ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ
ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΠΟΛΛΑΙ ΔΙΑ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ
ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΜΕΝΑΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΩΤΕΡΟΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ: Προκαταρκτική ἐπὶ τῶν ἀσκήσεων θεωρία: Ἀριθμητικαί, Ἀλγεβρικαὶ καὶ Γεωμετρικαὶ προτάσεις. Τυπολόγια Ἀλγέβρας καὶ Τριγωνομετρίας.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ: Ἀσκήσεις καθ' ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Σχέσεις μονάδων τόξων—Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τῶν γωνιῶν 30°, 45°, καὶ 60°—Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες ἐπὶ ημα καὶ συνα τόξου τινὸς α.—Ὁμοίως ἐπὶ ημα, συνα, εφα, καὶ σφα.—Ὁμοίως διὰ δύο τόξα α καὶ β.—Τριγωνομετρικὰ προβλήματα.—Τριγωνομετρικοὶ ἀριθμοὶ τόξων 2α καὶ $\frac{\alpha}{2}$.—Τόξα συμπληρωματικὰ καὶ παραπληρωματικά.—Τριγωνομετρικαὶ ἐξισώσεις διὰ τόξον χ, ὅπου $0° < \chi < 90°$.—Σχέσεις πλευρῶν καὶ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου.—Ὁμοίως ἐπὶ τυχόντος τριγώνου.—Τριγωνομετρικαὶ ταυτότητες ἐπὶ ημα, συνα, εφα, σφα, τεμα καὶ στεμα.—Ἐπαναληπτικαὶ ἀσκήσεις.

ΑΘΗΝΑΙ 1958

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ
ΠΟΛΛΑΙ ΤΩΝ ΟΠΟΙΩΝ ΔΙΑ ΔΥΟ ΚΑΙ ΤΡΙΩΝ ΤΡΟΠΩΝ
ΚΑΙ
ΤΑΞΙΝΟΜΗΜΕΝΑΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ
ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΠΑΝΤΩΝ
ΤΩΝ ΠΕΡΙ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ ΑΣΧΟΛΟΥΜΕΝΩΝ
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΩΤΕΡΟΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ: Προκαταρκτική ἐπί τῶν ἀσκήσεων θεωρία: Ἀριθμητικαί Ἀλγεβρικαί καί Γεωμετρικαί προτάσεις. Τυπολόγια Ἀλγέβρας καί Τριγωνομετρίας.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ: Ἀσκήσεις καθ᾽ ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Σχέσεις μονάδων τόξων - Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν γωνιῶν 30°, 45° καί 60° - Τριγωνομετρικαί ταυτότητες ἐπί ημα καί συνα τόξου τινός α.- Ὁμοίως ἐπί ημα, συνα, εφα καί σφα - Ὁμοίως διά δύο τόξα α καί β - Τριγωνομετρικά προβλήματα - Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων 2α καί $\frac{\alpha}{2}$.- Τόξα συμπληρωματικά καί παραπληρωματικά .- Τριγωνομετρικαί ἐξισώσεις διά τόξον χ , ὅπου $0^\circ < x < 90^\circ$. - Σχέσεις πλευρῶν καί γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου .- Ὁμοίως ἐπί τυχόντος τριγώνου - Τριγωνομετρικαί ταυτότητες ἐπί ημα, συνα, εφα, σφα, τεμα καί στεμα - Ἐπαναληπτικαί ἀσκήσεις.

ΑΘΗΝΑΙ 1958

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τήν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.

Γ. Μπακούρη

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Ἡ ἐπιθυμία μου νά συμβάλω ἐμπράκτως εἰς τήν εὐρεῖαν διάδοσιν καί κατανόησιν τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν μεταξύ τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων καί τῶν Ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν μέ παρεκίνησεν, ὅπως ἐκτός τῶν μέχρι τοῦδε ὑπ' ἐμοῦ γραφέντων Μαθηματικῶν βιβλίων συγγράψω καί σειράν βιβλίων ὑπό τόν τίτλον "Τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ α ί Ἀ σ κ ή σ ε ι ς".

Ὁ ἀνά χεῖρας "Τόμος Α΄" μέ λελυμένας τάς ἀσκήσεις ὑποδειγματικῶς καί διά πολλῶν τρόπων πληροῖ συγχρόνως καί ἐπιθυμίαν μαθητῶν καί ὑποψηφίων τοῦ κύκλου τῶν ἐργασιῶν μου.

Ἡ ὁλοκλήρωσις τοῦ ἔργου διά τῆς προσεχοῦς ἐκδόσεως καί ἄλλων τόμων Β΄, Γ΄κτλ., κατά τήν ἰδίαν ὡς καί ἐδῶ ταξινόμησιν τῆς ὕλης, ἐλπίζω, ὅτι θά συμβάλῃ κατά κάποιον τρόπον εἰς τήν συμπλήρωσιν τοῦ ὑπάρχοντος κενοῦ, ἐν τῇ Ἑλληνικῇ,ἀλλά καί ξένῃ βιβλιογραφίᾳ (καθ'ὅσον γνωρίζω) τ ῆ ς σ υ σ τ η μ α τ ι κ ῆ ς π α ρ α θ έ σ ε ω ς κ α ί δ ι α τ υ π ώ σ ε ω ς τῆς ὕλης τῶν Τριγωνομετρικῶν Ἀσκήσεων.

Ἡ πρόταξις πρό τῶν Ἀσκήσεων τῆς ἀπαραιτήτου θεωρίας καί τῶν σχετικῶν τυπολογίων Ἀλγέβρας καί Τριγωνομετρίας, καθώς καί ἡ μετά τάς λελυμένας ἀσκήσεις ἀναγραφή προτεινομένων πρός λύσιν Ἀσκήσεων, διά τήν ἐμπέδωσιν τῶν γνώσεων, καθιστᾶ, καθώς νομίζω, τό βιβλίον τοῦτο εἰδικόν βοήθημα δι'ὅλους ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι θά ἐπεθύμουν νά χρησιμοποιήσουν τοῦτο εἰς τά Σχολικά καί Φροντιστηριακά των μαθήματα.

Ἀθῆναι 30 Ἰανουαρίου 1958

Γ.Π.ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ - ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ I. ΟΡΙΣΜΟΣ ΚΑΙ ΣΚΟΠΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

"Εὐθύγραμμος Τριγωνομετρία καλεῖται ὁ κλάδος τῶν Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν, ὁ ὁποῖος σκοπόν ἔχει τόν διά τοῦ ὑπολογισμοῦ (καί ὄχι διά τῆς Γεωμετρικῆς συγκρίσεως ὁμοίων σχημάτων) προσδιορισμόν τῶν ἀγνώστων στοιχείων ἑνός τριγώνου, ὅταν μᾶς δοθοῦν ὡρισμένα καί ἀπαραίτητα πρός τοῦτο στοιχεῖα".

Ἡ σχετική ἐργασία διά τόν τοιοῦτον προσδιορισμόν καλεῖται ἰδιαιτέρως ἐ π ί λ υ σ ι ς τριγώνου.

Διά νά εἶναι δυνατή ἡ ἐπίλυσις ἑνός τριγώνου, πρέπει ἐκ τῶν κυρίων στοιχείων αὐτοῦ (τά ὁποῖα κύρια στοιχεῖα εἶναι αἱ τρεῖς πλευραί του, αἱ τρεῖς γωνίαι του καί τό ἐμβαδόν του) νά μᾶς δίδωνται τοὐλάχιστον τρία ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕν ἀπαραιτήτως μ ῆ κ ο ς.

Τότε μέ τήν βοήθειαν τῶν κυρίων στοιχείων τοῦ τριγώνου ὑπολογίζομεν, διά τῆς Τριγωνομετρίας, καί τά δευτερεύοντα στοιχεῖα αὐτοῦ (τά ὁποῖα δευτερεύοντα στοιχεῖα εἶναι τά τρία ὕψη του, αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, αἱ τρεῖς διάμεσοι του καί ἄλλα).

Ἐπειδή πᾶν εὐθύγραμμον σχῆμα ἀναλύεται εἰς τρίγωνα, δι' αὐτό διά τῆς Τριγωνομετρίας ἐπιλύομεν οἱονδήποτε εὐθύγραμμον σχῆμα ἀκόμη δέ ἐργαζόμεθα καί ἐπί τοῦ κύκλου.

Ὁ κύκλος εἰς τήν Τριγωνομετρίαν καλεῖται ἰδιαιτέρως, Τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ό ς κ ύ κ λ ο ς, ἡ δέ ἀκτίς του ἰσοῦται ἐξ ὁρισμοῦ, μέ τήν μονάδα τοῦ μήκους δηλαδή μέ + Ι.

Περί τοῦ Τριγωνομετρικοῦ κύκλου θά ὁμιλήσωμεν εἰς τόν Τόμον Β΄.

"Τριγωνομετρικαί Ἀσκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

<u>Σημείωσις</u>: Πάντα τά θέματα, πάντες οἱ τύποι καί πᾶσαι αἱ ἀσκήσεις αἱ φέρουσαι ἀστερίσκον * ἀναγράφονται διά τούς μαθητάς τῶν Τμημάτων Πρακτικῆς Κατευθύνσεως ὡς καί διά τούς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

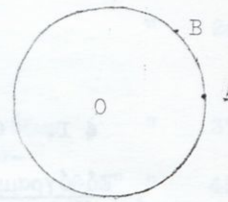
§ 2. ΜΟΝΑΔΕΣ ΜΕΤΡΗΣΕΩΣ ΤΟΞΩΝ ΚΑΙ ΓΩΝΙΩΝ

Ὡς μονάδα μετρήσεως ἑνός τόξου π.χ. $\overset{\frown}{AB}$ (Σχ. Ι) δυνάμεθα νά λάβωμεν

Α΄ τήν μ ο ί ρ α ν συμβολικῶς 1^{o}

Β΄ τόν β α θ μ ό ν " 1^{γ} καί

Γ΄ τό ἀ κ τ ί ν ι ο ν τόξον " 1α



(Σχ. Ι)

Τό μ έ τ ρ ο ν τοῦ τόξου ΑΒ παρίσταται συμβολικῶς $(\overset{\frown}{AB})$.

Εἶναι δέ:

$1^{o} = \dfrac{1}{360}$ τῆς περιφερείας $\qquad 1^{\gamma} = \dfrac{1}{400}$ τῆς περιφερείας

1α ἔχει μῆκος ἴσον πρός τό μῆκος τῆς ἀκτῖνος τοῦ κύκλου εἰς τήν περιφέρειαν τοῦ ὁποίου ἀνήκει

Ἰδιαιτέρως ἔχομεν:

Α΄. 1 περιφέρεια $= 360^{o}$

$1^{o} = 60'$ (πρῶτα λεπτά τῆς μοίρας)

$1' = 60''$ (δεύτερα " " ")

ἄρα $1^{o} = 60' . 60'' = 3600''$

1 περιφέρεια $= 360^{o} . 60' = 21600'$ καί

1 " $= 21600' . 60'' = 1296000''$

Β΄. 1 περιφέρεια $= 400^{\gamma}$

$1^{\gamma} = 100'$ (πρῶτα λεπτά τοῦ βαθμοῦ)

$1' = 100''$ (δεύτερα " " ")

ἄρα $1^{\gamma} = 100' . 100'' = 10000''$

1 περιφέρεια $= 400^{\gamma} . 100' = 40000'$

1 περιφέρεια $= 40000' . 100'' = 4000000''$

Γ΄. 1 περιφέρεια $= 2\pi$ ἀκτίνια

1 ἡμιπεριφέρεια $= \pi$ "

$\dfrac{1}{4}$ περιφερείας $= \dfrac{\pi}{2}$ " καί

$\dfrac{1}{8}$ περιφερείας $= \dfrac{\pi}{4}$ "

'Εκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι:
"Αν Γ εἶναι τό μῆκος τῆς περιφερείας καί ρ ἡ ἀκτίς της

τότε $\boxed{\frac{\Gamma}{2\rho} = \pi = 3,14159}$ καί $\boxed{\pi = 3,14}$ (διά τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς)

Δηλαδή: "'Ο λόγος τῆς περιφερείας πρός τήν διάμετρον αὐτῆς καλεῖται π καί εἶναι:
$\pi = 3,14159$ .... ἤ $\pi = 3,14$. (μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$)"

"Αν τώρα λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως ἑνός τόξου ΑΒ (Σχ.Ι) ὁλόκληρον τήν περιφέρειαν καί θέλομεν νά ἐκφράσωμεν τό μέτρον αὐτοῦ $(\overset{\frown}{AB})$

Α' εἰς μοίρας, θά ἔχωμεν $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\mu}{360}$

Β' " βαθμούς, " " $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\beta}{400}$ καί

Γ' " ἀκτίνια, " " $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{\alpha}{2\pi}$

'Επειδή ὅμως τό μέτρον τοῦ τόξου καί εἰς τάς τρεῖς περιπτώσεις εἶναι τό αὐτό θά ἔχωμεν.

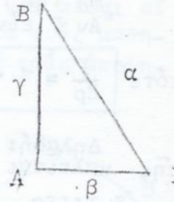
$$\boxed{\frac{\mu}{360} = \frac{\beta}{400} = \frac{\alpha}{2\pi}}$$

Διά πολλαπλασιασμοῦ τώρα καί τῶν τριῶν κλασμάτων ἐπί 2

λαμβάνομεν $\frac{\mu}{360}.2 = \frac{\beta}{400}.2 = \frac{\alpha}{2\pi}.2$ ἤ

δι'ἁπλοποιήσεως $\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}}$

§ 3. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΟΞΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ



(Σχ.2)

Ἔστω τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ.2) τό ὁποῖον ἔχει $\hat{A}$ = 1 ὀρθή καί τάς γωνίας Β καί Γ ὀξείας.

Τάς πλευράς αὐτοῦ ὀνομάζομεν μέ τά μικρά γράμματα τῶν κεφαλαίων τοιούτων τῶν ἀπέναντι γωνιῶν.

Καλοῦμεν τώρα

"Ἡμίτονον ὀξείας γωνίας τόν λόγον τῆς ἀπέναντι αὐτῆς καθέτου πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν.

"Συνημίτονον ὀξείας γωνίας τόν λόγον τῆς προσκειμένης αὐτῆς καθέτου πλευρᾶς πρός τήν ὑποτείνουσαν.

"Ἐφαπτομένην ὀξείας γωνίας τόν λόγον τῆς ἀπέναντι καθέτου πλευρᾶς πρός τήν ἄλλην κάθετον πλευράν.

"Συνεφαπτομένην ὀξείας γωνίας τόν λόγον τῆς προσκειμένης αὐτῆς καθέτου πλευρᾶς πρός τήν ἄλλην κάθετον πλευράν".

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

ἡμίτονον γωνίας Β $= \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{β}{α}$	συνημίτονον γωνίας Β $= \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{γ}{α}$
ἐφαπτομένη γωνίας Β $= \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{β}{γ}$	συνεφαπτομένη γωνίας Β $= \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{γ}{β}$

Συμβολικῶς γράφομεν:

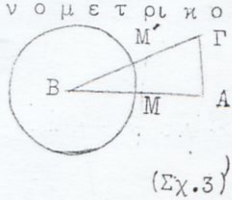
Διά τήν γωνίαν Β

ημ Β $= \frac{β}{α}$	συν Β $= \frac{γ}{α}$
εφ Β $= \frac{β}{γ}$	σφ Β $= \frac{γ}{β}$

Διά τήν γωνίαν Γ

ημ Γ $= \frac{γ}{α}$	συν Γ $= \frac{β}{α}$
εφ Γ $= \frac{γ}{β}$	σφ Γ $= \frac{β}{γ}$

Τό ἡμίτονον, τό συνημίτονον, ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη μιᾶς γωνίας καλοῦνται τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας ταύτης ἤ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου της ΜΜ΄ ὅταν αὕτη εἶναι ἐπίκεντρος. (Σχ. 3).



(Σχ.3)

Εἰς τό ἑξῆς θά λέγωμεν ἀδιαφόρως "τριγωνομετρικοί ἀριθμοί γωνίας ἤ τόξου".

§ 4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ α

Πᾶν τόξον ἔχει τούς προαναφερθέντας τέσσαρας τριγωνομετρικούς ἀριθμούς

ημα, συνα, εφα καί σφα

* Εἰς τούτους προστίθενται καί ἕτεροι δύο

Α΄. Ἡ τ έ μ ν ο υ σ α συμβολικῶς τ ε μ α καί

Β΄. Ἡ σ υ ν τ έ μ ν ο υ σ α " σ τ ε μ α

Ορίζομεν δέ ταύτας ὡς ἑξῆς:

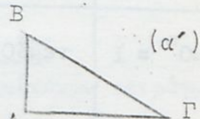
$\boxed{\tau\varepsilon\mu\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}$ * καί $\boxed{\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha = \frac{1}{\eta\mu\alpha}}$ *

Κατωτέρω παραθέτομεν πίνακα δεικνύοντα τάς τιμάς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀξειῶν φγωνιῶν 30°, 45° καί 60°.

'Επίσης, κατ'ἐπέκτασιν (ἀποδεικνύεται διά τῆς θεωρίας) καί τῶν γωνιῶν 0° καί 90°.

§ 5. ΓΕΝΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΙΣ

Α΄. ""Ισαι γωνίαι ἤ (ἴσα τόξα) ἔχουν ἴσους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς".



(α΄)

π.χ. "Αν $\underline{\hat{B} = \hat{B}'}$

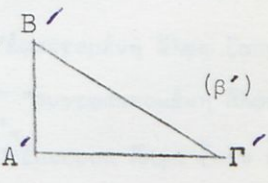
τότε ημΒ = ημΒ΄ κλπ.

<u>'Αντίστροφος πρότασις</u>

Β΄. ""Αν δύο γωνίαι (ἤ τόξα) ἔχουν ἴσους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τότε εἶναι ἴσαι".

πχ."Αν <u>ημΒ = ημΒ΄</u>

τότε $\hat{B} = \hat{B}'$ κλπ.



(β΄)

(Σχ. 4)

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου.Α΄"Εκδοσις

ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ ΤΟΞΩΝ
(ἤ ΓΩΝΙΩΝ) 0°, 30°, 45°, 60° καί 90° .

0°	30°	45°	60°	90°
$\eta\mu 0^\circ = 0$	$\eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\eta\mu 90^\circ = 1$
$\sigma\upsilon\nu 0^\circ = 1$	$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2}$	$\sigma\upsilon\nu 90^\circ = 0$
$\varepsilon\varphi 0^\circ = 0$	$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$	$\varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}$	$\varepsilon\varphi 90^\circ = \infty$
$\sigma\varphi 0^\circ = \infty$	$\sigma\varphi 30^\circ = \sqrt{3}$	$\sigma\varphi 45^\circ = 1$	$\sigma\varphi 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sigma\varphi 90^\circ = 0$

* ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΤΙΜΩΝ ΤΕΜΝΟΥΣΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΤΕΜΝΟΥΣΗΣ

0°	30°	45°	60°	90°
$\tau\varepsilon\mu 0^\circ = 1$	$\tau\varepsilon\mu 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\tau\varepsilon\mu 45^\circ = \sqrt{2}$	$\tau\varepsilon\mu 60^\circ = 2$	$\tau\varepsilon\mu 90^\circ = \infty$
$\sigma\tau\varepsilon\mu 0^\circ = \infty$	$\sigma\tau\varepsilon\mu 30^\circ = 2$	$\sigma\tau\varepsilon\mu 45^\circ = \sqrt{2}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu 60^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sigma\tau\varepsilon\mu 90^\circ = 1$,

Τ Υ Π Ο Λ Ο Γ Ι Ο Ν
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΥΠΩΝ

§ 6. Ι. ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΕΝ ΜΟΝΟΝ ΤΟΞΟΝ

Ι. <u>Τύποι συνδέοντες τά μέτρα τοῦ αὐτοῦ τόξου α</u>

$$\boxed{\frac{\mu}{360^{o}} = \frac{\beta}{400} = \frac{\alpha}{2\pi}} \quad (I) \quad ἤ \quad \boxed{\frac{\mu}{180^{o}} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}} \quad (2)$$

<u>Χρησιμότης τῶν τύπων (Ι) καί (2)</u>: Οἱ τύποι (Ι) καί (2) εἶναι κατ' οὐσίαν ἕνας τύπος καί χρησιμεύουν εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ μέτρου ἑνός τόξου, εἰς τά ἄλλα δύο εἴδη τῶν μονάδων οταν γνωρίζωμεν τό ἕν ἐκ τῶν τριῶν εἰδῶν.

Ἐφαρμογή τῶν τύπων <u>βλέπε ἀσκήσεις</u> (Ι) μέχρι καί (7).

2. Θ ε μ ε λ ι ώ δ ε ι ς σ χ έ σ ε ι ς συνδέουσαι τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α.

$συν^2α + ημ^2α = I$	(3)
$εφα = \dfrac{ημα}{συνα}$	(4)
$σφα = \dfrac{συνα}{ημα}$	(5)

$τεμ\ α = \dfrac{I}{συνα}$	(6) *
$στεμ\ α = \dfrac{I}{ημα}$	(7) *

3. <u>Ἀνάγνωσις τῶν τύπων (3) μέχρι καί (7)</u>

Ὁ τύπος (3) ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς: "συνημίτονον τετράγωνον ἄλφα σύν ἡμίτονον τετράγωνον ἄλφα ἴσον ἕν ".

Προτιμότερον ὅμως εἶναι νά ἀπαγγέλωμεν τόν τύπον ὡς ἑξῆς: "συνημίτονον τετράγωνον ἄλφα καί ἡμίτονον τετράγωνον ἄλφα ἴσον ἕν. " καί τοῦτο ἵνα μή ἐπέρχεται σύγχυσις τοῦ σημείου τῆς προσθέσεως "σύν".

Ὁ τύπος (4) ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς: "ἐφαπτομένη ἄλφα ἴσον ἡμίτονον ἄλφα πρός συνημίτονον ἄλφα".

Ὁ τύπος (5) ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς: " "συνεφαπτομένη ἄλφα ἴσον συνημίτονον ἄλφα πρός ἡμίτονον ἄλφα".

* Ὁ τύπος (6) ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς: "τέμνουσα ἄλφα ἴσον ἕνα πρός συνημίτονον ἄλφα".

* Ὁ τύπος (7) ἀπαγγέλεται ὡς ἑξῆς: "συντέμνουσα ἄλφα ἴσον ἕνα πρός ἡμίτονον ἄλφα".

Παρατηρήσεις:

Α. Καθώς παρατηροῦμεν αἱ θεμελιώδεις τριγωνομετρικαί σχέσεις, ἐκ τῶν ὁποίων ἀπορρέουν ὅλαι αἱ ἄλλαι τάς ὁποίας θά γνωρίσωμεν κατωτέρω, αι συνδέουσαι τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς, ἑνός τόξου α εἶναι ὀλιγώτεραι τοῦ πλήθους τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου αὐτοῦ.

Ὡς ἐκ τούτου, κατά τήν Ἄλγεβραν αἱ ἰσότητες αὗται ἰσχύουν δι' οἱονδήποτε τόξον ἐξ οὗ καί καλοῦνται "τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ α ί   τ α υ τ ό τ η τ ε ς".

* Β. Ἡ τέμνουσα παντός τόξου εἶναι ἀριθμός ἀντίστροφος τοῦ συνημιτόνου τοῦ ἰδίου τόξου.

* Γ. Ἡ συντέμνουσα παντός τόξου εἶναι ἀριθμός ἀντίστροφος τοῦ ἡμιτόνου τοῦ ἰδίου τόξου.

Δ. Ὁ τύπος (3) ἔπρεπε νά γραφῆ $(\text{συν}\alpha)^2+(\text{ημ}\alpha)^2=1$ ἀλλά τόν γράφομεν ὑπό τήν μορφήν (3) διά νά μή συγχέωνται αἱ σημειωμέναι πράξεις. Πάντως οὐδέποτε τίθεται τό τετράγωνον εἰς τό α ἀλλά εἰς τά συν καί ημ οὕτω: $\text{συν}^2\alpha$ καί $\text{ημ}^2\alpha$ διότι τό νά γράφωμεν $\text{συν}\alpha^2$ καί $\text{ημ}\alpha^2$ εἶναι ὡς νά ὑψώνωμεν τό τόξον εἰς τό τετράγωνον πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν νοεῖται εἰς τά Μαθηματικά. Δι' αὐτό γράφομεν $\text{συν}^2\alpha$ καί $\text{ημ}^2\alpha$.

4. Σ π ο υ δ α ι ο τ ά τ η   σ χ έ σ ι ς

$$\boxed{\text{εφ}\alpha.\text{σφ}\alpha = 1} \qquad (8)$$

Παρατήρησις: Ἡ σχέσις (8) εἶναι σπουδαιοτάτη, ἀμέσως μετά τάς θεμελιώδεις τοιαύτας καί δεικνύει ὅτι "ἡ ἐφαπτομένη καί ἡ συνεφαπτομένη τοῦ αὐτοῦ τόξου εἶναι ἀριθμοί ἀντίστροφοι καί πάντοτε ὁμόσημοι".

§ 7. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ὁρισμός. "Τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ά π ρ ο β λ ή μ α τ α καλοῦνται αι τριγωνομετρικαί ἐκεῖναι προτάσεις εἰς τάς οποίας δ ί δ ε τ α ι ὁ ἕνας ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξου τινός, π.χ. α, καί ζ η τ ο ῦ ν τ α ι οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί του τόξου αὐτοῦ σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τοῦ δοθέντος, καθώς λέγομεν."

ΠΡΟΒΛΗΜΑ Ιον. "Δοθέντος τοῦ ημα νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α".

Ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $συν^2α + ημ^2α = 1$

ἔχομεν $\boxed{συν^2α = 1 - ημ^2α}$ (9)

Τύποι δίδοντες (ἤ παρέχοντες) τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α συναρτήσει του ημα .

Ἐκ τοῦ τύπου (9) καί τῶν τύπων (3), (4), (5), (6) καί (7) ἔχομεν ἀντιστοίχως τούς ἑξῆς τύπους.

$συνα = \sqrt{1 - ημ^2α}$	(10)
$εφα = \dfrac{ημα}{\sqrt{1-ημ^2α}}$	(11)
$σφα = \dfrac{\sqrt{1-ημ^2α}}{ημα}$	(12)

$τεμα = \dfrac{1}{\sqrt{1-ημ^2α}}$	* (13)
$στεμα = \dfrac{1}{ημα}$	* (14)

Σημείωσις: Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε τήν ἄσκησιν (88)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2ον. "Δοθέντος τοῦ συνα νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α".

Ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $συν^2α + ημ^2α = 1$

ἔχομεν $\boxed{ημ^2α = 1 - συν^2α}$ (15)

Τύποι δίδοντες (ἤ παρέχοντες) τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α συναρτήσει του συνα.

Ἐκ τοῦ τύπου (15) καί τῶν τύπων (3), (4), (5), (6) καί (7) ἔχομεν ἀντιστοίχως τούς ἑξῆς τύπους.

$$\eta\mu\alpha = \sqrt{I-\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \qquad (I6)$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\sqrt{I-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (I7)$$

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sqrt{I-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} \qquad (I8)$$

$$\tau\varepsilon\mu\alpha = \frac{I}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (I9) \quad *$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha = \frac{I}{\sqrt{I-\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} \qquad (20) \quad *$$

Σημείωσις: Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε τήν ἄσκησιν 89.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3ον. "Δοθείσης τῆς εφα νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α".

Τύποι δίδοντες (ἤ παρέχοντες) τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α συναρτήσει τῆς εφα.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha = I$, τῆς σχέσεως $\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha = I$ καί τῶν τύπων (3), (4), (5), (6) καί (7) ἔχομεν ἀντιστοίχως τούς ἑξῆς τύπους.

$$\eta\mu\alpha = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sqrt{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}} \qquad (2I)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{I}{\sqrt{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}} \qquad (22)$$

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{I}{\varepsilon\varphi\alpha} \qquad (23)$$

$$\tau\varepsilon\mu\alpha = \sqrt{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} \qquad (24) \quad *$$

$$\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha = \frac{\sqrt{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha} \qquad (25) \quad *$$

Σημείωσις: Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε τήν ἄσκησιν 90.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4ον. "Δοθείσης τῆς σφα νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου α".

Τύποι δίδοντες (ἤ παρέχοντες) τούς ἄλλους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἑνός τόξου α συναρτήσει τῆς σφα.

Ἐκ τῆς θεμελιώδους σχέσεως $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha = I$, τῆς σχέσεως $\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha = I$ καί τῶν τύπων (3), (4), (5), (6), καί (7) ἔχομεν ἀντιστοίχως τούς ἑξῆς τύπους.

$$\text{ημα} = \frac{\text{I}}{\sqrt{\text{I}+\text{σφ}^2 \alpha}} \quad (26)$$

$$\text{συνα} = \frac{\text{σφα}}{\sqrt{\text{I}+\text{σφ}^2 \alpha}} \quad (27)$$

$$\text{εφα} = \frac{\text{I}}{\text{σφα}} \quad (28)$$

$$\text{τεμα} = \frac{\sqrt{\text{I}+\text{σφ}^2\alpha}}{\text{σφα}} \quad (29) \quad *$$

$$\text{στεμα} = \sqrt{\text{I}+\text{σφ}^2\alpha} \quad (30) \quad *$$

Σημείωσις. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε τήν ἄσκησιν 9Ι

Παρατήρησις: Ὅταν εἰς μίαν ἄσκησιν ἀναφερομένην εἰς ἕν τῶν τεσσάρων αὐτῶν προβλημάτων θέλωμεν νά βεβαιωθῶμεν, ὅτι τά ἀποτελέσματα εἶναι ἀληθῆ, τότε κάνομεν τά ἑξῆς (π.χ. διά τόξον α) πρός ἐπαλήθευσιν.

Α΄ Διά τό συνα καί τό ημα ἐντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον $\boxed{\text{συν}^2\alpha+\text{ημ}^2\ \alpha = \text{I}}$ τάς εὑρεθείσας τιμάς. Πρέπει νά εὕρωμεν 1=1

Β΄ Διά τήν εφα καί σφα ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον $\boxed{\text{εφα.σφα} = \text{I}}$ τάς εὑρεθείσας τιμάς. πρέπει νά εὕρωμεν Ι = Ι

§ 8. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΟΞΟΥ 2α καί ΤΟΞΟΥ $\frac{\alpha}{2}$

Ἐν τόξον α ἔχει ημα, συνα, εφα, σφα

" " 2α " ημ2α, συν2α, εφ2α, σφ2α

" " $\frac{\alpha}{2}$ " ημ $\frac{\alpha}{2}$, συν $\frac{\alpha}{2}$, εφ $\frac{\alpha}{2}$, σφ $\frac{\alpha}{2}$

§ 9. ΙΙ. ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΕΝ ΤΟΞΟΝ 2α
(δηλαδή τύποι πολλαπλασίου τόξου)

Ι. Τύποι δίδοντες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ διπλασίου τόξου 2α συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου α.

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha \qquad (3I)$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha \qquad (32)$$

$$\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{I-\varepsilon\varphi^2\alpha} \qquad (33)$$

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\alpha - I}{2\sigma\varphi\alpha} \qquad (34)$$

<u>Σημείωσις:</u> Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις Ἑβδόμης καί ἐπαναληπτικῆς ὁμάδος.

2. Τ ύ π ο ι δίδοντες τό συν2α συναρτήσει τοῦ ημα καί τοῦ συνα

Ἐκ τοῦ τύπου (32) καί τοῦ τύπου (9) ἔχομεν:
$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = I - 2\eta\mu^2\alpha \qquad (35)$$

Ἐκ τοῦ τύπου (32) καί τοῦ τύπου (I5) ἔχομεν:
$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - I \qquad (36)$$

<u>Σημείωσις:</u> Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις ἑβδόμης καί ἐπαναληπτικῆς ὁμάδος

3. Τύποι δίδοντες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου α συναρτήσει τοῦ συν 2α.

Ἐκ τῶν τύπων (35) καί (36) ἔχομεν:
$$\eta\mu\alpha = \sqrt{\frac{I-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \qquad (37) \qquad\qquad \sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{\frac{I+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}} \qquad (38)$$

Ἐκ τῶν τύπων (37) καί (38) ἔχομεν:
$$\varepsilon\varphi\alpha = \sqrt{\frac{I-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{I+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}} \qquad (39) \qquad\qquad \sigma\varphi\alpha = \sqrt{\frac{I+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{I-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}} \qquad (40)$$

§IO. III. ΤΥΠΟΙ ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟΙ ΕΙΣ ΕΝ ΤΟΞΟΝ $\frac{\alpha}{2}$

(δηλαδή τύποι ὑποπολλαπλασίου τόξου)

I. Τύποι δίδοντες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ τόξου α συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἡ μ ί σ ε ο ς τόξου $\frac{\alpha}{2}$.

$$\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \qquad (4\text{Ι})$$

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\ \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{\text{Ι}-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} \qquad (43)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \qquad (42)$$

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2} - \text{Ι}}{2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}} \qquad (44)$$

Σημείωσις: Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις ἑβδόμης καί ἐπαναληπτικῆς ὁμάδος.

2. Τύποι δίδοντες τό συνα συναρτήσει τοῦ ημ $\frac{\alpha}{2}$ καί τοῦ συν$\frac{\alpha}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \text{Ι}-2\eta\mu^2\frac{\alpha}{2} \qquad (45)$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \text{Ι} \qquad (46)$$

Σημείωσις Ιη: Ὁ τύπος (45) προκύπτει ἐκ τοῦ τύπου (35) ἄν θέσωμεν ὅπου 2α τό α καί ὅπου α τό $\frac{\alpha}{2}$.

Σημείωσις 2α: Ὁμοίως προκύπτει καί ὁ τύπος (46) ἀπό τόν τύπον (36).

Σημείωσις 3η: Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις ἑβδόμη καί ἐπαναληπτικῆς ὁμάδος

3. Τύποι δίδοντες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ ἡμίσεος τόξου $\frac{\alpha}{2}$ συναρτήσει τοῦ συνα .

$$\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Ι}-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \qquad (47)$$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Ι}-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\text{Ι}+\sigma\upsilon\nu\alpha}} \qquad (49)$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Ι}+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}} \qquad (48)$$

$$\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\text{Ι}+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\text{Ι}-\sigma\upsilon\nu\alpha}} \qquad (50)$$

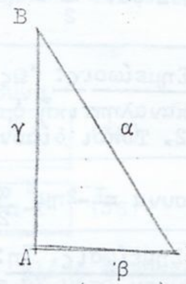
Σημείωσις. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις ἑβδόμηςκαί ἐπαναληπτικῆς ὁμάδος.

Τριγωνομετρικαί Ἀσκήσεις "Τ.Π.Μπακούρου. Α' Ἔκδοσις.

§ II. ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΛΕΥΡΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

I. Ἐκ τῆς § 3 (Σελ. 4) γνωρίζομεν τούς κάτωθι τύπους τούς ὁποίους ἀριθμοῦμεν τώρα

$\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha}$	(5I)	$\eta\mu\Gamma = \dfrac{\gamma}{\alpha}$	(55)
$\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha}$	(52)	$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\beta}{\alpha}$	(56)
$\varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma}$	(53)	$\varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{\gamma}{\beta}$	(57)
$\sigma\varphi B = \dfrac{\gamma}{\beta}$	(54)	$\sigma\varphi\Gamma = \dfrac{\beta}{\gamma}$	(58)



(Σχ. 5)

Σημείωσις. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις δεκάτης ὁμάδος.

2. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων λαμβάνομεν τούς ἑξῆς.

$\beta = \alpha\ \eta\mu B$	(59)	$\gamma = \alpha\eta\mu\Gamma$	(63)
$\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B$	(60)	$\beta = \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$	(64)
$\beta = \gamma\varepsilon\varphi B$	(6I)	$\gamma = \beta\varepsilon\varphi\Gamma$	(65)
$\gamma = \beta\sigma\varphi B$	(62)	$\beta = \gamma\sigma\varphi\Gamma$	(66)

Σημείωσις. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις δεκάτης ὁμάδος.

3. Διευκρινίσεις ἐπί τῶν τύπων (5I) μέχρι καί (66).

Α΄. Οἱ τύποι (59) καί (63) δεικνύουν ὅτι: "Ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν ὑποτείνουσαν ἐπί τό ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας".

Β΄. Οἱ τύποι (60) καί (64) δεικνύουν ὅτι: "Ἑκάστη, τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν ὑποτείνουσαν ἐπί τό συνημίτονον τῆς προσκειμένης γωνίας".

Γ΄. Οἱ τύποι (61) καί (65) δεικνύουν ὅτι: "Ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν ἄλλην κάθετον πλευράν ἐπί τήν ἐφαπτομένην τῆς ἀπέναντι γωνίας".

Δ΄. Οἱ τύποι (62) καί (66) δεικνύουν ὅτι: "Ἑκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν ἄλλην κάθετον πλευράν ἐπί τήν συνεφαπτομένην τῆς προσκειμένης γωνίας."

§ 12. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΩΝ ΓΩΝΙΩΝ.-

Ἄν δοθῆ γωνία τις α τότε ἡ συμπληρωματική της εἶναι $90^\circ - α$.

Εἶναι δέ πράγματι: $(90^\circ - α) + α = 90^\circ - \cancel{α} + \cancel{α} = 90^\circ$

Ὅπως διά τήν γωνίαν α ἔχομεν:

$$ημα\ ,\ συνα\ ,\ εφα \text{ καί } σφα$$

Οὕτω καί διά τήν γωνίαν $90^\circ - α$ ἔχομεν:

$ημ(90^\circ - α)$, $συν(90^\circ - α)$, $εφ(90^\circ - α)$ καί $σφ(90^\circ - α)$

Τύποι συνδέοντες τούς Τριγωνομετρικούς ἀριθμούς δύο τόξων ἤ γωνιῶν συμπληρωματικῶν.

(1)	$ημ(90^\circ - α) = συνα$	(67)	$εφ(90^\circ - α) = σφα$	(3)
(2)	$συν(90^\circ - α) = ημα$		$σφ(90^\circ - α) = εφα$	(4)

Σημείωσις. Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων βλέπε ἀσκήσεις ὀγδόης ὁμάδος.

§ 13. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΜΒΛΕΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΣΧΕΤΙΣΜΟΣ ΑΥΤΩΝ ΜΕ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΗΣ ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΗΣ ΤΗΣ ΟΞΕΙΑΣ.

Ἄν δοθῆ ὀξεῖα τις γωνία α τότε ἡ παραπληρωματική της ἀμβλεῖα εἶναι $180^\circ - \alpha$.

Εἶναι δέ πράγματι: $(180^\circ - \alpha) + \alpha = 180^\circ - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 180^\circ$

Ὅπως δέ διά τήν γωνίαν α ἔχομεν:

ημα, συνα, εφα καί σφα

Οὕτω καί διά τήν γωνίαν $180^\circ - \alpha$ ἔχομεν :

ημ$(180^\circ - \alpha)$, συν$(180^\circ - \alpha)$, εφ$(180^\circ - \alpha)$ καί σφ$(180^\circ - \alpha)$

Τύποι συνδέοντες τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς δύο τόξων ἤ γωνιῶν π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ ῶ ν.

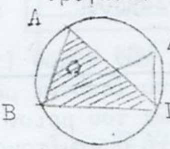
(1)	ημ$(180^\circ - \alpha)$ = ημα	(68)	εφ$(180^\circ - \alpha)$ = −εφα	(3)
(2)	συν$(180^\circ - \alpha)$ = − συνα		σφ$(180^\circ - \alpha)$ = −σφα	(4)

<u>Σημείωσις</u>. Ὡς ἐφαρμογήν των τύπων βλέπε ἀσκήσεις ὀγδόης ὁμάδος.

§ 11. ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΔΕΟΥΣΑΙ ΤΑΣ ΠΛΕΥΡΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΕΝ ΣΥΝΔΥΑΣΜΩ ΜΕ ΤΗΝ ΑΚΤΙΝΑ R ΤΟΥ ΠΕΡΙΓΕΓΡΑΜΜΕΝΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

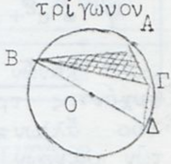
1.-
$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = 2R\eta\mu A & (1) \\ \beta = 2R\eta\mu B & (2) \\ \gamma = 2R\eta\mu\Gamma & (3) \end{array}\right\} \quad (69)$$

'Οξυγώνιον τρίγωνον



(Σχ.6)

'Αμβλυγώνιον τρίγωνον



(Σχ.7)

Κανών: "Εκάστη πλευρά τυχόντος τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπί τό ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας".

2.
$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R & (1) \\ \dfrac{\beta}{\eta\mu B} = 2R & (2) \\ \dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R & (3) \end{array}\right\} \quad (70)$$

Κανών. "'Ο λόγος ἑκάστης πλευρᾶς, τυχόντος τριγώνου πρός τό ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι γωνίας ἰσοῦται μέ τήν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου".

3.
$$\boxed{\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} = 2R} \quad (71)$$

Κανών. "Αἱ πλευραί τυχόντος τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρός τά ἡμίτονα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν των, οἱ δέ λόγοι αὐτοί ἰσοῦνται μέ τήν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου".

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

4. Τύποι συνδέοντες τάς τρεῖς πλευράς τυχόντος τριγώνου μέ τό συνημίτονον μιᾶς τῶν γωνιῶν του.

$$\left.\begin{array}{|l|l}\hline \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A & (1) \\ \hline \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\text{συν}B & (2) \\ \hline \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\text{συν}\Gamma & (3) \\ \hline \end{array}\right\} (72)$$

Κανών ἐπί τῶν τύπων (72)." Τό τετράγωνον ἑκάστης πλευρᾶς τυχόντος τριγώνου ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του μεῖον τό διπλάσιον γινόμενον των δύο αὐτῶν πλευρῶν ἐπί τό συνημίτονον τῆς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένης γωνίας".

5. Τύποι δίδοντες τό ἐμβαδόν τυχόντος τριγώνου.

$$\boxed{E = \frac{1}{2}\beta\gamma\text{ημ}A \quad (1)} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\gamma\text{ημ}B \quad (2)} \quad \boxed{E = \frac{1}{2}\alpha\beta\text{ημ}\Gamma \quad (3)} \quad (73)$$

Κανών: "Τό ἐμβαδόν τυχόντος τριγώνου ἰσοῦται (ἐν τῇ Τριγωνομετρίᾳ) μέ τό ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του ἐπί τό ἡμίτονον τῆς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένης γωνίας".

6. Τύποι συνδέοντες τάς δύο πλευράς τυχόντος τριγώνου μέ τάς ἐφαπτομένας τῶν ἀπέναντι γωνιῶν (καί χρησιμεύοντες ἰδίως εἰς τήν ἐπίλυσιν τυχόντος τριγώνου).

$$\boxed{\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{\text{εφ}\left(\frac{A - B}{2}\right)}{\text{εφ}\left(\frac{A + B}{2}\right)}} \quad (74)$$

Σημείωσις. Ἀναγράφομεν μόνον ἕνα τύπον, σχετικῶς μέ τάς πλευράς α καί β δεδομένου ὅτι ὑπάρχουν πανομοιότυποι τύποι διά τάς πλευράς α, γ καί β, γ.

Κανών ἐπί τῶν τύπων (74). " Ὁ λόγος τῆς διαφορᾶς δύο πλευρῶν τυχόντος τριγώνου πρός τό ἄθροισμα αὐτῶν ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῆς ἐφαπτομένης τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν ἀπέναντι γωνιῶν του πρός τήν ἐφαπτομένην τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἰδίων γωνιῶν".

Ὡς ἐφαρμογήν τῶν τύπων (69) μέχρι καί (74) βλέπε ἀσκήσεις ἑνδεκάτης ὁμάδος.

§ I5. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ Iη

Δεδομένα	Ὑποτείνουσα α Ὀξεῖα γωνία Β
Ζητούμενα	Γ, β, γ, Ε

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\Gamma = 90^\circ - B$	$\beta = \alpha\eta\mu B$
$\gamma = \alpha\eta\mu\Gamma$	$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

Δεδομένα	Ὑποτείνουσα α Κάθετος πλευρά β
Ζητούμενα	Β, Γ, γ, Ε

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$	$\Gamma = 90^\circ - B$
$\gamma^2 = (\alpha+\beta)\cdot(\alpha-\beta)$	$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η.

Δεδομένα	Αἱ κάθετοι πλευραί β καί γ
Ζητούμενα	Β, Γ, α, Ε

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma}$	$\Gamma = 90^\circ - B$
$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$	$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η.

Δεδομένα	Κάθετος πλευρά β Ὀξεῖα γωνία Β
Ζητούμενα	Γ, α, γ, Ε

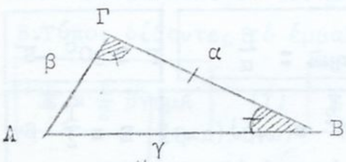
ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\Gamma = 90^\circ - B$	$\gamma = \beta\varepsilon\varphi\Gamma$
$\alpha = \frac{\beta}{\eta\mu B}$	$E = \frac{1}{2}\beta^2\varepsilon\varphi\Gamma$

§ 16. ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ Τ Υ Χ Ο Ν Τ Ω Ν Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Ω Ν.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 1η

Δεδομένα	Πλευρά α γωνίαι Β καί Γ
Ζητούμενα	Α,β,γ,Ε



(Σχ. 8)

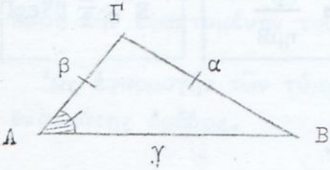
ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$A = 180^{\circ} - (B+\Gamma)$
$\beta = \dfrac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu A} = \dfrac{\alpha\eta\mu B}{\eta\mu(B+\Gamma)}$
$\gamma = \dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A} = \dfrac{\alpha\eta\mu\Gamma}{\eta\mu(B+\Gamma)}$
$E = \dfrac{\alpha^2\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu A} = \dfrac{\alpha^2\ \eta\mu B\eta\mu\Gamma}{2\eta\mu(B+\Gamma)}$

<u>Παρατήρησις ἐπί τῶν τύπων.</u> Εἰς τούς ἀνωτέρω τύπους ὅταν γων Α < Ι ὀρθ. λαμβάνομεν τόν τύπον μέ ημΑ εἰς τό β΄μέλος. Οταν ὅμως γων. Α > Ι ὀρθῆς λαμβάνομεν τόν τύπον μέ ημ(Β+Γ) εἰς τό β΄μέλος.

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 2α

Δεδομένα	Πλευραί α καί β γωνία Α
Ζητούμενα	Β,Γ,γ,Ε



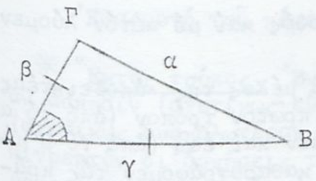
(Σχ. 9)

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\eta\mu B = \dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$
$\Gamma = 180^{\circ} - (A+B)$
$\gamma = \dfrac{\alpha\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu A}$
$E = \dfrac{1}{2}\,\alpha\beta\ \eta\mu\Gamma$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 3η

Δεδομένα	Πλευραί β καί γ γωνία Α
Ζητούμενα	Β,Γ,α,Ε (Γ>Β καί γ>β)



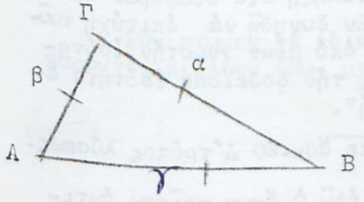
(Σχ. 10)

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\varepsilon\varphi \dfrac{\Gamma - B}{2} = \dfrac{\gamma - \beta}{\gamma + \beta}\, \sigma\varphi \dfrac{A}{2}$
$\Gamma + B = 180^\circ - A$
$\alpha = \dfrac{\beta\eta\mu A}{\eta\mu B}$
$E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

ΠΕΡΙΠΤΩΣΙΣ 4η

Δεδομένα	Πλευραί α,β,γ
Ζητούμενα	Α, Β, Γ, Ε



(Σχ. 11)

ΤΥΠΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ

$\sigma\upsilon\nu\, A = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$
$\eta\mu\, B = \dfrac{\beta\eta\mu A}{\alpha}$
$\Gamma = 180^\circ - (A + B)$
$E = \dfrac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Έκδοσις.

§ 17. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΤΡΟΠΟΙ ΛΥΣΕΩΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑΙ ΟΔΗΓΙΑΙ

Πρῶτος τρόπος: Λαμβάνομεν τό α΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, ἐκτελοῦμεν τάς σημειουμένας πράξεις (ἄν ὑπάρχουν τοιαῦται), προβαίνομεν εἰς τάς ἀναγκαίας ἀντικαταστάσεις, τῇ βοηθείᾳ τῶν καταλλήλων τύπων (παρατηροῦντες ὡς ἐπί τό πλεῖστον τί περιλαμβάνει τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος) καί προχωροῦντες βάσει τῶν κανόνων καταλήγομεν εἰς τό β΄μέλος.

Ὁ τρόπος αὐτός εἶναι ὁ πλέον ὀρθός καί μέ αὐτόν λύομεν τάς περισσοτέρας τῶν ἀσκήσεών μας.

Δεύτερος τρόπος. Λαμβάνομεν τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καί ὅπως ἐνεργοῦμεν εἰς τόν πρῶτον τρόπον (ἀπό τό α΄ μέλος εἰς τό β΄τοιοῦτον) οὕτω ἐνεργοῦμεν καί ἐδῶ (ἀπό τό β΄μέλος εἰς τό α΄τοιοῦτον). Μετά ταῦτα καθαρογράφομεν τάς πράξεις μας ὡς νά εἴχομεν ἀρχίσει ἀπό τό α΄μέλος (δηλαδή ἀντιστρέφομεν τήν πορείαν των πράξεών μας).

Εἰς τόν δεύτερον τρόπον καταφεύγομεν ὅταν δέν δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν μίαν ἄσκησιν ἀπ'εὐθείας ἐκ τοῦ α΄ μέλους εἰς τό β΄τοιοῦτον.

Ὁ τρόπος αὐτός ὑπ'ἄλλων μέν εἶναι παραδεκτός ὑπ' ἄλλων δέ ὄχι. Διά τοῦτο ἡμεῖς ὑποδεικνύομεν τήν ἀντιστροφήν τῆς πορείας τῶν πράξεων, κατά τήν καθαρογράφησίν των.

Τρίτος τρόπος. (Τέχνασμα). Ὁ ἀναγνώστης ὁ ἔχων πεῖραν ἀντιλαμβάνεται ἄν δύναται ἀρχίζων ἀπό μίαν γνωστήν σχέσιν (ὡς ἐπί τό πλεῖστον θεμελιώδη) νά καταλήξῃ διά διαφόρων πράξεων εἰς τήν ὑπό ἀπόδειξιν ἰσότητα. Ἄν δυνηθῇ νά ἐπιτύχῃ τοῦτο τότε κάνει τήν ἑξῆς σκέψιν. "Ἀφοῦ ἀπό μίαν γνωστήν ἰσότητα κατέληξα κατόπιν ὀρθῶν πράξεων εἰς τήν δοθεῖσαν ἰσότητα ἕπεται ὅτι, αὐτή, ἡ δοθεῖσα, εἶναι σωστή".

Ἐφαρμογή τοῦ τρίτου τρόπου βλέπε ἄσκ.20 Α΄τρόπος λύσεως.

Τέταρτος τρόπος (τέχνασμα). Καί ἐδῶ ὁ ἔχων πεῖραν ἀντιλαμβάνεται ἄν δύναται ἀρχίζων ἀπό τήν ὑπό ἀπόδειξιν ἰσότητα νά καταλήξῃ διά διαφόρων πράξεων εἰς μίαν γνωστήν, θεμελιώδη ὡς ἐπί τό πλεῖστον σχέσιν. Ἄν δυνηθῇ νά ἐπιτύχῃ τοῦτο τότε κάνει τήν ἑξῆς σκέψιν. "Ἀφοῦ ἀπό τήν δοθεῖσαν σχέσιν (ἰσότητα) κατέληξα κατόπιν ὀρθῶν πράξεων εἰς μίαν ἀληθῆ σχέσιν ἕπεται, ὅτι αὐτή, ἡ δοθεῖσα σχέσις, εἶναι σωστή".

Ἐφαρμογήν τοῦ τετάρτου τρόπου βλέπε ἄσκ. 20 Β΄ τρόπος λύσεως.

<u>Πέμπτος τρόπος.</u> Ἐργαζόμεθα χωριστά εἰς ἕκαστον μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καί προσπαθοῦμεν νά ἴδωμεν ἄν δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς τό αὐτό ἤ ἴσα ἀποτελέσματα. Τότε κάνομεν τήν ἑξῆς σκέψιν. "Ἀφοῦ ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος δίδουν τό αὐτό ἀποτέλεσμα ἕπεται ὅτι ἡ ἀποδεικτέα ἰσότης εἶναι ἀληθής".

Ἐφαρμογή τοῦ πέμπτου τρόπου βλέπε ἄσκησιν 35.

* <u>Ἕκτος τρόπος.</u> Ἐνίοτε εἶναι δυνατόν νά στηριχθῶμεν εἰς μίαν ἄσκησιν (σχετικῶς εὔκολον) διά νά λύσωμεν μίαν ἄλλην ἄσκησιν (σχετικῶς δυσκολωτέραν τῆς πρώτης). Τοῦτο ὅμως εἶναι συνήθως ἐπιτρεπτόν δι' ἀσκήσεις τῶν ἀπαιτήσεων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν, ὅπου θεωρεῖται πλεονασμός ἡ ἀπόδειξις τῆς εὐκόλου ἀσκήσεως, ἐξ οὗ καί λαμβάνεται αὕτη μᾶλλον ὡς τύπος, διά τήν ἀπόδειξιν τῆς δοθείσης σχετικῶς δυσκόλου ἀσκήσεως.

Ἐφαρμογή τοῦ ἕκτου τρόπου δύναται νά κάμη ὁ ἀναγνώστης μόνος του.

Γενική παρατήρησις.

Ἐπειδή ἡ λύσις τῶν ἀσκήσεων τῆς Τριγωνομετρίας ἀπαιτεῖ τήν γνῶσιν Ἀριθμητικῶν καί Ἀλγεβρικῶν πράξεων δι' αὐτό παραθέτομεν ὁλόκληρον τήν § 18 ἀναφερομένην εἰς χρησιμωτάτας Ἀριθμητικάς καί Ἀλγεβρικάς προτάσεις καί πράξεις.

Συνιστῶμεν δέ ἰδιαιτέρως εἰς τούς μαθητάς ἀναγνώστας τοῦ παρόντος βιβλίου ὅπως μελετήσουν μετά προσοχῆς τήν § 18.

---

§ 18. ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΧΡΗΣΙΜΕΥΟΥΣΑΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΛΥΣΙΝ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ.

Α΄ ΑΚΕΡΑΙΟΙ

1. "Δύο ἀριθμοί ἴσοι πρός τρίτον εἶναι καί μεταξύ των ἴσοι".
ἤ "Ἄν δύο μέλη δύο ἰσοτήτων εἶναι ἴσα μεταξύ των θά εἶναι ἴσα καί τά ἄλλα μέλη".

2. "Ἐάν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα προκύπτουν ἴσα".
ἤ "Ἄν εἰς ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος προσθέσωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν προκύπτει πάλιν ἰσότης".

3. "Ἐάν ἀπό ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἴσα προκύπτουν ἴσα".

4. "Εἰς μίαν ἰσότητα δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἀπό τό ἕν μέλος εἰς τό ἄλλο ἀλλάσσοντες συγχρόνως τό σημεῖον αὐτοῦ".

5. "Ἐάν ἐναλλάξωμεν τά μέλη μιᾶς ἰσότητος ἡ ἰσότης διατηρεῖται" (εἰς τήν τοιαύτην ἐναλλαγήν, ἄν θέλωμεν ἀλλάσσομεν τά σημεῖα).

6. "Ἐάν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος τά πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός, προκύπτει πάλιν ἰσότης". (Ἡ ἰδιότης αυτη μᾶς ἐπιτρέπει καί ἐκτελοῦμεν τήν ἀπαλοιφήν τῶν παρονομαστῶν).

7. "Ἐάν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος τά διαιρέσωμεν διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ μηδενός, προκύπτει πάλιν ἰσότης".

Νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἤ τῆς ἀδιαφορίας.

I. Πρόσθεσις.

8. "Τό ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων προσθετέων δέν μεταβάλλεται καί ἄν ἀλλάξωμεν τήν θέσιν αὐτῶν".

Παραδείγματα.

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς (δηλ. μέ γράμματα)
Ἄν $2+3+4 = 9$	Ἄν $\alpha+\beta+\gamma = \delta$
καί $4+2+3 = 9$ τότε	καί $\beta+\gamma+\alpha = \delta$ τότε
$2+3+4 = 4+2+3$	$\alpha+\beta+\gamma = \beta+\gamma+\alpha$

Π. Πολλαπλασιασμός

9. "Τό γινόμενον δύο ἤ περισσοτέρων <u>παραγόντων</u> δέν μεταβάλλεται καί ἄν ἀλλάξωμεν τήν θέσιν αὐτῶν".

Παρδείγματα

<u>'Αριθμητικῶς</u>	<u>Γενικῶς</u>
$2.3.4 = 24$	$\alpha\beta\gamma = \varepsilon$
$3.4.2 = 24$	$\gamma\alpha\beta = \varepsilon$
$2.3.4 = 3.4.2$	$\alpha\beta\gamma = \gamma\alpha\beta$

'Επιμεριστική ἰδιότης

"Αθροισμα ἐπί ἀριθμόν

ΙΟ. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπί ἀριθμόν δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπί τόν ἀριθμόν αὐτόν καί νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα γινόμενα".

Παραδείγματα

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$(2+3+5).10 = 2.10+3.10+5.10 =$

$= 20+30+50$

<u>Γενικῶς</u>

$(\alpha+\beta+\gamma).\delta =$

$= \alpha.\delta+\beta.\delta+\gamma.\delta$

'Επέκτασις τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος

"Αθροισμα ἐπί ἄθροισμα

ΙΙ. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπί ἄθροισμα δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑνός ἀθροίσματος μέ ὅλους τούς προσθετέους τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καί κατόπιν νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα γινόμενα".

Παραδείγματα

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$(2+3+5)\ (6+4) =$

$= 2.6+3.6+5.6+2.4+3.4+5.4 =$

$= 12+18+30+8+12+20 = 100$

<u>Γενικῶς</u>

$(\alpha+\beta+\gamma).(\delta+\varepsilon) =$

$= \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon$

Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π. Μπακούρου. Α' Ἔκδοσις.

Γινόμενον ἐπί ἀριθμόν

Ι2. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπί ἀριθμόν δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον ἐκ τῶν παραγόντων ἐπί τόν ἀριθμόν αὐτόν τούς δέ ἄλλους νά ἀφήσωμεν ὅπως εἶναι."

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
(2.3.5) Ι0 = 2 (3.Ι0) 5 =	(αβγ) δ =
= 2.30.5	= α (β.δ) γ

Σημείωσις Ιη. "Ἡ μονάς ὡς παράγων γινομένου δέν μεταβάλλει τό γινόμενον ὡς ἐκ τούτου ἡ μονάς ὡς παράγων δύναται νά παραλειφθῇ" ὅπως ἐπίσης εἶναι δυνατόν καί "νά τεθῇ ὡς παράγων γινομένου".

Σημείωσις 2α. "Τό μηδέν ὡς παράγων γινομένου μηδενίζει τό γινόμενον".

Ἄθροισμα δι'ἀριθμοῦ

Ι3. "Διά νά διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι'ἀριθμοῦ δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος διά τοῦ ἀριθμοῦ (ἐάν βεβαίως διαιροῦνται) καί νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα πηλίκα" (εἰς τήν ἰδιότητα αὐτήν στηριζόμεθα καί ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα).

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
(Ι0+6+4) : 2 =	(α+β+γ) : δ =
= Ι0:2+6:2+4:2 = 5+3+2	= α:δ+β :δ+γ:δ

Γινόμενον δι'ἀριθμοῦ

Ι4. "Διά νά διαιρέσωμεν γινόμενον δι'ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἕνα μόνον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διά τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ τούς δέ ἄλλους νά ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν".

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
(Ι0.6.5):3 = Ι0.(6:3).5 =	(αβγ) : δ =
= Ι0.2.5	= α(β:δ) γ.

Γινόμενον δι'ἑνός τῶν παραγόντων του.

Ι5. "Διά νά διαιρέσωμεν γινόμενον δι'ἑνός τῶν παραγόντων του ἀρκεῖ νά ἐξαλείψωμεν τόν παράγοντα αὐτόν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς

$(2.3.4) : 3 = 2.(3:3).4 =$
$= 2.\text{I}.4 = 2.4$

Γενικῶς

$(\alpha\beta\gamma) : \beta =$
$= \alpha(\beta:\beta)\ \gamma = \alpha.\text{I}.\gamma = \alpha.\gamma$

Σημείωσις Ιη. "Δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἄθροισμα ἤ γινόμενον διά της μονάδος χωρίς ἡ δοθεῖσα παράστασις νά μεταβληθῇ".

Παραδείγματα

"Αθροισμα

$$(2+3+4) = \frac{2+3+4}{\text{I}}$$

Γινόμενον

$$(2.3.4) = \frac{2.3.4}{\text{I}}$$

Σημείωσις 2α. "Ἡ διά τοῦ μηδενός διαίρεσις οἱουδήποτε ἀριθμοῦ, εἶναι ἀδύνατος" καί τοῦτο διότι οὐδείς ἀριθμός ὡς πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως πολλαπλασιαζόμενος μέ τόν διαιρέτην 0 θά δώσῃ τόν διαιρετέον κατά τόν ὁρισμόν τῆς διαιρέσεως".

Συνθετική ἰδιότης

Ι6. "Δυνάμεθα εἰς ἕν ἄθροισμα νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους προσθετέους διά τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν."

Παράδειγμα

$$2+3+4+5 = 2+(3+4)+5 = 2+7+5$$

'Αναλυτική ἰδιότης

Ι7. "Δυνάμεθα εἰς εν ἄθροισμα μά ἀντικαταστήσωμεν ενα προσθετέον διά δύο ἤ περισσοτέρων ἄλλων οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄθροισμα αὐτόν.

Παράδειγμα

$$2+7+5 = 2+(3+4)+5 = 2+3+4+5$$

Ι8. "Δυνάμεθα μά πολλαπλασιάσωμεν καί συγχρόνως νά διαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμόν διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ διαφόρου τοῦ μηδενός".

Παράδειγμα

$$5 = \frac{5.2}{2} = \frac{\text{I}0}{2} = 5$$

Β΄ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Ι. "Ἀπλοποίησις κλάσματος καλεῖται ἡ εὕρεσις ἑνός ἄλλου κλάσματος μέ μικροτέρους ὅρους ἀλλά τῆς αὐτῆς ἀξίας πρός τό δοθέν".

Τοῦτο τό ἐπιτυγχάνομεν διά τῆς διαιρέσεως καί τῶν δύο ὅρων του διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐάν βεβαίως διαιροῦνται. Κλάσμα μή δυνάμενον νά ἁπλοποιηθῇ καλεῖται ἀνάγωγον.

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς

$$\frac{\cancel{20}^{5}}{\cancel{100}_{25}} = \frac{\cancel{5}^{I}}{\cancel{25}_{5}} = \frac{I}{5} \quad ἤ \quad \frac{\cancel{20}^{I}}{\cancel{100}_{5}} = \frac{I}{5}$$

Γενικῶς

$$\frac{\alpha^{\cancel{2}}\,\cancel{\beta}\,\cancel{\gamma}}{\cancel{\alpha}\,\beta^{\cancel{2}}\,\cancel{\gamma}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

2. Διάφοροι πράξεις ἐπί τῶν κλασμάτων.

Ιη. "Ἡ μονάς δύναται νά γραφῇ ὡς κλάσμα μέ ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τόν αὐτόν" Π.χ.

$$I = \frac{3}{3},\ I = \frac{I}{I}\ \ I = \frac{\alpha}{\alpha}$$ καί οὕτω καθ᾽ ἑξῆς.

2α. "Πᾶς ἀκέραιος δύναται, νά γραφῇ ὡς κλάσμα μέ ἀριθμητήν τόν ἴδιον τόν ἀκέραιον καί παρονομαστήν τήν μονάδα". Π.χ.

$$6 = \frac{6}{I},\ 7 = \frac{7}{I}\ \ \alpha = \frac{\alpha}{I}$$ καί οὕτω καθ᾽ ἑξῆς.

3η. $I + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{7}{4}$

4η. $I - \frac{3}{4} = \frac{4}{4} - \frac{3}{4} = \frac{4-3}{4} = \frac{I}{4}$

5η. Κλάσμα ἐπί κλάσμα.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{7} = \frac{3.5}{4.7} = \frac{I5}{28},\quad \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}$$

6η. Κλάσμα διά κλάσματος

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5} = \frac{3.7}{4.5} = \frac{2I}{20},\quad \frac{\alpha}{\beta} : \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}$$

7η. Κλάσμα ἐπί ἀκέραιον $\frac{3}{4}.7=\frac{3}{4}.\frac{7}{\mathrm{I}}=\frac{3.7}{4.\mathrm{I}}=\frac{2\mathrm{I}}{4}$

8η. Κλάσμα δι'ἀκεραίου.

$\frac{3}{5}:7=\frac{3}{5}:\frac{7}{\mathrm{I}}=\frac{3.\mathrm{I}}{5.7}=\frac{3}{35}$

9η. 'Εξαγωγή ἀκεραίων μονάδων : $\frac{20}{3}=6\,\frac{2}{3}$

Ι0η. $\sqrt{\mathrm{I}-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=$; ΙΙη. $\sqrt{\mathrm{I}-\left(\frac{\mathrm{I}2}{\mathrm{I}3}\right)^2}=$;

'Απ. Ι0η $\sqrt{\mathrm{I}-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\mathrm{I}-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\sqrt{\frac{\mathrm{I}6}{25}}=\frac{4}{5}$.

'Απ. ΙΙη. $\sqrt{\mathrm{I}-\left(\frac{\mathrm{I}2}{\mathrm{I}3}\right)^2}=\sqrt{\mathrm{I}-\frac{\mathrm{I}44}{\mathrm{I}69}}=\sqrt{\frac{\mathrm{I}69}{\mathrm{I}69}-\frac{\mathrm{I}44}{\mathrm{I}69}}=\sqrt{\frac{\mathrm{I}69-\mathrm{I}44}{\mathrm{I}69}}=$

$=\sqrt{\frac{25}{\mathrm{I}69}}=\frac{5}{\mathrm{I}3}$.

Γ' ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

Τροπή συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν.

Ιη) $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{7}}=\frac{5}{6}:\frac{3}{7}=\frac{5}{6}.\frac{7}{3}=\frac{35}{\mathrm{I}8}$ ἤ ἀπ'εὐθείας $\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{7}}=\frac{5.7}{3.6}=\frac{35}{\mathrm{I}8}$

2α) $\dfrac{\frac{3}{4}}{5}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{\mathrm{I}}}=\frac{3.\mathrm{I}}{4.5}=\frac{3}{20}$

Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις " Γ.Π.Μπακούρου. Α'"Εκδοσις.

3η. $\dfrac{5}{\frac{6}{7}} = \dfrac{\frac{5}{1}}{\frac{6}{7}} = \dfrac{5\cdot 7}{1\cdot 6} = \dfrac{35}{6}$

4η. Σύνθετον κλάσμα μέ τούς παρανομαστάς τῶν ὅρων του τούς αὐτούς $\dfrac{\frac{3}{\cancel{4}}}{\frac{5}{\cancel{4}}} = \dfrac{3}{5}$

5η. Σύνθετον κλάσμα μέ τούς ἀριθμητάς τῶν ὅρων του τούς αὐτούς $\dfrac{\frac{\cancel{2}}{5}}{\frac{\cancel{2}}{3}} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{5}$

Δ΄. Λόγοι καί 'Αναλογίαι

<u>'Ορισμός:</u> "Λόγος δύο ἀριθμῶν καλεῖται τό πηλίκον αὐτῶν".

Π.χ. 'Ο λόγος τῶν ἀριθμῶν 12 καί 6 εἶναι $\frac{12}{6} = 2$

<u>'Ορισμός</u>. "'Αναλογία καλεῖται ἡ ἰσότης δύο λόγων".

Π.χ. $\frac{12}{6} = 2$ καί $\frac{8}{4} = 2$. Τότε $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$

Τρεῖς βασικαί ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

1η. Εἰς μίαν ἀναλογίαν τό γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν μέσων ὅρων της".

<u>Δηλαδή.</u> Εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$ ἔχομεν $\begin{cases} 12\cdot 4 = 8\cdot 6 \\ 48 = 48 \end{cases}$ ἤ

2α. "Εἰς μίαν ἀναλογίαν τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων (ὅρων της) πρός τήν διαφοράν αὐτῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων (ὅρων της) πρός τήν διαφοράν αὐτῶν".

<u>Δηλαδή.</u> Εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{12}{6} = \frac{8}{4}$ ἔχομεν $\begin{cases} \frac{12+6}{12-6} = \frac{8+4}{8-4} \text{ ἤ } \frac{18}{6} = \frac{12}{4} \\ \text{ἤ } 3 = 3 \end{cases}$

3η. "Εἰς μίαν ἀναλογίαν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν πρός τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν ἰσοῦται μέ τά κλάσματα τῆς ἀναλογίας". (τό αὐτό συμβαίνει καί μέ τήν διαφοράν)

Δηλαδή: Εἰς τήν ἀναλογίαν $\frac{I2}{6}=\frac{8}{4}$ ἔχομεν $\left\{\frac{I2}{6}=\frac{8}{4}=\frac{I2+8}{6+4}=\frac{20}{I0}=2\right.$

Ε΄ Ἀριθμοί ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι

Ὁρισμός. "Δύο ἀριθμοί καλοῦνται ἀντίθετοι ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί διαφορετικά σημεῖα.

Π.χ. οἱ ἀριθμοί +4 καί -4

Ἰδιότης τῶν ἀντιθέτων. "Οἱ ἀντίθετοι ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα μηδέν". Πράγματι $(+4)+(-4) = 0$

Ἀριθμοί ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ι

Ὁρισμός. "Δύο ἀριθμοί καλοῦνται ἀντίστροφοι ἄν ἔχουν γινόμεν τήν θετικήν μονάδα".

Π.χ. οἱ $\frac{3}{4}$ καί $\frac{4}{3}$ ἔχουν γινόμενον $\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=\frac{I2}{I2}=I$

ΣΤ΄ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΓΚΥΛΑΙ

Α΄ "Α ρ σ ι ς παρενθέσεων. Ὅταν εἰς μίαν Μαθηματικήν παράστασιν ὑπάρχουν σημειωμέναι παρενθέσεις (ἤ ἀγκύλαι) καί ἐπιθυμοῦμεν νά τάς παραλείψωμεν δυνάμεθα νά τάς παραλείψωμεν μέ τήν ἑξῆς συμφωνίαν." Ἄν μέν ἔμπροσθεν τῶν παρενθέσεων ὑπάρχει τό + τότε οἱ προσθετέοι διατηροῦν τό σημεῖον των, ἄν ὅμως ἔμπροσθεν τῆς παρενθέσεως ὑπάρχη τό -, τότε οἱ προσθετέοι ἀλλάσσουν σημεῖο".

Παραδείγματα

I. $I00+(2-3+5) = I00+2-3+5$

2. $100-(2-3+5) = I00-2+3-5$

Β΄ Θ έ σ ι ς παρενθέσεων. Ὅταν εἰς μίαν Μαθηματικήν παράστασιν θέλωμεν νά θέσωμεν ὡρισμένους προσθετέους ἐντός παρενθέσεων, τότε πράττομεν τοῦτο κατά τήν ἑξῆς συμφωνίαν. "Ἄν μέν ἔμπροσθεν τῆς παρενθέσεως θέσωμεν τό + τότε οἱ ἐντός τῶν παρενθέσεων προσθετέοι διατηροῦν τά σημεῖα των, ἄν ὅμως ἔμπροσθεν τῆς παρενθέσεων θέσωμεν τό -, τότε οἱ ἐντός τῶν παρενθέσεων προσθετέοι ἀλλάσσουν σημεῖον".

Παραδείγματα

Ι. $\mathrm{I}00+2-3+5 = \mathrm{I}00+(2-3+5)$

2. $\mathrm{I}00-2+3-5 = \mathrm{I}00-(2-3+5)$

Ζ΄ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Ι. Γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

$$\boxed{\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} \cdot \alpha^{\rho} = \alpha^{\mu+\nu+\rho}}$$

2. Δύναμις εἰς δύναμιν $\boxed{(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}}$

3. Γινόμενον παραγόντων εἰς δύναμιν

$$\boxed{(\alpha\beta\gamma)^{\mu} = \alpha^{\mu}\beta^{\mu}\gamma^{\mu}}$$

4. Πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ

$$\boxed{\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}}$$

5. Κλάσμα εἰς δύναμιν. $\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}}$

6. Πρώτη δύναμις παντός ἀριθμοῦ $\boxed{\alpha^{\mathrm{I}} = \alpha}$

7. Μηδενική " " " $\boxed{\alpha^{0} = \mathrm{I}}$

8. Δυνάμεις μέ ἀρνητικούς ἐκθέτας $\boxed{\alpha^{-\mu} = \frac{\mathrm{I}}{\alpha^{\mu}}}$

Η΄ ΔΥΟ ΣΠΟΥΔΑΙΟΤΑΤΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ

<u>Ι</u>

$\underline{\mathrm{I}^{\text{ος}}}$. "Ὅταν ἔχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν κλάσματα καί ἀκεραίους τότε πολλαπλασιάζομεν τούς ἀκεραίους καί τούς ἀριθμητάς καί τό ἐξαγόμενον γράφομεν ἀριθμητήν κλάσματος τοῦ ὁποίου παρονομαστήν γράφομεν τό γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν δοθέντων κλασμάτων".

Π.χ. $\frac{3}{2}.4.\frac{4}{5}.5.\frac{10}{12} = \frac{3.4.4.5.10}{2.5.12} = \frac{2400}{120} = 20$

<u>Παρατήρησις</u>. Προκειμένου νά άπλοποιήσωμεν τήν δοθεῖσαν παράστασιν δυνάμεθα νά άπλοποιήσωμεν ἀριθμητάς μέ παρονομαστάς ἤ ἀκεραίους μέ παρονομαστάς (ἄν βεβαίως ἁπλοποιοῦνται) οὐδέποτε ὅμως ἀκεραίους μέ ἀριθμητάς".

Π.χ. $\frac{3}{2}.\cancel{4}.\frac{4}{\cancel{5}}.\cancel{5}.\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\underset{6}{\cancel{12}}} = \frac{3.\overset{2}{\cancel{4}}.4.5}{\cancel{2}.\cancel{6}} = 20$

<u>2ος</u> "Ὅταν ἔχωμεν νά ὑπολογίσωμεν μίαν Μαθηματικήν παράστασιν εἰς τήν ὁποίαν εἶναι σημειωμέναι διάφοροι πράξεις, τότε κατά τόν ὑπολογισμόν της ἐκτελοῦμεν πρῶτον τάς δυνάμεις καί τάς ρίζας κατόπιν τούς πολλαπλασιασμούς καί τάς διαιρέσεις καί τέλος τάς προσθέσεις καί τάς ἀφαιρέσεις".

Π.χ. $\frac{\sqrt{100}.2+5^2:5-2^2.5}{(-1)^4.1000^0+1000:250} = \frac{10.2+25:5-4.5}{1.1+4} = \frac{20+5-20}{1+4} = \frac{5}{5} = 1$

Θ: ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ

<u>'Ορισμός</u>: "Ταυτότης καλεῖται ἡ ἰσότης ἡ ὁποία ἀληθεύει διά πᾶσαν τιμήν τῶν γραμμάτων της".

1η. Τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν.

Τύπος: $\boxed{(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$ (1)

2α. Τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν.

Τύπος: $\boxed{(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$ (2)

3η. Τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν.

Τύπος. $\boxed{(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma}$ (3)

. . . .

Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις "Τ.Π. Μπακούρου. Α' Ἔκδοσις

4η. Κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν

Τύπος: $\boxed{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$ (4)

5η. Κύβος τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν.

Τύπος: $\boxed{(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$ (5)

6η. Ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπί τήν διαφοράν των.

Τύπος: $(\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ (6)

Κανών. "Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπί τήν διαφοράν των ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν τετραγώνων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν" ἤ ἄλλως "μέ τό τετράγωνον τοῦ πρώτου μεῖον τό τετράγωνον τοῦ δευτέρου".

Ι΄. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΡΟΠΗΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΧΡΗΣΙΜΟΙ ΕΙΣ ΤΗΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΝ

1η. Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος ἐξ ὅλων τῶν προσθετέων.

Π.χ. $\boxed{\alpha\chi+\alpha\psi+\alpha\omega = \alpha(\chi+\psi+\omega)}$ (7)

Σημείωσις: Εἰς τήν ἐξαγωγήν κοινοῦ παράγοντος κάνομεν διαίρεσιν μέ διαιρέτην τόν κοινόν αὐτόν παράγοντα. Ἐντός τῶν παρενθέσεων γράφομεν τά πηλίκα τῶν διαιρέσειν ἑκάστου προσθετέου διά τοῦ κοινοῦ παράγοντος.

2α. Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος καθ' ὁμάδας.

Π.χ. $\boxed{\alpha\chi+\alpha\psi+\beta\chi+\beta\psi = \alpha(\chi+\psi)+\beta(\chi+\psi) = (\chi+\psi)(\alpha+\beta)}$ (8)

3α. Διαφορά δύο τετραγώνων.

Π.χ. $\boxed{\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)\,(\alpha-\beta)}$ (9)

Κανών. "Ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν βάσεων ἐπί τήν διαφοράν αὐτῶν".

4η. Άθροισμα δύο κύβων.

Π.χ. $\boxed{\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)}$ (Ι0)

5η. Διαφορά δύο κύβων.

Π.χ. $\boxed{\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)}$ (ΙΙ)

6η. Ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀποτελεῖ τό ἀνάπτυγμα (δηλ. τό β΄μέλος) τῶν τύπων τῶν σελίδων (33). καί (34)

Π.χ.

$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2$	(Ι2)
$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$	(Ι3)

ΙΑ΄. ΛΥΣΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Ὁρισμός. Ἐξίσωσις καλεῖται ἡ ἰσότης ἡ ὁποία ἀληθεύει δι᾽ὡρισμένας τιμάς τῶν γραμμάτων της".

Ι. Λύσις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ.

Κανών. "Διά νά λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς."

Α΄. Κάνομεν ἀπαλοιφήν παρονομαστῶν (ἄν ἔχη) .

Β΄. Ἐκτελοῦμεν τάς σημειουμένας πράξεις (ἄν ἔχη).

Γ΄. Χωρίζομεν γνωστούς ἀπό ἀγνώστους (μεταφέροντες τούς ἀγνώστους εἰς τό α΄μέλος καί τούς γνωστούς εἰς τό β΄μέλος καί ἀλλάσσοντες συγχρόνως τά σημεῖα πάντων τῶν μεταφερομένων ὅρων).

Δ΄. Ἐκτελοῦμεν τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων καί

Ε΄. Διαιροῦμεν μέ τόν συντελεστήν τοῦ ἀγνώστου(ἀμφότερα τά μέλη.)

2. Λύσις ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ.

Ἡ Γενική τελική μορφή μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός χ εἶναι

$$\boxed{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma = 0} \quad (\mathrm{I})$$

Ὁ τύπος ὁ δίδων τάς ρίζας αὐτῆς εἶναι

$$\boxed{\chi = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \quad (2)$$

3. Λύσις διτετραγώνου ἐξισώσεως.

Ἡ Γενική τελική μορφή μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως ὡς πρός χ εἶναι.

$$\boxed{\alpha\chi^4 + \beta\chi^2 + \gamma = 0} \quad (3)$$

Θέτοντες εἰς αὐτήν $\boxed{\chi^2 = \omega}$ καί $\boxed{\chi^4 = \omega^2}$

τήν ὑποβιβάζομεν εἰς δευτεροβάθμιον ὡς πρός ω (τῆς μορφῆς).

$$\boxed{\alpha\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0} \quad (4)$$

Εὑρίσκοντες τά ω_I καί ω_2 ὑπολογίζομεν ἐκ τῆς $\chi^2 = \omega$ τά χ_I χ_2 χ_3 καί χ_4.

4. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Ὁρισμός. "Καλοῦμεν Τ ρ ι γ ω ν ο μ ε τ ρ ι κ ή ν ἐξίσωσιν τήν ἐξίσωσιν η ὁποία ἔχει ὡς ἄγνωστον ὄχι τόν συνήθη ἐκ τῆς Ἀλγέβρας ἀριθμόν χ ἀλλά τόξον "χ μ ο ι ρ ῶ ν". κατά συνήθειαν.

Τάς τριγωνομετρικάς ἐξισώσεις λύομεν λαμβάνοντες αὐτάς ὡς Ἀλγεβρικάς καί μέ ἄγνωστον, ὄχι τό ζητούμενον τόξον χ, ἀλλά ἕνα ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ τόξου αὐτοῦ.

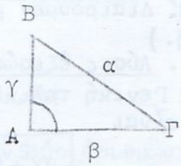
Κατόπιν εὑρίσκομεν καί τό χ διά τῆς Τριγωνομετρίας.

Εἰς τό παρόν βιβλίον θά λύσωμεν τριγωνομετρικάς ἐξισώσεις ἁπλῆς μορφῆς καί μέ ἕνα τριγωνομετρικόν ἀριθμόν τόξου τινός ἤ γωνίας τινός μικροτέρας τῶν 90^o.

ΙΒ΄. ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΝ ΘΕΩΡΗΜΑ

"Εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ $\hat{A}$ = Ι ὀρθή (Σχ. 12)ἔχομεν

Ι.	$(ΒΓ)^2 = (ΑΒ)^2 + (ΑΓ)^2$
2.	$(ΑΒ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΓ)^2$
3.	$(ΑΓ)^2 = (ΒΓ)^2 - (ΑΒ)^2$



(Σχ. Ι2)

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΟΜΑΣ ΠΡΩΤΗ

'Ασκήσεις άναφερόμεναι είς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν μονάδων τοῦ αὐτοῦ τόξου π.χ. $\widehat{AB}$ καί λυόμεναι διά τῆς χρήσεως τῶν τύπων

$$\boxed{\frac{\mu}{180^o}=\frac{\beta}{200^o}=\frac{\alpha}{\pi}}$$

1. Δίδεται τόξον $(\widehat{AB}) = 30^o$. Νά εὑρεθῆ τό μέτρον αὐτοῦ πρῶτον είς βαθμούς καί δεύτερον είς ἀκτίνια.-

Λύσις.

Σκέψις. Λαμβάνομεν τόν κατάλληλον διά τήν λύσιν τῆς ἀσκήσεως τύπον ὁ ὁποῖος ἐδῶ εἶναι $\frac{\mu}{180^o} = \frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$ καί χωρίζομεν αὐτήν είς τρεῖς ἄλλους τύπους.

τούς $\frac{\mu}{180^o} = \frac{\beta}{200}$, $\frac{\mu}{180^o} = \frac{\alpha}{\pi}$ καί $\frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$

Τώρα λαμβάνοντες τούς δύο πρώτους ἐξ αὐτῶν καί ἀντικαθιστῶντες τό μ μέ 30^o ὑπολογίζομεν τά β καί α.

Σημείωσις. Είς τό ἑξῆς θά παραλείπωμεν τό σύμβολον τῶν μοιρῶν είς τό 180^o γράφοντες ἁπλῶς 180.

'Εργασία.

Α΄. Ὑπολογισμός τοῦ β.

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\mu}{180}=\frac{\beta}{200}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ καί ἔχομεν $\frac{30}{180} = \frac{\beta}{200}$ (I)

Θεωροῦντες τήν ἰσότητα αὐτήν ὡς ἐξίσωσιν α΄βαθμοῦ μέ ἄγνωστο τό β καί ἐφαρμόζοντες τόν κανόνα (Σελ. 35) ἔχομεν:

$$180.\beta = 200.30 \text{ ή}$$

$$180.\beta = 6000 \text{ ή}$$

$$\beta = \frac{600\cancel{0}}{18\cancel{0}} = \frac{\cancel{600}^{\,100}}{\cancel{18}_{\,3}} = \frac{100}{3} = 33^{\gamma},\ 33 \text{ ή}$$

$\beta = 33^{\gamma}$ 33 πρῶτα καί 33 δεύτερα .

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ εἰς βαθμούς εἶναι $\beta = 33^{\gamma}$ 33 πρ. καί 33δ.

<u>Β΄ Ὑπολογισμός τοῦ α.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\}$ $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ καί ἔχομεν $\Big\}$ $\frac{30}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ (I)

Θεωροῦντες τώρα τήν ἰσότητα αὐτήν ὡς ἐξίσωσιν α΄ βαθμοῦ μέ ἄγνωστον τό α καί ἐφαρμόζοντες τά γνωστά ἔχομεν .

$180\alpha = 30\pi$

ή $\alpha = \frac{3\cancel{0}\pi}{18\cancel{0}}$

<u>Σημείωσις.</u> Τήν τιμήν τοῦ $\pi = 3,14$ τήν θέτομεν ἄν θέλωμεν, μόνον εἰς τό τέλος τῶν πράξεων.

ή $\alpha = \frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ εἰς ἀκτίνια εἶναι $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ἀκτίνια ἤ ἄν $\pi = 3,14$ $\alpha = \frac{3,14}{6} = 0,52$ ἀκτίνια μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$.συνήθως ὅμως ἀφήνομεν τήν τιμήν $\alpha = \frac{\pi}{6}$)

2. Δίδεται τόξον $(\overset{\frown}{AB}) = 90^{o}$(ἤ ὀρθή γωνία). Νά εὑρεθῆ τό μέτρον αὐτοῦ εἰς βαθμούς καί ἀκτίνια .

Λύσις.

(<u>Σκέψις.</u> 'Ομοίως ὡς ἄσκησις I).

Ἐργασία

<u>Α΄ Ὑπολογισμός τοῦ β.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\}$ $\longrightarrow$ $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ καί ἔχομεν $\Big\}$ $\frac{90}{180} = \frac{\beta}{200}$ ή

$180\beta = 200.90$

$180\beta = 1800$ καί $\beta = \frac{18000}{180} = 100$

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου 90^{o} (ἤ τῆς ὀρθῆς γωνίας) εἰς βαθμούς εἶναι $\beta = 100^{\gamma}$.

<u>Β΄ Ὑπολογισμός τοῦ α.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\{$ $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ 'Αντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν $\Big\}$ $\frac{90}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$

ή $180\alpha = 90\,\pi$

ή $\frac{180\alpha}{180} = \frac{90\pi}{180}$ καί $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ή $\alpha = \frac{\pi}{2}$

'Απάντησις. Τό μέτρον τοῦ τόξου 90° (ἤ τῆς ὀρθῆς γωνίας) εἰς ἀκτίνια εἶναι:

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ἀκτίνια}$$

ἤ ἄν $\pi = 3,14$, $\alpha = \frac{3,14}{2} = 1,57$ ἀκτίνια (μέ προσέγγιαν $\frac{1}{100}$)

3. Δίδεται τόξον $(\widehat{AB}) = 40^{\circ}\ 12'$. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον αὐτοῦ εἰς βαθμούς καί ἀκτίνια.

Λύσις.

(Σκέψις. 'Ομοίως ὡς ἄσκησις 1.)

'Εργασία

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\}$ $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ καί ἔχομεν $\Big\}$

$$\frac{40^{\circ}\ 12'}{180} = \frac{\beta}{200} \qquad (1)$$

Τώρα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Τρέπομεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ α΄ μέλους τῆς (1) εἰς τό αὐτό εἶδος δηλαδή ἤ εἰς πρῶτα λεπτά τῆς μοίρας ἤ εἰς μοίρας. Τοῦτο τό πράττομεν ἵνα ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι ὁμοειδεῖς καί τό πηλίκον ἀριθμός ἀφηρημένος διά νά δυνηθῶμεν νά εὕρωμεν τό β. Οὕτω ἔχομεν :

Πρῶτον

$(40^{\circ}\ 12') = 2412'$

$180^{\circ} = 10800'$

Βοηθητικαί πράξεις

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 60' \\ \hline 2400' \\ +12' \\ \hline 2412' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 180^{\circ} \\ \times 60' \\ \hline 10800' \end{array}$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) ἔχομεν.

$$\frac{2412'}{10800'} = \frac{\beta}{200}$$

ἤ $10800\,\beta = 2412.200$

ἤ $108\cancel{00}\,\beta = 4824\cancel{00}$

καί $\beta = \frac{4824}{108}$ ἤ

$\beta = 44^{\gamma},66$ ἤ

$\beta = 44^{\gamma}\ 66\pi\ 66\delta$

Δεύτερον

'Ως γνωστόν ἔχομεν $(40^{\circ}\ 12') = 2412'$

'Επίσης $1^{\circ} = 60'$

Ὥστε. $(40^{\circ}\ \ 12') = \left(\frac{2412'}{60'}\right)^{\circ} = \left(\frac{402}{10}\right)^{\circ} = 40^{\circ},2$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (Ι) ἔχομεν

$\frac{40^{o},2}{180} = \frac{\beta}{200}$ καί $\beta = \frac{804\cancel{0}}{18\cancel{0}} = \frac{134}{3}$ ἤ

$\beta = 44^{\gamma},66$ ἤ

ἤ $180\ \beta = 40^{o},2.200$

ἤ $180\ \beta = 8040,0$

$\boxed{\beta = 44^{\gamma}\ 66\pi\ 66\delta}$

<u>'Απάντησις</u>. Τό μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ εἰς βαθμούς (μέ ἀμφοτέρους τούς τρόπους) εἶναι τό αὐτό δηλαδή 44^{γ} 66π 66δ.

<u>Β. Ὑπολογισμός τοῦ α.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$. 'Αντικαθιστῶμεν τό μ μέ τήν τιμήν $40^{o},2$ καί ἔχομεν. $\frac{40^{o},2}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ (Ι). Λύοντες τώρα ὡς πρός α ἔχομεν:

$180\alpha = 40,2\pi$

ἤ $\alpha = \frac{40,2\ \pi}{180}$

ἤ $\alpha = \frac{402\ \pi}{1800}$

καί $\alpha = 0,22\ \pi$ ἀκτίνια

ἤ $\alpha = 0,22.3,14$ "

ἤ $\alpha = 0,6908$ "

ἤ $\alpha = 0,69$ "

(μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$)

4. Δίδεται τόξον $(\overset{\frown}{AB}) = 50^{o}\ 30'\ 40''$. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον αὐτοῦ εἰς βαθμούς καί ἀκτίνια.

Λύσις

(Σκέψις" 'Ως ἄσκησις 1)
('Εργασία " " 3).

<u>Α. Ὑπολογισμός τοῦ β.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ καί ἔχομεν:

χομεν. , $\frac{50^{o}\ 30'40''}{180} = \frac{\beta}{200}$ (Ι)

'Εργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν ἔχομεν.

<u>Πρῶτον.</u>

Τρέποντες τάς μοῖρας εἰς δεύτερα λεπτά μοίρας ἔχομεν:

$(50^{o}\ 30'40'') = 181840''$

$180^{o} = 648000''$

<u>Βοηθητικαί πράξεις.</u>

$$\begin{array}{r} 50^{o} \\ \times\ 60' \\ \hline 3000' \\ +30' \\ \hline 3030' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3030' \\ \times 60'' \\ \hline 181800'' \\ +40'' \\ \hline 181840'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 180^{o} \\ \times 60' \\ \hline 10800' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10800' \\ \times 60'' \\ \hline 648000'' \end{array}$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (I) ἔχομεν

$$\frac{181840''}{648000''} = \frac{\beta}{200}$$

ἤ $648000\beta = 181840.200$ καί $\beta = \frac{36368''}{648''}$

ἤ $648\cancel{000}\beta = 36368\cancel{000}$

ἤ $648\ \beta = 36368$ $\beta = 56^{\gamma},12$ ἤ

$$\boxed{\beta = 56^{\gamma}12\ \pi\ 34\delta}$$

Δεύτερον

Ὡς γνωστόν ἔχομεν. $(50^{o}30'40'') = 181840''$

$1^{o} = 3600''$

Ὥστε: $(50^{o}\ 30'40'') = \left(\frac{181840''}{3600''}\right)^{o} = \left(\frac{18184\cancel{0}}{360\cancel{0}}\right)^{o} = \left(\frac{\overset{4546}{\cancel{18184}}}{\underset{90}{\cancel{360}}}\right)^{o} =$

$$= \left(\frac{4546}{90}\right)^{o}$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (I) ἔχομεν

$$\frac{\left(\frac{4546}{90}\right)^{o}}{180^{o}} = \frac{\beta}{200}$$

ἤ $\frac{\frac{4546}{90}}{\frac{180}{1}} = \frac{\beta}{200}$

ἤ $\frac{4546}{180.90} = \frac{\beta}{200}$

$$\frac{4546}{16200} = \frac{\beta}{200}$$

$16200\beta = 4546.200$

$162\cancel{00}\beta = 909\cancel{200}$

$\beta = \frac{9092}{162} = \frac{4546}{81} = 56^{\gamma},12$

Ὥστε. $\boxed{\beta = 56^{\gamma},12}$

'Απάντησις. Τό μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ εἰς βαθμούς (μέ ἀμφοτέρους τούς τρόπους) εἶναι τό αὐτό, δηλαδή $56^{\gamma},12$.

Β; 'Υπολογισμός τοῦ α.

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ 'Αντικαθιστῶμεν τό μ μέ τήν τιμήν $\left(\frac{4546}{90}\right)^{o}$ καί ἔχομεν :

$$\frac{\left(\frac{4546}{90}\right)^{o}}{180^{o}} = \frac{\alpha}{\pi} \quad (1) \qquad \frac{4546}{16200} = \frac{\alpha}{\pi} \text{ ή}$$

$$\text{ή } \frac{\frac{4546}{90}}{\frac{180}{1}} = \frac{\alpha}{\pi} \qquad 16200\alpha = 4546\,\pi \text{ ή}$$

$$\alpha = \frac{4546\pi}{16200} = \frac{4546.3,14}{16200}$$

$$\text{ή } \frac{4546}{180.90} = \frac{\alpha}{\pi} \qquad \alpha = \frac{14274,44}{16200}$$

$$\alpha = 0,88 \text{ ἀκτίνια}$$

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου AB εἰς ἀκτίνια εἶναι α=0,88 ἀκτίνια (προσεγγ. $\frac{1}{100}$).

---

5. Δίδεται τόξον $(\overset{\frown}{AB}) = 50^{\gamma}$. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον αὐτοῦ εἰς μοίρας καί ἀκτίνια.

Λύσις

(<u>Σκέψις</u> . Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 1)

'Εργασία

<u>Α΄. Ὑπολογισμός τοῦ μ.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\}$ $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ 'Αντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν $\Big\}$ $\frac{\mu}{180} = \frac{50}{200}$ ή

$$\frac{\mu}{180} = \frac{1}{4} \text{ ή } 4\mu = 180^{0} \text{ καί } \mu = \frac{180}{4} = 45^{0}$$

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου 50^{γ} εἰς μοίρας εἶναι $\mu=45^{0}$.

<u>Β΄. Ὑπολογισμός τοῦ α.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\Big\}$ $\frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$ 'Αντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν $\Big\}$ $\frac{50}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$ ή

$$\frac{1}{4} = \frac{\alpha}{\pi} \text{ ή } 4\alpha = 1\pi \quad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

<u>'Απάντησις.</u> Τό μέτρον τοῦ τόξου 50^{γ} εἰς ἀκτίνια εἶναι $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ἀκτίνια ή ἄν π = 3,14 , $\alpha = \frac{3,14}{4} = 0,78$ ἀκτίνια $\Big\{$μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$).

---

6. Δίδεται τόξον $(\overset{\frown}{AB}) = \frac{5\pi}{8}$ ἀκτινίων. Νά εὑρεθῆ τό μέτρον αὐτοῦ εἰς μοίρας καί βαθμούς.

Λύσις

(Σκέψις. Ὁμοίως ὡς ἄσκησις Ι).

Ἐργασία

Α΄ Ὑπολογισμός τοῦ μ.

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$. Ἀντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{\pi}{1}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\mu}{180} = \frac{5\cancel{\pi}}{8\cancel{\pi}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\mu}{180} = \frac{5}{8}$$

ἤ $8\mu = 5.180$

$8\mu = 900$

καί $\mu = \frac{900}{8} = 112^\circ\ 30'$

Ἀπάντησις. Τό μέτρον τοῦ τόξου $AB = \frac{5\pi}{8}$ ἀκτινίων εἰς μοίρας εἶναι $112^\circ\ 30'$

Β΄ Ὑπολογισμός τοῦ β

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\frac{\beta}{200} = \frac{\alpha}{\pi}$ ἀντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν:

$$\frac{\beta}{200} = \frac{\frac{5\pi}{8}}{\frac{\pi}{1}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\beta}{200} = \frac{5\cancel{\pi}}{8\cancel{\pi}}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{\beta}{200} = \frac{5}{8}$$

ἤ $8\beta = 200.5$

$8\beta = 1000$

$\beta = \frac{1000}{8} = 125^\gamma$

Ἀπάντησις. Τό μέτρον τοῦ τόξου $AB = \frac{5\pi}{8}$ ἀκτινίων εἰς βαθμούς εἶναι 125^γ .

7. Μία γωνία ἔχει μέτρον 50 βαθμῶν. Μία ἄλλη γωνία ἔχει μέτρον $\frac{\pi}{4}$ ἀκτινίων. Ποία ἐκ τῶν δύο γωνιῶν εἶναι μεγαλυτέρα;

Λύσις.

Σκέψις. Τρέπομεν τά μέτρα ἀμφοτέρων τῶν γωνιῶν εἰς μοίρας διά νά δυνηθῶμεν νά τάς συγκρίνωμεν μέ τήν αὐτήν μονάδα μετρήσεως.

Ἐργασία.

Α΄. Τροπή τῆς γωνίας 50 βαθμῶν εἰς μοίρας.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\mu}{180} = \frac{\beta}{200}$ ἔχομεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$\frac{\mu}{180} = \frac{50}{200} \quad \ddot{\eta} \quad \mu = \frac{\cancel{180}.50}{\cancel{200}} = \frac{90}{2} = 45. \quad \text{Ὥστε.} \quad \mu = 45^{0}$$

Β΄. Τροπή τῆς γωνίας $\frac{\pi}{4}$ ἀκτινίων εἰς μοίρας.

Ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$ ἔχομεν δι' ἀντικαταστάσεως.

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{1}} \quad \ddot{\eta} \quad \frac{\mu}{180} = \frac{\cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}} \quad \ddot{\eta} \quad \frac{\mu}{180} = \frac{1}{4} \quad \ddot{\eta}$$

$$4\mu = 180 \quad \text{καί} \quad \mu = \frac{180}{4} = 45. \quad \text{Ὥστε.} \quad \mu = 45^{0}$$

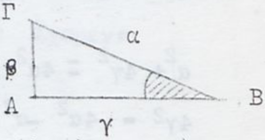
Συμπέρασμα. Ἀφοῦ καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις τό μέτρον ἑκάστης γωνίας εἶναι τό αὐτό δηλαδή 45^{0} ἕπεται ὅτι αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

ΟΜΑΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς τιμάς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν τόξων (ἤ γωνιῶν) 30°, 45° καί 60°.

8. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ ημ30° (διά μεθόδου στηριζομένης εἰς τούς ὁρισμούς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου).

Λύσις



(Σχ. Ι3)

"Εστω ὀρθογ. τρίγ. ΑΒΓ (Σχ. Ι3) μέ γων. Α = Ι ὀρθ. καί γων. Β = 30°

Εὕρεσις τοῦ ημ30°

'Εκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν (§ 5)

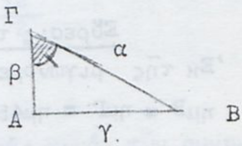
$$\eta\mu B = \eta\mu 30^\circ = \frac{\beta}{\alpha} \quad (\mathrm{I})$$

'Εκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἄν $\hat{B} = 30$ τότε $\alpha = 2\beta$ δηλ. "Αν μία ὀξεῖα γωνία ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 30° τότε ἡ ἀπέναντι κάθετος πλευρά εἶναι τό ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης." 'Αντικαθιστῶμεν τήν τιμήν τοῦ α εἰς τήν (Ι) καί λαμβάνομεν.

$$\eta\mu 30^\circ = \frac{\cancel{\beta}}{2\cancel{\beta}} = \frac{\mathrm{I}}{2}. \text{ Ὥστε.} \quad \boxed{\eta\mu 30^\circ = \frac{\mathrm{I}}{2}}$$

9. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ ημ60° (διά τῆς προηγουμένης μεθόδου).

Λύσις



(Σχ. Ι4)

"Εστω ὀρθογ. τρίγ. ΑΒΓ (Σχ. Ι4) μέ $\hat{A}$ = Ι ὀρθή καί $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

Εὕρεσις τοῦ ημ60°

'Εκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν (§ 3)

$$\eta\mu\Gamma = \eta\mu 60^\circ = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (\mathrm{I})$$

'Εκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἐπειδή $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ θά εἶναι $\hat{B} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ καί συνεπῶς $\alpha = 2\beta$ καί $\beta = \frac{\alpha}{2}$ (2).

Θά εὕρωμεν τώρα τήν τιμήν τοῦ γ συναρτήσει τοῦ α (μέ τό Πυθαγόρ. θεώρημα) καί τήν τιμήν αὐτήν θά ἀντικαστήσωμεν εἰς τήν ἰσότητα (Ι) ἵνα εὕρωμεν τήν τιμήν τοῦ ημ60°.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν κατά τό Πυθαγόρειον θεώρημα.

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad \text{ἤ (λόγῳ τῆς ἰσότητος (2)}$$

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \gamma^2 = \alpha^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\alpha^2}{4} + \frac{\gamma^2}{I} = \frac{\alpha^2}{I} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha^2 + 4\gamma^2 = 4\alpha^2 \quad \text{ἤ}$$

$$4\gamma^2 = 4\alpha^2 - \alpha^2$$

$$4\gamma^2 = 3\alpha^2 \quad \text{ἤ}$$

$$\gamma^2 = \frac{3\alpha^2}{4} \quad \text{καί}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}$$

$$\gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad (3)$$

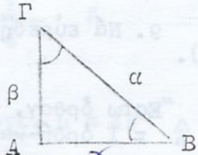
Τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τοῦ γ (συναρτήσει τοῦ α) θέτομεν εἰς τήν (Ι) καί ἔχομεν:

$$\eta\mu\Gamma = \eta\mu 60^\circ = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{I}} = \frac{\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{2\cancel{\alpha}} \quad \text{Ὥστε.} \quad \boxed{\eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ΙΟ. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ ημ45° (διά τῆς ἰδίας, ὡς ἀσκήσεις 8 καί 9, μεθόδου).

Λύσις

Ἔστω ὀρθογ. τριγ. ΑΒΓ (Σχ. Ι5) μέ γων. Α = Ι ὀρθ. καί $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$



(Σχ. Ι5)

Εὕρεσις τοῦ ημ45°

Ἐκ τῆς ρι γωνομετρίας ἔχομεν (§ 3)

$$\eta\mu B = \eta\mu\Gamma = \eta\mu 45^\circ = \frac{\beta}{\alpha} \quad (I)$$

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι ἐπειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ δι' αὐτό τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές καί ἐπομένως ΑΒ = ΑΓ ἤ β=γ θά εὕρωμεν τώρα τό α συναρτήσει τοῦ β.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγ. ΑΒΓ ἔχομεν, κατά τό Πυθαγόρειον θεώρημα:

$$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

$$\beta^2 + \beta^2 = \alpha^2$$

$$2\beta^2 = \alpha^2$$

$$\alpha^2 = 2\beta^2 \quad \text{καί}$$

$$\alpha = \sqrt{2\beta^2} \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha = \beta\sqrt{2}$$

Τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τοῦ α θέτομεν εἰς τήν (Ι) καί ἔχομεν.

$ημΒ = ημ45^o = \frac{β}{β\sqrt{2}} = \frac{Ι}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Ὥστε. $\boxed{ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}}$

ΙΙ. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν συνημιτόνων τῶν τόξων (ἤ γωνιῶν) 30°, 60° καί 45°.

Λύσις

Ι. Εὕρεσις τοῦ συν 30°. (Σχ Ι3)

Ἐπειδή $30^o + 60^o = 90^o$ δι'αὐτό (τύπ.67) ἔχομεν:

$$συν30^o = ημ60^o \quad ἀλλά \quad ημ60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$ἄρα \quad \boxed{συν30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

ΙΙ. Εὕρεσις τοῦ συν 60° (Σχ.Ι4)

Ἐπειδή $30^o+60^o = 90^o$ δι'αὐτό(τύπ.67) ἔχομεν:

$$συν60^o = ημ30^o \quad ἀλλά \quad ημ30^o = \frac{Ι}{2}$$

$$ἄρα \quad \boxed{συν60^o = \frac{Ι}{2}}$$

ΙΙΙ. Εὕρεσις τοῦ συν45° (Σχ.Ι5)

Ἐπειδή $45^o+45^o = 90^o$ δι'αὐτό (τύπος 67 ἔχομεν)

$$συν45^o = ημ45^o \quad ἀλλά \quad ημ45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$ἄρα \quad \boxed{συν45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Παρατήρησις. Ἄν θέλωμεν εὑρίσκομεν τάς τιμάς τῶν συνημιτόνων διά της ἰδίας μεθόδου δι'ἧς εὕρομεν καί τάς τῶν ἡμιτόνων.

Ι2. Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν ἐφαπτομένων τῶν τόξων 30°, 60° καί 45°.

Λύσις

Α΄ Τρόπος.

Μέθοδος στηριζομένη εἰς τόν τύπον $\Big\} \longrightarrow \boxed{εφα = \frac{ημα}{συνα}}$

I. <u>Εὕρεσις εφ30°</u>.

$$\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\eta\mu 30^\circ}{\sigma\upsilon\nu 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$ Ὥστε $\boxed{\varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

II. <u>Εὕρεσις εφ 60°</u>.

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\eta\mu 60^\circ}{\sigma\upsilon\nu 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$ Ὥστε. $\boxed{\varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}}$

III. <u>Εὕρεσις εφ45°</u>

$$\varepsilon\varphi\ 45^\circ = \frac{\eta\mu 45^\circ}{\sigma\upsilon\nu 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1.$$ Ὥστε. $\boxed{\varepsilon\varphi 45^\circ = 1}$

<u>Β΄ Τρόπος.</u>

Μέθοδος στηριζομένη είς τό Πυθαγόρειον θεώρημα καί τούς ὁρισμούς καί τύπους.

I. <u>Εὕρεσις εφ 30°</u>.

Ἐξετάζομεν τό (Σχ. 13)

Ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν $\varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi 30^\circ = \frac{\beta}{\gamma}$ (1)

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εὕρομεν.

ἐκ μέν τῆς <u>ἀσκήσεως 8</u> $\alpha = 2\beta$ καί $\beta = \frac{\alpha}{2}$

ἐκ δέ <u>" " 9</u> $\gamma = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

Τάς τιμάς τῶν β καί γ θέτομεν είς τήν (1) καί ἔχομεν.

$$\varepsilon\varphi\ 30^\circ = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\cancel{2}\cancel{\alpha}}{\cancel{2}\cancel{\alpha}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

<u>Παρατήρησις,</u> Καί μέ τούς δύο τρόπους εὕρομεν τό αὐτό ἀποτέλεσμα.

II. <u>Εὕρεσις εφ60°</u>

Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν (Σχ.14).

$$\varepsilon\varphi 60^\circ = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cancel{2}\cancel{\alpha}\sqrt{3}}{\cancel{2}\cancel{\alpha}} = \sqrt{3}$$

ΙΙΙ. Εὕρεσις εφ45°.

Ὁμοίως ὡς ἄνω ἔχομεν. (Σχ.Ι5).

$$εφ45^\circ = \frac{β}{γ} = \frac{β}{β} = 1.$$

Ι3 . Νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν συνεφαπτομένων τῶν τόξων (ἤ γωνιῶν) 30°, 60° καί 45°.

Λύσις

Α΄ Τρόπος.

Μέθοδος στηριζομένη εἰς τόν τύπον $\rightarrow \boxed{σφα = \frac{συνα}{ημα}}$

Ι. Εὕρεσις σφ 30°

$$σφ30^\circ = \frac{συν30^\circ}{ημ30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$ Ὥστε. $\boxed{σφ30^\circ = \sqrt{3}}$

ΙΙ. Εὕρεσις σφ 60°.

$$σφ60^\circ = \frac{συν60^\circ}{ημ60^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$ Ὥστε. $\boxed{σφ60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

ΙΙΙ. Εὕρεσις σφ 45°.

$$σφ45^\circ = \frac{συν45^\circ}{ημ45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 .$$ Ὥστε. $\boxed{σφ45^\circ = 1}$

Β΄ Τρόπος.

Μέθοδος στηριζομένη εἰς τόν β΄ τρόπον τῆς ἀσκήσεως Ι2.

Γ΄ Τρόπος.

Μέθοδος στηριζομένη εἰς τάς σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο τόξων (ἤ γωνιῶν) συμπληρωματικῶν καθώς καί ἄσκησις ΙΙ.

Ι4. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή ἑκάστης τῶν παραστάσεων .

Α΄ $K_1 = ημ0^\circ + ημ30^\circ + ημ45^\circ + ημ60^\circ + ημ90^\circ$

Β΄ $K_2 = συν0^\circ + συν30^\circ + συν45^\circ + συν60^\circ + συν90^\circ$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις " Γ.Π. Μπακούρου.Α΄ Ἔκδοσις.

Λύσις

Α΄. Θέτομεν εἰς τήν πρώτην σχέσιν ἀντί τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τάς τιμάς των (ἐκ τοῦ Πίνακος σελ. 6) καί ἔχομεν.

$$K_1 = \eta\mu 0^\circ + \eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ + \eta\mu 90^\circ =$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} =$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2}{2} = \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$$

Ἄν τώρα θέσωμεν $\sqrt{2} = 1,41$ καί $\sqrt{3} = 1,73$ μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ ἔχομεν.

$$K_1 = \frac{3+1,41+1,73}{2} = \frac{6,14}{2} = 3,07$$

Β΄. Ἐργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τήν παράστασιν K_1 ἔχομεν.

$$K2 = \sigma\upsilon\nu 0^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ + \sigma\upsilon\nu 45^\circ + \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 90^\circ =$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + 0 = \frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} \text{ ἤ } K_2 = 3,07$$

---

15. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

Α΄ $\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 60^\circ = 1$

Β΄ $\eta\mu 30^\circ\, \eta\mu 45^\circ \eta\mu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{4}$

Λύσις

Θέτομεν εἰς τό α΄ μέλος ἑκάστης ἐκ τῶν ὑπό ἀπόδειξιν ἰσοτήτων ἀντί τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τάς τιμάς των (Πίναξ σελ. 6) καί ἔχομεν:

Α΄. $\eta\mu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$

$$= \frac{1}{4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{καί}$$

Β΄. $\eta\mu 30^\circ \eta\mu 45^\circ \eta\mu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \sigma\upsilon\nu 45^\circ \sigma\upsilon\nu 60^\circ =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{8} + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{8} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{8}\,4} = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

I6. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

Α΄ $\varepsilon\varphi 30^{o} \cdot \varepsilon\varphi 45^{o} \cdot \varepsilon\varphi 60^{o} = I$

Β΄ $\sigma\varphi 30^{o} \cdot \sigma\varphi 45^{o} \cdot \sigma\varphi 60^{o} = I$

Λύσις

Ἐργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τήν ἄσκησιν I4 ἔχομεν

Α΄ $\varepsilon\varphi 30^{o} \varepsilon\varphi 45^{o} \varepsilon\varphi 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot I \cdot \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = I$

Β΄ $\sigma\varphi 30^{o} \sigma\varphi 45^{o} \sigma\varphi 60^{o} = \sqrt{3} \cdot I \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = I$

I7. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι.

$$\frac{\eta\mu^2 30^{o} + \eta\mu^2 45^{o} + \eta\mu^2 60^{o}}{\sigma\upsilon\nu^2 30 + \sigma\upsilon\nu^2 45^{o} + \sigma\upsilon\nu^2 60^{o}} + \frac{\varepsilon\varphi^2 30 + \varepsilon\varphi^2 45 + \varepsilon\varphi^2 60^{o}}{\sigma\varphi^2 30^{o} + \sigma\varphi^2 45 + \sigma\varphi^2 60^{o}} = 2$$

Λύσις

Ὀνομάζομεν, διά συντομίαν, τό α΄ μέλος τῆς ἀπ εικτέας ἰσότητος μέ τό γράμμα Κ καί θέτομεν ἀντί τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τάς τιμάς των (Πίναξ σελ. 6). Οὕτω ἔχομεν :

$$K = \frac{\left(\frac{I}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{I}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + I^2 + (\sqrt{3})^2}{(\sqrt{3})^2 + I^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{I}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{3}{4} + \frac{2}{4} + \frac{I}{4}} + \frac{\frac{I\cancel{3}}{\cancel{9}\,3} + I + 3}{3 + I + \frac{\cancel{3}I}{\cancel{9}\,3}} =$$

$$= \frac{\frac{6}{4}}{\frac{6}{4}} + \frac{\frac{I}{3} + 4}{4 + \frac{I}{3}} = \frac{24}{24} + \frac{4\frac{I}{3}}{4\frac{I}{3}} = I + I = 2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ι8. Νά ἐκφρασθῆ ὁ ἀριθμός 4 συναρτήσει τῶν $εφ45^o$ καί $εφ60^o$

Λύσις

(Σκέψις. Ἐπειδή $εφ45^o = Ι$ καί $εφ60 = \sqrt{3}$ δι᾽αὐτό θά προσπαθήσωμεν νά ἐκφράσωμεν τόν 4 συναρτήσει τῶν Ι καί $\sqrt{3}$. Γράφομεν. $4 = Ι+3 = Ι + (\sqrt{3})^2$ (Ι) [ἀφοῦ $3 = (\sqrt{3})^2$]

Ἀλλά $εφ45^o = Ι$, $εφ60 = \sqrt{3}$, καί $εφ^2 60 = (\sqrt{3})^2$

Κατά ταῦτα ἡ ἰσότης (Ι)

γράφεται $\boxed{4 = εφ45^o + εφ^2 60}$

Οὕτω ὁ 4 ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν $εφ45^o$ καί $εφ60^o$.

Ι9. Νά ἐκφρασθῆ ὁ ἀριθμός 2 συναρτήσει τῶν $σφ45^o$ καί $σφ30^o$.

(Σκέψις. Ἐπειδή $σφ45^o = Ι$ καί $σφ30^o = \sqrt{3}$ δι᾽αὐτό θά προσπαθήσωμεν νά ἐκφράσωμεν τό 2 συναρτήσει τῶν ἀριθμῶν Ι καί $\sqrt{3}$).

Γράφομεν. $2 = 3 - Ι = (\sqrt{3})^2 - Ι$ (Ι) [ἀφοῦ $3 = (\sqrt{3})^2$]

Ἀλλά $σφ45^o = Ι$, $σφ30 = \sqrt{3}$ καί $σφ^2 30 = (\sqrt{3})^2$

Κατά ταῦτα ἡ ἰσότης (Ι)

γράφεται $\boxed{2 = σφ^2 30 - σφ45}$

Οὕτω ὁ 2 ἐκφράζεται συναρτήσει τῶν $σφ45^o$ καί $σφ30^o$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

ΟΜΑΣ ΤΡΙΤΗ

Ἀσκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ ἡ μ ι τ ό ν ο υ καί σ υ ν η μ ι τ ό ν ο υ μιᾶς γωνίας ἤ ἑνός τόξου α καί λυόμεναι διά τῆς χρήσεως τῆς θεμελιώδους σχέσεως (3) καθώς καί τῶν σχέσεων (9) καί (Ι5).

20. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $ημ^2α = Ι - συν^2α$

Λύσις

(Σκέψις. Παρατηροῦντες μετά προσοχῆς τήν ἀποδεικτέαν ἰσότητα διαπιστώνομεν ὅτι ὑπάρχη τριγωνομετρική τίς σχέσις καί μάλιστα ἡ θεμελιώδης τοιαύτη $συν^2α + ημ^2α = Ι$, ἡ ὁποία ὁμοιάζει μέ τήν ἀποδεικτέαν ἰσότητα ἀπό ἀπόψεως τριγωνομετρικῶν ἐννοιῶν.

Κατά ταῦτα δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν κατά δύο τρόπους διά νά ἀποδείξωμεν τήν ἄσκησίν μας.

Ἀπόδειξις.

Α΄ Τρόπος. (Ἐφαρμόζομεν τόν τρίτον τρόπον § Ι7)

Λαμβάνομεν τήν θεμελιώδη σχέσιν

$$συν^2α + ημ^2α = Ι$$

καί μεταφέροντες τό $συν^2α$ εἰς τό β΄ μέλος (διότι θέλομεν νά παραμείνη μόνον του τό $ημ^2α$ εἰς τό α΄ μέλος, καθώς παρατηροῦμεν εἰς τήν ἀποδεικτέαν) μέ ἀλλαγμένον τό σημεῖον ἔχομεν

$$ημ^2α = Ι - συν^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Β΄ Τρόπος. (Ἐφαρμόζομεν τόν τέταρτον τρόπον § Ι7)

Λαμβάνομεν τήν δοθεῖσαν σχέσιν

$$ημ^2α = Ι - συν^2α$$

καί μεταφέροντες τό $-συν^2α$ εἰς τό α΄ μέλος μέ ἀλλαγμένον τό σημεῖον ἔχομεν.

$$συν^2α+ημ^2α = Ι$$

Συμπέρασμα. Ἀφοῦ λοιπόν ἀπό τήν δοθεῖσαν σχέσιν καταλήξαμεν εἰς μίαν θεμελιώδη (δηλαδή ἀληθῆ σχέσιν) ἕπεται ὅτι καί ἡ δοθεῖσα σχέσις εἶναι ἀληθής. ὅ.ἔ.δ.

21. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $συν^2α = Ι-ημ^2α$

Λύσις

Α΄ Τρόπος. Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 20.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$συν^2α+ημ^2α = Ι \quad καί \quad συν^2α = Ι-ημ^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Β΄ Τρόπος. Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 20.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$συν^2α = Ι-ημ^2α \quad καί \quad συν^2α+ημ^2α = Ι \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Παρατήρησις. Τάς ὑπό ἀπόδειξιν παραστάσεις τῶν ἀσκήσεων 20 καί 21 δυνάμεθα νά τάς λάβωμεν καί ὡς τύπους δι' ἄλλας ἀσκήσεις. Ὡς τύπους μάλιστα τάς ἀναγράψαμεν ὑπ' αὔξοντα ἀριθμόν (9) καί (15).

22. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $2ημ^2α-Ι = Ι-2συν^2α$

Λύσις

Α΄ Τρόπος. (Ἐφαρμόζομεν τόν πρῶτον τρόπον § 17).

(Σκέψις. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τό β΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος κυριαρχεῖ τό συνα. Δι' αὐτό θέτομεν εἰς τό α΄ μέλος ὅπου $ημ^2α = Ι-συν^2α$, ἐκ τοῦ τύπου (15), ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.)

Ἀπόδειξις.

$$2ημ^2α-Ι = 2(Ι-συν^2α)-Ι = 2-2συν^2α-Ι=Ι-2συν^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Β΄ Τρόπος. (Θέτομεν εἰς τό α΄ μέλος ὅπου $Ι = συν^2α+ημ^2α$. Ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.).

Ἀπόδειξις.

$$2ημ^2α-Ι = 2ημ^2α -(συν^2α+ημ^2α) =$$

$$= 2ημ^2α - συν^2α-ημ^2α = ημ^2α-συν^2α =$$

$$= Ι-συν^2α-συν^2α = Ι-2συν^2α \quad . \quad ὅ.ἔ.δ.$$

Γ΄ Τρόπος. ('Εφαρμόζομεν τόν τέταρτον τρόπον § Ι7).

Κατά ταῦτα ἔχομεν

$$2ημ^2α-Ι = Ι-2συν^2α \quad ἤ$$

$$2ημ^2α+2συν^2α = Ι+Ι \quad ἤ \text{ (κοινός παράγων τό 2)}$$

$$2(ημ^2α+συν^2α) = 2 \quad ἤ \text{ (διότι } συν^2α+ημ^2α=Ι \text{)}$$

$$2.Ι = 2 \quad ἤ$$

$$2 = 2$$

Συμπέρασμα. 'Αφοῦ ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως καταλήξαμεν εἰς ἀληθῆ ἰσότητα ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀληθής.

23. Νά ἀποδειχθῆ. $2συν^2α-Ι = Ι-2ημ^2α$

Λύσις

'Η ἄσκησις 23 ἀποδεικνύεται ὅπως ἀκριβῶς καί ἡ ἄσκησις 22. 'Εδῶ θά τήν ἀποδείξωμεν μόνον μέ τόν Α΄ τρόπον.

'Απόδειξις

$$2συν^2α-Ι = 2(Ι-ημ^2α) - Ι =$$

$$= 2-2ημ^2α-Ι = Ι-2ημ^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

24. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $συν^2α-ημ^2α = 2συν^2α-Ι$

Λύσις

Σκέψις. 'Επειδή εἰς τό β΄ μέλος κυριαρχεῖ τό $συν^2α$ δι' αὐτό λαμβάνομεν τό α΄ μέλος καί ἀντικαθιστῶμεν τό $ημ^2α$ συναρτήσει τοῦ $συν^2α$. Πρός τοῦτο θέτομεν $ημ^2α= Ι-συν^2α$ (τύπος (Ι5)) κατόπιν ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.

'Απόδειξις

Α΄ Τρόπος. $συν^2α-ημ^2α = συν^2α-(Ι-συν^2α) =$

$$= συν^2α-Ι+συν^2α = 2συν^2α-Ι$$

Β΄ Τρόπος. Συνδυάζομεν τήν δοθεῖσαν σχέσιν καί τήν θεμελιώδη τοιαύτην (Ι) καί τάς προσθέτομεν κατά μέλη κλπ.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$\left.\begin{array}{l} συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - I \\ \text{καί} \quad συν^2α + ημ^2α = I \end{array}\right\}$$

$$συν^2α \cancel{-ημ^2α} + συν^2α \cancel{+ημ^2α} = 2συν^2α - I + I \quad \text{ἤ}$$

$$2συν^2α = 2συν^2α$$

<u>Συμπέρασμα.</u> Ἀφοῦ, ἐφαρμόσαντες τούς τρίτον καί τέταρτον τρόπον § Ι7 καταλήξαμεν εἰς μίαν ἀληθῆ ἰσότητα δι'αὐτό καί ἡ δοθεῖσα σχέσις εἶναι ἀληθής.

<u>Γ΄ Τρόπος.</u> $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - I$ ἤ

$$συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - (συν^2α + ημ^2α)$$

$$συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - συν^2α - ημ^2α \quad \text{ἤ}$$

$$συν^2α - ημ^2α = συν^2α - ημ^2α$$

<u>Συμπέρασμα.</u> Ὅπως τό τῆς ἀσκήσεως 22.

---

25. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $συν^2α - ημ^2α = I - 2ημ^2α$

Λύσις.

Ἡ ἄσκησις 25 ἀποδεικνύεται ὅπως ἀκριβῶς καί ἡ ἄσκησις 24

Ἐδῶ θά τήν ἀποδείξωμεν μόνον μέ τόν Α΄ τρόπον.

Ἀπόδειξις

$$συν^2α - ημ^2α = I - ημ^2α - ημ^2α = I - 2ημ^2α \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

---

26. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $(ημα + συνα)^2 = I + 2ημα.συνα.$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> Καθώς παρατηροῦμεν τό α΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος εἶναι τό τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν. Ἀναπτύσσομεν τοῦτο κατά τόν τύπον (Ι) (Σελ.33) καί ἐκτελοῦντες τάς καταλλήλους ἀντικαταστάσεις καταλήγομεν εἰς τό β΄μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις.

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

(ἐπειδή $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1$) $= 1+2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

27. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 1-2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha$

Λύσις

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς καί προηγουμένη ἄσκησις. Ἐφαρμόζομεν τόν τύπον (2). (Σελ. 33).

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις

$$(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = \eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

('Επειδή $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$) $= 1-2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha.$ ὅ.ἔ.δ.

28. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 2$$

Λύσις

Σκέψις. Ἡ παροῦσα ἄσκησις εἶναι συνδυασμός τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων (26) καί (27).

'Απόδειξις

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 =$$

$$= (\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha)+(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha) =$$

$$= \eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= 1+1 = 2.$$ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις. Ἡ ἐκφώνησις τῆς ἀσκήσεως 28 ἦτο δυνατόν νά ἀναγραφῆ καί ὡς ἑξῆς.

"Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις.

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2+(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2$$

εἶναι ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς τῶν ημα καί συνα".

"'Ασκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

" Τοῦτο σημαίνει ὅτι "πρέπει ἡ δοθεῖσα παράστασις νά ἰσοῦται μέ μίαν ἄλλην παράστασιν μή περιέχουσαν τά ημα καί συνα". Π.χ. νά ἰσοῦται μέ ἕνα ἀριθμόν ὅπως καί πράγματι ἰσοῦται μέ τόν 2 ὡς ἀπεδείχθη ἐκ τῆς λύσεως.

Εἰς τό ἑξῆς λοιπόν ὅταν συναντῶμεν ἀσκήσεις κατά τήν ὡς ἄνω ἐκφώνησιν θά πρέπει νά ἀποδεικνύωμεν ὅτι αἱ δοθεῖσαι παραστάσεις εἶναι ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ι ἐκείνου τοῦ ὁποίου καθορίζει ἡ ἐκφώνησις. Δηλαδή θά πρέπει νά ἀποδεικνύωμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοῦται μέ κάτι μή περιέχον ἐκεῖνα τῶν ὁποίων θέλομεν νά εἶναι ἀνεξάρτητος ἡ δοθεῖσα παράστασις.

29. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2-(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = 4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

Λύσις

Α΄ Τρόπος.

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς καί προηγουμένως ἄσκησις

Ἀπόδειξις

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 -(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 =$$

$$= (\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)-(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)=$$

$$= (1+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha)-(1-2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha) =$$

$$= \cancel{1}+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \cancel{1}+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= 4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha \quad . \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄ Τρόπος.

Σκέψις. Καθώς παρατηροῦμεν τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος εἶναι διαφορά δύο τετραγώνων. Ἀναλύομεν τότε τό α΄ μέλος εἰς γινόμενον κατά τόν τύπον 9 (σελ. 34) καί ἐκτελοῦντες τάς καταλλήλους ἀντικαταστάσεις καταλήγομεν εἰς τό β΄ μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις

$$(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)^2-(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)^2 =$$

$$= \left[(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)+(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)\right]\left[(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)-(\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha)\right] =$$

$$= \left[\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha\right]\left[\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha\right] =$$

$$= \left[2\eta\mu\alpha\right]\left[2\sigma\upsilon\nu\alpha\right] = 4\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$$

30. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{I}{\eta\mu^2\alpha}+\dfrac{I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{I}{\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

Λύσις

Σκέψις. Προσθέτομεν τά κλάσματα τοῦ α΄μέλους τρέποντες αὐτή προηγουμένως είς ὁμώνυμα καί διά καταλλήλου ἀντικαταστάσεως καταλήγομεν είς τό β΄μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις

$$\dfrac{I}{\eta\mu^2\alpha}+\dfrac{I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha}=$$

$$=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\ \alpha^2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=\dfrac{I}{\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha}\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

31. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha=\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Λύσις

Σκέψις. Ἀναλύομεν τό α΄μέλος είς γινόμενον κατά τόν τύπον 9 (Σελ. 34) καί ἐκτελοῦντες τάς καταλλήλους ἀντικαταστάσεις καταλήγομεν είς τό β΄μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις

$$\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha=(\eta\mu^2\alpha)^2-(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2=$$

$$=(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\,(\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\quad(\text{Ἀλλά }\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=I)$$

$$=I.(\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=\eta\mu^2\alpha-\sigma\upsilon\nu^2\alpha\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

32. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha=I-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Λύσις

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς καί προηγουμένη ἄσκησις.

'Απόδειξις

$$ημ^4α-συν^4α = (ημ^2α+συν^2α)\cdot(ημ^2α-συν^2α) =$$

$$= I.(ημ^2α-συν^2α) = ημ^2α-συν^2α = \text{(θέτομεν τώρα } ημ^2α=I-συν^2α)$$

$$= I-συν^2α-συν^2α = I-2συν^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

33. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $ημ^4α-συν^4α = 2ημ^2α-I$

Λύσις

<u>Σκέψις</u>. 'Ομοίως ὡς καί προηγουμένη ἄσκησις.

'Απόδειξις

$$ημ^4α-συν^4α=(ημ^2α+συν^2α)\ (ημ^2α-συν^2α) =$$

$$= I.(ημ^2α-συν^2α) = ημ^2α-συν^2α = \text{(θέτομεν τώρα } συν^2α=I-ημ^2α)$$

$$= ημ^2α-(I-ημ^2α) = ημ^2α-I+ημ^2α = 2ημ^2α-I$$

34. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $ημ^4α-ημ^2α = -ημ^2α\ συν^2α$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> 'Εξάγομεν κοινόν παράγοντα εἰς τό α΄μέλος τό $ημ^2α$ καί δι'ἀντικαταστάσεως προχωροῦμεν καί φθάνομεν εἰς τό β΄μέλος.

'Απόδειξις

$ημ^4α-ημ^2α =$ (κοινός παράγων τό $ημ^2α$)

$= ημ^2α(ημ^2α-I) =$ (νόμος ἀντιμεταθέσεως εἰς παρένθεσιν).

$= ημ^2α(-I+ημ^2α)=$ (τό - ἐκτός νέας παρενθέσεως)

$= ημ^2α\left[-(I-ημ^2α)\right] =$ (τύπος (9) $I-ημ^2α=συν^2α$)

$= ημ^2α\left[-συν^2α\right] =$ (πολλαπλασιασμός).

$= -ημ^2ασυν^2α$ ὅ.ἔ.δ.

35. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $ημ^4α-ημ^2α = συν^4α-συν^2α$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος</u>. ('Εφαρμόζομεν τόν πέμπτον τρόπον § I7).

'Απόδειξις.

α' μέλος $= \eta\mu^4\alpha - \eta\mu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha\,(\eta\mu^2\alpha - I) =$ (βλέπε καί προηγουμένη ἄσκησιν).

$= \eta\mu^2\alpha\,(-\sigma\upsilon\nu^2\alpha) = -\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

β' μέλος $= \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha(\sigma\upsilon\nu^2\alpha - I) =$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha(-I + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \sigma\upsilon\nu^2\alpha\left[-(I - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\right] =$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha\left[-\eta\mu^2\alpha\right] = -\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha.$

Συμπέρασμα. 'Αφοῦ λοιπόν ἀπό ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καταλήγομεν εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα ἕπεται ὅτι:

α' μέλος $= \beta'$ μέλος

δηλαδή ἡ δοθεῖσα σχέσις εἶναι ἀληθής.

Β΄ Τρόπος. ('Εφαρμόζομεν τόν τέταρτον τρόπον § Ι7).

'Απόδειξις

$\eta\mu^4\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ἤ

$\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ἤ (διαφορά τετραγώνων εἰς α' μέλος).

$(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)(\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ἤ

$I.(\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha) = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ ἤ

$\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

'Αφοῦ καταλήξαμεν εἰς ἴσα καί ἡ ὑπό ἀπόδειξιν ἰσότης εἶναι ἀληθής.

36. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = -\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Λύσις

'Η ἄσκησις αὐτή ἀποδεικνύεται ἀκριβῶς ὅπως καί ἡ ἄσκησις 34.

---

37. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$ημα + συνα - ημ^3α - συν^3α = ημα\, συνα\, (ημα + συνα)$$

Λύσις

<u>Σκέψις</u>. Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος, ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα, καθ' ὁμάδας. Κατόπιν ἐκτελοῦμεν ἀντικαταστάσεις, ἐξάγομεν ἐκ νέου κοινόν παράγοντα καί καταλήγομεν εἰς τό β΄ μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις.

$$ημα + συνα - ημ^3α - συν^3α =$$

$$= ημα(I - ημ^2α) + συνα(I - συν^2α) =$$

$$= ημα.συν^2α + συνα.ημ^2α =$$

(κοινός παράγων τό ημα συνα).

$$= ημα\, συνα\, (συνα + ημα) = ημα\, συνα(ημα + συνα)$$

ὅ.ἔ.δ.

38. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$2συν^4α - 2συν^2α = συν^4α + ημ^4α - I$$

Ἀπόδειξις.

<u>Α΄ Τρόπος</u>. (Ἀπό α΄ μέλος εἰς β΄ τοιοῦτον).

$2συν^4α - 2συν^2α =$ (ἐφαρμόζομεν ἀναλυτικήν ἰδιότητα)

$= συν^4α + συν^4α - συν^2α - συν^2α =$ (" νόμον ἀντιμεταθέσεως).

$= συν^4α - συν^2α + συν^4α - συν^2α =$ (κοινόν παράγοντα)

$= συν^4α - συν^2α(I - συν^2α) - συν^2α =$ (ἀντικαταστάσεις).

$= συν^4α - συν^2α.ημ^2α - (I - ημ^2α) =$ (ἄρσις παρενθέσεων).

$= συν^4α - συν^2α\, ημ^2α - I + ημ^2α =$ (ἀντικατάστασις).

$= συν^4α - (I - ημ^2α)ημ^2α - I + ημ^2α =$

$= συν^4α - \cancel{ημ^2α} + ημ^4α - I + \cancel{ημ^2α} =$

$= συν^4α + ημ^4α - I$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> (Ἐφαρμόζομεν τέταρτον τρόπον § 17).

$2συν^4α - 2συν^2α = συν^4α + ημ^4α - 1$ ἤ

$2συν^4α - συν^4α - ημ^4α - 2συν^2α + 1 = 0$ ἤ

$συν^4α - ημ^4α - 2συν^2α + 1 = 0$ ἤ

$(συν^4α - ημ^4α) - 2συν^2α + 1 = 0$ ἤ

$(συν^2α + ημ^2α)(συν^2α - ημ^2α) - 2συν^2α + 1 = 0$ ἤ

$1.(συν^2α - ημ^2α) - 2συν^2α + 1 = 0$ ἤ

$συν^2α - \cancel{ημ^2α} - 2συν^2α + \cancel{ημ^2α} + συν^2α = 0$ ἤ

$2συν^2α - 2συν^2α = 0$ ἤ $0 = 0$

Ἀφοῦ καταλήξαμεν εἰς ἰσότητα ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα σχέσις εἶναι ἀληθής.

39. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{συνα + ημα}{συνα - ημα} + \frac{συνα - ημα}{συνα + ημα} = \frac{2}{συν^2α - ημ^2α}$$

Λύσις.

<u>Σκέψις</u>. Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος καί τρέποντες τά ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα προχωροῦμεν διά πράξεων κλπ. καί φθάνομεν εἰς τό β΄ μέλος.

Ἀπόδειξις.

$$\overset{συνα+ημα}{\frac{συνα + ημα}{συνα - ημα}} + \overset{συνα-ημα}{\frac{συνα - ημα}{συνα + ημα}} =$$

$$= \frac{(συνα + ημα)^2}{(συνα + ημα)(συνα - ημα)} + \frac{(συνα - ημα)^2}{(συνα + ημα)(συνα - ημα)} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2 + (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu\alpha\,\eta\mu\alpha + \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \frac{2(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{2 \cdot 1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

40. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = \frac{4\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}$$

Λύσις.

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς καί ἡ προηγουμένη ἄσκησις

Ἀπόδειξις.

$$\overset{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}} - \overset{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2 - (\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)^2}{(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\cancel{συν^2α} + 2ημα\,συνα + \cancel{ημ^2α} - \cancel{συν^2α} + 2ημα\,συνα - \cancel{ημ^2α}}{συν^2α - ημ^2α} =$$

$$= \frac{4ημα\,συνα}{συν^2α - ημ^2α} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

4I. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{I + συνα}{ημ^2α} = \dfrac{I}{I - συνα}$

Λύσις

Α΄ Τρόπος. ('Εφαρμόζομεν τόν τέταρτον τρόπον § I7).

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις.

$$\frac{I + συνα}{ημ^2α} = \frac{I}{I - συνα} \quad ἤ$$

$$I.ημ^2α = (I + συνα)(I - συνα) \quad ἤ$$

$$ημ^2α = I - συν^2α \quad καί \quad συν^2α + ημ^2α = I$$

'Αφοῦ λοιπόν ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως καταλήξαμεν εἰς τήν ἀληθῆ θεμελιώδη ἕπεται ὅτι καί ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀληθής.

Β΄ Τρόπος. ('Εφαρμόζομεν τόν τρίτον τρόπον § I7).

Λαμβάνομεν τήν θεμελιώδη σχέσιν

$συν^2α + ημ^2α = I$ (ταύτην γράφομεν ὡς ἑξῆς.)

$ημ^2α = I - συν^2α$ ἤ (ἐπειδή $I = I^2$)

$ημ^2α = I^2 - συν^2α$ ἤ (διαφορά τετραγώνων).)

$ημ^2α = (I + συνα)(I - συνα)$ ἤ (δι'ἐναλλαγῆς τῶν μελῶν)

$(I + συνα)\ (I - συνα) = ημ^2α$ ἤ

(διά διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ταύτης διά τοῦ γινομένου τῶν παρονομαστῶν τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος δηλαδή διά τοῦ $ημ^2α(Ι - συνα)$).

$$\frac{(Ι + συνα)\cancel{(Ι - συνα)}}{ημ^2α\ \cancel{(Ι - συνα)}} = \frac{ημ^2α}{ημ^2α\ (Ι - συνα)} \quad ἤ$$

$$\frac{Ι + συνα}{ημ^2α} = \frac{Ι}{Ι - συνα} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

42. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{Ι + συνα}{ημα} = \dfrac{ημα}{Ι - συνα}$

Λύσις

Ἡ ἄσκησις αὐτή ἀποδεικνύεται καθώς καί ἡ προηγουμένη ἄσκησις 4Ι.

Ἀπόδειξις.

(Μέ τόν Α΄τρόπον τῆς ἀσκήσεως 4Ι)

$$\frac{Ι + συνα}{ημα} = \frac{ημα}{Ι - συνα} \quad ἤ$$

$$ημα\ ημα = (Ι + συνα)\ (Ι - συνα) \quad ἤ$$

$$ημ^2α = Ι - συν^2α \quad ἤ$$

$$συν^2α + ημ^2α = Ι$$

('Αφοῦ λοιπόν ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως καταλήξαμεν εἰς τήν ἀληθῆ θεμελιώδη ἔπεται ὅτι καί ἡ δοθεισα είναι ἀληθής.)

43. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{Ι + ημα}{συν^2α} = \dfrac{Ι}{Ι - ημα}$

Λύσις

Ὁμοίως ὡς καί ἡ ἄσκησις 4Ι .

'Απόδειξις.

(Μέ τόν Α΄τρόπον τῆς ἀσκήσεως 4Ι).

$$\frac{I + ημα}{συν^2α} = \frac{I}{I - ημα} \quad ἤ$$

$$I.συν^2α = (I + ημα)(I - ημα) \quad ἤ$$

$$συν^2α = I^2 - ημ^2α \quad ἤ$$

$$συν^2α = I - ημ^2α \quad ἤ$$

$$συν^2α + ημ^2α = I$$

'Αφοῦ λοιπόν ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως καταλήξαμεν εἰς τήν ἀληθῆ θεμελιώδη ἕπεται ὅτι καί ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀληθής.

44. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\frac{I + ημα}{συνα} = \frac{συνα}{I - ημα}$$

Λύσις

'Ομοίως ὡς ἄσκησις 4Ι.
('Εφαρμόζομεν τόν Α΄τρόπον τῆς ἀσκήσεως 4Ι.)

'Απόδειξις.

$$\frac{I + ημα}{συνα} = \frac{συνα}{I - ημα} \quad ἤ$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha = (I + \eta\mu\alpha)\,(I - \eta\mu\alpha) \quad \mathring{\eta}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = I - \eta\mu^2\alpha \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = I$$

᾿Αφοῦ καταλήξαμεν εἰς ἀληθῆ σχέσιν, τήν θεμελιώδη, ἄρα καί ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀληθής.

ΟΜΑΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν τεσσάρων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν, (ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης καί συνεφαπτομένης) μιᾶς γωνίας α ἤ ἑνός τόξου α καί λυόμεναι διά τῆς χρήσεως.

α΄) τῶν θεμελιωδῶν σχέσεων (3)(4)(5).

β΄) τῆς σχέσεως $εφα.σφα = I$ καί

γ΄) τῶν σχέσεων (9) μέχρι καί (30).

45. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶσαν ὀξεῖαν γωνίαν α ἀληθεύει ἡ ἰσότης $I+εφ^2α = \frac{I}{συν^2α}$ ἤ γενικῶς

Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $I+ εφ^2α = \frac{I}{συν^2α}$

Λύσις (ὑποδειγματικῶς)

Σκέψις. 'Επειδή ἐκ τοῦ πρώτου μέλους τῆς δοθείσης ἰσότητος θέλομεν νά καταλήξωμεν εἰς τό β΄ μέλος ὅπου ὑπάρχει μόνον τό συνα δι'αὐτό ἐνεργοῦμεν ὡς ἑξῆς.

Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος καί ἀντικαθιστῶμεν τήν εφα θέτοντες $εφα = \frac{ημα}{συνα}$ (διότι ὡς παρατηροῦμεν αὐτή ἡ ἀντικατάστασις μᾶς ἐξυπηρετεῖ ἐδῶ) ἐκτελοῦμεν πράξεις καί νέας καταλλήλους ἀντικαταστάσεις καί καταλήγομεν εἰς τό β΄ μέλος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν

'Απόδειξις

$$I+εφ^2α = I+\left(\frac{ημα}{συνα}\right)^2 = I+\frac{ημ^2α}{συν^2α} =$$

$$= \frac{συν^2α}{συν^2α}+\frac{ημ^2α}{συν^2α} = \frac{συν^2α+ημ^2α}{συν^2α} = \frac{I}{συν^2α} \qquad ὅ.ἔ.δ.$$

" 'Ασκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π. Μπακοῦρου, Α΄ 'Εκδοσις.

46. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $1+\sigma\varphi^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}$

Λύσις

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 45.

Ἀπόδειξις

$$1+\sigma\varphi^2\alpha = 1+\left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2 = 1+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

47. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = 1+\sigma\varphi^2\alpha$

Λύσις

Α΄ Τρόπος. $\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}$ = (ἀφοῦ $\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha = 1$)

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = 1+\sigma\varphi^2\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ}$$

Β΄ Τρόπος. $\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}}\right)^2} =$

$$= \frac{1}{\frac{1}{1+\sigma\varphi^2\alpha}} = 1 : \frac{1}{1+\sigma\varphi^2\alpha} = 1 . \frac{1+\sigma\varphi^2\alpha}{1} =$$

$$= 1+\sigma\varphi^2\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Γ΄ Τρόπος. Ἀπό τό β΄ μέλος εἰς τό α΄ (ἔχει γραφῆ ὡς ἄσκησις 46).

48. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = I+\varepsilon\varphi^2\alpha$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u> $\frac{I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$

$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = I+\varepsilon\varphi^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> $\frac{I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$

$= \frac{I}{\left(\frac{I}{\sqrt{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}}\right)^2} = \frac{I}{\frac{I}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}} = I : \frac{I}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} =$

$= I \cdot \frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{I} = I+\varepsilon\varphi^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Γ΄ Τρόπος.</u> Ἀπό τό β΄ μέλος εἰς τό α΄ (ἔχει γραφῆ ὡς ἄσκησις 45).

49. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\sigma\varphi^2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u>

<u>Σκέψις.</u> Ἐπειδή εἰς τό β΄ μέλος θέλομεν τήν $\varepsilon\varphi^2\alpha$ δι'αὐτό ἀντικαθιστῶμεν εἰς τό α΄ μέλος τήν $\sigma\varphi^2\alpha$ θέτοντες $\sigma\varphi^2\alpha = \frac{I}{\varepsilon\varphi^2\alpha}$ κλπ.

Ἀπόδειξις

$$\frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\frac{I}{I}+\frac{I}{\varepsilon\varphi^2\alpha}} = \frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+I}{\varepsilon\varphi^2\alpha}} = \frac{\frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{I}}{\frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)}{1\cdot(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)} = \varepsilon\varphi^2\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Β΄ Τρόπος.</u> Θέτομεν εἰς τό α΄μέλος $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ καί $\sigma\varphi^2\alpha = \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}$ κλπ.

'Απόδειξις

$$= \frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{1+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{1+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}+\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}} = \frac{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha}} = \frac{1.\eta\mu^2\alpha}{1.\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

50. Νά ἀποδειχθῇ $\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha = \dfrac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> 'Ομοίως ὡς ἄσκησις 45.

'Απόδειξις

$$\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

51. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}+\dfrac{1}{\sigma\varphi\alpha}=\dfrac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}$

Λύσις.

Α΄. Τρόπος.

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 45.

Ἀπόδειξις

$$\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{1}{\sigma\varphi\alpha}=\frac{1}{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}+\frac{1}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\overset{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\eta\mu\alpha}+\frac{\overset{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}\qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄. Τρόπος.

Σκέψις. Προσθέτομεν τά κλάσματα τρέποντες αὐτά προηγουμένως εἰς ὁμώνυμα. κλπ.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{\overset{\sigma\varphi\alpha}{1}}{\varepsilon\varphi\alpha}+\frac{\overset{\varepsilon\varphi\alpha}{1}}{\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi\alpha}+\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}{1}=\left(\begin{array}{l}\text{τύπος (8)}\\ \varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi\alpha=1\end{array}\right)$$

$$=\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\overset{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\eta\mu\alpha}+\frac{\overset{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}=$$

$$=\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1}{\eta\mu\alpha.\sigma\upsilon\nu\alpha}\qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

52. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha\,(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)=1$

Λύσις

Σκέψις. (Ἀπό α΄ μέλος εἰς β΄ τοιοῦτον).

'Απόδειξις.

$$\text{συν}^2\alpha(\text{I}+\text{εφ}^2\alpha) = (\text{ἐπιμεριστική ἰδιότης})$$

$$= \text{συν}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha.\text{εφ}^2\alpha =$$

$$= \text{συν}^2\alpha+\cancel{\text{συν}^2\alpha}\cdot\frac{\text{ημ}^2\alpha}{\cancel{\text{συν}^2\alpha}} = \text{συν}^2\alpha+\text{ημ}^2\alpha = \text{I} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

---

53. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\text{ημ}^2\alpha(\text{I}+\text{σφ}^2\alpha) = \text{I}$

Λύσις

Σκέψις. ('Από α'μέλος εἰς β'τοιοῦτον).

'Απόδειξις.

$$\text{ημ}^2\alpha(\text{I}+\text{σφ}^2\alpha) = (\text{ἐπιμεριστική ἰδιότης.}$$

$$= \text{ημ}^2\alpha+\text{ημ}^2\alpha.\text{σφ}^2\alpha =$$

$$= \text{ημ}^2\alpha+\cancel{\text{ημ}^2\alpha}.\frac{\text{συν}^2\alpha}{\cancel{\text{ημ}^2\alpha}} = \text{ημ}^2\alpha+\text{συν}^2\alpha = \text{I} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

---

54. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\text{ημα συνα εφα σφα} = \text{ημα συνα}$$

Λύσις

Σκέψις. 'Επειδή εἰς τό β'μέλος δέν χρειαζόμεθα εφα καί σφα λαμβάνομεν τό α'μέλος ἀντικαθιστῶμεν τάς εφα καί σφα συν.- αρτήσει τῶν ημα καί συνα καί ἐκτελοῦντες πράξεις κλπ. καταλήγομεν εἰς τό β'μέλος.

'Απόδειξις.

Α'. Τρόπος. $\text{ημα συνα εφα σφα} = \text{ημασυνα}.\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}\cdot\frac{\text{συνα}}{\text{ημα}} =$

$$= \frac{\cancel{\text{ημασυνα}\text{ημασυνα}}}{\cancel{\text{συναημα}}} = \text{ημα.συνα} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β'. Τρόπος. $\text{ημασυναεφασφα} =$

$= \text{ημα.συνα.I} = (\text{διότι εφα.σφα} = \text{I} \text{ τύπος (8)})$

$= \text{ημα.συνα} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$

---

55. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha = 1$$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> Ὁμοίως ὡς καί προηγουμένη ἄσκησις.

Ἀπόδειξις.

$$\eta\mu^2\alpha\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha\varepsilon\varphi^2\alpha =$$

$$= \cancel{\eta\mu^2}\alpha . \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\cancel{\eta\mu^2\alpha}} + \cancel{\sigma\upsilon\nu^2}\alpha \frac{\eta\mu^2\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha = 1$$

56. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\eta\mu^2\alpha\ \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \sigma\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha$$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> Ὁμοίως ὡς καί προηγουμένη ἄσκησις.

Ἀπόδειξις

$$\eta\mu^2\alpha\ \underbrace{\varepsilon\varphi\alpha}_{\eta\mu\alpha} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \underbrace{\sigma\varphi\alpha}_{\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \eta\mu^2\alpha . \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha . \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\eta\mu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^4\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu^4\alpha - \sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{(\eta\mu^2\alpha)^2 - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\ (\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{1\ (\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$ (Χωρίζομεν τό κλάσμα εἰς δύο κλάσματα)

$$= \frac{\cancel{\eta\mu^2}\alpha}{\cancel{\eta\mu\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2}\alpha}{\eta\mu\alpha\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha$$

ὅ.ἔ.δ.

57. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}+\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha}=\mathrm{I}$

Λύσις.

<u>Α΄ Τρόπος.</u>

<u>Σκέψις.</u> Λαμβάνομεν τό α΄μέλος, προσθέτομεν τά κλάσματα τρέποντες αὐτά εἰς ὁμώνυμα κλπ.

Ἀπόδειξις.

$$\overbrace{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}}^{\mathrm{I}+\alpha\varphi^2\alpha}+\overbrace{\frac{\sigma\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha}}^{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha(\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha)+\sigma\varphi^2\alpha(\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha)}{(\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha)\ (\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha)}=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha.\sigma\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha.\varepsilon\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha+\varepsilon\varphi^2\alpha.\sigma\varphi^2\alpha}=$$

$$=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha+\mathrm{I}}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha+\mathrm{I}}=\frac{2+\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha}{2+\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha}=\mathrm{I}\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Β΄ Τρόπος.</u> Λαμβάνοντες τούς τύπους.

(2I) $\eta\mu\alpha=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sqrt{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ καί (27) $\sigma\upsilon\nu\alpha=\dfrac{\sigma\varphi\alpha}{\sqrt{\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha}}$

καί ὑψοῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἰς τό τετράγωνον ἔχομεν:

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}\quad\text{καί}\quad\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{\sigma\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha}$$

Ἐναλλάσσομεν τώρα τά μέλη καί ἔχομεν:

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\varepsilon\varphi^2\alpha}=\eta\mu^2\alpha\quad\text{καί}\quad\frac{\sigma\varphi^2\alpha}{\mathrm{I}+\sigma\varphi^2\alpha}=\sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

Προσθέτομεν τάς ἰσότητας αὐτάς κατά μέλη καί λαμβάνομεν:

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}+\frac{\sigma\varphi^2\alpha}{I+\sigma\varphi^2\alpha}=\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha=I$$ ὅ.ἔ.δ.

58. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u> Λαμβάνομεν τό α΄μέλος θέτομεν ὅπου $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}$, ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.

Ἀπόδειξις

$$\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{I-\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}}{I+\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}}=\frac{\frac{I}{I}^{(\sigma\varphi\alpha}-\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}^{(I}}{\frac{I}{I}^{(\sigma\varphi\alpha}+\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}^{(I}}=$$

$$=\frac{\frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha}-\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}}{\frac{\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha}+\frac{I}{\sigma\varphi\alpha}}=\frac{\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha}}{\frac{\sigma\varphi\alpha+I}{\sigma\varphi\alpha}}=\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}$$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> Λαμβάνομεν τό α΄μέλος θέτομεν ὅπου $\varepsilon\varphi\alpha=\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ πράξεις κλπ.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{I-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{I+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}=$$

$$=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}}=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}=$$ (διαιροῦμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά τοῦ ημα ἵνα προκύψη σφα)

"Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

$$=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}-\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}+\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}}=\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}$$ ὅ.ἔ.δ.

Γ΄ Τρόπος. (Τέχνασμα). Λαμβάνομεν τό α΄μέλος καί πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί σφα. κλπ.

Ἀπόδειξις.

$$\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{(I-\varepsilon\varphi\alpha)\sigma\varphi\alpha}{(I+\varepsilon\varphi\alpha)\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}$$ ὅ.ἔ.δ.

(ἀφοῦ $\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha = I$)

59. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}=\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}$

Λύσις

Σκέψις. Ἐπειδή ἡ παροῦσα ἄσκησις εἶναι ἡ προηγουμένη μέ τήν διαφοράν ὅτι ἔχουν ἐναλλαγῆ τά μέλη της δι΄αὐτό ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τήν προηγουμένη ἄσκησιν κατά τούς δύο πρώτους τρόπους θέτοντες ὅπου $\sigma\varphi\alpha=\frac{I}{\varepsilon\varphi\alpha}$ ἤ ὅπου $\sigma\varphi\alpha=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$.

Ἐδῶ θά τήν λύσωμεν μέ τέχνασμα.

Ἀπόδειξις.

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ α΄μέλους ἐπί εφα καί ἔχομεν.

$$\frac{\sigma\varphi\alpha-I}{\sigma\varphi\alpha+I}=\frac{(\sigma\varphi\alpha-I)\varepsilon\varphi\alpha}{(\sigma\varphi\alpha+I)\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{\sigma\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha}=\frac{I-\varepsilon\varphi\alpha}{I+\varepsilon\varphi\alpha}$$ ὅ.ἔ.δ.

(ἀφοῦ $\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha = I$)

60. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha=\frac{I-\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

Λύσις.

Α΄ Τρόπος.

Σκέψις. Λαμβάνομεν α΄ μέλος καί ἀντικαθιστῶμεν τά $συν^2α$ καί $ημ^2α$ συναρτήσει τῆς εφα κατά τούς τύπους (2Ι) καί (22).

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις

$$συν^2α-ημ^2α = \left(\frac{Ι}{\sqrt{Ι+εφ^2α}}\right)^2 - \left(\frac{εφα}{\sqrt{Ι+εφ^2α}}\right)^2 =$$

$$= \frac{Ι}{Ι+εφ^2α} - \frac{εφ^2α}{Ι+εφ^2α} = \frac{Ι-εφ^2α}{Ι+εφ^2α} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄ Τρόπος. (Τέχνασμα). Διατηροῦμεν τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος μέ τήν μονάδα γραμμένην ὑπό τήν μορφήν $ημ^2α+συν^2α = Ι$.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις.

$$συν^2α-ημ^2α = \frac{συν^2α-ημ^2α}{Ι} = \frac{συν^2α-ημ^2α}{συν^2α+ημ^2α} =$$

(διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος διά τοῦ $συν^2α$ ἵνα προκύψουν μικρότερα κλάσματα δίδοντα εφα).

$$= \frac{\dfrac{συν^2α-ημ^2α}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α+ημ^2α}{συν^2α}} \quad \frac{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} - \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}}{\dfrac{συν^2α}{συν^2α} + \dfrac{ημ^2α}{συν^2α}} = \frac{Ι - εφ^2α}{Ι + εφ^2α} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

6Ι. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $Ι-2ημ^2α = \dfrac{Ι-εφ^2α}{Ι+εφ^2α}$

Λύσις.

Α΄ Τρόπος.

Σκέψις. Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας. Θέτομεν

$\eta\mu^2\alpha = \dfrac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ διότι είς τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος κυριαρχεῖ ἡ $\varepsilon\varphi^2\alpha$.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

'Απόδειξις

$$I-2\eta\mu^2\alpha = I-2.\ \frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} = I - \frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} =$$

$$= \frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} - \frac{2\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{I+\varepsilon\varphi^2\alpha-2\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\ \varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{I-\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} \quad \text{δ.ἔ.δ.}$$

<u>Β΄ Τρόπος.</u>

$$I - 2\eta\mu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha =$$

(Τώρα προχωροῦμεν ὅπως εἰς τήν ἄσκησιν 60 β΄τρόπος) $= \dfrac{I-\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

62. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{I-\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} = I - 2\eta\mu^2\alpha$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> 'Επειδή ἡ ἄσκησις εἶναι ὡς ἡ (6I) ἐκ τοῦ β΄μέλους εἰς τό α΄δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν <u>Δεύτερον τρόπον</u> τῆς § I7. 'Εμεῖς θά τήν ἀποδείξωμεν ἐκ τοῦ α΄μέλους εἰς τό β΄τοιοῦτον.

'Απόδειξις

$$\frac{I-\varepsilon\varphi^2\alpha}{I+\varepsilon\varphi^2\alpha} = \frac{I - \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{I + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 + \eta\mu^2\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha}{I} =$$

$= \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = I - \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = I - 2\eta\mu^2\alpha$

63. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - I = \dfrac{I - \varepsilon\varphi^2\alpha}{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

Λύσις

Ἡ ἄσκησις ἀποδεικνύεται ὅπως καί ἡ ἄσκησις 6I.

Πρός τοῦτο θέτομεν: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{I}{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}$ πράξεις κλπ.

64. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - I = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - I}{\sigma\varphi^2\alpha + I}$

Λύσις

Ἡ ἄσκησις ἀποδεικνύεται ὅπως καί ἡ ἄσκησις 6I.

Πρός τοῦτο θέτομεν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha}{I + \sigma\varphi^2\alpha}$ πράξεις κλπ.

65. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $I - 2\eta\mu^2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - I}{\sigma\varphi^2\alpha + I}$

Λύσις

Ἡ ἄσκησις ἀποδεικνύεται ὅπως καί ἡ ἄσκησις 6I.

Πρός τοῦτο θέτομεν $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{I}{I + \sigma\varphi^2\alpha}$ πράξεις κλπ.

66. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\varepsilon\varphi\alpha = \sqrt{\dfrac{I - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{I - \eta\mu^2\alpha}}$

Λύσις

<u>Σκέψις</u>. Λαμβάνομεν τό α΄μέλ. καί θέτομεν $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

Κατόπιν $\eta\mu\alpha = \sqrt{I - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ καί $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{I - \eta\mu^2\alpha}$ κλπ.

Ἀπόδειξις

$\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \dfrac{\sqrt{I - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\sqrt{I - \eta\mu^2\alpha}} =$ { Διά νά διαιρέσωμεν ὁμοιοβαθμίους ρίζας διαιροῦμεν τάς ὑπορρίζους ποσότητας καί

$$\left.\begin{matrix}\text{τοῦ πηλίκου ἐξάγομεν}\\ \text{τήν ἰσοβάθμιον ρίζαν}\end{matrix}\right\} = \sqrt{\frac{I - συν^2α}{I - ημ^2α}} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

67. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $σφα = \sqrt{\dfrac{I - ημ^2α}{I - συν^2α}}$

Λύσις

Σκέψις. Ὁμοίως ὡς προηγουμένη ἄσκησις.

Ἀπόδειξις

$$σφα = \frac{συνα}{ημα} = \frac{\sqrt{I - ημ^2α}}{\sqrt{I - συν^2α}} = \sqrt{\frac{I - ημ^2α}{I - συν^2α}} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

68. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$ημ^2α\ εφα + συν^2α\ σφα + 2ημα\ συνα = εφα + σφα$$

Λύσις

Σκέψις. Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος. Θέτομεν ὅπου $εφα = \dfrac{ημα}{συνα}$ καί ὅπου $σφα = \dfrac{συνα}{ημα}$ κλπ.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις

$$ημ^2α\ εφα + συν^2α\ σφα + 2ημα\ συνα =$$

$$= ημ^2α \cdot \frac{ημα}{συνα} + συν^2α \cdot \frac{συνα}{ημα} + 2ημασυνα =$$

$$= \frac{ημ^3α}{συνα}^{\frown ημα} + \frac{συν^3α}{ημα}^{\frown συνα} + \frac{2ημα\ συνα}{I}^{\frown ημα\ συνα} =$$

$$= \frac{ημ^4α + συν^4α + 2ημ^2α\ συν^2α}{ημα\ συνα} = \left\{\begin{matrix}\text{Ὁ ἀριθμητής εἶναι}\\ \text{τό ἀνάπτυγμα τοῦ}\\ (ημ^2α + συν^2α)^2\\ \text{τύπος (I2) σελ. 35}\end{matrix}\right\},$$

$$= \frac{(\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{I^2}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{I}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{\eta\mu\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}\alpha}{\eta\mu\alpha\ \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}} =$$

$$= \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

69. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$(I + \varepsilon\varphi\alpha)\ (I + \sigma\varphi\alpha)\ \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha = (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u>
<u>Σκέψις.</u> Ὁμοίως ὡς προηγουμένη ἄσκησις.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ἀπόδειξις

$$(I + \varepsilon\varphi\alpha)\ (I + \sigma\varphi\alpha)\ \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= \left(I + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)\left(I + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

(Ἐφαρμόζομεν εἰς τούς δύο πρώτους παράγοντας τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα).

$$= \left(I + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\cancel{\eta\mu\alpha}\ \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}\ \cancel{\eta\mu\alpha}}\right)\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= \left(I + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + I\right)\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= \left(2 + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

(καί πάλιν τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα).

$$= 2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha + \frac{\eta\mu\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}\ \eta\mu\alpha\ \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\cancel{\eta\mu\alpha}}\ \cancel{\eta\mu\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$= 2ημα συνα + ημ^2α + συν^2α = \left[\text{τύπος (12) σελ.35} \right]$

$= (ημα + συνα)^2$ ὅ.ἔ.δ.

Β΄ Τρόπος.

$(1 + εφα)(1 + σφα)\, ημα\, συνα =$

$= \left(1 + \frac{ημα}{συνα}\right)\left(1 + \frac{συνα}{ημα}\right) ημα\, συνα =$

$= \left(\frac{συνα + ημα}{συνα}\right)\left(\frac{ημα + συνα}{ημα}\right) ημα\, συνα =$

$= \frac{(ημα + συνα)(ημα + συνα)}{\cancel{ημα\, συνα}} \cdot \cancel{ημα\, συνα} =$

$= (ημα + συνα)(ημα + συνα) = (ημα + συνα)^2$ ὅ.ἔ.δ.

70. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$(ημα + εφα)(συνα + σφα) = (1 + ημα)(1 + συνα)$

Λύσις

Α΄ Τρόπος.

Σκέψις. Λαμβάνομεν α΄ μέλος. Ἐκτελοῦμεν πράξεις, θέτομεν $εφα = \frac{ημα}{συνα}$ καί $σφα = \frac{συνα}{ημα}$ κλπ.

Ἀπόδειξις

$(ημα + εφα)(συνα + σφα) =$ (ἐπιμεριστική ἰδιότης)

$= ημα\, συνα + ημα\, σφα + συνα\, εφα + εφα\, σφα =$

$= ημα\, συνα + \cancel{ημα} \cdot \frac{συνα}{\cancel{ημα}} + \cancel{συνα} \cdot \frac{ημα}{\cancel{συνα}} + 1 =$

$= ημα\, συνα + συνα + ημα + 1 =$ (νόμος ἀντιμεταθέσεως)

$= 1 + ημα + συνα + ημα\, συνα =$ (κοινός παράγων τό συνα)

$= (I + ημα) + συνα\,(I + ημα) =$ (κοινός παράγων) τό $I + ημα)$

$= (I + ημα)\,(I + συνα)$. ὅ.ἔ.δ.

B΄ Τρόπος.
Σκέψις. Λαμβάνομεν α΄ μέλος. Θέτομεν $εφα = \frac{ημα}{συνα}$ καί $σφα = \frac{συνα}{ημα}$. Πράξεις κλπ.

'Απόδειξις.

$(ημα + εφα)\,(συνα + σφα) =$

$= \left(ημα + \frac{ημα}{συνα}\right)\left(συνα + \frac{συνα}{ημα}\right) = \left(\frac{ημα}{I} + \frac{ημα}{συνα}\right)\left(\frac{συνα}{I} + \frac{συνα}{ημα}\right) =$

$\left(\frac{ημα\,συνα + ημα}{συνα}\right)\left(\frac{συνα\,ημα + συνα}{ημα}\right) =$

$= \frac{ημα\,συνα + ημα}{συνα} \cdot \frac{συνα\,ημα + συνα}{ημα} =$

$= \frac{ημα\,(συνα + I)}{συνα} \cdot \frac{συνα\,(ημα + I)}{ημα} =$

$= \frac{\cancel{ημα\,συνα}\,(I + ημα)\,(I + συνα)}{\cancel{ημα\,συνα}} =$

$= (I + ημα)\,(I + συνα)$ ὅ.ἔ.δ.

7I. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$εφα\,(I - σφ^2α) + σφα\,(I - εφ^2α) = 0$$

Λύσις

A΄ Τρόπος.
Σκέψις. Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος. 'Εκτελοῦμεν πράξεις κλπ.

" "Ασκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π. Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις

'Απόδειξις.

$\varepsilon\varphi\alpha\ (\mathrm{I} - \sigma\varphi^2\alpha) + \sigma\varphi\alpha(\mathrm{I} - \varepsilon\varphi^2\alpha) =$

$= \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi^2\alpha =$

$= \varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\alpha =$

$= \varepsilon\varphi\alpha - \mathrm{I}.\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha - \mathrm{I}.\varepsilon\varphi\alpha =$

$= \cancel{\varepsilon\varphi\alpha} - \cancel{\sigma\varphi\alpha} + \cancel{\sigma\varphi\alpha} - \cancel{\varepsilon\varphi\alpha} = 0$

72. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\mathrm{I}}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \eta\mu^2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + 2$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> Λαμβάνομεν α΄μέλος. Χωρίζομεν τό κλάσμα εἰς δύο παράγοντας καί θέτομεν $\mathrm{I} = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha$.

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

'Απόδειξις.

$$\frac{\mathrm{I}}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \eta\mu^2\alpha} = \frac{\mathrm{I}}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\cdot\frac{\mathrm{I}}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} =$$

(χωρίζομεν ἐκ νέου τά κλάσματα)

$$= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\right)\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}\right) =$$

$= (\mathrm{I} + \varepsilon\varphi^2\alpha)\ (\sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I}) =$

$= \sigma\varphi^2\alpha + \varepsilon\varphi^2\alpha\ \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} + \varepsilon\varphi^2\alpha$ = (νόμος ἀντιμεταθέσεως)

$= \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + (\varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha)^2 + \mathrm{I}$ = $(\varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha = \mathrm{I})$

$= \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I}^2 + \mathrm{I} =$

$= \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} + \mathrm{I} = \varepsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + 2.$ ὅ.ἔ.δ.

73. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\overline{\sigma\varphi^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> Λαμβάνομεν α΄μέλ. 'Αντικαθιστῶμεν κλπ.

'Απόδειξις

$$\sigma\varphi^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}(1-\eta\mu^2\alpha) =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\cancel{\eta\mu^2\alpha}}\cdot\cancel{\eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha.$$

ὅ.ἔ.δ.

74. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha$.

Λύσις.

Σκέψις. Λαμβάνομεν α΄ μέλος. 'Αντικαθιστῶμεν κλπ.

'Απόδειξις.

$$\sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}\overset{1}{\frown} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{1}\overset{\eta\mu^2\alpha}{\frown} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ (1-\eta\mu^2\alpha)}{\eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}(1-\eta\mu^2\alpha) = \sigma\varphi^2\alpha . \sigma\upsilon\nu^2\alpha$$

ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΠΕΜΠΤΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν δύο γωνιῶν α καί β ἤ δύο τόξων α καί β καί λυόμεναι διά τῆς χρήσεως τῶν τύπων τοῦ παρόντος βιβλίου.

75. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$ημ^2α\ συν^2β - συν^2α\ ημ^2β = ημ^2α - ημ^2β$$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> 'Επειδή εἰς τό β΄μέλος θέλομεν μόνον τά $ημ^2α$ καί $ημ^2β$ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τό α΄μέλος τά $συν^2β$ καί $συν^2α$ συναρτήσει τῶν ημβ καί ημα, ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.

'Απόδειξις.

$$ημ^2α\ συν^2β - συν^2α\ ημ^2β =$$

$$= ημ^2α(1 - ημ^2β) - (1 - ημ^2α)\ ημ^2β =$$

$$= ημ^2α - \cancel{ημ^2α\ ημ^2β} - ημ^2β + \cancel{ημ^2α\ ημ^2β} =$$

$$= ημ^2α - ημ^2β\ .\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

76. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$ημ^2α\ συν^2β - συν^2α\ ημ^2β = συν^2β - συν^2α$$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> Παρεμφερής πρός τήν σκέψιν τῆς ἀσκήσεως 75.

'Απόδειξις.

$$ημ^2α\ συν^2β - συν^2α\ ημ^2β =$$

$$= (1 - συν^2α)\ συν^2β - συν^2α(1 - συν^2β) =$$

$$= συν^2β - \cancel{συν^2α\ συν^2β} - συν^2α + \cancel{συν^2α\ συν^2β} =$$

$$= συν^2β - συν^2α.\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

---

*"'Ασκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

77. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$συν^2α\ συν^2β - ημ^2α\ ημ^2β = συν^2α + συν^2β - I$$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> Ὁμοίως ὡς ἄσκησις 76.

Ἀπόδειξις.

$$συν^2α\ συν^2β - ημ^2α\ ημ^2β =$$

$$= συν^2α συν^2β - (I - συν^2α)(I - συν^2β) =$$

$$= συν^2α\ συν^2β - (I - συν^2α - συν^2β + συν^2α\ συν^2β) =$$

$$= \cancel{συν^2α\ συν^2β} - I + συν^2α + συν^2β - \cancel{συν^2α\ συν^2β} =$$

$$= συν^2α + συν^2β - I$$

78. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$ημ^2α\ συν^2β = I - συν^2α - ημ^2β + συν^2α\ ημ^2β$$

Λύσις

<u>Σκέψις.</u> (Α΄μέλος. ἀντικαταστάσεις πράξεις κλπ.).

Ἀπόδειξις.

$$ημ^2α\ συν^2β = (I - συν^2α)(I - ημ^2β) =$$

$$= I - συν^2α - ημ^2β + συν^2α\ ημ^2β. \quad ὅ.ἔ.δ.$$

79. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$I - συν^2α - ημ^2β + συν^2α\ ημ^2β = ημ^2α\ συν^2β$$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> (Α΄μέλος, ἀντικαταστάσεις, πράξεις κλπ.).

Ἀπόδειξις

$$I - συν^2α - ημ^2β + συν^2α\ ημ^2β =$$

$$= I - συν^2α - ημ^2β + (I - ημ^2α)(I - συν^2β) =$$

$$= I - συν^2α - ημ^2β + I - ημ^2α - συν^2β + ημ^2α\ συν^2β =$$

(ἀναγωγή καί νόμος ἀντιμεταθέσεως).

$= 2 - συν^2α - ημ^2α - συν^2β - ημ^2β + ημ^2α\ συν^2β$

$= 2 - (συν^2α + ημ^2α) - (συν^2β + ημ^2β) + ημ^2α\ συν^2β =$

$= 2 - I - I + ημ^2α\ συν^2β =$

$= \cancel{2} - \cancel{2} + ημ^2α\ συν^2β = ημ^2α\ συν^2β$. ὅ.ἔ.δ.

80. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $σφ^2α\ σφ^2β - I = \dfrac{συν^2α - ημ^2β}{ημ^2α\ ημ^2β}$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> (Α΄μέλος, ἀντικατάστασις, πράξεις κλπ.).

'Απόδειξις.

$$σφ^2α\ σφ^2β - I = \frac{συν^2α}{ημ^2α} \cdot \frac{συν^2β}{ημ^2β} - I = \frac{συν^2α\ συν^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} - I =$$

$$= \frac{συν^2α\ συν^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} - \frac{ημ^2α\ ημ^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} = \frac{συν^2α\ συν^2β - ημ^2α\ ημ^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} =$$

[Παρατηροῦμεν ὅτι τόν παρονομαστήν τοῦ β΄μέλους τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος τόν ἀποκτήσαμεν. Εἰς τόν ἀριθμητήν ὅμως τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος χρειαζόμεθα τά $συν^2α$ καί $ημ^2β$ δι'αὐτό ἐδῶ ἀντικαθιστῶμεν τά $συν^2β$ καί $ημ^2α$ ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς.

$συν^2β = I - ημ^2β$ καί $ημ^2α = I - συν^2α$].

$$= \frac{συν^2α\ (I - ημ^2β) - (I - συν^2α)\ ημ^2β}{ημ^2α\ ημ^2β} =$$

$$= \frac{συν^2α - \cancel{συν^2α\ ημ^2β} - ημ^2β + \cancel{συν^2α\ ημ^2β}}{ημ^2α\ ημ^2β} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\ \eta\mu^2\beta} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

81. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά δύο τυχούσας ὀξείας γωνίας α καί β ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\ \eta\mu^2\beta} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}$$

Λύσις.

Σκέψις. (Α΄ μέλος. ἀντικαταστάσεις, πράξεις κλπ.).

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\ \eta\mu^2\beta} = \frac{\overbrace{\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}^{1+\varepsilon\varphi^2\beta} - \overbrace{\frac{\varepsilon\varphi^2\beta}{1+\varepsilon\varphi^2\beta}}^{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}\cdot\frac{\varepsilon\varphi^2\beta}{1+\varepsilon\varphi^2\beta}} =$$

$$= \frac{\frac{1+\varepsilon\varphi^2\beta - \varepsilon\varphi^2\beta\,(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)}{\cancel{(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)\,(1+\varepsilon\varphi^2\beta)}}}{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha\quad \varepsilon\varphi^2\beta}{\cancel{(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)\,(1+\varepsilon\varphi^2\beta)}}} =$$

$$= \frac{1 + \cancel{\varepsilon\varphi^2\beta} - \cancel{\varepsilon\varphi^2\beta} - \varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}$$

ὅ. ἔ.δ.

82. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά δύο τυχούσας (ὀξείας ἐδῶ) γωνίας α καί β (ἤ διά δύο τόξα α καί β) ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$εφα\ εφβ(σφα + σφβ) = εφα + εφβ$$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u> ('Από α΄ μέλος εἰς β΄μέλος).

'Απόδειξις.

$εφα\ εφβ\ (σφα + σφβ) =$ ('Εφαρμόζομεν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα).

$= εφα\ εφβ\ σφα + εφα\ εφβ\ σφβ =$ (" νόμον ἀντιμεταθέσεως).

$= εφα\ σφα\ εφβ + εφα\ εφβ\ σφβ =$

$= I\ .\ εφβ + εφα.I = εφβ + εφα = εφα + εφβ$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> ('Επειδή εἰς τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος χρειαζόμεθα μόνον εφα καί εφβ ἀντικαθιστῶμεν, εἰς τό α΄ μέλος, τάς σφα καί σφβ συναρτήσει τῶν εφα καί εφβ).

'Απόδειξις.

$$εφα\ εφβ\ (σφα + σφβ) = εφα\ εφβ\ .\left(\frac{I}{εφα} + \frac{I}{εφ\ β}\right) =$$

$$= \cancel{εφα}\ εφβ\ .\ \frac{I}{\cancel{εφα}} + εφα\ \cancel{εφβ}\ \frac{I}{\cancel{εφβ}} =$$

$$= εφβ + εφα = εφα + εφβ. \quad ὅ.ἔ.δ.$$

<u>Γ΄ Τρόπος.</u>

$$εφα\ εφβ\ (σφα + σφβ) = \frac{ημα}{συνα}\ .\ \frac{ημβ}{συνβ}\left(\frac{συνα}{ημα} + \frac{συνβ}{ημβ}\right) =$$

" 'Ασκήσεις Τριγωνομετρίας" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

$$= \frac{ημα\ ημβ}{συνα\ συνβ}\left(\frac{συνα\ ημβ + συνβ\ ημα}{ημα\ ημβ}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{ημα}\ \cancel{ημβ}\ (συνα\ ημβ + συνβ\ ημα)}{συνα\ συνβ\ \cancel{ημα}\ \cancel{ημβ}} = \frac{συνα\ ημβ + συνβ . ημα}{συνα\ συνβ} =$$

$$= \frac{\cancel{συνα}\ ημβ}{\cancel{συνα}\ συνβ} + \frac{\cancel{συνβ}\ ημα}{συνα\ \cancel{συνβ}} = \frac{ημβ}{συνβ} + \frac{ημα}{συνα} =$$

$$= εφβ + εφα = εφα + εφβ. \qquad ὅ.ἔ.δ.$$

83. Ἄν α καί β τυχοῦσαι γωνίαι νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$εφα + εφβ = εφα\ εφβ\ (σφα + σφβ)$$

Ἀπόδειξις.

$$εφα + εφβ = \overset{σφβ}{\frac{1}{σφα}} + \overset{σφα}{\frac{1}{σφβ}} = \frac{σφβ + σφα}{σφα\ σφβ} =$$

$$= \frac{1}{σφα\ σφβ}\ (σφβ + σφα) = \frac{1}{σφα} . \frac{1}{σφβ}\ (σφα + σφβ) =$$

$$= εφα\ εφβ\ (σφα + σφβ). \qquad ὅ.ἔ.δ.$$

84. Ἄν α καί β τυχοῦσαι γωνίαι νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$σφα\ σφβ\ (εφα + εφβ) = σφα + σφβ$$

Λύσις.

<u>Σκέψις.</u> Ἡ ἄσκησις λύεται ὅπως καί ἡ ἄσκησις 82. Ἐδῶ θά τήν λύσωμεν μέ τόν α΄ τρόπον τῆς ἀσκήσεως 82.

'Απόδειξις.

$$\sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\beta(\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta) = \sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\beta\ \varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\beta\ \varepsilon\varphi\beta =$$

$$= \varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha\ \sigma\varphi\beta\ \varepsilon\varphi\beta =$$

$$= 1.\sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha.1 = \sigma\varphi\beta + \sigma\varphi\alpha = \sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

85. Ἄν α καί β τυχοῦσαι γωνίαι νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}$$

'Απόδειξις.

$$\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}^{\frown \varepsilon\varphi\beta} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}^{\frown \varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha.\varepsilon\varphi\beta} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

86. Ἄν α καί β τυχοῦσαι γωνίαι νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}$$

Λύσις

<u>Α΄ Τρόπος.</u>

'Απόδειξις.

$$\frac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}^{\frown \varepsilon\varphi\beta} + \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta}^{\frown \varepsilon\varphi\alpha}}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\frac{\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}}{\frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1}} =$$

$$= \frac{1.\cancel{(\varepsilon\varphi\beta + \varepsilon\varphi\alpha)}}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta\cancel{(\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta)}} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄ Τρόπος.

'Απόδειξις.

$$\frac{\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\beta}} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta}}{\dfrac{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha\, \sigma\upsilon\nu\beta}} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\, \sigma\upsilon\nu\beta\ \cancel{(\sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta + \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta)}}{\eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta\ \cancel{(\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \eta\mu\beta)}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\eta\mu\beta} = \sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\beta} = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}$$

87. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha . \varepsilon\varphi\alpha . \eta\mu\beta . \sigma\varphi\beta - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta = 0$$

ἤ κατ' ἄλλην ἔκφρασιν

"Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha\ \varepsilon\varphi\alpha . \eta\mu\beta\ \sigma\varphi\beta - \eta\mu\alpha . \sigma\upsilon\nu\beta$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν α καί β.

'Απόδειξις

$$\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha\ \eta\mu\beta\ \sigma\varphi\beta - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta =$$

$$= \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{\eta\mu\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}\ \cancel{\eta\mu\beta} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\beta}{\cancel{\eta\mu\beta}} - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta =$$

$$= \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta = 0 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΟΜΑΣ ΕΚΤΗ

Τριγωνομετρικά προβλήματα ἀναφερόμενα εἰς τήν εὕρεσιν τῶν ὑπολοίπων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας, α ἑνός τόξου α, ὅταν μᾶς δοθῆ εἷς ἐξ αὐτῶν.

---

88. Νά εὑρεθοῦν οἱ ὑπόλοιποι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς ὀξείας γωνίας α, ὅταν ημα $= \frac{3}{5}$.

Λύσις.

I. Εὕρεσις τοῦ συνα α.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (ΙΟ) συνα $= \sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}$ ὁ ὁποῖος δίδει τό συνα συναρτήσει τοῦ ημα, ἀντικαθιστῶμεν τό ημα καί ἔχομεν.

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25}{25}-\frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{25-9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Ὥστε: $\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{4}{5}}$

II. Εὕρεσις τῆς εφα.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (ΙΙ) εφα $= \frac{\eta\mu\alpha}{\sqrt{1 - \eta\mu^2\alpha}}$ ὁ ὁποῖος δίδει τήν εφα συναρτήσει τοῦ ημα, ἀντικαθιστῶμεν τό ημα καί ἔχομεν.

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{25-9}{25}}} = \frac{\frac{3}{5}}{\sqrt{\frac{16}{25}}} = \frac{\frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{4}{\cancel{5}}} = \frac{3}{4}$$

Ὥστε: $\boxed{\varepsilon\varphi\alpha = \frac{3}{4}}$

III. <u>Εὕρεσις τῆς σφα.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον (I2) σφα $= \frac{\sqrt{I - ημ^2α}}{ημα}$ ὁ ὁποῖος δίδει τήν σφα συναρτήσει τοῦ ημα, ἀντικαθιστῶμεν τό ημα καί ἔχομεν.

$$σφα = \frac{\sqrt{I-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{I-\frac{9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{25-9}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\sqrt{\frac{I6}{25}}}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} = \frac{4}{3}$$

<u>Ὥστε:</u> $\boxed{σφα = \frac{4}{3}}$

<u>Ἐπαλήθευσις τῆς ἀσκήσεως.</u>

Ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἀσκήσεως γίνεται διά τῆς ἐφαρμογῆς τῆς παρατηρήσεως τῆς σελίδος II .

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Α΄. $ημ^2α + συν^2α = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{I6}{25} = \frac{25}{25} = I$

Ἀφοῦ λοιπόν ἡ δοθεῖσα τιμή τοῦ ημα καί ἡ εὑρεθεῖσα τιμή τοῦ συνα ἐπαληθεύουν τήν θεμελιώδη σχέσιν $ημ^2α + συν^2α = I$ ἔπεται ὅτι αἱ τιμαί αὐταί εἶναι ἀληθεῖς.

Β΄. $εφα\ σφα = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = \frac{3.4}{4.3} = \frac{I2}{I2} = I$

Ἀφοῦ λοιπόν αἱ εὑρεθεῖσαι τιμαί τῆς εφα καί σφα ἐπαληθεύουν τήν σχέσιν εφα.σφα = I ἔπεται ὅτι αἱ τιμαί αὐταί εἶναι ἀληθεῖς.

89. Νά εὑρεθοῦν οἱ ὑπόλοιποι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς ὀξείας γωνίας α ὅταν συνα = $0,5^0$ (ἤ συνα $= \frac{50}{I00} = \frac{I}{2}$).

Λύσις.

I. Εὕρεσις τοῦ ημα.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (I6) $ημα = \sqrt{I - συν^2α}$ ὁ ὁποῖος δίδει τό ημα σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τοῦ συνα ἀντικαθιστῶμεν τό συνα καί ἔχομεν.

$$ημα = \sqrt{I-(0,50)^2} = \sqrt{I-(\frac{I}{2})^2} = \sqrt{I-\frac{I}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}-\frac{I}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ὥστε: $\boxed{ημα = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

II. Εὕρεσις τῆς εφα:

Λαμβάνομεν τόν τύπον (I7) $εφα = \frac{\sqrt{I - συν^2α}}{συνα}$ ὁ ὁποῖος δίδει τήν εφα σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τοῦ συνα, ἀντικαθιστῶμεν τό συνα μέ $0,50 = \frac{I}{2}$ καί ἔχομεν.

$$εφα = \frac{\sqrt{I-(\frac{I}{2})^2}}{\frac{I}{2}} = \frac{\sqrt{I-\frac{I}{4}}}{\frac{I}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{I}{4}}}{\frac{I}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{I}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{I}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$

Ὥστε: $\boxed{εφα = \sqrt{3}}$

III. Εὕρεσις τῆς σφα.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (I8) $σφα = \frac{συνα}{\sqrt{I-συν^2α}}$ ὁ ὁποῖος δίδει τήν σφα σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τοῦ συνα, ἀντικαθιστῶμεν τό συνα μέ $0,50 = \frac{I}{2}$ καί ἔχομεν.

$$σφα = \frac{\frac{I}{2}}{\sqrt{I-(\frac{I}{2})^2}} = \frac{\frac{I}{2}}{\sqrt{I-\frac{I}{4}}} = \frac{\frac{I}{2}}{\sqrt{\frac{4}{4}-\frac{I}{4}}} = \frac{\frac{I}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ὥστε: $\boxed{\sigma\varphi\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

<u>Ἐπαλήθευσις.</u>

Α΄ $\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$ ὅ.ἔ.δ.

Β΄ $\varepsilon\varphi\alpha.\sigma\varphi\alpha = \sqrt{3}\,.\,\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{(\sqrt{3})^2}{3} = \dfrac{3}{3} = 1$ ὅ.ἔ.δ.

90. Νά εὑρεθοῦν οἱ ὑπόλοιποι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς ὀξείας γωνίας α ὅταν $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{5}{12}$

Λύσις.

Ι. <u>Εὕρεσις τοῦ ημα.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον (21) $\eta\mu\alpha = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ ὁ ὁποῖος δίδει ημα σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τῆς εφα, ἀντικαθιστῶμεν τήν εφα καί ἔχομεν.

$$\eta\mu\alpha = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{144+25}{144}}} = \frac{\frac{5}{12}}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{\frac{5}{12}}{\frac{13}{12}} = \frac{5}{13}$$

<u>Ὥστε:</u> $\boxed{\eta\mu\alpha = \dfrac{5}{13}}$

ΙΙ. <u>Εὕρεσις τοῦ συνα.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον (22) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}}$ ὁ ὁποῖος δίδει τό συνα σ υ ν α ρ τ ή σ ε ι τῆς εφα , ἀντικαθιστῶμεν τήν ἐφα καί ἔχομεν.

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{5}{12}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{25}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{144+25}{144}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{169}{144}}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{13}{12}} = \frac{12}{13}$$

Ὥστε. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{12}{13}}$

III. Εὕρεσις τῆς σφα.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (23) $\sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha}$ ὁ ὁποῖος δίδει τήν σφα συναρτήσει τῆς εφα, ἀντικαθιστῶμεν τήν σφα καί ἔχομεν.

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}.$$ Ὥστε. $\boxed{\sigma\varphi\alpha = \frac{12}{5}}$

'Επαλήθευσις.

Α΄. $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} + \frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1$ ὅ.ἔ.δ.

Β΄. $\frac{5}{12} \cdot \frac{12}{5} = \frac{60}{60} = 1$ ὅ.ἔ.δ.

91. Νά εὑρεθοῦν οἱ ὑπόλοιποι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς ὀξείας γωνίας α, ὅταν $\sigma\varphi\alpha = \sqrt{3}$

Λύσις.

I. Εὕρεσις τοῦ ημα.

Λαμβάνομεν τόν τύπον (26) $\eta\mu\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\sigma\varphi^2\alpha}}$ ὁ ὁποῖος δίδει τό ημα συναρτήσει τῆς σφα, ἀντικαθιστῶμεν τήν σφα καί ἔχομεν.

$$ημα = \frac{1}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+3}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2} \quad \text{Ὥστε.} \quad \boxed{ημα = \frac{1}{2}}$$

II. <u>Εὕρεσις τοῦ συνα.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον (27) $συνα = \dfrac{σφα}{\sqrt{1+σφ^2α}}$ ὁ ὁποῖος δίδει κτλ.

$$συνα = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \boxed{\text{Ὥστε } συνα = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

III. <u>Εὕρεσις τῆς εφα.</u>

Λαμβάνομεν τόν τύπον (28) $εφα = \dfrac{1}{σφα}$ κλπ.

$$εφα = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad \text{Ὥστε.} \quad \boxed{εφα = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

<u>Ἐπαλήθευσις.</u>

Α΄. $$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄. $$\frac{\sqrt{3}}{3}.\sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3})^2}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΟΜΑΣ ΕΒΔΟΜΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἑνός τόξου π.χ. α καί τῶν τριγωνομετρικων ἀριθμῶν τοῦ διπλασίου τόξου 2α καθώς καί των τριγωνομετρικων ἀριθμῶν τοῦ ἡμίσεος τόξου $\frac{α}{2}$.

Σημείωσις. 'Εδῶ θά ἀναφέρωμεν ἀσκήσεις ἐπί τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν παραστάσεων σχετικῶν μέ τούς τύπους. Γενικάς ἀσκήσεις ἀναφερομένας εἰς τήν ἑβδόμην ὁμάδα ἀναγράφομεν εἰς τήν ἐπαναληπτικήν ὁμάδα ἀσκήσεων.

92. 'Εάν $ημα = \frac{1}{2}$ νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν παραστάσεων

ημ2α, συν2α, εφ2α καί σφ2α.

Λύσις.

1. Εὕρεσις τοῦ ημ2α.
'Ως γνωστόν ἔχομεν $ημ2α = 2ημα\, συνα$ (1) .

'Επειδή εἰς τό β΄μέλος ἄγνωστον εἶναι τό συνα θά εὕρωμεν αὐτό ἐκ τοῦ γνωστοῦ ημα.

Κατά ταῦτα. $συνα = \sqrt{1 - ημ^2α}$ καί δι' ἀντικαταστάσεως

$$συνα = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ὥστε } \boxed{συνα = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (1) ἔχομεν.

$$ημ2α = \cancel{2}.\ \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ὥστε } \boxed{ημ2α = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

2. Εὕρεσις τοῦ συν2α.
'Ως γνωστόν ἔχομεν: $συν2α = συν^2α - ημ^2α$ (2)

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (2) ἔχομεν.

$$συν2α = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

"Ωστε. $\boxed{συν2α = \frac{1}{2}}$

3. Εὕρεσις τῆς εφ2α.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν. $εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}$ (3)

Εὑρίσκομεν πρῶτον τήν εφα.

$$εφα = \frac{ημα}{συνα} = \frac{\frac{1}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\,\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

"Ωστε. $\boxed{εφα = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (3) τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τῆς εφα ἔχομεν.

$$εφ2α = \frac{2.\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{3}{9}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{9-3}{9}} =$$

$$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{6}{9}} = \frac{2\sqrt{3}\ .\ 9}{3.\ 6} = \frac{\cancel{18}\ \sqrt{3}}{\cancel{18}} = \sqrt{3}$$

"Ωστε. $\boxed{εφ2α = \sqrt{3}}$

4. Εὕρεσις τῆς σφ2α.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν: $\sigma\varphi 2\alpha = \dfrac{\sigma\varphi^2\alpha - 1}{2\sigma\varphi\,\alpha}$ (4)

Εὑρίσκομεν πρῶτον τήν σφα.

$$\sigma\varphi\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$ Ὥστε. $\sigma\varphi\alpha = \sqrt{3}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (4) τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τῆς σφα ἔχομεν.

$$\sigma\varphi 2\alpha = \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{2.\sqrt{3}} = \frac{3-1}{2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ὥστε. $\boxed{\sigma\varphi 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

93. Ἐάν $\eta\mu\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$ νά εὑρεθοῦν αἱ τιμαί τῶν παραστάσεων :

ημα , συνα , εφα καί σφα

I. Εὕρεσις τοῦ ημα.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν: $\eta\mu\alpha = 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ (I).

Ἐπειδή εἰς τό β΄ μέλος ἄγνωστον εἶναι τό $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ θά εὕρωμεν αὐτό ἐκ τῶν γνωστοῦ $\eta\mu\frac{\alpha}{2}$.

Κατά ταῦτα $\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\eta\mu^2\frac{\alpha}{2}}$ καί δι᾽ἀντικαταστάσεως

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ ὥστε $\boxed{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (I) ἔχομεν.

$$\eta\mu\alpha = \cancel{2}\cdot\frac{I}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ Ὥστε. $\boxed{\eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

I. Εὕρεσις τοῦ συνα.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$ (2)

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (2) ἔχομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{I}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{I}{4} = \frac{2}{4} = \frac{I}{2}$$

Ὥστε. $\boxed{\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{I}{2}}$

3. Εὕρεσις τῆς εφα.

Ὡς γνωστόν ἔχομεν $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{I - \varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}}$ (3)

Εὑρίσκομεν πρῶτον τήν $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\frac{\alpha}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{I}{\cancel{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}} = \frac{I}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ὥστε. $\boxed{\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (3) τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τῆς $\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}$ ἔχομεν.

$$\varepsilon\varphi\alpha = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{I - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{I - \frac{3}{9}} =$$ (πράξεις ὅπως καί ἡ ἄσκησις 92 .) $= \sqrt{3}$

Ὥστε $\boxed{\varepsilon\varphi\alpha = \sqrt{3}}$

4. <u>Εὕρεσις τῆς σφα.</u>

Ὡς γνωστόν ἔχομεν $σφα = \dfrac{σφ^2 \dfrac{α}{2} - 1}{2σφ \dfrac{α}{2}}$ (4)

Εὑρίσκομεν πρῶτον τήν $σφ \dfrac{α}{2}$

$$σφ \frac{α}{2} = \frac{συν \frac{α}{2}}{ημ \frac{α}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} = \sqrt{3}$$ Ὥστε. $\boxed{σφ \dfrac{α}{2} = \sqrt{3}}$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (4) τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τῆς $σφ \dfrac{α}{2}$ ἔχομεν:

$$σφα = \frac{(\sqrt{3})^2 - 1}{2\sqrt{3}} = \left(\begin{matrix}\text{πράξεις ὅπως} \\ \text{καί ἡ ἄσκησις} \\ 92\end{matrix}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$. Ὥστε $\boxed{σφα = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$

<u>Παρατήρησις.</u>

Ὅπως παρατηροῦμεν αἱ ἀσκήσεις (92) καί (93) δίδουν τά αὐτά ἀποτελέσματα.

Τοῦτο συμβαίνει διότι οἱ τύποι τούς ὁποίους μετεχειρίσθημεν εἶναι οἱ αὐτοί, ἀρκεῖ νά ἐννοοῦμεν τό τόξον τοῦ α΄ μέλους διπλάσιον τοῦ τόξου τοῦ β΄ μέλους.

Π.χ. ἄν $\dfrac{α}{2} = 30^\circ$ τότε $α = 2.30^\circ = 60^\circ$

Ἐπίσης ἄν $α = 30^\circ$ τότε $2α = 2.30^\circ = 60^\circ$.

94. Ἐάν $ημα = \dfrac{3}{5}$ καί $συνβ = \dfrac{7}{25}$ νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων:
1) $ημα\, συνβ + συνα\, ημβ$
2) $ημ2α$
3) $συν2β$

Λύσις.

I) <u>Εὕρεσις τῆς τιμῆς τῆς παραστάσεως:</u> ημασυνβ + συναημβ

Καθώς παρατηροῦμεν γνωρίζομεν τάς τιμάς τῶν ημα καί συνβ, θά εὕρωμεν τώρα τάς τιμάς τῶν συνα καί ημβ.

<u>Εὕρεσις τοῦ συνα.</u>

Κατά τόν τρόπον τῆς ἀσκήσεως 88 εὑρίσκομεν:

$$\text{συνα} = \sqrt{I - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

<u>Ὥστε.</u> $\boxed{\text{συνα} = \frac{4}{5}}$

<u>Εὕρεσις τοῦ ημβ.</u>

Κατά τόν τρόπον τῆς ἀσκήσεως 89 εὑρίσκομεν:

$$\text{ημβ} = \sqrt{I - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \sqrt{I - \frac{49}{625}} = \sqrt{\frac{576}{625}} = \frac{24}{25}$$

<u>Ὥστε.</u> $\boxed{\text{ημβ} = \frac{24}{25}}$

Ἀντικαθιστῶμεν τώρα εἰς τήν ἐξεταζομένην παράστασιν τάς δοθείσας καί εὑρεθείσας τιμάς καί ἔχομεν:

$$\text{ημα συνβ} + \text{συνα ημβ} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{25} + \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{2I + 96}{I25} = \frac{II7}{I25}$$

2. <u>Εὕρεσις τῆς τιμῆς τῆς παραστάσεως:</u> ημ2α

Γράφομεν ημ2α = 2ημα συνα καί ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν

$$\text{ημ2α} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

3. <u>Εὕρεσις τῆς τιμῆς τῆς παραστάσεως :</u> συν2β

Γράφομεν $\text{συν2β} = \text{συν}^2\text{β} - \text{ημ}^2\text{β}$ καί ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν:

$$\text{συν2β} = \left(\frac{7}{25}\right)^2 - \left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{49}{625} - \frac{576}{625} = \frac{49-576}{625} = -\frac{527}{625}$$

ΟΜΑΣ ΟΓΔΟΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τόξων (ἤ γωνιῶν) σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ῶ ν καί π α ρ α π λ η ρ ω μ α τ ι κ ῶ ν .

---

95. Ἄν α καί β δύο τόξα (ἤ γωνίαι) καί $α + β = 90^{o}$ νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα $ημ^{2}α + ημ^{2}β$ καί τό γινόμενον εφα.εφβ.

Λύσις.

'Επειδή $α + β = 90^{o}$ ἔχομεν ημα = συνβ (τύπος 67, Ιος).

καί εφα = σφβ (" 67, 3ος).

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

Ι. Εὕρεσις τοῦ ἀθροίσματος $ημ^{2}α + ημ^{2}β$

'Αντικαθιστῶμεν τό $ημ^{2}α$ μέ τό $συν^{2}β$ καί ἔχομεν:

$ημ^{2}α + ημ^{2}β = συν^{2}β + ημ^{2}β = Ι$ ὅ.ἔ.δ.

ΙΙ. Εὕρεσις τοῦ γινομένου εφα.εφβ.

'Αντικαθιστῶμεν τήν εφα μέ τήν σφβ καί ἔχομεν:

εφα.εφβ = σφβ.εφβ = Ι ὅ. ἔ. δ.

96, Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις:

Ι) ημα συν(90^{o}- α) + συνα ημ(90^{o}- α) καί

2) εφα εφ(90^{o}- α) - σφα σφ(90^{o}- α)

εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς γωνίας α.

'Απόδειξις.

'Επειδή αἱ γωνίαι 90^{o}-α καί α ἔχουν ἄθροισμα

$90^0 - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 90^0$ δηλαδή εἶναι συμπληρωματικαί θά ἔχομεν (τύποι 67)

$$\left.\begin{array}{r} ημ(90^0-α) = συνα \\ συν(90^0-α) = ημα \end{array}\right\} καί \left\{\begin{array}{l} εφ(90^0-α) = σφα \\ σφ(90^0-α) = εφα \end{array}\right.$$

Κατά ταῦτα ἔχομεν

Ι) $ημα.συν(90^0-α) + συνα.ημ(90^0-α) =$ (ἀντικαθιστῶντες)

$= ημα.ημα + συνα.συνα = ημ^2α + συν^2α = Ι$

Δηλαδή ἡ παράστασις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α ἀφοῦ τελικῶς δέν περιέχει α. ὅ.ἔ.δ.

2) $εφα.εφ(90^0 - α) - σφα.σφ(90^0 - α) =$ (ἀντικαθιστῶντες)

$= εφα.σφα - σφα.εφα = Ι - Ι = 0.$

Δηλαδή ἡ παράστασις εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α ἀφοῦ τελικῶς δέν περιέχει α. ὅ.ἔ.δ.

97. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

Ι) $ημ\dfrac{Α+Β}{2} = συν\dfrac{Γ}{2}$ καί 2) $εφ\dfrac{Α+Β}{2} = σφ\dfrac{Γ}{2}$

Ἀπόδειξις

Ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $Α + Β + Γ = Ι80^0$.

Ἐπομένως $\dfrac{\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}}{2} = \dfrac{Ι80^0}{2}$ ἤ $\dfrac{\hat{Α}+\hat{Β}}{2} + \dfrac{\hat{Γ}}{2} = 90^0$

δηλαδή αἱ γωνίαι $\dfrac{Α+Β}{2}$ καί $\dfrac{Γ}{2}$ εἶναι συμπληρωματικαί.

Κατά ταῦτα ἔχομεν (τύπος 67)

$ημ\dfrac{Α+Β}{2} = συν\dfrac{Γ}{2}$ καί $εφ\dfrac{Α+Β}{2} = σφ\dfrac{Γ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

98. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

Ι) $ημ(α + 30^0) = συν(60^0-α)$ καί 2) $εφ(α + 30^0) = σφ(60^0 - α)$

'Απόδειξις.

'Εξετάζοντες τά τόξα $\alpha + 30^\circ$ καί $60^\circ - \alpha$ παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν ἄθροισμα.

$$(\alpha + 30^\circ) + (60^\circ - \alpha) = \cancel{\alpha} + 30^\circ + 60^\circ - \cancel{\alpha} = 90^\circ$$

῞Ωστε τά δύο αὐτά τόξα εἶναι συμπληρωματικά.

Κατά ταῦτα ἔχομεν (τύπος 67).

I) $\eta\mu(\alpha + 30^\circ) = \sigma\upsilon\nu(60^\circ - \alpha)$ καί 2) $\varepsilon\varphi(\alpha + 30^\circ) = \sigma\varphi(60^\circ - \alpha)$

ὅ. ἔ. δ.

99. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις.

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ \eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma \\ \text{2)}\ \sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{array}\right\} \text{καί} \quad \left.\begin{array}{l} \text{3)}\ \varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi\Gamma \\ \text{4)}\ \sigma\varphi(A + B) = -\sigma\varphi\Gamma \end{array}\right\}$$

'Απόδειξις.

'Εκ τῆς Γεωμετρίας ἔχομεν $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ καί $(\hat{A} + \hat{B}) + \hat{\Gamma} = 180^\circ$, Δηλαδή αἱ γωνίαι $\hat{A} + \hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$ εἶναι παραπληρωματικαί. Τότε ἐκ τῆς Τριγωνομετρίας ἔχομεν (τύπ.68).

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ \eta\mu(A + B) = \eta\mu\Gamma \\ \text{2)}\ \sigma\upsilon\nu(A + B) = -\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{array}\right\} \text{καί} \left\{\begin{array}{l} \text{3)}\ \varepsilon\varphi(A + B) = -\varepsilon\varphi\Gamma \\ \text{4)}\ \sigma\varphi(A + B) = -\sigma\varphi\Gamma \end{array}\right.$$ ὅ.ἔ.δ.

100. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παραστάσεις

I) $\eta\mu(180^\circ - \alpha)\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$ καί

2) $\varepsilon\varphi(180^\circ - \alpha)\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi(180^\circ - \alpha)\varepsilon\varphi\alpha$

εἶναι ἀνεξάρτητοι τῆς γωνίας α.

'Απόδειξις.

'Επειδή αἱ γωνίαι $180^\circ - \alpha$ καί α ἔχουν ἄθροισμα $180^\circ - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 180^\circ$ δηλαδή εἶναι παραπληρωματικαί θά ἔχωμεν (τύπος 68).

$$\left.\begin{array}{l} \text{I)}\ \eta\mu(180^\circ - \alpha) = \eta\mu\alpha \\ \text{2)}\ \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \alpha) = -\sigma\upsilon\nu\alpha \end{array}\right\} \text{καί} \left\{\begin{array}{l} \text{3)}\ \varepsilon\varphi(180^\circ - \alpha) = -\varepsilon\varphi\alpha \\ \text{4)}\ \sigma\varphi(180^\circ - \alpha) = -\sigma\varphi\alpha \end{array}\right.$$

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

I) $ημ(I80^0 - α)\ ημα - συν(I80^0 - α)\ συνα =$

$= ημα \cdot ημα - (-συνα)\ συνα = ημ^2α + συν^2α = I$

Δηλαδή ἡ παράστασις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς γωνίας α. ὅ.ἔ.δ.

2) $εφ(I80^0 - α)\ σφα - σφ(I80^0 - α)\ εφα =$ (ἀντικαθιστῶντες)

$= -εφα . σφα - (-σφα)\ εφα =$

$= -εφα\ σφα + σφα\ εφα \quad = \quad 0$

Δηλαδή ἡ παράστασις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς γωνίας α. ὅ.ἔ.δ.

IOI. Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις.

$$ημI40^0\ συν40^0 - ημ50^0\ ημ40^0$$

Λύσις.

I) Ἐξετάζομεν τά τόξα $I40^0$ καί 40^0.
Ταῦτα ἔχουν ἄθροισμα $I40^0 + 40^0 = I80^0$ ἄρα εἶναι παραπληρωματικά. Ἐπομένως θά ἔχωμεν $ημI40^0 = ημ\ 40^0$

2) Ἐξετάζομεν τά τόξα 50^0 καί 40^0.
Ταῦτα ἔχουν ἄθροισμα $50^0 + 40^0 = 90^0$. ἄρα εἶναι συμπληρωματικά. Ἐπομένως θά ἔχωμεν $ημ50^0 = συν40^0$.

Ἀντικαθιστῶντες τώρα τά $ημI40^0$ καί $ημ50^0$ εἰς τήν δοθεῖσαν παράστασιν ἔχομεν.

$$ημI40^0\ συν40^0 - ημ50^0\ ημ40^0 =$$

$$= ημ40^0\ συν40^0 - συν40^0\ ημ40^0 = 0$$

Δηλαδή ἡ παράστασις ἁπλοποιουμένη ἰσοῦται μέ τό μηδέν.-

IO2. Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα.

$$\frac{6ημ(I80^0 - α)\ συν(90^0 - α) + 6συν^2α}{εφ(I80^0 - α)\ σφ(I80^0 - α) + 5εφ(90^0 - α)\ σφ(90^0 - α)}$$

Λύσις.

Ἐξετάζομεν τά τόξα ὅπως καί εἰς τάς προηγουμένας ἀσκήσεις καί προβαίνομεν εἰς ἀντικαταστάσεις πρός ἁπλούστευσιν ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος καί ἐν συνεχείᾳ πρός ἁπλοποίησιν αὐτοῦ.

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$180^\circ - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 180^\circ \quad \text{ἄρα} \quad ημ(180^\circ - α) = ημα$$

$$90^\circ - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 90^\circ \quad " \quad συν(90^\circ - α) = ημα$$

Ἐπίσης ἔχομεν

$$εφ(180^\circ - α)\, σφ(180^\circ - α) = 1 \quad \text{καί} \quad εφ(90^\circ - α)\, σφ(90^\circ - α) = 1$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τό κλάσμα ἔχομεν.

$$\frac{6ημ(180^\circ - α)\, συν(90^\circ - α) + 6συν^2α}{εφ(180^\circ - α)\, σφ(180^\circ - α) + 5εφ(90^\circ - α)\, σφ(90^\circ - α)} =$$

$$= \frac{6.ημα.ημα + 6συν^2α}{1 + 5.1} = \frac{6ημ^2α + 6συν^2α}{1 + 5} =$$

$$= \frac{6(ημ^2α + συν^2α)}{6} = \frac{6.1}{6} = 1$$

103. Νά ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα:

$$\frac{ημ(180^\circ - α)\, σφα\, ημ(90^\circ - α) - συν(180^\circ - α)\, εφα\, συν(90^\circ - α)}{εφ(90^\circ - α)\, σφ(90^\circ - α)}$$

Λύσις.

Ὁμοίως ὡς καί ἡ ἄσκησις 102.-

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$180 - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 180^\circ \quad \text{ἄρα} \quad ημ(180^\circ - α) = ημα$$

$$\text{καί} \quad συν(180^\circ - α) = -συνα$$

"Τριγωνομετρικαί Ἀσκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

II4.

$90^{o} - \cancel{\alpha} + \cancel{\alpha} = 90^{o}$ ἄρα $\eta\mu(90^{o} - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha$

$\sigma\upsilon\nu(90^{o} - \alpha) = \eta\mu\alpha$

$\varepsilon\varphi(90^{o} - \alpha) = \sigma\varphi\alpha$

καί $\sigma\varphi(90^{o} - \alpha) = \varepsilon\varphi\alpha$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τό κλάσμα ἔχομεν.

$$\frac{\eta\mu(I80^{o} - \alpha)\,\sigma\varphi\alpha\,\eta\mu(90^{o} - \alpha) - \sigma\upsilon\nu(I80^{o} - \alpha)\,\varepsilon\varphi\alpha\,\sigma\upsilon\nu(90^{o} - \alpha)}{\varepsilon\varphi(90^{o} - \alpha)\,\sigma\varphi(90^{o} - \alpha)} =$$

$$= \frac{\cancel{\eta\mu\alpha} \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\cancel{\eta\mu\alpha}} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha - (-\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}) \cdot \dfrac{\eta\mu\alpha}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}\,\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha\,\eta\mu\alpha}{\sigma\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu^{2}\alpha + \eta\mu^{2}\alpha}{\sigma\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\alpha} = \frac{I}{I} = I$$

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νά θέσωμεν εἰς τόν παρονομαστήν ὅπου $\varepsilon\varphi\,(90^{o} - \alpha)\,\sigma\varphi\,(90^{o} - \alpha) = I$.

ΟΜΑΣ ΕΝΝΑΤΗ

Τριγωνομετρικαί ἐξισώσεις μέ ἄγνωστον ἕνα μόνον ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν μιᾶς γωνίας χ (ἤ ἑνός τόξου χ) καί διά τιμάς του χ ἀπό 0° μέχρι 90°.

(Διά τήν λύσιν τῶν τριγωνομετρικῶν ἐξισώσεων βλέπε σελίδα 36).

Α΄ Τριγωνομετρικαί ἐξισώσεις α΄ βαθμοῦ.

Ι΄ Περίπτωσις καθ'ἥν ἡ τελική μορφή τῆς ἐξισώσεως ἔχει ὡς β΄μέλος τιμήν ἴσην πρός τήν τιμήν ἑνός τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν (ἤ τόξων) 30°, 45° καί 60°.

104. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\eta\mu\chi = \frac{1}{2}\left(0^\circ < \chi < 90^\circ\right)$

Λύσις.

Σκέψις. Ὁ ἄγνωστος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀπό μέν τῆς Ἀλγεβρικῆς πλευρᾶς, εἶναι τό ημχ ἀπό δέ τῆς Τριγωνομετρικῆς τοιαύτης ἡ γωνία (ἤ τό τόξον) χ.

Ὅταν λέγωμεν ὅτι θά λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν ἐννοοῦμεν ὅτι θά εὕρωμεν τό μέτρον τῆς γωνίας χ, διά τό ὁποῖον μέτρον ἀληθεύει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (ὑπενθυμίζομεν πάντοτε τό ἐδάφιον 4 σελ. 36).

Ἡ λύσις μιᾶς Τριγωνομετρικῆς ἐξισώσεως γίνεται κατά τόν κανόνα καί τρόπον λύσεως μιᾶς Ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως (σελ.35). Οὕτω εὑρίσκομεν τόν Ἀλγεβρικόν ἄγνωστον ὁ ὁποῖος εἶναι εἷς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

Μετά ταῦτα στηριζόμενοι εἰς τήν § 5 (ἀντίστροφον) σελ. 5 ἤ χρησιμοποιοῦντες λογαρίθμους εὑρίσκομεν καί τόν τριγωνομετρικόν ἄγνωστον δηλαδή τό χ, πρᾶγμα τό ὁποῖον εἶναι καί ὁ τελικός σκοπός μας.

Ἐργασία.

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐδῶ ἶναι εἰς τήν τελικήν της μορφην

Τό μέτρον τῆς γωνίας εὑρίσκεται κατά δύο τρόπους

<u>Α΄ Τρόπος.</u> Μᾶς ἐδόθη $ημχ = \frac{I}{2}$
Ὡςγνωστόν εἶναι: $ημ30^o = \frac{I}{2}$
Τά β΄ μέλη ἴσα. Ἄρα καί τά α΄ ἴσα.

<u>Ὥστε:</u> $ημχ = ημ30^o$. Τώρα (§ 5, ἀντίστροφον)

ἔχομεν $χ = 30^o$.

<u>Β΄ Τρόπος,</u> Χρῆσις λογαρίθμων.

$ημχ = \frac{I}{2}$ ἤ

$λογ\ ημχ = λογ\ (\frac{I}{2})$ ἤ

$λογ\ ημχ = λογ\ I - λογ2$ ἤ

$λογ\ ημχ = 0,00000 - 0,30I03$ ἤ

$λογημχ = \bar{I},69897$

καί $χ = 30^o$

<u>Παρατήρησις.</u> Καί μέ τούς δύο τρόπους εὑρίσκομεν τό αὐτό ἀποτέλεσμα.

I05. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $(0^o < χ < 90^o)$

Λύσις.

<u>Α΄ Τρόπος.</u> Μᾶς ἐδόθη $συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Ὡς γνωστόν ἔχομεν $συν45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Τά β΄ μέλη ἴσα ἄρα καί τά α΄ ἴσα.

<u>Ὥστε .</u> $συνχ = συν\ 45^o$. Τώρα (§ 5, ἀντίστροφον).

ἔχομεν $χ = 45^o$

<u>Β΄ Τρόπος.</u> Χρῆσις λογαρίθμων.

$συνχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ἤ

$λογ\ συνχ = λογ\ (\frac{\sqrt{2}}{2})$ ἤ

$$\left.\begin{aligned}\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\chi &= \lambda o\gamma\sqrt{2} - \lambda o\gamma 2 \quad \acute{\eta}\\ \lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\chi &= \frac{\lambda o\gamma 2}{2} - \lambda o\gamma 2 \quad \acute{\eta}\\ \lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\chi &= \frac{0{,}30I03}{2} - 0{,}30I03 \quad \acute{\eta}\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\chi = 0{,}I505I - 0{,}30I03\\ &\lambda o\gamma\,\sigma\upsilon\nu\chi = \overline{I}{,}85948\\ &\kappa\alpha\acute{\iota} \quad \chi = 45^{o}\end{aligned}$$

<u>Παρατήρησις.</u> Καί μέ τούς τρόπους εὑρίσκομεν τό αὐτό ἀποτέλεσμα.

IO6. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3} \quad (0^{o} < \chi < 90^{o})$

Λύσις.

<u>Α΄ Τρόπος.</u> Μᾶς ἐδόθη ὅτι $\varepsilon\varphi\chi = \sqrt{3}$
Ὡς γνωστόν εἶναι $\varepsilon\varphi 60 = \sqrt{3}$
Τά β΄ μέλη ἴσα ἄρα καί τά α΄ ἴσα.

<u>Ὥστε.</u> $\varepsilon\varphi\chi = \varepsilon\varphi 60^{o}$. Τώρα (§ 5, ἀντίστροφον).
ἔχομεν. $\chi = 60^{o}$

<u>Β΄ Τρόπος.</u> (Χρῆσις λογαρίθμων).

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi\chi &= \sqrt{3}\\ \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\chi &= \lambda o\gamma\sqrt{3} \quad \acute{\eta}\\ \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\chi &= \frac{\lambda o\gamma 3}{2} \quad \acute{\eta}\\ \lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\chi &= \frac{0{,}47732}{2}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}&\lambda o\gamma\,\varepsilon\varphi\chi = 0{,}23856\\ &\kappa\alpha\acute{\iota}\\ &\chi = 60^{o}\end{aligned}$$

IO7. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\sigma\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (0^{o} < \chi^{o} < 90^{o})$

Λύσις.

<u>Α΄ Τρόπος.</u> Μᾶς ἐδόθη ὅτι $\sigma\varphi\chi = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Ὡς γνωστόν εἶναι $\sigma\varphi 60^{o} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Τά β΄ μέλη ἴσα ἄρα καί τά α΄ ἴσα.

"Τριγωνομετρικαί Ἀσκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

<u>Ὥστε.</u> $σφχ = σφ60^{o}$. Τώρα (§ 5) ἀντίστροφον.

ἔχομεν. $χ = 60^{o}$.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> (Χρῆσις λογαρίθμων).

$$σφχ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$λογ\ σφχ = λογ(\frac{\sqrt{3}}{3}) \quad ἤ$$

$$λογ\ σφχ = λογ\sqrt{3} - λογ3 \quad ἤ$$

$$λογ\ σφχ = \frac{λογ3}{2} - λογ3 \quad ἤ$$

$$λογ\ σφχ = \frac{0,477I2}{2} - 0,477I2$$

$$λογ\ σφχ = 0,23856 - 0,477I2$$

$$λογ\ σφχ = \overline{I},76I44$$

καί

$$χ = 60^{o}$$

ΙΙ΄ Περίπτωσις καθ'ἥν τό β΄μέλος τῆς τελικῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι τυχών ἀριθμός.

Ι08. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5ημχ = 3 \quad (0^{o} < χ < 90^{o})$

Λύσις.

Φέρομεν τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν εἰς τήν τελικήν της μορφήν, ἀπό 'Αλγεβρικῆς πλευρᾶς.

$$5ημχ = 3$$

$$\frac{\cancel{5}ημχ}{\cancel{5}} = \frac{3}{5}$$

$$ημχ = \frac{3}{5}$$

Τώρα λογαριθμίζομεν καί ἔχομεν:

$$λογ\ ημχ = λογ\ (\frac{3}{5})$$

$$λογ\ ημχ = λογ3 - λογ5$$

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$$λογ\ ημχ = 0,477I2 - 0,69897$$

$$λογ\ ημχ = \overline{I},778I5$$

$$καί \quad χ = 36^{o}\ 52'\ I0''$$

<u>Βοηθητικαί πράξεις.</u>

	778I2		36^{o} I2΄
I7	778I5	3	
	77829		36^{o} I3΄

$$\boxed{\frac{I7}{3} \quad μ.ε.΄δ.τ. \quad I' = \frac{60''}{χ}}$$

$$χ = 60 \cdot \frac{3}{I7} = \frac{I80}{I8} = I0''$$

I09. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{25\varepsilon\varphi\chi}{4} - 5 = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + 3\varepsilon\varphi\chi$

Λύσις,

Θέτομεν κατ'ἀρχάς εἰς τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $\frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} = \varepsilon\varphi\chi$, διά νά ὑπάρχη εἰς τήν ἐξίσωσιν εἷς μόνον τριγωνομετρικός ἀριθμός, ἐδῶ ἡ εφχ. Κατόπιν ἐνεργοῦμεν κατά τά γνωστά (σελ. 35).

Κατά ταῦτα ἔχομεν.

$\frac{25\varepsilon\varphi\chi}{4} - 5 = \frac{\eta\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu\chi} + 3\varepsilon\varphi\chi$ ἤ

$\frac{25\varepsilon\varphi\chi}{4} - 5 = \varepsilon\varphi\chi + 3\varepsilon\varphi\chi$ ἤ

$\frac{25\varepsilon\varphi\chi}{4} - \frac{5}{I} = 4\varepsilon\varphi\chi$ ἤ

$25\varepsilon\varphi\chi - 20 = I6\varepsilon\varphi\chi$ ἤ

$25\varepsilon\varphi\chi - I6\varepsilon\varphi\chi = 20$ ἤ

$9\varepsilon\varphi\chi = 20$

$\varepsilon\varphi\chi = \frac{20}{9}$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = \lambda o\gamma\left(\frac{20}{9}\right)$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = \lambda o\gamma 20 - \lambda o\gamma 9$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = I{,}30I03 - 0{,}95424$

$\lambda o\gamma\varepsilon\varphi\chi = 0{,}34679$

$\chi = 65^0\ 46'\ 2I''$

Βοηθητικαί πράξεις.

34	34667	I2	$65^0\ 46'$
	34679		
	3470I		$65^0\ 47'$

$\frac{34}{I2}$ μ.ε΄.δ.τ. $\frac{I' = 60''}{\chi}$

$\chi = 60.\frac{I2}{34} = \frac{360}{I7} = 2I''$

Β΄. Τριγωνομετρικαί ἐξισώσεις β΄ βαθμοῦ.

IIO. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi + \frac{I}{4} = 0 \quad (0^0 < \chi < 90^0)$

Λύσις.

$\eta\mu^2\chi - \eta\mu\chi + \frac{I}{4} = 0$ ἤ (ἀπαλοιφή παρονομαστῶν).

$4\eta\mu^2\chi - 4\eta\mu\chi + I = 0$ ἤ $\boxed{\text{τύπος (2) σελ. 38.}}$

(β΄ βαθμοῦ ὡς πρός ημχ)

$\eta\mu\chi = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.I}}{2\ .\ 4}$ ἤ $\eta\mu\chi = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{I}{2}$

Ὥστε. $\eta\mu\chi = \frac{I}{2}$. Ἀλλά καί $\eta\mu 30^0 = \frac{I}{2}$. Ἄρα $\eta\mu\chi = \eta\mu 30^0$ καί $\chi = 30^0$.

111. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $εφχ + σφχ = 2 \quad (0^\circ < χ < 90^\circ)$.

Λύσις.

$εφχ + σφχ = 2$ ἤ (θέτοντες $σφχ = \frac{Ι}{εφχ}$ διά νά ἔχωμε ἐξίσ. μέ ἕνα ἄγνωστον, τήν εφχ)

$εφχ + \frac{Ι}{εφχ} = 2$ ἤ (ἀπαλοιφή παρονομαστῶν)

$εφ^2χ + Ι = 2εφχ$ ἤ

$εφ^2χ - 2εφχ + Ι = 0$ ἤ [Τύπος (2) σελ. 38]

(β΄βαθμοῦ ὡς πρός εφχ).

$$εφχ = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4.Ι.Ι}}{2.Ι} = \frac{2+\sqrt{0}}{2} = \frac{2}{2} = Ι$$

Ὥστε. $εφχ = Ι$. Ἀλλά καί $εφ45^\circ = Ι$

Ἄρα. $εφχ = εφ\,45^\circ$ καί $χ = 45^\circ$

Γ΄ Τριγωνομετρικαί ἐξισώσεις δ΄βαθμοῦ.
(Τῆς μορφῆς Διτετραγώνων).

ΙΙ2. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις $ημ^4χ - ημ^2χ + \frac{Ι}{4} = 0$

Λύσις.

$ημ^4χ - ημ^2χ + \frac{Ι}{4} = 0$ ἤ (ἀπαλοιφή παρονομαστῶν)

$4ημ^4χ - 4ημ^2χ + Ι = 0$ (Διτετράγωνος ὡς πρός ημχ).

Θέτομεν τώρα $ημ^2χ = ψ$ ὅτε $ημ^4χ = ψ^2$ διά νά τήν ὑποβιβάσωμεν εἰς δευτεροβάθμιον ὡς πρός ψ καί ἔχομεν:

$4ψ^2 - 4ψ + Ι = 0$ (β΄βαθμοῦ ὡς πρός ψ).

$$ψ = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.Ι}}{2.4} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{4}{8} = \frac{Ι}{2} \quad ψ = \frac{Ι}{2}$$

Ὥστε. $ημ^2χ = \frac{Ι}{2}$ καί $ημχ = \pm\sqrt{\frac{Ι}{2}} = \pm\frac{Ι}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Δηλαδή

$ημχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (δεκτή λύσις) καί

$ημχ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (ἀπορρίπτεται ἀφοῦ $0^\circ < χ < 90^\circ$)

Ἐκ τῆς $ημχ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ καί ἐπειδή $ημ45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

θά ἔχωμεν: $ημχ = ημ45^\circ$ καί $χ = 45^\circ$

ΟΜΑΣ ΔΕΚΑΤΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις μεταξύ τῶν πλευρῶν ἑνός ὀ ρ θ ο γ ω ν ί ο υ τριγώνου καί τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν του.

---

113. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ τήν γωνίαν Α = 1 ὀρθή ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$\frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu \Gamma} = \varepsilon\varphi B$$

Λύσις ὑποδειγματική χρησιμεύουσα καί διά τάς ἐπομένας ἀσκήσεις της σειρας αὐτης.

Α΄ Τρόπος. (Σκέψις). Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος θέτομεν

$\eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha}$, $\sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ἐκτελοῦμεν πράξεις κλπ.

'Απόδειξις.

$$\frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu \Gamma} = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha}}{\dfrac{\gamma}{\alpha} + \dfrac{\gamma}{\alpha}} = \frac{\dfrac{2\beta}{\alpha}}{\dfrac{2\gamma}{\alpha}} = \frac{\cancel{2}\cancel{\alpha}\beta}{\cancel{2}\cancel{\alpha}\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon\varphi B$$

ὅ.ἔ.δ.

Β΄ Τρόπος. (Σκέψις. Λαμβάνομεν τό α΄μέλος καί ἀντικαθιστῶμεν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας Γ μέ τούς ἀντιστοίχους των τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας Β, ἐκ τῆς σχέσ. $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$, διότι εἰς τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ἔχομεν μόνον τήν γωνίαν Β).

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

I22.

'Απόδειξις.

$$\frac{\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \eta\mu\Gamma} =$$ ('Επειδή $B + \Gamma = 90^0$ δι'αὐτό ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B$ καί $\eta\mu\Gamma = \sigma\upsilon\nu B$).

$$= \frac{\eta\mu B + \eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu B} = \frac{\cancel{2}\eta\mu B}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu B} = \varepsilon\varphi B \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΣΠΟΥΔΑΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.

Εἰς τάς ἑπομένας ἀσκήσεις τῆς ὁμάδος αὐτῆς θά παραλείπωμεν τό πρῶτον μέρος τῆς ἐκφωνήσεως καί θά ἀναγράφωμεν μόνον τάς ἀποδεικτέας ἰσότητας, ἐννοοῦντες ὅτι ἀναφερόμεθα εἰς ὀρθογώνια τρίγωνα μέ τήν $A = I$ ὀρθή.

II4. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{2\beta}{\alpha}$

'Απόδειξις.

Α΄ Τρόπος. $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2\beta}{\alpha}$ ὅ.ἔ.δ.

Β΄ Τρόπος. $\eta\mu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma =$ (ἐπειδή $B + \Gamma = 90^0$, ἔχομεν $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B$) $= \eta\mu B + \eta\mu B = 2\eta\mu B = 2 \cdot \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{2\beta}{\alpha}$ ὅ.ἔ.δ.

II5. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = \dfrac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2}$

'Απόδειξις.

$$\eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

II6. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{I}{\eta\mu B} + \sigma\varphi B = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta}$

'Απόδειξις.

$$\frac{I}{\eta\mu B} + \sigma\varphi B = \frac{I}{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{I}{I}}{\frac{\beta}{\alpha}} + \frac{\gamma}{\beta} =$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$ ὅ.ἔ.δ.

II7. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi 2B = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$

'Απόδειξις.

Α΄ Τρόπος. $\varepsilon\varphi 2B = \frac{\eta\mu 2B}{\sigma\upsilon\nu 2B} = \frac{2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu^2 B - \eta\mu^2 B} =$

$$= \frac{2.\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\gamma}{\alpha}}{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} = \frac{\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}}{\frac{\gamma^2}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} = \frac{\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}}{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}} = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$$

ὅ. ἔ. δ.

Β΄ Τρόπος. $\varepsilon\varphi 2B = \frac{2\varepsilon\varphi B}{I - \varepsilon\varphi^2 B} = \frac{2.\frac{\beta}{\gamma}}{I - \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2} = \frac{\frac{2\beta}{\gamma}}{I - \frac{\beta^2}{\gamma^2}} =$

$$= \frac{\frac{2\beta}{\gamma}}{\frac{\gamma^2}{\gamma^2} - \frac{\beta^2}{\gamma^2}} = \frac{\frac{2\beta}{\gamma}}{\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2}} = \frac{2\beta\gamma^{\cancel{2}}}{\cancel{\gamma}(\gamma^2 - \beta^2)} = \frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}$$

ὅ. ἔ. δ.

II8. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2 - \beta^2} = \varepsilon\varphi 2B$

I24.

'Απόδειξις.

$$\frac{2\beta\gamma}{\gamma^2-\beta^2}=\frac{2.\alpha\eta\mu B.\alpha\ \sigma\upsilon\nu B}{(\alpha\sigma\upsilon\nu B)^2-(\alpha\ \eta\mu B)^2}=\frac{2\ \alpha^2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B}{\alpha^2\ \sigma\upsilon\nu^2 B-\alpha^2\eta\mu^2 B}=$$

$$=\frac{2\alpha^2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B}{\alpha^2(\sigma\upsilon\nu^2 B-\eta\mu^2 B)}=\frac{2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu^2 B-\eta\mu^2 B}=\frac{\eta\mu 2B}{\sigma\upsilon\nu 2B}=\varepsilon\varphi 2B$$

ὅ. ἔ. δ.

II9. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\varphi 2B=\dfrac{\gamma^2-\beta^2}{2\beta\gamma}$

'Απόδειξις.

Α΄ Τρόπος. $\sigma\varphi 2B=\dfrac{\sigma\upsilon\nu 2B}{\eta\mu 2B}=\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 B-\eta\mu^2 B}{2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B}=$

$$=\frac{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{2.\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\gamma}{\alpha}}=\frac{\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}}=\frac{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}}{\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}}=\frac{\gamma^2-\beta^2}{2\beta\gamma}$$

ὅ. ἔ. δ.

I20. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu 2B=\dfrac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$

'Απόδειξις.

$$\sigma\upsilon\nu 2B=\sigma\upsilon\nu^2 B-\eta\mu^2 B=\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{\gamma^2}{\alpha^2}-\frac{\beta^2}{\alpha^2}=\frac{\gamma^2-\beta^2}{\alpha^2}$$

ὅ. ἔ. δ.

I2I. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu 2B=\dfrac{2\beta\gamma}{\alpha}$

'Απόδειξις.

$$\eta\mu 2B=2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B=2.\frac{\beta}{\alpha}.\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{2\beta\gamma}{\alpha^2}$$ ὅ. ἔ. δ.

I22. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\upsilon\nu 2B = \dfrac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2}$

'Απόδειξις.

$\sigma\upsilon\nu 2B =$ (ὡς καί ἄσκησις I20) $= \dfrac{\gamma^2 - \beta^2}{\alpha^2} =$

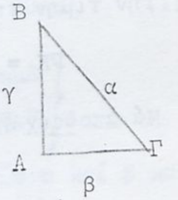
(ἀλλά ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $\alpha^2 = \gamma^2 + \beta^2$)

$= \dfrac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 + \beta^2}$ ὅ. ἔ. δ.

I23. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ μέ γων Α = Ι ὀρθή . ἔχομεν

$$E = \frac{I}{4}\,\alpha^2\,\eta\mu 2B$$

'Απόδειξις.



(Σχ. I6)

'Εκ τοῦ παραπλεύρως κειμένου σχήματος ἔχομεν (ἐκ τῆς Γεωμετρίας) :

$E = \dfrac{I}{2}$ (ΑΓ) (ΑΒ) ἤ

$E = \dfrac{I}{2}\,\beta.\gamma$ (I)

'Αλλ'ὡς γνωστόν $\beta = \alpha\eta\mu B$ καί $\gamma = \alpha\,\sigma\upsilon\nu B$. 'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν (I) ἔχομεν:

$E = \dfrac{I}{2}\,\alpha\eta\mu B\,\alpha\sigma\upsilon\nu B$ ἤ $E = \dfrac{I}{2}\,\alpha^2\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B$

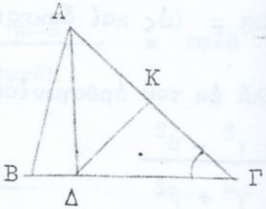
Πολλαπλασιάζομεν τώρα καί διαιροῦμεν τήν τελευταίαν ἰσότητα μέ τό 2 καί ἔχομεν :

$E = \dfrac{I}{2.2}\,.\,\alpha^2\,.\,2.\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu B$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

καί τελικῶς $E = \frac{1}{4}\alpha^2$ ημ $2B$ ὅ.ἔ.δ.

124. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τήν ΑΔ κάθετον ἐπί τήν ΒΓ. Ἐν συνεχείᾳ φέρομεν τήν ΔΚ κάθετον ἐπί τήν ΑΓ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι $ΓΚ = \beta \cdot συν^2Γ$.



Ἀπόδειξις.

Ἐξετάζομεν τό σχῆμα.

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΚΔ (μέ $\widehat{ΔΚΓ}$ = 1 ὀρθή) ἔχομεν :

$$ΓΚ = (ΔΓ)\ συνΓ \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου (Σχ. 17) ΑΔΓ (μέν $\widehat{ΑΔΓ}$ = 1 ὀρθή) ἔχομεν:

$$(ΔΓ) = (ΑΓ)\ συνΓ = \beta\ συνΓ \quad (ΑΓ = \beta)$$

Τήν τιμήν τῆς ΔΓ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) καί ἔχομεν.

$$ΓΚ = \beta συνΓ \cdot συνΓ = \beta\ συν^2Γ. \quad ὅ.ἔ.δ.$$

125. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = εφ\ \frac{B}{2}$

Ἀπόδειξις.

$$\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \left(\begin{array}{l}\text{διαιροῦμεν}\\ \text{τούς δύο}\\ \text{ὅρους τοῦ}\\ \text{κλάσματος}\\ \text{διά τοῦ } \alpha\end{array}\right) = \frac{\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha+\gamma}{\alpha}} = \frac{ημB}{\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}} =$$

$$= \frac{ημB}{1+συνB} = \frac{2ημ\frac{B}{2}συν\frac{B}{2}}{συν^2\frac{B}{2}+\cancel{ημ^2\frac{B}{2}}+συν^2\frac{B}{2}-\cancel{ημ^2\frac{B}{2}}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\ ημ\frac{B}{2}\ \cancel{συν\frac{B}{2}}}{\cancel{2}\ συν^{\cancel{2}}\frac{B}{2}} = \frac{ημ\frac{B}{2}}{συν\frac{B}{2}} = εφ\ \frac{B}{2} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

ΟΜΑΣ ΕΝΔΕΚΑΤΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις αἱ ὁποῖαι συνδέουν τάς πλευράς τ υ χ ό ν τ ο ς τριγώνου μέ τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν γωνιῶν του, τό ἐμβαδόν του καί τήν ἀκτῖνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καί αἱ ὁποῖαι ἀσκήσεις λύονται ἐπί τῇ βάσει τῶν τύπων τοῦ παρόντος βιβλίου.

Ι26. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$E = 2R^2\ ημΑ\ ημΒ\ ημΓ$$

'Απόδειξις

'Ως γνωστόν (τύπος 73) ἔχομεν $E = \frac{1}{2}\ αβημΓ$ (Ι)

'Επίσης γνωρίζομεν (τύπος 69) ὅτι $\left.\begin{array}{l} α = 2RημΑ \\ \text{καί } β = 2RημΒ \end{array}\right\}$

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (Ι) τάς τιμάς τῶν α καί β καί λαμβάνομεν.

$$E = \frac{1}{2}\cdot 2R\ ημΑ\ .\ 2R\ ημΒ\ ημΓ\ \text{καί}$$

$$E = \frac{1}{\cancel{2}}\ \cancel{2}R.ημΑ.2R\ ημΒ\ ημΓ = 2R^2\ ημΑ\ ημΒ\ ημΓ$$ ὅ.ἔ.δ.

Ι27. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$E = \frac{α^2 ημΒ\ ημΓ}{2ημΑ}$$

'Απόδειξις.

'Ως γνωστόν (τύπος 73) ἔχομεν $E = \frac{1}{2}\ αβ\ ημΓ$ (Ι)

'Επίσης γνωρίζομεν (τύπος 71) ὅτι:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B}$$ Λύοντες ταύτην ὡς πρός β ἔχομεν $\beta . \eta\mu A = \alpha . \eta\mu B$

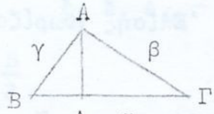
ὅτε $\frac{\beta\, \cancel{\eta\mu A}}{\cancel{\eta\mu A}} = \frac{\alpha\, \eta\mu B}{\eta\mu A}$ ἤ $\beta = \frac{\alpha\, \eta\mu B}{\eta\mu A}$

Τήν τιμήν ταύτην τοῦ β ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1), διά νά μήν ὑπάρχη τό β τό ὁποῖον δέν χρειαζόμεθα εἰς τό β΄μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καί λαμβάνομεν:

$$E = \frac{1}{2} . \alpha . \frac{\alpha \eta\mu B}{\eta\mu A} . \eta\mu\Gamma = \text{(Κανών 1ος Σελίς 32)} = \frac{\alpha^2 \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}{2\, \eta\mu A}$$ ὅ.ἔ.δ.

128. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον τό ὕψος τό ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς μιᾶς γωνίας αὐτοῦ ἐπί τήν ἀπέναντι πλευράν του ἰσοῦται μέ τήν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἐπί τά ἡμίτονα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Λύσις.



(Σχ. 18) Τριγ. ΑΒΓ Ὕψος ΑΔ

θά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$A\Delta = 2R\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma$$

'Απόδειξις.

'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΒ ἔχομεν (Σχ. 18)

$$A\Delta = \gamma \eta\mu B \qquad (1)$$

'Εκ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $\gamma = 2R\ \eta\mu\Gamma$

'Αντικαθιστῶμεν τώρα τήν τιμήν τοῦ γ εἰς τήν (1) καί ἔχομεν:

$$A\Delta = 2R\ \eta\mu\Gamma\ \eta\mu B$$ (νόμος ἀντιμεταθέσεως).

$$A\Delta = 2R\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma$$ ὅ.ἔ.δ.

129. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις.

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\beta\gamma\, \sigma\upsilon\nu A + \alpha\gamma\, \sigma\upsilon\nu B + \alpha\beta\, \sigma\upsilon\nu\Gamma)$$

'Απόδειξις.

'Ως γνωστόν (τύποι 72) ἔχομεν.
$$\left\{\begin{aligned} \alpha^2 &= \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \\ \beta^2 &= \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \\ \gamma^2 &= \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma \end{aligned}\right\}$$
Τάς ἰσότητας ταύτας προσθέτομεν κατά μέλη

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-2(\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta\sigma\upsilon\Gamma)$$

ἤ (διά μεταφορᾶς ὅρων)

$$2(\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma) = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \text{ ἤ}$$

$$2(\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma) = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

Καί δι'ἐναλλαγῆς τῶν μελῶν ἔχομεν.

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2(\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A+\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B+\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma) \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

130. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{\varepsilon\varphi A}{\varepsilon\varphi B}$$

'Απόδειξις.

'Εκ τοῦ τύπου 72 (2) $\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$

ἔχομεν $2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B = \alpha^2+\gamma^2-\beta^2$ καί

τελικῶς δι'ἐναλλαγῆς τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$\alpha^2+\gamma^2-\beta^2 = 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \quad \text{(I)}$$

'Εκ τοῦ τύπου 72 (I) $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

ἔχομεν $2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A = \beta^2+\gamma^2-\alpha^2$ καί

τελικῶς δι'ἐναλλαγῆς τῶν μελῶν λαμβάνομεν

$$\beta^2+\gamma^2-\alpha^2 = 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \quad \text{(II)}$$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α' Ἔκδοσις.

Τάς ἰσότητας (I) καί (II) διαιροῦμεν κατά μέλη καί λαμβάνομεν:

$$\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2} = \frac{2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B}{2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A} = \frac{\alpha\sigma\upsilon\nu B}{\beta\sigma\upsilon\nu A} = \left(\begin{array}{ll}\text{ἀλλά} & \alpha = 2R\eta\mu A \\ \text{καί} & \beta = 2R\eta\mu B\end{array}\right)$$

$$= \frac{2R\eta\mu A\ \sigma\upsilon\nu B}{2R\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu A} = \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\eta\mu B} = \varepsilon\varphi A\sigma\varphi B =$$

$$= \varepsilon\varphi A \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi B} = \frac{\varepsilon\varphi A}{\varepsilon\varphi B}$$ ὅ. ἔ. δ.

131. Ἐάν εἰς ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις $\eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = \eta\mu^2 A$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

Λύσις

Σκέψις. Διά νά εἶναι τό τρίγωνον ὀρθογώνιον πρέπει ἡ γων. $A = 90^\circ$ ἤ $\beta^2+\gamma^2 = \alpha^2$

Ἀπόδειξις

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων:

$\alpha = 2R\eta\mu A$ $\quad$ $\beta = 2R\eta\mu B$ καί $\quad$ $\gamma = 2R\eta\mu\Gamma$

ἔχομεν

$\alpha^2 = 4R^2\eta\mu^2 A$ $\quad$ $\beta^2 = 4R^2\eta\mu^2 B$ καί $\gamma^2 = 4R^2\eta\mu^2\Gamma$ ἤ :

$$\eta\mu^2 A = \frac{\alpha^2}{4R^2}, \quad \eta\mu^2 B = \frac{\beta^2}{4R^2} \quad \text{καί} \quad \eta\mu^2\Gamma = \frac{\gamma^2}{4R^2}$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα τάς τιμάς τῶν ἡμιτόνων εἰς τήν δοθεῖσαν σχέσιν ἔχομεν.

$$\frac{\beta^2}{4R^2} + \frac{\gamma^2}{4R^2} = \frac{\alpha^2}{4R^2}, \quad \frac{\beta^2+\gamma^2}{4R^2} = \frac{\alpha^2}{4R^2} \quad \text{καί}$$

$\beta^2+\gamma^2 = \alpha^2$. Ἄρα τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

ὅ.ἔ.δ.

132. Ἐάν εἰς ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύει ἡ σχέσις $\frac{\text{εφΑ}}{\text{εφΒ}} = \frac{\text{ημ}^2\text{Α}}{\text{ημ}^2\text{Β}}$ τότε νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

Ἀπόδειξις.

Ἐξετάζομεν τήν δοθεῖσαν σχέσιν $\frac{\text{εφΑ}}{\text{εφΒ}} = \frac{\text{ημ}^2\text{Α}}{\text{ημ}^2\text{Β}}$. Αὕτη δι' ἐφαρμογῆς τῆς Ιης ἰδιοτ. ἀναλογίαν (Σελ.30) γράφεται :

$\text{εφΑ ημ}^2\text{Β} = \text{εφΒ ημ}^2\text{Α}$ ἤ

$\frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΑ}}.\text{ημ}^2\text{Β} = \frac{\text{ημΒ}}{\text{συνΒ}}.\text{ημ}^2\text{Α}$ ἤ $\frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΑ}}\text{ημ}^2\text{Β} - \frac{\text{ημΒ}}{\text{συνΒ}}\text{ημ}^2\text{Α} = 0$

ἤ (δι' ἐξαγωγῆς ὡς κοινοῦ παράγοντος τοῦ ημΑ ημΒ) $\text{ημΑ ημΒ}\left(\frac{\text{ημΒ}}{\text{συνΑ}} - \frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΒ}}\right) = 0$

Τώρα ἵνα τό γινόμενον αὐτό ἰσοῦται μέ τό 0 πρέπει ἤ ὁ εἷς παράγων ἤ ὁ ἄλλος νά ἰσοῦται μέ τό 0. Δηλαδή

ἤ ημΑ ημΒ = 0 ὅπερ ἀδύνατον διότι ἀφοῦ πρόκειται περί τριγώνου οὐδεμία γωνία εἶναι 0° ὥστε τό ἡμιτόνόν της νά εἶναι 0.

ἤ $\frac{\text{ημΒ}}{\text{συνΑ}} - \frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΒ}} = 0$ ὅτε $\frac{\text{ημΒ}}{\text{συνΑ}} = \frac{\text{ημΑ}}{\text{συνΒ}}$ καί δι' ἐφαρμογῆς τῆς Ιης ἰδιότητος ἀναλογιῶν (Σελ.30).

ημΒ.συνΒ = ημΑ.συνΑ ἤ (δι' πολ/σμοῦ ἐπί 2 ἀμφοτέρων τῶν μελῶν)

2ημΒ συνΒ = 2ημΑ συνΑ ἤ

ημ2Β = ημ2Α (καί § 5 ἀντίστροφον).

2Β = 2Α ἄρα $\hat{\text{Β}} = \hat{\text{Α}}$

Ἀφοῦ λοιπόν τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει δύο γωνίας ἴσας θά εἶναι ἰσοσκελής. ὅ.ἔ.δ.

133. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ὑφίσταται ἡ σχέσις $\text{ημΑ} + \text{ημΒ} + \text{ημΓ} = \frac{\tau}{R}$ (ὅπου $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ καί R ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου).

'Απόδειξις.

'Εκ τῶν τύπων (70) ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R \quad \frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \quad \text{καί} \quad \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

'Εκ τῆς πρώτης ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{2R}{1} \quad \text{ἤ} \quad 2R.\eta\mu A = \alpha \quad \text{καί} \quad \eta\mu A = \frac{\alpha}{2R}$$

'Ομοίως λαμβάνομεν:

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{2R} \quad \text{καί} \quad \eta\mu \Gamma = \frac{\gamma}{2R}$$

Τάς τρεῖς τελευταίας ἰσότητας προσθέτομεν κατά μέλη καί λαμβάνομεν:

$$\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2R}$$

(ἀλλά ἐκ τῆς Γεωμετρίας $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$).

$$= \frac{\cancel{2}\tau}{\cancel{2}R} = \frac{\tau}{R} \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

* ΟΜΑΣ ΔΩΔΕΚΑΤΗ

'Ασκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς τάς σχέσεις καί τῶν ἕξ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν ἤτοι ἡμιτόνου, συνημιτόνου, ἐφαπτομένης, συνεφαπτομένης, τεμνούσης καί συντεμνούσης μιᾶς γωνίας ἤ ἑνός τόξου α.

---

134. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$ημα.συνα.εφα.σφα.τεμα.στεμα = I$$

'Απόδειξις.

$$ημα.συνα.εφα.σφα.τεμα.στεμα =$$

$$= ημα.συνα.εφα.σφα.\frac{I}{συνα}.\frac{I}{ημα} = (εφα.σφα = I)$$

$$= ημα\ συνα.I.\frac{I}{συνα\ ημα} = \frac{ημα\ συνα}{ημα\ συνα} = I \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Συμπέρασμα. "Τό γινόμενον καί τῶν ἕξ τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παντός τόξου ἰσοῦται μέ τήν μονάδα".

135. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $τεμ^2α = I + εφ^2α$

'Απόδειξις.

Α΄ Τρόπος. $τεμ^2α = \frac{I}{συν^2α} = \frac{συν^2α + ημ^2α}{συν^2α} =$

$$= \frac{συν^2α}{συν^2α} + \frac{ημ^2α}{συν^2α} = I + εφ^2α \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Β΄ Τρόπος. $τεμ^2α = \frac{I}{συν^2α} = \frac{I}{\frac{I}{I+εφ^2α}} = I : \frac{I}{I+εφ^2α} =$

$$= I . \frac{I+εφ^2α}{I} = I+εφ^2α. \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

" Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π. Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

Ι34.

Ι36. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι : $\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = 1+\sigma\varphi^2\alpha$

'Απόδειξις

Α΄ Τρόπος : $\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} =$

$= \frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = 1 + \sigma\varphi^2\alpha.$ ὅ.ἔ.δ.

Β΄ Τρόπος. $\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{1+\sigma\varphi^2\alpha}} =$

$= 1 : \frac{1}{1+\sigma\varphi^2\alpha} = 1 . \frac{1+\sigma\varphi^2\alpha}{1} = 1 + \sigma\varphi^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

Ι37. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\tau\varepsilon\mu^2\alpha . \eta\mu^2\alpha = \varepsilon\varphi^2\alpha$

'Απόδειξις.

$\tau\varepsilon\mu^2\alpha.\eta\mu^2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} . \eta\mu^2\alpha = \frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

Ι38. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha . \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \sigma\varphi^2\alpha$

'Απόδειξις.

$\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} . \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} = \sigma\varphi^2\alpha.$ ὅ.ἔ.δ.

Ι39. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\tau\varepsilon\mu^2\alpha\ \sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \tau\varepsilon\mu^2\alpha + \sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha$

'Απόδειξις.

$\tau\varepsilon\mu^2\alpha.\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} . \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \eta\mu^2\alpha} = \frac{\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \eta\mu^2\alpha}$

$= \frac{\cancel{\eta\mu^2\alpha}}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \cancel{\eta\mu^2\alpha}} + \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\ \eta\mu^2\alpha} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \frac{1}{\eta\mu^2\alpha} =$

$= \tau\varepsilon\mu^2\alpha + \sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha$ ὅ. ἔ. δ.

140. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $τεμ^2α + στεμ^2α = τεμ^2α\, στεμ^2α$

'Απόδειξις.

$$τεμ^2α + στεμ^2α = \frac{I}{\overbrace{συν^2α}} + \frac{I}{\overbrace{ημ^2α}} = \frac{ημ^2α + συν^2α}{συν^2α\, ημ^2α} =$$

$$= \frac{I}{συν^2α\, ημ^2α} = \frac{I}{συν^2α} \cdot \frac{I}{ημ^2α} = τεμ^2α . στεμ^2α \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

141. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{τεμα}{συνα} + \frac{στεμα}{ημα} = \frac{I}{ημ^2α\, συν^2α}$

'Απόδειξις.

Α΄ Τρόπος. $\frac{τεμα}{συνα} + \frac{στεμα}{ημα} = τεμα \cdot \frac{I}{συνα} + στεμα \frac{I}{ημα} =$

$$= \frac{I}{συνα} \cdot \frac{I}{συνα} + \frac{I}{ημα}\, \frac{I}{ημα} = \frac{I}{\overbrace{συν^2α}} + \frac{I}{\overbrace{ημ^2α}} =$$

$$= \frac{ημ^2α + συν^2α}{ημ^2α\, συν^2α} = \frac{I}{ημ^2α\, συν^2α} \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Β΄ Τρόπος.

$$\frac{τεμα}{συνα} + \frac{στεμα}{ημα} = \frac{\frac{I}{συνα}}{\frac{συνα}{I}} + \frac{\frac{I}{ημα}}{\frac{ημα}{I}} =$$

$$= \frac{I}{συν^2α} + \frac{I}{ημ^2α} = \frac{ημ^2α + συν^2α}{ημ^2α \cdot συν^2α} = \frac{I}{ημ^2α\, συν^2α}$$

ὅ. ἔ. δ.

136.

142. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\tau\epsilon\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$

Ἀπόδειξις.

Α΄ τρόπος. $\frac{\tau\epsilon\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \tau\epsilon\mu\alpha \cdot \frac{1}{\eta\mu\alpha} + \sigma\tau\epsilon\mu\alpha \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} =$

$= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} \cdot \frac{1}{\eta\mu\alpha} + \frac{1}{\eta\mu\alpha} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} =$

$= \frac{2}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$ ὅ. ἔ. δ.

Β΄ Τρόπος. $\frac{\tau\epsilon\mu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{\eta\mu\alpha}{1}} + \frac{\frac{1}{\eta\mu\alpha}}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1}} =$

$= \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{1}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}$ ὅ. ἔ. δ.

143. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\tau\epsilon\mu\alpha}{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha} = \sqrt{\tau\epsilon\mu^2\alpha - 1}$

Ἀπόδειξις.

$$\frac{\tau\epsilon\mu\alpha}{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha} = \frac{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\frac{1}{\eta\mu\alpha}} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\sqrt{\eta\mu^2\alpha}}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \sqrt{\tau\epsilon\mu^2\alpha - 1}$$

144. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\tau\epsilon\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \eta\mu\alpha} = \epsilon\varphi^3\alpha$

'Απόδειξις.

$$\frac{\text{τεμα} - \text{συνα}}{\text{στεμα} - \text{ημα}} = \frac{\frac{\mathrm{I}}{\text{συνα}} - \frac{\text{συνα}}{\mathrm{I}}}{\frac{\mathrm{I}}{\text{ημα}} - \frac{\text{ημα}}{\mathrm{I}}} = \frac{\frac{\mathrm{I} - \text{συν}^2\alpha}{\text{συνα}}}{\frac{\mathrm{I} - \text{ημ}^2\alpha}{\text{ημα}}} =$$

$$= \frac{\frac{\text{ημ}^2\alpha}{\text{συνα}}}{\frac{\text{συν}^2\alpha}{\text{ημα}}} = \frac{\text{ημ}^2\alpha \cdot \text{ημα}}{\text{συν}^2\alpha \cdot \text{συνα}} = \frac{\text{ημ}^3\alpha}{\text{συν}^3\alpha} = \left(\frac{\text{ημα}}{\text{συνα}}\right)^3 = (\text{εφα})^3 = \text{εφ}^3\alpha$$

I45. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\left(\frac{\text{ημα} + \text{συνα}}{\text{ημα} \cdot \text{συνα}}\right)^2 = (\text{τεμα} + \text{στεμα})^2$

'Απόδειξις.

$$\left(\frac{\text{ημα} + \text{συνα}}{\text{ημα συνα}}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{\text{ημα}}}{\cancel{\text{ημα}}\ \text{συνα}} + \frac{\cancel{\text{συνα}}}{\text{ημα}\ \cancel{\text{συνα}}}\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{I}}{\text{συνα}} + \frac{\mathrm{I}}{\text{ημα}}\right)^2 =$$

$$= (\text{τεμα} + \text{στεμα})^2$$ ὅ. ἔ. δ.

I46. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \frac{\mathrm{I}}{\frac{\text{σφ}^2\alpha + \mathrm{I}}{\text{σφ}^2\alpha}}} = \text{στεμ}^2\alpha$

'Απόδειξις.

$$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} - \frac{\mathrm{I}}{\frac{\text{σφ}^2\alpha + \mathrm{I}}{\text{σφ}^2\alpha}}} = \frac{\mathrm{I}}{\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}} - \frac{\text{σφ}^2\alpha}{\text{σφ}^2\alpha + \mathrm{I}}} = \frac{\mathrm{I}}{\frac{\text{σφ}^2\alpha + \mathrm{I} - \text{σφ}^2\alpha}{\text{σφ}^2\alpha + \mathrm{I}}} =$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{\dfrac{\mathrm{I}}{\sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I}}} = \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} + \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{\eta\mu^2\alpha} = \sigma\tau\epsilon\mu^2\alpha \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ι47 Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\tau\epsilon\mu^2\alpha . \sigma\tau\epsilon\mu^2\alpha = \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + 2$

'Απόδειξις.

$$\tau\epsilon\mu^2\alpha . \sigma\tau\epsilon\mu^2\alpha = \frac{\mathrm{I}}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} . \frac{\mathrm{I}}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{\mathrm{I}}{\left(\dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I} + \epsilon\varphi^2\alpha}}\right)^2} \frac{\mathrm{I}}{\left(\dfrac{\mathrm{I}}{\sqrt{\mathrm{I} + \sigma\varphi^2\alpha}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\mathrm{I}}{\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} + \epsilon\varphi^2\alpha}} . \frac{\mathrm{I}}{\dfrac{\mathrm{I}}{\mathrm{I} + \sigma\varphi^2\alpha}} = (\mathrm{I} + \epsilon\varphi^2\alpha)(\mathrm{I} + \sigma\varphi^2\alpha) =$$

$$= \mathrm{I} + \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \epsilon\varphi^2\alpha\, \sigma\varphi^2\alpha = \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} + (\epsilon\varphi\alpha\, \sigma\varphi\alpha)^2 =$$

$$= \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} + \mathrm{I}^2 = \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + \mathrm{I} + \mathrm{I} =$$

$$= \epsilon\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^2\alpha + 2 \quad \text{ὅ. ἔ. δ.}$$

Ι48. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $(\epsilon\varphi\alpha - \eta\mu\alpha)^2 + (\mathrm{I} - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 = (\tau\epsilon\mu\alpha - \mathrm{I})^2$

'Απόδειξις.

$(\epsilon\varphi\alpha - \eta\mu\alpha)^2 + (\mathrm{I} - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 =$ (ἀναπτύσσομεν τάς δυνάμεις)

$= \epsilon\varphi^2\alpha + \eta\mu^2\alpha - 2\epsilon\varphi\alpha\,\eta\mu\alpha + \mathrm{I} + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha =$

(νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως, ἀντικαταστάσεις).

$$= \epsilon\varphi^2\alpha + \underbrace{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha} - 2\,\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\,\eta\mu\alpha + \mathrm{I} - 2\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= \varepsilon\varphi^2\alpha + I - \frac{2\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + I - 2\sigma\upsilon\nu\alpha =$$

$$= \overbrace{\frac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}^{I} + \overbrace{\frac{2}{I}}^{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \overbrace{\frac{2\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}^{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \overbrace{\frac{2\sigma\upsilon\nu\alpha}{I}}^{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{I + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{(I + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) - \sigma\upsilon\nu\alpha\ (\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) - \sigma\upsilon\nu\alpha\ (\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{(I + \sigma\upsilon\nu^2\alpha) - \sigma\upsilon\nu\alpha . I - \sigma\upsilon\nu\alpha . I}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \frac{I + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{(I - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} =$$

$$= \left(\frac{I - \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 = \left(\frac{I}{\sigma\upsilon\nu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2 = (\tau\varepsilon\mu\alpha - I)^2 \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

149. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(\sigma\varphi\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 = (\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - 1)^2$$

Ἀπόδειξις.

$$(\sigma\varphi\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 = \left(\overbrace{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}}^{1} - \overbrace{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1}}^{\eta\mu\alpha}\right)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 =$$

$$= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 = \text{(κοινός παράγων)}.$$

$$= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha\,(1 - \eta\mu\alpha)}{\eta\mu\alpha}\right)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 = \frac{\left[\sigma\upsilon\nu\alpha\,(1 - \eta\mu\alpha)\right]^2}{\eta\mu^2\alpha} + (1 - \eta\mu\alpha)^2 =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha(1 - \eta\mu\alpha)^2}{\eta\mu^2\alpha} + (1 - \eta\mu\alpha)^2 = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}(1 - \eta\mu\alpha)^2 + (1 - \eta\mu\alpha)^2 =$$

= (κοινός παράγων τό $(1 - \eta\mu\alpha)^2$

$$= (1 - \eta\mu\alpha)^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha} + 1\right) = (1 - \eta\mu\alpha)^2\left(\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\alpha}\right) =$$

$$= (1 - \eta\mu\alpha)^2\,\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} = \frac{(1 - \eta\mu\alpha)^2}{\eta\mu^2\alpha} = \left(\frac{1 - \eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{\eta\mu\alpha} - \frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\alpha}\right)^2 = (\sigma\tau\epsilon\mu\alpha - 1)^2 \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΟΜΑΣ

Περιλαμβάνονται ἀσκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς ὅλας τάς προηγουμένας ὁμάδας.

150. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $συν^4α - ημ^4α + 1 = 2συν^2α$

'Απόδειξις.

$$συν^4α - ημ^4α + 1 = (συν^2α)^2 - (ημ^2α)^2 + 1 =$$

(παρουσιάζεται διαφορά τετραγώνων τήν ὁποίαν ἀναλύομεν κατά τόν τύπον 9 Σελ. 34).

$$= (συν^2α + ημ^2α)(συν^2α - ημ^2α) + 1 = 1.(συν^2α - ημ^2α) + 1 =$$

$$= συν^2α - ημ^2α + 1 = συν^2α - \cancel{ημ^2α} + συν^2α + \cancel{ημ^2α} = 2συν^2α$$

ὅ.ἔ.δ.

151. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $συν^4α - ημ^4α - 1 = -2ημ^2α$

'Απόδειξις.

$$συν^4α - ημ^4α - 1 = (συν^2α)^2 - (ημ^2α)^2 - 1 =$$

$$= (συν^2α + ημ^2α)(συν^2α - ημ^2α) - 1 = 1.(συν^2α - ημ^2α) - 1 =$$

$$= συν^2α - ημ^2α - (συν^2α + ημ^2α) =$$

$$= \cancel{συν^2α} - ημ^2α - \cancel{συν^2α} - ημ^2α = -2ημ^2α \quad ὅ.ἔ.δ.$$

152. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1 + ημ2α}{συν\,2α} = \dfrac{1 + σφα}{σφα - 1}$

'Απόδειξις.

$$\frac{1 + ημ2α}{συν\,2α} = \frac{συν^2α + ημ^2α + 2ημα\,συνα}{συν^2α - ημ^2α} =$$

$$= \frac{(\text{συνα} + \text{ημα})^{\cancel{2}}}{\cancel{(\text{συνα} + \text{ημα})}\,(\text{συνα} - \text{ημα})} = \frac{\text{συνα} + \text{ημα}}{\text{συνα} - \text{ημα}} =$$

(Διαιροῦμεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν μέ ημα ἵνα προκύψη σφα

$$= \frac{\dfrac{\text{συνα} + \text{ημα}}{\text{ημα}}}{\dfrac{\text{συνα} - \text{ημα}}{\text{ημα}}} = \frac{\dfrac{\text{συνα}}{\text{ημα}} + \dfrac{\text{ημα}}{\text{ημα}}}{\dfrac{\text{συνα}}{\text{ημα}} - \dfrac{\text{ημα}}{\text{ημα}}} = \frac{\text{I} + \text{σφα}}{\text{σφα} - \text{I}} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

I53. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\text{I} + \text{σφα}}{\text{σφα} - \text{I}} = \dfrac{\text{I} + \text{ημ2α}}{\text{συν 2α}}$

Ἀπόδειξις.

$$\frac{\text{I} + \text{σφα}}{\text{σφα} - \text{I}} = \frac{\text{I} + \dfrac{\text{συνα}}{\text{ημα}}}{\dfrac{\text{συνα}}{\text{ημα}} - \text{I}} = \frac{\dfrac{\text{ημα} + \text{συνα}}{\text{ημα}}}{\dfrac{\text{συνα} - \text{ημα}}{\cancel{\text{ημα}}}} =$$

$= \dfrac{\text{ημα} + \text{συνα}}{\text{συνα} - \text{ημα}} =$ (Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί συνα + ημα ἵνα προκύψη εἰς τόν παρονομαστήν τό $\text{συν}^2\text{α} - \text{ημ}^2\text{α} = \text{συν2α}$).

$$= \frac{(\text{ημα} + \text{συνα})(\text{ημα} + \text{συνα})}{(\text{συνα} - \text{ημα})(\text{συνα} + \text{ημα})} = \frac{(\text{ημα} + \text{συνα})(\text{ημα} + \text{συνα})}{\text{συν}^2\text{α} - \text{ημ}^2\text{α}} =$$

$$= \frac{(\text{ημα} + \text{συνα})^2}{\text{συν}^2\text{α} - \text{ημ}^2\text{α}} = \frac{\text{ημ}^2\text{α} + \text{συν}^2\text{α} + 2\text{ημα συνα}}{\text{συν}^2\text{α} - \text{ημ}^2\text{α}} = \frac{\text{I} + \text{ημ2α}}{\text{συν2α}}$$

ὅ.ἔ.δ.

154. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{1 - εφα}{1 + εφα} = \dfrac{1 - ημ2α}{συν2α}$

'Απόδειξις.

$$\frac{1 - εφα}{1 + εφα} = \frac{1 - \dfrac{ημα}{συνα}}{1 + \dfrac{ημα}{συνα}} = \frac{\dfrac{συνα}{συνα} - \dfrac{ημα}{συνα}}{\dfrac{συνα}{συνα} + \dfrac{ημα}{συνα}} = \frac{\dfrac{συνα - ημα}{συνα}}{\dfrac{συνα + ημα}{συνα}} =$$

$= \dfrac{συνα - ημα}{συνα + ημα} =$ (Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί συνα - ημα ἵνα προκύψη εἰς τό παρονομαστήν τό $συν^2α - ημ^2α = συν2α$.)

$$= \frac{(συνα - ημα)(συνα - ημα)}{(συνα + ημα)(συνα - ημα)} = \frac{(συνα - ημα)^2}{συν^2α - ημ^2α} =$$

$$= \frac{συν^2α + ημ^2α - 2συνα\,ημα}{συν2α} = \frac{1 - ημ2α}{συν2α}$$ ὅ.ἔ.δ.

155. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $(ημ^2α - συν^2α)^2 = 1 - 4ημ^2α\,συν^2α$

'Απόδειξις.

$(ημ^2α - συν^2α)^2 =$ (ἀναπτύσσομεν κατά τόν τύπον 2 σελ.33)

$= (ημ^2α)^2 + (συν^2α)^2 - 2ημ^2α\,συν^2α =$

$= ημ^4α + συν^4α - 2ημ^2α\,συν^2α =$ (προσθέτομεν καί ἀφαιροῦμεν τό $2ημ^2α\,συν^2α$ ἵνα προκύψη τό εἰς τό β΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος ὑπᾶρχον $-4ημ^2α\,συν^2α$).

$= ημ^4α + συν^4α - 2ημ^2α\, συν^2α + 2ημ^2α\, συν^2α - 2ημ^2α\, συν^2α =$

(ἀναγωγή, νόμος ἀντιμεταθέσεως.

$= (ημ^4α + συν^4α + 2ημ^2α\, συν^2α) - 4ημ^2α\, συν^2α =$

$= (ημ^2α + συν^2α)^2 - 4ημ^2α\, συν^2α = I^2 - 4ημ^2α\, συν^2α =$

$= I - 4ημ^2α\, συν^2α$ ὅ.ἔ.δ.

I56. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $εφα + σφα = \dfrac{2}{ημ2α}$

Ἀπόδειξις.

$$εφα + σφα = \frac{ημα}{συνα} + \frac{συνα}{ημα} = \frac{ημ^2α + συν^2α}{ημα\, συνα} = \frac{I}{ημα\, συνα}$$

(πολλαπλασιάζομεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί 2 ἵνα ἀποκτήσωμεν τόν ζητούμενον ἀριθμητήν τοῦ β΄ μέλους τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος)

$$= \frac{2}{2ημα\, συνα} = \frac{2}{ημ2α} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

I57. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $ημ2α = \dfrac{2}{εφα + σφα}$

Ἀπόδειξις.

$ημ2α = 2ημα\, συνα =$ (διαιροῦμεν διά τῆς μονάδος).

$$= \frac{2ημα\, συνα}{I} = \frac{2ημα\, συνα}{ημ^2α + συν^2α} =$$

(διαιροῦμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά τοῦ ημα συνα διά νά μείνῃ μόνον του τό 2 εἰς τόν ἀριθμητήν καί διά νά προκύψουν κλάσματα δίδοντα εφα καί σφα).

$$= \frac{\dfrac{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{2}{\dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}} =$$

$$= \frac{2}{\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}} = \frac{2}{\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

I58. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{I+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

'Απόδειξις.

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{I + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}{(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) + (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)} =$$

(Δηλαδή ἐγράψαμεν $I = \sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha$ καί $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha$)

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \cancel{\eta\mu^2\alpha} + \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \cancel{\eta\mu^2\alpha}} = \frac{\cancel{2}\eta\mu\alpha\ \cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha.$$

ὅ.ἔ.δ.

I59. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{I-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$

'Απόδειξις.

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{I - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha}{(\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha) - (\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)} =$$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α' Ἔκδοσις.

I46.

(Δηλαδή ἐγράψαμεν $1 = \text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha$ καί $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$)

$$= \frac{2\text{ημ}\alpha\,\text{συν}\alpha}{\cancel{\text{συν}^2\alpha} + \text{ημ}^2\alpha - \cancel{\text{συν}^2\alpha} + \text{ημ}^2\alpha} = \frac{\cancel{2\text{ημ}\alpha}\,\text{συν}\alpha}{\cancel{2\text{ημ}^2\alpha}} = \frac{\text{συν}\alpha}{\text{ημ}\alpha} = \text{σφ}\alpha$$

ὅ.ἔ.δ.

I60. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $1 + \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}2\alpha = \dfrac{1}{\text{συν}2\alpha}$

'Απόδειξις.

$1-\text{εφ}^2\alpha \qquad 1$

$$1 + \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}2\alpha = 1 + \text{εφ}\alpha \cdot \frac{2\text{εφ}\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1}{1} + \frac{2\text{εφ}^2\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} =$$

$$= \frac{1-\text{εφ}^2\alpha + 2\text{εφ}^2\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1+\text{εφ}^2\alpha}{1-\text{εφ}^2\alpha} = \frac{1+\dfrac{\text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha}}{1-\dfrac{\text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\text{συν}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha} + \dfrac{\text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha}}{\dfrac{\text{συν}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha} - \dfrac{\text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha}} = \frac{\dfrac{\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha}{\cancel{\text{συν}^2\alpha}}}{\dfrac{\text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha}{\cancel{\text{συν}^2\alpha}}} = \frac{\text{συν}^2\alpha + \text{ημ}^2\alpha}{\text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha}$$

$$= \frac{1}{\text{συν}2\alpha}$$

ὅ.ἔ.δ.

I6I. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\text{εφ}2\alpha}{1 + \text{εφ}\alpha\,\text{εφ}2\alpha} = \text{ημ}2\alpha$

$$= \frac{εφ2α}{1 + εφα\ εφ2α} = \frac{εφ2α}{1 + εφα . \frac{2εφα}{1-εφ^2α}} = \frac{εφ2α}{1 + \frac{2εφ^2α}{1-εφ^2α}} =$$

$$= \frac{εφ2α}{\frac{1-εφ^2α}{1-εφ^2α} + \frac{2εφ^2α}{1-εφ^2α}} = \frac{εφ2α}{\frac{1-εφ^2α + 2εφ^2α}{1-εφ^2α}} =$$

$$= \frac{εφ2α}{\frac{1+εφ^2α}{1-εφ^2α}} = \frac{\frac{2εφα}{\cancel{1-εφ^2α}}}{\frac{1+εφ^2α}{\cancel{1-εφ^2α}}} = \frac{2εφα}{1+εφ^2α} = \frac{2 . \frac{ημα}{συνα}}{1 + \frac{ημ^2α}{συν^2α}} =$$

$$= \frac{\frac{2ημα}{συνα}}{\frac{συν^2α}{συν^2α} + \frac{ημ^2α}{συν^2α}} = \frac{\frac{2ημα}{συνα}}{\frac{συν^2α + ημ^2α}{συν^2α}} = \frac{\frac{2ημα}{συνα}}{\frac{1}{συν^2α}} = \frac{2ημα\ συν^2α}{\cancel{συνα}} =$$

$= 2ημα\ συνα = ημ2α$. ὅ.ἔ.δ.

162. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι: $εφ2α - εφα = \frac{εφα}{συν2α}$

Ἀπόδειξις.

$$εφ2α - εφα = \overset{1}{\frac{ημ2α}{συν2α}} - \overset{συν2α}{\frac{εφα}{1}} = \frac{ημ2α - εφα\ συν2α}{συν2α} =$$

(ἀλλά $ημ2α = 2ημα\ συνα$ καί $συν2α = συν^2α - ημ^2α$).

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \ - \ \varepsilon\varphi\alpha\,(\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$$

(τόν παρονομαστήν δέν τόν ἀντικαθιστῶμεν διότι τόν χρειαζόμεθα ὅπως εἶναι).

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \varepsilon\varphi\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \varepsilon\varphi\alpha\,\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \ - \ \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\sigma\upsilon\nu^2\alpha \ + \varepsilon\varphi\alpha\,\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \varepsilon\varphi\alpha\,\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha \ + \varepsilon\varphi\alpha\,\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} =$$

(ἐξάγομεν κοινόν παράγοντα εἰς τόν ἀριθμητήν τήν εφα ὁπότε μέσα γράφομεν)

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha\left(\frac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\varepsilon\varphi\alpha} + \eta\mu^2\alpha\right)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha\ (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha\ .\ \frac{I}{\varepsilon\varphi\alpha} + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha\ (\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha . \sigma\varphi\alpha \ + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \quad \frac{\varepsilon\varphi\alpha\ (\cancel{\eta\mu\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\alpha\ . \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\cancel{\eta\mu\alpha}} + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$$

$$= \frac{\varepsilon\varphi\alpha\ (\sigma\upsilon\nu^2\alpha \ + \eta\mu^2\alpha)}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha\ .\ I}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

I63. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$

'Απόδειξις.

$$\frac{2\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\eta\mu\alpha + 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\cancel{2\eta\mu\alpha}\,(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha)}{\cancel{2\eta\mu\alpha}\,(1 + \sigma\upsilon\nu\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu\alpha} =$$ ['Επειδή είς τό β΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος θέλομεν $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ δι'αὐτό θέτομεν

$1 = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ καί $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$]

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left[\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]}{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cancel{\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cancel{\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cancel{\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} + \eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{2\eta\mu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$ ὅ.ἔ.δ.

164. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \varepsilon\varphi^2\alpha = 2 + \sigma\varphi^2\alpha$

'Απόδειξις

$\dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \varepsilon\varphi^2\alpha =$ (ἐπειδή είς τό β΄ μέλος χρειαζόμεθα σφα δι'αὐτό θά ἀντικαταστήσωμεν τά $\eta\mu^2\alpha$, $\sigma\upsilon\nu^2\alpha$ καί $\varepsilon\varphi^2\alpha$ συναρτήσεις τῆς σφα).

I5Q.

$$= \frac{I}{\dfrac{I}{I+\sigma\varphi^2\alpha}\cdot\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha}{I+\sigma\varphi^2\alpha}} - \frac{I}{\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{1}{\dfrac{\sigma\varphi^2\alpha}{(I+\sigma\varphi^2\alpha)^2}} - \frac{I}{\sigma\varphi^2\alpha} =$$

$$= \frac{(I+\sigma\varphi^2\alpha)^2}{\sigma\varphi^2\alpha} - \frac{I}{\sigma\varphi^2\alpha} =$$

$$= \frac{(I+\sigma\varphi^2\alpha)^2 - I}{\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{I + 2\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^4\alpha - I}{\sigma\varphi^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\sigma\varphi^2\alpha + \sigma\varphi^4\alpha}{\sigma\varphi^2\alpha} = \frac{2\sigma\varphi^2\alpha}{\sigma\varphi^2\alpha} + \frac{\sigma\varphi^4\alpha}{\sigma\varphi^2\alpha} = 2 + \sigma\varphi^2\alpha \; . \; \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

I65. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{I+\eta\mu 2\alpha} = \dfrac{2}{(I+\varepsilon\varphi\alpha)(I+\sigma\varphi\alpha)}$

'Απόδειξις.

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{I+\eta\mu 2\alpha} = \frac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} =$$

(διαιροῦμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά τοῦ ημα συνα διά νά μείνη μόνον του τό 2 είς τόν ἀριθμητήν καί διά νά προκύψουν κλάσματα δέ της εφα καί σφα).

$$= \frac{\dfrac{2\cancel{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\cancel{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha + 2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{2}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha} + \dfrac{2\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + 2} = \frac{2}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha + 2} =$$

(ἀναλύομεν τό 2 τοῦ παρονομαστοῦ εἰς Ι + Ι)

$$= \frac{2}{\sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha + 1 + 1} =$$ (ἐφαρμόζομεν τόν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τόν παρονομαστήν καί γράφομεν τήν μίαν ἐκ τῶν δύο μονάδων ὡς ἑξῆς. Ι = εφα σφα).

$$= \frac{2}{1 + \varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi\alpha} = \frac{2}{(1 + \varepsilon\varphi\alpha) + \sigma\varphi\alpha(1 + \varepsilon\varphi\alpha)} =$$

$$= \frac{2}{(1 + \varepsilon\varphi\alpha)\ (1 + \sigma\varphi\alpha)}$$ ὅ.ἔ.δ.

166. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B = 2\beta\gamma$$

Ἀπόδειξις

$\beta^2\eta\mu 2\Gamma + \gamma^2\eta\mu 2B =$ (ἀναλύομεν τά ημ2Β καί ημ2Γ)

$= \beta^2 2\eta\mu\Gamma\ \sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma^2.2\eta\mu B\ \sigma\upsilon\nu B =$ (ἀντικαθιστῶμεν)

$$= \beta^2 . 2. \frac{\gamma}{\alpha} . \frac{\beta}{\alpha} + \gamma^2 . 2. \frac{\beta}{\alpha} . \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\beta^3\gamma}{\alpha^2} + \frac{2\beta\gamma^3}{\alpha^2} =$$

$$= \frac{2\beta^3\gamma + 2\beta\gamma^3}{\alpha^2} = \frac{2\beta\gamma(\beta^2 + \gamma^2)}{\alpha^2} =$$ (ἀλλά $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ διότι τό τρίγωνον ὀρθογώνιον)

$$= \frac{2.\beta\gamma.\cancel{\alpha^2}}{\cancel{\alpha^2}} = 2\beta\gamma$$ ὅ.ἔ.δ.

I67. Νά ὑπολογισθοῦν τά ημ2χ, συν2χ, εφ2χ καί σφ2χ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $2εφ^2χ - I2εφχ + I8 = 0$

Λύσις

Θά λύσωμεν τήν ἐξίσωσιν διά νά εὕρωμεν τήν τιμήν τῆς εφχ καί κατόπιν εὑρίσκοντες τάς τιμάς τῶν ημχ, συνχ καί σφχ συναρτήσει τῆς εφχ θά ὑπολογίσωμεν τά ημ2χ , συν2χ , εφ2χ καί σφ2χ.

Λύσις τῆς ἐξισώσεως

$2εφ^2χ - I2εφχ + I8 = 0$ ἤ (δι'ἁπλοποιήσεως διά 2)

$εφ^2χ - 6εφχ + 9 = 0$ (β΄βαθμοῦ ὡς πρός εφχ)

$$εφχ = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.I.9}}{2\,.\,I}$$

$$εφχ = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} \to εφχ = \frac{6}{2} = 3$$

Ὥστε: $\boxed{εφχ = 3}$

Εὕρεσις ημχ

$$ημχ = \frac{εφχ}{\sqrt{I + εφ^2χ}}$$

$$ἤ\ ημχ = \frac{3}{\sqrt{I + 3^2}}$$

$$ἤ\ ημχ = \frac{3}{\sqrt{IO}} = \frac{3\sqrt{IO}}{IO}$$

ἄρα $\boxed{ημχ = \frac{3\sqrt{IO}}{IO}}$

Εὕρεσις συνχ

$$συνχ = \frac{I}{\sqrt{I + εφ^2χ}}$$

$$συνχ = \frac{I}{\sqrt{I + 3^2}}$$

$$συνχ = \frac{I}{\sqrt{IO}} = \frac{\sqrt{IO}}{IO}$$

$\boxed{συνχ = \frac{\sqrt{IO}}{IO}}$

Εὕρεσις σφχ.

$$σφχ = \frac{I}{εφχ}$$

$\boxed{σφχ = \frac{I}{3}}$

I.-<u>'Υπολογισμός τοῦ ημ2χ:</u> $\eta\mu 2\chi = 2\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi =$

$$= 2 . \frac{3\sqrt{I0}}{I0} . \frac{\sqrt{I0}}{I0} = \frac{2.3.(\sqrt{I0})^2}{I0^2} = \frac{6.I\cancel{0}}{I0\cancel{0}} = \frac{6}{I0} = \frac{3}{5}$$

II.-<u>'Υπολογισμός τοῦ συν2χ:</u> $\sigma\upsilon\nu 2\chi = \sigma\upsilon\nu^2\chi - \eta\mu^2\chi =$

$$= \left(\frac{\sqrt{I0}}{I0}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{I0}}{I0}\right)^2 = \frac{I0}{I00} - \frac{9.I0}{I00} = \frac{I0-90}{I00} = \frac{-8\cancel{0}}{I00} = -\frac{4}{5}$$

III. <u>'Υπολογισμός τῆς εφ2χ:</u>

$$\varepsilon\varphi 2\chi = \frac{2\varepsilon\varphi\chi}{I-\varepsilon\varphi^2\chi} = \frac{2.3}{I-3^2} = \frac{6}{I-9} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

IV.-<u>'Υπολογισμός τῆς σφ2χ:</u> $\sigma\varphi 2\chi = \dfrac{\sigma\varphi^2\chi - I}{2\sigma\varphi\chi} =$

$$= \frac{\left(\frac{I}{3}\right)^2 - I}{2.\frac{I}{3}} = \frac{\frac{I}{9} - \frac{9}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{-\frac{8}{9}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\frac{\cancel{8}^{4}.\cancel{3}}{\cancel{9}_{3}.\cancel{2}}}{} = -\frac{4}{3}$$

I68. 'Εάν $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{5}{I2}$ νά εὑρεθῇ μέ προσέγγισιν $\dfrac{I}{I00}$ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως. $\sqrt{\dfrac{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}{I7}}$

<u>Λύσις</u>

Κατά τόν τρόπον τῆς ἀσκήσεως 90 εὑρίσκομεν

$$\eta\mu\alpha = \frac{5}{I3} \quad \text{καί} \quad \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{I2}{I3}$$

'Αντικαθιστῶμεν τώρα εἰς τήν ἐξεταζομένην παράστασιν τάς εὑρεθείσας τιμάς καί λαμβάνομεν

$$\sqrt{\frac{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha}{I7}} = \sqrt{\frac{\frac{5}{I3} + \frac{I2}{I3}}{\frac{I7}{I}}} = \sqrt{\frac{\frac{I7}{I3}}{\frac{I7}{I}}} = \sqrt{\frac{\cancel{I7}.I}{\cancel{I7}.I3}} = \sqrt{\frac{I}{I3}} =$$

$$= \frac{I}{\sqrt{I3}} = \frac{\sqrt{I3}}{\sqrt{I3}.\sqrt{I3}} = \frac{\sqrt{I3}}{I3} = \left(\text{μέ προσέγγισ. } \frac{I}{I00}\right) = \frac{3,60}{I3} = 0,27$$

I69. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $σφ^4α+σφ^2α = \frac{I}{εφ^2αημ^2α}$

'Απόδειξις

$σφ^4α + σφ^2α = σφ^2α(σφ^2α+I) =$ (ἀντικαθιστῶμεν ἐκ τοῦ τύπου (23) τήν $σφ^2α$ συναρτήσει τῆς εφα καί τό $σφ^2α+I$ συναρτήσει τοῦ ημα ἐκ τοῦ τύπου (26)) $= \frac{I}{εφ^2α} \cdot \frac{I}{ημ^2α} = \frac{I}{εφ^2αημ^2α}$ ὅ.ἔ.δ.

I70. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $εφα-ημασυνα= ημ^2αεφα$

'Απόδειξις

$$εφα-ημασυνα= \frac{ημα}{συνα} - \frac{ημασυνα}{I} = \frac{ημα-ημασυν^2α}{συνα} =$$

$$= \frac{ημα(I-συν^2α)}{συνα} = \frac{ημα}{συνα}(I-συν^2α)= εφα.ημ^2α =$$

= (νόμος ἀντιμεταθέσεως) $= ημ^2α.εφα$ ὅ.ἔ.δ.

I7I. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\frac{ημ^2α}{σφ^2α} = εφ^2α-ημ^2α$

'Απόδειξις

$$\frac{ημ^2α}{σφ^2α} = \frac{I}{σφ^2α}. ημ^2α = εφ^2αημ^2α = εφ^2α(I-συν^2α)=$$

$$= εφ^2α-εφ^2ασυν^2α= εφ^2α- \frac{ημ^2α}{\cancel{συν^2α}} . \cancel{συν^2α}= εφ^2α-ημ^2α.$$ ὅ.ἔ.δ.

I72. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\frac{I-συνα}{I+συνα} = εφ^2\frac{α}{2}$

'Απόδειξις

Α΄ τρόπος.

$$\frac{I-συνα}{I+συνα} = \frac{συν^2\frac{α}{2}+ημ^2\frac{α}{2} - (συν^2\frac{α}{2} - ημ^2\frac{α}{2})}{συν^2\frac{α}{2}+ημ^2\frac{α}{2} + (συν^2\frac{α}{2} - ημ^2\frac{α}{2})} =$$

$$= \frac{\cancel{συν^2\frac{α}{2}} + ημ^2\frac{α}{2} - \cancel{συν^2\frac{α}{2}} + ημ^2\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2} + \cancel{ημ^2\frac{α}{2}} + συν^2\frac{α}{2} - \cancel{ημ^2\frac{α}{2}}} = \frac{\cancel{2}ημ^2\frac{α}{2}}{\cancel{2}συν^2\frac{α}{2}} = εφ^2\frac{α}{2} \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Β΄ τρόπος:</u> Λαμβάνομεν τόν τύπον (49) $εφ\frac{α}{2} = \sqrt{\frac{I-συνα}{I+συνα}}$

ἐναλλάσσομεν τά μέλη καί ἔχομεν $\sqrt{\frac{I-συνα}{I+συνα}} = εφ\frac{α}{2}$

Ὑψώνομεν ἀμφότερα τά μέλη εἰς τό τετράγωνον καί ἔχομεν $\left.\right\}$ $\frac{I-συνα}{I+συνα} = εφ^2\frac{α}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

I73. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{ημ2α}{I+συν2α} \cdot \frac{συνα}{I+συνα} = εφ\frac{α}{2}$

<u>'Απόδειξις</u>

$$\frac{ημ2α}{I+συν2α} \cdot \frac{συνα}{I+συνα} = \frac{2ημα.συνα}{συν^2α+\cancel{ημ^2α}+συν^2α-\cancel{ημ^2α}} \cdot \frac{συνα}{I+συνα} =$$

$$= \frac{\cancel{2}ημα\cancel{συνα}}{\cancel{2}συν^{\cancel{2}}α} \cdot \frac{συνα}{I+συνα} = \frac{ημα\ \cancel{συνα}}{\cancel{συνα}(I+συνα)} = \frac{ημα}{I+συνα} =$$

$$= \frac{2ημ\frac{α}{2}\ συν\frac{α}{2}}{συν^2\frac{α}{2} + \cancel{ημ^2\frac{α}{2}} + συν^2\frac{α}{2} - \cancel{ημ^2\frac{α}{2}}} = \frac{\cancel{2}ημ\frac{α}{2}\cancel{συν\frac{α}{2}}}{\cancel{2}συν^{\cancel{2}}\frac{α}{2}} = \frac{ημ\frac{α}{2}}{συν\frac{α}{2}} = εφ\frac{α}{2} \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

I74. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{2εφ^2α}{I+εφ^4α} = \frac{εφ^2 2α}{2+εφ^2 2α}$

<u>'Απόδειξις</u>

$$\frac{2εφ^2α}{I+εφ^4α} = \left(\begin{array}{l}\text{προσθέτομεν καί}\\ \text{ἀφαιροῦμεν τό } 2εφ^2α\\ \text{εἰς τόν παρονομαστήν}\end{array}\right) = \frac{2εφ^2α}{\underbrace{I+εφ^4α-2εφ^2α}+2εφ^2α} =$$

$$= \frac{2εφ^2α}{(I-εφ^2α)^2+2εφ^2α} = \left(\begin{array}{l}\text{πολλαπλασιάζομεν καί τούς δύο}\\ \text{ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί 2}\end{array}\right)$$

$$= \frac{2.2εφ^2α}{2\left[(I-εφ^2α)^2+2εφ^2α\right]} = \frac{4εφ^2α}{2(I-εφ^2α)^2+4εφ^2α} =$$

(διαιροῦμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος διά $(I-εφ^2α)^2$

$$= \frac{\dfrac{4εφ^2α}{(I-εφ^2α)^2}}{\cancel{\dfrac{2(I-εφ^2α)^2}{(I-εφ^2α)^2}} + \dfrac{4εφ^2α}{(I-εφ^2α)^2}} = \frac{\left(\dfrac{2εφα}{I-εφ^2α}\right)^2}{2+\left(\dfrac{2εφα}{I-εφ^2α}\right)^2} =$$

$$= \frac{(εφ2α)^2}{2+(εφ2α)^2} = \frac{εφ^2 2α}{2+εφ^2 2α}$$ ὅ.ἔ.δ.

I75. Ἄν $α$ καί $β$ τυχοῦσαι γωνίαι νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{συν^2α-ημ^2β}{ημ^2αημ^2β} = \frac{I}{εφ^2α}\left(\frac{I}{ημ^2β} - \frac{I}{συν^2α}\right)$$

<u>Λύσις</u>

<u>Σκέψις:</u> Α΄ μέλος, πράξεις, ἁπλοποιήσεις τεχνάσματα κλπ.

<u>Ἀπόδειξις</u>

$$\frac{συν^2α-ημ^2β}{ημ^2αημ^2β} = \frac{συν^2α}{ημ^2αημ^2β} - \cancel{\frac{ημ^2β}{ημ^2αημ^2β}} =$$

$$= \frac{συν^2α}{ημ^2α} \cdot \frac{I}{ημ^2β} - \frac{I}{ημ^2α} =$$ (πολλαπλασιάζομεν τούς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{I}{ημ^2α}$ ἐπί $συν^2α$)

$$= \frac{συν^2α}{ημ^2α} \cdot \frac{I}{ημ^2β} - \frac{I.συν^2α}{ημ^2α.συν^2α} = σφ^2α. \frac{I}{ημ^2β} - \frac{συν^2α.I}{ημ^2α.συν^2α} =$$

$$= σφ^2α. \frac{I}{ημ^2β} - \frac{συν^2α}{ημ^2α} . \frac{I}{συν^2α} = σφ^2α. \frac{I}{ημ^2β} - σφ^2α . \frac{I}{συν^2α} =$$

$$= σφ^2α\left(\frac{I}{ημ^2β} - \frac{I}{συν^2α}\right) = \frac{I}{εφ^2α}\left(\frac{I}{ημ^2β} - \frac{I}{συν^2α}\right)$$ ὅ.ἔ.δ.

✳ 176. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^4\alpha+1}+1=\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha$

'Απόδειξις

$$\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha+\sigma\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^4\alpha+1}+1=\frac{\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1}+\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\varepsilon\varphi^4\alpha+1}+1=\frac{\frac{\varepsilon\varphi^4\alpha+1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}}{\frac{\varepsilon\varphi^4\alpha+1}{1}}+1=$$

$$=\frac{\cancel{(\varepsilon\varphi^4\alpha+1)}\cdot 1}{\cancel{(\varepsilon\varphi^4\alpha+1)}\cdot\varepsilon\varphi^2\alpha}+1=\frac{\frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha}}{}+\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}=$$

$\Big($ἀλλά $\eta\mu^2\alpha=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ ἤ $\frac{\eta\mu^2\alpha}{1}=\frac{\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ ἄρα $\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha}\Big)$

$=\frac{1}{\eta\mu^2\alpha}=\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

✳ 177. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$(\varepsilon\varphi\alpha+2)(2\varepsilon\varphi\alpha+1)=5\varepsilon\varphi\alpha+2\tau\varepsilon\mu^2\alpha$$

'Απόδειξις

$(\varepsilon\varphi\alpha+2)(2\varepsilon\varphi\alpha+1)=$ (ἐπιμεριστική ἰδιότης)

$=2\varepsilon\varphi^2\alpha+4\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\alpha+2=$ (ἀναγωγή καί νόμος ἀντιμεταθ.)

$=5\varepsilon\varphi\alpha+2+2\varepsilon\varphi^2\alpha=$ (κοινός παράγων τό 2)

$=5\varepsilon\varphi\alpha+2(1+\varepsilon\varphi^2\alpha)=\Big[$Ὡς γνωστόν $\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

ἄρα $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=1+\varepsilon\varphi^2\alpha\Big]=5\varepsilon\varphi\alpha+2\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}=5\varepsilon\varphi\alpha+2\tau\varepsilon\mu^2\alpha$ ὅ.ἔ.δ.

✳ 178. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi 2\alpha+\tau\varepsilon\mu 2\alpha=\frac{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$

'Απόδειξις

$$\varepsilon\varphi 2\alpha+\tau\varepsilon\mu 2\alpha=\frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{\eta\mu 2\alpha+1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=\frac{1+\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}=$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha} = \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^{\cancel{2}}}{\cancel{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)}(\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}-\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\upsilon\nu\alpha}} = \frac{1+\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi\alpha} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

* 179. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\varphi2\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu2\alpha = \sigma\varphi\alpha$

Ἀπόδειξις

$$\sigma\varphi2\alpha+\sigma\tau\varepsilon\mu2\alpha = \frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha}{\eta\mu2\alpha} + \frac{1}{\eta\mu2\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu2\alpha+1}{\eta\mu2\alpha} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\cancel{\eta\mu^2\alpha}+\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\cancel{\eta\mu^2\alpha}}{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}\alpha}{\cancel{2}\eta\mu\alpha\cancel{\sigma\upsilon\nu\alpha}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

* 180. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$(1+\varepsilon\varphi\alpha+\tau\varepsilon\mu\alpha)(1+\varepsilon\varphi\alpha-\tau\varepsilon\mu\alpha) = \tau\varepsilon\mu^2\alpha.\eta\mu2\alpha$

Ἀπόδειξις

$(1+\varepsilon\varphi\alpha+\tau\varepsilon\mu\alpha)(1+\varepsilon\varphi\alpha-\tau\varepsilon\mu\alpha) =$

$= \Big[(1+\varepsilon\varphi\alpha)+\tau\varepsilon\mu\alpha\Big]\Big[(1+\varepsilon\varphi\alpha)-\tau\varepsilon\mu\alpha\Big] =$ (τύπος 6 σελ.34)

$= (1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-(\tau\varepsilon\mu\alpha)^2 = (1+\varepsilon\varphi\alpha)^2-\tau\varepsilon\mu^2\alpha =$

$= \left(1+\dfrac{\eta\mu\alpha}{\alpha\upsilon\nu\alpha}\right)^2-\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}\right)^2-\tau\varepsilon\mu^2\alpha =$

$= \dfrac{(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\tau\varepsilon\mu^2\alpha = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}\,(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2-\tau\varepsilon\mu^2\alpha. =$

$= \tau\varepsilon\mu^2\alpha(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2-\tau\varepsilon\mu^2\alpha =$ (κοινός παράγων τό $\tau\varepsilon\mu^2\alpha$)

$= \tau\varepsilon\mu^2\alpha\Big[(\sigma\upsilon\nu\alpha+\eta\mu\alpha)^2-1\Big] =$

$= \tau\varepsilon\mu^2\alpha\Big[\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\eta\mu^2\alpha+2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha-1\Big] =$

$= \tau\varepsilon\mu^2\alpha\Big[\cancel{1}+\eta\mu2\alpha-\cancel{1}\Big] = \tau\varepsilon\mu^2\alpha.\eta\mu2\alpha \quad$ ὅ.ἔ.δ.

I8I. Ἂν μεταξύ δύο τυχόντων τόξων α καί β ἀληθεύει ἡ σχέσις $\varepsilon\varphi^2\alpha - I = 2\varepsilon\varphi^2\beta$ νά ἀποδειχθῆ ὅτι θά ἀληθεύη καί ἡ σχέσις $\sigma\upsilon\nu^2\beta = I + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$

Λ ύ σ ι ς

Σκέψις: Λαμβάνομεν τήν ἐξ ὑποθέσεως ἰσχύουσαν σχέσιν καί ἀπομονώνομεν τήν $\varepsilon\varphi^2\beta$ εἰς τό α΄ μέλος ἐπειδή εἰς τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος χρειαζόμεθα τριγωνομετρικόν ἀριθμόν τοῦ τόξου β. Κατόπιν ἀντικαθιστῶμεν τήν $\varepsilon\varphi^2\beta$. κτλ.

Ἀπόδειξις

$\varepsilon\varphi^2\alpha - I = 2\varepsilon\varphi^2\beta$ ἤ (ἐναλλάσσομεν τά μέλη)

$2\varepsilon\varphi^2\beta = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ

$2.\dfrac{\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ

$\dfrac{2\eta\mu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ (ἐπειδή $\eta\mu^2\beta = I - \sigma\upsilon\nu^2\beta$)

$\dfrac{2(I - \sigma\upsilon\nu^2\beta)}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ (ἐπιμεριστική ἰδιότης).

$\dfrac{2 - 2\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ (χωρίζομεν τό κλάσμα)

$\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} - \dfrac{2\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\beta}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu^2\beta}} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ

$\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} - 2 = \varepsilon\varphi^2\alpha - I$ ἤ

$\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha - I + 2$ ἤ

$\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \varepsilon\varphi^2\alpha + I$ ἤ

$\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu^2\beta} = \dfrac{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}{I}$ ἤ

(ἀντιστρέφομεν τά ἴσα κλάσματα)

$\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\beta}{2} = \dfrac{I}{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}$ ἤ (πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη ἐπί 2)

$\cancel{2}\,.\,\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\beta}{\cancel{2}} = 2.\dfrac{I}{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}$ (ἀλλά $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{I}{I + \varepsilon\varphi^2\alpha}$)

ή $συν^2β = 2.συν^2α$ (ἀλλά $2συν^2α = συν^2α+συν^2α$)

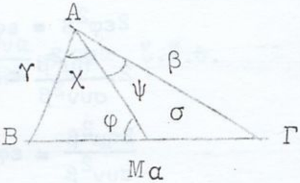
ή $συν^2β = συν^2α+συν^2α$ (προσθέτομεν καί ἀφαιροῦμεν συγχρόνως τό $ημ^2α$, εἰς τό β΄μέλος).

ή $συν^2β = \underbrace{συν^2α+ημ^2α}+\underbrace{συν^2α-ημ^2α}$

ή $συν^2β = 1+συν2α$ ὅ.ἔ.δ.

I82. Εἰς τυχόν τρίγωνον ΑΒΓ μέ πλευράς α, β, καί γ φέρομεν τήν διάμεσον αὐτοῦ ΑΜ σχηματίζουσαν γωνίαν χ μέ τήν πλευράν γ καί γωνίαν ψ μέ τήν πλευράν β. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: γημχ=βημψ

<u>Ἀπόδειξις</u>



(Σχ.Ι9)

Βλέπε (σχ.Ι9). Ὀνομάζομεν φ καί σ τάς γωνίας τάς ὁποίας σχηματίζει ἡ διάμεσος μετά τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Εἶναι δέ ΒΜ=ΜΓ (Ι) (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ) καί φ+σ = 2 ὀρθ. (ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μή κοιναί πλευραί κεῖνται ἐπ' εὐθείας). Ἄρα ημφ=ημσ (2).

Ι. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΒΜ ἔχομεν $\frac{γ}{ημφ} = \frac{ΒΜ}{ημχ}$ καί (Ιη Ἰδιότης ἀναλογιῶν σελ.30) γημχ= (ΒΜ) ημφ (3)

ΙΙ. Ἐπίσης ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΓΜ ἔχομεν $\frac{β}{ημσ} = \frac{ΜΓ}{ημψ}$ καί (Ιη ἰδιότης ἀναλ. Σελ.30) βημψ= (ΜΓ)ημσ (4)

Λόγῳ ὅμως τῶν ἰσοτήτων (Ι) καί (2) παρατηροῦμεν ὅτι τά β΄μέλη τῶν ἰσοτήτων (3) καί (4) εἶναι ἴσα. Ἄρα (πρότασις Ι, § Ι8. Σελ.24) θά εἶναι καί τά α΄ ἴσα.

<u>Ὥστε</u>: γημχ = βημψ.

<u>Σημείωσις</u>: Ἄν μᾶς ζητηθῆ νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

$$γημχ - βημψ = 0$$

τότε ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης ἰσότητος γημχ = βημψ καταλήγομεν εἰς τήν ἀποδεικτέαν διά τῆς μεταφορᾶς τοῦ βημψ ἐκ τοῦ β΄μέλους εἰς τό α΄μέ ἀλλαγμένον τό σημεῖον.

183. Νά άποδειχθῆ ὅτι:

$$ημ^6α+συν^6α-2ημ^4α-συν^4α+ημ^2α = 0$$

Λ ύ σ ι ς

Α΄. τρόπος. (Σκέψις: Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος, ἐνεργοῦμεν ἀντικαταστάσεις, πράξεις κτλ.).

'Απόδειξις

$ημ^6α+συν^6α-2ημ^4α-συν^4α+ημ^2α=$ (ἐφαρμόζομεν νόμον ἀντιμεταθέσεως καί συνθετικήν ἰδιότητα).

$=(ημ^6α-2ημ^4α+ημ^2α)-συν^4α+συν^6α=$ (συμπτύξεις)

$=(ημ^3α-ημα)^2-(συν^2α)^2+συν^6α=$ (ἐφαρμόζομεν τόν τύπον 9 σελ.34 διά τάς δύο παρενθέσεις).

$=(ημ^3α-ημα+συν^2α)(ημ^3α-ημα-συν^2α)+αν^6α=$

(ἐξάγομεν κοινούς παράγοντας εἰς τάς παρενθέσεις καί τοποθετοῦμεν ἀγκύλας).

$=\left[ημα(ημ^2α-1)+συν^2α\right]\left[ημα(ημ^2α-1)-συν^2α\right]+συν^6α=$

(ἀλλά $συν^2α = 1-ημ^2α$ ὅτε $-συν^2α= ημ^2α-1$) $=$

$=\left[ημα(-συν^2α)+συν^2α\right]\left[ημα(-συν^2α)-συν^2α\right]+συν^6α=$

$=\left[-ημασυν^2α+συν^2α\right]\left[-ημασυν^2α-συν^2α\right]+συν^6α=$

(ἐξάγομεν κοινούς παράγοντας εἰς τάς ἀγκύλας)

$=\left[συν^2α(1-ημα)\right]\left[-συν^2α(1+ημα)\right]+συν^6α=$ (πολ/μεν τάς ἀγκύλας)

$=-συν^4α(1-ημα)(1+ημα)+συν^6α=$

$=-συν^4α(1^2-ημ^2α)+συν^6α=-συν^4α(1-ημ^2α)+συν^6α=$

$=-συν^4α.συν^2α+συν^6α=\cancel{-συν^6α}\cancel{+συν^6α}=$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Β΄ Τρόπος.</u> (<u>Σκέψις</u>: Λαμβάνομεν τό α΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας ἰσότητος καί γράφομεν τούς δύο πρώτους προσθετέους αὐτῆς ὡς ἄθροισμα κύβων. Κατόπιν ἐφαρμόζομεν τόν τύπον 10 σελίς 35 κτλ.).

<u>Ἀπόδειξις</u>

$$\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha-2\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha =$$

$$=(\eta\mu^2\alpha)^3+(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^3-2\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha =$$

$$=\left[(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)\right]\left[(\eta\mu^2\alpha)^2-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha+(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2\right]-$$

$$-2\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha =$$

$$= 1.\left[\eta\mu^4\alpha-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha\right]-2\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha =$$

$$= \eta\mu^4\alpha-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha+\cancel{\sigma\upsilon\nu^4\alpha}-2\eta\mu^4\alpha-\cancel{\sigma\upsilon\nu^4\alpha}+\eta\mu^2\alpha =$$

(ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων, νόμος ἀντιμεταθέσεως)

$$= \eta\mu^2\alpha-\eta\mu^4\alpha-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha =$$

$$= \eta\mu^2\alpha(1-\eta\mu^2\alpha)-\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha =$$

$$= \cancel{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha}-\cancel{\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha} = 0 \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Παρατήρησις</u>: Ἡ παροῦσα ἄσκησις εἶναι δυνατόν νά τεθῆ καί ὡς ἑξῆς:

"Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις

$$\eta\mu^6\alpha+\sigma\upsilon\nu^6\alpha-2\eta\mu^4\alpha-\sigma\upsilon\nu^4\alpha+\eta\mu^2\alpha$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ α".

Πράγματι δέ, ἐφαρμόζοντες τόν ἕνα ἐκ τῶν δύο τρόπων ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ παράστασις αὐτη ἰσοῦται μέ τό μηδέν δηλαδή δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τό α ἀφοῦ τελικῶς δέν περιέχει τό α.

I84. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}$=I ὀρθή) ἀληθεύει ἡ σχέσις $\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \varepsilon\varphi\frac{B}{2}$

Λύσις

Σκέψις: Ἀντικαθιστῶμεν τάς πλευράς τοῦ α΄ μέλους μέ τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῆς γωνίας Β διότι αὐτήν τήν γωνίαν χρειαζόμεθα εἰς τό β΄ μέλος τῆς ἀποδεικτέας.

Ἀπόδειξις

$$\frac{\beta}{\alpha+\gamma} = \frac{\alpha\eta\mu B}{\alpha+\alpha\sigma\upsilon\nu B} = \frac{\cancel{\alpha}\eta\mu B}{\cancel{\alpha}(I+\sigma\upsilon\nu B)} = \frac{\eta\mu B}{I+\sigma\upsilon\nu B} =$$

$$= \frac{2\eta\mu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}+\cancel{\eta\mu^2\frac{B}{2}}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{B}{2}-\cancel{\eta\mu^2\frac{B}{2}}} = \frac{\cancel{2}\eta\mu\frac{B}{2}\,\cancel{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}}}{\cancel{2}\sigma\upsilon\nu^{\cancel{2}}\frac{B}{2}} = \frac{\eta\mu\frac{B}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{B}{2} \text{ ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις: Τήν ἀνωτέρω ἄσκησιν θά ἀποδείξωμεν ὑπό τήν κατωτέραν μορφήν.

I85. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ($\hat{A}$=I ὀρθή) ἀληθεύει ἡ σχέσις $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$

Λύσις

Α΄ τρόπος. Σκέψις: Λαμβάνομεν τόν τύπον τόν συνδέοντα τήν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ καί ἕνα ἐκ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῆς γωνίας Β καί ὁ ὁποῖος τύπος εἶναι ὁ (49) $\varepsilon\varphi\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{I-\sigma\upsilon\nu B}{I+\sigma\upsilon\nu B}}$

Ἀντικαθιστῶμεν τό συνΒ συναρτήσει τῶν πλευρῶν πράξεις κτλ.

'Απόδειξις

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{1-\sigma\upsilon\nu B}{1+\sigma\upsilon\nu B}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\gamma}{\alpha}}{1+\frac{\gamma}{\alpha}}}=\sqrt{\frac{\frac{\alpha-\gamma}{\cancel{\alpha}}}{\frac{\alpha+\gamma}{\cancel{\alpha}}}}=\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{\alpha+\gamma}}=$$

(πολ/μεν τούς ὅρους τοῦ κλάσματος τῆς ὑπορρίζου ποσότητος ἐπί $\alpha+\gamma$).

$$=\sqrt{\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\gamma)}}=\sqrt{\frac{\alpha^2-\gamma^2}{(\alpha+\gamma)^2}}=\sqrt{\frac{\beta^2}{(\alpha+\gamma)^2}}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Β' τρόπος. (Σκέψις: Γνωρίζομεν ὅτι αἱ πλευραί τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου συνδέονται μέ τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ὁλοκλήρων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου. Εἰς τήν ἀποδεικτέαν ὅμως ἰσότητα ἔχομεν τήν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας $\frac{B}{2}$. Ὡς ἐκ τούτου θά λάβωμεν τύπον συνδέοντα τάς εφΒ καί $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$.

καί ὁ ὁποῖος τύπος εἶναι : $\varepsilon\varphi B=\dfrac{2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}}$ (βλέπε τύπος (43))

Θεωροῦμεν τώρα τόν τύπον αὐτόν ὡς ἀλγεβρικήν ἐξίσωσιν β΄ βαθμοῦ μέ ἄγνωστον τήν $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}$ καί φέρομεν αὐτήν εἰς τήν τελικήν της μορφήν κτλ.

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi B=\frac{2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}}\ \text{ἤ}\ \left(\begin{matrix}\text{ἀπαλοιφή}\\ \text{παρονομαστῶν}\end{matrix}\right)\ \varepsilon\varphi B\left(1-\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}\right)=2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}\quad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon\varphi B-\varepsilon\varphi B.\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}-2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=0\quad \text{ἤ}$$

(πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη ἐπί -1 καί ἀλλάσσομεν συγχρόνως τήν θέσιν τῶν προσθετέων).

$$\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi^2\frac{B}{2}+2\varepsilon\varphi\frac{B}{2}-\varepsilon\varphi B=0\quad (\text{β΄ βαθμ. ὡς πρός } \varepsilon\varphi\tfrac{B}{2})$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4.\varepsilon\varphi B.(-\varepsilon\varphi B)}}{2.\varepsilon\varphi B}\quad \text{ἤ}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+4\varepsilon\varphi^2B}}{2\varepsilon\varphi B}\quad \acute{\eta}\quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{4(1+\varepsilon\varphi^2B)}}{2\varepsilon\varphi B}\quad \acute{\eta}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-2\pm2\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2B}}{2\varepsilon\varphi B}\quad \acute{\eta}\quad \varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{\cancel{2}(-1\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2B})}{\cancel{2}\varepsilon\varphi B}$$

καί τελικῶς $\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2B}}{\varepsilon\varphi B}$

Ἀπορρίπτομεν τώρα τήν ἀρνητικήν ρίζαν

$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-1-\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2B}}{\varepsilon\varphi B}$ ἐπειδή πρόκειται περί ὀξείας γωνίας καί λαμβάνομεν τήν θετικήν ρίζαν

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2B}}{\varepsilon\varphi B}$$

θέτομεν τώρα ὅπου $\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$ καί ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\frac{B}{2}=\frac{-1+\sqrt{1+(\frac{\beta}{\gamma})^2}}{\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{-1+\sqrt{1+\frac{\beta^2}{\gamma^2}}}{\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{-1+\sqrt{\frac{\gamma^2+\beta^2}{\gamma^2}}}{\frac{\beta}{\gamma}}=$$

$$=\frac{-1+\sqrt{\frac{\alpha^2}{\gamma^2}}}{\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{-1+\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}-1}{\frac{\beta}{\gamma}}=\frac{\frac{\alpha-\gamma}{\cancel{\gamma}}}{\frac{\beta}{\cancel{\gamma}}}=\frac{\alpha-\gamma}{\beta}$$

(πολλαπλασιάζομεν τώρα ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί $\alpha+\gamma$, διότι τό $\alpha+\gamma$ τό χρειαζόμεθα είς τόν παρονομαστήν τοῦ β΄ μέλους).

$$=\frac{(\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta(\alpha+\gamma)}=\frac{\beta^{\cancel{2}}}{\cancel{\beta}(\alpha+\gamma)}=\frac{\beta}{\alpha+\gamma}\qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

186. Δοθείσης τῆς σχέσεως $\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x=\frac{12}{25}$ νά ὑπολογισθοῦν τά ημx καί συνx (λαμβανομένων ὑπ'ὄψιν μόνον τῶν θετικῶν τιμῶν των).

Λύσις

<u>Σκέψις</u>: Ἐπειδή ἡ δοθεῖσα ἰσότης περιέχει δύο ἀγνώστους τούς ὁποίους πρέπει νά ὑπολογίσωμεν δι' αὐτό θά λάβωμεν καί μίαν ἄλλην ἰσότητα συνδέουσαν τούς δύο αὐτούς ἀγνώστους ὥστε νά ἀποκτήσωμεν <u>σύστημα δύο ἐξισώσεων</u> μέ δύο ἀγνώστους.

Ὡς τοιαύτην ἰσότητα λαμβάνομεν τήν θεμελιώδη σχέσιν $συν^2χ + ημ^2χ = 1$

Οὕτω ἔχομεν τό σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} (1)\ & συν^2χ + ημ^2χ = 1 \\ (2)\ & ημχσυνχ = \frac{12}{25} \end{aligned}\right\}$$

(Πολλαπλασιάζομεν τά μέλη τῆς (2) ἐπί 2 καί γράφομεν τό 1 τοῦ β' μέλους τῆς (1) ὡς $\frac{25}{25}$)

$$\left.\begin{aligned} & συν^2χ + ημ^2χ = \frac{25}{25} \\ & 2ημχσυνχ = \frac{24}{25} \end{aligned}\right\}$$

τάς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος προσθέτομεν πρῶτον καί ἀφαιροῦμεν κατόπιν κατά μέλη

$$\left.\begin{aligned} & συν^2χ + ημ^2χ + 2ημχσυνχ = \frac{49}{25} \\ & συν^2χ + ημ^2χ - 2ημχσυνχ = \frac{1}{25} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} & (συνχ + ημχ)^2 = \frac{49}{25} \\ & (συνχ - ημχ)^2 = \frac{1}{21} \end{aligned}\right\}$$

(Ἐξάγομεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν).

$$\left.\begin{aligned} & συνχ + ημχ = \pm\frac{7}{5} \\ & συνχ - ημχ = \pm\frac{1}{5} \end{aligned}\right\}$$

Λαμβάνομεν τώρα (κατά τήν ἐκφώνησιν) τάς τιμάς

$$\left.\begin{aligned} & συνχ + ημχ = \frac{7}{5} \\ & συνχ - ημχ = \frac{1}{5} \end{aligned}\right\}$$

1. Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν:

$2συνχ = \frac{8}{5}$ καί $συνχ = \frac{8}{5} : 2 = \frac{4}{5}$. <u>Ὥστε</u>: $συνχ = \frac{4}{5}$

ΙΙ. Δι'ἀφαιρέσεως κατά μέλη ἔχομεν:

$2\eta\mu\chi = \frac{6}{5}$ καί $\eta\mu\chi = \frac{6}{5} : 2 = \frac{3}{5}$. <u>Ὥστε</u> : $\eta\mu\chi = \frac{3}{5}$

Ι87. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶν τόξον $\chi < 90^\circ$ ἀληθεύει ἡ σχέσις $\tau o\xi.\eta\mu\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}} = \tau o\xi.\varepsilon\varphi\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$

<u>Σημείωσις:</u> Ἡ ὑπό ἀπόδειξιν ἰσότης ἀπαγγέλλεται ὡς ἑξῆς: "Τόξον ἡμιτόνου $\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}$ ἴσον τόξον ἐφαπτομένης $\sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$ "

<u>Λύσις</u>

<u>Σκέψις</u>: Διά νά ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι τά δύο μέλη αὐτῆς ἰσοῦνται πρός τό αὐτό τόξον.

<u>Ἀπόδειξις</u>

Θέτομεν $\tau o\xi.\eta\mu\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}} = \omega$ (Ι) (Δηλαδή λέγομεν ὅτι "τό τόξον τό ὁποῖον ἔχει $\eta\mu\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}$ εἶναι τό ω").

Ἐκ τῆς (Ι) λαμβάνομεν τότε $\eta\mu\omega = \sqrt{\frac{\chi}{\chi\ \alpha}}$ (2)

Τώρα ἔχομεν: $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\eta\mu\omega}{\sqrt{1-\eta\mu^2\omega}} =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}\right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}}{\sqrt{1-\frac{\chi}{\chi+\alpha}}} = \frac{\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}}{\sqrt{\frac{\chi+\alpha-\chi}{\chi+\alpha}}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{\chi}{\chi+\alpha}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{\chi+\alpha}}} = \sqrt{\frac{\frac{\chi}{\cancel{\chi+\alpha}}}{\frac{\alpha}{\cancel{\chi+\alpha}}}} = \sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$$ <u>Ὥστε</u>: $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$

Ἐκ τῆς $\varepsilon\varphi\omega = \sqrt{\frac{\chi}{\alpha}}$ λαμβάνομεν ὅτι

$$\text{τοξ. εφ}\sqrt{\frac{χ}{α}} = ω \qquad (3)$$

'Εκ τῶν (1) καί (3) συνάγομεν (πρότασις 1 § 18 σελ.24) ὅτι

$$\text{τόξ.ημ}\sqrt{\frac{χ}{χ+α}} = \text{τόξ.εφ}\sqrt{\frac{χ}{α}} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

I. Ἂν $\eta\mu\chi = \dfrac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 + \nu^2}$ νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ τόξου χ.

2. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sigma\varphi\alpha - \eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \sigma\varphi\alpha$

3. Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$3 - \sigma\upsilon\nu 2\chi(4 - \sigma\upsilon\nu 2\chi) - \eta\mu^2 2\chi$$

4. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\eta\mu^2 2\alpha - 4\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2 2\alpha + 4\eta\mu^2\alpha - 4} = \varepsilon\varphi^4\alpha$

5. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\varepsilon\varphi^2\alpha} = \sigma\varphi^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

6. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}$ = I ὀρθ.) ἀληθεύει ἡ σχέσεις $\dfrac{\alpha + \gamma}{\beta} = \sigma\varphi\dfrac{B}{2}$

7. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}$ = I ὀρθ.) ἀληθεύει ἡ σχέσεις $\sigma\varphi\dfrac{B}{2} = \dfrac{\alpha + \gamma}{\beta}$

8. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{4}{I - 2\varepsilon\varphi\alpha\ \sigma\varphi 2\alpha} = \left(\sigma\varphi\dfrac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}\right)^2$

"Τριγωνομετρικαί 'Ασκήσεις" Γ.Π.Μπακούρου. Α΄ Ἔκδοσις.

9. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις:

$$2\eta\mu^6\chi + 2\sigma\upsilon\nu^6\chi - 3(\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ χ.

10. Διά ποίαν τιμήν τοῦ λ ἡ παράστασις

$$\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + \lambda\,(\eta\mu^4\chi + \sigma\upsilon\nu^4\chi)$$

λαμβάνει τήν αὐτήν τιμήν δι'ὁποιανδήποτε τιμήν τοῦ χ;

11. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶν τόξον

$\chi < 90^\circ$ ἀληθεύει ἡ σχέσις:

$$\text{τοξ.συν}\sqrt{\frac{\alpha}{\chi+\alpha}} = \text{τοξ.σφ}\sqrt{\frac{\alpha}{\chi}}$$

12. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi^4\alpha + \varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{1}{\sigma\varphi^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

13. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἄν ἰσχύη ἡ σχέσις

$$4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 3\alpha$$

θά ἰσχύη καί ἡ $\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu 3\alpha$.

14. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha$

15. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $2\cdot\dfrac{3+\sigma\upsilon\nu 4\chi}{1-\sigma\upsilon\nu 4\chi} = \sigma\varphi^2\chi + \varepsilon\varphi^2\chi$

16. Ἄν $5\eta\mu\chi - 5\sigma\upsilon\nu\chi = 1$ νά ὑπολογισθοῦν τά

$\eta\mu 2\chi$, $\sigma\upsilon\nu 2\chi$, $\varepsilon\varphi 2\chi$, $\sigma\varphi 2\chi$.

17. Ἐκ τῆς $εφ30^o$ νά ὑπολογισθῇ ἡ $εφ15^o$

18. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{εφ^2 2χ}{2 + εφ^2 2χ} = \dfrac{2εφ^2 χ}{1 + εφ^4 χ}$

19. Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$3 - 4συν2χ + συν4χ$$

*20. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$(σφα + 2)(2σφα + 1) = 5σφα + 2στεμ^2 α$$

*21. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: $στεμ2α + σφ2α = σφα$

22. Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα

$$\frac{(1 - χ^2)\,ημ2α - 2χ\,συν2α}{ημα - χσυνα}$$

23. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left(\frac{ημ2χ - ημ4χ}{ημ2χ + ημ4χ}\right)\left(\frac{συν2χ - συν4χ}{συν2χ + συν4χ}\right) + εφ^2 χ = 0$$

24. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{2ημα - ημ2α}{2ημα + ημ2α} = \frac{1 - συνα}{1 + συνα}$$

*25. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2συνχ = τεμχ$

26. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως $3εφ^2 χ - 18εφχ + 27 = 0$ νά ὑπολογισθοῦν τά ημ2χ, συν2χ, εφ2χ καί σφ2χ

27. Ἔστω ΑΒ διάμετρος κύκλου ἀκτῖνος R καί Μ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτοῦ. Φέρομεν τήν ΜΝ κάθετον ἐπί τήν ΑΒ. (Ν σημεῖον τῆς διαμέτρου). Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$AM + MN = 2R\,ημφ\,(1 + συνφ)$$

ἄν γωνία ΑΒΜ = φ

28. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \cdot \frac{1}{\eta\mu^2\alpha}}$

* 29. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\alpha\ \sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha}$

30. Ἄν μεταξύ τῶν τόξων α καί β ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$\frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta}$ νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$\eta\mu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\beta = (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$$

31. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\ \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$

(Πολλαπλασιάσατε τό $3\eta\mu^2\chi\ \sigma\upsilon\nu^2\chi$ μέ τήν $1 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\alpha$ καί σχηματίσατε τελικῶς τό ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν).

32. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$E = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2\eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}$$

33. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$R = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\alpha\beta\gamma}{\eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu\Gamma}}$$

34. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$4ER = \alpha\beta\gamma$$

* 35. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$2(\sigma\tau\varepsilon\mu\, 2\alpha + \sigma\varphi 2\alpha) = \sigma\varphi\,\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\,\frac{\alpha}{2}$$

Διεύθυνσις συγγραφέως

Γεώργιος Π. Μπακοῦρος
Καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν
τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως
Ὁδός Γριβαίων 7
(πάροδος Σκουφᾶ 64)
Ἀθῆναι

28. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} \cdot \dfrac{1}{\eta\mu^2\alpha}}$

* 29. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\varepsilon\varphi\alpha + \sigma\varphi\alpha = \sqrt{\tau\varepsilon\mu^2\alpha\ \sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha}$

30. Ἄν μεταξύ τῶν τόξων α καί β ἰσχύῃ ἡ σχέσις

$\dfrac{\eta\mu\beta}{\eta\mu\alpha} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\beta}$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$\eta\mu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\beta = (\eta\mu\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha)^2$

31. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι: $\eta\mu^6\chi + \sigma\upsilon\nu^6\chi + 3\eta\mu^2\chi\ \sigma\upsilon\nu^2\chi = 1$

(Πολλαπλασιάσατε τό $3\eta\mu^2\chi\ \sigma\upsilon\nu^2\chi$ μέ τήν $1 = \eta\mu^2\chi + \sigma\upsilon\nu^2\chi$ καί σχηματίσατε τελικῶς τό ἀνάπτυγμα τοῦ κύβου τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν).

32. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$E = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2\ \eta\mu A\ \eta\mu B\ \eta\mu \Gamma}$$

33. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

34. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

* 35. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

$$2(\sigma\tau\varepsilon\mu\ 2\alpha + \sigma\varphi 2\alpha) = \sigma\varphi\ \frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\ \frac{\alpha}{2}$$