Ν. Χ. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΗΝ ΣΤ' ΓΥΜΝΑΣΙ

Δ 2 ΜΜΣ

Βαρουχάκης (Ν. Χ)

Ν. Χ. ΒΑΡΟΥΧΑΚΗ

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΗΣ ΕΚΤΗΣ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΣΧΟΛΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ἡ κατὰ τὰ τελευταῖα ἔτη τεραστία ἀνάπτυξις τῶν Θετικῶν Ἐπιστημῶν, ὀφειλομένη κυρίως εἰς τὰ πορίσματα τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, ἐπέβαλεν διεθνῶς τὴν ἀναθεώρησιν τῆς εἰς τὰς διαφόρους βαθμίδας τῆς Ἐκπαιδεύσεως διδασκομένης ὕλης τῶν Μαθηματικῶν, ἐπὶ τῷ σκοπῷ προσαρμογῆς τοῦ ὅλου προγράμματος διδασκαλίας εἰς τὴν ἀνάγκην κατακτήσεως ὑπὸ τῶν διδασκομένων περισσοτέρων, εἰς ἀνώτερον νοητικὸν ἐπίπεδον εὑρισκομένων καὶ πολλαπλῶς πρὸς ἄλλας ἐπιστήμας συνδεομένων, μαθηματικῶν γνώσεων.

Ἡ διὰ τοῦ ἐν ἰσχύι Ἀναλυτικοῦ Προγράμματος ἀναθεώρησις τῆς διδακτέας ὕλης τῶν Μαθηματικῶν εἰς τὴν Μέσην Ἐκπαίδευσιν διὰ τῆς εἰσαγωγῆς θεμάτων ἀναμφισβητήτου χρησιμότητος καὶ γενικωτέρου ἐνδιαφέροντος, συνιστᾷ διὰ τὴν Χώραν μας σημαντικὸν βῆμα προόδου πρὸς τὴν κατεύθυνσιν τοῦ ἐκσυγχρονισμοῦ τῆς διδασκαλίας τῶν Μαθηματικῶν.

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον πραγματεύεται τὰ ὑπὸ τὸ ἀνωτέρω πνεῦμα νεοεισαχθέντα θέματα εἰς τὴν διδακτέαν ὕλην τῆς ΣΤ' Γυμνασίου θετικῆς κατευθύνσεως, ἀπευθυνόμενον ὡς ἐκ τούτου εἰς τοὺς μαθητὰς τῆς τάξεως ταύτης, ὡς ἐπίσης καὶ εἰς τοὺς ὑποψηφίους Ἀνωτάτων Σχολῶν.

Διὰ τὴν κατανόησιν τοῦ περιεχομένου του, ἐπαρκοῦν συνήθεις, εἰς προηγουμένας τάξεις κτηθεῖσαι γνώσεις, πολλαὶ τῶν ὁποίων ἐπαναλαμβάνονται συνοπτικῶς, ὅπου ἐκρίθη ἀναγκαῖον, οὕτως ὥστε τὸ ἔργον νὰ ἀποκτήσῃ ἑνότητα καὶ αὐτοτέλειαν.

Ἐν ἀρχῇ ἐκρίθη σκόπιμος μία συνοπτικὴ ὑπόμνησις βασικῶν τινων ἐννοιῶν διὰ τὴν ἐν συνεχείᾳ ἀναλυτικὴν μελέτην, κυρίως τοῦ μερικοῦ καὶ τοῦ διπλοῦ λόγου. Ἐν προκειμένῳ πρέπει νὰ τονισθῇ ὅτι ὡρισμέναι νεοεισαγόμεναι ἐκφράσεις π.χ. διαίρεσις διανύσματος (καὶ ὄχι τμήματος) εἰς λόγον, μερικὸς λόγος τριάδος σημείων κλπ. ἀνταποκρίνονται εἰς τὰς ἀπαιτήσεις αὐστηρότητος καὶ σαφηνείας τῶν συγχρόνων Μαθηματικῶν.

Ἡ θεωρία τῶν ἁρμονικῶν τετράδων συνεδέθη πρὸς τὴν θεωρίαν τῶν πολικῶν διὰ τῆς ἑνιαίας παρουσιάσεως τῆς πολικῆς σημείου ὡς πρὸς δύο εὐθείας καὶ ὡς πρὸς κύκλον. Δὲν εἶναι, νομίζομεν, ἐπιτρεπτὸς ὁ διαχωρισμὸς τῶν δύο θεμάτων, τὰ ὁποῖα συνήθως ἐμφανίζονται ὡς ἄσχετα μεταξύ των, ἀφοῦ τόσον ὁ κύκλος, ὅσον καὶ τὸ σχῆμα δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι εἰδικαὶ περιπτώσεις κωνικῆς τομῆς.

Τὰ περὶ σημειακῶν μετασχηματισμῶν ἐκτίθενται κατὰ τρόπον αὐστηρῶς ἐπαγωγικόν. Οὕτως, ἡ ὁμόρροπος ἰσότης ἕπεται τῆς μεταφορᾶς καὶ στροφῆς. Ὁριζομένη ὡς γινόμενον μεταφορῶν καὶ στροφῶν παρέχει τὴν διὰ τῶν μετασχηματισμῶν ἑρμηνείαν τῆς «ὀλισθήσεως» τοῦ ἐπιπέδου ἐφ' ἑαυτοῦ. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἐν συνεχείᾳ—μὲ βάσιν τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς εὐθεῖαν—καὶ τῆς ἀντιρρόπου ἰσότητος, συμπληροῦται ἡ ὁμὰς τῶν ἰσοτήτων, ὁλοκληροῦται δὲ ἡ διὰ τῶν μετασχηματισμῶν ἑρμηνεία τῆς ἐννοίας τῆς μετακινήσεως. Τέλος, μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ μὲ τὴν αὐτὴν πάντοτε μέθοδον τῆς ἀναζητήσεως νέων μετασχηματισμῶν διὰ συνθέσεως τῶν ἤδη μελετηθέντων, καταλήγομεν εἰς τὸν γενικὸν μετασχηματισμὸν τῆς ὁμοιότητος.

Οἱ διδόμενοι ὁρισμοί, ἀφ' ἑνὸς μὲν ἐναρμονίζονται μὲ τοὺς ἤδη γνωστοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἴσων ἢ ὁμοίων τριγώνων καὶ πολυγώνων, ἀφ' ἑτέρου δὲ εἶναι ταυτόσημοι μὲ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἀντιστοίχων μετασχηματισμῶν τοῦ Χώρου.

Ἕκαστον κεφάλαιον συμπληροῦται μὲ ἐφαρμογὰς καὶ ἀσκήσεις. Διὰ τῶν ἐφαρμογῶν—τῶν ὁποίων δίδονται συνοπτικαὶ λύσεις—καὶ τῶν προτεινομένων ἀσκήσεων, ἡ ἐπιλογὴ ὡς καὶ ἡ διάταξις τῶν ὁποίων ἐγένετο μὲ πᾶσαν δυνατὴν ἐπιμέλειαν, ἐπεδιώχθη νὰ καταδειχθῇ ἡ σπουδαιότης καὶ ἡ ποικιλία τῶν θεμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ χρησιμοποιηθοῦν ἀποτελεσματικῶς αἱ ἐκτιθέμεναι μέθοδοι.

Πολλὰ ἡ παροῦσα ἐργασία ὀφείλει εἰς τὸν Καθηγητὴν τοῦ ΕΜΠ κ. Π. Δ. Λαδόπουλον, αἱ συμβουλαὶ καὶ ὑποδείξεις τοῦ ὁποίου κατὰ διαφόρους φάσεις αὐτῆς ὑπῆρξαν πολύτιμοι. Αἰσθάνομαι βαθυτάτην τὴν ὑποχρέωσιν, ὅπως τὸν εὐχαριστήσω καὶ ἀπὸ τῆς θέσεως ταύτης.

Εὐχαριστῶ, ἐπίσης, θερμῶς τοὺς Καθηγητὰς κ.κ. Α. Φ. Πάλλαν τῆς Ἀν. Σχολῆς Ν. Δοκίμων καὶ Δ. Κ. Παπαμιχαὴλ τῆς Ἀν. Γεωπονικῆς Σχολῆς Ἀθηνῶν διὰ τὸ πολλαπλῶς ἐκδηλωθὲν ἐνδιαφέρον των κατὰ τὴν συγγραφὴν τοῦ παρόντος.

Παρὰ τὴν καταβληθεῖσαν προσπάθειαν, πιθανῶς δὲν ἀπεφεύχθησαν σφάλματα ἢ παραλείψεις. Δέον πάντως νὰ ληφθῇ ὑπ' ὄψιν ὅτι βιβλίον ἀναλόγου περιεχομένου διὰ πρώτην φορὰν γράφεται εἰς τὴν Χώραν μας. Ὁ ὑπογράφων αἰσθάνεται ὄχι μόνον τὴν χαρὰν ἀλλὰ καὶ τὴν εὐθύνην αὐτῆς τῆς πρωτοπορείας. Καὶ ἐλπίζει.

Ν. Χ. Βαρουχάκης

Α'. ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

I. ΛΟΓΟΙ

Ὁ λόγος δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι μία τῶν βασικωτέρων ἐννοιῶν τῆς Γεωμετρίας. Ἐπὶ τῆς ἐννοίας ταύτης, ἐν συνδυασμῷ καὶ μὲ τὴν ἔννοιαν τῆς φορᾶς, θεμελιοῦται πλῆθος ἄλλων βασικῶν ἐννοιῶν, ὡς εἶναι ὁ λόγος διανυσμάτων, ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ διανύσματος κ.λ.π. Αἱ ἀνωτέρω ἔννοιαι, γνωσταὶ ἐκ προηγουμένων μαθημάτων, δίδονται ὑπὸ μορφὴν ἐπαναλήψεως ἐν ἀρχῇ τοῦ παρόντος Κεφαλαίου. Ἐν συνεχείᾳ εἰσάγονται ὁ μερικὸς λόγος καὶ ὁ διπλοῦς λόγος, ὁ ὁποῖος καὶ ἀποτελεῖ τὸ κύριον θέμα τοῦ Κεφαλαίου τούτου. Ἰδιαιτέρως ἐξετάζεται ἡ λίαν ἐνδιαφέρουσα περίπτωσις τῆς ἁρμονικότητος τετράδος σημείων ἢ εὐθειῶν.

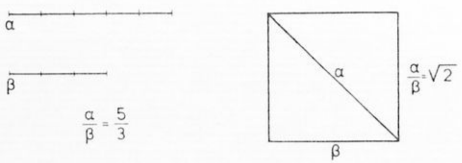
1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

1.1 ΛΟΓΟΣ ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΩΝ ΤΜΗΜΑΤΩΝ

Ἀπὸ τῶν πρώτων ἤδη μαθημάτων Γεωμετρίας, ὁρίζονται, εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθυγράμμων* τμημάτων, αἱ σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος, καθὼς καὶ αἱ πράξεις: πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις τμημάτων, ὡς καὶ πολλαπλασιασμὸς τμήματος ἐπὶ θετικὸν ρητόν. Βραδύτερον εἰσάγεται ἡ ἔννοια τοῦ λόγου δύο τμημάτων μὲ τὰ ἀκόλουθα βασικὰ χαρακτηριστικά:

● 1. Κάθε ζεῦγος (α,β) τμημάτων μὲ $\beta \neq 0$** ἀντιστοιχίζεται εἰς ἕνα ὡρισμένον ρητὸν ἢ ἄρρητον ἀριθμόν, ὅστις καλεῖται **λόγος τοῦ α πρὸς τὸ β** καὶ συμβολίζεται $\frac{\alpha}{\beta}$, ὡς κάτωθι (σχ. 1.1):

ΣΧ. 1.1



Ἂν ὑπάρχῃ ρητὸς $\frac{\mu}{\nu}$ ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\mu}{\nu}\cdot\beta=\alpha$, τότε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\nu}$$

Ἄλλως, διὰ κάθε ρητὸν $\frac{\mu}{\nu}$ θὰ εἶναι:

$$(1) \qquad \frac{\mu}{\nu}\cdot\beta<\alpha \qquad \text{ἢ} \qquad \frac{\mu}{\nu}\cdot\beta>\alpha \qquad (2)$$

Οὕτω τὸ σύνολον $\mathbf{Q}$ τῶν ρητῶν διαμερίζεται*** εἰς δύο σύνολα Q_1 καὶ Q_2, ἀποτελούμενα ἀντιστοίχως ἐκ τῶν ρητῶν, οἱ ὁποῖοι πληροῦν τὴν (1) ἢ (2).

Εἶναι δέ: $\qquad Q_1 \ni x < y \in Q_2 \qquad (\forall x, \ \forall y)$

---

* Ἐφεξῆς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καλοῦμεν ἁπλῶς **τμήματα.**

** **0**: μηδενικὸν τμῆμα,

*** Ἤτοι: $Q_1 \cup Q_2 = \mathbf{Q}$ καὶ $Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$

Εἶναι ὅμως γνωστόν ὅτι διὰ τῆς ἄνω διαμερίσεως τοῦ συνόλου **Q** ὁρίζεται εἷς ἄρρητος ἀριθμὸς κ. Τότε ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \kappa$$

● 2. Δοθέντων ἑνὸς τμήματος **β** καὶ θετικοῦ ἀριθμοῦ κ ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν τμῆμα **α**, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὸ **β** εἶναι κ. Τὸ τμῆμα τοῦτο **α** καλεῖται καὶ γινόμενον τοῦ **β** ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν κ, συμβολίζεται δὲ κ **β**. Ἰσχύει, ὅθεν, ἡ ἰσοδυναμία:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \kappa \Longleftrightarrow \alpha = \kappa\beta \quad (\beta \neq 0)$$

1.2 ΤΙΜΗ ΤΜΗΜΑΤΟΣ

Ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ἓν μὴ μηδενικὸν τμῆμα **ι**, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν **μοναδιαῖον.**

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ὁ λόγος τυχόντος τμήματος ΑΒ πρὸς τὸ μοναδιαῖον καλεῖται τιμὴ τοῦ μήκους ἢ ἁπλῶς τιμὴ τοῦ τμήματος ΑΒ (βάσει τοῦ ι).

Ἡ τιμὴ τοῦ μοναδιαίου **ι**, εἶναι προφανῶς 1.
Οὕτω π.χ. αἱ τιμαὶ τῆς περιμέτρου καὶ τῆς διαγωνίου ἑνὸς τετραγώνου ὡς πρὸς μοναδιαῖον τμῆμα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ εἶναι ἀντιστοίχως 4 καὶ $\sqrt{2}$.
Εἰς τὸ σύνολον τῶν τμημάτων καὶ ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ τιμαὶ των λαμβάνονται βάσει τοῦ **αὐτοῦ** μοναδιαίου τμήματος, ἀποδεικνύεται ὅτι:

● 1. Δύο ἴσα τμήματα ἔχουν ἴσας τιμὰς καὶ ἀντιστρόφως.

● 2. Ἡ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος ἢ διαφορᾶς τμημάτων εἶναι ἴση ἀντιστοίχως πρὸς τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν τιμῶν των.

● 3. Ἡ τιμὴ τοῦ γινομένου τμήματος ἐπὶ θετικὸν ἀριθμὸν κ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς τιμῆς τοῦ τμήματος ἐπὶ κ.

● 4. Ὁ λόγος δύο τμημάτων ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον τῶν τιμῶν των.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων καὶ πρὸς ἀποφυγὴν ἐπιβαρύνσεως τοῦ συμβολισμοῦ, διὰ τὴν τιμὴν ἑνὸς τμήματος χρησιμοποιεῖται τὸ σύμβολον αὐτοῦ τούτου τοῦ τμήματος. Οὕτως, ἰσότητες ὡς αἱ ἀκόλουθοι:

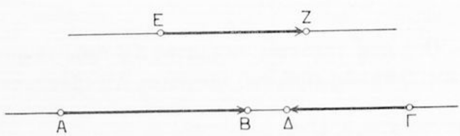
$$\mathrm{AB} = \Gamma\Delta \qquad\qquad \mathrm{AB} \pm \Gamma\Delta = \mathrm{EZ}$$

$$\Gamma\Delta = \kappa \cdot AB \qquad\qquad \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \kappa$$

δύνανται νὰ ἀναφέρωνται τόσον εἰς τὰ τμήματα, ὅσον καὶ εἰς τὰς τιμάς των, εὑρισκομένας πάντως, βάσει τοῦ **αὐτοῦ** μοναδιαίου τμήματος, **οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τοῦτο.**

1.3 ΛΟΓΟΣ ΠΑΡΑΛΛΗΛΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἔστωσαν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ δύο παράλληλα* διανύσματα. Λόγος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ πρὸς τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, συμβολικῶς $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$, εἶναι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $+\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}$ ἢ $-\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}$, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως τὰ θεωρούμενα διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα.



ΣΧ. 1.3

Οὕτω π.χ. εἶναι (σχ. 1.3):

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = -\frac{AB}{\Gamma\Delta} \qquad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{EZ}} = \frac{AB}{EZ} \qquad \frac{\overrightarrow{EZ}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = -\frac{EZ}{\Gamma\Delta}$$

Ἐκ τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ καὶ τῆς § 1.1, 2 προκύπτει ὅτι:

Δοθέντος διανύσματος $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ κ, ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν διάνυσμα $\vec{\alpha}$, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὸ $\vec{\beta}$ εἶναι κ. Τὸ $\vec{\alpha}$ καλεῖται καὶ γινόμενον τοῦ $\vec{\beta}$ ἐπὶ κ, συμβολικῶς $\kappa\vec{\beta}$. Ὥστε:

$$\frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \kappa \Longleftrightarrow \vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}, \quad \vec{\beta} \neq \vec{0}$$

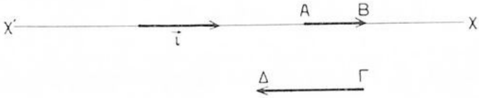
---

* Ὑπὸ τὴν **εὐρεῖαν** ἔννοιαν (οἱ φορεῖς των δύνανται καὶ νὰ συμπίπτουν ὡς εἰς τὸ σχ. 1.3).

1.4 ΑΞΩΝ. ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΤΙΜΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Ἐπὶ προσανατολισμένης εὐθείας x΄x, (σχ. 1.4) ὀνομάζομεν **μοναδιαῖον διάνυσμα** ἓν διάνυσμα $\vec{\iota}$ θετικῆς φορᾶς καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα ὁρίζουν τμῆμα **ι**, λαμβανόμενον ὡς μοναδιαῖον.

ΣΧ. 1.4



Ἐπειδὴ ἡ ἐκλογή, τόσον τοῦ μοναδιαίου τμήματος **ι**, ὅσον καὶ τῆς θετικῆς φορᾶς εἶναι αὐθαίρετος, δυνάμεθα, ἀντιστρόφως, ἐπὶ εὐθείας x΄x νὰ ὁρίσωμεν **τυχὸν διάνυσμα** $\vec{\iota}$ ὡς μοναδιαῖον, ὁπότε ἀφ᾿ ἑνὸς μὲν προσανατολίζομεν τὴν εὐθεῖαν, ἀφ᾿ ἑτέρου δὲ ὁρίζομεν μοναδιαῖον τμῆμα. Θὰ λέγωμεν τότε, ὅτι **θέτομεν ἕνα ἄξονα** ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x. Οὕτω, νοοῦμεν ὅτι :

Ἄξων εἶναι τὸ ζεῦγος (x΄x, $\vec{\iota}$) τῆς εὐθείας x΄x καὶ τοῦ ὁρισθέντος ὡς μοναδιαίου διανύσματος $\vec{\iota}$.

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ὁ λόγος ἑνὸς διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ πρὸς τὸ μοναδιαῖον $\vec{\iota}$ ἄξονος παραλλήλου τοῦ $\overrightarrow{AB}$, καλεῖται ἀλγεβρικὴ* τιμὴ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ (βάσει τοῦ $\vec{\iota}$), συμβολίζεται δὲ : $\overline{AB}$

Ὥστε :
$$\overline{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\vec{\iota}}$$

ἢ ἰσοδυνάμως :
$$\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{\iota}$$

Ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{AB}$ ἰσοῦται μὲ $+AB$ ἢ $-AB$, καθ᾿ ὅσον ἀντιστοίχως τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον (σχ. 1.4) τοῦ μοναδιαίου $\vec{\iota}$.

---

* **Ἀπόλυτος τιμὴ** διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καλεῖται ἡ τιμὴ τοῦ τμήματος AB, συμβολίζεται δέ : $|\overrightarrow{AB}|$. Ἄρα :

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}| = AB$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ κατόπιν τῶν εἰς τὴν § 1.2 συμπερασμάτων 1-4 προκύπτει ἀμέσως ὅτι εἰς τὸ σύνολον τῶν διανυσμάτων τῶν παραλλήλων πρὸς ἄξονα x΄x, ἰσχύουν τὰ ἑξῆς :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overline{\mathrm{AB}} = \overline{\Gamma\Delta} \tag{1}$$

$$\overline{\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right]} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\Gamma\Delta} \tag{2}$$

εἰδικῶς δέ, ἂν Α, Β, Γ εἶναι σημεῖα ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τοῦ θεωρουμένου ἄξονος

$$\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{B}\Gamma} = \overline{\mathrm{A}\Gamma} \quad \text{(Chasles)} \tag{2΄}$$

$$\overline{\left[\kappa\, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right]} = \kappa\, \overline{\mathrm{AB}} \tag{3}$$

εἰδικώτερον δὲ $(\kappa = -1)$:

$$\overline{\mathrm{BA}} = -\overline{\mathrm{AB}} \tag{3΄}$$

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\Gamma\Delta}} \tag{4}$$

ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι αἱ ἀλγεβρικαὶ τιμαὶ λαμβάνονται βάσει τοῦ **αὐτοῦ** μοναδιαίου διανύσματος, **ἀνεξαρτήτως τῆς ἐκλογῆς τούτου** ἐπὶ τῆς εὐθείας x΄x.

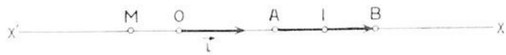
1.5 ΤΕΤΜΗΜΕΝΗ

Ἐπὶ ἄξονος x΄x ἐκλέγομεν αὐθαιρέτως ἓν σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν **ἀρχὴν** τοῦ ἄξονος (σχ. 1.5). Τότε εἰς κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ εἷς ὡρισμένος πραγματικὸς ἀριθμός: ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ $\overline{\mathrm{OM}} = \mu$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, ἥτις καλεῖται καὶ **τετμημένη** τοῦ σημείου Μ. Ἀντιστρόφως: Εἰς κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν μ ἀντιστοιχεῖ ἓν μοναδικὸν σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος μὲ τετμημένην μ. Πράγματι (1.3), ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν διάνυσμα $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mu \cdot \vec{\boldsymbol{\iota}}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀλγεβρικὴ τιμὴ εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{\mathbf{OM}}}{\vec{\boldsymbol{\iota}}} = \mu.$

Ἂν αἱ τετμημέναι τῶν ἄκρων A καὶ B διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ἀντιστοίχως α καὶ β τότε:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \overline{AO} + \overline{OB} \qquad \text{(Chasles)} \\ &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

ΣΧ. 1.5



Ἡ τετμημένη x τοῦ μέσου I τοῦ τμήματος AB ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης:

$$\overline{AI} = \overline{IB}$$

ἤτοι: $x - \alpha = \beta - x$

ἄρα: $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1 - 4

2. ΜΕΡΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ

2.1 ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΕΙΣ ΛΟΓΟΝ

Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος x΄x διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 2.1α,β). Θὰ λέγωμεν ὅτι **τὸ σημεῖον Γ τοῦ ἄξονος χωρίζει (ἢ διαιρεῖ) τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ,** ὅταν:

$$\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = \lambda \qquad (1)$$

ΣΧ. 2.1α

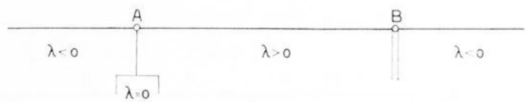
ΣΧ. 2.1β

Διὰ κάθε σημεῖον Γ τοῦ ἄξονος, διάφορον τοῦ B, ὁρίζεται διὰ τῆς (1) μία τιμὴ τοῦ λόγου λ ἡ ὁποία:

● Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{O}$ εἶναι —1 διὰ κάθε Γ. (σχ. 2.1 β)

● Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{O}$ ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς θέσεως τοῦ Γ ἐπὶ τοῦ ἄξονος (σχ. 2.1 α). Οὕτω: Ἂν τὸ σημεῖον Γ εἶναι (σχ. 2.1 γ):

ΣΧ. 2.1γ



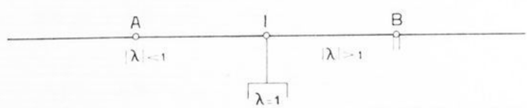
● 1. ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma B}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ $\lambda > 0$

● 2. ἐξωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma B}$ εἶναι ἀντίρροπα καὶ $\lambda < 0$

● 3. Τὸ σημεῖον Α, τότε: $\overline{A\Gamma} = 0$ καὶ $\lambda = 0$

Ἀναλυτικώτερον ἂν εἶναι Ι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 2.1 δ) καί:

ΣΧ. 2.1δ



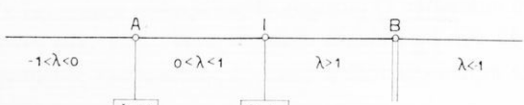
● 4. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Β εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ι, τότε $A\Gamma > \Gamma B$ καὶ $|\lambda| > 1$

● 5. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Α εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ι, τότε $A\Gamma < \Gamma B$ καὶ $|\lambda| < 1$.

● 6. Τὸ Γ συμπίπτει μὲ τὸ Ι, τότε $\overline{A\Gamma} = \overline{\Gamma B}$ καὶ $\lambda = 1$.

Πάντα τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα δεικνύονται εἰς τὸ σχῆμα 2.1 ε

ΣΧ. 2.1ε



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ὁ λόγος $\lambda = \dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = \dfrac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\overrightarrow{\Gamma B}}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῆς φορᾶς, τοῦ μοναδιαίου τμήματος **ι** ἢ τῆς ἀρχῆς Ο τοῦ ἄξονος. Ἕνεκα τούτου, ἐφεξῆς, δυνάμεθα νὰ ὁμιλῶμεν περὶ τοῦ λόγου, εἰς τὸν ὁποῖον ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ χωρίζεται ὑπό τινος σημείου Γ τῆς **εὐθείας** ΑΒ, ὑπονοοῦντες ὅτι θεωροῦμεν ἕνα τυχόντα ἄξονα ἐπ' αὐτῆς.

2.2 ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ ΤΟΥ ΛΟΓΟΥ

Δυνάμεθα νὰ μελετήσωμεν, λεπτομερέστερον, τὴν μεταβολὴν τοῦ λόγου λ, ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμεν ἄξονα $y'y \neq x'x$ (σχ. 2.2α) μὲ ἀρχὴν τὸ σημεῖον Α καὶ μοναδιαῖον διάνυσμα, ἔστω $\overrightarrow{AE}$. Ἐπὶ τῆς, διὰ τοῦ σημείου Β, παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$, ὁρίζομεν τὸ σημεῖον Θ, διὰ τὸ ὁποῖον:

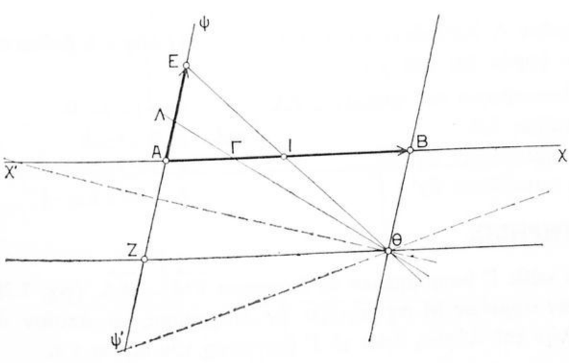
$$\overrightarrow{\Theta B} = \overrightarrow{AE} \qquad | \text{ τὰ τμήματα ΘΕ,ΑΒ διχοτομοῦνται } |$$

Ἂν ἡ διὰ τοῦ Θ παράλληλος πρὸς τὸν $x'x$ τέμνῃ τὸν $y'y$ εἰς τὸ σημεῖον Ζ τότε τυχοῦσα διὰ τοῦ Θ εὐθεῖα, διάφορος τῶν ΘΒ καὶ ΘΖ, τέμνει ἀμφοτέρους τοὺς ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$· ἔστω εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Λ ἀντιστοίχως. Τότε εἶναι:

$$\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = \frac{\overline{A\Lambda}}{\overline{\Theta B}} = \frac{\overline{A\Lambda}}{\overline{AE}} = \overline{A\Lambda}$$

ἤτοι ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον χωρίζεται τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὑπὸ τοῦ σημείου Γ, ἰσοῦται πρὸς τὴν **τετμημένην** τοῦ Λ ἐπὶ τοῦ ἄξονος $y'y$.

ΣΧ. 2.2α



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ.— Τὸ σύνολον τῶν διὰ τοῦ Θ εὐθειῶν, ἐκτὸς τῶν ΘΒ καὶ ΘΖ, ἀντιστοιχίζει :

- 1. Κάθε σημεῖον $\Gamma \neq B$ τοῦ ἄξονος x΄x εἰς ἓν σημεῖον $\Lambda \neq Z$ τοῦ ἄξονος y΄y, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ Γ χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.
- 2. Ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον $\Lambda \neq Z$ τοῦ y΄y εἰς ἓν σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον ἴσον πρὸς τὴν τετμημένην τοῦ Λ

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ δεδομένου ὅτι ἡ τετμημένη τοῦ Ζ εἶναι $\overline{AZ} = -\overline{AE} = -1$ συνάγομεν τὰ ἀκόλουθα :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- **1. Ὁ λόγος εἰς τὸν ὁποῖον ἓν σημεῖον Γ τοῦ ἄξονος x΄x χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἶναι διάφορος τοῦ —1.**

Πράγματι εἰς τὸ Γ ἀντιστοιχεῖ τὸ $\Lambda \neq Z$

- **2. Δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\lambda \neq -1$ ὑπάρχει σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄x, καὶ ἓν μόνον, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ.**

Πράγματι ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν σημεῖον Λ μὲ τετμημένην λ, ἐπειδὴ δὲ $\lambda \neq -1$ ἄρα $\Lambda \neq Z$, ἡ ΘΛ τέμνει τὸν ἄξονα x΄x εἰς τὸ ζητούμενον σημεῖον Γ.

- **3. Ὅταν τὸ Γ διαγράφῃ κατὰ τὴν φορὰν τοῦ $\overrightarrow{AB}$, ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄x:**

α. Τὴν ἡμιευθεῖαν Ax΄
β. Τὸ τμῆμα ΑΙ (Ι μέσον τοῦ ΑΒ)
γ. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΙΒ
δ. Τὴν ἡμιευθεῖαν Bx΄

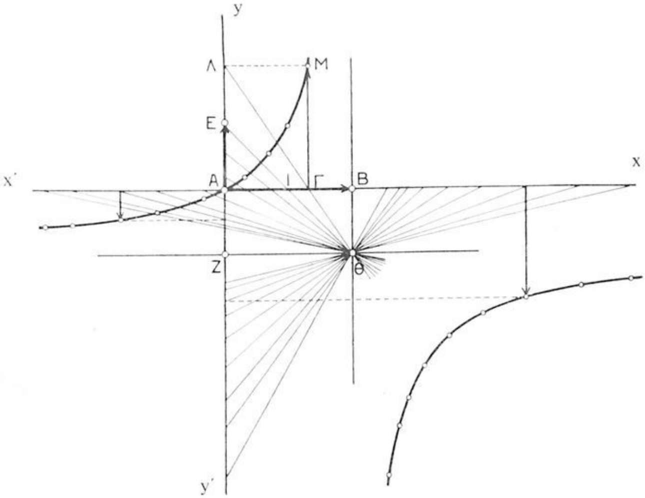
Τότε ἀντιστοίχως :

Τὸ σημεῖον Λ διαγράφει κατὰ τὴν **θετικὴν φορὰν** ἐπὶ τοῦ y΄y		Ὁ λόγος λ **βαίνει αὐξανόμενος :**
α. Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΖΑ		α. $-1<\lambda<0$
β. Τὸ τμῆμα ΑΕ	**καὶ**	β. $0\leq\lambda\leq1$
γ. Τὴν ἡμιευθεῖαν Ey		γ. $1<\lambda<+\infty$
δ. Τὴν ἡμιευθεῖαν Zy΄		δ. $-\infty<\lambda<-1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἂν διὰ κάθε Γ θεωρήσωμεν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{A\Lambda}$ (σχ. 2.2β), τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ σχηματίζει ἓν διάγραμμα, τὸ ὁποῖον δεικνύει τὴν μεταβολὴν τοῦ λόγου, ὅταν τὸ Γ διαγράφῃ τὸν ἄξονα x΄x.

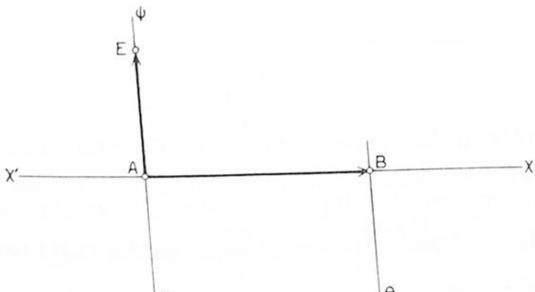
Εἰς τὸ σχῆμα 2.2β οἱ ἄξονες x'x καὶ y'y ἔχουν ληφθῆ ὀρθογώνιοι καὶ ἔχει κατασκευασθῆ ἱκανὸς ἀριθμὸς σημείων Μ, ὥστε νὰ ἐπιτυγχάνεται μὲ ἱκανοποιητικὴν ἀκρίβειαν χάραξις τοῦ ὡς ἄνω διαγράμματος μεταβολῆς τοῦ λ.



ΣΧ. 2.2β

2.3 ΤΟ ΕΠ' ΑΠΕΙΡΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΕΥΘΕΙΑΣ

Ἡ εἰς τὸ Πόρισμα 2 τῆς προηγουμένης παραγράφου 2.2 διατυπουμένη ἐξαίρεσις $\lambda \neq -1$ δύναται νὰ ἀπαλειφθῆ ἂν «ἐφεύρωμεν» σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ **συμβατικῶς** τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον -1. Πρὸς τοῦτο θὰ πρέπει ἀντίστοιχον τοῦ σημείου τούτου ἐπὶ τοῦ ἄξονος y'y (2.2) νὰ εἶναι τὸ σημεῖ-



ΣΧ. 2.3

ον Ζ (σχ. 2.3). Ἄρα πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι ἡ ΘΖ ἔχει κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν παράλληλον αὐτῆς x΄x (καὶ ἓν μόνον διότι ἄλλως θὰ συνέπιπτον). Ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον Θ ἐκλέγεται αὐθαιρέτως, (διότι καὶ τὸ $\overrightarrow{ΑΕ}$ εἶναι αὐθαίρετον) πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι καὶ ὅλαι αἱ παράλληλοι τῆς x΄x ἔχουν τὸ αὐτὸ κοινὸν σημεῖον. Τὸ σημεῖον τοῦτο θὰ ὀνομάσωμεν **ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖον** ἑκάστης τῶν εὐθειῶν τούτων. Δεχόμενοι τὰ ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι :

● Μία διεύθυνσις ὁρίζει ἓν ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖον.

Πρέπει νὰ δεχθῶμεν ἀκόμη ὅτι :

● Δύο εὐθεῖαι διαφόρου διευθύνσεως ἔχουν διακεκριμένα ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα (διότι ἤδη ἔχουν ἓν κοινὸν σημεῖον).

Τέλος δεχόμεθα ὅτι :

● Πάντα τὰ ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα τῶν διαφόρων διευθύνσεων τοῦ Ἐπιπέδου κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας : τῆς **ἐπ᾽ ἄπειρον εὐθείας,** ὡς καλεῖται, τοῦ ἐπιπέδου. Ἡ εἰσαγωγὴ τῆς ἐννοίας τοῦ ἐπ᾽ ἄπειρον σημείου διευκολύνει εἰς τὴν γενικωτέραν καὶ ἑνοποιημένην διατύπωσιν ὡρισμένων γεωμετρικῶν προτάσεων (π.χ. εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ Πορ. 2 τῆς § 2.2)
Κατωτέρω, πάντως, ἀναφερόμεθα **ἐν γένει** εἰς **μὴ** ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα. Ὁσάκις θέλομεν νὰ θεωρήσωμεν ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα, τοῦτο θὰ ἀναφέρεται ρητῶς, τὰ σημεῖα δὲ ταῦτα θὰ συμβολίζωμεν μὲ γράμματα, φέροντα δείκτην ∞ π.χ. $Γ_\infty$, $Χ_\infty$.

2.4 ΜΕΡΙΚΟΣ ΛΟΓΟΣ

Ἐπὶ εὐθείας ε, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α,Β καὶ Γ(σχ. 2.4). Ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον ἓν διάνυσμα μὲ ἄκρα δύο ἐκ τῶν ἀνωτέρω σημείων π.χ. τὸ $\overrightarrow{ΑΒ}$, χωρίζεται ὑπὸ τοῦ τρίτου σημείου Γ, ἐν προκειμένῳ ὁ λόγος :

$$\lambda = \frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΓΒ}} \tag{1}$$

ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς ἐκλογῆς τοῦ ζεύγους ($\overrightarrow{ΑΒ}$, Γ) ὡς δεικνύει ἡ θέσις τῶν σημείων εἰς τὴν (1). Ἐπειδὴ τὸ ἀνωτέρω ζεῦγος δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ἐκ τῆς διατεταγμένης τριάδος (Α,Β,Γ) τῶν σημείων, δίδεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός :

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Μερικὸς (ἢ ἁπλοῦς)* λόγος τριάδος (Α,Β,Γ) σημείων μιᾶς εὐ-

* Μερικός, ἐκ τοῦ ὅτι τὸ σημεῖον Γ μερίζει... Ἁπλοῦς, κατ᾽ ἀντιδιαστολὴν πρὸς τὸν διπλοῦν ὅστις εἰσάγεται κατωτέρω (3.2).

θείας καλεῖται ὁ λόγος, εἰς τὸν ὁποῖον τὸ τρίτον σημεῖον Γ χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τῶν δύο πρώτων σημείων αὐτῆς.

ΣΧ.
2.4

Τὸν μερικὸν λόγον τῆς τριάδος (Α,Β,Γ) συμβολίζομεν (ΑΒΓ).

Ὥστε:
$$(AB\Gamma) = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} \qquad (2)$$

Εἰς τὴν **γενικὴν** περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ σημεῖα εἶναι διακεκριμένα ὁ ὡς ἄνω λόγος εἶναι **διάφορος τοῦ 0 καὶ τοῦ —1** (2.2 Πόρ. 1)

Εἰδικαὶ περιπτώσεις (σημεῖα συμπίπτοντα):

$$(AA\Gamma) = -1$$
$$(ABA) = 0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Ἂν τὸ **τρίτον** σημεῖον τῆς τριάδος εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας, τότε (2.3):

$$(AB\Gamma_\infty) = -1 = (BA\Gamma_\infty)$$

2.5 ΜΕΡΙΚΟΙ ΛΟΓΟΙ ΕΚ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΡΙΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Τὰ σημεῖα Α,Β καὶ Γ τῆς εὐθείας ε (σχ. 2.4) σχηματίζουν 6 διακεκριμένας τριάδας, τῶν ὁποίων οἱ μερικοὶ λόγοι ὑπολογίζονται, ὅταν δίδεται εἷς ἐξ αὐτῶν.

Ἔστω:
$$(AB\Gamma) = \frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} = \lambda \qquad (1)$$

Τότε:

- α. Δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν δύο πρώτων σημείων ἔχομεν:

$$(BA\Gamma) = \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{\Gamma A}} = \frac{1}{\lambda} \qquad (2)$$

- β. Δι' ἀντιμεταθέσεως τῶν δύο τελευταίων σημείων ἔχομεν:

$$(A\Gamma B) = \frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}}{\overline{B\Gamma}} = -(1+\lambda) \qquad (3)$$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω α καὶ β εὑρίσκομεν τοὺς ὑπολοίπους, ὡς κάτωθι:

'Εκ τῆς (2): $$(\text{ΒΓΑ}) = -\left(1+\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda+1}{\lambda} \qquad (4)$$

'Εκ τῆς (3): $$(\text{ΓΑΒ}) = -\frac{1}{1+\lambda} \qquad (5)$$

'Εκ τῆς (4): $$(\text{ΓΒΑ}) = -\frac{\lambda}{\lambda+1} \qquad (6)$$

Οἱ ὡς ἄνω λόγοι εἶναι ἐν γένει διάφοροι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 5 - 11

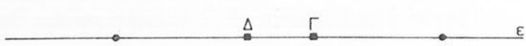
3. ΔΙΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΣ ΤΕΤΡΑΔΟΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

3.1. ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΕΥΘΕΙΑΣ

Ἔστω (Α,Β,Γ,Δ) μία διατεταγμένη τετρὰς σημείων δοθείσης εὐθείας ε (σχ. 3.1). Τὰ ζεύγη (Α,Β) καὶ (Γ,Δ) ὀνομάζομεν ἀντιστοίχως **πρῶτον** καὶ **δεύτερον** ζεῦγος τῆς τετράδος. 'Επίσης ὀνομάζομεν τὰ Α,Δ **ἄκρα** σημεῖα καὶ τὰ Β,Γ **μέσα** σημεῖα τῆς τετράδος.

ΣΧ. 3.1α

ΣΧ. 3.1β



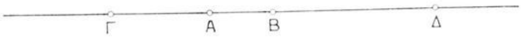
Θὰ λέγωμεν ὅτι **τὰ ζεύγη** τῆς τετράδος **χωρίζονται**, ὅταν μεταξὺ τῶν σημείων ἑκάστου ὑπάρχῃ ἓν μόνον σημεῖον τοῦ ἄλλου (σχ. 3,1α)

3.2 ΔΙΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Διπλοῦς λόγος τετράδος (Α,Β,Γ,Δ) σημείων μιᾶς εὐθείας (σχ. 3.2) **καλεῖται ὁ λόγος (ΑΒΓ) : (ΑΒΔ) τῶν δύο μερικῶν λόγων, οἱ ὁποῖοι ὁρίζονται ἀπὸ τὸ πρῶτον ζεῦγος καὶ ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄλλου ζεύγους τῆς τετράδος.**

Ὁ διπλοῦς λόγος τῆς τετράδος (Α,Β,Γ,Δ) συμβολίζεται : (ΑΒΓΔ).

ΣΧ. 3.2



Ὥστε : $$(ΑΒΓΔ) = \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΔ)} = \frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΓΒ}} : \frac{\overline{ΑΔ}}{\overline{ΔΒ}}$$

Ὁ διπλοῦς λόγος ὁρίζεται ὅταν, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὁρίζωνται οἱ μερικοὶ λόγοι ἤτοι : τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι διάφορα τοῦ Β, ἀφ' ἑτέρου δὲ $(ΑΒΔ) \neq 0$ ἤτοι $Δ \neq Α$.

Εἰς τὴν **γενικὴν περίπτωσιν**, καθ' ἣν τὰ σημεῖα εἶναι διακεκριμένα :

● 1. ὁ διπλοῦς λόγος **εἶναι διάφορος τοῦ 0 καὶ 1**

διότι: $Γ \neq Α \Rightarrow (ΑΒΓ) \neq 0$

καί : $Γ \neq Δ \Rightarrow (ΑΒΓ) \neq (ΑΒΔ)$

● 2. Ὅταν τὰ ζεύγη χωρίζωνται, τότε οἱ μερικοὶ λόγοι εἶναι ἑτερόσημοι (2.1, 1 καὶ 2), ἄρα ὁ διπλοῦς λόγος εἶναι ἀρνητικός. Ὅταν τὰ ζεύγη δὲν χωρίζωνται, ὁ διπλοῦς λόγος εἶναι θετικός.

Εἰδικαὶ περιπτώσεις (σημεῖα συμπίπτοντα):

Εἶναι: $$(ΑΑΓΔ) = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$(ΑΒΓΓ) = 1$$

$$(ΑΒΑΔ) = \frac{0}{(ΑΒΔ) \neq 0} = 0$$

Συμπέρασμα : Ὁ διπλοῦς λόγος ἔχει τιμήν :

● 1 ὅταν συμπίπτουν τὰ σημεῖα ἑνὸς ζεύγους τῆς τετράδος

● 0 ὅταν συμπίπτουν τὰ πρῶτα σημεῖα τῶν ζευγῶν τῆς τετράδος

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν σημεῖον τοῦ **δευτέρου** ζεύγους εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας, τότε ὁ ἀντίστοιχος μερικὸς λόγος εἶναι —1.

Συνεπῶς : $$(ΑΒΓ_{\infty}Δ) = -1/(ΑΒΔ)$$

$$(ΑΒΓΔ_{\infty}) = -(ΑΒΓ)$$

$$(ΑΒΓ_{\infty}Γ_{\infty}) = 1$$

3.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Δοθέντων τριῶν σημείων Α, Β, Γ ἐπ' εὐθείας (σχ. 3.4) **καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\rho \neq 0$ νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Δ, διὰ τὰ ὁποῖα :**

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \rho \tag{1}$$

Λύσις

Ἔστω : $(\mathrm{AB\Gamma}) = \lambda$

Εἶναι : $\lambda \neq 0$

καὶ :
$$\rho = \frac{\lambda}{(\mathrm{AB\Delta})} \iff (\mathrm{AB\Delta}) = \frac{\lambda}{\rho} \tag{2}$$

Ἐκ τῆς (2) ὁρίζεται (2.2 πόρ. 2) **ἓν μοναδικὸν σημεῖον Δ** ἱκανοποιοῦν τὴν (1)
Εἰδικῶς ἄν :

- $\rho = \lambda$ τότε $(\mathrm{AB\Delta}) = 1$ καὶ Δ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ (2.1)
- $\rho = -\lambda$ τότε $(\mathrm{AB\Delta}) = -1$ καὶ Δ εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας.
- $\rho = 1$ τότε Δ εἶναι τὸ σημεῖον Γ

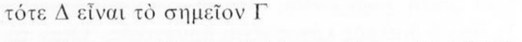
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν μεταξὺ τῶν δοθέντων εἶναι καὶ τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς εὐθείας, Γ_∞, τότε

$$\lambda = -1 \quad \text{καὶ} \quad (\mathrm{AB\Delta}) = -\frac{1}{\rho}$$

3.4 ΔΙΠΛΟΙ ΛΟΓΟΙ ΕΚ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

Ἐπὶ εὐθείας ε θεωροῦμεν **τέσσαρα** σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. (σχ. 3.4). Μὲ τὰ σημεῖα αὐτὰ δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν $4! = 24$ διαφόρους τετράδας (ὅσαι αἱ μεταθέσεις 4 στοιχείων). Θὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς διπλοῦς λόγους τῶν διαφόρων τετράδων, ὅταν δίδεται εἷς ἐξ αὐτῶν. (Παρατηροῦμεν ὅτι ὅλοι οἱ ὡς ἄνω διπλοῖ λόγοι εἶναι διάφοροι τοῦ 0 καὶ τοῦ 1).

ΣΧ. 3.4



Θεωροῦμεν τὴν τετράδα (Α,Β,Γ,Δ) τῆς ὁποίας ἔστω ρ ὁ διπλοῦς λόγος :

$$(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = \rho$$

Εἰς τὴν ἀνωτέρω τετράδα :

● 1. Ἀντιμεταθέτομεν τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐκ τῶν ζευγῶν της

Εἶναι : $(AB\Delta\Gamma)=\dfrac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)}=\dfrac{1}{\rho}$

Ἐπίσης : $(BA\Gamma\Delta)=\dfrac{\overline{B\Gamma}}{\overline{\Gamma A}}:\dfrac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta A}}=\dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}:\dfrac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}=\dfrac{1}{\rho}$

Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ὅταν ἀντιμεταθέτωμεν τὰ σημεῖα ἑνὸς ἐκ τῶν ζευγῶν τετράδος ὁ διπλοῦς λόγος ἀντιστρέφεται.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ὅταν ἀντιμεταθέτωμεν τὰ σημεῖα καὶ τῶν δύο ζευγῶν τετράδος, ὁ διπλοῦς λόγος της παραμένει ἀμετάβλητος.

Πράγματι : $(BA\Delta\Gamma)=1:\dfrac{1}{\rho}=\rho$

● 2. Ἀντιμεταθέτομεν τὰ ζεύγη

Εἶναι :
$$(\Gamma\Delta AB)=\frac{\overline{\Gamma A}}{\overline{A\Delta}}:\frac{\overline{\Gamma B}}{\overline{B\Delta}}$$
$$=\frac{\overline{\Gamma A}\cdot\overline{B\Delta}}{\overline{A\Delta}\cdot\overline{\Gamma B}}$$
$$=\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}:\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}$$
$$=\rho$$

Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ὅταν ἀντιμεταθέτωμεν τὰ ζεύγη τετράδος ὁ διπλοῦς λόγος παραμένει ἀμετάβλητος.

● 3. Ἀντιμεταθέτομεν δύο μέσα ἢ ἄκρα σημεῖα της

Εἶναι : $\rho_1=(A\Gamma B\Delta)=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}:\dfrac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}}$

$$=\frac{(\overline{A\Gamma}+\overline{\Gamma B})(\overline{\Delta A}+\overline{A\Gamma})}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}}=$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta A} + \overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Delta A} + \overline{A\Gamma}\cdot\overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B}\cdot\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}}$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma}\,(\overline{\Delta A} + \overline{A\Gamma} + \overline{\Gamma B})}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}} + \frac{\overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Delta A}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}}$$

$$= \frac{\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{A\Delta}} + 1 = -\rho + 1 =$$

$$= 1 - \rho$$

Ἐπίσης: $\rho_2 = (\Delta B\Gamma A) = (\Gamma A\Delta B)$ | ἀντιμετ. ζευγῶν |

$= (A\Gamma B\Delta)$ | ἀντιμετ. σημείων ἑκάστου ζεύγους |

$= \rho_1$

$= 1 - \rho$

Ὥστε:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ὅταν ἀντιμεταθέτωμεν δύο μέσα ἢ ἄκρα σημεῖα τετράδος ὁ νέος διπλοῦς λόγος ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀρχικοῦ ἀπὸ τὴν μονάδα.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ὅταν ἀντιμεταθέτωμεν συγχρόνως καὶ τὰ μέσα καὶ τὰ ἄκρα σημεῖα ὁ διπλοῦς λόγος παραμένει ἀμετάβλητος

Πράγματι: $(\Delta\Gamma BA) = 1 - (1 - \rho) = \rho$

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

Εἶναι: $\rho = (AB\Gamma\Delta) = (BA\Delta\Gamma)$

$= (\Gamma\Delta AB)$

$= (\Delta\Gamma BA)$

Ἄρα αἱ τετράδες ἀνὰ τέσσαρες ἔχουν τὸν αὐτὸν διπλοῦν λόγον. Ἑπομένως δὲν ὑπάρχουν περισσότεροι τῶν 6 διπλοῖ λόγοι διάφοροι. Ἄς τοὺς ἀναζητήσωμεν. Εἴδομεν ὅτι:

$$(AB\Gamma\Delta) = \rho \tag{1}$$

$$(AB\Delta\Gamma) = \frac{1}{\rho} \tag{2}$$

$$(ΑΓΒΔ) = 1 - ρ \qquad (3)$$

Ἐξ αὐτῶν προκύπτουν οἱ ἑξῆς :

$$(ΑΔΒΓ) = 1 - \frac{1}{ρ} = \frac{ρ-1}{ρ} \quad | \text{ ἀντιμετ. μέσων εἰς τὸν (2)} \qquad (4)$$

$$(ΑΔΓΒ) = \frac{ρ}{ρ-1} \quad | \text{ ἀντιμετ. σημείων β΄ ζεύγους εἰς τὸν (4)} \qquad (5)$$

καὶ

$$(ΑΓΔΒ) = \frac{1}{1-ρ} \quad | \text{ ἀντιμετ. σημείων β΄ ζεύγους εἰς τὸν (3)} \qquad (6)$$

Οἱ ἀνωτέρω διπλοῖ λόγοι εἶναι ἐν γένει διάφοροι.

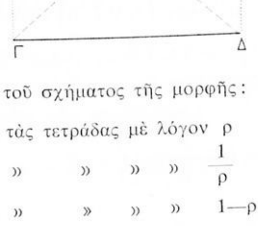
Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Δοθέντος ἑνὸς συνόλου 4 σημείων εὐθείας, οἱ διπλοῖ λόγοι ὅλων τῶν σχηματιζομένων τετράδων ἐκ τοῦ συνόλου τούτου ἔχουν 6 διαφόρους τιμὰς ἐν γένει: τὰς (1) ἕως (6).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Αἱ ἀνωτέρω ἓξ τιμαὶ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἓξ μεταθέσεις τῶν τριῶν τελευταίων γραμμάτων τετράδος, τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον γράμμα εἶναι ὡρισμένον.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ

Τὸ κατωτέρω σχῆμα δεικνύει ἕνα πρακτικὸν τρόπον εὑρέσεως τῶν τετράδων μὲ τὸν αὐτὸν διπλοῦν λόγον.



Οὕτω, μία διαδρομὴ ἐπὶ τοῦ σχήματος τῆς μορφῆς:

- 1.  ἢ  δίδει τὰς τετράδας μὲ λόγον ρ
- 2.  ἢ  » » » » » $\frac{1}{ρ}$
- 3.  ἢ » » » » » 1—ρ κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 12 - 15

4. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΣΗΜΕΙΩΝ

4.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία τετρὰς σημείων εὐθείας καλεῖται ἁρμονική, ὅταν ὁ διπλοῦς λόγος αὐτῆς ἔχῃ τιμὴν —1.

ΣΧ.
4.1

Ἔστω (Α,Β,Γ,Δ) μία ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων (σχ. 4.1)

● 1. Εἶναι : $(ΑΒΓΔ) = -1 < 0$

Ἄρα : **Τὰ ζεύγη τῆς τετράδος χωρίζονται** (3.2, 2)

Εἰδικώτερον : $$(ΑΒΓΔ) = -1 \Longleftrightarrow \frac{(ΑΒΓ)}{(ΑΒΔ)} = -1$$

$$\Longleftrightarrow (ΑΒΓ) = -(ΑΒΔ)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΓΒ}} = -\frac{\overline{ΑΔ}}{\overline{ΔΒ}}$$

Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἵνα ἡ τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ) εἶναι ἁρμονικὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ νὰ χωρίζουν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ εἰς λόγους ἀντιθέτους.

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ἐπίσης ὅτι σημεῖα Γ, Δ **χωρίζουν ἁρμονικῶς** τὸ $\overrightarrow{ΑΒ}$ εἰς (ἀπόλυτον) λόγον $\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$ ἢ $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ ἢ ἀκόμη ὅτι **εἶναι συζυγῆ (ἁρμονικὰ** ἀλλήλων) **ὡς πρὸς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.**

● 2. Οἱ διπλοῖ λόγοι ἐκ τοῦ συνόλου $\{Α,Β,Γ,Δ\}$ ἔχουν τὰς ἑξῆς τιμὰς (3.4):

$$ρ = -1 = \frac{1}{ρ}$$

$$1 - ρ = 2 = 1 - \frac{1}{ρ}$$

$$\frac{1}{1-ρ} = \frac{1}{2} = \frac{ρ}{ρ-1}$$

Ἑπομένως ὑπάρχουν τρεῖς μόνον διάφοροι διπλοῖ λόγοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ εἰς ὀκτὼ διαφόρους τετράδας.

Οὕτω, ὑπάρχουν ὀκτὼ ἁρμονικαὶ τετράδες, αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῆς (Α,Β,Γ,Δ) δι᾽ ἀντιμεταθέσεως τῶν σημείων ἑνὸς ζεύγους ἢ ἀντιμεταθέσεως τῶν ζευγῶν. Εἶναι δὲ αὗται αἱ ἑξῆς:

(Α,Β,Γ,Δ) (Α,Β,Δ,Γ) (Β,Α,Γ,Δ) (Β,Α,Δ,Γ)

(Γ,Δ,Α,Β) (Γ,Δ,Β,Α) (Δ,Γ,Α,Β) (Δ,Γ,Β,Α)

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸ κάτωθι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὰ σημεῖα ἑκάστου ζεύγους ἁρμονικῆς τετράδος, εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ σημεῖα τοῦ ἄλλου ζεύγους.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν καὶ τετράδας εἰς τὰς ὁποίας ἓν τῶν σημείων τοῦ β′ ζεύγους εἶναι τὸ ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖον X_∞ τῆς εὐθείας. Ἂν Ι εἶναι τὸ ἕτερον σημεῖον τοῦ ζεύγους τούτου καὶ Α,Β τὰ σημεῖα τοῦ α′ ζεύγους, θὰ εἶναι

$$(ABX_\infty) = -1$$

Ἵνα ἡ θεωρουμένη τετρὰς εἶναι ἁρμονικὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἕτερος μερικὸς λόγος (ΑΒΙ) νὰ ἰσοῦται μὲ 1 ἤτοι τὸ Ι νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ.

Οὕτως, ἁρμονικαὶ τετράδες εἶναι αἱ:

$(ABX_\infty I)$ $(ABIX_\infty)$ $(BAIX_\infty)$ $(BAX_\infty I)$

Δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι:

Τὸ ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖον καὶ τὸ μέσον τυχόντος τμήματος μιᾶς εὐθείας, εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος τούτου.

4.2 ΓΕΝΙΚΗ ΣΥΝΘΗΚΗ ΑΡΜΟΝΙΚΟΤΗΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα ἡ τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ) σημείων ἑνὸς ἄξονος (σχ. 4.2) **εἶναι ἁρμονικὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀντίστοιχοι τετμημέναι α, β, γ, δ τῶν σημείων της νὰ πληροῦν τὴν συνθήκην:**

$$(\alpha + \beta)\ (\gamma + \delta) = 2\,(\alpha\beta + \gamma\delta) \tag{1}$$

ΣΧ. 4.2

Ἀπόδειξις

Εἶναι: $(\mathrm{AB\Gamma\Delta}) = -1 \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{\mathrm{A\Gamma}}}{\overline{\mathrm{\Gamma B}}} = -\dfrac{\overline{\mathrm{A\Delta}}}{\overline{\mathrm{\Delta B}}}$

$$\Longleftrightarrow \overline{\mathrm{A\Gamma}}\;\overline{\mathrm{B\Delta}} + \overline{\mathrm{A\Delta}}\;\overline{\mathrm{B\Gamma}} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (\gamma-\alpha)\,(\delta-\beta)+(\delta-\alpha)\,(\gamma-\beta) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \gamma\delta-\alpha\delta-\beta\gamma+\alpha\beta+\delta\gamma-\alpha\gamma-\beta\delta+\alpha\beta=0$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)\,(\gamma+\delta) = 2(\alpha\beta+\gamma\delta)$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● 1. Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν Ο τοῦ ἄξονος τὸ μέσον Ι τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 4.2, 1)

ΣΧ. 4.2, 1

Τότε: $\beta = -\alpha$

καὶ ἡ (1) γράφεται:

$$0=2(-\alpha^2+\gamma\delta) \Longleftrightarrow \gamma\delta = \alpha^2 \;\;(=\beta^2)$$

Ἤτοι: $\overline{\mathbf{I\Gamma}} \cdot \overline{\mathbf{I\Delta}} = \mathbf{IA}^2 = \mathbf{IB}^2$ (2)

Ὁμοίως, ἂν J εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ, θὰ εἶναι:

$$\overline{\mathrm{JA}}\;\overline{\mathrm{JB}} = \mathrm{J\Gamma}^2 = \mathrm{J\Delta}^2$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Ἐκ τῆς (2) προκύπτουν τὰ ἑξῆς:

α. Τὸ γινόμενον $\overline{\mathrm{I\Gamma}} \cdot \overline{\mathrm{I\Delta}}$ εἶναι θετικόν. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα **Γ καὶ Δ εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μέσου Ι τοῦ τμήματος ΑΒ.**

β. Ὅταν τὸ Γ «τείνῃ» πρὸς τὸ Β (ἤτοι, ἡ τετμημένη του λαμβάνῃ τὰς τιμὰς ἀκολουθίας μὲ ὅριον $\overline{\mathrm{IB}} = \beta$) τότε καὶ τὸ Δ τείνει ἐπίσης εἰς τὸ Β. Δεχόμεθα κατόπιν τούτου **συμβατικῶς** ὅτι τὸ συζυγὲς τοῦ Β ὡς πρὸς τὰ Α,Β εἶναι τὸ Β. Ὁμοίως προκύπτει ὅτι, ὡς συζυγὲς τοῦ Α ὡς πρὸς τὰ Α,Β πρέπει νὰ δεχθῶμεν τὸ Α.

● 2. Λαμβάνομεν ὡς ἀρχὴν (σχ. 4.4, 2) τὸ Α, ὁπότε $\alpha = 0$ καὶ $\beta,\gamma,\delta \neq 0$

καὶ ἡ (2) γράφεται: $\beta(\gamma+\delta)=2\gamma\delta \Longleftrightarrow \dfrac{2}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\delta}$

ἤτοι: $$\frac{2}{\overline{\mathbf{AB}}}=\frac{1}{\overline{\mathbf{A\Gamma}}}+\frac{1}{\overline{\mathbf{A\Delta}}} \qquad (3)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν: $$\frac{2}{\overline{\mathrm{BA}}}=\frac{1}{\overline{\mathrm{B\Gamma}}}+\frac{1}{\overline{\mathrm{B\Delta}}}$$

$$\frac{2}{\overline{\Gamma\Delta}}=\frac{1}{\overline{\Gamma\mathrm{A}}}+\frac{1}{\overline{\Gamma\mathrm{B}}}$$

$$\frac{2}{\overline{\Delta\Gamma}}=\frac{1}{\overline{\Delta\mathrm{A}}}+\frac{1}{\overline{\Delta\mathrm{B}}}$$

ΣΧ. 4.2, 2

● 3. Ἡ ἀνωτέρω σχέσις: $\beta(\gamma+\delta)=2\gamma\delta$ (ἀρχὴ τὸ σημεῖον A)

γράφεται: $$\beta\,\frac{\gamma+\delta}{2}=\gamma\delta$$

ἐπειδὴ $\dfrac{\gamma+\delta}{2}$ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ μέσου J τοῦ τμήματος ΓΔ (σχ. 4.2, 3)

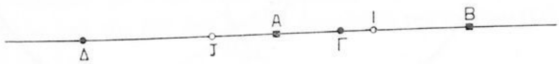
θὰ ἔχωμεν: $$\overline{\mathbf{AB}}\cdot\overline{\mathbf{AJ}}=\overline{\mathbf{A\Gamma}}\cdot\overline{\mathbf{A\Delta}} \qquad (4)$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν: $$\overline{\mathrm{BA}}\cdot\overline{\mathrm{BJ}}=\overline{\mathrm{B\Gamma}}\cdot\overline{\mathrm{B\Delta}}$$

$$\overline{\Gamma\Delta}\cdot\overline{\Gamma\mathrm{I}}=\overline{\Gamma\mathrm{A}}\cdot\overline{\Gamma\mathrm{B}}$$

$$\overline{\Delta\Gamma}\cdot\overline{\Delta\mathrm{I}}=\overline{\Delta\mathrm{A}}\cdot\overline{\Delta\Gamma}$$

ΣΧ. 4.2, 3



● 4. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας τῶν (4) λαμβάνομεν:

$$-\frac{\overline{AJ}}{\overline{BJ}}=\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{B\Gamma}}\cdot\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{B\Delta}}$$

ἤ:

$$\frac{\overline{\mathbf{AJ}}}{\mathbf{JB}}=\frac{\overline{\mathbf{A\Gamma}}}{\mathbf{\Gamma B}}\cdot\frac{\overline{\mathbf{A\Delta}}}{\mathbf{\Delta B}} \qquad (5)$$

Ἀλλὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ χωρίζουν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἁρμονικῶς εἰς λόγον

$$\kappa=\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{A\Delta}{\Delta B}>0$$

Ἄρα:

$$\frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}}=\kappa\cdot(-\kappa)=-\kappa^2$$

Ὥστε:

Ἂν δύο σημεῖα Γ, Δ χωρίζουν ἁρμονικῶς διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον $\kappa>0$, τὸ μέσον J τοῦ τμήματος ΓΔ χωρίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον $-\kappa^2$

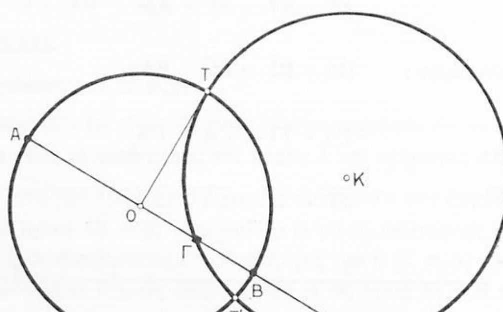
4.3 ΜΙΑ ΣΥΝΘΗΚΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΟΣ ΚΥΚΛΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα δύο κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ μία διάμετρος τοῦ ἑνὸς νὰ χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ ἄλλου.

Ἀπόδειξις

Ἔστωσαν (σχ. 4.3) οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Κ), τεμνόμενοι κατὰ τὰ σημεῖα Τ, Τ′ καὶ μία εὐθεῖα ΑΟΒ, ἥτις **τέμνεται** ὑπὸ τοῦ (Κ) κατὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἵνα οἱ κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι, ὡς γνωστόν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀκτὶς ΟΤ

ΣΧ. 4.3



νὰ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ (Κ) ἢ ἰσοδυνάμως | θεωροῦντες τὴν δύναμιν τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Κ) | :

$$\overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Delta} = OT^2 \Longleftrightarrow \overline{O\Gamma} \cdot \overline{O\Delta} = OA^2 = OB^2$$

ἄρα (4.2, 1): $\Longleftrightarrow (AB\Gamma\Delta) = -1$

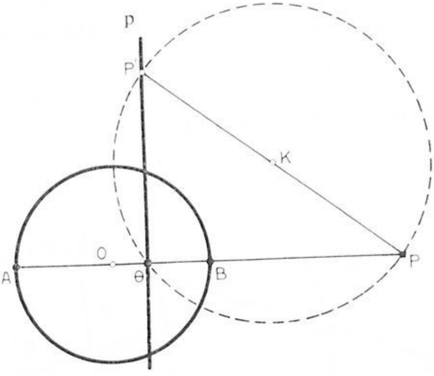
4.4 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΣ Γ. ΤΟΠΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.— Θεωροῦμεν σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς κύκλου (Ο). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν ἀντιδιαμετρικῶν τοῦ Ρ σημείων τῶν κύκλων (Κ), οἱ ὁποῖοι εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς τὸν (Ο) ($P \neq O$).

Λύσις

● Ἔστω Ρ′ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου (σχ. 4.4) καὶ Θ ἡ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΟΡ. Ἐπειδὴ ἡ ΡΡ′ εἶναι διάμετρος τοῦ (Κ), τὸ σημεῖον Θ ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸν (Κ). Ἂν ΑΒ εἶναι ἡ ὑπὸ τῆς ΟΡ ὁριζομένη διάμε-

ΣΧ. 4.4



τρος τοῦ (Ο), τότε κατὰ τὸ προηγούμενον Θεώρημα 4.3 τὸ Θ εἶναι συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α,Β καὶ τὸ Ρ′ ἀνήκει εἰς τὴν κάθετον p ἐπὶ τὴν ΟΡ εἰς τὸ ὡρισμένον σημεῖον Θ.

● Ἀντιστρόφως: Ἂν Ρ′ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς p, ὁ κύκλος (Κ) διαμέτρου ΡΡ′ διέρχεται διὰ τοῦ Θ, ἐπειδὴ δὲ ἡ τετρὰς (Α,Β,Ρ,Θ) εἶναι ἁρμονική, οἱ κύκλοι (Ο) καὶ (Κ) εἶναι (4.3) ὀρθογώνιοι.

Ὥστε τὸ ζητούμενον σύνολον εἶναι **ἡ κάθετος εἰς τὸ συζυγὲς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς ὑπὸ τῆς ΟΡ ὁριζομένης διαμέτρου τοῦ κύκλου (Ο)**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ: 3
ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 16-21

5. ΔΙΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΣ ΤΕΤΡΑΔΟΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

5.1 ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΔΕΣΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ Ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου ἐπ᾽ ἄπειρον ἢ μή, καλεῖται ἐπίπεδος δέσμη εὐθειῶν.

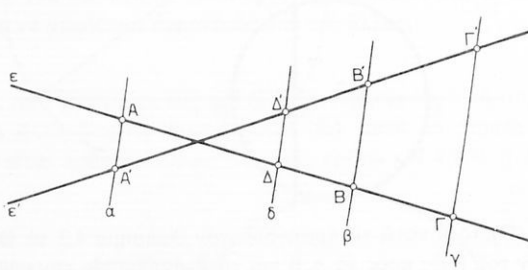
Αἱ εὐθεῖαι μιᾶς δέσμης ὀνομάζονται καὶ **ἀκτῖνες** αὐτῆς τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, **κέντρον** τῆς δέσμης. Αἱ εὐθεῖαι τῆς δέσμης εἶναι παράλληλοι ἢ συντρέχουσαι, καθ᾽ ὅσον τὸ κέντρον της εἶναι σημεῖον ἐπ᾽ ἄπειρον ἢ μή.

5.2 ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΠΑΠΠΟΥ

Θεωροῦμεν τέσσαρας εὐθείας α,β,γ,δ ἐπιπέδου δέσμης (σχ. 5.2, 1 καὶ 2). Ἔστωσαν Α,Β,Γ,Δ καὶ Α΄,Β΄,Γ΄,Δ΄, τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα τομῆς αὐτῶν ὑπὸ δύο εὐθειῶν ε και ε΄ ἀντιστοίχως, μὴ διερχομένων διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς δέσμης. Θὰ συγκρίνωμεν τοὺς διπλοῦς λόγους (ΑΒΓΔ) καὶ (Α΄Β΄Γ΄Δ΄). Ἔστω ὅτι :

● **1. Αἱ εὐθεῖαι α,β,γ,δ εἶναι παράλληλοι** (σχ. 5.2, 1)

ΣΧ. 5.2, 1



Κατὰ τὸ θεώρημα Θαλῆ εἶναι :

$$\frac{\overline{\text{ΑΓ}}}{\overline{\text{ΓΒ}}} = \frac{\overline{\text{Α΄Γ΄}}}{\overline{\text{Γ΄Β΄}}} \qquad \text{καὶ} \qquad \frac{\overline{\text{ΑΔ}}}{\overline{\text{ΔΒ}}} = \frac{\overline{\text{Α΄Δ΄}}}{\overline{\text{Δ΄Β΄}}}$$

ἤτοι : $$(\text{ΑΒΓ}) = (\text{Α΄Β΄Γ΄}) \qquad (1)$$

καὶ $$(\text{ΑΒΔ}) = (\text{Α΄Β΄Δ΄}) \qquad (2)$$

ὁπότε διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

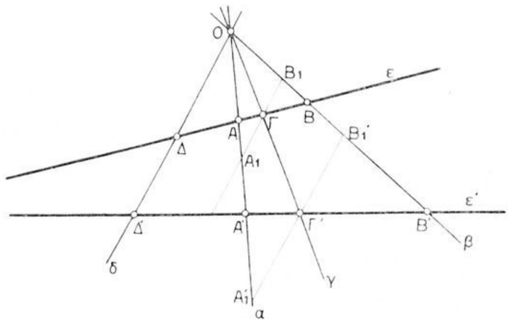
$$(\text{ΑΒΓΔ}) = (\text{Α΄Β΄Γ΄Δ΄})$$

● **2. Αἱ εὐθεῖαι α,β,γ,δ εἶναι συντρέχουσαι εἰς σημεῖον Ο** (σχ. 5.2, 2)

Θεωροῦμεν τὴν διὰ τοῦ σημείου Γ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν δ, ἥτις τέμνει τὰς α καὶ β, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα $Α_1$ καὶ $Β_1$ ἀντιστοίχως. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $ΑΓΑ_1$ καὶ ΑΔΟ ἔχομεν:

$$\frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΑΔ}} = \frac{\overline{Α_1Γ}}{\overline{ΟΔ}} \qquad (1)$$

ΣΧ.
5.2, 2



ἐκ δὲ τῶν $ΓΒΒ_1$ καὶ ΔΒΟ:

$$\frac{\overline{ΓΒ}}{\overline{ΔΒ}} = \frac{\overline{Β_1Γ}}{\overline{ΟΔ}} \qquad (2)$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει:

$$\frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΓΒ}} : \frac{\overline{ΑΔ}}{\overline{ΔΒ}} = \frac{\overline{Α_1Γ}}{\overline{Β_1Γ}} \qquad (3)$$

Ὁμοίως, θεωροῦντες τὴν ἐκ τοῦ Γ΄ παράλληλον $Α'_1Γ'Β'_1$ πρὸς τὴν δ, καταλήγομεν εἰς τήν:

$$\frac{\overline{Α'Γ'}}{\overline{Γ'Β'}} : \frac{\overline{Α'Δ'}}{\overline{Δ'Β'}} = \frac{\overline{Α'_1Γ'}}{\overline{Β_1'Γ'}} \qquad (4)$$

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι α, β, γ τῆς δέσμης ὁρίζουν ἐπὶ τῶν παραλλήλων $Α_1ΓΒ_1$

καὶ $A'_1\Gamma' B'_1$ τμήματα ἀνάλογα, τὰ δεύτερα μέλη τῶν (3) καὶ (4) εἶναι ἴσα. Ἄρα καὶ :

$$\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}} : \frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}} = \frac{\overline{A'\Gamma'}}{\overline{\Gamma' B'}} : \frac{\overline{A'\Delta'}}{\overline{\Delta' B'}}$$

ἤτοι : $$(AB\Gamma\Delta) = (A'B'\Gamma'\Delta')$$

Ἀπεδείχθη, λοιπόν, ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ὁ διπλοῦς λόγος τῆς τετράδος τῶν σημείων, καθ' ἃ τέσσαρες εὐθεῖαι ἐπιπέδου δέσμης τέμνονται ὑπὸ ἄλλης, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς ἐκλογῆς τῆς τεμνούσης.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Τὸ θεώρημα ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἓν τῶν σημείων τομῆς εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, ἤτοι ἡ τέμνουσα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν τῶν εὐθειῶν τῆς τετράδος, ὅπως π.χ. ἡ $A_1\Gamma B_1$ (σχ. 5.2, 2) ἥτις «τέμνει» τὴν δ εἰς τὸ Δ_∞

Πράγματι ἐκ τῆς (3) ἔχομεν :

$$\begin{aligned}(AB\Gamma\Delta) &= -\frac{\overline{A_1\Gamma}}{\overline{\Gamma B_1}} \\ &= -(A_1B_1\Gamma) \\ &= \frac{(A_1B_1\Gamma)}{(A_1B_1\Delta_\infty)} \quad \text{διότι } (A_1B_1\Delta_\infty) = -1 \\ &= (A_1B_1\Gamma\Delta_\infty)\end{aligned}$$

5.3 ΔΙΠΛΟΥΣ ΛΟΓΟΣ ΤΕΤΡΑΔΟΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΔΕΣΜΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Διπλοῦς λόγος τετράδος εὐθειῶν (α,β,γ,δ) μιᾶς ἐπιπέδου δέσμης καλεῖται ὁ διπλοῦς λόγος τῆς τετράδος (Α,Β,Γ,Δ) τῶν σημείων, καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι τέμνονται ἀντιστοίχως ὑπὸ τυχούσης ἄλλης εὐθείας, μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς δέσμης.

Τὸν ὡς ἄνω διπλοῦν λόγον συμβολίζομεν : (αβγδ)
ἤ, ἂν Ο εἶναι τὸ κέντρον τῆς δέσμης, Ο(ΑΒΓΔ)*

---

* Ἀντὶ (ΟΑ ΟΒ ΟΓ ΟΔ).

Ὥστε εἶναι: $(\alpha\beta\gamma\delta) = \mathrm{O}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) = (\mathrm{AB}\Gamma\Delta)$

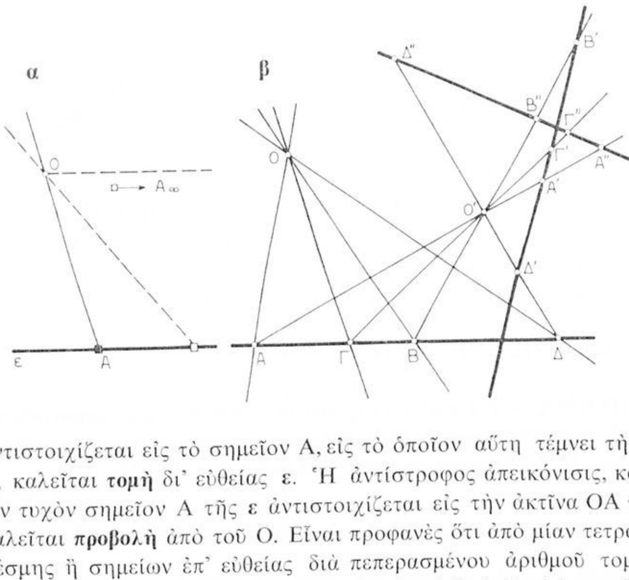
Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ καὶ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὴν § 3.3 προκύπτει ὅτι:

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Δοθεισῶν τριῶν εὐθειῶν α,β,γ δέσμης καὶ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\rho \neq 0$ ὑπάρχει εὐθεῖα δ τῆς δέσμης καὶ μία μόνον, ὥστε νὰ εἶναι: $(\alpha\beta\gamma\delta) = \rho$.

5.4 ΠΡΟΒΟΛΗ ΚΑΙ ΤΟΜΗ

Ἔστω εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς (σχ. 5.4α). Ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῆς δέσμης κέντρου Ο ἐπὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς εὐθείας. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη, κατὰ τὴν ὁποίαν μία ἀκτὶς ΟΑ τῆς

ΣΧ. 5.4



δέσμης ἀντιστοιχίζεται εἰς τὸ σημεῖον Α, εἰς τὸ ὁποῖον αὕτη τέμνει τὴν **ε** (σχ. 5.4α), καλεῖται **τομὴ** δι' εὐθείας **ε**. Ἡ ἀντίστροφος ἀπεικόνισις, κατὰ τὴν ὁποίαν τυχὸν σημεῖον Α τῆς **ε** ἀντιστοιχίζεται εἰς τὴν ἀκτῖνα ΟΑ τῆς δέσμης, καλεῖται **προβολὴ** ἀπὸ τοῦ Ο. Εἶναι προφανὲς ὅτι ἀπὸ μίαν τετράδα εὐθειῶν δέσμης ἢ σημείων ἐπ' εὐθείας διὰ πεπερασμένου ἀριθμοῦ τομῶν καὶ προβολῶν καταλήγομεν εἰς τετράδα, τῆς ὁποίας ὁ διπλοῦς λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν διπλοῦν λόγον τῆς ἀρχικῆς τετράδος.

Οὕτως ἔχομεν π.χ. (σχ. 5.4β):

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) &= (\mathrm{AB}\Gamma\Delta) \\ &= \mathrm{O}'(\mathrm{AB}\Gamma\Delta) \\ &= (\mathrm{A}'\mathrm{B}'\Gamma'\Delta') \\ &= (\mathrm{A}''\mathrm{B}''\Gamma''\Delta'') \text{ κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

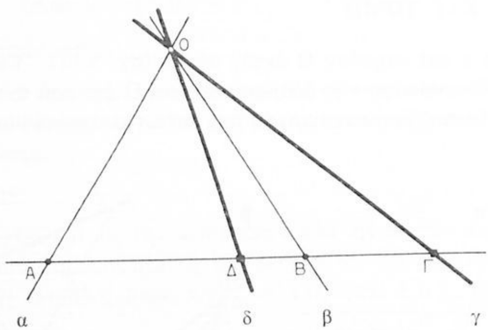
ΕΦΑΡΜΟΓΗ: 2
ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 22-27

6. ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΤΕΤΡΑΣ ΕΥΘΕΙΩΝ

6.1 ΟΡΙΣΜΟΣ

Μία τετρὰς εὐθειῶν δέσμης καλεῖται ἁρμονική, ὅταν ὁ διπλοῦς λόγος αὐτῆς ἔχῃ τιμὴν -1.

ΣΧ.
6.1



Ἔστω (Α,Β,Γ,Δ) μία ἁρμονικὴ τετρὰς σημείων (σχ. 6.1). Αὕτη προβάλλεται ἀπὸ τυχόντος σημείου Ο κατὰ ἁρμονικὴν τετράδα εὐθειῶν (α,β,γ,δ). Αἱ εὐθεῖαι α,β, ἀντιστοιχοῦσαι εἰς σημεῖα Α,Β συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Γ,Δ, ὀνομάζονται **συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς γ,δ** καὶ ἀντιστρόφως.

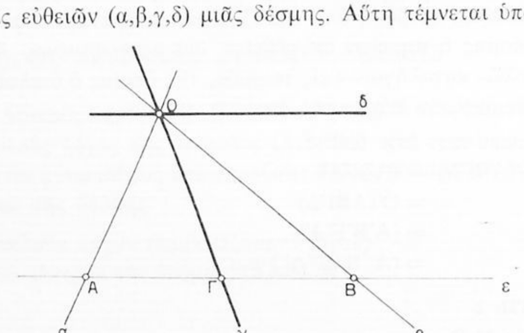
6.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἵνα μία τετρὰς εὐθειῶν δέσμης εἶναι ἁρμονική, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἡ τυχοῦσα παράλληλος πρὸς μίαν ἐκ τούτων νὰ τέμνῃ τὰς ἄλλας εἰς σημεῖα, ἐξ ὧν ἓν εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις

Ἔστω ἡ τετρὰς εὐθειῶν (α,β,γ,δ) μιᾶς δέσμης. Αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς εὐ-

ΣΧ.
6.2



θείας ε || δ κατὰ τὴν τετράδα (Α,Β,Γ,Δ_∞) ἔνθα Δ_∞ τὸ κοινὸν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῶν δ καὶ ε. Τότε, ἵνα ἡ ἀνωτέρω τετρὰς εἶναι ἁρμονική, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (4.1, Παρ.) τὸ σημεῖον Γ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Τὸ μέσον ἀντιστοιχεῖ εἰς εὐθεῖαν συζυγῆ ἐκείνης, πρὸς τὴν ὁποίαν ἄγεται ἡ παράλληλος.

6.3 ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΘΕΤΟΙ

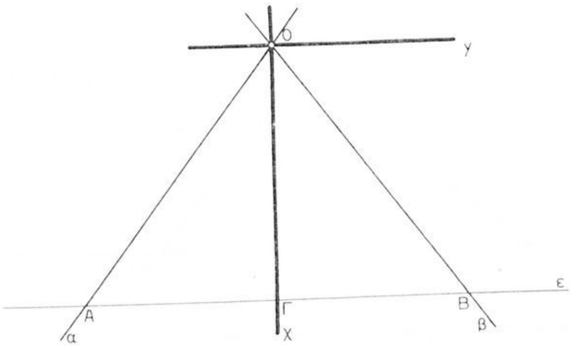
Μία ἀξιοσημείωτος περίπτωσις ἁρμονικῆς τετράδος εὐθειῶν ἐπισημαίνεται διὰ τοῦ κάτωθι θεωρήματος :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Αἱ διχοτόμοι x καὶ y τῶν γωνιῶν δύο εὐθειῶν α καὶ β, τεμνομένων εἰς σημεῖον Ο, εἶναι συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς α καὶ β.

Ἀπόδειξις

Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν ε παράλληλον τῆς διχοτόμου y, ἥτις τέμνει τὰς εὐθείας α,β καὶ x ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α,Β,Γ. Ἐπειδὴ $x \perp y$ θὰ εἶναι

ΣΧ. 6.3



καὶ $\varepsilon \perp x$. Ὥστε ἡ διχοτόμος x εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, τὸ ὁποῖον ἑπομένως εἶναι ἰσοσκελές. Ἄρα τὸ σημεῖον Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα (6.2) ἡ τετρὰς (α,β,x,y) εἶναι ἁρμονική.

Ἀντιστρόφως:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἂν δύο συζυγεῖς εὐθεῖαι ἁρμονικῆς τετράδος εἶναι κάθετοι, τότε διχοτομοῦν τὰς γωνίας τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν τῆς τετράδος.

Ἀπόδειξις

Ἔστω ἡ ἁρμονικὴ τετρὰς εὐθειῶν (α,β,x,y). Ἀναφερόμενοι εἰς τὸ σχ. 6.3, ὑποθέτομεν $x \perp y$ καὶ ε || y. Ἐπειδὴ ἡ τετρὰς ὑπετέθη ἁρμονική, κατὰ τὸ θεώρημα (6.2) τὸ σημεῖον Γ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἡ x εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν (α,β) ἡ δὲ $y \perp x$ εἶναι ἡ ἄλλη διχοτόμος.

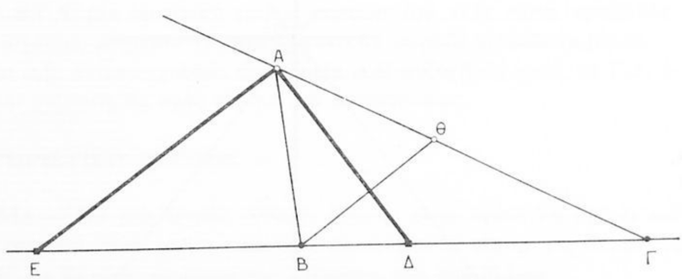
6.4 ΔΙΧΟΤΟΜΟΙ ΓΩΝΙΑΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Ἔστωσαν ΑΔ, ΑΕ αἱ ἐσωτερικὴ καὶ ἐξωτερικὴ ἀντιστοίχως διχοτόμοι τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 6.4). Ἡ τετράς, (ΑΒ,ΑΓ,ΑΔ,ΑΕ) εἶναι, ὡς γνωρίζομεν (6.3), ἁρμονική. Ἄρα καὶ **ἡ τετρὰς** (Β,Γ,Δ,Ε) **εἶναι ἁρμονικὴ**

Συνεπῶς:
$$\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = -\frac{\overline{BE}}{\overline{E\Gamma}} > 0 \qquad (1)$$

● Ἔστω ὅτι ἡ διὰ τοῦ Β παράλληλος τῆς ΑΕ, ἥτις εἶναι κάθετος τῆς ΑΔ, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Τὸ τρίγωνον ΑΒΘ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἑπομένως:
$$A\Theta = AB \qquad (2)$$

ΣΧ. 6.4



Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουν τὰ κάτωθι:

ἐκ τῆς (1):
$$\frac{\overline{B\Delta}}{\overline{\Delta\Gamma}} = \frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} = \frac{EB}{E\Gamma} = -\frac{\overline{BE}}{\overline{E\Gamma}}$$

$$= \frac{A\Theta}{A\Gamma} \quad | \text{ Θεώρ. Θαλῆ } |$$

καὶ λόγῳ τῆς (2):
$$= \frac{AB}{A\Gamma} \qquad (3)$$

ἤτοι, ἕκαστον τῶν ἰχνῶν Δ καὶ Ε ὁρίζει μὲ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως **τμήματα ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.**

● Ἀντιστρόφως: Ἔστω σημεῖον Ζ τῆς ΒΓ, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\frac{ΖΒ}{ΖΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$

Τότε, λόγῳ τῶν (3), τοῦτο συμπίπτει μὲ τὸ ἴχνος τῆς ἐσωτερικῆς ἢ ἐξωτερικῆς διχοτόμου, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως εἶναι ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ (2.2, Πορ. 2).

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα σημεῖον ἐσωτερικὸν ἢ ἐξωτερικὸν τῆς βάσεως τριγώνου εἶναι ἴχνος ἀντιστοίχου διχοτόμου τῆς ἀπέναντι γωνίας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὁρίζῃ μὲ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως τμήματα ἀνάλογα τῶν προσκειμένων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ. - Εἰς τὴν εἰδικὴν περίπτωσιν ΑΒ = ΑΓ τὸ σημεῖον Ε εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον τῆς ΒΓ. Τὸ θεώρημα προφανῶς ἰσχύει διὰ τὸ ἴχνος Δ τῆς ἐσωτερικῆς διχοτόμου.

6.5 ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β τοῦ Ἐπιπέδου καὶ θετικὸς ἀριθμὸς κ≠0. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἐκ τῆς συνθήκης:

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = κ \tag{1}$$

Λύσις

● Ἄν κ = 1, εἶναι:

$$ΜΑ = ΜΒ$$

καὶ τὸ ζητούμενον σύνολον εἶναι προφανῶς ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΑΒ.

● Ἄν κ≠1 τότε (σχ. 6.5):

ὑπάρχει ἓν σημεῖον Γ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ, διὰ τὸ ὁποῖον:

$$\frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΓΒ}} = κ \tag{2}$$

καὶ ἕν, ἐξωτερικὸν τοῦ ΑΒ, σημεῖον Δ διὰ τὸ ὁποῖον:

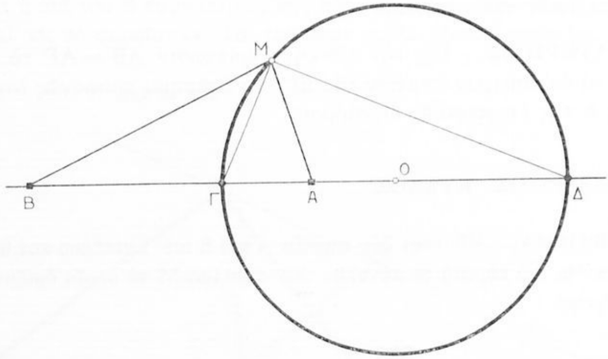
$$\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}} = -\kappa \qquad (3)$$

Ἀμφότερα πληροῦν τὴν (1) ἄρα εἶναι σημεῖα τοῦ ζητουμένου συνόλου. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου, ἐκτὸς τῆς εὐθείας ΑΒ Θὰ εἶναι τότε:

$$\kappa = \frac{MA}{MB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{\Delta A}{\Delta B}$$

ἄρα (6.4), αἱ ΜΓ καὶ ΜΔ εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΜΑΒ. Ἑπομένως ΜΓ ⊥ ΜΔ καὶ τὸ Μ ἀνήκει εἰς τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ διάμετρον τὸ σταθερὸν τμῆμα ΓΔ.

ΣΧ. 6.5



● Ἀντιστρόφως:

Ἂν Μ εἶναι σημεῖον τοῦ ἀνωτέρω κύκλου, ἐπειδὴ ἡ τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ), λόγῳ τῶν (2) καὶ (3), εἶναι ἁρμονική, καὶ ἡ τετρὰς (ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ) θὰ εἶναι ἁρμονική. Αἱ δύο συζυγεῖς εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΜΔ εἶναι κάθετοι, διότι ἡ γωνία των εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμίκυκλον, ἄρα (6.3) εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΒ

Τότε: $$\frac{MA}{MB} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \kappa$$

Ἑπομένως:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ Ἐπιπέδου*, τῶν ὁποίων αἱ ἀπο-

* Τὸ ἀνάλογον σύνολον εἰς τὸν Χῶρον εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῶν Ἀπολλωνίων κύκλων ἐπὶ τῶν διαφόρων ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Εὐκόλως δεικνύεται ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι σφαῖρα μὲ διάμετρον καὶ πάλιν τὸ ΓΔ. Ἡ σφαῖρα αὕτη καλεῖται Ἀπολλώνιος ἐπίσης.

στάσεις ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B ἔχουν λόγον σταθερὸν $\kappa \neq 1$, εἶναι κύκλος, τοῦ ὁποίου μία διάμετρος ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγους κ καὶ -κ.

Ὁ ἀνωτέρω κύκλος καλεῖται **Ἀπολλώνιος ἢ κύκλος τῶν ἀναλόγων ἀποστάσεων.**

6.6 ΕΥΘΕΙΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΩΝ ΑΠΟΣΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Δοθεισῶν δύο εὐθειῶν ε καὶ ε΄ τοῦ Ἐπιπέδου, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς εὐθείας ἔχουν λόγον σταθερὸν κ.

Λύσις

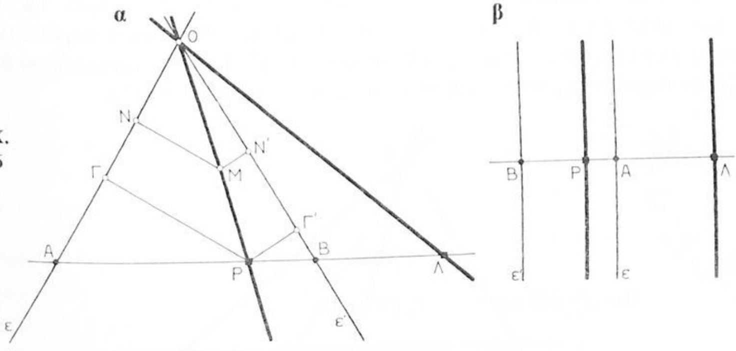
Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου καὶ Ν,Ν΄ αἱ προβολαὶ αὐτοῦ ἐπὶ τὰς εὐθείας ε καὶ ε΄ ἀντιστοίχως (σχ. 6.6).

Εἶναι:
$$\frac{MN}{MN'} = \kappa \qquad (1)$$

Ἂν Ο εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ε καὶ ε΄, τότε κάθε σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΟΜ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου, τὸ ὁποῖον ἑπομένως σχηματίζεται **ἀπὸ εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ Ο.**

● Ἂν $\kappa = 1$, τότε προφανῶς αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι αἱ δύο διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῶν α καὶ β.

ΣΧ. 6.6



● Ἂν $\kappa \neq 1$, θεωρήσωμεν τυχοῦσαν παράλληλον ΑΒ πρὸς μίαν τῶν ἀνωτέρω διχοτόμων, ἥτις **θὰ τέμνεται** ὑπὸ τῶν ζητουμένων εὐθειῶν. Ἂν Ρ εἶναι ἓν ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΡΑΓ καὶ ΡΒΓ΄ θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{P\Gamma}{P\Gamma'} = \kappa \qquad (2)$$

Ἀλλ' ἐπὶ τῆς AB δύο μόνον σημεῖα P καὶ Λ ὑπάρχουν, ἱκανοποιοῦντα τὴν (2): τὰ χωρίζοντα ἁρμονικῶς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς (ἀπόλυτον) λόγον κ. Ἑπομένως τὸ ζητούμενον σύνολον ἀποτελοῦν αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰ ἀνωτέρω σημεῖα **εὐθεῖαι ΟΡ καὶ ΟΛ συζυγεῖς ὡς πρὸς τὰς ε καὶ ε'.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν ε || ε' (σχ. 6.6β), τότε ἐπὶ τυχούσης κοινῆς καθέτου αὐτῶν ὁρίζονται τὰ σημεῖα P καὶ Λ, τὸ δὲ ζητούμενον σύνολον εἶναι, ὡς εὐκόλως προκύπτει, αἱ διὰ τῶν P καὶ Λ **παράλληλοι πρὸς τὰς δοθείσας**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 28-36

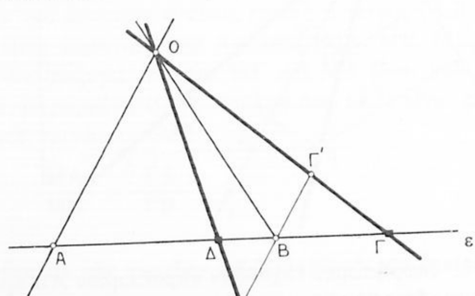
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. **Δοθέντων τριῶν σημείων Α,Β,Γ ἐπὶ εὐθείας ε, νὰ κατασκευασθῇ τὸ συζυγὲς τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.**

Λύσις

Λαμβάνομεν σημεῖον Ο ἐκτὸς τῆς εὐθείας ε (σχ. 1). Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ΟΑ,ΟΒ,ΟΓ τῆς δέσμης κέντρου Ο. Ἐκ τοῦ Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΑ, ἥτις τέμνει τὴν ΟΓ ἔστω εἰς τὸ Γ'. Ἐπὶ τῆς παραλλήλου ὁρίζομεν σημεῖον Δ', ὥστε τὸ Β νὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος Γ'Δ'.

ΣΧ. 1



Τότε (6.2) ἡ τετρὰς Ο (Α,Β,Γ,Δ') εἶναι ἁρμονική, ἑπομένως ἂν Δ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν ΟΔ' καὶ ε, τοῦτο εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

2. **Διὰ τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ἄγονται αἱ εὐθεῖαι ΔΕ, ΔΖ καθέτως καὶ ΔΙ, ΔΘ, παραλλήλως πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:**

1. Οἱ διπλοῖ λόγοι (ΑΒΕΘ) καὶ (ΑΓΖΙ) εἶναι ἴσοι

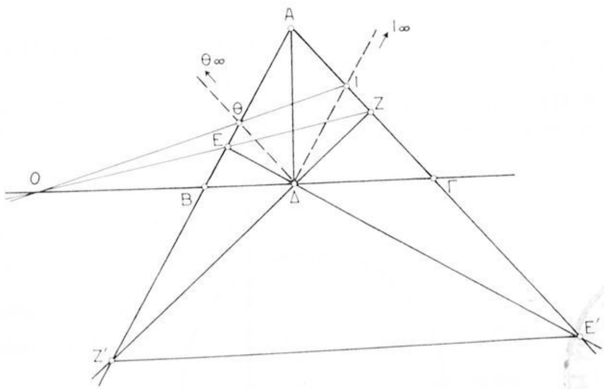
2. Αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ ΘΙ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΒΓ

Ἀπόδειξις

● 1. Εἶναι (σχ. 2): $(\text{ΑΒΕΘ}) = \Delta(\text{ΑΒΕΘ})$

$= (\text{ΑΓΕ}'\Theta_\infty)$ | τομὴ διὰ τῆς ΑΓ |

$$= -(\text{ΑΓΕ}') = \frac{\overline{\text{ΑΕ}'}}{\overline{\text{ΓΕ}'}} \qquad (1)$$



ΣΧ. 2

Ἐπίσης: $(\text{ΑΓΖΙ}) = \Delta(\text{ΑΓΖΙ})$

$= (\text{ΑΒΖ}'\text{Ι}_\infty)$ | τομὴ διὰ τῆς ΑΒ |

$$= -(\text{ΑΒΖ}') = \frac{\overline{\text{ΑΖ}'}}{\overline{\text{ΒΖ}'}} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ τὰ τμήματα ΖΖ′ καὶ ΕΕ′ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΖ′Ε′, τοῦ ὁποίου ἑπομένως ὀρθόκεντρον εἶναι τὸ σημεῖον Δ. Ἄρα ΑΔ⊥Ε′Ζ′ καὶ συνεπῶς

$E'Z' \parallel B\Gamma$. Τότε ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλῆ προκύπτει ἡ ἰσότης τῶν λόγων εἰς τὰς (1) καὶ (2) ἤτοι:

$$(AB E\Theta) = (A\Gamma Z I) \qquad (3)$$

● 2. Ἂν O εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν EZ καὶ ΒΓ, ἔστω ὅτι ἡ OΘ τέμνει τὴν ΑΓ κατὰ τὸ σημεῖον I'.

Τότε εἶναι: $(ABE\Theta) = O(ABE\Theta)$ | τομὴ διὰ τῆς ΑΓ |

$$= (A\Gamma Z I')$$

Λόγω δὲ τῆς (3) ἕπεται ὅτι τὰ σημεῖα I καὶ I' συμπίπτουν (3.3).

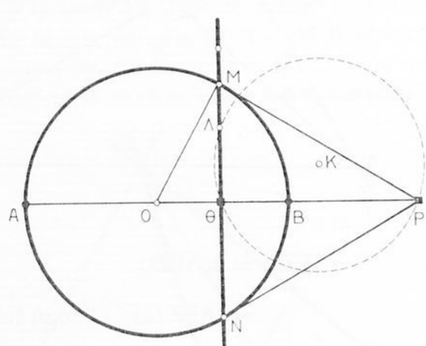
3. **Θεωροῦμεν τὰς ἐφαπτομένας PM καὶ PN ἑνὸς κύκλου (O) ἐκ δοθέντος σημείου P.** (σχ. 3) **Ἂν Λ εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας MN. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου PΛ, τέμνει ὀρθογωνίως τὸν (O).**

Ἀπόδειξις

Ἔστω AB ἡ ὑπὸ τῆς OP ὁριζομένη διάμετρος τοῦ (O) καὶ Θ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ αὕτη τέμνεται ὑπὸ τῆς MN.

Ἐπειδὴ $MN \perp OP$ ἀρκεῖ νὰ δειχθῇ (4.4) ὅτι τὸ σημεῖον Θ εἶναι συζυγὲς ἁρμονικὸν τοῦ P ὡς πρὸς τὰ A καὶ B.

ΣΧ. 3



Πράγματι, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου MOP ἔχομεν:

$$O\Theta \cdot OP = OM^2 = OA^2$$

Ἑπομένως (4.2, 1) ἡ τετρὰς (A,B,P,Θ) εἶναι ἁρμονική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἂν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι διανύσματα ἴσα ($\neq\overrightarrow{0}$) νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι :

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Delta}}, \quad \frac{\overrightarrow{A\Delta}}{\overrightarrow{\Delta\Gamma}}, \quad \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{A\Delta}}, \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{\Delta A}} \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{BA}}$$

2. Ἂν A, B, Γ, M εἶναι σημεῖα ἑνὸς ἄξονος δείξατε ὅτι :

1. $\overline{MA}\cdot\overline{B\Gamma}+\overline{MB}\cdot\overline{\Gamma A}+\overline{M\Gamma}\cdot\overline{AB}=0$ (Euler)
2. $MA^2\cdot\overline{B\Gamma}+MB^2\cdot\overline{\Gamma A}+M\Gamma^2\cdot\overline{AB}+\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}=0$ (Stewart)

3. Θεωροῦμεν ἐπὶ ἄξονος δύο σημεῖα A καὶ B, τὸ μέσον I τοῦ τμήματος AB καὶ τυχὸν σημεῖον M. Δείξατε ὅτι :

1. $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=MI^2-IA^2$
2. $MA^2+MB^2=2MI^2+2IA^2$
3. $MA^2-MB^2=2\overline{AB}\cdot\overline{IM}$

4. Ἐπὶ ἄξονος, ἀρχῆς O, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A(α) B(β) Γ(γ)* Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα:

$$\frac{\overline{OB}\cdot\overline{O\Gamma}}{\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}}+\frac{\overline{O\Gamma}\cdot\overline{OA}}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{BA}}+\frac{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Gamma B}}$$

5. Ἐπὶ ἄξονος θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A(—2) καὶ B(1). Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Γ, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον $2, -\frac{1}{2}, -2$

6. Ἐπὶ ἄξονος θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A(—1) B(2) Γ(5).

1. Ποῖος ὁ λόγος λ, εἰς τὸν ὁποῖον τό Γ χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$;
2. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον —λ
3. Ἂν J εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ, εἰς ποῖον λόγον χωρίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$;

7. Ἂν τὸ σημεῖον Γ χωρίζῃ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον λ, δείξατε ὅτι

$$\overline{A\Gamma}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\ \overline{AB}$$

8. Ἂν AB = 4, νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγους 3 καὶ —3

9. Ἓν σημεῖον Γ χωρίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς λόγον $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ Εἶναι δὲ: $AB=4+\sqrt{5}.$

Ὑπολογίσατε τὰ AΓ καὶ BΓ.

---

* Οἱ ἐντὸς παρενθέσεων ἀριθμοὶ δηλοῦν, ὡς γνωστόν, τὰς τετμημένας τῶν σημείων.

10. Ἔστωσαν Γ καὶ Δ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν δοθὲν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς τοὺς ἀντιθέτους λόγους $\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{3}{4}$. Ἂν AB = 5 νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ : ΓΑ, ΓΒ, ΔΑ, ΔΒ, ΓΔ.

11. Λέγοντες ὅτι ἓν τμῆμα AB χωρίζεται ὑπὸ σημείου Γ εἰς λόγον λ ἐννοοῦμεν ὅτι :

$$(AB\Gamma) = \lambda \text{ ἢ } (BA\Gamma) = \lambda.$$

1. Ἀποδείξατε ὅτι ὑπάρχουν **δύο** σημεῖα ἐν γένει, τὰ ὁποῖα χωρίζουν δοθὲν τμῆμα εἰς δοθέντα λόγον. Πότε τὰ σημεῖα ταῦτα συμπίπτουν;

2. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν δοθὲν τμῆμα τ εἰς λόγον $\sqrt{2}$ καὶ $-\sqrt{2}$.

12. Ἐπὶ ἄξονος θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α(—4) Β(1) Γ(3) Δ(—2). Ποῖος ὁ διπλοῦς λόγος (ΑΒΓΔ);

13. Δείξατε ὅτι $(AB\Gamma\Delta) = \left[\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{A\Delta}}\right] : \left[\frac{1}{\overline{AB}} - \frac{1}{\overline{A\Gamma}}\right]$

14. Δίδονται ἐπὶ ἄξονος τὰ σημεῖα Α(1) Β(4) Γ(7). Ὁρίσατε τὸ σημεῖον Δ, ὥστε νὰ εἶναι : (ΑΔΒΓ) = —2

15. Ἂν $(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}$ ὑπολογίσατε τοὺς διπλοῦς λόγους (ΑΓΒΔ), (ΑΔΒΓ) καὶ (ΑΓΔΒ)

16. Θεωροῦμεν ρόμβον ΑΒΓΔ κέντρου Ο, ἔστω δὲ Θ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Εὕρετε τὸν λόγον (ΑΟΘΓ).

17. Ἐπὶ ἄξονος θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα : Α(—3), Β(2) Γ(—2). Νὰ ὁρισθῇ τὸ συζυγὲς ἑκάστου ὡς πρὸς τὰ δύο ἄλλα.

18. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα (Α,Β,Γ,Δ) ἐπὶ εὐθείας ε, ἔστωσαν δὲ Ι καὶ J τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως. Ἵνα ἡ τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ) εἶναι ἁρμονικὴ πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

1. $\overline{IA} \cdot \overline{IB} + \overline{I\Gamma} \cdot \overline{I\Delta} = 0$
2. $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = 4IJ^2$

19. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἐπὶ εὐθείας, ἔστωσαν δὲ Ι καὶ J τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι :

1. $\overline{AB} + \overline{\Gamma\Delta} = \overline{A\Delta} + \overline{\Gamma B}$

2. Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα τὰ Ι καὶ J συμπίπτουν εἶναι ἡ :

$$\overline{A\Gamma} + \overline{B\Delta} = \overline{A\Delta} + \overline{B\Gamma} = 0$$

3. Ἂν ἡ τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ) εἶναι ἁρμονικὴ τότε :

$$\frac{1}{\overline{A\Gamma}} + \frac{1}{\overline{B\Delta}} + \frac{1}{\overline{A\Delta}} + \frac{1}{\overline{B\Gamma}} = 0 \qquad (1)$$

καὶ

$$\overline{AB} \cdot \overline{\Gamma\Delta} + 2\overline{A\Delta} \cdot \overline{B\Gamma} = 0 \qquad (2)$$

20. Ἂν (ΑΒΓΔ) = —1, (ΑΒΓ) = λ καὶ ΑΒ = τ ὑπολογίσατε τὸ ΓΔ.

21. Ἂν (Α,Β,Γ,Δ) εἶναι ἁρμονικὴ τετρὰς καὶ (ΑΒΓ) = λ, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι (ΑΓΔ) καὶ (ΒΓΔ).

22. Ἔστω παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἂν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΓΔ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς εὐθειῶν (ΑΔ, ΑΖ, ΑΕ, ΑΒ) ἔχει διπλοῦν λόγον $\frac{4}{3}$

23. Δύο τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ὀρθογώνια εἰς τὸ Ο ἔχουν τὰς ἄλλας των κορυφὰς ἐπ' εὐθείας. Ἂν $\widehat{ΑΟΓ} = ω$ δείξατε ὅτι:

$$Ο(ΑΒΓΔ) = -εφ^2ω$$

24. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Ἂν Α′ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΡ καὶ ΒΓ ἔστω $Ρ_1$ τὸ σημεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $(ΑΑ'ΡΡ_1) = κ$ (δοθείς). Ἂν Β′ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν $ΒΡ_1$ καὶ ΑΓ, ἔστω $Ρ_2$ τὸ σημεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον $(ΒΒ'Ρ_1Ρ_2) = κ$. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Γ, Ρ καὶ $Ρ_2$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι ἂν αὐτη τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ′ θὰ εἶναι $(ΓΓ'Ρ_2Ρ) = κ$.

25. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, μία εὐθεῖα ε τοῦ ἐπιπέδου του καὶ σημεῖον Ο ἐπὶ τῆς ε. Αἱ συμμετρικαὶ τῶν εὐθειῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ὡς πρὸς τὴν ε τέμνουν τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Α′ Β′ Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Α′ Β′ Γ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

26. Μία τετρὰς (Α,Β,Γ,Δ) σημείων ἄξονος προβάλλεται ἀπὸ σημείου Ο. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1. $$Ο(ΑΒΓΔ) = \frac{\overline{ΟΑΓ}}{\overline{ΟΓΒ}} : \frac{\overline{ΟΑΔ}}{\overline{ΟΔΒ}}$$

Ἔνθα $\overline{ΟΑΓ}$ συμβολίζει τὴν ἀλγεβρικὴν τιμὴν τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου ΟΑΓ, μὲ τὸ πρόσημον τῆς $\overline{ΑΓ}$.

2. $$Ο(ΑΒΓΔ) = \frac{ημ\,(\overrightarrow{ΟΑ}, \overrightarrow{ΓΟ})}{ημ\,(\overrightarrow{ΟΓ}, \overrightarrow{ΟΒ})} : \frac{ημ\,(\overrightarrow{ΟΑ}, \overrightarrow{ΟΔ})}{ημ\,(\overrightarrow{ΟΔ}, \overrightarrow{ΟΒ})}$$

27. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, Ε καὶ Ζ ἑνὸς κύκλου. Δείξατε ὅτι:
1. Α(ΒΔΕΖ) = Γ(ΒΔΕΖ)
2. Τέμνοντες τὰς ἀνωτέρω τετράδας εὐθειῶν διὰ τῶν ΔΕ καὶ ΕΖ, θεωρήσατε τὰς προκυπτούσας τετράδας σημείων, διὰ νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ ζεύγη εὐθειῶν (ΑΒ, ΔΕ), (ΒΓ, ΕΖ) καὶ (ΓΔ, ΖΑ) ὁρίζουν σημεῖα τῆς αὐτῆς εὐθείας (Θεώρημα Pascal).

28. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Θεωροῦμεν τὰς ἁρμονικὰς τετράδας (ΒΑ, ΒΓ, ΒΡ, Βx) καὶ (ΓΑ, ΓΒ, ΓΡ, Γy). Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΡ καὶ Βx τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ι αἱ δὲ ΒΓ καὶ ΑΡ εἰς τὸ σημεῖον Τ προσδιορίσατε τὴν θέσιν τῶν σημείων Α,Ι,Ρ,Τ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι Βx, Γy, ΑΡ εἶναι συντρέχουσαι.

29. Ἔστωσαν τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ ὕψη ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ καὶ τὸ ὀρθόκεντρον Η αὐτοῦ. Ἂν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΑΑ′ καὶ Β′Γ′ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς (Α, Η, Θ, Α′) εἶναι ἁρμονική.

30. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν μὴ παράλληλον πρὸς τὴν διάμεσον ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ, ἥτις τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Π, τὴν ΑΜ εἰς τὸ Ρ, τὴν ΑΓ εἰς τὸ Σ καὶ τὴν ΑΧ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ εἰς τὸ Τ. Δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς (Π,Ρ,Σ,Τ) εἶναι ἁρμονική.

31. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ χορδὴν ΓΔ κάθετον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ (Ο) αἱ δὲ εὐθεῖαι ΜΓ καὶ ΜΔ τέμνουν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ:

1. Δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς (Α,Β,Ε,Ζ) εἶναι ἁρμονική.

2. Ὑπολογίσατε τὸ γινόμενον ΟΕ · ΟΖ

32. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο) καὶ τὴν διάμετρον ΔΕ κάθετον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΔΑ καὶ ΕΑ τέμνουν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Ρ καὶ Σ. Δείξατε ὅτι ἡ τετρὰς (Β,Γ,Ρ,Σ) εἶναι ἁρμονική.

33. Ἔστωσαν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ διάμεσος αὐτοῦ ΑΜ. Θεωροῦμεν σημεῖον Ι ὥστε νὰ εἶναι: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ καὶ σημεῖον Θ ὥστε $\overrightarrow{B\Theta} = 2\overrightarrow{BA}$ Δείξατε ὅτι:

1. Ἡ τετρὰς (Α,Β,Ι,Θ) εἶναι ἁρμονική.

2. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΓΙ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ο, δείξατε ὅτι $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM} = \vec{0}$ καὶ $\overrightarrow{IO} = \frac{1}{4}\overrightarrow{I\Gamma}$

34. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ.

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα τὰ τρίγωνα ΜΑΒ καὶ ΜΑΓ εἶναι ἰσοδύναμα.

2. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ, τὰ ὁποῖα ὁρίζουν τρίγωνα ΜΑΒ, ΜΑΓ, ΜΒΓ ἰσοδύναμα.

35. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ ὁρίζουν ἐπὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τὰ ζεύγη τῶν σημείων (Δ, Δ′) (Ε, Ε′) καὶ (Ζ, Ζ′). Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι γράφονται μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα ΔΔ′, ΕΕ′, ΖΖ′. Δείξατε ὅτι:

1. Οἱ ὡς ἄνω κύκλοι εἶναι ὀρθογώνιοι πρὸς τὸν κύκλον (Α, Β, Γ) ἔχουν δὲ δύο κοινὰ σημεῖα N_1, N_2.

2. Ἂν Θ καὶ Ι εἶναι τὰ σημεῖα, καθ' ἃ ἡ $N_1 N_2$ τέμνει τὸν κύκλον (Α,Β,Γ), αἱ ΑΙ, ΑΘ εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας $N_1\widehat{A}N_2$.

36. Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ θεωρήσωμεν τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ, τὸ ὕψος $A\Delta = \upsilon_\alpha$, τὰ ἴχνη Ε καὶ Ζ τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς ἀντιστοίχως, τῆς γωνίας Α τοὺς ἐγγεγραμμένον καὶ παρεγγεγραμμένους κύκλους (Ο, ρ) (O_α, ρ_α) (O_β, ρ_β) (O_γ, ρ_γ) καὶ τὰ σημεῖα Ι,I_α, I_β, I_γ, ἐπαφῆς τῆς ΒΓ καὶ τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1. Αἱ τετράδες (Α,Ε,Ο,O_α) καὶ (Α, Ζ, O_β, O_γ) εἶναι ἁρμονικαί.

2. Τὰ μέσα τῶν τμημάτων OO_α καὶ $O_\beta O_\gamma$ εἶναι τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ κύκλου (Α,Β,Γ) καὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΒΓ.

3. $MI^2 = MI^2_\alpha = \overline{ME} \cdot \overline{M\Delta}$

$MI^2_\beta = MI^2_\gamma = \overline{MZ} \cdot \overline{M\Delta}$

$$\frac{2}{\upsilon_\alpha} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_\alpha} = \frac{1}{\rho_\beta} + \frac{1}{\rho_\gamma}$$

II. ΠΟΛΙΚΑΙ

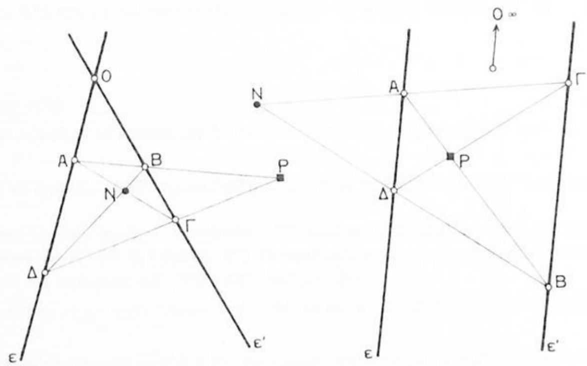
Ὁ κύκλος καὶ τὸ σχῆμα δύο τεμνομένων εὐθειῶν, εἶναι δύο εἰδικαὶ περιπτώσεις κωνικῆς τομῆς ἤτοι, τομῆς ἐκ περιστροφῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα αὐτῆς ἢ διερχομένου διὰ τῆς κορυφῆς της, ἀντιστοίχως. Τὸ θέμα τοῦ παρόντος κεφαλαίου εἶναι ἡ, στενῶς συνδεδεμένη μὲ τὴν θεωρίαν τῶν ἁρμονικῶν τετράδων, ἔννοια τῆς πολικῆς σημείου ὡς πρὸς τὰ ἀνωτέρω σχήματα. Ὁ διδόμενος, ἑνιαῖος καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις, ὁρισμὸς εἶναι γενικός, ἰσχύων δι' οἱανδήποτε κωνικὴν τομήν, ἐπιτρέπει δὲ τὴν ὁμοιόμορφον παρουσίασιν συλλογισμῶν καὶ συμπερασμάτων.

1. ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

1.1 ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΖΥΓΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΔΥΟ ΕΥΘΕΙΑΣ

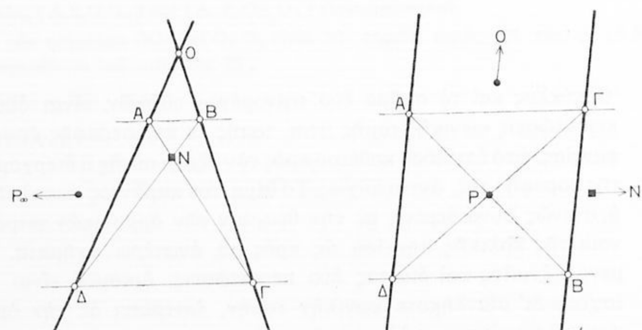
ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἐπὶ τοῦ σχήματος δύο εὐθειῶν ε καὶ ε΄ τοῦ Ἐπιπέδου, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ρ αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸ Ν, τότε τὰ σημεῖα Ρ καὶ Ν καλοῦνται συζυγῆ (ἀλλήλων) ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ε καὶ ε΄. (σχ. 1.1α)

ΣΧ. 1.1α



Σημειωτέον ὅτι ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς ἀναφέρεται καὶ εἰς περιπτώσεις κατὰ τὰς ὁποίας τὰ σημεῖα Ρ, Ν, ὡς καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ε καὶ ε΄ εἶναι ἐπ᾽ ἄπειρον σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. (σχ. 1.1β)

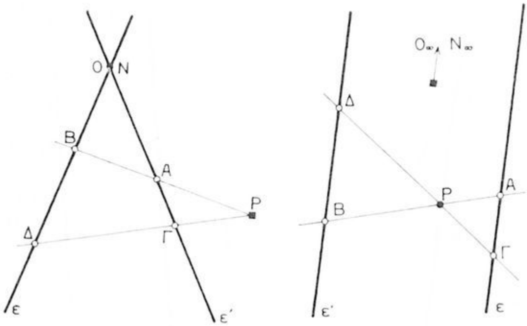
ΣΧ. 1.1β



Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι:

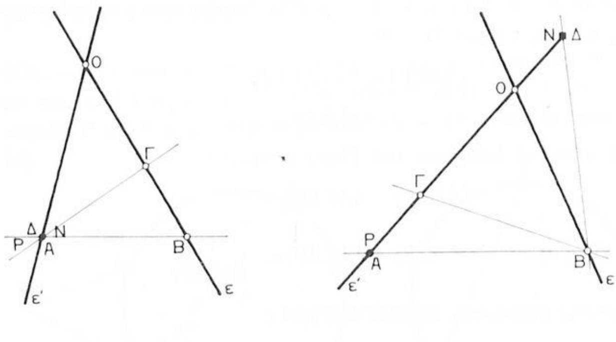
● 1. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν συζυγὲς σημεῖον, δοθέντος σημείου Ρ, ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ε καὶ ε΄, ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο εὐθείας διὰ τοῦ Ρ, ὁρίζοντες οὕτως ἐπὶ τῶν ε καὶ ε΄ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Ὥστε, τοῦ τυχόντος σημείου Ρ, ὑπάρχουν ἄπειρα συζυγῆ. Μεταξὺ τούτων περιλαμβάνεται εἰς πᾶσαν περίπτωσιν καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ε καὶ ε΄ (σχ. 1.1γ).

ΣΧ.
1.1γ



● 2. Ἂν τὸ Ρ, εἰδικώτερον, εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ε ἢ ε΄, ἵνα σημεῖον Ν εἶναι συζυγὲς αὐτοῦ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ε ἢ ε΄ (σχ. 1.1δ).

ΣΧ.
1.1δ



Ὥστε:

Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν σημείου Ρ τῆς εὐθείας ε εἶναι ἡ ε.

1.2 ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

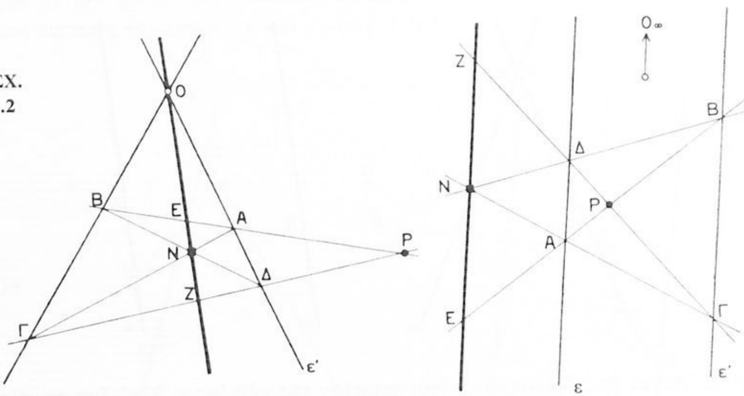
ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν, σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου δύο εὐθειῶν

ε καὶ ε΄, διαφόρου τοῦ κοινοῦ σημείου των Ο, ὡς πρὸς τὰς εὐθείας αὐτάς, εἶναι ἡ συζυγὴς τῆς ΟΡ ὡς πρὸς τὰς ε καὶ ε΄.

Ἀπόδειξις

Ἔστω Ν ἓν συζυγὲς τοῦ Ρ (σχ. 1.2) τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα τομῆς Ε καὶ Ζ τῶν εὐθειῶν ΡΑΒ καὶ ΡΓΔ ἀντιστοίχως μετὰ τῆς ΟΝ. Τὴν τετράδα σημείων (Α,Β,Ε,Ρ) προβάλλομεν ἀπὸ τοῦ σημείου Ν

ΣΧ. 1.2



καὶ ἐν συνεχείᾳ τέμνομεν διὰ τῆς ΡΔ. Λαμβάνοντες τοὺς ἀντιστοίχους διπλοῦς λόγους ἔχομεν (Ι, 5.4):

$$(ABEP) = N\,(ABEP)$$
$$= (\Gamma\Delta ZP)$$

Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πάππου εἶναι:

$$(ABEP) = (\Delta\Gamma ZP)$$

Ἄρα (Ι, 4.3): $$(\Gamma\Delta ZP) = (\Delta\Gamma ZP) = \frac{1}{(\Gamma\Delta ZP)}$$

Ἐκ ταύτης προκύπτει ἀφοῦ $(\Gamma\Delta ZP) \neq 1$:

$$(\Gamma\Delta ZP) = -1$$

ἤτοι ἡ τετρὰς (Γ,Δ,Ζ,Ρ) εἶναι ἁρμονικὴ καὶ ἡ ΟΝ εἶναι συζυγὴς τῆς ΟΡ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ε καὶ ε΄.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΝ, συζυγοῦς τῆς ΟΡ ὡς πρὸς τὰς ε καὶ ε΄. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ΝΑΓ, ΡΑΒ, ΡΓΔ καὶ τὸ σημεῖον N′ τομῆς τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ. Τὸ σημεῖον τοῦτο, **συζυγὲς** ἐκ κατασκευῆς **τοῦ P** πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν συζυγῆ τῆς OP εὐθεῖαν ON, ἄρα συμπίπτει μὲ τὸ N.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἵνα τὰ σημεῖα P καὶ N εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ε καὶ ε′, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ζεῦγος (P,N) τῶν σημείων τούτων μετὰ τοῦ ζεύγους τῶν σημείων, καθ' ἃ ἡ PN τέμνει τὰς ε, ε′, νὰ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα (6.1).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἀναφέρεται εἰς σημεῖον P μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς ε ἢ ε′. Ἂν τὸ P εἶναι σημεῖον τῆς ε, τὸ θεώρημα ἰσχύει (1.1, 2) διότι ἡ ε θεωρεῖται **συμβατικῶς** συζυγὴς ἑαυτῆς (I, 4.2, 1 παρ. 2).

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἡ εὐθεῖα τῶν συζυγῶν σημείων, ὡς πρὸς δύο εὐθείας ε καὶ ε′, δοθέντος σημείου P, καλεῖται πολικὴ τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς τὰς εὐθείας.

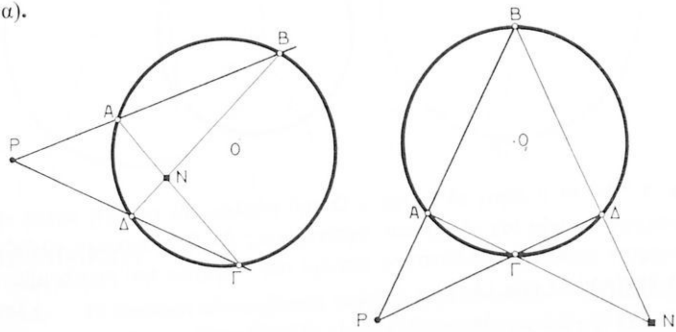
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 1 - 3
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 1 - 8

2. ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

2.1 ΣΗΜΕΙΑ ΣΥΖΥΓΗ ΩΣ ΠΡΟΣ ΚΥΚΛΟΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἐπὶ δοθέντος κύκλου (O) θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον P, αἱ δὲ ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὸ N, τότε τὰ σημεῖα P καὶ N καλοῦνται συζυγῆ (ἀλλήλων) ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O) (σχ. 2.1α).

ΣΧ. 2.1α



Σημειωτέον ὅτι τὰ σημεῖα P,N δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἐπ' ἄπειρον σημεῖα (σχ. 2.1β, γ). Δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἀμφότερα ἐσωτερικὰ σημεῖα τοῦ κύκλου.

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

● 1. Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓν συζυγὲς σημεῖον, δοθέντος σημείου P, ὡς πρὸς τὸν κύκλον (O), ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν δύο τεμνούσας διὰ τοῦ P, ὁρίζοντες, οὕτως, ἐπὶ τοῦ κύκλου τὰ σημεῖα A,B,Γ,Δ. Ὥστε, τοῦ τυχόντος σημείου P ὑπάρχουν ἄπειρα συζυγῆ.

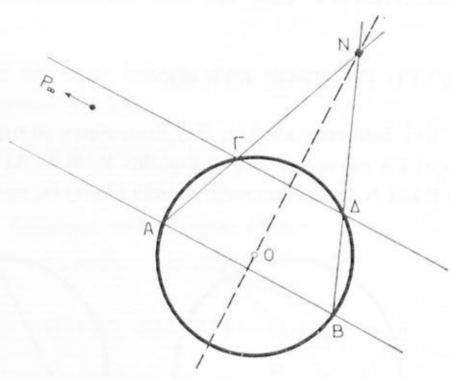
Εἰδικώτερον :

● 2. Ἄν P_∞ εἶναι τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον δοθείσης διευθύνσεως, κάθε συζυγὲς N αὐτοῦ εἶναι τομὴ εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ, τὰς ὁποίας ὁρίζουν αἱ κορυφαὶ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον ἰσοσκελοῦς τραπεζίου μὲ βάσεις ΑΒ, ΓΔ ἐχούσας τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν (σχ 2.1β). Ἄρα τὸ N εἶναι σημεῖον τῆς, διὰ τοῦ κέντρου O, καθέτου ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Καὶ ἀντιστρόφως πᾶν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ καθέτου εἶναι συζυγὲς τοῦ P_∞.

Ὥστε :

Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν ἐπ' ἄπειρον σημείου δοθείσης διευθύνσεως, εἶναι εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου, κάθετος ἐπὶ τὴν ἐν λόγῳ διεύθυνσιν.

ΣΧ. 2.1β

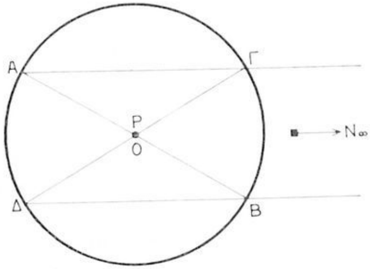


● 3. Ἄν τὸ P εἶναι τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου, τὰ συζυγῆ αὐτοῦ εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖα (σχ. 2.1γ) καὶ ἀντιστρόφως ἂν θεωρήσωμεν τὸ ἐπ' ἄπειρον σημεῖον δοθείσης διευθύνσεως, μεταξὺ τῶν συζυγῶν του περιλαμβάνεται καὶ τὸ κέντρον O (σχ. 2.1β).

Ἄρα :

Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν τοῦ κέντρου Ο εἶναι ἡ ἐπ' ἄπειρον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου.

ΣΧ.
2.1γ

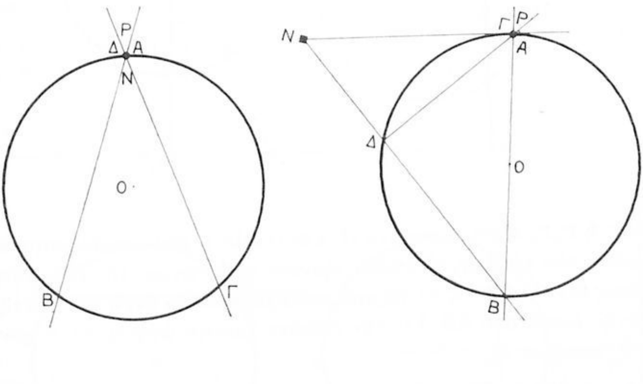


● 4. Ἂν τὸ Ρ εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου, τὰ συζυγῆ αὐτοῦ εἶναι σημεῖα τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Ρ καὶ ἀντιστρόφως τυχὸν σημεῖον τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ Ρ εἶναι συζυγὲς τοῦ Ρ (σχ. 2.1δ). (Δύο σημεῖα τοῦ κύκλου συμπίπτοντα εἰς τὸ Ρ ὁρίζουν τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο).

Ὥστε :

Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν σημείου Ρ τοῦ κύκλου εἶναι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο.

ΣΧ.
2.1δ



2.2 ΠΟΛΙΚΗ ΣΗΜΕΙΟΥ

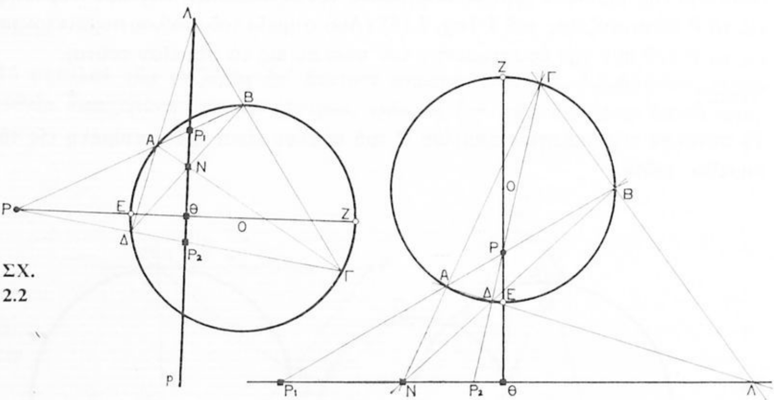
ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ σύνολον τῶν συζυγῶν σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς κύκλου (Ο) ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον (Ρ≠Ο), εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΡ εἰς

τὸ συζυγὲς τοῦ P ὡς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς ὑπὸ τῆς OP ὁριζομένης διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Ἀπόδειξις

● Ἂν τὸ P εἶναι ἐπ' ἄπειρον σημεῖον ἢ σημεῖον τοῦ κύκλου τὸ θεώρημα ἔχει ἤδη ἀποδειχθῆ (2.1, 2 καὶ 2.1, 4)

● Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, ἔστω N ἓν συζυγὲς τοῦ P (σχ. 2.2) τομὴ τῶν εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ. Ἂν Λ εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ N, ὡς ἐκ τῆς κατασκευῆς του, εἶναι καὶ συζυγὲς τοῦ P ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΔ, ΒΓ. (1.1) ἡ δὲ εὐθεῖα ΛN εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ P ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ταύτας ἤτοι συζυγὴς τῆς ΛP (1.2). Ἂν, λοιπόν, P_1 εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΛN καὶ PAB, ἡ τετρὰς (P,P_1, A,B) εἶναι ἁρμονικὴ ἑπομένως (I, 4.3) ὁ κύκλος διαμέτρου PP_1 εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν δοθέντα κύκλον (O). Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὸ P_2 σημεῖον τομῆς τῶν ΛN καὶ PΔΓ.



ΣΧ. 2.2

Οὕτως ἡ P_1P_2 εἶναι ἡ γνωστὴ (I, 4.4) εὐθεῖα p τῶν ἀντιδιαμετρικῶν τοῦ P σημείων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν ὀρθογωνίως τὸν (O). Αὕτη εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν OP εἰς τὸ συζυγὲς τοῦ P ὡς πρὸς τὰ ἄκρα τῆς ὑπὸ τῆς OP ὁριζομένης διαμέτρου AB. Εἰς τὴν εὐθεῖαν ταύτην ἀνήκει τὸ τυχὸν συζυγὲς τοῦ P, σημεῖον N.

● Ἀντιστρόφως: Ἔστω N τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας p. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας NAΓ, PAB, PΓΔ καὶ τὸ σημεῖον N', τῆς τομῆς τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ. Τὸ σημεῖον τοῦτο, **συζυγὲς** ἐκ κατασκευῆς **τοῦ P,** κατὰ τὰ προηγούμενα, πρέπει νὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν p, ἄρα συμπίπτει μὲ τὸ N.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Ἵνα τὰ σημεῖα P καὶ N εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον (O) πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ κύκλος διαμέτρου PN νὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (O).**

● **2. Ἂν ἡ PN τέμνῃ τὸν (O), τὰ σημεῖα P,N εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὸν (O) ὅταν τὸ τμῆμα PN χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπὸ τοῦ (O)** (I, 4.3).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● 1. Ὅλοι οἱ διὰ τοῦ P, ὀρθογώνιοι πρὸς τὸν (O) κύκλοι, διέρχονται διὰ τοῦ σημείου Θ. Ἄρα ἡ δύναμις τοῦ κέντρου O ὡς πρὸς τυχόντα ἐκ τούτων

εἶναι: $O\Theta \cdot OP = R^2$ | R ἡ ἀκτὶς τοῦ (O) |

● 2. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ εὐθεῖα p τέμνει τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα N_1,N_2(σχ. 2.3), τὰ σημεῖα ταῦτα **εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ P ἀγομένων ἐφαπτομένων** τοῦ κύκλου.

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἡ εὐθεῖα τῶν συζυγῶν σημείων, ὡς πρὸς κύκλον (O) δοθέντος σημείου P, καλεῖται πολικὴ τοῦ σημείου τούτου ὡς πρὸς τὸν κύκλον.

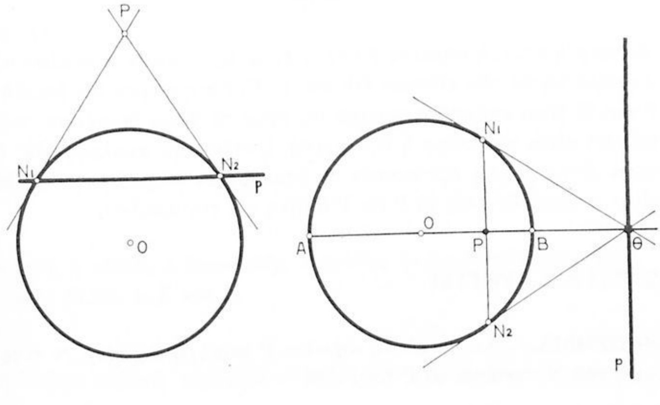
2.3 ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΗΣ ΠΟΛΙΚΗΣ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ.—Δοθέντος σημείου P νὰ κατασκευασθῇ ἡ πολικὴ αὐτοῦ p

Εἰδικαὶ λύσεις

● Ἂν P εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου ὁρίζομεν δύο σημεῖα τῆς p: τὰ σημεῖα ἐπαφῆς N_1 καὶ N_2 τῶν ἐκ τοῦ P ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου.

ΣΧ.
2.3



● Ἂν P εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου, ἡ εἰς τὸ P ἐπὶ τὴν OP κάθετος εἶναι πολικὴ ἑνὸς συζυγοῦς τοῦ P σημείου Θ. Ἂν ἡ κάθετος τέμνη τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα N_1, N_2 αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουν τὸ Θ (σχ. 2.3)

● Εἰς τὰς λοιπὰς περιπτώσεις, καθ' ἃς τὸ P εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου, τὸ κέντρον O ἢ ἓν ἐπ' ἄπειρον σημεῖον, ἡ πολικὴ εἶναι γνωστὴ (2.1).

Γενικὴ λύσις

Θεωροῦμεν δύο διὰ τοῦ P τεμνούσας τὸν κύκλον τὰς PAB, PΓΔ (σχ. 2.2) καὶ ὁρίζομεν τὰ δύο συζυγῆ τοῦ P σημεῖα τῆς p: τὸ N τομὴν τῶν AΓ, BΔ καὶ τὸ Λ τομὴν τῶν AΔ, BΓ.

2.4 ΠΟΛΟΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Δοθείσης εὐθείας p, ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν σημεῖον P, τοῦ ὁποίου πολικὴ εἶναι ἡ p ὡς πρὸς δοθέντα κύκλον (O).

Ἀπόδειξις

Ἡ διὰ τοῦ O κάθετος ἐπὶ τὴν p, τέμνει αὐτὴν εἰς σημεῖον Θ, ὁρίζει δὲ ἐπὶ τοῦ κύκλου διάμετρον AB (σχ. 2.3). Ἔστω P τὸ συζυγὲς τοῦ Θ ὡς πρὸς τὰ σημεῖα A,B. Τότε ἡ p εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ P (2.2).

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Πόλος δοθείσης εὐθείας p καλεῖται τὸ σημεῖον P τοῦ ὁποίου πολικὴ εἶναι ἡ p.

2.5 ΘΕΣΕΙΣ ΠΟΛΟΥ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΗΣ

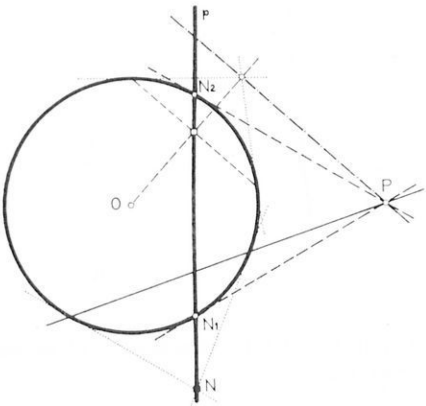
Ἔστω p ἡ πολικὴ σημείου P (σχ. 2.3) ὡς πρὸς δοθέντα κύκλον (O) καὶ Θ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν OP καὶ p. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδὴ τὰ σημεῖα P καὶ Θ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ ὡς πρὸς τὰ ἄκρα διαμέτρου τοῦ κύκλου, ἡ πολικὴ εἶναι τέμνουσα ἢ ἐξωτερικὴ εὐθεῖα τοῦ κύκλου, καθ' ὅσον τὸ P εἶναι ἀντιστοίχως ἐξωτερικὸν ἢ ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου. Αὕτη εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ P ἂν P ἀνήκη εἰς τὸν κύκλον.

2.6 ΣΥΖΥΓΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΙ

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἂν ἡ πολικὴ σημείου P περιέχη σημεῖον N τότε καὶ ἡ πολικὴ τοῦ N περιέχει τὸ P (σχ. 2.6).

Πράγματι τὰ σημεῖα P καὶ N εἶναι συζυγῆ **ἀλλήλων**. Ἄρα, ἡ πολικὴ τοῦ N περιέχει καὶ τὸ σημεῖον P.

ΣΧ. 2.6



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Ἄν σημεῖον διαγράφῃ εὐθεῖαν, τότε ἡ πολική του διέρχεται διὰ τοῦ πόλου τῆς εὐθείας.**

● **2. Ἄν εὐθεῖα μεταβλητὴ διέρχεται διὰ σημείου, ὁ πόλος αὐτῆς διαγράφει τὴν πολικὴν τοῦ σημείου.**

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Δύο εὐθεῖαι καλοῦνται συζυγεῖς ὡς πρὸς κύκλον ὅταν ἑκάστη περιέχῃ τὸν πόλον τῆς ἄλλης.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 4,5
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 9 - 21

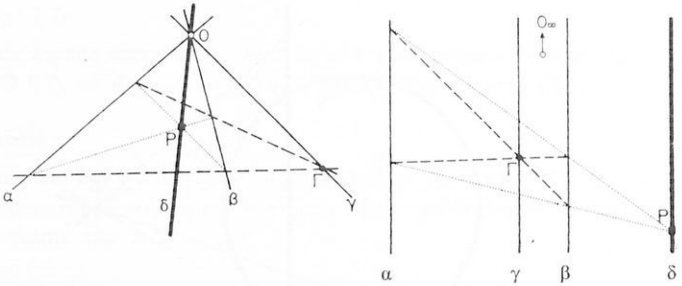
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα δ ἁρμονικῆς τετράδος (α,β,γ,δ) εὐθειῶν, ὅταν δίδωνται αἱ τρεῖς ἄλλαι α, β καὶ γ.**

Λύσις

Ἡ ζητουμένη δ εἶναι πολικὴ τυχόντος σημείου Γ τῆς γ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας α,β. Ἀρκεῖ λοιπόν, νὰ κατασκευασθῇ ἓν συζυγὲς Ρ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας (σχ. 1).

ΣΧ. 1

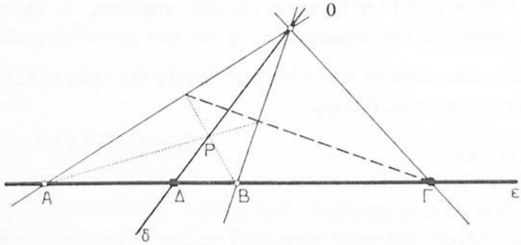


2. **Δοθέντων τριῶν σημείων Α,Β,Γ ἐπὶ εὐθείας ε νὰ κατασκευασθῇ τὸ συζυγὲς Δ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ Α καὶ Β.**

Λύσις *

Ἀρκεῖ νὰ κατασκευασθῇ (σχ. 2) ὅπως προηγουμένως, ἡ συζυγὴς δ τῆς ΟΓ ὡς πρὸς τὰς ΟΑ καὶ ΟΒ ἔνθα Ο σημεῖον ἐκτὸς τῆς ε. Ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ταύτης δ καὶ τῆς ε εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον σημεῖον Δ.

ΣΧ. 2



3. **Ἂν Δ, Ε, Ζ εἶναι οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ Η εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου, αἱ δὲ κορυφαί του τὰ κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου ΔΕΖ.**

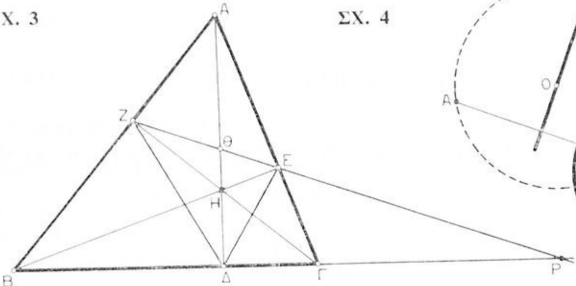
Ἀπόδειξις

Ἂν εἶναι Ρ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ΖΕ καὶ ΒΓ (σχ. 3) τότε τὸ Η εἶναι συζυγὲς τοῦ Ρ, ἡ δὲ ΑΗΔ ἡ πολικὴ τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΑΓ.

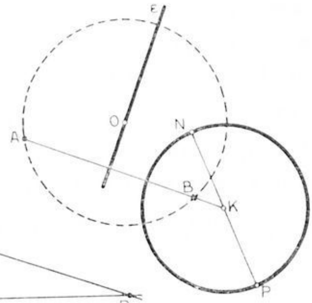
* Ἄλλη λύσις ἐδόθη εἰς τὸ Κεφ. Ι, ἐφ. 1.

Ἄρα αἱ τετράδες Ρ,Θ,Ζ,Ε καὶ Δ(Ρ,Θ,Ζ,Ε) εἶναι ἁρμονικαί, ἐπειδὴ δὲ αἱ εὐθεῖαι ΔΘΑ καὶ ΒΔΓ εἶναι κάθετοι, αὗται (Ι, 6.3) εἶναι αἱ διχοτόμοι τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ὁμοίως προκύπτει ὅτι, διχοτόμοι τῆς μὲν γωνίας Ζ εἶναι αἱ ΖΓ, ΑΒ τῆς δὲ Ε αἱ ΕΒ, ΑΓ.

ΣΧ. 3



ΣΧ. 4



4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τ. τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου Α καὶ ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους δύο δοθέντα σημεῖα Ρ καὶ Ν εἶναι συζυγῆ.

Λύσις

● Ἔστω (Ο) εἷς τῶν κύκλων τούτων (σχ. 4). Ἐπειδὴ τὰ Ρ καὶ Ν εἶναι συζυγῆ, ὁ κύκλος (Κ) διαμέτρου ΡΝ εἶναι (2.2 Πόρ. 1) ὀρθογώνιος πρὸς τὸν (Ο). Ἄρα ἡ δύναμις τοῦ κέντρου Κ ὡς πρὸς τὸν (Ο) εἶναι R^2 ἔνθα $R = KP$. Ἐπομένως ἂν Β εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας ΚΑ καὶ τοῦ (Ο), τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι σταθερὸν ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης :

$$KA.\ KB = R^2 \qquad (1)$$

Ἐπομένως τὸ κέντρον Ο εἶναι σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου (ε) τοῦ σταθεροῦ τμήματος ΑΒ.

● Ἀντιστρόφως : Ἂν Ο εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς (ε) ὁ κύκλος (Ο, ΟΑ) διέρχεται καὶ διὰ τοῦ Β, λόγῳ δὲ τῆς (1) εἶναι ὀρθογώνιος τοῦ (Κ).

5. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο), ἔστω δὲ Ρ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐφαπτομένων τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἂν ἡ ΑΡ τέμνῃ τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε, τὸν δὲ κύκλον εἰς τὸ Α΄, δείξατε ὅτι :

1. Ἡ ΑΕ εἶναι συμμετρικὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ τοῦ τριγώνου. (Τὸ τμῆμα ΑΕ καλεῖται συμμετροδιάμεσος).

2. Αἱ ΜΕ καὶ ΜΡ εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας Μ τοῦ τριγώνου ΑΜΑ΄.
3. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α, Α΄ τέμνονται εἰς σημεῖον Ζ ἐπὶ τῆς ΒΓ.

4. Εἶναι : $\dfrac{EB}{E\Gamma} = \dfrac{\gamma^2}{\beta^2}$ ἔνθα $AB = \gamma$ καὶ $A\Gamma = \beta$

Ἀπόδειξις

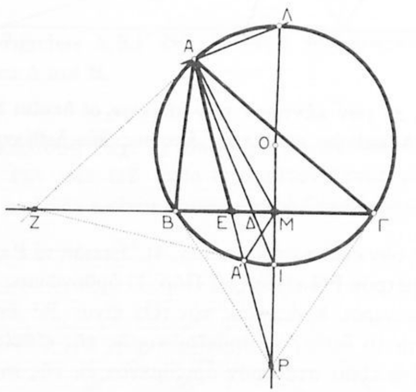
● 1. Τὸ σημεῖον Ρ εἶναι πόλος τῆς ΒΓ (σχ. 5). Ἄρα τὸ Μ εἶναι συζυγὲς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Ι, Λ.

Ἄρα : $$(PMI\Lambda) = A(PMI\Lambda) = -1$$

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΔΙ (ἡ ΑΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τόξου ΒΓ) καὶ ΑΛ εἶναι κάθετοι, θὰ εἶναι (1, 6.3) διχοτόμοι τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου ΑΕΜ.

● 2. Ὁμοίως τὸ Ε εἶναι συζυγὲς τοῦ Ρ ὡς πρὸς τὰ Α, Α΄.

ΣΧ. 5



Ἄρα : $$(PEAA') = M(PEAA') = -1$$

καὶ ἐπειδὴ ΜΡ⊥ΜΕ, αὗται εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας Μ.

● 3. Ἀφοῦ ἡ ΑΑ΄ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ρ ὁ πόλος αὐτῆς θὰ εἶναι σημεῖον Ζ τῆς πολικῆς ΒΓ τοῦ Ρ (2.6, Πόρ. 2).

● 4. Ἄρα τὸ σημεῖον Ε εἶναι συζυγὲς τοῦ Ζ ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ.

Ἄρα : $$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{ZB}{Z\Gamma} \tag{1}$$

Ἀλλὰ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΖΒΑ καὶ ΖΑΓ ἔχομεν :

$$\frac{ZA}{Z\Gamma} = \frac{\gamma}{\beta} \quad ἢ \quad \frac{ZA^2}{Z\Gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\beta^2} \tag{2}$$

καὶ ἐπειδὴ $ZA^2 = ZB \cdot Z\Gamma$, ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$\frac{EB}{E\Gamma} = \frac{\gamma^2}{\beta^2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νὰ εὑρεθοῦν σημεῖα συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ ζεύγη εὐθειῶν (ΑΒ, ΓΔ), (ΒΓ, ΑΔ) καὶ (ΑΓ, ΒΔ).

2. Ἔστωσαν Α, Β, Γ τρία σημεῖα εὐθείας καὶ Α,Δ,Ε τρία σημεῖα ἑτέρας εὐθείας. Αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΔ τέμνονται εἰς τὸ Α΄, ἡ ΒΔ καὶ ἡ ΓΕ τέμνονται εἰς τὸ Α΄΄.
1. Ποία εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Α ὡς πρὸς τὰς εὐθείας Α΄΄Β, Α΄΄Γ καὶ ποία ἡ πολικὴ τοῦ Α΄ ὡς πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΔ.
2. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΒΕ καὶ ΓΔ τέμνουν τὴν ΑΑ΄΄ εἰς τὰ σημεῖα α καὶ β ἀντιστοίχως, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ τετρὰς (α, β, Α, Α΄΄) εἶναι ἁρμονική.

3. Θεωροῦμεν δύο εὐθείας ε καὶ ε΄ τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον Ο καὶ δύο εὐθείας ε_1 καὶ ε_2 τεμνομένας εἰς τὸ O_1 διάφορον τοῦ Ο. Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον, ἔχον τὴν αὐτὴν πολικὴν καὶ ὡς πρὸς τὰ δύο ζεύγη εὐθειῶν.

4. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ Ρ τέμνουσα τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ ὥστε νὰ εἶναι (Α΄, Β΄, Γ΄, Ρ) = 1

5. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας ε, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τοιαῦτα, ὥστε τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ, νὰ μὴ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον.
1. Δείξατε, ὅτι ὑπάρχει σημεῖον Ι τῆς ε τοιοῦτον ὥστε $\overline{IA} \cdot \overline{IB} = \overline{I\Gamma} \cdot \overline{I\Delta} > 0$. Κατασκευάσατε τὸ σημεῖον Ι, καὶ ἀποδείξατε, ὅτι ὑπάρχουν δύο σημεῖα Μ καὶ Ν, τοιαῦτα ὥστε (ΑΒΜΝ) = (ΓΔΜΝ) = —1
2. Εὕρετε τὸν γ.τ. τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν πολικὴν ὡς πρὸς δύο ζεύγη εὐθειῶν τῆς αὐτῆς δέσμης Ox, Oy καὶ Ox΄, Oy΄.

6. Θεωροῦμεν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἔστω δὲ ε ἡ πολικὴ τοῦ Α, ὡς πρὸς τὰς ΓΒ καὶ ΓΔ. Μία εὐθεῖα Αx, τέμνει τὴν ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Ι, τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὴν ΓΔ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ε εἰς τὸ Ε.
Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $IA^2 = IE^2 = \overline{IM} \cdot \overline{IN}$ καὶ $\overline{BM} \cdot \overline{\Delta N} = \overline{B\Gamma} \cdot \overline{\Delta\Gamma}$

7. Ἡ διὰ τοῦ σημείου Ρ, τομῆς τῶν διαγωνίων τραπεζίου, παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ τέμνει τὰς ἄλλας πλευρὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ΕΡ = ΖΡ.

8. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ μία εὐθεῖα ε ἥτις τέμνει τὰς εὐθείας ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα A_1, B_1, Γ_1, ἀντιστοίχως. Ἂν αἱ εὐθεῖαι AA_1 καὶ BB_1 τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Γ΄, αἱ BB_1 καὶ $\Gamma\Gamma_1$ εἰς τὸ Α΄ καὶ αἱ $\Gamma\Gamma_1$ καὶ AA_1 εἰς τὸ Β΄ νὰ δειχθῇ ὅτι :
1. Ἡ τετρὰς (Α, A_1, Β΄, Γ΄) εἶναι ἁρμονική.
2, Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν δέσμην.

9. Ἵνα δύο σημεῖα Μ καὶ Ν εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς κύκλον (Ο) πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεών των ὡς πρὸς τὸν (Ο) νὰ εἶναι ἴσον πρὸς MN^2.

10. Δοθέντων 4 σημείων Α,Β,Γ,Δ, ποῖοι εἶναι οἱ κύκλοι ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους τὰ Α καὶ Β ἀφ' ἑνὸς καὶ τὰ Γ καὶ Δ ἀφ' ἑτέρου εἶναι συζυγῆ.

11. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Ι καὶ ὡς πρὸς τοὺς ὁποίους δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β εἶναι συζυγῆ.

12. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ο) διερχόμενος, διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τοιοῦτος ὥστε, ἡ πολικὴ δοθέντος σημείου Ρ ὡς πρὸς τὸν κύκλον νὰ εἶναι δοθεῖσα εὐθεῖα ε.

13. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος (Ο) ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας ε καὶ τοιοῦτος ὥστε ἡ πολικὴ δοθέντος σημείου Ρ ὡς πρὸς τὸν κύκλον νὰ εἶνα δοθεῖσα εὐθεῖα Ρ.

14. Δίδεται σημεῖον Α κύκλου (Ο) καὶ μία χορδὴ ΒΓ μεταβαλλομένη παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν.
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἂν Α εἶναι σταθερόν, ἡ πολικὴ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου Ρ.
2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Ρ, ὅταν τὸ Α διαγράφῃ τὸν κύκλον (Ο).

15. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν διὰ τοῦ σημείου τούτου μίαν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε, τὴν δὲ ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ Δ, εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ.

16. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον (Ο). Ἔστω Μ σημεῖον τοῦ κύκλου. Αἱ εὐθεῖαι ΒΜ καὶ ΓΜ τέμνουν τὰς ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ Δ καὶ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ΔΕ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

17. Δίδεται κύκλος (Ο) διαμέτρου ΑΒ καὶ σημεῖον Ρ ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ἡ πολικὴ p τοῦ σημείου Ρ ὡς πρὸς τὸν (Ο) τέμνει τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Κ. Διὰ τοῦ σημείου Ρ φέρομεν εὐθεῖαν ΡΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὸν κύκλον (Ο) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ, τὰ ὁποῖα προβάλονται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.
1. Δείξατε, ὅτι ὡς πρὸς τὸν κύκλον διαμέτρου ΡΚ ἡ εὐθεῖα ΕΓ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Ζ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ Ε.
2. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ κάθετος ΡΓΔ εἰς τρόπον ὥστε τὸ τμῆμα ΕΖ νὰ ἔχῃ δοθὲν μῆκος.

18. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τρεῖς δοθέντας κύκλους (O_1), (O_2) καὶ (O_3).

19. Ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος ὀρθογωνίου κατὰ τὴν γωνίαν Ο τριγώνου ΑΟΒ, ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν ΟΑ, ΑΒ καὶ ΟΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ,Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΡ ἐπὶ τὴν ΔΕ. Δείξατε ὅτι ἡ γωνία ΟΡΑ εἶναι ὀρθή.

20. Ἐκ σημείου Ρ φέρομεν τέμνουσαν ΡΑΒ εἰς κύκλον (Ο) καὶ τὴν εὐθεῖαν (ε), κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΡ εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Δείξατε, ὅτι, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, τέμνουν τὴν εὐθεῖαν (ε) εἰς δύο σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἰσαπέχοντα τοῦ σημείου Ρ.

21. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον (Ο) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ (Ζ τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ).
1. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ κύκλος διαμέτρου ΕΖ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον (Ο).
2. Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΖΑΒ καὶ ΖΔΓ ὡς καὶ τὸ σημεῖον Ε εἶναι σταθερά, οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὰ ΑΒΓΔ ἔχουν τὸν αὐτόν, ριζικὸν ἄξονα, ὅστις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΕΖ.

Β΄. ΣΗΜΕΙΑΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

III. ΓΕΝΙΚΟΤΗΤΕΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Εἰς τὴν Γεωμετρίαν, ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως χρησιμοποιεῖται εὐρέως, ἀποδιδομένη διὰ τοῦ ὅρου **«μετασχηματισμός»**. Γενικώτερον, ἄλλωστε, ἡ σχετικὴ πρὸς τὴν συνάρτησιν ὁρολογία (βλ. σχετικῶς Μαθηματικὰ ΣΤ' Γυμνασίου Τόμος Α', Μέρος Α' ΟΕΔΒ 1968) ἔχει προσαρμοσθεῖ εἰς τὴν γεωμετρικὴν γλῶσσαν. Εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἐκτίθενται, ἀκριβῶς, οἱ βασικοὶ ὁρισμοὶ καὶ συμπεράσματα— κατὰ τὸ πλεῖστον γνωστὰ ἐκ τῶν μαθημάτων Ἀλγέβρας—τὰ ὁποῖα θὰ ἀποτελέσουν τὸ βασικὸν λεξιλόγιον, διὰ τοὺς εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια μελετωμένους εἰδικοὺς μετασχηματισμούς.

1. ΟΡΟΛΟΓΙΑ - ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

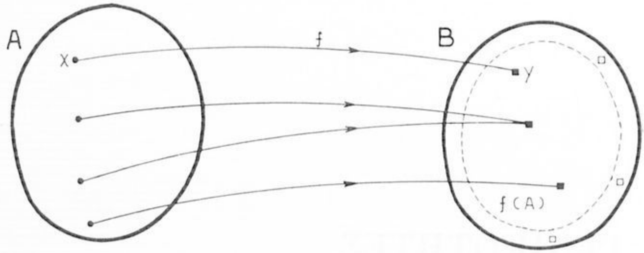
1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΙΣ

Ἡ ἔννοια τῆς συναρτήσεως εἶναι ἀπὸ τὰς θεμελιώδεις Μαθηματικὰς ἐννοίας, ὡς δὲ εἶναι ἤδη γνωστόν, ὁρίζεται ὡς ἀκολούθως :

Ἔστωσαν τὰ μὴ κενὰ σύνολα A καὶ B (σχ. 1.1). Ἂν δοθῇ εἷς συγκεκριμένος τρόπος (π.χ. εἷς κανών, μία διαδικασία) μὲ τὸν ὁποῖον κάθε $x \in A$ ἀντιστοιχίζεται εἰς ἓν μοναδικὸν $y \in B$, τότε λέγομεν ὅτι ὡρίσθη μία **συνάρτησις** f μὲ **πεδίον ὁρισμοῦ** τὸ A καὶ τιμὰς εἰς τὸ B, ἢ μία **μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς τὸ B.** Θὰ γράφωμεν δέ :

$$A \ni x \xrightarrow{f} y \in B$$

ΣΧ. 1.1



Τὸ στοιχεῖον $y \in B$, **ἀντίστοιχον** ἢ **εἰκὼν** τοῦ $x \in A$ διὰ τῆς f λέγεται καὶ **τιμὴ τῆς f εἰς τὸ x** συμβολίζεται δὲ καὶ μὲ f(x). Γράφομεν ὅθεν :

$$y = f(x)$$

Ὅλα τὰ στοιχεῖα $y \in B$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντίστοιχα ἑνὸς (τουλάχιστον) $x \in A$ ἀποτελοῦν σύνολον, συμβολιζόμενον f(A), τὸ ὁποῖον καλεῖται **πεδίον τιμῶν** τῆς συναρτήσεως f. Εἶναι δέ :

$$f(A) \subseteq B$$

Ἂν B = A, τότε ἡ f εἶναι, ὡς λέγομεν, ἀπεικόνισις τοῦ A εἰς ἑαυτό.

1.2 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Θεωροῦντες δύο σύνολα γεωμετρικῶν στοιχείων (σημείων, εὐθειῶν κλπ.)

ὀνομάζομεν **μετασχηματισμόν**, κάθε μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ ἑνός συνόλου εἰς τὸ ἄλλο.

Ἂν τὰ ἀνωτέρω σύνολα εἶναι σύνολα σημείων, ὁ μετασχηματισμὸς καλεῖται **σημειακός**.

Οἱ μετασχηματισμοί, οἱ ὁποῖοι ἐξετάζονται εἰς τὰ ἑπόμενα, εἶναι σημειακοὶ καὶ συγκεκριμένως εἶναι μονοσήμαντοι ἀπεικονίσεις ἑνὸς βασικοῦ σημειοσυνόλου **Ω** εἰς **ἑαυτό**. Ὀνομάζονται συντόμως **μετασχηματισμοὶ τοῦ Ω**. Ὡς βασικὸν σύνολον **Ω**, τοῦ ὁποίου ἡ ὕπαρξις θὰ ὑπονοῆται ἐφεξῆς καὶ εἰς ἃς περιπτώσεις δὲν ἀναφέρεται ῥητῶς, λαμβάνεται συνήθως ὁ Γεωμετρικὸς Χῶρος ἢ τὸ Ἐπίπεδον ἢ καὶ ἡ Εὐθεῖα, θεωρούμενα βεβαίως ὡς σύνολα σημείων*.

1.3 ΟΜΟΛΟΓΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

Διὰ νὰ ὁρισθῇ εἷς μετασχηματισμὸς t, τοῦ **Ω**, ἀρκεῖ νὰ δοθῇ ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον καθορίζεται, διὰ κάθε σημεῖον $M \in \mathbf{\Omega}$, ἓν μοναδικὸν ἀντίστοιχον (εἰκὼν) σημεῖον $M' \in \mathbf{\Omega}$. Τὸ σημεῖον τοῦτο M′ καλεῖται, ἐδῶ, **ὁμόλογον** τοῦ M κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν t. Τοῦτο ἐκφράζεται διὰ τῶν συμβολισμῶν :

$$M' = t(M)$$

ἢ

$$M \xrightarrow{t} M'$$

Τὸ ζεῦγος (M, M′) καλεῖται **ζεῦγος ὁμολόγων σημείων** τοῦ μετασχηματισμοῦ. Πολλάκις, ἐνδιαφερόμεθα διὰ τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ μετασχηματισμοῦ ὄχι εἰς μεμονωμένα σημεῖα, ἀλλὰ εἰς ζεύγη σημείων ἤτοι, εἰς διανύσματα ἢ εἰς σύνολα σημείων, τὰ ὁποῖα καλοῦμεν **σχήματα****. Ἂν A′, B′ εἶναι τὰ ὁμόλογα τῶν σημείων A καὶ B ἀντιστοίχως κατὰ μετασχηματισμὸν t, τότε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ θὰ ὀνομάζεται **ὁμόλογον** τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὸν t. Ὁμοίως, τὰ ὁμόλογα τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (F) ἀποτελοῦν σχῆμα (F′), τὸ ὁποῖ-

---

* Γενικώτερον, μετασχηματισμοὶ εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν καὶ εἰς τοὺς λεγομένους **σημειακοὺς χώρους**, οἱ ὁποῖοι εἶναι μαθηματικὰ κατασκευάσματα ἀποτελοῦντα γενίκευσιν τοῦ Γεωμετρικοῦ Χώρου. Χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τοῦ σημειακοῦ χώρου εἶναι ὅτι τὰ στοιχεῖα του, καλούμενα σημεῖα, ἀνὰ ζεύγη δημιουργοῦν «διανύσματα» μὲ ὅλας τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν διανυσμάτων τοῦ συνήθους Γεωμετρικοῦ Χώρου, δηλαδὴ ἀποτελοῦντα διανυσματικὸν χῶρον.

** Τὸ σχῆμα ὑπὸ τὴν ἔννοιαν σημειοσυνόλου θὰ συμβολίζεται μὲ σύμβολον ἐντὸς παρενθέσεως. Οὕτω, μία εὐθεῖα ὡς γεωμετρικὸν στοιχεῖον συμβολίζεται : ε, θεωρουμένη ὅμως ὡς σύνολον τῶν σημείων της θὰ συμβολίζεται : (ε).

ον ὀνομάζεται **ὁμόλογον** τοῦ (F) κατὰ τὸν t. Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ:

$$(F) \xrightarrow{t} (F')$$

Θὰ λέγωμεν ἀκόμη ὅτι ἓν σημεῖον ἢ διάνυσμα ἢ σχῆμα **σ μετασχηματίζεται** διὰ τοῦ t εἰς τὸ ὁμόλογόν του **σ΄**.

1.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Εἰς τὸ Ἐπίπεδον ἢ τὸν Χῶρον:

● 1. Θεωροῦμεν σημεῖον Ο. Ἔστω σ ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ εἶναι τὸ συμμετρικὸν Μ΄ τοῦ Μ ὡς πρὸς τὸ Ο (σχ. 1.4, 1).*

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἀμέσως ὅτι ἰσχύουν τὰ ἑξῆς:

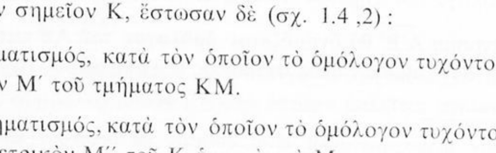
α. Ὁμόλογον τοῦ σημείου Ο εἶναι τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο.

β. Ὁμόλογον ἡμιευθείας Ox, ἀρχῆς Ο, εἶναι ἡ ἀντικειμένη ἡμιευθεῖα Ox΄.

Ἄρα τὸ ὁμόλογον εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Ο εἶναι ἡ αὐτὴ εὐθεῖα.

γ. Τὸ ὁμόλογον κύκλου κέντρου Ο εἶναι ὁ αὐτὸς κύκλος.

ΣΧ. 1.4, 1



● 2. Θεωροῦμεν σημεῖον Κ, ἔστωσαν δὲ (σχ. 1.4 ,2):

a. h ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ εἶναι τὸ μέσον Μ΄ τοῦ τμήματος ΚΜ.

b. h* ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ εἶναι τὸ συμμετρικὸν Μ΄΄ τοῦ Κ ὡς πρὸς τὸ Μ.

Παρατηροῦμεν ὅτι:

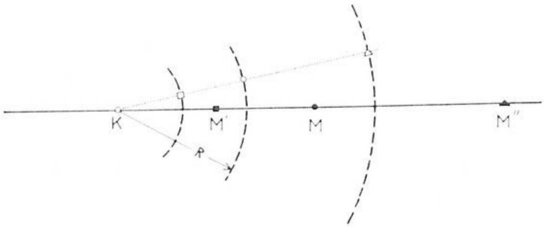
α. Τὸ σημεῖον Κ ἔχει ὡς ὁμόλογον τὸ αὐτὸ σημεῖον Κ, τόσον κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν h, ὅσον καὶ κατὰ τὸν h*.

---

* Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος καλεῖται **συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖον.**

β. Τὸ ὁμόλογον κύκλου (K, R) εἶναι κύκλος ὁμόκεντρος : κατὰ μὲν τὸν μετασχηματισμὸν h ὁ (K, R/2) κατὰ δὲ τὸν h* ὁ (K, 2R).

ΣΧ. 1.4,2



● 3. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε). Ἔστω p ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τυχὸν σημεῖον M ἔχει ὡς ὁμόλογον τὴν ὀρθὴν προβολὴν του M′ ἐπὶ τὴν (ε) (σχ. 1.4, 3).

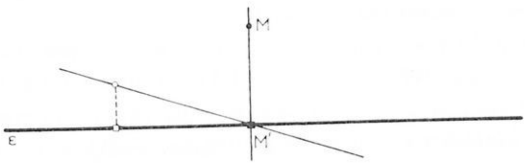
Παρατηροῦμεν ὅτι :

α. Πᾶν σημεῖον τῆς (ε) ἔχει ὡς ὁμόλογον ἑαυτό.

β. Μία εὐθεῖα κάθετος πρὸς τὴν (ε) ἔχει ὡς ὁμόλογον σχῆμα, ἀποτελούμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ τέμνει τὴν (ε).

γ. Μία εὐθεῖα πλαγία πρὸς τὴν (ε) ἔχει ὡς ὁμόλογον τὴν (ε)

ΣΧ. 1.4, 3



1.5 ΑΜΦΙΜΟΝΟΣΗΜΑΝΤΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Εἷς μετασχηματισμὸς t καλεῖται ἀμφιμονοσήμαντος, ὅταν ὄχι μόνον κάθε σημεῖον M ἔχῃ ἓν μοναδικὸν ὁμόλογον σημεῖον M′, ἀλλὰ καὶ κάθε σημεῖον M′ εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς μοναδικοῦ σημείου M. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ὁρίζεται ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς τοῦ t, συμβολιζόμενος μὲ t^{-1}, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁμόλογον τοῦ τυχόντος σημείου M′ εἶναι τὸ M, τὸ σημεῖον δηλ. ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον διὰ τοῦ t μετασχηματίζεται εἰς M′.

Ἰσχύει ὅθεν ἡ ἰσοδυναμία :

$$M' = t(M) \Longleftrightarrow M = t^{-1}(M')$$

ἢ συμβολικῶς : $M \underset{t^{-1}}{\overset{t}{\rightleftarrows}} M'$

Σημειωτέον ὅτι καὶ ὁ t^{-1} εἶναι μετασχηματισμὸς ἀμφιμονοσήμαντος, ἀντίστροφος δὲ τούτου εἶναι ὁ t.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

● 1. Ὁ μετασχηματισμὸς σ τῆς § 1.4, 1 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Πράγματι κάθε σημεῖον Μ′ εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς καὶ μοναδικοῦ σημείου Μ. Ἐπειδὴ δὲ καὶ τὸ Μ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ′, ὁ ἀντίστροφος σ^{-1} τοῦ σ εἶναι ὁ αὐτὸς μετασχηματισμὸς σ. Ἤτοι : $\sigma^{-1} = \sigma$.

● 2. Ὁ μετασχηματισμὸς h τῆς § 1.4, 2a εἶναι ἐπίσης ἀμφιμονοσήμαντος. Ἀντίστροφος h^{-1} τούτου εἶναι ὁ h^* τῆς § 1.4, 2b.

Ὥστε : $h^{-1} = h^*$ καὶ $h^{*-1} = h$

● 3. Ὁ μετασχηματισμὸς p τῆς § 1.4, 3 δὲν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος. Πράγματι σημεῖον τι ἐκτὸς τῆς (ε) οὐδενὸς σημείου εἶναι ὁμόλογον. Ἐξ ἄλλου, σημεῖον Α ἐπὶ τῆς (ε) εἶναι ὁμόλογον ἀπειρίας σημείων: τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς καθέτου πρὸς τὴν (ε) εἰς τὸ σημεῖον Α.

1.6 ΗΝΩΜΕΝΑ ΣΗΜΕΙΑ. ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

Ἂν ἓν σημεῖον κατὰ μετασχηματισμὸν t συμπίπτῃ μὲ τὸ ὁμόλογόν του, τότε καλεῖται **ἡνωμένον σημεῖον** τοῦ t.

Π.χ. τὸ σημεῖον Ο τοῦ παραδ. 1, τὸ σημεῖον Κ τοῦ παραδ. 2 καὶ κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) τοῦ παραδ. 3 τῆς § 1.4 εἶναι ἡνωμένα σημεῖα.

Ἂν ἓν σχῆμα συμπίπτῃ μὲ τὸ ὁμόλογόν του κατὰ μετασχηματισμὸν t, τότε καλεῖται **ἀναλλοίωτον** (κατὰ τὸν μετασχηματισμόν).

Δύναται νὰ εἶναι:

● **Ἀναλλοίωτον σημεῖον πρὸς σημεῖον**, ἂν κάθε σημεῖον του εἶναι ἡνωμένον. Π.χ. ἡ εὐθεῖα (ε) τοῦ παραδ. 3 τῆς § 1.4 εἶναι ἀναλλοίωτος σημεῖον πρὸς σημεῖον κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν p.

● **Ἀναλλοίωτον συνολικῶς** ἂν ὑπάρχουν σημεῖα του, μὴ ἡνωμένα. Π.χ. κάθε κύκλος κέντρου Ο κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν σ τῆς § 1.4, 1 καὶ κάθε εὐθεῖα (ε) διερχομένη διὰ τοῦ Ο εἶναι σχήματα συνολικῶς ἀναλλοίωτα.

1.7 ΙΣΟΤΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Δύο μετασχηματισμοὶ t_1 καὶ t_2 ὀνομάζονται **ἴσοι**, ὅταν τὰ ὁμόλογα Μ′ καὶ Μ″ τυχόντος σημείου Μ κατὰ τοὺς t_1 καὶ t_2 ἀντιστοίχως, συμπίπτουν. Γράφομεν ὡς συνήθως : $t_1 = t_2$

Ἰσχύει δηλαδή: $t_1 = t_2 \Longleftrightarrow t_1(M) = t_2(M) \qquad (\forall M)$

1.8 ΕΝΕΛΕΙΚΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Εἷς ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμὸς καλεῖται **ἐνελεικτικός**, ὅταν εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του.

Ἄν, κατὰ ἐνελεικτικὸν μετασχηματισμὸν t ὁμόλογον σημείου M εἶναι τὸ σημεῖον M′, τότε ὁμόλογον τοῦ M′ εἶναι τὸ M, διότι:

$$t(M') = t^{-1}(M') = M$$

Τοῦτο ἐκφράζομεν καὶ διὰ τοῦ συμβολισμοῦ:

$$M \overset{t}{\longleftrightarrow} M'$$

Π.χ. ὁ μετασχηματισμὸς σ τῆς § 1.4, 1 εἶναι ἐνελεικτικός.
Οἱ μετασχηματισμοὶ h καὶ h* τῆς § 1.4, 2 δὲν εἶναι ἐνελεικτικοί.

1.9 Ο ΤΑΥΤΟΤΙΚΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ὁ ἁπλούστερος, δύναται νὰ λεχθῇ, μετασχηματισμὸς εἶναι ἐκεῖνος, κατὰ τὸν ὁποῖον ὡς ὁμόλογον τοῦ τυχόντος σημείου M, ὁρίζεται αὐτὸ τοῦτο τὸ M. Ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος καλεῖται **ταυτοτικὸς** συμβολίζεται δὲ μὲ t^0

$$M \xrightarrow{t^0} M$$

Κάθε σημεῖον εἶναι ἡνωμένον σημεῖον τοῦ t^0. Προφανῶς ὁ t^0 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ δὴ ἐνελεικτικός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1-7

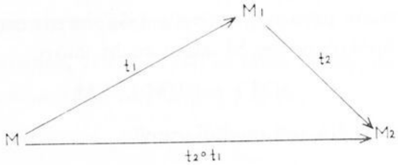
2. Η ΣΥΝΘΕΣΙΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

2.1 ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Θεωρήσωμεν τοὺς μετασχηματισμοὺς t_1 καὶ t_2. Τυχὸν σημεῖον M μετασχηματίζεται διὰ τοῦ t_1 εἰς $M_1 = t_1(M)$, τοῦτο δὲ μετασχηματίζεται ἐν συνεχείᾳ διὰ τοῦ t_2 εἰς $M_2 = t_2(M_1)$, ἤτοι:

$$M_2 = t_2[t_1(M)] \tag{1}$$

Ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁμόλογον τοῦ τυχόντος σημείου M εἶναι τὸ κατὰ τὰ ἀνωτέρω διὰ τῆς (1) ὁριζόμενον σημεῖον M_2, καλεῖται **γινόμενον τῶν μετασχηματισμῶν t_1 καὶ t_2** κατὰ τὴν ἀναγραφομένην διαδοχήν, συμβολίζεται δὲ : $t_2 o t_1$. Οἱ μετασχηματισμοὶ t_1 καὶ t_2 καλοῦνται **πα-**



ράγοντες αὐτοῦ. Σημειωτέον, ὅτι λόγῳ τῆς (1) εἰς τὸν ἀνωτέρω συμβολισμὸν $t_2 o t_1$ τοῦ γινομένου οἱ παράγοντες ἀναγράφονται κατὰ διαδοχὴν ἀνάστροφον ἐκείνης, καθ' ἣν ἐκτελεῖται ἡ σύνθεσις τῶν μετασχηματισμῶν. Τοῦτο ἔχει σημασίαν καθότι εἶναι ἐν γένει :

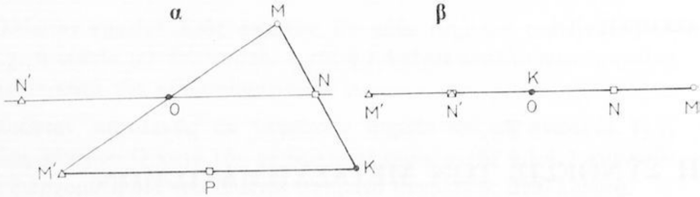
$$t_2 o t_1 \neq t_1 o t_2$$

Θεωρήσωμεν π.χ. τοὺς μετασχηματισμοὺς σ καὶ h τῶν παραδ. 1 καὶ 2α τῆς § 1.4

● Ἂν $O \neq K$, τότε εἶναι $\sigma o h \neq h o \sigma$. Πράγματι (σχ. 2.1α) :

$$h(M) = N \qquad \qquad \sigma(M) = M'$$
$$\text{ἐνῷ :}$$
$$\sigma(N) = N' \qquad \qquad h(M') = P$$

Ἐκ τῶν ὁποίων : $(\sigma o h)\ (M) = N' \neq P = (h o \sigma)(M)$



ΣΧ. 2.1

● Ἂν $O = K$, τότε εἶναι $\sigma o h = h o \sigma$. Πράγματι (σχ. 2.1, β):

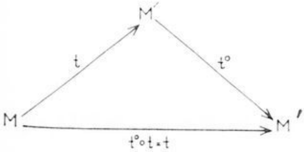
$$h(M) = N \qquad \qquad \sigma(M) = M'$$
$$\text{καί :}$$
$$\sigma(N) = N' \qquad \qquad h(M') = N'$$

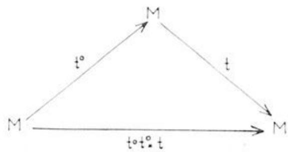
ἐκ τῶν ὁποίων: $(\sigma o h)\ (M) = N' = (h o \sigma)\ (M)$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● 1. Διὰ κάθε μετασχηματισμὸν t εἶναι:

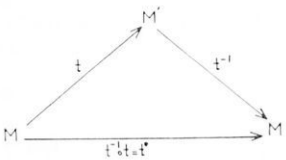
$$tot^0 = t^0ot = t$$

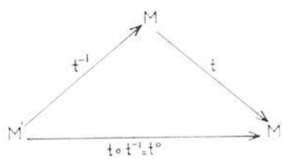




● 2. Ἂν ὁ t εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος τότε:

$$t^{-1}ot = tot^{-1} = t^0$$





● 3. Ἂν ὁ t εἶναι ἐνελεικτικὸς τότε:

$$t^2 = t^0$$

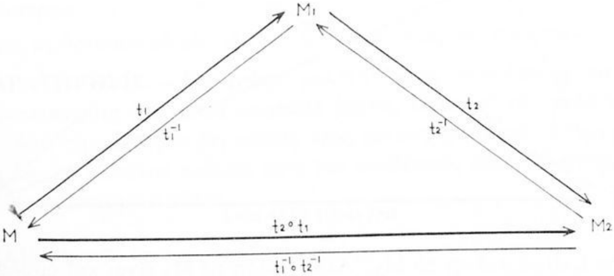
Πράγματι: $t^2 = tot$

$= tot^{-1}$ (διότι $t = t^{-1}$)

$= t^0$

● 4. Ἂν οἱ μετασχηματισμοὶ t_1 καὶ t_2 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι τότε καὶ ὁ t_2ot_1 εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, μὲ ἀντίστροφον τὸν $t_1^{-1}ot_2^{-1}$ ἤτοι:

$$(t_2ot_1)^{-1} = t_1^{-1}ot_2^{-1}$$



Πράγματι, ἔστω M τυχὸν σημεῖον καὶ

$$M_1 = t_1(M)$$

$$M_2 = t_2(M_1)$$

Τότε θὰ εἶναι :

$$M_1 = t_2^{-1}(M_2)$$

καὶ $$M = t_1^{-1}(M_1)$$

Ὁπότε τὸ μὲν M_2 εἶναι ὁμόλογον τοῦ M κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $t_2 o t_1$, τὸ δὲ M ὁμόλογον τοῦ M_2 κατὰ τὸν $t_1^{-1} o t_2^{-1}$

2.2 ΠΡΟΣΕΤΑΙΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ

Τὸ γινόμενον περισσοτέρων μετασχηματισμῶν ὁρίζεται ἐπαγωγικῶς :

$$t_3 o t_2 o t_1 = t_3 o (t_2 o t_1)$$

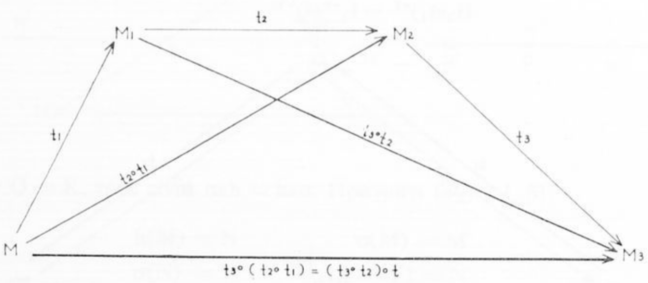
καὶ γενικῶς :

$$t_\nu o t_{\nu-1} o \ldots\ldots o t_2 o t_1 = t_\nu o (t_{\nu-1} o \ldots\ldots o t_2 o t_1)$$

Τὸ γινόμενον $t o t o \ldots o t$ ν ἴσων μετασχηματισμῶν συμβολίζεται : t^ν
Βασικὴ ἰδιότης τῆς πράξεως o τῆς συνθέσεως τῶν μετασχηματισμῶν εἶναι ἡ προσεταιριστική. Ἄν, δηλαδή, θεωρήσωμεν τοὺς μετασχηματισμοὺς t_1, t_2 καὶ t_3, τότε ἰσχύει :

$$t_3 o (t_2 o t_1) = (t_3 o t_2) o t_1 \qquad (1)$$

Πράγματι : Ὑποθέσωμεν ὅτι τυχὸν σημεῖον M μετασχηματίζεται διὰ τοῦ t_1 εἰς M_1, τοῦτο διὰ τοῦ t_2 εἰς M_2, τέλος δὲ τὸ M_2 διὰ τοῦ t_3 μετασχηματίζεται εἰς M_3. Οὕτω ὁμόλογον τοῦ M κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $t_3 o t_2 o t_1$



ἤτοι, τὸν $t_3 o (t_2 o t_1)$ εἶναι τὸ M_3. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ M_3 εἶναι καὶ ὁμόλογον τοῦ

M_1 κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $t_3 o t_2$, ἕπεται ὅτι εἶναι ὁμόλογον τοῦ M καὶ κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $(t_3 o t_2) o t_1$, ὁπότε ἀληθεύει ἡ (1).

Συνεπείᾳ τῆς ὡς ἄνω προσεταιριστικῆς ἰδιότητος, ὡς εἶναι ἤδη γνωστόν, δυνάμεθα εἰς ἓν γινόμενον νὰ ἀντικαταστήσωμεν **διαδοχικοὺς** παράγοντας μὲ τὸ γινόμενόν των ἢ ἀντιστρόφως.

Π.χ. $\qquad t_4 o t_3 o t_2 o t_1 = t_4 o (t_3 o t_2) o t_1$

ἢ $\qquad t_3 o t_2 o t_1 = t_3 o t o t' o t_1$ ὅπου $t_2 = t o t'$

2.3 ΟΜΑΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Θεωροῦμεν ἓν σύνολον $\mathscr{G}$ ἀμφιμονοσημάντων μετασχηματισμῶν, ὑποθέτομεν δὲ ὅτι:

● 1. Τὸ γινόμενον, δύο οἱωνδήποτε μετασχηματισμῶν τοῦ $\mathscr{G}$ ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ $\mathscr{G}$.

● 2. Ὁ ἀντίστροφος, οἱουδήποτε μετασχηματισμοῦ τοῦ $\mathscr{G}$, ἀνήκει ἐπίσης εἰς τὸ $\mathscr{G}$.

Τότε, ἐπειδή: $\qquad t \in \mathscr{G}$ καὶ $t^{-1} \in \mathscr{G} \Rightarrow t \circ t^{-1} \in \mathscr{G}$

καὶ (2.1, Πόρ. 2): $\qquad t o t^{-1} = t^{-1} o t = t^0$

ἕπεται ὅτι: $\qquad t^0 \in \mathscr{G}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ κάτωθι:

Ἡ πρᾶξις $\circ$ τῆς συνθέσεως μετασχηματισμῶν, ὁριζομένη ἐπὶ τοῦ συνόλου $\mathscr{G}$

● εἶναι προσεταιριστική (2.2).

● ἔχει οὐδέτερον στοιχεῖον τὸν t^0 (2.1, Πορ. 1).

● κάθε στοιχεῖον $t \in \mathscr{G}$ ἔχει συμμετρικὸν ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\circ$: Τὸν ἀντίστροφον t^{-1}.

Ἄρα, ἐξ ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $\mathscr{G}$ εἶναι ὁμὰς ὡς πρὸς τὴν πρᾶξιν $\circ$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Κατὰ τὴν μελέτην ἑνὸς συνόλου μετασχηματισμῶν, ἡ διαπίστωσις ὅτι τοῦτο ἀποτελεῖ ὁμάδα, ἐξαντλεῖ τὴν μελέτην τοῦ θέματος ὑπὸ τὴν ἔννοιαν ὅτι οὐδεὶς **νέος** μετασχηματισμὸς δύναται νὰ προκύψῃ ἐκ τοῦ συνόλου τούτου, οὔτε διὰ συνθέσεως οὔτε δι' ἀντιστροφῆς τῶν μετασχηματισμῶν αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 8 - 16

3. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

3.1 ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΕΝΟΝ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια, ἐξετάζονται ἀποκλειστικῶς **μετασχηματισμοὶ τοῦ Ἐπιπέδου.** Διὰ τὸν **μονοσήμαντον** καθορισμόν, ἑκάστοτε, τοῦ ὁμολόγου ἑνὸς τυχόντος σημείου, εἶναι ἀπαραίτητα καὶ προσανατολισμένα γεωμετρικὰ στοιχεῖα (διανύσματα, προσανατολισμέναι γωνίαι). Οὕτω π.χ. δοθέντων τῶν σημείων Ο καὶ Α (σχ. 3.2β), δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν ἓν σημεῖον Β διὰ τῆς **προσανατολισμένης** γωνίας (ΟΑ, ΟΒ), δι' ἧς καθορίζεται μονοσημάντως ἡ θέσις τῆς ἡμιευθείας ΟΒ καὶ τῆς ἀποστάσεως ΟΒ, (ἂν ἡ γωνία δὲν θεωρηθῇ προσανατολισμένη, ὁρίζονται δύο σημεῖα Β).

Ὅθεν, ἐφεξῆς, τὸ Ἐπίπεδον λαμβάνεται προσανατολισμένον, αἱ δὲ γωνίαι, εἰς τὰς ὁποίας ἀναφερόμεθα προσανατολισμέναι.

3.2 ΒΑΣΙΚΑΙ ΤΙΝΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

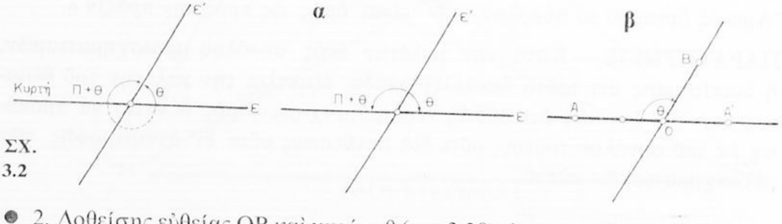
Διὰ τὴν εὐχερεστέραν κατανόησιν ὡρισμένων σημείων ἐκ τῶν ἐκτιθεμένων εἰς τὰ ἑπόμενα κεφάλαια, ὑπενθυμίζομεν, ἐνταῦθα, βασικάς τινας προτάσεις, ἀναφερομένας εἰς τὴν ἔννοιαν τῆς γωνίας δύο εὐθειῶν.

● 1. **Γωνία (ε, ε′) δύο εὐθειῶν**(ε) καὶ (ε′) εἶναι ἡ γωνία $(\vec{u}, \vec{u'})$ δύο διανυσμάτων $\vec{u}$ καὶ $\vec{u'}$, λαμβανομένων αὐθαιρέτως ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων, ἀντιστοίχως. Σημειοῦται ὅτι (σχ. 3.2α):

α. Ἐκ τῆς γωνίας εὐθειῶν (ε,ε′) ὁρίζονται **δύο κυρταὶ** γωνίαι θ καὶ θ + π.

β. Τὰ διπλάσια αὐτῶν, διαφέρουν κατὰ 2π. Ἄρα, ἡ γωνία 2(ε, ε′) ὁρίζει **μίαν** κυρτὴν γωνίαν 2θ.

γ. Ὅλαι αἱ ἰσότητες γωνιῶν, ἀναφέρονται, ἐφεξῆς, εἰς τὰς **κυρτὰς** γωνίας τὰς ὁποίας ὁρίζουν αἱ πλευραί των. Ὑπὸ τὴν προϋπόθεσιν αὐτήν, ἰσχύει διὰ τὰς διαδοχικὰς γωνίας ἡ γνωστὴ ἰσότης Chasles.



ΣΧ. 3.2

● 2. Δοθείσης εὐθείας ΟΒ καὶ γωνίας θ (σχ. 3.2β), ὑπάρχει **μία καὶ μόνον** εὐθεῖα διὰ δοθέντος σημείου Α, τοιαύτη ὥστε ἡ γωνία **εὐθειῶν** (ΟΑ, ΟΒ) νὰ εἶναι ἴση πρὸς θ. Ὥστε, ἵνα τὰ σημεῖα, Ο, Α καὶ Α′ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ διὰ τὰς **γωνίας εὐθειῶν** ἡ ἰσότης :

$$(OA,\ OB) = (OA',\ OB)$$

● 3. Δοθέντων δύο σημείων Α καὶ Β καὶ γωνίας θ, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ διὰ τὰ ὁποῖα (σχ. 3.2γ) :

α. $(\overrightarrow{MA},\ \overrightarrow{MB}) = \theta$ εἶναι **ἓν** τόξον κύκλου μὲ ἄκρα Α καὶ Β.

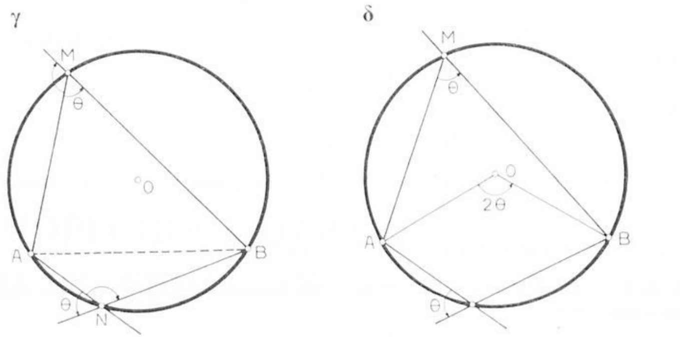
β. γων. εὐθ. $(MA,\ MB) = \theta$ εἶναι κύκλος διερχόμενος διὰ τῶν Α καὶ Β.

● 4. Ἵνα τὰ σημεῖα Α, Β, Μ, Ν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου (σχ. 3.2γ), πρέπει καὶ ἀρκεῖ διὰ τὰς γωνίας εὐθειῶν, νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :

$$(MA,\ MB) = (NA,\ NB)$$

● 5. Ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα ἑνὸς κύκλου (Ο) διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον Μ τοῦ (Ο) ἰσχύει (σχ. 3.2δ) :

$$(\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}) = 2(MA,\ MB)$$



ΣΧ. 3.2

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν σ ἢ h τῆς § 1.4, νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁμόλογον παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο ἢ Κ ἀντιστοίχως.

2. Κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν ρ τῆς § 1.4, 3 νὰ εὑρεθῇ τὸ ὁμόλογον κύκλου. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κύκλων, τῶν ὁποίων ὁμόλογον εἶναι δοθὲν τμῆμα τῆς εὐθείας (ε) ;

3. Δείξατε ὅτι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς ι^0 εἶναι ἐνελεικτικός.

4. Δείξατε ὅτι ἂν t εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμός, τότε:

$$(t^{-1})^{-1} = t$$

5. Ἡ προβολὴ καὶ ἡ τομὴ (§ I, 5.4) εἶναι σημειακοὶ μετασχηματισμοί;

6. Ἐπὶ ἄξονος, θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον $M'(x')$ τυχόντος σημείου $M(x)$ ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης:

$$xx' = 3(x + x')$$

1. Ὁρίσατε τὰ ἡνωμένα σημεῖα A καὶ B τοῦ μετασχηματισμοῦ.
2. Δείξατε ὅτι δύο ὁμόλογα σημεῖα M, M′ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ A καὶ B.

7. Ἐπὶ ἄξονος θεωροῦμεν τὸν μετασχηματισμόν, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον $M'(x')$ τυχόντος σημείου $M(x)$ ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης

$$xx' - 3x - 2x' + 4 = 0$$

1. Ὁρίσατε τὰ ἡνωμένα σημεῖα A καὶ B τοῦ μετασχηματισμοῦ.
2. Ἔστω τὸ σημεῖον Γ(2). Ὁρίσατε τὸ συζυγὲς Δ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὰ A, B.
3. Δείξατε ὅτι ἡ ἁρμονικὴ τετρὰς (A,B,Γ,Δ) μετασχηματίζεται εἰς, ἐπίσης, ἁρμονικὴν τετράδα (A, B, Γ′, Δ′).
4. Δείξατε ὅτι ὁ διπλοῦς λόγος (ABMM′) εἶναι σταθερός.

8. Ἂν $t_1 = t_2$ τότε διὰ κάθε μετασχηματισμὸν t θὰ εἶναι:

$$t_1 \circ t = t_2 \circ t \quad \text{καὶ} \quad t \circ t_1 = t \circ t_2$$

9. Δείξατε ὅτι ἂν t εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμὸς καὶ t_1, t_2 τυχόντες μετασχηματισμοί,

$$t_2 \circ t_1 = t_2 \circ t^{-1} \circ t \circ t_1$$

ἂν δὲ ὁ t εἶναι ἐνελεικτικός,

$$t_2 \circ t_1 = t_2 \circ t \circ t \circ t_1$$

10. Δείξατε ὅτι ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα μετασχηματισμὸς t εἶναι ἐνελεικτικὸς εἶναι:

$$t^2 = t_0$$

11. Συγκρίνατε τοὺς μετασχηματισμοὺς (§ 1.4) $p \circ h$ καὶ $h \circ p$

12. Δείξατε ὅτι οἱ κάτωθι κανόνες λογισμοῦ τῶν δυνάμεων ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τοὺς μετασχηματισμούς:

$$t^{\mu} \circ t^{\nu} = t^{\mu+\nu} \qquad (t^{\mu})^{\nu} = t^{\mu\nu}$$

13. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἐνελεικτικῶν μετασχηματισμῶν δὲν εἶναι ἐν γένει μετασχηματισμὸς ἐνελεικτικός. Τὸ σύνολον τῶν ἐνελεικτικῶν μετασχηματισμῶν ἀποτελεῖ ὁμάδα;

14. Δείξατε ὅτι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀμφιμονοσημάντων μετασχηματισμῶν τοῦ Ω ἀποτελεῖ ὁμάδα.

15. Δείξατε ὅτι τὸ σύνολον $\{t^0\}$ ἀποτελεῖ ὁμάδα. Ἂν δὲ t εἶναι μετασχηματισμὸς ἐνελεικτικός, τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὸ σύνολον $\{t, t^0\}$

16. Δείξατε ὅτι εἶναι ἐν γένει:

$$(t_2 \circ t_1)^2 \neq t_2^2 \circ t_1^2$$

Εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι $(t_2 \circ t_1)^2 = t_2^2 \circ t_1^2$;

IV. ΟΜΟΡΡΟΠΟΙ ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΕΙΣ ΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟΝ

Εἰς τὸ Κεφάλαιον τοῦτο εἰσάγονται δύο βασικοὶ μετασχηματισμοὶ τοῦ Ἐπιπέδου: ἡ μεταφορὰ καὶ ἡ στροφή. Κοινὴ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῶν μετασχηματισμῶν τούτων εἶναι, ὡς θὰ ἴδωμεν, ὅτι μετασχηματίζουν ἓν τμῆμα ἢ μίαν (προσανατολισμένην) γωνίαν εἰς σχῆμα ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον ἤτοι, **διατηροῦν**, ὡς λέγομεν, **τὰ τμήματα καὶ τὰς γωνίας.** Ἡ ἰδιότης αὕτη μεταβιβάζεται καὶ εἰς οἱονδήποτε γινόμενον ἐκ τῶν μετασχηματισμῶν τούτων, δεδομένου ὅτι ἡ σχέσις ἰσότητος τμημάτων ἢ γωνιῶν εἶναι μεταβατική. Τοὺς ὡς ἄνω μετασχηματισμοὺς θὰ καλέσωμεν **ὁμορρόπους ἰσότητας**.

1. ΜΕΤΑΦΟΡΑ *

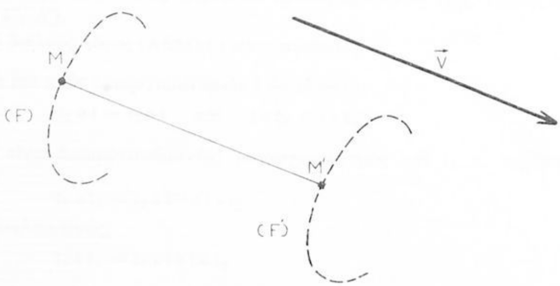
1.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—**Μεταφορὰ κατὰ δοθὲν διάνυσμα** $\vec{V}$ (σχ. 1.1) **καλεῖται ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ΄ τυχόντος σημείου Μ, ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :**

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{V} \qquad (1)$$

Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην μεταφορὰν συμβολίζομεν: $T[\vec{V}]$. Τὸ διάνυσμα $\vec{V}$ καλεῖται **διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς.**

ΣΧ. 1.1



Δυνάμεθα ἀμέσως νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι :

● 1. Ἂν $\vec{V} = \vec{0}$, θὰ εἶναι $\overrightarrow{MM'} = \vec{0} \Longleftrightarrow M' = M$

ἤτοι, ἡ μεταφορὰ $T[\vec{0}]$ εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς t^0. Ὥστε : **ὁ t^0 δύναται νὰ θεωρῆται ὡς μεταφορὰ κατὰ μηδενικὸν διάνυσμα.**

● 2. Ἂν $\vec{V} \neq \vec{0}$, τότε $\overrightarrow{MM'} \neq \vec{0}$

ἤτοι : **ἡ μεταφορὰ οὐδὲν ἡνωμένον σημεῖον ἔχει.**

1.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ἡ συνθήκη: $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$ (1)

γράφεται ἰσοδυνάμως: $\overrightarrow{M'M} = -\vec{V}$ (1΄)

---

* Τὰ ἐκτιθέμενα εἰς τὴν § 1, ἰσχύουν καὶ εἰς τὸν Χῶρον.

Ἑπομένως, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον M′ (σχ. 1.1), τοῦτο εἶναι ὁμόλογον ἑνὸς μοναδικοῦ σημείου M : τοῦ ὁριζομένου ἀπὸ τὴν (1′). Μάλιστα δέ, ὡς δεικνύει ἡ (1′), τὸ M εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ M′ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T[-\vec{V}]$.

Ἑπομένως, ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς τῆς $T[\vec{V}]$ εἶναι ἡ $T[-\vec{V}]$. Συμβολικῶς :

$$T^{-1}[\vec{V}] = T[-\vec{V}]$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἡ μεταφορὰ εἶναι μετασχηματισμὸς ἀμφιμονοσήμαντος. Ὁ ἀντίστροφος μεταφορᾶς εἶναι μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα ἀντίθετον τοῦ διανύσματος τῆς θεωρουμένης.

1.3 ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα MM′ ἡ ὁριζομένη ἀπὸ δύο οἱαδήποτε ὁμόλογα σημεῖα, ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ διανύσματος $\vec{V}$ τῆς μεταφορᾶς. Ἄρα ἂν εὐθεῖα

ΣΧ. 1.3

(ε) εἶναι παράλληλος τοῦ $\vec{V}$ (σχ. 1.3), τότε εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν $T[\vec{V}]$. Καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα (ε) εἶναι ἀναλλοίωτος, τότε $M \in (\varepsilon) \Rightarrow M' \in (\varepsilon)$ καὶ ἐπειδὴ $\vec{V} = \overrightarrow{MM'}$, θὰ εἶναι $(\varepsilon) \parallel \vec{V}$.

Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα εὐθεῖα εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος κατὰ μεταφοράν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παράλληλος τοῦ διανύσματος τῆς μεταφορᾶς.

1.4 ΟΜΟΛΟΓΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δύο ὁμόλογα κατὰ μεταφορὰν διανύσματα εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις

Ἔστω ἡ μεταφορὰ $T[\vec{V}]$. Ἂν A′ καὶ B′ εἶναι τὰ ὁμόλογα δύο σημείων A καὶ B ἀντιστοίχως (σχ. 1.4), τότε εἶναι :

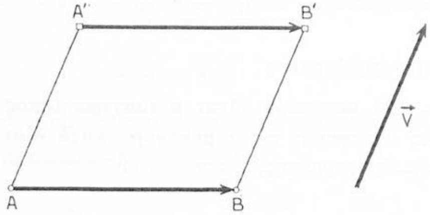
$$\overrightarrow{AA'} = \vec{V} = \overrightarrow{BB'}$$

ἄρα : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'B}$

$$= \vec{V} + \overrightarrow{A'B'} - \vec{V}$$

καὶ τελικῶς : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$

ΣΧ. 1.4



ΠΟΡΙΣΜΑ.—Δύο ὁμόλογα κατὰ μεταφορὰν τμήματα εἶναι ἴσα. Ἤτοι, ἡ μεταφορὰ **διατηρεῖ τὰ τμήματα.**

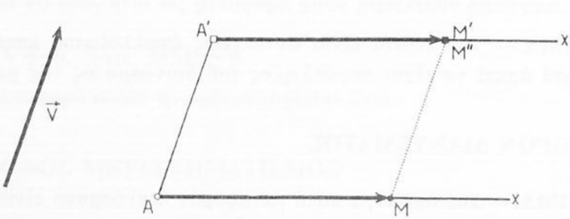
1.5 ΟΡΙΣΜΟΣ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

● Θεωρήσωμεν μεταφοράν, τῆς ὁποίας ἔστω (Α,Α′) ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων (σχ. 1.5). Ἄν Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα θὰ εἶναι :

$$\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM} \tag{1}$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη (1) ἀρκεῖ διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ Μ′ ἐπὶ ἡμιευθείας, ἀρχῆς Α′, ὁμορρόπου πρὸς τὴν ἡμιευθεῖαν ΑΜ.

ΣΧ. 1.5



● Ἀντιστρόφως θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δοθέντων τῶν σημείων Α καὶ Α′, ὁ μετασχηματισμὸς, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης (1), εἶναι μεταφορά.

Ἀπόδειξις

Πράγματι, πρόκειται προφανῶς περὶ τῆς μεταφορᾶς $T[\overrightarrow{AA'}]$ **ὁριζομένης**, ὡς λέγομεν, **ἐκ τοῦ** ζεύγους (Α,Α'), κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ὁμόλογον Μ'' τοῦ τυχόντος σημείου Μ, λόγῳ τῆς (1), ταυτίζεται μὲ τὸ Μ'.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Ἂν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι διανύσματα ἴσα, ὑπάρχει μεταφορὰ καὶ μία μόνον, καθ' ἣν ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἐκ τῶν θεωρημάτων 1.4 καὶ 1.5 προκύπτει ὅτι χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς μεταφορᾶς εἶναι, ὅτι **διατηρεῖ τὰ διανύσματα.**

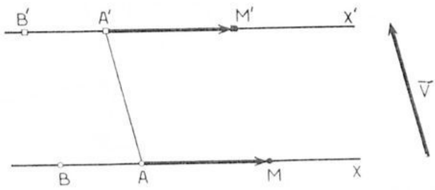
1.6 ΟΜΟΛΟΓΑ ΑΠΛΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ὁμόλογον ἡμιευθείας ΑΧ (σχ. 1.6) **κατὰ μεταφορὰν $T[\vec{V}]$ εἶναι ἡμιευθεῖα Α'Χ' ὁμόρροπος τῆς ΑΧ.**

Ἀπόδειξις

Ἔστω Α' τὸ ὁμόλογον τῆς ἀρχῆς Α τῆς ΑΧ. Ἵνα σημεῖον Μ' εἶναι ὁμόλο-

ΣΧ.
1.6



γον σημείου τινὸς Μ τῆς ΑΧ **πρέπει** (1.4) καὶ **ἀρκεῖ** (1.5) $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{AM}$ ἤτοι, τὸ Μ' νὰ εἶναι σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Α' ἀγομένης ἡμιευθείας Α'Χ' ὁμορρόπως πρὸς τὴν ΑΧ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Κατὰ μίαν μεταφοράν:

● **1. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῆς θεωρουμένης.**

Ἀντιστρόφως: Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὁμόλογοι, κατ' ἀπείρους τρόπους, κατὰ μεταφοράν, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα ὁρίζεται ἀπὸ ἓν σημεῖον τῆς μιᾶς καὶ ἓν σημεῖον τῆς ἄλλης.

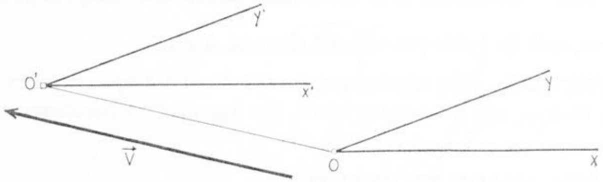
● **2. Τὸ ὁμόλογον τοῦ ἐσωτερικοῦ* τμήματος ΑΒ** (σχ. 1.6) **εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁμολόγου του Α'Β'.**

* Τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τμήματος ΑΒ εἶναι, ὡς γνωστόν, ἡ τομὴ τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ καὶ ΒΑ.

● **3. Τὸ ὁμόλογον γωνίας εἶναι γωνία ἴση τῆς θεωρουμένης.** Πράγματι, αἱ ὁμόλογοι πλευραί των εἶναι ὁμόρροποι. Ἤτοι (σχ. 1.6, 3), ἡ μεταφορὰ **διατηρεῖ τὰς γωνίας.**

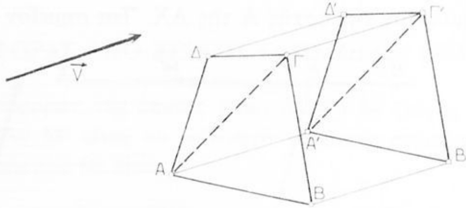
Ἑπομένως διατηρεῖ τὴν **καθετότητα**, ὡς καὶ τὴν **παραλληλίαν** εὐθειῶν.

ΣΧ.
1.6, 3



● **4. Τὸ ὁμόλογον τριγώνου ἢ πολυγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνον ἢ πολύγωνον ἴσον πρὸς τὸ θεωρούμενον.** Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν ὁρίζουν διανύσματα ἴσα.

ΣΧ.
1.6, 4

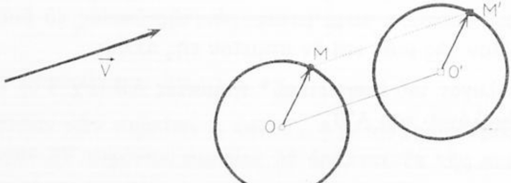


Ἀντιστρόφως :

Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμολόγων τριγώνων ἢ πολυγώνων ὁρίζουν διανύσματα ἴσα, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ὁμόλογα κατὰ μεταφορὰν (ὁριζομένὴν ἀπὸ δύο ὁμολόγους κορυφάς).

● **5. Τὸ ὁμόλογον κύκλου εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὸν θεωρούμενον.** Τὰ κέντρα αὐτῶν εἶναι ὁμόλογα σημεῖα. Δύο δὲ ὁμόλογοι ἀκτῖνες ὁρίζουν ἴσα διανύσματα.

ΣΧ.
1.6, 5



Ἀντιστρόφως: Δύο ἴσοι κύκλοι εἶναι ὁμόλογοι κατὰ τὴν μεταφοράν, ἥτις ἀντιστοιχίζει τὰ κέντρα των.

1.7 ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Ἔστωσαν τὰ διανύσματα $\vec{V}_1$ καὶ $\vec{V}_2$ (σχ. 1.7). Ἡ μεταφορὰ $\mathbf{T}[\vec{V}_1]$ μετασχηματίζει τυχὸν σημεῖον Μ εἰς M_1, ἡ δὲ $\mathbf{T}[\vec{V}_2]$ τὸ σημεῖον M_1 εἰς M_2. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $\mathbf{T}[\vec{V}_2]\circ\mathbf{T}[\vec{V}_1]$ εἶναι τὸ σημεῖον M_2

ΣΧ. 1.7

Ἐξ ἄλλου ἰσχύουν: $\overrightarrow{MM_1} = \vec{V}_1$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{V}_2$

ἐκ τῶν ὁποίων: $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$

$= \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖον M_2 εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ καὶ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\mathbf{T}[\vec{V}_1 + \vec{V}_2]$.

Συνεπῶς: $\mathbf{T}[\vec{V}_2]\circ\mathbf{T}[\vec{V}_1] = \mathbf{T}[\vec{V}_1 + \vec{V}_2]$

Εἶναι προφανὲς ὅτι ἐπειδή: $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{V}_2 + \vec{V}_1$

θὰ εἶναι: $\mathbf{T}[\vec{V}_2]\circ\mathbf{T}[\vec{V}_1] = \mathbf{T}[\vec{V}_1]\circ\mathbf{T}[\vec{V}_2]$

Συνοψίζομεν τὰ ἀνωτέρω, ὡς κάτωθι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ γινόμενον μεταφορῶν εἶναι μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων τῶν θεωρουμένων. Τὸ ὡς ἄνω γινόμενον εἶναι ἀντιμεταθετικόν.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ: Μία μεταφορὰ δύναται νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους ὡς τὸ γινόμενον δύο μεταφορῶν.

Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ ὁρισθοῦν δύο διανύσματα, ἔχοντα ἄθροισμα τὸ διάνυσμα τῆς θεωρουμένης.

1.8 ΟΜΑΣ ΤΩΝ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Ἔστω $\mathcal{T}$ τὸ σύνολον τῶν μεταφορῶν. Ἐκ τῶν προηγουμένων προκύπτουν τὰ κάτωθι :

● Οἱ μετασχηματισμοὶ τοῦ $\mathcal{T}$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι (1.2), ὁ δὲ ἀντίστροφος μεταφορᾶς εἶναι μεταφορά :

$$\tau \in \mathcal{T} \Rightarrow \tau^{-1} \in \mathcal{T} \qquad (\forall \tau)$$

● Τὸ γινόμενον μεταφορῶν εἶναι μεταφορὰ (1.7) :

$$\tau_1,\ \tau_2 \in \mathcal{T} \Rightarrow \tau_2 \circ \tau_1 \in \mathcal{T} \ (\forall \tau_1,\ \forall \tau_2)$$

Εἶναι δέ : $\tau_2 \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \tau_2$

Ἑπομένως (III,2.3) :

Τὸ σύνολον $\mathcal{T}$ τῶν μεταφορῶν εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμάς.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 1 - 3
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 1 - 10

2. ΕΠΙΠΕΔΟΣ ΣΤΡΟΦΗ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Θεωροῦμεν εἰς τὸ Ἐπίπεδον σταθερὸν σημεῖον Ο καὶ προσανατολισμένην γωνίαν θ (σχ. 2.1).

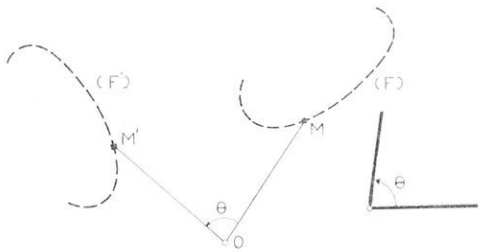
Στροφή, κέντρου Ο καὶ γωνίας θ, καλεῖται ὁ μετασχηματισμὸς τοῦ Ἐπιπέδου, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς συνθήκας :

$$OM' = OM \qquad (1)$$

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \qquad (2)$$

Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην στροφὴν συμβολίζομεν: **R**[O, θ]

ΣΧ.
2.1



Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτουν ἀμέσως τὰ ἑξῆς:

● 1. Τὸ ὁμόλογον τοῦ κέντρου O εἶναι τὸ O ἤτοι: **τὸ κέντρον στροφῆς εἶναι ἡνωμένον σημεῖον** τοῦ μετασχηματισμοῦ.

● 2. Ἄν $\theta \neq 0$ οὐδὲν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ O εἶναι ἡνωμένον, διότι αἱ ἡμιευθεῖαι OM′ καὶ OM εἶναι διάφοροι.

● 3. Ἄν $\theta = 0$, τότε $M' = M$ ἤτοι ἡ στροφὴ **R**[O, 0] εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς t^0. Ὥστε **ὁ t^0 δύναται νὰ θεωρῆται ὡς στροφὴ γωνίας μηδενικῆς**, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι τυχὸν σημεῖον O.

● 4. Ἄν $\theta = \pi$ αἱ ἡμιευθεῖαι OM′ καὶ OM εἶναι ἀντικείμεναι καὶ ἡ στροφὴ **R**[O, π] καλεῖται, εἰδικώτερον καὶ **συμμετρία ὡς πρὸς κέντρον O**, συμβολικῶς: Σ[O]

2.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Αἱ συνθῆκαι (1) καὶ (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου 2.1 γράφονται ἰσοδυνάμως:

$$OM = OM' \qquad (1')$$

$$(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OM'}) = -\theta \qquad (2')$$

Ἑπομένως, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον M′ (σχ. 2.1), ὑπάρχει ἓν μοναδικὸν σημεῖον M, ὁριζόμενον ἐκ τῶν (1′) καὶ (2′), μὲ ὁμόλογον τὸ M′ κατὰ τὴν **R**[O, θ]. Μάλιστα δέ, ὡς δεικνύουν αἱ (1′) καὶ (2′), τὸ M εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ΄ κατὰ τὴν στροφὴν R[O, −θ]. Ἑπομένως, ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς τῆς R[O, θ] εἶναι ἡ στροφὴ R[O, −θ]. Συμβολικῶς:

$$R^{-1}[O, \theta] = R[O, -\theta]$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

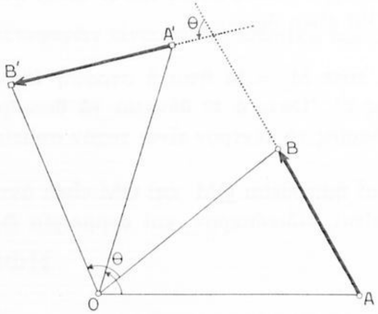
ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἡ στροφὴ εἶναι μετασχηματισμὸς ἀμφιμονοσήμαντος. Ὁ ἀντίστροφος στροφῆς εἶναι στροφὴ τοῦ αὐτοῦ κέντρου καὶ γωνίας ἀντιθέτου τῆς γωνίας τῆς θεωρουμένης.

2.3 ΟΜΟΛΟΓΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ὁμόλογον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατὰ στροφὴν R[O,θ] εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$, τοιοῦτον ὥστε:

$$AB = A'B'$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$$



ΣΧ. 2.3

Ἀπόδειξις

Εἶναι (σχ.2.3): $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = \theta = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'})$

ἢ: $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) + (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA'}) + (\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})$

ἄρα: $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'})$

ἑπομένως, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β΄ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα. Ἄρα:

$$AB = A'B' \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{A'O})+(\overrightarrow{A'O},\overrightarrow{A'B'}) \qquad |\text{ Chasles }|$$

$$= (\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO})+(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'})-(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'O}) \qquad (\text{III}, 3.2, 1\gamma)$$

Ἐπειδὴ δὲ ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων OAB καὶ OA′B′:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}) = (\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'O})$$

θὰ εἶναι τελικῶς:

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA'}) = \theta$$

2.4 ΟΡΙΣΜΟΣ ΣΤΡΟΦΗΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

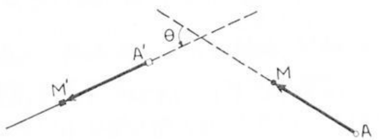
● Θεωρήσωμεν στροφήν, τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι θ, ἔστω δὲ (A,A′) ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων (σχ. 2.4α). Ἂν M′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου M, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι:

$$A'M' = AM \qquad (1)$$

$$(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{A'M'}) = \theta \qquad (2)$$

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι ἀρκοῦν διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου M′. Πράγματι διὰ τῆς (2) ὁρίζεται ἡ ἡμιευθεῖα A′M′, ἀρχῆς A′, ἐπὶ τῆς ὁποίας διὰ τῆς (1) ὁρίζεται τελικῶς τὸ σημεῖον M′

ΣΧ.
2.4α



● Ἀντιστρόφως θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

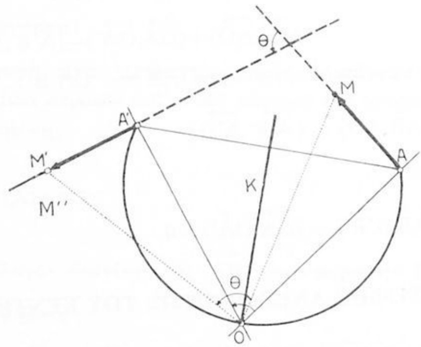
ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δοθέντων τῶν σημείων A καὶ A′ ὁ μετασχηματισμὸς r, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον M′ τυχόντος σημείου M ὁρίζεται ἐκ τῶν συνθηκῶν (1) καὶ (2), ἔνθα θ σταθερὰ γωνία διάφορος τῆς μηδενικῆς, εἶναι στροφή, τῆς ὁποίας ἡ γωνία εἶναι θ.

Ἀπόδειξις

● Ἂν τὰ σημεῖα A,A′ συμπίπτουν, τότε ἐξ ὁρισμοῦ r = **R**[A,θ].

● Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν $A \neq A'$, τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου A κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν r εἶναι, λόγῳ τῆς (1), τὸ A′. Ἄρα ἂν ὁ r εἶναι στροφή,

ΣΧ.
2.4β



θὰ πρέπει, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα 2.3, ἡ γωνία αὐτῆς λόγῳ τῆς (2) νὰ εἶναι θ, ἂν δὲ O εἶναι τὸ κέντρον της θὰ πρέπει :

$$OA = OA' \tag{3}$$

καὶ :

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \tag{4}$$

Ἀλλὰ τοιοῦτον σημεῖον O ὑπάρχει καὶ εἶναι μοναδικόν : εἶναι ἡ τομὴ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος AA′ καὶ τοῦ κυκλικοῦ τόξου, ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου, τὰ σημεῖα A,A′ φαίνονται ὑπὸ γωνίαν θ.

Θεωρήσωμεν τὴν στροφὴν **R**[O,θ]. Αὕτη μετασχηματίζει τὸ A εἰς A′, λόγω τῶν (3) καὶ (4), τὸ τυχὸν δὲ σημεῖον M ἔστω εἰς M′′.

Εἶναι (2.3) : $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = \theta$ καὶ $A'M'' = AM$

ἄρα: $$(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{A'M''}) = (\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M''}) = -\theta + \theta = 0$$

καὶ λόγῳ τῆς (1): $A'M'' = A'M'$

Ἄρα τὰ σημεῖα M′ καὶ M′′ συμπίπτουν. Ἑπομένως :

$$r = \mathbf{R}[O,\theta]$$

Λέγομεν ὅτι ἡ στροφὴ r **ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ζεῦγος (A,A′) καὶ τὴν γωνίαν θ.**

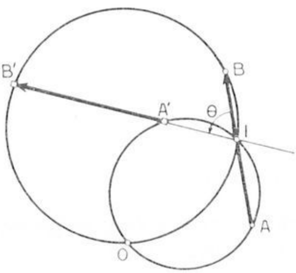
ΠΟΡΙΣΜΑ.— Ἂν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι διανύσματα ἄνισα τοιαῦτα ὥστε $AB = A'B'$, τότε ὑπάρχει στροφὴ καὶ μία μόνον, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$.

Πράγματι, ἔστω $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$. Εἶναι $\theta \neq 0$ καὶ ἡ στροφή, ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ ζεῦγος σημείων (A, A') καὶ τὴν γωνίαν θ μετασχηματίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$. Λέγομεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω στροφὴ **ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ζεῦγος** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ὁμολόγων διανυσμάτων.

2.5 ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ ΣΤΡΟΦΗΣ

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων, τὸ κέντρον μιᾶς στροφῆς εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν μεσοκαθέτων τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ ζεύγη ὁμολόγων σημείων, καθὼς καὶ τῶν κυκλικῶν τόξων, ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων δύο ὁμόλογα σημεῖα φαίνονται ὑπὸ τὴν γωνίαν στροφῆς (σχ. 2.4β). Ἄρα, τὸ κέντρον Ο δύναται νὰ κατασκευασθῇ, ὡς ἡ τομὴ δύο ἐκ τῶν ὡς ἄνω τόπων (ὡς ἐγένετο κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος).

ΣΧ.
2.5



Ὅταν ἡ στροφὴ ὁρίζεται ἀπὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ὁμολόγων διανυσμάτων, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὸ κέντρον καὶ ὡς ἑξῆς: Ἔστω Ι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β' (σχ. 2.5). Τότε αἱ γωνίαι εὐθειῶν (ΙΙΙ, 3.2, 1):

$$(IA, IA'),\ (OA, OA') \text{ καὶ } (IB, IB'),\ (OB, OB')$$

εἶναι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν στροφῆς θ.

Ἄρα (ΙΙΙ, 3.2, 4), τὰ σημεῖα A, A', I, O καὶ B, B', I, O εἶναι συγκυκλικά. Ἑπομένως τὸ κέντρον Ο εἶναι τὸ δεύτερον, ἐκτὸς τοῦ Ι, σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων (I, A, A') καὶ (I, B, B').

2.6 ΟΜΟΛΟΓΑ ΑΠΛΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

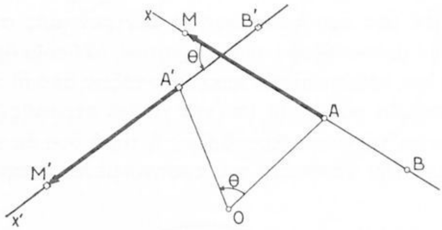
ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ὁμόλογον ἡμιευθείας ΑΧ κατὰ στροφὴν $R[O, \theta]$ εἶναι ἡμιευθεῖα Α'Χ', τοιαύτη ὥστε $(AX, A'X') = \theta$.

Ἀπόδειξις

Ἔστω Α′ τὸ ὁμόλογον τῆς ἀρχῆς Α τῆς ἡμιευθείας ΑΧ (σχ. 2.6). Ἵνα σημεῖον Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον σημείου τινός, Μ τῆς ΑΧ, **πρέπει** (2.3) καὶ **ἀρκεῖ** (2.4):

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta, \qquad AM = A'M'$$

ΣΧ.
2.6



ἤτοι, τὸ Μ′ νὰ εἶναι σημεῖον τῆς ἡμιευθείας, ἀρχῆς Α′, ἥτις σχηματίζει μετὰ τῆς ΑΧ γωνίαν θ.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Κατὰ μίαν στροφὴν **R**[O,θ]:

● **1. Τὸ ὁμόλογον τοῦ ἐσωτερικοῦ ἑνὸς τμήματος ΑΒ** (σχ. 2.6) **εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁμολόγου του Α′Β′.**

● **2. Τὸ ὁμόλογον γωνίας (ΑΧ,ΑΥ) εἶναι γωνία (Α′Χ′, Α′Υ′) ἴση τῆς (ΑΧ,ΑΥ)**

Πράγματι ἐπειδή:

$$(AX, A'X') = \theta = (AY, A'Y')$$

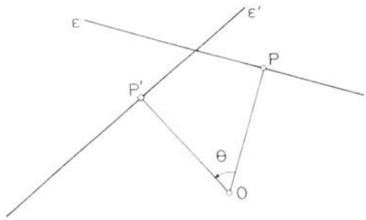
Θὰ εἶναι:
$$(A'X',A'Y') = (A'X', AX) + (AX,AY) + (AY,A'Y') \quad | \text{Chasles} |$$
$$= -\theta + (AX, AY) + \theta$$
$$= (AX,AY)$$

Ὥστε ἡ στροφὴ **διατηρεῖ τὰς γωνίας.** Ἄρα καὶ τὴν **καθετότητα,** ὡς καὶ τὴν **παραλληλίαν** εὐθειῶν.

● **3. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας (ε) εἶναι εὐθεῖα (ε′) τοιαύτη ὥστε (ε,ε′) = θ.**

Σημειωτέον ὅτι, ἐπειδὴ ἡ στροφὴ διατηρεῖ τὴν καθετότητα, αἱ προβολαὶ Ρ καὶ Ρ′ τοῦ κέντρου Ο (σχ. 2.6, 3) ἐπὶ τὰς ὁμολόγους εὐθείας (ε) καὶ (ε′) εἶναι ὁμόλογα σημεῖα. Δυνάμεθα, ὅθεν, νὰ κατασκευάσωμεν τὴν (ε′) εὑρίσκοντες τὸ ὁμόλογον P′ τῆς προβολῆς P τοῦ O ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε). Σημειωτέον ὅτι τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς τῶν γωνιῶν τῶν (ε) καὶ (ε′).

ΣΧ. 2.6, 3

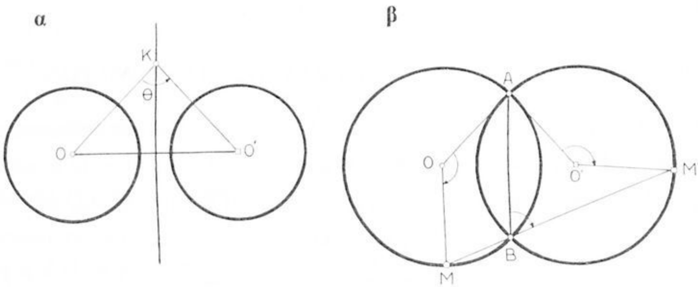


● 4. Τὸ ὁμόλογον κύκλου εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὸν θεωρούμενον.

Τὰ κέντρα αὐτῶν εἶναι ὁμόλογα σημεῖα.

᾿Αντιστρόφως : Δύο ἴσοι κύκλοι (O) καὶ (O′) εἶναι ὁμόλογοι καθ᾿ οἱανδήποτε στροφήν, ἥτις ἀντιστοιχίζει τὰ κέντρα των, ἤτοι, ἔχουσαν κέντρον ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος OO′ (σχ. 2.6, 4α).

ΣΧ. 2.6, 4



Σχετικῶς ἰσχύει τὸ ἑξῆς :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἂν δύο ἴσοι κύκλοι (O) καὶ (O′) τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B, δύο ὁμόλογα σημεῖα κατὰ τὴν στροφὴν κέντρου A, καθ᾿ ἣν εἶναι ὁμόλογοι, ὁρίζουν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ ἄλλου σημείου τομῆς των B.

᾿Απόδειξις

Εἶναι (σχ. 2.6, 4β) : $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'})$ | 2.6, Πορ. 2 |

Αἱ δὲ γωνίαι εὐθειῶν (BA, BM) καὶ (BA, BM′) εἶναι ἴσαι, ὡς ἡμίση τῶν προηγουμένων (III, 3.2). Τοῦτο σημαίνει ὅτι αἱ εὐθεῖαι BM καὶ BM′ συμπίπτουν.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 4 - 6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 11 - 22

3. ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ ΙΣΟΤΗΣ

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ὁμόρροπος ἰσότης καλεῖται πᾶν γινόμενον μετασχηματισμῶν, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι μεταφορὰ ἢ στροφή.

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν, ἀμέσως, ὅτι:

● 1. Κατὰ μίαν ὁμόρροπον ἰσότητα **διατηροῦνται τὰ τμήματα καὶ αἱ γωνίαι**, ὡς τοῦτο συμβαίνει καθ' ἕκαστον τῶν μετασχηματισμῶν, τῶν ὁποίων ἡ ὁμ. ἰσότης εἶναι γινόμενον. Τὸ ὁμόλογον (F′) σχήματος (F) κατὰ μίαν ὁμ. ἰσότητα καλεῖται **ὁμορρόπως ἴσον** τοῦ (F).

● 2. Μία μεταφορὰ ἢ στροφὴ t δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον $t \circ t^0$.

Ἄρα: **Ἡ μεταφορὰ καὶ ἡ στροφὴ εἶναι ὁμ. ἰσότητες.**

● 3. Ἐπίσης (ΙΙΙ, 2.2):

Τὸ γινόμενον ὁμ. ἰσοτήτων εἶναι ὁμ. ἰσότης.

3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΜ. ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

● Ἔστω ἡ ὁμ. ἰσότης d καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων.

Εἶναι (3.1, 1):
$$AB = A'B' \tag{1}$$

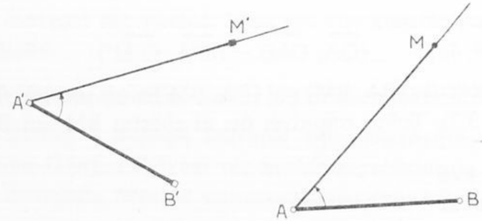
Ἂν δὲ M′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου M θὰ εἶναι ὁμοίως (σχ. 3.2α):

$$AM = A'M' \tag{2}$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) \tag{3}$$

Αἱ συνθῆκαι (2) καὶ (3) ἀρκοῦν διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου M′. Πράγματι διὰ τῆς (3) ὁρίζεται ἡ ἡμιευθεῖα A′M′, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐν συνεχείᾳ, διὰ τῆς (2), ὁρίζεται ἓν μοναδικὸν σημεῖον M′.

ΣΧ. 3.2α



Θὰ λέγωμεν συντόμως ὅτι τὸ σημεῖον Μ΄ ὡρίσθη **βάσει** τῶν ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$.

● Ἀντιστρόφως θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Δοθέντων τῶν ἴσων τμημάτων ΑΒ καὶ Α΄Β΄ ὁ μετασχηματισμὸς d, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ΄ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς συνθήκας (2) καὶ (3), εἶναι ὁμόρροπος ἰσότης.

Ἀπόδειξις

Ἔστω $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'}) = \theta$. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ $AB = A'B'$, ὑπάρχει **μεταφορὰ** ἢ **στροφὴ** d΄, καθόσον ἀντιστοίχως $\theta = 0$ ἢ $\theta \neq 0$, ἡ ὁποία μετασχηματίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$ (Πορ. 1.5 καὶ 2.4). Ἐξ ἄλλου, τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ κατὰ τὴν ὡς ἄνω ὁμ. ἰσότητα d΄, κατασκευαζόμενον **βάσει** τῶν ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, λόγῳ τῶν (2) καὶ (3) εἶναι τὸ Μ΄.

Ἄρα : $$d = d'$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Εἰς τὸ Ἐπίπεδον μία ὁμόρροπος ἰσότης ἀνάγεται εἰς μεταφορὰν ἢ εἰς στροφήν.**

● **2. Ἂν μετασχηματισμὸς διατηρῇ τὰ τμήματα καὶ τὰς γωνίας, οὗτος εἶναι ὁμόρροπος ἰσότης.**

● **3. Κατὰ μίαν ὁμόρροπον ἰσότητα d ἡ γωνία $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ δύο ὁμολόγων διανυσμάτων εἶναι σταθερά.**

Εἰδικώτερον δὲ :

α. ἂν ἡ d εἶναι μεταφορά, τότε $\theta = 0$ (1.4)

β. ἂν ἡ d εἶναι στροφή, τότε $\theta \neq 0$ (2.3)

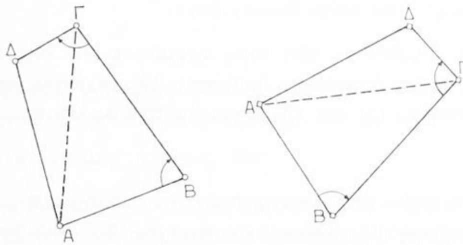
Ἡ γωνία αὕτη θ καλεῖται **γωνία τῆς ὁμ. ἰσότητος.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● 1. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ὁμ. ἰσότητος εἶναι ὅτι διατηρεῖ τὰ τμήματα καὶ τὰς γωνίας.

● 2. Ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς τῶν ὁμ. ἴσων σχημάτων, ὡς ὁμολόγων κατὰ ὁμ. ἰσότητα, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τρίγωνα ἢ πολύγωνα, συμφωνεῖ μὲ τὸν διδόμενον διὰ τὰ σχήματα ταῦτα γνωστὸν ὁρισμὸν (ὁμόλογοι πλευραὶ ἴσαι, γωνίαι ἴσαι). Πράγματι δύο ὁμόλογα τρίγωνα ἢ πολύγωνα κατὰ ὁμόρ. ἰσότητα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας (3.1, 1) καὶ ἀντιστρόφως : Ἂν ΑΒΓ... καὶ Α΄Β΄Γ΄... εἶναι τρίγωνα ἢ πολύγωνα μὲ ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας καὶ ὁμολόγους γωνίας ἴσας (σχ. 3.2β), ταῦτα δύνανται νὰ καταστοῦν ὁμόλογα κατὰ μίαν ὁμ. ἰσότητα d: τὴν ὁριζο-

ΣΧ. 3.2β



μένην ἀπὸ τὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B'A'})$. Τότε τὸ ὁμόλογον τῆς κορυφῆς Γ, κατασκευαζόμενον **βάσει** τῶν $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{B'A'}$, εἶναι τὸ σημεῖον Γ'. Ὁρίζομεν τότε τὴν ὁμ. ἰσότητα ἀπὸ τὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{\Gamma B}, \overrightarrow{\Gamma' B'})$, ὁπότε ὁμόλογον τῆς ἑπομένης κορυφῆς Δ εἶναι τὸ Δ' κ.ο.κ.

3.3 ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΟΜ. ΙΣΟΤΗΤΩΝ

Ἔστωσαν αἱ ὁμ. ἰσότητες d_1 καὶ d_2 μὲ γωνίας θ_1 καὶ θ_2 ἀντιστοίχως. Τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μετασχηματίζεται διὰ τῆς d_1 εἰς $\overrightarrow{A_1B_1}$, τοῦτο δὲ διὰ τῆς d_2 εἰς $\overrightarrow{A_2B_2}$. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατὰ **τὴν ὁμ. ἰσότητα** (3.1, 3) $d_2 o d_1$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A_2B_2}$

Ἐπειδὴ: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \theta_1$ καὶ $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \theta_2$

θὰ εἶναι:
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_2B_2}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) + (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}) = \theta_1 + \theta_2$$

ὁπότε:

- ἂν $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ ἡ ὁμ. ἰσότης $d_2 o d_1$ εἶναι **στροφὴ**
- ἂν $\theta_1 + \theta_2 = 0$ ἡ ὁμ. ἰσότης $d_2 o d_1$ εἶναι **μεταφορά**.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- **1. Τὸ γινόμενον δύο μεταφορῶν εἶναι μεταφορὰ** (Πρβλ. 1.7)
- **2. Τὸ γινόμενον μιᾶς μεταφορᾶς καὶ μιᾶς στροφῆς γωνίας θ, εἶναι στροφή, τῆς αὐτῆς γωνίας θ.**

● 3. **Τὸ γινόμενον δύο στροφῶν μὲ γωνίας ἀντιθέτους εἶναι μεταφορά, ἄλλως εἶναι στροφή, μὲ γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν θεωρουμένων.**

3.4 Η ΟΜΑΣ ΤΩΝ ΟΜ. ΙΣΟΤΗΤΩΝ

Εἰς τὰ προηγούμενα ἀπεδείχθη ὅτι:

● 1. Αἱ ὁμ. ἰσότητες εἶναι μετασχηματισμοὶ ἀμφιμονοσήμαντοι (1.2 καὶ 2.2), ὁ δὲ ἀντίστροφος ὁμ. ἰσότητος εἶναι ὁμ. ἰσότης.

● 2. Τὸ γινόμενον ὁμ. ἰσοτήτων εἶναι ὁμ. ἰσότης (3.1, 3).

Ἄρα: **Τὸ σύνολον τῶν ὁμ. ἰσοτήτων τοῦ Ἐπιπέδου ἀποτελεῖ ὁμάδα.**

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ: 7, 8
ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 23 - 31

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

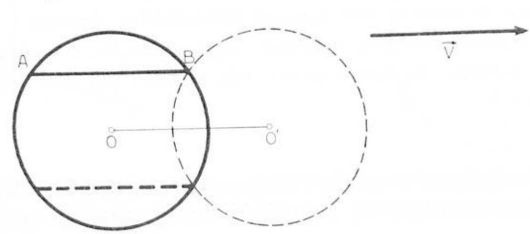
1. **Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ διάνυσμα $\vec{V}$. Νὰ κατασκευασθῇ χορδὴ ΑΒ οὕτως ὥστε:**

$$\overrightarrow{AB} = \vec{V}$$

Λύσις

Τὸ σημεῖον Β (σχ. 1) εἶναι ὁμόλογον τοῦ Α κατὰ τὴν μεταφορὰν $T[\vec{V}]$. Ἄρα ἀνήκει καὶ εἰς τὸν κύκλον (Ο′) ὁμόλογον τοῦ δοθέντος κατὰ τὴν ἐν

ΣΧ. 1



λόγῳ μεταφορὰν (Εἶναι $\overrightarrow{OO'} = \vec{V}$). Ὁρισθέντος τοῦ Β, τὸ Α ὁρίζεται διὰ τῆς

$$\overrightarrow{BA} = -\vec{V}$$

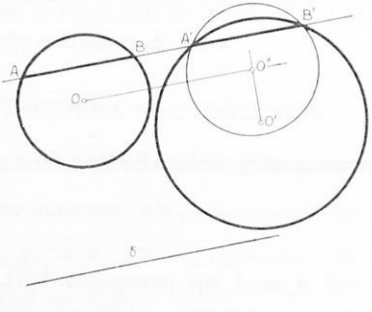
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἐπιλύεται τὸ γενικώτερον πρόβλημα, καθ' ὃ ἀντὶ τοῦ κύκλου (Ο), δίδονται τὰ σχήματα (F_1) καὶ (F_2) καὶ ζητεῖται ἡ κατασκευὴ τμήματος AB μὲ $A \in (F_1)$, $B \in (F_2)$ εἰς τρόπον ὥστε $B = t(A)$, ἔνθα t γνωστὸς μετασχηματισμός. Ὁρίζεται καὶ πάλιν τὸ B ὡς σημεῖον τομῆς τοῦ (F_2) καὶ τοῦ (F'_1), ὁμολόγου τοῦ (F_1) κατὰ τὸν t.

2. Νὰ ἀχθῇ τέμνουσα δύο δοθέντας κύκλους (O) καὶ (O΄), ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν, οὕτως ὥστε αἱ ὁριζόμεναι χορδαὶ νὰ εἶναι ἴσαι.

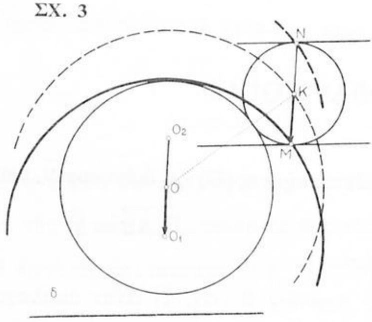
Λύσις

Ἡ μεταφορὰ $T[\overrightarrow{AA'}]$ μετασχηματίζει τὴν χορδὴν AB εἰς A΄B΄ (σχ. 2), τὸν δὲ κύκλον (O) εἰς (O΄΄). Οἱ κύκλοι (O΄) καὶ (O΄΄) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A΄ καὶ B΄. Ἄρα ἡ διάκεντρος OO΄΄ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Τὸ O΄΄ ὁρίζεται ὡς τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ἐκ τοῦ O΄ καθέτου καὶ τῆς ἐκ τοῦ O παραλλήλου πρὸς τὴν δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Ὁρισθέντος τοῦ O΄΄ κατασκευάζεται μὲ κέντρον O΄΄ κύκλος ἴσος πρὸς τὸν (O), ὅστις τέμνει τὸν (O) κατὰ τὰ σημεῖα A΄ καὶ B΄.

ΣΧ. 2



ΣΧ. 3



3. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν κύκλων (K) δοθείσης ἀκτῖνος r τῶν ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς δοθέντος σταθεροῦ κύκλου (O,R). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων (K) τῶν ἐχουσῶν δοθεῖσαν διεύθυνσιν δ.

Λύσις

Τὸ σημεῖον K διαγράφει κύκλον $(O, R+r)$. Εἰς κάθε κύκλον (K) ἀντιστοιχοῦν δύο ἀντιδιαμετρικὰ σημεῖα ἐπαφῆς M καὶ N, (σχ. 3), ὁμόλογα τοῦ κέντρου K κατὰ τὰς μεταφορὰς ἀντιστοίχως $T[\overrightarrow{KM}]$ καὶ $T[\overrightarrow{KN}]$. Ἀλλὰ τὰ ἀντίθετα διανύσματα $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$ εἶναι γνωστά, διότι ἔχουν διεύθυνσιν κάθετον πρὸς τὴν δοθεῖσαν δ εἶναι δέ: $KM = KN = r$.

Ἑπομένως, ἂν τεθῇ $\overrightarrow{KM} = \vec{\upsilon}$, τὸ σύνολον τῶν σημείων M εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ ὡς ἄνω κύκλου κατὰ τὴν $T[\vec{\upsilon}]$ τῶν δὲ σημείων N τὸ ὁμόλογον τοῦ αὐτοῦ κύκλου κατὰ τὴν $T[-\vec{\upsilon}]$. Ἤτοι, ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι οἱ κύκλοι $(O_1, R+r)$ καὶ $(O_2, R+r)$ ἔνθα $\overrightarrow{OO_1} = \vec{\upsilon} = -\overrightarrow{OO_2}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν οἱ κύκλοι (K) ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς τοῦ (O), τὸ κέντρον K διαγράφει τὸν κύκλον $(O, R-r)$ καὶ ὁ ζητούμενος γ.τ εἶναι οἱ δύο κύκλοι $(O_1, R-r)$ καὶ $(O_2, R-r)$.

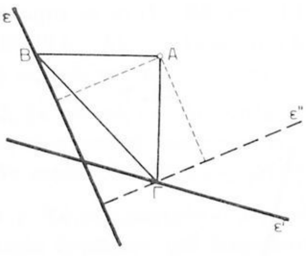
ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.—Ὁμοίως ἐπιλύεται τὸ γενικώτερον πρόβλημα τοῦ γ.τ. σημείου M, ὅταν εἶναι $M = t(K)$, ἔνθα t γνωστὸς μετασχηματισμός, ὁ δὲ γ.τ. τοῦ σημείου K εἶναι γνωστὸν σχῆμα (F).

4. **Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) δοθείσης κορυφῆς Α, οὕτως ὥστε αἱ ἄλλαι κορυφαί του Β καὶ Γ, νὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δοθεισῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄)** (σχ. 4).

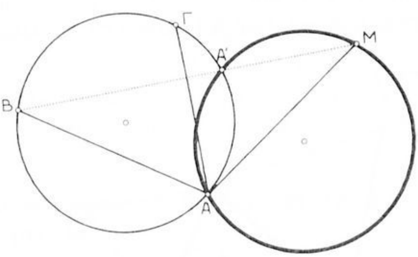
Λύσις

Τὸ σημεῖον Γ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Β κατὰ τὴν στροφὴν $r = \mathbf{R}\left[A, \pm\frac{\pi}{2}\right]$ ἄρα, ἀνήκει ἐκτὸς τῆς (ε΄) καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν (ε΄΄) ὁμόλογον τῆς (ε) κατὰ τὴν στροφὴν ταύτην. Κατασκευάζεται ὅθεν, ὡς τομὴ τῶν δύο ὡς ἄνω εὐθειῶν (ε΄) καὶ (ε΄΄) (δύο λύσεις, ἐν γένει).

ΣΧ. 4



ΣΧ. 5



5. **Ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο) διερχομένου διὰ σημείου Α θεωροῦμεν δύο μεταβλητὰ σημεῖα Β καὶ Γ εἰς τρόπον ὥστε : γων. εὐθ. (ΑΒ,ΑΓ) = α** (δοθεῖσα).

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ συμμετρικοῦ Μ τοῦ σημείου Β ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ.

2. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΜ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

Λύσις

● 1. Ἂν Μ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου, τότε :

$$AM = AB$$

καὶ $$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 2(AB, A\Gamma) = 2\alpha$$

Ἄρα τὸ Μ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Β κατὰ τὴν στροφὴν **R**[Α, 2α]. Ἑπομένως, τὸ σύνολον τῶν Μ εἶναι κύκλος (Ο′) ἴσος πρὸς τὸν δοθέντα, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον Ο′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο κατὰ τὴν ἀνωτέρω στροφήν.

● 2. Ἄν Α′ εἶναι τὸ ἄλλο σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων γνωρίζομεν (Θ. 2.6, 4), ὅτι ἡ εὐθεῖα ΒΜ τῶν ὁμολόγων σημείων διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α′.

6. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ′, ΒΓΑ′ καὶ ΓΑΒ′ ὁμοίως προσανατολισμένα. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ τμήματα ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ εἶναι ἴσα, ἀνὰ δύο σχηματίζουν γωνίαν $\frac{\pi}{3}$ καὶ διέρχονται διὰ σημείου Ο (Steiner), τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Α,Β,Γ′) (Β,Γ,Α′) καὶ (Γ,Α,Β′).

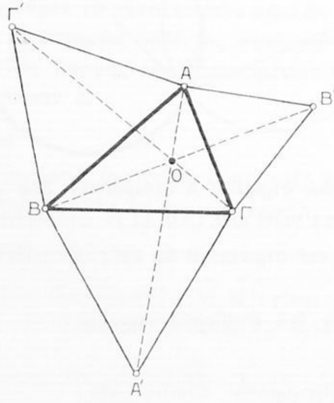
Λύσις

Ἡ στροφὴ $\mathbf{R}\left[A, \frac{\pi}{3}\right]$ μετασχηματίζει (σχ. 6) τὸ σημεῖον Γ′ εἰς Β τὸ δὲ Γ εἰς Β′. Ἄρα:

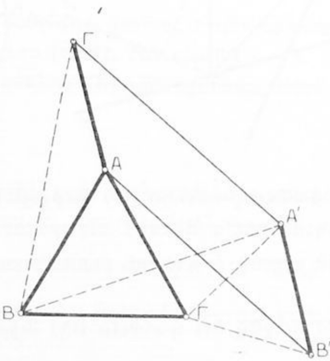
$$\Gamma\Gamma' = BB' \quad \text{καὶ} \quad (\overrightarrow{\Gamma'\Gamma}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{\pi}{3}$$

Ἔστω Ο τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν ΓΓ′ καὶ ΒΒ′. Τότε τὰ σημεῖα Γ′,Β,Α,Ο καὶ Γ,Β′,Α,Ο εἶναι συγκυκλικὰ (2.5).

ΣΧ. 6



ΣΧ. 7



Ὁμοίως προκύπτει, θεωροῦντες τὴν στροφὴν $R\left[B, \frac{\pi}{3}\right]$, ὅτι $AA' = \Gamma\Gamma'$, ἂν δὲ ἡ AA' τέμνῃ τὴν $\Gamma\Gamma'$ κατὰ τὸ σημεῖον O', τοῦτο εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (A,B,Γ') και (B,Γ,A'). Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ κύκλος (A,B,Γ') τέμνει τὴν $\Gamma'\Gamma$ κατὰ τὰ σημεῖα Γ' καὶ O, τὰ σημεῖα O' καὶ O συμπίπτουν.

7. **Θεωροῦμεν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Α΄. Κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα Α΄ΓΒ΄ καὶ ΒΑ΄Γ΄ ὁμοίως προσανατολισμένα πρὸς τὸ ΑΒΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον Α΄Β΄ΑΓ΄ εἶναι παραλληλόγραμμον.**

Ἀπόδειξις

Ἡ στροφὴ $\left[B, -\frac{\pi}{3}\right]$ (σχ. 7) μετασχηματίζει τὸ A εἰς Γ τὸ δὲ Γ' εἰς A', ἤτοι, τὸ $\overrightarrow{A\Gamma'}$ εἰς $\overrightarrow{\Gamma A'}$. Ἡ στροφὴ $\left[A', \frac{\pi}{3}\right]$ μετασχηματίζει τὸ $\overrightarrow{\Gamma A'}$ εἰς $\overrightarrow{B'A'}$.

Ἄρα, κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀνωτέρω στροφῶν, ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{A\Gamma'}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{B'A'}$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι μεταφορὰ (3.3, 3), ἐπειδὴ αἱ γωνίαι τῶν στροφῶν εἶναι ἀντίθετοι. Ἄρα:

$$\overrightarrow{A\Gamma'} = \overrightarrow{B'A'}$$

8. Η ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΣΗΜΕΙΟΝ

ΓΕΝΙΚΑ.—Εἰς τὸ Ἐπίπεδον, ἡ συμμετρία $\Sigma[O]$, ὡς πρὸς δοθὲν σημεῖον O (ἢ ὡς πρὸς κέντρον O), εἶναι ἡ στροφὴ κέντρου O καὶ γωνίας π (2.1, 4).

Ὡς ἐκ τούτου, ἐκ τῶν ἐκτεθέντων εἰς τὰς § 2 καὶ 3, εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν Ἐπίπεδον στροφήν, προκύπτουν, εἰδικώτερον διὰ $\theta = \pi$, τὰ ἀκόλουθα διὰ τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς σημεῖον :

● 1. Τὸ συμμετρικὸν (ὁμόλογον κατὰ συμμετρίαν) διανύσματος εἶναι διάνυσμα **ἀντίθετον** τοῦ θεωρουμένου (σχ. 8α).

● 2. Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας ἢ εὐθείας εἶναι ἀντιστοίχως ἡμιευθεῖα **ἀντίρροπος** ἢ εὐθεῖα **παράλληλος** τῆς θεωρουμένης.

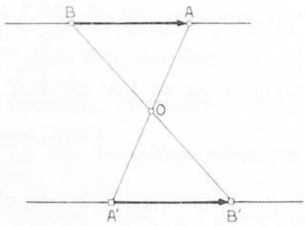
● 3. Ἂν αἱ πλευραὶ δύο τριγώνων ἢ πολυγώνων ὁρίζουν διανύσματα ἀντίθετα, τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς σημεῖον : Τὸ κοινὸν **μέσον τῶν τμημάτων** τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν ὁμολόγων κορυφῶν.

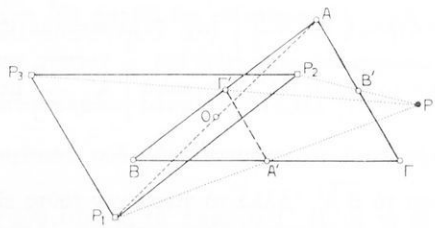
● 4. Τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς τὰ σημεῖα O_1 καὶ O_2 **εἶναι μεταφορὰ** (3.3, 3).

Σημειωτέον ὅτι, ἂν τὸ σημεῖον O_1, ἡνωμένον κατὰ τὴν $\Sigma[O_1]$, μετασχηματίζεται εἰς O' κατὰ τὴν $\Sigma[O_1]$, τότε $\overrightarrow{O_1O'} = 2\overrightarrow{O_1O_2}$ καὶ ἑπομένως τὸ διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς $\Sigma[O_2] \circ \Sigma[O_1]$ εἶναι $2\overrightarrow{O_1O_2}$

ΚΕΝΤΡΟΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ.—Ἕν σημεῖον Κ καλεῖται **κέντρον συμμετρίας** δοθέντος σχήματος, ἂν κατὰ τὴν $\Sigma[K]$ τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ἀναλλοίωτον. Οὕτω π.χ. κάθε σημεῖον τῆς μεσοπαραλλήλου δύο παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος αὐτῶν.

ΣΧ. 8 α β





ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ

Τὰ συμμετρικὰ P_1, P_2, P_3 τυχόντος σημείου Ρ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰ μέσα Α′, Β′, Γ′, τῶν πλευρῶν αὐτοῦ ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, εἶναι κορυφαὶ τριγώνου, συμμετρικοῦ τοῦ ΑΒΓ ὡς πρὸς σημεῖον.

Ἀπόδειξις

Τὸ P_1 εἶναι ὁμόλογον τοῦ P_3 (σχ. 8β) κατὰ τὸ γινόμενον $\Sigma[A'] \circ \Sigma[\Gamma']$ τὸ ὁποῖον εἶναι μεταφορὰ (4). Ἄρα :

$$\overrightarrow{P_3P_1} = 2\overrightarrow{\Gamma'A'} = -\overrightarrow{\Gamma A}$$

Ὁμοίως: $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{P_2P_3} = -\overrightarrow{B\Gamma}$

Ἄρα (3), τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ P_1, P_2, P_3 εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ κοινὸν μέσον Ο τῶν τμημάτων AP_1, BP_2, ΓP_3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε ὅτι ἡ μεταφορὰ μετασχηματίζει μίαν ἐφαπτομένην κύκλου, εἰς ἐφαπτομένην τοῦ ὁμολόγου του.

2. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος δοθείσης ἀκτῖνος, ὅστις διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου ὁρίζει ἐπὶ δοθείσης εὐθείας τμῆμα ἴσον πρὸς δοθέν.

3. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα ἴσον πρὸς δοθέν, ἔχον δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα εὑρίσκονται ἐπὶ δύο δοθέντων κύκλων ἢ εὐθειῶν ἢ ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος κύκλου.

4. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ τοῦ ὁποίου δίδονται τὰ μέσα Γ′ καὶ Β′ τῶν πλευρῶν του ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι σημεῖα δοθείσης εὐθείας καὶ δοθέντος κύκλου.

5. Νὰ κατασκευασθῇ τραπέζιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαγώνιοι, ἡ γωνία αὐτῶν καὶ μία πλευρὰ αὐτοῦ.

6. Νὰ κατασκευασθῇ τέμνουσα δύο δοθέντας κύκλους (Ο) καὶ (Ο′), ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν, τοιαύτη ὥστε αἱ ὁριζόμεναι χορδαὶ νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα ἢ δοθεῖσαν διαφοράν.

7. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης διευθύνσεωςτῶν κύκλων δοθείσης ἀκτῖνος, οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου.

8. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ τῶν ὁποίων ἡ κορυφὴ Β εἶναι σταθερά, ἡ κορυφὴ Γ εἶναι σημεῖον δοθείσης εὐθείας ΒΧ, ὁ δὲ περιγεγραμμένος κύκλος των ἔχει δοθεῖσαν ἀκτῖνα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Α.

9. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἑκατέρωθεν τῆς ὑπὸ δύο δοθεισῶν παραλλήλων (ε) καὶ (ε′) ὁριζομένης ταινίας. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα $M \in (\varepsilon)$ καὶ $M' \in (\varepsilon')$ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ΜΜ′ νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν, νὰ εἶναι δέ:
1. $AM = BM'$
2. $AM + MM' + M'B$ ἐλάχιστον.

10. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ χορδὴ ΑΒ αὐτοῦ. Ἂν Μ εἶναι μεταβλητὸν σημεῖον τοῦ (Ο), νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος:
1. τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΜΑΒ
2. τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο κύκλων (Μ, ΜΗ) καὶ (Η, ΗΜ).

11. Δείξατε ὅτι ἡ στροφὴ μετασχηματίζει μίαν ἐφαπτομένην κύκλου εἰς ἐφαπτομένην τοῦ ὁμολόγου του.

12. Ἰσόπλευρον τρίγωνον ἔχει μίαν σταθερὰν κορυφήν. Ἡ δευτέρα κορυφὴ διαγράφει δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἢ δοθέντα κύκλον. Ποῖος ὁ γ.τ. τῆς τρίτης κορυφῆς;

13. Νὰ κατασκευασθῇ ἰσοσκελὲς τρίγωνον τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ κορυφὴ Α, ἡ γωνία Α καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ τῆς βάσεως εἶναι σημεῖα δύο δοθέντων κύκλων, (ἢ εὐθειῶν ἢ εὐθείας καὶ κύκλου).

14. Κατασκευάσατε ἓν τετράγωνον, ἔχον τρεῖς κορυφὰς ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν.

15. Κατασκευάσατε ἓν ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ εὑρίσκονται ἐπὶ τριῶν δοθέντων ὁμοκέντρων κύκλων.

16. Δίδεται ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, ΑΒ∥ΓΔ. Ποία ἡ στροφή, καθ' ἣν ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{A\Delta}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$; ἢ $\overrightarrow{\Gamma B}$;

17. Ποῖον τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν στροφῶν, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζουν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) εἰς ἄλλην δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε΄);

18. Θεωροῦμεν ἡμίκυκλον διαμέτρου ΑΒ καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Γ ἐπ' αὐτοῦ. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΑΓ θεωροῦμεν σημεῖον Δ, ὥστε νὰ εἶναι ΑΔ = ΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Δ.

19. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ θεωροῦμεν σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως, ὥστε νὰ εἶναι ΒΜ = ΓΝ. Δείξατε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

20. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄) ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α. Ἕν σημεῖον Μ διαγράφει τὸν κύκλον (Ο) καὶ ἓν σημεῖον Μ΄ τὸν κύκλον (Ο΄), οὕτως ὥστε $(OM,\ O'M') = \frac{\pi}{2}$.

1. Δείξατε, ὅτι ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ΄ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου Ε.
2. Ἂν E_1 εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Ε ὡς πρὸς τὴν ΟΟ΄, M_1 τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὴν στροφὴν $\mathbf{R}\left[E_1, -\frac{\pi}{2}\right]$, δείξατε ὅτι ἡ $M'M_1$, διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

21. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ, τοιοῦτον ὥστε, ΑΒ > ΑΓ καὶ $(AB,\ A\Gamma) = \frac{\pi}{3}$. Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ σημεῖον Ν τῆς ΑΓ τοιαῦτα ὥστε ΒΜ = ΓΝ καὶ 2ΜΝ = ΒΓ.

22. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας (Οx, Οy) θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι: $OM + OM' = \lambda$ (λ δοθέν). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΟΜΜ΄.

23. Τὸ σύνολον τῶν στροφῶν τοῦ Ἐπιπέδου ἀποτελεῖ ὁμάδα;

24. Δείξατε ὅτι τὸ σύνολον τῶν στροφῶν τοῦ αὐτοῦ κέντρου Ο εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμάς.

25. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο στροφῶν $\mathbf{R}[O,\ \theta]$ καὶ $\mathbf{R}[O',\ -\theta]$. Τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἀντιμεταθετικόν;

26. Ποῖον εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο στροφῶν $\mathbf{R}\left[O_1, \frac{\pi}{2}\right]$ καὶ $\mathbf{R}\left[O_2, \frac{\pi}{2}\right]$;

27. Θεωροῦμεν τὰς στροφὰς $r_1 = \mathbf{R}[O_1,\theta_1]$ καὶ $r_2 = \mathbf{R}[O_2,\theta_2]$ μὲ $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$, ἔστω δὲ Ω τὸ κέντρον τῆς στροφῆς $r_2 \circ r_1$ καὶ Ω_1 τὸ ὁμόλογον τοῦ Ω κατὰ τὴν r_1.

1. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα O_1O_1 εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $\Omega\Omega_1$.
2. Κατασκευάσατε τὸ κέντρον Ω τοῦ γινομένου $r_2 \circ r_1$.
3. Κατασκευάσατε τὸ Ω, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἶναι μεταφορά.

28. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα, τοῦ ὁποίου μέσον εἶναι δοθὲν σημεῖον, τὰ δὲ ἄκρα του εἶναι σημεῖα δύο δοθέντων κύκλων (ἢ εὐθειῶν ἢ εὐθείας καὶ κύκλου).

29. Εἰς δοθὲν τετράπλευρον νὰ ἐγγραφῇ παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου δίδεται τὸ κέντρον.

30. Ἀποδείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς τρία σημεῖα Α, Β, Γ εἶναι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Δ, κορυφὴν τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

31. Δείξατε ὅτι σχῆμα, τὸ ὁποῖον περιέχεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν κύκλου, δὲν δύναται νὰ ἔχῃ δύο κέντρα συμμετρίας.

V. ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΙ ΙΣΟΤΗΤΕΣ ΟΜΑΣ ΤΩΝ ΙΣΟΤΗΤΩΝ

Ἐνταῦθα εἰσάγεται εἷς νέος βασικὸς μετασχηματισμὸς τοῦ Ἐπιπέδου: ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν. Ὡς θὰ ἴδωμεν κατωτέρω, ἡ συμμετρία **διατηρεῖ** μὲν **τὰ τμήματα**, ἀλλ᾽ ὄχι τὰς γωνίας. Συγκεκριμένως δέ, τὸ ὁμόλογον γωνίας εἶναι γωνία ἀντίθετος τῆς θεωρουμένης. Θὰ λέγωμεν συντόμως, ὅτι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν **ἀναστρέφει τὰς γωνίας.** Τὰ αὐτὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τὸ γινόμενον συμμετρίας καὶ ὁμορρόπου ἰσότητος, ἀφοῦ ἡ τελευταία αὕτη διατηρεῖ καὶ τὰ τμήματα καὶ τὰς γωνίας. Ἡ ἰδιότης τῆς διατηρήσεως τῶν τμημάτων καὶ ἀναστροφῆς τῶν γωνιῶν εἶναι χαρακτηριστικὴ τῶν ἀνωτέρω μετασχηματισμῶν, τοὺς ὁποίους θὰ καλέσωμεν **ἀντιρρόπους ἰσότητας.**

1. ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

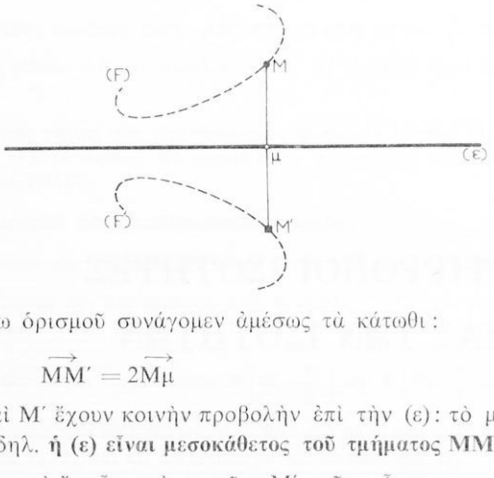
1.1 ΓΕΝΙΚΑ*

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Συμμετρία ὡς πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) (σχ. 1.1) **καλεῖται ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τυχὸν σημεῖον Μ, μὲ ὀρθὴν προβολὴν ἐπὶ τὴν (ε) ἔστω μ, ἔχει ὡς ὁμόλογον τὸ σημεῖον Μ΄, τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης :**

$$\overrightarrow{\mu M'} = -\overrightarrow{\mu M} \qquad (1)$$

Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην συμμετρίαν συμβολίζομεν Σ[ε].
Ἡ εὐθεῖα (ε) καλεῖται καὶ **ἄξων** τῆς συμμετρίας. Χρησιμοποιοῦμεν τὸν γνωστὸν ὅρον «συμμετρικὸν» (σημείου, σχήματος κλπ.) ἀντὶ τοῦ «ὁμόλογον κατὰ συμμετρίαν».

ΣΧ. 1.1



Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν ἀμέσως τὰ κάτωθι :

● 1. Εἶναι : $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{M\mu}$

Τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ ἔχουν κοινὴν προβολὴν ἐπὶ τὴν (ε) : τὸ μέσον μ τοῦ τμήματος ΜΜ΄ δηλ. **ἡ (ε) εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος ΜΜ΄.**

● 2. Οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον Μ΄, τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ἑνὸς μοναδικοῦ σημείου Μ, μάλιστα δὲ τὸ Μ, ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (1), εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ΄. Ὥστε ἡ συμμετρία Σ[ε] εἶναι μετασχηματισμὸς **ἀμφιμονοσήμαντος** καὶ ἴσος πρὸς τὸν ἀντίστροφον αὐτοῦ. Συμβολικῶς :

$$\Sigma^{-1}[\varepsilon] = \Sigma[\varepsilon]$$

Ὥστε (ΙΙΙ, 1.8) :

Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν εἶναι μετασχηματισμὸς ἐνελεικτικὸς

* Τὰ ἐκτιθέμενα εἰς τὴν § 1.1 ἰσχύουν καὶ εἰς τὸν Χῶρον.

● 3. Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι **ἀναλλοίωτος σημεῖον πρὸς σημεῖον.** Ἐκτὸς δὲ τῶν σημείων τῆς (ε) οὐδὲν ἄλλο σημεῖον εἶναι ἡνωμένον.

● 4. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ κεῖνται ἐπὶ καθέτου πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε), μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν (ε), εἶναι **συνολικῶς ἀναλλοίωτος.**

● 5. Κάθε κύκλος μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς (ε) εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος.

1.2 ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΩΝ

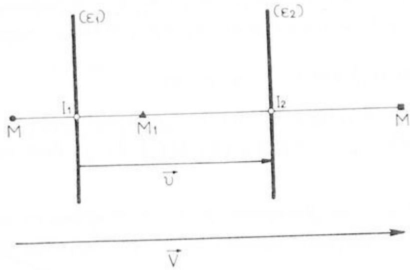
Εἰς τὸ Ἐπίπεδον, θεωροῦμεν τὰς εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) (σχ. 1.2,1 καὶ 2). Διὰ τῆς συμμετρίας $\Sigma[\varepsilon_1]$ τυχὸν σημεῖον Μ μετασχηματίζεται εἰς M_1, τοῦτο δὲ ἐν συνεχείᾳ διὰ τῆς $\Sigma[\varepsilon_2]$, εἰς M_2. Οὕτω τὸ ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν $\Sigma[\varepsilon_2]\circ\Sigma(\varepsilon_1)$ εἶναι τὸ M_2.

Διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

● **1. Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) εἶναι παράλληλοι**

Ἂν I_1 καὶ I_2 εἶναι τὰ μέσα τῶν τμημάτων MM_1 καὶ M_1M_2 ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν (σχ.1.2,1) :

ΣΧ. 1.2,1



$$\overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{I_1M_1} \qquad (1.1,\ 1)$$

καὶ
$$\overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1I_2}$$

ἐκ τῶν ὁποίων διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει :

$$\overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{I_1I_2}$$

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{I_1I_2}$ εἶναι διὰ κάθε Μ ἴσα πρὸς σταθερὸν διάνυσμα $\vec{\upsilon}$ μὲ ἀρχὴν καὶ πέρας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) καὶ κάθετον πρὸς αὐτάς.

Ἄρα : $\overrightarrow{MM_2} = 2\,\vec{\upsilon}$

Οὕτω, τὸ σημεῖον M_2 ἐμφανίζεται ὡς ὁμόλογον τοῦ M καὶ κατὰ τὴν μεταφορὰν $T[2\vec{\upsilon}]$. Ἄρα (III, 1.7) :

$$\Sigma[\varepsilon_2] \circ \Sigma[\varepsilon_1] = T[2\vec{\upsilon}]$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν :

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.—Τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθείας παραλλήλους εἶναι μεταφορά.

Ἀντιστρόφως : Ἔστω μεταφορὰ $T[\vec{V}]$. Θεωρήσωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) καθέτους ἐπὶ τὸ διάνυσμα $\vec{V}$ τῆς μεταφορᾶς καὶ τοιαύτας ὥστε ἡ (ε_1) νὰ μετασχηματίζεται εἰς (ε_2) διὰ μεταφορᾶς, διανύσματος $\vec{\upsilon} = \dfrac{\vec{V}}{2}$ (ἑπομένως ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἐκλέγεται αὐθαιρέτως) (σχ. 1.2, 1). Τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα : $\Sigma[\varepsilon_2] \circ \Sigma[\varepsilon_1] = T\left[2\dfrac{\vec{V}}{2}\right] = T[\vec{V}]$

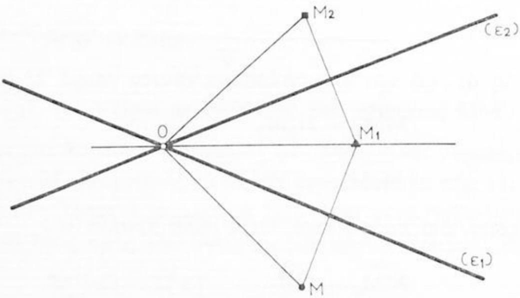
Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.—Μία μεταφορὰ δύναται, κατ᾽ ἀπείρους τρόπους, νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθείας παραλλήλους.

● **2. Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνονται**

Ἄν O εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν (ε_1) καὶ (ε_2) (σχ. 1.2, 2) τοῦτο εἶναι ἡνωμένον σημεῖον τῶν συμμετριῶν $\Sigma[\varepsilon_1]$, $\Sigma[\varepsilon_2]$, ἄρα καὶ τοῦ γινομένου των $\Sigma[\varepsilon_2] \circ \Sigma[\varepsilon_1]$.

ΣΧ. 1.2, 2



Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων OMM_1 καὶ OM_1M_2 προκύπτουν τὰ ἑξῆς :

$$OM = OM_1 = OM_2$$

ἤτοι $$OM = OM_2 \tag{1}$$

καὶ
$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_2}) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$$
$$= 2(\varepsilon_1, OM_1) + 2(OM_1, \varepsilon_2) \quad | \text{III}, 3.2, 1\beta |$$
$$= 2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \qquad (2)$$

Ἑπομένως, ὡς προκύπτει ἐκ τῶν (1) καὶ (2), τὸ M_2 εἶναι ὁμόλογον τοῦ M καὶ κατὰ τὴν στροφὴν $\mathbf{R}[O, 2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$. Ἄρα:

$$\Sigma[\varepsilon_2] \circ \Sigma[\varepsilon_1] = \mathbf{R}[O, 2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)]$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ I.—Τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθείας τεμνομένας εἶναι στροφὴ μὲ κέντρον τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν καὶ γωνίαν διπλασίαν τῆς γωνίας αὐτῶν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Τὸ γινόμενον τῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς δύο εὐθείας καθέτους, εἶναι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ σημεῖον τομῆς των.

Ἀντιστρόφως: Ἔστω στροφὴ $\mathbf{R}[O, \theta]$. Θεωρήσωμεν δύο εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) διερχομένας διὰ τοῦ κέντρου τῆς στροφῆς O καὶ τοιαύτας ὥστε $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \dfrac{\theta}{2}$ (ἑπομένως ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἐκλέγεται αὐθαιρέτως) (σχ. 1.2, 2). Τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα:

$$\Sigma[\varepsilon_2] \circ \Sigma[\varepsilon_1] = \mathbf{R}\left[O, 2\frac{\theta}{2}\right] = \mathbf{R}[O, \theta]$$

Ὥστε:

ΘΕΩΡΗΜΑ II.—Μία στροφὴ δύναται νὰ θεωρηθῇ, κατ᾽ ἀπείρους τρόπους, ὡς τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθείας διερχομένας διὰ τοῦ κέντρου της.

● Πάντα τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν ὡς ἑξῆς:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἵνα μετασχηματισμὸς τοῦ Ἐπιπέδου εἶναι ὁμόρροπος ἰσότης πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον δύο συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθεῖαν.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Τὸ γινόμενον τῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς **2κ (κ ∈ ℕ)** εὐθείας εἶναι ὁμόρροπος ἰσότης.

1.3 ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΩΣ ΠΡΟΣ ΕΥΘΕΙΑΝ

Λόγῳ τῆς ἐνελεικτικότητος τῆς συμμετρίας ἰσχύει τὸ ἑξῆς:

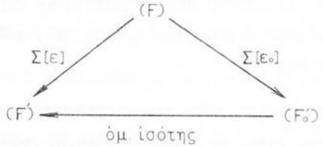
ΘΕΩΡΗΜΑ.— Μία συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ε) δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον συμμετρίας ὡς πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε_0) καὶ τῆς ὁμορρόπου ἰσότητος $\Sigma[\varepsilon] \circ \Sigma[\varepsilon_0]$

Πράγματι :

$$\begin{aligned}(\Sigma[\varepsilon] \circ \Sigma[\varepsilon_0]) \circ \Sigma[\varepsilon_0] &= \Sigma[\varepsilon] \circ (\Sigma[\varepsilon_0] \circ \Sigma[\varepsilon_0]) \\ &= \Sigma[\varepsilon] \circ t^0 \qquad (1.1,\ 2) \\ &= \Sigma[\varepsilon].\end{aligned}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.— Τὰ συμμετρικὰ (F′), (F'_0) τοῦ αὐτοῦ σχήματος (F) ὡς πρὸς δύο εὐθείας (ε) καὶ (ε_0) ἀντιστοίχως, εἶναι σχήματα ὁμορρόπως ἴσα.

ΣΧ. 1.3



Τὰ ἀνωτέρω εἶναι ἰδιαιτέρως χρήσιμα διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ συμμετρικοῦ (F′) ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ε) ἑνὸς σχήματος (F). Πρὸς τοῦτο ἐκλέγομεν μίαν εὐθεῖαν (ε_0) ὡς πρὸς τὴν ὁποίαν τὸ συμμετρικὸν (F'_0) τοῦ δοθέντος σχήματος (F) νὰ δύναται νὰ ὁρισθῇ εὐχερῶς. Ἐν συνεχείᾳ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ (F'_0) διὰ τῆς ὁμ. ἰσότητος $d = \Sigma[\varepsilon] \circ \Sigma[\varepsilon_0]$ εἰς τὸ ζητούμενον (F′).

Ἐπὶ τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω προκύπτουν τά, ἤδη γνωστά, συμπεράσματα τῆς ἑπομένης παραγράφου.

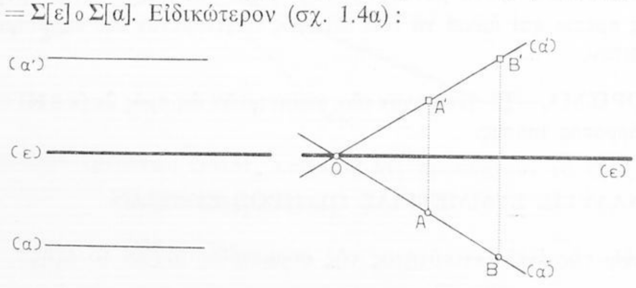
1.4 ΟΜΟΛΟΓΑ ΑΠΛΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

Κατὰ μίαν συμμετρίαν Σ[ε] :

● 1. Τὸ συμμετρικὸν εὐθείας (α) εἶναι **εὐθεῖα** (α′).

Πρὸς ἀπόδειξιν, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ὡς (ε_0) τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (α). Ἡ (α), ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν Σ[α], μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν (α′) διὰ τῆς ὁμ. ἰσότητος $d = \Sigma[\varepsilon] \circ \Sigma[\alpha]$. Εἰδικώτερον (σχ. 1.4α) :

ΣΧ. 1.4α



a. ἂν (α) || (ε) τότε ὁ μετασχηματισμὸς d εἶναι μεταφορὰ καὶ (α′) || (α) ἡ δὲ (ε) εἶναι **μεσοπαράλληλος** τῶν (α) καὶ (α′).

b. ἂν (α) τέμνῃ τὴν (ε) εἰς σημεῖον Ο, τότε d = **R**[Ο, 2(α,ε)] καὶ ἡ (α′) διέρχεται διὰ τοῦ Ο ἡ δὲ (ε) εἶναι ἡ μία **διχοτόμος** τῆς γωνίας (α, α′).

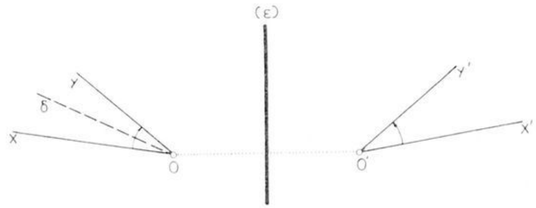
● 2. Τὸ συμμετρικὸν τμήματος ΑΒ εἶναι τμῆμα Α′Β′ **ἴσον** πρὸς τὸ ΑΒ. (Λαμβάνομεν ὡς (ε_0) τὴν εὐθεῖαν ΑΒ).

Ὥστε: **Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν διατηρεῖ τὰ τμήματα.**

● 3. Τὸ συμμετρικὸν ἡμιευθείας ΑΧ εἶναι ἡμιευθεῖα Α′Χ′.

● 4. Τὸ συμμετρικὸν γωνίας (ΟΧ, ΟΥ) εἶναι γωνία (Ο′Χ′, Ο′Υ′) **ἀντίθετος** τῆς (ΟΧ, ΟΥ) (σχ. 1.4β).

ΣΧ. 1.4β

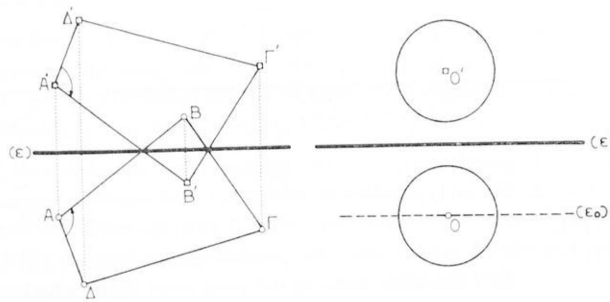


Πράγματι, τὸ συμμετρικὸν τῆς (ΟΧ, ΟΥ) ὡς πρὸς τὴν διχοτόμον αὐτῆς δ εἶναι ἡ γωνία (ΟΥ, ΟΧ) ἀντίθετος τῆς θεωρουμένης.

Ἄρα: **Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν ἀναστρέφει τὰς γωνίας.** Συνεπῶς, **διατηρεῖ** τὴν καθετότητα καὶ παραλληλίαν εὐθειῶν.

● 5. Τὸ συμμετρικὸν τριγώνου ἢ πολυγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνον ἢ πολύγωνον ἀντιρρόπως ἴσον τοῦ θεωρουμένου (ὁμόλογοι πλευραὶ ἴσαι, ὁμόλογοι γωνίαι ἀντίθετοι) (σχ. 1.4γ).

ΣΧ. 1.4γ



● 6. Τὸ συμμετρικὸν κύκλου Ο εἶναι κύκλος (Ο′) **ἴσος** πρὸς τὸν (Ο). (Λαμβάνομεν ὡς (ε_0) τυχοῦσαν εὐθεῖαν διὰ τοῦ κέντρου Ο) (σχ. 1.4γ).

Τὰ κέντρα τῶν συμμετρικῶν κύκλων εἶναι συμμετρικὰ σημεῖα.

1.5 ΑΞΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ ΣΧΗΜΑΤΟΣ

Μία εὐθεῖα (δ) καλεῖται **ἄξων συμμετρίας** δοθέντος σχήματος, ἂν τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν Σ[δ].

Ἂν δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἶναι ἄξονες συμμετρίας σχήματος, τότε (1.2, 2 Πορ.) τὸ σημεῖον τομῆς των εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος (IV, ἐφ. 8).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 1 - 4
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 1 - 14

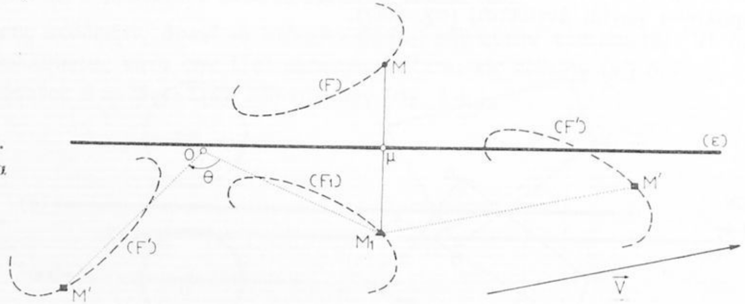
2. ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΣ ΙΣΟΤΗΣ

2.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Εἰς τὸ Ἐπίπεδον, τὸ γινόμενον συμμετρίας ὡς πρὸς εὐθεῖαν καὶ ὁμορρόπου ἰσότητος καλεῖται ἀντίρροπος ἰσότης.

Τὸ ὁμόλογον (F′) κατὰ ἀντίρροπον ἰσότητα ἑνὸς σχήματος (F), καλεῖται **ἀντιρρόπως ἴσον** αὐτοῦ, εἶναι δὲ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς σχῆμα (F_1), συμμετρικὸν τοῦ (F) ὡς πρὸς εὐθεῖαν (σχ. 2.1α)

ΣΧ. 2.1α



$R[O,\theta] \circ \Sigma[\varepsilon]$ $\qquad$ $T[\vec{V}] \circ \Sigma[\varepsilon]$

Συνεπῶς, ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● 1. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας ἢ ἡμιευθείας κατὰ ἀντίρροπον ἰσότητα εἶναι ἀντιστοίχως εὐθεῖα ἢ ἡμιευθεῖα.

● 2. Ἡ ἀντίρροπος ἰσότης **διατηρεῖ τὰ τμήματα,** ἐνῶ **ἀναστρέφει τὰς γωνίας. Διατηρεῖ,** ἑπομένως, τὴν καθετότητα καὶ παραλληλίαν εὐθειῶν.

● 3. Κατὰ μίαν ἀντίρροπον ἰσότητα τὸ ὁμόλογον κύκλου εἶναι κύκλος ἴσος πρὸς τὸν θεωρούμενον.

Δυνάμεθα ἀκόμη νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς:

● 1. Μία συμμετρία σ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον $t^0 \circ \sigma$. Ἄρα: **Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν εἶναι ἀντίρροπος ἰσότης.**

● 2. Ἐπίσης ἀντίρροποι ἰσότητες εἶναι (1.2 Πορ.):

Τὸ γινόμενον $2\kappa+1$ ($\kappa \in \mathbb{N}$) συμμετριῶν, ὡς καὶ τὸ γινόμενον μιᾶς ὁμορρόπου ἰσότητος καὶ μιᾶς συμμετρίας (ἀνάγεται εἰς τὸ γινόμενον τριῶν συμμετριῶν).

Ἐξ ἄλλου, μία ἀντίρροπος ἰσότης δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον τριῶν συμμετριῶν (2.1). Ἄρα:

Ἵνα μετασχηματισμὸς εἶναι ἀντίρροπος ἰσότης πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσοῦται πρὸς γινόμενον τριῶν συμμετριῶν ὡς πρὸς εὐθεῖαν.

● 3. Ἔστω ἡ ἀντίρροπος ἰσότης q, γινόμενον τῆς συμμετρίας σ καὶ τῆς ὁμ. ἰσότητος d: $q = d \circ \sigma$

Αὕτη, ὡς γινόμενον ἀμφιμονοσημάντων μετασχηματισμῶν, εἶναι μετασχηματισμὸς **ἀμφιμονοσήμαντος** μὲ ἀντίστροφον (III, 2.1, Πορ. 4):

$$q^{-1} = \sigma^{-1} \circ d^{-1} = \sigma \circ d^{-1}$$

Ὥστε: **ὁ ἀντίστροφος ἀντιρρόπου ἰσότητος εἶναι ἀντίρροπος ἰσότης.**

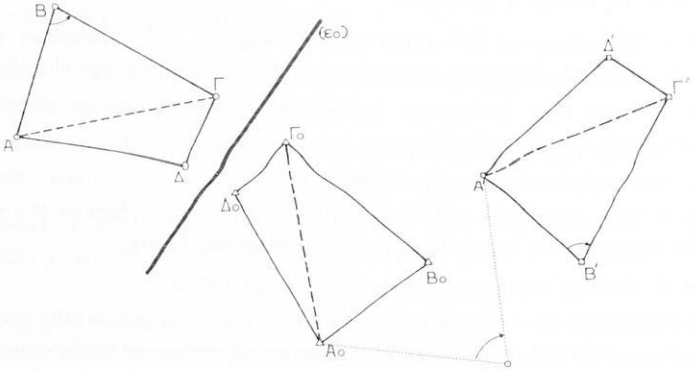
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς τῶν ἀντιρρόπως ἴσων σχημάτων, ὡς ὁμολόγων κατὰ ἀντίρροπον ἰσότητα, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τρίγωνα ἢ πολύγωνα, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν διδόμενον διὰ τὰ σχήματα ταῦτα γνωστὸν ὁρισμὸν (ὁμόλογοι πλευραὶ ἴσαι, γωνίαι ἀντίθετοι).

Πράγματι δύο ὁμόλογα κατὰ ἀντίρροπον ἰσότητα τρίγωνα ἢ πολύγωνα ἔχουν ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας καὶ γωνίας ἀντιθέτους (Πορ. 2). Ἀντιστρόφως: Ἂν (Π) καὶ (Π΄) εἶναι τρίγωνα ἢ πολύγωνα ΑΒΓ... καὶ Α΄Β΄Γ΄..., ἀντιστοίχως (σχ. 2.1β), μὲ ὁμολόγους πλευρὰς ἴσας καὶ γωνίας ἀντιθέτους δύνανται νὰ καταστοῦν ὁμόλογα κατὰ μίαν ἀντίρροπον ἰσότητα.

Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν (Π_0) τοῦ (Π) ὡς πρὸς τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε_0). Δυνάμεθα τότε (IV, 3.2, Παρ. 2) νὰ μετασχηματίσωμεν τὸ (Π_0) εἰς (Π') κατὰ μίαν ὁμ. ἰσότητα d. Ἄρα τὸ (Π') εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Π) κατὰ τὴν ἀντίρροπον ἰσότητα $d_0\Sigma[\varepsilon_0]$.

ΣΧ.
2,1β



2.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΥ ΙΣΟΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

● Ἔστω ἡ ἀντίρροπος ἰσότης q καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων. Εἶναι (2.1, Πορ. 2):

$$AB = A'B' \tag{1}$$

ἂν δὲ M′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου M θὰ εἶναι ἐπίσης:

$$A'M' = AM \tag{2}$$

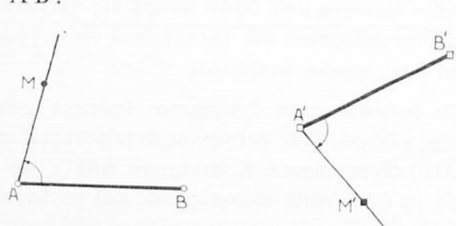
καὶ

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \tag{3}$$

Αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι ἀρκοῦν διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ M′. Πράγματι διὰ τῆς (3) ὁρίζεται ἡ ἡμιευθεῖα A′M′, ἀρχῆς A′, ἐπὶ τῆς ὁποίας, διὰ τῆς (1), ὁρίζεται τελικῶς τὸ σημεῖον M′ (σχ. 2.2).

Θὰ λέγωμεν συντόμως ὅτι τὸ σημεῖον M′ ὡρίσθη **βάσει** τῶν ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$.

ΣΧ.
2.2



● Ἀντιστρόφως θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δοθέντων τῶν ἴσων τμημάτων AB καὶ A′B′ ὁ μετασχηματισμὸς q, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον M′ τυχόντος σημείου M ὁρίζεται ἀπὸ τὰς συνθήκας (2) καὶ (3), εἶναι ἀντίρροπος ἰσότης.

Ἀπόδειξις

Ἔστω (ε) **τυχοῦσα** εὐθεῖα. Διὰ τῆς $\sigma = \Sigma[\varepsilon]$, τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μετασχηματίζεται εἰς $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Εἶναι: $A_1B_1 = AB$

καὶ λόγῳ τῆς (1): $A_1B_1 = A'B'$

Ἑπομένως ὑπάρχει ὁμ. ἰσότης d ἥτις μετασχηματίζει τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ κατὰ τὴν ἀντ. ἰσότητα $d \circ \sigma$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$.

Ἐξ ἄλλου τὸ ὁμόλογον M″ τοῦ σημείου M, κατὰ τὴν ὡς ἄνω ἀντ. ἰσότητα, ὁριζόμενον **βάσει** τῶν ὁμολόγων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, λόγω τῶν (2) καὶ (3) συμπίπτει μὲ τὸ M′.

Ἄρα:

$$q = d \circ \sigma$$

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

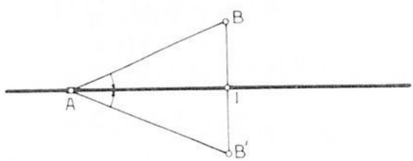
● **1. Δύο ἀντίρροποι ἰσότητες ἔχουσαι κοινὰ δύο ζεύγη (A,A′) καὶ (B,B′) ὁμολόγων σημείων, εἶναι ἴσαι.**

● **2. Μία ἀντίρροπος ἰσότης δύναται νὰ θεωρηθῇ, κατ᾽ ἀπείρους τρόπους, ὡς τὸ γινόμενον συμμετρίας αὐθαιρέτου ἄξονος καὶ ὁμ. ἰσότητος.**

● **3. Μία ἀντίρροπος ἰσότης ἔχουσα ἓν ἡνωμένον σημεῖον A εἶναι συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ A** (σχ. 2.2, 3).

Πράγματι θὰ ἔχῃ ἡνωμένον καὶ τὸ μέσον I τοῦ τμήματος BB′ τοῦ ὁριζομένου ἀπὸ τυχὸν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων ἄρα (Πορ. 1) ἰσοῦται πρὸς τὴν συμμετρίαν ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AI.

**ΣΧ.
2.2, 3**



● 4. Ἂν **μετασχηματισμὸς διατηρῇ τὰ τμήματα καὶ ἀναστρέφῃ τὰς γωνίας, οὗτος εἶναι ἀντ. ἰσότης.**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● 1. Μία ἀντ. ἰσότης εἶναι μετασχηματισμὸς ἐν γένει διάφορος τῆς συμμετρίας, διότι δύναται νὰ ὁρισθῇ ἀπὸ δύο τμήματα ἴσα ἀλλὰ **μὴ** συμμετρικά.

● 2. Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἀντ. ἰσότητος εἶναι ὅτι διατηρεῖ τὰ τμήματα καὶ ἀναστρέφει τὰς γωνίας.

2.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΥ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

Θεωροῦμεν συμμετρίαν σ ὡς πρὸς εὐθεῖαν (ε), ὁμόρ. ἰσότητα d καὶ τὴν ἀντίρροπον ἰσότητα:

$$q = d \circ \sigma \tag{1}$$

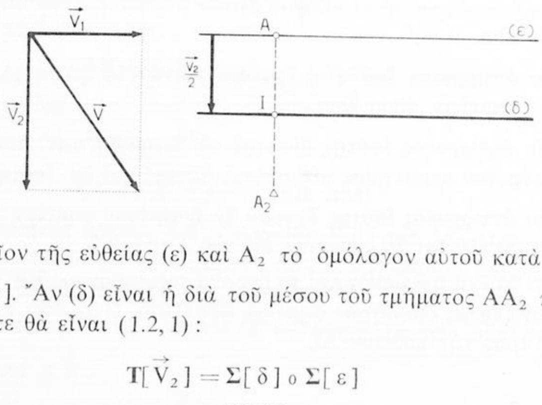
Διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

● **1. Ἡ d εἶναι μεταφορὰ** $\mathbf{T}[\vec{V}]$

Ἀναλύομεν τὸ διάνυσμα $\vec{V}$ εἰς ἄθροισμα δύο διανυσμάτων $\vec{V}_1 \parallel (\varepsilon)$ καὶ $\vec{V}_2 \perp (\varepsilon)$. Εἶναι (IV, 1.7) :

$$\mathbf{T}[\vec{V}] = \mathbf{T}[\vec{V}_1] \circ \mathbf{T}[\vec{V}_2] \tag{2}$$

ΣΧ. 2.3, 1



Ἔστω Α σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) καὶ A_2 τὸ ὁμόλογον αὐτοῦ κατὰ τὴν μεταφορὰν $\mathbf{T}[\vec{V}_2]$. Ἂν (δ) εἶναι ἡ διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος AA_2 παράλληλος τῆς (ε), τότε θὰ εἶναι (1.2, 1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}[\vec{V}_2] &= \Sigma[\delta] \circ \Sigma[\varepsilon] \\ &= \Sigma[\delta] \circ \sigma \end{aligned} \tag{3}$$

Ἄρα ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) προκύπτει :

$$\begin{aligned} q &= \mathbf{T}[\vec{V}] \circ \sigma \\ &= \mathbf{T}[\vec{V}_1] \circ \Sigma[\delta] \circ \sigma \circ \sigma \\ &= \mathbf{T}[\vec{V}_1] \circ \Sigma[\delta] \end{aligned} \tag{4}$$

Ὥστε, ἡ ἀντίρροπος ἰσότης q ἀνάγεται εἰς γινόμενον συμμετρίας καὶ μεταφορᾶς, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα εἶναι παράλληλον τοῦ ἄξονος τῆς συμμετρίας.

Σημειωτέον ὅτι ἂν $\vec{V} \perp (\varepsilon)$ τότε $q = \Sigma[\delta]$ $(\vec{V}_1 = \vec{0})$.

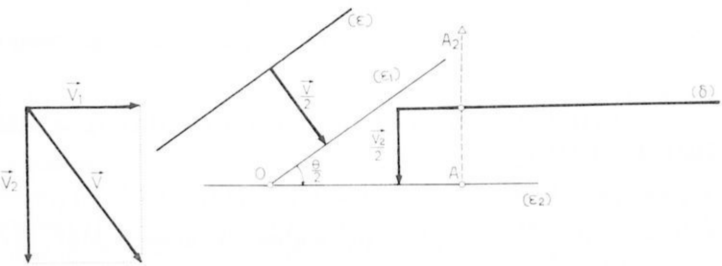
● **2. Ἡ d εἶναι στροφὴ $R[O, \theta]$**

Ἀναλύομεν τὴν στροφὴν $R[O,\theta]$ εἰς γινόμενον δύο συμμετριῶν σ_1 καὶ σ_2 ὡς πρὸς εὐθείας (ε_1) καὶ (ε_2) ἀντιστοίχως, ἐκλέγοντες τὴν (ε_1) παράλληλον τῆς (ε). Τότε εἶναι :

$$\begin{aligned} q &= (\sigma_2 \circ \sigma_1) \circ \sigma \\ &= \sigma_2 \circ (\sigma_1 \circ \sigma) \\ &= \sigma_2 \circ \mathbf{T}[\vec{V}] \end{aligned}$$

Σημειωτέον ὅτι, ἂν $O \in (\varepsilon)$ τότε $q = \sigma_2$

ΣΧ.
2.3, 2



Τὸ γινόμενον $\sigma_2 \circ T[\vec{V}]$ ἀνάγεται ὅπως καὶ εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν ὡς δεικνύεται καὶ εἰς τὸ σχ. 2.3, 2. | A_2 εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ $A \in (\varepsilon_2)$ κατὰ τὴν $T[-\vec{V}_2]$

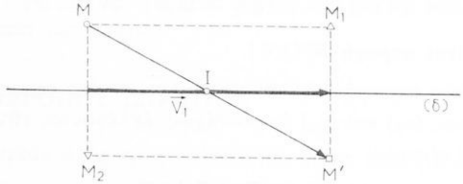
Εἶναι :

$$\begin{aligned} q &= \sigma_2 \circ \mathbf{T}[\vec{V}] \\ &= \sigma_2 \circ \mathbf{T}[\vec{V}_2] \circ \mathbf{T}[\vec{V}_1] \\ &= \sigma_2 \circ \sigma_2 \circ \mathbf{\Sigma}[\delta] \circ \mathbf{T}[\vec{V}_1] \\ &= \mathbf{\Sigma}[\delta] \circ \mathbf{T}[\vec{V}_1] \end{aligned} \qquad (5)$$

Ὥστε, ἡ ἀντίρροπος ἰσότης q ἀνάγεται εἰς γινόμενον μεταφορᾶς καὶ συμμετρίας, τῆς ὁποίας ὁ ἄξων εἶναι παράλληλος τοῦ διανύσματος τῆς μεταφορᾶς.

● Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ εἰς πᾶσαν περίπτωσιν $\vec{V}_1 \parallel (\delta)$, τὸ γινόμενον (4) ἢ (5), εἰς τὸ ὁποῖον ἀνάγεται μία ἀντ. ἰσότης, εἶναι ἀντιμεταθετικὸν (σχ. 2.3, 3).

ΣΧ. 2.3, 3



Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Μία ἀντίρροπος ἰσότης δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἀντιμεταθετικὸν γινόμενον μιᾶς συμμετρίας καὶ μιᾶς μεταφορᾶς, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα εἶναι παράλληλον τοῦ ἄξονος τῆς συμμετρίας.

Ὁ ἄξων τῆς συμμετρίας καὶ τὸ διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς καλοῦνται **ἄξων** καὶ **διάνυσμα** τῆς ἀντιρρόπου ἰσότητος.

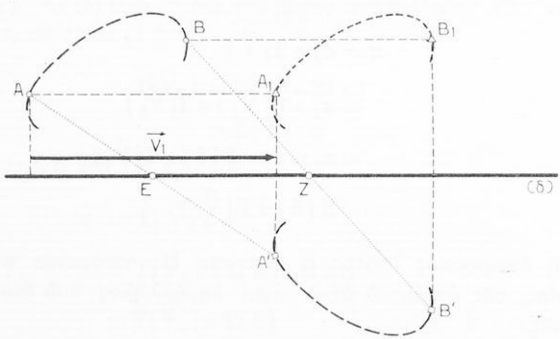
ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΤΟΥ ΑΞΟΝΟΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΥ ΙΣΟΤΗΤΟΣ

Ὡς προκύπτει ἐκ τῶν προηγουμένων (σχ. 2.3, 3):

α. Ὁ ἄξων τῆς συμμετρίας περιέχει τὰ μέσα τῶν τμημάτων MM′, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ ζεύγη ὁμολόγων σημείων.

β. Ἡ προβολὴ ἐπὶ τὸν ἄξονα (δ) τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{MM'}$, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ δύο τυχόντα ὁμόλογα σημεῖα ἰσοῦται μὲ τὸ διάνυσμα τῆς μεταφορᾶς.

ΣΧ. 2.3, 4



Ἄρα, ὅταν δίδωνται δύο ὁμόλογα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τῆς ἀντιρ. ἰσότητος, τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν τμημάτων ΑΑ′ καὶ ΒΒ′ ὁρίζουν τὸν ἄξονα, ἡ δὲ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{AA'}$ (ἢ $\overrightarrow{BB'}$) ἐπὶ τὸν ἄξονα ὁρίζει τὸ διάνυσμα αὐτῆς (σχ. 2.3, 4).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ὁ ἄξων (δ) διχοτομεῖ μίαν τῶν γωνιῶν (A_1B_1, Α′Β′) (1.4, 1b), ἐπειδὴ δὲ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$, θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον μιᾶς τῶν γωνιῶν (ΑΒ, Α′Β′).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : 5
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 15 - 19

3. ΙΣΟΤΗΣ

3.1 Η ΟΜΑΣ ΤΩΝ ΙΣΟΤΗΤΩΝ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

Αἱ ἰσότητες, ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι, διατηροῦν ὡς εἴδομεν τὰ τμήματα. Προσέτι δέ:

● Τὸ γινόμενον δύο ἀντ. ἰσοτήτων διατηρεῖ καὶ τὰς γωνίας, ἤτοι εἶναι ὁμ. ἰσότης (IV, 3.2 Πορ. 2), τὸ δὲ γινόμενον μιᾶς ὁμ. καὶ μιᾶς ἀντ. ἰσότητος ἀναστρέφει τὰς γωνίας, ἤτοι εἶναι ἀντ. ἰσότης (2.2 Πορ. 4). Ἐπίσης (3.4), τὸ γινόμενον δύο ὁμ. ἰσοτήτων εἶναι ὁμ. ἰσότης. Ἐξ ἄλλου:

● Ὁ ἀντίστροφος ἰσότητος εἶναι ἰσότης (IV, 1.2 καὶ 2.2, V, 1.1, 2). Ἄρα:

Τὸ σύνολον τῶν ἰσοτήτων τοῦ Ἐπιπέδου εἶναι ὁμάς.

3.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ

Ἡ ἰδιότης τῆς διατηρήσεως τῶν τμημάτων εἶναι χαρακτηριστικὴ τῶν ἰσοτήτων. Πράγματι:

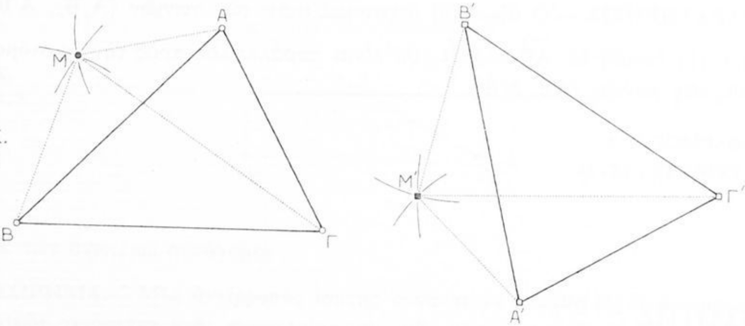
Ἔστω μετασχηματισμὸς e διατηρῶν τὰ τμήματα καὶ ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων τριγώνων. Εἶναι:

$$AB = A'B' \quad B\Gamma = B'\Gamma' \quad \Gamma A = \Gamma' A'$$

Ἄρα, τὰ τρίγωνα εἶναι ἢ ὁμορρόπως ἢ ἀντιρρόπως ἴσα. Ὑπάρχει, λοιπόν, ὁμ. ἢ ἀντ. ἰσότης b, καθ' ἣν τὰ τρίγωνα ταῦτα εἶναι ὁμόλογα.

Πρέπει νὰ δείξωμεν ὅτι e = b. Πράγματι τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου M, τόσον κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν e ὅσον καὶ κατὰ τὸν b, ὁριζόμενον ἀπὸ τὰς συνθήκας $A'M' = AM$ $B'M' = BM$ καὶ $\Gamma'M' = \Gamma M$, εἶναι τὸ σημεῖον, καθ᾽ ὃ οἱ τρεῖς κύκλοι (A', AM) (B', BM) καὶ $(\Gamma', \Gamma M)$ τέμνονται.

ΣΧ. 3.2



Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα μετασχηματισμὸς εἶναι ἰσότης πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διατηρῇ τὰ τμήματα.

3.3. ΙΣΟΤΗΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΙΣ

Διὰ τῶν μετασχηματισμῶν ἰσότητος ἑρμηνεύεται γεωμετρικῶς, ἡ καθαρῶς ἐποπτικὴ ἔννοια τῆς μετατοπίσεως τοῦ Ἐπιπέδου ἐφ᾽ ἑαυτοῦ, ἡ ὁποία μετατόπισις, ἀντιστρόφως, δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ἐποπτικὴ εἰκὼν διὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς ἰσότητος. Οὕτω:

- Μία οἱαδήποτε «ὀλίσθησις» τοῦ Ἐπιπέδου ἐφ᾽ ἑαυτοῦ, δυναμένη νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀποτέλεσμα ἀλλεπαλλήλων στοιχειωδῶν «παραλλήλων μετατοπίσεων» (μεταφορῶν) καὶ περιστροφῶν τοῦ Ἐπιπέδου περὶ ἀκίνητον σημεῖον (στροφῶν), εἶναι ἡ ἐποπτικὴ εἰκὼν τῆς ὁμ. ἰσότητος (IV, 3.1).

- Μία «ἀναστροφὴ» τοῦ Ἐπιπέδου περὶ ἀκίνητον εὐθεῖαν εἶναι ἡ ἐποπτικὴ εἰκὼν τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς εὐθεῖαν. Τέλος ἡ ἀντίρροπος ἰσότης, ἐποπτικῶς, εἶναι ἡ ὀλίσθησις ἑνός, προηγουμένως ἀναστραφέντος περὶ εὐθεῖαν, Ἐπιπέδου (2.1).

Ἐξ ἄλλου, εἰς ὅ,τι ἀφορᾷ τὴν ἐποπτικὴν ἑρμηνείαν τῆς ἰσότητος σχημάτων (IV, 3.1 καὶ V, 2.1) παρατηροῦμεν ὅτι ἴσα σχήματα εἶναι ὅσα δύνανται νὰ ἀχθοῦν εἰς σύμπτωσιν διὰ μιᾶς τῶν ἀνωτέρω μετατοπίσεων τοῦ Ἐπιπέδου, εἰδικώτερον δέ:

● Τὰ ὁμορρόπως ἴσα σχήματα δι᾽ ὀλισθήσεως τοῦ Ἐπιπέδου ἐφ᾽ἑαυτοῦ, ἥτις δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ διὰ μιᾶς μόνης μεταφορᾶς ἢ στροφῆς (IV, 3.2 Πορ. 1).

● Τὰ ἀντιρρόπως ἴσα σχήματα ὡς προηγουμένως, ἀλλ᾽ ἀφοῦ προηγηθῇ ἀναστροφὴ τοῦ Ἐπιπέδου. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἡ ὀλίσθησις δύναται νὰ εἶναι (2.3) μία μεταφορὰ παραλλήλως πρὸς τὴν εὐθεῖαν, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ ἀναστροφή.

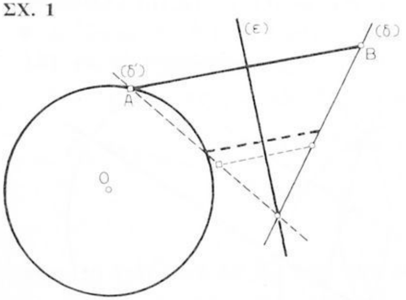
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. **Δίδονται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα (δ). Νὰ ὁρισθῇ σημεῖον Α τοῦ (Ο) καὶ σημεῖον Β τῆς (δ), ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ νὰ ἔχῃ μεσοκάθετον, δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).**

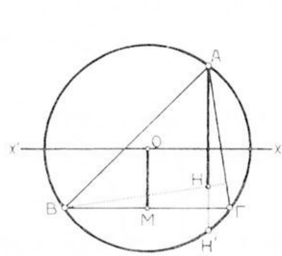
Λύσις

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Β ὡς πρὸς τὴν (ε) (σχ. 1), θὰ ἀνήκῃ εἰς τὴν εὐθεῖαν (δ΄) συμμετρικὴν τῆς (δ) ὡς πρὸς τὴν (ε). Ἄρα κατασκευάζεται, ὡς σημεῖον τομῆς τῶν (δ΄) καὶ (Ο).

ΣΧ. 1



ΣΧ. 2



2. **Εἰς πᾶν τρίγωνον ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀπὸ τὴν ἔναντι τῆς κορυφῆς πλευράν.**

Ἀπόδειξις

Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ (σχ. 2). Τὸ συμμετρικὸν Η΄ τοῦ ὀρθοκέντρου Η ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΒΓ ἀνήκει εἰς τὸν περιγεγραμμένον κύκλον (Ο) τοῦ τριγώνου. Τὸ δὲ συμμετρικὸν τοῦ Η΄ ὡς πρὸς τὴν x΄Ox, παράλληλον τῆς ΒΓ, εἶναι τὸ σημεῖον Α.

Ἄρα τὸ Η μετασχηματίζεται εἰς Α διὰ τοῦ γινομένου: $\Sigma[x'x] \circ \Sigma[B\Gamma]$ τὸ ὁποῖον (1.2, 1) εἶναι μεταφορὰ κατὰ διάνυσμα $2\overrightarrow{MO}$.

Ὥστε: $$\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{MO}$$

3. ΕΥΘΕΙΑΙ STEINER ΚΑΙ SIMSON ΤΡΙΓΩΝΟΥ

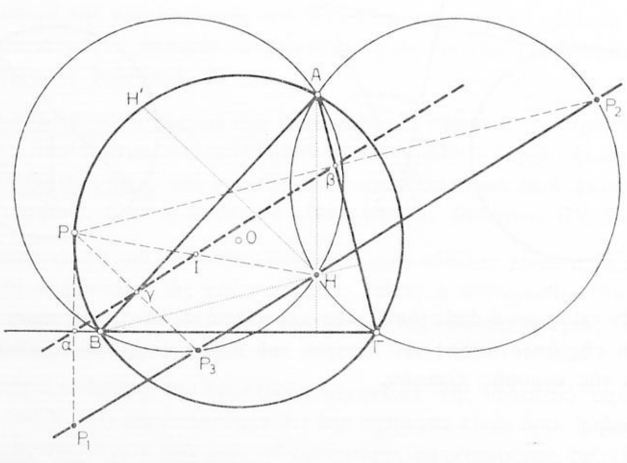
1. Τὰ συμμετρικὰ P_1, P_2, P_3, τυχόντος σημείου P τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοίχως, κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας (Steiner) διερχομένης διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου.

2. Αἱ προβολαὶ τοῦ P ἐπὶ τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ, κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας (Simson) ἥτις διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος PH.

Ἀπόδειξις

● 1. Τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου Η ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ εἶναι ὡς γνωστὸν σημεῖα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου (Ο). Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν ΑΒ μετασχηματίζει (σχ. 2) τὸ σημεῖον P_3 εἰς P τὸν δὲ κύκλον (Α,Β,Η) εἰς (Α,Β,Η΄), δηλ. εἰς (Ο). Ὁμοίως ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΑΓ μετασχηματίζει τὸ μὲν P εἰς P_2 τὸν δὲ κύκλον (Ο) εἰς (Α,Η,Γ). Οὕτω κατὰ

ΣΧ. 3



τὸ γινόμενον τῶν δύο συμμετριῶν, τὸ ὁποῖον εἶναι (1.2, 2) ἡ στροφὴ

R[A, 2(AB, AΓ)] ὁμόλογον τοῦ P_3 εἶναι τὸ P_2 τοῦ δὲ κύκλου (A,H,B) ὁ κύκλος (A,H,Γ). Ἄρα (IV, 2.6, 4) ἡ εὐθεῖα P_2P_3 διέρχεται διὰ τοῦ κοινοῦ σημείου H τῶν ἀνωτέρω κύκλων, ἤτοι τὰ P_2, P_3, H εἶναι ἐπ' εὐθείας.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ σημεῖα P_1, P_2, H, εἶναι ἐπ' εὐθείας. Οὕτω τὰ σημεῖα P_1, P_2, P_3 καὶ H κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας (Steiner).

● 2. Αἱ προβολαὶ τοῦ σημείου P ἐπὶ τὰς BΓ, ΓΑ, AB εἶναι τὰ μέσα α,β,γ, τῶν τμημάτων PP_1, PP_2, PP_3 ἄρα, τὰ σημεῖα ταῦτα, ὡς καὶ τὸ μέσον I τοῦ τμήματος PH, κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Simson), παραλλήλου τῆς εὐθείας Steiner $P_1P_2P_3H$.

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ.— Οἱ κύκλοι (A,B,H) (B,Γ,H) (Γ,A,H) συμμετρικοὶ τοῦ (A,B,Γ) εἶναι ἴσοι πρὸς αὐτὸν (Carnot).

4. **Ἐπὶ τῶν πλευρῶν BΓ, ΓΑ, AB ὀξυγωνίου τριγώνου ABΓ θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Δ, E, Z ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι :**

1. Ὅταν τὸ Δ εἶναι σταθερόν, ἡ περίμετρος τοῦ μεταβλητοῦ τριγώνου ΔEZ εἶναι ἐλαχίστη, ὅταν ἡ EZ διέρχεται ἀπὸ τὰ συμμετρικὰ M καὶ N τοῦ Δ ὡς πρὸς τὰς AB καὶ AΓ ἀντιστοίχως.

2. Ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΔEZ εἶναι ἐλαχίστη, ὅταν τὰ σημεῖα Δ, E καὶ Z εἶναι οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ABΓ.

Ἀπόδειξις

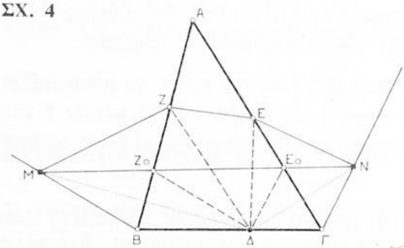
● 1. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα MN τέμνει τὰς πλευρὰς AB καὶ AΓ τοῦ τριγώνου ABΓ εἰς τὰ σημεῖα Z_0 καὶ E_0 ἀντιστοίχως (σχ. 4). Εἶναι :

$$\begin{aligned} \text{Περίμ. } \Delta EZ &= \Delta E + EZ + Z\Delta \\ &= NE + EZ + ZM > MN = MZ_0 + Z_0E_0 + E_0N \\ &\qquad = \Delta Z_0 + Z_0E_0 + E_0\Delta \\ &\qquad = \text{Περίμ. } \Delta E_0Z_0 \end{aligned}$$

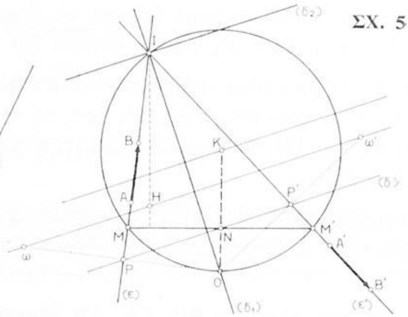
ἤτοι, τὸ τρίγωνον ΔE_0Z_0 ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

● 2. Ὅταν τὸ Δ εἶναι σταθερόν, ἡ ἐλαχίστη περίμετρος εἶναι τὸ τμῆμα MN. Ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν διὰ τὰς διαφόρους θέσεις τοῦ Δ τὸ ἐλάχιστον τμῆμα MN. Ἐπειδὴ Δ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB καὶ N εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Δ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AΓ, τὸ N θὰ εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ M κατὰ τὴν στροφὴν Σ[AΓ] ∘ Σ[AB] = R[A, 2(AB, AΓ)]. Ἑπομένως, τὸ τμῆμα MN εἶναι βάσις ἰσοσκελοῦς τριγώνου AMN μὲ γωνίαν κορυφῆς σταθεράν. Ἡ βάσις MN εἶναι ἐλαχίστη συγχρόνως μὲ τὰς ἄλλας του πλευρὰς ἤτοι, ὅταν AM⊥BM ἢ AΔ⊥BΓ. Ἄρα ἡ κορυφὴ Δ τοῦ ἔχοντος τὴν ἐλαχίστην περίμετρον τριγώνου εἶναι ὁ ποὺς τοῦ ὕψους ΑΔ. Τότε αἱ ἄλλαι κορυφαί του εἶναι ἀναγκαίως οἱ πόδες τῶν ἄλλων ὑψῶν, διότι, ἄλλως θὰ ὑπῆρχε τρίγωνον μὲ μικροτέραν περίμετρον.

ΣΧ. 4



ΣΧ. 5



5. ΙΣΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΕΥΘΕΙΩΝ

Θεωρήσωμεν (σχ. 5) ἐπὶ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε΄) ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, ὥστε νὰ εἶναι :

$$AB = A'B' \qquad (1)$$

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα $M \in (\varepsilon)$ καὶ $M' \in (\varepsilon')$ ὁρίζουν **ἴσας διαιρέσεις** ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν ἄν :

$$AM = A'M' \text{ καὶ } BM = B'M' \qquad (2)$$

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, λόγῳ τῆς (1) ὁρίζουν δύο ἰσότητας, μίαν ὁμόρροπον καὶ μίαν ἀντίρροπον, καθ' ἃς λόγῳ τῶν (2) τὸ σημεῖον M΄ εἶναι ὁμόλογον τοῦ M. Ἑπομένως :

● 1. **Τὰ μέσα τῶν τμημάτων MM΄ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας** (δ), ἡ ὁποία (2.3 Παρ.), εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν διχοτόμον (δ_2) τῆς γωνίας (ε, ε΄). (Ἂν εἰδικώτερον, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{A'B'}$, τὰ μέσα συμπίπτουν εἰς τὸ κέντρον O τῆς ὑπὸ τῶν διανυσμάτων τούτων ὁριζομένης συμμετρίας ὡς πρὸς σημεῖον).

● 2. **Ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{MM'}$ ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι σταθερὸν διάνυσμα.**

Ἔστω ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον I. Τότε :

● 3. **Οἱ περὶ τὰ τρίγωνα IMM΄ κύκλοι (K) διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου :** Τοῦ κέντρου O τῆς ὑπὸ τῶν AB καὶ A΄B΄ ὁριζομένης στροφῆς (IV, 2.5). Ἐπίσης:

● 4. **Αἱ μεσοκάθετοι τῶν τμημάτων MM΄ διέρχονται διὰ τοῦ σταθεροῦ σημείου O,** μέσου τοῦ τόξου MM΄, διότι (IV, 2.6,3) ἡ IO εἶναι ἡ μία διχοτόμος (δ_1) τῆς γωνίας (ε, ε΄).

● 5. Ἔστωσαν P,P′, αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ τοῦ Ο ἐπὶ τὰς εὐθείας (ε) καὶ (ε′) καὶ ω, ω′ τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ο ὡς πρὸς τὰς ἀνωτέρω εὐθείας. Αἱ σταθεραὶ εὐθεῖαι PP′ καὶ ωω′ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι Simson καὶ Steiner τοῦ τριγώνου IMM′ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον Ο. Ἄρα ἡ μὲν PP′ περιέχει καὶ τὴν προβολὴν τοῦ Ο ἐπὶ τὴν MM′, ἤτοι τὸ μέσον τοῦ τμήματος MM′ καὶ ἐπομένως εἶναι ἡ ἀνωτέρω εὐθεῖα (δ), ἡ δὲ ωω′ περιέχει τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου IMM′. Σημειωτέον ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν μίαν διχοτόμον (δ_1) τῆς γωνίας (ε,ε′), ἄρα εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ἄλλην διχοτόμον (δ_2). Εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΙΟ ἀνήκουν καὶ τὰ κέντρα Κ τῶν κύκλων (I,M,M′). Οὕτω δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν (ἡ συμπλήρωσις τῆς ἀποδείξεως ἀφίεται ὡς ἄσκησις) ὅτι:

Οἱ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ τμήματος MM′ τοῦ ὀρθοκέντρου καθὼς καὶ τοῦ κέντρου τοῦ περὶ τὸ τρίγωνον IMM′ κύκλου, εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν μίαν τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας (ε,ε′).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δείξατε ὅτι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν μετασχηματίζει μίαν ἐφαπτομένην κύκλου εἰς ἐφαπτομένην τοῦ ὁμολόγου του.

2. Νὰ κατασκευασθῇ τμῆμα μὲ ἄκρα ἐπὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἢ κύκλων τοιοῦτον ὥστε, δοθεῖσα εὐθεῖα νὰ εἶναι μεσοκάθετος αὐτοῦ.

3. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν δίδωνται αἱ πλευραί του β καὶ γ καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

4. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ, ὁ πούς Α′ τοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς Α ὕψους καὶ ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

5. Δίδονται εὐθεῖα (ε) καὶ δύο κύκλοι (O_1) καὶ (O_2). Νὰ κατασκευασθῇ σημεῖον $M \in (\varepsilon)$, ὥστε ἡ (ε) νὰ εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν δύο διὰ τοῦ Μ ἐφαπτόμεναι, μία τοῦ (O_1) καὶ μία τοῦ (O_2).

6. Δίδονται εὐθεῖα (ε) καὶ τὰ σχήματα (F_1) καὶ (F_2), ἕκαστον τῶν ὁποίων εἶναι εὐθεῖα ἢ κύκλος. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνον ΑΒΓΔ τοιοῦτον ὥστε: $A \in (F_1)$, $\Gamma \in (F_2)$ καὶ $B, \Delta \in (\varepsilon)$.

7. Θεωροῦμεν ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ μεταβλητὴν εὐθεῖαν (ε) διὰ τοῦ Α. Ἂν Γ′ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ Γ ὡς πρὸς τὴν (ε) καὶ Μ τὸ σημεῖον, καθ' ὃ ἡ ΒΓ′ τέμνει τὴν (ε), νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων Γ′ καὶ Μ.

8. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε_1) καὶ (ε_2) τεμνόμεναι εἰς τὸ Ο, σημεῖον Ρ τοῦ ἐπιπέδου των καὶ μεταβλητὴ διὰ τοῦ Ρ εὐθεῖα (δ). Ἂν αἱ συμμετρικαὶ τῆς (δ) ὡς πρὸς τὰς (ε_1) καὶ (ε_2) τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Μ, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ.

9. Δείξατε ὅτι ἂν σχῆμα (F) ἔχῃ δύο ἄξονας συμμετρίας, τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι $\frac{\pi}{\nu}$, ὑπάρχουν ν στροφαί, καθ' ἃς τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι ἀναλλοίωτον.

10. Δίδονται εὐθεῖα (ε) καὶ τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ὁρίσατε σημεῖον Μ τῆς (ε), τοιοῦτον ὥστε ἡ (ε) νὰ διχοτομῇ μίαν τῶν γωνιῶν (ΜΑ, ΜΒ). Δείξατε ὅτι τότε τὸ ἄθροισμα ΜΑ+ΜΒ εἶναι ἐλάχιστον, ἂν τὰ σημεῖα εἶναι πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς (ε), ἄλλως ἡ διαφορὰ ΜΑ-ΜΒ εἶναι μεγίστη.

11. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον, ὅταν δίδωνται αἱ εὐθεῖαι αἱ περιέχουσαι τὰς διχοτόμους του καὶ ἓν σημεῖον μιᾶς τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

12. Τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας (ε). Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ Ρ σημεῖον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου του.

1. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.
2. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ὅταν δοθῇ καὶ τὸ μέσον Ν τῆς πλευρᾶς ΑΒ.

13. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον τῶν στροφῶν: r_1 κέντρου Α καὶ γωνίας 2(ΑΓ, ΑΒ), r_2 κέντρου Β καὶ γωνίας 2(ΒΑ, ΒΓ) καὶ r_3 κέντρου Γ καὶ γωνίας 2(ΓΒ, ΓΑ), εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.

14. Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον δύο στροφῶν ἢ μιᾶς στροφῆς καὶ μιᾶς μεταφορᾶς, δι' ἀναλύσεως ἑκάστου τῶν παραγόντων εἰς γινόμενον δύο συμμετριῶν, εἰς τρόπον ὥστε δύο τῶν ἀξόνων συμμετρίας νὰ συμπίπτουν.

15. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Νὰ ἀναχθῇ ὁ μετασχηματισμὸς $\Sigma[\Gamma\Delta]\circ\Sigma[B\Gamma]\circ\Sigma[AB]$ εἰς γινόμενον συμμετρίας καὶ μεταφορᾶς. Ἂν Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον σημείου τινὸς Μ, ποία ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{MM'}$ ἐπὶ τὴν ΒΓ;

16. Εὕρετε ὅλας τὰς ἰσότητας, καθ' ἃς δοθὲν ἰσόπλευρον τρίγωνον εἶναι ἀναλλοίωτον. Ἀποδείξατε ὅτι αὗται ἀποτελοῦν ὁμάδα.

17. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι (Ο) καὶ (Ο′), τὰ σταθερὰ σημεῖα $A\in(O)$ καὶ $A'\in(O')$ καὶ τὰ μεταβλητὰ σημεῖα $M\in(O)$ καὶ $M'\in(O')$ τοιαῦτα ὥστε: $(AO, AM) = -(A'O', A'M')$.

1. Δείξατε ὅτι ὁ γ.τ. τῶν μέσων τῶν τμημάτων ΜΜ′ περιέχεται εἰς εὐθεῖαν (δ). Νὰ καθορισθῇ ὁ τόπος οὗτος.
2. Ἔστωσαν Ν καὶ Ν′ τὰ σημεῖα, καθ' ἃ αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ Α′Μ′ τέμνουν τὴν (δ). Δείξατε ὅτι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{NN'}$ εἶναι σταθερόν.

18. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Διὰ μεταβλητοῦ σημείου Ρ τῆς ΒΓ ἄγονται αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ΑΓ, ΑΒ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′.

1. Δείξατε ὅτι τὰ Μ καὶ Μ′ διαγράφουν ἴσας διαιρέσεις ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ.
2. Εὕρετε τὸν γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΜΜ′, τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς καὶ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΑΜΜ′.

19. Θεωροῦμεν δύο ἄξονας x′Ox καὶ y′Oy καὶ εὐθεῖαν (δ) παράλληλον πρὸς τὴν μίαν διχοτόμον τῆς γωνίας (x′x, y′y). Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα Μ τοῦ ἄξονος x′Ox καὶ Μ′ τοῦ y′Oy διαγράφουν ἴσας διαιρέσεις ἐπὶ τῶν ἀξόνων τούτων, ἂν πληροῦται μία τῶν κάτωθι συνθηκῶν:

1. Τὸ ἄθροισμα $\overline{OM}+\overline{OM'}$ ἢ ἡ διαφορὰ $\overline{OM}-\overline{OM'}$ εἶναι σταθερά.
2. Τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΜΜ′ ἢ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΟΜΜ′ ἢ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου (Ο,Μ,Μ′), διαγράφει τὴν (δ).
3. Ἡ προβολὴ τοῦ $\overrightarrow{MM'}$ ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι σταθερὸν διάνυσμα.

VI. ΟΜΟΙΟΤΗΤΕΣ

Αἱ **ὁμοιότητες,** τὰς ὁποίας ἐξετάζομεν εἰς τὸ παρὸν κεφάλαιον ἔχουν, ὡς θὰ ἴδωμεν, τὴν ἑξῆς χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα : **Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων τμημάτων εἶναι σταθερός,** καλεῖται δὲ λόγος τῆς ὁμοιότητος. Ὑπὸ τὴν ἔννοιαν αὐτὴν ἡ ὁμοιότης ἀποτελεῖ γενίκευσιν τῆς ἰσότητος ἥτις, ὡς εἴδομεν, εἶναι ὁμοιότης μὲ λόγον 1. Αἱ ὁμοιότητες, ὡς καὶ αἱ ἰσότητες θὰ διακριθοῦν εἰς ὁμορρόπους ἢ ἀντιρρόπους, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως διατηροῦν ἢ ἀναστρέφουν τὰς γωνίας. Ἡ ἵδρυσις τῶν ὁμοιοτήτων ἐπιτυγχάνεται διὰ τῆς εἰσαγωγῆς ἑνὸς νέου βασικοῦ μετασχηματισμοῦ, τῆς **ὁμοιοθεσίας** καὶ τῆς συνθέσεως αὐτοῦ μὲ τοὺς ἤδη ἐξετασθέντας μετασχηματισμοὺς ἰσότητος.

1. ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑ *

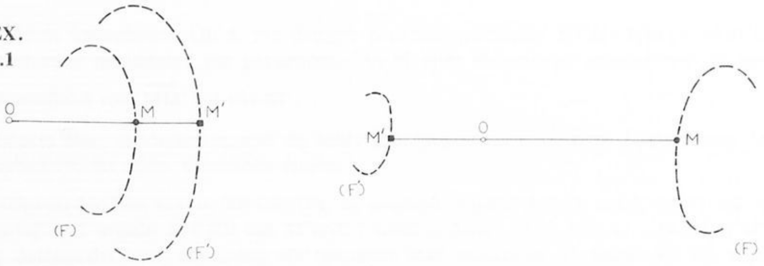
1.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἔστωσαν σταθερὸν σημεῖον Ο καὶ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\lambda \neq 0$. **Ὁμοιοθεσία, κέντρου Ο καὶ λόγου λ, καλεῖται ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης :**

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην ὁμοιοθεσίαν συμβολίζομεν: **Η**[Ο,λ]. Χρησιμοποιοῦμεν τὸν συντομώτερον ὅρον «ὁμοιόθετον» ἀντὶ τοῦ «ὁμόλογον κατὰ ὁμοιοθεσίαν». Θὰ λέγωμεν π.χ. τὸ ὁμοιόθετον σημείου, διανύσματος, σχήματος κλπ.

ΣΧ.
1.1



Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα (σχ. 1.1) :

● 1. Τὰ σημεῖα Ο, Μ, Μ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας. Εἰδικώτερον δέ :
Ἄν $\lambda > 0$, τὰ σημεῖα Μ,Μ′ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο. Ἡ ὁμοιοθεσία καλεῖται τότε **ὁμόρροπος** ἢ θετική.
Ἄν $\lambda < 0$, τὰ σημεῖα Μ, Μ′ κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο. Ἡ ὁμοιοθεσία καλεῖται τότε **ἀντίρροπος** ἢ ἀρνητική.

● 2. Ἄν $\lambda = 1$, τότε ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $M' = M$ καὶ ἡ ὁμοιοθεσία **Η**[Ο, 1] εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμὸς t^0. Ὥστε : ὁ t^0 **δύναται νὰ θεωρῆται ὁμοιοθεσία αὐθαιρέτου κέντρου καὶ λόγου 1.**

● 3. Ἄν $\lambda = -1$ ἡ (1) γράφεται :

$$\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$$

* Τὰ ἐκτιθέμενα εἰς τὴν § 1 ἰσχύουν καὶ εἰς τὸν Χῶρον.

καὶ ἡ ὁμοιοθεσία Η[Ο, —1] εἶναι ἡ **συμμετρία** Σ[Ο] **ὡς πρὸς κέντρον** Ο ἤ, ὅπερ τὸ αὐτό, **ἡ στροφὴ** R[Ο,π].

● 4. Τὸ κέντρον Ο τῆς ὁμοιοθεσίας εἶναι προφανῶς **ἡνωμένον** σημεῖον.

● 5. Ἡ (μὴ ταυτοτικὴ) ὁμοιοθεσία ($\lambda \neq 1$), ἐκτὸς τοῦ κέντρου, δὲν ἔχει ἄλλα ἡνωμένα σημεῖα.

1.2 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ

Ἡ συνθήκη : $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$ (1)

γράφεται ἰσοδυνάμως : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{\lambda} \overrightarrow{OM'}$ (1′)

ἑπομένως, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον Μ′, τοῦτο εἶναι ὁμοιόθετον ἑνὸς μοναδικοῦ σημείου Μ : τοῦ ὁριζομένου ἀπὸ τὴν (1′). Μάλιστα δέ, ὡς δεικνύει ἡ (1′), τὸ Μ εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Μ′ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν $\mathbf{H}\left[O, \dfrac{1}{\lambda}\right]$. Ἑπομένως, ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς τῆς **Η**[Ο,λ], εἶναι ἡ $\mathbf{H}\left[O, \dfrac{1}{\lambda}\right]$. Συμβολικῶς :

$$\mathbf{H}^{-1}[O,\lambda] = \mathbf{H}\left[O, \frac{1}{\lambda}\right]$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι μετασχηματισμὸς ἀμφιμονοσήμαντος. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμὸς ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁμοιοθεσία, ἥτις ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ λόγον ἀντίστροφον τοῦ λόγου τῆς θεωρουμένης.

1.3 ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο, Μ, Μ′ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σχ. 1.3), ἂν εὐθεῖα διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου Ο, εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος. Καὶ ἀντιστρόφως

ΣΧ. 1.3

ἂν εὐθεῖα (ε) εἶναι ἀναλλοίωτος τότε $M \in (\varepsilon) \Rightarrow M' \in (\varepsilon)$. Ἄρα καὶ τὸ Ο, σημεῖον τῆς εὐθείας ΜΜ′, ἀνήκει εἰς τὴν (ε).

Ὥστε:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Ἵνα εὐθεῖα εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος κατὰ ὁμοιοθεσίαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ περιέχῃ τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας.

1.4 ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ὁμοιόθετον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ εἶναι διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ παράλληλον, τοῦ ὁποίου ὁ λόγος πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἰσοῦται πρὸς τὸν λόγον ὁμοιοθεσίας.

Ἀπόδειξις

Ἔστω ἡ ὁμοιοθεσία Η[Ο,λ]. Ἂν Α′, Β′ εἶναι τὰ ὁμόλογα δύο τυχόντων σημείων Α καὶ Β ἀντιστοίχως, τότε εἶναι (σχ. 1.4):

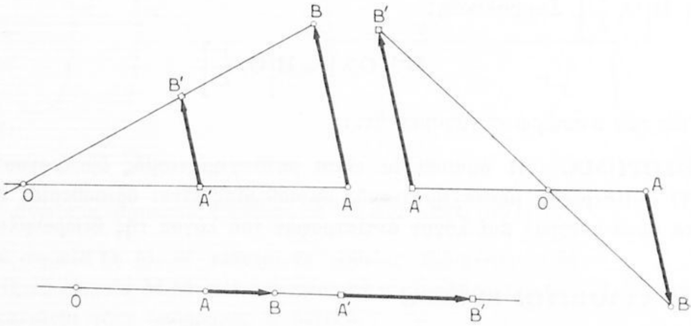
$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$$

καὶ
$$\overrightarrow{OB'} = \lambda\overrightarrow{OB}$$

ἐκ τῶν ὁποίων:
$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'}$$
$$= \lambda\overrightarrow{OB} - \lambda\overrightarrow{OA}$$
$$= \lambda[\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}]$$

καὶ τελικῶς:
$$\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$$

ΣΧ. 1.4



ΠΟΡΙΣΜΑ.— Ὁ λόγος $\dfrac{A'B'}{AB}$ δύο ὁμοιοθέτων τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ λόγου ὁμοιοθεσίας.

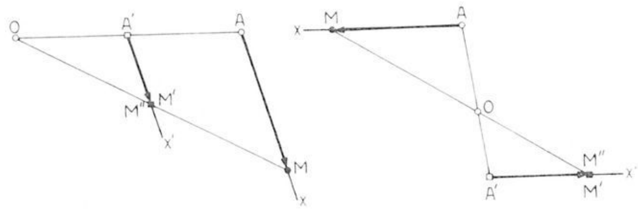
1.5 ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΩΣ ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

● Ἔστω ὁμοιοθεσία h, λόγου λ καὶ (Α,Α′) ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων. Ἂν Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι:

$$\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM} \tag{1}$$

Ἡ (1) ἀρκεῖ διὰ τὸν καθορισμὸν τοῦ σημείου M′ ἐπὶ ἡμιευθείας, ἀρχῆς A′, παραλλήλου πρὸς τὴν AM (ὁμορρόπου ἢ ἀντιρρόπου, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως $\lambda > 0$ ἢ $\lambda < 0$) (σχ. 1.5).

ΣΧ. 1.5



● Ἀντιστρόφως θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Δοθέντων τῶν σημείων A,A′ ὁ μετασχηματισμὸς h, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον M′ τυχόντος σημείου M ὁρίζεται ἐκ τῆς συνθήκης:

$$\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM}, \quad \lambda \neq 1 \text{ (σταθερά)} \tag{1}$$

εἶναι ὁμοιοθεσία.

Ἀπόδειξις

● Ἂν $A = A'$ τότε ἐξ ὁρισμοῦ $h = \mathbf{H}[A,\lambda]$.

● Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $A \neq A'$, λόγῳ τῆς (1), τὸ ὁμόλογον τοῦ σημείου A κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν h εἶναι τὸ σημεῖον A′. Ἄρα, ἂν ὁ h εἶναι ὁμοιοθεσία, θὰ πρέπει κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα νὰ ἔχῃ λόγον λ, τὸ δὲ κέντρον της O θὰ εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας AA′, τοιοῦτον ὥστε:

$$\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$$

ἢ ἰσοδυνάμως (I, 2.4): $\quad \overline{OA'} = \lambda\overline{OA} \Longleftrightarrow (A'AO) = -\lambda \qquad (2)$

Ἀλλὰ τοιοῦτον σημεῖον O ὑπάρχει καὶ εἶναι μοναδικόν, ἐπειδὴ $-\lambda \neq -1$

Θεωρήσωμεν, ὅθεν τὴν ὁμοιοθεσίαν $\mathbf{H}[O,\lambda]$. Αὕτη μετασχηματίζει τὸ A εἰς A′ λόγῳ τῆς (2). Ἐξ ἄλλου τὸ ὁμόλογον M″ τοῦ τυχόντος σημείου M, ὁριζόμενον ἐπὶ παραλλήλου πρὸς τὴν AM ἡμιευθείας ἀρχῆς A′, λόγῳ τῆς (1) συμπίπτει μὲ τὸ M′. Ἄρα:

$$h = \mathbf{H}[O,\lambda]$$

Θὰ λέγωμεν συντόμως ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία h ὁρίζεται **ἀπὸ τὸ ζεῦγος (A,A′) καὶ τὸν λόγον λ.**

ΠΟΡΙΣΜΑ.— Ἂν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι διανύσματα παράλληλα καὶ ἄνισα,

τότε ὑπάρχει ὁμοιοθεσία καὶ μία μόνον, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$

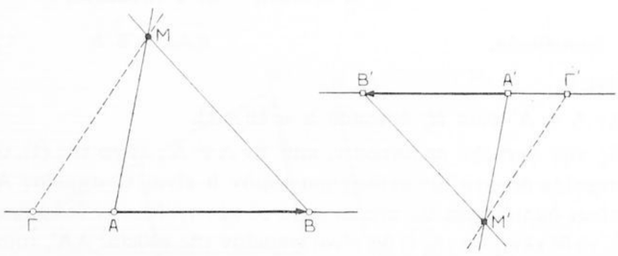
Πράγματι, ἔστω λ ὁ λόγος τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ πρὸς τὸ $\overrightarrow{AB}$. Εἶναι $\lambda \neq 1$, ἡ δὲ ὁμοιοθεσία λόγου λ, ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ ζεῦγος (A,A′) μετασχηματίζει τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$.

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω ὁμοιοθεσία ὁρίζεται **ἀπὸ τὸ ζεῦγος ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$) ὁμολόγων διανυσμάτων** ἢ ἀπὸ τὰ ζεύγη (A,A′) καὶ (B,B′) ὁμολόγων σημείων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

● 1. Ἂν (A,A′) καὶ (B,B′) εἶναι δύο ζεύγη ὁμοιοθέτων σημείων, ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'}$), τὸ ὁμοιόθετον τυχόντος σημείου M ἐκτὸς τῆς εὐθείας AB κειμένου, δύναται νὰ κατασκευασθῇ ὡς ἡ τομὴ M′ τῶν ἐκ τῶν A′ καὶ B′ ἀγομένων παραλλήλων πρὸς τὰς AM καὶ BM ἀντιστοίχως (σχ. 1.5, 1). Τὸ ὁμοιόθετον Γ′ σημείου Γ τῆς εὐθείας AB κατασκευάζεται ὁμοίως, ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευασθῇ τὸ ὁμοιόθετον σημείου τινὸς ἐκτὸς τῆς AB.

ΣΧ. 1.5, 1



● 2. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας κατασκευάζεται ὡς ἡ τομὴ δύο εὐθειῶν AA′ καὶ BB′, τὰς ὁποίας ὁρίζουν τὰ ζεύγη (A,A′), (B,B′) ὁμοιοθέτων σημείων μὴ ἐπ᾽ εὐθείας κειμένων.

1.6 ΟΜΟΙΟΘΕΤΑ ΑΠΛΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ ὁμοιόθετον ἡμιευθείας AX κατὰ ὁμοιοθεσίαν H[O,λ] εἶναι ἡμιευθεῖα A′X′ ὁμόρροπος ἢ ἀντίρροπος τῆς AX, καθ᾽ ὅσον εἶναι ἀντιστοίχως $\lambda > 0$ ἢ $\lambda < 0$.

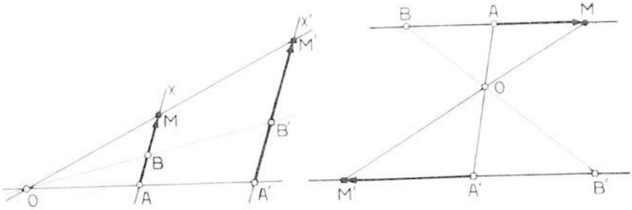
Ἀπόδειξις

Ἂν A′ εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τῆς ἀρχῆς A τῆς ἡμιευθείας AX (σχ. 1.6), ἵνα τὸ σημεῖον M′ εἶναι ὁμοιόθετον σημείου τινὸς M τῆς AX, πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\overrightarrow{A'M'} = \lambda \overrightarrow{AM}$$

ἤτοι τὸ Μ΄ νὰ εἶναι σημεῖον τῆς ἐκ τοῦ Α΄ ἀγομένης ἡμιευθείας Α΄Χ΄, ὁμορρόπως μέν, ἂν $\lambda > 0$, ἀντιρρόπως δέ, ἂν $\lambda < 0$, πρὸς τὴν ΑΧ.

ΣΧ. 1.6



ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

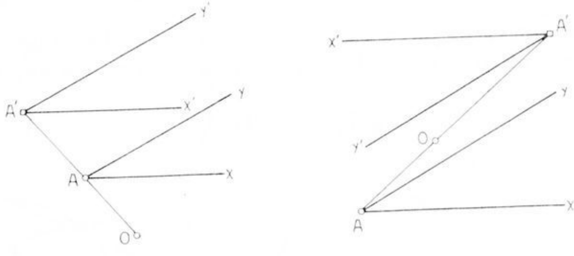
● **1. Τὸ ὁμοιόθετον εὐθείας εἶναι εὐθεῖα παράλληλος τῆς θεωρουμένης.**

● **2. Τὸ ὁμοιόθετον τοῦ ἐσωτερικοῦ τμήματος εἶναι τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ὁμοιοθέτου του.**

● **3. Τὸ ὁμοιόθετον γωνίας εἶναι γωνία ἴση τῆς θεωρουμένης.**

Πράγματι, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν εἶναι ἢ ὁμόρροποι ἢ ἀντίρροποι καὶ κατὰ τὰ δύο ζεύγη.

ΣΧ. 1.6, 3



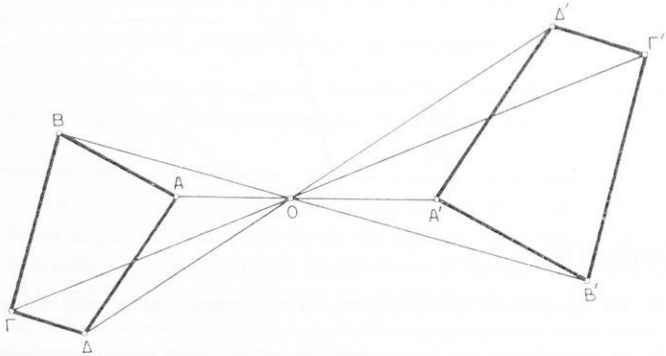
Ἡ ὁμοιοθεσία, ὅθεν, **διατηρεῖ τὰς γωνίας.** Ἑπομένως, διατηρεῖ τὴν καθετότητα ὡς καὶ τὴν παραλληλίαν τῶν εὐθειῶν.

● **4. Τὸ ὁμοιόθετον τριγώνου ἢ πολυγώνου εἶναι ἀντιστοίχως τρίγωνον ἢ πολύγωνον ὅμοιον τοῦ θεωρουμένου.** Αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ αὐτῶν ὁρίζουν διανύσματα παράλληλα, μὲ λόγον τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας (σχ. 1.6, 4).

Ἀντιστρόφως :

Ἂν αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ὁμολόγων τριγώνων ἢ πολυγώνων ὁρίζουν διανύσματα μὲ λόγον σταθερὸν ($\neq 1$), ταῦτα εἶναι ὁμοιόθετα κατὰ μίαν ὁμοιοθεσίαν, ὁριζομένην ἀπὸ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων πλευρῶν.

ΣΧ. 1.6, 4



1.7 ΟΜΟΙΟΘΕΤΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

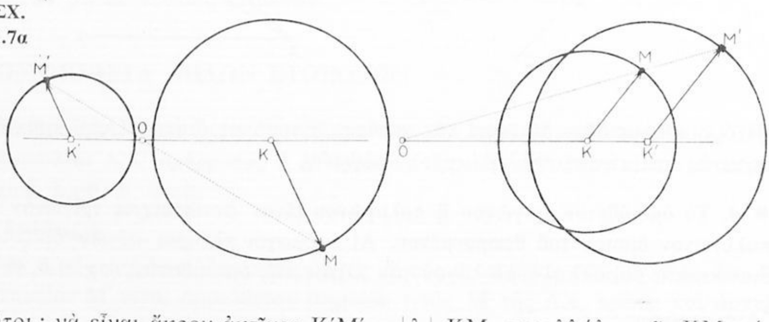
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.—Τὸ ὁμοιόθετον κύκλου (Κ,α) κατὰ ὁμοιοθεσίαν Η[Ο,λ] εἶναι κύκλος (Κ′, $|\lambda|$ α). Τὰ κέντρα αὐτῶν εἶναι ὁμοιόθετα σημεῖα.

Ἀπόδειξις

Ἔστω Κ′ τὸ ὁμοιόθετον τοῦ κέντρου Κ (σχ. 1.7α). Ἵνα σημεῖον Μ′ εἶναι ὁμοιόθετον σημείου τινὸς Μ τοῦ κύκλου (Κ), πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\overrightarrow{K'M'} = \lambda\,\overrightarrow{KM}$$

ΣΧ. 1.7α

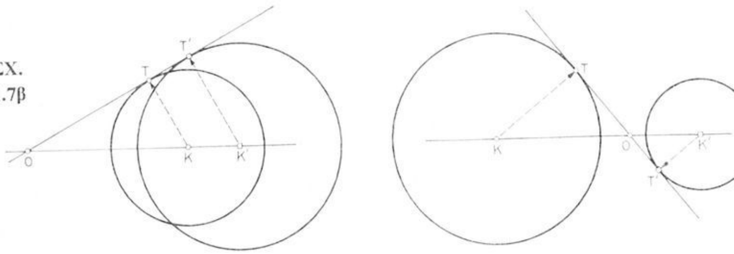


ἤτοι: νὰ εἶναι ἄκρον ἀκτῖνος Κ′Μ′ $= |\lambda| \cdot$ ΚΜ, παραλλήλου τῆς ΚΜ, κύκλου, ὅστις ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Κ′.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

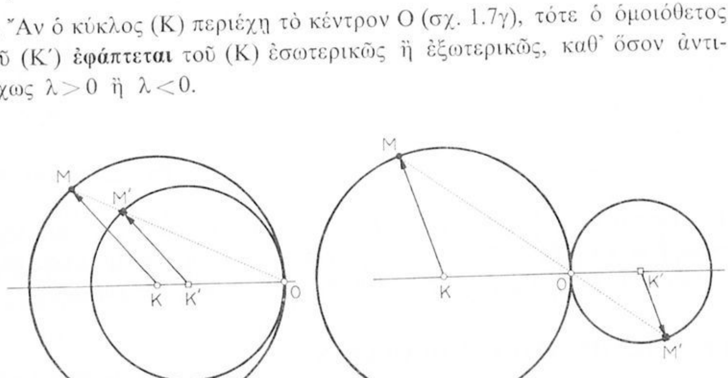
● 1. Δύο ὁμόλογοι ἀκτῖνες εἶναι παράλληλοι. Ἑπομένως (σχ. 1.7β), αἱ ἐκ τοῦ κέντρου Ο τῆς ὁμοιοθεσίας ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου (Κ) (ἐφ' ὅσον βεβαίως τοῦτο εἶναι ἐξωτερικὸν σημεῖον τοῦ κύκλου) εἶναι **ἐφαπτόμεναι** καὶ τοῦ ὁμοιοθέτου του (Κ').

ΣΧ. 1.7β



● 2. Ἂν ὁ κύκλος (Κ) περιέχῃ τὸ κέντρον Ο (σχ. 1.7γ), τότε ὁ ὁμοιόθετος αὐτοῦ (Κ') **ἐφάπτεται** τοῦ (Κ) ἐσωτερικῶς ἢ ἐξωτερικῶς, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως $\lambda > 0$ ἢ $\lambda < 0$.

ΣΧ. 1.7γ



ΘΕΩΡΗΜΑ II.—Δοθέντων δύο ἀνίσων κύκλων (Κ,α) καὶ (Κ',α') ὑπάρχουν δύο ὁμοιοθεσίαι μὲ λόγους ἀντιθέτους, καθ' ἃς ὁ (Κ',α') εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (Κ,α). Τὰ κέντρα των εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Κ,Κ'. (Ἂν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι, ὑπάρχει μία μόνον ὁμοιοθεσία: ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ μέσον τοῦ ΚΚ').

Ἀπόδειξις

Ἂν ὑπάρχῃ ὁμοιοθεσία, ἥτις μετασχηματίζει τὸν κύκλον (Κ,α) εἰς (Κ',α'), τότε ὁ λόγος της, κατὰ τὸ Θεώρημα I, ὁρίζεται ἀναγκαίως ἐκ τῆς συνθήκης:

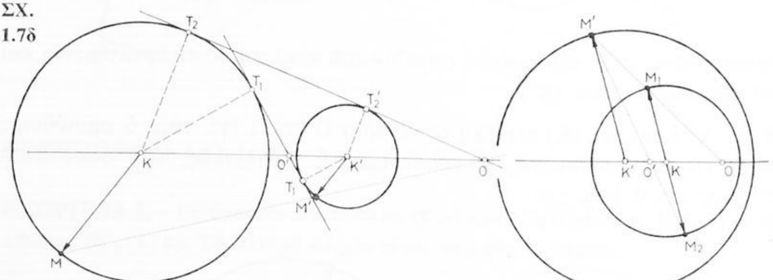
$$\alpha' = |\lambda|\alpha \text{ ἤτοι } \lambda = \pm\frac{\alpha'}{\alpha} \qquad (1)$$

Τὸ δὲ κέντρον αὐτῆς εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΚΚ΄ τῶν κέντρων, τὰ ὁποῖα, ὡς γνωστόν, πρέπει νὰ εἶναι ὁμοιόθετα. Ἀλλὰ ὑπάρχουν ἕν σημεῖον Ο καὶ ἕν σημεῖον Ο΄ τῆς εὐθείας ΚΚ΄ (Ι, 2.2, Πορ. 2), τοιαῦτα ὥστε:

$$\frac{\overline{OK'}}{\overline{OK}} = \frac{\alpha'}{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\overline{O'K'}}{\overline{O'K}} = -\frac{\alpha'}{\alpha} \tag{2}$$

Τὰ ἀνωτέρω σημεῖα Ο,Ο΄, **συζυγῆ ἁρμονικὰ τῶν Κ,Κ΄** (Ι, 4.1, 1) λόγῳ τῶν (2), ὁρίζουν τὰς ὁμοιοθεσίας $\mathbf{H}\left[O, \frac{\alpha'}{\alpha}\right]$ καὶ $\mathbf{H}\left[O', -\frac{\alpha'}{\alpha}\right]$ αἱ ὁποῖαι, συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα, μετασχηματίζουν τὸν κύκλον (Κ) εἰς (Κ΄).

ΣΧ. 1.7δ



Τὸ κέντρον Ο ἢ Ο΄ δύναται νὰ κατασκευασθῇ (σχ. 1.7δ) ὡς ἡ τομὴ τῆς εὐθείας ΚΚ΄ καὶ τῆς εὐθείας, ἣν ὁρίζουν δύο ὁμόλογα σημεῖα, ἄκρα παραλλήλων ἀκτίνων ἢ σημεῖα ἐπαφῆς κοινῆς ἐφαπτομένης τῶν κύκλων.

1.8 ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΔΥΟ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΩΝ

Θεωροῦμεν τὰς ὁμοιοθεσίας $h_1 = \mathbf{H}[O_1, \lambda_1]$ καὶ $h_2 = \mathbf{H}[O_2, \lambda_2]$.

Τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται διὰ τῆς h_1 εἰς $\overrightarrow{A_1M_1}$, τοῦτο δὲ διὰ τῆς h_2 εἰς $\overrightarrow{A_2M_2}$. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{AM}$ κατὰ τὸ γινόμενον $h_2 o h_1$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A_2M_2}$ (σχ. 1.8, 1 καὶ 2). Θὰ ἔχωμεν τότε:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \lambda_1\overrightarrow{AM}$$

καὶ
$$\overrightarrow{A_2M_2} = \lambda_2\overrightarrow{A_1M_1}$$

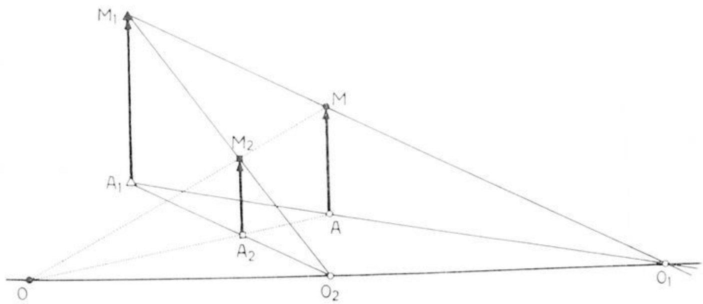
ἑπομένως:
$$\overrightarrow{A_2M_2} = \lambda_1\lambda_2\overrightarrow{AM} \tag{1}$$

Διακρίνομεν τὰς περιπτώσεις :

● **1.** Εἶναι $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$

Ἐπειδὴ ἡ (1) ἀληθεύει δι᾽ οἱονδήποτε ζεῦγος (M, M_2) ὁμολόγων σημείων τοῦ μετασχηματισμοῦ $h_2 \circ h_1$, οὗτος **εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ λόγον** $\lambda_1\lambda_2$ (1.5).

ΣΧ. 1.8, 1



Τὸ κέντρον τῆς $h_2 \circ h_1$

● Ἂν τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 συμπίπτουν εἰς τὸ σημεῖον O, τοῦτο εἶναι ἡνωμένον σημεῖον τόσον τῆς h_1 ὅσον καὶ τῆς h_2, ἄρα καὶ τῆς $h_2 \circ h_1$. Ὥστε : Τὸ **O εἶναι τὸ κέντρον τῆς $h_2 \circ h_1$**

● Ἂν τὰ κέντρα O_1 καὶ O_2 εἶναι διάφορα, τότε ἡ εὐθεῖα O_1O_2 εἶναι ἀναλλοίωτος καθ᾽ ἕκαστον τῶν μετασχηματισμῶν h_1 καὶ h_2 ἄρα εἶναι ἀναλλοίωτος κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν $h_2 \circ h_1$, ἄρα περιέχει τὸ κέντρον αὐτῆς O. Τὸ O δύναται νὰ ορισθῇ ὡς ἡ τομὴ τῆς O_1O_2 καὶ τῆς εὐθείας AA_2, ἥτις ὁρίζεται ἀπὸ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων (σχ. 1.8,1).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν μὲ λόγους λ_1 καὶ λ_2, ὅταν $\lambda_1\lambda_2 \neq 1$, εἶναι ὁμοιοθεσία λόγου $\lambda_1\lambda_2$. Τὸ κέντρον της εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας τῶν κέντρων τῶν δύο θεωρουμένων ὁμοιοθεσιῶν, ἂν ταῦτα εἶναι διακεκριμένα, ἄλλως συμπίπτει μὲ αὐτά.

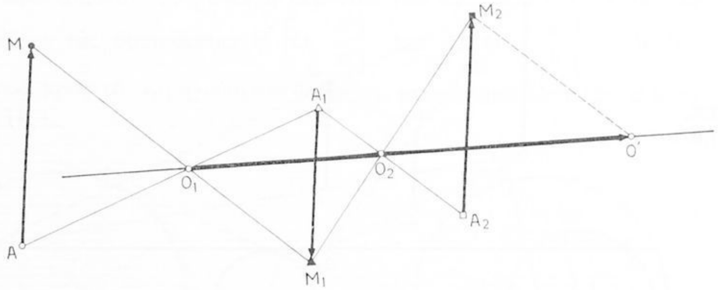
ΠΟΡΙΣΜΑ.—Μία ἀντίρροπος ὁμοιοθεσία $H[O, -\lambda]$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον τῆς ἀντιστοίχου ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας $H[O, \lambda]$ ἐπὶ τὴν συμμετρίαν $\Sigma[O]$ (1.1, 3).

● **2. Εἶναι $\lambda_1\lambda_2 = 1$**

Ἐκ τῆς (1) συνάγομεν ὅτι τὸ γινόμενον **εἶναι μεταφορά** (IV, 1.5). Τὸ διάνυσμά της ὁρίζεται ἀπὸ ἓν οἱονδήποτε ζεῦγος ὁμολόγων σημείων (σχ. 1.8, 2).

Εἰδικώτερον ἔστω ὅτι τὸ κέντρον O_1, ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν h_1, μετασχηματίζεται, διὰ τῆς h_2 εἰς τὸ σημεῖον O' τῆς εὐθείας O_1O_2. **Διάνυσμα $\vec{V}$ τῆς μεταφορᾶς** $h_2 \circ h_1$ εἶναι, ὅθεν, τὸ $\overrightarrow{O_1O'}$ **μὲ φορέα τὴν O_1O_2.** Ἂν αἱ ὁμοθεσίαι ἔχουν κοινὸν κέντρον O, τοῦτο εἶναι ἡνωμένον σημεῖον τῆς μεταφορᾶς $h_2 \circ h_1$, ἡ ὁποία, ἑπομένως, **εἶναι ὁ t^0.** Ὥστε:

ΣΧ. 1.8, 2



ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν μὲ λόγους ἀντιστρόφους εἶναι μεταφορά, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα φέρεται ὑπὸ τῆς εὐθείας τῶν κέντρων των. Ἂν τὰ κέντρα τῶν ὁμοιοθεσιῶν συμπίπτουν, τότε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.

ΠΟΡΙΣΜΑ.— Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν τοῦ αὐτοῦ κέντρου O εἶναι ἀντιμεταθετικὴ ὁμάς.

1.9 ΟΜΑΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΩΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑΦΟΡΩΝ

Ἂν συνθέσωμεν μίαν μεταφορὰν καὶ μίαν ὁμοιοθεσίαν, λόγου λ, ἐπειδὴ ἡ μεταφορὰ διατηρεῖ τὰ διανύσματα (IV, 1.4), τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται εἰς $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Ἄρα (1.5):

- **Τὸ γινόμενον μιᾶς μεταφορᾶς καὶ μιᾶς ὁμοιοθεσίας, λόγου λ, εἶναι ὁμοιοθεσία, τοῦ αὐτοῦ λόγου λ.**

Ἐξ ἄλλου, εἰς τὰ προηγούμενα ἀπεδείχθη ὅτι:

- Τὸ γινόμενον δύο μεταφορῶν εἶναι μεταφορὰ (IV, 1.7) καὶ τὸ γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν εἶναι ὁμοιοθεσία ἢ μεταφορὰ (1.8). Ἐπίσης ὅτι:

- Ὁ ἀντίστροφος μεταφορᾶς ἢ ὁμοιοθεσίας εἶναι ἀντιστοίχως μεταφορὰ ἢ ὁμοιοθεσία.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοθεσιῶν καὶ μεταφορῶν εἶναι ὁμάς.

1.10 ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΟΜΟΙΟΘΕΣΙΑΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Μία ὁμοιοθεσία κέντρου O δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς τὸ γινόμενον ὁμοιοθεσίας τοῦ αὐτοῦ λόγου, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι οἱονδήποτε σημεῖον O′ καὶ μεταφορᾶς, τῆς ὁποίας τὸ διάνυσμα εἶναι παράλληλον τῆς εὐθείας OO′.

Ἀπόδειξις

Εἶναι: $H[O,\lambda] = H[O,\lambda] \circ t^0$

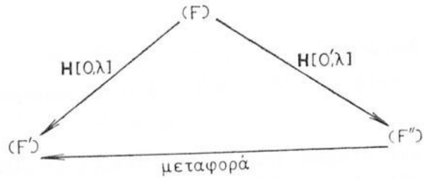
$$= H[O,\lambda] \circ \left(H\left[O', \frac{1}{\lambda}\right] \circ H[O',\lambda] \right) \qquad (1.8, 2)$$

$$= \left(H[O,\lambda] \circ H\left[O' \frac{1}{\lambda}\right] \right) \circ H[O',\lambda]$$

$$= T[\vec{V}] \circ H[O',\lambda]$$

ΠΟΡΙΣΜΑ.— Τὰ ὁμοιόθετα (F′) καὶ (F′′) τοῦ αὐτοῦ σχήματος (F) κατὰ δύο ὁμοιοθεσίας τοῦ αὐτοῦ λόγου εἶναι ὁμόλογα κατὰ μεταφοράν.

ΣΧ. 1.10



Τὰ ἀνωτέρω χρησιμεύουν καὶ διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ ὁμοιοθέτου (F′) ἑνὸς σχήματος (F): δυνάμεθα νὰ ἐκλέξωμεν καταλλήλως ἓν σημεῖον O′, ὥστε νὰ εὑρίσκεται εὐχερῶς τὸ ὁμοιόθετον (F′′) τοῦ (F) κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν κέντρου O′. Δυνάμεθα τότε νὰ προσδιορίσωμεν τὸ ζητούμενον (F′) διὰ μεταφορᾶς παραλλήλως πρὸς τὴν OO′. Κατ' ἐφαρμογὴν τῆς μεθόδου δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν π.χ. τὰ Θεωρήματα 1.6 καὶ 1.7 λαμβάνοντες ὡς «βοηθητικὸν» κέντρον ὁμοιοθεσίας O′ τὰ σημεῖα A καὶ K ἀντιστοίχως.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ: 1-5
ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 1-32

2. ΟΜΟΡΡΟΠΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΣ

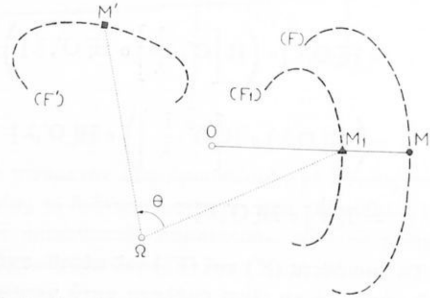
2.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Τὸ γινόμενον ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας καὶ ὁμορρόπου ἰσότητος καλεῖται ὁμόρροπος ὁμοιότης.

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ ἡ γωνία τῆς ἰσότητος καλοῦνται **λόγος** καὶ **γωνία τῆς ὁμορρόπου ὁμοιότητος.**

Τὸ ὁμόλογον (F′), κατὰ ὁμόρροπον ὁμοιότητα, ἑνὸς σχήματος (F), καλεῖται **ὁμορρόπως ὅμοιον** αὐτοῦ, εἶναι δὲ ὁμορρόπως ἴσον πρὸς σχῆμα (F_1) ὁμοιόθετον τοῦ (F) (σχ. 2.1).

ΣΧ.
2.1



Συνεπῶς ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

Κατὰ μίαν ὁμ. ὁμοιότητα:

● **1.** Τὸ ὁμόλογον εὐθείας ἢ ἡμιευθείας εἶναι ἀντιστοίχως εὐθεῖα ἢ ἡμιευθεῖα.

● 2. Τὸ ὁμόλογον κύκλου (Κ,α) εἶναι κύκλος (Κ′,λα) ἔνθα λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος. Τὸ κέντρον Κ′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ κέντρου Κ.

● **3. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων τμημάτων εἶναι σταθερός, ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος. Ἡ γωνία δύο ὁμολόγων διανυσμάτων εἶναι σταθερά, ἴση πρὸς τὴν γωνίαν τῆς ὁμοιότητος.**

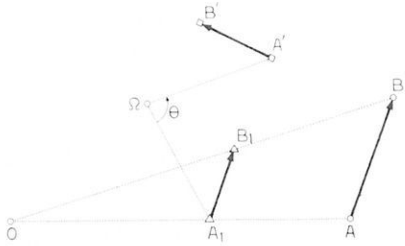
Πράγματι, ἂν $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἶναι τὸ ὁμοιόθετον διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ κατὰ ὁμοιοθεσίαν, λόγου λ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ τὸ ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{A_1B_1}$ κατὰ ὁμ. ἰσότητα, γωνίας θ (σχ. 2.1, 3), τότε θὰ εἶναι:

$$A'B' = A_1B_1 = \lambda AB \qquad (1.4 \text{ Πορ.})$$

Ἐπίσης εἶναι: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = 0$ (διότι $\lambda > 0$)

Ἄρα: $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$ (IV, 3, Πορ. 3)

ΣΧ.
2.1, 3



● 4. **Ἡ ὁμόρροπος ὁμοιότης διατηρεῖ τὰς γωνίας**. Διατηρεῖ, ἑπομένως, τὴν **καθετότητα**, ὡς καὶ τὴν **παραλληλίαν** εὐθειῶν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● 1. Ἡ ὁμόρροπος ὁμοιότης εἶναι μετασχηματισμὸς **γενικώτερος** τόσον τῆς ὁμ. ἰσότητος ὅσον καὶ τῆς ὁμοιοθεσίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι **εἰδικαὶ περιπτώσεις** ὁμ. ὁμοιότητος.

Πράγματι:

Ἡ μεταφορὰ ἢ **ἡ στροφὴ** εἶναι ἡ ὁμ. ὁμοιότης λόγου 1 (1.1, 2) καὶ γωνίας ἀντιστοίχως 0 ἢ $\theta \neq 0$.

Ἡ (μὴ ταυτοτικὴ) **ὁμ. ὁμοιοθεσία** εἶναι ἡ ὁμ. ὁμοιότης λόγου $\lambda \neq 1$ καὶ γωνίας 0, ἤτοι τὸ γινόμενον ὁμ. ὁμοιοθεσίας καὶ μεταφορᾶς (1.9 καὶ 1.10).

Ἡ ἀντ. ὁμοιοθεσία, λόγου $-\lambda$, εἶναι ἡ ὁμ. ὁμοιότης λόγου λ καὶ γωνίας π (1.8, 1 Πορ.).

Ἡ ὁμ. ὁμοιότης, λόγου $\lambda \neq 1$ καὶ γωνίας $\theta \neq 0$, εἶναι τὸ γινόμενον **ὁμ. ὁμοιοθεσίας καὶ στροφῆς**, ὡς δὲ προκύπτει ἐκ τοῦ ἀνωτέρω Πορ. 3, ἂν προσέτι $\theta \neq \pi$, εἶναι μετασχηματισμὸς διάφορος τῶν ἤδη μελετηθέντων.

● 2. Ἡ ὁμόρροπος ὁμοιότης, ὡς γινόμενον ἀμφιμονοσημάντων μετασχηματισμῶν, εἶναι **ἀμφιμονοσήμαντος.**

● 3. Εὐκόλως δεικνύεται (Πρβλ. V, 2.1 Παρ.) ὅτι ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς τῶν ὁμορρόπως ὁμοίων σχημάτων, ὡς ὁμολόγων κατὰ ὁμ. ὁμοιότητα, καθ' ὅσον ἀφορᾷ εἰς τρίγωνα ἢ πολύγωνα, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν διδόμενον διὰ τὰ σχήματα ταῦτα γνωστὸν ὁρισμὸν (ὁμόλογοι πλευραὶ ἀνάλογοι, ὁμόλογοι γωνίαι ἴσαι).

Πράγματι, δύο ὁμόλογα κατὰ ὁμ. ὁμοιότητα τρίγωνα ἢ πολύγωνα (Π) καὶ (Π′) ἔχουν ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ γωνίας ἴσας (Πορ. 3 καὶ 4).

Καὶ ἀντιστρόφως: ἂν τὰ (Π) καί (Π′) ἔχουν πλευρὰς ἀναλόγους καὶ γωνίας ἴσας καὶ εἶναι λ ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν (ἤτοι ὁ σταθερὸς λόγος δύο ὁμολόγων πλευρῶν) μία ὁμοιοθεσία h λόγου λ μετασχηματίζει τὸ (Π) εἰς σχῆμα ὁμ. ἴσον τοῦ (Π′). Ἄρα τὸ Π′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ (Π) κατὰ ὁμ. ὁμοιότητα.

2.2 ΟΜ. ΟΜΟΙΟΤΗΣ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ: λ, θ ΚΑΙ ΕΝ ΖΕΥΓΟΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

● Ἔστω s μία ὁμ. ὁμοιότης, λόγου λ γωνίας θ καὶ (Α,Α′) ἓν ζεῦγος ὁμολόγων σημείων (σχ. 2.2).

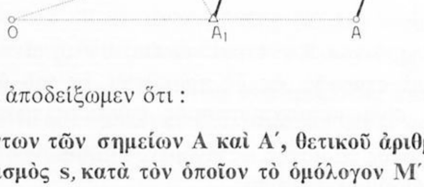
Ἂν Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου Μ, τότε εἶναι (2.1, Πορ. 3):

$$A'M' = \lambda AM \tag{1}$$

$$(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{A'M'}) = \theta \tag{2}$$

Αἱ ὡς ἄνω συνθῆκαι ἀρκοῦν διὰ νὰ προσδιορισθῇ τὸ σημεῖον Μ′. Πράγματι διὰ τῆς (2) ὁρίζεται ἡ ἡμιευθεῖα Α′Μ′, ἐπὶ τῆς ὁποίας ὁρίζεται τελικῶς τὸ Μ′ διὰ τῆς (1).

ΣΧ. 2.2



● Ἀντιστρόφως, θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Δοθέντων τῶν σημείων Α καὶ Α′, θετικοῦ ἀριθμοῦ λ καὶ γωνίας θ, ὁ μετασχηματισμὸς s, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω συνθήκας (1) καὶ (2) εἶναι ὁμόρροπος ὁμοιότης, λόγου λ καὶ γωνίας θ.

Ἀπόδειξις

● Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν $\theta = 0$, αἱ ἀνωτέρω συνθῆκαι συνοψίζονται εἰς τὴν $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\overrightarrow{AM}$. Ἑπομένως, ἂν εἶναι καὶ $\lambda = 1$, ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι μεταφορὰ (IV, 1.5), ἄλλως εἶναι ὁμοιοθεσία (1.5). Ἂν $\lambda=1$ καὶ $\theta \neq 0$ ὁ μετασχηματισμὸς εἶναι στροφὴ γωνίας θ (IV, 2.4).

● Εἰς τὴν γενικὴν περίπτωσιν $\theta \neq 0$ καὶ $\lambda \neq 1$, θεωροῦμεν **τυχὸν** σημεῖον O. Ἡ ὁμοιοθεσία h κέντρου O καὶ λόγου λ μετασχηματίζει τὸ σημεῖον A ἔστω εἰς A_1, τὸ τυχὸν δὲ σημεῖον M εἰς M_1 εἰς τρόπον ὥστε:

$$\overrightarrow{A_1M_1} = \lambda \overrightarrow{AM} \tag{3}$$

Ἐκ ταύτης προκύπτουν:

λόγῳ τῆς (1): $A_1M_1 = A'M'$

καὶ λόγῳ τῆς (2): $(\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A'M'}) = \theta$

Ἑπομένως ὑπάρχει στροφὴ r ὁριζομένη ἐκ τοῦ ζεύγους (A_1, A') καὶ τῆς γωνίας θ (IV, 2.4), ἥτις ἀντιστοιχίζει τὸ $\overrightarrow{A_1M_1}$ εἰς τὸ $\overrightarrow{A'M'}$. Ἑπομένως τὸ σημεῖον M′, ὁμόλογον τοῦ τυχόντος M κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν s, ἐμφανίζεται ὡς ὁμόλογον αὐτοῦ καὶ κατὰ τὴν ὁμόρροπον ὁμοιότητα $r \circ h$. Ὥστε:

$$s = r \circ h.$$

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἀνωτέρω ὁμόρροπος ὁμοιότης **ὁρίζεται** ἀπὸ τὸν **λόγον** λ, **τὴν γωνίαν** θ καὶ τὸ **ζεῦγος** (A,A′) τῶν ὁμολόγων σημείων.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Ὁ ἀντίστροφος ὁμ. ὁμοιότητος εἶναι ὁμ. ὁμοιότης, ἥτις ἔχει λόγον ἀντίστροφον καὶ γωνίαν ἀντίθετον τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων τῆς θεωρουμένης.**

Πράγματι, αἱ ὡς ἄνω συνθῆκαι (1) καὶ (2) γράφονται ἰσοδυνάμως:

$$AM = \frac{1}{\lambda} A'M' \tag{1'}$$

$$(\overrightarrow{A'M'}, \overrightarrow{AM}) = -\theta \tag{2'}$$

Αἱ (1′) καὶ (2′) δεικνύουν ὅτι τὸ M εἶναι ὁμόλογον τοῦ M′ κατὰ ὁμ. ὁμοιότητα, λόγου $\frac{1}{\lambda}$ καὶ γωνίας $-\theta$.

● **2. Τὸ γινόμενον στροφῆς καὶ ὁμ. ὁμοιοθεσίας εἶναι ὁμ. ὁμοιότης.**

Πράγματι, ἂν θ εἶναι ἡ γωνία στροφῆς καὶ λ ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας, τυχὸν διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται εἰς $\overrightarrow{A'M'}$, τοιοῦτον ὥστε νὰ πληροῦνται αἱ (1) καὶ (2).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἡ ἐκλογὴ τοῦ κέντρου O εἶναι αὐθαίρετος. Ἄρα, ἡ ὁμόρροπος ὁμοιότης δύναται γενικῶς νὰ θεωρηθῇ, κατ' ἀπείρους τρόπους, ὡς τὸ γινόμενον **ὁμοιοθεσίας καὶ στροφῆς** μὲ κέντρα ἐν γένει **διάφορα**.

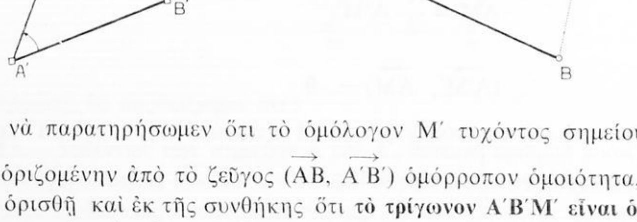
Σημειωτέον ὅτι κατὰ τὴν ἀπόδειξιν ἠδυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν πρῶτον μίαν στροφὴν αὐθαιρέτου κέντρου καὶ γωνίας θ, ἐν συνεχείᾳ δὲ ὁμοιοθεσίαν λόγου λ. Οὕτως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ὁμόρροπος ὁμοιότης δύναται νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους, καὶ ὡς τὸ γινόμενον **στροφῆς καὶ ὁμοιοθεσίας**.

2.3 ΟΡΙΣΜΟΣ ΟΜ. ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Ἂν $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι τυχόντα διανύσματα, ὑπάρχει ὁμόρροπος ὁμοιότης καὶ μία μόνον, καθ' ἣν ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$.

Πράγματι, ἂν εἶναι $\dfrac{A'B'}{AB} = \lambda$ καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$, ἡ (μοναδικὴ) ὁμόρροπος ὁμοιότης ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸν λόγον λ, τὴν γωνίαν θ καὶ τὸ ζεῦγος (A,A′) μετασχηματίζει τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$. Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ὡς ἄνω ὁμοιότης **ὁρίζεται ἀπὸ τὸ ζεῦγος ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$)** ὁμολόγων διανυσμάτων.

ΣΧ. 2.3



Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι τὸ ὁμόλογον M′ τυχόντος σημείου M κατὰ τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὸ ζεῦγος ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$) ὁμόρροπον ὁμοιότητα, δύναται νὰ ὁρισθῇ καὶ ἐκ τῆς συνθήκης ὅτι **τὸ τρίγωνον A′B′M′ εἶναι ὁμορρόπως ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ABM**, ἤτοι, νὰ κατασκευασθῇ ὡς τομὴ τῶν γνωστῶν ἡμιευθειῶν A′M′ καὶ B′M′, ὁριζομένων διὰ τῶν συνθηκῶν διατηρήσεως τῶν γωνιῶν (σχ. 2.3) :

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \qquad (3)$$

καὶ $$(\overrightarrow{B'A'},\ \overrightarrow{B'M'}) = (\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BM}) \tag{4}$$

ἢ ἐκ μόνης τῆς (3) ἢ (4) καὶ τῆς : $A'M' = \lambda AM$ ἢ $B'M' = \lambda BM$ ἀντιστοίχως.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτουν ἀμέσως τὰ ἑξῆς :

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

- **1. Ἂν μετασχηματισμὸς διατηρῇ τὰς γωνίας, οὗτος εἶναι ὁμ. ὁμοιότης.**
- **2. Τὸ γινόμενον ὁμ. ὁμοιοτήτων** διατηρεῖ τὰς γωνίας (2.1 Πορ. 4), ἐπομένως **εἶναι ὁμ. ὁμοιότης.**
- **3. Ἂν μία ὁμ. ὁμοιότης ἔχῃ δύο ἡνωμένα σημεῖα, αὕτη εἶναι ὁ ταυτοτικὸς μετασχηματισμός.**

2.4 ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΟΜ. ΟΜΟΙΟΤΗΤΩΝ

Ἔστωσαν αἱ ὁμοιότητες s_1 καὶ s_2 μὲ λόγους λ_1, λ_2 καὶ γωνίας θ_1, θ_2 ἀντιστοίχως.

Ἓν διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ μετασχηματίζεται διὰ τῆς s_1 ἔστω εἰς $\overrightarrow{A_1M_1}$, τοῦτο δὲ διὰ τῆς s_2 ἔστω εἰς $\overrightarrow{A_2M_2}$. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{AM}$ κατὰ τὴν **ὁμ. ὁμοιότητα** $s_2 \circ s_1$ (2.3 Πορ. 2) εἶναι τὸ $\overrightarrow{A_2M_2}$. Εἶναι δέ :

$$A_1M_1 = \lambda_1 AM \qquad (\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{A_1M_1}) = \theta_1$$

καὶ $$A_2M_2 = \lambda_2 A_1M_1 \qquad (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_2$$

Ἐκ τῶν ὁποίων προκύπτει :

$$A_2M_2 = \lambda_1\lambda_2 AM$$

καὶ $$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_2M_2}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{A_1M_1}) + (\overrightarrow{A_1M_1}, \overrightarrow{A_2M_2}) = \theta_1 + \theta_2.$$

Ἑπομένως, ἡ ὁμ. ὁμοιότης $s_2 \circ s_1$ ἔχει λόγον $\lambda_1\lambda_2$ καὶ γωνίαν $\theta_1 + \theta_2$.

Συνάγομεν, λοιπόν, τὰ ἑξῆς :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ γινόμενον δύο ὁμ. ὁμοιοτήτων εἶναι ὁμ. ὁμοιότης, ἔχουσα λόγον τὸ γινόμενον τῶν λόγων καὶ γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν ὁμοιοτήτων παραγόντων.

2.5 ΟΜΑΣ ΟΜ. ΟΜΟΙΟΤΗΤΩΝ

Ἐκ τῶν § 2.2 Πορ. 1 καὶ 2.3 Πορ. 2 προκύπτει ἀμέσως ὅτι :

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ σύνολον τῶν ὁμορρόπων ὁμοιοτήτων εἶναι ὁμάς.

2.6 ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΡΡΟΠΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Ἔστω s μία ὁμ. ὁμοιότης, λόγου λ καὶ γωνίας θ, καὶ ἓν ζεῦγος (Α,Α′) ὁμολόγων σημείων.

Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ s ἔχῃ ἡνωμένον σημεῖον.

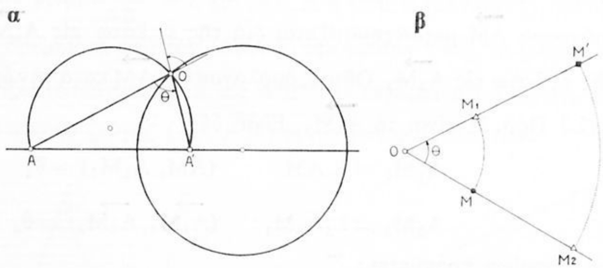
● Ἐν πρώτοις ὑποθέτομεν ὅτι $\lambda \neq 1$, $\theta \neq 0$ καὶ π. Ἂν ὁ μετασχηματισμὸς ἔχῃ ἡνωμένον σημεῖον Ο, τοῦτο θὰ εἶναι μοναδικὸν (2.3 Πορ. 3). Τότε, ἐπειδὴ ὁμόλογον τοῦ $\overrightarrow{OA}$ θὰ εἶναι τὸ $\overrightarrow{OA'}$ θὰ πρέπει(σχ. 2.6α):

$$OA' = \lambda OA \tag{1}$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta \tag{2}$$

Ἡ μὲν (1) δεικνύει ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον Ο ἀνήκει εἰς τὸν Ἀπολλώνιον κύκλον, σύνολον τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ σημεῖα Α′, Α ἔχουν λόγον σταθερὸν λ, ἡ δὲ (2) ὅτι τὸ Ο ἀνήκει εἰς τὸ κυκλικὸν

ΣΧ. 2.6



τόξον, ἀπὸ τὰ σημεῖα τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα Α, Α′ φαίνονται ὑπὸ γωνίαν θ.

Ἡ τομὴ Ο τῶν δύο ὡς ἄνω τόπων εἶναι τὸ ζητούμενον ἡνωμένον σημεῖον τῆς ὁμοιότητος.

Πράγματι, τὸ ὁμόλογον τοῦ Ο κατὰ τὴν ὁμοιότητα s εἶναι τὸ σημεῖον Ο′ διὰ τὸ ὁποῖον (2.2):

$$A'O' = \lambda\, AO \tag{1'}$$

καὶ

$$(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O'}) = \theta \tag{2'}$$

Ἐκ τῆς (2′), λόγῳ τῆς (2), προκύπτει ὅτι τὸ Ο′ εἶναι σημεῖον τῆς ἡμιευθείας Α′Ο, ἐκ δὲ τῆς (1′), λόγῳ τῆς (1), ὅτι συμπίπτει μὲ τὸ Ο.

Ἐξ ἄλλου, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἡ ὁμοιότης s ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ὁμοιοθεσίας κέντρου Ο καὶ στροφῆς (2.2 Παρ.), τὸ σημεῖον Ο, ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν, θὰ εἶναι ἀναλλοίωτον καὶ κατὰ τὴν στροφήν, ἤτοι εἶναι τὸ κέντρον αὐτῆς, ὁπότε:

$$s = \mathbf{R}[O, \theta] \circ \mathbf{H}[O,\lambda].$$

Εὐκόλως προκύπτει (σχ. 2.6β) ὅτι τὸ ἀνωτέρω γινόμενον εἶναι ἀντιμεταθετικὸν ἤτοι:

$$s = \mathbf{H}[O,\lambda] \circ \mathbf{R}[O,\theta]$$

● Τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα δὲν ἰσχύουν μόνον, ὅταν ἡ ὁμοιότης s εἶναι μεταφορὰ ($\lambda = 1$, $\theta = 0$) ἐνῷ ἰσχύουν, ὅταν ἡ s εἶναι στροφὴ ($\lambda = 1$, $\theta \neq 0$) ἢ ὁμοιοθεσία ($\lambda \neq 1$, $\theta = 0$ ἢ π).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ ἀκόλουθα:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Μία ὁμ. ὁμοιότης διάφορος μεταφορᾶς ἔχει ἓν ἡνωμένον σημεῖον, δύναται δὲ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἀντιμεταθετικὸν γινόμενον ὁμοιοθεσίας καὶ στροφῆς, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὸν κέντρον τὸ σημεῖον τοῦτο.

2.7 ΚΕΝΤΡΟΝ ΟΜΟΡΡΟΠΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Τὸ ἡνωμένον σημεῖον ὁμ. ὁμοιότητος καλεῖται **κέντρον** αὐτῆς. Ἡ ὁμ. ὁμοιότης κέντρου Ο, λόγου λ καὶ γωνίας θ θὰ συμβολίζεται: $\mathbf{S}\ [O,\lambda,\theta]$.

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν τὰ ἑξῆς:

● 1. Ἵνα τὸ Μ′ εἶναι ὁμόλογον τοῦ σημείου Μ κατὰ τὴν ὁμοιότητα $\mathbf{S}\ [O,\lambda,\theta]$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ (2.2):

$$OM' = \lambda OM \text{ καὶ } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \tag{1}$$

Τὰ τρίγωνα ΟΜΜ′, ἀνὰ δύο, **εἶναι ὁμ. ὅμοια.**

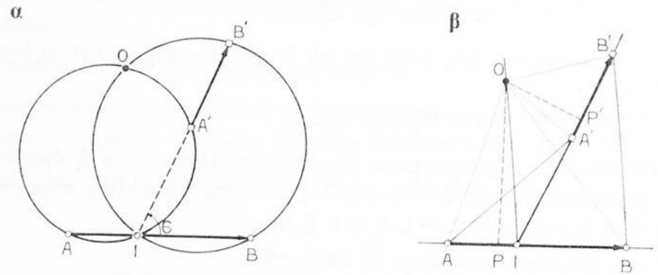
● 2. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιότητος εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν Ἀπολλωνίων κύκλων, τὰ σημεῖα ἑκάστου τῶν ὁποίων ἔχουν ἀποστάσεις λόγου λ ἀπὸ δύο ὁμόλογα σημεῖα, ὡς καὶ τῶν κυκλικῶν τόξων ἀπὸ τὰ σημεῖα ἑκάστου τῶν ὁποίων, δύο ὁμόλογα σημεῖα φαίνονται ὑπὸ γωνίαν θ. Δύναται, ἄρα νὰ κατασκευασθῇ ὡς τομὴ δύο ἐκ τῶν ὡς ἄνω τόπων (ὡς ἐγένετο κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος).

● 3. Ἔστω $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων, τῶν ὁποίων οἱ φορεῖς τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ι. Τὸ κέντρον τῆς ὁμοιότητος εἶναι, ὡς εἴδομεν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς στροφῆς (IV, 2.5), σημεῖον παντὸς κύκλου διερχομένου διὰ τοῦ Ι καὶ δύο ὁμολόγων σημείων κειμένων ἐπὶ τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α′Β′ π.χ. τοῦ κύκλου (Ι, Α, Α′) διότι:

$$(IA, IA') = (OA, OA') = \theta.$$

Συνεπῶς τὸ κέντρον Ο δύναται νὰ κατασκευάζεται (σχ. 2.7α) καὶ ὡς τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῶν κύκλων (Ι, Α, Α΄) καὶ (Ι, Β, Β΄).

ΣΧ.
2.7



● 4. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΟΑΑ΄ καὶ ΟΒΒ΄ (σχ. 2.7β) εἶναι ὁμ. ὅμοια (2.7, 1), ἡ ὁμ. ὁμοιότης, καθ' ἣν τὰ ἀνωτέρω τρίγωνα εἶναι ὁμόλογα, ὁρίζεται **ἀπὸ τὸ ζεῦγος** $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'})$, ἔχει δὲ **τὸ αὐτὸ κέντρον Ο.**

● 5. Αἱ προβολαὶ Ρ, Ρ΄ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὰς ὁμολόγους εὐθείας ΑΒ καὶ Α΄Β΄ ἀντιστοίχως εἶναι ὁμόλογα σημεῖα. Δυνάμεθα, ὅθεν, νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ὁμόλογον εὐθείας, κατασκευάζοντες τὸ ὁμόλογον Ρ΄ τῆς προβολῆς Ρ τοῦ κέντρου Ο ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ταύτην.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τὸ κέντρον Ο, τοῦ ὁποίου αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ὁμολόγους εὐθείας ΑΒ καὶ Α΄Β΄ ἔχουν σταθερὸν λόγον λ εἶναι σημεῖον γνωστοῦ γ.τ. : μιᾶς τῶν εὐθειῶν τῶν **ἀναλόγων ἀποστάσεων** (Ι, 6.6).

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ : 6 - 8.
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 33 - 46

3. ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΣ*

3.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.— Τὸ γινόμενον ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας καὶ ἀντιρρόπου ἰσότητος καλεῖται ἀντίρροπος ὁμοιότης.

Ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας καλεῖται καὶ **λόγος τῆς ἀντ. ὁμοιότητος.** Τὸ ὁμόλογον (F΄) κατὰ ἀντίρροπον ὁμοιότητα, ἑνὸς σχήματος (F) καλεῖται **ἀντιρρόπως ὅμοιον** αὐτοῦ, εἶναι δὲ ἀντιρρόπως ἴσον πρὸς σχῆμα ὁμοιόθετον τοῦ (F).

* Ἐκτίθεται συνοπτικώτερον, κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ προηγούμενα.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● 1. Τὸ ὁμόλογον εὐθείας, ἡμιευθείας, κύκλου (Κ,α) εἶναι ἀντιστοίχως εὐθεῖα, ἡμιευθεῖα, κύκλος (Κ΄,λα) | λ ὁ λόγος ὁμοιότητος |.

● **2. Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων τμημάτων εἶναι σταθερός, ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος.**

● **3. Ἡ ἀντ. ὁμοιότης ἀναστρέφει τὰς** γωνίας.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

● 1. Ἡ ἀντ. ὁμοιότης εἶναι μετασχηματισμὸς **γενικώτερος** τῆς ἀντ. ἰσότητος, ἡ ὁποία εἶναι **ἡ ἀντ. ὁμοιότης λόγου 1.** Ἡ ἀντ. ὁμοιότης λόγου $\lambda \neq 1$ εἶναι μετασχηματισμὸς διάφορος τῶν ἤδη μελετηθέντων.

● 2. Ἡ ἀντ. ὁμοιότης εἶναι μετασχηματισμὸς **ἀμφιμονοσήμαντος**.

3.2 ΟΡΙΣΜΟΣ ΑΝΤ. ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ ΑΠΟ ΖΕΥΓΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

● Ἔστω ἀντίρροπος ὁμοιότης c, λόγου λ καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων. Εἶναι (3.1 Πορ. 2):

$$A'B' = \lambda AB$$

Τὸ ὁμόλογον Μ΄ τυχόντος σημείου Μ (σχ. 3.2) δύναται νὰ καθορισθῇ ἀπὸ τὰς συνθήκας (3.1 Πορ. 2 καὶ 3):

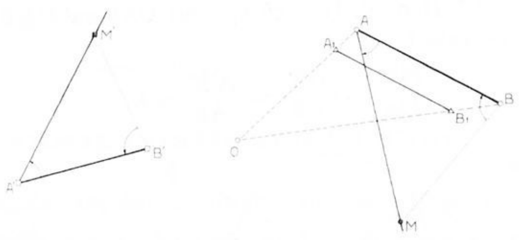
$$A'M' = \lambda AM \tag{1}$$

καὶ

$$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) \tag{2}$$

(ἢ ὡς κορυφὴ τριγώνου Α΄Β΄Μ΄ ἀντ. ὁμοίου πρὸς τὸ ΑΒΜ)

ΣΧ. 3.2



● **Ἀντιστρόφως :** Θεωρήσωμεν τὰ τμήματα ΑΒ καὶ Α΄Β΄, ἔστω δὲ λ ὁ λόγος τοῦ Α΄Β΄ πρὸς τὸ ΑΒ. **Ὁ μετασχηματισμὸς c, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ΄ τυχόντος σημείου Μ ὁρίζεται ἀπὸ τὰς συνθήκας (1) καὶ (2) εἶναι ἀντίρροπος ὁμοιότης.**

Πράγματι, μία ὁμοιοθεσία h, **αὐθαιρέτου** κέντρου Ο καὶ λόγου λ, μετασχηματίζει τὸ AB εἰς $A_1B_1=\lambda AB=A'B'$, ὁπότε ὑπάρχει ἀντίρροπος ἰσότης q μετασχηματίζουσα τὸ $\overrightarrow{A_1B_1}$ εἰς $\overrightarrow{A'B'}$. Τὸ ὁμόλογον τοῦ M τόσον κατὰ τὴν ἀντ. ὁμοιότητα $q \circ h$, ὅσον καὶ κατὰ τὸν μετασχηματισμὸν c εἶναι, λόγῳ τῶν (1) καὶ (2), τὸ αὐτὸ σημεῖον M′. Ἄρα:

$$c = q \circ h$$

Θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ c ὁρίζεται **ἀπὸ τὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.**

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Μία ἀντ. ὁμοιότης δύναται νὰ θεωρηθῇ κατ' ἀπείρους τρόπους ὡς τὸ γινόμενον ὁμ. ὁμοιοθεσίας καὶ ἀντ. ἰσότητος.**

● **2. Ὁ ἀντίστροφος ἀντ. ὁμοιότητος εἶναι ἀντ. ὁμοιότης.**

● **3. Μία ἀντ. ὁμοιότης, ἔχουσα δύο ἡνωμένα σημεῖα A καὶ B, εἶναι ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB** (V, 2.2 Πορ. 3).

● **4. Ἂν μετασχηματισμὸς ἀναστρέφῃ τὰς γωνίας, οὗτος εἶναι ἀντ. ὁμοιότης.**

3.3 ΑΝΑΓΩΓΗ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

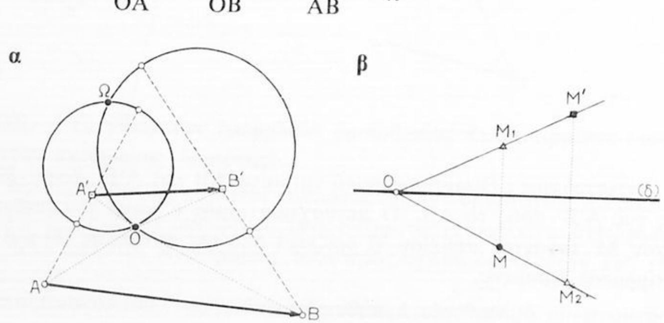
Ἔστω c μία ἀντ. ὁμοιότης, λόγου λ καὶ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ἓν ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων. Θὰ ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ c ἔχῃ ἡνωμένον σημεῖον.

● Ἂν $\lambda = 1$, ἡ c εἶναι ἀντίρροπος ἰσότης καὶ ὡς γνωστόν, πλὴν τῆς περιπτώσεως τῆς συμμετρίας, δὲν ἔχει ἡνωμένα σημεῖα.

● Ὑποθέτομεν $\lambda \neq 1$. Ἂν ἡ c ἔχῃ ἡνωμένον σημεῖον O, τοῦτο θὰ εἶναι μοναδικὸν (3.2, Πορ. 3). Τότε τὰ τρίγωνα OAB καὶ OA′B′ (σχ. 3.3α) εἶναι ὁμόλογα, συνεπῶς:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = \lambda$$

ΣΧ. 3.3



Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὸ σημεῖον O πρέπει νὰ ἀναζητηθῇ εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο Ἀπολλωνίων κύκλων, τὰ σημεῖα τῶν ὁποίων ἔχουν ἀποστάσεις λόγου λ, τοῦ ἑνὸς μὲν ἀπὸ τὰ A′,A, τοῦ ἑτέρου δὲ ἀπὸ τὰ B′,B. Ἀλλ' ἤδη, τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς Ω εἶναι (2.7, 2) τὸ κέντρον τῆς ὑπὸ τῶν $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A'B'}$, ὁριζομένης **ὁμορρόπου** ὁμοιότητος. Τὸ ἄλλο, ἔστω O, εἶναι τὸ ζητούμενον.

Πράγματι, τὰ τρίγωνα OAB, OA′B′ ἐκ κατασκευῆς ἔχουν τὰς πλευρὰς ἀναλόγους, εἶναι ἑπομένως ὅμοια καὶ δὴ ἀντιρρόπως, διότι ἄλλως τὸ O θὰ ἦτο ἓν δεύτερον ἡνωμένον σημεῖον τῆς ἀνωτέρω ὁμορρόπου ὁμοιότητος, ὅπερ ἀποκλείεται (2.2, Πορ. 3).

● Ἐξ ἄλλου, παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν ἡ c ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ὁμοιοθεσίας κέντρου O καὶ ἀντ. ἰσότητος (3.2, Πορ. 1), τὸ σημεῖον O, ἀναλλοίωτον κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν, θὰ εἶναι ἀναλλοίωτον καὶ κατὰ τὴν ἀντ. ἰσότητα, ἡ ὁποία, ἑπομένως (V, 2.2, Πορ. 3), εἶναι συμμετρία ὡς πρὸς εὐθεῖαν (δ) διερχομένην διὰ τοῦ O.

Ἄρα: $c = \Sigma[\delta] \circ \mathbf{H}[O,\lambda]$ μὲ $O \in (\delta)$

Εὐκόλως δεικνύεται (σχ. 3.3β) ὅτι τὸ ἀνωτέρω γινόμενον εἶναι ἀντιμεταθετικόν, ἤτοι:

$$c = \mathbf{H}[O,\lambda] \circ \Sigma[\delta]$$

Συμπεραίνομεν, ὅθεν:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Μία ἀντίρροπος ὁμοιότης, λόγου $\lambda \neq 1$, ἔχει ἓν ἡνωμένον σημεῖον O, δύναται δὲ νὰ ἀναχθῇ εἰς τὸ ἀντιμεταθετικὸν γινόμενον ὁμοιοθεσίας, κέντρου O καὶ τοῦ αὐτοῦ λόγου λ, καὶ συμμετρίας ὡς πρὸς εὐθεῖαν (δ) διερχομένην διὰ τοῦ O.

Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἀναχθεῖσαν ἀντ. ὁμοιότητα συμβολίζομεν: $\mathbf{C}[O,\lambda,\delta]$

3.4 ΚΕΝΤΡΟΝ ΚΑΙ ΑΞΟΝΕΣ ΑΝΤΙΡΡΟΠΟΥ ΟΜΟΙΟΤΗΤΟΣ

Τὸ ἡνωμένον σημεῖον τῆς ἀντ. ὁμοιότητος καλεῖται **κέντρον** αὐτῆς.

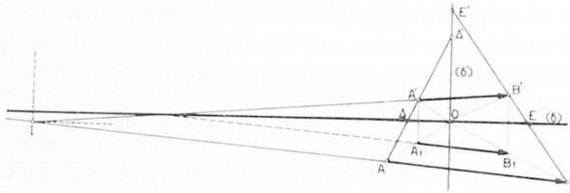
Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι κατὰ τὴν ἀντ. ὁμοιότητα $c = \mathbf{C}[O,\lambda,\delta]$:

● 1. Τὸ κέντρον O εἶναι κοινὸν σημεῖον ὅλων τῶν Ἀπολλωνίων κύκλων, τὰ σημεῖα ἑκάστου τῶν ὁποίων ἔχουν ἀποστάσεις λόγου λ, ἀπὸ δύο ὁμόλογα σημεῖα.

● 2. Ἡ εὐθεῖα (δ) ὡς καὶ ἡ κάθετος (δ′) ἐπὶ τὴν (δ) εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτοι, καλοῦνται δὲ **ἄξονες** τῆς ἀντ. ὁμοιότητος.

● 3. Ἄν $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ εἶναι ζεῦγος ὁμολόγων διανυσμάτων (σχ. 3,4), οἱ φορεῖς αὐτῶν ἔχουν διευθύνσεις συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (δ), διότι τὸ $\overrightarrow{A'B'}$ εἶναι συμμετρικὸν διανύσματος $\overrightarrow{A_1B_1}$ παραλλήλου τοῦ $\overrightarrow{AB}$. Ἄρα, ἡ γωνία τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν AB, A΄B΄ ἔχει διχοτόμους **παραλλήλους** τῶν (δ) καὶ (δ΄).

ΣΧ.
3.4



● 4. Εἰδικώτερον, ἂν (Α,Α΄) εἶναι ζεῦγος ὁμολόγων σημείων, οἱ ἄξονες διχοτομοῦν τὴν γωνίαν τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν ΟΑ, ΟΑ΄, περιέχουν δηλαδὴ τὰς διχοτόμους ΟΔ καὶ ΟΔ΄ τοῦ τριγώνου ΟΑΑ΄ καὶ εἰδικώτερον τὰ ἴχνη των, τὰ ὁποῖα **χωρίζουν ἁρμονικῶς** τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A'A}$ εἰς τὸν λόγον (I, 6.4) $\dfrac{OA'}{OA}$ ἤτοι, τὸν λόγον ὁμοιότητος. Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ κατασκευὴ τῶν ἀξόνων ὁμοιότητος διὰ τῶν σημείων Δ,Δ΄ καὶ Ε,Ε΄, τὰ ὁποῖα χωρίζουν ἁρμονικῶς εἰς τὸν λόγον αὐτῆς, δύο διανύσματα $\overrightarrow{A'A}$ καὶ $\overrightarrow{B'B}$ ὁμολόγων σημείων.

● 5. Δύο ὁμόλογα σημεῖα Α,Α΄ μὴ κείμενα ἐπὶ τῶν ἀξόνων, κεῖνται ἑκατέρωθεν τοῦ (δ) καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ (δ΄). Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΑ΄ εἶναι πλαγία πρὸς τοὺς ἄξονας δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀναλλοίωτος. Οὕτως, οἱ ἄξονες εἶναι αἱ **μόναι** ἀναλλοίωτοι εὐθεῖαι κατὰ τὴν ἀντ. ὁμοιότητα.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ : 9
ΑΣΚΗΣΕΙΣ : 47 - 50

4. ΟΜΟΙΟΤΗΣ

4.1 ΟΜΑΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΩΝ

Τὸ γινόμενον μιᾶς ὁμορρόπου καὶ μιᾶς ἀντιρρόπου ὁμοιότητος ἀναστρέφει τὰς γωνίας, ἄρα εἶναι ἀντίρροπος ὁμοιότης, ἐνῷ τὸ γινόμενον δύο ἀντιρρόπων ὁμοιοτήτων διατηρεῖ τὰς γωνίας καὶ ἑπομένως εἶναι ὁμόρροπος ὁμοιότης.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὡς καὶ τῶν § 2.5 καὶ § 3.2 Πορ. 2 προκύπτει ὅτι:

ΘΕΩΡΗΜΑ.—Τὸ σύνολον τῶν ὁμοιοτήτων τοῦ Ἐπιπέδου εἶναι ὁμάς.

4.2 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΣ

Κατὰ μίαν ὁμοιότητα, ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον, ὁ λόγος δύο ὁμολόγων τμημάτων εἶναι, ὡς εἴδομεν, σταθερός. Ἡ ἰδιότης αὕτη εἶναι χαρακτηριστικὴ τῆς ὁμοιότητος.

Πράγματι, ἂν μετασχηματισμὸς t ἔχῃ τὴν ὡς ἄνω ἰδιότητα ἀποδεικνύεται ἀκριβῶς ὡς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἰσότητος (V, 3.2) ὅτι **ὁ t ἰσοῦται πρὸς τὴν ὁμοιότητα,** ὁμόρροπον ἢ ἀντίρροπον, ἥτις ἀντιστοιχίζει δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, ὁμόλογα κατὰ τὸν t.

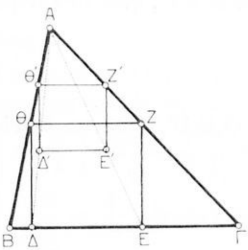
ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. **Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ΔΕΖΘ (Δ καὶ Ε ἐπὶ τῆς ΒΓ).**

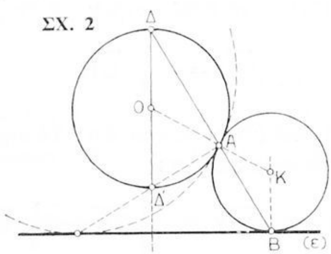
Λύσις

Δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓν τετράγωνον Δ΄Ε΄Ζ΄Θ΄ (σχ. 1) ὁμοιόθετον τοῦ ζητουμένου κατὰ ὁμοιοθεσίαν, κέντρου Α, ὁρίζοντες τμῆμα Θ΄Ζ΄ ∥ ΒΓ μὲ ἄκρα ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ. Τὰ σημεῖα τομῆς τῆς ΒΓ μετὰ τῶν ΑΔ΄ καὶ ΑΕ΄ εἶναι αἱ κορυφαὶ Δ καὶ Ε τοῦ ζητουμένου.

ΣΧ. 1



ΣΧ. 2



2. **Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο) καὶ δοθείσης εὐθείας (ε), ὅταν δίδεται τὸ ἓν τῶν σημείων ἐπαφῆς Α ἢ Β ἀντιστοίχως** (σχ. 2).

Ὁ κύκλος (Ο) εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ ζητουμένου κύκλου (Κ) κατὰ ὁμοιοθεσίαν κέντρου Α, ἡ ὁποία μετασχηματίζει τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Β εἰς ἓν τῶν ἄκρων τῆς καθέτου πρὸς τὴν (ε) διαμέτρου ΔΔ΄ τοῦ (Ο). Ὥστε:

- ἂν δίδεται τὸ Α, ὁρίζομεν τὸ Β ὡς σημεῖον τομῆς τῆς ΔΑ ἢ Δ΄Α καὶ (ε).
- ἂν δίδεται τὸ Β, ὁρίζομεν τὸ Α ὡς τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς ΒΔ ἢ ΒΔ΄ καὶ τοῦ (Ο).

Ὁρισθέντος καὶ τοῦ δευτέρου σημείου ἐπαφῆς, ὁρίζεται τὸ κέντρον Κ ὡς τομὴ τῶν εὐθειῶν ΟΑ καὶ τῆς διὰ τοῦ Β καθέτου ἐπὶ τὴν (ε).

3. ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ EULER

Ἔστωσαν (σχ. 3): τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ, (O,R) ὁ περιγεγραμμένος κύκλος του, Α΄,Β΄, Γ΄ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ (Ο΄,R΄) ὁ κύκλος (Α΄,Β΄,Γ΄).

- Εἶναι: $$\frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A'\Gamma'}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = -\frac{1}{2}$$

Ἄρα (1.6, 4) τὸ τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ ΑΒΓ κατὰ ὁμοιοθεσίαν λόγου $-\frac{1}{2}$, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εἶναι **τὸ κοινὸν σημεῖον** τῶν ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ ἤτοι, τὸ κέντρον βάρους G τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἑπομένως καὶ ὁ κύκλος (Ο΄,R΄) εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (O,R) Ἄρα (1.7):

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{2} \quad \text{καὶ} \quad \overrightarrow{GO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \tag{1}$$

- Κατὰ τὴν ἀνωτέρω ὁμοιοθεσίαν ὁμόλογον τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, ἤτοι τὸ κέντρον Ο.

Ἄρα: $$\overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH} \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι: **Τὰ σημεῖα O,G,O΄,H κεῖνται ἐπ' εὐθείας (Euler)** ὡς ἐπίσης καὶ ὅτι:

$$\overrightarrow{OO'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH} \tag{3}$$

ἤτοι **τὸ Ο΄ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΗ.** Ἑπομένως, λόγῳ καὶ τῆς (1):

Ἡ τετρὰς (O,O΄,G,H) εἶναι ἁρμονική.

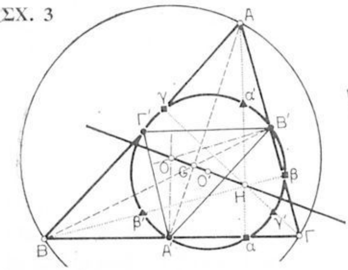
Ἐξ ἄλλου, ἂν α,β,γ εἶναι οἱ πόδες τῶν ὑψῶν, τὸ κέντρον Ο΄, μέσον τοῦ ΟΗ, ἀνήκει εἰς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος Α΄α (ὁμοίως Β΄β, Γ΄γ) ἄρα ὁ κύκλος (Ο΄,R΄) **διέρχεται καὶ ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν** τοῦ τριγώνου.

● Ὑπάρχει καὶ δευτέρα ὁμοιοθεσία, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος (O′,R′) εἶναι ὁμοιόθετος τοῦ (O, R). Ἔχει λόγον $\frac{1}{2}$, τὸ δὲ κέντρον της εἶναι τὸ συζυγὲς τοῦ G ὡς πρὸς τὰ O καὶ O′ (1.7, Θεωρ. II). Ἄρα εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον H. Κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν ταύτην ὁμοιόθετα τῶν A,B,Γ εἶναι τὰ **μέσα τῶν τμημάτων** HA, HB, HΓ, τὰ ὁποῖα, ἑπομένως, **ἀνήκουν εἰς τὸν κύκλον** (O′,R′).

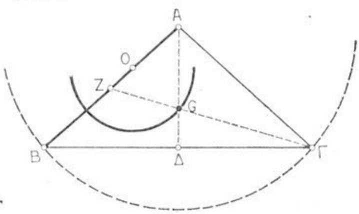
Συνοψίζομεν τὰ ἀνωτέρω ὡς ἀκολούθως :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Εἰς πᾶν τρίγωνον, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν καὶ τὰ μέσα τῶν τμημάτων τῶν ὁριζομένων ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον καὶ τὰς τρεῖς κορυφὰς εἶναι ἐννέα σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Euler). Τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Euler, τὸ κέντρον βάρους καὶ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, σχηματίζοντα ἁρμονικὴν τετράδα.

ΣΧ. 3



ΣΧ. 4



4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν κέντρων βάρους τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων ΑΒΓ, τῶν ὁποίων μία τῶν ἴσων πλευρῶν, ἡ ΑΒ, εἶναι σταθερά.

Λύσις

Ἡ κορυφὴ Γ διαγράφει τὸν κύκλον (A, AB), τὸ δὲ σημεῖον G, κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου, εἶναι ὁμόλογον τοῦ Γ (σχ. 4) κατὰ τὸ γινόμενον $\mathbf{H}\left[A, \frac{2}{3}\right] \circ \mathbf{H}\left[B, \frac{1}{2}\right]$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοιοθεσία h, ἔχουσα λόγον $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ καὶ κέντρον τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν ΓG καὶ AB (1.8, 1), δηλ. τὸ μέσον Z τοῦ τμήματος AB. Ἑπομένως, τὸ σύνολον τῶν σημείων G εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ κύκλου (A,AB) κατὰ τὴν $h = \mathbf{H}\left[Z, \frac{1}{3}\right]$ ἤτοι, **κύκλος** μὲ ἀκτῖνα $\frac{1}{3}$ AB, τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον O, ὁμοιόθετον τοῦ A, εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ τμήματος ZA, διὰ τὸ ὁποῖον $ZO = \frac{1}{3}ZA$.

5. ΔΙΑΤΕΜΝΟΥΣΑΙ

ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΝΕΛΑΟΥ.—Ἂν ΑΒΓ εἶναι τυχὸν τρίγωνον, ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα τὰ σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως κεῖνται ἐπ' εὐθείας (σχ. 5α), **εἶναι ἡ :**

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}}=1 \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις

Θεωρήσωμεν τὰς ὁμοιοθεσίας: h_1, ἥτις, ἔχουσα κέντρον Α΄, μετασχηματίζει τὸ Γ εἰς Β καὶ h_2, ἥτις, ἔχουσα κέντρον Γ΄, μετασχηματίζει τὸ Β εἰς Α. Τὸ γινόμενον $h_2 o h_1$ αὐτῶν, ἑπομένως, μετασχηματίζει τὸ Γ εἰς Α. Ὁ μετασχηματισμὸς $h_2 o h_1$ εἶναι ὁμοιοθεσία μὲ λόγον τὸ γινόμενον $\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}}$ τῶν λόγων τῶν h_1 καὶ h_2 καὶ κέντρον τὴν τομὴν τῶν ΑΓ καὶ Α΄Γ΄ (1.8, 1). Ἄρα, ἵνα τὸ κέντρον τῆς ὡς ἄνω ὁμοιοθεσίας εἶναι τὸ σημεῖον Β΄, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ :

$$\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'\Gamma}}=\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}}$$

ἢ ἰσοδυνάμως ἡ (1).

ΘΕΩΡΗΜΑ CEVA.—Ἂν ΑΒΓ εἶναι τυχὸν τρίγωνον καὶ Α΄, Β΄, Γ΄ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως, ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχωνται διὰ σημείου (σχ. 5β), **εἶναι ἡ :**

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}}=-1 \qquad (1)$$

Ἀπόδειξις

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ι τῶν ΒΒ΄ καὶ ΓΓ΄ καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον A_0 τῶν ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ (ΙΙ, 1.1). Ἄρα, ἵνα καὶ ἡ ΑΑ΄ διέρχεται διὰ τοῦ Ι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ A_0 ὡς πρὸς τὰς ΑΒ, ΑΓ καὶ τὰ Α΄ καὶ A_0 νὰ εἶναι συζυγῆ ὡς πρὸς τὰ Β καὶ Γ, ἤτοι :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'\Gamma}}=-\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0\Gamma}} \qquad (2)$$

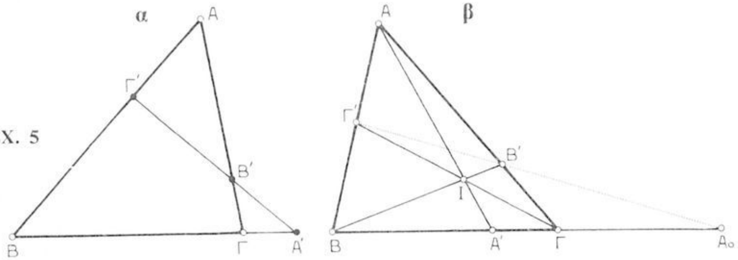
Ἀλλὰ τὰ A_0,Β΄,Γ΄ εἶναι ἐπ' εὐθείας καὶ κατὰ τὸ Θεώρημα Μενελάου θὰ εἶναι :

$$\frac{\overline{A_0B}}{\overline{A_0\Gamma}}\cdot\frac{\overline{B'\Gamma}}{\overline{B'A}}\cdot\frac{\overline{\Gamma'A}}{\overline{\Gamma'B}}=1$$

ἐκ τῆς ὁποίας, λόγῳ τῆς (2), προκύπτει τὸ ζητούμενον.

ΠΟΡΙΣΜΑ.—Αἱ συμμετροδιάμεσοι τριγώνου (ΙΙ, Ἐφ. 5,4) **διέρχονται διὰ σημείου.**

ΣΧ. 5



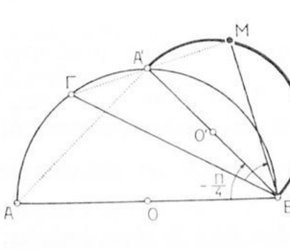
6. **Σημεῖον Γ διαγράφει ἡμίκυκλον (Ο) διαμέτρου ΑΒ** (σχ. 6). **Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον ΒΓΜ, ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον κατὰ τὴν γωνίαν Μ, ἀντιθέτως προσανατολισμένον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῆς κορυφῆς Μ.**

Λύσις

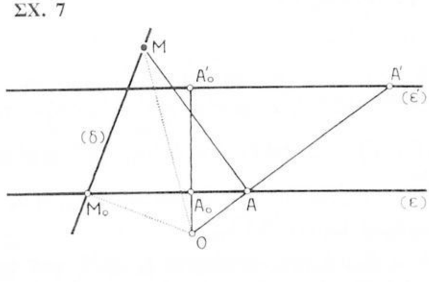
Εἶναι : $(\overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{BM}) = -\dfrac{\pi}{4}$ καὶ $BM = B\Gamma \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ἄρα, τὸ Μ εἶναι ὁμόλογον τοῦ σημείου Γ κατὰ τὴν ὁμ. ὁμοιότητα $S\left[B, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\pi}{4}\right]$. Ἄρα, ὁ ζητούμενος γ.τ. εἶναι ἡμίκυκλος (Ο′) τοῦ ὁποίου διάμετρος εἶναι ἡ Α′Β, ἔνθα Α′ τὸ ὁμόλογον τοῦ Α.

ΣΧ. 6



ΣΧ. 7



7. **Δίδονται δύο παράλληλοι (ε) καὶ (ε′) καὶ σταθερὸν σημεῖον Ο τοῦ ἐπιπέδου των. Μία μεταβλητὴ τέμνουσα διὰ τοῦ Ο ὁρίζει ἐπὶ τῶν παραλλήλων τούτων τὰ σημεῖα Α καὶ Α′ ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι Μ τὸ σημεῖον, διὰ τὸ ὁποῖον: $AM = AA'$ καὶ $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2}$, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ.**

Λύσις

Τὰ **ὀρθογώνια** τρίγωνα ΟΑΜ (σχ. 7) , ἀνὰ δύο, εἶναι ὁμ. ὅμοια διότι :

$$\frac{OA}{AM} = \frac{OA}{AA'} = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ἂν A_0 καὶ A'_0 εἶναι αἱ προβολαὶ τοῦ O ἐπὶ τὰς (ε) καὶ (ε΄) καὶ M_0 τὸ εἰς τὴν OA_0 ἀντιστοιχοῦν σημεῖον τοῦ τόπου ($A_0M_0 = A_0A'_0$), ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OAM καὶ OA_0M_0 ἔχομεν:

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OM_0}{OA_0} = \lambda \ \sigma\tau\alpha\theta. \quad (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OM_0}) = \theta \ \sigma\tau\alpha\theta.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι τὸ M εἶναι ὁμόλογον τοῦ A κατὰ τὴν ὁμοιότητα S[O, λ, θ]. Ἐπειδὴ δὲ τὸ A διαγράφει τὴν (ε), τὸ M θὰ διαγράφῃ **εὐθεῖαν** (δ). Ἀλλὰ τὸ M_0 εἶναι ὁμόλογον τῆς προβολῆς A_0 τοῦ O ἐπὶ τὴν (ε). Ἄρα (2.7, 5) ἡ (δ) θὰ εἶναι ἡ εἰς τὸ M_0 κάθετος ἐπὶ τὴν OM_0.

8. ΣΗΜΕΙΟΝ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ ΤΟΥ MIQUEL

Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἂν Ε καὶ Ζ εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν ΑΒ, ΔΓ καὶ ΒΓ, ΑΔ ἀντιστοίχως (σχ. 8), **νὰ δειχθῇ ὅτι :**

1. Οἱ κύκλοι (Ζ, Α, Β), (Ζ, Γ, Δ), (Ε, Β, Γ), (Ε, Α, Δ), διέρχονται διὰ σημείου (Miquel).

2. Τὰ κέντρα O_1, O'_1, O_2, O'_2 τῶν ἀνωτέρω κύκλων ἀντιστοίχως καὶ τὸ σημεῖον O τοῦ Miquel εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ κύκλου (Miquel).

3. Ἂν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον, τότε τὸ O εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας ΕΖ.

Ἀπόδειξις

● 1. Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ ὁρίζουν ὁμ. ὁμοιότητα s_1, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον O εἶναι (2.7, 3) τὸ ἐκτὸς τοῦ Ε κοινὸν σημεῖον τῶν κύκλων (Ε,Α,Δ) καὶ (Ε,Β,Γ). Ἀλλὰ τὸ O εἶναι ἐπίσης (2.7, 4) κέντρον τῆς ὑπὸ τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{A\Delta}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ ὁριζομένης ὁμ. ὁμοιότητος s_2, ἄρα, κοινὸν σημεῖον καὶ τῶν κύκλων (Ζ,Α,Β) καὶ (Ζ,Δ,Γ).

● 2. Κατὰ τὴν ὁμοιότητα s_1 ὁμόλογον τοῦ κύκλου (O,A,B) εἶναι ὁ κύκλος (O,Δ,Γ). Συνεπῶς, τὰ κέντρα των O_1, O'_1 ἀντιστοίχως, εἶναι ὁμόλογα σημεῖα, ἄρα :

$$(\overrightarrow{OO_1}, \overrightarrow{OO'_1}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta}) \tag{1}$$

Ἐξ ἄλλου, τὰ τμήματα OA, OΔ εἶναι κοιναὶ χορδαὶ τοῦ (O_2) μὲ τοὺς (O_1) καὶ (O'_1) ἀντιστοίχως. Ἄρα : $O_2O_1 \perp OA$ καὶ $O_2O'_1 \perp O\Delta$. Ὡς ἐκ τούτου:

$$(O_2O_1, \ O_2O'_1) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Delta}) \tag{2}$$

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν (ΙΙΙ, 3.2, 4), ὅτι τὸ κέντρον O_2 εἶναι σημεῖον τοῦ κύκλου (O, O_1, O'_1)

Τὸ αὐτὸ ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὸ κέντρον O'_2.

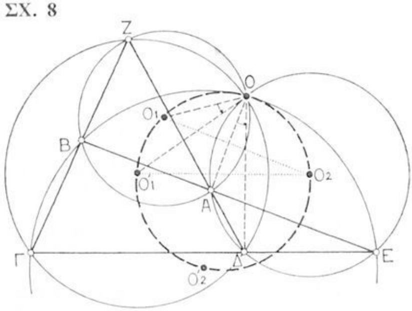
● 3. Εἶναι : $(OZ, OA) = (BZ, BA)$ καὶ $(OE, OA) = (\Delta E, \Delta A)$ (3)

Ἂν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγράψιμον, τὰ δεύτερα μέλη τῶν (3) εἶναι ἴσα. Ἄρα :

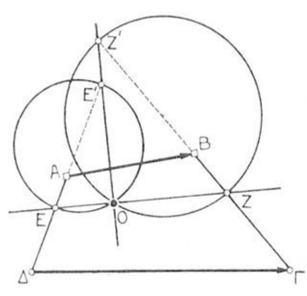
$$(OZ, OA) = (OE, OA)$$

τὸ ὁποῖον σημαίνει (ΙΙΙ, 3.2, 2), ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΖ καὶ ΟΕ συμπίπτουν.

ΣΧ. 8



ΣΧ. 9



9. **Θεωροῦμεν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἔστωσαν Ε, Ε΄ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν ἁρμονικῶς τὸ $\overrightarrow{A\Delta}$ εἰς τὸν λόγον $\dfrac{AB}{\Delta\Gamma}$ καὶ Ζ,Ζ΄ τὰ χωρίζοντα ἁρμονικῶς τὸ $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἰς τὸν αὐτὸν λόγον.**

Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ Ε΄Ζ΄ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῆς γωνίας (ΔΓ, ΑΒ), τέμνονται δὲ εἰς σημεῖον Ο, ἐξ οὗ διέρχονται καὶ οἱ κύκλοι μὲ διαμέτρους ΕΕ΄ καὶ ΖΖ΄ (σχ. 9).

'Απόδειξις

Ἔστω c ἡ ἀντ. ὁμοιότης, ἡ ὁριζομένη ἀπὸ τὸ ζεῦγος $(\overrightarrow{\Delta\Gamma}, \overrightarrow{AB})$. 'Επειδὴ ὁμόλογον τοῦ Δ εἶναι τὸ Α καὶ τοῦ Γ τὸ Β, οἱ ἄξονες αὐτῆς ὁρίζονται ἀπὸ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα χωρίζουν ἁρμονικῶς εἰς τὸν λόγον ὁμοιότητος $\dfrac{AB}{\Gamma\Delta}$ τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ (3.4, 4). Ἄρα, ἄξονες αὐτῆς εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΕΖ καὶ Ε΄Ζ΄. Αὗται εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τῶν ὁμολόγων εὐθειῶν ΓΔ, ΑΒ (3.4,3), τέμνονται δὲ εἰς τὸ κέντρον Ο τῆς ὁμοιότητος. Τὸ Ο, ὅμως, (3.4, 1) ἀνήκει εἰς τοὺς 'Απολλωνίους κύκλους μὲ διαμέτρους τὰς ΕΕ΄ καὶ ΖΖ΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ὁρίσατε τὰς ὁμοιοθεσίας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχίζουν δύο τρίγωνα ἢ δύο τετράγωνα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι.

2. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον Ο. Μεταβλητὸν σημεῖον Μ προβάλλεται ἐπὶ τὰς (δ) καὶ (δ΄) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Εὕρετε τὸν τόπον τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΑΒ ἔχῃ δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

3. Δίδονται δύο εὐθεῖαι (ε) καὶ (ε΄) καὶ σημεῖον Α. Μεταβλητὴ εὐθεῖα, ἔχουσα σταθερὰν διεύθυνσιν, τέμνει τὰς (ε) καὶ (ε΄) εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ.

4. Νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον ΓΔΕΖ εἰς ἡμίκυκλον διαμέτρου ΑΒ, εἰς τρόπον ὥστε τὰ Γ καὶ Δ νὰ εἶναι σημεῖα τῆς ΑΒ, τὰ δὲ Ε καὶ Ζ σημεῖα τοῦ ἡμικύκλου.

5. Αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι σταθεραί. Εὕρετε τοὺς γ. τόπους τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου, ὅταν ἡ κορυφὴ Α διαγράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) ἢ δοθέντα κύκλον (Ο).

6. Δείξατε ὅτι ἡ ὁμοιοθεσία μετασχηματίζει μίαν ἐφαπτομένην κύκλου εἰς ἐφαπτομένην τοῦ ὁμοιοθέτου του.

7. Δείξατε ὅτι, ἂν δύο κύκλοι ἢ κύκλος καὶ εὐθεῖα τέμνωνται ὑπὸ γωνίαν ω, τὰ ὁμοιόθετα αὐτῶν θὰ τέμνωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω.

8. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν κύκλων, τῶν ἐφαπτομένων δοθείσης εὐθείας (ε) εἰς ἓν σταθερὸν σημεῖον Α. Εὕρετε τοὺς γ. τόπους τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

9. Θεωροῦμεν τὸ σύνολον τῶν κύκλων, τῶν ἐφαπτομένων δύο τεμνομένων εὐθειῶν Οx καὶ Οy. Εὕρετε τοὺς γ. τόπους τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

10. Δοθέντων σταθεροῦ σημείου Ο καὶ κύκλου (Λ), ὅστις δὲν διέρχεται διὰ τοῦ Ο, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΟΑΒ, τοιαύτη ὥστε $\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \kappa$ (δοθείς).

11. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ σταθερὸν σημεῖον Α αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΒΓ, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον καὶ τῶν ὁποίων ἡ βάσις ΒΓ εἶναι ἴση πρὸς δοθὲν τμῆμα.

12. Θεωροῦμεν σταθερὸν σημεῖον Α καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Μ, διαγράφον δοθέντα κύκλον (Ο). Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων εἰς τὰ ὁποῖα, αἱ εὐθεῖαι ΑΜ τέμνουν τὰς δύο διχοτόμους τῆς γωνίας (ΟΑ, ΟΜ).

13. Δίδονται δύο κύκλοι ἐφαπτόμενοι εἰς τὸ σημεῖον Α. Διὰ σταθεροῦ σημείου Β ἄγομεν μίαν τέμνουσαν ΒΜΝ πρὸς ἕνα ἐκ τῶν κύκλων. Αἱ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΝ τέμνουν τὸν δεύτερον κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Μ΄ καὶ Ν΄. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα Μ΄ Ν΄ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου.

14. Δείξατε ὅτι, ὅταν τρεῖς κύκλοι ἐφάπτωνται ἀνὰ δύο, αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες συνδέουν ἓν ἐκ τῶν σημείων ἐπαφῆς μὲ τὰ δύο ἄλλα, ὁρίζουν εἰς ἕνα ἐκ τῶν κύκλων μίαν διάμετρον, παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον τῶν δύο ἄλλων κύκλων.

15. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ εὐθεῖα (ε). Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος μὲ κέντρον ἐπὶ τῆς (ε) διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου Α αὐτῆς καὶ ἐφαπτόμενος τοῦ κύκλου (Ο).

16. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς ἐκ τούτων εἰς ἓν σημεῖον Μ ὁρίζει ἐπὶ τοῦ ἄλλου τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Δείξατε ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι μία τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας (ΑΒ, ΑΓ).

17. Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΜ τοῦ ἑνὸς καὶ τὴν κάθετον ἐπ' αὐτὴν χορδὴν ΑΜ′ τοῦ ἄλλου. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου.

18. Δίδονται δύο κύκλοι τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Διὰ μεταβλητοῦ σημείου Μ ἑνὸς τῶν κύκλων, θεωροῦμεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸν ἕτερον κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων βάρους τῶν τριγώνων ΑΓΔ.

19. Θεωροῦμεν δύο ὁμοκέντρους κύκλους, σταθερὸν σημεῖον Ρ τοῦ ἐσωτερικοῦ κύκλου, τυχοῦσαν χορδὴν ΡΑ τοῦ κύκλου τούτου καὶ τὴν χορδὴν ΡΒΓ τοῦ ἐξωτερικοῦ κύκλου, κάθετον πρὸς τὴν ΡΑ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γ.τ. τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

20. Δίδονται τέσσαρα σταθερὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ κατὰ τὴν ὡς ἄνω διαδοχήν. Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (Ο), σύνολον τῶν σημείων Μ, διὰ τὰ ὁποῖα (ΜΑ, ΜΒ) = α καὶ τὸν κύκλον (Ο′) σύνολον τῶν σημείων Ν διὰ τὰ ὁποῖα (ΝΓ, ΝΔ)= - α.

1. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΟΟ′ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου, ὅταν τὸ α μεταβάλλεται.
2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῆς ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας τῶν δύο κύκλων.

21. Δίδεται κύκλος (Ο) καὶ ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου του τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Θεωροῦμεν μίαν μεταβλητὴν διάμετρον ΓΔ. Αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Μ.

22. Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους $(Λ_1)$, $(Λ_2)$, $(Λ_3)$ καὶ τὰ κέντρα ὁμοιοθεσίας αὐτῶν ἀνὰ δύο: O_1 καὶ O'_1 τῶν $(Λ_2)$, $(Λ_3)$, O_2 καὶ O'_2 τῶν $(Λ_1)$, $(Λ_3)$, O_3 καὶ O'_3 τῶν $(Λ_1)$,$(Λ_2)$. Δείξατε ὅτι τὰ κέντρα ὁμορρόπου ὁμοιοθεσίας O_1, O_2, O_3 κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐπ' εὐθείας ἐπίσης κεῖνται καὶ τὰ κέντρα O_1, O'_2, O'_3 ὡς καὶ τὰ O'_1, O_2, O'_3 καὶ O'_1, O'_2, O_3.

23. Θεωροῦμεν κύκλον ἐφαπτόμενον δύο κύκλων (Λ) καὶ (Λ′) εἰς τὰ σημεῖα Τ καὶ Τ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΤΤ′ διέρχεται δι' ἑνὸς τῶν κέντρων ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων (Λ) καὶ (Λ′).

24. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Λ) εἰς δοθὲν σημεῖον Τ αὐτοῦ καὶ δοθέντος ἄλλου κύκλου (Λ′).

25. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν εὐθειῶν καὶ δοθέντος κύκλου.

26. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δοθέντος σημείου καὶ τέμνων δύο δοθείσας εὐθείας ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ φ.

27. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δοθείσης εὐθείας.

28. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τριγώνου ΑΒΓ, τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Ι τὴν ἀπέναντι πλευρὰν καὶ εἰς τὸ Δ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τῶν τριγώνων τούτων, ὅταν μεταβάλλωνται, εἰς τρόπον ὥστε τὰ Α, Ι καὶ Δ νὰ παραμένουν σταθερά.

29. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν ΒΓ σταθερὰν καὶ παραμένει ἐγγεγραμμένον εἰς δοθέντα κύκλον. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐφάπτεται ἑνὸς σταθεροῦ κύκλου.

30. Θεωροῦμεν ὅλους τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται διὰ δύο σταθερῶν σημείων Α καὶ Β. Ἔστω Μ, τὸ σημεῖον ἐπαφῆς ἑνὸς τῶν κύκλων τούτων μὲ μίαν ἐφαπτομένην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τοῦ κύκλου Euler τοῦ τριγώνου ΑΜΒ.

31. Νὰ κατασκευασθῇ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν δίδωνται :

1. Ἡ γωνία Α καὶ αἱ διὰ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ διάμεσοι.
2. Αἱ γωνίαι Β καὶ Γ ὡς καὶ ἡ ἀπόστασις ΟΗ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀπὸ τὸ ὀρθόκεντρον.
3. Ἡ κορυφὴ Α, τὸ κέντρον βάρους Κ καὶ ἡ συνθήκη ὅτι αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ ἀνήκουν εἰς δύο δοθείσας εὐθείας (ἢ δύο κύκλους).
4. Ὁ λόγος τῶν πλευρῶν ΑΒ πρὸς ΑΓ, ἡ γωνία Α καὶ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου.
5. Αἱ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος ΑΔ.

32. Θεωροῦμεν ἐπὶ εὐθείας τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ κατὰ τὴν ἀναγραφομένην διαδοχὴν καὶ τὰ τρία ζεύγη τῶν κύκλων μὲ διαμέτρους ἀντιστοίχως (ΑΒ, ΓΔ) (ΑΓ, ΒΔ) καὶ (ΑΔ, ΒΓ). Δείξατε ὅτι :

1. Τὰ κέντρα ὁμ. ὁμοιοθεσίας τοῦ α΄ καὶ β΄ ζεύγους κύκλων συμπίπτουν εἰς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τοῦ γ΄ ζεύγους.
2. Τὰ κέντρα ὁμ. ὁμοιοθεσίας τοῦ α΄ ζεύγους καὶ ἀντ. ὁμοιοθεσίας τοῦ γ΄ ζεύγους συμπίπτουν εἰς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τοῦ β΄ ζεύγους.
3. Τὰ κέντρα ἀντ. ὁμοιοθεσίας τοῦ β΄ καὶ γ΄ ζεύγους συμπίπτουν εἰς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τοῦ α΄ ζεύγους.

33. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων τῶν ὁμοιοτήτων, δοθέντος λόγου, αἱ ὁποῖαι μετασχηματίζουν μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) εἰς δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε΄).

34. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο κύκλοι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι ὁμόλογοι κατ' ἀπειρίαν ὁμ. ὁμοιοτήτων. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν κέντρων ὁμοιότητος.

35. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων, ἐξ ἑκάστου τῶν ὁποίων δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

36. Δείξατε ὅτι δύο τεμνόμενοι κύκλοι εἶναι ὁμόλογοι κατὰ ὁμοιότητα, ἥτις ἔχει κέντρον τὸ ἓν τῶν σημείων τομῆς των, ἡ δὲ εὐθεῖα, ἡ συνδέουσα δύο ὁμόλογα σημεῖα ἐπὶ τῶν κύκλων τούτων, διέρχεται διὰ τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς των.

37. Τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει βάσιν ΒΓ σταθερὰν καὶ τὴν γωνίαν Α σταθεράν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς προβολῆς τοῦ μέσου τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

38. Δίδονται δύο ἴσοι κύκλοι ἐφαπτόμενοι εἰς ἓν σημεῖον Α. Θεωροῦμεν δύο μεταβλητὰς ἀκτῖνας ΟΜ καὶ Ο΄Μ΄ τοιαύτας ὥστε $(\overrightarrow{OM}, \quad \overrightarrow{O'M'}) = \frac{\pi}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΜΜ΄.

39. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (δ), σταθερὸν σημεῖον Β μὴ κείμενον ἐπὶ τῆς (δ) καὶ μεταβλητὸν ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἔχον τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἐπὶ τῆς (δ).

α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Γ, ὅταν τὸ σημεῖον Α διαγράφῃ τὴν (δ).

β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν καὶ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

40. Ὁμορρόπου ὁμοιότητος δίδεται τὸ κέντρον Ο καὶ ἓν ζεῦγος (Α,Α′) ὁμολόγων σημείων. Νὰ κατασκευσθῇ σημεῖον Μ καὶ τὸ ὁμόλογόν του Μ′, ὅταν δίδεται ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ ἢ διάνυσμα $\vec{V}$ ἴσον πρὸς τὸ $\overrightarrow{MM'}$ ἢ τὸ μέσον Ρ τοῦ τμήματος ΜΜ′ ἢ ἡ μεσοκάθετος τοῦ ΜΜ′.

41. Θεωροῦμεν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ σημεῖον Δ τοῦ ἐπιπέδου του. Κατασκευάζομεν τὰ ὁμ. ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ τρίγωνα ΑΔΕ καὶ ΔΒΖ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ΓΖΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

42. Ἔστωσαν δύο ὁμ. ὅμοια τρίγωνα ΟΑΜ καὶ ΟΑ′Μ′ μὲ ὕψη ἀντιστοίχως ΟΗ καὶ ΟΗ′. Ὀνομάζομεν Κ, Ι, Ζ τὰ μέσα τῶν τμημάτων ΑΑ′, ΜΑ′, Μ′Α. Συγκρίνατε τὰ δύο τρίγωνα ΚΙΖ καὶ ΟΗΗ′ καὶ συμπεράνατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΙΖ καὶ ΗΗ′ εἶναι κάθετοι.

43. Ἔστωσαν Ι, Κ, Ζ, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ καὶ ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ Μ, Ν, Ρ αἱ κορυφαὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας τῶν ὁμοίως προσανατολισμένων ἰσοσκελῶν καὶ ὀρθογωνίων τριγώνων ΒΜΓ, ΓΝΑ, ΑΡΒ.

1. Ἐφαρμόσατε εἰς τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{IN}$ τὸ γινόμενον τῶν $S\left(B, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \circ S\left(\Gamma, \sqrt{2}\, \frac{\pi}{4}\right)$

2. Συγκρίνατε τὰ τρίγωνα ΒΜΝ καὶ ΜΓΡ καὶ δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ διέρχονται δ.ἀ σημείου.

44. Δύο κύκλοι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἓν σημεῖον Μ διαγράφει τὸν κύκλον (Ο) καὶ ἓν σημεῖον Μ′ τὸν κύκλον (Ο′) εἰς τρόπον ὥστε $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = (\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'M'})$.

1. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΜΜ′ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΟΟ′ καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΜ′ διέρχεται διὰ τοῦ Β.

2. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ $\overrightarrow{MM'}$ εἰς δοθέντα λόγον.

45. Ἔστωσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (δ) καὶ (δ′) καὶ σταθερὸν σημεῖον Ο. Μεταβλητὴ διὰ τοῦ Ο εὐθεῖα τέμνει τὰς (δ) καὶ (δ′) εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′. Ἔστω Κ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου διαμέτρου ΜΜ′.
α) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐκ τοῦ σημείου Ο ἀγομένων ἐφαπτομένων εἰς τὸν κύκλον (Κ).
β) Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος (Κ) ὁρίζει χορδὴν σταθεροῦ μήκους ἐφ᾿ ἑκάστου τῶν τόπων τούτων.

46. Δοθέντων μιᾶς εὐθείας (ε) καὶ σημείου Ο, τοῦ ὁποίου ἡ προβολὴ ἐπὶ την (ε) ἔστω Ν, θεωροῦμεν ὅλας τὰς ὁμοιότητας κέντρου Ο, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχίζουν εἰς τὸ σημεῖον Ν ἓν σημεῖον Ν′ τῆς (ε).
1. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ γωνία τῆς ὁμοιότητος, ἂν εἶναι γνωστὸς ὁ λόγος λ αὐτῆς.
2. Ποῖος ὁ γ.τ. τῶν ὁμολόγων σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου, κατὰ τὰς ὡς ἄνω ὁμοιότητας;
3. Ποῖος ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς ὁμόλογον δοθὲν σημεῖον Μ′;
4. Δείξατε ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι (δ) τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὁμόλογον τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν (δ′) διέρχονται δι᾿ ἑνὸς σταθεροῦ σημείου.
5. Ἔστω (Γ′) τὸ ὁμόλογον δοθέντος κύκλου (Γ) κατὰ μίαν ἐκ τῶν ὁμοιοτήτων τούτων. Νὰ κατασκευασθῇ ὁ κύκλος (Γ′), ὅστις διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου ἢ ὅστις ἔχει ἀκτῖνα ἴσην πρὸς δοθεῖσαν ἢ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας.

47. Δείξατε ὅτι, ὁπωσδήποτε καὶ ἂν ἀναλυθῇ μία ἀντ. ὁμοιότης εἰς γινόμενον ὁμοιοθεσίας καὶ ἀντ. ἰσότητος, ὁ ἄξων τῆς ἀντ. ἰσότητος ἔχει σταθερὰν διεύθυνσιν.

48. Ἔστω ἡ ἀντ. ὁμοιότης $C[O,\lambda,\delta]$ καὶ $(\delta') \perp (\delta)$ ὁ ἕτερος τῶν ἀξόνων αὐτῆς. Δείξατε ὅτι ἡ ὁμοιότης αὕτη ἀνάγεται εἰς τὸ ἀντιμεταθετικὸν γινόμενον τῆς ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας $H[O, -\lambda]$ καὶ τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς τὸν ἄξονα (δ').

49. Δίδεται ἡ ἀντ. ὁμοιότης $c = C[O,\lambda,\delta,)$. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ ζεῦγος (M, M') ὁμολόγων σημείων, ἂν δίδεται ἡ εὐθεῖα MM' ἢ διάνυσμα ἴσον πρὸς $\overrightarrow{MM'}$ ἢ ὁ κύκλος (O,M,M') ἢ τὸ μέσον I τοῦ τμήματος MM' ἢ ἡ μεσοκάθετος τοῦ MM'.

50. Δίδεται ἀντ. ὁμοιότης c, λόγου λ, ἥτις μετασχηματίζει τὸ σημεῖον A εἰς A', τὸ δὲ A' εἰς A''. Δείξατε ὅτι:

1. Τὸ κέντρον αὐτῆς O εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας AA'' καὶ τῆς ἐφαπτομένης εἰς τὸ A' τοῦ κύκλου (A, A', A'').
2. $c^2 = H[O, \lambda^2]$.
3. Τὸ κέντρον O εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν τὰ ἴχνη τῶν διχοτόμων τῆς γωνίας A' τοῦ τριγώνου $AA'A''$, οἱ δὲ ἄξονες τῆς ὁμοιότητος εἶναι μεσοκάθετοι τῶν ἀνωτέρω διχοτόμων.

51. ΟΜΟΙΑΙ ΔΙΑΙΡΕΣΕΙΣ ΕΠΙ ΕΥΘΕΙΩΝ.— Θεωρήσωμεν ἐπὶ δύο εὐθειῶν (ε) καὶ (ε') ἀντιστοίχως τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A'B'}$, ἔστω δέ:

$$A'B' = \lambda AB$$

Θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ σημεῖα $M \in (\varepsilon)$ καὶ $M' \in (\varepsilon')$ ὁρίζουν **ὁμοίας διαιρέσεις**, λόγου λ, ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω εὐθειῶν ἄν:

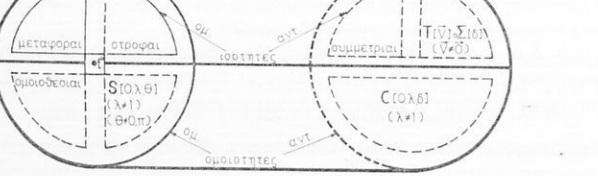
$$A'M' = \lambda AM \text{ καὶ } B'M' = \lambda BM$$

Ὑπὸ τὰς ἀνωτέρω προϋποθέσεις δείξατε ὅτι (Πρβλ. V, ἐφ. 5):

1. Ἂν εἶναι I τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν εὐθειῶν (ε) καὶ (ε'), οἱ περὶ τὰ τρίγωνα IMM' κύκλοι διέρχονται διὰ σταθεροῦ σημείου O, κέντρου τῆς ὑπὸ τῶν $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$ ὁριζομένης ὁμ. ὁμοιότητος.

2. Τὰ κάτωθι σημεῖα διαγράφουν εὐθείας: Τὸ σημεῖον P τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ $\overrightarrow{M'M}$ εἰς δοθέντα λόγον, εἰδικώτερον δὲ εἰς τὸν λόγον λ ἢ ὅταν P εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος MM'. Ἡ προβολὴ Ω τοῦ κέντρου O ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν MM', τὸ ὀρθόκεντρον H τοῦ τριγώνου IMM' (διαγράφουν ἀντιστοίχως τὰς εὐθείας Simson καὶ Steiner τοῦ τριγώνου IMM' ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O) ὡς καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον IMM' κύκλου (διαγράφει τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος IO).

52. ΔΟΜΗ ΤΗΣ ΟΜΑΔΟΣ ΤΩΝ ΟΜΟΙΟΤΗΤΩΝ.— Ἀναγνωρίσατε τὴν δομὴν τῆς ὁμάδος τῶν ὁμοιοτήτων εἰς τὸ κατωτέρω σχῆμα, συμφώνως πρὸς τὰ ἐκτεθέντα. (Διὰ συνεχοῦς γραμμῆς σημειοῦνται ὑποομάδες).



VII. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ

Ἡ **ἀντιστροφὴ** διαφέρει οὐσιωδῶς τῶν ἤδη μελετηθέντων μετασχηματισμῶν. Οὕτω π.χ., ἐνῷ ἡ ὁμοιότης μετασχηματίζει κάθε εὐθεῖαν εἰς εὐθεῖαν καὶ κάθε κύκλον εἰς κύκλον, ἡ ἀντιστροφή, μετασχηματισμὸς ἐνελεικτικός, ἐναλλάσσει τὰς μὴ διερχομένας διὰ τοῦ κέντρου της **εὐθείας εἰς κύκλους** διερχομένους δι' αὐτοῦ. Ἐξ ἄλλου μετατρέπει δύο τεμνόμενα σχήματα, εἰς σχήματα τεμνόμενα ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν, διατηροῦσα εἰδικώτερον τὴν ὀρθογωνιότητα, ὡς καὶ τὴν ἐπαφὴν δύο σχημάτων. Ἕνεκα τῶν ἀνωτέρω καὶ ἄλλων συναφῶν ἰδιοτήτων, πολλαὶ καὶ ποικίλαι εἶναι αἱ περιπτώσεις, καθ' ἃς ἡ ἀντιστροφὴ δύναται νὰ ἀποβῇ πολύτιμον ἀποδεικτικὸν μέσον, μετατρέπουσα προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ὑπεισέρχονται κύκλοι ἢ εὐθεῖαι, εἰς ἄλλα, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι ἁπλουστέρα.

1. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ*

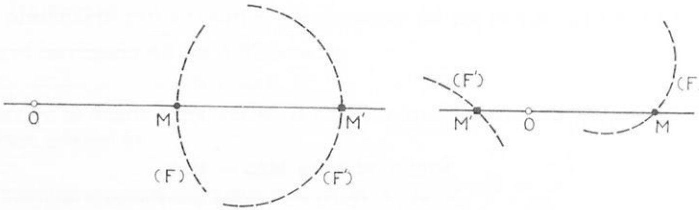
1.1 ΓΕΝΙΚΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ.—Ἔστωσαν σταθερὸν σημεῖον Ο καὶ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\kappa \neq 0$. **Ἀντιστροφή, κέντρου Ο καὶ δυνάμεως κ, καλεῖται ὁ μετασχηματισμός, κατὰ τὸν ὁποῖον τὸ ὁμόλογον Μ′ τυχόντος σημείου $M \neq O$ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς εὐθείας ΟΜ τὸ ὁριζόμενον ἐκ τῆς συνθήκης :**

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \kappa \qquad (1)$$

Ὁμόλογον τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς δὲν ὁρίζεται. Τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην ἀντιστροφὴν συμβολίζομεν : **I**[Ο,κ]

ΣΧ. 1.1



Ἐκ τοῦ ὡς ἄνω ὁρισμοῦ, προκύπτουν τὰ ἀκόλουθα :

● 1. Ἂν $\kappa > 0$ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Ο καὶ ἡ ἀντιστροφὴ καλεῖται **ὁμόρροπος** (ἢ θετική). Ἂν $\kappa < 0$ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ Ο καὶ ἡ ἀντιστροφὴ καλεῖται **ἀντίρροπος** (ἢ ἀρνητική).

● 2. Ἂν Μ′ εἶναι τὸ ὁμόλογον σημείου τινὸς Μ, ἐκ τῆς (1) συνάγεται ὅτι καὶ τὸ Μ εἶναι ὁμόλογον τοῦ Μ′.

Ἄρα : **Ἡ ἀντιστροφὴ εἶναι μετασχηματισμὸς ἐνελεικτικός.**

Δύο σημεῖα ἢ σχήματα ὁμόλογα κατὰ ἀντιστροφὴν καλοῦνται **ἀντίστροφα** ἀλλήλων.

● 3. Ἔστωσαν (Α,Α′) καὶ (Β,Β′) δύο ζεύγη ἀντιστρόφων σημείων ἐπὶ **διακεκριμένων** εὐθειῶν (σχ. 1.2). Ἐπειδή :

$$\kappa = \overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$$

τὰ σημεῖα Α, Α′, Β, Β′ **εἶναι συγκυκλικά.**

---

* Τὰ ἐκτιθέμενα ἰσχύουν ἐν γένει καὶ εἰς τὸν Χῶρον.

1.2 ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ

● **1. Σημεῖα**

Τὰ ἡνωμένα σημεῖα τῆς ἀντιστροφῆς ὁρίζονται ἐκ τῆς συνθήκης : $OM^2=\kappa$.

Ἄρα :

α. Μία ἀντίρροπος ἀντιστροφὴ ($\kappa < O$) **δὲν ἔχει** ἡνωμένα σημεῖα.

β. Μία ὁμόρροπος ἀντιστροφὴ ἔχει ἡνωμένα τὰ σημεῖα τοῦ κύκλου $(O, \sqrt{\kappa})$

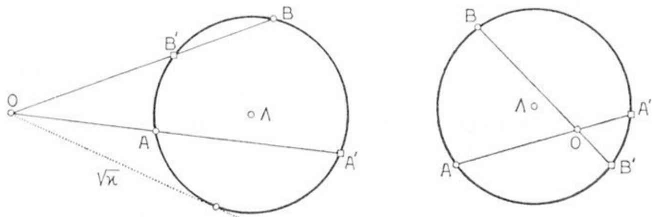
Ὁ κύκλος οὗτος καλεῖται **κύκλος τῆς ἀντιστροφῆς.**

● **2. Εὐθεῖαι**

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ο,Μ,Μ′ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας, μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος καὶ ἀντιστρόφως, ἂν εὐθεῖα (ε) εἶναι ἀναλλοίωτος, τότε $M \in (\varepsilon) \Rightarrow M' \in (\varepsilon)$ ἄρα καὶ $O \in (\varepsilon)$. Ὥστε :

Ἵνα εὐθεῖα εἶναι ἀναλλοίωτος κατὰ ἀντιστροφήν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς ἀντιστροφῆς.

ΣΧ. 1.2



● **3. Κύκλοι**

Ἂν κύκλος (Λ) διέρχεται διὰ δύο ἀντιστρόφων σημείων Α, Α′ (σχ. 1.2), τότε τὸ ὁμόλογον Β′ τυχόντος σημείου $B \in (\Lambda)$ ἀνήκει (1.1, 3) εἰς τόν κύκλον (Α, Α′, Β) δηλ. τὸν (Λ).

Ὥστε :

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Κατὰ μίαν ἀντιστροφήν, εἷς κύκλος διερχόμενος διὰ δύο ὁμολόγων σημείων, εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Ἵνα κύκλος εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος κατὰ ἀντιστροφὴν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ δύναμις τοῦ κέντρου τῆς ἀντιστροφῆς ὡς πρὸς τὸν κύκλον τοῦτον, νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν δύναμιν τῆς ἀντιστροφῆς.**

● **2. Κατὰ ὁμόρροπον ἀντιστροφήν, ἵνα κύκλος εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον ἀντιστροφῆς.**

1.3 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΟΡΙΖΟΜΕΝΗ ΑΠΟ ΟΜΟΛΟΓΑ ΣΗΜΕΙΑ

Μία ἀντιστροφὴ εἶναι ὡρισμένη, ὅταν δίδωνται :

● Τὸ κέντρον της O καὶ ἓν ζεῦγος (A, A′) ὁμολόγων σημείων ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ κέντρου.

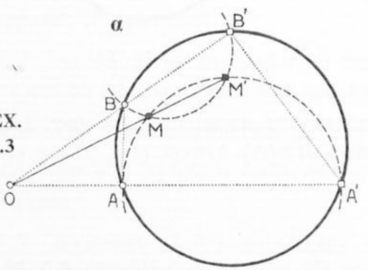
● δύο ζεύγη (A, A′) καὶ (B, B′) ὁμολόγων σημείων, κειμένων ἐπὶ κύκλου ἢ ἐπ' εὐθείας, διότι τότε ὁρίζεται ἐν γένει τὸ κέντρον της O.

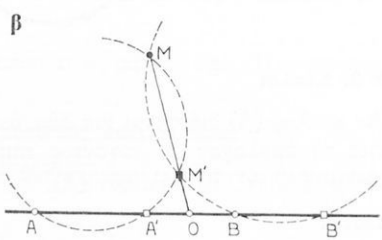
Πράγματι, ἂν μὲν τὰ σημεῖα εἶναι συγκυκλικά (σχ. 1.3α), τὸ O εἶναι προφανῶς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν AA′ καὶ BB′ (ἂν τέμνωνται), ἂν δὲ τὰ σημεῖα εἶναι ἐπ' εὐθείας (σχ. 1.3β), τὸ O εἶναι τὸ σημεῖον αὐτῆς, διὰ τὸ ὁποῖον :

$$\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'} \iff \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OB'}}{\overline{OA'}}$$

ἤτοι, τὸ κέντρον τῆς ὑπὸ τῶν $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{BA'}$ ὁριζομένης ὁμοιοθεσίας (ἂν $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{BA'}$).

Τὸ ὁμόλογον τυχόντος σημείου M, κατὰ τὴν κατὰ τὰ ἀνωτέρω ὁριζομένην ἀντιστροφὴν εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τῆς εὐθείας OM καὶ τοῦ κύκλου (A, A′, M) ἢ δύο κύκλων (A,A′,M) καὶ (B,B′,M), ἕκαστος τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπὸ τὸ M καὶ ἓν ζεῦγος ἀντιστρόφων σημείων.





ΣΧ. 1.3

1.4 ΑΠΟΣΤΑΣΙΣ ΤΩΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΔΥΟ ΣΗΜΕΙΩΝ

Θεωροῦμεν ἀντιστροφὴν **I**[O,κ] καὶ δύο ζεύγη (A,A′) καὶ (B,B′) ὁμολόγων σημείων.

Εἶναι : $\overline{OA}\cdot\overline{OA'}=\overline{OB}\cdot\overline{OB'}=\kappa$

● **Ἂν τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ κύκλου,** τότε (σχ. 1.3α) τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΒ'Α' εἶναι ὅμοια, ἑπομένως:

$$\frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$$

ἤτοι $$A'B' = AB \cdot \frac{OA'}{OB} = AB \cdot \frac{OA' \cdot OA}{OB \cdot OA}$$

καὶ τελικῶς: $$\mathbf{A'B' = AB \cdot \frac{|\kappa|}{OA \cdot OB}} \qquad (1)$$

● **Ἂν τὰ σημεῖα εἶναι ἐπ' εὐθείας** (σχ. 1.3β), τότε:

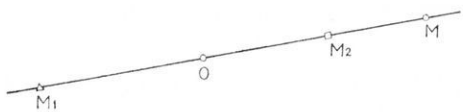
$$\overline{A'B'} = \overline{A'O} + \overline{OB'} = -\frac{\kappa}{\overline{OA}} + \frac{\kappa}{\overline{OB}} = -\frac{\kappa\,\overline{AB}}{\overline{OA} \cdot \overline{OB}} \qquad (2)$$

Ἄρα ὁ τύπος (1) ἰσχύει καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην.

1.5 ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΝ ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΥ

Θεωροῦμεν τὰς ἀντιστροφὰς $\iota_1 = \mathbf{I}[O,\kappa_1]$ καὶ $\iota_2 = \mathbf{I}[O,\kappa_2]$, τοῦ αὐτοῦ κέντρου Ο. Τυχὸν σημεῖον Μ μετασχηματίζεται διὰ τῆς ι_1 εἰς M_1 (σχ. 1.5), τοῦτο δὲ διὰ τῆς ι_2 εἰς M_2. Οὕτως, ὁμόλογον τοῦ Μ κατὰ τὸ γινόμενον $\iota_2 o \iota_1$ εἶναι τὸ M_2.

ΣΧ. 1.5



Θὰ εἶναι: $$\overline{OM} \cdot \overline{OM}_1 = \kappa_1$$

καὶ $$\overline{OM}_1 \cdot \overline{OM}_2 = \kappa_2$$

Συνεπῶς: $$\frac{\overline{OM}_2}{\overline{OM}} = \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \qquad (1)$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὸ M_2 εἶναι τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Μ κατὰ τὴν ὁμοιοθεσίαν, ἥτις ἔχει κέντρον Ο καὶ λόγον $\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}$.

Συμπεραίνομεν ὅθεν:

ΘΕΩΡΗΜΑ.— Τὸ γινόμενον δύο ἀντιστροφῶν, τοῦ αὐτοῦ κέντρου, εἶναι ὁμοιοθεσία, ἥτις ἔχει τὸ αὐτὸ κέντρον καὶ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῶν δυνάμεων τῶν θεωρουμένων.

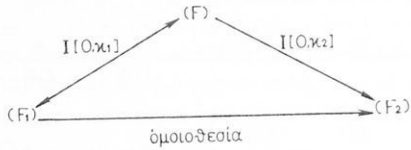
ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

● **1. Μία ὁμοιοθεσία Η[Ο,λ] δύναται νὰ θεωρηθῇ κατ᾽ ἀπείρους τρόπους, ὡς τὸ γινόμενον δύο ἀντιστροφῶν ι_1 καὶ ι_2, τοῦ αὐτοῦ κέντρου Ο, μὲ δυνάμεις ἀντιστοίχως κ_1 καὶ κ_2, τοιαύτας ὥστε $\lambda = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}$**

● **2. Τὰ ἀντίστροφα (F_1) καὶ (F_2) τοῦ αὐτοῦ σχήματος (F) κατὰ δύο ἀντιστροφάς, τοῦ αὐτοῦ κέντρου, εἶναι ὁμοιόθετα.**

Πράγματι, λόγῳ τῆς ἐνελεικτικότητος τῆς ἀντιστροφῆς (σχ. 1.5, 2), τὸ (F_2) εἶναι ὁμόλογον τοῦ (F_1) κατὰ τὸ γινόμενον $\mathbf{I}[O, \kappa_2] \circ \mathbf{I}[O, \kappa_1]$, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοιοθεσία.

ΣΧ.
1.5, 2



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.— Ἂν $\kappa_1 = -\kappa_2$, τότε $\iota_2 \circ \iota_1 = \Sigma[O]$

1.6 ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.—Τὸ ἀντίστροφον εὐθείας (ε), μὴ διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι κύκλος διερχόμενος διὰ τοῦ Ο, τοῦ ὁποίου ἡ διὰ τοῦ Ο διάμετρος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν (ε).

Ἀπόδειξις

Ἔστω Ρ ἡ προβολὴ τοῦ Ο ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ Ω τὸ ἀντίστροφον τοῦ σημείου Ρ (σχ. 1.6α). Εἶναι:

$$\overline{OP} \cdot \overline{O\Omega} = \kappa$$

Ἵνα τὸ σημεῖον Μ′ εἶναι τὸ ἀντίστροφον τοῦ τυχόντος σημείου Μ τῆς (ε), πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τοῦ κύκλου (Ρ,Ω,Μ) καὶ τῆς εὐθείας ΟΜ (1.3) ἢ ἰσοδυνάμως, ἐπειδὴ $OP \perp (\varepsilon)$:

$$(M'O,\ M'\Omega) = (PM,\ PO) = \frac{\pi}{2}$$

Ἄρα, τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ′ εἶναι ὁ κύκλος διαμέτρου ΟΩ.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Τὸ ἀντίστροφον κύκλου (Λ), διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι εὐθεῖα μὴ διερχομένη διὰ τοῦ Ο, κάθετος ἐπὶ τὴν διὰ τοῦ Ο διάμετρον τοῦ (Λ).

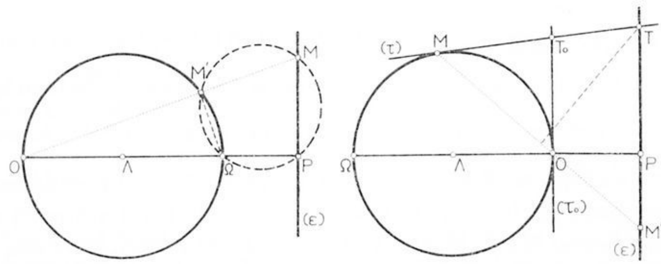
Ἀπόδειξις

Ἔστω Ω τὸ ἀντιδιαμετρικὸν τοῦ Ο καὶ Ρ τὸ ἀντίστροφον τοῦ Ω. Θεωροῦμεν τὴν εὐθεῖαν (ε), κάθετον ἐπὶ τὴν OP εἰς τὸ σημεῖον P. Ἀντίστροφον τῆς (ε) κατὰ τὸ προηγούμενον Θεώρημα εἶναι ὁ κύκλος (Λ), ἄρα καὶ τοῦ (Λ) ἡ (ε), λόγῳ τῆς ἐνελεικτικότητος τῆς ἀντιστροφῆς.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ

Ἔστωσαν (τ_0) καὶ (τ) αἱ ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου εἰς τὸ κέντρον O τῆς ἀντιστροφῆς καὶ τυχὸν ἄλλο σημεῖον $M \in (\Lambda)$ ἀντιστοίχως (σχ 1.6β). Ἂν ἡ (τ) τέμνῃ τὰς **παραλλήλους** (τ_0) καὶ (ε) εἰς τὰ σημεῖα T_0 καὶ T ἀντιστοίχως, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον T_0MO εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ τρίγωνον TMM′. Ἄρα, αἱ εὐθεῖαι (τ) καὶ (ε) εἶναι **συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος MM′** τῶν ἀντιστρόφων σημείων M καὶ M′.

ΣΧ. 1.6



ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙΙ.— Δοθέντων κύκλου (Λ) καὶ εὐθείας (ε), ὑπάρχουν δύο ἀντιστροφαί, καθ' ἃς τὰ σχήματα ταῦτα εἶναι ὁμόλογα ἢ μία μόνον, ἂν ἡ (ε) ἐφάπτεται τοῦ (Λ).

Ἀπόδειξις

Συμφώνως πρὸς τὰ προηγούμενα, τὸ κέντρον μιᾶς ἀντιστροφῆς, ἥτις ἀντιστοιχίζει τὴν εὐθεῖαν (ε) καὶ τὸν κύκλον, εἶναι ἀναγκαίως ἄκρον διαμέτρου καθέτου πρὸς τὴν (ε), **μὴ κείμενον** ἐπὶ τῆς (ε). Ἀλλά, ὑπάρχουν **δύο** τοιαῦτα σημεῖα O καὶ Ω ἢ **ἓν μόνον**, ὅταν ἡ (ε) ἐφάπτεται τοῦ (Λ), (τὸ ἄλλο εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς).

Δι' ἕκαστον τῶν κέντρων τούτων π.χ. τὸ O, ὁρίζεται μία ἀντιστροφή, διότι ὁμόλογον τοῦ ἀντιδιαμετρικοῦ Ω τοῦ O, πρέπει νὰ εἶναι ἡ κοινὴ προβολή των P, ἐπὶ τὴν (ε). Εἶναι ἡ ἀντιστροφὴ $\mathbf{I}[O, \overline{O\Omega} \cdot \overline{OP}]$, κατὰ τὴν ὁποίαν, πράγματι, συμφώνως πρὸς τὸ Θεώρημα Ι, ὁμόλογον τῆς (ε) εἶναι ὁ κύκλος (Λ). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ἀντιστροφὴν $\mathbf{I}[\Omega, \overline{\Omega O} \cdot \overline{\Omega P}]$.

Ἂν ἡ (ε) ἐφάπτεται τοῦ Λ, τότε ἡ μόνη ἀντιστροφή, ἥτις ἀντιστοιχίζει τὰ δύο σχήματα εἶναι ἡ $\mathbf{I}\,[O, OP^2]$

1.7 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΙ ΚΥΚΛΟΙ

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι.— Τὸ ἀντίστροφον κύκλου (Λ) μὴ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς, εἶναι κύκλος ὁμοιόθετος τοῦ θεωρουμένου, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Ο καὶ λόγον ἴσον πρὸς τὸν λόγον τῆς δυνάμεως κ τῆς ἀντιστροφῆς πρὸς τὴν δύναμιν p τοῦ Ο ὡς πρὸς τὸν κύκλον.

Ἀπόδειξις

Ὁ κύκλος (Λ) (σχ. 1.7) μένει ἀναλλοίωτος (1.2, Πορ. 1) κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν $\iota^* = \mathbf{I}[O, p]$, ἄρα μετασχηματίζεται διὰ τῆς $\iota = \mathbf{I}[O, \kappa]$ εἰς σχῆμα ὁμοιόθετον αὐτοῦ (1.5, Πορ. 2) ἤτοι, εἰς **κύκλον** (Λ′). Ἡ ὁμοιοθεσία, ἥτις μετασχηματίζει τὸν (Λ) εἰς (Λ′) εἶναι τὸ γινόμενον $\iota o \iota^*$, ἔχει δὲ (1.5) κέντρον τὸ Ο καὶ λόγον $\dfrac{\kappa}{p}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

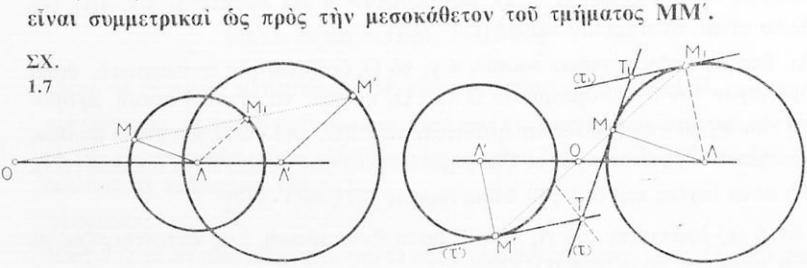
● 1. Ἂν α, α' εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων, ὁ λόγος $\dfrac{\kappa}{p}$ ἰσοῦται πρὸς $\dfrac{\alpha'}{\alpha}$ ἢ $-\dfrac{\alpha'}{\alpha}$ καθ' ὅσον ἀντιστοίχως τὸ Ο εἶναι κέντρον ὁμ. ἢ ἀντ. ὁμοιοθεσίας.

● 2. Ἂν εἶναι Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου (Λ) καὶ M_1 τὸ δεύτερον σημεῖον τομῆς τοῦ (Λ) καὶ τῆς εὐθείας ΟΜ, τότε ἡ μὲν ἀντιστροφὴ ι^* μετασχηματίζει τὸ M_1 εἰς Μ, ἡ δὲ ι τὸ Μ εἰς Μ′, τὸ ὁποῖον, ἑπομένως, εἶναι **ὁμοιόθετον** τοῦ M_1. Ἐντεῦθεν ἕπεται καὶ ἡ κατασκευὴ τοῦ κύκλου (Λ′): Κατασκευάζομεν τὸ ἀντίστροφον Μ′ ἑνὸς σημείου $M \in (\Lambda)$, ὁρίζομεν τὸ $M_1 \in (\Lambda)$ καὶ ἐν συνεχείᾳ εὑρίσκομεν τὸ κέντρον Λ′, ὡς τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΟΛ καὶ τῆς διὰ τοῦ Μ′ παραλλήλου πρὸς τὴν $M_1\Lambda$.

● 3. Αἱ ἐφαπτόμεναι (τ_1) καὶ (τ′) εἰς τὰ ὁμοιόθετα σημεῖα M_1 καὶ Μ′ ἀντιστοίχως εἶναι παράλληλοι (σχ. 1.7β). Ἂν αὗται τέμνωνται εἰς τὰ σημεῖα T_1 καὶ Τ ἀντιστοίχως ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης (τ) εἰς τὸ σημεῖον Μ, ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον T_1MM_1 εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ τὸ τρίγωνον ΤΜΜ′. Συμπεραίνομεν ὅθεν:

Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο ὁμόλογα σημεῖα Μ,Μ′ δύο ἀντιστρόφων κύκλων **εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΜΜ′.**

ΣΧ. 1.7



ΘΕΩΡΗΜΑ ΙΙ.— Δοθέντων δύο ἀνίσων κύκλων (Λ, α) καὶ (Λ′, α′) τοῦ Ἐπιπέδου, ὑπάρχουν δύο ἀντιστροφαί, καθ' ἃς οἱ κύκλοι εἶναι ὁμόλογοι ἢ μία μόνον, ἂν εἶναι ἐφαπτόμενοι.

Ἀπόδειξις

Τὸ κέντρον μιᾶς τοιαύτης ἀντιστροφῆς εἶναι ἀναγκαίως (Θεώρ. Ι) κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν κύκλων, **μὴ κείμενον** ἐπ' αὐτῶν. Ὑπάρχουν **δύο** τοιαῦτα σημεῖα Ο καὶ Ο′ ἢ **ἓν μόνον,** ἂν οἱ κύκλοι ἐφάπτωνται (τὸ ἄλλο εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς). Ἐξ ἄλλου ἡ δύναμις τῆς ζητουμένης ἀντιστροφῆς εἶναι (1.7, Παρ. 1) $p\dfrac{\alpha'}{\alpha}$ ἢ $-p\dfrac{\alpha'}{\alpha}$, καθ' ὅσον ἀντιστοίχως τὸ κέντρον της εἶναι κέντρον ὁμορρόπου ἢ ἀντιρρόπου ὁμοιοθεσίας.

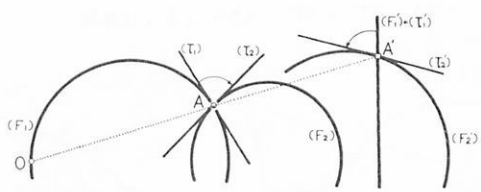
Πράγματι, αἱ ἀντιστροφαὶ $\mathbf{I}\left[O,\, p\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right]$ καὶ $\mathbf{I}\left[O',\, -p\dfrac{\alpha'}{\alpha}\right]$ κατὰ τὸ προηγούμενον Θεώρημα μετασχηματίζουν τὸν κύκλον (Λ) εἰς (Λ′)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΣ.—Ἂν οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι (VI, 1.7, Θεώρ. Ι), τότε εἶναι ὁμόλογοι κατὰ μίαν ἀντιστροφήν: τὴν $\mathbf{I}[O, -p]$.

1.8 ΓΩΝΙΑ ΔΥΟ ΣΧΗΜΑΤΩΝ ΕΙΣ ΚΟΙΝΟΝ ΣΗΜΕΙΟΝ ΑΥΤΩΝ

Ἔστωσαν τὰ σχήματα (F_1) καὶ (F_2), ἔχοντα κοινὸν σημεῖον Α. Μία ἀντιστροφή, κέντρου $O \neq A$, μετασχηματίζει τὰ (F_1) καὶ (F_2) εἰς (F'_1) καὶ (F'_2), τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν σημεῖον τὸ Α′, ἀντίστροφον τοῦ Α. Εἰς ἣν περίπτωσιν ἕκαστον τῶν (F_1) καὶ (F_2) εἶναι κύκλος ἢ εὐθεῖα*, εἴδομεν ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι (τ_1) τοῦ (F_1) εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ (τ_1') τοῦ (F'_1) εἰς τὸ Α′ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΑ′ (§ 1.7, Παρ. 3 καὶ § 1.6,

ΣΧ. 1.8



Παρ. ἐφ' ὅσον ὡς ἐφαπτομένη εὐθείας νοεῖται ἡ αὐτὴ εὐθεῖα). Τὸ αὐτὸ ἰσχύει διὰ τὰς ἐφαπτομένας (τ_2) τοῦ (F_2) καὶ (τ'_2) τοῦ (F'_2). Ἄρα, **ἡ γωνία (τ_1, τ_2) τῶν (F_1), (F_2) εἶναι ἀντίθετος τῆς γωνίας (τ'_1, τ'_2) τῶν (F'_1), (F'_2).**

* Τὰ ἐκτιθέμενα ἰσχύουν γενικώτερον καὶ διὰ σχήματα, διὰ τὰ ὁποῖα **ὁρίζεται ἐφαπτομένη** εἰς τὸ σημεῖον Α.

Εἰδικώτερον: **Ἂν τὰ σχήματα (F_1) καὶ (F_2) τέμνωνται ὀρθογωνίως ἢ ἐφάπτωνται εἰς σημεῖον Α, τότε τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν ἀντιστοίχως θὰ τέμνωνται ἢ θὰ ἐφάπτωνται εἰς τὸ σημεῖον Α΄, ἀντίστροφον τοῦ Α.**

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. ΘΕΩΡΗΜΑ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ

Ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα κυρτὸν τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν.

Ἀπόδειξις

Ἔστω κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (σχ. 1). Θεωροῦμεν τὸν κύκλον (Α,Β,Δ) ὁ ὁποῖος διὰ μιᾶς ἀντιστροφῆς κέντρου Α μετασχηματίζεται εἰς εὐθεῖαν Β΄Δ΄. Ἵνα καὶ τὸ σημεῖον Γ ἀνήκῃ εἰς τὸν κύκλον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἀντίστροφόν του Γ΄ νὰ εἶναι σημεῖον τοῦ τμήματος Β΄Δ΄ ἤτοι:

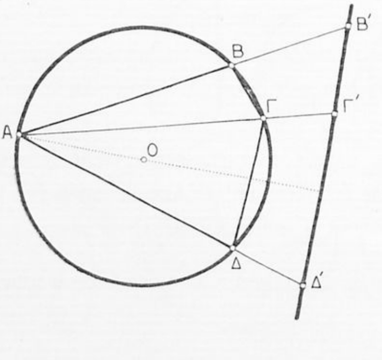
$$Β'Δ' = Β'Γ' + Γ'Δ'$$

Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη γράφεται ἰσοδυνάμως (1.4):

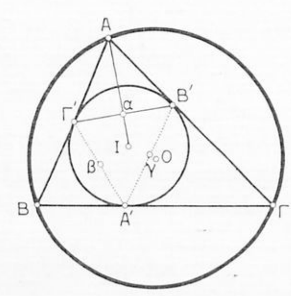
$$ΒΔ \frac{|κ|}{ΑΒ \cdot ΑΔ} = ΒΓ \frac{|κ|}{ΑΒ \cdot ΑΓ} + ΓΔ \frac{|κ|}{ΑΓ \cdot ΑΔ}$$

ἢ: $$\mathbf{ΒΔ \cdot ΑΓ = ΒΓ \cdot ΑΔ + ΓΔ \cdot ΑΒ}$$

ΣΧ. 1



ΣΧ. 2



2. ΣΧΕΣΙΣ EULER

Ἂν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι (I,r) καὶ (O,R) οἱ ἐγγεγραμμένος καὶ περιγεγραμμένος κύκλοι ἀντιστοίχως, τότε :

$$IO^2 = R^2 - 2rR$$

Ἀπόδειξις

Ἔστωσαν Α΄,Β΄,Γ΄ (σχ. 2) τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου (I). Ἡ εὐθεῖα Γ΄Β΄ εἶναι ἡ πολικὴ τοῦ σημείου Α ὡς πρὸς τὸν (I). Ἑπομένως (II, 2.2 Παρ. 1), ἂν α εἶναι ἡ τομὴ τῶν ΙΑ καὶ Β΄Γ΄ θὰ εἶναι:

$$I\alpha \cdot IA = r^2$$

Ὁμοίως : $\quad I\beta \cdot IB = I\gamma \cdot I\Gamma = r^2$

Ἄρα, ἡ ἀντιστροφὴ κέντρου I καὶ δυνάμεως r^2 μετασχηματίζει τὰ σημεῖα Α,Β,Γ εἰς α,β,γ ἀντιστοίχως, ἤτοι τὸν κύκλον (O,R) εἰς κύκλον (α,β,γ) ὁ ὁποῖος εἶναι ὁ κύκλος Euler τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, ἄρα ἔχει ἀκτῖνα $\frac{r}{2}$ Οἱ κύκλοι οὗτοι εἶναι ὁμοιόθετοι μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας λ, τοιοῦτον ὥστε (1.7):

$$\lambda = \frac{r^2}{IO^2 - R^2} \quad \text{καὶ} \quad |\lambda| = \frac{r}{2} : R = \frac{r}{2R} \tag{1}$$

(διότι ἡ δύναμις τοῦ I ὡς πρὸς τὸν (O) εἶναι $IO^2 - R^2$).

Ἐπειδὴ $IO < R$ θὰ εἶναι $\lambda < 0$ ἄρα:

$$\lambda = -\frac{r}{2R} \tag{2}$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει :

$$-\frac{1}{2R} = \frac{r}{IO^2 - R^2}$$

καὶ τελικῶς : $\quad \mathbf{IO^2 = R^2 - 2Rr}$

3. Δοθέντων τριῶν σταθερῶν σημείων Α, Β καὶ Γ νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τοῦ κοινοῦ σημείου Μ τῶν ὀρθογωνίων μεταβλητῶν κύκλων (Α, Β, Μ) καὶ (Α, Γ, Μ).

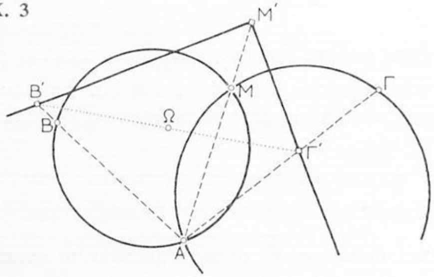
Λύσις

Μία ἀντιστροφή, κέντρου Α, μετασχηματίζει τοὺς κύκλους (Α, Β, Μ) καὶ (Α, Γ, Μ) εἰς εὐθείας **καθέτους** Β΄Μ΄ καὶ Γ΄Μ΄. Ὁ γ. τόπος τοῦ Μ΄ εἶναι κύκλος (Ω) διαμέτρου Β΄Γ΄.

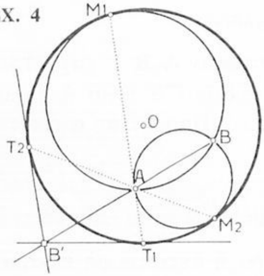
Ἄρα ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ ἀντίστροφος τοῦ (Ω), ἤτοι:

- Ἂν τὸ Α δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ (Ω), εἶναι κύκλος καὶ δὴ **ὀρθογώνιος** τοῦ (Α, Β, Γ), | ἐπειδὴ οὗτος εἶναι ἀντίστροφος τῆς $B'\Gamma' \perp (\Omega)$ |.
- Ἂν Α εἶναι σημεῖον τοῦ (Ω), ὁ γ.τ. εἶναι ἡ εὐθεῖα ΒΓ.

ΣΧ. 3



ΣΧ. 4



4. **Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ δύο σημείων Α καὶ Β καὶ ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου (Ο).**

Λύσις

Θεωροῦμεν τὴν ἀντιστροφὴν κέντρου Α, κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ κύκλος (Ο) εἶναι ἀναλλοίωτος (1.2,3). Ὁ ζητούμενος κύκλος μετασχηματίζεται εἰς ἐφαπτομένην τοῦ (Ο) διερχομένην διὰ τοῦ Β', ἀντιστρόφου τοῦ Β. Κατασκευάζομεν, ὅθεν, τὰς διὰ τοῦ Β' ἐφαπτομένας τοῦ (Ο), ἔστω εἰς τὰ σημεῖα T_1 καὶ T_2. Αἱ AT_1 καὶ AT_2 ἐπανατέμνουν τὸν (Ο) εἰς τὰ σημεῖα M_1 καὶ M_2, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὸν (Ο) τῶν ζητουμένων κύκλων (A, B, M_1) καὶ (A, B, M_2).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Κατὰ μίαν ἀντίρροπον ἀντιστροφὴν $I[O, -\kappa]$, δείξατε ὅτι ὁ κύκλος $(O, \sqrt{\kappa})$ εἶναι συνολικῶς ἀναλλοίωτος, τέμνεται δὲ ὑπὸ παντὸς ἄλλου συνολικῶς ἀναλλοιώτου κύκλου κατὰ διάμετρον (ψευδορθογωνίως).

2. Ἐπὶ εὐθείας (ε) θεωροῦμεν τὰ σταθερὰ σημεῖα Α, Β καὶ μεταβλητὸν σημεῖον Ρ.

   1. Δι' ἓν ὡρισμένον Ρ, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ὁμόλογον Μ' τυχόντος σημείου Μ κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν $I[P, \overline{PA} \cdot \overline{PB}]$.

   2. Ἂν τὸ Μ διαγράφῃ εὐθεῖαν (δ) ἡ δὲ ΜΜ' διατηρῇ σταθερὰν διεύθυνσιν, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ'.

3. Ἂν (Α, Α′), (Β, Β′) καὶ (Μ, Μ′) εἶναι τρία ζεύγη ὁμολόγων σημείων κατὰ ἀντιστροφὴν κέντρου Ο, δείξατε ὅτι : (ΜΑ, ΜΒ) + (Μ′Α′, Μ′Β′) = (ΟΑ, ΟΒ)

Ἂν τὸ σημεῖον Μ διαγράφῃ κύκλον διερχόμενον διὰ τῶν Α καὶ Β, ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ′ ;

4. Θεωροῦμεν κύκλον (Κ) διαμέτρου ΑΒ, σημεῖον Γ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τὴν κάθετον (ε) ἐπὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Γ. Μία διὰ τοῦ Γ εὐθεῖα, τέμνει τὸν (Κ) εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ′ αἱ δὲ εὐθεῖαι ΑΜ καὶ ΑΜ′ τέμνουν τὴν (ε) εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ′. Δείξατε ὅτι τὸ γινόμενον $\overline{\Gamma\Delta} \cdot \overline{\Gamma\Delta'}$ εἶναι σταθερόν.

5. Θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν Α′, Β′, Γ′, Δ′ κατὰ ἀντιστροφὴν κέντρου Ο. Δείξατε ὅτι :

1. $$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} : \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Gamma' A'}{\Gamma' B'} : \frac{\Delta' A'}{\Delta' B'}$$

2. Ἂν ἡ τετρὰς (Α, Β, Γ, Δ) εἶναι ἁρμονική, τὸ δὲ Ο σημεῖον τοῦ φορέως της, τότε καὶ ἡ (Α′, Β′, Γ′, Δ′) εἶναι ἁρμονική.

6. Ποῖον τὸ γινόμενον ὁμοιοθεσίας καὶ ἀντιστροφῆς, τοῦ αὐτοῦ κέντρου ;

7. Δείξατε ὅτι μία ἀντιστροφὴ κέντρου Α μετασχηματίζει τὴν δέσμην κύκλων, διερχομένων διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β, εἰς δέσμην εὐθειῶν, διερχομένων διὰ τοῦ Β′, ἀντιστρόφου τοῦ Β.

8. Ἐπὶ εὐθείας (ε) θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Σημεῖον Ρ διαγράφει τὴν μεσοκάθετον τοῦ τμήματος ΑΒ, ἡ δὲ ΓΡ ἐπανατέμνει τὸν κύκλον (Ρ, Α, Β) εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ.

9. Κατὰ μίαν ἀντιστροφήν, ἥτις ἀντιστοιχίζει κύκλον (Λ) καὶ εὐθεῖαν (ε), δείξατε ὅτι ὁμόλογον τοῦ κέντρου Λ εἶναι τὸ συμμετρικὸν τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ε).

10. Δίδεται ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, κορυφῆς Α. Ἐπὶ εὐθείας διερχομένης διὰ τοῦ Α θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν, τοιαῦτα ὥστε :

$$\frac{MB}{M\Gamma} = \frac{NB}{N\Gamma}$$

Ἂν τὸ Ν διαγράφῃ εὐθεῖαν ἢ κύκλον, εὕρετε τὸν γ.τ. τοῦ Μ ἀντιστοίχως.

11. Θεωροῦμεν κύκλον (Ο) καὶ ἐξωτερικὸν σημεῖον αὐτοῦ Α. Διὰ σταθεροῦ σημείου Ρ θεωροῦμεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὸν κύκλον εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ.

1. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος (Α, Β, Γ) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

2. Ἂν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπανατέμνουν τὸν (Ο) εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ καὶ ὁ κύκλος (Α, Δ, Ε) διέρχονται διὰ σταθερῶν σημείων Ζ καὶ Θ ἀντιστοίχως.

3. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ.τ. τῶν σημείων τομῆς Μ καὶ Ν τῶν εὐθειῶν ΒΓ, ΔΕ καὶ τῶν κύκλων (Α,Β,Γ), (Α,Δ,Ε) ἀντιστοίχως.

12. Μελετήσατε τὸ εἶδος τῶν ἀντιστροφῶν, αἵτινες ἀντιστοιχίζουν δύο κύκλους.

13. Θεωρήσωμεν μίαν δέσμην κύκλων, ἐφαπτομένων ἀνὰ δύο εἰς τὸ σημεῖον Α. Δείξατε ὅτι : Μία ἀντιστροφή, κέντρου Ο, μετασχηματίζει τὴν δέσμην, ἂν μὲν Ο ≠ Α, εἰς δέσμην κύκλων ἐφαπτομένων εἰς τὸ Α′, ἀντίστροφον τοῦ Α, ἂν δὲ Ο = Α, εἰς δέσμην παραλλήλων εὐθειῶν.

14. Ἂν κύκλος (Κ) ἐφάπτεται δύο κύκλων ἢ κύκλου καὶ εὐθείας, τὰ σημεῖα ἐπαφῆς εἶναι ὁμόλογα κατὰ μίαν ἀντιστροφήν, ἥτις ἀντιστοιχίζει τὰ δύο σχήματα.

15. Κατὰ μίαν ἀντιστροφήν, ἥτις ἀντιστοιχίζει δύο κύκλους (Λ) καὶ (Λ΄) δείξατε ὅτι:
1. Ὁμόλογον τοῦ κέντρου Λ εἶναι ἡ προβολή του ἐπὶ τὴν πολικὴν τοῦ κέντρου Ο τῆς ἀντιστροφῆς ὡς πρὸς τὸν κύκλον (Λ΄).
2. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο ἀντίστροφα σημεῖα $M \in (\Lambda)$ καὶ $M' \in (\Lambda')$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν δύο κύκλων.
3. Ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τέμνονται ἐπίσης καὶ δύο χορδαὶ ΜΝ καὶ Μ΄Ν΄, τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα εἶναι ἀντίστροφα σημεῖα ἐπὶ τῶν κύκλων.

16. Θεωροῦμεν κύκλον (Κ), δύο σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τυχὸν σημεῖον $M \in (K)$. Αἱ εὐθεῖαι ΜΑ, ΜΒ ἐπανατέμνουν τὸν (Κ) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Ἡ διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῆς ΑΒ τέμνει τὸν (Κ) εἰς τὸ σημεῖον Ε.
1. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ τέμνει τὴν ΑΒ εἰς σταθερὸν σημεῖον Ρ.
2. Ὑποθέτοντες ὅτι ὁ κύκλος (Κ) καὶ τὸ σημεῖον Β εἶναι σταθερά, τὸ δὲ Α διαγράφει κύκλον, ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ Ρ;

17. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ σημείου καὶ ἐφαπτόμενος δοθέντος κύκλου καὶ δοθείσης εὐθείας.

18. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος, διερχόμενος διὰ σημείου καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθέντων κύκλων.

19. Δύο ὀρθογώνιοι μεταβλητοὶ κύκλοι (Ο) καὶ (Ο΄), τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεῖα Μ, Μ΄ ἐφάπτονται εὐθείας (ε) εἰς τὰ σταθερὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.
1. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γ.τ. τῶν σημείων Ρ καὶ Ρ΄, ὁμολόγων τῶν Μ καὶ Μ΄ ἀντιστοίχως κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν $\mathbf{I}[A,\ AB^2]$.
2. Νὰ εὑρεθοῦν ἐν συνεχείᾳ οἱ γ.τ. τῶν Μ καὶ Μ΄

20. Ἔστωσαν ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον, (Ο) καὶ (Ο΄) οἱ ἐγγεγραμμένος καὶ παρεγγεγραμμένος κύκλοι, ἐφαπτόμενοι τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ΄. Ἂν εἶναι Α΄ τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ Κ τὸ σημεῖον, εἰς ὃ ἡ ΒΓ τέμνεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α τοῦ τριγώνου, νὰ δειχθῇ ὅτι:
1. Τὸ σημεῖον Κ καὶ ὁ ποὺς α τοῦ ὕψους Αα τοῦ τριγώνου εἶναι ἀντίστροφα ἀλλήλων κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν $\iota = \mathbf{I}[A',\ A'\Delta^2]$.
2. Κατὰ τὴν ἀντιστροφὴν ι ὁ κύκλος Euler τοῦ τριγώνου μετασχηματίζεται εἰς τὴν διὰ τοῦ Κ κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν κύκλων (Ο) καὶ (Ο΄).
3. Συμπεράνατε ἐν συνεχείᾳ ὅτι ὁ κύκλος Euler τριγώνου ἐφάπτεται τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων τοῦ τριγώνου (Feuerbach).

21. Θεωροῦμεν ἐπὶ δοθέντος κύκλου (Ο) τὰ σημεῖα Α καὶ Β, μεταβλητὸν σημεῖον Ρ τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοὺς κύκλους (Κ) καὶ (Λ), τοὺς διερχομένους διὰ τοῦ Ρ καὶ ἐφαπτομένους τοῦ (Ο) εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:
1. Οἱ κύκλοι (Κ) καὶ (Λ) τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.
2. Ἂν Ν εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον αὐτῶν, ἡ εὐθεῖα ΡΝ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου. Ποῖος ὁ γ.τ. τοῦ σημείου Ν;
3. Ἔστωσαν (Ω) καὶ (Ω΄) οἱ κύκλοι οἱ ἐφαπτόμενοι τῶν τριῶν κύκλων (Ο), (Κ), (Λ). Ἑκάστη εὐθεῖα ὁριζομένη ἐκ τοῦ Ρ καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν (Ω), (Ω΄) καὶ (Κ), (Λ) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.
4. Οἱ κύκλοι (Κ) καὶ (Λ) μένουν ὀρθογώνιοι πρὸς σταθερὸν κύκλον καὶ ἐφαπτόμενοι σταθεροῦ κύκλου, διαφόρου τοῦ (Ο). Ποῖοι οἱ γ.τ. τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν (Ω), (Ω΄) μὲ τοὺς (Κ), (Λ);

ΜΟΝΟΤΥΠΙΑ — ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ **"ΚΛΑΠΑΚΗ,,**

ΚΟΥΡΤΙΔΟΥ 153 ΤΗΛ. 255.195 - 257.468, ΑΘΗΝΑΙ