρω δεξιά ἀναγραφόμενα ἐξαγόμενα εὑρίσκο-ται καί ἐάν ἐργασθῶμεν μέ ἀριθμούς τῆς 'Αριθμητικῆς, ἀρκεῖ ε-τό ἀριθμητικόν ἐξαγόμενον νά προτάξωμεν τό +.

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι «Πᾶσα πρᾶξις μεταξύ θετικῶν ἀριθμ-δίδει τό αὐτό ἀποτέλεσμα ὡς ἐάν ἐγένετο μεταξύ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν τούτων (δηλ. ἀριθμῶν τῆς 'Αριθμητικῆς) ἀρ-κεῖ εἰς τό ἀριθμητικόν ἐξαγόμενον νά τεθῇ τό πρόσημον +.(Ὑπ-τίθεται ὅτι ἡ ἀντίστοιχος ἀριθμητική πρᾶξις δύναται νά ἐκτε-λεσθῇ)».

Κατόπιν τούτων ἀγόμεθα εἰς τήν ἑπομένην παραδοχήν (ἤ σύμ-βασιν) ἡ ὁποία διευκολύνει τούς ὑπολογισμούς χωρίς νά ἔρχετα-εἰς σύγκρουσιν μέ τούς κανόνας τῶν πράξεων.

«Πᾶς θετικός ἀριθμός ἰσοῦται μέ τήν ἀπόλυτον τιμήν του." ἄλλως, τό σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ταυτίζεται μέ τό σύνο-λον τῶν ἀπολύτων τιμῶν των».

Οὕτω οἱ μή ἀρνητικοί ἀριθμοί τῆς 'Αλγέβρας ταυτίζον-ται μέ τούς ἀριθμούς τῆς 'Αριθμητικῆς. Ἑπομένως ἐκ τῶν δύ-ταξεων τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν τάς ὁποίας μέχρι τοῦδε ἐθεωρήσα-μεν μόνον οἱ ἀρνητικοί παραμένουν ὡς νέοι ἀριθμοί ἐνῶ τ-μηδέν καί οἱ θετικοί (δηλ. οἱ μή ἀρνητικοί) συμ-πίπτουν μέ τούς γνωστούς, ἤδη ἀριθμούς τῆς 'Αριθμητικῆς. Γε-νικῶς δέ, πᾶν ὅ,τι ἐξεφράζετο μέ ἕνα θετικόν ἀριθμόν θά δύνα-ται νά ἐκφράζεται μέ ἕνα ἀριθμόν τῆς 'Αριθμητικῆς.

Οὕτω λοιπόν κατά σύμβασιν θά εἶναι:

$$+2 = 2\ ,\ +15 = 15\ ,\ +\frac{1}{12} = \frac{1}{12}\ ,\ (+5) - (+7) = 5 - 7 = -2$$

Διά τῆς συμβάσεως ταύτης ὡρισμέναι παραστάσεις τῆς 'Αρ-μητικῆς μή ἔχουσαι νόημα ἀποκτοῦν τοιοῦτον. Π.χ. ἡ παράστασ-

10 - 80 εἰς τήν ἀριθμητικήν δέν ἐκφράζει κανένα ἀριθμόν (ἀδύνατος ἀφαίρεσις) εἰς τήν Ἄλγεβραν ὅμως παριστᾶ τον -70. Ὁμοίως, ἡ 7 - 9 + 2 - 5 + 10 μέ τήν Ἀριθμητικήν δέν προσδιορίζεται ἐνῶ μέ την Ἄλγεβραν παριστᾶ τόν 5.

38. **Δεύτερος ὁρισμός τῆς ἀπολύτου τιμῆς.** Εἰς τήν παράγρ.22 ὡρίσαμεν τί εἶναι ἀπόλυτος τιμή σχετικοῦ ἀριθμοῦ. Τώρα, κατόπιν τῆς ταυτίσεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν μέ τούς ἀπολύτους δυνάμεθα νά δώσωμεν ἕνα δεύτερον ὁρισμόν τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἄς λάβωμεν πρός τοῦτο ἕνα συγκεκριμένον ἀριθμόν π.χ. τόν +5. Ἔχομεν $|+5| = 5$ σύμφωνα μέ τόν πρῶτον ὁρισμόν τῆς παράγρ. 22 β. Ἐπίσης ἔχομεν $5 = +5$ σύμφωνα μέ τήν σύμβασιν.

Ἐπομένως προκύπτει $|+5| = +5$. Δηλαδή ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ +5 εἶναι ὁ ἴδιος ὁ +5. Καί γενικῶς:

(1) $|\text{θετικοῦ ἀριθμοῦ}| =$ ὁ ἴδιος ὁ ἀριθμός

Διά τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν -5 ἔχομεν $|-5| = 5$ ἀλλά $5 = +5$ καί $+5 = -(-5)$ δηλ.: $|-5| = -(-5)$. Δηλ. ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ -5 εἶναι ὁ ἀντίθετος ἀριθμός $-(-5)$. Καί γενικῶς:

(2) $|\text{ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ}| =$ ὁ ἀντίθετός του

Οὕτω προκύπτει ὁ 2ος ὁρισμός τῆς ἀπολύτου τιμῆς:

«Ἡ ἀπόλυτος τιμή πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι αὐτός οὗτος ὁ x ὅταν εἶναι θετικός ἤ ὁ ἀντίθετός του $-x$ ὅταν ὁ x εἶναι ἀρνητικός ἤ τό μηδέν ὅταν $x = 0$».

Ὥστε ἔχομεν:

$$\begin{cases} \text{Ἐάν } x \text{ θετικός τότε } |x| = x \\ \text{Ἐάν } x \text{ ἀρνητικός τότε } |x| = -x \\ \text{Ἐάν } x \text{ μηδέν τότε } |x| = 0 \end{cases}$$

Προφανῶς ἡ $|x|$ ο ὐ δ έ π ο τ ε εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός.

Ὁ δεύτερος οὗτος ὁρισμός εἰσάγει τήν $|\ |$ εἰς τήν Ἄλγεβραν, εἶναι πλέον εὔχρηστος εἰς τάς πράξεις καί χρησιμοποιεῖται σχεδόν πάντοτε εἰς τήν Ἄλγεβραν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ἐάν θέλομεν νά ὑπολογίσωμεν τήν παράστασιν $|\sqrt{2} - 7| + \frac{2}{3}|6 - 3| + |\sqrt{2} - 1|$ σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδή ὁ ἀριθμός $\sqrt{2} - 7$ εἶναι ἀρνητικός, ἡ $|\sqrt{2} - 7| = -(\sqrt{2} - 7) = 7 - \sqrt{2}$. Ἐπειδή ὁ $6 - 3$ εἶναι θετικός, ἡ $|6-3| = 6 - 3$. Ἐπειδή ὁ $\sqrt{2} - 1$ εἶναι θετικός, ἡ $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$. Ὥστε ἡ ἀνωτέρω παράστασις ἰσοῦται μέ:

$$7 - \sqrt{2} + \frac{2}{3}(6 - 3) + \sqrt{2} - 1 = 7 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2} - 1 =$$

$$= 7 + 2 - 1 = 8$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

86. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως:

$$\left|0{,}14 - \left\{\left|3{,}14 - \sqrt{2}\right| + \left|1 - \sqrt{2}\right|\right\}\right| = \ ;$$

87. Ποῖοι ἀριθμοί πληροῦν τήν ἰσότητα $|x - 3| = 7$ καί ποῖοι τήν ἰσότητα $2|x| + x = 3$;

88. Νά δειχθῆ ὅτι $x^2 = |x|^2$

89. Βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ν'ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα:

$$\frac{|x| + 3x^2}{3|x| + 1}$$

90. Νά εὑρεθῆ ὁ φυσικός ἀριθμός ν γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$2\nu + \frac{(-3)^{2\nu+5}}{|(-3)^{2\nu+5}|} = \left|\left(\frac{5}{7 - \frac{49}{5}} + \frac{7}{5 - \frac{25}{7}}\right) \cdot \frac{-22}{-\frac{25}{7} + \frac{49}{5}}\right|$$

$$+ 121 - \left\{\left|6 - \sqrt{73}\right| + \left|17 - \sqrt{73}\right|\right\}^2$$

39. **Ἀνισότητες. Ὁρισμοί.** «Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β ὅταν ἡ διαφορά α − β εἶναι θετικός ἀριθμός. Γράφομεν δέ τότε $\alpha > \beta$

Ἐάν, τουναντίον, ἡ διαφορά α − β εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός τότε λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ β καί γράφομεν τότε

$\alpha < \beta$».

Οὕτω π.χ. ἔχομεν ὅτι $-7 < -2$ διότι $(-7)-(-2)=-5$ δηλ. ἀρνητικός ἀριθμός. Ἐπίσης $10 > -50$ δίοτι $10-(-50)= +60$ δηλ. θετικός ἀριθμός.

Εἶναι ἐπίσης φανερόν ὅτι ἄν ὁ α εἶναι μεγαλυτερος τοῦ β τότε ὁ β θά εἶναι μικρότερος τοῦ α. Διότι ἀφοῦ αἱ δύο διαφοραί $(\alpha-\beta)$ καί $(\beta-\alpha)$ εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, ἄν ἡ πρώτη διαφορά εἶναι θετική, ὁπότε $\alpha > \beta$, τότε ἡ δευτέρα θά εἶναι ἀρνητική, ἄρα $\beta < \alpha$. Ὥστε αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καί $\beta < \alpha$ εἶναι ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι, δηλ. ἡ μία συνεπάγεται τήν ἄλλην.

Τά σύμβολα $<$ καί $>$ καλοῦται «σημεῖα ἀνισότητος» ἡ δέ σχέσις καθ'ἥν δύο ποσότητες συνδέονται μέ ἕν ἐκ τῶν συμβόλων τούτων καλεῖται ἀ ν ι σ ό τ η ς. Αἱ δύο αὗται ποσότητες λέγονται μ έ λ η τῆς ἀνισότητος. Δύο ἀνισότητες ὅπως αἱ $\alpha < \beta$ καί $\gamma < \delta$ μέ τό ἴδιο «σημεῖον ἀνισότητος» λέγομεν ὅτι ἔχουν τήν α ὐ τ ή ν φ ο ρ ά ν ἤ εἶναι ὁμοιόστροφοι. Αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$ καί $\gamma > \delta$ εἶναι ἐπίσης ὁμοιόστροφοι. Ἄλλως λέγομεν ὅτι ἔχουν ἀντίθετον φοράν ἤ εἶναι ἑτερόστροφοι. Οὕτω π.χ. αἱ δύο ἀνισότητες $\alpha < \beta$ καί $\gamma > \delta$ εἶναι ἑτερόστροφοι.

Εἶναι προφανές ὅτι μεταξύ δύο τυχόντων πραγματικῶν ἀριθμῶν θά ὑπάρχῃ πάντοτε μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων:

$$\text{ἤ } \alpha > \beta \quad \text{ἤ } \alpha < \beta \quad \text{ἤ } \alpha = \beta$$

Ἄμεσοι συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ. i) «Πᾶς θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός».

Διότι ἡ διαφορά τοῦ θετικοῦ θ καί τοῦ 0 εἶναι $\vartheta - 0 = \vartheta$ δηλαδή θετικός ἀριθμός. Ὥστε $\vartheta > 0$.

ii) «Πᾶς ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικροτερος τοῦ μηδενός».

Διότι ἄν α ἀρνητικός, ἡ διαφορά $\alpha - 0 = \alpha$ δηλ. ἀρνητικός ἐπομένως, κατά τόν ὁρισμόν, $\alpha < 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔπεται ὅτι διά νά ἐκφράσωμεν μέ σύμβολα ὅτι ὁ ἀριθμός x εἶναι θετικός, ἀρκεῖ νά γράφωμεν

(1) $$x > 0$$

διά νά ἐκφράσωμεν δέ ὅτι ἀριθμός τις y εἶναι ἀρνητικός ἀρκεῖ νά γράφωμεν:

(2) $$y < 0$$

Ἐπίσης, διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι δύο πραγματικοί ἀριθμοί α καί β εἶναι ὁ μ ό σ η μ ο ι, ἀρκεῖ νά γράφωμεν

(3) $$\alpha\beta > 0$$

διότι ἡ (3) ἰσχύει ὅταν καί μόνον ὅταν οἱ ἀριθμοί α καί β ἔχουν τό αὐτό πρόσημον.

Τέλος ἄν οἱ α καί β εἶναι ἑ τ ε ρ ό σ η μ ο ι θά ἔχωμεν

(4) $$\alpha\beta < 0$$

καί ἀντιστρόφως. Ἄν ἰσχύη ἡ (4) οἱ α καί β εἶναι ἑτερόσημοι

iii) «Πᾶς θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος παντός ἀρνητικοῦ».

Διότι, ἄν $\alpha > 0$ καί $\beta < 0$, ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ δηλ. πρός τό ἄθροισμα δύο θετικῶν ἀριθμῶν, ἄρα εἶναι θετικός. Συνεπῶς $\alpha > \beta$.

iv) «Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μικρότερος εἶναι ὁ ἔχων μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν».

Ἔστωσαν οἱ ἀρνητ. ἀριθμοί α καί β καί ἔστω $|\alpha| > |\beta|$. Ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα $\alpha + (-\beta)$ καί ἔχει τό σημεῖον τοῦ ἀπολύτως μεγαλυτέρου προσθετέου δηλ. τοῦ α. Ὥστε εἶναι ἀρνητική. Συνεπῶς $\alpha < \beta$.

Παρατήρησις. Λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι ἀ π ο λ ύ τ ω ς μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς τ ο ῦ β ἄν ἰσχύη ἡ ἀνισότης $|\alpha| > |\beta|$. Ἄν ἰσχύη ἡ $|\gamma| < |\delta|$ λέγομεν ὅτι ὁ γ εἶναι ἀ π ο λ ύ τ ω ς μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τ ο ῦ δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Σύμφωνα πρός τ'ἀνωτέρω θά ἰσχύουν: $+7>0$ $-\frac{2}{3}<0$, $-11{,}2<0$, $7{,}5>-800$, $-20<-12$, $-30>-50$. Ἐπίσης θά εἶναι: $-3<-\sqrt{2}<-1<2<\sqrt{5}<\sqrt{37}$.

Τό σύμβολον τοῦ περιέχεσθαι: Ἡ διπλῆ ἀνισότης

(3) $$\alpha < x < \beta$$

ἐκφράζει ὅτι ὁ x εἶναι συγχρόνως καί μεγαλύτερος τοῦ α καί μικρότερος τοῦ β. Τούτου συμβαίνοντος λέγομεν ὅτι ὁ x π ε ρ ι έ χ ε τ α ι μ ε τ α ξ ύ α κ α ί β.

Οὕτω π.χ. ὁ 5,2 περιέχεται μεταξύ 4 καί 7 δηλ. $4<5{,}2<7$ καί ὁ -1 μεταξύ -2 καί $-\frac{1}{10}$, $-2<-1<-\frac{1}{10}$.

Τά σύμβολα $\leqslant$, $\geqslant$. Διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι ὁ α εἶναι «μικρότερος ἤ τό πολύ ἴσος» μέ β γράφομεν

(1) $$\alpha \leqslant \beta$$

Ἡ (1) σημαίνει δηλ. ὅτι ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ εἶναι ἤ ἀρνητική ἤ μηδέν. Ἐκφράζει ἀκόμη ὅτι ὁ α εἶναι ὄ χ ι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς τ ο ῦ β. Στηριζόμενοι εἰς τήν τελευταίαν ταύτην ἄποψιν θά ἠδυνάμεθα νά γράψωμεν: $5 \leqslant 7$ διότι ὁ 5 εἶναι ὄ χ ι μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς τ ο ῦ 7. Ὁμοίως ἡ διατύπωσις ὅτι ὁ α εἶναι «μεγαλύτερος ἤ ἴσος» τοῦ β διατυπώνεται:

(2) $$\alpha \geqslant \beta$$

Ἡ (2) σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά $\alpha-\beta$ εἶναι θετική ἤ μηδέν. Ἤ ἄλλως ὅτι ὁ α εἶναι ὄ χ ι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τοῦ β. Καί πάλιν, θά ἠδυνάμεθα νά γράψωμεν: $5 \geqslant 0$ ἐφ' ὅσον ὁ 5 εἶναι ὄ χ ι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τοῦ 0.

Εἰδικώτερον, ἄν ἰσχύη ἡ σχέσις

$$\alpha \geqslant 0$$

λέγομεν ὅτι ὁ α εἶναι μ η ἡ ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς. (Δηλ. ὁ α εἶναι ἤ θετικός ἤ μηδέν).

Ἡ ἀπόδειξις μιᾶς ἀνισότητος γίνεται πολλάκις βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ δοθέντος εἰς τήν ἀρχήν τῆς παρούσηςπαραγρ. Διά νά κρίνωμεν δηλ. ἄν Α εἶναι > τοῦ Β σχηματίζομεν τήν διαφοράν Α - Β καί ἐξετάζομεν ἐάν αὕτη εἶναι θετική. (Ἤ διά νά δείξωμεν ὅτι Γ < Δ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι ἡ Γ - Δ εἶναι ἀρνητική).

Παράδειγμα: «Ἄν α καί β ὁμόσημοι νά δειχθῆ ὅτι

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) > 1 + \alpha + \beta \text{ ».}$$

Λύσις: Σχηματίζομεν τήν διαφοράν τοῦ πρώτου μέλους μεῖον τό δεύτερον:

$$(1 + \alpha)(1 + \beta) - (1 + \alpha + \beta) = 1 + \beta + \alpha + \alpha\beta - 1 - \alpha - \beta = \alpha\beta$$

Βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορά εἶναι θετική διότι α καί β ὁμόσημοι, ἄρα ἡ ἀνισότης ἰσχύει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

91. Νά διαταχθοῦν κατά σειράν μεγέθους οἱ ἀριθμοί -1, $+4$, $-3/2$, $-1/6$, $+20$, -7, $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{3}$.

92. Ποῖος ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν: $-(2,8 + \sqrt{2})$ καί $\dfrac{-2}{0,1 + (1/2)^3}$ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἄλλου;

93. Ἐάν $\alpha < \beta$ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha < \dfrac{\alpha + \beta}{2} < \beta$

94. Ἐάν $\alpha < \beta < \gamma$ νά δειχθῆ ὅτι $\alpha < \dfrac{\alpha + \beta + \gamma}{3} < \gamma$

95. Καλεῖται μέσος ἀριθμητικός ν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\nu$ ὁ ἀριθμός $\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_\nu}{\nu}$. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικός ν πραγματικῶν ἀριθμῶν περιέχεται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καί τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν ν δοθέντων.

96. Ἐάν $\alpha \leqslant \beta$ καί συγχρόνως $\alpha \geqslant \beta$ τότε $\alpha = \beta$.

97. Ἐάν x τυχών πραγματικός, τότε $|x| \geqslant x$

98. Ἐάν x καί y τυχόντες πραγματικοί νά δειχθῆ ὅτι:

$$xy + |xy| \geqslant |x|y + x|y|$$

40. Αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες τῶν ἀνισότητων:

Θεώρημα I. «Δοθέντων τριῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α,β,γ, ἐάν ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β καί ὁ β μεγαλύτερος τοῦ γ τότε ὁ α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ γ»

Δηλαδή ἄν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$. Διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ διαφοραί $\alpha - \beta$ καί $\beta - \gamma$ εἶναι θετικαί, ἄρα καί τό ἄθροισμα αὐτῶν θετικόν, δηλ. τό $(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma$. εἶναι θετικόν. Ἄρα $\alpha > \gamma$.

Σημείωσις. Τό ἀνωτέρω θεώρημα ἐκφράζει ὅτι ἡ σχέσις τῆς ἀνισότητος εἶναι μ ε τ α β α τ ι κ ή. (Ἴδε καί §22, σχέσις τῆς ἰσότητος).

Θεώρημα II. «Ἐάν ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἡ ἀνισότης ἀλλάζει φοράν (ἀντιστρέφεται)»

Δηλ. ἄν $\alpha > \beta$ τότε $-\alpha < -\beta$. Διότι ἀφοῦ $\alpha > \beta$ ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι θετική καί συνεπῶς ὁ ἀντίθετός της ἀριθμός $(-\alpha) - (-\beta)$ εἶναι ἀρνητικός. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ διαφορά τῶν $(-\alpha)$ καί $(-\beta)$ εἶναι ἀρνητική, ἕπεται ὅτι $-\alpha < -\beta$.

Θεώρημα III. «Δυνάμεθα νά προσθέσωμεν ἤ ν'ἀφαιρέσωμεν ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος τόν αὐτόν ἀριθμόν»

Ἀρκεῖ ν'ἀποδείξωμεν ὅτι δυνάμεθα νά προσθέσωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν, διότι ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τήν πρόσθεσιν τοῦ ἀντιθέτου.

Πράγματι, ἔστω $\alpha > \beta$ καί γ τυχών πραγματικός. Ἡ διαφορά

$$(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta + \gamma - \gamma = \alpha - \beta$$

Ἀλλά ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha - \beta$ θετικός, ὥστε ἡ $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ θετική ἄρα $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$. Ὥστε ἄν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Θεώρημα IV. «Δυνάμεθα νά προσθέσωμεν κατά μέλη ὁσασδήποτε ἀνισότητας ὁμοιοστρόφους».

Ἐάν π.χ. $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$, $\varepsilon > \zeta$, $\eta > \vartheta$ τότε θά εἶναι καί: $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \vartheta$. Διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ διαφοραί $(\alpha - \beta)$, $(\gamma - \delta)$, $(\varepsilon - \zeta)$, $(\eta - \vartheta)$ εἶναι ὅλαι θετικαί, ἑπομένως καί τό ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι θετικόν.

Ἀλλά τό ἄθροισμα τῶν διαφορῶν τούτων γράφεται:

$$(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) + (\varepsilon - \zeta) + (\eta - \vartheta) = \alpha - \beta + \gamma - \delta + \varepsilon -$$
$$- \zeta + \eta - \vartheta = \alpha + \gamma + \varepsilon + \eta - \beta - \delta - \zeta - \eta =$$
$$= (\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \vartheta).$$

Ὥστε ἡ διαφορά $(\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta) - (\beta + \delta + \zeta + \vartheta)$ εἶναι θετική καί συνεπῶς $\alpha + \gamma + \varepsilon + \eta > \beta + \delta + \zeta + \vartheta$

Θεώρημα V. «Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἐπί ἀριθμόν θετικόν, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται, ἄν δέ ἐπί ἀρνητικόν ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται».

Ἀπόδειξις: Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha > \beta$ καί τυχών θετικός γ. Ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι θετική, ἄρα καί τό γινόμενον $(\alpha - \beta)\gamma$ θετικόν δηλ. τό $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι θετικόν. Συνεπῶς $\alpha\gamma > \beta\gamma$.

Ἐάν γ ἀρνητικός, τότε τό γινόμενον $(\alpha - \beta)\gamma$ εἶναι ἀρνητικόν δηλ. ἡ διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ εἶναι ἀρνητική καί συνεπῶς $\alpha\cdot\gamma < \beta\cdot\gamma$.

Πόρισμα: Ἐάν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη ἀνισότητος διά του αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνισότης διατηρεῖται ἄν ὁ διαιρέτης εἶναι θετικος, ἀντιστρέφεται δέ ἄν εἶναι ἀρνητικός.

Διότι ἡ διαίρεσις διά γ ἰσοδυναμεῖ μέ πολλαπλασιασμόν ἐπί τόν ἀντίστροφον ἀριθμόν $\frac{1}{\gamma}$ ὅστις εἶναι ὁμόσημος τοῦ γ.

Θεώρημα VI. «Δοθεισῶν δύο ὁμοιοστροφων ἀνισοτήτων ἄν τό πρῶτον μέλος τῆς πρώτης καί τό δεύτερον μέλος τῆς δευτέρας εἶναι ὁμόσημα, τότε ἄν πολλαπλασιάσωμεν κατά μέλη τάς ἀνισό-

<u>τητας λαμβάνομεν ὁμοιόστροφον ἀνισότητα ἐφ'ὅσον τό κοινόν σημεῖον τῶν μελῶν τούτων εἶναι τό +, ἑτερόστροφον δέ, ἄν τό κοινόν σημεῖον τῶν μελῶν εἶναι τό -</u> ».

'Απόδειξις. Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$, $\gamma > \delta$

1)Ἔστω ὅτι α καί δ εἶναι θετικοί. Τότε κατά τό προηγούμενον θεώρημα, θά ἔχωμεν πολ/ζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς δευτέρας ἐπί α καί τῆς πρώτης ἐπί δ:

$$\alpha\gamma > \alpha\delta \quad \text{καί} \quad \alpha\delta > \beta\delta$$

Ὅθεν κατά τό θεώρημα Ι. θά εἶναι καί $\alpha\gamma > \beta\delta$

2)'Εάν α καί δ ἀρνητικοί, οἱ ἴδιοι πολ/σμοί παρέχουν ἀντιστρόφους τῶν προηγουμένων ἀνισότητας:

$$\alpha\gamma < \alpha\delta \qquad \text{καί} \qquad \alpha\delta < \beta\delta$$

ἐξ ὧν ἕπεται ὅτι $\alpha\gamma < \beta\delta$.

Πόρισμα 1ον « 'Εάν ἀμφότερα τά μέλη ἀνισότητος εἶναι θετικά, τότε ὑψοῦντες ἀμφότερα τά μέλη εἰς τό τετράγωνον, λαμβάνομεν ἀνισότητα ὁμοιόστροφον· 'Εάν δέ ἀμφότερα τά μέλη εἶναι ἀρνητικά, τότε δι'ὑψώσεως εἰς τό τετράγωνον, λαμβάνομεν ἑτερόστροφον ἀνισότητα ».

Διότι ἡ ὕψωσις ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς $\alpha > \beta$ εἰς τό τετράγωνον, ἰσοδυναμεῖ μέ τόν κατά μέλη πολ/σμόν τῶν ἀνισοτήτων $\alpha > \beta$, $\alpha > \beta$. 'Εφαρμόζεται λοιπόν προηγούμενον θεώρημα.

Πόρισμα 2ον. « 'Εκ δύο θετικῶν ἀριθμῶν ὁ ἔχων τό μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι μεγαλύτερος».

'Απόδειξις. Ἔστωσαν οἱ θετικοί ἀριθμοί α καί β. 'Εάν $\alpha^2 > \beta^2$ τότε λέγομεν ὅτι θά εἶναι $\alpha > \beta$. Διότι, ἄν ἦτο $\alpha < \beta$ τότε, κατά τό προηγούμενον πόρισμα, θά εἴχομεν καί $\alpha^2 < \beta^2$ τό ὁποῖον ἀντιβαίνει πρός τήν ὑπόθεσιν. Ὥστε δέν εἶναι $\alpha < \beta$. Ἄν ἦτο $\alpha = \beta$ τότε καί $\alpha^2 = \beta^2$ τό ὁποῖον πάλιν ἀντιβαίνει πρός τήν ὑπόθεσιν, ὥστε δέν εἶναι $\alpha = \beta$. 'Αναγκαστικῶς λοιπόν θά εἶναι $\alpha > \beta$.

Πόρισμα 3ον «Ἐάν α καί β εἶναι μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ο ἀριθμοί τότε ἡ σχέσις $\alpha^2 \geqslant \beta^2$ συνεπάγεται τήν $\alpha \geqslant \beta$».

Διότι ἀφοῦ $\alpha^2 \geqslant \beta^2$ θά εἶναι ἤ $\alpha^2 > \beta^2$ ἤ $\alpha^2 = \beta^2$.

i) Ἔστω $\alpha^2 > \beta^2$ καί $\beta \neq 0$. Τότε κατά τό προηγούμενον πόρισμα θά ἔχωμεν $\alpha > \beta$.

ii) Ἔστω $\alpha^2 > \beta^2$ καί $\beta = 0$. Τότε $\alpha^2 > 0$ ἄρα $\alpha \neq 0$· καί ἐπειδή ὁ α εἶναι μή ἀρνητικός ἔπεται ὅτι $\alpha > 0$ ἤτοι $\alpha > \beta$

iii) Ἔστω $\alpha^2 = \beta^2$. Τότε ἤ θά εἶναι καί οἱ δύο ἀριθμοί μηδενικοί, ὁπότε ἰσχύει ἡ σχέσις $\alpha = \beta$ ἤ θά εἶναι καί οἱ δύο θετικοί. Ἀλλ' ἐάν δύο θετικοί ἀριθμοί ἔχουν ἴσα τετράγωνα εἶναι ἴσοι. (ἄν ἦσαν ἄνισοι θά εἶχαν καί ἄνισα τετράγωνα κατά τό πόρισμα 1ον). Ὥστε πάλιν $\alpha = \beta$

Συνεπῶς καταλήγομεν εἰς ὅλας τάς περιπτώσεις ὅτι εἴτε $\alpha > \beta$ εἴτε $\alpha = \beta$. Ὥστε θά ἰσχύη ἡ σχέσις $\alpha \geqslant \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) «Ἔστω $0 < \alpha < \gamma$ καί $0 < \beta < \delta$. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\alpha - \frac{1}{\beta} < \gamma - \frac{1}{\delta}$»

Ἀπόδειξις: Ἔχομεν $\beta < \delta$, ἄρα κατά τό πόρισμα τοῦ θεωρ. V θά εἶναι

$$\frac{\beta}{\beta\delta} < \frac{\delta}{\beta\delta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{\delta} < \frac{1}{\beta} \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{\beta} > \frac{1}{\delta}$$

Κατά τό θεώρ. II θά εἶναι $-\frac{1}{\beta} < -\frac{1}{\delta}$. Τέλος ἀπό τάς δύο ἀνισότητας $\alpha < \gamma$ καί $-\frac{1}{\beta} < -\frac{1}{\delta}$ ἔπεται ἡ ἀποδεικτέα $\alpha - \frac{1}{\delta} < \gamma - \frac{1}{\delta}$ (Θεώρ. IV).

2) Ἐάν $3x + 5 > \frac{x}{2} + 3$ νά δειχθῇ ὅτε τότε $x > -\frac{4}{5}$.

Ἀπόδειξις: Πολ/μεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς δοθείσης ἐπί 2 ὁπότε κατά τό θεώρημα V λαμβάνομεν $6x + 10 > x + 6$. Ἐξ αὐτῆς ἀφαιροῦντες ἀπό τά δύο μέλη τό x (Θεώρ. III) λαμβάνομεν $5x + 10 > 6$. Ἀφαιροῦντες τό 10 ἀπό τά δύο μέλη λαμβάνομεν ἀκόμη $5x > -4$. Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη διά 5 (Θεώρ. V) λαμβάνομεν $x > -\frac{4}{5}$.

3) 'Εάν άληθεύσυν αἱ τέσσαρες ἀνισότητες $\pi > 0$, $k > 0$ $\pi^2 - 4k > 0$, $2\alpha > \pi$ νά δειχθῆ ὅτι θ'ἀληθεύουν καί αἱ ἀνισότητες α') $\alpha\pi > 2k$ καί β') $\alpha > \frac{\pi}{4} + \frac{k}{\pi}$

'Απόδειξις: 'Επειδή $\pi > 0$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς 4ης τῶν δοθεισῶν $2\alpha\pi > \pi^2$ (θεώρ. V). 'Επειδή δέ $\pi^2 > 4k$ (ὡς φαίνεται ἀπό τήν τρίτην τῶν δοθεισῶν) ἔπεται: $2\alpha\pi > 4k$ (Θεώρ. I). Διαιροῦντες διά 2 τά μέλη τῆς τελευταίας (ἴδε πόρισμα τοῦ V) φθάνομεν εἰς τήν ἀποδεικτέαν $\alpha\pi > 2k$

'Από τήν ἀποδειχθεῖσαν $\alpha\pi > 2k$ λαμβάνομεν τήν

(1) $$\alpha > \frac{2k}{\pi}$$

(Πόρισμα τοῦ V). Καί ἀπό τήν δοθεῖσαν $2\alpha > \pi$ λαμβάνομεν τήν

(2) $$\alpha > \frac{\pi}{2}$$

'Από τάς (1) καί (2) λαμβάνομεν $2\alpha > \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{\pi}$ (Θεώρ. IV). Διαιροῦντες διά 2 ἀμφότερα τά μέλη τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν τήν 2αν ἀποδεικτέαν: $\alpha > \frac{\pi}{4} + \frac{k}{\pi}$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

99. Δείξατε διά παραδειγμάτων ἀριθμητικῶν ὅτι ἄν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας, δυνατόν νά προκύψη ὁμοιόστροφος ἤ ἑτερόστροφος πρός τάς δοθεῖσας ἀνισότης ἤ ἀκόμη καί ἰσότης. (Δέν ὑπάρχει κανών διά τήν ἀφαίρεσιν ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων κατά μέλη. 'Η πρᾶξις αὕτη τῆς κατά μέλη ἀφαιρέσεως δ έ ν σ υ γ κ α τ α λ έ γ ε τ α ι εἰς τάς μεταξύ ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων ἰσχυούσας πράξεις).

100. Καθ'ὅμοιον τρόπον δείξατε ὅτι ἄν διαιρέσωμεν κατά μέλη δύο ὁμοιοστρόφους ἀνισότητας λαμβάνομεν ἀνισότητα, ἄλλοτε ὁμοιόστροφον καί ἄλλοτε ἑτερόστροφον πρός τάς δοθεῖσας ἤ ἀκόμη καί ἰσότητα. ('Η ἀνωτέρω παρατήρησις διά τήν ἀφαίρεσιν ἰσχύει καί διά τήν διαίρεσιν τῶν ἀνισοτήτων κατά μέλη).

101. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν $\alpha > \beta$ καί $\gamma < \delta$ τότε θά εἶναι
$$\alpha - \gamma > \beta - \delta$$

102. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν $\alpha > \beta$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$ ἐφ'ὅσον οἱ α καί β εἶναι ὁμόσημοι καί $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$ ὅταν οἱ α καί β εἶναι ἑτερόσημοι

103. 'Εάν τρεῖς πραγματικοί ἀριθμοί σχετίζονται οὕτως ὥστε ἕκαστος νά εἶναι μικρότερος τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων τότε καί οἱ τρεῖς ἀριθμοί εἶναι θετικοί.

104. 'Εάν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί ἰσχύει δέ $\alpha > \beta$, $\gamma < \delta$ τότε θά ἰσχύη καί ἡ ἀνισότης

$$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$$

105. Δείξατε ὅτι ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ ἔχων τό μεγαλύτερον τετράγωνον εἶναι ὁ μικρότερος.

106. 'Εάν ν φυσικός ἀριθμός καί $\alpha > \beta > 0$ τότε καί $\alpha^\nu > \beta^\nu$. 'Αντιστροφως, ἄν $\alpha^\nu > \beta^\nu$ ὅπου α,β θετικοί τοτε θά ἰσχύη καί $\alpha > \beta$.

107. 'Εάν ν περιττός ἀκέραιος νά δειχθῆ ὅτι ἰσχυούσης τῆς ἀνισότητος $\alpha > \beta$ θά ἰσχύη καί ἡ $\alpha^\nu > \beta^\nu$. 'Αντιστρόφως ἄν $\alpha^\nu > \beta^\nu$ ὅπου ν περιττός, τότε καί $\alpha > \beta$.

108. 'Εάν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ νά δειχθῆ ὅτι τότε $|\beta - \gamma| < |\alpha - \delta|$

109. 'Εάν εἶναι $\alpha < \sqrt{2} < \beta$ δείξατε ὅτι τότε θά εἶναι:

$$\left\{\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{|\alpha - \beta|}{2}\right\}^2 > 2$$

110. 'Εάν α,β,γ παριστάνουν τά μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου δείξατε ὅτι τότε $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 < 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$

111. Δείξατε ὅτι ἄν $x_1 \neq x_2$, ἡ παράστασις

$$\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

παριστάνει τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀριθμῶν x_1, x_2 ἐνῶ ἡ

$$\frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{|x_1 - x_2|}{2}$$

τόν μικρότερον.

112. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν κλάσμα μέ θετικούς ὅρους εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος, προσθέσωμεν δέ εἰς ἀμφοτέρους τούς ὅρους του τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν, τότε τό κλάσμα αὐξάνει. ῎Αν δέ τό κλάσμα εἶναι > 1 τότε διά τῆς αὐτῆς πράξεως ἐλαττοῦται.

113. Δοθέντων ὁσωνδήποτε κλασμάτων, ὄχι ὅλων ἴσων μεταξύ των, καί ἐχόντων παρονομαστάς ὁμοσήμους, τό κλάσμα τό ἔχον ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρ/στήν τό ἄθροισμα τῶν παρ/στῶν περιέχεται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καί τοῦ μεγαλυτέρου ἐκ τῶν κλασμάτων τουτων.

114. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν ἀληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\beta > 0 \quad , \quad 4\alpha < \beta \quad , \quad \alpha + \gamma > \beta$$

τότε θ'άληθεύη και ή ἀνισότης: $8\gamma + \alpha > 6\beta$

115. Ἐάν $0 < \omega < 1$ καί $\nu > \mu$ τότε καί $\omega^{\nu} < \omega^{\mu}$ ὅπου ν,μ φυσικοί ἀριθμοί (Ἤτοι ἄν ἡ βάσις δυνάμεως εἶναι ἀπολύτως μικροτέρα τῆς μονάδος, τότε αὐξάνοντος τοῦ ἐκθέτου ἡ δύναμις ἐλαττοῦται).

116. Ἐάν $\alpha > \beta > 0$ καί ν φυσικός ἀριθμός, δείξατε ὅτι

$$(\alpha^{2\nu+2} - \beta^{2\nu+2})^{\nu} > (\alpha^{2\nu} - \beta^{2\nu})^{\nu+1}$$

41. **Οἱ ἀκέραιοι τῆς Ἀλγέβρας:** Οἱ ἀριθμοί

$$0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ldots,\ \pm \nu\ \ldots \qquad (\nu \text{ φυσικός})$$

λέγονται ἀ κ έ ρ α ι ο ι τ ῆ ς Ἀ λ γ έ β ρ α ς ἤ Ἀ λ γ ε β ρ ι κ ο ί ἀ κ έ ρ α ι ο ι ἤ ἁπλῶς ἀ κ ε ρ α ι ο ι. Εἰς τήν Ἄλγεβραν δηλ. ἐννοοῦμεν ὡς ἀκεραίους, ὅλους τούς θ ε τ ι κ ο ύ ς ἀ κ ε ρ α ί ο υ ς (ἤ φυσικούς ἀριθμούς 1 , 2 , 3 , 4 ,... , ὅλους τούς ἀ ρ ν η τ ι κ ο ύ ς ἀ κ ε ρ α ί ο υ ς, -1 , -2 , -3 , - 4 ,... (ἀντιθέτους τῶν προηγουμένων) κ α ί τ ό μ η δ έ ν.

Ὅλαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς (ἴδε κεφαλ. I) ἐπεκτείνονται καί διά τούς ἀκεραίους τῆς Ἀλγέβρας μέ μικράς ἐνίοτε τροποποιήσεις. Οὕτω:

Διαιρετότης. Οἱ ὁρισμοί εἶναι οἱ ἴδιοι μέ τούς γνωστούς ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς (ἴδε παράγρ.5) μόνον πού ἔχομεν ἐδῶ καί ἀρνητικούς διαρέτας. Ὁ ἀλγεβρικός ἀκέραιος +4 ἔχει π.χ. ὡς διαιρέτας τούς +1 , -1 , +2 , -2 , +3 , -3 , +4 , -4 τούς αὐτούς δέ ἀκριβῶς διαιρέτας ἔχει καί ὁ ἀκέραιος -4.

Πρῶτος λέγεται ἕνας ἀκέραιος p τῆς Ἀλγέβρας $\neq 0$ καί $\neq \pm 1$ ὅταν ἔχη ὡς μόνους διαιρέτας τούς ± 1 καί $\pm p$. Οὕτω οἱ «πρῶτοι» ἀκέραιοι τῆς Ἀλγέβρας εἶναι οἱ ±2 , ±3 , ±5 , ±7 , ±11 ,...

Τό ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου α διά τοῦ β εἶναι ἀκέραιος μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς κ α ί μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τ ῆ ς ἀ π ο λ ύ τ ο υ τ ι μ ῆ ς τοῦ δ ι α ι ρ έ τ ο υ β, πληρῶν τήν ἰσότητα:

$$(1) \qquad \alpha = \beta\pi + \upsilon \quad , \quad 0 \leqslant \upsilon < |\beta| ,$$

π ἀκέραιος (ἴδε παράγρ.6). Οὕτω π.χ. ἡ (ἀλγοριθμική) διαίρεσις τοῦ -37 διά +8 δίδει ὑπόλοιπόν +3 καί πηλῖκον -5.

$$-37 = (+8)(-5) + 3$$

Ἄλλα παραδείγματα διαιρέσεως (ἀλγοριθμικῆς) εἶναι:

τοῦ -17 διά -7 : $-17 = (-7)\cdot(+3) + 4$ (πηλῖκον +3, ὑπόλ+4)

" -7 " +11 : $-7 = 11\cdot 0 - 7$ (πηλ. 0, ὑπόλ. -7)·

" +50 " -22 : $+50 = (-22)\cdot 3 + 16$ (πηλ. 3, ὑπόλ. +16)

Ἡ **ἰσότης τῆς διαιρέσεως** (1) ἀποδεικνύεται ὅπως εἰς τήν Ἀριθμητικην (παράγρ.6).

Μέγιστος κοινός διαιρέτης δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων τῆς Ἀλγέβρας εἶναι, φυσικά, ὁ μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ἐ κ τ ῶ ν θ ε τ ι κ ῶ ν κ ο ι ν ῶ ν δ ι α ι ρ ε τ ῶ ν τῶν δοθέντων καί εὑρίσκεται ὅπως ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ, ἀντικαθισταμένων τῶν ἀκεραίων διά τῶν ἀπολύτων τιμῶν των. (ἴδε παράγρ. 7)

Τό **ἐλάχιστον θετικόν κοινόν πολλαπλάσιον** δεδομένων ἀκεραιων εὑρίσκεται ὅπως εἰς τήν Ἀριθμητικήν ἀντικαθισταμένων τῶν ἀκεραίων διά τῶν ἀπολύτων τιμῶν των. (ἴδε παράγρ. 8 καί 10 παρατ. β).

Οἱ **σχετικῶς πρῶτοι** ὁρίζονται ὅπως εἰς τήν Ἀριθμητικήν (παράγρ. 9) καί πάντα τά θεωρήματα τῶν παράγρ. 9 ἰσχύουν καί διά τούς ἀκεραίους τῆς Ἀλγέβρας, ὡς εἶναι ἀμέσως προφανές.

42. **Οἱ σύμμετροι καί ἀσύμμετροι τῆς Ἀλγέβρας.** Ἕνας πραγματικός ἀριθμός λέγεται σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς ὅταν ἰσοῦται πρός τό πηλῖκον δύο ἀκεραίων α/β ὅπου $\beta \neq 0$. Οὕτω π.χ. οἱ ἀριθμοί -3, $-\frac{5}{7}$, $+0{,}27$, 0, εἶναι σύμμετροι καθ'ὅσον γράφονται ἀντιστοίχως: $\frac{-3}{+1}$, $\frac{-5}{+7}$, $\frac{+27}{+100}$, $\frac{0}{+1}$. Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή κάθε συμμέτρου τῆς Ἀλγέβρας εἶναι ἕνας σύμμετρος

τῆς 'Αριθμητικῆς (παράγρ.12), αἱ δέ τέσσαρες πράξεις ἐκτελούμεναι μεταξύ συμμέτρων δίδουν ὡς ἐξαγόμενον πάλιν σύμμετρον ἀριθμόν (ἴδε παράγρ. 12).

Πάντες οἱ λοιποί πραγματικοί ἀριθμοί οἵτινες δέν εἶναι σύμμετροι ἤτοι δέν δύνανται νά τεθοῦν ὑπό μορφήν α/β ἔνθα α,β ἀκέραιοι καί $\beta \neq 0$ λέγονται ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ι . Οἱ ἀσύμμετροι τῆς 'Αλγέβρας ἔχουν προφανῶς ὡς ἀπολύτους τιμάς, ἀσυμμέτρους ἀριθμούς τῆς 'Αριθμητικῆς (ἴδε παράγρ.16). Οὕτω π.χ. οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $-\sqrt{2}$, $+\sqrt{5}$, $-3\sqrt[3]{7}$ εἶναι ἀσύμμετροι διότι καί αἱ ἀπόλυτοι τιμαί των εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί τῆς 'Αριθμητικῆς (ἴδε παράγρ.18).

Οὕτω, οἱ πραγματικοί ἀριθμοί χωρίζονται εἰς δύο τάξεις εἰς συμμέτρους καί ἀσυμμέτρους. Κάθε δέ πραγματικός ἀριθμός θ'ἀνήκη ἤ εἰς τήν μίαν ἤ εἰς τήν ἄλλην τάξιν.

43.* Τό ἀκέραιον μέρος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. 'Εάν x τυχών πραγματικός ἀριθμός, καλοῦμεν «ἀκέραιον μέρος τοῦ x» καί τό παριστάνομεν μέ $[x]$ τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀκεραίων τῶν μή ὑπερβαινόντων τόν x. Οὕτω π.χ. ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὁ μή ὑπερβαίνων τόν 7,15 εἶναι ὁ 7 (διότι ὁ ἀμέσως ἑπόμενός του, 8, ὑπερβαίνει τόν 7,15) ἄρα $[7,15]=7$. 'Επισης, ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὁ μή ὑπερβαίνων τόν $-7,15$ εἶναι ὁ -8, (διότι ὁ ἀμέσως μεγαλύτερος ἀκέραιος τοῦ -8 εἶναι ὁ -7 ὅστις ὑπερβαίνει τό $-7,15$ καθ'ὅσον $-7 > -7,15$). 'Επομένως τό «ἀκέραιον μέρος» τοῦ $-7,15$ εἶναι ὁ -8 ἤτοι $[-7,15] = -8$.

'Ομοίως: $[\sqrt{2}] = 1$, $[3,14] = 3$, $[0,999] = 0$, $[-0,999] = -1$, $[7] = 7$, $[-10] = -10$ κ.ο.κ.

Προφανῶς, ὁ ἀκέραιος ἀριθμός $[x]$ εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς ἤ ἴ σ ο ς τ ο ῦ x αὐξηθείς ὅμως κατά 1 ὑπερβαίνει τόν x. Δηλ. ἡ ποσότης $[x]$ εἶναι ἀκέραιος πληρῶν τάς σχέσεις

(1) $$[x] \leqslant x < [x] + 1$$

* Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι'ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

Ἡ (1) ὁρίζει τό σύμβολον $[x]$

Τό = ἰσχύει εἰς τήν (1) μ ό ν ο ν ὅ τ α ν ὁ x ε ἶ ν α ι ἀ κ έ ρ α ι ο ς δηλ. τ ό τ ε μ ό ν ο ν θά ἔχωμεν $[x] = x$

Ἐάν καί ἀπό τά τρία μέλη τῆς (1) ἀφαιρεθῆ ὁ $[x]$ λαμβάνομεν τήν

(2) $$0 \leqslant x - [x] < 1$$

Ἐκ τῆς (2) ἕπεται ὅτι:

(3) $$x - [x] = \vartheta \quad \text{ὅπου } 0 \leqslant \vartheta < 1$$

Τέλος, ἀπό τήν (1) ἔχομεν $x < [x] + 1$, καί $x - 1 < [x]$ συνεπῶς τό $[x]$ πληροῖ τάς σχέσεις:

(4) $$x - 1 < [x] \leqslant x$$

Τό σύμβολον $[x]$ ἀντικαθίσταται ἐνίοτε διά τοῦ συμβόλου Ακ(x) (Ακ. τοῦ x) ἤ E(x) τά ὁποῖα ἐκφράζουν ὅ,τι καί τό $[x]$

Ἰδιότητες. i) «Ἐάν ἀριθμός x αὐξηθῆ κατά ἀκέραιον k καί τό ἀκέραιον μέρος του αὐξάνεται κατά k». Ἤτοι

$$[x + k] = [x] + k$$

ἄν k ἀκέραιος.

Πρός ἀπόδειξιν ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν τό k καί εἰς τά τρία μέλη τῆς (1) ὁπότε λαμβάνομεν

$$[x] + k \leqslant x + k < [x] + k + 1$$

δηλ. σχέσιν δεικνύουσαν ὅτι ὁ $x + k$ ἔχει ἀκέραιον μέρος τό

$$[x] + k$$

ii) «Ἐάν $x < y$, οὐδείς δέ ἀκέραιος k ὑπάρχει, τοιοῦτος ὥστε $x < k \leqslant y$ τότε $[x] = [y]$».

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ (1) ὅτι $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Ἐάν, τώρα, ὁ y ἦτο μεγαλύτερος ἤ ἴσος τοῦ $[x] + 1$ θά εἴχομεν ὅτι $x < [x] + 1 \leqslant y$ ὅπερ ἀντίκειται πρός τήν ὑπόθεσιν

Συνεπῶς εἶναι $y < [x] + 1$. Ἐπίσης εἶναι $[x] \leqslant y$ διότι $x < y$. Ὥστε ἔχομεν: $[x] \leqslant y < [x] + 1$. Δηλαδή τό y ἔχει ἀκέραιον μέρος τό $[x]$ ἤτοι $[y] = [x]$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. «Πόσοι φυσικοί ἀριθμοί ὑπάρχουν μή ὑπερβαίνοντες τόν θετικόν ἀριθμόν α;».

Λύσις: Προφανῶς ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τόν μεγαλύτερον φυσικόν ἀριθμόν x τόν μή ὑπεβαίνοντα τόν α. Τότε καί ὅλοι οἱ μικρότεροι τοῦ x δέν θά ὑπερβαίνουν τόν α και συνεπῶς τό ζητούμενον πλῆθος θά εἶναι x. Ἀλλά ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὁ μή ὑπερβαίνων τόν α εἶναι τό $[\alpha]$. Ὥστε $x = [\alpha] =$ πλῆθος φυσ. ἀριθμῶν μή ὑπερβαινόντων τό α.

2. «Πόσοι ἐκ τῶν ν φυσικῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, \ldots \nu$ εἶναι διαιρετοί διά τοῦ δοθέντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ δ;».

Λύσις: Πάντες οἱ διαρετοί διά δ εἶναι ἀκέραια πολ/σια τοῦ δ ἤτοι τῆς μορφῆς $\lambda\delta$ (λ = φυσικός ἀριθμός) καί ἐπειδή θά συγκαταλέγονται μεταξύ τῶν $1, 2, 3 \ldots \nu$ δέν πρέπει νά ὑπερβαίνουν τόν ν. Ὥστε πρέπει $\lambda\delta \leqslant \nu$ ἤ $\lambda \leqslant \frac{\nu}{\delta}$ δηλ. ὁ λ δέν πρέπει νά ὑπερβαίνη τό $\frac{\nu}{\delta}$. Ἀλλ' ὑπάρχουν $\left[\frac{\nu}{\delta}\right]$ φυσικοί ἀριθμοί μή ὑπερβαίνοντες τό $\frac{\nu}{\delta}$ (ἴδε προηγ. παράδειγμα. Ὥστε ὁ λ δύναται νά λάβη $\left[\frac{\nu}{\delta}\right]$ τιμάς καί τό ζητούμενον πλῆθος εἶναι $\left[\frac{\nu}{\delta}\right]$.

3. «Πόσα ἀριθμητικά κλάσματα ὑπάρχουν δυνάμενα ν' ἁπλοποιηθοῦν διά δ καί ἔχοντα ὅρους μικροτέρους ἤ ἴσους τοῦ ν;».

Ἔστω ἕνα τέτοιο κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$. Ὁ ἀριθμητής του α θά εἶναι φυσικός ἀριθμός μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ ν καί διαιρετός διά δ ὁ δέ παρ/στής του β ἐπίσης. Ὥστε ὡς ἀριθμητής α ἑκάστου τῶν θεωρουμένων κλασμάτων δύναται νά χρησιμεύση ὁποιοσδήποτε φυσικός ἀριθμός διαρετός διά δ καί $\leqslant \nu$ ὁμοίως καί ὡς παρ/στής. Ἔστω x τό πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι δύνανται νά χρησιμεύσουν ὡς αριθμηταί ἤ παρονομασται. Ἑκαστος ἀριθμητής α συνδυαζόμενος διαδοχικῶς μέ ὅλους τούς νατούς παρονομαστάς (τῶν ὁποίων τό πλῆθος εἶναι x) θά δώσ κλάσματα ἁπλοποιήσιμα διά δ. Ἐπειδή ὅμως εἶναι x ὅλοι νατοί ἀριθμηταί θά δώσουν ἐν ὅλῳ $x \cdot x = x^2$ κλάσματα. Ὥσ ζητούμενον πλῆθος τῶν κλασμάτων εἶναι x^2 ὅπου x τό πλῆθος φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν $\leqslant \nu$ καί διαιρετῶν διά δ. Ἀλλά σύμφ τό ἀνωτέρω 2ον παράδειγμα, ἔχομεν $x = \left[\frac{\nu}{\delta}\right]$. Ὥστε τό ζητ νον πλῆθος τῶν κλασμάτων εἶναι ἴσον μέ $\left[\frac{\nu}{\delta}\right]^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

117. Μέ πόσον ἰσοῦται τό ἄθροισμα $[x] + [-x]$ α) ὅταν ὁ ναι ἀκέραιος β) ὅταν δέν εἶναι ἀκέραιος;

118. Ἄν λ καί μ φυσικοί ἀριθμοί δείξατε ὅτι

$$\frac{\lambda - 2\mu}{\mu} < \left[\frac{\lambda - 1}{\mu}\right]$$

119. Ἄν α τυχών πραγματικός ἀριθμός καί ν τυχών φυσικός ξατε ὅτι

$$\left[\frac{[\alpha]}{\nu}\right] = \left[\frac{\alpha}{\nu}\right]$$ (Νά γίνη χρῆσις τοῦ

120. Εαν $x - [x] < \frac{1}{2}$ τότε $[x] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$ (Νά γίνη χρῆσ τοῦ II).

121. Ἐάν x , y , ω , α τυχόντες ἀκέραιοι δείξατε ὅτι

$$\left[\frac{x + y + \omega}{\alpha}\right] \geqslant \left[\frac{x}{\alpha}\right] + \left[\frac{y}{\alpha}\right] + \left[\frac{\omega}{\alpha}\right]$$

44. Ρίζαι πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ὁρισμός i) « Ἐάν ὑπάρχ πραγματικός ἀριθμός β ὅστις ὑψούμενος εἰς τήν νυοστήν δύ (ν φυσικός ἀριθμός) γίνεται ἴσος πρός δοθέντα πραγματικόν ριθμόν α, δηλ. ἄν $\beta^\nu = \alpha$, τότε ὁ β λέγομεν ὅτι εἶναι μία οστή ρίζα τοῦ α. Ἐάν ν = 2 ὁ β εἶναι μία τε γωνική ρίζα τοῦ α. Ἐάν ν = 3 ὁ β εἶναι μία κυβική ρίζα τ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. Ὁ 2 εἶναι μία κυβική ρίζα τοῦ 8, διότ $2^3 = 8$.

2. Ὁ -2 εἶναι μία πέμπτη ρίζα τοῦ -32 διότι $(-2)^5 = -32$

3. Ὁ -3 εἶναι μία τετραγωνική ρίζα τοῦ $+9$ διότι $(-3)^3 = +9$
4. Ὁ $+3$ εἶναι μία τετραγωνική ρίζα τοῦ $+9$ διότι $(+3)^2 = +9$
5. Ὁ -2 εἶναι μία τετάρτη ρίζα τοῦ 16 διότι $(-2)^4 = 16$
6. Ὁ 2 εἶναι μια τετάρτη ρίζα τοῦ 16 διότι $(2)^4 = 16$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων γίνεται φανερόν ὅτι ἕνας πραγματικός ἀριθμός δύναται νά ἔχη περισσοτέρας τῆς μιᾶς νυοστάς πραγματικάς ρίζας.

Ὑπάρχουν καί ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι δέν ἔχουν καμμίαν πραγματικήν νυοστήν ρίζαν. Π.χ. δέν ὑπάρχει τετραγωνική ρίζα τοῦ -16 διότι πᾶς πραγματικός ἀριθμός ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον δίδει ἐξαγόμενον θετικόν ἤ μηδέν καί συνεπῶς δέν δύναται νά δώση τόν -16. Γενικῶς:

«Ἐάν ὁ α εἶναι ἀρνητικός καί ὁ ν ἄρτιος τότε οὐδείς πραγματικός ἀριθμός ὑπάρχει δυνάμενος νά χρησιμεύση ὡς νυοστή ρίζα τοῦ α».

Διότι πᾶς πραγματικός ἀριθμός ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν καθίσταται θετικός ἤ μηδέν καί συνεπῶς οὐδέποτε θά παρεῖχε τόν ἀρνητικόν α.

Μόνον ὅταν ἐπεκταθῆ τό σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν διά τῆς εἰσαγωγῆς καί νέων ἀριθμῶν, τῶν καλουμένων μιγαδικῶν, θά δυνηθῶμεν νά ἐξετάσωμεν καί τοιαύτας νυοστάς ρίζας αἱ ὁποῖαι δέν ὑπάρχουν μέσα εἰς τό πεδίον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Πρός τό παρόν θά περιορισθῶμεν εἰς τοιαύτας τιμάς τοῦ α καί τοῦ ν διά τάς ὁποίας μία τουλάχιστον (πραγματική) νυοστή ρίζα τοῦ α ὑπάρχει.

Διά να ἔχωμεν ἱκανοποιητικόν συμβολισμόν τῶν ριζῶν εἰσάγομεν τόν ἑπόμενον ὁρισμόν.

Ὁρισμός ii) «Ἐάν ὁ πραγματικός ἀριθμός α ἔχει μίαν νυοστην ρίζαν ἡ ὁποία εἶναι θετική ἤ μηδέν ἡ ρίζα αὐτή λέγεται π ρ ω τ ε ύ ο υ σ α   ν υ ο σ τ ή   ρ ί ζ α   τ ο ῦ   α».

'Εάν ὁ α δέν ἔχει θετικήν νυοστήν ρίζαν ἀλλά ἔχει μίαν ἀρνητικήν νυοστην ρίζαν τότε ἡ ἀρνητική νυοστή ριζα καλεῖται π ρ ω τ ε ύ ο υ σ α ν υ ο σ τ ή ρ ί ζ α τοῦ α. 'Η πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α παρίσταται διά τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἤ διά τοῦ $\sqrt{\alpha}$ ὅταν $\nu = 2$».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 7. Ἔχομεν π.χ: $\sqrt{25} = 5$. Σημειωτέον ὅτι ἡ $\sqrt{25}$ δέν ἰσοῦται μέ -5 ἄν καί ὁ -5 εἶναι μία τετραγωνική ρίζα τοῦ 25 (ὄχι ὅμως ἡ πρωτεύουσα σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν ΙΙ). 'Εάν θέλωμεν νά παραστήσωμεν τήν ἀρνητικήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ 25 τότε προτάσσομεν τό σημεῖον πλήν. Γράφομεν δηλ. $-\sqrt{25} = -5$.

8. $\sqrt[3]{-8} = -2$, 9. $\sqrt[4]{81} = 3$, 10. $-\sqrt[4]{81} = -3$, 11. $\sqrt[3]{64} = 4$

12. $\sqrt[5]{-32} = -2$.

Εἰς τήν παράστασιν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ τό σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται ρ ι ζ ι κ ό ν, ὁ ν δ ε ί κ τ η ς τῆς ρίζης καί τό α ὑ π ό ρ ρ ι ζ ο ν. 'Η παράστασις $\sqrt{\alpha}$ χωρίς τόν δείκτην 2 ἀναγεγραμμένον ἐκφράζει τήν πρωτεούσαν τετραγων. ρίζαν τοῦ α.

'Η ὕπαρξις τῆς νυοστῆς ρίζης. 'Αποδεικνύεται ὅτι δοθέντος οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ α ὑπάρχει πάντοτε εἷς καί μόνος ἄλλος θετικός β ὅστις ὑψούμενος εἰς τήν νυοστήν παρέχει τόν α. 'Ο β δύναται νά εἶναι σύμμετρος ἤ ἀσύμμετρος. 'Εν τῇ πρώτῃ περιπτώσει λέγομεν ὅτι ἡ νυοστή ρίζα τοῦ α ἐ ξ ά γ ε τ α ι ἀ κ ρ ι β ῶ ς ἤ ὅτι ὁ α εἶναι τ ε λ ε ί α ν υ ο σ τ ή δ ύ ν α μ ι ς. 'Εν τῇ δευτέρα περιπτώσει καθ'ἥν ὁ β εἶναι ἀσύμμετρος, ἡ ἀριθμητικη τιμή τῆς $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι γνωστή μόνον κατά προσέγγισιν.

Ὥστε, ἐ ά ν ὁ α ε ἶ ν α ι θ ε τ ι κ ό ς κ α ί ὁ ν τ υ χ ώ ν φ υ σ ι κ ό ς, ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὑ π ά ρ χ ε ι κ α ί ε ἶ ν α ι ἕ ν α ς ὡ ρ ι σ μ έ ν ο ς θ ε τ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς ἤ ὄ χ ι, (καθ'ὅσον ὁ α εἶναι τελεία νυοστή δύναμις ἤ ὄχι).

'Εάν ὁ α εἶναι ἀρνητικός καί ὁ ν περιττός, τότε ὑπάρχει εἷς καί μόνον πραγματικός ἀριθμός β καί μάλιστα ἀρνητικός, ὅστις ὑψούμενος εἰς τήν νυοστήν μᾶς δίδει τόν α.

Δηλ. ἐ ά ν $\alpha < 0$ κ α ί ν π ε ρ ι τ τ ό ς, ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ὑ π ά ρ χ ε ι κ α ί ε ἶ ν α ι ἕ ν α ς κ α θ ω ρ ι σ μ έ ν ο ς ἀ ρ ν η τ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς, σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς ἤ ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς (καθ'ὅσον ὁ α εἶναι τελεία δύναμις ἤ ὄχι).

Δέν ὑπάρχει πραγματική νυοστή ρίζα τοῦ α μόνον ὅταν $\alpha < 0$ καί ν ἄρτιος.

Ἔτσι π.χ. ἡ $\sqrt[5]{7}$, ἡ $\sqrt[3]{10}$, ὑπάρχουν, εἶναι θετικαί καί μάλιστα ἀσύμμετροι (ἴδε παράγρ.18). Ἡ $\sqrt[5]{-20}$ ὑπάρχει εἶναι ἀρνητική καί μάλιστα ἀσύμμετρος. Ἡ τετάρτη ρίζα τοῦ -5 δέν ὑπάρχει (μέσα εἰς τούς πραγματικούς ἀριθμούς).

Τ'ἀνωτέρω συνοψίζονται εἰς τάς ἑξῆς ἰδιότητας τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$:

Π ά ν τ ο τ ε ἰ σ χ ύ ε ι ὅ τ ι $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \alpha$. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς νυοστῆς ρίζης τοῦ α.

Ἐ ά ν $\alpha > 0$ τ ό τ ε δ ι ά κ ά θ ε φ υ σ ι κ ό ν ἀ ρ ι θ μ ό ν ν ε ἶ ν α ι $\sqrt[\nu]{\alpha} > 0$ (ἴδε καί παραδείγματα 7, 9, 11).

Ἐ ά ν $\alpha < 0$ κ α ί ν π ε ρ ι τ τ ό ς τ ό τ ε $\sqrt[\nu]{\alpha} < 0$ (ἴδε καί παραδείγματα 8, 12).

Ἐ ά ν $\alpha < 0$ κ α ί ν ἄ ρ τ ι ο ς τ ό τ ε τ ό σ ύ μ β ο λ ο ν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δ έ ν ἔ χ ε ι ἔ ν ν ο ι α ν π ρ α γ μ α τ ι κ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ο ῦ.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

122. Γράψατε συμβολικῶς καί εὕρετε τάς ἑπομένας πρωτευούσας ρίζας: Τήν κυβικήν ρίζαν τοῦ -27, τήν τετάρτην ρίζαν τοῦ 16, τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ $\frac{1}{25}$, τήν ἕκτην ρίζαν τοῦ 64, τήν πέμπτην ρίζαν τοῦ $-\frac{1}{243}$

123. Εὕρετε τάς (πρωτευούσας) ρίζας: $\sqrt[3]{125}$, $\sqrt[3]{-125}$, $\sqrt[3]{-216}$

$\sqrt[3]{64/27}$, $\sqrt[3]{-0,125}$, $\sqrt[4]{10000}$, $\sqrt[4]{16/81}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[5]{-1}$, $\sqrt[5]{-243}$
$\sqrt[5]{-243/32}$, $\sqrt[\nu]{(-\vartheta)^\nu}$ ὅπου ν ἄρτιος καί ϑ θετικός.

124. Εὕρετε ὅλας τάς πραγματικάς τετάρτας ριζας ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν, 81, 625/16 , 0,0256.

125. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως $\sqrt{121} - \sqrt[3]{-1000} + \sqrt[4]{256} - \sqrt[3]{64} + \sqrt[3]{-\alpha^3} + \sqrt[4]{\alpha^4}$ $(\alpha > 0)$

126. Ὑπολογίσατε τάς κάτωθι δυνάμεις:
$(\sqrt{19})^2$, $(\sqrt[3]{-7})^3$, $(\sqrt[4]{8})^4$, $(\sqrt[5]{-8})^5$, $(-\sqrt[3]{-11})^3$, $(-\sqrt[4]{7})^4$, $(-\sqrt[5]{-8})^5$, $\sqrt[\nu]{(-\vartheta)^\nu}$

127. Ἀποδείξατε ὅτι ἄν α τυχών πραγματικός καί ν ἄρτιος

$$\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$$
$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$$

ΔΙΟΡΘΩΣΙΣ ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΩΝ

ΤΟΥ Α΄. ΤΟΜΟΥ ΤΩΝ «ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ»

Σ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

Παρακαλεῖται ὁ ἀναγνώστης τοῦ ὡς ἄνω βιβλίου ὅπως ἔχῃ ὑπ' ὄψιν του τὰς κατωτέρω ἐπιφερομένας διορθώσεις σφαλμάτων τὰ ὁποῖα παρεισέφρυσαν κατὰ τὴν ἐκτύπωσιν.

Α΄. ΑΛΛΑΓΗ ΑΡΙΘΜΗΣΕΩΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΙΝΩΝ

Ἄσκησις 328, σελὶς 212: ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀσκήσεως νὰ διορθωθῇ εἰς 328(*).

Ἡ ἀμέσως μετὰ τὴν 507, ἄσκησις, μὴ ἀριθμηθεῖσα, νὰ λάβῃ τὸν ἀριθμὸν 507(*).

Αἱ ἀσκήσεις τῆς σελίδος 355, αἱ φέρουσαι τοὺς ἀριθμοὺς 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, νὰ ἀριθμηθοῦν ἀντιστοίχως: 546(*), 547(*), 548(*), 549(*), 550(*), 551(*), 552(*).

Ἡ ἄσκησις 578 τῆς σελίδος 370, ν' ἀριθμηθῇ : 578(*).

Β΄. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΚΦΩΝΗΣΕΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΙΝΩΝ

Ἄσκ. 7, σελ. 5, ἀντὶ τῆς λέξεως «Ἀντιστρόφως» ἀνάγνωθι : δηλαδή.

Ἄσκ. 184, σελ. 131, ἀντὶ ω πραγματικός, γράφε ω θετικός.

Ἄσκ. 187, σελ. 131, ἀντὶ οἱ x καὶ y εἶναι ἀμφότεροι..., γράφε : οἱ x καὶ k εἶναι ἀμφότεροι...

Ἄσκ. 232, 3η, σελ. 161, γράφε : $4x^2-8x-5$.

Ἄσκ. 235, 2α, σελ. 161, γράφε : $2x^2-3|x|-5$.

Ἄσκ. 239, 3η, σελ. 165, γράφε : $x^2+4xy+4y^2-16z^2-6x-12y+9$.

Ἄσκ. 253, σελ. 167, γράφε : $\nu^7-7\nu^5+14\nu^5-8\nu$.

Ἄσκ. 262. σελ. 174, ἀντὶ τῆς ἀναγραφομένης παραστάσεως νὰ γραφῇ ἡ ἑξῆς : $\frac{x^2y^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(x^2-\beta^2)(y^2-\beta^2)(z^2-\gamma^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(x^2-\gamma^2)(y^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}$.

Ἄσκ. 266, σελ. 175, γράφε : $y=\frac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$.

Ἄσκ. 322, σελ. 205, γράφε : $\sqrt{A-\sqrt{B}}=|x-\sqrt{y}|$.

Ἄσκ. 332, σελ. 212, γράφε : $\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\alpha}{\xi-\alpha}\left(1-\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)+\frac{x-\beta}{\xi-\beta}\left(1+\frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)\right\}$.

Ἄσκ. 344, σελ. 221, ἀντὶ $\leqq$ γράφε $<$.

Ἀσκ. 346, σελ. 221, γράφε : εὕρετε τὴν $|z|$, γνωστοῦ...

Ἀσκ. 350, σελ. 221, τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας: $|\alpha^2+\alpha\beta|-|\alpha\beta|+\alpha|\beta|$.

Ἀσκ. 352, σελ. 221, γράφε : ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράστασις $\Pi=\ldots$ ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 2 $(0\leqq x\leqq 2)$.

Ἀσκ. 355, σελ. 222, γράφε : $40|x|\leqq\sqrt{3}$.

Ἀσκ. 365, σελ. 223, γράφε : $\{2x^2+2x|x|-|x|-x\}\{\alpha^2|x|-\alpha^2x-5|x|+5x\}\equiv 0$

Ἀσκ. 367, σελ. 223, γράφε : $\left|\dfrac{5\alpha+16\beta}{4\alpha+20\beta}\right|<1$.

Ἀσκ. 369, σελ. 223, ἀντὶ «καὶ $\vartheta<|\varrho|$» γράφε : καὶ $|\varrho|\leqq\vartheta$.

Ἀσκ. 394, σελ. 236, νὰ προστεθῇ : «καὶ $\nu>1$».

Ἀσκ. 395, σελ. 236, γράφε : $1+\nu\alpha+\dfrac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^2$ καὶ $\nu>2$.

Ἀσκ. 399, σελ. 236, γράφε : $\left|1\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2+1}+2\dfrac{\alpha-2}{\alpha^2+2}+3\dfrac{\alpha-3}{\alpha^2+3}+\ldots+\nu\dfrac{\alpha-\nu}{\alpha^2+\nu}\right|<\dfrac{\nu(\nu+1)}{2|\alpha|}$

Ἀσκ. 440, σελ. 259, ὁ τρίτος προσθετέος $(1-\alpha)(x-1)$ νὰ διορθωθῇ : $(1-\alpha)(x-1)(x-\alpha)$.

Ἀσκ. 448, σελ. 263, γράφε : διὰ τοῦ $x^2-x\sqrt{2}+\lambda$ ἀντὶ $x-x\sqrt{2}+\lambda$.

Ἀσκ. 453, σελ. 269, γράφε : $x^2-2\alpha^{-\frac{2}{3}}x+\alpha^{-\frac{4}{3}}-\beta^2$.

Ἀσκ. 459, σελ. 271, γράφε : $3^\nu x^\nu$ ἀντὶ $3^\nu x$.

Ἀσκ. 478. σελ. 284, ὁ ὅρος $-10x^8$ τοῦ δοθέντος πολυωνύμου νὰ διορθωθῇ εἰς $-104x^3$.

Ἀσκ. 487, σελ. 290, γράφε : $x^\mu-\alpha^\mu$.

Ἀσκ. 520, σελ. 319, ὁ ἀριθμητὴς τοῦ 2ου κλάσματος νὰ γραφῇ : $\beta^3(\gamma+\alpha)$.

Ἀσκ. 523, σελ. 319, γράφε : $\dfrac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\dfrac{2\beta}{\beta+\gamma}+\dfrac{2\gamma}{\gamma+\alpha}+\dfrac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$.

Ἀσκ. 533, γ) σελ. 331, τὸ πρῶτον κλάσμα τοῦ 2ου μέλους νὰ διορθωθῇ εἰς : $\dfrac{-1}{x(x-1)^2}$.

Ἀσκ. 572, ἀντὶ $\alpha+\beta\neq 0$ γράφε $\alpha+\beta>0$.

Ἀσκ. 580ii), σελ. 371, ἡ πρώτη ἐξίσωσις νὰ διορθωθῇ · $2x+3y-970=0$.

Ἀσκ. 599, σελ. 381, νὰ προστεθῇ : «Δίδεται ἀκόμη ὅτι αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις ἔχουν κοινὴν λύσιν».

Ἀσκ. 626, σελ. 143, ἀντὶ «ἦσαν υ καὶ υ_1 ὅπου υ_2» γράφε: «ἦσαν υ_1 καὶ υ_2 ὅπου».

Γ'. ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ ΤΙΝΕΣ ΕΙΣ ΤΟ ΚΕΙΜΕΝΟΝ

Σελ. 190, στιχ. 6ος, ἀντὶ διαφέρουν, γράφε διαφέρουσαν.

Σελ. 300, στιχ. 7ος, ἀντὶ $\varphi_\mu(x)$ γράφε $\varphi_\mu(y)$.

Σελ. 386, στιχ. 17ος, εἰς μερικὰ ἀντίτυπα οἱ τύποι (5) ἔχουν γραφῇ ἐσφαλμένως. Οἱ ὀρθοὶ τύποι (5) εἶναι $\{x=x_0+\lambda\beta,\ y=y_0-\lambda\alpha\}$.

Σελ. 369, ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αἱ δύο τελευταῖαι ἐκ τῶν 5 ἐξισώσεων τοῦ συστήματος νὰ διορθωθοῦν ὡς ἀκολούθως : $3x-3y+t=2$, $5z-4t+5u=2$. Τοῦτο συνεπάγεται, ἀναλόγους διορθώσεις εἰς τὴν σελ. 370.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

45. **'Αλγεβρική παράστασις.** 'Η *'Αλγεβρική παράστασις* δύναται νά όρισθῆ κατ'ἀρχήν ὡς ἡ ἔκφρασις ἤ παράστασις ἀλλεπαλήλων πράξεων αἱ ὁποῖαι ἐκτελοῦνται μεταξύ γραμμάτων καί ἀριθμῶν.

Π.χ. ἡ ἔκφρασις:

$$-2\alpha^2\beta + (\beta\gamma)^3 - \frac{8\alpha}{\beta + \gamma^2}$$

εἶναι μία ἀλγεβρική παράστασις. Δι'αὐτῆς δηλοῦται ὅτι ὁ -2 πολ/ζεται ἐπί τό τετράγωνον τοῦ α καί τό προκῦπτον γινόμενον ἐπί β. ἀκολούθως εἰς τό ἐξαγόμενον προστίθεται ἡ τρίτη δύναμις τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν β καί γ καί κατόπιν ἀπό τό προκῦψαν ἄθροισμα ἀφαιρεῖται τό κλάσμα $\frac{8\alpha}{\beta + \gamma^2}$, δηλ. τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ὀκταπλασίου τοῦ α διά τοῦ ἀθροίσματος τοῦ β καί τοῦ τετραγώνου τοῦ γ.

'Ακριβέστερος ὁρισμός εἶναι ὁ ἑπόμενος:

«*'Αλγεβρική παράστασις εἶναι κάθε σύνολον ἀριθμῶν καί γραμμάτων συνδεομένων μεταξύ των διά τῶν σημείων τῶν πράξεων*».

'Αριθμητική τιμή ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται ὁ ἀριθμός τόν ὁποῖον λαμβάνομεν ὅταν ἀντικαταστήσωμεν ὅλα τά γράμματα τῆς ἀλγεβρ. παραστάσεως δι'ἀριθμῶν καί ἐκτελέσωμεν τάς σημειουμένας πράξεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: 'Η ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως

$$2\alpha\beta - \frac{\sqrt{\alpha}\cdot\beta - \gamma}{\alpha^3 - \beta^3} \quad \text{διά } \alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = -52$$

εἶναι ὁ ἀριθμός:

$$2\cdot4\cdot2-\frac{\sqrt{4}\cdot2-(-52)}{4^3-2^3}=16-\frac{2\cdot2+52}{64-8}=16-\frac{56}{56}=15$$

Μία ἀλγεβρική παράστασις δυνατόν νά μή ἔχη ἀριθμητικήν τιμήν ἤ ἀκόμη νά μή ἔχη ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ δι'ὡρισμένας τιμάς τῶν γραμμάτων.

Οὕτω π.χ. ἡ ἀλγ. παράστασις

$$2x-5+\frac{3}{x-4}$$

δέν ἔχει ἀριθμ. τιμήν διά $x=4$ (ἀδύνατος διαίρεσις). Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ Ἀλγεβρ. παράστασις δέν ἔχει νόημα διά τήν τιμήν $x=4$. Ἐπίσης ἡ $\sqrt{x-1}+3x$ δέν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὅταν $x<1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητική τιμή ἑκάστης τῶν ἑπομένων παραστάσεων

α) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$ διά $\alpha=5$, $\beta=2$, $\gamma=3$

β) $\frac{\alpha^2}{4}+\beta^2+\frac{\gamma^2}{9}+\alpha\beta-\frac{\alpha\gamma}{3}-\frac{2\beta\gamma}{3}$ διά $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=1$

γ) $(x+y-z)^2+(x+y)^2(x-y+z)+(x-y)^2$ διά $x=-1$, $y=-2$, $z=1/2$.

129. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή ἑκάστης τῶν παραστάσεων

α) $\frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$ διά $\alpha=13$ $\beta=14$, $\gamma=15$

β) $\alpha-2\sqrt{\alpha+1}-\frac{2\cdot\sqrt[3]{4\alpha-5}-\sqrt{2\alpha-7}}{\sqrt{\alpha-4}}$ διά $\alpha=8$

130. Εὕρετε τάς ἀριθμ. τιμάς τῆς ἀλγ. παραστάσεως

$$|x-3|+|x-5|$$

διά $x=1$, $x=2$, $x=3+\sqrt{2}$, $x=3+\sqrt{3}$, $x=6$ $x=6+\vartheta$ (ὅπου ϑ θετικός ἀριθμός).

131. Εὕρετε τάς ἀριθμ. τιμάς τῆς ἀλγ. παραστάσεως

$$\big|3|x-5|+x-5\big|-x-3|x|$$

διά $x = 5$, $x = 6$, $x = -10$, $x = 10 + \vartheta$ ὅπου $\vartheta > 0$

132. Διά ποίας τιμάς τοῦ x ἡ ἀλγ. παράστασις

$$\frac{x}{x-5} + 3x^2 + \frac{4-3x}{(x-3)^2}$$

δέν ἔχει νόημα;

133. Διά ποίας τιμάς τοῦ x ἡ ἀλγ. παράστασις

$$\frac{3}{4}\sqrt[4]{(x^2+5)(x-1)} + 2x$$

δέν ἔχει ἔννοιαν πραγματικῆς ποσότητος;

46. **Γενικαί κατηγορίαι ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.** Αἱ ἀλγεβρικαί παραστάσεις χωρίζονται εἰς κατηγορίας κατά δύο τρόπους.

Πρῶτον: εἰς ρ η τ ά ς καί ἀ ρ ρ ή τ ο υ ς καί δεύτερον : εἰς ἀ κ ε ρ α ί α ς καί κ λ α σ μ α τ ι κ ά ς.

i) Μία ἀλγ. παράστασις λέγεται ρ η τ ή ὅταν δέν περιέχει τήν ἐξαγωγήν ρίζης γράμματος ἤ συνόλου γραμμάτων.(Συνεπῶς δύναται νά περιέχη τάς πράξεις τῆς προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολ/σμοῦ καί διαιρέσεως δηλ. τάς τέσσαρας λεγομένας ρ η τ ά ς π ρ ά ξ ε ι ς μεταξύ τῶν γραμμάτων της καί ἀριθμῶν). Π.χ. αἱ παραστάσεις

$$3\alpha^2 \ , \ \frac{\beta^2+2\gamma}{\alpha+\beta} \ , \quad \sqrt{2}\cdot\alpha\beta\gamma \ , \quad \frac{\sqrt{3}-\alpha^2\cdot\sqrt{7}\cdot\beta\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$$

εἶναι ὅλαι ρηταί.

Ἄ ρ ρ η τ ο ς ἀλγεβρική παράστασις καλεῖται ἡ περιέχουσα ρίζας γραμμάτων. Π.χ. αἱ παραστάσεις

$$\alpha\sqrt{\beta} \ , \quad \sqrt{\alpha^2} \ , \quad \sqrt[3]{\alpha+\beta} + 7\alpha\beta$$

εἶναι ἄρρητοι.

ii) Ἐξ ἄλλου, ἀ κ ε ρ α ί α ἀλγ. παράστασις εἶναι ἐκείνη ἥτις δέν περιέχει γράμμα εἰς τόν παρονομαστην (Δηλ. δέν περιέχει διαίρεσιν διά γράμματος ἤ παραστάσεως περιεχούσης γράμματα). Π.χ. ἀκέραιαι ἀλγ. παραστάσεις εἶναι αἱ

$$-\alpha^2\beta \ , \quad \frac{\alpha+\beta}{7} \quad , \ -\frac{2}{3}\alpha\beta\gamma \ , \quad \frac{\alpha^3-\beta^3}{3^5}, \frac{(x-2)^\nu}{4^\nu} - 1$$

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός. Τέλος, κ λ α σ μ α τ ι κ ή λέγεται ἡ παράστασις ἡ περιέχουσα γράμματα εἰς τόν παρονομαστήν, ὅπως π.χ. αἱ:

$$\frac{\alpha-\beta}{3+\delta}, \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}, \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1} \ , \ \frac{x^2}{x}$$

Φυσικά κάθε ἀλγ. παράστασις δύναται νά χαρακτηρισθῆ διττῶς: καί σύμφωνα μέ τήν ὑποδιαίρεσιν i καί σύμφωνα μέ τήν ii Οὕτω π.χ. ἡ $\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\gamma}}$ εἶναι καί ἄρρητος καί κλασματική ἡ δέ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί ρητή καί κλασματική. Τέλος ἡ $(\alpha^3-\beta)^2+3\gamma\delta(\alpha+\beta^2)$ εἶναι ἀ κ ε ρ α ί α - ρ η τ ή.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

134. Χαρακτηρίσατε τάς κάτωθι ἀλγ. παραστάσεις:

$$\frac{2}{7}x^2y \ , \ \frac{x^2\omega}{3} \ , \ \frac{3}{4}x^3-\frac{2}{3}y^2, \ \sqrt{2}\,\alpha\beta\gamma - \sqrt{3}\cdot\alpha^3\beta \ , \ \sqrt{\alpha\beta} \quad \frac{\sqrt{x^3+y^3}}{2xy}$$

47. Μονώνυμα καί πολυώνυμα. Καλεῖται μ ο ν ώ ν υ μ ο ν κάθε ἀλγ. παράστασις ἐν τῇ ὁποίᾳ δέν σημειοῦται οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις. Π.χ. μονώνυμα εἶναι αἱ παραστάσεις

$$-3\alpha^2\beta \quad , \quad \frac{2\alpha^2}{\beta} \quad , \quad \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\gamma} \quad , \ -\frac{3}{4}\alpha\sqrt{x}$$

Σύμφωνα μέ τον διαχωρισμόν τῶν ἀλγ. παραστάσεων ὡς ἔγινεν εἰς τήν προηγουμένην §46 θά ἠδύνατό τις νά διακρίνη τέσσαρα εἴδη μονωνύμων:

1) Ἄρρητα - ἀκέραια, ὅπως τά $4\alpha^3\beta\cdot\sqrt{\alpha}$, $-\frac{2}{3}\alpha\sqrt[3]{\beta}x$ (ὑπάρχει ἐξαγωγή ρίζης, ἀλλ'ὄχι καί διαίρεσις διά γράμματος).
2) Ἄρρητα - κλασματικά, ὅπως τά $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}$, $\frac{-\sqrt[3]{\alpha\beta}}{\gamma}$ (Καί ἐξαγωγή ρίζης καί διαίρεσις διά γράμματος).
3) Ρητά κλασματικά, ὅπως π.χ. $\frac{5\alpha^3\gamma}{\beta}$, $\frac{-2\alpha\beta}{3\gamma^3\delta}$ (Δέν ὑπάρχει ἐξαγωγή ρίζης, ἀλλά διαίρεσις διά γράμματος).

4) Ἀκέραια - ρητά, ὅπως π.χ. $-\frac{2}{5}xy^3$, $7\alpha\beta\gamma^3$, $-5x^4$, $\sqrt{2}\,xy$

Τά ἀκέραια - ρητά μονώνυμα δέν περιέχουν οὔτε ἐξαγωγήν ρίζης γράμματος, οὔτε διαίρεσιν διά γράμματος· συνεπῶς, ἐφ' ὅσον εἶναι μονώνυμα θά περιέχουν μόνον πολ/σμούς μεταξύ γραμμάτων καί ἀριθμῶν. Ὥστε «τ ό ἀ κ έ ρ α ι ο ν - ρ η τ ό ν μ ο ν ώ ν υ μ ο ν ε ἶ ν α ι γ ι ν ό μ ε ν ο ν ἑ ν ό ς ἀ ρ ι θ μ ο ῦ ἐ π ί τ ά ς δ υ ν ά μ ε ι ς δ ι α φ ό ρ ω ν γ ρ α μ μ ά τ ω ν μ έ ἐ κ θ έ τ α ς φ υ σ ι κ ο ύ ς ἀ ρ ι θ μ ο ύ ς».

Ὁ ἀριθμητικός παράγων, γραφόμενος εἰς τήν ἀρχήν, καλεῖται σ υ ν τ ε λ ε σ τ ή ς τοῦ μονωνύμου. Οὕτω π.χ. τό μονώνυμον $-\frac{1}{3}xy^3\omega$ ἔχει συντελεστήν $-\frac{1}{3}$, τό $25\alpha\beta$ τόν 25, τό $\alpha\beta$ τήν μονάδα, διότι δύναται νά γραφῆ $1\cdot\alpha\beta$.

Σύμβασις. Τό ἀκέραιον - ρητόν μονώνυμον θά καλοῦμεν ἐφεξῆς «ἀ κ έ ρ α ι ο ν μ ο ν ώ ν υ μ ο ν».

Βαθμός ἀκεραίου μονωνύμου καλεῖται τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τό μονώνυμον. (Ἐάν γράμμα τι δέν ἔχει ἐκθέτην τότε θεωρεῖται ὅτι ἔχει ἐκθέτην τό 1). Π.χ. τό $\frac{2}{5}x^3y^2$ εἶναι βαθμοῦ $3 + 2 = 5$ τό $-4\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι βαθμοῦ $3 + 2 + 1 = 6$.

Βαθμός ἀκεραίου μονωνύμου ὡς πρός ἕνα γράμμα καλεῖται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος ἐν τῷ μονωνύμῳ· ὡ ς π ρ ό ς δύο γ ρ ά μ μ α τ α, τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν γραμμάτων τούτων κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Τό $9x^2y^3\omega$ εἶναι ἀκέραιον μονωνυμον 6ου βαθμοῦ. Ὡς πρός x εἶναι δευτέρου, ὡς πρός y τρίτου, ὡς πρός ω πρώτου, ὡς πρός x καί y εἶναι 5ου καί ὡς πρός x καί ω εἶναι τριτου βαθμοῦ.

Πολυώνυμον καλεῖται τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα μονωνύμων. Ἐάν τό πολυώνυμον σύγκειται ἀπό δύο μονώνυμα λέγεται πολλάκις δ ι ώ ν υ μ ο ν καί ἄν ἀπό τρία, τ ρ ι ώ ν υ μ ο ν. Κατ' ἐπέκτασιν, ἡ λέξις πολυώνυμον θά ἐπιτρέπεται καί ὅταν ὑπάρχει ἕν μόνον μονώνυμον.

Ὅροι τοῦ πολυωνύμου καλοῦνται τά μονώνυμα ἐξ ὧν σύγκειται τό πολυώνυμον, μέ τά σημεῖα των. Ὅρος τοῦ πολυωνύμου δύναται νά μή περιέχη γράμματα ἀλλά νά εἶναι συγκεκριμμένος ἀριθμός· τότε λέγομεν ὅτι ὁ ὅρος οὗτος εἶναι μ η δ ε ν ι κ ο ῦ β α θ μ ο ῦ.

Ἀκέραιον πολυώνυμον καλεῖται ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου πάντες οἱ ὅροι εἶναι ἀ κ έ ρ α ι α μονώνυμα. Ἐκ τῶν ἀκεραίων μονωνύμων ἐξ ὧν σύγκειται τό πολυώνυμον λαμβάνομεν ἐκεῖνο τό ὁποῖον ἔχει τόν μεγαλύτερον βαθμόν ἀπό τά ἄλλα ἤ ἔχει βαθμόν ὄχι μικρότερον ἀπό κανένα ἄλλο καί ὁ βαθμός τούτου λέγεται β α θ μ ό ς τ ο ῦ ἀ κ ε ρ α ί ο υ π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ.

Π.χ. τό πολυώνυμον $3x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 8$ ἔχει βαθμόν 4 ἤ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ. Τό $x^3 + \alpha x + \beta$ εἶναι τριτου βαθμοῦ. Τό $\alpha^4 + 3\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta + 7$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ.

Ἐάν τό πολυώνυμον περιέχει μονώνυμα μέ πολλά γράμματα ἕκαστον, διακρίνομεν καί β α θ μ ό ν τ ο ῦ π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ ὡ ς π ρ ό ς ἕ ν α γ ρ ά μ μ α. Οὕτω π.χ. τό πολυωνυμον $5\alpha^4 - 3\alpha^2\beta + 7\beta^2 - \alpha + \gamma + 7$ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ ὡς προς α, δευτέρου ὡς προς β πρώτου ὡς πρός γ καί ὡς πρός ὅλα ὁμοῦ εἶναι τετάρτου βαθμοῦ.

Ὅμοιοι ὅροι ἑνός πολυωνύμου καλοῦνται ἐκεῖνοι οἵτινες διαφέρουν μόνον κατά τόν συντελεστήν. Π.χ. εἰς τό πολυώνυμον

$$4\alpha x^3 - 3\alpha^3 x + \frac{1}{7}\alpha x^3 - 4 - \alpha x^3 + 2x^2$$

ὅμοιοι ὅροι εἶναι οἱ $4\alpha x^3$, $+\frac{1}{7}\alpha x^3$ καί $-\alpha x^3$. Ἐπειδή δέ κάθε πολυώνυμον εἶναι ἀλγεβρικόν ἄθροισμα δυνάμεθα, φυσικά, ν'ἀντικαταστήσωμεν τούς ὁμοίους ὅρους διά τοῦ ἀθροίσματός των καί πρός τοῦτο ἐξάγομεν τόν μεταξύ τῶν ὁμοίων ὅρων κοινόν παράγοντα, ἐκτός παρενθέσεως (ἴδε §31δ). Οὕτω, εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα:

$$4\alpha x^3 + \frac{1}{7}\alpha x^3 - \alpha x^3 = (4 + \frac{1}{7} - 1)\alpha x^3 = \frac{22}{7}\alpha x^3$$

Ἔστω ἀκόμη τό πολυώνυμον

$$\alpha^3 + 2\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - 4\beta^3 - 4\alpha^3 + \alpha^2\beta + 6\alpha\beta^2 + 5\beta^2$$

Ἀλλάζομεν τήν τάξιν τῶν ὅρων καί γράφομεν

$$(\alpha^3 - 4\alpha^3) + (2\alpha^2\beta + \alpha^2\beta) + (-3\alpha\beta^2 + 6\alpha\beta^2) + (-4\beta^3 + 5\beta^3) =$$
$$= -3\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Γενικῶς: «ἄν εἰς πολυώνυμον ὑπάρχουν πολλοί ὅμοιοι ὅροι δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν αὐτούς ὑπό ἑνός ὁμοίου πρός αὐτούς καί ἔχοντος συντελεστήν τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τούτων».

Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται ἀ ν α γ ω γ ή τ ῶ ν ὁ μ ο ί ω ν ὅ ρ ω ν.

48. Διατεταγμένα πολυώνυμα. Ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν ο ν κ α τ ά τ ά ς κ α τ ι ο ύ σ α ς δ υ ν ά μ ε ι ς ἑ ν ό ς γ ρ ά μ μ α τ ο ς, ὅταν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου βαίνουν ἐλαττούμενοι ὅταν ἀναγιγνώσκομεν τό πολυώνυμον ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά. Π.χ. τά πολυώνυμα

$$-6x^5 + 4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 1 \quad \text{καί} \quad \alpha^3 + 2\alpha^2 - 7\alpha + 12$$

εἶναι διατεταγμένα κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τόπρῶτον καί τοῦ α τό δεύτερον.

Τό ἀκέρ. πολυώνυμον λέγεται δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν ο ν κ α τ ά τ ά ς ἀ ν ι ο ύ σ α ς δ υ ν ά μ ε ι ς ἑ ν ό ς γ ρ ά μ μ α τ ο ς ὅταν ὁ βαθμός τοῦ γράμματος βαίνει αὐξανόμενος ὅταν ἀναγιγνώσκομεν τό πολυώνυμον ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά.

Π.χ. τό πολυώνυμον $-3 + 2x + 7x^2 - 2x^3 + x^4$ εἶναι διατεταγμένον κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x.

'Εφ'ὅσον οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου περιέχουν πολλά γράμματα τότε τό πολυώνυμον δύναται νά διαταχθῆ κατά διαφόρους τρόπους ὡς πρός τά διάφορα γράμματα.

Π.χ. τό $3\alpha x^2 y + 2\alpha x y^2 \omega + 3\omega^2$ δύναται νά διαταχθῆ

1ον) κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x : $3\alpha x^2 y + 2\alpha y^2 \omega + 3\omega^2$

2ον) κατά τάς κατιουσας δυνάμεις του y : $2\alpha x \omega y^2 + 3\alpha x^2 y + 3\omega^2$

3ον) κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ω: $3\omega^2 + 2\alpha x y^2 \omega + 3\alpha x^2 y$

καθώς καί κατά τάς άνιούσας δυνάμεις ὡς πρός τά αὐτά γράμματα.

Διάταξις εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας: 'Εάν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου περιέχουν πολλά γράμματα καί γραφοῦν κατά ὁμάδας ἑκάστη τῶν ὁποίων ν'ἀποτελεῖται ἀπό μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὁ κοινός δέ βαθμός ἑκάστης ὁμάδος νά εἶναι διαφορετικός τοῦ τῶν ἄλλων τότε λέγομεν ὅτι τό πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον εἰς ὁ μ ο γ ε ν ε ῖ ς ὁ μ ά δ α ς. Π.χ. τό

$$(2x^2 + 3xy + y^2) + (4x - 5y) + 7$$

εἶναι διατεταγμένον εἰς τρεῖς ὁμογενεῖς ὁμάδας. Ἡ πρώτη εἶναι 2ου ἡ δευτέρα 1ου καί ἡ τρίτη μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα x,y.

Ἡ γενική μορφή πολυωνύμου νυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρός x . Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός, κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον νυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τό γράμμα x θά εἶναι προφανῶς τῆς μορφῆς

$$(1) \qquad \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_2 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu$$

ὅπου $\alpha_0 \neq 0$ καί πάντες οἱ ν + 1 συντελεσταί $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι ἤ ἀριθμοι ἤ παραστάσεις μ ἡ π ε ρ ι έ χ ο υ σ α ι τ ό x . 'Εάν πάντες οἱ συντελεσταί τοῦ (1) εἶναι ≠ 0 τό πολυώνυμον λέγεται καί π λ ῆ ρ ε ς π ο λ υ ώ ν υ μ ο ν.

'Αντί τῆς μορφῆς (1) τό πολυώνυμον νυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρός x δυναται νά γραφῆ:

$$(2) \qquad \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \alpha_\nu x^\nu \;, \quad \alpha_\nu \neq 0.$$

δηλ. κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135. Νά διαταχθοῦν κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x τά πολυώνυμα:

$$\alpha x^3 + 3\alpha^2x^2 - 5\alpha x^3 + x^4 + \alpha x^3 + \alpha^2x^2 - 3\alpha^3x + \alpha^4 \quad \text{καί}$$
$$x^4y^2 - x^3y^5 + 2x^4y^4 - x^5y^2 - x^3y^5 - y^3 - 2x^4y^3$$

136. Τό δεύτερον ἐκ τῶν πολυωνύμων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νά διαταχθῆ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας.

49. **Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις πολυωνύμων.** Ἐπειδή τά πολυώνυμα εἶναι ἀλγεβρικά ἀθροίσματα ἕπεται ὅτι προστίθενται σύμφωνα μέ τόν κανόνα προσθέσεως ἀθροισμάτων (§ 27 (iii) καί § 30 ἐφαρμογή 1η).

Δηλαδή, διά νά εὕρωμεν τό ἄθροισμα πολλῶν πολυωνύμων ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν ὅλους τούς ὅρους τῶν πολυωνύμων ἐν συνεχείᾳ καί κατόπιν νά ἐκτελέσωμεν τήν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων (ἄν ὑπάρχουν τοιοῦτοι). Π.χ.

$$(9x^4 - 2\alpha x^3 + \alpha^2x^2 - \beta^3x + \beta^4) + (5x^4 + 3\beta x^3 - 5\alpha\beta x^2 - \alpha^3x + \beta^4) =$$
$$= 9x^4 - 2\alpha x^3 + \alpha^2x^2 - \beta^3x + \beta^4 + 5x^4 + 3\beta x^3 - 5\alpha\beta x^2 - \alpha^3x + \beta^4 =$$
$$= 9x^4 + 5x^4 - 2\alpha x^3 + 3\beta x^3 + \alpha^2x^2 - 5\alpha\beta x^2 - \beta^3x - \alpha^3x + \beta^4 + \beta^4 =$$
$$= 14x^4 + (3\beta - 2\alpha)x^3 + (\alpha^2 - 5\alpha\beta)x^2 - (\alpha^3 + \beta^3)x + 2\beta^4$$

Ἐπίσης, διά ν'ἀφαιρέσωμεν πολυώνυμον ἀρκεῖ ν'ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων του καί κατόπιν, μέ ἠλλαγμένα σημεῖα, νά τούς προσθέσωμεν διαδοχικῶς. (Ἴδε §30, Θεώρημα).

Π.χ. $5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x - 12 - (3x^4 + 8x^2 + 4x + 10) =$
$$= 5x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 10x - 12 - 3x^4 - 8x^2 - 9x - 10$$
$$= 2x^4 - 2x^3 - x^2 - 19x - 22$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

137. Δίδονται τά πολυώνυμα: $A = \alpha^4 - 6\alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 - \beta^4$
$B = 3\alpha^4 - 2\alpha^3\beta + 4\alpha^2\beta^2 + 5\alpha\beta^2 - 2\beta^4$, $\Gamma = -\alpha^4 + 3\alpha^3\beta - 3\alpha^2\beta^2 + 7\alpha\beta^3 + 5\beta^4$. Ζητεῖται νά εὑρεθοῦν τά πολυώνυμα:

$$A + B - \Gamma \quad , \quad A - B + \Gamma \quad \text{καί} \quad -A + B + \Gamma$$

καί κατόπιν νά ἐπαληθευθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τριῶν τελευταίων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα Α + Β + Γ τῶν δεδομένων.

138. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$(5\alpha^2 - 3\alpha x + x^2) - [4\alpha^2 + 5\alpha x - (3\alpha^2 - 7\alpha x + 5x^2)] - 7x^2$$

50. **Πολλαπλασιασμός ἀκεραίων μονωνύμων.** Τό γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εὑρίσκεται σύμφωνα μέ τόν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο γινομένων· δηλ. πολλαπλασιάζομεν τό ἕν μέ ὅλους τούς παράγοντας οἵτινες ἀποτελοῦν τό ἄλλο.

Π.χ. $(4x^3y^2z)(3x^2y\omega) = 4x^3y^2z \cdot 3x^2y\omega = 4\cdot 3x^3x^2y^2yz\omega =$
$= 12x^5y^3z\omega$

Ἐπίσης: $(\frac{3}{4}\alpha^3\beta^2\gamma^5)(20\alpha\beta\gamma^2) = \frac{3}{4}\cdot 20\cdot \alpha^3\alpha\beta^2\beta\gamma^5\gamma^2 = 15\alpha^4\beta^3\gamma^7$

Ὡς εἶναι φανερόν, ὁ συντελεστής τοῦ γινομένου δύο μονωνύμων ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν δύο μονωνύμων τό δέ λοιπόν μέρος ἀποτελεῖται ἀπό τά γράμματα καί τῶν δύο μονωνύμων καί ἕκαστον μέ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τούς ὁποίους ἔχει καί εἰς τά δύο μονώνυμα.

Ἄλλα παραδείγματα:

$$(\frac{1}{7}\alpha x^3 y)(2\beta x y^2) = \frac{2}{7}\alpha\beta x^4 y^3$$

$$(-9x^3y)(-\frac{4}{3}x^5y\,\omega)(2xy\,\omega) = 24x^9y^3\omega^2 \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Θεώρημα. «Ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων μονωνύμων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων».

Διότι, προφανῶς, τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἑνός μονωνύμου πλέον τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ὅλων τῶν γραμμάτων τοῦ ἄλλου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ὁ βαθμός τοῦ $\frac{1}{2}\alpha^3\beta\gamma$ εἶναι ὁ 5 ὁ δέ τοῦ 7α εἶναι ὁ 2. Τό γινόμενόν των $\frac{7}{2}\alpha^4\beta\gamma^2$ ἔχει βαθμόν $7 = 5 + 2$.

Τό γινόμενον πολυωνύμου ἐπί μονώνυμον εὑρίσκεται σύμφωνα μέ τόν κανόνα πολ/σμοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος ἐπί ἀριθμό δηλ. πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπί τό μονώνυμον καί προσθέτομεν τά μερικά γινόμενα.

Τό γινόμενον ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπί ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι πάντοτε ἀκέραιον πολυώνυμον διότι τό γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(x^4 - 3\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha^3 + \alpha^4)\alpha x^2 = \alpha x^6 - 3\alpha^2 x^5 + \alpha^3 x^4 - 2\alpha^4 x^2 + \alpha^5 x^2$, $(x^4 y - 2x^3 y^2 + 4x^2 y + y^3)5xy^2 =$

$$= 5x^5 y^3 - 10x^4 y^4 + 20x^3 y^3 + 5xy^5$$

ΑΣΚΗΣΙΣ

139. Νά εὑρεθοῦν τά γινόμενα: $(12\alpha^3\beta)(7\alpha^2\beta\gamma)$, $(-5\alpha\beta\gamma)(8\alpha\beta\delta)$, $(7\alpha\beta^2\gamma^3)(2\alpha^2\beta\gamma)(5\alpha^4\beta^5\gamma^2)$, $(-5\alpha^2 + 3\alpha\beta - 8\beta^2)(-9\alpha\beta)$, $(\frac{1}{2}\alpha\beta^3\gamma)^4 (-3\alpha^2\beta)^3$

51. **Πολλαπλασιασμός ἀκεραίων πολυωνύμων.** Τό γινόμενον δύο πολυωνύμων εὑρίσκεται συμφώνως πρός τόν κανόνα τοῦ πολ/σμοῦ δύο ἀθροισμάτων· δηλ. πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ ἑνός πολυωνύμου ἐπί ἕκαστον ὅρον τοῦ ἄλλου καί προσθέτομεν τά μερικά γινόμενα. ('Επιμεριστικός νόμος, §31, Θεώρ. VII).

Συνήθως πολλαπλασιάζομεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ πρώτου πολυωνύμου ἐπί πάντας τούς ὅρους τοῦ δευτέρου, κατόπιν τόν δεύτερον τοῦ πρώτου ἐπί πάντας τούς ὅρους τοῦ δευτέρου κ.ο.κ. καί τέλος ἀθροίζομεν ὅλα τά γινόμενα ἐκτελοῦντες καί τήν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων (ἐφ'ὅσον ὑπάρχουν τοιοῦτοι).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(2x + 5x^2 - 6x^3 + 4x^4)(2 + 5x - 4x^2) = 4x + 10x^2 - 8x^3 + 10x^2 + 25x^3 - 20x^4 - 12x^3 - 30x^4 + 24x^5 + 8x^4 + 20x^5 - 16x^6 = -16x^6 + 44x^5 - 42x^4 + 5x^3 + 20x^2 + 4x$

Θεώρημα. «Εἰς τό γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων διατεταγμένων ὡς πρός ἕν γράμμα, ὁ ὅρος μεγίστου βαθμοῦ ὡς πρός τό γράμμα τοῦτο εἶναι ἴσος πρός τό γινόμενον τῶν μεγιστοβαθμίων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων. 'Ο δέ ὅρος ἐλαχίστου βαθμοῦ μέσα εἰς τό γινόμενον τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσος πρός τό γινόμενον τῶν ἐλαχιστοβαθμίων ὅρων τῶν δύο πολυωνύμων ».

'Απόδειξις. Ἔστω Ax^{α} τυχών ὅρος τοῦ πρώτου πολυωνύμου καί Bx^{β} τυχών ὅρος τοῦ δευτέρου. (Τά Α καί Β εἶναι ἤ ἀριθμοί ἤ παραστάσεις περιέχουσαι ἄλλα γράμματα, διάφορα τοῦ x).

Τό γινόμενον τῶν δύο τούτων ὅρων δηλ. τό $ABx^{\alpha+\beta}$ θά εἶναι εἷς ὅρος τοῦ γινομενου τῶν δύο πολυωνύμων. Εἶναι δέ προφανές ὅτι ἐν ᾗ περιπτώσει ὁ Ax^{α} εἶναι ὁ μεγίστου βαθμοῦ ὅρος τοῦ πρώτου πολυωνύμου ὁ δέ Bx^{β} ὁ ὅρος μεγίστου βαθμοῦ τοῦ δευτέρου πολυωνύμου τότε ὁ ὅρος $ABx^{\alpha+\beta}$ θά εἶναι ὁ ὅρος μεγίστου βαθμοῦ τοῦ γινομένου. (Καθ'ὅσον πάντες οἱ λοιποί ὅροι τοῦ γινομένου θά εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $\alpha+\beta$).

Κατ'ἀνάλογον τρόπον ἀποδεικνύεται καί τό 2ον μέρος τοῦ θεωρήματος.

Πόρισμα 1ον «Ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο ἀκεραίων πολυωνύμων (ὡς πρός ἕν γράμμα) ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων (ὡς πρός τό γράμμα τοῦτο)».

Διότι, ἄν ὁ βαθμός τοῦ πρώτου εἶναι μ δηλ. ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ πρώτου εἶναι Ax^{μ} ὁ δέ βαθμός τοῦ δευτέρου, ν, δηλ. ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ δευτέρου εἶναι Bx^{ν} τότε ὁ ὅρος $ABx^{\mu+\nu}$ εἶναι ὡς εἴδομεν ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ γινομένου, συνεπῶς ὁ βαθμός τοῦ γινομένου εἶναι $\mu + \nu$ δηλ. τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο παραγόντων.

Πόρισμα 2ον. «Τό γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ἐξ ὧν τό ἕν ἔχει τουλάχιστον δύο ὅρους διαφορετικοῦ βαθμοῦ οὐδέποτε εἶναι μονώνυμον ».

Διότι κατά το ἀνωτέρω θεώρημα θά ὑπάρχῃ εἷς ὅρος μεγίστου βαθμοῦ καί εἷς ὅρος ἐλαχίστου οἵτινες δέν ἀνάγονται μέ κανένα ἄλλον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

140. Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα:

$(x^3+2x^2+2x+1)(x^2-x+1)$, $(x+y+z)\cdot$
$(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$, $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$,

$$(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)(\alpha-\beta)$$

141. Ἐάν δύο ἀκέραια πολυώνυμα εἶναι ἀντιστοίχως μ καί ν βαθμοῦ, ὅπου $\mu>\nu$, τίνος βαθμοῦ εἶναι τό ἄθροισμά των καί τίνος βαθμοῦ ἡ διαφορά των;

142. Ἐάν τό πολυώνυμον Α εἶναι μ βαθμοῦ, τό Β, ν βαθμοῦ τό Γ, ρ βαθμοῦ, ὅπου $\mu>\nu>\rho$, τίνος βαθμοῦ εἶναι τό πολυώνυμον

$$5A\cdot B+7B\cdot\Gamma-B-\Gamma;$$

52. **Ἀξιοσημείωτοι πολλαπλασιασμοί.** Ὡρισμένοι τύποι γινομένων παρουσιάζονται τόσον συχνά είς τόν Ἀλγεβρικόν λογισμόν ὥστε καθίσταται ἀπαραίτητον, διά τήν εὐχερῆ διεξαγωγήν τῶν πράξεων, νά γνωρίζομεν ἀπό μνήμης τά ἐξαγόμενα τῶν ειδικῶν τούτων πολλαπλασιασμῶν. Αἱ ἀπομνημονευτέαι αὗται ἰσότητες (**ἤ τύποι**) εἶναι αἱ κάτωθι:

i) $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

Ἀπόδειξις: $(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha\cdot\alpha+\alpha\beta+\beta\alpha+$ $+\beta\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(3x+5y)^2=9x^2+30xy+25y^2$, $(\alpha^2+\beta^2)^2=$ $=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4$, $(5\alpha x+2\beta y)^2=25\alpha^2x^2+20\alpha\beta xy+4\beta^2y^2$, $(\sqrt{2}+1)^2=2+2\sqrt{2}+1=3+2\sqrt{2}$.

ii) $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νά τεθῆ εἰς τον τύπον (i) ὅπου β τό $-\beta$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(3\alpha x-4x^2y^2)^2=9\alpha^2x^2-24\alpha x^3y^2+16x^4y^4$,
$\left(\sqrt{\alpha}\cdot x-\dfrac{\beta}{2\sqrt{\alpha}}\right)^2=\alpha x^2-\beta x+\dfrac{\beta^2}{4\alpha^2}$

iii) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$

Ἀπόδειξις: $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\cdot\alpha-\alpha\cdot\beta+\beta\cdot\alpha-\beta\cdot\beta=\alpha^2-\beta^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(3xy+\omega)(3xy-\omega)=9x^2y^2-\omega^2$,
$(x^4+y^4)(x^4-y^4)=x^8-y^8$, $(x+5)(x-5)=x^2-25$,
$(\alpha\sqrt{2}+\sqrt{3})(\alpha\sqrt{2}-\sqrt{3})=2\alpha^2-3$, $(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=x^2-9$,
$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)=[(\alpha+\beta)+\gamma]\cdot[(\alpha+\beta)-\gamma]=$

$= (\alpha + \beta)^2 - \gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - \gamma^2$, $(x - y + \omega)(x + y - \omega) =$
$= [x - (y - \omega)] \cdot [x + (y - \omega)] = x^2 - (y - \omega)^2 = x^2 - y^2 + 2y\omega -$

iv) $(x + \alpha)(x + \beta) = x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$,
$(x - 1)(x - 10) = x^2 - 11x + 10$

$(x + 5)(x - 1) + (x - 2)(x + 7) + (x + 8)(x + 6) =$
$= x^2 + 4x - 4 + x^2 + 5x - 14 + x^2 + 14x + 48 = 3x^2 + 23x + 30$

v) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

'Απόδειξις: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = [(\alpha + \beta) + \gamma]^2 =$
$(\alpha + \beta)^2 + 2(\alpha + \beta)\gamma + \gamma^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma + \gamma^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(3x - y + 2)^2 = 9x^2 + y^2 + 4 - 6xy + 12x - 4y$
$(x^2 + x - 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 - 2x^2 - 2x$

vi) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

«'Ο κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν σύν τρεῖς φοράς τό γινόμενόν των ἐπί τό ἄθροισμά των».

'Η ἀπόδειξις εὔκολος.

'Εφαρμογή. «Νά δειχθῆ ὅτι ἄν τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα μηδέν τότε τό ἄθροισμα τῶν κύβων των ἰσοῦται μέ τό τριπλάσιον γινόμενόν των».

'Απόδειξις: Ἔστω ὅτι $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Τότε θά ἔχωμεν καί $\alpha + \beta = -\gamma$. 'Υψοῦντες ἀμφότερα τά μέλη εἰς τόν κύβον, λαμβάνομεν $(\alpha + \beta)^3 = (-\gamma)^3$ ἤ $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = -\gamma^3$. Εἰς τήν τελευταῖαν ἰσότητα θέτομεν ὅπου $\alpha + \beta$ τό ἴσον του $-\gamma$ καί λαμβάνομεν $\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(-\gamma) = -\gamma^3$ ἤ $\alpha^3 + \beta^3 - 3\alpha\beta\gamma = -\gamma^3$ ἤ $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$ ὅ.ἔ.δ.

vii) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - \beta^3 - 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$

'Η (vii) προκύπτει ἐκ τῆς (vi) ἄν ὅπου β τεθῆ $-\beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : $(\sqrt{5} + 1)^3 - (\sqrt{5} - 1)^3 =$

$= (\sqrt{5})^3 + 3(\sqrt{5})^2 \cdot 1 + 3 \cdot \sqrt{5} \cdot 1^2 + 1^3 - \Big\{ (\sqrt{5})^3 - 3(\sqrt{5})^2 \cdot 1 + 3\sqrt{5} \cdot 1^2$
$- 1^3 \Big\} = 6(\sqrt{5})^2 + 2 = 6 \cdot 5 + 2 = 32$

viii) $(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2(\beta + \gamma) + 3\beta^2(\alpha + \gamma) +$
$+ 3\gamma^2(\alpha + \beta) + 6\alpha\beta\gamma$

Ἡ ἀνωτέρω ἰσότης δύναται νά προκύψῃ δι'ἐκτελέσεως τοῦ πολ/σμοῦ: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \cdot (\alpha + \beta + \gamma)$

Ἐφαρμογή. Ἐάν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ τότε $\beta + \gamma = -\alpha$, $\alpha + \gamma = -\beta$ καί $\alpha + \beta = -\gamma$ ἡ δέ ἀνωτέρω ἰσότης (viii) γίνεται:

$0 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2(-\alpha) + 3\beta^2(-\beta) + 3\gamma^2(-\gamma) + 6\alpha\beta\gamma$ ἤ

$0 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha^3 - 3\beta^3 - 3\gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma$ ἤ

$0 = -2\alpha^3 - 2\beta^3 - 2\gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma$ ἤ $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Δηλ. ἀποδεικνύεται πάλιν ἡ ἐφαρμογή τοῦ τύπου (vi): «Ἐάν τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα μηδέν τότε...».

53. Δέν θά ἦτο περιττόν, ὁ σπουδαστής ν'ἀπομνημονεύσῃ τούς περισσοτέρους ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων καί κατά τήν ἀντίθετον φοράν. Δηλαδή:

i) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα: $\dfrac{x^4 + y^4 + 2x^2y^2}{x^2 + y^2}$

Σύμφωνα πρός τόν (i) τό κλάσμα γράφεται: $\dfrac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$

ii) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ἡ παράστασις $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$ γράφεται σύμφωνα μέ τόν ἀνωτέρω τύπον:

$$\sqrt{(2x)^2 - 2(2x) + 1} = \sqrt{(2x - 1)^2} = |2x - 1|$$

iii) $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον) Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα $\dfrac{9x^4 - 16y^4}{9x^4 + 24x^2y^2 + 16y^4}$

Τοῦτο γράφεται:

$$\frac{(3x^2 + 4y^2)(3x^2 - 4y^2)}{(3x^2 + 4y^2)^2} = \frac{3x^2 - 4y^2}{3x^2 + 4y^2}$$

2ον. Ἄν ν φυσικός ἀριθμός, νά δειχθῇ, ὅτι ὁ ἀριθμός $\sqrt{\nu^2 + 1}$ εἶναι ἀσύμμετρος

'Απόδειξις: 'Αρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ὁ ν^2+1 δέν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου (ἴδε καί §18). 'Εάν ἦτο τετράγωνον ἀκεραίου τινός k τότε θά εἴχομεν: $\nu^2+1=k^2$ ἤ $k^2-\nu^2=1$ ἤ $(k+\nu)(k-\nu)=1$. 'Αλλά τό γινόμενον δύο φυσικῶν ἀριθμῶν ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι >1 δέν δύναται νά εἶναι μονάς. Συνεπῶς ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι ἄτοπος καί ὁ ν^2+1 δέν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου

iv) $x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=(x+\alpha)(x+\beta)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα: $\dfrac{x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{x^2+(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma}$

Τοῦτο γράφεται: $\dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x+\alpha)(x+\gamma)}=\dfrac{x+\beta}{x+\gamma}$

v) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma=(\alpha+\beta-\gamma)^2$

'Εφαρμογή $\sqrt{x^4+y^4+z^4+2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2}=$

$=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^2}=x^2+y^2+z^2$

vi) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3$

vii) $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3=(\alpha-\beta)^3$

'Εφαρμογή: $\sqrt[3]{x^3+3x^2+3x+1}=\sqrt[3]{(x+1)^3}=x+1$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Νά ἐκτελεσθοῦν σύμφωνα πρός τούς ἀνωτέρω κανόνας αἱ πράξεις αἱ σημειούμεναι εἰς τάς ἀσκήσεις 143 καί 144

143. $(3\alpha x+2\beta y)(3\alpha x-2\beta y)$, $(3x-y+5)(3x+y-5)$, $(\alpha+2\beta-3)(\alpha+2\beta+3)$, $(\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)(\alpha^2+4\beta^2)(\alpha^4+16\beta^4)$,

$(2x+3+\mu)(2x+3-\mu)$

144. $(x^2+3x-2)^2$, $(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})$,

$(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$, $(1+x^2)(1+x^2+x\sqrt{3})(1+x^2-x\sqrt{3})$

$(\frac{x}{2}+\frac{2y}{5})(\frac{x}{2}-\frac{2y}{5})$, $(\frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{3\alpha}{x})(\frac{3\alpha}{x}-\frac{\alpha^2}{\beta})$, $(\frac{y}{2\alpha}+\frac{\alpha}{y})^2$

145. Ν'ἁπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις:

α) $(x+y-z)^2-(x-y-z)^2+(x-y+z)^2-(y+z-x)^2$

β) $\alpha(\beta+\gamma-\alpha)^2+\beta(\gamma+\alpha-\beta)^2+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2+$

$+(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$

146. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις: $(\alpha+\beta)^3-(\alpha-\beta)^3-2\beta^3$
$(1+x+x^2)^3$, $(x-y)^3+(x+y)^3+3(x+y)(x-y)^2+$
$+3(x-y)(x+y)^2$

147. Ν'ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης:

$$\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2}\right]^2=\nu^3$$

καί ν'ἀποδειχθῇ κατόπιν τῇ βοηθείᾳ ταύτης, ὅτι

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2$$

ν τυχών φυσικός.

148. Ν'ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}$$

καί κατόπιν να δειχθῇ ἡ ἰσότης

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός.

149. Νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον δύο παραστάσεων ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων δύναται ἐπίσης νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν ἀθροίσματος δύο τετραγώνων. Νά γίνῃ γενίκευσις.

150. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων, εἶναι διαιρετή διά τοῦ 8.

151. Ἐάν ἀριθμός εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων τότε καί τό διπλάσιον του εἶναι πάλιν ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἀκεραίων.

152. Ἐάν $x>\frac{\alpha}{\rho}+\beta\rho$ ὅπου α,β,ρ θετικοί τότε καί $x>\sqrt{2\alpha\beta}$

153. Νά γραφοῦν ὡς τετράγωνα διωνύμων αἱ παραστάσεις:
$x^4+2x^2y^2+y^4$, x^2-2x+1 , $4x^2+4x+1$, $x^2-22xy+121y^2$

154. Ὁρίσατε ἑκάστοτε τιμήν διά τό Τ οὕτως ὥστε ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων νά καθίσταται τέλειον τετράγωνον διωνύμου:
x^2+T+4y^2, $9x^2+T+1$, $25+T+y^2$, $25x^2+T+9y^2$
$81m^2+T+4n^2$, $k^2+T+16l^2$, $81x^2y^6+T+4$, $121\alpha^2+T+9\beta^2$;
$9x^4y^2-12x^2y^2+T$

155. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλεια τετράγωνα ἀκεραίων τριωνύμων καί ποῖαι ὄχι: Ἐν τῇ πρώτῃ δέ περι-

πτώσει νά γραφοῦν ὡς τέλεια τετράγωνα

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma\ ,\quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta$$
$$x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2+2y^2z^2\ ,\quad x^2+y^2+4+4x+4y-xy$$
$$x^2+y^2+9+6x-6y-2xy\ .$$

156. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι τέλειοι κύβοι ἀκεραίων διωνύμων;

$$x^6-3x^4+3x^2-1 \qquad \omega^3\varphi^3+3\omega^2\varphi^2x+3\omega\varphi x^2+x^3$$
$$y^3-6y^2+12y-8 \qquad z^3-9z^2-27z-27$$

54. **Τό τετράγωνον τυχόντος πολυωνύμου. Θεώρημα.** «Τό τετράγωνον ἀθροίσματος (ἤ πολυωνύμου) ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων του αὐξηθέν κατά τό ἄθροισμα τῶν διπλασίων γινομένων τῶν ὅρων λαμβανομένων ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους».

Ἀπόδειξις: Διά νά σχηματίσωμεν τό τετράγωνον τοῦ $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\tau+\rho+\sigma$ πρέπει νά ἐκτελέσωμεν τόν πολ/σμόν

$$(1)\qquad (\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau)(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\rho+\sigma+\tau)$$

Οἱ ὅροι τοῦ γινομένου (1) σχηματίζονται διά πολ/σμοῦ τυχόντος ὅρου τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἐπί τυχόντα ὅρον τοῦ δευτέρου. Ὅταν λοιπόν λάβωμεν τό αὐτό γράμμα καί ἀπό τά δύο ἀθροίσματα θά σχηματισθῇ τό τετράγωνον τοῦ γράμματος τούτου. Ἄν λάβωμεν διαφορετικά γράμματα π.χ. τό β ἐκ τοῦ πρώτου καί τό ρ ἐκ τοῦ δευτέρου θά σχηματισθῇ τό γινόμενον βρ τῶν γραμμάτων τούτων. Ἀλλά τό αὐτό γινόμενον θά παρουσιασθῇ ἀκόμη μίαν φοράν ὅταν λάβωμεν, ἀντιστρόφως, τό ρ ἐκ τοῦ πρώτου ἀθροίσματος καί τό β ἐκ τοῦ δευτέρου. Ἄρα θά παρουσιασθῇ τό διπλάσιον τοῦ βρ. Ὥστε οἱ ὅροι τοῦ (1) κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ πολ/σμοῦ θά εἶναι δύο εἰδῶν: ἤ τετράγωνα τῶν γραμμάτων ἤ διπλάσια γινόμενα τῶν γραμμάτων λαμβανομένων ἀνά δύο.

Παρατήρησις 1η. Ἐν τῇ πράξει γράφομεν πρῶτον κατά σειράν τά τετράγωνα ὅλων τῶν προσθετέων καί ἀκολούθως τά διπλάσια γινόμενα τοῦ πρώτου μέ ὅλα τά ἑπόμενα γράμματα, κατόπιν τοῦ δευτέρου μέ ὅλα τά ἑπόμενά του κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\beta\delta + 2\gamma\delta$, $(x^3 + x^2 - x - 1)^2 = x^6 + x^4 + x^2 + 1 + 2x^5 - 2x^4 - 2x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = x^6 + 2x^5 - x^4 - 4x^3 - x^2 + 2x + 1$.

Παρατήρησις 2α. Εἰδικαί περιπτώσεις τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος εἶναι οἱ τύποι (i) (ii) καί (v) τῆς §52.

Παρατήρησις 3η. Τό ἀνωτέρω θεώρημα διατυποῦται συμβολικῶς καί ὡς ἑξῆς:

(2) $$(\Sigma\alpha)^2 = \Sigma\alpha^2 + \Sigma 2\alpha\beta$$

ὅπου $\Sigma\alpha$ = ἄθροισμα τοῦ α καί τῶν λοιπῶν γραμμάτων

$\Sigma\alpha^2$ = ἄθροισμα τοῦ α^2 καί ὅλων τῶν λοιπῶν τετραγώνων

$\Sigma 2\alpha\beta$ = ἄθροισμα τοῦ $2\alpha\beta$ καί ὅλων τῶν λοιπῶν δυνατῶν διπλασίων γινομένων.

55.* Ὁ κύβος πολυωνύμου. Θεώρημα. «Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀριθμῶν πλέον τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τοῦ τριπλασιου τετραγώνου ἑκάστου ἐπί ἕκαστον τῶν ἄλλων πλέον τό ἄθροισμα τῶν ἑξαπλασιων γινομενων τῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνά τρεῖς καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους».

Ἀπόδειξις. Διά νά εὑρεθῆ τό $(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau)^3$ ἀρκεῖ νά ἐκτελεσθῆ ὁ πολλαπλασιασμός τῶν τριῶν παραγόντων

(1) $$(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau)(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau)(\alpha + \beta + \gamma + \ldots + \tau)$$

Τό ἐξαγόμενον τοῦ πολ/σμοῦ (1) θά εἶναι κατά τόν ἐπιμεριστικόν νόμον ἄθροισμα ἀπό γινόμενα τά ὁποῖα εὑρίσκομεν πολλαπλασιάζοντες τυχόν γράμμα τῆς πρώτης παρενθέσεως ἐπί τυ-

* Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι' ἀστερίσκων δύνανται νά παραλειφθοῦν εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

χόν γράμμα τῆς δευτέρας καί τό γινόμενον αὐτῶν ἐπί τυχόν γράμ-μα τῆς τρίτης. Δηλ. θά εἶναι γινόμενα ἐκ τριῶν παραγόντων ἐξ ὧν ὁ πρῶτος θά ἔχη ληφθῆ ἀπό τήν πρώτην παρένθεσιν, ὁ δεύτε-ρος ἀπό τήν δευτέραν καί ὁ τρίτος ἀπό τήν τρίτην. Τά γινόμε-να αὐτά ταξινονοῦμεν εἰς τρεῖς κατηγορίας ὡς ἐξῆς:

1ον) Ἄν λάβωμεν ἀπό τάς τρεῖς παρενθέσεις τό ἴδιο γράμ-μα τότε θά προκύψουν ὅροι τῆς μορφῆς $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^3$ δηλ. οἱ κύβοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν.

2ον) Ἄν λάβωμεν ἀπό τάς δύο παρενθέσεις τό αὐτό γράμμα καί ἀπό τήν τρίτην διάφορον γράμμα, τότε θά προκύψουν ὅροι τῆς μορφῆς: $\alpha\cdot\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\beta\cdot\alpha + \beta\cdot\alpha\cdot\alpha = 3\alpha^2\beta$ (δηλ. τό β ἐκ τῆς τρί-της ἤ τό β ἐκ τῆς δευτέρας ἤ τό β ἐκ τῆς πρώτης καί τό α ἀπό τάς δύο ἄλλας ἑκάστοτε).

3ον) Ἄν λάβωμεν διαφορετικά γράμματα καί ἀπό τάς τρεῖς παρενθέσεις. Τότε θά προκύψουν ὅροι τῆς μορφῆς:

$$\alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\beta + \beta\gamma\alpha + \beta\alpha\gamma + \gamma\alpha\beta + \gamma\beta\alpha = 6\alpha\beta\gamma$$

Ἄλλης μορφῆς ὅροι δέν θά προκύψουν κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (1) διότι κάθε ὅρος θά εἶναι, ὡς εἴδομεν εἰς τήν ἀρχήν, γινόμενον ἐκ τριῶν γραμμάτων καί συνεπῶς θ'ἀνήκη εἰς τήν 1ην ἤ 2αν ἤ 3ην κατηγορίαν. ὅ.ἔ.δ.

Σύμφωνα μέ τόν ἀνωτέρω κανόνα, ὑψοῦται εἰς τόν κύβον καί τυχόν πολυώνυμον.

Παρατήρησις. Ἀναλόγως πρός τήν παρατ. 3 τοῦ θεωρήμ. τῆς §54 δυνάμεθα νά διατυπώσωμεν καί τό ἀνωτέρω θεώρημα συμβολι-κῶς ὡς ἐξῆς:

$$(\Sigma\alpha)^3 = \Sigma\alpha^3 + \Sigma 3\alpha^2\beta + \Sigma 6\alpha\beta\gamma \qquad (2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

157. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις: $(2x^3 + 5x^2 + 6x + 4)^2$
$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2$

158. Τό ἄθροισμα ν ἀριθμῶν εἶναι 120 τό δέ ἄθροισμα τῶν τε-

τραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων εἶναι 4400. Πόσον εἶναι τό ἄθροισμα ὅλων τῶν γινομένων τῶν ἀριθμῶν τούτων ἀνά δύο λαμβανομένων καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους;

159. Νά δειχθῆ ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+3\alpha^2(\beta+\gamma+\delta)+$$
$$+3\beta^2(\alpha+\gamma+\delta)+3\gamma^2(\alpha+\beta+\delta)+3\delta^2(\alpha+\beta+\gamma)+$$
$$+6(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta).$$

160. 'Εάν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ νά δειχθῆ ὅτι τότε

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=3(\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta+\alpha\beta\gamma)$$

161. 'Εάν οἱ διάφοροι τοῦ μηδενός ἀριθμοί $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ πληροῦν τάς ἰσότητας:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1 \quad , \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=1 \quad , \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=1$$

τότε θά πληροῦν καί τήν $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}=0.$

56. **'Αλγεβρικαί ταυτότητες καί σχέσεις.** Καλεῖται ἀ λ γ ε β ρ ι κ ή τ α υ τ ό τ η ς ἤ ἁπλῶς τ α υ τ ό τ η ς κάθε ἰσότης μεταξύ δύο ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀληθεύουσα δ ι' ὅ λ α ς τ ά ς τ ι μ ά ς τῶν γραμμάτων τῶν περιεχομένων εἰς τάς δύο ἀλγεβρικάς παραστάσεις. Π.χ. ταυτότης εἶναι ἡ ἰσότης

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \text{ἤ} \qquad (x+y+5)\omega=x\omega+y\omega+5\omega$$

'Επίσης ὅλαι αἱ ἰσότητες (i) ἕως (iii) τῆς § 52 εἶναι ἀλγεβρικαί ταυτότητες διότι ἀληθεύουν δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν ἐμφανιζομένων εἰς τά δύο μέλη ἑκάστης τῶν ἰσοτήτων τουτων. 'Ενίοτε, ὅταν θέλωμεν νά τονίσωμεν ὅτι πρόκειται περί ταυτότητος, χρησιμοποιοῦμεν ἀντι τοῦ συμβόλου $=$ τῆς ἰσότητος, τό σύμβολον $\equiv$ ὡς ἐκφράζον τήν ἰσότητα μεταξύ τῶν δύο μελῶν τῆς ἀλγεβρικῆς ταυτότητος.

Τά δύο μέλη τῆς ταυτότητος λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι ἀ λ γ ε β ρ ι κ α ί π α ρ α σ τ ά σ ε ι ς ἤ ἀκόμη παραστάσεις ἐκ ταυτότητος ἴ σ α ι.

Πᾶσα ταυτότης $A\equiv B$ λέγεται καί μ ε τ α σ χ η μ α τισ μ ό ς (ἤ μετατροπή) τῆς παραστάσεως Α εἰς τήν ἰσοδύναμον Β. Οὕτω π.χ. ἡ ἰσότης (iii) τῆς §52 εἶναι μία ταυτότης μετασχηματίζουσα τήν διαφοράν δύο τετραγώνων εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπί τήν διαφοράν τῶν βάσεων.

Ἀντιθέτως πρός τήν ταυτότητα, μία ἰσότης μεταξύ δύο ἀλγ. παραστάσεων, ἡ ὁποία δέν ἀληθεύει δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν περιεχομένων εἰς τάς ἀλγεβρ. παραστάσεις ἀλλ'ἀληθεύει μ ό ν ο ν δ ι ά κ α τ α λ λ ή λ ο υ ς τ ι μ ά ς τῶν γραμμάτων τούτων, εἶναι μία ἰ σ ό τ η ς ὑ π ό σ υ ν θ ῆ κ α ς. Δηλ. ὑπό τάς συνθήκας ὅτι αἱ τιμαί τῶν γραμμάτων πρέπει νά προσαρμόζωνται μεταξύ των (νά εἶναι δηλ. κ α τ ά λ λ η λ ο ι) διά ν'ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης. Ἡ ἰσότης ὑπό συνθήκας λέγεται συνήθως σ χ έ σ ι ς διότι συσχετίζει τά γράμματα τῶν δύο παραστάσεων. Λέγεται ἀκόμη καί «ἐ ξ ί σ ω σ ι ς», ὡς θά ἴδωμεν εἰς ἑπόμενον κεφάλαιον. Οὕτω π.χ. ἡ ἰσότης $\alpha + \beta^2 = 3\beta + 1$ εἶναι μία σ χ έ σ ι ς μεταξύ τῶν α,β καί ὄχι ταυτότης. Διότι ἄν τό β ἔχῃ π.χ. τήν τιμήν 2 τότε τό α θά ἔχῃ ὑποχρεωτικῶς τήν τιμήν 3 διά νά ἱκανοποιῆται ἡ ἰσότης. Τέλος, ἡ ὑπό συνθήκας ἰσότης ὁσάκις δέν ὑπάρχει φόβος νά ἐκληφθῇ ὡς ταυτότης καλεῖται, ἁπλῶς, ἰσότης. Λέγομεν π.χ. ὅτι τά γράμματα α,β,γ π λ η ρ ο ῦ ν τ ή ν ἰ σ ό τ η τ α $\alpha^3 + \beta = 2\gamma - 5$ (ἤ σχέσιν ἤ ἐξίσωσιν). Ὅπως βλέπομεν, ἡ ὑπό συνθήκας ἰσότης ἤ σχέσις (ἤ ἐξίσωσις) δεσμεύει τά γράμματα μεταξύ των, ἐνῷ ἡ ταυτότης δέν δημιουργεῖ οὐδένα δεσμόν μεταξύ τῶν γραμμάτων τῶν ὑπαρχόντων εἰς τά μέλη της.

Ὅταν τό ἕνα μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι ἕν μόνον γράμμα, τό δέ ἄλλο μέλος δέν περιέχει τό γράμμα τοῦτο, τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἰσότης ἐκφράζει τό γράμμα τοῦτο σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τῶν γραμμάτων τά ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τό ἄλλο μέλος. Π.χ. ἡ σχέσις $x = 3\alpha + \beta - 1$ ἐκφράζει τό x συναρτήσει τῶν α καί β (ἤ ἀριθμητική τιμή τοῦ x ὁρίζεται ἄν ὁρισθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν α καί β). Ἐπίσης, ἡ σχέσις $y = (3x^2 - \omega)\alpha$ ἐκφράζει τό y συναρτήσει τῶν x ω καί α.

Γενικώτερον, ἡ ἰσότης Α = Β ὅπου Α καί Β ἀλγεβρ. παραστάσεις, μή ἔχουσαι κοινόν γράμμα ἐκφράζει τήν ἀλγεβρικήν παράστασιν Α συναρτήσει τῶν γραμμάτων τῶν ὑπαρχόντων εἰς τήν Β. Π.χ. ἡ $xy = \alpha^2 - \beta + \gamma$ ἐκφράζει τό γινόμενον xy συναρτήσει τῶν α,β,γ ἤ τήν παράστασιν $\alpha^2 - \beta + \gamma$ συναρτήσει τῶν x καί y

Ἡ λέξις σ χ έ σ ι ς ἔχει πάντως καί γενικωτέραν ἔννοιαν καί χρησιμοποιεῖται εἰς τά Μαθηματικά ὄχι μόνον εἰς τήν περίπτωσιν ἀλγεβρικῶν ἰσοτήτων ἀλλά καί εἰς πολλάς ἄλλας περιστάσεις. Οὕτω π.χ. ἄν δύο ποσότητες Α καί Β συνδέονται διά τοῦ συμβόλου $\leqslant$ λέγομεν ὅτι π λ η ρ ο ῦ ν τ ή ν σ χ έ σ ι ν $A \leqslant B$. Ἤ ἄν ὁ ἀκέραιος α διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν β οἱ δύο ἀκέραιοι πληροῦν τήν σχέσιν $\alpha | \beta$ (ἴδε §5), κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

162. Ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων εἶναι ταυτότητες καί ποῖαι εἶναι ἐξισώσεις;

$$(x+1)^2 + 5 = x^2 + 2x + 6 \quad , \quad (x+y)^3 - 3xy(x+y) = x^3 + y^3,$$
$$(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z+x)^2 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + yz + 2zx,$$
$$\sqrt{(x+2)^2} = |x+2| \quad , \quad x + y = 10 .$$

163. Ἀποδείξατε ὅτι

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma) + (\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha) + (\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta) \equiv 0 \ ,$$
$$(\mu^4 - \nu^4) + 2\nu(\mu^3+\nu^3) - (\mu+\nu)^2(\mu-\nu)^2 \equiv 2\mu^2\nu(\mu+\nu) \ ,$$
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2 + (\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2 + (\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2 + (\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2 \equiv 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$$

164. Ἐάν τεθῇ $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$ θά ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$(\tau - \alpha)^2 + (\tau - \beta)^2 + (\tau - \gamma)^2 + \tau^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ ,$$
$$\frac{2\tau(\tau - \alpha)}{\beta\gamma} = 1 + \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$$

165. Ἐάν $x + y + z = \alpha$ καί $x^2 + y^2 + z^2 = \beta^2$ νά ἐκφρασθῇ ἡ

ποσότης $xy+yz+zx$ συναρτήσει τῶν α καί β.

166. Ἐάν $x+y+z=\alpha$, $x^2+y^2+z^2=\beta^2$ καί $x^3+y^3+z^3=\gamma^3$ νά ὑπολογισθῆ τό γινόμενον xyz συναρτήσει τῶν α,β,γ.

167. Ἐάν $\alpha^2+x=y$ καί $\alpha=3x-y$, ποία σχέσις θά ὑπάρχη τότε μεταξύ τῶν γραμμάτων x καί y;

57. Μή ἀρνητικαί ἀλγ. παραστάσεις. Μόνιμοι ἀνισότητες. Ἐάν μία ἀλγεβρική παράστασις, διά πᾶσας τάς πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων της λαμβάνει μόνον θετικάς ἤ μηδενικάς τιμάς τότε ἡ παράστασις αὕτη λέγεται μ η ἀ ρ ν η τ ι κ ή ἀ λ γ ε β ρ ι κ ή π α ρ ά σ τ α σ ι ς (ἤ μή ἀρνητική ποσότης).

Δηλ. ἐάν Α εἶναι μή ἀρνητική ἀλγ. παράστασις τότε ἡ σχέσις

(1) $$A \geqslant 0$$

ἀληθεύει, οἱασδήποτε πραγματικάς τιμάς καί ἄν ἔχουν τά γράμματα ἐξ ὧν ἀπαρτίζεται ἡ Α.

Οὕτω π.χ. ἡ παράστασις $(\alpha-\beta)^2$ προφανῶς οὐδέποτε λαμβάνει ἀρνητικήν τιμήν, οἱασδήποτε πραγματικάς τιμάς καί ἄν ἔχουν τά γράμματα α καί β ἀλλά εἶναι θετική ὅταν $\alpha \neq \beta$ καί μηδέν, ὅταν $\alpha=\beta$ (ἴδε §32 (i) καί (ii). Ὥστε ἡ παράστασις $(\alpha-\beta)^2$ εἶναι μή ἀρνητική καί συνεπῶς ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$$

δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων α καί β.

Ἐπίσης αἱ παραστάσεις:

$$x^2, \quad x^2+y^2, \quad (x-y)^2+(y-z)^2, \quad |x+3|$$

εἶναι μή ἀρνητικαί, μηδενιζόμεναι ἡ μέν πρώτη, μόνον διά $x=0$ ἡ δευτέρα διά $x=0$, $y=0$, ἡ τρίτη διά $x=y=z$, ἡ τετάρτη διά $x=-3$.

Θεώρημα. «Ἐάν τό ἄθροισμα πραγματικῶν καί μή ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό μηδέν τότε ἕκαστος προσθετέος, χωριστά ἰσοῦται μέ τό μηδέν»

'Απόδειξις. Ἔστωσαν οἱ μή ἀρνητικοί ἀριθμοί A_1, A_2,.. A_ν τοιοῦτοι ὥστε:

$$(2) \qquad A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_\nu = 0 .$$

Ἕκαστος τῶν προσθετέων εἶναι ἐξ ὑποθέσεως ἤ θετικός ἤ μηδέν. Ἐάν ὁ A_1 ἦτο θετικός τότε ἐπειδή οἱ ἄλλοι δέν εἶναι ἀρνητικοί, τό ἄθροισμα $A_1 + A_2 + \ldots + A_\nu$ θά ἦτο θετικόν, ὅπερ ἀντίκειται πρός τήν ὑπόθεσιν, (2). Ἄρα ἀποκλείεται ὁ A_1 νά εἶναι θετικός, ἐπομένως δέν ἀπομένει παρά νά εἶναι $A_1 = 0$. Ἡ αὐτή ἀπόδειξις ἰσχύει καί δι'ὅλους τούς ἄλλους, δηλ. κατά σειράν θά εἶναι $A_2 = 0$, $A_3 = 0$,..., $A_\nu = 0$.

Τό ἀνωτέρω θεώρημα ἐφαρμόζεται ἀμέσως ὅταν τό ἄθροισμα μή ἀρνητικῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἰσοῦται (διά καταλλήλους πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων των) μέ μηδέν. Οὕτω π.χ. ἐάν δίδεται ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(x - 3)^2 + (x + y - 1)^2 + (x + y + \omega)^2 = 0$$

ὅπου x, y, ω πραγματικοί ἀριθμοί, τότε συνάγομεν ἀμέσως ὅτι $x - 3 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + y + \omega = 0$ καί ἐξ αὐτῶν εὑρίσκομεν $x = 3$, $y = -2$, $\omega = -1$.

Μία ἀλγεβρική παράστασις λέγεται μονίμως θετική ὅταν λαμβάνει μ ό ν ο ν θ ε τ ι κ ά ς τ ι μ ά ς, οἱασδήποτε πραγματικάς τιμάς καί ἄν λάβουν τά γράμματα αὐτῆς. Ἀναλόγως ὁρίζεται καί ἡ μονίμως ἀρνητική ἀλγ. παράστασις.

Οὕτω π.χ. αἱ ἀλγ. παραστάσεις $x^2 + 1$, $(x - y)^2 + 3$, $x^2 + y^2 + \omega^2 + 0{,}2$ εἶναι μονίμως θετικαί ἐνῶ αἱ $-7 - (3x + y)^2$ $- |x - 3| - |x + 5|$ εἶναι μονίμως ἀρνητικαί.

Μία ἀνισότης $A > B$ συνδέουσα δύο ἀλγ. παραστασεις A καί B λέγεται μόνιμος ἀνισότης ὅταν ἰσχύη δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν ὑπαρχόντων εἰς τάς δύο ἀλγ. παραστάσεις A καί B.

'Ομοίως, ἡ σχέσις $A \geqslant B$ λέγεται μόνιμος ὅταν ἰσχύη δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν δύο παραστάσεων Α καί Β.

Προφανῶς ἵνα ἡ $A > B$ εἶναι μόνιμος, πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ διαφορά Α - Β νά εἶναι μονίμως θετική παράστασις. 'Επίσης ἵνα μονίμως ἰσχύη ἡ σχέσις $A \geqslant B$ πρέπει καί ἀρκεῖ ἡ Α - Β νά εἶναι μή ἀρνητική ἀλγ. παράστασις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

168. Νά εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x , y , ω ὅταν ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$(2x-4)^2+(x+y-5)^4+(x+y+\omega-1)^6=0$$

ἤ ἡ ἰσότης $|3x-6|+|x+2y-8|+|x+y+\omega+7|=0$

ἤ ἡ ἰσότης $x^2+y^2+\omega^2=0$

169. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $|x-5|+|x-7|+|x-8|$ εἶναι μονίμως θετική ἐνῶ ἡ $|x-5|+|y-7|+|\omega-8|$ εἶναι μή ἀρνητική.

170. 'Εάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$, α, πληροῦν τήν σχέσιν

$$|x_1-\alpha|+|x_2-\alpha|+|x_3-\alpha|+\ldots+|x_\nu-\alpha|=0$$

τότε θά πληροῦν καί τήν

$$|x_1-x_2|+|x_2-x_3|+|x_3-x_4|+\ldots+|x_{\nu-1}-x_\nu|=0$$

58. Χρήσιμοι μετασχηματισμοί καί ἀνισότητες.

i) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

Δηλ. τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἐκφράζεται τῇ βοηθεία τοῦ ἀθροίσματος καί τοῦ γινομένου τῶν δύο ἀριθμῶν ἤ τῆς διαφορᾶς καί τοῦ γινομένου.

ii) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha\right.$

'Απόδειξις: Ἔχομεν κατά σειράν:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma)$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha^2+\beta^2+\beta^2+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+(\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)+(\gamma^2+\alpha^2-2\alpha\gamma)\right]=$$
$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

iii) $$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$$

iv) $$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

«Τό ἄθροισμα τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν, ἰσοῦται πρός τόν κύβον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν μεῖον τρεῖς φοράς τό γινόμενόν των ἐπί τό ἄθροισμά των».

Διά τῆς ταυτότητος αὐτῆς ἐκφράζεται τό ἄθροισμα τῶν κύβων δύο ἀριθμῶν συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος καί τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων.

Ἀπόδειξις εὔκολος (ἴδε §52, vi)

v) $$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

Ὁ μετασχηματισμός οὗτος μετατρέπει τό ἄθροισμα δύο κύβων εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων παραστάσεων, προκύπτει δέ ἐκ τοῦ προηγουμένου ἄν ἐξαχθῇ εἰς τό β΄ μέλος του τό α + β ἐκτός παρενθέσεως.

vi) $$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$

Δηλ. ἡ διαφορά δύο κύβων ἐκφράζεται συναρτήσει τῆς διαφορᾶς και τοῦ γινομένου τῶν βάσεων.

Ἀπόδειξις εὔκολος.

vii) $$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Δηλ. ἡ διαφορά δύο κύβων μετασχηματίζεται εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων παραστάσεων.

Ἀπόδειξις, ὅπως ἡ τοῦ (v).

viii) $$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

Ἀπόδειξις. Ἐάν ἐκτελέσωμεν τάς πράξεις εἰς τό δεύτερον μέλος λαμβάνομεν τό πρῶτον. Ἐκ τοῦ δευτέρου μεταβαίνομεν ἐπίσης εἰς τό τρίτον δυνάμει τῆς (ii).

'Αλλά καί ἐκ τοῦ πρωτου μέλους δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς τό δεύτερον χρησιμοποιοῦντες δύο φοράς τήν ταυτότητα IV ὡς ἑξῆς

$$(\alpha^3+\beta^3)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=$$
$$=\left\{(\alpha+\beta)^3+\gamma^3\right\}-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3\alpha\beta\gamma=$$
$$=\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]^3-3(\alpha+\beta)\gamma\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3\alpha\beta\gamma=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha+\beta)\gamma\right]-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha+\beta)\gamma-3\alpha\beta\right]=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma-3\alpha\gamma-3\beta\gamma-3\alpha\beta)=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha).$$

ix) $\alpha^2+\beta^2\geqslant 2\alpha\beta$ ὅπου α,β τυχόντες πραγματικοί.

'Απόδειξις: Ἡ διαφορά τοῦ πρώτου μέλους μεῖον τό δεύτερον $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2$ δηλ. ποσότης μή ἀρνητική. Τό = ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha=\beta$.

x) $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2\geqslant\alpha\beta$, ὅπου α,β τυχόντες πραγματικοί.

'Απόδειξις: $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\alpha\beta=\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{4}-\alpha\beta$

$$=\frac{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}{4}=\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\geqslant 0$$

Τό = ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha=\beta$.

xi) $x^2+x+1>0$ ὅπου x τυχών πραγματικός

'Απόδειξις: Τό πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος εἶναι μονίμως θετική παράστασις διότι γράφεται: $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$.

xii) $x^2-x+1>0$ ὅπου x τυχων πραγματικός

'Απόδειξις. $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΤΙΝΑ ΑΝΙΣΟΤΗΤΩΝ: 1) «Νά δειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$2\cdot4\cdot6\cdot8\ \ldots\ (2\nu)<(\nu+1)^\nu \qquad \nu>1 \text{ ».}$$

'Απόδειξις: Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες ἀπό τούς ἄκρους (δηλ. 1ος καί τελευταῖος, δεύτερος καί προτελευταῖος...) ἔχουν τό ἴδιο ἄθροισμα

$$2+2\nu=2(\nu+1)\quad,\quad 4+(2\nu-2)=2(\nu+1)$$
$$6+(2\nu-4)=2(\nu+1)\qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Χρησιμοποιοῦντες τήν (X) λαμβάνομεν

$$(1)\qquad \begin{aligned} 2\cdot 2\nu &< (\nu+1)^2 \\ 4\cdot(2\nu-2) &< (\nu+1)^2 \\ 6\cdot(2\nu-4) &< (\nu+1)^2 \\ &\dots\dots\dots \\ (2\nu-4)\cdot 6 &< (\nu+1)^2 \\ (2\nu-2)\cdot 4 &< (\nu+1)^2 \\ 2\nu\cdot 2 &< (\nu+1)^2 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζωμεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας (1) καί μάλιστα τά πρῶτα μέλη «κατά στῆλας» καί λαμβάνομεν

$$[2\cdot 4\cdot 6\dots(2\nu)]\cdot[2\nu(2\nu-2)\dots 6\ 4\ 2] < \left\{(\nu+1)^2\right\}^\nu \quad \text{ἤ}$$

$$\left\{2\cdot 4\cdot 6\dots(2\nu-2)\cdot(2\nu)\right\}^2 < \left\{(\nu+1)^\nu\right\}^2 \text{ ὁπότε θά εἶναι καί}$$

$$2\cdot 4\cdot 6\dots(2\nu) < (\nu+1)^\nu$$

διότι ἐκ δύο θετικῶν, ὁ ἔχων τό μικρότερον τετράγωνον εἶναι μικρότερος (ἴδε σελ.87 Πόρισμα 2ον),

Σημείωσις. Ἐκ τῶν σχέσεων (1) δυνατόν ἡ μία νά εἶναι ἰσότης καί τοῦτο συμβαίνει ἄν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος, ὅστις πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν ἑαυτόν του. Τοῦτο ὅμως δέν μεταβάλλει τήν ἀποδεικτέαν ἀνισότητα.

2) « Ἐάν α_1, α_2,... α_ν πραγματικοί ἀριθμοί καί παραστήσωμεν μέ $\Sigma\alpha_\kappa\alpha_\lambda$ τό ἄθροισμα τῶν γινομένων των ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους καί μέ $\Sigma\alpha_\rho^2$ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν τούτων, νά δειχθῇ ὅτι

$$\Sigma\alpha_\kappa\alpha_\lambda \leqslant \frac{\nu-1}{2}\Sigma\alpha_\rho^2 \text{ »}.$$

Ἀπόδειξις. Ἄν γράψωμεν ὅλα τά διπλάσια γινόμενα τῶν α_1, α_2,...α_ν ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους καί δι' ἕκαστον τούτων ἐφαρμόσωμεν τήν (ix) θά ἔχωμεν τάς σχέσεις:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_1\alpha_2 &\leqslant \alpha_1^2+\alpha_2^2 \\ 2\alpha_1\alpha_3 &\leqslant \alpha_1^2+\alpha_3^2 \\ &\dots\dots\dots \\ 2\alpha_1\alpha_\nu &\leqslant \alpha_1^2+\alpha_\nu^2 \\ 2\alpha_2\alpha_3 &\leqslant \alpha_2^2+\alpha_3^2 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

. . . .

$$2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu \leqslant \alpha_{\nu-1}^2 + \alpha_\nu^2$$

Το ἄθροισμα των πρώτων μελῶν ὅλων τῶν ἀνωτερω σχέσεων εἶναι $2\Sigma\alpha_\kappa\alpha_\lambda$ τό δέ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι

$$(\nu - 1)\alpha_1^2 + (\nu - 1)\alpha_2^2 + \ldots + (\nu - 1)\alpha_\nu^2 = (\nu - 1)\Sigma\alpha_\rho^2$$

Διότι εἰς τά δεύτερα μέλη, ἕκαστον γράμμα παρουσιάζεται συνοδευόμενον ἀπό ἕκαστον τῶν ἄλλων δηλαδή $\nu - 1$ φοράς

Π.χ. τό α_1 παρουσιάζεται μίαν φοράν μαζί μέ τό α_2, μίαν μέ τό α_3, μίαν μέ τό α_4... μίαν μέ τό α_ν δηλ. τόσας φοράς, ὅσα εἶναι τά ὑπόλοιπα γράμματα. Τό αὐτό συμβαίνει καί διά τό α_2, διά τό α_3,... διά τό α_ν

Κατόπιν τούτου διά προσθέσεως τῶν (2) κατά μέλη προκύπτει ἡ ἀποδεικτέα σχέσις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

171. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$(x + \alpha)(x^2 - \alpha x + \alpha^2) - (x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

$$(x + \alpha)(x - \alpha)(x^2 - \alpha x + \alpha^2)(x^2 + \alpha x + \alpha^2)$$

172. Ἐάν $x + y = 5$ καί $xy = 6$ εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

α) $x^2 + y^2$ β) $x^3 + y^3$ γ) $(x - y)^2$ δ) $x^2 + y^2 + xy$

173. Εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως $x^4 + y^4 + x^2y^2$ ἐάν δίδεται ὅτι $x + y = 3$ καί $xy = 1$

174. Ἐάν $x - y = 1$ καί $x^2 + y^2 = 4$, εὕρετε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῆς παραστάσεως

$$x^3 - y^3 + (x + y)^2$$

175. Ἐάν ἰσχύουν αἱ ἰσότητες $x + y + z = \alpha$, $xy + yz + zx = \beta$ $xyz = \gamma$ εὕρετε τήν τιμήν τῆς παραστάσεως $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ συναρτήσει τῶν α, β καί γ.

176. Ἐάν $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ νά δειχθῇ ὅτι τότε

$$\text{ἤ} \quad x + y + z = 0 \quad \text{ἤ} \quad x = y = z$$

177. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y, z πληροῦν τήν σχέσιν

$$(y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2 = (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2$$

δείξατε ότι τότε $x = y = z$

178. Δείξατε ότι ή άλγ. παράστασις

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2yz-y^2zx-z^2xy$$

είναι μή άρνητική. Πότε αύτη ίσοῦται μέ μηδέν;

179. Δείξατε ότι ή άλγ. παράστασις

$$x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-2x^2yz-2y^2zx-2z^2xy$$

είναι μή άρνητική.

180. Δείξατε ότι έκάστη τῶν έπομένων παραστάσεων είναι μή άρνητική:

$$(x-y)(x-z)+(y-z)(y-x)+(z-x)(z-y)$$
$$(x+y)(x-z)+(y+z)(y-x)+(z+x)(z-y)$$

181. Άν α πραγματικός, δείξατε ότι είναι

$$3(1+\alpha^2+\alpha^4) \geqslant (1+\alpha+\alpha^2)^2$$

182. Διά τυχόντας πραγματικούς x,y,z δείξατε ότι ισχύει

$$x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$$

183. Δείξατε ότι τό άθροισμα δύο άντιστρόφων θετικῶν άριθμῶν είναι πάντοτε μεγαλύτερον ή ίσον τοῦ 2.

√ 184. Εάν ν φυσικός άριθμός καί ω ~~πραγματικός~~ θετικός δείξατε ότι

$$\omega^{2\nu}+\omega^{2\nu-1}+\omega^{2\nu-2}+\ldots+\omega^2+\omega+1 \geqslant (2\nu+1)\omega^\nu$$

185. Εάν α,β,γ θετικοί νά δειχθῆ ότι

$$\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha) \geqslant 6\alpha\beta\gamma$$

√ 186. Βάσει τῆς ταυτότητος

$$\frac{x^2+k^2}{2} = \left(\frac{x+k}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-k}{2}\right)^2$$

δείξατε ότι άν x καί k είναι άκέραιοι άμφότεροι άρτιοι ή άμφότεροι περιττοί, τότε ό άριθμός

$$\frac{x^2+k^2}{2}$$

ίσοῦται πρός τό άθροισμα τῶν τετραγώνων δύο άκεραίων.

187. Εάν x, y άκέραιοι ό δέ άριθμός x^2+2y είναι τέλειον τετράγωνον άκεραίου τινος k δείξατε ότι τότε οί x καί k είναι άμφότεροι άρτιοι ή άμφότεροι περιττοί καί ότι ό άκέραιος x^2+y ίσοῦται μέ τό άθροισμα δύο άκεραίων τετραγώνων.

188. Εάν ύφίστανται αί σχέσεις $\alpha^2+\beta^2=1$ καί $x^2+y^2=1$

τότε θά ὑφίσταται καί ἡ $\alpha x + \beta y \leqslant 1$.

189. Ἐάν $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ τότε θά εἶναι $\alpha x + \beta y + \gamma z \leqslant 1$. Γενικῶς, ἐάν $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_\nu^2 = 1$ καί $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2 = 1$ τότε θά εἶναι καί

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu \leqslant 1$$

190. Δείξατε ὅτι $\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 + \alpha^2\beta^2 \geqslant \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)$ ὅπου α, β, γ τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί.

191. Ἐάν $x + y + z > 0$ δείξατε ὅτι τότε

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz$$

192. Ἐάν $\alpha > \beta > 0$ δείξατε ὅτι $\alpha^3 - \beta^3 > (\alpha - \beta)^3$

193. Ἐάν x, y, z πραγματικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $x < y + z$, $y < x + z$ $z < x + y$ δείξατε ὅτι θά εἶναι

$$\frac{2}{3}(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) > x^3 + y^3 + z^3 + xyz.$$

59. Ταυτότης τοῦ Langrange διά δύο τριάδας ἀριθμῶν:

$$(1) \quad \begin{aligned} &(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \\ &= (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 \end{aligned}$$

Ἀπόδειξις. Τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ταυτότητος (1) μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων λαμβάνει τήν μορφήν

$$\begin{aligned} &\alpha^2x^2 + \alpha^2y^2 + \alpha^2z^2 + \beta^2x^2 + \beta^2y^2 + \beta^2z^2 + \gamma^2x^2 + \gamma^2y^2 + \gamma^2z^2 - \\ &- \alpha^2x^2 - \beta^2y^2 - \gamma^2z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\alpha\gamma xz - 2\beta\gamma yz = \\ &= (\alpha^2y^2 - 2\alpha\beta xy + \beta^2x^2) + (\beta^2z^2 - 2\beta\gamma zy + \gamma^2y^2) + \\ &+ (\gamma^2x^2 - 2\alpha\gamma xz + \alpha^2z^2) = (\alpha y - \beta x)^2 + (\beta z - \gamma y)^2 + (\gamma x - \alpha z)^2 = \text{B}' \text{ μέλος} \end{aligned}$$

Φθάνομεν δηλ. εἰς τό δεύτερον μέλος διά διαδοχικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ πρώτου μέλους.

Θά ἠδυνάμεθα ἐπίσης ν'ἀναπτύξωμεν καί τό πρῶτον καί τό δεύτερον μέλος καί νά τά διατάξωμεν ὡς ἀκεραία πολυώνυμα 2ου βαθμοῦ ὡς πρός x, y, z ὁπότε θά κατελήγαμεν καί ἀπό τά δύο μέλη εἰς τό ἴδιο ἀκέραιον πολυώνυμον:

$$(\beta^2 + \gamma^2)x^2 + (\gamma^2 + \alpha^2)y^2 + (\alpha^2 + \beta^2)z^2 - 2\alpha\beta xy - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha xz$$

60. **Τό σύμβολον τῆς δευτεροταξίου ὁριζούσης.** Διάφοροι Μαθηματικοί τύποι γράφονται κατά τρόπον πλέον εὐμνημόνευτον καί κομψόν ἄν πᾶσαν διαφοράν τῆς μορφῆς $\alpha\beta' - \alpha'\beta$ παραστήσωμεν δια τοῦ συμβόλου

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}$$

ὅπερ λέγεται ὁρίζουσα δευτέρας τάξεως καί ἀποτελεῖται ἀπό τέσσαρας ἀριθμούς γεγραμμένους εἰς δύο γραμμάς (ὁριζοντίας) καί δύο στήλας (κατακορύφους).

Ὥστε ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta$$

Οὕτω π.χ. $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 1\cdot 5 = 13 \quad , \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -x & -y \end{vmatrix} = 2y + x$ κ.α.κ.

Τό δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange γράφεται μέ τήν βοήθειαν τῶν ὁριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ x & y \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ x & z \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ y & z \end{vmatrix}^2$$

ἤτοι ὡς ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τριῶν ὁριζουσῶν προκυπτουσῶν ἀπό τάς στήλας τοῦ πίνακος

$$\begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & z \end{Bmatrix}$$

λαμβανομένας ἀνά δύο.

61. **Γενικωτέρα ταυτότης τοῦ Lagrange.** Ἀνάλογος ταυτότης πρός τήν τῆς §59 ἰσχύει καί ὅταν δοθῦν δύο ὁμάδες ἐκ ν γραμματων. Ἀναφέρομεν ἐδῶ τήν περίπτωσιν δύο ὁμάδων ἐκ τεσσάρων γραμμάτων:

$$(1) \qquad \begin{Bmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ x & y & z & \omega \end{Bmatrix}$$

Ἡ ἀντίστοιχος ταυτότης τοῦ Lagrange εἶναι

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+z^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega)^2=$$

$$(2)\quad =\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ x & y\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ x & z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\alpha & \delta\\ x & \omega\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ y & z\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\beta & \delta\\ y & \omega\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}\gamma & \delta\\ z & \omega\end{vmatrix}^2$$

Δηλαδή καί πάλιν, τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γραμμάτων τῆς πρώτης γραμμῆς τοῦ (1) ἐπί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γραμμάτων τῆς δευτέρας γραμμῆς τοῦ (1) μεῖον τό τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τῶν ἀντιστοίχων γραμμάτων τῶν δύο γραμμῶν, ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὁριζουσῶν αἵτινες προκύπτουν ἀπό τάς στῆλας τοῦ πίνακος (1) λαμβανομένας ἀνά δύο καθ'ὅλους τούς δυαντούς τρόπους.

Ἡ ἀπόδιεξις τῆς (2) γίνεται ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τριῶν γραμμάτων (δευτέρα μέθοδος) ἡ δέ γενίκευσις διά δύο ὁμάδας ἐκ ν γραμμάτων ἑκάστη εἶναι εὐνόητος.

62. Ἀνισότης τοῦ Schwarz. Οὕτω λέγεται ἡ μόνιμος σχέσις

$$(1)\qquad (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)\geqslant(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

ἡ προκύπτουσα ἐκ τῆς παρατηρήσεως ὅτι τό 2ον μέλος τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange εἶναι πάντοτε μή ἀρνητική ποσότης.

Οὕτω π.χ. ἐκ τῆς ταυτότητος (1) καί τῆς §59 ἕπεται ἀμέσως ἡ

$$(2)\qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2)\geqslant(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

ἥτις εἶναι μερική περίπτωσις τῆς (1), διά $\nu=3$.

Ἐπίσης ἐκ τῆς ταυτότητος (2) τῆς §61 ἕπεται ἀμέσως ἡ

$$(3)\qquad (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+z^2+\omega^2)\geqslant(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega)^2$$

ἥτις εἶναι μερική περίπτωσις τῆς (1), διά $\nu=4$.

Ἡ γενική μορφή (1) τῆς ἀνισότητος τοῦ Schwarz προκύπτει ἐκ τῆς γενικῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange διά δύο ὁμάδας ἐκ ν γραμμάτων, ἀλλά δύναται ν'ἀποδειχθῆ καί ἀνεξαρτήτως ὡς θά ἴδωμεν εἰς τό Κεφ. VI, §91.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

194. Ἐάν μεταξύ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha,\beta,\gamma,x,y,z$, ὅπου α,β,γ διάφοροι τοῦ μηδενός, ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(x^2+y^2+z^2) = (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2$$

δείξατε ὅτι τότε θά ἰσχύη:

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$$

195. Ὁμοίως ἐκ τῆς σχέσεως $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+z^2+\omega^2) = (\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta\omega)^2$ ἕπεται ὅτι

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}=\frac{\omega}{\delta}$$

ὅπου ὑποτίθεται ὅτι οἱ παρ/σταί εἶναι $\neq 0$.

196. Ἐάν ἰσχύουν αἱ τρεῖς ἰσότητες

$$\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2$$
$$\beta^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2$$
$$\alpha\beta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu$$

δείξατε ὅτι ἐάν πολ/σωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς πρώτης ἐπί β^2 τῆς δευτέρας ἐπί α^2 καί τῆς τρίτης ἐπί $-2\alpha\beta$ καί κατόπιν τάς προσθέσωμεν κατά μέλη θά προκύψη ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$$

ὅπου οἱ παρ/σταί ὑποτίθενται $\neq 0$).

63. Διαίρεσις διά μονωνύμου ἤ πολυωνύμου. α) Τό πηλίκον δύο μονωνύμων παρίσταται διά κλάσματος ἔχοντος ἀριθμητήν τόν διαιρετέον καί παρονομαστήν τόν διαιρέτην. Ἐπειδή εἰς τό κλάσμα τοῦτο δέν περιέχονται τά σύμβολα + ἤ − διά τοῦτο τό πηλίκον δύο μονωνύμων εἶναι πάλιν μονώνυμον

Τό πηλίκον δύο ἀκεραίων μονωνύμων δέν εἶναι ἐν γένει ἀκέραιον μονώνυμον. Οὕτω π.χ. τό πηλίκον τοῦ $\frac{3}{4}x^2y$ διά τοῦ $7xy^2\omega$ εἶναι τό ἀλγεβρ. κλάσμα $\frac{3x^2y}{28xy^2\omega}$ τό ὁποῖον δέν εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον δύναται ὅμως ν'ἁπλοποιηθῇ (ἐφ'ὅσον τά δύο μονώνυμα ἔχουν γράμματα τινά κοινά) καί νά γραφῇ $\frac{3x}{28y\omega}$.

Δυνατόν ὅμως μετά τήν ἁπλοποίησιν νά μή παραμείνη εἰς τόν παρ/στήν τοῦ κλάσματος οὐδέν γράμμα ὁπότε τό πηλίκον τῶν δύο μονωνύμων εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον. Διά νά συμβῇ τοῦτο, προφανῶς, πρέπει καί ἀρκεῖ: «ὁ διαιρετέος νά περιέχη ὅλα τά γράμματα ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ὁ διαιρέτης καί ἕκαστον γράμμα εἰς βαθμόν τουλάχιστον ἴσον πρός ἐκεῖνον τόν ὁποῖον ἔχει τό γράμμα τοῦτο εἰς τόν διαιρέτην».

β) Διαίρεσις πολυωνύμου διά μονωνύμου. Ἐπειδή ἀλγεβρ. ἄθροισμα διαιρεῖται δι' ἀριθμοῦ, ἄν ἕκαστος τῶν ὅρων του διαιρεθῇ διά τοῦ ἀριθμοῦ τούτου, ἕπεται, κατ' ἀναλογίαν, ὅτι πολυώνυμον διαιρεῖται διά μονωνύμου, ἄν διαιρεθῇ ἕκαστος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου διά τοῦ μονωνύμου. Ὥστε τό πηλίκον θά εἶναι καί αὐτό πολυώνυμον, ἀλλ' ὄχι ἐν γένει ἀκέραιον.

Τό πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου, δέν εἶναι ἐν γένει ἀκέραιον πολυώνυμον διότι δέν ἀπαρτίζεται ἐν γένει ἀπό ἀκέραια μονώνυμα. Οὕτω π.χ.

$$\frac{2x^3-4\alpha^2x^2+2\alpha x-4}{3\alpha x^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{x}{\alpha}-\frac{4\alpha}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x}-\frac{4}{3\alpha x^2}$$

Εἴς τινας ὅμως περιπτώσεις τό πηλίκον δυνατόν νά εἶναι καί ἀκέραιον πολυώνυμον, ὅπως π.χ.:

$$\frac{25x^2y^2-10xy^4+20x^2y}{15xy}=\frac{5}{3}xy-\frac{2}{3}y^3+\frac{4}{3}x$$

γ) Τό πηλίκον δύο οἱωνδήποτε πολυωνύμων εἶναι ἐν τῇ γενικῇ περιπτώσει μία κλασματική ἀλγεβρική παράστασις μέ ἀριθμητήν τό διαιρετέον καί παρονομαστήν τόν διαιρέτην.

Τό πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι ἐν γένει μία ρητή, κλασματική ἀ λ γ ε β ρ ι κ ή π α ρ ά σ τ α σ ι ς ἤ συντόμως ρ η τ ό ν κ λ ά σ μ α. Δυνατόν ὅμως νά συμβῆ ὥστε ἡ παράστασις αὐτή νά ἰσοῦται πρός ἀκέραιον πολυώνυμον. Οὕτω π.χ. τό πηλίκον τοῦ $9x^2-4$ διά $3x+2$ εἶναι ἴσον μέ

$$\frac{9x^2-4}{3x+2}=\frac{(3x+2)(3x-2)}{3x+2}=3x-2$$

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν καθ'ἥν τό πηλίκον τῶν δύο ἀκερ. πολυωνύμων ἰσοῦται πρός ἀκέραιον πολυώνυμον, ἡ διαίρεσις λέγεται τ ε λ ε ί α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

197. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

$(15\alpha^4\beta-12\alpha^3\beta^2-9\alpha^2\beta^3+6\alpha^2\beta^2):3\alpha\beta$

$(8\alpha^4\beta^2-6\alpha^3\beta^3+4\alpha^2\beta^4-2\alpha^2\beta^2):-2\alpha^2\beta^2$

$(x^{\mu+2}y^{\nu}+2x^{\mu+1}y^{\nu+1}+x^{\mu}y^{\nu+2}):x^{\mu}y^{\nu}$

$(4x^3-2x^2-5x):(4x^2-2x-5)$

$(x^4-4\alpha^2x^2+\alpha^4):(x^2-\alpha^2)$

$(x^6-3x^4+3x^2-1):(x^4-2x^2+1)$

64. **Ἀξιοσημείωτοι διαιρέσεις.** Αἱ κάτωθι τέλειαι διαιρέσεις ἀπαντοῦν συχνά εἰς τήν Ἄλγεβραν καί εἶναι χρήσιμοι εἰς πολλά ζητήματα:

i) «Διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν καί διά τυχόν $x\neq\alpha$ ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$\frac{x^{\nu}-\alpha^{\nu}}{x-\alpha}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2+\ldots+x\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1}\text{ »}.$$

Δηλαδή ἡ διαίρεσις $x^{\nu}-\alpha^{\nu}:x-\alpha$ εἶναι τελεία καί τό πηλίκον σύγκειται ἀπό μονώνυμα μέ συντελεστήν $+1$ καί βαθμοῦ $\nu-1$ ὡς πρός τά γράμματα α καί x

Ἀπόδειξις: Ἄς καλέσωμεν Π τήν παράστασιν

$$x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+\ldots+x\alpha^{\nu-2}+\alpha^{\nu-1}$$

Θά ἔχωμεν:

(1) $$x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\alpha + x^{\nu-3}\alpha^2 + \ldots + x\alpha^{\nu-2} + \alpha^{\nu-1} = \Pi$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) ἐπί x λαμβάνομεν

$$x^{\nu} + x^{\nu-1}\alpha + x^{\nu-2}\alpha^2 + \ldots + x^2\alpha^{\nu-2} + x\alpha^{\nu-1} = \Pi x$$

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τόν ἀριθμόν α^{ν}:

$$x^{\nu} + x^{\nu-1}\alpha + x^{\nu-2}\alpha^2 + \ldots + x^2\alpha^{\nu-2} + x\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu} = \Pi x + \alpha^{\nu}$$

Εἰς τό πρῶτον μέλος ἐξάγομεν τό α ἐκτός παρενθέσεως ἀπό ὅλους τούς ὅρους οἱ ὁποῖοι περιέχουν τόν α:

$$x^{\nu} + \alpha(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\alpha + \ldots + x^2\alpha^{\nu-3} + x\alpha^{\nu-2} + \alpha^{\nu-1}) = \Pi x + \alpha^{\nu}$$

Τό ἐν παρενθέσει πολυώνυμον εἶναι τό Π (λόγω τῆς (1)), ὥστε ἔχομεν:

$$x^{\nu} + \alpha\,\Pi = \Pi x + \alpha^{\nu} .$$ Ἐπομένως

$$x^{\nu} - \alpha^{\nu} = \Pi x - \alpha\,\Pi , \quad \text{ἤτοι:} \quad x^{\nu} - \alpha^{\nu} = \Pi(x - \alpha)$$

Ἄρα, $\dfrac{x^{\nu} - \alpha^{\nu}}{x - \alpha} = \Pi$ καί ἀντικαθιστῶντες τό Π διά τοῦ ἴσου του ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τήν ἀποδεικτέαν ἰσότητα

$$\frac{x^{\nu} - \alpha^{\nu}}{x - \alpha} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\alpha + \ldots + x\alpha^{\nu-2} + \alpha^{\nu-1}$$

ἰσχύουσαν προφανῶς δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ x πλήν τῆς τιμῆς x = α δι'ἥν τό πρῶτον μέλος καθίσταται ἀόριστον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\frac{x^4 - \alpha^4}{x - \alpha} = x^3 + x^2\alpha + x\alpha^2 + \alpha^3 ,$$

$$\frac{x^5 - 2^5}{x - 2} = x^4 + x^3 2 + x^2 2^2 + x\cdot 2^3 + 2^4 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

$$\frac{x^6 - 1}{x + 1} = \frac{x^6 - (1)^6}{x - (-1)} = x^5 + x^4(-1) + x^3(-1)^2 + x^2(-1)^3 + x(-1)^4 + (-1)^5 =$$

$$= x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$$

ii) Διά κάθε φυσικόν ἀριθμον ν καί διά τυχόν $x \neq 1$ ἰσχύει ἡ ἰσότης:

$$\frac{x^\nu - 1}{x - 1} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + x^{\nu-3} + \ldots + x + 1$$

Πρός ἀπόδειξιν ταύτης ἀρκεῖ εἰς τήν (i) νά τεθῆ $\alpha = 1$.

iii) Διά κάθε περιττόν φυσικόν ἀριθμόν ν καί κάθε $x \neq -\alpha$ ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$\frac{x^\nu + \alpha^\nu}{x + \alpha} = x^{\nu-1} - x^{\nu-2}\alpha + x^{\nu-3}\alpha^2 - \ldots - x\alpha^{\nu-2} + \alpha^{\nu-1}$$

Ἐνταῦθα, τά σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου εἶναι ἐναλλάξ + καί − καί μάλιστα, + ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι ἄρτιος καί − ὅταν ὁ ἐκθέτης τοῦ α περιττός.

Ἀπόδειξις: Σύμφωνα μέ τήν ἰσότητα (i) θά ἔχωμεν

$$(2) \quad \frac{x^\nu - \beta^\nu}{x - \beta} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}\beta + x^{\nu-3}\beta^2 + \ldots + x\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}$$

ὅπου β τυχών ἀριθμός.

Θέτομεν εἰς την (2) ὅπου β τό −α ὁπότε λαμβάνομεν

$$(3) \quad \frac{x^\nu - (-\alpha)^\nu}{x - (-\alpha)} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}(-\alpha) + x^{\nu-3}(-\alpha)^2 + \ldots + x(-\alpha)^{\nu-2} + (-\alpha)^{\nu-1}$$

Ἐπειδή ὁ ν εἶναι περιττός ἀκέραιος, ὁ ν − 1 ἄρτιος, ὁ ν − 2 περιττός κ.ο.κ. ἕπεται ὅτι θά ἔχωμεν

$$(-\alpha)^\nu = -\alpha^\nu \quad , \quad (-\alpha)^{\nu-1} = \alpha^{\nu-1} \quad , \quad (-\alpha)^{\nu-2} = -\alpha^{\nu-2} \text{ κ.ο.κ.}$$

καί ἑπομένως ἡ (3) γράφεται

$$\frac{x^\nu + \alpha^\nu}{x + \alpha} = x^{\nu-1} - x^{\nu-2}\alpha + x^{\nu-3}\alpha^2 - \ldots - x\alpha^{\nu-2} + \alpha^{\nu-1} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

$$\frac{x^3 + \alpha^3}{x + \alpha} = x^2 - x\alpha + \alpha^2 ,$$

$$\frac{x^5 + y^5}{x + y} = x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - xy^3 + y^4$$

iv) **Διά κάθε περιττόν,** φυσικόν ἀριθμόν ν καί κάθε $x \neq -1$

ἰσχύει ἡ ἰσότης

$$\frac{x^{\nu}+1}{x+1}=x^{\nu-1}-x^{\nu-2}+x^{\nu-3}-x^{\nu-4}+\ldots-x+1$$

Ἐφαρμογαί τῶν ἀνωτέρω: 1) «Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀκέραιος $2^{4\nu}-1$ εἶναι διαιρετός διά 15».

Ἀπόδειξις: Ὁ ἀριθμός $2^{4\nu}-1$ γράφεται καί $(2^4)^{\nu}-1=$ $=16^{\nu}-1$ καί προκύπτει ἀπό τό διώνυμον $x^{\nu}-1$ ὅταν $x=16$. Θεωροῦμεν λοιπόν τήν ἐκ τῆς (ii) ἀπορρέουσαν ταυτότητα

$$x^{\nu}-1\equiv(x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\ldots+x+1)$$

καί θέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη της ὅπου x τόν 16 ὁπότε, φυσικά προκύπτουν ἴσοι ἀριθμοί:

$$16^{\nu}-1=15(16^{\nu-1}+16^{\nu-2}+\ldots+16+1)$$

Ἐπειδή ἡ ἐν παρενθέσει ποσότης ἐκφράζει ἀκέραιον ἀριθμόν ἕπεται ὅτι τό 2ον μέλος τῆς ἰσότητος εἶναι ἀκέραιον πολλαπλάσιον τοῦ 15, ἄρα καί τό πρῶτον.

2) « Νά δειχθῇ ὅτι ἡ διαίρεσις

$$\frac{(x-2)^{2\nu}-1}{x-1}$$

εἶναι τελεία καί νά εὑρεθῇ τό πηλίκον (ν θετικός ἀκέραιος)».

Λύσις. Ἐάν γράψωμεν τό πηλίκον ὑπό τήν μορφήν

$$\frac{(x-2)^{2\nu}-(-1)^{2\nu}}{(x-2)-(-1)}$$

καί θέσωμεν $x-2=y$, καταλήγομεν εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου

$$\frac{y^{2\nu}-(-1)^{2\nu}}{y-(-1)}$$

Σύμφωνα μέ τόν (i) θά ἔχωμεν

$$\frac{y^{2\nu}-(-1)^{2\nu}}{y-(-1)}=y^{2\nu-1}+y^{2\nu-2}(-1)+y^{2\nu-3}(-1)^2+\ldots+(-1)^{2\nu-1}$$

καί γράφοντες πάλιν ὅπου y τό $x-2$ λαμβάνομεν τελικῶς:

$$\frac{(x-2)^{2\nu}-1}{x-1}=(x-2)^{2\nu-1}-(x-2)^{2\nu-2}+(x-2)^{2\nu-3}-$$
$$\ldots+(x-2)-1$$

3) «Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός, νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀκέραιος $3^{2\nu+2}-2^{\nu+1}$ εἶναι διαρετός διά 7».

Ἀπόδειξις: Ὁ δοθείς ἀριθμός γράφεται $(3^2)^{\nu+1}-2^{\nu+1}=9^{\nu+1}-2^{\nu+1}$ καί προκύπτει ἀπό τήν παράστασιν $x^{\nu+1}-2^{\nu+1}$ ὅταν $x=9$. Ἐάν λοιπόν εἰς τήν ταυτότητα

$$x^{\nu+1}-2^{\nu+1}=(x-2)(x^{\nu}+x^{\nu-1}2+x^{\nu-2}2^2+\ldots+2^{\nu})$$

τεθῆ $x=9$ λαμβάνομεν

$$9^{\nu+1}-2^{\nu+1}=7(2^{\nu}+2^{\nu-1}\cdot 2+\ldots+2^{\nu})=\text{πολ. } 7$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

198. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

$$\frac{x^5-32y^5}{x-2y},\quad \frac{81x^4-1}{9x-1},\quad \frac{x^7y^7+1}{xy+1},\quad \frac{\omega^5+32x^5}{\omega+2x}$$

$$\frac{x^8-1}{x+1},\quad \frac{y^6-64}{y+2},\quad \frac{243x^5+32}{3x+2},\quad \frac{81\alpha^4-\beta^8}{3\alpha-\beta^2}$$

$$\frac{x^8-16y^4}{x^2-2y},\quad \frac{x^{6\mu}-y^{12\nu}}{x^{\mu}-y^{2\nu}},\quad \frac{x^{3\mu}+y^{6\nu}}{x^{\mu}+y^{2\nu}}\quad (\mu,\nu \text{ φυσικοί ἀριθ.}).$$

199. Ἐάν ν ἄρτιος δείξατε ὅτι

$$\frac{x^{\nu}-\alpha^{\nu}}{x+\alpha}=x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2-\ldots-\alpha^{\nu-1}$$

200. Ἐπί ποίαν παράστασιν πρέπει νά πολ/σθῆ τό πολυώνυμον $\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta+\alpha\beta^3$ διά νά γίνη διώνυμον; Ὁμοίως διά τά

$$x^2+\alpha x+\alpha^2\quad,\quad x^2-\alpha x+\alpha^2\quad,\quad x^3-\alpha x^2+\alpha^2 x-\alpha^3$$

201. Ἐάν ν θετικός ἀκέραιος νά δειχθῆ ὅτι ἡ διαίρεσις

$$\frac{(x+1)^{\nu}}{2^{\nu}}-1 : \frac{x-1}{2^{\nu}}$$

εἶναι τελεία καί νά εὑρεθῆ τό πηλίκον.

202. Ὁμοίως διά τήν διαίρεσιν:

$$\frac{(x-1)^{2\nu}}{4^{\nu}} - 1 \; : \; \frac{x+1}{4^{\nu}}$$

203. Ὁμοίως διά τήν διαίρεσιν

$$(x-2)^{2\nu} + (x-1)^{\nu} - 1 \; : \; x-2$$

204. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός δείξατε ὅτι ὁ ἀκέραιος $5^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετός διά 6.

205. Δείξατε ὅτι ὁ ἀκέραιος $2^{35}-1$ εἶναι διαρετός διά 31 κα διά 127.

206. Ἐάν ν ἀκέραιος θετικός καί $0 < \omega < 1$ ν'ἀποδειχθῆ ἡ ἀ νισότης

$$1 - \omega^{2\nu+1} > (2\nu+1)\omega^{\nu}(1-\omega)$$

207. Ἐάν α,β,ν φυσικοί ἀριθμοί καί $\alpha > \beta$ νά δειχθῆ ἡ διπλ ἀνισότης

$$\nu\alpha^{\nu-1} > \frac{\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}}{\alpha-\beta} > \nu\beta^{\nu-1} \; .$$

65. Ὁ τύπος τοῦ διωνύμου. Ἐάν τό διώνυμον $\alpha+\beta$ ὑψωθῆ εἰ δύναμιν μέ ἐκθέτην τυχόντα ἀκέραιον θετικόν ὁ τύπος ὁ παρέ τό ἐξαγόμενον τῆς ὑψώσεως ταύτης δηλ. τό λεγόμενον ἀ ν ά π τ υ γ μ α τ ῆ ς δ υ ν ά μ ε ω ς $(\alpha+\beta)^{\nu}$ λέγεται δ ω ν υ μ ι κ ό ς τ ύ π ο ς ἤ τύπος τοῦ διωνύμου. Μερικαί ριπτώσεις τοῦ διωνυμικοῦ τύπου εἶναι οἱ τύποι

$$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \; , \quad (\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

Πρός τό παρόν θά περιγράψωμεν ἁπλῶς τόν τύπον τοῦτον ἀ βλέποντες εἰς την πρακτικήν ἐφαρμογήν αὐτοῦ, ἀπόδειξιν δέ θ δώσωμεν ἀργότερον εἰς τό κεφάλαιον VII περί πλήρους ἐπαγω

Ἡ μορφή τοῦ διωνυμικοῦ τύπου εἶναι κατ'ἀρχήν ἡ ἑξῆς:

$$(1) \quad (\alpha+\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu} + c_1\alpha^{\nu-1}\beta + c_2\alpha^{\nu-2}\beta^2 + c_3\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \ldots + c_{\nu}\beta^{\nu}$$

ὅπου οἱ συντελεσταί c_1, c_2, $c_3 \ldots$ c_{ν} τοῦ ἀναπτύγματος ἐξ αρτῶνται μόνον ἀπό τό ν καί προσδιορίζονται βαθμηδόν μέ τ ἑξῆς τρόπον:

Ὁ c_1 ἰσοῦται μέ ν. Ὁ c_2 εὑρίσκεται ἄν ὁ c_1 πολ/σθῆ ἐ τόν ἀντίστοιχον ἐκθέτην τοῦ α δηλ. ἐπί $\nu - 1$ καί τό γινόμενον διαιρεθῇ διά τοῦ πλήθους τῶν πρό τοῦ c_2 ὅρων δηλ. διά 2. Ὁ c_3 εὑρίσκεται ἄν ὁ c_2 πολ/σθῇ ἐπί τόν ἀντίστοιχον ἐκθέτην τοῦ α δηλ. ἐπί ν-2 καί τό γινόμενον διαιρεθῇ διά τοῦ πλήθους τῶν πρό τοῦ c_3 ὅρων δηλ. διά 3 κ.ο.κ.

Οὕτω π.χ.

$$(\alpha + \beta)^5 = \alpha^5 + c_1\alpha^4\beta + c_2\alpha^3\beta^2 + c_3\alpha^2\beta^3 + c_4\alpha\beta^4 + c_5\beta^5$$

ὅπου

$$c_1 = 5\ ,\ c_2 = \frac{c_1 \cdot 4}{2} = 10\ ,\ c_3 = \frac{c_2 \cdot 3}{3} = 10\ ,\ c_4 = \frac{c_3 \cdot 2}{4} = 5,\ c_5 = \frac{c_4 \cdot 1}{5} = 1$$

Ἐν τούτοις, ὁ ὑπολογισμός τῶν συντελεστῶν διευκολύνεται διότι ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ἰσάκις τῶν ἄκρων ἀπέχοντες συντελεσταί εἶναι ἴσοι καί συνεπῶς ἐπαναλαμβάνονται δίς, ἐκτός τοῦ μεσαίου (ἄν ὑπάρχει). Οὕτω:

$$(\alpha + \beta)^6 = \alpha^6 + 6\alpha^5\beta + 15\alpha^4\beta^2 + 20\alpha^3\beta^3 + 15\alpha^2\beta^4 + 6\alpha\beta^5 + \beta^6$$

$$(\alpha + \beta)^7 = \alpha^7 + 7\alpha^6\beta + 21\alpha^5\beta^2 + 35\alpha^4\beta^3 + 35\alpha^3\beta^4 + 21\alpha^2\beta^5 + 7\alpha\beta^6 + \beta^7$$

Ἐάν εἰς τόν τύπον (1) τεθῇ ὅπου β το −β λαμβάνομεν τόν τύπον

$$(2) \qquad (\alpha - \beta)^\nu = \alpha^\nu - c_1\alpha^{\nu-1}\beta + c_2\alpha^{\nu-2}\beta^2 - c_3\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \ldots\ldots$$

ὅπου οἱ συντελεσταί $c_1, c_2, c_3 \ldots$ εἶναι οἱ προηγουμένως ὑπολογισθέντες. Οὕτω π.χ.

$$(\alpha - \beta)^5 = \alpha^5 - 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 - \beta^5$$

$$(\alpha - \beta)^8 = \alpha^8 - 8\alpha^7\beta + 28\alpha^6\beta^2 - 56\alpha^5\beta^3 + 70\alpha^4\beta^4 - 56\alpha^3\beta^5 +$$
$$+ 28\alpha^2\beta^6 - 8\alpha\beta^7 + \beta^8$$

Ἐφαρμογή. Ἐάν οἱ ἀριθμοί x, y πληροῦν τάς σχέσεις $x + y = \alpha$, $x^3 + y^3 = \beta$ νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $x^4 + y^4$ συναρτήσει τῶν α καί β .

Λύσις. Ὑψοῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς $x+y=\alpha$ εἰς τήν 4ην λαμβάνομεν: $(x+y)^4=\alpha^4$ ἤ

$$(3) \quad \begin{aligned} & x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=\alpha^4 \\ \text{ἤ} \quad & (x^4+y^4)+4xy(x^2+y^2)+6(xy)^2=\alpha^4 \end{aligned}$$

Εἰς τήν τελευταίαν ταύτην σχέσιν, ἐκτός τῆς ζητουμένης ποσότητος x^4+y^4 ὑπάρχουν ἀκόμη καί αἱ ποσότητες xy καί x^2+y^2 ἀρκεῖ δέ νά γνωρίζομεν τάς δύο τελευταίας διά νά εὕρωμεν τήν πρώτην.

Τό γινόμενον xy εὑρίσκεται ἐκ τῆς ταυτότητος

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$$

ἥτις δίδει: $\beta^3=\alpha^3-3xy\alpha$, $3xy\alpha=\alpha^3-\beta^3$, $xy=\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}$

Τό x^2+y^2 εὑρίσκεται ἐκ τῆς ταυτότητος: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ ἥτις δίδει:

$$x^2+y^2=\alpha^2-2\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}=\frac{3\alpha^3-2\alpha^3+2\beta^3}{3\alpha}=\frac{\alpha^3+2\beta^3}{3\alpha}$$

Κατόπιν τούτων ἡ (3) γίνεται:

$$x^4+y^4+4\cdot\frac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}\cdot\frac{\alpha^3+2\beta^3}{3\alpha}+6\left(\frac{\alpha^3-\beta^3}{3\alpha}\right)^2=\alpha^4$$

καί ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$x^4+y^4=\alpha^4-4\cdot\frac{(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+2\beta^3)}{9\alpha^2}-6\,\frac{(\alpha^3-\beta^3)^2}{9\alpha^2}$$

καί μετά τάς πράξεις:

$$x^4+y^4=\frac{2\beta^6+8\alpha^3\beta^3-\alpha^6}{9\alpha^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

208. Νά εὑρεθοῦν τ'ἀναπτύγματα

$$(x+1)^4-(x-1)^4 \;,\quad (x+\sqrt{2})^4+(x-\sqrt{2})^4 \;,\quad \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$$

$$(x+\beta)^6+(x-\beta)^6 \;,\quad (\sqrt{2}+1)^6-(\sqrt{2}-1)^6$$

$$(\alpha+\beta)^7-(\alpha-\beta)^7 \;,\quad (\alpha+\sqrt{\alpha^2-1})^7+(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})^7$$

209. Ὑπολογίσατε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τῶν κάτωθι δυνάμεων τῇ βοηθεία τοῦ τύπου τοῦ διωνύμου:

$(100+1)^7$, $(101)^6$, $(100-1)^6$, 99^7 , 98^4 , 49^5

210. Ν'ἀποδειχθοῦν αἱ ταυτότητες

$(x+y)^4+x^4+y^4 \equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$

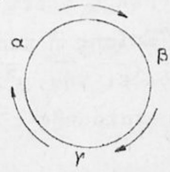
$(x+y)^5-x^5-y^5 \equiv 5xy(x+y)(x^2+y^2+xy)$

211. Ἐάν οἱ ἀριθμοί x καί y πληροῦν τάς σχέσεις $x+y=\alpha$ καί $x^3+y^3=\beta^3$ νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως x^5+y^5 συναρτήσει τῶν α καί β.

212. Ἐάν οἱ ἀριθμοί α και β πληροῦν τήν σχέσιν $\alpha^2+\beta^2=1$ δείξατε ὅτι θά πληροῦν και τήν σχέσιν

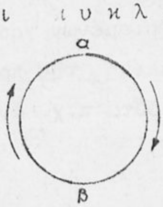
$$(\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2)^2=\frac{\alpha^8+\beta^8+1}{2}$$

66. Ἡ κυκλική μετατροπή. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν Ἀλγεβρικήν παράστασιν Α ἥτις περιέχει τά γράμματα α,β,γ. Ἐάν ἐν τῇ παραστάσει ταύτῃ ἀντικαταστήσωμεν τό γράμμα α διά τοῦ β τό β διά τοῦ γ καί τό γ διά τοῦ α, τότε προκύπτει μία νέα ἀλγεβρ. παράστασις Α΄περιέχουσα τά ἴδια γράμματα ἀλλ'ἐν γένει διάφορος τῆς πρώτης. Λέγομεν τότε ὅτι ἡ Α΄προῆλθε ἐκ τῆς Α διά κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων α,β,γ. Ἡ ὀνομασία αὐτή ἐξηγεῖται ἀμέσως ἐκ τοῦ παραπλεύρως σχήματος (6), ἡ δέ πρᾶξις αὐτη δι' ἧς μεταβαίνομεν ἐκ τῆς παραστάσεως Α εἰς τήν Α΄ λέγεται κυκλική μετατροπή.



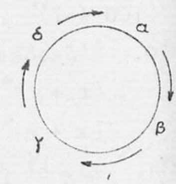
Σχ.6

Ἡ κυκλική μετατροπή δύναται νά γίνῃ εἰς δύο γράμματα α καί β ὁπότε ἀντικαθιστῶμεν τό α διά τοῦ β καί τό β διά τοῦ α (ἴδε σχ. 7). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ κυκλ. μετατροπή λέγεται καί ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων α καί β.



Σχ.7

Ἡ κυκλικη μετατροπη δύναται νά γίνη εἰς τεσσαρα γράμματα, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ὁπότε σύμφωνα μέ τό (σχ. 8) ἀντικαθίσταται το α διά τοῦ β τό β διά τοῦ γ τό γ διά τοῦ δ καί τό δ διά τοῦ α.



Σχ.8

Τέλος, ἄν ἡ αλγ. παράστασις περιέχει ν γράμματα $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ δυνάμεθα νά ἐκτελέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει κυκλικήν μετατροπήν ἀντικαθιστῶντες τό x_1 διά τοῦ x_2 τό x_2 διά τοῦ x_3 ... τό $x_{\nu-1}$ διά τοῦ x_ν καί τό x_ν διά τοῦ x_1

Οὕτω π.χ. ἡ παράστασις $\alpha^2 - \beta\gamma$ παρέχει διά κυκλικῆς μετατροπῆς τήν $\beta^2 - \gamma\alpha$ καί αὐτή πάλιν τήν $\gamma^2 - \alpha\beta$ ἡ τελευταία δέ αὔτη παράγει τήν πρώτην.

Ἐπίσης, ἡ ἀλγεβρική παράστασις $A = 3\alpha\beta^2\gamma + \sqrt{\alpha\gamma}$ διά κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων της δίδει τήν $A' = 3\beta\gamma^2\alpha + \sqrt{\beta\alpha}$ καί αὐτή πάλιν διά νέας κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων της δίδει τήν $A'' = 3\gamma\alpha^2\beta + \sqrt{\gamma\beta}$. Ἡ A'' διά νέας κυκλικῆς μετατροπῆς δίδει πάλιν τήν Α.

Ἐπίσης ἡ παράστασις $x^2y + 7$ δι'ἐναλλαγῆς τῶν γραμμάτων της διδει τήν $y^2x + 7$ ἡ δέ $\alpha^3\beta + \beta\gamma^2 + (\delta - \alpha - \beta)^2$ διά κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ δίδει τήν $\beta^3\gamma + \gamma\delta^2 + (\alpha - \beta - \gamma)^2$ κ.ο.κ.

Κυκλικαί σχέσεις. Ἐάν ἔχωμεν δύο σχέσεις $A = B$ καί $\Gamma = \Delta$ ἐξ ὧν ἡ δευτέρα προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης διά κυκλικῆς μετατροπῆς ὡρισμένων γραμμάτων τῆς πρώτης τότε ἡ δευτέρα ἄς καλεῖται «κυκλική» τῆς πρώτης.

Οὕτω π.χ. ἄν ἰσχύουν αἱ δύο σχέσεις

$$x^3 + yz^2 + zx = \alpha$$
$$y^3 + zx^2 + xy = \beta$$

ἡ δευτέρα ἐκ τούτων εἶναι κυκλική τῆς πρώτης ὡς πρός τά γράμματα x, y, z

Ὁμοίως, ἡ σχέσις $\beta+\gamma=-\alpha$ εἶναι κυκλική τῆς $\alpha+\beta=-\gamma$ καί ἡ $\gamma+\alpha=-\beta$ κυκλική τῆς $\beta+\gamma=-\alpha$ ὡς πρός τά γράμματα α,β,γ.

Κυκλικήν μετατροπήν δυνάμεθα νά κάμωμεν καί εἰς δύο συγχρόνως ὁμάδας γραμμάτων μιᾶς σχέσεως διά νά λάβωμεν τήν κυκλικήν της. Οὕτω ἐκ τῶν σχέσεων

$$xy=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}z\ ,\quad yz=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}x\ ,\quad zx=\frac{\gamma+\alpha}{\beta}y$$

ἡ δευτέρα εἶναι κυκλική τῆς πρώτης καί ἡ τρίτη τῆς δευτέρας.

Ἡ κυκλική μετατροπή εἶναι μία ἐργασία ἥτις μᾶς ἀπαλλάσσει πολλάκις ἀπό τόν περιττόν κόπον τῆς ἐπαναλήψεως παρομοίων ἀλγεβρικῶν πράξεων, ὅπως θά ἴδωμεν κατωτέρω.

Ἐάν μία ἀλγεβρική παράστασις μένει ἀμετάβλητος κατόπιν τῆς κυκλικῆς τροπῆς τῶν γραμμάτων της, λέγεται τότε συμμετρική ἀλγεβρ. παράστασις. Π.χ. ἡ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ κυκλικῶς μετατρεπομένη γίνεται $\beta^2+\gamma^2+\alpha^2$ δηλ. μένει ἡ ἰδία, ἄρα εἶναι συμμετρική παράστασις ὡς πρός τά α,β,γ.

Μερική μετατροπή. Ἐνίοτε εἶναι ὠφέλιμος ἡ παρατήρησις ὅτι μία ἀλγεβρική παράστασις ἤ σχέσις προκύπτει ἀπό μίαν ἄλλην διά μετατροπῆς ἑνός μόνον γράμματος τῆς πρώτης εἰς ἄλλο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) «Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νά δειχθῆ ὅτι τότε

$$\alpha^5+\beta^5+\gamma^5=\frac{5}{6}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\ ».$$

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως ἔχομεν

(1) $$\alpha+\beta=-\gamma$$

καί δι' ὑψώσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1) εἰς τήν 5ην δύναμιν λαμβάνομεν (διά τοῦ διωνυμικοῦ τύπου)

(2) $\alpha^5 + 5\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 + 10\alpha^2\beta^3 + 5\alpha\beta^4 + \beta^5 = -\gamma^5$

'Εξ αὐτῆς πάλιν λαμβάνομεν τήν

(3) $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + 5\alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) + 10\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) = 0$

'Εκ τῆς ταυτότητος $\alpha^3 + \beta^3 \equiv (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ καί τῆς σχέσεως $\alpha + \beta = -\gamma$ εὑρίσκομεν $\alpha^3 + \beta^3 = -\gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma$ καί συνεπῶς ἡ (3) γίνεται

(4) $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + 5\alpha\beta(-\gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma) - 10\alpha^2\beta^2\gamma = 0$ ἤ

$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + 5\alpha\beta\gamma(-\gamma^2 + 3\alpha\beta) - 10\alpha^2\beta^2\gamma = 0$ ἤ

$\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + 5\alpha\beta\gamma(-\gamma^2 + 3\alpha\beta - 2\alpha\beta) = 0$

καί τέλος

(5) $\alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 = 5\alpha\beta\gamma(\gamma^2 - \alpha\beta)$

Ὥστε ἐκ τῆς σχέσεως (1) ἐφθάσαμεν διά σειρᾶς πράξεων μεταξύ τῶν γραμμάτων α, β, γ εἰς τήν σχέσιν (5).

'Εάν τώρα, ἀναχωρήσωμέν ἐκ τῆς (ἀληθευούσης) σχέσεως

(6) $\beta + \gamma = -\alpha$

ἡ ὁποία εἶναι κυκλική τῆς (1) ὡς πρός τά α, β, γ θά φθάσωμεν προφανῶς εἰς σχέσιν κυκλικήν τῆς (5) δηλ. εἰς τήν

(7) $\beta^5 + \gamma^5 + \alpha^5 = 5\beta\gamma\alpha(\alpha^2 - \beta\gamma)$

(Πράγματι, ὅπως ἡ (1) ἔδωσε τήν (2), ἡ (2) τήν (3).... καί τέλος ἡ (4) ἔδωσε τήν (5) οὕτω καί ἡ κυκλική τῆς (1) θά δώση τήν κυκλικήν τῆς (2)... καί τέλος τήν κυκλικήν τῆς (5)).

'Εάν δέ, τέλος, ἀναχωρήσωμεν ἐκ τῆς σχέσεως

(8) $\gamma + \alpha = -\beta$

ἥτις εἶναι κυκλική τῆς (6) θά λάβωμεν διά τῶν αὐτῶν πράξεων τήν κυκλικήνσχέσιν τῆς (7) δηλ. τήν

(9) $\gamma^5 + \alpha^5 + \beta^5 = 5\gamma\alpha\beta(\beta^2 - \gamma\alpha)$

'Εφ'όσον λοιπόν ἰσχύουν αἱ (5),(7) καί (9) θά ἰσχύη καί ἡ διά προσθέσεως αὐτῶν κατά μέλη προκύπτουσα:

(10) $$3(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) = 5\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha).$$

'Αλλ'ἔχομεν κατά σειράν: $\alpha+\beta+\gamma=0$, $(\alpha+\beta+\gamma)^2=0$ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0$, $2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$, $-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ καί ἑπομένως ἡ (10) γράφεται:

(11) $$3(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) = 5\alpha\beta\gamma\left[(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\right] = 5\alpha\beta\gamma\,\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

'Αλλ'ἐπειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$ θά εἶναι καί $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ (ἴδε σελ.114) συνεπῶς ἡ (11) γράφεται:

$$3(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5) = \frac{5}{2}\,3\alpha\beta\gamma(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = \frac{5}{2}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

καί ἐξ αὐτῆς προκύπτει ἀμέσως ἡ ἀποδεικτέα. ✓

2) «'Εάν ἡ ποσότης

$$A = \frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}$$

ἰσοῦται μέ τό μηδέν, τό αὐτό συμβαίνη καί διά τήν ποσότητα

$$B = \frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}\text{ »}.$$

'Απόδειξις. 'Εκ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν την

(1) $$\frac{\alpha}{\beta-\gamma} = -\left\{\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right\}$$ ἤ

$$\frac{\alpha}{\beta-\gamma} = -\left\{\frac{\alpha\beta-\beta^2+\gamma^2-\alpha\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}\right\} = \frac{\beta^2-\gamma^2+\alpha\gamma-\alpha\beta}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}.$$

πολ/ζοντες δέ ἀμφότερα τά μέλη ἐπί $\frac{1}{\beta-\gamma}$ λαμβάνομεν

(2) $$\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2} = \frac{\beta^2-\gamma^2+\alpha\gamma-\alpha\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}$$

'Επίσης ἰσχύει ἡ σχέσις

(3) $$\frac{\beta}{\gamma-\alpha} = -\left\{\frac{\gamma}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\right\}$$

ἥτις εἶναι κυκλική τῆς (1) ὡς πρός α,β,γ ἄρα θά ἰσχύη καί ἡ κυκλική τῆς (2) δηλ. ἡ

$$(4) \qquad \frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2} = \frac{\gamma^2 - \alpha^2 + \beta\alpha - \beta\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$$

'Ομοίως, θά ἰσχύη καί ἡ κυκλική τῆς (4) δηλ. ἡ

$$(5) \qquad \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\alpha^2 - \beta^2 + \gamma\beta - \gamma\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

Διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν (2) , (4) καί (5) λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2} + \frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{\beta^2-\gamma^2+\alpha\gamma-\alpha\beta+\gamma^2-\alpha^2+\beta\alpha-\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2+\gamma\beta-\gamma\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} =$$

$$= \frac{0}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} = 0$$

δηλ. τήν ἀποδεικτέαν. (Φυσικά ὑποτίθεται ὅτι $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \neq 0$).

3) «'Εάν ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$y_1 = \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta}, \quad y_2 = \frac{\alpha x_2 + \beta}{\gamma x_2 + \delta}, \quad y_3 = \frac{\alpha x_3 + \beta}{\gamma x_3 + \delta}, \quad y_4 = \frac{\alpha x_4 + \beta}{\gamma x_4 + \delta}$$

νά δειχθῆ ὅτι θά ἰσχύη και ἡ ἰσότης

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2} : \frac{y_4-y_1}{y_4-y_2} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ».

'Απόδειξις: 'Αρκεῖ εἰς τό πρῶτον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ν'ἀντικατασταθοῦν τά y_1, y_2, y_3, y_4 διά τῶν ἴσων των καί μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καί ἁπλοποιήσεων, νά προκύψη τό δεύτερον μέλος. Πρός περιορισμόν τῆς πληθώρας τῶν πράξεων δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς:

Α) Εὑρίσκομεν τήν διαφοράν $y_3 - y_1$:

$$y_3 - y_1 = \frac{\alpha x_3 + \beta}{\gamma x_3 + \delta} - \frac{\alpha x_1 + \beta}{\gamma x_1 + \delta} =$$

$$= \frac{\alpha\gamma x_3 x_1 + \alpha\delta x_3 + \beta\gamma x_1 + \beta\delta - \alpha\gamma x_1 x_3 - \alpha\delta x_1 - \beta\gamma x_3 - \beta\delta}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)} =$$

$$= \frac{\alpha\delta x_3 + \beta\gamma x_1 - \alpha\delta x_1 - \beta\gamma x_3}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)} = \frac{\alpha\delta(x_3 - x_1) - \beta\gamma(x_3 - x_1)}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)},$$

$$(1) \qquad y_3 - y_1 = \frac{(x_3 - x_1)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)}$$

Β) 'Από τόν τύπον (1) τόν παρέχοντα τήν $y_3 - y_1$ εὑρίσκομεν ἀμέσως τήν διαφορίν $y_3 - y_2$ μετατρέποντες ἁπλῶς τόν δείκτην 1 είς 2:

$$(2) \qquad y_3 - y_2 = \frac{(x_3 - x_2)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_2 + \delta)}$$

Γ) Εὑρίσκομεν τήν ποσότητα $\dfrac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$ διαιροῦντες κατά μέλη τάς (1) και (2):

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{(x_3 - x_1)(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_1 + \delta)} \cdot \frac{(\gamma x_3 + \delta)(\gamma x_2 + \delta)}{(x_3 - x_2)(\alpha\delta - \beta\gamma)} \qquad \text{ἤ}$$

$$(3) \qquad \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{(x_3 - x_1)(\gamma x_2 + \delta)}{(x_3 - x_2)(\gamma x_1 + \delta)}$$

Δ) 'Από τόν (3) τόν παρέχοντα τήν ποσότητα $\dfrac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2}$ εὑρίσκομεν ἀμέσως τήν ποσότητα $\dfrac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2}$ τρέποντες ἁπλῶς τόν δείκτην 3 είς 4.

$$(4) \qquad \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{(x_4 - x_1)(\gamma x_2 + \delta)}{(x_4 - x_2)(\gamma x_1 + \delta)}$$

Ε) Τέλος, διαιροῦντες κατά μέλη τάς (3) καί (4) λαμβάνομεν τήν ἀποδεικτέαν σχέσιν:

$$\frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} : \frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

213. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ νά δειχθοῦν αἱ ἰσότητες

1ον $(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2 = \alpha^2\beta^2 + \beta^2\gamma^2 + \gamma^2\alpha^2 = \frac{1}{2}(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4)$

2ον $2(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2$

214. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ δείξατε ὅτι:

$\alpha^7 + \beta^7 + \gamma^7 = \frac{7}{2}\alpha\beta\gamma(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) = \frac{7}{5}(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)(\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4) =$

$$= \frac{7}{10}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha^5+\beta^5+\gamma^5)$$

(Νά ληφθῆ ὑπ'ὄψιν τό παράδειγμα (1) τῆς §66 καθώς καί ἡ προηγουμένη ἄσκησις).

215. 'Εάν διά τούς ἀριθμούς x, y, z, α, β, γ ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$(1) \quad \frac{2y+2z-x}{\alpha} = \frac{2z+2x-y}{\beta} = \frac{2x+2y-z}{\gamma}$$

νά δειχθῆ ὅτι τότε θά ἰσχύουν καί αἱ ἰσότητες αἱ προκύπτουσαι ἐκ τῶν (1) δι'ἐναλλαγῆς τῶν x, y, z μέ τά α, β, γ ἀντιστοίχως.

216. 'Εάν $A = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, $B = \alpha + \beta - \gamma - \delta$, $\Gamma = \alpha - \beta + \gamma - \delta$, $\Delta = \alpha - \beta - \gamma + \delta$

1ον Δείξατε ὅτι $AB(A^2+B^2) = 2\left\{(\alpha+\beta)^4 - (\gamma+\delta)^4\right\}$

2ον Εὕρετε τήν ποσότητα $\Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2)$ ἐκ τῆς προηγουμένης, ἄνευ ἐκτελέσεως πράξεων.

3ον 'Εάν $AB(A^2+B^2) = \Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2)$ δείξατε ὅτι τότε θά εἶναι καί $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2) = \gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)$.

217. 'Εάν

$$X = \alpha x + \beta y + \gamma z$$
$$\Psi = \alpha y + \beta z + \gamma x$$
$$Z = \alpha z + \beta x + \gamma y$$

δείξατε ὅτι

$$X^3+\Psi^3+Z^3 - 3X\Psi Z = (\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

ΜΕΤΑΤΡΟΠΑΙ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΡΗΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

I. ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΙΣ

67. Ὁ μετασχηματισμός ἑνός ἀκεραίου πολυωνύμου εἰς γινόμενον ἄλλων ἀκεραίων πολυωνύμων δηλ. ἡ «παραγοντοποίησις» τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου εἶναι ἕν ἐκ τῶν σπουδαίων προβλημάτων τῆς Ἀλγέβρας. Διότι, ἡ μετατροπή αὕτη εἰς γινόμενον ἀφ'ἑνός μέν συντελεῖ εἰς τήν ἁπλοποίησιν πολυπλόκων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων καί τήν ἀπόδειξιν διαφόρων προτάσεων, ἀφ'ἑτέρου δέ, ἐφ'ὅσον ἐπιτυγχάνεται, συντελεῖ εἰς τήν λύσιν ἐξισώσεων καί ἀνισοτήτων ἀνωτέρου βαθμοῦ ὅπως θά ἴδωμεν ἀργότερον.

Τό πρόβλημα τῆς «παραγοντοποιήσεως» πολυωνύμου εἶναι τό ἀντίστροφον τοῦ προβλήματος τοῦ πολ/σμοῦ τῶν πολυωνύμων. Διότι τώρα δίδεται τό γινόμενον καί ζητοῦνται οἱ παράγοντες ἐνῶ εἰς τόν πολ/σμόν δίδονται οἱ παράγοντες καί ζητεῖται τό γινόμενον.

Ἡ παραγοντοποίησις θά λέγεται συνήθως εἰς τά ἑπόμενα τροπή εἰς γινόμενον (ἤ ἀνάλυσις εἰς γινόμενον παραγόντων).

Ἡ τροπή εἰς γινόμενον δέν εἶναι πάντοτε εὔκολος οὔτε πάντοτε δυνατή.

Εἰς τό παρόν κεφάλαιον θά ἐξετάσωμεν τάς στοιχειώδεις μεθόδους δι'ὧν ἐπιτυγχάνεται εἰς ὡρισμένας περιπτώσεις ἡ τροπή εἰς γινομενον ἀκεραίου πολυωνύμου ἤ γενικώτερον ἀκεραίας - ρητῆς παραστάσεως (δηλ. ἀλγεβρ. παραστάσεως, ἡ ὁποία συγκροτεῖται ἀπό ἀκέραια πολυώνυμα συνδεδεμένα μεταξύ των διά προσθέσεων, ἀφαιρέσεων καί πολλαπλασιασμῶν. Ἴδε καί § 46).

Θά ἴδωμεν ἐπίσης διαφόρους ἐφαρμογάς τῆς τροπῆς ἀκεραίων - ρητῶν παραστάσεων εἰς γινόμενα.

68. **Περίπτωσις κοινοῦ παράγοντος.** Ὅταν μεταξύ τῶν ὅρων τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου ὑπάρχει κοινός παράγων (μονώνυμον) τότε δυνάμεθα νά ἐξαγάγωμεν αὐτόν ἐκτός παρενθέσεως, σύμφωνα πρός τόν τύπον

$$\alpha x + \alpha y + \alpha z = \alpha(x + y + z)$$

ὁπότε τό πολυώνυμον μετατρέπεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον) $\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 = x(\alpha + \beta x + \gamma x^2)$

2ον) $25xyz + 5yz^2 - 10x^2y^2z^3 = 5yz(5x + 2z - 2x^2yz^2)$

3ον) $2x^3y^3 - 4x^2y^5 + 3x^3y^4 - x^4y^3 = x^2y^3(2x - 4y^2 + 3xy - x^2)$

69. **Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος καθ᾽ὁμάδας ὅρων.** Ὅταν δέν ὑπάρχει κοινός μονωνυμικός παράγων εἰς ὅλους τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου, εἶναι δυνατόν πολλάκις νά χωρίσωμεν τούς ὅρους εἰς ὁμάδας τοιαύτας ὥστε ἀπό ἑκάστην ὁμάδα νά ἐξάγεται κοινός παράγων ἐκτός παρενθέσεως τό δέ ἐντός τῆς παρενθέσεως πολυώνυμον νά εἶναι τό ἴδιο δι᾽ὅλας τάς ὁμάδας ὁπότε ἐξάγεται καί τοῦτο ἐκτός παρενθέσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) Νά γίνη γινόμενον τό $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta x + \gamma x$.

Λύσις: Μεταξύ τῶν δύο πρώτων ὅρων ἐξάγομεν τόν α καί μεταξύ τρίτου καί τετάρτου τόν x ὁπότε λαμβάνομεν:

$$\alpha(\beta + \gamma) + x(\beta + \gamma)$$

Τό $(\beta + \gamma)$ εἶναι τώρα κοινός παράγων εἰς τάς δύο ὁμάδας καί συνεπῶς δύναται νά ἐξαχθῆ ἐκτός παρενθέσεως ὁπότε ἡ παράστασις γράφεται ὑπό μορφήν γινομένου:

$$(\beta + \gamma)(\alpha + x)$$

2ον) Νά γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $(\alpha x + \beta y)^2 + (\beta x - \alpha y)^2$

Λύσις: Ἐκτελοῦμεν πρῶτον τάς πράξεις καί λαμβάνομεν:

$$\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \beta^2 x^2 + \alpha^2 y^2$$

Μεταξύ 1ου καί 3ου ὅρου ἐξάγομεν τόν x^2 καί μεταξύ 2ου καί 4ου τόν y^2 ὁπότε τό πολυώνυμον μετασχηματίζεται εἰς τό

$$x^2(\alpha^2 + \beta^2) + y^2(\beta^2 + \alpha^2)$$

καί τοῦτο πάλιν εἰς τό

$$(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)$$

3ον) $\alpha\gamma + \beta\gamma - 4\alpha - 4\beta + \gamma y - 4y = \alpha\gamma - 4\alpha + \beta\gamma - 4\beta + \gamma y - 4y$

$$= \alpha(\gamma - 4) + \beta(\gamma - 4) + y(\gamma - 4) = (\gamma - 4)(\alpha + \beta + y)$$

4ον) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^2(\beta + \gamma) + \beta^2(\gamma + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta\gamma$$

Λύσις. Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις καί ἀναλύομεν τό $2\alpha\beta\gamma$ εἰς $\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma$ διά νά ἔχωμεν ὀκτώ ὅρους ὁπότε ὑπάρχει ἡ δυνατότης νά τούς λάβωμεν ἀνά ζεύγη ἔχοντα τόν ἴδιον παράγοντα. Οὕτω ἔχομεν:

$$\alpha^2\beta + \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma + \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha + \gamma^2\beta + \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\gamma =$$

$$= (\alpha^2\beta + \beta^2\alpha) + (\alpha^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\beta^2\gamma + \alpha\beta\gamma) + (\gamma^2\alpha + \gamma^2\beta) =$$

$$= \alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha\gamma(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \alpha) + \gamma^2(\alpha + \beta) =$$

$$= (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2) = (\alpha + \beta)\left[\alpha(\beta + \gamma) + \gamma(\beta + \gamma)\right]$$

$$= (\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma)$$

Οὕτω ἡ παράστασις μετετράπη εἰς γινόμενον τριῶν π ρ ω τ ο β α θ μ ί ω ν παραγόντων.

5ον) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον τό $\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta)$

Λύσις, Ἐκτελοῦμεν τά πράξεις:

$$\alpha^2\beta - \alpha^2\gamma + \beta^2\gamma - \beta^2\alpha + \gamma^2\alpha - \gamma^2\beta$$

Ἐάν μεταξύ πρώτου καί δευτέρου ἐξαχθῆ ὁ α^2 θά μείνη ἐντός παρενθέσεως τό $\beta - \gamma$. Ἐάν ὁ τρίτος ὅρος ληφθῆ μέ τόν τελευταῖον θά μείνη πάλιν ἐντος παρενθέσεως τό $\beta - \gamma$. Τέλος μεταξύ τῶν δύο ὑπολοίπων ἄν ἐξαχθῆ ὁ $-\alpha$ θά μείνη ἐντός παρενθέσεως ὁ $\beta^2 - \gamma^2$ καί οὕτω θά ἔχωμεν τόν $\beta - \gamma$ ὡς παράγοντα τῆς δοθείσης παραστάσεως. Γράφομεν λοιπόν τήν δοθεῖσαν παράστασιν διαδοχικῶς:

$$\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta\gamma(\beta - \gamma) - \alpha(\beta^2 - \gamma^2) = (\beta - \gamma)\left[\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha(\beta + \gamma)\right] =$$

$$= (\beta - \gamma)\left[(\alpha^2 - \alpha\beta) + (\beta\gamma - \alpha\gamma)\right] = (\beta - \gamma)\left[\alpha(\alpha - \beta) - \gamma(\alpha - \beta)\right] =$$
$$= (\beta - \gamma)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)$$

Ἐξ αὐτοῦ ἡ χρήσιμος ταυτότης

$$\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta) = -(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\alpha - \beta)$$

6ον) Νά γίνη γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha|\beta| + |\alpha|\beta - \alpha\beta - |\alpha\beta|$$

Λύσις. Αὕτη γράφεται $\alpha|\beta| + |\alpha|\beta - \alpha\beta - |\alpha|\cdot|\beta| =$

$$\alpha|\beta| - \alpha\beta + |\alpha|\beta - |\alpha|\cdot|\beta| = \alpha\left\{|\beta| - \beta\right\} + |\alpha|\left\{\beta - |\beta|\right\} =$$
$$= \alpha\left\{|\beta| - \beta\right\} - |\alpha|\left\{|\beta| - \beta\right\} = \left\{|\beta| - \beta\right\}\left\{\alpha - |\alpha|\right\}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

218, Εἰς τά κάτωθι πολυώνυμα νά ἐξαχθῆ κοινός παράγων τό μονώνυμον τοῦ μεγίστου δυνατοῦ βαθμοῦ:

$$2x^3y^3 - 4x^2y^6 + 3x^3y^5 - x^4y^3$$
$$\alpha^2\beta^2x^4 - \frac{1}{2}\alpha^3\beta x^5 + \frac{2}{3}\alpha^2\beta^3x^3 - \alpha^5\beta x^3$$
$$-3x^3y^2 + 12x^2y^3 - 6x^4y + 9x^3y - 3x^2y$$
$$5x^3y^3z^3 - 20x^2y^2z^4 + 10xy^3z^3 - 5xy^4z^5 + 15xy^2z^5$$

219. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τά κάτωθι πολυώνυμα.

$5x + x^2 - 35 - 7x$ $\qquad 2\alpha x^2 - 3\beta x^2 + 6\alpha - 9\beta$

$3\alpha x - 2\beta x + 2\beta y - 3\alpha y$ $\qquad 7\alpha x^2 - 4y^2 - 4x^2 + 7\alpha y^2$

$3x + 5\alpha x + 3y + 5\alpha y$ $\qquad 3x - 5\beta y + \alpha x - 5\beta x + \alpha y + 3y$

$xy - 4x - 3y + 12$ $\qquad 2\alpha^2 + \alpha(2\beta - 1) - \beta$

$\alpha(\beta^2+\gamma^2) + \beta(\gamma^2+\alpha^2) + \gamma(\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha\beta\gamma$ $\qquad \alpha(\beta^2-\gamma^2) + \beta(\gamma^2-\alpha^2) + \gamma(\alpha^2-\beta^2)$

220. Νά εὑρεθῆ τό ὑπόλοιπον καί τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθ.

$2^{40} + 2^{28} + 2^{23} + 2^{20} + 2^{18} + 2^{17} + 2^6 + 2^5 + 2 + 1$ διά τοῦ $2^{23} + 2 + 1$.

221. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma)(\beta^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)(\gamma^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου.

70. Διαφορά τετραγώνων. Ὅταν ἡ παράστασις εἶναι ἤ δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων δύο ἄλλων παραστάσεων, ἐφαρμόζομεν τότε τόν μετασχηματισμόν

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

ὅστις τήν μετατρέπει εἰς γινόμενον δύο παραγόντων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων ἡ ἀλγεβρ. παράστασις:

$$(13x^2 - 5y^2)^2 - (12x^2 + 4y^2)^2$$

Λύσις: Δι'ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου τοῦ μετασχηματίζοντος τήν διαφοράν δύο τετραγώνων εἰς γινόμενον ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$(13x^2 - 5y^2 + 12x^2 + 4y^2)(13x^2 - 5y^2 - 12x^2 - 4y^2) =$$

$$= (25x^2 - y^2)(x^2 - 9y^2) = \left[(5x)^2 - y^2\right]\left[x^2 - (3y)^2\right] =$$

$$= (5x + y)(5x - y)(x + 3y)(x - 3y).$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοδυναμεῖ πρός γινόμενον τεσσάρων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

2) Νά γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $2\beta\gamma + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2$

Λύσις: Ἡ δοθεῖσα δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν διαφορᾶς τετραγώνων γραφομένη :

$$\alpha^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma) = \alpha^2 - (\beta - \gamma)^2$$

Συνεπῶς ἰσοῦται μέ

$$(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha - \beta + \gamma)$$

3) Νά γίνη γινόμενον ἡ παράστασις $\alpha^4 + \beta^4 + \alpha^2\beta^2$

Λύσις: Διά τῆς προσθήκης τοῦ ὅρου $\alpha^2\beta^2$ ἡ παράστασις αὕτη καθίσταται τέλειον τετράγωνον: $\alpha^4 + \beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2$.

Ἐάν κατόπιν ἀφαιρέσωμεν τόν προστεθέντα ὅρον, λαμβάνομεν διαφοράν τετραγώνων. Ὥστε:

$$\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$$

4) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις $\alpha^4+\beta^4$

Λύσις: Ὅπως προηγουμένως, προσθέτομεν εἰς τήν παράστασιν, τόν ὅρον $2\alpha^2\beta^2$ διά νά καταστῆ αὕτη τέλειον τετράγωνον καί κατόπιν τόν ἀφαιροῦμεν:

$$\alpha^4+\beta^4=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta\sqrt{2})^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2})$$

5) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις x^4-x^2+16

Λύσις. Διά τῆς προσθέσεως τοῦ ὅρου $9x^2$ ἡ παράστασις καθίσταται τέλειον τετράγωνον. Συνεπῶς ἔχομεν

$$x^4-x^2+16=x^4+8x^2+16-9x^2=(x^2+4)^2-9x^2=$$
$$=(x^2+4+3x)(x^2+4-3x)$$

6) Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2$$

Λύσις: Ἐάν εἰς την θέσιν τοῦ $-2\alpha^2\beta^2$ ὑπῆρχε τό $+2\alpha^2\beta^2$ ἡ παράστασις θά ἦτο τέλειον τετράγωνον τριωνύμου, διότι

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2$$

Διά τοῦτο μετασχηματίζομεν τήν δοθεῖσαν, προσθέτοντες καί ἀφαιροῦντες τόν ὅρον $4\alpha^2\beta^2$. Οὕτω ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2)-4\alpha^2\beta^2=$$
$$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(2\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)=$$
$$=\left[(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)-\gamma^2\right]\cdot\left[(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)-\gamma^2\right]=$$
$$=\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\left[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2\right]=$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

καί τελικῶς λαμβάνομεν γινόμενον τεσσάρων πρωτοβαθμίων παραγόντων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

222. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις:

$4x^2-y^2$ $\quad 49\alpha^2x^4-25\beta^2y^2$ $\quad 81x^2-121y^2$

$169x^4-100\alpha^2y^2$ $\quad 28x^2-63\mu^2\nu^2$ $\quad x^3-4xy^2$

$\frac{4}{9}x^2y^2-\frac{1}{4}$ $\quad \frac{25}{16}\alpha^3x^4-\frac{4}{9}\alpha y^2$ $\quad \frac{9}{4}\mu^2x^2-\frac{25}{36}\nu^2y^2$

223. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων πολυωνύμων αἱ παραστάσεις:

$4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$, $\quad 4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$

$(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$, $\quad 2\beta\gamma+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

224. Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2$, $\quad x^4+324,\ x^4+4$

225. Νά γίνουν γινόμενα αἱ παραστάσεις:

$x^4-23x^2y^2+y^4$ $\quad x^4-11x^2y^2+y^4$

x^4-14x^2+25 $\quad 16-60x^2+49x^4$

$9-55x^2+25x^4$ $\quad x^8-17x^4+16$

226. Ἀφοῦ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις x^4+4y^4 νά δειχθῇ ἀκολούθως ὅτι αὕτη δέν δύναται νά ἰσοῦται μέ ἄλλον πρῶτον ἀριθμόν εἰμή μόνον μέ τόν 5, ὅταν τά x καί y εἶναι οἱοιδήποτε ἀκέραιοι.

227. Ὑπάρχουν ἀκέραιοι ἀριθμοί πληροῦντες τήν σχέσιν

$$x^4+4y^4=13\ ;$$

228. Ἀφοῦ τραπῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$\alpha^4-18\alpha^2+17$$

νά δειχθῇ ὅτι ἄν ὁ α εἶναι περιττός ἀκέραιος τότε ἡ παράστασις αὕτη ἰσοῦται μέ πολλαπλάσιον τοῦ 64.

71. **Διαφορά ἤ ἄθροισμα κύβων.** Ὅταν ἡ ἀλγεβρική παράστασις δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν διαφορᾶς ἤ ἀθροίσματος κύβων, μετατρέπεται εἰς γινόμενον τῇ βοηθείᾳ μιᾶς ἐκ τῶν δύο ταυτοτήτων

$$A^3-B^3\equiv(A-B)(A^2+AB+B^2)$$

$$A^3+B^3\equiv(A+B)(A^2-AB+B^2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον) $1 - 125x^3 = 1^3 - (5x)^3 = (1-5x)(1+5x+25x^2)$

2ον) $27x^3y^3 + 1 = (3xy)^3 + 1^3 = (3xy+1)\left[(3xy)^2 + 3xy + 1\right]$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

229. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:

$27x^3 - 64y^2 \qquad 8\alpha^3 + \beta^3 \qquad 8\mu^3 + 125\nu^3$

$24\alpha^3x^3 - 81\alpha^6y^3 \qquad 7x^6 - 448y^6 \qquad x^{12} + y^6$

$54x^5 + 16x^2y^3 \qquad (3x+y)^3 - 27 \qquad (x+2y)^3 + 8(3x-y)^3$

230. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα:

$x(x^2+1) - y(y^2+1) \qquad \alpha^{2\mu+3\nu} - \alpha^{2\mu} - \alpha^{3\nu} + 1$

$\alpha^6 - \beta^6 \qquad (\alpha+\beta+\gamma)^3 - \alpha^3 - \beta^3 - \gamma^3$

231. Ἐάν οἱ διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί α, β, γ πληροῦν τάς σχέσεις:

$$\alpha^3 + \pi\alpha + k = 0 \quad , \quad \beta^3 + \pi\beta + k = 0 \quad , \quad \gamma^3 + \pi\gamma + k = 0$$

νά δειχθῆ ὅτι τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

72. Ἡ ἀνάλυσις ἑνός ὅρου εἰς δύο μέρη: Ἐνίοτε ἡ μετατροπή εἰς γινόμενον πολυωνύμου ἔχοντος περιττόν πλῆθος ὅρων, ἐπιτυγχάνεται διά καταλλήλου ἀναλύσεως ἑνός ὅρου του εἰς δύο μέρη οὕτως ὥστε τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ πολυωνυμου νά γίνη ἄρτιον. Τότε οἱ ὅροι δύνανται ἐνδεχομένως νά ληφθοῦν κατά ζεύγη ἔχοντα ὅλα τόν ἴδιον κοινόν παράγοντα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον) $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 =$
$= x(x+2) + 3(x+2) = (x+2)(x+3)$ (Ἀνελύθη ὁ $5x$ εἰς $2x + 3x$)

2ον) $\alpha^6 + 7\alpha^3 - 8 = \alpha^6 + 8\alpha^3 - \alpha^3 - 8 = \alpha^3(\alpha^3 - 1) + 8(\alpha^3 - 1) =$
$= (\alpha^3 - 1)(\alpha^3 + 8) = (\alpha - 1)\cdot(\alpha^2 + \alpha + 1)\cdot(\alpha + 2)\cdot(\alpha^2 - 2\alpha + 4)$
(Ἀνελύθη ὁ $7\alpha^3$ εἰς $8\alpha^3 - \alpha^3$).

3ον) $x^3 + 2x^2 - 3 = x^3 + 2x^2 - 2 - 1 = (x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) =$
$= (x-1)(x^2 + x + 1) + 2(x-1)(x+1) = (x-1)\left[x^2+x+1+2(x+1)\right] =$
$= (x-1)(x^2 + 3x + 2) = (x-1)\left[(x^2 + x) + (2x + 2)\right] =$
$= (x-1)\left[x(x+1) + 2(x+1)\right] = (x-1)(x+1)(x+2)$.

4ον) $x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2 = x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x + 2x - 2 =$

$= x^3(x-1) - 3x(x-1) + 2(x-1) = (x-1)(x^3 - 3x + 2) =$

$= (x-1)(x^3 - x - 2x + 2) = (x-1)\left[x(x^2-1) - 2(x-1)\right] =$

$= (x-1)\left[x(x-1)(x+1) - 2(x-1)\right] = (x-1)^2\left[x(x+1) - 2\right] =$

$= (x-1)^2(x + x - 1 - 1) = (x-1)^2\left[(x^2-1) + (x-1)\right] =$

$= (x-1)^2\left[(x-1)(x+1) + (x-1)\right] = (x-1)^3(x+2)$

5ον) $x^6 + 26x^3y^3 - 27y^6 = x^6 + 27x^3y^3 - x^3y^3 - 27y^6 =$

$= (x^6 - x^3y^3) + (27x^3y^3 - 27y^6)$

$= x^3(x^3 - y^3) + 27y^3(x^3 - y^3) = (x^3 - y^3)(x^3 + 27y^3) =$

$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

232. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα

$\alpha^2 - 4\alpha\beta + 3\beta^2$ $\qquad$ $(x+y)^2 - 4(x+y)(3x+y-1) + 3(3x+y-1)^2$

$4x^2 - 8x + 5$ $\qquad$ $8x^2 + 10x - 3$

$6x^2 + 25x - 25$ $\qquad$ $15x^2 - 19x + 6$

$x^2 + 3x + 2$ $\qquad$ $20x^2 + 18xy - 35y^2$

233. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα

$\alpha^4 - 9\alpha^2 + 20$ $\qquad$ $x^5 - 5x^4y + 4x^3y^2$

$x^3 + x - 2$ $\qquad$ $2x^3 - x - 1$

$3x^3 - x - 2$ $\qquad$ $3x^3 - 2x - 1$

$\alpha^2 - 3\beta^2 + 2\alpha\beta$

234. Βάσει τῆς ἀσκ. 88 (§ 38) νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις

$$2x^2 + 5|xy| - 3y^2 \quad , \quad 2x^2 - 3|x| - 5$$

235. Ἐάν x, y ἀκέραιοι καί τό $4x - y$ εἶναι πολ/σιον τοῦ 3 νά δειχθῇ ὅτι τό

$$4x^2 + 7xy - 2y^2$$

εἶναι πολ/σιον τοῦ 9.

73. Ἄθροισμα ἤ διαφορά ὁμοίων δυνάμεων. Παραστάσεις τῆς μορφῆς $\alpha^\nu - \beta^\nu$ ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός ἤ $\alpha^\nu + \beta^\nu$ ὅπου ν

περιττός τρέπονται είς γινόμενα βάσει τῶν ἰσοτήτων (i) καί (iii) τῆς §64 (ἀξιοσημείωτοι διαιρέσεις). Δηλαδή:

$$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta)(\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^\nu) \quad (\nu \text{ τυχών})$$

$$\alpha^\nu + \beta^\nu = (\alpha + \beta)(\alpha^{\nu-1} - \alpha^{\nu-2}\beta + \ldots + \beta^{\nu-1}) \quad (\nu \text{ περιττός})$$

Παρατηρητέον ὅτι ἄν ὁ ν εἶναι ἄρτιος εἶναι προτιμώτερον να μετατρέπωμεν κατ'ἀρχάς τήν διαφοράν $\alpha^\nu - \beta^\nu$ ὡς διαφοράν δύο τετραγώνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1ον) $\alpha^6 - \beta^6 = (\alpha^3 - \beta^3)(\alpha^3 + \beta^3) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

2ον) $\alpha^{10} + \beta^{10} = (\alpha^2)^5 + (\beta^2)^5 = (\alpha^2 + \beta^2)[(\alpha^2)^4 - (\alpha^2)^3 \cdot \beta^2 + (\alpha^2)^2(\beta^2)^2 -$
$- \alpha^2(\beta^2)^3 + (\beta^2)^4]$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

236. Νά τραποῦν είς γινόμενα:

$x^7 + y^7 \qquad x^6 + 64 \qquad 243x^5 + 32$

$\alpha^{10} + 1 \qquad 32x^5 - y^5 \qquad x^{10} - y^{10}$

237. Νά τραποῦν είς γινόμενα:

$x^9 - y^9 \qquad 16x^4 - 81 \qquad 64\alpha^6 - \beta^6$

$x^{12} + 1 \qquad x^{3\mu} + y^{6\nu} \qquad \alpha^{4\mu} - \beta^{4\nu}$

74. **Τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου πολυωνύμου.** Ἐνίοτε μία παράστασις προέρχεται ἀπό τήν ὕψωσιν ἀκεραίου πολυωνύμου είς τό τετράγωνον καί συνεπῶς (ἀφοῦ διαπιστωθῆ τοῦτο) ἡ παράστασις τρέπεται είς γινόμενον (δύο ἴσων παραγόντων). Τοῦτο συμβαίνει ὅταν ἡ παράστασις περιέχει τά τετράγωνα διαφόρων μονωνύμων καί τα διπλάσια γινόμενα αὐτῶν καθ'ὅλους τούς δυνατούς τρόπους δηλ. εἶναι μιᾶς τῶν μορφῶν

$\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma \quad , \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma +$
$+ 2\alpha\delta + 2\beta\gamma + 2\delta\beta + 2\gamma\delta$ κτλ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1ον) $9x^2 + 4y^4 + 25z^2 - 12xy^2 - 20y^2z + 30xz = (3x - 2y^2 + 5z)^2$

2ον) $9\alpha^2x^2 + \alpha^2 + 16y^2 + 4 + 6\alpha^2x - 24\alpha xy + 12\alpha x - 8\alpha y + 4\alpha - 16y = (3\alpha x + \alpha - 4y + 2)^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

238. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:

1. $x^2 + y^2 + 9 - 6x - 6y + 2xy$
2. $x^2 + 4y^2 + 25 - 4xy - 10x + 20y$
3. $9x^2 + 4y^2 + 16 - 12xy + 24x - 16y$
4. $25\alpha^2 + 4\beta^2 + 9\gamma^2 + 20\alpha\beta - 30\alpha\gamma - 12\beta\gamma$
5. $x^2y^2 + 4y^2z^2 + x^2z^2 + 4xy^2z - 4xyz^2 - 2x^2yz$
6. $36\alpha^2 + 9\beta^2 + 16 - 36\alpha\beta + 48\alpha - 24\beta$
7. $9x^2 + 16y^2 + z^2 + 24xy - 6xz - 8yz - 9\alpha^2$
8. $4\alpha^2 + 9\beta^2 + 25\gamma^2 - 16\delta^2 - 12\alpha\beta - 20\alpha\gamma + 30\beta\gamma$
9. $4x^2+9y^2+z^2+16k^2+12xy-4xz+16xk-6yz+24yk-8zk$
10. $4\alpha^2+9\beta^2+25\gamma^2+16\delta^2-12\alpha\beta-20\alpha\gamma+16\alpha\delta+30\beta\gamma-24\beta\delta-40\gamma\delta$
11. $x^2y^2 - 4|xy|\omega + 4\omega^2$
12. $x^2 + y^2 + \omega^2 - 2x|y| - 2x|\omega| + 2|y\omega|$

75. Ἐφαρμογαί τινες τῆς μετατροπῆς εἰς γινόμενον.

1) « Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι διά πᾶσαν πραγματικήν τιμήν τοῦ x ἀληθεύει ἡ σχέσις

$$2x^4 + 1 \geqslant 2x^3 + x^2 \text{ ».}$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά $2x^4 + 1 - (2x^3 + x^2)$ εἶναι μή ἀρνητική ποσότης. Διά νά μελετήσωμεν δέ τό σημεῖον τῆς διαφορᾶς ταύτης εἶναι σκόπιμον νά τήν μετατρέψωμεν εἰς γινόμενον ἁπλουστέρων παραγόντων καί νά ἐξετάσωμεν τό σημεῖον ἑκάστου παράγοντος. Αὕτη γράφεται διαδοχικῶς:

$$2x^4 + 1 - 2x^3 - x^2 = 2x^3(x - 1) - (x^2 - 1) = (x - 1)(2x^3 - x - 1) =$$
$$= (x - 1)(x^3 + x^3 - x - 1) = (x - 1)\left[(x^3 - x) + (x^3 - 1)\right] =$$
$$= (x - 1)\left[x(x + 1)(x - 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)\right] =$$
$$= (x - 1)(x - 1)\left[x^2 + x + x^2 + x + 1\right] = (x - 1)^2\left[2x^2 + 2x + 1\right]$$

Ὁ πρῶτος παράγων $(x - 1)^2$ εἶναι μή ἀρνητική ποσότης ἐνῶ ὁ δεύτερος εἶναι μονίμως θετικός διότι δύναται νά γραφῇ ὡς ἄθροισμα τετραγώνων μή μηδενιζομένων συγχρόνως, δηλ.

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = x^2 + (x+1)^2$$

Ὥστε τό γινόμενον τῶν δύο τούτων εἶναι θετικόν ἤ μηδέν.

2) «Ν'ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα

$$\frac{\alpha\beta(x^2+y^2) + xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2) + xy(\alpha^2-\beta^2)}».$$

Λύσις. Ἀρκεῖ νά τρέψωμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενα παραγόντων καί ἐφ'ὅσον ὑπάρξουν παράγοντες κοινοί εἰς τόν ἀριθμητήν καί τόν παρονομαστήν νά διαιρέσωμεν δι'αὐτῶν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος.

Ὁ ἀριθμητης γράφεται:

$$\alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 + \alpha^2 xy + \beta^2 xy = \alpha x(\beta x + \alpha y) + \beta y(\alpha y + \beta x) = (\beta x + \alpha y)(\alpha x + \beta y)$$

και ὁ παρ/στής ὁμοίως ἀναλύεται εἰς γινόμενον

$$(\alpha y - \beta x)(\beta x + \alpha y)$$

Συνεπῶς τό κλάσμα γράφεται:

$$\frac{(\alpha x + \beta y)(\beta x + \alpha y)}{(\alpha x - \beta y)(\beta x + \alpha y)}$$

καί ἁπλοποιούμενον διά $\beta x + \alpha y$ καθίσταται ἴσον πρός

$$\frac{\alpha x + \beta y}{\alpha x - \beta y}$$

3) «Ἐάν ν ἀκέραιος νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $\nu^5 - 5\nu^3 + 4\nu$ εἶναι διαιρετός διά τοῦ 120».

Ἀπόδειξις. Διά νά διαιρεῖται διά τοῦ 120 πρέπει νά περιέχη τούς παράγοντας τοῦ 120 δηλ. τούς 3,5 καί 8 . ($120 = 3\cdot 5\cdot 8$) Πρός διαπίστωσιν τούτου τρέπομεν τόν ἀριθμόν $\nu^5 - 5\nu^3 + 4\nu$ εἰς γινόμενον παραγόντων. Ἔχομεν:

$$\nu^5 - 5\nu^3 + 4\nu = \nu(\nu^4 - 5\nu^2 + 4) = \nu(\nu^4 - \nu^2 - 4\nu^2 + 4) =$$

$$= \nu\left[\nu^2(\nu^2-1) - 4(\nu^2-1)\right] = \nu(\nu^2-1)(\nu^2-4) = \nu(\nu+1)(\nu-1)(\nu+2)(\nu-2)$$

$$= (\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)$$

Δηλ. φθάνομεν εἰς γινόμενον πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων τό ὁποῖον πάντοτε διαιρεῖται διά τοῦ 120.

Διότι μεταξύ 5 διαδοχικῶν ἀκεραίων ὁ εἷς εἶναι κατ'ἀνάγκην πολ/σιον τοῦ 5 ἄρα τό γινόμενον διαιρεῖται διά 5. Ἐπίσης, μεταξύ τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων, ὁ εἷς εἶναι ἀναγκαστικῶς πολλαπλάσιον τοῦ 3 ἄρα τό γινόμενον τῶν 5 διαδοχικῶν διαιρεῖται καί διά 3.

Τέλος μεταξύ τῶν πέντε διαδοχικῶν ἀκεραίων $\nu - 2$, $\nu - 1$,

ν , $\nu+1$, $\nu+2$ θά ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο διαδοχικοί ἄρτιοι τό γινόμενον δέ δύο διαδοχικῶν ἀρτίων ἔστω τῶν $2k$ καί $2k+2$ εἶναι πολ/σιον τοῦ 8. Διότι

$$2k(2k+2) = 4k(k+1)$$

καί $k(k+1) =$ ἄρτιος $= 2\rho$, ὥστε $2k(2k+2) = 8\rho$. Ὥστε τό $(\nu-2)(\nu-1)\nu(\nu+1)(\nu+2)$ διαιρεῖται καί διά 8. Ἐφ'ὅσον λοιπόν τό ὑπ'ὄψιν γινόμενον διαιρεῖται καί διά 5 καί διά 3 καί διά 8 θά διαιρεῖται καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν $5\cdot3\cdot8 = 120$ διότι οἱ 5 , 3 καί 8 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀνά δύο (ἴδε §9 Θεώρ. II).

4) «Ἐάν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι $\neq 0$ καί πληροῦν τήν σχέσιν

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\gamma+\delta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}$$

νά δειχθῇ ὅτι τότε θά εἶναι ἤ

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad ἤ \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} \text{ »}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν νά δείξωμεν ὅτι θ'ἀληθεύῃ ἕν ἐκ τῶν δύο ἤ $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ ἤ $\alpha\gamma - \beta\delta = 0$. Πρός τοῦτο δέ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι

$$(1) \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha\gamma - \beta\delta) = 0$$

ὁπότε ἤ ὁ εἷς ἤ ὁ ἄλλος παράγων θά εἶναι μηδέν. Ἀλλ'ἡ (1) ὀφείλει νά προέρχεται ἀπό τήν ὑπόθεσιν, ἥτις γράφεται

$$(2) \qquad (\alpha+\beta)^2\gamma\delta - (\gamma+\delta)^2\alpha\beta = 0$$

Ἑπομένως πρέπει νά τραπῇ τό πρῶτον μέλος τῆς (2) εἰς γινόμενον παραγόντων διά νά προκύψῃ ἡ (1).

Ἔχομεν πράγματι:

$$(\alpha+\beta)^2\gamma\delta - (\gamma+\delta)^2\alpha\beta = (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)\gamma\delta - (\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2)\alpha\beta =$$
$$= \alpha^2\gamma\delta + 2\alpha\beta\gamma\delta + \beta^2\gamma\delta - \gamma^2\alpha\beta - 2\gamma\delta\alpha\beta - \delta^2\alpha\beta$$
$$= \alpha^2\gamma\delta - \delta^2\alpha\beta + \beta^2\gamma\delta - \gamma^2\alpha\beta = \alpha\delta(\alpha\gamma-\beta\delta) - \beta\gamma(\alpha\gamma-\beta\delta) =$$
$$= (\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha\delta-\beta\gamma).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

239. Νά τραποῦν εἰς γινόμενα

$81x^4 + 11x^2 + 4 \qquad x^3 - 8y^3 + 2x^2 - 8xy + 8y^2 - 6x + 12y$

$x^2 + 4xy + 4y^2 - 16z^2 - 6x - 12y + 9$

$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 25z^2 + 40z - 16$

240. Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) + (\alpha\gamma - \beta\delta)(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2)$$

241. Νά τραπῆ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις

$$xyz(x^2y^2z^2 - z^2x - x^2y - zy^2) + zx^2 + xy^2 + yz^2 - 1$$

242. Ν'ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα

$$\frac{(\alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 - 2\beta\gamma)(\alpha + \beta - \gamma)}{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma - \beta^2)} \qquad \frac{\alpha^3 - \alpha^2\beta - 9\alpha\beta^2 + 9\beta^3}{\alpha^6 - 9\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^4 + 9\beta^6}$$

$$\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2} \qquad \frac{\alpha^{12} + \beta^{12}}{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha\beta^4 + \beta^5}$$

$$\frac{\alpha^2 + 3\alpha\beta - \alpha\gamma + 2\beta^2 - 2\beta\gamma}{\alpha^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2} \qquad \frac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2 - 11x + 12}$$

243. Ν'ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα

$$\frac{\alpha^5 + \alpha^2\beta^3 - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4}{\alpha^4 - \alpha^2\beta^2 + \alpha^3\beta - \alpha\beta^3} \qquad \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 2x + 1)}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\frac{x^4 - 81y^4}{81y^4 + 9x^2y^2 - 2x^4 + 9y^2 - x^2} \qquad \frac{4x^2 + 2x - 12xy - 3y + 9y^2}{8x^3 - 27y^3}$$

$$\frac{\frac{4}{9} - x^2}{5 + \frac{15|x|}{2}} \qquad \frac{x^2 + 9|x| + 8}{x^2 + 2|x| + 1}$$

244. Ἐάν ὁ α εἶναι ἀκέραιος περιττός νά δειχθῆ ὅτι τότε ὁ ἀριθμός $\alpha^5 - \alpha$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 240

245. Ἐάν ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha + \beta + \gamma}$$

νά δειχθῆ ὅτι δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν α,β,γ εἶναι κατ'ἀνάγκην ἀντίθετοι καί ἀκολούθως νά δειχθῆ ὅτι θ'ἀληθεύῃ καί ἡ

$$\frac{1}{\alpha^{2\nu+1}} + \frac{1}{\beta^{2\nu+1}} + \frac{1}{\gamma^{2\nu+1}} = \frac{1}{(\alpha + \beta + \gamma)^{2\nu+1}}$$

ὅπου ν, φυσικός ἀριθμός

246. Ἐάν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$$

νά δειχθῆ ὅτι τότε θ'ἀληθεύῃ καί ἡ ἰσότης

$$(\alpha + \beta + \gamma)^{2\nu+1} = \alpha^{2\nu+1} + \beta^{2\nu+1} + \gamma^{2\nu+1}$$

ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός

247. Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ πληροῦν τήν σχέσιν

$$(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^3 = \alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)^3$$

νά δειχθῆ ὅτι τότε εἷς ἐξ αὐτῶν εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν δύο ἄλλων.

248. Ἐάν $x > 0$ νά ἐξετασθῆ ποία ἐκ τῶν δύο ποσοτήτων $x^3 + 1$ καί $x^2 + x$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἄλλης;

249. Ὁμοίως διά τάς x^3 καί $x^2 + x + 2$ ὅταν $x > 2$

250. Ὁμοίως διά τάς ποσότητας $3\alpha\beta^2$ καί $\alpha^3 + 2\beta^3$ ὅταν $\alpha > 0$ καί $\beta > 0$.

251. Ἐάν $x > \alpha$ δείξατε ὅτι

$$x^3 + 13\alpha^2 x > 5\alpha x^2 + 9\alpha^3$$

252. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις

$$(\alpha^2 - \beta\gamma)^3 + (\beta^2 - \alpha\gamma)^3 + (\gamma^2 - \alpha\beta)^3 - 3(\alpha^2 - \beta\gamma)(\beta^2 - \alpha\gamma)(\gamma^2 - \alpha\beta)$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνός ἀκεραίου πολυωνύμου.

253. Ἐάν ν ἀκέραιος > 2 δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός

$$\nu^7 - 7\nu^5 + 14\nu^3 - 8\nu$$

εἶναι διαιρετός διά 120.

254. Δείξατε ὅτι ἄν ἡ παράστασις

$$\alpha + \frac{\beta\gamma - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

δέν μεταβάλλει τιμήν δι' ἐναλλαγῆς τῶν α καί β τότε δέν θά μεταβάλη τιμήν καί δι' ἐναλλαγῆς τῶν α καί γ.

76. Ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον. Ὁρισμοί. (i) Δύο ἀκέραιαι-ρηταί ἀλγεβρ. παραστάσεις λέγονται σχετικῶς πρῶται ἤ πρῶται πρός ἀλλήλας ὅταν δέν ἔχουν κοινόν παράγοντα ἀκεραίαν ρητήν παράστασιν (δηλ. δέν διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τῆς αὐτῆς ἀκεραίας - ρητῆς παραστάσεως). Π.χ. αἱ $x + y - 5$ καί $2x - y + 3$ ἤ αἱ $\alpha^2 + \alpha - 2$ καί $2\alpha + \beta$ ἤ αἱ $\alpha^2 - 5\alpha + 6$ καί $\alpha^2 - 9\alpha + 20$.

ii) Δοθεισῶν δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων - ρητῶν παραστάσεων, καλεῖται κοινόν πολλαπλάσιον (κ.π) αὐτῶν κάθε ἀκεραία - ρητή παράστασις ἡ ὁποία περιέχει ὡς παράγοντας τάς δοθείσας παραστάσεις.

iii) **Καλεῖται 'ἐλάχιστον κοινόν πολλάπλασιον** (Ε.Κ.Π.) ὁσωνδήποτε ἀκεραίων μονωνύμων ἐχόντων ἀκεραίους συντελεστάς ἕν μονώνυμον ἔχον συντελεστήν τό Ε.Κ.Π. τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων καί περιέχον ὅλα τά γράμματα τῶν δοθέντων μονωνύμων ἕκαστον δέ γράμμα μέ τόν μεγαλύτερον ἐκθέτην του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἔστωσαν τά μονώνυμα

(1) $24x^2yz^3$, $15xy^2z$, $-4z^5$ xy

Τό Ε.Κ.Π. τῶν (1) εἶναι τό μονώνυμον

(2) $120x^2y^2z^5$

ὅπου ὁ συντελεστής 120 εἶναι τό Ε.Κ.Π. τῶν 24 , 15 , -4 καί 1. Βλέπομεν ὅτι τό (2) περιέχει ὅλα τά δοθέντα μονώνυμα ὡς παράγοντας ἄρα εἶναι Κ.Π. τῶν (1). 'Εάν ὅμως εἷς ἐκ τῶν ἐκθετῶν τοῦ (2) ἐλαττωθῇ τότε τοῦτο παύει νά περιέχῃ ὡς παράγοντας ὅλα τά δοθέντα δηλ. παύει νά εἶναι Κ.Π. συνεπῶς τό (2) εἶναι τό κατωτάτου δυνατοῦ βαθμοῦ Κ.Π. τῶν (1) καί ἔτσι ἐξηγεῖται καί ἡ ὀνομασία του ὡς Ε.Κ.Π.

iv) «'Εάν δοθοῦν δύο ἤ περισσότεραι ἀκέραιαι - ρηταί παραστάσεις ἀναλελυμέναι εἰς γινόμενα τῆς μορφῆς

(3) $c_1 A^{\mu} B^{\nu} \Gamma^{\rho} \ldots$, $c_2 A^{\tau} B^{\lambda} \Delta^{\sigma} \ldots$, ...

ὅπου c_1, c_2.... ἀκέραιοι συντελεσταί καί Α , Β , Γ , Δ ... ἀκέραιαι - ρηταί παραστάσεις, πρῶται πρός ἀλλήλας ἀνά δύο τότε καλεῖται 'Ελάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον (ΕΚΠ) τῶν παραστάσεων τούτων (3) τό γινόμενον τό ὁποῖον σχηματίζεται ἀπό τό ΕΚΠ. τῶν συντελεστῶν $c_1, c_2, \ldots$ καί ἀπό ὅλους παράγοντας Α,Β,Γ...(κοινούς καί μή κοινούς εἰς τάς παραστάσεις (3)) ἑκάστου παράγοντος λαμβανομένου μέ τόν μεγαλύτερον ἐκθέτην του».

Τό οὕτω σχηματιζόμενον ΕΚΠ. περιέχει προφανῶς ὡς παράγοντα κάθε μίαν ἀπό τάς παραστάσεις (3) ἄρα εἶναι Κ.Π. τῶν (3). 'Εάν ὅμως τοῦ λείψῃ εἷς παράγων τότε ὅπως παρετηρήσαμεν καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν μονωνύμων (1) παύει νά εἶναι ΚΠ τῶν (3) διά τοῦτο καλεῖται ἐλάχιστον κοινόν πολ/σιον τῶν (3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἐάν εἰς τό παράδειγμα 1 ἀντικατασταθοῦν τά γράμματα x , y , z τῶν μονωνύμων μέ ἀκέραια πολυώνυμα σχετικῶς πρῶτα, π.χ. ἀντί τοῦ x τεθῆ τό $\alpha+\beta$ ἀντί y τό $\alpha-\beta$ καί ἀντί z τό α^2+1 προκύπτουν ἀκέραιαι - ρηταί παραστάσεις τῆς μορφῆς (3) δηλ. αἱ

(4) $24(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)(\alpha^2+1)^3 \quad , \quad 15(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+1)$

$-4(\alpha^2+1)^5 \quad , \quad -(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$

Τό ΕΚΠ τῶν (4) σύμφωνα μέ τόν ἀνωτέρω ὁρισμόν (iv) εἶναι τό

$$120(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2(\alpha^2+1)^2$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νά εὑρεθῆ τό ΕΚΠ τῶν

$$\alpha^3-\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\beta^3 \qquad 25\alpha^3-25\alpha\beta^2-25\alpha^2\beta+25\beta^3$$
$$15\alpha^2+15\alpha\beta-30\beta^2$$

Λύσις. Διά νά ἐφαρμόσωμεν τόν κανόνα (iv) τρέπομεν πρῶτον τάς παραστάσεις εἰς γινόμενα τῆς μορφῆς (3). Λαμβάνομεν δέ

$$\alpha^3-\alpha\beta^2+\alpha^2\beta-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2$$
$$25\alpha^3-25\alpha\beta^2-25\alpha^2\beta+25\beta^3=5^2(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$$
$$15\alpha^2+15\alpha\beta-30\beta^2=5\cdot3(\alpha-\beta)(\alpha+2\beta)$$

Πάντες οἱ προκύψαντες παράγοντες $\alpha-\beta$, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, εἶναι σχετικῶς πρῶτοι. Θά ἔχωμεν συνεπῶς

$$\text{Ε.Κ.Π.} = 5^2\cdot3\,(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)^2(\alpha+2\beta)$$

Παρατήρησις. Ἐάν αἱ δοθεῖσαι παραστάσεις τραποῦν εἰς γινομενα ἀλλά δέν εἶναι γνωστόν ἄν οἱ προκύψαντες παράγοντες εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους τότε σχηματίζομεν γινομενον ἐξ ὅλων τῶν προκυψάντων παραγόντων καί ἕκαστον μέ τόν μεγαλύτερον ἐκθέτην του λαμβανομεν ἕν κοινόν πολ/σιον τῶν παραστάσεων, χρήσιμον πολλάκις διά τας πράξεις μας ἄν καί δέν γνωρίζομεν ἄν εἶναι τό ΕΚΠ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

255. Νά εὑρεθῆ τό ΕΚΠ. ἑκάστης τῶν κάτωθι ὁμάδων:

1ον) $24\alpha^2\beta$, 36β , $60\alpha\beta^2$ 2ον) $60\alpha\beta^2x^2$, $25\alpha^2y$, $14\alpha x$

3ον $28y^3$, $36\alpha x^2$, $64\alpha^2 xy$ 4ον) $28\alpha^3(\alpha+\beta)^3$, $35\alpha\beta^2(\alpha-\beta)$

5ον) $6x^5-12x^3y^2$, $4x^3y-8xy^3$

6ον) $15\alpha\beta xy^2-45\beta y^3$, $10\alpha^3x^2-30\alpha^2xy$

7ον) $\alpha-2\beta$, $\alpha^2-4\beta^2$ $\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2$

8ον) $4x^2-25y^2$, $6x^2-9xy-15y^2$, $10x^2+35xy+25y^2$

9ον) $36\alpha^2-49\beta^2$, $36\alpha^3-18\alpha^2\beta-28\alpha\beta^2$ $90\alpha^2\beta+165\alpha\beta^2+70\beta^3$

10ον) $x^{12}-y^6$ $3x^4-6x^2y-9y^2$

11ον) x^3+y^3 , $(x+y)^3$, x^2-xy+y^2 , x^2-y^2

II. ΡΗΤΑΙ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

77. Καλεῖται ρητόν ἀλγεβρικόν κλάσμα τό πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων δηλ. κλάσμα ἔχον ἀριθμητήν καί παρονομαστήν ἀκέραια πολυώνυμα. Ἕνα ρητόν ἀλγ. κλάσμα δύναται ν'ἁπλοποιηθῇ ἐφ'ὅσον οἱ δύο ὅροι του ἔχουν παράγοντα κοινόν, ὅπως εἴδομεν εἰς τό παράδειγμα 2 τῆς §75. Ἐπίσης κάθε ἀκεραία ρητή παράστασις δύναται νά γραφῇ ὑπό κλασματικήν μορφήν ἄν τεθῇ ὡς παρονομαστής ἡ μονάς,

Ἐξ ἄλλου γνωρίζομεν ὅτι ρητή κλασματική παράστασις εἶναι ἐκείνη ἥτις δέν περιέχει ἐξαγωγήν ρίζης γράμματος, περιέχει ὅμως διαίρεσιν διά γραμμάτων. Κατ' ἀνάγκην λοιπόν κάθε ρητή - κλασματική παράστασις θά δημιουργῆται ἐν γένει ἀπό ρητά κλάσματα καί πολυώνυμα συνδεόμενα διά τῶν τεσσάτων ρητῶν πράξεων,

Σημειωτέον ὅτι αἱ τέσσαρες πράξεις μεταξύ ρητῶν κλασμάτων ἐκτελοῦνται σύμφωνα μέ τούς γνωστούς κανόνας τούς ἰσχύοντας διά τά ἀλγεβρικά κλάσματα (§34).

78. **Πρόσθεσις ρητῶν κλασμάτων.** Ἐάν ἡ ρητή - κλασματική παράστασις εἶναι ἀλγεβρικόν ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων ἐχόντων τόν αὐτόν παρονομαστήν, τότε ἰσοῦται μέ ἕν ρητόν κλάσμα ἔχον πα-

ρονομαστήν τόν κοινόν παρονομαστήν τῶν κλασμάτων καί ἀριθμητήν τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν:

$$\frac{\alpha}{k}-\frac{\beta}{k}+\frac{\gamma}{k}-\frac{\delta}{k}=\frac{\alpha-\beta+\gamma-\delta}{k}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

$$\frac{x^2-y^3}{3(x+y)}-\frac{x^3-y+y^2}{3(x+y)}+\frac{x}{3(x+y)}=$$

$$=\frac{(x^2-y^3)-(x^3-y+y^2)+x}{3(x+y)}=\frac{(x^2-y^2)-(x^3+y^3)+(x+y)}{3(x+y)}$$

$$=\frac{(x+y)(x-y)-(x+y)(x^2-xy+y^2)+(x+y)}{3(x+y)}=$$

$$=\frac{x-y-x^2+xy-y^2+1}{3}$$

Σημειωτέον ὅτι τό πρόσημον $-$, πρό τοῦ κλάσματος, ἀφορᾶ τόν ἀριθμητήν καί δύναται ν'ἀντικατασταθῇ μέ $+$ ἄν ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἀριθμητοῦ.

Ἐάν ἡ κλασματική παράστασις εἶναι ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων μέ διαφορετικούς παρονομαστάς τότε δυνάμεθα νά καταστήσωμεν τούς προσθετέους ὁμώνυμα κλάσματα καί κατόπιν νά τούς προσθέσωμεν ὡς ἀνωτέρω.

Ἕνας τρόπος διά νά καταστήσωμεν τά κλάσματα ὁμώνυμα εἶναι νά πολλαπλασιάσωμεν τούς ὅρους ἑκάστου ἐπί τό γινόμενον τῶν παρονομαστῶν ὅλων τῶν ἄλλων. Τότε κοινός παρονομαστής λαμβάνεται τό γινόμενον ὅλων τῶν παρονομαστῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. **Νά μετατραπῇ εἰς ἕν ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις**

$$\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}-\frac{2xy-x^2+y^2}{xy}+3x+5y$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα δύναται νά λάβῃ κατά σειράν, τάς μορφάς:

$$\frac{(x^3-y^3)xy}{(x^2-y^2)xy}-\frac{(2xy-x^2+y^2)(x^2+y^2)}{xy(x^2+y^2)}+\frac{(3x+5y)(x^2+y^2)xy}{(x^2+y^2)xy}=$$

$$=\frac{(x^3-y^3)xy-(2xy-x^2+y^2)(x^2+y^2)+(3x+5y)(x^2+y^2)xy}{(x+y)xy}$$

$$=\frac{4x^4y+4xy^4+3x^2y^3+5x^3y^2-2x^3y-2xy^3+x^4-y^4}{x^3y+xy^3}$$

Συνήθως ὅμως κατά τήν μετατροπήν τῶν κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα ἐπιδιώκομεν ὡς κοινόν παρονομαστήν, ὄχι τό γινομενον ὅλων τῶν παρ/στῶν ἀλλά ἕνα κοινόν πολ/σιον τῶν παρ/στῶν ὅσον τό δυνατόν ἁπλούστερον καί εἰ δυνατόν τό ΕΚΠ. αὐτῶν. Εὑρεθέντος τοῦ κοινοῦ παρονομαστοῦ, πολλαπλασιάζομεν ἀκολούθως ἀριθμητήν καί παρ/στήν ἑκάστου κλάσματος μέ κατάλληλον παράστασιν οὕτως ὥστε ὅλοι οἱ παρ/σταί νά γινουν ἴσοι μέ τόν προκαθορισθέντα κοινόν παρ/στήν ὅστις ὡς εἴπομεν εἶναι ἕν ΚΠ. ἤ τό ΕΚΠ. τῶν παρονομαστῶν

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Νά γίνη ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις

$$\frac{1}{(x+\alpha)^2}+\frac{2}{(x+\alpha)(x+\beta)}-\frac{3}{(x+\beta)^2}$$

Λύσις: Τό ΕΚΠ τῶν παρονομαστῶν εἶναι ἐνταῦθα τό $(x+\alpha)^2(x+\beta)^2$ καί τοῦτο θά τεθῆ ὡς κοινός παρ/στής· πρός τοῦτο θά πολ/σθοῦν οἱ ὅροι τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπί $(x+\beta)^2$, τοῦ δευτέρου ἐπί $(x+\alpha)(x+\beta)$ καί τοῦ τρίτου ἐπί $(x+\alpha)^2$ ὁπότε ἡ παράστασις θά λάβη τήν μορφήν

$$\frac{(x+\beta)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}+\frac{2(x+\alpha)(x+\beta)}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}-\frac{3(x+\alpha)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}=$$

$$=\frac{(x+\beta)^2+2(x+\alpha)(x+\beta)-3(x+\alpha)^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}$$

$$=\frac{2\alpha x-2\beta x+2\alpha\beta-2\beta^2}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Νά γίνη ἕν ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις

$$A\equiv\frac{8}{(x+3)(x^2-1)}+\frac{2}{x^2+3}+\frac{1}{x+1}$$

Λύσις: Ὁ πρῶτος παρ/στής περιέχει παράγοντας καί τούς ἄλλους ἄρα οὗτος θά ληφθῆ ὡς κοινός παρονομαστής. Οἱ ἀριθμηταί ἑκάστου τῶν ἄλλων θά πολλαπλασιασθοῦν μέ τούς παράγοντας οἱ ὁποῖοι λείπουν ἀπό τούς παρονομαστάς των. Ἤτοι:

$$A\equiv\frac{8+2(x+1)(x-1)+(x^2+3)(x-1)}{(x^2+3)(x+1)(x-1)}=\frac{x^3-3x^2+3x+3}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τόν ἑξῆς πρακτικόν κανόνα:

«Τό ἄθροισμα ρητῶν κλασμάτων ἰσοῦται μέ ρητόν κλάσμα ἔχον παρονομαστήν ἕνα κοινόν πολ/σιον τῶν παρονομαστῶν καί ἀριθμητήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πολλαπλασιασμένων ἕκαστον μέ ὅτι ἐπολλαπλασιάσθη ὁ παρονομαστής του.»

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. Νά γίνη ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις

$$\frac{1}{\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta}+\frac{1}{\beta^2-3\alpha^2+2\alpha\beta}-\frac{2}{3\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2}$$

Λύσις. Κατ'ἀρχάς τρέπομεν τούς παρ/στάς εἰς γινόμενα σύμφωνα μέ τάς γνωστάς μεθόδους καί λαμβάνομεν:

$$\alpha^2 - 3\beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)$$

$$\beta^2 - 3\alpha^2 + 2\alpha\beta = -(\alpha - \beta)(\beta + 3\alpha)$$

$$3\alpha^2 + 10\alpha\beta + 3\beta^2 = (3\alpha + \beta)(3\beta + \alpha)$$

Ὡς κοινός παρονομαστής τῶν κλασμάτων θά ληφθῆ τό ΕΚΠ. αὐτῶν δηλ. τό $(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)(3\beta + \alpha)$ καί θά ἐφαρμοσθῆ ὁ ἀνωτέρω κανών. Θά ἔχωμεν

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)} - \frac{1}{(\alpha - \beta)(\beta + 3\alpha)} - \frac{2}{(3\alpha + \beta)(\alpha + 3\beta)} =$$

$$= \frac{(3\alpha + \beta) - (\alpha + 3\beta) - 2(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)(3\beta + \alpha)} = \frac{0}{(\alpha - \beta)(\alpha + 3\beta)(3\beta + \alpha)} = 0$$

ὑποτίθενται βεβαίως ὅλοι οἱ παρ/σταί $\neq 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

256. Νά τραποῦν εἰς ἕν ρητόν κλάσμα αἱ ἑπόμεναι ρηταί κλασματικαί παραστάσεις:

$$\frac{4\alpha\beta + 2\beta^2 - 12\alpha^2}{3(\alpha^2 - \beta^2)} + \frac{2\alpha - \beta}{\alpha - \beta} + \frac{7\alpha}{3(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{4x - 6}{2x^2 + 7x - 15} + \frac{3x - 6}{25 - x^2} - \frac{2 - x}{x^2 - 7x + 10}$$

267. Ὅμοιον ζήτημα διά τάς παραστάσεις

$$\frac{x}{x^3 + x^2y + xy^2 + y^3} + \frac{y}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} + \frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{x^2 + 3y^2}{x^4 - y^4} - \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}$$

258. Ν'ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶσας τάς τιμάς τῶν γραμμάτων τάς μή μηδενιζούσας τούς παρονομαστάς ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$\frac{y^2z^2}{\beta^2\gamma^2} + \frac{(y^2 - \beta^2)(z^2 - \beta^2)}{\beta^2(\beta^2 - \gamma^2)} + \frac{(y^2 - \gamma^2)(z^2 - \gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2 - \beta^2)} = 1$$

$$\frac{1}{(y - z)^2} + \frac{1}{(z - x)^2} + \frac{1}{(x - y)^2} = \left(\frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x} + \frac{1}{x - y}\right)^2$$

259. Ὁμοίως νά δειχθῆ:

$$\frac{\beta + \gamma}{\alpha(\alpha + \beta + \gamma)} = \frac{\beta}{\alpha(\alpha + \beta)} + \frac{\gamma}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + \gamma)}$$

καί νά δημιουργηθῆ κατόπιν ἀνάλογος ἰσότης διά τέσσαρα γράμματα α,β,γ,δ. Τέλος, νά γίνη γενίκευσις δι'ὁσαδήποτε γράμματα.

260. Νά τεθοῦν ὑπό ἁπλουστέραν μορφήν αἱ παραστάσεις

$$\frac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} + \frac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} + \frac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$$

$$\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

261. Νά τεθοῦν ὑπό ἁπλουστέραν μορφήν αἱ παραστάσεις

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right) - \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}\right)$$

$$\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + \frac{\gamma+\alpha}{\alpha\gamma}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$$

$$\frac{x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3-3x^2y^2z^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2}$$

262. Ὁμοίως ἡ παράστασις

$$\frac{y^2x^2z^2}{\beta^2\gamma^2} + \frac{(x^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)(y^2-\beta^2)}{\beta^2(\gamma^2-\beta^2)} + \frac{(x^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)(y^2-\gamma^2)}{(\gamma^2-\beta^2)\gamma^2}$$

263. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παραστασις

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\beta\gamma(y-z)^2+\gamma\alpha(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$

διατηρεῖ τήν αὐτήν τιμήν ὅταν τά x, y, z μεταβάλλονται πληροῦντα πάντοτε τήν σχέσιν

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=0$$

79. Πολλαπλασιασμός καί διαίρεσις ρητῶν κλασμάτων. Ἐάν ἡ ρητή κλασματική παράστασις εἶναι γινόμενον ρητῶν κλασμάτων τότε θά ἰσοῦται μέ κλάσμα ἔχον ἀριθμητήν τό γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν καί παρ/στήν τό γινόμενον τῶν παρ/στῶν. Ἀλλά τό γινόμενον δύο ἀκέραιων πολυωνύμων εἶναι πάλιν ἀκέραιον πολυώνυμον συνεπῶς τό ἐξαγόμενον θά εἶναι κλάσμα μέ ὅρους πολυώνυμα δηλ. ρητόν κλάσμα.

Ἀλλά καί τό πηλίκον δύο ρητῶν κλασμάτων εἶναι πάλιν ρητόν κλάσμα διότι ὡς εἴδομεν εἰς τά περί Ἀλγεβρικῶν κλασμάτων, πρός εὕρεσιν τοῦ πηλίκου πολλαπλασιάζομεν τo διαιρετέον επί τόν ἀντίστροφον τοῦ διαιρέτου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

$$\frac{12(x^2-4)}{5(x^2+xy-2y^2)}\times\frac{15(x^2-y^2)}{4(x^2-5x+6)}\times\frac{x+2y}{x+y}$$

$$=\frac{\cancel{4}\cdot 3\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{5}\cdot 3\cdot\cancel{(x+y)}\cancel{(x-y)}\cdot(x+2y)}{\cancel{5}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-y)}\cdot\cancel{4}(x-3)\cancel{(x-2)}\cdot\cancel{(x+y)}}=\frac{9(x+2y)}{x-3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

$$\frac{4x^2-y^2}{4x^2-11xy-3y^2}:\frac{2x^2-5xy-3y^2}{4x^2+5xy+y^2}$$

$$=\frac{4x^2-y^2}{4x^2-11xy-3y^2}\times\frac{4x^2+5xy+y^2}{2x^2-5xy-3y^2}$$

$$=\frac{(2x+y)(2x-y)(4x+y)(x+y)}{(4x+y)(x-3y)(2x+y)(x-3y)}=\frac{(2x-y)(x+y)}{(x-3y)^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

264. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι σημειούμεναι πράξεις:

$$\frac{14\alpha^2y^2}{9x^2}\times(-18\alpha x^3y) \qquad \frac{-\alpha^2y^3}{5x}:(-3\alpha xy^2)$$

$$\frac{26x^3}{-11y^2}\cdot\frac{22y}{-39x} \qquad \left(\frac{-16x^2}{9y^2}\right)\cdot\left(\frac{3xy}{-4}\right)$$

$$\left(\frac{-16\alpha^2x^3}{5y^2}\right):\left(\frac{24\alpha^3x}{-25}\right) \qquad \frac{16x^2-9}{4x+1}:(3-4x)$$

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha-3\beta}\times\frac{1}{4\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2}\ , \qquad \frac{5\alpha x+10\alpha y}{x^3-y^3}:\frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2+xy+y^2}$$

265. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

$$\frac{3y-x}{x^2-3xy-10y^2}\cdot\frac{x^2-4y^2}{x^3-27y^3}\cdot\frac{x^2-4xy-5y^2}{x-2y}$$

$$\left(\frac{x^2y^2-2y^4}{3x^2+y^2}:\frac{x^4-4x^2y^2+y^4}{3x^4-2x^2y^2-y^4}\right)\cdot\frac{x+y}{x-y}$$

266. Ἐάν $x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καί $y=\dfrac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$

νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον $(x+1)(y+1)$ συναρτήσει τῶν $\alpha,\ \beta,\ \gamma$.

267. Ἐάν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ δείξατε τήν ἰσότητα

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=9$$

80. **Σύνθετα κλάσματα.** Τό ἁ π λ ο ῦ ν κ λ ά σ μ α δέν περιέχει κλασματικάς παραστάσεις εἰς τόν ἀριθμητήν του ἤ τόν παρονομαστήν του. Ἕνα κλάσμα τό ὁποῖον περιέχει ἕν τουλάχιστον κλάσμα εἰς τόν ἀριθμητήν του ἤ εἰς τόν παρονομαστήν του ἤ εἰς ἀμφοτέρους καλεῖται σ ύ ν θ ε τ ο ν κ λ ά σ μ α.

Διά νά μετατρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν μετατρέπωμεν πρῶτον τόν ἀριθμητήν του εἰς ἕνα ἁπλοῦν κλάσμα· καί τόν παρονομαστήν του ἐπίσης καί κατόπιν διαιροῦμεν τά δύο προκύψαντα ἁπλᾶ κλάσματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά τραπῆ εἰς ἁπλοῦν τό

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{1+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}$$

1η Λύσις. Ὁ ἀριθμητής γράφεται:

$$\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x^2+2xy+y^2)-(x^2-2xy+y^2)}{x^2-y^2}=\frac{4xy}{x^2-y^2}$$

Ὁ παρονομαστής γράφεται:

$$1+\frac{y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2-y^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{x^2}{x^2-y^2}$$

Ἐξ αὐτῶν ἔχομεν:

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{1+\dfrac{y^2}{x^2-y^2}}=\frac{\dfrac{4xy}{x^2-y^2}}{\dfrac{x^2}{x^2-y^2}}=\frac{4xy}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2}=\frac{4y}{x}$$

2α **Λύσις.** Πολλάκις πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπί τό Ε.Κ.Π. τῶν παρ/στῶν τούς ὁποίους θέλομεν νά ἐξαλείψωμεν. Οὕτω π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα θέλομεν νά ἐξαλείψωμεν τούς $x-y$, $x+y$, x^2-y^2 καί διά τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ συνθέτου ἐπί $(x+y)(x-y)$

$$\frac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{1+\frac{y^2}{x^2-y^2}}=\frac{\left[\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right](x-y)(x+y)}{\left[1+\frac{y^2}{x^2-y^2}\right](x-y)(x+y)}=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2+y^2}=\frac{4y}{x}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά τραπῆ εἰς ἁπλοῦν τό σύνθετον $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{+x}}}$

Λύσις. Ἁπλουστεύομεν πρῶτον τάς κλασματικάς παραστάσεις τάς πλέον ἀπομακρυσμένας ἀπό τήν κυρίαν γραμμήν διαιρέσεως.

$$1-\frac{x}{1+x}=\frac{1+x-x}{1+x}=\frac{1}{1+x}$$

$$\frac{x}{1-\frac{x}{1+x}}=\frac{x}{\frac{1}{1+x}}=x+x^2$$

$$1-\frac{x}{1-\frac{x}{1+x}}=1-x-x^2$$

καί τελικῶς

$$\frac{x}{1-\frac{x}{1-\frac{x}{1+}}}=\frac{x}{1-x-x}$$

81. Πᾶσα ρητή κλασματική παράστασις παράγεται διά συνδυασμοῦ τῶν τεσσάρων ρητῶν πράξεων: προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καί διαιρέσεως ἐκτελουμένων μεταξύ ρητῶν κλασμάτων ἤ πολυωνύμων. Ἐπειδή δέ κατά τά προηγούμενα ἑκάστη τῶν πράξεων τούτων δίδει ὡς ἀποτέλεσμα ἕν ρητόν κλάσμα, ἕπεται ὅτι καί τό τελικόν ἐξαγόμενον θά εἶναι ρητόν κλάσμα ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν κλασματικήν παράστασιν.

Ὥστε «Πᾶσα ρητή-κλασματική παράστασις μετατρέπεται εἰς ἰσοδύναμον πρός αὐτήν ρητόν κλάσμα.»

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

268. Νά γίνουν ἁπλᾶ τά κάτωθι σύνθετα κλάσματα:

$$\frac{x-2-\frac{8}{x}}{1+\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} \qquad \frac{1+\frac{2}{x}-\frac{15}{x^2}}{x+4-\frac{5}{x}} \qquad \frac{x+3-\frac{12x+26}{x+4}}{1-\frac{11x+26}{(x+4)^2}}$$

$$\frac{m - 6 - \dfrac{m+12}{m+2}}{m + 4 - \dfrac{2m+1}{m-2}} \qquad \frac{\dfrac{3m+4}{3m} - \dfrac{n+2}{n}}{\dfrac{9m}{16n} - \dfrac{n}{4m}} \qquad \frac{x^2 + x + 1 - \dfrac{x^3}{x-1}}{x^2 - x + 1 \quad \dfrac{x^3}{x+1}}$$

269. Νά τραπῆ εἰς ἕν ρητόν κλάσμα ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων

$$\left(\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}\right)\cdot\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\frac{\dfrac{x}{y} - 1 + \dfrac{y}{x}}{x^3 - 2x^2y + xy^2}$$

$$\frac{\dfrac{1-x}{1-x+x^2} + \dfrac{1+x}{1+x+x^2}}{\dfrac{1+x}{1+x+x^2} - \dfrac{1-x}{1-x+x^2}}$$

270. Νά τραπῆ εἰς ἕν ρητόν κλάσμα ἑκάστη τῶν παραστάσεων

$$\frac{\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta+\gamma}}{\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta-\gamma}}\left[1 + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right]$$

$$\frac{\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} - \beta}{\dfrac{1}{\gamma} + \dfrac{1}{\beta - 2\gamma}}, \qquad \frac{\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma} - \gamma}{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma - 2\beta}}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΤΥΧΟΝΤΑ ΣΥΜΜΕΤΡΟΝ ΕΚΘΕΤΗΝ

82. Δυνάμεις μέ ἐκθέτην τυχόντα ἀκέραιον α΄) Τό σύμβολον α^ν ἔχει ὁρισθῆ ὅταν ὁ α εἶναι τυχών ἀριθμός καί ὁ ν εἶναι φυσικός ἀριθμός 1,2,3,... (§ 32). Ἤδη θά ὁρίσωμεν τό σύμβολον α^ν ὅταν ὁ ν διατρέχει τας ὑπολοίπους ἀκεραίας τιμάς: 0 , -1 , -2 , -3 ,...

Ὁρισμοί. «Ἐάν μ φυσικός ἀριθμός καί $\alpha \neq 0$ τό σύμβολον $\alpha^{-\mu}$ παριστᾶ τό ἀντίστροφον τῆς δυνάμεως α^μ· τό δέ σύμβολον α^0 παριστᾶ τήν θετικήν μονάδα».

Ὥστε ἔχομεν <u>ἐξ ὁρισμοῦ</u>, $\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^\mu}$, $\alpha^0 = 1$ ὅπου $\alpha \neq 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\alpha^{-5} = \frac{1}{\alpha^5}$, $\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 9$,

$$(-0,3)^{-3} = \frac{1}{(-0,3)^3} = \frac{1}{-(0,3)^3} = \frac{1}{-\left(\frac{3}{10}\right)^3} = -\frac{1000}{27}, \quad (\alpha+\beta)^0 = 1$$

$$x^2 y^{-5} = \frac{x^2}{y^5} = \frac{y^{-5}}{x^{-2}}, \quad \alpha^{-2} - \beta^{-2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) =$$

$$= (\alpha^{-1} + \beta^{-1})(\alpha^{-1} - \beta^{-1})$$

β΄) Τά νέα ταῦτα σύμβολα, α^0, α^{-1}, α^{-2}, α^{-3},..., $\alpha^{-\nu}$... (τά ὁποῖα ἔχουν νόημα διά $\alpha \neq 0$) καλοῦνται ἐπίσης δ υ ν ά μ ε ι ς τοῦ α (μέ ἐκθέτας ἀρνητικούς ἤ μηδέν) καί οὐδόλως διαφέρουν ὡς πρός τάς ἰδιότητας, ἀπό τάς γνωστάς ἤδη δυνάμεις μέ θετικούς ἐκθέτας· ὑπακούουν δηλ. αἱ νέαι αὐταί δυνάμεις εἰς τούς αὐτούς πέντε νόμους οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν διά δυνάμεις μέ φυσικούς ἐκθέτας (§ 32).

Τοῦτο ἀποδεικνύεται διά τῶν ἑπομένων θεωρημάτων

Θεώρημα I. «Ἐάν μ ἀκέραιος (θετικός ἤ ἀρνητικός ἤ μηδέν) ἰσχύει πάντοτε ἡ ἰσότης

(1) $$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$$ ».

Ἀπόδειξις. Ἐάν $\mu > 0$ ἡ ἰσότης ἰσχύει ἐξ ὁρισμοῦ. Ἔστω λοιπόν ὅτι ὁ μ εἶναι ἀρνητικός καί θ ἡ ἀπόλυτος τιμή αὐτοῦ. Τότε $\mu = -\vartheta$, $-\mu = \vartheta$ καί τό πρῶτον μέλος $\alpha^{-\mu}$ τῆς ἀποδεικτέας ἰσοῦται μέ α^{ϑ}, ἐνῶ τό δεύτερον ἰσοῦται μέ:

$$\frac{1}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{-\vartheta}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}} = \alpha^{\vartheta}$$

Ἄρα τά δύο μέλη εἶναι ἴσα.

Τέλος, ἄν $\mu = 0$ ἀμφότερα τά μέλη ἰσοῦνται μέ 1 σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν: $\alpha^0 = 1$, ὥστε πάλιν ἡ ἰσότης ἰσχύει.

Θεώρημα II. « Διά τυχόντας φυσικούς ἀριθμούς μ καί ν καί $\alpha \neq 0$, ἰσχύει πάντοτε ὅτι

(2) $$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$ ».

Ἀπόδειξις. Ἐάν $\mu > \nu$ ἡ ἰσότης (2) ἰσχύει ὡς γνωστόν (σελ. 69,V) Ἐάν $\mu = \nu$ τότε $\alpha^{\mu} = \alpha^{\nu}$ ἄρα τό πρῶτον μέλος τῆς (2) εἶναι ἴσον μέ 1. Ἀλλά καί τό δεύτερον μέλος εἶναι τότε α^0 δηλ. πάλιν 1.

Τέλος, ἐάν $\nu > \mu$ τότε θά ἔχωμεν $\nu = \mu + \vartheta$ ὅπου θ ἡ (θετική) διαφορά $\nu - \mu$. Τό πρῶτον μέλος τῆς (2) γράφεται τότε

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu+\vartheta}} = \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\vartheta}} = \frac{1}{\alpha^{\vartheta}}$$

Τό δευτερον μέλος ἰσοῦται μέ $\alpha^{-\vartheta}$ δηλ. μέ $\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}$, ὥστε πάλιν ἡ (2) ἰσχύει.

Θεώρημα III. « Τό γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτας τυχόντας ἀκεραίους ἰσοῦται μέ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ».

Δηλ. θά εἶναι πάντοτε

(3) $$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$$

'Απόδειξις: 'Εάν μ καί ν θετικοί ἀκέραιοι ἡ (3) ὡς γνωστόν ἰσχύει.

'Εάν μ θετικός καί ν ἀρνητικός, ἴσος μέ $-\vartheta$ τότε:

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{-\vartheta}=\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\vartheta}}=\alpha^{\mu-\vartheta}$$ (σύμφωνα μέ τήν (2))

'Αλλά $-\vartheta=\nu$ καί $\mu-\vartheta=\mu+\nu$. Ὥστε $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu-\vartheta}=\alpha^{\mu+\nu}$ ὅ.ἔ.δ.

'Εάν μ καί ν ἀρνητικοί, ἔστω $\mu=-k$, $\nu=-\vartheta$ τότε

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{-k}\cdot\alpha^{-\vartheta}=\frac{1}{\alpha^{k}}\cdot\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}=\frac{1}{\alpha^{k+\vartheta}}=\frac{1}{\alpha^{(-\mu)+(-\nu)}}=\frac{1}{\alpha^{-(\mu+\nu)}}=\alpha^{\mu+\nu}$$ (σύμφωνα μέ τήν (1)). Ὥστε πάλιν ἡ (3) ἰσχύει.

'Εάν εἷς τῶν ἐκθετῶν εἶναι μηδέν, π.χ. $\mu=0$ τότε:

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{0}\cdot\alpha^{\nu}=1\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\nu}=\alpha^{0+\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$$

δηλ. πάλιν ἡ (3) ἰσχύει.

Τέλος ἄν καί οἱ δύο ἐκθέται εἶναι μηδενικοί προφανῶς ἡ (3) ἰσχύει καθ'ὅσον καί τά δύο μέλη της εἶναι ἴσα πρός 1.

Θεώρημα IV. «Τό πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτας τυχοντας ἀκεραίους ἰσοῦται μέ δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουσαν ἐκθέτην τήν διαφοράν τῶν ἐκθετῶν, τοῦ ἀριθμητοῦ μεῖον τόν τοῦ παρονομαστοῦ».

Δηλ. πάντοτε; $$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}$$

'Απόδειξις. Ἔχομεν $\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{-\nu}$ (Θεώρ. I) καί συνεπῶς

$$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu}\cdot\frac{1}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{-\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$$

διότι τό θεώρημα περί γινομένου δυνάμεων ἰσχύει δι'οἱουσδήποτε ἐκθέτας.

Θεώρημα V. «Δύναμις μέ ἀκέραιον ἐκθέτην ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν μέ ἀκέραιον ἐκθέτην, ἄν πολλαπλασιασθῇ ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως ἐπί τόν νέον ἐκθέτην».

Δηλ. πάντοτε ἰσχύει ἡ:

(1) $$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$$

Ἀπόδειξις. Τό θεώρημα εἶναι γνωστόν ὅταν ἀμφότεροι οἱ ἐκθέται εἶναι θετικοί (ἀκέραιοι).

1ον) Ἔστω μ ἀρνητικός = −θ καί ν θετικός. Τότε:

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{-\vartheta})^{\nu} = \left(\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}\right)^{\nu} = \frac{1}{(\alpha^{\vartheta})^{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\vartheta\nu}} = \alpha^{-\vartheta\nu} = \alpha^{(-\vartheta)\nu} = \alpha^{\mu\nu} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

2ον) Ἔστω μ θετικός καί ν ἀρνητικός = −k. Τότε:

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{\mu})^{-k} = \frac{1}{(\alpha^{\mu})^{k}} = \frac{1}{\alpha^{\mu k}} = \alpha^{-\mu k} = \alpha^{\mu(-k)} = \alpha^{\mu\nu} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

3ον) Ἔστω μ ἀρνητικός = −θ καί ν ἀρνητικός = −k Τότε:

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{-\vartheta})^{-k} = \left(\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}\right)^{-k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha^{\vartheta}}\right)^{k}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^{\vartheta k}}} = \alpha^{\vartheta k} = \alpha^{(-\vartheta)(-k)} = \alpha^{\mu\nu} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

4ον) Ἔστω μ = 0. Τότε:

$$(\alpha^{\mu})^{\nu} = (\alpha^{0})^{\nu} = 1^{\nu} = 1 \quad \text{καί} \quad \alpha^{\mu\nu} = \alpha^{0\cdot\nu} = \alpha^{0} = 1$$

ἄρα πάλιν ἡ (4) ἰσχύει.

5ον). Ἔστω ν = 0

Τότε πάλιν τό πρῶτον μέλος τῆς (4) εἶναι $(\alpha^{\mu})^{0} = 1$ καί τό δεύτερον εἶναι $\alpha^{\mu\cdot 0} = \alpha^{0} = 1$ ἄρα αὕτη ἰσχύει καί πάλιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

271. Νά εὑρεθῇ τό ἐξαγόμενον τῶν πράξεων:

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{-5}\right)^{-3} + \left(\frac{1}{-2}\right)^{-3} - 3\cdot 7\cdot(-5)\cdot(-2)$$

272. Ὁμοίως

$$(-0,125)^{-2} - (0,25)^{-3} + \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}\cdot\frac{45}{105} = \;;$$

273. Γράψατε τάς κάτωθι παραστάσεις ὡς γινόμενα δυνάμεων, (χωρίς παρονομαστάς):

$$\frac{5x^{2}}{\alpha^{2}y^{3}}\,, \quad \frac{3\alpha^{5}x^{3}}{\alpha^{7}x}\,, \quad \frac{1}{xy^{2}}\,, \quad \frac{9x^{-4}y^{-4}}{x^{2}y}$$

274. Ἐάν τεθῇ $S_{\kappa} = x^{\kappa} + x^{-\kappa}$ νά εὑρεθῇ σχέσις συνδέουσα τά S_1, S_ν, $S_{\nu+1}$ καί $S_{\nu+2}$ ὅπου ν τυχών φυσικός ἀριθμός.

83. 'Ιδιότητες τῶν ριζῶν μέ θετικά ὑπόρριζα. Εἰς τήν § 44 ὡρίσαμεν τήν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ (πρωτεύουσα νυοστή ρίζα τοῦ α) καί εἴδομεν πότε τοῦτο ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί πότε ὄχι. Τώρα θά ἐξετάσωμεν περαιτέρω ἰδιότητας τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ βάσει τῶν ὁποίων γίνεται ὁ ἀλγεβρικός λογισμός μέ ριζικά.

'Υποθέτοντες τά ὑπόρριζα θετικά καί τούς δεικτας τῶν ριζῶν τυχόντας φυσικούς ἀριθμούς θά δείξωμεν τας κατωθι 6 ἰδιότητας (νόμους τῶν ριζῶν) οἱ ὁποῖοι διέπουν τάς πράξεις μεταξύ τῶν ριζῶν.

i) $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu\mu]{\alpha}$. Ἤτοι: «Ρίζα ρίζης ἰσοῦται μέ ρίζαν ἔχουσαν δείκτην τό γινόμενον τῶν δεικτῶν καί ὑπόρριζον τό αὐτό».

ii) $\theta\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\theta^{\nu}\alpha}$ ὅπου $\theta > 0$. Ἤτοι: «Θετικός παράγων εὑρισκόμενος πρό τοῦ ριζικοῦ δύναται νά εἰσαχθῆ ὑπό τό ριζικόν ἀφοῦ ὑψωθῆ εἰς ἥν δύναμιν δεικνύει ὁ δείκτης».

Ἤ ἄλλως: «Παράγων εὑρισκόμενος ὑπό τό ριζικόν δύναται νά ἐξαχθῆ ἐκτός αὐτοῦ, ἀφοῦ ὁ ἐκθέτης του διαιρεθῆ διά τοῦ δείκτου τῆς ρίζης».

iii) $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}}$ (ρ φυσικός). Ἤτοι: «Ἡ ἀξία τῆς ρίζης δέν βλάπτεται ὅταν δείκτης καί ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου πολλαπλασιασθοῦν (ἤ διαιρεθοῦν) μέ τόν αὐτόν (φυσικόν) ἀριθμόν»

iv) $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}$. Ἤτοι: « Τό γινόμενον ἰσοβαθμίων ριζῶν (δηλ. ἐχουσῶν τόν αὐτόν δείκτην) ἰσοῦται μέ ρίζαν ἔχουσαν τόν αὐτόν δείκτην καί ὑπόρριζον τό γινόμενον τῶν ὑπορρίζων».

v) $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$. Ἤτοι: « Τό πηλίκον δύο ἰσοβαθμίων ριζῶν ἐκφράζεται μέ ρίζαν ἔχουσαν τόν αὐτόν δείκτην καί ὑπόρριζον τό πηλίκον τῶν ὑπορρίζων».

Ἤ ἄλλως: « Ἡ νυοστή ρίζα κλάσματος ἰσοῦται μέ τήν νυοστήν ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ διά τῆς νυοστῆς ρίζης τοῦ παρ/στοῦ». (Φυσικά λαμβάνονται πάντοτε αἱ πρωτεύουσαι ρίζαι).

vi) $(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\rho} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}$. Ἤτοι: «**Ρίζα ὑψοῦται εἰς δύναμιν ἄν τό ὑπόρριζον ὑψωθῇ εἰς τήν δύναμιν ταύτην**».

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις καί τῶν 6 νόμων στηρίζεται εἰς τό ἑξῆς λ ῆ μ μ α:

«Ἐάν δύο θετικοί ἀριθμοί α καί β, ὑψούμενοι ἕκαστος εἰς τήν λ (λ φυσικός) δίδουν ἴσα ἐξαγόμενα τότε οἱ ἀριθμοί αὐτοί εἶναι ἴσοι».

Πράγματι, ἄν ἦτο $\alpha < \beta$ τότε θά ἦτο καί $\alpha^{\lambda} < \beta^{\lambda}$ (ἴδε ἀσκ.106) ὅπερ ἀντίκειται εἰς τήν ὑπόθεσιν $\alpha^{\lambda} = \beta^{\lambda}$. Ὁμοίως, δέν δύναται νά εἶναι $\alpha > \beta$. Ἐπομένως $\alpha = \beta$.

Κατόπιν τουτου, διά νά δείξωμεν τάς ἀνωτέρω ἰσότητας (i) ἕως (vi) ἀρκεῖ νά ὑψώσωμεν καί τά δύο (θετικά) μέλη ἑκάστης εἰς τήν αὐτήν δύναμιν καί νά λάβωμεν τό ἴδιο ἐξαγόμενον.

Οὕτω, ὑψοῦμεν ἀμφότερα τά μελη τῆς (i) εἰς τήν δύναμιν μ·ν. Τό πρῶτον μέλος γίνεται διαδοχικῶς:

$$\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\mu\nu} = \left[\left(\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}\right)^{\nu}\right]^{\mu} = \left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^{\mu} = \alpha$$

(Διότι κατά τόν ὁρισμόν τῆς ρίζης, εἶναι $(\sqrt[\nu]{\omega})^{\nu} = \omega$)

Τό δεύτερον μέλος τῆς (i) ὑψούμενον εἰς τήν αὐτήν δύναμιν γίνεται $(\sqrt[\mu\nu]{\alpha})^{\mu\nu} = \alpha$ δηλ. ὅσον ἔγινε καί τό πρῶτον. Ὥστε τά δύο μέλη τῆς (i) εἶναι ἴσα.

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (ii) ὑψοῦμεν ἀμφότερα τά μέλη της εἰς τήν νυοστήν

$$(\vartheta\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \vartheta^{\nu}\cdot(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu} = \vartheta^{\nu}\cdot\alpha$$

$$(\sqrt[\nu]{\vartheta^{\nu}\alpha})^{\nu} = \vartheta^{\nu}\alpha$$

καί ὡς βλέπομεν καθίστανται ἴσα.

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (iii) ὑψοῦμεν τά μέλη της εἰς τήν ν·ρ

$$(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}})^{\nu\rho} = \left[(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}})^{\nu}\right]^{\rho} = (\alpha^{\mu})^{\rho} = \alpha^{\mu\rho}$$

$$(\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}})^{\nu\rho} = \alpha^{\mu\rho}$$

καί λαμβάνομεν ἴσα ἐξαγόμενα.

Ἡ (iv) καί (v) ἀποδεικνύεται δι'ὑψώσεως τῶν μελῶν της εἰς τήν νυοστήν ἡ δέ (vi) εἶναι συνέπεια τῆς (iv) διότι:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\rho} = \sqrt[\nu]{\alpha}\,\sqrt[\nu]{\alpha}\ldots\sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\ldots\alpha} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\rho}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\alpha > 0$, $\sqrt{\sqrt{\alpha}} = \sqrt[4]{\alpha}$, $\sqrt[3]{\sqrt{\alpha^6}} = \sqrt[6]{\alpha^6} = \alpha$ (Θεώρ. I)
$\sqrt[3]{8\alpha} = \sqrt[3]{2^3\cdot\alpha} = 2\sqrt[3]{\alpha}$ (Θεώρ. II) $\sqrt{\alpha} = \sqrt[4]{\alpha^2}$, $\sqrt[6]{\alpha^4} = \sqrt[3]{\alpha^2}$ (Θεώρ. III)
$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{36} = 3$ (Θεώρ. IV)
$\dfrac{\sqrt[3]{48}}{\sqrt[3]{6}} = \sqrt[3]{\dfrac{48}{6}} = \sqrt[3]{8} = 2$ (Θεώρ. V) $(\sqrt[3]{3\alpha^2})^6 = \sqrt[3]{(3\alpha^2)^6} = \sqrt[3]{3^6\alpha^{12}} =$
$= \sqrt[3]{3^6}\,\sqrt[3]{\alpha^{12}} = 3^2\cdot\alpha^4 = 9\alpha^4$ (Θεώρ. VI, IV).

84. Ἀρνητικά ὑπόρριζα. Ἐάν ν περιττός καί ϑ θετικός ἰσχύει ἡ ἰσότης

(1) $$\sqrt[\nu]{-\vartheta} = -\sqrt[\nu]{\vartheta}$$

δηλ. τό πρόσημον − ἐξέρχεται ἐκτός τοῦ ριζικοῦ ὅταν ὁ δείκτης εἶναι περιττός. Πράγματι, τά δύο μέλη τῆς (1) εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί οἵτινες ὑψουμενοι εἰς τήν περιττήν δύναμιν ν καθίστανται ἴσοι. Συνάγεται εὐκόλως ἐκ τούτου ὅτι εἶναι ἴσοι ἀριθμοί.

Βάσει τῆς (1), πράξεις μεταξύ ριζῶν μέ ἀρνητικά ὑπόρριζα ἀνάγονται εἰς πράξεις μεταξύ ριζῶν μέ θετικά ὑπόρριζα.

Οὕτω π.χ. $\sqrt[3]{-7}\cdot\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{7}\cdot\sqrt[3]{6} = -\sqrt[3]{42}$,

$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{-\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}} = -\sqrt[9]{2}$ κ.ο.κ.

Ἀνεξαρτήτως ὅμως τούτου πᾶσαι αἱ ἰδιότητες (i) ἕως (vi) τῆς §83 ἰσχύουν καί δι'ἀρνητικά ὑπόρριζα ὑπό τόν ὅρον τά δύο μέλη ἑκάστης ἰσότητος νά ἔχουν ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί νά εἶναι ὁμόσημα.

Οὕτω π.χ. ἡ τιμή τῆς ρίζης $\sqrt[5]{(-7)^3}$ δέν βλάπτεται ἄν πολλαπλασιάσωμεν δείκτην καί ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου μέ 3 (ἰδιότης iii) ἐνῶ ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί 2 μεταβάλλεται. Δηλ.

$$\sqrt[5]{(-7)^3} = \sqrt[15]{(-7)^9} \qquad \text{ἐνῶ} \qquad \sqrt[5]{(-7)^3} \neq \sqrt[10]{(-7)^6}$$

Εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν αἱ δύο παραστάσεις δέν εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί.

85. **Ἐφαρμογαί τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν.** α) **Πολλαπλασιασμός ἀνισοβαθμίων ριζῶν.** Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἀνισοβαθμίους ρίζας τάς τρέπομεν πρῶτον εἰς ἰσοβαθμίους βάσει τῆς ἰδιότητος (iii) τῆς §83. Πρός τοῦτο πολλαπλασιάζομεν δείκτην καί ἐκθέτην ἑκάστης ρίζης ἐπί κατάλληλον ἀκέραιον ὥστε πάντες οἱ δεῖκται νά καταστοῦν ἴσοι. Ἀκολούθως ἐφαρμόζομεν τήν ἰδιότηταίν

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1. $\sqrt[4]{\alpha}\,\sqrt[6]{\beta}\,\sqrt[3]{\gamma} = \sqrt[12]{\alpha^3}\sqrt[12]{\beta^2}\sqrt[12]{\gamma^4} = \sqrt[12]{\alpha^3\beta^2\gamma^4}$

2. $\sqrt[3]{4\alpha^2\beta}\cdot\sqrt[4]{8\alpha^3\gamma} = \sqrt[12]{(4\alpha^2\beta)^4}\cdot\sqrt[12]{(8\alpha^3\gamma)^3} = \sqrt[12]{4^4\cdot\alpha^8\cdot\beta^4\cdot 8^3\cdot\alpha^9\cdot\gamma^3} =$

$= \sqrt[12]{2^8\cdot 2^9\cdot\alpha^{17}\cdot\beta^4\cdot\gamma^3} = 2\alpha\sqrt[12]{2^5\alpha^5\beta^4\gamma^3}$

(Τά α, β, γ ὑποτίθενται θετικά).

β) **Διαίρεσις ἀνισοβαθμίων ριζῶν.** Αὕτη γίνεται ὁμοίως·

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 3. $\dfrac{\sqrt[5]{\alpha}}{\sqrt[10]{\alpha}} = \dfrac{\sqrt[10]{\alpha^2}}{\sqrt[10]{\alpha}} = \sqrt[10]{\dfrac{\alpha^2}{\alpha}} = \sqrt[10]{\alpha}$

4. $\dfrac{\sqrt[3]{4\alpha^2 x}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2\alpha x}\,\sqrt[6]{8\alpha^4 x^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{(4\alpha^2 x)^3}\,\sqrt[12]{x^3}}{\sqrt[12]{(2\alpha x)^6}\,\sqrt[12]{(8\alpha^4 x^2)^2}} = \dfrac{\sqrt[12]{4^3\cdot\alpha^6\cdot x^6}}{\sqrt[12]{2^6\cdot 8^2\cdot\alpha^{14}\cdot x^{10}}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^6\cdot\alpha^6\cdot x^6}{2^6\cdot 2^6\cdot\alpha^{14}x^{10}}} =$

$$\sqrt[12]{\frac{1}{2^6\cdot\alpha^8\cdot x^4}} = \frac{1}{\sqrt[12]{2^6\cdot\alpha^8\cdot x^4}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2^3\alpha^4 x^2}}$$

γ) **Ἁπλούστευσις μιᾶς ρίζης.** Οὕτω καλεῖται ἡ εὕρεσις ἰσοδυνάμου παραστάσεως πρός τήν δοθεῖσαν ρίζαν ἀλλά μέ μικρότερον ὑπόρριζον ἤ μικρότερον δείκτην. Ἡ ἁπλούστευσις τῆς ρίζης, ἐφ'ὅσον εἶναι δυνατή, ἐπιτυγχανεται διά τῶν ἰδιοτήτων (i), (ii) καί (iii) τῆς §83. Ἐπίσης συντελεῖ εἰς τήν ἁπλούστευσιν ἡ μετατροπή τοῦ ὑπορρίζου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 5. $\sqrt{32} = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

6. $\sqrt[3]{189} = \sqrt[3]{3^3 \cdot 7} = 3\sqrt[3]{7}$

7. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4}\cdot\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{\alpha}{8}}} = \sqrt[6]{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}$

δ) Ἁπλούστευσις διαφόρων ἀρρήτων παραστάσεων. Πολλάκις, πολύπλοκοι παραστάσεις μέ ριζικά ἁπλουστεύονται σημαντικῶς μετά τήν ἐφαρμογήν τῶν κανόνων τῶν πράξεων ἐπί ριζῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 8. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} =$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{4-2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2.$

9. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{\alpha^2}}\cdot\sqrt[6]{\sqrt[4]{\alpha^9}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[10]{\sqrt[4]{\alpha^{19}}}} = \sqrt[15]{\alpha^2}\cdot\sqrt[24]{\alpha^9}\cdot\sqrt[120]{\alpha^{19}} = \sqrt[120]{\alpha^{16}}\,\sqrt[120]{\alpha^{45}}\,\sqrt[120]{\alpha^{19}} = \sqrt[120]{\alpha^{80}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$

10. $\sqrt[3]{-108} + \sqrt[3]{500} - \sqrt[3]{-32} - \sqrt[6]{11664} = -\sqrt[3]{108} + \sqrt[3]{500} + \sqrt[3]{32} - \sqrt[6]{11664}$

$= -\sqrt[3]{4\cdot 3^3} + \sqrt[3]{4\cdot 5^3} + \sqrt[3]{4\cdot 2^3} - \sqrt[6]{4^2\cdot 3^6} = -3\sqrt[3]{4} + 5\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4} - 3\sqrt[3]{4}$

$= (-3+5+2-3)\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4}$

11. Ν'ἁπλοποιηθῆ τό ἄρρητον κλάσμα

$$\frac{x^2 - x - 2 + (x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2 + x - 2 + (x+1)\sqrt{x^2-4}}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι $x > 2$.

Λύσις. Διά νά μετατρέψωμεν τόν ἀριθμητήν εἰς γινόμενον παραγόντων, τρέπομεν χωριστά τό ρητόν μέρος του εἰς γινόμενον ἐπίσης καί τό ἄρρητον καί κατόπιν μεταξύ τῶν δύο τούτων ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα. Ἔχομεν δηλ.

$$x^2 - x - 2 = (x^2 - 1) - x - 1 = (x+1)(x-1) - (x+1) =$$

$$= (x+1)(x-2)$$

$$(x-1)\sqrt{x^2-4} = (x-1)\sqrt{(x+2)(x-2)} = (x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$$

Ὁ ἀριθμητής λοιπόν γίνεται:

$$(x+1)(x-2) + (x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2} = (x+1)\sqrt{x-2}\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x-2}$$

$$= \sqrt{x-2}\left\{(x+1)\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2}\right\}$$

Ὁμοίως ὁ παρ/στής τοῦ δοθέντος γράφεται:

$$(x-1)(x+2) + (x+1)\sqrt{(x+2)(x-2)} = (x-1)\sqrt{x+2}\sqrt{x+2} +$$

$$+ (x+1)\sqrt{(x+2)}\sqrt{x-2} = \sqrt{x+2}\left\{(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}\right\}$$

Συνεπῶς τό κλάσμα ἰσοῦται μέ

$$\frac{\sqrt{x-2}\left\{(x+1)\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2}\right\}}{\sqrt{x+2}\left\{(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}\right\}} = \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

275. Ν'ἁπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448} \qquad \sqrt[3]{-54} - \sqrt[3]{-250} - \sqrt[3]{-125}$$

$$\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{\alpha^5}}\cdot\sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^3}}\cdot\sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{\alpha^9}}\cdot\sqrt[6\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$$

276. Ὁμοίως αἱ παραστάσεις.

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2}) \qquad \frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$$

277. Ν'ἁπλουστευθοῦν αἱ ἄρρητοι παραστάσεις

$$\sqrt[3]{27x^8 - 81x^6y^2}, \quad \sqrt{x^{-4} - 3x^{-2}y^2}, \quad \sqrt{4x^{-2}y^4 + 3y^6}$$

$$\sqrt[5]{729} \qquad \sqrt[3]{\frac{3}{25}} + \sqrt[3]{-120} + \sqrt[3]{\frac{5}{9}}$$

278. Ὁμοίως διά τάς παραστάσεις

$$\sqrt[3]{1,375} + \sqrt[3]{-88} + \sqrt{0,48}, \quad \sqrt[8]{\frac{1}{81}(x+3y)^4}$$

$$\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{16x\,y}} \qquad \sqrt[6]{\frac{\sqrt[3]{x^2y}}{\sqrt[3]{xy}}} \qquad \sqrt{2+x^{-3}} - \sqrt{8x^4+4x}$$

279. Ἐάν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} = 0$ δείξατε ὅτι τότε θά ἰσχύῃ καί ἡ $(x+y+z)^3 = 27xyz$

280. Νά εὑρεθῇ τό ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων

$$(2-\sqrt{1-x})^6 + (2+\sqrt{1-x})^6$$

281. Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα

$$\frac{x^2 - x - 2 + (x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2 + x - 2 + (x+1)\sqrt{x^2-4}}$$

ὅπου τό x ὑποτίθεται < -2

282. Ν'ἁπλοποιηθῇ ἡ ἄρρητος παράστασις

$$\frac{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4} - 2}{x^3 - 3x + (x^2-1)\sqrt{x^2-4} + 2}$$

283. Ἄν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ νά τεθοῦν κατά τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθ-

μοί $\frac{\alpha + \beta}{2}$ (μέσος ἀριθμητικός), $\sqrt{\alpha\beta}$ (μέσος γεωμετρικός)
καί $\frac{2\alpha\beta}{\alpha + \beta}$ (μέσος ἁρμονικός).

284. Δείξατε ὅτι ἄν $\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{\Gamma}{\gamma} = \frac{\Delta}{\delta}$, ὅπου πάντες οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων εἶναι θετικοί, θά ἔχωμεν καί

$$\sqrt{A\alpha} + \sqrt{B\beta} + \sqrt{\Gamma\gamma} + \sqrt{\Delta\delta} = \sqrt{(A + B + \Gamma + \Delta)(\alpha + \beta + \gamma + \delta)}$$

285. Ἐάν οἱ θετικοί ἀριθμοί x, y, z πληροῦν τήν σχέσιν $xy + yz + zx = 1$ θά πληροῦν ἐπίσης καί τήν σχέσιν

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = 2$$

286. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y πληροῦν τήν ἰσότητα

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\alpha^2 - \gamma^2} = 1$$

ὅπου $\alpha > \gamma > 0$ νά δειχθῇ ὅτι θά πληροῦν καί τήν

$$\sqrt{(x + \gamma)^2 + y^2} + \sqrt{(x - \gamma)^2 + y^2} = 2\alpha$$

86. Ρητοποίησις τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐάν ἕν ἀλγεβρικόν κλάσμα περιέχει εἰς τόν παρονομαστήν ριζικά, ἐπιδιώκομεν τότε νά μετατρέψωμεν τό κλάσμα τοῦτο εἰς ἄλλο ἴσον οὗ ὁποίου ὁ παρονομαστής νά μή περιέχῃ ριζικά δηλ. νά εἶναι ρητός.

Τοῦτο ἐπιδιώκεται διότι τά κλάσματα μέ ρητόν παρονομαστήν παρουσιάζουν πολλά πλεονεκτήματα ἔναντι τῶν ἐχόντων ἄρρητον παρονομαστήν, τόσον εἰς τάς πράξεις ὅσον καί εἰς τόν ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν αὐτῶν. Οὕτω π.χ. ἡ πρόσθεσις ἀρρήτων κλασμάτων εὐκολύνεται σημαντικῶς ἄν μετατραποῦν οἱ προσθετέοι εἰς κλάσματα μέ ρητούς παρονομαστάς καί χρησιμοποιηθῇ τό Ε.Κ.Π. τῶν ρητῶν παρονομαστῶν.

Ἡ ἐργασία δι'ἧς εὑρίσκομεν κλάσμα ἴσον πρός τό δοθέν ἀλλά ἔχον παρονομαστήν ρητόν καλεῖται «ρητοποίησις» τοῦ παρονομαστοῦ ἤ μετατροπή τοῦ παρονομαστοῦ εἰς ρητόν.

Μορφαί κλασμάτων μέ ἄρρητον παρονομαστήν, συχνά παρουσιαζόμεναι εἰς τόν ἀλγεβρικόν λογισμόν εἶναι αἱ ἑπόμεναι

i) Κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}$, $\frac{\alpha}{\beta\pm\sqrt{\gamma}}$ Ταῦτα τρέπονται εἰς ἰσοδύναμα μέ ρητόν παρονομαστην ἐάν πολλαπλασιασθοῦν οἱ δύο ὅροι των ἐπί μίαν σ υ ζ υ γ ῆ π α ρ ά σ τ α σ ι ν τοῦ παρονομαστοῦ δηλ. διαφέρουν τοῦ παρονομαστοῦ μόνον ὡς πρός τό πρόσημον τοῦ ἑνός ριζικοῦ.

Οὕτω: $$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta})^2-(\sqrt{\gamma})^2} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$$

$$\frac{4}{2-3\sqrt{7}} = \frac{4(2+3\sqrt{7})}{(2-3\sqrt{7})(2+3\sqrt{7})} = \frac{4(2+3\sqrt{7})}{4-63} = -\frac{4(2+3\sqrt{7})}{59}$$

$$\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} = \frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})}{(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})} = \frac{(\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y})^2}{(x+y)-(x-y)}$$

$$= \frac{x+y-2\sqrt{x^2-y^2}+x-y}{2y} = \frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$$

ii) Κλάσματα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\pm\sqrt{\delta}}$. Διά νά μετατρέψωμεν ταῦτα εἰς ἰσοδύναμα μέ ρητόν παρονομαστήν πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους των ἐπί μίαν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρ/στοῦ ὁπότε τό πλῆθος τῶν ριζικῶν τοῦ παρ/στοῦ ἐλαττοῦται καί μεταβαίνομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν (i).

Οὕτω:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}} = \frac{\alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta})}{[(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})+\sqrt{\delta}]\cdot[(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})-\sqrt{\delta}]} = \frac{A}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2-(\sqrt{\delta})^2}$$

$$= \frac{A}{(\beta+\gamma-\delta)+2\sqrt{\beta\gamma}}$$

ὅπου ἐτέθη $A = \alpha(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta})$. Πολλαπλασιαζομεν ἐκ νέου τούς ὅρους τοῦ προκύψαντος κλάσματος ἐπί τήν συζυγῆ τοῦ παρ/στοῦ παράστασιν: $(\beta+\gamma-\delta)-2\sqrt{\beta\gamma}$ καί τοῦτο μετατρέπεται εἰς τό

$$\frac{A(\beta+\gamma-\delta-2\sqrt{\beta\gamma})}{[(\beta+\gamma-\delta)+2\sqrt{\beta\gamma}][(\beta+\gamma-\delta)-2\sqrt{\beta\gamma}]} = \frac{A(\beta+\gamma-\delta-2\sqrt{\beta\gamma})}{(\beta+\gamma-\delta)^2-4\beta\gamma}$$

Οὕτω φθάνομεν τελικῶς, εἰς κλάσμα μέ ρητόν παρ/στήν.

Γενικώτερον. Ἐάν ὁ παρ/στης εἶναι τῆς μορφῆς

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}$$

πολλαπλασιάζομεν τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί τήν παράστασιν $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})$ ὁπότε μεταβαίνομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν.

Ἀναλόγως ἐργαζόμεθα ἄν ὁ παρ/στής ἔχει 5 ὅρους κ.ο.κ.

iii) **Κλάσματα τῆς μορφῆς** $\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}$. Ὁ παρ/στής ρητοποιεῖται ἄν πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος τούτου ἐπί τόν παράγοντα $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$. Πράγματι

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta}\,\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\beta}$$

Οὕτω:
$$\frac{5}{2\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{2\cdot(\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}}=\frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{2}=2\sqrt[3]{4}$$

iv) **Κλάσματα τῆς μορφῆς** $\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma}}$. Πάλιν ὑπάρχει κατάλληλος παράγων ὅστις πολλαπλασιαζων ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος μετασχηματίζει αὐτό εἰς κλάσμα μέ ρητον παρ/στήν.

Διότι ἐκ τῆς ταυτότητος $x^{\nu}-y^{\nu}=(x-y)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}y+\ldots+y^{\nu-1})$ λαμβάνομεν θέτοντες ὅπου x τό $\sqrt[\nu]{\beta}$ καί ὅπου y τό $\sqrt[\nu]{\gamma}$ τήν ἰσότητα:

$$(1)\qquad \beta-\gamma=(\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma})(\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}}\sqrt[\nu]{\gamma}+\ldots+\sqrt[\nu]{\gamma^{\nu-1}})$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι ὁ παράγων ἐπί τόν ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενος ὁ παρ/στής $\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma}$ καθίσταται ρητός εἶναι ὁ

$$(2)\qquad \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}+\ldots+\sqrt[\nu]{\gamma^{\nu-1}}$$

Δυνάμεθα ἐπίσης νά γράψωμεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma}}=\frac{\alpha(\beta-\gamma)}{(\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma})(\beta-\gamma)}=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}\cdot\frac{\beta-\gamma}{\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma}}=$$

$$= \frac{\alpha}{\beta - \gamma} \frac{(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu} - (\sqrt[\nu]{\gamma})^{\nu}}{(\sqrt[\nu]{\beta}) - (\sqrt[\nu]{\gamma})}$$

καί νά ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ $(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu} - (\sqrt[\nu]{\gamma})^{\nu}$ διά τοῦ $(\sqrt[\nu]{\beta}) - (\sqrt[\nu]{\gamma})$ κατά τούς κανόνας τῶν ἀξιοσημειώτων διαιρέσεων δηλ. ὅπως ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν $x^{\nu} - y^{\nu}$ διά $x - y$ (§64)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x} - 1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x - 1}\,\dfrac{x - 1}{\sqrt[3]{x} - 1} = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x - 1}\,\dfrac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1}{(\sqrt[3]{x}) - 1} =$

$$= \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x - 1}\left((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1\right) = \frac{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)}{x - 1} = \frac{x\sqrt[3]{x} + x + \sqrt[3]{x^2}}{x - 1}$$

(ὅπου ἐφηρμόσθη ἡ ταυτότης $\dfrac{y^3 - 1}{y - 1} = y^2 + y + 1$)

Παρατήρησις. Ἐάν ν ἄρτιος εἶναι προτιμώτερον νά πολ/σωμεν πρῶτον ἀριθμητήν καί παρ/στήν ἐπί τήν συζυγῆ παράστασιν $\sqrt[\nu]{\beta} + \sqrt[\nu]{\gamma}$ διότι ὑποβιβάζεται ὁ δείκτης εἰς τό ἥμισυ, καί κατόπιν νά ἐφαρμόσωμεν τήν ἀνωτέρω μέθοδον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[12]{\alpha} - 1} = \dfrac{\sqrt[12]{\alpha} + 1}{(\sqrt[12]{\alpha})^2 - 1} = \dfrac{A}{\sqrt[12]{\alpha^2} - 1} = \dfrac{A}{\sqrt[6]{\alpha} - 1} =$

$$= \frac{A}{\alpha - 1}\cdot\frac{\alpha - 1}{\sqrt[6]{\alpha} - 1} = \frac{A}{\alpha - 1}\;\frac{(\sqrt[6]{\alpha})^6 - 1}{(\sqrt[6]{\alpha}) - 1} =$$

$$= \frac{A}{\alpha - 1}\left(\sqrt[6]{\alpha^5} + \sqrt[6]{\alpha^4} + \sqrt[6]{\alpha^3} + \sqrt[6]{\alpha^2} + \sqrt[6]{\alpha} + 1\right)$$

(ὅπου ἐτέθη $A = \sqrt[12]{\alpha} + 1$ καί ἐφηρμόσθη ἡ ἰσότης

$$\frac{y^6 - 1}{- 1} = y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \quad)$$

ν) Κλάσματα τῆς μορφῆς $\dfrac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta} + \sqrt[\nu]{\gamma}}$. Ἐάν ὁ ν εἶναι π ε ρ ι τ τ ό ς ἐργαζόμεθα ὡς προηγουμένως, βάσει τῆς ἰσότητος

$$\frac{y^{\nu} + \omega^{\nu}}{y + \omega} = y^{\nu-1} - y^{\nu-2}\omega + \ldots + \omega^{\nu-1} \qquad \text{Δηλαδή}$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta} + \sqrt[\nu]{\gamma}} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}\cdot\frac{\beta + \gamma}{\sqrt[\nu]{\beta} + \sqrt[\nu]{\gamma}} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}\;\frac{(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu} + (\sqrt[\nu]{\gamma})^{\nu}}{(\sqrt[\nu]{\beta}) + (\sqrt[\nu]{\gamma})} =$$

$$= \frac{\alpha\left[\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}} - \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-2}\gamma} + \sqrt[\nu]{\beta^{\nu-3}\gamma^2} - \ldots + \sqrt[\nu]{\gamma^{\nu-1}}\right]}{\beta + \gamma}$$

Ἐάν ὁ ν εἶναι ἄ ρ τ ι ο ς πολλαπλασιάζομεν τούς δύο ὅρους κλάσματος ἐπί $\sqrt[\nu]{\beta} - \sqrt[\nu]{\gamma}$ καί ἀναγόμεθα εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν (iv).

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}+\sqrt[\nu]{\gamma}} = \frac{\alpha(\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma})}{\sqrt[\nu]{\beta^2}-\sqrt[\nu]{\gamma^2}} = \frac{\alpha(\sqrt[\nu]{\beta}-\sqrt[\nu]{\gamma})}{\sqrt[\nu/2]{\beta}-\sqrt[\nu/2]{\gamma}}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

287. Νά εὑρεθῆ τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα:

$$\frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{3}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

288. Νά γίνουν ρητοί οἱ παρονομασταί τῶν κάτωθι κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha+\beta}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha-1}-\sqrt{2\alpha}+\sqrt{\alpha+1}}, \quad \frac{\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{10}-\sqrt{5}}$$

289. Ὁμοίως, τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{\sqrt[6]{5}+\sqrt[3]{2}}, \quad \frac{1}{2+\sqrt[4]{7}}$$

290. Ὁμοίως τῶν κλασμάτων

$$\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}$$

291. Ἐάν μ καί ν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί τό δέ γινόμενον μν δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός $\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

292. Νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$\frac{9+\sqrt{75}}{15-7\sqrt{12}} \cdot \frac{13-\sqrt{147}}{4+\sqrt{27}}$$

γνωστοῦ ὄντος ὅτι κατά προσέγγισιν, εἶναι $\sqrt{3} = 1,732$.

293. Νά τραποῦν εἰς κλάσματα μέ ρητόν παρονομαστήν αἱ παραστάσεις

$$\sqrt[4]{2x+\frac{1}{8x^2y^6}} \qquad \sqrt{\frac{3\alpha^2-\alpha^3}{50x^5}} \qquad \sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} \qquad \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{6}-\sqrt{18}}$$

$$\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{14}}{\sqrt{7}-\sqrt{14}} \qquad \frac{3\sqrt{0,1}-2\sqrt{10}}{\sqrt{0,1}+\sqrt{10}}$$

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} - \frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{2\sqrt{\alpha-\beta}}{3\sqrt{\alpha+\beta}-2\sqrt{\alpha-\beta}} + \frac{3\sqrt{\alpha+\beta}}{3\sqrt{\alpha+\beta}+2\sqrt{\alpha-\beta}}$$

294. Ν'ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα

$$\frac{(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})^4-\alpha^4}{4(x+\sqrt{x^2-\alpha^2})^2}$$

καί νά λάβη τελικῶς μορφήν ἔχουσαν ρητόν παρ/στήν.

295. Νά τραπῆ εἰς κλάσμα μέ ρητόν παρ/στήν ἡ παράστασις

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$$

296. Μέ τήν βοήθειαν τῆς ταυτότητος (viii) τῆς §58 νά δειχθῆ ὅτι εἶναι δυνατόν νά ρητοποιηθῆ ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}}$$

87. **Δυνάμεις μέ κλασματικόν ἐκθέτην. α) Ὁρισμός.** «Ἐάν μ καί ν εἶναι τυχόντες φυσικοί ἀριθμοί καί α θετικός οἱοσδήποτε παριστῶμεν διά τοῦ συμβόλου $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ τήν νυοστήν (πρωτεύουσαν) ρίζαν τῆς μυοστῆς δυνάμεως τοῦ α δηλ. τήν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ ».

Τό σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ τό ἐκφράζον τήν $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καλεῖται δύναμις τοῦ α μέ κλασματικόν ἐκθέτην $\frac{\mu}{\nu}$ (α εἰς τήν $\frac{\mu}{\nu}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\alpha^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$, $\alpha^{1,25}=\alpha^{\frac{125}{100}}=\alpha^{\frac{5}{4}}=\sqrt[4]{\alpha^5}$

$$\alpha^{3,14}=\alpha^{\frac{314}{100}}=\alpha^{\frac{157}{50}}=\sqrt[50]{\alpha^{157}}$$

Ἐπειδή ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι $\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha}$ ἕπεται ὅτι καί κάθε ρίζα δύναται νά γραφῆ ὡς δύναμις μέ κλασματικόν ἐκθέτην.

Αἱ νέαι αὐταί δυνάμεις καίτοι ἔχουν διάφορον ἔννοιαν ἀπό τάς γνωστάς μας δυνάμεις μέ ἀκεραίους ἐκθέτας, ἐν τούτοις ὑπακούουν εἰς τούς ἰδίους νόμους μέ ἐκείνας.

Θά ἔχωμεν π.χ.

$$\alpha^{3,14}\cdot\alpha^{0,86}=\alpha^4 , \quad (\alpha^{0,2})^4=\alpha^{0,8} \qquad \text{κ.ο.κ.}$$

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀπό τό ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα Ι. « **Οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων μέ ἀκεραίους ἐκθέτας ἰσχύουν καί διά τάς δυνάμεις μέ κλασματικούς ἐκθέτας** ».

Ἀπόδειξις. 1) Τό γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\,\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\,\sqrt[\lambda]{\alpha^\kappa}=\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}}\cdot\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}}=\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda+\kappa\nu}}=\alpha^{\frac{\mu\lambda+\kappa\nu}{\nu\lambda}}$$

$$=\alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}+\frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\kappa}{\lambda}}$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μέ δύναμιν τοῦ α ἔχουσαν τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

2) Τό πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ α:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} : \alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} : \sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} : \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\kappa\nu}} =$$

$$= \sqrt[\nu\lambda]{\frac{\alpha^{\mu\lambda}}{\alpha^{\kappa\nu}}} = \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda-\kappa\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda-\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}-\frac{\kappa\nu}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\kappa}{\lambda}}$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μέ δύναμιν τοῦ α ἔχουσαν ἐκθέτην τήν διαφοράν τῶν ἐκθετῶν.

3) Δύναμις εἰς δύναμιν:

$$(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}})^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}})^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}})^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\kappa}}} = \sqrt[\lambda\nu]{\alpha^{\mu\kappa}} = \alpha^{\frac{\mu\kappa}{\lambda\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}}$$

ἰσοῦται ὡς βλέπομεν μέ δύναμιν τοῦ α ἔχουσαν ἐκθέτην τό γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

4) Ὁμοίως δεικνύεται καί ὁ κανών ὑψώσεως γινομένου εἰς δύναμιν: $(\alpha\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\beta^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$

5) Ὁμοίως δεικνύεται καί ὁ κανών ὑψώσεως κλάσματος εἰς δύναμιν: $(\frac{\alpha}{\beta})^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$.

γ) Δυνάμεις μέ ἀρνητικόν κλασματικόν ἐκθέτην $-\frac{\mu}{\nu}$. Ὁρισμός: «Διά τοῦ συμβόλου $\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}}$ παριστῶμεν τό ἀντίστροφον τῆς δυνάμεως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$». Ἤτοι ἐξ ὁρισμοῦ, εἶναι:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}} \quad \mu,\nu \text{ φυσικοί}, \ \alpha > 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: $\alpha^{-0,2} = \frac{1}{\alpha^{0,2}} = \frac{1}{\alpha^{1/5}} = \frac{1}{\sqrt[5]{\alpha}} = \frac{\sqrt[5]{\alpha^4}}{\alpha}$

$$\beta^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\beta^{2/3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2}} = \frac{\sqrt[3]{\beta}}{\beta}, \quad \gamma^{-1,2} = \frac{1}{\gamma^{1,2}} = \frac{1}{\gamma^{12/10}} = \frac{1}{\gamma^{6/5}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{\gamma^6}} = \frac{\sqrt[5]{\gamma^4}}{\gamma^2}, \quad \frac{1}{\sqrt[\nu]{x}} = x^{-\frac{1}{\nu}}$$

δ) Θεώρημα II. «Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ θετικούς συμμέτρους ἐκθέτας ἰσχύουν καί ὅταν αἱ δυνάμεις ἔχουν ἐκθέτας οἱουσδήποτε συμμέτρους, εἴτε ἀρνητικούς εἴτε θετικούς, ἀδιακρίτως».

Τό θεώρημα τοῦτο ἔχει κατ'οὐσίαν ἀποδειχθῆ εἰς τήν §82 ὅπου ἐδείχθη ὅτι πάντες οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων μέ θετικούς ἀκεραίους ἐκθέτας ἰσχύουν καί διά δυνάμεις μέ ἐκθέτας τυχόντας ἀκεραίους, εἴτε ἀρνητικούς εἴτε θετικούς, ἀδιακρίτως.

ε) Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι τό σύμβολον α^x $(\alpha>0)$ ἔχει ἔννοιαν διά τυχόντα σύμμετρον ἐκθέτην x: ἀκέραιον θετικόν ἤ ἀρνητικόν, κλασματικόν θετικόν ἤ ἀρνητικόν, ἤ δεκαδικόν μέ πεπερασμένον πλῆθος ψηφίων καί ὅτι πᾶσαι αἱ ἰσότητες $\alpha^x \cdot \alpha^y = \alpha^{x+y}$, $(\alpha^x)^y = \alpha^{xy}$, $(\alpha\beta\gamma)^x = \alpha^x\beta^x\gamma^x$ κτλ. ἰσχύουν δι' ὅλας τάς προαναφερθεῖσας περιπτώσεις καίτοι τό σύμβολον α^x ἔχει διαφόρους σημασίας, ἀντιστοιχούσας εἰς τά διάφορα εἴδη τοῦ ἐκθέτου. Οὕτω π.χ. θά ἔχωμεν: $\alpha^{2,57} \cdot \alpha^{-0,57} = \alpha^2$, $(\alpha^{-0.5})^{-2} = \alpha$, $\alpha^{-3,14} : \alpha^{-0,14} = \alpha^{-3}$, $\alpha^4 \cdot \alpha^{-4,5} = \alpha^{-0.5}$ κ.ο.κ.

στ) Ἐνίοτε ἡ βάσις τῆς δυνάμεως μέ κλασματικόν ἐκθέτην λαμβάνεται ὑπό διαφόρων συγγραφέων καί ἀρνητική. Τοῦτο θ' ἀποφεύγεται ἐνταῦθα διά πολλούς λόγους. Οὕτω π.χ. ἡ

$$(-8)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \text{ἐνῶ ἡ} \quad (-8)^{2/6} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = \sqrt[3]{8} = +2$$

$$\text{δηλ.} \quad (-8)^{\frac{1}{3}} \neq (-8)^{2/6}$$

δέν ὑπάρχει δηλαδή εὐχέρεια λογισμοῦ μέ τοιαύτας δυνάμεις.

ζ) Ἐφαρμογή. Ν' ἁπλοποιηθῇ τό ἄρρητον κλάσμα

$$K = \frac{\alpha - x + 4\alpha^{1/4}x^{3/4} - 4\alpha^{1/2}x^{1/2}}{\alpha^{1/2} + 2\alpha^{1/4}x^{1/4} - x^{1/2}}$$

Λύσις. Δυνάμεθα νά δώσωμεν εἰς τό ἀνωτέρω κλάσμα μορφήν ρητοῦ κλάσματος ἄν ὅλους τούς ἐκθέτας τοῦ α καταστήσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα καί τοῦ x ἐπίσης:

$$K = \frac{\alpha^{4/4} - x^{4/4} + 4\alpha^{1/4}x^{3/4} - 4\alpha^{2/4}x^{2/4}}{\alpha^{2/4} + 2\alpha^{1/4}x^{1/4} - x^{2/4}}$$

καί κατόπιν θέσωμεν:

$$\alpha^{1/4} = y \quad , \quad x^{1/4} = \omega$$

ὁπότε τό κλάσμα μετατρέπεται εἰς ρητόν. Διότι θά ἔχωμεν:

$$\alpha^{1/4} = y \quad , \quad \alpha^{2/4} = y^2 \quad , \quad \alpha^{4/4} = y^4 \quad , \quad x^{1/4} = \omega \quad x^{2/4} = \omega^2,$$

$$x^{3/4} = \omega^3, \quad x^{4/4} = \omega^4$$

καί συνεπῶς

$$K = \frac{y^4 - \omega^4 + 4y\omega^3 - 4y^2\omega^2}{y^2 + 2y\omega - \omega^2}$$

Ἔχομεν λοιπόν ν' ἁπλοποιήσωμεν ρητόν κλάσμα. Ὁ ἀριθμητής γράφεται:

$$y^4 - (\omega^4 - 4y\omega^3 + 4y^2\omega^2) = y^4 - (\omega^2 - 2y\omega)^2 =$$

$$= (y^2 + \omega^2 - 2y\omega)(y^2 - \omega^2 + 2y\omega) \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$K = \frac{(y^2 + \omega^2 - 2y\omega)(y^2 - \omega^2 + 2y\omega)}{y^2 - \omega^2 + 2y\omega} =$$

$$= y^2 + \omega^2 - 2y\omega = (y - \omega)^2$$

Ἐπανερχόμενοι εἰς τά παλαιά γράμματα, λαμβάνομεν

$$K = (\alpha^{1/4} - x)^2$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

297. Νά ἐκφρασθοῦν διά ριζικῶν αἱ κάτωθι ἀριθμητικαί παραστάσεις καί νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί των:

$$(-32)^{-1/5}, \quad \left(\frac{1}{8}\right)^{-1/3} \quad \left(\frac{1}{32}\right)^{-1/5} \quad (0,25)^{1/2} \quad (0,216)^{1/3}, \ 125^{2/3}$$

$$(-27)^{4/3} \qquad \left(\frac{8}{27}\right)^{2/3}$$

298. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ σημειούμεναι πράξεις τά δέ τελικά ἐξαγόμενα νά γραφοῦν χωρίς κλασματικούς ἐκθέτας

$$(5^{1/2} x^{1/4} y)^4 \qquad \left(\frac{8\alpha^3}{x^9}\right)^{-1/3} \qquad (\alpha^{1/2} + \alpha^{-1/2})^2$$

$$(\alpha^{1/2} + \beta^{1/2})(\alpha^{1/2} - \beta^{1/2}) \qquad (x^{1/2} - y^{1/2})(x^{-1/2} + y^{-1/2})$$

$$(\alpha^{1/3} - \beta^{1/3})(\alpha^{2/3} + \alpha^{1/3}\beta^{1/3} + \beta^{2/3}) \qquad (2x^{1/2} - 3y^{1/2})(3x^{1/2} + 4y^{1/2})$$

$$(x^{1/3} + 3x^{1/2} + x^{1/4})(x^{1/3} - x^{1/4} + 2)$$

299. Ὑπολογίσατε τήν ἀριθμ. τιμήν τῆς παραστάσεως

$$\left\{zy^{1/3}x^{-1/2} - x^{1/4}y^{1/3}\right\}\left\{xy - y\sqrt{x} + \frac{xz^2}{y}\right\}$$

ὅταν $x = 0{,}0001$, $y = -0{,}008$ $z = -\dfrac{1}{2}$

300. Ὑπολογίσατε τήν παράστασιν

$$\sqrt[4]{16\sqrt{256}} - 81^{-0,25} + \frac{2}{5}\sqrt[4]{24\cdot 3\cdot\sqrt[4]{54}} - (9^{0,2})^{2,5} + 27^{-4/3} - 36^{3/2}$$

301. Χρησιμοποιοῦντες δυνάμεις μέ κλασματικούς ἐκθέτας τρέψατε εἰς γινόμενον τάς παραστάσεις

$$4x^{2/3} - 9y^{2/3} \quad , \quad x^{6/5} - y^{4/3} \qquad x^{-6} - 27y^{9/2} \qquad x - y$$

$$36x^{-4/3} - 25y^{-2/5} \quad , \quad \alpha^{2/3} - 5\alpha^{1/3}\beta^{-1/3} + 6\beta^{-2/3}$$

302. Ν'άπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\frac{x - y}{x^{3/4} + x^{1/2}y^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/2}y^{1/4} + x^{1/4}y^{1/2}}{x^{1/2} + y^{1/2}} \qquad \frac{x^{1/2} - 2x^{1/4} + 1}{x^{1/4} - 2x^{1/8} + 1}$$

303. Ν'άπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

$$\frac{\alpha^2 - \alpha^{3/2}\cdot x^{1/2} - 2\alpha^{1/2}x^{1/4} + 2x^{3/4}}{\alpha^{1/2} - x^{1/2}} \qquad \frac{x^{5/3} \quad x^{4/3}y^{1/3} - xy^{2/3} + x^{2/3}y}{x^{5/3} - 2xy^{2/3} + x^{1/3}y^{4/3}}$$

304. 'Εάν α,β ρητοί θετικοί καί $\alpha\beta > 1$ ν'άπλοποιηθῆ ἡ παράστασις.

$$\frac{\left(\alpha^2 - \frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}}{\left(\beta^2 - \frac{1}{\alpha^2}\right)^{\beta}\left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}}$$

305. 'Εάν α,β τυχόντες θετικοί νά δειχθῆ ἡ ἰσότης

$$(\alpha^2 + \alpha^{4/3}\beta^{2/3})^{1/2} + (\beta^2 + \alpha^{2/3}\beta^{4/3})^{1/2} = (\alpha^{2/3} + \beta^{2/3})^{3/2}$$

306. 'Εάν α,β θετικοί, νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος

$$\frac{\alpha^{1/2} - \left[\alpha - (\alpha^2 - \alpha x)^{1/2}\right]^{1/2}}{\alpha^{1/2} + \left[\alpha - (\alpha^2 - \alpha x)^{1/2}\right]^{1/2}} \quad \text{ὅταν} \quad x = \alpha\left[1 - \frac{16\beta^2}{(1+\beta)^4}\right]$$

307. 'Εάν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως

$$2\alpha(1 + x^2)^{1/2}\left[x + (1 + x^2)^{1/2}\right]^{-1} \quad \text{ὅταν} \quad x = 2^{-1}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/2} - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/2}\right]$$

87α Διπλᾶ ριζικά. α) Τάς ἐκφράσεις τῆς μορφῆς

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} \quad \text{ἤ} \quad \sqrt{A - \sqrt{B}}$$

ὅπου Α καί Β ρητοί ἀριθμοί ἤ ρηταί παραστάσεις καλοῦμεν διπλά ριζικά. Τό ὑπόριζον $A + \sqrt{B}$ ἤ $A - \sqrt{B}$ ὑποτίθεται πάντοτε, θετικόν.

β) Τό ἄθροισμα καί ἡ διαφορά δύο διπλῶν συζυγῶν ριζικῶν: $\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}}$ καί $\sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}$ δύναται νά μετασχηματισθῆ ὡς ἀκολούθως:

$$\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}} = \sqrt{\left(\sqrt{\alpha + \sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha - \sqrt{\beta}}\right)^2} = \sqrt{2\alpha \pm 2\sqrt{\alpha^2 - \beta}}$$

δηλ. συγχωνεύονται τά δύο συζυγῆ διπλᾶ εἰς ἕν διπλοῦν.

Σημείωσις. 'Αθροίσματα τῆς μορφῆς $\sqrt{A + \sqrt{B}} \pm \sqrt{A - \sqrt{B}}$ ὅπου Α,Β τυχοῦσαι παραστάσεις, ἁπλουστεύονται ἤ ὑπολογίζονται πολλάκις βάσει τοῦ ἀνωτέρω μετασχηματισμοῦ. Θέτομεν δηλαδή:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} \pm \sqrt{A-\sqrt{B}} = K$$

καί δι' ὑψώσεως εἰς τό τετράγωνον λαμβάνομεν τήν ἁπλουστέραν σχέσιν:

$$2A + 2\sqrt{A^2 - B} = K^2$$

ἐξ ἧς πολλάκις προκύπτει τό Κ.

γ) Ἐάν τόν ἀνωτέρω τύπον γράψωμεν ὑπό τήν μορφήν:

$$(1) \qquad \sqrt{2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\beta}} = \sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}} \pm \sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}$$

καί θέσωμεν $2\alpha = A$, $4\alpha^2 - 4\beta = B$ τότε εὑρίσκομεν ὅτι $\alpha = \frac{A}{2}$ καί $\beta = \frac{A^2 - B}{4}$ ὁ δέ τύπος (1) μετατρέπεται διά τῶν ἀντικαταστάσεων τούτων εἰς τόν:

$$(2) \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Συνήθως ὁ (2) γράφεται:

$$(3) \qquad \sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\Gamma}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\Gamma}{2}} \qquad \text{ὅπου} \qquad \Gamma = \sqrt{A^2 - B}$$

Ἐάν ἡ ποσότης $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον συμμέτρου ἀριθμοῦ ἤ ρητῆς παραστάσεως (δηλ. ὡς λέγομεν, ἡ $\sqrt{A^2-B}$ ἐξάγεται ἀκριβῶς) τότε τό Γ εἶναι ποσότης ρητή καί τό δεύτερον μέλος τῆς (3) εἶναι ἄθροισμα ἁπλῶν ριζικῶν.

Τότε λέγομεν ὅτι τό διπλοῦν ριζικόν $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$ τρέπεται (διά τοῦ (3)) εἰς ἄθροισμα ἁπλῶν ριζικῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1. Νά μετασχηματισθῇ τό διπλοῦν ριζικόν

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}$$

Λύσις. Τοῦτο γράφεται: $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ καί εἶναι $A = 7$, $B = 48$ $A^2 - B = 1$, $\Gamma = 1$. Συνεπῶς ὁ τύπος (3) δίδει:

$$\sqrt{7+\sqrt{48}} = \sqrt{\frac{7+1}{2}} + \sqrt{\frac{7-1}{2}}$$

2. Νά μετασχηματισθῆ τό $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}}$

Λύσις. Τοῦτο γράφεται $\sqrt{x + \sqrt{4x-4}}$ καί ἔχομεν $A = x$, $B = 4x - 4$, $A^2 - B = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ καί $\Gamma = |x-2|$.

Ὁ τύπος (3) δίδει

$$\sqrt{x + \sqrt{4x-4}} = \sqrt{\frac{x + x - 2}{2}} + \sqrt{\frac{x - (x-2)}{2}} = \sqrt{x-1} + 1$$

3. Ν'ἀπλοποιηθῆ ἡ παράστασις: $K = \sqrt{\dfrac{6 + 2\sqrt{3}}{33 - 19\sqrt{3}}}$

Λύσις. Ἐν πρώτοις, καθιστῶμεν ρητόν τόν παρ/στήν τοῦ ὑπορρίζου διά νά ἔχωμεν μόνον εἰς τόν ἀριθμητήν, διπλοῦν ριζικον. Ἔχομεν

$$K = \sqrt{\frac{(6+2\sqrt{3})(33+19\sqrt{3})}{(33-19\sqrt{3})(33+19\sqrt{3})}} = \sqrt{\frac{198 + 114\sqrt{3} + 66\sqrt{3} + 114}{33^2 - 19^2 \cdot 3}} =$$

$$= \sqrt{\frac{312 + 180\sqrt{3}}{6}} = \sqrt{52 + 30\sqrt{3}} = \sqrt{52 + \sqrt{2700}}$$

Ἔχομεν τώρα, $A = 52$, $B = 2700$, $A^2 - B = 4$, $\Gamma = 2$. Ὥστε

$$K = \sqrt{\frac{52+2}{2}} + \sqrt{\frac{52-2}{2}} = \sqrt{27} + \sqrt{25}$$

Τελικῶς ἔχομεν $K = 5 + 3\sqrt{3}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

308. Νά ἀχθῆ εἰς τήν ἁπλουστάτην δυνατήν μορφήν ἡ παράστασις

$$\frac{\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{38 + 5\sqrt{3}}}$$

309. Ὁμοίως ἡ παράστασις

$$\sqrt{28 + 10\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}$$

310. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις:

$$\frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{18 - \sqrt{3 + \sqrt{5}}}} - \frac{\sqrt{10} + \sqrt{18}}{\sqrt{8 + \sqrt{3 - \sqrt{5}}}}$$

ὑπολογίζεται ὅταν γνωρίζομεν μόνον τήν τιμήν τῆς $\sqrt{5}$

311. Ν'ἁπλουστευθῆ ἡ παράστασις

$$\sqrt{8 + 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = K$$

312. Ν'ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8} + \sqrt{\sqrt{2} - 1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} - 1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8} - \sqrt{\sqrt{2} + 1}}} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{38 + 17\sqrt{5}} = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$$

313. Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$\frac{(4 + \sqrt{15})^{3/2} + (4 - \sqrt{15})^{3/2}}{(6 + \sqrt{35})^{3/2} + (6 - \sqrt{35})^{3/2}}$$

314. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις

$$\sqrt{\alpha + 2\beta\sqrt{\alpha - \beta^2}} + \sqrt{\alpha - 2\beta\sqrt{\alpha - \beta^2}}$$

ἰσοῦται μέ 2β ἤ μέ $2\sqrt{\alpha - \beta^2}$ καθ'ὅσον εἶναι $\beta^2 \leqslant \alpha \leqslant 2\beta^2$ ἤ εἶναι $\alpha \geqslant 2\beta^2$. $(\beta > 0)$.

88. Προσεγγίσεις. Ὁρισμός i) «Δοθέντος θετικοῦ συμμέτρου ἀριθμοῦ A καλεῖται κατά προσέγγισιν μονάδος καί κατ'ἔλλειψιν νυοστή ρίζα τοῦ A ὁ ἀ κ έ ρ α ι ο ς α ὁ πληρῶν τήν διπλῆν σχέσιν $\alpha^\nu \leqslant A < (\alpha + 1)^\nu$. Εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἰσχύει τό = λέγομεν ὅτι ἡ νυοστή ρίζα τοῦ A ἐξάγεται ἀκριβῶς»

Ἔτσι π.χ. ἐπειδή ὁ 28 ὑψούμενος εἰς τόν κύβον δέν ὑπερβαίνει τόν 22000 ἐνῷ ὁ 29 ὑψούμενος εἰς τόν κύβον ὑπερβαίνει τόν 22000 ἔπεται ὅτι ὁ 28 εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος καί κατ ἔλλειψιν κυβική ρίζα τοῦ 22000.

Ἀναλόγως ὁρίζεται καί ἡ κ α θ' ὑ π ε ρ ο χ ή ν καί κατά προσέγγισιν μονάδος νυοστή ρίζα ὡς ὁ ἀκέραιος α ὁ πληρῶν τάς

$$(\alpha - 1)^\nu < A \leqslant \alpha^\nu$$

Ἔτσι π.χ. ὁ 29 εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος καί καθ ὑπεροχήν κυβική ρίζα τοῦ 22000.

Ὁρισμός ii). «Νυοστή ρίζα τοῦ θετικοῦ συμμέτρου A κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10^\rho}$ καί κατ'ἔλλειψιν καλεῖται τό κλάσμα $\frac{x}{10^\rho}$ ὅπου x ἀκέραιος, τό πληροῦν τήν διπλῆν σχέσιν

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{10^\rho}\right)^\nu \leqslant A < \left(\frac{x+1}{10^\rho}\right)^\nu \quad »$$

Οὕτω, ἐπειδή $(2,224)^3 < 11 < (2,225)^3$ ἔπεται ὅτι τό κλάσμα $\frac{2224}{1000}$ εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν χιλιοστοῦ ($= \frac{1}{10^3}$) καί κατ'ἔλλειψιν κυβική ρίζα τοῦ 11

'Ομοίως, ἄν ἔχομεν:

$$\left(\frac{x-1}{10^{\rho}}\right)^{\nu} < A \leqslant \left(\frac{x}{10^{\rho}}\right)^{\nu}$$

τότε τό $\frac{x}{10^{\rho}}$ εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10^{\rho}}$ καί καθ'ὑπεροχήν νυοστή ρίζα τοῦ A.

Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα, ὁ $2,225 = \frac{2225}{1000}$ εἶναι ἡ καθ' ὑπεροχήν καί κατά προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ κυβική ρίζα τοῦ 11.

Παρατήρησις. 'Εάν ἀντί τῆς $\sqrt[\nu]{A}$ λάβωμεν τό κλάσμα $\frac{x}{10^{\rho}}$ τό πληροῦν τήν σχέσιν (1) τότε κάμνομεν λάθος μικρότερον τοῦ $\frac{1}{10^{\rho}}$ Πράγματι ἀπό τήν (1) ἔπεται:

$$\frac{x}{10^{\rho}} \leqslant \sqrt[\nu]{A} < \frac{x+1}{10}$$

καί ἄν ἀφαιρέσωμεν ἀπό τά τρία μέλη τό $\frac{x}{10^{\rho}}$ ἔχομεν

$$0 \leqslant \sqrt[\nu]{A} - \frac{x}{10^{\rho}} < \frac{1}{10^{\rho}}$$

δηλ. τό $\frac{x}{10^{\rho}}$ διαφέρει τῆς $\sqrt[\nu]{A}$ ὀλιγότερον τοῦ $\frac{1}{10^{\rho}}$.

'Ορισμός ~~111~~). «'Εάν $\varepsilon > 0$ λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμός α παριστᾶ τήν ποσότητα A κατά προσέγγισιν ε ὅταν ὁ α διαφέρει τῆς A, ἀπολύτως, ὀλιγώτερον τοῦ ε,

δηλ. $|A - \alpha| \leqslant \varepsilon$ »

'Εάν ἐπί πλέον, γνωρίζομεν ὅτι $\alpha \leqslant A$ τότε ὁ ἀριθμός α λέγομεν ὅτι προσεγγίζει τήν A κατ'ἔλλειψιν καί μέ προσέγγισιν ε. 'Εάν δέ $\alpha \geqslant A$ ὁ α προσεγγίζει καθ'ὑπεροχήν τήν A.

Ἄν ἡ A εἶναι ἄγνωστος ὁ δέ α γνωστός λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἡ A εἶναι τότε γνωστή κατά προσέγγισιν ε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν 1/10 καί κατ'ἔλλειψιν ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $1580(2 + \sqrt{9,8})$

Λύσις: 'Εάν ἡ $\sqrt{9,8}$ ὑπολογισθῆ κατ'ἔλλειψιν μέ λάθος λ τότε τό λάθος τοῦτο θά πολλαπλασιασθῆ ἐπί 1580 καί θά γίνῃ 1580λ. Πρέπει δέ νά εἶναι $1580\lambda < \frac{1}{10}$ ἄρα $\lambda < \frac{1}{15800}$. Ὥστε κατά τήν ἐξαγωγήν τῆς $\sqrt{9,8}$ πρέπει νά κάμωμεν λάθος $< \frac{1}{15800}$. 'Επειδή ἡ ρίζα ἐξάγεται κατά προσέγγισιν 1 ἤ 1/10 ἤ

$\frac{1}{100}$ κλπ. πρέπει τώρα νά ἐξαχθῆ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100000}$ (δηλ. μέ 5 δεκαδικά ψηφία) διά νά ἐξασφαλισθῆ ὅτι θά κάμωμεν λάθος ὀλιγώτερον τοῦ $\frac{1}{15800}$. Ἑπομένως, ἡ ζητουμένη προσεγγιστική τιμή θά εἶναι $1580(2 + 3,13049) = 8106,1742$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

315. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός ποία ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος καί κατ'ἔλλειψιν:

τετραγωνική ρίζα τοῦ $(\nu + 1)^2 - 1$
" " " $(\nu + 1)^2 + 1$
κυβική " " $(\nu + 1)^3 - 1$
" " " $(\nu + 1)^3 + 1$

316. Νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν 1/100 ἡ τιμή ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

$$\frac{19\sqrt{2} + 5\sqrt{7}}{180}, \quad \frac{4}{\sqrt{7}} \quad \frac{1}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$$

317. Ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\nu + 1$ καί $\nu + 2$ προσεγγίζει περισσότερον πρός τήν $\sqrt{(\nu + 1)(\nu + 2)}$; (ν φυσικός ἀριθμός).

318. Ἐάν $0 < x < 1$ νά δειχθῆ ὅτι

$$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$$

Μέ ποίαν προσέγγισιν παριστᾶ τήν $\sqrt{1 + x}$ ἡ ποσότης $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$

Νά εὑρεθῆ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ἡ $\sqrt{1,02}$ κατά προσέγγισιν καί νά ὁρισθῆ ἡ προσέγγισις.

319. Ἐάν α ἀκέραιος νά εὑρεθῆ ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος καί κατ'ἔλλειψιν τετραγωνική ρίζα τῶν παραστάσεων:

$$16\alpha^2 + 8\alpha + 3 \quad , \quad 4\alpha^2 + \sqrt{16\alpha^2 + 8\alpha + 3} \quad , \quad \alpha^2 + \sqrt{4\alpha^2 + \sqrt{16\alpha^2 + 8\alpha + 3}}$$

320. Ἐάν ὁ θετικός ἀκέραιος α εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν μονάδος καί κατ'ἔλλειψιν τετραγ. ρίζα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ Α νά δειχθῆ ἡ ἀνισότης

$$\sqrt{A} < \alpha + \frac{A - \alpha^2}{2\alpha + 1} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\alpha + 1}$$

321. Ἐάν α εἶναι φυσικός ἀριθμός > 1 δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός $\alpha - \frac{1}{3\alpha^2}$ εἶναι κατά προσέγγισιν $\frac{1}{3\alpha^2}$ καί καθ'ὑπεροχήν κυβική ρίζα τοῦ $\alpha^3 - 1$. Ὁμοίως δέ καί ὁ ἀριθμός $\alpha + \frac{1}{3\alpha^2}$ διά τόν $\alpha^3 + 1$.

89. Περί τῆς ἰσότητος $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$. Θεώρημα «Ἐάν α, β, γ, δ εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί ἐξ ὧν οἱ β καί δ εἶναι > 0 καί ὄχι τέλεια τετράγωνα συμμέτρων τότε ἄν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\alpha + \sqrt{\beta} = \gamma + \sqrt{\delta}$, θά εἶναι $\alpha = \gamma$ καί $\beta = \delta$».

Ἀπόδειξις. Ἡ δοθεῖσα ἰσότης γράφεται

$$\sqrt{\beta} = (\gamma - \alpha) + \sqrt{\delta}$$

καί τετραγωνιζομένη δίδει τήν

$$\beta = (\gamma - \alpha)^2 + \delta + 2(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta} \quad \text{ἤτοι:}$$

(1) $$\beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2 = 2(\gamma - \alpha)\sqrt{\delta}$$

Ἐάν ἦτο $\gamma - \alpha \neq 0$ θά ἐλαμβάνομεν διαιροῦντες τά μέλη τῆς (1) διά $2(\gamma - \alpha)$ τήν ἰσότητα

$$\sqrt{\delta} = \frac{\beta - \delta - (\gamma - \alpha)^2}{2(\gamma - \alpha)}$$

Δηλ. ἡ $\sqrt{\delta}$ θά ἦτο ἴση πρός τόν σύμμετρον ἀριθμόν $\frac{\beta-\delta-(\gamma-\alpha)^2}{2(\gamma-\alpha)}$ καί συνεπῶς τό δ θά ἦτο τέλειον τετράγωνον συμμέτρου ἀριθμοῦ. τοῦτο ὅμως ἀντίκειται εἰς τήν ὑπόθεσιν καί ἑπομένως ἡ ὑπόθεσις ὅτι $\gamma - \alpha \neq 0$ μᾶς ὁδηγεῖ εἰς ἀπαράδεκτον ἐξαγόμενον.

Ἀποκλειομένης λοιπόν τῆς περιπτώσεως $\gamma - \alpha \neq 0$ μένει ὅτι κατ'ἀνάγκην θά εἶναι $\gamma - \alpha = 0$ δηλ.

$$\gamma = \alpha$$

Ἀλλά τότε ἕπεται ἀμέσως ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως ὅτι καί

$$\beta = \delta$$

Παρατήρησις i) Ἐάν ὑπό τάς αὐτάς προυποθέσεις ἰσχύει ὅτι $\alpha - \sqrt{\beta} = \gamma - \sqrt{\delta}$ πάλιν θά ἔχωμεν $\alpha = \gamma$ καί $\beta = \delta$. Διότι ἀρκεῖ ν'ἀλλάξωμεν τά σημεῖα τῶν δύο μελῶν ὁπότε ἔχομεν τήν περίπτωσιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.

Παρατήρησις ii) Εἰς τήν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό χρήσιμον θεώρημα τῆς §20.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : «Ἐάν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}} = x + \sqrt{y}$ ὅπου A, B, x, y, σύμμετροι καί B καί y θετικοί, ὄχι τέλεια τετράγωνα νά δειχθῇ ὅτι τότε θά ὑφίσταται καί ἡ ἰσότης:

$$\sqrt[3]{A - \sqrt{B}} = x - \sqrt{y} \text{ ».}$$

Ἀπόδειξις. Ὑψοῦντες τά δύο μέλη τῆς δοθείσης σχέσεως εἰς τόν κύβον λαμβάνομεν

$$A+\sqrt{B} = x^3 + 3x^2\sqrt{y} + 3xy + y\sqrt{y} = (x^3+3xy) + (3x^2+y)\sqrt{y} \text{ ἤ}$$

$$A+\sqrt{B} = (x^3+3xy) + \sqrt{(3x^2+y)^2\, y}$$

ὁπότε χάρις εἰς τό ἀνωτέρω θεώρημα θά ἰσχύουν ἀμφότεραι αἱ σχέσεις:

$$A = x^3+3xy \quad , \quad B = (3x^2+y)^2 y$$

Ἐπομένως θά ἔχωμεν

$$A-\sqrt{B} = x^3+3xy-\sqrt{(3x^2+y)^2 y} = x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y} =$$

$$= x^3 - 3x^2\sqrt{y} + 3xy - y\sqrt{y} = (x-\sqrt{y})^3$$

Συνεπῶς
$$\sqrt[3]{A-\sqrt{B}} = x-\sqrt{y}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

322. Ἐάν ἰσχύει ἡ ἰσότης $\sqrt{A+\sqrt{B}} = x+\sqrt{y}$ ὅπου A, B, x, y, ρητοί καί B καί y θετικοί καί ὄχι τέλεια τετράγωνα νά δειχθῆ ὅτι τότε ὁ ἀριθμός $A^2 - B$ θά εἶναι τέλειον τετράγωνον συμμέτρου ἀριθμοῦ ὁ δέ A θά εἶναι > 0. Θά ἰσχύη δέ ἐπί πλέον καί ἡ ἰσότης

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = |x-\sqrt{y}|$$

323. Ὑπό τάς προϋποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως διά τούς ἀριθμούς A, B, x, y νά δειχθῆ ὅτι ἡ ἰσότης $A+\sqrt{B} = x-\sqrt{y}$ εἶναι ἀδύνατος.

324. Ἐάν ἰσχύει ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{A+\sqrt{B}} = x+\sqrt{y}$ ὅπου διά τούς ἀριθμούς A, B, x, y ἰσχύουν αἱ προϋποθέσεις τῆς ἀσκ. 322 νά δειχθῆ ὅτι τότε ἡ ποσότης $A^2 - B$ εἶναι κύβος συμμέτρου ἀριθμοῦ (τέλειος κύβος).

325. Ἐάν x καί y φυσικοί ἀριθμοί, ὄχι τέλεια τετράγωνα νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ὁμοίως δέ καί ὁ ἀριθμός $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ ἐφ' ὅσον ὅμως $x \neq y$

326. Ἐάν α, β σύμμετροι ἡ δέ παράστασις $x^2+\alpha x+\beta$ μηδενίζεται ἄν ὁ x ἀντικατασταθῆ μέ $\gamma+\sqrt{\delta}$ ὅπου γ, δ σύμμετροι καί $\delta > 0$ καί ὄχι τέλειον τετράγωνον νά δειχθῆ ὅτι ἡ αὐτή παράστασις θά μηδενίζεται καί ἄν ἀντικατασταθῆ τό x μέ $\gamma-\sqrt{\delta}$.

327. Ἐάν α, β, γ σύμμετροι τότε ἄν ἰσχύη ἡ ἰσότης $\alpha+\beta\sqrt{2} = \gamma\sqrt{3}$ δείξατε ὅτι $\alpha=\beta=\gamma=0$.

328. Ἐφ' ὅσον οἱ α, β, γ εἶναι σύμμετροι δείξατε ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt[3]{2} = 0$ ἰσχύει μόνον ὅταν $\alpha=\beta=\gamma=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΜΕ ΑΠΟΛΥΤΟΥΣ ΤΙΜΑΣ

90. **Ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν.** Εἰς τήν §38 ὡρίσαμεν τό σύμβολον $|x|$ (= ἀπόλυτος τιμή τοῦ x) ὅπου x τυχών πραγματικ[ός] ἀριθμός, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{cases} |x| = x & \text{ἐάν } x > 0 \\ |x| = -x & \text{ἐάν } x < 0 \\ |x| = 0 & \text{ἐάν } x = 0 \end{cases}$$

καί παρετηρήσαμεν ὅτι ἡ $|x|$ εἶναι μ ή ἀ ρ ν η τ ι κ ή π ο σ ό τ η ς δηλ. ὅτι πάντοτε ἔχομεν: $|x| \geqq 0$. Μᾶς εἶναι γνω[στόν] ἀκόμη ὅτι οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί ἔχουν τήν ἰδίαν ἀπόλυτο[ν] τιμήν (§22) δηλ.: $|x| = |-x|$

Αἱ περαιτέρω ἰδιότητες τῶν ἀπολύτων τιμῶν περιγράφονται ἀπό τά κάτωθι θεωρήματα.

Θεώρημα I. «Πᾶς ἀριθμός εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τῆς ἀπολύτου τιμῆς του».

Δηλαδή πάντοτε $x \leqq |x|$

Ἀπόδειξις. Ἐάν ὁ x εἶναι θετικός ἤ μηδέν τότε $x = |x|$ σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν. Ἐάν ὁ x εἶναι ἀρνητικός τότε εἶναι μικρότερος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $|x|$ δηλαδή τότε $x < |x|$

Θεώρημα II. «Τό τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ».

Δηλαδή $|x|^2 = x^2$

Ἀπόδειξις. Ἐάν $x>0$ τότε $|x| = x$ καί $|x|^2 = x^2$ Ἐάν $x<0$ τότε $|x| = -x$, ὥστε πάλιν, $|x|^2 = (-x)^2 = x^2$

Παρατήρησις. Προφανῶς ἰσχύει καί ὅτι $|x|^{2\nu} = x^{2\nu}$ ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

Θεώρημα III. «Ἐάν $-\alpha \leqq x \leqq \alpha$ ὅπου, βεβαίως, $\alpha > 0$ τότε καί $|x| \leqslant \alpha$ καί ἀντιστρόφως».

'Απόδειξις. 1) 'Εάν ὁ x εἶναι θετικός ἤ μηδέν τότε $x = |x|$ καί συνεπῶς, ἀφοῦ ἔχομεν $x \leqslant \alpha$ θά ἔχωμεν καί $|x| \leqslant \alpha$ 'Εάν ὁ x εἶναι ἀρνητικός τότε $|x| = -x$ ἤτοι $x = -|x|$ καί ἐπειδή ἔχομεν $-\alpha \leqslant x$ θά ἔχωμεν καί $-\alpha \leqslant -|x|$ ἤ $\alpha \geqslant |x|$ ἤ $|x| \leqslant \alpha$. Ὥστε πάντοτε: $|x| \leqslant \alpha$

2) 'Αντιστρόφως. Ἔστω ὅτι ἰσχύει: $|x| \leqslant \alpha$ ὅπου $\alpha > 0$. Τότε, ἄν $x \geqslant 0$ θά ἔχωμεν $|x| = x$ · ἄρα ἡ δοθεῖσα σχέσις $|x| \leqslant \alpha$ γράφεται $x \leqslant \alpha$. Εἶναι ὅμως συγχρόνως καί $x > -\alpha$ διότι ὁ x εἶναι θετικός (ἤ μηδέν). Ὥστε θά ἔχωμεν

$$-\alpha < x \leqslant \alpha$$

'Εάν δέ $x < 0$ τότε $|x| = -x$, ἄρα ἡ δοθεῖσα σχέσις $|x| \leqslant \alpha$ γράφεται, $-x \leqslant \alpha$ ἤ $x \geqslant -\alpha$. Ἔχομεν ὅμως συγχρόνως καί ὅτι $x < \alpha$ διότι ὁ x εἶναι ἀρνητικός καί ὁ α θετικός. Ὥστε θά ἔχωμεν ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ

$$-\alpha \leqslant x < \alpha$$

Ὥστε θά εἶναι, ἤ $-\alpha < x \leqslant \alpha$ ἤ $-\alpha \leqslant x < \alpha$ καθ' ὅσον ὁ x εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός. 'Επομένως, συγχωνευομένων τῶν δύο σχέσεων, θά εἶναι γενικῶς:

$$-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$$

Παρατήρησις 1η. 'Η διπλῆ σχέσις $-\alpha \leqslant x \leqslant \alpha$ εἶναι κατά τ' ἀνωτέρω ἰσοδύναμος πρός τήν ἁπλῆν $|x| \leqslant \alpha$.

Παρατήρησις 2α. 'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι: «ἡ διπλῆ ἀνισότης $-\alpha < x < \alpha$ εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἁπλῆν: $|x| < \alpha$ ὅπου $\alpha > 0$».

Θεώρημα IV. «'Η ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἤ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν».

Δηλαδή, ἔχομεν πάντοτε: $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ ὅπου τυχόντες πραγματικοί.

Ἀπόδειξις: Κατά τό Θεώρ. I θά ἰσχύουν:

$$x \leqslant |x| \quad , \quad y \leqslant |y|$$

αἵτινες προστιθέμεναι κατά μέλη δίδουν τήν

$$(1) \qquad x+y \leqslant |x|+|y|$$

Ὁμοίως, ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $-x \leqslant |-x| \quad , \; -y \leqslant |-y|$ ἤτοι

$$-x \leqslant |x| \quad , \quad -y \leqslant |y|$$

αἵτινες δίδουν τήν $-x-y \leqslant |x|+|y|$ ἤτοι

$$(2) \qquad x+y \geqslant -\left\{|x|+|y|\right\}$$

Αἱ (1) καί (2) γράφονται ὡς διπλή ἀνισότης

$$(3) \qquad -\left\{|x|+|y|\right\} \leqslant x+y \leqslant \left\{|x|+|y|\right\}$$

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν, ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα III, ὅτι

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα 1ον. «Ἡ ἀπόλυτος τιμή τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἤ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν».

Δηλαδή $|x-y| \leqslant |x|+|y|$ ὅπου x,y τυχόντες πραγματικοί.

Πράγματι: $\quad |x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x|+|-y| = |x|+|y|.$

Πόρισμα 2ον. «Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε προσθετέων εἶναι μικροτέρα ἤ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων».

Δηλ. $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$ ὅπου α_1, α_2, $\ldots$, α_ν τυχόντες πραγματικοί.

Ἀπόδειξις: Ἔστωσαν πρῶτον τρεῖς προσθετέοι α_1, α_2, α_3. Τό ἄθροισμα $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα δύο προσθετέων: τοῦ $(\alpha_1+\alpha_2)$ καί τοῦ α_3 ὥστε δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τό ἀνωτέρω θεώρημα.

Δηλαδή $|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| = |(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2|+|\alpha_3|$

'Αλλά $|\alpha_1+\alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|$ καί συνεπῶς $|\alpha_1+\alpha_2|+|\alpha_3| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|$

Ἐπομένως $|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3| \leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|$

Κατ'ἀνάλογον τρόπον ἡ περίπτωσις τῶν τεσσάρων προσθετέων ἀνάγεται εἰς τήν περί ωσιν τῶν τριῶν:

$$|\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4| = |(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)+\alpha_4| \leqslant |\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3|+|\alpha_4| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha_1|+|\alpha_2|+|\alpha_3|+|\alpha_4|$$

'Ομοίως, ἀφοῦ ἡ πρότασις ἰσχύει διά τέσσαρες προσθετέους θά ἰσχύη καί διά πέντε κ.ο.κ. Κατά τόν τρόπον αὐτόν φθάνομεν εἰς ὁσουσδήποτε προσθετέους.

Θεώρημα V. «'Η ἀπόλυτος τιμή διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἤ ἴση τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν καθ'οίανδήποτε τάξιν».

Δηλ. θά εἶναι $|x-y| \geqslant |x|-|y|$ καθώς καί $|x-y| \geqslant$ $\geqslant |y|-|x|$ ὅπου x, y τυχόντες πραγματικοί.

'Απόδειξις. Ἔχομεν $|x| = |x+y-y| = |y+(x-y)| \leqslant$ $\leqslant |y|+|x-y|$. 'Αφαιροῦντες ἀπό τό πρῶτον καί τελευταῖον μέλος τήν $|y|$ λαμβάνομεν: $|x|-|y| \leqslant |x-y|$ ἤτοι $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

'Ομοίως, $|y| = |y+x-x| = |x+(y-x)| \leqslant |x|+|y-x|$ ἐκ τῆς ὁποίας

$$|y|-|x| \leqslant |y-x| \quad \text{ἤτοι} \quad |x-y| \geqslant |y|-|x|$$

Πόρισμα. «'Η ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἤ ἴση πρός τήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν»

Δηλαδή: $|x+y| \geqslant |x|-|y|$ καί $|x+y| \geqslant |y|-|x|$

Πράγματι: $|x+y| = |x-(-y)| \geqslant |x|-|-y| = |x|-|y|$

Θεώρημα VI. «'Η ἀπόλυτος τιμή τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλυτέρα ἤ ἴση τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο ἀριθμῶν».

Δηλ. $|x-y| \geqslant ||x|-|y|| = ||y|-|x||$

'Απόδειξις. 'Από τό Θεώρημα V ἔχομεν: $|x-y| \geqslant |x|-|y|$

ἤτοι

(4) $\qquad |x| - |y| \leqslant |x - y|$

Ἐπίσης ἔχομεν $|x - y| \geqslant |y| - |x|$ ἤ $-|x - y| \leqslant |x| - |y|$ ἤτοι

(5) $\qquad |x| - |y| \geqslant -|x - y|$

Αἱ (4) καί (5) γράφονται ὡς διπλῆ ἀνισοτης

(6) $\qquad -|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|$

Ἐκ τῆς (6) λαμβάνομεν, χάρις εἰς τό Θεώρημα III ὅτι

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y| \quad \text{ἤ} \quad |x - y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$$ ὅ.ἔ.δ.

Πόρισμα. Ἐάν x, y τυχόντες πραγματικοί, ἰσχύει ὅτι

$$|x + y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$$

Διότι $|x+y| = |x-(-y)| \geqslant \big||x| - |-y|\big| = \big||x| - |y|\big|$

Συνοπτική γραφή τῶν θεωρημάτων. «Ἐάν α καί β τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί ἰσχύουν πάντοτε αἱ σχέσεις

(7) $\qquad |\alpha| - |\beta| \leqslant \big||\alpha| - |\beta|\big| \leqslant |\alpha \pm \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$

Αἱ σχέσεις (7) εἶναι λίαν χρήσιμοι διά τόν λογισμόν τῶν ἀπολύτων τιμῶν, ὡς περιέχουσαι τά περισσότερα ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθέντων θεωρημάτων ἡ ἀπομνημόνευσις τῶν (7) διευκολύνει τήν ἐργασίαν τοῦ Σπουδαστοῦ ἐπί τῶν ἀπολύτων τιμῶν.

Θεώρημα VII. «Ἡ ἀπόλυτος τιμή γινόμενου ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν ἀριθμῶν».

Δηλαδή $|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu| = |\alpha_1| \cdot |\alpha_2| \ldots |\alpha_\nu|$ (ἴδε §31, γ΄)

Θεώρημα VIII. «Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν».

Δηλ. $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ ὅπου $\beta \neq 0$ (ἴδε §33, β΄)

Θεώρημα IX. «Ἐάν x τυχών πραγματικός ἀληθεύει ὅτι $x = |x| \cdot \text{σημ}(x)$ ἐάν δέ $x \neq 0$ τότε $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|} = \text{σημ}(x)$ ».

Ἀπόδειξις. Τό σύμβολον σημ(x) (= σημεῖον τοῦ x) ὡρίσαμεν εἰς τήν §31 ὡς ἑξῆς: σημ(x) = +1 ὅταν $x > 0$, σημ(x) = −1 ὅταν $x < 0$ καί σημ(x) = 0 ὅταν $x = 0$. Ἐάν λοιπόν $x > 0$ τότε $x = |x| = +1\,x =$

$= |x|\cdot$σημ(x), ἄν $x<0$ τότε $x=-|x| = |x|\cdot$σημ(x), ἄν $x=0$ πάλιν ἰσχύει ὅτι $x=|x|$σημ(x). Ἐάν δέ $x\neq 0$ ἔπεται ἀμέσως ὅτι $\frac{|x|}{x} =$ σημ$(x) = \frac{x}{|x|}$

Ἄλλαι ἀποδείξεις. Αἱ περισσότεραι ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀποδειχθεισῶν ἀνισοτήτων μέ ἀπολύτους τιμάς δύνανται νά δειχθοῦν καί δι᾽ὑψώσεως εἰς τό τετράγωνον, βάσει τοῦ ἑξῆς συλλογισμοῦ: Ἐάν α καί β εἶναι μ η ἀ ρ ν η τ ι κ ο ί ἡ σχέσις $\alpha\leqslant\beta$ ἀληθεύει ἄν ἀληθεύῃ ἡ $\alpha^2\leqslant\beta^2$. (ἴδε §40 πόρισμα 3ον Θεωρήματος VI).

1) Νά δειχθῇ ὅτι $|x\pm y|\leqslant |x|+|y|$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδή τά δύο μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἀνισότητος εἶναι θετικοί, ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $|x\pm y|^2\leqslant\{|x|\pm|y|\}^2$ ἤ νά δείξωμεν ὅτι

$$(x\ \ y)^2\leqslant x^2+2|x|\cdot|y|\ \ y^2 \qquad \text{(σύμφωνα μέ τό Θεώρ II).}$$

δηλαδή: $x^2\pm 2xy+y^2\leqslant x^2+2|x|\cdot|y|+y^2$ ἤ τέλος νά δείξωμεν $\pm 2xy\leqslant|2xy|$. Τοῦτο ὅμως ἀληθεύει σύμφωνα μέ τό Θεώρημα I.

2) Νά δειχθῇ ὅτι $|x\pm y|\geqslant|x|-|y|$.

Ἀπόδειξις: Ἐάν τό δεύτερον μέλος εἶναι ἀρνητικόν ἤ μηδέν ἡ σχέσις ἀληθεύει διότι τό πρῶτον εἶναι θετικόν ἤ μηδέν. Ἐάν πάλιν τό δεύτερον μέλος εἶναι θετικόν τότε καί τά δύο μέλη εἶναι θετικά καί συνεπῶς διά ν᾽ἀληθεύῃ ἡ σχέσις ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι

$$|x\pm y|^2\geqslant\{|x|-|y|\}^2 \qquad \text{ἤ ὅτι}$$

$$x^2+y^2\pm 2xy\geqslant x^2+y^2-2|xy| \qquad \text{ἤ ὅτι}$$

$$\pm 2xy\geqslant -2|xy| \qquad \text{ἤ ὅτι} \qquad \mp 2xy\leqslant|2xy|$$

Ἡ τελευταία ὅμως σχέσις εἶναι ἀληθής,

3) Νά δειχθῇ ἡ σχέσις: $|x\pm y|\geqslant\big||x|-|y|\big|$

Καί ἡ σχέσις αὐτή δεικνύεται διά τετραγωνισμοῦ τῶν μελῶν της, ἀκριβῶς ὅπως ἡ 1.

4) Νά δειχθῇ ἡ σχέσις $|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu|\leqslant|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|$

Ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι

$$|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu|^2\leqslant\{|\alpha_1|+|\alpha_2|+\ldots+|\alpha_\nu|\}^2 \qquad \text{ἤ ὅτι}$$

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2+2\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1\alpha_3+\ldots\leqslant|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\ldots+|\alpha_\nu|^2+$$
$$+2|\alpha_1||\alpha_2|+2|\alpha_1||\alpha_3|+\ldots$$

ἤ ὅτι $\quad 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \ldots \leqslant |2\alpha_1\alpha_2| + |2\alpha_1\alpha_3| + \ldots$

Ἡ τελευταία αὕτη ἀληθεύει διότι ἀληθεύουν αἱ:

$$2\alpha_1\alpha_2 \leqslant |2\alpha_1\alpha_2| \quad , \quad 2\alpha_1\alpha_3 \leqslant |2\alpha_1\alpha_3| \; , \ldots$$

αἱ ὁποῖαι προστιθέμεναι κατά μέλη δίδουν τήν

$$2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1\alpha_3 + \ldots \leqslant |2\alpha_1\alpha_2| + |2\alpha_1\alpha_3| + \ldots$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*328. Ἐάν πάντες οἱ ἀριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι ὁμόσημοι τότε ἰσχύουν αἱ ἰσότητες

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|$$

$$|x - y| = \big||x| - |y|\big|$$

329. Ποῖοι ἀκέραιοι ἀριθμοί πληροῦν τήν ἀνισότητα

$$|x| < 2{,}75 \quad ;$$

330. Ἐάν $|x| > \alpha$ ὅπου $\alpha > 0$ τότε θά εἶναι ἤ $x > \alpha$ ἤ $x < -\alpha$. Ἀντιστρόφως, ἄν πληροῦται ἡ μία ἐκ τῶν δύο ἀνισοτήτων: $x > \alpha$ ἤ $x < -\alpha$ τότε θά πληροῦται καί ἡ $|x| > \alpha$.

331. Ποῖοι ἀκέραιοι πληροῦν συγχρόνως καί τάς δύο ἀνισότητας

$$|x| > 1{,}2 \quad \text{καί} \quad |x| < \sqrt{27} \;;$$

332. Ν'ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{x-\alpha}{\xi-\alpha}\left(1 - \frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right) + \frac{x-\beta}{\xi-\beta}\left(1 + \frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)\right\}$$

ὅπου $\alpha < \xi < \beta$ ὑπό τήν προϋπόθεσιν α) ὅτι $x < \xi$ καί β) ὅτι $x > \xi$.

333. Ἐάν $x = \dfrac{\alpha}{|\alpha| + |\beta|} \qquad y = \dfrac{\beta}{|\alpha| + |\beta|}$ τότε $|x| + |y| = 1$

334. Ἄν x πραγματικός δείξατε ὅτι

$$\{x + |x|\}\{x - |x|\} = 0$$

335. Ἐάν $\alpha^2 \neq \beta^2$ δείξατε ὅτι

$$\frac{|\alpha| - |\beta|}{\big||\alpha| - |\beta|\big|} + \frac{\big||\alpha| - |\beta|\big|}{|\alpha - \beta|} + \frac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leqslant 3$$

336. Ἐάν $\alpha\beta \neq 0$ καί $\alpha^2 < 16\beta^2$ δείξατε ὅτι τότε

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{15}{4}$$

337. α) Ἐάν $|\alpha\beta| < 1$ τότε εἷς τουλάχιστον ἐκ τῶν ἀριθμῶν

$|\alpha|$, $|\beta|$ εἶναι < 1. β) Ἐάν $\alpha^4 + \beta^4 = k^4$ τότε καί $|\alpha| \leqslant k$ καί $|\beta| \leqslant k$. γ) Ἐάν $(x-\alpha)^2 + y^2 \leqslant \rho^2$ τότε $-\rho + \alpha \leqslant x \leqslant \rho + \alpha$

338. Ἐάν $|x - 1| + |x^2 - x| = 0$ εὕρετε τόν πραγματικόν ἀριθμόν x.

339. Ἐάν x καί y εἶναι πραγματικοί $\neq 0$ τότε ἄν

$$\frac{|x|y| + y|x||}{|xy|} = 2$$

οἱ ἀριθμοί x καί y εἶναι ὁμόσημοι.

340. Δείξατε ὅτι διά κάθε πραγματικόν ἀριθμόν x ἰσχύουν:

$$\big||2x+5| - |2x+9|\big| \leqslant 4 \quad , \quad \big||3-5x| - |5x-12|\big| \leqslant 9$$

341. Διά πάντα πραγματικόν x ἰσχύει

$$|x^2 - 3x + 10| - |x^2 - 3x + 1| + \big||x^3 - 7| - |2 - x^3|\big| \leqslant 14$$

91. Περαιτέρω παραδείγματα ἐπί τῶν ἀπολύτων τιμῶν. 1ον. Ἐάν μεταξύ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x, y, α, β ὅπου $\alpha\beta \neq 0$, ἰσχύουν αἱ δύο σχέσεις:

$$(1) \qquad x = \alpha\{|\alpha| + |\beta|\} \qquad \text{καί} \qquad y = \beta\{|\alpha| + |\beta|\}$$

τότε θά ἰσχύουν καί αἱ

$$(2) \qquad \alpha = \frac{x}{\sqrt{|x| + |y|}} \qquad \beta = \frac{y}{\sqrt{|x| + |y|}}$$

Καί ἀντιστρόφως, αἱ (2) συνεπάγονται τάς (1).

Λύσις. Ἐπειδή ἡ (2) περιέχει τάς $|x|$, $|y|$ διά τοῦτο λαμβάνομεν τάς ἀπολύτους τιμάς ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἑκάστης τῶν (1) ὁπότε ἔχομεν

$$|x| = |\alpha|\{|\alpha| + |\beta|\} \qquad , \qquad |y| = |\beta|\{|\alpha| + |\beta|\}$$

Διά προσθέσεως τούτων κατά μέλη λαμβάνομεν

$$|x| + |y| = \{|\alpha| + |\beta|\}\cdot\{|\alpha| + |\beta|\} = \{|\alpha| + |\beta|\}^2 \quad \text{καί συνεπῶς}$$

$$(3) \qquad \sqrt{|x| + |y|} = |\alpha| + |\beta|$$

Ἐπειδή $\alpha \neq 0$ καί $\beta \neq 0$ λαμβάνομεν ἀπό τάς (1):

$$|\alpha| + |\beta| = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

ὁπότε ἡ (3) γίνεται

$$\sqrt{|x| + |y|} = \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$$

καί ἐξ αὐτῶν τάς ἀποδεικτέας (2)

Ἀντιστρόφως. Ἐκ τῶν (2) λαμβάνομεν

(4) $|\alpha| = \dfrac{|x|}{\sqrt{|x|+|y|}}$ $\qquad$ $|\beta| = \dfrac{|y|}{\sqrt{|x|+|y|}}$

καί ἐξ αὐτῶν : $|\alpha|+|\beta| = \dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{|x|+|y|}} = \sqrt{|x|+|y|}$. Ἀφοῦ λοιπόν $\sqrt{|x|+|y|} = |\alpha| + |\beta|$ αἱ (2) γράφονται

$$\alpha = \frac{x}{|\alpha|+|\beta|} \qquad \beta = \frac{y}{|\alpha|+|\beta|}$$

καί ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν τάς (1).

2ον. Ἐάν ὑφίσταται ἡ σχέσις

$$\beta(1+|\alpha|) = 1 + \alpha + |\alpha|$$

τότε θά ὑφίστανται αἱ δύο σχέσεις:

$$|\beta - 1| < 1 \quad , \quad \alpha(1 - |\beta - 1|) = \beta - 1$$

καί ἀντιστρόφως, ἀπό τάς δύο τελευταίας ἕπεται ἡ πρώτη

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $\beta(1+|\alpha|) - (1+|\alpha|) = \alpha$ ἤ

$(\beta - 1)(1+|\alpha|) = \alpha \quad , \quad \beta - 1 = \dfrac{\alpha}{1+|\alpha|}$ καί ἐκ ταύτης

(5) $$|\beta - 1| = \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|}$$

Ἐπειδή δέ $|\alpha| < 1 + |\alpha|$ ἔπετει ὅτι $\dfrac{|\alpha|}{1+|\alpha|} < 1$ καί συνεπῶς

$$|\beta - 1| < 1$$

Ἐξ ἄλλου ἄν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (5) ἀφαιρέσωμεν ἀπό τήν μονάδα, εὑρίσκομεν

(6) $$1 - |\beta - 1| = 1 - \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} = \frac{1}{1+|\alpha|}$$

Ἔχομεν ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως: $(\beta - 1)(1+|\alpha|) = \alpha$, ὅτι

$$\frac{1}{1+|\alpha|} = \frac{\beta - 1}{\alpha}$$

καί συνεπῶς ἡ (6) γίνεται

$$1 - |\beta - 1| = \frac{\beta - 1}{\alpha} \quad ἤ \quad \alpha\left\{1 - |\beta - 1|\right\} = \beta - 1$$

Ἀντιστρόφως: Ἐκ τῆς $|\beta - 1| < 1$ ἔχομεν ὅτι $1 - |\beta - 1| > 0$ καί ἐκ τῆς δοθείσης:

(7) $$\alpha\left\{1 - |\beta + 1|\right\} = \beta - 1$$

ἔχομεν: $|\alpha| \left\{1 - |\beta - 1|\right\} = |\beta - 1|$ ἤ $|\alpha| = \dfrac{|\beta - 1|}{1 - |\beta - 1|}$ ἤ

(8) $$1 + |\alpha| = 1 + \frac{|\beta - 1|}{1 - |\beta - 1|} = \frac{1}{1 - |\beta - 1|}$$

Ἀλλ' ἐκ τῆς (7) ἔχομεν ὅτι

$$1-|\beta-1|=\frac{\beta-1}{\alpha} \quad , \quad \frac{1}{1-|\beta-1|}=\frac{\alpha}{\beta-1}$$

συνεπῶς ἡ (8) γίνεται

$$1+|\alpha|=\frac{\alpha}{\beta-1} \quad ἤ \quad (\beta-1)(1+|\alpha|)=\alpha \quad ἤ \quad \beta(1+|\alpha|)=1+\alpha+|\alpha|$$

3ον. «Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων

$$(9) \quad \left|\frac{2\alpha+5\beta}{2\beta+5\alpha}\right|<1 \quad , \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|>1 \qquad \left|\frac{2\alpha\beta+5\beta^2}{2\alpha\beta+5\alpha^2}\right|<1$$

ὅπου $\alpha\beta \neq 0$, ἑκάστη συνεπάγεται τάς δύο ἄλλας»

Ἀπόδειξις: Ἔστω ὅτι ὑφίσταται ἡ πρώτη. Θά ἔχωμεν τότε καί

$$\left|\frac{2\alpha+5\beta}{2\beta+5\alpha}\right|^2<1 \quad ἤ \quad 4\alpha^2+25\beta^2+20\alpha\beta<4\beta^2+25\alpha^2+20\alpha\beta$$

$$ἤ \quad 21\beta^2<21\alpha^2 \quad ἤ \quad \alpha^2>\beta^2 \quad ἤ \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2>1 \quad ἤ$$

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^2>1 \quad ἤ \quad \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|>1$$

Ἀκολούθως, πολλαπλασιάζοντες κατά μέλη τάς ἰσχυούσας ἀνισότητας

$$\left|\frac{2\alpha+5\beta}{2\beta+5\alpha}\right|<1 \quad , \quad \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1$$

λαμβάνομεν τήν τρίτην ἐκ τῶν (9).

Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (9). Τότε ἀκολουθοῦντες τήν ἀντίθετον πορείαν φθάνομεν ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (9) εἰς τήν πρώτην. Δηλαδή, θά ἰσχύουν κατά σειράν αἱ:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|>1 \quad , \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2}>1 \quad , \quad \alpha^2>\beta^2 \quad , \quad 21\beta^2<21\alpha^2$$

$$4\alpha^2+25\beta^2+20\alpha\beta<25\alpha^2+4\beta^2+20\alpha\beta \quad , \quad (2\alpha+5\beta)^2<(5\alpha+2\beta)^2$$

$$\left(\frac{2\alpha+5\beta}{5\alpha+2\beta}\right)^2<1 \quad , \quad \left|\frac{2\alpha+5\beta}{5\alpha+2\beta}\right|^2<1 \quad , \quad \left|\frac{2\alpha+5\beta}{2\beta+5\alpha}\right|<1$$

Ἑπομένως, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, θά ἰσχύη καί ἡ τρίτη. Τέλος ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ τρίτη ἐκ τῶν (9). Τότε θά ἰσχυουν κατά σειράν αἱ ἀνισότητες:

$$\left|\frac{2\alpha\beta+5\beta^2}{2\alpha\beta+5\alpha^2}\right|^2<1 \quad , \quad 4\alpha^2\beta^2+25\beta^4+20\alpha\beta^3<4\alpha^2\beta^2+25\alpha^4+20\alpha^3\beta$$

$$0<25(\alpha^4-\beta^4)+20\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$$

$$0 < 5(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2) + 4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) \qquad ἤ$$

$$(10) \qquad (\alpha^2-\beta^2)\left\{5\alpha^2+5\beta^2+4\alpha\beta\right\} > 0$$

Ἐπειδή ὅμως $5\alpha^2+5\beta^2+4\alpha\beta = (2\alpha+\beta)^2+4\beta^2$ δηλ. εἶναι θετική ποσότης, ἕπεται ἐκ τῆς (10) ὅτι $\alpha^2-\beta^2 > 0$ ἤ $\alpha^2 > \beta^2$ καί συνεπῶς $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| > 1$

Ἰσχυούσης δέ τῆς 2ας ἐκ τῶν (9) θά ἰσχύη καί ἡ πρώτη ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

4ον. «Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν δύο σχέσεων

$$\alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0 \quad , \quad |\alpha+\beta| \geqslant |\alpha-\beta|$$

ἑκάστη συνεπάγεται τήν ἄλλην».

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἀληθεύει ἡ $\alpha|\beta| - \beta|\alpha| = 0$. Αὕτη γρά-

$$|\alpha|\,\text{σημ}(\alpha)\cdot|\beta| - |\beta|\,\text{σημ}(\beta)\,|\alpha| = 0 \quad ἤ \quad |\alpha|\cdot|\beta|\left\{\text{σημ}(\alpha) - \text{σημ}(\beta)\right\} = 0$$

Ὥστε θά εἶναι ἤ $\alpha = 0$ ἤ $\beta = 0$ ὁπότε ἡ δευτέρα ἀληθεύει ὡς ἰσότης ἤ $\text{σημ}(\alpha) = \text{σημ}(\beta)$ ὁπότε οἱ α καί β εἶναι ὁμόσημοι καί συνεπῶς

$$2\alpha\beta > -2\alpha\beta \quad , \quad \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta > \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \quad , \quad (\alpha+\beta)^2 > (\alpha-\beta)^2$$

$$|\alpha+\beta|^2 > |\alpha-\beta|^2 \quad \text{καί τέλος} \quad |\alpha+\beta| > |\alpha-\beta|$$

Ἀντιστρόφως. Ἐάν $|\alpha+\beta| \geqslant |\alpha-\beta|$ τότε $|\alpha+\beta|^2 \geqslant |\alpha-\beta|^2$ ἤ $(\alpha+\beta)^2 \geqslant (\alpha-\beta)^2$ ἤ $2\alpha\beta \geqslant -2\alpha\beta$ ἤ $4\alpha\beta \geqslant 0$ $\alpha\beta \geqslant 0$ ἐκ δέ τῆς τελευταίας ἕπεται ὅτι ἤ $\alpha\beta = 0$ ἤ $\alpha\beta > 0$. Ἐάν $\alpha = 0$ ἤ $\beta = 0$ ἡ πρώτη προφανῶς ἀληθεύει. Ἐάν α καί β ὁμόσημοι τότε $\text{σημ}(\beta) = \text{σημ}(\alpha)$ ἤ

$$\frac{|\beta|}{\alpha} = \frac{|\alpha|}{\alpha} \qquad ἤ \qquad \alpha|\beta| = \beta|\alpha|$$

5ον. «Ἐάν ὁ πραγματικός ἀριθμός z πληροῖ τήν σχέσιν

$$\left|\frac{z+4}{z+1}\right| = 2$$

νά ὑπολογισθῇ ἡ $|z|$.

Λύσις. Ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως λαμβάνομεν κατά σειράν

$$\frac{|z+4|}{|z+1|} = 2 \quad , \quad \frac{|z+4|^2}{|z+1|^2} = 4$$

$$z^2+16+8z = 4(z^2+2z+1) \quad , \quad z^2+16+8z = 4z^2+8z+4$$

$$3z^2 = 12 \quad , \quad z^2 = 4 \quad , \quad |z|^2 = 4 \qquad |z| = 2$$

6ον. 'Εάν οί $\neq 0$ πραγματικοί άριθμοί x, y, α, β πληροῦν τάς σχέσεις

$$\alpha = \frac{x}{1+|x|+|y|} \qquad \beta = \frac{y}{1+|x|+|y|}$$

νά ύπολογισθοῦν οί x καί y συναρτήσει τῶν α, β

Λύσις. 'Εκ τῶν δοθεισῶν έξισώσεων λαμβάνομεν τάς

$$|\alpha| = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} \qquad |\beta| = \frac{|y|}{1+|x|+|y|}$$

καί διά προσθέσεως αύτῶν τήν

$$(11) \quad |\alpha|+|\beta| = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{\{1+|x|+|y|\}-1}{1+|x|+|y|} =$$

$$= 1 - \frac{1}{1+|x|+|y|}$$

'Αλλ' έκ τῶν δοθεισῶν έχομεν ότι

$$\frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\alpha}{x} \quad \text{καί} \quad \frac{1}{1+|x|+|y|} = \frac{\beta}{y}$$

έπομένως ή (11) δίδει

$$|\alpha|+|\beta| = 1 - \frac{\alpha}{x} \qquad \text{καί} \qquad |\alpha|+|\beta| = 1 - \frac{\beta}{y}$$

'Η πρώτη έκ τῶν άνωτέρω γράφεται

$$\frac{\alpha}{x} = 1 - |\alpha| - |\beta| \qquad \text{καί δίδει} \qquad x = \frac{\alpha}{1-|\alpha|-|\beta|}$$

καί έκ τῆς δευτέρας έχομεν όμοίως: $y = \dfrac{\beta}{1-|\alpha|-|\beta|}$

7ον «'Εάν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ δείξατε ότι ή παράστασις

$$\Pi = |\alpha - x| + |\beta - x| + |\gamma - x| + |\delta - x|$$

διατηρεῖ σταθεράν τιμήν όταν τό x μεταβάλλεται παραμένον μεταξύ β καί γ, δηλ. $\beta < x < \gamma$».

'Απόδειξις. 'Επειδή $x > \beta$ θά εἶναι καί $x > \alpha$ καί έπειδή $x < \gamma$ θά εἶναι καί $x < \delta$. Ὥστε έχομεν: $x > \alpha$, $x > \beta$, $x < \gamma$, $x < \delta$ καί συνεπῶς $x - \alpha > 0$, $x - \beta > 0$ $x - \gamma < 0$ $x - \delta < 0$ ἄρα

$$|x-\alpha| = x - \alpha \ , \quad |x-\beta| = x - \beta \quad |x-\gamma| = \gamma - x \quad |x-\delta| = \delta - x$$

Συνεπῶς $\Pi = x - \alpha + x - \beta + \gamma - x + \delta - x = \gamma + \delta - (\alpha+\beta)$

δηλ. ή παράστασις Π εἶναι ά ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τοῦ x έν τῇ περιπτώσει ταύτῃ.

Παρατηρήσεις. Τό αύτό ίσχύει καί όταν $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$. 'Εάν δέ τό x δ έ ν π λ η ρ ο ῖ τήν σχέσιν $\beta \leqslant x \leqslant \gamma$, τότε θά πληροῖ μίαν ἐκ τῶν τεσσάρων σχέσεων:

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta \quad ἤ \quad x < \alpha \quad ἤ \quad \gamma < x \leqslant \delta \quad ἤ \quad x > \delta$$

ὁπότε ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω δι'ἑκάστην περίπτωσιν χωριστά, εὑρίσκομεν (ἀπαλλάσσοντες τήν Π ἀπό τάς ἀπολύτους τιμάς) ὅτι καί εἰς τάς τέσσαρας περιπτώσεις ἡ Π ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ x, ἔχουσα διαφόρους ἐκφράσεις ἑκάστοτε. Τήν ἐργασίαν ταύτην ἀφήνομεν ὡς ἄσκησιν εἰς τόν ἀναγνώστην.

8ον. «Νά προσδιορισθοῦν συναρτήσει τῶν α καί β οἱ ἀριθμοί c_1 καί c_2 οὕτως ὥστε ἡ παράστασις

(12) $$\big|\alpha x|y| + \beta|x|y\big|$$

νά δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν

(13) $$c_1|xy| + c_2 xy \quad »$$.

(Δηλαδή νά ἰσχύῃ η ταυτότης ὡς πρός τά x καί y :

(14) $$\big|\alpha x|y| + \beta|x|y\big| \equiv c_1|xy| + c_2 xy$$

Λύσις: Ἡ (14) πρέπει νά ἰσχύῃ διά πᾶσας τάς τιμάς τῶν x καί y ἤτοι καί εἰς τάς 6 περιπτώσεις:

(i) $x>0$, $y>0$ (ii) $x>0$, $y<0$ (iii) $x<0$, $y>0$ (iv) $x<0$, $y<0$ (v) $x = 0$ $y =$ οἱοσδήποτε (vi) $y = 0$, $x =$ οἱοσδήποτε.

Εἰς τήν περίπτωσιν (i) ἡ (14) γράφεται:

$$|\alpha xy + \beta xy| = c_1 xy + c_2 xy \quad ἤ \quad |\alpha + \beta| xy = (c_1 + c_2) xy$$

καί διά νά ἰσχύῃ πρέπει

(15) $$c_1 + c_2 = |\alpha + \beta|$$

Εἰς τήν περίπτωσιν (ii) ἡ (14) γράφεται

$$|-\alpha xy + \beta xy| = -c_1 xy + c_2 xy \quad ἤ \quad |-\alpha + \beta|\cdot|xy| = (-c_1 + c_2) xy$$

ἤ $-|-\alpha + \beta| xy = (c_2 - c_1) xy$.

καί διά νά ἰσχύῃ πρέπει

(16) $$c_1 - c_2 = |\alpha - \beta|$$

Διά τήν περίπτωσιν (iii) εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι πρέπει

(17) $$c_1 - c_2 = |\alpha - \beta|$$

καί διά τήν (iv) ὅτι πρέπει

(18) $$c_1 + c_2 = |\alpha + \beta|$$

Εἰς τάς περιπτώσεις (v) καί (vi) ἡ (14) ἰσχύει οἱασδήποτε τιμάς καί ἄν ἔχουν τά c_1, c_2. Ὥστε τελικῶς ἡ (14) διά νά ἰσχύῃ πάντοτε πρέπει (καί ἀρκεῖ) νά ἀληθεύουν αἱ (15) (16), (17), (18) δηλ. αἱ δύο σχέσεις

(19) $$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= |\alpha + \beta| \\ c_1 - c_2 &= |\alpha + \beta| \end{aligned}$$

Διά προσθέσεως κατά μέλη τῶν (19) λαμβάνομεν

$$2c_1 = |\alpha + \beta| + |\alpha - \beta| \quad \text{ἤ} \quad c_1 = \frac{1}{2}\Big\{|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|\Big\}$$

καί δι' ἀφαιρέσεως

$$2c_2 = |\alpha + \beta| - |\alpha - \beta| \quad \text{ἤ} \quad c_2 = \frac{1}{2}\Big\{|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta|\Big\}$$

Οὕτω, προσδιωρίσθησαν οἱ ἀριθμοί c_1, c_2 καί ἐδείχθη ἡ ταυτότης:

$$\big|\alpha x|y| + \beta|x|y\big| = \frac{1}{2}\Big\{|\alpha + \beta| + |\alpha - \beta|\Big\}|xy| + \frac{1}{2}\Big\{|\alpha + \beta| - |\alpha - \beta|\Big\}xy$$

Ἄλλη διατύπωσις τῆς λύσεως. Ἡ (14) γράφεται:

$$\big|\alpha\cdot|x|\cdot\text{σημ}(x)\cdot|y| + \beta\cdot|x|\cdot|y|\text{σημ}(y)\big| = c_1|xy| + c_2|xy|\text{σημ}(xy)$$

ἤ $\big|\alpha\,\text{σημ}(x) + \beta\,\text{σημ}(y)\big||xy| = \Big\{c_1 + c_2\,\text{σημ}(xy)\Big\}|xy|$

καί θ' ἀληθεύει διά πάσας τάς τιμάς τῶν x καί y ἄν

(20) $$c_1 + c_2\,\text{σημ}(xy) = \big|\alpha\,\text{σημ}(x) + \beta\,\text{σημ}(y)\big|$$

Ἡ (20) πρέπει ν' ἀληθεύῃ εἴτε ἄν τά x καί y εἶναι ὁμόσημα εἴτε ἑτερόσημα δηλ. πρέπει νά ἰσχύουν καί αἱ δύο σχέσεις

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= |\alpha + \beta| \\ c_1 - c_2 &= |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

Ἔτσι ἐπανευρίσκομεν τάς (19).

9ον Ἀνισότης τοῦ **Schwarz**. «Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_\nu$ καί $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ τυχόντες πραγματικοί νά δειχθῇ ὅτι

(21) $$|\alpha_1\beta_1| + |\alpha_2\beta_2| + \dots + |\alpha_\nu\beta_\nu| \leqslant \sqrt{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_\nu^2)}$$

Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστόν ἡ σχέσις

(22) $$2xy \leqslant x^2 + y^2$$

ἀληθεύει διά τυχόντας πραγματικούς ἀριθμούς. Ἐκ τῆς (22) λαμβάνομεν ν σχέσεις θέτοντες πρῶτον ὅπου x τόν

$$\frac{|\alpha_1|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_\nu^2}}$$

καί ὅπου y τόν $\frac{|\beta_1|}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}}$ κατόπιν ὅπου x τόν $\frac{|\alpha_2|}{\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}}$

καί ὅπου y τόν ἀριθμόν $\frac{|\beta_2|}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}}$ κ.ο.κ. λαμβάνομεν

$$\frac{2|\alpha_1\beta_1|}{\sqrt{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)}} \leqslant \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}+\frac{\beta_1^2}{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}$$

$$\frac{2|\alpha_2\beta_2|}{\sqrt{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)}} \leqslant \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}+\frac{\beta_2^2}{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}$$

. . . .

$$\frac{2|\alpha_\nu\beta_\nu|}{\sqrt{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)}} \leqslant \frac{\alpha_\nu^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2}+\frac{\beta_\nu^2}{\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2}$$

Ἐάν τάς ν ἀνωτέρω σχέσεις προσθέσωμεν κατά μέλη τῶν δέ δευτέρων μελῶν ἡ ἄθροισις γίνη κατά σ τ ή λ α ς, ἡ πρώτη στήλη θά δώση ἄθροισμα 1 καί ἡ δευτέρα 1 συνεπῶς θά λάβωμεν τήν σχέσιν

$$\frac{2|\alpha_1\beta_1|+2|\alpha_2\beta_2|+\ldots+2|\alpha_\nu\beta_\nu|}{\sqrt{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)}} \leqslant 2$$

ἥτις παρέχει ἀμέσως τήν ἀποδεικτέαν (21).

Ἐκ τῆς (21) προκύπτει ἡ ἀνισότης τοῦ Schwarz (§ 62) διότι

$$|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu| \leqslant |\alpha_1\beta_1|+|\alpha_2\beta_2|+\ldots+|\alpha_\nu\beta_\nu|$$

ἄρα ἡ (21) δίδει:

$$|\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu| \leqslant \sqrt{(\alpha_1^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\ldots+\beta_\nu^2)}$$

καί δι'ὑψώσεως εἰς τό τετράγωνον

$$(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2 \leqslant (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2)$$

Λαμβάνομεν δηλ. τήν ἀνισότητα τοῦ Schwarz.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

342. Ἐάν $x \neq 0$ δείξατε ὅτι

$$\left|x+\frac{1}{x}\right| \geqslant 2$$

343. Δείξατε ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x πληρῶν τήν σχέσιν:

$$|x| = \left|x+\frac{|\alpha x^2+\beta|}{x}\right|$$

ὅπου α,β ὁμόσημοι.

344. Ἐάν $|\alpha|>1$ δείξατε ὅτι

$$\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| - 1 < |\alpha| \leqslant \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right|$$

345. Ἐάν α, β πραγματικοί, δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν δύο σχέσεων: $\alpha|\beta| + \beta|\alpha| = 0$, $|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha - \beta|$ συνεπάγεται τήν ἄλλην.

346. Ἐάν $\alpha > 0$ καί $\lambda > 1$ εὕρετε τήν $|z|$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ z πληροῖ τήν ἰσότητα

$$\frac{\left|z + \dfrac{\alpha\lambda^2}{\lambda^2 - 1}\right|}{\left|z + \dfrac{\alpha}{\lambda^2 - 1}\right|} = \lambda$$

347. Ἐάν $|x - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$ καί $|x - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$ ὅπου $\varepsilon > 0$, τότε θά εἶναι: $|\alpha - \beta| < \varepsilon$

348. Ἐάν α, β, γ πραγματικοί, $\neq 0$, νά δειχθῇ ὅτι ἡ διπλῆ ἀνισότης $|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma$ συνεπάγεται τάς τρεῖς ἀνισότητας $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \gamma + \alpha$, $\gamma < \alpha + \beta$ καί ἀντιστρόφως αἱ τρεῖς τελευταῖαι συνεπάγονται τήν ἀρχικήν. Ἐπίσης, ἡ ἀρχική συνεπάγεται ὅτι α, β, γ εἶναι θετικοί.

349. Ἐάν $\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$ δείξατε ὅτι

$$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leqslant \sqrt{\alpha - \beta}$$

350. Ἐάν α, β πραγματικοί δείξατε τήν σχέσιν

$$|\alpha^2 + \alpha\beta| - |\alpha\beta| + \alpha|\beta| \leqslant \alpha|\alpha + \beta| - \alpha|\alpha| + \alpha^2$$

351. Ἐάν $\alpha > \beta > 0$ καί $|x - \alpha| > |x - \beta|$ νά δειχθῇ ὅτι τότε

$$x < \frac{\alpha + \beta}{2}$$

352. Ποία εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τιμή τήν ὁποίαν δύναται νά λάβη ἡ παράστασις Π=.... ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως 9 (0 ≤ x

$$\Pi = \big||x(x - 2) - 10| - |(x - 5)(x - 2) - 20|\big|$$

καί διά ποίαν τιμήν τοῦ x τήν λαμβάνει;

353. Ἐάν $\alpha = \frac{x}{|y| + |z|}$ $\beta = \frac{y}{|z| + |x|}$ $\gamma = \frac{z}{|x| + |y|}$ νά δειχθῇ ὅτι τότε

$$|\alpha\beta\gamma| < \frac{1}{8} \quad \text{καί} \quad \frac{1}{|\alpha|} + \frac{1}{|\beta|} + \frac{1}{|\gamma|} \geqslant 6$$

354. Ἐάν $|\alpha_1| < |\alpha_2| < |\alpha_3|$ δείξατε ὅτι τότε

$$\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\alpha_3^2} < \frac{|\alpha_1| + |\alpha_2|}{|\alpha_3|}$$

355. Ἐάν $x = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\nu} + \frac{\beta\sqrt{3}}{2(\nu - 1)}$ ὅπου α, β, ν ἀκέραιοι τοιοῦτοι

ὥστε $\nu \geqq 5$, $\alpha\beta = -1$ δείξατε ὅτι τότε

$$40|x| < \sqrt{3}$$

356. Ἐάν $\alpha < \beta$, διά ποῖα x ἡ παράστασις

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x ; $\big||\alpha - x| - |\beta - x|\big|$

357. Δείξατε ὅτι αἱ δύο σχεσεις: $\alpha = \dfrac{\gamma}{1 + |\gamma| + |\delta|}$, $\beta = \dfrac{\delta}{1 + |\gamma| + |\delta|}$ συνεπάγονται τάς τρεῖς σχέσεις:

$$|\alpha| + |\beta| < 1 \quad , \quad \gamma = \frac{\alpha}{1 - |\alpha| - |\beta|}, \quad \delta = \frac{\beta}{1 - |\alpha| - |\beta|}$$

καί ἀντιστρόφως, αἱ τρεῖς τελευταῖαι συνεπάγονται τάς δύο πρῶτας.

358. Δείξατε ὅτι $|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu| \geqq |\alpha_1| - |\alpha_2| - |\alpha_3| - \ldots - |\alpha_\nu|$

359. Ἐάν ρ_1, ρ_2 πραγματικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $\rho_1^2 \neq \rho_2^2$ καί $\rho_1 \rho_2 \neq 0$ καί παραστήσωμεν μέ M τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν $\left|\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right|, \left|\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right|$ δείξατε ὅτι

$$\frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{|\rho_1 \rho_2|} - 1 < M < \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{|\rho_1 \rho_2|}$$

360. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, γ πληροῦν τάς ἀνισότητας

$$|\alpha| < |\beta + \gamma| \quad , \quad |\beta| < |\gamma + \alpha| \, , \quad |\gamma| < |\alpha + \beta|$$

τότε εἶναι πάντες ὁμόσημοι καί θά πληροῦν καί τάς ἀνισότητας

$$|\alpha| > |\beta - \gamma| \quad , \quad |\beta| > |\gamma - \alpha| \quad , \quad |\gamma| > |\alpha - \beta|$$

361. Ἐάν x, y, z πραγματικοί καί $\neq 0$ πληροῦται δέ ἡ σχέσις

$$\frac{\big|x|yz| + y|zx| + z|xy|\big|}{|xyz|} = 3$$

τότε οἱ τρεῖς αὐτοί ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι.

362. Ἐάν x, y πραγματικοί καί $|x| > 1$ δείξατε ὅτι ἄν ἰσχύη ἡ σχέσις $y = \dfrac{x}{1 - |x|}$ τότε θά ἰσχύη καί ἡ $x = \dfrac{y}{1 - |y|}$

363. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις $\big|\alpha|x| + \beta x\big|$ δύναται πάντοτε νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν $A|x| + Bx$

364. Νά ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοί c_1 καί c_2 συναρτήσει τῶν α καί β εἰς τρόπον ὥστε νά ἔχωμεν

$$\big|\alpha x^2 + \beta x|x|\big| \equiv c_1 x^2 + c_2 x|x|$$

365. Νά δειχθῆ ἡ ταυτότης

$$\left\{2x^2 + 2x|x| - |x| - x\right\}\left\{\alpha^2|x| - \alpha^2 x - 5|x| + 5x\right\} \equiv 0$$

366. 'Εάν α,β πραγματικοί, δείξατε ότι

$$\alpha|\beta| + |\alpha|\beta \leqslant \alpha\beta + |\alpha\beta|$$

Πότε ἰσχύει τό = ;

367. 'Εάν α,β πραγματικοί ἀριθμοί καί $\alpha\beta \neq 0$ δειξατε ὅτι ἡ σχέσις

$$\left|\frac{5\alpha + 16\beta}{4\alpha + 20\beta}\right| < 1$$

συνεπάγεται τήν

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| - \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < \frac{15}{4}$$ καί ἀντιστρόφως

368. 'Εάν $\rho^2 = -\alpha\rho - \beta$ τότε θά ἔχωμεν

$$|\rho|^2 - |\alpha\rho| + |\beta| \geqslant 0 \quad \text{καί} \quad |\rho|^2 + |\alpha\rho| - |\beta| \geqslant 0$$

369. 'Εάν $\vartheta > 0$, $\vartheta - \dfrac{|\beta|}{\vartheta} = |\alpha|$, $\rho + \dfrac{\beta}{\rho} = -\alpha$ δείξατε ὅτι τότε

$$\vartheta - \frac{|\beta|}{\vartheta} \geqslant |\rho| - \frac{|\beta|}{|\rho|} \quad \text{καί} \quad \cancel{\vartheta < |\rho|} \quad |\rho| \leqslant \vartheta$$

370. 'Εάν διά τοῦ [x] παριστάνομεν τόν μεγαλύτερον ἀκέραιον τόν μή ὑπερβαίνοντα τόν πραγματικόν ἀριθμόν x (ἴδε § 43) νά εὑρεθῆ ποίας τιμάς δύναται νά λάβη ἡ παράστασις

$$\left|[x] - 2\left[\frac{x}{2}\right]\right|$$

ὅταν x τυχών πραγματικός ἀριθμός

371. Νά ὁρισθοῦν οἱ φυσικοί ἀριθμοί x καί ν γνωστοῦ ὄντος ὅτι οὗτοι πληροῦν τήν ἐξίσωσιν

$$\left|x + \sqrt{50}\right| + \left|\sqrt{\nu^2 + 1} - x\right| = 10$$

372. 'Εάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x , y πληροῦν τήν ἰσότητα

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\gamma^2 - \alpha^2} = 1$$

ὅπου $\gamma > \alpha > 0$ τότε θά πληροῦν καί τήν

$$\left|\sqrt{(x+\gamma)^2 + y^2} - \sqrt{(x-\gamma)^2 + y^2}\right| = 2\alpha$$

373. 'Εάν $2|\beta| \leqslant \alpha \leqslant \gamma$ νά δειχθῆ ὅτι τότε: $\alpha \leqslant \dfrac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$.
'Εάν δέ $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$ δείξατε ὅτι οἱ μόνοι ἀκέραιοι οἱ πληροῦντες τήν δοθεῖσαν σχέσιν εἶναι $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 1$.

374. 'Εάν ν φυσικός ἀριθμός καί $|\alpha| < 1$ νά δειχθῆ ὅτι

$$\left|\nu\,\frac{\alpha - \nu}{\alpha^2 + \nu}\right| < \frac{\nu}{|\alpha|}$$

375. Ἐάν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί ἔχοντες ἕκαστος ἀπόλυτον τιμήν <1 καί $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ τυχόντες πραγματικοί νά δειχθῆ ὅτι τότε ὑπάρχει ἀριθμός λ περιέχομενος μεταξύ -1 καί $+1$ καί τοιοῦτος ὥστε νά ὑφίσταται ἡ ἰσότης:

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \ldots + \lambda_\nu\alpha_\nu = \lambda\left\{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_\nu|\right\}$$

376. Νά δειχθῆ ὅτι ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων

$$x\left\{|3x| + |2y| + |7z|\right\} = \alpha \quad , \quad y\left\{|3x| + |2y| + |7z|\right\} = \beta$$

$$z\left\{|3x| + |2y| + |7z|\right\} = \gamma$$ ὅπου $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ἕπονται αἱ σχέσεις

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{|3\alpha| + |2\beta| + |7\gamma|}} \quad , \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{|3\alpha| + |2\beta| + |7\gamma|}} \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{|3\alpha| + |2\beta| + |7\gamma|}}$$

καί ἀντιστρόφως.

377. Ἐάν μεταξύ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β ἰσχύει ἡ σχέσις $\beta(1 + |\alpha|)(1 - |\alpha| + \alpha^2) = \alpha^3$ νά δειχθῆ ὅτι τότε θά ἰσχύη καί ἡ $\alpha^3\left\{|\beta| - 1\right\} + \beta = 0$. Ὑπό ποίαν συνθήκην ἀληθεύει καί τό ἀντίστροφον;

378. Ἐάν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί νά δειχθῆ ἡ σχέσις

$$\frac{|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_\nu|}{\nu} \leqslant \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_\nu^2}{\nu}}$$

379. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, x, y, πληροῦν τάς τρεῖς σχέσεις

$$\alpha\beta > 0$$

$$|x| < |x + \alpha| < \beta$$

$$|y| < |y + \alpha| < \beta$$

νά δειχθῆ ὅτι θά πληροῦν καί τήν ἀνισότητα

$$|xy - (x + \alpha)(y + \alpha)| < 2\alpha\beta$$

380. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y πληροῦν τήν ἀνισότητα

$$\left||xy| - 3x\right| < |x - y| - 4$$

δείξατε ὅτι τότε οἱ ἀριθμοί

$$1 - |x| \qquad \text{καί} \qquad 4 - |y|$$

εἶναι ἑτερόσημοι.

381. Ἐάν $\vartheta_2 > \vartheta_1 > 0$ καί α καί β πραγματικοί πληροῦται δέ ἡ ἀνισότης

$$\left|\frac{\vartheta_1\alpha + \vartheta_2\beta}{\vartheta_1\beta + \vartheta_2\alpha}\right|\cdot\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$$

δείξατε ὅτι τότε θά εἶναι

$$\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| < 1$$

382. Ἐάν ὁ πραγματικός α πληροῖ τήν ἀνισότητα $|\alpha|>1$ δείξατε ὅτι τότε θά πληροῖ καί τάς

$$\left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right| - 1 < |\alpha| < \left|\alpha + \frac{1}{\alpha}\right|$$

383. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, ξ, η πληροῦν τάς σχέσεις

$$\alpha > \beta > 0 \qquad \text{καί} \qquad \frac{\xi^2}{\alpha^2} + \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

τότε ἄν οἱ πραγματικοί x καί y πληροῦν τήν ἰσότητα

$$(x - \beta)^2 + y^2 = \frac{\beta^4}{\alpha^4}\xi^2 + \eta^2$$

θά πληροῦν καί τάς σχέσεις

$$|y| \leqslant \beta \qquad \text{καί} \qquad |x - \beta| \leqslant \beta$$

Σημείωσις. Τό σύμβολον $|\alpha|$ ἔχει νόημα καί ὅταν ὁ α εἶναι φανταστικός (ἤ μιγαδικός) ἀριθμός, ὡς θά ἴδωμεν ἀργότερον. Διά τοῦτο τονίζεται εἰς ὅλας τάς ἀνωτέρω ἀσκήσεις ὅτι οἱ ἀριθμοί τῶν ὁποίων λαμβάνονται αἱ ἀπόλυτοι τιμαί εἶναι πραγματικοί. Ὅταν τοῦτο δέν δηλοῦται ρητῶς τότε πρέπει νά ἐξετάση τίς καί τήν περίπτωσιν καθ'ἥν οἱ ἀριθμοί ὧν λαμβάνονται αἱ ἀπόλυτοι τιμαί εἰναι μιγαδικοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

92. **Ἡ μέθοδος τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς.** α) Μαθηματική ἐπαγωγή ἤ πλήρης ἤ τελεία ἐπαγωγή καλεῖται μία γενική μέθοδος ἀποδείξεως. Ἡ μέθοδος αὐτή χρησιμοποιεῖται προκειμένου ν'ἀποδειχθῆ ὅτι μία Μαθηματική πρότασις ἡ ὁποία ἐκφράζεται τῆ βοηθεία φυσικοῦ τινος ἀριθμοῦ ν ἔχει ἰσχύν δι' ὅλας γενικῶς τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν.

Τοιαῦται Μαθηματικαί προτάσεις (Θεωρήματα), εἰς τάς ὁποίας εἰσέρχεται ἕνας φυσικός ἀριθμός ν καί αἱ ὁποῖαι ἀποδεικνυεται ὅτι ἰσχύουν οἱανδήποτε φυσικήν τιμήν καί ἄν ἔχη ὁ ν εἶναι παραδείγματος χάριν:

i) «Διά κάθε φυσικόν αριθμόν ν ἰσχύη ἡ ἰσότης

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2 \text{ »}$$

ii) «Ἐάν α καί β εἶναι θετικοί τότε διά κάθε φυσικόν ἀριθμόν ν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\beta^{\nu+1} \geqslant \alpha^{\nu}\beta(\nu+1) - \nu\alpha^{\nu+1}$$

Προτάσεις δέ χρήζουσαι ἀποδείξεως δι'ὅλας τάς ἀκεραίας τιμάς τοῦ ν τάς μεγαλυτέρας τοῦ 1 ἤ τοῦ 2 εἶναι π.χ. αἱ:

iii) «Τό γινόμενον ν ἀκεραίων ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος εἶναι ναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων, εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων».

iv) «Τό πλῆθος τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν πλευράς ἰσοῦται μέ $\dfrac{\nu(\nu-3)}{2}$ ».

Πᾶσαι αἱ ἀνωτέρω προτάσεις (i) - (iv) δύνανται ὡς θά ἴδωμεν ν'ἀποδειχθοῦν διά τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς διά τῆς ὁποίας καί πλεῖστοι ἄλλοι ἐνδιαφέροντες τύποι τῶν Μαθηματικῶν ἀποδεικνύονται.

Ἡ Μαθηματική ἐπαγωγή στηρίζεται ἐπί τοῦ ἑπομένου θεωρήματος.

β) Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς: Ἐάν διά μίαν Μαθηματικήν πρότασιν Ε(ν) ἀφορῶσαν ἕνα φυσικόν ἀριθμόν ν εἶναι γνωστόν ὅτι

(i) «Ἡ πρότασις ἀληθεύει διά ν = 1» καί ὅτι

(ii) «Ἄν ἡ πρότασις ἀληθεύει διά κάποιαν τιμήν k τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τότε ἀναγκαστικῶς ἀληθεύει καί διά τήν ἀμέσως ἑπομένην τιμήν k + 1 τοῦ ν»

τότε, (ἐφ'ὅσον δηλ. συμβαίνουν τά (i) καί (ii)) ἡ πρότασις Ε(ν) ἀληθεύει δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν. (Δηλαδή δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς).

Πρώτη ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ πρότασις ἀληθεύει διά ν = 1 τότε λόγω τῆς παραδοχῆς (ii) θ'ἀληθεύη καί διά τήν ἀμέσως ἑπομένην τιμήν τοῦ ν δηλ. διά ν = 2. Ἀφοῦ, τώρα ἡ πρότασις ἀληθεύει διά ν = 2 ἕπεται ἐκ τῆς (ii) ὅτι θ'ἀληθεύη καί διά τήν ἀμέσως ἑπομένην τιμήν τοῦ ν δηλ. διά ν = 3. Ἀφοῦ ἀληθεύει διά ν = 3 ἕπεται ἐκ τῆς (ii) ὅτι θ'ἀληθεύη καί διά ν = 4. Προχωροῦντες οὕτω κατά μίαν μονάδα ἑκάστοτε φθάνομεν εἰς οἱονδήποτε συγκεκριμμένον φυσικόν ἀριθμόν θέλομεν. (Ἐπειδή ὅμως τό πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἄπειρον καί συνεπῶς ἀνεξάντλητον εἴμεθα ὑποχρεωμένοι,ἐδῶ, νά ἐπικαλεσθῶμεν ἕνα ἀξίωμα τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν σύμφωνα πρός τό ὁποῖον, κατά τόν τρόπον αὐτόν προχωροῦντες, δηλ. αὐξάνοντες κατά μονάδα, τούς διατρέχομεν ὅλους). Κατόπιν τούτων ἡ ἰδιότης Ε(ν) ἰσχύει δι' ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς.

Δευτέρα ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς δύναται νά γίνη διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ἐπί τῇ βάσει τῆς λεγομένης «ἀρχῆς τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ» ἤ-τις διατυποῦται ὡς ἑξῆς: «**Εἰς κάθε σύνολον*** φυσικῶν ἀριθμῶν **ὑπάρχει πάντοτε εἷς ἐλάχιστος** (δηλαδή μικρότερος ὅλων τῶν ἄλλων)»

Ἄς ὑποθέσωμεν λοιπόν ὅτι ἰσχύουν αἱ παραδοχαί (i) καί (ii) ἀλλά ἡ πρότασις Ε(ν) δέν ἰσχύει δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς. Τότε ἄς φαντασθῶμεν τό σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διά τούς ὁποίους δ έ ν ἰ σ χ ύ ε ι ἡ πρότασις Ε(ν), ἔστω τό $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$. Εἰς τό σύνολον αὐτό Σ θά ὑπάρχη εἷς ἐλάχιστος, ἔστω ὁ α διά τόν ὁποῖον δέν ἰσχύει ἡ πρότασις. Θά εἶναι δέ $\alpha \geqslant 2$ διότι διά $\nu = 1$ ἰσχύει. Ἀφοῦ λοιπόν ὁ α εἶναι ὁ ἐλάχιστος φυσικός ἀριθμός διά τόν ὁποῖον ἡ πρότασις δέν ἰσχύει, ἕπεται ὅτι δ ι ά τ ο ύ ς μ ι κ ρ ο τ έ ρ ο υ ς τ ο υ, ἡ π ρ ό τ α σ ι ς θ ά ἰ σ χ ύ η. Ἄρα θά ἰσχύη καί διά $\nu = \alpha - 1$. Ἐνῶ ὅμως ἰσχύη διά $\nu = \alpha - 1$, δέν ἰσχύει διά $\nu = \alpha$, τό ὁποῖον ἀντιφάσκει πρός τήν ὑπόθεσιν (ii).

Σημείωσις. Ἡ ἀρχή τοῦ ἐλαχίστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ τήν ὁποίαν ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τήν δευτέραν ἀπόδειξιν, δύναται ν'ἀποδειχθῆ ἐπί τῇ βάσει τοῦ ἀξιώματος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τό ὁποῖον ἀνεφέρθημεν ἐν τῇ πρώτῃ ἀποδείξει καί ἀντιστρόφως.

Παρατήρησις. Συμβαίνει πολλάκις ἡ πρότασις Ε(ν) νά ἔχη νόημα διά τάς τιμάς τοῦ ν ἀπό τινος φυσικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha > 1$ καί ἔπειτα. Π.χ. ἡ πρότασις (iv) ἔχει νόημα διά $\nu = 3,4,5\ldots$

Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τό θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἰσχύει (προφανῶς) ὑπό τήν ἑξῆς διατύπωσιν:

«Ἐάν διά τήν Μαθηματικήν πρότασιν Ε(ν) εἶναι γνωστόν ὅτι

(i) Ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = \alpha$· καί ὅτι

(ii) Ἄν ἡ πρότασις ἀληθεύει διά $\nu = k$ τότε ὑποχρεωτικῶς ἀληθεύει καί διά $\nu = k + 1$.

---

* Πρόκειται περί συνόλου ἀποτελουμένου ἀπό διαφόρους ἀλλήλων φυσικούς ἀριθμούς.

τότε ἡ πρότασις Ε(ν) ἀληθεύει δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν ἀπό α καί ἄνω ».

γ) Ἡ ἐφαρμογή τῆς Μεθόδου. Ἡ ἀπόδειξις ἑνός Θεωρήματος (ἐξαρτωμένου ἐκ τοῦ ν) διά τῆς ἀποδεικτικῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς γίνεται ἐν τῇ πράξει εἰς τρία στάδια, ὡς ἀκολούθως.

i) Ἐπαλήθευσις. Ἐλέγχομεν ἄν τό Θεώρημα ἀληθεύῃ διά μίαν ἤ περισσοτέρας μικράς τιμάς τοῦ ν. Συνήθως ἀποδεικνύομεν ὅτι τό Θεώρημα ἀληθεύει διά ν = 1.

ii) Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k + 1. Ὑποθέτομεν ὅτι τό Θεώρημα ἰσχύει διά κάποιαν τιμήν k τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν καί ἀποδεικνύομεν ἐπί τῇ βάσει τῆς ὑποθέσεως ταύτης, ὅτι τό Θεώρημα θά ἰσχύῃ ἀναγκαστικῶς καί διά ν = k + 1. Εἰς τό μέρος τοῦτο τῆς ἀποδείξεως συγκεντρώνεται συνήθως ὅλη ἡ δυσκολία τῆς ἐφαρμογῆς τῆς μεθόδου.

iii) Συμπέρασμα. Συνδυάζομεν τά δύο προηγούμενα μέρη (i) καί (ii) μέ τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς καί συνάγομεν ἀμέσως ὅτι τό Θεώρημά μας ἀληθευει δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. « Νά δειχθῇ ὅτι ὁ τύπος

$$(1) \qquad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3 = \left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2$$

ἰσχύει δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν ».

Ἀπόδειξις. i) Ἐπαλήθευσις. Ἡ ἰσότης (1) ἀληθεύει διά ν = 1· διότι ἐάν ν = 1 τό ἀριστερόν μέλος αὐτῆς περιέχει μόνον ἕνα ὅρον καί ὁ τύπος (1) καθίσταται τότε

$$1^3 = \left\{\frac{1\cdot 2}{2}\right\}^2$$

καί εἶναι προφανῶς, ἀληθής. (Διά ν = 2 ὁ τύπος (1) γίνεται

$$1^3 + 2^3 = \left\{\frac{2(2+1)}{2}\right\}^2$$

διά ν = 3 γίνεται

$$1^3+2^3+3^3=\left\{\frac{3(3+1)}{2}\right\}^2$$

καί άληθεύει ὅπως δυνάμεθα εὐκόλως νά ἴδωμεν· αἱ ἐπαληθεύσεις ὅμως αὐταί δέν εἶναι ἀναγκαῖαι διά τήν ἀπόδειξιν).

ii) **Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k + 1**. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ὁ (1) ἀληθεύει διά κάποιαν τιμήν τοῦ ν ἔστω τήν k δηλαδή ὅτι ἔχομεν

$$(2) \qquad 1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$$

καί θά ἐπιδιώξωμεν ν'ἀποδείξωμεν βάσει τῆς (2) ὅτι ὁ τύπος (1) ἀληθεύει καί διά ν = k+ 1, ὅτι δηλαδή

$$(3) \qquad 1^3+2^3+3^3+\ldots+(k+1)^3=\left\{\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right\}^2$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (3) μετατρέπομεν τό πρῶτον μέλος τῆς (3) δεχόμενοι πάντοτε ὅτι ἡ (2) ἰσχύει καί λαμβάνομεν διαδοχικῶς:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+(k+1)^3=\left\{1^3+2^3+3^3+\ldots+k^3\right\}+(k+1)^3=$$

$$=\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2+(k+1)^3=\frac{k^2(k+1)^2}{4}+(k+1)^3=$$

$$=(k+1)^2\left\{\frac{k^2}{4}+k+1\right\}=(k+1)^2\,\frac{k^2+4k+4}{4}=$$

$$=\frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}=\left\{\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}\right\}^2$$

Δηλ. φθάνομεν ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (3) εἰς τό δεύτερον. Συνεπῶς, ἄν ἡ (2) ἀληθεύει τότε καί ἡ (3) ἀληθεύει.

iii) **Συμπέρασμα**. Εἰς τό (i) ἐδείχθη ὅτι ὁ τύπος μας ἀληθεύει διά ν = 1. Εἰς τό (ii) ἐδείχθη ὅτι ἄν ὁ τύπος ἀληθεύη διά μίαν ὁποιανδήποτε τιμήν k τοῦ ν τότε ὑποχρεωτικῶς θ' ἀληθεύη καί διά τήν ἑπομένην τιμήν k + 1 τοῦ ν. Συνεπῶς σύμφωνα μέ τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ὁ τύπος μας ἀληθεύει δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν.

Παρατηρήσεις. Οὔτε μόνη ἡ ἐπαλήθευσις διά πολλάς τιμάς τοῦ ν οὔτε μόνον τό βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k+ 1 ἐξασφαλίζουν τήν γενική ἰσχύν τῆς προτάσεως.

Ἄν π.χ. ἡ πρότασις συμβῆ ν'ἀληθεύη διαπολλάς ἀρχικάς τιμάς τοῦ ν, δέν ἔπεται ὅτι ἀληθεύει γενικῶς. Ἕνα κλασσικόν παράδειγμα τοιαύτης πλάνης εἶναι τό ἑξῆς ψευδές θεώρημα: "Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός τότε ὁ ἀριθμός ($\nu^2-\nu+41$) εἶναι πρῶτος„

Διά τάς τεσσαράκοντα πρώτας τιμάς τοῦ ν ἡ ἀνωτέρω πρότασις ἀληθεύει· δηλ. διά ν = 1,2,3,... 40 ὁ $\nu^2-\nu+41$ εἶναι πράγματι πρῶτος ἀριθμός. Ὅμως διά ν = 41 λαμβάνομεν

$$\nu^2-\nu+41=41^2-41+41=41^2$$

δηλ. ἀριθμόν μή πρῶτον.

'Επίσης δυνατόν ν'ἀποδειχθῆ ὅτι "ἄν ἡ πρότασις ἰσχύει διά $\nu = k$ τότε ἀναγκαστικῶς θά ἰσχύη καί διά $\nu = k + 1$" χωρίς τοῦτο μόνον του νά ἐξασφαλίζη τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως. Οὕτω π.χ. ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ἰσότης

$$1^3 + 2^3 + \ldots + \nu^3 = \left\{\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right\}^2 + 10$$

ἰσχύει διά $\nu = k$ δυνάμεθα τότε νά δείξωμεν (ὅπως ἀκριβῶς εἰς τό προηγηθέν παράδειγμα) ὅτι αὕτη θά ἰσχύη καί διά $\nu = k + 1$. 'Εν τούτοις δέν ὑπάρχει καμμιά τιμή τοῦ ν διά τήν ὁποίαν ἡ ἰσότης αὕτη ἀληθεύει ὡς φαίνεται ἄν παρεμβάλλωμεν μέ τήν (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. " 'Εαν α καί β θετικοί καί ν τυχῶν φυσικός ἀριθμός νά δειχθῆ ἡ σχέσις

(4) $$\beta^{\nu+1} \geqslant \alpha^{\nu}\beta(\nu+1) - \nu\alpha^{\nu+1}$$

'Απόδειξις i). 'Επαλήθευσις. Διά $\nu = 1$ ἡ ἀποδεικτέα γράφεται

$$\beta^2 \geqslant \alpha\cdot\beta\cdot 2 - \alpha^2 \quad ἤ \quad \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geqslant 0 \quad ἤ \quad (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$$

καί προφανῶς ἀληθεύει

ii) Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό $k+1$. "Ας ὑποθέσωμεν ὅτι διά κάποιαν τιμήν k τοῦ ν ἡ (4) ἀληθεύει δηλ. ὅτι ἰσχύει:

(5) $$\beta^{k+1} \geqslant \alpha^{k}\beta(k+1) - k\alpha^{k+1}$$

Θά ζητήσωμεν νά δείξωμεν ὅτι ἡ (4) ἀληθεύει τότε ὑποχρεωτικῶς καί διά $\nu = k + 1$. Δηλαδή ὅτι ἀληθευούσης τῆς (5) ἀληθεύει καί ἡ

(6) $$\beta^{k+2} \geqslant \alpha^{k+1}\beta(k+2) - (k+1)\alpha^{k+2}$$

Πρός τοῦτο πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀληθευούσης σχέσεως (5) ἐπί β ὁπότε αὕτη γίνεται

(7) $$\beta^{k+2} \geqslant \alpha^{k}\beta^2(k+1) - k\beta\alpha^{k+1}$$

Τώρα, ἡ ὑποτιθεμένη ὡς ἀληθής δηλ. ἡ (7) καί ἡ ἀποδεικτέα δηλ. ἡ (6) ἔ χ ο υ ν τ ά ἴ δ ι α π ρ ῶ τ α μ έ λ η καί συνεπῶς διά ν'ἀληθεύη ἡ (6) ἀληθευούσης τῆς (7) ἀ ρ κ ε ῖ νά δειχθῆ ὅτι:

(8) $$\alpha^{k}\beta^2(k+1) - k\beta\alpha^{k+1} \geqslant \alpha^{k+1}\beta(k+2) - (k+1)\alpha^{k+2}$$

ἤ (κατόπιν ἁπλοποιήσεως μέ α^k) ὅτι

$$\beta^2(k+1) - k\beta\alpha \geqslant \alpha\beta(k+2) - (k+1)\alpha^2$$

ἤ

$$(k+1)(\beta^2 + \alpha^2) - (2k+2)\alpha\beta \geqslant 0$$

$$ή \quad (k+1)\left\{ \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \right\} \geqslant 0$$

'Αλλ'ή τελευταία αὕτη ἀληθεύει προφανῶς, ἄρα καί ἡ (8). 'Αφοῦ ἀληθευει ἡ (8) ἕπεται ὅτι ἀληθευούσης τῆς (7) ἀληθεύει καί ἡ (6).

Συμπέρασμα. 'Αφοῦ ἡ πρότασις (4) ἀληθεύει διά $\nu = 1$ καί ἀφοῦ ἡ ἰσχύς τῆς (4) διά $\nu = k$ συνεπάγεται τήν ἰσχύν αὐτῆς και διά $\nu = k + 1$ ἕπεται ἀπό τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς, ὅτι ἡ προτασις (4) ἀληθεύει δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ν.

Σημείωσις. Προκειμένου ν'ἀποδείξωμεν ἀνισότητας διά τῆς 'Επαγωγικῆς μεθόδου καλόν εἶναι νά δοκιμάζωμεν κατ' ἀρχήν τόν ἀνωτέρω τρόπον, δηλ. νά καθιστῶμεν διά καταλλήλων μετατροπῶν τά πρῶτα (ἤ τά δεύτερα) μέλη τῆς ὑποτιθεμένης ὡς ἀληθοῦς καί τῆς ἀποδεικτέας ἴσα. Θά ἔχωμεν τότε ν'ἀποδείξωμεν π.χ. ὅτι ἄν $A < B$ τότε, καί $A < \Gamma$. Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι $B \leqslant \Gamma$. Διότι ἀφοῦ $A < B$ καί $B \leqslant \Gamma$ θά ἔχωμεν κατ'ἀνάγκην καί $A < \Gamma$.

'Εννοεῖται ὅτι δυνατόν ἡ $A < B$ νά συνεπάγεται τήν $A < \Gamma$ χωρίς νά εἶναι $B < \Gamma$.

'Ομοίως, διά νά δείξωμεν ὅτι ἡ $A > B$ συνεπάγεται τήν $\Gamma > B$ ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $\Gamma > A$ κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. «**Νά δειχθῆ ὅτι τό γινόμενον ν ἀκεραίων ἐκ ~~τῶν ὁποιων ἕκαστος εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων~~ τετραγώνων εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων**».

'Απόδειξις i) 'Επαλήθευσις. ῎Ας ἴδωμεν πρῶτον ἄν τό Θεώρημα ἰσχύη διά τήν μικροτέραν δυνατήν τιμήν τοῦ ν δηλ. διά δύο παράγοντας. ῎Εστω λοιπόν ὅτι

$$x_1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \qquad \text{και} \qquad x_2 = \beta_1^2 + \beta_2^2$$

Τότε $x_1 x_2 = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2) = \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 =$

$$= \alpha_1^2\beta_1^2 + \alpha_2^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 + \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 =$$

$$= (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)^2 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2$$

δηλ. το γινόμενον δύο ἀκεραίων ὧν ἕκαστος εἶναι ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων. ῞Ωστε το θεώρημα ἰσχύη διά $\nu = 2$.

ii) Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k + 1. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι τό θεώρημα ἰσχύει διά k παράγοντας. Θ'ἀποδείξωμεν ὅτι ἀναγκαστικῶς τότε θά ἰσχύη καί διά k + 1 παράγοντας:

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_k x_{k+1}$$

Πράγματι, ἐφ'ὅσον τό θεώρημα ἰσχύει διά k παράγοντας, τό γινόμενον $\Pi = x_1 x_2 \ldots x_k$ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἴσος πρός τό ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων καί συνεπῶς

$$x_1 x_2 x_3 \ldots x_k x_{k+1} = \Pi x_{k+1}$$

ὅπου καί ὁ Π καί ὁ x_{k+1} εἶναι ἕκαστος ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων. Ἐπειδή διά δύο παράγοντας τό Θεώρημα ἰσχύει ἕπεται ὅτι καί το γινόμενον $x_1 x_2 \ldots x_{k+1}$ εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τελείων τετραγώνων.

iii) **Συμπέρασμα.** Ἐφ'ὅσον τό Θεώρημα ἰσχύη διά ν = 2 καί ἐφ'ὅσον, ὁσάκις ἰσχύει διά ν = k ἰσχύει καί διά ν=k+1 ἕπεται κατά τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ὅτι θά ἰσχύη δι'ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς ἀπό 2 καί ἄνω.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. «Νά δειχθῆ ὅτι τό πλῆθος Δ_ν τῶν διαγωνίων πολυγώνου ἔχοντος ν κορυφάς δίδεται ὑπό τοῦ τύπου

(9) $$\Delta_\nu = \frac{\nu(\nu - 3)}{2}$$ ».

Ἀπόδειξις i) **Ἐπαλήθευσις.** Τό Θεώρημα ἔχει νόημα διά τιμάς τοῦ ν ἀπό 3 καί ἄνω. Διά ν = 3 ὁ τύπος (9) παρέχει πλῆθος διαγωνίων, ἴσον μέ μηδέν. ἄρα ἀληθεύει, διότι τό τρίγωνον δέν ἔχει διαγωνίους. (Διά ν = 4 ὁ τύπος δίδει

$$\frac{4(4 - 3)}{2} = 2$$

δηλαδή πράγματι, παρέχει τό πλῆθος τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου).

ii) **Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k + 1.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ τύπος (9) ἀληθεύει διά πολύγωνα μέ k κορυφάς. Θά δείξωμεν ὅτι τότε θ'ἀληθεύη καί διά πολύγωνα μέ k + 1 κορυφάς δηλ. ὅτι

$$\Delta_{k+1} = \frac{(k + 1)\{(k + 1) - 3\}}{2}$$

Ἔστω $A_1 A_2 A_3 \ldots A_k A_{k+1}$ πολύγωνον μέ k + 1 κορυφάς: A_1, A_2, ... A_{k+1}. Φέρομεν τήν διαγώνιον $A_1 A_3$ ὁπότε τό πολύγωνον χωρίζεται εἰς ἕνα τρίγωνον $A_1 A_2 A_3$ καί εἰς ἕνα πολυγωνον $A_1 A_3 A_4 \ldots A_{k+1}$ ἔχον k κορυφάς. Αἱ διαγώνιοι τοῦ $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{k+1}$ ἀποτελοῦνται i) ἀπό τάς διαγωνίους τοῦ $A_1 A_3 A_4 \ldots A_{k+1}$ τῶν ὁποίων τό πλῆθος ἰσοῦται μέ $\frac{k(k-3)}{2}$ ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τό θεώρημα ἰσχύει διά

(iii) ἀπό τάς διαγωνίους αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπό τήν κορυφήν A_2 καί τῶν ὁποίων τό πλῆθος εἶναι $(k+1)-3=k-2$

Διότι διά νά λάβωμεν διαγώνιον ἐκ τοῦ A_2 ἑνοῦμεν τό A_2 μέ ὅλας τάς κορυφάς ἐξαιρέσει τῶν A_1, A_2 καί A_3). Ὥστε ἄν Δ_{k+1} εἶναι τό πλῆθος τῶν διαγωνίων τοῦ πολυγώνου μέ $k+1$ κορυφάς θά εἶναι λόγῳ τῶν (i), (ii) καί (iii).

$$\Delta_{k+1}=\frac{k(k-3)}{2}+1+k-2=\frac{k(k-3)}{2}+k-1=$$

$$=\frac{k^2-3k+2k-2}{2}=\frac{k^2-k-2}{2}=\frac{(k^2-1)-(k+1)}{2}=$$

$$=\frac{(k+1)(k-1-1)}{2}=\frac{(k+1)(k-2)}{2} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\Delta_{k+1}=\frac{(k+1)\{(k+1)-3\}}{2}$$

Συμπέρασμα. Ἀφοῦ τό Θεώρημα ἰσχύει διά $\nu=3$ καί ἀφοῦ, ἄν ἰσχύῃ διά $\nu=k$ ἰσχύει ὑποχρεωτικῶς καί διά $\nu=k+1$ ἕπεται ἀπό τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ὅτι θά ἰσχύῃ δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ ν ἀπό 3 καί ἄνω (Δηλ. δι'ὅλα τά πολύγωνα).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. «Ἐάν θ ἀριθμός θετικός $\neq 1$ καί ν οἱοσδήποτε φυσικός ἀριθμός νά δειχθῇ ἡ ἀνισότης

$$(10) \qquad \frac{1+\vartheta^2+\vartheta^4+\ldots+\vartheta^{2\nu}}{\vartheta+\vartheta^3+\ldots+\vartheta^{2\nu-1}}>1+\frac{1}{\nu}\text{ »}$$

Ἀπόδειξις i) Ἐπαλήθευσις. Διά $\nu=1$ ἡ ἀποδεικτέα ἀνισότης γίνεται :

$$\frac{1+\vartheta^2}{\vartheta}>1+\frac{1}{1}$$

δηλ. $1+\vartheta^2>2\vartheta$ καί προφανῶς ἀληθεύει.

ii) **Βῆμα ἐκ τοῦ k εἰς τό k + 1.** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ (10) ἰσχύει διά $\nu=k$ δηλ. ὅτι ἔχομεν

$$(11) \qquad \frac{1+\vartheta^2+\vartheta^4+\ldots+\vartheta^{2k}}{\vartheta+\vartheta^3+\ldots+\vartheta^{2k-1}}>1+\frac{1}{k}=\frac{k+1}{k}$$

Θά δείξωμεν τώρα, ὅτι ἐκ τῆς (11) ἕπεται ἡ

$$(12) \qquad \frac{1+\vartheta^2+\vartheta^4+\ldots+\vartheta^{2k+2}}{\vartheta+\vartheta^3+\ldots+\vartheta^{2k+1}}>1+\frac{1}{k+1}$$

δηλ. ὅτι ἡ (10) ἰσχύει καί διά $\nu=k+1$

Πρός τοῦτο ἀντιστρέφομεν τά δύο μέλη τῆς (11) καί ἔχομεν

$$\frac{\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k-1}}{1 + \vartheta^2 + \ldots + \vartheta^{2k}} < \frac{k}{k+1}$$

καί πολ/ζοντες ἀριθμητήν καί παρ/στήν τοῦ πρώτου μέλους ἐπί ϑ λαμβάνομεν

$$\frac{\vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots + \vartheta^{2k}}{\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1}} < \frac{k}{k+1} = \frac{k+1-1}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1}$$

καί ἀλλάσσοντες τά σημεῖα τῶν δύο μελῶν

$$(13) \qquad - \frac{\vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots + \vartheta^{2k}}{\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1}} > -1 + \frac{1}{k+1}$$

Ἐξ ἄλλου ἰσχύει προφανῶς ὅτι

$$(14) \qquad \frac{1 + \vartheta^2}{\vartheta} > 2$$

ὁπότε προσθέτοντες κατά μέλη τάς (13) καί (14) λαμβάνομεν

$$(15) \qquad \frac{1 + \vartheta^2}{\vartheta} - \frac{\vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots + \vartheta^{2k}}{\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1}} > 1 + \frac{1}{k+1}$$

Τό πρῶτον μέλος τῆς (15) γράφεται διαδοχικῶς

$$\frac{(1 + \vartheta^2)(\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k-1} + \vartheta^{2k+1}) - \vartheta(\vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots + \vartheta^{2k})}{\vartheta(\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1})} =$$

$$= \frac{(\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1}) + (\vartheta^3 + \vartheta^5 + \vartheta^{2k+1} + \vartheta^{2k+3}) - (\vartheta^3 + \vartheta^5 + \ldots + \vartheta^{2k+1})}{\vartheta(\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1})}$$

$$= \frac{\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1} + \vartheta^{2k+3}}{\vartheta(\vartheta + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1})} = \frac{1 + \vartheta^2 + \vartheta^4 + \ldots + \vartheta^{2k+2}}{1 + \vartheta^3 + \ldots + \vartheta^{2k+1}}$$

Ἑπομένως ἡ (15) συμπίπτει μέ τήν ἀποδεικτέαν (12).

iii) Συμπέρασμα. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, ἕπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ὅτι ἡ ἀνισότης (10) ἰσχύει δι'ὅλους τούς ἀκεραίους ν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ν'ἀποδειχθοῦν διά τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς αἱ κάτωθι ἰσότητες 384 ἕως 391.

384. $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2\nu - 1) = \nu^2$

385. $4 + 8 + 12 + \ldots + (4\nu) = 2\nu(\nu + 1)$

386. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + \nu^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu + 1)(2\nu + 1)$

387. $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + 3\cdot 4 + \ldots + \nu(\nu + 1) = \frac{1}{3}\nu(\nu + 1)(\nu + 2)$

388. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2\nu - 1)^3 = \nu^2(2\nu^2 - 1)$

389. $$2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2^3 + \ldots + \nu\cdot 2^{\nu-1} = (\nu - 1)2^\nu$$

390. $$\frac{(\nu+1)(\nu+2)\ldots(2\nu)}{1\cdot 3\cdot 5\ \ldots(2\nu-1)} = 2^\nu$$

391. $$\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{\nu+3} + \ldots + \frac{1}{2\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu}$$

392. Νά δειχθῆ ἐπαγωγικῶς, βάσει τῆς ταυτότητος $x^{k+1} - y^{k+1} = x(x^k - y^k) + y^k(x - y)$ ὅτι ἐάν ν τυχών φυσικός ἀριθμός τότε ὁ $x - y$ εἶναι παράγων τοῦ $x^\nu - y^\nu$

393. Νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν

'Εάν ν τυχών φυσικός ἀριθμός ν'ἀποδειχθοῦν ἐπαγωγικῶς αἱ ἀνισότητες:

394. $(1 + \alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha$ ὅπου $\alpha > 0$ $\nu > 1$

395. $(1 + \alpha)^\nu > 1 + \nu\alpha + \dfrac{\nu(\nu-1)}{2}\alpha^2$ ὅπου $\alpha > 0$ $\nu > 2$

396. $(1 - \varepsilon)^{-\nu} > 1 + \varepsilon\nu$ ὅπου $\varepsilon < 1$

397. $$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{\nu}}{\nu} > \frac{2}{3}\sqrt{\nu}$$

398. 'Οσαδήποτε ριζικά καί ἄν ὑπάρχουν εἰς τό πολλαπλοῦν ριζικόν

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$$

νά δειχθῆ ὅτι τοῦτο εἶναι < 2.

399. 'Εάν $|\alpha| < 1$ νά δειχθῆ διά τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἡ ἀνισότης

$$\left| 1\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha^2+1} + 2\cdot\frac{\alpha-2}{\alpha^2+2} + 3\cdot\frac{\alpha-3}{\alpha^2+3} + \ldots + \nu\,\frac{\alpha-\nu}{\alpha^2+\nu} \right| < \frac{\nu(\nu+1)}{2|\alpha|}$$

93. Δεύτερα μορφή τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου. Θεώρημα. «'Εάν διά μίαν Μαθηματικήν πρότασιν Ε(ν) ἀφορῶσαν ἕνα φυσικόν ἀριθμον ν εἶναι γνωστόν ὅτι

(i) «'Η πρότασις ἀληθεύει διά ν = 1» καί ὅτι

(ii) «'Εαν ἡ πρότασις ἀληθεύει δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν ἀπό 1 ἕως k τότε ἀναγκαστικῶς ἀληθεύει καί διά ν = k + 1» τότε (ἐφ'ὅσον δηλ. συμβαίνουν αἱ (i) καί (ii)) ἡ πρότασις ἀληθεύει δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν».

'Απόδειξις. 'Η ἀπόδειξις εἶναι σχεδόν ἡ αὐτή μέ τήν δευτέραν ἀπόδειξιν τοῦ Θεωρήματος τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς τῆς §92.

'Εφαρμογάς τῆς 2ας μορφῆς τῆς ἐπαγωγικῆς μεθόδου θά ἴδωμεν εἰς ἑπόμενα κεφάλαια.

94.* 'Απόδειξις τοῦ διωνυμικοῦ τύπου. α) Εἰς τήν §65 περιεγράψαμεν τόν διωνυμικόν τύπον χωρίς νά τόν ἀποδείξωμεν. Ἤδη δυνάμεθα νά δώσωμεν ἀπόδειξιν τοῦ τύπου τούτου διά τῆς μεθόδου τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς ἀφοῦ προηγουμένως ὁρίσωμεν δύο νέα σύμβολα τά ὁποῖα παίζουν σπουδαῖον ρόλον εἰς τόν Μαθηματικόν λογισμόν καίτοι εἰς τό παρόν βιβλίον ὀλιγίστην ἐφαρμογήν εὑρίσκουν.

β) Τό σύμβολον ν! (= νί παραγοντικόν) ὅπου ν φυσικός ἀριθμός, ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

(1) $$\nu! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \dots\ \nu.$$

Δηλ. τό ν! ἐκφράζει τό γινόμενον τῶν ν πρώτων φυσικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω π.χ. $1! = 1$, $2! = 1\cdot 2 = 2$, $3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ $4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Κατά συνθήκην δεχόμεθα ὅτι

(2) $$0! = 1$$

γ) Τό σύμβολον $\binom{\nu}{\mu}$ (= νί ἀνά μί) ὅπου ν καί μ ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε $\nu \geqslant \mu \geqslant 0$ ὁρίζεται ἀπό τήν ἰσότητα

(3) $$\binom{\nu}{\mu} = \frac{\nu!}{\mu!(\nu-\mu)!}$$

'Εάν $\mu = \nu$ τότε ἔχομεν: $\binom{\nu}{\nu} = \frac{\nu!}{\nu!\,0!} = 1$. Ὥστε

(3') $$\binom{\nu}{\nu} = 1$$

'Εάν $\mu = 0$, ἔχομεν $\binom{\nu}{0} = \frac{\nu!}{0!(\nu-0)!} = 1$. Ὥστε

(3'') $$\binom{\nu}{0} = 1$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τοῦ ἀριθμοῦ $\binom{\mu}{\nu}$ εἶναι προτιμότερος ὁ τύπος

(4) $$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\dots\nu}$$

---

* Κεφάλαια καί παράγραφοι σημειούμενα δι'ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

Ὁ (4) προκύπτει ἐκ τοῦ (3) ἄν ἀντικατασταθοῦν τά παραγοντικά, δηλ.

$$\binom{\mu}{\nu} = \frac{\mu!}{\nu!(\mu-\nu)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,\mu}{\nu!\,1\cdot 2\cdot 3\ldots(\mu-\nu)} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\,(\mu-\nu)(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)\ldots\mu}{\nu!\,1\cdot 2\cdot 3\ldots(\mu-\nu)} =$$

$$= \frac{(\mu-\nu+1)(\mu-\nu+2)\ldots\,\mu}{\nu!} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,\nu}$$

Εἰς τόν τύπον (4) ὁ ἀριθμητής εἶναι γινόμενον ν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν, τό ὁποῖον ὡς ἀποδεικνύεται εἰς τήν Ἀριθμητικήν εἶναι πάντοτε διαιρετόν διά τοῦ γινομένου $1\cdot 2\cdot 3 \ldots \nu$ συνεπῶς ὁ ἀριθμός $\binom{\mu}{\nu}$ εἶναι ἀκέραιος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ $\binom{7}{2} = \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2} = 21$ $\binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35$

$\binom{7}{4} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 35$, $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$ $\binom{10}{10} = 1$ (σύμφωνα μέ τόν 3′) $\binom{7}{0} = 1$ (σύμφωνα μέ τόν (3′′)).

Μία ἐνδιαφέρουσα ἰδιότης τοῦ συμβόλου $\binom{\mu}{\nu}$ ἐκφράζεται ἀπό τήν ἰσότητα

$$(5) \qquad \binom{\mu}{\nu} = \binom{\mu}{\mu-\nu}$$

Πράγματι τό δεύτερον μέλος τῆς (5) εἶναι σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν ἴσον πρός

$$\frac{\mu!}{(\mu-\nu)![\mu-(\mu-\nu)]!} = \frac{\mu!}{(\mu-\nu)!\,\nu!} = \binom{\mu}{\nu}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. $\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = \frac{10\cdot 9}{1\cdot 2} = 45$, $\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$, $\binom{7}{7} = \binom{7}{0}$.

Τέλος, μία ἄλλη ἰδιότης τοῦ συμβόλου τούτου τήν ὁποίαν θά χρειασθῶμεν εἰς τήν ἀπόδειξιν τοῦ διωνυμικοῦ τύπου, εἶναι ἡ ἐκφραζομένη ἀπό τήν ἰσότητα

$$(6) \qquad \binom{\mu}{\nu} + \binom{\mu}{\nu+1} = \binom{\mu+1}{\nu+1}$$

Ἡ ἰσότης (6) ἀποδεικνυεται ἄν χρησιμοποιήσωμεν τόν τύπον (4):

$$\binom{\mu}{\nu} + \binom{\mu}{\nu+1} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,\nu} + \frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu(\nu+1)}$$

$$=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)\,(\nu+1)+\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)(\mu-\nu)}{1\cdot2\cdot3\ldots\nu(\nu+1)}$$

$$=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)\,\{\nu+1+\mu-\nu\}}{1\cdot2\cdot3\ldots(\nu+1)}=$$

$$=\frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)\ldots(\mu-\nu+1)}{1\cdot2\cdot3\,\ldots\,(\nu+1)}=\binom{\mu+1}{\nu+1}$$

δ) Ὁ Διωνυμικός τύπος. «Διά κάθε φυσικόν ἐκθέτην ν ἰσχύει ὁ τύπος

$$(7)\qquad (\alpha+\beta)^{\nu}=\alpha^{\nu}+\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta+\binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^{2}+\binom{\nu}{3}\alpha^{\nu-3}\beta^{3}+\ldots+\binom{\nu}{\nu}\beta^{\nu}\text{»}.$$

Ἀπόδειξις: Διά $\nu=1$ ὁ διωνυμικός τύπος (7) καθίσταται

$$(\alpha+\beta)^{1}=\alpha^{1}+\binom{1}{1}\beta^{1}$$

ἄρα ἰσχύει. (Διά $\nu=2$ καθίσταται $(\alpha+\beta)^{2}=\alpha^{2}+\binom{2}{1}\alpha\beta+\binom{2}{2}\beta^{2}$ καί ἰσχύει πάλιν.

Ἄς ὑποτεθῇ τώρα ὅτι ὁ (7) ἰσχύει διά $\nu=k$ δηλ. ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης

$$(8)\qquad (\alpha+\beta)^{k}=\alpha^{k}+\binom{k}{1}\alpha^{k-1}\beta+\binom{k}{2}\alpha^{k-2}\beta^{2}+\ldots+\binom{k}{k}\beta^{k}$$

Τότε θά δείξωμεν ὅτι ὑποχρεωτικῶς, ὁ τύπος (7) θά ἰσχύῃ καί διά $\nu=k+1$, δηλ. ὅτι θά ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$(9)\qquad (\alpha+\beta)^{k+1}=\alpha^{k+1}+\binom{k+1}{1}\alpha^{k}\beta+\binom{k+1}{2}\alpha^{k-1}\beta^{2}+\binom{k+1}{3}\alpha^{k-2}\beta^{3}+$$

$$\ldots+\binom{k+1}{k}\alpha\beta^{k}+\binom{k+1}{k+1}\beta^{k+1}$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (9) πολ/μεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (8) πρῶτον ἐπί α καί κατόπιν ἐπί β ὁπότε λαμβάνομεν τάς:

$$(10):\ \begin{cases}(\alpha+\beta)^{k}\cdot\alpha=\alpha^{k+1}+\binom{k}{1}\alpha^{k}\beta+\binom{k}{2}\alpha^{k-1}\beta^{2}+\binom{k}{3}\alpha^{k-2}\beta^{3}+\ldots+\binom{k}{k}\alpha\beta^{k}\\(\alpha+\beta)^{k}\cdot\beta=\binom{k}{0}\alpha^{k}\beta+\binom{k}{1}\alpha^{k-1}\beta^{2}+\binom{k}{2}\alpha^{k-2}\beta^{3}+\ldots+\binom{k}{k-1}\alpha\beta^{k}+\beta^{k+1}\end{cases}$$

Προσθέτοντες κατά μέλη τάς (10) καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$\binom{k}{1}+\binom{k}{0}=\binom{k+1}{1},\quad \binom{k}{2}+\binom{k}{1}=\binom{k+1}{2},$$

$$\binom{k}{3}+\binom{k}{2}=\binom{k+1}{3}\ldots\binom{k}{k}+\binom{k}{k-1}=\binom{k+1}{k}$$

(σύμφωνα μέ τήν (6)), λαμβάνομεν τήν ἀποδεικτέαν (9).

Ὥστε ἡ (8) συνεπάγεται τήν (9)· δηλ. ἄν ὁ τύπος (7) ἰσχύῃ διά $\nu=k$ θά ἰσχύῃ καί διά $\nu=k+1$. Ἐπειδή δέ ἰσχύη καί διά $\nu = 1$ θά ἰσχύη σύμφωνα μέ τό Θεώρημα τῆς Μαθηματικῆς ἐπαγωγῆς δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν.

Παρατήρησις 1η. 'Εάν οἱ συντελεσταί τοῦ διωνυμικοῦ τύπου ἀντικατασταθοῦν βάσει τοῦ τύπου (4), οὗτος γίνεται

$$(11)\quad (\alpha+\beta)^\nu = \alpha^\nu + \nu\alpha^{\nu-1}\beta + \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\alpha^{\nu-3}\beta^3 + \ldots + \beta^\nu$$

Παρατήρησις 2α. Βάσει τῆς ἰσότητος (5) γίνεται φανερόν ὅτι οἱ συντελεσταί τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ διωνύμου οἱ ἰσάκις ἀπέχοντες τῶν ἄκρων, εἶναι ἴσοι.

Παρατήρησις 3η. 'Ο πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(\alpha+\beta)^\nu$ εἶναι ἴσος μέ $\binom{\nu}{0}\alpha^\nu\cdot\beta^0$, ὁ δεύτερος ἴσος πρός $\binom{\nu}{1}\alpha^{\nu-1}\beta^1$ ὁ τρίτος $\binom{\nu}{2}\alpha^{\nu-2}\beta^2 \ldots$ καί ὁ λστος ἴσος πρός $\binom{\nu}{\lambda-1}\alpha^{\nu-(\lambda-1)}\cdot\beta^{\lambda-1}$. Γενικῶς, πάντες οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι τῆς μορφῆς $\binom{\nu}{\rho}\alpha^{\nu-\rho}\beta^\rho$ ὅπου τό ρ διατρέχει τάς τιμάς $0,1,2,\ldots\nu$ καί συνεπῶς τό πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu + 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ☆

400. Ν' ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις

$$\frac{8!}{7!},\quad \frac{12!}{4!8!},\quad \frac{\nu!}{(\nu-1)!},\quad \frac{(k+1)!}{(k-1)!},\quad \frac{1}{(\rho+1)!}\cdot\frac{1}{\rho!}$$

$$\binom{\nu}{k}:\binom{\nu}{k-1}$$

401. 'Εάν $\binom{2\nu}{3}:\binom{\nu}{2} = 44 : 3$ νά εὑρεθῆ τό ν

402. Νά εὑρεθῆ ὁ 5ος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left(2\alpha - \frac{6}{3}\right)^8$

403. Νά εὑρεθῆ ὁ μεσαῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^{14}$

404. Νά εὑρεθοῦν οἱ συντελεσταί τοῦ x^{32} καί x^{-17} ἐν τῷ ἀναπτύγματι $\left(x^4 - \frac{1}{x^3}\right)^{15}$

405. 'Αναπτύσσοντες τό $(1 + 1)^\nu$ δείξατε τήν σχέσιν:

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu} = 2^\nu$$

406. 'Αναπτύσσοντες τό $(1 - 1)^\nu$ δείξατε τήν σχέσιν

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{2} + \binom{\nu}{4} + \ldots = \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{3} + \binom{\nu}{5} + \ldots$$

407. 'Εάν ν φυσικός ἀριθμός > 1 δείξατε ὅτι

$$\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^\nu > 2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

95. Μεταβληταί. Ἄς φαντασθῶμεν ἕνα σύνολον ἀριθμῶν, ἔστω τό Σ. Ἐάν, τώρα, θεωρήσωμεν ὅτι τό σύμβολον x παριστᾶ κατά βούλησιν ὁποιονδήποτε ἀριθμόν τοῦ συνόλου Σ, τότε καλοῦμεν τό x «μεταβλητήν». Λέγομεν ἀκόμη ὅτι ἡ μεταβλητή x διατρέχει τούς ἀριθμούς τοῦ Σ ἤ ὅτι ἡ x, ἔχει πεδίον μεταβολῆς τό Σ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἐάν ἡ x ἐκφράζει τό μῆκος τυχούσης χορδῆς κύκλου ἀκτῖνος 2,5 μέτρων τότε ἡ x εἶναι μία μεταβλητή διατρέχουσα τάς τιμάς ἀπό 0 (μή συμπεριλαμβανομένου) μέχρι 5 μέτρων (συμπεριλαμβανομένου). Δηλαδή ἔχει πεδίον μεταβολῆς τό διάστημα (0...5) γράφομεν δέ τότε

$$0 < x \leqslant 5$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἐάν ἡ μεταβλητή x παριστᾶ τό πλῆθος τῶν διαιρετῶν ἑνός οἱουδήποτε ἀκεραίου $\neq 0$, τότε αὕτη διατρέχει τάς τιμάς 1,2,3... δηλ. ἔχει πεδίον μεταβολῆς τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ἐάν ἡ x παριστᾶ τήν ἀκτῖνα τυχόντος κύκλου, τότε ἡ μεταβλητή αὕτη δύναται νά λαβη πᾶσας τάς θετικάς τιμάς (Ἀπό μηδέν μή συμπεριλαμβανομένου ἕως σύν ἄπειρον δηλ: $0 < x < +\infty$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Ἐάν ἡ μεταβλητή x παριστᾶ (εἰς βαθμούς Κελσίου) τήν θερ/σιαν πάγου εὑρισκομένου ὑπό ἀτμοσφ. πίεσιν 76 cm Hg τότε τό πεδίον μεταβολῆς της θά εἶναι κατά τά παραδεδεγμένα ἐκ τῆς Φυσικῆς ἀπό $0^{\circ C}$ μέχρι $-273,^{\circ C}2$ δηλ. $-273,2 < x \leqslant 0$ κ.ο.κ.

Αἱ μεταβληταί (ποσότητες) παρίστανται συνήθως μέ τά τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου: x,y,ω,z,t,u,...

96. Σταθεραί. Ἐάν μία ποσότης ἔχει μίαν μόνον καθωρισμένην τιμήν εἰς ἕνα ζήτημα τότε καλεῖται σταθερά. Δηλ. ἡ σταθερά εἶναι τό σύμβολον ἑνός μόνον ἀριθμοῦ. Αἱ σταθεραί παρίστανται μέ τά πρῶτα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου α,β,γ,... Ἔτσι π.χ. ἐάν γράφωμεν τήν γενικήν μορφήν ἑνός ἀκεραίου πολυωνύ-

μου τοῦ x.

$$\alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_{\nu}$$

οἱ συντελεσταί $\alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_{\nu}$ εἶναι σταθεραί (ποσότητες) ἐνῶ τό σύμβολον x εἶναι μεταβλητή διατρέχουσα πᾶσας τάς πραγματικάς τιμάς.

97. **Συναρτήσεις.** Ἐάν ἡ βάσις ἑνός τριγώνου μένει σταθερά τό δέ ὕψος τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται, τότε καί τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου μεταβάλλεται. Ἐάν τό ὕψος τοῦ ὑπ'ὄψιν τριγώνου λάβη μίαν ὡρισμένην τιμήν τότε καί τό ἐμβαδόν λαμβάνει μίαν ὡρισμένην τιμήν. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν δηλαδή, τό ἐμβαδόν ἐξαρτᾶται ἀπό τό ὕψος καί λέγομεν ὅτι τό ἐμβαδόν εἶναι συνάρτησις τοῦ ὕψους.

Ὁμοίως, ἄν ἡ θερμοκρασία μιᾶς μεταλλικῆς ράβδου μεταβάλλεται καί τό μῆκος τῆς ράβδου ἐπίσης μεταβάλλεται. Ὅταν δέ ἡ θερ/σία τῆς ράβδου ἔχει μίαν οἱανδήποτε ὡρισμένην τιμήν (μέσα εἰς ἕνα διάστημα φυσικῶς καθοριζόμενον) τότε καί τό μῆκος τῆς ράβδου ἔχει ἐπίσης ὡρισμένην τιμήν. Λέγομεν λοιπόν ὅτι τό μῆκος τῆς ράβδου εἶναι συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας της.

Ὁμοίως, τό ἐμβαδόν κύκλου εἶναι συνάρτησις τῆς ἀκτῖνος του κ.ο.κ.

Γενικός ὁρισμός τῆς συναρτήσεως ἄς εἶναι ὁ ἀκόλουθος: **«Ἡ μεταβλητή y καλεῖται συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x ὅταν αἱ x καί y συνδέονται μεταξύ των κατά τοιοῦτον τρόπον ὥστε εἰς κάθε τιμήν τοῦ x νά ἀντιστοιχῆ μία τιμή τοῦ y».**

Τό σύνολον τῶν τιμῶν τῆς x διά τάς ὁποίας ὑπάρχει ἡ ἀνωτέρω ἀντιστοιχία λέγεται «π ε δ ί ο ν ὁ ρ ι σ μ ο ῦ τ ῆ ς σ υ ν α ρ τ ή σ ε ω ς y».

Ὥστε ὁριζομένης τῆς x ὁρίζεται καί ἡ y. Συνεπῶς ἡ y ἐξαρτᾶται ἐν γένει ἀπό τήν x καί διά τοῦτο ἡ μέν x λέγεται ἀνεξάρτητος μεταβλητή ἡ δέ y ἐξηρτημένη μεταβλητή.

Εἰς τόν ἀνωτέρω γενικόν ὁρισμόν δέν ἀναφέρεται κατά ποῖον τρόπον ὁρίζεται ἡ y ὅταν δοθῇ ἡ x. Πράγματι, ἔχομεν ἀπειρίαν τρόπων ἀλληλοεξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν x καί y·ὅταν δέ δοθῇ ὁ νόμος καθ'ὅν ἡ y προκύπτει ἐκ τῆς x τότε ἡ y εἶναι πλέον μία καθωρισμένη συνάρτησις τῆς x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Ἡ y καί ἡ x συνδέονται διά τῆς σχέσεως

$$y = 3x + 5 \tag{1}$$

Ἡ (1) καθοριζει τήν y ὡς συνάρτησιν τῆς x. Ἐάν τό x ὁρισθῇ τότε ἐκ τῆς (1) ὁρίζεται καί ἡ y. Ἔτσι π.χ. ἄν $x = 0$ τότε $y = 5$· ἄν $x = 1$, τότε $y = 8$· ἄν $x = -1$ τότε $y = 2$ κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἡ μεταβλητή y προκύπτει ἐκ τῆς x βάσει τῆς ἰσότητος

$$y = \frac{|x|}{(x-1)(x-2)} \tag{2}$$

Ἡ (2) ἐκφράζει τήν y ὡς συνάρτησιν τῆς x. Ἡ y ὁρίζεται δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τῆς x ἐ ξ α ι ρ έ σ ε ι τῶν δύο τιμῶν $x = 1$ καί $x = 2$. Εἰς τήν τιμήν $x = 1$ δέν ἀντιστοιχεῖ, καμμία τιμή τῆς y (ἀδύνατος διαίρεσις) ὁμοίως καί εἰς τήν τιμήν $x = 2$. Ὥστε τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς ἀνωτέρω συναρτήσεως δέν περιέχει τούς ἀριθμούς 1 καί 2.

Διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι τό y εἶναι συνάρτησις τοῦ x γράφομεν συνήθως

$$y = \sigma(x)$$

τό δέ σύμβολον σ(x) ἀναγιγνώσκομεν: συνάρτησις τοῦ x ἤ σίγμα τοῦ x. Ὅταν πρόκειται νά παραστήσωμεν περισσοτέρας συναρτήσεις τοῦ x μεταχειριζόμεθα ἀνάλογα σύμβολα φ(x), f(x), F(x) ἤ $\sigma_1(x)$, $\sigma_2(x)$ $\sigma_3(x)$ κτλ.

Τό σύμβολον σ(α) παριστᾷ τήν τιμήν τήν ὁποίαν λαμβάνει ἡ συνάρτησις σ(x) (δηλ. τό y) ὅταν τό x λάβῃ τήν ὡρισμένην τιμήν α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ἔστω $y = 3x^2 - 5x + 7$

Ἄς παραστήσωμεν τήν συνάρτησιν y διά τοῦ σ(x), ὁπότε

$$y = \sigma(x) = 3x^2 - 5x + 7$$

Θά ἔχωμεν π.χ.

$$\sigma(1) = 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 7 = 5$$
$$\sigma(-1) = 3(-1)^2 - 5(-1) + 7 = 15$$
$$\sigma(2) = 3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 7 = 9$$
$$\sigma(\tfrac{1}{2}) = 3(\tfrac{1}{2})^2 - 5\,\tfrac{1}{2} + 7 = \tfrac{21}{4}$$
$$\sigma(\alpha^2) = 3(\alpha^2)^2 - 5\alpha^2 + 7 = 3\alpha^4 - 5\alpha^2 + 7$$
$$\sigma(x + 2) = 3(x + 2)^2 - 5(x + 2) + 7 = 3x^2 + 7x + 9$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Δοθέντος ὅτι $f(x) = x^2 - 3x + 1$ καί $F(x) = x - 2$ νά εὑρεθοῦν αἱ ποσότητες $f(4)\cdot F(-3)$, $\dfrac{f(4)}{F(-3)}$, $\dfrac{f(\alpha)}{F(\beta)}$

Λύσις: Ἔχομεν $f(4) = 4^2 - 3\cdot 4 + 1 = 5$, $F(-3) = (-3) - 2 = -5$ ὁπότε $f(4)\cdot F(-3) = 5(-5) = -25$,

$$\frac{f(4)}{F(-3)} = \frac{5}{-5} = 1 \qquad \frac{f(\alpha)}{F(\beta)} = \frac{\alpha^2 - 3\alpha + 1}{\beta - 2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

408. Εἰς κύκλον ἀκτῖνος 2 μέτρων εἶναι ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον παρ/μον τοῦ ὁποίου μία πλευρά εἶναι x μέτρα. Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ὡς συνάρτησις τοῦ x. Ποῖον τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ταύτης;

409. Ἰσοσκελοῦς τριγώνου αἱ ἴσαι πλευραί ἔχουν μήκη τεσσάρων μονάδων μήκους ἑκάστη καί ἡ βάσις, x μονάδων. Νά ἐκφρασθῇ ἡ περίμετρος του καί τό ἐμβαδόν του ὡς συναρτήσεις τοῦ x. Ποῖον τό πεδίον μεταβολῆς τῆς x;

410. Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν κύκλου συναρτήσει τοῦ μήκους x τῆς περιφερείας αὐτοῦ.

411. Δοθέντος ὅτι $\sigma(x) = x(7x + 1)|3x - 4|$ νά εὑρεθοῦν: $\sigma(0)$, $\sigma(-\frac{1}{7})$, $\sigma(\frac{4}{3})$, $\sigma(2)$, $\sigma(-\frac{1}{3})$

412. Δοθέντος ὅτι $f(x) = x^2$ νά εὑρεθῇ:

$$\{f(\alpha) - f(\beta)\} : f(\alpha - \beta)$$

413. Δοθέντος ὅτι $F(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ εὕρετε: $\dfrac{F(\alpha) - F(\frac{1}{2})}{1 - F(\alpha)F(\frac{1}{2})}$

414. Ἐάν $f(x) = x^2 - 2|x| + 5$ καί $g(x) = 2x^2 + 3$ ὑπολογίσατε τούς ἀριθμούς ἤ παραστάσεις

$$f(-3)+g(2)\ ,\quad f(-3):g(-2),\ 2f(4)-3g(4)$$

$$f(\alpha^2)-g(\alpha^2)\ ,\quad f(\alpha^2)+g(\alpha)$$

415. Ἡ μεταβλητή y εἶναι συνάρτησις $\sigma(x)$ τῆς μεταβλητῆς x τοιαύτη ὥστε ἄν x_1, x_2 εἶναι δύο οἱαιδήποτε ἀκέραιαι τιμαί τοῦ x νά ἰσχύη πάντοτε ὅτι

$$\sigma(x_1+x_2)=\sigma(x_1)\sigma(x_2)$$

Δίδεται ἐπίσης ὅτι $\sigma(1)=\alpha$. Νά δειχθῆ ὅτι τότε διά πᾶσαν ἀκεραίαν τιμήν τοῦ x ὁ y δίδεται ὑπό τῆς σχέσεως $y=\sigma(x)=\alpha^x$

416. Ἐάν $\varphi(\nu)=\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}$ καί $\sigma(\nu)=\dfrac{1}{\nu}$ δείξατε ὅτι

$$\alpha)\quad \varphi(\nu)=\sigma(\nu)-\sigma(\nu+1)$$

$$\beta)\quad \varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\ldots+\varphi(\nu)=\sigma(1)-\sigma(\nu+1)$$

ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

417. Ἐάν $\varphi(\nu)=3^\nu$ καί $\sigma(\nu)=\dfrac{1}{2}3^\nu$ δείξατε ὅτι

$$\varphi(\nu)=\sigma(\nu+1)-\sigma(\nu)$$

καί βάσει τούτου εὕρετε τό ἄθροισμα:

$$3^1+3^2+3^3+\ldots+3^\nu$$

418. Δείξατε ὅτι $\dfrac{\nu^2+1}{\nu(\nu+1)}\cdot 2^{\nu-1}=\sigma(\nu)-\sigma(\nu-1)$ ὅπου $\sigma(\nu)=\dfrac{\nu 2^\nu}{\nu+1}$

καί κατόπιν ὑπολογίσατε τό ἄθροισμα:

$$\frac{2}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}\cdot 2+\frac{10}{3\cdot 4}\,2^2+\frac{17}{4\cdot 5}\cdot 2^3+\ldots+\frac{\nu^2+1}{\nu(\nu+1)}\,2^{\nu-1}$$

98. **Αὔξουσα καί φθίνουσα συνάρτησις.** Μία συνάρτησις $\sigma(x)$ λέγεται α ὔ ξ ο υ σ α εἰς ἕνα διάστημα (α,β) ὅταν αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως βαίνουν αὐξανόμεναι ἐφ' ὅσον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή x βαίνει αὐξανομένη ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ. (Συνάρτησις καί ἀνεξάρτητος μεταβλητή συγχρόνως αὐξάνουν ἤ συγχρόνως ἐλαττοῦνται).. Ἀκριβέστερον:

Ὁρισμός i) «Ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ καλεῖται αὔξουσα εἰς τό διάστημα (α,β) ὅταν ἡ ἀνισότης

$$x_1 < x_2$$

συνεπάγεται τήν ἀνισότητα

$$\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$$

ὅπου x_1, x_2 εἶναι τ υ χ ό ν τ ε ς ἀριθμοί τοῦ διαστήματος

(α,β) (δηλαδή $\alpha \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \beta$) ».

Μέ ἄλλα λόγια, εἰς μεγαλυτέραν τιμήν τοῦ x πρέπει ν'ἀντιστοιχῇ μεγαλυτέρα τιμή συναρτήσεως.

Τουναντίον, ὅταν αὐξανομένης τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἡ συνάρτησις βαινει ἐλαττουμένη τότε ἡ συνάρτησις λέγεται φ θ ί ν ο υ σ α. Ἀκριβέστερον:

Ὁρισμός ii) «Ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ καλεῖται φθίνουσα εἰς τό διάστημα (α,β) ὅταν ἡ **ἀνισότης**

$$x_1 < x_2$$

συνεπάγεται τήν ἀνισότητα

$$\sigma(x_1) > \sigma(x_2)$$

ὅπου x_1, x_2 εἶναι τ υ χ ό ν τ ε ς ἀριθμοί τοῦ διαστήματος (α,β) (δηλ. $\alpha \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \beta$) ».

Δηλαδή: εἰς μεγαλυτέραν τιμήν τοῦ x πρέπει ν'ἀντιστοιχῇ μικροτέρα τιμή τῆς συναρτήσεως.

Ἀναφέρομεν ἐδῶ τά ἑπόμενα παραδείγματα:

Ἐκ τῆς Φυσικῆς: Τό μῆκος μεταλλικῆς ράβδου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τῆς θερμοκρασίας τῆς ράβδου. Ἡ πίεσις μιᾶς ὡρισμένης μάζης ἀερίου ὑπό σταθεράν θερ/αν εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ ὄγκου (διότι κατά τόν νόμον τῶν Boyle - Mariotte αὐξάνοντος τοῦ ὄγκου ἐλαττοῦται ἡ πίεσις ἤ ἐλαττουμένου τοῦ ὄγκου αὐξάνει ἡ πίεσις).

Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας: Τό συνx εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα $0 \leqslant x \leqslant 180^\circ$ καί αὔξουσα συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα $180 \leqslant x \leqslant 360^\circ$

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας: Τό μῆκος χορδῆς κύκλου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ τόξου x τό ὁποῖον ὑποτείνει ἡ χορδή, ὅταν τό τόξον μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως 180° καί φθίνουσα συνάρτησις τοῦ x ὅταν τό x μεταβάλλεται ἀπό 180° ἕως 360°

Διά ν'ἀποδείξωμεν ὅτι μία δεδομένη συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα εἰς ἕνα δεδομένον διάστημα, χρησιμοποιοῦμεν τούς ἀνωτέρω δοθέντας ὁρισμούς (i) καί (ii), ὅπως φαίνεται εἰς τά κάτωθι δύο παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. **Νά δειχθῇ ὅτι συνάρτησις $\sigma(x) = x^2-4x+3$ εἶναι φθίνουσα εἰς τό διάστημα: $-\infty < x < 2$** (δηλαδή ὅταν τό

x μεταβάλλεται κάτω τοῦ 2).

'Απόδειξις. Λαμβάνομεν δύο τυχούσας ἀνίσους τιμάς x_1 καί x_2 τοῦ διαστήματος $(-\infty, 2)$ δηλ. τοιαῦτας ὥστε

(1) $$x_1 < x_2 < 2$$

ὁποτε ἀρκεῖ νά δειχθῆ ὅτι εἰς τήν μεγαλυτέραν ἐξ αὐτῶν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα τιμη τῆς συναρτήσεως, δηλ.

(2) $$\sigma(x_1) > \sigma(x_2)$$

Πρός ἀπόδειξιν τῆς (2) σχηματιζομεν τήν διαφοράν $\sigma(x_1) - \sigma(x_2)$:

$$\sigma(x_1) - \sigma(x_2) = (x_1^2 - 4x_1 + 3) - (x_2^2 - 4x_2 + 3) =$$
$$= x_1^2 - x_2^2 - 4(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 4) = (x_1 - x_2)\{(x_1-2)+(x_2-2)\}$$

'Επειδή δέ ἐκ τῆς ὑποθεσεως (1) ἔχομεν: $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 - 2 < 0$, $x_2 - 2 < 0$ ἔπεται ὅτι ἡ ποσότης $(x_1 - x_2)\{(x_1 - x_2) + (x_2 - 2)\}$ εἶναι θετική. 'Επομένως $\sigma(x_1) - \sigma(x_2) > 0$ καί $\sigma(x_1) > \sigma(x_2)$ ὅ.ἔ.δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ συνάρτησις $\sigma(x) = x^2-4x+3$ εἶναι αὔξουσα εἰς τό διάστημα: $2 < x < \infty$ (δηλ. διά τάς ἄνω τοῦ 2 τιμάς τοῦ x)

'Απόδειξις. Λαμβάνομεν πάλιν τυχόν ζεῦγος ἀνίσων ἀριθμῶν (x, x) τοῦ διαστήματος $(2, +\infty)$ δηλ. ὥστε νά εἶναι

(3) $$2 < x_1 < x_2$$

Θά ἔχωμεν, ὡς καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα:

$$\sigma(x_1) - \sigma(x_2) = (x_1 - x_2)\{(x_1 - 2) + (x_2 - 2)\}$$

Ἔχομεν ὅμως ἐκ τῆς (3) ὅτι $x_1 - x_2 < 0$, $x_1 - 2 > 0$, $x_2 - 2 > 0$ καί συνεπῶς $\sigma(x_1) - \sigma(x_2) < 0$ ἤτοι $\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$. Ὥστε ἡ ἀνισότης $x_1 < x_2$ συνεπάγεται τήν $\sigma(x_1) < \sigma(x_2)$ ἄρα ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα εἰς τό ὑπ'ὄψιν διάστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

419. Νά δειχθῆ ὅτι διά τάς θετικάς τιμάς τοῦ x ἡ συνάρτησις $\frac{1}{1+x^2}$ εἶναι φθίνουσα. Ὅταν δέ τό x μεταβάλλεται λαμβᾶνον ἀρνητικάς τιμάς ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα.

420. 'Εάν $\alpha > 0$ ἡ συνάρτησις $\sigma(x) = \alpha x + \beta$ αὐξάνει πάντοτε μετά τοῦ x. ἐάν δέ $\alpha < 0$ ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις

τοῦ x

421. Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις $2(x^2 + xy + y^2) + 3(x + y) + 6$ εἶναι μονίμως θετική. Βάσει τούτου δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον $2x^3 + 3x^2 + 6x$ εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ x εἰς τό διάστημα ἀπό $-\infty$ ἕως $+\infty$

422. Δίδεται ἡ συνάρτησις

$$f(x) = \frac{1}{2}\left\{\frac{x-\alpha}{\xi-\alpha}\left(1 - \frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right) + \frac{x-\beta}{\xi-\beta}\left(1 + \frac{x-\xi}{|x-\xi|}\right)\right\}$$

ὅπου α, ξ, β σταθεροί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $\alpha < \xi < \beta$. Νά δειχθῆ ὅτι εἰς τό διάστημα: $-\infty < x < \xi$ ἡ $f(x)$ εἶναι αὔξουσα ἐνῶ εἰς τό διάστημα $\xi < x < +\infty$ εἶναι φθίνουσα.

99. Συνάρτησις πολλῶν μεταβλητῶν. «Ἡ μεταβλητή z λέγεται συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν x καί y ὅταν ἡ z συνδέεται μέ τά x καί y κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἐάν δοθῆ μία τιμή εἰς τήν x καί μία τιμή εἰς τήν y νά ὁρίζεται τότε μία ἀντίστοιχος τιμή τῆς z . Ἐνταῦθα αἱ x καί y εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί καί ἡ z ἐξηρτημένη μεταβλητή.

Ἡ z παρίσταται συνήθως διά τοῦ συμβόλου:

$$z = \sigma(x, y)$$

(z = συνάρτησις τῶν x καί y ἤ z ἴσος σίγμα τῶν x καί y) ἤ δι' ἄλλων ἀναλόγων συμβόλων.

Ἐντελῶς ὁμοίως ὁρίζεται τό σύμβολον

$$\omega = \sigma(x, y, z)$$

διά τοῦ ὁποίου ἐκφράζεται ὅτι ἡ ω εἶναι συνάρτησις τῶν τριῶν μεταβλητῶν x , y καί z κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Πᾶσα ἀλγεβρική παράστασις εἶναι συνάρτησις τῶν γραμμάτων τά ὁποῖα περιέχει, ὅταν τά γράμματα ταῦτα παριστοῦν μεταβλητάς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἐάν $z = f(xy) = x^2 - xy + y^2$, εὑρίσκομεν ὅτι $f(2,3) = 2^2 - 2\cdot 3 + 3^2 = 7$, $f(-3,1) = (-3)^2 - (-3)(1) + 1^2 = 13$, $f(3,0) = 9$ $f(2\alpha,\beta) = 4\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

423. Ἐάν $z = f(x,y) = 3x - 2y + 4$ εὕρετε: $f(0,0)$ $f(1,-1)$ $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ $f(\frac{2}{3}, -\frac{1}{2})$ $f(2\alpha, 3\alpha)$ $f(-x,-y)$, $f(y,x)$

424. 'Εάν $z = f(x,y) = x^2 - 5xy + y^2$ δείξατε ὅτι πάντοτε

$$f(-x,-y) = f(x,y) \quad \text{καί} \quad f(x,y) = f(y,x)$$

425. 'Εάν $\omega = x^2 + y^2 + z^2 + 6(xy + xz + zy) = \sigma(x,y,z)$ δείξατε ὅτι $\sigma(\alpha,\beta,\gamma) = \sigma(\beta,\gamma,\alpha) = \sigma(\gamma,\alpha,\beta) = \sigma(-\alpha,-\beta,-\gamma)$.

100. **Ποσά ἀνάλογα.** α) Ἕνας ἀπό τούς ἁπλουστάτους τρόπους ἀλληλοεξαρτήσεως δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων, εἶναι ἡ ἀναλογία ἡ ὁποία ἐμφανίζεται συχνότατα εἰς τήν Γεωμετρίαν καί τήν Φυσικήν. Δύο μεταβληταί x καί y λέγομεν ὅτι μ ε τ α β ά λ λ ο ν τ α ι ἀ ν α λ ό γ ω ς ὅταν συνδέωνται διά τῆς σχέσεως

$$(1) \qquad y = cx$$

ὅπου c εἶναι σταθερά ποσότης $\neq 0$, λεγομένη σ τ α θ ε ρ ά τ ῆ ς ἀ ν α λ ο γ ί α ς. Λέγομεν ἐπίσης τότε ὅτι ἡ y μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν x καί τἀνάπαλιν· ἤ ἀκόμη ὅτι αἱ μεταβληταί ποσότητες x καί y εἶναι ε ὐ θ έ ω ς ἀ ν ά λ ο γ ο ι (ἤ ἁπλῶς, ἀ ν ά λ ο γ ο ι). Ἡ σχέσις (1) ὑποτίθεται ἰσχύουσα κατά κανόνα δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τῆς x ἤ τουλάχιστον, δι'ὅλας τάς μή ἀρνητικάς τιμάς τῆς x.

Εἶναι προφανές ὅτι «ἄν αἱ μεταβληταί x καί y **μεταβάλλονται ἀναλόγως, δύο τυχοῦσαι τιμαί τῆς μιᾶς** ($\neq 0$) **ἔχουν τόν ἴδιον λόγον ὅν καί αἱ ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς ἄλλης**.» Διότι ἄν εἰς τήν τιμήν x_1 τῆς x ἀντιστοιχεῖ ἡ y_1 τῆς y καί εἰς τήν τιμήν x_2 τῆς x ἀντιστοιχεῖ ἡ y_2 τῆς y θά ἔχωμεν, βάσει τῆς (1) ὅτι

$$y_1 = cx_1 \quad \text{καί} \quad y_2 = cx_2$$

ὁπότε διά διαιρέσεως κατά μέλη λαμβάνομεν τήν ἀποδεικτέαν

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \qquad \text{ἥτις γράφεται καί} \qquad \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

β) «Μία μεταβλητή z λέγομεν ὅτι μ ε τ α β ά λ λ ε τ α ι ἀ ν α λ ό γ ω ς π ρ ό ς π ο λ λ ά ς σ υ γ χ ρ ό ν ω ς μ ε τ α β λ η τ ά ς $x, y, \omega, \ldots$ ὅταν ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τό γινόμενον $xy\omega\ldots$ τῶν μεταβλητῶν τούτων ».

Δηλαδή

(2) $$z = c\cdot xy\omega\ldots$$

ὅπου c ἡ σταθερά τῆς ἀναλογίας. Ὅταν ἰσχύη ἡ (2) λέγομεν ἐπίσης ὅτι ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως κ α ί πρός τήν x κ α ί πρός τήν y κ α ί πρός τήν ω...

Τοῦτο ἔχει τό ἑξῆς νόημα. Ἐάν μεταβάλλεται μ ό ν ο ν ἡ x αἱ δέ λοιπαί y, ω,... διατηροῦν σταθεράς τιμάς τότε ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν x. Ἄν μεταβάλλεται μόνον ἡ y τότε ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν y κ.ο.κ.

γ) «Μία μεταβλητή z λέγομεν ὅτι μεταβάλλεται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ω ς ἀ ν α λ ό γ ω ς πρός τήν x, ὅταν ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τό ἀντίστροφον τῆς x »

Δηλαδή ὅταν

(3) $$z = c\cdot\frac{1}{x}$$ ὅπου c σταθερά $\neq 0$.

δ) Τά ἀνωτέρω εὑρίσκουν ἐφαρμογην εἰς την Φυσικήν κυρίως

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά ἐκφρασθῇ ἡ z ὡς συνάρτησις τῶν x, y, ω γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ z μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν x καί ἀναλόγως πρός τό τετράγωνον τῆς y καί ἀντιστρόφως ἀναλόγως πρός τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς ω. Ὅταν δέ $x = 1$, $y = 2$, $\omega = 4$ τότε ἡ z ἔχει τιμήν 8

Λύσις. Ἐκ τῶν ὁρισμῶν β) καί γ) ἕπεται ὅτι θά εἶναι

$$z = c\,\frac{xy^2}{\sqrt{\omega}}$$

ὅπου c ἡ σταθερά τῆς ἀναλογίας. Ἐπίσης ἡ (4) θ' ἀληθεύη ὅταν $x = 1$, $y = 2$, $\omega = 4$ καί $z = 8$ ἄρα

$$8 = c\,\frac{1\cdot 2^2}{\sqrt{4}} \quad \text{ἤ} \quad 8 = c\,2 \quad \text{καί} \quad c = 4$$

Ἡ ζητουμένη σχέσις θά εἶναι λοιπόν

$$z = \frac{2xy^2}{\sqrt{\omega}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Ἡ ποσότης Ε εἶναι ἀνάλογος τῆς (Ι) καί ἀντιστρόφως ἀνάλογος πρός τό τετράγωνον τῆς δ. Ἐάν $\delta = 0{,}064$ καί $I = 2$ τότε $E = 100$. Ἐάν $I = 9$, πόσον πρέπει νά εἶναι τό δ ἵνα ἔχωμεν $E = 400$;

Λύσις: Ἔχομεν κατά σειράν:

$$E = c\frac{I}{d^2} \quad , \quad 100 = c\cdot\frac{2}{(0,064)^2} \quad 400 = c\cdot\frac{9}{\delta^2}$$

Ἄν διαιρέσωμεν κατά μέλη τάς δύο τελευταίας εὑρίσκομεν

$$\frac{100}{400} = \frac{2}{(0,064)^2}\,\frac{\delta^2}{9} \quad \text{ἤ} \quad \frac{1}{4} = \frac{2}{9}\cdot\frac{\delta^2}{(0,064)^2}$$

ἑπομένως

$$\delta^2 = \frac{9\cdot(0,064)^2}{8} \quad \text{καί} \quad \delta = \frac{3\cdot 0,064}{\sqrt{8}} = \frac{3\cdot 0,064\sqrt{8}}{8} =$$

$$= 3\cdot 0,008\sqrt{8} = 0,048.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

426. Γράψατε ὑπό μορφήν ἐξισώσεων τούς κάτωθι νόμους:

α) Τό πλῆθος N τῶν παλμῶν ἀνά δευτερόλεπτον τεταμένης χορδῆς εἶναι ἀνάλογον πρός τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς τεινούσης δυνάμεως F, ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ μήκους l, ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς ἀκτῖνος r καί ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῆς πυκνότητος d τῆς χορδῆς.

β) Ἡ ἄπωσις F μεταξύ δύο ὁμωνύμων ἠλεκτρικῶν φορτίων Q_1 καί Q_2 εἶναι ἀνάλογος ἑκάστου τῶν φορτίων καί ἀντιστρόφως ἀνάλογος τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως d αὐτῶν.

γ) Ἡ ποσότης M μεταβάλλεται ἀναλόγως τῆς F καί τῆς d^2 καί ἀντιστρόφως ἀνάλογος τῆς m. Ὅταν δέ $F = 3$, $d = 2$ καί $m=5$ τότε $M = 225$.

427. Ἐάν αἱ μεταβληταί x καί y συνδέονται διά τῆς σχέσεως $\alpha x + \beta y = \gamma$ ὅπου α, β, γ σταθεραί $\neq 0$ δείξατε ὅτι τότε αἱ μεταβληταί x καί $y - \frac{\gamma}{\beta}$ μεταβάλλονται ἀναλόγως. Ἐπίσης αἱ μεταβληταί y καί $x - \frac{\gamma}{\alpha}$.

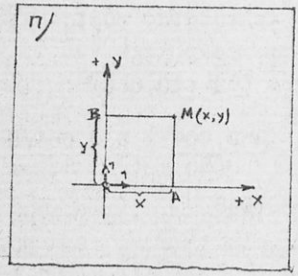
428. Ἐάν ἡ x καί ἡ y μεταβάλλωνται ἀναλόγως πρός τήν t τότε ἡ $x^2 + 3y^2$ μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν t^2.

429. Δεδομένου ὅτι ἡ ποσότης $x + y$ μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν $z + \frac{1}{z}$ καί ὅτι ἡ $x - y$ μεταβάλλεται ἀναλόγως πρός τήν $z - \frac{1}{z}$ νά εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξύ τῶν μεταβλητῶν x καί y δεδομένου ὅτι ὅταν τό $x = 3$ καί τό $y = 1$ τότε ἡ μεταβλητή z ἔχει τήν τιμήν 2.

101. Καρτεσιαναί συντεταγμέναι.* Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα ἀπέραν-

* Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι᾽ ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

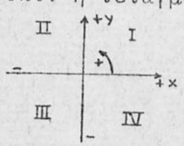
τον ἐπίπεδον (Π) (ἴδε σχ.9). Εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τούτου εἶναι δυνατόν ν'ἀντιστοιχίσωμεν διά καταλλήλου τρόπου, δύο ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι νά προσδιορίζουν πλήρως τήν θέσιν τοῦ Μ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (καί οἱ ὁποῖοι λέγονται συντεταγμέναι τοῦ Μ). Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς:



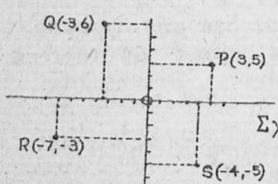
Σχ. 9

Χαράσσομεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου δύο ἄ ξ ο ν α ς (ἴδε § 28), ΟΧ καί ΟΨ καθέτως τεμνομένους εἰς τό Ο καί κατόπιν προβάλλομεν τό Μ ἐπί τούς δύο τούτους ἄξονας. Ἐάν Α καί Β εἶναι αἱ προβολαί τοῦ Μ ἐπί τούς ΟΧ καί ΟΨ ἀντιστοίχως (ἴδε σχ. 9) τότε το σχετικόν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overline{OA}$ (ἴδε §28) καλεῖται τ ε τ μ η μ έ ν η τοῦ Μ καί παρίσταται ἐν γένει μέ x τό δέ σχετικόν μέτρον τοῦ διανύσματος $\overline{OB}$ καλεῖται τ ε τ α γ μ έ ν η τοῦ Μ καί παρίσταται γενικῶς μέ y. Ἀμφότεροι οἱ ἀριθμοί x καί y καλοῦνται σ υ ν τ ε τ α γ μ έ ν α ι (Καρτεσιαναί ἤ ὀρθογώνιοι)* τοῦ σημείου Μ καί γράφονται παραπλεύρως τοῦ Μ, ἐντός παρενθέσεως, πρώτη ἡ τετμημένη καί κατόπιν ἡ τεταγμένη: Μ(x,y).

Σχ. 10



Οἱ δύο ἄξονες σχηματίζουν τέσσαρας γωνίας αἱ ὁποῖαι καλοῦνται πρώτη, δευτέρα, τρίτη καί τετάρτη γωνία τῶν ἀξόνων ὅπως σημειοῦνται κατά σειράν εἰς τό σχῆμα 10.



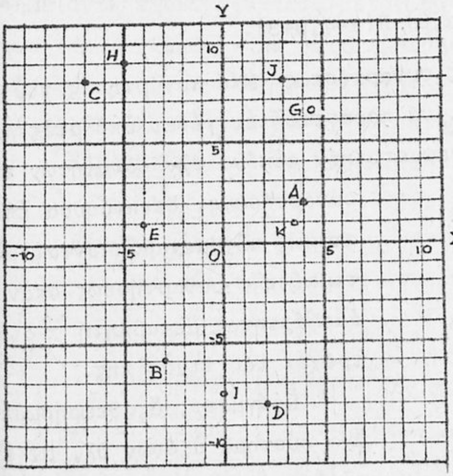
Σχ. 11

Ἐάν σημεῖον κεῖται μέσα εἰς τήν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων ἔχει ἀμφοτέρας τάς συντεταγμένας του θετικάς, ἐάν εἰς τήν δευτέραν ἔχει τετμημένην ἀρνητικήν καί τεταγμένην θετικήν· εἰς τήν τρίτην ἔχει καί τάς δύο συντεταγμένας του ἀρνητικάς καί εἰς τήν τετάρτην, ἔχει τετμημένην θετικήν καί τεταγμένην ἀρνητικήν.

Ὁ ἄξων ΟΧ λέγεται ἄ ξ ω ν τ ῶ ν x καί ὁ ΟΨ, ἄ ξ ω ν τ ῶ ν y ἡ δέ τομή των Ο λέγεται ἀ ρ χ ή τ ῶ ν ἀ ξ ό ν ω ν. Πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x ἔχει τεταγμένην μηδέν καί πᾶν σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν y ἔχει τετμημένην μηδέν.

---

* Πρός διάκρισιν, διότι ὑπάρχουν καί ἄλλα συστήματα συντεταγμένων.



σχ. 12

Ἡ ἀρχή Ο ἔχει καί τάς δύο συντεταγμένας της μηδενικάς δηλ. O(0,0).

Ὅταν καθορισθῇ τό ἀνώτερω σύστημα ἀξόνων ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τότε, εἰς πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν x καί y ἐξ ὧν ὁ πρῶτος δηλοῖ τήν τετμημένην καί ὁ 2ος τήν τεταγμένην τοῦ Μ· καί ἀντιστρόφως: εἰς πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος ἀριθμῶν (x,y) ἀντιστοιχεῖ ἕν καί μόνον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τό M(x,y) τό ὁποῖον ὁρίζεται ἄν λάβωμεν ἐπί τῶν ΟΧ, ΟΨ διανύσματα $\overline{OA}$ καί $\overline{OB}$ τοιαῦτα ὥστε $(\overline{OA}) = x$ καί $(\overline{OB}) = y$ (ἴδε σχ. 9) καί φέρομεν ἐκ τοῦ Α παρ/λον πρός τήν ΟΨ καί ἐκ τοῦ Β παρ/λον πρός τήν ΟΧ. Ἡ τομή τῶν δύο τούτων γραμμῶν ὁρίζει τό Μ. Συνεπῶς, ἡ θέσις ἑνός σημείου ἐπί τοῦ ἐπιπέδου καθορίζεται πλήρως ἀπό ἕνα ζεῦγος ἀριθμῶν ὑπάρχει δέ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί τῶν ζευγῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (Παράβαλε μέ §24). Κατόπιν τούτων βλέπομεν ὅτι δυνάμεθα νά παριστάνωμεν τά ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου καί τανάπαλιν, τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου μέ ζεύγη πραγματικῶν ἀριθμῶν. Σημειωτέον ὅτι δέν εἶναι ἀναγκαῖον νά λάβωμεν ἴσας τάς μονάδας ἐπί τῶν δύο ἀξόνων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εἰς τό σχ.(11), ἡ τετμημένη τοῦ P εἶναι +5 καί ἡ τεταγμένη 3 δηλ. εἶναι P(5,3). Ὁμοίως τό σημεῖον Q τῆς δευτέρας γωνίας ἔχει συντεταγμένας -3 καί 6 εἶναι δηλ. Q(-3,6). Τό σημεῖον R(-7,-3) εἶναι τό εἰκονιζόμενον εἰς τήν τρίτην γωνίαν καί τό S(4,-5) εἶναι τό εἰκονιζόμενον εἰς τό σχ(11) μέσα εἰς τήν 4ην γωνίαν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

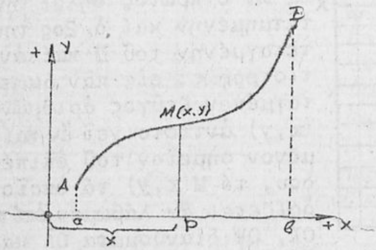
430. Εὕρετε τάς συντεταγμένας ἑκάστου τῶν σημείων A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K, τοῦ σχ. (12)

431. Σχεδιάσατε α) τό τετράγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί ἔχουν συντεταγμένας: (4,2),(-2,2),(-2,-4),(4,-4), β) τό ὀρθογώνιον τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί ἔχουν συντεταγμενας: (8,-2),(-4,-2) (-4,3), γ) τό τραπέζιον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί ἔχουν συντεταγμένας: (2,3) , (-3,3) , (-4,-1) , (5,-1)

432. Δείξατε ὅτι τά σημεῖα Μ(α,β) καί Μ'(β,α) εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν διχοτόμον τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων

433. Εὕρετε τήν ἀπόστασιν ΑΒ ἄν Α(-3,5) , Β(+7,5) ἤ ἄν Α(2,-1) Β(2,+7) ἤ ἄν Α(α,β) Β(α+4,β+3).

102. Γραφική παράστασις συναρτήσεως. Μία συνάρτησις τοῦ x ἔστω ἡ y= σ(x) δύναται νά παρασταθῆ ἐν γένει ὑπό μιᾶς γραμμῆς ἡ ὁποία δίδει μίαν γεωμετρικήν εἰκόνα τῶν ἰδιοτήτων τῆς συναρτήσεως, δεικνύουσα ἐποπτικῶς πῶς μεταβάλλονται αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως ὅταν ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή x διατρέχει τάς τιμάς της.



σχ. 13

Πράγματι, ἄς θεωρήσωμεν ἕνα σύστημα ἀξόνων ΟΧ, ΟΨ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ (σχ. 13) καί ἄς λάβωμεν ἕν σημεῖον Μ ἔχον τετμημένην μέν τυχοῦσαν τιμήν x τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς καί τεταγμένην y τήν ἀντίστοιχον τιμήν τῆς συναρτήσεως ἤτοι ἔχον y = σ(x). Ὅταν τό x συνεχῶς μεταβάλλεται, τότε τό Μ κινεῖται διαγρᾶφον ἐν γένει μίαν γραμμήν ΑΒ ἥτις λέγομεν ὅτι εἶναι ἡ γεωμετρική ἤ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως. Πᾶν σημεῖον τῆς γραμμῆς ταύτης ἔχει ὡς τετμημένην κάποιαν τιμήν τοῦ x καί ὡς τεταγμένην, τήν ἀντίστοιχον τιμήν της συναρτήσεως.

Ὁρισμός. Γραφική παράστασις μιᾶς συναρτήσεως καλεῖται ἡ γραμμή ἡ ὁποία σύγκειται ἀπό τά σημεῖα τά ἔχοντα τετμημένας μέν τάς τιμάς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, τεταγμένας δέ τάς ἀντιστοίχους τιμάς τῆς συναρτήσεως.

Διά νά κατασκευάσωμεν στοιχειωδῶς τήν γραφικήν παράστασιν μιᾶς συναρτήσεως σχηματίζομεν ἕνα πίνακα ἀποτελούμενον ἀπό διαφόρους τιμάς τοῦ x αὐθαιρέτως ἐκλεγομένας καί ἀπό τάς ἀντιστοίχους τιμάς y τῆς συναρτήσεως καί κατασκευάζομεν τά σημεῖα τά ἔχοντα συντεταγμένας τά ζεύγη ταῦτα τῶν ἀντιστοί-χων τιμῶν x καί y. Τά οὕτω εὑρισκόμενα σημεῖα ἀνήκουν ὅλα εἰς τήν γραφικήν παράστασιν τῆς $y = \sigma(x)$ καθορίζοντα κατά τό μᾶλλον καί ἧττον τό σχῆμα αὐτῆς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά παρασταθῇ γραφικῶς ἡ συνάρτησις

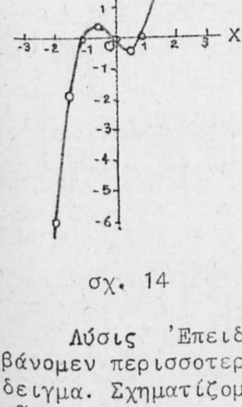
$$y = \sigma(x) = x^3 - x$$

Λύσις. Δίδομεν εἰς τό x τάς τιμάς $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2,$ $-1, -2$ καί εὑρίσκομεν τάς ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ y:

$\sigma(0) = 0$, $\sigma(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{8}$, $\sigma(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$, $\sigma(1) = 0$, $\sigma(\frac{3}{2}) = \frac{15}{8}$ $\sigma(2) = 6$ $\sigma(-1) = 0$, $\sigma(-2) = -6$. Οὕτω προκύπτει ὁ πίναξ

x	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	2	-1	-2
y	0	$-\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	0	$\frac{15}{8}$	6	0	-6

Τά σημεῖα $(0,0)$ $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{8})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{8})$, $(1,0)$ $(\frac{3}{2}\ \frac{15}{8})$ $(2,6)$ $(-1,0)$ $(-2,-6)$ κεῖνται ἐπί τῆς γραμμῆς ἥτις παριστάνει τήν συνάρτησιν καί καθορίζουν κατά προσέγγισιν τό σχῆμα τῆς γραμμῆς ταύτης. Τά ὀκτώ ταῦτα σημεῖα, παριστώμενα εἰς τό σχ. 14 διά κυκλίσκων συνδέομεν κατά σειράν δι᾽ὁμαλῆς καμπύλης καί δημιουργοῦμεν οὕτω μέ ἱκανήν προσέγγισιν τήν γραφικήν παράστασιν τῆς δοθείσης συναρτήσεως διά τό διάστημα ἀπό -2 ἕως $+2$. Ἔξω τῆς περιοχῆς αὐτῆς εἶναι εὔκολον νά φαντασθῶμεν πῶς προχωρεῖ ἡ γραμμή. Εἰς τό σχ. 14 αἱ μετρικαί κλίμακες ἐπί τῶν δύο ἀξόνων ἐλήφθησαν αἱ ἴδιαι καί ἐπί τῶν δύο ἀξόνων δηλ. μέ τήν αὐτήν μονάδα



σχ. 14

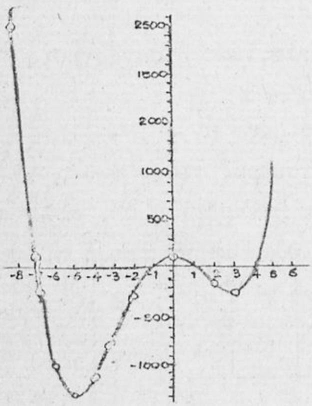
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά σχεδιασθῇ ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως

$$y = \sigma(x) = 3x^4 + 8x^3 - 90x^2 + 100$$

Λύσις Ἐπειδή ἡ καμπύλη ἐδῶ, εἶναι πολυπλοκωτερα, λαμβάνομεν περισσοτερας τιμάς τοῦ x ἀπό τό προηγουμενον παράδειγμα. Σχηματίζομεν ὡς προηγουμένως πίνακα ἀντιστοίχων τιμῶν:

x	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6	−7	−8
y	725	−60	−251	−148	21	100	5	−270	−683	−1084	−1084	−280	149	2532

'Επειδή διά μικράς τιμάς τοῦ x ἔχομεν ἐν γένει μεγάλας (κατ'ἀπόλυτον τιμήν) τιμάς τοῦ y καί συνεπῶς τά σημεῖα τῆς γραφικῆς παράστασεως πίπτουν ἔξω τοῦ χάρτου σχεδιάσεως ὅταν αἱ κλίμακες ἐπί τῶν ἀξόνων εἶναι αἱ αὐταί διά τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν διά τάς τεταγμένας πολύ μικροτέραν μονάδα. Κατόπιν δοκιμῶν καταλήγομεν νά λάβωμεν τό ἴδιο μῆκος ὡς παριστόν μίαν μονάδα ἐπί τοῦ ΟΧ καί διακοσίας μονάδας ἐπί τοῦ ΟΨ. 'Αφοῦ σημειώσωμεν τάς μετρικάς κλίμακας ἐπί τῶν δύο ἀξόνων, προσδιορίζομεν τά 14 σημεῖα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τά παρεχόμενα ὑπό τοῦ πίνακος (σημειοῦντες αὐτά διά κυκλίσκων) καί λαμβάνομεν ὡς τό σχῆμα 15 δεικνύει τήν γραφικήν παράστασιν.



σχ. 15

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αἱ ἑπόμεναι ἀσκήσεις 434 ἕως 438 νά λυθοῦν ἐπί τετραγωνισμένου χάρτου. Νά ληφθοῦν κατάλληλοι μετρικαί κλίμακες ἐπί τῶν δύο ἀξόνων τά δέ κατασκευαζόμενα σημεῖα τῶν γραφικῶν παραστάσεων νά παρασταθοῦν μέ κυκλίσκους.

434. Νά γίνη γραφική παράστασις τῆς $y = f(x)$ εἰς τό διάστημα −4 ἕως +6 βάσει τοῦ πίνακος τιμῶν τῆς $f(x)$:

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5	6
y = f(x)	−11	−3	$-\frac{7}{4}$	4	$\frac{11}{2}$	4	$\frac{13}{4}$	3	4	7	$\frac{51}{4}$

435. Ὁμοίως βάσει τοῦ πίνακος:

x	−5	−4	−3	−2	−3/2	−1	−1/2	0	1	2	3
y=f(x)	9	2	−3	−6	$-6\frac{3}{4}$	−7	$-6\frac{3}{4}$	−6	−3	2	9

436. Νά παρασταθῆ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $y = f(x)$ εἰς τό διάστημα −2 ἕως +4 βάσει τῶν τιμῶν αὐτῆς:

$f(-2) = -5$, $f(-1) = 0$ $f(0) =$ [illegible] $f(1) = 4$ $f(2) = 3$ $f(3) = 0$ $f(4) = -5$. 'Ακολούθως, ἐκ τῆς γραφικῆς παράστασεως νά εὑρεθοῦν (κατά προσέγγισιν) αἱ τιμαί $f(-\frac{1}{2})$, $f(\frac{3}{2})$. 'Επίσης νά εὑρεθῆ κατά προσέγγισιν ἡ τιμή τοῦ x διά τήν ὁποίαν $f(x) = 1$ καθώς καί ἑκάστη δι'ἥν $f(x) = 2$.

437. Νά παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ συναρτήσεις τοῦ x: $y = 3x$
$y = 3 - 2x$, $y = 2x - 4$, $y = x^2 - 2x - 3$ $y = 6 - x - x^2$
$y = 6 - x - x^3$

438. Νά εὑρεθῇ ἡ γραφική παράστασις τῶν συναρτήσεων ,

$$y = |x| , \quad y = |x - 2| + 1 \quad y = x + |x| + 1$$

Κ Ε Φ Α Λ Α Ι Ο Ν IX

Π Ε Ρ Ι Τ Η Σ Δ Ι Α Ι Ρ Ε Σ Ε Ω Σ Τ Ω Ν Π Ο Λ Υ Ω Ν Υ Μ Ω Ν.

I. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

103. Τό μηδενικόν πολυώνυμον τοῦ x. Διά θεωρητικούς λόγους εἰσάγομεν τήν ἔννοιαν τοῦ «μηδενικοῦ πολυωνύμου» δηλαδή ἑνός πολυωνύμου ὡς πρός x τοῦ ὁποίου πάντες οἱ συντελεσταί εἶναι μηδέν: $0x^{\nu} + 0x^{\nu-1} + \ldots + 0x + 0$. Τό πλῆθος τῶν ὅρων του δύναται νά εἶναι οἱονδήποτε, βαθμός δέ αὐτοῦ δέν ὁρίζεται. Τό μηδενικόν πολυώνυμον προστιθέμενον εἰς ἕνα ἄλλο τυχόν πολυώνυμον τοῦ x , τό ἀφίνει ἀμετάβλητον. Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μηδενικοῦ πολυωνύμου εἶναι πάντοτε τό μηδέν ὁποιανδήποτε τιμήν καί ἄν λάβη τό x

Διά τοῦτο, προκειμένου νά ἐκφράσωμεν ὅτι κάποιο ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x , ἔστω τό f(x), εἶναι τό μηδενικόν πολυώνυμον γράφομεν

(1) $$f(x) \equiv 0$$ (ἐκ ταυτότητος ἴσον μέ μηδέν)

καί διά νά ἐκφράσωμεν ὅτι τό f(x) δέν εἶναι μηδενικόν πολυώνυμον γράφομεν

(2) $$f(x) \not\equiv 0$$

Τό πολυώνυμον μέ μηδενικούς συντελεστάς εἶναι τό μόνον πολυώνυμον τό ὁποῖον ἔχει τήν ἰδιότητα νά μηδενίζεται διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x . Δηλ. ἄν πολυώνυμον f(x) καθίσταται μηδέν διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x τότε τό f(x) θά ἔχη πάντας τούς συντελεστάς του μηδενικούς. Τοῦτο θά δειχθῆ περαιτέρω (§ 111).

Δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x λέγονται ἐκ τ α υ τ ό τ η τ ο ς ἴ σ α (ἤ ἁπλῶς ἴ σ α) ὅταν ἡ διαφορά των εἶναι τό μηδενικόν πολυώνυμον. Ἤτοι ὅταν οἱ συντελεσταί τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων των εἶναι ἴσοι πρός ἕνα. Ἔχομεν λοιπόν

$$\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu x + \alpha_{\nu+1} \equiv \alpha'_0 x^\nu + \alpha'_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha'_\nu x + \alpha'_{\nu+1}$$

ὅταν $\alpha_0 = \alpha'_0$, $\alpha_1 = \alpha'_1, \ldots, \alpha_\nu = \alpha'_\nu$, $\alpha_{\nu+1} = \alpha'_{\nu+1}$

Ἐάν δύο ἀκέραιαι ρηταί παραστάσεις τοῦ x συνδέονται διά $\equiv$ τοῦτο θά σημαίνει ὅτι ἄν διαταχθοῦν αὗται κατά τάς δυνάμεις τοῦ x συμφωνοῦν ὅρον πρός ὅρον.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

439. Προσδιορίσατε ἀριθμητικάς τιμάς τῶν α, β, γ, δ εἰς τρόπον ὥστε νά ἰσχύη ἡ ταυτότης

$$5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \equiv (x^2 - 5x - 1)(5x^2 + \alpha x + \beta) + \gamma x + \delta$$

440. Διά κάθε α δείξατε ὅτι

$(x-\alpha)$

$$(\alpha-10)(x-\alpha)(x-10) + 9(x-10)(x-1) + (1-\alpha)(x-1) +$$
$$+ 9(\alpha-10)(1-\alpha) \equiv 0$$

104. Τό σταθερόν πολυώνυμον. Ἡ οἰκογένεια τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x συμπληροῦται διά τῆς εἰσαγωγῆς εἰς αὐτήν ἐκτός τοῦ μηδενικοῦ καί τοῦ σ τ α θ ε ρ ο ῦ πολυωνύμου. Τό σταθερόν πολυώνυμον ἀποτελεῖται ἀπό τόν σταθερόν μόνον ὅρον καί εἶναι συνεπῶς ἀνεξάρτητον τοῦ x. Δηλαδή μία σταθερά c θεωρεῖται κατ' ἐπέκτασιν ὡς πολυώνυμον τοῦ x β α θ μ ο ῦ μ η δ ε ν ι κ ο ῦ, ἐφ' ὅσον $c \neq 0$. Οὕτω π.χ. ὁ ἀριθμός 7 δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἀκερ. πολυων. τοῦ x μηδενικοῦ βαθμοῦ διότι δυνάμεθα νά γράφωμεν $7 \equiv 7x^0$. Ἐάν $c = 0$ τότε τό σταθερόν πολυώνυμον συμπίπτει μέ τό μηδενικόν πολυώνυμον.

105. Τελεία διαίρεσις. Ἡ θεωρία τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι εἰς γενικάς γραμμάς ἐντελῶς ὁμοία μέ τήν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (ἴδε §5, §6, §7). Δεδομένου ὅτι κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x εἶναι μία συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς x διά τοῦτο κατά τήν πραγμάτευσιν τῆς θεωρίας ταύτης θά παριστάνωμεν τά πολυώνυμα μέ τά σύμβολα τῶν συναρτήσεων, ἤτοι A(x), B(x), Π(x), f(x) κ.τ.λ.

Ὁρισμός. «Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $A(x)$ λέγομεν ὅτι διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $B(x) \not\equiv 0$ ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(x)$ τό ὁποῖον πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τό $B(x)$ νά δίδη γινόμενον ἴσον (ἐκ ταυτότητος) μέ τό $A(x)$».

Δηλαδή ὅταν

(1) $$A(x) \equiv B(x)\cdot\Pi(x)$$

ὅπου $\Pi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον. Λέγομεν ἐπίσης τότε, ὅτι τό $A(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $B(x)$ ἤ ὅτι τό $B(x)$ διαιρεῖ (ἀκριβῶς) τό $A(x)$, ἤ ὅτι ἡ διαίρεσις $A(x) : B(x)$ εἶναι τελεία διαίρεσις. Τό δέ $\Pi(x)$ εἶναι τό πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως διότι ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν

(2) $$\frac{A(x)}{B(x)} = \Pi(x)$$

δηλ. τό $\Pi(x)$ εἶναι ἡ ἁπλουστάτη μορφή τήν ὁποίαν δύναται νά λάβη ἡ κλασματική παράστασις $\dfrac{A(x)}{B(x)}$.

Ἐκ τῆς (1) ἕπεται ἐπίσης ὅτι καί τό $\Pi(x)$ (ἐφ' ὅσον εἶναι $\not\equiv 0$) διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $A(x)$ καί δίδει πηλίκον $B(x)$.

Συνέπειαι τοῦ ὁρισμοῦ α) Πᾶν πολυώνυμον διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπό παντος σταθεροῦ πολυωνύμου $\not\equiv 0$ (δηλ. σταθερᾶς ποσότητος $\neq 0$).

Διότι προφανῶς:

$$\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu \equiv c\left\{\frac{\alpha_0}{c}x^\nu + \frac{\alpha_1}{c}x^{\nu-1} + \ldots + \frac{\alpha_\nu}{c}\right\}$$

ὅπου τό ἐντός τῆς ἀγκύλης ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι τό πηλίκον.

β) Τό μηδενικόν πολυώνυμον διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπό παντός μή μηδενικοῦ πολυωνύμου καί δίδει πηλίκον μηδέν. Ἤτοι

$$0 \equiv B(x)\cdot 0$$

Παρατήρησις. Γενικῶς, ἡ διαίρεσις δύο τυχόντων ἀκεραίων πολυωνύμων δέν εἶναι τελεία· κατ'ἐξαίρεσιν μόνον εἶναι τελεία.

Ἕνας τρόπος διά νά ἐλέγξωμεν ἄν ἕνα πολυώνυμον διαιρεῖ ἕνα ἄλλο εἶναι ὁ ἀκόλουθος: Ἔστωσαν π.χ. τά πολυώνυμα $2x^2-5x+5$ καί $3x+5$. Ἵνα τό δεύτερον διαιρεῖ ἀκριβῶς τό πρῶτον πρέπει νά ὑπάρχη ἀκέραιον πολυώνυμον Π (x) τοιοῦτον ὥστε

$$(3) \qquad 2x^2-5x+5 \equiv (3x+5)\,\Pi(x)$$

Ἐκ τῆς (3) ἕπεται ὅτι τό Π(x) πρέπει νά εἶναι πρώτου βαθμοῦ (ἴδε § 51 Πορ. 1ον) ἤτοι τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$. Διά νά πληροῦται λοιπόν ἡ (3) πρέπει νά ὑπάρχουν δύο σταθεροί ἀριθμοί α καί β τοιοῦτοι ὥστε:

$$2x^2-5x+5 \equiv (3x+5)(\alpha x+\beta) \quad \text{ἤ}$$

$$2x^2-5x+5 = 3\alpha x^2+(3\beta+5\alpha)x+5\beta$$

δηλαδή νά ἔχωμεν συγχρόνως:

$$(4) \qquad 2=3\alpha\,, \quad -5=3\beta+5\alpha\,, \quad 5=5\beta$$

Αἱ (4) ὅμως δέν εἶναι δυνατόν νά ἰσχύουν συγχρόνως διότι ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν δίδει $\alpha=2/3$, ἡ τρίτη $\beta=1$ ὁπότε, διά τάς τιμάς ταύτας τῶν α καί β ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (4) δέν ἀληθεύει.

Συνεπῶς δέν ὑπάρχει πολυώνυμον Π(x) πληροῦν τήν (3) ἄρα τό $2x^2-5x+5$ δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $3x+5$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

441. Ἐάν τό B(x) διαιρεῖ ἀκριβῶς δύο ἄλλα ἀκέραια πολυώνυμα, τότε θά διαιρῆ καί τό ἄθροισμα καί τήν διαφοράν τῶν δύο τούτων.

442. Ἐάν τό B(x) διαιρεῖ ἀκριβῶς τά $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_\nu(x)$ τότε θά διαιρῆ καί τό πολυώνυμον

$$c_1A_1(x)+c_2A_2(x)+\ldots+c_\nu A_\nu(x)$$

ὅπου $c_1, c_2, \ldots c_\nu$ τυχοῦσαι σταθεραί.

443. Ἐάν τό A(y) διαιρεῖται διά B(y) τότε καί τό $A(x^2)$ διαιρεῖται διά $B(x^2)$.

444. Δείξατε ὅτι τό x^3-2x+1 δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ x^2+2x+1

445. Προσδιορίσατε τούς συντελεστάς α καί β εἰς τρόπον ὥστε τό $x^3+\alpha x^2+\beta x-3$ νά διαιρῆται ἀκριβῶς διά τοῦ x^2-x+1

106. Ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως. Ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως:

Ἔστωσαν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, τά A(x) καί B(x) ἐξ ὧν τό πρῶτον εἶναι βαθμοῦ μ καί τό δεύτερον βαθμοῦ ν ἔνθα $\mu \geqslant \nu > 0$. Τό πρῶτον θά καλεῖται διαιρετέος καί τό δεύτερον διαρέτης.

Θά δείξωμεν ὅτι ὑπάρχει πάντοτε πολυώνυμον υ(x) βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου (δηλ. τοῦ ν) τό ὁποῖον ἀφαιρούμενον ἀπό τόν διαιρετέον A(x) τόν καθιστᾶ (ἀκριβῶς) διαιρετόν διά τοῦ B(x). Τό πολυώνυμον τοῦτο υ(x) λέγεται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A(x) διά B(x).

Εἰς τήν περίπτωσιν, καθ'ἥν τό A(x) διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ B(x) τό υ(x) εἶναι τό μηδενικόν πολυώνυμον.

Πρός ἀπόδειξιν τῆς ὑπάρξεως τοιούτου πολυωνύμου υ(x) βασιζόμεθα ἐπί τῆς ἑπομένης βοηθητικῆς προτάσεως.

Λῆμμα. «Δοθέντος τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου A(x) (διαιρετέου), βαθμοῦ μ καί τοῦ πολυωνύμου $B(x) \neq 0$ (διαιρέτου) βαθμοῦ ν μικροτέρου ἤ ἴσου πρός μ, ὑπάρχει πάντοτε ἕν ἀκέραιον μονώνυμον $\Pi_1(x)$ καί ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον $\upsilon_1(x)$ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ A(x) τοιαῦτα ὥστε νά ὑφίσταται ἡ ταυτότης

$$A(x) = B(x)\,\Pi_1(x) + \upsilon_1(x) \quad ».$$

Ἀπόδειξις. Ἄς νοήσωμεν τά A(x) καί B(x) διατεταγμένα κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ἔστω ὅτι

$$A(x) = \alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \alpha_2 x^{\mu-2} + \ldots + \alpha_{\mu} \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

$$B(x) = \beta_0 x^{\nu} + \beta_1 x^{\nu-1} + \beta_2 x^{\nu-2} + \ldots + \beta_{\nu} \qquad (\beta_0 \neq 0)$$

Διαιροῦντες τόν πρῶτον ὅρον $\alpha_0 x^{\mu}$ τοῦ διαιρετέου διά τοῦ πρώτου ὅρου $\beta_0 x^{\nu}$ τοῦ διαιρέτου λαμβάνομεν ὡς πηλίκον τό ἀκέραιον μονωνυμον $\frac{\alpha_0}{\beta_0} x^{\mu-\nu}$ τό ὁποῖον ἄς καλέσωμεν $\Pi_1(x)$.

Πολλαπλασιάζοντες τόν διαιρέτην B(x) ἐπί τό $\Pi_1(x)$ λαμβανομεν ὡς γινόμενον το πολυώνυμον

$$B(x)\,\Pi_1(x) = (\beta_0 x^{\nu} + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_{\nu}) \cdot \frac{\alpha_0}{\beta_0} x^{\mu-\nu}$$

$$= \alpha_0 x^{\mu} + \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_1 x^{\mu-1} + \ldots + \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_{\nu} x^{\mu-\nu}$$

τό ὁποῖον ἔχει μετά τοῦ A(x) τόν ὅρον $\alpha_0 x^{\mu}$ κοινόν. Ἐπομένως, ἄν τό γινόμενον $B(x) \cdot \Pi_1(x)$ ἀφαιρέσωμεν ἀπό τό A(x) θά λάβωμεν πολυώνυμον, ἔστω τό $\upsilon_1(x)$, βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ μ, διότι μέ τήν ἀφαίρεσιν ὁ μεγιστοβάθμιος ὅρος τοῦ A(x) ἐξαλείφεται.

Θά ἔχωμεν δηλαδή

$$A(x) - B(x)\cdot\Pi_1(x) = (\alpha_0 x^{\mu} + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots) - (\alpha_0 x^{\mu} + \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_1 x^{\mu-1} + \ldots)$$

$$= (\alpha_1 - \frac{\alpha_0}{\beta_0}\beta_1)x^{\mu-1} + \ldots = \upsilon_1(x)$$

Ἡ ἀνωτέρω ταυτότης

$$A(x) - B(x)\,\Pi_1(x) = \upsilon_1(x) = \text{πολυώνυμον}$$

βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ A(x) γράφεται:

$$A(x) = B(x)\,\Pi_1(x) + \upsilon_1(x) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις. Τό $\upsilon_1(x)$ λέγεται πρῶτον ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A(x) διά τοῦ B(x).

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω φθάνομεν εἰς τήν λεγομένην ταυτότητα τῆς διαιρέσεως ἡ ὁποία διαμορφοῦται καί ἀποδεικνύεται ἀπό τό ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα. «Δοθέντων δύο διατεταγμένων κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x ἀκεραίων πολυωνύμων A(x) (διαιρετέος) καί $B(x) \not\equiv 0$ (διαιρέτης) ἐξ ὧν τό πρῶτον εἶναι βαθμοῦ μ, ὄχι κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ ν τοῦ δευτέρου, ὑπάρχουν δύο ἄλλα πολυώνυμα, τό Π(x) καί τό υ (x) ἐξ ὧν τό υ(x) εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ ν τοῦ διαιρέτου τοιαῦτα ὥστε,

$$(1) \qquad A(x) \equiv B(x)\cdot\Pi(x) + \upsilon(x)$$

Τό Π(x) καλεῖται ἀκέραιον πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ A(x) διά B(x) ἤ ἀλγοριθμικόν πηλίκον ἤ (κακῶς) πηλίκον, καί τό υ(x) καλεῖται ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A(x) διά B(x) ἡ δέ ταυτότης (1) ἡ συνδέουσα διαιρετέον, διαιρέτην, πηλίκον καί ὑπόλοιπον καλεῖται ταυτότης τῆς διαιρέσεως

Ἀπόδειξις, Κατά τό προηγούμενον λῆμμα, θά ὑπάρχη μονώνυμον $\pi_1(x)$ καί πολυώνυμον $\upsilon_1(x)$ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ μ τοιαῦτα ὥστε

:

$$A(x) \equiv B(x)\, \Pi_1(x) + \upsilon_1(x)$$

'Εάν τό $\upsilon_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ $B(x)$ τό θεώρημα ἰσχύει. Εἰ δ'ἄλλως, θεωροῦμεν τό $\upsilon_1(x)$ ὡς διαιρετέον , καί τό $B(x)$ ὡς διαιρέτην ὁπότε ὑπάρχουν κατά τό λῆμμα, ἕν μονωνυμον $\Pi_2(x)$ καί ἕν πολυώνυμον $\upsilon_2(x)$ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\upsilon_1(x)$ ὥστε νά εἶναι

$$\upsilon_1(x) \equiv B(x)\cdot\Pi_2(x) + \upsilon_2(x)$$

'Εφ'ὅσον τό $\upsilon_2(x)$ δέν εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ $B(x)$ θά ὑπάρχη πάλιν ἕν μονώνυμον $\Pi_3(x)$ καί ἕν πολυώνυμον $\upsilon_3(x)$ βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ $\upsilon_2(x)$ ὥστε νά εἶναι

$$\upsilon_2(x) \equiv B(x)\cdot\Pi_3(x) + \upsilon_3(x)$$

Οἱ βαθμοί τῶν διαδοχικῶν ὑπολοίπων $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$, $\upsilon_3(x)$ βαίνουσιν διαδοχικῶς ἐλαττούμενοι, ἄρα θά φθάσωμεν τελικῶς, εἰς ἕνα ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ ν τοῦ $B(x)$ ὁπότε θά σταματήση ἡ ἐργασία αὐτή. Οὕτω θά ἔχωμεν τάς ἰσότητας

$$(2)\quad \begin{aligned} A(x) &\equiv B(x)\, \Pi_1(x) + \upsilon_1(x)\\ \upsilon_1(x) &\equiv B(x)\, \Pi_2(x) + \upsilon_2(x)\\ \upsilon_2(x) &\equiv B(x)\, \Pi_3(x) + \upsilon_3(x)\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \upsilon_k(x) &\equiv B(x)\, \Pi_{k+1}(x) + \upsilon(x) \end{aligned}$$

ὅπου τό $\upsilon(x)$ εἶναι, πλέον, β α θ μ ο ῦ κ α τ ω τ έ ρ ο υ τ ο ῦ ν. 'Εάν τάς ἰσοτητας (2) προσθέσωμεν κατά μέλη, ἐξαλείφοντες συγχρόνως καί τά $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$, $\upsilon_3(x)$... $\upsilon_k(x)$ ἀπό ἀμφότερα τά μέλη, θά λάβωμεν τήν ταυτότητα

$$A(x) \equiv B(x)\left\{\Pi_1(x) + \Pi_2(x) + \ldots + \Pi_{k+1}(x)\right\} + \upsilon(x)$$

Καλοῦντες δέ τό $\Pi_1(x) + \Pi_2(x) + \ldots + \Pi_{k+1}(x)$ μέ $\Pi(x)$, φθάνομεν εἰς τήν ἀποδεικτέαν ταυτότητα

$$A(x) \equiv B(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x)$$

107, Παρατηρήσεις ἐπί τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως.

Παρατήρησις 1η. Ἡ ταυτότης (1) τῆς διαιρέσεως γράφεται (ἐφ'ὅσον $B(x) \neq 0$) καί:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \Pi(x) + \frac{\upsilon(x)}{B(x)} \tag{3}$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι «Τό πηλίκον $\frac{A(x)}{B(x)}$ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ἀποτελεῖται ἐν γένει ἀπό ἕνα ἀκέραιον μέρος $\Pi(x)$ καί ἀπό ἕνα κλασματικόν μέρος $\frac{\upsilon(x)}{B(x)}$ εἰς τό ὁποῖον ὁ βαθμός τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ του παρονομαστοῦ

Τό $\Pi(x)$ εἶναι τό «ἀκέραιον» ἤ «ἀλγοριθμικόν πηλικον» τοῦ $A(x)$ διά $B(x)$.

Παρατήρησις 2α. «Ἡ διαίρεσις $A(x) : B(x)$ εἶναι τελεία μόνον ὅταν τό ὑπόλοιπον $\upsilon(x)$ εἶναι μηδενικόν πολυωνυμον δηλ. ἔχει πάντας τοῦς συντελεστάς του μηδενικούς ».

Παρατήρησις 3η. Ἡ ταυτότης (1) τῆς διαιρέσεως ἀναλύει τόν διαιρετέον $A(x)$ εἰς δύο μέρη ἐξ ὧν τό ἕν (δηλ. τό $B(x)\Pi(x)$) εἶναι διαιρετόν διά $B(x)$ τό δέ ἄλλο εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $B(x)$. Ἐπίσης ἡ (1) γραφομένη: $A(x) - \upsilon(x) \equiv B(x)\,\Pi(x)$ δεικνύει ὅτι ἡ διαφορά τοῦ διαιρετέου μεῖον τό ὑπόλοιπον εἶναι ἀκριβῶς διαιρετή διά τοῦ διαιρέτου.

Παρατήρησις 4η. Ἐάν μ ὁ βαθμός τοῦ διαιρετέου καί ν ὁ τοῦ διαιρέτου, ὅπου $\mu \geqslant \nu$ τότε ὁ βαθμός τοῦ ἀκεραίου πηλίκου ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τοῦ βαθμοῦ $\mu - \nu$ διαιρετέου καί διαιρέτου.

Πράγματι, ἔστω ρ ὁ βαθμός τοῦ $\Pi(x)$. Εἰς τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

(4) $A(x) \equiv B(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x)$

τό $B(x)\cdot\Pi(x)$ θά εἶναι βαθμοῦ $\nu+\rho$ καί ἐπειδή τό $\upsilon(x)$ εἶναι βαθμοῦ $<\nu$ καί συνεπῶς μικροτέρου τοῦ $\nu+\rho$ ἕπεται ὅτι τό $\upsilon(x)$ προστιθέμενον εἰς τό $B(x)\Pi(x)$ δέν μεταβάλλει τόν βαθμόν τοῦ τελευταίου τούτου. Ὥστε τό δεύτερον μέλος τῆς (4), εἶναι βαθμοῦ $\nu+\rho$ ἐνῶ τό πρῶτον εἶναι μ. Ἀφοῦ τά δύο μέλη εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, θά εἶναι καί τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, ἤτοι $\mu=\nu+\rho$ καί συνεπῶς $\rho=\mu-\nu$.

Παρατήρησις 5η. Ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως ἐπεκτείνεται καί εἰς την περίπτωσιν καθ'ἥν ὁ βαθμός τοῦ διαιρετέου $A(x)$ εἶναι μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $B(x)$ ὁπότε δεχόμεθα ὡς ἀκέραιον πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης τό μηδενικόν πολυώνυμον καί ὡς ὑπόλοιπον αὐτόν τοῦτον τόν διαιρέτην, δηλ.

$$A(x) \equiv B(x)\cdot 0 + A(x)$$

Ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως καί πάλιν πληροῦται, ἐφ'ὅσον ὁ βαθμός τοῦ $A(x)$ (δηλ. τοῦ ὑπολοίπου) εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $B(x)$.

Διά τῆς παραδοχῆς ταύτης διευκολυνόμεθα πολλάκις εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου (ἴδε § 113).

108. **Ἐκτέλεσις τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.** Ὁ προσδιορισμός τοῦ ἀκεραίου πηλίκου $\Pi(x)$ καί τοῦ ὑπολοίπου $\upsilon(x)$, ὅταν δοθοῦν ὁ διαιρετέος $A(x)$ καί ὁ διαιρέτης $B(x)$, καλεῖται ἐκτέλεσις τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως τοῦ $A(x)$ διά τοῦ $B(x)$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως (Θεώρημα τῆς § 106) παρέχει συγχρόνως καί τόν τρόπον ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως (διά τῶν ἰσοτήτων (2)). Κατ'ἀρχάς διατάσσομεν διαιρετέον καί διαιρέτην κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ μεταβλητοῦ γράμματος καί κατόπιν προσδιορίζομεν τόν πρῶτον ὅρον $\Pi_1(x)$ τοῦ πηλικου καί τό πρῶτον ὑπόλοιπον $\upsilon_1(x)$ ὅπως εἰς τό λῆμμα τῆς §106, ὕστερα τόν δεύτερον ὅρον $\Pi_2(x)$ τοῦ πηλίκου καί τό δεύτερον ὑπόλοιπον $\upsilon_2(x)$ κ.ο.κ. Αἱ πράξεις διατάσσονται ὅπως εἰς τό ἑπόμενον παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $A(x) = x^5+2x^4-12x^3+40x^2$ διά τοῦ $B(x) = x^2-3x+5$ »

Λύσις,

$$\begin{array}{lrl|l}
\text{Διαιρετέος} & A(x) = & x^5+2x^4-12x^3+40x^2 & x^2-3x+5=B(x)=\text{διρέτης} \\
\text{γινόμενον} & -B(x)\Pi_1(x) = & -x^5+3x^4-5x^3 & \underbrace{x^3}_{\Pi_1(x)}+\underbrace{5x^2}_{\Pi_2(x)}\underbrace{-2x}_{\Pi_3(x)}\underbrace{+9}_{\Pi_4(x)} = \text{Πηλίκ.} \\
\hline
\text{πρῶτον ὑπολ.} & \upsilon_1(x) = & 5x^4-17x^3+40x^2 & \\
\text{γινόμενον} & -B(x)\Pi_2(x) = & -5x^4+15x^3-25x^2 & \\
\hline
\text{δεύτερον ὑπ.} & \upsilon_2(x) = & -2x^3+15x^2 & \\
\text{γινόμενον} & -B(x)\Pi_3(x) = & +2x^3-6x^2+10x & \\
\hline
\text{τρίτον ὑπόλ.} & \upsilon_3(x) = & 9x^2+10x & \\
\text{γινόμενον} & -B(x)\Pi_4(x) = & -9x^2+27x-45 & \\
\hline
\text{τελικόν ὑπόλ.} & \upsilon(x) = & 37x-45 &
\end{array}$$

Τό πηλίκον εἶναι x^3+5x^2-2x+9 καί τό ὑπόλοιπον εἶναι $37x-45$. Δυνάμεθα δέ νά γράφωμεν:

$$\frac{x^5+2x^4-12x^3+40x^2}{x^2-3x+5} = x^3+5x^2-2x+9+\frac{37x-45}{x^2-3x+5}$$

(Πρός ἐπαλήθευσιν τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως, παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\begin{aligned}
\upsilon_1(x) &= A(x) - B(x)\cdot(x^3) \\
\upsilon_2(x) &= \upsilon_1(x) - B(x)\cdot(5x^2) \\
\upsilon_3(x) &= \upsilon_2(x) - B(x)\cdot(-2x) \\
\upsilon(x) &= \upsilon_3(x) - B(x)\cdot(+9)
\end{aligned}$$

Διά προσθέσεως τούτων κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$\upsilon(x) = A(x) - B(x)(x^3+5x^2-2x+9) \quad \text{ἤ}$$

$$A(x) = B(x)(x^3+5x^2-2x+9)+37x-45)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. «Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ διά τοῦ $\alpha+\beta+\gamma$ ».

Λύσις. Διατάσσομεν διαιρετέον καί διαιρέτην κατά τάς κατιούσας δυνάμεις ἑνός γράμματος, π.χ. τοῦ α καί κατόπιν ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν ὡς εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα:

$$\begin{array}{l|l} \alpha^3 + 0\cdot\alpha^2 - 3(\beta\gamma)\alpha + (\beta^3+\gamma^3) & \alpha + (\beta+\gamma) \\ \cline{2-2} -\alpha^3 - (\beta+\gamma)\alpha^2 & \alpha^2 - (\beta+\gamma)\alpha + (\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma) \\ \hline \quad -(\beta+\gamma)\alpha^2 - 3(\beta\gamma)\alpha + (\beta^3+\gamma^3) & \\ \quad +(\beta+\gamma)\alpha^2 + (\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)\alpha & \\ \hline \qquad (\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)\alpha + (\beta^3+\gamma^3) & \\ \qquad -(\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma)\alpha - (\beta+\gamma)(\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2) & \\ \hline \qquad\qquad 0 & \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι, λοιπόν τελεία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα

$$k(x,y) = \frac{2x^3 + x^2y - xy^2 - 3y^3 + x^2 + xy + 3y^2}{x^2 + xy + 3y^2}$$

Λύσις. Ἄς ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ ἀριθμητοῦ διά τοῦ παρονομαστοῦ. Πρός τοῦτο διατάσσομεν ἀμφοτέρους κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν ὡς ἀνωτέρω, φροντίζοντες ὅπως π ά ν τ α τ ά μ ε ρ ι κ ά ὑ π ό λ ο ι π α ε ἶ ν α ι κ α ί α ὐ τ ά δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν α κ α τ ά τ ά ς κ α τ ι ο ῦ σ α ς δ υ ν ά μ ε ι ς τ ο ῦ x

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + (y+1)x^2 + (y-y^2)x + (3y^2-3y^3) & x^2 + yx + 3y^2 \\ \cline{2-2} -2x^3 - 2yx^2 & 2x + (-y+1) \\ \hline \quad (-y+1)x^2 + (y-y^2)x + (3y^2-3y^3) & \\ \quad -(-y+1)x^2 + (y^2-y)x + (3y^3-3y^2) & \\ \hline \quad 0\,x^2 + 0\,x + 0 \equiv 0 & \end{array}$$

Ἡ διαίρεσις εἶναι τελεια, συνεπῶς

$$k(x,y) = 2x - y + 1$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

446. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι τέλειαι διαιρέσεις:

1ον) $x^3 - 3x^2 + 3x + y^3 - 1 \; : \; x + y - 1$

2ον) $\alpha^4 - \alpha^3\beta + 2\alpha^2\beta^2 - \alpha\beta^3 + \beta^4 : \alpha^2 + \beta^2$

3ον) $x^5 - 5x^4y + 7x^3y^2 - x^2y^3 - 4xy^4 + 2y^5 \; : \; x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

447. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα καί ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:

1) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 2x^3 - x + 1$ διά τοῦ $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

2) $\alpha^4 - 3\alpha^3\beta + 6\alpha^2\beta^2 - 3\alpha\beta^3 + \beta^4$ διά τοῦ $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2$

448. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις τοῦ $x^4 + 1$ διά τοῦ $x^2 - x\sqrt{2} + \lambda$ Ἀκολούθως νά δειχθῇ ὅτι διά κατάλληλον τιμήν τοῦ λ ἡ διαί-

ρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

449 . Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαιρέσις τοῦ $x^4 + 3x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$ διά $x^2 - 3x + 5$ καί κατόπιν νά ὁρισθοῦν τά α καί β οὕτως ὥστε ἡ διαιρεσις αὕτη νά εἶναι τελεία.

450. Ἐάν διαιρετέος καί διαιρέτης πολ/σθοῦν ἐπί τό αὐτό ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$, τό πηλίκον δέν βλάπτεται ἀλλά τό ὑπόλοιπον πολ/ζεται ἐπί $\varphi(x)$.

451. Ἐάν διαιρετέος εἶναι τό $2x^3 + xy^2 + y^3$ καί διαρέτης τό $2x + y$ εὕρετε πηλίκον καί ὑπόλοιπον πρῶτον ὅταν ἀμφότεροι εἶναι διατεταγμένοι ὡς πρός τό γράμμα x καί δεύτερον ὅταν εἶναι διατεταγμένοι ὡς πρός τό y

452. Νά δειχθῇ διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς ὅτι δοθέντων τῶν $A(x)$ (διαιρέτέου) καί $B(x)$ (διαιρέτου) μόνον ἕν πηλίκον $\Pi(x)$ καί ἕν μόνον ὑπόλοιπον $\upsilon(x)$ ὑπάρχει (Δηλ. τό ζεῦγος $\Pi(x)$, $\upsilon(x)$ εἶναι μοναδικόν).

453. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

$$x^2 - 2\alpha^{-2/3}x + \alpha^{-4/3} - \beta^2 : x - \alpha^{-2/3} + \beta$$

454. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

$$x^{6/5} + 1 : x^{2/15} + 1$$

455. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$$\frac{\alpha-\beta}{2\alpha\beta}x^2 - \frac{\alpha}{\beta}x - \frac{\beta}{\alpha}x + \frac{(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta} \quad : \quad x - \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha-\beta}$$

109. Ἀτέρμων διαίρεσις. Ἐάν διαιρετέος καί διαιρέτης διαταχθοῦν κατά τάς ἀ ν ι ο ύ σ α ς δυνάμεις τοῦ x καί ἐφαρμοσθῇ κατόπιν ἡ μέθοδος ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως τῆς προηγουμένης § τότε, (ἐξαιρέσει τῆς περιπτώσεως καθ'ἥν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία) ἡ πρᾶξις δύναται νά συνεχίζεται ἐπ'ἄπειρον. Ἔστω π.χ. τό ἑξῆς παράδειγμα:

$$\begin{array}{l r|l}
 & 6 - 5x + x^2 & 1 + x \equiv B(x) \\
\cline{3-3}
 & -6 - 6x & \underbrace{6}_{1\text{ος}} - \underbrace{11x}_{2\text{ος}} + \underbrace{12x^2}_{3\text{ος}} - \underbrace{12x^3}_{4\text{ος}} \\
\text{1ον ὑπόλοιπον:} & -11x + x^2 & \\
 & +11x + 11x^2 & \\
\hline
\text{2ον ὑπόλοιπον:} & 12x^2 & \\
 & -12x^2 - 12x^3 & \\
\hline
\text{3ον ὑπόλοιπον:} & -12x^3 & \\
 & +12x^3 + 12x^4 & \\
\hline
\text{4ον ὑπόλοιπον} & 12x^4 &
\end{array}$$

Δηλ. διαιροῦμεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου καί λαμβάνομεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ «πηλίκου» τόν 6. Τοῦτον πολ/μεν ἐπί B(x) καί τό γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπό τόν διαιρετέον A(x) καί εὑρίσκομεν τό πρῶτον «ὑπόλοιπον» $-11x + x^2$. Θεωροῦμεν τώρα, ὥς διαιρετέον τό πρῶτον ὑπόλοιπον καί συνεχίζομεν. Ἐπειδή κάθε φοράν τό εὑρισκόμενον «ὑπόλοιπον» εἶναι ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀπό τό προηγουμένως εὑρεθέν, ἡ πρᾶξις αὕτη δέν ἔχει τέλος.

Δυνάμεθα ὅμως νά σταματήσωμεν εἰς ὁποιονδήποτε ὅρον τοῦ «πηλίκου» ὁπότε θά ἔχωμεν δημιουργήσει μίαν ἀνάλυσιν τοῦ διαιρετέου, διαφορετικήν ἑκάστοτε. Π.χ. ἄν σταματήσωμεν εἰς τόν 3ον ὅρον τοῦ «πηλίκου», θά ἰσχύη

$$6 - 5x + x^2 \equiv (1 + x)(6 - 11x + 12x^2) - 12x^3$$

ἄν δέ εἰς τόν 4ον, θά ἰσχύη:

$$6 - 5x + x^2 \equiv (1+x)(6-11x+12x^2-12x^3) + 12x^4 \quad \text{ἥτις δίδει}$$

$$\frac{6-5x+x^2}{1+x} = 6-11x+12x^2-12x^3+ \frac{12x^4}{1+x}$$

(Ἴδε ἰσότητας (1) τῆς §108). Δυνάμεθα νά δημιουργήσωμεν οὕτω, ἀπείρους ταυτότητας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

456. Νά εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι τοῦ πηλίκου τῆς ἀτέρμονος διαιρέσεως $2 + 3x + 4x^2 / 1 - x + 2x^2$

457. Νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις τοῦ $1 - \alpha\beta x^2$ διά τοῦ $1 -(\alpha+\beta)x + \alpha\beta x^2$ ἀμφοτέρων διατεταγμένων κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x ὥστε τό «πηλίκον» νά εὑρεθῆ κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x, μέχρι τοῦ ὅρου τοῦ νυοστοῦ βαθμοῦ ὡς πρός x. Ποῖον τότε τό ἀντίστοιχον ὑπόλοιπον;

458. Δοθέντων δύο ἀκεραίων πολυωνύμων A(x) καί B(x) βαθμῶν οἱωνδήποτε νά δειχθῆ ὅτι ἐφ'ὅσον τό A(x) δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ B(x) τότε ἐκτελουμένης τῆς διαιρέσεως μέ τά πολυώνυμα ταῦτα διατεταγμένα κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις, φθάνομεν εἰς ἕν πολυώνυμον Π(x) βαθμοῦ ν (δοθέντος) καί εἰς ἕν ἄλλο πολυώνυμον υ(x) τοιαῦτα ὥστε νά πληροῦται ἡ ταυτότης:

$$A(x) \equiv B(x)\,\Pi(x) + x^{\nu+1}\upsilon(x)$$

59. Δείξατε ὅτι
$$\frac{1}{1-3x} = 1+3x+3^2x^2+3^3x^3+\ldots+3^\nu x^\nu + \frac{3^{\nu+1}x^{\nu+1}}{1-3x}$$

110. Διαιρετότης διά $x-\alpha$. Θεώρημα Ι. « Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου τοῦ x διά τοῦ $x-\alpha$ ἰσοῦται πρός τόν ἀριθμόν τόν προκύπτοντα ὅταν ἐν τῷ πολυωνύμῳ ἀντικατασταθῇ ὁ x διά τοῦ α».

Ἀπόδειξις Ἔστω $\varphi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x καί α οἱοσδήποτε σταθερός ἀριθμός. Ἄν τό $\varphi(x)$ διατάξωμεν κατά τάς ἐλαττιούσας δυνάμεις τοῦ x καί τό διαιρέσωμεν, ἀλγοριθμικῶς, διά τοῦ $x-\alpha$, θά λάβωμεν ἕνα ἀκέραιον πηλίκον $\Pi(x)$ καί ἕν ὑπόλοιπον υ, βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $x-\alpha$ δηλ. βαθμοῦ μηδενικοῦ ὡς πρός x. Ὥστε τό ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως διά $x-\alpha$ δέν θά περιέχῃ x, δηλ. θά εἶναι ἕνας σταθερός ἀριθμός, ἀνεξάρτητος τοῦ x. Ἐξ ἄλλου, ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως,

$$(1) \qquad \varphi(x) \equiv (x-\alpha)\,\Pi(x) + \upsilon$$

ἰσχύει διά πάσας τάς τιμάς τοῦ x, ἄρα καί διά τήν τιμήν $x=\alpha$. Θέτοντες λοιπόν εἰς τήν (1) ὅπου x τό α καί παρατηροῦντες ὅτι ἡ ἀντικατάστασις αὐτη δέν μεταβάλλει τό υ, τό ὁποῖον εἶναι σταθερόν, λαμβάνομεν

$$(2) \qquad \varphi(\alpha) = (\alpha-\alpha)\,\Pi(\alpha) + \upsilon$$

Ἐπειδή $(\alpha-\alpha)\,\Pi(\alpha) = 0\cdot\Pi(\alpha) = 0$, ἡ (2) δίδει ὅτι

$$(3) \qquad \varphi(\alpha) = \upsilon$$

Ἡ (3) δεικνύει ὅτι τό ὑπόλοιπον υ τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διά $x-\alpha$ ἰσοῦται μέ $\varphi(\alpha)$ δηλ. μέ τήν ἀριθμητικην τιμήν τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$, διά $x=\alpha$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. « Νά εὑρεθῇ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρεσεως τοῦ $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ διά τοῦ $x - 3$, ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως. Ἐπίσης καί διά τοῦ $x + 2$ ».

Λύσις. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τό $f(x)$ τό x διά 3 καί ἔχομεν τό ζητούμενον ὑπόλοιπον: $υ = f(3) = 81-54+27-3+2 = 53$

Ἐπίσης, ἐπειδή $x + 2 = x - (-2)$, τό ὑπόλοιπον διά $x + 2$ θά εἶναι

$$f(-2) = 16 + 16 + 12 + 2 + 2 = 48$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. « Ἀκέραιον πολυώνυμον $φ(x)$ διαιρούμενον διά $x^2 - 1$ δίδει ὑπόλοιπον $4x + 7$. Νά εὑρεθῆ ποῖον ὑπόλοιπον δίδει τό $φ(x)$ διαιρούμενον διά $x + 1$ ἤ διά $x - 1$ ».

Λύσις. Ἐξ ὑποθέσεως, θά ἰσχύη ἡ ταυτότης

$$φ(x) \equiv (x^2 - 1)\,Π(x) + 4x + 7$$

Ἐάν εἰς αὐτήν τεθῆ ὅπου x τό 1 λαμβάνομεν

$$φ(1) = (1^2 - 1)\,Π(1) + 4\cdot 1 + 7 = 11$$

καί ἄν τεθῆ $x = -1$ λαμβάνομεν

$$φ(-1) = \left\{(-1)^2 - 1\right\}Π(-1) + 4(-1) + 7 = 3$$

Ἀφοῦ λοιπόν $φ(1) = 11$, ἕπεται ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά $x - 1$ εἶναι τό 11 καί ἀφοῦ $φ(-1) = 3$, τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά $x + 1$ εἶναι τό 3.

Πόρισμα. « Ἱκανή καί ἀναγκαῖα συνθήκη ἵνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x - α$ εἶναι νά μηδενίζεται τό πολυώνυμον ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῆ ἀντί τοῦ x, τό α».

Δηλαδή:

Ἐάν $φ(α) = 0$, τότε τό $φ(x) \equiv (x - α)\,Π(x)$ ὅπου $Π(x)$ ἀκέρα. πολυώνυμον καί ἀντιστρόφως.

Πράγματι, ἄν $φ(α) = 0$ τότε (λόγῳ τῆς (3)) καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $φ(x)$ διά $x - α$ εἶναι ἐπίσης, μηδέν ἄρα ἡ διαίρεσις διά $x - α$ θά εἶναι τελεία. Τό ἀντίστροφον εἶναι φανερόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. « Νά δειχθῆ ὅτι τό διώνυμον $x + 2$ εἶναι παράγων τοῦ πολυωνύμου $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 5x - 2$ ».

Λύσις. Ἀρκεῖ πρός τοῦτο, τό $x + 2$ νά διαιρῆ ἀκριβῶς, τό $f(x)$, δηλ. νά εἶναι $f(-2) = 0$. Πράγματι, εὑρίσκομεν, δι' ἀντικαταστάσεως ὅτι $f(-2) = 16 + 16 - 20 - 10 - 2 = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. « Νά δειχθῆ ὅτι τό $(x+\alpha)$ δέν διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $x^{10} + \alpha^{10}$ ὅταν $\alpha \neq 0$ ».

Λύσις. Ἐάν $f(x) = x^{10} + \alpha^{10}$ τότε $f(-\alpha) = (-\alpha)^{10} + \alpha^{10} = 2\alpha^{10}$. Συνεπῶς ἡ διαίρεσις τοῦ $x^{10} + \alpha^{10}$ διά $x+\alpha$ δίδει ὑπόλοιπον $2\alpha^{10} \neq 0$ ἄρα δέν εἶναι τελεία.

Θεώρημα ΙΙ. «<u>Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$ ὅπου α, β, γ ἀριθμοί διάφοροι ἀλλήλων ἀνά δύο, τότε θά διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$· καί ἀντιστρόφως</u>».

Ἀπόδειξις: Ἔστω $\varphi(x)$ τό ἀκέραιον πολυώνυμον. Ἐπειδή τοῦτο διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x-\alpha$ θά ἔχωμεν:

$$\varphi(x) \equiv (x-\alpha)\,\Pi(x) \tag{4}$$

ὅπου $\Pi(x)$ εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διά τοῦ $x-\alpha$.

Ἐάν εἰς τήν (4) τεθῆ ὅπου x τό β λαμβάνομεν τήν ἰσότητα

$$\varphi(\beta) = (\beta-\alpha)\,\Pi(\beta). \tag{5}$$

Ἔχομεν ὅμως $\varphi(\beta) = 0$, διότι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς φιά $x-\beta$ (ἴδε προηγούμενον πόρισμα), ὥστε ἡ (5) γίνεται

$$0 = (\beta-\alpha)\,\Pi(\beta) \tag{6}$$

καί ἐπειδή $\beta-\alpha \neq 0$ (ἐξ ὑποθέσεως), ἡ (6) δίδει ὅτι

$$\Pi(\beta) = 0 \tag{7}$$

Ἡ (7), κατά τό προηγούμενον πόρισμα, δεικνύει ὅτι τό $\Pi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\beta$ (ἀφοῦ τό $\Pi(x)$ μηδενιζεται ὅταν τεθῆ $x=\beta$ ἐν αὐτῷ). Ἄρα θά ἔχωμεν

$$\Pi(x) = (x-\beta)\,\Pi_1(x) \tag{8}$$

ὅπου $\Pi_1(x)$ τό πηλίκον τοῦ $\Pi(x)$ διά $x-\beta$.

Βάσει τῆς (8) ἡ (4) γράφεται

(9) $$\varphi(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)\cdot\Pi_1(x)$$

Ἐάν εἰς την (9) τεθῆ ὅπου x τό γ λαμβάνομεν

$$\varphi(\gamma) = (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\cdot\Pi_1(\gamma)$$

καί ἐπειδή $\varphi(\gamma)=0$ (διότι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται διά $x-\gamma$) ἐνῷ $(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\neq 0$ συνάγομεν ὅτι

(10) $$\Pi_1(\gamma) = 0$$

Ἡ (10) δεικνύει ὅτι τό $\Pi_1(x)$ μηδενίζεται ἄν τεθῆ εἰς αὐτό ὅπου x τό γ, δηλ. δεικνύει ὅτι τό $\Pi_1(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\gamma$. Ὥστε ὡς συνέπειαν τῆς (10) ἔχομεν ὅτι

$$\Pi_1(x) \equiv (x-\gamma)\cdot\Pi_2(x)$$

ὅπου $\Pi_2(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x

Τῇ βοηθείᾳ τῆς τελευταίας ταύτης ταυτότητος, ἡ (9) γράφεται

(11) $$\varphi(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\Pi_2(x)$$

Ὥστε τό $\varphi(x)$ ἰσοδυναμεῖ πρός γινόμενον τοῦ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ἐπί ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, συνεπῶς τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$.

Ἀντιστρόφως. Ἄν τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ τότε θά ἰσοδυναμεῖ μέ $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ ἐπί ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi_2(x)$ τό ὁποῖον θά εἶναι τό πηλίκον τῆς τελείας ταύτης διαιρέσεως, δηλ.:

$$\varphi(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdot\Pi_2(x)$$

Ἐκ τῆς ταυτότητος ὅμως αὐτῆς ἕπεται ὅτι τό $\varphi(x)$ εἶναι γινόμενον τοῦ $x-\alpha$ ἐπί τό ἀκέραιον πολυώνυμον $(x-\beta)(x-\gamma)\Pi_2(x)$, ἄρα τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\alpha$. Ὁμοίως, μέ $x-\beta$ καί μέ $x-\gamma$.

Παρατήρησις. Προφανῶς τό ἀνωτέρω θεώρημα γενικεύεται δι'ὁσουσδήποτε διαιρέτας. Δηλ., «'Εάν τό ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπό ὁσωνδήποτε διαφόρων ἀλλήλων διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta, \dots$ $x-\tau$ τότε θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν $(x-\alpha)(x-\beta)\dots(x-\tau)$ ».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. «Διά ποίας τιμάς τῶν k καί λ τό πολυώνυμον $\varphi(x) = 3x^4 - kx^3 + 5x^2 - 9x + \lambda$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x^2 - 1$; ».

Λύσις: 'Επειδή $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$ συνάγομεν ὅτι διά νά διαιρῆται τό $\varphi(x)$ διά $x^2 - 1$ πρέπει καί ἀρκεῖ, κατά τό προηγούμενον θεώρημα, νά διαιρῆται καί διά $x+1$ καί διά $x-1$. Ἤτοι πρέπει

$$\varphi(-1) = 0 \quad \text{καί} \quad \varphi(1) = 0.$$

Εὑρίσκομεν $\varphi(-1) = 3 + k + 5 + 9 + \lambda = 17 + k + \lambda$
$\varphi(1) = 3 - k + 5 - 9 + \lambda = -1 - k + \lambda$

Οἱ ἀριθμοί k καί λ πρέπει λοιπόν νά πληροῦν τάς σχέσεις

$$k + \lambda = -17 \quad \text{καί} \quad -k + \lambda = 1$$

'Εξ αὐτῶν εὑρίσκομεν (δι'ἀφαιρέσεως καί προσθέσεως κατά μέλη), $k = -9$, $\lambda = -8$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

460. Νά δειχθῆ ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\varphi(x)$ διά τοῦ διωνύμου $\alpha x + \beta$ ὅπου $\alpha \neq 0$, εἶναι ἴσον με $\varphi(-\frac{\beta}{\alpha})$.

461. Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, χωρίς νά ἐκτελεσθῆ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως:

$2x^4 + 5x^3 - x - 6 : x - 5$, $3x^4 - 2x^2 + 5x - 9 : 2x + 3$

$2x^3 + 5x^2 - 7x + 2 : 3x - 2$

462. Νά εὑρεθῆ

α) 'Εάν ὁ $x+3$ διαιρεῖ τό $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 11x + 6$

β) 'Εάν ὁ $x+2$ " " $x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 11x + 6$

γ) 'Εάν ὁ $x+\alpha$ " " $x^7 + \alpha^7$ ἤ τό $x^7 - \alpha^7$

δ) 'Εάν ὁ $x+\alpha$ " " $x^8 + \alpha^8$ ἤ τό $x^8 - \alpha^8$

463. Διά ποίας τιμάς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν τό $x^\nu + \alpha^\nu$ διαι-

ρεῖται ἀκριβῶς διά $x+\alpha$ ἤ διά $x-\alpha$; Ὁμοίως, πότε τό $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ διαιρεῖται διά $x-\alpha$ ἤ διά $x+\alpha$;

464. Ἐάν ν φυσικός ἀριθμός δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον $(x+1)^{2\nu} - x^{2\nu} - 2x - 1$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $x(x+1)(2x+1)$.

465. Ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διά x^2-5x+6 δίδει ὑπόλοιπον $3x-4$. Τί ὑπόλοιπον δίδει διαιρούμενον διά $x-2$ ἤ διά $x-3$;

466. Ἐάν $\varphi(x) = 3x^2 - 5x + 6$ νά μορφωθῆ τό $\varphi(3x-5)$. Ἄν πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-4$ δείξατε ὅτι τό $\varphi(3x-5)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-3$.

467. Ὁρίσατε τό α οὕτως ὥστε τό $x^3+\alpha x^2-20x+6$ νά διαιρῆται διά $x-3$. Ἐπίσης ὁρίσατε τά k καί λ οὕτως ὥστε τό πολυώνυμον $2x^3-x^2+kx+\lambda$ νά διαιρῆται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x+2)(x-4)$.

111. Πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος μηδέν. Θεώρημα I. «Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον νυοστοῦ βαθμοῦ ἔστω τό

$$f(x) = \alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu} \quad , \quad \alpha_0 \neq 0$$

μηδενίζεται διά ν διαφόρους τιμάς τοῦ x, ἔστω τάς

$$\rho_1 , \rho_2 , \rho_3 , \ldots \rho_{\nu}$$

τότε τό f(x) ἰσοῦται ἐκ ταυτότητος πρός τό γινόμενον

$$\alpha_0 (x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\ldots(x-\rho_{\nu})$$

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ τό f(x) μηδενίζεται διά $x=\rho_1$, $x=\rho_2$ ... $x=\rho_{\nu}$ ἕπεται ὅτι θά διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x-\rho_1$, $x-\rho_2$, ... $x-\rho_{\nu}$, ἄρα καί διά τοῦ γινομένου $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu})$ (ἐφ'ὅσον τά $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{\nu}$ εἶναι διάφορα ἀλλήλων ἀνά δύο). Ὥστε θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_{\nu})\,\Pi$$

ὅπου Π πηλίκον. Τό Π θά εἶναι σταθερός ἀριθμός καί μάλιστα ἴσος μέ α_0. Διότι ἐφ'ὅσον διαιρετέος καί διαιρέτης εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, τό πηλίκον Π θά ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_\nu$ διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου $(x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_\nu)$. Ὁ διαιρέτης διατασσόμενος κατά τάς δυνάμεις τοῦ x ἔχει πρῶτον ὅρον x^ν, συνεπῶς $\Pi = \dfrac{\alpha_0 x^\nu}{x^\nu} = \alpha_0$

Πόρισμα. «Ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x ὄχι ἐκ ταυτότητος μηδέν, δέν δύναται νά μηδενίζεται διά τιμάς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ βαθμοῦ του».

Ἀπόδειξις. Ἐάν ὅλαι αἱ πραγματικαί τιμαί τοῦ x αἱ μηδενίζουσαι τό πολυώνυμον εἶναι ὀλιγότεραι τοῦ ν, τό θεώρημα ἰσχύει. Ἔστω τώρα ὅτι τό $f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots$ ὅπου $\alpha_0 \neq 0$ μηδενίζεται διά ν τιμάς τοῦ x, τάς $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$. Θά δείξωμεν ὅτι οὐδεμία ἄλλη τιμή τοῦ x τό μηδενίζει.

Πράγματι, κατά τό θεώρημα I θά εἶναι $f(x) \equiv \alpha_0(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$.

Ἐάν δέ τό x λάβῃ ὁποιανδήποτε ἄλλην τιμήν, διάφορον τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ τότε οὐδείς ἐκ τῶν ν παραγόντων $x - \rho_1, x - \rho_2, \ldots x - \rho_\nu$ μηδενίζεται· ἐπειδή δέ $\alpha_0 \neq 0$, οὔτε καί τό γινόμενον $\alpha_0(x - \rho_1)(x - \rho_2)\ldots(x - \rho_\nu)$ μηδενίζεται. Ὥστε τό $f(x)$ δι'οὐδεμίαν ἄλλην τιμην ἐκτός τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ μηδενίζεται.

Θεώρημα II. «Ἐαν τό πολυωνυμον $f(x) = \alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_2 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_\nu$ μηδενίζεται δια τιμάς τοῦ x περισσοτερας τοῦ ν τότε πάντες οἱ συντελεσταί $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι ἴσοι μέ τό μηδέν».

Ἀπόδειξις. Ἐάν δέν ἦσαν ὅλοι οἱ συντελεσταί $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ ἴσοι μέ τό μηδέν, τότε ἔστω α_k ὁ πρῶτος μή μηδενικός συντελεστής τόν ὁποῖον συναντῶμεν ἀναγιγνώσκοντες τό πολυώνυμον ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά ($k = 0$ ἤ 1 ἤ 2 ...). Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει τό πολυώνυμον θά ἤρχιζε ἀπό τόν ὅρον $\alpha_k x^{\nu-k}$ ἤτοι θά ἦτο βαθμοῦ $\nu - k$ καί ἐπομένως δέν θά ἠδύνατο νά μηδενίζεται διά τιμάς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ ν - k. Τοῦτο ὅμως ἀντιβαίνει πρός τήν ὑπόθεσιν καθ'ἥν τό πολυώνυμον μηδενίζεται διά τιμάς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ ν, ἄρα καί τοῦ ν-k

Συνεπῶς οὐδείς συντελεστής $\neq 0$ ὑπάρχει. (Ἤτοι τό f(x) εἶναι τό μηδενικόν πολυώνυμον).

Πόρισμα 1ον. **«Ἐάν τό πολυώνυμον $f(x) = \alpha_0 x^{\nu} + \alpha_1 x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_{\nu}$ μηδενίζεται δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ x τότε πάντες οἱ συντελεσταί του εἶναι μηδέν, δηλ. $f(x) \equiv 0$».**

Διότι μηδενίζεται διά τιμάς τοῦ x περισσοτέρας τοῦ ν.

Πόρισμα 2ον. **«Ἐάν ἡ ἰσότης $A(x) = A'(x)$ μεταξύ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x ἰσχύει δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ x τότε $A(x) \equiv A'(x)$ (δηλ. τά δύο πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα)».**

Διότι τό πολυώνυμον $A(x) - A'(x)$ θά μηδενίζεται δι' ἀπείρους τιμάς τοῦ x ἄρα κατά τό προηγούμενον πόρισμα θά εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον μέ μηδέν. Συνεπῶς τά δύο πολυώνυμα A(x) καί A'(x) ἔχοντα διαφοράν τό μηδενικόν πολυώνυμον, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, δηλ. ἔχουν τούς συντελεστάς των ἴσους ἕνα πρός ἕνα.

Θεώρημα III. **«<u>Ἐάν $A(x) \cdot B(x) \equiv A(x)B'(x)$ καί $A(x) \not\equiv 0$ τότε $B(x) \equiv B'(x)$, ὅπου A(x), B(x), B'(x) ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x</u>».**

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς ὑποθέσεως λαμβάνομεν ὅτι τό γινόμενον

$$A(x)\{B(x) - B'(x)\}$$

μηδενίζεται διά κάθε x . Αἱ τιμαί αἱ μηδενίζουσαι τό A(x) δέν εἶναι περισσότεραι τοῦ βαθμοῦ του. Ἄρα αἱ τιμαί τοῦ x αἱ μή μηδενίζουσαι τό A(x) εἶναι ἄπειροι τό πλῆθος. Αὗται, ὡς μή μηδενίζουσαι τόν παράγοντα A(x) θά μηδενίζουν κατ'ἀνάγκην τόν δεύτερον παράγοντα τοῦ γινομένου δηλ. τόν $B(x) - B'(x)$.

Ὥστε ἡ ἰσότης $B(x) = B'(x)$ θά ἀληθεύη δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ x καί συνεπῶς σύμφωνα μέ τό 2ον πόρισμα τοῦ Θεωρ. II, θά εἶναι $B(x) \equiv B'(x)$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

468. Δείξατε ὅτι τά πολυώνυμα $2x^3 - \alpha x + 1$ καί $x^3 + 5x + 2$ δέν δύνανται νά ἔχουν ἴσας τιμάς διά τέσσαρας διαφόρους τιμάς τοῦ x

469. Ἐάν α, β, γ τυχόντες σταθεροί ἀριθμοί δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον $(\alpha-\beta)(x-\alpha)(x-\beta) + (\beta-\gamma)(x-\beta)(x-\gamma) + (\gamma-\alpha)(x-\gamma)(x-\alpha) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

470. Ἐάν $\varphi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)\cdot\varphi(-x)$ ἔχει μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ x.

471. Ἐάν τό ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διαδοχικῶς διά $x-\rho_1$, $x-\rho_2$, ... $x-\rho_\nu$ δίδει πάντοτε τό αὐτό ὑπόλοιπον υ, τότε διαιρούμενον διά τοῦ γινομένου $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\ldots(x-\rho_\nu)$ δίδει ἐπίσης ὑπόλοιπον υ. Τά ρ_1, ρ_2, ... ρ_ν ὑποτίθενται διάφορα ἀλλήλων.

472. Προσδιορίσατε ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ τοιοῦτον ὥστε

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) \equiv x^3$$

Εὕρετε ἀκολούθως τό ἄθροισμα $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + \nu^3$

473. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης ὡς πρός x.

$$\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \equiv 1$$

ἄνευ ἐκτελέσεως τῶν πράξεων,

474. Ὁμοίως νά δειχθῇ ἡ ταυτότης

$$(x-\alpha)^2\cdot(\beta-\gamma) + (x-\beta)^2\cdot(\gamma-\alpha) + (x-\gamma)^2\cdot(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \equiv 0$$

112. Ἡ «σύντομος» διαίρεσις διά x − α. Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διά x − α δύναται νά εὑρεθῇ διά συντομευμένου τρόπου χρησίμου εἰς τήν πρᾶξιν, ἰδίως δέ εἰς τήν περίπτωσιν καθ'ἥν ἔχομεν νά ἐκτελέσωμεν ἀλλεπαλλήλους διαιρέσεις τῆς μορφῆς αὐτῆς. Ὁ κανών δίδεται ἀπό τό ἑπόμενον θεώρημα.

Θεώρημα. « 'Εάν τό ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ νοηθῆ πλῆρες καί διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διά $x - \alpha$ νοηθῆ ἐπίσης πλῆρες καί διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, τότε

1) Ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μέ τόν πρῶτον συντελεστήν τοῦ διαιρετέου.

2) Πᾶς ἄλλος συντελεστής τοῦ πηλίκου (π.χ. ὁ νυοστός) προκύπτει ἄν ὁ προηγούμενός του συντελεστής πολλαπλασιασθῆ ἐπί α καί τό γινόμενον προστεθῆ εἰς τόν συντελεστήν τῆς ἰδίας τάξεως (δηλ. τόν νυοστόν) τοῦ διαιρετέου.

3) Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως προκύπτει ἄν ὁ τελευταῖος συντελεστής τοῦ πηλίκου πολλαπλασιασθῆ ἐπί α καί τό γινόμενον προστεθῆ εἰς τόν τελευταῖον συντελεστήν τοῦ διαιρετέου».

'Απόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἄν ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν διά $x - \alpha$, προσέχοντες πῶς σχηματίζονται οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου.

Ἔστω $\varphi(x) = A_0x^{\mu} + A_1x^{\mu-1} + \ldots + A_{\mu}x + A_{\mu+1}$ καί ἄς ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις $\varphi(x) : x - \alpha$

$$
\begin{array}{l|l}
A_1x^{\mu} + A_2x^{\mu-1} + A_3x^{\mu-2} + \ldots + A_{\mu-1}x^2 + A_{\mu}x + A_{\mu+1} & x - \alpha \\
-A_1x^{\mu} + \alpha B_1x^{\mu-1} & \hline B_1x^{\mu-1} + B_2x^{\mu-2} + \ldots \\
\hline
\quad B_2x^{\mu-1} + A_3x^{\mu-2} + \ldots & \quad + B_{\mu-2}x^2 + B_{\mu-1}x + B_{\mu} \\
\quad -B_2x^{\mu-1} + \alpha\cdot B_2x^{\mu-2} & \\
\hline
\qquad B_3x^{\mu-2} + \ldots\ldots & \\
\qquad -B_3x^{\mu-2} + \ldots\ldots & \\
\hline
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
\qquad\qquad B_{\mu-2}x^3 + A_{\mu-1}x^2 + A_{\mu}x + A_{\mu+1} & \\
\qquad\qquad -B_{\mu-2}x^3 + \alpha B_{\mu-2}x^2 & \\
\hline
\qquad\qquad\quad B_{\mu-1}x^2 + A_{\mu}x + A_{\mu+1} + & \\
\qquad\qquad\quad -B_{\mu-1}x^2 + \alpha B_{\mu-1}x & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad B_{\mu}x + A_{\mu+1} & \\
\qquad\qquad\qquad -B_{\mu}x + \alpha B_{\mu} & \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad \upsilon &
\end{array}
$$

Κατά τήν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ταύτης ἐτέθη

$$(1)\quad \begin{cases} B_1 = A_1 \,,\ B_2 = \alpha B_1 + A_2 \,,\quad B_3 = \alpha B_2 + A_3 \ .\ .\ .\ .\ . \\ B_{\mu-1} = \alpha B_{\mu-2} + A_{\mu-1} \quad,\quad B_\mu = \alpha B_{\mu-1} + A_\mu \qquad \text{καί} \\ \upsilon = \alpha B_\mu + A_{\mu+1} \end{cases}$$

Δηλαδή, ὁ πρῶτος συντελεστής τοῦ πηλίκου εἶναι ἴσος μέ τόν πρῶτον συντελεστήν τοῦ διαιρετέου. Ὁ 2ος συντελεστής, B_2, τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μέ τόν προηγούμενόν του συντελεστήν B_1 ἐπί α, σύν τόν δεύτερον συντελεστήν τοῦ διαιρετέπου, κ.ο.κ.

Ἐν γένει αἱ ἰσότητες (1) δεικνύουσαι πῶς δημιουργεῖται ἕκαστος συντελεστής τοῦ πηλίκου ἐκ τοῦ προηγουμένου συντελεστοῦ καί πῶς τό ὑπόλοιπον υ δημιουργεῖται ἀπό τόν τελευταῖον συντελεστήν B_μ, ἀποδεικνύουν τό Θεώρημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. Ἔστω διαιρετέος ὁ $2x^5 - 4x^4 + 7x^3 - x^2 + x + 10$ καί διαιρέτης ὁ $x - 3$. Οἱ συντελεσταί τοῦ πηλίκου θά εἶναι:

συντελεστής τοῦ	x^4	:	ὁ 2
" "	x^3	:	ὁ $2\cdot 3 + (-4) = 2$
" "	x^2	:	ὁ $2\cdot 3 + 7 = 13$
" "	x	:	ὁ $13\cdot 3 + (-1) = 38$
σταθερός ὅρος		:	ὁ $38\cdot 3 + 1 = 115$
ὑπόλοιπον			$115\cdot 3 + 10 = 355$

Ἄλλη διάταξις τῶν πράξεων. Δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν τούς ἀριθμούς ἐπί τριῶν γραμμῶν. Εἰς τήν πρώτην νά γραφοῦν οἱ συντελεσταί τοῦ διαιρετέου. Ἕκαστος ἀριθμός τῆς 2ας γραμμῆς νά προκύπτῃ ἀπό τόν προηγούμενον ἀριθμόν τῆς τρίτης γραμμῆς πολ/σθέντα ἐπί 3. Ὁ πρῶτος ἀριθμός τῆς τρίτης γραμμῆς νά εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν πρῶτον τῆς πρώτης οἱ δέ ἄλλοι νά προκύπτουν διά προσθέσεως τῶν ἀριθμῶν τῆς δευτέρας γραμμῆς μέ τούς ἀριθμούς τῆς πρώτης:

Συντελεσταί διαιρετέου:	2	−4	7	−1	1	10	3
		6	6	39	114	345	
Συντελεσταί πηλίκου:	2	2	13	38	115	355 = ὑπόλ.	

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον καί τό ὑπόλοιπον τοῦ $x^4 - 8x^3 + 5$ διά $x + 1,2$ διά τῆς «συντόμου» διαιρέσεως.

Λύσις. Ὁ διαιρέτης γράφεται $x - (-1,2)$, ἄρα $\alpha = -1,2$ ὁ δέ διαιρέτης: $x^4 - 8x^3 + 0x^2 + 0\cdot x + 5$

$$\begin{array}{lrrrr|r}
\text{Συντελεσταί διαιρέτου:} & 1 & -8 & 0 & 0 & 5 \\
 & & -1,2 & 11,04 & -13,248 & 15,8976 \\
\hline
\text{Συντελεσταί πηλίκου:} & 1 & -9,2 & 11,04 & -13,248 & 20,8976 =
\end{array}$$

= ὑπόλοιπον.

Ὥστε $$\frac{x^4 - 8x^3 + 5}{x + 1,2} = x^3 - 9,2x^2 + 11,04x - 13,248 + \frac{20,8976}{x + 1,2}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. Τά ἀξιοσημείωτα πηλίκα τά ὁποῖα εὕρομεν εἰς τήν §64 εὑρίσκονται βάσει τῆς ἀνωτέρω μεθόδου, κατά εὐκολώτερον τρόπον. Οὕτω, i) Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $x^\mu - \alpha^\mu : x - \alpha$. Γράφομεν τόν διαιρετέον: $x^\mu + 0\cdot x^{\mu-1} + 0\cdot x^{\mu-2} + \ldots + 0\cdot x - \alpha^\mu$ καί ἐφαρμόζομεν τόν ἀνώτερω κανόνα.

$$\begin{array}{cccccc|l}
1 & 0 & 0 & 0\ \ldots & 0 & -\alpha^\mu & \alpha \\
 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\ \ldots & \alpha^{\mu-1} & \alpha^\mu & \\
\hline
1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^3\ \ldots & \alpha^{\mu-1} & 0 = \text{ὑπόλοιπον} &
\end{array}$$

Ὥστε: $$\frac{x^\mu - \alpha^\mu}{x - \alpha} = x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1}$$

ii) Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $x^\mu + \alpha^\mu : x - \alpha$ Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω, λαμβάνομεν

$$\begin{array}{ccccc|l}
1 & 0 & 0 & 0 & \alpha^\mu & \alpha \\
 & \alpha & \alpha^2 \ldots & \alpha^{\mu-1} & \alpha^\mu & \\
\hline
1 & \alpha & \alpha^2 & \alpha^{\mu-1} & 2\alpha^\mu = \text{ὑπόλοιπον} &
\end{array}$$

Ὥστε $$\frac{x^\mu + \alpha^\mu}{x - \alpha} = x^{\mu-1} + \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \ldots + \alpha^{\mu-1} + \frac{2\cdot\alpha^\mu}{x - \alpha}$$

iii) Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις $x^\mu - \alpha^\mu : x + \alpha$. Τό πηλίκον ταύτης εἶναι $x^{\mu-1} - \alpha x^{\mu-2} + \alpha^2 x^{\mu-3} + \alpha^3 x^{\mu-4} + \alpha^4 x^{\mu-5} \ldots$ διότι οἱ συντελεσταί τοῦ πηλίκου δίδονται ἀπό τήν τρίτην γραμμήν τοῦ κάτωθι πίνακος:

1	0	0	0	$\lfloor -\alpha$
	$-\alpha$	$(-\alpha)^2$	$(-\alpha)^3$	
1	$-\alpha$	$(-\alpha)^2$	$(-\alpha)^3$	

Τό ὑπόλοιπον εἶναι τό $(-\alpha)^\mu - \alpha^\mu$ καί εἶναι μηδέν ἄν μ ἄρτιος ἤ $-2\alpha^\mu$ ἄν μ περιττός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. « Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x) = \nu^2 x^{\nu+2} - (2\nu^2 + 2\nu - 1)x^{\nu+1} + (\nu + 1)^2 x^\nu - x - 1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x - 1)^3$».

Λύσις. Ἀρκεῖ νά δειχθοῦν τά ἑξῆς: 1ον) Ὅτι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x - 1$ ὁπότε $\varphi(x) = (x - 1)\,\Pi(x)$ 2ον) Ὅτι τό πηλίκον $\Pi(x)$ διαιρεῖται πάλιν ἀκριβῶς δια τοῦ $x - 1$, δηλ. $\Pi(x) = (x - 1)\cdot\Pi_1(x)$ καί 3ον) Ὅτι τό $\Pi_1(x)$ διαιρεῖται ἐπίσης ἀκριβῶς διά τοῦ $x - 1$ δηλ. ὅτι $\Pi_1(x) = (x - 1)\cdot\Pi_2(x)$.

Πράγματι, αἱ τρεῖς ταυτότητες $\varphi(x) = (x - 1)\cdot\Pi(x)$, $\Pi(x) = (x - 1)\cdot\Pi_1(x)$, $\Pi_1(x) = (x - 1)\cdot\Pi_2(x)$ δίδουν την ταυτότητα $\varphi(x) = (x - 1)^3\,\Pi_2(x)$ ἥτις ἀποδεικνυει τήν πρότασιν.

Διαιροῦμεν λοιπόν κατ'ἀρχάς τό $\varphi(x)$ διά $x - 1$ σύμφωνα μέ τόν κανόνα τῆς συντόμου εὑρέσεως τοῦ πηλίκου.

ν^2	$-(2\nu^2 + 2\nu - 1)$	$(\nu + 1)^2$	0	0 ...	-1	-1	$\lfloor 1$
	ν^2	$-(\nu^2 + 2\nu - 1)$	2	2 ...	2	1	
ν^2	$-(\nu^2 + 2\nu - 1)$	2	2	2 ...	1	0 =	

= ὑπόλοιπον

Ὥστε $\Pi(x) = \nu^2 x^{\nu+1} - (\nu^2 + 2\nu - 1)x^\nu + 2x^{\nu-1} + 2x^{\nu-2} + \ldots + 2x + 1$.

Διαιροῦμεν πάλιν τό $\Pi(x)$ μέ τόν ἴδιον κανόνα

ν^2	$-(\nu^2 + 2\nu - 1)$	2	2	2	2	1
	ν^2	$-2\nu + 1$	$-2\nu + 3$	$-2\nu + 5$ ...		-1
ν^2	$-2\nu + 1$	$-2\nu + 3$	$-2\nu + 5$	$-2\nu + 7$	-1	0 =

= ὑπόλοιπον

Παρατηρητέον ὅτι οἱ ὅροι τοῦ $\Pi(x)$ οἱ ἔχοντες συντελεστήν 2 εἶναι $\nu - 1$ τό πλῆθος καί ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου θά προκύπτῃ ἐκ τοῦ $-2\nu + 1$ διά προσθέσεως $\nu - 1$ φοράς τό 2 ἄρα θά ἰσοῦται μέ $-2\nu + 1 + (\nu-1)\,2 = -1$.

Ὥστε ἔχομεν

$Π_1(x) = ν^2x^ν + (-2ν + 1)x^{ν-1} + (-2ν + 3)x^{ν-2} + (-2ν + 5)x^{ν-3} +$
$... - 3x - 1$

Τέλος, ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι καί τό $Π_1(x)$ διαιρεῖται διά $x - 1$ δηλ. ὅτι $Π_1(1) = 0$. Πράγματι

$Π_1(1) = ν^2 + (-2ν + 1) + (-2ν + 3) + (-2ν + 5) +...+ (-3) +$
$+ (-1) = ν^2 - \{1 + 3 + 5 + 7 +...+ (2ν - 5) + (2ν - 3) + (2ν-1)\}$

ὁπότε ἀρκεῖ νά δειχθῆ ἡ ἰσοτης

$$1 + 3 + 5 + 7 +...+ (2ν - 1) = ν^2$$

Αὐτη δεικνύεται εὐκόλως μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. (ἴδε ἀσκ. 384).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

475. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα καί τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων ἐκτελουμένων διά τῆς «συντόμου» μεθόδου

1. $2x^6 - 11x^5 + 8x^4 + 17x^3 - 7x^2 + 13x - 10 \; : \; x - 4$
2. $x^5 + 8x^2 + 3 \; : \; x + 2$
3. $3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5 \; : \; x + \frac{2}{3}$

476. Δείξατε ὅτι τό $12α^4 + 16α^3 - 43α^2 - 36α + 36$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(2α - 3)(2α + 3)(α + 2)$ καί εὕρετε τό πηλίκον διά τοῦ συντόμου τρόπου.

477. Ἐάν $f(x) = 5x^4 - 12x^3 - 20x^2 - 43 + 6$ νά εὑρεθῆ τό $f(4)$ ὄχι δι' ἀπ' εὐθείας ἀντικαταστάσεως ἐν τῷ πολυωνύμῳ ἀλλά διά τῆς μεθόδου τῆς συντόμου διαιρέσεως. Ὁμοίως, νά εὑρεθῆ τό $φ(1,4)$ ὅταν $φ(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x + 5$.

478. Νά εὑρεθῆ ἡ μεγαλυτέρα δύναμις τοῦ $x - 2$ ἡ ὁποία διαιρεῖ ἀκριβῶς τό πολυώνυμον: $3x^6 - 24x^5 + 73x^4 - 104x^3 + 72x^2 - 32x + 16$.

479. Νά δειχθῆ ὅτι τό πολυώνυμον $A(x) = νx^{ν+1} - (ν + 1)x^ν + 1$ (ὅπου ν φυσικός ἀριθμός) διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x - 1)^2$

480. Νά δειχθῆ ὅτι τό ἀκέρ. πολυώνυμον $νx^{ν+2} - (ν + 2)x^{ν+1} + (ν + 2)x - ν$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x - 1)^3$.

481. Να δειχθῆ ὅτι το ἀκέρ. πολυώνυμον $x^{4ν+2} - (2ν + 1)x^{2ν+2} + (2ν + 1)x^{2ν} - 1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x^2 - 1)^3$

482. Νά ὁρισθοῦν τά α καί β οὕτως ὥστε τό πολυώνυμον $x^6 + \alpha x^5 + (2\alpha + 1)x^4 + \beta x^3 + (2\alpha + 1)x^2 + \alpha x + 1$ νά διαιρῆται διά δυνάμεως τοῦ $x - 1$ ὅσον τό δυνατόν μεγαλυτέρου βαθμοῦ. Τίς ὁ μέγιστος οὗτος βαθμός;

483. Νά δειχθῆ ὅτι ἄν τό πολυώνυμον $\alpha_0 x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \alpha_2 x^{\nu-2} + \ldots + \alpha_\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x - 1)^2$ τότε καί τό

$$\nu\alpha_0 x^{\nu-1} + (\nu - 1)\alpha_1 x^{\nu-2} + (\nu - 2)\alpha_2 x^{\nu-3} + \ldots + \alpha_{\nu-1}$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x - 1$.

484. Ἐάν β φυσικός ἀριθμός, > 1, νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις τοῦ $x^{\beta-1} - 1$ διά τοῦ $(x - 1)^2$, Βάσει ταύτης νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀκέραιος $\beta^{\beta-1} - 1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ ἀκεραίου $(\beta - 1)^2$ καί ὅτι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης γραφόμενον εἰς τό σύστημα ἀριθμήσεως μέ βάσιν β ἔχει β - 2 ψηφία τά ὁποῖα εἶναι κατά σειράν, ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά: 1, 2, 3, ... β-4, β-3, β-1.

113. Ἰδιότητες τοῦ ὑπολοίπου. Ὁρισμός. Ἐάν $B(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x θά καλοῦμεν π ο λ λ α π λ ά σ ι ο ν τοῦ $B(x)$ κάθε γινόμενον τοῦ $B(x)$ ἐπί ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.

Προφανῶς τό ἄθροισμα πολ/σίων τοῦ $B(x)$ εἶναι ἐπίσης πολλαπλάσιον τοῦ $B(x)$.

Θεώρημα I. « Ἵνα δύο πολυώνυμα διαιρούμενα διά τοῦ αὐτοῦ διαιρέτου ἀφίνουν τό αὐτό ὑπόλοιπον πρέπει καί ἀρκεῖ νά διαφέρουν κατά πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου ».

Ἀπόδειξις. Ἐάν εἰς τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$A(x) \equiv B(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x) \qquad (1)$$

προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τυχόν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρετου ἔστω τό $B(x)\cdot\sigma(x)$, λαμβάνομεν τήν

$$A(x) + B(x)\cdot\sigma(x) = B(x)\left\{\Pi(x) + \sigma(x)\right\} + \upsilon(x) \qquad (2)$$

Ἡ (2) ἡ ὁποία εἶναι πάλιν, μία ταυτότης διαιρέσεως φανερωνει ὅτι καί τό $A(x) + B(x)\cdot\sigma(x)$ διαιρούμενον διά $B(x)$, πάλιν τό αὐτό ὑπόλοιπον $\upsilon(x)$ δίδει. Ἀλλά τά πολυώνυμα $A(x)$ καί $A(x) + B(x)\cdot\sigma(x)$ διαφέρουν κατά πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου· βλέπομεν δέ ὅτι ἀφήνουν τό ἴδιον ὑπόλοιπον.

'Αντιστρόφως. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἀκέρ. πολυώνυμα $A(x)$ καί $A'(x)$ δίδονται τό αὐτό ὑπόλοιπον ὡς πρός διαιρέτην $B(x)$. Θά ἔχωμεν τότε:

$$A(x) = B(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x)$$
$$A'(x) = B(x)\,\Pi'(x) + \upsilon(x)$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατά μέλη τῶν δύο ταυτοτήτων λαμβάνομεν τήν ταυτότητα:

$$A(x) - A'(x) = B(x)\left\{\Pi(x) - \Pi'(x)\right\}$$

ἤ ἄν τεθῆ $\Pi(x) - \Pi'(x) = \sigma(x)$

$$A(x) - A'(x) = B(x)\cdot\sigma(x)$$

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τά τό αὐτό ὑπόλοιπον ἀφήνοντα πολυώνυμα $A(x)$ καί $A'(x)$ διαφέρουν κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου.

Θεώρημα II. «'Εάν εἰς γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων ἀντικατασταθοῦν τινές τῶν παραγόντων (ἤ καί ὅλοι) διά τῶν ὑπολοίπων των ὡς πρός τόν αὐτόν διαιρέτην $B(x)$ τότε τό μέν γινόμενον μεταβάλλεται κατά πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου $B(x)$ τό δέ ὑπόλοιπον δέν βλάπτεται».

'Απόδειξις. Ἔστω $A(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x)$ ἕνα γινόμενον ἀκεραίων πολυωνύμων καί $\upsilon(x)$ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $A(x)$ διά τινος διαιρέτου $B(x)$. Θά δείξωμεν πρῶτον ὅτι ἄν ὁ παράγων $A(x)$ ἀντικατασταθῆ διά τοῦ ὑπολοίπου του $\upsilon(x)$, τό προκῦπτον νέον γινόμενον $\upsilon(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x)$ διαφέρει τοῦ παλαιοῦ κατά πολλαπλάσιον τοῦ $B(x)$ καί ὅτι (συνεπῶς) δίδει τό αὐτό ὑπόλοιπον ὡς πρός $B(x)$, μέ τό παλαιόν. 'Εκ τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως

$A(x) = B(x)\cdot\Pi(x) + \upsilon(x)$ λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} A(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x) &= \left\{B(x)\cdot\Pi(x) + \upsilon(x)\right\}\Gamma(x)\cdot\Delta(x) \\ &= \upsilon(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x) + B(x)\Pi(x)\Gamma(x)\Delta(x) \end{aligned}$$

Θέτοντες $\Pi(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x) = \sigma(x)$ λαμβάνομεν τήν ταυτότητα

$$A(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x) = \upsilon(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x) + B(x)\cdot\sigma(x)$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται ὅτι τά δύο γινόμενα $A(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x)$ καί $\upsilon(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x)$ διαφέρουν κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου $B(x)$. Ἐπομένως θά δίδουν τό αὐτό ὑπόλοιπον ὡς πρός $B(x)$ σύμφωνα πρός τό θεώρημα I.

Ἀφοῦ λοιπόν τό Θεώρημα ἰσχύη ὅταν ἕνας παράγων ἀντικατασταθῆ διά τοῦ ὑπολοίπου του, θά ἰσχύη καί ὅταν ὁσοιδήποτε ἀντικατασταθοῦν. Διότι, πάλιν ἀπό τό $\upsilon(x)\cdot\Gamma(x)\cdot\Delta(x)$ μεταβαίνομεν εἰς τό $\upsilon(x)\cdot\upsilon'(x)\cdot\Delta(x)$, ἀντικαθιστῶντες τό $\Gamma(x)$ διά τοῦ ὑπολοίπου του $\upsilon'(x)$ ὡς πρός $B(x)$ κ.ο.κ.

Πόρισμα 1ον. Τό ὑπόλοιπον δυνάμεως $[A(x)]^\nu$ δέν βλάπτεται ὅταν ἡ βάσις $A(x)$ ἀντικατασταθῆ διά τοῦ ὑπολοίπου της ὡς πρός τόν αὐτόν διαιρέτην.

Πόρισμα 2ον. Ἐάν εἰς ἄθροισμα γινομένων ἀκεραίων πολυωνύμων $\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(x) + \varphi_3(x)\cdot\varphi_4(x)\cdot\varphi_5(x) +\ldots$ ἀντικατασταθοῦν τινά ἐκ τῶν πολυωνύμων τούτων διά τῶν ὑπολοίπων των (ὡς πρός τόν αὐτόν διαιρέτην $B(x)$) τότε τό ὑπόλοιπον τοῦ ὅλου ἀθροίσματος (ὡς πρός $B(x)$) δέν μεταβάλλεται.

Διότι ἕκαστον γινόμενον καί συνεπῶς καί τό ὅλον ἄθροισμα μεταβάλλεται κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου.

Θεώρημα III. «Τό ὑπόλοιπον ἀθροίσματος ἀκεραίων πολυωνύμων ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τῶν προσθετέων».

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν τά ἀκέραια πολυώνυμα $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.. $\varphi_\nu(x)$ ἔχοντα ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα $\upsilon_1(x)$, $\upsilon_2(x)$,... $\upsilon_\nu(x)$ ὡς πρός διαιρέτην τινά $B(x)$. Ἐκ τῆς ταυτότητος τῆς διαιρέσεως $\varphi_1(x) = B(x)\cdot\Pi_1(x) + \upsilon_1(x)$ ἔχομεν ὅτι $\varphi_1(x) - \upsilon_1(x) = B(x)\cdot\Pi_1(x)$ δηλ. ὅτι τά $\varphi_1(x)$ καί $\upsilon_1(x)$ διαφέρουν κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου. Ἐπομένως καί τά πολυώνυμα

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) +\ldots+ \varphi_\nu(x) \quad \text{καί} \quad \upsilon_1(x) + \varphi_2(x) +\ldots+\varphi_\nu(x)$$

διαφέρουν κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου, ἄρα δίδουν τό αὐτό ὑπόλοιπον. Ὥστε ἄν εἷς προσθετέος ἀντικατασταθῇ διά τοῦ ὑπολοίπου του τό νέον προκῦπτον ἄθροισμα δίδει τό αὐτό ὑπόλοιπον μέ τό παλαιόν. Ἀντικαθιστῶμεν λοιπόν εἰς τό $\upsilon_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)$ τό $\varphi_2(x)$ μέ τό $\upsilon_2(x)$ ὁπότε τό $\upsilon_1(x) + \upsilon_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)$ δίδει τό αὐτό ὑπόλοιπον μέ τό προηγούμενον. Οὕτω προχωροῦντες φθάνομεν εἰς τό $\upsilon_1(x) + \upsilon_2(x) + \ldots + \upsilon_\nu(x)$ τό ὁποῖον δίδει τό αὐτό ὑπόλοιπον μέ τό $\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \ldots + \varphi_\nu(x)$. Ἀλλά τό $\upsilon_1(x) + \ldots + \upsilon_\nu(x)$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου $B(x)$, συνεπῶς δίδει ὑπόλοιπον, τόν ἑαυτόν του (ἴδε § 107, παρατήρ. 5).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. 1η. «Νά εὑρεθῇ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $x^7 + 5x^6 - (x^3 - 4)^3 + 8x^3 - 9x^2 + x - 7$ διά τοῦ $x^3 - 2$»

Λύσις. Γράφομεν τόν διαιρετέον κατά τάς δυνάμεις τοῦ x^3 ἤτοι:

$$(x^3)^2 x + 5(x^3)^2 - (x^3 - 4)^3 + 8x^3 - 9x^2 + x - 7$$

καί κατόπιν, συμφώνως πρός τά πορίσματα 2ον καί 1ον τοῦ Θεωρήματος II θέτομεν ὅπου x^3, τό ὑπόλοιπόν του διά $x^3 - 2$ δηλ. τό 2. Οὕτω λαμβάνομεν τό πολυώνυμον

$$2^2 x + 5\cdot 2^2 - (-2)^3 + 8\cdot 2 - 9x^2 + x - 7 = -9x^2 + 5x + 37$$

τό ὁποῖον διαφέρει τοῦ ἀρχικοῦ κατά πολ/σιον τοῦ διαιρέτου $x^3 - 2$. Ἐπειδή δέ τό $-9x^2 + 5x + 37$ εἶναι καί βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ διαιρέτου $x^3 - 2$, ἕπεται ὅτι εἶναι αὐτό τοῦτο τό ζητούμενον ὑπόλοιπον.

2α. «Ἐάν α, β, γ θετικοί ἀκέραιοι νά εὑρεθῇ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $x^{3\alpha} + x^{3\beta+1} + x^{3\gamma+5}$ διά τοῦ $x^3 - 2$»

Λύσις. Γράφομεν τόν διαιρετέον κατά τάς δυνάμεις τοῦ x^3

$$(1) \qquad (x^3)^\alpha + (x^3)^\beta x + (x^3)^{\gamma+1} x^2$$

καί ἀντικαθιστῶμεν τό x^3 διά τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρός $x^3 - 2$ δηλαδή διά τοῦ 2.

Διά τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης προκύπτει νέον πολυώνυμον παρέχον τό ἴδιο ὑπόλοιπον μέ τό (1):

(2) $$2^{\alpha} + 2^{\beta}x + 2^{\gamma+1}x^2$$

'Επειδή δέ τό (2) εἶναι δευτέρου βαθμοῦ δηλ. μικροτέρου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου δίδει ὡς ὑπόλοιπον τόν ἑαυτόν του. Ἄρα τό ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι τό (2).

3η. «Νά δειχθῆ ὅτι τό ἀκέραιον πολυώνυμον

$$x^{\kappa\alpha} + x^{\kappa\beta+1} + x^{\kappa\gamma+2} + \dots + x^{\kappa\tau+\kappa-1}$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ

$$x^{\kappa-1} + x^{\kappa-2} + \dots + x + 1$$

ὅπου k, α, β, γ, ... τ, ἀκέραιοι θετικοί

'Απόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρέτης $x^{\kappa-1} + x^{\kappa-2} + \dots + 1$ ἰσοῦται πρός τό πηλίκον $x^{\kappa} - 1 : x - 1$, ἄρα οὗτος πολλαπλασιαζόμενος ἐπί $x - 1$ λαμβάνει τήν μορφήν $x^{\kappa} - 1$.

'Εξ αὐτοῦ ἀγόμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν διαιρετέον καί διαιρέτην ἐπί $x - 1$ ὁπότε ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι τό $(x^{\kappa\alpha} + x^{\kappa\beta+1} + \dots + x^{\kappa\tau+\kappa-1})(x - 1)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $(x^{\kappa-1} + x^{\kappa-2} + \dots + x + 1)(x - 1)$, δηλαδή διά τοῦ $x^{\kappa} - 1$.

Πρός τοῦτο γράφομεν τόν διαιρετέον ὑπό τήν μορφήν

$$\left\{(x^{\kappa})^{\alpha} + (k^{\kappa})^{\beta}x + (x^{\kappa})^{\gamma}x^2 + \dots + (x^{\kappa})^{\tau}\cdot x^{\kappa-1}\right\}(x - 1)$$

καί ἀντικαθιστῶντες τό x^{κ} διά τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεώς του διά $x^{\kappa} - 1$ δηλ. διά τοῦ 1 φθάνομεν εἰς τό πολυώνυμον

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{\kappa-1})(x - 1) = x^{\kappa} - 1$$

τό ὁποῖον ἀφήνει τό αὐτό ὑπόλοιπον. 'Αλλά τό $x^{\kappa} - 1$ ἀφήνει προφανῶς ὑπόλοιπον μηδέν ὡς πρός διαιρέτην τόν $x^{\kappa} - 1$ ἄρα καί ὁ ἀρχικός διαιρετέος ἀφήνει ὑπόλοιπον μηδέν, δηλαδή διαιρεῖται ἀκριβῶς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

485. 'Εάν α, β, γ θετικοί ἀκέραιοι, δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον $(x^{3\alpha} + x^{3\beta+1} + x^{3\gamma+2})(x - 1)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x^3 - 1$.

486. Νά δειχθῆ ὅτι τό $x^{2\nu}+x^{\nu}+1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ x^2+x+1 ὅταν τό ν εἶναι τῆς μορφῆς $3k\pm 1$ ὅπου k φυσικός ἀριθμός.

487. Νά δειχθῆ ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαῖα συνθήκη ἵνα τό $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x^{\lambda}-\alpha^{\lambda}$ εἶναι τό μ νά διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ λ. (μ,λ φυσικοί).

488. Νά δειχθῆ ὅτι τό $x^{8}+x^{13}+x^{18}+x^{43}$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ x^3+x^2+x+1

489. Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον ἔχον πάντας τούς συντελεστάς του ἀκεραίους, μηδενίζεται διά τινα ἀκεραίαν τιμήν τοῦ x ἔστω $x=k$ τότε ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου διά $x=\lambda$, ὅπου λ τυχών ἀκέραιος, εἶναι ἀριθμός ἀκριβῶς διαιρετός διά $k-\lambda$. Ἐξ αὐτοῦ νά δειχθῆ ὅτι ἄν πολυώνυμον μέ ἀκεραίους συντελεστάς λαμβάνει διά $x=0$ καί $x=1$ ἀριθμητικάς τιμάς περιττάς, τότε τό πολυώνυμον δέν μηδενίζεται δι' οὐδεμίαν ἀκεραίαν τιμήν τοῦ x

490. Νά δειχθῆ ὅτι πᾶν πολυώνυμον βαθμοῦ $\geqslant 3$ δύναται νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν $\varphi(x^3)+x\varphi_1(x^3)+x^2\varphi_2(x^3)$ ὅπου τά $\varphi(t)$ $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ ἐκφράζουν ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρός t. Ἀκολούθως νά δειχθῆ ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου διά $x^3-\alpha$ εἶναι τό $\varphi(\alpha)+x\varphi_1(\alpha)+x^2\varphi_2(\alpha)$. Ἐφαρμόσατε ταῦτα εἰς τό πολυώνυμον $x^8-5x^7+6x^6-x^4+x^3-x^2+12x-1$

114. **Μέγιστος κοινός διαιρέτης δεδομένων πολυωνύμων.** Δοθέντων τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων $A(x)$ καί $B(x)$ καλεῖται κ ο ι ν ό ς δ ι α ι ρ έ τ η ς (Κ.Δ.) αὐτῶν, πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον $\delta(x)$ τό ὁποῖον διαιρεῖ (ἀκριβῶς) καί τό $A(x)$ καί τό $B(x)$. Εἷς κοινός διαιρέτης $\Delta(x)$ τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ λέγεται μ έ γ ι σ τ ο ς κ ο ι ν ό ς δ ι α ι ρ έ τ η ς (Μ.Κ.Δ.) τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ ὅταν δέν ὑπάρχει ἄλλος κοινός διαιρέτης τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ $\Delta(x)$. Ἐάν ὁ $\Delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ καί ὁ $c\Delta(x)$ (ὅπου c σταθερά) εἶναι ἐπίσης ἕνας Μ.Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$. Διότι καί ὁ $c\,\Delta(x)$ ἐπίσης διαιρεῖ ἀκριβῶς τά $A(x)$ καί $B(x)$ καί συγχρόνως εἶναι καί τοῦ μεγίστου δυνατοῦ βαθμοῦ.

Οὕτω π.χ. ὁ x^2-1 διαιρεῖ ἀκριβῶς καί τό x^4-1 καί τό $2x^2-2$· μεγαλυτέρου δέ βαθμοῦ Κ.Δ. δέν δύναται νά ὑπάρξη (διότι δέν θά διήρειτό $2x^2-2$)· ἄρα ὁ x^2-1 εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν

$x^4 - 1$ καί $2x^2 - 2$. Ἐν τούτοις καί ὁ $2(x^2 - 1)$ εἶναι ἐπισης Μ.Κ.Δ. διότι διαιρεῖ ἀκριβῶς καί τό $x^4 - 1$ (δίδων πηλίκον $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$) καί τό $2x^2 - 2$, καί συγχρόνως μεγαλύτερος εἰς βαθμόν ἀπό αὐτόν κοινός διαιρέτης δέν ὑπάρχει. Γενικῶς δέ καί ὁ $c(x^2 - 1)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $x^4 - 1$ καί $2x^2 - 2$, ὅπου c τυχών σταθερός.

Εἰς τά ἑπόμενα, ὅταν ὁμιλοῦμεν περί Μ.Κ.Δ. θά ἐννοοῦμεν ἕνα ὁποιονδήποτε ἐκ τῶν Μ.Κ.Δ. (οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μεταξύ των κατά σταθερόν παράγοντα). Κατά κανόνα θά λαμβάνομεν ἐκεῖνον ὅστις ἔχει τούς ἁπλουστέρους συντελεστάς.

Ὅσα ἐγράφησαν διά τόν Μ.Κ.Δ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν (§7) ἐφαρμόζονται σχεδόν λέξιν πρός λέξιν καί διά τόν Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων πολυωνύμων. Ἤτοι ἰσχύουν τά λήμματα:

Λῆμμα i). «Ἐάν τό ἀκέρ. πολυών. $B(x)$ διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $A(x)$ τότε τό $B(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$»

Ἀπόδειξις. Τό $B(x)$ διαιρεῖ καί τόν ἑατόν του, ἄρα εἶναι Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$. Μεγαλυτέρου δέ βαθμοῦ ἀπό τόν $B(x)$, κοινός διαιρέτης τῶν $A(x)$ καί $B(x)$, δέν ὑπάρχει διότι δέν θά διήρει τό $B(x)$. Ὥστε ὁ $B(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ.

Λῆμμα ii). «Ἐκτελεσθείσης τῆς διαιρέσεως $A(x)$ δια $B(x)$ πᾶς Κ.Δ τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ διαιρεῖ ἀκριβῶς καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $A(x)$ διά τοῦ $B(x)$. Πᾶς δέ κοινός διαιρετης τοῦ ὑπολοίπου καί τοῦ διαιρέτου διαιρεῖ ἀκριβῶς καί τόν διαιρετέον».

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\delta(x)$ ἕνας Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$. Θά εἶναι τότε: $A(x) = \delta(x)\cdot\Pi_1(x)$, $B(x) = \delta(x)\cdot\Pi_2(x)$ ὅπου $\Pi_1(x)$ $\Pi_2(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα. Ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως:

$$A(x) = B(x)\,\Pi(x) + \upsilon(x)$$

δίδει τώρα:

$$\delta(x)\cdot\Pi_1(x) = \delta(x)\cdot\Pi_2(x) + \upsilon(x) \qquad \text{ἤ}$$

$$\upsilon(x) = \delta(x)\cdot\left\{\Pi_1(x) - \Pi_2(x)\right\} \qquad \text{ἤ} \quad \upsilon(x) = \delta(x)\cdot\Pi_3(x)$$

ὅπου $\Pi_3(x) = \Pi_1(x) - \Pi_2(x)$ = ἀκέραιον πολυώνυμον. Ὥστε τό $\upsilon(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $\delta(x)$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί τό δεύτερον μέρος τοῦ λήμματος

Πόρισμα. «Οἱ κοινοί διαιρέται καί ὁ Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων δέν βλάπτονται ἄν τό ἕν ἐξ αὐτῶν ἀντικατασταθῆ διά τοῦ ὑπολοίπου του ὡς πρός τό ἄλλο».

Πράγματι, ἄν $A(x) \equiv B(x)\cdot\Pi(x) + \upsilon(x)$ τότε πᾶς Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ θά εἶναι σύμφωνα μέ τό λῆμμα (ii) καί Κ.Δ. τῶν $B(x)$ καί $\upsilon(x)$ καί ἀντιστρόφως.

Συνεπῶς τά δύο ζεύγη:

$$\{A(x)\ ,\ B(x)\} \quad \text{καί} \quad \{\upsilon(x)\ ,\ B(x)\}$$

ἔχουν τούς αὐτούς κοινούς διαιρέτας· Ἄρα θά ἔχουν καί τόν αὐτόν μέγιστον κοινόν διαιρέτην.

115. ~~Εὐκλείδιος ἀλγόριθμος. Τά λήμματα τῆς~~ προηγουμένης παραγράφου ἐπιτρέπουν τήν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. δι'ἀλλεπαλλήλων διαιρέσεων ἤτοι ἐπιτρέπουν τήν ἐφαρμογήν τοῦ Εὐκλειδίου ἀλγορίθμου (§ 7) εἰς τά ἀκέραια πολυώνυμα.

Ἔστωσαν, πράγματι, δύο ἀκέραια πολυώνυμα $A(x)$ καί $B(x)$ ἐξ ὧν τό πρῶτον ἄς ὑποτεθῆ ὅτι εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἤ ἴσου τοῦ δευτέρου. Πρός εὕρεσις τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ ἐκτελοῦμεν τάς ἑπομένας διαιρέσεις:

$$(1)\qquad \begin{aligned} A(x) &\equiv B(x)\cdot\Pi(x) + \upsilon(x) \\ B(x) &\equiv \upsilon(x)\cdot\Pi_1(x) + \upsilon_1(x) \\ \upsilon(x) &\equiv \upsilon_1(x)\cdot\Pi_2(x) + \upsilon_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \upsilon_{\nu-2}(x) &\equiv \upsilon_{\nu-1}(x)\cdot\Pi_\nu(x) + \upsilon_\nu(x)_{=0} \end{aligned}$$

ὅπου $\upsilon_\nu(x) \equiv 0$

καί ὅπου ἕκαστον ὑπόλοιπον, χρησιμεύει εἰς τήν ἑπομένην διαίρεσιν ὡς διαιρέτης.

Αἱ διαιρέσεις (1) συνεχίζονται ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τήν διαίρεσιν ἐκείνην ἡ ὁποία δίδει ὑπόλοιπον τό μηδενικόν πολυώνυμον. Τοῦτο ὁπωσδήποτε θά συμβῆ διότι οἱ βαθμοί τῶν ὑπολοίπων $υ(x)$, $υ_1(x)$, $υ_2(x)$,... βαίνουν ἐλαττούμενοι καί ἤ θά φθάσωμεν εἰς ἕνα ὑπόλοιπον τό ὁποῖον εἶναι σταθερός ἀριθμός, ὁπότε τό ἑπόμενόν του θά εἶναι τό μηδενικόν πολυώνυμον (διότι τό πολυώνυμον - σταθερά, διαιρεῖ ἀκριβῶς κάθε πολυώνυμον), ἤ θά εὕρωμεν ὑπόλοιπον μηδέν, πρίν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον σταθερόν, δηλ. πρίν ἐξαντλήσωμεν ὅλην τήν σειράν τῶν δυνατῶν διαιρέσεων.

Ἔστω λοιπόν ὅτι ἡ τελευταία τῶν ἀνωτέρω ἀναγραφομένων διαιρέσεων (1) δίδει ὑπόλοιπον μηδέν δηλ. $υ_ν \equiv 0$. Τότε ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. εἶναι τό πολυώνυμον $υ_{ν-1}(x)$, (τό ὁποῖον διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $υ_{ν-2}(x)$).

Διότι, σύμφωνα πρός τό πόρισμα τοῦ λήμματος (ii) ὁ Μ.Κ.Δ. τοῦ ζεύγους $\{A(x), B(x)\}$ εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν Μ.Κ.Δ. τοῦ ζεύγους $\{υ(x), B(x)\}$ καί τοῦτος μέ τόν τοῦ ζεύγους $\{υ(x)$ $υ_1(x)\}$ ...καί τέλος, μέ τόν Μ.Κ.Δ. τοῦ τελευταίου ζεύγους, $\{υ_{ν-2}(x), υ_{ν-1}(x)\}$. Ἐπειδή ὅμως τό $υ_{ν-1}(x)$ διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $υ_{ν-2}(x)$ ἕπεται κατά τό λῆμμα (i) ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τοῦ τελευταίου ζεύγους $\{υ_{ν-2}(x), υ_{ν-1}(x)\}$ εἶναι ὁ $υ_{ν-1}(x)$. Ἑπομένως ὁ $υ_{ν-1}(x)$ εἶναι καί Μ.Κ.Δ. τοῦ ἀρχικοῦ ζεύγους $\{A(x), B(x)\}$. Ἐννοεῖται ὅτι καί πᾶς Κ.Δ. τοῦ πρώτου ζεύγους $\{A(x), B(x)\}$ εἶναι καί Κ.Δ. τοῦ τελευταίου ζεύγους $\{υ_{ν-2}(x), υ_{ν-1}(x)\}$ καί ἀντιστρόφως. Τοῦτο εἶναι φανερόν ἀπό τό πόρισμα τοῦ λήμματος (ii).

Ἰδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ. i) «Πάντες οἱ κοινοί διαιρέται δύο πολυωνύμων εἶναι καί διαιρέται τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν δύο πολυωνύμων καί ἀντιστρόφως».

Δηλαδή ὁ Μ.Κ.Δ. περιέχει ὡς παράγοντας ὅλους τούς Κ.Δ.

τῶν δύο πολυωνύμων.

Διότι ὅπως εἴδομεν κατά τήν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. διά τῶν ταυτοτήτων (1) πᾶς Κ.Δ τοῦ ζεύγους $\{A(x),\ B(x)\}$ εἶναι καί Κ.Δ τοῦ τελευταίου ζευγους $\{\upsilon_{\nu-2}(x),\ \upsilon_{\nu-1}(x)\}$ ἄρα θά διαιρῇ ἀκριβῶς τό $\upsilon_{\nu-1}(x)$ δηλ. τόν Μ.Κ.Δ. Καί ἀντιστρόφως, πᾶς διαιρέτης τοῦ Μ.Κ.Δ. δηλ. τοῦ $\upsilon_{\nu-1}(x)$ εἶναι Κ.Δ τοῦ τελευταίου ζεύγους $\left(\text{διότι } \upsilon_{\nu-2}(x) = \upsilon_{\nu-1}(x)\cdot \Pi_{\nu}(x)\right)$ ἄρα θά εἶναι καί Κ.Δ τοῦ ἀρχικοῦ ζεύγους $\{A(x),\ B(x)\}$

ii) « 'Εάν τά A(x) καί B(x) πολλαπλασιασθοῦν ἀμφότερα ἐπί τό ἀκέραιον πολυώνυμον φ(x) καί ὁ Μ.Κ.Δ. των πολλαπλασιάζεται ἐπί φ(x) ».

Διότι, ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) ἐπί φ(x) λαμβάνομεν τάς ἰσότητας:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
&\varphi(x)\cdot A(x) \equiv \varphi(x)\cdot B(x)\cdot \Pi(x) + \varphi(x)\cdot \upsilon(x)\\
&\varphi(x)\cdot B(x) \equiv \varphi(x)\cdot \upsilon(x)\cdot \Pi_1(x) + \varphi(x)\cdot \upsilon_1(x)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(x)\ \upsilon_{\nu-2}(x) \equiv \varphi(x)\ \upsilon_{\nu-1}(x)\cdot \Pi_{\nu}(x)
\end{aligned}
$$

$\left(\text{διότι } \upsilon_{\nu}(x)\cdot \varphi(x) \equiv 0\right)$.

Αἱ (2) δεικνύουν ὅτι ὁ Εὐκλείδιος ἀλγόριθμος ἐφαρμοζόμενος εἰς τά πολυώνυμα φ(x)·A(x) καί φ(x)·B(x) δίδει ὡς Μ.Κ.Δ τόν $\varphi(x)\cdot \upsilon_{\nu-1}(x)$ δηλ. τόν παλαιόν πολλαπλασιασμένον ἐπί φ(x).

iii) 'Εάν τά A(x) καί B(x) διαιρεθοῦν ἀμφότερα διά τινος Κ.Δ των δ(x) τότε καί ὁ Μ.Κ.Δ. των διαιρεῖται καί αὐτός διά τοῦ δ(x).

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἀκριβῶς, ὅπως τό προηγούμενον· ἀρκεῖ δηλ. νά διαιρέσωμεν τά μέλη τῶν (1) διά τοῦ δ(x) ὁπότε καί ὁ $\upsilon_{\nu-1}(x)$ διαιρεῖται διά δ(x).

Πολυώνυμα σχετικῶς πρῶτα. 'Εάν ὁ Μ.Κ.Δ δύο ἀκερ. πολυωνύμων A(x) καί B(x) εἶναι τό σταθερόν πολυώνυμον (δηλ. σταθερός ἀριθμός), τότε τά A(x) καί B(x) λέγονται σ χ ε τ ι-κ ῶ ς π ρ ῶ τ α ἤ π ρ ῶ τ α π ρ ό ς ἄ λ λ η λ α. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν κατά τήν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ διά τῶν ἰσοτήτων (1) τό προτελευταῖον ὑπόλοιπον $υ_{ν-1}(x)$ εἶναι σταθερός ἀριθμός. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τά A(x) καί B(x) δέν ἔχουν ἄλλους Κ.Δ. ἀπό σταθερούς ἀριθμούς.

Ἐάν Δ(x) εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν A(x) καί B(x) τότε ἄ ν τ ά π ο λ υ ώ ν υ μ α δ ι α ι ρ ε θ ο ῦ ν δ ι ά τ ο ῦ Μ.Κ.Δ τ ω ν, τ ά π ρ ο κ ύ π τ ο ν τ α π η λ ί κ α ε ἶ-ν α ι π ρ ῶ τ α π ρ ό ς ἄ λ λ η λ α. Δηλ. τά πολυώνυμα

$$\frac{A(x)}{\Delta(x)} = A_1(x) \qquad \text{καί} \qquad \frac{B(x)}{\Delta(x)} = B_1(x)$$

θά εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα.

Διότι σύμφωνα μέ τήν ἰδιότητα (iii) τοῦ Μ.Κ.Δ., ὅταν τά A(x) καί B(x) διαιρεθοῦν διά Δ(x) καί ὁ Μ.Κ.Δ. των διαιρεῖται διά τοῦ ἑαυτοῦ του καί καθίσταται μονάς. Συνεπῶς τά $A_1(x)$ καί $B_1(x)$ ἔχουν Μ.Κ.Δ. τόν 1 (ἤ οἱονδήποτε σταθερόν ἀριθμόν c), δηλ. εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα

Ἡ πρακτική ἐφαρμογή τῆς μεθόδου. Ἐπειδή ὁ Μ.Κ.Δ. ὁρίζεται κατά προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος, δηλ. ἄν Δ(x) εἶναι Μ.Κ.Δ. δύο πολυωνύμων καί ὁ cΔ(x) εἶναι πάλιν Μ.Κ.Δ. (c σταθερός ἀριθμός) διά τοῦτο ἄν χρειάζεται, πολλαπλασιάζομεν τό ἕν ἤ ἀμφότερα τά πολυώνυμα ἐπί καταλλήλους σταθερούς ἀριθμους διά νά καταστήσωμεν τάς διαιρέσεις εὐκολωτέρας, ὁπότε καί ὁ Μ.Κ.Δ. πολλαπλασιάζεται ἐπί σταθερόν ἀριθμόν, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν βλάπτει αὐτόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Νά εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $3x^3+2x^2-2x+5$ καί $6x^2-11x-35$».

Λύσις. Πολλαπλασιάζωμεν τό πρῶτον πολυώνυμον ἐπί 2 καί ἐκτελοῦμεν τήν πρώτην διαίρεσιν:

$$
\begin{array}{rrl|l}
 & 6x^3+4x^2-4x+10 & & 6x^2-11x-35 \\
 & -6x^3+11x^2+35x & & x \,\|\, +5 \\
\hline
\upsilon_1 = & 15x^2+31x+10 & & \\
2\upsilon_1 = & 30x^2+62x+20 & & \\
 & -30x^2+55x+175 & & \\
\hline
\upsilon_2 = & +117x+195 & &
\end{array}
$$

Τό πρῶτον μερικόν ὑπόλοιπον υ_1 τῆς διαιρέσεως ταύτης πολλαπλασιάζωμεν ἐπί 2 ὁπότε τό πηλίκον μεταβάλλεται ἐνῶ τό τελικόν ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπί 2, πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν βλάπτει τόν Μ.Κ.Δ. Ἔχομεν λοιπόν τώρα νά εὕρωμεν τόνΜ.Κ.Δ τῶν $6x^2-11x-35$ και $117x+195$. Τό δεύτερον γράφεται $3\cdot 39x+5\cdot 39=39(3x+5)$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά εὕρωμεν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν $6x^2-11x-35$ καί $3x+5$. Ἐκτελουμεν τήν δευτέραν διαίρεσιν:

$$
\begin{array}{r|l}
6x^2-11x-35 & 3x+5 \\
\cline{2-2}
-6x^2-10x & 2x-7 \\
\cline{1-1}
-21x-35 & \\
+21x+35 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Ἐπειδή αὕτη εἶναι τελεία, ἕπεται ὅτι ὁ ζητούμενος Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ $3x+5$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νά εὑρεθῆ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων
$14x^3-9x^2-41x+6$ καί $2x^3+7x^2-10x-24$ ».

Λύσις. Ἐκτελοῦμεν τήν πρώτην διαίρεσιν καί τό ὑπόλοιπον διαιροῦμεν διά -29:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 14x^3-9x^2-41x+6 & 2x^3+7x^2-10x-24 \\
\cline{3-3}
 & -14x^3-49x^2+70x+168 & 7 \\
\cline{2-2}
\upsilon(x) = & -58x^2+29x+174 & \\
-\frac{1}{29}\upsilon(x) = & 2x^2-x-6 &
\end{array}
$$

Ἐκτελοῦμεν κατόπιν τήν δευτέραν διαίρεσιν:

$$
\begin{array}{r|l}
2x^3+7x^2-10x-24 & 2x^2-x-6 \\
\cline{2-2}
-2x^3+x^2+6x & x+4 \\
\cline{1-1}
8x^2-4x-24 & \\
-8x^2+4x+24 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

῾Ο ζητούμενος Μ.Κ.Δ. εἶναι ὁ $2x^2 - x + 6$.

116. **Μ.Κ.Δ. περισσοτέρων τῶν δύο ἀκεραίων πολυωνύμων.** Οἱ κοινοί διαιρέται καί ὁ Μ.Κ.Δ. ὁσωνδήποτε ἀκερ. πολυωνύμων $A(x)$, $B(x)$, $\Gamma(x)$,... ορίζονται ὅπως καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν δύο.

Πρός εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. τριῶν ἀκ. πολυωνύμων $A(x)$, $B(x)$ $\Gamma(x)$ διά τοῦ Εὐκλειδίου ἀλγορίθμου, εὑρίσκομεν πρῶτον τόν Μ.Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ ἔστω τόν $\Delta(x)$ καί κατόπιν τόν Μ.Κ.Δ. τῶν $\Delta(x)$ και $\Gamma(x)$ ἔστω τόν $M(x)$. ῾Ο $M(x)$ διαιρεῖ καίτό $\Gamma(x)$ καί τό $\Delta(x)$, ἄρα καί τό ζεῦγος $A(x)$, $B(x)$. Μεγαλυτέρου δέ βαθμοῦ ἀπό αὐτόν Κ.Δ. δέν δύναται νά ὑπάρξῃ διότι δέν θά διήρειτόν $\Delta(x)$ ἄρα οὔτε τά $A(x)$ καί $B(x)$.

῾Ομοίως, ἡ περίπτωσις τῶν τεσσάρων πολυωνύμων ἀνάγεται εἰς τήν περίπτωσιν τῶν τριῶν, ἀντικαθισταμένων τῶν δύο διά τοῦ Μ.Κ.Δ. των, κ.ο.κ.

Αἱ ἰδιότητες (i), (ii) καί (iii) τοῦ Μ.Κ.Δ ἰσχύουν καί εἰς τήν περίπτωσιν ὁσωνδήποτε ἀκερ. πολυωνύμων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

491. Μέ τήν βοήθειαν τοῦ Μ.Κ.Δ. ν'ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα, ὥστε νά καταστοῦν ἀνάγωγα:

(α) $\dfrac{35x^2 - 3x - 2}{28x^3 - 15x^2 - 19x + 6}$ (β) $\dfrac{24x^3 + 82x^2 - 111x + 27}{12x^3 + 56x^2 + 7x - 9}$

(γ) $\dfrac{2\alpha^2 - 3\alpha\beta - 2\beta^2 + 5\beta - 2}{\alpha^2 - 5\alpha\beta + 6\beta^2 - \alpha + \beta - 2}$

492. Νά εὑρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν πολυωνύμων

$x^6 - 6x^4 + 11x^2 - 342$ καί $x^3 - 3x^2 - 4x + 12$

᾽Ακολούθως δέ νά εὑρεθῇ τό Ε.Κ.Π. τῶν δυο τούτων.

493. Νά γίνουν ὁμώνυμα, μέ κοινόν παρονομαστήν τοῦ ἐλαχίστου δυνατοῦ βαθμοῦ τά κλάσματα

$\dfrac{3x + 8}{20x^2 - 3x - 2}$ καί $\dfrac{3x^2 - 4}{10x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$

494. Ν'ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα

α) $\dfrac{15x^3+17x^2+9x+4}{21x^3+x^2+5x-2}$ β) $\dfrac{20x^3-8x^2+10x-4}{20x^2-3x-2}$

μέ τήν βοήθειαν τοῦ Μ.Κ.Δ.

495. Νά γίνουν ὁμώνυμα τά κλάσματα

$$\frac{x}{6x^4+x^3-39x^2-8x+5} \quad \text{καί} \quad \frac{2-x}{6x^3+x^2-39x-10}$$

ἀλλά μέ κοινόν παρ/στήν τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ.

496. Ν'ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα

$$\frac{|x^4-6x^3+13x^2-12x+4| + |3x^3-7x^2-8x+20| + |3x^3-19x^2+40x-28|}{|x^4-3x^3+2x^2-4x+8| + |49x^4-210x^3+253x^2-60x+4|}$$

497. Ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν $A(x)$ καί $B(x)$ εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν Μ.Κ.Δ. τῶν $c_1A(x) + c_2B(x)$ καί $B(x)$ ὅπου c_1, c_2 τυχόντες σταθεροί ἀριθμοί $\neq 0$.

498. Διά ποίας τιμάς τοῦ α εἶναι ἁπλοποιήσιμον τό κλάσμα

$$\frac{x^3-\alpha x^2+19x-\alpha-4}{x^3-(\alpha+1)x^2+23x-\alpha-7} \quad ;$$

Νά εὑρεθῇ δέ καί ἡ ἁπλουστέρα μορφή του.

499. Δίδονται τά ἀκέραια πολυώνυμα $x^\mu-1$ καί $x^\nu-1$ ὅπου $\mu > \nu > 0$. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν εἶναι τῆς μορφῆς $x^\delta-1$ ὅπου δ εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν μ καί ν.

500. Δείξατε ὅτι τῶν α καί β ὄντων ρητῶν τά πολυώνυμα

$$x^3-3x^2+3x-3 \qquad \text{καί} \qquad x^3-3x^2+\alpha x+\beta^2$$

εἶναι σχετικῶς πρῶτα.

501. Δίδονται τά πολυώνυμα $A(x) = 20x^4+x^2+1$ καί $B(x) = 25x^4+5x^3-x-1$. Νά εὑρεθοῦν τά μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ πολυώνυμα $\Gamma(x)$ καί $\Delta(x)$ διά τά ὁποία ἰσχύει ἡ ταυτότης

$$A(x)\cdot\Gamma(x) + B(x)\cdot\Delta(x) \equiv 0$$

II. ΑΚΕΡΑΙΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ.

117. Πολυώνυμα πολλῶν γραμμάτων. Τά πολυώνυμα, τά ὁποῖα περιέχουν (εἰς τά μονώνυμά των) περισσότερα τοῦ ἑνός μεταβλητά γράμματα εἶναι συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν καί διά τόν λόγον τοῦτον θά παρίστανται μέ τά σύμβολα $\sigma(x,y)$, $\varphi(x,y,z)\ldots$ ὅπου $x, y, z \ldots$ τά μεταβλητά γράμματα τά περιεχόμενα ἐν τῷ πολυωνύμῳ. Οὕτω π.χ. δυνάμεθα νά θέσωμεν

$$3x^2 - 2xy + y^2 - 5x + 1 = \sigma(x,y)$$
$$x^3 + y^2z + xz^2 - 2xy - 7z + 4 = \varphi(x,y,z)$$

Ὁπότε θά εἶναι καί

$$\sigma(y,x) = 3y^2 - 2yx + x^2 - 5y + 1$$
$$\varphi(y,z,x) = y^3 + z^2x + xy^2 - 2yz - 7x + 4$$
$$\varphi(y,x,z) = y^3 + x^2z + yz^2 - 2yx - 7z + 4$$

Κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον δύο μεταβλητῶν γραμμάτων x καί y δύναται νά διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας (ἴδε σελ. 108) δηλ. νά λάβῃ τήν μορφήν

$$(1) \quad \sigma(x,y) = c_0 + c_1x + c_2y + c_3x^2 + c_4xy + c_5y^2 + \ldots.$$

ὅπου $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, \ldots$ εἶναι σταθεροί ἀριθμοί: οἱ σ υ ν τ ε λ ε σ τ α ί τοῦ πολυωνύμου. (Τό δεύτερον μέλος τῆς (1) συγκροτεῖται πρῶτον ἀπό τόν σταθερόν ὅρον, κατόπιν ἀπό τούς πρωτοβαθμίους ὅρους τοῦ πολυωνύμου κατόπιν ἀπό τούς δευτεροβαθμίους κ.ο.κ.).

Ἐπίσης κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον δύο γραμμάτων x καί y δύναται νά διαταχθῇ ὡς πρός x ὁπότε λαμβάνει τήν μορφήν

$$(2) \quad \sigma(x,y) = x^{\mu}\varphi_0(y) + x^{\mu-1}\varphi_1(y) + x^{\mu-2}\varphi_2(y) + \ldots + x\varphi_{\mu-1}(y) + \varphi_{\mu}(y)$$

ὅπου τά $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y),\dots$ παριστοῦν ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρός y. Τοῦτο γίνεται ἄν συλλέξωμεν τούς ὅρους οἱ ὁποῖοι ἐμφανίζουν τόν x εἰς τήν μεγαλυτέραν δύναμιν μ καί μεταξύ αὐτῶν ἐξαγάγωμεν κοινόν παράγοντα τόν x^{μ}, κατόπιν τούς ὅρους οἵτινες ἔχουν κοινόν παράγοντα τόν $x^{\mu-1}$ ... καί τέλος συλλέξωμεν τούς ὅρους οἱ ὁποῖοι δέν περιέχουν τόν x καί οἱ ὁποῖοι ἀπαρτίζουν τόν τελευταῖον προσθετέον $\varphi_\mu(x)$ τοῦ ἀναπτύγματος (2).

Τό αὐτό πολυώνυμον δύναται νά διαταχθῇ καί κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ y δηλ. νά λάβῃ τήν μορφήν

$$\sigma(x,y) = y^{\nu}f_0(x)+y^{\nu-1}f_1(x)+\dots+f_\nu(x)$$

ὅπου $f_0(x)$, $f_1(x),\dots$ ἀκέραια πολυώνυμα.

Ὁμοίως, τυχόν ἀκέραιον πολυώνυμον τριῶν γραμμάτων x,y,z δύναται νά διαταχθῇ εἰς ὁμογενεῖς ὁμάδας:

$$(3)\qquad c_0+c_1x+c_2y+c_3z+c_4x^2+c_5y^2+c_6z^2+c_7xy+c_8xz+c_9yz+\dots$$

ὅπου c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, $c_5\dots$ οἱ (ἀριθμητικοί) συντελεσταί του ἤ δύναται νά διαταχθῇ κατάς τάς κατιούσας δυνάμεις ἑνός γράμματος, π.χ. τοῦ x

$$(4)\qquad x^{\mu}\cdot\sigma_0(y,z)+x^{\mu-1}\cdot\sigma_1(y,z)+x^{\mu-2}\cdot\sigma_2(y,z)+\dots$$

ὅπου $\sigma_0(y,z)$, $\sigma_1(y,z),\dots$ ἀκέραια πολυώνυμα τῶν γραμμάτων y καί z.

Τό **μηδενικόν πολυώνυμον** (ἤ **ἐκ ταυτότητος μηδέν** πολυώνυμον) ὁρίζεται πάλιν ὡς τό ἀκέραιον πολυώνυμον ὁσωνδήποτε γραμμάτων τοῦ ὁποίου πάντες οἱ συντελεσταῖ εἶναι μηδενικοί. Φυσικά, τό μηδενικόν πολυώνυμον ἔχει τιμήν μηδέν οἱασδήποτε τιμάς καί ἄν λάβουν τά μεταβλητά γράμματα αὐτοῦ. Ἐάν $\sigma(x,y,z)$ εἶναι μηδενικόν πολυώνυμον, γράφομεν $\sigma(x,y,z)\equiv 0$. Εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν γράφομεν $\sigma(x,y,z)\not\equiv 0$.

Ἡ ἰ σ ό τ η ς μεταξύ δύο ἀκεραίων πολυωνύμων περιεχόντων τά ἴδια μεταβλητά γράμματα ὁρίζεται ὅπως καί διά τά πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς (§ 103). Δηλαδή δύο ἀκέραια πολυώνυμα λέγονται ἴ σ α (ἤ ἐ κ τ α υ τ ό τ η τ ο ς ἴ σ α) ὅταν σύγκεινται ἀπό ὅμοια μονώνυμα ἔχοντα τούς ἰδίους ἀντιστοίχους ἀριθμητικούς συντελεστάς (δηλ. ὅταν σύγκεινται ἀπό ἴσα μονώνυμα ἤ ὅπερ τό αὐτό, ἔχουν διαφοράν τό μηδενικόν πολυώνυμον). Οὕτω π.χ. τά πολυώνυμα

$$3x^2y - x^3 + 2x - 5y + 1 \quad \text{καί} \quad \alpha x^2y - \beta x^3 + \gamma x + \delta y + \varepsilon$$

θά λέγωνται ἴσα (ἐκ ταυτότητος) μόνον ὅταν

$$\alpha = 3 \;,\; \beta = 1 \;,\; \gamma = 2 \;,\; \delta = -5 \;,\; \varepsilon = 1$$

Θεμελιῶδες θεώρημα: " Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, $y,z,\ldots$ ἔστω τό $\sigma(x,y,z,\ldots)$ μηδενίζεται διά πάσας τάς τιμάς τῶν $x,y,z,\ldots$ αἱ ὁποῖαι δέν μηδενίζουν ἕνα ἄλλο ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z,\ldots) \neq 0$ τότε τό πρῶτον εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ".

Τό θεώρημα τοῦτο εἶναι βασικόν διά τήν θεωρίαν τῆς διαιρετότητος τῶν πολυωνύμων μέ πολλάς μεταβλητάς, ὅπως θά ἴδωμεν εἰς τά ἀμέσως ἑπόμενα.

Ἀπόδειξις τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος.✩ Ἡ ἀπόδειξις γίνεται βαθμηδόν (ἐπαγωγικῶς). Ἄς θεωρήσωμεν πρῶτον ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(x,y)$ δύο μεταβλητῶν x καί y τό ὁποῖον μηδενίζεται δι'ὅλα τά ζεύγη τιμῶν τῶν x καί y τά ὁποῖα δέν μηδενίζουν ἕνα ἄλλο ἀκέρ. πολυώνυμον $\varphi(x,y)$. (Τό $\varphi(x,y)$ ὑποτίθεται φυσικά, ὄχι ἐκ ταυτότητος μηδέν). Γράφομεν τότε τά πολυώνυμα ταῦτα ὑπό τήν μορφήν (2) δηλ.:

$$(3) \qquad \sigma(x,y) = x^{\mu}\varphi_0(y) + x^{\mu-1}\varphi_1(y) + \ldots + x\varphi_{\mu-1}(y) + \varphi_{\mu}(y)$$

$$(4) \qquad \varphi(x,y) = x^{\nu}f_0(y) + x^{\nu_1}f_1(y) + x^{\nu_2}f_2(y) + \ldots.$$

ὅπου $\nu > \nu_1 > \nu_2, \ldots$ καί $f_0(y) \neq 0$, $f_1(y) \neq 0, \ldots$ (Δηλ. εἰς

✩ Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι'ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

τήν (4) δέν ἀναγράφονται αἱ δυνάμεις τοῦ x αἱ ὁποῖαι τυχόν λείπουν ἀπό τό πολυώνυμον $\varphi(x,y)$ ἤτοι αἱ ἔχουσαι συντελεστήν 0).

Ἔστω y_1 τιμή τοῦ y μή μηδενίζουσα τό γινόμενον

(5) $$f_0(y)f_1(y)f_2(y)$$

Θέτομεν τήν τιμήν ταύτην ἀντί τοῦ y εἰς τήν (3) ὁπότε λαμβάνομεν πολυώνυμον ὡς πρός x μόνον, τό

(6) $$x^{\mu}\varphi_0(y_1) + x^{\mu-1}\varphi_1(y_1) + \ldots + \varphi_{\mu}(y_1)$$

Τό (6) ἐξ ὑποθέσεως μηδενίζεται δι'ὅλα τά x τά ὁποῖα λαμβανόμενα ὁμοῦ μέ τό y_1 σχηματίζουν ζεύγη (x, y_1) μή μηδενίζοντα τό (4) δηλαδη τό (6) μηδενίζεται δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ x· συνεπῶς εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ὥστε

(7) $$\varphi_0(y_1) = 0 \quad , \quad \varphi_1(y_1) = 0 \quad , \ldots \quad \varphi_{\mu}(y_1) = 0$$

Αἱ (7) ἰσχύουν διά κάθε y_1 μή μηδενιζον τό (5), δηλαδή ἰσχύουν δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ y_1 ἑκάστη. Ἄρα τά πολυώνυμα $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$,.. $\varphi_{\mu}(y)$ ὡς μηδενιζόμενα ἕκαστον δι' ἀπείρους τιμάς τοῦ y εἶναι ὅλα ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Συνεπῶς καί τό (3) εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν (ἔχει δηλ. ὅλους τούς συντελεστάς του μηδενικούς).

Οὕτω ἐδείχθη τό θεώρημα διά πολυώνυμα δυό μεταβλητῶν γραμμάτων.

Ἔστω τώρα ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(x,y,z)$ τριῶν μεταβλητῶν x,y,z τό ὁποῖον μηδενίζεται δι'ὅλας τάς τριάδας τιμῶν (x, y,z) αἱ ὁποῖαι δέν μηδενίζουν ἕνα ἄλλο ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z) \not\equiv 0$. Γράφομεν τά πολυώνυμα ταῦτα ὑπό τήν μορφήν (4) δηλ.

(8) $$\sigma(x,y,z) = x^{\mu}\varphi_0(y,z) + x^{\mu-1}\varphi_1(y,z) + \ldots + \varphi_{\mu}(y,z)$$

(9) $$\varphi(x,y,z) = x^{\nu}f_0(y,z) + x^{\nu_1}f_1(y,z) + x^{\nu_2}f_2(y,z) + \ldots$$

ὅπου $\nu > \nu_1 > \nu_2 > \ldots$ καί $f_0(y,z) \not\equiv 0$, $f_1(y,z) \not\equiv 0$, $f_2(y,z) \not\equiv 0, \ldots$

Ἔστω (y_1, z_1) ἕνα ζεῦγος τιμῶν τῶν (y,z), μή μηδενίζον τό πολυώνυμον

(10) $$f_0(y,z)f_1(y,z)f_2(y,z)$$

Θέτομεν τάς τιμάς ταύτας y_1, z_1 ἀντί τῶν y καί z εἰς τήν (8) ὁπότε λαμβάνομεν πολυώνυμον ὡς πρός x μόνον, τό

(11) $$x^{\mu}\varphi_0(y_1,z_1) + x^{\mu-1}\varphi_1(y_1,z_1) + \ldots + \varphi_{\mu}(y_1,z_1)$$

Τό (11) μηδενίζεται, ἐξ ὑποθέσεως, δι'ὅλα τά x τά ὁποῖα λαμβανόμενα ὁμοῦ μέ τά y_1 , z ἀποτελοῦν τριάδας (x, y_1, z_1) μή μηδενιζούσας τό (9), δηλαδή τό (11) μηδενίζεται δι'ἀπείρους τιμάς τοῦ x συνεπῶς εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ὥστε θά εἶναι

(12) $\varphi_0(y_1, z_1) = 0 \ , \ \varphi_1(y_1, z_1) = 0 \ , \ldots \ \varphi_\mu(y_1, z_1) = 0$

Αἱ (12) ἰσχύουν, ἑκάστη, δι'ὅλα τά ζεύγη τιμῶν (y_1, z_1) τά μή μηδενίζοντα τό ἀκέρ. πολυών. (10). Ἄρα σύμφωνα μέ τό μέ τό προηγουμένως ἀποδειχθέν, τά πολυώνυμα

$\varphi_0(y, z) \ , \ \varphi_1(y, z), \ldots \ \varphi_\mu(y, z)$

μηδενιζόμενα ἕκαστον δι'ὅλας τάς τιμάς y , z τάς μή μηδενιζούσας τό (10) θά εἶναι ὅλα ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Συνεπῶς καί τό (8) ἔχει πάντας τούς συντελεστάς του μηδενικούς ἤτοι εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν . ὅ.ἔ.δ.

Κατά τόν αὐτόν τρόπον μεταβαίνομεν ἀπό πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν εἰς πολυώνυμα τεσσάρων κ.ο.κ., ἐπαγωγικῶς φθάνομεν εἰς πολυώνυμα ὁσωνδήποτε μεταβλητῶν γραμμάτων.

Πόρισμα 1ον τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος. «Ἐάν τό γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων $\varphi(x,y,z,\ldots)\cdot\sigma(x,y,z,\ldots)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν ἐνῶ τό ἕν ἐξ αὐτῶν δέν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν τότε τό ἄλλο εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν».

Δηλ. ἄν $\quad \varphi(x,y,z,\ldots)\cdot\sigma(x,y,z,\ldots) \equiv 0$

καί $\quad \varphi(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0$

τότε $\quad \sigma(x,y,z,\ldots) \equiv 0$

Διότι ἀφοῦ τό γινόμενον $\varphi(x,y,z,\ldots)\cdot\sigma(x,y,z,\ldots)$ μηδενίζεται δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν x ,y , z,... ἕπεται ὅτι ὁ παράγων $\sigma(x,y,z,\ldots)$ θά μηδενίζεται δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν x, y, z,... αἱ ὁποῖαι δ έ ν μ η δ ε ν ί ζ ο υ ν τό $\varphi(x,y,z,\ldots)$ Ἄρα κατά τό ἀνωτέρω θεώρημα, τό $\sigma(x,y,z,\ldots)$ θά εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Πόρισμα 2ον τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος. «Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(x,y,z,\ldots)$ μηδενίζεται δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν γραμμάτων του x, y , z ,... τότε τό πολυώνυμον ἔχει πάντας τούς συντελεστάς του μηδενικούς».

Συνεπῶς, ἐκτός ἀπό τό μηδενικον πολυώνυμον, δέν ὑπάρχει ἄλλο τό ὁποῖον νά μηδενίζεται δι'ὅλας τάς τιμάς τῶν μεταβλητῶν γραμμάτων του x y z

118. **Διαιρετότης.** Ἡ τελεία διαίρεσις ὁρίζεται και διά τά πολυώνυμα ἑνός γράμματος: « Λέγομεν ὅτι τό ἀκέραιον πολυώνυμον $B(x,y,z,\ldots)$ ὄχι ἐκ ταυτότητος μηδέν διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $A(x,y,z,\ldots)$ ὅταν ὑπάρχει ἀκέραιον πολυώνυμον $\Pi(x,y,z,\ldots)$ τοιοῦτον ὥστε νά ὑφίσταται ἡ ταυτότητς

$$(1) \qquad A(x,y,z,\ldots) \equiv B(x,y,z,\ldots)\cdot\Pi(x,y,z,\ldots)$$

Ἡ (1) γράφεται καί

$$(2) \qquad \frac{A(x,y,z,\ldots)}{B(x,y,z,\ldots)} = \Pi(x,y,z,\ldots)$$

ὅπου $\Pi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι τό πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ $A(x,y,z,\ldots)$ διά $B(x,y,z,\ldots)$

Οὕτω π.χ. τό $x^3+y^3+z^3-3xyz$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x+y+z$ καί δίδει πηλίκον $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$ (ἴδε σελ. 127 VIII) τό δέ $\alpha^3+\beta^3$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$ καί δίδει πηλίκον $\alpha+\beta$.

Ἡ μοναδικότης τοῦ πηλίκου ἐξασφαλίζεται ἀπό τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς §116. Πράγματι, ἄν ὑπῆρχε καί ἄλλο πηλίκον $\Pi_1(x,y,z,\ldots)$ τῆς τελείας διαιρέσεως τοῦ $A(x,y,z,\ldots)$ διά τοῦ $B(x,y,z,\ldots)$ τότε ἐκτός τῆς (1) θά ἴσχυε καί ἡ

$$(3) \qquad A(x,y,z,\ldots) \equiv B(x,y,z,\ldots)\cdot\Pi_1(x,y,z,\ldots)$$

Ἐκ τῶν (1) καί (3) λαμβάνομεν τήν ταυτότητα

$$B(x,y,z,\ldots)\,\Pi(x,y,z,\ldots) \equiv B(x,y,z,\ldots)\,\Pi_1(x,y,z,\ldots)$$

καί ἑπομένως

$$(4) \qquad B(x,y,z,\ldots)\left\{\Pi(x,y,z,\ldots) - \Pi_1(x,y,z,\ldots)\right\} \equiv 0$$

Σύμφωνα μέ τό 1ον Πόρισμα τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος, ἀφοῦ τό $B(x,y,z,\ldots) \not\equiv 0$ ἕπεται ἐκ τῆς (4) ὅτι

$$\Pi(x,y,z,\ldots) - \Pi_1(x,y,z,\ldots) \equiv 0$$

ή $\Pi(x,y,z,\ldots) \equiv \Pi_1(x,y,z,\ldots)$

Δηλαδή ἕν μονον πηλίκον ὑπάρχει.

Θεώρημα Ι. «'Εάν τό ἀκεραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z,\ldots)$ καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν ὅταν εἰς αὐτό τεθῆ ὅπου x τό y τότε τό $\varphi(x,y,z,\ldots)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-y$ · καί ἀντιστρόφως»

'Απόδειξις. 'Εάν διατάξωμεν τό $\varphi(x,y,z,\ldots)$ κατά τάς δυνάμεις τοῦ x καί ἐκτελέσωμεν τήν διαίρεσιν διά $x-y$, θά εὕρωμεν ἕνα πηλίκον $\Pi(x,y,z,\ldots)$ καί ἕνα ὑπόλοιπον βαθμοῦ μηδενικοῦ ὡς πρός x δηλ. μή περιέχον x ἀλλά μόνον τά λοιπά γράμματα $y,z,\ldots$ Θά ἔχωμεν δηλ. ταυτότητα τῆς μορφῆς

$$(5) \qquad \varphi(x,y,z,\ldots) \equiv (x-y)\,\Pi(x,y,z\ldots) + \sigma(y,z\ldots)$$

'Εάν εἰς τήν (5) τεθῆ ὅπου x τό y, τό πρῶτον μέλος καθίσταται (ἐξ ὑποθέσεως) ἐκ ταυτότητος μηδέν καί τό $(x-y)\,\Pi(x,y,z,\ldots)$ ἐπίσης. ῎Αρα τό $\sigma(y,z,\ldots)$ ὡς διαφορά δύο ἐκ ταυτότητος μηδέν πολυωνύμων εἶναι μηδενικόν πολυώνυμον. ῞Ωστε ἡ (5) γράφεται

$$\varphi(x,y,z,\ldots) \equiv (x-y)\,\Pi(x,y,z,\ldots) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Τό ἀντίστροφον εἶναι προφανές.

Θεώρημα ΙΙ. «'Εάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-y$ καί $x-z$ τότε θά διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου $(x-y)(x-z)$»

'Απόδειξις. 'Αφοῦ διαιρεῖται διά $x-y$ θά ἔχωμεν

$$(6) \qquad \varphi(x,y,z) \equiv (x-y)\,\Pi(x,y,z)$$

ὅπου $\Pi(x,y,z)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν x, y, z.

'Εάν εἰς τήν (6) τεθῆ ὅπου x τό z, τό πρῶτον μέλος της καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν (διότι διαιρεῖται διά $x-z$). ἄρα καί τό δεύτερον. Συνεπῶς θά εἶναι

(7) $(z-y)\,\Pi(z,y,z) \equiv 0$

'Επειδή λοιπόν τό γινόμενον $(z-y)\,\Pi(z,y,z)$ είναι ἐκ ταυτοτητος μηδέν ἐνῶ ὁ παράγων $z-y$ δέν εἶναι $\equiv 0$, ἕπεται, κατά τό 1ον πόρισμα τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος τῆς §116, ὅτι ὁ δευτερος παράγων $\Pi(z,y,z)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

'Αφοῦ λοιπόν τό $\Pi(x,y,z)$ καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν ὅταν ὅπου x τεθῆ τό z ἕπεται ὅτι τό $\Pi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-z$ ἤτοι ὅτι

(8) $\Pi(x,y,z) \equiv (x-z)\,\Pi_1(x,y,z)$

ὅπου $\Pi_1(x,y,z)$ ἀκέραιον πολυώνυμον.

'Η (6) λόγω τῆς (8) γίνεται

$$\varphi(x,y,z) \equiv (x-y)(x-z)\,\Pi_1(x,y,z) \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Θεώρημα III. «<u>'Εάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά $x-y$ καί διά $y-z$ καί διά $z-x$ τότε θά διαιρεῖται καί διά τοῦ $(x-y)(y-z)(z-x)$</u>»

'Απόδειξις. 'Επειδή τό $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται καί διά $x-y$ καί διά $y-z$ θά διαιρῆται (σύμφωνα μέ τό προηγούμενον) καί διά $(x-y)(y-z)$. 'Επίσης θά διαιρῆται καί διά $(y-z)(z-x)$ διά τον αὐτόν λόγον. Ὥστε θά ἔχωμεν

(9) $\varphi(x,y,z) \equiv (x-y)(y-z)\cdot\Pi_1(x,y,z) \equiv (y-z)(z-x)\cdot\Pi_2(x,y,z)$

ἑπομενως

(10) $(y-z)\left\{(x-y)\cdot\Pi_1(x,y,z) - (z-x)\Pi_2(x,y,z)\right\} \equiv 0$

'Εκ τῆς (10) ἕπεται ὅτι τό ἐντός τῆς ἀγκύλης πολυώνυμον εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν (διότι ὁ παράγων $y-z$ εἶναι $\not\equiv 0$, ἄρα ἐφαρμόζεται τό πόρισμα τοῦ θεμελιώδους θεωρήματος).

Ὥστε θά ἔχωμεν

$$(x-y)\cdot\Pi_1(x,y,z) - (z-x)\cdot\Pi_2(x,y,z) \equiv 0$$

ή $\quad (x-y)\cdot\Pi_1(x,y,z) \equiv (z-x)\cdot\Pi_2(x,y,z)$

Ἕκαστον τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταυτότητος ἄς ὀνομασθῇ $\sigma(x,y,z)$, ἤτοι

$$\sigma(x,y,z) \equiv (x-y)\,\Pi_1(x,y,z) \equiv (z-x)\,\Pi_2(x,y,z)$$

Βλέπομεν ὅτι τό $\sigma(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά $x-y$ και διά $z-x$, ἄρα θά διαιρῆται καί διά $(x-y)(z-x)$ ἤτοι

(11) $$\sigma(x,y,z) \equiv (x-y)(z-x)\Pi_3(x,y,z)$$

ὅπου $\Pi_3(x,y,z)$ ἀκερ. πολυώνυμον.

Κατά συνέπειαν ἡ (9) δίδει:

$$\varphi(x,y,z) \equiv (y-z)\,\sigma(x,y,z) \equiv (y-z)(x-y)(z-x)\cdot$$

$\Pi_3(x,y,z)$ ὅ.ἔ.δ.

Δι'ἀναλόγου τρόπου ἀποδεικνύεται καί τό

Θεώρημα IV. «Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x+y$, $y+z$, $z+x$ τότε διαιρεῖται καί διά τοῦ $(x+y)(y+z)(z+x)$».

Ἐννοεῖται ὅτι τά προηγούμενα θεωρήματα ἰσχύουν καί ἄν ὁ διαιρετέος $\varphi(x,y,z)$ περιέχει ἐκτός τῶν γραμμάτων x,y,z καί ἄλλα μεταβλητά γράμματα· αἱ ἀποδειξεις παραμένουν ἀναλλοίωτοι.

119. Συμμετρικά πολυώνυμα. Τά ἀκέραια πολυώνυμα τά ὁποῖα δέν βλάπτονται δια κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων των (ἴδε § 66) καλοῦνται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ά (ἤ κυκλικά).

Π.χ. συμμετρικά πολυώνυμα ὡς πρός δύο γράμματα x,y εἶναι τα

$$x+y+1\,,\quad xy+7x+7y-5\,,\quad x^3+y^3+5x^2y+5xy^2+6x+6y$$

Ταῦτα παραμένουν ἀμετάβλητα δι'εναλλαγῆς (κυκλικῆς τροπῆς) τῶν γραμμάτων x καί y

Πολυώνυμα συμμετρικά ὡς πρός τρία γράμματα x, y, z εἶναι:

~~1ον) Πρωτοβάθμια:~~ μόνον τῆς μορφῆς

$$k(x+y+z)+\lambda$$

ὅπου k, λ σταθεραί, $k \neq 0$

2ον) Δευτεροβάθμια: μόνον τῆς μορφῆς

$$k(x^2+y^2+z^2)+\lambda(xy+yz+zx)+\mu(x+y+z)+\nu$$

ὅπου k, λ, μ, ν σταθεροί ἀριθμοί.

3ον) Τριτοβάθμια: μόνον τῆς μορφῆς

$$k(x^3+y^3+z^3)+\lambda(x^2y+x^2z+xy^2+zy^2+xz^2+yz^2)+$$
$$+\mu xyz+\nu(x^2+y^2+z^2)+\rho(xy+yz+zx)+\sigma(x+y+z)+\tau$$

ὅπου $k, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$, σταθεραί.

Ἄς ἀποδείξωμεν τό 2ον) ἐκ τῶν ἀνωτέρω:

Πᾶν πολυώνυμον 2ον βαθμοῦ ὡς πρός x, y, z εἶναι τῆς μορφῆς

$$(1) \quad Ax^2+By^2+\Gamma z^2+\Delta xy+Exz+Hzy+\Theta x+Iy+Mz+N$$

(ὅπου $A, B, \Gamma \ldots$ οἱ συντελεσταί του ὄχι ὅλοι ὑποχρεωτικῶς $\neq 0$)

Διά κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων x, y, z τό πολυώνυμον τοῦτο μετατρέπεται εἰς τό

$$(2) \quad Ay^2+Bz^2+\Gamma x^2+\Delta yz+Eyx+Hxz+\Theta y+Iz+Mx+N$$

τό ὁποῖον ἐν γένει εἶναι διάφορον τοῦ ἀρχικοῦ. Ἵνα διά τῆς κυκλικῆς μετατροπῆς τό πολυώνυμον παραμείνη ἀναλλοίωτον πρέπει τά (1) καί (2) νά εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα (δηλ. νά συμφωνοῦν ὅρον πρός ὅρον) ἤτοι νά εἶναι

$Ay^2 = By^2$, $Bz^2 = \Gamma z^2$, $\Gamma x^2 = Ax^2$ ἐξ ὧν, $A = B = \Gamma$. Ἐπίσης, $\Delta yz = Hzx$, $Eyx = \Delta xy$, $Hxz = Exz$, ἐξ ὧν, $\Delta = H = E$. Τέλος πρέπει $\Theta y = Iy$, $Iz = Mz$, $Mx = \Theta x$ δηλ. $\Theta = I = M$.

Θέτοντες δέ $A = B = \Gamma = k$, $\Delta = E = H = \lambda$ καί $\Theta = I = M = \mu$ εὑρίσκομεν ὅτι τό θεωρούμενον πολυώνυμον (1) πρέπει νά εἶναι κατ' ἀνάγκην τῆς μορφῆς

$$k^2(x^2+y^2+z^2) + \lambda(xy+xz+zy) + \mu(x+y+z) + N$$

διά νά εἶναι συμμετρικόν.

Κατ'ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκονται αἱ γενικαί μορφαί τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων 1ου καί 3ου βαθμοῦ τάς ὁποίας ἀνεγράψαμεν ἀνωτέρω.

Θεώρημα Ι. «'Εάν εἰς τελείαν διαιρέσιν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι συμμετρικά πολυώνυμα, τότε καί τό πηλίκον εἶναι συμμετρικόν πολυώνυμον».

'Απόδειξις. 'Εάν εἰς τήν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως

$$A(x,y,z) \equiv B(x,y,z)\, \Pi(x,y,z)$$

ἐκτελεσθῆ κυκλική μετατροπή τῶν γραμμάτων, θά προκύψη μία νέα ταυτότης:

$$A(y,z,x) \equiv B(y,z,x)\cdot \Pi(y,z,x)$$

εἰς τήν ὁποίαν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης παρέμειναν ἀμετάβλητοι. Διότι οὗτοι εἶναι συμμετρικά πολυώνυμα καί δέν βλάπτονται διά τῆς κυκλικῆς μετατροπῆς τῶν γραμμάτων, Συνεπῶς καί τό πηλίκον παραμένει διά τῆς κυκλικῆς μετατροπῆς, τό αὐτό. ("Αλλως θά εἴχωμεν δύο διαφορετικά πηλίκα). "Ωστε

$$\Pi(y,z,x) \equiv \Pi(x,y,z)$$

δηλ. τό $\Pi(x,y,z)$ εἶναι κατ'ἀνάγκην συμμετρικόν πολυώνυμον.

Θεώρημα ΙΙ, «'Εάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός τά γράμματα x, y, z καί διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τυχόντος πολυωνυμου $\sigma(x,y,z)$ τότε θά διαιρῆται ἀκριβῶς καί διά τῶν κυκλικῶν πρός τό $\sigma(x,y,z)$ παραστάσεων: $\sigma(y,z,x)$, καί $\sigma(z,x,y)$»

'Απόδειξις. Διότι, θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα

(1) $\varphi(x,y,z) \equiv \sigma(x,y,z)\, \Pi(x,y,z)$

ἐάν δέ εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ταυτότητος ἐκτελέσωμεν κυκλικήν μετατροπήν, τό πρῶτον μέλος δέν βλάπτεται διότι εἶναι συμμετρική παράστασις τῶν x,y,z ἐνῶ τό δεύτερον μέλος γίνεται $\sigma(y,z,x)\cdot\Pi(y,z,x)$. Ἐπομένως διά τῆς κυκλικῆς μετατροπῆς, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1) τήν ταυτότητα

$$(2) \qquad \varphi(x,y,z) \equiv \sigma(y,z,x)\,\Pi(y,z,x)$$

ἥτις δεικνύει ὅτι τό $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $\sigma(y,z,x)$. Διά νέας κυκλικῆς μετατροπῆς ἀποδεικνύεται ὅτι τό $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται καί διά $\sigma(z,x,y)$.

Θεώρημα III. «Ἐάν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός x, y, z καί διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $x-y$ τότε θά διαιρῆται ἀκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$. Ἐάν δέ τό $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται διά $x+y$ τότε θά διαιρῆται καί διά $(x+y)(y+z)(z+x)$».

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ τό συμμετρικόν πολυώνυμον $\varphi(x,y,z)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-y$, ἕπεται κατά τό θεώρ. II ὅτι θά διαιρῆται ἀκριβῶς καί διά τῶν κυκλικῶν πρός τό $x-y$ παραστάσεων, ἤτοι τῶν $y-z$ καί $z-x$. Ἐπομένως θά διαιρῆται ἀκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου $(x-y)(y-z)(z-x)$ σύμφωνα πρός τό Θεώρημα III τῆς § 118.

Ὁμοίως γίνεται φανερόν καί τό δεύτερον μέρος τοῦ Θεωρήματος.

120. Τά στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα. Ἐάν θεωρήσωμεν ν μεταβλητάς $x_1, x_2, x_3 \cdots x_\nu$ τότε τό ἄθροισμα αὐτῶν $S_1 = x_1+x_2+\ldots+x_\nu$, τό ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνά δύο τῶν μεταβλητῶν τούτων δηλ. τό

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_1x_\nu + x_2x_3 + \ldots + x_2x_\nu + x_3x_4 + \ldots ,$$

τό ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνά τρεῖς:

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_1x_2x_\nu + x_2x_3x_4 + \ldots$$

κ.ο.κ. καί τέλος τό γινόμενον ὅλων:

$$S_\nu = x_1 x_2 x_3 \ldots x_\nu$$

εἶναι ὅλα, πολυώνυμα (πρώτου, δευτέρου, τρίτου,...νυοστοῦ βαθμοῦ) συμμετρικά ὡς πρός $x_1 x_2 x_3$ x_ν καί καλοῦνται **στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα** τῶν **μεταβλητῶν** $x_1 x_2 x_3 \ldots x_\nu$.

Οὕτω π.χ. τά στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα δύο μεταβλητῶν x, y εἶναι τά

$$x + y \quad \text{καί} \quad xy$$

Τά στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα τριῶν μεταβλητῶν x, y, z εἶναι τά:

$$x + y + z, \quad xy + xz + yz, \quad xyz$$

Τεσσάρων μεταβλητῶν εἶναι τά

$$x + y + z + \omega, \quad xy + xz + x\omega + yz + y\omega + z\omega,$$

$$xyz + xy\omega + yz\omega + xz\omega \quad \text{καί τό} \quad xyz\omega$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι: «τυχόν συμμετρικόν ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νά ἐκφρασθῆ πάντοτε συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων*».

Οὕτω π.χ. τό συμμετρικόν πολυώνυμον

$$x^3 + y^3 + 2xy^2 + 2x^2y + 3(x^2 + y^2)$$

γραφεται:

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) + 2xy(x + y) + 3(x + y)^2 - 6xy$$

ἐκφραζόμενον συναρτήσει μόνον τῶν $x + y$ καί xy.

Ὡς **δεύτερον παράδειγμα** ἅς λάβωμεν τό ἑξῆς: Δίδεται τό συμμετρικόν πολυώνυμον τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν x_1, x_2, x_3, x_4

$$f = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$$

Ζητεῖται νά ἐκφρασθῆ τό f συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν

---

* Ἀπόδειξις τούτου ὑπάρχει εἰς τό βιβλίον τοῦ S. Borofsky " Elementary theorie of equations" σελ. 182

συμμετρικῶν πολυωνύμων $S_1 = x_1+x_2+x_3+x_4$, $S_2 = x_1x_2+x_1x_3+$ $+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$ καί $S_3 = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4$

Λύσις. Μετασχηματίζομεν πρῶτον τό f βάσει τῆς γνωστῆς ταυτότητος (σελ. 127, IV).

$$f \equiv (x_1+x_2)^3+(x_3+x_4)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)-3x_3x_4(x_3+x_4) =$$
$$=(x_1+x_2+x_3+x_4)^3-3(x_1+x_2)(x_3+x_4)(x_1+x_2+x_3+x_4)-$$
$$-3x_1x_2(x_1+x_2)-3x_3x_4(x_3+x_4).$$

Ἐπειδή $(x_1+x_2)(x_3+x_4) = S_2-x_1x_2-x_3x_4$ λαμβάνομεν

$$f \equiv S_1^3-3(S_2-x_1x_2-x_3x_4)S_1-3x_1x_2(S_1-x_3-x_4)-3x_3x_4(S_1-x_1-x_2)=$$
$$=S_1^3-3S_1S_2+3S_1(x_1x_2+x_3x_4)-3S_1(x_1x_2+x_3x_4)+$$
$$+3(x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_3x_4x_1+x_3x_4x_2)=$$
$$=S_1^3-3S_1S_2+3S_3.$$ Ὥστε $f \equiv S_1^3-3S_1S_2+3S_3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

502. Τό ἄθροισμα καί τό γινόμενον δύο συμμετρικῶν πολυωνύμων ὡς πρός $x, y, z, \ldots$ εἶναι ἐπίσης συμμετρικόν πολυώνυμον.

503. Ἐάν x καί y ἀνεξάρτητοι μεταβληταί καί $\varphi(x)$, $\sigma(y)$ ἀκέρ. πολυώνυμα πληροῦντα τήν σχέσιν
$$\varphi(x)-\sigma(y)\equiv 0$$
τότε καί $\varphi(x)\equiv c$ καί $\sigma(y)\equiv c$ ὅπου c σταθερά. (Δηλ. τά $\varphi(x)$ $\sigma(y)$ εἶναι σταθερά πολυώνυμα).

504. Ἐάν τό ἀκερ. πολυώνυμον $\sigma(x,y)+\varphi(z)$ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός x, y, z τότε τό $\sigma(x,y)\equiv\varphi(x)+\varphi(y)+c$ ὅπου c σταθερά.

505. Ἐάν συμμετρικόν πολυώνυμον ὡς πρός $x, y, z, \ldots$ εἶναι μ βαθμοῦ ὡς πρός x τότε θά εἶναι μ βαθμοῦ καί ὡς πρός ἑκάστην τῶν λοιπῶν μεταβλητῶν $y, z, \ldots$

506. Νά ἐκφρασθῇ τό πολυώνυμον $f \equiv x_1^3+x_2^3+x_3^3$ συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων $S_1 = x_1+x_2+x_3$, $S_2 = x\,x+$ $+x_1x_3+x_2x_3$, $S_3 = x_1x_2x_3$

507. Νά δειχθῇ ἡ ταυτότης

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\ldots\ldots(x-x_\nu)\equiv x^\nu-S_1x^{\nu-1}+S_2x^{\nu-2}-S_3x^{\nu-3}\ldots+(-1)^\nu S_\nu$$

ὅπου $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_\nu$ τά στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα τῶν γραμμάτων $x_1, x_2, x_3 \ldots x_\nu$

507* Ἐφαρμόσατε τήν ταυτότητα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως διά

$\nu = 4$ καί θέσατε ἀκολούθως ἀντί τοῦ x διαδοχικῶς x_1, x_2, x_3 x_4. Τῇ βοηθείᾳ τῶν προκυπτουσῶν ταυτοτήτων καί τοῦ 2ου παραδείγματος τῆς § 120 ἐκφράσατε τό πολυώνυμον $x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4$ συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων S_1, S_2, S_3, S_4 τῶν τεσσάρων μεταβλητῶν

508. Νά ἐκφρασθῇ τό $x_1^4+x_2^4+x_3^4$ συναρτήσει τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων S_1, S_2, S_3 τῶν τριῶν γραμμάτων x_1, x_2, x_3

509. Ὅμοιον ζήτημα διά τό πολυώνυμον

$$(x_1+x_2-x_3)(x_1+x_3-x_2)(x_2+x_3-x_1)$$

510. Νά ἐκφρασθῇ διά τῶν στοιχειωδῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων τό: $x^2y^2z^2+x^2y^2\omega^2+x^2z^2\omega^2+y^2z^2\omega^2$

511. Νά ἐκφρασθῇ τό $f\equiv x^3+y^3$ συναρτήσει τῶν $f_1\equiv x+y+1$ καί $f_2\equiv xy-x-y$

512. Νά ἐκφρασθῇ τό $f\equiv x^3+y^3$ συναρτήσει τῶν $f_1\equiv x+y$ καί $f_2\equiv x^2+y^2$

513. Νά ἐκφρασθῇ τό $f\equiv xyz$ συναρτήσει τῶν $f_1 = x+y+z-1$ $f_2\equiv xy+yz+zx$ καί $f_3\equiv x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y$

121. Ὁμογενῆ πολυώνυμα. Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρός τά γράμματα x, y, z, ... λέγεται ὁ μ ο γ ε ν έ ς, ὅταν πάντες οἱ ὅροι του (δηλ. τά μονώνυμα ἐξ ὧν σύγκειται) εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα ταῦτα.

Οὕτω π.χ. τό πολυώνυμον

$$\alpha^3\beta+2\alpha\beta^3+3\beta^4$$

εἶναι ὁμογενές, τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρός α καί β. Τό xy^2+z^3 εἶναι ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός τά x, y, z ἐνῷ τό x^2-xy+y^2+2y δέν εἶναι ὁμογενές πολυώνυμον.

Ἔστω $cx^\mu y^\nu z^\rho$ μονώνυμον βαθμοῦ $\mu+\nu+\rho=k$. Ἐάν τά x, y, z πολλαπλασιασθοῦν τό καθέν ἐπί τυχόντα ἀριθμόν λ τό μονώνυμον γίνεται

$$c(\lambda x)^\mu(\lambda y)^\nu(\lambda z)^\rho = cx^\mu y^\nu z^\rho\cdot\lambda^{\mu+\nu+\rho} = cx^\mu y^\nu z^\rho\cdot\lambda^k$$

δηλ. πολλαπλασιάζεται ἐπί λ^k. Ἐάν λοιπόν πολυώνυμον τῶν x, y, z σύγκειται ἀπό μονώνυμα k βαθμοῦ καί θέσωμεν εἰς αὐτό ὅπου x, y, z ἀντιστοίχως: λx, λy, λz τότε ὅλα τά μονώνυμα πολλαπλασιάζονται ἐπί λ^{κ} συνεπῶς καί τό πολυώνυμον. Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι ἄν πολυώνυμον $\varphi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι ὁμογενές βαθμοῦ k καί λ τυχών ἀριθμός, τότε θά πληροῦται ἡ σχέσις

(1) $\varphi(\lambda x,\ \lambda y,\ \lambda z,\ldots) \equiv \lambda^{\kappa}\varphi(x,y,z,\ldots)$

Θεώρημα Ι. « Τό γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ὁμογενές ».

Ἀπόδειξις. Ἕκαστος ὅρος (μονωνυμον) τοῦ γινομένου προέρχεται ἐκ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός ὅρου τοῦ πρώτου πολυωνυμου ἐπί ἕνα ὅρον τοῦ δευτέρου, ἄρα εἶναι βαθμοῦ ἴσου πρός τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο τούτων ὅρων. Συνεπῶς πάντες οἱ ὅροι τοῦ γινομένου εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ (ἴσου πρός τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν δύο πολυωνύμων).

Θεώρημα ΙΙ. «Εἰς τήν περίπτωσιν τελείας διαιρέσεως, ἄν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι ὁμογενῆ ἀκέραια πολυώνυμα, τότε καί τό πηλίκον εἶναι πολυώνυμον ὁμογενές ».

Ἀπόδειξις. Θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως

(1) $A(x,y,z,\ldots) \equiv B(x,y,z,\ldots)\ \Pi(x,y,z,\ldots)$

ὅπου Α καί Β ὁμογενῆ. Ἐάν τό πηλίκον Π δέν ἦτο ὁμογενές δηλ. εἶχε ὅρους ἀνίσου βαθμοῦ τότε καί τό γινόμενον $B(x,y,z,\ldots)\cdot\Pi(x,y,z,\ldots)$ θά εἶχεν ὅρους ἀνίσου βαθμοῦ. Διότι πάντες οἱ ὅροι τοῦ $B(x,y,z,\ldots)$ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, πολλαπλασιαζόμενοι δέ μέ τούς ὅρους τοῦ $\Pi(x,y,z,\ldots)$ οἵτινες θά ἦσαν ἀνίσου βαθμοῦ θά ἔδιδον ὡς ἐξαγόμενον, πολυώνυμον μέ ἀνισοβαθμίους ὅρους δηλ. μή ὁμογενές. Ὥστε τό $A(x,y,z,\ldots)$ δέν θά ἦτο ὁμογενές, πρᾶγμα ἀντιβαῖνον πρός τήν ὑπόθεσιν. Συνεπῶς τό $\Pi(x,y,z,\ldots)$ εἶναι ὁμογενές.

122. Πολυώνυμα συμμετρικά καί ὁμογενῆ. Εἰς πολλά ζητήματα ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ παρουσιάζονται ἀκέραια πολυώνυμα ἔχοντα συγχρόνως τήν ἰδιότητα τῆς συμμετρίας καί τήν ἰδιότητα τῆς

ὁμογενείας. Τοιαῦτα πολυώνυμα, συμμετρικά καί ὁμογενῆ ὡς πρός τρία γράμματα x, y, z δυνάμεθα νά λάβωμεν ἄν ἀπό τά συμμετρικά πολυώνυμα τῆς § 118 παραλείψωμεν τούς ὅρους ἐκείνους οἱ ὁποῖοι καταστρέφουν τήν ὁμογένειαν. Ἔτσι εὑρίσκομεν ὅτι τ ά μ ό ν α π ο λ υ ώ ν υ μ α ὁ μ ο γ ε ν ῆ κ α ί σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ά ὡς πρός τρία γράμματα x, y, z εἶναι:

1ον) Πρωτοβάθμια: τά τῆς μορφῆς $k(x+y+z)$

2ον) Δευτεροβάθμια: $k(x^2+y^2+z^2)+\lambda(xy+yz+zx)$

3ον) Τριτοβάθμια: $k(x^3+y^3+z^3)+\lambda(x^2y+x^2z+y^2x+$
$+y^2z+z^2x+z^2y)+\mu xyz$

ὅπου k, λ, μ σταθεροί ἀριθμοί.

Ἐπίσης, ὅλα τά στοιχειώδη συμμετρικά πολυώνυμα τῆς §120 εἶναι συγχρόνως συμμετρικά καί ὁμογενῆ.

Μέ χρῆσιν τῶν θεωρημάτων τῶν δύο προηγουμένων § δυνάμεθα πολλάκις νά μετατρέπωμεν ταχέως εἰς γινόμενα παραγόντων διάφορα συμμετρικά καί ὁμογενῆ πολυώνυμα, ὅπως γίνεται φανερόν ἀπό τά κάτωθι παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Νά τραπῆ εἰς γινόμενον παραγόντων τό πολυώνυμον $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$».

Λύσις. Ἀναζητοῦμεν πρῶτον, ἕνα διαιρέτην τοῦ δεδομένου πολυωνύμου. Πρός τοῦτο δοκιμάζωμεν συνήθως ἄν διαιρεῖται διά τοῦ $\alpha-\beta$ ἤ $\alpha+\beta$ ἤ διά τοῦ α. Διά τήν πρώτην δοκιμήν θέτομεν ἐν τῷ πολυωνύμῳ ὅπου α τό β. Εὑρίσκομεν τότε

$$\beta^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\beta)+\gamma^2(\beta-\beta)\equiv 0$$

Ἄρα (Θεώρ. I, §118) διαιρεῖται διά $\alpha-\beta$. Ἐπειδή τό δοθέν πολυώνυμον εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός α, β, γ ἕπεται ὅτι θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ (Θεώρ. III, § 118). Ὥστε θά εἶναι:

$$(1)\quad \alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)\equiv(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\Pi$$

Ἐπειδή διαιρετέος καί διαιρέτης εἶναι τρίτου βαθμοῦ ἕκαστος, ἕπεται ὅτι τό πηλίκον Π θά εἶναι σταθερός ἀριθμός (δηλ. μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός α,β,γ).
Πρός εὕρεσιν τοῦ Π δίδομεν εἰς τά γράμματα α, β γ ἀριθμητικάς

τιμάς, π.χ. $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = 2$ ὁπότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τήν ἀριθμητικήν ἰσότητα

$$0(1-2) + 1(2-0) + 4(0-1) = (0-1)(1-2)(2-0)\Pi \,, \quad \text{ἤ}$$

$$-2 = 2\Pi \quad \text{καί} \quad \Pi = -1.$$

Οὕτω ἡ (1) γίνεται:

$$(2) \quad \alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta) \equiv -(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

Σημείωσις. Διά νά ἐλέγξωμεν ἄν τό πολυώνυμον διαιρεῖται διά $\alpha+\beta$ θέτομεν ἐν αὐτῷ ὅπου α τό $-\beta$ καί ἄν μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος, τότε θά διαιρῆται διά $\alpha+\beta$. Διά νά ἐλέγξωμεν ἄν διαιρεῖται διά α θέτομεν $\alpha = 0$ καί ἄν προκύπτει ἐξαγόμενον ἐκ ταυτότητος μηδέν, τότε διαιρεῖται διά α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. «Ν'ἁπλοποιηθῆ ἡ παράστασις

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma) \equiv (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha) - \beta\gamma(\beta+\gamma) - \gamma\alpha(\alpha+\gamma) - \alpha\beta(\alpha+\beta)\text{»}$$

Λύσις. Ἐάν θέσωμεν ἐν τῇ παραστάσει, $\alpha = 0$ αὕτη καθίσταται $\beta(\beta + \gamma)\cdot\gamma - \beta\gamma(\beta + \gamma)$ δηλ. ἐκ ταυτότητος μηδέν.

Ἐκ τούτου συνάγομεν ὅτι διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ $\alpha - 0 = \alpha$.

Ἐπειδή δέ ἡ παράστασις εἶναι συμμετρική θά διαιρῆται καί διά τοῦ β καί διά τοῦ γ, ἄρα καί διά τοῦ $\alpha\beta\gamma$. Ὥστε θά εἶναι

$$(3) \qquad \varphi(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \alpha\beta\gamma\cdot\Pi$$

ὅπου τό πηλίκον θά εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός α,β,γ (διότι τό $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ εἶναι 3ου βαθμοῦ), δηλ. σταθερός ἀριθμός. Πρός καθορισμόν τοῦ Π θέτομεν εἰς τήν (3) ἀντί τῶν α,β,γ ἀντιστοίχως ὡρισμένας ἀριθμητικάς τιμάς, λ.χ. $\alpha = 1$ $\beta = 1$ $\gamma = 1$ ὁπότε λαμβάνομεν ἐκ τῆς (3):

$$(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) - 2 - 2 - 2 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \Pi$$

ἤτοι $\qquad 8 - 6 = \Pi \quad , \quad \Pi = 2$

Συνεπῶς ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοδυναμεῖ πρός τήν $2\alpha\beta\gamma$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. «Νά γίνη γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις $(\beta^3 + \gamma^3)(\beta - \gamma) + (\gamma^3 + \alpha^3)(\gamma - \alpha) + (\alpha^3 + \beta^3)(\alpha - \beta)$»

Λύσις. Θέτοντες εἰς τήν δοθεῖσαν ὅπου α τό β βλέπομεν ὅτι αὕτη καθίσταται ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ἄρα διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $\alpha - \beta$. Ἐπειδή δέ εἶναι συμμετρική θά διαιρεῖται καί διά $\beta - \gamma$ καί διά $\gamma - \alpha$ ἄρα καί διά τοῦ γινομένου $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$. Ἐάν λοιπόν παραστήσωμεν διά τοῦ k τήν παράστασιν θά εἶναι

$$k \equiv (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)\cdot\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$$

ὅπου τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως θά εἶναι κατ'ἀνάγκην πρωτοβάθμιον πολυώνυμον ὡς πρός α,β,γ διότι ὁ διαιρετέος k εἶναι 4ου βαθμοῦ καί ὁ διαιρέτης $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$ εἶναι 3ου. Ἐκτός τούτου, ἐπειδή διαιρετέος καί διαιρέτης εἶναι συμμετρικά καί ὁμογενῆ πολυώνυμα καί τό πηλίκον $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$ θά εἶναι συμμετρικόν καί ὁμογενές (Θεώρ. I, §118 καί θεώρ. II, §120). Ἄρα τό $\Pi(\alpha,\beta,\gamma)$ θά εἶναι τῆς μορφῆς $\lambda(\alpha+\beta+\gamma)$ (Ἴδε εἰς τήν ἀρχήν τῆς παρούσης §).

Ὥστε θά ἔχωμεν τήν $k \equiv (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\cdot\lambda(\alpha+\beta+\gamma)$.

Ἐπομένως διά νά ὁρισθῆ τό πηλίκον ἀρκεῖ νά εὑρεθῆ ὁ ἀριθμητικός συντελεστής λ. Πρός εὕρεσιν τούτου θέτομεν εἰς τήν ταυτότητα

$$k \equiv (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\,\lambda(\alpha+\beta+\gamma)$$

ἀντί τοῦ α,β,γ, ἀριθμητικάς τιμάς π.χ. $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma=2$ ὁπότε ὅπως εἰς τά προηγούμενα παραδείγματα εὑρίσκομεν τό λ. Ἐνταῦθα εὑρίσκεται $\lambda = 1$ και ἡ δοθεῖσα παράστασις μετατρέπεται εἰς γινόμενον τεσσάρων παραγόντων:

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. «Νά γίνη γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις: $\alpha(\beta^4 - \gamma^4) + \beta(\gamma^4 - \alpha^4) + \gamma(\alpha^4 - \beta^4)$

Λύσις: Εὑρίσκομεν καί πάλιν ὅτι ἡ παράστασις διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$, Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης θά εἶναι πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός α,β,γ, ὁμογενές καί συμμετρικόν. Ἄρα θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$k(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \lambda(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)$$

Θά ἰσχύη λοιπόν ἡ ταυτότης

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4) + \beta(\gamma^4-\alpha^4) + \gamma(\alpha^4-\beta^4) \equiv (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\cdot\left\{k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) + \lambda(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\right\}$$

ὅπου k,λ προσδιοριστέοι ἀριθμητικοί συντελεσταί.

Θέτοντες $\alpha = 0$ $\beta = 1$ $\gamma = -1$ εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀνωτέρω ταυτότητος εὑρίσκομεν

$$1 = 2k - \lambda \tag{4}$$

Θέτοντες δέ ἀκολούθως $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 2$ εὑρίσκομεν

$$-5 = -6k + \lambda \tag{5}$$

'Εκ τῶν δύο σχέσεων (4) καί (5) προσδιορίζομεν τά k καί λ: Προσθέτοντες αὐτάς κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$-4 = -4k \quad \text{δηλ.} \quad k = 1 \quad \text{καί κατόπιν} \quad \lambda = 1$$

Οὕτω δημιουργεῖται ἡ ταυτότης

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4) \equiv$$

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

514. 'Εάν τό ἀκέρ. πολυώνυμον $\sigma(x,y,z)$ μηδενίζεται ἐκ ταυτότητος διά $x=0$ καί $y=0$ καί διά $z=0$ τότε διαιρεῖται ἀκριβῶς διά xyz.

515. 'Εάν ἀκερ. πολυώνυμον μηδενίζεται διά $x=0$ παραμένει δέ ἀμετάβλητον ἄν ὅπου x τεθῇ $-x$ τότε τό πολυώνυμον διαιρεῖται διά x^2. 'Εάν δέ εἶναι καί συμμετρικόν ὡς πρός $x, y, z, \ldots,$ τότε θά διαιρῆται καί διά $x^2y^2z^2$

516. 'Εάν τό ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(x,y)$ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός x καί y καί διαιρεῖται διά $x-y$ δείξατε ὅτι τότε θά διαιρῆται καί διά $(x-y)^2$

517. Νά μετατραποῦν εἰς γινόμενα τά κάτωθι πολυώνυμα

α) $(x+y+z)^5-x^5-y^5-z^5$

β) $(x+y+z)^4-(y+z)^4-(z+x)^4-(x+y)^4+x^4+y^4+z^4$

γ) $(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-\alpha)^3-(\gamma+\alpha-\beta)^3-(\alpha+\beta-\gamma)^3$

518. Νά γίνουν γινόμενα τά κάτωθι πολυώνυμα

α) $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+8\alpha\beta\gamma$

β) $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma$

γ) $(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)^3-\beta^3\gamma^3-\gamma^3\alpha^3-\alpha^3\beta^3$

519. Νά γίνουν γινόμενα:

α) $(\alpha+\beta+\gamma)^5-(\beta+\gamma-\alpha)^5-(\gamma+\alpha-\beta)^5-(\alpha+\beta-\gamma)^5$

β) $\alpha(\beta-\gamma)^3+\beta(\gamma-\alpha)^3+\gamma(\alpha-\beta)^3$

γ) $(x-\alpha)^3(\beta-\gamma)^3+(x-\beta)^3(\gamma-\alpha)^3+(x-\gamma)^3(\alpha-\beta)^3$

520. Ν'ἁπλουστευθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha^3(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^3(\gamma+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\gamma^3(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

521. Ν'άπλουστευθῆ ἡ παράστασις

$$\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2) + \frac{\gamma+\alpha}{\alpha\gamma}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2) + \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$$

522. Ν'άπλουστευθῆ ἡ παράστασις

$$\frac{\alpha(\beta-\gamma)^2}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)} + \frac{\beta(\gamma-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} + \frac{\gamma(\alpha-\beta)^2}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$$

523. Ν'άπλουστευθῆ ἡ παράστασις

$$\frac{2\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{2\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{2\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Χ

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΙ Η ΑΝΑΓΟΜΕΝΑΙ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΥΣ.

123. Ὁρισμοί. Καλεῖται ἐ ξ ί σ ω σ ι ς, μία ἰσότης μεταξύ δύο παραστάσεων, ἰσχύουσα μόνον δι'είδικάς τιμάς τῶν γραμμάτων τά ὁποῖα περιέχονται εἰς τάς δύο παραστάσεις.

Ἡ ἐξίσωσις δηλαδή εἶναι μία ἰσότης τῆς μορφῆς Α = Β ὅπου Α καί Β παραστάσεις ὄχι ἐκ ταυτότητος ἴσαι καί ἀπαιτοῦσαι είδικάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν περιεχομένων εἰς τάς Α καί Β διά ν'άληθεύη.

Μέ ἄλλας λέξεις, ἐξίσωσις εἶναι μία ἰσότης ὑπό συνθήκας (ἴδε §56).

Οὕτω π.χ. ἡ ἰσότης $3x - 4 = x + 6$ δέν εἶναι ταυτότης (§56) ἀλλ'ἀπαιτεῖ κατάλληλον τιμήν τοῦ x διά ν'ἀληθεύη. Συνεπῶς εἶναι μία ἐξίσωσις.

Ἐπίσης ἡ ἰσότης $x + y = 10$ ἀληθεύει διά κατάλληλα ζεύγη τιμῶν τῶν x καί y ὅπως π.χ. $(x = 1, \ y = 9)$ $(x = 2, \ y = 8)$ $(x = 0, \ y = 10)$,... καί ὄχι διά τυχόν ζεῦγος τιμῶν τῶν x καί y. Συνεπῶς εἶναι μία ἐξίσωσις.

Εἰς τήν ἐξίσωσιν Α = Β αἱ παραστάσεις Α καί Β καλοῦνται μ έ λ η τ ῆ ς ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς, ὀνομάζομεν δέ συνήθως π ρ ῶ τ ο ν μ έ λ ο ς τό πρός τ'ἀριστερά τοῦ σημείου = καί δ ε ύ τ ε ρ ο ν μ έ λ ο ς τό πρός τά δεξιά.

Τά γράμματα τά ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τά δύο μέλη καί τῶν ὁποίων αἱ τιμαί πρέπει νά προσδιορισθοῦν καταλλήλως ὥστε ν'ἀληθεύη ἡ ἐξίσωσις λέγονται ἄ γ ν ω σ τ ο ι τῆς ἐξισώσεως. Παρίστανται δέ οἱ ἄγνωστοι κατά κανόνα, μέ τά τελευταῖα γράμματα x, y, ω, z, t ... τοῦ ἀλφαβήτου.

Ἔτσι ἔχομεν ἐξισώσεις μέ ἕνα ἤ δύο ἤ περισσοτέρους ἀγνώστους.

'Εάν ($x, y, z, \ldots$) εἶναι οἱ ἄγνωστοι καί ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$) εἶναι ἀριθμητικαί τιμαί αἱ ὁποῖαι τιθεμέναι ἀ ν τ ι σ τ ο ί χ ω ς ἀντί τῶν $x, y, z, \ldots$ καθιστοῦν τά δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως ἀριθμούς ἴσους τότε λέγομεν ὅτι ἡ ὁμάς τῶν ἀριθμῶν ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$) εἶναι μία λ ύ σ ι ς τῆς ἐξισώσεως. Κάθε λύσις τῆς ἐξισώσεως. λέγομεν, ὅτι ἱ κ α ν ο π ο ι ε ῖ ἤ π λ η ρ ο ῖ ἤ ἐ π α λ η θ ε ύ ε ι τήν ἐξίσωσιν.

Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3x - 4 = x + 6$ ἱκανοποιεῖται ἀπό τήν τιμήν $x = 5$, ἡ $2x + y = 10$ ἀπό τό ζεῦγος (2,6) (δηλ. $x = 2$, $y = 6$) ἡ $x + 3y + z = 10$ ἀπό τήν τριάδα (1, 0, 9) (δηλ. μέ $x = 1$, $y = 0$, $z = 9$). 'Υποτίθεται δηλ. πάντοτε ὅτι οἱ ἄγνωστοι $x, y, z, \ldots$ ἔχουν τοποθετηθῆ εἰς μίαν ὡρισμένην σειράν αἱ δέ ἀντίστοιχοι τιμαί των $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τήν λύσιν ἔχουν διαταχθῆ κατά τήν αὐτήν τάξιν οὕτως ὥστε ὁ α εἶναι ἡ τιμή τοῦ x, ὁ β τοῦ y κ.ο.κ.

Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι ἡ λ ύ σ ι ς ε ἶ ν α ι μ ί α δ ι α τ ε τ α γ μ έ ν η ὁ μ ά ς ἀ ρ ι θ μ ῶ ν ἱ κ α ν ο π ο ι ο ῦ σ α τ ή ν ἐ ξ ί σ ω σ ι ν.

Ρίζα ἐξισώσεως μέ ἕνα ἄγνωστον καλεῖται κάθε λύσις αὐτῆς δηλ. κάθε τιμη τοῦ x ἡ ὁποία ἐπαληθεύει τήν ἐξίσωσιν. Ἡ εὕρεσις ὅ λ ω ν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως καλεῖται ἐ π ί λ υ σ ι ς αὐτῆς.

'Υπάρχουν ἐξισώσεις τῶν ὁποίων αἱ ρίζαι εἶναι π ρ ο φ α ν ε ῖ ς. Π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x = 3$ δέν δύναται νά ἔχη ἄλλην λύσιν (ρίζαν) εἰμή τόν ἀριθμόν 3. 'Επίσης ἡ ἐξίσωσις

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)\ldots(x - \rho_\nu) = 0$$

ὅπου $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \ldots \rho_\nu$ γνωστοί ἀριθμοί ἔχει ὡς ρίζας τούς ἀριθμούς $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots \rho_\nu$ καί μόνον αὐτούς.

Εἰς τοιαῦτας ἐξισώσεις μέ προφανεῖς λύσεις προσπαθοῦμεν ν'ἀνάγωμεν τάς πρός ἐπίλυσιν ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον. Πρός τοῦτο βοηθούμεθα ἀπό τά θεωρήματα τῆς ἑπομένης παραγράφου 124.

Μία ἐξίσωσις λέγεται ρητή ἤ ἄρρητος, ἀκεραία ἤ κλασματική κτλ. καθ'ὅσον τά μέλη της εἶναι ἀλγ. παραστάσεις ρηταί ἤ ἄρρητοι κτλ. ὡς πρός τούς ἀγνώστους. Οὕτω π.χ. ἡ ὡς πρός x ἐξίσωσις $\sqrt{x+1}=4$ εἶναι ἄρρητος ἐξίσωσις ἐνῶ ἡ

$$\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\cdot x^2+\gamma\sqrt{2}\cdot x=\delta$$

εἶναι ρητή - ἀκεραία ὡς πρός x. 'Επίσης ἡ $\dfrac{3}{x}=\dfrac{5}{x^2+1}$ εἶναι κλασματική - ρητή κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

524. Δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων δέν ἔχει καμμίαν πραγματικήν λύσιν

α) $\sqrt{x+1}=-5$ β) $|x-3|+|x-2|=-1$

γ) $x^2+y^2+z^2=-3$ δ) $(x-2)^2+5=0$ ε) $|x+5|=x$

525. 'Εάν α, β, γ δεδομένοι πραγματικοί ἀριθμοί δείξατε ὅτι ἑκάστη τῶν κατωθι ἐξισώσεων ἔχει μίαν μόνον πραγματικήν λύσιν

α) $|x-\alpha|+|y-\beta|+|z-\gamma|=0$ β) $(x-\alpha)^2+(y-\alpha)^4+(z-\gamma)^6=0$

γ) $x^2+(y-2)^2+3(x^2+y^2-1)=0$

124. 'Ισοδύναμοι ἐξισώσεις. Δύο ἐξισώσεις λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ ο ι, ὅταν ἔχουν τάς ἰδίας λύσεις. Δηλαδή, ὅταν πᾶσα λύσις τῆς πρώτης εἶναι καί λύσις τῆς δευτέρας καί πᾶσα λύσις τῆς δευτέρας εἶναι κάί λύσις τῆς πρώτης.

'Από μίαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νά λάβωμεν ἄλλας ἰσοδυνάμους πρός τήν δοθεῖσαν τῇ βοηθείᾳ τῶν δύο ἑπομένων θεωρημάτων.

Θεώρημα I. «'Εάν εἰς ἀμφότερα τά μέλη ἐξισώσεως προστεθῇ (ἤ ἀφαιρεθῇ) ἡ αὐτή παράστασις, προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος πρός τήν ἀρχικήν».

'Απόδειξις. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

(1) $A = B$

ὅπου Α καί Β παραστάσεις περιέχουσαι ἕνα ἤ περισσοτέρους ἀγνώστους. Ἐάν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τήν παράστασιν Γ (περιέχουσαν ἐν γένει τούς ἰδίους ἀγνώστους, ἤ μερικούς ἤ σταθεράν) λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν

(2) $A + \Gamma = B + \Gamma$

Ἐάν δι'ειδικάς τιμάς τῶν ἀγνώστων, τά Α καί Β λαμβάνουν ἴσας ἀριθμητικάς τιμάς, τότε καί τά $A + \Gamma$ καί $B + \Gamma$ λαμβάνουν προφανῶς, ἴσας ἀριθμητικάς τιμάς. Ὥστε πᾶσα λύσις τῆς (1) εἶναι καί λύσις τῆς (2).

Ἀντιστρόφως, πᾶσα λύσις τῆς (2), ὡς καθιστῶσα ἴσας τάς ποσότητας $A + \Gamma$ καί $B + \Gamma$ θά καθιστᾶ κατ'ἀνάγκην ἴσας καί τάς Α καί Β, δηλαδή θά εἶναι λύσις τῆς (1).

Τό θεώρημα ἰσχύει, προφανῶς, καί ὅταν ἀφαιροῦμεν τήν αὐτήν ποσότητα ἀπό τά δύο μελη.

Πόρισμα 1ον. «Πᾶσα ἐξίσωσις δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν $A = 0$».

Διότι ἀφαιροῦντες ἀπό τά δύο μέλη ποσότητα ἴσην προς τό δεύτερον μέλος λαμβάνομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν τῆς ὁποίας τό δεύτερον μέλος εἶναι μηδέν.

Πόρισμα 2ον. «Λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον διαγράφοντες ὅρον τινά ἀπό τό ἕνα μέλος καί γράφοντες τόν ὅρον τοῦτον μέ ἀλλαγμένον τό σημεῖον τοῦ εἰς τό ἄλλο μέλος».

Ἡ ἐργασία αὐτή γίνεται μ ε τ α φ ο ρ ά ἑνός ὅρου ἀπό τό ἕνα μέλος εἰς τό ἄλλο.

Ὁρισμός. Ἐκ τοῦ 1ου πορίσματος συνάγεται ὅτι πᾶσα ρητή - ἀκεραία ἐξίσωσις δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν $A = 0$ ὅπου τό Α εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον ὡς πρός τούς ἀγνώστους. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου τούτου (ὡς πρός τούς ἀγνώστους) καλεῖται **β α θ μ ό ς τ ῆ ς** (ἀκεραίας - ρητῆς) **ἐ ξ ι σ ώ - σ ε ω ς**.

Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 7x + 1 = 0$ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ἐξίσωσις καθώς ἐπίσης καί ἡ $xy + 2 = 0$. Ἡ

Ἡ $2x^2y + \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός τούς ἀγνώστους x, y.

Θεώρημα II. «Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπί τόν αὐτόν σταθερόν ἀριθμόν διάφορον τοῦ μηδενός, τότε προκύπτει ἐξίσωσις ἰσοδύναμος τῇ ἀρχικῇ».

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

(3) $$A = B$$

Διά πολλαπλασιασμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της ἐπί ποσότητα $\Gamma \neq 0$ λαμβάνομεν τήν ἐξίσωσιν

(4) $$A\Gamma = B\Gamma$$

Ἀντί τῆς (3) και τῆς (4) θεωροῦμεν τάς ἰσοδυνάμους των

(3΄) $A - B = 0$ (4΄) $\Gamma(A - B) = 0$

Πᾶσα λύσις τῆς (3΄) εἶναι προφανῶς καί λύσις τῆς (4΄) διότι καθιστᾶ μηδέν τήν διαφοράν $A - B$, δηλ. μηδενίζει τόν ἕνα παράγοντα του γινομένου $\Gamma(A - B)$.

Ἀντιστρόφως, πᾶσα λύσις τῆς (4΄) θά μηδενίζῃ κατ'ἀνάγκην τόν ἕνα παράγοντα καί ἐπειδή ὁ Γ εἶναι $\neq 0$, θά μηδενίζῃ τόν $A - B$. ὅ.ἔ.δ.

Εὐνόητον εἶναι ὅτι καί ἄν διαιρέσωμεν τά μέλη τῆς (3) διά ποσότητος $\Gamma \neq 0$, λαμβάνομεν πάλιν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον. Διότι τοῦτο ἰσοδυναμεῖ μέ πολ/σμόν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπί $\frac{1}{\Gamma}$.

Παρατήρησις. Ἐάν ἡ ἀξίωσις $A = B$ περιέχει μόνον ἕνα ἄγνωστον, ἔστω τόν x ὁ δέ πολλαπλασιαστής Γ περιέχει καί αὐτός τόν x τότε κάθε τιμή τοῦ x μηδενίζουσα τόν Γ θά εἶναι λύσις τῆς $A\Gamma = B\Gamma$ χωρίς ὅμως νά εἶναι ἐν γένει καί λύσις τῆς $A = B$.

Διά τοῦτο ἡ (4) δέν εἶναι τότε ἰσοδύναμος πρός τήν (3) Περιέχει ὅμως ἡ (4) καί τάς λύσεις τῆς (3) καί ἐνδεχομένως καί ἄλλας. Αἱ λύσεις τῆς (3) δύνανται τότε νά εὑρεθοῦν ἐκ τῶν λύσεων τῆς (4) ὅταν ἀπό ταῦτας ἐξαιρεθοῦν αἱ μηδενίζουσαι τόν Γ χωρίς νά ἐπαληθεύουν καί τήν (3).

Ἀνάλογα ἰσχύουν προκειμένου περί ἐξισώσεως μέ περισσοτέρους ἀγνώστους.

Ἐφαρμογή. «**Ἐάν οἱ συντελεσταί ἀκεραίας - ρητῆς ἐξισώσεως εἶναι ρηταί κλασματικαί παραστάσεις, αὕτη δύναται νά τραπῆ εἰς ἰσοδύναμον ἔχουσαν ὡς συντελεστάς ἀκεραίας παραστάσεις, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη της ἐπί ἕνα κοινόν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν**».

Οἱ συντελεσταί δύνανται νά εἶναι ἀριθμητικά κλάσματα ὅπως εἰς τήν: $\frac{4}{3}x - \frac{1}{6} - 5x = \frac{x}{4} + 8 - \frac{x}{2}$ ἡ ὁποία διά πολ/σμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἐπί 12 καθίσταται

$$16x - 2 - 60x = 3x + 96 - 6x$$

ἤ κλασματικαί παραστάσεις, ὅπως εἰς τήν

$$\frac{x}{\alpha - \beta} + 1 = \frac{2x - 3}{\alpha^2 - \beta^2}$$

ἡ ὁποία διά πολ/σμοῦ τῶν μελῶν της ἐπί $\alpha^2 - \beta^2$ (ὑποτιθεμένου $\neq 0$) γίνεται $(\alpha + \beta)x + \alpha^2 - \beta^2 = 2x - 3$

Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται ἐξάλειψις τῶν παρονομαστῶν.

125. **Ρηταί κλασματικαί ἐξισώσεις.** Ὅταν τά μέλη τῆς ἐξισώσεως εἶναι ρηταί - κλασματικαί παραστάσεις (§ 81) τότε ἡ ἐξίσωσις δύναται τελικῶς, ν'ἀναχθῆ εἰς τήν μορφήν

$$(1) \qquad \frac{A}{B} = 0$$

ὅπου Α καί Β ἀκέραια πολυώνυμα ὡς πρός τόν ἄγνωστον ἤ τούς ἀγνώστους.

Πᾶσα λύσις τῆς (1) καθιστᾶ τό κλάσμα $\frac{A}{B}$ ἴσον μέ τό μηδέν. συνεπῶς μηδενίζει τόν ἀριθμητήν του χωρίς νά μηδενίζη συγχρόνως καί τόν παρονομαστήν του.

Διότι ἄν ἐμηδένιζε καί τόν παρονομαστήν θά καθίστα τό κλάσμα, ὄχι ἴσον μέ μηδέν ἀλλ'ἀόριστον. (§ 33 γ').

Ὥστε ὡς λύσεις τῆς (1) δεχόμεθα τάς τιμάς ἐκείνας τοῦ ἀγνώστου (ἤ τῶν ἀγνώστων) αἱ ὁποῖαι ἱκανοποιοῦν τάς δύο σχέσεις: $A = 0$, $B \neq 0$.

Ἤτοι «Ἡ κλασματική ἐξίσωσις $A/B=0$ ἰσοδυναμεῖ πρός τό σύστημα τῶν σχέσεων

$$A = 0 \quad , \quad B \neq 0 \text{ ».}$$

126. Ἐπίλυσις τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μέ ἕνα ἄγνωστον. Συμφώνως πρός τόν εἰς τήν § 124 δοθέντα ὁρισμόν, μία ἀκεραία-ῥητή ἐξίσωσις λέγεται πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός ἕνα γράμμα x, ὅταν μετά τήν μεταφοράν πάντων τῶν ὅρων της εἰς τό πρῶτον μέλος καί τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων, τό πρῶτον μέλος της λαμβάνει τήν μορφήν πολυωνύμου πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x. Δηλαδή ὅταν ἡ ἐξίσωσις δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν

$$(1) \qquad \alpha x + \beta = 0,$$

ὅπου α, β γνωστοί συντελεσταί. Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν

$$(2) \qquad \alpha x = -\beta$$

καί ἐάν $\alpha \neq 0$ δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) διά τοῦ α ὁπότε λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$(3) \qquad x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

τῆς ὁποίας ἡ λύσις εἶναι προφανής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ Ι. «Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2x}{5} - 3x + \frac{1}{5} = \frac{2}{3} - x - \frac{x}{15} \text{ ».}$$

Λύσις. Ἐξαλείφοντες τούς παρ/στάς λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν:

$$6x - 45x + 3 = 10x - 15x - x$$

Ἡ (1) δίδει $x = -3$ ἀλλ' ἡ τιμή αὐτή τοῦ x δέν ἐπαληθεύει τήν (2) (δηλ. μηδενίζει τόν παρ/στήν) καί διά τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτος. Ὥστε ἡ δοθεῖσα δέν ἔχει λύσιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. « Νά λυθῆ καί διερευνηθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha x - 1}{x - 1} + \frac{\beta}{x + 1} = \frac{\alpha(x^2 + 1)}{x^2 - 1} \text{ ».}$$

Λύσις. Ἀπαλείφομεν τούς παρ/στάς, θέτοντες συγχρόνως καί τόν περιορισμόν.

(1) $$(x - 1)(x + 1) \neq 0$$

καί λαμβάνομεν τήν

$$(\alpha x - 1)(x + 1) + \beta(x - 1) = \alpha(x^2 + 1)$$

ἤ μετά τάς ἀναγωγάς, τήν

(2) $$(\alpha + \beta - 1)x = \alpha + \beta + 1$$

Περίπτωσις i) Ἔστω $\alpha + \beta - 1 \neq 0$. Τότε ἡ (2) δίδει

(3) $$x = \frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta - 1}$$

Διά νά εἶναι δεκτη ἡ (3) πρέπει νά πληροῖ τήν (1), δηλ. πρέπει:

$$\left(\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta - 1} - 1\right)\cdot\left(\frac{\alpha + \beta + 1}{\alpha + \beta - 1} + 1\right) \neq 0$$

ἤ $$\frac{2}{\alpha + \beta - 1}\cdot\frac{2(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - 1} \neq 0$$

ἤ $$\alpha + \beta \neq 0$$

Ἐάν εἶναι $\alpha + \beta = 0$ ἡ (3) εἶναι ἀπαράδεκτος, ὡς μή πληροῦσα τόν περιορισμόν (1).

Περίπτωσις ii) Ἔστω $\alpha + \beta - 1 = 0$. Τότε ἡ (2) δέν ἔχει λύσιν διότι τό δεύτερον μέλος της $\alpha + \beta + 1 = 2 \neq 0$ (ἴδε § 127).

Συμπέρασμα. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὅταν $\alpha + \beta \neq 1$ καί συγχρόνως $\alpha + \beta \neq 0$ δηλ. ὅταν

$$(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta) \neq 0$$

καί καμμίαν λύσιν ὅταν $(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta) = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. «Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+6}{x+7} = \frac{x+2}{x+3} + \frac{x+5}{x+6} \text{ ».}$$

Λύσις. 'Αφοῦ εἰς ἕκαστον κλάσμα ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις, ἡ ἐξίσωσις γράφεται (μετά τάς ἀναγωγάς)

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}$$

ἤ ἀκόμη

$$\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$$

ἤ

$$\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x^2+13x+42}$$

'Εξαλείφοντες τούς παρ/στάς λαμβάνομεν $x^2+5x+6 = x^2+13x+42$ καί $x=-9/2$, τιμήν μή μηδενίζουσαν, οὐδένα παρ/στήν τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

526. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\frac{x+4}{5}-x=\frac{3x-5}{2}$ β) $\frac{x-3}{8}+\frac{x+4}{12}=\frac{3x+7}{20}+3$

γ) $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left\{\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right\}=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$

δ) $\frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{5}+\frac{3x+1}{2}=\frac{27x+19}{20}$

527. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $(x-1)(2x+1)(x-4)=0$ β) $x^3-4x=0$

γ) $3x^2-7=0$ δ) $(3x-1)^2-(5x+3)^2=0$

528. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$

β) $(x+2)^3-(x-2)^3=32x+16$

γ) $[(\alpha+\beta)x-\gamma]^2=[(\alpha-\beta)x+\gamma]^2$

δ) $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$

529. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $(x+\alpha)^3+(x+\beta)^3+(x+\gamma)^3=3(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)$

β) $(1-x)(\alpha-x)=(\alpha-x)(1-\beta)-(1+x)(\beta-x)$

γ) $(x-\alpha)^3(x+2\beta+\alpha)-(x+\beta)^3(x-2\alpha-\beta)=0$

530. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $(x-\alpha)(2x-\beta)^2-(x-\beta)(2x-\alpha)^2=0$

καί μεταφέροντες τούς ἀγνώστους ὅρους εἰς τό Α; μέλος καί τούς γνωστούς εἰς τό δεύτερον λαμβάνομεν νέαν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$6x - 45x + 15x + x = 10 - 3$$

ἤ $$-23x = 7$$

ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν $x = -\frac{7}{23}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΙΙ. « Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}x + 2\alpha - 2\beta = \frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}x$$

ὅπου α,β δεδομένοι ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta) \neq 0$ καί x ὁ ἄγνωστος.

Λύσις. Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη ἐπί $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)$ λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x + 2(\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2) = (\alpha^3-\beta^3)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta) - (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)x$$

καί ἀκολούθως τάς ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις

$$(\alpha+\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x + (\alpha-\beta)^2(\alpha^2+\beta^2)x = (\alpha^3-\beta^3)(\alpha^2-\beta^2) - 2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha-\beta)$$

ἤ $$(\alpha^2+\beta^2)\left\{(\alpha+\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\right\}x = (\alpha^2-\beta^2)\left\{(\alpha^3-\beta^3) - 2(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)\right\}$$

ἤ $$2(\alpha^2+\beta^2)^2 x = (\alpha^2-\beta^2)(\alpha-\beta)\cdot\left[\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha^2 - 2\beta^2\right]$$

καί τέλος $$x = \frac{-(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}{2(\alpha^2+\beta^2)} = -\frac{(\alpha-\beta)^2(\alpha^3+\beta^3)}{2(\alpha^2+\beta^2)}$$

127. **Διερεύνησις τῆς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως**. Εἴδομεν ὅτι ἄν $\alpha \neq 0$, ἡ ἐ ξ ί σ ω σ ι ς $\alpha x + \beta = 0$ ἔ χ ε ι μ ί α ν μ ό ν ο ν λ ύ σ ι ν τήν $x = -\frac{\beta}{\alpha}$. Μένει λοιπόν πρός ἐξέτασιν ἡ περίπτωσις καθ'ἥν $\alpha = 0$. 'Εν τῇ περιπτώσει ταύτῃ δέν δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν διά α ἀμφότερα τά μέλη. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι, ἄν $\beta \neq 0$, τότε διά ν'ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις $\alpha x = -\beta$ μέ $\alpha = 0$, θά ἔπρεπε νά ὑπάρχῃ ἀριθμός x ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τό μηδέν (δηλ. τό α) νά δίδῃ ἐξαγόμενον $-\beta$, διάφορον τοῦ μηδενός. 'Αλλ'ἐπειδή τοιοῦτος ἀριθμός δέν ὑπάρχει, συνάγομεν ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν $\alpha=0$,

$\beta \neq 0$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ δέν ἔχει καμμίαν λύσιν (ἀδύνατος).

Ἐάν πάλιν εἶναι καί $\alpha = 0$ καί $\beta = 0$ τότε ἡ παράστασις $\alpha x + \beta$ ἰσοῦται μέ μηδέν διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x. Ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\alpha x + \beta = 0$ ἐπαληθεύεται διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x (εἶναι ταυτότης).

Ὥστε: Ἐάν $\alpha \neq 0$ ἡ $\alpha x + \beta = 0$ ἔχει μίαν μόνον λύσιν
Ἐάν $\alpha = 0$ $\beta \neq 0$ ἡ $\alpha x + \beta = 0$ οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.
Ἐάν $\alpha = 0$, $\beta = 0$ ἡ $\alpha x + \beta = 0$ εἶναι ταυτότης.

128. **Ἐπίλυσις ρητῶν κλασματικῶν ἐξισώσεων.** Ὅπως προκύπτει ἀπό τήν §125, πᾶσα ρητή - κλασματική ἐξίσωσις $A(x)/B(x) = 0$ μέ ἕνα ἄγνωστον x ἀνάγεται τελικῶς εἰς σύστημα δύο σχέσεων ἀποτελουμένων ἀπό μιαν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν $A(x) = 0$ καί ἀπό μίαν π α ρ α σ υ ν θ ή κ η ν $B(x) \neq 0$. Πᾶσα λύσις πρέπει νά ἱκανοποιῆ τάς καί δύο σχέσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{x^2+2x-3} = 0$$

Λύσις. Πρός εὕρεσιν τοῦ Ε.Κ.Π. τῶν παρ/στῶν τρέπομεν εἰς γινόμενον τήν παράστασιν x^2+2x-3

$$x^2+2x-3 = x^2-x+3x-3 = x(x-1) + 3(x-1) = (x-1)(x+3)$$

καί ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+2}{x+3} + \frac{4}{(x-1)(x+3)} = 0$$

ἤ
$$\frac{(x+1)(x+3) - (x+2)(x-1) + 4}{(x-1)(x+3)} = 0$$

ἤ
$$\frac{3x+9}{(x-1)(x+3)} = 0$$

Ἡ τελευταία ἀληθεύει ὅταν συγχρόνως ἔχομεν

(1) $$3x + 9 = 0$$
(2) $$(x-1)(x+3) \neq 0$$

β) $\dfrac{\alpha - x}{\alpha - \beta} - \dfrac{x - \beta}{\alpha + \beta} = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}$

γ) $(2x - \alpha - \beta)\left[(x - \alpha)^3 - (x - \beta)^3\right] = 3(\beta - \alpha)\left[(x-\alpha)^3 + (x-\beta)^3\right]$

531. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\dfrac{2x - 13}{2x - 16} + \dfrac{2(x - 6)}{x - 8} = \dfrac{7}{8} + \dfrac{2(5x - 39)}{3x - 24}$

β) $\dfrac{7x + 8}{21} - \dfrac{x + 4}{8x - 11} = \dfrac{x}{3}$ γ) $\dfrac{4}{x + 2} + \dfrac{7}{x + 3} = \dfrac{37}{x^2+5x+6}$

532. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\dfrac{x - 1}{x - 2} - \dfrac{x - 2}{x - 3} = \dfrac{x - 4}{x - 5} - \dfrac{x - 5}{x - 6}$

β) $\dfrac{x - 1}{x - 2} + \dfrac{x - 6}{x - 7} = \dfrac{x - 5}{x - 6} + \dfrac{x - 2}{x - 3}$

γ) $\dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 6x + 10} = \left(\dfrac{x - 2}{x + 3}\right)^2$

533. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x - 2} = 0$

β) $\dfrac{2}{x - 1} + \dfrac{3}{x + 1} = \dfrac{14}{x - 3} - \dfrac{9}{x - 2}$

γ) $\dfrac{3}{(x + 2)(x - 1)} = \dfrac{-1}{x(x - 1)^2} + \dfrac{3}{x(x - 3)}$

534. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\frac{\dfrac{1}{1 + x}}{1 - \dfrac{1}{1 + x}} + \frac{\dfrac{1}{1 + x}}{\dfrac{x}{1 - x}} + \frac{\dfrac{1}{1 - x}}{\dfrac{x}{1 + x}} + \frac{3}{2x} = 0$$

β) $\left(\dfrac{1 + x}{1 - x} - \dfrac{1 - x}{1 + x}\right)\left(\dfrac{3}{4x} + \dfrac{x}{4} - x\right) = \dfrac{\left(x - 3 + \dfrac{5x}{2x - 6}\right)\dfrac{3x}{2}}{2x - 1 + \dfrac{15}{x - 3}}$

535. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\dfrac{\alpha}{\alpha x - 1} + \dfrac{\beta}{\beta x - 1} = \dfrac{\alpha + \beta}{(\alpha + \beta)x - 1}$

β) $\dfrac{x - \alpha}{x - \alpha - 1} - \dfrac{x - \alpha - 1}{x - \alpha - 2} = \dfrac{x - \beta}{x - \beta - 1} - \dfrac{x - \beta - 1}{x - \beta - 2}$

536. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\frac{1}{(x+\alpha)^2-\beta^2}+\frac{1}{(x-\beta)^2-\alpha^2}=\frac{1}{x^2-(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{x^2-(\alpha-\beta)^2}$

β) $\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x+2\alpha}{x-2\alpha}=\frac{x-2\alpha}{x+2\alpha}+\frac{x-\alpha}{x+\alpha}$

537. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $x\left(\frac{x-2\alpha}{x+\alpha}\right)^3+\alpha\left(\frac{2x-\alpha}{x+\alpha}\right)^3=x^2-\alpha^2$

β) $\frac{1}{7}|x-2|+2=3|x-2|-18$

γ) $\left|\frac{x^2-1}{x^4+x^2-2x}\right|+\left|\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}\right|=\frac{|x+2|}{x^2+x+2}$

129. Ἀνισότητες ὑπό συνθήκας. α) Ἐάν ἡ ἀνισότης

(1) $$A(x) > B(x)$$

δέν εἶναι μόνιμος ὡς πρός x (ἴδε § 57) ἀλλ'ἀληθεύει μόνον διά καταλλήλους τιμάς τοῦ γράμματος x τότε λέγεται ἀ ν ι σ ό τ η ς ὑ π ό σ υ ν θ ή κ α ς.

Οὕτω π.χ. ἡ ἀνισότης $2x > 10$ ἀληθεύει μόνον διά τιμάς τοῦ x μεγαλυτέρας τοῦ 5, δηλ. εἶναι ἀνισότης ὑπό συνθήκας.

Λύσις τῆς (1) λέγεται καθε τιμή τοῦ x ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν (1), δηλαδή καθιστᾶ τήν παράστασιν A(x) μεγαλυτέραν τῆς B(x).

Ἐπίλυσις τῆς ἀνισότητος (1) καλεῖται ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν τιμῶν τοῦ x αἱ ὁποῖαι ἱακνοποιοῦν τήν (1).

Ἰσοδύναμοι, λέγονται δύο ἀνισότητες ὡς πρός x ὅταν ἔχουν τάς ἰδίας λύσεις. Δηλαδή κάθε τιμή τοῦ x ἐπαληθεύουσα τήν μίαν, ἐπαληθεύει καί τήν ἄλλην· καί ἀντιστρόφως.

Ἀναλόγους ὁρισμούς δίδομεν καί διά ἀνισότητας ὑπό συνθήκας περιεχούσας περισσότερα τοῦ ἑνός γράμματα:

(2) $$A(x, y, \ldots) > B(x, y, \ldots)$$

Λύσις τῆς (2) λέγεται κάθε ὁμάς τιμῶν (α, β, ..) αἴτιες τιθέμεναι ἀντι τῶν x , y ,... ἐπαληθεύουν τήν (2) κ.ο.κ.

'Επίσης, ἀντί τῆς (1) δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν τήν σ χ έ- σ ι ν:

(3) $$A(x) \geqslant B(x)$$

διά τήν όποίαν ἰσχύουν πάντες οἱ ἀνωτέρω ὁρισμοί.

β)'Από μίαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς (1) ἤ (2) δυνάμεθα νά λάβωμεν ἄλλας ἰσοδυνάμους τῇ βοηθείᾳ τῶν ἑπομένων θεωρημάτων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόδειξις εἶναι εὔκολος, στηριζομένη εἰς γνωστάς ἰδιότητας τῶν ἀνισοτήτων (§ 40).

Θεώρημα Ι. «'Εάν εἰς ἀμφότερα τά μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τήν αὐτήν παράστασιν, λαμβάνομεν ἀνισότητα ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν».

'Εξ αὐτοῦ πηγάζει ἡ «μεταφορά ἑνός ὅρου ἀπό τό ἕν μέλος τῆς ἀνισότητος εἰς τό ἄλλο».

Θεώρημα ΙΙ. «'Εάν ἀμφότερα τά μέλη ἀνισότητος πολλαπλασιασθοῦν ἐπί τόν αὐτόν θετικόν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης ἰσοδύναμος πρός τήν ἀρχικήν».

'Εξ αὐτοῦ πηγάζει ἡ ἐξάλειψις τῶν παρονομαστῶν.

130. 'Επίλυσις πρωτοβαθμιων ἀνισοτήτων. 'Επί τῇ βάσει τῶν δύο ἀνωτέρω θεωρημάτων Ι καί ΙΙ δύναται νά γίνη ἡ ἐπίλυσις τῶν π ρ ω τ ο β α θ μ ί ω ν ἀ ν ι σ ο τ ή τ ω ν δηλ. ἐκείνων τῶν ὁποίων τά μέλη εἰναι πρωτοβάθμια πολυώνυμα τοῦ x. 'Η ἐπίλυσις γίνεται ὅπως καί ἡ τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (ἐξάλειψις παρ/στῶν, μεταφορά τῶν ἀγνώστων ὅρων εἰς τό ἕνα μέλος καί τῶν γνωστῶν εἰς τό ἄλλο,ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων διαίρεσις διά τοῦ συντελεστοῦ τοῦ x. 'Ως ἀποτέλεσμα ὅμως τῆς ἐπιλύσεως τῆς πρωτοβαθμίου ἀνισότητος λαμβάνομεν ὄχι μίαν τιμήν τοῦ x ὅπως εἰς τάς ἐξισώσεις ἄλλ'ἐν γένει ὁλόκληρον δ ι ά σ τ η μ α τιμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{x+1}{2} > 1 - \frac{x}{7}$$

Λύσις. Δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς δοθείσης, ἐπί 70 ὁπότε λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἀνισότητα:

$$14(3x-1) - 35(x+1) > 70 - 10x$$

ἥτις γράφεται

$$7x - 49 > 70 - 10x$$

Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν ἰσοδύναμον προσθέτοντες τό $10x$, εἰς ἀμφότερα τά μέλη (δηλ. μεταφέροντες τόν ὅρον $-10x$ εἰς τό πρῶτον μέλος):

$$7x + 10x - 49 > 70$$

Μεταφέρομεν τό -49 εἰς τό δεύτερον μέλος:

$$7x + 10x > 70 + 49$$

Οὕτω φθάνομεν εἰς τήν

$$17x > 119$$

καί ἐξ αὐτῆς εἰς τήν ἰσοδύναμον:

$$x > \frac{119}{17} \quad , \text{ ἤτοι } \quad x > 7$$

Ἡ τελευταία αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἀρχικήν. Ἄρα ἡ ἀρχική ἀληθεύει διά τάς τιμάς τοῦ x τάς μεγαλυτέρας τοῦ 7.

Σημείωσις. Κατά τήν ἐπίλυσιν τῶν ἀνισοτήτων πρέπει νά ἐνθυμούμεθα ὅτι, ὁσάκις πολλαπλασιάζομεν, ἤ διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη ἀνισότητος ἐπί ἀ ρ ν η τ ι κ ό ν ἀ ρ ι θ μ ό ν πρέπει ν'ἀλλάσσωμεν τήν φοράν τῆς ἀνισότητος. (§40, Θεωρ. II).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

538. Ὑπάρχουν τιμαί τοῦ x ἐπαληθεύουσαι συγχρόνως τάς δύο ἀνισότητας: $6x + 5/7 > 4x + 7$ καί $(8x+3)/2 < 2x + 25$; Ἄν ὑπάρχουν, ποῖαι εἶναι αὗται;

539. Ὅμοιον ζήτημα μέ τό προηγούμενον, διά τό ζεῦγος τῶν ἀνισοτήτων: $8x - 5 > (15x-8)/2$ καί $2(2x-3) > 5x - 3/4$

540. Ἐάν $\alpha \neq 0$ δείξατε ὅτι τό διώνυμον $\alpha x + \beta$ ἔχει τό σημεῖον τοῦ α διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x μεγαλυτέραν τῆς ρίζης του.

541. α) Αἱ ἀνισότητες $x^2(x-3)>0$ καί $x-3>0$ εἶναι ἰσοδύναμοι; β) Αἱ σχέσεις $x^2(x-3)\geqslant 0$ καί $x-3\geqslant 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι;

542. Νά λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$|2x-3|>\frac{1}{2}x$$

131. Διαστήματα. Δοθέντων δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha<\beta$ καλεῖται ἀ ν ο ι κ τ ό ν δ ι ά σ τ η μ α ἀ π ό α ἕ ω ς β τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι εἶναι μεγαλύτεροι μέν τοῦ α μικρότεροι δέ τοῦ β. Δηλ. τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν x οἱ ὁποῖοι πληροῦν τήν διπλήν ἀνισότητα

$$(1)\qquad \alpha<x<\beta$$

Εἰς τό ἀνοικτόν διάστημα δ έ ν συμπεριλαμβάνονται οἱ α καί β δηλ. τά λεγόμενα ἄ κ ρ α τοῦ διαστήματος.

Καλεῖται κ λ ε ι σ τ ό ν δ ι ά σ τ η μ α ἀπό α ἕως β τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν x οἱ ὁποῖοι πληροῦν τήν διπλήν σχέσιν

$$(2)\qquad \alpha\leqslant x\leqslant\beta$$

Δηλ. εἰς τό κλειστόν διάστημα συμπεριλαμβάνεται κ α ί τά ἄκρα α καί β. Ὁμοίως ἔχομεν τό ἀ ν ο ι κ τ ό ν π ρ ό ς τ' ἀ ρ ι σ τ ε ρ ά δ ι ά σ τ η μ α:

$$(3)\qquad \alpha<x\leqslant\beta$$

καί τό ἀ ν ο ι κ τ ό ν π ρ ό ς τ ά δ ε ξ ι ά:

$$(4)\qquad \alpha\leqslant x<\beta$$

Τά (3) καί (4) λέγονται καί ἡ μ ι α ν ο ι κ τ ά διαστήματα. Τό κλειστόν διάστημα (2) παρίσταται γεωμετρικῶς ἀπό ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα κείμενον ἐπί τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἔχον ἄκρα τά δύο σημεῖα τά παριστῶντα τούς ἀριθμούς α καί β (ἴδε § 24).

Τά λοιπά διαστήματα, (1),(3),(4) παρίστανται ἀπό τό ἴδιο τμῆμα ὅταν ἐξαιρέσωμεν τό ἕνα ἤ καί τά δύο ἄκρα του.

Κατ'ἐπέκτασιν καλοῦμεν διάστημα καί τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ α. Παντες οἱ ἀριθμοί ~~x~~τοῦ διαστήματος τούτου θά πληροῦν τήν ἀνισότητα

(5) $$x > \alpha$$

'Αντί τῆς (5) γράφομεν πολλάκις τήν

(5') $$\alpha < x < +\infty$$

ἥτις σημαίνει ἀκριβῶς ὅ,τι καί ἡ (5).

Ὁμοίως διακρίνομεν ~~διαστήματα τιμῶν τοῦ~~ x ὁριζόμενα ὑπό τῆς ἀνισότητος

(6) $$x < \alpha$$

(ἤ ὅπερ τό αὐτό, ἀπό τήν $-\infty < x < \alpha$

ἤ τῆς σχέσεως

(7) $$x \geqslant \alpha$$

ἤ τῆς

(8) $$x \leqslant \alpha$$

Τά διαστήματα (5),(6),(7) καί (8) παρίστανται γεωμετρικῶς ἀπό ἀπεράντους ἡμιευθείας ἀρχομένας ἀπό τοῦ σημείου Α τοῦ ἔχοντος τετμημένην α καί εἰς τούς ὁποίους συμπεριλαμβάνεται ἤ ὄχι ἡ ἀρχή των Α.

Τέλος διακρίνομεν καί τό «διάστημα» ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, τό ὁποῖον γεωμετρικῶς παρίσταται ἀπό ὁλόκληρον τήν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο ἐκφράζομεν ὡς διάστημα ἀπό $-\infty$ ἕως $+\infty$ καί τό παριστάνομεν μέ:

$$-\infty < x < +\infty$$

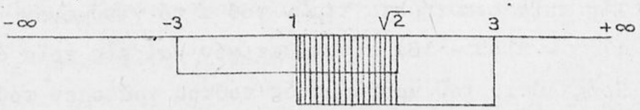
Εἰς διάφορα ζητήματα τῶν ἀνισοτήτων μᾶς

χρειάζεται τό *κοινόν μέρος δύο διαστημάτων*, δηλ. τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν x οἱ ὁποῖοι ἀνήκουν *συγχρόνως* εἰς δύο δεδομένα διαστήματα (ὅπως λ.χ. εἰς τάς ἀσκήσεις 538 καί 539 τῆς σελ. 334).

Τό κοινόν μέρος δύο ἤ καί περισσοτέρων διαστημάτων εὑρίσκεται εὔκολα γραφικῶς ἄν παραστήσωμεν τά διαστήματα μέ εὐθύγραμμα τμήματα, εἶναι δέ καί αὐτό πάλιν ἕνα διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Νά εὑρεθῇ τό κοινόν μέρος τῶν διαστημάτων $-3 < x < \sqrt{2}$ καί $1 < x < 3$ ».

Λύσις. Γράφομεν τά ἄκρα τῶν δύο διαστημάτων δηλ. τους ἀριθμούς $-3, \sqrt{2}, 1, 3$ κατά σειράν μεγέθους, ἐπί μιᾶς εὐ-

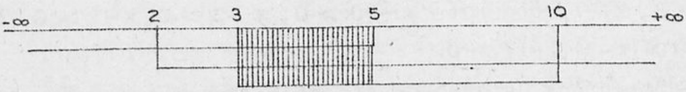


Σχ. 16

θείας, ὡς εἰς τό σχ. (16) καί ὑπογραμμίζομεν τά δύο διαστήματα διά γραμμῶν ἐχουσῶν διαφορετικάς ἀποστάσεις ἀπό τῆς εὐθείας. Τό κοινόν διάστημα, φαίνεται ἀμέσως ὅτι εἶναι ἀπό 1 ἕως $\sqrt{2}$, μή συμπεριλαμβανομένων τῶν ἄκρων. Δηλαδή εἶναι τό ἀνοικτόν διάστημα $1 < x < \sqrt{2}$. (Ἡ τιμή $x = 1$ ἀνήκει εἰς τό πρῶτον ἀλλά δέν ἀνήκει εἰς τό δεύτερον, συνεπῶς δέν εἶναι κοινή τιμή τῶν δύο. Ὁμοίως ἡ $\sqrt{2}$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. «Νά εὑρεθῇ τό κοινόν μέρος τῶν τριῶν διαστημάτων: $-\infty < x \leqslant 5$, $2 < x < +\infty$, $3 \leqslant x \leqslant 10$

Λύσις: Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα.



Σχ. 17

Ἡ λύσις δίδεται ἀπό τό παραπλεύρως σχ. (17). Τό κοινόν διάστημα εἶναι ἀπό 3 ἕως 5 καί εἶναι κλειστόν διότι ἡ τιμή $x = 3$ ἀνήκει εἰς ὅλα τά δοθέντα διαστήματα· ὁμοίως καί ἡ τιμή $x = 5$. Ὥστε τό κοινόν μέρος εἶναι τό $3 \leqslant x \leqslant 5$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

543. α) Ποῖον διάστημα τιμῶν τοῦ x ὁρίζει ἡ ἀνισότης $|x| < 1$

β) Ποῖα διαστήματα ἐκφράζει ἡ ἀνισότης $|x| \geqq 3$;
γ) Ποῖον τό κοινόν μέρος τῶν διαστημάτων $|x| \leqslant 1$ καί $|x| < 5$;

544. Εὕρετε τό κοινόν μέρος τῶν τεσσάρων διαστημάτων:
α) $3 - \sqrt{12} < x \leqslant \sqrt{12}$, β) $3{,}4 \leqslant x < 3{,}5$, γ) $x > -0{,}45$
δ) $x < \sqrt{13}$

545. Ἐάν $\alpha < \beta$ δείξατε ὅτι θά ἔχωμεν

$$\frac{1}{2}\Big|\,|\alpha - x| - |\beta - x|\,\Big| = \left|\frac{\alpha+\beta}{2} - x\right| \quad ἤ \quad = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$$

καθ'ὅσον ὁ x περιέχεται εἰς τό διάστημα ἀπό α ἕως β ἤ ὄχι.

132. Ἀνισότητες τῆς μορφῆς $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\tau) > 0$ ἤ < 0. Ἄς ἀρχίσωμεν ἀπό ἕνα συγκεκριμμένον πρόβλημα:

«Εἰς ποῖα διαστήματα τιμῶν τοῦ x τό γινόμενον $(x-1)(x-3)(x-10)$ εἶναι θετικόν καί εἰς ποῖα ἀρνητικόν;»

Πρός λύσιν τοῦ προβλήματος τούτου γράφομεν τούς ἀριθμούς 1, 3, 10, δηλ. τ ά ς ρ ί ζ α ς τ ο ῦ γ ι ν ο μ έ ν ο υ κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους ἐπί μιᾶς εὐθείας.

x:	$-\infty$		1		3		10		∞
Γινόμενον:		$-$		$+$		$-$		$+$	

Σχ. 18

Οὕτω δημιουργοῦνται τέσσαρα ἀ ν ο ι κ τ ά διαστήματα: ἀπό $-\infty$ ἕως 1, ἀπό 1 ἕως 3, ἀπό 3 ἕως 10, καί ἀπό 10 ἕως $+\infty$

Ὅταν τό x λάβη τιμήν τινα τοῦ τελευταίου δεξιά διαστήματος τότε τό γινόμενον καθίσταται θετικόν. Διότι ἀφοῦ τό x ἀνήκει εἰς τό διάστημα τῶν τιμῶν τῶν ἄνω τοῦ 10 θά εἶναι $x > 10$ $x > 3$, $x > 1$ ἄρα καί $x - 10 > 0$, $x - 3 > 0$, $x - 1 > 0$ ἄρα καί $(x-10)(x-3)(x-1) > 0$.

Ὅταν ὁ x μεταπηδήση εἰς τό διάστημα ἀπό 3 ἕως 10 τότε θά εἶναι $x < 10$, $x > 3$, $x > 1$ ἄρα $x - 10 < 0$, $x - 3 > 0$, $x - 1 > 0$ καί συνεπῶς τό γινόμενον $(x-10)(x-3)(x-1)$ καθίσταται τότε ἀρνητικόν.

Ὅταν ὁ x λάβη τιμήν τινά τοῦ ἀμέσως προηγουμένου (ἀνοικτοῦ) διαστήματος 1 ἕως 3 τότε θά πληροῖ τάς ἀνισότητας $x < 10$

$x < 3,\ x > 1$ ἄρα θά εἶναι $x-10 < 0 \quad x-3 < 0, \quad x-1 > 0$ καί συνεπῶς τό γινομενον $(x-10)(x-3)(x-1)$ εἶναι τότε θετικόν.

Ἐν γένει, ὅ τ α ν ὁ x μ ε τ α π η δ ᾶ ἀ π ό ἕ ν ἐ κ τ ῶ ν ἀ ν ω τ έ ρ ω δ ι α σ τ η μ ά τ ω ν ε ἰ ς τ ό π ρ ο η γ ο ύ μ ε ν ο ν, τ ό γ ι ν ό μ ε ν ο ν ἀ λ λ ά ζ ε ι σ η μ ε ῖ ο ν.

Ὥστε τό ἐξεταζόμενον γινόμενον καθίσταται θετικόν μέν εἰς τά (ἀνοικτά) διαστήματα $x > 10$ καί $1 < x < 3$ καί ἀρνητικόν εἰς τά $x < 1$ καί $3 < x < 10$ (ἴδε σχ. 18).

Γενικῶς, ἄς θεωρήσωμεν τό γινόμενον

(1) $\quad (x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)$

οὗτινος αἱ ρίζαι $\alpha, \beta, \ldots \rho, \sigma, \tau$ ἔστω ὅτι πληροῦν τάς ἀνισότητας

(2) $\quad \alpha < \beta < \gamma \ \ldots\ \rho < \sigma < \tau$

Ἐάν γράψωμεν τούς ἀριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \tau$ κατά τήν σειράν (2) ἐπί μιᾶς εὐθείας δημιουργοῦνται διαδοχικά ἀνοικτά

$-\infty \quad \alpha \quad \beta \quad \rho \quad \sigma \quad \tau \quad +\infty$

διαστήματσ τιμῶν

$x < \alpha \quad , \quad \alpha < x < \beta \quad , \ldots \quad \rho < x < \sigma \quad , \quad \sigma < x < \tau \ , x > \tau$

Ἐάν ὁ x ἀνήκει εἰς τό τελευταῖον διάστημα, δηλ. εἶναι $x > \tau$ τότε θά εἶναι κατά μείζονα λόγον καί $x > \sigma,\ x > \rho, \ldots$ $x > \alpha$, ἄρα ὅλοι οἱ παράγοντες $x-\alpha, x-\beta, \ldots x-\rho, x-\sigma, x-\tau$ εἶναι θετικοί καί τό γινόμενόν των θετικόν.

Ὅταν ὁ x μεταβῇ εἰς τό ἀμέσως προηγούμενον διάστημα, ἀπό σ ἕως τ τότε θά ἰσχύουν:

$$x < \tau \quad , \quad x > \sigma \quad , \quad x > \rho, \ldots \quad x > \alpha$$

Συνεπῶς, εἶναι $x-\tau < 0$ ἐνῶ πάντες οἱ λοιποί παράγοντες $x-\sigma$, $x-\rho$,... $x-\alpha$, εἶναι θετικοί, ἄρα τό γινόμενον ἔχει τιμήν ἀρνητικήν εἰς τό διάστημα τοῦτο.

Καθ'ὅμοιον τρόπον γίνεται φανερόν ὅτι ἐν γένει ὅταν ὁ x μεταπηδᾷ ἀπό ἕν διάστημα εἰς τό ἀμέσως προηγούμενον ἀλλάζει σημεῖον μόνον ἕνας παράγων τοῦ γινομένου ἄρα ἀλλάζει σημεῖον καί τό γινόμενον.

Κατά ταῦτα, διά τήν μελέτην τοῦ σημείου τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\rho)(x-\sigma)(x-\tau)$ γράφομεν κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους τάς ρίζας $\alpha, \beta, \ldots \rho, \sigma, \tau$ ὁπότε εἰς τό τελευταῖον δεξιά διάστημα (δηλ. $x > \tau$) τό γινόμενον εἶναι θετικόν, εἰς τό ἀμέσως προηγούμενον διάστημα (δηλ. $\sigma < x < \tau$) τό γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν κ.ο.κ. ἐναλλάξ.

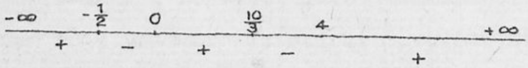
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. "Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης

$$(3) \qquad x(2x+1)(x-2)(3x-10)(4-x) > 0$$

Λύσις. Γράφομεν τήν (3) ὑπό τήν κανονικήν μορφήν (1) διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη της διά τοῦ $2\cdot 3$ καί ἀλλάζοντες τό σημεῖον τοῦ τελευταίου παράγοντος ὁπότε ἡ ἀνισότης ἀντιστρέφεται:

$$(4) \qquad (x-0)\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)\left(x-\frac{10}{3}\right)(x-4) < 0$$

Γράφομεν τάς ρίζας $0, -\frac{1}{2}, 2, \frac{10}{3}, 4$ κατά σειράν αὔ-



ξοντος μεγέθους ὁπότε δημιουργοῦμεν πέντε διαστήματα. Εἰς τό τελευταῖον δεξιά (δηλ. εἰς τό $x > 4$) τό πρῶτον μέλος τῆς (4) εἶναι θετικόν, εἰς τό προτελευταῖον (δηλ. $10/3 < x < 4$) εἶναι ἀρνητικόν κ.ο.κ. Διά νά πληροῦται ἡ (4) πρέπει τό πρῶτον μέλος της νά εἶναι ἀρνητικόν καί τοῦτο συμβαίνει εἰς τά διαστήματα

$$(5) \qquad \frac{10}{3} < x < 4 \qquad \text{καί} \qquad -\frac{1}{2} < x < 0$$

Αἱ (5) δίδουν πάσας τάς λύσεις τῆς (3).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης

(6) $$x^3(2x+1)^3(x-2)(3x-20)^5(x-4)^2 < 0$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται:

(7) $$\left\{x^2(2x+1)^2(3x-20)^4(x-4)^2\right\}\left\{x(2x+1)(x-2)(3x-20)\right\} < 0$$

ἤτοι ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραστάσεων ἐξ ὧν ἡ πρώτη εἶναι μή ἀρνητική ἡ δέ δευτέρα εἶναι τῆς μορφῆς (1).

Διά ν'ἀληθεύη ἡ (7) πρέπει νά μή μηδενίζεται ἡ πρώτη ἀγκύλη (ὁπότε θά εἶναι θετική) ἐνῶ ἡ δευτέρα πρέπει νά εἶναι ἀρνητική, Ὥστε ἡ (7) ἰσοδυναμεῖ μέ τό σύστημα τῶν δύο σχέσεων.

(8) $$x(2x+1)(x-2)(3x-20) < 0$$

(8΄) $$x(2x+1)(3x-20)(x-4) \neq 0$$

Λύομεν τήν ἀνισότητα (8) κατά τόν προηγουμένως ἐκτεθέντα τρόπον (δηλ. ἀφοῦ πρῶτον τήν γράφωμεν ὑπό τήν μορφήν

$$(x-0)(x+\frac{1}{2})(x-2)(x-\frac{20}{3}) < 0\ )$$

$$-\infty \quad\quad -\tfrac{1}{2} \quad\quad 0 \quad\quad 2 \quad\quad \tfrac{20}{3} \quad\quad +\infty$$
$$+ \quad\quad - \quad\quad + \quad\quad - \quad\quad +$$

καί εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη ἀληθεύει εἰς τά διαστήματα

(9) $$-\frac{1}{2} < x < 0 \qquad \text{καί} \qquad 2 < x < \frac{20}{3}$$

Κατόπιν ἐξετάζομεν ἄν εἰς τά διαστήματα (9) ὑπάρχουν τιμαί τοῦ x μή ἱκανοποιοῦσαι τήν (8΄) ὁπότε αὗται πρέπει ν'ἀποκλεισθοῦν. Αἱ τιμαί αὗται εἶναι αἱ

$$x = 0 \;,\; x = -\frac{1}{2} \;,\; x = \frac{20}{3} \quad \text{καί} \quad x = 4$$

Ἐκ τούτων μόνον ἡ $x = 4$ ἀνήκει εἰς τό δεύτερον ἐκ τῶν διαστημάτων (9) καί πρέπει νά ἐξαιρεθῆ ἀπό αὐτό.

Ὥστε τελικῶς αἱ λύσεις τῆς (6) εἶναι αἱ

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \quad \text{καί} \quad 2 < x < \frac{20}{3} \quad \text{ὅπου} \quad x \neq 4$$

ἤ ἄλλως:

$$-\frac{1}{2} < x < 0 \;,\; 2 < x < 4 \;,\; 4 < x < \frac{20}{3}$$

133. Κλασματικαί ἀνισότητες. Μία ἀνισότης λέγεται κλασματική, ὡς πρός τόν ἄγνωστον x ὅταν εἰς τά μέλη της ὑπάρχουν κλασματικαί παραστάσεις τοῦ x (δηλ. περιέχουσαι τόν ἄγνωστον x εἰς τόν παρονομαστήν).

Ἐάν μεταφέρωμεν ὅλους τούς ὅρους τῆς κλασματικῆς ἀνισότητος εἰς τό πρῶτον μέλος καί ἀναγάγωμεν πάντα τά κλάσματα εἰς ἕν (καθιστῶντες αὐτά ὁμώνυμα) τότε ἡ ἀνισότης λαμβάνει τήν μορφήν:

$$(1) \quad \frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad \text{ἤ} \quad (1') \quad \frac{A(x)}{B(x)} < 0$$

ὅπου A(x) καί B(x) ἀκέραιαι παραστάσεις περιέχουσαι τόν x.

Ἡ ἀνισότης ὅμως (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἀνισότητα

$$(2) \quad A(x)\cdot B(x) > 0$$

Διότι ἄν ἀληθεύῃ ἡ (1) τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ παραστάσεις A(x) καί B(x) εἶναι ὁμόσημοι καί συνεπῶς ἔχουν γινόμενον θετικόν, ἤτοι $A(x)\cdot B(x) > 0$. Ἀντιστρόφως, ἄν $A(x)B(x) > 0$ τότε αἱ παραστάσεις A(x) καί B(x) εἶναι ὁμόσημοι καί συνεπῶς ἔχουν πηλίκον θετικόν δηλ. $A(x)/B(x) > 0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ (1′) ἰσοδυναμεῖ πρός τήν

$$(2') \quad A(x)\cdot B(x) < 0$$

Ἔτσι, ἀναγόμεθα εἰς ἀνισότητα τῆς μορφῆς (2) ἤ (2′) ὄχι κλασματικήν. Ἐάν λοιπόν αἱ παραστάσεις A(x) καί B(x) εἶναι δυνατόν νά τραποῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τότε ~~μεταπίπτομεν εἰς ἀνισότητα τῆς μορφῆς~~ $(x-\alpha)(x-\beta)\ldots(x-\sigma)(x-\tau) > 0$ ἤ < 0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$\frac{x+2}{3x+1} < \frac{x-2}{2x-1}$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται

$$\frac{x+2}{3x+1} - \frac{x-2}{2x-1} < 0 \qquad \text{ἤ}$$

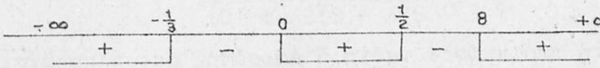
$$\frac{(x+2)(2x-1)-(x-2)(3x+1)}{(3x+1)(2x-1)} < 0 \qquad \text{ἤ}$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{-x^2+8x}{(3x+1)(2x-1)} < 0$$

Ἔτσι ἐφθάσαμεν εἰς τήν μορφήν $A(x)/B(x) < 0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(-x^2+8x)(3x+1)(2x-1) < 0 \qquad \text{ἤ} \qquad -x(x-8)(3x+1)(2x-1) < 0$$

$$\text{ἤ τήν} \qquad (x-0)(x-8)\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right) > 0$$



Αἱ ρίζαι τοῦ πρώτου μέλους εἶναι: $0, 8, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$. Ταῦτας γράφομεν κατά σειράν μεγέθους ἐπ' εὐθείας καί ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς προηγούμενα παραδείγματα εὑρίσκομεν ὅτι τό γινόμενον $(x-0)(x-8)(x+\frac{1}{3})(x-\frac{1}{2})$ εἶναι θετικόν εἰς τά ὑπογραμμισμένα διαστήματα: $x < -\frac{1}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > 8$ τά ὁποῖα ἀποτελοῦν καί πάσας τάς λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. "Νά λυθῇ ὡς πρός x καί νά διερευνηθῇ ὡς πρός λ ἡ ἀνισότης

$$(3) \qquad \frac{\lambda x}{\lambda-2} - \frac{x-1}{3} < \frac{2x+3}{4}$$

Λύσις. Ἡ ἀνισότης εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρός x. ἐπειδή ὅμως περιέχει εἰς τόν παρ/στήν τό γράμμα λ τό ὁποῖον ὑποτίθεται δεδομένος μέν ἀριθμός ἀλλά δυνάμενος νά λάβῃ ποικίλας τιμάς (ἀπό τάς ὁποίας ἑκάστοτε ἐξαρτᾶται ἡ λύσις) διά τοῦτο προκειμένου νά ἐξαλείψωμεν τούς παρ/στάς θά ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τάς κλασματικάς ἀνισότητας.

Λαμβάνομεν δηλαδή διαδοχικῶς τάς ἰσοδυνάμους πρός τήν ἀρχικήν ἀνισότητας:

$$\frac{\lambda x}{\lambda-2} - \frac{x-1}{3} - \frac{2x+3}{4} < 0$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{12\lambda x - 4(\lambda-2)(x-1) - 3(\lambda-2)(2x+3)}{12(\lambda-2)} < 0$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{12\lambda x - 4(\lambda-2)x + 4(\lambda-2) - 6(\lambda-2)x - 9(\lambda-2)}{\lambda-2} < 0$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{(2\lambda+20)x - 5(\lambda-2)}{\lambda-2} < 0$$

$$\text{ἤ} \qquad (\lambda-2)\left\{(2\lambda+20)x - 5(\lambda-2)\right\} < 0$$

ἤ $\quad 2(\lambda - 2)(\lambda + 10)x - 5(\lambda - 2)^2 < 0$

ἤ (3) $\quad 2(\lambda - 2)(\lambda + 10)x < 5(\lambda - 2)^2$

Διακρίνομεν τώρα τρεῖς περιπτώσεις

i) $(\lambda - 2)(\lambda + 10) > 0$. Τότε διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (3) διά τοῦ (θετικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ x λαμβάνομεν:

$$x < \frac{5(\lambda - 2)^2}{2(\lambda - 2)(\lambda + 10)}$$

Ἤτοι ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀνισότης μας πληροῦται διά

$$x < \frac{5(\lambda - 2)}{2(\lambda + 10)}$$

ii) $(\lambda - 2)(\lambda + 10) < 0$. Τότε διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (3) διά τοῦ (ἀρνητικοῦ) συντελεστοῦ τοῦ x λαμβάνομεν

$$x > \frac{5(\lambda - 2)^2}{2(\lambda - 2)(\lambda + 10)}$$

Ὥστε ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἀνισότης ἀληθεύει διά

$$x > \frac{5(\lambda-2)}{2(\lambda + 10)}$$

iii) $(\lambda - 2)(\lambda + 10) = 0$. Τοῦτο συμβαίνει διά $\lambda = 2$ ἤ ~~λ = -10~~. Διά $\lambda = 2$ δέν ἔχει νόημα ἡ δοθεῖσα (διότι μηδενίζεται εἰς ~~παρονομαστής). Δηλ. λ = -10~~ ἡ (3) καθίσταται

$$0 \cdot x < 5 \cdot 12^2$$

καί ἀληθεύει διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x (διότι καθίσταται $0 < 5 \cdot 12^2$).

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι ἔχομεν διαφόρους ἀπαντήσεις εἰς τό τεθέν πρόβλημα διά τάς διαφόρους τιμάς τῆς «παραμέτρου» λ.

Γενικῶς δέ, ἄν μία ἐξίσωσις ἤ ἀνισότης περιέχει ἐκτός τοῦ ἀγνώστου καί ἕνα ἄλλο γράμμα λ τό ὁποῖον χωρίς νά δίδεται ἀριθμητικῶς, θεωρεῖται ὡς γνωστή ποσότης, τότε τό γράμμα τοῦτο λ λέγεται παράμετρος τῆς ἐξισώσεως ἤ τῆς ἀνισότητος. Ἡ λύσις ἐξαρτᾶται τότε ἀπό τήν τιμήν τῆς παραμέτρου καί ἐνδέχεται ἡ μορφή τῆς λύσεως ν' ἀλλάξῃ κατά τάς διαφόρους τιμάς τῆς παραμέτρου.

Σημείωσις 1η. Αἱ περιπτώσεις (i) καί (ii) δύνανται ν' ἀναλυθοῦν περαιτέρω. Οὕτω, ἡ ἀνισότης (i) δύναται νά λυθῇ ὡς πρός λ ὁπότε δίδει $\lambda < -10$ ἤ $\lambda > 2$.

'Επίσης ἡ ἀνισότης (ii) λυομένη ὡς πρός λ δίδει $-10<\lambda<2$. Κατόπιν τούτων δυνάμεθα νά καταρτίσωμεν πίνακα λύσεων δι'ὅλας τάς πραγματικάς τιμάς τοῦ λ, ὡς τόν κάτωθι:

Διά $-\infty<\lambda<-10$ .... $x<\dfrac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)}$ (Περίπτ. i)

Διά $\lambda=-10$ .... ἀλήθευει διά πᾶν x (Περιπτ.iii)

Διά $-10<\lambda<2$ .... $x>\dfrac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)}$ (Περιπτ. ii)

Διά $\lambda=2$ .... δέν ἔχει νόημα (Περιπτ. iii)

Διά $2<\lambda<+\infty$ .... $x<\dfrac{5(\lambda-2)}{2(\lambda+10)}$ (Περιπτ. i)

Αἱ τιμαί $\lambda=-10$ καί $\lambda=2$ λέγονται καί σ υ ν ο ρ ι α κ α ί τ ι μ α ί τοῦ λ διότι εὑρίσκονται εἰς τά σύνορα τῶν διαδοχικῶν διαστημάτων".

Σημείωσις 2α. Θά ἠδυνάμεθα νά ἐξαλείψωμεν τούς παρ/στάς τῆς ἀνωτέρω ἀνισότητος (3) πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη της ὄχι ἐπί $3\cdot4\ (\lambda-2)$ (τό ὁποῖον δέν γνωρίζομεν ἄν εἶναι θετικόν ἤ ἀρνητικόν), ἀλλ'ἐπί $3\cdot4\ (\lambda-2)^2$ ὁπότε ἡ ἀνισότης διατηρεῖται. Κατόπιν προχωροῦμεν ὡς ἀνωτέρω.

134. **Συστήματα ἀνισοτήτων μέ ἕνα ἄγνωστον.** 'Εάν ἔχομεν πολλάς ἀνισότητας περιεχούσας τόν ἴδιον ἄγνωστον x καί ζητοῦμεν διά ποίας τιμάς τοῦ x σ υ ν α λ η θ ε ύ ο υ ν τότε ἔχομεν πρό ἡμῶν, σύστημα ἀνισοτήτων. Λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι πᾶσαι αἱ τιμαί τοῦ x ἤ μᾶλλον πάντα τά διαστήματα τιμῶν τοῦ x εἰς τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦνται συγχρόνως πᾶσαι αἱ δοθεῖσαι ἀνισότητες. Δηλαδή λύσεις τοῦ συστήματος εἶναι αἱ κ ο ι ν α ί λ ύ σ ε ι ς τῶν ἀνισοτήτων ἐκ ὧν σύγκειται τό σύστημα.

Πρός εὕρεσιν τῶν κοινῶν λύσεων, λύομεν χωριστά ἑκάστην ἀνισότητα καί κατόπιν διά γραφικῆς μεθόδου εὑρίσκομεν τάς κοινάς λύσεις, ὡς φαίνεται εἰς τό ἑπόμενον παράδειγμα.

"Εστω ὅτι ζητοῦνται αἱ κοιναί λύσεις τῶν τριῶν ἀνισοτήτων

$$A(x)>0\ ,\quad B(x)>0\ ,\quad \Gamma(x)>0$$

Λύοντες τήν πρώτην ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν

(1) $\qquad x < \frac{3}{4} \qquad$ καί $\qquad x > 10$

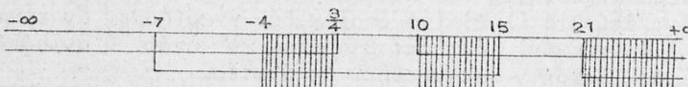
Λύοντες τήν δευτέραν ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν

(2) $\qquad -7 < x < 15 \qquad$ καί $\qquad x > 21$

Λύοντες τέλος τήν τρίτην ἔστω ὅτι εὑρίσκομεν

(3) $\qquad x > -4$

Πρός εὕρεσιν τῶν κοινῶν λύσεων (ἐάν ὑπάρχουν) γράφομεν τά ἄκρα ὅλων τῶν εὑρεθέντων διαστημάτων (1), (2) καί (3) κατά σειράν αὔξοντος μεγέθους ἐπ'εὐθείας (ε) καί ὑπογραμμίζομεν τά διαστήματα εἰς τά ὁποῖα πληροῦται ἑκάστη ἀνισότης διά γραμμῶν ἐχουσῶν διαφορετικήν ἀπόστασιν ἀπό τήν (ε) διά τάς διαφόρους ἀνισότητας.



Ἄν ὑπάρχουν κοινά διαστήματα τῶν (1), (2) καί (3), ταῦτα γίνονται ἐποπτικῶς καταφανῆ ἀμέσως. Εἰς τό παράδειγμά μας αἱ τρεῖς ἀνισότητες ἱκανοποιοῦνται συγχρόνως (συναληθεύουν) εἰς τά διαστήματα

(4) $\qquad -4 < x < \frac{3}{4} \quad , \quad 10 < x < 15 \quad$ καί $\quad x > 21$

καί μόνον εἰς αὐτά. Τά (4) ἀποτελοῦν λοιπόν τήν λύσιν τοῦ συστήματος τῶν τριῶν ἀνισοτήτων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

546. Νά λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

α) $(x-3)^2(5x+2)^3(2-x)(4-3x) > 0$ $\qquad$ β) $\dfrac{(4x^2-1)(x+2)^2}{x^3(x+1)(x-2)^5} \geqslant 0$

547. Νά λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

α) $\dfrac{-4}{3x+1} > \dfrac{3}{2-x}$ $\qquad$ β) $\dfrac{2x^2-4x+3}{(x+2)(x-3)} + \dfrac{1}{2} < 0$

548. Νά λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

α) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}$ β) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)} > \frac{1}{x^2(x+3)}$

549. Νά λυθοῦν καί διερευνηθοῦν ὡς πρός τήν παράμετρον λ αἱ ἀνισότητες

α) $\frac{\lambda x+1}{3} + \frac{4\lambda - x}{2} < \frac{\lambda^2}{6}$ β) $\frac{2x-1}{\lambda+1} - \frac{x+2}{3} > \frac{2x-5}{2(\lambda+1)}$

550. Νά λυθοῦν ὡς πρός x αἱ ἀνισότητες

α) $\mu \frac{x+1}{x-1} > 1$ β) $\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right)^2 < \frac{x^2+\alpha^2}{x^2+\beta^2}$ $(\alpha \neq \beta)$

551. Νά λυθῆ ὡς πρός x ἡ ἀνισότης

$\frac{\mu x+\nu}{\alpha+\beta} - \frac{\pi x+k}{\alpha-\beta} < \frac{\mu x-\nu}{\alpha-\beta} + \frac{\pi x-k}{\alpha+\beta}$

552. Νά εὑρεθοῦν αἱ κοιναί λύσεις τῶν ἀνισοτήτων

$\left\{x^3 - 5x^2 + 6x > 0 \quad , \quad |x| < 4 \quad , \quad |x| > 1\right\}$

135. Ἐξισώσεις μέ ριζικά. α) Θεώρημα: «Ἐάν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως εἰς τό τετράγωνον, λαμβάνομεν μίαν νέαν ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὡς λύσεις, πάσας τάς λύσεις τῆς πρώτης, ἀλλ'ἡ ὁποία ἐν γένει δέν εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν πρώτην»

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$A = B \tag{1}$$

εἶναι προφανές ὅτι πᾶσα λύσις τῆς (1) εἶναι καί λύσις τῆς

$$A^2 = B^2 \tag{2}$$

διότι ἀφοῦ ἡ λύσις αὕτη καθιστᾶ τάς παραστάσεις A καί B, ἴσας θά καθιστᾶ ἴσα καί τά τετράγωνα αὐτῶν. Δέν δυνάμεθα ὅμως νά συμπεράνωμεν τό ἀντίστροφον διότι ἡ (2) γράφεται:

$$A^2 - B^2 = 0 \quad ἤ$$

$$(A - B)(A + B) = 0 \tag{3}$$

πᾶσα δέ λύσις τῆς (3) θά μηδενίζη ἤ τόν παράγοντα A − B ἤ τόν παράγοντα A + B. Δηλαδή ἤ θά ἱκανοποιῆ την ἐξίσωσιν A − B = 0 δηλ. τήν (1) ἤ θά ἱκανοποιῆ τήν ἐξίσωσιν A+B=0 δηλ. τήν A = −B ἡ ὁποία εἶναι διάφορος ἐν γένει τῆς (1).

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι πᾶσα λύσις τῆς τετραγωνισμένης ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις ἤ τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως (1) ἤ τῆς ἐξισώσεως τῆς προκυπτούσης ἐκ τῆς ἀρχικῆς ὅταν ἀλλάξωμεν τό σημεῖον τοῦ ἑνός μέλους, δηλ. τῆς $A = -B$.

Ἡ ἐ ξ ί σ ω σ ι ς $A = -B$ λ έ γ ε τ α ι κ α ί σ υ ζ υ γ ή ς τ ῆ ς $A = B$.

Γενίκευσις τοῦ θεωρήματος. « Ἐάν ν περιττός φυσικός ἀριθμός ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu} = B^{\nu}$ (ὅπου Α καί Β «πραγματικαί» Ἀλγ. Παραστάσεις) ἔχει τάς ἰδίας πραγματικάς λύσεις μέ τήν $A = B$. Ἐάν ν ἄρτιος, ἡ ἐξίσωσις $A^{\nu} = B^{\nu}$ ἔχει ὡς πραγματικάς λύσεις τάς λύσεις ἀμφοτέρων τῶν ἐξισώσεων: $A = B$ καί $A = -B$ »

Ἀπόδειξις. Πᾶσα λύσις τῆς $A^{\nu} = B^{\nu}$, ὡς καθιστῶσα ἴσας τάς δυνάμεις A^{ν} καί B^{ν} θ ά κ α θ ι σ τ ᾶ ἴ σ α ς κ α τ' ἀ π ό λ υ τ ο ν τ ι μ ή ν κ α ί τ ά ς β ά σ ε ι ς Α κ α ί Β. (Ἐάν ἦτο $|A| \neq |B|$ τότε θά ἦτο καί $|A|^{\nu} \neq |B|^{\nu}$ ἤ $|A^{\nu}| \neq |B^{\nu}|$. Ἴδε καί λῆμμα τῆς § 83).

Ἑπομένως, ἀφοῦ $|A| = |B|$ θά εἶναι ἤ $A = B$ ἤ $A = -B$. Ἐάν ν περιττός, ἀποκλείεται νά εἶναι αἱ βάσεις Α καί Β ἑτερόσημοι διότι τότε καί αἱ δυνάμεις A^{ν} καί B^{ν} θά ἦσαν ἑτερόσημοι. Ἑπομένως θά εἶναι $A = B$ δηλ. πᾶσα λύσις τῆς $A^{\nu} = B^{\nu}$ εἶναι καί λύσις τῆς $A = B$· καί ἀντιστρόφως.

Ἐάν ν ἄρτιος δέν ἀποκλείεται αἱ βάσεις Α καί Β νά εἶναι ἑτερόσημοι, διότι καί ἄν $A = -B$ πάλιν ἔχομεν $A^{\nu} = B^{\nu}$. Ὥστε τότε $A = B$ ἤ $A = -B$. Καί ἀντιστρόφως.

β) **Ἐξισώσεις ἄρρητοι.** Δοθείσης μιᾶς ἀ ρ ρ ή τ ο υ ἐ ξ ι σ ώ σ ε ω ς (δηλ. περιεχούσης τόν ἄγνωστον ὑπό τό ριζικόν), δυνάμεθα ἐν γένει διά καταλλήλου ὑψώσεως τῶν μελῶν της εἰς δυνάμεις νά εὕρωμεν ἐν τέλει μίαν ἀκεραίαν - ρητήν ἐξίσωσιν ἡ ὁποία θά περιέχῃ ὅλας τάς λύσεις τῆς ἀρχικῆς ἀρρήτου ἐξισώσεως, χωρίς ὅμως νά εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμος πρός

ήν ἀρχικήν ("Ιδε τά δύο προηγούμενα θεωρήματα). Διά τοῦτο
κ τῶν ριζῶν τῆς τελικῆς (ἄνευ ριζικῶν) ἐξισώσεως πρέπει δι'
παληθεύσεως ἤ ἄλλου τινος τρόπου ν'ἀποκλείσωμεν ἐκείνας αἵ-
ινες δέν πληροῦν τήν ἀρχικήν ἐξίσωσιν.

'Ενίοτε ἡ ἀκεραία - ρητή ἐξίσωσις εἰς τήν ὁποίαν κατα-
ήγομεν εἶναι πρωτοβάθμιος.

γ)'Εάν ἡ ἐξίσωσις περιέχει ἕνα μόνον ριζικόν, τότε ἀ-
ο μ ο ν ο ῦ μ ε ν τοῦτο δηλαδή τό μεταφέρομεν εἰς τό ἕνα
έλος ἐνῶ εἰς τό ἄλλο μέλος μεταφέρομεν π ά ν τ α ς τούς
λ λ ο υ ς ὅ ρ ο υ ς τῆς ἐξισώσεως. Κατόπιν ὑψοῦμεν ἀμφό-
ερα τά μέλη τῆς ἐξισώσεως εἰς δυναμιν ἔχουσαν ἐκθέτην ἴ-
ον πρός τόν δείκτην τοῦ ριζικοῦ καί φθάνομεν εἰς ἐξίσωσιν
ρητήν.

"Εστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $x + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2$

'Απομονοῦντες τό ριζικόν λαμβάνομεν τήν:

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = 2 - x \qquad (4)$$

καί ὑψοῦντες εἰς τό τετράγωνον τά μέλη τῆς (4) φθάνομεν εἰς
τήν ρητήν ἐξίσωσιν:

$$x^2 + x - 1 = 4 + x^2 - 4x \quad ἤ \quad 5x = 5 \quad ἤ \quad x = 1$$

'Η εὑρεθεῖσα ρίζα 1 δύναται νά εἶναι ρίζα τῆς (4) ἤ τῆς
συζυγοῦς τῆς (4) δηλ. τῆς

$$-\sqrt{x^2 + x - 1} = 2 - x \qquad (5)$$

Θέτοντες εἰς τήν (4) ὅπου $x = 1$ βλέπομεν ὅτι ἡ (4) ἱ-
κανοποιεῖται. Συνεπῶς ἡ εὑρεθεῖσα λύσις εἶναι ἡ λύσις τῆς
δοθείσης.

'Ο ἔ λ ε γ χ ο ς τ ῆ ς ε ὑ ρ ε θ ε ί σ η ς λ ύ-
σ ε ω ς $x = 1$ δ ύ ν α τ α ι ν ά γ ί ν η κ α ί χ ω-
ρ ί ς ἐ π α λ ή θ ε υ σ ι ν, βάσει τῆς ἑξῆς παρατηρήσεως:
Κάθε λύσις τῆς (4) καθιστᾶ τό δεύτερον μέλος ἴσον μέ τό πρῶ-

τον, ἄρα καθιστᾷ τό $2 - x \geqslant 0$ ἐνῷ πᾶσα λύσις τῆς (5) καθιστᾷ τό 2 - ἀρνητικόν ἤ μηδέν. Δηλαδή κάθε λύσις τῆς (4), πληροῖ τήν σχέσιν

$$(6) \qquad 2 - x \geqslant 0$$

ἐνῷ κάθε λύσις τῆς (5) πληροῖ τήν

$$(7) \qquad 2 - x \leqslant 0$$

Ἡ εὑρεθεῖσα τιμή $x = 1$ ἱκανοποιεῖ τήν (6) καί ὄχι τήν (7), συνεπῶς εἶναι λύσις τῆς (4) καί ὄχι τῆς (5).

δ) Ἐάν ἡ ἐξίσωσις περιέχει δύο τετραγωνικάς ρίζας, ἀπομονοῦμεν τό ἕνα ριζικόν καί τετραγωνίζομεν. Οὕτω λαμβάνομεν ἐξίσωσιν περιέχουσαν ἕνα μόνον ριζικόν καί ἐργαζόμεθα ὡς καί προηγουμένως. Ἐάν δέ ὑπάρχουν περισσότερα ριζικά, δι'ἀλλεπαλλήλων ὑψώσεων εἰς δυνάμεις (ἀφοῦ προηγουμένως γίνουν κατάλληλοι μεταφοραί), ἐλαττοῦμεν τό πλῆθος τῶν ριζικῶν μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ἀκεραίαν ρητήν ἐξίσωσιν.

Πρέπει ὅμως ἐκ τῶν λύσεων τῆς ἀκεραίας ἐξισώσεως εἰς τήν ὁποίαν καταλήγομεν νά ἐκλέξωμεν ἐκείνας αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τήν δοθεῖσαν. Ἡ ἐπιλογή αὕτη δύναται νά γίνη δι'ἐπαληθεύσεως τῆς ἀρχικῆς, ἤ ἄν ἔχωμεν θέσει περιορισμούς, δι'ἐπαληθεύσεως τῶν περιορισμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. "Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις:

$$(8) \qquad \sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x-10}$$

Λύσις. Ἐπειδή καί τά δύο μέλη τῆς (8) εἶναι θετικά, αὕτη θά εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν διά τετραγωνίσεως προκύπτουσαν. (Διότι ἡ συζυγής της:

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = -\sqrt{x+2} - \sqrt{x-10}$$

προφανῶς οὐδεμίαν λύσιν ἔχει, ἐπειδή τό πρῶτον μέλος της εἶναι ἀριθμός θετικός τό δέ δεύτερον ἀρνητικός καί συνεπῶς ἰσότης μεταξύ των εἶναι ἀδύνατος).

Τετραγωνίζοντες τήν (8) λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$x-2 + x-7 + 2\sqrt{(x-2)(x-7)} = x+2 + x-10 + 2\sqrt{(x+2)(x-10)}$$

'Απομονοῦμεν τό ριζικόν τοῦ πρώτου μέλους καί ἔχομεν τήν

(9) $$2\sqrt{x^2 - 9x + 14} = 1 + 2\sqrt{x^2 - 8x - 20}$$

ἥτις ἔχει ἀμφότερα τά μέλη θετικά καί συνεπῶς (ὡς ἐξηγήσαμεν προηγούμενως) θά εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν διά τετραγωνίσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της προκύπτουσαν ἐξίσωσιν:

$$4x^2 - 36x + 56 = 1 + 4x^2 - 32x - 80 + 4\sqrt{x^2 - 8x - 20}$$

'Απομονοῦμεν τό ριζικόν καί φθάνομεν εἰς τήν ἐξίσωσιν:

(10) $$4\sqrt{x^2 - 8x - 20} = -4x + 135$$

ἰσοδύναμον πρός τήν (8).

'Επειδή τό πρῶτον μέλος τῆς (10) εἶναι μή ἀρνητική ποσότης, πρέπει ἡ λύσις x νά ἱκανοποιῆ τόν περιορισμόν

(11) $$-4x + 125 \geqslant 0$$

'Ακολούθως τετραγωνίζοντες τήν (10) λαμβάνομεν

$$16x^2 - 128x - 320 = 16x^2 + 18225 - 1080x$$

καί ἐξ αὐτῆς

$$x = 19 + \frac{457}{952}$$

'Επειδή ἡ τιμή αὕτη πληροῖ τόν τεθέντα περιορισμόν (11) διά τοῦτο ἐπαληθεύει τήν (10) καί ὄχι τήν συζυγῆ της. 'Αλλ' ἡ (10) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν (8), ἄρα ἡ τιμή $x = 19 + \frac{457}{952}$ εἶναι ἡ μοναδική λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

2. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{2 + x}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + x}} + \frac{2 - x}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - x}} = \sqrt{2}$$

Λύσις. Διά νά ἔχη τό πρῶτον μέλος, νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πρέπει $2 + x \geqslant 0$ καί $2 - x \geqslant 0$ δηλαδή

(12) $$-2 \leqslant x \leqslant 2$$

καί διά νά εἶναι ὁ δεύτερος παρονομαστής $\neq 0$ πρέπει $x \neq 0$. Ὥστε

(13) $$x \neq 0$$

'Εξαλείφοντες τούς παρ/στάς λαμβάνομεν

$$(2+x)(\sqrt{2}-\sqrt{2-x})+(2-x)(\sqrt{2}+\sqrt{2+x}) =$$
$$=\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2+x})(\sqrt{2}-\sqrt{2-x})$$

καί μετά τάς πράξεις καί άναγωγάς:

'Η τελευταία αὕτη γράφεται:

(14) $$x\left\{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right\}=\sqrt{2}\left\{2+\sqrt{4-x^2}\right\}$$

καί ἔχει δεύτερον μέλος θετικόν. Συνεπῶς καί τό πρῶτον μέλος τῆς (14) θά εἶναι $\geqslant 0$. 'Επειδή δέ ὁ παράγων $\left\{\sqrt{2-x}+\sqrt{2+x}\right\}$ εἶναι > 0 ἔπεται ὅτι

(15) $$x \geqslant 0$$

Κατόπιν τοῦ περιορισμοῦ (15) ὑψοῦμεν τά δύο μέλη τῆς (14) εἰς τό τετράγωνον ὁπότε λαμβάνομεν:

$$x^2\left\{4+2\sqrt{4-x^2}\right\}=2\left\{8-x^2+4\sqrt{4-x^2}\right\}$$

'Απλοποιοῦντες διά 2 καί ἀπομονοῦντες τό ριζικόν λαμβάνομεν:

(16) $$(x^2-4)\sqrt{4-x^2}=8-3x^2$$

'Από τήν (16) προκύπτει ὁ περιορισμός:

(17) $$\frac{8-3x^2}{x^2-4}\geqslant 0$$

Κατόπιν τοῦ περιορισμοῦ (17) τετραγωνίζομεν τήν (16) καί λαμβάνομεν:

$$(4-x^2)^3=(8-3x^2)^2 \quad \text{ἤ}$$
$$x^6-3x^4=0 \quad \text{ἤ}$$
$$x^4(x^2-3)=0$$

καί ἐξ τῆς τελευταίας, τρεῖς τιμάς διά τό x:

$$x_1=0\ ,\quad x_2=\sqrt{3}\ ,\quad x_3=-\sqrt{3}$$

'Η πρώτη ρίζα $x_1=0$ ἀπορρίπτεται ὡς μή πληρούσα τόν περιορισμόν (13). 'Η τρίτη, $x_3=-\sqrt{3}$ ἐπίσης ὡς μή πληροῦσα τόν περιορισμόν (15). 'Η δευτέρα $x_2=\sqrt{3}$ πληροῖ ἅπαντας τούς τεθέντας περιορισμούς: (12), (13), (15) καί (17) ἐπομένως εἶναι ἡ (μοναδική) λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

ε) **Ἄρρητοι ἐξισώσεις μέ παράμετρον.** Ὅταν ἡ ἄρρητος ἐξίσωσις περιέχει παράμετρον (ἴδε σελ.344) τότε δυνατόν δι' ὡρισμένας τιμάς τῆς παραμέτρου νά ἔχη λύσιν καί διά τάς λοιπάς τιμάς τῆς παραμέτρου νά μή ἔχη λύσιν. Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\sqrt{5-2x}=\lambda\sqrt{x}$ διά τάς ἀρνητικάς τιμάς τῆς παραμέτρου λ δέν ἔχει προφανῶς λύσιν (τά δύο μέλη εἶναι τότε ἑτερόσημα) ἐνῶ διά τάς θετικάς (ἤ μηδέν) ἔχει.

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν τιμῶν τῆς παραμέτρου διά τάς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ἤ περισσοτέρας λύσεις καλεῖται διερεύνησις τῆς ἐξισώσεως ὡς πρός τήν παράμετρον.

Ἡ διερεύνησις γίνεται βάσει τῶν περιορισμῶν τούς ὁποίους θέτομεν κατά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἀρρήτου ἐξισώσεως, ὡς φαίνεται ἀπό τά ἑπόμενα παραδείγματα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθῆ καί διερευνηθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-7}=\lambda \tag{18}$$

Λύσις. Ἐπειδή τό πρῶτον μέλος εἶναι θετική ποσότης πρέπει νά εἶναι $\lambda>0$. Κατόπιν τούτου τετραγωνίζομεν τήν (18) καί ἀπομονοῦντες τό ριζικόν λαμβάνομεν

$$2\sqrt{(x-3)(x-7)}=\lambda^2-2x+10 \tag{19}$$

Ἡ (19) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν (18) ἐφ' ὅσον $\lambda>0$. Δεύτερος περιορισμός, προκύπτει ἀπό τήν (19):

$$\lambda^2-2x+10\geqslant 0 \tag{20}$$

Τετραγωνίζοντες τήν (19) καί λύοντες ὡς πρός x εὑρίσκομεν

$$x=\frac{\lambda^4+20\lambda^2+16}{4\lambda^2}. \tag{21}$$

Ἡ εὑρεθεῖσα λύσις πρέπει ὅμως νά πληροῖ τόν περιορισμόν (20), δηλ. πρέπει

$$\lambda^2-2\frac{\lambda^4+20\lambda^2+16}{4\lambda^2}+10\geqslant 0 \tag{22}$$

Ἡ (22), προκύψασα ἐκ τοῦ περιορισμοῦ (20) κατόπιν ἀντικαταστάσεως τοῦ x ἐν αὐτῷ, ἀποτελεῖ περιορισμόν διά τήν παράμετρον λ. Δηλαδή ἡ λ δέν δύναται νά εἶναι τυχοῦσα ἀλλά πρέπει νά πληροῖ τήν (22) ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν.

Ἡ (22) λαμβάνει μετά τάς πράξεις τήν μορφήν: $\lambda^4-16\geqslant 0$ ἤ

$$(\lambda^2+4)(\lambda+2)(\lambda-2)\geqslant 0 \tag{23}$$

καί ἐπειδή πρέπει καί $\lambda>0$ ὡς παρετηρήσαμεν ἐξ ἀρχῆς, φθάνομεν εἰς τήν σχέσιν $\lambda-2\geqslant 0$ ἤ

$$\lambda\geqslant 2$$

Ὥστε ἡ (18) ἔχει ὡς λύσιν τήν (21), μόνον ὅταν $\lambda\geqslant 2$.

Διά $\lambda < 2$ ἡ (18) οὐδεμίαν λύσιν ἔχει.

2. Διά ποίας τιμάς τοῦ α ἔχει λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$x = \alpha + \sqrt{x^2 + 2(\alpha+1)x + 4\alpha} \qquad ;$$

Λύσις. Ἀπομονοῦμεν τό ριζικόν:

$$\sqrt{x^2 + 2(\alpha+1)x + 4\alpha} = x - \alpha$$

ἐξ οὗ ὁ περιορισμός

(24) $$x - \alpha \geqslant 0$$

Τετραγωνίζοντες λαμβάνομεν

$$x^2 + 2(\alpha+1)x + 4\alpha = x^2 + \alpha^2 - 2\alpha x \qquad \text{ἤ}$$

$$2x(2\alpha+1) = \alpha^2 - 4\alpha \qquad \text{καί} \qquad x = \frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2(2\alpha+1)}$$

Ἵνα ἡ τιμή αὐτή τοῦ x πληροῖ τήν δοθεῖσαν πρέπει καί ἀρκεῖ νά πληροῖ τόν περιορισμόν (24) δηλ. πρέπει

(25) $$\frac{\alpha^2 - 4\alpha}{2(2\alpha+1)} - \alpha \geqslant 0$$

Λύοντες τήν κλασματικήν ἀνισότητα (25) (ἴδε §133) εὑρίσκομεν ὅλας ἐκείνας τάς τιμάς τοῦ α διά τάς ὁποίας ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσιν. Εὑρίσκομεν δέ

$$-\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 0$$

στ) Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{\Gamma} = 0$ ὅπου Α, Β, Γ, παραστάσεις περιέχουσαι τόν x. Ἡ λύσις της διευκολύνεται ἄν ἐνθυμηθῶμεν ὅτι ἄν τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα μηδέν, τότε τό ἄθροισμα τῶν κύβων των ἰσοῦται πρός τό τριπλάσιον γινόμενόν των (ἴδε σελ. 144). Συνεπῶς ἐκ τῆς δοθείσης ἕπεται ἡ

(26) $$A + B + \Gamma = 3\sqrt[3]{AB\Gamma} \qquad \text{ἤ} \qquad (A + B + \Gamma)^3 = 27AB\Gamma$$

ἥτις δέν περιέχει ριζικά.

Ἀντιστρόφως ἡ (26) συνεπάγεται τήν δοθεῖσαν ἄν δέν εἶναι $A = B = \Gamma$ (ἴδε σελ. 127, VIII καί ἄσκ. 176).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

(27) $$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$$

Λύσις. Ἔχομεν $\sqrt[3]{x+1} + (-\sqrt[3]{x-1}) + (-\sqrt[6]{x^2-1}) = 0$ καί συνεπῶς, τό ἄθροισμα τῶν κύβων ἴσον πρός τό τριπλάσιον γινόμενον, δηλ:

(28) $$(x+1)+(-x+1)+(-\sqrt{x^2-1}) = 3\sqrt[3]{x^2-1}\cdot\sqrt[6]{x^2-1} \quad \text{ἤ}$$

$$2-\sqrt{x^2-1} = 3\sqrt{x^2-1} \quad \text{ἤ}$$

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}, \quad x^2 = \frac{5}{4}, \quad x' = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x'' = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Αἱ δύο αὐταί τιμαί τοῦ x πληροῦσαι τήν (28) πληροῦν καί τήν (27) διότι δέν καθιστοῦν ἴσα τά τρία ριζικά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*546. Νά λυθοῦν αἱ ἄρρητοι ἐξισώσεις

α) $\sqrt{7x-5}+\sqrt{4x-1} = \sqrt{7x-4}+\sqrt{4x-2}$

β) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x-1$

*547. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x}} - \dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$ β) $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1$

γ) $\dfrac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}} + \dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}}} = \sqrt{2(x^3+1)}$

*548. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}} + \frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}} = \sqrt{x}$$

*549. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x+49}-\sqrt[3]{x-49} = 2$ β) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

550. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

α) $\sqrt[3]{2-x} = 1-\sqrt{x-1}$ β) $\sqrt{x}+\sqrt{x+2} = \dfrac{4}{\sqrt{x+2}}$

*551. Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$$\sqrt{x+7}+\varepsilon_1\sqrt{x+5}+\varepsilon_2\sqrt{x+3}+\varepsilon_3\sqrt{x+2} = 0$$

ὅπου ἕκαστον τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, εἶναι ἤ +1 ἤ −1 καί νά εὑρεθῆ εἰς ποίαν ἐξ ὅλων ἀνήκει ἡ εὑρισκομένη λύσις.

552. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{x} + \frac{\sqrt[\nu]{\alpha+x}}{\alpha} = \frac{\sqrt[\nu]{x}}{\gamma}$$

Εἰς τάς κάτωθι ἐξισώσεις νά εὑρεθῆ διά ποίας τιμάς τῆς παραμέτρου α ὑπάρχει λύσις καί ποία ἡ λύσις αὕτη;

553) $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=\alpha$

554) $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{x^2}}=\alpha x$

555) $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=(\alpha+1)\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$

556) $\frac{5\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+x^2}}=2(\sqrt{\alpha^2+x^2}+x)$

557) $\frac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}}=\alpha^3\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$

558) $2\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}=\sqrt{\alpha-x+\sqrt{x(\alpha+x)}}$

559) $\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\frac{\alpha^2}{\alpha+x}}=\sqrt{2\alpha+x}$

Νά λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καί νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι τάς ὁποίας πρέπει νά πληροῦν αἱ παράμετροι διά νά ὑπάρχη λύσις.

560. $\sqrt{\alpha^2+x\sqrt{\beta^2+x^2-\alpha^2}}=x-\alpha$

561. $\frac{1-\alpha x}{1+\alpha x}\cdot\sqrt{\frac{1+\beta x}{1-\beta x}}=1$

562. $\sqrt{\alpha-x}+\sqrt{\beta-x}=\sqrt{\alpha+\beta-2x}$

563. $\sqrt{x-2\alpha}+\sqrt{x-2\beta}=2$

564. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt[3]{x-\alpha}+\sqrt[3]{x-\beta}+\sqrt[3]{x-\gamma}=0$$

καί νά διερευνηθῆ ἡ ὕπαρξις λύσεως.

565. Νά μετατραποῦν εἰς ρητάς αἱ κάτωθι ἐξισώσεις

α) $\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}-\sqrt[3]{\Gamma}=0$ β) $\sqrt[3]{A}+\sqrt{B}+\Gamma=0$

566. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$x=t+\sqrt{x^2+2(t+1)x+4t}$$

καί νά εὑρεθῆ διά ποίας τιμάς τῆς παραμέτρου t, ἡ ἐξίσωσις ἔχει λύσιν. Νά εὑρεθῆ ἐπίσης ἄν δύνανται συγχρόνως ὁ x καί ὁ t νά εἶναι ἀκέραιοι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XI

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ Η ΑΝΑΓΟΜΕΝΑ ΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΑ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Α΄ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

136. **Ἐξισώσεις πρωτοβάθμιοι ὡς πρός δύο ἀγνώστους.** α) Ἡ πρωτοβάθμιος ὡς πρός x καί y ἐξίσωσις:

(1) $$\alpha x + \beta y = \gamma$$

ὅπου α, β, γ γνωστοί ἀριθμοί καί x, y, οἱ ἄγνωστοι, δέχεται ἐν γένει ἀπείρους λύσεις.* Διότι ἄν εἶναι π.χ. $\beta \neq 0$ καί δώσωμεν εἰς τόν x μίαν αὐθαίρετον τιμήν x_0, τότε ἡ (1) καθίσταται πρωτοβάθμιος μέ ἕνα ἄγνωστον (τόν y) καί οὕτω καθορίζεται καί μία τιμή τοῦ y. Ἐπειδή δέ ὁ x_0 εἶναι αὐθαίρετος, ἕπεται ὅτι ἡ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις (Δηλ. ἐπαληθεύεται ἀπό ἄπειρα ζεύγη τιμῶν τῶν x καί y· ἴδε §123).

Παρατηρητέον ἀκόμη, ὅτι ἄν $\beta = 0$ καί $\alpha \neq 0$, ἡ (1) ἀληθεύει διά $x = \gamma/\alpha$ καί y = οἱοσδήποτε ἀριθμός

Ἐάν δοθῆ καί δευτέρα ἐξίσωσις

(2) $$\alpha' x + \beta' y = \gamma$$

συνδέουσα τάς αὐτάς μεταβλητάς x καί y τότε αἱ δύο ἐξισώσεις (1) καί (2) ὁμοῦ λαμβανόμεναι ἀποτελοῦν ἕνα σύστημα.

(3) $$\begin{cases} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha' x + \beta' y = \gamma' \end{cases}$$

Κατά κανόνα, ὑπάρχει ἕνα ζεῦγος τιμῶν τῶν x καί y τό

---

* Αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις, μέ ὁσουσδήποτε ἀγνώστους λέγονται καί "γραμμικαί ἐξισώσεις".

ὁποῖον ἱκανοποιεῖ καί τάς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (3) δηλ. καί τήν (1) καί τήν (2). Ἡ κοινή αὐτή λύσις τῶν (1) καί (2) καλεῖται λ ύ σ ι ς τ ο ῦ σ υ σ τ ή μ α τ ο ς τῶν δύο ἐξισώσεων (3) ἡ δέ εὕρεσις πασῶν τῶν λύσεων (ἐφ'ὅσον ὑπάρχουν) λέγεται ἐ π ί λ υ σ ι ς τ ο ῦ σ υ σ τ ή μ α τ ο ς (3).

β) **Ἐπίλυσις καί διερεύνησις τοῦ (3).** Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τό σύστημα (3) εἶχε ὡς λύσιν τό ζεῦγος τῶν ἀριθμῶν (x_o, y_o), τότε τό ζεῦγος τοῦτο θά ἱκανοποίει ἀμφοτέρας τάς ἐξισώσεις καί συνεπῶς θά εἴχομεν

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha x_o + \beta y_o = \gamma \\ \alpha' x_o + \beta' y_o = \gamma' \end{cases}$$

Ἐάν πολ/σωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς πρώτης ἐκ τῶν (4) ἐπί β΄ καί τά τῆς δευτέρας ἐπί -β λαμβάνομεν:

$$\begin{cases} \alpha\beta' x_o + \beta\beta' y_o = \gamma\beta' \\ -\alpha'\beta x_o - \beta'\beta y_o = -\gamma'\beta \end{cases}$$

Ἦτοι ὁ y_o ἀ π ο κ τ ᾶ ἀ ν τ ι θ έ τ ο υ ς σ υ ν τ ε λ ε σ τ ά ς εἰς τάς δύο ἰσότητας, καί διά προσθέσεως κατά μέλη λαμβάνομεν

$$(5) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x_o = \gamma\beta' - \gamma'\beta$$

Πολλαπλασιάζοντες ἐξ ἄλλου ἀμφότερα τά μέλη τῆς πρώτης ἐκ τῶν (4) ἐπί -α΄ καί τά τῆς δευτέρας ἐπί α καί ἀκολούθως προσθέτοντες λαμβάνομεν ὁμοίως.

$$(6) \qquad (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y_o = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma$$

Ὥστε ἄν πληροῦνται αἱ (4) θά πληροῦνται καί αἱ

$$(7) \qquad \begin{cases} (\alpha\beta' - \alpha'\beta)x_o = \gamma\beta' - \beta\gamma' \\ (\alpha\beta' - \alpha'\beta)y_o = \alpha\gamma' - \alpha'\gamma \end{cases}$$

Ἄν ὑποτεθῆ, τώρα, ὅτι

(8) $$\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$$

λαμβάνομεν τότε ἐκ τῶν (7) τάς

(9) $$\left\{ x_0 = \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \quad , \quad y_0 = \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} \right\}$$

(Σημειωτέον ὅτι μέ χρῆσιν τῶν ὁριζουσῶν (ἴδε σελ. 133) οἱ τύποι (9) γράφονται

(9′) $$\left\{ x = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \right\}$$

Ὅπου ἕκαστος ἀριθμητής προκύπτει ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ ἄν εἰς αὐτόν τεθῶσιν ἀντί τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀγνώστου οἱ γνωστοί ὅροι ὑποτιθέμενοι εἰς τό 2ον μέλος).

Ὥστε, ἄν ὑπῆρχε λύσις τίς (x_0, y_0) τοῦ συστήματος (3) αὕτη θά ἦτο ἡ ὑπό τῶν τύπων (9) παρεχομένη.

Μένει ἀκόμη νά δείξωμεν ὅτι αἱ ἀνωτέρω εὑρεθεῖσαι τιμαί τῶν x_0 καί y_0 πράγματι ἐπαληθεύουν τό σύστημα. Πρός τοῦτο θέτομεν εἰς τήν πρώτην τῶν ἐξισώσεων (4) ὅπου x_0 καί y_0 τάς τιμάς των ὁπότε ἔχομεν:

$$\alpha x_0 + \beta y_0 = \alpha\,\frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \beta\,\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} =$$

$$\frac{\alpha\gamma\beta' - \alpha\beta\gamma' + \beta\alpha\gamma' - \beta\alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \frac{\gamma(\alpha\beta' - \alpha'\beta)}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma$$

δηλ. ἡ ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται. Ὁμοίως καί ἡ δευτέρα. Ὥστε οἱ τύποι (9) παρέχουν τήν μοναδικήν λύσιν τοῦ συστήματος (3) ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ.

Ἄς ὑποτεθῇ τώρα ὅτι

(10) $$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \quad \text{καί} \quad \gamma\beta' - \beta\gamma' \neq 0$$

Τότε ἡ πρώτη ἐκ τῶν (7) δι'οὐδεμίαν τιμήν τοῦ x_0 ἱκανοποιεῖται, συνεπῶς τό σύστημα (3) δ έ ν ἔ χ ε ι κ α μ μ ί α ν λ ύ σ ι ν. Τό ἴδιο συμβαίνει καί ἄν $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$ καί $\alpha\gamma' - \alpha'\gamma \neq 0$.

Τέλος, ἄς ὑποτεθῆ ὅτι

(11) $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0 \quad , \quad \gamma\beta' - \beta\gamma' = 0 \quad , \quad \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἀποδεικνύεται ὅτι τό σύστημα (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις. Διά τήν ἀπόδειξιν διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

Ἔστω πρῶτον $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Τότε αἱ (11) δίδουν:

$$\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad , \quad \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \lambda$$

Ὥστε $\alpha' = \alpha\lambda$ $\beta' = \beta\lambda$ $\gamma' = \gamma\lambda$ καί ἡ $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$ λαμβάνει τήν μορφήν $\alpha\lambda x + \beta\lambda y = \lambda\gamma$ ἤ $\lambda(\alpha x + \beta y) = \lambda\gamma$. Ἐπομένως πᾶσα λύσις τῆς $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι καί λύσις τῆς $\alpha'x + \beta'y = \gamma'$, ἄρα τό (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις (Δηλ. τάς ἀπείρους λύσεις τῆς $\alpha x + \beta y = \gamma$).

Ἐάν πάλιν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$ τότε ἡ πρώτη ἐκ τῶν (11) δίδει $\frac{\beta'}{\beta} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \lambda$ ἡ δέ δευτέρα, $\gamma' = 0$ ὥστε τό σύστημα καταντᾶ $\{\alpha x + \beta y = 0 \quad \lambda\alpha x + \lambda\beta y = 0\}$ καί ἔχει πάλιν ἀπείρους λύσεις.

Ἐάν εἶναι $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$ ἡ πρώτη ἐκ τῶν (11) δίδει $\beta' = 0$ ἡ δέ τρίτη $\frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \lambda$ καί τό σύστημα καταντᾶ $\{\alpha x = \gamma \quad , \quad \lambda\alpha x = \lambda\gamma\}$ καί ἔχει ἀπείρους λύσεις : $x = \frac{\gamma}{\alpha}$ καί y οἱοσδήποτε.

Τελος, ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί διά πᾶσας τάς λοιπάς δυνατάς περιπτώσεις ὅτι πληρουμένων τῶν (11) τό σύστημα (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις.

Τό ἐξαγόμενον τῆς διερευνήσεως διατυποῦται κατά πλέον εὐμνημόνευτον τρόπον διά τῆς χρήσεως δευτεροταξίων ὁριζουσῶν (ἴδε §60). Πράγματι τά πρῶτα μέλη τῆς (11) γράφονται ἀντιστοίχως:

(12) $$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} ,$$

καί θά ἰσχύουν τά ἑξῆς:

i) Ἐάν:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \neq 0$$

Τό σύστημα $\{\alpha x + \beta y = \gamma \ , \ \alpha'x + \beta'y = \gamma'\}$ ἔχει μίαν καί μόνην λύσιν παρεχομένην ὑπό τῶν τύπων (9)

ii) 'Εάν

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

καί μία τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο ἄλλων ὁριζουσῶν (12) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός τό σύστημα οὐδεμίαν λύσιν ἔχει. (Αἱ ἐξισώσεις (3) λέγονται τότε ἀσυμβίβαστοι).

iii) 'Εάν καί αἱ τρεῖς ὁρίζουσαι (12) εἶναι μηδέν τό σύστημα (3) ἔχει ἀπείρους λύσεις.

γ) Παράδειγμα διερευνήσεως συστήματος δύο πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ὡς πρός παράμετρον. «Διά ποίας τιμάς τῆς παραμέτρου λ τό σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda+5)x + (2\lambda+3)y = 3\lambda + 2 \\ (3\lambda+10)x + (5\lambda+6)y = 2\lambda + 4 \end{cases}$$

ἔχει μίαν ἤ καμμίαν ἤ ἀπείρους λύσεις;

Λύσις. Μίαν καί μόνον λύσιν θά ἔχωμεν ἄν

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & 2\lambda + 3 \\ 3\lambda + 10 & 5\lambda + 6 \end{vmatrix} \neq 0$$

ἤ $(\lambda + 5)(5\lambda + 6) - (2\lambda + 3)(3\lambda + 10) \neq 0$ ἤ $-\lambda^2 + 2\lambda \neq 0$ ἤτοι ἄν $-\lambda(\lambda - 2) \neq 0$.

Μέ ἄλλα λόγια, δι'ὅλας τάς τιμάς τοῦ λ αἱ ὁποῖαι δέν εἶναι οὔτε μηδέν οὔτε 2 τό σύστημα ἔχει μίαν μοναδικήν λύσιν.

Μένουν λοιπόν πρός ἐξέτασιν αἱ τιμαί 0 καί 2 τῆς παραμέτρου λ.

Διά $\lambda = 0$ τό δοθέν σύστημα καθίσταται

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 10x + 6y = 4 \end{cases} \quad ἤ \quad \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

καί ἔχει προφανῶς, ἀπείρους λύσεις: $\left\{x = k\ , y = \dfrac{2 - 5k}{3}\right\}$ ὅπου k αὐθαίρετος ἀριθμός.

Διά $\lambda = 2$ τό δοθέν σύστημα καθίσταται

$$\begin{cases} 7x + 7y = 8 \\ 16x + 16y = 8 \end{cases} \quad ἤ \quad \begin{cases} x + y = 8/7 \\ x + y = 1/2 \end{cases}$$

καί οὐδεμίαν λύσιν ἔχει διότι προφανῶς αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις εἶναι ἀσυμβίβαστοι.

Συμπέρασμα: Ἐάν $\lambda(\lambda - 2) \neq 0$, μία μόνη λύσις
Ἐάν $\lambda = 0$ ἄπειροι λύσεις
Ἐάν $\lambda = 2$ καμμία λύσις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

567. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

$$\begin{cases} x - 5y = 10 \\ 8y + 9y = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 4y - 29 = 0 \\ 9x - 2y - 17 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - 3y + 5 = 0 \\ 4x - 6y + 9 = 0 \end{cases}$$

568. Νά λυθῆ καί διερευνηθῆ τό σύστημα

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2\lambda y + 2 = 0 \\ 2\lambda x + (\lambda - 1)y - (\lambda - 1) = 0 \end{cases}$$

569. Νά διερευνηθῆ κατά τάς τιμάς τῆς λ τό σύστημα

$$\left\{ (\lambda-1)x + (\lambda+1)y - 2(\lambda^3-1) = 0 \;,\; (\lambda^2-1)x + (\lambda^2+1)y - 2(\lambda^3-1) = 0 \right\}$$

570. Νά ὁρισθοῦν τά μ καί ρ συναρτήσει τῶν α καί β οὕτως ὥστε τό σύστημα:

$$\begin{cases} (3\mu - 5\rho + \beta)x + (8\mu - 3\rho - \alpha)y = 1 \\ (2\mu - 3\rho + \beta)x + (4\mu - \rho)y = 2 \end{cases}$$

νά ἔχη ἀπείρους λύσεις.

571. Νά ὁρισθῆ ὁ μ οὕτως ὥστε αἱ τρεῖς ἐξισώσεις
$(2\mu + 5)x + (3\mu + 1)y + 3 = 0$, $(\mu + 5)x + (2\mu + 3)y - 18 = 0$
καί $y - 2x = 0$, νά ἔχουν κοινήν τινα λύσιν.

572. Ἐάν $\alpha + \beta > 0$ καί $\alpha < \beta$ νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{ x + |y| = \alpha \quad , \quad |x| + y = \beta \right\}$$

573. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{ \sqrt{y} - \sqrt{20 - x} = \sqrt{y - x} \qquad 3\sqrt{20 - x} = 2\sqrt{y - x} \right\}$$

137. Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. α) Ἡ μέθοδος αὕτη καθώς καί ἡ τῆς ἑπομένης §138 δύναται νά ἐφαρμοσθῆ εἰς σύστημα ὁσωνδήποτε πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων (γ ρ α μ μ ι κ ό ν σ ύ σ τ η μ α) μέ ἰσαρίθμους ἀγνώστους. Ἄς θεωρήσωμεν π.χ. τό σύστημα:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta' \\ \alpha'' y + \beta'' y + \gamma'' z = \delta'' \end{cases}$$

ἀποτελούμενον ἀπό τρεῖς πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις περιεχούσας τούς ἀγνώστους x, y, z.

Ἐάν $\alpha \neq 0$ δυνάμεθα νά λύσωμεν τήν πρώτην ὡς πρός x

$$(2) \qquad x = \frac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha}$$

καί ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τάς δύο ἄλλας ἐξισώσεις, τό x διά τῆς ἴσης πρός αὐτό παραστάσεως (2). Θά λάβωμεν τότε τό σύστημα

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} \\ \alpha' \dfrac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} + \beta' y + \gamma' z = \delta' \\ \alpha'' \dfrac{\delta - \beta y - \gamma z}{\alpha} + \beta'' y + \gamma'' z = \delta'' \end{cases}$$

Τό (3) εἶναι σύστημα ἰσοδύναμον πρός τό (1) δηλ. πᾶσα λύσις (x_0, y_0, z_0) τοῦ (1) εἶναι καί λύσις τοῦ (3) καί ἀντιστρόφως· τοῦτο φαίνεται εὐκόλως.

Συνεπῶς ἀντί τοῦ (1) ἀρκεῖ νά λύσωμεν τό (3). Εἰς τό (3) αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα μέ δύο ἀγνώστους y καί z. Λύοντες τό σύστημα τοῦτο μέ τούς δύο ἀγνώστους προσδιορίζομεν τά y καί z. Ἀντικαθιστῶντες δέ κατόπιν τάς τιμάς αὐτῶν εἰς τήν πρώτην ἐκ τῶν (2) προσδιορίζομεν καί τό x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Νά λυθῇ τό σύστημα

$$\left\{ 4x - 5y + 2z = 0 \ , \ 3x + 2y + 7z = 28 \ , \ x - y + 2z = 5 \right\}$$ ».

Λύσις. Ἐκ τῆς τελευταίας λαμβάνομεν τό x συναρτήσει τῶν y καί z καί τό ἀντικαθιστῶμεν εἰς τάς δύο πρώτας. Οὕτω μεταβαίνομεν εἰς τό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{c} x = 5 + y - 2z \\ 4(5+y-2z) - 5y + 2z = 0 \ , \quad 3(5+y-2z) + 2y + 7z = 28 \end{array} \right\}$$

Αἱ δύο τελευταῖαι μετά τάς ἀναγωγάς δίδουν τό σύστημα

$$(5) \qquad \begin{cases} y + 6z = 20 \\ 5y + z = 13 \end{cases}$$

Τό (5) δυνάμεθα νά λύσωμεν διά τῆς ἰδίας μεθόδου. Ἤτοι εὑρίσκομεν τό y ἐκ τῆς πρώτης τῶν (5).

(6) $$y = 20 - 6z$$

καί τό φέρομεν εἰς τήν δευτέραν ἥτις καθίσταται

$$5(20 - 6z) + z = 13$$

Ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν $z = 3$, ἐκ τῆς (6), $y = 2$ καί ἐκ τῆς 1ης τῶν (4), $x = 1$. Ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι ἡ τριάς (1, 2, 3).

ΚΑΝΩΝ. «Διά νά λύσωμεν σύστημα ἐκ ν ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μέ ν ἀγνώστους, λύομεν τήν μίαν τῶν ἐξισώσεων ὡς πρός ἕνα ἄγνωστον καί ἀντικαθιστῶμεν εἰς τάς ἄλλας ἐξισώσεις τόν ἄγνωστον τοῦτον διά τῆς πρός αὐτόν ἴσης παραστάσεως. Οὕτω λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον εἰς τό ὁποῖον ν - 1 ἐξισώσεις περιέχουν ν - 1 ἀγνώστους, εἰς τό ὁποῖον ἐργαζόμεθα ὡς καί προηγουμένως καί τό ἀνάγομεν εἰς ἄλλο σύστημα ἐκ ν - 2 ἐξισώσεων μέ ν - 2 ἀγνώστους. Οὕτω καθ'ἑξῆς, βαθμηδόν, φθάνομεν τελικῶς εἰς μίαν ἐξίσωσιν μέ ἕνα ἄγνωστον. Ἀνατρέχοντες εἰς τάς λελυμένας ὡς πρός ἕνα ἄγνωστον προηγουμένας ἐξισώσεις προσδιορίζομεν κατά σειράν, ὅλους τούς ἀγνώστους».

Παρατήρησις. Ἐάν κατά τήν ἀνωτέρω ἐργασίαν προκύψη ἐξίσωσις τίς ἡ ὁποία δέν ἔχει λύσιν ἤ εἶναι ταυτότης, τότε καί τό ἀρχικον σύστημα δέν θά ἔχη λύσιν ἤ δυνατόν νά ἔχη ἀπείρους λύσεις.

β) Γενίκευσις τῆς μεθόδου. Ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως ἐπιδέχεται καί τήν ἑξῆς γενίκευσιν.

Ἀντί νά λύσωμεν ὡς πρός ἕνα ἄγνωστον π.χ. τόν x τήν μίαν ἐξίσωσιν δυνάμεθα νά λύσωμεν δύο ἐκ τῶν ἐξισώσεων ὡς πρός δύο ἀγνώστους x καί y (εὑρίσκοντες αὐτούς συναρτήσει τῶν ἄλλων ἀγνώστων) καί τάς τιμάς των φέρομεν εἰς τάς λοιπάς ἐξισώσεις. Τότε ἀναγόμεθα εἰς σύστημα μή περιέχον x καί y δηλ. ἔχον δύο ἀγνώστους ὀλιγωτέρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ἔστω πρός λύσιν τό σύστημα

$$\{x+y+5z=12\ ,\quad x-y+6z=8\ ,\ 2x-7y+10z=21\}$$

Θεωροῦμεν τάς δύο πρώτας ὡς ἀποτελούσας σύστημα μέ ἀγνώστους x καί y

$$\left\{\begin{array}{l} x+y = 12-5z \\ x-y = 8-6z \end{array}\right\}$$

καί (διά προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως κατά μέλη) εὑρίσκομεν τά x καί y συναρτήσει τοῦ z :

$$(6)\qquad x=\frac{20-11z}{2}\qquad y=\frac{4+z}{2}$$

Τάς τιμάς ταύτας τῶν x καί y εἰσάγομεν εἰς τήν τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος καί λαμβάνομεν

$$2\cdot\frac{20-11z}{2}-7\cdot\frac{4+z}{2}+10z=21$$

Ἐξ αὐτῆς, $z=-\dfrac{10}{3}$. Ἐκ τῶν (6) εὑρίσκομεν

$$x=\frac{20+\frac{110}{3}}{2}=\frac{85}{3}\qquad y=\frac{4-\frac{10}{3}}{2}=\frac{1}{3}$$

Οὕτω ἔχομεν ὡς λύσιν τήν τριάδα $\left(\dfrac{85}{3}\ ,\ \dfrac{1}{3}\ ,\ -\dfrac{10}{3}\right)$

Παρατήρησις. Εἰς σύστημα μέ περισσοτέρους τῶν τριῶν ἀγνώστους δυνάμεθα νά λύσωμεν τρεῖς ἐκ τῶν δοθεισῶν ὡς πρός τρεῖς ἀγνώστους καί κατόπιν νά ἐργασθῶμεν ὁμοίως.

Οὕτω λ.χ. εἰς τό σύστημα:

$$\{\alpha x=\beta y=\gamma z=\delta\omega\quad ,\ \varepsilon x+\eta y+kz+\lambda\omega=\mu\}$$

δυνάμεθα νά εὕρωμεν τρεῖς ἐκ τῶν ἀγνώστων συναρτήσει τοῦ τετάρτου:

$$(7)\qquad x=\frac{\delta}{\alpha}\omega\ ,\quad y=\frac{\delta}{\beta}\omega\ ,\quad z=\frac{\delta}{\gamma}\omega$$

ὁπότε δι' ἀντικαταστάσεως ἡ τετάρτη ἐξίσωσις γίνεται

$$\varepsilon\frac{\delta}{\alpha}\omega+\eta\frac{\delta}{\beta}\omega+k\frac{\delta}{\gamma}\omega+\lambda\omega=\mu$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν τόν ω καί κατόπιν ἐκ τῶν (7) τά x, y, z

γ) Τό γενικόν θεώρημα.* «Ὅταν εἰς ἕνα σύστημα ἀλγεβρι-

* Παραγραφοι καί ἐδάφια σημειούμενα δι' ἀστερίσκων δυνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

κῶν ἐξισώσεων ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι λελυμένη ὡς πρός ἕνα ἄγνωστον, τότε λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον, ἀντικαθιστῶντες εἰς τάς ἄλλας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος, τόν ἄγνωστον τοῦτον διά τῆς πρός αὐτόν ἴσης παραστάσεως».

'Απόδειξις. "Ας θεωρήσωμεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων

$$(8) \quad \{x = A(y,z) \quad , \quad B(x,y,z) = 0 \quad , \quad \Gamma(x,y,z) = 0\}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ πρώτη εἶναι λελυμένη ὡς πρός x. "Ας θεωρήσωμεν καί τό σύστημα

$$(9) \quad \{x = A(y,z) \quad , \quad B(A,y,z) = 0 \quad , \quad \Gamma(A,y,z) = 0\}$$

τό ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ (8) ὅταν εἰς τήν 2αν καί τήν 3ην ἐκ τῶν (8) τεθῇ εἰς τήν θέσιν τοῦ x ἡ πρός αὐτό ἴση παράστασις $A(y,z)$ τήν ὁποίαν χάριν συντομίας παριστῶμεν διά μόνου τοῦ A. Οὕτω ἡ δευτέρα τῶν (9) δέν περιέχει x ἀλλά μόνον y,z. Ὁμοίως καί ἡ τρίτη. "Ας θεωρησωμεν λύσιν τινα τοῦ συστήματος (8) ἔστω τήν $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ 'Εάν εἰς τάς (8) ὅπου x,y,z θέσωμεν ἀντιστοίχως x_0, y_0, z_0 αὗται ἐπαληθεύονται· συνεπῶς ἔχομεν

$$(10) \quad x_0 = A(y_0,z_0) = A_0 \quad , \quad B(x_0,y_0,z_0) = 0$$
$$\Gamma(x_0,y_0,z_0) = 0$$

Θά δείξωμεν ὅτι τά (x_0, y_0, z_0) ἀποτελοῦν λύσιν καί τοῦ (9). Πράγματι, ἡ πρώτη ἐκ τῶν (9) ἐπαληθεύεται (διότι εἶναι ἡ ἰδία μέ τήν πρώτην ἐκ τῶν (8) . 'Εάν εἰς τήν δευτέραν ἐκ τῶν (9) τεθῇ ὅπου y τό y_0 καί ὅπου z τό z_0 , τότε τό A (περιέχον τά y καί z) θά λάβη τιμήν τινα A_0 καί τό πρῶτον μέλος τῆς 2ας ἐκ τῶν (9) θά γίνη $B(A_0, y_0, z_0)$ ἤτοι, $B(x_0, y_0, z_0)$ διότι $A_0 = x_0$ λόγω τῶν (10). 'Αλλά $B(x_0, y_0, z_0) = 0$ λόγω τῶν (10) συνεπῶς ἡ 2α ἐκ τῶν (9) ἐπαληθεύεται.

Ὁμοίως καί ἡ 3η ἐκ τῶν (9).

'Αντιστρόφως. "Εστω (x_1, y_1, z_1) μία λύσις τοῦ (9). Αἱ τρεῖς ἐξισώσεις (9) θά ἐπαληθεύονται μέ τάς τιμάς αὐτάς δηλ. θά ἔχωμεν

$$(11) \quad x_1 = A(y_1, z_1) = A_1 \quad , \quad B(A_1,y_1,z_1) = 0$$
$$\Gamma(A_1,y_1,z_1) = 0$$

'Επειδή ὅμως $A_1 = x_1$ αἱ (11) γράφονται

$$(12) \quad \{x_1 = A(y_1,z_1) \quad , \quad B(x_1,y_1,z_1) = 0 \quad , \quad \Gamma(x_1,y_1,z_1)\}$$

Αἱ (12) δεικνύουν ὅτι τό (8) ἐπαληθεύεται διά $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$. Δηλ. κάθε λύσις τοῦ (9) εἶναι καί τοῦ (8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

574. Νά λυθοῦν τά συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} \\ 5x + 6y + 8z = 384 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \alpha x^3 = \beta y^3 = \gamma z^3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\delta} \end{cases}$

575. Νά λυθῆ τό σύστημα

$\{3x - 4y + 7z = 0 \quad , \quad 2x - y - 2z = 0 \quad , \quad 3x^3 - y^3 + z^3 = 18$

576. Νά λυθῆ καί διερευνηθῆ τό σύστημα

$\{x + y + z = \alpha + \beta \quad , \quad x - y = 2\beta \quad , \quad 2x(\alpha-\beta) - (y-z)(\alpha+\beta) = 0$

577. Νά λυθῆ τό σύστημα

$\{x + y - z = \alpha^2 + 1 \quad , \quad x - y + z = (\alpha+1)^2$

$xy + z = \alpha^4 + 2\alpha^2 + 2$

578. Νά ὑπολογισθοῦν τό ἐμβαδόν καί αἱ πλευραι τριγώνου τοῦ ὁποίου δίδονται τά τρια ὕψη $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$

138. Μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.

α) Θεώρημα Ι. « Τό σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων $\{A = 0 , B = 0\}$ ἰσοδυναμεῖ πρός τό σύστημα $\{A = 0 , \lambda A + kB = 0\}$ ὅπου λ , k σταθεροί ἀριθμοί καί $k \neq 0$ ».

'Απόδειξις. Πᾶσα λύσις τοῦ πρώτου συστήματος εἶναι καί λύσις τοῦ δευτέρου, διότι μηδενίζουσα τάς παραστάσεις A καί B θά μηδενίζη καί τήν παράστασιν $\lambda A + kB$.

'Αντιστρόφως, πᾶσα λύσις τοῦ δευτέρου συστήματος ὡς μηδενίζουσα ἀμφοτέρας τάς παραστάσεις A καί $\lambda A + kB$ θά μηδενίζη καί τήν kB· ἐπειδή δέ $k \neq 0$ θά μηδενίζη καί τήν παράστασιν B. Συνεπῶς θά εἶναι καί λύσις τοῦ συστήματος $\{A = 0 , B = 0\}$

β) Ὁρισμός. «'Εάν $k, \lambda, \mu, \ldots$ σταθεροί ἀριθμοί ὄχι ὅλοι μηδέν, τότε ἡ ἐξίσωσις

$$kA + \lambda B + \mu \Gamma + \ldots = 0$$

θά λέγομεν ὅτι προκύπτει διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν ἐξισώσεων $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$, ... »

Οἱ ἀριθμοί $k, \lambda, \mu, \ldots$ εἶναι οἱ «συντελεσταί» ἐπί τούς ὁποίους πολ/ζονται αἱ ἐξισώσεις πρίν προστεθοῦν.

Θεώρημα ΙΙ. « Δοθέντος συστήματος ὁσωνδήποτε ἐξισώσεων, $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$, ... $T = 0$ λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον ἄν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ αὐτῆς πολλαπλασιασμένης ἐπί συντελεστήν $\neq 0$ καί ὁσωνδήποτε ἐκ τῶν ἄλλων ἐξισώσεων τοῦ συστήματος».

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω συστήματος λαμβάνομεν π.χ. τό σύστημα

$$\{A = 0 \ , \ kB + \lambda A + \mu\Gamma = 0 \ , \ \Gamma = 0 \ , \ldots \ T = 0\}$$

ὅπου ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἀντικατεστάθη διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ αὐτῆς καί τῶν $A = 0$, $\Gamma = 0$ $(k \neq 0)$. Ἡ ἀπόδειξις ὅτι τό νέον σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό ἀρχικόν, εἶναι ἐντελῶς ὁμοία μέ τήν τοῦ Θεωρ. Ι.

Ἐφαρμογή. Ἔστω τό πρωτοβάθμιον σύστημα

$$(1) \qquad \{A = 0 \ , \ B = 0 \ , \ \Gamma = 0 \ , \ \Delta = 0\}$$

μέ τέσσαρας ἀγνώστους x, y, z, t . Τοῦτο δυνάμεθα ν'ἀντικαταστήσωμεν μέ τό σύστημα

$$(2) \qquad \{A = 0 \ , \ \lambda A + kB = 0 \ , \ \Gamma = 0 \ , \ \Delta = 0\}$$

ὅπου ἡ δευτέρα ἐξίσωσις νά μή περιεχη τόν x. Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά ἐκλέξωμεν τούς αὐθαιρετους ἀριθμούς λ καί k εἰς τρόπον ὥστε ὁ x νά ἔχη ἀντιθέτους συντελεστάς εἰς τάς ἐξισώσεις $\lambda A = 0$ καί $kB = 0$ (§136, β') ὁπότε διά τῆς προσθέσεως αὐτῶν ἐξαλείφεται.

Ἀκολούθως εἰς τό (2) ἀντικαθιστῶμεν τήν $\Gamma = 0$ διά τῆς $\lambda' A + k'\Gamma = 0$ μή περιέχουσαν τόν x (κατόπιν καταλλήλου ἐκλογῆς τῶν λ' καί k') καί τέλος εἰς τό προκῦπτον σύστημα

$$(3) \qquad \{A = 0 \ , \ \lambda A + kB = 0 \ , \ \lambda' A + k'\Gamma = 0 \ , \ \Delta = 0\}$$

ἀντικαθιστῶμεν τήν $\Delta = 0$ μέ τήν $\lambda'' A + k''\Delta = 0$ μή περιέχουσαν ἐπίσης τόν x. Ἔτσι φθάνομεν εἰς τό ἰσοδύναμον σύστημα

(4) $\{A = 0 \ , \ \lambda A + kB = 0 \ , \ \lambda' A + k'\Gamma = 0 \ \ \lambda'' A + k''\Delta = 0\}$

τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις δέν περιέχουν τόν x. Ἄρα αὐταί ἀποτελοῦν σύστημα μέ τρεῖς ἀγνώστους, τό ὁποῖον ἀνάγομεν διά τῆς αὐτῆς μεθόδου εἰς ἄλλο μέ δύο ἀγνώστους καί τοῦτο πάλιν εἰς μίαν ἐξίσωσιν μέ ἕνα ἄγνωστον.

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐπιλύσεως πρωτοβαθμίων συστημάτων εἶναι ἡ κυριώτατα χρησιμοποιουμένη εἰς τήν πρᾶξιν καί λέγεται μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.

Ἡ λύσις ἀκολουθεῖ τό κάτωθι σχῆμα

τέσσαρες ἄγνωστοι	τέσσαρες ἄγνωστοι
" "	τρεῖς "
" "	" "
" "	" "
τέσσαρες ἄγνωστοι	τέσσαρες ἄγνωστοι
τρεῖς "	τρεῖς "
δύο "	δύο "
δύο "	εἷς ἄγνωστος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. " Ἔστω τό σύστημα μέ 5 ἀγνώστους x, y, z, t, u :

$$\begin{aligned} x - y + z - t + u &= 0 \\ 2x - y + 3z &= 1 \\ x + 3y - 2u &= 0 \\ 3x - 3y - t &= 0 \\ 5z - 4t - 5u &= 0 \end{aligned}$$

Δυνάμεθα, συνδυάζοντες γραμμικῶς τήν 1ην καί 2αν ἐξίσωσιν νά λάβωμεν ἐξίσωσιν μή περιέχουσαν τόν x, δηλ. ν'ἀπαλείψωμεν τόν x μεταξύ 1ης καί 2ας. Ὁμοίως τόν x μεταξύ 1ης καί 3ης καί μεταξύ 1ης καί 4ης. Πρός τοῦτο πολ/ζομεν τήν πρώτην ἐπί -2 καί τήν προσθέτομεν μέ τήν 2αν ὅτε λαμβάνομεν:

$$y + z + 2t - 2u = 1$$

Κατόπιν τήν πρώτην ἐπί -1 καί τήν πρόσθέτομεν εἰς τήν τρίτην, ὅτε εἰς τήν θέσιν τῆς τρίτης ἔχομεν

$$4y - z + t - 3u = 0$$

Κατόπιν, προσθέτομεν τήν πρώτην πολ/σμένην ἐπί -3 μέ τήν τετάρτην καί θέτομεν εἰς τήν θέσιν τῆς τετάρτης τόν γραμμικόν αὐτόν συνδυασμόν

$$4t - 3z - 3u = 2$$

Οὕτω φθάνομεν εἰς τό ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ 4y - z + t - 3u = 0 \\ 4t - 3z - 3u = 2 \\ 5z - 4t - 5u = 0 \end{cases}$$

Μεταξύ 2ας καί 3ης ἀπαλείφομεν τόν y , προσθέτοντες εἰς τήν τρίτην, τήν 2αν πολ/σμένην ἐπί -4.

Οὕτω φθάνομεν εἰς τό ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{cases} x - y + z - t + u = 0 \\ y + z + 2t - 2u = 1 \\ -5z - 7t + 5u = -4 \\ -3z + 4t - 3u = 2 \\ 5z - 4t - 5u = 0 \end{cases}$$

Μεταξύ 3ης και 4ης ἀπαλείφομεν τόν z (πολ/ντες τήν 3ην ἐπί -3 καί τήν 4ην ἐπί 5 καί προσθέτοντες) καί μεταξύ 3ης καί 5ης ἐπίσης ἀπαλείφομεν τό z (προσθέτοντες). Ἔτσι φθάνομεν εἰς τό σύστημα

$$\begin{aligned} x - y + z - t + u &= 0 \\ y + z + 2t - 2u &= 1 \\ -5z - 7t + 5u &= -4 \\ 41t - 30u &= 22 \\ 11t - 10u &= 2 \end{aligned}$$

Τέλος ἀπαλείφομεν τό u μεταξύ τῶν δύο τελευταίων (πολλαπλασιάζοντες τήν 5ην ἐπί -3 καί προσθέτοντες τήν τετάρτην) καί φθάνομεν εἰς τό ἰσοδύναμον σύστημα

$$\begin{aligned} x - y + z - t + u &= 0 \\ y + z + 2t - 2u &= 1 \\ -5z - 7t + 5u &= -4 \\ 41t - 30u &= 22 \\ 8t &= 16 \end{aligned}$$

Εὑρίσκομεν βαθμηδόν: $t = 2$, $u = 2$, $z = 0$, $y = 1$, $x = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

*578. Νά λυθοῦν τά συστήματα

i) $\begin{cases} 12x + 7y = 109 \\ 5y - 2z = 11 \\ 3z + 4x = 26 \end{cases}$ ii) $\begin{cases} 3x + 4y + 2z = 47 \\ 5x - 3y + 7z = 41 \\ 7x - 2y - 5z = 24 \end{cases}$

579. Νά λυθοῦν τά συστήματα

$$\text{i)}\begin{cases} \alpha^3+\alpha^2x+\alpha y+z=0\\ \beta^3+\beta^2x+\beta y+z=0\\ \gamma^3+\gamma^2x+\gamma y+z=0\end{cases}\qquad \text{ii)}\begin{cases} x+y+z=0\\ (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)z=0\\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z=1\end{cases}$$

580. Νά λυθοῦν τά συστήματα

$$\text{i)}\begin{cases} x+3y+5z+3u=34\\ x+y+2z+u=13\\ x+2y+5z+4u=36\\ x+3y+8z+5u=51\end{cases}\qquad \text{ii)}\begin{cases} 2x+3y-90=0\\ x-y+2z-355=0\\ 2y-3z+t+50=0\\ z-t-60=0\end{cases}$$

581. Νά λυθοῦν καί διερευνηθοῦν τά συστήματα

$$\text{i}\begin{cases} x+2y+(\mu+3)z=8\\ 2x+3y+(\mu+4)z=12\\ 3x+(6\mu+5)y+7z=20\end{cases}\qquad \text{ii}\begin{cases} \mu x+y+z=1\\ x+\mu y+z=\mu\\ x+y+\mu z=\mu^2\end{cases}$$

582. Συναρτήσει τῶν α, β, γ νά ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοί c_1, c_2, c_3, c_4 οὕτως ὥστε νά ὑφίσταται ἡ ὡς πρός x, y, z ταυτότης:

$$\big|\alpha x|yz|+\beta y|zx|+\gamma z|xy|\big| \equiv c_1xyz+c_2|xy|\cdot z+c_3|yz|x+c_4|zx|y .$$

138. **Κυκλικά συστήματα.** Ἐάν εἰς ἕνα σύστημα ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι κυκλική τῆς πρώτης (ἴδε σελ. 146) ἡ τρίτη τῆς δευτέρας κ.ο.κ. τό σύστημα λέγεται κ υ κ λ ι κ ό ν. Συνήθως εἰς τά κυκλικά συστήματα ἐπιζητοῦμεν διά καταλλήλων συνδυασμῶν τῶν ἐξισώσεων νά ὑπολογίσωμεν μίαν συμμετρικήν παράστασιν τῶν ἀγνώστων καί κατόπιν τῇ βοηθείᾳ αὐτῆς νά προσδιορίσωμεν τούς ἀγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Νά λυθῇ τό σύστημα

$$x+y+z=\delta\ ,\quad y+z+t=\alpha\ ,\quad z+t+x=\beta\ ,$$
$$t+x+y=\gamma$$

Λύσις. Ἕκαστος ἄγνωστος ὑπάρχει τρεῖς φοράς μέσα εἰς τάς ἐξισώσεις. Ἄν λοιπόν προσθέσωμεν ὅλας κατά μέλη, θά προκύψῃ τό τριπλάσιον ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀγνώστων:

$$3(x+y+z+t)=\alpha+\beta+\gamma+\delta$$

Ἐάν ἀπό τήν ἐξίσωσιν: $x+y+z+t=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)/3$ ἀφαιρέσωμεν (κατά μέλη) τήν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος εὑρίσκομεν τόν t :

$$t = \frac{\alpha + \beta + \gamma + \delta}{3} - \delta = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 3\delta}{3}$$

όμοίως δέ εὑρίσκομεν καί τούς ἄλλους ἀγνώστους.

Παρατήρησις. Ἐπειδή τό δοθέν σύστημα εἶναι κυκλικόν ὡς πρός τάς ὁμάδας τῶν γραμμάτων: (x, y, z, t) καί $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ (ἴδε §66) **ἔχομεν τό δικαίωμα νά ἐκτελέσωμεν κυκλικήν μετατροπήν εἰς τήν ἐξίσωσιν τήν παρέχουσαν τόν t καί νά εὕρωμεν τούς ἄλλους ἀγνώστους.** Ἔτσι ἐκ τῆς $t = (\alpha + \beta + \gamma - 2\delta)/3$ λαμβάνομεν $x = (\beta + \gamma + \delta - 2\alpha)/3$, $y = (\gamma + \delta + \alpha - 2\beta)/3$ $z = (\delta + \alpha + \beta - 2\gamma)/3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. **Νά λυθῆ τό σύστημα**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \alpha x + k(y + z + t) = \lambda & \beta y + k(z + t + x) = \mu \\ \gamma z + k(t + x + y) = \nu \quad , & \delta t + k(x + y + z) = \rho \end{array} \right\}$$

Λύσις. Τό δοθέν εἶναι κυκλικόν ὡς πρός τάς τρεῖς ὁμάδας τῶν γραμμάτων: (x, y, z, t) , $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $(\lambda, \mu, \nu, \rho)$.

Ἄς λάβωμεν ὡς νέον ἄγνωστον τό ἄθροισμα S τῶν τεσσάρων ἀγνώστων. Ἤτοι ἄς θέσωμεν

$$(1) \qquad x + y + z + t = S$$

ὅπου S πέμπτος ἄγνωστος. Ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν γράφεται $\alpha x + k(S - x) = \lambda$ καί παρέχει τόν x συναρτήσει τοῦ S: $\alpha x + kS - kx = \lambda$, $(\alpha - k)x = \lambda - kS$

$$(2) \qquad x = \frac{\lambda - kS}{\alpha - k}$$

Διά κυκλικῆς μετατροπῆς λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$(3) \qquad y = \frac{\mu - kS}{\beta - k} \quad , \quad z = \frac{\nu - kS}{\gamma - k} \quad , \quad t = \frac{\rho - kS}{\delta - k}$$

Φέροντες τάς τιμας τῶν x, y, z, t εἰς τήν πέμπτην ἐξίσωσιν (1) λαμβάνομεν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ὡς πρός S:

$$(6) \qquad \frac{\lambda - kS}{\alpha - k} + \frac{\mu - kS}{\beta - k} + \frac{\nu - kS}{\gamma - k} + \frac{\rho - kS}{\delta - k} = S$$

Ἐκ τῆς (6) εὑρίσκεται τό S καί ἐκ τῶν (2) , (3) οἱ x, y, z, t.

139. Συστήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ, ἀναγόμενα εἰς πρωτοβάθμια.

Ἡ ἀναγωγή αὐτη ἐπιτυγχάνεται ἐνίοτε δι'ἑνός ἐκ τῶν ἑπομένων τριῶν τρόπων.

α' Διά βοηθητικῶν ἀγνώστων. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. « Νά λυθῆ τό σύστημα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{3}{z}=\alpha \ , \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{3}{x}=\beta \ , \quad \frac{1}{z}+\frac{1}{x}-\frac{3}{y}=\gamma$$

Λύσις. Τό σύστημα τοῦτο δέν εἶναι πρωτοβάθμιον. Λαμβάνομεν ὡς ἀγνώστους τά $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ θέτοντες

(1) $$\frac{1}{x}=x', \quad \frac{1}{y}=y', \quad \frac{1}{z}=z'$$

Τό σύστημα μεταβαίνει εἰς τό (γραμμικόν σύστημα):

(2) $$\left\{x'+y'-3z'=\alpha \ , \quad y'+z'-3x'=\beta \ , \quad z'+x'-3y'=\gamma\right\}$$

Διά προσθέσεως ὅλων κατά μέλη λαμβάνομεν

(3) $$-x'-y'-z'=\alpha+\beta+\gamma$$

Προσθέτοντες τήν (3) κατά μέλη μέ τήν πρώτην τῶν (2) λαμβάνομεν $-4z'=2\alpha+\beta+\gamma$, $z'=-(2\alpha+\beta+\gamma)/4$ καί διά κυκλικῆς μετατροπῆς:

$$x'=-(2\beta+\gamma+\alpha)/4 \qquad , \qquad y'=-(2\gamma+\alpha+\beta)/4$$

Ἐκ τῶν (1) εὑρίσκομεν τελικῶς:

$$x=\frac{-4}{2\beta+\gamma+\alpha} \ , \quad y=\frac{-4}{2\gamma+\alpha+\beta} \ , \quad z=\frac{-4}{2\alpha+\beta+\gamma}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{\frac{y+z}{yz}=\frac{5}{18} \ , \quad \frac{z+x}{zx}=\frac{13}{36} \ , \quad \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12}\right\}$$

Λύσις. Ἐάν ἕκαστον κλάσμα ἀναλυθῆ εἰς δύο λαμβάνομεν:

$$\frac{y+z}{yz}=\frac{y}{yz}+\frac{z}{yz}=\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18}$$

(2) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{13}{36} \qquad , \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{12}$$

Θεωροῦμεν ὡς νέους ἀγνώστους τά $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$, ἤτοι θέτομεν: $\frac{1}{x}=x'$, $\frac{1}{y}=y'$, $\frac{1}{z}=z'$ ὁπότε τό (2) γράφεται:

(3). $$z'+y'=\frac{5}{18} \ , \quad x'+z'=\frac{13}{36} \ , \quad x'+y'=\frac{5}{12}$$

Διά προσθέσεως τῶν (3) κατά μέλη, λαμβάνομεν

$$x' + y' + z' = \frac{19}{18}$$

καί προχωροῦμεν κατά τά γνωστά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. **Νά λυθῆ τό σύστημα**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x(y+z)}{\alpha} = \dfrac{y(z+x)}{\beta} = \dfrac{z(x+y)}{\gamma} \\ yz + zx + xy = (\alpha+\beta+\gamma)xyz \end{array} \right\}$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ἐν πρώτοις ὅτι εἰς ὅλους τούς ὅρους ὅλων τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ὑπάρχει ὡς παράγων ἤ ὁ x ἤ ὁ y. Τοῦτο σημαίνει ὅτι ἄν $x = 0$ καί $y = 0$ τότε αἱ ἐξισώσεις ἐπαληθεύονται οἱανδήποτε τιμήν καί ἄν ἔχῃ ὁ z. Ἔχομεν λοιπόν μίαν ἀπειρίαν λύσεων.

i) $x = 0$, $y = 0$, $z =$ αὐθαίρετος ἀριθμός οἱοσδήποτε. Ὁμοίως διαπιστοῦμεν τήν ὕπαρξιν τῶν λύσεων.

ii) $x = 0$, $y = k$ (αὐθαίρετος), $z = 0$

iii) $x = \lambda$ (αὐθαίρετος), $y = 0$, $z = 0$.

Ἐάν μόνον ὁ x εἶναι μηδέν οἱ δέ y καί z εἶναι $\neq 0$ ἡ τελευταία δέν ἐπαληθεύεται.

Ὥστε μένει νά ζητήσωμεν λύσεις εἰς τάς ὁποίας οὐδείς ἄγνωστος εἶναι μηδενικός. Δηλ. θά ὑποθέσωμεν τώρα ὅλους τούς ἀγνώστους $\neq 0$. Ἐφαρμόζομεν τήν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων καί χρησιμοποιοῦντες τήν τελευταίαν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

$$\frac{xy+xz}{\alpha} = \frac{yz+yx}{\beta} = \frac{zx+zy}{\gamma} = \frac{2(xy+yz+xz)}{\alpha+\beta+\gamma} =$$

$$= \frac{2(\alpha+\beta+\gamma)xyz}{\alpha+\beta+\gamma} = 2xyz$$

Ἤ ἀκόμη:

$$\left. \begin{array}{l} xy + xz = 2\alpha xyz \\ yz + xy = 2\beta xyz \\ zx + zy = 2\gamma xyz \end{array} \right\}$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη ἑκάστης τούτων διά $xyz \neq 0$ φθάνομεν εἰς τό σύστημα:

$$\left\{ \frac{1}{z} + \frac{1}{y} = 2\alpha \quad , \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 2\beta \quad , \quad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = 2\gamma \right\}$$

Θέτοντες $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ $\frac{1}{z} = z'$ φθάνομεν εἰς τό γενικόν σύστημα:

$$\left\{ z' + y' = 2\alpha \quad , \quad x' + z' = 2\beta \qquad y' + x' = 2\gamma \right\}$$

ἐκ τοῦ ὁποίου: $z' = \alpha + \beta - \gamma$, $x' = \beta + \gamma - \alpha$, $y' = \gamma + \alpha - \beta$.

Ὥστε ἡ μή μηδενική λύσις εἶναι ἡ

$$x = \frac{1}{\beta + \gamma - \alpha}, \quad y = \frac{1}{\gamma + \alpha - \beta}, \quad z = \frac{1}{\alpha + \beta - \gamma}$$

β) Ὅταν αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος καθίστανται τῆς μορφῆς $A \cdot B = 0$ ὅπου A, B πρωτοβάθμιοι παραστάσεις. Εἶναι φανερόν ὅτι τό σύστημα:

$$\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases}$$

ἀναλύεται εἰς δύο συστήματα

$$\begin{cases} A = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} B = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases}$$

τό δέ σύστημα:

$$\begin{cases} A \cdot B = 0 \\ \Gamma \cdot \Delta = 0 \end{cases}$$

ἀναλύεται εἰς τέσσαρα συστήματα.

$$\begin{cases} A = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ \Gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. "Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{ x^2 + y + z = \alpha, \quad y^2 + z + x = \alpha, \quad z^2 + x + y = \alpha \right\}$$

Λύσις. Ἐάν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη 1ην καί 2αν καί 1ην καί 3ην λαμβάνομεν ἁπλουστέρας ἐξισώσεις:

$$x^2 - y^2 + y - x = 0 \quad \text{καί} \quad x^2 - z^2 + z - x = 0$$

ἤτοι: $(x - y)(x + y - 1) = 0$, $(x - z)(x + z - 1) = 0$

Ἔχομεν λοιπόν τό ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{cases} x^2 + y + z = \alpha \\ (x - y)(x + y - 1) = 0 \\ (x - z)(x + z - 1) = 0 \end{cases}$$

(Ὅπου ἀντί τῆς 2ας ἐτέθη ἡ διαφορά αὐτῆς καί τῆς 1ης καί ἀντί τῆς 3ης ἡ διαφορά αὐτῆς καί τῆς 1ης σύμφωνα μέ τό Θεώρ. II §138).

Τό τελευταῖον σύστημα, σχίζεται εἰς τέσσαρα συστήματα

$$\begin{cases} x^2+y+z=\alpha \\ x-y=0 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y+z=\alpha \\ x-y=0 \\ x+z-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y+z=\alpha \\ x+y-1=0 \\ x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y+z=\alpha \\ x+y-1=0 \\ x+z-1=0 \end{cases}$$

ἕκαστον τῶν ὁποίων λύεται εὐκόλως διά τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως (§ 137, β'). Δηλαδή ἀπό τάς δύο τελευταίας εὑρίσκομεν δύο ἐκ τῶν ἀγνώστων συναρτήσει τοῦ τρίτου καί ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν πρώτην.

γ) **Διά συνδυασμῶν τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκομεν ἁπλουστέρας ἐξισώσεις.** 'Εάν αἱ ἐξισώσεις εἶναι κυκλικαί ζητοῦμεν διά συνδυασμῶν αὐτῶν νά ὑπολογίσωμεν συμμετρικήν τινα παράστασιν τῶν ἀγνώστων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. **Νά λυθῆ τό σύστημα**

$$\{xyz=\alpha \ , \quad yzt=\beta \ , \quad ztx=\gamma \ , \quad txy=\delta\}$$

Λύσις. Διά πολ/σμοῦ κατά μέλη τῶν τεσσάρων ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot t^3 = \alpha\beta\gamma\delta \quad \text{καί} \quad xyzt = \sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Διαιροῦντες κατά μέλη τήν τελευταίαν ταύτην μέ τήν πρώτην τῶν δοθεισῶν λαμβάνομεν:

$$t = \frac{\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma\delta}}{\alpha} = \sqrt[3]{\frac{\beta\gamma\delta}{\alpha^2}}$$

Κυκλικῶς εὑρίσκομεν

$$x = \sqrt[3]{\frac{\gamma\delta\alpha}{\beta^2}} \ , \quad y = \sqrt[3]{\frac{\delta\alpha\beta}{\gamma^2}} \ , \quad z = \sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\delta^2}}$$

'Ελέγχομεν ὅτι αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί ἐπαληθεύον τάς δοθείσας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. **Νά λυθῆ τό σύστημα**

$$\{x^2-yz=\alpha^2 \ , \quad y^2-zx=\beta^2 \ , \quad z^2-xy=\gamma^2\}$$

Λύσις. 'Εάν τάς προσθέσωμεν κατά μέλη λαμβάνομεν

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

ἤ (ἴδε § 58,II)

$$(1) \qquad \frac{1}{2}\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\} = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

'Εάν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη πρώτην καί δευτέραν ἐκ τῶν δοθεισῶν εὑρίσκομεν

$$x^2-y^2+zx-yz=\alpha^2-\beta^2 \quad \text{ἤ} \quad (x-y)(x+y)+z(x-y)=\alpha^2-\beta^2$$

$$\text{ἤ} \quad (2) \qquad (x-y)(x+y+z)=\alpha^2-\beta^2$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν τάς κυκλικάς σχέσεις

$$(3) \qquad \begin{cases} (y - z)(x + y + z) = \beta^2 - \gamma^2 \\ (z - x)(x + y + z) = \gamma^2 - \alpha^2 \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἀπό τάς (2) καί (3) αἱ διαφοραί $x - y$, $y - z$, $z - x$ ἐκφράζονται συναρτήσει τοῦ ἀθροίσματος $x + y + z$ τῶν τριῶν ἀγνωστων. Λαμβάνομεν ὡς τεταρτον ἄγνωστον τό ἄθροισμα $x + y + z = S$ ὁπότε αἱ (2) καί (3) διδουν

$$(4) \quad x - y = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{S}, \quad y - z = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{S}, \quad z - x = \frac{\gamma^2 - \alpha^2}{S}$$

Ἀντικαθιστῶμεν είς τήν (1) τάς διαφοράς $x - y$, $y - z$, $z - x$ ἐκ τῶν (4) καί λαμβάνομεν

$$(5) \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha^2-\beta^2)}{S^2} + \frac{(\beta^2-\gamma^2)}{S^2} + \frac{(\gamma^2-\alpha^2)}{S^2}\right\} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

Ἐκ τῆς (5) εὑρίσκομεν

$$S^2 = \frac{(\alpha^2-\beta^2) + (\beta^2-\gamma^2) + (\gamma^2-\alpha^2)}{2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}$$, καί ἐξ αὐτῆς τό $S = \pm k$

Ἔχομεν τότε τά πρωτοβάθμια συστήματα

$$\begin{cases} x + y + z = k \\ x - y = \dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{k} \\ y - z = \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{k} \end{cases} \quad - \quad \begin{cases} x + y + z = -k \\ x - y = -\dfrac{\alpha^2 - \beta^2}{k} \\ y - z = -\dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{k} \end{cases}$$

τά ὁποῖα λύομεν μέ μίαν τῶν γνωστῶν μεθόδων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

583. Νά λυθοῦν τά συστήματα

$$1\text{ον}\begin{cases} y + z - x = \alpha \\ z + x - y = \beta \\ x + y - z = \gamma \end{cases} \qquad 2\text{ον}\begin{cases} y + z + t - x = \alpha \\ z + t + x - y = \beta \\ t + x + y - z = \gamma \\ x + y + z - t = \delta \end{cases}$$

584. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\begin{cases} \dfrac{10x + 4y - 5z}{5} = \dfrac{4x + 6y - 3z}{9} \\ 10x + 4y - 5z = 4x + 6y - 3z - 8 \\ \dfrac{10x + 4y - 5z}{10} + \dfrac{4x + 6y - 3z}{3} = \dfrac{x+y+z}{4} \end{cases}$$

585. Νά λυθοῦν τά συστήματα

1) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{5} \\ 2x + 3y - 4z + 7 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y + z = \alpha \\ (x+y)^2 - z^2 = \beta^2 \\ (x+z)^2 - y^2 = \gamma^2 \end{cases}$

586. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\alpha(xy+xz-yz) = \beta(yz+xy-zx) = \gamma(zx+zy-xy) = xyz$$

587. Νά λυθοῦν τά συστήματα

1) $\left\{ \dfrac{yz}{\beta z + \gamma y} = \alpha, \quad \dfrac{zx}{\gamma x + \alpha z} = \beta, \quad \dfrac{xy}{\alpha y + \beta x} = \gamma \right\}$

2) $\dfrac{y+z-x}{7} = \dfrac{z+x-y}{11} = \dfrac{x+y-z}{5} = \dfrac{xyz}{3}$

588. Νά λυθοῦν τά συστήματα

1) $\{x(x+y+z) = 48, \quad y(x+y+z) = 12, \quad z(x+y+z) = 84\}$

2) $\{(y+z)^2 - x^2 = \alpha, \quad (z+x)^2 - y^2 = \beta, \quad (x+y)^2 - z^2 = \gamma\}$

589. Νά λυθοῦν τά συστήματα

1) $\{yz = \alpha, \quad zx = \beta, \quad xy = \gamma\}$

2) $x^2 - (y-z)^2 = \alpha, \quad y^2 - (z-x)^2 = \beta, \quad z^2 - (x-y)^2 = \gamma$

590. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\{xy + 2x + y = 7, \quad y\omega + 3y + 2\omega = 12, \quad x\omega + \omega + 3x = 15\}$$

591. Νά λυθοῦν τά συστήματα

1) $\left\{ \dfrac{xyz}{y+z} = \alpha, \quad \dfrac{xyz}{z+x} = \beta \quad \dfrac{xyz}{x+y} = \gamma \right.$

2) $\left\{ \dfrac{x(yz+1)}{z} = \dfrac{y(zx+1)}{x} = \dfrac{z(xy+1)}{y} = 2 \right\}$

592. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$x^2 + yz = y+z, \quad y^2 + zx = z+x, \quad z^2 + xy = x + y$$

593. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$x(x+y+z) + yz = 238, \quad y(x+y+z) + zx = 187$$
$$z(x+y+z) + xy = 154$$

594. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$y^2 + z^2 - x(y+z) = -18 \quad z^2 + x^2 - y(z+x) = -2$$
$$x^2 + y^2 - z(x+y) = 162$$

595. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{x^2(y-z) = -\frac{5}{3}\ ,\ y^2(z-x) = 3\ ,\ z^2(x-y) = \frac{1}{3}\right\}$$

140. Ἐξισώσεις συμβιβασταί. Ἄς θεωρήσωμεν π.χ. σύστημα ἐκ τεσσάρων ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους x, y, z. Ἐν γένει αἱ τρεῖς ἐξ αὐτῶν ἔχουν μίαν κοινήν λύσιν ἡ ὁποία ὅμως δέν εἶναι καί λύσις τῆς τετάρτης.

Ἐάν ὅμως συμβαίνει ἡ κοινή λύσις τῶν τριῶν νά ἐπαληθεύῃ καί τήν τετάρτην τότε αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις μέ τούς τρεῖς ἀγνώστους λέγονται σ υ μ β ι β α σ τ α ί.

Ἄλλως λέγονται ἀ σ υ μ β ί β α σ τ ο ι.

Ἔστωσαν π.χ. αἱ τέσσαρες πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$, $\Delta = 0$ περιέχουσαι τούς τρεῖς ἀγνώστους x, y, z. Μία ἱκανή συνθήκη ἵνα εἶναι συμβιβασταί εἶναι: αἱ μέν τρεῖς ἐξ αὐτῶν $\{A = 0,\ B = 0,\ \Gamma = 0\}$ νά ἔχουν κοινήν λύσιν ἡ δέ τετάρτη νά προκύπτῃ διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἄλλων. Διότι ἄν $\Delta \equiv kA + \lambda B + \mu\Gamma$ ὅπου k, λ, μ σταθεροί ἀριθμοί ἡ κοινή λύσις τῶν $A = 0$, $B = 0$, $\Gamma = 0$ θά μηδενίζῃ προφανῶς καί τήν παράστασιν $kA + \lambda B + \mu\Gamma$ δηλ. θά καθιστᾶ τό Δ ἴσον μέ μηδεν, ἄρα θά ἐπαληθεύῃ τήν $\Delta = 0$.

Ἐν γένει, διά νά εἶναι συμβιβασταί τέσσαρες ἐξισώσεις μέ τρεῖς ἀγνώστους πρέπει νά ὑπάρχῃ κατάλληλος σχέσις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων. Τήν ἀναγκαίαν αὐτήν σχέσιν δυνάμεθα νά εὕρωμεν ἄν ἐπιλύσωμεν τό σύστημα τῶν τριῶν καί ἀπαιτήσωμεν αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί τῶν ἀγνώστων νά ἱκανοποιοῦν καί τήν τετάρτην.

Τ'ἀνωτέρω ἰσχύουν, φυσικά, καί διά τρεῖς ἐξισώσεις μέ δύο ἀγνώστους ἤ πέντε ἐξισώσεις μέ 4 ἀγνώστους κ.ο.κ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. «Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ τρεῖς ἐξισώσεις

$$\left\{\alpha x + \beta y = \gamma\ ,\ \alpha' x + \beta' y = \gamma'\ ,\ \alpha'' x + \beta'' y = \gamma''\right\}$$

εἶναι συμβιβασταί ποία σχέσις θά συνδέη τότε τούς 9 συντελεστάς $\alpha, \beta, \gamma,\ \alpha', \beta', \gamma',\ \alpha'', \beta'', \gamma''$».

Λύσις. Ἡ κοινή λύσις (x_o, y_o) τῶν δύο πρώτων δίδεται ἀπό τούς τύπους (9) τῆς §136. Τό ζεῦγος (x_o, y_o) θά ἐπαληθεύη καί τήν τρίτην τῶν δοθεισῶν ἀφοῦ εἶναι συμβιβασταί. Δηλ. $\alpha'' x_o + \beta'' y_o = \gamma''$ ἤ

$$\alpha'' \frac{\gamma\beta' - \beta\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} + \beta'' \frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} = \gamma''$$

Ἡ ζητουμένη λοιπόν σχέσις εἶναι ἡ:

$$\alpha''(\gamma\beta' - \beta\gamma') + \beta''(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) + \gamma''(\alpha'\beta - \alpha\beta') = 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. «Διά ποίαν τιμήν τοῦ α εἶναι συμβιβασταί αἱ τρεῖς ἐξισώσεις

$$\left\{3x + \alpha y = 5\ ,\ 5x + (\alpha+2)y = 6\ ,\ 8x - 3\alpha y = 11\right\}».$$

Λύσις. Ἀρκεῖ κατ'ἀρχήν ἡ τρίτη νά προκύπτη διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο πρώτων. Δηλ. νά ὑπάρχουν δύο σταθεροί ἀριθμοί λ καί μ τοιοῦτοι ὥστε ἡ ἐξίσωσις

$$\lambda(3x + \alpha y - 5) + \mu\left\{5x + (\alpha+2)y - 6\right\} = 0$$

νά ταυτίζεται μέ τήν ἐξίσωσιν $8x - 3\alpha y - 11 = 0$. Ὥστε πρέπει

$$\lambda(3x + \alpha y - 5) + \mu\left\{5x + (\alpha+2)y - 6\right\} \equiv 8x - 3\alpha y - 11$$

Ἐξισοῦντες τούς συντελεστάς τῶν x καί y ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καθώς καί τούς σταθερούς ὅρους λαμβάνομεν:

$$3\lambda + 5\mu = 8\ ,\ \lambda\alpha + \mu(\alpha+2) = -3\alpha\ ,\ -5\lambda - 6\mu = -11$$

Ἐκ τῆς πρώτης καί τρίτης εὑρίσκομεν $\lambda = 1$, $\mu = 1$, ὁπότε ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\alpha = -2/5$.

Ἄλλη λύσις. Δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν ὅπως εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

596. Ἐάν αἱ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις $A \equiv \alpha x+\beta y+\gamma z-\delta = 0$ καί $B \equiv \alpha' x+\beta' y+\gamma' z-\delta' = 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε ὑπάρχει σταθερός ἀριθμός λ τοιοῦτος ὥστε $B \equiv \lambda A$ (Ἄς ὑποτεθῇ $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$).

597. Ἐάν εἰς σύστημα πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων: $\{A = 0\ ,\ B = 0\ ,\ \Gamma = 0\ ,\ \Delta = 0\}$ αἱ ἐξισώσεις $A - B = 0$ καί $\Gamma - \Delta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμοι, τότε μία ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος προκύπτει διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν τριῶν ἄλλων.

598. Νά δειχθῇ ὅτι ἄν $\lambda\mu(\lambda+\mu) \neq 0$ αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις

$$A \equiv \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - \lambda\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = 0 \quad , \quad B \equiv \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} - \mu\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = 0$$

$$\Gamma \equiv \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) = 0 \quad , \quad \Delta \equiv \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right) = 0$$

εἶναι συμβιβασταί. ("Εχουν κοινήν λύσιν).

599. 'Εάν $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$, ποίαν ἄλλην συνθήκην πρέπει νά πληροῦν τά α, β, γ ἵνα τό σύστημα

$$\begin{cases} x + y + z - (\alpha + \beta + \gamma) = 0 \\ \alpha x + \beta y + \gamma z - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \\ \beta x + \gamma y + \alpha z - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0 \\ \gamma x + \alpha y + \beta z - 4\alpha\beta = 0 \end{cases}$$

ἔχει λύσιν; (Δηλ. αἱ τέσσαρες ἐξισώσεις νά εἶναι συμβιβασταί;) Δίδεται ἀκόμη ὅτι αἱ τρεῖς τελευταῖαι ἐξισώσεις ἔχουν κοινήν λύσιν

600. Δείξατε ὅτι εἰς ἕκαστον τῶν κατωτέρω συστημάτων αἱ τρεῖς ἐξισώσεις δέν εἶναι ἀνεξάρτητοι, δηλ. μία ἐξ αὐτῶν προκύπτει διά γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τῶν δύο ἄλλων:

$$1)\ \begin{cases} x - y = 3 \\ y - z = -5 \\ z - x = 2 \end{cases} \quad 2)\ \begin{cases} 3x - 8y + 7z = 10 \\ 2x + 5y - 3z = 12 \\ 16x + 9y - z = 80 \end{cases} \quad 3)\ \begin{cases} 3x - 2y + 4z = 13 \\ +2x + 5y - 3z = -9 \\ 7x + 8y - 2z = -5 \end{cases}$$

Τί συνάγετε διά τό πλῆθος τῶν λύσεων ἑκάστου τῶν συστημάτων τούτων; Πῶς δύνανται νά ὁρισθοῦν αἱ λύσεις;

141. **'Ομογενῆ συστήματα.** α) "Οταν ὁ σταθερός ὅρος μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι μηδενικός, ἡ ἐξίσωσις λέγεται ὁ μ ο γ ε ν ή ς. Τοιαῦται λ.χ. εἶναι αἱ ἐξισώσεις $\alpha x + \beta y = 0$ $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta\omega = 0$ κ.ο.κ. 'Εάν δέ ἕνα σύστημα ἐξισώσεων ἀπαρτίζεται ἀπό ὁμογενεῖς ἐξισώσεις, τότε λέγεται ὁ μ ο γ ε ν έ ς σ ύ σ τ η μ α.

Οὕτω π.χ. τό σύστημα μέ τρεῖς ἀγνώστους:

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = 0 \\ \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z = 0 \end{cases}$$

εἶναι ὁμογενές. Τό ὁμογενές σύστημα ἔχει πάντοτε μίαν προφανῆ λύσιν, τήν μ η δ ε ν ι κ ή ν λ ύ σ ι ν. Οὕτω π.χ. τό (1) δέχεται προφανῶς ὡς λύσιν τήν τριάδα $\{x = 0 \ , \ y = 0,$

$z = 0$.

Εἰς κάθε ὁμογενές σύστημα δυνατόν νά συμβαίνουν δύο τινά: Ἤ δέν ἔχει ἄλλην λύσιν πλήν τῆς μηδενικῆς ἤ ἐκτός τῆς μηδενικῆς ἔχει καί ἄλλας (μή μηδενικάς) λύσεις ἀπείρους τό πλῆθος. Διά νά συμβαίνη τό δεύτερον ἀπαιτεῖται ειδική σχέσις μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῶν ἐξισώσεων τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος.

Θ' ἀρκεσθῶμεν ἐνταῦθα εἰς τήν εὕρεσιν τῆς ἀναγκαίας συνθήκης μεταξύ τῶν συντελεστῶν τοῦ (1) ὑποτιθεμένου ὅτι τοῦτο " ἔχει καί λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς.

Ἄν ὑποτεθῆ λ.χ. ὅτι τό (1) ἔχει καί λύσιν εἰς τήν ὁποίαν ὁ z εἶναι $\neq 0$ τότε διαιροῦντες διά z ἀμφότερα τά μέλη ὅλων τῶν ἐξισώσεων φθάνομεν εἰς τό σύστημα

$$(2) \quad \left\{ \alpha\frac{x}{z} + \beta\frac{y}{z} + \gamma = 0 \;,\; \alpha'\frac{x}{z} + \beta'\frac{y}{z} + \gamma' = 0 \;,\; \alpha''\frac{x}{z} + \beta''\frac{y}{z} + \gamma'' = 0 \right.$$

Ἐάν δέ θέσωμεν $\frac{x}{z} = \omega$, $\frac{y}{z} = \varphi$ θά ἔχωμεν ὅτι οἱ ω καί φ πληροῦν καί τάς τρεῖς ἐξισώσεις

$$(3) \quad \left\{ \alpha\omega + \beta\varphi + \gamma = 0 \quad \alpha'\omega + \beta'\varphi + \gamma' = 0 \quad \alpha''\omega + \beta''\varphi + \gamma'' = 0 \right\}$$

ἤτοι αἱ (3) θά εἶναι συμβιβασταί. Ἀλλά τότε μεταξύ τῶν 9 συντελεστῶν $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ θά ὑπάρχη ἡ σχέσις ἡ εὑρεθεῖσα εἰς τό παράδειγμα 1, § 140.

β) **Δύο ὁμογενεῖς γραμμικαί ἐξισώσεις μέ τρεῖς ἀγνώστους**

Τό σύστημα:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z &= 0 \end{aligned} \right.$$

παρουσιάζεται συχνά εἰς ζητήματα τῆς Ἀλγέβρας. Ἐν προκειμένῳ ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα:

"Ἐάν τό ὁμογενές σύστημα (4) ἔχει καί λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς τότε θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις

$$(5) \quad \frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta' & \gamma' \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma' & \alpha' \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ ὁρίζουσαι εἰς τούς παρ/στάς εἶναι $\neq 0$».

'Απόδειξις. "Εστω $z \neq 0$. Τότε ἐκ τοῦ (4) λαμβάνομεν

$$\left\{\alpha\frac{x}{z}+\beta\frac{y}{z}=-\gamma \quad , \quad \alpha'\frac{x}{z}+\beta'\frac{y}{z}=-\gamma'\right\} \qquad \text{ἤ}$$

$$(6) \qquad \left\{\alpha\omega+\beta\varphi=-\gamma \qquad \alpha'\omega+\beta'\varphi=-\gamma'\right\}$$

ὅπου ἐτέθη $\omega = x/z$, $\varphi = y/z$

Λύοντες τό (6) ὡς πρός ω καί φ εὑρίσκομεν

$$\omega=\frac{\begin{vmatrix}-\gamma & \beta\\ -\gamma' & \beta'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}} \quad , \quad \varphi=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & -\gamma\\ \alpha' & -\gamma'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta\end{vmatrix}}$$

(κατά τούς τύπους (9') τῆς §136)

"Ητοι:

$$\frac{x}{z}=\frac{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}} \qquad \frac{y}{z}=\frac{\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \gamma' & \alpha'\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}}$$

ἤ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta' & \gamma'\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}} \quad \text{καί} \quad \frac{y}{\begin{vmatrix}\gamma & \alpha\\ \gamma' & \alpha'\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha' & \beta'\end{vmatrix}}$$ ὅ.ἔ.δ.

'Εφαρμογή. 'Η ἄσκησις 575 σελ. 367 δύναται νά λυθῆ ὡς ἑξῆς. 'Από τάς δύο πρώτας ἐξισώσεις λαμβάνομεν

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}-4 & 7\\ -1 & -2\end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix}7 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z}{\begin{vmatrix}3 & -4\\ 2 & -1\end{vmatrix}} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{x}{15}=\frac{y}{20}=\frac{z}{5} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{1}=\lambda\ , \qquad x=3\lambda \quad y=4\lambda \quad z=\lambda$$

ὁπότε ἡ τρίτη γίνεται:

$$27\lambda^3-64\lambda^3+\lambda^3=18 \ \text{ἤ}\ -36\lambda^3=18 \quad \text{καί} \quad \lambda=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

"Ωστε $x=-3/\sqrt[3]{2}$, $y=-4/\sqrt[3]{2}$, $z=-1/\sqrt[3]{2}$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

601. 'Εάν οἱ $\neq 0$ ἀριθμοί x, y, z ἱκανοποιοῦν τό σύστημα

$$\{\alpha(y+\omega)=x \quad , \quad \beta(\omega+x)=y \quad , \quad \gamma(x+y)=\omega\}$$.

νά δειχθῆ ὅτι τότε

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2\alpha\beta\gamma=1$$

'Επίσης θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$x^2/\alpha(1-\beta\gamma) = y^2/\beta(1-\alpha\gamma) = \omega^2/\gamma(1-\alpha\beta)$$

(τῶν παρ/στῶν ὑποτιθεμένων $\neq 0$).

602. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό σύστημα

$$\{\alpha x + \gamma y + \beta z = 0 \quad , \quad \gamma x + \beta y + \alpha z = 0 \quad , \quad \beta x + \alpha y + \gamma z = 0\}$$

πληροῦται καί ἀπό τιμάς τῶν x, y, z ὄχι ὅλας μηδενικάς νά δειχθῆ ὅτι μεταξύ τῶν α, β, γ θά ὑφίσταται τότε ἡ σχέσις:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma = 0$$

603. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$7yz + 3zx = 4xy \quad , \quad 21yz - 3zx = 4xy \quad , \quad x + 2y - 3z = 19$$

. Νά λυθῆ τό σύστημα

$$\left\{\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = \frac{x}{\beta} + \frac{y}{\gamma} + \frac{z}{\alpha} = \frac{x}{\gamma} + \frac{y}{\alpha} + \frac{z}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right\}$$

604. Νά δειχθῆ ὅτι ἐκ τῶν σχέσεων

$$x = \gamma y + \beta z \quad , \quad y = \alpha z + \gamma x \quad , \quad z = \beta x + \alpha y$$

ἕπεται ἡ σχέσις: $\dfrac{x^2}{1-\alpha^2} = \dfrac{y^2}{1-\beta^2} = \dfrac{z^2}{1-\gamma^2}$ (ὑπό τινας εὐνοήτους περιορισμούς διά τά α, β, γ).

605. Ἐάν $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)(\delta+1) \neq 0$ δείξατε ὅτι ἐφ'ὅσον τό σύστημα

$$\left\{\begin{array}{ll} x = \beta y + \gamma z + \delta\omega \quad , & y = \alpha x + \gamma z + \delta\omega \quad , \\ z = \alpha x + \beta y + \delta\omega \quad , & \omega = \alpha x + \beta y + \gamma z \end{array}\right\}$$

ἔχει καί λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς θά ὑπάρχῃ ἡ σχέσις

$$\frac{\alpha}{\alpha+1} + \frac{\beta}{\beta+1} + \frac{\gamma}{\gamma+1} + \frac{\delta}{\delta+1} = 1$$

142.* Διοφαντικαί ἐξισώσεις πρώτου βαθμοῦ. α) Ὅταν καί οἱ συντελεσταί καί οἱ ἄγνωστοι μιᾶς ἐξισώσεως εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί τότε ἡ ἐξίσωσις καλεῖται Δ ι ο φ α ν τ ι κ ή.

Ἔστω ἡ Διοφαντική ἐξίσωσις

$$(1) \qquad \alpha x + \beta y = \gamma$$

Ἐπίλυσις τῆς (1) σημαίνει εὕρεσις ὅλων τῶν ἀκεραίων λύσεών της ἤτοι ὅλων τῶν ζευγῶν ἀκεραίων οἱ ὁποῖοι τήν ἐπαληθεύουν.

Διά τήν ἐπίλυσιν τῆς (1) χρησιμεύουν τά κάτωθι θεωρήματα:

Θεώρημα Ι. «Ἐάν οἱ α καί β ἔχουν κοινόν διαιρέτην δ τόν ὁποῖον δέν ἔχει ὁ γ τότε ἡ Διοφαντική ἐξίσωσις $\alpha x + \beta y = \gamma$

* Κεφάλαια ἤ παράγραφοι σημειούμενα δι'ἀστερίσκων δύνανται νά παραλείπωνται εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν.

οὐδεμίαν λύσιν ἔχει».

'Απόδειξις. Τά δύο μέλη τῆς (1) οὐδέποτε καθίστανται ἴσα δι' ἀκεραίας τιμάς τῶν x καί y. Διότι τό πρῶτον μέλος ἔχει πάντοτε ὡς διαιρέτην τόν δ ἐνῶ τό δεύτερον δέν διαιρεῖται διά δ.

Θεώρημα ΙΙ. «'Εάν οἱ α καί β εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους τότε ἡ (1) ἔχει ἀκεραίαν λύσιν».

'Απόδειξις. Ἔστω $\alpha > 0$. (Ἄν δέν εἶναι, δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τά σημεῖα). Λύομεν τήν (1) ὡς πρός x:

(2) $$x = \frac{\gamma - \beta y}{\alpha}$$

Δίδομεν εἰς τόν y κατά σειράν τάς ἀκεραίας τιμάς:

(3) $0, 1, 2, 3, \ldots (\alpha - 1)$

Κάποια ἀπό τάς τιμάς αὐτάς θά καθιστᾶ τό δεύτερον μέλος τῆς (2) ἀκέραιον ἀριθμόν καί ἔτσι θά ἔχωμεν καί τό x καί τό y ἀκεραίους. Πρός ἀπόδειξιν τούτου παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις τοῦ ἀκεραίου $\gamma - \beta y$ διά τοῦ α θά δίδη διαφορετικόν ἑκάστοτε ὑπόλοιπον ὅταν ὁ y διατρέχει τάς τιμάς (3). Διότι ἄν δύο τιμαί ἐκ τῶν (3) ἔστω αἱ k καί ρ ἔδιδον τό αὐτό ὑπόλοιπον υ θά εἴχομεν τάς ἰσότητας τῆς διαιρέσεως (ἴδε § 6)

$$\gamma - \beta k = \alpha\pi + \upsilon \quad , \quad \gamma - \beta\rho = \alpha\pi' + \upsilon$$

καί συνεπῶς $(\gamma - \beta k) - (\gamma - \beta\rho) = \alpha(\pi - \pi')$ ἤτοι

(4) $$\beta(\rho - k) = \alpha(\pi - \pi')$$

'Εκ τῆς (4) θά εἴχομεν ὅτι ὁ α διαιρεῖ τό γινόμενον $\beta(\rho - k)$ καί ἐπειδή εἶναι πρῶτος πρός τόν β θά διαιρῇ ἀκριβῶς τόν $(\rho - k)$ (ἴδε § 9, Ι). 'Αλλά τοῦτο εἶναι ἄτοπον διότι καί ὁ ρ καί ὁ k εἶναι μικρότεροι τοῦ α.

'Αφοῦ λοιπόν οἱ α ἀριθμοί $0, 1, 2, \ldots (\alpha - 1)$ τιθέμενοι ἀντί τοῦ y δίδουν διαφορετικά ὑπόλοιπα καί ἀφοῦ ὅλα τά δυνατά ὑπόλοιπα πού ἠμποροῦν νά προκύψουν εἶναι ἐπίσης α τό πλῆθος: $0, 1, 2, \ldots (\alpha - 1)$ ἕπεται ὅτι εἷς ἐκ τῶν α ἀριμῶν δι'ὧν ἀντικαθίσταται ὁ y θά δίδη ὡς ὑπόλοιπον τό μηδέν.

Θεώρημα III. «'Εάν ἡ Διοφαντική ἐξίσωσις $\alpha x + \beta y = \gamma$ ἔχει μίαν λύσιν (x_o, y_o) τότε ἔχει καί ἀπείρους ἄλλας».

'**Απόδειξις.** 'Εν πρώτοις, ὑποθέτομεν τά α καί β πρῶτα πρός ἄλληλα. ('Εάν δέν εἶναι διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (1) διά τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν α καί β). Ἔστω τώρα ὅτι ἐκτός τῆς λύσεως (x_o, y_o) ὑπῆρχε καί ἄλλη λύσις (x, y) τῆς (1). Θά εἴχομεν τότε

$$\left\{ \alpha x_o + \beta y_o = \gamma \qquad , \qquad \alpha x + \beta y = \gamma \right\}$$

καί δι'ἀφαιρέσεως κατά μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha(x - x_o) + \beta(y - y_o) = 0 \qquad \text{ἤ}$$

$$\frac{x - x_o}{y - y_o} = \frac{\beta}{-\alpha}$$

'Επειδή τό κλάσμα $\beta/-\alpha$ εἶναι ἀνάγωγον ἕπεται ὅτι οἱ ὅροι τοῦ $x - x_o / y - y_o$ θά εἶναι ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων τοῦ ἀναγώγου (ἴδε σελ 23 θεωρ). Ὥστε θά ἦτο

$$x - x_o = \lambda\beta \qquad , \qquad y - y_o = \lambda\alpha$$

ὅπου λ κάποιος ἀκέραιος. Δηλ:

$$(5) \qquad \left\{ x = x_o + \lambda\beta \qquad y = y_o - \lambda\alpha \right\}$$

Πράγματι ὅμως αἱ (5) τιθέμεναι εἰς τήν (1) τήν ἐπαληθεύουν οἱανδήποτε τιμήν καί ἄν ἔχη ὁ ἀκέραιος λ. Ὥστε ἡ (1) ἔχει τάς ἀπείρους λύσεις (5) τάς παραγομένας ὅταν ὁ λ διατρέχει ὅλους τούς ἀκεραίους ἀριθμούς $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

β) **Αἱ θετικαί** λύσεις τῆς (1) εὑρίσκονται ἀπό τούς (5) ὅταν ὁ ἀκέραιος λ προσδιορισθῆ ἀπό τό σύστημα τῶν ἀνισοτήτων

$$x_o + \lambda\beta > 0 \qquad , \qquad y_o - \lambda\alpha > 0$$

αἱ δέ μή ἀρνητικαί λύσεις ὅταν ὁ λ προσδιορισθῆ ἀπό τό σύστημα τῶν σχέσεων $x_o + \lambda\beta \geqslant 0$, $y_o - \lambda\alpha \geqslant 0$

γ) **Διοφαντική ἐξίσωσις** πρώτου βαθμοῦ μέ τρεῖς ἀγνώστους

'Εάν ὁ συντελεστής ἑνός τῶν ἀγνώστων εἶνα 1 ὅπως λ.χ. εἰς τήν $x + \beta y + \gamma z = \delta$ ἡ γενική λύσις εἶναι προφανής: $y = k$ (= τυχών ἀκέραιος) , $z = \lambda$ (= τυχών ἀκέραιος) καί $x = \delta - \beta k - \gamma\lambda$. Εἰδ'ἄλλως, ἀνάγομεν τήν ἐξίσωσιν εἰς ἄλλην μέ μικροτέρους συντελεστάς καί αὐτήν εἰς ἄλλην μέ ἔτι μικροτέρους κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ἐξίσωσιν εἰς τήν ὁποίαν εἷς τῶν ἀγνώστων ἔχει συντελεστήν 1. 'Ο τρόπος φαίνεται ἀπό τό κατωτέρω παράδειγμα:

$$5x + 9y - 2z = 17$$

$$x = \frac{17 + 2z - 9y}{5} = 3 - y + \frac{2 + 2z - 4y}{5} = 3 - y + p$$

'Αρκεῖ νά λύσωμεν τήν $5p = 2 + 2z - 4y$

$$y = \frac{2z + 2 - 5p}{4} = -p + \frac{2z + 2 - p}{4} = -p + q$$

'Αναγόμεθα εἰς τήν $4q = 2z + 2 - p$:

$$z = 2q - 1 + \frac{p}{2} = 2q - 1 + r \quad , \quad p = 2r$$

$$y = -2r + q \qquad x = 3 - (-2r + q) + 2r = 4r - q + 3$$

'Η γενική λύσις: $x = 4r - q + 3$, $y = -2r + q$

$z = r + 2q - 1$ ὅπου r , q αὐθαίρετοι ἀκέραιοι.

Ταχύτερον λύεται ἡ δοθεῖσα ἄν λύσωμεν ὡς πρός z (τόν ἔχοντα μικρότερον συντελεστήν):

$$z = \frac{5x + 9y - 17}{2} = 2x + 4y - 8 + \frac{x + y - 1}{2}$$ ἤ

$$z = 2x + 4y - 8 + p \tag{6}$$

ὅπου $2p = x + y - 1$ καί συνεπῶς

$$x = 2p - y + 1 \tag{7}$$

'Η (6) γίνεται βάσει τῆς (7):

$$z = 2(2p - y + 1) + 4y - 8 + p$$ δηλ.

$z = 2y + 5p - 6$, $x = 2p - y + 1$, $y =$ οἱοσδήποτε ἀκερ.

ἐκφράζουν τήν γενικήν λύσιν.

δ) **'Ακέραιαι λύσεις συστήματος.** Πρός εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων συστήματος δύο Διοφαντικῶν ἐξισώσεων μέ τρεῖς ἀγνώστους:

$$(9) \quad \{\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta \quad , \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = \delta'\}$$

ἀπαλείφομεν τόν ἕνα ἄγνωστον μεταξύ τῶν (9) ἔστω τόν z καί λαμβάνομεν Διοφαντικήν ἐξίσωσιν ὡς πρός τούς δύο ἄλλους ἀγνώστους, ἔστω τήν

$$Kx + \Lambda y = M$$

τῆς ὁποίας ἡ γενική λύσις ἄς εἶναι ἡ:

$$(10) \qquad x = x_0 + \lambda\Lambda \qquad y = y_0 - \lambda K$$

Τάς τιμάς (10) θέτομεν εἰς μίαν ἐκ τῶν (9), ἔστω τήν πρώτην ὁπότε λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ὡς πρός λ καί z:

$$(11) \qquad \alpha(x_0 + \lambda\Lambda) + \beta(y_0 - \lambda K) + \gamma z = \delta$$

Λύομεν τήν (11) ὡς πρός λ καί z καί ἔστω ἡ γενική λύσις αὐτῆς:

$$(12) \qquad \lambda = \lambda_0 + \lambda'\varepsilon \quad , \quad z = z_0 - \lambda'\eta$$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τάς (10) τό λ ἐκ τῶν (12) καί λαμβάνομεν τήν γενικήν λύσιν τοῦ συστήματος συναρτήσει τῆς παραμέτρου λ΄ ἥτις διατρέχει ὅλας τάς ἀκεραίας τιμάς.

Αἱ θ ε τ ι κ α ί λ ύ σ ε ι ς τοῦ συστήματος λαμβάνονται ἀκολούθως ὡς ἐγράφη εἰς τό ἀνωτέρω ἐδάφιον β΄).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ*

606. Νά εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς $7x + 11y = 47$ καί κατόπιν αἱ θετικαί λύσεις αὐτῆς.

607. 'Ομοίως διά τήν $13x + 5y = 41$

608. Νά εὑρεθοῦν αἱ θετικαί ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος

$$\{4x + 3y + 2z = 16 \quad , \quad 5x + 6y + 7z = 38\}$$

609. Ν'ἀναλυθῆ τό κλάσμα 77/65 εἰς ἄθροισμα δύο ρητῶν κλασμάτων ἐχόντων παρ/στάς 13 καί 5.

610. Νά ὁρισθοῦν τά κλάσματα τά ὁποῖα δέν μεταβάλλονται ἐάν προστεθῆ 5 εἰς τόν ἀριθμητήν καί 12 εἰς τόν παρ/στήν.

611. Κατά ποίους τρόπους ἕνα χαρτονόμισμα τῶν 50 δρχ. ἠμπορεῖ ν'ἀλλαχθῆ μέ μικρότερα χαρτονομίσματα;

612. Νά εὑρεθῆ ἀκέρ. ἀριθμός ὅστις διαιρούμενος διά 11 δίδει ὑπόλοιπον 3 διά 37 δίδει ὑπόλοιπον 13 καί διά 17 δίδει ὑπολ. 10.

Β΄ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

143. α) Εἰς τά 'Αλγεβρικά "προβλήματα" ζητεῖται ἐν γένει, ὁ προσδιορισμός ποσοτήτων καλουμένων "ἀγνώστων" αἱ ὁποῖαι συνδέονται δι'ἀλγεβρικῶν σχέσεων μέ ἄλλας γνωστάς ποσότητας αἱ ὁποῖαι θεωροῦνται ὡς δεδομένα τοῦ προβλήματος. 'Επίλυσις ἤ λύσις τοῦ προβλήματος καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν ἀγνώστων.

Διά νά λύσωμεν ἕνα 'Αλγεβρικόν πρόβλημα παριστῶμεν τόν ἄγνωστον ἤ τούς ἀγνώστους διά γραμμάτων (συνήθως τῶν x, y, z, t,..) καί κατόπιν καταστρώνομεν τήν ἐξίσωσιν ἤ τάς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος ἐπί τῇ βάσει τῶν σχέσεων αἱ ὁποῖαι σύμφωνα μέ την ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος, ὑπάρχουν μεταξύ δεδομένων καί ζητουμένων (ἀγνώστων) ποσοτήτων. Οἱ ἄγνωστοι θά εὑρεθοῦν ἐκ τῆς ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως ἤ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων τάς ὁποίας θά καταστρώσωμεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1. **"Νά μοιρασθοῦν 1680 δρχ. εἰς τρία πρόσωπα, οὕτως ὥστε τό 2ον νά λάβη 70 δρχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου τό δέ τρίτον 40 δρχ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου"**

Λύσις. 'Εάν παραστήσωμεν διά x τό ποσόν πού θά λάβη ὁ πρῶτος, τότε ὁ δεύτερος θά λάβη x + 70 ὁ δέ τρίτος (x+70) + + 40, σύμφωνα πρός τήν ἐκφώνησιν. 'Η ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος προκύπτει ἄν ἐκφράσωμεν ὅτι καί οἱ τρεῖς μαζί ἔλαβον τό διαμοιρασθέν ποσόν:

$$x + (x + 70) + \{(x + 70) + 40\} = 1680$$

ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν x = 500 δρχ. Συνεπῶς ὁ 2ος θά λάβη 570 δρχ. καί ὁ τρίτος 610 δρχ.

'Επαλήθευσις. $500 + 570 + 610 = 1680$

2. «Νά εὑρεθῆ τριψήφιος ἀριθμός γνωστοῦ ὄντος ὅτι α) τό ψηφίον τῶν δεκάδων ἰσοῦται πρός τό ψηφίον τῶν μονάδων β) Ὅτι, προσθέτοντες 42 εἰς τό διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ λαμβάνομεν ἀριθμόν ἔχοντα τά ψηφία του κατ' ἀντίστροφον τάξιν ἤ ὁ ζητούμενος (δηλ. λαμβάνομεν τόν ἀνεστραμμένον τοῦ ζητουμένου). γ) Ἐάν ἐναλλάξωμεν τά ψηφία τῶν δεκάδων καί ἑκατοντάδων, λαμβάνομεν ἀριθμόν ὅστις αὐξανόμενος κατά 27 γίνεται ἴσος πρός τόν ἀνεστραμμένον τοῦ ζητουμένου».

Λύσις. Ἄς παραστήσωμεν μέ x τό ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων, μέ y τό τῶν δεκάδων, ὁπότε κατά τό πρόβλημα θά εἶναι y καί τό ψηφίον τῶν μονάδων. Ὁ ζητούμενος ἀριθμός θά ἔχη y μονάδας, y δεκάδας καί x ἑκατοντάδας, συνεπῶς θά εἶναι ὁ $\overline{xyy}_{<10>}$ (ἴδε § 11) καί θά ἔχη ἐν ὅλῳ μονάδας:

$$y + 10y + 100x$$

Ὁ ἀνεστραμμένος ἀριθμός θά εἶναι ὁ yyx. ἄρα θ' ἀποτελεῖται ἀπό $x + 10y + 100y$ μονάδας. Κατά τό β' ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν τήν ἐξίσωσιν

$$(1) \quad 42 + 2(y + 10y + 100x) = x + 10y + 100y$$

Ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων δεκάδων καί ἑκατοντάδων προκύπτων ἀριθμός θά εἶναι ὁ $\overline{yxy}_{<10>} = y + 10x + 100y$ καί κατά τό γ' ἐπίταγμα τοῦ προβλήματος θά ἔχωμεν:

$$(2) \quad y + 10x + 100y + 27 = x + 10y + 100y$$

Αἱ ἐξισώσεις (1) καί (2) ἁπλοποιούμεναι σχηματίζουν τό σύστημα

$$(3) \qquad \begin{cases} 198x - 88y = -42 \\ x - y = -3 \end{cases}$$

Λύοντες τό σύστημα εὑρίσκομεν $x = 2$, $y = 5$· συνεπῶς ὁ ζητούμενος ἀριθμός $\overline{xyy}_{<10>}$ εἶναι ὁ 255.

3. «Νά εὑρεθοῦν δύο ἀκέραιοι θετικοί τοιοῦτοι ὥστε ἄν ζητήσωμεν τόν Μ.Κ.Δ. των διά τῆς μεθόδου των διαδοχικῶν διαιρέσεων, ἡ πρώτη διαίρεσις νά δίδη πηλίκον 3 καί ὑπόλοιπον 6 ἡ δέ δευτέρα πηλίκον τό ἕν ἑκατοστόν τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ καί ὑπόλοιπον μηδέν».

Λύσις. Ἔστωσαν x καί y οἱ ζητούμενοι καί ἔστω $x > y$. Ἡ πρώτη διαίρεσις δίδει $x = 3y + 6$ ἡ δέ δευτέρα $y = 6 \cdot \frac{x}{100}$ (ἴδε σελ 9). Ἐκ τοῦ συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $x = 60$, $y = 18$.

β) Περιορισμοί. Οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος ὀφείλουν ἐν γένει νά ἱκανοποιοῦν ὡρισμένας συνθήκας σχετικάς πρός τήν φύσιν τοῦ προβλήματος τάς ὁποίας καλοῦμεν π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ο ύ ς τοῦ προβλήματος. Δύναται λοιπόν νά συμβῆ, ἀφοῦ καταστρώσωμεν τάς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος καί λύσωμεν αὐτάς, νά λάβωμεν τιμάς τῶν ἀγνώστων μή πληρούσας τούς περιορισμούς.

Τότε αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί εἶναι ἀπαράδεκτοι καί τό πρόβλημα δέν ἔχει λύσιν.

Οὕτω π.χ. εἰς τό 1ον ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ὁ x ὑπόκειται εἰς τόν περιορισμόν νά εἶναι θετικός. Εἰς τό 2ον οἱ x καί y πρέπει νά εἶναι ἀκέραιοι τοιοῦτοι ὥστε $0 < x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$. Ἐάν δέ τό σύστημα (3) δέν ἔδιδε τοιαύτας λύσεις τό πρόβλημα θά ἦτο ἀδύνατον. Εἰς τό 3ον παράδειγμα οἱ x, y ὑπόκεινται εἰς τόν περιορισμόν νά εἶναι ἀκέραιοι.

Δ υ ν ά μ ε θ α ν ά θ έ τ ω μ ε ν τ ο ύ ς π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ο ύ ς τ ῶ ν ἀ γ ν ώ σ τ ω ν ε ὐ θ ύ ς ἐ ξ ἀ ρ χ ῆ ς κ α ί ν ά ἀ π ο ρ ρ ί π τ ω μ ε ν ε ἰ ς τ ό τ έ λ ο ς ἐ κ ε ί ν α ς τ ά ς λ ύ σ ε ι ς α ἱ ὁ π ο ῖ α ι δ έ ν π λ η ρ ο ῦ ν τ ο ύ ς τ ε θ έ ν τ α ς π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ο ύ ς.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. **«Νά εὑρεθῆ τετραψήφιος ἀριθμός ἔχων τά δύο πρῶτα ψηφία του ἴσα, τά δύο τελευταῖα ἴσα καί νά εἶναι καί τέλειον τετράγωνον».**

Λύσις. Ἔστω $\overline{xxyy}_{\langle 10\rangle}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Θέτομεν τούς π ε ρ ι ο ρ ι σ μ ο ύ ς τῶν ἀγνώστων:

x καί y ἀκέραιοι, $0 < x \leqslant 9$, $0 \leqslant y \leqslant 9$.

Ὁ ζητούμενος ἀριθμός $\overline{xxyy}_{\langle 10\rangle} = 1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y) = 11(99x + x + y)$.

Ἐπειδή ὁ ἀριθμός θά εἶναι τέλειον τετράγωνον διά τοῦτο πρέπει ὁ παράγων $99x + x + y$ νά διαιρῆται καί αὐτός διά τοῦ 11. Ὁ παράγων $99x + x + y$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο προσθετέους: $99x$ καί $x + y$ ἐξ ὧν ὁ πρῶτος διαιρεῖται διά 11.

Ἄρα καί ὁ δεύτερος πρέπει νά διαιρῆται διά 11. Ἐπειδή ἡ μεγίστη δυνατή τιμή τοῦ x εἶναι 9 καί τοῦ y, ἐπίσης,

διά τοῦτο ἡ μεγίστη δυνατή τιμή τοῦ $x+y$ εἶναι 18. Ὥστε $x+y \leqslant 18$. Ἀλλ'ἐκ τῶν θετικῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων τοῦ 18 μόνον ὁ 11 διαιρεῖται διά 11. Ἄρα κατ'ἀνάγκην $x+y=11$.
Ὁ ζητούμενος ἀριθμός ἰσοῦται λοιπόν μέ

$$11(99x+x+y) = 11(99x+11) = 11^2(9x+1)$$

Ὁ παράγων $9x+11$ πρέπει νά εἶναι καί αὐτός τελειον τετράγωνον. Αἱ δυναταί τιμαί τοῦ x εἶναι 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ἡ τιμή $x=1$ ἀποκλείεται διότι δίδει $y=10$. Ὥστε μένουν πρός ἔλεγχον αἱ λοιπαί. Διά $x=2,3,4,5$ καί 6 εὑρίσκομεν ὅτι τό $9x+1$ δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον διά $x=7$ εἶναι καί διά $x=8$ καί 9 δέν εἶναι.

Ἄρα, ἡ μόνη δεκτή τιμή τοῦ x εἶναι $x=7$. Ἀλλ'ἐπειδή $x+y=11$ ἔπεται ὅτι $y=4$. Ὥστε ὁ ἀριθμός δέν ἠμπορεῖ νά εἶναι ἄλλος ἀπό τόν 7744. Πράγματι οὗτος εἶναι τετράγωνον τοῦ 88 καί, ὡς ἐδείχθη, εἶναι ὁ μόνος ὅστις πληροῖ τά ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

γ΄) **Διερεύνησις.** Ἕνα πρόβλημα δύναται δ'ὡρισμένας τιμάς τῶν δεδομένων του νά ἔχῃ λύσιν καί δι'ἄλλας τιμάς τῶν δεδομένων του νά μή ἔχῃ λύσιν.

Διερευνησις καλεῖται ἡ εὕρεσις τῶν συνθηκῶν εἰς τάς ὁποίας πρέπει νά ὑπόκεινται τά δεδομένα τοῦ προβλήματος ἵνα τό πρόβλημα εἶναι δυνατόν. Αἱ συνθῆκαι αὗται μεταξύ τῶν δεδομένων λέγονται καί συνθῆκαι δυνατότητος τοῦ προβλήματος.

Διά νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι δυνατότητος πρέπει, φυσικά, τά δεδομένα νά παρίστανται διά γραμμάτων, (δηλ. γενικῶν καί ὄχι συγκεκριμμένων ἀριθμῶν) καί νά ἐκφρασθοῦν (συνηθως δι'ἀνισοτητων) οἱ περιορισμοί εἰς τούς ὁποίους δέον νά ὑπόκεινται οἱ ἄγνωστοι τοῦ προβλήματος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5. « **Τρεῖς ἵπποι** Α, Β, Γ πρόκειται νά τρέξουν εἰς μίαν **ἱπποδρομίαν. Ἐάν ὁ Α ἔλθῃ πρῶτος**, ὁ ἐπ' αὐ**τοῦ στοιχηματίζων λαμβάνει α φοράς τό ποσόν** τό ὁποῖον ἔπαιξεν **ἐπί τοῦ ἵππου τουτου**. Ἄν ὁ Β **ἔλθῃ πρῶτος**, τό ἐπ **αὐτοῦ** παιχθέν ποσόν ἀποδίδεται β φοράς **καί** διά τόν Γ τό παιχθέν ποσόν ἀποδίδεται γ φοράς. **Ζητοῦνται** τά ποσά τά ὁποῖα πρέπει νά παίξῃ τις ἐπί ἑκάστου ἵππου οὕτως ὥστε νά ἔχη ἐν πάση περιπτώσει κέρδος, δεδομένον ποσόν Σ».

Λύσις. Ἔστω ὅτι πρέπει νά στοιχηματίση x δρχ. ἐπί τοῦ ἵππου Α, y δρχ. ἐπί τοῦ Β καί z δρχ. ἐπί τοῦ Γ. Ἐάν νικήση ὁ Α τότε ὁ παίκτης θά λάβη αx δρχ. θά ἔχη ἐξοδεύσει δέ x + y + z δρχ. ἄρα τό κέρδος του θά εἶναι αx − (x + y + z) τοῦτο πρέπει νά ἰσοῦται μέ Σ. Ὥστε θά ἔχωμεν $\alpha x-(x+y+z)=\Sigma$

ἤ
$$x+y+z=\alpha x-\Sigma$$

Ὁμοίως σκεπτόμενοι διά τούς ἵππους Β καί Γ εὑρίσκομεν τάς ἐξισώσεις: $x+y+z=\beta y-\Sigma$, $x+y+z=\gamma z-\Sigma$

Ἔχομεν λοιπόν πρός ἐπίλυσιν τό σύστημα:

$$(4)\quad \left\{x+y+z=\alpha x-\Sigma=\beta y-\Sigma=\gamma z-\Sigma\right\}$$

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν:

$$\alpha x=\beta y=\gamma z$$

Ἐάν παραστήσωμεν διά τοῦ t ἕκαστον τῶν ἴσων τούτων γινομένων, θά ἔχωμεν:

$$\alpha x=\beta y=\gamma z=t \quad \text{καί} \quad x=t/\alpha,\ y=t/\beta,\ z=t/\gamma$$

Δυνάμει τούτων, ἡ πρώτη τῶν (4) καθίσταται

$$\frac{t}{\alpha}+\frac{t}{\beta}+\frac{t}{\gamma}=\alpha\frac{t}{\alpha}-\Sigma$$

καί ἐξ αὐτῆς εὑρίσκομεν

$$t=\frac{\Sigma}{1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)}$$

Εὑρεθέντος τοῦ t εὑρίσκονται καί τά x, y, z:

$$x=\frac{\Sigma}{\alpha(1-M)}\ ,\quad y=\frac{\Sigma}{\beta(1-M)}\ ,\quad z=\frac{\Sigma}{\gamma(1-M)}$$

ὅπου $M=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}$.

Διερεύνησις, Διά νά ἔχη λύσιν τό πρόβλημα πρέπει αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί τῶν x, y, z νά εἶναι θετικαί. ... ὅμως συμβαίνει μόνον ὅταν $1 - M > 0$ ἤ $M < 1$.

Ὥστε ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} < 1$$

δηλ. ὑπό τόν περιορισμόν τοῦτον διά τά α, β, γ τό πρόβλημα εἶναι δυνατόν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6. «Δοθέντων τεσσάρων ἀριθμῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ νά εὑρεθῇ ἀριθμός ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕκαστον τῶν δοθέντων δίδει τέσσαρας νέους ἀριθμούς ἀποτελοῦντας ἀναλογίαν».

Λύσις. Ἐάν x ὁ ζητούμενος ἀριθμός τότε οἱ ἀριθμοί $\alpha+x$, $\beta+x$, $\gamma+x$, $\gamma+x$, $\delta+x$ δέον ν'ἀποτελοῦν ἀναλογίαν. Δηλ.

$$\frac{\alpha + x}{\beta + x} = \frac{\gamma + x}{\delta + x} \quad ἤ \quad (\alpha + x)(\delta + x) = (\beta + x)(\gamma + x)$$

Τακτοποιοῦντες τήν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος εὑρίσκομεν

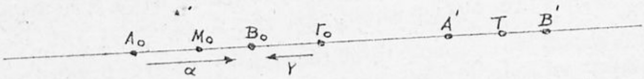
$$x\Big[(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma)\Big] = \beta\gamma - \alpha\delta \tag{5}$$

Ἡ (5) ἔχει μίαν λύσιν ὅταν $\alpha + \delta - (\beta+\gamma) \neq 0$ (ἴδε § 127). Ἡ (5) δέν ἔχει λύσιν ὅταν $(\alpha + \delta) - (\beta + \gamma) = 0$ ἐνῶ $\beta\gamma - \alpha\delta \neq 0$ καί ἀπείρους λύσεις ὅταν $\alpha + \delta - (\beta + \gamma) = 0$ καί $\beta\gamma - \alpha\delta = 0$ δηλ. ὅταν $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ καί $\alpha\delta = \beta\gamma$. Τό ἐξαγόμενον τῆς διερευνήσεως εἶναι λοιπόν τό ἑξῆς:

1) Τό πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὅταν $\alpha + \delta \neq \beta + \gamma$
2) Πᾶς ἀριθμός εἶναι λύσις (ἀόριστον τό πρόβλημα) ὅταν $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ καί $\alpha\delta = \beta\gamma$.
3) Τό πρόβλημα δέν ἔχει λύσιν (ἀδύνατον) ὅταν $\alpha+\delta = \beta+\gamma$ ἐνῶ $\alpha\delta \neq \beta\gamma$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7. «Ἐπί ἀπεράντου ἄξονος κινοῦνται τρία σημεῖα Α, Β, Γ κατά τήν αὐτήν φοράν καί μέ σταθεράς ταχύτητας υ_1, υ_2, υ_3 ἀντιστοίχως. Κατά τινα χρονικήν στιγμήν τό Β εὑρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Γ καί εἰς ἀποστάσεις $(\overline{AB}) = \alpha$, $(\overline{\Gamma B}) = \gamma$ ἀπό τό Α καί Γ, ὅπου $\alpha > 0$ καί $\gamma < 0$. Νά εὑρεθῇ ἡ χρονική στιγμή καθ'ἥν τό Γ εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τοῦ ΑΒ. Νά γίνῃ διερεύνησις ἐπί τῆς δυνατότητος.

Λύσις. Ἂς ἐκλέξωμεν ὡς ἀρχήν τῶν χρόνων τήν στιγμήν καθ'ἥν τά κινητά Α, Β, Γ εὑρίσκονται εἰς τά σημεῖα A_0, B_0, Γ_0 ἀντιστοίχως ἀπέχοντα ἀλλήλων: $(\overline{A_0B_0}) = \alpha > 0$ καί $(\overline{\Gamma_0 B_0}) = \gamma < 0$. Ἔστω δέ ὅτι κατά τόν χρόνον t (θετικόν ἤ ἀρνητικόν δηλ. μετά ἤ πρό). τά κινητά Α, Β, Γ θά εὑρίσκωνται εἰς τάς θέσεις Α΄ Β΄ Τ ὅπου Τ τό μέσον τῆς Α΄Β΄.



Σχ. 19

Ἂς λάβωμεν ὡς ἀρχήν τῶν διαστημάτων τό A_0 καί ἄς φαντασθῶμεν ἕνα τέταρτον κινητόν: τό μέσον τῆς ΑΒ. Τό μέσον Μ τῆς ΑΒ κινεῖται μέ ταχύτητα ἴσην πρός τό ἡμιάθροισμα τῶν ταχυτήτων τῶν Α καί Β.

Ἵνα τό Γ εὑρεθῇ εἰς τό μέσον τῆς ΑΒ ἀρκεῖ νά συναντήσῃ τό νοητόν τοῦτο κινητόν Μ. Κατά τήν ἀρχήν τῶν χρόνων τά κινητά Γ καί Μ εὑρίσκονται εἰς Γ_0 καί M_0 ἀντιστοίχως ἐνῶ κατά τήν χρονικήν στιγμήν t (ὅπου t ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος) εὑρίσκονται ἀμφότερα εἰς τό Τ.

Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι

$$(\overline{M_0\Gamma_0}) = (\overline{M_0 T}) - (\overline{\Gamma_0 T})$$ (ἴδε σελ. 46 β΄)

ἤ $$\frac{\alpha}{2} - \gamma = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} t - \upsilon_3 t$$

ἤ $$\left(\frac{\upsilon_1 + \upsilon}{2} - \upsilon_3\right) t = \frac{\alpha}{2} - \gamma$$

Ἐφ'ὅσον $\frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} \neq \upsilon_3$ τό πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν:

$$t = \frac{\alpha - 2\gamma}{\upsilon_1 + \upsilon_2 - 2\upsilon_3}$$

θετικήν ἤ ἀρνητικήν καθ'ὅσον $\upsilon_1 + \upsilon_2 > 2\upsilon$ ἤ $\upsilon_1 + \upsilon_2 < 2\upsilon_3$.

'Εαν $\frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \upsilon_3$, τότε ἐπειδή $\frac{\alpha}{2} - \gamma \neq 0$ τό πρόβλημα δέν ἔχει λύσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

613. Δύο πόλεις Α καί Β ἀπέχουν 800 km. Ὁ τόννος τοῦ ἄνθρακος τιμᾶται εἰς μέν τήν Α 3700 δρχ. εἰς δέ τήν Β, 4675 δρχ. τά μεταφορικά δέ εἶναι κατά τόννον 1,80 δρχ. ἀνά km. Νά ὁρισθῇ μεταξύ τῶν Α καί Β σημεῖον ὅπου ἡ ἀξία τοῦ ἄνθρακος νά εἶναι ἡ αὐτή εἴτε οὗτος ληφθῇ ἐκ τῆς Α εἴτε ἐκ τῆς Β.

614. Νά εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός ὅστις αὐξάνει κατά 270 ὅταν ἐναλλάξωμεν τά δύο πρῶτα ψηφία του, ἐλαττοῦται κατά 396 ὅταν ἐναλλάξωμεν τά ἀκραῖα ψηφία του, τέλος δέ ἐλαττοῦται κατά 63 ἄν ἐναλλάξωμεν τά δύο τελευταῖα ψηφία του.

615. Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμός 25 διπλασιάζεται δι'ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του;

616. Νά εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός (τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος) ὅστις, ἄν ἀναστραφῇ παριστάνει τόν ἴδιον ἀριθμόν εἰς τό ἑπταδικόν σύστημα.

617. Τρεῖς παίκται Α, Β, Γ συμφωνοῦν ὅπως ὁ χάνων δίδει εἰς τούς ἄλλους, ὅσα ἔχει ἕκαστος. Κατ'ἀρχάς χάνει ὁ Α, κατόπιν ὁ Β καί τέλος ὁ Γ. Μετά ταῦτα ἕκαστος παίκτης ἔχει α δράχ. Ζητοῦνται τά ποσά πού εἶχεν ἕκαστος εἰς τήν ἀρχήν τοῦ παιγνιδίου.

618. Ποσόν διαμοιράζεται εἰς ὡρισμένον πλῆθος προσώπων ὡς ἑξῆς: ὁ 1ος λαμβάνει α δρχ. καί τό 1/ν τοῦ ὑπολοίπου. Ὁ 2ος 2α δρχ. καί τό 1/ν τοῦ νέου ὑπολοίπου. Ὁ 3ος 3α δρχ. καί τό 1/ν τοῦ νέου ὑπολοίπου κ.ο.κ. Διά τοῦ τρόπου τούτου τό ποσόν διεμοιράσθη τελείως καί πάντες ἔλαβον ἴσα μερίδια. Ζητεῖται α) τό πλῆθος τῶν μεριδίων β) τί ποσόν ἔλαβεν ἕκαστος καί γ) νά ἐλεγχθῇ ἡ δυνατότης τοῦ προβλήματος.

619. Δεξαμενή φέρει τρεῖς κρουνούς Α, Β, Γ. Ἄν καί οἱ τρεῖς χρησιμοποιηθοῦν ὡς κρουνοί παροχῆς ἡ δεξαμενή πληροῦται εἰς $2\frac{6}{7}$ ὥρας ὅταν καί οἱ τρεῖς ἀνοιχθοῦν. 'Εάν μόνον οἱ Α καί Γ ἀνοιχθοῦν χρειάζονται $3\frac{3}{4}$ ὥρας διά νά πληρωθῇ ἡ δεξαμενή. 'Εάν οἱ Β καί Γ χρησιμοποιηθοῦν ὡς κρουνοί παροχῆς καί ὁ Α ὡς

κρουνός ἀποχετευσεως χρειαζονται $6\frac{2}{3}$ ὧραι διά νά πληρωθῆ ἡ δεξαμενή. Νά εὑρεθῆ εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος κρουνός μόνος του πληροῖ τήν δεξαμενήν.

620. Πόσα μέρη βάρους καθαροῦ ψευδαργύρου καί πόσα μέρη βάρους καθαροῦ χαλκοῦ θά πρέπει νά προστεθοῦν εἰς 150 μέρη βάρους μίγματος περιέχοντος 25 % ψευδάργυρον καί 35 % χαλκόν διά νά δώσουν μίγμα περιέχον $33^1/3$ % ψευδάργυρον καί 40 % χαλκόν;

621. Ἀλώπηξ καταδιώκει λαγόν. Ὁ λαγός ἀπέχει 50 βήματα ἀλώπεκος ἀπό τήν ἀλώπεκα. Πόσα βήματα θά κάνη ὁ λαγός μέχρις ὅτου τόν φθάση ἡ ἀλώπηξ ἐάν ὁ λαγός κάνει 5 βήματα καθ' ὅν χρόνον ἡ ἀλώπηξ κάνει 4, ἀλλά 2 βήματα ἀλώπεκος εἶναι ἰσοδύναμα μέ 3 βήματα λαγοῦ;

622. Δεδομένου ὅτι ἡ ἀξία ἑνός ἀδάμαντος εἶναι ἀνάλογος πρός τό τετράγωνον τοῦ βάρους του, νά εὑρεθῆ ἡ ἀξία ἀδάμαντος βάρους ἑνός καρατίου ὅταν τρία χρυσᾶ δακτυλίδια ἰσοβαρῆ, φέροντα ἀδάμαντας τριῶν, τεσσάρων καί πέντε καρατίων ἀντιστοίχως στοιχίζουν α, β, γ δρχ. Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐργασία διά τήν κατασκευήν των στοιχίζει τό ἴδιο καί διά τά τρία καί ὅτι ἕκαστον ἀποτελεῖται ἀπό καθαρόν χρυσόν καί ἕνα ἀδάμαντα.

623. Τριγώνου δίδονται αἱ πλευραί α, β καί ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐπί ταύτας ὑψῶν ἰσοῦται πρός τό τρίτον ὕψος. Νά ὑπολογισθῆ ἡ τρίτη πλευρά. Ποία ἡ συνθήκη δυνατότητος;

624. Ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βάσις ΒΓ = α καί τό ἐπ' αὐτήν ὕψος h. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τό τρίγωνον καί ἔχοντος περίμετρον 2τ. Ἡ μία πλευρά τοῦ ὀρθογωνίου δέον νά κεῖται ἐπί τῆς ΒΓ ὁλόκληρον δέ τό ὀρθογώνιον νά περιέχηται ἐντός τοῦ τριγώνου. Διερεύνησις.

625. Τρία δοχεῖα κυλινδρικά, διαφόρων χωρητικοτήτων ἀλλά γεωμετρικως ὅμοια καί τῶν ὁποιων τά ὕψη εἶναι ὡς 1 : 2 : 3, περιέχουν ὕδωρ εἰς ποσότητας ἀναλόγους πρός τά ὕψη των. Μεταβιβάζοντες ὕδωρ ἐκ τοῦ ἑνός δοχείου εἰς τό ἄλλο φέρομεν τό ὕδωρ εἰς τό αὐτό ὕψος καί εἰς τά τρια δοχεῖα. Ἀκολούθως λαμβάνοντες 9 λίτρας ὕδατος ἐκ τοῦ τρίτου δοχείου καί ρίπτοντες αὐτό εἰς τό πρῶτον, βλεπομεν ὅτι τό δεύτερον περιέχει διπλάσιον ὕδωρ τοῦ πρώτου. Τουτων δεδομένων νά εὑρεθοῦν οἱ ἀρχικοί ὄγκοι τοῦ ὕδατος καί εἰς τά τρία δοχεῖα.

626. Εἰς τήν ἄσκ. 22 νά εὑρεθῆ μετά πόσον χρόνον τά κινητά θά συναντηθοῦν διά πρώτην φοράν;

Ἐάν αἱ ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν ἦσαν $υ_1$ καί $υ_2$ ὅπου $υ_2$

$υ_1/υ_2$= ἀσύμμετρος ἀριθμός, δειξατε ὅτι οὐδέποτε τά δύο κινητά θά εὑρεθοῦν πάλιν συγχρόνως εἰς τό σημεῖον ἐξ οὗ ἀνεχώρησαν.

627. Ποίαν χρονικήν στιγμήν μεταξύ 8ης καί 9ης οἱ δεῖκται ἑνός ὡρολογίου συμπίπτουν; Πότε δεικνύουν πρός ἐκ διαμέτρου ἀντίθετα σημεῖα;

628. Παρατηρεῖ τις τό ὡρολόγιον του τό ἑσπέρας καί διαπιστώνει ὅτι ὁ δείκτης τῶν ὡρῶν εἶναι μεταξύ 7ης καί 8ης ὥρας ἐνῶ ὁ δείκτης τῶν λεπτῶν κεῖται μεταξύ 1ης καί 2ας ὥρας. Τό παρατηρεῖ ἐκ νέου περί τό μέσον τῆς νυκτός καί βλέπει ὅτι οἱ δεῖκται ἐνήλλαξαν ἀκριβῶς θέσιν. Τί ὥραν ἐδείκνυεν τό ὡρολόγιον κατά τήν πρώτην φοράν;

629. Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καί τό μῆκος ἁμαξοστοιχίας, γνωστοῦ ὄντος ὅτι χρειάζεται 7 sec διά νά διέλθη πρό ἀκινήτου παρατηρητοῦ καί 25 sec διά νά διασχίση σταθμόν μήκους 387 m.

630. Ἁμαξοστοιχία ἀναχωρεῖ ἐξ Ἀθηνῶν τήν 8 π.μ. καί φθάνει εἰς Θεσαλονίκην τήν 10 μμ. Μία ἄλλη ἀναχωρεῖ ἐκ Θεσ/νίκης τήν 12ην μεσημβρινήν καί φθάνει εἰς Ἀθήνας τό μεσονύκτιον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἐξ Ἀθηνῶν θά συναντηθοῦν ἄν ὅλη ἡ ἀπόστασις εἶναι 500 km; (Αἱ ταχύτητες σταθεραί)

631. Δύο κινητά ἀναχωροῦν συγχρόνως καί μέ σταθεράς ταχύτητας ἐκ δύο πόλεων Α καί Β κατευθυνόμενα τό πρῶτον πρός τήν Β καί τό δεύτερον πρός τήν Α. Μετά τήν συνάντησιν των τό πρῶτον ἐχρειάσθη 2,5 ὥρας διά νά φθάση εἰς τήν Β καί τό δεύτερον 10 ὥρας διά νά φθάση εἰς τήν Α. Ἐάν ΑΒ = 360 km νά ὁρισθοῦν αἱ ταχύτητες καί τό σημεῖον συναντήσεως.

632. Δύο ποδηλάται Α καί Β διανύουν τό μεταξύ δύο πόλεων Π καί k διάστημα ἐκ 405 km ἀναχωροῦντες ἀπό τήν Π ἐνῶ συγχρόνως μέ αὐτούς ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς k κατευθυνόμενος πρός τήν Π· τρίτος ποδηλάτης Γ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι 1ον) μετά 9 ὥρας ὁ Α ἰσαπέχει τῶν Β καί Γ 2ον) μετά 10 ὥρας ὁ Γ ἰσαπέχει τῶν Α καί Β, 3ον) ὅτι ὁ Α διανύει εἰς 30΄ ὅσον ὁ Β εἰς 36΄ ζητοῦνται αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἰς km/h (ὑποτιθέμεναι σταθεραί) ὡς καί μετά πόσας ὥρας (ἀπό τῆς ἐκκινήσεως) ὁ Β θά ἰσαπέχη τῶν Α καί Γ.

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟΝ ΟΡΩΝ

(Οἱ ἀριθμοί δηλοῦν τάς σελίδας)

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

1) C. Bourlet, Leçons d'Algèbre élèmentaire.

2) Marie J. Weiss, Higher Algebra for the Undergraduate.

3) G. Lemaire, Questions d' Algèbre élèmentaire.

4) R. W. Brink, College Algebra.

5) S. Borofsky, Elementary theorie of equations

* * *