Δ 2 ΜΜΙ

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Μπακούρου (Γεωρ. Π.)

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ
ΚΑΙ ΤΑΞΙΝΟΜΗΜΕΝΑΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ Ε΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ: Προκαταρκτική ἐπὶ τῶν ἀσκήσεων θεωρία. Ἀριθμητικαί, Ἀλγεβρικαὶ καὶ Γεωμετρικαὶ προτάσεις.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ: Ἀσκήσεις καθ' ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Εὐθύγραμμα τμήματα.—Ἐπίκεντροι γωνίαι καὶ ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα.—Συμπληρωματικαὶ καὶ παραπληρωματικαὶ γωνίαι.—Διαγώνιοι πολυγώνων.—Διχοτόμοι διαφόρων γωνιῶν.—Εὐθεῖαι καὶ τεθλασμέναι γραμμαί.—Ἰσότης στοιχείων τριγώνων.—Κάθετοι καὶ πλάγιαι εὐθεῖαι.—Ἀνισότης στοιχείων τριγώνων.—Ἁπλοῖ γεωμετρικοὶ τόποι καὶ ἁπλαῖ γεωμετρικαὶ κατασκευαί.—Ἐπαναληπτικαὶ ἀσκήσεις.

ΑΘΗΝΑΙ 1958

Μπακούρος (Γεωρ. Π.)

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΩΣ

ΚΑΙ

ΤΑΞΙΝΟΜΗΜΕΝΑΙ ΚΑΤΑ ΚΑΤΗΓΟΡΙΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΗΣ
Ε΄ ΤΑΞΕΩΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ.

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ: Προκαταρκτική ἐπί τῶν ἀσκήσεων θεωρία. Ἀριθμητικαί, Ἀλγεβρικαί καί Γεωμετρικαί προτάσεις.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ: Ἀσκήσεις καθ' ὁμάδας ὡς ἑξῆς: Εὐθύγραμμα τμήματα - Ἐπίκεντροι γωνίαι καί ἀντίστοιχα αὐτῶν τόξα - Συμπληρωματικαί καί παραπληρωματικαί γωνίαι - διαγώνιοι πολυγώνων - Διχοτόμοι διαφόρων γωνιῶν - Εὐθεῖαι καί τεθλασμέναι γραμμαί - Ἰσότης στοιχείων τριγώνων - κάθετοι καί πλάγιαι εὐθεῖαι - Ἀνισότης στοιχείων τριγώνων - Ἁπλοῖ γεωμετρικοί τόποι καί ἁπλαῖ γεωμετρικαί κατασκευαί - Ἐπαναληπτικαί ἀσκήσεις.

ΑΘΗΝΑΙ 1958.

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τό παρόν βιβλίον περιλαμβάνει Γεωμετρικάς ἀσκήσεις ἀναφερομένας εἰς τήν ὕλην τῆς **Ε' τάξεως** τῶν σημερινοῦ τύπου Γυμνασίων.

Συγκεκριμένως περιέχει τάς ἐκφωνήσεις ἀσκήσεων, μετά τῶν λύσεων αὐτῶν, μέχρι τοῦ κεφαλαίου περί παραλλήλων εὐθειῶν μή συμπεριλαμβανομένου.

Ἡ περιεχομένη ἐνταῦθα ὕλη χωρίζεται εἰς δύο μέρη.

Τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν ἀναφέρεται εἰς τάς ἀπαραιτήτους ἐκείνας προτάσεις ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς, τῆς Ἀλγέβρας καί τῆς Γεωμετρίας, αἱ ὁποῖαι χρησιμεύουν εἰς τήν ἀπόδειξιν τῶν Ἀσκήσεων τοῦ παρόντος βιβλίου.

Τό δεύτερον πάλιν ἀποτελεῖται ἀπό ἐννέα ὁμάδας ἀσκήσεων, ταξινομημένας κατά κατηγορίας καί ἐκ μιᾶς ἀκόμη, τῆς ἐπαναληπτικῆς, περιλαμβανούσης ἀσκήσεις ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων ὁμάδων.

Ἡ τοιαύτη ταξινόμησις τῶν ἀσκήσεων καί ὁ ἀναλυτικός τρόπος λύσεών των ἀποτελεῖ προσωπικήν ἡμῶν ἐργασίαν καί γίνεται διά πρώτην φοράν, τοὐλάχιστον ἐν Ἑλλάδι, ἐξ ὅσων γνωρίζομεν.

Ἡ πρόταξις πρό τῶν ἀσκήσεων τῶν προαναφερθεισῶν προτάσεων γίνεται μέ τόν σκοπόν, ὅπως κατά τάς λύσεις τῶν ἀσκήσεων μή ἀναγράφομεν ἐνίοτε - διά λόγους ἐξοικονομήσεως χώρου - τά δικαιολογητικά τῆς ἐργασίας μας ἐν ἐκτάσει, ἀλλ' ἵνα παραπέμπωμεν τόν ἀναγνώστην, διά τῆς ἀναγραφῆς τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν, εἰς τήν οἰκείαν παράγραφον.

Ἐπί πλέον ἡ προαναφερθεῖσα ἐξοικονόμησις τοῦ χώρου ἀποσκοπεῖ καί εἰς τήν ἀναλυτικωτέραν ἀνάπτυξιν τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων πρός πλήρη κατατόπισιν τοῦ ἀναγνώστου.

Τό ἔργον μας θά συνεχίσωμεν - πάντοτε κατά τόν ἴδιον τρόπον - διά τῆς ἐκδόσεως καί ἄλλων τόμων, ἑνός ἤ δύο ἀνά ἑκάστην Γυμνασιακήν τάξιν, ὥστε, τόσον διά τούς **μαθητάς τῶν Γυμνασίων**, ὅσον καί διά τούς **ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν**, νά ἀποβῇ τοῦτο κατά πάντα τρόπον ὠφέλιμον.

Ἀθῆναι, 7 Μαρτίου 1958

Γ. Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ - ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΑΡΕΧΩΝ

ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΝ **ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΚΑΙ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ**
ΤΗΣ ΔΙΑ ΤΑ ΓΥΜΝΑΣΙΑ ΕΓΚΕΚΡΙΜΕΝΗΣ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΠΡΟΣ ΤΑΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΑΡΟΝΤΟΣ ΒΙΒΛΙΟΥ

Α΄. ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Αὔξων ἀριθμός	
Βιβλίου Ὀργανισμοῦ.	Παρόντος βιβλίου.
1α΄	32
1β΄	33
2α΄	34α΄
2β΄	34γ΄
2γ΄	34δ΄
3	12
4	13
5	18
6	19
8	36
9	17
10	20
11	21
12	22
13	24
14	27α΄
15	27β΄
16	27γ΄
17	27δ΄
20α΄	29α΄
20β΄	29β΄
21	30
22	39
23	38
24	53α΄

Αὔξων ἀριθμός	
Βιβλίου Ὀργανισμοῦ.	Παρόντος βιβλίου
25	53β΄
26	54
27	115
28	170α΄
29	170β΄
34	122
41	55
42	56
43	57
44	58
45	59
46	60
47	109β΄
48	61
51	65
52	66
53	67
54	68
55	71
56	72
58	73
59	74
60	75
63	123
65	104

Αὔξων ἀριθμός	
Βιβλίου Ὀργανισμοῦ.	Παρόντος βιβλίου
66	105
67	76
68	78
69	79
70	81
71	82
72	83
73	118
74	131
75	103
76	119
77	116
78	84
79	85
80	173
81	146
82	160
83	161
84	148
85	145
86	92
87	93
88	94
89	117

Β΄ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑ ΠΟΡΙΣΜΑΤΩΝ

Αύξων Αριθμός	
Βιβλίου Οργανισμού	Παρόντος βιβλίου
§ 22	31
§ 32 Πόρισμα I	164
" II	165
§ 35 Πόρισμα I	157
" II	36
" III	158
§ 41	10
§ 41 Πόρισμα	11
§ 43 " I	14
" II	15
" III	16
§ 51	166
§ 52	168
§ 53	169
§ 55	167
§ 63 Πόρισμα I	150
" II	151
" III	152
§ 65 " I	124
" II	125
§ 67 " I	171
§ 68 Πρόβλημα I	172
§ 74 Πόρισμα I	162
§ 75 " I	163
" II	74
" III	62
§ 76 " I	107
" II	108
" III	106
" IV	109
§ 77 " I	63
§ 80 " I	64
§ 81 " I	70
§ 82 " I	90
" II	91
§ 84 Πρόβλημα II	159
§ 86 Πόρισμα I	111
§ 87 " I	112
" II	113
§ 91 "	154
§ 92 " I	155
" II	156

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ
ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ἀπαραίτητοι Ἀριθμητικαί, Ἀλγεβρικαί καί Γεωμετρικαί προτάσεις χρησιμεύουσαι είς τήν λύσιν τῶν Ἀσκήσεων τοῦ παρόντος βιβλίου.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΚΑΙ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΙΣΟΤΗΤΕΣ

1. "Δύο ἀριθμοί ἴσοι πρός τρίτον εἶναι καί μεταξύ των ἴσοι"

Ἕτερος τρόπος ἀποδόσεως τῆς προτάσεως.

"Ἄν δύο μέλη δύο ἰσοτήτων εἶναι ἴσα μεταξύ των θά εἶναι ἴσα καί τά ἄλλα μέλη".

Παραδείγματα.

Ἀριθμητικῶς. (δηλαδή μέ ἀριθμούς)

Ἄν $5 = \frac{10}{2}$ καί $5 = \frac{20}{4}$ Τότε: $\frac{10}{2} = \frac{20}{4}$

Γενικῶς. (δηλαδή μέ γράμματα)

Ἄν $\alpha = \gamma$ καί $\beta = \gamma$ Τότε: $\alpha = \beta$

2. "Ἐάν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἴσα προκύπτουν ἴσα" ἤ ἄλλως:

"Ἐάν εἰς ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος προσθέσωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν προκύπτει πάλιν ἰσότης".

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς

$$\begin{array}{r} 5 = 5 \\ 6 = 6 \\ \hline 5+6 = 5+6 \\ 11 = 11 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10 = 10 \\ 10+2 = 10+2 \\ \hline 12 = 12 \end{array}$$

Γενικῶς

$$\begin{array}{r} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \\ \hline \alpha+\beta = \gamma+\delta \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha = \beta \\ \alpha+\gamma = \beta+\gamma \end{array}$$

3."'Εάν ἀπό ἴσα <u>ἀφαιρέσωμεν</u> ἴσα προκύπτουν ἴσα" ἤ <u>ἄλλως</u>

"'Εάν ἀπό ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος <u>ἀφαιρέσωμεν</u> τόν αὐτόν ἀριθμόν προκύπτει πάλιν ἰσότης".

<u>Παραδείγματα</u>

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$$\begin{array}{r} 10 = 10 \\ \underline{6 = \ 6} \\ 10-6 = 10-6 \\ 4 = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 = 8 \\ \underline{8-3 = 8-3} \\ 5 = 5 \end{array}$$

<u>Γενικῶς</u>

$$\begin{array}{c} \alpha = \beta \\ \underline{\gamma = \delta} \\ \alpha-\gamma = \beta-\delta \end{array} \qquad \begin{array}{c} \alpha = \beta \\ \alpha-\gamma = \beta-\gamma \end{array}$$

4." Εἰς μίαν ἰσότητα δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἀπό τό ἕνα μέλος εἰς τό ἄλλο ἀλλάσσοντες συγχρόνως τό σημεῖον αὐτοῦ"

<u>Παραδείγματα</u>

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$5 + 6 = 8 + 3$ ἤ

$5 + 6 - 3 = 8$

<u>Γενικῶς</u>

$\alpha + \beta = \gamma + \delta$ ἤ

$\alpha + \beta - \gamma = \delta$

5."'Εάν ἐναλλάξωμεν τά μέλη μιᾶς ἰσότητος, ἡ ἰσότης διατηρεῖται".

<u>Παραδείγματα</u>

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$\frac{10}{2} = 5$ καί $5 = \frac{10}{2}$

<u>Γενικῶς</u>

$\alpha = \beta \ , \quad \beta = \alpha$

(Εἰς τήν τοιαύτην ἐναλλαγήν, ἄν θέλωμεν ἀλλάσσομεν τά σημεῖα).

6."'Εάν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος τά <u>πολλαπλασιάσωμεν</u> ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός, προκύπτει πάλιν ἰσότης".

<u>Παραδείγματα</u>

<u>'Αριθμητικῶς</u>

$$\begin{array}{c} 10 = 10 \ , \quad 2 \neq 0 \\ 10.2 = 10.2 \\ 20 = 20 \end{array}$$

<u>Γενικῶς</u>

$$\begin{array}{c} \alpha = \beta \ , \quad \gamma \neq 0 \\ \alpha\gamma = \beta\gamma \end{array}$$

7. "'Εάν άμφότερα τά μέλη μιᾶς ἰσότητος τά διαιρέσωμεν διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ μηδενός, προκύπτει πάλιν ἰσότης".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 = 10, \quad 2 \neq 0$	$\alpha = \beta, \quad \gamma \neq 0$
$10:2 = 10:2$	$\alpha:\gamma = \beta:\gamma$ ἤ
$5 = 5$	$\dfrac{\alpha}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\gamma}$

ΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

8. "'Εάν εἰς ἴσα προσθέσωμεν ἄνισα προκύπτουν ὁμοίως ἄνισα" (Λέγοντες ὁμοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ἀπό τήν πρόσθεσιν τοῦ μεγαλυτέρου προκύπτει τό μεγαλύτερον καί ἀπό τήν πρόσθεσιν τοῦ μικροτέρου τό μικρότερον).

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 = 10$	$\alpha = \beta$
$6 > 2$	$\gamma > \delta$
$10+6 > 10+2$	$\alpha+\gamma > \beta+\delta$
$16 > 12$	

9. "'Εάν ἀπό ἴσα ἀφαιρέσωμεν ἄνισα προκύπτουν ἀνομοίως ἄνισα" (Λέγοντες ἀνομοίως ἐννοοῦμεν ὅτι ἀπό τήν ἀφαίρεσιν τοῦ μεγαλυτέρου προκύπτει τό μικρότερον καί ἀπό τήν ἀφαίρεσιν τοῦ μικροτέρου τό μεγαλύτερον).

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 = 10$	$\alpha = \beta$
$7 > 4$	$\gamma > \delta$
$10 - 7 < 10 - 4$	$\alpha - \gamma < \beta - \delta$
$3 < 6$	

Α Ν Ι Σ Ο Τ Η Τ Ε Σ

10."'Εάν άμφότερα τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος τά πολλαπλασιάσωμεν ή τά διαιρέσωμεν μέ τόν αὐτόν ἀρνητικόν ἀριθμόν, ή ἀνισότης ἀλλάσσει στροφήν" (Λέγοντες, ή ἀνισότης ἀλλάσσει στροφήν ἐννοοῦμεν ὅτι ἐκ τοῦ μεγαλυτέρου προκύπτει τό μικρότερον καί ἐκ τοῦ μικροτέρου τό μεγαλύτερον. Εἰς τήν τοιαύτην περίπτωσιν, τό ἄνοιγμα τῆς γωνίας στρέφει ὑποχρεωτικῶς πρός τό ἄλλο μέρος, διά νά εὑρεθῆ ἐντός αὐτοῦ τό μεγαλύτερον μέλος τῆς προκυπτούσης ἀνισότητος)

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
Α΄ Πολλαπλασιασμός.	
$6 > 5 \quad , -2$	$\alpha > \beta \quad , -\gamma$
$6(-2) < 5(-2)$	$\alpha(-\gamma) < \beta(-\gamma)$
$-12 < -10$	$-\alpha\gamma < -\beta\gamma$
Β΄ Διαίρεσις	
$8 > 6 \quad , -2$	$\alpha > \beta \quad , -\gamma$
$8:(-2) < 6:(-2)$	$\alpha:(-\gamma) < \beta:(-\gamma)$
$-4 < -3$	$-\frac{\alpha}{\gamma} < -\frac{\beta}{\gamma}$

11."'Εάν εἰς άμφότερα τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος προσθέσωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν προκύπτει ἀνισότης ὁμοία πρός τήν δοθεῖσαν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 > 6$	$\alpha > \beta$
$10+3 > 6+3$	$\alpha+\gamma > \beta+\gamma$
$13 > 9$	

12."'Εάν ἀπό ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος ἀφαιρέσωμεν τόν αὐτόν ἀριθμόν προκύπτει ἀνισότης ὁμοία πρός τήν δοθεῖσαν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 > 6$	$\alpha > \beta$
$10-2 > 6-2$	$\alpha-\gamma > \beta-\gamma$
$8 > 4$	

13. "Εάν εἰς ἄνισα προσθέσωμεν ὁμοίως ἄνισα, δηλαδή τό μεγαλύτερον εἰς τό μεγαλύτερον καί τό μικρότερον εἰς τό μικρότερον, προκύπτουν ὁμοίως ἄνισα".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$10 > 4$	$\alpha > \beta$
$8 > 3$	$\gamma > \delta$
$10+8 > 4+3$	$\alpha+\gamma > \beta+\delta$
$18 > 7$	

14. "'Εάν ἕνας ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος ἑνός ἄλλου καί αὐτός ὁ δεύτερος πάλιν εἶναι μεγαλύτερος ἑνός τρίτου, τότε λέγομεν ὅτι ὁ πρῶτος ἐκ τῶν δοθέντων κατά μείζονα λόγον εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ τοῦ τρίτου."

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
"Αν $10 > 5$ καί $5 > 2$	"Αν $\alpha > \beta$ καί $\beta > \gamma$
Τότε:	Τότε:
κατά μείζονα λόγον	κατά μείζονα λόγον
$10 > 2$	$\alpha > \gamma$

Νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως ἤ τῆς ἀδιαφορίας

Πρόσθεσις.

15. "Τό ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων προσθετέων δέν μεταβάλλεται καί ἄν ἀλλάξωμεν τήν θέσιν αὐτῶν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς	Γενικῶς
$2+3+4 = 9$	$\alpha+\beta+\gamma = \delta$
$4+2+3 = 9$	$\beta+\gamma+\alpha = \delta$
$2+3+4 = 4+2+3$	$\alpha+\beta+\gamma = \beta+\gamma+\alpha$

Πολλαπλασιασμός

16. "Τό γινόμενον δύο ἤ περισσοτέρων παραγόντων δέν μεταβάλλεται καί ἄν ἀλλάξωμεν τήν θέσιν αὐτῶν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς

"Αν $2.3.4 = 24$, καί $3.4.2 = 24$ Τότε: $2.3.4 = 3.4.2$

Γενικῶς

$\left.\begin{array}{l}\alpha\beta\gamma = \varepsilon \\ \gamma\alpha\beta = \varepsilon\end{array}\right\} \alpha\beta\gamma = \gamma\alpha\beta$

'Επιμεριστική ἰδιότης

"Αθροισμα ἐπί ἀριθμόν

17. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπί ἀριθμόν δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος ἐπί τόν ἀριθμόν αὐτόν καί νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα γινόμενα".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς

$(2+3+5).10 =$
$=2.10+3.10+5.10=20+30+50$

Γενικῶς

$(\alpha+\beta+\gamma)\delta =$
$=\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta$

"Αθροισμα ἐπί ἄθροισμα

17α. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπί ἄθροισμα δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἑνός ἀθροίσματος ἐπί ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καί νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα γινόμενα".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς

$(2+3+5)(4+6) =$
$=2.4+3.4+5.4+2.6+3.6+5.6$

Γενικῶς

$(\alpha+\beta+\gamma)(\delta+\varepsilon)=$
$=\alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta+\alpha\varepsilon+\beta\varepsilon+\gamma\varepsilon$

Γινόμενον ἐπί ἀριθμόν

18. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπί ἀριθμόν δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον ἐκ τῶν παραγόντων ἐπί τόν ἀριθμόν αὐτόν τούς δέ ἄλλους νά ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν".

Παραδείγματα

'Αριθμητικῶς

$(2.3.5)10=2.(3.10).5=2.30.5$

Γενικῶς

$(\alpha\beta\gamma)\delta = \alpha(\beta\delta)\gamma$

Σημείωσις: 1η: "'Η μονάς ὡς παράγων γινομένου δέν μεταβάλλει τό γινόμενον" ἕνεκα τούτου "ἡ μονάς ὡς παράγων δύναται νά παραλειφθῇ". ὅπως ἐπίσης "δύναται καί νά γραφῇ" χωρίς τό γινόμενον νά μεταβληθῇ.

Σημείωσις 2α: "Τό μηδέν ὡς παράγων γινομένου μηδενίζει τό γινόμενον."

"Ἄθροισμα δι'ἀριθμοῦ

19. "Διά νά διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι'ἀριθμοῦ δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος διά τοῦ ἀριθμοῦ καί νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα πηλίκα".

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
$(10+6+4):2=$	$(\alpha+\beta+\gamma):\delta=$
$=10:2+6:2+4:2=5+3+2$	$=\alpha:\delta+\beta:\delta+\gamma:\delta$

Γινόμενον δι'ἀριθμοῦ

20. "Διά νά διαιρέσωμεν γινόμενον δι'ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν ἕνα μόνον τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου διά τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ τούς δέ ἄλλους νά ἀφήσωμεν ὅπως ἔχουν".

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
$(10.6.5):3=10.(6:3).5=$	$(\alpha\beta\gamma):\delta=$
$=10.2.5$	$=\alpha(\beta:\delta)\gamma$

Γινόμενον δι'ἑνός τῶν παραγόντων του.

21. "Διά νά διαιρέσωμεν γινόμενον δι'ἑνός τῶν παραγόντων του ἀρκεῖ νά ἐξαλείψωμεν τόν παράγοντα αὐτόν".

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς	Γενικῶς
$(2.3.4):3=$	$(\alpha\beta\gamma):\beta=$
$=2.(3:3).4=2.1.4=2.4$	$=\alpha(\beta:\beta)\gamma=\alpha.1.\gamma=\alpha\gamma$

Ἁπλοποίησις κλάσματος

22. "Ἁπλοποίησις κλάσματος καλεῖται ἡ εὕρεσις ἑνός ἄλλου κλάσματος μέ μικροτέρους ὅρους ἀλλά τῆς αὐτῆς ἀξίας πρός τό δοθέν".

Τοῦτο τό ἐπιτυγχάνομεν διά τῆς διαιρέσεως καί τῶν δύο ὅρων του διά τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἐάν βεβαίως διαιροῦνται.

Παραδείγματα

Ἀριθμητικῶς

$$\frac{\cancel{20}^{\cancel{5}^{1}}}{\underset{\underset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{100}}}=\frac{1}{5} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\cancel{20}^{1}}{\underset{5}{\cancel{100}}}=\frac{1}{5}$$

Γενικῶς

$$\frac{\alpha\,\cancel{\beta\gamma}}{\cancel{\alpha\beta^{2}\gamma}}=\frac{\alpha}{\beta}$$

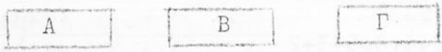
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

23."Δύο σχήματα δέν εἶναι δυνατόν νά εἶναι συγχρόνως καί ἴσα καί ἄνισα".

24."Τό μέρος δέν εἶναι δυνατόν νά ἰσοῦται μέ τό ὅλον".

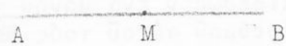
25."Ἐάν δύο σχήματα εἶναι ἴσα πρός τρίτον θά εἶναι καί μεταξύ των ἴσα".

Π.χ. ἄν A = Γ
καί B = Γ
Τότε: A = B



26."Ἑκάστη εὐθεῖα ἔχει μόνον ἕν μέσον"

Π.χ. Ἡ εὐθεῖα AB
ἔχει ὡς μέσον μόνον τό M
Ὥστε: AM = MB



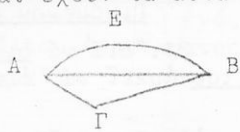
27."Μεταξύ δύο σημείων A καί B διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα" ἤ ἄλλως: "Δύο σημεῖα ὁρίζουν τήν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας".

Π.χ. Διά τῶν σημείων A καί B διέρχεται μόνον ἡ εὐθεῖα AB.

28.'Εξ ὅλων τῶν γραμμῶν αἱ ὁποῖαι ἔχουν τά αὐτά ἄκρα μικροτέρα ὅλων εἶναι ἡ εὐθεῖα"

Π.χ. AB < AΓB ἤ AB < AΓ+ΓB

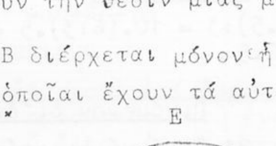
ἐπίσης AB < AEB



29."Ἀπόστασις δύο σημείων ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει αὐτά"

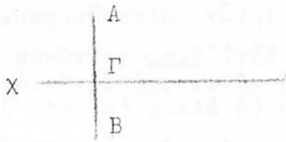
30."Ἡ περίμετρος πάσης κυρτῆς τεθλασμένης γραμμῆς εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν περίμετρον πάσης ἄλλης τεθλασμένης, κυρτῆς ἤ μή κυρτῆς, περικλειούσης τήν πρώτην καί ἐχούσης μέ αὐτήν τά αὐτά ἄκρα"

Π.χ. AB+BΓ+ΓΔ < AE+EZ+ZΔ



31."Ἀπόστασις σημείου ἀπό εὐθείας ὀνομάζεται τό τμῆμα τῆς καθέτου, ἐκ τοῦ σημείου ἐπί τήν εὐθεῖαν, τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τοῦ σημείου καί τῆς εὐθείας".

Π.χ. Δίδονται σημ.Α καί εὐθεῖα χψ
Φέρομεν ΑΒ $\perp$ χψ ,(Γ σημεῖον τομῆς).
Τότε ἡ ΑΓ εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Α
ἀπό τῆς χψ.



32. "Ἐάν ἐκ σημείου, ἐκτός εὐθείας εὑρισκομένου, φέρωμεν κάθετον ἐπί αὐτήν καί πλαγίας, τότε συμβαίνουν τά ἑξῆς:

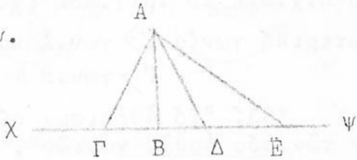
α΄) Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα πάσης πλαγίας.
β΄) Δύο πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι καί

γ΄) Δύο πλάγιαι τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου εἶναι ἄνισοι καί μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας ὁ πούς ἀπέχει περισσότερον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου".

Π.χ. Ἄν ΑΒ $\perp$ χψ
καί ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ πλάγιαι πρός τήν χψ.

Τότε:

α΄) ΑΒ μικροτέρα ὅλων τῶν ἄλλων
β΄) ἄν ΒΓ = ΒΔ τότε ΑΓ = ΑΔ καί
γ΄) ἄν ΒΕ > ΒΓ " ΑΕ > ΑΓ



Ἀντίστροφος πρότασις

33. "Ἐάν ἐκ σημείου ἐκτός εὐθείας εὑρισκομένου, φέρωμεν πολλάς εὐθείας πρός αὐτήν τότε συμβαίνουν τά ἑξῆς:

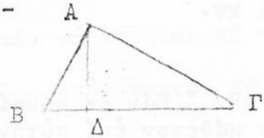
α΄) Ἡ μικροτέρα ὅλων εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν.
β΄) Οἱ πόδες δύο ἴσων πλαγίων ἀπέχουν ἴσον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου καί
γ΄) Οἱ πόδες δύο ἀνίσων πλαγίων ἀπέχουν ὁμοίως ἄνισον ἀπό τόν πόδα τῆς καθέτου.

Π.χ. Φέρομεν εὐθείας ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ. Τότε
α΄) Ἄν ΑΒ μικροτέρα ὅλων, θά εἶναι ΑΒ $\perp$ χψ
β΄) Ἄν ΑΓ=ΑΔ, θά εἶναι ΒΓ=ΒΔ.
γ΄) Ἄν ΑΕ>ΑΓ, θά εἶναι ΒΕ>ΒΓ.

33α: "Διά σημείου ἐκτός εὐθείας, εὑρισκομένου μία καί μόνον μία κάθετος ἄγεται ἐπί τήν εὐθεῖαν ταύτην".

33β: <u>Βάσις</u> τριγώνου καλεῖται (καί λαμβάνεται) ἑκάστη ἐκ τῶν τριῶν πλευρῶν του.

33γ: <u>Ὕψος</u> τριγώνου καλεῖται ἡ ἐκ μιᾶς κορυφῆς αὐτοῦ ἀγομένη κάθετος ἐπί τήν ἀπέναντι πλευράν του (ἤ ἄλλως ἐπί τήν βάσιν του).



Π.χ. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι:
βάσις εἶναι ἡ ΒΓ τότε
ὕψος " ἡ ΑΔ$\perp$ΒΓ

34." '<u>Ἑκάστη πλευρά τριγώνου</u> εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καί μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν".
Π.χ. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι

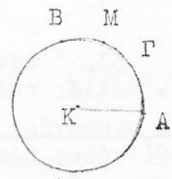
ΑΓ-ΑΒ $<$ ΒΓ $<$ ΑΓ+ΑΒ

35α: <u>Πᾶσα ἐξωτερική γωνία</u> τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν ἐντός καί ἀπέναντι γωνιῶν αὐτοῦ Π.χ.Εἰς τό τρίγ.ΑΒΓ ἔχομεν ὅτι:

ἐξωτερική γωνία Γ $>$ γων.Α καί
" " Γ $>$ γων.Β

35β: "Τό ἄθροισμα δύο γωνιῶν τριγώνου εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν".
Π.χ. εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν $\hat{A} + \hat{B} <$ 2 ὀρθῶν

<u>Κ Υ Κ Λ Ο Σ</u>

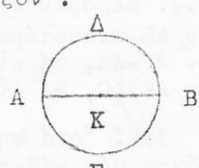


36. '<u>Η συμβολική γραφή κύκλου ἤ περιφερείας</u> κέντρου Κ καί ἀκτῖνος ΚΑ εἶναι (Κ,ΚΑ).

37. "Πᾶν τόξον περιφερείας ἔχει μόνον <u>ἕν μέσον</u>".
Π.χ. τό τόξον ΒΓ ἔχει μέσον τό Μ ὥστε $\overset{\frown}{BM}=\overset{\frown}{M\Gamma}$

38."<u>Κέντρον τόξου</u> ὀνομάζεται τό κέντρον τοῦ κύκλου εἰς τήν περιφέρειαν τοῦ ὁποίου ἀνήκει τό τόξον".
Π.χ. κέντρον τοῦ $\overset{\frown}{B\Gamma}$ εἶναι τό Κ.

39. "<u>Διάμετρος κύκλου</u> ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό κέντρον αὐτοῦ καί περατοῦται ἑκατέρωθεν εἰς τήν περιφέρειαν". Π.χ. ἡ εὐθεῖα ΑΒ



'Ιδιότητες τῆς διαμέτρου

40. "'Η διάμετρος κύκλου χωρίζει

α΄) τήν περιφέρειαν είς δύο ἴσα μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων ὀνομάζεται <u>ἡμιπεριφέρεια</u> καί

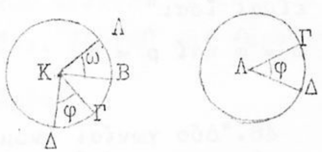
β΄) τόν κύκλον είς δύο ἴσα μέρη ἕκαστον τῶν ὁποίων ὀνομάζεται <u>ἡμικύκλιον</u>".

'Αντίστροφος πρότασις.

41. "'Εάν μία εὐθεῖα περατουμένη είς τήν περιφέρειαν, χωρίζῃ αὐτήν είς δύο ἴσα μέρη ἤ τόν κύκλον είς δύο ἴσα μέρη, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου".

'Αντιστοιχία ἐπικέντρων γωνιῶν καί ἀντιστοίχων τόξων.

42. "Είς τόν αὐτόν ἤ είς ἴσους κύκλους <u>είς ἴσα τόξα</u> ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαι".



Π.χ. $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

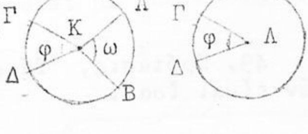
'Αντίστροφος πρότασις.

43. "Είς τόν αὐτόν ἤ είς ἴσους κύκλους <u>είς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας</u> ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα".

Π.χ. $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$

44. "Είς τόν αὐτόν ἤ είς ἴσους κύκλους <u>είς ἄνισα τόξα</u> ἀντιστοιχοῦν <u>ὁμοίως ἄνισοι</u> ἐπίκεντροι γωνίαι."



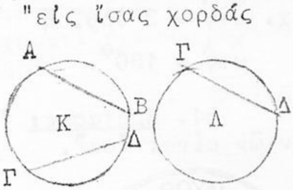
Π.χ. $\widehat{AB} > \widehat{\Gamma\Delta}$

$\hat{\omega} > \hat{\varphi}$

'Αντιστοιχία χορδῶν καί τόξων

44α. "Είς τόν αὐτόν ἤ ἴσους κύκλους είς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί" καί <u>ἀντιστρόφως</u>· "είς ἴσας χορδάς ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα".

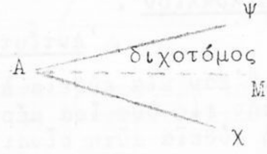
Π.χ. $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ / χορδ.ΑΒ=χορδ.ΓΔ καί χορδ.ΑΒ=χορδ.ΓΔ / $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$



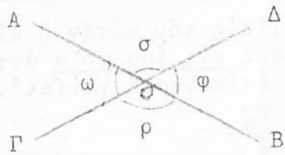
<u>Ἀντίστροφος πρότασις</u>

45."Εἰς τόν αὐτόν, ἤ εἰς κύκλους εἰς <u>ἀνίσους ἐπικέντρους γωνίας</u> ἀντιστοιχοῦν <u>ὁμοίως ἄνισα τόξα</u>

Π.χ. $\dfrac{\hat{\omega} > \hat{\varphi}}{\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$

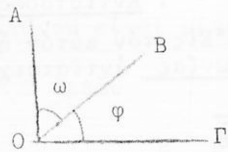


46."<u>Διχοτόμος</u> γωνίας ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἀρχίζει ἀπό τήν κορυφήν τῆς γωνίας καί χωρίζει τήν γωνίαν εἰς δύο ἴσα μέρη". Π.χ. ἡ AM



47."<u>Αἱ κατά κορυφήν</u> γωνίαι εἶναι ἴσαι"

Π.χ. $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ καί $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$

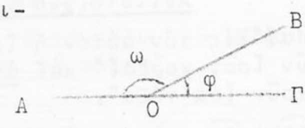


48."Δύο γωνίαι ὀνομάζονται <u>συμπληρωματικαί</u> ὅταν ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἤ 90^{o}."

Π.χ. $\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 1$ ὀρθή ἤ

$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 90^{o}$

49. Πρότασις, "Τά συμπληρώματα τῆς αὐτῆς ἤ ἴσων γωνιῶν εἶναι ἴσα".



50."Δύο γωνίαι ὀνομάζονται <u>παραπληρωματικαί</u> ὅταν ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν ἤ 180^{o}"

Π.χ. $\hat{\omega}+\hat{\varphi} = 2$ ὀρθ. ἤ

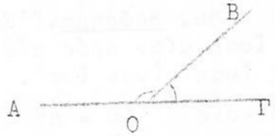
$\hat{\omega}+\hat{\varphi} = 180^{o}$.

51. <u>Πρότασις</u>: "Τά παραπληρώματα τῆς αὐτῆς ἤ ἴσων γωνιῶν εἶναι ἴσα".

Θ ε ω ρ ή μ α τ α

52."'Εάν δύο γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς καί αἱ μή κοιναί πλευραί των κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε αἱ δύο αὗται γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί".

Π.χ. 'Αν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καί ΒΟΓ εἶναι ἐφεξῆς μέ τάς μή κοινάς πλευράς των, ΑΟ καί ΟΓ, ἐπ'εὐθείας



Τότε:

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2$ ὀρθαί ἤ $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 180^{\circ}$

53."'Εάν δύο γωνίαι εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικαί, τότε αἱ μή κοιναί πλευραί των κεῖνται ἐπ'εὐθείας".

Π.χ.'Αν αἱ γωνίαι ΑΟΒ καί ΒΟΓ εἶναι ἐφεξῆς καί παραπληρωματικαί δηλ.

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2 \text{ ὀρθαί}$$

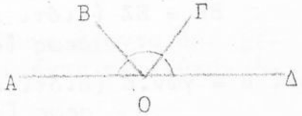
Τότε:

Αἱ μή κοιναί πλευραί των ΑΟ καί ΟΓ κεῖνται ἐπ'εὐθείας (ἤ ἄλλως ἀποτελοῦν εὐθεῖαν).

54."'Εάν ἐκ σημείου εὐθείας φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς, τότε τό ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μέ δύο ὀρθάς γωνίας ἤ 180°".

Π.χ. $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 2$ ὀρθαί

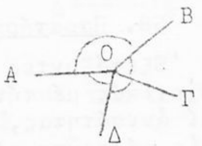
ἤ $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} = 180^{\circ}$



55."'Εάν ἐκ σημείου ἐπιπέδου φέρωμεν ὁσασδήποτε εὐθείας, κειμένας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, καί πρός διαφόρους διευθύνσεις, τότε τό ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν ἰσοῦται μέ τέσσαρας ὀρθάς γωνίας ἤ 360°"

Π.χ. $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OA} = 4$ ὀρθ.

ἤ $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OA} = 360^{\circ}$



Τ Ρ Ι Γ Ω Ν Α

Α΄ ΙΣΟΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

56. Θεώρημα. "Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας εἶναι ἴσα".

Ὑπόθεσις | ΑΒ = ΔΕ
| ΑΓ = ΔΖ
| γων.Α=γων.Δ

Συμπέρασμα Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ.

Σπουδαιοτάτη γενική συμπερασματική πρότασις ἐπί τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων.

57. "Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα τότε:
α΄) ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν εὑρίσκονται ἴσαι πλευραί καί
β΄) ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν εὑρίσκονται ἴσαι γωνίαι"
"Εἰς τό συμπέρασμα αὐτό καταλήγομεν ὅταν θέσωμεν τό ἕν τρίγωνον ἐπί τοῦ ἄλλου καί ἐφαρμόσουν".

Κατά ταῦτα ἐπί τῆς ἀνωτέρω περιπτώσεως ἔχομεν:

ΒΓ = ΕΖ (διότι εὑρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων γωνιῶν Α καί Δ).

γων. Β = γων.Ε (διότι εὑρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων πλευρῶν ΑΓ καί ΔΖ).

καί

γων. Γ = γων.Ζ (διότι εὑρίσκονται ἀπέναντι τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων πλευρῶν ΑΒ καί ΔΕ).

58. Παρατήρησις:

Ἐξετάζοντες τήν ἰσότητα δύο τριγώνων καί γράφοντες τάς σχετικάς μέ τήν ὑπόθεσιν καί τό συμπέρασμα ἰσότητας (ἤ καί ἀνισότητας, εἰς ἄλλας περιπτώσεις) φροντίζομεν ὅπως εἰς τά πρῶτα μέλη αὐτῶν γράφωμεν στοιχεῖα τοῦ ἑνός τριγώνου καί εἰς τά δεύτερα μέλη στοιχεῖα τοῦ ἄλλου τριγώνου.

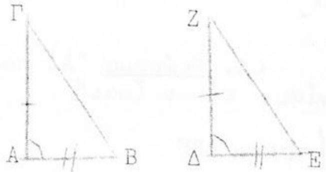
Τοῦτο μᾶς διευκολύνει εἰς τήν διατύπωσιν τῆς σκέψεως μας καί εἰς τήν ταχυτέραν εὕρεσιν τῶν ζητουμένων.

'Επίσης ἡ προαναφερθεῖσα γενική συμπερασματική πρότασις ἰσχύει εἰς ὅλας τάς περιπτώσεις τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων τάς ὁποίας θά ἀναφέρωμεν κατωτέρω.

59. <u>Πόρισμα</u>. "<u>Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα</u> ἔχοντα τάς καθέτους πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν εἶναι ἴσα".

Υ | ΑΒ = ΔΕ
  | ΑΓ = ΔΖ
  | γων.Α = γων.Δ (ὡς ὀρθαί)

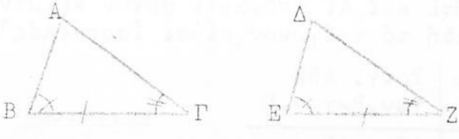
Σ | Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ



60. <u>Θεώρημα</u>."'Εάν δύο <u>τρίγωνα</u> ἔχουν ἀπό μίαν πλευράν ἴσην καί τάς εἰς αὐτήν προσκειμένας γωνίας ἴσας μίαν πρός μίαν εἶναι ἴσα".

Υ | ΒΓ = ΕΖ
  | γων.Β = γων.Ε
  | γων.Γ = γων.Ζ

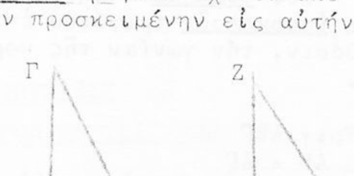
Σ | Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ



61. <u>Πόρισμα</u>. "<u>Δύο ὀρθογώνια</u> τρίγωνα ἔχοντα ἀπό μίαν κάθετον πλευράν ἴσην καί τήν προσκειμένην εἰς αὐτήν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην εἶναι ἴσα".

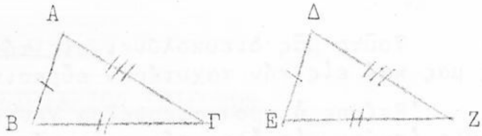
Υ | ΑΒ = ΔΕ
  | γων.Β = γων.Ε
  | γων.Α = γων.Δ (ὡς ὀρθαι)

Σ | Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ



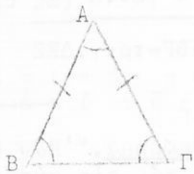
62. <u>Θεώρημα.</u> "'Εάν δύο <u>τρίγωνα</u> ἔχουν καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν, εἶναι ἴσα".

Υ	ΑΒ = ΔΕ ΒΓ = ΕΖ ΑΓ = ΔΖ
Σ	Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ.



63. <u>Σημείωσις</u>:"Όταν <u>δύο τρίγωνα ἔχουν</u> καί τάς τρεῖς γωνίας των ἴσας μίαν πρός μίαν τότε δέν εἶναι ἀπαραιτήτως ἴσα".

64. <u>Θεώρημα</u> "Αἱ παρά τήν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ἴσαι"

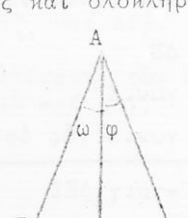


Υ	τριγ. ΑΒΓ ΑΒ = ΑΓ
Σ	γων.Β = γων.Γ

65. <u>Ἀντίστροφον</u> ""Αν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἴσαι τότε καί αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι πλευραί εἶναι ἴσαι δηλαδή τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές".

Υ	Τριγ. ΑΒΓ γων.Β=γων.Γ
Σ	ΑΒ = ΑΓ

66. <u>Θεώρημα</u> "Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἐκ τῆς κορυφῆς <u>ἰσοσκελοῦς</u> τριγώνου ἐπί τήν βάσιν αὐτοῦ, διχοτομεῖ τήν βάσιν, τήν γωνίαν τῆς κορυφῆς καί ὁλόκληρον τό τρίγωνον".



Υ	Τριγ.ΑΒΓ ΑΒ = ΑΓ ΑΔ $\perp$ ΒΓ
Σ	ΒΔ = ΔΓ (δηλ.ΑΔ διάμεσος τοῦ τριγώνου)

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (δηλ. ΑΔ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς) καί Τριγ. ΑΔΒ = τριγ.ΑΔΓ.

67. <u>Παρατηρήσεις</u> (ἐπί τοῦ σχήματος τῆς § 66).

α´) "Οταν ἡ ΑΔ εἶναι ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου (ὅπως ἀνωτέρω) τότε θά ἔχη τάς τρεῖς ἀναφερθείσας ἰδιότητας.

β´) "Οταν ἡ ΑΔ εἶναι <u>διάμεσος</u> τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου τότε εἶναι καί ὕψος καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς καί χωρίζει τό τρίγ.ΑΒΓ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα.

γ´) "Οταν ἡ ΑΔ εἶναι <u>διχοτόμος</u> τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἰσοσκελοῦς τριγώνου τότε εἶναι καί ὕψος καί διάμεσος καί χωρίζει τό τρίγ.ΑΒΓ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα".

δ´) "Οταν εἰς ἕν τρίγωνον ΑΒΓ ἡ εὐθεῖα ΑΔ (σχῆμα ἀνωτέρω) <u>χωρίζει αὐτό εἰς δύο "ἴσα τρίγωνα</u> τότε τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές καί ἡ ΑΔ εἶναι <u>ὕψος διάμεσος καί διχοτόμος τῆς γωνίας Α</u> τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

---

68. <u>Πόρισμα</u>. "Πᾶν <u>ἰσόπλευρον</u> τρίγωνον εἶναι καί ἰσογώνιον"

<u>ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ</u>

γων.Α=γων.Β=γων.Γ

69. <u>Πόρισμα.</u> "Πᾶν <u>ἰσογώνιον</u> τρίγωνον εἶναι καί ἰσόπλευρον"

<u>γων.Α = γων.Β=γων.Γ</u>

ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΔΥΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

70. <u>Θεώρημα</u>. "Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα θά εἶναι ἴσα ὅταν ἐκτός τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν δύο (ὁποιασδήποτε) πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν".

71. <u>Θεώρημα</u>. "Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα θά εἶναι ἴσα ὅταν ἐκτός τῆς ὀρθῆς γωνίας ἔχουν μίαν πλευράν ἴσην καί μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην."

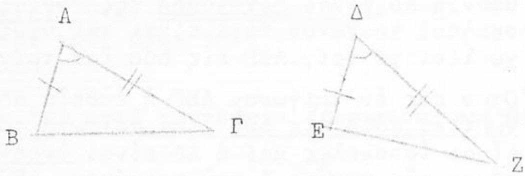
Β΄ ΑΝΙΣΟΤΗΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

72. "'Εάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀνίσους, εἶναι ἄνισα καί αἱ πλευραί αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἀνίσων αὐτῶν γωνιῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι".

Π.χ. Τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ.

$AB = \Delta E$
$A\Gamma = \Delta Z$
$\hat{A} > \hat{\Delta}$

$B\Gamma > EZ$



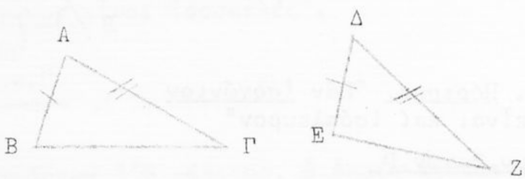
'Αντίστροφος πρότασις

73."'Εάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς τρίτας ἀνίσους τότε τά τρίγωνα εἶναι ἄνισα καί αἱ γωνίαι αἱ κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἀνίσων αὐτῶν πλευρῶν εἶναι ὁμοίως ἄνισοι".

Π.χ.Τρίγ.ΑΒΓ καί ΔΕΖ.

$AB = \Delta E$
$A\Gamma = \Delta Z$
$B\Gamma > EZ$

$\hat{A} > \hat{\Delta}$

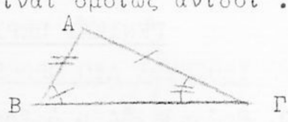


74."'Εάν δύο πλευραί τριγώνου εἶναι ἄνισοι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ὁμοίως ἄνισοι".

Π.χ. τρίγωνον.ΑΒΓ

$A\Gamma > AB$

$\hat{B} > \hat{\Gamma}$



75."'Εάν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι πλευραί εἶναι ὁμοίως ἄνισοι".

Π.χ.τρίγωνον ΑΒΓ

$\hat{B} > \hat{\Gamma}$

$A\Gamma > AB$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

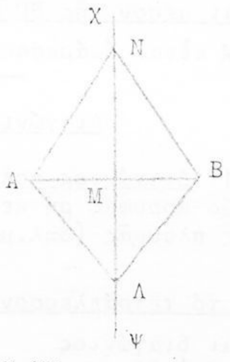
76. Ὁρισμός. "Γεωμετρικός τόπος σημείων ὀνομάζεται πᾶσα γραμμή ἤ ἐπιφάνεια τῆς ὁποίας ὅλα τά σημεῖα ἔχουν μίαν ὡρισμένην καί τήν αὐτήν ἰδιότητα· καί ἀντιστρόφως κάθε σημεῖον τό ὁποῖον ἔχει αὐτήν τήν ἰδιότητα εὑρίσκεται ἐπί τῆς γραμμῆς ἤ τῆς ἐπιφανείας ταύτης".

Πρῶτα παραδείγματα γεωμετρικῶν τόπων

α΄) Ἡ περιφέρεια κύκλου
β΄) Ἡ κάθετος εἰς τό μέσον δοθείσης εὐθείας (καλουμένη μεσοκάθετος) καί
γ΄) Ἡ διχοτόμος γωνίας.

77. "Πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπί τῆς μεσοκαθέτου δοθείσης εὐθείας, ἀπέχει ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων τῆς δοθείσης εὐθείας."

Ἀντιστρόφως: Πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἐκ τῶν ἄκρων δοθείσης εὐθείας εὑρίσκεται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου ταύτης.



Π.χ. Δίδεται εὐθεῖα AB.

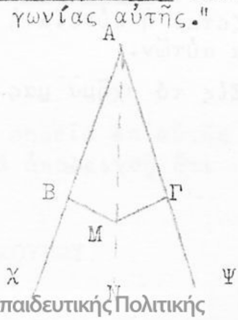
$X\Psi \perp AB$ εἰς τό μέσον M
καί N τυχ. σημ. τῆς $X\Psi$

Τότε $AN = NB$

Ἀντιστρόφως. Δίδεται τυχόν σημεῖον Λ τοιοῦτον ὥστε $A\Lambda = \Lambda B$.
Τότε τό Λ κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου $X\Psi$.

78. "Πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπί τῆς διχοτόμου δοθείσης γωνίας ἀπέχει ἴσον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς."

Ἀντιστρόφως: Πᾶν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἐκ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.

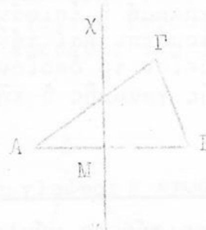


Π.χ. Δίδεται γωνία $XA\Psi$
AN ἡ διχοτόμος αὐτῆς
καί M τυχ. σημ. τῆς AN
Ἄν $MB \perp AX$ καί $M\Gamma \perp A\Psi$
Τότε $MB = M\Gamma$.

79. Πᾶν σημεῖον τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐκτός τῆς μεσοκαθέτου δοθείσης εὐθείας ἀπέχει ἄνισον ἐκ τῶν ἄκρων τῆς δοθείσης καί ὀλιγώτερον ἀπέχει ἀπό ἐκεῖνο τό ἄκρον μαζί μέ τό ὁποῖον εὑρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος τῆς μεσοκαθέτου

Π.χ. Εὐθεῖα ΑΒ, Μ μέσον ΑΒ
χψ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ
Γ ἐκτός τῆς μεσοκαθέτου

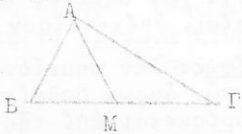
Τότε ΓΒ < ΓΑ.



Διάμεσος τριγώνου

80. Διάμεσος τριγώνου ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει μίαν κορυφήν μέ τό μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς".

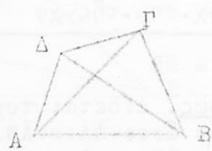
Π.χ. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ
ἄν Μ εἶναι μέσον τῆς ΒΓ
Τότε ἡ ΑΜ εἶναι διάμεσος.



Διαγώνιος πολυγώνου

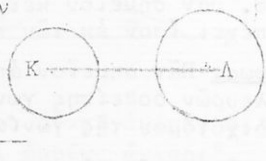
81. Διαγώνιος πολυγώνου ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει δύο κορυφάς μή κειμένας, ἐπί τῆς αὐτῆς πλευρᾶς (δηλ.μή διαδοχικάς).

Π.χ. εἰς τό τετράπλευρον ΑΒΓΔ
ἡ ΑΓ εἶναι διαγώνιος
ὁμοίως καί ἡ ΒΔ.



82. Διάκεντρος δύο κύκλων ὀνομάζεται ἡ εὐθεῖα ἡ ἑνοῦσα τά κέντρα αὐτῶν.

Π.χ. Εἰς τό σχῆμα μας ἡ ΚΛ.



ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΟΜΑΣ ΠΡΩΤΗ

Ἀσκήσεις ἐπί τῶν σχέσεων εὐθυγράμμων τμημάτων εὑρισκομένων ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας.

1. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τέσσαρα σημεῖα ἐπ' αὐτῆς τά Α, Β, Γ καί Δ μέ τήν σειράν καθ' ἥν τά ἀπαγγέλλομεν. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$ΑΓ + ΒΔ = ΑΔ + ΒΓ$$

Λύσις

Δεδομένα ἤ Ὑπόθεσις	Α,Β,Γ,Δ σημεῖα τῆς χψ
Ζητούμενα ἤ συμπέρασμα	ΑΓ+ΒΔ = ΑΔ+ΒΓ

Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{ll} & ΑΓ = ΑΒ+ΒΓ \\ \text{καί} & ΒΔ = ΒΓ+ΓΔ \end{array}\right\}$$ Τάς ἰσότητας αὐτάς προσθέτομεν κατά μέλη καί λαμβάνομεν.

$$ΑΓ+ΒΔ = \underline{ΑΒ}+\underline{ΒΓ}+ΒΓ+\underline{ΓΔ}$$ ἤ

(ἐπειδή $ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ = ΑΔ$) ἔχομεν

$ΑΓ+ΒΔ = ΑΔ+ΒΓ$ ὅ.ἔ.δ.

2. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τέσσαρα σημεῖα ἐπ' αὐτῆς τά Α,Β,Γ καί Δ κατά σειράν. Ἐάν ΒΓ=ΓΔ νά ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΓ = \frac{ΑΒ+ΑΔ}{2}$.

"Γεωμετρικαί 'Ασκήσεις" Τόμος Α΄ Γ.Π.ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

Λ ύ σ ι ς

Δεδομένα ή ὑπόθεσις	Α,Β,Γ,Δ σημ. τῆς χψ. ΒΓ = ΓΔ
Ζητούμενα ή συμπέρασμα	$ΑΓ = \frac{ΑΒ+ΑΔ}{2}$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΑΓ = ΑΒ+ΒΓ } Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἰσότητας
καί ΑΓ = ΑΔ-ΔΓ } αὐτάς καί λαμβάνομεν.

ΑΓ+ΑΓ = ΑΒ + ΒΓ + ΑΔ - ΔΓ ἤ
(ἐπειδή ΒΓ = ΓΔ ἔχομεν $\cancel{Β}Γ-\cancel{Δ}Γ = 0$)

2.ΑΓ = ΑΒ+ΑΔ ἤ (διαιροῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος διά 2).

$\frac{\cancel{2}.ΑΓ}{\cancel{2}} = \frac{ΑΒ+ΑΔ}{2}$. "Ὥστε: $ΑΓ = \frac{ΑΒ+ΑΔ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

3. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τέσσαρα σημεῖα ἐπ'αὐτῆς τά Α,Β, Γ καί Δ. 'Εάν Μ εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καί Ν τό μέσον τοῦ ΓΔ νά ἀποδειχθῇ ὅτι $ΜΝ = \frac{ΑΓ+ΒΔ}{2}$

Λ ύ σ ι ς

Δεδομένα ή ὑπόθεσις	Α,Β,Γ,Δ σημεῖα τῆς χψ Μ μέσον ΑΒ Ν " ΓΔ
Ζητούμενα ή συμπέρασμα	$ΜΝ = \frac{ΑΓ+ΒΔ}{2}$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΜΝ = ΜΓ + ΓΝ ἤ (ἐπειδή ΜΓ=ΑΓ-ΑΜ)

ΜΝ = ΑΓ - ΑΜ + ΓΝ ἤ (ἐπειδή Μ μέσ. ΑΒ καί Ν μέσ.ΓΔ)

$ΜΝ = ΑΓ - \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΓΔ}{2}$ (1)

'Επίσης ἔχομεν:

$MN = MB + BN$ ἤ (ἐπειδή $BN = B\Delta - \Delta N$)

$MN = MB + B\Delta - \Delta N$ ἤ (ἐπειδή Μ μέσ.ΑΒ καί Ν μέσ.ΓΔ)

$$MN = \frac{AB}{2} + B\Delta - \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad (2)$$

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν

$$MN + MN = A\Gamma - \cancel{\frac{AB}{2}} + \cancel{\frac{\Gamma\Delta}{2}} + \cancel{\frac{AB}{2}} + B\Delta - \cancel{\frac{\Gamma\Delta}{2}} \quad ἤ$$

(κατόπιν ἀναγωγῆς τῶν ἀντιθέτων, κατά σημεῖον, προσθετέων)

$$2.MN = A\Gamma + B\Delta \quad ἤ \quad \frac{\cancel{2}.MN}{\cancel{2}} = \frac{A\Gamma + B\Delta}{2}$$

καί τελικῶς $MN = \dfrac{A\Gamma + B\Delta}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

<u>Σημείωσις:</u> Εἰς τό ἑξῆς: τά δεδομένα καί ζητούμενα θά τά γράφωμεν ἁπλούστερον.

4.- Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τέσσαρα σημεῖα ἐπ'αὐτῆς τά Α,Β,Γ καί Δ μέ τήν σειράν καθ'ἥν τά ἀπαγγέλλομεν, καθώς καί τό μέσον Μ τῆς ΑΒ καί τό μέσον Ν τῆς ΓΔ.

Ἄν ΑΔ=30 ἑκ. καί ΒΓ=20 ἑκ. νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα ΑΒ+ΓΔ καί ἡ ἀπόστασις ΜΝ.

<u>Λύσις</u>

Α,Β,Γ,Δ σημ.τῆς χψ

ΑΔ = 30 ἑκ.

ΒΓ = 20 ἑκ.

Μ μέσον ΑΒ

Ν " ΓΔ

1) ΑΒ+ΓΔ = ;

2) ΜΝ = ;

<u>Ἀπόδειξις</u>

<u>1. Ὑπολογισμός τοῦ ΑΒ + ΓΔ:</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = A\Delta$ ἤ (§ 3)

$AB + \cancel{B\Gamma} + \Gamma\Delta - \cancel{B\Gamma} = A\Delta - B\Gamma$ ἤ (ἐπειδή ΑΔ=30 ἑκ. καί ΒΓ = 20 ἑκ.)

$AB + \Gamma\Delta = 30 - 20 = 10$ ἑκ.

<u>2. Ὑπολογισμός τῆς ΜΝ:</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$MN = MB + B\Gamma + \Gamma N$ ἤ (διότι Μ μέσον ΑΒ
καί Ν " ΓΔ)

$MN = \frac{AB}{2} + B\Gamma + \frac{\Gamma\Delta}{2}$ ἤ

$MN = \frac{AB+\Gamma\Delta}{2} + B\Gamma$ ἤ 'Επειδή $AB+\Gamma\Delta = 10$ ἑκ.
(ὡς εὑρέθη) καί $B\Gamma=20$ ἑκ. (ἐξ ὑποθ.)

$MN = \frac{10}{2} + 20 = 5+20 = 25$

Δηλαδή $MN = 25$ ἑκ.

5. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τρία σημεῖα ἐπ'αὐτῆς τά Α, Β καί Γ μέ τήν σειράν καθ'ἥν τά ἀπαγγέλλομεν. Ἄν εἶναι ΑΒ=20 ἑκ. καί ΒΓ = 8 ἑκ. καί Κ τό μέσον τῆς ΑΒ, Λ τό μέσον τῆς ΑΓ καί Μ τό μέσον τῆς ΒΓ νά δειχθῆ ὅτι τά τμήματα ΚΛ καί ΑΜ ἔχουν τό αὐτό μέσον.

Λύσις

Α,Β,Γ σημ. χψ
ΑΒ = 20 ἑκ.
ΒΓ = 8 ἑκ.
Κ μέσον ΑΒ
Λ " ΑΓ
Μ " ΒΓ

Τά μέσα τῶν ΚΛ καί ΑΜ συμπίπτουν.

'Απόδειξις

Ἔστω Ν τό μέσον τοῦ ΚΛ τότε ΚΝ=ΝΛ (1)
'Επίσης ἔχομεν: ΑΝ = ΑΚ+ΚΝ (2)
καί ΝΜ = ΝΛ+ΛΜ (3)

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἰσότητες (2) καί (3) ἔχουν ἀπό ἕνα προσθετέον των τοῦ β' μέλους των ἴσον λόγῳ τῆς (1)

Δηλαδή ἔχουν ΚΝ = ΝΛ.

'Εξετάζομεν τώρα τούς δύο ἄλλους προσθετέους τῶν β' μελῶν, τούς ΑΚ καί ΛΜ. 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$AK = \frac{AB}{2} = \frac{20}{2} = 10$ ἑκ.

καί $\Lambda M = \Lambda\Gamma - M\Gamma = \frac{A\Gamma}{2} - \frac{B\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma-B\Gamma}{2}$ ἤ δι'ἀντικαταστάσεως (καί ἐπειδή , $ΑΓ=ΑΒ+ΒΓ=20+8=28$ ἑκ.)

$$ΛΜ = \frac{28-8}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

δηλ. $ΛΜ = 10$ ἑκ.

Διαπιστώνομεν λοιπόν ὅτι $ΑΚ = ΛΜ$
δηλ καί οἱ ἄλλοι δύο προσθετέοι τῶν β΄ μελῶν τῶν ἰσοτήτων (2) καί (3) εἶναι ἴσοι. Ὥστε τά β΄ μέλη εἶναι ἴσα ἄρα θά εἶναι ἴσα καί τά α΄ μέλη.

Ἐπομένως ἔχομεν ΑΝ= ΝΜ. Οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι τό Ν, μέσον τῆς ΚΛ εἶναι καί μέσον τῆς ΑΜ ὅ.ε.δ.

6. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τρία σημεῖα ἐπ'αὐτῆς τά Α,Β καί Γ. Ἐάν <u>τό Β εὑρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Γ</u>.καί Μ εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ νά ἀποδειχθῆ ὅτι
$$ΓΜ = \frac{ΓΑ + ΓΒ}{2}$$

<u>Λύσις</u>

Α,Β,Γ σημ. τῆς χψ.
<u>Μ μέσον ΑΒ</u>
$$ΓΜ = \frac{ΓΑ+ΓΒ}{2}$$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} ΓΜ = ΓΑ - ΑΜ \\ καί\ ΓΜ = ΓΒ + ΜΒ \end{array}\right\}$$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἰσότητας αὐτάς καί λαμβάνομεν.

$2.ΓΜ = ΓΑ-ΑΜ+ΓΒ+ΜΒ$ (1)

Ἀλλά ΑΜ=ΜΒ ἀφοῦ Μ μέσον τῆς ΑΒ

<u>Ὥστε</u> : $-\cancel{Α}Μ + Μ\cancel{Β} = 0$

Ἐπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται (κατόπιν τῆς ἀναγωγῆς)

$2.ΓΜ = ΓΑ + ΓΒ$ ἤ

$$\frac{\cancel{2}.ΓΜ}{\cancel{2}} = \frac{ΓΑ+ΓΒ}{2} \text{ καί } ΓΜ = \frac{ΓΑ+ΓΒ}{2}$$ ὅ.ἔ.δ.

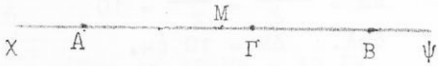
7. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί τρία σημεῖα ἐπ'αὐτῆς τά Α, Β καί Γ. <u>Ἐάν τό Γ εὑρίσκεται μεταξύ τῶν Α καί Β</u> καί Μ εἶναι τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ νά ἀποδειχθῆ ὅτι
$$ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$$

<u>Λύσις</u>

Α, Β, Γ σημ. τῆς χψ

<u>Μ μέσον ΑΒ</u>

$ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$



<u>'Απόδειξις</u>

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$\left.\begin{array}{ll} & ΓΜ = ΓΑ - ΑΜ \\ \text{καί} & ΓΜ = ΜΒ - ΓΒ \end{array}\right\}$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἰσότητας αὐτάς καί λαμβάνομεν

$2.ΓΜ = ΓΑ-ΑΜ+ΜΒ-ΓΒ \quad (1)$

'Αλλά ΑΜ = ΜΒ ἀφοῦ Μ μέσον τῆς ΑΒ

<u>Ὥστε</u>: $-\cancel{Α}Μ+Μ\cancel{Β} = 0$

'Επομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$2.ΓΜ = ΓΑ - ΓΒ$ ἤ

$\frac{\cancel{2}.ΓΜ}{\cancel{2}} = \frac{ΓΑ-ΓΒ}{2}$ καί $ΓΜ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΔΕΥΤΕΡΑ

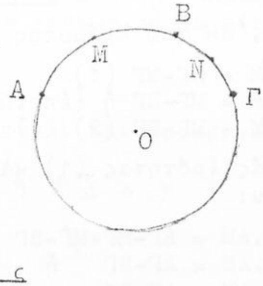
'Ασκήσεις ἐπί τῶν σχέσεων τόξων εὑρισκομένων ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας καθώς καί ἐπικέντρων γωνιῶν καί ἀντιστοίχων πρός αὐτάς τόξων.

---

8. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο διαδοχικά ἐπ' αὐτῆς τόξα τά ΑΒ καί ΒΓ. 'Εάν Μ εἶναι τό μέσον τοῦ τόξου ΑΒ καί Ν τό μέσον τοῦ τόξου ΒΓ νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $ΑΝ+ΑΜ = \frac{3.ΑΒ+ΒΓ}{2}$ καί 2) $ΑΝ-ΑΜ = \frac{ΑΒ+ΒΓ}{2}$

Λύσις



Διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ
Μ μέσον $\widehat{ΑΒ}$
Ν " $\widehat{ΒΓ}$

---

1) $ΑΝ+ΑΜ = \frac{3.ΑΒ+ΒΓ}{2}$

2) $ΑΝ-ΑΜ = \frac{ΑΒ+ΒΓ}{2}$

'Απόδειξις

1.'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$ΑΝ = ΑΒ+ΒΝ$ ἤ (ἐπειδή $ΒΝ=ΝΓ=\frac{ΒΓ}{2}$)

$ΑΝ = ΑΒ + \frac{ΒΓ}{2}$ (1)

καί $ΑΜ = \frac{ΑΒ}{2}$ (2)

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν

$ΑΝ + ΑΜ = ΑΒ + \frac{ΒΓ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} = \frac{2.ΑΒ}{2} + \frac{ΑΒ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} = \frac{2.ΑΒ+ΑΒ+ΒΓ}{2} =$

$= \frac{3.ΑΒ+ΒΓ}{2}$. "Ωστε: $ΑΝ+ΑΜ = \frac{3.ΑΒ+ΒΓ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

---

2. Τάς ἰσότητας (1) καί (2) ἀφαιροῦμεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

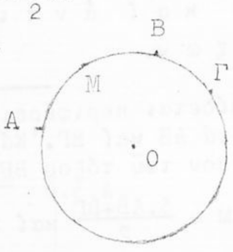
$$AN-AM = AB + \frac{B\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{2.AB}{2} + \frac{B\Gamma}{2} - \frac{AB}{2} =$$

$$= \frac{2.AB+B\Gamma-AB}{2} = \frac{AB+B\Gamma}{2}$$. Ὥστε: $AN-AM = \frac{AB+B\Gamma}{2}$.

9. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο διαδοχικά ἐπ'αὐτῆς τόξα τά ΑΒ καί ΒΓ. Ἐάν Μ εἶναι τό μέσον τοῦ τόξου ΑΒ νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

1) $\widehat{AM} = \frac{\widehat{A\Gamma}-\widehat{B\Gamma}}{2}$ καί 2) $M\Gamma = \frac{\Gamma A+\Gamma B}{2}$

Λύσις



Διαδοχικά τόξα ΑΒ, ΒΓ

Μ μέσον $\widehat{AB}$

---

1) $\widehat{AM} = \frac{\widehat{A\Gamma}-\widehat{B\Gamma}}{2}$

2) $\widehat{M\Gamma} = \frac{\widehat{A\Gamma}+\widehat{B\Gamma}}{2}$

Ἀπόδειξις

1. Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$AM = A\Gamma - M\Gamma$ (1)

καί $MB = M\Gamma - B\Gamma$ ἤ (ἐπειδή $MB=AM$)

$AM = M\Gamma - B\Gamma$ (2)

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$2.AM = A\Gamma - \cancel{M\Gamma} + \cancel{M\Gamma} - B\Gamma$ ἤ

$2.AM = A\Gamma - B\Gamma$ ἤ

$\frac{\cancel{2}.AM}{\cancel{2}} = \frac{A\Gamma-B\Gamma}{2}$ καί $AM = \frac{A\Gamma-B\Gamma}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

---

2. Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$M\Gamma = A\Gamma - AM$ (1)

καί $M\Gamma = MB + B\Gamma$ ἤ (ἐπειδή $AM=MB$)

$M\Gamma = AM + B\Gamma$ (2)

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$2.M\Gamma = A\Gamma - \cancel{AM} + \cancel{AM} + B\Gamma$ ἤ

$2.M\Gamma = A\Gamma + B\Gamma$ ἤ

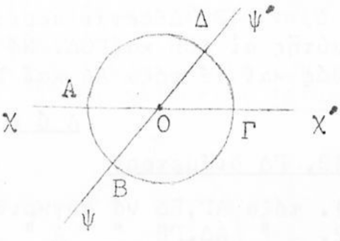
$\frac{\cancel{2}.M\Gamma}{\cancel{2}} = \frac{A\Gamma+B\Gamma}{2}$ καί $M\Gamma = \frac{A\Gamma+B\Gamma}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

10. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κατά κορυφήν γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Γωνίαι χοψ, χ΄οψ΄
κατά κορυφήν

$\widehat{\chi o\psi} = \widehat{\chi' o\psi'}$



'Απόδειξις

Γνωρίζομεν, ἐκ τῆς θεωρίας, ὅτι "τό μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρός τό μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου εἰς αὐτήν τόξου".

Καθιστῶμεν τώρα τάς δοθείσας γωνίας ἐπικέντρους. (Πρός τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν μέ κέντρον τήν κορυφήν Ο καί ἀκτῖνα τέμνουσαν τάς πλευράς τῶν γωνιῶν, ἔστω εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ καί Δ).

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

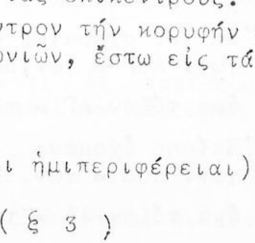
τόξον ΒΑΔ = τοξ. ΑΔΓ (ἀμφότερα εἶναι ἡμιπεριφέρειαι).
ἤ (ἐκ τοῦ σχήματος)
τόξ. ΒΑ+~~τόξ ΑΔ~~= ~~τοξ ΑΔ~~ + τοξ.ΔΓ ἤ (§ 3)
τοξ.ΒΑ = τοξ.ΔΓ ἤ (§ 42)
γων. χοψ = γων. χ΄οψ΄ ὅ.ἔ.δ.

11. "Αν δύο εὐθεῖαι τέμνωνται καί σχηματίζουν δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας, νά ἀπ/χθῇ ὅτι πᾶσαι αἱ γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ τέμνονται
$\widehat{A O\Gamma} = \widehat{\Gamma O B}$

$\widehat{A O\Gamma} = \widehat{\Gamma O B} = \widehat{B O\Delta} = \widehat{\Delta O A}$



'Απόδειξις

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $\widehat{A O\Gamma} = \widehat{\Gamma O B}$ (1)

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

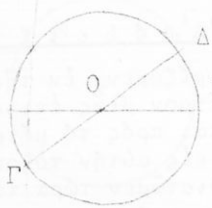
$\widehat{AO\Gamma} = \widehat{BO\Delta}$ (ὡς κατά κορυφήν)
καί $\widehat{\Gamma OB} = \widehat{AO\Delta}$ (" " ")

Λόγω τῆς ἰσότητος (1) καί τῶν δύο αὐτῶν ἰσοτήτων ἔχομεν: (§ I)

$\widehat{AO\Gamma} = \widehat{\Gamma OB} = \widehat{BO\Delta} = \widehat{\Delta OA}$ ὅ.ἔ.δ.

12. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο διάμετροι αὐτῆς αἱ ΑΟΒ καίΓΟΔ. Νά συγκριθοῦν τά τόξα ΑΓ καί ΒΔ καθώς καί τά τόξα ΑΔ καί ΓΒ.

Λ ύ σ ι ς



ΑΒ, ΓΔ διάμετροι

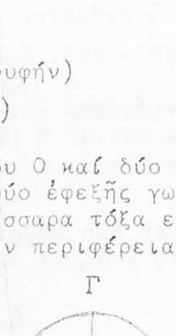
1. τόξα ΑΓ,ΒΔ νά συγκριθοῦν
2. " ΑΔ,ΓΒ " "

'Εργασία
πρός εὕρεσιν τοῦ ζητουμένου

1. 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:
γων. ΑΟΓ = γων.ΒΟΔ (ὡς κατά κορυφήν)
ἄρα τόξον ΑΓ = τόξον ΒΔ (§ 43)
2. 'Επίσης ἔχομεν:
γων. ΑΟΔ = γων. ΓΟΒ (ὡς κατά κορυφήν)
ἄρα τόξον ΑΔ = τόξον ΓΒ. (§ 43)

13. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο διάμετροι αὐτῆς αἱ ΑΟΒ καί ΓΟΔ σχηματίζουσαι δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας τάς ΑΟΓ καί ΓΟΒ. Νά συγκριθοῦν τά τέσσαρα τόξα εἰς τά ὁποῖα αἱ διάμετροι αὐταί χωρίζουσι τήν περιφέρειαν.

Λ ύ σ ι ς



Διάμετροι ΑΟΒ, ΓΟΔ
γων. ΑΟΓ= γων.ΓΟΒ

τόξα ΑΓ,ΓΒ,ΒΔ καί ΔΑ
νά συγκριθοῦν

'Εργασία

'Εξετάζοντες τό σχῆμα ἀποδεικνύομεν ὅπως καί εἰς τήν ἄσκησιν 11 ὅτι

$\widehat{AO\Gamma} = \widehat{\Gamma OB} = \widehat{BO\Delta} = \widehat{\Delta OA}$

'Αφοῦ λοιπόν αἱ τέσσαρες αὗται ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι ἕπεται ὅτι τά ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἴσα.

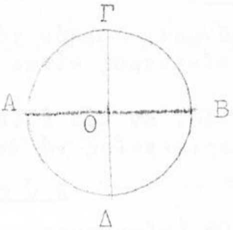
<u>Ὥστε:</u> $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$

14. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο κάθετοι μεταξύ των διάμετροι. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

α΄) διαιροῦσιν τήν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα μεταξύ των τόξα (καλούμενα <u>τεταρτημόρια</u>)

καί β΄) διαιροῦσιν τόν κύκλον εἰς τέσσαρα ἴσα μεταξύ των μέρη, κυκλικούς τομεῖς, (οἱ ὁποῖοι καλοῦνται <u>τεταρτοκύκλια</u>).

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



Διάμετροι ΑΟΒ, ΓΟΔ

ΑΟΒ κάθετος ἐπί τήν ΓΟΔ

α΄) $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$

β΄) ΑΟΓΑ = ΓΟΒΓ = ΒΟΔΒ = ΔΟΑΔ.

<u>'Α π ό δ ε ι ξ ι ς</u>

<u>α΄.</u> 'Επειδή αἱ διάμετροι ΑΟΒ καί ΓΘΔ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κάθετοι μεταξύ των ἕπεται ὅτι σχηματίζουν τέσσαρας ἴσας μεταξύ των γωνίας.

<u>Ὥστε</u>: $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{\Gamma OB} = \widehat{BO\Delta} = \widehat{\Delta OA}$

'Επειδή ὅμως αἱ γωνίαι αὗται εἶναι ἐπίκεντροι δι'αὐτό καί τά ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἴσα.

<u>Ὥστε</u>: $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{B\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$.

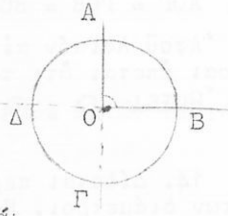
<u>β΄.</u> Παρατηροῦντες τό σχῆμα καί ἔχοντες ὑπ'ὄψιν τήν ὑπόθεσιν καί τήν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα τοῦ α΄μέρους τῆς ἀσκήσεως, διαπιστώνομεν ὅτι οἱ τέσσαρες κυκλικοί τομεῖς ἔχουν ἴσας γωνίας καί ἴσας βάσεις ἑπομένως εἶναι ἴσοι:

Ὥστε ΑΟΓΑ = ΓΟΒΓ = ΒΟΔΒ = ΔΟΑΔ ὅ.ἔ.δ.

---

15. Νά ἀπ/χθῆ ὅτι μία ὀρθή ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπί τεταρτημορίου περιφερείας.

Λ ύ σ ι ς



Γωνία ΑΟΒ ὀρθή ἐπίκεντρος
τόξον ΑΒ τεταρτημόριον

'Απόδειξις

Προεκτείνομεν τάς πλευράς ΟΑ καί ΟΒ τῆς δοθείσης ἐπικέντρου γωνίας ΑΟΒ πέραν τοῦ κέντρου, μέχρι νά γίνουν διάμετροι τῆς δοθείσης περιφερείας.

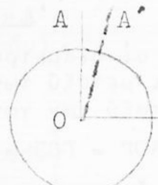
'Επειδή τότε αἱ τέσσαρες ἐπίκεντροι γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των (τοῦτο ἀποδεικνύομεν ὅπως εἰς τήν ἄσκησιν 14) ἔχομεν ὅτι τά ἀντίστοιχα τόξα εἶναι ἴσα.

"Ωστε: $\widehat{AB} = \widehat{B\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta} = \widehat{\Delta A} = \frac{1}{4}$ περιφερείας

Πράγματι λοιπόν τό τόξον ΑΒ, εἰς τό ὁποῖον βαίνει ἡ ὀρθή ἐπίκεντρος εἶναι τεταρτημόριον.

16. "Αν μία ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπί τεταρτημορίου περιφερείας νά ἀπ/χθῇ ὅτι εἶναι ὀρθή.

Λ ύ σ ι ς



Γων. ΑΟΒ ἐπίκεντρος
τόξον ΑΒ τεταρτημόρ.
Γων. ΑΟΒ= 1 ὀρθή.

'Απόδειξις

'Υποθέτομεν ὅτι ἡ γωνία ΑΟΒ δέν εἶναι ὀρθή. Δηλαδή ὅτι ἡ ΟΑ δέν εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΟΒ.

Φέρομεν λοιπόν τήν ΟΑ'$\perp$ΟΒ εἰς τό Ο.

Τότε γων. Α'ΟΒ = 1 ὀρθ. 'Επειδή ὅμως εἶναι συγχρόνως καί ἐπίκεντρος ἕπεται ὅτι τόξον Α'Β $=\frac{1}{4}$ περιφερείας

'Εξ ὑποθέσεως ὅμως καί τόξον ΑΒ = $\frac{1}{4}$ περιφερείας.

"Ωστε $\widehat{AB} = \widehat{A'B}$ ὅπερ ἄτοπον διότι τό μέρος δέν εἶναι δυνατόν νά ἰσοῦται μέ τό ὅλον.

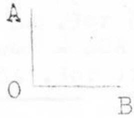
'Επομένως ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ βαίνουσα ἐπί τεταρτημορίου περιφερείας εἶναι ὀρθή.

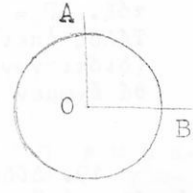
17. Δίδεται μία ὀρθή γωνία ΑΟΒ. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον αὐτῆς εἰς μοίρας.

Λ ύ σ ι ς

Γων. ΑΟΒ = 1 ὀρθή

γων.ΑΟΒ πόσων μοιρῶν;





'Εργασία

Γνωρίζομεν ἐκ τῆς θεωρίας, ὅτι "τό μέτρον μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας ἰσοῦται πρός τό μέτρον τοῦ ἀντιστοίχου εἰς αὐτήν τόξου.

Καθιστῶμεν τώρα τήν δοθεῖσαν γωνίαν ΑΟΒ ἐπίκεντρον. (πρός τοῦτο γράφομεν περιφέρειαν μέ κέντρον τήν κορυφήν Ο καί ἀκτῖνα τέμνουσαν τάς πλευράς τῆς γωνίας).

'Επειδή ἡ ὀρθή ἐπίκεντρος γωνία βαίνει ἐπί τεταρτημορίου περιφερείας, τό δέ τεταρτημόριον ἰσοῦται μέ 90°. δι'αὐτό ἔχομεν:

1 ὀρθή = 90°

Ὥστε: Τό μέτρον τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι 90°.

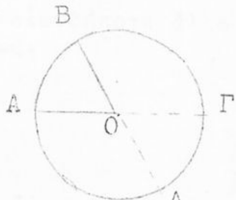
Παρατήρησις: Εἰς τό ἑξῆς θά λαμβάνωμεν πλέον ὡς γνωστόν τό ὅτι 1 ὀρθ. = 90°.

18. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί ἕν τόξον αὐτῆς τό ΑΒ= 50°. Νά εὑρεθῇ πόσων μοιρῶν εἶναι ἕκαστον ἀπό τά τόξα εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ἡ περιφέρεια ὅταν αἱ ἀκτῖνες ΟΑ καί ΟΒ προεκταθοῦν μέχρι τῆς περιφερείας.

Λ ύ σ ι ς

τόξον ΑΒ = 50°

$\widehat{B\Gamma}$=; $\widehat{\Gamma\Delta}$; $\widehat{\Delta A}$;



'Εργασία

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

γων. ΓΟΔ = γων. ΑΟΒ (κατά κορυφήν)

ἄρα τόξ. ΓΔ = τοξ. ΑΒ

'Επειδή δέ τοξ. ΑΒ = 50° (ἐξ ὑποθέσεως)

ἔχομεν ὅτι τοξ. ΓΔ = 50°

'Επίσης ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

τόξ. ΑΒΓ = 180° (διότι ΑΟΓ διάμετρος)

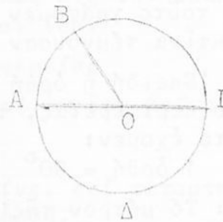
ἤ τοξ. ΑΒ + τοξ. ΒΓ = 180° ἤ

50° + τόξ. ΒΓ = 180° ἤ
τόξ. ΒΓ = $180^{\circ}-50^{\circ}$ ἤ τόξ. ΒΓ = 130°
Τέλος ἐπειδή τοξ. ΑΔ = τοξ. ΒΓ
(διότι γων. ΑΟΔ = γων. ΒΟΓ ὡς κατά κορυφήν)
θά ἔχωμεν ὅτι τοξ. ΑΔ = 130°

---

19. Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καί δύο διαδοχικά τόξα αὐτῆς τά ΑΒ = 75° καί τό ΒΓ = 105° (τά τόξα αὐτά δέν ἔχουν κοινόν μέρος). Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ χορδή ΑΓ ἰσοῦται μέ τήν διάμετρον τῆς περιφερείας.

Λ ύ σ ι ς



Τόξ. ΑΒ = 75°
" ΒΓ = 105°

χορδ. ΑΓ = διάμετρος

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{ΑΒΓ} = \widehat{ΑΒ} + \widehat{ΒΓ}$ ἤ (δι'ἀντικαταστάσεως)

$\widehat{ΑΒΓ} = 75^{\circ} + 105^{\circ}$ ἤ

$\widehat{ΑΒΓ} = 180^{\circ}$ καί ἐπομένως καί $\widehat{ΑΔΓ} = 180^{\circ}$

Ἀφοῦ λοιπόν ἡ χορδή ΑΓ χωρίζει τήν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη ἔπεται ὅτι εἶναι διάμετρος αὐτῆς ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΤΡΙΤΗ

'Ασκήσεις ἐπί τῶν συμπληρωματικῶν καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

20. Δίδεται γωνία ἴση πρός $\frac{1}{2}$ ὀρθῆς. Νά εὑρεθῆ τό μέτρον αὐτῆς εἰς μοίρας.

Λύσις

Γων. ΑΟΒ $= \frac{1}{2}$ ὀρθῆς

γων.ΑΟΒ πόσων μοιρῶν;

'Εργασία

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ ὀρθή γωνία ἔχει μέτρον 90°.

'Επίσης γνωρίζομεν ἐκ τῆς 'Αριθμητικῆς ὅτι διά νά εὕρωμεν μέρος ἑνός ἀριθμοῦ πρέπει νά κάνωμεν πολλαπλασιασμόν. Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά πολ/σωμεν τόν ἀριθμόν ἐπί τό κλάσμα τό ὁποῖου μᾶς δεικνύει τό ζητούμενον μέρος.

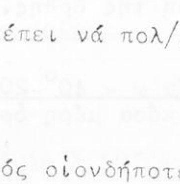
Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν πρέπει νά πολ/μεν τάς 90° μέ τό $\frac{1}{2}$.

"Ωστε: γων. ΑΟΒ $= 90^{\circ} . \frac{1}{2} = \frac{90^{\circ}}{2} = 45^{\circ}$

Σημείωσις: "Αν ἡ δοθεῖσα γωνία ἰσοῦται πρός οἱονδήποτε ἄλλο κλάσμα τῆς ὀρθῆς γωνίας θά ἐργαζώμεθα ὁμοίως.
Π.χ. ἄν γων. ΑΟΒ $= \frac{1}{4}$ ὀρθῆς, τότε:
τό μέτρον τῆς δοθείσης γωνίας εἰς μοίρας
εἶναι γων. ΑΟΒ $= 90^{\circ} . \frac{1}{4} = \frac{90^{\circ}}{4} = 22^{\circ}\ 30'$

21. Δίδεται γωνία ΑΟΒ $= 50^{\circ}$. Νά εὑρεθῆ τό μέτρον αὐτῆς εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

Λύσις



Γων. ΑΟΒ $= 50^{\circ}$

γων. ΑΟΒ πόσα μέρη ὀρθῆς;

'Εργασία

Θά λύσωμεν τήν ἄσκησιν διά τῆς ἀναγωγῆς εἰς τήν μονάδα.

Γωνία 90^{o} ἀντιστοιχεῖ εἰς 1 ὀρθήν

" 1^{o} " " $\frac{1}{90}$ ὀρθῆς

καί " 50^{o} " " $\frac{1}{90} \cdot 50$ "

<u>Ὥστε</u>: γων. ΑΟΒ $= \frac{1}{90} \cdot 50 = \frac{5\cancel{0}}{9\cancel{0}} = \frac{5}{9}$ ὀρθῆς.

<u>Ἕτερος τρόπος</u>:

Ἐπειδή ὡς μονάς θά ληφθῇ ἐδῶ ἡ ὀρθή γωνία τό δέ μέτρον της εἰς μοίρας εἶναι 90^{o} δι'αὐτό θά διαιρέσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν μοιρῶν τῆς δοθείσης γωνίας διά τοῦ 90^{o} καί θά ἔχωμεν τό μέτρον τῆς δοθείσης εἰς μέρη ὀρθῆς γωνίας.

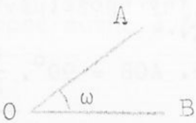
Κατά ταῦτα ἐδῶ ἔχομεν:

γων. ΑΟΒ $= 50^{o} = \frac{5\cancel{0}}{9\cancel{0}}$ ὀρθ. $= \frac{5}{9}$ ὀρθῆς,

<u>Ὥστε</u> γων. $50^{o} = \frac{5}{9}$ ὀρθῆς.

22. Δίδονται δύο γωνίαι $\hat{\omega} = 40^{o}20'$ καί $\hat{\varphi} = 50^{o}\ 16'48''$. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον ἑκάστης τούτων εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

Λύσις



<u>Α. Γωνία $\omega = 40^{o}\ 20'$</u>

γων. ω πόσα μέρη ὀρθῆς;

'Εργασία

Θά λύσωμεν τήν ἄσκησιν διά τῆς ἀναγωγῆς εἰς τήν μονάδα ἀφοῦ τρέψωμεν προηγουμένως τήν ὀρθήν γωνίαν εἰς <u>πρῶτα λεπτά τῆς μοίρας</u> ὅπως θά πράξωμεν καί διά τήν δοθεῖσαν γωνίαν.

$90^{o} \times 60' = 5400'$

$(40^{o}\ 20') = 40^{o} \times 60' + 20' = 2400' + 20' = 2420'$

<u>Τώρα λέγομεν</u>

Γωνία 90^{o} ἤ $5400'$ ἀντιστοιχεῖ εἰς 1 ὀρθήν

" $1'$ " " $\frac{1}{5400}$ ὀρθῆς

καί " $2420'$ " " $\frac{1}{5400} \cdot 2420$ ὀρθῆς

<u>Ώστε:</u> γωνία $\omega = \frac{1}{5400}\cdot 2420 = \frac{242\cancel{0}}{540\cancel{0}} = \frac{\overset{121}{\cancel{242}}}{\underset{270}{\cancel{540}}}$

"Αρα γωνία $\omega = \frac{121}{270}$ ὀρθῆς

<u>Ἕτερος τρόπος</u>

Τρέπομεν τήν ὀρθήν γωνίαν καί τήν δοθεῖσαν εἰς πρῶτα λεπτά τῆς μοίρας. Κατόπιν διαιροῦμεν τόν ἀριθμόν τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς δοθείσης γωνίας διά τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πρώτων λεπτῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας καί ἔχομεν τό μέτρον τῆς δοθείσης γωνίας εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς γωνίας.

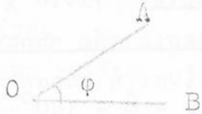
Κατά ταῦτα ἔχομεν:

γωνίαν $\omega = (40^{\circ}20') = \frac{(40^{\circ}20')}{90^{\circ}} = \frac{242\cancel{0}}{540\cancel{0}}$ ὀρθ. $= \frac{242}{540} = \frac{121}{270}$ ὀρθῆς

<u>Ώστε:</u> γων. $(40^{\circ}20') = \frac{121}{270}$ ὀρθῆς

<u>Β΄ Γωνία $\varphi = 50^{\circ}\ 16'48''$</u>

γωνία φ πόσα μέρη ὀρθῆς;



<u>Ἐ ρ γ α σ ί α</u>

Θά λύσωμεν τήν ἄσκησιν ὅπως καί τήν προηγουμένην ἄσκησιν, ἀφοῦ τρέψωμεν καί τήν ὀρθήν γωνίαν καί τήν δοθεῖσαν <u>εἰς δεύτερα λεπτά τῆς μοίρας</u>.

$90^{\circ} \times 60' = 5400'$

$5400' \times 60'' = 324000''$

$(50^{\circ}\ 16'\ 48'') = (50^{\circ} \times 60' + 16'\ \ 48'') =$

$=(3000' + 16'\ 48'') = (3016'\ 48'') = (3016' \times 60'' + 48'') =$

$= (180960'' + 48'') = 181008''$

Τώρα συνεχίζομεν τήν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ἤ μέ τήν ἀναγωγήν εἰς τήν μονάδα ἤ ὡς ἑξῆς:

γωνία $\varphi = (50^{\circ}\ 16'48'') = \frac{(50^{\circ}16'48'')}{90^{\circ}} = \frac{181008''}{324000''}$ ὀρθῆς

<u>Βοηθητική πρᾶξις</u>

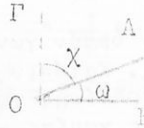
ἁπλοποίησις τοῦ κλάσματος $\left.\right\}\ \frac{\overset{\overset{7542}{\cancel{22626}}}{\cancel{181008}}}{\underset{\underset{13500}{\cancel{40500}}}{\cancel{324000}}} = \frac{\overset{\overset{419}{\cancel{838}}}{\cancel{7542}}}{\underset{\underset{750}{\cancel{1500}}}{\cancel{13500}}} = \frac{419}{750}$

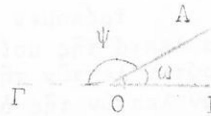
"Ωστε: γων. $\varphi = \frac{419}{750}$ ὀρθ.

23. Δίδονται τρεῖς γωνίαι ἡ $\hat{\omega} = 42^\circ$, ἡ $\hat{\varphi} = 46^\circ 15'$ καί ἡ [illegible] $= 55^\circ 40' 36''$.

Νά εὑρεθῇ πόση εἶναι ἡ συμπληρωματική καί ἡ παραπληρωματική ἑκάστης τούτων.

Λύσις





<u>Α΄ γωνία ω = 42°</u>

α΄ συμπληρωματική;

β΄ παραπληρωματική;

Ἐργασία

<u>α΄ Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης</u>

Ἄν $\hat{\chi}$ εἶναι ἡ συμπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε $\hat{\chi} + \hat{\omega} = 90^\circ$ ἤ

$\hat{\chi} + 42^\circ = 90^\circ$ ἤ $\hat{\chi} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$

<u>Ὥστε:</u> γωνία $\chi = 48^\circ$

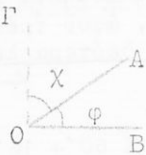
<u>β΄ Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης</u>

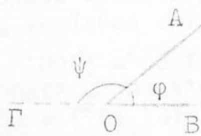
Ἄν ψ εἶναι ἡ παραπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε $\hat{\psi} + \hat{\omega} = 180^\circ$ ἤ

$\hat{\psi} + 42^\circ = 180^\circ$ ἤ $\hat{\psi} = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$

<u>Ὥστε:</u> γωνία $\psi = 138^\circ$





<u>Β΄ γωνία φ = 46°15΄</u>

α΄ συμπληρωματική;

β΄ παραπληρωματική;

Ἐργασία

<u>α΄ Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης</u>

Ἄν $\hat{\chi}$ εἶναι ἡ συμπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε $\hat{\chi} + \hat{\varphi} = 90^\circ$ ἤ

$\hat{\chi} + (46^\circ 15') = 90^\circ$ ἤ

$\hat{\chi} = 90^\circ - (46^\circ 15')$ ἤ

$\hat{\chi} = (89^\circ 60') - (46^\circ 15')$ ἤ

$\hat{\chi} = 43^\circ 45'$

<u>Ὥστε:</u> γωνία $\chi = 43^\circ 45'$

<u>Βοηθητική πρᾶξις</u>

$$\begin{array}{rl} 90^\circ & = 89^\circ\ 60' \\ \hat{\varphi} & = 46^\circ\ 15' \\ \hline 90^\circ - \hat{\varphi} & = 43^\circ 45' \end{array}$$

β΄ Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης

Ἄν $\hat{\psi}$ εἶναι ἡ παραπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε: $\hat{\psi}+\hat{\varphi}=180^\circ$ ἤ

$\hat{\psi}+(46^\circ 15')=180^\circ$ ἤ

$\hat{\psi}=180^\circ-(46^\circ 15')$ ἤ

$\hat{\psi}=(179^\circ 60')-(46^\circ 15')$ ἤ

$\hat{\psi}=133^\circ 45'$

Βοηθητική πρᾶξις

$180^\circ = 179^\circ\ 60'$

$\hat{\varphi} = 46^\circ\ 15'$

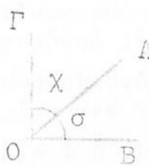
$180^\circ-\hat{\varphi} = 133^\circ 45'$

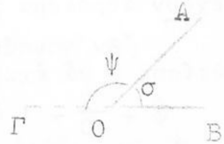
Ὥστε: γωνία $\hat{\psi}=133^\circ 45'$

Γ΄ γωνία $\sigma = 55^\circ 40' 36''$

α΄ συμπληρωματική;

β΄ παραπληρωματική;





Ἐργασία

α΄ Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης

Ἄν χ εἶναι ἡ συμπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε: $\hat{\chi}+\hat{\sigma}=90^\circ$ ἤ

$\hat{\chi}+(55^\circ 40' 36'')=90^\circ$ ἤ

$\hat{\chi}=90^\circ-(55^\circ 40' 36'')$ ἤ

$\hat{\chi}=(89^\circ 59' 60'')-(55^\circ 40' 36'')$ ἤ

$\hat{\chi}=34^\circ 19' 24''$.

Βοηθητική πρᾶξις:

$90^\circ = 89^\circ 59' 60''$

$\sigma = 55^\circ 40' 36''$

$90^\circ-\hat{\sigma} = 34^\circ 19' 24''$

Ὥστε: γωνία $\chi=34^\circ 19' 24''$

β΄ Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης

Ἄν ψ εἶναι ἡ παραπληρωματική τῆς δοθείσης γωνίας

τότε $\hat{\psi}+\hat{\sigma}=180^\circ$ ἤ

$\hat{\psi}+(55^\circ 40' 36'')=180^\circ$ ἤ

$\hat{\psi}=180^\circ-(55^\circ 40' 36'')$ ἤ

$\hat{\psi}=(179^\circ 59' 60'')-(55^\circ 40' 36'')$ ἤ

$\hat{\psi}=124^\circ 19' 24''$.

Βοηθητική πρᾶξις

$180^\circ = 179^\circ 59' 60''$

$\hat{\sigma} = 55^\circ 40' 36''$

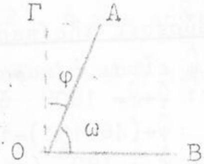
$180^\circ-\hat{\sigma} = 124^\circ 19' 24''$

Ὥστε: γωνία $\hat{\psi}=124^\circ 19' 24''$

24. Δίδεται γωνία ω ἴση πρός $\frac{7}{10}$ τῆς ὀρθῆς. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον τῆς συμπληρωματικῆς της καί τῆς παραπληρωματικῆς της εἰς μέρη ὀρθῆς καί εἰς μοίρας.

Λύσις

I. Δοθεῖσα γωνία $\omega = \frac{7}{10}$ ὀρθῆς.



Συμπληρωμ. δοθείσης
α΄) εἰς μέρη ὀρθῆς;
β΄) " μοίρας;

Ἐργασία

α΄ Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης εἰς μέρη ὀρθῆς.

Ὡς γνωστόν δύο γωνίαι καλοῦνται συμπληρωματικαί ἄν ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας (ἤ 90°).

Ἄν λοιπόν ὀνομάσωμεν $\hat{\varphi}$ τήν συμπληρωματικήν τῆς δοθείσης $\hat{\omega}$ θά ἔχωμεν $\hat{\varphi}+\hat{\omega} = 1$ ὀρθή ἤ

$\hat{\varphi} + \frac{7}{10} = 1$ ὀρθ. ἤ $\hat{\varphi} = 1 - \frac{7}{10} = \frac{10}{10} - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$

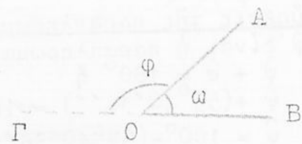
Ὥστε: $\hat{\varphi} = \frac{3}{10}$ ὀρθῆς.

β΄ Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης εἰς μοίρας.

Εὑρίσκομεν τό μέτρον τῆς δοθείσης εἰς μοίρας.
Ὡς προαναφέραμεν ἔχομεν 1 ὀρθ.$=90^\circ$
καί $\hat{\omega} = \frac{7}{10}$ ὀρθ. $= \frac{7}{10} \cdot 90^\circ = \frac{630^\circ}{10} = 63^\circ$

Ὥστε: Ἡ δοθεῖσα γωνία εἶναι 63° καί ἡ συμπληρωματική της $\hat{\varphi}$ εἶναι $\hat{\varphi} = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$ Δηλαδή $\hat{\varphi} = 27^\circ$

II. Δοθεῖσα γωνία $\omega = \frac{7}{10}$ ὀρθῆς



Παραπληρωματική δοθείσης
α) εἰς μέρη ὀρθῆς;
β) " μοίρας ;

Ἐργασία

α΄ Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης εἰς μέρη ὀρθ.

Ὡς γνωστόν δύο γωνίαι καλοῦνται παραπληρωματικαί ἄν ἔχουν ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν (ἤ 180°).

Ἄν λοιπόν ὀνομάσωμεν $\hat{\varphi}$ τήν παραπληρωματικήν τῆς δοθείσης $\hat{\omega}$ θά ἔχωμεν:

$\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 2$ ὀρθ. ἤ $\hat{\varphi} + \frac{7}{10} = 2$ ὀρθ. ἤ

$\hat{\varphi} = 2 - \frac{7}{10} = \frac{2}{1} - \frac{7}{10} = \frac{20}{10} - \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$. Ὥστε: $\hat{\varphi} = \frac{13}{10}$ ὀρθῆς β΄ Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης εἰς μοίρας.

Εὑρίσκομεν τό μέτρον τῆς εὑρεθείσης παραπληρωματικῆς εἰς μοίρας.

Ὡς προαναφέραμεν ἔχομεν 1 ὀρθ.$=90^\circ$ καί

$$\hat{\varphi} = \frac{13}{10} \text{ ὀρθ.} = \frac{13}{10}\cdot 90^\circ = \frac{1170^\circ}{10} = 117^\circ$$

Ὥστε: Ἡ παραπληρωματική $\hat{\varphi}$ τῆς δοθείσης γωνίας εἶναι 117°.

Ἕτερος τρόπος: εὑρέσεως τῆς παραπληρωματικῆς εἰς μοίρας.

Ἡ δοθεῖσα γωνία $\omega = 63^\circ$

Ἄρα ἡ παραπληρωματική εἶναι $\hat{\varphi} = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$

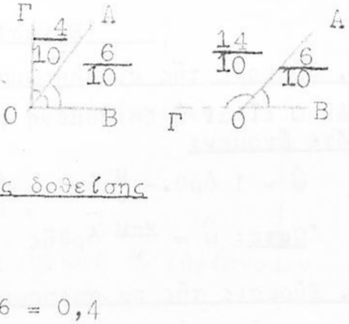
---

25. Δίδεται γωνία ἴση πρός 0,6 τῆς ὀρθῆς, Νά εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματική της καί ἡ παραπληρωματική της γωνία εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

Λύσις

Δοθεῖσα γωνία = 0,6 ὀρθῆς

1. Συμπληρωματική δοθείσης;
2. Παραπληρωματική " ;



Ἐργασία

1. Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης

Ἄν ω εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία

Τότε ἔχομεν:

$$\hat{\omega} = 1 \text{ ὀρθ.} - 0,6 \text{ ὀρθ.} = 1,0 - 0,6 = 0,4$$

Ὥστε: $\hat{\omega} = 0,4$ ὀρθῆς.

β΄ τρόπος

$$\hat{\omega} = 1 - 0,6 = 1 - \frac{6}{10} = \frac{10}{10} - \frac{6}{10} = \frac{4}{10} \text{ ὀρθῆς}$$

Ὥστε: $\hat{\omega} = \frac{4}{10}$ ὀρθῆς

2. Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης

Ἄν $\hat{\varphi}$ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία

Τότε ἔχομεν:

$\hat{\varphi} = 2$ ὀρθ.$-0,6$ ὀρθ.$= 2,0-0,6=1,4$ ὀρθῆς

<u>Ὥστε</u>: $\hat{\varphi} = 1,4$ ὀρθῆς

<u>β΄ τρόπος</u>:

$\hat{\varphi} = 2-0,6 = 2-\frac{6}{10} = \frac{20}{10} - \frac{6}{10} = \frac{14}{10}$ ὀρθῆς

<u>Ὥστε</u>: $\hat{\varphi} = \frac{14}{10}$ ὀρθῆς ἤ

$\hat{\varphi} = \frac{\cancel{14}^{7}}{\cancel{10}_{5}} = \frac{7}{5}$ ὀρθῆς.

<u>Γενίκευσις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως</u>

26. Δίδεται γωνία ἴση πρός $\frac{\mu}{\nu}$ τῆς ὀρθῆς. Νά εὑρεθῇ ἡ συμπληρωματική καί ἡ παραπληρωματική της γωνία εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

<u>Δοθεῖσα γωνία $= \frac{\mu}{\nu}$ ὀρθῆς</u>

1. Συμπληρωματική δοθείσης;
2. Παραπληρωματική " ;

<u>Ἐργασία</u>

<u>1. Εὕρεσις τῆς συμπληρωματικῆς τῆς δοθείσης</u>.

Ἄν ω εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία

<u>Τότε ἔχομεν</u>:

$\hat{\omega} = 1$ ὀρθ.$- \frac{\mu}{\nu}$ ὀρθ.$= 1- \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu}{\nu} - \frac{\mu}{\nu} = \frac{\nu-\mu}{\nu}$

<u>Ὥστε</u>: $\hat{\omega} = \frac{\nu-\mu}{\nu}$ ὀρθῆς

<u>2. Εὕρεσις τῆς παραπληρωματικῆς τῆς δοθείσης</u>.

Ἄν φ εἶναι ἡ ζητουμένη γωνία

<u>Τότε ἔχομεν</u>:

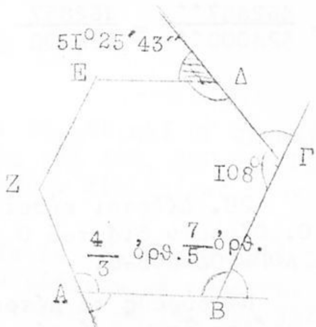
$\hat{\varphi} = 2$ ὀρθ.$- \frac{\mu}{\nu}$ ὀρθῆς $= 2- \frac{\mu}{\nu} = \frac{2\nu-\mu}{\nu}$ ὀρθῆς

<u>Ὥστε</u>: $\hat{\varphi} = \frac{2\nu-\mu}{\nu}$ ὀρθῆς.

27. Δίδεται ἕν πολύγωνον π.χ. τό ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἄν γων.Α$=\frac{4}{3}$ ὀρθῆς, γων. Β$=\frac{7}{5}$ ὀρθῆς, γων. Γ $= 108^{\circ}$ καί ἐξωτερική γων.Δ$= 51^{\circ}25'43''$ νά εὑρεθοῦν τά ἑξῆς: στοιχεῖα τοῦ πολυγώνου: α) ἐξωτερική γωνία Α, β) ἐξωτερική γωνία Β, γ) ἐ-

ξωτερική γων.Γ καί δ') ἐσωτερική γωνία Δ, είς μέρη ὀρθῆς καί είς μοίρας.

Λύσις



Δίδεται ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ

α: γωνία Α = $\frac{4}{3}$ ὀρθῆς

β: γωνία Β = $\frac{7}{5}$ "

γ: γωνία Γ = 108°

δ: ἐξωτερ.γωνία Δ = 51°25'43''

α: ἐξωτ. γων. Α ;

β: " " Β ;

γ: " " Γ ;

δ: ἐσωτερ.γων.Δ ;

'Εργασία

α:'Εργαζόμενοι ὅπως είς τήν ἄσκησιν 24 εὑρίσκομεν

1. ἐξ.γων.Α = $\frac{2}{3}$ ὀρθῆς

2. ἐξ.γων.Α = $\frac{2}{3}\cdot 90^\circ = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

β:'Εργαζόμενοι ὅπως είς την ἄσκησιν 24 εὑρίσκομεν

1. ἐξ.γωνία Β = $\frac{3}{5}$ ὀρθῆς

2. ἐξ.γων. Β = $\frac{3}{5}\cdot 90^\circ = \frac{270^\circ}{5} = 54^\circ$.

γ:'Εργαζόμενοι ὅπως είς τάς ἀσκήσεις 23 καί 25 εὑρίσκομεν

1. ἐξ.γων. Γ = 72°

2. ἐξ.γων.Γ = $72^\circ = \frac{72^\circ}{90^\circ} = \frac{72}{90} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ ὀρθ.

δ:'Εργαζόμενοι ὅπως είς τάς ἀσκήσεις 23 καί 24 εὑρίσκομεν

1. ἐσωτερ.γων. Δ = 180°-(51°25'43'') ἤ

" " Δ = (179°59'60'')-(51°25'43'') ἤ

" " Δ = 128°34'17''

2. ἐσωτερ.γων.Δ $= 128^{\circ}34'17'' =$

$$= \frac{128^{\circ}34'17''}{90^{\circ}} =$$

$$= \frac{462857''}{324000''} = \frac{462857}{324000} \text{ ὀρθῆς}$$

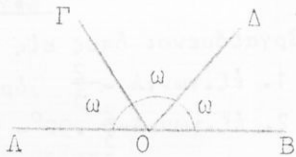
<u>Βοηθητικαί πράξεις</u>

$$\begin{array}{r} 90^{\circ} \\ \times 60' \\ \hline 5400' \\ \times 60'' \\ \hline 324000'' \end{array} \qquad \begin{array}{r} 128^{\circ} \\ \times 60' \\ \hline 7680' \\ +34' \\ \hline 7714' \\ \times 60'' \\ \hline 462840'' \\ +17'' \\ \hline 462857'' \end{array}$$

28. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καί ἕν σημεῖον ἐπ'αὐτῆς π.χ. τό Ο. Φέρομεν διά τοῦ Ο δύο εὐθείας ΟΓ καί ΟΔ ὥστε νά εἶναι $\widehat{ΑΟΓ}=\widehat{ΓΟΔ}=\widehat{ΔΟΒ}=\omega$.

Νά εὑρεθῇ τό μέτρον ἑκάστης τῶν γωνιῶν τούτων τόσον εἰς μοίρας ὅσον καί εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καί

<u>$\widehat{ΑΟΓ}=\widehat{ΓΟΔ}=\widehat{ΔΟΒ}=\hat{\omega}$</u>

$\widehat{ΑΟΓ}$;, $\widehat{ΓΟΔ}$;, $\widehat{ΔΟΒ}$;

<u>'Εργασία</u>

Γνωρίζομεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν οὕτω σχηματιζομένων γωνιῶν (§ 54) ἰσοῦται μέ 2 ὀρθ. ἤ 180°

<u>'Εδῶ ἔχομεν:</u>

$\widehat{ΑΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ} + \widehat{ΔΟΒ} = 2$ ὀρθ.

'Αλλά ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{ΑΟΓ} = \widehat{ΓΟΔ} = \widehat{ΔΟΒ} = \hat{\omega}$

'Αντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν:

$\hat{\omega} + \hat{\omega} + \hat{\omega} = 2$ ὀρθ.

$3\hat{\omega} = 2$ " (διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη

$\frac{\cancel{3}\hat{\omega}}{\cancel{3}} = \frac{2}{3}$ " τῆς ἰσότητος διά 3)

καί $\hat{\omega} = \frac{2}{3}$ "

<u>"Ωστε</u>: $\widehat{ΑΟΓ} = \widehat{ΓΟΔ} = \widehat{ΔΟΒ} = \hat{\omega} = \frac{2}{3}$ ὀρθῆς

'Επίσης ἔχομεν:

$$\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OB} = 180^\circ$$

ἤ $3\hat{\omega} = 180^\circ$ καί $\hat{\omega} = \frac{180}{3} = 60^\circ$

Ὥστε: $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta} = \widehat{\Delta OB} = \hat{\omega} = 60^\circ$

---

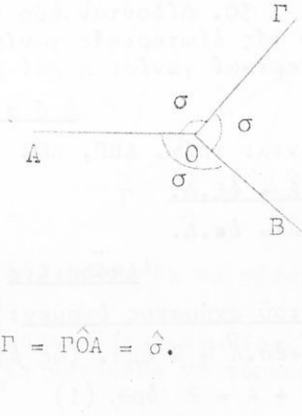
29. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, καί ΟΓ σχηματίζουσαι τρεῖς, ἴσας μεταξύ των, γωνίας τάς ΑΟΒ, ΒΟΓ καί ΓΟΑ. Νά εὑρεθῇ τό μέτρον ἑκάστης τούτων τόσον εἰς μοίρας ὅσον καί εἰς μέρη τῆς ὀρθῆς.

'Εάν κατόπιν προεκταθῇ ἡ μία ἐκ τῶν τριῶν εὐθειῶν πρός τό μέρος τῆς γωνίας τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν νά εὑρεθοῦν τά μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς προεκτάσεως ταύτης μέ τάς δύο ἄλλας εὐθείας.

Λύσις

I. Δίδονται εὐθεῖαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ
καί $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA} = \hat{\sigma}$.

$\widehat{AOB}$; $\widehat{BO\Gamma}$; $\widehat{\Gamma OA}$;



'Εργασία

Γνωρίζομεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν οὕτω σχηματιζομένων γωνιῶν (§ 55) ἰσοῦται μέ 4 ὀρθές ἤ 360°

'Εδῶ ἔχομεν

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma OA} = 4 \text{ ὀρθές}$$

'Αλλά ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA} = \hat{\sigma}$.
'Αντικαθιστῶμεν καί ἔχομεν:

$\hat{\sigma} + \hat{\sigma} + \hat{\sigma} = 4$ ὀρθ. ἤ

$3\hat{\sigma} = 4$ " ἤ (διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος διά 3)

$\frac{\cancel{3}\hat{\sigma}}{\cancel{3}} = \frac{4}{3}$ "

Ὥστε: $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA} = \hat{\sigma} = \frac{4}{3}$ ὀρθῆς.

'Επίσης ἔχομεν:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma OA} = 360^\circ$$

ἤ $3\hat{\sigma} = 360^\circ$ ἤ $\hat{\sigma} = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

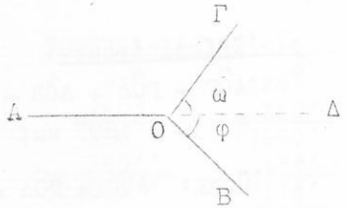
Ὥστε: $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA} = \hat{\sigma} = 120^\circ$

II. Δίδονται εὐθεῖαι ΟΑ; ΟΒ, ΟΓ

καί $\widehat{ΑΟΒ}=\widehat{ΒΟΓ}=\widehat{ΓΟΑ}$

ΟΔ προέκτασις τῆς ΑΟ

$\widehat{ΓΟΔ}$; $\widehat{ΔΟΒ}$;



Λ ύ σ ι ς

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

$\widehat{ΑΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ} = 180^\circ$ (ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μή κοιναί πλευραί κεῖνται επ'εὐθείας).

ἤ ἐπειδή $\widehat{ΑΟΓ} = 120^\circ$ (ὡς εὑρέθη) ἔχομεν

$120^\circ + \widehat{ΓΟΔ} = 180^\circ$ ἤ $\widehat{ΓΟΔ} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Ὥστε: $\widehat{ΓΟΔ} = 60^\circ$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι καί $\widehat{ΔΟΒ} = 60^\circ$

---

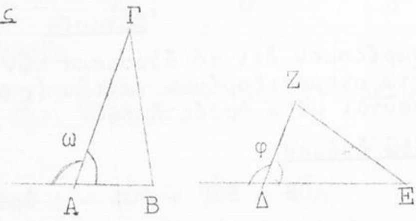
30. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ τά ὁποῖα ἔχουν τάς ἐξωτερικάς γωνίας Α καί Δ ἴσας. Νά ἀπ/χθῇ ὅτι αἱ ἐσωτερικαί γωνίαι Α καί Δ αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Λ ύ σ ι ς

Δίδονται τρίγ. ΑΒΓ, ΔΕΖ

ἐξ. $\hat{Α}$ = ἐξ.$\hat{Δ}$.

ἐσ. $\hat{Α}$ = ἐσ.$\hat{Δ}$.



Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ἐξ.$\hat{Α}$+ἐσ.$\hat{Α}$ = 2 ὀρθ. (ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μή κοιναί πλευραί κεῖνται ἐπ'εὐθείας).

ἤ $\hat{ω} + \hat{Α} = 2$ ὀρθ. (1)

-Ὁμοίως ἔχομεν:

ἐξ. $\hat{Δ}$ + ἐσ. $\hat{Δ}$ = 2 ὀρθ. (" ")

ἤ $\hat{φ} + \hat{Δ} = 2$ ὀρθ. (2)

Τά β΄μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα ἄμα θά εἶναι καί τά α΄μέλη ἴσα.

Ὥστε: $\hat{ω} + \hat{Α} = \hat{φ} + \hat{Δ}$ ἤ

ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως $\hat{ω} = \hat{φ}$ θά ἔχωμεν (§ 3) $\hat{Α} = \hat{Δ}$. ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΤΕΤΑΡΤΗ

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς ἐ π ί τ ο ῦ π λ ή θ ο υ ς τ ῶ ν δ ι α γ ω ν ί ω ν π α ν τ ό ς κ υ ρ τ ο ῦ ε ὐ θ υ γ ρ ά μ μ ο υ σ χ ή μ α τ ο ς.

31. Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν του ἤ νά εὑρεθῇ τύπος δίδων τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς

Τυχόν πολύγωνον ΑΒΓ....
(π.χ. πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ)

πλῆθος διαγωνίων;

Ἐργασία

Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται τό πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀπό τήν κορυφήν Α φέρομεν τάς διαγωνίους ΑΓ καί ΑΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῆς κορυφῆς Α δέν δυνάμεθα νά φέρωμεν ἄλλας διαγωνίους.

Ἐπίσης ἀπό τήν κορυφήν Β φέρομεν τάς διαγωνίους ΒΕ καί ΒΔ. Παρατηροῦμεν ὅτι καί ἐδῶ δέν δυνάμεθα νά φέρωμεν ἄλλας διαγωνίους.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τάς διαγωνίους αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐξ ὅλων τῶν ἄλλων κορυφῶν.

Παρατηροῦμεν δέ γενικῶς ὅτι: Ἀπό ἑκάστην κορυφήν ἄγονται τόσαι διαγώνιοι ὅσαι εἶναι αἱ κορυφαί πλήν τριῶν.

Ο ὕ τ ω:

Ἄν ν εἶναι τό πλῆθος τῶν κορυφῶν τοῦ πολυγώνου τότε:
Ἀπό μίαν κορυφήν ἄγονται ν-3 διαγώνιοι καί ἀπό ὅλας τάς κορυφάς δηλαδή ἀπό τάς ν ἄγονται (ν-3)ν διαγώνιοι. Οὕ-

τω ὅμως ἑκάστη διαγώνιος ὑπολογίζεται δύο φοράς.

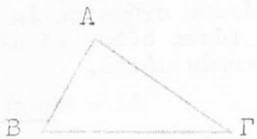
Ἐπομένως, ἄν μέ τό γράμμα δ ὀνομάσωμεν τό πραγματικόν πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός πολυγώνου, τότε τό πλῆθος αὐτῶν δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$\boxed{\delta = \frac{(\nu-3)\nu}{2}}$$

---

32. Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός τριγώνου ἤ νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον δέν ἔχει διαγωνίους.

Λύσις



Τρίγ. ΑΒΓ

πλῆθος διαγωνίων;

Ἐργασία ἤ ἀπόδειξις

Πρῶτος τρόπος

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τό πραγματικόν πλῆθος τῶν διαγωνίων παντός κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος εἶναι

$$\boxed{\delta = \frac{(\nu-3)\nu}{2}} \quad (1) \left\{ \begin{array}{l} \text{τό } \delta \text{ παριστᾶ τό πλῆθος} \\ \text{τῶν διαγωνίων} \\ \text{τό } \nu \text{ παριστᾶ τό πλῆθος} \\ \text{τῶν πλευρῶν ἤ κορυφῶν} \end{array} \right.$$

Διά τό τρίγωνον ἔχομεν $\nu=3$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον καί λαμβάνομεν

$$\delta = \frac{(3-3)3}{2} = \frac{0.3}{2} = \frac{0}{2} = 0. \text{ Ὥστε: } \delta = 0$$

Συμπέρασμα: Τό τρίγωνον δέν ἔχει διαγωνίους.

Δεύτερος τρόπος:

Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς διαγωνίου ἑνός κυρτοῦ εὐθυγράμμου σχήματος καί ἐξετάζοντες τό τρίγωνον ΑΒΓ διαπιστώνομεν ὅτι "τό τρίγωνον δέν ἔχει διαγωνίους" διότι δέν ἔχει μή διαδοχικάς κορυφάς ὥστε νά ὑπάρχῃ εὐθεῖα ἑνοῦσα δύο τοιαύτας κορυφάς καί νά εἶναι διαγώνιος.

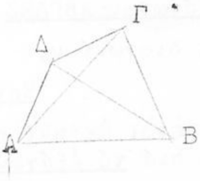
---

33. Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν διαγωνίων ἑνός κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Λύσις

Τετράπλ.ΑΒΓΔ

πλῆθος διαγωνίων;



Ἐργασία

Λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$\boxed{\delta = \frac{(\nu-3)\nu}{2}} \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ πλῆθος διαγωνίων} \\ \nu \quad \text{"} \quad \text{κορυφῶν} \end{array} \right.$$

Διά τό τετράπλευρον ἔχομεν $\nu = 4$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον καί λαμβάνομεν:

$$\delta = \frac{(4-3)4}{2} = \frac{1.4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{Ὥστε: } \delta = 2$$

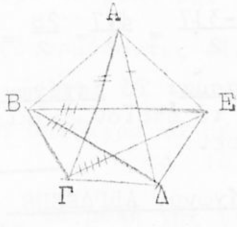
Συμπέρασμα: Τό τετράπλευρον ἔχει δύο διαγωνίους πρᾶγμα τό ὁποῖον διαπιστώνομεν καί ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ σχήματος.

34. Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν διαγωνίων τῶν ἑξῆς κυρτῶν εὐθυγράμμων σχημάτων. α) πενταγώνου β) ἑξαγώνου γ) ἑπταγώνου καί δ) ὀκταγώνου.

Λύσις

α. Πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ

πλῆθος διαγωνίων;



Ἐργασία

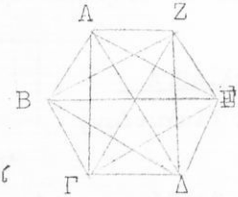
Λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$\boxed{\delta = \frac{(\nu-3)\nu}{2}} \quad (1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta \text{ πλῆθος διαγωνίων} \\ \nu \quad \text{"} \quad \text{κορυφῶν} \end{array} \right.$$

Διά τό πεντάγωνον ἔχομεν $\nu = 5$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον καί λαμβάνομεν

$$\delta = \frac{(5-3)5}{2} = \frac{2.5}{2} = \frac{10}{2} = 5. \quad \text{Ὥστε: } \delta = 5.$$

Συμπέρασμα: Τό πεντάγωνον ἔχει πέντε διαγωνίους πρᾶγμα τό ὁποῖον διαπιστώνομεν καί ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ σχήματος.



β΄ Ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ

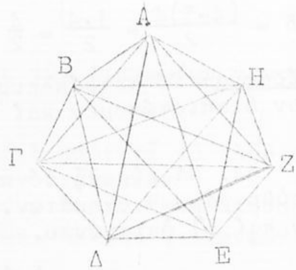
πλῆθος διαγωνίων;

Ἐργασία

Ἐργαζόμενοι ὡς καί προηγουμένως καί ἐπειδή διά τό ἑξάγωνον ἔχομεν ν = 6 λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου:

$$δ = \frac{(6-3)6}{2} = \frac{3.6}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{Ὥστε: } δ = 9.$$

Συμπέρασμα: Τό ἑξάγωνον ἔχει ἐννέα διαγωνίους πρᾶγμα τό ὁποῖον διαπιστώνομεν καί ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ σχήματος.



γ΄ Ἑπτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗ

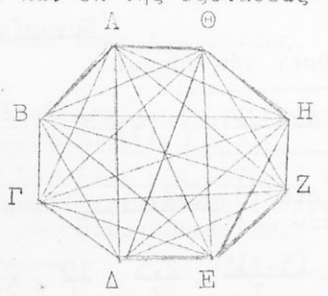
πλῆθος διαγωνίων;

Ἐργασία

Ἐργαζόμενοι ὡς καί προηγουμένως καί ἐπειδή διά τό ἑπτάγωνον ἔχομεν ν = 7 λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου:

$$δ = \frac{(7-3)7}{2} = \frac{4.7}{2} = \frac{28}{2} = 14. \quad \text{Ὥστε: } δ = 14.$$

Συμπέρασμα: Τό ἑπτάγωνον ἔχει δέκα τέσσαρας διαγωνίους πρᾶγμα τό ὁποῖον διαπιστώνομεν καί ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ σχήματος.



δ΄ Ὀκτάγωνον ΑΒΓΔΕΖΗΘ

πλῆθος διαγωνίων;

Ἐργασία

Ἐργαζόμενοι ὡς καί προηγουμένως καί ἐπειδή διά τό ὀκτάγωνον ἔχομεν ν=8 λαμβάνομεν ἐκ τοῦ τύπου:

$$\delta = \frac{(8-3)8}{2} = \frac{5.8}{2} = \frac{40}{2} = 20.$$ Ὥστε: $\delta=20$.

Συμπέρασμα: Τό ὀκτάγωνον ἔχει εἴκοσι διαγωνίους πρᾶγμα τό ὁποῖον διαπιστώνομεν καί ἐκ τῆς ἐξετάσεως τοῦ σχήματος.

---

35. Νά εὑρεθῇ ποῖον εἶναι τό πολύγωνον τό ὁποῖον ἔχει ἐννέα διαγωνίους.

Λ ύ σ ι ς

πλῆθος διαγωνίων $\delta = 9$

πλῆθος πλευρῶν $\nu =$;

Ἐργασία

Διά νά εὕρωμεν τό πολύγωνον τό ὁποῖον ἔχει 9 διαγωνίους πρέπει νά εὕρωμεν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

Πρός τοῦτο λαμβάνομεν τόν τύπον

$$\boxed{\delta = \frac{(\nu-3)\nu}{2}}$$

ὅπου: δ τό πλῆθος τῶν διαγωνίων
καί ν " " " πλευρῶν

Ἀντικαθιστῶμεν τό δ μέ τό 9 καί ἔχομεν:

$9 = \frac{(\nu-3)\nu}{2}$ ἤ (πολ/ζοντες ἀμφότερα τά μέλη ἐπί 2)

$2.9 = \frac{(\nu-3)\nu}{\cancel{2}} . \cancel{2}$ ἤ $18 = (\nu-3)\nu$ ἤ (ἐφαρμόζοντες εἰς τό β΄μέλος τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα) (§ I7)

$18 = \nu^2-3\nu$ ἤ (ἀφαιροῦντες ἀπό ἀμφότερα τά μέλη τό τό 18)

$\cancel{18} - \cancel{18} = \nu^2-3\nu-18$

$0 = \nu^2-3\nu - 18$ ἤ (ἐναλλάσσοντες τά μέλη τῆς ἰσότητος)

$\nu^2-3\nu-18 = 0$ ἤ (ἐπειδή $-18 = -9-9$)

$\nu^2-3\nu-9-9 = 0$ ἤ (ἀντιμεταθέτοντες τούς ὅρους)

$\nu^2-9-3\nu-9 = 0$ ἤ (τρέποντες εἰς γινόμενον)

$[\nu^2-9=(\nu+3)(\nu-3)\ ,\quad -3\nu-9=-3(\nu+3)]$

$(\nu+3)(\nu-3)-3(\nu+3) = 0$ ἤ (ἐξάγοντες κοινόν παράγοντα)

$(\nu+3)(\nu-3-3) = 0$ ἤ
$(\nu+3)(\nu-6) = 0$

Τώρα ἵνα τό γινόμενον αὐτό ἰσοῦται μέ τό μηδέν πρέπει ἤ

I. ὁ ἕνας παράγων νά ἰσοῦται μέ μηδέν
δηλ. $\nu-6 = 0$ } ἤ
II. ὁ ἄλλος παράγων νά ἰσοῦται μέ μηδέν
δηλ. $\nu+3 = 0$

I. Ἐξετάζομεν τήν ἰσότητα $\nu-6 = 0$
Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ξ 2)
$\nu-\cancel{6}+\cancel{6} = 0+6$ ἤ
$\nu = 6$

<u>Ὥστε:</u> Τό ζητούμενον πολύγωνον ἔχει ἕξ πλευράς δηλ. εἶναι <u>ἑξάγωνον</u>

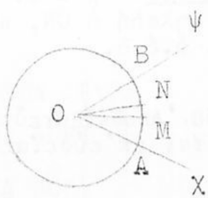
II. Ἐξετάζομεν τώρα τήν ἰσότητα $\nu+3=0$
Ἐκ ταύτης ἔχομεν (ξ 3)
$\nu+\cancel{3}-\cancel{3} = 0 - 3$ ἤ $\nu = -3$

Ἐπειδή ὅμως ἕν πολύγωνον δέν εἶναι δυνατόν νά ἔχῃ ἀρνητικόν ἀριθμόν πλευρῶν δι'αὐτό δέν παραδεχόμεθα τήν λύσιν αὐτήν. Δηλαδή τό εὑρεθέν ἀποτέλεσμα $\nu=-3$ δέν εἶναι δεκτόν.

ΟΜΑΣ ΠΕΜΠΤΗ

'Ασκήσεις ἐπί τῶν διχοτόμων τῶν διαφόρων γωνιῶν.

36. 'Αποδείξατε ὅτι ἑκάστη γωνία ἔχει μίαν καί μόνον μίαν διχοτόμον.



Λύσις

Γωνία $x\hat{O}\psi$

1. ἔχει διχοτόμον
2. " μόνον μίαν διχοτόμον

'Απόδειξις

1. Καθιστῶμεν τήν δοθεῖσαν γωνίαν $x\hat{O}\psi$ ἐπίκεντρον

Ἔστω M τό μέσον τοῦ τόξου AB. Φέρομεν τήν OM τότε ἐπειδή $\widehat{AM} = \widehat{MB}$ θά ἔχωμεν καί $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ (§ 42).

Ἄρα ἡ OM εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας AOB καί ἑπομένως ἀπεδείχθη ὅτι ἡ γωνία ἔχει μίαν διχοτόμον.

2. Ἔστω ὅτι ὑπάρχει καί ἄλλη διχοτόμος τῆς γωνίας AOB. π.χ. ἡ ON

Τότε $\widehat{AON} = \widehat{NOB}$ καί (§ 43)

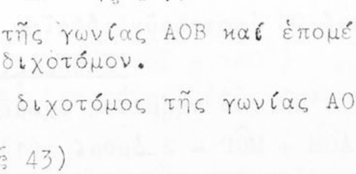
θά ἔχωμεν $\widehat{AN} = \widehat{NB}$ Ἄρα τό N εἶναι μέσον τοῦ τόξου AB.

Οὕτω ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι τό τόξον AB ἔχει δύο μέσα ὅπερ ἄτοπον.

Ἑπομένως ἡ γωνία $x\hat{O}\psi$ ἔχει μόνον μίαν διχοτόμον. ὅ.ε.δ.

37. 'Αποδείξατε ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προεκτεινομένη, πέραν τῆς κορυφῆς της, διχοτομεῖ καί τήν κατά κορυφήν γωνίαν τῆς δοθείσης.

Λύσις



$\widehat{AOB}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$ κατά κορυφήν
OM διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$
ON προέκτασις τῆς OM

ON διχοτόμος τῆς $\widehat{\Gamma O\Delta}$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (1) (ὡς ἡμίση τῆς γων.ΑΟΒ ἀφοῦ ΟΜ διχοτόμος αὐτῆς).

$\hat{\omega} = \hat{\rho}$ (2) (κατά κορυφήν)

καί $\hat{\varphi} = \hat{\sigma}$ (3) (" ")

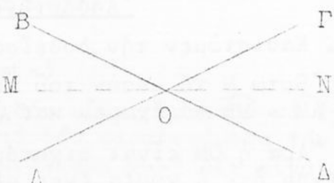
'Επειδή τά α΄μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καί (3) εἶναι ἴσα, λόγῳ τῆς (1), θά εἶναι καί τά β΄ μέλη ἴσα.

<u>Ὥστε</u>: $\hat{\rho} = \hat{\sigma}$.

Δηλαδή ἡ ΟΝ, προέκτασις τῆς ΟΜ διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΓΟΔ. ὅ.ἔ.δ.

38. 'Αποδείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο κατά κορυφήν γωνιῶν κεῖνται ἐπ'εὐθείας.

Λ ύ σ ι ς



$\widehat{AOB}$, $\widehat{\Gamma O\Delta}$ κατά κορυφήν
ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$
ΟΝ " " $\widehat{\Gamma O\Delta}$

ΟΜ καί ΟΝ ἀποτελοῦν εὐθεῖαν

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{AOM} + \widehat{MO\Gamma} = 2$ ὀρθαί (1) (ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μή κοιναί πλευραί κεῖνται ἐπί εὐθείας).

'Αλλά $\widehat{AOM} = \widehat{\Gamma ON}$ (ὡς ἡμίση τῶν ἴσων κατά κορυφήν γωνιῶν)

<u>Συμβουλευτική παρατήρησις:</u> Αἱ γωνίαι ΑΟΜ καί ΓΟΝ δέν εἶναι κατά κορυφήν διότι ἐνῷ ἡ γραμμή ΑΟΓ εἶναι εὐθεῖα τοὐναντίον ἡ γραμμή ΜΟΝ δέν γνωρίζομεν ἐάν εἶναι εὐθεῖα ἀφοῦ θέλωμεν μάλιστα νά τό ἀποδείξωμεν.

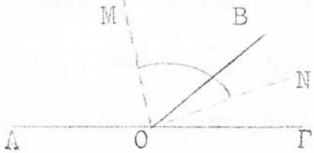
'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) τήν $\widehat{AOM}$ μέ τήν ἴσην της $\widehat{\Gamma ON}$ καί ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma ON} + \widehat{MO\Gamma} = 2 \text{ ὀρθαί}.$$

'Επομένως αἱ γωνίαι ΓΟΝ καί ΜΟΓ ὡς ἐφεξῆς παραπληρωματικαί ἔχουν τάς μή κοινάς πλευράς των ΟΜ καί ΟΝ ἐπ'εὐθείας ὅ.ἔ.δ.

39. 'Αποδείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 90° (ἤ κατ'ἄλλην ἔκφρασιν "εἶναι κάθετοι ἐπ'ἀλλήλας").

Λύσις



$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOΓ}$ ἐφεξῆς
$\widehat{AOB}+\widehat{BOΓ} = 180^\circ$
OM διχοτόμος $\widehat{AOB}$
ON " $\widehat{BOΓ}$

$\widehat{MON} = 90^\circ$.

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MON}=\widehat{MOB}+\widehat{BON}$ (1)

'Αλλά $\widehat{MOB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$ (ἀφοῦ OM διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$)

καί $\widehat{BON} = \dfrac{\widehat{BOΓ}}{2}$ (" ON " $\widehat{BOΓ}$)

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) καί ἔχομεν

$$\widehat{MON} = \frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BOΓ}}{2} \quad ἤ$$

$$\widehat{MON} = \frac{\widehat{AOB}+\widehat{BOΓ}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$ (ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{AOB}+\widehat{BOΓ} = 180^\circ$)

"Ωστε: $\widehat{MON} = 90^\circ$ δηλαδή αἱ διχοτόμοι ἐδῶ τέμνονται καθέτως ὅ.ἔ.δ.

40. "Αν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 90° νά ἀπ/χθῆ ὅτι αἱ δύο αὐταί γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.

Λύσις

$\widehat{AOB}$, $\widehat{BOΓ}$ ἐφεξῆς
OM διχοτόμος $\widehat{AOB}$
ON " $\widehat{BOΓ}$
$\widehat{MON} = 90^\circ$

$\widehat{AOB} + \widehat{BOΓ} = 180^\circ$

'Απόδειξις

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν $\widehat{MON} = 90^\circ$ (1)

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON}$ (2)

'Επειδή τά α΄ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά β΄ ἴσα.

"Ωστε: $\widehat{MOB} + \widehat{BON} = 90^{\circ}$ (3)

'Αλλά $\widehat{MOB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ (ἀφοῦ ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$)

καί $\widehat{BON} = \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$ (" ΟΝ " " $\widehat{BO\Gamma}$)

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (3) καί ἔχομεν

$\frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = 90^{\circ}$ ἤ

$\frac{\widehat{AOB}+\widehat{BO\Gamma}}{2} = 90^{\circ}$ ἤ (ξ 6) πολλαπλασιάζομεν ἐπί 2.

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2.90^{\circ}$ ἤ

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 180^{\circ}$

"Ωστε: Αἱ γωνίαι ΑΟΒ καί ΒΟΓ εἶναι παραπληρωματικαί ὅ.ἔ.δ.

41. Δίδονται δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικαί γωνίαι. Φέρομεν τήν διχοτόμον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν. 'Εάν τώρα φέρωμεν κάθετον ἐπί τήν διχοτόμον αὐτήν, εἰς τήν κορυφήν τῆς γωνίας, νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κάθετος αὔτη εἶναι διχοτόμος τῆς ἄλλης γωνίας.

Λύσις

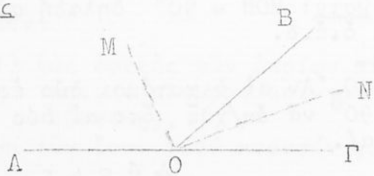
ΑΟΒ, ΒΟΓ ἐφεξῆς γωνίαι

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2$ ὀρθ.

ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$

ΟΝ ⊥ ΜΟ.

ΟΝ διχοτόμ.τῆς $\widehat{BO\Gamma}$.



'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{MON} = 1$ ὀρθ.(διότι ἐξ ὑποθέσ. ΟΝ ⊥ ΟΜ)

ἤ $\widehat{MOB} + \widehat{BON} = 1$ ὀρθ.(διότι $\widehat{MON}=\widehat{MOB}+\widehat{BON}$)

ἤ $\frac{\widehat{AOB}}{2} + \widehat{BON} = 1$ " (1) (διότι $\widehat{MOB} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ ἀφοῦ ΜΟ διχ. $\widehat{AOB}$)

'Αλλά $\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2$ ὀρθ.(ἐξ ὑποθέσ.)ἤ διαιροῦμεν διά 2.

$\frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = \frac{2}{2}$

ἤ $\dfrac{\widehat{AOB}}{2} + \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = 1$ ὀρθή (2)

Ἐπειδή τά β΄μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά α΄μέλη ἴσα.

Ὥστε: $\cancel{\dfrac{\widehat{AOB}}{2}} + \widehat{BON} = \cancel{\dfrac{\widehat{AOB}}{2}} + \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$ ἤ (ξ 3)

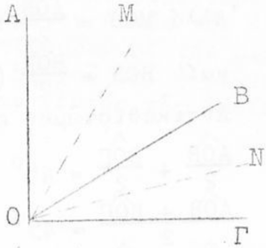
$\widehat{BON} = \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ON σχηματίζει μέ τήνπλευράν OB γωνίαν ἴσην πρός τό ἥμισυ τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ ἔπεται ὅτι ἡ ON εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ ὅ.ἔ.δ.

42. Ἀποδείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς καί συμπληρωματικῶν γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 45°

Λύσις

$\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ ἐφεξῆς
$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 90^\circ$
OM διχοτόμος $\widehat{AOB}$
ON " $\widehat{BO\Gamma}$

$\widehat{MON} = 45^\circ$



Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON}$ (1)

Ἀλλά $\widehat{MOB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$ (ἀφοῦ OM διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$)

καί $\widehat{BON} = \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$ (" ON " " $\widehat{BO\Gamma}$)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) καί ἔχομεν

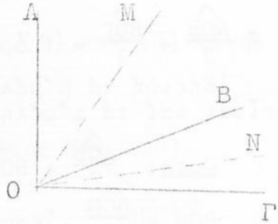
$\widehat{MON} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} + \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$ ἤ

$\widehat{MON} = \dfrac{\widehat{AOB}+\widehat{BO\Gamma}}{2} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$ (ἐξ ὑποθέσεως $\widehat{AOB}+\widehat{BO\Gamma}=90^\circ$)

Ὥστε: $\widehat{MON} = 45^\circ$ ὅ.ἔ.δ.

43. Ἄν αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν 45° νά ἀπ/χθῆ ὅτι αἱ δύο αὐταί γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί.

Λ ύ σ ι ς



$\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ ἐφεξῆς

ΟΜ διχοτόμος $\widehat{AOB}$

ΟΝ " $\widehat{BO\Gamma}$

$\widehat{MON} = 45^\circ$

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 90^\circ$

'Απόδειξις

'Εξ ὑποθέσεως $\widehat{MON} = 45^\circ$ (1)

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MON} = \widehat{MOB} + \widehat{BON}$ (2)

'Επειδή τά α΄ μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά β΄ ἴσα .

"Ωστε: $\widehat{MOB} + \widehat{BON} = 45^\circ$ (3)

'Αλλά $\widehat{MOB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2}$ (ἀφοῦ ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$)

καί $\widehat{BON} = \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$ (" ΟΝ " " $\widehat{BO\Gamma}$)

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (3) καί ἔχομεν

$$\frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = 45^\circ \text{ ἤ}$$

$$\frac{\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma}}{2} = 45^\circ \text{ ἤ} \qquad (\S\ 6)$$

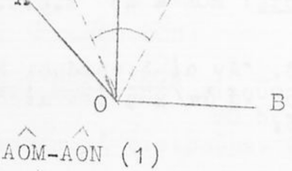
$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2.45^\circ \text{ ἤ}$$

$$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 90^\circ$$

"Ωστε: Αἱ γωνίαι $\widehat{AOB}$ καί $\widehat{BO\Gamma}$ εἶναι συμπληρωματικαί ὅ.ἔ.δ.

44. Δίδονται δύο γωνίαι ΑΟΒ καί ΑΟΓ ἔχουσαι κοινήν κορυφήν Ο καί μίαν πλευράν κοινήν τήν ΑΟ. 'Εάν ἡ διαφορά των εἶναι 90° νά ἀπ/χθῇ ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων των εἶναι 45°.

Λ ύ σ ι ς



$\widehat{AOB} - \widehat{AO\Gamma} = 90^\circ$

ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$

ΟΝ " " $\widehat{AO\Gamma}$

$\widehat{MON} = 45^\circ$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MON} = \widehat{AOM} - \widehat{AON}$ (1)

'Αλλά $\widehat{AOM} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ (ἀφοῦ ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$)

καί $\widehat{AON} = \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2}$ (" ΟΝ " " $\widehat{AO\Gamma}$)

'Αντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) καί ἔχομεν

$$\widehat{MON} = \frac{\widehat{AOB}}{2} - \frac{\widehat{AO\Gamma}}{2} \text{ ἤ}$$

$$\widehat{MON} = \frac{\widehat{AOB} - \widehat{AO\Gamma}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ \text{ (ἐξ ὑποθέσεως } \widehat{AOB}-\widehat{AO\Gamma}=90^\circ)$$

"Ωστε: $\widehat{MON} = 45^\circ$ ὅ.ἔ.δ.

45. Δίδονται δύο ἐφεξῆς καί συμπληρωματικαί γωνίαι. Φέρομεν τήν διχοτόμον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν. 'Εάν τώρα φέρωμεν ἐκ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας εὐθεῖαν κειμένην ἐντός τῆς ἄλλης ἐκ τῶν δύο δοθεισῶν γωνιῶν καί σχηματίζουσαν μέ τήν διχοτόμον τῆς πρώτης γωνίας, γωνίαν 45° νά ἀπ/χθῇ ὅτι ἡ δευτέρα αὐτή εὐθεῖα διχοτομεῖ τήν ἄλλην γωνίαν (ἐντός τῆς ὁποίας εὑρίσκεται).

Λύσις

$\widehat{AOB}$, $\widehat{BO\Gamma}$ ἐφεξῆς

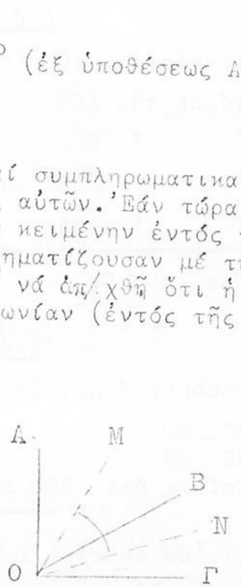
$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 1$ ὀρθή

ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$

ΟΝ ἐντός $\widehat{BO\Gamma}$ ὥστε

$\widehat{MON} = 45^\circ$

ΟΝ διχοτόμος $\widehat{BO\Gamma}$



'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{MON} = 45^\circ$ (ἐξ ὑποθ.) ἤ $\widehat{MOB} + \widehat{BON} = 45^\circ$ ἤ

$$\frac{\widehat{AOB}}{2} + \widehat{BON} = 45^\circ \quad (1)$$

'Αλλά $\frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = \frac{1}{2}$ ὀρθῆς ἤ

ἤ $\frac{\widehat{AOB}}{2} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2} = 45^\circ \quad (2)$

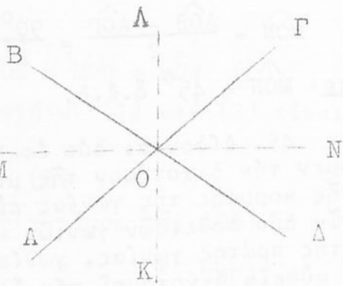
'Επειδή τά β΄μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά α΄μέλη ἴσα.

"Ωστε: $\cancel{\frac{\widehat{AOB}}{2}} + \widehat{BON} = \cancel{\frac{\widehat{AOB}}{2}} + \frac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$

καί $\widehat{BON} = \dfrac{\widehat{BO\Gamma}}{2}$. Ἀφοῦ λοιπόν ἡ ΟΝ σχηματίζει μέ τήν πλευράν ΟΒ τῆς γωνίας ΒΟΓ γωνίαν ἴσην πρός τό ἥμισυ τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ ἔπεται ὅτι ἡ ΟΝ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{BO\Gamma}$ ὅ.ἔ.δ.

46. Ἀποδείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἀνά δύο κατά κορυφήν γωνιῶν αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπό δύο εὐθειῶν τεμνομένων, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

<u>Λύσις</u>



ΑΓ, ΒΔ τεμνόμεναι εὐθεῖαι

ΟΜ διχοτόμος τῆς $\widehat{AOB}$

ΟΛ " " $\widehat{BO\Gamma}$

ΟΝ " " $\widehat{\Gamma O\Delta}$ καί

ΟΚ " " $\widehat{\Delta OA}$

$\Lambda O \perp MO$ καί $\Lambda O \perp ON$

$KO \perp MO$ " $KO \perp ON$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἀποδεικνύομεν ὅπως εἰς τήν ἄσκησιν 39 ὅτι

$\Lambda O \perp MO$

$\Lambda O \perp ON$

Ἐπίσης ὅτι $KO \perp MO$ καί $KO \perp ON$

---

47. Ἐκ σημείου Ο φέρομεν τρεῖς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. ὥστε γων. ΑΟΒ=γων.ΒΟΓ=γων.ΓΟΑ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΟ προεκτεινομένη πέραν τῆς κορυφῆς Ο διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΒΟΓ.

<u>Λύσις</u>

$\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma OA}$

<u>ΟΔ προέκτασις ΑΟ</u>

ΟΔ διχοτόμ. $\widehat{BO\Gamma}$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{AO\Gamma} + \widehat{\varphi} = 2 \text{ ὀρθ.} \\ \text{καί } \widehat{AOB} + \widehat{\omega} = 2 \text{ ὀρθ.} \end{array}\right\}$$

(ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μή κοιναί πλευραί κεῖνται ἐπ' εὐθείας

'Επειδή τά β΄μέλη εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά α΄ ἴσα.

<u>Ὥστε</u>: $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\varphi} = \widehat{AOB} + \widehat{\omega}$

'Επειδή δέ $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{AOB}$ (ἐξ ὑποθέσεως) λόγῳ (§ 3)

ἔχομεν $\widehat{\varphi} = \widehat{\omega}$

<u>Πράγματι</u>: λοιπόν ἡ ΟΔ διχοτομεῖ τήν γωνίαν ΒΟΓ ὅ.ἔ.δ.

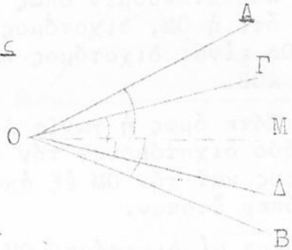
---

48. Δίδεται γωνία ΑΟΒ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Ο φέρομεν <u>ἐντός</u> τῆς γωνίας δύο εὐθείας ΟΓ καί ΟΔ ὥστε νά σχηματίζουν ἴσας γωνίας μέ τάς πλευράς τῆς γωνίας ΑΟΒ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος ΟΜ τῆς γωνίας ΓΟΔ εἶναι διχοτόμος καί τῆς γωνίας ΑΟΒ.

<u>Λύσις</u>

Δίδεται γωνία ΑΟΒ
γων. ΓΟΑ = γων. ΔΟΒ
<u>ΟΜ διχοτόμος γωνίας ΓΟΔ</u>
ΟΜ " " ΑΟΒ



<u>'Απόδειξις</u>

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{MO\Gamma} = \widehat{MO\Delta}$ (1) (ὡς ἡμίση τῆς γων. ΓΟΔ)

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $\widehat{\Gamma OA} = \widehat{\Delta OB}$ (2)

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί λαμβάνομεν:

$\widehat{MO\Gamma} + \widehat{\Gamma OA} = \widehat{MO\Delta} + \widehat{\Delta OB}$ ἤ

$\widehat{MOA} = \widehat{MOB}$

'Εκ τῆς τελευταίας ταύτης ἰσότητος προκύπτει ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ.

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. 'Εάν δοθῇ ἡ ΟΜ ὡς διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΟΒ καί ζητεῖται ν'ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι διχοτόμος καί τῆς γωνίας ΓΟΔ θά ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς (Σχῆμα ἀσκήσεως)

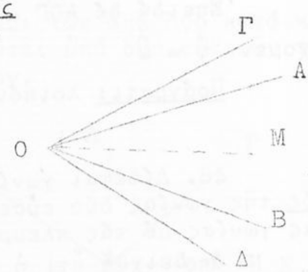
'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{AOM} = \widehat{MOB}$ (1) 'Επίσης
'Εξ ὑποθέσεως " $\widehat{AO\Gamma} = \widehat{\Delta OB}$ (2)

'Αφαιροῦμεν κατά μέλη: $\widehat{AOM} - \widehat{AO\Gamma} = \widehat{MOB} - \widehat{\Delta OB}$

ἤ $\widehat{ΓΟΜ} = \widehat{ΜΟΔ}$

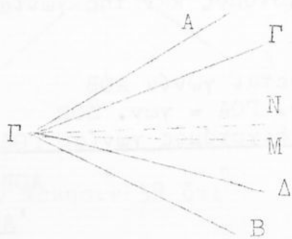
Ὥστε πράγματι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος καί τῆς γωνίας ΓΟΔ ὅ.ἔ.δ.

2. Κατά τούς ἰδίους ὡς ἄνω τρόπους ἐργαζόμεθα ἐάν αἱ εὐθεῖαι ΟΓ καί ΟΔ δίδονται ἐκτός τῆς γωνίας ΑΟΒ, καθώς εἰς τό παραπλεύρως εὑρισκόμενον σχῆμα.



3. Ἐάν εἰς τήν ἐκφώνησιν ἐδίδοντο αἱ διχοτόμοι ΟΜ τῆς γωνίας ΓΟΔ καί ΟΝ τῆς γωνίας ΑΟΒ καί ἐζητεῖτο νά ἀποδείξωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι αὗται συμπίπτουν τότε θά ἐργαζώμεθα ὡς ἑξῆς:

Ἀποδεικνύομεν ὅπως καί ἀνωτέρω ὅτι ἡ ΟΜ, διχοτόμος τῆς γων. ΓΟΔ εἶναι διχοτόμος καί τῆς γωνίας ΑΟΒ.



Τότε ὅμως ἡ γωνία ΑΟΒ θά εἶχεν δύο διχοτόμους, τήν ΟΝ ἐξ ὑποθέσεως καί τήν ΟΜ ἐξ ἀποδείξεως, ὅπερ ἄτοπον.

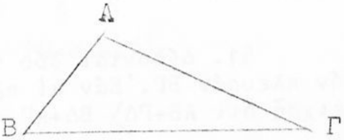
Ἄρα αἱ διχοτόμοι ΟΜ καί ΟΝ τῶν δύο ὡς ἄνω εὑρισκομένων γωνιῶν συμπίπτουν ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΕΚΤΗ

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς ἐ π ί τ ῶ ν σ χ έ σ ε ω ν ε ὐ θ ε ι ῶ ν κ α ί τ ε θ λ α σ μ έ ν ω ν γ ρ α μ μ ῶ ν κ α θ ώ ς κ α ί μ ε τ α ξ ύ τ ε θ λ α σ μ έ ν ω ν γ ρ α μ μ ῶ ν, μ έ τ ά α ὐ τ ά ἄ κ ρ α.

49. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη πλευρά τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς ημιπεριμέτρου του.

Λ ύ σ ι ς



Τρίγωνον $AB\Gamma$
πλευρά AB

$$AB < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$$

Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$AB < A\Gamma+B\Gamma$ (§28).

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀνισότητος τήν πλευράν AB καί ἔχομεν

$AB+AB < AB+B\Gamma+A\Gamma$ ἤ

$2.AB < AB+B\Gamma+A\Gamma$ ἤ

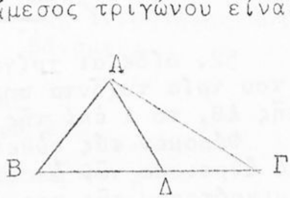
(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$\frac{\cancel{2}.AB}{\cancel{2}} < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$ καί

τέλος $AB < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

50. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς ἡμιπεριμέτρου του.

Λ ύ σ ι ς



Τρίγ. $AB\Gamma$
Διάμεσος $A\Delta$

$$A\Delta < \frac{AB+A\Gamma+B\Gamma}{2}$$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{ll} & ΑΔ < ΑΒ+ΒΔ \quad (\S\ 28) \\ \text{καί} & ΑΔ < ΑΓ+ΔΓ \quad (\S\ 28) \end{array}\right\}$$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί

ἔχομεν:

$ΑΔ+ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+ΒΔ+ΔΓ$ ἤ (διότι $ΒΔ+ΔΓ= ΒΓ$)

$2.ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ$ ἤ

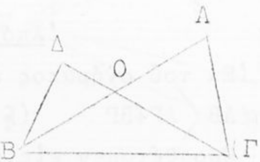
(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$$\frac{\cancel{2}.ΑΔ}{\cancel{2}} < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2} \quad \text{καί}$$

τέλος $$ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2}$$ ὅ.ε.δ.

51. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΒΓ ἔχοντα κοινήν τήν πλευράν ΒΓ. 'Εάν αἱ πλευραί ΑΒ καί ΓΔ τέμνωνται ν'ἀποδειχθῇ ὅτι $ΑΒ+ΓΔ > ΒΔ+ΑΓ$.

Λύσις



Τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΒΓ
Πλευρά ΒΓ κοινή
ΑΒ, ΓΔ τέμνονται

$ΑΒ+ΓΔ > ΒΔ+ΑΓ$

'Απόδειξις

Ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς τῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΓΔ. Τότε ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

$$\left.\begin{array}{ll} & ΒΟ+ΟΔ > ΒΔ \quad (\S\ 28) \\ \text{καί} & ΑΟ+ΟΓ > ΑΓ \quad (\S\ 28) \end{array}\right\}$$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί λαμβάνομεν:

$ΒΟ+ΟΔ+ΑΟ+ΟΓ > ΒΔ+ΑΓ$ ἤ

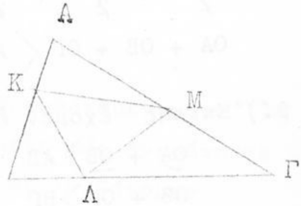
(διότι $ΒΟ + ΑΟ = ΑΒ$ καί $ΟΔ + ΟΓ = ΓΔ$)

$ΑΒ + ΓΔ > ΒΔ + ΑΓ$ ὅ.ε.δ.

52. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Λαμβάνομεν ἐπί τῶν πλευρῶν του τρία τυχόντα σημεῖα τά Κ,Λ καί Μ ὡς ἑξῆς. Τό Κ ἐπί τῆς ΑΒ, τό Λ ἐπί τῆς ΒΓ καί τό Μ ἐπί τῆς ΑΓ.

Φέρομεν τάς εὐθείας ΚΛ, ΛΜ καί ΜΚ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν αὐτῶν σημείων εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ δοθέντος τριγώνου.

Λύσις



Κ. τυχ. σημ. ΑΒ
Λ " " ΒΓ
Μ " " ΑΓ

ΚΛ+ΛΜ+ΜΚ < ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΚΛ < ΚΒ+ΒΛ (§ 28)
ΛΜ < ΛΓ+ΓΜ (§ 28)
καί ΜΚ < ΜΑ+ΑΚ (§ 28)

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί λαμβάνομεν:

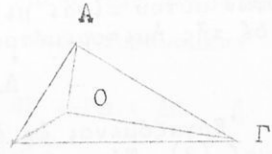
ΚΛ+ΛΜ+ΜΚ < ΚΒ+ΒΛ+ΛΓ+ΓΜ+ΜΑ+ΑΚ ἤ

(διότι ΚΒ+ΑΚ=ΑΒ, ΒΛ+ΛΓ=ΒΓ καί ΓΜ+ΜΑ=ΑΓ).

ΚΛ+ΛΜ+ΜΚ < ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ ὅ.ἔ.δ.

53. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Ο ἐντός αὐτοῦ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπό τάς κορυφάς τοῦ τριγώνου εἶναι α΄) μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου καί β΄) μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ.

Λύσις



Ο τυχ.σημ.ἐντός τριγώνου ΑΒΓ

α΄) ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ < ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ

β΄) ΟΑ+ΟΒ+ΟΓ > $\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ}{2}$

'Απόδειξις

α΄) 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΟΒ+ΟΓ < ΑΒ+ΑΓ (§ 30)
ΟΓ+ΟΑ < ΑΒ+ΒΓ (§ 30)
καί ΟΑ+ΟΒ < ΑΓ+ΒΓ (§ 30)

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας καί λαμβάνομεν:

2.ΟΑ+2.ΟΒ+2.ΟΓ < 2.ΑΒ+2.ΒΓ+2.ΑΓ ἤ

(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$\frac{2.ΟΑ+2.ΟΒ+2.ΟΓ}{2} < \frac{2.ΑΒ+2.ΒΓ+2.ΑΓ}{2}$ ἤ

$$\frac{\cancel{2}.OA}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.OB}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.O\Gamma}{\cancel{2}}<\frac{\cancel{2}.AB}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.B\Gamma}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.A\Gamma}{\cancel{2}} \quad \text{ἤ}$$

$$OA+OB+O\Gamma<AB+B\Gamma+A\Gamma \qquad (1)$$

ὅ.ἔ.δ.

β:) Ἐπίσης ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος

$$\left.\begin{array}{lr} OA+OB>AB & (\S\ 28\ ) \\ OB+O\Gamma>B\Gamma & (\S\ 28\ ) \\ \text{καί}\quad O\Gamma+OA>\Gamma A & (\S\ 28\ ) \end{array}\right\}$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας καί λαμβάνομεν:

$$2.OA+2.OB+2.O\Gamma>AB+B\Gamma+\Gamma A \quad \text{ἤ}$$

(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$$\frac{2.OA+2.OB+2.O\Gamma}{2}>\frac{AB+B\Gamma+\Gamma A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\cancel{2}.OA}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.OB}{\cancel{2}}+\frac{\cancel{2}.O\Gamma}{\cancel{2}}>\frac{AB+B\Gamma+\Gamma A}{2} \quad \text{ἤ}$$

$$OA+OB+O\Gamma>\frac{AB+B\Gamma+\Gamma A}{2} \qquad (2) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

<u>Σημείωσις</u>: Ἔστω ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις μᾶς ἐδίδετο ὑπό τήν ἑξῆς ἐκφώνησιν "Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Ο κειμένου ἐντός τριγώνου ΑΒΓ, ἀπό τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἶναι μικρότερον μέν τῆς περιμέτρου μεγαλύτερον δέ τῆς ἡμιπεριμέτρου αὐτοῦ".

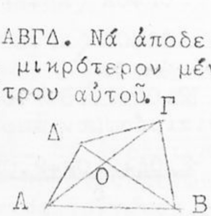
<u>Λ ύ σ ι ς</u>

Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ἀποκτῶμεν τάς ἀνισότητας (1) καί (2). Τώρα συνδυάζοντες αὐτάς ἔχομεν (§ Ι4) (εἰς μίαν μόνον παράστασιν).

$$\frac{AB+B\Gamma+\Gamma A}{2}<OA+OB+O\Gamma<AB+B\Gamma+\Gamma A$$

54. Δίδεται κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διαγωνίων του εἶναι μικρότερον μέν τῆς περιμέτρου μεγαλύτερον δέ τῆς ἡμεπεριμέτρου αὐτοῦ.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



<u>ΑΒΓΔ κυρτ. τετράπλευρον</u>

α:) $A\Gamma+B\Delta<AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A$

β:) $A\Gamma+B\Delta>\dfrac{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A}{2}$

'Απόδειξις

α.) 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν·

$$\left.\begin{array}{ll} ΑΓ < ΑΒ+ΒΓ & (\S\ 28) \\ ΑΓ < ΑΔ+ΔΓ & (\S\ 28) \\ ΒΔ < ΑΒ+ΑΔ & (\S\ 28) \\ ΒΔ < ΒΓ+ΓΔ & (\S\ 28) \end{array}\right\}$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας καί λαμβάνομεν

$$2.ΑΓ + 2.ΒΔ < 2.ΑΒ + 2.ΒΓ + 2.ΓΔ + 2.ΑΔ$$ ἤ

(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$$\frac{\cancel{2}.ΑΓ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΒΔ}{\cancel{2}} < \frac{\cancel{2}.ΑΒ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΒΓ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΓΔ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΑΔ}{\cancel{2}}$$

ἤ $ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΑΔ \quad (1)$ ὅ.ἔ.δ.

β.) Ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Τότε ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

$$\left.\begin{array}{lll} & ΑΟ + ΟΒ > ΑΒ & (\S\ 28) \\ & ΟΒ + ΟΓ > ΒΓ & (\S\ 28) \\ & ΟΓ + ΟΔ > ΓΔ & (\S\ 28) \\ \text{καί} & ΟΔ + ΟΑ > ΑΔ & (\S\ 28) \end{array}\right\}$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας καί λαμβάνομεν:

$$2.ΑΟ + 2.ΟΒ + 2.ΟΓ + 2.ΟΔ > ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ$$ ἤ

(ἄν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2)

$$\frac{\cancel{2}.ΑΟ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΟΒ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΟΓ}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{2}.ΟΔ}{\cancel{2}} > \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2}$$ ἤ

$$ΑΟ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ > \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2}$$ ἤ

(διότι ΑΟ + ΟΓ = ΑΓ καί ΟΒ + ΟΔ = ΒΔ)

$$ΑΓ + ΒΔ > \frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2}$$ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις:

Δυνάμεθα τώρα νά συνδυάσωμεν τάς ἀνισότητας (1) καί (2) κατά τήν (§ 14) ὡς ἑξῆς:

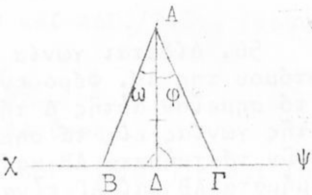
$$\frac{ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ}{2} < ΑΓ + ΒΔ < ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ$$

ΟΜΑΣ ΕΒΔΟΜΗ

Ἀσκήσεις ἐπί τῆς ἰσότητος τῶν στοιχείων τῶν τριγώνων.

55. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Φέρομεν τήν ΑΔ κάθετον ἐπί τήν χψ καί δύο πλαγίας τάς ΑΒ καί ΑΓ αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν ἴσας γωνίας ω καί φ μέ τήν κάθετον. Νά συγκριθοῦν αἱ πλάγιαι αὗται (ἤ κατ'ἄλλην ἀπόδοσιν τῆς ἐκφωνήσεως. "νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλάγιαι αὗται εἶναι ἴσαι").

Λύσις



Δίδονται εὐθεῖα χψ καί σημ.Α

$ΑΔ \perp χψ$

ΑΒ, ΑΓ πλάγιαι πρός χψ

$\hat{ω} = \hat{φ}$.

ΑΒ = ΑΓ.

Ἀπόδειξις

Α' Ὑποδειγματικός τρόπος δεικνύων πῶς οἱ μαθηταί θά γράφουν εἰς τάς γραπτάς ἐξετάσεις τήν λύσιν μιᾶς ἀσκήσεως.

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν τάς γωνίας των ΑΔΒ καί ΑΔΓ ἴσας ὡς ὀρθάς ἀφοῦ ἐξ ὑποθέσεως $ΑΔ \perp χψ$.

Ἐπίσης ἔχουν τήν πλευράν ΑΔ κοινήν καί τάς γωνίας ω καί φ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως.

Τά τρίγωνα λοιπόν εἶναι ὀρθογώνια ἔχοντα μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην (ἐδῶ κοινήν) καί μίαν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτήν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην.

Ἑπομένως εἶναι ἴσα καί τότε ὅλα των τά στοιχεῖα θά εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως. Ἀπέναντι ἴσων πλευρῶν εὑρίσκονται ἴσαι γωνίαι καί ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν ἴσαι πλευραί.

Ὥστε: ΑΒ=ΑΓ, ὡς ὑποτείνουσαι εὑρισκόμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων ὀρθῶν γωνιῶν. ὅ.ἔ.δ.

Β' Σύντομος τρόπος ἀποδόσεως τῆς λύσεως, δεικνύων πῶς οἱ μαθηταί θά γράφουν τάς ἀσκήσεις εἰς τά τετράδιά των, ἄν βεβαίως τό ἐπιθυμοῦν, ἤ καί εἰς τόν πίνακα δεδομένου ὅτι θά δύνανται διά ζώσης νά συμπληρώνουν ὅσα οἱ κύριοι ἐξετασταί των τούς ζητοῦν.

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ.Ταῦτα ἔχουν:

Τήν ΑΔ,πλευράν κοινήν

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ἐξ ὑποθέσεως) καί

$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ (ὡς ὀρθάς ἀφοῦ $A\Delta \perp \chi\psi$)

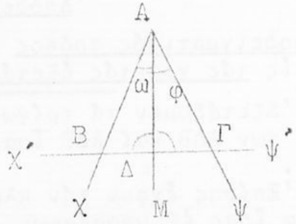
'Επομένως (§ 6Ι) τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΒ=ΑΓ ὅ.ἔ.δ.

<u>Σημείωσις:</u> Εἰς τό ἑξῆς ἐμεῖς θά γράφωμεν μόνον τόν β΄τρόπον.

---

56. Δίδεται γωνία χΑψ καί τυχόν σημεῖον Δ ἐπί τῆς διχοτόμου της ΑΜ. Φέρομεν κάθετον ἐπί τήν διχοτόμον ΑΜ εἰς τό σημεῖον αὐτῆς Δ τήν χ΄ψ΄ ἡ ὁποία τέμνει τάς πλευράς τῆς γωνίας εἰς τά σημεῖα Β καί Γ ἀντιστοίχως. Νά συγκριθοῦν τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ (ἤ <u>ἄλλως:</u>"νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά τμήματα ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσα").

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



Δίδονται
Γωνία χΑψ
ΑΜ διχ.τῆς $\hat{A}$ καί
Δ τυχ. σημ.τῆς ΑΜ
<u>χ΄ψ΄⊥ΑΜ εἰς τό Δ</u>

ΑΒ = ΑΓ.

<u>'Απόδειξις</u>

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν:

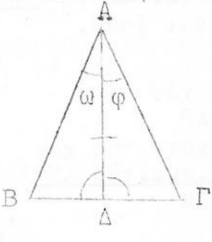
Τήν ΑΔ,πλευράν κοινήν

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἡμίση τῆς $\chi\hat{A}\psi$ ἀφοῦ ΑΜ διχ.) καί $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ (ὡς ὀρθάς ἀφοῦ $\chi'\psi' \perp AM$).

'Επομένως (§ 6Ι) τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΒ=ΑΓ ὅ.ἔ.δ.

---

57. Ἂν ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ εἶναι συγχρόνως καί ὕψος αὐτοῦ, νά συγκριθοῦν αἱ πλευραί ΑΒ καί ΑΓ αὐτοῦ(ἤ ἄλλως "νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραί ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσαι").



Λ ύ σ ι ς

ΑΔ διχ. τῆς γων. Α
ΑΔ ὕψος τοῦ τριγώνου
ΑΒ = ΑΓ

'Απόδειξις

(Σημείωσις: Ὡς σχῆμα κατασκευάζομεν τρίγ.ΑΒΓ ἰσοσκελές χωρίς ὅμως νά μεταχειριζώμεθα εἰς τήν ἀπόδειξιν πᾶν ὅ,τι ἀπορρέει ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ σχήματος).

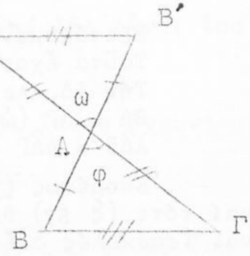
'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ. Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΑΔ,πλευράν κοινήν
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ἀφοῦ ΑΔ διχ.τῆς $\hat{A}$)
καί $\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΔΓ}$ (ὡς ὀρθάς ἀφοῦ ΑΔ ὕψος).

Τά τρίγωνα λοιπόν ΑΔΒ καί ΑΔΓ (§ 6I) εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΒ=ΑΓ. ὅ.ἔ.δ.

---

58. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τάς πλευράς αὐτοῦ ΑΒ καί ΑΓ πρός τό ἄλλο μέρος τῆς κορυφῆς Α καί ἐπί τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΑΒ΄=ΑΒ καί ΑΓ΄= ΑΓ.Φέρομεν τέλος τό εὐθύγραμ.τμῆμα Β΄Γ΄. Νά συγκριθῇ τοῦτο πρός τήν πλευράν ΒΓ (ἤ ἄλλως: νά ἀποδειχθῇ ὅτι Β΄Γ΄= ΒΓ).

Λ ύ σ ι ς



Τρίγ. ΑΒΓ
ΑΒ΄= ΑΒ
ΑΓ΄= ΑΓ
Β΄Γ΄= ΒΓ

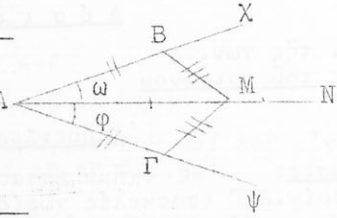
'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒ΄Γ΄ καί ΑΒΓ
Ταῦτα ἔχουν:
ΑΒ΄ = ΑΒ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΑΓ΄= ΑΓ (" ") καί
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς κατά κορυφήν)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΒ΄Γ΄ καί ΑΒΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν Β΄Γ΄= ΒΓ ὅ.ἔ.δ.

59. Δίδεται γωνία χΑψ. Ἐπί τῶν πλευρῶν αὐτῆς ορίζομεν τμήματα ΑΒ καί ΑΓ ἴσα μεταξύ των. Ἄν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς διχοτόμου ΑΝ τῆς γωνίας νά συγκριθοῦν τά τμήματα ΜΒ καί ΜΓ (ἤ <u>ἄλλως</u>: νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά τμήματα ΜΒ καί ΜΓ εἶναι ἴσα).

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



Γωνία χΑψ
ΑΒ = ΑΓ
ΑΝ διχοτ. τῆς $\widehat{\chi A \psi}$
<u>Μ τυχ. συμ. τῆς ΑΝ</u>
ΒΜ = ΓΜ

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα: ΑΒΜ καί ΑΓΜ. Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΑΜ, πλευράν κοινήν
ΑΒ = ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καί
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἡμίση τῆς $\widehat{\chi A \psi}$)

Ἐπομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΑΓΜ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) ἔχουν καί ΒΜ=ΓΜ ὅ.ἔ.δ.

---

60. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄν ἡ διάμεσος αὐτοῦ ΑΔ εἶναι συγχρόνως καί ὕψος αὐτοῦ, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

Τριγ. ΑΒΓ
ΑΔ διάμεσος
<u>ΑΔ ὕψος</u>
τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΑΔ, πλευράν κοινήν
ΒΔ = ΔΓ (ὡς ἡμίση τῆς ΔΓ) καί
$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ (ὡς ὀρθάς)

Ἐπομένως (§ 59) τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΒ = ΑΓ δηλ. τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές ὅ.ἔ.δ.

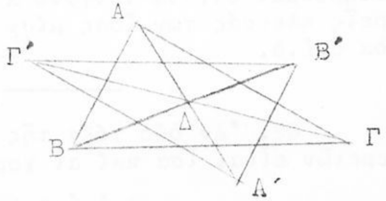
---

61. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί τυχόν σημεῖον Δ κείμενον είς τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Φέρομεν τάς εὐθείας ΑΔ, ΒΔ καί ΓΔ καί προεκτείνοντες αὐτάς πέραν τοῦ Δ λαμβάνομεν, ἐπί τῶν προεκτάσεων τμήματα ΔΑ΄= ΔΑ, ΔΒ΄= ΔΒ καί ΔΓ΄= ΔΓ. Σχηματίζομεν τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄. Νά συγκριθοῦν τά τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄καί ΑΒΓ (ἤ ἄλλως: νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά δύο αὐτά τρίγωνα εἶναι ἴσα).

Λ ύ σ ι ς

I. Τό σημ.Δ ἐντός τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

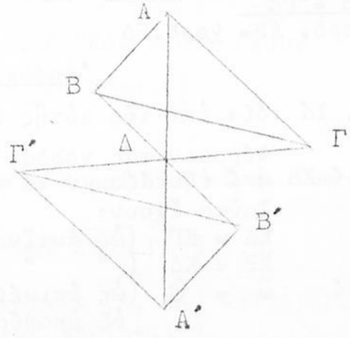
Τριγ. ΑΒΓ.
Δ τυχ.σημεῖον
I) ἐντός τοῦ τριγ.ΑΒΓ
II) ἐκτός " "
ΔΑ΄= ΔΑ
ΔΒ΄= ΔΒ
ΔΓ΄= ΔΓ



Τότε:

Εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις
Τριγ.Α΄Β΄Γ΄= τρίγ.ΑΒΓ

II. Τό σημ.Δ ἐκτός τοῦ τριγ.ΑΒΓ



'Απόδειξις

1)'Εξετάζομεν (εἰς ὁποιονδήποτε ἐκ τῶν δύο σχημάτων) τά τρίγωνα Α΄Β΄Δ καί ΑΒΔ.

Ταῦτα ἔχουν
ΔΑ΄= ΔΑ (διότι ἐλήφθησαν)
ΔΒ΄= ΔΒ (" ") καί
Α΄$\widehat{\Delta}$Β΄= ΑΔΒ (ὡς κατά κορυφήν)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα Α΄Β΄Δ καί ΑΒΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) ἔχουν

Α΄Β΄ = ΑΒ (1)

2)'Εξετάζομεν τά τρίγωνα Α΄Γ΄Δ καί ΑΓΔ. Ταῦτα ἔχουν:
ΔΑ΄= ΔΑ (διότι ἐλήφθησαν)
ΔΓ΄= ΔΓ (" ") καί

Α΄$\widehat{\Delta\Gamma}$΄= $\widehat{\text{ΑΔΓ}}$ (ὡς κατά κορυφήν)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα Α΄Γ΄Δ καί ΑΓΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) ἔχουν

ΑΓ΄= ΑΓ (2)

3)'Εξετάζομεν τέλος τά τρίγωνα Β΄Γ΄Δ καί ΒΓΔ. Ταῦτα ἔχουν:

ΔΒ΄= ΔΒ (διότι ἐλήφθησαν)
ΔΓ΄= ΔΓ (διότι ") καί
$\widehat{Β΄ΔΓ΄} = \widehat{ΒΔΓ}$ (ὡς κατά κορυφήν)

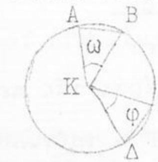
Ἑπομένως (§ 56) τά τρίγωνα Β΄Γ΄Δ καί ΒΓΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) ἔχουν Β΄Γ΄= ΒΓ (3)

'Εξετάζοντες τώρα τάς ἰσότητας (1) (2) καί (3) παρατηροῦμεν ὅτι τά τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄καί ΑΒΓ ἔχουν καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν. Ἄρα (§ 62) εἶναι ἴσα ὅ.ἔ.δ.

---

62. Ἄν δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσα καί αἱ χορδαί αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Λύσις



$\widehat{ΑΒ} = \widehat{ΓΔ}$
χορδ. ΑΒ= χορδ.ΓΔ

'Απόδειξις

Ι. Τά τόξα ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Φέρομεν τάς χορδάς ΑΒ καί ΓΔ,τάς ἀκτίνας ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ καί ΚΔ καί ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ.

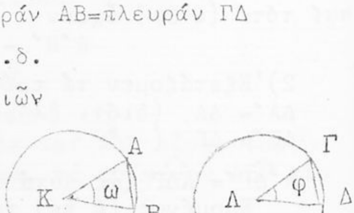
Ταῦτα ἔχουν:
ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου)
ΚΒ = ΚΔ (" " " ")
καί $\hat{ω} = \hat{φ}$ (ὡς ἐπικέντρους ἀντιστοιχούσας εἰς ἴσα, ἐξ ὑποθέσεως, τόξα).

Ἑπομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί πλευράν ΑΒ=πλευράν ΓΔ

Ὥστε χορδή ΑΒ= χορδ.ΓΔ ὅ.ἔ.δ.

ΙΙ. Τά τόξα ἐπί δύο ἴσων περιφερειῶν

(Κ,ΚΑ) καί (Λ,ΛΓ)



Φέρομεν τάς χορδάς ΑΒ καί ΓΔ καί ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ. Ταῦτα ἔχουν:

ΚΑ = ΛΓ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων)
ΚΒ = ΛΔ (" " ")

καί $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἐπικέντρους ἀντιστοιχούσας εἰς ἴσα, ἐξ ὑποθέσεως, τόξα)

Ἐπομένως (§ 56) τά τρίγωνα κτλ. ὡς ἀνωτέρω εἶναι ἴσα.

Ἄρα χορδ.ΑΒ = χορδ.ΓΔ ὡς πλευραί ἴσων τριγώνων εὑρισκόμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν ὅ.ἔδ.

---

63. Ἄν δύο χορδαί, μικροτέρων ἡμιπεριφερείας τόξων τῆς αὐτῆς ἤ ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι καί τά τόξα ταῦτα εἶναι ἴσα.

Λ ύ σ ι ς

Χορδ.ΑΒ=χορδ.ΓΔ

$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$

Ἀπόδειξις

Ι. Αἱ χορδαί ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας (βλέπε σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως περίπτ.Ι).

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ. Ταῦτα ἔχουν

ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου)
ΚΒ = ΚΔ (ὡς " " ")
καί ΑΒ = ΓΔ (ἐξ ὑποθέσεως

Ἐπομένως (§ 62) τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

Ἀλλά τότε (§ 43) θά ἔχουν καί $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ ὅ.ἔ.δ.

ΙΙ. Αἱ χορδαί ἐπί δύο ἴσων περιφερειῶν (Κ, ΚΑ) καί (Λ, ΛΓ.) (βλ.σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως περίπτ.ΙΙ)

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ. Ταῦτα ἔχουν:

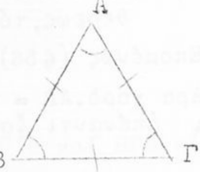
ΚΑ = ΛΓ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων)
ΚΒ = ΛΔ (" " " ")
καί ΑΒ = ΓΔ (ἐξ ὑποθέσεως)

Ἐπομένως (§ 62) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$.

Ἀλλά τότε (§ 43) θά ἔχουν καί $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ ὅ.ἔ.δ.

---

64. Πᾶν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καί ἰσογώνιον.



Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ
ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$

'Απόδειξις

'Επειδή ΑΒ=ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ βάσιν τήν πλευράν ΒΓ

'Επομένως (§ 64) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (1). 'Επίσης ἐπειδή ΑΒ=ΒΓ (ἐξ ὑποθέσεως) τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές μέ βάσιν τήν πλευράν ΑΓ.

'Επομένως (§ 64) $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν (§ Ι)

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ Ὥστε τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι καί ἰσογώνιον ὅ.ἔ.δ.

---

65. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄν Μ εἶναι τό μέσον τῆς βάσεως ΒΓ καί λάβωμεν ἐπί τῶν ἴσων πλευρῶν του, ἀρχόμενοι ἐκ τῆς κορυφῆς Α, ἴσα τμήματα ΑΕ καί ΑΖ, φέρομεν δέ καί τά εὐθύγραμμα τμήματα ΜΕ καί ΜΖ νά ἀποδειχθῆ ὅτι ΜΕ = ΜΖ.

Λ ύ σ ι ς

Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές.
Μ μέσον ΒΓ
ΑΕ = ΑΖ.
ΜΕ=ΜΖ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΜΕ καί ΑΜΖ. Ταῦτα ἔχουν:

Τήν ΑΜ, πλευράν κοινήν

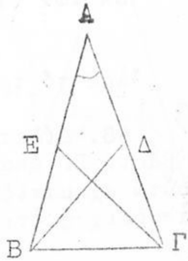
ΑΕ = ΑΖ (διότι ἐλήφθησαν) καί

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (διότι εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον ἡ διάμεσος αὐτοῦ εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς).

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΜΕ καί ΑΜΖ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΜΕ=ΜΖ ὅ.ἔ.δ.

66. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τάς ἴσας πλευράς αὐτοῦ εἶναι ἴσαι.

Λύσις



Τριγ.ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΑΒ = ΑΓ
ΒΔ διάμεσος
ΓΕ "

ΒΔ = ΓΕ

'Απόδειξις

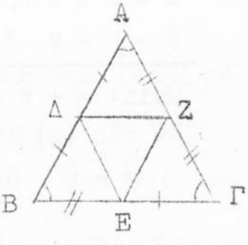
'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΕΓ
Ταῦτα ἔχουν:
Γωνίαν Α κοινήν
ΑΒ = ΑΓ (ὡς ἴσας πλευράς τοῦ ἰσοσκελοῦς) καί
ΑΔ = ΑΕ (ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΓ καί ΑΒ)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΕΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) τά τρίγωνα θά ἔχουν καί ΒΔ = ΓΕ. ὅ.ἔ.δ.

---

67. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄν Δ,Ε καί Ζ εἶναι τά μέσα τῶν πλευρῶν του νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσόπλευρον
Δ, Ε, Ζ, μέσα πλευρῶν
τριγ.ΔΕΖ ἰσόπλευρον

'Απόδειξις

1)'Εξετάζομεν τά τρίγωνα
ΑΔΖ καί ΔΒΕ
Ταῦτα ἔχουν:

ΑΔ = ΔΒ (ὡς ἡμίση τῆς πλευρᾶς ΑΒ)
ΑΖ = ΒΕ (" " ἴσων πλευρῶν τοῦ τριγ.ΑΒΓ)
καί $\hat{A} = \hat{B}$ (διότι τό ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι καί ἰσογώνιον).

'Επομένως (§56) τά τρίγωνα ΑΔΖ καί ΔΒΕ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

ΔΖ = ΔΕ (1)

2) Ἐξετάζοντες τά τρίγωνα ΑΔΖ καί ΓΕΖ ἀποδεικνύομεν κατά τόν ἴδιον τρόπον ὅτι:

ΔΖ = ΖΕ (2)

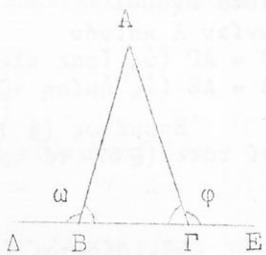
Ἐκ τῶν (1) καί (2) προκύπτει ὅτι (§ Ι)

ΔΕ = ΕΖ = ΖΔ

Ἄρα τό τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἰσόπλευρον ὅ.ἔ.δ.

68. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τήν βάσιν ΒΓ ἑκατέρωθεν τῶν κορυφῶν Β καί Γ. Νά συγκριθοῦν αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ἐξωτερικαί γωνίαι ω καί φ (ἤ ἄλλως νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐξωτερικαί γωνίαι ω καί φ εἶναι ἴσαι)

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές

$\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ἐξωτερ. γωνίαι

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές αἱ παρά τήν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε: γων.Β = γων.Γ (1)

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν τώρα:

$$\left.\begin{array}{ll} \hat{\omega} + \hat{B} = 2 \text{ ὀρθ.} & (\S 52) \text{ καί} \\ \hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ "} & (\S 52) \end{array}\right\} \text{Τά β΄ μέλη ἴσα ἄρα καί τά α΄}$$

Ὥστε: $\hat{\omega} + \hat{B} = \hat{\varphi} + \hat{\Gamma}$ (2)

Ἐκ τῆς (2) λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν (§ 3)

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ ὅ.ἔ.δ.

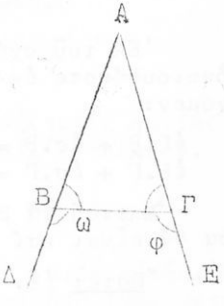
69. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τάς ἴσας πλευράς πέραν τῆς βάσεως ΒΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ οὕτω σχηματιζόμεναι ἐξωτερικαί γωνίαι ω καί φ εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές

$\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ ἐξωτερικαί γωνίαι

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$



'Απόδειξις

'Επειδή τό τρίγωνον ΑΒΓ είναι ἰσοσκελές αἱ παρά τήν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι.

"Ωστε: γων. Β = γων.Γ (1)

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν τώρα:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\omega} + \hat{B} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad (\S\ 52) \text{ καί} \\ \hat{\varphi} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad (\S\ 52)\end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Τά β΄μέλη} \\ \text{ἴσα ἄρα} \\ \text{καί τά α΄}\end{array}$$

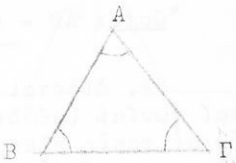
"Ωστε: $\hat{\omega} + \hat{B} = \hat{\varphi} + \hat{\Gamma}$ (2)

'Εκ τῆς (2) λόγῳ τῆς (1) ἔχομεν (§ 3)

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ ὅ.ἔ.δ.

70. Πᾶν ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καί ἰσόπλευρον.

Λ ύ σ ι ς



Τρίγωνον ΑΒΓ
$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$

ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ

'Απόδειξις

'Επειδή $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ἐξ ὑποθέσεως) τότε (§ 65) τό τρίγωνον ΑΒΓ θά ἔχῃ ΑΒ = ΑΓ (1)

'Επίσης ἐπειδή $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ (ἐξ ὑποθέσεως) τότε (§ 65) τό τρίγωνον ΑΒΓ θά ἔχῃ ΑΒ = ΒΓ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν (§ Ι) ὅτι

ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ. "Ωστε τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι καί ἰσόπλευρον ὅ,ἔ.δ.

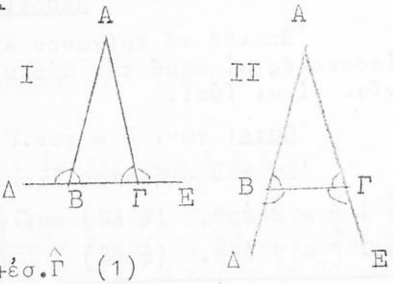
71. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, τό ὁποῖον ἔχει τάς ἐξωτερικάς γωνίας Β καί Γ ἴσας. Νά συγκριθοῦν αἱ πλευραί ΑΒ καί ΑΓ (ἤ ἄλλως. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ πλευραί ΑΒ καί ΑΓ εἶναι ἴσαι).

Λ ύ σ ι ς

Τριγων.ΑΒΓ
ἐξωτερ.γων.Β = ἐξωτ.γων.Γ

ΑΒ = ΑΓ

'Απόδειξις



'Εκ τοῦ σχήματος (ὁποιουδήποτε ἐκ τῶν δύο) ἔχομεν:

ἐξ.$\hat{B}$ + ἐσ.$\hat{B}$ = 2 ὀρθ. (§ 52)
ἐξ.$\hat{\Gamma}$ + ἐσ.$\hat{\Gamma}$ = 2 ὀρθ. (§ 52)

'Επειδή τά β΄μέλη εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά α΄ἴσα.

"Ωστε: ἐξ. $\hat{B}$+ἐσ.$\hat{B}$ = ἐξ.$\hat{\Gamma}$+ἐσ.$\hat{\Gamma}$ (1)

'Αλλ'ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν:ἐξωτ.B = ἐξωτ.$\hat{\Gamma}$

Οὕτω ἐκ τῆς (1) ἔχομεν (§ 3)

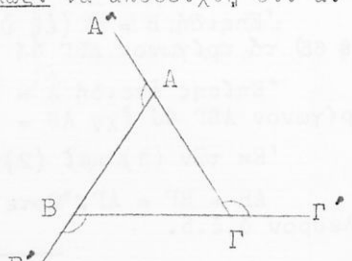
ἐσωτ. $\hat{B}$ = ἐσωτ. $\hat{\Gamma}$

'Αφοῦ λοιπόν τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει δύο γωνίας ἴσας θά ἔχῃ καί τάς ἀπέναντι αὐτῶν κειμένας πλευράς ἴσας (δηλ.θά εἶναι ἰσοσκελές)

"Ωστε: ΑΒ = ΑΓ ὅ.ἔ.δ.

72. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἐξωτερικαί γωνίαι (μέ διαφόρους κορυφάς) εἶναι ἴσαι. Νά συγκριθοῦν αἱ τρεῖς πλευραί αὐτοῦ (ἤ ἄλλως: νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τρεῖς πλευραί εἶναι ἴσαι).

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ
ἐξωτ.$\hat{A}$ = ἐξωτ.$\hat{B}$ =ἐξωτ.$\hat{\Gamma}$
ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ἐξωτ.$\hat{A}$ + ἐσωτ.$\hat{A}$ = 2 ὀρθ. (§ 52)
ἐξωτ.$\hat{B}$ + ἐσωτ.$\hat{B}$ = 2 ὀρθ. (§ 52)
ἐξωτ.$\hat{\Gamma}$ + ἐσωτ.$\hat{\Gamma}$ = 2 ὀρθ. (§ 52)

'Επειδή τά β΄μέλη εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά α΄ἴσα.

"Ωστε:

ἐξωτ.$\hat{A}$+ἐσωτ.$\hat{A}$=ἐξ.$\hat{B}$+ἐσ.$\hat{B}$=ἐξ.$\hat{\Gamma}$+ἐσ.$\hat{\Gamma}$ (1)

'Αλλ'ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: ἐξ.$\hat{A}$=ἐξ.$\hat{B}$=ἐξ.$\hat{Γ}$

Οὕτω ἐκ τῆς (1) ἔχομεν (§3)

ἐσ.$\hat{A}$ = ἐσ.$\hat{B}$ = ἐσ. $\hat{Γ}$

'Αφοῦ λοιπόν τό τρίγωνον ἔχει καί τάς τρεῖς γωνίας ἴσας εἶναι ἰσογώνιον καί ἐπομένως (§69) καί ἰσόπλευρον.

Ὥστε ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ ὅ.ἔ.δ.

---

73. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τήν ΑΔ κάθετον ἐπί τήν χψ καί δύο, ἴσας μεταξύ των, πλαγίας πρός τήν χψ, τάς ΑΒ καί ΑΓ.

Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ γωνίαι ω καί φ τάς ὁποίας αἱ πλάγιαι σχηματίζουν μέ τήν κάθετον εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Εὐθεῖα χψ καί σημ.Α ἐκτός.
ΑΔ ⊥ χψ
ΑΒ, ΑΓ πλάγιαι πρός χψ
ΑΒ = ΑΓ

$\hat{ω} = \hat{φ}$

'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΑΒ = ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως)

Τό τρίγωνον λοιπόν ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Εἰς ἕν ἰσοσκελές ὅμως τρίγωνον τό ἐπί τήν βάσιν ὕψος εἶναι συγχρόνως καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς.

'Αφοῦ λοιπόν ΑΔ ⊥ ΒΓ
Ἔχομεν $\hat{ω} = \hat{φ}$ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις: Ἄν θέλωμεν ἐξετάζομεν τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ ἀποδεικνύοντες ὅτι εἶναι ἴσα καί τότε θά ἔχουν καί $\hat{ω} = \hat{φ}$.

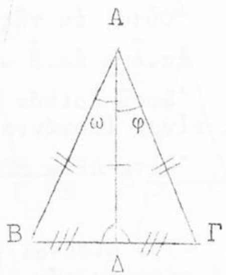
---

74. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Ἄν ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό μεταξύ τῆς κορυφῆς καί τῆς βάσεως αὐτοῦ τμῆμα τῆς διχοτόμου ΑΔ εἶναι καί ὕψος καί διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Λ ύ σ ι ς

Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελ.
ΑΔ διχ.τῆς $\hat{A}$

α) ΑΔ ὕψος τοῦ τριγ.ΑΒΓ
β) ΑΔ διάμεσος τοῦ τριγ.ΑΒΓ



Ἐργασία

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ.

Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΑΔ,πλευράν κοινήν
ΑΒ = ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καί
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἡμίση τῆς $\hat{A}$, ἀφοῦ ΑΔ διχ.)

Ἐπομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΔΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

α΄) $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta\Gamma}$ (ὡς εὑρισκομένας ἀπέναντι τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ).

Ἀλλά $\widehat{A\Delta B} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 2$ ὀρθ.(§ 52).Ἀντικαθιστῶντες τήν $\widehat{A\Delta\Gamma}$ ἔχομεν:

$\widehat{A\Delta B} + \widehat{A\Delta B} = 2$ ὀρθ.

ἤ $2.\widehat{A\Delta B} = 2$ "

ἤ $\frac{\cancel{2}.\widehat{A\Delta B}}{\cancel{2}} = \frac{2}{2} = 1$ ὀρθ.

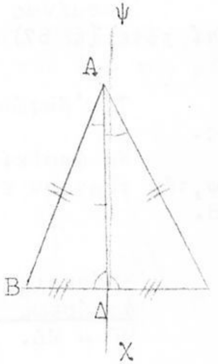
Ὥστε: $\widehat{A\Delta B} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 1$ ὀρθ.

Δηλαδή ἡ ΑΔ σχηματίζουσα ὀρθάς γωνίας μέ τήν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπ'αὐτήν. Ὡς ἀγομένη δέ ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετος ἐπί τήν ἀπέναντι πλευράν εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

β΄) Ἐπειδή ὡς ἀπεδείχθη τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΑΔΓ θά ἔχωμεν (§-57) ὅτι ΒΔ = ΔΓ (ὡς εὑρισκόμεναι ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν $\hat{\omega}$ καί $\hat{\varphi}$).Ἄρα ΑΔ διάμεσος τοῦ τριγ.ΑΒΓ.

75. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία τέμνει τήν βάσιν ΒΓ δίχα καί καθέτως διέρχεται ἀπό τήν κορυφήν αὐτοῦ καί διχοτομεῖ τήν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν Α.

Λ ύ σ ι ς



Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές
Δ μέσον βάσεως ΒΓ
χψ ⊥ ΒΓ εἰς Δ

χψ διέρχεται διά κορυφ. Α
χψ διχοτομεῖ τήν γων. Α

'Απόδειξις

Ἔστω ὅτι ἡ χψ παρ' ὅλον ὅτι εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΒΓ δέν διέρχεται διά τῆς κορυφῆς Α.

Τότε φέρομεν τήν ἐκ τῆς κορυφῆς Α κάθετον ἐπί τήν βάσιν. Ἡ κάθετος αὐτη ὀφείλει νά διέλθῃ διά τοῦ μέσου Δ τῆς βάσεως ΒΓ, ἐπειδή τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές (§ 66).

Τότε ὅμως θά ὑπάρχουν δύο κάθετοι ἐπί τήν ΒΓ εἰς τό σημεῖον Δ ὅπερ ἄτοπον.

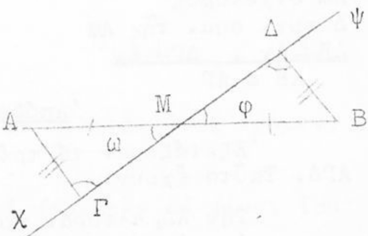
Ἄρα πρέπει ἡ χψ, μεσοκάθετος τῆς ΒΓ, νά διέλθῃ διά τῆς κορυφῆς Α ὅτε θά εἶναι καί ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Τότε ὑπό τήν ἰδιότητα τοῦ ὕψους τοῦ ἰσοσκελοῦς θά εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

---

76. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ. Διά τοῦ μέσου Μ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν χψ καί φέρομεν τάς ἀποστάσεις τῶν ἄκρων Α καί Β ἀπό τῆς χψ. Νά συγκριθοῦν αἱ ἀποστάσεις αὗται (ἤ ἄλλως νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἶναι ἴσαι).

Λ ύ σ ι ς



Εὐθεῖα ΑΒ
Μ μέσον ΑΒ
χψ τυχοῦσα εὐθεῖα
ΑΓ ⊥ χψ
ΒΔ ⊥ χψ

ΑΓ = ΒΔ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΜΓ καί ΒΜΔ. Ταῦτα ἔχουν:
ΑΜ = ΜΒ (ἐξ ὑποθέσεως)
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς κατά κορυφήν)
καί $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ (ὡς ὀρθάς)

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΜΓ καί ΒΜΔ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΓ = ΒΔ ὅ.ἔ.δ.

---

77. 'Εκφώνησις καί σχῆμα τά τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ κάθετοι ἐκ τῶν Α καί Β ἐπί τήν χψ, τήν τέμνουν εἰς σημεῖα ἀπέχοντα ἴσον ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΑΒ.

Λύσις

'Υπόθεσις προηγουμένης ἀσκήσεως (Σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως).

ΜΓ = ΜΔ.

'Απόδειξις

'Εργαζόμενοι ἀκριβῶς ὅπως καί προηγουμένως ἔχομεν:

Τριγ. ΑΜΓ = τριγ. ΒΜΔ

Ἄρα (§ 57) θά ἔχουν ΜΓ = ΜΔ ὅ.ἔ.δ.

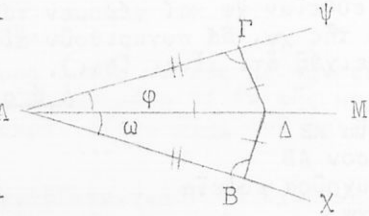
---

78. Δίδεται γωνία χΑψ καί ΑΜ ἡ διχοτόμος αὐτῆς. 'Εκ τυχόντος σημείου Δ τῆς διχοτόμου ΑΜ φέρομεν καθέτους ἐπί τάς πλευράς τῆς γωνίας. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται τέμνουν τάς πλευράς τῆς γωνίας εἰς σημεῖα ἀπέχοντα ἴσον ἀπό τήν κορυφήν τῆς γωνίας.

Λύσις

Γων. χΑψ
ΑΜ διχοτόμος
Δ τυχ. σημ. τῆς ΑΜ
ΔΒ ⊥ Αχ , ΔΓ ⊥ Αψ

ΑΒ = ΑΓ



'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ. Ταῦτα ἔχουν:

Τήν ΑΔ, πλευράν κοινήν

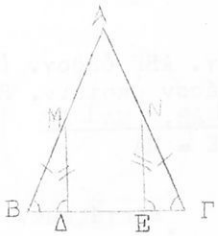
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (διότι ΑΜ διχ. τῆς $\chi\hat{A}\psi$)

καί $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ὡς ὀρθάς)

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΔ εἶναι ἴσα. Ἄρα (§ 57) θά ἔχουν ΑΒ = ΑΓ.

79. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν του ἀπό τήν βάσιν ΒΓ εἶναι ἴσαι.

Λύσις



Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
Μ μέσον ΑΒ
Ν " ΑΓ
ΜΔ ⊥ ΒΓ, ΝΕ ⊥ ΒΓ

ΜΔ = ΝΕ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΔΜ καί ΓΕΝ
Ταῦτα ἔχουν:

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ὡς παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς)

$\hat{\Delta} = \hat{E}$ (ὡς ὀρθάς) καί

ΒΜ = ΓΝ (ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς)

'Επομένως (§71) τά τρίγωνα ΒΔΜ καί ΓΕΝ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΜΔ = ΝΕ ὅ.ἔ.δ.

80. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἐκ τῶν μέσων τῶν ἴσων πλευρῶν του ἀγόμεναι κάθετοι ἐπί τήν βάσιν τέμνουν αὐτήν εἰς σημεῖα ἀπέχοντα ἴσον ἀπό τάς κορυφάς τῆς βάσεως καί σχηματίζουν μέ αὐτάς (τάς ἴσας πλευράς) ἴσας γωνίας.

Ὑπόθεσις προηγουμένης ἀσκήσεως.

(Σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως)

ΒΔ = ΓΕ
$\widehat{BM\Delta} = \widehat{\Gamma NE}$

'Απόδειξις

'Εργαζόμενοι ἀκριβῶς ὅπως καί προηγουμένως ἔχομεν:

Τριγ. ΒΔΜ = τριγ. ΓΕΝ.

Τότε ὅμως (§ 57) ὅλα των τά στοιχεῖα θά εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως

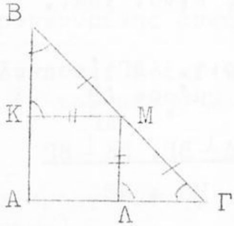
Ὥστε: καί αἱ τρίται πλευραί των θά εἶναι ἴσαι

Δηλαδή ΒΔ = ΓΕ

'Απέναντι δέ τῶν ἴσων αὐτῶν, ἐξ ἀποδείξεως, πλευρῶν θά εὑρίσκωνται ἴσαι γωνίαι.

Ὥστε $\widehat{BM\Delta} = \widehat{\Gamma NE}$ ὅ.ἔ.δ.

81. Δίδεται ὀρθογώνιον καί ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό μέσον Μ τῆς ὑποτεινούσης αὐτοῦ ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς καθέτους πλευράς του.



Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ ὀρθογ. ἰσοσκελές
Μ μέσον ὑποτειν. ΒΓ
ΜΚ ⊥ ΑΒ, ΜΛ ⊥ ΑΓ

ΜΚ = ΜΛ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΚΜ καί ΓΛΜ. Ταῦτα ἔχουν:

ΒΜ = ΜΓ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ)

$\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (ὡς παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ)

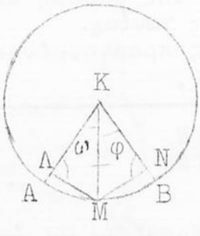
καί $\hat{K} = \hat{\Lambda}$ (ὡς ὀρθάς)

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΒΚΜ καί ΓΛΜ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΜΚ = ΜΛ. ὅ.ἔ.δ.

---

82. Δίδεται τόξον ΑΒ περιφερείας κέντρου Κ. 'Εκ τοῦ μέσου Μ τοῦ τόξου φέρομεν καθέτους ἐπί τάς εἰς τά ἄκρα αὐτοῦ καταληγούσας ἀκτῖνας. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Λ ύ σ ι ς



Τόξον ΑΒ
Μ μέσον τοῦ $\overset{\frown}{AB}$
ΜΛ ⊥ ΚΑ, ΜΝ ⊥ ΚΒ

ΜΛ = ΜΝ

'Απόδειξις

Φέρομεν τήν ἀκτῖνα ΚΜ

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΚΛΜ καί ΚΝΜ. Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΚΜ, πλευράν κοινήν
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἐπικέντρους βαινούσας ἐπί τῶν ἴσων τόξων ΑΜ καί ΜΒ)

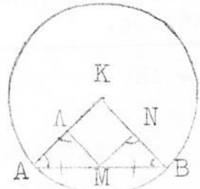
καί $\hat{\Lambda} = \hat{N}$ (ὡς ὀρθάς)

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΚΛΜ καί ΚΝΜ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΜΛ = ΜΝ. ὅ.ἔ.δ.

---

83. Δίδεται χορδή ΑΒ περιφερείας κέντρου Κ. Ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς χορδῆς φέρομεν καθέτους ἐπί τάς εἰς τά ἄκρα αὐτῆς καταληγούσας ἀκτίνας. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Λύσις



Χορδή ΑΒ
Μ μέσον τῆς ΑΒ
ΜΛ ⊥ ΚΑ, ΝΜ ⊥ ΚΒ

ΜΛ = ΜΝ

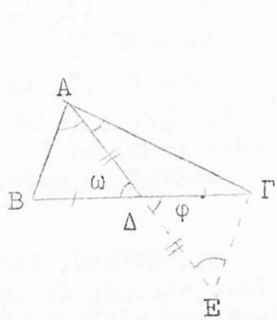
Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΛΜ καί ΒΝΜ.
Ταῦτα ἔχουν:
ΑΜ = ΜΒ (ὡς ἡμίση τῆς ΑΒ)
$\hat{A} = \hat{B}$ (ὡς παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΚΒ
καί $\hat{\Lambda} = \hat{N}$ (ὡς ὀρθάς)

Ἐπομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΛΜ καί ΒΝΜ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΜΛ = ΜΝ ὅ.ἔ.δ.

84. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τήν διάμεσον αὐτοῦ ΑΔ, τήν προεκτείνομεν πέραν τοῦ Δ καί ἐπί τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμῆμα ΔΕ=ΑΔ. Φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΕΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΕΓ = ΑΒ.

Λύσις



Τριγ. ΑΒΓ
ΑΔ διάμεσος
ΔΕ = ΑΔ

ΓΕ = ΑΒ.

Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΓΔΕ καί ΑΔΒ.
Ταῦτα ἔχουν:
ΔΕ = ΑΔ (ἐξ ὑποθέσεως)
$\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ (ὡς κατά κορυφήν)
καί ΔΓ = ΒΔ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ)

Ἐπομένως (§56) τά τρίγωνα ΓΔΕ καί ΑΔΒ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΓΕ=ΑΒ ὅ.ἔ.δ.

85. Ἐκφώνησις καί σχῆμα τά τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ γωνίαι ΔΑΒ καί ΔΕΓ εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Ὑπόθεσις προηγουμένης ἀσκήσεως.

(Σχῆμα προηγουμένης ἀσκήσεως).

$\widehat{\Delta A B} = \widehat{\Delta E \Gamma}$

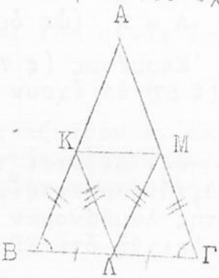
Ἀπόδειξις

Ἐργαζόμενοι ἀκριβῶς ὅπως καί προηγουμένως ἔχομεν:

Τριγ. ΑΔΒ = τριγ. ΕΔΓ, εἶναι δέ καί ΒΔ = ΔΓ, ἐξ ὑποθέσεως

ἄρα (§ 57) $\widehat{\Delta A B} = \widehat{\Delta E \Gamma}$ ὅ.ἔ.δ.

86. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τά μέσα τῶν πλευρῶν του σχηματίζουν ἰσοσκελές τρίγωνον.



Λύσις

Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
Κ, Λ, Μ μέσα πλευρῶν
Τριγ. ΚΛΜ ἰσοσκελ.

Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΚΒΛ καί ΜΓΛ. Ταῦτα ἔχουν:

ΒΛ = ΛΓ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ)
ΚΒ = ΜΓ (" " τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ)
καί $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$ (" παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ)

Ἐπομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΚΒΛ καί ΜΓΛ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΚΛ = ΜΛ.

Δηλαδή τό τρίγ. ΚΛΜ εἶναι ἰσοσκελές ὅ.ἔ.δ.

87. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τάς ἴσας πλευράς ΑΒ καί ΑΓ πέραν τῆς βάσεως ΒΓ καί ἐπί τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ καί ΓΕ ἴσα μεταξύ των. Φέρομεν τάς εὐθείας ΒΕ καί ΓΔ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΕ=ΓΔ.

Λύσις

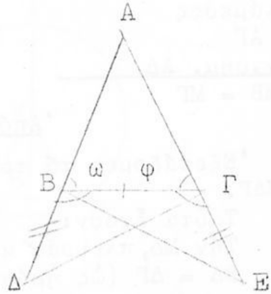
Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΒΓ βάσις , ΒΔ = ΓΕ

ΒΕ = ΓΔ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ.

Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΒΓ, πλευράν κοινήν
ΒΔ = ΓΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
καί $\widehat{\Gamma B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$ (ὡς παραπληρώματα τῶν ἴσων γωνιῶν ω καί φ, τῶν κειμένων παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ)



'Επομένως (§56) τά τρίγωνα ΒΓΔ καί ΒΓΕ εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν καί
ΓΔ = ΒΕ ὅ.ἔ.δ.

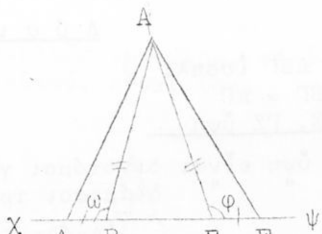
---

88. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τήν βάσιν ΒΓ ἑκατέρωθεν καί ἐπί τῶν προεκτάσεων ταύτης λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ καί ΓΕ ἴσα μεταξύ των. Φέρομεν τάς εὐθείας ΑΔ καί ΑΕ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΔ = ΑΕ.

Λύσις

Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΒΓ βάσις
ΒΔ = ΓΕ

ΑΔ = ΑΕ



'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ.

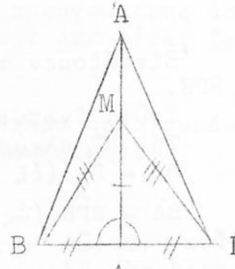
Ταῦτα ἔχουν:
ΒΔ = ΓΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΑΒ = ΑΓ (ὡς ἴσας πλευράς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγ.ΑΒΓ)
καί $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς παραπλ. τῶν ἴσων γωνιῶν ΑΒΓ καί ΑΓΒ αἱ ὁποῖαι κεῖνται παρά τήν βάσιν τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ).

'Επομένως (§56) τά τρίγωνα ΑΒΔ καί ΑΓΕ εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν καί ΑΔ = ΑΕ ὅ.ἔ.δ.

---

89. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς διαμέσου ΑΔ αὐτοῦ ἀπέχει ἴσον τῶν κορυφῶν τῆς βάσεώς του.

"Γεωμετρικαί 'Ασκήσεις" Τόμος Α' Γ.Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ



Τριγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΑΔ διάμεσος
ΑΒ = ΑΓ
<u>Μ τυχ.σημ. ΑΔ</u>
ΜΒ = ΜΓ

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΜΔΒ καί ΜΔΓ.

Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΜΔ, πλευράν κοινήν
ΒΔ = ΔΓ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ)

καί $\widehat{\text{ΜΔΒ}} = \widehat{\text{ΜΔΓ}}$ (διότι ἡ διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τήν βάσιν αὐτοῦ εἶναι καί ὕψος του), ὀρθαί.

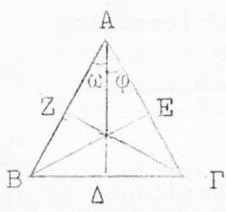
Ἐπομένως (§ 59) τά τρίγωνα ΜΔΒ καί ΜΔΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΜΒ = ΜΓ

<u>Σημείωσις</u>: Εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα θά καταλήξωμεν ἐάν ἐξετάσωμεν τά τρίγωνα ΑΜΒ καί ΑΜΓ.

---

90. Τά ὕψη ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καί διάμεσοι αὐτοῦ.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>



Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοπλ.
ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ
<u>ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ὕψη</u>

1) Τά ὕψη εἶναι διχοτόμοι γωνιῶν
2) " " " διάμεσοι τριγώνου.

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐξετάζομεν μόνον ἕν ὕψος π.χ. τό ΑΔ καί ὅ,τι θά ἰσχύη δι'αὐτό, θά ἰσχύη καί διά τά ἄλλη ὕψη.

Ἐπειδή τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον θά ἔχη ΑΒ=ΑΓ. Ἐπομένως εἶναι καί ἰσοσκελές.

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς του ἐπί τήν βάσιν του εἶναι συγχρόνως καί <u>διχοτόμος</u> τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἀλλά καί διάμεσος αὐτοῦ.

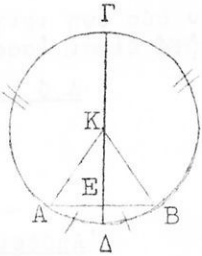
---

91. Ἡ διάμετρος κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπί χορδήν αὐτοῦ διχοτομεῖ τήν χορδήν καί τά ἀντίστοιχα αὐτῆς τόξα.

Λ ύ σ ι ς

Κύκλος (Κ, ΚΑ)
Χορδ. ΑΒ
Διάμετρος ΓΔ
ΓΔ ⊥ ΑΒ

ΑΕ = ΕΒ, $\overset{\frown}{Α Δ} = \overset{\frown}{ΔΒ}$, $\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΓΒ}$



'Απόδειξις

Σχηματίζομεν τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΚΒ τό ὁποῖον ἔχει βάσιν τήν ΑΒ.

'Επειδή ἡ ΚΔ ἄγεται κάθετος ἐκ τῆς κορυφῆς Κ ἐπί τήν βάσιν ΑΒ, διχοτομεῖ τήν βάσιν ΑΒ καί τήν γωνίαν ΑΚΒ.

Ὥστε: $\widehat{ΑΚΔ} = \widehat{ΔΚΒ}$. καί ΑΕ = ΕΒ.

Τότε ὅμως (§43) $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΔΒ}$ (1).

'Επίσης εἶναι $\overset{\frown}{ΔΑΓ} = \overset{\frown}{ΔΒΓ}$ (2) (ὡς ἡμιπεριφέρειαι)

'Αφαιροῦμεν τήν ἰσότητα (1) ἀπό τήν ἰσότητα (2) κατά μέλη καί ἔχομεν $\overset{\frown}{ΔΑΓ} - \overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΔΒΓ} - \overset{\frown}{ΔΒ}$ ἤ

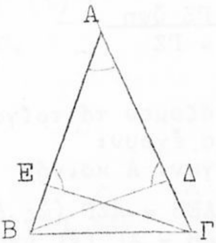
$\overset{\frown}{ΑΓ} = \overset{\frown}{ΒΓ}$ ὅ.ἔ.δ.

92.. Νά ἀπ/χθῇ ὅτι τά ὕψη ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τά ὁποῖα ἄγονται ἀπό τά ἄκρα τῆς βάσεως αὐτοῦ, εἶναι ἴσα.

Λ ύ σ ι ς

ΑΒ = ΑΓ
ΒΔ ὕψος
ΓΕ ὕψος

ΒΔ = ΓΕ



'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΕΓ.

Ταῦτα ἔχουν:

Τήν γων. Α κοινήν

$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΕΓ}$ (ὡς ὀρθάς)

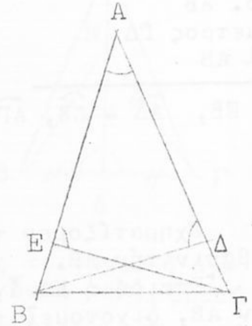
καί ΑΒ = ΑΓ (ὡς ἴσας πλευράς τοῦ ἰσοσκελοῦς).

'Επομένως (§7I) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν ΒΔ = ΓΕ ὅ.ἔ.δ.

<u>Σημείωσις:</u> Εἰς τό ἴδιον ἀποτέλεσμα δυνάμεθα νά φθάσωμεν ἐάν ἐξετάσωμεν τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΔΓ καί ΒΕΓ. ὅ.ἔ.δ.

93. Ἄν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ἰσοσκελές.

Λ ύ σ ι ς



ΒΔ ὕψος
ΓΕ ὕψος
ΒΔ = ΓΕ
ΑΒ = ΑΓ

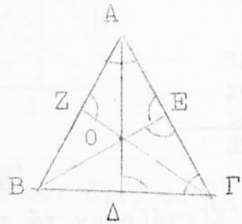
Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΒ καί ΑΕΓ.
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γων. Α κοινήν
$\widehat{ΑΔΒ} = \widehat{ΑΕΓ}$ (ὡς ὀρθάς)
καί ΒΔ = ΕΓ (ἐξ ὑποθέσεως)
Ἐπομένως (§ 71) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΒ = ΑΓ.
Δηλαδή τό τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον δύο πλευράς ἴσας εἶναι ἰσοσκελές. ὅ.ἔ.δ.

---

94. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά ὕψη παντός ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσα.

Λ ύ σ ι ς



Τριγ. ΑΒΓ
ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ
ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ὕψη
ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ

Ἀπόδειξις

1) Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΕΒ καί ΑΖΓ
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γων. Α κοινήν
$\widehat{ΑΕΒ} = \widehat{ΑΖΓ}$ (ὡς ὀρθάς)
καί ΑΒ = ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως)
Ἐπομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΕΒ καί ΑΖΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν
καί ΒΕ = ΓΖ (1)

2) Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΒΕΓ.
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γων. Γ κοινήν
$\widehat{ΑΔΓ} = \widehat{ΒΕΓ}$ (ὡς ὀρθάς)

καί ΑΓ = ΒΓ (ἐξ ὑποθέσεως)

'Επομένως (§ 7I) τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΒΕΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

καί ΑΔ = ΒΕ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν (§ 1)

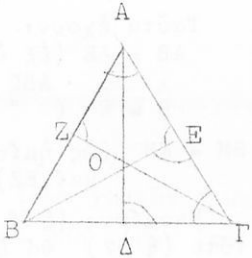
ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ ὅ.ἔ.δ.

---

95. Ἄν τά τρία ὕψη ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσα, ν'ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον αὐτό εἶναι ἰσόπλευρον.

Λύσις

Τριγ. ΑΒΓ
ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ὕψη
ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ
ΑΒ = ΒΓ = ΑΓ



'Απόδειξις

1)'Εξετάζομεν τά τρίγωνα
ΑΕΒ καί ΑΖΓ
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γων. Α κοινήν
$\hat{E} = \hat{Z}$ (ὡς ὀρθάς)
καί ΒΕ = ΓΖ (ἐξ ὑποθέσεως)

'Επομένως (§ 7I) τά τρίγωνα ΑΕΒ καί ΑΖΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΒ = ΑΓ (1)

2)'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΒΕΓ.

Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γων. Γ. κοινήν
$\hat{E} = \hat{\Delta}$ (ὡς ὀρθάς)
καί ΑΔ = ΒΕ (ἐξ ὑποθέσεως)

'Επομένως (§ 7I) τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΒΕΓ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΓ = ΒΓ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν ὅτι (§ I)
ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ
<u>Ὥστε:</u> τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον.

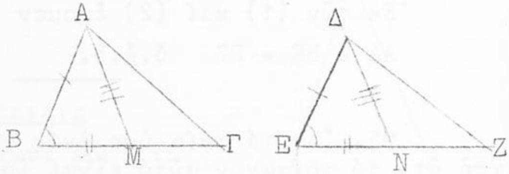
---

96. Δίδονται δύο ἴσα μεταξύ των τρίγωνα τά ΑΒΓ καί ΔΕΖ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ διάμεσοι ΑΜ καί ΔΝ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τάς ἴσας πλευράς ΒΓ καί ΕΖ εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Τριγ. ΑΒΓ= τριγ. ΔΕΖ.
ΒΓ = ΕΖ
ΑΜ διάμεσος
ΔΝ "

ΑΜ = ΔΝ



'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΔΕΝ.

Ταῦτα ἔχουν:
ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως ἀφοῦ εἶναι ἴσα τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ).
$\hat{B} = \hat{E}$ (" " " " " " ")
καί ΒΜ = ΕΝ (ὡς ἡμίση τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων πλευρῶν ΒΓ καί ΕΖ)

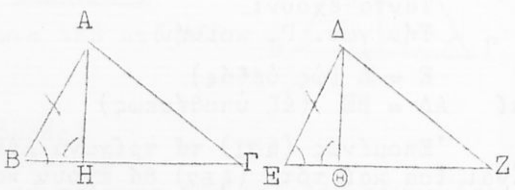
'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΒΜ καί ΔΕΝ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί ΑΜ = ΔΝ. ὅ.ἔ.δ.

97. Δίδονται δύο ἴσα μεταξύ των τρίγωνα τά ΑΒΓκαί ΔΕΖ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά ὕψη ΑΗ καί ΔΘ, τά ἀντιστοιχοῦντα εἰς τάς ἴσαςπλευράς ΒΓ καί ΕΖ, εἶναι ἴσα.

Λύσις

Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ
ΒΓ = ΕΖ
ΑΗ ὕψος
ΔΘ "

ΑΗ = ΔΘ



'Απόδειξις:

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΗ καί ΔΕΘ.

Ταῦτα ἔχουν:
ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
$\hat{B} = \hat{E}$ (" ")
καί $\hat{H} = \hat{\Theta}$ (ὡς ὀρθάς)

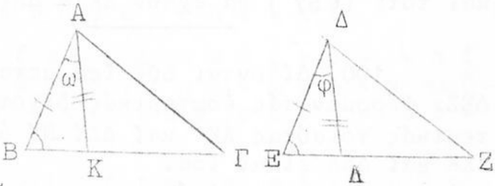
'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΒΗ καί ΔΕΘ εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν καί ΑΗ = ΔΘ. ὅ.ἔ.δ.

98. Δίδονται δύο ἴσα μεταξύ των τρίγωνα τά ΑΒΓ καί ΔΕΖ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ διχοτόμοι ΑΚ καί ΔΛ τῶν ἴσων γωνιῶν Α καί Δ εἶναι ἴσαι.

Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ = τριγ.ΔΕΖ
γων. Α = γων.Δ
ΑΚ διχ. τῆς γων. Α
ΔΛ " " " Δ

ΑΚ = ΔΛ



Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΚ καί ΔΕΛ.

Ταῦτα ἔχουν:

ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως λόγῳ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ΑΒΓ καί ΔΕΖ).

$\hat{B} = \hat{E}$ (δι'ὅμοιον λόγον)

καί $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἡμίση τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων γωνιῶν Α καί Δ)

Ἐπομένως (§60) τά τρίγωνα ΑΒΚ καί ΔΕΛ εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν ΑΚ = ΔΛ ὅ.ἔ.δ.

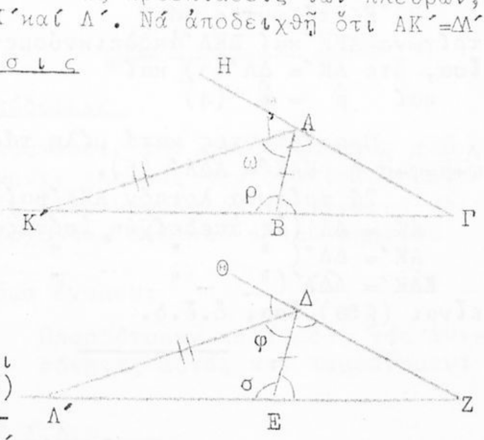
---

99. Δίδονται δύο ἴσα μεταξύ των τρίγωνα τά ΑΒΓ καί ΔΕΖ. Φέρομεν τάς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Α καί Δ αἱ ὁποῖαι, διχοτόμοι, τέμνουν τάς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν, ΒΓ καί ΕΖ εἰς τά σημεῖα Κ΄καί Λ΄. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ΑΚ΄=ΔΛ΄

Λ ύ σ ι ς

Τρίγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ
γων.Α = γων.Δ
ΑΚ΄διχ.ἐξ. $\hat{A}$
ΔΛ΄ " " $\hat{\Delta}$

ΑΚ΄= ΔΛ΄



Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΚ΄ καί ΔΕΛ΄

Ταῦτα ἔχουν:

ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως διότι τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ)

$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς ἡμίση τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ΒΑΗ καί

ΕΔΘ, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαί τῶν ἴσων γωνιῶν Α καί Δ, τῶν ἴσων τριγώνων ΑΒΓ καί ΔΕΖ).

καί $\hat{\rho}=\hat{\sigma}$ (ὡς παραπληρ. τῶν ἴσων γωνιῶν $\hat{B}$ καί $\hat{E}$)

Ἐπομένως (§ 60) τά τρίγωνα ΑΒΚ΄καί ΔΕΛ΄εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν ΑΚ΄= ΔΛ΄ ὅ.ἔ.δ.

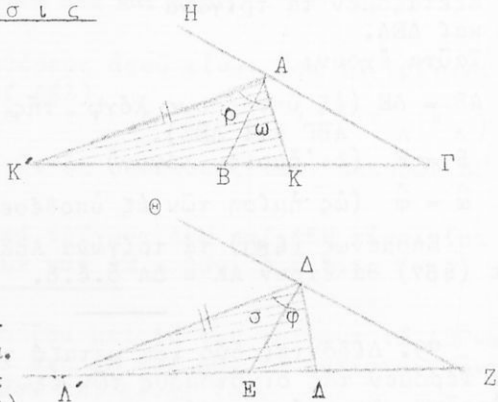
---

100. Δίδονται δύο ἴσα μεταξύ των τρίγωνα τά ΑΒΓ καί ΔΕΖ. Φέρομεν τάς ἐσωτερικάς διχοτόμους ΑΚ, ΔΛ καί τάς ἐξωτερικάς τοιαύτας ΑΚ΄ καί ΔΛ΄. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά τρίγωνα ΑΚΚ΄καί ΔΛΛ΄εἶναι ἴσα.

<u>Λύσις</u>

Τριγ.ΑΒΓ=τριγ.ΔΕΖ
γων.Α = γων.Δ
ΑΚ διχ. ἐσ.$\hat{A}$
ΑΚ΄ " ἐξ.$\hat{A}$
ΔΛ " ἐσ.$\hat{\Delta}$
ΔΛ΄ " ἐξ.$\hat{\Delta}$

Τριγ.ΑΚΚ΄= τριγ.ΔΛΛ΄



<u>Ἀπόδειξις</u>

1) Ἐξετάζοντες τά τρίγωνα ΑΒΚ καί ΔΕΛ ἀποδεικνύομεν, ὅπως ἄσκ. 98, ὅτι εἶναι ἴσα, ὅτε ΑΚ=ΔΛ (1) καί $\hat{\omega}$ = $\hat{\varphi}$ (2)

2) Ἐξετάζοντες τά τρίγωνα ΑΒΚ΄καί ΔΕΛ΄ἀποδεικνύομεν, ὅπως ἄσκ. 99, ὅτι εἶναι ἴσα, ὅτε ΑΚ΄= ΔΛ΄(3) καί
καί $\hat{\rho}$ = $\hat{\sigma}$ (4)

Προσθέτοντες κατά μέλη τάς (2) καί (4) ἔχομεν $\hat{\omega}+\hat{\rho}=\hat{\varphi}+\hat{\sigma}$ ἤ $\widehat{KAK'}$ = $\widehat{\Lambda\Delta\Lambda'}$ (5).

Τά τρίγωνα λοιπόν ΑΚΚ΄καί ΔΛΛ΄ἔχοντα
ΑΚ = ΔΛ (ὡς ἀπεδείχθη, ἰσότης (1))
ΑΚ΄= ΔΛ΄(" " (3)) καί
$\widehat{KAK'}$ = $\widehat{\Lambda\Delta\Lambda'}$ (" " (5))
εἶναι (§56) ἴσα. ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΟΓΔΟΗ

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς ἀ ν α φ ε ρ ό μ ε ν α ι

α) ε ἰ ς τ ά ς σ χ έ σ ε ι ς κ α θ έ τ ω ν κ α ί π λ α γ ί ω ν ε ὐ θ ε ι ῶ ν ἀ γ ο μ έ ν ω ν ἐ κ τ ο ῦ α ὐ τ ο ῦ σ η μ ε ί ο υ ἐ π ί τ ή ν α ὐ τ ή ν ε ὐ - θ ε ῖ α ν κ α ί

β΄) ε ἰ ς τ ή ν ἀ ν ι σ ό τ η τ α π λ ε υ ρ ῶ ν κ α ί γ ω ν ι ῶ ν τ ο ῦ α ὐ τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ ἤ δ ι α φ ο ρ ε τ ι κ ῶ ν τ ρ ι γ ώ ν ω ν.

---

101. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνός τριγώνου ἀπό τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου του.

Λ ύ σ ι ς

Τρίγωνον ΑΒΓ

ΑΔ ἀπόστασις Α ἀπό ΒΓ

ΒΕ " Β " ΑΓ

ΓΖ " Γ " ΑΒ

ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ < ΑΒ+ΒΓ+ΑΓ

Ἀπόδειξις

Ἐάν φέρωμεν τάς ἀποστάσεις τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἀπό τάς ἀπέναντι πλευράς των διαπιστώνομεν (ἐδῶ καί ἀποδεικνύομεν εἰς ἄλλο κεφάλαιον τῆς Θεωρητικῆς Γεωμετρίας) ὅτι αὗται διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου π.χ. Ο.

Ἐξετάζοντες τό σχῆμα ἔχομεν:

ΑΔ < ΑΒ (§ 32, α΄)
ΒΕ < ΒΓ (§ 32, α΄)
καί ΓΖ < ΓΑ (§ 32, α΄)

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί λαμβάνομεν:

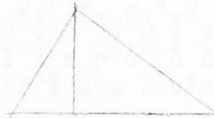
ΑΔ+ΒΕ+ΓΖ < ΑΒ+ΒΓ+ΓΑ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις: Ἑτέρα ἔκφρασις τῆς ἐκφωνήσεως εἶναι ἡ ἑξῆς:
"Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ὑψῶν παντός τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου".

---

102. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς ὑποτεινούσης.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ
γωνία Α = 1 ὀρθ.
ΑΔ ὕψος

ΑΔ < ΒΓ

Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

ΑΔ < ΑΒ (διότι ΑΔ⊥ΒΓ ἐνῷ ΑΒ πλαγία πρός ΒΓ)

Ἐπίσης ἔχομεν:

ΑΒ < ΒΓ (διότι ΑΒ⊥ΑΓ ἐνῷ ΒΓ πλαγία πρός ΑΓ)

Ἀφοῦ λοιπόν ΑΔ < ΑΒ καί ΑΒ < ΒΓ κατά μείζονα λόγον, ὅπως λέγωμεν (§ 14), θά εἶναι ΑΔ < ΒΓ ὅ.ἔ.δ.

---

103. Δίδεται ὀρθή γωνία χΑψ. Λαμβάνομεν δύο σημεῖα Β καί Γ ἐπί τῆς πλευρᾶς Αχ καί δύο ἄλλα Δ καί Ε ἐπί τῆς πλευρᾶς Αψ καί εἰς τοιαύτην θέσιν ὥστε ΑΒ < ΑΓ καί ΑΔ < ΑΕ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΒΔ < ΓΕ.

Λύσις

Γωνία χΑψ = 1 ὀρθή
ΑΒ < ΑΓ
ΑΔ < ΑΕ

ΒΔ < ΓΕ

Ἀπόδειξις

Φέρομεν τήν βοηθητικήν εὐθεῖαν ΒΕ. Τότε ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

ΒΔ < ΒΕ (§ 32, γ´) (ἀμφότεραι εἶναι πλάγιαι ὡς πρός τήν Αψ, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Β ἐξ οὗ ἄγεται καί ἡ ΒΑ⊥Αψ).

Ἐπίσης ἔχομεν:

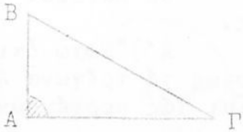
ΒΕ⟨ΓΕ (§ 32,γ΄) (ἀμφότεραι εἶναι πλάγιαι ὡς πρός τήν Αχ, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ε ἐξ οὗ ἄγεται καί ἡ ΕΑ⊥Αχ

Συγκρίνοντες τώρα τάς δύο ἀνωτέρω ἀνισότητας ἔχομεν (§ 14) ὅτι ΒΔ⟨ΓΕ ὅ.ἔ.δ.

---

104. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα ἑκάστης τῶν καθέτων πλευρῶν αὐτοῦ.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ μέ γων.Α= 1 ὀρθή
ΒΓ ὑποτείνουσα
ΑΒ, ΑΓ κάθετοι πλευραί

ΒΓ⟩ΑΒ καί ΒΓ⟩ΑΓ

'Απόδειξις

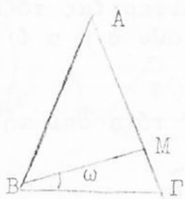
Γνωρίζομεν (§ 35 α΄) ὅτι $\hat{A}+\hat{B}$ ⟨ 2 ὀρθῶν. 'Αφοῦ ὅμως ἐξ ὑποθέσεως $\hat{A}$ = 1 ὀρθή ἕπεται ὅτι $\hat{B}$ ⟨1 ὀρθῆς καί ἑπομένως $\hat{A}$⟩ $\hat{B}$. Τότε ὅμως (§ 75) ΒΓ⟩ΑΓ.

'Ομοίως $\hat{A}+\hat{\Gamma}$⟨ 2 ὀρθῶν. Α=1 ὀρθή ἄρα $\hat{\Gamma}$⟨1 ὀρθῆς καί ἑπομένως $\hat{A}$⟩$\hat{\Gamma}$. Τότε ὅμως (§ 75) ΒΓ⟩ΑΒ ὅ.ἔ.δ.

---

105. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ. "Αν ΒΓ εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ καί Μ τυχόν σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΓ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀπόστασις ΜΒ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἀποστάσεως ΜΓ.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΒΓ βάσις αὐτοῦ
Μ τυχόν σημεῖον ΑΓ

ΜΒ ⟩ ΜΓ.

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τό τρίγωνον ΒΜΓ. Εἰς αὐτό ἔχομεν:

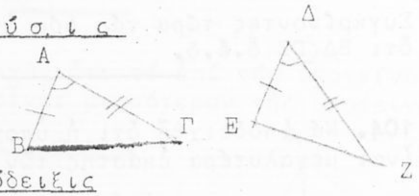
Γωνία Γ ⟩ γωνίας ω [διότι γων.Γ = γων.Β καί γων. Β⟩γων.ω ἀφοῦ ἡ γων.ω εἶναι μέρος τῆς γων. Β].

"Αρα (§ 75) ΒΜ⟩ΜΓ ὅ.ἔ.δ.

---

106. Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευράς ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς τρίτας ἀνίσους τότε ἀπέναντι τῶν ἀνίσων αὐτῶν πλευρῶν κεῖνται ὁμοίως ἄνισοι γωνίαι.

Λύσις



Τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ
ΑΒ=ΔΕ, ΑΓ=ΔΖ. ΒΓ > ΕΖ

$\hat{A} > \hat{\Delta}$

Ἀπόδειξις

Θά κάνωμεν τήν ἀπόδειξιν διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Α΄) Ἔστω ὅτι γωνία Α= γωνία Δ. Τότε ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχουν καί τάς πλευράς αἱ ὁποῖαι τάς περιέχουν ἴσας θά εἶναι (§ 56) ἴσα.

Τότε ὅμως (§ 57) θά ἔχουν ΒΓ=ΕΖ ὅπερ ἄτοπον διότι ὑπετέθη ΒΓ > ΕΖ.
Ὥστε ἀποκλείεται νά εἶναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.

Β΄) Ἔστω ὅτι γων. Α < γων.Δ.

Τότε ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ΑΒ=ΔΕ καί ΑΓ=ΔΖ θά ἔχωμεν (§ 72) ὅτι ΒΓ < ΕΖ ὅπερ ἄτοπον διότι ὑπετέθη ΒΓ > ΕΖ.

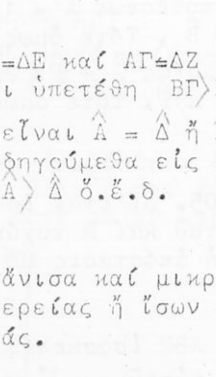
Ἀφοῦ λοιπόν ἀποκλείεται νά εἶναι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ ἤ $\hat{A} < \hat{\Delta}$ (διότι εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις ὁδηγούμεθα εἰς ἄτοπον) δι᾽αὐτό δεχόμεθα ἀναγκαστικῶς ὅτι $\hat{A} > \hat{\Delta}$ ὅ.ἔ.δ.

---

107. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: δύο ἄνισα καί μικρότερα ἡμιπεριφερείας τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας ἤ ἴσων περιφερειῶν ἔχουν ὁ μ ο ί ω ς ἀνίσους χορδάς.

Λύσις

Ι. Τά τόξα ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας (Κ,ΚΛ).



$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$
$\overset{\frown}{AB}$ < ἡμιπεριφερείας
$\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ < "

χορδή ΑΒ < χορδῆς ΓΔ

Ἀπόδειξις

Φέρομεν τάς χορδάς ΑΒ καί ΓΔ καί τάς ἀκτῖνας τάς καταληγούσας εἰς τά ἄκρα τῶν τόξων.

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ. Ταῦτα ἔχουν

ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου)
ΚΒ = ΚΔ (" " " " ") καί
$\hat{\omega} < \hat{\varphi}$ (§ 44 ἀφοῦ $\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$)

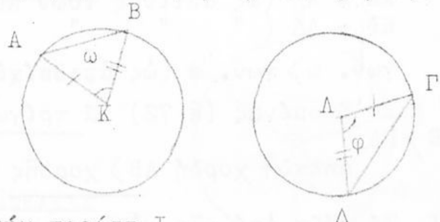
'Επομένως (§ 72) τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ θά ἔχουν ΑΒ < ΓΔ.

Δηλαδή χορδή ΑΒ < χορδῆς ΓΔ ὅ.ἔ.δ.

ΙΙ. Τά τόξα ἐπί τῶν ἴσων περιφερειῶν (Κ,ΚΑ) καί (Λ,ΛΓ).

Περιφ.(Κ,ΚΑ)=περιφ.(Λ,ΛΓ)
$\overset{\frown}{AB} < \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$
$\overset{\frown}{AB}$ < ἡμιπεριφερείας
$\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ < "

χορδή ΑΒ < χορδῆς ΓΔ



'Η ἀπόδειξις ὅπως καί εἰς τήν περίπτ.Ι.

'Εδῶ ὅμως ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ.

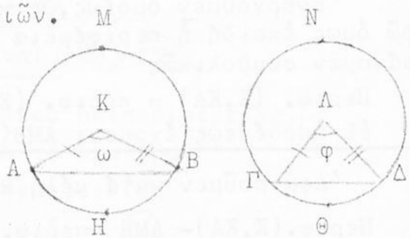
108. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι δύο ἄνισα καί μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας τόξα τῆς αὐτῆς ἤ ἴσων περιφερειῶν ἔχουν ἀ ν ο μ ο ί ω ς ἀνίσους χορδάς.

Λ ύ σ ι ς

Ι. Τά τόξα ἐπί ἴσων περιφερειῶν.

Περιφ.(Κ,ΚΑ)=περιφ.(Λ,ΛΓ)
$\overset{\frown}{AMB} < \overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$
$\overset{\frown}{AMB}$ > ἡμιπεριφερείας
$\overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$ > "

χορδή ΑΒ > χορδῆς ΓΔ



'Απόδειξις

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν:

Περιφέρεια (Κ,ΚΑ) = περιφέρεια (Λ,ΛΓ)
καί $\overset{\frown}{AMB} < \overset{\frown}{\Gamma N\Delta}$

'Αφαιροῦμεν κατά μέλη καί τότε κατά τήν (§ 9) ἔχομεν:

Περιφέρεια (Κ,ΚΑ)-$\widehat{ΑΜΒ}$ > περιφέρεια (Λ,ΛΓ)-$\widehat{ΓΝΔ}$

$\widehat{ΑΗΒ} > \widehat{ΓΘΔ}$ (1)

Φέροντες τώρα τάς ἀκτῖνας τάς καταληγούσας εἰς τά ἄκρα τῶν τόξων σχηματίζομεν τάς γωνίας ω καί φ καί τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ.

Εἶναι δέ λόγῳ τῆς ἀνισότητος (1) καί κατά τήν(§44) γων. ω > γων. φ.

'Εξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ.

Ταῦτα ἔχουν:

ΚΑ = ΛΓ (ὡς ἀκτῖνας ἴσων κύκλων)
ΚΒ = ΛΔ (" " " ") καί

γων. ω > γων. φ (ὡς ἀπεδείχθη)

'Επομένως (§ 72) τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ θά ἔχουν ΑΒ > ΓΔ.

Δηλαδή χορδή ΑΒ > χορδῆς ΓΔ ὅ.ἔ.δ.

ΙΙ. Τά τόξα ἐπί τῆς αὐτῆς περιφερείας (Κ,ΚΑ)

$\widehat{ΑΜΒ} < \widehat{ΓΝΔ}$
$\widehat{ΑΜΒ}$ > ἡμιπεριφερείας
$\widehat{ΓΝΔ}$ > "

χορδή ΑΒ > χορδῆς ΓΔ

'Απόδειξις

'Ενεργοῦμεν ὁμοίως, ὡς καί εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν 'Εδῶ ὅμως ἐπειδή ἡ περιφέρεια ἰσοῦται μέ τόν ἑαυτόν της, γράφομεν συμβολικῶς

Περιφ. (Κ,ΚΑ) = περιφ. (Κ,ΚΑ)
ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν: $\widehat{ΑΜΒ} < \widehat{ΓΝΔ}$

'Αφαιροῦμεν κατά μέλη καί κατά τήν (§ 9) ἔχομεν:

Περίφ.(Κ,ΚΑ)- $\widehat{ΑΜΒ}$ > περιφ.(Κ,ΚΑ) - $\widehat{ΓΝΔ}$

ἤ $\widehat{ΑΝΒ} > \widehat{ΓΜΔ}$

Τότε ὅμως (§ 44) γων. ω > γων. φ.

'Εξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ καί ἀποδεικνύομεν ὅπως καί εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ὅτι

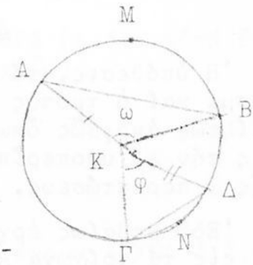
χορδή ΑΒ > χορδή ΓΔ ὅ.ἔ.δ.

109. Ἂν δύο χορδαί τοῦ αὐτοῦ ἤ ἴσων κύκλων εἶναι ἄνισοι νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά μέν μ ι κ ρ ό τ ε ρ α ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ὁ μ ο ί ω ς ἄνισα τά δέ μ ε γ α λ ύ τ ε ρ α ἡμιπεριφερείας ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν εἶναι ἀ ν ο μ ο ί ω ς ἄ ν ι σ α.

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

I. Αἱ χορδαί ἐπί τῆς <u>αὐτῆς περιφερείας</u> (Κ,ΚΑ)

A: Τά ἀντίστοιχα τόξα <u>μ ι κ ρ ό τ ε ρ α</u> ἡμιπεριφερείας.



χορδή ΑΒ > χορδῆς ΓΔ
$\widehat{AMB}$ (ἀντιστοιχ.χορδ.ΑΒ) < ἡμιπερ.
$\widehat{ΓΝΔ}$ (" " ΓΔ) < "

$\widehat{AMB} > \widehat{ΓΝΔ}$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Φέρομεν τάς ἀκτῖνας τάς καταληγούσας εἰς τά ἄκρα τῶν τόξων καί ἐξετάζομεν τά σχηματιζόμενα τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ.

Ταῦτα ἔχουν:

ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου)
ΚΒ = ΚΔ (" " " ") καί
ΑΒ > ΓΔ (ἐξ ὑποθέσεως)

Ἄρα (§ 73) θά ἔχουν καί $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$.

Τότε ὅμως (§ 45) <u>θά εἶναι $\widehat{AMB} > \widehat{ΓΝΔ}$</u>

B: Τά ἀντίστοιχα τόξα μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας.

χορδή ΑΒ > χορδῆς ΓΔ (Σχῆμα τό ἀνωτέρω)
$\widehat{ANB}$ (ἀντιστοιχ.χορδ.ΑΒ) > ἡμιπεριφερείας
$\widehat{ΓΜΔ}$ (" " ΓΔ) > "

$\widehat{ANB} < \widehat{ΓΜΔ}$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἀπεδείχθη προηγουμένως ὅτι:

$\widehat{AMB} > \widehat{ΓΝΔ}$ (1)

Συμβολικῶς γράφομεν:

Περιφ. (Κ,ΚΑ) = περιφ.(Κ,ΚΑ) (2)

'Αφαιροῦμεν ἀπό τά μέλη τῆς ἰσότητος (2) τά μέλη τῆς ἀνισότητος (1) καί ἔχομεν (§ 9).

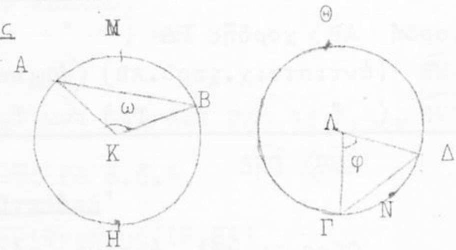
Περιφ. (Κ,ΚΑ) - $\widehat{AMB}$ < περιφ.(Κ,ΚΑ)- $\widehat{\Gamma N\Delta}$

ἤ (βλέπε σχῆμα) $\widehat{ANB}$ < $\widehat{\Gamma M\Delta}$

II. Αἱ χορδαί ἐπί ἴσων περιφερειῶν (Κ,ΚΑ),(Λ,ΛΓ)

Α: Τά ἀντίστοιχα τόξα μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Λ ύ σ ι ς



'Η ὑπόθεσις, τό συμπέρασμα καί ὁ τρόπος ἀποδείξεως ἀκριβῶς ὅπως καί εἰς τήν Α' υποπερίπτωσιν τῆς Ι περιπτώσεως.

'Εδῶ βεβαίως ἐργαζόμεθα εἰς τά τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΛΔ καί ἀποδεικνύομεν ὅτι $\widehat{AMB}$ > $\widehat{\Gamma N\Delta}$.

Β: Τά ἀντίστοιχα τόξα μεγαλύτερα ἡμιπεριφερείας

Λ ύ σ ι ς

χορδ. ΑΒ > χορδῆς ΓΔ (Σχῆμα τό ἀνωτέρω)

$\widehat{AHB}$ (ἀντίστοιχ. χορδ.ΑΒ) > ἡμιπεριφερείας

$\widehat{\Gamma\Theta\Delta}$ (" " ΓΔ) > "

$\widehat{AHB}$ < $\widehat{\Gamma\Theta\Delta}$

'Απόδειξις

'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν: Περ.(Κ,ΚΑ) = περ.(Λ,ΛΓ) (1)

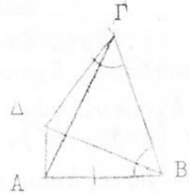
'Απεδείχθη ὅτι $\widehat{AMB}$ > $\widehat{\Gamma N\Delta}$ (2)

'Αφαιροῦμεν ἀπό τά μέλη τῆς ἰσότητος (1) τά μέλη τῆς ἀνισότητος (2) καί κατά τήν (§ 9) ἔχομεν:

Περ.(Κ,ΚΑ)-$\widehat{AMB}$ < περ.(Λ,ΛΓ) - $\widehat{\Gamma N\Delta}$

ἤ (βλέπε σχῆμα) $\widehat{AHB}$ < $\widehat{\Gamma\Theta\Delta}$ ὅ.ἔ.δ.

110. Δίδεται κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ έχον δύο απέναντι πλευράς ίσας, τάς ΑΒ καί ΓΔ καί γων. Β > γων.Γ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΑΓ > ΒΔ.



Λ ύ σ ι ς

ΑΒΓΔ κυρτόν τετράπλευρον

ΑΒ = ΓΔ

γων. Β > γων. Γ

ΑΓ > ΒΔ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΒΓΔ (διότι αὐτά ἔχουν τά ἀναφερόμενα εἰς τήν ἐκφώνησιν στοιχεῖα)

Ταῦτα ἔχουν:

Τήν ΒΓ πλευράν κοινήν

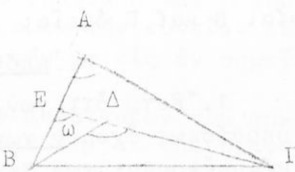
ΑΒ = ΔΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καί

$\hat{B} > \hat{\Gamma}$ (" ")

'Επομένως (§ 72) τά τρίγωνα θά ἔχουν ΑΓ > ΒΔ ὅ.ἔ.δ.

111. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Δ ἐντός αὐτοῦ. Φέρομεν τάς εὐθείας ΔΒ καί ΔΓ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι: γων.ΒΔΓ > γων.Α.

'Απόδειξις.



Προεκτείνομεν τήν ΓΔ μέχρι νά τμήσῃ τήν πλευράν ΑΒ εἴς τι σημεῖον π.χ.Ε καί θέτομεν γων.ΔΕΒ=ω.

'Εκ τοῦ τριγώνου ΒΕΔ ἔχομεν:

Γωνία ΒΔΓ > γωνίας ω (§ 35 α΄)

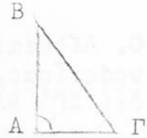
'Εκ τοῦ τριγώνου ΕΑΓ ἔχομεν Γων.ω > γωνίας Α (§ 35α΄)

'Αφοῦ λοιπόν γων.ΒΔΓ > γων.ω καί γων. ω > γων.Α θά ἔχωμεν (§ 14) γων.ΒΔΓ > γων.Α ὅ.ἔ.δ.

112. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν ὀρθογώνιον ἤ ἀμβλυγώνιον τρίγωνον ἔχει δύο ὀξείας γωνίας.

Λ ύ σ ι ς

Α΄ Περίπτωσις ὀρθογωνίου τριγώνου.



<u>Τό τρίγ. ΑΒΓ ἔχει γων.Α=1 ὀρθή</u>
Γωνίαι Β καί Γ ὀξεῖαι

<u>'Απόδειξις</u>

1. Ἔστω ὅτι γών.Β=1ὀρθή
'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν: γων.Α=1ὀρθή
Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν. γων. Β +γων.Α = 2 ὀρθαί. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (§ 35, β΄).

Ὥστε ἀποκλείεται, ἐδῶ, γων. Β = 1 ὀρθή.

2. Ἔστω ὅτι γων. Β > 1 ὀρθῆς
'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν γων. Α = 1 "
Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν: γων.Β + γων. Α > 2 ὀρθῶν. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (§ 35,β΄)

Ὥστε ἀποκλείεται, ἐδῶ γων.Β > 1 ὀρθῆς.

'Αφοῦ λοιπόν ἀποκλείεται νά εἶναι ἡ γωνία Β, ὀρθή ἤ ἀμβλεῖα κατ'ἀνάγκην θά <u>εἶναι ὀξεῖα</u>.

'Ομοίως ἐργαζόμεθα καί ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα.

Β΄. Περίπτωσις ἀμβλυγωνίου τριγώνου

<u>τό τρίγ.ΑΒΓ ἔχει γων. Α > 1 ὀρθῆς</u>
Γωνίαι Β καί Γ ὀξεῖαι

<u>'Απόδειξις</u>

1. Ἔστω ὅτι γων. Β=1 ὀρθή
'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν γων.Α > 1 "
Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν: γων.Β+ γων.Α > 2 ὀρθῶν. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (§ 35,β΄).

Ὥστε ἀποκλείεται, ἐδῶ, γων.Β = 1 ὀρθή.

2. Ἔστω ὅτι γων. Β > 1 ὀρθῆς
'Εξ ὑποθέσεως ἔχομεν γων.Α > 1 "
Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν γων. Β + γων.Α > 2 ὀρθῶν. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον (§ 35, β΄).

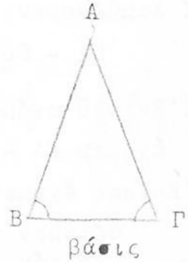
Ὥστε ἀποκλείεται, ἐδῶ, γων. Β > 1 ὀρθῆς

'Αφοῦ λοιπόν ἀποκλείεται νά εἶναι ἡ γωνία Β ὀρθή ἤ ἀμβλεῖα κατ'ἀνάγκην θά εἶναι ὀξεῖα.

'Ομοίως ἐργαζόμεθα καί ἀποδεικνύομεν ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα.

---

113. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παρά τήν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι,



'Απόδειξις

'Αφοῦ τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές αἱ παρά τήν βάσιν του ΒΓ γωνίαι αὐτοῦ Β καί Γ εἶναι ἴσαι "Ωστε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

1. "Αν $\hat{B}$ = 1 ὀρθή θά εἶναι καί $\hat{\Gamma}$ = 1 ὀρθή (ἀφοῦ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$)

'Επομένως $\hat{B}+\hat{\Gamma}$ = 2 ὀρθ. ὅπερ ἄτοπον (§ 35,β΄). "Ωστε ἀποκλείεται νά εἶναι αἱ γωνίαι Β καί Γ ὀρθαί.

2. "Αν $\hat{B} >$ 1 ὀρθ. τότε καί $\hat{\Gamma} >$ 1 ὀρθ. (ἀφοῦ $\hat{B} = \hat{\Gamma}$)

'Επομένως $\hat{B}+\hat{\Gamma} >$ 2 ὀρθ. ὅπερ ἄτοπον (§ 35,β΄). "Ωστε ἀποκλείεται νά εἶναι αἱ γωνίαι Β καί Γ ἀμβλεῖαι.

"Ωστε ἀπομένει ὅτι αἱ γωνίαι Β καί Γ εἶναι ὀξεῖαι.

---

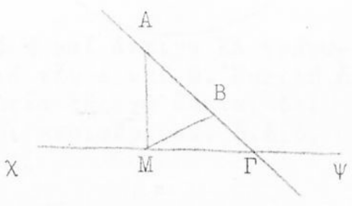
114. Δίδεται εὐθεῖα χψ καί δύο σημεῖα Α καί Β εὑρισκόμενα πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς. Φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΑΒ ἡ ὁποία προεκτεινομένη ἔστω ὅτι τέμνει τήν χψ εἰς ἕν σημεῖον Γ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπό τά Α καί Β εἶναι μ ε γ α λ υ τ έ ρ α τῆς διαφορᾶς τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς χψ ἀπό τά Α καί Β.

Λύσις

χψ τυχοῦσα εὐθεῖα
Α,Β τυχόντα σημεῖα ἐκτός τῆς χψ
Μ τυχόν σημ. ἐπί τῆς χψ
Γ σημ. τομῆς ΑΒ καί χψ

ΓΑ - ΓΒ > ΜΑ - ΜΒ (Σχ.α΄)
ἤ ΓΑ - ΓΒ > ΜΒ - ΜΑ (Σχ.β΄)



(Σχ.α΄)

'Απόδειξις

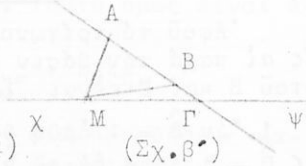
Ι. 'Εκ τοῦ σχήματος, ὅπου ΜΑ > ΜΒ

ἔχομεν : ΓΑ - ΓΒ = ΑΒ (1)

'Επίσης ἔχομεν: ΑΒ > ΜΑ - ΜΒ (§ 34)

Θέτομεν τώρα είς τό α΄ μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης ὅπου ΑΒ τήν ἴσην πρός αὐτό διαφοράν ΓΑ-ΓΒ, ἐκ τῆς (1), καί λαμβάνομεν

ΓΑ - ΓΒ > ΜΑ - ΜΒ ὅ.ἔ.δ.



ΙΙ. 'Εκ τοῦ σχήματος ὅπου ΜΒ > ΜΑ

ἔχομεν ΓΑ - ΓΒ = ΑΒ (2)

'Επίσης ἔχομεν: ΑΒ > ΜΒ - ΜΑ (§ 34)

(Σχ.β΄)

Θέτομεν τώρα, είς τό α΄μέλος τῆς ἀνισότητος ταύτης ὅπου ΑΒ τήν ἴσην πρός αὐτό διαφοράν ΓΑ-ΓΒ, ἐκ τῆς (2), καί λαμβάνομεν

ΓΑ - ΓΒ > ΜΒ - ΜΑ ὅ.ἔ.δ.

ΟΜΑΣ ΕΝΝΑΤΗ

'Ασκήσεις άναφερόμεναι

α΄) είς τούς τρεῖς πρώτους γεωμετρικούς τόπους (δηλαδή περιφέρειαν κύκλου, μεσοκάθετον εὐθείας καί διχοτόμον γωνίας) καί

β΄) εἰς ἁπλάς γεωμετρικάς κατασκευάς.

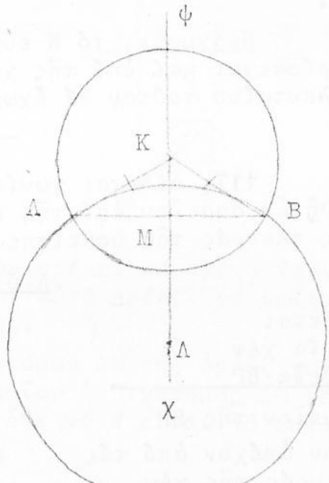
115. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι διά δύο δοθέντων σημείων διέρχονται ἄπειροι περιφέρειαι.

Λύσις

Δίδονται σημεῖα Α καί Β.

Διέρχονται ἄπειροι περιφέρ.

'Απόδειξις



Φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΑΒ καί ὑψοῦμεν κάθετον χψ ἐπ'αὐτήν είς τό μέσον της Μ.

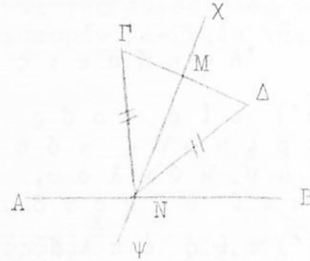
Γνωρίζομεν (§ 77) ὅτι ὅλα τά σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ταύτης ἀπέχουν ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς εὐθείας ΑΒ.

'Εάν λοιπόν λάβωμεν ἕν ἐκ τῶν ἀπείρων σημείων τῆς χψ, π.χ. τό Κ, θά ἔχωμεν ΚΑ=ΚΒ.

'Επομένως, ἐάν μέ κέντρον τό Κ καί ἀκτῖνα ΚΑ γράψωμεν περιφέρειαν αὐτη θά διέλθῃ διά τῶν Α καί Β.'Επειδή ὅμως τοῦτο συμβαίνει δι'ὅλα τά σημεῖα τῆς χψ ἕπεται ὅτι διά τῶν Α καί Β διέρχονται ἄπειροι περιφέρειαι. ὅ.ἔ.δ.

116. Δίδεται εὐθεῖα τις καί δύο σημεῖα ἐκτός αὐτῆς. Νά εὑρεθῇ ἕν σημεῖον ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης ἀπέχον ἴσον ἀπό τά δύο δοθέντα σημεῖα.

Λ ύ σ ι ς



Δίδονται
εὐθεῖα ΑΒ
σημεῖα Γ καί Δ ἐκτός αὐτῆς.

σημεῖον τῆς ΑΒ ἴσον
ἀπέχον τῶν Γ καί Δ

'Απόδειξις

Φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΓΔ καί ὑψοῦμεν κάθετον χψ ἐπ' αὐτήν εἰς τό μέσον της Μ.

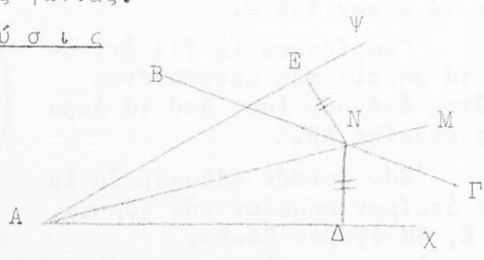
Ἔστω ὅτι ἡ χψ τέμνει τήν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς ἕν σημεῖον Ν. Λέγομεν ὅτι τό Ν εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

Πράγματι, τό Ν εὑρίσκεται ἐπί τῆς ΑΒ ἐνῷ συγχρόνως εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς χψ, μεσοκαθέτου τῆς ΓΔ. Ὡς ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου θά ἔχωμεν (§ 77) ὅτι ΝΓ=ΝΔ ὅ.ἔ.δ.

---

117. Δίδεται γωνία τις καί τυχοῦσα εὐθεῖα. Νά εὑρεθῇ ἕν σημεῖον ἐπί τῆς εὐθείας ταύτης ἀπέχον ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς δοθείσης γωνίας.

Λ ύ σ ι ς



Δίδεται
γωνία χΑψ
εὐθεῖα ΒΓ

σημεῖον τῆς ΒΓ
ἴσον ἀπέχον ἀπό τάς
πλευράς τῆς χΑψ.

'Απόδειξις

'Επειδή τό ζητούμενον σημεῖον πρέπει νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς δοθείσης γωνίας δι'αὐτό πρέπει νά κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.

Πρός τοῦτο φέρομεν τήν διχοτόμον ΑΜ τῆς γωνίας χΑψ

Ἔστω ὅτι ἡ διχοτόμος τέμνει τήν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΒΓ εἰς ἕν σημεῖον Ν. Λέγομεν ὅτι τό Ν εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

Πράγματι τό Ν εὑρίσκεται ἐπί τῆς ΒΓ ἐνῷ συγχρόνως εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς ΑΜ διχοτόμου τῆς γων. χΑψ.

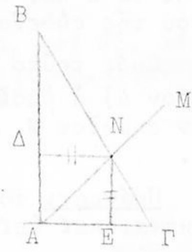
Ὡς ἐκ τοῦ τελευταίου τούτου (§ 78) θά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς γωνίας χΑψ.

Φέροντες λοιπόν τάς ἀποστάσεις ΝΔ καί ΝΕ τοῦ Ν ἀπό τάς πλευράς Αχ καί Αψ ἔχομεν ΝΔ=ΝΕ.

Ὥστε πράγματι τό Ν εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

---

118. Δίδεται ὀρθογώνιον καί σκαληνόν τρίγωνον. Νά εὑρεθῇ ἕν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης του τό ὁποῖον νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς καθέτους πλευράς του.



Λύσις

Τρίγ.ΑΒΓ ὀρθογ. σκαληνόν
γων. Α = 1 ὀρθή.

σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἴσον ἀπέχον τῶν ΑΒ,ΑΓ.

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή τό ζητούμενον σημεῖον πρέπει νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς ὀρθῆς γωνίας δι'αὐτό πρέπει νά κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.

Πρός τοῦτο φέρομεν τήν διχοτόμον ΑΜ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. Ἔστω Ν τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον ἡ διχοτόμος ΑΜ τέμνει τήν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Λέγομεν ὅτι τό Ν εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

Πράγματι τό Ν εὑρίσκεται ἐπί τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ἐνῷ συγχρόνως εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς ΑΜ διχοτόμου τῆς γωνίας Α. Ἄρα θά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς γωνίας Α.

Φέροντες λοιπόν τάς ἀποστάσεις ΝΔ καί ΝΕ τοῦ Ν ἀπό τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ ἔχομεν ΝΔ=ΝΕ.

Ὥστε πράγματι τό Ν εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

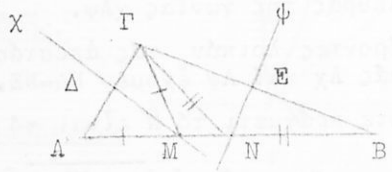
---

119. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καί σημεῖον Γ ἐκτός αὐτῆς. Νά εὑρεθῇ πρῶτον σημεῖον Μ ἐπί τῆς ΑΒ τοιοῦτον ὥστε νά εἶναι ΜΑ=ΜΓ καί δεύτερον σημεῖον Ν ἐπίσης ἐπί τῆς ΑΒ τοιοῦτον ὥστε νά εἶναι ΝΒ=ΝΓ.

Λ ύ σ ι ς

Εὐθεῖα ΑΒ
σημ.Γ ἐκτός τῆς ΑΒ

Νά εὑρεθοῦν
α´) σημ. Μ ὥστε ΜΑ=ΜΓ
β´) " Ν " ΝΒ=ΝΓ



'Απόδειξις

α)'Επειδή τό ζητούμενον σημεῖον Μ πρέπει νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τά Α καί Γ, δι αὐτό πρέπει νά κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς εὐθείας ΑΓ, τῆς ἑνούσης τά σημεῖα Α καί Γ.

Πρός τοῦτο φέρομεν τήν μεσοκάθετον Δχ τῆς ΑΓ(εἰς τό μέσον Δ) ἡ ὁποία μεσοκάθετος, ἔστω, ὅτι τέμνει τήν ΑΒ εἰς ἕν σημεῖον Μ. Λέγομεν ὅτι τό Μ εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

Πράγματι τό Μ εὑρίσκεται ἐπί τῆς ΑΒ ἐνῷ συγχρόνως εὑρίσκεται καί ἐπί τῆς ΜΔ μεσοκαθέτου τῆς ΑΓ.

Φέροντες λοιπόν τήν ΜΓ θά ἔχομεν (§ 77) ΜΑ=ΜΓ ὅ.ἔ.δ.

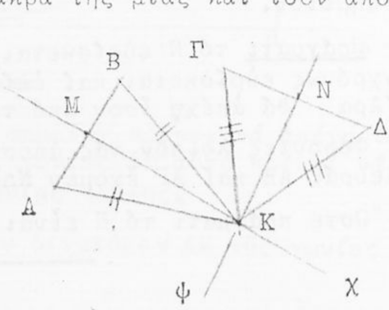
β)'Εργαζόμενοι ὁμοίως διά τό σημεῖον Ν καί φέροντες τήν ΝΓ θά ἔχωμεν ΝΒ=ΝΓ.

---

120. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΑΒ καί ΓΔ. Νά εὑρεθῇ ἕν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς μιᾶς καί ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς ἄλλης εὐθείας.

Λ ύ σ ι ς

Εὐθεῖαι ΑΒ καί ΓΔ
Νά εὑρεθῇ σημ. πχ.Κ
"Ωστε
α´) ΚΑ = ΚΒ
β´) ΚΓ = ΚΔ



'Απόδειξις

α')'Επειδή τό ζητούμενον σημεῖον Κ πρέπει νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τά Α καί Β δι'αὐτό πρέπει νά κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου Μχ τῆς εὐθείας ΑΒ, ὅτε θά ἔχωμεν ΚΑ=ΚΒ.

β')'Επειδή τό ζητούμενον σημεῖον Κ πρέπει νά ἀπέχῃ ἐπίσης ἴσον ἀπό τά Γ καί Δ δι'αὐτό πρέπει νά κεῖται καί ἐπί τῆς μεσοκαθέτου Νψ τῆς εὐθείας ΓΔ ὅτε θά ἔχωμεν ΚΓ=ΚΔ.

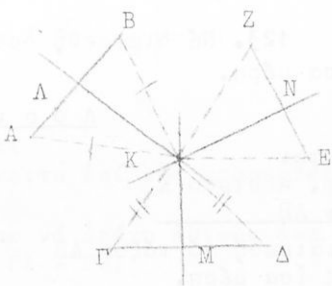
Διά νά ἰσχύουν ὅμως ταὐτοχρόνως αἱ ἰσότητες ΚΑ=ΚΒ καί ΚΓ=ΚΔ πρέπει τό Κ νά εἶναι κοινόν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων Μχ καί Νψ.

"Ωστε πρέπει αἱ μεσοκάθετοι αὐταί νά τέμνωνται ὅτε τό σημεῖον τομῆς των (ἐδῶ τό Κ), εἶναι τό ζητούμενον σημεῖον.

---

121. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ, καί ΕΖ. Νά εὑρεθῇ ἕν σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς ΑΒ, ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς ΓΔ καί ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς ΕΖ.

Λ ύ σ ι ς



'Εργαζόμενοι ὅπως ἀκριβῶς καί εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν καταλήγομεν εἰς τό συμπέρασμα ὅτι "τότε μόνον θά ὑπάρχῃ τοιοῦτον σημεῖον ὅταν αἱ μεσοκάθετοι ἐπί τάς τρεῖς δοθείσας εὐθείας διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου π.χ. Κ "

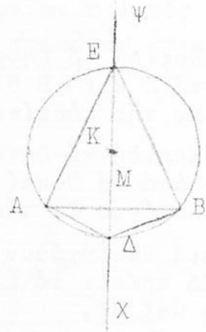
"Ωστε θά ἔχωμεν

ΚΑ = ΚΒ , ΚΓ = ΚΔ καί ΚΕ = ΚΖ.

---

122. Δίδεται κύκλος κέντρου Κ καί χορδή ΑΒ αὐτοῦ.Νά εὑρεθῇ σημεῖον ἐπί τῆς περιφερείας αὐτοῦ ἀπέχον ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῆς χορδῆς.

Λ ύ σ ι ς



Κύκλος κέντρου Κ
χορδή ΑΒ

σημεῖον τῆς περιφερείας
ἴσον ἀπέχον ἀπό Α καί Β.

'Απόδειξις

'Επειδή τό ζητούμενον σημεῖον πρέπει νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τά ἄκρα Α καί Β τῆς χορδῆς ΑΒ δι'αὐτό πρέπει νά κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ.

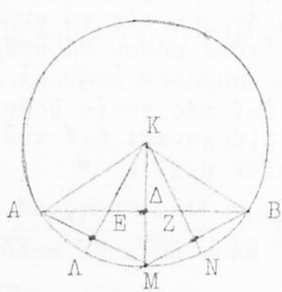
Φέρομεν λοιπόν τήν μεσοκάθετον χψ τῆς ΑΒ, εἰς τό μέσον της Μ, ἡ ὁποία μεσοκάθετος ἐξερχομένη τῆς περιφερείας τέμνει αὐτήν εἰς δύο σημεῖα, τά Δ καί Ε, τά ὁποῖα λέγομεν ὅτι εἶναι τά ζητούμενα (δηλαδή ἐδῶ ἔχομεν δύο σημεῖα ἀπέχοντα ἴσον ἀπό τά Α καί Β καί ὄχι ἕν).

Πράγματι φέροντες τάς ΑΔ, ΔΒ, ΑΕ καί ΕΒ θά ἔχωμεν (§ 77).

ΑΔ = ΒΔ καί ΑΕ = ΒΕ ὅ.ἔ.δ.

123. Νά διαιρεθῇ δοθέν τόξον περιφερείας εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη.

Λ ύ σ ι ς



Δίδονται
περιφ. κεντρου Κ
τόξον ΑΒ

νά διαιρεθῇ τό τόξον ΑΒ
εἰς 4 ἴσα μέρη.

'Απόδειξις

Φέρομεν τήν χορδήν ΑΒ καί τάς ἀκτῖνας ΚΑ καί ΚΒ τάς καταληγούσας εἰς τά ἄκρα τοῦ τόξου.

Τό τρίγωνον ΑΚΒ εἶναι ἰσοσκελές. Φέρομεν τήν κάθετον ΚΔ ἐπί τήν βάσιν αὐτοῦ ΑΒ ὅτε (§ 66) αὐτη, ἡ ΚΔ, διχοτομεῖ καί τήν γωνίαν ΑΚΒ.

Προεκτείνομεν τήν ΚΔ μέχρι νά τμήσῃ τήν περιφέρειαν εἰς ἕν σημεῖον Μ. Τότε κατά τά ἀνωτέρω $\widehat{AKM} = \widehat{MKB}$ καί ἐπομένως (§ 43) $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$ (1)

Φέρομεν τώρα τάς χορδάς ΑΜ καί ΜΒ καί σχηματίζομεν τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΚΜ καί ΜΚΒ.

Φέροντες τάς καθέτους ΚΕ καί ΚΖ ἐπί τάς βάσεις αὐτῶν ΑΜ καί ΜΒ διχοτομοῦμεν τάς γωνίας ΛΚΜ καί ΜΚΒ ἐπομένως καί τά ἀντίστοιχα τόξα ΑΜ καί ΜΒ.

Οὕτω ἔχομεν $\overset{\frown}{ΑΛ} = \overset{\frown}{ΛΜ}$ καί $\overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$

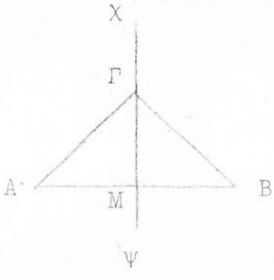
Λόγῳ ὅμως τῆς ἰσότητος (1) θά ἔχωμεν

$\overset{\frown}{ΑΛ} = \overset{\frown}{ΛΜ} = \overset{\frown}{MN} = \overset{\frown}{NB}$ ὅ.ἔ.δ.

---

124. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τό ὁποῖον, ἀπέχει ἴσον ἀπό τά ἄκρα ἑνός εὐθυγράμμου τμήματος εὑρίσκεται ἐπί τῆς καθέτου ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τό μέσον αὐτοῦ.

Λ ύ σ ι ς



Δίδεται
εὐθύγρ.τμῆμα ΑΒ
ΧΨ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ
Γ τυχόν σημεῖον
ΓΑ = ΓΒ.

Τό Γ κεῖται ἐπί τῆς χψ.

Ἀπόδειξις

Ἄν τό σημεῖον Γ, παρ' ὅλον ὅτι ἀπέχει ἴσον ἀπό τά Α καί Β, δέν ἔκειτο ἐπί τῆς μεσοκαθέτου χψ θά ἔκειτο ἐκτός αὐτῆς.

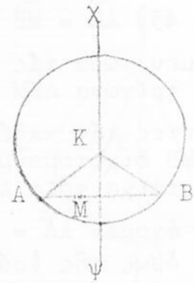
Τότε ὅμως (§ 79) τό Γ ἔπρεπε νά ἀπέχῃ ἄνισον ἀπό τά Α καί Β ὅπερ ἄτοπον διότι ὑπετέθη ΓΑ = ΓΒ.

Ἐπομένως τό Γ εὑρίσκεται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου χψ (τῆς ΑΒ) ὅ.ἔ.δ.

---

125. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κάθετος ἐπί δοθεῖσαν χορδήν τόξου κύκλου, εἰς τό μέσον αὐτῆς διέρχεται ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ (ἤ ἄλλως διά τοῦ κέντρου τοῦ τόξου).

Λ ύ σ ι ς



Δίδονται
Κύκλος κέντρου Κ
τόξον ΑΒ
χορδή ΑΒ
χψ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ

χψ διέρχεται διά τοῦ Κ

'Απόδειξις

Φέρομεν τάς ἀκτῖνας ΚΑ καί ΚΒ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι. Ὥστε ΚΑ = ΚΒ.

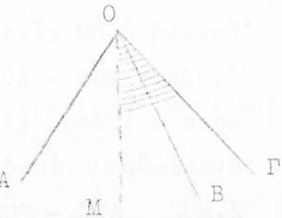
Τότε ὅμως (§ 77, ἀντίστροφον) τό Κ εὑρίσκεται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ.

Δηλαδή ἡ χψ μεσοκάθετος τῆς ΑΒ διέρχεται διά τοῦ κέντρου Κ ὅ.ἔ.δ.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΟΜΑΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Περιλαμβάνονται ἀσκήσεις ἀναφερόμεναι εἰς ὅλας τάς προηγουμένας ὁμάδας.

126. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος ΟΜ μιᾶς γωνίας ΑΟΒ σχηματίζει μέ εὐθεῖαν ΟΓ εὑρισκομένην ἐ κ τ ό ς τῆς γωνίας ΑΟΒ γωνίαν ἴσην μέ τό ἡ μ ι ά θ ρ ο ι σ μ α τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ΟΓ μέ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας ΑΟΒ.



Λύσις

Γωνία ΑΟΒ

ΟΜ διχοτόμος γωνίας ΑΟΒ

Εὐθεῖα ΟΓ ἐκτός τῆς γωνίας

$$\widehat{MO\Gamma} = \frac{\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma}}{2}$$

Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν $\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{AOM}$

καί $\widehat{MO\Gamma} = \widehat{MOB} + \widehat{BO\Gamma}$

τάς ἰσότητας αὐτάς προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$$2.\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{AOM} + \widehat{MOB} + \widehat{BO\Gamma} \qquad (1)$$

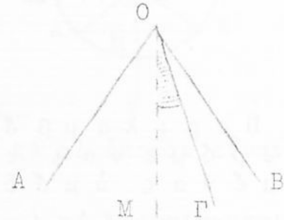
Ἐπειδή ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γων. ΑΟΒ ἔχομεν $\widehat{MOB} = \widehat{AOM}$ ἤ $-\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 0$.

Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γράφεται $2.\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma}$

Διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2 καί ἔχομεν:

$$\frac{\cancel{2}\widehat{MO\Gamma}}{\cancel{2}} = \frac{\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma}}{2} \quad \text{ἤ} \quad \widehat{MO\Gamma} = \frac{\widehat{AO\Gamma} + \widehat{BO\Gamma}}{2} \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

127. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος OM μιᾶς γωνίας AOB σχηματίζει μέ εὐθεῖαν OΓ εὑρισκομένην ἐ ν τ ό ς τῆς γωνίας AOB, γωνίαν ἴσην μέ τήν ἡ μ ι δι α φ ο ρ ά ν τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας σχηματίζει ἡ εὐθεῖα OΓ μέ ἑκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας AOB.



<u>Λ ύ σ ι ς</u>

Γωνία AOB
OM διχοτόμος γωνίας AOB
<u>Εὐθεῖα OΓ ἐντός τῆς γωνίας</u>

$$\widehat{MO\Gamma} = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{BO\Gamma}}{2}$$

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν: $\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{AOM}$

καί $\widehat{MO\Gamma} = \widehat{MOB} - \widehat{\Gamma OB}$

Τάς ἰσότητας αὐτάς προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$$2.\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{AOM} + \widehat{MOB} - \widehat{\Gamma OB} \quad (1)$$

Ἐπειδή ἡ OM εἶναι διχοτόμος τῆς γων. AOB

ἔχομεν: $\widehat{MOB} = \widehat{AOM}$ ἤ $-\cancel{\widehat{AOM}} + \cancel{\widehat{MOB}} = 0$

Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γράφεται: $2\widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma} - \widehat{\Gamma OB}$

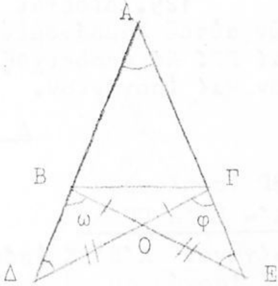
Διαιροῦμεν ἀμφότερα τά μέλη διά 2 καί ἔχομεν:

$$\frac{\cancel{2}.\widehat{MO\Gamma}}{\cancel{2}} = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{\Gamma OB}}{2} \quad ἤ \quad \widehat{MO\Gamma} = \frac{\widehat{AO\Gamma} - \widehat{\Gamma OB}}{2} \quad ὅ.ἔ.δ.$$

---

128. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ABΓ. Προεκτείνομεν τάς ἴσας πλευράς AB καί AΓ πέραν τῆς βάσεως BΓ καί ἐπί τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα BΔ καί ΓE ἴσα μεταξύ των. Φέρομεν τάς εὐθείας BE καί ΓΔ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τό O.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ΔO=OE καί BO=OΓ.



Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΑΒ = ΑΓ, ΒΓ βάσις
ΒΔ, ΓΕ προεκτάσεις ἴσων πλευρῶν
ΒΔ = ΓΕ, Ο σημ.τομῆς

ΔΟ = ΟΕ
ΒΟ = ΟΓ

'Απόδειξις

Ι.'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΓΔ.

Ταῦτα ἔχουν: Τήν Α γωνίαν κοινήν
ΑΒ=ΑΓ (ἐξ ὑποθέσεως) καί

ΑΕ=ΑΔ (διότι ΑΕ=ΑΓ+ΓΕ καί ΑΔ=ΑΒ+ΒΔ καί ἀφοῦ τά β΄μέλη εἶναι ἴσα μεταξύ των, ὡς ἀποτελούμενα ἀπό ἴσους προσθετέους θά εἶναι καί τά α΄μέλη ἴσα).

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα θά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

γων. Δ = γων. Ε (1)

καί γων.ΑΓΔ= γων.ΑΒΕ (2)

'Εκ τοῦ σχήματος θά ἔχωμεν ἀκόμη γων. φ = γων. ω (§ 51) ὡς παραπληρωματικαί τῶν ἐξ ἀποδείξεως [(ἰσότης (2)] γωνιῶν ΑΓΔ καί ΑΒΕ.

ΙΙ.'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΟΔ καί ΓΟΕ.

Ταῦτα ἔχουν

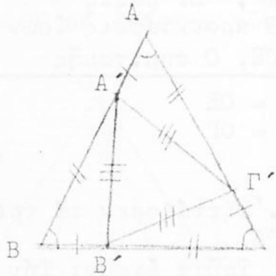
ΒΔ = ΓΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
γων. ω = γων. φ (ἐξ ἀποδείξεως) καί
γων. Δ = γων. Ε (" ")

'Επομένως (§ 60) τά τρίγωνα θά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

ΔΟ = ΟΕ (ὡς εὑρισκομένας ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν ω καί φ).

καί ΒΟ = ΟΓ (" " " " ἴσων γωνιῶν Δ καί Ε) ὅ.ἔ.δ.

129. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ.'Επί τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λαμβάνομεν ἴσα μεταξύ των τμήματα τά ΑΑ´, ΒΒ´ καί ΓΓ´. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό τρίγωνον Α´Β´Γ´ εἶναι ἰσόπλευρον καί ἰσογώνιον.



Λύσις

ΑΒΓ ἰσόπλευρον
ΑΑ´= ΒΒ´= ΓΓ´

τρίγωνον Α´Β´Γ´ ἰσόπλευρον
καί ἰσογώνιον

'Απόδειξις

Ι.'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΑ´Γ´ καί ΒΒ´Α´

Ταῦτα ἔχουν

ΑΑ´ = ΒΒ´ (διότι ἐλήφθησαν)
ΑΓ´ = Α´Β διότι ΑΓ´= ΑΓ-ΓΓ´ καί Α´Β =ΑΒ- ΑΑ´καί ἀφοῦ ΑΓ = ΑΒ (πλευραί ἰσοπλεύρου) ΓΓ´= ΑΑ´ (ἐλήφθησαν) ἄρα καί τά ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων θά εἶναι ἴσα (§ 3) καί τέλος γων. Α = γων.Β διότι τό ἰσόπλευρον τρίγ. ΑΒΓ εἶναι καί ἰσογώνιον (§ 68)

῞Ωστε τά τρίγωνα ΑΑ´Γ´ καί ΒΒ´Α´ (§ 56) εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν Α´Γ´= Α´Β´ (1)

ΙΙ. 'Εξετάζομεν τά τρίγωνα Α Α´Γ καί ΓΓ´Β´.

Ταῦτα ἔχουν

ΑΑ´ = ΓΓ´ (ἐλήφθησαν)
ΑΓ´ = ΓΒ´ (ὡς περίπτωσις Ι) καί τέλος
γων. Α = γων.Γ (" Ι)

῞Ωστε τά τρίγωνα ΑΑ´Γ´ καί ΓΓ´Β´εἶναι ἴσα (§ 56) καί τότε (§ 57) θά ἔχουν Α´Γ´= Β´Γ´ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν Α´Β´= Β´Γ´= Α´Γ´

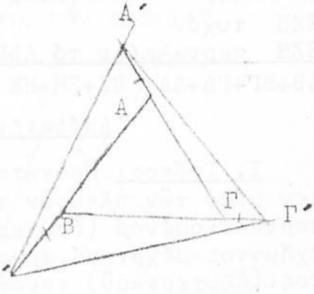
'Επομένως, τό τρίγωνον Α´Β´Γ´εἶναι ἰσόπλευρον καί (§ 68) θά εἶναι καί ἰσογώνιον ὅ.ἔ.δ.

---

130. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ.'Επί τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν αὐτοῦ λαμβάνομεν ἴσα μεταξύ των τμήματα τά ΑΑ´, ΒΒ´ καί ΓΓ´. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό τρίγωνον

Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρον καί ἰσογώνιον.

Λύσις



ΑΒΓ ἰσόπλευρον
ΑΑ΄ = ΒΒ΄= ΓΓ΄

τρίγ. Α΄Β΄Γ΄ ἰσόπλευρον
καί ἰσογώνιον.

'Απόδειξις

I. 'Εξετάζομεν τά τρίγωνα
Α΄ΓΓ΄ καί Α΄ΑΒ΄
Ταῦτα ἔχουν:

ΓΓ΄= Α΄Α (διότι ἐλήφθησαν)

Α΄Γ= Β΄Α (διότι Α΄Γ=Α΄Α+ΑΓ καί Β΄Α=Β΄Β+ΒΑ
καί ἀφοῦ τά β΄μέλη ἴσα, ὡς ἀποτελούμενα ἀπό ἴσους προσθετέους, θά εἶναι καί τά α΄ μέλη ἴσα) καί τέλος

γων. Α΄ΓΓ΄= γων. Β΄ΑΑ΄ (ὡς παραπληρωματικάς τῶν ἴσων γωνιῶν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ).

Ὥστε τά τρίγωνα Α΄ΓΓ΄ καί Α΄ΑΒ΄εἶναι ἴσα (§ 56) καί τότε (§ 57) θά ἔχουν Α΄Γ΄ = Α΄Β΄ (1)

II, 'Εξετάζομεν τά τρίγωνα Α΄ΓΓ΄καί Β΄ΒΓ΄

'Εργαζόμενοι ὁμοίως ἀποδεικνύομεν ὅτι

Α΄Γ΄ = Β΄Γ΄ (2)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν:

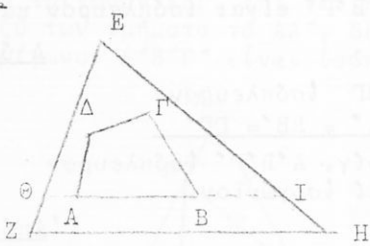
Α΄Β΄ = Β΄Γ΄ = Α΄Γ΄

'Επομένως τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσόπλευρον καί (ξ 68) θά εἶναι καί ἰσογώνιον ὅ.ἔ.δ.

---

131. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ περίμετρος παντός κ υ ρ τ ο ῦ εὐθυγράμμου σχήματος εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν περίμετρον ἄλλου εὐθυγράμμου σχήματος, κυρτοῦ ἤ μή κυρτοῦ τό ὁποῖον περικλείει τό πρῶτον.

Λύσις



ΑΒΓΔ κυρτόν εὐθυγρ.σχῆμα
ΕΖΗ τυχόν " "
ΕΖΗ περικλείει τό ΑΒΓΔ
ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ < ΕΖ+ΖΗ+ΗΕ

Ἀπόδειξις

I. Τρόπος: Προεκτείνομεν μίαν τῶν πλευρῶν τοῦ περικλειομένου (ἐσωτερικοῦ) σχήματος μέχρι νά συναντήση τήν περίμετρον τοῦ περικλείοντος (ἐξωτερικοῦ) τοιούτου. Προεκτείνομεν ἐδῶ τήν ΑΒ μέχρι νά τμήση τήν περίμετρον τοῦ ΕΖΗ εἰς τά σημεῖα Θ καί Ι.

Τότε ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν (§ 30)

ΑΔ + ΔΓ + ΓΒ < ΑΘ + ΘΕ + ΕΙ + ΙΒ

Προσθέτομεν εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἀνισότητος τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ καί ἔχομεν

ΑΔ+ΔΓ+ΓΒ+ΑΒ < ΑΘ+ΘΕ+ΕΙ+ΙΒ+ΑΒ ἤ

(ἐφαρμόζοντες τόν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως εἰς τό α΄μέλος καί διότι εἰς τό β΄ μέλος θέτομεν ΑΘ+ΙΒ+ΑΒ=ΘΙ).

ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ < ΘΙ+ΘΕ+ΕΙ (1)

Ἀλλά ΘΙ < ΘΖ+ΖΗ+ΗΙ (2) (λόγῳ § 28).

Ἀντικαθιστῶντες τώρα εἰς τό β΄ μέλος τῆς ἀνισότητος (1) τόν προσθετέον ΘΙ μέ τό μεγαλύτερον ἀπό αὐτόν, λόγῳ τῆς (2), ἄθροισμα ΘΖ+ΖΗ+ΗΙ ἐνισχύομεν ἀκόμη περισσότερα τήν ἀνισότητα (1) ὡς αὐτη δεικνύει τό μεγαλύτερον καί τό μικρότερον.

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ < ΘΖ+ΖΗ+ΗΙ+ΘΕ+ΕΙ ἤ

ἐπειδή ΘΖ+ΘΕ = ΕΖ καί ΗΙ+ΕΙ=ΗΕ ἔχομεν δι'ἀντικαταστάσεως εἰς τό β΄μέλος

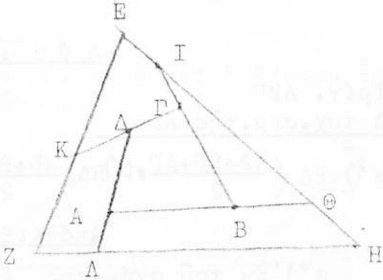
ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΑ < ΕΖ+ΖΗ+ΗΕ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις:

Ἡ ἐκφώνησις τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως εἶναι δυνατόν νά δοθῆ καί ὡς ἐξῆς:

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ περίμετρος πάσης κλειστῆς κ υ ρ τ ῆ ς τεθλασμένης γραμμῆς εἶναι μικροτέρα ἀπό τήν περίμετρον πάσης ἄλλης, ἐπίσης κλειστῆς, τεθλασμένης γραμμῆς (κυρτῆς ἤ μή κυρτῆς) περικλειούσης τήν πρώτην".

Ἡ ἀπόδειξις καί ἐδῶ γίνεται ὡς καί ἀνωτέρω.



<u>Β΄ Τρόπος</u>. Εἶναι δυνατόν <u>εἰς ἀμφοτέρας τάς περιπτώσεις</u> νά χρησιμοποιήσωμεν τό παραπλεύρως κείμενον σχῆμα εἰς τό ὁποῖον, ὅπως φαίνεται <u>π ρ ο ε κ τ ε ί ν ο μ ε ν</u> πάσας τάς πλευράς τῆς περικλειομένης τεθλασμένης (κατά τόν τρόπον ὁ ὁποῖος φαίνεται εἰς τό σχῆμα).

[Δηλαδή ἀρχίζομεν ἀπό τήν κορυφήν Α καί μεταβαίνοντες, ἐπί τῆς περιμέτρου, πρός τάς ἄλλας κορυφάς προεκτείνομεν ἑκάστην πλευράν πέραν τῆς ἑπομένης κορυφῆς μέχρι νά συναντήσῃ τήν περίμετρον τῆς ἐξωτερικῆς τεθλασμένης] .

Τώρα ἔχομεν ἐκ τοῦ σχήματος:

$$\left.\begin{array}{lll} & A\Theta < A\Lambda+\Lambda H+H\Theta & (\S\ 28) \\ & BI < B\Theta+\Theta I & (\ \ ''\ \ ) \\ & \Gamma K < \Gamma I+IE+EK & (\ \ ''\ \ ) \\ \text{καί} & \Delta\Lambda < \Delta K+KZ+Z\Lambda & (\ \ ''\ \ ) \end{array}\right\}$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί ἔχομεν

$$A\Theta+BI+\Gamma K+\Delta\Lambda < A\Lambda+\Lambda H+H\Theta+B\Theta+\Theta I+\Gamma I+IE+EK+\Delta K+KZ+Z\Lambda$$

ἤ

Ἐπειδή $A\Theta = AB+B\Theta$, $BI = B\Gamma+\Gamma I$ καί $\left.\begin{array}{l}\Gamma K = \Gamma\Delta+\Delta K \\ \Delta\Lambda = \Delta A+A\Lambda\end{array}\right\}$ ἔχομεν δι' ἀντικαταστάσεως

$$AB+\cancel{B\Theta}+B\Gamma+\cancel{\Gamma I}+\Gamma\Delta+\cancel{\Delta K}+\Delta A+\cancel{A\Lambda} < \cancel{A\Lambda}+\Lambda H+H\Theta+\cancel{B\Theta}+\Theta I+\cancel{\Gamma I}+IE+EK+\cancel{\Delta K}+KZ+Z\Lambda$$

ἤ (§ 12)

$$AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A < \underline{\Lambda H}+\underline{H\Theta}+\underline{\Theta I}+\underline{IE}+EK+KZ+\underline{Z\Lambda}$$

ἤ (διότι $\Lambda H+Z\Lambda = ZH$, $H\Theta+\Theta I+IE = HE$ καί $EK+KZ=EZ$)

Ἔχομεν τελικῶς:

$$AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A < EZ+ZH+HE \quad ὅ.ἔ.δ.$$

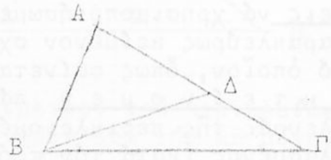
132. Δίδεται τυχόν τρίγωνον ΑΒΓ. 'Επί τῆς πλευρᾶς του ΑΓ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Δ καί φέρομεν τήν εὐθεῖαν ΒΔ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι:

α΄) $B\Delta < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$ καί β΄) $B\Delta > \frac{AB+B\Gamma-A\Gamma}{2}$

Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ
Δ τυχ.σημ.τῆς ΑΓ

α΄) $B\Delta < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$, β΄) $B\Delta > \frac{AB+B\Gamma-A\Gamma}{2}$



'Απόδειξις

α΄) 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{ll} B\Delta < AB+A\Delta & (\S\ 28) \\ \text{καί } B\Delta < B\Gamma+\Gamma\Delta & (\S\ 28) \end{array}\right\}$$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί (§ 13) ἔχομεν:

$B\Delta+B\Delta < AB+\underline{A\Delta}+B\Gamma+\underline{\Gamma\Delta}$ ἤ (διότι $A\Delta+\Gamma\Delta = A\Gamma$)

$2.B\Delta < AB+B\Gamma+A\Gamma$ ἤ (διαιροῦντες διά 2)

$$\frac{\cancel{2}.B\Delta}{\cancel{2}} < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$$ καί τελικῶς

$$B\Delta < \frac{AB+B\Gamma+A\Gamma}{2}$$ ὅ.ἔ.δ.

β΄) 'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{ll} B\Delta+A\Delta > AB & (\S\ 28) \\ \text{καί } B\Delta+\Delta\Gamma > B\Gamma & (\S\ 28) \end{array}\right\}$$ Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνισότητας αὐτάς καί (§ 13) ἔχομεν:

$\underline{B\Delta}+A\Delta+\underline{B\Delta}+\Delta\Gamma > AB+B\Gamma$ ἤ (διότι $A\Delta+\Delta\Gamma = A\Gamma$)

$2.\underline{B\Delta}+A\Gamma > AB+B\Gamma$ ἤ (μεταφέροντες τόν προσθετέον ΑΓ εἰς τό β΄ μέλος ἔχομεν).

$2.B\Delta > AB+B\Gamma-A\Gamma$ ἤ (διαιροῦντες διά 2)

$$\frac{\cancel{2}.B\Delta}{\cancel{2}} > \frac{AB+B\Gamma-A\Gamma}{2}$$ καί

$$B\Delta > \frac{AB+B\Gamma-A\Gamma}{2}$$ ὅ.ἔ.δ.

133. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχοντα ΑΒ=ΔΕ γων. Β=γων.Ε καί γων.Γ+γων.Ζ=2ὀρθ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀπέναντι τῶν ἴσων γωνιῶν κείμεναι πλευραί εἶναι ἴσαι

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

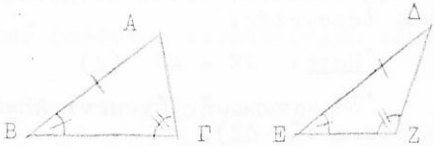
Ι. Ἀρχική θέσις δοθέντων τριγώνων.

$AB = \Delta E$

$\hat{B} = \hat{E}$

$\hat{\Gamma} + \hat{Z} = 2$ ὀρθαί

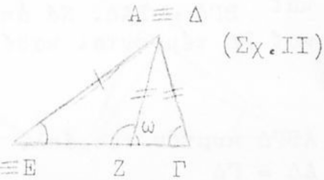
$A\Gamma = \Delta Z$



<u>Ἀπόδειξις</u>

Θά ἀποδείξωμεν τό ζητούμενον διά τῆς ἐπιθέσεως (τοποθετήσεως) τοῦ ἑνός τριγώνου π.χ. τοῦ ΔΕΖ ἐπί τοῦ ἄλλου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ.ΙΙ)

ΙΙ. Θέσις τριγώνων πρός ἀπόδειξιν τοῦ ζητουμένου.



Θέτομεν κατά ταῦτα τό τρίγωνον ΔΕΖ ἐπί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (Σχ.ΙΙ) ὥστε <u>νά ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι</u>, ἐξ ὑποθέσεως γωνίαι Β καί Ε.

Τότε λόγῳ τῆς ὑποθέσεως (δεδομένων) ἐπειδή θά συμπέσουν αἱ ἴσαι πλευραί ΔΕ καί ΑΒ, ἡ κορυφή Δ θά εὑρεθῇ ἐπί τῆς κορυφῆς Α (Α ≡ Δ) (<u>Σημείωσις:</u> Τό σύμβολον ≡ δεικνύει ὅτι αἱ κορυφαί Α καί Δ συμπίπτουν).

Ἐπίσης θά συμπέσουν αἱ πλευραί ΕΖ καί ΒΓ ἀλλά μόνον αἱ κορυφαί Ε καί Β θά συμπέσουν ἐνῷ ἡ κορυφή Ζ θά λάβῃ θέσιν ἐπί τῆς πλευρᾶς ΑΓ, ὡς φαίνεται εἰς τό (Σχ.ΙΙ).

Τελικῶς τά τρίγωνα θά λάβουν τήν θέσιν ἡ ὁποία φαίνεται εἰς τό (Σχ.ΙΙ) καί ἐκ τοῦ ὁποίου ἔχομεν.

γων. ω + γων.ΑΖΕ = 2 ὀρθ. (1) (§ 52)

Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν:

γων. Γ + γων.Ζ = 2 ὀρθ. (2)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν (§ 1)

γων. ω + γων. ΑΖΕ = γων.Γ+γων.Ζ (3)

Ἀλλά γων. ΑΖΕ = γων. Ζ (διότι πρόκειται περί τῆς ἰδίας γωνίας)

Ἄρα (§ 3) γων. ω = γων. Γ

Τό τρίγωνον λοιπόν ΑΖΓ ἔχον δύο γωνίας ἴσας ἔχει καί τάς ἀπέναντι αὐτῶν κειμένας πλευράς ἴσας (§ 65) ἄρα εἶναι ἰσοσκελές.

Ὥστε: ΑΖ = ΑΓ (4)

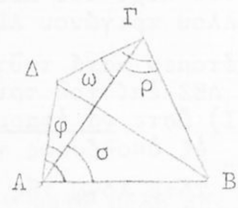
Ἐκ κατασκευῆς ἔχομεν: ΑΖ=ΔΖ (5) (ἀφοῦ ΑΖ εἶναι ἡ νέα θέσις τῆς ΔΖ).

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (4) καί (5) προκύπτει (§ 1) ὅτε

ΑΓ = ΔΖ ὅ.ἔ.δ.

134. Δίδεται κυρτόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἔχον ΑΔ=ΓΔ καί ΒΓΔ = ΒΑΔ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΓκ καί ΒΔ τέμνονται καθέτως.

Λύσις



ΑΒΓΔ κυρτόν τετράπλ.
ΑΔ = ΓΔ
$\widehat{ΒΓΔ} = \widehat{ΒΑΔ}$

ΑΓ⊥ ΒΔ

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή ΑΔ=ΓΔ (ἐξ ὑποθέσεως) τό τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ἰσοσκελές..

Ἑπομένως αἱ παρά τήν βάσιν του γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ὥστε: $\hat{ω} = \hat{φ}$ (1).

Ἐξ ἄλλου $\widehat{ΒΓΔ} = \widehat{ΒΑΔ}$ (2) (ἐξ ὑποθέσεως)

Ἀφαιροῦμεν κατά μέλη τήν (1) ἀπό τήν (2) καί λαμβάνομεν:

$$\widehat{ΒΓΔ} - \hat{ω} = \widehat{ΒΑΔ} - \hat{φ} \quad ἤ$$

$$\hat{ρ} = \hat{σ} \quad (3)$$

Τό τρίγωνον λοιπόν ΑΒΓ έχον δύο γωνίας ίσας, τάς ρ καί σ ώς φαίνεται έκ τής (3) είναι ισοσκελές. Επομένως ΑΒ=ΓΒ.

Ούτω τό Β απέχει ίσον τών Α καί Γ.
Αλλά καί τό Δ " " " " "

Επομένως τά σημεία Β καί Δ οφείλουν [(§ 77), αντίστροφ.] νά κείνται επί τής ευθείας τής καθέτου είς τό μέσον τής ΑΓ.

Επειδή όμως τά Β καί Δ ορίζουν μόνον μίαν ευθείαν, τήν ΒΔ, δι'αυτό ΒΔ⊥ΑΓ.

Ώστε αί διαγώνιοι τού δοθέντος τετραπλεύρου τέμνονται καθέτως.

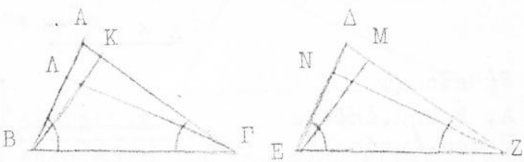
---

135. Εάν δύο τρίγωνα έχουν από μίαν πλευράν ίσην καί τά πρός τάς άλλας δύο πλευράς των αντίστοιχα ύψη ίσα, επίσης αντιστοίχως, τότε τά τρίγωνα αυτά θά είναι ίσα.

Λύσις

Τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ
ΒΓ = ΕΖ
ύψ.ΒΚ=ύψ.ΕΜ
" ΓΛ= " ΖΝ

Τρίγ.ΑΒΓ=τρίγ.ΔΕΖ



Απόδειξις

I. Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΚΓ καί ΕΜΖ

Ταύτα έχουν:

Γων. ΒΚΓ = γων. ΕΜΖ (ώς ορθάς)
ΒΓ = ΕΖ (έξ υποθέσεως) καί
ΒΚ = ΕΜ (" ")

Τά τρίγωνα λοιπόν (§ 70) είναι ίσα καί τότε (§ 57) θά έχουν:

$$\widehat{B\Gamma K} = \widehat{EZM} \quad \text{δηλ. είναι } \hat{\Gamma} = \hat{Z} \quad (1)$$

II. Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΓΛΒ καί ΖΝΕ.

Ταύτα έχουν:

Γων. ΓΛΒ = γων. ΖΝΕ (ώς ορθάς)
ΒΓ = ΕΖ (έξ υποθέσεως) καί
ΓΛ = ΖΝ (" ")

Τά τρίγωνα λοιπόν (§ 70) εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

$\widehat{\Gamma B\Lambda} = \widehat{ZEN}$ ἤ $\hat{B} = \hat{E}$ (2)

III. Ἐξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ

Ταῦτα ἔχουν

ΒΓ = ΕΖ (ἐξ ὑποθέσεως)

$\hat{B} = \hat{E}$ (ὡς ἀπεδείχθη ἰσότης (2)) καί

$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ (" " " (1))

Ἄρα (§ 60) τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ εἶναι ἴσα ὅ.ἔ.δ.

---

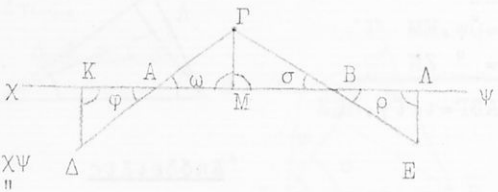
136. Δίδεται εὐθεῖα χψ, δύο σημεῖα ἐπ' αὐτῆς τά Α καί Β καί τρίτον σημεῖον Γ ἐκτός αὐτῆς. Φέρομεν τάς ΑΓ καί ΓΒ, προεκτείνομεν αὐτάς πέραν τῆς χψ καί ἐπί τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΑΔ = ΑΓ καί ΒΕ = ΒΓ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Δ καί Ε ἀπό τήν χψ εἶναι ἴσαι.

Λύσις

Εὐθεῖα χψ
Α, Β σημ. ἐπί χψ
Γ σημ. ἐκτός "
ΑΔ=ΑΓ, ΒΕ=ΒΓ
ΔΚ ἀπόστασις Δ ἀπό χψ
ΕΛ " Ε " "

ΔΚ = ΕΛ



Ἀπόδειξις

Φέρομεν τήν ΓΜ⊥χψ.

I. Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΚΔ καί ΑΜΓ

- Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Κ = γων.Μ (ὡς ὀρθάς)

γων. φ = γων.ω (ὡς κατά κορυφήν) καί

ΑΔ = ΑΓ (διότι ἐλήφθησαν ἴσαι)

Τά τρίγωνα λοιπόν (§ 71) εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΚΔ = ΓΜ (1)

ΙΙ. 'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΒΛΕ καί ΒΜΓ.

Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Λ = γων.Μ (ὡς ὀρθάς)

γων. ρ = γων.σ (ὡς κατά κορυφήν) καί

ΒΕ = ΒΓ (διότι ἐλήφθησαν ἴσαι)

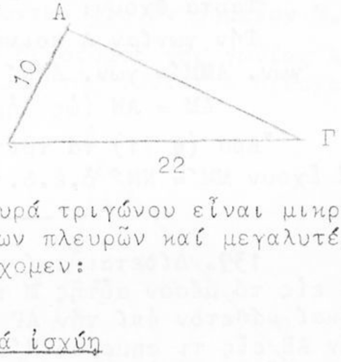
Τά τρίγωνα λοιπόν (§ 71) εἶναι ἴσα καί τότε (§57) θά ἔχουν ΛΕ=ΓΜ (2).

'Εκ τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) ἐπειδή τά β΄μέλη εἶναι ἴσα θά εἶναι καί τά πρῶτα ἴσα. Ὥστε ΚΔ=ΛΕ ὅ.ἔ.δ.

---

137. Μία πλευρά ἑνός τριγώνου εἶναι 10 μέτρα. Μία ἄλλη πλευρά εἶναι 22 μέτρα. Ἄν ἡ τρίτη πλευρά εἶναι διπλασία μιᾶς ἐκ τῶν δύο πρώτων πλευρῶν ποῖον τό μῆκος τῆς τρίτης αὐτῆς πλευρᾶς;

Λ ύ σ ι ς



Τρίγ. ΑΒΓ

ΑΒ = 10μ. } ΑΓ διπλασία μιᾶς

ΒΓ = 22μ. } τούτων.

ΑΓ = ;

'Απόδειξις

Γνωρίζομεν ὅτι ἑκάστη πλευρά τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καί μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς αὐτῶν. Κατά ταῦτα ἔχομεν:

Ι. Ἄν ΑΓ = 2.ΒΓ δηλαδή

ΑΓ = 2.22 = 44 τότε δέν θά ἰσχύῃ

ἡ σχέσις ΑΒ > ΑΓ-ΒΓ διότι

10 > 44-22 ἤ 10 > 22 ὅπερ ἄτοπον

Ὥστε ἀποκλείεται ΑΓ = 2.ΒΓ

ΙΙ. Ἄν ΑΓ = 2.ΑΒ δηλαδή

ΑΓ = 2.10 = 20 τότε θά ἰσχύῃ

ἡ σχέσις ΑΒ > ΒΓ - ΑΓ διότι

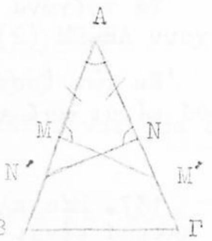
10 > 22 - 20 ἤ 10 > 2

Ὥστε τό μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς ΑΓ εἶναι 20 μ.

138. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον. Φέρομεν καθέτους ἐπί τάς ἴσας πλευράς του εἰς τά μέσα αὐτῶν αἱ ὁποῖαι κάθετοι περατοῦνται εἰς τά σημεῖα τομῆς των μέ τήν ἄλλην ἐκ τῶν ἴσων πλευρῶν του.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κάθετοι αὗται εἶναι ἴσαι.

Λύσις



Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές
ΑΒ = ΑΓ
Μ μέσον ΑΒ, ΜΜ΄⊥ΑΒ
Ν " ΑΓ, ΝΝ΄⊥ΑΓ

ΜΜ΄ = ΝΝ΄

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΜΜ΄ καί ΑΝΝ΄

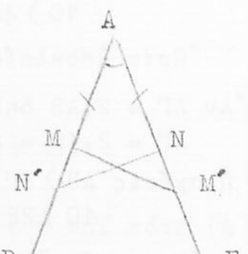
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν γωνίαν Α κοινήν
γων. ΑΜΜ΄= γων. ΑΝΝ΄ (ὡς ὀρθάς) καί
ΑΜ = ΑΝ (ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελ.)

Ἄρα (§ 71) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΜΜ΄= ΝΝ΄ ὅ.ἔ.δ.

---

139. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν κάθετον ἐπί τήν ΑΒ εἰς τό μέσον αὐτῆς Μ τέμνουσαν τήν ΑΓ εἴς τι σημεῖον Μ΄καί κάθετον ἐπί τήν ΑΓ εἰς τό μέσον αὐτῆς Ν τέμνουσαν τήν ΑΒ εἴς τι σημεῖον Ν΄. Ἄν αἱ δύο κάθετοι ΜΜ΄ καί ΝΝ΄ εἶναι ἴσαι νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ
Μ μέσον ΑΒ, ΜΜ΄⊥ΑΒ
Ν " ΑΓ, ΝΝ΄⊥ΑΓ
ΜΜ΄= ΝΝ΄

Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΜΜ' καί ΑΝΝ'
Ταῦτα ἔχουν
Τήν γωνίαν Α κοινήν
γων. ΑΜΜ'= γων. ΑΝΝ' (ὡς ὀρθάς) καί
ΜΜ'= ΝΝ'(ἐξ ὑποθέσεως)

Ἄρα (§ 71) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΜ = ΑΝ.

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τά μέλη ἐπί 2 καί ἔχομεν
2.ΑΜ = 2.ΑΝ ἤ
ΑΒ = ΑΓ.

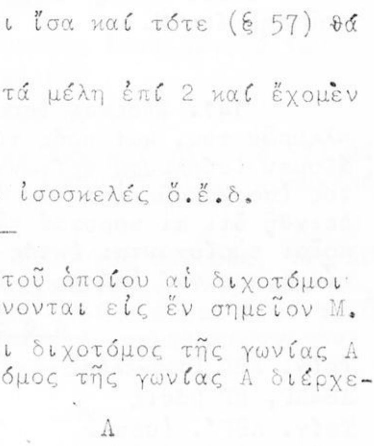
Ὥστε τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές ὅ.ἔ.δ.

---

140. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καί Γ τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον Μ.

Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α (ἤ ἄλλως νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α διέρχεται διά τοῦ Μ).

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ
ΒΚ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Β.
ΓΛ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ.
Μ σημεῖον τομῆς ΒΚ καί ΓΛ

ΑΜ διχοτόμος γωνίας Α.

'Απόδειξις

'Επειδή τό Μ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως κοινόν σημεῖον τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καί Γ δι'αὐτό θά ἀπέχῃ τοῦτο ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῶν ἐξωτερικῶν αὐτῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Φέροντες τώρα τάς ἀποστάσεις ΜΖ, ΜΗ καί ΜΘ τοῦ σημείου Μ ἀπό τάς πλευράς ΒΔ, ΒΓ καί ΓΕ (ἀντιστοίχως) ἔ-

χομεν. Διά μέν τήν έξ.γων.Β, $MZ = MH$ (1)
διά δέ " " " Γ, $M\Theta = MH$ (2)
Ἐπομένως (§ 1) $MZ = M\Theta$.

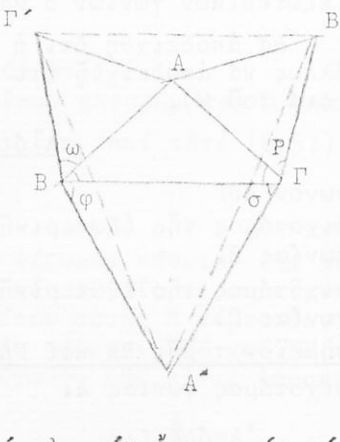
Ἀφοῦ λοιπόν τό Μ ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς πλευράς ΔΒΑ καί ΕΓΑ τῆς γωνίας Α δι'αὐτό (τό Μ) θά κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου ΑΜ τῆς γωνίας Α.

Ὥστε καί ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α διέρχεται διά τοῦ σημείου Μ.

---

141. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον. Ἐπί τῶν τριῶν πλευρῶν του, καί πρός τό ἐξωτερικόν μέρος αὐτοῦ, κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευράς τάς πλευράς τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς ἐπί τῶν ὁποίων τά κατασκευάζομεν. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ κορυφαί τῶν τριῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐκτός τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι κορυφαί ἐπίσης ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

<u>Λύσις</u>



Τρίγ. ΑΒΓ ἰσοσκελές.
ΑΒ=ΑΓ, ΒΓ βάσις
Τρίγ. ΑΒΓ´. ἰσοπλ.
" ΑΓΒ´ "
" ΒΓΑ´ "

" Α´Β´Γ´ ἰσοσκελές

<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν

I. Τρίγ. ΑΒΓ´= τριγ.ΑΓΒ´
(διότι ἔχουν καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας ἀνά μίαν, ἀφοῦ ἕκαστον εἶναι ἰσόπλευρον μέ πλευράν ἴσην πρός τάς ἴσας πλευράς τοῦ δοθέντος ἰσοσκελοῦς ΑΒΓ.

Ἐπομένως (§ 57) θά ἔχουν $\hat{\omega} = \hat{\rho}$ (1)

II. Ἐπειδή τρίγωνον ΑΒΓ ἰσοσκελές ἐξ ὑποθέσεως καί ΑΒ=ΑΓ ἔχομεν $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (2)

III. Τό τρίγωνον Α´ΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον ἐκ κατασκευῆς ἄρα καί ἰσοσκελές μέ Α´Β = Α´Γ. Ἄρα ἔχομεν $\hat{\varphi} = \hat{\sigma}$ (3)

Τάς ἰσότητας (1) (2) καί (3) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$$\hat{\omega} + \hat{B} + \hat{\varphi} = \hat{\rho} + \hat{\Gamma} + \hat{\sigma} \quad \text{ἤ}$$

$$\widehat{\Gamma'BA'} = \widehat{B'\Gamma A'} \qquad (4)$$

IV. Ἐξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα Α΄ΒΓ΄ καί Α΄ΓΒ΄ (φέροντες προηγουμένως τάς Α΄Γ΄ καί Α΄Β΄).

Ταῦτα ἔχουν:

Α΄Β = Α΄Γ (ὡς ἴσας πρός τήν ΒΓ)

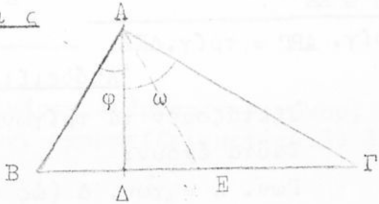
ΒΓ΄ = ΓΒ΄ (ὡς " " τάς ἐπίσης ἴσας μεταξύ των ΑΒ καί ΑΓ)

καί $\widehat{\Gamma'BA'} = \widehat{B'\Gamma A'}$ [ὡς ἀπεδείχθη, ἰσότης (4)]

"Αρα (§ 56) τά τρίγωνά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν Α΄Γ΄= Α΄Β΄ δηλαδή τό τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἰσοσκελές ὅ.ἔ.δ.

142. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ ἔχον δύο πλευράς, τάς ΑΓ καί ΑΔ, ἀνίσους ὡς ἑξῆς: τήν ΑΓ μεγαλυτέραν τῆς ΑΒ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῶν γωνιῶν τάς ὁποίας σχηματίζει τό ὕψος ΑΔ μέ τάς ἀνίσους αὐτάς πλευράς τήν μεγαλυτέραν τήν σχηματίζει μέ τήν μεγαλυτέραν ἐξ αὐτῶν.

Λύσις



Τρίγ. ΑΒΓ
ΑΓ > ΑΒ
ΑΔ ὕψος

γων. ω > γων.φ

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή ΑΓ > ΑΒ καί εἶναι ἀμφότεραι πλάγιαι ὡς πρός τήν ΒΓ, ἡ δέ ΑΔ ⊥ ΒΓ δι'αὐτό (§ 33, γ΄)

ἔχομεν ΔΓ > ΒΔ

Λαμβάνομεν τώρα τμῆμα ΔΕ = ΒΔ καί φέρομεν τήν ΑΕ ἡ ὁποία εὑρίσκεται πλησιέστερον πρός τό ὕψος ἤ ἡ ΑΓ.

Τότε ἐπειδή ΒΔ = ΔΕ θά εἶναι (§ 32 β΄) ΑΒ = ΑΕ.

Εἰς τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΕ ἐπειδή ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπί τήν βάσιν ΒΕ θά εἶναι καί διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς.

Ὥστε γων. φ = γων. ΔΑΕ (1)

'Εκ τοῦ σχήματος ὅμως ἔχομεν

γων. ΔΑΕ $<$ γων. ω (2) (διότι ἡ γωνία ΔΑΕ εἶναι μέρος τῆς γωνίας ω)

'Αντικαθιστῶντες εἰς τό α΄μέλος τῆς ἀνισότητος (2) τήν γωνίαν ΔΑΕ μέ τήν ἴσην της γων.φ (ἰσότης (1)) ἔχομεν:

γων φ $<$ γων. ω ἤ

ὅπερ τό αὐτό γων. ω $>$ γων. φ ὅ.ἔ.δ.

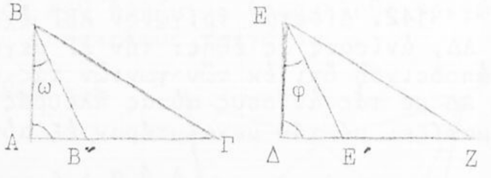
---

143. Δίδονται δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχοντα ἀπό μίαν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ἴσην καί τάς διχοτόμους τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἐπίσης ἴσας. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

Λύσις

Τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ
γωνίαι Α καί Δ ὀρθαί
γων.Β = γων. Ε
ΒΒ΄ διχοτόμ. γων.Β
ΕΕ΄ " " Ε
ΒΒ΄= ΕΕ΄

τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ.ΔΕΖ



'Απόδειξις

Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΒ΄καί ΔΕΕ΄

Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Α = γων. Δ (ὡς ὀρθάς)

γων. ω = γων. φ (ὡς ἡμίση τῶν ἴσων γωνιῶν Β καί Ε)

καί ΒΒ΄= ΕΕ΄ (ἐξ ὑποθέσεως)

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΒΒ΄καί ΔΕΕ΄ θά εἶναι ἴσα καί (§ 57)

θά ἔχουν ΑΒ = ΔΕ (1)

'Εξετάζοντες τώρα τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΕΔΖ παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν

Γων. Α = γων. Δ (ὡς ὀρθάς)

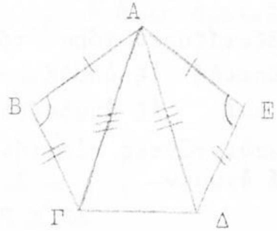
γων. Β = γων. Ε (ἐξ ὑποθέσεως) καί

ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ἀποδείξεως, ἰσότης (1))

'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ θά εἶναι ἴσα ὅ.ἔ.δ.

144. Δίδεται πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ ἔχον ὅλας του τάς πλευράς καί ὅλας του τάς γωνίας ἴσας μεταξύ των. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ διαγώνιοι ΑΓ καί ΑΔ εἶναι ἴσαι.

Λ ύ σ ι ς



Πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ

ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=ΔΕ=ΕΑ

$\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = \hat{E}$

ΑΓ, ΑΔ διαγώνιοι

ΑΓ = ΑΔ

'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΕΔ

Ταῦτα ἔχουν:

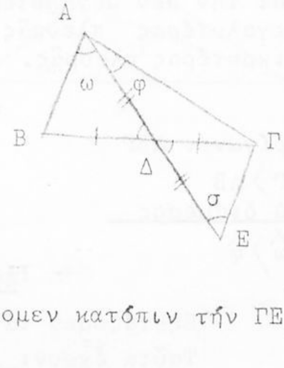
ΑΒ = ΑΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΒΓ = ΕΔ (" ") καί
$\hat{B} = \hat{E}$ (" ")

Ἄρα (§ 56) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΓ = ΑΔ ὅ.ἔ.δ.

---

145. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἑκάστη διάμεσος τριγώνου, περιεχομένη μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μετ'αὐτῶν ἀνομοίως ἀνίσους γωνίας.

Λ ύ σ ι ς



Τρίγωνον ΑΒΓ

ΑΓ > ΑΒ

ΑΔ διάμεσος

$\hat{\varphi} < \hat{\omega}$

'Απόδειξις

Προεκτείνομεν τήν ΑΔ πέραν τοῦ Δ καί λαμβάνομεν ἐπί τῆς προεκτάσεως ταύτης τμῆμα ΔΕ = ΑΔ. Φέρομεν κατόπιν τήν ΓΕ.

Ι. 'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΓΔΕ καί ΑΔΒ

Ταῦτα ἔχουν

ΓΔ = ΒΔ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ)
ΔΕ = ΑΔ (διότι ἐλήφθησαν) καί

γων. ΓΔΕ = γων. ΑΔΒ (ὡς κατά κορυφήν)

Ἄρα (§ 56) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν

γων. σ = γων. ω (1)

καί ΓΕ = ΑΒ (2)

ΙΙ. Ἐξετάζομεν τώρα τό τρίγωνον ΑΓΕ

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ > ΑΒ

καί ἐξ ἀποδείξεως ΑΒ = ΓΕ

ἀντικαθιστῶντες είς τήν ἀνισότητα τήν ΑΒ μέ τήν ἴσην της ΓΕ θά ἔχωμεν

$$ΑΓ > ΓΕ \quad (3)$$

Τότε ὅμως είς τό τρίγωνον ΑΓΕ λόγῳ τῆς ἀνισότητος (3) ἔχομεν κατά τήν (§ 74), ὅτι

$$\hat{φ} < \hat{σ} \quad (4)$$

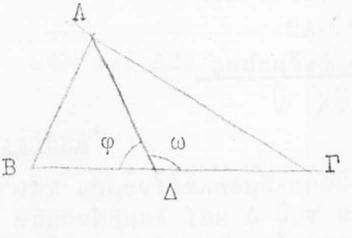
Ὡς ἀπεδείχθη ὅμως, ἰσότης (1), $\hat{σ} = \hat{ω}$.

Ἀντικαθιστῶντες είς τήν ἀνισότητα (4) τήν γων. σ μέ τήν ἴσην της γων. ω θά ἔχωμεν $\hat{φ} < \hat{ω}$ ὅ.ἔ.δ.

---

146. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη διάμεσος τριγώνου, περιεχομένη μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν, σχηματίζει μετά τῆς τρίτης πλευρᾶς, πρός τήν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ, ἀνίσους γωνίας καί τήν μέν μεγαλυτέραν τήν σχηματίζει πρός τό μέρος τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τήν δέ μικροτέραν πρός τό μέρος τῆς μικροτέρας πλευρᾶς.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ

ΑΓ > ΑΒ

ΑΔ διάμεσος

$\hat{ω} > \hat{φ}$

Ἀπόδειξις

Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΔΒ

Ταῦτα ἔχουν:

Τήν ΑΔ πλευράν κοινήν

ΔΓ = ΔΒ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ) καί
ΑΓ > ΑΒ (ἐξ ὑποθέσεως)
Ἄρα (§ 73) θά ἔχουν $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$ ὅ.ἔ.δ.

Σημείωσις: Ἔστω ὅτι μᾶς ἐζητεῖτο νά ἀποδείξωμεν ὅτι "ἡ μία ἐκ τῶν γωνιῶν ω καί φ εἶνε ὀξεῖα καί ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα".

Ἀπόδειξις

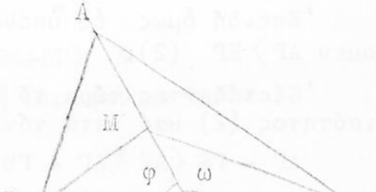
Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:
$\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 2$ ὀρθ. (§ 52)
Ἄν αἱ γωνίαι ἦσαν ἴσαι θά εἴχωμεν $\hat{\omega} = \hat{\varphi} = 1$ ὀρθή.
Ἀφοῦ ὅμως ἀπεδείχθη ὅτι $\hat{\omega} > \hat{\varphi}$
ἕπεται ὅτι $\hat{\omega} > 1$ ὀρθῆς (δηλαδή ἀμβλεῖα)
καί $\hat{\varphi} < 1$ ὀρθῆς (" ὀξεῖα)

---

147. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον μιᾶς διαμέσου τριγώνου, περιεχομένης μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν, ἀπέχει ἀπό τά ἄκρα τῆς πλευρᾶς πρός τήν ὁποίαν ἀντιστοιχεῖ ἄνισον καί ὅτι περισσότερον ἀπέχει, ἀπό ἐκεῖνο τό ἄκρον διά τοῦ ὁποίου διέρχεται ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν δύο ἀνίσων αὐτῶν πλευρῶν.

Τρίγωνον ΑΒΓ
ΑΓ > ΑΒ
ΑΔ διάμεσος
Μ τυχόν σημ. διαμέσου

ΜΓ > ΜΒ



Ἀπόδειξις

I. Ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΔΓ καί ΑΔΒ καί ἀποδεικνύομεν ὅπως καί εἰς τήν ἄσκησιν 146 ὅτι
$\hat{\omega} > \hat{\varphi}$ (1)

II. Ἐξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΜΔΓ καί ΜΔΒ
Ταῦτα ἔχουν:
Τήν ΜΔ πλευράν κοινήν
ΔΓ = ΔΒ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ) καί
$\hat{\omega} > \hat{\varphi}$ (ὡς ἀπεδείχθη ἀνισότης (1))

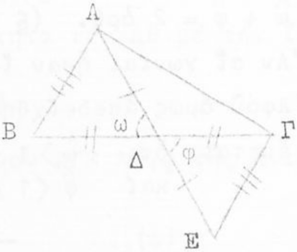
"Αρα (ξ 72) τά τρίγωνα ΜΔΓ καί ΜΔΒ θά ἔχουν

ΜΓ $>$ ΜΒ ὅ.ἔ.δ.

---

148. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη διάμεσος τριγώνου περιεχομένη μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ἡμιδιαφορᾶς τῶν περιεχουσῶν αὐτήν πλευρῶν καί μικροτέρα τοῦ ἡμιαθροίσματος αὐτῶν.

Λύσις



Τρίγωνον ΑΒΓ

ΑΓ $>$ ΑΒ

ΑΔ διάμεσος

$\frac{ΑΓ-ΑΒ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$

'Απόδειξις

Προεκτείνομεν τήν ΑΔ πέραν τοῦ Δ καί λαμβάνομεν ἐπί τῆς προεκτάσεως τμῆμα ΔΕ = ΑΔ. Φέρομεν τήν ΓΕ καί ἐξετάζοντες τά τρίγωνα ΓΔΕ καί ΑΔΒ ἀποδεικνύομεν (ὅπως καί εἰς τήν ἄσκησιν 84)

ὅτι ΕΓ = ΑΒ (1)

'Επειδή ὅμως ἐξ ὑποθέσεως ΑΓ $>$ ΑΒ ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν ΑΓ $>$ ΕΓ (2).

'Εξετάζοντες τώρα τό τρίγωνον ΑΓΕ ἔχομεν, λόγῳ τῆς ἀνισότητος (2) καί κατά τήν (ξ 34), ὅτι:

ΑΓ − ΓΕ $<$ ΑΕ $<$ ΑΓ + ΓΕ (3)

'Αλλά ΓΕ = ΑΒ (ὡς ἀπεδείχθη ἰσότης (1)) καί ΑΕ = 2.ΑΔ (ἀφοῦ ἐλήφθη ΔΕ = ΑΔ).

'Αντικαθιστῶντες εἰς τήν ἀνισότητα (3) τά ΓΕ καί ΑΕ ἔχομεν

ΑΓ-ΑΒ $<$ 2.ΑΔ $<$ ΑΓ + ΑΒ ἤ διά διαιρέσεως διά 2 ἔχομεν:

$\frac{ΑΓ-ΑΒ}{2} < \frac{\cancel{2}.ΑΔ}{\cancel{2}} < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$

καί τελικῶς: $\frac{ΑΓ-ΑΒ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$ ὅ.ἔ.δ.

149. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ έχον ΑΓ > ΑΒ. Φέρομεν τήν διάμεσον αὐτοῦ ΑΔ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

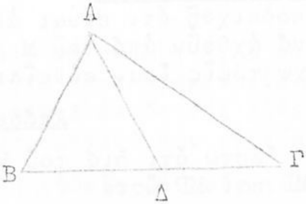
$$\frac{ΑΒ + ΑΓ - ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ}{2}$$

Λ ύ σ ι ς

Τρίγ. ΑΒΓ

ΑΓ > ΑΒ, ΑΔ διάμεσος

$$\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2}$$



Ἀπόδειξις

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

I. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΓ (§ 34)

$$ΑΓ - ΔΓ < ΑΔ < ΑΓ+ΔΓ \quad (1)$$

II. Ἐκ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ (§ 34)

$$ΑΒ - ΒΔ < ΑΔ < ΑΒ + ΒΔ \quad (2)$$

Τάς ἀνισότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν.

$$ΑΒ+ΑΓ-ΒΔ-ΔΓ < 2.ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+ΒΔ+ΔΓ \quad ἤ$$

$$ΑΒ+ΑΓ-(ΒΔ+ΔΓ) < 2.ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+(ΒΔ+ΔΓ) \quad ἤ$$

$$ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ < 2.ΑΔ < ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ \quad ἤ \text{ (διαιροῦμεν διά 2)}$$

$$\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < \frac{\cancel{2}.ΑΔ}{\cancel{2}} < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2} \quad ἤ$$

$$\frac{ΑΒ+ΑΓ-ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{2} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Σημείωσις: Εἰς τήν παροῦσαν ἄσκησιν ἦτο δυνατόν νά μᾶς ζητεῖται νά ἀποδείξωμεν ὅτι:

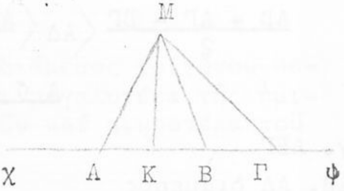
$$\frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} - \frac{ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} + \frac{ΒΓ}{2}$$

Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά χωρίσωμεν τά κλάσματα τῆς προηγουμένως ἀποδειχθείσης ἀνισότητος.

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

$$\frac{ΑΒ + ΑΓ}{2} - \frac{ΒΓ}{2} < ΑΔ < \frac{ΑΒ+ΑΓ}{2} + \frac{ΒΓ}{2} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

150. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἀπό σημείου εὑρισκομένου ἐκτός δοθείσης εὐθείας εἶναι ἀδύνατον νά ἀχθοῦν τρεῖς εὐθεῖαι ἴσαι μεταξύ των.



Λύσις

Δίδονται
Εὐθεῖα χψ καί
σημ. Μ ἐκτός αὐτῆς
Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἶναι ἀδύνατον νά ἀχθοῦν ἀπό τοῦ Μ μέχρι τῆς χψ τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι.

Ἀπόδειξις

Ἔστω ὅτι διά τοῦ Μ ἄγονται μέχρι τῆς χψ, αἱ εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΒ καί ΜΓ ὥστε

$$ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ \qquad (1)$$

Φέρομεν τώρα καί τήν ἐκ τοῦ Μ κάθετον ΜΚ ἐπί τήνχψ.

Τότε (§ 33) καί λόγῳ τῆς (1) θά ἔχωμεν ΚΑ=ΚΒ=ΚΓ (2)

Τό νά εἶναι ὅμως ΚΒ = ΚΓ εἶναι ἀδύνατον, διότι "τό μέρος δέν δύναται νά ἰσοῦται μέ τό ὅλον" (§ 24)

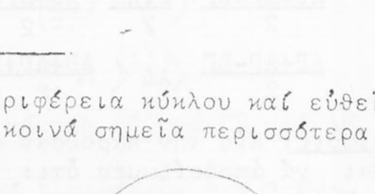
Οὕτω ὁδηγούμεθα εἰς ἄτοπον ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι ἄγονται ἐκ τοῦ Μ μέχρι τῆς χψ τρεῖς ἴσαι εὐθεῖαι καί ἐπομένως τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Σημείωσις: Ἐπειδή ἡ ἄσκησις αὐτή ἀναγράφεται εἰς τά ἐν χρήσει σήμερον σχολικά βιβλία ὡς πόρισμα, δι'αὐτό εἶναι δυνατόν νά στηριχθῶμεν εἰς αὐτήν πρός ἀπόδειξιν ἄλλων ἀσκήσεων.

---

151. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι περιφέρεια κύκλου καί εὐθεῖα γραμμή εἶναι ἀδύνατον νά ἔχουν κοινά σημεῖα περισσότερα ἀπό δύο.

Λύσις



Δίδονται
περιφέρεια κέντρου Κ
καί εὐθεῖα χψ
Νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἶναι ἀδύνατον νά ἔχουν τρία κοινά σημεῖα.

'Απόδειξις

"Εστω ότι ή περιφέρεια Κ καί ή εύθεία χψ έχουν τρία κοινά σημεία τά Α, Β καί Γ.

Φέροντες τάς εύθείας ΚΑ, ΚΒ καί ΚΓ έχομεν ότι

ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (έπειδή τά σημεία Α, Β καί Γ κείνται έπί τής περιφερείας καί συνεπώς αύται είναι άκτίνες τού κύκλου).

"Εχομεν όμως έξ ύποθέσεως ότι τά σημεία Α, Β καί Γ κείνται καί έπί τής εύθείας χψ. Ούτω καταλήγομεν είς τό άτοπον ότι "άπό τού σημείου Κ, κειμένου έκτός τής εύθείας χψ, άγονται μέχρις αύτής τρείς ίσαι μεταξύ των εύθείαι".

'Επομένως ή περιφέρεια καί ή εύθεία δέν είναι δυνατόν νά έχουν τρία κοινά σημεία.

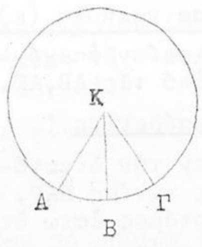
---

152. Νά άποδειχθή ότι ή περιφέρεια κύκλου είναι καμπύλη γραμμή.

Λύσις

Περιφ,κύκλου Κ

είναι καμπύλη



'Απόδειξις

Φέρομεν τρείς άκτίνας ΚΑ,ΚΒ καί ΚΓ, αί όποίαι, ώς άκτίνες τού αύτού κύκλου, είναι ίσαι.

"Ωστε ΚΑ = ΚΒ = ΚΓ (1)

'Εάν ή περιφέρεια τού κύκλου Κ θεωρηθή εύθεία θά έχωμεν ότι "έκ τού σημείου Κ κειμένου έκτός εύθείας άγονται μέχρις αύτής τρείς ίσαι μεταξύ των εύθείαι" όπερ άτοπον.

"Αρα ή περιφέρεια κύκλου δέν είναι εύθεία γραμμή καί έπομένως θά είναι καμπύλη ό.έ.δ.

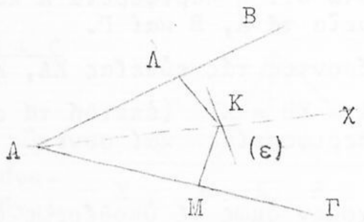
---

153. Νά εύρεθούν τά σημεία τά άπέχοντα ίσον άπό δύο τεμνομένας εύθείας καί εύρισκόμενα έπί δοθείσης γραμμής.

Λ ύ σ ι ς

I. Εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ
Γωνία ΒΑΓ
Τυχοῦσα εὐθεῖα (ε)

Εὕρεσις σημείου τῆς (ε) ἀπέχοντος ἴσον ἀπό τάς ΑΒ, ΑΓ.



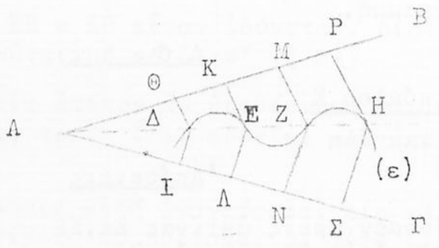
'Απόδειξις

Γνωρίζομεν ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς πλευράς της.

Φέρομεν λοιπόν τήν διχοτόμον Αχ ἡ ὁποία ἔστω ὅτι τέμνει τήν εὐθεῖαν (ε) εἰς ἕν σημεῖον Κ. Λέγομεν ὅτι τό Κ εἶναι τό ζητούμενον. Πράγματι φέροντες τάς ἀποστάσεις ΚΛ καί ΚΜ τοῦ Κ ἀπό τάς πλευράς ΑΒ καί ΑΓ θά ἔχωμεν ΚΛ = ΚΜ ὅ.ἔ.δ.

II. Εὐθεῖαι ΑΒ, ΑΓ
Γωνία ΒΑΓ
Τυχοῦσα καμπύλη (ε)

Εὕρεσις σημείων ἀπεχόντων ἴσον ἀπό τάς ΑΒ,ΑΓ.



'Απόδειξις

Φέρομεν τήν διχοτόμον Αχ τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἡ ὁποία διχοτόμος ἔστω ὅτι τέμνει τήν καμπύλην (ε) εἰς ἕν, δύο ἤ περισσότερα σημεῖα.

Λέγομεν ὅτι ταῦτα εἶναι τά ζητούμενα σημεῖα (ἐδῶ τά Δ, Ε, Ζ καί Η).

Πράγματι ὡς εὑρισκόμενα ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΒΑΓ θά ἀπέχουν ἴσον ἀπό τάς πλευράς της.

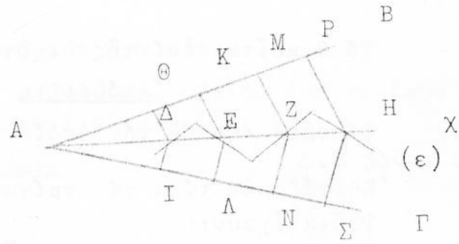
Φέροντες λοιπόν τάς ἀποστάσεις τῶν σημείων ἀπό τάς πλευράς τῆς γωνίας ἔχομεν.

ΔΘ = ΔΙ, ΕΚ = ΕΛ, ΖΜ = ΖΝ , ΗΡ = ΗΣ.

III. Ἡ τυχοῦσα γραμμή τεθλασμένη (ε)

'Απόδειξις

Ἐργαζόμεθα ὁμοίως ὡς καί εἰς περίπτωσιν II.



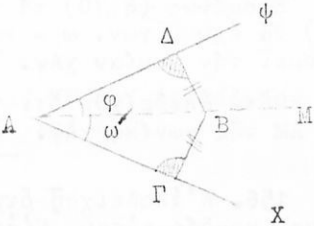
---

154. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς πλευράς τῆς γωνίας ταύτης.

Λύσις

χΑψ δοθεῖσα γωνία
ΑΜ διχοτόμος τῆς γωνίας
Β τυχόν σημ. τῆς διχοτόμου
ΒΓ ⊥ Αχ, ΒΔ ⊥ Αψ

ΒΓ = ΒΔ



'Απόδειξις

'Εξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΓΒ καί ΑΔΒ.

Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Γ = γων. Δ (ὡς ὀρθάς), τήν πλευράν (ὑποτείνουσαν) ΑΒ κοινήν καί γων. ω = γων. φ (ὡς ἡμίση τῆς γωνίας χΑψ ἀφοῦ ἡ ΑΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ταύτης).

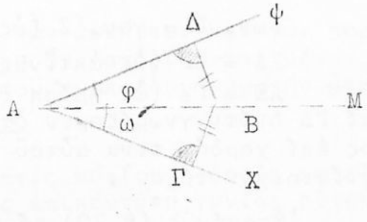
'Επομένως (§ 71) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΒΓ = ΒΔ. ὅ.ἔ.δ.

---

155. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶν σημεῖον τό ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς πλευράς μιᾶς γωνίας κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ταύτης.

Λύσις

χΑψ δοθεῖσα γωνία
Β τυχόν σημεῖον ἐντός τῆς γωνίας.
ΒΓ ⊥ Αχ (δηλ. ΒΓ ἀπόστασις Β ἀπό Αχ)
ΒΔ ⊥ Αψ (δηλ. ΒΔ " Β ἀπό Αψ)
ΒΓ = ΒΔ



Τό Β κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας χΑψ.

'Απόδειξις

Φέρομεν τήν ΑΒ τήν ὁποίαν προεκτείνομεν μέχρι σημείου τινός Μ.

'Εξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΑΓΒ καί ΑΔΒ.

Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Γ = γων. Δ (ὡς ὀρθάς)

τήν πλευράν (ὑποτείνουσαν) ΑΒ κοινήν καί τάς καθέτους πλευράς ΒΓ καί ΒΔ ἴσας ἐξ ὑποθέσεως.

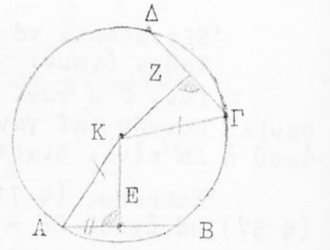
'Επομένως (§ 70) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν γων. ω = γων. φ καί συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΑΒΜ διχοτομεῖ τήν γωνίαν χΑψ.

Οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι τό σημεῖον Β κεῖται ἐπί τῆς διχοτόμου ΑΜ τῆς γωνίας χΑψ. ὅ.ἔ.δ.

---

156. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι, τό κέντρον κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπό ἴσας χορδάς αὐτοῦ. Ν'ἀποδειχθῇ καί τό ἀντίστροφον.

Λύσις:



Κύκλος Κέντρου Κ
χορδή ΑΒ = χορδή ΓΔ
ΚΕ ⊥ ΑΒ
ΚΖ ⊥ ΓΔ

ΚΕ = ΚΖ

'Απόδειξις:

Φέρομεν τάς ἀκτῖνας ΚΑ καί ΚΓ καί ἐξετάζομεν τά σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΑ καί ΚΖΓ.

Ταῦτα ἔχουν:

Γων. Ε = γων. Ζ (ὡς ὀρθάς)

ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου) καί

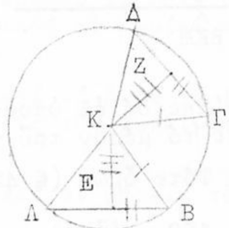
ΑΕ = ΓΖ (ὡς ἡμίση τῶν ἐξ ὑποθέσεως ἴσων χορδῶν ΑΒ καί ΓΔ διότι γνωρίζομεν ὅτι ἡ ἐκ τοῦ κέντρου κύκλου κάθετος ἐπί χορδήν τινα αὐτοῦ διχοτομεῖ καί τήν χορδήν καί τό ἀντίστοιχον τόξον).

'Επομένως (§ 70) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί τάς τρίτας πλευράς των ἴσας. Οὕτω θά εἶναι ΚΕ = ΚΖ ὅ.ἔ.δ.

'Αντίστροφον

"Ν'άποδειχθῇ ὅτι ἄν τό κέντρον κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπό δύο χορδάς αὐτοῦ, αἱ χορδαί αὗται εἶναι ἴσαι".

Λύσις



Κύκλος κέντρου Κ
ΑΒ, ΓΔ χορδαί τοῦ κύκλου Κ
ΚΕ ⊥ ΑΒ, ΚΖ ⊥ ΓΔ
ΚΕ = ΚΖ

ΑΒ = ΓΔ

'Απόδειξις

Φέρομεν τάς ἀκτίνας ΚΑ καί ΚΓ καί ἐξετάζομεν τά σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα ΚΕΑ καί ΚΖΓ.

Ταῦτα ἔχουν:
Γων. Ε = γων. Ζ (ὡς ὀρθάς)
ΚΑ = ΚΓ (ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου) καί
ΚΕ = ΚΖ (ἐξ ὑποθέσεως)

'Επομένως (§ 70) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί τάς τρίτας πλευράς των ἴσας. Οὕτω θά εἶναι ΕΑ = ΖΓ (1).

Φέρομεν τώρα καί τάς ἀκτῖνας ΚΒ καί ΚΔ, καί οὕτω σχηματίζονται τά ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΚΒ καί ΓΚΔ.

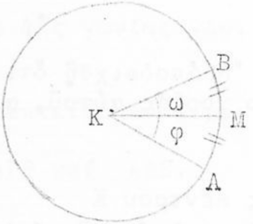
Γνωρίζομεν (§ 66) ὅτι: $ΕΑ = \frac{ΑΒ}{2}$ καί $ΖΓ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2)

Λόγῳ τῆς ἰσότητος (1) θά ἔχωμεν ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) (§ 1) ὅτι $\frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2}$ ἄρα (§ 6) ΑΒ = ΓΔ.

Οὕτω ἀπεδείχθη ὅτι χορδή ΑΒ = χορδή ΓΔ.

Σημείωσις: Αἱ ἀποδείξεις τῶν ἀσκήσεων καί τῶν πορισμάτων γίνεται μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι στηρίζονται μόνον εἰς τήν προηγουμένην, ἐν τῷ βιβλίῳ τοῦ σχολείου, γνωστήν ὕλην ἀναλόγως τῆς θέσεώς των.

157. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκτίς κύκλου ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τό μέσον ἑνός τόξου μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας αὐτοῦ διαιρεῖ αὐτήν εἰς δύο ἴσας γωνίας.



Λύσις

Ἐπίκεντρος γωνία ΑΚΒ
Μ μέσον τόξον ΑΒ
ΚΜ ἀκτίς

$\widehat{AKM} = \widehat{BKM}$

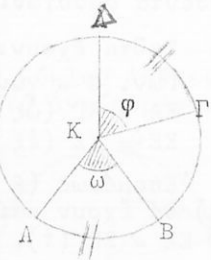
Ἀπόδειξις

Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως τό σημεῖον Μ εἶναι τό μέσον τοῦ τόξου ΑΒ δι'αὐτό θά ἔχωμεν: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

Τότε ὅμως (§ 42) θά εἶναι γων. ΑΚΜ = γων. ΒΚΜ ὅ.ἔ.δ.

158. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν δύο κυκλικοί τομεῖς τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἤ ἴσων κύκλων ἔχουν ἴσας βάσεις ἤ ἴσας γωνίας, οὗτοι εἶναι ἴσοι.

Λύσις.



Περίπτωσις Ι.

Οἱ κυκλικοί τομεῖς εἰς τόν αὐτόν κύκλον:

ΑΚΒΑ, ΓΚΔΓ κυκλικοί τομεῖς
α: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$
β: $\widehat{AKB} = \widehat{\Gamma K\Delta}$

ΑΚΒΑ = ΓΚΔΓ

Ἀπόδειξις

α. Γνωρίζομεν ἐξ ὑποθέσεως ὅτι αἱ βάσεις $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τῶν κυκλικῶν τομέων ΑΚΒΑ καί ΓΚΔΓ εἶναι ἴσαι.

Στρέφομεν τώρα τόν κυκλικόν τομέα ΓΚΔΓ περί τό Κ, χωρίς οὗτος νά ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου Κ, ὥστε τά ἐξ ὑποθέσεως ἴσα τόξα ΓΔ καί ΑΒ, δηλαδή αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων, νά ἐφαρμόσουν.

Ἐπειδή τό Κ μένει εἰς τήν θέσιν του, καί τό Γ συμπίπτει μέ τό Α δι'αὐτό ἡ ἀκτίς ΚΓ θά συμπέσῃ μέ τήν ἀκτῖνα ΚΑ.

Τέλος ἐπειδή τό Δ συμπίπτει μέ τό Β δι'αὐτό ἡ ἀκτίς ΚΔ θά συμπέσῃ μέ τήν ἀκτῖνα ΚΒ.

Οὕτω ἀφοῦ ἐφαρμόζουν αἱ γωνίαι καί αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων οὗτοι εἶναι ἴσοι.

Ὥστε: ΑΚΒΑ = ΓΚΔΓ ὅ.ἔ.δ.

β: Γνωρίζομεν ἐξ ὑποθέσεως ὅτι αἱ γωνίαι ΑΚΒ καί ΓΚΔ τῶν κυκλικῶν τομέων ΑΚΒΑ καί ΓΚΔΓ εἶναι ἴσαι.

Στρέφομεν τώρα τόν κυκλικόν τομέα ΓΚΔΓ περί τό Κ, χωρίς οὗτος νά ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ κύκλου Κ, ὥστε αἱ ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ καί ΓΚΔ, δηλαδή αἱ γωνίαι τῶν κυκλικῶν τομέων, νά ἐφαρμόσουν.

Ἐπειδή τό Γ συμπίπτει μέ τό Α καί τό Δ μέ τό Β δι' αὐτό τά τόξα ΑΒ καί ΓΔ, δηλαδή αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων, θά ἐφαρμόσουν.

Ὅθεν ἀφοῦ ἐφαρμόζουν αἱ γωνίαι καί αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων οὗτοι εἶναι ἴσοι.

Ὥστε: ΑΚΒΑ = ΓΚΔΓ ὅ.ἔ.δ.

Περίπτωσις ΙΙ.

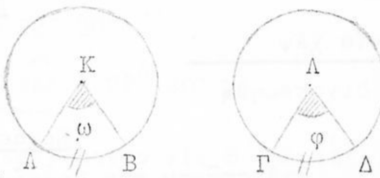
Οἱ κυκλικοί τομεῖς εἰς ἴσους κύκλους.

ΑΚΒΑ, ΓΛΔΓ κυκλικοί τομεῖς

α: $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta}$

β: $\widehat{AKB} = \widehat{\Gamma\Lambda\Delta}$

ΑΚΒΑ = ΓΛΔΓ



Ἀπόδειξις

α: Γνωρίζομεν ἐξ ὑποθέσεως ὅτι αἱ βάσεις $\overset{\frown}{AB}$ καί $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ τῶν κυκλικῶν τομέων ΑΚΒΑ καί ΓΛΔΓ εἶναι ἴσαι.

Τοποθετοῦμεν τώρα τόν κύκλον Κ ἐπί τοῦ κύκλου Λ ὥστε νά ἐφαρμόσουν τά κέντρα των καί αἱ περιφέρειαί των (ἀφοῦ οἱ κύκλοι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσοι) καί ἐπί πλέον νά ἐφαρμόσουν καί τά ἐξ ὑποθέσεως ἴσα τόξα ΑΒ καί ΓΔ, δηλαδή αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων.

Ἐπειδή τό Κ συμπίπτει μέ τό Λ καί τό Α μέ τό Γ δι' αὐτό ἡ ἀκτίς ΚΑ θά συμπέσῃ μέ τήν ἀκτῖνα ΛΓ.

Τέλος ἐπειδή τό Β συμπίπτει μέ τό Δ ἡ ἀκτίς ΚΒ θά συμπέσῃ μέ τήν ἀκτίνα ΛΔ.

Οὕτω ἀφοῦ ἐφαρμόζουν αἱ γωνίαι καί αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων οὗτοι εἶναι ἴσοι.

Ὥστε ΑΚΒΑ = ΓΛΔΓ ὅ.ἔ.δ.

β΄ Γνωρίζομεν ἐξ ὑποθέσεως ὅτι αἱ γωνίαι ΑΚΒ καί ΓΛΔ τῶν κυκλικῶν τομέων ΑΚΒΑ καί ΓΛΔΓ εἶναι ἴσαι.

Τοποθετοῦμεν τώρα τόν κύκλον Κ ἐπί τοῦ κύκλου Λ ὥστε νά ἐφαρμόσουν τά κέντρα των καί αἱ περιφέρειαί των (ἀφοῦ οἱ κύκλοι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἴσοι) καί ἐπί πλέον νά ἐφαρμόσουν καί αἱ ἐξ ὑποθέσεως ἴσαι γωνίαι ΑΚΒ καί ΓΛΔ δηλαδή αἱ γωνίαι τῶν κυκλικῶν τομέων.

Ἐπειδή τό Α συμπίπτει μέ τό Γ καί τό Β μέ τό Δ δι' αὐτό τά τόξα ΑΒ καί ΓΔ, δηλαδή αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων, θά ἐφαρμόσουν.

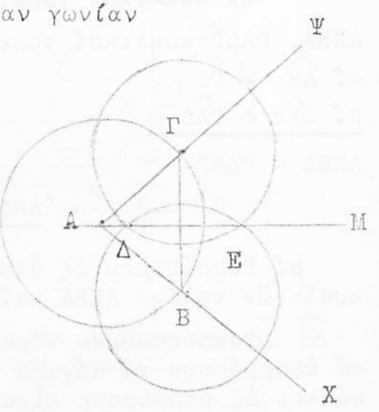
Οὕτω ἀφοῦ ἐφαρμόζουν αἱ γωνίαι καί αἱ βάσεις τῶν κυκλικῶν τομέων οὗτοι εἶναι ἴσοι.

Ὥστε: ΑΚΒΑ = ΓΛΔΓ ὅ.ἔ.δ.

---

159. Νά διχοτομήσητε δοθεῖσαν γωνίαν

<u>Λύσις</u>



Γωνία χΑψ

Νά διχοτομηθῇ

<u>Ἐργασία</u>

Καθιστῶμεν τήν δοθεῖσαν γωνίαν χΑψ ἐπίκεντρον.

Ἔστω Β καί Γ τά σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας, τήν ὁποίαν γράφομεν μέ κέντρον Α, καί τῶν πλευρῶν Αχ καί Αψ τῆς γωνίας χΑψ.

Φέρομεν τήν χορδήν ΒΓ ὅτε σχηματίζεται τό ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ, ἀφοῦ ΑΒ = ΑΓ ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου Α.

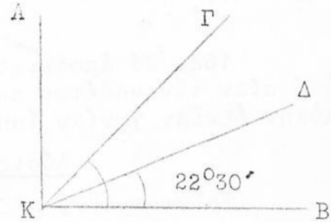
Ἐάν τώρα ὑψώσωμεν τήν μεσοκάθετον τῆς ΒΓ, αὕτη δηλαδή ἡ μεσοκάθετος ΔΕ θά διέρχεται διά τοῦ σημείου Α (§ 77 ἀντίστροφον).

Ἐπειδή δέ πλέον ἡ ΑΕ εἶναι διάμεσος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ δι'αὐτό αὕτη (§ 67,β΄) εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας χΑψ.

---

160. Νά κατασκευάσητε γωνίαν $22^{\circ}\ 30'$.

Λύσις



Κατασκευάζομεν ὀρθήν γωνίαν ΑΚΒ (φέροντες πρός τοῦτο δύο καθέτους μεταξύ των εὐθείας τάς ΑΚ καί ΚΒ).

Διχοτομοῦμεν τώρα (κατά τά γνωστά ἄσκησις 159) τήν γωνίαν ΑΚΒ φέροντες τήν διχοτόμον αὐτῆς ΚΓ.

Οὕτω ἡ γωνία ΒΚΓ εἶναι τό ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΚΒ καί ἑπομένως $ΒΚΓ = 45^{\circ}$.

Διχοτομοῦμεν τέλος (πάλιν κατά τά γνωστά) τήν γωνίαν ΒΚΓ φέροντες τήν διχοτόμον αὐτῆς ΚΔ.

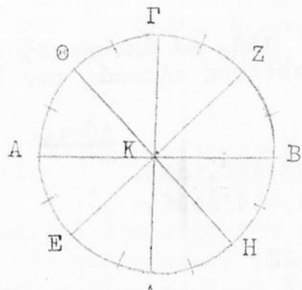
Οὕτω ἡ γωνία ΒΚΔ εἶναι τό ἥμισυ τῆς γωνίας ΒΚΓ καί ἑπομένως

$$\widehat{ΒΚΔ} = \frac{45^{\circ}}{2} = 22^{\circ}\ 30'$$

Ὥστε κατεσκευάσθη γωνία $\widehat{ΒΚΔ} = 22^{\circ}\ 30'$

161. Νά χωρίσητε μίαν περιφέρειαν εἰς 8 ἴσα τόξα.

Λύσις



Περιφέρεια κέντρου Κ

Νά χωρισθῇ εἰς 8 ἴσα τόξα.

Ἐργασία

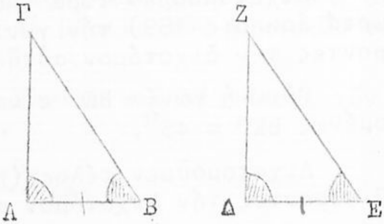
Φέρομεν δύο καθέτους μεταξύ των διαμέτρους τάς ΑΒ καί ΓΔ. Τότε αὗται χωρίζουν τήν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα $\widehat{ΑΓ} = \widehat{ΓΒ} = \widehat{ΒΔ} = \widehat{ΔΑ}$ (ταῦτα εἶναι ἴσα διότι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας τάς $\widehat{ΑΚΓ}$, $\widehat{ΓΚΒ}$, $\widehat{ΒΚΔ}$ καί $\widehat{ΔΚΑ}$ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί.)

Λαμβάνομεν τώρα τά μέσα Θ καί Ζ τῶν τόξων ΑΓ καί ΓΒ καί φέρομεν τάς διαμέτρους ΘΚΗ καί ΖΚΕ. Τότε τά τόξα ΑΘ, ΘΓ, $\widehat{ΓΖ}$, $\widehat{ΖΒ}$, $\widehat{ΒΗ}$, $\widehat{ΗΔ}$, $\widehat{ΔΕ}$ καί $\widehat{ΕΑ}$ εἶναι ἴσα διότι ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι ὡς ἡμίση τῶν ὀρθῶν γωνιῶν (Ἡ ΘΚ διχοτομοῦσα τήν ὀρθήν γωνίαν ΑΚΓ διχοτομεῖ καί τήν κατά κορυφήν της ΒΚΔ. Ὁμοίως ἡ ΖΚ διχοτομοῦσα τήν ὀρθήν γωνίαν ΒΚΓ θά διχοτομῇ καί τήν κατά κορυφήν της ΑΚΔ).

---

162. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν ἀπό μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην καί τήν προσκειμένην εἰς αὐτήν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην, ταῦτα εἶναι ἴσα.

<u>Λύσις</u>



Τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ
γων. Α = 1 ὀρθή
γων. Δ = 1 "
ΑΒ = ΔΕ
γων. Β = γων. Ε

Τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. ΔΕΖ

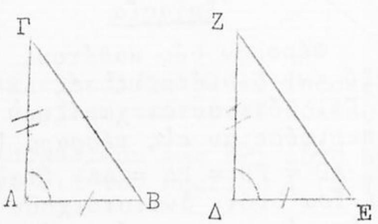
<u>Ἀπόδειξις</u>

Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχουν:
ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
γων. Β = γων. Ε (ἐξ ὑποθέσεως) καί
γων. Α = γων. Δ (ὡς ὀρθάς)
Ἐπομένως (§ 60) εἶναι ἴσα ὅ.ἔ.δ.

---

163. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τάς καθέτους πλευράς των ἴσας, μίαν πρός μίαν, ταῦτα εἶναι ἴσα.

<u>Λύσις</u>



Τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ.
γων. Α = 1 ὀρθή
γων. Δ = 1 "
ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ

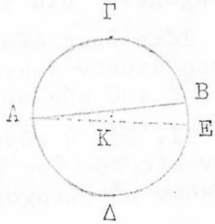
Τρίγ.ΑΒΓ=τρίγ.ΔΕΖ

<u>Ἀπόδειξις</u>

Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχουν:
ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΑΓ = ΔΖ (" ") καί
γων. Α = γων. Δ (ὡς ὀρθάς). Ἐπομένως (§ 59) εἶναι ἴσα. ὅ.ἔ.δ.

164. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν μία χορδή κύκλου δέν διέρχεται διά τοῦ κέντρου αὐτοῦ, διαιρεῖ τόν κύκλον καί τήν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἄνισα μέρη.

<u>Λύσις</u>



Κύκλος κέντρου Κ
χορδή ΑΒ

1) ΑΓΒΑ, ΑΔΒΑ ἄνισα μέρη τοῦ κύκλου
2) $\widehat{ΑΓΒ}$, $\widehat{ΑΔΒ}$ ἄνισα μέρη τῆς περιφερείας

<u>Ἀπόδειξις</u>

Φέρομεν τήν διάμετρον ΑΚΕ.

Τότε αὐτη ὡς διάμετρος (§ 40) χωρίζει τόν μέν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη, τά ΑΚΕΒΓΑ καί ΑΚΕΔΑ, τήν δέ περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, τά ΑΓΒΕ καί ΑΔΕ.

Κατά ταῦτα ἔχομεν:

1. ΑΚΕΒΓΑ = ΑΚΕΔΑ καί 2. $\widehat{ΑΓΒΕ} = \widehat{ΑΔΕ}$

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τό κυκλικόν τμῆμα ΑΓΒΑ εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμικυκλίου ΑΓΒΕΚΑ συνεπῶς καί τοῦ ἄλλου ἡμικυκλίου ΑΚΕΔΑ. Ἑπομένως κατά μείζονα λόγον (§ 14) θά εἶναι μικρότερον καί τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΑΔΒΑ ὅ.ἔ.δ.

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι τό τόξον ΑΓΒ εἶναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριφερείας ΑΓΕ συνεπῶς καί τῆς ἄλλης ἡμιπεριφερείας ΑΔΕ. Ἑπομένως κατά μείζονα λόγον (§ 14) θά εἶναι μικρότερον καί τοῦ τόξου ΑΔΒ ὅ.ἔ.δ.

---

165. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν ἕν εὐθύγραμμον τμῆμα χωρίζει ἕνα κύκλον ἤ μίαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη, τοῦτο θά εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου ἤ τῆς περιφερείας ταύτης. (**Ἑτέρα ἔκφρασις τῆς ἐκφωνήσεως:** Νά ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα χορδή κύκλου χωρίζουσα τοῦτον ἤ τήν περιφέρειαν αὐτοῦ εἰς δύο ἴσα μέρη, εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου τούτου).

<u>Λύσις</u>

Κύκλος κέντρου Κ
Εὐθεῖα ΑΒ (ἤ χορδή ΑΒ)
1) ΑΒΓΑ = ΑΒΔΑ
2) $\widehat{ΑΓΒ} = \widehat{ΑΔΒ}$

ΑΒ διάμετρος τοῦ κύκλου Κ

'Απόδειξις

I. 'Εάν ή εύθεῖα ΑΒ παρ'ὅλον ὅτι χωρίζει τόν κύκλον είς δύο ἴσα μέρη, δέν ἦτο διάμετρος θά ἦτο χορδή τοῦ κύκλου μή διερχομένη διά τοῦ κέντρου τούτου.

Τότε ὅμως δέν θά έχώριζε τόν κύκλον είς δύο ἴσα μέρη, ὅπερ ἄτοπον (κατά τήν ὑπόθεσιν). Ἄρα ή εύθεῖα ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ ὅ.ἔ.δ.

II. 'Εάν ή εύθεῖα ΑΒ, παρ' ὅλον ὅτι χωρίζει τήν περιφέρειαν είς δύο ἴσα μέρη, δέν ἦτο διάμετρος θά ἦτο χορδή τοῦ κύκλου μή διερχομένη διά τοῦ κέντρου τούτου.

Τότε ὅμως δέν θά έχώριζε τήν περιφέρειαν είς δύο ἴσα, ὅπερ ἄτοπον (κατά τήν ὑπόθεσιν). Ἄρα ή εύθεῖα ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. ὅ.ἔ.δ.

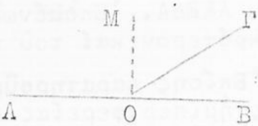
---

166. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν αί μή κοιναί πλευραί δύο έφεξῆς γωνιῶν κεῖνται έπ' εύθείας, τό ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι δύο όρθαί γωνίαι(ἤ κατ'ἄλλην ἔκφρασιν "αί δύο γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί").

Λύσις

$\widehat{A O \Gamma}$, $\widehat{\Gamma O B}$ έφεξῆς γωνίαι
ΑΟ, ΟΒ μή κοιναί πλευραί
ΑΟΒ εύθεῖα

$\widehat{A O \Gamma} + \widehat{\Gamma O B} = 2$ όρθαί



'Απόδειξις

Φέρομεν τήν εύθεῖαν ΜΟ $\perp$ ΑΟΒ. Τότε έκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{AOM} = 1$ όρθή (1) (ἀφοῦ ΜΟ $\perp$ ΑΟΒ)
$\widehat{MOB} = 1$ " (2) (" ΜΟ $\perp$ ΑΟΒ)

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

$\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 2$ όρθαί ἤ ἐπειδή $\widehat{MOB} = \widehat{MO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB}$ ἔχομεν $\widehat{AOM} + \widehat{MO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2$ όρθαί ἤ ἐπειδή $\widehat{AOM} + \widehat{MO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$ ἔχομεν $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2$ όρθαί ὅ.ἔ.δ.

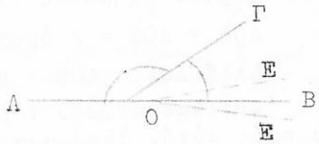
---

167. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἄν δύο έφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί τότε αί μή κοιναί πλευραί των κεῖνται έπ' εύθείας.

Λύσις

$\widehat{AO\Gamma}$, $\widehat{\Gamma OB}$ ἐφεξῆς γωνίαι
ΑΟ, ΟΒ μή κοιναί πλευραί
$\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2$ ὀρθαί

ΑΟ, ΟΒ κεῖνται ἐπ'εὐθείας.



'Απόδειξις

Ἔστω ὅτι αἱ μή κοιναί πλευραί ΑΟ καί ΟΒ, τῶν ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν ΑΟΓ καί ΓΟΒ, δέν κεῖνται ἐπ'εὐθείας.

Προεκτείνομεν τήν πλευράν ΑΟ πέραν τῆς κορυφῆς Ο μέχρισημείου τινός Ε ('Η προέκτασις τῆς ΑΟ δηλαδή ἡ ΟΕ δύναται νά κεῖται εἴτε ἐντός τῆς γωνίας ΓΟΒ εἴτε ἐκτός ταύτης).

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν: $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OE} = 2$ ὀρθαί (1) (§ 52).

'Επίσης ἔχομεν: $\widehat{AO\Gamma} + \widehat{\Gamma OB} = 2$ ὀρθαί (2) (ἐξ ὑποθέσεως)

'Εκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν (§ 1)

$\cancel{\widehat{AO\Gamma}} + \widehat{\Gamma OE} = \cancel{\widehat{AO\Gamma}} + \widehat{\Gamma OB}$ ἤ (§ 3)

$\widehat{\Gamma OE} = \widehat{\Gamma OB}$ (3)

'Εκ τῆς (3) παρατηροῦμεν ὅτι μέ τό νά ὑποθέσωμεν ὅτι αἱ μή κοιναί πλευραί τῶν ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν γωνιῶν δέν κεῖνται ἐπ'εὐθείας καταλήγομεν εἰς ἄτοπον διότι **"τό μέρος δέν εἶναι δυνατόν νά ἰσοῦται μέ τό ὅλον".**

Ἄρα αἱ μή κοιναί πλευραί ΑΟ καί ΟΒ κεῖνται ἐπ'εὐθείας. ὅ.ἔ.δ.

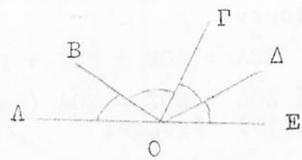
---

168. 'Από τυχόν σημεῖον δοθείσης εὐθείας φέρομεν διαφόρους εὐθείας πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν οὕτω σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν (ἤ **ἄλλως**. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι "τό ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μέ δύο ὀρθάς γωνίας").

Λύσις

ΑΕ δοθεῖσα εὐθεῖα
Ο τυχόν σημεῖον τῆς ΑΒ
ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ τυχοῦσαι εὐθεῖαι

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = ;$ ἤ
$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = 2$ ὀρθαί



'Απόδειξις

'Εκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{AO\Delta} + \widehat{\Delta OE} = 2$ ὀρθαί (1) (§ 52)

'Αλλά $\widehat{AO\Delta} = \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta}$ (2)

'Αντικαθιστῶμεν τώρα εἰς τήν (1) τήν γωνίαν ΑΟΔ μέ τό ἴσον πρός αὐτήν ἄθροισμα

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta}$, ἐκ τῆς (2) καί ἔχομεν:

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} = 2$ ὀρθαί ὅ.ἔ.δ.

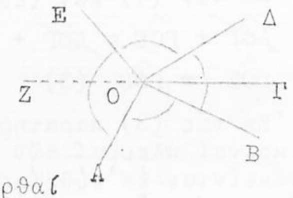
---

169. 'Από τυχόν σημεῖον δοθέντος ἐπιπέδου φέρομεν διαφόρους εὐθείας πρός τά διάφορα μέρη αὐτοῦ (τοῦ ἐπιπέδου). Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν οὕτω σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν (ἤ ἄλλως: "Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν ἰσοῦται μέ τέσσαρας ὀρθάς γωνίας")

Λύσις

Ο τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ φύλλου τοῦ χάρτου τούτου

ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ τυχοῦσαι εὐθεῖαι.



$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} + \widehat{EOA} =$;

ἤ

$\widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} + \widehat{EOA} = 4$ ὀρθαί

'Απόδειξις

Προεκτείνομεν τήν μίαν ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ σχήματος π.χ. τήν ΓΟ πέραν τοῦ σημείου Ο μέχρι σημείου ~~σημείου~~ τινός Ζ.

Τότε ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν (§ 54)

$\widehat{ZOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} = 2$ ὀρθαί (1) καί

$\widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} + \widehat{EOZ} = 2$ " (2)

Προσθέτομεν τώρα τάς ἰσότητας (1) καί (2) κατά μέλη καί ἔχομεν:

$\widehat{ZOA} + \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{\Gamma O\Delta} + \widehat{\Delta OE} + \widehat{EOZ} = 4$ ὀρθαί ἤ

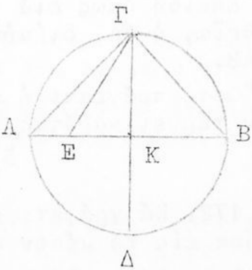
ἐπειδή $\widehat{ZOA} + \widehat{EOZ} = \widehat{EOA}$ (καί λόγῳ τοῦ νόμου τῆς ἀντιμεταθέσεως § 15) ἔχομεν:

$\widehat{ΑΟΒ} + \widehat{ΒΟΓ} + \widehat{ΓΟΔ} + \widehat{ΔΟΕ} + \widehat{ΕΟΑ} = 4$ ὀρθαί ὅ.ἔ.δ.

170. Δίδεται περιφέρεια κύκλου κέντρου Κ καί δύο κάθετοι μεταξύ των διάμετροι αὐτῆς αἱ ΑΒ καί ΓΔ. Ἐπί τῆς ἀκτῖνος ΚΑ ὁρίζομεν τυχόν σημεῖον Ε. Νά συγκριθοῦν.

α΄) Τό τμῆμα ΓΕ καί ἡ χορδή ΓΑ καί
β΄) " " ΓΕ " " " ΓΒ .

<u>Λύσις</u>



Κύκλος Κέντρου Κ
ΑΒ, ΓΔ διάμετροι
ΑΒ ⊥ ΓΔ
<u>ΓΑ, ΓΕ, ΓΒ χορδαί</u>

α΄) ΓΕ, ΓΑ νά συγκριθοῦν
β΄) ΓΕ, ΓΒ " "

<u>Ἐργασία</u>

α΄ Ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν:

ΓΚ ⊥ ΑΒ ἄρα αἱ ΓΕ καί ΓΒ εἶναι πλάγιαι πρός τήν ΑΒ.

Ἐπειδή τώρα τό Ε κεῖται ἐπί τῆς ΑΚ καί εἶναι ΕΚ < ΑΚ (ἀφοῦ ἡ ΑΚ εἶναι ἀκτίς καί ἡ ΕΚ μέρος τῆς ἀκτῖνος).

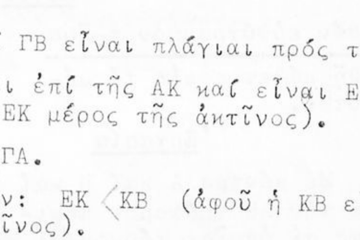
Δι'αὐτό (§ 32,γ) ΓΕ < ΓΑ.

β΄) Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν: ΕΚ < ΚΒ (ἀφοῦ ἡ ΚΒ εἶναι ἀκτίς καί ἡ ΕΚ μέρους τῆς ἀκτῖνος).

Δι'αὐτό (§ 32,γ΄) ΓΕ < ΓΒ.

171. Δίδεται εὐθεῖα ΑΒ καί αἱ περιφέρειαι (Α,ΑΒ) καί (Β,ΑΒ). Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινή χορδή ΓΔ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν τέμνει καθέτως καί εἰς τό μέσον τήν ἀπόστασιν ΑΒ τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν. (δηλαδή τήν διάκεντρον).

<u>Λύσις</u>



Περιφέρειαι (Α,ΑΒ), (Β,ΑΒ)
ΑΒ διάκεντρος
<u>ΓΔ κοινή χορδή</u>

ΓΔ κάθετος ἐπί τήν
ΑΒ εἰς τό μέσον της Μ.

<u>Ἀπόδειξις</u>

Φέρομεν τάς ἀκτῖνας ΑΓ, ΑΔ, ΒΔ καί ΒΓ.

Τότε ἔχομεν ΑΓ = ΒΓ (ὡς ἀκτῖνες ἴσων κύκλων).

Ἑπομένως τό σημεῖον Γ ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων Α καί Β τῆς εὐθείας ΑΒ. Συνεπῶς τό Γ θά κεῖται (§ 77 ἀντίστροφον) ἐπί ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ἐπίσης ἔχομεν ΑΔ = ΒΔ (ὡς ἀκτῖνες ἴσων κύκλων).

Ἑπομένως τό σημεῖον Δ ἀπέχει ἴσον τῶν ἄκρων Α καί Β τῆς εὐθείας ΑΒ. Συνεπῶς τό Δ θά κεῖται (§ 77 ἀντίστροφον) ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς εὐθείας ΑΒ.

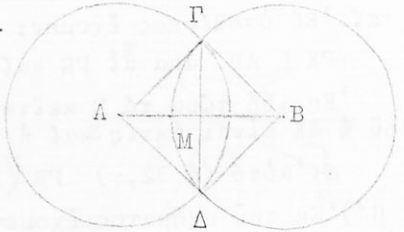
Ἐπειδή ὅμως διά τῶν σημείων Γ καί Δ διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα, ἡ ΓΔ, δι'αὐτό αὕτη θά εἶναι μεσοκάθετος τῆς εὐθείας ΑΒ.

Ὥστε πράγματι ἡ κοινή χορδή ΓΔ τῶν δύο τεμνομένων περιφειῶν τέμνει καθέτως καί εἰς τό μέσον Μ τήν διάκεντρον ΑΒ.

ὅ.ἔ.δ.

172. Νά γράψετε εὐθεῖαν κάθετον ἐπί δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα εἰς τό μέσον αὐτοῦ.

<u>Λύσις</u>



ΑΒ δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα

Νά ἀχθῆ κάθετος εἰς τό μέσον αὐτοῦ.

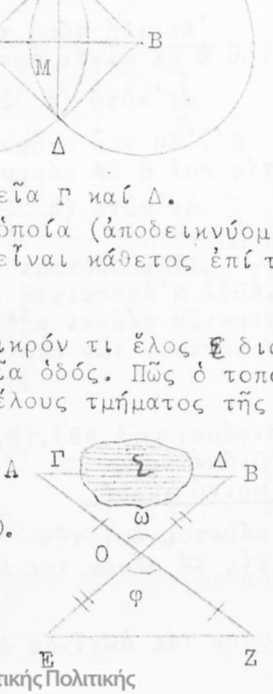
<u>Ἐργασία</u>

Μέ κέντρα Α καί Β καί ἀκτῖνα τήν ΑΒ γράφομεν περιφερείας αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τά σημεῖα Γ καί Δ.

Φέρομεν τήν κοινήν χορδήν ΓΔ ἡ ὁποία (ἀποδεικνύομεν ὅπως ἀκριβῶς καί εἰς τήν ἄσκησιν 171) εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΑΒ εἰς τό μέσον αὐτῆς Μ. .

173. Εἰς μίαν πεδιάδα ὑπάρχει μικρόν τι ἕλος Σ διά μέσου τοῦ ὁποίου πρέπει νά διέλθη εὐθεῖα ὁδός. Πῶς ὁ τοπογράφος θά εὕρη τό μῆκος τοῦ ἐντός τοῦ ἕλους τμήματος τῆς ὁδοῦ.

<u>Λύσις</u>



Λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α,Β καί Ο. Φέρομεν τάς εὐθείας ΑΟ καί ΒΟ. Τάς προεκτείνομεν πέραν τοῦ Ο. Ἐπί τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα.

ΟΕ = ΟΒ καί ΟΖ = ΟΑ.

Φέρομεν καί τήν εὐθεῖαν ΕΖ. Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ἔχομεν φέρει καί τήν εὐθεῖαν ΑΓΔΒ.

Τά τρίγωνα ΟΑΒ καί ΟΕΖ ἔχουν
ΟΑ = ΟΖ (ἐκ κατασκευῆς)
ΟΒ = ΟΕ (" ") καί
$\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ὡς κατά κορυφήν)

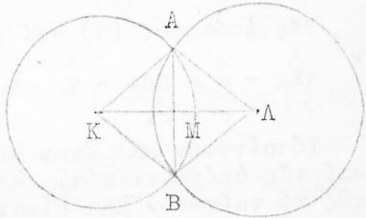
Ἄρα (§ 56) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν ΑΒ = ΕΖ.

Ἐπειδή ἡ ΕΖ εἶναι δυνατόν νά μετρηθῆ ἐπί τοῦ ἐδάφους δι'αὐτό δυνάμεθα νά γνωρίζωμεν καί τήν ΑΒ ἴσην τῆς ΕΖ.

Μετροῦμεν τά τμήματα ΑΓ καί ΔΒ καί τό ἄθροισμα αὐτῶν ἀφαιροῦμεν ἐκ τῆς ΑΒ ὅτε τό ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι τό ζητούμενον μῆκος ΓΔ.

174. Δίδονται δύο περιφέρειαι ἄνισοι τεμνόμεναι εἰς τά σημεῖα Α καί Β. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ κοινή χορδή ΑΒ τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν τέμνεται δίχα καί καθέτως ὑπό τῆς διακέντρου ΚΛ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

Λύσις



ΚΛ ἡ διάκεντρος
ΑΒ ἡ κοινή χορδή

ΚΛ $\perp$ ΑΒ εἰς τό μέσον Μ τῆς ΑΒ.

Ἀπόδειξις

Ἐπειδή ΑΚ = ΒΚ (ὡς ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς περιφερείας Κ)δι' αὐτό (§ 77 ἀντίστροφον) τό σημεῖον Κ κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ".

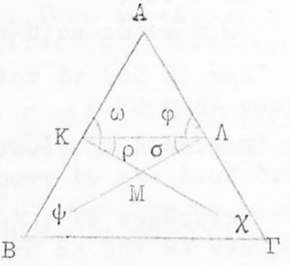
Ὁμοίως ἐπειδή ΑΛ = ΒΛ (ὡς ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς περιφερείας Λ) δι'αὐτό (§ 77 ἀντίστροφον) « τό σημεῖον Λ κεῖται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς ΑΒ".

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τά σημεῖα Κ καί Λ, κέντρα τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν, ὀφείλουν νά κεῖνται ἐπί τῆς μεσοκαθέτου τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἐπειδή ὅμως διά τῶν σημείων Κ καί Λ διέρχεται μία μόνον εὐθεῖα· ἡ διάκεντρος ΚΛ, δι'αὐτό αὕτη, ἡ ΚΛ, εἶναι κάθετος ἐπί τήν κοινήν χορδήν ΑΒ εἰς τό μέσον αὐτῆς Μ. ὅ.ἔ.δ.

175. Νά γράψετε ἕν ἰσόπλευρον τρίγωνον καί νά φέρετε καθέτους ἐπί δύο πλευράς αὐτοῦ εἰς τά μέσα των. Ἄν αἱ κάθετοι αὗται τέμνωνται εἴς τι σημεῖον νά ἀποδείξετε ὅτι τό σημεῖον τοῦτο μαζί μέ τά μέσα τῶν δύο πλευρῶν εἶναι κορυφαί ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

<u>Λύσις</u>

Τρίγωνον ΑΒΓ ἰσόπλευρον
Κ μέσον τῆς ΑΒ
Λ " " ΑΓ
$K\chi \perp AB$, $\Lambda\psi \perp A\Gamma$
<u>Μ σημεῖον τομῆς Κχ,Λψ</u>
Τρίγ.ΜΚΛ ἰσοσκελές



<u>Ἀπόδειξις</u>

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\widehat{AK\chi} = \widehat{A\Lambda\psi}$ (1) (ὡς ὀρθαί)

$\widehat{\omega} = \widehat{\varphi}$ (2) (ὡς παρά τήν βάσιν ΚΛ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΚΛ. Τοῦτο εἶναι ἰσοσκελές διότι ΑΚ = ΑΛ ὡς ἡμίση τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καί ΑΓ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ).

Τάς ἰσότητας (1) καί (2) ἀφαιροῦμεν κατά μέλη καί ἔχομεν

$\widehat{AK\chi} - \widehat{\omega} = \widehat{A\Lambda\psi} - \widehat{\varphi}$ ἤ

$\widehat{\rho} = \widehat{\sigma}$.

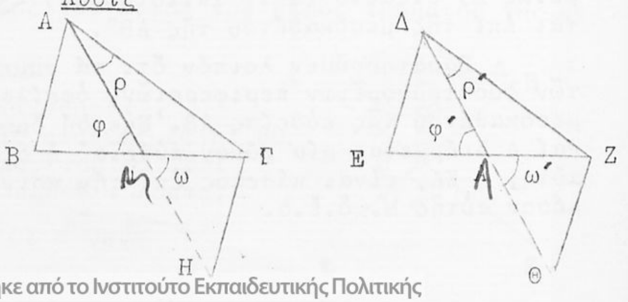
Τότρίγωνον ΜΚΛ ἔχον δύο γωνίας, τάς $\widehat{\rho}$ καί $\widehat{\sigma}$ ἴσας θά ἔχῃ καί τάς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς ἴσας. Οὕτω ΜΛ = ΜΚ καί συνεπῶς τό τρίγωνον ΜΚΛ εἶναι ἰσοσκελές. ὅ.ἔ.δ.

---

176. Δίδονται δύο τρίγωνα ἔχοντα δύο πλευράς ἴσας μίαν πρός μίαν καί τάς ὑπ'αὐτῶν περιεχομένας διαμέσους ἴσας. Ν'ἀποδειχθῇ ὅτι τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα.

<u>Λύσις</u>

Τρίγωνα ΑΒΓ,ΔΕΖ
ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ
ΑΜ,ΔΛ διάμεσοι
<u>ΑΜ = ΔΛ</u>
Τρίγ.ΑΒΓ=τρίγ. ΔΕΖ



'Απόδειξις

Προεκτείνομεν τάς διαμέσους τῶν τριγώνων, τήν μέν ΑΜ πέραν τοῦ Μ τήν δέ ΔΛ πέραν τοῦ Λ.

'Επί τῶν προεκτάσεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΜΗ=ΑΜ καί ΛΘ=ΔΛ. Τέλος φέρομεν καί τάς εὐθείας ΓΗ καί ΖΘ.

'Εξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΓΜΗ καί ΑΜΒ. Ταῦτα ἔχουν:

ΜΗ = ΑΜ (ἐκ κατασκευῆς)
ΜΓ = ΒΜ (ὡς ἡμίση τῆς ΒΓ) καί
$\hat{\omega}$ = $\hat{\varphi}$ (ὡς κατά κορυφήν)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί ἄρα, (§ 57), θά ἔχουν ΓΗ = ΑΒ (1)

'Επίσης ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΖΛΘ καί ΔΛΕ. Ταῦτα ἔχουν:

ΛΘ = ΔΛ (ἐκ κατασκευῆς)
ΛΖ = ΕΛ (ὡς ἡμίση τῆς ΕΖ) καί
$\hat{\omega}'$ = $\hat{\varphi}'$ (ὡς κατά κορυφήν)

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα αὐτά εἶναι ἴσα καί ἄρα, (§ 57), θά ἔχουν ΖΘ = ΔΕ (2)

'Εξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν ΑΒ = ΔΕ (3)

Οὕτω λόγῳ τῆς (3) ἐκ τῶν (1) καί (2) ἔχομεν(§1) ΓΗ = ΖΘ (4).

'Εξετάζομεν τώρα τά τρίγωνα ΑΓΗ καί ΔΖΘ. Ταῦτα ἔχουν:

ΑΓ = ΔΖ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΓΗ = ΖΘ (ἐξ ἀποδείξεως , ἰσότης (4))
καί ΑΗ = ΔΘ (διότι ἑκάστη εἶναι ἐκ κατασκευῆς διπλασία ἴσων διαμέσων).

'Επομένως (§ 62) τά τρίγωνα ΑΓΗ καί ΔΖΘ εἶναι ἴσα καί τότε (§ 57) θά ἔχουν καί $\hat{\rho} = \hat{\rho}'$ (5).

Τέλος ἐξετάζομεν τά τρίγωνα ΑΓΜ καί ΔΖΛ. Ταῦτα ἔχουν:

ΑΜ = ΔΛ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΑΓ = ΔΖ (" ") καί
$\hat{\rho} = \hat{\rho}'$ (ἐξ ἀποδείξεως ἰσότης (5))

'Επομένως (§ 56) τά τρίγωνα ΑΓΜ καί ΔΖΛ εἶναι ἴσα καί ἄρα, (§ 57), θά ἔχουν ΜΓ = ΛΖ (6)

'Εκ τῆς (6) ἔχομεν (§ 6) 2.ΜΓ = 2.ΛΖ ἤ
ΒΓ = ΕΖ

Παρατηροῦμεν λοιπόν ὅτι τά δοθέντα τρίγωνα ΑΒΓ καί ΔΕΖ ἔχουν καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρός μίαν ὡς ἑξῆς:

ΑΒ = ΔΕ (ἐξ ὑποθέσεως)
ΑΓ = ΔΖ (" ") καί
ΒΓ = ΕΖ (" ἀποδείξεως)
Οὕτω (§ 62) τά τρίγωνα εἶναι ἴσα ὅ.ἔ.δ.

Διεύθυνσις συγγραφέως

Γεώργιος Π. Μπακοῦρος
Καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν
τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως
Ὁδός Γριβαίων 7
(πάροδος Σκουφᾶ 64)
Ἀθῆναι

25

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1. **Ὁ Ἀθλητισμὸς καὶ ἡ συμβολή του εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν διεθνῶν σχέσεων.** (16σέλιδος μελέτη—Ἔκδ. 1948).
2. **Σημειώσεις Γεωμετρίας.**
3. **Περὶ Ριζῶν.** (Ἀναλυτικὴ ἀνάπτυξις τῶν διαφόρων τρόπων εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς καὶ κυβικῆς ρίζης τῶν ἀριθμῶν.— Εἰδικοὶ πίνακες παρέχοντες ἀμέσως τετράγωνα ἀριθμῶν καὶ τετραγωνικὰς ρίζας).
4. **Θεωρία ἐπὶ τῶν Λογαρίθμων.** (Ἀναλυτικὴ ἀνάπτυξις τῆς χρήσεως τῶν Λογαρίθμων μετὰ παραδειγμάτων.—Πρότυπον εἰς τὸ εἶδος του).
5. **Ὑφαίρεσις.** (Ἀναλυτικὴ θεωρία ἐπὶ τῆς ὑφαιρέσεως, μετὰ παραδειγμάτων καὶ προβλημάτων.—Χρησιμώτατον βιβλίον διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν καὶ τοὺς κ. κ. Δημοδιδασκάλους).
6. **Συλλογὴ προβλημάτων Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς.**
7. **Ἀλγεβρικὰ προβλήματα κινήσεως** (Βιβλίον χρησιμώτατον διὰ τοὺς ὑποψηφίους ὅλων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν).
8. **Τριγωνομετρικαὶ Ἀσκήσεις.** (Ἐκφωνήσεις καὶ Λύσεις). Τόμος Α'. (Χρησιμώτατον διὰ τοὺς τελειοφοίτους Γυμνασίων).
9. **Γεωμετρικαὶ Ἀσκήσεις.** (Ἐκφωνήσεις καὶ Λύσεις). Τόμος Α' (Διὰ τὴν Ε' τάξιν τῶν Γυμνασίων).