ΧΡΙΣΤΟΥ Α. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΝ ΤΩι Π. Σ. Π. Α.

ΣΤΟΙΧΕΙΑ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ ΣΧΟΛΑΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ Α΄.

*

ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΗΣ: ΑΡΓΥΡΗΣ ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ
1946

Πᾶν ἀντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφὴν τοῦ συγγραφέως

Ἡ εἰς τὸν διαγωνισμὸν τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας τυχοῦσα τοῦ Α΄ βραβείου Ἄλγεβρά μου ἐξυπηρετεῖ τὰς μορφωτικὰς ἀνάγκας τῶν μαθητῶν τῶν Γυμνασίων νέου τύπου, ἐνῷ τὰ ἤδη ἐκδιδόμενα «Στοιχεῖα τῆς Ἀλγέβρας» πρόκειται νὰ ἐξυπηρετήσουν τὰς ἀνάγκας τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων, τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτέρας τοῦ Κράτους σχολὰς ὡς καὶ παντὸς σπουδαστοῦ, ὅστις ἤθελεν ἀσχοληθῇ ἰδιαιτέρως μὲ τὴν Ἄλγεβραν καὶ γενικῶς μὲ τὰ Μαθηματικά. Δι᾽ ὃ τὰ «Στοιχεῖα τῆς Ἀλγέβρας» περιέχουν ὅλην τὴν πρὸς τοῦτο ἀπαιτουμένην ὕλην. Οὕτω περιέχουν ἐκτὸς τῆς ὕλης τῆς διδασκομένης εἰς τὰ Κλασσικὰ Γυμνάσια, ἥτις πάντως ἔχει ἐπεκταθῆ, καὶ τὰς ἰδιότητας π. χ. τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων, τὰς ἀπροσδιορίστους μορφάς, τὰ περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων, τὰ περὶ συναρτήσεων, ὁριζουσῶν, ἀπροσδιορίστου ἀναλύσεως, μεταθέσεων, διατάξεων, συνδυασμῶν, τὸν τύπον τοῦ διωνύμου, τὰς πιθανότητας, παραγώγους, τὸν ὁρισμὸν τοῦ διαφορικοῦ, τὸν ὑπολογισμὸν ἐμβαδῶν ἐπιπέδου χωρίου καὶ ἐν γένει πᾶν ὅ,τι ἐκρίθη συμβάλλον εἰς τὴν πλήρη ἐπιτυχίαν τοῦ σκοποῦ, δι᾽ ὃν ἐκδίδονται τὰ Στοιχεῖα ταῦτα.

Κατὰ τὸν τρόπον τῆς ἐκθέσεως τῆς ὕλης ἐλήφθησαν ὑπ᾽ ὄψιν ὅλαι αἱ ἐπιστημονικαὶ ὡς καὶ αἱ διδακτικαὶ ἀπαιτήσεις, ὥστε ὁ σπουδαστὴς ν᾽ ἀποκομίσῃ μετὰ πάσης δυνατῆς εὐκολίας τὰ κέρδη, τὰ ὁποῖα προσδοκᾷ ἐκ τῆς μελέτης τῶν στοιχείων τούτων.

Αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἄφθονοι ἐπακολουθοῦν πᾶσαν ἑνότητα, ἐξελέγησαν μετὰ πολλῆς ἐπιμελείας καὶ εἶναι διατεταγμέναι μεθοδικῶς κατ᾽ αὔξουσαν δυσκολίαν.

Τὰ παρόντα Στοιχεῖα ἐκδίδονται εἰς ἐποχὴν πολὺ δύσκολον ἀπὸ τῆς ἀπόψεως τῶν ἐκδοτικῶν μέσων. Ἀλλ᾽ ὁ ἐκδοτικὸς οἶκος Α. Παπαζήση, ἐν τῇ συναισθήσει καὶ τῇ ἐκπληρώσει τῆς κοινωνικῆς ἀποστολῆς του, δὲν ἐφείσθη μέσων καὶ δαπανῶν, ὅπως ὑπερνικήσῃ τὰς ὡς ἄνω δυσκολίας καὶ παρουσιάσῃ τὸ βιβλίον τοῦτο ὅσον γίνεται ἀρτιώτερον. Δι᾽ ὃ ὀφείλονται εἰς αὐτὸν ἔπαινος καὶ εὐχαριστίαι.

Ἀθῆναι 15 Ἰανουαρίου 1944

Χ. ΜΠΑΡΜΠΑΣΤΑΘΗΣ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α΄

Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας. Σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

1. Ἐὰν εἷς ἔμπορος ἀπὸ τὴν πώλησιν βουτύρου ἐκέρδισε 1000 δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὴν πώλησιν τυροῦ ἔχασε 300 δραχμάς, τελικῶς ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ εἴδη ἐκέρδισε 1000—300=700 δραχμάς. Ἀλλ' ἐὰν ἔχανε ἀπὸ τὸ βούτυρον 1000 δραχμάς, ἐκέρδιζε δὲ ἀπὸ τὸν τυρὸν 300 δραχμάς, τελικῶς θὰ ἔχανε 700 δραχμάς. Ἐὰν δὲ μᾶς εἴπουν γενικῶς, ὅτι ὁ ἔμπορος οὗτος ἀπὸ τὸ μὲν ἓν εἶδος ἐκέρδισεν α δραχμάς, ἀπὸ δὲ τὸ ἄλλο ἔχασε β δραχμάς, διὰ νὰ εὕρωμεν, ἐὰν ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη, πρέπει πρῶτον νὰ ἐξετάσωμεν, ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μεγαλύτερος. Καί, ἐὰν μὲν εἶναι $\alpha > \beta$, θὰ εὕρωμεν, ὅτι οὗτος ἐκέρδισεν $(\alpha - \beta)$ δραχμάς, ἐὰν δὲ εἶναι $\beta > \alpha$, θὰ εὕρωμεν ὅτι ἔχασε $(\beta - \alpha)$ δραχμάς. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι εἰς τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα δίδεται τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἑνὸς ἐμπόρου καὶ ζητεῖται νὰ εὕρωμεν, ἂν τελικῶς ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη οὗτος, ἔχομεν δύο περιπτώσεις: Ἤτοι τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν $\alpha - \beta$, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι κέρδος, καὶ τὴν ἀντίθετον πρὸς αὐτὴν κατὰ τὴν ὁποίαν κάμνομεν τὴν ἀφαίρεσιν $\beta - \alpha$, ὁπότε τὸ ἐξαγόμενον εἶναι ζημία.

2. Ἀλλ' ἐάν, διὰ νὰ λύσωμεν τοιαῦτα προβλήματα, *δὲν εἴχομεν ἀνάγκην νὰ προσέξωμεν, ποῖος ἐκ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι μεγαλύτερος*, ἀλλ' ἠδυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον διὰ τῆς ἐκτελέσεως μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως, π. χ. τῆς ἀφαιρέσεως $\alpha - \beta$, ἡ λύσις αὐτῶν θὰ ἦτο: 1ον) *γενικωτέρα*, διότι ἀντὶ δύο περιπτώσεων θὰ εἴχομεν μίαν, καὶ 2ον) *ἁπλουστέρα*, διότι ἀπὸ τὸ ἐξαγόμενον τῆς πράξεως μόνον, καὶ χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσωμεν λέξεις ἢ φράσεις, θὰ ἐνοούσαμεν ἀμέσως, ἂν τοῦτο φανερώνῃ κέρδος ἢ ζημίαν.

3. ***Ὁρισμὸς τῆς Ἀλγέβρας.***— Ὡς δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ἀπὸ τὰ προηγούμενα, ἡ ἀριθμητικὴ δὲν λύει τὰ ζητήματα ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν γενικώτερον· οὔτε δὲ ἐν γένει χρησιμοποιεῖ γενικὰς μεθόδους διὰ τὴν λύσιν αὐτῶν. Ἀλλ' ὅ,τι δὲν δύναται ἡ ἀριθμητική, τὸ ἐπιτυγχάνει ἡ ἄλγεβρα.

Ἡ ἄλγεβρα εἶναι *γενικὴ ἀριθμητικὴ* ἀσχολουμένη μὲ τοὺς ἀριθμοὺς καὶ τὰ ἐπ' αὐτῶν ζητήματα. Λύει δὲ αὐτὰ μὲ γενικὰς μεθόδους ἁπλούστερον καὶ γενικώτερον. Πῶς δὲ ἐπιτυγχάνει ταῦτα, θὰ ἴδωμεν εἰς τὰ κατωτέρω.

4. ***Ἀλγεβρικὰ σύμβολα.***—Εἰς τὴν ἄλγεβραν (ὡς καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν), διὰ νὰ γράφωμεν συντόμως τὰς σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, χρησιμοποιοῦμεν σύμβολα ἢ σημεῖα. Εἰς αὐτὴν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν καὶ αἱ μεταξὺ αὐτῶν σχέσεις ἰσότητος καὶ ἀνισότητος σημειοῦνται διὰ τῶν αὐτῶν σημείων, διὰ τῶν ὁποίων σημειοῦνται καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἤτοι διὰ τῶν $+$, $-$, $\cdot$, $:$, $=$, $>$ κτλ.

Ἐπίσης, διὰ νὰ καταστήσῃ ἡ ἄλγεβρα τοὺς συλλογισμοὺς ἁπλουστέρους καὶ γενικωτέρους, χρησιμοποιεῖ συνήθως τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου, πρὸς παράστασιν τῶν ἀριθμῶν.

Ὅταν οἱ ἀριθμοὶ διαφέρουν μεταξύ των, παρίστανται διὰ διαφόρων γραμμάτων: π.χ. α, β, γ, δ, κτλ.· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι εἰς ἓν ζήτημα ἕκαστον γράμμα παριστᾷ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Σημείωσις. Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν α καὶ β ἢ τῶν 5 καὶ β παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: αβ ἢ 5β. Ἀλλὰ τὴν παράστασιν αὐτὴν δὲν δυνάμεθα νὰ μεταχειρισθῶμεν, ὅταν ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι ἀριθμοί, διότι τὸ γινόμενον π.χ. 7 ἐπὶ 5, ἐὰν παρασταθῇ διὰ τοῦ 75, συγχέεται μὲ τὸν ἀριθμὸν 75.

5. ***Θετικοὶ καὶ ἀρνητικοὶ ἀριθμοί.***—Ἓν ἀπὸ τὰ αἴτια διὰ τὰ ὁποῖα ἡ ἀριθμητικὴ δὲν δύναται νὰ λύῃ τὰ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν ζητήματα καὶ γενικώτερον εἶναι, ὅτι εἰς αὐτὴν ἡ ἀφαίρεσις δὲν εἶναι πάντοτε δυνατή. Π. χ. ἡ ἀφαίρεσις 5—8 δὲν δύναται νὰ γίνῃ, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν 8, νὰ δίδῃ ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 8, ἤτοι 5. Ἐπίσης δὲ καὶ ἡ ἀφαίρεσις 0—1 δὲν εἶναι δυνατή, διότι δὲν ὑπάρχει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν 1, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Ἐνῷ εἰς τὴν ἄλγεβραν πᾶσα ἀφαίρεσις εἶναι δυνατή. Συμβαίνει δὲ τοῦτο, διότι αὕτη εἰσάγει *νέους ἀριθμούς*. Ἀλλ' ὅταν εἰσάγῃ νέους ἀριθμοὺς προϋποθέτει τὰ ἑξῆς: Οἱ νέοι ἀριθμοὶ μετὰ τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν νὰ ἀποτε-

λέσουν ἓν γενικώτερον σύστημα ἀριθμῶν, εἰς τὸ ὁποῖον καὶ ἡ ἀφαίρεσις νὰ γίνεται πάντοτε, καὶ *νὰ διατηρηθοῦν ἀναλλοίωτοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος*.

6. Διὰ νὰ γίνῃ λοιπὸν ἡ ἀφαίρεσις $0-1$ δυνατή, πρέπει νὰ ὑπάρχῃ εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν μονάδα, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Τοιοῦτον ἀριθμὸν δεχόμεθα, ὅτι ὑπάρχει· ἤτοι δεχόμεθα μίαν νέαν μονάδα, ἡ ὁποία, ὅταν προστεθῇ εἰς τὴν 1, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Λέγομεν δὲ τὴν νέαν αὐτὴν μονάδα *ἀντίθετον* τῆς πρώτης καὶ τὴν παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: -1, ἤτοι τὴν παριστῶμεν μὲ τὸ ἴδιον σύμβολον ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —, δηλαδὴ δεχόμεθα ὅτι, $0-1=-1$. Ἐπίσης, διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀφαίρεσις $0-2$, δεχόμεθα ὅτι ὑπάρχει εἷς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τὸν 2, νὰ δίδῃ ἄθροισμα 0. Λέγομεν δὲ καὶ τοῦτον ἀντίθετον τοῦ 2 καὶ τὸν παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: -2, ἤτοι δεχόμεθα, ὅτι $0-2=-2$. Καὶ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ πᾶσα ἀφαίρεσις δεχόμεθα δι᾿ ἕκαστον ἀριθμὸν ἕνα ἀντίθετον, ὥστε οἱ δύο ὁμοῦ νὰ ἔχουν ἄθροισμα 0, καὶ τὸν ὁποῖον παριστῶμεν μὲ τὸ αὐτὸ σύμβολον, ἔχον πρὸ αὐτοῦ τὸ σημεῖον —.

Οὕτω τῶν ἀριθμῶν:

$$3, \quad 5, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad 0{,}25$$

ἀντίθετοι εἶναι οἱ

$$-3, \quad -5, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{2}{3}, \quad -0{,}25\cdot$$

ἑπομένως εἶναι

$$0-3=-3, \quad 0-5=-5, \quad 0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ὁμοίως εἶναι

$$5-8=5-(5+3)=(5-5)-3=0-3=-3$$

καὶ $$\frac{2}{7}-\frac{6}{7}=\left(\frac{2}{7}-\frac{2}{7}\right)-\frac{4}{7}=0-\frac{4}{7}=-\frac{4}{7}.$$

7. Τοὺς νέους ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν πρὸ αὐτῶν τὸ σημεῖον —, καλοῦμεν *ἀρνητικούς*, τοὺς δὲ προϋπάρχοντας *θετικούς*. Οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γράφονται πρὸς διάκρισιν καὶ μὲ τὸ σημεῖον + (σὺν) πρὸ αὐτῶν. Οὕτως ὁ θετικὸς ἀριθμὸς 5 γράφεται καὶ $+5$. Οἱ

θετικοὶ καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Εἰς αὐτό, ὅπως οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν θετικῶν μονάδων

$$+1, \quad +\frac{1}{2}, \quad +\frac{1}{3}, \quad +\frac{1}{4} \ldots,$$

οὕτω καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ γίνονται ἐκ τῶν ἀντιθέτων μονάδων

$$-1, \quad -\frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4} \ldots,$$

αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ἀρνητικαί.

Εἶναι δέ, ὡς ἐδέχθημεν,

$$(+1)+(-1)=0$$

$$(+5)+(-5)=0$$

$$\left(+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=0 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ὥστε κατὰ τὰ ἀνωτέρω πᾶς ἀριθμὸς εἶναι ἄθροισμα πολλῶν μονάδων θετικῶν ἢ ἀρνητικῶν.

Σημείωσις. Εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν νέων ἀριθμῶν ὡδηγήθησαν ἀπὸ τὸ ἑξῆς :

Πολλὰ ποσὰ μὲ τὰ ὁποῖα ἀσχολεῖται ὁ ἄνθρωπος εἶναι ἀντίθετα. Π. χ. κέρδος καὶ ζημία, περιουσία καὶ χρέος, αἱ εἰσπράξεις καὶ αἱ πληρωμαί, τὰς ὁποίας κάμνει ταμίας τραπέζης, τὸ ἐνεργητικὸν καὶ τὸ παθητικὸν ἑνὸς ἐμπόρου κ. ἄ. Εἰς αὐτὰ δέ, ὡς π. χ. εἰς τὸ κέρδος καὶ τὴν ζημίαν, παρατηροῦμεν τὸ ἑξῆς :

Ἐὰν π. χ. εἷς ἔμπορος κερδίσῃ μίαν δραχμὴν καὶ ἔπειτα χάσῃ μίαν δραχμήν, τελικῶς οὔτε ἐκέρδισε τίποτε, οὔτε ἐζημιώθη. Ἤτοι, ἂν εἰς τὴν μίαν δραχμὴν κέρδους προστεθῇ ἡ ζημία μιᾶς δραχμῆς, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι 0. Ὁμοίως, ἐὰν εἰς τὰς δύο δραχμὰς κέρδους προστεθῇ ζημία δύο δραχμῶν, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι πάλιν μηδὲν κ.ο.κ.

8. Ὁμόσημοι καὶ ἑτερόσημοι ἀριθμοί.—Ὅταν δύο ἀριθμοὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον λέγονται *ὁμόσημοι*, ἄλλως λέγονται *ἑτερόσημοι*. Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ -3 καὶ -8 εἶναι ὁμόσημοι, οἱ δὲ $+\frac{3}{4}$ καὶ $-8{,}5$ εἶναι ἑτερόσημοι.

9. Ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ.—Ἐὰν ἀριθμοῦ τινος ἀφαιρέσωμεν τὸ πρὸ αὐτοῦ σημεῖον, προκύπτει ἀριθμός, ὅστις λέγεται *ἀπόλυτος τιμὴ* αὐτοῦ. Οὕτω τοῦ -7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7 καὶ τοῦ $+7$ ἢ τοῦ 7 ἀπόλυτος τιμὴ εἶναι ὁ 7. Σημειοῦται δὲ οὕτω : $|-7|=7$ καὶ

$|7| = 7$. Δηλαδὴ οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τὰς ἀπολύτους τιμάς των.

10. ***Ἴσοι ἀριθμοί.*** — *Ἴσοι* λέγονται δύο ἀριθμοί, ἐὰν ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀπολύτους τιμὰς ἴσας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Πράξεις ἐπὶ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

11. ***Πρόσθεσις.*** — Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ ἐπὶ τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

α΄) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $+4$ καὶ $+7$· ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι 4 θετικαὶ μονάδες καὶ 7 θετικαὶ μονάδες δίδουν ἄθροισμα 11 μονάδας θετικάς, ἤτοι εἶναι:

$$(+4) + (+7) = (+11).$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-4) + (-7) = -11$$

καὶ
$$\left(-\frac{4}{9}\right) + \left(-\frac{2}{9}\right) = -\frac{6}{9}$$

καὶ
$$\left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{7}\right) = -\frac{11}{28}.$$

β΄) Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἑτεροσήμων ἀριθμῶν $+5$ καὶ -7.

Ἀλλὰ $\quad (+5) + (-7) = (+5) + (-5) + (-2)$

καὶ ἐπειδὴ $\quad (+5) + (-5) = 0$

ἕπεται, ὅτι $\quad (+5) + (-7) = -2.$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$$(-5) + (+7) = (-5) + (+5) + (+2) = +2$$

καὶ
$$\left(+\frac{2}{9}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) = \left(+\frac{10}{45}\right) + \left(-\frac{36}{45}\right) =$$
$$= \left(+\frac{10}{45}\right) + \left(-\frac{10}{45}\right) + \left(-\frac{26}{45}\right) = -\frac{26}{45}.$$

12. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

1ον. *Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημον πρὸς αὐτοὺς καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.*

2ον. *Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημον πρὸς τὸν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλύτερον ἐξ αὐτῶν καὶ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.*

Κατὰ ταῦτα, ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν $\pm\alpha$ καὶ $\pm\beta$, ἔχομεν

$$(+\alpha)+(+\beta)=+(\alpha+\beta) \qquad (-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)$$
$$(-\alpha)+(+\beta)=-(\alpha-\beta) \quad \text{ἐὰν} \quad \alpha>\beta$$
$$(-\alpha)+(+\beta)=+(\beta-\alpha) \quad » \quad \beta>\alpha$$
$$(+\alpha)+(-\beta)=+(\alpha-\beta) \quad » \quad \alpha>\beta$$
$$(+\alpha)+(-\beta)=-(\beta-\alpha) \quad » \quad \beta>\alpha$$

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς *προσθέσεως* ἔχει μεταβληθῆ· ἓν δὲ ἄθροισμα δὲν εἶναι πάντοτε μεγαλύτερον ἑκάστου τῶν *προσθετέων.*

Σημείωσις. Ἐὰν ὁ εἷς τῶν δύο προσθετέων εἶναι 0, τὸ ἄθροισμα εἶναι ὁ ἄλλος προσθετέος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα

$(+7)+(+10)$, $(-13)+(-7)$, $(-25)+(+16)$, $(+57)+(-100)$

$(-100)+(+21)$, $(-1000)+(+11)$, $(+64)+0$, $0+(-57)$

$\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{2}{8}\right)$, $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{15}{16}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{2}{7}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$

$\left(-2\frac{1}{4}\right)+\left(+1\frac{1}{2}\right)$, $\left(-9\frac{3}{4}\right)+\left(+7\frac{5}{12}\right)$, $\left(-10\frac{5}{16}\right)+\left(+5\frac{3}{8}\right)$,

$(+3{,}15)+(-2{,}50)$, $(+2{,}125)+(-4{,}625)$, $(-0{,}36)+(-1{,}2)$, $(-9)+(+2{,}75)$

$(+6{,}8)+(-3{,}975)$, $\left(+6\frac{1}{2}\right)+(-4{,}75)$, $(-9{,}4)+\left(+\frac{3}{4}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}\right)+(+1{,}25)$

13. *Πρόσθεσις ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν.* — Ὅταν οἱ προσθετέοι εἶναι περισσότεροι τῶν δύο, προσθέτομεν διαδοχικῶς κατὰ σειρὰν τοὺς προσθετέους ὡς μᾶς δίδονται.

Π. χ. δια νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα

$$(+8)+(-5)+(+12)+(+18)+(-13)$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

$$(+8)+(-5)=+3, \quad (+3)+(+12)=+15$$
$$(+15)+(+18)=+33, \quad (+33)+(-13)=+20$$

ὥστε εἶναι : $(+8)+(-5)+(+12)+(+18)+(-13)=+20.$

14. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. — Τὸ ἀνωτέρω δοθὲν ἄθροισμα παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ 38 $[=(+8)+(+12)+(+18)]$ θετικὰς μονάδας καὶ ἀπὸ 18$[=(-5)+(-13)]$ ἀρνητικάς. Αἱ 18 αὐταὶ ἀρνητικαὶ μονάδες ὁμοῦ μὲ 18 θετικὰς (ἐκ τῶν 38) δίδουν ἄθροισμα 0. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι γίνεται τοῦτο καθ' οἱανδήποτε τάξιν καὶ ἂν λάβωμεν τοὺς προσθετέους καὶ ἑπομένως τὸ ἄθροισμα τούτων εἶναι πάντοτε 20 θετικαὶ μονάδες. Ὥστε : *Τὸ ἄθροισμα πολλῶν ἀριθμῶν δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν προσθετέων.*

15. Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι *ἡ ἀρχικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως διατηρεῖται καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.* Ἑπομένως *ἀληθεύουν καὶ διὰ τοὺς νέους ἀριθμοὺς καὶ ὅλαι αἱ ἄλλαι ἰδιότητες τῆς προσθέσεως.* Οὕτω πρὸς εὕρεσιν τοῦ ἀθροίσματος πολλῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ ἐργαζώμεθα ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

1) $$(+9)+(-7)+(+3)+(-15)+(+6)=$$
$$=(+9)+(+3)+(+6)+(-7)+(-15)=(+18)+(-22)=-4$$

2) $$\left(+\frac{1}{3}\right)+(-2)+\left(-\frac{2}{5}\right)+(+1)=\left(+\frac{4}{3}\right)+\left(-\frac{12}{5}\right)=-\frac{16}{15}$$

16. Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ.—Ἐπὶ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε μονάδων ὁμοσήμων ἢ ἑτεροσήμων εἶναι πάντοτε ἓν πλῆθος μονάδων ὁμοσήμων ἢ καὶ 0. Δι' ὃ ὁρίζομεν γενικῶς τὸν ἀριθμὸν ὡς *ἄθροισμα μονάδων*, ὁμοσήμων ἢ μὴ ἀδιαφόρως.

17. Ἐφαρμογὴ εἰς τὸν πρακτικὸν βίον.—Ἡ ἐφαρμογὴ τῆς προσθέσεως τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἰς τον πρακτικὸν βίον εἶναι συνήθης. Διότι οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοὶ προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησιν ποσῶν ἀλλ' ὑπάρχουν ποσὰ τὰ ὁποῖα ἐπιδέχονται ἀντίθεσιν, ἤτοι ἔχουν δύο φορὰς ἀντιθέτους. Τοιαῦτα ποσὰ εἶναι π. χ. τὸ κέρδος καὶ ἡ ζημία ἑνὸς ἐμπόρου, ἡ θερμοκρασία ἡ ἄνωθεν καὶ ἡ κάτωθεν τοῦ μηδενός, ἡ χρονολογία ἡ π. Χ καὶ ἡ μ. Χ , ἡ κίνησις ἐπὶ εὐ θείας γραμμῆς ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἡ κίνησις ἐπὶ εὐθείας δεξιὰ ἢ ἀριστερά, ἑνὸς σημείου τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς ἀρχὴ κ.ἄ.

Δι' ὅλα δὲ τὰ τοιαῦτα ποσὰ δεχόμεθα *κατὰ συνθήκην*, ἤτοι συμφωνοῦμεν, τὸ ἑξῆς : Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἀπὸ τὴν μέτρησιν ὁμοειδῶν ποσῶν, καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν καὶ τὴν αὐτὴν φοράν, παρίστανται δι' ἀριθμῶν ὁμοσήμων, π. χ. θετικῶν, ὁπότε, ὅταν ἔχουν ταῦτα τὴν ἀντίθετον φοράν, θὰ παρίστανται διὰ τῶν ἀντιθέτων ἀριθμῶν. Οὕτω π. χ. ἐὰν 100 δραχμαὶ κέρδους παρασταθοῦν διὰ τοῦ $+100$, ἡ ζημία τῶν 100 δραχμῶν θὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ -100.

18. Κατὰ ταῦτα, ἐὰν ἔμπορός τις ἐκέρδισε κατὰ πρῶτον 5000 δραχμὰς καὶ ἔπειτα ἐζημιώθη κατὰ 1000 δραχμάς, τὸ τελικὸν ἐξαγόμενον εἶναι τὸ ἄθροισμα $(+5000$ δρχ.$)+(-1000$ δρχ.$)=(+4000$ δρχ.), δηλαδὴ κέρδος 4000 δραχμαί. Ὁμοίως, ἐὰν βαδίζῃ τις ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς ΑΒ δεξιὰ καὶ τὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα διανύει, παραστήσωμεν διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, τὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ διαστήματα, τὰ ὁποῖα τυχὸν θὰ διανύσῃ, θὰ παραστήσωμεν δι' ἀρνητικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω δέ, ἐὰν ἀνεχώρησεν οὗτος ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ ἐκινήθη δύο χιλιόμετρα πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κατόπιν τρία χιλιόμετρα πρὸς τὰ ἀριστερά, ἡ τελικὴ ἀπόστασις αὐτοῦ καὶ ἡ θέσις ἀπὸ τῆς ἀρχῆς θὰ δεικνύεται ὑπὸ τοῦ ἀθροίσματος $(+2$ χιλμ.$)+(-3$ χλμ.$)$ $=-1$ χιλιόμετρον· ἤτοι οὗτος εὑρίσκεται ἤδη ἀριστερὰ τῆς ἀρχῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν ἑνὸς χιλιομέτρου ἀπὸ ταύτης.

Σημείωσις α'. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν τὸ πρόβλημα τῆς § 1 ἀνάγεται εἰς μίαν περίπτωσιν καὶ θὰ λυθῇ διὰ μιᾶς μόνον πράξεως, ἤτοι τῆς προσθέσεως τῶν α καὶ β, ὅπου ὁ α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ ὁ β ἀρνητικός· ἐκ τοῦ ἀθροίσματος δὲ θὰ συμπεράνωμεν, ἐὰν ὁ ἔμπορος ἐκέρδισεν ἢ ἐζημιώθη καὶ πόσον.

Σημείωσις β'. Ὑπάρχουν ποσά, τὰ ὁποῖα δὲν ἐπιδέχονται ἀντίθεσιν, ὅπως π. χ. εἶναι αἱ ὧραι τῆς ἡμερησίας ἐργασίας ἑνὸς ἐργάτου, ἡ χωρητικότης ἑνὸς βαρελίου, ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου κ.ἄ. Τὰ τοιαῦτα ποσὰ παρίστανται πάντοτε διὰ θετικῶν ἀριθμῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα :

$$(+5)+(+9)+(+13)+(+8)+(+25)+(+34)$$
$$(-7)+(-2)+(-10)+(-6)+(-12)+(-18)$$
$$(-2)+(+10)+(-8)+(+9)+(-11)$$
$$(+6)+(-23)+(-17)+(+45)+(-50)+(+55)$$
$$(+2{,}6)+(-1{,}4)+(-3{,}8)+(+1{,}8)+(+0{,}8)$$

$$(-2{,}25)+(-3{,}5)+(+8{,}125)+(-9{,}375)+(-15)$$

$$\left(+\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(-\frac{11}{30}\right)+\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{13}{15}\right)$$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(+1\frac{2}{3}\right)+\left(-2\frac{3}{15}\right)+\left(-1\frac{7}{60}\right)+(-7)$$

3) Νὰ παραστήσετε διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν τὰς θερμοκρασίας 13^0, 8^0, $11^0\frac{1}{2}$ τὰς ἄνωθεν τοῦ μηδενὸς καὶ τὰς 2^0, 5^0 6^0 τὰς κάτωθι τοῦ μηδενός.

4) Ἐὰν λάβωμεν ὡς ἀρχὴν τοῦ χρόνου τὴν μεσημβρίαν μιᾶς ἡμέρας, διὰ ποίων ἀριθμῶν θὰ παρασταθοῦν αἱ ὧραι 8, $9\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{2}$ π. μ. καὶ αἱ ὧραι 1, 4, 8 μ. μ. τῆς αὐτῆς ἡμέρας; Καὶ διὰ ποίου ἀριθμοῦ θὰ παρασταθῇ ἡ δωδεκάτη μεσημβρινή;

5) Ἡ θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο κατά τινα στιγμὴν -3^0 Κ. Μετά τινας ὥρας ἡ θερμοκρασία τῆς ἡμέρας αὐτῆς ηὐξήθη κατὰ 9^0 Κ. Πόσους βαθμοὺς ἐδείκνυε τότε τὸ θερμόμετρον;

6) Ἓν ἀεροπλάνον ἀνῆλθε κατ' ἀρχὰς ὑπὲρ τὴν γῆν εἰς ὕψος 1800 μέτρων, ἔπειτα κατῆλθεν ἐκ τοῦ ὕψους αὐτοῦ κατὰ 600 μέτρα. Κατόπιν ἀνῆλθε κατὰ 850 μέτρα, κατῆλθε πάλιν κατὰ 700 μέτρα καὶ τέλος ἀνῆλθε κατὰ 450 μέτρα. α') Νὰ παραστήσητε τὰς ἀνόδους καὶ καθόδους τοῦ ἀεροπλάνου διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ β') νὰ εὕρητε διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων τὸ τελικὸν ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

7) Ἔμπορός τις ἔχει τὸ ποσὸν τῶν 10000 δρχ,. ὑπολογίζει δέ, ὅτι ὀφείλει εἰς διαφόρους 3250 δρχ., 4600 δρχ., 1050,50 δρχ., καὶ 5425,75 δρχ. Τοῦ ὀφείλουν ὅμως ἄλλοι 675 δρχ., 2140,50 δρχ., 6750 δρχ. καὶ 3500 δρχ. Νὰ παραστήσητε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ ἔπειτα νὰ εὕρητε πόσας δραχμὰς θὰ ἔχῃ.

8) Ἔμπορός τις ὑπολογίζει, ὅτι ὀφείλει εἰς διαφόρους 1723,50 δρχ., 2945,30 δρχ., 5402,75 δρχ. καὶ 7015 δρχ. Τοῦ ὀφείλουν ὅμως 1300 δρχ., 2500 δρχ. καὶ 418,40 δρχ.· ἔχει δὲ εἰς τὸ ταμεῖον του 8000 δρχ. Ἀφοῦ κανονίσῃ ὅλους τοὺς λογαριασμούς του, ποία θὰ εἶναι ἡ χρηματική του κατάστασις;

9) Κινητόν τι κινούμενον ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς χ'χ ἀναχωρεῖ ἀπό τινος σημείου αὐτῆς Α, φθάνει ἔπειτα εἰς τὸ σημεῖον Β, ἔπειτα εἰς τὸ Γ καὶ τέλος εἰς τὸ Δ. Ἐὰν οἱ δρόμοι εἶναι ΑΒ$=+7$ μ., ΒΓ$=-5$ μ. καὶ ΓΔ$=+14$ μ., ποῖον εἶναι τὸ ἄθροισμα; Καὶ ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων Α,Β,Γ καὶ Δ πρὸς ἄλληλα;

10) Κινητόν τι, ἀναχωρῆσαν ἐκ τοῦ σημείου Β εὐθείας τινός, ἔφθασεν εἰς τὸ σημεῖον Α, ἔπειτα εἰς τὸ Γ καὶ τέλος εἰς τὸ Δ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ἐὰν οἱ δρόμοι εἶναι ΒΑ$=+8$ μ., ΑΓ$=-18$ μ. καὶ ΓΔ$=+35$ μ., πόσων μέτρων εἶναι ὁ δρόμος ΒΔ; Ποία εἶναι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν σημείων Β, Α, Γ καὶ Δ πρὸς ἄλληλα;

19. ***Ἀφαίρεσις.*** — **Ἡ ἀφαίρεσις ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.**

Ἔστω ὅτι θέλομεν ν' ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν α (θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν) τὸν $+\beta$· ἀλλὰ τότε ἡ διαφορὰ $\alpha-(+\beta)$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα $\alpha+(-\beta)$, διότι ἐὰν εἰς αὐτὸ προσθέσωμεν τὸν ἀφαιρετέον $+\beta$ λαμβάνομεν

$$\alpha+(-\beta)+(+\beta)=\alpha$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\alpha-(-\beta)=\alpha+(+\beta)$$

διότι $$\alpha+(+\beta)+(-\beta)=\alpha.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν, ὅτι *ἡ ἀφαίρεσις ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν. Εὑρίσκεται δὲ ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν ὅταν εἰς τὸν μειωτέον προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.*

Οὕτως εἶναι

$(+6)-(+8)=(+6)+(-8)=-2$ $\qquad$ $(-7)-(-9)=(-7)+(+9)=+2$

$(-5)-(+6)=(-5)+(-6)=-11$ $\qquad$ $(+3)-(-4)=(+3)+(+4)=+7$

Καὶ γενικῶς ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν $\pm\alpha$, $\pm\beta$ εἶναι

$$(+\alpha)-(+\beta)=(+\alpha)+(-\beta)=+(\alpha-\beta) \quad \alpha>\beta$$
$$\text{ἢ } =-(\beta-\alpha) \quad \alpha<\beta$$
$$(+\alpha)-(-\beta)=(+\alpha)+(+\beta)=+(\alpha+\beta)$$
$$(-\alpha)-(+\beta)=(-\alpha)+(-\beta)=-(\alpha+\beta)$$
$$(-\alpha)-(-\beta)=(-\alpha)+(+\beta)=-(\alpha-\beta) \quad \alpha>\beta$$
$$\text{ἢ } =+(\beta-\alpha) \quad \alpha<\beta$$

Παρατηρήσεις. 1) Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν δὲν εἶναι πάντοτε μικροτέρα τοῦ μειωτέου.

2) Ἡ διαφορὰ $0-(-7)$ ἰσοῦται κατὰ τὰ ἀνωτέρω μὲ

$$0+(+7)=+7 \text{ καὶ ἡ } 0-(+4) \text{ εἶναι } 0+(-4)=-4.$$

Ταῦτα δὲ δύνανται νὰ γραφοῦν ὡς ἑξῆς :

$$-(-7)=+7,\ +(+7)=+7,\ -(+4)=-4,\ +(-4)=-4$$

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος μὲ τὸν $+\alpha$. Ὁ ἀντίθετος δὲ τοῦ α εἶναι ὁ $-\alpha$.

Ὥστε ἐὰν $\alpha=+5$ τότε εἶναι $-\alpha=-(+5)=-5$

καὶ ἐὰν $\alpha=-8$ » » $-\alpha=-(-8)=+8$.

Ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ κτλ. δὲν πρέπει νὰ λαμβάνωνται ὡς ἀρνητικοί. Θὰ εἶναι δὲ τοιοῦτοι, ἐὰν οἱ ἀντίθετοί των α, β, γ κτλ. εἶναι θετικοί. Ἀλλ' ἐὰν οἱ α, β, γ κτλ. εἶναι ἀρνητικοί, τότε οἱ $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$ κτλ. εἶναι θετικοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

11) Νὰ γίνουν αἱ ἀφαιρέσεις:

$(+28)-(+18)$ $\quad(+17)-(-19)$ $\quad(-34)-(+13)$ $\quad(-48)-(\;15)$

$$\left(-\frac{20}{9}\right)-\left(+\frac{3}{9}\right) \qquad \left(-\frac{15}{7}\right)-\left(-\frac{2}{7}\right)$$

$$\left(+\frac{3}{5}\right)-\left(+\frac{9}{10}\right) \qquad \left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{11}{42}\right)$$

$$\left(+6\frac{5}{8}\right)-\left(+9\frac{3}{4}\right) \qquad \left(-7\frac{1}{5}\right)-\left(-8\frac{7}{8}\right)$$

$$\left(+4\frac{3}{11}\right)-\left(-\frac{4}{5}\right) \qquad \left(-\frac{9}{10}\right)-\left(+2\frac{8}{13}\right)$$

$(-2{,}6)-(-1{,}2)$ $\quad(+3{,}2)-(+0{,}25)$ $\quad(+0{,}04)-(-1{,}6)$ $\quad(-3{,}63)-(+5{,}875)$

$$(-0{,}375)-\left(-\frac{3}{8}\right) \qquad \left(+2\frac{1}{16}\right)-(+3{,}5)$$

$$\left(+9\frac{1}{6}\right)-(-1{,}225) \qquad (-0{,}4)-\left(-\frac{2}{15}\right)$$

12) Ἡ ἐλαχίστη θερμοκρασία ἡμέρας τινὸς ἦτο $-2{,}5^{0}$, ἡ δὲ μεγίστη $+17{,}6^{0}$. Πόση εἶναι ἡ διαφορὰ τῆς ἐλαχίστης αὐτῆς θερμοκρασίας ἀπὸ τῆς μεγίστης καὶ ἑπομένως πόσων βαθμῶν ἦτο ἡ αὔξησις τῆς θερμοκρασίας κατὰ τὴν ἡμέραν αὐτήν;

13) Εἷς ἐργάτης ἀπὸ τὸ ἡμερομίσθιον μιᾶς ἡμέρας ἐπλήρωσεν ἓν χρέος 25 δρ. καὶ τοῦ ἔμειναν 85 δραχμαί. Νὰ παραστήσητε τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς διὰ θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν διὰ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ εὕρητε τὸ ἡμερομίσθιον τῆς ἡμέρας αὐτῆς.

14) Ὁ ἰσολογισμὸς ἐμπόρου τινὸς κατὰ τὴν ἀρχὴν ἔτους τινὸς ἀφῆκε παθητικὸν 4850 δραχμάς, εἰς δὲ τὸ τέλος τοῦ αὐτοῦ ἔτους ἀφῆκεν ἐνεργητικὸν 35150 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κέρδος τοῦ ἐμπόρου κατὰ τὸ ἔτος τοῦτο, ὡς εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα.

20. ***Σειρὰ προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων.*** — Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῶν κάτωθι πράξεων:

$$(-8)-(-7)-(+9)+(+11)-(-14).$$

Τοῦτο κατὰ τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκεται, ὅτι εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα:

$$(-8)+(+7)+(-9)+(+11)+(+14).$$

Ἀλλὰ τὸ τελευταῖον τοῦτο ἄθροισμα παριστῶμεν ἁπλούστερον γράφοντες *κατὰ συνθήκην* τοὺς προσθετέους τὸν ἕνα μετὰ τὸν ἄλλον καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του, ἤτοι παριστῶμεν αὐτὸ ὡς ἑξῆς:

$$-8+7-9+11+14.$$

Τὸ δὲ ἄθροισμα

$$(+7)+(-9)+(-8)+(+18)$$

γράφεται: $+7-9-8+18$

καὶ ἐπειδὴ εἰς αὐτὸ ὁ πρῶτος ἀριθμὸς εἶναι θετικός, γράφεται τοῦτο καὶ $7-9-8+18$

21. ***Ἡ διπλῆ σημασία τῶν + καὶ —.*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἡ παράστασις $8-5-11+13-9$ ἢ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $+8$, -5, -11, $+13$, -9, ἢ ὡς φανερώνουσα τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν 8, 5, 11, 13, 9, διότι εἶναι ὡς εἴδομεν:

$$(+8)-(+5)-(+11)+(+13)-(+9)=$$
$$=(+8)+(-5)+(-11)+(+13)+(-9)=8-5-11+13-9.$$

Ὥστε τὰ σημεῖα + καὶ — ἔχουν διπλῆν σημασίαν, ἤτοι ἢ

α') φανερώνουν τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ τῆς ἀφαιρέσεως ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους συνδέουν, ὁπότε οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θεωροῦνται θετικοί, ἢ

β') φανερώνουν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς πρὸ τοῦ ὁποίου εὑρίσκονται εἶναι θετικὸς ἢ ἀρνητικός, ὁπότε μεταξὺ τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν τούτων ἀριθμῶν πρέπει νὰ νοήσωμεν τὸ σημεῖον τῆς προσθέσεως. Τοῦτο δέ, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, οὐδεμίαν σύγχυσιν προκαλεῖ.

Σημείωσις α'. Τὰ σημεῖα + καὶ —, ὅταν εἶναι πρὸ μεμονωμένων ἀριθμῶν, ὡς $+9$, -20 κτλ., δεικνύουν ἁπλῶς, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ εἶναι θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί.

Σημείωσις β'. Ἐπειδὴ $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$

$\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$ ἕπεται ὅτι

οἱ ἀριθμοὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\beta-\alpha$ εἶναι ἀντίθετοι, ἤτοι εἶναι

$$\alpha-\beta=-(\beta-\alpha).$$

22. ***Πρόσθεσις ἀθροίσματος εἰς ἀριθμόν.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν 48 τὸ ἄθροισμα $18-7-15$.

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $+18$, -7 καὶ -15 εἶναι -4 Ὥστε εἶναι:

$$48+(18-7-15)=48+(-4)=44.$$

Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ ὡς ἑξῆς: Τὸ ἄθροισμα $18-7-15$ γράφεται $(+18)+(-7)+(-15)$, τοῦτο δὲ θέλομεν νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν $+48$.

Ἀλλὰ κατὰ τὴν γνωστὴν ἰδιότητα τῆς προσθέσεως ἀθροίσματος εἰς ἀριθμὸν ἔχομεν:

$$(+48)+[(+18)+(-7)+(-15)]=$$
$$=(+48)+(+18)+(-7)+(-15)=48+18-7-15.$$

Ὥστε εἶναι:

$$48+(18-7-15)=48+18-7-15 \qquad (1)$$

καὶ γενικῶς εἶναι $\quad \alpha+(\beta-\gamma-\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta-\gamma-\delta+\varepsilon.$

Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι: *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μετὰ τὸν ἀριθμὸν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων των καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν.*

23. *Ἀφαίρεσις ἀθροίσματος ἀπὸ ἀριθμοῦ.*— Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ ἀνωτέρω ἄθροισμα ἀπὸ τὸν 48, θὰ ἔχωμεν:

$$48-(18-7-15)=48-(-4)=48+4=52$$

ἢ

$$(+48)-[(+18)+(-7)+(-15)]=$$
$$=48-(+18)-(-7)-(-15)=$$
$$=48+(-18)+(+7)+(+15)$$

ἤτοι:

$$48-(18-7-15)=48-18+7+15 \qquad (2)$$

καὶ γενικῶς εἶναι:

$$\alpha-(\beta-\gamma-\delta+\varepsilon)=\alpha-\beta+\gamma+\delta-\varepsilon.$$

Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι: *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπὸ ἀριθμοῦ, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μετὰ τὸν ἀριθμὸν ὅλους τοὺς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος μὲ ἀντίθετα σημεῖα καὶ ἔπειτα νὰ προσθέσωμεν.*

24. *Θέσις καὶ ἄρσις παρενθέσεων.*—Ἐκ τῶν ἄνω ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι ἐὰν θέλωμεν νὰ θέσωμεν ἀριθμοὺς ἐντὸς παρενθέσεων ἤ, ὅταν εἶναι ἐντὸς παρενθέσεων, νὰ γράψωμεν αὐτοὺς ἄνευ παρενθέσεων, θὰ γράψωμεν τοὺς ἀριθμοὺς μετὰ τῶν αὐτῶν σημείων των, ἐὰν πρὸ τῶν παρενθέσεων ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον $+$, μὲ ἠλλαγμένα δὲ τὰ σημεῖα, ἐὰν πρὸ τῶν παρενθέσεων ὑπάρχῃ τὸ σημεῖον $-$.

Οὕτω γράφομεν:

$$5-8+3-9=(5-8+3-9)=-(-5+8-3+9)$$

καὶ $(9-4+3)-(8+6-9-4)=9-4+3-8-6+9+4.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

15) Τὰς κάτωθι σειρὰς προσθέσεων καὶ ἀφαιρέσεων νὰ γράψῃς πρῶτον ὡς ἀθροίσματα θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ κατόπιν ταῦτα νὰ γράψῃς ἁπλούστερον:

$$(+12)+(-9)-(+8)-(-15)+(+10)-(-6)$$
$$(-7)-(-4)+(-11)+(+13)-(-2)-(-5)$$
$$-(-20)-(-32)-(+44)-(-28)-(+17)+(+12)$$

16) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$$(+5)+(-2)-(-4)+(+8)-(+9)$$
$$(+18)-(+7)-(-9)-(+15)+(-10)$$
$$(-3)-(-2)+(-5)+(+2)-(-3)+(-5)$$
$$(-9)-(-7)-(+18)-(-16)-(+23)+(-25)$$
$$\left(-\frac{5}{2}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-1\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{5}{8}\right)$$
$$(-4)-(-1{,}5)+(+3{,}25)-(-3)+(-1{,}75)$$
$$-(-0{,}02)+(-4{,}27)-(-1{,}1)-(-1{,}83)-(-2{,}5)$$
$$\left(+\frac{3}{4}\right)-(-0{,}5)+\left(+\frac{1}{2}\right)-\left(-1\frac{1}{2}\right)-(-2{,}75)$$

17) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

$7-18, \quad -32-47+23, \quad -9+36-15-29+36$

$5-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-5\frac{5}{8}+\frac{3}{4} \qquad 3-\frac{1}{3}-8\frac{2}{4}+6\frac{2}{3}$

$-0{,}5+2{,}25+4{,}625-7{,}25, \qquad -1+0{,}125-0{,}375+0{,}5+1.875$

18) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι ἐξαγόμενα:

$$35+(28-30-12), \quad 100-(-24+9-36)$$
$$(7+9-8-12)+(-15+4-7-10)$$
$$(8-15-24)-(11-19+13-2)$$
$$-(-8+3-7)-(4-6-17+23)$$
$$(27-12)-(32-40)-(-24+50)$$

25. *Πολλαπλασιασμός.* —Εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὁ πολλαπλασιασμός, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμούς. Ἤτοι ἔχομεν:

$$(+5).(+3) = (+5)+(+5)+(+5)$$
$$(-5).(+3) = (-5)+(-5)+(-5)$$
$$(-5).\left(+\frac{3}{4}\right) = \frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}+\frac{-5}{4}$$
$$(+5).(+1) = +5 \text{ καὶ } (-5).(+1) = -5$$

26. *Σημασία τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ —1.* Ἤδη μένει νὰ ἐξετασθῇ ἡ περίπτωσις κατὰ τὴν ὁποίαν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Πρὸς τοῦτο ὅμως θὰ ὁρίσωμεν προηγουμένως τὴν σημασίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα —1, ὥστε *νὰ διατηρῶνται αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ* (δηλαδὴ ἡ τῆς ἀδιαφορίας ὅσον ἀφορᾷ τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ ἡ ἐπιμεριστική).

Ἀλλὰ κατὰ τὴν ἰδιότητα τῆς ἀδιαφορίας τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν, ἔχομεν π.χ.

$$(+5).(-1)=(-1).(+5).$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$(-1).(+5)=(-1)+(-1)+(-1)+(-1)+(-1)=-5,$$

ἔπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι καὶ $(+5).(-1)=-5$, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρίσωμεν, ὅτι: *Τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα —1 εἶναι ὁ ἀντίθετος αὐτοῦ.*

Ἀλλ' ὅτι οὕτω πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὸ γινόμενον ἀριθμοῦ ἐπὶ —1 δεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἄς λάβωμεν τὸ γινόμενον $(+5).(+1)=+5$. Ἀλλ' ἐπειδὴ $+1=(+2)+(-1)$, ἔπεται ὅτι καὶ τὸ γινόμενον τοῦ $+5$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $(+2)+(-1)$ πρέπει νὰ εἶναι πάλιν $+5$. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦ $+5$ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $(+2)+(-1)$ κατὰ τὴν ἐπιμεριστικὴν ἰδιότητα, τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν, εἶναι

$$(+5).(+2)+(+5).(-1).$$

Τοῦτο δὲ εἶναι ἴσον μὲ $+5$.

Ἤτοι εἶναι $\quad (+5).(+2)+(+5).(-1)=+5$

ἢ $\quad (+5)+(+5)+(+5).(-1)=+5.$

Ἀλλ' ἵνα τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἰσοῦται μὲ $+5$, πρέπει νὰ εἶναι $(+5)+(+5).(-1)=0$. Διὰ νὰ γίνῃ ὅμως τοῦτο, πρέπει τὸ γινόμενον $(+5).(-1)$ νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀντίθετος τοῦ $+5$. Τοιοῦτος δὲ εἶναι μόνον ὁ -5· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι $(+5).(-1)=-5$.

Ὁμοίως, ἐὰν λάβωμεν τὸ γινόμενον $(-5).(+1)=-5$, θὰ ἔχωμεν

$$(-5).[(+2)+(-1)]=(-5).(+2)+(-5).(-1)=-5$$

ἤτοι $\quad (-5)+(-5)+(-5).(-1)=-5.$

Ἀλλ' ἵνα τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ -5, πρέπει νὰ εἶναι

$$(-5)+(-5).(-1)=0.$$

῞Ωστε τὸ γινόμενον $(-5).(-1)$ πρέπει νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἀντίθετος τοῦ -5, ἤτοι $+5$· ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δεχθῶμεν, ὅτι $(-5).(-1) = +5$. Γενικῶς δὲ ἀνάγκη νὰ εἶναι $\alpha.(-1) = -\alpha$, ὅπου α εἶναι τυχὼν ἀριθμός.

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς:

1) *Τὸ γινόμενον τῆς ἀρνητικῆς μονάδος — 1 ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της ἰσοῦται μὲ τὴν θετικὴν μονάδα 1.* Ἤτοι

$$(-1).(-1) = 1.$$

2) *Πᾶς ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι γινόμενον τοῦ ἀντιθέτου του θετικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τὴν ἀρνητικὴν μονάδα — 1.* Ἤτοι

$$-8 = (+8)(-1), \qquad -\frac{5}{9} = \left(+\frac{5}{9}\right).(-1).$$

27. ***Πολλαπλασιασμὸς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν.***—Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν:

$(+6).(+5) = +30$ ἢ ἁπλούστερον $6.5 = 30$

$(+6).(-5) = (+6).(+5).(-1) = -30$ » $6.(-5) = -30$

$(-6).(+5) = (+6).(+5).(-1) = -30$ » $(-6).5 = -30$

$(-6).(-5) = (+6).(+5).(-1).(-1) = +30$ » $(-6).(-5) = 30$

῞Ωστε: *Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν, καὶ μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ παράγοντες εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν εἶναι ἑτερόσημοι.*

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι, ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν $\pm\alpha$, $\pm\beta$

$(+\alpha).(+\beta) = +(\alpha.\beta)$ $\qquad$ $(-\alpha).(+\beta) = -(\alpha.\beta)$

$(-\alpha).(-\beta) = +(\alpha.\beta)$ $\qquad$ $(+\alpha).(-\beta) = -(\alpha.\beta)$

Σημείωσις α΄. Τὸ γινόμενον δύο παραγόντων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς εἶναι 0, ἰσοῦται μὲ τὸ 0, ἤτοι εἶναι π.χ.

$$(+5).0 = 0.(+5) = 0.$$

Σημείωσις β΄. Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου δύο ἀριθμῶν λαμβάνεται κατὰ τὸν ἑπόμενον κανόνα, ὁ ὁποῖος λέγεται κανὼν τῶν σημείων. Ἤτοι:

+ ἐπὶ + δίδει +
+ » — » —
— » + » —
— » — » +

28. ***Ἰδιότητες.***—Ἀφοῦ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἰδιότης τῆς

ἀδιαφορίας ὡς πρὸς τὴν τάξιν τῶν παραγόντων ἀληθεύει καὶ ἐπὶ ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος. Ἀλλὰ καὶ ἡ ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης ἀληθεύει· διότι π.χ. διὰ τὸ γινόμενον

$$(-5+7).3$$

ἔχομεν $(-5+7).3=(-5)+7+(-5)+7+(-5)+7=$

$$=(-5)+(-5)+(-5)+7+7+7=(-5).3+7.3$$

ἤτοι εἶναι $(-5+7).3=(-5).3+7.3$ (1)

Ἀλλ' ἀφοῦ ἀληθεύει ἡ ἰσότης αὐτή, θὰ ἀληθεύῃ καὶ ἡ

$$(-5+7).(-3)=(-5).(-3)+7.(-3),$$

διότι οἱ ἀριθμοὶ $(-5+7).(-3)$

καὶ $(-5).(-3)+7.(-3)$

εἶναι ἀντίθετοι τῶν ἴσων ἀριθμῶν τῆς ἰσότητος (1). Ἑπομένως καὶ αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: *Ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀληθεύουν καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

19) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$24.15 \qquad (-35).11 \qquad 101.(-13) \qquad (-225).(-75) \qquad 1001.(-11)$$

$$(-7).\,2\frac{3}{7} \qquad 2\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{2}{13}\right) \qquad \left(-1\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-3\frac{1}{6}\right)$$

$$\left(-4\frac{5}{9}\right)\cdot 1\frac{2}{3} \qquad \left(-1\frac{7}{8}\right)\cdot\left(-4\frac{11}{15}\right)$$

$$2{,}5.(0{,}4) \qquad (-0{,}2).(-0{,}5) \qquad \left(-4\frac{3}{4}\right)\cdot 2{,}4 \qquad (0{,}004).\left(-2\frac{1}{2}\right) \qquad 5\frac{5}{9}\cdot(-4{,}5)$$

20) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους:

$$(-5+7).7 \qquad (8-17)(-6) \qquad (-2+7-3).(-5) \qquad (-1{,}2+7{,}5-0{,}3).1{,}1$$

$$(-2+6).(5-7) \qquad (-3{,}1+8{,}5).(-2{,}2-5{,}4) \qquad (3-4-5).\,6+(-2-6+7).(-9)$$

$$(-5-9+3).(-10)+(5-4).(-3)$$

29. ***Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.***—Τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων ὁρίζεται ὅπως καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτω διὰ τὸ γινόμενον $(+5).(-3).(-4).(+7).(-2)$ λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$(+5).(-3)=-15, \quad (-15).(-4)=+60, \quad (+60).(+7)=+420,$
$(+420).(-2)=-840$

Ὥστε εἶναι :

$$(+5).(-3).(-4).(+7).(-2)=-840.$$

30. ***Σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.*** —Αἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων, τὰς ὁποίας ἐμάθομεν εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀληθεύουν, ὡς εἴδομεν, καὶ ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος. Ἑπομένως ἀληθεύει καὶ ἡ ἰδιότης τῆς ἀντικαταστάσεως. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα ἀντικαταστήσωμεν τοὺς θετικοὺς παράγοντας $(+5)$ καὶ $(+7)$, θὰ εὕρωμεν θετικὸν γινόμενον τὸ $+35$. Ἐὰν δὲ εὕρωμεν ἔπειτα τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν ἀρνητικῶν παραγόντων, τὸ σημεῖον αὐτοῦ εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν θὰ ἀλλάξῃ, ὅταν θὰ τὸ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν θετικὸν παράγοντα $+35$. Ἀλλ' ἐδῶ οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες εἶναι τρεῖς. Ἐπειδὴ δὲ οἱ δύο ἐξ αὐτῶν δίδουν γινόμενον θετικόν, τοῦτο πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ τὸν τρίτον ἀρνητικὸν παράγοντα θὰ δώσῃ γινόμενον ἀρνητικόν, τὸ -24. Ὥστε τὸ ὅλον γινόμενον θὰ εἶναι ἀρνητικόν : $(-24).(+35)=-840$. Ἂν ὅμως οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες ἦσαν τέσσαρες, οὗτοι πολλαπλασιαζόμενοι ἀνὰ δύο θὰ ἔδιδον γινόμενον θετικόν. Ἑπομένως καὶ τὸ ὅλον γινόμενον θὰ ἦτο θετικόν. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι :

Τὸ σημεῖον τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων καὶ 1) Εἶναι τοῦτο *θετικόν*, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι *ἄρτιος* (ἢ 0). 2) Εἶναι *ἀρνητικόν*, ἂν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι *περιττός*.

Πδ. $(-7).2.(-3).(-6)=-252, \quad -2.3.(-5).(-4).(-6)=+720$

Σημείωσις α'. Εὑρίσκομεν ταχύτερον τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων, ἂν εὕρωμεν πρῶτον τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὡς ἄνω εἴπομεν, καὶ ἔπειτα εὕρωμεν τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων.

Σημείωσις β'. Ὅταν εἷς τῶν παραγόντων γινομένου εἶναι 0, τὸ γινόμενον εἶναι 0. Ὅταν δὲ τὸ γινόμενον παραγόντων εἶναι 0, εἷς τοὐλάχιστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι 0.

31. ***Ἰδιότης τῆς ἰσότητος.*** —*Ἐὰν ἴσους ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν γινόμενα ἴσα.* Διότι εἶναι ἴσα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ὁμόσημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(+3).(-5).(-8).(+2)$. $\quad (-4).(-5).8.(-6).(-2)$

$(-10).(-2).9.(-3).(-1)$, $\quad \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$

$1\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{8}\right)\cdot 2\frac{3}{4} \quad (-1).(-2).(-0{,}3)(-0{,}5).(-4)$

$(-15).6.9.0.(-7{,}25).125 \quad (-1{,}5).\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 1\frac{1}{2}\cdot(-4).(-0{,}2)$

32. Διαίρεσις.—Ἡ διαίρεσις καὶ εἰς τὴν ἄλγεβραν ὁρίζεται ὡς πρᾶξις ἀντίστροφος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Ἔστω ἡ διαίρεσις $(-8):(+4)$. Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι -2, διότι $(-2).(+4)=-8$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι

$(+8):(-4)=-2$ ἢ ἁπλούστερον $8:(-4)=-2$

$(-8):(-4)=+2$ ἢ ἁπλούστερον $(-8):(-4)=2$

Ἤτοι: *Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν, καὶ μὲ τὸ σημεῖον + μέν, ἂν οἱ ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι, μὲ τὸ — δέ, ἂν οὗτοι εἶναι ἑτερόσημοι.*

Ἑπομένως, ἂν α καὶ β εἶναι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ἀριθμῶν $\pm\alpha$, $\pm\beta$, εἶναι

$(+\alpha):(+\beta)=+(\alpha:\beta) \qquad (+\alpha):(-\beta)=-(\alpha:\beta)$

$(-\alpha):(-\beta)=+(\alpha:\beta) \qquad (-\alpha):(+\beta)=-(\alpha:\beta)$

33. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.—Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν παρίσταται καὶ διὰ κλάσματος ὡς εἰς τὴν ἀριθμητικήν. Οὕτω τὰ προηγούμενα πηλίκα παρίστανται :

$$\frac{+\alpha}{+\beta}=+\frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{+\alpha}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

$$\frac{-\alpha}{-\beta}=+\frac{\alpha}{\beta} \qquad \frac{-\alpha}{+\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

Τὰ κλάσματα τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοὶ λέγονται *ἀλγεβρικά*. Ἕπεται δὲ ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δὲν μεταβάλλεται, ὅταν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους του ἐπὶ —1. Ἀλλὰ καὶ γενικῶς, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία του δὲν μεταβάλλεται. Διότι αἱ ἀπόλυτοι τιμαὶ τῶν ὅρων θὰ πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ ἀριθμοῦ· ἂν δὲ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικὸς τὰ σημεῖα τῶν ὅρων θὰ διατηρηθοῦν· ἂν δὲ εἶναι ἀρνητικὸς τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων θὰ ἀλλάξουν. Αἱ ἰδιότητες λοιπὸν τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων ἀληθεύουν καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

34. Τὸ 0 εἰς τὴν διαίρεσιν.—Τὸ πηλίκον τοῦ 0 διαιρεθέντος δι᾿ οἱουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ εἶναι 0, ἤτοι εἶναι $\frac{0}{\alpha}=0$, διότι εἶναι $0.\alpha = 0$.

Διὰ τοῦ 0 οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ διαιρεθῇ· ἤτοι *ἡ διὰ τοῦ 0 διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος.* Καὶ πράγματι οὐδεὶς ἀριθμὸς δύναται νὰ εἶναι πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως, διότι πᾶς ἀριθμὸς πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ 0 δίδει γινόμενον 0. Οὐδὲ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν τὸ πηλίκον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως ὡς ἀριθμὸν καὶ νὰ τὸν εἰσαγάγωμεν εἰς τὸ ἤδη ὑπάρχον σύστημα τῶν ἀριθμῶν. Διότι ἐὰν παραδεχθῶμεν ὅτι $\frac{1}{0}=\lambda$ (λ ὁ νέος ἀριθμός) καὶ ἑπομένως ὅτι $1 = 0.\lambda$ θὰ ἔχωμεν

π.χ. $0.5.\lambda = 0.\lambda = 1$· ἀλλὰ πάλιν $0.5.\lambda = 0.\lambda.5 =$
$= 1.5 = 5$, ἤτοι $1 = 5$, ὅπερ εἶναι ἀδύνατον.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν $(\alpha+0).\lambda = (\alpha).\lambda = \alpha\lambda$ καὶ $(\alpha+0).\lambda = \alpha.\lambda + 0.\lambda = \alpha\lambda+1$, ἤτοι $\alpha\lambda = \alpha\lambda+1$, ὅπερ ἀδύνατον.

Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτων, ὅτι ἂν παραδεχθῶμεν τὸ πηλίκον $\frac{1}{0}$ ἢ τὸ $\frac{\alpha}{0}$ ὡς ἀριθμόν, αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν τεσσάρων πράξεων καὶ τῆς ἰσότητος καταστρέφονται.

Τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\frac{0}{0}$, εἶναι φανερὸν ὅτι δύναται νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀριθμός. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο ἀόριστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

22) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις :

$150 : 25 \quad (-240) : (-15) \quad 216 : (-18) \quad (-216) : 12 \quad (-1001) : (-91)$

$\left(-2\frac{1}{4}\right) : 1\frac{1}{9} \qquad \left(-2\frac{1}{2}\right) : \left(-2\frac{1}{7}\right) \qquad \left(-1\frac{7}{9}\right) : 1\frac{5}{18}$

$9 : (-1{,}2) \qquad (-3{,}4) : (-1{,}5) \qquad (-0{,}2) : (-0{,}008)$

$(-2{,}5) : \frac{1}{2} \qquad \left(-\frac{3}{4}\right) : (-0{,}5), \ (-7{,}4) : 8\frac{1}{2} \qquad \left(-\frac{7}{8}\right) : (-0{,}35)$

23) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα

$2.(-6):(-12)$	$(-30):(-3).(-5)$	$5.(-7):(-0{,}35)$
$(-36):(-0{,}3).(-4)$	$(-600):2.(-3).(-5)$	$2.(-3).(-5):(-600)$
$(-2).(-9):(-6).3.15$	$0{,}5:(-4).(-5)$	$3:(-0{,}1).0{,}03$

24) Ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ὁ —25 διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον 225; Καὶ ἐπὶ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιασθῇ ἕκαστος τῶν κάτωθι ἀριθμῶν, διὰ νὰ δώσῃ γινόμενον τὸν ἀπέναντι αὐτοῦ ἀριθμόν;

-17	-425	$\frac{1}{3}$	-1
32	-416	$1{,}6$	$-0{,}016$
-75	5	$-\frac{3}{5}$	$0{,}12$
1	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}75$	$-1\frac{1}{4}$

25) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$36 - 45 - 18 + 9):9 \quad (56 - 64 - 80 - 120):(-8) \quad (5 - 7 + 3 - 8):\left(-\frac{1}{3}\right)$

$(-120):(7 - 12 + 11 - 21) \quad (-18):(2 - 0{,}2) \quad 9:(0{,}05 - 0{,}5)$

26) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα κατὰ δύο τρόπους:

$\left(-5 + \frac{3}{4} - 1 + 7\right).\left(2 - 3 - \frac{3}{2}\right), \quad \left(9 - 2 - \frac{4}{3} - 8\right)\cdot\left(-\frac{8}{5} + 4 + 3 - 6\right)$

27) Αἱ κάτωθι παραστάσεις νὰ κατασταθοῦν ἁπλούστεραι:

$$\frac{\left(2 + \frac{1}{3} - 5\right)\cdot\left(1 - \frac{7}{4}\right)}{\left(4 - 3 + \frac{1}{2}\right)} \qquad \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{2}{7} + 6\right)\cdot(7-9) - (3-4).(8-5-4)}{\frac{1}{7} - 1 + \frac{1}{4}}$$

28) Κινητόν τι κινούμενον ἐπ' εὐθείας ἀναχωρεῖ ἀπὸ σημείου αὐτῆς A καὶ φθάνει εἰς τὸ B· εἶναι δὲ (AB) = 18 μέτρα. Κατόπιν κινεῖται ἀντιθέτως μὲ ταχύτητα 1 μέτρου εἰς 5'. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A θὰ εὑρίσκεται τὸ κινητὸν μετὰ παρέλευσιν ἡμισείας ὥρας, ἀφ' ἧς ἀνεχώρησεν ἀπὸ τοῦ B;

29) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα νὰ εὑρεθῇ μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του ἀπὸ τοῦ B τὸ κινητόν, κινούμενον κατὰ τὴν ἀρνητικὴν φοράν, θὰ εὑρίσκεται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ A ἴσην μὲ —12 μέτρα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Δυνάμεις καὶ ἀρχικαὶ ἰδιότητες αὐτῶν.

35. ***Ὁρισμός.***—Τὸ γινόμενον 5.5.5 λέγεται δύναμις τοῦ 5, τὸ δὲ γινόμενον τοῦ $(-5).(-5).(-5).(-5)$ λέγεται δύναμις τοῦ -5. Καὶ τὸ γινόμενον ααααα λέγεται δύναμις τοῦ α. Ὥστε: *Δύναμις ἀριθμοῦ λέγεται τὸ γινόμενον ἴσων παραγόντων πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.*

Αἱ δυνάμεις παρίστανται ὅπως καὶ εἰς τὴν ἀριθμητικήν· ὁ δὲ ἐκθέτης αὐτῶν, κατὰ τὸν ὁρισμόν, εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2. Οὕτω γράφομεν:

$$5.5.5.=5^3 \text{ καὶ } (-5).(-5).(-5).(-5)=(-5)^4$$

καὶ $$\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^5.$$

εἶναι δὲ $$(-2)^5=(-2).(-2).(-2).(-2).(-2).$$

36. ***Σημεῖον τῶν δυνάμεων.***— Ἀφοῦ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα παραγόντων, ἕπεται ὅτι (§ 30):

1) *Αἱ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικαί.* Οὕτως εἶναι:

$$(+2)^3=+8 \qquad (+2)^4=+16 \qquad (+2)^5=+32, \qquad (+\alpha)^\nu=+\alpha^\nu$$

2) *Αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικαὶ μὲν ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος, ἀρνητικαὶ δέ, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττός.* Οὕτως εἶναι:

$$(-3)^2=+9 \qquad (-3)^3=-27 \qquad (-3)^4=+81 \qquad (-3)^5=-243$$

καὶ γενικῶς εἶναι

$(-\alpha)^\nu=+\alpha^\nu$, ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἤτοι $(-\alpha)^{2\mu}=+\alpha^{2\mu}$

$(-\alpha)^\nu=-\alpha^\nu$, ἐὰν ὁ ν εἶναι περιττὸς ἤτοι $(-\alpha)^{2\mu+1}=-\alpha^{2\mu+1}$

Ὁμοίως εἶναι $(-1)^{2\mu}=+1$ καὶ $(-1)^{2\mu+1}=-1$

Σημείωσις. Ἀλλὰ $-3^2=-9$, διότι $-3^2=-(+3)^2=-9$. Ὁμοίως εἶναι καὶ $-3^4=-81$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα, ἡ τρίτη, ἡ τετάρτη καὶ ἡ πέμπτη δύναμις καθενὸς τῶν ἀριθμῶν:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
(−1), (−2), (−3), (−4), (−5), (−6), (−7), (−8), (−9), (−10)

31) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$(+6)^2$ $\quad(-6)^3$ $\quad-6^2,$ $\quad10^3,$ $\quad(-10)^3,$ $\quad-10^3$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^5 \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left(1\frac{1}{8}\right)^3 \quad \left(3\frac{4}{5}\right)^2 \quad \left(-2\frac{7}{9}\right)^3$

32) Ὁμοίως τῶν δυνάμεων :

$(0,1)^2 \quad (-0,2)^5 \quad (-0,3)^4 \quad (-0,03)^3, \quad (-0,001)^2$

$(-0,02)^4 \quad (0,03)^5 \quad (-1,05)^3, \quad (-22,5)^3, \quad (1,0101)^4$

33) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5, \quad (-1)^2-(-1)^3+(-1)^4-(-1)^5$

$(-1)^2+(-2)^3+(-3)^4+(-4)^5, \quad (-1)^2-(-2)^3+(-3)^4-(-4)^5$

$-(-1)^2+(-2)^3-(-3)^4+(-4)^5. \quad (-\alpha)^3+(-\alpha)^5-(-\alpha)^6+(-\alpha)^7$

34) Νὰ εὑρεθοῦν ἐπίσης τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$(+2)^3+(-3)^2, \quad (-5)^3-(+4)^2, \quad (-6)^3+(-2)^5, \quad 3^3+(-3)^3, \quad 3^3-(-3)^3$

$-3^3+(-3)^3, \quad 2^4+(-2)^4, \quad 2^4-(-2)^4, \quad -2^4+(-2)^4, \quad (-2)^4-(-2)^4$

35) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

$2^4 . 4^2, \quad 2^5 . 5^2, \quad 5^3 . 2^4, \quad 2^5 . 10^3, \quad 13^2 . 21^2$

$(-3)^2 . (-2)^3, \quad -3^2 . (-2)^3. \quad (-7)^3 . (-1)^3, \quad (-1)^9 . (-4)^4, \quad (-9)^3 . (-5)^4$

$(-0,2)^3 . (-3)^2, \quad (0,1)^3 . (-0,4)^3,$

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 . \left(-\frac{3}{4}\right)^2, \quad \left(-\frac{1}{4}\right)^4 . \left(-1\frac{1}{2}\right)^3, \quad \left(3\frac{1}{3}\right)^4 . \left(-2\frac{1}{2}\right)^3$

37. ***Ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.***—Ἀφοῦ αἱ δυνάμεις εἶναι γινόμενα, ἕπεται ὅτι αἱ ἰδιότητες αὐτῶν εὑρίσκονται ἀπὸ τὰς ἰδιότητας τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Εἶναι δὲ αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων αἱ ἑξῆς :

1) $\alpha^3.\alpha^2.\alpha^4.=\alpha\alpha\alpha.\ \alpha\alpha.\ \alpha\alpha\alpha\alpha=\alpha^9\ (=\alpha^{3+2+4})$ καὶ γενικῶς εἶναι $\alpha^\mu . \alpha^\nu \ldots\ldots \alpha^\rho = \alpha^{\mu+\nu+\ldots+\rho}$ ὅπου μ, ν. . . , ρ εἶναι ἀκέραιοι θετικοί.

Ὥστε : *Τὸ γινόμενον δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ μὲ ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.*

πδ. $\quad (-3)^3 . (-3)^5 . (-3)^2 = (-3)^{10}.$

2) Ἔστω, ὅτι τὴν δύναμιν $(-5)^3$ θέλομεν νὰ τὴν ὑψώσωμεν εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν. Ἀλλὰ τότε εἶναι :

$[(-5)^3]^4=(-5)^3 . (-5)^3 . (-5)^3 . (-5)^3=(-5)^{3+3+3+3}=(-5)^{3.4}=(-5)^{12}$

καὶ γενικῶς εἶναι : $\quad (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu.\nu}.$

Ὥστε : *Ὅταν ἔχωμεν νὰ ὑψώσωμεν δύναμιν ἀριθμοῦ εἰς ἄλλην δύναμιν, πολλαπλασιάζομεν τοὺς ἐκθέτας.*

3) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον 2.5.7 εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$(2.5.7)^3 = 2.5.7.2\ 5.7.2.5.7. = 2^3.5^3.7^3$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν $(\alpha.\beta.\gamma.)^\mu = \alpha^\mu \,.\, \beta^\mu \,.\, \gamma^\mu$.

Ὥστε : *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν ὑψοῦμεν ἕκαστον τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἰς τὴν ἰδίαν δύναμιν.*

4) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑψώσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ εἰς τὴν τετάρτην δύναμιν· ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4}$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$.

Ὥστε : *Διὰ νὰ ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν ὑψοῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του εἰς τὴν αὐτὴν δύναμιν.*

38. ***Διαίρεσις δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.***—Ἔστω ἡ διαίρεσις $\alpha^7 : \alpha^3$. Ἀλλὰ τότε ἔχομεν :

$$\frac{\alpha^7}{\alpha^3} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha} = \alpha^4 (= \alpha^{7-3})$$

καὶ γενικῶς ἔχομεν, ὅταν $\mu > \nu$, $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$.

Ὥστε : *Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ τούτου ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.*

π. δ. $\frac{7^8}{7^2} = 7^6$, $\frac{(-3)^7}{(-3)^2} = (-3)^5$

39. ***Σημασία τῆς δυνάμεως α¹.***—Ὅταν εἰς τὴν ὡς ἄνω διαίρεσιν ὁ ἐκθέτης τοῦ διαιρετέου εἶναι κατὰ μονάδα μεγαλύτερος τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^6 : \alpha^5$, τότε κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν $\frac{\alpha^6}{\alpha^5} = \alpha^{6-5} = \alpha^1$. Ἀλλ' εἴδομεν προηγουμένως (§ 35), ὅτι ὁ ἐκθέτης πάσης δυνάμεως εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ 2. Ὥστε ἡ δύναμις μὲ ἐκθέτην τὴν 1 δὲν ἔχει σημασίαν· ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha^6}{\alpha^5} = \frac{\alpha.\alpha.\alpha\ \alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha} = \alpha$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq 0$, εἶναι $\alpha^1 = \alpha$. Καὶ μὲ τὴν συμφωνίαν δὲ αὐτὴν αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων διατηροῦνται, διότι π. χ. $\alpha^4 . \alpha = \alpha\alpha\alpha\alpha . \alpha = \alpha^5$ καὶ $\alpha.^4 \alpha^1 = \alpha^{4+1} = \alpha^5$.

40. ***Σημασία τῆς δυνάμεως*** α^0.—Ὅταν οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἴσοι, ὡς εἰς τὴν διαίρεσιν $\alpha^5 : \alpha^5$, τότε κατὰ τὴν § 38 ἔχομεν $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = \alpha^0$· ἀλλὰ καὶ διὰ τὸν ἐκθέτην 0 παρατηροῦμεν ὅ,τι παρετηρήσαμεν καὶ διὰ τὸν ἐκθέτην 1. Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἴσων ἀριθμῶν εἶναι 1, ἤτοι ἐπειδὴ $\frac{\alpha^5}{\alpha^5} = 1$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\alpha^0 = +1$. Ἡ συμφωνία δὲ αὕτη δὲν μεταβάλλει τὰς ἀρχικὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων διότι

$$\alpha^\nu . 1 = \alpha^\nu . \quad \text{καὶ } \alpha^\nu . \alpha^0 = \alpha^{\nu+0} = \alpha^\nu .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων κατὰ δύο τρόπους, ἤτοι α) νὰ εὑρεθοῦν χωριστὰ αἱ δυνάμεις καὶ ἔπειτα νὰ γίνουν αἱ ἄλλαι πράξεις καὶ β) νὰ ἐφαρμοσθοῦν πρῶτον αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$2^4 . 2^3$, $(-3)^2 . (-3)^3$, $2^3 . 2^2 . 2^4$, $(10^2)^3$, $[(-2)^3]^2$ $[(-1)^2]^5$

$(2.3.5)^2$, $[(-3) . (-5)]^2$, $(1.2.3.4)^3$, $\left(\frac{2}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$

$3^6 : 3^4$, $(-5)^4 : (-5)^2$, $(-2)^7 : (-2)^3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^5 : \left(\frac{3}{4}\right)^2$, $\frac{2^5}{3^5} : \frac{2^3}{3^3}$, $-\frac{2^5}{3^5} : \frac{2^3}{3^3}$

37) Αἱ δυνάμεις 9^3 καὶ 4^4 νὰ τραποῦν εἰς δυνάμεις τοῦ 3 καὶ τοῦ 2.

38) Ὁμοίως αἱ δυνάμεις 125^2 καὶ 8^4 νὰ τραποῦν εἰς δυνάμεις τοῦ 5 καὶ τοῦ 2.

39) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

25^1 $(-15)^1$ $\left(-\frac{3}{5}\right)^1$ $(-2)^5 : (-2)^4$

48^0 $(-59)^0$ $\left(-\frac{6}{11}\right)^0$ $(-3)^4 : (-3)$

8.3^1 $(-9)^1.(-3)$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^1 . \left(-\frac{2}{3}\right)$ $[(-5)^1]^1$

$85^0 . (-42)^0$ $(\ 5)^1.(90)^0$ $(7^0)^5$ $(7^5)^0$

$15^0 . \left(\frac{3}{11}\right)^0$ $\left(15 . \frac{3}{11}\right)^0$ $15^0 . \frac{3^0}{11}$ $15^0 . \frac{3}{11^0}$

$(-1)^0.(-1)^0.(-8)^0$ $(-9)^1.(5-7)^0.(5-7)^1$

$(-0{,}375)^0 . \left(\frac{5}{24}\right)^1 .(27-45)^0$. $(8-3{,}5)^0 . \frac{1}{5^0} . \frac{7^0}{(3-4)^1}$

41. ***Δυνάμεις ἔχουσαι ἀρνητικὸν ἐκθέτην.***—Ἐὰν θέλωμεν, ἵνα ἡ ἰσότης $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ ἀληθεύῃ καὶ ὅταν $\mu<\nu$, θὰ εὑρίσκωμεν εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀρνητικούς· π. χ. $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\alpha^{3-5}=$ $=\alpha^{-2}$. Αἱ δυνάμεις ὅμως μὲ ἐκθέτην ἀρνητικὸν εἶναι ἄνευ ἐννοίας. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\frac{\alpha.\alpha.\alpha}{\alpha.\alpha.\alpha.\alpha.\alpha}=\frac{1}{\alpha^2}$, δεχόμεθα, ὅτι, ἐὰν $\alpha\neq 0$, $\alpha^{-2}=$ $=\frac{1}{\alpha^2}$ καὶ γενικῶς ὅτι $\alpha^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha^\lambda}$, ὅπου λ ἀκέραιος καὶ θετικός. Ὥστε: *Πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ* (διαφόρου τοῦ 0), *ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀκέραιον ἀρνητικόν, ἰσοῦται μὲ κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὴν μονάδα καὶ παρονομαστὴν τὴν δύναμιν τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἀντίθετον.* Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8},\ (-3)^{-2}=\frac{1}{(-3)^2}=\frac{1}{9},\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{9}}=9.$$

Σημείωσις. Ἀντιστρόφως δὲ εἶναι:

$$\frac{1}{2^3}=2^{-3} \text{ καὶ } \frac{1}{5^2}=5^{-2}.$$

42. Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους θετικοὺς ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς δυνάμεις αὐτάς, ὡς συνάγεται ἀπὸ τὰ κάτωθι παραδείγματα:

1) $2^{-3}.\,2^{-4}=\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^4}=\frac{1}{2^3.2^4}=\frac{1}{2^7}=2^{-7}$

καὶ γενικῶς $\alpha^{-\mu}.\,\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\mu}\cdot\frac{1}{\alpha^\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu+\nu}}=\alpha^{-\mu-\nu}=\alpha^{(-\mu)+(-\nu)}$

2) $(2.3.5)^{-2}=\frac{1}{(2.3.5)^2}=\frac{1}{2^2.3^2.5^2}=\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{5^2}=2^{-2}.\,2^{-2}.\,5^{-2}$

καὶ γενικῶς

$$(\alpha.\beta.\gamma)^{-\mu}=\frac{1}{(\alpha.\beta.\gamma)^\mu}=\frac{1}{\alpha^\mu.\beta^\mu.\gamma^\mu}=\frac{1}{\alpha^\mu}\cdot\frac{1}{\beta^\mu}\cdot\frac{1}{\gamma^\mu}=\alpha^{-\mu}.\,\beta^{-\mu}.\,\gamma^{-\mu}$$

3) $(\alpha^\nu)^{-\mu}=\frac{1}{(\alpha^\nu)^\mu}=\frac{1}{\alpha^{\nu\mu}}=\alpha^{-\nu\mu}=\alpha^{\nu(-\mu)}$

$$4)\ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\mu} = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}} = \frac{1}{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\beta^{\mu}}{\alpha^{\mu}} = \frac{1}{\alpha^{\mu}} : \frac{1}{\beta^{\mu}} = \alpha^{-\mu} : \beta^{-\mu} = \frac{\alpha^{-\mu}}{\beta^{-\mu}}$$

$$5)\quad \alpha^{\mu} : \alpha^{-\nu} = \alpha^{\mu} : \frac{1}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu} . \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu} = \alpha^{\mu-(-\nu)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

40) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

$$2^{-1} \quad 2^{-2} \quad 2^{-5} \quad (-2)^{-3} \quad (-2)^{-4}$$

$$4^{-3} \quad 12^{-1} \quad 5^{-3} \quad (-3)^{-5} \quad (-8)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{-3} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$$

41) Νὰ ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα :

$$2^{2}.2^{-2} \quad 5^{-3}.5^{3} \quad 3^{5}.3^{-2} \quad 7^{2}.7^{-4} \quad 4^{-3}.4^{-2}$$

$$(3^{5})^{-2} \quad (2^{-3})^{2} \quad (5^{-2})^{-3} \quad (2.3.5)^{-3} \quad (4.3.7.9)^{-2}$$

$$2^{5} : 2^{7} \quad 2^{-5} : 2^{7} \quad 2^{-5} : 2^{-7} \quad 5^{-9} : 5^{-9} \quad 7^{-6} : 7^{-5}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ ἀνισοτήτων.

43. ***Ἀνισότης θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.***— Εἴδομεν εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ὅτι, ἐὰν $\alpha > \beta$, ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι δυνατή. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι δυνατή, τότε εἶναι $\alpha > \beta$. Ἑπομένως, ἐὰν ἡ ἀφαίρεσις $\alpha - \beta$ εἶναι ἀδύνατος, τότε εἶναι $\alpha < \beta$, ἢ μὲ ἄλλους λόγους, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, τότε εἶναι $\alpha > \beta$, ἐὰν δὲ αὕτη εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, τότε εἶναι $\alpha < \beta$.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴν δεχόμεθα ὡς ἀληθῆ καὶ εἰς τὸ σύστημα τῶν θετικῶν καὶ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἤτοι δεχόμεθα ὅτι: *Εἷς ἀριθμὸς α λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου ἀριθμοῦ β, ἐὰν ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός.*

Ἐκ τούτου ἕπονται τὰ ἑξῆς :

1) Ἡ διαφορὰ $(+5) - 0$ ἰσοῦται μὲ $+5$· ἄρα εἶναι $+5 > 0$· ἐπίσης ἡ διαφορὰ $(+8) - (-9)$ ἰσοῦται μὲ $+8 + (+9)$, ἤτοι εἶναι θετική· ἄρα $+8 > -9$. Ὅθεν : *Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενὸς καὶ παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ.*

Ἑπομένως ἡ παράστασις $\alpha>0$ φανερώνει, ὅτι ὁ α εἶναι ἀριθμὸς θετικός.

2) Ἐπειδὴ $0-(-5)=0+(+5)=+5$

καὶ $0-(-7)=+7$

ἕπεται, ὅτι $-5<0$ καὶ $-7<0$,

ἤτοι ὅτι : *Πᾶς ἀριθμὸς ἀρνητικὸς εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός.* Ἑπομένως εἶναι μικρότερος καὶ παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ παράστασις ἄρα $\alpha<0$ φανερώνει, ὅτι ὁ α εἶναι ἀριθμὸς ἀρνητικός.

3) Ἐπειδὴ

$$(-5)-(-7)=(-5)+(+7)=+2$$

ἕπεται, ὅτι $-5>-7$·

ὁμοίως, ἐπειδὴ $(-9)-(-4)=-9+(+4)=-5$,

ἕπεται, ὅτι $-9<-4$.

Συνάγεται λοιπόν, ὅτι : *Ἐκ δύο ἀριθμῶν ἀρνητικῶν μεγαλύτερος εἶναι ὁ ἔχων τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν.*

Εἰς τὴν ἄλγεβραν λοιπὸν ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν

$$\ldots -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$$

προχωρεῖ ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιὰ αὐξανομένη.

44. ***Ἰδιότητες.***—1) Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$, τότε ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἀλλ' ἡ διαφορὰ αὐτὴ δὲν μεταβάλλεται, ἐὰν προσθέσωμεν καὶ εἰς τοὺς δύο ὅρους της τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, π. χ. τὸν γ· ὥστε ἡ διαφορὰ $(\alpha+\gamma)-(\beta+\gamma)$ εἶναι θετικὴ καὶ ἑπομένως εἶναι $\alpha+\gamma>\beta+\gamma$· ὅθεν :

Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἀνισότητος προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀνισότης μένει.

2) Ἔστω αἱ ἀνισότητες $\alpha>\beta$ καὶ $\gamma>\delta$· ἀλλὰ τότε αἱ διαφοραὶ $\alpha-\beta$ καὶ $\gamma-\delta$ εἶναι θετικαί· ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)$ εἶναι θετικόν· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς : $(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$. Ὥστε εἶναι $\alpha+\gamma>\beta+\delta$· ὅθεν :

Ἐὰν προσθέσωμεν ἀνίσους ἀριθμοὺς εἰς ἀνίσους, ἀλλὰ τὸν μεγαλύτερον εἰς τὸν μεγαλύτερον καὶ τὸν μικρότερον εἰς τὸν μικρότερον, ἡ ἀνισότης μένει.

3) Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$· τότε ἡ διαφορὰ $\alpha-\beta$ εἶναι θετική. Ἐὰν δὲ πολλαπλασιάσωμεν αὐτὴν ἐπὶ $\mu\neq0$, τότε ἡ διαφορὰ $\alpha\mu-\beta\mu$ θὰ εἶναι θετική, ἂν ὁ μ εἶναι θετικός, ὁπότε ἔχομεν $\alpha\mu>\beta\mu$· ἂν ὅμως ὁ μ εἶναι ἀρνητικὸς θὰ εἶναι $\alpha\mu-\beta\mu<0$ καὶ ἑπομένως $\alpha\mu<\beta\mu$.

Ὅθεν: *Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός, ἡ ἀνισότης μένει μέν, ἐὰν ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δέ, ἐὰν εἶναι ἀρνητικός.*

Πδ. Ἐπειδὴ εἶναι $-3 > -5$

θὰ εἶναι $(-3).(+4) > (-5).(+4)$

ἤτοι $-12 > -20$

καὶ $(-3).(-4) < (-5).(-4)$

ἤτοι $12 < 20.$

45. *Πόρισμα 1ον.* — *Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ δύο μέλη ἀνισότητος διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἀνισότης μένει μέν, ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι θετικός, ἀντιστρέφεται δέ, ἐὰν εἶναι ἀρνητικὸς* (§ 32).

Πδ. Ἐπειδὴ εἶναι $-4 > -8$

θὰ εἶναι $(-4) : (+2) > (-8) : (+2)$

ἤτοι $-2 > -4$ καὶ $(-4) : (-2) < (-8) : (-2)$, ἤτοι $2 < 4$.

46. *Πόρισμα 2ον.* — *Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος, ἡ ἰσότης ἀντιστρέφεται.*

Π.χ. ἐκ τῆς ἀνισότητος $-6 > -12$ προκύπτει διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ -1 (ἤτοι διὰ τῆς ἀλλαγῆς τῶν σημείων)

$$+6 < +12.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

42. Αἱ κάτωθι σειραὶ τῶν ἀριθμῶν νὰ καταταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους αὐξανομένου :

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{7}$$

$$-1, \quad 5, \quad -\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{8}, \quad 7, \quad \frac{1}{4}$$

$$0, \quad -1, \quad 0{,}64, \quad \frac{2}{3}, \quad -\frac{7}{11}, \quad -0{,}9$$

43) Ἐὰν αἱ ἀνισότητες $\alpha > \beta$
$\gamma > \delta$ πολλαπλασιασθοῦν κατὰ μέλη
θὰ εἶναι $\alpha\gamma > \beta\delta$ ὅταν τὰ μέλη α καὶ δ εἶναι ἀμφότερα θετικὰ καὶ $\alpha\gamma < \beta\delta$ » » » α » δ » » ἀρνητικά.

44) Ἐὰν εἶναι $\alpha > \beta$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^2 > \beta^2$, ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη α καὶ β εἶναι θετικά. Ἐὰν ὅμως ταῦτα εἶναι ἀρνητικὰ θὰ εἶναι $\alpha^2 < \beta^2$.

45) Ἐὰν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος $\alpha > \beta$ εἶναι ὁμόσημα θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

ἀλλ' ἐὰν ταῦτα εἶναι ἑτερόσημα θὰ εἶναι $\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}$.

46) Ἐὰν $\alpha > \beta$

$\gamma < \delta$ καὶ τὰ μέλη γ καὶ δ εἶναι ὁμόσημα καὶ διάφορα τοῦ 0 θὰ εἶναι

$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$ ὅταν τὰ α καὶ δ εἶναι θετικὰ

καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\delta}$ » » α » δ » ἀρνητικά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις καὶ διάφορα εἴδη αὐτῶν.

47. Τύποι.—Ἡ ἀριθμητικὴ λύσις ἑνὸς προβλήματος δὲν φανερώνει τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν διὰ νὰ λάβωμεν τὸ ἐξαγόμενον αὐτοῦ. Ἂς ὑποθέσωμεν π.χ., ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν τόκον κεφαλαίου 17500 δρχ. πρὸς 6% ἐπὶ 3 ἔτη. Ὁ ζητούμενος τόκος κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι 3150 δραχμαί. Ἀλλὰ τὸ ἐξαγόμενον τοῦτο δὲν φανερώνει τὴν σειρὰν τῶν πράξεων, αἱ ὁποῖαι ἔγιναν, ἐνῷ, ἐὰν παραστήσωμεν τὸν τόκον διὰ τοῦ τ, τὸ κεφάλαιον διὰ τοῦ κ, τὸν χρόνον εἰς ἔτη διὰ τοῦ χ καὶ τὸ ἐπιτόκιον διὰ τοῦ ε, θὰ εὕρωμεν τὸν ἄγνωστον τόκον, ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις ὡς δεικνύει ἡ παράστασις $\frac{\varepsilon.\kappa.\chi.}{100}$, ἤτοι εἶναι $\tau = \frac{\varepsilon.\kappa.\chi}{100}$.

Ἡ ἰσότης αὐτὴ λέγεται, ὡς εἴδομεν (Ἀριθμ. § 232), *τύπος* τοῦ τόκου. Γενικῶς δέ: *Τύπος λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία δεικνύει τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπὶ τῶν δεδομένων* (τὰ ὁποῖα παρίστανται διὰ γραμμάτων), *ἵνα εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος.*

48. Πλεονεκτήματα τῶν τύπων.—1) Εἷς τύπος δεικνύει κατὰ τρόπον σαφῆ τὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τοῦ ἀγνώστου ἑνὸς προβλήματος.

2) Εἷς τύπος ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν ὅλα τὰ προβλήματα, τὰ ὁποῖα διαφέρουν μόνον κατὰ τὰ ἀριθμητικὰ δεδομένα. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν των.

3) Διὰ τοῦ μετασχηματισμοῦ ἑνὸς τύπου εὑρίσκομεν νέους τύπους, διὰ τῶν ὁποίων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν νέα προβλήματα. Οὕτως ἐκ τοῦ τύπου τοῦ τόκου εὑρίσκομεν τοὺς τύπους:

$$κ = \frac{100.τ}{ε.χ.}, \qquad χ = \frac{100.τ}{κ\,ε}, \qquad ε = \frac{100.τ}{κ.χ},$$

διὰ τῶν ὁποίων λύομεν τὰ προβλήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ζητεῖται τὸ κεφάλαιον, ὁ χρόνος καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

*49. **Σημασία τῶν τύπων.*** — Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν ἡ χρῆσις τῶν τύπων εἶναι πολὺ περιωρισμένη, ἐνῷ εἰς τὴν ἄλγεβραν εἶναι γενική, διότι αὕτη ζητεῖ νὰ δώσῃ εἰς πᾶν ζήτημα μαθηματικὸν μίαν λύσιν γενικήν, ἐκφραζομένην μὲ ἕνα ἢ πολλοὺς τύπους.

Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον αἱ διάφοροι ποσότητες, αἱ ὁποῖαι εἰσέρχονται εἰς τὰ διάφορα ζητήματα, παρίστανται γενικῶς διὰ γραμμάτων, καὶ ὁ ἄλλος κατὰ τὸν ὁποῖον ἡ ζητουμένη λύσις ἑνὸς ζητήματος δίδεται διὰ τύπου καὶ ὄχι δι' ἀριθμοῦ, εἶναι σπουδαιοτάτης σημασίας. Ἡ ταχεῖα δὲ ἀνάπτυξις τῶν μαθηματικῶν χρονολογεῖται ἀπὸ τῆς ἐποχῆς (ἀπὸ τοῦ 16ου αἰῶνος), κατὰ τὴν ὁποίαν ἔγινε χρῆσις τῶν ἄνω τρόπων. Ἀλλὰ πρὶν ἴδωμεν λεπτομερείας τούτων, θὰ ἴδωμεν πῶς ἡ ἄλγεβρα κατατάσσει τοὺς τύπους καὶ πῶς ἁπλοποιεῖ αὐτούς.

*50. **Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος.*** — Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν α καὶ β παρίσταται διὰ τοῦ $α+β$. Ἡ παράστασις αὕτη λέγεται *ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος*· ὁμοίως αἱ παραστάσεις,

$$α^2 - β^2, \qquad 5αβ, \qquad \frac{α-β}{α+β}, \qquad 2ρ(αβ + βγ + γα)$$

εἶναι ἀλγεβρικαί

Γενικῶς δέ: *Ἀλγεβρικὴ παράστασις ἢ ἀλγεβρικὸς τύπος λέγεται πᾶν σύνολον γραμμάτων ἢ γραμμάτων καὶ ἀριθμῶν συνδεομένων διὰ τῶν σημείων τῶν πράξεων.*

Εἰς τὰς ἀλγεβρικὰς παραστάσεις ὑποθέτομεν πρὸς τὸ παρὸν σημειουμένας μόνον τὰς τέσσαρας θεμελιώδεις πράξεις, διότι μόνον αὐτὰς εἴδομεν μέχρι τοῦδε.

*51. **Μονώνυμα.*** — Εἰς τὰς παραστάσεις:

$$+χ, \qquad -χ, \qquad 7αβ, \qquad -3α^2β, \qquad -\frac{2}{3}αβ^2, \qquad \frac{5α}{β}, \qquad -\frac{8αβ}{γ}$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν εἶναι σημειωμένη οὔτε πρόσθεσις, οὔτε ἀφαίρεσις. Αἱ τοιαῦται παραστάσεις λέγονται *μονώνυμα*. Ὥστε: *Μονώνυμον λέγεται ἡ παράστασις ἐν τῇ ὁποίᾳ δὲν εἶναι σημειωμένη οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις.*

*52. **Ἀκέραια καὶ κλασματικὰ μονώνυμα.*** — Εἰς τὰ ἄνω μονώνυμα:

$$+\chi(=+1.\chi), \quad -\chi(=-1.\chi), \quad 7\alpha\beta, \quad -3\alpha^2\beta, \quad -\frac{2}{3}\alpha\beta^2$$

παρατηροῦμεν, ὅτι δὲν περιέχεται διαίρεσις διὰ γράμματος· λέγονται δὲ διὰ τοῦτο *ἀκέραια*, ἐνῷ τὰ $\frac{5\alpha}{\beta}$, $-\frac{8\alpha\beta}{\gamma}$, εἰς τὰ ὁποῖα περιέχεται διαίρεσις διὰ γράμματος, λέγονται *κλασματικά*.

53. *Συντελεστὴς μονωνύμου.*—Εἰς τὰ μονώνυμα τῆς § 51 παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν καὶ ἀριθμητικοὶ παράγοντες, οἱ ὁποῖοι εἶναι γραμμένοι πρῶτοι.

Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων μονωνύμου (ὅστις γράφεται πρῶτον) *λέγεται συντελεστὴς αὐτοῦ.* Ὥστε τῶν ἄνω μονωνύμων συντελεσταὶ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ

$$1, \quad -1, \quad 7, \quad -3, \quad -\frac{2}{3}, \quad 5, \quad -8.$$

Σημείωσις. Ὁ ἀριθμητικὸς παράγων μονωνύμου εἶναι συντελεστὴς αὐτοῦ ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχει. Δυνάμεθα ὅμως νὰ ἔχωμεν καὶ συντελεστὴν μονωνύμου ὡς πρὸς ἓν μόνον γράμμα αὐτοῦ ἢ καὶ πρὸς περισσότερα. Τότε συντελεστὴς τοῦ μονωνύμου λέγεται τὸ γινόμενον τῶν λοιπῶν γραμμάτων αὐτοῦ ἐπὶ τὸν ἀριθμητικόν του παράγοντα. Οὕτω τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta\chi$ συντελεστὴς ὡς πρὸς χ εἶναι τὸ γινόμενον $3\alpha\beta$, ὡς πρὸς $\beta\chi$ τὸ 3α καὶ ὡς πρὸς β τὸ $3\alpha\chi$.

54. *Βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου.*—Εἰς τὰ ἀκέραια μονώνυμα ἐξετάζομεν καὶ τὸν *βαθμὸν* ἢ πρὸς ἓν γράμμα, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ θεωρούμενον μονώνυμον, ἢ πρὸς πολλὰ χράμματα αὐτοῦ. Καὶ *βαθμὸς ἀκεραίου μονωνύμου πρὸς ἓν γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ ἐκθέτης τοῦ γράμματος τούτου· πρὸς πολλὰ δὲ γράμματα αὐτοῦ λέγεται τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων τούτων.*

Οὕτω τὸ μονώνυμον $9\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι πρὸς τὸ α τρίτου βαθμοῦ, πρὸς τὸ β δευτέρου βαθμοῦ, πρὸς τὸ γ πρώτου βαθμοῦ, πρὸς τὰ γράμματα α καὶ γ τετάρτου βαθμοῦ, πρὸς ὅλα τὰ γράμμαια αὐτοῦ ἕκτου βαθμοῦ κ.ο.κ.

Σημείωσις. Ἐπειδὴ

$$9\alpha^3\beta^2\gamma = 9\alpha^3\beta^2\gamma\,\delta^0 = 9\alpha^3\beta^2\gamma.\varepsilon^0$$

ἔπεται, ὅτι πᾶν μονώνυμον ὡς τὸ $9\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι βαθμοῦ 0 πρὸς πᾶν γράμμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχεται εἰς αὐτό.

55. *Πολυώνυμα.*—Ἐὰν ἔχωμεν πολλὰ μονώνυμα ὡς τὰ

$$+8\alpha^3, \quad -7\alpha^2\beta, \quad -3\alpha\beta^2, \quad +5\beta^3$$

καὶ γράψωμεν τὸ ἓν μετὰ τὸ ἄλλο καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του ὡς ἑξῆς :

$$+8\alpha^3 -7\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+5\beta^3$$

ἢ

$$8\alpha^3-7\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2+5\beta^3$$

(ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦ πρώτου ὅρου εἶναι +), τότε ἔχομεν ἄθροισμα μονωνύμων. Λέγεται δὲ τὸ ἄθροισμα τοῦτο *πολυώνυμον*. Πολυώνυμον εἶναι καὶ ἡ παράστασις π.χ.

$$-5\chi^4+4\chi^2\psi-5\chi\psi^3+9\psi^4,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἄθροισμα τῶν μονωνύμων

$$-5\chi^4, \quad 4\chi^2\psi, \quad -5\chi\psi^3, \quad 9\psi^4.$$

Ἐπίσης καὶ ἡ παράστασις

$$\chi^2-2\chi+3.$$

Ὥστε: *Πολυώνυμον λέγεται τὸ ἄθροισμα μονωνύμων καὶ ἑνὸς γνωστοῦ ἀριθμοῦ, ὅστις δύναται νὰ εἶναι καὶ μηδέν.*

56. ***Ὅροι τοῦ πολυωνύμου.***—Τὰ μονώνυμα καὶ ὁ γνωστὸς ἀριθμός, ἐξ ὧν ἀποτελεῖται τὸ πολυώνυμον, μετὰ τῶν πρὸ αὐτῶν σημείων των λέγονται *ὅροι* τοῦ πολυωνύμου. Οὕτω τοῦ δευτέρου πολυωνύμου τῆς προηγουμένης παραγράφου ὅροι εἶναι οἱ

$$-5\chi^4, \quad 4\chi^2\psi, \quad -5\chi\psi^3, \quad 9\psi^4.$$

Τοῦ δὲ τελευταίου ὅροι εἶναι οἱ

$$\chi^2, \quad -2\chi, \quad 3.$$

57. ***Διώνυμον, τριώνυμον.***—Ἐὰν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι δύο, τότε τοῦτο λέγεται *διώνυμον*, ἐὰν δὲ τρεῖς, τότε λέγεται *τριώνυμον*. Κατὰ ταῦτα, ἡ παράστασις $\alpha^2 - \beta^2$ εἶναι διώνυμον, ἡ δὲ $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ εἶναι τριώνυμον.

58. ***Ἀκέραια πολυώνυμα.***—Εἰς τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλα τὰ μονώνυμα, ἐκ τῶν ὁποίων ἀποτελοῦνται, εἶναι ἀκέραια. Λέγονται δὲ διὰ τοῦτο *ἀκέραια πολυώνυμα*.

Ὥστε τὸ πολυώνυμον εἶναι ἀκέραιον, ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι αὐτοῦ ἐξ ὧν ἀποτελεῖται εἶναι μονώνυμα ἀκέραια.

59. ***Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου.***—Βαθμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς ἓν γράμμα αὐτοῦ λέγεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ πρὸς τὸ γράμμα τοῦτο. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\alpha^3 - 3\alpha^2\chi + 5\alpha\chi^5$ εἶναι πρὸς τὸ α τρίτου βαθμοῦ, πρὸς δὲ τὸ χ πέμπτου βαθμοῦ

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον πρὸς τὰ γράμματα α καὶ χ εἶναι ἕκτου βαθμοῦ.

60. ***Πολυώνυμα ὁμογενῆ.***—Τὸ πολυώνυμον $5\alpha^3 - 8\alpha^2\beta + 7\beta^3$ παρατηροῦμεν, ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β. Λέγεται δὲ διὰ τοῦτο *ὁμογενές*. Ὁμογενῆ εἶναι καὶ τὰ πολυώνυμα

$$\chi^4 + \chi^2\psi^2 + \psi^4, \quad \chi^2 + \alpha\psi^2$$

πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ ψ.

Ὥστε ἓν πολυώνυμον λέγεται ὁμογενὲς πρός τινα γράμματα, ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα αὐτά.

61. ***Πολυώνυμα συμμετρικά.***—Εἰς τὸ πολυώνυμον $\chi^2\psi + \psi^2\varphi + \varphi^2\chi$, ἐὰν θέσωμεν ὅπου χ, ψ ὅπου ψ, φ καὶ ὅπου φ, χ, ἤτοι, ἐὰν μεταθέσωμεν τὰ γράμματα αὐτὰ κυκλικῶς, προκύπτει τὸ πολυώνυμον $\psi^2\varphi + \varphi^2\chi + \chi^2\psi$, τὸ ὁποῖον κατ' οὐδὲν διαφέρει τοῦ πρώτου. Δι' ὃ λέγεται τὸ πολυώνυμον τοῦτο *συμμετρικὸν* πρὸς τὰ γράμματα χ,ψ,φ. Γενικῶς *ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον λέγεται συμμετρικὸν πρὸς τὰ γράμματα τὰ ὁποῖα περιέχει* (ἢ πρὸς μερικὰ τούτων) *ὅταν δὲν μεταβάλλεται ἂν τὰ γράμματα ταῦτα μετατεθοῦν κυκλικῶς*. Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\chi^3 + \psi^3 + \varphi^2$ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰ γράμματα χ καὶ ψ καὶ ὄχι πρὸς ὅλα τὰ γράμματα αὐτοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

47) Δώσατε μερικὰ παραδείγματα ἀκεραίων καὶ κλασματικῶν μονωνύμων ὡς καὶ πολυωνύμων.

48) Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς πρὸς καθὲν γράμμα χωριστὰ ἢ πρὸς ὅλα τὰ γράμματα τῶν κάτωθι μονωνύμων ;

$$3\alpha\beta^3, \qquad -5\alpha^2\beta\gamma, \qquad -\alpha^3\beta\gamma^4\delta, \qquad -\frac{3}{7}\chi^2\psi^3\varphi.$$

Ποῖοι εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀνωτέρω πολυωνύμων ;

49) Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς τῶν πολυωνύμων ;

1) $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ πρὸς τὸ χ ;

2) $\alpha\chi+\beta\psi$ πρὸς τὸ χ ; πρὸς τὸ ψ ;

3) $5\alpha^3-4\alpha^2\beta^2+7\alpha^4\beta^3-\beta^5$ πρὸς τὸ α ; πρὸς τὸ β ;

4) $\alpha\chi^3+\beta\chi^2\psi+\gamma\chi\psi^2+\delta\psi^3$ πρὸς τὰ χ καὶ ψ ;

Ἐκ τῶν πολυωνύμων τούτων εἶναι κανὲν ὁμογενές ; Καὶ ποῖον ;

62. ***Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.***—Γνωρίζομεν ὅτι τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰς παραστάσεις, παριστοῦν ἀριθμούς. Ἐὰν λοιπὸν εἰς μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν ἕκαστον τῶν γραμμάτων ἀντικατασταθῇ ὑπὸ ἀριθμοῦ καὶ ἐκτελεσθοῦν αἱ σημειωμέναι πράξεις, τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον θὰ λάβωμεν, λέγεται *ἀριθμητικὴ τιμὴ* τῆς παραστάσεως. Ὁ ἀριθμὸς διὰ τοῦ ὁποίου ἀντικαθιστῶμεν γράμμα τι λέγεται *τιμὴ* τοῦ αὐτοῦ γράμματος.

Οὕτως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$3\alpha^2 + 5$ δι' $\alpha = 2$ εἶναι $3.2^2 + 5 = 12 + 5 = 17$,

ἡ δὲ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ δι' $\alpha = 4$ καὶ $\beta = 2$

εἶναι $4^3 + 3.4^2.2 + 3.4.2^2 + 2^3 = 64 + 96 + 48 + 8 = 216$

καὶ δι' $\alpha = 4$ καὶ $\beta = -2$

εἶναι $4^3 + 3.4^2(-2) + 3.4.(-2)^2 + (-2)^3 = 64 - 96 + 48 - 8 = 8$.

Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ βλέπομεν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ παραστάσεως ἐξαρτᾶται ἐκ τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων τὰ ὁποῖα περιέχει, ἀλλ' ὅταν αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων δοθοῦν, ἡ τιμὴ αὐτῆς εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη.

Σημείωσις. Κατὰ τὴν εὕρεσιν τῆς τιμῆς τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἐκτελοῦμεν γενικῶς πρῶτον τοὺς πολλαπλασιασμοὺς καὶ τὰς διαιρέσεις καὶ ἔπειτα τὰς προσθέσεις καὶ ἀφαιρέσεις. Ἐὰν περιέχῃ ὅρους κλασματικούς, ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις χωριστὰ εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ χωριστὰ εἰς τὸν παρονομαστήν. Ἐπίσης, ἐὰν ἔχῃ παρενθέσεις ἢ ἀγκύλας, ἐκτελοῦμεν χωριστὰ τὰς πράξεις τῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἢ τῶν ἀγκυλῶν.

63. ***Πρώτη ἔννοια τῆς συναρτήσεως***.—Ἔστω ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $3\chi-5$· ἡ τιμὴ αὐτῆς διὰ $\chi = 1$ εἶναι -2, διὰ $\chi = 2$ εἶναι 1 διὰ $\chi = 3$ εἶναι 4 κ.ο.κ. Βλέπομεν ἑπομένως, ὅτι ἡ τιμὴ αὐτῆς δὲν εἶναι σταθερά, ἀλλὰ μεταβλητὴ καὶ ὅτι ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς τιμῆς τοῦ χ' ἡ ὁποία εἶναι καὶ αὐτὴ μεταβλητή· λέγομεν δὲ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ὅτι ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $3\chi-5$ εἶναι *συνάρτησις* τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. Λέγεται δὲ ὁ χ ἀνεξάρτητος μεταβλητή, διότι αἱ τιμαὶ αὐτοῦ ὁρίζονται αὐθαιρέτως.

Γενικῶς δέ, *ὅταν μεταβλητὸς ἀριθμὸς συνδέεται πρὸς ἄλλον μεταβλητὸν χ οὕτως, ὥστε δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ (ἢ ὡρισμέναι τιμαὶ) τοῦ πρώτου, τότε οὗτος λέγεται συνάρτησις τοῦ χ*.

Αἱ συναρτήσεις τοῦ χ παρίστανται συμβολικῶς διὰ τοῦ συμβόλου $\sigma(\chi)$, $\varphi(\chi)$ κλπ., π.χ $\sigma(\chi) = 3\chi - 5$, διὰ δὲ $\chi = 1, 2$ κλπ. γράφομεν $\sigma(1) = 3.1 - 5 = -2$ ἢ $\sigma(2) = 3.2 - 5 = 1$ κλπ.

Ἐὰν ἀλγεβρικὴ παράστασις περιέχῃ μίαν ἢ δύο ἢ τρεῖς κλπ. μεταβλητάς, τότε εἶναι συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχει· οὕτως ἡ ἀλγεβρικὴ παράστασις $\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2$, ἡ περιέχουσα τὰς μεταβλητὰς χ, ψ, εἶναι συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν τούτων καὶ γράφεται $\sigma(\chi,\psi) = \chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2$. Συνάρτησις τῶν μεταβλητῶν χ,ψ εἶναι καὶ ἡ παράστασις $\chi^2 - \alpha\chi\psi + \psi^2$, εἰς τὴν ὁποίαν τὸ γράμμα α παριστᾷ ἀριθμὸν ὡρισμένον (σταθερόν).

Οἱ μεταβλητοὶ ἢ οἱ σταθεροὶ ἀριθμοί, ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι, εἶναι τιμαὶ ποσῶν μεταβλητῶν ἢ σταθερῶν, π.χ. ἡ ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ποσὸν μεταβλητὸν καθὼς καὶ ἡ πλευρὰ αὐτοῦ, ὁ δὲ ἀριθμός, ὅστις μετρεῖ αὐτήν, δηλαδὴ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ, εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους τῆς πλευρᾶς του· ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι σταθερόν. Ἐκ τῶν ἀριθμῶν δὲ αὐτῶν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ἀφῃρημένους ἀριθμοὺς μεταβλητοὺς ἢ σταθερούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

50) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

1) $\chi+3\psi$	ἐὰν	$\chi=10$	$\psi=-4$	
2) $\chi^2-9\psi$	»	$\chi=-3$	$\psi=-2$	
3) $2\chi^2+3\psi^2$	»	$\chi=-1$	$\psi=-4$	
4) $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2$	»	$\chi=7$	$\psi=-3$	
5) $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^2$	»	$\alpha=6$	$\beta=-2$	
6) $\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$	»	$\alpha=1$	$\beta=-2$	
7) $\alpha^4+5\beta\gamma$	»	$\alpha=3$	$\beta=-4$,	$\gamma=4$
8) $8\alpha^2-9\beta^2-11\gamma^2+6\alpha\beta\gamma$	»	$\alpha=1$	$\beta=3$	$\gamma=-5$
9) $2\chi^3+20\psi^2-30\varphi-\chi\varphi\psi$	»	$\chi=2$	$\psi=-4$,	$\varphi=10$
10) $9\chi-5\psi$	»	$\chi=\frac{1}{5}$	$\psi=-\frac{1}{9}$	
11) $2\chi^2-3\chi\psi+6\psi^2$	»	$\chi=\frac{1}{2}$	$\psi=\frac{1}{3}$	
12) $(2\psi+3\omega)^2$	»	$\psi=-\frac{1}{2}$	$\omega=-\frac{1}{3}$	
13) $(\alpha-\beta).(\alpha+\beta)-(\alpha^2-\beta^2)$	»	$\alpha=5$	$\beta=-7$	
14) $(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)^2$	»	$\alpha=-9$	$\beta=5$	
15) $(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2$	»	$\alpha=2$	$\beta=-2$,	$\gamma=2$
16) $(4\alpha-3\beta-6\gamma).(\alpha+8\beta+7\gamma)$	»	$\alpha=-\beta$	$\beta=2$	$\gamma=-5$
17) $\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{3}+\frac{\alpha\beta}{6}$	»	$\alpha=\frac{1}{3}$	$\beta=\frac{1}{2}$	
18) $\frac{\alpha^2}{3}-\frac{2\beta^2}{5}+\frac{\alpha\beta}{15}$	»	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\beta=\frac{1}{3}$	
19) $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$	»	$\nu=-2,-1,0,1,2,3$		
20) $2\chi^2-5\chi+2$	»	$\chi=-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},0,\frac{2}{3},\frac{4}{5}.$		

51) Ἐπίσης νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$(\alpha-\beta)^2+(3\alpha-2\beta)^2-(5-\beta+\alpha)^2, \text{ ὅταν } \alpha=3 \text{ καὶ } \beta=-2$$

52) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$(\chi+2\psi)^2-(2\psi+3\omega)^2+(3\omega+\chi)^2$$

ὅταν $\quad \chi=1, \quad \psi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=\frac{1}{3}$

καὶ ὅταν $\quad \chi=-1, \quad \psi=-\frac{1}{2}$ καὶ $\omega=\frac{1}{3}$

53) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$(4\alpha-3\beta-6\gamma).(\alpha+8\beta+7\gamma)$, ὅταν $\alpha=-\beta$, $\beta=2$, $\gamma=-5$

54) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\alpha+\gamma-\beta)^2$, ὅταν $\alpha=-\beta=\gamma=2$

55) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων διὰ τὰς ἑπομένας τιμὰς τῶν γραμμάτων $\chi=1$, $\psi=2$, $\omega=4$

$$\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\omega}+\frac{\omega}{\chi}+5, \qquad \frac{\chi^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{\psi}-\frac{\psi^2}{\chi}+\frac{4\omega+1}{4}$$

$$\frac{\psi\omega}{\chi}-\frac{\chi\omega}{\psi}+\frac{\chi\psi}{\omega}-\frac{2\psi+4\omega+1}{4}.$$

56) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων

$\frac{5\alpha^3-2\alpha^2\beta-7\alpha\beta\gamma}{2\alpha^2-3\beta\gamma+\gamma^2}$ διὰ $\alpha=2$ $\beta=-1$, $\gamma=4$

$\frac{\alpha(\beta+\gamma)-\beta(\alpha-\gamma)}{\alpha[\gamma(\alpha-\beta)+\alpha]}$ διὰ $\alpha=3$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=-2$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right).\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}\right)$ διὰ $\alpha=0{,}2$, $\beta=0{,}5$, $\gamma=\frac{7}{2}$

57) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$\frac{[(\alpha-\beta)\gamma+\alpha]\delta^2}{\gamma^2\left[\beta-[\alpha+(\beta+\gamma)]\frac{\delta}{\varepsilon}\right]}$ διὰ $\alpha=4$, $\beta=1$, $\gamma=3$, $\delta=-6$, $\varepsilon=-2$

64. *Ἴσαι ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις.*— Ἐκ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, συνεπείᾳ τῆς ἰδιότητος τῆς ἀδιαφορίας, προκύπτει ἡ παράστασις $\alpha+\delta+\gamma+\beta$. Αἱ παραστάσεις αὐταὶ λέγονται *ἴσαι*. Ἐπίσης ἴσαι εἶναι καὶ αἱ παραστάσεις $\varphi(\chi+\psi)=\varphi\chi+$ $+\varphi\psi$, διότι ἡ δευτέρα προκύπτει ἐκ τῆς πρώτης συνεπείᾳ τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος. Ὥστε: *Δύο ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις λέγονται ἴσαι, ὅταν ἡ μία προκύπτῃ ἐκ τῆς ἄλλης διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων.*

65. *Ταυτότητες.*—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\alpha+\delta+\gamma+\beta.$$

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα $\alpha,\beta,\gamma,\delta$. Ὁμοίως εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἡ ἰσότης $\varphi(\chi+\psi)=\varphi\chi+\varphi\psi$ ἀληθεύει, οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν τὰ γράμματα φ,χ,ψ. Αἱ τοιαῦται ἰσότητες λέγονται *ταυτότητες*.

Γενικῶς δέ: *Ταυτότης λέγεται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, τὰ ὁποῖα περιέχει.*

66. ***Ἀλγεβρικὸς λογισμός. Σκοπὸς αὐτοῦ.***— Ὅταν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν μετασχηματίζωμεν εἰς ἄλλην ἴσην, δυνάμει τῶν ἰδιοτήτων τῶν πράξεων, ἐκτελοῦμεν *ἀλγεβρικὴν πρᾶξιν.* Τὸ σύνολον δὲ τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων λέγεται *ἀλγεβρικὸς λογισμός.*

Ὁ ἀλγεβρικὸς λογισμός, ἤτοι αἱ ἀλγεβρικαὶ πράξεις, γίνονται ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ὄχι διὰ νὰ εὕρωμεν ἓν ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, ὡς γίνεται εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἀλλὰ διὰ νὰ μετασχηματίσωμεν τὰς παραστάσεις εἰς ἄλλας ἴσας, ἀλλ' *ἁπλουστέρας. Ὁ μετασχηματισμὸς δὲ οὗτος τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἶναι εἷς ἐκ τῶν κυριωτέρων σκοπῶν τῆς ἀλγέβρας.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων

Α'. ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ

67. Εἰς τὴν § 55 εἴδομεν πῶς προσθέτομεν μονώνυμα καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα μονωνύμων εἶναι ἐν γένει ἓν πολυώνυμον. Ἡ πρόσθεσις λοιπὸν δύο πολυωνύμων εἶναι πρόσθεσις δύο ἀθροισμάτων. Καὶ κατὰ συνέπειαν: *Διὰ νὰ προσθέσωμεν ἓν πολυώνυμον εἰς ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν ἓν πολυώνυμον περιέχον ὅλους τοὺς ὅρους τῶν δύο πολυωνύμων καὶ ἕκαστον μετὰ τοῦ σημείου του.*

Οὕτως εἶναι

$$(8\alpha^3 - 7\alpha^2\beta + 5\beta^3) + (-5\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 - 2\beta^3) =$$
$$= 8\alpha^3 - 7\alpha^2\beta + 5\beta^3 - 5\alpha^3 + 3\alpha^2\beta - 4\alpha\beta^2 - 2\beta^3.$$

Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἰσχύουν καὶ ὅταν ἔχωμεν νὰ προσθέσωμεν ὁσαδήποτε πολυώνυμα.

Ὁμοίως εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν προσθετέων (πολυωνύμων ἢ καὶ μονωνύμων).

68. ***Ὅμοιοι ὅροι.***— Εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι $8\alpha^3$ καὶ $-5\alpha^3$ τοῦ ἀθροίσματος διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν συντελεστήν· τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τοὺς ὅρους $-7\alpha^2\beta$ καὶ $3\alpha^2\beta$ ὡς καὶ εἰς τοὺς $5\beta^3$ καὶ $-2\beta^3$. *Οἱ ὅροι οἱ ὁποῖοι διαφέρουν μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν* (ἢ οὐδόλως διαφέρουν) *λέγονται ὅμοιοι.*

69. ***Ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.***— Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων ὅρων $8\alpha^3$ καὶ $-5\alpha^3$, ἤτοι τὸ $8\alpha^3-5\alpha^3$, εἶναι φανερόν, ὅτι ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον

$$(8-5)\alpha^3=3\alpha^3.$$

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι

$$-7\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta=(-7+3)\alpha^2\beta=-4\alpha^2\beta$$

καὶ

$$5\beta^3-2\beta^3=(5-2)\beta^3=3\beta^3.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι: *Τὸ ἄθροισμα ὁμοίων ὅρων εἶναι εἷς ὅρος ὅμοιος πρὸς αὐτούς. Συντελεστὴν δὲ ἔχει τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν αὐτῶν ὅρων.*

Ἡ πρόσθεσις ὁμοίων ὅρων λέγεται *ἀναγωγὴ* αὐτῶν. Τὸ ἄθροισμα λοιπόν, τὸ ὁποῖον εὕρομεν ἀνωτέρω εἰς τὴν § 67, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων αὐτοῦ εἶναι:

$$3\alpha^3-4\alpha^2\beta-4\alpha\beta^2+3\beta^3.$$

Σημείωσις. Οἱ ὅμοιοι ὅροι, τοὺς ὁποίους εἴδομεν εἰς τὰ ἀνωτέρω πολυώνυμα, εἶναι ὅμοιοι ὡς πρὸς ὅλα τὰ γράμματα αὐτῶν· φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι ὅμοιοι ὅροι πολυωνύμου ὡς πρός τι ἢ πρός τινα γράμματα αὐτῶν εἶναι οἱ διαφέροντες μόνον κατὰ τὸν συντελεστὴν ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ ἢ τὰ αὐτὰ γράμματα. Οὕτως ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\alpha\chi+\chi^2-\beta\chi+\chi\gamma$ ὅμοιοι ὅροι ὡς πρὸς χ εἶναι οἱ $\alpha\chi$, $-\beta\chi$, $\gamma\chi$, ἡ δὲ ἀναγωγὴ αὐτῶν δίδει τὸν ὅρον $(\alpha-\beta+\gamma)\chi$.

70. ***Διατεταγμένα πολυώνυμα.***—Ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων πολυωνύμου γίνεται εὐκολωτέρα, ἂν οἱ ὅροι αὐτοῦ γραφοῦν καθ' ὡρισμένην τάξιν· εἶναι δὲ αὕτη, ὅταν οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου γράφωνται κατὰ τοιαύτην σειράν, ὥστε οἱ ἐκθέται ἑνὸς γράμματος αὐτοῦ ἐλαττοῦνται ἢ αὐξάνονται ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον· καὶ εἰς μὲν τὴν πρώτην περίπτωσιν τὸ πολυώνυμον λέγεται διατεταγμένον κατὰ τὰς *κατιούσας* δυνάμεις τοῦ θεωρουμένου γράμματος, εἰς δὲ τὴν δευτέραν λέγεται διατεταγμένον κατὰ τὰς *ἀνιούσας* δυνάμεις τοῦ γράμματος αὐτοῦ.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\chi^3-3\chi^2-5\chi+6$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ· τὸ αὐτὸ πολυώνυμον, ἂν γραφῇ $6-5\chi-3\chi^2+\chi^3$, θὰ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος. Ὡσαύτως τὸ ὁμογενὲς πολυώνυμον $\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ καὶ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος ψ.

Ἓν πολυώνυμον διατεταγμένον εἶναι *πλῆρες*, ὅταν περιέχῃ τὸ γράμμα τῆς διατάξεως εἰς ὅλους τοὺς βαθμοὺς ἀπὸ τοῦ ἀνωτέρου μέχρι τοῦ κατωτέρου, ὅστις εἶναι ὁ 0.

Π. χ. τὰ πολυώνυμα $\chi^4-3\chi^3+2\chi^2-7\chi+1$ καὶ $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι πρὸς χ πλήρη, ἐνῷ τὰ $3\chi^3-2\chi^2+3\chi$ καὶ χ^2+1 δὲν εἶναι πλήρη.

Ἓν πλῆρες πολυώνυμον μ βαθμοῦ πρὸς χ ἔχει μ+1 ὅρους.

Ἡ πρόσθεσις τῶν διατεταγμένων πολυωνύμων γίνεται οὕτω εὐκολωτέρα· διότι τότε γράφομεν τὰ μὲν ὑπὸ τὰ δὲ εἰς τρόπον, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ προσθέτομεν ἔπειτα, προσθέτοντες τοὺς ὁμοίους ὅρους ἑκάστης στήλης. Π. δ.

1)
$$\begin{array}{r}
\chi^3-5\chi^2+2\chi+4 \\
4\chi^2-3\chi-7 \\
2\chi^3 \qquad +2\chi+1 \\
-\chi^3-2\chi^2+3\chi \\
\hline
2\chi^3-3\chi^2+4\chi-2
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r}
2\chi^4+\alpha\chi^3+2\alpha^2\chi^2+3\alpha^3\chi+\alpha^4 \\
\chi^4-\beta\chi^3-2\beta^2\chi^2+3\beta^3\chi-\beta^4 \\
-2\chi^4+\gamma\chi^3-2\gamma^2\chi^2-3\gamma^3\chi+\gamma^4 \\
\hline
\chi^4+(\alpha-\beta+\gamma)\chi^3+2(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)\chi^2+3(\alpha^3+\beta^3-\gamma^3)\chi+(\alpha^4-\beta^4+\gamma^4)
\end{array}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

58) Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι προσθέσεις :

1)	$+3\alpha$ $+9\alpha$	-6β -7β	$+8\alpha^2$ $-\alpha^2$	$-7\chi^2$ $+\chi^2$	$-5\chi^3$ $+2\chi^3$
2)	$\frac{1}{2}\alpha$ $\frac{1}{4}\alpha$	$-\frac{12}{5}\beta$ $\frac{7}{10}\beta$	$-1\frac{1}{2}\alpha^2$ $2\frac{1}{4}\alpha^2$	$-\frac{2}{3}\chi^2$ $-\frac{1}{2}\chi^2$	$-\frac{5}{6}\chi^3$ $\frac{4}{5}\chi^3$
3)	$\alpha+\beta$ β	$\alpha-\beta$ $-\beta$	$\alpha^2+\beta^2$ $-\beta^2$	χ^2 $\chi^2-\psi^2$	$-\chi^3$ $\chi^3+\psi$
4)	α^2-1 α^2+1	β^2+8 $2\beta^2-3$	$5\mu^3-7$ $3-2\mu^3$	$8\nu^4-9$ $9-8\nu^4$	$2\lambda^2-3$ $5-2\lambda^2$
5)	$5\alpha^2-7\beta^2$ $3\beta^2-2\alpha^2$	$4\alpha^2-3\beta^2$ $-4\beta^2-3\alpha^2$	μ^2-5 ν^2+1	$2\nu^3-3$ $-3\nu^2-1$	$3\chi^3-2\chi$ $2\chi^2-7$

6) $\begin{array}{r} 8\alpha^3-3\beta^2+3\gamma-4 \\ 5\alpha^3-4\beta^2-5\gamma+9 \\ \hline \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \end{array}$

7)

$$\begin{array}{rrrr}
5\chi & -9\psi^2 & 5\alpha^2-3\beta^2 & \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 \\
-3\chi & \psi^2 & -2\alpha^2-5\beta^2 & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2 \\
7\chi & 9\psi^2 & 6\alpha^2+7\beta^2 & \alpha^2-\beta^2-\gamma^2-\delta^2 \\
-6\chi & -5\psi^2 & -7\alpha^2-4\beta^2 & -\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2 \\
\hline
\end{array}$$

8)

$$\begin{array}{rr}
8\chi^3-7\chi^2+5\chi-1 & 6\chi-\psi+3\phi-5\omega \\
-5\chi^3+\chi^2-2\chi+3 & -5\chi+3\psi-7\phi+4\omega \\
3\chi^3-5\chi^2-7\chi+1 & -3\chi+4\psi-\phi-\omega \\
-5\chi^3+4\chi^2+4\chi-7 & 4\chi-6\psi+5\phi+2\omega \\
\hline
\end{array}$$

9)

$$\begin{array}{rr}
\frac{1}{2}\alpha-\frac{2}{3}\beta+\frac{2}{5}\gamma+\delta & 2\frac{3}{4}\chi-1\frac{1}{5}\psi-2\frac{2}{3}+2\frac{1}{3}\omega \\
\frac{1}{4}\alpha-\frac{5}{6}\beta-\frac{3}{5}\gamma-\frac{3}{4}\delta & -1\frac{1}{4}\chi+2\frac{3}{10}\psi+\frac{8}{3}\phi-3\frac{1}{2}\omega \\
\hline
\end{array}$$

10)

$$\begin{array}{r}
2,5\chi-8,34\psi+15,49\phi-4,45\omega \\
-7,48\chi+9,6\psi-33,3\phi-0,97\omega \\
13,75\chi-8,9\psi-0,46\phi+3,18\omega \\
\hline
\end{array}$$

Β΄. ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ

71. ***Ἀφαίρεσις μονωνύμου.***—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τῆς παραστάσεως $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ τὸ μονώνυμον $-4\alpha\beta$. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν (§ 19), ὅτι

$$(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)-(-4\alpha\beta)=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+4\alpha\beta$$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων $-2\alpha\beta$ καὶ $4\alpha\beta$,

$$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγεται ὁ κανὼν τῆς ἀφαιρέσεως μονωνύμου ἀπὸ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

72. ***Ἀφαίρεσις πολυωνύμου.***—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέμεν ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4$ τὸ πολυώνυμον $4\chi^2-9\chi+$ $+6$. Ἀλλὰ τὸ ἀφαιρετέον πολυώνυμον παριστᾷ ἀριθμόν. Διὰ νὰ τὸν ἀφαιρέσωμεν δέ, ἀρκεῖ νὰ προσθέσωμεν τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι οὗτος (ὁ ἀντίθετος) εὑρίσκεται, ἐὰν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4-(4\chi^2-9\chi+6)=$$
$$=4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4-4\chi^2+9\chi-6=4\chi^3-9\chi^2+17\chi-10.$$

Καὶ πράγματι, διότι εἶναι

$$4\chi^3-9\chi^2+17\chi-10+4\chi^2-9\chi+6=4\chi^3-5\chi^2+8\chi-4.$$

Ὥστε : *Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ μιᾶς παραστάσεως δοθὲν πολυώνυμον, γράφομεν κατόπιν αὐτῆς ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀφαιρετέου πολυωνύμου μὲ ἠλλαγμένα τὰ σημεῖα αὐτῶν.*

Καὶ ἐνταῦθα εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς διαφορᾶς ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, αἱ ὁποῖαι ἀφαιροῦνται.

Σημείωσις. Ἐὰν θέλωμεν νὰ θέσωμεν παραστάσεις ἐντὸς παρενθέσεων ἤ, ἂν εἶναι ἐντὸς παρενθέσεων, νὰ γράψωμεν αὐτὰς ἐκτὸς παρενθέσεων, θὰ ἐργασθῶμεν συμφώνως μὲ ὅσα εἴπομεν εἰς τὴν § 24. Οὕτως εἶναι

$$15-(3\chi^2-2\psi^2-\gamma)=15-3\chi^2+2\psi^2+\gamma$$

καὶ $$3\alpha^2-\chi^2+\psi^2+\chi-\psi=3\alpha^2-(\chi^2-\psi^2)+(\chi-\psi).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

59) Νὰ γίνουν αἱ ἀφαιρέσεις :

1)	$+9\chi$	$+7\chi^2$	$-9\alpha^2$	$-5\beta^3$	$-11\lambda^4$
	$+5\chi$	$-3\chi^2$	$-10\alpha^2$	$+3\beta^3$	$-4\lambda^4$
2)	χ	χ	$-\chi$	$-\chi$	2χ
	ψ	$-\psi$	$-\psi$	ψ	-5
3	2μ	5μ	-2μ	$2\mu^2+1$	$3\mu^2$
	3ν	-4ν	-3ν	μ^2	μ^2-1
4)	$\chi-1$	$\chi-\psi$	$2\chi-3\psi$	χ^2+2	$2-\chi^3$
	$\chi+1$	$\psi-\chi$	$2\chi+3\psi$	$5-4\chi^2$	χ^3+2
5)	χ^2-1	χ^2-4	$3\chi^3-4\psi^2$	$5\chi^3-2\psi^2$	$5\chi^3+2\psi^2$
	ψ^2+2	$4-\psi^2$	$3\psi^2-4\chi^3$	$2\psi^2+5\chi^3$	$5\psi^2+2\chi^2$

6)	$\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$	$6\alpha^3-8\beta^2+5\gamma-9$	$4\alpha^3-5\beta^3+7\gamma^3-2\delta^3$
	$\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$	$\alpha^3-5\beta^2-4\gamma+1$	$5\alpha^3+\beta^3-3\gamma^3-2\delta^3$

60) Εἰς τὰς κάτωθι παραστάσεις νὰ ἀρθοῦν αἱ παρενθέσεις καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων :

1) $(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)$ 2) $(\chi-2\psi)+(\chi-3\psi)$ 3) $5\alpha-(2\alpha+3\beta)$ 4) $10\alpha-(3\alpha-5\beta)$

5) $(\alpha+\beta-\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)$ 6) $(9\alpha-5\beta)-(3\alpha+4\beta)-(\alpha-7\beta)$

7) $44\alpha^2+(85\beta^2-63)-(100\beta^2-31\alpha^2+37)+100$

8) $10\chi^3-(23+5\chi^2)+(23-\chi)-(9\chi^3-4\chi^2-\chi)$

9) $\alpha-[(\alpha-\beta)+(\alpha-\gamma)]$ 10) $(5\alpha-3\beta)-[(2\alpha-3\gamma)-(3\beta-\gamma)]$

11) $\left[\frac{1}{2}\alpha-\left(1\frac{1}{4}\beta+\gamma\right)\right]-\left[\left(\frac{3}{4}\alpha-\frac{2}{5}\beta\right)+\left(2\frac{1}{2}\beta-\frac{1}{2}\gamma\right)\right]$

12) $\left[0{,}5\alpha-\left(2\frac{1}{2}\beta-1{,}75\gamma\right)\right]-\left[\left(0{,}25\beta-2\frac{3}{5}\alpha\right)-\left(3\gamma+\alpha\right)\right]$

61) Εἰς ἑκάστην τῶν κάτωθι παραστάσεων νὰ τεθοῦν ἐντὸς παρενθέσεων οἱ δύο πρῶτοι ὅροι μὲ τὸ σημεῖον + πρὸ αὐτῶν καὶ οἱ τρεῖς τελευταῖοι μὲ τὸ σημεῖον —.

1) $\chi^2-\psi^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2$

2) $\alpha^3+\beta^3+5\chi\psi-3\chi^2+7\psi^2$

3) $8\alpha^3-5-\chi^2-\chi\psi-\psi^2$

4) $-\alpha+\alpha^2-\beta^2+\beta+1$

62) Τί πρέπει νὰ προσθέσωμεν

1) εἰς τὴν παράστασιν $5\chi+2\psi$ διὰ νὰ λάβωμεν 5χ ;

2) » » » $2\chi+3\psi-5$ » » » $3\psi+5$;

καὶ 3) » » » $2\alpha^2+4\beta+\gamma$ » » » $3\alpha^2-5\beta$;

63) Τί ἀριθμὸν λαμβάνομεν, ὅταν εἰς τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν τὴν διαφορὰν $(\alpha-\beta)$, ἢ τὴν $(\beta-\alpha)$;

64) Τί ἀριθμὸν λαμβάνομεν, ὅταν ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$ δύο ἀριθμῶν ἀφαιρέσωμεν τὴν διαφορὰν $(\alpha-\beta)$ ἢ τὴν $(\beta-\alpha)$;

Γ'. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

73. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίων μονωνύμων.*** — Εἴδομεν (§ 37) ὅτι $\alpha^2.\alpha^3=\alpha^{2+3}=\alpha^5$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι μονώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ μονωνύμου, τοῦ ἴσου πρὸς τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων μονωνύμων, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἀκέραια μονώνυμα $-5\alpha^3\beta^2\gamma$ καὶ $3\alpha^2\beta$. Ἀλλ' ἕκαστον τῶν μονωνύμων τούτων, ὡς καὶ πᾶν μονώνυμον, εἶναι γινόμενον πολλῶν παραγόντων. Ἑπομένως *τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι μονώνυμον, τὸ ὁποῖον περιέχει ὅλους τοὺς παράγοντας τῶν δύο μονωνύμων.* Ὥστε εἶναι:

$$-5\alpha^3\beta^2\gamma.3\alpha^2\beta=-5.\alpha^3.\beta^2.\gamma.3.\alpha^2.\beta$$

ἀλλ' εἰς τὸ τελευταῖον αὐτὸ γινόμενον δυνάμεθα νὰ ἀλλάξωμεν τὴν τάξιν τῶν παραγόντων καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν παράγοντας αὐτοῦ διὰ τοῦ γινομένου των. Ὥστε εἶναι:

$$-5\alpha^3\beta^2\gamma.3\alpha^2\beta = (-5).3.\alpha^3.\alpha^2.\beta^2.\beta.\gamma = -15\alpha^5\beta^3\gamma.$$

74. Καὶ διὰ περισσότερα μονώνυμα ἐργαζόμεθα ὁμοίως. Οὕτω τὸ γινόμενον τῶν μονωνύμων $-3\alpha^4\beta\gamma$, $-\alpha\gamma^3\delta$ καὶ $4\beta^2$ εἶναι:

$$(-3).(-1).4.\alpha^4.\alpha.\beta.\beta^2.\gamma.\gamma^3.\delta = 12\alpha^5\beta^3\gamma^4\delta.$$

Ὁμοίως εἶναι:

$$(3\alpha^2\beta)^3 = (3\alpha^2\beta).(3\alpha^2\beta).(3\alpha^2\beta) = 27\alpha^6\beta^3$$

Ὥστε: *Ἵνα πολλαπλασιάσωμεν δύο ἢ περισσότερα ἀκέραια μονώνυμα, πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν καὶ ἔπειτα δεξιὰ τοῦ γινομένου των γράφομεν ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ὑπάρχουν εἰς τὰ μονώνυμα καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν, τοὺς ὁποίους ἔχει εἰς τὰ μονώνυμα.*

Σημείωσις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως ἔπεται ὅτι ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου ἀκεραίων μονωνύμων πρὸς ἓν ἢ περισσότερα γράμματα ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων πρὸς τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα τοῦτα

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

65) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$2\alpha^3.5\alpha^2 \quad -5\alpha.\alpha^4 \quad -2\alpha^2.6\beta^3 \quad 8\alpha\chi.(-5\alpha\psi) \quad 3\alpha^2\chi.4\alpha^3\chi^2\psi$

$\alpha^2\beta^3\gamma.\alpha\beta^2 \quad -9\beta\chi\psi^3.(-5\alpha\beta^2\chi^2\psi) \quad \frac{2}{5}\chi^2\psi\cdot\left(-\frac{5}{2}\psi^2\right) \quad \frac{4}{9}\alpha^2\beta^2\cdot\left(-\frac{9}{11}\alpha\beta\right)$

$-\frac{1}{5}\chi^3\psi^2\varphi\left(-\frac{1}{2}\chi\psi\varphi\right)$

$0{,}5\chi\psi^2.(-2\chi^2\psi) \quad -3\alpha^2\beta.(-0{,}01\alpha\beta^2) \quad -0{,}4\alpha\beta(-0{,}5\alpha\beta\gamma)$

$-1\frac{3}{4}\alpha^2\beta.(-1{,}75\beta^2\gamma) \quad 0{,}005\chi^3\psi^2\varphi.\left(-\frac{1}{8}\chi\psi^2\varphi^3\right)$

66) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$(-\alpha).(-\beta).(-\gamma) \quad (-\alpha).(-\beta).(-\gamma).(-\delta) \quad 6\chi^3.(-2\alpha\chi^2).(-3\alpha\chi)$

$15\alpha^2\chi^2.\frac{1}{5}\beta^2\psi.\left(-\frac{1}{3}\chi\psi^2\right) \quad -\frac{2}{3}\alpha\beta^2.\left(-\frac{3}{4}\beta^2\chi\right).\left(-\frac{4}{5}\alpha\chi\right)$

$-10\alpha\beta.(-0{,}2\beta\gamma).(-0{,}5\gamma\delta)$

67) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$\chi^{\mu-\nu}.\chi^\nu \quad \psi^{\mu+\nu}.\psi^{\mu-4} \quad \varphi^{\nu+1}.\varphi^{\nu-1} \quad \omega^{5-\mu}.\omega^{4-\nu} \quad \upsilon^{2\mu-3\nu}.\upsilon^{4\nu-\mu}$

$\chi^2.\psi.\chi^{3\mu-2}.\psi^{4-2\mu} \quad 2\psi\chi^{\mu-\nu}.\chi^{2\mu-3}.\chi^{5-4\nu}.3\psi \quad (\chi-\psi)^{\mu-1}.(\chi-\psi)^{1-\nu}$

$\alpha(\chi-\psi)^\mu.\alpha^2\beta(\chi-\psi)^{\nu-2\mu} \quad \alpha\beta^{\mu-2}.4\beta\gamma^{\mu-3}.8\alpha^{\mu-2}.\gamma$

68) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(5\alpha)^2$ $\quad$ $(3\alpha\beta)^2$ $\quad$ $(-\alpha^1)^1$

$(-2\alpha^2\beta)^5$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\alpha^2\chi\right)^3$ $\quad$ $\left(\frac{3}{5}\alpha^3\beta\chi\right)^2$

$(2\alpha^2)^3.(4\alpha\beta^2)^2$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^3.(-5\alpha\chi)^2.(-3\beta\chi)^3$ $\quad$ $(-\alpha\beta).(-2\alpha\chi).(-\beta\chi)^3$

$(5\alpha^2\beta)^2$ $\quad$ $(-3\alpha^1\beta)^3$

$\left(-\frac{1}{2}\chi\psi^4\varphi^2\right)^3$ $\quad$ $(-0.1\alpha^3\beta\gamma^1)^4$

$(-3\alpha\beta)^2\left(\frac{1}{4}\beta\gamma\right)^3.(4\gamma\alpha)^4$ $\quad$ $\left(\frac{1}{3}\alpha\beta\right)^2.\left(\frac{3\alpha}{\beta}\right)^2.\left(\frac{5\beta}{\alpha}\right)^3$

75. ***Πολλαπλασιασμὸς ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον.***—Γνωρίζομεν, ὅτι

$$(\alpha+\beta+\gamma).\delta = \alpha\delta+\beta\delta+\gamma\delta.$$

Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ γινόμενον ἀκεραίου πολυωνύμου ἐπὶ ἀκέραιον μονώνυμον εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ πολυώνυμον $2\chi^2-7\chi-4$ ἐπὶ $-3\chi^2$. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς θὰ γίνῃ ὡς ἔγινε ὁ ἄνω πολλαπλασιασμὸς $(\alpha+\beta+\gamma).\delta$, διότι τὸ δοθὲν πολυώνυμον ὡς καὶ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἑπομένως *θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων του ἐπὶ τὸ μονώνυμον καὶ θὰ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι :

1) $(2\chi^2-7\chi-4).(-3\chi^2) = -6\chi^4+21\chi^3+12\chi^2.$

2) $(2\chi^4\psi-5\chi^3\psi^2-7\chi^2\psi^3+9\chi\psi^4).5\chi^2\psi^3 = 10\chi^6\psi^4-25\chi^5\psi^5-35\chi^4\psi^6+45\chi^3\psi^7$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

69) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(3\chi-2\psi).5\chi\psi$ $\quad$ $(\alpha^2-\beta^2).(-2\alpha\beta)$ $\quad$ $(2\alpha-3\beta+\gamma).5\alpha\beta$ $\quad$ $(\alpha\chi^2-\beta\chi+\gamma).(-2\psi)$

$(5\alpha^3-2\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-4\beta^3).\alpha^2\beta^2$ $\quad$ $(8\alpha^4-5\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta^2+6\alpha\beta^3+\beta^4).(-4\alpha\beta)$

70) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

$(8\chi^3-6\chi^2+4\chi-12).(-0,5\chi)$ $\quad$ $\left(\frac{2}{3}\alpha^3-0,4\alpha\beta^2+0,6\gamma^4-5\right).\frac{2}{5}\alpha^2\gamma$

$(0,6\chi^3-0,8\chi^2\psi+2\chi\psi^2-2\psi^3).(0,5\chi^2\psi^3)$ $\quad$ $(3\chi^5-4\psi^4-9\chi^3\psi^2+27-\chi^4).\frac{2}{3}\chi^2\psi$

$$(3\psi^4+18\chi^4-42+6\psi^2\chi^2-15\chi^3\psi) \,.\, 1\frac{1}{2}\chi\psi^2.$$

$$(-2\frac{3}{4}\alpha\chi\psi^2) \,.\, (64+8\alpha^2\chi^2-12\alpha^2\chi\psi-16\chi^2\psi^2-24\alpha\chi\psi^2)$$

71) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$$(\alpha^{2\mu})^{2\mu-3} \qquad (-\alpha^{2\mu-1})^{2\mu} \qquad \left(\alpha^{\chi^3}\right)^{2\chi^2-\chi+2} \qquad \left(\alpha^{2\chi-1}.\beta^{1-2\chi}\right)^{4\chi}$$

$$\left(\alpha^{\nu+1}+\alpha^{\nu-1}\right)\alpha^{\nu} \quad \left(\chi^{2\mu}-\psi^{2\nu}\right)\chi^{2\nu}\psi^{2\mu} \quad \left[\left(\alpha^2 . \chi^3\right)^{\mu}+\left(\alpha^3 \chi^2\right)^{\nu}\right]\alpha\chi \quad \left(2\chi^{\nu-1}-3\psi^{\nu}\right)6\chi^{\nu}.\psi^{\nu-3}$$

72) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$$(5\chi-3\psi^2)\chi+(3\psi-5\chi^2)\psi-(2\chi-7\psi)\chi\psi \qquad 4\alpha(4\alpha-7\beta)-7\beta(2\alpha-5\beta)-2\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$3\alpha\beta(\alpha-\gamma)-\beta\gamma(2\beta-3\alpha)-\beta^2(3\alpha-2\gamma)+6\alpha\beta^2$$

$$3(\alpha+\beta+2\psi)\chi-2(\alpha-3\beta-3\chi)\psi-3\beta(\chi+2\psi)+2\alpha\psi$$

76. Πολλαπλασιασμὸς δύο ἀκεραίων πολυωνύμων. — Γνωρίζομεν, ὅτι $(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)=\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\delta+\beta\delta$. Ἐκ τοῦ παραδείγματος δὲ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον.

Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον πολυωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον, λέγεται πολλαπλασιασμὸς αὐτῶν.

1) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ τριώνυμον $\chi^2-2\chi\psi+\psi^2$ ἐπὶ $\chi-3\psi$. Ἀλλ' ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς θὰ γίνῃ ὡς ἔγινε ὁ ἄνω πολλαπλασιασμὸς $(\alpha+\beta).(\gamma+\delta)$, διότι, ὡς γνωρίζομεν, πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἤτοι θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ δοθὲν τριώνυμον πρῶτον ἐπὶ χ, ἔπειτα ἐπὶ -3ψ καὶ κατόπιν θὰ προσθέσωμεν τὰ γινόμενα, τὰ ὁποῖα θὰ εὕρωμεν· θὰ ἔχωμεν δὲ

$$(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)\,\chi=\chi^3-2\chi^2\psi+\chi\psi^2$$

$$\underline{(\chi^2-2\chi\psi+\psi^2)(-3\psi)= \qquad -3\chi^2\psi+6\chi\psi^2-3\psi^3}$$

$$\text{ἄθροισμα μερικῶν γινομένων} \quad =\chi^3-5\chi^2\psi+7\chi\psi^2-3\psi^3.$$

Ὥστε: *Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου μὲ ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα.*

Ἡ ἀνωτέρω πρᾶξις διατάσσεται πρὸς εὐκολίαν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r}
\chi^2-2\chi\psi+\psi^2 \qquad \\
\chi-3\psi \qquad \\
\hline
\chi^3-2\chi^2\psi+\chi\psi^2 \qquad \\
-3\chi^2\psi+6\chi\psi^2-3\psi^3 \\
\hline
\chi^3-5\chi^2\psi+7\chi\psi^2-3\psi^3.
\end{array}$$

διατάσσομεν δηλαδὴ ἀμφότερα τὰ πολυώνυμα πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ὁμοίως· κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὸ πρῶτον πολυώνυμον ἐφ᾽ ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, τὰ δὲ μερικὰ γινόμενα γράφομεν τὸ ἓν ὑπὸ τὸ ἄλλο, ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην, καὶ ἔπειτα προσθέτομεν.

2) Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός: $(3\alpha^2-4\alpha-6).(2\alpha^2+\alpha+3)$.

$$
\begin{array}{lr}
 & 3\alpha^2-4\alpha-6 \qquad\qquad\quad \\
 & 2\alpha^2+\alpha\ +3 \qquad\qquad\quad \\
\hline
\text{μερικὸν γινόμενον ἐπὶ } 2\alpha^2 & 6\alpha^4-8\alpha^3-12\alpha^2 \qquad\qquad\quad \\
\text{» \quad » \quad » \quad } \alpha & 3\alpha^3-4\alpha^2-6\alpha \qquad \\
\text{» \quad » \quad » \quad } 3 & 9\alpha^2-12\alpha-18 \\
\hline
\text{ὁλικὸν γινόμενον} & 6\alpha^4-5\alpha^3-7\alpha^2-18\alpha-18.
\end{array}
$$

3) Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός:

$$(\chi^5+\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi+\alpha^5).(\chi-\alpha)$$

$$
\begin{array}{r}
\chi^5+\alpha\chi^4+\alpha^2\chi^3+\alpha^3\chi^2+\alpha^4\chi+\alpha^5 \qquad\quad \\
\chi-\alpha \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \\
\hline
\chi^6+\alpha\chi^5+\alpha^2\chi^4+\alpha^3\chi^3+\alpha^4\chi^2+\alpha^5\chi \qquad\quad \\
-\alpha\chi^5-\alpha^2\chi^4-\alpha^3\chi^3-\alpha^4\chi^2-\alpha^5\chi-\alpha^6 \\
\hline
\chi^6-\alpha^6 \qquad\qquad\qquad\qquad
\end{array}
$$

77. *Παρατηρήσεις.* Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ὅροι χ^2 καὶ χ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ γράμμα χ τῆς διατάξεως μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην, δίδουν τὸν ὅρον χ^3 τοῦ γινομένου, ὅστις εἰς αὐτὸ ἔχει τὸ χ πάλιν μὲ τὸν μεγαλύτερον ἐκθέτην. Οἱ δὲ ὅροι ψ^2 καὶ -3ψ, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ χ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην (τὸν 0), δίδουν τὸν ὅρον $3\psi^3$ τοῦ γινομένου, ὅστις εἰς αὐτὸ ἔχει πάλιν τὸ χ μὲ τὸν μικρότερον ἐκθέτην. Ὥστε οἱ ὅροι χ^3 καὶ $-3\psi^3$ δὲν ἔχουν ἄλλον ὅρον ὅμοιον μὲ αὐτοὺς καὶ δὲν μεταβάλλονται διὰ τῆς ἀναγωγῆς. Ὁμοίας παρατηρήσεις κάμνομεν καὶ εἰς τὰ ἄλλα δύο παραδείγματα. Ἐκ τῶν παρατηρήσεων δὲ τούτων συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

1. *Τὸ γινόμενον δύο πολυωνύμων οὐδέποτε **δύναται** νὰ εἶναι μονώνυμον.* Διότι ἔχει τοὐλάχιστον δύο ὅρους. Εἶναι δὲ οὗτοι, ὡς εἴδομεν ἀνωτέρω, οἱ μὴ μεταβαλλόμενοι διὰ τῆς ἀναγωγῆς. Δύναται μάλιστα νὰ ἔχῃ μόνον αὐτοὺς τοὺς ὅρους ὡς δεικνύει τὸ 3ον παράδειγμα.

2. *Ὁ βαθμὸς τοῦ γινομένου πρὸς ἓν γράμμα ἰσοῦται μὲ **τὸ ἄθροισμα** τῶν βαθμῶν **τῶν** παραγόντων πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα.*

3. *Τὸ γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων, εἶναι ὁμογενές πολυώνυμον.* Διότι ἐὰν π.χ. ὁ βαθμὸς τοῦ ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι μ καὶ ὁ τοῦ ἄλλου εἶναι ν, ὁ βαθμὸς οἱουδήποτε ὅρου τοῦ γινομένου, ὡς ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ὁμογενῶν πολυωνύμων συνάγεται (καὶ ἐκ τοῦ τρόπου καθ' ὃν γίνεται ὁ πολλπλασιασμὸς) θὰ εἶναι μ+ν. Βλέπε δὲ καὶ 1ον παράδειγμα.

78. ***Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες.***—Ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες, αἱ ὁποῖαι ἀπαντῶνται συχνὰ εἰς τὴν ἄλγεβραν, εἶναι αἱ ἑξῆς:

α' ***Τετράγωνον διωνύμου.***

1) $$(\chi+\alpha)^2=(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2$$

$$\begin{array}{r}\chi+\alpha\\ \chi+\alpha\\ \hline \chi^2+\alpha\chi\qquad\\ \alpha\chi+\alpha^2\\ \hline \chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2\end{array}$$

Ἤτοι: *Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν, εἰς ὃ προστίθεται καὶ τὸ διπλάσιον γινόμενον αὐτῶν.*

Π.χ. $$(\chi+3)^2=\chi^2+2.3\chi+3^2=\chi^2+6\chi+9$$

$$(3\chi+5)^2=(3\chi)^2+2(3\chi).5+5^2=9\chi^2+30\chi+25$$

2) $$(\chi-\alpha)^2=(\chi-\alpha).(\chi-\alpha)=\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2$$

Ἤτοι: *Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.*

Π.χ. $$(\chi-7)^2=\chi^2-2.7\chi+7^2=\chi^2-14\chi+49$$

$$(2\chi-3)^2=(2\chi)^2-2.(2\chi).3+3^2=4\chi^2-12\chi+9$$

Σημείωσις. Ἐπειδὴ $(\chi-\alpha)^2=[\chi+(-\alpha)]^2=\chi^2+2(-\alpha)\chi+(-\alpha)^2=\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2$, αἱ δύο ὡς ἄνω ταυτότητες γράφονται εἰς μίαν τὴν $(\chi\pm\alpha)^2=\chi^2\pm2\alpha\chi+\alpha^2$ καὶ τὴν ὁποίαν ἐκφράζομεν ὡς ἑξῆς: Τὸ τετράγωνον διωνύμου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τετράγωνα τῶν δύο ὅρων αὐτοῦ καὶ ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ γινομένου των.

β' ***Ἄθροισμα ἐπὶ διαφορὰν τῶν αὐτῶν δύο παραστάσεων.***

$$(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)=\chi^2-\alpha^2$$

$$\begin{array}{r}\chi+\alpha\\ \chi-\alpha\\ \hline \chi^2+\alpha\chi\qquad\\ -\alpha\chi-\alpha^2\\ \hline \chi^2-\alpha^2\qquad\end{array}$$

Ἤτοι: *Τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφοράν των ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου πλὴν τὸ τετράγωνον τοῦ δευτέρου.*

Π.χ. $(\chi+5).(\chi-5)=\chi^2-5^2=\chi^2-25$

$$(6\chi+5\psi)(6\chi-5\psi)=(6\chi)^2-(5\psi)^2=36\chi^2-25\psi^2.$$

Σημείωσις. Αἱ ἀνωτέρω ταυτότητες γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2=(\chi+\alpha).(\chi+\alpha)=(\chi+\alpha)^2$$
$$\chi^2-2\alpha\chi+\alpha^2=(\chi-\alpha).(\chi-\alpha)=(\chi-\alpha)^2$$
$$\chi^2-\alpha^2=(\chi+\alpha).(\chi-\alpha)$$

Ἑπομένως τριώνυμα ἢ διώνυμα ὡς τὰ ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ τὰ γράψωμεν ὡς γινόμενα δύο παραγόντων.

Π.χ.
$$\chi^2+10\chi+25=\chi^2+2.5\chi+5^2=(\chi+5).(\chi+5)=(\chi+5)^2$$
$$\chi^2-8\chi+16=\chi^2-2.4\chi+4^2=(\chi-4).(\chi-4)=(\chi-4)^2$$
$$\chi^2-36=\chi^2-(6)^2=(\chi+6).(\chi-6)$$

γ′ ***Κύβος διωνύμου***

1) $(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta)=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$

2) $(\alpha-\beta)^3=(\alpha-\beta)^2.(\alpha-\beta)=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$

$$(=[\alpha+(-\beta)]^3)$$

1)
$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \qquad\qquad \\ \alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r} \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \qquad\qquad \\ -\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \hline \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \end{array}$$

Ἐκ τῶν ἐξαγομένων δὲ τούτων εὐκόλως συνάγεται ἡ σχετικὴ πρότασις περὶ τοῦ κύβου τοῦ διωνύμου.

$$(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$$

δ′ ***Τετράγωνον πολυωνύμου.*** Τὸ γινόμενον $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta).(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$, ὡς ἐκ τῆς κατωτέρω διατάξεως τῆς πράξεως φαίνεται, ἰσοῦται μὲ

	$+\alpha$	$+\beta$	$+\gamma$	$+\delta$
$+\alpha$	α^2	$+\alpha\beta$	$+\alpha\gamma$	$+\alpha\delta$
$+\beta$	$+\alpha\beta$	β^2	$+\beta\gamma$	$+\beta\delta$
$+\gamma$	$+\alpha\gamma$	$+\beta\gamma$	γ^2	$+\gamma\delta$
$+\delta$	$+\alpha\delta$	$+\beta\delta$	$+\gamma\delta$	δ^2

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta.$$

Ὅθεν: *Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν ὅρων του καὶ ἀπὸ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.*

$$(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha(-\beta)+2\alpha(-\gamma)+2\alpha\delta+2(-\beta)(-\gamma)+$$
$$+2(-\beta)\delta+2(-\gamma)\delta=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma-2\beta\delta-2\gamma\delta$$

Ἐφαρμογαί. 1) $(\chi+\psi)^4=[(\chi+\psi)^2]^2=(\chi^2+2\chi\psi+\psi^2)^2=\chi^4+4\chi^2\psi^2+\psi^4$
$+2.\chi^2.2\chi\psi+2\chi^2\psi^2+2.2\chi\psi.\psi^2=\chi^4+4\chi^3\psi+6\chi^2\psi^2+4\chi\psi^3+\psi^4$

2) $(\chi-\psi)^4=\chi^4+4\chi^3(-\psi)+6\chi^2(-\psi)^2+4\chi(-\psi)^3+(-\psi)^4=$
$=\chi^4-4\chi^3\psi+6\chi^2\psi^2-4\chi\psi^3+\psi^4$

3) $(\chi+\psi)^6=[(\chi+\psi)^3]^2=(\chi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3)^2$
$=\chi^6+6\chi^5\psi+15\chi^4\psi^2+20\chi^3\psi^3+15\chi^2\psi^4+6\chi\psi^5+\psi^6$

4) $(\chi+\psi)^5=(\chi+\psi)^4(\chi+\psi)=\chi^5+5\chi^4\psi+10\chi^3\psi^2+10\chi^2\psi^3+$
$+5\chi\psi^4+\psi^5$

Σημείωσις. α'. Διὰ τοὺς ἀριθμητικοὺς συντελεστὰς τῶν διαδοχικῶν δυνάμεων τοῦ διωνύμου, τὰς ὁποίας εὕρομεν μέχρι τοῦδε παρατηροῦμεν ὅτι

$(\chi+\psi)^0$	1						
$(\chi+\psi)^1$	1	1					
$(\chi+\psi)^2$	1	2	1				
$(\chi+\psi)^3$	1	3	3	1			
$(\chi+\psi)^4$	1	4	6	4	1		
$(\chi+\psi)^5$	1	5	10	10	5	1	
$(\chi+\psi)^6$	1	6	15	20	15	6	1

Ἤδη σημειοῦμεν, ὅτι ἕκαστος ἀριθμὸς τοῦ πίνακος αὐτοῦ εἶναι ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, οἵτινες εὑρίσκονται εἰς τὴν ἀμέσως ὑπεράνω γραμμήν· ὁ εἷς δὲ ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἀκριβῶς ἄνωθεν αὐτοῦ (τοῦ πρώτου), καὶ ὁ ἄλλος ἀριστερὰ τοῦ δευτέρου.

Π.χ. ὁ 4 τῆς πέμπτης γραμμῆς εἶναι ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 1

1 3

4

ἐκ δὲ τῶν δύο 15 τῆς ἑβδόμης γραμμῆς, ὁ μὲν πρῶτος εἶναι ἄθροισμα τῶν 10 καὶ 5, ὁ δὲ δεύτερος τῶν 5 καὶ 10

5 10   10 5

15   15

Οὕτω λοιπὸν δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ὅστις λέγεται τρίγωνον τοῦ Pascal, εἰς ὅσας γραμμὰς θέλομεν. Εὐκόλως δὲ δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ μιᾶς γραμμῆς θὰ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τοῦ διατεταγμένου ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως τοῦ ἀθροίσματος $\chi+\psi$, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν τῆς ἰδίας γραμμῆς ἤ, ὅπερ εἶναι τὸ ἴδιον, οἱ ἀριθμοὶ τῆς γραμμῆς $\mu+1$ θὰ εἶναι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(\chi+\psi)^{\mu}$.

Ὅτι οὕτως εἶναι, αὐτὸ ποὺ ἤδη ἁπλῶς συμπεραίνομεν θὰ τὸ ἀποδείξωμεν βραδύτερον. Ἐπὶ τοῦ παρόντος δεχόμεθα τοῦτο ὡς ἀληθὲς ἄνευ ἀποδείξεως.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εὑρίσκομεν ὅτι οἱ ἀριθμητικοὶ συντελεσταὶ τῶν δυνάμεων $(\chi+\psi)^7$, $(\chi+\psi)^8$, $(\chi+\psi)^9$ κτλ. εἶναι οἱ

$(\chi+\psi)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1		
$(\chi+\psi)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
$(\chi+\psi)^9$	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
. . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	.

Σημείωσις β΄. Διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν μίαν ταυτότητα ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι τὰ δύο μέλη αὐτῆς εἶναι παραστάσεις ἴσαι πρὸς ἀλλήλας ἢ πρὸς τρίτην παράστασιν. Οὕτω διὰ νὰ ἐπαληθεύσωμεν τὴν κατωτέρω ταυτότητα τοῦ Lagrange

$$(\alpha^2+\beta^2)(\chi^2+\psi^2)-(\alpha\chi+\beta\psi)^2=(\alpha\psi-\beta\chi)^2$$

ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ εὑρίσκομεν τὴν παράστασιν τοῦ δευτέρου μέλους. Καὶ πράγματι, διότι εἶναι $\alpha^2\chi^2+\alpha^2\psi^2+\beta^2\chi^2+\beta^2\psi^2-\alpha^2\chi^2-2\alpha\beta\chi\psi-\beta^2\psi^2=\alpha^2\psi^2-2\alpha\beta\chi\psi+\beta^2\chi^3=(\alpha\psi-\beta\chi)^2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

73) Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\alpha+\beta)(\gamma-\delta)$ $\quad(7\alpha-3)(5\alpha-4)$ $\quad(2\chi-3\psi)(\chi-\psi)$ $\quad(5\chi-4\psi)(2\chi+3\psi)$

$(2\chi^2-5).(3\chi^2+7)$ $\quad(5\chi^2-4\psi^2).(3\chi^2-\psi^2)$ $\quad(7\alpha^2+9\beta^2).(9\alpha^2-7\beta^2)$ $\quad(\alpha^3+\beta^2).(2\alpha^3-3\beta^2)$

74) Νὰ γίνουν οἱ κάτωθι πολλαπλασιασμοί:

$(\chi^2+\chi+1).(\chi+1)$ $\quad(\psi^2-9\psi+4).(-\psi+5)$ $\quad(1+2\beta-3\beta^2).(1-5\beta)$

$(\alpha^2-5\alpha-6).(\alpha-4)$ $\quad(\varphi^2+3\varphi\omega+9\omega^2).(\varphi-3\omega)$ $\quad(2\mu^2+4\mu\nu-6\nu^2).(3\mu-4\nu)$

75) Ὁμοίως νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$(\alpha+\beta-\gamma).(\alpha-\beta+\gamma)$ $\quad(\alpha^2+\alpha+1).(\alpha^2+2\alpha+5)$ $\quad(\beta^2+2\beta+2).(\beta^2-2\beta+2)$

$(5\gamma^2-3\gamma+4).(-\gamma^2+4\gamma+2)$ $\quad(\chi^2+2\chi\psi+3\psi^2).(\chi^2-3\chi^2)$ $\quad(\psi^2+4\psi\varphi-2\varphi^2).(2\psi^2-\psi\varphi+\varphi^2)$

76) Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$(8\alpha^3+4\alpha^2\beta+1\alpha\beta^2+\beta^3).(2\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ $\quad(6\alpha\gamma-3\alpha\delta+2\beta\gamma-\beta\delta).(6\alpha\gamma+3\alpha\delta-2\beta\gamma-\beta\delta)$

$$(3\alpha^2\chi^2-5\alpha\chi^3-2\alpha^4+4\chi^4).(-3\chi^5+3\alpha^2\chi^3-5\alpha^3\chi^2)$$

$$(7\alpha\gamma-11\alpha\delta+\beta\gamma)(7\alpha\gamma+11\alpha\delta-\beta\gamma)-(\alpha\gamma-\beta\gamma).(3\alpha\gamma+3\alpha\delta)$$

77) Νὰ γίνουν οἱ πολλαπλασιασμοί:

$[\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+(\alpha+\beta)].[3\chi^2-4(\alpha+\beta)\chi+(\alpha+\beta)]$

$[(2\alpha^2-3\beta^2)\chi^2+(3\alpha\beta^2-\beta^2)\chi+(\alpha^4-2\beta^4)].[(3\alpha^2+2\beta^2)\chi^2-2(3\alpha\beta^2-\beta^3)\chi+(\alpha^4+2\beta^4)]$

78) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

$(\chi-\alpha).(\chi-\beta).(\chi-\gamma)$ $\quad (\chi-\psi).(\psi-\varphi).(\varphi-\chi)$ $\quad (2\chi-3).(3\chi+7).(6\chi-5)$

$(\alpha\chi+\beta)(\gamma\chi+\beta)(\beta\chi-\gamma)$ $\quad (\chi-1).(\chi+2)(\chi^2+\chi+1)$ $\quad (\chi+\alpha).(\chi-\alpha)(\chi^2-\alpha\chi+\alpha^2).(\chi^2+\alpha\chi+\alpha^2)$

$6\chi(\chi+1).(7\chi-2)-3(\chi+1)7\chi(2\chi-1)$ $\quad [(\alpha+3)\chi-(2-\beta)\chi^2+(1-\alpha)\chi^3][(1-\alpha)-\chi]$

79) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κάτωθι τετράγωνα:

$(4\chi+\psi)^2$ $\quad (\chi+3\psi)^2$ $\quad (2\varphi+3\omega)^2$ $\quad (1+\chi\psi)^2$ $\quad (\chi^2+\psi)^2$

$(\chi^2+\psi^2)^2$ $\quad (2\varphi^2+3\omega^2)^2$ $\quad (\chi^\mu+\psi^\mu)^2$ $\quad (\alpha\chi^\mu+\beta\psi^\mu)^2$ $\quad (\alpha\chi^\mu+\beta\psi^\nu)^2$

$\left(\psi+\frac{\chi}{2}\right)^2$ $\quad \left(\frac{\varphi}{3}+\frac{\chi}{2}\right)^2$ $\quad \left(1\frac{1}{5}\alpha+1\frac{2}{3}\right)^2$ $\quad (0,5\chi+0,02\psi)^2$ $\quad (0,2\chi^2+0,3\psi)^2$

80) Ὁμοίως νὰ εὑρεθοῦν τὰ τετράγωνα:

$(\psi-1)^2$ $\quad (8-\varphi)^2$ $\quad (2\alpha-1)^2$ $\quad (\beta-3\gamma)^2$ $\quad (\alpha\beta-1)^2$

$(9\chi^2-7\psi^2)^2$ $\quad \left(1\frac{1}{2}-\omega\right)^2$ $\quad \left(2\frac{1}{3}-1\frac{2}{7}\psi\right)^2$ $\quad (10\chi-0,6\psi)^2$ $\quad (0,6\chi-0,5\psi^2)^2$

81) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα:

$(3\alpha-5).(3\alpha+5)$ $\quad (7\chi+3\psi).(7\chi-3\psi)$ $\quad (4\varphi+5\omega).(5\omega-4\varphi)$ $\quad (16\chi-3\psi).(3\psi+16\chi)$

$\left(3\chi+\frac{1}{2}\right).\left(3\chi-\frac{1}{2}\right)$ $\quad \left(\frac{\psi}{2}+\frac{\chi}{3}\right).\left(\frac{\psi}{2}-\frac{\chi}{3}\right)$ $\quad \left(0,3\alpha+\frac{\beta}{2}\right).\left(\frac{\beta}{2}-0,3\alpha\right)$

$\left(0,01\alpha-\frac{4}{3}\beta\right).\left(\frac{4}{3}\beta+0,01\alpha\right)$

$[(\alpha+\beta)+(\chi+\psi)].[(\alpha+\beta)-(\chi+\psi)]$ $\quad [(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi].[(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi]$

82) Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα δύο παραγόντων αἱ παραστάσεις:

$9\chi^2-4\psi^2$ $\quad \alpha^2\chi^4-\beta^2\psi^4$ $\quad (\chi+1)^2-16$ $\quad 25-(\chi-1)^2$ $\quad (\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2$

$(\chi-\psi)^2-(\chi+\psi)^2$ $\quad \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$ $\quad \frac{144}{25}\chi^2-\frac{4}{9}\psi^2$ $\quad (\chi+1)^2-16(\psi-1)^2$ $\quad 9(\chi-2)^2-36(\chi+2)^2$

83) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ κύβοι τῶν κάτωθι δυνάμεων:

$(\chi+1)^3$ $\quad (\psi+3)^3$ $\quad (\chi^2+\psi)^3$ $\quad \left(\chi+\frac{2}{3}\right)^3$ $\quad (\chi+0,1)^3$

$(1-\psi)^3$ $\quad \left(\chi-\frac{1}{2}\right)^3$ $\quad (2\alpha-\beta)^3$ $\quad (\alpha-\beta^2)^3$ $\quad (0,4-\varphi)^3$

84) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$(3\alpha+2\beta+\gamma)^2$ $\quad (3\chi-5\psi-2)^2$ $\quad (\chi\psi+\psi\varphi+\varphi\chi)^2$

$(\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)^2$ $\quad (\alpha+2\beta+3\gamma+4\delta)^2$ $\quad (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\mu-1}+\alpha_\mu)^2$

$(\alpha+\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma+\delta)^2+(-\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$

85) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων:

$(\chi-\psi)^5$ $\quad (\chi-\psi)^6$ $\quad (\chi-\psi)^7$ $\quad (\chi-\psi)^8$ $\quad (\chi-\psi)^9$

$(\chi+3)^4+(\chi-3)^4$ $\quad (\chi+2)^5-(\chi-2)^5$ $\quad (2\chi+3)^5-(2\chi-3)^5$

86) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι:

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$

$(\alpha-\beta).(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)=\alpha^4-\beta^4$ καὶ γενικῶς ὅτι

$(\alpha-\beta).(\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu-1}.\beta+\alpha^{\mu-2}\beta^2+\ldots+\beta^{\mu})=\alpha^{\mu+1}-\beta^{\mu+1}$ τοῦ μ ὄντος ἀκεραίου θετικοῦ

87) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι:

$\mu^2(\mu+1)^2+\mu^2+(\mu+1)^2=[\mu^2+(\mu+1)^2]^2$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+(\alpha+\beta+\gamma+2\delta)^2=(\alpha+\delta)^2+(\beta+\delta)^2+(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2$

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\chi^2+\psi^2+\varphi^2)=(\beta\varphi-\gamma\psi)^2+(\gamma\chi-\alpha\varphi)^2+(\alpha\psi-\beta\chi)^2$

$(\chi+\psi+\varphi)^3-(\chi^3+\psi^3+\varphi^3)=3(\psi+\varphi)(\varphi+\chi)(\chi+\psi)$

88) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι:

$(\chi+\psi)^3-\chi^3-\psi^3=3\chi\psi(\chi+\psi)$

$(\chi+\psi)^5-\chi^5-\psi^5=5\chi\psi(\chi+\psi).(\chi^2+\chi\psi+\psi)^2$

$(\chi+\psi)^7-\chi^7-\psi^7=7\chi\psi(\chi+\psi)(\chi^3+\chi\psi+\psi^2)^2$

$(\chi+\psi)^9-\chi^9-\psi^9=3\chi\psi(\chi+\psi).[3(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)^2+\chi^2\psi^2(\chi+\psi)^2]$ (Cauchy)

Δ'. ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ

79. ***Διαίρεσις ἀκεραίων μονωνύμων.*** — Τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}$ γνωρίζομεν (§ 38), ὅτι εἶναι ἴσον μὲ $\alpha^{7-3}=\alpha^4$, ἤτοι $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}=\alpha^4$. Ἐπίσης γνωρίζομεν (§ 41), ὅτι $\frac{\alpha^3}{\alpha^5}=\frac{1}{\alpha^2}$. Παρατηροῦμεν δέ, ὅτι τὸ μὲν πηλίκον α^4 εἶναι ἀκεραία παράστασις, τὸ δὲ $\frac{1}{\alpha^2}$ εἶναι κλασματική.

Μονώνυμον ἀκέραιον λέγεται *διαιρετὸν* δι᾽ ἄλλου, ὅταν ὑπάρχῃ ἀκέραιον μονώνυμον ἴσον μὲ τὸ πηλίκον αὐτῶν.

Διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων λέγεται ἡ εὕρεσις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου (ἐὰν ὑπάρχῃ) *τὸ ὁποῖον εἶναι πηλίκον αὐτῶν.*

Ἐκ τῆς ταυτότητος $\frac{\alpha^7}{\alpha^3}=\alpha^4$, ἕπεται ἡ $\alpha^7=\alpha^3.\alpha^4$. Συνάγομεν λοιπὸν ὅτι: *Τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ ἀκέραιον καὶ μονώνυμον πηλίκον εἶναι ἴσον μὲ τὸν διαιρετέον.*

Ὅθεν ἕπεται εὐκόλως, ὅτι: *Διὰ νὰ εἶναι ἓν μονώνυμον διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ τοῦτο ὅλα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα ἔχει ὁ διαιρέτης, καὶ ἕκαστον μὲ ἐκθέτην μὴ μικρότερον.*

Π. χ. Τὸ μονώνυμον $35\alpha^3\beta^2\gamma$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $-2\alpha^3\beta^2$. Ἐνῷ τὸ μονώνυμον $8\alpha^3\beta^4\gamma$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $3\alpha\beta\gamma\delta$. Ἐπίσης τὸ μονώνυμον $9\chi^2\psi\varphi$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ μονωνύμου $3\chi\psi^2\varphi$. Ὥστε:

Ἡ διαίρεσις δύο ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος:

1) *ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα, τὸ ὁποῖον δὲν περιέχει ὁ διαιρετέος, καὶ*

2) *ὅταν ὁ διαιρέτης περιέχῃ γράμμα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος, τὸ ὁποῖον ὑπάρχει καὶ εἰς τὸν διαιρετέον.*

80. Ἔστω ἤδη, ὅτι πρόκειται νὰ εὕρωμεν τὸ πηλίκον τοῦ μονωνύμου $42\alpha^4\beta^5$ διὰ τοῦ $6\alpha\beta^3$

Ἐπειδὴ τὰ ἀκέραια ταῦτα μονώνυμα εἶναι γινόμενα πολλῶν παραγόντων, ἕπεται, ὅτι δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τὸ $42\alpha^4\beta^5$ πρῶτον διὰ τοῦ 6, ἔπειτα τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διὰ τοῦ α καὶ τέλος τὸ νέον πηλίκον διὰ τοῦ β^3.

Ἀλλὰ $\quad 42\alpha^4\beta^5 : 6 = 7\alpha^4\beta^5$

$7\alpha^4\beta^5 : \alpha = 7\alpha^3\beta^5$

καὶ $\quad 7\alpha^3\beta^5 : \beta^3 = 7\alpha^3\beta^2$

ἤτοι $\quad 42\alpha^4\beta^5 : 6\alpha\beta^3 = 7\alpha^3\beta^2$

Ὅθεν: *Ἵνα διαιρέσωμεν μονώνυμον δι' ἄλλου μονωνύμου* (ὅταν διαιρεῖται) *διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἔπειτα δὲ γράφομεν δεξιὰ τοῦ πηλίκου αὐτῶν ἕκαστον γράμμα τοῦ διαιρετέου, ἀφοῦ προηγουμένως ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν ἐκθέτην αὐτοῦ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος τοῦ διαιρέτου.*

Ἐὰν γράμμα τι δὲν ὑπάρχῃ εἰς τὸν διαιρέτην ὑποθέτομεν, ὅτι ὑπάρχει μὲ ἐκθέτην 0.

Πδ. 1) $18\alpha^4\beta^3\gamma^5\delta : 6\alpha^2\beta\gamma^3 = \frac{18}{6}\,\alpha^{4-2}\,.\,\beta^{3-1}\,.\,\gamma^{5-3}\,.\,\delta = 3\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta$

2) $-12\chi^3\psi^2\varphi : -7\chi\psi^2 = \frac{12}{7}\,\chi^2\varphi$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων :

$14\alpha^2\beta^2 : 7\alpha\beta$, $\quad -23\alpha^4\beta^3\gamma^2 : -5\alpha\beta^3\gamma^2$, $\quad 7\alpha^5\beta^3\gamma^2\delta : -\alpha^2\beta$, $\quad -49\alpha^7\beta^3\chi\psi^2 : 21\alpha^8\beta\chi\psi^2$

$\frac{3}{5}\chi\psi^2 : -\frac{3}{2}\chi\psi$, $\qquad -1\frac{2}{3}\alpha\chi^4\psi^5 : -\frac{5}{8}\alpha\psi^5$,

$\frac{1}{3}\alpha^8\chi^2\psi^6\varphi^4 : -5\alpha^3\chi\psi\varphi^2$, $\qquad -8\alpha\beta^2\gamma\chi^3 : -\frac{1}{3}\alpha\beta\chi$

$0{,}04\alpha^3\beta^2\chi^7 : -0.09\alpha^2\beta\chi^6$, $\qquad -0{,}015\chi^3\psi^3\omega^3 : 0{,}03\chi\psi^2\omega^3$,

$-\frac{5}{6}\alpha\chi^5\psi^4 : 0{,}25\alpha\chi^4$, $\qquad -0{,}625\alpha^2\beta\psi^5 : \frac{5}{8}\alpha\beta$

81. *Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι᾽ ἀκεραίου μονωνύμου.*— Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω (§ 79) συνάγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον ἀκεραίου πολυωνύμου δι᾽ ἀκεραίου μονωνύμου δὲν εἶναι πάντοτε ἀκέραιον πολυώνυμον. Ἐὰν τὸ πηλίκον τοῦτο εἶναι ἀκέραιον, τότε τὸ πολυώνυμον λέγεται *διαιρετὸν* διὰ τοῦ μονωνύμου τούτου. *Ἡ εὕρεσις τοῦ πολυωνύμου καὶ ἀκεραίου πηλίκου λέγεται διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου διὰ τοῦ μονωνύμου.*

Ἔστω ἤδη, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸ πολυώνυμον $8\alpha^5 - 12\alpha^4 + 20\alpha^3 - 4\alpha^2$ διὰ τοῦ μονωνύμου $2\alpha^2$. Ἀλλὰ πᾶν πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα τῶν ὅρων του. Ἔχομεν ἑπομένως ἐδῶ νὰ διαιρέσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ διαιρέτου καὶ νὰ προσθέσωμεν τὰ προκύπτοντα πηλίκα. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ τοῦτο, ἤτοι διὰ νὰ ὑπάρχῃ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς, *πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου* (τὸ ὁποῖον εἶναι ἄνευ ὁμοίων ὅρων) *νὰ εἶναι διαιρετοὶ διὰ τοῦ μονωνύμου.* Ἐπειδὴ δὲ συμβαίνει τοῦτο εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα, ἕπεται, ὅτι ὑπάρχει πηλίκον τῆς δοθείσης διαιρέσεως καὶ εἶναι τοῦτο τὸ ἑξῆς :

$$(8\alpha^5 - 12\alpha^4 + 20\alpha^3 - 4\alpha^2) : 2\alpha^2 =$$

$$= \frac{8\alpha^5}{2\alpha^2} - \frac{12\alpha^4}{2\alpha^2} + \frac{20\alpha^3}{2\alpha^2} - \frac{4\alpha^2}{2\alpha^2} = 4\alpha^3 - 6\alpha^2 + 10\alpha - 2.$$

82. *Ἐξαγωγὴ κοινῶν παραγόντων ἐκτὸς παρενθέσεως.*— Ἐκ τῆς προηγουμένης διαιρέσεως λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα :

$$8\alpha^5 - 12\alpha^4 + 20\alpha^3 - 4\alpha^2 = 2\alpha^2.(\alpha^4 - 6\alpha^3 + 10\alpha - 2).$$

Ὥστε, ὅταν ἓν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ μονωνύμου δύναται τοῦτο νὰ παρασταθῇ ὡς γινόμενον τοῦ μονωνύμου ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου· ὅταν δὲ ἓν πολυώνυμον παραστήσωμεν οὕτω, λέγομεν, ὅτι *ἐξάγομεν τοὺς κοινοὺς παράγοντας τῶν ὅρων αὐτοῦ ἐκτὸς παρενθέσεως.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

90) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων καὶ κατόπιν νὰ παρασταθῇ ὁ διαιρετέος ἑκάστης διαιρέσεως ὡς γινόμενον:

$(24\alpha^2-12\alpha+4):4,$ $\qquad$ $(25\chi^2-15\chi+5): -5$

$(18\alpha\chi-24\alpha\psi+12\alpha\varphi):6\alpha$ $\qquad$ $(35\chi^4-28\chi^3+49\chi^2-14\chi):7$

$$(18\chi^2\psi-36\alpha\chi^3\psi^2+72\beta\chi^2\psi^3-18\gamma\chi^4\psi^3):18\chi^2\psi$$

$$(54\beta^4\psi^3-18\beta^3\psi^4-12\beta^2\psi^5+24\beta\psi^6):-6\beta\psi^3$$

$$(160\alpha^3\chi^3\psi^3-120\alpha^2\chi^4\psi^2-40\alpha\chi^5\psi^2):20\alpha\chi^3\psi$$

$$(108\chi^4\psi^3\varphi^2-72\chi^2\psi^3\varphi^4+63\chi\psi^2\varphi^5):-9\chi\psi^2 5$$

83. *Διαίρεσις δύο ἀκεραίων πολυωνύμων.* —Καὶ ἐδῶ λέγομεν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων δὲν εἶναι πάντοτε παράστασις ἀκεραία. Ἐὰν ὅμως ὑπάρχῃ ἀκεραία παράστασις (πολυώνυμον ἢ μονώνυμον) ἴση πρὸς τὸ πηλίκον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων τότε λέγεται τὸ ἓν *διαιρετὸν* διὰ τοῦ ἄλλου. *Ἡ εὕρεσις δὲ τοῦ πηλίκου αὐτοῦ λέγεται διαίρεσις τῶν δύο πολυωνύμων.*

Καὶ ἤδη ἔστω ἡ διαίρεσις

$$(6\chi^5-5\chi^4-9\chi^3+5\chi^2-7\chi+6):(2\chi^3-3\chi^2+\chi-2)$$

τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν δυνατήν· ἑπομένως τὸ πολυώνυμον πηλίκον, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν, ὅτι ὑπάρχει, πρέπει, πολλαπλασιαζόμενον ἐπὶ $2\chi^3-3\chi^2+\chi-2$, νὰ δώσῃ τὸ διαιρετέον πολυώνυμον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου, τὸ ὁποῖον ὑποθέτομεν διατεταγμένον καὶ αὐτὸ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ, σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τοῦ πηλίκου ἐπὶ τὸν διαιρέτην οἱ πρῶτοι ὅροι αὐτῶν θὰ δώσουν γινόμενον τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου (77)· ἤτοι, ἐὰν διὰ τοῦ π_1 παραστήσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, θὰ ἔχωμεν $(2\chi^3).\pi_1=6\chi^5$ καὶ ἑπομένως ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων, ἤτοι $\pi_1=6\chi^5:2\chi^3=3\chi^2$

Μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου παρατηροῦμεν ὅτι ὁ διαιρετέος ἀποτελεῖται ἐκ τῶν γινομένων τοῦ διαιρέτου ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἂν λοιπὸν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐφ' ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸ ὑπόλοιπον θὰ εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου· ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν ἤδη ἕνα ὅρον τοῦ πηλίκου, τὸν $3\chi^2$, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον ἐπὶ τὸν διαιρέτην εἶναι $6\chi^5-9\chi^4+3\chi^3-6\chi^2$· ἐὰν δὲ αὐτὸ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸν διαιρετέον, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον $4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6$, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, εἶναι γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τοὺς λοιπούς (ἀγνώστους) ὅρους τοῦ πηλίκου· ἄρα διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς λοιποὺς ὅρους τοῦ πηλίκου πρέπει νὰ ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν $(4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6):(2\chi^3-3\chi^2+\chi-2)$, τῆς ὁποίας, κατὰ τὰ προηγούμενα, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου (ἤτοι ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ζητουμένου) εἶναι πηλίκον τῆς διαιρέσεως $4\chi^4:2\chi^3=2\chi$· ἐξακολουθοῦντες ὡς ἄνω εὑρίσκομεν τὸν ἑπόμενον ὅρον διὰ νέας διαιρέσεως· θὰ εἶναι δὲ οὗτος ὁ -3.

Ἡ πρᾶξις αὕτη διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{array}{r|l}
6\chi^5-5\chi^4-9\chi^3+5\chi^2-7\chi+6 & 2\chi^3-2\chi^2+\chi-2 \\ \cline{2-2}
-6\chi^5+9\chi^4-3\chi^3+6\chi^2 & 3\chi^2+2\chi-3 \\ \cline{1-1}
4\chi^4-12\chi^3+11\chi^2-7\chi+6 & \\
-4\chi^4+6\chi^3-2\chi^2+4\chi & \\ \cline{1-1}
-6\chi^3+9\chi^2-3\chi+6 & \\
+6\chi^3-9\chi^2+3\chi-6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

84. Ἐὰν τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, συλλογιζόμενοι ὁμοίως, εὑρίσκομεν τοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἀρχίζοντες δηλ. τὴν διαίρεσιν ἀπὸ τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸ γράμμα τῆς διατάξεως ὑπὸ τὸν μικρότερον ἐκθέτην· π. χ.

$$
\begin{array}{r|l}
3-17\chi+22\chi^2-8\chi^3 & 1-4\chi \\ \cline{2-2}
-3+12\chi & 3-5\chi+2\chi^2 \\ \cline{1-1}
-5\chi+22\chi^2-8\chi^3 & \\
+5\chi-20\chi^2 & \\ \cline{1-1}
2\chi^2-8\chi^3 & \\
-2\chi^2+8\chi^3 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

85. ***Κανὼν τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.*** — Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑπόμενος κανὼν τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ὧν τὸ ἓν εἶναι διαιρετὸν δι' ἄλλου.

Διὰ νὰ διαιρέσωμεν πολυώνυμον δι' ἄλλου πολυωνύμου διατάσσομεν ἀμφότερα κατὰ τὰς κατιούσας ἢ κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις ἑνὸς καὶ *τοῦ αὐτοῦ γράμματος καὶ λαμβάνομεν κατὰ τὴν διαίρεσιν μόνον τοὺς πρώτους ὅρους αὐτῶν, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου· ἔπειτα ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ διαιρετέου τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸν ὅρον τοῦτον καὶ εὑρίσκομεν ἓν ὑπόλοιπον· μετὰ δὲ ταῦτα θεωροῦμεν τὸ ὑπόλοιπον τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ κάμνομεν ἐπ᾽ αὐτοῦ ὅσα καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου διαιρετέου, ὅτε εὑρίσκομεν τὸν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου καὶ ἓν ὑπόλοιπον. Θεωροῦμεν πάλιν καὶ τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον καὶ ἐξακολουθοῦμεν ἐργαζόμενοι κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.*

Σημείωσις. Ὅταν ἓν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν δι᾽ ἄλλου, ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου αὐτῶν εἶναι προδήλως, τὸ πηλίκον τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ διαιρέτου· ὁ βαθμὸς δὲ τοῦ πηλίκου εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρετέου· διότι ἀφοῦ ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ διαιρέτου ἐπὶ τὸ πηλίκον, ὁ βαθμὸς αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ τοῦ βαθμοῦ τοῦ πηλίκου.

86. ***Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς διαιρέσεως***.—Ἔστωσαν ἤδη δύο πολυώνυμα Α καὶ Β διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος χ, ὁ δὲ βαθμὸς τοῦ Α νὰ μὴ εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β. Ἐὰν τὸ Α εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Β, ἡ διαίρεσις εἶναι δυνατή· ἐὰν ὅμως τὸ Α δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ Β, ἡ διαίρεσις αὐτῶν, ὅπως ὡρίσθη (83) δὲν δύναται νὰ γίνῃ. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ δὲν δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων, ἂν ἡ διαίρεσις τοῦ Α διὰ τοῦ Β εἶναι ἀδύνατος ἢ ὄχι, θὰ ἀρχίσωμεν τὴν ἐκτέλεσιν αὐτῆς κατὰ τὸν προηγουμένως δοθέντα κανόνα, ὡς ἐὰν ἦτο δυνατή, καὶ κατ᾽ αὐτὴν θὰ εὕρωμεν μίαν σειρὰν ἀκεραίων πολυωνύμων πρὸς χ, τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεως καὶ μίαν σειρὰν ὅρων οἵτινες θὰ εἶναι ὅροι τοῦ πηλίκου, ἐὰν ὑπάρχῃ. Ἀλλ᾽ ὁ βαθμὸς πρὸς χ τῆς σειρᾶς τῶν ὑπολοίπων θὰ βαίνῃ ἐλαττούμενος, διότι ἐν ἑκάστῃ διαιρέσει ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν θὰ ὑπάρχει ἐν τῷ ὑπολοίπῳ· ἐὰν δὲ ἡ διαίρεσις δὲν εἶναι δυνατὴ θὰ φθάσωμεν ἀναγκαίως εἰς ἓν ὑπόλοιπον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ ἡ διαίρεσις θὰ διακοπῇ. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ παριστῶμεν διὰ Π τὸ ἄθροισμα τῶν εὑρεθέντων ὅρων, οἵτινες θὰ ἦσαν ὅροι τοῦ πηλίκου, ἐὰν ὑπῆρχε, καὶ διὰ Υ τὸ εὑρεθὲν ὑπόλοιπον, ὅπερ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ Β. Τότε θὰ ἔχωμεν $Α=Β.Π+Υ$, διότι κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ἀφῃρέθησαν ἀπὸ τῶν ὅρων τοῦ Α τὰ γινόμενα τοῦ Β ἐπὶ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ Π· ἤτοι ἀφῃρέθη τὸ γινόμενον Β.Π καὶ ἔμεινε τὸ Υ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν

1) ὅτι διδομένων δύο πολυωνύμων Α καὶ Β, ὅπως ἀνωτέρω, ὑπάρχει ἓν πολυώνυμον Π (καὶ ἓν μόνον) ἀκέραιον πρὸς χ καὶ ἓν πολυώνυμον Υ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ Β καὶ τοιαῦτα ὥστε νὰ εἶναι

$$Α = Β.Π + Υ$$

2) ὅτι τὸ πολυώνυμον Π εὑρίσκεται, ὅταν διαιρεθῇ τὸ Α διὰ τοῦ Β κατὰ τὸν κανόνα τῆς διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων (85) μέχρις ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β. *Τὸ πολυώνυμον τοῦτο Π λέγεται πηλίκον τῆς διαιρέσεως Α : Β. τὸ δὲ Υ ὑπόλοιπον αὐτῆς.* Ἂν τὸ Υ εἶναι 0 ἡ διαίρεσις εἶναι *τελεία* καὶ ἂν ὄχι ἡ διαίρεσις εἶναι *ἀτελής*.

87. Ἤδη μένει ν' ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον Π εἶναι ἓν καὶ μόνον. Διότι ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει ἓν ἄλλο ἀκέραιον πολυώνυμον Π′ καὶ ἑπομένως καὶ ἓν ἄλλο ἀκέραιον πολυώνυμον Υ′ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $Α = Β.Π' + Υ'$ θὰ ἔχωμεν

$$Β.Π + Υ = Β.Π' + Υ'$$

ἢ

$$Β\,(Π - Π') + Υ - Υ' = 0 \qquad (1)$$

ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς: Ἡ διαφορὰ $Υ - Υ'$ εἶναι προφανῶς πολυώνυμον βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ Β. Ἐξ ἄλλου, ἐὰν τὰ πολυώνυμα Π καὶ Π′ δὲν ἦσαν τὰ αὐτά, ἡ διαφορά των $Π - Π'$ θὰ ἦτο ἢ ἓν πολυώνυμον ἢ μία σταθερὰ ποσότης· ἀλλὰ τότε τὸ γινόμενον $Β\,(Π - Π')$ θὰ ἦτο ἓν πολυώνυμον βαθμοῦ τοὐλάχιστον ἴσου μὲ τὸν βαθμὸν τοῦ Β καὶ ἑπομένως ὁ εἰς τὸν μεγαλύτερον βαθμὸν ὅρος αὐτοῦ δὲν θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἐξουδετερωθῇ κατὰ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ὑπὸ οὐδενὸς ὅρου τοῦ πολυωνύμου $Υ - Υ'$. Ἑπομένως τὸ α′ μέλος τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος (1) δὲν θὰ εἶναι δυνατὸν νὰ γίνῃ 0 ἢ ἐὰν εἶναι $Π = Π'$ καὶ $Υ = Υ'$.

Π. δ. 1ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον:

$16α^3 + 32α^2 - 16α^4 + α^7 - 4α^5$ διὰ τοῦ $α^3 - 8$.

$$\begin{array}{l|l}
α^7 - 4α^5 - 16α^4 + 16α^3 + 32α^2 & α^3 - 8 \\ \cline{2-2}
-α^7 \qquad\quad + 8α^4 & α^4 - 4α^2 - 8α + 16 \\ \cline{1-1}
\quad -4α^5 - 8α^4 + 16α^3 + 32α^2 & \\
\quad +4α^5 \qquad\qquad\qquad - 32α^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad -8α^4 + 16α^3 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rr}
+8\alpha^4 & -64\alpha \\
\hline
+16\alpha^3 & -64\alpha \\
-16\alpha^3 & +128 \\
\hline
 & -64\alpha+128
\end{array}
$$

2ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον $2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3$ διὰ τοῦ $\chi-\alpha$

$$
\begin{array}{r|l}
2\alpha\chi^2+\alpha^2\chi+\alpha^3 & \chi-\alpha \\
\cline{2-2}
-2\alpha\chi^2+2\alpha^2\chi & 2\alpha\chi+3\alpha^2 \\
\cline{1-1}
3\alpha^2\chi+\alpha^3 & \\
-3\alpha^2\chi+3\alpha^3 & \\
\cline{1-1}
4\alpha^3 &
\end{array}
$$

3ον) Νὰ διαιρεθῇ τὸ πολυώνυμον

$2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4$ διὰ τοῦ $1-\chi+2\chi^2-7\chi^3$

$$
\begin{array}{r|l}
2-9\chi-5\chi^2+16\chi^3-7\chi^4 & 1-\chi+2\chi^2-7\chi^3 \\
\cline{2-2}
-2+2\chi-4\chi^2+14\chi^3 & 2-7\chi+\ldots \\
\cline{1-1}
-7\chi-9\chi^2+30\chi^3-7\chi^4 & \\
+7\chi-7\chi^2+14\chi^3-49\chi^4 & \\
\cline{1-1}
-16\chi^2+44\chi^3-56\chi^4 & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Παρατήρησις. Ἡ τελευταία διαίρεσις ἐξακολουθεῖ ἐπ' ἄπειρον, διότι τὰ πολυώνυμα εἶναι διατεταγμένα κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ· ἐνῷ, ἐὰν ἦσαν διατεταγμένα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ, θὰ ἐφθάναμεν εἰς ὑπόλοιπον βαθμοῦ κατωτέρου ἢ ὁ διαιρέτης (διότι εἰς ἕκαστην διαίρεσιν ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ διαιρετέου δὲν ὑπάρχει ἐν τῷ ὑπολοίπῳ), ὁπότε ἡ διαίρεσις θὰ διεκόπτετο. Διὰ τοῦτο προτιμότερον ἐν τῇ διαιρέσει νὰ διατάσσωμεν τὰ πολυώνυμα κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

Σημείωσις. Ἐὰν εἰς πολυώνυμον αἱ δυνάμεις τοῦ γράμματος τῆς διατάξεως πολλαπλασιάζωνται οὐχὶ ἐπὶ ἀριθμοὺς ἢ μονώνυμα, ἀλλ' ἐπὶ πολυώνυμα, ἡ διαίρεσις εἶναι βεβαίως περισσότερον ἐπίπονος, ἀλλ' ἡ θεωρία αὐτῆς οὐδόλως μεταβάλλεται· μόνον οἱ πρῶτοι ὅροι, ἐκ τῆς διαιρέσεως τῶν ὁποίων εὑρίσκονται οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου, εἶναι καὶ αὐτοὶ πολυώνυμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

91) Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$(\chi^2-\psi^2):(\chi+\psi)$

$(\chi^2+2\chi+1):(\chi+1)$

$(\chi^3+3\chi^2+3\chi+1):(\chi+1)$

$(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2):(\alpha-\beta)$

$(3\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2):(3\alpha-2\beta)$

$(5\alpha^6+15\alpha^5+5\alpha+15):(\alpha+3)$

$(35\chi^3+47\chi^2+13\chi+1):(5\chi+1)$

$(6\chi^3+\chi^2-29\chi+21):(2\chi-3)$

$(\alpha^3-2\alpha^2\beta-\alpha\beta^2+2\beta^3):(\alpha^2-\beta^2)$

$(6\alpha^5-4\alpha^3\beta-3\alpha^2\beta^3+2\beta^4):(2\alpha^3-\beta^3)$

92) Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$$(\chi^3-\chi^2-5\chi+6):(\chi^2+\chi-3)$$
$$(4\chi^3-16\chi^2+25\chi-25):(2\chi^2-3\chi+5)$$
$$(45\chi^4+18\chi^3+35\chi^2+4\chi-4):(9\chi^3+7\chi-2)$$
$$(21\alpha^4-16\alpha^3\beta+16\alpha^2\beta^2-5\alpha\beta^3+2\beta^4):(3\alpha^2-\alpha\beta-\beta^2)$$
$$(12\alpha^2\chi^7-35\alpha^3\chi^6+34\alpha^4\chi^5-27\alpha^5\chi^4+9\alpha^6\chi^3+\alpha^7\chi^2+6\alpha^9):(4\chi^4-5\alpha\chi^3+3\alpha^2\chi^2-2\alpha^4)$$

93) Ὁμοίως νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις :

$$\left(\frac{4}{5}\chi^2+\frac{7}{3}\chi-2\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{5}\chi-\frac{1}{2}\right) \qquad \left(\frac{3}{2}\chi^2+4\frac{3}{5}\chi\psi-\frac{4}{3}\psi^2\right):\left(2\frac{1}{2}\chi-\frac{2}{3}\psi\right)$$
$$\left(3\frac{3}{4}\psi^2-4\frac{3}{7}\psi-3\frac{3}{7}\right):\left(1\frac{1}{5}+2\frac{1}{4}\psi\right) \qquad \left(\frac{3\chi^2}{5}+\frac{11\chi}{6}-\frac{25}{9}\right):\left(\frac{3\chi}{2}-\frac{5}{3}\right)$$
$$\left(3\chi^5-\frac{37}{15}\chi^4\psi+\frac{102}{5}\chi^3\psi^2-\frac{57}{10}\chi^2\psi^3+\frac{123}{10}\chi\psi^4-3\psi^5\right):\left(3\chi^3-\frac{2}{3}\chi^2\psi+2\chi\psi^2-\frac{1}{2}\psi^3\right)$$
$$(6\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-6\beta^4)\chi^4-(3\alpha^3\beta^2+7\alpha^2\beta^3-24\alpha\beta^4+4\beta^5)\chi^3+(5\alpha^6-\alpha^4\beta^2-20\alpha^2\beta^4-8\beta^6)\chi^2-$$
$$-(3\alpha^5\beta^2+3\alpha^4\beta^3-14\alpha\beta^6-2\beta^7)\chi+\alpha^8-4\beta^8:(2\alpha^2-3\beta^2)\chi^2+(3\alpha\beta^2-\beta^3)\chi+\alpha^4-2\beta^4$$

88. ***Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διὰ $\beta\chi-\alpha$.*** Ἡ ἐφαρμογὴ τῶν προηγουμένων περὶ διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων, εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὸ πολυώνυμον Β εἶναι διώνυμον πρώτου βαθμοῦ πρὸς χ, ὡς τὸ $\beta\chi-\alpha$, ἄγει εἰς ἓν τῶν σπουδαιοτέρων διὰ τὴν ἄλγεβραν θεωρημάτων, περὶ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς χ διὰ τοῦ ὡς ἄνω διωνύμου $\beta\chi-\alpha$.

Ἔστω $\sigma(\chi)$ ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον προκειμένου νὰ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ $\beta\chi-\alpha$, κατατάσσομεν κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος χ. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $\sigma(\chi):(\beta\chi-\alpha)$ θὰ εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ, ἔστω τὸ $\pi(\chi)$, ἐνῷ τὸ ὑπόλοιπον αὐτῆς υ δὲν θὰ περιέχῃ τὸ χ, διότι θὰ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου. Ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα

$$\sigma(\chi)=(\beta\chi-\alpha)\cdot\pi(\chi)+\upsilon$$

ἡ ὁποία ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἑπομένως καὶ διὰ $\chi=\frac{\alpha}{\beta}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ λαμβάνει τιμὴν ὡρισμένην (μὴ περιέχουσαν τὸ χ) τὴν $\sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, τὸ γινόμενον $(\beta\chi-\alpha).\pi(\chi)$ μηδενίζεται, διότι μηδενίζεται εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ, ἤτοι ὁ $\beta\chi-\alpha$, τὸ δὲ υ μένει ἀμετάβλητον. Ὥστε εἶναι $\sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\upsilon$, ἤτοι:

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς χ διὰ τοῦ διωνύμου $\beta\chi-\alpha$ ἰσοῦται μὲ τὴν τιμὴν τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, εἰς ὃ θέτομεν ἀντὶ χ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$.

89. Ἐὰν ἑπομένως ἡ τιμὴ τοῦ $\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι 0, ἤτοι ἐὰν εἶναι $\sigma\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)=\upsilon=0$, συμπεραίνομεν ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο εἶναι διαιρετὸν διὰ $\beta\chi-\alpha$. Ἐπειδὴ δέ, ἐὰν τὸ $\sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\beta\chi-\alpha$, θὰ εἶναι $\upsilon=0$, ἕπεται τὸ

Πόρισμα. *Διὰ νὰ εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ διαιρετὸν διὰ $\beta\chi-\alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα τὸ πολυώνυμον τοῦτο μηδενίζεται, ὅταν ἐν αὐτῷ τεθῇ ἀντὶ χ τὸ $\frac{\alpha}{\beta}$.*

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $\beta=1$, λέγομεν ὅτι:

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $\chi-\alpha$ ἰσοῦται μὲ $\sigma(\alpha)$

καὶ κατὰ συνέπειαν

Διὰ νὰ εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα $\sigma(\alpha)=0$.

Κατὰ ταῦτα τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$$(27\chi^3-18\chi^2+6\chi-1):(3\chi-2) \qquad \text{εἶναι}$$

$$27\left(\frac{2}{3}\right)^3-18\left(\frac{2}{3}\right)^2+6.\frac{2}{3}-1=27.\frac{8}{27}-18.\frac{4}{9}+6.\frac{2}{3}-1=3$$

καὶ τὸ τῆς διαιρέσεως

$$(\chi^5-5\chi^4+3\chi^2-15):(\chi-5) \qquad \text{εἶναι}$$

$$5^5-5.5^4+3.5^2-15=0$$

ἤτοι τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-5$.

90. Ἐπειδὴ $\beta\chi+\alpha=\beta\chi-(-\alpha)$ καὶ $\chi+\alpha=\chi-(-\alpha)$ ἕπεται ὅτι·

Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $\beta\chi+\alpha$ (ἢ διὰ $\chi+\alpha$) ἰσοῦται μὲ $\sigma\left(-\dfrac{\alpha}{\beta}\right)$ (ἢ μὲ $\sigma(-\alpha)$).

Π. δ. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$32\chi^5-24\chi^3+10\chi+25$ διὰ $2\chi+3$ εἶναι

$$32\left(-\frac{3}{2}\right)^5-24\left(-\frac{3}{2}\right)^3+10.\left(-\frac{3}{2}\right)+25=-152.$$

Καὶ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως

$\chi^4-5\chi^3-3\chi^2-7\chi+11$ διὰ $\chi+2$ εἶναι

$$(-2)^4-5(-2)^3-3(-2)^2-7(-2)+11=59$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται.

94) $(\chi^3+2\chi^2+3\chi+4) \quad : \quad (\chi-1)$

95) $(\chi^3-3\chi^2-5\chi+2) \quad : \quad (\chi-2)$

96) $(2\chi^3-4\chi^2+\chi-6) \quad : \quad (\chi+2)$

97) $(\chi^4+5\chi^3-\chi^2-3\chi+7) \quad : \quad (\chi+3)$

98) $(5\chi^3+15\chi^2-5\chi+15) \quad : \quad (5\chi-1)$

99) $(4\chi^4-8\chi^3+8\chi-16) \quad : \quad (4\chi+3)$

100) $(3\chi^3-2\alpha\chi^2-5\alpha^2\chi+4\alpha^3) \quad : \quad (\chi-\alpha)$

101) $[(\chi+\alpha+2\beta)^3-\chi^3-\alpha^3-\beta^3] : (\chi+\alpha)$

91. Προσδιορισμὸς τῶν συντελεστῶν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $\beta\chi-\alpha$. Ἔστω διὰ τὸ ἁπλούστερον τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον

$$A_0\chi^4+A_1\chi^3+A_2\chi^2+A_3\chi+A_4$$

τὸ ὁποῖον διαιροῦμεν διὰ $\beta\chi-\alpha$ καὶ εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{l|l}
A_0\chi^4+A_1\chi^3+A_2\chi^2+A_3\chi+A_4 & \beta\chi-\alpha \\
\hline
-A_0\chi^4+\dfrac{A_0\alpha}{\beta}\chi^3 & \dfrac{A_0}{\beta}\chi^3+\left(\dfrac{A_1}{\beta}+\dfrac{A_0\alpha}{\beta^2}\right)\chi^2+\left(\dfrac{A_2}{\beta}+\dfrac{A_1\alpha}{\beta^2}+\dfrac{A_0\alpha^2}{\beta^3}\right)\chi+\left(\dfrac{A_3}{\beta}+\dfrac{A_2\alpha}{\beta^2}+\dfrac{A_1\alpha^2}{\beta^3}+\dfrac{A_0\alpha^3}{\beta^4}\right) \\
\hline
\left(+A_1+\dfrac{A_0\alpha}{\beta}\right)\chi^3+A_2\chi^2 & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\hline
\upsilon=\dfrac{A_0\alpha^4}{\beta^4}+\dfrac{A_1\alpha^3}{\beta^3}+\dfrac{A_2\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{A_3\alpha}{\beta}+A_4 &
\end{array}$$

Ὥστε:

Ὁ συντελεστὴς τοῦ 1ου ὅρου τοῦ πηλίκου εἶναι $\frac{A_0}{\beta}$

Τοῦ 2ου ὅρου εἶναι $\frac{A_1}{\beta}+\frac{A_0\alpha}{\beta^2}=\left(A_1+\frac{A_0\alpha}{\beta}\right)\cdot\frac{1}{\beta}$

» 3ου » » $\frac{A_2}{\beta}+\frac{A_1\alpha}{\beta^2}+\frac{A_0\alpha^2}{\beta^3}=\left(A_2+\frac{A_1\alpha}{\beta}+\frac{A_0\alpha^2}{\beta^2}\right)\cdot\frac{1}{\beta}$

ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι $\left(A_3+\frac{A_2\alpha}{\beta}+\frac{A_1\alpha^2}{\beta^2}+\frac{A_0\alpha^3}{\beta^3}\right)\cdot\frac{1}{\beta}$

καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι $A_4+\alpha\left(\frac{A_3}{\beta}+\frac{A_2\alpha}{\beta^2}+\frac{A_1\alpha^2}{\beta^3}+\frac{A_0\alpha^3}{\beta^4}\right)$.

Ἤδη, ἐὰν συγκρίνωμεν τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου καὶ μεταξύ των καὶ πρὸς τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων τοῦ διαιρετέου, δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τὰ ἑξῆς:

1) *Ὁ συντελεστὴς τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὸν συντελεστὴν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρετέου διαιρεθέντα διὰ β.*

2) *Ὁ συντελεστὴς τοῦ τυχόντος ὅρου τοῦ πηλίκου εὑρίσκεται, ἐὰν εἰς τὸν συντελεστὴν τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος τὴν αὐτὴν τάξιν ἐν τῷ διαιρετέῳ προσθέσωμεν τὸ γινόμενον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ προηγουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου ἐπὶ α καὶ διαιρέσωμεν ἔπειτα τὸ εὑρισκόμενον ἄθροισμα διὰ β.*

3) *Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἰσοῦται μὲ τὸν τελευταῖον συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ τελευταίου συντελεστοῦ τοῦ πηλίκου ἐπὶ α.*

Παρατηρητέον ὅμως, ὅτι ὁ ἀνωτέρω νόμος ὑποθέτει τὸ διαιρετέον πολυώνυμον πλῆρες. Δι' ὃ, ὅταν δὲν συμβαίνῃ τοῦτο, εἰσάγομεν εἰς τὸν διαιρετέον ὅλας τὰς ἐλλειπούσας δυνάμεις τοῦ χ καὶ ἑκάστην μὲ συντελεστὴν 0.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν τῆς διαιρέσεως $\chi^3-4\chi^2+3\chi-8$ διὰ $2\chi-3$ τὸ πηλίκον ἔχει συντελεστὰς

$$1\text{ον})=\frac{1}{2}\qquad 2\text{ον})=\frac{-4+\frac{1}{2}\cdot 3}{2}=-\frac{5}{4}$$

$$3\text{ον})=\frac{3-\frac{5}{4}\cdot 3}{2}=-\frac{3}{8}\ \text{καὶ}\ \upsilon=-8-\frac{3}{8}\cdot 3=-\frac{73}{8}.$$

Ὥστε τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι $\frac{1}{2}\chi^2 - \frac{5}{4}\chi - \frac{3}{8}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $-\frac{73}{8}$.

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $5\chi^4-4\chi^2+8$ διὰ $3\chi-2$, συμπληροῦμεν πρῶτον τὸν διαιρετέον, ὡς ἀνωτέρω εἴπομεν, καὶ ἔχομεν οὕτω τὴν διαίρεσιν $5\chi^4+0\chi^3-4\chi^2+0\chi+8$ διὰ $3\chi-2$ τῆς ὁποίας τὸ πηλίκον ἔχει συντελεστὰς

$$1\text{ον}) = \frac{5}{3} \quad 2\text{ον}) = \frac{0+\frac{5}{3}\cdot 2}{3} = \frac{10}{9} \quad 3\text{ον}) = \frac{-4+\frac{10}{9}\cdot 2}{3} = -\frac{16}{27}$$

$$4\text{ον}) = \frac{0-\frac{16}{27}\cdot 2}{3} = -\frac{32}{81}$$

Τῆς ἀνωτέρω λοιπὸν διαιρέσεως τὸ πηλίκον εἶναι $\frac{5}{3}\chi^3 + \frac{10}{9}\chi^2 - \frac{16}{27}\chi - \frac{32}{81}$ καὶ τὸ ὑπόλοιπον $8-\frac{32}{81}\cdot 2 = -\frac{584}{81}$.

Διὰ τὴν διαίρεσιν $3\chi^5+7\chi^4+10\chi^2+20$ διὰ $\chi+3=\chi-(-3)$ ἀφοῦ παρατηρήσωμεν ὅτι $\beta=1$, καὶ συμπληρώσωμεν τὸν διαιρετέον $3\chi^5+7\chi^4+0\chi^3+10\chi^2+0\chi+20$, ἔχομεν συντελεστὰς

1ου ὅρου) $= \frac{3}{1} = 3$. 2ου) $7+3(-3)=-2$. 3ου) $0+(-2).(-3)=6$. 4ου) $=10+6(-3)=-8$. 5ου) $=0+(-8).(-3)=24$, ὑπόλοιπον δὲ ἔχομεν $20+24(-3)=-52$.

Ἑπομένως τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι

$$3\chi^4-2\chi^3+6\chi^2-8\chi+24.$$

Σημείωσις. Ὅταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν ἑνὸς πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\alpha$, εὑρίσκομεν, ὡς ἀνωτέρω, τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma(\chi)$ διὰ $\chi-\alpha$. Διότι τοῦτο εἶναι ἡ ζητουμένη τιμή. Ὁ ὡς ἄνω δὲ τρόπος εἶναι ἁπλούστερος ἀπὸ τὸν τρόπον, ὅστις συνίσταται εἰς τὴν ἀντικατάστασιν ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\sigma(\chi)$ τοῦ χ διὰ τοῦ α καὶ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειουμένων πράξεων, ἐκτὸς ἐὰν ὁ ἀριθμὸς α εἶναι ἴσος μὲ ± 1.

92. *Διαίρεσις τῶν $\chi^\mu \pm \alpha^\mu$ διὰ $\chi \pm \alpha$ καὶ ὅπου μ ἀκέραιος θετικός*. 1) Τὸ διώνυμον $\chi^\mu - \alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$, διότι $\alpha^\mu -$

$-\alpha^\mu = 0$. Τὸ δὲ πηλίκον, εὑρισκόμενον ὡς προηγουμένως ἐξετέθη, εἶναι

$$\frac{\chi^\mu-\alpha^\mu}{\chi-\alpha}=\chi^{\mu-1}+\alpha\chi^{\mu-2}+\alpha^2\chi^{\mu-3}+\ldots+\alpha^{\mu-2}\chi+\alpha^{\mu-1}$$

2) Τὸ διώνυμον $\chi^\mu+\alpha^\mu$ δὲν εἶναι γενικῶς διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$, διότι $\alpha^\mu+\alpha^\mu=2\alpha^\mu$· τὸ δὲ πηλίκον ἔχει τὴν ἀνωτέρω μορφήν.

3) Τὸ διώνυμον $\chi^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi+\alpha$, ἐὰν ὁ μ εἶναι ἄρτιος, διότι ἔχομεν $(-\alpha)^\mu-\alpha^\mu$, ὁπότε, ἐὰν $\mu=2\nu$ λαμβάνομεν $(-\alpha)^{2\nu}-\alpha^{2\nu}=0$, ἐὰν δὲ $\mu=2\nu+1$ λαμβάνομεν $(-\alpha)^{2\nu+1}-\alpha^{2\nu+1}=-2\alpha^{\nu+1}$.

Τὰ πηλίκα εἶναι

$$\frac{\chi^{2\nu}-\alpha^{2\nu}}{\chi+\alpha}=\chi^{2\nu-1}-\alpha\chi^{2\nu-2}+\alpha^2\chi^{2\nu-3}-\alpha^3\chi^{2\nu-4}+\ldots-\alpha^{2\nu-1}$$

καὶ $$\frac{\chi^{2\nu+1}-\alpha^{2\nu+1}}{\chi+\alpha}=\chi^{2\nu}-\alpha\chi^{2\nu-1}+\alpha^2\chi^{2\nu-2}-\alpha^3\chi^{2\nu-3}+\ldots+\alpha^{2\nu}$$

4) Τὸ διώνυμον $\chi^\mu+\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi+\alpha$, ὅταν ὁ μ εἶναι περιττός, ἤτοι $\mu=2\nu+1$, διότι $(-\alpha)^{2\nu+1}+\alpha^{2\nu+1}=0$, ἐνῷ ὅταν εἶναι $\mu=2\nu$ εἶναι $(-\alpha)^{2\nu}+\alpha^{2\nu}=2\alpha^{2\nu}$.

Τὰ πηλίκα εἶναι

$$\frac{\chi^{2\nu+1}+\alpha^{2\nu+1}}{\chi+\alpha}=\chi^{2\nu}-\alpha\chi^{2\nu-1}+\alpha^2\chi^{2\nu-2}-\ldots\ldots+\alpha^{2\nu} \text{ καὶ}$$

$$\frac{\chi^{2\nu}+\alpha^{2\nu}}{\chi+\alpha}=\chi^{2\nu-1}-\alpha\chi^{2\nu-2}+\alpha^2\chi^{2\nu-3}-\ldots\ldots-\alpha^{2\nu-1}$$

Παρατηρήσεις. Εἰς τὰς τέσσαρας ὡς ἄνω περιπτώσεις παρατηροῦμεν ὅσον ἀφορᾷ τοὺς συντελεστὰς τῶν ὅρων τῶν πηλίκων, ὅτι ὅλοι εἶναι ἴσοι μὲ 1 καὶ εἶναι ὅλοι θετικοί, ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ $\chi-\alpha$, ἐναλλὰξ δὲ θετικοὶ καὶ ἀρνητικοί, ἐὰν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ $\chi+\alpha$ Εἰς τὴν δευτέραν δὲ αὐτὴν περίπτωσιν ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ πηλίκου ἔχει συντελεστὴν θετικόν, ἐὰν ὁ μ εἶναι περιττὸς καὶ ἀρνητικόν, ἐὰν ὁ μ εἶναι ἄρτιος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρὶς νὰ ἐκτελεσθοῦν αὗται :

102) $\chi^5+8\chi^4+\chi^3-2\chi^2-\chi-1$ διὰ $\chi-2$

103) $3\chi^5-2\chi^4+3\chi^2+\chi-2$ διὰ $\chi-1$

104) $\chi^6-\chi^4+\chi^2-3$ διὰ $\chi+3$

105) $\chi^7-\chi^5+7\chi^3-\chi-5$ διὰ $\chi+4$

106) $\chi^4-2\chi^3+\chi-1$ διὰ $4\chi-1$

107) $5\chi^5-4\chi^4-\chi-10$ διὰ $3\chi+4$

Νὰ εὑρεθοῦν ὁμοίως τὰ πηλίκα καὶ τὰ ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:

108) $(\chi^5\pm\psi^5):(\chi\pm\psi)$

109) $(\chi^6\pm\psi^6):(\chi\pm\psi)$

110) $(\chi^\nu-1):(\chi-1)$

111) $(\chi^{2\nu+1}+1):(\chi+1)$

112) $(\chi^{3\omega}-\psi^{3\omega}):(\chi^\omega-\psi^\omega)$

113) $(\chi^{2\omega}-\psi^{2\omega}):(\chi^2-\psi^2)$

114) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ χ^2+1.

Ἔστω διὰ τὸ ἁπλούστερον

$$\sigma(\chi)=\alpha_0\chi^5+\alpha_1\chi^4+\alpha_2\chi^3+\alpha_3\chi^2+\alpha_4\chi+\alpha_5$$

Τὸ πολυώνυμον τοῦτο γράφομεν ὡς ἄθροισμα δύο πολυωνύμων ἀκεραίων πρὸς χ, ἐξ ὧν τὸ μὲν νὰ περιέχῃ τοὺς ὅρους τοῦ ἀρτίου βαθμοῦ, τὸ δὲ ἄλλο τοὺς ὅρους τοῦ περιττοῦ βαθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν θὰ ἔχωμεν:

$$\sigma(\chi)=(\alpha_1\chi^4+\alpha_3\chi^2+\alpha_5)+(\alpha_0\chi^5+\alpha_2\chi^3+\alpha_4\chi) \text{ ἢ}$$

$$\sigma(\chi)=(\alpha_1\chi^4+\alpha_3\chi^2+\alpha_5)+\chi(\alpha_0\chi^4+\alpha_2\chi^2+\alpha_4) \text{ ἢ}$$

ἐὰν θέσωμεν $\alpha_1\chi^4+\alpha_3\chi^2+\alpha_5=\varphi(\chi^2)$ καὶ

$$\alpha_0\chi^4+\alpha_2\chi^2+\alpha_4=\varphi'(\chi^2)$$

$$\sigma(\chi)=\varphi(\chi^2)+\chi\varphi'(\chi^2).$$

Ἤδη θέτομεν προσωρινῶς $\chi^2=\psi$ καὶ διαιροῦμεν τὰ $\varphi(\psi)$ καὶ $\varphi'(\psi)$ διὰ $\psi+1$.

Ἔχομεν δὲ τότε $\varphi(\psi)=\alpha_1\psi^2+\alpha_3\psi+\alpha_5=(\psi+1)[\alpha_1\psi+(\alpha_3-\alpha_1)]+(\alpha_5-\alpha_3+\alpha_1)=$

$$=(\psi+1)\varphi_1(\psi)+\varphi(-1)$$

$$\varphi'(\psi)=\alpha_0\psi^2+\alpha_2\psi+\alpha_4=(\psi+1)[\alpha_0\psi+(\alpha_2-\alpha_0)]+(\alpha_4-\alpha_2+\alpha_0)=(\psi+1)\varphi'_1(\psi)+\varphi'(-1)$$

ἢ ἐὰν θέσωμεν ἀντὶ ψ τὸ χ^2

$$\varphi(\chi^2)=(\chi^2+1)\,[\alpha_1\chi^2+(\alpha_3-\alpha_1)]+(\alpha_5-\alpha_3+\alpha_1)=(\chi^2+1)\varphi_1(\chi^2)+\varphi(-1)$$

$$\varphi'(\chi^2)=(\chi^2+1)\,[\alpha_0\chi^2+(\alpha_2-\alpha_0)]+(\alpha_4-\alpha_2+\alpha_0)=(\chi^2+1)\varphi'_1(\chi^2)+\varphi'(-1)$$

Ὥστε εἶναι

$$\sigma(\chi)=(\chi^2+1)\varphi_1(\chi^2)+\varphi(-1)+\chi(\chi^2+1)\varphi'_1(\chi^2)+\chi\varphi'(-1)=$$

$$=(\chi^2+1)\,[\varphi_1(\chi^2)+\chi\varphi'_1(\chi^2)]+\varphi(-1)+\chi\varphi'(-1)$$

Ἡ σχέσις δὲ αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma(\chi)$ διὰ χ^2+1 εἶναι $\varphi(-1)+\chi\varphi'(-1)$ ἤτοι τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἂν πρῶτον ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ^2 διὰ τοῦ -1 εἰς τὰ πολυώνυμα $\varphi(\chi^2)$ καὶ $\varphi'(\chi^2)$ καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα τὰς πράξεις τὰς ὁποίας δεικνύει ἡ παράστασις

$$\varphi(-1)+\chi\varphi'(-1).$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν τὸ ζητούμενον ὑπόλοιπον εἶναι

$$(\alpha_1-\alpha_3+\alpha_5)+\chi(\alpha_4-\alpha_2+\alpha_0).$$

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω ὑπόλοιπον εὑρίσκεται, ἂν ἀντικατασταθῇ ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\sigma(\chi)$ τὸ $\chi^{4\mu}$ διὰ τοῦ 1, τὸ $\chi^{4\mu+2}$ διὰ τοῦ -1, τὸ $\chi^{4\mu+1}$ διὰ τοῦ χ καὶ τὸ $\chi^{4\mu+3}$ διὰ τοῦ $-\chi$.

115) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ χ^2-1.

116) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $A\chi^2+B$.

117) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου $\sigma(\chi)$ διὰ $\chi^2\pm\alpha^2$.

Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων, ἄνευ ἐκτελέσεως τῆς πράξεως:

118) $(2\chi^3-4\chi^2-\chi+3):(\chi^2\pm1)$.

119) $(\chi^{11}-\chi^6-\chi^4+\chi^3-\chi+1):(\chi^2\pm1)$.

120) $(\chi^{15}+\chi^{13}-\chi^8-3\chi^6+\chi^4+2\chi^3+4\chi^2+2\chi+1):(\chi^2+1)$.

121) $(\chi^9-\chi^7-3\chi^5+4\chi^3+4\chi^2-\chi+3):(\chi^2-1)$.

93. *Ἀνάλυσις πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων*.— Εἰς τὰ προηγούμενα εἴδομεν μερικὰς περιπτώσεις ἀναλύσεως πολυωνύμου εἰς γινόμενον παραγόντων, ὅπως ἐπὶ π. δ. εἰς τὰς παραστάσεις τῆς μορφῆς $\chi^2-\alpha^2=(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)$, $\chi^2+2\alpha\beta+\beta^2=(\chi\pm\alpha)^2$, $\chi^3\pm3\chi^2\alpha+3\chi\alpha^2+\alpha^3=(\chi\pm\alpha)^3$ ἢ καὶ εἰς τὰ διώνυμα $\chi^\mu-\alpha^\mu$, $\chi^{2\nu+1}$, $\chi^{2\nu}-\alpha^{2\nu}$, τὰ ὁποῖα ἀναλύονται εἰς γινόμενα τῶν διαιρετῶν των, ἐπὶ τὰ πηλίκα τῶν ἀντιστοίχων διαιρέσεων.

Ἐκτὸς ὅμως τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων ἀναγράφομεν καὶ τὰς κάτωθι:

1) Ἐὰν οἱ ὅροι πολυωνύμου δύνανται ν' ἀποτελέσουν ὁμάδας, τῶν ὁποίων ἑκάστη περιέχει παράγοντας κοινούς, θέτομεν αὐτοὺς ἐκτὸς παρενθέσεως. Ἐὰν δὲ αἱ παρενθέσεις αὗται περιέχουν τὴν αὐτὴν παράστασιν θέτομεν καὶ ταύτην ἐκτὸς παρενθέσεως.
π.δ. $\alpha\chi-\beta\chi+\gamma\chi+\alpha\psi-\beta\psi+\gamma\psi=\chi(\alpha-\beta+\gamma)+\psi(\alpha-\beta+\gamma=(\alpha-\beta+\gamma).$
$.(\chi+\psi)$.

2) Ἐὰν τριωνύμου ὁ εἷς ὅρος δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο μονωνύμων, ὧν τὸ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων ὅρων, τότε ἀναλύομεν τὸ τριώνυμον τοῦτο εἰς γινόμενον παραγόντων κατὰ τὸν τρόπον (β').

π χ. $6\chi^2+17\chi+5=6\chi^2+15\chi+2\chi+5=$
$=2\chi(3\chi+1)+5(3\chi+1)=(3\chi+1).(2\chi+5)$.

ἀντεκατεστάθη δὲ ὁ 17χ διὰ τοῦ $15\chi+2\chi$, διότι $15\chi.2\chi=30\chi^2$, $6\chi^2.5=$ $=30\chi^2$.

Ἐπίσης $9\chi^2+14\chi-8=9\chi^2+18\chi-4\chi-8=9\chi(\chi+2)-4(\chi+2)=(\chi+$ $+2).(9\chi-4)$.

3) Ἐὰν ὁ εἷς ὅρος τριωνύμου δύναται ν' ἀντικατασταθῇ διὰ τοῦ ἀθροίσματος ἢ τῆς διαφορᾶς δύο ἄλλων, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ εἷς μετὰ

τῶν δύο ἄλλων ὅρων τοῦ τριωνύμου νὰ ἀποτελῇ τέλειον τετράγωνον, ὁ δὲ ἄλλος νὰ εἶναι καὶ οὗτος τέλειον τετράγωνον μὲ σημεῖον ἀντίθετον τοῦ σημείου τοῦ πρώτου (τελείου τετραγώνου), τότε θὰ ἔχωμεν διαφορὰν δύο τετραγώνων, ἣν ἀναλύομεν κατὰ τὰ γνωστά.

π.χ. $49\chi^2+42\chi-16=49\chi^2+42\chi+9-25=(7\chi+3)^2-5^2=$
$=(7\chi+3+5).(7\chi+3-5)=(7\chi+8).(7\chi-2).$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις ;

122) $2\alpha\chi-3\beta\psi-2\beta\chi+3\alpha\psi$
123) $15\alpha\mu-10\alpha\rho-3\beta\mu+2\beta\rho$
124) $(\alpha+\beta)(\chi+\psi)-\gamma\chi-\gamma\psi$
125) $(2\chi+\psi)(\alpha-\beta)+2\chi+\psi$
126) $(\alpha+2\beta)^2-5\alpha-10\beta$
137) $\chi(\psi+\omega-\alpha)-\omega(\chi-\psi+\alpha)$

Ν' ἀναλυθοῦν ὁμοίως αἱ παραστάσεις ;

128) α^4-9
129) $3\alpha^2-27$
130) $25-(4-\chi)^2$
131) $9(5\chi-4\psi)^2-64\chi^2$
132) $81\alpha^2-16(2\alpha-3\chi)^2$
133) $(\alpha+3\beta)^2-9(\beta-\gamma)^2$
134) $(4\alpha+3\beta)^2-16(\alpha-\chi)^2$

Ν' ἀναλυθοῦν ὁμοίως αἱ παραστάσεις :

135) $\alpha^2-6\alpha+9$
136) $36\chi^2+49-84\chi$
137) $48\chi\psi-64\chi^2-9\psi^2$
138) $\chi^3+4\chi^2+4\chi$
139) $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$
140) $(\alpha-\beta)^2\chi^2-2(\alpha-\beta)\gamma\chi^2+\gamma^2\chi^2$

Ν' ἀναλυθοῦν ὁμοίως αἱ παραστάσεις

141) $25\alpha^2-\gamma^2+10\alpha+1$
142) $9\chi^2-4\psi^2+4\phi\psi-\phi^2$
143) $25\alpha^2-9\psi^2-12\chi\psi-4\chi^2$
144) $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$
145) $\chi^2+\psi^2-\omega^2-\phi^2+(\chi\psi+\omega\phi)$
146) $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2-2(\alpha\gamma-\beta\delta)$

Ὁμοίως ν' ἀναλυθοῦν αἱ παραστάσεις

147) $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$
148) $8-12\chi+6\chi^2-\chi^3$
149) $\chi^6-3\chi^4\psi^2+3\chi^2\psi^4-\psi^6$
150) $\chi^4+4\chi^3+6\chi^2+5\chi+1$
151) $\chi^4+9\chi^3\psi+27\chi^2\psi^2+27\chi\psi^3$
152) $\alpha^2+4\alpha\beta+6\alpha\gamma+4\beta^2+12\beta\gamma+9\gamma^2$

Τὰ κάτωθι τριώνυμα ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα

153) $\chi^2+5\chi+6$
154) $\chi^2-5\chi+6$
155) $3\chi^2-5\chi+2$
156) $\chi^2+6\chi+8$
157) $\chi^2-\chi-12$
158) $\chi^2-7\chi\psi+12\psi^2$
159) $\chi^2-3\chi\psi-10\psi^2$
160) $\chi^2-3\chi^3\psi-18\chi^2\psi^2$

Ν' ἀναλυθοῦν ὁμοίως τὰ τριώνυμα

161) $\alpha^2+2\alpha\beta-15\beta^2$
162) $15\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta$

163) $9\chi^2+6\chi\psi-3\psi^2$

164) $4\chi^2-12\chi\psi-27\chi\psi^2$

165) $\chi^4+\chi^2\psi^2+\psi^4$

166) $\chi^8+10\chi^4+21$

167) $\chi^{10}+12\chi^5+27$

168) $15-10\chi^3-25\chi^6$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων.

94. *Ἀκέραιον πολυώνυμον.* — Γνωρίζομεν, ὅτι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $A.\chi^\mu$, ὅπου Α εἶναι ὡρισμένος ἀριθμὸς οἱοσδήποτε μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τοῦ χ καὶ μ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Ἐπίσης γνωρίζομεν, ὅτι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον πολλῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν χ, ψ, φ... εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $A.\chi^\mu.\psi^\nu\varphi^\rho$ ...., ὅπου Α εἶναι ἀριθμὸς ὡρισμένος μὴ ἐξαρτώμενος ἐκ τῶν μεταβλητῶν χ, ψ, φ....., οἱ δὲ μ, ν, ρ εἶναι ἀριθμοὶ ἀκέραιοι θετικοὶ ἢ καὶ μηδέν.

Τὰ ὡς ἄνω ἀναφερόμενα πολυώνυμα θεωροῦνται ἀνηγμένα, ἤτοι μὴ ἔχοντα ὁμοίους ὅρους καὶ διατεταγμένα.

95. *Πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα καὶ ἐκ ταυτότητος μηδέν.* — Δύο ἀκέραια πολυώνυμα τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται ἐκ τῶν αὐτῶν ἀκριβῶς ὅρων λέγονται *ἐκ ταυτότητος ἴσα.* Εἶναι δὲ πρόδηλον, ὅτι δύο πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἔχουν ἴσας ἀριθμητικὰς τιμάς, δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχουν.

Ἐὰν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων ἐξ ὧν ἀποτελεῖται ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν, τὸ πολυώνυμον τοῦτο λέγεται *ἐκ ταυτότητος μηδέν.* Εἶναι δὲ πρόδηλον, ὅτι *ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος μηδὲν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν,* ἤτοι εἶναι μηδὲν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχει.

96. *Θεώρημα.* *Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον σ(χ) εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Κατὰ πρῶτον θ' ἀποδείξωμεν τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ὡς ἀληθῆ διὰ διώνυμον πρώτου βαθμοῦ $\alpha_0\chi+\alpha_1$ (1).

Εἶναι δὲ τοῦτο καθ' ὑπόθεσιν ἴσον μὲ μηδὲν δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Θὰ εἶναι ἑπομένως τοῦτο μηδὲν καὶ ἐὰν εἰς αὐτὸ θέσωμεν ἀντὶ χ, λχ ($\lambda\neq1$). Τότε δὲ θὰ ἔχωμεν

$$\alpha_0\lambda\chi+\alpha_1=0$$

Ἤδη ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὸ $\alpha_0\lambda\chi+\alpha_1$ ἀπὸ τοῦ διωνύμου (1) τὸ ὁποῖον προηγουμένως ἐπολλαπλασιάσαμεν ἐπὶ λ, εὑρίσκομεν

$$\alpha_1(\lambda-1)=0$$

Εἶναι ὅμως φανερόν, ὅτι διὰ νὰ συμβῇ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $\alpha_1=0$. Τὸ δοθὲν λοιπὸν διώνυμον (1) ἀνάγεται εἰς τὸν ὅρον $\alpha_0\chi$, ὅστις πρέπει νὰ εἶναι 0 δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ π. χ. διὰ $\chi=1$. Ὥστε εἶναι $\alpha_0=0$

Ἤδη θ' ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης εἶναι ἀληθὴς δι' ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ−1, θὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ πολυώνυμον βαθμοῦ μ Πρὸς τούτοις ἔστω τὸ πολυώνυμον

$$\alpha_0\chi^\mu+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\alpha_2\chi^{\mu-2}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\chi+\alpha_\mu=0 \quad (2)$$

δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι τοῦτο 0 καὶ ὅταν εἰς αὐτὸ θέσωμεν ἀντὶ χ, λχ ($\lambda\neq1$). Οὕτω δὲ λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα

$$\alpha_0\lambda^\mu\chi^\mu+\alpha_1\lambda^{\mu-1}\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_{\mu-1}\lambda\chi+\alpha^\mu=0 \quad (3)$$

Ἤδη πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ λ^μ καὶ ἀπὸ τὴν προκύπτουσαν ἀφαιροῦμεν τὴν (3), ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ταυτότητα

$$\alpha_1(\lambda^\mu-\lambda^{\mu-1})\chi^{\mu-1}+\alpha_2(\lambda^\mu-\lambda^{\mu-2})\chi^{\mu-2}+\ldots+\alpha^{\mu-1}(\lambda^\mu-\lambda)\chi+$$
$$+\alpha_\mu.(\lambda^\mu-1)=0$$

τῆς ὁποίας τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ−1, καὶ δι' ὃ ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης ὑπετέθη ἀληθής. Εἶναι λοιπὸν τοῦτο ἐκ ταυτότητος μηδέν. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι, διὰ νὰ συμβαίνῃ τοῦτο, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$. . , .$\alpha_{\mu-1}=0$, $\alpha_\mu=0$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν πολυώνυμον (2) ἀνάγεται εἰς τὸν ὅρον $\alpha_0\chi^\mu$, ὅστις δὲν δύναται νὰ εἶναι 0, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ ἢ ἐὰν εἶναι $\alpha_0=0$

Ἀληθεύει λοιπὸν ἡ ἀνωτέρω ἰδιότης καὶ διὰ πολυώνυμον βαθμοῦ μ. Ὥστε ἀφοῦ ἡ ἰδιότης αὕτη ἀπεδείχθη ἀληθὴς διὰ πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ, εἶναι ἀληθὴς καὶ διά πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ. Καὶ ἀφοῦ εἶναι ἀληθὴς διὰ πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ, εἶναι ἀληθὴς καὶ διὰ πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ κ.ο.κ.

97. Θεώρημα. *Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον σ(χ,ψ,φ...) εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχει, εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Τὸ θεώρημα τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι γενίκευσις τοῦ προηγουμένου. Θὰ τὸ ἀποδείξωμεν δὲ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Ἤτοι θ' ἀποδείξωμεν, ὅτι ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀληθὲς διὰ ρ μεταβλητάς, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ ρ+1

Ἔστω ἤδη διὰ τὸ ἁπλούστερον, ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ μὲ τρεῖς μεταβλητὰς χ, ψ, φ

$$\alpha_1\chi^2+\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\beta_2\varphi\chi+2\beta_3\chi\psi+2\gamma_1\chi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta=0$$

εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν δι' οἱασδήποτε τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τὰς ὁποίας περιέχει.

Θεωροῦμεν τὰς μεταβλητὰς ψ, φ ὡς ἐχούσας τιμὰς ὡρισμένας καὶ διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ χ (κατιούσας ἢ ἀνιούσας). Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε

$$\alpha_1\chi^2+2(\beta_3\psi+\beta_2\varphi+\gamma_1)\chi+\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta=0$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πολυώνυμον τοῦτο, εἶναι ἴσον μὲ μηδὲν δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Εἶναι ἑπομένως ἐκ ταυτότητος μηδὲν καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι

$$\alpha_1=0 \quad \beta_3\psi+\beta_2\varphi+\gamma_1=0 \text{ καὶ}$$

$$\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta=0$$

αἱ ἰσότητες δὲ αὗται ἀληθεύουν οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν αἱ μεταβληταὶ ψ καὶ φ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὑπετέθη ἀληθὲς διὰ δύο μεταβλητάς, ἕπεται ὅτι τὰ πολυώνυμα

$$\beta_3\psi+\beta_2\varphi+\gamma_1, \quad \alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν, ἤτοι οἱ συντελεσταὶ αὐτῶν

$$\alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \text{ καὶ } \delta$$

εἶναι ὅλοι ἴσοι μὲ μηδέν. Ἐπειδὴ δὲ ὡς ἀνωτέρω εἴδομεν εἶναι καὶ $\alpha_1=0$, συνάγομεν ὅτι τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι ἀληθὲς διὰ τρεῖς μεταβλητάς. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἀπεδείχθη προηγουμένως ἀληθὲς διὰ μίαν μεταβλητήν, ἕπεται ὅτι εἶναι ἀληθὲς διὰ δύο μεταβλητάς, καὶ ἐν συνεχείᾳ ὅτι εἶναι ἀληθὲς διὰ τρεῖς μεταβλητὰς κ.ο.κ

Σημείωσις. Ἡ ὡς ἄνω πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ εἰς τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα. Διότι ἐὰν π.χ. εἶναι

$$\alpha_1\chi^2+\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\beta_2\varphi\chi+2\beta_3\chi\psi=0$$

καὶ δώσωμεν εἰς μίαν τῶν μεταβλητῶν, ἔστω τὴν φ, τιμὴν σταθεράν, ἐνῷ αἱ ἄλλοι δύο χ, ψ δύνανται νὰ λάβουν οἱασδήποτε τιμάς, ἀγόμεθα εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ πολυωνύμου μὲ δύο μεταβλητάς, τὸ ὁποῖον ἐὰν εἶναι ἴσον μὲ μηδέν, θὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

98. Θεώρημα.—*Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα σ(χ) καὶ φ(χ) εἶναι ἴσα δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.*

Διότι, ἡ διαφορὰ σ(χ)—φ(χ) εἶναι ἴση μὲ μηδὲν δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Εἶναι ἑπομένως αὕτη πολυώνυμον ἐκ ταυτότητος μηδέν. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τρόπον τῆς ἀφαιρέσεως δύο πολυωνύμων εὐκόλως συνάγομεν, ὅτι εἷς οἱοσδήποτε ὅρος τῆς διαφορᾶς εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν ὅρων τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ τῶν δύο πολυωνύμων. Ἀλλ' ὁ οἱοσδήποτε οὗτος ὅρος τῆς διαφορᾶς εἶναι ἴσος μὲ μηδέν. Ὥστε οἱ ὅροι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσοι, οὔτε δὲ εἶναι δυνατὸν νὰ ὑπάρχῃ εἰς ἓν τῶν πολυωνύμων ὅρος, ὅστις δὲν θὰ ὑπάρχῃ καὶ εἰς τὸ ἄλλο Τὰ πολυώνυμα λοιπὸν $\sigma(\chi)$ καὶ $\varphi(\chi)$ εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ καὶ ἴσα ὅρον πρὸς ὅρον.

99. Θεώρημα. *Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα τῶν μεταβλητῶν χ, ψ, φ... εἶναι ἴσα δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν τούτων, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.*

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι γενίκευσις τοῦ προηγουμένου. Θὰ ἀποδείξωμεν δέ, ὡς ἀπεδείξαμεν τὸ Θ. 97, ἤτοι θ' ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἀληθὲς διὰ ρ μεταβλητάς, θὰ εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ $\rho+1$.

Ἔστω διὰ τὸ ἁπλούστερον τὰ δύο ἀκέραια πολυώνυμα

$$A_1\chi^2+A_2\psi^2+A_3\varphi^2+2B_1\psi\varphi+2B_2\varphi\chi+2B_3\chi\psi+2\Gamma_1\chi+2\Gamma_2\psi+2\Gamma_3\varphi+\Delta$$

$$\alpha_1\chi^2+\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\beta_2\varphi\chi+2\beta_3\chi\psi+2\gamma_1\chi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta$$

τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν χ, ψ, φ.

Ἤδη θεωροῦμεν τὰς μεταβλητὰς ψ, φ ὡς ἐχούσας τιμὰς ὡρισμένας καὶ διατάσσομεν τὰ δοθέντα δύο πολυώνυμα κατὰ τὰς αὐτὰς δυνάμεις τοῦ χ. Θὰ ἔχωμεν δὲ τότε

$$A_1\chi^2+2(B_3\psi+B_2\varphi+\Gamma_1)\chi+A_2\psi^2+A_3\varphi^2+2B_1\psi\varphi+2\Gamma_2\psi+2\Gamma_3\varphi+\Delta$$

$$\alpha_1\chi^2+2(\beta_3\psi+\beta_2\varphi+\gamma_1)\chi+\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta$$

Ἀλλὰ τὰ πολυώνυμα ταῦτα πρὸς χ εἶναι ἴσα δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Ὥστε εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἤτοι εἶναι

$$A_1=\alpha_1 \quad B_3\psi+B_2\varphi+\Gamma_1=\beta_3\psi+\beta_2\varphi+\gamma_1 \quad \text{καὶ} \qquad (1)$$

$$A_2\psi^2+A_3\varphi^2+2B_1\psi\varphi+2\Gamma_2\psi+2\Gamma_3\varphi+\Delta =$$
$$=\alpha_2\psi^2+\alpha_3\varphi^2+2\beta_1\psi\varphi+2\gamma_2\psi+2\gamma_3\varphi+\delta \qquad (2)$$

Αἱ ἰσότητες ὅμως (1) καὶ (2) ἀληθεύουν διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν ψ, φ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὑπετέθη ἀληθὲς διὰ δύο μεταβλητάς, ἕπεται ὅτι τὰ πολυώνυμα (1) ὡς καὶ τὰ (2) εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἤτοι εἶναι

$A_2=\alpha_2$, $A_3=\alpha_3$, $B_1=\beta_1$, $B_2=\beta_2$, $B_3=\beta_3$, $\Gamma_1=\gamma_1$, $\Gamma_2=\gamma_2$, $\Gamma_3=\gamma_3$ καὶ $\Delta=\delta$

ἀλλ' εἶναι καὶ $A_1=\alpha$. Τὸ ἀνωτέρω λοιπὸν θεώρημα ἀληθεύει καὶ διὰ τρεῖς μεταβλητάς. Ἐπειδὴ δὲ τοῦτο ἀπεδείχθη ἀληθὲς διὰ μίαν μεταβλητήν, ἕπεται ὅτι εἶναι ἀληθὲς καὶ διὰ δύο μεταβλητὰς καὶ ἐν συνεχείᾳ καὶ διὰ τρεῖς μεταβλητὰς κ.ο.κ.

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εὐκόλως δεικνύεται, ὅτι ἀληθεύει καὶ διὰ τὰ ὁμογενῆ πολυώνυμα.

100. Θεώρημα. *Ἵνα ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον σ(χ) εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου (χ—α)(χ—β)(χ—γ) . . . . . (χ—μ), τῶν α,β,γ . . . μ ὄντων ἀριθμῶν διαφόρων πρὸς ἀλλήλους, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ χ—α, χ—β, χ—γ, . . . χ—μ.*

I Ἐὰν τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ σ(χ) διὰ τοῦ γινομένου (χ—α)(χ—β)(χ—γ) . . . . (χ—μ) εἶναι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον π(χ), ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$σ(χ)=(χ-α)(χ-β)(χ-γ) \dots (χ-μ)π(χ)$$

αὕτη δὲ δεικνύει, ὅτι τὸ σ(χ) ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ χ—α ἐπὶ τὸ πολυώνυμον (χ—β)(χ—γ) . . . (χ—μ). π(χ), ἤτοι ὅτι σ(χ) εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ χ—α. Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται, ὅτι τὸ σ(χ) εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ χ—β, χ—γ κτλ.

II. Ἐὰν τὸ σ(χ) εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ χ—α, χ—β, χ—γ . . . . χ—μ καὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως σ(χ) : (χ—α) εἶναι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον π(χ), ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$σ(χ)=(χ-α).π(χ) \qquad (1)$$

εἰς τὴν ὁποίαν θέτομεν ἀντὶ τοῦ χ τὸ β. Ἀλλὰ καθ' ὑπόθεσιν τὸ σ(χ) εἶναι διαιρετὸν διὰ χ—β· ὥστε ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου τούτου διὰ χ=β εἶναι 0, ἤτοι εἶναι σ(β)=0 ἢ

$$(β-α)π(β)=0$$

ἐπειδὴ δὲ β—α εἶναι διάφορον τοῦ 0, ἕπεται ὅτι π(β)=0 ἤτοι ὅτι ἡ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου π(χ) διὰ χ=β εἶναι 0. Ἑπομένως τὸ π(χ) εἶναι διαιρετὸν διὰ χ—β, ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως π(χ) : (χ—β) εἶναι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $π_1(χ)$ ἔχομεν

$$π(χ)=(χ-β)\,π_1(χ)$$

Ἤδη ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν ταυτότητα (1) τὸ π(χ) διὰ τοῦ ἴσου του $(χ-β)π_1(χ)$ λαμβάνομεν

$$σ(χ)=(χ-α)(χ-β)π_1(χ)$$

ἀλλὰ τὸ σ(χ) εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ χ—γ· ὥστε εἶναι

$$σ(γ)=(γ-α)(γ-β).π_1(γ)=0$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης συνάγεται ὅτι $π_1(γ)=0$, ἀφοῦ τὰ διώνυμα γ—α καὶ γ—β εἶναι διάφορα τοῦ 0. Ὥστε τὸ $π_1(χ)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ χ—γ. Ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $π_1(χ) : (χ-γ)$ εἶναι τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $π_2(χ)$ ἔχομεν τὴν ταυτότητα

$$π_1(χ)=(χ-γ).π_2(χ)$$ ἑπομένως καὶ τὴν

$$σ(χ)=(χ-α)(χ-β)(χ-γ).π_2(χ).$$

Ἐξακολουθοῦντες οὕτω εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ $\sigma(\chi)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\mu)$ ἐπὶ ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ. Τὸ ἀκέραιον δὲ τοῦτο πολυώνυμον εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma(\chi)$ διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)(\chi-\gamma)\ldots(\chi-\mu)$. Τὸ $\sigma(\chi)$ λοιπὸν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ γινομένου.

101. Πόρισμα.—*Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ βαθμοῦ μ μηδενίζεται διὰ μ τιμὰς τοῦ χ, $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots \alpha_\mu$ διαφόρους πρὸς ἀλλήλας, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ τὸ γινόμενον*

$$A_0(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)\ldots(\chi-\alpha_\mu)$$

A_0 ὄντος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^μ ἐν τῷ δοθέντι πολυωνύμῳ.

Τὸ πολυώνυμον τοῦτο

$$\sigma(\chi)=A_0\chi^\mu+A_1\chi^{\mu-1}+A_2\chi^{\mu-2}+\ldots+A_\mu \qquad (1)$$

ὡς διαιρούμενον χωριστὰ διὰ $\chi-\alpha_1$, $\chi-\alpha_2$, $\ldots\chi-\alpha_\mu$, διαιρεῖται καὶ διὰ τοῦ γινομένου

$$(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)\ldots(\chi-\alpha_\mu)$$

ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ, βαθμοῦ μ. Τὸ πηλίκον λοιπὸν τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma(\chi)$ διὰ τοῦ γινομένου τούτου εἶναι βαθμοῦ $\mu-\mu=0$, ἤτοι εἶναι ποσότης σταθερά, ἔστω Β. Ὥστε εἶναι

$$\sigma(\chi)=B(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)\ldots(\chi-\alpha_\mu) \qquad (2)$$

ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ πολυώνυμα (1) καὶ (2) εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα. Οἱ μέγιστοι λοιπὸν ὅροι αὐτῶν $A_0\chi^\mu$ καὶ $B\chi^\mu$ εἶναι ἴσοι. Ἤτοι εἶναι

$$A_0\chi^\mu=B\chi^\mu \quad \text{καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι } A_0=B.$$

102. Θεώρημα.—*Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ $(\chi-\alpha)^\kappa$, $(\chi-\beta)^\lambda$, $(\chi-\gamma)^\rho \ldots$, α,β,γ ὄντων ἀριθμῶν διαφόρων πρὸς ἀλλήλους καὶ $\kappa,\lambda,\rho,\ldots$ ἀκεραίων θετικῶν, εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου*

$$(\chi-\alpha)^\kappa.(\chi-\beta)^\lambda.(\chi-\gamma)^\rho \ldots$$

Ἀφοῦ τὸ $\sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\chi-\alpha)^\kappa$ ἔχομεν

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^\kappa.\pi_1(\chi) \qquad (1)$$

καὶ ὅπου $\pi_1(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ διαιρετὸν διὰ $\chi-\alpha$.

Ἀλλὰ τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ $(\chi-\beta)^\lambda$· ὥστε εἶναι

$$\sigma(\chi)=(\chi-\beta)^\lambda.\rho(\chi) \qquad (2)$$

καὶ ὅπου $\rho(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον μὴ διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἀλλ' ἂν εἰς τὴν ταυτότητα (2) θέσωμεν ἀντὶ χ, β εὑρίσκομεν $\sigma(\beta)=0$, ὁπότε ἐκ τῆς ταυτότητος (1) προκύπτει

$$(\beta-\alpha)^{\kappa}.\pi_1(\beta)=0. \quad \text{ἤτοι}$$

$$\pi_1(\beta)=0 \quad \text{διότι εἶναι } \beta-\alpha\neq 0.$$

Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι $\pi_1(\beta)=0$, ἕπεται ὅτι τὸ πολυώνυμον $\pi_1(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἐὰν δὲ λ' εἶναι ἡ μεγαλυτέρα δύναμις τοῦ $\chi-\beta$, ἥτις διαιρεῖ τὸ $\pi_1(\chi)$ θὰ εἶναι $\pi_1(\chi)=(\chi-\beta)^{\lambda'}.\pi_2(\chi)$ καὶ ὅπου τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\pi_2(\chi)$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἀλλὰ τότε ἡ ταυτότης (1) γράφεται

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda'}.\pi_2(\chi) \quad \text{ἢ}$$

ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν ταυτότητα (2)

$$(\chi-\beta)^{\lambda}.\rho(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda'}.\pi_2(\chi).$$

Ἤδη λέγομεν ὅτι $\lambda=\lambda'$. Διότι οὔτε τὸ $\rho(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω, οὔτε καὶ τὸ γινόμενον $(\chi-\alpha)^{\kappa}.\pi_2(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ ἰδίου διωνύμου $\chi-\beta$. Διότι ἂν τὸ γινόμενον τοῦτο ἦτο διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$, θὰ ἦτο

$$(\beta-\alpha)^{\kappa}.\pi_2(\beta)=0.$$

Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον καὶ διότι εἶναι $\beta-\alpha\neq 0$ καὶ διότι ὡς ἐλέχθη ἀνωτέρω τὸ $\pi_2(\chi)$ δὲν εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi-\beta$. Ἡ δύναμις λοιπὸν λ' εἶναι ἡ μεγαλυτέρα δύναμις τοῦ $\chi-\beta$ ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ πολυώνυμον $\sigma(\chi)$. Ὥστε εἶναι $\lambda'=\lambda$, ἑπομένως καὶ

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda}.\pi_2(\chi)$$

Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ $\pi_2(\chi)$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τῆς δυνάμεως $(\chi-\gamma)^{\rho'}$ ἴσης μὲ τὴν $(\chi-\gamma)^{\rho}$ καὶ ἑπομένως ὅτι

$$\sigma(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda}.(\chi-\gamma) \;.\pi_3(\chi)$$

Οὕτω δὲ δυνάμεθα νὰ ἐξακολουθήσωμεν καὶ διὰ τοὺς ὑπολοίπους διαιρέτας τοῦ $\sigma(\chi)$, ὁπότε θὰ εὕρωμεν

$$\sigma(\chi)=\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda}.(\chi-\gamma)^{\rho}\ldots\pi_{\tau}(\chi).$$

Τὸ $\sigma(\chi)$ λοιπὸν εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου

$$(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda}.(\chi-\gamma)^{\rho}\ldots.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν μ εἶναι ὁ βαθμὸς τοῦ $\sigma(\chi)$ θὰ εἶναι

$$\kappa+\lambda+\rho+\ldots.. \leqslant \mu.$$

Εἰς ἣν ὅμως περίπτωσιν εἶναι

$$\kappa+\lambda+\rho+\ldots.. =\mu$$

τὸ $\pi_\tau(\chi)$ θὰ εἶναι ποσότης σταθερά, ἤτοι ἀνεξάρτητος τοῦ χ, ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\chi)=A(\chi-\alpha)^{\kappa}(\chi-\beta)^{\lambda}(\chi-\gamma)^{\rho}\ \ldots \qquad (3)$$

103. Θεώρημα. — *Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον τριῶν μεταβλητῶν σ(χ, ψ, φ) εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ χ—ψ, ψ—φ, φ—χ, εἶναι διαιρετὸν καὶ διὰ τοῦ γινομένου (χ—ψ)(ψ—φ)(φ—χ)*

Διατάσσομεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον σ(χ, ψ, φ) κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ καὶ διαιροῦμεν αὐτὸ διὰ χ—ψ. Τὸ πηλίκον δὲ τῆς διαιρέσεως αὐτῆς θὰ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον καὶ πρὸς τὰς τρεῖς μεταβλητὰς χ, ψ, φ. Διότι πρὸς χ μὲν θὰ εἶναι ἀκέραιον, ἐπειδὴ τὸ σ(χ, ψ, φ) εἴπομεν ὅτι εἶναι διαιρετὸν διὰ χ—ψ. Ὡς πρὸς δὲ τὰς ἄλλας μεταβλητὰς ψ, φ θὰ εἶναι ἀκέραιον, διότι οἱ ὅροι τοῦ σ(χ, ψ, φ) εἶναι τῆς μορφῆς $A\chi^{\mu}\psi^{\nu}\varphi^{\rho}$ (§ 94) καὶ ἑπομένως οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου θὰ εἶναι τῆς μορφῆς

$$A\chi^{\mu}\psi^{\nu}\varphi^{\rho} : \chi = A\chi^{\mu-1}\cdot\psi^{\nu}\cdot\varphi^{\rho}.$$

Ἂν ἤδη τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως

$$\sigma(\chi,\psi,\varphi) : (\chi-\psi)$$

παραστήσωμεν διὰ τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου καὶ πρὸς τὰς τρεῖς μεταβλητὰς π(χ,ψ,φ) θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\chi,\psi,\varphi) = (\chi-\psi).\pi(\chi,\psi,\varphi).$$

Ἀλλὰ τὸ δοθὲν πολυώνυμον διαιρεῖται καὶ διὰ ψ—φ· ἑπομένως μηδενίζεται, ἐὰν εἰς αὐτὸ θέσωμεν ἀντὶ ψ, φ. Τότε δὲ θὰ εἶναι

$$\sigma(\chi,\varphi,\varphi)=(\chi-\varphi).\pi(\chi,\varphi,\varphi)=0.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ ἡ μεταβλητὴ χ δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμήν, δυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὸ χ διάφορον τοῦ φ. Ὥστε $\chi-\varphi\neq0$ καὶ ἑπομένως π(χ, φ, φ)=0, ἐξ οὗ συνάγομεν ὅτι τὸ π(χ, ψ, φ) εἶναι διαιρετὸν διὰ ψ—φ. Ἐὰν δὲ προχωρήσωμεν ὡς εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν διαιρετῶν χ—α, χ—β, χ—γ τοῦ Θ. 100, θὰ καταλήξωμεν εἰς τὴν ταυτότητα

$$\sigma(\chi,\psi,\varphi)=(\chi-\psi)(\psi-\varphi)(\varphi-\chi).P(\chi,\psi,\varphi)$$

(ὅπου P(χ,ψ,φ) ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ, ψ, φ), ἡ ὁποία ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις φανερὸν εἶναι, ὅτι δύναται νὰ ἐπεκταθῇ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν περισσοτέρων τῶν τριῶν μεταβλητῶν

104. Θεώρημα. — *Ἐὰν ἀκέραιον πολυώνυμον σ(χ) βαθμοῦ μ μηδενίζεται διὰ τιμὰς τοῦ χ διαφόρους πρὸς ἀλλήλας καὶ πλείονας τοῦ μ εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.*

Ἔστω ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον βαθμοῦ μ μηδενίζεται διὰ τὰς $\mu+1$ τιμὰς τοῦ χ, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\mu, \alpha_{\mu+1}$ καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι διάφοροι πρὸς ἀλλήλας· ἀλλὰ κατὰ τὸ πόρισμα 101 θὰ εἶναι

$$\sigma(\chi)=A_0(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)\ldots\ldots(\chi-\alpha_\mu) \qquad (1)$$

Ὅμως τὸ σ(χ) μηδενίζεται καὶ διὰ $\chi=\alpha_{\mu+1}$, ὥστε εἶναι

$$\sigma(\alpha_{\mu+1})=A_0(\alpha_{\mu+1}-\alpha_1)(\alpha_{\mu+1}-\alpha_2)\ldots(\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu)=0.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ὅλοι οἱ παράγοντες $\alpha_{\mu+1}-\alpha_1$ $\alpha_{\mu+1}-\alpha_2$, ...$\alpha_{\mu+1}-\alpha_\mu$ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός. Ὥστε μηδὲν εἶναι ὁ A_0. Ἀλλὰ τὸ σ(χ) εὑρίσκεται ὅταν τὸ πολυώνυμον, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τῆς εὑρέσεως τοῦ γινομένου $(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)\ldots(\chi-\alpha_\mu)$, πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ A_0, ἤτοι ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου τούτου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ μηδέν. Ἀλλὰ τότε ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τοῦ σ(χ) θὰ εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν, ἤτοι τὸ σ(χ) εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

105. Πόρισμα.— *Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα $\sigma_1(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$, ἀμφότερα βαθμοῦ μ, λαμβάνουν τὴν αὐτὴν ἀντιστοίχως ἀριθμητικὴν τιμὴν διὰ τιμὰς τοῦ χ διαφόρους πρὸς ἀλλήλας καὶ πλείονας τοῦ μ, εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα.*

Διότι ἡ διαφορὰ αὐτῶν $\sigma_1(\chi)-\sigma_2(\chi)$ εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς χ βαθμοῦ τὸ πολὺ ἴσου μὲ μ· μηδενίζεται δὲ τοῦτο διὰ τιμὰς τοῦ χ πλείονας τοῦ μ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Τὰ δύο λοιπὸν πολυώνυμα $\sigma_1(\chi)$, $\sigma_2(\chi)$ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα (§ 98).

106. Θεώρημα.— *Ἐὰν δύο ἀκέραια πολυώνυμα $\sigma_1(\chi)$ καὶ $\sigma_2(\chi)$, ἀμφότερα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μ, μηδενίζονται διὰ μ τιμὰς τοῦ χ διαφόρους πρὸς ἀλλήλας, ἔχουν τοὺς συντελεστὰς τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ χ ἀναλόγους.*

Ἐὰν αἱ ὡς ἄνω τιμαὶ τοῦ χ εἶναι αἱ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_\mu$, ἔχομεν τὰς ταυτότητας

$$\sigma_1(\chi)=A_0(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)\ldots(\chi-\alpha_\mu) \qquad A_0\neq0$$
$$\sigma_2(\chi)=B_0(\chi-\alpha_1)(\chi-\alpha_2)(\chi-\alpha_3)\ldots(\chi-\alpha_\mu) \qquad B\neq0$$

ἐξ ὧν διὰ διαιρέσεως λαμβάνομεν $\dfrac{\sigma_1(\chi)}{\sigma_2(\chi)}=\dfrac{A_0}{B_0}$ καὶ ἐκ ταύτης τὴν ταυτότητα $B_0\sigma_1(\chi)-A_0\sigma_2(\chi)=0$ (1), ἥτις εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν. Οἱ συντελεσταὶ λοιπὸν τοῦ πολυωνύμου τὸ ὁποῖον αὕτη ἐκφράζει εἶναι ἴσοι μὲ μηδέν. Ὥστε ἐὰν π. χ. A_ν εἶναι ὁ συντελεστὴς τῆς δυνάμεως $\chi^{\mu-\nu}$ ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\sigma_1(\chi)$ καὶ B_ν ὁ συντελεστὴς τῆς αὐτῆς δυνάμεως $\chi^{\mu-\nu}$ ἐν τῷ πολυωνύμῳ $\sigma_2(\chi)$, θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ $\chi^{\mu-\nu}$ ἐν τῷ πολυωνύμῳ (1) τὴν ἰσότητα $B_0A_\nu - A_0B_\nu = 0$. ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\frac{A_\nu}{B_\nu} = \frac{A_0}{B_0}$.

Σημείωσις. Τὰ A_ν καὶ B_ν πρέπει νὰ εἶναι διάφορα τοῦ 0· ἄλλως τε εἶναι φανερὸν ὅτι ἐὰν ὁ εἷς ἐκ τῶν συντελεστῶν A_ν καὶ B_ν εἶναι 0 καὶ ὁ ἄλλος θὰ εἶναι 0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

169) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $5\chi^3-3\chi^2-5\chi+3$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου $(\chi-1)(\chi+1)$.

170) Τὸ πολυώνυμον $\chi^3+4\chi^2+\chi-6$, τὸ ὁποῖον μηδενίζεται διὰ $\chi=1$, $\chi=-2$ καὶ $\chi=-3$, ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον.

171) Ὁμοίως ν' ἀναλυθῇ τὸ πολυώνυμον

$$4\chi^5-28\chi^4+76\chi^3-100\chi^2+64\chi-16$$

τὸ ὁποῖον εἶναι διαιρετὸν χωριστὰ διὰ $(\chi-1)^3$ καὶ $(\chi-2)^2$.

172) Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha-\beta)$, $(\beta-\gamma)$, $(\gamma-\alpha)$ εἶναι παράγοντες τοῦ πολυωνύμου $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$.

173) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi^3+\psi^3+\varphi^3-3\chi\psi\varphi$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi+\psi+\varphi$.

174) Νὰ δειχθῇ ὅτι $(\chi+\alpha+\beta)^\mu-\chi^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$, ἐὰν μ περιττὸς ἀριθμός.

175) Νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi-\beta$, $\chi-\gamma$ εἶναι παράγοντες τοῦ πολυωνύμου $\chi^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\chi)+\gamma^2(\chi-\beta)$ καὶ κατόπιν ν' ἀναλυθῇ τοῦτο εἰς γινόμενον.

176) Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τῆς ταυτότητος

$$(\chi-\alpha)(\beta-\gamma)+(\chi-\beta)(\gamma-\alpha)+(\chi-\gamma)(\alpha-\beta)=0$$

177) Ἐκ τοῦ ἄνω πολυωνύμου νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις τῶν ταυτοτήτων

$$(\beta-\gamma)+(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)=0 \quad \text{(τοῦ Chasles)}$$

$$\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)=0 \quad \text{(τοῦ Euler)}$$

178) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν α, β, γ, ἵνα τὸ πολυώνυμον $\chi\psi+\alpha\chi+\beta\psi+\gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

107. Τὸ πηλίκον δύο οἱωνδήποτε ἀλγεβρικῶν παραστάσεων παρίσταται ὡς ἀλγεβρικὸν κλάσμα ἔχον ἀριθμητὴν τὸν διαιρετέον καὶ παρονομαστὴν τὸν διαιρέτην. Οὕτως ἔχομεν:

$$(3\alpha^2+2\beta^2):\ \alpha\beta=\frac{3\alpha^2+2\beta^2}{\alpha\beta}\quad \text{καὶ}\ (\chi^2+\chi\psi+\psi^2):(\alpha\chi-\beta\psi)=$$

$$=\frac{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}{\alpha\chi-\beta\psi}.$$

108. Προηγουμένως (§ 33) εἴπομεν, ὅτι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων ἀληθεύουν καὶ εἰς τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα τῶν ὁποίων ὅροι εἶναι ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί. Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι ἀληθεύουν αὗται καὶ ὅταν οἱ ὅροι των εἶναι οἱαιδήποτε ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις, διότι, ὡς καὶ προηγουμένως εἴπομεν, ἀριθμοὺς παριστοῦν αὗται. Ἑπομένως ὅλαι αἱ ἁπλοποιήσεις καὶ αἱ πράξεις αἱ ὁποῖαι γίνονται ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων γίνονται καὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν. Οὕτω δὲ δυνάμεθα νὰ μετασχηματίζωμεν ἢ νὰ τρέπωμεν ταῦτα εἰς ἄλλα κλάσματα ἴσα.

109. ***Ἁπλοποίησις***.—1) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα:

$$\frac{20\alpha^5\beta^2\gamma}{15\alpha^3\beta\gamma^3\delta}.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παράγοντες $5\alpha^3\beta\gamma$ εἶναι κοινοὶ παράγοντες τῶν ὅρων αὐτοῦ. Ἐὰν διαιρέσωμεν λοιπὸν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος αὐτοῦ διὰ τοῦ μονωνύμου $5\alpha^3\beta\gamma$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{20\alpha^5\beta^2\gamma}{15\alpha^3\beta\gamma^3\delta}=\frac{4\alpha^2\beta}{3\gamma^2\delta}.$$

2) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα:

$$\frac{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι

$$\chi^2-2\chi\psi+\psi^2=(\chi-\psi)^2=(\chi-\psi)(\chi-\psi)$$

καὶ ὅτι $$\chi^2-\psi^2=(\chi-\psi)(\chi+\psi).$$

Ὥστε εἶναι $\dfrac{\chi^2-2\chi\psi+\psi^2}{\chi^2-\psi^2}=\dfrac{(\chi-\psi)(\chi-\psi)}{(\chi-\psi)(\chi+\psi)}=\dfrac{\chi-\psi}{\chi+\psi}.$

110. Πρόσθεσις καὶ ἀφαίρεσις κλασμάτων.— Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\gamma}{\delta},\ \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Πρὸς τοῦτο θὰ τὰ τρέψωμεν εἰς ὁμώνυμα, μὲ κοινὸν παρονομαστὴν τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν· θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\gamma}{\delta}+\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\alpha\delta\zeta}{\beta\delta\zeta}+\frac{\gamma\beta\zeta}{\beta\delta\zeta}+\frac{\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}=\frac{\alpha\delta\zeta+\gamma\beta\zeta+\varepsilon\beta\delta}{\beta\delta\zeta}.$$

2) Νὰ προστεθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ \frac{\beta}{\alpha-\beta},\ \frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο θὰ λάβωμεν ὡς κοινὸν παρονομαστὴν ὄχι τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν, ἀλλὰ τὸ διώνυμον $\alpha^2-\beta^2$, διότι τοῦτο διαιρεῖται καὶ δι' $\alpha+\beta$ καὶ δι' $\alpha-\beta$· οὕτως ἔχομεν:

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\beta(\alpha+\beta)}{\alpha^2-\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=$$

$$=\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2+\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}=\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

3) Νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3},\qquad \frac{1}{\alpha+\beta}.$$

Εἰς αὐτὰ κοινὸς παρονομαστὴς θὰ ληφθῇ ὁ

$$\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν:

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}-\frac{1}{\alpha+\beta}=\frac{2\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^3}-\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^3}=$$

$$=\frac{2\alpha\beta-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=\frac{-\alpha^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}=-\frac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha+\beta)^3}.$$

111. Πολλαπλασιασμὸς κλασμάτων.—1) Νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{\alpha}{\chi+\psi},\quad \frac{\chi-\psi}{\beta}.$$

Ἔχομεν $\frac{\alpha}{\chi+\psi}\cdot\frac{\chi-\psi}{\beta}=\frac{\alpha(\chi-\psi)}{\beta(\chi+\psi)}$.

2) Ὁμοίως νὰ πολλαπλασιασθοῦν τὰ κλάσματα:

$$\frac{12\chi\psi}{\chi^2-\psi^2},\ \frac{\chi-\psi}{9\psi\varphi}$$

Ἔχομεν $\frac{12\chi\psi}{\chi^2-\psi^2}\cdot\frac{\chi-\psi}{9\psi\varphi}=\frac{12\chi\psi(\chi-\psi)}{9\psi\varphi(\chi^2-\psi^2)}=\frac{4\chi}{3\varphi(\chi+\psi)}$.

112. Διαίρεσις κλασμάτων.—1) Νὰ γίνῃ ἡ διαίρεσις

$$\frac{\chi^2-\psi^2}{3\alpha\beta}:\frac{2\chi-2\psi}{15\alpha^2}.$$

Τὸ ζητούμενον πηλίκον εἶναι

$$\frac{\chi^2-\psi^2}{3\alpha\beta}\cdot\frac{15\alpha^2}{2(\chi-\psi)}=\frac{15\alpha^2(\chi^2-\psi^2)}{6\alpha\beta(\chi-\psi)}=\frac{5\alpha(\chi+\psi)}{2\beta}.$$

113. Σύνθετα κλάσματα.—Τὸ πηλίκον

$$\frac{1}{\alpha+\beta}:\frac{1}{\alpha-\beta}$$

παρίσταται διὰ τοῦ συνθέτου κλάσματος

$$\frac{\frac{1}{\alpha+\beta}}{\frac{1}{\alpha-\beta}}$$

Ἵνα ἓν σύνθετον κλάσμα τραπῇ εἰς ἁπλοῦν ἢ διαιροῦμεν τὸν ἀριθμητὴν αὐτοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του ἢ πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων αὐτοῦ ἢ ἐπὶ ἁπλουστέραν παράστασιν, ἥτις διαιρεῖται ὑπὸ τῶν παρονομαστῶν τούτων.

Οὕτως ἔχομεν:

1) $$\frac{\frac{1}{\alpha+\beta}}{\frac{1}{\alpha-\beta}}=\frac{1}{\alpha+\beta}:\frac{1}{\alpha-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\ \text{ἢ}\ \frac{\frac{1}{\alpha+\beta}.(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\frac{1}{\alpha-\beta}.(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

2) $$\frac{\beta+\frac{\alpha}{\beta}}{\alpha-\frac{\beta}{\alpha}}=\left(\beta+\frac{\alpha}{\beta}\right):\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\frac{\beta^2+\alpha}{\beta}:\frac{\alpha^2-\beta}{\alpha}=\frac{\alpha(\alpha+\beta^2)}{\beta(\alpha^2-\beta)}$$

ἤ
$$\frac{\left(\beta+\frac{\alpha}{\beta}\right)\alpha\beta}{\left(\alpha-\frac{\beta}{\alpha}\right)\alpha\beta}=\frac{\alpha\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2\beta-\beta^2}=\frac{\alpha(\alpha+\beta^2)}{\beta(\alpha^2-\beta)}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι ἀλγεβρικὰ κλάσματα

179) $\frac{24\alpha^2\beta\chi}{12\alpha\beta^2}$ $\quad \frac{-5\alpha^3\beta^4\chi}{35\alpha^2\beta^4\chi^2}$ $\quad \frac{27\chi^3\psi^4\varphi^2}{-18\chi\psi^2\varphi^4}$ $\quad \frac{-\chi^3\psi^2\varphi}{\varphi\psi^2\chi^3}$

180) $\frac{\chi^2-\chi\psi}{\chi\psi-\psi^2}$ $\quad \frac{3\chi\psi-3\chi}{9\psi^2-9\psi}$ $\quad \frac{\alpha^2\chi-\alpha\chi^2}{\chi^2-\alpha^2}$ $\quad \frac{\chi^2-9}{6\chi+18}$

181) $\frac{\chi^2-\psi^2}{(\chi-\psi)^2}$ $\quad \frac{\chi^4-\alpha^4}{\chi^2+\alpha^2}$ $\quad \frac{\chi^3-\psi^3}{\chi^2-\psi^2}$ $\quad \frac{(\chi-\psi)^3}{(\psi-\chi)^3}$

182) $\frac{\chi^2-2\chi+1}{\chi^2-1}$ $\quad \frac{\chi^2-4\chi+3}{1-\chi^2}$ $\quad \frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi^2-6\chi+8}$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις

183) $\frac{3}{\alpha}-\frac{2}{\beta}$ $\quad \frac{\alpha}{4\chi}-\frac{\beta}{12\chi}$ $\quad \frac{\chi}{5}+\frac{\psi}{3}$ $\quad \frac{2\chi}{3}-\frac{3\psi}{5}$

184) $\frac{3}{\chi}+\frac{4}{\psi}+\frac{7}{\varphi}$, $\frac{1}{\chi\psi}+\frac{1}{\psi\varphi}+\frac{1}{\varphi\chi}$, $\frac{\chi}{\psi\varphi}-\frac{\psi}{\chi\varphi}+\frac{\varphi}{\chi\psi}$

185) $\frac{2}{\chi+1}+\frac{3}{\chi-1}$, $\frac{2}{(\chi-1)^3}+\frac{1}{(\chi-1)^2}$, $\frac{1}{\chi^2-\alpha^2}+\frac{1}{(\chi+\alpha)^2}+\frac{1}{(\chi-\alpha)^2}$

186) $\frac{1}{(\chi-2)(\chi-3)}+\frac{2}{(\chi-1)(3-\chi)}+\frac{1}{(\chi-1)(\chi-2)}$

187) $\frac{\alpha^2\chi^2}{\alpha^2-\chi^2}+\frac{\alpha^3+\alpha^3\chi}{\alpha^2+2\alpha\chi+\chi^2}-\frac{\alpha^2-2\alpha\chi}{\alpha-\chi}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα τῶν κάτωθι πολλαπλασιασμῶν καὶ κατόπιν νὰ ἁπλοποιηθοῦν ταῦτα.

188) $\frac{\alpha^3}{\beta}\cdot\frac{\beta^2}{\alpha\chi}$, $-\frac{2\alpha\beta\chi}{\psi}\cdot\frac{3\varphi}{\alpha\beta\chi}$, $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\beta-\alpha}{2(\alpha^2-\beta^2)}$

189) $\frac{\alpha^3-\alpha\beta^2}{\beta^2\gamma-\beta\gamma^2}\cdot\frac{\beta^2-\gamma^2}{\alpha^4-\beta^4}$, $\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\varphi}\right).\chi\psi\varphi$, $\left(\alpha+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha}\right)\alpha$

190) $\frac{\mu^2\nu}{\alpha^2\beta}\cdot\frac{2\alpha\beta^2}{9\chi\psi}\cdot\frac{\alpha\chi\psi}{\mu\nu^2}$, $\quad \frac{\chi^2-\psi^2}{\chi}\cdot\frac{5}{\chi+\psi}\cdot\frac{3\chi}{25(\chi-\psi)}$

191) $(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ $\quad \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\right)\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)+1$

192) $\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+1\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις

193) $\frac{5\alpha\beta}{9\chi\psi}:\frac{2\alpha\beta}{9\chi^2\psi^2}$ $\qquad \frac{9\alpha^2\beta^2}{5\chi^2\psi}:\frac{3\alpha\beta}{20\chi^2\psi^2}$ $\qquad \frac{35\alpha\chi}{6\psi}:7\alpha\psi$

194) $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}:\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2-\beta^2}$, $\qquad \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha-\beta}:(\alpha+\beta)$, $\qquad (\alpha+\beta):\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta}$

195) $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\chi^2-\psi^2}:\frac{\alpha-\beta}{\chi+\psi}$, $\qquad \frac{\chi\psi^2}{\alpha-\beta}:\frac{\chi^2\psi}{\beta-\alpha}$, $\qquad \frac{14\alpha(\chi-\psi)}{3\chi\psi}\cdot\frac{7\beta(\psi-\chi)}{9\gamma\chi}$

196) $\left(\frac{\alpha\chi}{\beta\psi}-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\chi}{\psi}\right):\frac{\alpha^2\chi}{\beta\psi^2}$, $\qquad \frac{(\alpha+\gamma)^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}:\frac{\alpha\beta-\beta^2+\beta\gamma}{\alpha^2+\alpha\beta-\beta\gamma}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

197) $$\frac{\alpha^2+4\alpha-21}{\alpha+4}\cdot\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2+4\alpha+4}:\frac{\alpha-4}{\alpha+2}$$

198) $$(\chi^2+2\chi\psi-\psi^2)\left(\frac{\chi}{\chi-\psi}-\frac{\psi}{\chi+\psi}\right):\left(\frac{\chi}{\chi-\psi}+\frac{\psi}{\chi+\psi}\right)$$

199) $$(\psi\varphi+\varphi\chi+\chi\psi)\left(\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\varphi}\right)-\chi\psi\varphi\left(\frac{1}{\chi^2}+\frac{1}{\psi^2}+\frac{1}{\varphi^2}\right)$$

200) $$\left(\frac{\chi^2}{\psi^2}-1\right)\left(\frac{\chi}{\chi-\psi}-1\right)+\left(\frac{\chi^3}{\psi^3}-1\right)\left(\frac{\chi^2+\chi\psi}{\chi^2+\chi\psi+\psi^2}-1\right)$$

Ν' ἁπλοποιηθοῦν τὰ κάτωθι κλάσματα

201) $\dfrac{\frac{\chi}{\psi}+1}{\frac{\chi}{\psi}-1}$, $\qquad \dfrac{\alpha}{\alpha+\frac{\gamma}{\delta}}$, $\qquad \dfrac{\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}}$, $\qquad \dfrac{\frac{\alpha^2}{\beta}-\frac{\beta^2}{\alpha}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}$

202) $\dfrac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta+\gamma}}$, $\qquad \dfrac{1+\frac{1}{\chi-1}}{1-\frac{1}{\chi+1}}$, $\qquad \dfrac{\chi-2-\frac{\chi^2-5\chi}{\chi-3}}{\chi+\frac{3\chi}{\chi-3}}$

203) $\dfrac{\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}-\frac{1}{\chi\psi}}{\chi+\psi-1}$, $\qquad \dfrac{\frac{\chi}{\psi}+\frac{\psi}{\varphi}+\frac{\varphi}{\chi}}{\frac{\chi^2}{\psi\varphi}+\frac{\psi^2}{\chi\varphi}+\frac{\varphi^2}{\chi\psi}}$, $\qquad \dfrac{\frac{\alpha}{2\beta}+\frac{\beta}{3\gamma}+\frac{\gamma}{4\alpha}}{\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}+\frac{\beta^2}{\alpha\gamma}+\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}}$

204) $\dfrac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{1}{(\alpha+\beta)^2}+\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}}$ $\qquad \dfrac{\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\right)}{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{\beta}{\alpha^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΜΕΙΚΤΟΙ.—Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν κάτωθι παραστάσεων

205) $\frac{\alpha^{\mu}.\beta^{\mu-2}.(1-\gamma)^2}{\alpha^{\mu-1}.\beta^{\mu}.(\gamma-1)^3}$ $\qquad$ 206) $\frac{\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)^7}{\alpha^{\mu+2}.\beta^{\mu+2}(\beta-\alpha)^4}$ $\qquad$ 207) $\left(\frac{\alpha^{-2}.\beta^5.\gamma^0}{\chi^{-2}.\psi^{-4}}\right)^2$

208) $\left(\frac{\alpha^0.\beta^{-2}.\gamma^3}{\chi^2.\psi^{-1}}\right)^{-2}$ $\qquad$ 209) $\frac{\alpha^3.\beta^{-4}.\gamma^2}{\chi^{-1}.\psi^{-2}}:\frac{\chi^3.\psi^2}{\alpha^{-3}.\beta^3.\gamma^{-3}}$ $\qquad$ 210) $\frac{\alpha^{\mu}.\beta^{-\nu}}{\chi^{\nu}.\psi^{-\mu}}:\frac{\chi^{-\mu}.\psi^{\nu}}{\alpha^{-\mu}.\beta^{\nu}}$

211) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$(5\chi+3\psi)^4-(5\psi+3\phi)^3+(9\phi-\chi)^2 \text{ διὰ } \chi=\frac{1}{4},\quad \psi=-\frac{1}{12},\quad \omega=\frac{17}{36}$$

212) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$\frac{3}{4}(8\chi-24\psi)-\frac{5}{6}(12\chi+18\psi)-7(3\chi-8\psi) \text{ διὰ } \chi=-\frac{1}{5},\quad \psi=\frac{1}{23}$$

213) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$,

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)=4\beta^2\gamma^2$$

214) Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$$

Ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι πολυώνυμα

215) $\alpha^3-\beta^3+\gamma^3+3\alpha\beta\gamma$

216) $\chi^3+8\psi^3+\phi^3-6\chi\psi\phi$

Ν' ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις

217) $\chi^3+11\chi-6(\chi^2+1)$

218) $2\chi^3+5\chi^2+\chi-2$

219) $\chi^2+\chi-10+\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\chi^2}$

220) $\chi^2-5\chi-10-\dfrac{10}{\chi}+\dfrac{4}{\chi^2}$

221) $\chi^3-5\chi-\dfrac{5}{\chi}+\dfrac{1}{\chi^3}$

222) $\chi^4+3\chi^2-8+\dfrac{3}{\chi^2}+\dfrac{1}{\chi^4}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα

223) $[(\chi^2+\chi+1)^2-(\chi^2-\chi+1)^2].[(2\chi^2+\chi-2)^2-(2\chi^2-\chi-2)^2]$

224) $[(3\alpha+\beta)^2-(\alpha+3\beta)^2].[(3\alpha-\beta)^2-(\alpha-3\beta)^2].(\alpha^2+\beta^2)^2$

225) $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).(\alpha-\beta+\gamma).(\alpha-\beta-\gamma)$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων

226) $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2+2\alpha\beta-2\gamma\delta):(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

227) $(\chi^2+2\chi\psi+\psi^2+\chi+\psi-6):(\chi+\psi-2)$

228) $[(\chi^2-\psi^2)^3-\phi^6]:(\chi^2-\psi^2-\phi^2)$

229) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $(\chi+\psi)^\nu-\chi^\nu-\psi^\nu$ εἶναι διαιρετὸν α) διὰ $\chi\psi(\chi+\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)$ ὅταν ὁ ν (ἀκέραιος καὶ θετικὸς) εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 μεῖον 1 καὶ β) διὰ $\chi\psi(\chi+\psi)(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)^2$ ὅταν ὁ ν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6 σὺν 1. (Cauchy)

230) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\chi^{14}-7\chi^8+7\chi^6-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\chi^2-1)^3$· καὶ γενικῶς ὅτι $\chi^{4\nu+2}-(2\nu+1)\chi^{2\nu+2}+(2\nu+1)\chi^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\chi^2-1)^3$.

(É. Catalan)

231) Ἐὰν υ εἶναι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $\mu:\nu$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(\chi^\mu-\alpha^\mu):(\chi^\nu-\alpha^\nu)$ εἶναι $\alpha^{\mu-\upsilon}.(\chi^\upsilon-\alpha^\upsilon)$.

232) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἵνα $\chi^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $\chi^\nu-\alpha^\nu$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἵνα τὸ μ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ν.

233) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\nu\chi^{\nu+1}-(\nu+1)\chi^\nu+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ $(\chi-1)^2$ καὶ ἔπειτα νὰ προσδιορισθῇ τὸ πηλίκον.

234) Ν' ἀναλυθῇ $(1+\chi+\chi^2+\ldots+\chi^\nu)^2-\chi^\nu$ εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων.

235) Ν' ἀναλυθῇ $(1+\chi+\chi^2+\ldots+\chi^\nu)^\mu-\chi^\nu$ εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων πολυωνύμων. (E. Catalan)

236) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta+\gamma^2-\alpha\gamma-\beta\gamma}+\frac{\alpha+\gamma}{\alpha\gamma+\beta^2-\alpha\beta-\beta\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma+\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma}$$

237) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta^2-(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{\alpha-\beta}{\gamma^2-(\alpha-\beta)^2}$

238) Ν' ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα

$$\frac{\dfrac{1}{\chi-\alpha}-\dfrac{1}{\chi+\alpha}-\dfrac{2\alpha}{\chi^2+\alpha^2}}{\dfrac{1}{\chi^3-\alpha^3}-\dfrac{1}{\chi^3+\alpha^3}}$$

239) Νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\frac{(\alpha+\beta)^3-\gamma^3}{\alpha+\beta-\gamma}+\frac{(\beta+\gamma)^3-\alpha^3}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{(\gamma+\alpha)^3-\beta^3}{\gamma+\alpha-\beta}=2(\alpha+\beta+\gamma)^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$$

240) Νὰ μετασχηματισθῇ $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)$ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

241) Νὰ μετασχηματισθῇ $(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)(\varepsilon^2+\eta^2)$ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγώνων

ΒΙΒΛΙΟΝ Β΄.

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Ἐξισώσεις τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

114. ***Ὁρισμοί.***—Εἴδομεν προηγουμένως (§ 65) ὅτι ἡ ἰσότης ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων τὰ ὁποῖα περιέχει λέγεται ταυτότης. Αἱ ταυτότητες δὲ προκύπτουν διὰ τῶν διαφόρων μετασχηματισμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, οἱ ὁποῖοι γίνονται δυνάμει τῶν πράξεων.

Ἤδη ἂς λάβωμεν δύο τυχούσας ἀλγεβρικὰς παραστάσεις, π.χ. τὰς $5\chi+4$ καὶ $7\chi-2$, καὶ ἂς συνδέσωμεν αὐτὰς μὲ τὸ σημεῖον τῆς ἰσότητος, ὁπότε θὰ ἔχωμεν $5\chi+4=7\chi-2$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἰσότης αὐτὴ ἀληθεύει μόνον διὰ $\chi=3$, διότι τότε εἶναι $5.3+4=7.3-2$, ἐνῷ διὰ $\chi=2,4$ κ.τ.λ. εἶναι $10+4>14-2$ καὶ $20+4<28-2$ κ.τ.λ.

Αἱ τοιαῦται ἰσότητες καλοῦνται ἐξισώσεις. Γενικῶς δέ: *Ἐξίσωσιν καλοῦμεν τὴν ἰσότητα, τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἔχουν γράμματα καὶ ἡ ὁποία ἀληθεύει, ὅταν τὸ γράμμα ἢ τὰ γράμματα λάβουν καταλλήλους τιμάς.*

Τοιαύτη εἶναι ἡ ἰσότης $\chi^2-3\chi=10$, ἥτις ἀληθεύει διὰ $\chi=5$ καὶ διὰ $\chi=-2$, διότι $5^2-3.5=10$ καὶ $(-2)^2-3(-2)=10$. Τὰ γράμματα τῆς ἐξισώσεως, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἀντικατασταθοῦν μὲ ὡρισμένους ἀριθμούς, ἵνα ἀληθεύσῃ ἡ ἰσότης, λέγονται ***ἄγνωστοι*** τῆς ἐξισώσεως. Οἱ δὲ ὡρισμένοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν ἀντικαταστήσουν τοὺς ἀγνώστους, ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, λέγονται ***λύσεις*** ἢ ***ῥίζαι*** τῆς ἐξισώσεως. Ἐὰν δὲ τοιοῦτοι ἀριθμοὶ δὲν ὑπάρχουν, ἡ ἐξίσωσις λέγεται *ἀδύνατος*.

Οἱ ἄγνωστοι παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου φ, χ, ψ, ω.

Ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τῶν ἀγνώστων λέγεται καὶ αὕτη λύσις τῆς ἐξισώσεως. Εἶναι δὲ ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τὸ κυριώτατον ἔργον τῆς ἀλγέβρας, διότι εἰς τοῦτο ἀνάγεται, ὡς θὰ ἴδωμεν, ἡ λύσις τῶν προβλημάτων.

115. ***Διάφοροι κατηγορίαι ἐξισώσεων.***— Αἱ ἐξισώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν ὑπὸ διαφόρους μορφάς· οὕτω π. χ. 1) Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον ὡς εἶναι αἱ :

$$2\chi+5=9, \quad \chi^2-4=21 \text{ κτλ.}$$

ἢ καὶ μὲ δύο, τρεῖς κτλ. ἀγνώστους ὡς εἶναι αἱ :

$$\chi+\psi=10, \quad \chi+\varphi+\psi-15=42, \quad \chi^2-\psi^2=5\omega \text{ κτλ.}$$

2) Ἔχομεν τὰς ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν οὐδένα ἄγνωστον εἰς τὸν παρονομαστήν, λέγονται δὲ διὰ τοῦτο *ἀκέραιαι*, ὡς εἶναι ἡ ἐξίσωσις $7\chi+13=15\chi-3$. Ἐνῷ αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἄγνωστον εἰς τὸν παρονομαστήν, λέγονται *κλασματικαί*. Κλασματικὴ ἐξίσωσις εἶναι π. χ. ἡ

$$\frac{8}{\chi+1}=\frac{3\chi}{2\chi-1}.$$

116. ***Ἰσοδύναμοι ἐξισώσεις.***— Αἱ ἐξισώσεις $3\chi+1=13$ καὶ $5\chi-3=17$ εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι ἔχουν τὴν αὐτὴν ρίζαν 4. Δύο ἐξισώσεις, ὅταν ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας, ἤτοι ὅταν αἱ ρίζαι τῆς πρώτης εἶναι ρίζαι τῆς δευτέρας καὶ ἀντιστρόφως, λέγονται *ἰσοδύναμοι*. Ὥστε αἱ ἀνωτέρω δύο ἐξισώσεις εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ λύσις μιᾶς ἐξισώσεως δὲν εἶναι πάντοτε εὔκολος. Διὰ τοῦτο μετασχηματίζομεν αὐτὴν διαδοχικῶς εἰς ἄλλας ἰσοδυνάμους ἐξισώσεις, μέχρις οὗ εὕρωμεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον, τῆς ὁποίας ἡ λύσις εἶναι προφανής, ὡς π. χ. εἶναι ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως $\chi=5$, τῆς ὁποίας ἡ ρίζα εἶναι 5. Ὁ μετασχηματισμὸς μιᾶς ἐξισώσεως εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον στηρίζεται ἐπὶ τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων.

Γενικαὶ ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

117. ***Θεώρημα.***—*Ἐὰν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἢ ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $A(\chi, \psi, \varphi...)=B(\chi, \psi, \varphi...)$, περιέχουσα τοὺς ἀγνώστους $\chi, \psi, \varphi...$ καὶ τὴν ὁποίαν συντομώτερον παριστῶμεν ὡς ἑξῆς : $A=B$ (1). Ἐὰν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Γ προκύπτει ἡ ἐξίσωσις $A+\Gamma=B+\Gamma$ (2). Λέγομεν δὲ ἤδη ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι, ἐὰν δι' ἁρμοδίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (1) γίνουν ἀριθμοὶ ἴσοι, διὰ τὰς ἰδίας τιμὰς αὐτῶν καὶ τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) θὰ εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Διότι εἰς ἴσους ἀριθμοὺς προσεθέσαμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Γ. Ὥστε πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι λύσις καὶ τῆς (2). Καὶ ἀντιστρόφως· ἐὰν δι' ἁρμοδίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τὰ μέλη τῆς (2) γίνουν ἴσοι ἀριθμοί, διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς αὐτῶν καὶ τὰ μέλη τῆς (1) θὰ εἶναι ἴσοι ἀριθμοί· διότι εὑρίσκομεν αὐτήν, ἂν ἀπὸ τὰ ἴσα μέλη τῆς (2) ἀφαιρέσωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Γ. Ὥστε πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) εἶναι λύσις καὶ τῆς (1). Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A-\Gamma=B-\Gamma$ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ὡς γνωρίζομεν ἡ ἀφαίρεσις τοῦ Γ ἀνάγεται εἰς τὴν πρόσθεσιν τοῦ $-\Gamma$. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις

$$4\chi-2\psi=\chi-8 \text{ καὶ } 4\chi-2\psi+7=\chi-8+7$$

εἶναι ἰσοδύναμοι ὡς καὶ αἱ

$$2\chi^2+\chi+3=\chi^2+\chi+18 \text{ καὶ } 2\chi^2+3=\chi^2+18.$$

Σημείωσις. Ὅταν τὸ Γ εἶναι παράστασις περιέχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, αἱ ἐξισώσεις $A=B$ καὶ $A+\Gamma=B+\Gamma$ (ἢ $A-\Gamma=B-\Gamma$) εἶναι ἰσοδύναμοι διὰ τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων, δι' ἃς ἡ παράστασις Γ λαμβάνει ὡρισμένην τιμήν. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $\chi=3$ καὶ $\chi+\dfrac{1}{\chi}=3+\dfrac{1}{\chi}$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἐνῷ αἱ $\chi=3$ καὶ $\chi+\dfrac{1}{\chi-3}=3+\dfrac{1}{\chi-3}$ δὲν εἶναι (1).

Πόρισμα 1ον. *Δυνάμεθα νὰ μεταφέρωμεν οἱονδήποτε ὅρον ἐξισώσεως ἀπὸ τοῦ ἑνὸς μέλους εἰς τὸ ἄλλο, ἀρκεῖ νὰ ἀλλάξωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ.*

Διότι δυνάμεθα νὰ προσθέσωμεν εἰς τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως τὸν ἀντίθετον αὐτοῦ.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις

$$6\chi-5=2\chi+11 \text{ καὶ } 6\chi-5+5=2\chi+11+5$$

ἤτοι αἱ

$$6\chi-5=2\chi+11 \text{ καὶ } 6\chi=2\chi+11+5$$

εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς εἶναι καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$2\chi=3-5\psi \text{ καὶ } 2\chi+5\psi=3.$$

Πόρισμα 2ον. — *Πᾶσα ἐξίσωσις ἀκεραία δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν ἑνὸς πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ 0.*

(1) Διὰ τῆς ἐννοίας τοῦ ὁρίου, τὴν ὁποίαν θὰ ἴδωμεν βραδύτερον, καὶ αἱ ἐξισώσεις αὗται δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ἰσοδύναμοι.

Διότι δυνάμεθα ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἑνος μέλους νὰ μεταφέρωμεν εἰς τὸ ἄλλο. Οὕτως ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$3χ^2+7+5χ=2χ^2-2χ-5$ λαμβάνομεν τὴν $3χ^2+7+5χ-2χ^2+2χ+5=0$

ἢ μετὰ τὴν ἀναγωγὴν τὴν $χ^2+7χ+12=0$.

118. Θεώρημα.—*Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν (πλὴν τοῦ 0) ἢ διαιρέσωμεν διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον.*

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $Α=Β$ (1). Ἐὰν τὰ μέλη αὐτῆς πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν Γ διάφορον τοῦ 0, λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $Α.Γ=Β.Γ$ (2), λέγομεν δὲ ἤδη, ὅτι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι, ἂν δι' ἁρμοδίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τὰ μέλη τῆς (1) γίνουν ἴσοι ἀριθμοί, διὰ τὰς ἰδίας τιμὰς αὐτῶν καὶ τὰ μέλη τῆς (2) θὰ γίνουν ἴσοι ἀριθμοί, διότι προέκυψεν αὕτη διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἴσων μελῶν τῆς (1) ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν· ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν δι' ἁρμοδίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων τὰ μέλη τῆς (2) γίνουν ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ τὰ μέλη τῆς (1) διὰ τὰς ἰδίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων θὰ γίνουν ἴσοι ἀριθμοί, διότι προέκυψεν αὕτη διὰ τῆς διαιρέσεως τῶν ἴσων μελῶν τῆς (2) διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ. Αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐξισώσεις $Α=Β$ καὶ $\frac{Α}{Γ}=\frac{Β}{Γ}$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι ἡ διαίρεσις διὰ Γ ἀνάγεται εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν ἐπὶ $\frac{1}{Γ}$.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $\frac{χ}{5}=3$ καὶ $\frac{χ}{5}.5=3.5$, ἤτοι αἱ $\frac{χ}{5}=3$ καὶ $χ=15$ εἶναι ἰσοδύναμοι. Ὡσαύτως καὶ αἱ ἐξισώσεις $7χ=-7$ καὶ $\frac{7χ}{7}=\frac{-7}{7}$, ἤτοι αἱ $7χ=-7$ καὶ $χ=-1$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Σημείωσις α'. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ὑποθέτει τὸν ἀριθμὸν Γ σταθερὸν καὶ ὡρισμένον. Διότι ἐὰν ὁ Γ εἶναι παράστασις περιέχουσα ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) δὲν εἶναι ἐν γένει ἰσοδύναμοι.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $χ-3=0$ καὶ $(χ-3).(χ-2)=0$ δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι. διότι ἐνῷ ἡ πρώτη ἔχει τὴν ρίζαν $χ=3$, ἡ δευτέρα, ἐκτὸς τῆς ρίζης αὐτῆς, ἔχει καὶ τὴν ρίζαν $χ=2$.

Ὁμοίως καὶ αἱ ἐξισώσεις

$$(χ-3)(χ-2)=0 \text{ καὶ } (χ-3)(χ-2).\frac{1}{χ-2}=0$$

ἤτοι αἱ

$$(χ-3)(χ-2)=0 \text{ καὶ } χ-3=0$$

δὲν εἶναι ἰσοδύναμοι. Διότι ἡ δευτέρα ἐξ αὐτῶν δὲν ἔχει πλέον τὴν ρίζαν $\chi=2$ τῆς πρώτης. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν βλέπομεν, ὅτι ὅταν ὁ Γ περιέχῃ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους τῆς ἐξισώσεως, ἡ ἐξίσωσις (2) ἢ δύναται νὰ περιέχῃ ξένας ρίζας, ἤτοι ρίζας, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι καὶ ρίζαι τῆς (1) ἢ δύναται νὰ περιέχῃ ρίζας ὀλιγωτέρας τῶν ριζῶν τῆς (1).

Σημείωσις β΄. Ἐὰν ὁ Γ εἶναι παράστασις περιέχουσα γράμματα διάφορα τῶν ἀγνώστων, αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμοι μόνον διὰ τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὸ Γ.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $\alpha\chi=\beta$ καὶ $(\alpha-\beta)\alpha\chi=(\alpha-\beta)\beta$ εἶναι ἰσοδύναμοι μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\neq\beta$.

Ὁμοίως καὶ αἱ ἐξισώσεις $(\alpha-\beta)\chi=\alpha+\beta$ καὶ $\chi=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ εἶναι ἰσοδύναμοι μόνον ὅταν εἶναι $\alpha\neq\beta$.

Πόρισμα.—*Δυνάμεθα ν' ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως*. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν καὶ τὰ δύο μέλη αὐτῆς ἐπὶ -1.

119. ***Θεώρημα***. *Ἐὰν $A=0$ εἶναι ἐξίσωσις ἀκεραία καὶ B ἀκέραιον πολυώνυμον πρὸς τοὺς ἀγνώστους τῆς δοθείσης ἐξισώσεως καὶ τὸ ὁποῖον δὲν γίνεται μηδὲν δι' οὐδεμίαν τῶν ριζῶν αὐτῆς αἱ ἐξισώσεις*

$$\frac{A}{B}=0 \quad \text{καὶ} \quad A=0$$

εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἡ τιμὴ τοῦ Β δι' οἱασδήποτε, ἀλλ' ὡρισμένας τιμὰς τῶν ἀγνώστων, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι πάντοτε ὡρισμένη. Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἵνα εἶναι $\dfrac{A}{B}=0$ πρέπει νὰ εἶναι $A=0$. Τοὐναντίον δὲ ἐὰν δώσωμεν εἰς τοὺς ἀγνώστους τὰς τιμὰς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $A=0$ (καὶ δι' ἃς εἶναι $B\neq0$) θὰ εἶναι $\dfrac{A}{B}=0$· αἱ ἐξισώσεις λοιπὸν $\dfrac{A}{B}=0$ καὶ $A=0$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις

$\dfrac{\chi^2+2\chi-3}{\chi+2}=0$ καὶ $\chi^2+2\chi-3=0$ καὶ εἰς ἃς αἱ ρίζαι 1 καὶ -3 τῆς δευτέρας δὲν μηδενίζουν τὸ διώνυμον $\chi+2$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Πόρισμα.—*Δυνάμεθα νὰ ἀπαλείψωμεν ὅλους τοὺς παρονομαστὰς τῶν ὅρων μιᾶς ἐξισώσεως* :

I. Ὅταν ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀκεραία καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως εἶναι κλάσματα τρέπομεν πρῶτον τὰ κλάσματα εἰς ὁμώνυμα καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀρχικὴν καὶ τῆς ὁποίας ὅλοι οἱ ὅροι ἔχουν συντελεστὰς ἀκεραίους.

Ἔστω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $\frac{5}{2}\chi+\frac{7}{6}\chi-9=\frac{4}{3}\chi+\frac{1}{12}\chi+\frac{9}{2}$. Ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν κλασμάτων (καὶ ἐνταῦθα ὁ ε. κ. π.) εἶναι ὁ 12. Ὥστε λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{30\chi}{12}+\frac{14\chi}{12}-\frac{108}{12}=\frac{16\chi}{12}+\frac{\chi}{12}+\frac{54}{12}$$

Καὶ κατόπιν διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν αὐτῆς ἐπὶ 12:

$$30\chi+14\chi-108=16\chi+\chi+54$$

Συντομώτερον ὅμως ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς : ἤτοι πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δεδομένης ἐξισώσεως ἐπὶ ἕνα κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν καὶ μάλιστα ἐπὶ τὸ ε. κ. π. αὐτῶν, ὅταν εἶναι οὗτοι ὡρισμένοι ἀριθμοί. Οὕτως δὲ ἔχομεν

$$12.\frac{5}{2}\chi+12.\frac{7}{6}\chi-12.9=12.\frac{4}{3}\chi+12.\frac{1}{12}\chi+12.\frac{9}{2}$$

ἤτοι $$30\chi+14\chi-108=16\chi+\chi+54.$$

Ἔστω ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{(\alpha+\beta)\chi}{\alpha-\beta}-\frac{(\alpha-\beta)\chi}{\alpha+\beta}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Ἐνταῦθα κοινὸς παρονομαστὴς ἢ κοινὸν πολλαπλάσιον τῶν παρονομαστῶν λαμβάνεται ἡ παράστασις $\alpha^2-\beta^2$. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐπὶ $\alpha^2-\beta^2$ καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha+\beta)^2\chi-(\alpha-\beta)^2\chi=1$$

ἥτις εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐκτὸς ὅταν εἶναι $\alpha^2=\beta^2$.

II. Ἐὰν ἡ δεδομένη ἐξίσωσις εἶναι κλασματική, ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω διὰ νὰ καταστήσωμεν αὐτὴν ἀκεραίαν καὶ κατόπιν ἐξετάζομεν, ἐὰν αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν.

Ἔστω π. χ. ἐξίσωσις

$$2=\frac{5}{2\chi-1}+\frac{2}{\chi-1}.$$

Ἐνταῦθα κοινὸς παρονομαστὴς λαμβάνεται τὸ γινόμενον $(2\chi-1)(\chi-1)$. Γράφομεν δὲ διαδοχικῶς

$$2-\frac{5}{2\chi-1}-\frac{2}{\chi-1}=0$$

$$\frac{2(2\chi-1)(\chi-1)}{(2\chi-1)(\chi-1)}-\frac{5(\chi-1)}{(2\chi-1)(\chi-1)}-\frac{2(2\chi-1)}{(2\chi-1)(\chi-1)}=0$$

$$\frac{2(2\chi-1)(\chi-1)-5(\chi-1)-2(2\chi-1)}{(2\chi-1)(\chi-1)}=0$$

Ὥστε πρέπει νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$2(2\chi-1)(\chi-1)-5(\chi-1)-2(2\chi-1)=0 \qquad (1)$$

ἡ ὁποία θὰ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσαν, ἐὰν αἱ ρίζαι της δὲν μηδενίζουν τὸν παρονομαστὴν $(2\chi-1)(\chi-1)$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι τῆς ἀκεραίας ἐξισώσεως (1), αἱ ὁποῖαι εἶναι 3 καὶ $\frac{3}{4}$, δὲν μηδενίζουν τὸν ἐν λόγῳ παρονομαστήν, ἕπεται ὅτι αὕτη καὶ ἡ ἀρχικὴ εἶναι ἰσοδύναμοι. Αἱ ρίζαι ἑπομένως τῆς δοθείσης εἶναι 3 καὶ $\frac{3}{4}$.

Συντομώτερον καθιστῶμεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἀκεραίαν ὡς ἑξῆς:

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν (ἢ ἐνίοτε ἐπὶ ἁπλουστέραν τούτου παράστασιν διαιρετὴν δι᾿ ὅλων τῶν παρονομαστῶν). Εὑρίσκομεν δὲ τότε τὴν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν

$$2(2\chi-1)(\chi-1)=5(\chi-1)+2(2\chi-1) \text{ ἤτοι τὴν}$$

$$2(2\chi-1)(\chi-1)-5(\chi-1)-2(2\chi-1)=0$$

Σημείωσις. Ἐὰν ρίζαι τινὲς τῆς ἀκεραίας ἐξισώσεως μηδενίζουν τὸν ὡς ἄνω κοινὸν παρονομαστήν, αὗται δὲν εἶναι ἐν γένει καὶ ρίζαι τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως.

120. ***Βαθμὸς τῶν ἐξισώσεων*** —Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι πᾶσα ἀκεραία ἐξίσωσις δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφὴν πολυωνύμου ἴσου πρὸς τὸ μηδέν. Ἐὰν δὲ τὸ ἀκέραιον τοῦτο πολυώνυμον δὲν ἔχῃ ὁμοίους ὅρους, ὁ βαθμὸς αὐτοῦ λέγεται βαθμὸς τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτως αἱ ἐξισώσεις

$$5\chi-10=0 \text{ καὶ } 3\chi+2\psi-13=0$$

εἶναι πρώτου βαθμοῦ, αἱ δὲ

$$\chi^2-7\chi+12=0 \text{ καὶ } \chi\psi+\chi-\psi-19=0$$

εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

121. Διὰ νὰ λύσωμεν μίαν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον, θὰ προσπαθήσωμεν πρῶτον νὰ φέρωμεν αὐτὴν εἰς τὴν ἀπλουστέραν της μορφήν, ἐφαρμόζοντες τὰς γνωστὰς ἰδιότητας τῶν ἐξισώσεων.

Π. χ. Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{3(\chi+1)}{7}-4=\frac{1-\chi}{5} \qquad (1).$$

Πρὸς τοῦτο ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, τοὺς ὁποίους ἔχει, πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη της ἐπὶ τὸ γινόμενον 5.7, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν ἰσοδύναμον

$$5.7.\frac{3(\chi+1)}{7}-5.7.4=5.7.\frac{1-\chi}{5}$$

ἤτοι τὴν $5.3(\chi+1)-5.7.4=7(1-\chi)$

ἤ, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων, τὴν $15\chi+15-140=7-7\chi$ (2).

Κατόπιν τούτων μεταφέρομεν τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν χ, εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς ὅρους εἰς τὸ ἄλλο μέλος, δηλ. χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τοὺς ὅρους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν ἄγνωστον, ὅτε λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὰς ἀνωτέρω (1) καὶ (2) $15\chi+7\chi=140+7-15$

ἤ, μετὰ τὴν ἀναγωγήν, $22\chi=132$.

Εἶναι δὲ ἡ ἐξίσωσις αὕτη πρώτου βαθμοῦ· ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη δι' 22 εὑρίσκομεν $\chi=\frac{132}{22}=6$, δηλαδὴ εὑρίσκομεν ὅτι ὁ 6 εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως. Καὶ πράγματι, ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ διὰ τοῦ 6 εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, εὑρίσκομεν

$$\frac{3(6+1)}{7}-4=\frac{1-6}{5}$$

καὶ μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων εὑρίσκομεν, ὡς ἔπρεπε νὰ συμβῇ, τὴν ἰσότητα $-1=-1$.

122. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ λύσωμεν ἐξίσωσιν πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον:

α') Ἀπαλείφομεν τοὺς παρονομαστάς, ἐὰν ἔχῃ.

β') Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις.

γ') Χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ ἐκείνους οἱ ὁποῖοι περιέχουν τὸν ἄγνωστον.

δ') Κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, καὶ

ε') Διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου, ἐὰν οὗτος εἶναι διάφορος τοῦ 0, ὁπότε εὑρίσκομεν τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μία καὶ μόνη.

Πδ. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$5-\frac{4+\chi}{4}=4-\frac{5+\chi}{5}.$$

Πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ γινόμενον 5.4 εὑρίσκομεν $5.4.5-5(4+\chi)=5.4.4-4(5+\chi)$

ἢ $100-20-5\chi=80-20-4\chi$

ἢ $100-20-80+20=5\chi-4\chi$, ἤτοι $\chi=20$.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{2(\chi-3)}{3}-\frac{\chi-4}{5}=\frac{\chi+2}{2}-\frac{\chi-6}{6}$$

Πολλαπλασιάζοντες ὅλους τοὺς ὅρους ἐπὶ τὸ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ὅπερ εἶναι 2.3.5, εὑρίσκομεν

$$2.2.5(\chi-3)-2.3.(\chi-4)=3.5(\chi+2)-5(\chi-6)$$

ἢ $20\chi-60-6\chi+24=15\chi+30-5\chi+30$

ἢ $20\chi-6\chi-15\chi+5\chi=30+30+60-24$

ἢ $4\chi=96$

ἤτοι $\chi=\frac{96}{4}=24$.

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$4\chi+3=\frac{12-\chi}{2}-3.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$8\chi+6=12-\chi-6$$

ἢ $8\chi+\chi=12-6-6$

ἢ $9\chi=0$

ἤτοι $\chi=\frac{0}{9}=0$.

123. ***Μερικαὶ περιπτώσεις***. —α') *Ἐξισώσεις ἀδύνατοι*. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{5\chi+1}{10}+2=\frac{\chi}{2}+\frac{1}{5}.$$

Πολλαπλασιάζομεν ὅλους τοὺς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπὶ τὸ ἐ.κ.π. τῶν παρονομαστῶν, ἤτοι ἐπὶ 10, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$5\chi+1+20=5\chi+2\cdot$$

ἐὰν δὲ ἤδη χωρίσωμεν τοὺς γνωστοὺς ἀπὸ τῶν ἀγνώστων ὅρων καὶ κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν εὑρίσκομεν

$$5\chi - 5\chi = -20 - 1 + 2 \quad \text{καὶ} \quad 0.\chi = -19.$$

Ἀλλὰ μὲ οἱονδήποτε ἀριθμὸν καὶ ἂν ἀντικαταστήσωμεν τὸν χ, θὰ ἔχωμεν γινόμενον 0, ἤτοι θὰ ἔχωμεν $0 = -19$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἤτοι ὑπὸ οὐδενὸς ἀριθμοῦ ἐπαληθεύεται.

β') *Ἐξισώσεις ἀπροσδιόριστοι.* Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{5(3+16\chi)}{8} - 9\chi = \frac{8\chi+15}{8}.$$

Κατὰ τὰ προηγούμενα ἔχομεν :

$$15 + 80\chi - 72\chi = 8\chi + 15$$

ἢ
$$80\chi - 72\chi - 8\chi = 15 - 15$$

ἢ
$$0.\chi = 0.$$

Ὥστε οἱανδήποτε τιμὴν καὶ ἂν δώσωμεν εἰς τὸν χ, πάντοτε θὰ ἔχωμεν $0 = 0$. Ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ καὶ ἐπομένως εἶναι ταυτότης.

124. ***Ἐγγράμματοι ἐξισώσεις.*** — 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐγγράμματος ἐξίσωσις :

$$\frac{\alpha\chi}{\beta} - \frac{\beta(\chi-\beta)}{\alpha} = \alpha,$$

εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ γνωστοὶ ἀριθμοὶ παρίστανται διὰ τῶν γραμμάτων α καὶ β. Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὰς ἀριθμητικὰς ἐξισώσεις, ὁπότε εὑρίσκομεν διαδοχικῶς τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς τὴν δοθεῖσαν ἐξισώσεις.

$$\alpha^2\chi - \beta^2(\chi-\beta) = \alpha^2\beta$$

$$\alpha^2\chi - \beta^2\chi + \beta^3 = \alpha^2\beta.$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)\chi = \alpha^2\beta - \beta^3$$

$$(\alpha^2 - \beta^2)\chi = \beta(\alpha^2 - \beta^2).$$

Ἤδη, ἐὰν $\alpha^2 - \beta^2 \neq 0$, ἤτοι ἐὰν $\alpha \neq \beta$, διαιροῦμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως δι' $\alpha^2 - \beta^2$, ὁπότε εὑρίσκομεν $\chi = \beta$. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\alpha = \beta$, ἤτοι ἐὰν εἶναι $\alpha^2 - \beta^2 = 0$, ἡ διαίρεσις διὰ τοῦ $\alpha^2 - \beta^2$ εἶναι ἀδύνατος καὶ ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται $0 = 0$. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται ταυτότης.

125. ***Γενικὴ μορφὴ τῆς ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον καὶ διερεύνησις αὐτῆς.*** — Πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, εἰς τὴν ὁποίαν ἐφαρμόζομεν τὰ α′, β′, γ′, δ′ τῆς § 122, λαμβάνει τὴν μορφὴν $\alpha\chi=\beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὡρισμένοι ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταί. Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὐτή, ἡ ὁποία εὑρέθη διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἐξισώσεων (§ 118), εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἀρχικήν. Ὥστε πᾶσα ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεως ὡς ἡ $\alpha\chi=\beta$.

Ἤδη παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς :

1) Ἐὰν $\alpha\neq0$, ἡ διαίρεσις τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς δι᾽ α εἶναι δυνατή, ὁπότε διαιροῦντες ἔχομεν $\chi=\dfrac{\beta}{\alpha}$· ὑπάρχει λοιπὸν εἷς ἀριθμὸς καὶ προφανῶς εἷς καὶ μόνος, ὅστις ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν.

2) Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq0$, οὐδέποτε εἶναι δυνατὴ ἡ ἰσότης $0.\chi=\beta$. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν οὐδεμία λύσις καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος (§ 123, α).

3) Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, θά εἶναι πάντοτε $0.\chi=0$· ὑπάρχει λοιπὸν ἀπειρία λύσεων καὶ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης (§ 123, β). Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν λέγομεν. Ἐὰν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha\chi=\beta$ εἶναι :

1) $\alpha\neq0$, *ὑπάρχει λύσις μία καὶ μόνη, ἡ* $\dfrac{\beta}{\alpha}$

2) $\alpha=0$ καὶ $\beta\neq0$, *ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος*, καὶ

3) $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, *ἡ ἐξίσωσις εἶναι ταυτότης.*

126. ***Τὸ σύμβολον*** ∞.—Τὰ κλάσματα

$$\frac{5}{0{,}1} \quad \frac{5}{0{,}01} \quad \frac{5}{0{,}001} \quad \frac{5}{0{,}0001} \quad \text{κτλ.}$$

εἶναι ἴσα κατὰ σειρὰν μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 50, 500, 5000, 50000, κτλ. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος, τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητὴς εἶναι σταθερός, *αὐξάνει* συνεχῶς, ὅταν ὁ παρονομαστὴς αὐτοῦ *ἐλαττοῦται* συνεχῶς, εἶναι δὲ ἡ ἀξία αὐτοῦ τόσῳ μεγαλυτέρα, ὅσῳ ὁ παρονομαστής του γίνεται μικρότερος. Δύναται δὲ ἡ ἀξία αὐτοῦ νὰ ὑπερβῇ ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμόν, ὁσονδήποτε μεγάλον, ὅταν ὁ παρονομαστὴς γίνῃ ἱκανῶς μικρός. Γενικῶς λοιπὸν ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\chi=\dfrac{\beta}{\alpha}$, εἰς ὃ ὁ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, ὁ δὲ α, ἐλαττούμενος διαρκῶς, πλησιάζει πρὸς τὸ 0, αὐξάνει συνεχῶς κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν καὶ δύναται νὰ ὑπερβῇ πάντα ἀριθμόν. Διὰ τοῦτο τὸ $\dfrac{\beta}{0}$ παρισταται διὰ τοῦ συμβόλου ∞, τὸ ὁποῖον καλεῖται *ἄπειρον*, δηλαδὴ ἀριθμὸς μεγαλύτερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν παντὸς ἀριθμοῦ. Ἀλλ' ἀφοῦ δὲν ὑπάρχει τοιοῦτος ἀριθμός, τὸ σύμβολον $\infty = \dfrac{\beta}{0}$ δὲν ἔχει καμμίαν ἀριθμητικὴν ἀξίαν.

Π. δ. 1) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{\chi-\alpha}{\beta-1} = \dfrac{\chi+2}{2}$ (1)

Ἐὰν $\beta \neq 1$, πολλαπλασιάζομεν τα μέλη τῆς δοθείσης ἐπὶ $2(\beta-1)$ καὶ ἔχομεν

$$2(\chi-\alpha) = (\beta-1)(\chi+2) \text{ ἢ } 2\chi-2\alpha = \beta\chi+2\beta-\chi-2 \text{ ἢ}$$

$(3-\beta)\chi = 2\alpha+2\beta-2$ (2), ὁπότε, ἐὰν $\beta \neq 3$, ἔχομεν $\chi = \dfrac{2(\alpha+\beta-1)}{3-\beta}$ (3)

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις (1) ἔχει τὴν ρίζαν (3), ὅταν εἶναι β διάφορον τῆς 1 καὶ τοῦ 3.

Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι $\beta=1$, τὸ πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δὲν ἔχει οὐδεμίαν ἀριθμητικὴν ἔννοιαν· ἐὰν δὲ εἶναι $\beta=3$ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $0=2\alpha+4$, δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν $\beta=3$ καὶ $2\alpha+4 \neq 0$ ἤτοι $\alpha \neq -2$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος· ἐὰν ὅμως εἶναι καὶ $2\alpha+4=0$ ἤτοι $\alpha=-2$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἀπροσδιόριστος.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{3\beta\chi-4}{\chi+7} = \alpha$ (1)

Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν τὰς ἰσοδυνάμους

$$\frac{3\beta\chi-4}{\chi+7} - \alpha = 0 \text{ ἢ } \frac{3\beta\chi-4-\alpha(\chi+7)}{\chi+7} = 0 \text{ ἢ}$$

$$\frac{(3\beta-\alpha)\chi-7\alpha-4}{\chi+7} = 0 \text{ ἢ } (3\beta-\alpha)\chi-7\alpha-4=0 \qquad (2)$$

Καὶ ἤδη ἐὰν 1′) $3\beta-\alpha \neq 0$ ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει τὴν λύσιν

$\chi = \dfrac{7\alpha+4}{3\beta-\alpha}$ (3), ἥτις εἶναι καὶ λύσις τῆς (1) ἐὰν $\chi+7 \neq 0$, ἤτοι ἐὰν

$\dfrac{7\alpha+4}{3\beta-\alpha} + 7 \neq 0$ ἢ $\dfrac{21\beta+4}{3\beta-\alpha} \neq 0$. Ἀλλ' ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει νὰ εἶναι $21\beta+4 \neq 0$, ἤτοι $\beta \neq -\dfrac{4}{21}$.

ἐὰν δὲ 2′) $3\beta-\alpha=0$ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $0=7\alpha+4$ καὶ εἶναι αὕτη ἀδύνατος ἢ ἀπροσδιόριστος καθ' ὅσον εἶναι $\alpha \neq -\dfrac{4}{7}$ ἢ $\alpha = -\dfrac{4}{7}$. Ἐπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος ἐὰν $\alpha \neq -\frac{4}{7}$ καὶ ἀπροσδιόριστος ἤτοι ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ (πλὴν τῆς $\chi=-7$), ἐὰν $\beta=-\frac{4}{7}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

242) $5(3\chi-1)+2(1-3\chi)=6$

243) $5(7\chi+8)-13(3\chi+4)=4$

244) $9(2\chi-1)-5(8\chi-1)=-15$

245) $8(6\chi+5)-3(1-9\chi)=-13$

246) $\frac{3\chi}{4}-\frac{2\chi}{3}-\frac{5}{12}=0$

247) $8\frac{1}{4}\chi-\frac{\chi}{5}-3\frac{2}{3}\chi-4\frac{1}{5}\chi+1=0$

248) $\frac{2\chi-9}{3}-\frac{3\chi-7}{10}=1$

249) $\frac{7\chi-2}{3}-\frac{4}{5}(\chi+3)+6=\frac{3(\chi+2)}{2}$

250) $0=2\chi-3\left(5+\frac{3}{4}\chi\right)+\frac{2}{3}(4-\chi)-\frac{1}{4}(3\chi-16)$

251) $5\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}\left(4{,}6-3\frac{1}{3}\chi\right)=4{,}7\chi-0{,}8\left(3\frac{1}{2}\chi-\frac{1}{3}\right)$

252) $2(\psi+5)(\psi+2)=(2\psi+7)+(\psi+3)$

253) $(2\psi+1)^2-8=(2\psi-1)^2$

254) $21(\psi+3)(\psi-5)-5(3\psi-7)(\psi-5)=2(3\psi-1)(\psi+3)$

255) $(2\chi+3)^2+(3\chi+5)^2+(8\chi-7)^2=(7\chi+11)(11\chi-6)$

256) $\frac{3\chi-1}{2\chi-1}-\frac{2(2\chi-1)}{3\chi-2}=\frac{1}{6}$

257) $\frac{2\chi+1}{4\chi-7}+\frac{3\chi-1}{2\chi+3}=2$

258) $\frac{5\chi-1}{3(\chi+1)}-\frac{3\chi+2}{2(\chi-1)}=\frac{\chi^2-30\chi+2}{6\chi^2-6}$

259) $\frac{3\chi-7}{2\chi-9}-\frac{3(\chi+1)}{2(\chi+3)}=\frac{11\chi+3}{2\chi^2-3\chi-27}$

260) $\frac{5}{\chi+1}-\frac{5}{\chi-8}=\frac{9}{\chi-2}-\frac{9}{\chi-7}$

261) $\frac{2}{\chi-14}-\frac{5}{\chi-13}=\frac{2}{\chi-9}-\frac{5}{\chi-11}$

Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

262) $(\alpha-\beta)\chi=2\alpha-(\alpha+\beta)\chi$

263) $\alpha(\beta-\chi)+\beta(\gamma-\chi)=\beta(\alpha-\chi)+\gamma\chi$

264) $(\alpha-\chi)(\beta+\chi)-\beta(\alpha-\beta)=(\alpha+\gamma)^2-(\gamma+\chi)\chi$

265) $\alpha\beta\gamma\chi+\alpha\beta^2+\gamma\delta^2\chi+\alpha\gamma\delta=\alpha\beta\delta\chi+\alpha^2\beta+\gamma^2\delta\chi+\beta\gamma\delta$

266) $\frac{2\chi-\alpha}{\beta}-\frac{\beta-2\chi}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

267) $\frac{\alpha-\chi}{\alpha}+\frac{\beta-\chi}{\beta}+\frac{\gamma-\chi}{\gamma}=3$

268) $\frac{\chi^2-\alpha}{\beta\chi}-\frac{\alpha-\chi}{\beta}=\frac{2\chi}{\beta}-\frac{\alpha}{\chi}$

269) $\frac{\alpha\chi}{\beta}-\frac{\beta(\chi-\beta)}{\alpha}=\alpha$

270) $\frac{\alpha\chi}{\beta} - \frac{2\gamma^2\chi}{\alpha\beta} + 4\alpha = \frac{4\beta\gamma^2\chi}{\alpha^3} - \frac{5\alpha^2}{\beta^2} + \frac{2\gamma^2}{\alpha} - 3\beta$

271) $\frac{(\alpha+\beta)(\chi-\beta)}{\alpha-\beta} - 3\alpha = \frac{4\alpha\beta-\beta^2}{\alpha+\beta} - 2\chi + \frac{\alpha^2-\beta\chi}{\beta}$

272) $\alpha - \alpha\chi\left(1-\frac{1}{\chi}\right) = \alpha(\alpha+\chi)\left(1+\frac{1}{\chi}\right) + \alpha^2\left(1-\frac{1}{\chi}\right) - \alpha$

273) $\frac{\chi-\alpha}{2} = \frac{\chi+2}{\beta-1}$ 274) $\frac{\alpha+\chi}{\beta-\chi} + \frac{5}{\chi-\beta} = 3$

275) $\frac{2\alpha\chi+5}{\chi+4} = \beta+1$ 276) $\frac{3\chi+5}{\chi-\alpha} = \beta$

Προβλήματα
λυόμενα δι᾿ ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον

127. ***Ὁρισμοί.***— *Πρόβλημα* λέγεται πᾶσα πρότασις εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ἓν ἢ περισσότερα ἄγνωστα ἐκπληροῦντα ὡρισμένους *ὅρους*, ἤτοι ὡρισμένας ἀπαιτήσεις.

Εἰς ἕκαστον πρόβλημα διακρίνομεν *δεδομένα* καὶ *ζητούμενα*, ἤτοι *γνωστὰ* καὶ *ἄγνωστα*, εἶναι δὲ ταῦτα πάντοτε *ἀριθμοί*· ἂν δὲ εἰς ἓν πρόβλημα ἀναφέρονται ποσά, ἕκαστον τούτων ὑποτίθεται ὅτι ἔχει μετρηθῆ διὰ τῆς μονάδος αὐτοῦ καὶ ὅτι ἔχει ἐκφρασθῆ δι᾿ ἀριθμοῦ.

Ἡ εὕρεσις τῶν ζητουμένων ἢ τῶν ἀγνώστων λέγεται *λύσις* τοῦ προβλήματος.

Οἱ κυριώτεροι ὅροι τοὺς ὁποίους πρέπει νὰ ἐκπληροῦν τὰ ἄγνωστα διὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα, δηλοῦνται εἰς αὐτὴν τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος· ὁρίζουν δὲ οὗτοι τὰς σχέσεις αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν δεδομένων καὶ τῶν ζητουμένων. Οἱ τοιοῦτοι δὲ ὅροι λέγονται *ἐπιτάγματα*.

Εἰς ἣν ὅμως περίπτωσιν ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστᾷ ποσόν τι, ἤτοι εἶναι συγκεκριμένος, ἀπαιτεῖται ἵνα οὗτος ἐκπληροῖ δευτερεύοντάς τινας ὅρους διὰ νὰ λυθῇ τὸ πρόβλημα ἐν τοῖς πράγμασι. Οὕτως, ἐὰν π. χ. εἰς ἓν πρόβλημα ζητεῖται ἀριθμὸς ἐργατῶν, οἱ ὁποῖοι θ᾿ ἀποπερατώσουν ἓν ἔργον, πρέπει οὗτος νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός. Ἐὰν δὲ εἰς ἄλλο πρόβλημα ζητεῖται ἡ ἡλικία ἑνὸς ἀνθρώπου, πρέπει οὗτος νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τῶν ἀνθρώπων. Βλέπομεν λοιπὸν ἐκ τούτων, ὅτι οἱ δευτερεύοντες ὅροι οἱ ἐπιβαλλόμενοι ἐπὶ τῶν ἀγνώστων καὶ οἱ ὁποῖοι λέγονται *περιορισμοὶ* πηγάζουν μόνον ἐκ τῆς φύσεως τοῦ ποσοῦ, τὸ ὁποῖον παριστοῦν οἱ ἄγνωστοι.

*128. **Τρόπος λύσεως προβλημάτων.*** — Εἴδομεν προηγουμένως (§ 3) ὅτι σκοπὸς τῆς Ἀλγέβρας εἶναι ἡ λύσις τῶν προβλημάτων κατὰ τρόπον ἁπλοῦν καὶ γενικόν. Ἐπιτυγχάνει δὲ ταῦτα διότι 1ον) *χρησιμοποιεῖ γράμματα,* 2ον) *εἰσάγει νέους ἀριθμοὺς* (εἴδομεν μέχρι τοῦδε, ὅτι εἰσήγαγε τοὺς ἀρνητικοὺς) καὶ 3) *ἀνάγει τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων.*

Ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὴν Ἄλγεβραν ὡς πρὸς τὸν τρόπον τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων εἶναι ἡ παράστασις τῶν ἀγνώστων διὰ γραμμάτων, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργάζεται ὡς ἐὰν ἦσαν γνωστοὶ ἀριθμοί, δύναται δὲ οὕτω νὰ ἐκφράζῃ πᾶν πρόβλημα, ἔχουσα ὑπ' ὄψει τὰς ἀπαιτήσεις αὐτοῦ, δι' ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὰ γνωστὰ καὶ τὰ ἄγνωστα. Π. χ.

1) Πρόβλημα. *Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ὅταν ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ δίδει διαφορὰν 15;*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο ζητεῖται ἀριθμός, ὅστις νὰ ἐκπληροῖ τὸ ἑξῆς ἐπίταγμα: ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ πενταπλασίου του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸν 15. Ὑποθέτω λοιπὸν πρῶτον ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εὑρέθη καὶ ὅτι εἶναι π. χ. ὁ χ. Κατόπιν σημειώνω, διὰ τῶν ἀλγεβρικῶν συμβόλων καὶ τῶν γνωστῶν ἀριθμῶν τοῦ προβλήματος, τὰς πράξεις τὰς ὁποίας ἀπαιτεῖ τοῦτο. Εὑρίσκω δὲ οὕτω τὴν διαφορὰν $5χ-χ$, τὴν ὁποίαν ἐξισώνω μὲ τὸν ἀριθμὸν 15, ἤτοι σχηματίζω τὴν ἐξίσωσιν $5χ-χ=15$. Τέλος παρατηρῶ ὅτι εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν οὐδεὶς περιορισμὸς δύναται νὰ ἐπιβληθῇ, διότι εἶναι ἀφῃρημένος. Ἤδη ἐὰν λύσω τὴν ὡς ἄνω ἐξίσωσιν εὑρίσκω $χ=3\frac{3}{4}$. Ἐπειδὴ δὲ ἡ λύσις αὐτὴ ἐπαληθεύει τὸ πρόβλημα, διότι

$$5.\left(3\frac{3}{4}\right)-3\frac{3}{4}=5.3+5.\frac{3}{4}-3\frac{3}{4}=15+\frac{15}{4}-\frac{15}{4}=15,$$

λέγω, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ $3\frac{3}{4}$.

2) Πρόβλημα. *Ἔδωσα εἰς πτωχοὺς καὶ εἰς τὸν καθένα ἐξ αὐτῶν 5 δραχμάς. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν δραχμῶν τὰς ὁποίας ἔδωσα, ἀφαιρέσω τὸν ἀριθμὸν τῶν πτωχῶν εὑρίσκω διαφορὰν 15.*

Καὶ εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο, ἐὰν παραστήσωμεν διὰ χ τὸν ἀριθμὸν τῶν πτωχῶν, ἐπιτάσσεται ἵνα εἶναι $5χ-χ=15$. Ἀλλ' ἐδῶ ἐπὶ πλέον ἀπαιτεῖται ἵνα ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικός. Διότι ὑπὸ τὸν περιορισμὸν αὐτὸν τὸ πρόβλημα τοῦτο δύναται νὰ λυθῇ ἐν τοῖς πράγμασι. Δεδομένου ὅμως, ὅτι λύοντες τὴν ὡς ἄνω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=3\frac{3}{4}$, λέγομεν ὅτι ἡ λύσις αὕτη δὲν δύναται νὰ γίνῃ παραδεκτή.

129. ***Παρατηρήσεις.***—Ἤδη ὡς πρὸς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς;

1) Τὰ προβλήματα εἰς τὴν ἄλγεβραν λύονται ὅλα δι' ἐξισώσεων. Εἶναι δὲ δυνατὸν τοῦτο, διότι παριστῶμεν τοὺς ζητουμένους ἀγνώστους ἀριθμοὺς μὲ γράμματα, ἐπὶ τῶν ὁποίων ἐργαζόμεθα ὡς ἐὰν ἦσαν γνωστοί. Ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν δὲ τοῦ προβλήματος σημειοῦμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν κατὰ τὰς ἀπαιτήσεις (τοὺς ὅρους) αὐτοῦ. Οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, πλησίον τῶν ὁποίων γράφομεν τοὺς περιορισμοὺς αὐτοῦ, ὅταν ὑπάρχουν.

2) Κατόπιν τούτου λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ἢ τὰς ἐξισώσεις.

3) Τελευταῖον ἐξετάζομεν, ἐὰν ὁ ἀριθμός, τὸν ὁποῖον εὕρομεν ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως εἶναι σύμφωνος μὲ τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ὁπότε ἡ λύσις εἶναι πραγματική.

Σημείωσις. Γενικοὶ κανόνες διὰ τὸν σχηματισμὸν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων, αἱ ὁποῖαι ἀπαιτοῦνται διὰ τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, δὲν ὑπάρχουν, διότι ἡ ποικιλία τῶν προβλημάτων εἶναι πολὺ μεγάλη. Ἐν τούτοις ἔπειτα ἀπὸ προηγουμένην ἄσκησιν, ἡ ὁποία νὰ συνοδεύεται ὑπὸ προσοχῆς, ὁ σχηματισμὸς τῶν ἐξισώσεων γίνεται εὐκόλως.

Προβλήματα

130.—*1) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον καὶ τὸ τέταρτον κάμνουν τὸν ἀριθμὸν 52.*

Ἔστω ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ. Τὸ ἥμισυ αὐτοῦ εἶναι $\frac{\chi}{2}$, τὸ τρίτον $\frac{\chi}{3}$ καὶ τὸ τέταρτον $\frac{\chi}{4}$, τὸ δὲ ἄθροισμα τούτων,

ἤτοι
$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4},$$

θὰ εἶναι κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος ἴσον μὲ 52. Ὥστε ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{\chi}{2}+\frac{\chi}{3}+\frac{\chi}{4}=52$$

ἐκ τῆς ὁποίας λύοντες, εὑρίσκομεν $\chi=48$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{7}$, νὰ δίδῃ κλάσμα ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$.

Ἔστω, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς χ. Τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{2+\chi}{7+\chi}=\frac{1}{2}$, λύοντες δὲ αὐτὴν εὑρίσκομεν $\chi=3$.

3) Μία τάξις ἀνεχώρησε δι᾽ ἐκδρομὴν ἐκ τοῦ σχολείου της βαδίζουσα 6 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Ἀλλ᾽ εἷς μαθητὴς τῆς τάξεως αὐτῆς καθυστέρησε καὶ ἀνεχώρησεν ἐκ τοῦ σχολείου πρὸς συνάντησίν της 1 ὥραν καὶ 20′ ἀργότερον τρέχων διὰ ποδηλάτου μὲ ταχύτητα 16 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Μετὰ πόσην ὥραν ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς του θὰ συναντήσῃ ὁ μαθητὴς τὴν τάξιν του;

Ἔστω, ὅτι ὁ μαθητὴς θὰ συναντήσῃ τὴν τάξιν του μετὰ χ πρῶτα λεπτὰ τῆς ὥρας. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι μέχρι τῆς στιγμῆς τῆς συναντήσεως καὶ ὁ μαθητὴς καὶ ἡ τάξις διήνυσαν τὸ αὐτὸ διάστημα. Ἀλλ᾽ ἡ τάξις τὸ διήνυσε εἰς $\chi+80$ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 6 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Ὥστε ἀφοῦ εἰς 60 πρῶτα λεπτὰ διήνυσεν 6 χιλιόμετρα εἰς $\chi+80$ πρῶτα λεπτὰ διήνυσε $\frac{6(\chi+80)}{60}$ χιλιόμετρα. Ἐξ ἄλλου ὁ μαθητὴς διήνυσε τὸ αὐτὸ διάστημα εἰς χ πρῶτα λεπτὰ μὲ ταχύτητα 16 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Διήνυσεν ἑπομένως εἰς τὰ χ πρῶτα λεπτὰ διάστημα $\frac{16\chi}{60}$ χιλιόμετρα. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{6(\chi+80)}{60}=\frac{16\chi}{60}$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=48$ πρῶτα λεπτά.

4) Εἷς ἐδάνεισε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς $7^0/_0$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς $5^0/_0$. Λαμβάνει δὲ καὶ ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων 2436 δραχμὰς τόκον κατ᾽ ἔτος. Ζητεῖται τὸ κεφάλαιον.

Ἔστω χ τὸ κεφάλαιον. Ἐπειδὴ δὲ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ ἐδάνεισε πρὸς $7^0/_0$, λαμβάνει ἀπὸ τὸ μέρος αὐτὸ τοῦ κεφαλαίου εἰς 1 ἔτος τόκον $\frac{\frac{2\chi}{5}\cdot 7}{100}=\frac{14\chi}{500}$. Ἀπὸ δὲ τὰ $\frac{3\chi}{5}$ λαμβάνει τόκον εἰς ἓν ἔτος $\frac{\frac{3\chi}{5}\cdot 5}{100}=\frac{3\chi}{100}$. Εἶναι δὲ κατὰ τὸ πρόβλημα $\frac{14\chi}{500}+\frac{3\chi}{100}=2436$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=42000$ δραχμαί.

5) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ πέμπτον, ὅταν αὐξηθῇ κατὰ 6, ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ δεκάτου, τὸ ὁποῖον ἔχει αὐξηθῇ κατὰ 15.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα :

$$\frac{\chi}{5}+6=2\left(\frac{\chi}{10}+15\right).$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $0.\chi=24$, ἤτοι $0=24$. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Ὥστε καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον, διότι οὐδεὶς τοιοῦτος ἀριθμὸς ὑπάρχει.

6) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τρίτον ἠλαττωμένον κατὰ 9 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{9}$, τὸ ὁποῖον ἔχει ἐλαττωθῇ κατὰ 3.

Ἔστω χ ὁ ζητούμενος ἀριθμός· ἀλλὰ τότε θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ πρόβλημα :

$$\frac{\chi}{3}-9=3.\left(\frac{\chi}{9}-3\right)$$

Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $0.\chi=0$, ἤτοι $0=0$. Ὥστε πᾶς ἀριθμὸς εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ.

7) Εἷς πατὴρ εἶναι 58 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 26 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

Ἔστω μετὰ χ ἔτη. Ἀλλὰ τότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι $58+\chi$ ἔτη καὶ ἡ τοῦ υἱοῦ $26+\chi$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $58+\chi=3.(26+\chi)$. Πρέπει δὲ ὁ χ, ὡς παριστῶν μέλλοντα χρόνον, νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἡλικία $58+\chi$ νὰ εἶναι δυνατή, ἤτοι νὰ μὴ ὑπερβαίνῃ τὴν δυνατὴν ἡλικίαν τοῦ ἀνθρώπου. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=-10$. Ὥστε τὸ πρόβλημα αὐτό, τὸ ὁποῖον ζητεῖ μέλλοντα χρόνον, πρέπει νὰ θεωρηθῇ ὡς ἀδύνατον. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ ἀρνητικὸς χρόνος φανερώνει παρελθόντα χρόνον, τὸ ζητούμενον τοῦ προβλήματος συνέβη πρὸ 10 ἐτῶν. Καὶ πράγματι πρὸ 10 ἐτῶν αἱ ἡλικίαι τοῦ πατρὸς καὶ τοῦ υἱοῦ ἦσαν 48 καὶ 16 εἶναι δὲ $48=16.3$. Ὥστε εἰς τὰ προβλήματα ὡς τὰ ἀνωτέρω διὰ νὰ εἶναι παραδεκταὶ καὶ αἱ ἀρνητικαὶ λύσεις (ὅταν πληροῦν καὶ τοὺς λοιποὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος), πρέπει νὰ ζητῆται ὄχι μόνον πότε θὰ εἶναι ἡ ἡλικία τριπλασία, ἀλλὰ καὶ πότε ἦτο.

Γενικῶς δὲ εἰς τὰ προβλήματα εἰς τὰ ὁποῖα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς παριστᾷ ποσόν, τὸ ὁποῖον ἐπιδέχεται ἀντίθεσιν, καὶ *αἱ ἀρνητικαὶ* *λύσεις δύνανται νὰ ἑρμηνευθοῦν.* Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ περιέχωνται καὶ εἰς τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ὅταν ἡ διατύπωσίς του εἶναι κατάλληλος, ὡς εἴδομεν προηγουμένως.

8) Ἐκ δύο ἀνθρώπων ὁ μὲν εἷς εἶχε 1000 δραχμάς, ὁ δὲ ἄλλος 500 δραχμάς. Ἐξοδεύουν δὲ καθ' ἡμέραν ὁ μὲν πρῶτος 30 δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος 20. Μετὰ πόσας ἡμέρας θὰ ἔχουν ἴσας δραχμάς;

Ἔστω μετὰ χ ἡμέρας. Ἀλλὰ τότε ὁ μὲν πρῶτος θὰ ἔχῃ $1000-30\chi$ δραχμάς, ὁ δὲ δεύτερος $500=20\chi$ καὶ θὰ εἶναι κατὰ τὸ πρόβλημα $1000-30\chi=500-20\chi$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ νὰ κάμῃ καὶ τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως θετικά, διότι μετὰ χ ἡμέρας πρέπει νὰ ἔχουν καὶ οἱ δύο ἓν ποσὸν δραχμῶν. Ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\chi=50$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὕτη δὲν εἶναι δεκτή, διότι καὶ ἐὰν περάσουν μόνον 34 ἡμέραι, οὐδεὶς ἐκ τῶν δύο ἀνθρώπων θὰ ἔχῃ χρήματα.

Σημείωσις. Ἡ λύσις αὐτὴ εἶναι παραδεκτή, ἐὰν δεχθῶμεν, ὅτι οἱ δύο οὗτοι ἄνθρωποι δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἴσον χρέος.

9) Εἷς ἐργάτης ἐλάμβανε διὰ τὰς ὥρας τῆς τακτικῆς ἐργασίας του 6,50 δραχμὰς τὴν ὥραν καὶ διὰ τὰς ἐκτάκτους ὥρας 8 δραχμὰς τὴν ὥραν. Δι' ἐργασίαν δὲ 60 ὡρῶν, τακτικὴν καὶ ἔκτακτον, ἔλαβε 510 δραχμάς. Πόσαι εἶναι αἱ ὧραι τῆς τακτικῆς καὶ πόσαι αἱ τῆς ἐκτάκτου ἐργασίας του;

Ἐὰν χ εἶναι αἱ ὧραι τῆς τακτικῆς ἐργασίας του, αἱ τῆς ἐκτάκτου θὰ εἶναι $60-\chi$. Ἔχομεν δὲ τότε τὴν ἐξίσωσιν $6{,}50\chi+(60-\chi).8=510$. Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ οὐχὶ μεγαλύτερος τοῦ 60. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν λαμβάνομεν $\chi=-20$. Ἀλλ' ἡ λύσις αὐτὴ ἀπορρίπτεται.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

277) Τίνος ἀριθμοῦ τὸ τριπλάσιον σὺν 6 εἶναι ἴσον μὲ τὸ πενταπλάσιον αὐτοῦ πλὴν 10;

278) Ἐὰν ἀπὸ τὸ διπλάσιον ἀριθμοῦ ἀφαιρέσωμεν τὸν 8, θὰ λάβωμεν τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

279) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ $\frac{1}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{6}$ δίδουν τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτοῦ.

280) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 71 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ $\frac{1}{5}$ τοῦ πρώτου καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ δευτέρου νὰ δίδουν ἄθροισμα 17.

281) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{19}{69}$, νὰ δίδῃ κλάσμα ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{2}$.

282) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὅταν προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν 3 καὶ 5, νὰ δίδῃ ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ 3:4.

283) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 159.

284) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς εἰς ὃν προστιθέμενοι οἱ ἀριθμοὶ 3, 5, 12, 17 νὰ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

285) Τρία πρόσωπα ἐμοίρασαν μεταξύ των 250 δραχμάς. Ἔλαβε δὲ ὁ δεύτερος 5 δραχμὰς ὀλιγωτέρας τοῦ πρώτου καὶ 10 δραχμὰς περισσοτέρας τοῦ τρίτου. Πόσας ἔλαβεν ὁ καθείς;

286) Εἰς μίαν ἐπιχείρησιν κατέθεσαν ὁ μὲν Α 7000 δραχμάς, ὁ δὲ Β 9000 δραχμάς. Ἐκέρδισαν δὲ ἐκ τῆς ἐπιχειρήσεως αὐτῆς 6400 δραχμάς. Πόσον κέρδος ἔλαβεν ὁ καθείς; (Ὁ λόγος τῶν κεφαλαίων ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν κερδῶν).

287) Εἶχε τις δύο εἴδη οἴνου ἀξίας 6,50 δραχμῶν καὶ 10,50 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν· θέλει δὲ νὰ κάμῃ ἐξ αὐτῶν μεῖγμα 1200 ὀκάδων ἀξίας 8 δραχμῶν τὴν ὀκᾶν. Πόσας ὀκάδας θὰ ἀναμείξῃ ἀπὸ ἕκαστον εἶδος;

288) Εἶχε τις 32 ὀκάδας οἰνοπνεύματος τῶν 85°. Πόσας ὀκάδας ὕδατος πρέπει νὰ ρίψῃ εἰς αὐτό, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ οἰνοπνεύματος κατέλθῃ εἰς 80°;

289) Εἶχε τις 120 γραμμάρια χρυσοῦ βαθμοῦ καθαρότητος 0,740 καὶ ἄλλον βαθμοῦ 0,880. Πόσα γραμμάρια τοῦ δευτέρου κράματος πρέπει νὰ ἀναμείξῃ μὲ τὰ 120, ἵνα ὁ βαθμὸς τοῦ κράματος γίνῃ 0,820;

290) Τοκίζει τις μὲ ἁπλοῦν τόκον κεφάλαιον 10370 δρχ. πρὸς 4,5 % καὶ 15320 δρχ. πρὸς 5,5 %. Μετὰ πόσον χρόνον τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια θὰ φέρουν τόκον ἐν συνόλῳ 1571,10 δρχ.

291) Ἐκ κεφαλαίου 36000 δρχ. ἐτόκισέ τις ἓν μέρος πρὸς 5 % καὶ τὸ ὑπόλοιπον πρὸς 4 %, λαμβάνει δὲ ἐτησίως τόκον ἐκ τῶν δύο κεφαλαίων 1740 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἕκαστον τῶν μερῶν τοῦ κεφαλαίου.

292) Τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν χρημάτων του ἐδάνεισέ τις πρὸς 5 %, τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 6 % καὶ εἰσπράττει ἐτησίως τόκον ὁμοῦ 21600 δρχ. Πόσας ἐδάνεισε πρὸς 5 τοῖς ἑκατὸν καὶ πόσας πρὸς 6;

293) Δύο κεφάλαια διαφέρουν κατὰ 4000 δραχμάς. Τὸ μικρότερον ἐτοκίσθη πρὸς 4 % καὶ τὸ ἄλλο πρὸς 5 %. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια αὐτά τῶν ὁποίων οἱ τόκοι ἑνὸς ἔτους ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον 8:11.

294) Ἐκ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του οἰκονόμησέ τις 1500 δραχμάς. Τὸ ἑπόμενον ἔτος τὰς μὲν δαπάνας του ἠλάττωσε κατὰ 15 %, τὸ δὲ εἰσόδημά του ηὐξήθη κατὰ 10 %. Ἐξοικονόμησε δὲ οὕτω τὸ δεύτερον ἔτος 6000 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ εἰσόδημα τοῦ προηγουμένου ἔτους;

295) Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων, ὧν ἡ μεταξὺ αὐτῶν ἀπόστασις εἶναι $52\frac{1}{2}$ χλμ., πρὸς συνάντησιν ὁ εἷς τοῦ ἄλλου,

Ἡ ταχύτης καθ' ὥραν τοῦ ἑνὸς εἶναι κατὰ 1,8 χλμ. μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ ἄλλου, συναντῶνται δὲ μετὰ $1\,^1/_2$ ὥραν ἀπὸ τῆς ἐκκινήσεως. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν ὁ καθείς ;

296) Μία τάξις σχολείου ἀνεχώρησεν εἰς ἐκδρομήν. Εἷς δὲ μαθητὴς ἀνεχώρησε πρὸς συνάντησίν της μίαν ὥραν βραδύτερον, τρέχων ἐπὶ ποδηλάτου μὲ ταχύτητα 15 χιλιομέτρων τὴν ὥραν. Συνήντησε δὲ τὴν τάξιν του μετὰ ἡμίσειαν ὥραν, ἀφ' ὅτου ἐξεκίνησεν οὗτος. Ποία ἡ ταχύτης μὲ τὴν ὁποίαν ἐβάδιζεν ἡ τάξις ;

297) Εἷς στρατιώτης ποδηλάτης ἐστάλη διὰ νὰ μεταβιβάσῃ διαταγὴν εἰς τὸ σύνταγμά του, τὸ ὁποῖον εἶχεν ἀναχωρήσει ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου 2 ὥρας ἐνωρίτερον. Ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου ἦτο τὰ $\frac{19}{4}$ τῆς ταχύτητος μὲ τὴν ὁποίαν ἐβάδιζε τὸ σύνταγμα. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ φθάσῃ ὁ ποδηλάτης τὸ σύνταγμα ;

298) Ἡ ἡλικία ἑνὸς εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας ἄλλου, ἐνῷ πρὸ 10 ἐτῶν ἦτο τριπλασία. Ποία εἶναι ἡ παροῦσα ἡλικία ἑκάστου ;

299) Πατήρ τις εἶναι 37 ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ 8 ἐτῶν. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο ἢ θὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ ;

300) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 30 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του. Πρὸ 8 ἐτῶν τὸ ἄθροισμα τῶν ἡλικιῶν των ἦτο 46. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ ποία ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ ;

301) Πατήρ τις ἦτο 42 ἐτῶν, ὁ μεγαλύτερος υἱός του 10 ἐτῶν καὶ ὁ μικρότερος 4 ἐτῶν. Μετὰ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ ἔχῃ λόγον πρὸς τὴν ἡλικίαν τῶν δύο υἱῶν του ὁμοῦ, ὃν λόγον ἔχει ὁ 3 πρὸς τὸν 2 ;

302) Ὀκτὼ ἐργάται ἐξετέλεσαν τὸ $\frac{1}{5}$ ἔργου τινὸς ἐργαζόμενοι 4 ὥρας καθ' ἡμέραν ἐπὶ 9 ἡμέρας. Πόσας ὥρας πρέπει νὰ ἐργάζωνται καθ' ἡμέραν 15 ἐργάται, ἵνα ἀποτελειώσουν τὸ ἔργον εἰς 3 ἡμέρας ;

303) Ἐπώλησέ τις ὕφασμα πρὸς 69 δρχ. τὸν πῆχυν καὶ ἐκέρδισεν ἐν ὅλῳ 90 δρχ. Ἐὰν ὅμως ἐπώλει τὸ ὕφασμα κατὰ 4,60 δρχ. τὸν πῆχυν εὐθηνότερον θὰ ἔχανε 23,50 δρχ. Πόσων πήχεων ἦτο τὸ ὕφασμα ;

304) Μία κρήνη γεμίζει δεξαμενὴν εἰς 7 ὥρας, ἄλλη δὲ κρήνη τὴν γεμίζει εἰς 9 ὥρας. Ὅταν δὲ ρέουν καὶ αἱ δύο συγχρόνως ἐπὶ 3 ὥρας, ἡ δεξαμενή, διὰ νὰ γεμίσῃ ἐντελῶς, χρειάζεται ἀκόμη 120 ὀκάδας Πόσας ὀκάδας χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

305) Κρᾶμα ἀργύρου καὶ κασσιτέρου ἔχει εἰδικὸν βάρος 9 καὶ ζυγίζει 10 χιλιόγραμμα, Πόσον ἄργυρον καὶ πόσον κασσίτερον περιέχει τὸ κρᾶμα αὐτό, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ἀργύρου εἶναι 10,2 καὶ τοῦ κασσιτέρου εἶναι 7,3 ;

306) Τὸ βάρος σανίδος ἐκ ξύλου ὀξυᾶς εἶναι κατὰ 10 χιλιόγραμμα μικρότερον τοῦ βάρους τοῦ ὑπ' αὐτῆς ἐκτοπιζομένου ὕδατος. Τὸ εἰδικὸν βάρος τῆς ὀξυᾶς εἶναι 0,8, Ποῖον εἶναι τὸ βάρος τῆς σανίδος ;

307) Ράβδος ἔχει μῆκος 40 ἑκατοστῶν τοῦ μέτρου. Εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς κρέμαται βάρος 2,5 χιλιογράμμων, εἰς δὲ τὸ ἄλλο κρέμαται βάρος

0,75 χιλιογράμμων. Εἰς ποῖον σημεῖον πρέπει νὰ ὑποβαστάξωμεν τὴν ράβδον, ἵνα ἰσορροπήσῃ; (Τὸ βάρος τῆς ράβδου δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

308) Τῆς ταυτότητος $\chi^2-\chi^2=\chi^2-\chi^2$ τὸ πρῶτον μέλος γράφεται $\chi(\chi-\chi)$, τὸ δὲ δεύτερον γράφεται $(\chi+\chi)(\chi-\chi)$· ὥστε ἔχομεν

$$\chi(\chi-\chi)=(\chi+\chi)(\chi-\chi).$$

Ἐὰν δὲ ἤδη διαιρέσωμεν τὰ μέλη διὰ $\chi-\chi$, εὑρίσκομεν $\chi=\chi+\chi$ ἤτοι $\chi=2\chi$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

309) Ἐκ τῆς ἐξισώσεως

$$12\chi-10=15\chi-8$$

λαμβάνομεν τὰς $\quad 12\chi+8=15\chi+10 \quad 4(3\chi+2)=5(3\chi+2)$

Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς τελευταίας ἐξισώσεως διὰ $3\chi+2$, εὑρίσκομεν $\quad 4=5.$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ σφάλμα.

131. *Προβλήματα γενικά.* — Εἰς ἓν πρόβλημα εἶναι δυνατὸν τὰ δεδομένα νὰ παρίστανται διὰ γραμμάτων, διότι οἱ διάφοροι συλλογισμοὶ τοὺς ὁποίους κάμνομεν διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα δὲν ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν ἀριθμῶν ἢ ἀπὸ τὸ εἶδος αὐτῶν.

Τὸ πρόβλημα τοῦ ὁποίου τὰ δεδομένα παρίστανται διὰ γραμμάτων λέγεται γενικόν.

Εἰς τὰ γενικὰ προβλήματα εἶναι εὐνόητον ὅτι καὶ ἡ λύσις εἶναι γενική. Διότι αὕτη περιέχει ἐν γένει ὅλα τὰ γράμματα διὰ τῶν ὁποίων παρίστανται τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος καὶ δεικνύει τὰς πράξεις αἱ ὁποῖαι πρέπει νὰ γίνουν ἐπ' αὐτῶν ἵνα εὑρεθῇ ὁ ἄγνωστος Ἑπομένως (§ 50) ἀποτελεῖ αὕτη παράστασιν ἢ τύπον.

132. *Διερεύνησις γενικοῦ προβλήματος* — Τὰ γράμματα δι' ὧν παρίστανται τὰ δεδομένα ἑνὸς γενικοῦ προβλήματος εἶναι δυνατὸν νὰ λάβουν διαφόρους τιμάς. Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν νὰ κάμωμεν ἐπ' αὐτῶν διαφόρους ὑποθέσεις. Μεταβαλλομένων ὅμως τῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων ἢ τῶν ὑποθέσεων εἶναι δυνατὸν νὰ μεταβάλλεται καὶ ἡ λύσις τοῦ προβλήματος καὶ δι' ἄλλας μὲν τιμὰς ἢ ὑποθέσεις τὸ πρόβλημα νὰ καθίσταται δυνατὸν καὶ δι' ἄλλας νὰ καθίσταται ἀδύνατον ἢ ἀόριστον.

Ἡ ἐξέτασις τῶν διαφόρων τούτων περιπτώσεων καὶ καθ' ἃς τὸ πρόβλημα καθίσταται δυνατόν, ἀδύνατον ἢ ἀόριστον λέγεται διερεύνησις τοῦ γενικοῦ προβλήματος. Ὡς παραδείγματα γενικῶν προβλημάτων καὶ τῆς διερευνήσεως αὐτῶν δίδομεν τὰ κάτωθι.

1) *Ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ διὰ νὰ γίνῃ ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$;*

Περιορισμοί.—Οἱ παρονομασταὶ β καὶ δ πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

Τότε δὲ ἐὰν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}=\frac{\gamma}{\delta}$$

ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν, ἂν ὑποθέσωμεν τὸ $\beta+\chi$ διάφορον τοῦ 0, ἤτοι τὸ χ διάφορον τοῦ $-\beta$

$$(\alpha+\chi)\delta=\gamma(\beta+\chi)$$
$$\alpha\delta+\delta\chi=\beta\gamma+\gamma\chi$$
$$\delta\chi-\gamma\chi=\beta\gamma-\alpha\delta$$
$$\chi(\delta-\gamma)=\beta\gamma-\alpha\delta \qquad (1)$$

Ἑπομένως ἂν ὑποθέσωμεν πάλιν $\delta-\gamma\neq 0$, ἤτοι $\delta\neq\gamma$, θὰ ἔχωμεν

$$\chi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\delta-\gamma} \qquad (2)$$

Διερεύνησις.—Ἐὰν $\delta=\gamma$ θὰ εἶναι $\delta-\gamma=0$, ἐὰν δὲ εἶναι καὶ $\beta\gamma-\alpha\delta=0$, ἤτοι ἐὰν εἶναι καὶ $\alpha=\beta$, τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0=0$, ἤτοι εἶναι ἀπροσδιόριστος. Ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς λύει τὸ πρόβλημα. Καὶ πράγματι, διότι μὲ τὰς ὑποθέσεις αὐτὰς τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσα μὲ τὴν μονάδα.

Ἐὰν $\delta=\gamma$ καὶ $\beta\gamma\neq\alpha\delta$, ἤτοι $\alpha\neq\beta$, τότε τὸ μὲν πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι 0, τὸ δὲ δεύτερον μέλος αὐτῆς εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) εἶναι ἀδύνατος. Ἑπομένως καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον. Καὶ πράγματι, διότι τὸ μὲν κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$ ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, τὸ δὲ $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι διάφορον αὐτῆς. Ἑπομένως καὶ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+\chi}{\beta+\chi}$ εἶναι πάντοτε διάφορον τῆς μονάδος.

Ἐὰν ἡ λύσις (2) δώσῃ τὴν ρίζαν $\chi=-\beta$, αὕτη δὲν δύναται νὰ εἶναι παραδεκτή· διότι διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς ὑπεθέσαμεν τὸ χ διάφορον τοῦ $-\beta$.

Ἄλλως τε διὰ νὰ εἶναι $\chi=-\beta$, πρέπει νὰ εἶναι $\alpha=\beta$, διότι, οὕτως ἐκ τῆς λύσεως(2) εὑρίσκομεν $\chi = \dfrac{\beta(\gamma-\delta)}{\delta-\gamma} = -\beta$. Ἀλλὰ τότε εὐκόλως φαίνεται ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ἡ εὑρεθεῖσα λύσις (2) εἶναι παραδεκτὴ εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις πλὴν τῶν δύο τὰς ὁποίας ἐξῃρέσαμεν.

2) *Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha}{\beta}$ νὰ καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ ἀντίστροφον αὐτοῦ.*

Περιορισμοί.—Ὁ β ὁ παρονομαστὴς τοῦ δοθέντος κλάσματος ὡς καὶ ὁ α ὁ παρονομαστὴς τοῦ ἀντιστρόφου του πρέπει νὰ εἶναι διάφοροι τοῦ 0.

Ἡ ἐξίσωσις δὲ τότε τοῦ προβλήματος εἶναι $\dfrac{\alpha-\chi}{\beta-\chi} = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Ἤδη διὰ νὰ ἐξαλείψωμεν τοὺς παρονομαστὰς ὑποθέτομεν $\beta-\chi \neq 0$ ἤτοι $\chi \neq \beta$, εὑρίσκομεν δὲ τότε
$\alpha(\alpha-\chi) = \beta(\beta-\chi)$, ἤτοι $(\alpha-\beta)\chi = \alpha^2-\beta^2$ (1) καὶ ἂν $\alpha-\beta \neq 0$, ἤτοι ἂν $\alpha \neq \beta$ ἔχομεν

$$\chi = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta} \qquad (2)$$

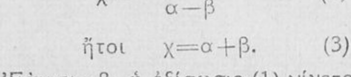
$$\text{ἤτοι} \quad \chi = \alpha+\beta. \qquad (3)$$

Διερεύνησις.—Ἐὰν $\alpha = \beta$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $0 = 0$, ἤτοι εἶναι ἀπροσδιόριστος. Ἑπομένως πᾶς ἀριθμὸς λύει τὸ πρόβλημα.

Ἐὰν ἡ λύσις (3) δώσῃ τὴν ρίζαν $\chi = \beta$, αὕτη πρέπει ν' ἀπορριφθῇ, γίνεται δὲ τοῦτο ὅταν $\alpha = 0$· ἀλλὰ τότε εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ λύσις λοιπὸν (3) ἁρμόζει εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις, ἐκτὸς ἐκείνων τὰς ὁποίας ἐξῃρέσαμεν.

3) ***Δύο κινητὰ κινοῦνται μὲ κίνησιν ὁμαλὴν ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς πρὸ ἀορίστου χρόνου· καὶ τοῦ μὲν πρώτου ἡ ταχύτης εἶναι τ, τοῦ δευτέρου εἶναι τ′ καὶ εὑρίσκονται τὴν στιγμὴν αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων ἀπόστασιν α. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ Α ἀπὸ τοῦ σημείου Μ τῆς συναντήσεως τῶν δύο κινητῶν.***



Τὸ σημεῖον Β ὑποτίθεται δεξιὰ τοῦ Α, ὁ δὲ ἀριθμὸς α ὅστις ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν ΑΒ ὑποτίθεται θετικός· τοῦτο δὲ σημαίνῃ, ὅτι τὸ τμῆμα ΑΒ ἐγράφη ὑπὸ κινητοῦ κατὰ τὴν διεύθυνσιν ἐκ τοῦ Α πρὸς τὸ Β· ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς ὅστις θὰ ἐκφράζῃ τὴν ἀπόστασιν ΒΑ διανυομένην κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν θὰ εἶναι ἀρνητικός, ἤτοι θὰ εἶναι οὗτος —α. Καὶ κατὰ ταῦτα καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τ καὶ τ′ θὰ εἶναι θετικὸς μέν, ἂν τὸ διάστημα τὸ ὁποῖον ἐκφράζει διανύεται κατὰ τὴν διεύθυνσιν ΑΒ, καὶ ἀρνητικὸς ἂν διανύεται κατὰ τὴν ἀντίθετον ΒΑ.

Καὶ ἤδη ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν ΑΜ, ἤτοι $(AM)=\chi$· ἀλλὰ τότε ὁ ἀριθμὸς ὅστις ἐκφράζει τὴν ἀπόστασιν ΒΜ θὰ εἶναι $\chi-\alpha$, ἤτοι θὰ εἶναι $(BM)=\chi-\alpha$, εἴτε τὸ Μ κεῖται πέραν (δεξιὰ) τοῦ Β, εἴτε κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Α, εἴτε μεταξὺ Α καὶ Β. Διότι, ἂν τὸ Μ κεῖται πέραν τοῦ Β εἶναι προφανῶς $(BM)=(AM)-(AB)=\chi-\alpha$· ἂν δὲ κεῖται τὸ Μ ἀριστερὰ τοῦ Α, εἶναι $(BM)=(BA)+(AM)=-\alpha+\chi=\chi-\alpha$· ἂν δὲ τέλος κεῖται τοῦτο μεταξὺ Α καὶ Β εἶναι $(AB)=(AM)+(MB)$, ἤτοι $\alpha=\chi+(MB)$ ἢ $(MB)=\alpha-\chi$· ἀλλ' ὅπως ὁ ἀριθμὸς (ΒΑ) εἶναι ἀντίθετος τοῦ (ΑΒ) οὕτω καὶ ὁ (ΒΜ) εἶναι ἀντίθετος τοῦ (ΜΒ) ἤτοι τοῦ $\alpha-\chi$. Ὥστε εἶναι $(BM)=\chi-\alpha$. Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι ἀφοῦ συγχρόνως ἀναχωροῦν τὰ δύο κινητὰ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ συγχρόνως φθάνουν εἰς τὸ Μ, ἕπεται ὅτι οἱ χρόνοι καθ' οὓς διανύονται τὰ διαστήματα ΑΜ καὶ ΒΜ, ἤτοι τὸ χ καὶ $\chi-\alpha$, εἶναι ἴσοι· ἐπειδὴ δὲ γνωρίζομεν, ὅτι ἐν τῇ ὁμαλῇ κινήσει ὁ χρόνος ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ διαστήματος διὰ τῆς ταχύτητος, σχηματίζομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{\tau}=\frac{\chi-\alpha}{\tau'} \qquad (1)$$

ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν διαδοχικῶς

$$\tau'\chi=\tau\chi-\alpha\tau, \qquad \alpha\tau=\chi(\tau-\tau') \qquad (2) \text{ καὶ ἐὰν } \tau-\tau'\neq 0$$

$$\chi=\frac{\alpha\tau}{\tau-\tau'} \qquad (3)$$

Διερεύνησις.—Ἐὰν $\tau=\tau'$ ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $\alpha\tau=0$· ἑπομένως δὲν ὑπάρχει λύσις· τὸ δὲ πρόβλημα τότε εἶναι προφανῶς ἀδύνατον.

Ἐὰν αἱ ταχύτητες εἶναι ἄνισοι καί:

Α′ ἀμφότεραι θετικαὶ καὶ ἐάν:

1) $\tau>\tau'$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετικὴ καὶ μεγαλυτέρα τοῦ α· διότι εἶναι $\tau>\tau-\tau'$ καὶ ἑπομένως $\frac{\tau}{\tau-\tau'}>1$, ἤτοι $\frac{\alpha\tau}{\tau-\tau'}>\alpha$. Τὸ σημεῖον λοι-

πὸν τῆς συναντήσεως θὰ εἶναι πέραν (δεξιὰ) τοῦ Β καὶ προφανῶς τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ ἡ διαφορὰ $\tau-\tau'$ εἶναι μικροτέρα.

2) $\tau<\tau'$ ἤτοι ἐὰν $\tau-\tau'<0$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἐπομένως τὸ Μ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Α, ἤτοι τὰ δύο κινητὰ συνηντήθησαν πρὶν ἢ φθάσουν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Β′ ἀμφότεραι ἀρνητικαὶ καὶ ἐάν:

1) $\tau>\tau'$ ἤτοι ἐὰν $\tau-\tau'>0$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι ἀρνητική, διότι $\alpha\tau<0$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ τῆς συναντήσεως εἶναι ἀριστερὰ τοῦ Α.

2) $\tau<\tau'$ ἤτοι ἐὰν $\tau-\tau'<0$ ἡ τιμὴ τοῦ χ εἶναι θετική· ὥστε ἡ συνάντησις τῶν δύο κινητῶν ἔγινε πέραν τοῦ Β πρὶν ἢ ταῦτα φθάσουν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β.

Γ′. Ἡ τ θετικὴ καὶ ἡ τ' ἀρνητική, ἤτοι $\tau>0$ καὶ $\tau'<0$ ἢ $-\tau'>0$, ἀλλ' εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εἶναι $\tau+(-\tau')=\tau-\tau'>0$ καὶ $\alpha\tau>0$. Ἡ τιμὴ λοιπὸν τοῦ χ εἶναι θετική. Ἀλλ' ἐπειδὴ $\tau<\tau+(-\tau')$ ἤτοι $\tau<\tau-\tau'$, εἶναι $\frac{\tau}{\tau-\tau'}<1$, ἤτοι $\frac{\alpha\tau}{\tau-\tau'}<\alpha$, δηλαδὴ $\chi<\alpha$. Τὸ σημεῖον λοιπὸν Μ κεῖται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Δ′. Ἡ τ ἀρνητικὴ καὶ ἡ τ' θετική. Τότε $\tau-\tau'<0$ καὶ $\alpha\tau<0$· ἄρα $0<\chi<\alpha$. Τὸ Μ λοιπὸν κεῖται πάλιν μεταξὺ τῶν Α καὶ Β.

Ἡ λύσις λοιπὸν (3) ἁρμόζει εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις πλὴν ὅταν εἶναι $\tau=\tau'$.

4) *Μία δεξαμενὴ γεμίζει διὰ δύο κρουνῶν, ἐξ ὧν ὁ πρῶτος τὴν γεμίζει εἰς τ ὥρας καὶ ὁ δεύτερος εἰς τ' ὥρας. Ἐὰν ἀνοιχθοῦν καὶ οἱ δύο κρουνοὶ συγχρόνως εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν;*

Ἔστω ὅτι εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενήν, τῆς ὁποίας τὴν χωρητικότητα παριστῶμεν διὰ τῆς μονάδος 1. Ἀλλ' ἀφοῦ ὁ πρῶτος κρουνὸς τὴν γεμίζει μόνος του εἰς τ ὥρας, εἰς μίαν ὥραν θὰ γεμίσῃ τὸ $\frac{1}{\tau}$ τῆς δεξαμενῆς καὶ εἰς χ ὥρας θὰ γεμίσῃ τὰ $\frac{\chi}{\tau}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ δεύτερος κρουνὸς θὰ γεμίσῃ εἰς χ ὥρας τὰ $\frac{\chi}{\tau'}$ τῆς δεξαμενῆς. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\chi}{\tau}+\frac{\chi}{\tau'}=1.$$

Πρέπει δὲ νὰ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τ, τ' καὶ χ θετικοί. Ἤδη ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\tau'\chi+\tau\chi=\tau\tau', \quad \chi(\tau'+\tau)=\tau\tau' \text{ καὶ } \chi=\frac{\tau\tau'}{\tau+\tau'}.$$

Ἡ λύσις δὲ αὕτη εἶναι παραδεκτή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν τὰ κάτωθι προβλήματα:

310) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς ὅστις προστιθέμενος εἰς ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸ διπλάσιον.

311) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καθιστᾷ αὐτὸν ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον αὐτοῦ.

312) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ ἀφαιρούμενος ἀπὸ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ ἰδίου κλάσματος καθιστᾷ αὐτὸ ἴσον μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\delta}$.

313) Πατὴρ τις εἶναι α ἐτῶν, ὁ δὲ υἱὸς αὐτοῦ β. Πότε ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι ἢ πότε ἦτο τετραπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ;

314) Ἐκ δύο ἀνθρώπων ὁ εἷς εἶναι ἡλικίας α ἐτῶν, ὁ δὲ ἄλλος β. Μετὰ πόσον χρόνον αἱ ἡλικίαι των θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ μ : ν;

315) Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ μεταξὺ δύο προσώπων, οὕτως ὥστε τὸ μερίδιον τοῦ πρώτου νὰ εἶναι τὸ νυοστὸν μέρος τοῦ μεριδίου τοῦ δευτέρου. Πόσων δραχμῶν ἦτο τὸ μερίδιον ἑκάστου.

316) Νὰ μοιρασθοῦν α δραχμαὶ μεταξὺ τριῶν προσώπων, οὕτως ὥστε ὁ πρῶτος νὰ λάβῃ διπλασίας δραχμὰς ἀπὸ ὅσας θὰ λάβῃ ὁ δεύτερος καὶ οὗτος πάλιν νὰ λάβῃ β δραχμὰς περισσοτέρας ἀπὸ ὅσας ἔλαβεν ὁ τρίτος. Πόσας δραχμὰς ἔλαβεν ἕκαστον πρόσωπον;

317) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι γ. Τὸ ἄθροισμα τοῦ γινομένου τοῦ μὲν ἑνὸς ἐπὶ μ, τοῦ δὲ ἄλλου ἐπὶ ν εἶναι α. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοί;

318) Ἐργάτης τις χρειάζεται α ὥρας, ἵνα τελειώσῃ ἔργον τι, δεύτερος ἐργάτης χρειάζεται β ὥρας διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ τρίτος γ ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας οἱ τρεῖς ἐργάται ὁμοῦ θὰ τελειώσουν τὸ ἔργον;

319) Δύο κεφάλαια, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι α δραχμαί, ἐτοκίσθησαν τὸ μὲν ἓν πρὸς τ % κατ' ἔτος, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς τ' % καὶ δίδουν ἐτήσιον τόκον β δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο ταῦτα κεφάλαια.

320) Γραμμάτιον ὀνομαστικῆς ἀξίας Α προεξωφλήθη μ μῆνας πρὸ τῆς λήξεως αὐτοῦ πρὸς ε %. Ποία εἶναι ἡ ἐσωτερικὴ ὑφαίρεσις;

321) Εἷς ἔκαμε μεῖγμα λ ὀκάδων ἐκ δύο ποιοτήτων οἴνου. Καὶ τῆς μὲν μιᾶς ποιότητος ἡ μία ὀκᾶ ἀξίζει α δραχμάς, τῆς ἄλλης β δραχμὰς καὶ τοῦ

μείγματος γ δραχμάς. Πόσας ὀκάδας οἴνου ἀνέμειξεν ἐκ τῆς μιᾶς ποιότητος καὶ πόσας ἐκ τῆς ἄλλης;

322) Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς AB κατὰ τὴν διεύθυνσιν AB μὲ κίνησιν ὁμαλήν. Τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι τ, διέρχεται τοῦ σημείου A λ ὥρας πρὸ τῆς στιγμῆς καθ' ἣν τὸ δεύτερον, τοῦ ὁποίου ἡ ταχύτης εἶναι τ′, διέρχεται διὰ τοῦ B. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου B ἀπὸ τοῦ σημείου τῆς συναντήσεως τῶν κινητῶν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ A ἀπὸ τοῦ B εἶναι α.

323) Δύο κινητὰ κινοῦνται πρὸ ἀορίστου χρόνου ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς AB μὲ κίνησιν ὁμαλήν. Τοῦ πρώτου ἡ ταχύτης εἶναι τ, τοῦ δευτέρου εἶναι τ′, εὑρίσκονται δὲ κατὰ τὴν στιγμὴν αὐτὴν τὸ μὲν ἓν εἰς τὸ σημεῖον A, τὸ δὲ ἄλλο εἰς τὸ B. Ζητεῖται ὁ μεταξὺ τῆς παρούσης στιγμῆς καὶ τῆς συναντήσεως αὐτῶν χρόνος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ A ἀπὸ τοῦ B εἶναι α.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ πρώτου βαθμοῦ μετὰ πολλῶν ἀγνώστων.

133. ***Λύσις μιᾶς ἐξισώσεως μὲ δύο ἀγνώστους.***— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἔχουν ἄθροισμα 10. Ἀλλ' ἐὰν διὰ χ καὶ ψ παραστήσωμεν τοὺς ζητουμένους ἀριθμούς, θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $χ+ψ=10$. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν $ψ=0$, θὰ εἶναι $χ=10$, ἐὰν δὲ εἶναι $ψ=1$, θὰ εἶναι $χ=9$ καί, ἐὰν $ψ=2, 3, \ldots -1, -2, -3$ κτλ., θὰ εἶναι $χ=8, 7, \ldots 11, 12, 13$, κτλ. Ὥστε ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχει τὰς λύσεις:

$$\begin{array}{c|c|c|c} ψ=0 & 1 & 2 & 3\ldots \\ χ=10 & 9 & 8 & 7\ldots \end{array} \qquad (1)$$

Ἤτοι: Ἑκάστη τιμὴ τοῦ ψ μὲ τὴν ἀντίστοιχον τιμὴν τοῦ χ ἀποτελοῦν μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως. Ἐπειδὴ δὲ δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸ ψ ἀπείρους τιμάς, εἰς κάθε μίαν τῶν ὁποίων ἀντιστοιχεῖ καὶ μία τιμὴ τοῦ χ, ἔπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει λύσεις *ἀπείρους τὸ πλῆθος*. Τὸ αὐτὸ παρατηροῦμεν καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $2χ-3ψ=6$, ἐκ τῆς ὁποίας διὰ

$$ψ=0, \quad 1, \quad 2, \quad 3 \quad \text{κτλ.}$$

λαμβάνομεν $\quad χ=3, \quad 4\frac{1}{2} \quad 6, \quad 7\frac{1}{2} \quad$ »

ὥστε: *Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$* (ὅπου α, β, γ, εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοὶ ἢ παραστάσεις γνωσταὶ) *ἔχει λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

134. ***Σύστημα ἐξισώσεων. Ἰσοδύναμα συστήματα.***—Ἐὰν ζητήσωμεν, ἵνα οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ τοῦ προηγουμένου προβλήματος ἔχουν ὄχι μόνον ἄθροισμα 10, ἀλλὰ καὶ διαφορὰν 4, ἤτοι, ἐὰν ζητήσωμεν, ἵνα αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ τοῦ ψ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις

$$\chi+\psi=10, \quad \chi-\psi=4$$

βλέπομεν εὐκόλως, ὅτι ἐκ τῶν ἀνωτέρω λύσεων (1) μόνον ἡ λύσις $\psi=3$, $\chi=7$ ἐπαληθεύει τὰς δύο αὐτὰς ἐξισώσεις ἢ τὸ σύστημα τῶν δύο αὐτῶν ἐξισώσεων. Λέγομεν δὲ σύστημα ἐξισώσεων *τὸ σύνολον πολλῶν ἐξισώσεων, τὰς ὁποίας ἐπαληθεύουν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων.*

Διὰ νὰ λύσωμεν ἓν σύστημα ἐξισώσεων, προσπαθοῦμεν νὰ εὕρωμεν ἓν ἄλλο σύστημα *ἰσοδύναμον*, ἀλλὰ τὸ ὁποῖον νὰ λύεται εὐκολώτερον. Λέγομεν δὲ δύο συστήματα *ἰσοδύναμα, ἐὰν αἱ αὐταὶ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων ἐπαληθεύουν καὶ τὰ δύο.*

Ἀπὸ ἓν δοθὲν σύστημα λαμβάνομεν ἄλλο ἰσοδύναμον κατὰ πολλοὺς τρόπους. Π. χ. ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἄλλην ἰσοδύναμον πρὸς αὐτήν. Οὕτω τὸ δοθὲν σύστημα

$$\begin{matrix}\chi+\psi=10\\ \chi-\psi=4\end{matrix} \quad \text{καὶ τὸ} \quad \begin{matrix}2\chi+2\psi=20\\ 3\chi-3\psi=12\end{matrix}$$

εἶναι ἰσοδύναμα. Ἀλλ' ἐν γένει ὁ τρόπος οὗτος δὲν κάμνει εὐκολωτέραν τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων. Ὁ κατάλληλος τρόπος διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν συστημάτων θὰ ἦτο ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος διὰ τοῦ *συνδυασμοῦ* μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων θὰ ἔδιδεν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία νὰ μὴ ἔχῃ ἕνα τῶν ἀγνώστων. Διότι οὕτω θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀνάγωμεν τὴν λύσιν συστημάτων εἰς τὴν λύσιν ἐξισώσεων μὲ ἕνα ἄγνωστον. Ἀλλὰ τοιοῦτος συνδυασμὸς ὑπάρχει καὶ λέγεται *ἀπαλοιφὴ* τοῦ ἀγνώστου. Μέθοδοι ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου, καὶ ἑπομένως μέθοδοι τῆς λύσεως ἑνὸς συστήματος, εἶναι διάφοροι. Αὗται δὲ στηρίζονται εἰς τὰ κάτωθι θεωρήματα.

135. ***Θεώρημα.***—*Ἐὰν εἰς σύστημα ἐξισώσεων προσθέσωμεν κατὰ μέλη ἢ ὅλας ἢ μερικὰς μόνον καὶ ἔπειτα ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος, διὰ τῆς εὑρεθείσης διὰ τῆς προσθέσεως, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν.*

Ἔστω τὸ σύστημα $A=A'$, $B=B'$, $\Gamma=\Gamma'$ (1), εἰς ὃ χάριν συντομίας παριστῶμεν διὰ τῶν γραμμάτων Α, Β, Γ, Α', Β', Γ' ἀλγεβρικὰς παραστάσεις περιεχούσας ἐν γένει τοὺς ἀγνώστους τοῦ συστήματος χ, ψ, φ. . . λέγομεν δὲ ὅτι τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$Α+Β=Α'+Β', \quad Β=Β', \quad Γ=Γ' \quad (2)$$ ἢ καὶ πρὸς τὸ

$$Α+Β+Γ=Α'+Β'+Γ', \quad Β=Β', \quad Γ=Γ' \quad (3)$$

Διότι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὰς παραστάσεις Α, Β, Γ, ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς Α', Β', Γ', καθιστοῦν προφανῶς ἴσας καὶ τὰς παραστάσεις $Α+Β$, $Α'+Β'$ ὡς καὶ τὰς $Α+$ $+Β+Γ$, $Α'+Β'+Γ'$. Ὥστε αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (1) εἶναι καὶ λύσεις τῶν συστημάτων (2) καὶ (3), ἀντιστρόφως δὲ αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (2) αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὰς παραστάσεις $Α+Β$, Β, Γ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς $Α'+Β'$, Β', Γ', καθιστοῦν προφανῶς ἴσας καὶ τὰς παραστάσεις Α, Α'. Ὥστε αἱ λύσεις τοῦ συστήματος (2) εἶναι καὶ λύσεις τοῦ συστήματος (1)· τὰ συστήματα λοιπὸν (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμα· ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ τὰ συστήματα (1) καὶ (3) εἶναι ἰσοδύναμα. Κατὰ ταῦτα ἐὰν τὰς ἐξισώσεις

$$χ+ψ=10, \quad χ-ψ=4 \qquad (1)$$

τοῦ συστήματος τῆς § 134 προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ ἀντικαταστήσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ, π.χ. τὴν $χ+ψ=10$ διὰ τῆς προκυπτούσης ἐξισώσεως $2χ=14$, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$2χ=14, \quad χ-ψ=4 \qquad (2).$$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ συστήματος (1) δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν τοῦ συστήματος (2), ἥτις εἶναι εὐκολωτέρα. Διότι ἐκ τῆς πρώτης $2χ=$ $=14$ εὑρίσκομεν $χ=7$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $χ-ψ=4$, εὑρίσκομεν $7-$ $-ψ=4$, ἤτοι $ψ=3$. Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $χ=7$, $ψ=3$ (εἶναι δὲ καὶ ἡ μόνη).

Παρατήρησις.—Εἴπομεν προηγουμένως (§ 134) ὅτι εἰς ἓν σύστημα δυνάμεθα ν' ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐξίσωσιν μὲ ἄλλην ἰσοδύναμον πρὸς αὐτήν. Ἕπεται λοιπὸν ἐκ τούτων καὶ ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ὅτι τὸ σύστημα (1) εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ

$$μΑ+νΒ+ρΓ= μΑ'+νΒ'+ρΓ', \quad Β=Β', \quad Γ=Γ'$$

καὶ ὅπου μ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός, ἐνῷ τὰ ν καὶ ρ δύνανται νὰ εἶναι μηδὲν ἢ ὄχι.

Οὕτω π.χ. τὸ σύστημα $2χ+3ψ=22$, $5χ-2ψ=17$ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα $19χ=95$, $5χ-2ψ=17$, τὸ ὁποῖον εὑρέθη διά τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν μελῶν τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ 2, τῆς δευτέρας ἐπὶ 3 καὶ τῆς προσθέσεως ἔπειτα τῶν νέων ἐξισώσεων κατὰ μέλη. Ἐκ τοῦ δευτέρου δὲ αὐτοῦ συστήματος εὑρίσκομεν πρῶτον $\chi=5$ καὶ ἔπειτα $\psi=4$.

136. Θεώρημα.— *Ἐὰν εἰς σύστημα λύσωμεν μίαν τῶν ἐξισώσεων πρὸς ἕνα τῶν ἀγνώστων* (τῶν ἄλλων ὑποτιθεμένων γνωστῶν) *καὶ ἔπειτα ἀντικαταστήσωμεν τοῦτον διὰ τῆς τιμῆς του εἰς ὅλας τὰς ἐξισώσεις ἢ εἰς μερικὰς μόνον, εὑρίσκομεν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν.*

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} A(\chi,\psi,\varphi)&=A'(\chi,\psi,\varphi)\\ B(\chi,\psi,\varphi)&=B'(\chi,\psi,\varphi)\\ \Gamma(\chi,\psi,\varphi)&=\Gamma'(\chi,\psi,\varphi)\end{aligned} \qquad (1)$$

καὶ ἔστω ὅτι, ὑποτιθεμένων τῶν ψ, φ ὡς γνωστῶν, δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρὸς χ, ἔστω δὲ ὅτι $\chi=A_1(\psi,\varphi)$· ἀφοῦ λοιπὸν ἡ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1), τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \chi&=A_1(\psi,\varphi)\\ B(\chi,\psi,\varphi)&=B'(\chi,\psi,\varphi)\\ \Gamma(\chi,\psi,\varphi)&=\Gamma'(\chi,\psi,\varphi).\end{aligned} \qquad (2)$$

ἐὰν ἤδη εἰς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ διὰ τῆς τιμῆς του, λαμβάνομεν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi&=A_1(\psi,\varphi)\\ B[A_1(\psi,\varphi),\psi,\varphi]&=B'[A_1(\psi,\varphi),\psi,\varphi]\\ \Gamma[A_1(\psi,\varphi),\psi,\varphi]&=\Gamma'[A_1(\psi,\varphi),\psi,\varphi]\end{aligned} \qquad (3)$$

ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύστημα (2). Διότι πᾶσα λύσις τοῦ ἑνὸς τῶν συστημάτων (2) καὶ (3) δίδει εἰς τὸ χ μίαν τιμὴν ἴσην μὲ $A_1(\psi,\varphi)$. Ἀλλὰ τὰ δύο αὐτὰ συστήματα διαφέρουν μόνον κατὰ τοῦτο: ὅτι δηλαδὴ ἐν τῷ συστήματι (3) ἀντὶ τοῦ χ ὑπάρχει τὸ ἴσον του $A_1(\psi,\varphi)$. Ὥστε πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (2) εἶναι λύσις καὶ τοῦ συστήματος (3) καὶ ἀντιστρόφως.

Ἔστω π.χ. τὸ σύστημα

$$\chi=5+3\psi, \quad 4\chi-9\psi=26.$$

Ἐὰν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὸ χ διὰ τοῦ ἴσου του $5+3\psi$, εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\chi=5+3\psi, \quad 4(5+3\psi)-9\psi=26.$$

Ἀλλ' ἡ δευτέρα ἐξίσωσις ἔχει ἕνα μόνον ἄγνωστον τὸν ψ· λύοντες λοιπὸν αὐτὴν εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\chi=5+3.2$ ἤτοι $\chi=11$.

137. *Λύσις συστήματος δύο ἐξισώσεων α' βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων. 1) Μέθοδος τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀναγωγῆς.*—"Εστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$3\chi+4\psi=19$$
$$-2\chi+5\psi=-5$$

Πρὸς τοῦτο θὰ εὕρωμεν ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν σύστημα καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μία ἐξίσωσις νὰ μὴ περιέχῃ ἕνα ἄγνωστον, ἤτοι θὰ ἀπαλείψωμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων. Δυνάμεθα δὲ νὰ πράξωμεν τοῦτο. Διότι δυνάμεθα (Θ. 135, παρατ.) νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις ἐπὶ τοιούτους ἀριθμούς, ὥστε οἱ συντελεσταὶ ἑνὸς ἀγνώστου νὰ γίνουν ἀντίθετοι ἀριθμοὶ καὶ ἑπομένως κατὰ τὴν πρόσθεσιν τῶν ἐξισώσεων νὰ ἀπαλειφθῇ ὁ ἄγνωστος οὗτος. Εἰς τὸ ληφθὲν δὲ παράδειγμα, ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν χ, πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ ἐν τῇ δευτέρᾳ καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ ἐν τῇ πρώτῃ. Λαμβάνομεν δὲ οὕτω τὸ σύστημα

$$6\chi+8\psi=38$$
$$-6\chi+15\psi=-15$$

ἤδη δὲ προσθέτοντες εὑρίσκομεν $23\psi=23$.

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ

$$3\chi+4\psi=19,\quad 23\psi=23.$$

'Αλλ' ἡ λύσις τοῦ εὑρεθέντος συστήματος εἶναι εὐκολωτάτη. Διότι ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως αὐτοῦ εὑρίσκομεν ἀμέσως $\psi=1$ καὶ κατόπιν διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ἐν τῇ πρώτῃ τοῦ ψ διὰ τῆς τιμῆς του, εὑρίσκομεν $3\chi+4.1=19$ καὶ ἐξ αὐτῆς $\chi=5$.

"Ωστε αἱ μόναι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι $\chi=5$, $\psi=1$. 'Εὰν θελήσωμεν ν' ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, θὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν πρώτην ἐπὶ 5 (ἢ —5) καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ —4 (ἢ 4). Οὕτω δὲ θὰ ἔχωμεν

$$\begin{array}{r} 15\chi+20\psi=95 \\ 8\chi-20\psi=20 \\ \hline 23\chi=115. \end{array}$$

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ

$$3\chi+4\psi=19,\qquad 23\chi=115$$

καὶ ἐκ μὲν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως αὐτοῦ εὑρίσκομεν $\chi=5$ καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $3.5+4\psi=19$ ἢ $\psi=1$.

Ἔστω προσέτι πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$3\chi-6\psi=30$$
$$5\chi-8\psi=44$$

Εἰς τὸ σύστημα αὐτό, διὰ νὰ ἀπαλείψωμεν τὸν ψ, τοῦ ὁποίου παρατηροῦμεν ὅτι οἱ συντελεσταὶ ἔχουν κοινὸν παράγοντα, ἐργαζόμεθα, ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\begin{array}{rl|rr} -8) & 3\chi-6\psi=30 & -4) & -12\chi+24\psi=-120 \\ 6) & 5\chi-8\psi=44 & 3) & 15\chi-24\psi=\ \ 132 \\ \cline{4-4} & & & 3\chi=12 \quad \text{ἤτοι } \chi=4 \end{array}$$

Ἤδη ἀντικαθιστῶμεν τὸ χ διὰ τῆς εὑρεθείσης τιμῆς του εἰς μίαν τῶν δοθεισῶν (διότι ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις $3\chi=12$ μετὰ μιᾶς τῶν δοθεισῶν ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν) π.χ. εἰς τὴν πρώτην καὶ εὑρίσκομεν

$$3.4-6\psi=30 \quad \text{ἤτοι } \psi=-3.$$

Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $\chi=4$, $\psi=-3$. Ἡ μέθοδος τῆς ἀπαλοιφῆς ἑνὸς ἀγνώστου, ὡς ἔγινεν εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, λέγεται *μέθοδος τῆς προσθέσεως* ἢ *τῆς ἀναγωγῆς*. Ὡς δὲ εἴδομεν, ὡς κατάλληλοι πολλαπλασιασταὶ λαμβάνονται οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου, ὅταν ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ ἐν τῇ μιᾷ ἐξισώσει γίνῃ πολλαπλασιαστὴς τῆς ἄλλης, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι οἱ πολλαπλασιασταὶ καθίστανται ἑτερόσημοι, ἐὰν οἱ συντελεσταὶ εἶναι ὁμόσημοι καὶ ὁμόσημοι (καὶ συνήθως θετικοί), ἐὰν οἱ συντελεσταὶ εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἀλλ' εἶναι ἁπλούστερον νὰ καθιστῶμεν κοινὸν συντελεστὴν τοῦ ἀπαλειπτέου ἀγνώστου τὸ ε. κ. π. τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ καὶ νὰ πολλαπλασιάζωμεν ἑκάστην τῶν ἐξισώσεων ἐπὶ τὸ πηλίκον τοῦ ε.κ.π. διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου ἐν τῇ ἰδίᾳ ἐξισώσει, ἀλλάσσοντες ὅμως τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς πηλίκου, ἂν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου εἶναι ὁμόσημοι.

2) *Μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.* Αὕτη στηρίζεται εἰς τὸ Θ. 136· Ἔστω ὡς π. δ. τὸ σύστημα $2\chi+\psi=13$, $3\chi-2\psi=9$.

Λύομεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρὸς ψ καὶ γράφομεν τὸ δοθὲν σύστημα ὡς ἑξῆς

$$\psi=13-2\chi, \quad 3\chi-2\psi=9.$$

Ἐὰν δὲ ἤδη ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τὸ ψ διὰ τῆς τιμῆς του εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα

$$\psi=13-2\chi, \quad 3\chi-2(13-2\chi)=9$$

εἰς τὸ ὁποῖον ἡ δευτέρα ἐξίσωσις περιέχει ἕνα ἄγνωστον, τὸν χ· αὕτη δὲ λυομένη δίδει $\chi=5$. Ἤδη θέτοντες τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην εὑρίσκομεν $\psi=3$. Ὥστε ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $\chi=5$, $\psi=3$.

Ἡ μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας εἰς τὸ προηγούμενον σύστημα ἀπηλείψαμεν ἕνα τῶν ἀγνώστων λέγεται *μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως*.

3) *Μέθοδος τῆς συγκρίσεως*. Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα

$$4\chi-3\psi=11, \quad 8\chi+\psi=1.$$

Λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, π. χ. πρὸς τὸν χ, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{11+3\psi}{4}, \quad \chi=\frac{1-\psi}{8} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ δὲ τὰ πρῶτα μέλη τοῦ συστήματος (1) εἶναι ἴσα θὰ εἶναι καὶ τὰ δεύτερα ἴσα, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\frac{11+3\psi}{4}=\frac{1-\psi}{8}.$$

ἀλλ' ἡ ἐξίσωσις αὕτη πρὸς ψ μετὰ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1) π. χ. τῆς δευτέρας δίδει τὸ σύστημα

$$\chi=\frac{1-\psi}{8}, \quad \frac{11+3\psi}{4}=\frac{1-\psi}{8} \quad (2)$$

ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἤδη λύοντες τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (2) εὑρίσκομεν $\psi=-3$, ἐὰν δὲ τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ψ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=\frac{1}{2}$. Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι $\chi=\frac{1}{2}$, $\psi=-3$.

Ἡ μέθοδος αὐτὴ κατὰ τὴν ὁποίαν λύομεν καὶ τὰς δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον καὶ κατόπιν ἐξισοῦμεν τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ ἀγνώστου τούτου λέγεται *μέθοδος τῆς συγκρί-*

σεως, ἀλλὰ *κυρίως* εἶναι μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως. Διότι εἰς τὴν δευτέραν π. χ. ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1) ἀντικαθιστῶμεν τὸ χ διὰ τῆς τιμῆς του, τὴν ὁποίαν δίδει ἡ πρώτη ἐξίσωσις.

Παρατήρησις.—Ἡ ἀπαλοιφὴ ἑνὸς τῶν ἀγνώστων δύναται νὰ γίνῃ καὶ ὡς φαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω παράδειγμα. Τὸ σύστημα π. χ.

$$\begin{matrix} 3\chi+2\psi=23 \\ 5\chi-7\psi=-3 \end{matrix} \quad \text{γράφεται} \quad \begin{matrix} 3\chi=23-2\psi \\ 5\chi=7\psi-3 \end{matrix}$$

Ἐὰν ἤδη διαιρέσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου συστήματος κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{3}{5}=\frac{23-2\psi}{7\psi-3}$$

ἥτις δὲν περιέχει τὸν χ. Ἡ μέθοδος δὲ αὕτη ἀπαλοιφῆς εἶναι παραλλαγὴ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως.

138. Μερικαὶ περιπτώσεις.—*α) Συστήματα ἀδύνατα.* Ἔστω τὸ σύστημα

$$2\chi+3\psi=8,\ 4\chi+6\psi=12 \qquad (1).$$

Πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ −2, τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ 1 καὶ ἔπειτα προσθέτοντες εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r} -4\chi-6\chi=-16 \\ 4\chi+6\psi=12 \\ \hline 0.\chi=-4 \end{array} \qquad (2)$$

Ἀλλ᾽ ἀφοῦ ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀδύνατον, ἤτοι αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι *ἀσυμβίβαστοι*. Καὶ πράγματι, διότι τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὸ σύστημα (2), ἐὰν τὸ γράψωμεν ὡς ἑξῆς :

$$\begin{matrix} 4\chi+6\psi=16 \\ 4\chi+6\psi=12. \end{matrix}$$

β) *Συστήματα ἀπροσδιόριστα.* Ἔστω τὸ σύστημα

$$4\chi-3\psi=6,\ \ 12\chi-9\psi=18 \qquad (1).$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ −3 καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ 1, ὁπότε ἔχομεν

$$\begin{array}{r} -12\chi+9\psi=-18 \\ 12\chi-9\psi=18 \\ \hline 0.\psi=0 \end{array} \qquad (2)$$

καὶ προσθέτοντες

'Αλλ' ἀφοῦ ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀπροσδιόριστος, καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀπροσδιόριστον. Καὶ πράγματι, διότι τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σύστημα, ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως διὰ 3, διότι τότε ἔχομεν

$$4χ-3ψ=6$$
$$4χ-3ψ=6$$

ἤτοι ἔχομεν πραγματικῶς μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους, ἡ ὁποία γνωρίζομεν, ὅτι ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Παρατήρησις.—'Εκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων συνάγομεν, ὅτι *ἓν σύστημα δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μετὰ δύο ἀγνώστων ἢ ἔχει ἓν μόνον σύστημα λύσεων, ἢ εἶναι ἀδύνατον, ἢ ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.*

139. *Λύσις καὶ διερεύνησις τοῦ γενικοῦ συστήματος.*

$$αχ+βψ=γ$$
$$α'χ+β'ψ=γ' \qquad (1).$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐπὶ β' καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ —β καὶ προσθέτομεν ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη, ὁπότε εὑρίσκομεν.

$$(αβ'-α'β)χ=γβ'-γ'β \qquad (2)$$

'Υποθέτοντες δὲ ἤδη $αβ'-α'β\neq0$ λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς τὴν τιμὴν τοῦ χ.

$$χ=\frac{γβ'-γ'β}{αβ'-α'β} \qquad (3)$$

'Ομοίως πολλαπλασιάζοντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν ἐπὶ —α' καὶ τὴν δευτέραν ἐπὶ α καὶ προσθέτοντες ἔπειτα αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(αβ'-α'β)ψ=γ'α-γα'$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ ψ.

$$ψ=\frac{γ'α-γα'}{αβ'-α'β} \qquad (4)$$

Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτων, ὅτι : *ἂν $αβ'-α'β\neq0$ τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνην, ἥτις δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (3) καὶ (4).*

Ἤδη πρόκειται νὰ ἐξετάσωμεν τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶναι

$\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$· ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις (2) γίνεται $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$ καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ

$$\begin{aligned} \alpha\chi + \beta\psi &= \gamma \\ \gamma\beta' - \gamma'\beta &= 0. \end{aligned}$$

Ἐὰν ἤδη εἶναι $\gamma\beta' - \gamma'\beta \neq 0$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ τελευταίου τούτου συστήματος εἶναι ἀδύνατος καὶ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις εἶναι ἀσυμβίβαστοι καὶ οὐδεμία λύσις ὑπάρχει. Ἐὰν δὲ εἶναι $\gamma\beta' - \gamma'\beta = 0$, τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς μίαν μόνον ἐξίσωσιν, τὴν $\alpha\chi + \beta\psi = \gamma$, καὶ ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις.

Π. δ. 1) Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2\chi - 5\psi &= 6 \\ 4\chi - 10\psi &= 9 \end{aligned}$$

Εἰς τοῦτο εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 20 - 20 = 0$

$$\gamma'\alpha - \gamma\alpha' = 18 - 24 = -6$$

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

2) Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \chi + \lambda\psi &= 2\mu \\ 3\chi + \psi &= \mu \end{aligned}$$

Εἰς τοῦτο εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1 - 3\lambda$ καὶ ἐὰν

1) $1 - 3\lambda \neq 0$ ἤτοι $\lambda \neq \frac{1}{3}$ τὸ δοθὲν σύστημα ἐπιδέχεται μίαν καὶ μόνην λύσιν, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ μ, τήν

$$\chi = \frac{\mu(2-\lambda)}{1-3\lambda} \qquad \psi = \frac{-5\mu}{1-3\lambda}$$

2) $1 - 3\lambda = 0$, ἤτοι $\lambda = \frac{1}{3}$· ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὴν παράστασιν $\gamma\beta' - \gamma'\beta = \mu(2-\lambda)$. Καὶ ἐὰν μὲν $\mu(2-\lambda) \neq 0$, ἤτοι ἐὰν $\mu \neq 0$ (διότι $2 - \lambda \neq 0$) τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἀδύνατον. Ἐὰν δὲ $\mu(2-\lambda) = 0$, ἤτοι ἐὰν $\mu = 0$, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις. Δίδονται δὲ αὗται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως $\psi = -3\chi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

324) $5\chi+3\psi+2=0$, $3\chi+2\psi+1=0$

325) $(2\chi-\psi)+(\chi-2\psi)=18$, $(\chi-3\psi)-(3\chi-\psi)=-2$

326) $3(\psi-\chi)+36=0$, $\chi-(\chi-\psi)+60=0$

327) $\frac{\chi}{2}=\frac{\psi}{3}+1$, $\frac{\chi}{4}=\frac{4}{3}\psi-10$

328) $2\frac{1}{4}\chi=3\frac{1}{3}\psi+4$, $2\frac{1}{5}\psi=3\frac{1}{3}\chi-47$

329) $5\chi-4{,}9\psi=1$, $3\chi-2{,}9\psi=0{,}1$

330) $\frac{5}{\chi+2\psi}=\frac{7}{2\chi+\psi}$, $\frac{7}{3\chi-2}=\frac{5}{6-\psi}$

331) $\frac{\chi+1}{3}-\frac{\psi+2}{4}=\frac{2(\chi-\psi)}{4}$, $\frac{\chi-3}{4}-\frac{\psi-3}{3}=2\psi-\chi$

332) $\frac{\chi+1}{3}=\frac{\psi}{4}-1$, $\frac{\psi}{3}-\frac{3\chi+1}{4}=0$

333) $\frac{4\chi-3\psi-7}{5}=\frac{3\chi}{10}-\frac{2\psi}{15}-\frac{5}{6}$, $\frac{\psi-1}{8}+\frac{\chi}{2}-\frac{3\psi}{20}-1=\frac{\psi-\chi}{15}+\frac{\chi}{6}+\frac{1}{10}$

334) $\frac{\chi-\psi}{4}-\frac{(5\chi-1)}{2}+\frac{3(2-\psi)}{2}+\frac{1-\chi}{3}=0$, $\frac{7(\chi+\psi)}{6}=\frac{2(\chi-3)}{7}-\frac{3(\psi-\chi)}{2}$

335) $2.\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\psi}=1$, $7.\frac{1}{\chi}-2.\frac{1}{\psi}=20$ (ἐνταῦθα ὡς ἄγνωστοι δέον νὰ θεωρηθοῦν τὰ $\frac{1}{\chi}$ καὶ $\frac{1}{\psi}$ καὶ πρὸς ταῦτα νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις).

336) $\frac{5}{\chi}+\frac{2}{\psi}=13$, $\frac{4}{\chi}+\frac{7}{\psi}=5$

337) $\frac{16}{\chi}-\frac{27}{\psi}=-1$, $\frac{8}{\chi}+\frac{36}{\psi}=5$

338) $\frac{27}{\chi}+\frac{5}{\psi}=-1$, $\frac{7}{2\chi}+\frac{7}{3\psi}=-\frac{77}{90}$

339) $17\chi-\frac{3}{\psi}=30$, $16\chi-\frac{0{,}4}{\psi}=1{,}7$

340) $\frac{\chi}{3}+\frac{5}{\psi}=4\frac{1}{3}$, $\frac{\chi}{6}+\frac{10}{\psi}=2\frac{2}{3}$

341) $\frac{\chi}{2}+\frac{5}{3\psi}=-1\frac{5}{9}$, $4\chi-\frac{1}{\psi}=7\frac{2}{3}$

342) $\chi+\psi=5\alpha$, $\chi-\psi=3\alpha$

343) $5\chi-\psi=6\alpha$, $4\chi-5\psi=9\alpha$

344) $2\alpha\chi+\psi=7\beta$, $\alpha\chi-\psi=2\beta$

345) $\alpha\chi+2\psi=-1$, $2\chi+3\psi=\gamma$

346) $\chi-\beta\psi=2$, $2\beta\chi+\alpha\psi=-2$

347) $\alpha\chi+\beta\psi=\alpha^2+\beta^2$, $\beta\chi-\alpha\psi=0$

348) $\frac{2\chi}{\alpha}-\alpha\psi=\alpha$, $3\chi-2\alpha^2\psi=\alpha^2$

349) $(\alpha+\beta)\chi-(\alpha-\beta)\psi=4\alpha\beta$, $(\alpha+\beta)\chi+(\alpha-\beta)\psi=2(\alpha^2+\beta^2)$.

140. Λύσις συστήματος δσωνδήποτε ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἰσαρίθμους ἀγνώστους.

Ἔστω πρῶτον τὸ σύστημα τῶν τριῶν ἐξισώσεων

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\phi&=6 \\ 2\chi+\psi-3\phi&=-5 \\ \chi-3\psi+4\phi&=7. \end{aligned} \qquad (1)$$

Διὰ μιᾶς τῶν προηγουμένων μεθόδων ἀπαλείφομεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἕνα ἐκ τῶν τριῶν ἀγνώστων, π. χ. τὸν χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $\psi+5\phi=17$. Ὁμοίως μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ τῆς τρίτης ἀπαλείφομεν τὸν αὐτὸν ἄγνωστον χ, ὁπότε εὑρίσκομεν $-4\psi+3\phi=1$. Ἐὰν ἤδη τὴν δευτέραν καὶ τρίτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὰς εὑρεθείσας δύο ἐξισώσεις, ἔχομεν τὸ σύστημα τὸ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν

$$\begin{aligned} \chi+\psi+\phi&=6 \\ \psi+5\phi&=17 \\ -4\psi+3\phi&=1. \end{aligned} \qquad (2)$$

εἰς ὃ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις περιέχουν δύο καὶ τοὺς αὐτοὺς ἀγνώστους ψ καὶ ϕ. Ἀποτελοῦν λοιπὸν αὗται ἰδιαίτερον σύστημα, τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν νὰ λύωμεν. Λύοντες δὲ τοῦτο εὑρίσκομεν $\psi=2$ καὶ $\phi=3$. Κατόπιν δὲ ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi+\psi+\phi=6$ εὑρίσκομεν $\chi+2+3=6$, ἤτοι $\chi=1$. Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὸ δοθὲν σύστημα, εἶναι $\chi=1$, $\psi=2$, $\phi=3$. Ἀποτελοῦν δὲ αὗται ἓν σύστημα λύσεων, τὸ ὁποῖον εἶναι καὶ τὸ μόνον.

141. Ἐκ τῶν προηγουμένων βλέπομεν, ὅτι ἡ λύσις συστήματος τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους. Ἀλλὰ καὶ ἡ λύσις παντὸς συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν συστήματος δύο ἐξισώσεων μὲ δυο ἀγνώστους. Διότι ἂν ἔχωμεν π. χ. ἓν σύστημα μ ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ μ ἀγνώστους καὶ ἀπαλείψωμεν μεταξὺ τῆς πρώτης καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων $\mu-1$ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, θὰ εὕρωμεν $\mu-1$ ἐξισώσεις. Αὗται δὲ μετὰ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἀποτελοῦν σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἀλλ' αἱ νέαι εὑρεθεῖσαι $\mu-1$ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι περιέχουν $\mu-1$ ἀγνώστους, ἀποτελοῦν ἴδιον σύστημα.

Ἐὰν δὲ λύσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο καὶ τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν $\mu-1$ ἀγνώστων θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, αὕτη θὰ ἔχῃ πλέον ἕνα μόνον ἄγνωστον, ἡ τιμὴ τοῦ ὁποίου θὰ εὑρεθῇ ἐκ τῆς λύσεως αὐτῆς. Ὥστε μὲ τὸν τρόπον αὐτόν : *ἡ λύσις παντὸς συστήματα-*

Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων εὑρίσκομεν $\chi=\frac{13}{10\alpha}$, $\psi=\frac{1}{10}$.

Ἂν δὲ τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν χ καὶ ψ θέσωμεν εἰς τὰς δύο ἄλλας ἐξισώσεις λαμβάνομεν $\frac{13}{10}+\frac{\beta}{10}=3$, $\frac{13}{10\alpha}-\frac{\beta}{10}=2$, ἐξ ὧν εὑρίσκομεν $\alpha=\frac{13}{37}$. $\beta=17$. Αἱ δοθεῖσαι λοιπὸν ἐξισώσεις γίνονται

$$\frac{13}{37}\chi-3\psi=1 \qquad \frac{13}{37}\chi+17\psi=3$$

$$\frac{26}{37}\chi+4\psi=3 \qquad \chi-17\psi=2$$

Ταυτοποιοῦνται δὲ αὗται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων. Καὶ πράγματι αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, αἱ ὁποῖαι εὑρίσκονται ἐκ δύο τῶν ἐξισώσεων τούτων, ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ἄλλας δύο.

Σημείωσις.—Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀορίστων συντελεστῶν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ν δυνάμεθα εἰς τοὺς ἐπὶ πλέον τοῦ ν συντελεστὰς νὰ δώσωμεν τιμὰς αὐτοβούλως· ἀλλ' ἐὰν ὁ ἀριθμὸς αὐτῶν εἶναι μικρότερος τοῦ ν αἱ προκύπτουσαι ἐξισώσεις μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν μ ἀγνώστων θὰ εἶναι ἀσυμβίβαστοι· ἑπομένως καὶ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις θὰ εἶναι τοιαῦται.

143. Μέθοδος ἀπαλοιφῆς τοῦ Bézout ***ἢ τῶν ἀορίστων συντελεστῶν.***—Διὰ τῆς μεθόδου ταύτης ἀπαλείφομεν εἰς ἓν σύστημα ὅλους τοὺς ἀγνώστους συγχρόνως πλὴν ἑνός· π.δ. Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi&=\delta \\ \alpha'\chi+\beta'\psi+\gamma'\varphi&=\delta' \qquad (1) \\ \alpha''\chi+\beta''\psi+\gamma''\varphi&=\delta'' \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ λ, τῆς δευτέρας ἐπὶ λ′, τῆς τρίτης ἐπὶ λ″, προσθέτομεν ἔπειτα τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\lambda\alpha+\lambda'\alpha'+\lambda''\alpha'')\chi+(\lambda\beta+\lambda'\beta'+\lambda''\beta'')\psi+(\lambda\gamma+\lambda'\gamma'+\lambda''\gamma'')\varphi=$$
$$=\lambda\delta++\lambda'\delta'+\lambda''\delta''. \qquad (2)$$

ἥτις, ἐὰν $\lambda\neq0$, μετὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ἐξισώσεως ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἤδη λαμβάνομεν $\lambda=1$ καὶ ὁρίζομεν τὸ λ′ καὶ λ″ εἰς τρόπον ὥστε οἱ συντελεσταὶ τοῦ ψ καὶ φ ἐν τῇ ἐξισώσει (2) νὰ γίνουν μηδέν· ἤτοι νὰ εἶναι

$$\begin{aligned} \beta+\lambda'\beta'+\lambda''\beta''&=0 \\ \gamma+\lambda'\gamma'+\lambda''\gamma''&=0 \qquad (3) \end{aligned}$$

ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις (2) ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(\alpha+\lambda'\alpha'+\lambda''\alpha'')\chi=\delta+\lambda'\delta'+\lambda''\delta''$$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\delta+\lambda'\delta'+\lambda''\delta''}{\alpha+\lambda'\alpha'+\lambda''\alpha''}$$

Θὰ λάβωμεν δὲ τελικῶς τὴν τιμὴν τοῦ χ, ἐὰν εἰς τὴν ὡς ἄνω ἐξίσωσιν ἀντικαταστήσωμεν τὰ λ', λ'' διὰ τῶν τιμῶν των εὑρισκομένων ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος (3).

Ἤδη εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν ἐξισώσωμεν μὲ τὸ μηδὲν τοὺς συντελεστὰς τῶν χ, φ καὶ ἔπειτα τῶν χ, ψ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, θὰ εὕρωμεν τὰς τιμὰς τῶν ψ, φ.

$$\psi=\frac{\delta+\lambda'\delta'+\lambda''\delta''}{\beta+\lambda'\beta'+\lambda''\beta''},\qquad \varphi=\frac{\delta+\lambda'\delta'+\lambda''\delta''}{\gamma+\lambda'\gamma'+\lambda''\gamma''}.$$

Αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, φ τοῦ συστήματος (1) εὑρισκόμεναι ὡς λέγομεν ἀνωτέρω εἶναι αἱ ἑξῆς:

$$\chi=\frac{\delta\beta'\gamma''-\delta\beta''\gamma'+\delta'\beta''\gamma-\delta'\beta\gamma''+\delta''\beta\gamma'-\delta''\beta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma}$$

$$\psi=\frac{\alpha\delta'\gamma''-\alpha\delta''\gamma'+\alpha'\delta''\gamma-\alpha'\delta\gamma''+\alpha''\delta\gamma'-\alpha''\delta'\gamma}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma}\qquad(4)$$

$$\varphi=\frac{\alpha\beta'\delta''-\alpha\beta''\delta'+\alpha'\beta''\delta-\alpha'\beta\delta''+\alpha''\beta\delta'-\alpha''\beta'\delta}{\alpha\beta'\gamma''-\alpha\beta''\gamma'+\alpha'\beta''\gamma-\alpha'\beta\gamma''+\alpha''\beta\gamma'-\alpha''\beta'\gamma}$$

Ἐφαρμογή.—Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned}2\chi+4\psi-\varphi&=7\\5\chi+10\psi-2\varphi&=19\\4\chi-2\psi+\varphi&=3\end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ λ', τῆς τρίτης ἐπὶ λ'' καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη τὴν πρώτην ἐξίσωσιν καὶ τὰς προκυπτούσας· εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὴν ἐξίσωσιν

$$(2+5\lambda'+4\lambda'')\chi+(4+10\lambda'-2\lambda'')\psi+(-1-2\lambda'+\lambda'')\varphi=$$
$$=7+19\lambda'+3\lambda''$$

ἥτις μετὰ τῆς δευτέρας καὶ τρίτης ἐξισώσεως ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Ἤδη 1) πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ χ θέτομεν

$$\begin{aligned}4+10\lambda'-2\lambda''&=0\\-1-2\lambda'+\lambda''&=0\end{aligned}$$

ἐκ τοῦ συστήματος δὲ αὐτοῦ εὑρίσκομεν $\lambda'=-\frac{1}{3}$, $\lambda''=\frac{1}{3}$.

$$\text{Ὥστε εἶναι } \chi = \frac{7 - \frac{19}{3} + 1}{2 - \frac{5}{3} + \frac{4}{3}} = 1.$$

2) Πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ ψ θέτομεν

$$2 + 5\lambda' + 4\lambda'' = 0$$
$$-1 - 2\lambda' + \lambda'' = 0$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\lambda' = -\frac{6}{13}$, $\lambda'' = \frac{1}{13}$

$$\text{Ὥστε εἶναι } \psi = \frac{7 - \frac{114}{13} + \frac{13}{13}}{4 - \frac{60}{13} - \frac{2}{13}} = 2$$

3) Πρὸς εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ φ θέτομεν

$$2 + 5\lambda' + 4\lambda'' = 0$$
$$4 + 10\lambda' - 2\lambda'' = 0$$

ἐξ οὗ εὑρίσκομεν $\lambda' = -\frac{2}{5}$, $\lambda'' = 0$

$$\text{Ὥστε εἶναι } \varphi = \frac{7 - \frac{38}{5}}{-1 + \frac{4}{5}} = 3$$

Ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$\chi = 1, \quad \psi = 2, \quad \varphi = 3$$

Σημείωσις α'.—Διὰ τὴν ἁπλουστέραν λύσιν τοῦ ὡς ἄνω συστήματος ἠδυνάμεθα τὴν τιμὴν χ=1 νὰ θέσωμεν εἰς τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις αὐτοῦ καὶ νὰ λύσωμεν ἀκολούθως τὸ σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ τοὺς ἀγνώστους ψ, φ.

Σημείωσις β'.—Ἡ μέθοδος τοῦ Bézout ἐφαρμόζεται προφανῶς ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη καὶ διὰ τὴν λύσιν συστήματος μ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους.

144. Κανὼν τοῦ Cramer.—Ὁ Cramer ἐξετάσας μετὰ προσοχῆς τοὺς τύπους (3), (4) τῆς § 139 ὡς καὶ τὸν τύπον (4) τῆς § 143, εὗρε τὸν κάτωθι πρακτικὸν κανόνα (τὴν ἀκρίβειαν τοῦ ὁποίου θὰ δείξωμεν εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ ὁριζουσῶν) εὑρέσεως εὐκόλως τῶν τιμῶν μ ἀγνώστων περιεχομένων εἰς σύστημα μ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.

Ἔστω τὸ σύστημα μ πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους, χ, ψ, φ, υ . . . . ω.

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi+\delta\upsilon+\ldots+\eta\omega=\kappa$$
$$\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1\varphi+\delta_1\upsilon+\ldots+\eta_1\omega=\kappa_1$$
$$\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2\varphi+\delta_2\upsilon+\ldots+\eta_2\omega=\kappa_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{\mu-1}\chi+\beta_{\mu-1}\psi+\gamma_{\mu-1}\varphi+\delta_{\mu-1}\upsilon+\ldots+\eta_{\mu-1}\omega=\kappa_{\mu-1}.$$

1ον. Αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι κλάσματα ἔχοντα τὸν αὐτὸν παρονομαστήν, ὅστις σχηματίζεται ὡς ἑξῆς: Δεξιὰ τοῦ συντελεστοῦ α τοῦ πρώτου ἀγνώστου χ γράφομεν τὸν συντελεστὴν β τοῦ δευτέρου, σχηματίζοντες οὕτω τὸ γινόμενον αβ· ἔπειτα ἀλλάζομεν τὴν τάξιν τῶν συντελεστῶν αὐτῶν καὶ μεταξὺ τῶν γινομένων αβ καὶ βα θέτομεν τὸ σημεῖον —· οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὸ διώνυμον

$$\alpha\beta-\beta\alpha$$

Δεξιὰ ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ ὡς ἄνω διωνύμου γράφομεν τὸν συντελεστὴν γ τοῦ τρίτου ἀγνώστου, τὸν ὁποῖον ἔπειτα θέτομεν διαδοχικῶς εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις ἐκ δεξιῶν πρὸς τὰ ἀριστερά, ἀλλάζοντες ὅμως τὸ σημεῖον μεθ' ἑκάστην θέσιν τοῦ γ, οὕτω δὲ σχηματίζομεν τὸ πολυώνυμον

$$\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma\beta+\gamma\alpha\beta-\beta\alpha\gamma+\beta\gamma\alpha-\gamma\beta\alpha$$

Ὁμοίως πάλιν δεξιὰ ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου τούτου γράφομεν τὸν συντελεστὴν δ τοῦ τετάρτου ἀγνώστου, τὸν ὁποῖον γράφομεν ἔπειτα διαδοχικῶς εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις, ἀλλάζοντες συγχρόνως τὸ σημεῖον μεθ' ἑκάστην θέσιν τοῦ δ· εὑρίσκομεν δὲ οὕτω τὸ πολυώνυμον

$$\alpha\beta\gamma\delta-\alpha\beta\delta\gamma+\alpha\delta\beta\gamma-\delta\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma\beta\delta+\alpha\gamma\delta\beta-\alpha\delta\gamma\beta+\ldots$$

Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω μέχρις ὅτου λάβωμεν καὶ τὸν συντελεστὴν τοῦ τελευταίου ἀγνώστου ω. Τέλος εἰς ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου τὸν ὁποῖον τελικῶς θὰ εὕρωμεν δίδομεν τὸν δείκτην 1 εἰς τὸ δεύτερον γράμμα, τὸν δείκτην 2 εἰς τὸ τρίτον, τὸν 3 εἰς τὸ τέταρτον κ.ο.κ.

2ον. Ὁ ἀριθμητὴς τοῦ κλάσματος, τὸ ὁποῖον δίδει τὴν τιμὴν ἑνὸς ἀγνώστου, εὑρίσκεται ἂν εἰς τὸν ὡς ἄνω εὑρισκόμενον κοινὸν παρονομαστὴν ἀντικαταστήσωμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ ἀγνώστου τούτου διὰ τοῦ γνωστοῦ ὅρου διατηροῦντες ὅμως τοὺς δείκτας.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν λύοντες τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\kappa$$
$$\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1\varphi=\kappa_1$$
$$\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2\varphi=\kappa_2$$

εὑρίσκομεν ὡς τιμὴν τοῦ χ

$$\chi = \frac{\kappa\beta_1\gamma_2 - \kappa\gamma_1\beta_2 + \gamma\kappa_1\beta_2 - \beta\kappa_1\gamma_2 + \beta\gamma_1\kappa_2 - \gamma\beta_1\kappa_2}{\alpha\beta_1\gamma_2 - \alpha\gamma_1\beta_2 + \gamma\alpha_1\beta_2 - \beta\alpha_1\gamma_2 + \beta\gamma_1\alpha_2 - \gamma\beta_1\alpha_2}$$

ἡ ὁποία ὡς βλέπομεν δὲν διαφέρει τῆς τιμῆς τοῦ χ τῶν τύπων (4) τῆς § 143, ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς δείκτας οἵτινες ἀντικατέστησαν τοὺς τόνους. Ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν καὶ τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ φ.

Ἐφαρμογή.—Νὰ λυθῇ κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Cramer τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 4\chi+2\psi+3\varphi&=17\\ 5\chi+3\psi+\ \varphi&=14\\ 7\chi+\ \psi+2\beta&=15 \end{aligned}$$

Εὑρίσκομεν $\chi = \dfrac{17.3\cdot2-17.1.1+3.14.1-2\,14.2+2.1.15-3.3.15}{4.3.2-4.1.1+3.5.1-2.5.2+2.1.7-3.3.7}$ ἤτοι

$$\chi = \frac{102-17+42-56+30-135}{24-4+15-20+14-63} = \frac{-34}{-34} = 1$$

$$\psi = \frac{112-60+225-170+119-294}{-34} = \frac{-68}{-34} = 2$$

$$\varphi = \frac{180-56+85-150+196-357}{-34} = \frac{-102}{-34} = 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

350) $4\chi-5\psi+3\varphi=2$, $2\chi+3\psi-6\varphi=-14$, $8\chi+2\psi+5\omega=2$

351) $\chi+2\psi-\varphi=2$, $3\chi-\psi+4\varphi=27$, $4\chi+\psi-5\varphi=11$

352) $12\chi-7\psi-25\varphi=0$, $10\chi-42\psi+5\varphi=0$, $\chi-7\psi+4\varphi=3$

353) $\chi+\psi=27$, $\chi+\varphi=25$, $\psi+\varphi=22$

354) $2\chi-3\psi=13$, $3\psi+3\varphi=-1$, $4\varphi+\chi=13$

355) $\chi+2\psi=12$, $\psi+2\omega=21$, $\omega+2\chi=12$

356) $\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{\psi}{6}+\dfrac{\varphi}{4}=5$, $\psi+\dfrac{\varphi}{2}=10$, $\varphi+\dfrac{\chi}{4}=9$

357) $\dfrac{\chi}{5}-\dfrac{\psi}{2}=0$, $\dfrac{\chi}{3}-\dfrac{\varphi}{2}=1$, $\dfrac{\varphi}{2}-\dfrac{\psi}{3}=2$

358) $\chi+\psi+\varphi=99$, $\chi:\psi=5$, $\chi:\varphi=3$

359) $1\frac{1}{3}\chi+1\frac{1}{2}\psi=10$, $2\frac{2}{3}\chi+2\frac{2}{5}\omega=20$, $3\frac{1}{4}\psi+3\frac{2}{5}\omega=30$

360) $0{,}8\chi+0{,}04\psi=6$, $0{,}1\psi+0{,}5\omega=7$, $\omega+0{,}2\chi=10$

361) $\chi+2\psi-0{,}7\omega-21$, $3\chi+0{,}2\psi-\omega=24$, $0{,}9\chi+7\psi-2\omega=27$

362) $\dfrac{3\psi-2\chi}{3\varphi-7}=\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5\varphi-\chi}{2\psi-3\varphi}=1$, $\dfrac{\psi-2\varphi}{3\psi-2\chi}=1$

363) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=1$, $\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\chi}=2$, $\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\varphi}=\dfrac{3}{2}$

364) $\dfrac{2}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{3}{\omega}$, $\dfrac{3}{\omega}-\dfrac{2}{\psi}=2$, $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{4}{3}$

365) $\chi+\psi+\varphi=18$, $\psi+\varphi+\omega=12$, $\varphi+\omega+\chi=15$, $\omega+\chi+\psi=9$

366) $\chi-\psi+4\varphi=18$, $\psi-\varphi+4\omega=22$, $\varphi-\omega+4\chi=3$, $\omega-\chi+4\psi=17$

367) $\chi+2\psi=5$, $\psi+2\varphi=8$, $\varphi+2\omega=11$, $\psi+2\chi=6$

368) $\dfrac{\chi}{2}+\dfrac{\psi}{4}-\dfrac{\varphi}{3}=1$, $\dfrac{\chi}{3}-\dfrac{\psi}{4}+\dfrac{\omega}{9}=1$, $\dfrac{\chi}{6}+\dfrac{3\varphi}{5}-\dfrac{\omega}{2}=1$, $\dfrac{3\psi}{4}-\dfrac{\varphi}{5}-\dfrac{\omega}{3}=0$

369) $\chi-2\psi=0$, $\psi-2\varphi=-2$, $\varphi-2\omega=2$, $\omega-2\upsilon=-5$, $\upsilon-2\chi=11$

370) $7\chi-2\omega+3\varphi=17$, $4\psi-2\omega+\upsilon=11$, $5\psi-3\chi-2\varphi=8$, $4\psi-3\varphi+2\upsilon=9$, $3\omega+8\varphi=33$

371) $\chi+\psi=\gamma$, $\psi+\omega=\alpha$, $\omega+\chi=\beta$

372) $\chi-\psi=\alpha$, $\psi-\omega=\beta$, $\omega-\chi=\gamma$

373) $\psi+\omega-\chi=\alpha$, $\omega+\chi-\psi=\beta$, $\chi+\psi-\omega=\gamma$

374) $\dfrac{1}{\psi}+\dfrac{1}{\omega}-\dfrac{1}{\chi}=\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\psi}=\dfrac{2}{\beta}$, $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{2}{\gamma}$.

375) $\psi+\omega+\varphi=\alpha$, $\omega+\varphi+\chi=\beta$, $\varphi+\chi+\psi=\gamma$, $\chi+\psi+\omega=\delta$

376) $\chi\psi=\alpha\,(\chi+\psi)$, $\psi\omega=\beta\,(\psi+\omega)$, $\omega\chi=\gamma\,(\omega+\chi)$

377) Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α,β,γ, ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\psi=6 \qquad \beta\chi+\psi=\gamma$$
$$2\alpha\chi+\psi=10 \qquad 2\alpha\chi+\beta\psi=11$$

ταυτοποιοῦνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

378) Ὁμοίως νὰ ὁρισθοῦν οἱ α,β,γ ἵνα αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+2\psi=-1 \qquad \chi-\beta\psi=2$$
$$2\chi+3\psi=\gamma \qquad 2\alpha\chi+\gamma\psi=-2$$

ταυτοποιοῦνται μὲ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων.

379) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα 425, ὅταν δὲ διαιρέσωμεν τὸν μεγαλύτερον διὰ τοῦ μικροτέρου νὰ ἔχωμεν πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 5.

380) Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων νὰ εἶναι 10. Ἐὰν δὲ ἀντιστραφῇ νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς κατὰ 4 μικρότερος τοῦ τετραπλασίου τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. (Ἐὰν χ εἶναι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ τῶν μονάδων ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς ἔχει ἐν ὅλῳ $10χ+ψ$ μονάδας).

381) Πατήρ τις εἶναι κατὰ 27 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ του, ἀλλὰ μετὰ 5 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία ἑκάστου;

382) Πρὸ 15 ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνὸς ἦτο διπλασία τῆς ἡλικίας ἄλλου, ἀλλὰ μετὰ 10 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πρώτου θὰ εἶναι τὰ $\frac{11}{8}$ τῆς ἡλικίας τοῦ δευτέρου. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία ἑκάστου;

383) Εἷς ἀφοῦ διήνυσε τὸ ἥμισυ ἑνὸς δρόμου ἐδιπλασίασεν ἔπειτα τὴν ταχύτητά του καὶ οὕτω διήνυσε ὅλον τὸν δρόμον εἰς $10\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας. Κατὰ τὴν ἐπιστροφήν του ηὔξησε τὴν ἀρχικήν του ταχύτητα κατὰ 1 χιλιόμετρον τὴν ὥραν, οὕτω δὲ διήνυσε τὸν ἴδιον δρόμον εἰς 12 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ δρόμου, ὡς καὶ ἡ ταχύτης τοῦ ὁδοιπόρου.

384) Ἐκ δύο κεφαλαίων τὰ ὁποῖα ἐτόκιζέ τις πρὸς 5% τὸ ἓν καὶ 7% τὸ ἄλλο ἐλάμβανεν ἐτήσιον τόκον 2580 δραχμάς. Ἐὰν ἐνήλλασσε τὰ ἐπιτόκια, ὁ τόκος οὗτος θὰ ηὐξάνετο κατὰ 120 δραχμάς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

385) Κεφάλαιον 6000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 4,5% ἐπὶ τ ἔτη καὶ κεφάλαιον 8.000 δραχμῶν τοκιζόμενον πρὸς 5,5% ἐπὶ τ' ἔτη φέρουν ὁμοῦ τόκον 2300 δραχμάς. Ἐὰν ὅμως οἱ χρόνοι ἐνηλλάσσοντο, ὁ τόκος τῶν δύο κεφαλαίων θὰ ἦτο 1960 δραχμαί. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ χρόνοι τ καὶ τ'.

386) Ἀνέμειξέ τις 16 γραμμάρια χρυσοῦ μετ' ἄλλων 7 γραμμαρίων χρυσοῦ διαφόρου βαθμοῦ καθαρότητος καὶ ἔλαβε κρᾶμα β. κ. 0,84· ἐὰν ἀνεμίγνυε 5 γραμμάρια ἐκ τοῦ πρώτου καὶ 18 γραμμάρια ἐκ τοῦ δευτέρου ὁ β. κ. τοῦ νέου κράμστος θὰ ἦτο 0,86. Ποῖος εἶναι ὁ βαθμὸς καθαρότητος ἑκάστου τῶν ἀρχικῶν κραμάτων;

387) Κρᾶμα ἀπὸ χρυσὸν καὶ ἄργυρον, τὸ ὁποῖον ζυγίζει 375 γραμμάρια, ζυγίζει ἐντὸς τοῦ ὕδατος 350 γραμμάρια. Πόσα γραμμάρια χρυσοῦ καὶ πόσα γραμμάρια ἀργύρου ὑπάρχουν εἰς τὸ κρᾶμα, ὅταν εἶναι γνωστόν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ εἶναι 19,5 καὶ τοῦ ἀργύρου 10,5;

388) Ἀπὸ τὰ ἄκρα μοχλοῦ κρέμανται δύο σώματα ζυγίζοντα ὁμοῦ 42 χιλιόγραμμα. Τὰ μήκη τῶν μοχλοβραχιόνων ἔχουν λόγον $\frac{2}{5}$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου σώματος.

389) Τρεῖς ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα 150. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δεύτερον διὰ τοῦ πρώτου, λαμβάνομεν πηλίκον 2, ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τὸν τρίτον διὰ τοῦ δευτέρου, λαμβάνομεν πηλίκον 1 καὶ ὑπόλοιπον 25. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

390) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων αὐτοῦ νὰ εἶναι 17. Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων νὰ εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐ-

τοῦ γραφοῦν κατ' ἀντίστροφον τάξιν, νὰ προκύπτῃ ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 99.

391) Ἐκ τριῶν φίλων εἶπεν ὁ πρῶτος πρὸς τοὺς δύο ἄλλους: Ἐὰν ἀπὸ τὰς δραχμάς, τὰς ὁποίας ἔχετε οἱ δύο σας, μοῦ δώσετε 40 δραχμάς, θὰ ἔχω τότε τριπλασίας δραχμὰς ἀπὸ ὅσας θὰ σᾶς μείνουν. Ὁ δεύτερος ἀπήντησεν: Ἐὰν σεῖς μοῦ δώσετε 83 δραχμάς, θὰ ἔχω τετραπλασίας ἀπὸ ὅσας θὰ σᾶς μείνουν. Ὁ δὲ τρίτος εἶπεν: Ἐὰν σεῖς μοῦ δώσεται 43 δραχμάς, θὰ ἔχω πενταπλασίας ἀπὸ τὰς ἰδικάς σας. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἕκαστος;

392) Δεξαμενή τις γεμίζει διὰ τριῶν κρουνῶν. Οἱ δύο πρῶτοι τὴν γεμίζουν ὁμοῦ εἰς 4 ὥρας, καὶ οἱ δύο τελευταῖοι εἰς 5 ὥρας, ὁ δὲ πρῶτος μετὰ τοῦ τρίτου εἰς 6 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θὰ γεμίσῃ ἕκαστος κρουνὸς τὴν δεξαμενήν;

393) Ἵνα ἐκτελέσουν ἔργον τι, χρειάζονται οἱ μὲν Α καὶ Β ὁμοῦ 12 ὥρας, οἱ δὲ Β καὶ Γ ὁμοῦ 20 ὥρας, οἱ δὲ Γ καὶ Α ὁμοῦ 15 ὥρας. Πόσας ὥρας χρειάζεται ἕκαστος τούτων διὰ τὸ αὐτὸ ἔργον καὶ πόσας ὅλοι ὁμοῦ;

394) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν ἄθροισμα α καὶ πηλίκον π. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

395) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν διαφορὰν α καὶ πηλίκον α. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

396) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ πρώτου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ β ἀπὸ τοῦ δευτέρου, τὸ δὲ $\frac{1}{2}$ τοῦ δευτέρου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ ἀριθμοῦ α ἀπὸ τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

397) Δίδεται ἡ σειρὰ

$$\alpha+\beta,\ \alpha\lambda+\beta\lambda_1,\ \alpha\lambda^2+\beta\lambda_1^2,\ \alpha\lambda^3+\beta\lambda_1^3,\ \alpha\lambda^4+\beta\lambda_1^4,\dots$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ χ καὶ ψ, τοιοῦτοι ὥστε ἕκαστος ὅρος τῆς σειρᾶς αὐτῆς νὰ προκύπτῃ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν δύο προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων ἐπὶ χ (τοῦ πρώτου) καὶ ἐπὶ ψ (τοῦ δευτέρου) καὶ τῆς προσθέσεως ἔπειτα τῶν ἐξαγομένων.

398) Δίδεται ἡ σειρὰ

$$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\lambda+\beta\lambda_1+\gamma\lambda_2,\ \alpha\lambda^2+\beta\lambda_1^2+\gamma\lambda_2^2,\ \alpha\lambda^3+\beta\lambda_1^3+\gamma\lambda_2^3,\dots$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, τοιοῦτοι ὥστε ἕκαστος ὅρος τῆς σειρᾶς αὐτῆς νὰ προκύπτῃ διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν τριῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων, ἐπὶ χ (τοῦ πρώτου), ἐπὶ ψ (τοῦ δευτέρου) καὶ ἐπὶ ω (τοῦ τρίτου) καὶ τῆς προσθέσεως ἔπειτα τῶν ἐξαγομένων.

399) Ἀτμάμαξα ἧς ἡ ταχύτης εἶναι τ, ἀναχωρεῖ κατόπιν ἄλλης ἧς ἡ ταχύτης εἶναι τ'· ὑπελογίσθη δὲ ὁ μεταξὺ τῶν δύο ἀναχωρήσεων χρόνος, ὅπως ἀμφότεραι φθάσουν συγχρόνως εἴς τινα τόπον. Ἀλλ' ἡ πρώτη ἀτμάμαξα ἀφοῦ διήνυσε τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ δρόμου, ἠναγκάσθη νὰ ἐλαττώσῃ τὴν ταχύ-

τητά της εἰς τὸ ἥμισυ· οὕτω δὲ συνήντησε τὴν δευτέραν α χιλιόμετρα πρὸ τοῦ τόπου εἰς ὃν ἐπρόκειτο νὰ συναντηθοῦν. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ σταθμοῦ τῆς ἀναχωρήσεως μέχρι τοῦ τόπου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Λύσις ἀνισοτήτων α΄ βαθμοῦ.

145. Ἡ ἀνισότης $\chi>5$ ἀληθεύει δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς μεγαλυτέρας τοῦ 5. Ἡ ἀνισότης $\psi^2<-4$ δὲν ἀληθεύει δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ ψ, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς ἀριθμοῦ εἶναι θετικὸς ἀριθμός, πᾶς δὲ θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ δὲ ἀνισότης $5\varphi^2>3\varphi^2$ ἀληθεύει δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ φ. Διότι πάντοτε 5 τετράγωνα τοῦ φ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὰ 3 τετράγωνα τοῦ φ. Ὥστε μία ἀνισότης τῆς ὁποίας τὰ μέλη ἐκτὸς τῶν ὡρισμένων ἀριθμῶν ἔχουν γράμματα, δύναται νὰ ἀληθεύῃ ἢ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῶν γραμμάτων ἢ διὰ μερικὰς μόνον ἢ καὶ δι' οὐδεμίαν. Τότε τὰ γράμματα λέγονται *ἄγνωστοι* τῆς ἐξισώσεως.

146. Αἱ γενικαὶ ἰδιότητες (σελ. 92) τῶν ἐξισώσεων ἀληθεύουν καὶ εἰς τὰς ἀνισότητας, τῶν ὁποίων τὰ μέλη ἔχουν γράμματα ἄγνωστα καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως. Μόνον πρέπει, ὅταν ὁ πολλαπλασιαστὴς ἢ ὁ διαιρέτης εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, νὰ ἀντιστρέφωμεν τὴν ἀνισότητα.

147, Ἀνισότης πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. Λύσις αὐτῆς — Η ἀνισότης $5\chi>18-\chi$, ἡ ὁποία βλέπομεν ὅτι περιέχει ἕνα ἄγνωστον, τὸν χ, εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν, εἶναι πρώτου βαθμοῦ. Ὁμοίως πρώτου βαθμοῦ εἶναι καὶ ἡ ἀνισότης $4\chi<\chi-15$. Γενικῶς δὲ ἀνισότης πρώτου βαθμοῦ λέγεται ἡ ἀνισότης, ἡ περιέχουσα ἕνα ἄγνωστον εἰς τὸν πρῶτον βαθμόν, ἤτοι ἡ ἀνισότης τῆς μορφῆς $\alpha\chi>\beta$ (ἢ $\alpha\chi<\beta$).

1) *Ἔστω ἡ ἀνισότης* $\frac{3\chi}{4}+8>\frac{\chi}{3}+13$.

Πολλαπλασιάζομεν τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος ἐπὶ τὸ γινόμενον 4.3 καὶ λαμβάνομεν $9\chi+96>4\chi+156$. Κατόπιν χωρίζομεν τοὺς γνωστοὺς ὅρους ἀπὸ τῶν ἀγνώστων, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$9\chi-4\chi>156-96 \quad \text{ἢ} \quad 5\chi>60$$

Ἐὰν δὲ τέλος διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ 5 εὑρίσκομεν

$\chi>12$. Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει μόνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς χ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 12. Ἤτοι ἐλύσαμεν τὴν ἀνισότητα.

2) *Ἔστω ἡ ἀνισότης* $\frac{1}{-\chi+1}>2$.

Προκειμένου νὰ καταστήσωμεν τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα ἀκεραίαν θὰ διακρίνωμεν δύο περιπτώσεις.

α) Ὑποθέτομεν $-\chi+1>0$ ἤτοι $\chi<1$· ἀλλὰ τότε πολλαπλασιάζοντες τὰ μέλη τῆς δοθείσης ἀνισότητος ἐπὶ $-\chi+1$ λαμβάνομεν $1>-2\chi+2$, ἤτοι $\chi>\frac{1}{2}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν προηγουμένως ὅτι $\chi<1$, βλέπομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται ἐὰν εἶναι $\frac{1}{2}<\chi<1$.

β) Ἐὰν ἤδη ὑποθέσωμεν ὅτι $-\chi+1<0$, ἤτοι $\chi>1$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν $1<-2\chi+2$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi<\frac{1}{2}$. Ἀλλὰ βλέπομεν ὅτι ἡ λύσις αὕτη εἶναι ἀσυμβίβαστος πρὸς τὴν ὑπόθεσιν. Αἱ μόναι λοιπὸν λύσεις τῆς δοθείσης ἀνισότητος εἶναι αἱ $\frac{1}{2}<\chi<1$.

3) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $3\chi+\frac{\chi}{\alpha}>\frac{3\chi}{4}+2$

α) Ἐὰν $\alpha>0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν $(9\alpha+4)\chi>8\alpha$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi>\frac{8\alpha}{9\alpha+4}$.

β) Ἐὰν $\alpha<0$, ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀνάγεται εἰς τὴν $(9\alpha+4)\chi<8\alpha$, ἐκ τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, ἂν $9\alpha+4<0$ ἤτοι ἂν $\alpha<-\frac{4}{9}$, $\chi>\frac{8\alpha}{9\alpha+4}$ καὶ ἂν $9\alpha+4>0$ ἤτοι ἂν $-\frac{4}{9}<\alpha<0$ $\chi<\frac{8\alpha}{9\alpha+4}$.

148. *Συναληθεύουσαι ἀνισότητες πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.* — Ἐὰν ὁ αὐτὸς ἄγνωστος χ ὀφείλει νὰ ἐπαληθεύῃ συγχρόνως πολλὰς ἀνισότητας, λύομεν χωριστὰ ἑκάστην τῶν δεδομένων ἀνισοτήτων, αἱ τιμαὶ δὲ τοῦ χ αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς διαφόρους ἀνισότητας εἶναι αἱ ζητούμεναι λύσεις.

Π δ. 1) *Ποῖοι εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δύο ἀνισότητας*

$$3\chi-2>\chi-12. \qquad \frac{5\chi+4}{2}<\chi+10;$$

Λύοντες τὴν πρώτην ἀνισότητα εὑρίσκομεν $\chi > -5$, ἤτοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνισότητα αὐτὴν εἶναι οἱ

$$-4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ κτλ.} \qquad (1)$$

Ὁμοίως λύοντες τὴν δευτέραν ἀνισότητα εὑρίσκομεν $\chi < 5\frac{1}{3}$, ἤτοι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ οἱ ἐπαληθεύοντες τὴν ἀνισότητα αὐτὴν εἶναι οἱ

$$5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, \text{ κτλ.} \qquad (2)$$

ὥστε ἐκ τῆς λύσεως τῶν δύο ἀνισοτήτων εὕρομεν

$$-5 < \chi < 5\frac{1}{3}$$

Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀκέραιοι ἀριθμοί, ὡς καὶ ἐκ τῶν σειρῶν (1) καὶ (2) φαίνεται εἶναι οἱ

$$-4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

2) *Ποῖοι ἀριθμοὶ ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς ἀνισότητας*

$$22-4\chi < 13-7\chi, \quad \frac{5\chi+20}{3} > 8+\chi;$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἀνισότητος εὑρίσκομεν $\chi < -3$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\chi > 2$. Βλέπομεν δὲ ἐκ τούτων ὅτι δὲν ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ χ αἱ ὁποῖαι νὰ ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς δοθείσας ἀνισότητας.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ περισσοτέρας ἀνισότητας α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

149. Ἀνισότητες ὧν ἡ λύσις ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον. — Ἀνισότητες μὲ ἕνα ἄγνωστον βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ πρώτου δύνανται ν' ἀναχθοῦν εἰς τὴν λύσιν ἀνισοτήτων πρώτου βαθμοῦ, ὡς καὶ ἀνισότητες ὧν τὰ μέλη δὲν εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κάτωθι παραδειγμάτων.

1) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $(\chi+2)(3-2\chi) < 0$.

Ἵνα τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀρνητικὸν πρέπει οἱ παράγοντες αὐτοῦ νὰ εἶναι ἑτερόσημοι ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι ἢ $\chi+2>0$ καὶ $3-2\chi<0$ (1) ἢ $\chi+2<0$ καὶ $3-2\chi>0$. (2). Ἀλλ' αἱ μὲν ἀνισότητες (1) συναληθεύουν διὰ $\chi > \frac{3}{2}$, αἱ δὲ ἀνισότητες (2) συναληθεύουν διὰ $\chi < -2$, ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ χ μεγαλυτέρας τοῦ $\frac{3}{2}$ ἢ μικροτέρας τοῦ -2.

2) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $(\chi+1)(\chi-1)(\chi-2) > 0$.

Ἵνα τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν πρέπει ἢ ὅλοι οἱ παράγοντες αὐτοῦ νὰ εἶναι θετικοὶ ἢ δύο ἐκ τούτων νὰ εἶναι ἀρνητικοί, ἀλλὰ

ὁ $\chi+1$ εἶναι θετικὸς διὰ $\chi>-1$ καὶ ἀρνητικὸς διὰ $\chi<-1$
ὁ $\chi-1$ » » » $\chi>1$ » » » $\chi<1$
ὁ $\chi-2$ » » » $\chi>2$ » » » $\chi<2$

῞Ωστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ χ μεγαλυτέρας τοῦ 2 ἢ περιεχομένας μεταξὺ τοῦ -1 καὶ $+1$.

3) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $\frac{4\chi-2}{\chi-1}>0$

Τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς θὰ εἶναι θετικὸν ἐὰν οἱ δύο ὅροι εἶναι ὁμόσημοι. Ἀλλ' ὁ $4\chi-2$ εἶναι θετικὸς διὰ $\chi>\frac{1}{2}$ καὶ ἀρνητικὸς διὰ $\chi<\frac{1}{2}$

ὁ $\chi-1$ » » » $\chi>1$ » » » $\chi<1$

Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἀνισότης ἀληθεύει διὰ τιμὰς τοῦ χ μεγαλυτέρας τοῦ 1 ἢ μικροτέρας τοῦ $\frac{1}{2}$.

Τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα λύομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου μέλους ἐπὶ τὸν παρονομαστήν, ἵνα κατασιήσωμεν τοῦτον θετικόν. Λαμβάνομεν δὲ τότε

$$\frac{(4\chi-2)(\chi-1)}{(\chi-1)^2}>0.$$

Ἡ ἀνισότης ὅμως αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν $(4\chi-2)(\chi-1)>0$, ἥτις δίδει τὰς αὐτὰς ὡς ἄνω λύσεις.

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον, ὃν δεικνύουν τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα λύονται καὶ ἀνισότητες τῆς μορφῆς $Α.Β.Γ.Δ.\ldots \gtreqless 0$ ὅπου $Α, ΒΓ, \ldots$ εἶναι διώνυμα πρώτου βαθμοῦ πρὸς τὸν ἄγνωστον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες :

400) $\frac{3}{4}\chi<5\chi-\frac{5}{7}$

401) $\frac{1}{6}(\chi+2)-\frac{1}{4}(\chi-7)>\frac{1}{8}(\chi+25)$

402) $\frac{2\chi}{5}-3>\frac{\chi-4}{15}-\frac{5}{6}$

403) $(\chi+1)^2(\chi-3)>\chi^2\left(\chi-\frac{1}{2}\right)-\frac{\chi^2}{2}+5$

404) $\frac{1}{2-\chi}>3$

405) $\frac{2\chi}{3}-\frac{\chi}{\alpha}<\chi-2$

406) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $8\chi-7\frac{1}{2}>\frac{4\chi+65}{5}$, $2\chi-7<\chi+2\frac{1}{2}$.

407) Ὁμοίως διὰ ποίας ἀκεραίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $7\chi-15>27-7\chi$, $\frac{4\chi-11}{11}<\frac{\chi+6}{3}$.

408) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες

$$\frac{13\chi-1}{9} < \frac{2+\chi}{11} - 3, \qquad \frac{5\chi+1}{9} > \frac{4-3\chi}{5} - 3$$

409) Ὁμοίως διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ συναληθεύουν αἱ ἀνισότητες $-3\chi+$ $+2>7\chi+7$, $4\chi-12> \frac{2}{3}(\chi+7)$.

410) Ἐρωτηθεὶς τις πόσων ἐτῶν εἶναι ἀπεκρίθη ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν ἀπὸ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτῶν ἀφαιρέσῃς τὸν 7 εὑρίσκεις ὑπόλοιπον μεγαλύτερον τοῦ 4· ἐὰν δὲ εἰς τὸ 1]3 αὐτῶν προσθέσῃς τὸν 1 εὑρίσκεις ἄθροισμα μεγαλύτερον τῆς διαφορᾶς τοῦ 4 ἀπὸ τὸ ἥμισυ αὐτῶν. Μεταξὺ πόσων ἐτῶν κυμαίνεται ἡ ἡλικία του;

411) Δύο πεζοπόροι ἀναχωροῦν συγχρόνως πρὸς συνάντησίν των ὁ μὲν ἐκ τῆς πόλεως Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου κυμαίνεται μεταξὺ 5 καὶ 8 χιλιομέτρων τὴν ὥραν, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ δευτέρου μεταξὺ 6 καὶ 7· ἡ δὲ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων εἶναι 30 χιλιόμετρα. Μεταξὺ πόσων ὡρῶν θὰ γίνῃ ἡ συνάντησις αὐτῶν καὶ εἰς ποῖον μέρος τῆς ὁδοῦ;

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

412) $\chi(\chi-1)<0$ 413) $8\chi^2>5\chi$ 414) $\chi^2>9$

415) $(\chi+2)(2\chi-1)(5\chi-9)<0$ 416) $(2\chi+1)(25\chi^2-9)(5\chi-7)<0$

417) $\frac{2\chi+1}{1-\chi}<1$ 418) $-2< \frac{7-3\chi}{4\chi+5}$ 419) $\frac{3\chi-8}{(1-2\chi)(1-\chi)}<0$

Νὰ δειχθῇ ὅτι πάντοτε εἶναι

420) $\alpha^2+\beta^2\geqslant 2\alpha\beta$ 421) $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}>2$ 422) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2>\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

150. Γνωρίζομεν (§ 142) ὅτι ἐξίσωσις ἔχουσα ἀγνώστους περισσοτέρους τοῦ ἑνός, ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις· ὁμοίως δὲ καὶ ὅτι σύστημα ἐξισώσεων ἔχον ἀριθμὸν ἀγνώστων μεγαλύτερον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἐξισώσεων, ἔχει ἀπείρους τὸ πλῆθος λύσεις. Ἀλλ' ἐνίοτε ζητεῖται ἵνα αἱ λύσεις τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως ἢ τοῦ τοιούτου συστήματος εἶναι ἀκέραιαι. Εἰς τὰς περιπτώσεις δὲ αὐτὰς οἱ ἐπὶ πλέον ἄγνωστοι δὲν ὁρίζονται αὐθαιρέτως ἀλλ' ἁρμοδίως, ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν ἄλλων προκύπτουν εἰ δυνατὸν ἀκέραιαι.

Τὸ μέρος τῆς Ἀλγέβρας, ἐν τῷ ὁποίῳ διδάσκεται ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων δεδομένης ἐξισώσεως ἐχούσης ἀγνώστους περισσοτέρους *τοῦ ἑνὸς ἢ καὶ συστήματος ἐξισώσεων ἔχοντος περισσοτέρους ἀγνώστους ἢ ἐξισώσεις λέγεται ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις.*

Οἱ συντελεσταὶ τῶν τοιούτων ἐξισώσεων ὑποτίθενται ἀκέραιοι, διότι ἄλλως καθιστῶμεν αὐτοὺς ἀκεραίους ἀπαλλάσσοντες τὴν ἐξίσωσιν ἀπὸ τῶν παρονομαστῶν.

Ἐνταῦθα θὰ ἀσχοληθῶμεν μόνον περὶ τὴν ἐπίλυσιν κατ' ἀριθμοὺς ἀκεραίους μιᾶς ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἢ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἠγμένης εἰς τὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἢ τὴν $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\delta$, ὡς καὶ συστήματος πρώτου βαθμοῦ ἐκ δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἠγμένου εἰς τὴν μορφὴν $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\delta$, $\alpha'\chi+\beta'\psi+\gamma'\varphi=\delta'$, ὅπου α, β, γ, δ εἶναι γνωστοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ θετικοὶ ἢ ἀρνητικοί. Οἱ ἀκέραιοι συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων εἰς ἑκάστην ἐξίσωσιν καὶ ὁ ἐν αὐτῇ γνωστὸς ὅρος δύνανται νὰ ὑποτεθοῦν πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· διότι ἂν ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην ἐξαλείφομεν αὐτόν, διαιροῦντες δι' αὐτοῦ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως.

Ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$.

151. Θεώρημα Α'. — *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β τῶν ἀγνώστων ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ οὐδεμίαν ἐπιδέχεται ἀκεραίαν λύσιν.*

Διότι ὁ κοινὸς διαιρέτης δ τῶν α καὶ β, οἱουσδήποτε ἀκεραίους ἀριθμοὺς καὶ ἂν θέσωμεν ἀντὶ τῶν χ καὶ ψ, θὰ διαιρῇ τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἐξισώσεως καὶ κατὰ συνέπειαν θὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον μέλος γ, τὸ ὁποῖον ὑπετέθη ὡς μὴ διαιρετὸν διὰ τοῦ δ.

152. Θεώρημα Β'. — *Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἔχει ἀκεραίαν τινὰ λύσιν.*

Εἷς τῶν συντελεστῶν, ἔστω ὁ α, δύναται νὰ ὑποτεθῇ πάντοτε θετικός, διότι ἄλλως ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἐξισώσεως. Ἀφοῦ λοιπὸν ὑπεθέσαμεν τὸν α θετικὸν λύομεν τὴν ἐξίσωσιν πρὸς τὸν ἄγνωστον χ (οὗ συντελεστὴς εἶναι ὁ α) καὶ λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\gamma-\beta\psi}{\alpha}.$$

Ἤδη δίδομεν εἰς τὸν ψ κατὰ σειρὰν τὰς τιμὰς $\psi=0, 1, 2, 3 \ldots (\alpha-1)$ ὧν τὸ πλῆθος εἶναι α καὶ τοὺς οὕτω προκύπτοντας ἐκ τῆς παραστάσεως $\gamma-\beta\psi$ ἀριθμοὺς διαιροῦμεν διὰ τοῦ α, φροντίζοντες ὅμως ὅπως τὰ ὑπόλοιπα των διαιρέσεων τούτων εἶναι ὅλα θετικά. (Κάμνομεν δὲ τὸ ἀρνητικὸν ὑπόλοιπον θετικόν, ἐὰν εἰς τὸ πηλίκον προσθέσωμεν μίαν ἀρνητικὴν μονάδα· διότι ἂν π. χ. τῆς διαιρέσεως $-11:4$ λάβωμεν ὡς πηλίκον τὸ -3 θὰ ἔχωμεν ὑπόλοιπον 1.) Τὰ θετικὰ δὲ αὐτὰ ὑπόλοιπα εἶναι ὅλα μεταξύ των διάφορα. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τὸν ψ δίδομεν τὰς τιμὰς ψ', ψ'' ὡς καὶ ὅτι οἱ προκύπτοντες ἀριθμοὶ $\gamma-\beta\psi'$, $\gamma-\beta\psi''$ διαιρούμενοι δι' α δίδουν πηλίκα ἀντιστοίχως π', π'' καὶ ἴσον ὑπόλοιπον υ (θετικόν). Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι

$$\gamma-\beta\psi'=\alpha\pi'+\upsilon$$
$$\gamma-\beta\psi''=\alpha\pi''+\upsilon$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων δὲ τούτων δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη εὑρίσκομεν τὴν

$$\beta(\psi''-\psi')=\alpha(\pi'-\pi'')$$

ἡ ὁποία δεικνύει, ὅτι ὁ α διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\beta(\psi''-\psi')$· ἐπειδὴ ὅμως ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β, ἕπεται ὅτι διαιρεῖ τὴν διαφορὰν $\psi''-\psi'$· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι οἱ ἀριθμοὶ ψ', ψ'' εἶναι μικρότεροι τοῦ α· αἱ διαιρέσεις λοιπὸν τῶν ἀριθμῶν $\gamma-\beta\psi'$, $\gamma-\beta\psi''$ διὰ τοῦ α δίδουν ὑπόλοιπα μέταξύ των διάφορα. Ὥστε ὑπόλοιπα τῶν ὡς ἄνω διαιρέσεων διὰ τοῦ α δύνανται νὰ εἶναι οἱ διάφοροι μεταξύ των καὶ μικρότεροι τοῦ α ἀριθμοὶ

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ (\alpha-1)$$

τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ἀκριβῶς ὅσον καὶ τῶν διαιρέσεων, ἤτοι α. Ὅθεν μία τῶν διαιρέσεων τούτων δίδει ὑπόλοιπον 0, ἤτοι εἰς μίαν τῶν ἀκεραίων τιμῶν τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία τιμὴ τοῦ χ. Τὸ θεώρημα λοιπὸν ἀπεδείχθη.

153. Θεώρημα Γ. — *Ὅταν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἔχει μίαν ἀκεραίαν λύσιν ἔχει καὶ ἄλλας ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

Ἔστω $\chi=\chi'$ καὶ $\psi=\psi'$ μία ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἤτοι ἔστω $\alpha\chi'+\beta\psi'=\gamma$.

Ἐὰν ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἐξισώσεως ἀφαιρέσωμεν τοὺς ἴσους ἀριθμοὺς $\alpha\chi'+\beta\psi'$ καὶ γ, προκύπτει ἰσοδύναμος ἐξίσωσις ἡ $\alpha(\chi-\chi')+\beta(\psi-\psi')=0$, ἤτοι ἡ

$$\alpha(\chi-\chi')=\beta(\psi'-\psi) \qquad (\iota)$$

Τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς διαιροῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη δι' α· καὶ τὸ μὲν πρῶτον μέλος αὐτῆς εἶναι προφανῶς διαιρετὸν δι' α· πρέπει ἄρα ὁ α νὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον μέλος, ἂν ἡ ἐξίσωσις ἀληθεύῃ δι' ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ καὶ ψ· ἀλλ' ὁ α εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν β· ἀνάγκη λοιπὸν οὗτος νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $\psi'-\psi$· ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\psi'-\psi=\alpha\tau$ (1), ὅπου τ εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Ἐπίσης ὁ β ἀνάγκη νὰ διαιρῇ τὴν διαφορὰν $\chi-\chi'$· ὥστε πρέπει νὰ εἶναι $\chi-\chi'=\beta\tau'$ (2), ὅπου τ' εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος.

Ἤδη θέτοντες τὰς τιμὰς τῶν διαφορῶν (1) καὶ (2) εἰς τὴν ἐξίσωσιν (ι), εὑρίσκομεν τ=τ′. Ὅθεν ἵνα ἡ ἐξίσωσις (ι) ἐπαληθεύσῃ, *πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τ καὶ τ′ νὰ εἶναι ἴσοι* καὶ ἑπομένως οἱ τύποι

$$\chi=\chi'+\beta\tau, \quad \psi=\psi'-\alpha\tau \tag{3}$$

οἱ εὑρισκόμενοι ἐκ τῆς (1) καὶ (2) ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (ι) *οἱοσδήποτε ἀκέραιος καὶ ἂν εἶναι ὁ τ*· ἀλλ' οἱ τύποι (3) ἐπαληθεύουν καὶ τὴν ἰσοδύναμον πρὸς τὴν (ι) δοθεῖσαν ἐξίσωσιν αχ+βψ=γ. Ἔχει ἄρα ἡ ἐξίσωσις αὕτη λύσεις ἀπείρους τὸ πλῆθος, διδομένας ὑπὸ τῶν τύπων (3)· ἀλλὰ πλὴν τούτων οὐδεμία ἄλλη ὑπάρχει.

Ὅθεν: *Ἐκ μιᾶς ἀκεραίας λύσεως τῆς ἐξισώσεως αχ+βψ=γ εὑρίσκομεν τύπους, περιέχοντας ὅλας τὰς ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς· καὶ πρὸς τοῦτο αὐξάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ χ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ ψ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ἀόριστον τινὰ ἀκέραιον τ, τὴν τιμὴν δὲ τοῦ ψ κατὰ τὸν συντελεστὴν τοῦ χ πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ —τ.*

Ἐπειδὴ δὲ ἀντὶ τ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν καὶ —τ μᾶς εἶναι ἀδιάφορον ποῖον ἐκ τῶν συντελεστῶν θὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τ καὶ ποῖον ἐπὶ τὸν —τ.

Π δ. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως 5χ+ +2ψ=27.*

Λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{27-2\psi}{5}$. Κατόπιν δοκιμάζομεν ἐκ τῶν πέντε τιμῶν τοῦ ψ=0, 1, 2, 3, 4 ποία καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ χ ἀκεραίαν· εὑρίσκομεν δὲ ὅτι διὰ ψ=1 εἶναι χ=5. Ὥστε ὅλαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

$$\chi=5+2\tau$$
$$\psi=1-5\tau.$$

154. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς χ+βψ=γ, ἤτοι ἐὰν ἐν αὐτῇ ὁ εἷς τῶν ἀγνώστων ἔχει συντελεστὴν τὴν μονάδα 1, εὐκολώτατα εὑρίσκονται αἱ ἀκέραιαι λύσεις, διότι τότε συνάγομεν ἀμέσως χ=γ—βψ· εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι εἰς ἑκάστην ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ ἀκεραία ἐπίσης τιμὴ τοῦ χ. Δι' ὃ θὰ ζητήσωμεν ἤδη ἵνα ἡ εὕρεσις τῶν ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως αχ+βψ=γ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν εὕρεσιν τῶν ἀκεραίων λύσεων ἐξισώσεως, ἐν τῇ ὁποίᾳ ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑτέρου τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι ἡ μονὰς 1.

Ἔστω ἡ ἐξίσωσις αχ+βψ=γ (1), τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ α καὶ β ὑποτίθενται πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Θὰ εἶναι ἑπομένως οὗτοι ἄνισοι καὶ ἔστω β>α. Τότε λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς χ, ἤτοι πρὸς τὸν ἄγνωστον τὸν ἔχοντα τὸν μικρότερον συντελεστὴν καὶ εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{\gamma - \beta\psi}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta\psi}{\alpha}$$

Διαιροῦμεν τὰ γ καὶ β διὰ τοῦ α καὶ ἔστω ὅτι $\gamma = \alpha\pi + \gamma_1$ καὶ $\beta = \alpha\pi'$ $+\beta_1$ ὁπότε θὰ εἶναι $\chi = \pi - \pi'\psi + \frac{\gamma_1 - \beta_1\psi}{\alpha}$.

Ἵνα δὲ εἶναι ἀκεραία ἡ τιμὴ αὕτη τοῦ χ πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει ὁ ψ νὰ καθιστοῦν τὴν παράστασιν $\frac{\gamma_1 - \beta_1\psi}{\alpha}$ ἴσην μὲ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φ. Ὥστε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\gamma_1 - \beta_1\psi}{\alpha} = \varphi \qquad \text{ἤτοι } \beta_1\psi + \alpha\varphi = \gamma_1 \quad (2).$$

Οὕτως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (2) τῆς ὁποίας οἱ συντελεσταὶ β_1 καὶ α εἶναι τῶν συντελεστῶν α καὶ β ἀντιστοίχως μικρότεροι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\beta_1 < \alpha$ λύομεν πρὸς ψ καὶ ἔχομεν

$$\psi = \frac{\gamma_1 - \alpha\varphi}{\beta_1}$$

Ἤδη ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἤτοι διαιροῦμεν γ_1 καὶ α διὰ β_1 καὶ ἔστω $\gamma_1 = \beta_1\pi'' + \gamma_2$ καὶ $\alpha = \beta_1\pi''' + \beta_2$, ὁπότε θὰ εἶναι

$$\psi = \pi'' - \pi'''\varphi + \frac{\gamma_2 - \beta_2\varphi}{\beta_2}$$

Ἤδη θέτομεν $\frac{\gamma_2 - \beta_2\varphi}{\beta_1} = \omega$ ἢ $\beta_2\varphi + \beta_1\omega = \gamma_2$ (3).

Βλέπομεν δὲ ἤδη ὅτε ἡ ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως (2) ἤχθη εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως (3), ἥτις εἶναι ἁπλουστέρα. Ἐὰν δὲ ἐξακολουθήσωμεν οὕτως ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ β_1,β_2 εἶναι τὰ διαδοχικὰ ὑπόλοιπα, ἅτινα εὑρίσκομεν ζητοῦντες τὸν μέγιστον κοινὸν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν α καὶ β πρώτων πρὸς ἀλλήλους θὰ εὕρωμεν ὑπόλοιπον ἴσον μὲ τὴν μονάδα 1 καὶ θὰ φθάσωμεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\upsilon + \beta_{\nu-1}\kappa = \gamma_\nu$, ἥτις ἀνάγεται εἰς τὴν $\upsilon = \gamma_\nu - \beta_{\nu-1}\kappa$. Ἀντικαθιστῶντες ἔπειτα τοὺς βοηθητικοὺς ἀγνώστους υ . . . ω, φ διὰ τῶν τιμῶν των συναρτήσει τοῦ κ εἰς τὰς διαφόρους ἐξισώσεις ἀρχόμενοι ἀπὸ τῶν τελευταίων θὰ καταλήξωμεν εἰς τοὺς γενικοὺς τύπους

$$\chi = A + \beta\kappa$$
$$\psi = B - \alpha\kappa$$

Σημείωσις Τὴν ἀνωτέρω μέθοδον τὴν χρησιμοποιοῦμεν συνήθως ὅταν οἱ συντελεσταὶ εἶναι μεγάλοι.

π. δ. *Ἔστω ἡ ἐξίσωσις* $7\chi+13\psi=207$.

Ἐφαρμόζοντες τὰ ἀνωτέρω εὑρίσκομεν διαδοχικῶς

$$\chi=\frac{207-13\psi}{7}=29-\psi+\frac{4-6\psi}{7}$$

$$\frac{4-6\psi}{7}=\varphi, \qquad 7\varphi+6\psi=4$$

$$\psi=\frac{4-7\varphi}{6}=-\varphi+\frac{4-\varphi}{6}$$

$$\frac{4-\varphi}{6}=\kappa \qquad \varphi=4-6\kappa$$

Ὥστε ἡ γενικὴ λύσις εἶναι $\psi=-(4-6\kappa)+\kappa=-4+7\kappa$ καὶ $\chi=29-(-4+7\kappa)+4-6\kappa=37-13\kappa$.

155. Ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$. — Ἐὰν ζητηθῇ ἵνα αἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ εἶναι ὄχι μόνον ἀκέραιαι ἀλλὰ καὶ θετικαί, εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ τ ὁ εἰς τοὺς τύπους (3) τῆς § 153 δὲν δύναται νὰ εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός. Πρὸς εὕρεσιν δὲ τῶν τιμῶν τοῦ τ αἵτινες θὰ καθιστοῦν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ ἀκεραίας καὶ θετικὰς διακρίνομεν τὰς ἑξῆς περιπτώσεις.

1) Οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, ἐπειδὴ δὲ ὁ α πάντοτε δύναται νὰ ὑποτίθεται θετικὸς καὶ ὁ β θὰ εἶναι θετικός· ἀλλ' ἐὰν ὁ γ εἶναι ἀρνητικός, εἶναι πρόδηλον, ὅτι οὐδεμία θετικὴ λύσις ὑπάρχει· ὥστε καὶ ὁ γ πρέπει νὰ εἶναι θετικός.

Κατόπιν τούτων ἔστω $\chi=\chi'$, $\psi=\psi'$ μία ἀκεραία λύσις εὑρεθεῖσα διὰ τῆς μεθόδου τῆς § 153. Ὁ ψ' ἑπομένως εἶναι θετικὸς καὶ μικρότερος τοῦ α, αἱ δὲ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων

$$\chi=\chi'-\beta\tau>0$$
$$\psi=\psi'+\alpha\tau>0$$

Ἤδη εἶναι φανερὸν ὅτι διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ τ ὡς καὶ διὰ $\tau=0$ θὰ εἶναι $\psi>0$. Θὰ εἶναι δὲ $\psi<0$ διὰ πᾶσαν ἀρνητικὴν τιμὴν (ἀκεραίαν) τοῦ τ, διότι ὡς γνωρίζομεν εἶναι $\psi'<\alpha$.

Ὥστε αἱ ἀρνητικαὶ τιμαὶ τοῦ τ ἀπορρίπτονται καὶ ἀπομένει νὰ ἐξετάσωμεν, ἂν αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τ ὡς καὶ ἡ 0, καθιστοῦν ὅλαι ἢ μερικαὶ μόνον καὶ τὸν χ θετικόν. Ἀλλὰ διὰ νὰ γίνῃ ὁ χ θετικὸς διὰ τὰς τιμὰς $\tau=0, 1, 2, 3\ldots$ πρέπει νὰ εἶναι $\chi'>0$ ὡς καὶ $\chi'>\beta\tau$ ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\frac{\chi'}{\beta}>\tau$.

Ὥστε ἡ μὲν μικροτέρα τιμὴ τοῦ τ θὰ εἶνσι ἡ $\tau=0$, ἡ δὲ μεγαλυτέρα θὰ εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος (θετικὸς) ὅστις περιέχεται εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\chi'}{\beta}$, ἔστω δὲ οὗτος ὁ ε. Αἱ δεκταὶ τιμαὶ λοιπὸν τοῦ τ, αἱ ὁποῖαι δίδουν τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως, εἶναι $\tau=0, 1, 2, 3. \ldots .\varepsilon$ καὶ τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι $\varepsilon+1$.

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha\chi'+\beta\psi'=\gamma$ θὰ εἶναι

καὶ
$$\frac{\chi'}{\beta}+\frac{\psi'}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta} \qquad (1)$$

Ἐὰν δέ ε εἶναι ὁ μέγιστος ἀκέραιος, ὅστις περιέχεται εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\chi'}{\beta}$, θὰ εἶναι $\frac{\chi}{\beta}=\varepsilon+\frac{\upsilon}{\beta}$ ὅπου $\frac{\upsilon}{\beta}<1$. Ὥστε ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\varepsilon+\frac{\upsilon}{\beta}+\frac{\psi'}{\alpha}=\frac{\gamma}{\alpha\beta}$. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδη εἶναι καὶ $\frac{\psi'}{\alpha}<1$, θὰ εἶναι $\frac{\upsilon}{\beta}+\frac{\psi'}{\alpha}$ ἢ μικρότερον τῆς μονάδος ἢ μεγαλύτερον αὐτῆς· πάντως ὅμως μικρότερον τοῦ 2. Ὥστε ὁ μέγιστος ἀκέραιος ὁ περιεχόμενος εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$ θὰ εἶναι ἢ ὁ ε ἢ ὁ $\varepsilon+1$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται ὅτι εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν α καὶ β εἶναι ἀμφότερα θετικά: *Ὁ ἀριθμὸς τῶν θετικῶν καὶ ἀκεραίων λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ ἰσοῦται ἢ πρὸς τὸν μέγιστον θετικὸν ἀκέραιον τὸν περιεχόμενον εἰς τὸ κλάσμα $\frac{\gamma}{\alpha\beta}$, ἂν οὗτος εἶναι ὁ $\varepsilon+1$, ἢ πρὸς αὐτὸν τοῦτον ηὐξημένον κατὰ μονάδα, ἂν εἶναι ὁ ε.*

2) Οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι, ἤτοι $\alpha>0$ καὶ $\beta<0$. Διὰ τὴν αὐτὴν ὡς εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν λύσιν $\chi=\chi'$, $\psi=\psi'$ ἔχομεν τοὺς ἰδίους τύπους

$$\chi=\chi'-\beta\tau>0$$
$$\psi=\psi'+\alpha\tau>0.$$

Διὰ τὰς ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ τ αἱ τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ἀρνητικαί, καὶ διὰ τὰς θετικὰς ὡς καὶ τὴν 0 αἱ τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι θετικαί. Αἱ ἀρνητικαὶ λοιπὸν τιμαὶ τοῦ τ ἀπορρίπτονται, αἱ δὲ τιμαὶ αὐτοῦ

$\tau=0, 1, 2, 3\ldots.$ καθιστοῦν τὸν χ θετικόν, ἂν εἶναι $\chi'>0$, διότι τότε εἶναι $\chi=\chi'$, $\chi'-\beta$, $\chi'-2\beta\ldots.$ ἐπειδὴ $-\beta>0$· ἀλλ' ἂν εἶναι $\chi'<0$ αἱ θετικαὶ τιμαὶ τοῦ τ αἱ μεγαλύτεραι τοῦ κλάσματος $\dfrac{\chi'}{\beta}$ καθιστοῦν τὸν χ θετικόν. Διότι δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $\chi=\beta\left(\dfrac{\chi'}{\beta}-\tau\right)$· ἐπειδὴ δὲ $\beta<0$, διὰ νὰ εἶναι $\chi>0$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\dfrac{\chi'}{\beta}-\tau<0$, ἤτοι $\tau>\dfrac{\chi'}{\beta}$. Ὥστε εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν οἱ συντελεσταὶ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι, *ἡ ἐξίσωσις* $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ *ἔχει λύσεις θετικὰς καὶ ἀκεραίας ἀπείρους τὸ πλῆθος.*

Π. δ. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις : 1) Τῆς ἐξισώσεως* $2\chi+5\psi=35$.

Λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=\dfrac{35-5\psi}{2}$, ἐξ ἧς διὰ $\psi=1$ λαμβάνομεν $\chi=15$.

Οἱ τύποι λοιπὸν οἱ δίδοντες τὰς θετικὰς καὶ ἀκεραίας λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι

$$\chi=15-5\tau>0$$
$$\psi=1+2\tau>0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{15}{5}=3$ καὶ $4>\dfrac{35}{10}>3$ αἱ δεκταὶ τιμαὶ τοῦ τ εἶναι κατ' ἀριθμὸν 4, ἤτοι αἱ $\tau=0, 1, 2, 3$ δίδοντες

$$\chi=15,\ 10,\ 5,\ 0$$
$$\psi=1,\ 3,\ 5,\ 7$$

2) *Τῆς ἐξισώσεως* $9\chi+5\psi=33$. Λύοντες πρὸς ψ εὑρίσκομεν $\psi=\dfrac{33-9\chi}{5}$. ἐξ ἧς διὰ $\chi=2$ λαμβάνομεν $\psi=3$. Ὥστε πρέπει νὰ εἶναι

$$\chi=2+5\tau>0$$
$$\psi=3-9\tau>0$$

Ἐπειδὴ δὲ $1>\dfrac{3}{9}>0$ καὶ $1>\dfrac{33}{45}>0$, δεκτὴ τιμὴ τοῦ τ εἶναι μόνον 1 ἢ $\tau=0$, δίδουσα τὴν εὑρεθεῖσαν λύσιν $\chi=2$, $\psi=3$.

3) *Τῆς ἐξισώσεως* $2\chi+5\psi=43$. Οἱ τύποι οἱ δίδοντες τὰς ζητουμένας λύσεις εἶναι οἱ

$$\chi=19-5\tau>0$$
$$\psi=1+2\tau>0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $3 < \frac{19}{5} < 4$ καὶ $4 < \frac{43}{10} < 5$ αἱ δεκταὶ τιμαὶ τοῦ τ εἶναι τέσσαρες, αἱ $\tau=0, 1, 2, 3$ δίδουσαι

$$\chi=19, 14, 9, 4$$
$$\psi= 1, 3, 5, 7$$

156. ***Ἀκέραιαι λύσεις ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους.***— Ἔστω τοιαύτη ἐξίσωσις ἡ $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\delta$, εἰς ἥν, ἵνα ὑπάρχουν ἀκέραιαι λύσεις, πρέπει οἱ α, β, γ νὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους (§ 151, 152). Κατόπιν τούτων, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ζητουμένας λύσεις ἐξετάζομεν, ἐὰν δύο ἐκ τῶν τριῶν συντελεστῶν α, β, γ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους· ἔστω δὲ ὅτι τοιοῦτοι εἶναι οἱ α, β. Τότε γράφομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$\alpha\chi+\beta\psi=\delta-\gamma\varphi \text{ ἢ ἐὰν θέσωμεν } \delta-\gamma\varphi=\delta_1$$
$$\alpha\chi+\beta\psi=\delta_1$$

Κατόπιν εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\delta_1$ καὶ συνάγομεν, ὅτι οἱ τύποι οἱ δίδοντες αὐτὰς εἶναι οἱ

$$\chi=\chi'+\beta\tau$$
$$\psi=\psi'-\alpha\tau$$

ὅπου χ' καὶ ψ' εἶναι συναρτήσεις τῆς δ_1.

Ἐὰν ἤδη εἰς αὐτὰς ἀντικαταστήσωμεν τὸ δ_1 διὰ τῆς τιμῆς τοῦ $\delta-\gamma\varphi$, εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$\chi=A+A'\varphi+\beta\tau$$
$$\psi=B+B'\varphi-\alpha\tau$$

δι' ὧν εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν χ, ψ, τὰς ἀντιστοιχούσας εἰς τὰς δεδομένας ἀκεραίας τιμὰς τῶν φ καὶ τ.

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, γράφομεν καὶ πάλιν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ὡς ἑξῆς

$$\alpha\chi+\beta\psi=\delta-\gamma\varphi$$

ἢ ἐὰν λ εἶναι ὁ κοινὸς διαιρέτης τῶν α καὶ β

$$\lambda\alpha'\chi+\lambda\beta'\psi=\delta-\gamma\varphi$$

Ἀλλὰ τότε συνάγομεν ὅτι καὶ $\delta-\gamma\varphi$ πρέπει νὰ εἶναι πολλαπλάσιόν τι τοῦ λ· ἄρα θέτομεν $\delta-\gamma\varphi=\lambda\delta'$, ὁπότε ἔχομεν

$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\delta'$$

Ἤδη εὑρίσκομεν τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς τελευταίας αὐτῆς ἐξισώσεως καὶ συνάγομεν τοὺς τύπους

$$\chi=\chi'+\beta'\tau$$
$$\psi=\psi'-\alpha'\tau$$

εἶναι δὲ χ', ψ' συναρτήσεις τοῦ δ', τοῦ ὁποίου αἱ ἀκέραιαι τιμαί, ὁμοῦ μὲ ἀκεραίας τιμὰς τοῦ ϕ, πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $\delta-\gamma\phi=\lambda\delta'$. Λύομεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν τοὺς τύπους

$$\phi=\phi'+\lambda\tau'$$
$$\delta=\delta''-\gamma\tau'$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν τὴν τιμὴν αὐτῆς τῆς δ' εἰς τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τῶν χ, ψ θὰ λάβωμεν τοὺς ἑξῆς γενικοὺς τύπους, δίδοντες τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν ἀγνώστων χ, ψ, ϕ.

$$\chi=A+A'\tau'+\beta'\tau, \quad \psi=B+B'\tau'-\alpha'\tau, \quad \phi=\phi'+\lambda\tau'$$

Π. δ. *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $15\chi+2\psi+6\phi=56$.*

Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ 15 καὶ 2 εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους μεταφέρομεν τὸν ὅρον 6ϕ εἰς τὸ δεύτερον μέλος

$$15\chi+2\psi=56-6\phi=\delta_1 \qquad (1)$$

ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν λύσιν $\chi=\delta_1$, $\psi=-7\delta_1$. Οἱ τύποι λοιπὸν οἱ δίδοντες τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1) εἶναι

$$\chi=\delta_1-2\tau, \quad \psi=-7\delta_1+15\tau \quad \text{ἤτοι}$$
$$\chi=56-6\phi-2\tau, \quad \psi=-392+42\phi+15\tau$$

π.χ. διὰ $\tau=12$, $\phi=5$ λαμβάνομεν $\chi=2$, $\psi=-2$ καὶ
$\tau=21$, $\phi=2$ » $\chi=2$, $\psi=7$

Ἤδη ἵνα ἴδωμεν διὰ ποίας ἀκεραίας θετικὰς τιμὰς τοῦ ϕ, λαμβάνουν καὶ οἱ χ, ψ θετικὰς τιμάς, πρέπει νὰ ὁρισθοῦν τὰ ὅρια τῶν τιμῶν τοῦ ἀορίστου τ. Ἀλλ' ἵνα εἶναι χ καὶ ψ θετικοὶ πρέπει νὰ εἶναι

$$56-6\phi-2\tau>0, \quad -392+42\phi+15\tau>0$$

ἐξ ὧν συνάγομεν $\tau<\dfrac{56-6\phi}{2}$, $\tau>\dfrac{392-42\phi}{15}$ ἤτοι $\dfrac{392-42\phi}{15}<$ $<\dfrac{56-6\phi}{2}$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\phi<\dfrac{56}{6}<10$. Ὥστε αἱ μόναι θετικαὶ καὶ ἀκέραιοι τιμαὶ τοῦ ϕ δύνανται νὰ εἶναι αἱ $\phi=1, 2, 3, \ldots 9$.

Θέτομεν λοιπὸν εἰς τὰ ὅρια τοῦ τ διαδοχικῶς τὰς ἀνωτέρω τιμὰς τοῦ ϕ καὶ εὑρίσκομεν διὰ

$\phi=1$	$\tau<25$	$\tau>23$	ἄρα	$\tau=24$
$\phi=2$	$\tau<22$	$\tau>20$	»	$\tau=21$
$\phi=3$	$\tau<19$	$\tau>17$	»	$\tau=18$
$\phi=4$	$\tau<16$	$\tau>14$	»	$\tau=15$
$\phi=5$	$\tau<13$	$\tau>12$		

Ἀλλὰ τὰ τελευταῖα αὐτὰ ὅρια τοῦ τ εἶναι ἀσυμβίβαστα πρὸς ἄλληλα καὶ ἡ τιμὴ $\varphi=5$ ἀπορρίπτεται· ὁμοίως δὲ εὑρίσκομεν, ὅτι καὶ αἱ ἑπόμεναι τιμαὶ $\varphi=6, 7, 8, 9$ δέον ν' ἀπορριφθοῦν. Οὕτω δὲ δεκταὶ τιμαὶ τοῦ φ εἶναι αἱ $\varphi=1, 2, 3, 4$. Δίδουν δὲ αὗται διὰ

$\tau=24,\quad \varphi=1,\quad \chi=2,\quad \psi=10$
$\tau=21,\quad \varphi=2,\quad \chi=2,\quad \psi=7$
$\tau=18,\quad \varphi=3,\quad \chi=2,\quad \psi=4$
$\tau=15,\quad \varphi=4,\quad \chi=2,\quad \psi=1$

Σημείωσις. Ἐὰν τῆς ἀνωτέρω δοθείσης ἐξισώσεως μεταφέρομεν τὸν ὅρον 2ψ εἰς τὸ δεύτερον μέλος θὰ ἔχωμεν

$$15\chi+6\varphi=56-2\psi \qquad \text{ἢ}$$
$$3.5\chi+3.2\chi=56-2\psi=3\delta_1 \qquad \text{ἢ}$$
$$5\chi+2\varphi=\delta_1$$

Λύοντες ἤδη τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$\chi=\delta_1-2\tau,\quad \varphi=-2\delta_1+5\tau$$

Ἐκ δὲ τῆς ἐξισώσεως $56-2\psi=3\delta_1$ εὑρίσκομεν τοὺς τύπους

$$\delta_1=2\tau',\quad \psi=28-3\tau'$$

Οἱ τύποι λοιπὸν οἱ δίδοντες τὰς ἀκεραίας λύσεις τῆς ἐξισώσεως $15\chi+2\psi+$ $+6\varphi=56$ εἶναι οἱ

$$\chi=2\tau'-2\tau,\quad \varphi=-4\tau'+5\tau,\quad \psi=28-3\tau'$$

π.χ. διὰ $\tau'=10,\ \tau=9$ εἶναι $\chi=2.\ \psi=-2\ \varphi=5$
καὶ » $\tau'=7,\ \tau=5$ » $\chi=4,\ \psi=7\ \varphi=-3$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἵνα αἱ τιμαὶ τῶν τριῶν ἀγνώστων εἶναι καὶ θετικαὶ πρέπει νὰ εἶναι

$28-3\tau'>0\quad 2\tau'>2\tau$ καὶ $-4\tau'+5\tau>0$ ἤτοι $\tau'<\frac{28}{3}<10\quad \tau'>\tau$ ἀλ-

$\tau>\frac{4}{5}\tau'$. Κατὰ ταῦτα δὲ διὰ

$\tau'=9$ δεκτὴ τιμὴ τοῦ τ εἶναι ἡ $\tau=8$
$\tau'=8$ » » » » » » $\tau=7$
$\tau'=7$ » » » » » » $\tau=6$
$\tau'=6$ » » » » » » $\tau=5$

ἐνῷ διὰ τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ τ' δὲν ὑπάρχουν δεκταὶ τιμαὶ τοῦ τ· διότι π.χ. διὰ $\tau'=5$ πρέπει νὰ εἶναι $\tau>\frac{4}{5}\cdot 5$, ἤτοι $\tau>4$· ἀλλὰ τοῦτο δὲν εἶναι δυνατὸν διότι πρέπει νὰ εἶναι $\tau<\tau'$ ἤτοι $\tau<5$.

Κατόπιν τούτων εὑρίσκομεν διὰ

$\tau'=9$ καὶ $\tau=8\quad \chi=2,\quad \varphi=4,\quad \psi=1$
$\tau'=8$ » $\tau=7\quad \chi=2,\quad \varphi=3,\quad \psi=4$
$\tau'=7$ » $\tau=6\quad \chi=2,\quad \varphi=2,\quad \psi=7$
$\tau'=6$ » $\tau=5\quad \chi=2,\quad \varphi=1,\quad \psi=10$

ἤτοι εὑρίσκομεν τὰς αὐτὰς ὡς καὶ προηγουμένως θετικὰς καὶ ἀκεραίας τιμὰς τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων
423) $2\chi-3\psi=24$ 424) $17\chi-49\psi=-8$ 425) $4\chi+3\psi+24=0$
Νὰ εὑρεθοῦν αἱ θετικαὶ καὶ ἀκέραιαι λύσεις τῶν ἐξισώσεων
426) $7\chi+3\psi=73$ 427) $2\chi+13\psi=185$ 428) $7\chi-16=5\psi$
429) $5\chi-3\psi+11\varphi=32$ 430) $6\chi+22\psi+15\varphi=77$

431) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θετικὴ καὶ ἀκεραία λύσις τῆς ἐξισώσεως $5\chi+13\psi=227$, ἥτις ἔχει τὴν μεγίστην τιμὴν τοῦ χ

432) Εἷς ἠγόρασεν ἀριθμόν τινα βιβλίων ἀντὶ 5 ταλλήρων ἕκαστον καὶ ἀριθμὸν ἄλλων βιβλίων ἀντὶ 7 ταλλήρων ἕκαστον καὶ ἐπλήρωσεν ἐν ὅλῳ 38 τάλληρα. Πόσα βιβλία ἐξ ἑκάστου εἴδους ἠγόρασεν;

433) Τὸ ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ὧν οἱ παρονομασταὶ εἶναι 4 καὶ 7, εἶναι $2\frac{3}{28}$ Ποῖα εἶναι τὰ κλάσματα αὐτά;

434) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 115 εἰς δύο ἀριθμοὺς ἀκεραίους, τοιούτους ὥστε ὁ μὲν εἷς νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8, ὁ δὲ ἄλλος πολλαπλάσιον τοῦ 11.

435) Μία ὁμὰς ἐξ ἀνδρῶν καὶ γυναικῶν ἐδαπάνησεν ἐν ὅλῳ 1000 δραχμὰς καὶ ἕκαστος μὲν ἀνὴρ ἐδαπάνησε 19 δραχμάς, ἑκάστη δὲ γυνὴ 11 δραχμάς. Πόσοι ἦσαν οἱ ἄνδρες καὶ πόσαι αἱ γυναῖκες;

436) Θέλει τις νὰ πληρώσῃ 211 δραχμὰς εἰς νομίσματα τῶν 5 δραχμῶν, τῶν 2 καὶ τῶν 20 δραχμῶν. Πόσα θὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους;

437) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμὸς τοιοῦτος ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων ἐπὶ 11, καὶ τοῦ ψηφίου τῶν δεκάδων ἐπὶ 17 νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμόν, ὅστις προκύπτει, ἐὰν τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατὰ τάξιν ἀντίστροφον ἠλαττωμένον κατὰ 2.

157. *Ἀκέραιαι λύσεις συστήματος ἐκ δύο ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ τρεῖς ἀγνώστους.*

Ἔστω τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi&=\delta \\ \alpha'\chi+\beta'\psi+\gamma'\varphi&=\delta' \end{aligned} \qquad (1)$$

Ἐὰν ἀπαλείψωμεν τὸν ἄγνωστον φ λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\chi+(\beta\gamma'-\gamma\beta')\psi=\delta\gamma'-\gamma\delta' \qquad (2)$$

ἥτις μετὰ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος (1) ἔστω τῆς πρώτης, α, ἀποτελεῖ σύστημα ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθέν. Τῆς ἐξισώσεως (2) ἔστω μία λύσις, ἡ $\chi=\chi'$, $\psi=\psi'$ Τότε οἱ τύποι οἱ διδοντες τὰς ἀκεραίας λύσεις αὐτῆς εἶναι οἱ $\chi=\chi'+(\beta\gamma'-\gamma\beta')\tau$, $\psi=\psi'-(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')\tau$ (3). Ἐὰν δὲ θέσωμεν τὰς τιμὰς αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν τοῦ δοθέντος συστήματος λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $\gamma(\beta\alpha'-\alpha\beta')\tau+\gamma\varphi=$ $=\delta-\alpha\chi'-\beta\psi'$ (4), ἔχουσαν ἀγνώστους τὸν τ καὶ φ, τῆς ὁποίας τὸ δεύτερον μέλος διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ γ, ἐὰν αὕτη ἔχῃ ἀκεραίας λύσεις. Ἐὰν δὲ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι π, ἡ ἐξίσωσις (4) ἀνάγεται εἰς τὴν

$$(\beta\alpha'-\alpha\beta')\tau+\varphi=\pi \qquad (5)$$

τῆς ὁποίας μία λύσις ἔστω ἡ $\tau=\tau'$, $\varphi=\varphi'$., Οἱ τύποι λοιπὸν οἱ δίδοντες ὅλας τὰς λύσεις αὐτῆς εἶναι $\tau=\tau'+\mu$, $\varphi=\varphi'-(\beta\alpha'-\alpha\beta')\mu$ (6) ὥστε, μὲ τὰς προηγουμένας ὑποθέσεις οἱ τύποι οἱ δίδοντες τὰς ἀκεραίας ρίζας τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι οἱ

$$\chi=\chi'+(\beta\gamma'-\gamma\beta')(\tau'+\mu)$$
$$\psi=\psi'-(\alpha\gamma'-\gamma\alpha')(\tau'+\mu)$$
$$\varphi=\varphi'-(\beta\alpha'-\alpha\beta')\mu$$

Π. δ. *Ἔστω τὸ σύστημα* $3\chi+5\psi+6\varphi=62$
$7\chi+3\psi+5\varphi=76$ *οὗ ζητοῦνται αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις.*

Ἀπαλείφοντες τὸν φ εὑρίσκομεν $27\chi-7\psi=146$, τῆς ὁποίας μία λύσις εἶναι $\chi=1$, $\psi=-17$. Ἄρα $\chi=1+7\tau$, $\psi=-17+27\tau$ καὶ ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ συστήματος, ἕνεκα τῶν τιμῶν αὐτῶν χ, ψ, ἄγεται εἰς τὴν $156\tau+6\varphi=144$, ἤτοι εἰς τὴν $26\tau+\varphi=24$, ἥτις διὰ πᾶσαν ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ τ' δίδει ἀκεραίαν τιμὴν τοῦ φ, εὑρισκομένην ὑπὸ τοῦ τύπου $\varphi=24-26\tau'$. Οἱ τύποι λοιπὸν οἱ δίδοντες τὰς ἀκεραίας λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι

$$\chi=1+7\tau',\quad \psi=-17+27\tau',\quad \varphi=24-26\tau'.$$

Οὕτω διὰ $\tau'=1, 2$ ἔχομεν

$\chi=8$, $\psi=10$, $\varphi=-2$ ἢ $\chi=15$, $\psi=37$, $\varphi=-28$

Ἤδη ἵνα εἶναι αἱ τιμαὶ τῶν χ, ψ, φ, θετικαὶ πρέπει νὰ θέσωμεν

$1+7\tau'>0$ $\quad -17+27\tau'>0$, $\quad 24-26\tau'>0$ ἐξ ὧν συνάγομεν

$$\tau'>-\frac{1}{7} \qquad \tau'>\frac{17}{27}>0 \qquad \tau'<\frac{24}{26}<1.$$

Ὥστε τὸ δοθὲν σύστημα δὲν ἐπιδέχεται θετικὰς λύσεις.

Σημείωσις.—Τὴν ἀνωτέρω μέθοδον διὰ δύο ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους, εὐκόλως δυνάμεθα νὰ τὴν ἐπεκτείνωμεν εἰς τὴν ἐπίλυσιν συστήματος μ ἐξισώσεων πρώτου βαθμοῦ μὲ (μ+1) ἀγνώστους. Πρὸς τοῦτο δὲ ἀπαλείφομεν ἕνα τῶν ἀγνώστων διαδοχικῶς μεταξὺ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων, οὕτω δὲ εὑρίσκομεν (μ—1) ἐξισώσεις μὲ τοὺς μ ὑπολοίπους ἀγνώστους. Ὁμοίως μεταξὺ μιᾶς τῶν (μ—1) ἐξισώσεων καὶ ἑκάστης τῶν ἄλλων (μ—2) ἀπαλείφομεν ἕνα τῶν μ ἀγνώστων καὶ οὕτως εὑρίσκομεν (μ—2) ἐξισώσεις μὲ τοὺς (μ—1) ὑπολοίπους ἀγνώστους. Ἐξακολουθοῦντες δὲ οὕτω, θὰ φθάσωμεν εἰς δύο ἐξισώσεις μὲ τρεῖς ἀγνώστους τέλος εἰς μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους. Οὕτω δὲ θὰ ἀντικαταστήσωμεν καὶ τὸ δοθὲν σύστημα μὲ ἄλλο ἰσοδύναμον καὶ τὸ ὁποῖον θ' ἀποτελῆται ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων τοῦ δοθέντος συστήματος, ἐκ μιᾶς τῶν εὑρεθεισῶν (μ—1) ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους, ἐκ μιᾶς τῶν ἐξισώσεων μὲ (μ—1) ἀγνώστους κ.ο.κ. ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως μὲ τρεῖς ἀγνώστους καὶ ἐκ τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, τῆς περιεχούσης δύο ἀγνώστους, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν τοὺς τύπους τοὺς δίδοντας τὰς ἀκεραίας τιμὰς τῶν δύο ἀγνώστων χ καὶ ψ, οὓς περιέχει συναρτήσει βοηθητικοῦ ἀγνώστου ἀκεραίου τ. Τὰς τιμὰς αὐτὰς τῶν χ καὶ ψ θέτομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν τὴν περιέχουσαν τρεῖς ἀγνώστους χ,ψ,φ, λαμβάνοντες οὕτω μίαν ἐξίσωσιν μὲ δύο ἀγνώστους φ καὶ τ, τὴν ὁποίαν λύομεν· ἐὰν δὲ μετὰ τοῦτο θέσωμεν τὴν εὑρισκομένην τιμὴν τοῦ τ, εἰς τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ, εὑρίσκομεν τύπους δίδοντας τὰς τιμὰς τοῦ χ, ψ, φ, συναρτήσει μιᾶς ἀορίστου τ.Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ἐπὶ τῆς ἐξισώσεως μὲ τέσσαρας ἀγνώστους χ, ψ, φ, ω εὑρίσκομεν τύπους δίδοντας τὰς τιμὰς αὐτοῦ συναρτήσει μιᾶς ἀορίστου, τῆς $τ_2$ Οὕτως ἐξακολουθοῦντες εἰς ἐξισώσεις διαδοχικῶς ἐχούσας ἕνα ἄγνωστον περισσότερον, θὰ εὕρωμεν τύπους δίδοντας τὰς τιμὰς ὅλων τῶν ἀγνώστων συναρτήσει μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς ἀκεραίας ἀορίστου

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ θετικαὶ καὶ ἀκέραιαι λύσεις τῶν συστημάτων.

438) $χ + 5ψ + 4φ = 37$, $3χ + 7ψ + 9φ = 72$

439) $5χ + 7ψ - 2φ = 29$, $2χ + 3ψ + 5φ = 53$

440) $13χ+5ψ-2φ+4ω=33$, $8χ+7ψ+3φ-5ω=11$, $11χ-3ψ+5φ-7ω=-8$

441) $χ-7ψ=2$, $7ψ-10ω=5$, $10ω-11φ=-2$, $11φ-17υ=4$

442) Θέλει τις μὲ 400 λίρας ν' ἀγοράσῃ 24 σάκκους ἐμπορευμάτων τριῶν εἰδῶν, ἤτοι ζαχάρεως, σίτου καὶ καφέ· πωλεῖται δὲ ὁ εἷς σάκκος ζαχάρεως ἀντὶ $6\frac{1}{2}$ λιρῶν, ὁ εἷς σάκκος σίτου ἀντὶ $2\frac{1}{2}$ λιρῶν καὶ ὁ εἷς σάκκος καφὲ ἀντὶ $29\frac{1}{2}$ λιρῶν. Πόσους σάκκους θ' ἀγοράσῃ ἀπὸ κάθε εἶδος;

443) Εἶχε τις δένδρα περισσότερα τῶν 400 καὶ ὀλιγώτερα τῶν 600. Ἐὰν τὰ ἐφύτευε εἰς γραμμὰς ἀνὰ 11 θὰ τοῦ ἀπέμενον 3, ἐνῷ ἂν τὰ ἐφύτευεν ἀνὰ 12 θὰ τοῦ ἀπέμενον 11. Πόσα δένδρα εἶχεν;

Ἀσκήσεις ἀνάμεικτοι,—Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

444)
$$\frac{2}{2χ+3ψ-7} + \frac{3}{3χ+φ-6} = 2$$
$$\frac{8}{3χ+φ-6} + \frac{3}{2φ-3ψ+2} = 5$$
$$\frac{9}{2φ-3ψ+2} + \frac{4}{2χ+3ψ-7} = 4$$

445)
$$\frac{3χ}{5} - \frac{ψ}{2} + \frac{7ω}{3} = 9$$
$$\frac{2χ}{3} + \frac{3ψ}{4} - \frac{ω}{2} = 3\frac{5}{6}$$
$$\frac{2χ}{5} - \frac{ψ}{3} + \frac{14ω}{9} = 6$$

446)
$$χ - \frac{ψ}{2} + 2ω = 1$$
$$3χ+4ψ - \frac{ω}{3} = 2$$
$$\frac{9χ}{2} + 6ψ - \frac{ω}{2} = \frac{1}{3}$$

447)
$$(α+β)χ+(α-β)ψ+(α^2-β^2)φ=2(μ+ν)$$
$$\frac{χ}{μ} + \frac{ψ}{ν} + \frac{φ}{μ+ν} = \frac{2α+1}{α^2-β^2}$$
$$\frac{χ}{α-β} - \frac{ψ}{α+β} + φ = \frac{2μ}{α^2-β^2}$$

Νὰ λυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα

448) $\alpha\chi+\psi+\omega=\alpha^2$, $\chi+\alpha\psi+\omega=3\alpha$, $\chi+\psi+\alpha\omega=2$

449) $\alpha\chi+\psi-\omega=1$, $\chi-\beta\psi+\beta^2\omega=\beta^3$, $\chi-\gamma\psi+\gamma^2\omega=\gamma^3$

450) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α τὸ σύστημα $\alpha\chi-5\psi=4\alpha-1$, $3\chi+(\alpha-8)\psi=20-3\alpha$.

1ον) εἶναι ἀόριστον, 2ον) ἔχει τὰς ἐξισώσεις αὐτοῦ ἀσυμβιβάστους πρὸς ἀλλήλας καὶ 3ον) λαμβάνει τὴν λύσιν $\chi=\psi$;

451) Ἐὰν α, β, γ, εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ διάφοροι πρὸς ἀλλήλους καὶ πληροῦν τὰς σχέσεις $\alpha^3+\lambda\alpha+\rho=0$, $\beta^3+\lambda\beta+\rho=0$, $\gamma^3+\lambda\gamma+\rho=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοὶ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $\alpha+\beta+\gamma=0$.

452) Ἐὰν $\chi^2+8\chi+2=A(\chi-1)(\chi-2)+B(\chi-2)+\Gamma$, εὑρεῖν τὰ Α, Β, Γ (ποσότητες σταθεραί, ἤτοι ἀνεξάρτητοι τοῦ χ).

453) Ἐὰν $6\chi^3+\chi^2-3\chi-5=A(\chi-1)(\chi+1)(\chi-3)+B(\chi+1)(\chi-3)+\Gamma(\chi+1)+\Delta$, εὑρεῖν τοὺς συντελεστὰς Α, Β, Γ, Δ.

454) Ἐὰν $\dfrac{\chi^2-10\chi-13}{(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}=\dfrac{A}{\chi-1}+\dfrac{B}{\chi-2}+\dfrac{\Gamma}{\chi-3}$, εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς Α,Β,Γ.

Ἐκ τῆς δοθείσης ταυτότητος εὑρίσκομεν τὴν $\chi^2-10\chi-13=A(\chi-2)(\chi-3)+B(\chi-1)(\chi-3)+\Gamma(\chi-1)(\chi-2)$ (1), ἥτις ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἄρα καὶ διὰ $\chi=1$, $\chi=2$, $\chi=3$· ἀλλὰ διὰ $\chi=1$ λαμβάνομεν $-22=2A$ καὶ ἑπομένως $A=-11$ ἐνῷ διὰ $\chi=2$ εὑρίσκομεν $B=29$ καὶ διὰ $\chi=3$, $\Gamma=-17$.

Τοὺς ἀριθμοὺς Α,Β,Γ εὑρίσκομεν καὶ ὡς ἑξῆς.

Ἐκτελοῦντες τὰς πράξεις εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ταυτότητος (1) εὑρίσκομεν τὴν $\chi^2-10\chi-13=(A+B+\Gamma)\chi^2-(5A+4B+3\Gamma)\chi+6A+3B+2\Gamma$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν (§ 95) τὸ σύστημα $A+B+\Gamma=1$, $5A+4B+3\Gamma=10$, $6A+3B+2\Gamma=-13$ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου, εὑρίσκομεν $A=-11$, $B=29$, $\Gamma=-17$· ὥστε εἶναι

$$\frac{\chi^2-10\chi-13}{(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}=\frac{11}{\chi-1}+\frac{29}{\chi-2}-\frac{17}{\chi-3}$$

ἤτοι τὸ κλάσμα $\dfrac{\chi^2-10\chi-13}{(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}$ ἀνελύθη εἰς ἄθροισμα τριῶν μερικῶν κλασμάτων μὲ παρονομαστὰς τοὺς παράγοντας τοῦ παρονομαστοῦ του·

455) Ἐὰν $\dfrac{3\chi^2-\chi+4}{(\chi-1)^3}=\dfrac{A}{\chi-1}+\dfrac{B}{(\chi-1)^2}+\dfrac{\Gamma}{(\chi-1)^3}$, εὑρεῖν τὰ Α,Β,Γ.

Ἐκ τῆς δοθείσης ταυτότητος λαμβάνομεν τὴν $3\chi^2-\chi+4=A(\chi-1)^2+B(\chi-1)+\Gamma$, ἐξ ἧς διὰ $\chi=1$ εὑρίσκομεν $\Gamma=6$. Ἐξισοῦντες ἤδη τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ χ εὑρίσκομεν $A=3$ καὶ $-1=-2A+B$, ἤτοι $B=5$. Ὥστε εἶναι $\dfrac{3\chi^2-\chi+4}{(\chi-1)^3}=\dfrac{3}{\chi-1}+\dfrac{5}{(\chi-1)^2}+\dfrac{6}{(\chi-1)^3}$

Ἡ ζητουμένη ἀνάλυσις τοῦ δοθέντος κλάσματος εἰς ἄθροισμα μερικῶν κλασμάτων γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς : Ἐὰν θέσωμεν $\chi-1=\psi$, ἤτοι $\chi=1+\psi$, λαμβάνομεν

$$\frac{3\chi^2-\chi+4}{(\chi-1)^3}=\frac{3(1+\psi)^2-(1+\psi)+4}{\psi^3}=\frac{3\psi^2+5\psi+6}{\psi^3}$$

ἤτοι $\dfrac{3\chi^2-\chi+4}{(\chi-1)^3}=\dfrac{3}{\psi}+\dfrac{5}{\psi^2}+\dfrac{6}{\psi^3}=\dfrac{3}{\chi-1}+\dfrac{5}{(\chi-1)^2}+\dfrac{6}{(\chi-1)^3}$

Σημείωσις. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω παραδείγματος συνάγομεν ὅτι ἓν ἀλγεβρικὸν κλάσμα τῆς μορφῆς

$$\frac{\alpha\chi^{\mu-1}+\beta\chi^{\mu-2}+\gamma\chi^{\mu-3}+\ldots\ldots+\kappa\chi+\lambda}{(\chi-1)^{\mu}}$$

ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα μερικῶν κλασμάτων τῆς μορφῆς

$$\frac{A}{\chi-1}+\frac{B}{(\chi-1)^2}+\frac{\Gamma}{(\chi-1)^3}+\ldots\ldots+\frac{\Lambda}{(\chi-1)^{\mu}}$$

456) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα μερικῶν κλασμάτων τὸ κλάσμα $\frac{\chi^3+\chi^2-\chi+3}{(\chi-1)(\chi+2)}$.

Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλυτέρου βαθμοῦ ἢ ὁ παρονομαστής, διαιροῦμεν τὸν πρῶτον διὰ τοῦ δευτέρου, ὁπότε τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται

$$\frac{\chi^3+\chi^2-\chi+3}{(\chi+1)(\chi+2)}=\chi+\frac{\chi+3}{(\chi-1)(\chi+2)}$$

Ἐπειδὴ δὲ εὑρίσκομεν, ὡς εἰς τὰ προηγούμενα παραδείγματα, ὅτι

$$\frac{\chi+3}{(\chi-1)(\chi+2)}=\frac{A}{\chi-1}+\frac{B}{\chi+2}=\frac{\frac{4}{3}}{\chi-1}=\frac{\frac{1}{3}}{\chi+2}$$

ἕπεται ὅτι

$$\frac{\chi^3+\chi^2-\chi+3}{(\chi-1)(\chi+2)}=\chi+\frac{4}{3(\chi-1)}-\frac{1}{3(\chi+2)}$$

457) Νὰ ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα μερικῶν κλασμάτων τὸ κλάσμα $\frac{3\chi^2+7\chi+2}{(\chi+1)(\chi^2+2\chi+5)}$.

Θέτομεν $$\frac{3\chi^2+7\chi+2}{(\chi+1)(\chi^2+2\chi+5)}=\frac{A}{\chi+1}+\frac{B\chi+\Gamma}{\chi^2+2\chi+5} \qquad (1)$$

ὡς δὲ βλέπομεν ἤδη, ὁ ἀριθμητὴς τοῦ πρώτου μερικοῦ κλάσματος εἶναι ποσότης σταθερά, ἤτοι βαθμοῦ 0 πρὸς χ, καὶ τοῦτο διότι ὁ παρονομαστής του εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς χ. Ὁ ἀριθμητὴς ὅμως τοῦ δευτέρου μερικοῦ κλάσματος εἶναι πρώτου βαθμοῦ πρὸς χ, διότι ὁ παρονομαστής του εἶναι πρὸς χ, δευτέρου βαθμοῦ. Κατόπιν τούτων, εὑρίσκομεν ἐκ τῆς ταυτότητος (1) τὴν

$$3\chi^2+7\chi+2=A(\chi^2+2\chi+5)+(B\chi+\Gamma)(\chi+1)\cdot$$

ἐξισοῦντες δὲ ἤδη τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ χ εὑρίσκομεν τὸ σύστημα

$A+B=3,\quad 2A+B+\Gamma=7,\quad 5A+\Gamma=2$ ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν

$$A=-\frac{1}{2},\qquad B=\frac{7}{2},\qquad \Gamma=\frac{9}{2}.$$

Ὥστε εἶναι $$\frac{3\chi^2+7\chi+2}{(\chi+1)(\chi^2+2\chi+5)}=-\frac{1}{2(\chi+1)}+\frac{7\chi+9}{2(\chi^2+2\chi+5)}$$

Ν' ἀναλυθοῦν εἰς ἀθροίσματα μερικῶν κλασμάτων τὰ κλάσματα

458) $\frac{6\chi^2-4\chi-6}{(\chi-1)(\chi-2)(\chi-3)}$ 459) $\frac{2\chi^3+5\chi^2-6}{\chi(\chi-1)(\chi+1)(\chi+2)}$

460) $\frac{7\chi+5}{3\chi^2+4\chi+1}$ 461) $\frac{\chi}{\chi^3-1}$ 462) $\frac{1}{(\chi-1)^2(\chi^2+1)}$

463) $\frac{4(\chi+10)}{\chi^4-16}$ 464) $\frac{\chi^3+3\chi^2+\chi+4}{(\chi+1)(\chi+3)}$ 465) $\frac{8-8\chi}{\chi(\chi-2)^3}$

466) $\frac{\chi+1}{\chi(\chi-1)^3}$ 467) $\frac{1}{\chi^3(\chi^2+1)^2}$ 468) $\frac{4\chi^3-5\chi+2}{\chi^3(\chi-1)^2(\chi+1)}$

469) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἵνα τὸ κλάσμα $\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}$ ἔχει τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμὴν οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ τιμὴ τοῦ χ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ συντελεσταὶ νὰ εἶναι ἀνάλογοι ἤτοι $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}$.

470) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἵνα ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma'}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μεταβλητῆς χ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα οἱ συντελεσταὶ εἶναι ἀνάλογοι.

471) Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἀνισότητος $6\alpha\beta\gamma<\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)+\beta\gamma(\beta+\gamma)$.

472) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν

$$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha_1}{\beta_1}<\frac{\alpha_2}{\beta_2}<\dots\dots<\frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}$$

θὰ εἶναι $$\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\alpha+\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu}{\beta+\beta_1+\beta_2+\dots+\beta_\mu}<\frac{\alpha_\mu}{\beta_\mu}$$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

473) $\frac{9\chi+7}{7\chi+5}>4$ 474) $\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)}>1$

575) $\frac{\mu\chi+\nu}{\alpha+\beta}-\frac{\lambda\chi+\rho}{\alpha-\beta}<\frac{\mu\chi-\nu}{\alpha-\beta}+\frac{\lambda\chi-\rho}{\alpha+\beta}$

476) Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς τριψήφιος, ὅστις ἀντιστρεφόμενος γίνεται ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ ἑαυτοῦ.

477) Ἔχει τις τρία κράματα ἀργύρου. Περιέχονται δὲ εἰς 1 χιλιόγραμμον ἑκάστου τούτων, τοῦ μὲν πρώτου $\frac{7}{8}$ ἀργύρου, τοῦ δὲ δευτέρου $\frac{11}{16}$ καὶ τοῦ τρίτου $\frac{9}{16}$. Πόσα χιλιόγραμμα (εἰς ἀριθμοὺς ἀκεραίους) πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου κράματος, ἵνα κάμῃ κρᾶμα 30 χιλιογράμμων, εἰς ὃ νὰ περιέχωνται $\frac{3}{4}$ ἀργύρου εἰς ἕκαστον χιλιόγραμμον;

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ΄

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ I

Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

158. Ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι 4, εἶναι ὁ 2 ($2^2=4$). Ὁ δὲ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου ὁ κύβος εἶναι 27, εἶναι ὁ 3 ($3^3=27$). Ἀλλὰ ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2;

Ἐπειδὴ $1^2=1$ καὶ $2^2=4$, ἕπεται ὅτι οὐδεὶς ἀκέραιος ἀριθμὸς ὑπάρχει τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ 2. Ἀλλ' ἂς ἴδωμεν μήπως ὑπάρχει κλασματικὸς ἀριθμός· ἂς δεχθῶμεν δέ, ὅτι ὑπάρχει τοιοῦτος κλασματικὸς ἀριθμὸς π. χ. ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$. Ἔστω δὲ τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ ἀνάγωγον, ἤτοι ὅτι οἱ ὅροι του δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν παράγοντα. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2=2$, ἤτοι $\frac{\alpha^2}{\beta^2}=2$, ἡ ἰσότης δὲ αὕτη δεικνύει ὅτι τὸ α^2 ἤτοι τὸ α.α, εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ β^2, ἤτοι διὰ τοῦ β.β καὶ ὅτι τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι 2. Ἀλλ' ἵνα τὸ γινόμενον α.α εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ β.β πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τοῦ α.α νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ β.β, ἤτοι τὸ α νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας τοῦ β. Ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν παράγοντα. Ὥστε τὸ α^2 δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ διαιρῆται διὰ τοῦ β^2. Ἄρα οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται μὲ 2.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι οὔτε ἀκέραιος οὔτε κλασματικὸς ἀριθμὸς ὑπάρχει, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἢ ὁ κύβος κτλ. νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸν ἀριθμὸν 10.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν (τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν) δὲν δύναται νὰ λύσῃ ζητήματα, ὡς τὰ προηγούμενα.

Ἀλλὰ καθώς, διὰ νὰ καταστήσωμεν τὴν διαίρεσιν πάντοτε δυνατήν, εἰσηγάγομεν νέους ἀριθμούς, τοὺς κλασματικούς, καὶ διὰ νὰ καταστήσωμεν ὁμοίως δυνατὴν τὴν ἀφαίρεσιν, εἰσηγάγομεν τοὺς ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, οὕτω, διὰ νὰ καταστήσωμεν δυνατὴν τὴν λύσιν τῶν ζητημάτων τῶν ὁμοίων πρὸς τὰ προηγούμενα, θὰ εἰσαγάγωμεν νέους ἀριθμούς, μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅμως ὅτι θὰ διατηρηθοῦν, ὡς πάντοτε, οἱ νόμοι τῶν πράξεων ἀναλλοίωτοι.

159. ***Ἀσύμμετροι ἀριθμοί.***—Διὰ νὰ εὕρωμεν τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμούς, παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς. Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς π. χ. ὁ 5, ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένον πλῆθος ἀκεραίων μονάδων. Ὁμοίως καὶ πᾶς κλασματικὸς ἀριθμός, ὡς π. χ. ὁ $\frac{3}{4}$, ἀποτελεῖται ἀπὸ ὡρισμένον πλῆθος κλασματικῶν μονάδων ἴσων μὲ $\frac{1}{4}$. Ἀλλὰ πάλιν γνωρίζομεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς δύναται νὰ τραπῇ εἰς δεκαδικόν· π. χ. $5=\frac{50}{10}$, $\frac{3}{4}=\frac{75}{100}$. Ἀλλὰ πλεῖστα τῶν κοινῶν κλασμάτων, ὅταν τραποῦν εἰς δεκαδικά, τρέπονται εἰς περιοδικά, ἤτοι τρέπονται εἰς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, τὰ ὁποῖα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἐπαναλαμβάνονται διαρκῶς τὰ ἴδια καὶ μὲ τὴν αὐτὴν τάξιν.

π. χ. $\frac{7}{11}=0{,}636363......$, $\frac{18}{111}=0{,}162162162.....$

Ἀλλ' ἀφοῦ δεχόμεθα, ὅτι ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες ἀποτελοῦν ἀριθμόν, ὅταν τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων γράφονται, ἔχουν τὴν ὡς ἀνωτέρω τάξιν, τίποτε δὲν μᾶς ἐμποδίζει νὰ δεχθῶμεν, ὅτι ἀποτελοῦν ἀριθμὸν καὶ ἄπειροι τὸ πλῆθος δεκαδικαὶ μονάδες (θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί), ἔστω καὶ ἂν γράφωνται μὲ οἱαδήποτε ψηφία, ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων τούτων ὁμοειδῶν μονάδων νὰ εἶναι μικρότερον ἀκεραίου τινὸς ὁμοειδοῦς. Οὕτω τὸ ἄπειρον πλῆθος 1,41412135624....., τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων μονάδων εἶναι προφανῶς μικρότερον τοῦ 2, θεωροῦμεν ὡς ἀριθμόν. Εἶναι δὲ οὗτος προφανῶς διάφορος τῶν ἀκεραίων, ἀλλ' εἶναι ὅμως καὶ διάφορος τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν. Διότι ἂν ἦτο ἴσος μὲ κλάσμα, τοῦτο θὰ ἐτρέπετο εἰς δεκαδικόν, τὸ ὁποῖον ἢ θὰ εἶχεν ὡρισμένον ἀριθμὸν ψηφίων ἤ, ἂν εἶχεν ἄπειρα ψηφία, θὰ ἦσαν περιοδικά.

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν τρέπωνται εἰς δεκαδικούς, ἔχουν ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, λέγονται *ἀσύμμετροι*. Πρὸς διάκρισιν δὲ οἱ ἀκέραιοι καὶ οἱ κλασματικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται ***σύμμετροι***.

166. Γενικὸς ὁρισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ. — Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ὁ ἀριθμὸς ὁρίζεται ὡς ἑξῆς : *Ἀριθμὸς λέγεται τὸ σύνολον ὁμοειδῶν δεκαδικῶν μονάδων ὡρισμένου πλήθους ἢ καὶ ἀπείρου.*

161. Ἰσότης καὶ ἀνισότης τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. — Ὁ ἀριθμὸς 2,1345 περιέχει, ὡς βλέπομεν, ὅλας τὰς μονάδας τοῦ ἀριθμοῦ 2,134 καὶ ἄλλας ἀκόμη. Εἶναι λοιπὸν μεγαλύτερος τοῦ δευτέρου. Ὥστε : *Εἷς ἀριθμὸς λέγεται μεγαλύτερος ἄλλου, ὅταν ἔχῃ ὅλας τὰς μονάδας αὐτοῦ καὶ ἄλλας ἀκόμη.*

Ἐὰν ἤδη θελήσωμεν νὰ συγκρίνωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ 0,9999 . . . . , θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι πᾶς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἴσοι. Ὥστε : *Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι, ὅταν πᾶς ἀριθμὸς (ἀκέραιος ἢ κλασματικός), ὅστις εἶναι μικρότερος τοῦ ἑνός, εἶναι μικρότερος καὶ τοῦ ἄλλου.*

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν οἱ ἀριθμοὶ 3,146 καὶ 3,145999..... εἶναι ἴσοι, ἐνῷ οἱ ἀριθμοὶ 3,146.... καὶ 3,148.... εἶναι ἄνισοι, οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὰ ἄλλα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν· εἶναι δὲ ὁ πρῶτος μικρότερος τοῦ δευτέρου.

Παρατήρησις. Καὶ μετὰ τὴν εἰσαγωγὴν τῶν νέων αὐτῶν ἀριθμῶν, ἤτοι τῶν ἀσυμμέτρων, οἱ ὁρισμοὶ τῶν τεσσάρων πράξεων μένουν οἱ αὐτοί. Ἀποδεικνύεται δέ, ὅτι ὅλαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων διατηροῦνται. Ἐπίσης ἀποδεικνύεται, ὅτι πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι καὶ τετράγωνον ἄλλου ἀριθμοῦ καὶ κύβος καὶ τετάρτη δύναμις ἄλλου κτλ.

Κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν, συνήθως διατηροῦμεν ὀλίγα δεκαδικὰ ψηφία αὐτῶν καὶ ὅσα χρειάζονται διὰ νὰ ἔχωμεν ἱκανοποιητικὴν προσέγγισιν. Τὰ δὲ λοιπὰ παραλείπομεν. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν μέθοδοι, διὰ τῶν ὁποίων ἐκτελοῦνται αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν ἀσυμμέτρων συντομώτερον· ταύτας δὲ θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

Σημείωσις. Διὰ τῆς εἰσαγωγῆς τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν γίνεται δυνατὴ καὶ ἡ μέτρησις πάσης εὐθείας γραμμῆς, ἐκ τῆς ὁποίας (μετρήσεως) προκύπτει ἀριθμὸς σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος.

Περὶ ῥιζῶν.

162. Ὁρισμοί. — Ἐπειδὴ ὁ 4 εἶναι τετράγωνον τοῦ 2, ὁ 2 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 4. Καὶ ἐπειδὴ $27=3^3$, ὁ 3 λέγεται τρίτη ἢ κυβικὴ ῥίζα τοῦ 27· καὶ ἐπειδὴ $624=5^4$, ὁ 5 λέγεται τετάρτη ῥίζα τοῦ 625· γενικῶς δέ, ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, ὁ β λέγεται μυοστὴ ρίζα τοῦ α. Ὥστε: *Μυοστὴ ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ὑψούμενος εἰς τὴν μ δύναμιν, δίδει τὸν δοθέντα.*

Ἡ μυοστὴ ρίζα τοῦ α παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $\sqrt[\mu]{\alpha}$. Ὥστε ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, θὰ εἶναι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$. Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται *ριζικόν*, ὁ μ *δείκτης* τῆς ρίζης καὶ ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ὑπάρχει ὑπὸ τὸ ριζικὸν λέγεται *ὑπόρριζον*· ἡ δὲ ρίζα τῆς δευτέρας τάξεως, ἤτοι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, γράφεται συνήθως ἄνευ τοῦ δείκτου 2 ὡς ἑξῆς: $\sqrt{4}$, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta-\gamma}$ κτλ.

Εἴδομεν ὅτι, ἐὰν $\alpha=\beta^\mu$, θὰ εἶναι $\beta=\sqrt[\mu]{\alpha}$. Ὥστε ἡ πρώτη ἰσότης γράφεται $\alpha=\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu$. Ἀλλὰ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}=\alpha$, κατὰ τὸν ὁρισμόν.

Ὥστε εἶναι $\left(\sqrt[\mu]{\alpha}\right)^\mu=\sqrt[\mu]{\alpha^\mu}$.

163. Ρίζαι ἀρτίας τάξεως. — Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{16}$ ἢ τὴν $\sqrt[4]{16}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ

$$4.4=16 \text{ καὶ } (-4).(-4)=16,$$

ἔπεται, ὅτι ὁ 16 ἔχει δύο τετραγωνικὰς ρίζας ἀντιθέτους, τὰς $+4$ καὶ -4. Γράφομεν δὲ ταύτας συντόμως ὡς ἑξῆς $\sqrt{16}=\pm 4$. Ὁμοίως, ἐπειδὴ

$$2.2.2.2=16 \text{ καὶ } (-2).(-2).(-2).(-2)=16,$$

ἔπεται, ὅτι ὁ 16 ἔχει δύο τετάρτας ρίζας ἀντιθέτους, τὰς 2 καὶ -2, ἤτοι εἶναι $\sqrt[4]{16}=\pm 2$.

Ἀλλὰ $\sqrt{-16}$ ἢ $\sqrt[4]{-16}$ δὲν ὑπάρχει. Καὶ πράγματι, διότι πᾶν τετράγωνον καὶ γενικῶς πᾶσα δύναμις ἀρτίας τάξεως εἶναι θετική. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι:

1) *Πᾶς θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει δύο ρίζας ἑκάστης ἀρτίας τάξεως, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντίθετοι.*

2) *Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν ρίζας ἀρτίας τάξεως.*

164. Ρίζαι περιττῆς τάξεως. — Ἐπειδὴ

$$2.2.2=8 \text{ καὶ } (-2).(-2).(-2)=-8$$

ἔπεται, ὅτι $\sqrt[3]{8}=2$ καὶ $\sqrt[3]{-8}=-2$.

Ὁμοίως εἶναι $\sqrt[5]{32}=2$, διότι $2^5=32$,

καὶ $\sqrt[5]{-32}=-2$, διότι $(-2)^5=-32$.

Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι :

Πᾶς ἀριθμὸς ἔχει μίαν ρίζαν ἑκάστης περιττῆς τάξεως καὶ εἶναι αὕτη θετική, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι θετικός. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀρνητικός, ἡ ρίζα εἶναι ἀρνητική.

Ρίζαι τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

165. Εἰς τὴν § 158 ἀπεδείξαμεν, ὅτι ὁ ἀριθμὸς 2, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τετράγωνον ἀκεραίου, δὲν εἶναι τετράγωνον οὐδὲ κλάσματος· τοῦτο δὲ σημαίνει, ὅτι ἡ $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Κατὰ τὸν ἴδιον δὲ τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι *οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ἔχουν ρίζας ἢ ἀκεραίους ἀριθμοὺς ἢ ἀσυμμέτρους, οὐδέποτε δὲ κλάσματα.*

166. Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν (§ 282) εἴδομεν ὅτι, ἵνα εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκριβῆ (δηλαδὴ ἀκέραιον ἀριθμόν), πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ διαιροῦνται ὅλοι διὰ 2. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι, ἵνα εἷς ἀκέραιος ἀριθμὸς ἔχῃ τρίτην, τετάρτην καὶ γενικῶς μυοστὴν ρίζαν ἀκριβῆ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ νὰ διαιροῦνται ὅλοι διὰ 3, 4 καὶ γενικῶς διὰ μ.

Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $2^6.3^{12}$ ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκέραιον ἀριθμόν, τὸν $2^3.3^6$, τρίτην ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $2^2.3^4$ καὶ ἕκτην ρίζαν τὸν 2.3^2.

167. Ἐὰν $α^5=β^5$, ὅπου α καὶ β ἀριθμοὶ θετικοί, ἤτοι ἐὰν $α.α.α.α.α=β.β.β.β.β$, εἶναι φανερὸν ὅτι θὰ εἶναι καὶ $α=β$. Διότι, ἐὰν ὁ α ἦτο διάφορος τοῦ β, ἤτοι ἐὰν $α\neq β$, εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ ἦτο καὶ $α.α\neq β.β$ κτλ. Ἐπομένως θὰ ἔπρεπε καὶ τὰ γινόμενα $α.α.α.α.α$ καὶ $β.β.β.β.β$, νὰ ἦσαν διάφορα. Ἀλλ' ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι ἴσα, ὥστε εἶναι καὶ $α=β$.

Γενικῶς δέ, ἐὰν $α^μ=β^μ$, ὅπου μ εἶναι ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός, θὰ εἶναι καὶ $α=β$. Κατόπιν τούτου εὐκόλως ἕπεται ὅτι, ἐὰν $α^μ=β^μ$, ὅπου α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, θὰ εἶναι καὶ $α=β$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Φανταστικοὶ καὶ μιγάδες ἀριθμοί.

168. ***Ὁρισμοί.***— Εἴδομεν, ὅτι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ —16, ὡς καὶ παντὸς ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ, δὲν ὑπάρχει, διότι πᾶν τετράγωνον εἶναι θετικόν. Ἑπομένως, ἐὰν θέλωμεν ἵνα καὶ οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τετραγωνικὴν ρίζαν, εἶναι ἀνάγκη νὰ πλάσωμεν καὶ νὰ παραδεχθῶμεν νέον τινὰ ἀριθμὸν καὶ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τετράγωνον αὐτοῦ νὰ εἶναι —1. Τὸν ἀριθμὸν τοῦτον, τὸν ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ i καὶ διὰ τὸν ὁποῖον θὰ ἔχωμεν $i^2=-1$, θεωροῦμεν ὡς νέαν μονάδα καὶ εἰσάγομεν αὐτὴν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἀριθμῶν. Μετ' αὐτῆς δὲ εἰσάγομεν καὶ τὴν ἀντίθετον αὐτῆς —i. Ἤτοι δεχόμεθα ὅτι

$$\sqrt{-1}=i, \qquad i^2=-1 \qquad \text{καὶ} \qquad (-i)^2=-1.$$

Ἀλλ' ἐκτὸς τούτων δεχόμεθα ὡς ἀριθμοὺς καὶ ὅλα τὰ πολλαπλάσια τοῦ i καὶ τοῦ —i, ὡς καὶ τὰ μέρη αὐτῶν. Οὕτω

$$i+i+i+i=4i,\ (-i)+(-i)+(-i)=-3i,\ \frac{i}{4}+\frac{i}{4}+\frac{i}{4}=\frac{3i}{4}$$

θεωροῦνται ὡς ἀριθμοί.

Αἱ νέαι μονάδες i καὶ —i λέγονται *φανταστικαὶ* καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν (καὶ οἱ ἐκ τῶν μερῶν αὐτῶν) ἀποτελούμενοι ἀριθμοὶ λέγονται *φανταστικοί*· αἱ δὲ παλαιαὶ 1 καὶ —1 πρὸς διάκρισιν λέγονται *πραγματικαὶ* καὶ οἱ ἐξ αὐτῶν ἀριθμοὶ *πραγματικοί*. Οὕτως οἱ προηγούμενοι ἀριθμοὶ 4i, —3i, $\frac{3i}{4}$ εἶναι φανταστικοί.

Οἱ φανταστικοὶ καὶ οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν ἓν γενικώτερον σύστημα, εἰς τὸ ὁποῖον ὅλοι οἱ ἀριθμοὶ γίνονται ἀπὸ τὰς μονάδας 1, — 1, i καὶ — i καὶ ἀπὸ τὰ μέρη αὐτῶν καὶ εἰς τὸ ὁποῖον διατηροῦνται (ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο) ἀμετάβλητοι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν πράξεων.

169. Αἱ πράξεις ἐπὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἐκτελοῦνται ὅπως καὶ ἐπὶ τῶν πραγματικῶν· οὕτω διὰ τὰς πράξεις τῆς προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως αὐτῶν, ἔχομεν π.χ.

$$5i+3i=8i,\quad -4i-7i=-11i,\quad -9i+7i=-2i$$

$$-10i-(-3i)=-10i+3i=-7i,\quad 8i-8i=0.$$

$$\alpha i+\beta i=(\alpha+\beta)i\quad \alpha i-\beta i=(\alpha-\beta)i\quad \alpha i-\alpha i=0$$

Εἰς τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν παρατηροῦμεν ὅτι $(-i)(-i)=(-i)^2=i^2=-1,\ i^3=i^2.i=-1.i=-i$

$$i^4=+1,\quad i^5=i,\quad i^6=-1 \text{ κτλ.}$$

καὶ γενικῶς ὅτι $i^{4\nu}=1,\quad i^{4\nu+1}=i,\quad i^{4\nu+2}=-1,\quad i^{4\nu+3}=-i$ ὅπου ν εἶναι οἱοσδήποτε ἀκέραιος θετικὸς ἀριθμός.

Ὥστε εἶναι $\alpha i.\beta i=\alpha\beta i^2=-\alpha\beta,\quad \alpha i.\beta i.\gamma i=\alpha\beta\gamma i^3=-\alpha\beta\gamma i$ κ.ο.κ. ἤτοι τὸ γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἶναι πραγματικὸν ἢ φανταστικὸν καθ' ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν φανταστικῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι ἄρτιος ἢ περιττός.

Ἤδη παρατηροῦντες ὅτι εἶναι $4i.4i=(4i)^2=16(-1)=-16$

ὡς καὶ
$$(-4i).(-4i)=(-4i)^2=16(-1)=-16,$$

συνάγομεν ὅτι $\sqrt{-16}=\sqrt{16.(-1)}=\pm 4i\cdot$

ἤτοι ὅτι *τετραγωνικαὶ ῥίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν καὶ εἶναι φανταστικοὶ ἀριθμοί.*

Εἰς τὴν διαίρεσιν τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἔχομεν

π.χ. $$-8i:4i=\frac{-8i}{4i}=-2,\quad \frac{\alpha i^2}{\beta i}=\frac{\alpha}{\beta}i,\quad \frac{\alpha i}{\beta i^2}=\frac{\alpha i}{-\beta}=-\frac{\alpha}{\beta}i$$

$$\frac{1}{i}=\frac{i}{i^2}=\frac{i}{-1}=-i \quad \text{ἢ}\quad \frac{1}{i}=\frac{i^4}{i}=i^3=-i\quad \text{ἢ}\quad \frac{1}{i}=i^{-1}=-i$$

Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι $i^{-\nu}=(-i)^{\nu}$ καὶ ὅπου ν εἶναι εἷς οἱοσδήποτε ἀκέραιος ἀριθμός.

Ὁμοίως εἶναι $i^1=i$ καὶ $i^0=1$.

170. ***Μιγάδες ἀριθμοί.*** — Ὁ ἀριθμὸς $4+2i$ βλέπομεν ὅτι ἔχει ἓν πραγματικὸν μέρος, τὸν ἀριθμὸν 4, καὶ ἓν φανταστικόν, τὸ $2i$, λέγεται δὲ διὰ τοῦτο *μιγάς*. Ὥστε: *Μιγὰς ἀριθμὸς λέγεται ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπὸ πραγματικὰς καὶ φανταστικὰς μονάδας.* Οὕτως οἱ ἀριθμοὶ

$$-3+4i,\quad 7-5i,\quad -\frac{3}{4}-\frac{2}{5}i,$$

εἶναι μιγάδες. Καὶ γενικῶς μιγὰς ἀριθμὸς εἶναι ὁ $\alpha+\beta i$, ὅπου οἱ α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἱοιδήποτε.

Ἐὰν $\beta=0$ ὁ $\alpha+\beta i$ ἀνάγεται εἰς τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α, ἐνῷ ἐὰν $\alpha=0$ οὗτος ἀνάγεται εἰς τὸν φανταστικὸν $\beta i\cdot$ ἐὰν δὲ εἶναι συγχρόνως $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ὁ $\alpha+\beta i$ ἰσοῦται μὲ μηδέν, ὁπότε γράφομεν $\alpha+\beta i=0$.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ λέγονται *ἴσοι*, ἐὰν τὰ πραγματικὰ μέρη αὐτῶν εἶναι ἴσα, ὡς καὶ τὰ φανταστικὰ ἴσα, ἤτοι ἐὰν εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$· γράφομεν δὲ τότε $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$· ὅτι δὲ οὕτω πρέπει νὰ ὁρισθῇ ἡ ἰσότης δύο μιγάδων ἀριθμῶν συνάγεται ἐκ τοῦ ὅτι ἵνα εἶναι ὁ $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$, πρέπει νὰ εἶναι καὶ $\alpha-\gamma=\delta i-\beta i$, ἤτοι $\alpha-\gamma=(\delta-\beta)i$. Ἀλλ' ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης δὲν εἶναι δυνατή, διότι δὲν εἶναι δυνατὸν εἷς πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ $\alpha-\gamma$, νὰ εἶναι ἴσος μὲ φανταστικὸν ἀριθμὸν τὸν $(\delta-\beta)i$· εἶναι ὅμως αὕτη δυνατὴ ὅταν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἶναι ἴσα μὲ μηδέν, δηλαδὴ ὅταν εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Δύο μιγάδες ἀριθμοὶ λέγονται *συζυγεῖς*, ἐὰν διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ φανταστικοῦ μέρους αὐτῶν. Ὅθεν οἱ $5+8i$, $5-8i$ εἶναι συζυγεῖς μιγάδες τοιοῦτοι δὲ εἶναι καὶ οἱ $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$.

Μέτρον τοῦ μιγάδος $\alpha+\beta i$ λέγεται ὁ θετικὸς ἀριθμὸς $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Οὕτω τοῦ $3+4i$ μέτρον εἶναι ὁ $\sqrt{9+16}=5$· τὸ αὐτὸ δὲ μέτρον ἔχουν καὶ οἱ μιγάδες $-3+4i$, $-3-4i$, $3-4i$.

171. Πράξεις ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν. —Διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ τὴν ἀφαίρεσιν δύο μιγάδων ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ παρατηροῦμεν ὅτι κατὰ τὸν ὁρισμὸν εἶναι.

$$(\alpha+\beta i)+(\gamma+\delta i)=(\alpha+\gamma)+(\beta+\delta)i$$
$$(\alpha+\beta i)-(\gamma+\delta i)=(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)i$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$(\alpha+\beta i)+(\alpha-\beta i)=2\alpha$$
$$(\alpha+\beta i)-(\alpha-\beta i)=2\beta i$$
$$(\alpha+\beta i)+(-\alpha-\beta i)=0$$

Διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο μιγάδων $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ ἔχομεν $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma+\alpha\delta i+\beta\gamma i+\beta\delta i^2=(\alpha\gamma-\beta\delta)+(\alpha\delta+\beta\gamma)i$. Ἐὰν ὅμως οἱ δύο μιγάδες εἶναι συζυγεῖς τὸ γινόμενόν των ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ μέτρου αὐτῶν. Καὶ πράγματι, διότι εἶναι $(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)=\alpha^2-\alpha\beta i+\alpha\beta i-\beta^2 i^2=\alpha^2+\beta^2$.

Διὰ τὴν διαίρεσιν δύο μιγάδων ἀριθμῶν $\alpha+\beta i$ καὶ $\gamma+\delta i$ καὶ ὅπου $\gamma+\delta i$ ὑποτίθεται διάφορον τοῦ 0 παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πηλίκον αὐτῶν τὸ ὁποῖον παριστῶμεν διὰ τοῦ κλάσματος $\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\chi+\psi i$, δι' ὃν πρέπει νὰ εἶναι $\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)(\chi+\psi i)$ ἤτοι

$\alpha+\beta i=(\gamma\chi-\delta\psi)+(\delta\chi+\gamma\psi)i$ ἐξ ἧς ἔπεται τὸ σύστημα $\gamma\chi-\delta\psi=\alpha$, $\delta\chi+\gamma\psi=\beta$ μὲ τοὺς ἀγνώστους χ, ψ, οὗ ἡ λύσις εἶναι

$$\chi=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}, \quad \psi=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}.$$

Ὥστε εἶναι $(\alpha+\beta i):(\gamma+\delta i)=\dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\dfrac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i$

Σημείωσις. Τὸ ἀνωτέρω πηλίκον εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς φαίνεται

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)}=\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2}$$

Παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ἐξαγόμενα τῶν τεσσάρων πράξεων ἐπὶ τῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι γενικῶς μιγάδες ἀριθμοί. Μόνον δὲ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ κάτωθι ῥίζαι :

478) $\sqrt{-49}$, $\sqrt{(-8)^2}$, $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{81}$,

479) $\sqrt{\alpha^2}$, $\sqrt{-\alpha^2}$, $\sqrt{(-\alpha)^2}$, $\sqrt{-\alpha^4}$, $\sqrt{(-\alpha)^4}$,

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

480) i^9, i^{10}, i^{11}, i^{12}, i^{17} i^{20}

481) $3i.5i$, $8i.9i$, $-8i.4i$, $-2i.3i^2$, $6i^9.3i.5i^8$

482) $5.\sqrt{-4}$, $i\sqrt{-25}$, $3i\sqrt{-64}$, $\alpha.\beta i\sqrt{-\gamma}$, $\alpha i.\beta i\sqrt{(-\gamma)^2}$,

483) $(7+8i)+(9-5i)+(1+i)+(-3i+4)$

484) $(2+3i)-(2-i)+(5-4i)-(7i-11)$

485) $4(2+7i)-3(6-5i)-3(13i-8)+9(5+3i)$

486) $(2+7i)(3+5i)$, $(8-9i)(9-8i)$, $(11+13i)(13-11i)$

487) $(10i+7)(10i-7)$, $(10-7i)(10+7i)$, $(9+i)(9-i)$

488) $(1+i)^2$, $(1-i)^2$, $(3+4i)^2$, $(2+i)^3$, $(3-2i)^3$

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον δύο συζυγῶν μιγάδων οἱ

489) $\alpha^2+\beta^2$, $\chi^2+4\psi^2$, $25\mu^2+16\nu^2$, $\lambda^4+\rho^4$

490) $16+1$, $25+9$, 10, 50, 65

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων

491) $\dfrac{3}{1+3i}$, $\dfrac{7i}{5+11i}$, $\dfrac{4-3i}{2+i}$, $\dfrac{3-4i}{17-6i}$, $\dfrac{59+9i}{4+5i}$

492) $\dfrac{1}{1+i}+\dfrac{1}{1-i}$, $\dfrac{1+2i}{1-2i}+\dfrac{1-2i}{1+2i}$, $\dfrac{1+18i}{3+4i}+\dfrac{7-26i}{3-4i}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι

493) $\frac{1+i}{1-i}=i$ 494) $(\alpha-\beta i)(\gamma-\delta i)+(\beta+\alpha i)(\delta+\gamma i)=0$

495) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν ὧν ἕκαστος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Δυνάμεις ἔχουσαι κλασματικὸν ἐκθέτην

172. ***Σημασία τῆς δυνάμεως*** $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$. — Μέχρι τοῦδε ἐγενικεύσαμεν τὴν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως εἰς τοὺς ἐκθέτας 1, 0 καὶ ἀκεραίους ἀρνητικούς. Ἤδη μένει νὰ περιλάβωμεν εἰς τοὺς ἐκθέτας καὶ τοὺς κλασματικοὺς ἀριθμοὺς (θετικοὺς ἢ ἀρνητικούς). Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ ὁρίσωμεν τὴν σημασίαν τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικούς, ὑπὸ τὸν ὅρον, ὅτι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων θὰ διατηρηθοῦν. Ἑπομένως καὶ ἡ ἰδιότης $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$. (1)

Προηγουμένως εἴδομεν, ὅτι, ἐκ τῆς ἰσότητος $2^2=4$ συνάγεται ἡ $\sqrt{4}=2$ καὶ ἐκ τῆς $3^3=27$ συνάγεται ἡ $\sqrt[3]{27}=3$

ὥστε ἐπειδὴ $$3^{\frac{1}{2}} . 3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=3$$

(κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα (1), τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν), ἤτοι ἐπειδὴ $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^2=3$, πρέπει τὸ $3^{\frac{1}{2}}$ *νὰ ὁρισθῇ ὡς τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 3*, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὅτι $3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$.

Ὁμοίως ἐπειδὴ
$$2^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}} . 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=2, \text{ ἤτοι } \left(2^{\frac{1}{3}}\right)=2.$$

πρέπει τὸ $2^{\frac{1}{3}}$ *νὰ ὁρισθῇ ὡς τρίτη ῥίζα τοῦ 2*, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $2^{\frac{1}{3}}=\sqrt{2}$. Καὶ γενικῶς διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν σημασίαν τοῦ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ὅπου ν εἶναι θετικὸς ἀκέραιος ἀριθμός, σχηματίζομεν γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$, ἤτοι

τὸ $$\alpha^{\frac{1}{\nu}} . \alpha^{\frac{1}{\nu}} . \alpha^{\frac{1}{\nu}} \ldots\ldots \alpha^{\frac{1}{\nu}},$$

τὸ ὁποῖον, κατὰ τὴν ἀρχικὴν ἰδιότητα (1) τὴν ὁποίαν διατηροῦμεν, εἶναι ἴσον μὲ

$$\alpha^{\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\frac{1}{\nu}+\cdots+\frac{1}{\nu}}=\alpha^{\frac{1}{\nu}.\nu}=\alpha.$$

ἤτοι ἔχομεν $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\nu}=\alpha$. Ἀλλὰ τότε πρέπει τὸ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ *νὰ ὁρισθῇ ὡς νυοστὴ ρίζα τοῦ α*, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $\alpha^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3 \text{ καὶ } (-32)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{-32}=-2.$$

171. ***Σημασία τῆς δυνάμεως*** $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$.—Ἔστω ἡ δύναμις $8^{\frac{2}{3}}$.

Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $8^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{2}{3}}$

θὰ ἔχωμεν $8^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{2}{3}}.8^{\frac{2}{3}}=8^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=8^2$,

ἤτοι θὰ ἔχωμεν $$\left(8^{\frac{2}{3}}\right)^3=8^2.$$

Ὥστε τὸ $8^{\frac{2}{3}}$, πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς τρίτη ρίζα τοῦ 8^2, ἤτοι πρέπει νὰ ὁρισθῇ, ὅτι $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}$.

Ὁμοίως, ἐὰν ἔχωμεν τὴν δύναμιν $32^{\frac{4}{5}}$ καὶ σχηματίσωμεν τὸ γινόμενον $32^{\frac{4}{5}}.32^{\frac{4}{5}}.32^{\frac{4}{5}}.32^{\frac{4}{5}}.32^{\frac{4}{5}}$

βλέπομεν ὅτι τοῦτο εἶναι ἴσον μὲ $32^{\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\frac{4}{5}}=32^4$.

ἤτοι, ὅτι εἶναι $\left(32^{\frac{4}{5}}\right)^5=32^4$.

Πρέπει λοιπὸν νὰ ὁρισθῇ ὅτι

$$32^{\frac{4}{5}}=\sqrt[5]{32^4}.$$

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι τὸ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὅπου μ καὶ ν εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί, *πρέπει νὰ ὁρισθῇ ὡς ἡ νυοστὴ ρίζα τοῦ* α^{μ}, ἤτοι

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = \sqrt[4]{(3^4)^3} = \sqrt[4]{3^{12}} = 3^3 \qquad (\S\ 166)$$

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ

$$32^{\frac{4}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} \cdot 32^{\frac{1}{5}} = \left(32^{\frac{1}{5}}\right)^4,$$

ἕπεται, ὅτι $$32^{\frac{4}{5}} = \left(\sqrt[5]{32}\right)^4,$$

Ἐπειδὴ δὲ ὡρίσαμεν, ὅτι $32^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{32^4}$,
ἕπεται, ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\left(\sqrt[5]{32}\right)^4 = \sqrt[5]{32^4}$$

Γενικῶς δὲ πρέπει νὰ εἶναι

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^{\mu} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ἢ $$\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = (\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}. \qquad (1)$$

Παρατηρήσεις. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν εἶναι

1) $$\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = \sqrt[3]{8^2}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\sqrt[3]{8} = 2$, ἔχομεν $\left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 4$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ

$$(8)^2 = (2^3)^2 = 2^6, \text{ἔχομεν } \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{2^6} = 4$$

2) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = \sqrt[4]{16^3}$. Ἀλλα $\sqrt[4]{16} = \pm 2$. Ὥστε εἶναι

$$\left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = (\pm 2)^3 = \pm 8.$$

Ἐξ ἄλλου εἶναι $16^3 = (2^4)^3 = 2^{12}$. Ὥστε εἶναι

$$\sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = \pm 2^3 = \pm 8.$$

3) $\left(\sqrt[4]{16}\right)^2 = \sqrt[4]{16^2}$. Ἀλλὰ εἰς τὸ παράδειγμα τοῦτο τὸ πρῶ-

τον μέλος ἰσοῦται μὲ $(\pm 2)^2=4$, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος ἰσοῦται μὲ
$$\sqrt[4]{16^2}=\sqrt[4]{2^8}=\pm 2^2=\pm 4.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν παραδειγμάτων βλέπομεν, ὅτι ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶναι τελεία. Διὰ νὰ εἶναι δὲ τελεία ἡ ἰσότης αὐτή, θὰ ὑποθέτωμεν τὸν ἀριθμὸν α πάντοτε θετικὸν καί, ὅταν ἡ ῥίζα εἶναι ἀρτίας τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχῃ δύο τιμὰς ἀντιθέτους, θὰ λαμβάνωμεν ἐξ αὐτῶν ὑπ᾿ ὄψιν μόνον τὴν θετικήν.

172. ***Ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν περιττῆς τάξεως.*** — Ἐπειδὴ
$$\sqrt[3]{-8}=-2 \quad \text{καὶ} \quad -\sqrt[3]{8}=-2$$
ἔπεται, ὅτι
$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}.$$
Ὁμοίως ἔχομεν $\sqrt[5]{-16}=-\sqrt[5]{16}$. Ταῦτα δὲ φανερώνουν, ὅτι τὰς ῥίζας τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν περιττῆς τάξεως δυνάμεθα νὰ τὰς ἀναγάγωμεν εἰς τὰς ῥίζας τῆς αὐτῆς τάξεως τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

173. ***Ἰδιότητες τῶν ῥιζῶν.*** — Ἔστω ἡ δύναμις $5^{\frac{6}{8}}$. Ἐὰν τὸν κλασματικὸν ἐκθέτην αὐτῆς καταστήσωμεν ἀνάγωγον, λαμβάνομεν τὴν δύναμιν $5^{\frac{3}{4}}$. Ἐὰν ἤδη ὑψώσωμεν εἰς τὴν 8ην δύναμιν καὶ τὰς δύο δυνάμεις $5^{\frac{6}{8}}$ καὶ $5^{\frac{3}{4}}$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης $\left(5^{\frac{6}{8}}\right)^8=5^6$ καὶ ἐκ τῆς δευτέρας $\left(5^{\frac{3}{4}}\right)^8=5^6$. Ἀφοῦ λοιπὸν εἶναι
$$\left(5^{\frac{6}{8}}\right)^8=\left(5^{\frac{3}{4}}\right)^8$$
ἔπεται, ὅτι (§ 167)
$$5^{\frac{6}{8}}=5^{\frac{3}{4}}$$
ἤτοι
$$\sqrt[8]{5^6}=\sqrt[4]{5^3}.$$
Ὥστε: *Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου διὰ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ* (ὅστις τοὺς διαιρεῖ), *ἡ ἀξία τῆς ῥίζης δὲν βλάπτεται.*

Πόρισμα. — Ἐπειδὴ ἡ ἀνωτέρω ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $\sqrt[4]{5^3}=\sqrt[8]{5^6}$, ἔπεται, ὅτι, *ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν δείκτην τῆς ῥίζης καὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τῆς ῥίζης* *δὲν βλάπτεται*, συμφώνως πρὸς τὴν παρατήρησιν 3 τῆς § 171, ὅπου ὡρίσθη, ὅτι ὅταν ἡ ρίζα εἶναι ἀρτίας τάξεως, ὁπότε θὰ ἔχῃ δύο τιμὰς ἀντιθέτους, θὰ λαμβάνωμεν ἐξ αὐτῶν ὑπ' ὄψιν μόνον τὴν θετικήν.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$\alpha^{\frac{\mu\lambda}{\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \quad \text{ἤτοι} \quad \sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \qquad (2)$$

174. *Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας κλάσματα ἀρνητικά.* — Ὁ ὁρισμὸς τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικοὺς (§ 39) ἐπεκτείνεται καὶ

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

ἐπὶ τῶν δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλάσματα ἀρνητικά :
(μ καὶ ν ὄντων ἀριθμῶν ἀκεραίων), διότι, ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἰσότητος ταύτης ὑψώσωμεν εἰς τὴν ν δύναμιν λαμβάνομεν

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$$

διὰ τὸν αὐτὸν λόγον εἶναι καὶ

$$\alpha^{\frac{-\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{-\mu}}$$

Οὕτως εἶναι

$$8^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αἱ κάτωθι δυνάμεις νὰ γραφοῦν ὡς ρίζαι

496) $\alpha^{\frac{1}{2}}$ $\qquad \alpha^{\frac{2}{3}}$ $\qquad \alpha^{\frac{3}{4}}$ $\qquad \alpha^{\frac{1}{4}}$

497) $\beta^{\frac{3}{5}}$ $\qquad \beta^{\frac{1}{8}}$ $\qquad \beta^{\frac{1}{\rho}}$ $\qquad \beta^{\frac{\rho}{3}}$

498) $\chi^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad \chi^{-\frac{3}{4}}$ $\qquad \chi^{2\frac{1}{2}}$ $\qquad \chi^{-2\frac{1}{2}}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι δυνάμεων :

499) $4^{\frac{1}{2}}$ $\qquad 4^{-\frac{1}{2}}$ $\qquad 27^{\frac{2}{3}}$ $\qquad 27^{-\frac{2}{3}}$

500) $32^{\frac{3}{5}}$ $\qquad 100^{\frac{2}{4}}$ $\qquad 49^{\frac{4}{8}}$ $\qquad (-8)^{-\frac{2}{3}}$

Αἱ κάτωθι ρίζαι νὰ γραφοῦν ὡς δυνάμεις :

501) $\sqrt[3]{\alpha^2}$ $\qquad \sqrt[4]{\alpha^3}$ $\qquad \sqrt[4]{\alpha}$ $\qquad \sqrt{\alpha}$

502) $\sqrt{\beta^3}$ $\qquad \sqrt[6]{\beta^3}$ $\qquad \sqrt[\nu]{\beta^2}$ $\qquad \sqrt{\beta^\nu}$

Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεσις τῶν ριζῶν.

175. Οἱ ὁρισμοὶ τῶν δυνάμεων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν συμμέτρους ἐκθέτας καὶ τοὺς ὁποίους εἴδομεν προηγουμένως, εἶναι τοιοῦτοι ὥστε νὰ διατηρῶνται καὶ ἐπ' αὐτῶν (ἀποδεικνύεται δὲ τοῦτο) ὅλαι αἱ ἀρχικαὶ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων. Οὕτω π. χ. εἶναι

$$\alpha^{\frac{3}{4}}.\alpha^{\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=\alpha^{\frac{5}{4}} \qquad \alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\alpha^{\frac{\kappa}{\tau}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}+\frac{\kappa}{\tau}}=\alpha^{\frac{\pi\tau+\kappa\rho}{\rho\tau}} \quad (1)$$

$$\left(\alpha^{-\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}}=\alpha^{-\frac{8}{15}} \qquad \left(\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}\right)^{\frac{\kappa}{\tau}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}\cdot\frac{\kappa}{\tau}} \quad (2)$$

$$(\alpha\beta\gamma)^{\frac{2}{7}}=\alpha^{\frac{2}{7}}.\beta^{\frac{2}{7}}.\gamma^{\frac{2}{7}} \quad \text{καὶ γενικῶς} \quad (\alpha\beta\gamma)^{\frac{\pi}{\rho}}=\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}.\beta^{\frac{\pi}{\rho}}.\gamma^{\frac{\pi}{\rho}} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\beta^{\frac{1}{3}}} \qquad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\pi}{\rho}}=\frac{\alpha^{\frac{\pi}{\rho}}}{\beta^{\frac{\pi}{\rho}}} \quad (4)$$

Σημείωσις.— Ἂν ὁ ἀριθμὸς ρτ εἶναι ἄρτιος, ἑκάτερον τῶν μελῶν τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἔχει ἀνὰ δύο ἀντιθέτους τιμάς, ἂν δὲ ὁ ρτ εἶναι περιττὸς ἑκάτερον τῶν μελῶν ἔχει μίαν μόνην τιμήν. Ὁμοίως ἑκάτερον τῶν μελῶν τῶν ἰσοτήτων (3) καὶ (4) ἔχει δύο τιμὰς ἀντιθέτους, ἂν ὁ ρ εἶναι ἄρτιος καὶ μίαν ἂν ὁ ρ εἶναι περιττός.

176. ***Πολλαπλασιασμὸς τῶν ριζῶν.*** —α') *Τῶν ἰσοβαθμίων ριζῶν.* Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον

$$\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}.$$

Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι

$$\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}=\alpha^{\frac{1}{\nu}}\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}.\beta^{\frac{1}{\nu}}.\gamma^{\frac{1}{\nu}}=(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma},$

ἔπεται, ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\beta}.\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}.$

Ὥστε : *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἰσοβαθμίους ῥίζας, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ γινομένου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.*

Π.χ. εἶναι $\sqrt{2}.\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$ καὶ $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{64}=4.$

β′) *Τῶν ῥιζῶν μὲ διαφόρους δείκτας.* Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ γινόμενον $\sqrt[3]{7}.\sqrt[4]{5}.\sqrt[6]{8}.$

Ἀλλὰ τὸ γινόμενον τοῦτο γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $7^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{4}}.8^{\frac{1}{6}}.$ Ἂν δὲ ἤδη ἀντὶ τῶν ἐκθετῶν τούτων γράψωμεν τὰ ἴσα πρὸς αὐτοὺς ἀλλ' ὁμώνυμα κλάσματα, ἤτοι τὰ $\frac{4}{12}, \frac{3}{12}, \frac{2}{12},$ θὰ ἔχωμεν (§ 173).

$$7^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{4}}.8^{\frac{1}{6}}=7^{\frac{4}{12}}.5^{\frac{3}{12}}.8^{\frac{2}{12}}$$

ἤτοι θὰ ἔχωμεν

$$\sqrt[3]{7}.\sqrt[4]{5}.\sqrt[6]{8}.=\sqrt[12]{7^4}.\sqrt[12]{5^3}.\sqrt[12]{8^2}=\sqrt[12]{7^4.5^3.8^2}$$

Ἐκ τούτου λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι *τὸ γινόμενον οἱωνδήποτε ῥιζῶν ἀνάγεται πάντοτε εἰς μίαν ῥίζαν καὶ τοῦτο διότι δυνάμεθα νὰ τρέπωμεν ῥίζας διαφόρων δεικτῶν εἰς ἰσοβαθμίους.*

γ′) *Ῥίζης ἐπὶ θετικὸν ἀριθμόν.* Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὴν $\sqrt[3]{12}$ ἐπὶ 2 ἢ $2\sqrt[3]{12}.$

Ἀλλ' ἐπειδὴ $2=2^{\frac{3}{3}}=\sqrt[3]{2^3}.$

ἔχομεν $2\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{2^3}.\sqrt[3]{12}=\sqrt[3]{2^3.12}=\sqrt[3]{96}.$

Καὶ γενικῶς ἔχομεν

$$\alpha\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu\,\beta}.$$

Ἐπειδὴ ἡ τελευταία ἰσότης γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} = \alpha\sqrt[\nu]{\beta},$$

ἕπεται, ὅτι : 1) *Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ῥίζαν ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸ ὑπόρριζον ἐπὶ τὴν ἰσοβάθμιον δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.*

Π.χ.
$$2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 . 3} = \sqrt{12}.$$

2) *Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν παράγοντά τινα τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ῥιζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν αὐτοῦ.*

Π.χ.
$$\sqrt{300} = \sqrt{100.3} = 10\sqrt{3}.$$

177. Διαίρεσις τῶν ῥιζῶν. — *α') Τῶν ἰσοβαθμίων.*

Ἡ διαίρεσις $\sqrt[\nu]{\alpha} : \sqrt[\nu]{\beta}$ γράφεται $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \dfrac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}}$

ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{\nu}}}{\beta^{\frac{1}{\nu}}} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$, ἕπεται $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

ἤτοι: *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἄλλης ἰσοβαθμίου, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὰ ὑπόρριζα καὶ τοῦ πηλίκου νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ῥίζαν.*

Π.χ.
$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{4} = 2, \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = 2.$$

β') *Τῶν ῥιζῶν μὲ διάφορον δείκτην.* Ἡ περίπτωσις αὕτη ἀνάγεται εἰς τὴν προηγουμένην, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν ὁμοίαν περίπτωσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

Π.χ. εἶναι
$$\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt[6]{10^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \sqrt[6]{\frac{10^2}{3^3}}.$$

γ') *Διαίρεσις ῥίζης δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ.* Ἐὰν ἔχωμεν τὴν διαίρεσιν $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}$, παρατηροῦμεν, ὅτι

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta^\nu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}} \quad \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta^\nu}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\beta}.$$

Ἔπεται λοιπόν, ὅτι

1) *Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ῥίζαν δι' ἀριθμοῦ θετικοῦ, ἀρκεῖ νὰ διαιρέ-*

σωμεν τὸ ὑπόρριζον διὰ τῆς ἰσοβαθμίου δυνάμεως τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

2) *Δυνάμεθα νὰ ἐξαγάγωμεν διαιρέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ, ἐὰν προηγουμένως ἐξαγάγωμεν τὴν ἰσοβάθμιον ρίζαν αὐτοῦ.*

Π.χ. $\frac{\sqrt[3]{80}}{2}=\sqrt[3]{\frac{80}{2^3}}=\sqrt[3]{\frac{80}{8}}=\sqrt[3]{10}$ καὶ $\sqrt{\frac{7}{100}}=\frac{\sqrt{7}}{10}$.

178. **Μεταβίβασις ριζῶν ἐκ τοῦ παρονομαστοῦ εἰς τὸν ἀριθμητήν.**— 1) Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἐξαγόμενον τῆς διαιρέσεως $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Πρὸς τοῦτο πρέπει νὰ εὕρωμεν τὴν ρίζαν $\sqrt{2}$, ἡ ὁποία εὑρίσκεται κατὰ προσέγγισιν καὶ ἔπειτα νὰ διαιρέσωμεν. Θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω νὰ διαιρέσωμεν $\frac{5}{1,41421}$ ἤτοι $\frac{500000.}{141421}$ ἀλλ' ἡ πρᾶξις αὕτη καὶ μακρὰ εἶναι καὶ δὲν μᾶς δίδει καὶ πολὺ ἀκριβὲς ἐξαγόμενον. Ἀλλ' ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ μεταβιβάσωμεν τὸ ριζικὸν εἰς τὸν ἀριθμητήν, ὥστε εἰς τὸν παρονομαστὴν νὰ ἔχωμεν σύμμετρον ἀριθμόν, καὶ ἡ πρᾶξις θὰ γίνῃ εὐκολωτέρα καὶ τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶναι ἀκριβέστερον. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυνατὸν καὶ γίνεται ὡς ἑξῆς: Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt{2}$, ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5.1,41421}{2}=\frac{7,07105}{2}.$$

Ἡ δὲ τελευταία αὐτὴ πρᾶξις εἶναι εὐκολωτέρα τῆς προηγουμένης. Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt{\beta}}{\beta}.$$

2) Ἤδη ἔστω τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$. Ἀλλ' ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ τὸ ἄθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{2}$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{5-2}=\frac{\alpha(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{3}.$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{2+\sqrt{2}}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{2(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{4-2}=\frac{\alpha(2-\sqrt{2})}{2}.$$

Καὶ γενικῶς εἶναι $\frac{\alpha}{\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\sqrt{\beta}\mp\sqrt{\gamma})}{\beta-\gamma}$.

3) Ἔστω ἤδη τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\sqrt[5]{\beta}}$. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ἐπὶ $\sqrt[5]{\beta^4}$ θὰ ἔχωμεν $\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^4}}{\sqrt[5]{\beta}.\sqrt[5]{\beta^4}}=\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^4}}{\sqrt[5]{\beta^5}}=$

$$=\frac{\alpha\sqrt[5]{\beta^4}}{\beta}$$

Καὶ γενικῶς, ἐὰν ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος εἶναι $\sqrt[\mu]{\beta}$ πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}$ διότι τότε εἶναι

$$\frac{\alpha}{\sqrt[\mu]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta}.\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{1+\mu-1}}}=\frac{\alpha\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\beta}$$

4) Ἤδη λαμβάνομεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\gamma}}$. Θέτοντες $\sqrt[3]{\beta}=\chi$ καὶ $\sqrt[3]{\gamma}=\psi$ ἔχομεν $\chi^3=\beta$ καὶ $\psi^3=\gamma$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν

$$\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\gamma}-\sqrt[3]{\gamma}}=\frac{\alpha}{\chi-\psi}=\frac{\alpha(\chi^2+\chi\psi+\psi^2)}{\chi^3-\psi^3}=\frac{\alpha\left(\sqrt[3]{\beta^2}+\sqrt[3]{\beta\gamma}+\sqrt[3]{\gamma^2}\right)}{\beta-\gamma}.$$

Σημείωσις α΄. Εἰς τὰ προηγούμενα περὶ πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως τῶν ῥιζῶν ὑπετίθετο διαρκῶς, ὅτι πρόκειται περὶ ῥιζῶν πραγματικῶν. Διὰ τοῦτο κατὰ τὰς πράξεις αὐτὰς ἐπὶ τῶν ῥιζῶν δέον νὰ προσέχωμεν, ὥστε νὰ μὴ ὑποπίπτωμεν εἰς σφάλματα. Π. χ. ὁ πολλαπλασιασμὸς $\sqrt{-4}$ ἐπὶ $\sqrt{-4}$ δίδει κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\sqrt{(-4).(-4)}=\sqrt{16}=\pm4,$$

ἐνῷ τὸ ἀληθὲς γινόμενον εἶναι -4.

Σημείωσις β΄ Ἡ πρόσθεσις καὶ ἡ ἀφαίρεσις τῶν ῥιζῶν γίνεται μὲ τοὺς αὐτοὺς κανόνας, μὲ τοὺς ὁποίους γίνονται αἱ πράξεις αὐταὶ ἐπὶ τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Ἐὰν δὲ εἰς τὰ ἐξαγόμενα αὐτῶν ὑπάρχουν ὅμοιαι ῥίζαι, ἤτοι ῥίζαι μὲ τὸν αὐτὸν δείκτην καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἀκριβῶς ὑπόρριζον, κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν αὐτῶν, ὡς κάμνομεν τὴν ἀναγωγὴν ὁμοίων ὅρων.

Π.χ.
$$(7\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta})+(\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})=$$
$$=7\sqrt{\alpha}+3\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}=8\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}.$$
$$(3\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}+9\sqrt{\gamma})-(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+7\sqrt{\gamma})=$$
$$=3\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}+9\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-7\sqrt{\gamma}=2\sqrt{\alpha}-4\sqrt{\beta}+2\sqrt{\gamma}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα :

503) $\sqrt{2}.\sqrt{8}$ $\quad \sqrt{3}.\sqrt{12}$ $\quad \sqrt{2}.\sqrt{50}$ $\quad \sqrt{28}.\sqrt{7}$

504) $\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{4}$ $\quad \sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{18}$ $\quad \sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{36}$ $\quad \sqrt[3]{72}.\sqrt[3]{3}$

505) $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt{\beta}$ $\quad \sqrt{2\alpha}.\sqrt{18\alpha}$ $\quad \sqrt[3]{5\alpha^2}.\sqrt[3]{25\alpha}$ $\quad \sqrt[3]{\frac{2\alpha}{3}}\sqrt[3]{\frac{3\alpha^2}{2}}$

506) $3\sqrt{5}.\ 2\sqrt{20}$ $\quad 3\sqrt{50}.\ 4\sqrt{2}$ $\quad \alpha\sqrt{\chi}.\ \beta\sqrt{\chi}$ $\quad \alpha\sqrt{\beta}.\ \beta\sqrt{\alpha}$

507) $\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{10}$, $\quad \sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{9}.\sqrt[3]{15}$, $\quad \sqrt[4]{\alpha}.\sqrt[4]{\alpha^2}.\sqrt[4]{\alpha\beta}$, $\quad \sqrt[4]{\alpha}.\sqrt[4]{\alpha^3}.\sqrt[4]{\alpha^5}$

508) $\sqrt[3]{3}\sqrt{2}$, $\quad \sqrt[3]{25}.\sqrt[6]{25}$, $\quad \sqrt[5]{\alpha}\sqrt[3]{\alpha}$, $\quad \sqrt{2\alpha}.\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[5]{2\alpha^2}$

509) $\sqrt[3]{4}\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\quad \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\sqrt{6}$, $\quad \sqrt{\alpha}\sqrt[\mu]{\beta}$ $\quad \sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[2\mu]{\beta}$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι :

510) $2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{40}$, $\quad 5\sqrt{8}=200$, $\quad \sqrt{700}=10\sqrt{7}$

511) $\sqrt{180}=6\sqrt{5}$, $\quad 3\sqrt[4]{2}=\sqrt[4]{162}$ $\quad \sqrt[3]{875}=5\sqrt[3]{7}$

Νὰ ἐξαχθοῦν παράγοντες τῶν ὑπορρίζων, ἐκτὸς ῥιζικοῦ εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα :

512) $\sqrt{5\alpha^4\beta^8\chi^2}$, $\quad \sqrt[3]{24\chi^6\psi^9}$, $\quad \sqrt[3]{27\alpha^4\psi^7}$, $\quad \sqrt[4]{16\alpha^4\beta^8\chi}$

513) $\sqrt{\chi^{2\nu+1}}$, $\quad \sqrt[3]{\chi^{3\nu+1}}$, $\quad \sqrt[\nu]{\chi^{\nu+3}}$, $\quad \sqrt[\nu]{7\chi^{2\nu+}}$,

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλίκα :

514) $\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}}$ $\quad \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{\sqrt{54}}{\sqrt{3}}$ $\quad \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{5}}$

515) $\dfrac{\sqrt{320}}{\sqrt[3]{5}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{12}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{5\beta}}{\sqrt{5}}$

516) $\dfrac{\sqrt{8}}{2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{27}}{3}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{72}}{2}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[4]{162}}{3}$

517) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{23}}{\sqrt{5}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$

518) $\dfrac{\sqrt[4]{\alpha^3}}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{\chi}}{\sqrt[5]{\chi}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[4]{\psi^5}}{\sqrt[5]{\psi^2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[4]{\chi}}{\sqrt[8]{\chi}}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι πράξεων :

519) $\sqrt{\alpha}.\,\alpha^{\frac{1}{4}}$ $\qquad \beta^{\frac{1}{2}}.\sqrt[3]{\beta}$ $\qquad \gamma^{\frac{3}{2}}.\sqrt[3]{\gamma}$ $\qquad \sqrt[6]{\delta}.\,\delta^{\frac{5}{6}}.\,\delta^{\frac{1}{3}}$

520) $\dfrac{\alpha^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\alpha}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{\beta}}{\beta^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{\gamma 2}}{\gamma^{\frac{1}{2}}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt[3]{\dfrac{\alpha}{\beta}}}$

Νὰ ἐξαχθοῦν παράγοντες τῶν ὑπορρίζων ἐκτὸς ριζικοῦ εἰς τὰ κατωτέρω παραδείγματα :

521) $\sqrt{\dfrac{5\alpha}{16\chi^4}}$, $\qquad \sqrt{\dfrac{11\chi}{9\psi^3}}$ $\qquad \sqrt[3]{\dfrac{5\psi^3}{6\chi^5}}$ $\qquad \sqrt[4]{\dfrac{81\alpha^4}{3\beta^5}}$

522) $\sqrt{\chi+\dfrac{\chi}{\chi^2-1}}$, $\qquad \sqrt{1\,\dfrac{1}{15}}$ $\qquad \sqrt{5\,\dfrac{5}{24}}$, $\qquad \sqrt{9\,\dfrac{1}{32}}$

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα :

523) $\left(\sqrt[3]{\alpha}\right)^2$ $\qquad \left(\sqrt{\alpha}\right)^3$ $\qquad \left(\sqrt[5]{\alpha^7}\right)^3$ $\qquad \left(3\sqrt[3]{\alpha}\right)^4$

524) $(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})^2$ $\qquad (\alpha-\sqrt{\alpha})^2$, $\qquad (-\alpha+\sqrt{\beta})^2$, $\qquad (\alpha-\beta\sqrt{\chi})^2$

525) $\left(\sqrt{\chi}+\dfrac{1}{\sqrt{\chi}}\right)^2$, $\qquad \left(\sqrt{\dfrac{\chi}{\psi}}+\sqrt{\dfrac{\psi}{\chi}}\right)^2$, $\qquad \left(\sqrt{\dfrac{2\alpha}{3\beta}}-\sqrt{\dfrac{2\beta}{3\alpha}}\right)^2$

526) $\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)^3$, $\qquad \left(\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[3]{\psi}\right)^3$, $\qquad \left(1-\sqrt[3]{2}\right)^3$

Νὰ γίνουν αἱ διαιρέσεις

527) $\left(\alpha\sqrt{x^3}+\sqrt{x}\right):\sqrt{x}$, $\left(2\sqrt{\alpha\beta}+\alpha\sqrt{\beta}+\beta\sqrt{\alpha}\right):\sqrt{\alpha\beta}$

528) $\left(x-\psi\right):\left(\sqrt{x}+\sqrt{\psi}\right)$ $\left(1-\alpha\right):\left(1-\sqrt{\alpha}\right)$

529) $\left(x\sqrt{x}-\psi\sqrt{\psi}\right):\left(\sqrt{x}-\sqrt{\psi}\right)$ $\left(x\sqrt{x}+\psi\sqrt{\psi}\right):\left(x\sqrt{\psi}+\right.$

$\left.+\psi\sqrt{x}\right)$.

530) $\left(x+1\right):\left(\sqrt[3]{x}+1\right)$ $\left(x-1\right):\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

Νὰ ἀπαλλαγοῦν τῶν ριζικῶν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων :

531) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{6}{\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{81}{\sqrt[3]{9}}$, $\dfrac{\sqrt[4]{9}}{\sqrt[6]{81}}$

532) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, $\dfrac{4}{\sqrt{5}-1}$, $\dfrac{4}{3-2\sqrt{2}}$, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

533) $\dfrac{\alpha\sqrt{x}-\beta\sqrt{\psi}}{\gamma\sqrt{x}+\delta\sqrt{\psi}}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\alpha-\beta}}$, $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}$

534) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}$, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις :

535) $3\sqrt{3}+2\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 536) $5\sqrt{7}-8\sqrt{7}+3\sqrt{7}$

537) $\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{2}{3}\sqrt{5}+\frac{1}{4}\sqrt{5}$ 538) $\frac{7}{8}\sqrt{11}-\frac{1}{2}\sqrt{11}-\frac{1}{5}\sqrt{11}$

539) $(7\sqrt{\alpha}+5\sqrt{\beta}-4\sqrt{\alpha})+(5\sqrt{\beta}-3\sqrt{\alpha}-6\sqrt{\beta}$

540) $(\sqrt{\alpha}-2\sqrt{3x})-(\sqrt{3x}-5\sqrt{\alpha}-3\sqrt{\alpha}+7\sqrt{3x})$

541) $4\sqrt{2}-3\sqrt{8}+\sqrt{18}$ 542) $3\sqrt{3}-5\sqrt{18}+6\sqrt{12}+\sqrt{8}$

543) $3\sqrt[3]{16}+7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{-128}-6\sqrt[3]{-250}$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

544) $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}}=\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\mu\nu]{\alpha}$

Αἱ κάτωθι ρίζαι ἄλλων ριζῶν νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὴν ἁπλουστέραν δυνατὴν μορφήν.

545) $\sqrt[3]{\sqrt{\chi^3}}$, $\sqrt{\sqrt[3]{\psi^2}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\chi^9}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\psi^{15}}}$

546) $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{81}}$, $\sqrt[5]{\sqrt{3125}}$, $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}}$

547) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\alpha}}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{\beta}}}$, $\sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha}}$, $\sqrt[3]{\chi\sqrt{\chi}}$

548) $\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha\sqrt{\alpha}}}$, $\sqrt{\alpha\sqrt{\beta\sqrt{\gamma}}}$, $\sqrt[4]{\chi\sqrt[3]{\psi\sqrt{\varphi}}}$, $\sqrt[4]{\alpha\sqrt[5]{\beta^8}}$

549) Πότε ἡ παράστασις $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τρέπεται εἰς μίαν μόνην ρίζαν;

Ἐπειδὴ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$ ἕπεται ὅτι $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}$

Ὥστε τὸ ἄθροισμα $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ τρέπεται εἰς μίαν μόνην ρίζαν, ἐὰν τὸ γινόμενον αβ τῶν ὑπορρίζων εἶναι τέλειον τετράγωνον. Οὕτως εἶναι $\sqrt{3}+\sqrt{27}=$ $=\sqrt{3+27+2\sqrt{3.27}}=\sqrt{48}$ καὶ $\sqrt{5}+\sqrt{45}=\sqrt{80}$.

Σημείωσις α'. Ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὅρον τρέπεται καὶ διαφορὰ δύο τετραγωνικῶν ριζῶν εἰς μίαν μόνην ρίζαν.

Οὕτως εἶναι $\sqrt{8}-\sqrt{2}=\sqrt{8+2-2\sqrt{16}}=\sqrt{2}$ καὶ

$$\sqrt{45}-\sqrt{5}=\sqrt{45+5-2\sqrt{225}}=\sqrt{20}.$$

Σημείωσις β'. Ἀπὸ τὴν ἰδίαν ἰσότητα $\sqrt{\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ συνάγεται ὅτι: τετραγωνικὴ ρίζα παραστάσεως τῆς μορφῆς $\gamma+\sqrt{\delta}$ δύναται νὰ τραπῇ εἰς ἄθροισμα δύο τετραγωνικῶν ριζῶν ἢ καὶ εἰς ὁμοίαν παράστασιν. Οὕτως εἶναι.

$$\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{1+2+2\sqrt{1.2}}=\sqrt{1}+\sqrt{2}=1+\sqrt{2}$$
$$\sqrt{29+\sqrt{720}}=\sqrt{20+9+2\sqrt{180}}=\sqrt{20}+\sqrt{9}=3+\sqrt{20}$$
$$\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{2+3+2\sqrt{6}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

550) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\sqrt{\alpha+\beta}<\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$, ὅταν α καὶ β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοί. Ὥστε ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἀθροίσματος δὲν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν μερῶν του.

551) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι $\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}=2-\sqrt{3}$

552) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}=\gamma$, ἐὰν α, β, γ εἶναι ἀκέραιον εἶναι ἀδύνατος.

179. *Τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μονωνύμων.* — Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα παντὸς ἀκεραίου μονωνύμου, ἤτοι ἡ $\frac{1}{2}$ δύναμις αὐτοῦ, ἐξάγεται κατὰ τὰς ἰδιότητας τῶν δυνάμεων, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἑκάστου παράγοντος.

Ἐπειδὴ ἕκαστος παράγων εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ τινος, ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτοῦ ἐξάγεται διαιρουμένου τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς διὰ τοῦ 2. Κατὰ ταῦτα εἶναι.

$$\sqrt{64\alpha^2\beta^4\gamma^8}=(64)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.(\beta^4)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^8)^{\frac{1}{2}}=\pm 8\alpha\beta^2\gamma^4.$$

Κλασματικοῦ μονωνύμου ἡ ρίζα ἐξάγεται κατὰ τὰς αὐτὰς ἰδιότητας, ἐὰν ἐξαχθῇ ἡ ρίζα ἀμφοτέρων τῶν ὅρων αὐτοῦ.

Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$\sqrt{\frac{25\alpha^4\beta^6\gamma^2}{36\chi^6}}=\left(\frac{25\alpha^4\beta^6\gamma^2}{36\chi^6}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{(25)^{\frac{1}{2}}.(\alpha^4)^{\frac{1}{2}}.(\beta^6)^{\frac{1}{2}}.(\gamma^2)^{\frac{1}{2}}}{(36)^{\frac{1}{2}}.(\chi^6)^{\frac{1}{2}}}=\pm\frac{5\alpha^2\beta^3\gamma}{6\chi^3}$$

Τὸ διπλοῦν σημεῖον $\pm$ ἐγράφη πρὸ τῶν ἐξαγομένων, διότι ἡ τετραγωνικὴ ρίζα καὶ πᾶσα ἀρτίου βαθμοῦ ρίζα ἔχει δύο ἀντιθέτους τιμὰς καὶ δύναται ἑπομένως τὸ ἐξαγόμενον νὰ ληφθῇ καὶ θετικῶς καὶ ἀρνητικῶς.

Ἐάν τινος τῶν παραγόντων δὲν ἐξάγεται ἡ ρίζα, ἀφίνομεν ἐπ' αὐτοῦ σημειωμένην τὴν πρᾶξιν· ἤ, ἐὰν εἶναι δυνατόν, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς δύο, οὕτως ὥστε νὰ ἐξάγηται ἡ ρίζα τοῦ ἑτέρου τῶν παραγόντων. Κατὰ ταῦτα εἶναι:

$$\sqrt{5\alpha^2\beta^6\gamma^8}=\sqrt{5}\alpha\beta^3\gamma^4$$

$$\sqrt{8\alpha^3\beta^4\gamma^6}=\sqrt{8}.\sqrt{\alpha^3}\beta^2\gamma^3=\sqrt{2.4}.\sqrt{\alpha^2.\alpha}.\beta^2\gamma^3=$$

$$=2\sqrt{2}.\alpha\sqrt{\alpha}.\beta^2\gamma^3=2\alpha\beta^2\gamma^3\sqrt{2\alpha}.$$

Ὁμοίως $\sqrt{\frac{4\alpha^2\beta^4\gamma^2}{\delta}}=\frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\sqrt{\delta}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν μονωνύμων.

553) $36\alpha^4\beta^2$, 554) $-625\chi^6\psi^8$ 555) $144\alpha^2\chi^4\psi^{26}$

556) $16\alpha\beta\gamma$ 557) $-\frac{1}{9}\alpha^2\beta^2\gamma^4$, 558) $-\frac{18}{98}\alpha\chi^2\psi^{10}$

559) $-\frac{5}{16}\alpha^8\beta^5\gamma^2$ 560) $-\frac{4}{9}\alpha\beta^8\gamma^7$ 561) $\frac{48\alpha^6\beta^8\gamma}{75\chi^2\psi^4}$

180. Τετραγωνική ρίζα τῶν πολυωνύμων.—Νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου πολυωνύμου, σημαίνει νὰ εὕρωμεν πολυώνυμον τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ τὸ δοθὲν πολυώνυμον. Ἀλλὰ γνωρίζομεν ὅτι (σελ. 54) τὸ τετράγωνον παντὸς πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τετράγωνα ὅλων τῶν ὅρων του καὶ ἀπὸ τὰ διπλάσια γινόμενα αὐτῶν ἀνὰ δύο λαμβανομένων καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους· ἀλλ' ὅταν τὸ πολυώνυμον εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, εἰς τὸ τετράγωνον αὐτοῦ, ὑπάρχουν τέσσαρες ὅροι μὴ δυνάμενοι ν' ἀναχθοῦν μὲ οὐδένα ἄλλον ὅρον· εἶναι δὲ οὗτοι οἱ δύο πρῶτοι καὶ οἱ δύο τελευταῖοι, ἐὰν τὸ τετράγωνον εἶναι καὶ αὐτὸ διατεταγμένον, τοῦτο δὲ εὐκόλως συνάγεται ἀπὸ τὴν θεωρίαν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν πολυωνύμων (§ 76, 77).

Κατόπιν τῶν ὡς ἄνω παρατηρήσεων εὐκόλως συνάγεται ἡ μέθοδος δι' ἧς εὑρίσκεται ἡ τετραγωνικὴ ρίζα, ὅταν ὑπάρχῃ, τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων. Διότι ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι τετράγωνον ἄλλου πολυωνύμου καὶ διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος, ἔστω τοῦ χ· ἐὰν ἤδη παραστήσωμεν τὸ δοθὲν πολυώνυμον διὰ τοῦ $Π=Α+Β+Γ+\ldots+Μ$ καὶ τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν αὐτοῦ, ὁμοίως διατεταγμένην διὰ τοῦ πολυωνύμου $α+β+γ+\ldots+λ+κ$, θὰ ἔχωμεν

$$Π=(α+β+γ+\ldots+λ+κ)^2 \quad \text{ἤτοι}$$

$$Π=α^2+2αβ+β^2+2αγ+2βγ+γ^2+\ldots+2λκ+κ^2$$

Ἀλλὰ κατὰ γνωστὰ ὁ πρῶτος ὅρος Α τοῦ δοθέντος πολυωνύμου, θὰ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης. Ἐξάγοντες ἄρα τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ δοθέντος πολυωνύμου θὰ εὕρωμεν τὸν πρῶτον ὅρον α τῆς ρίζης, ἤτοι $α=\sqrt{Α}$

Ἀλλὰ πάλιν γνωρίζομεν ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος Β τοῦ δοθέντος πολυωνύμου ἰσοῦται μὲ $Β=2αβ$. Ὥστε εἶναι $β=\dfrac{Β}{2α}=\dfrac{Β}{2\sqrt{Α}}$.

Ἤδη ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ τετράγωνα τοῦ $(α+β)$ ἀφαιροῦμεν τοὺς τρεῖς ὅρους αὐτοῦ $α^2+2αβ+β^2$· γίνεται δὲ ἡ ἀφαίρεσις αὕτη ὡς ἑξῆς: ἐπειδὴ $α^2=Α$ διαγράφομεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ δοθέντος πολυωνύμου καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπον πολυώνυμον ἀφαιροῦμεν τὸ $2αβ+β^2=β\,(2α+β)$, ἤτοι τὸ γινόμενον τοῦ δευτέρου ὅρου β ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου σὺν τῷ δευτέρῳ.

Ἀπὸ τὸ δοθὲν λοιπὸν πολυώνυμον ἀπομένει ἤδη τὸ πολυώνυμον $Π'=2αγ+2βγ+γ^2+\ldots+2λκ+κ^2$ εἰς ὃ ὁ πρῶτος ὅρος $2αγ$ περιέχει τὸ γράμμα τῆς διατάξεως μετὰ τοῦ μεγίστου ἐκθέτου. Ἑπομένως ὁ ὅρος οὗτος τοῦ ὑπολοίπου δὲν ἠδυνήθη ν' ἀναχθῇ μὲ οὐδένα τῶν ἑπομένων καὶ εἶναι διὰ τοῦτο ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ὑπολοίπου· ἐὰν ἄρα διαιρέσωμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ Π′ διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης, θὰ εὕρωμεν πηλίκον τὸν τρίτον ὅρον γ τῆς ρίζης.

Ἀφοῦ εὕρομεν τὸν τρίτον ὅρον γ καὶ ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον Π πρέπει νὰ περιέχῃ τὸ $(α+β+γ)^2 = (α+β)^2+2γ(α+β)+γ^2$ ἀφαιροῦμεν τοὺς ὅρους τούτους ἀπὸ τοῦ Π ἢ ὅπερ τὸ αὐτὸ ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ Π′ τὸ $2(α+β)γ+γ^2 = (2α+2β+γ)γ$.

Μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν ἀπὸ τοῦ Π τοῦ $(α+β+γ)^2$ ἀπομένει ὑπόλοιπόν τι Π″ ἐκ τοῦ ὁποίου εὑρίσκομεν τὸν τέταρτον ὅρον τῆς ρίζης διαιροῦντες τὸν πρῶτον ὅρον αὐτοῦ διὰ τοῦ 2α. Ἐξακολουθοῦμεν δὲ οὕτω, μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα.

$9α^4-12α^3β+34α^2β^2-20αβ^3+25β^4$	$3α^2-2αβ+5β^2$
$-9α^4$	$6α^2$
$-12α^3β+34α^2β^2-20αβ^3+25β^4$	$6α^2-2αβ$
$12α^3β-4α^2β^2$	$-2αβ$
$30α^2β^2-20αβ^3+25β^4$	
$-30α^2β^2+20αβ^3-25β^4$	$-12α^3β+4α^2β^2$
0	$6α^2-4αβ+5β^2$
	$5β^2$
	$30α^2β^2-20αβ^3+25β^4$

181. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών:

Διὰ νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀκεραίου πολυωνύμου διατάσσομεν αὐτὸ κατὰ τὰς δυνάμεις ἑνὸς γράμματος.

1) Ἐξάγομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου καὶ τὴν ρίζαν ταύτην γράφομεν πρῶτον ὅρον τῆς ρίζης τοῦ πολυωνύμου.

2) Ἀφαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον ἐκ τοῦ πολυωνύμου καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης.

3) Εἰς τὸ διπλάσιον τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης προσθέτομεν τὸν δεύτερον καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ἐπὶ τὸν δεύτερον *ὅρον· τὸ προκῦπτον δέ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου ὑπολοίπου, ὅτε εὑρίσκομεν δεύτερόν τι ὑπόλοιπον.*

4) Διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ ὑπολοίπου τούτου διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης καί τὸ πηλίκον εἶναι ὁ τρίτος ὅρος τῆς ρίζης τοῦ πολυωνύμου.

5) Εἰς τὸ διπλάσιον τῶν δύο πρώτων ὅρων τῆς ρίζης προσθέτομεν τὸν εὑρεθέντα τρίτον ὅρον καὶ τὸ προκῦπτον ἄθροισμα πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸν τρίτον ὅρον, ἔπειτα δὲ τὸ γινόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου, ὁπότε προκύπτει τρίτον ὑπόλοιπον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς· περατοῦται δὲ ἡ πρᾶξις ὅταν φθάσωμεν εἰς ὑπόλοιπον 0.

Σημείωσις α'. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγεται ὅτι δοθὲν πολυώνυμον δὲν εἶναι τετράγωνον ἄλλου ὅταν:

1) Εἶναι διώνυμον, διότι τὸ τετράγωνον παντὸς μὲν μονωνύμου εἶναι μονώνυμον, παντὸς δὲ διωνύμου τριώνυμον.

2) Μετὰ τὴν διάταξιν πρός τι γράμμα, ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα.

3) Ὁ πρῶτος ὅρος τινὸς τῶν ὑπολοίπων δὲν εἶναι διαιρετός διὰ τοῦ διπλασίου τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης.

Σημείωσις β'. Εἰς τὸ παράδειγμα τῆς προηγουμένης παραγράφου ἐλάβομεν τὸν πρῶτον ὅρον τῆς ρίζης μὲ τὸ σημεῖον +· ἠδυνάμεθα ὅμως νὰ τὸν λάβωμεν μὲ τὸ σημεῖον —, ὁπότε συνεχίζοντες τὴν εὕρεσιν τῆς ρίζης θὰ εὑρίσκομεν τοὺς αὐτοὺς ὅρους, ἀλλὰ πάντας μὲ σημεῖον ἀντίθετον. Ὑπάρχουν ἑπομένως δύο πολυώνυμα ἀντίθετα, ὧν τὸ τετράγωνον εἶναι τὸ δοθέν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐξαχθῇ ἡ τετραγωνική ρίζα τῶν πολυωνύμων.

562) $16\alpha^4+96\alpha^3\beta+216\alpha^2\beta^2+216\alpha\beta^3+81\beta^4$

563) $4\chi^4-12\alpha\chi^3+25\alpha^2\chi^2-24\alpha^3\chi+16\alpha^4$

564) $\chi^6-6\alpha\chi^5+15\alpha^2\chi^4-20\alpha^3\chi^3+15\alpha^4\chi^2-6\alpha^5\chi+\alpha^6$

565) $\chi^4\psi^2+\phi^4\chi^2+\psi^4\phi^2+2\chi^3\phi^2\psi+2\phi^3\psi^2\chi+2\psi^3\chi^3\phi$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

Α. Ἰδιότητες τῶν ἐξισώσεων.

182. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha=\beta$ (1) τῆς ὁποίας τὰ μέλη παριστῶμεν πρὸς συντομίαν μὲ ἓν γράμμα. Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha^2=\beta^2 \quad (2).$$

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι πᾶσα λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἐπαλη-

θεύει τὴν ἐξίσωσιν (2). Διότι, ἐὰν τὰ α καὶ β γίνουν ἴσοι ἀριθμοὶ καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν εἶναι ἴσοι ἀριθμοί. Πᾶσα ὅμως λύσις τῆς ἐξισώσεως (2) δὲν εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1), διότι ἡ ἐξίσωσις (2) ἐπαληθεύεται καὶ ὅταν $\alpha=\beta$ καὶ ὅταν $\alpha=-\beta$, ἐπειδὴ $\alpha^2=\beta^2$ καὶ $\alpha^2=(-\beta)^2=\beta^2$. Ἐκ δὲ τῶν δύο τούτων λύσεων μόνον ἡ $\alpha=\beta$ ἐπαληθεύει καὶ τὴν ἐξίσωσιν (1), οὐχὶ δὲ καὶ ἡ $\alpha=-\beta$. Ὥστε: *Ἐὰν ἀμφότερα τὰ μέλη ἐξισώσεως ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνον, ἡ ἐξίσωσις ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ, θὰ περιέχῃ ὄχι μόνον τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, ἀλλὰ καὶ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῆς δοθείσης, ὅταν ἀλλαχθῇ τὸ σημεῖον τοῦ ἑνὸς μέλους αὐτῆς.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha^2=\beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς $\alpha=\beta$ καὶ $\alpha=-\beta$. Εἶναι δὲ ἡ πρώτη τούτων ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\sqrt{\alpha^2}=\sqrt{\beta^2}$, ἡ δὲ δευτέρα ἡ αὐτὴ μὲ τὴν $\sqrt{\alpha^2}=-\sqrt{\beta^2}$. Ὥστε ἡ προηγουμένη πρότασις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἑξῆς: *Ἐὰν ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τῶν μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως καὶ λάβωμεν τὴν ρίζαν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν μελῶν καὶ μετὰ τοῦ + καὶ μετὰ τοῦ —, αἱ δύο ἐξισώσεις, τὰς ὁποίας θὰ λάβωμεν, εἶναι ἰσοδύναμοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν.*

Β΄. Γενικὴ μορφὴ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ μὲ ἕνα ἄγνωστον.

183. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-8=\frac{\chi^2}{3}-\chi+1.$$

Ἐὰν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀπαλείψωμεν πρῶτον τὸν παρονομαστήν, ἔπειτα ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, κατόπιν μεταφέρωμεν ὅλους τοὺς ὅρους εἰς τὸ πρῶτον μέλος καὶ τέλος κάμωμεν τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, θὰ ἔχωμεν τὴν $2\chi^2+3\chi-27=0$, ἡ ὁποία, ὡς βλέπομεν, εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὸ χ. Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἀντὶ 2 α, ἀντὶ 3 β καὶ ἀντὶ —27 γ, ἡ εὑρεθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0 \qquad (1).$$

Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτων, ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ δύναται νὰ ἀχθῇ εἰς τὴν μορφὴν (1).

Ὁ συντελεστὴς α δὲν δύναται νὰ εἶναι 0, διότι τότε ἡ ἐξίσωσις καταντᾷ $\beta\chi+\gamma=0$, ἤτοι πρώτου βαθμοῦ. Ἀλλ' ἐὰν ὁ συντελεστὴς β εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha\chi^2+\gamma=0 \qquad (2).$$

Ἐὰν δὲ ὁ γνωστὸς ὅρος γ εἶναι 0, ἡ ἐξίσωσις γίνεται

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=0 \qquad (3).$$

Τὰς δύο αὐτὰς μερικὰς περιπτώσεις (2) καὶ (3) θὰ ἐξετάσωμεν πρὸ τῆς γενικῆς.

184. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\gamma=0$. —1). Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2=25$. Ἀλλ' αἱ λύσεις αὐτῆς εἶναι ἢ $\chi=+\sqrt{25}$ ἢ $\chi=-\sqrt{25}$, δηλαδὴ $\chi=\pm 5$.

2) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^2+27=0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$3\chi^2=-27, \quad \chi^2=-\frac{27}{3} \text{ καὶ ἢ } \chi=\sqrt{-\frac{27}{3}} \text{ ἢ } \chi=-\sqrt{-\frac{27}{3}}$$

$$\text{ἤτοι } \chi=\pm\sqrt{-9} \text{ δηλαδὴ } \chi=\pm 3i.$$

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\gamma=0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\alpha\chi^2=-\gamma, \quad \chi^2=-\frac{\gamma}{\alpha} \text{ καὶ } \chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Εἶναι δὲ αἱ εὑρεθεῖσαι λύσεις πραγματικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$, καὶ φανταστικαί, ὅταν $-\frac{\gamma}{\alpha}<0$.

185. Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$. —1) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-6\chi=0$. Ἀλλ' αὕτη γράφεται $\chi(\chi-6)=0$. Ἀλλ' ἵνα γινόμενον παραγόντων εἶναι 0, ἀρκεῖ εἷς τῶν παραγόντων νὰ εἶναι 0. Ὥστε θὰ εἶναι ἢ $\chi=0$ ἢ $\chi-6=0$, ἤτοι $\chi=6$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει δύο ρίζας, 0 καὶ 6.

2) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$. Αὕτη γράφεται $\chi(\alpha\chi+\beta)=0$. Ἐπαληθεύεται δὲ ἢ διὰ $\chi=0$, ἢ διὰ $\alpha\chi+\beta=0$, ἤτοι διὰ $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$. Ὥστε καὶ αὕτη ἔχει δύο ρίζας, τὰς 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

566) $23\chi^2-1127=0$, $\quad \frac{5}{4}\chi^2=720$, $\quad \frac{5}{3}\chi^2=\frac{243}{125}$, $\quad 4\chi^2-3=897$

567) $5\chi^2-64=\chi^2$, $\quad 7\chi^2+81=-2\chi^2$, $\quad 6\chi^2-15=\chi^2+485$

568) $\frac{\chi^2}{4}-64=0$, $\quad \frac{5\chi}{9}=\frac{125}{\chi}$, $\quad \frac{7\chi^2}{10}-30=\frac{\chi^2}{4}+15$

569) $(\chi-1)(\chi+1)=35$, $\quad (\chi+3)(\chi-3)=135$, $\quad (2\chi+5)(2\chi-5)=11$

570) $\left(\chi-\frac{1}{2}\right)\left(\chi+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$, $\left(\chi-\frac{1}{7}\right)\left(\chi+\frac{1}{7}\right)=\frac{15}{49}$,

$$\left(3\chi+\frac{1}{2}\right)\left(3\chi-\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{36}.$$

Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

571) $5\chi^2-75\chi=0$, $7\chi^2+84\chi=0$, $\frac{\chi^2}{5}+20\chi=25\chi$

572) $5\chi^2-\frac{\chi}{2}=\frac{\chi}{3}$, $(\chi-7)(\chi+5)=9\chi-35$, $(5\chi+2)(7\chi-10)=34\chi-20$

573) $\left(\chi+\frac{1}{4}\right)\left(\chi-\frac{1}{4}\right)=5\chi-\frac{1}{16}$ $\frac{3\chi^2-2\chi}{3}=\frac{3\chi^2}{4}+\frac{2\chi}{3}$

574) $2\left(\frac{\chi^2}{9}+\frac{\chi}{2}\right)=\frac{3\chi^2}{4}$ $\frac{4(\chi-12)}{3}=\frac{\chi+32}{\chi-2}$

Ὁμοίως νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

575) $\chi^2=\alpha\beta^2$, $\gamma\chi^2-\beta=\alpha$, $\frac{\alpha\chi}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta\chi}$, $\frac{\alpha\chi}{\beta}=\frac{\beta}{\alpha\chi}$

576) $\alpha\chi^2-\beta\chi=0$, $\frac{\chi^2}{\alpha}+\frac{\chi}{\beta}=0$, $\frac{\chi^2}{\alpha}+\beta\chi=0$, $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\beta\chi-\alpha^2$

186. Λύσις τῆς γενικῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.— Διά νά λύσωμεν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, θά προσπαθήσωμεν διά καταλλήλου μετασχηματισμοῦ, ἵνα ὁ ἄγνωστος χ, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς αὐτήν εἰς δύο ὅρους, εὑρεθῇ εἰς ἕνα μόνον ὅρον. Θά εὕρωμεν δέ τόν κατάλληλον αὐτόν μετασχηματισμόν ἀπό τά ἑξῆς: Ἡμεῖς γνωρίζομεν, ὅτι :

$$(\chi+\alpha)^2=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2.$$

Ἐκ τοῦ ἀναπτύγματος δέ αὐτοῦ συνάγομεν τά ἑξῆς. Διώνυμον, ὡς τό $\chi^2+2\alpha\chi$, τοῦ ὁποίου, ὡς βλέπομεν, ὁ εἷς ὅρος εἶναι χ^2, ὁ δέ ἄλλος περιέχει τό χ εἶναι μέρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ τετραγώνου ἑνός ἄλλου διωνύμου. Ὁ εἷς δέ ὅρος τοῦ ἄλλου διωνύμου εἶναι ἡ $\sqrt{\chi^2}$, ἤτοι ὁ χ, ὁ δέ ἄλλος ὅρος εἶναι τό ἥμισυ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ, ἤτοι ὁ $\frac{2\alpha}{2}=\alpha$. Ὥστε, ἵνα τό διώνυμον $\chi^2+2\alpha\chi$ γίνῃ τέλειον τετράγωνον, πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς αὐτό τό α^2. Ὥστε εἶναι

$$\chi^2+2\alpha\chi=\chi^2+2\alpha\chi+\alpha^2-\alpha^2$$

ἤτοι

$$\chi^2+2\alpha\chi=(\chi+\alpha)^2-\alpha^2.$$

Κατά ταῦτα εἶναι

$$\chi^2+6\chi=(\chi+3)^2-3^2=(\chi+3)^2-9$$

καί

$$\chi^2-\frac{1}{2}\chi=\left(\chi-\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\left(\chi-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16} \text{ κ.ο.κ.}$$

187. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἔστω πρός λύσιν α) ἡ ἐξίσωσις

$$\chi^2-6\chi+5=0 \qquad (1).$$

Μεταφέρομεν τὸν γνωστὸν ὅρον εἰς τὸ δεύτερον μέλος. ὁπότε ἔχομεν

$$\chi^2-6\chi=-5 \qquad (2).$$

Ἀλλὰ τὸ $\chi^2-6\chi$ εἶναι μέρος τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ

$$(\chi-3)^2=\chi^2-6\chi+9.$$

Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως (2) τὸ 9 θὰ ἔχωμεν

$$\chi^2-6\chi+9=9-5 \quad \text{ἤτοι} \quad (\chi-3)^2=4.$$

Ἐὰν ἤδη ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ἐξισώσεως, λαμβάνομεν

$$\chi-3=\pm 2 \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=3\pm 2.$$

Ὥστε ἢ $\chi=3+2=5$ ἢ $\chi=3-2=1$.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι 5 καὶ 1. Καὶ πράγματι, διότι

$$\chi^2-6\chi+5=5^2-6.5+5=25-30+5=0$$

ἢ

$$1^2-6.1+5=1-6+5=0.$$

β) Ἔστω ἤδη ἡ γενικὴ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. Ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi=-\gamma$$

καὶ κατόπιν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi=-\frac{\gamma}{\alpha},$$

διὰ τῆς προσθέσεως δὲ εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τοῦ $\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἔχομεν

$$\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha},$$

ἤτοι

$$\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2},$$

ἐξάγοντες δὲ ἤδη τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν μελῶν εὑρίσκομεν

$$\chi+\frac{\beta}{2\alpha}=\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ὅθεν ἢ

$$\chi=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ἢ} \quad \chi=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

δηλαδὴ

$$\chi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (1).$$

188. Ἡ ἔκφρασις αὕτη τοῦ χ εἶναι *γενικὸς τύπος*, δι' οὗ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς λύσεις οἱασδήποτε ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, χωρὶς νὰ ἐπαναλάβωμεν τοὺς προηγηθέντας συλλογισμούς.

Ἐκ τοῦ γενικοῦ τύπου (1) εὑρίσκονται καὶ αἱ λύσεις τῶν ἁπλουστέρων $\alpha\chi^2+\gamma=0$ καὶ $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$ (§ 184, 185), διότι αἱ ἐξισώσεις αὗται ὑπάγονται εἰς τὴν γενικὴν τῆς ὁποίας εἶναι μερικαὶ μόνον περιπτώσεις.

Καὶ πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν $\beta=0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\alpha\chi^2+\gamma=0$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει $\chi=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}$.

Ἐὰν δὲ ὑποθέσωμεν $\gamma=0$, ἡ μὲν γενικὴ ἐξίσωσις καταντᾷ $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, ὁ δὲ γενικὸς τύπος δίδει $\chi=\frac{-\beta\pm\beta}{2\alpha}$· ὅθεν αἱ λύσεις εἶναι $\chi=0$ καὶ $\chi=-\frac{\beta}{\alpha}$.

189. Διερεύνησις. Ἐκ τοῦ εὑρεθέντος τύπου (1) συνάγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ἔχει

1) *δύο* μὲν πραγματικὰς λύσεις ἢ *ρίζας*, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς $\beta^2-4\alpha\gamma$, εἶναι θετικός, ἤτοι ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$.

2) *μίαν* δὲ μόνην (πραγματικήν), ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$.

καὶ 3) *δύο μιγάδας* καὶ μάλιστα συζυγεῖς, ἐὰν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$. Ὁ ἀριθμὸς $\beta^2-4\alpha\gamma$, ἐκ τοῦ εἴδους τοῦ ὁποίου διακρίνομεν τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, λέγεται *διακρίνουσα* τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς.

Παρατηρήσεις. 1) Ἐὰν ὁ συντελεστὴς τοῦ χ εἶναι ἄρτιος ὁ τύπος (1) λαμβάνει ἁπλουστέραν μορφήν, διότι ἐὰν εἶναι $\beta=2\beta'$, ἔχομεν

$$\chi=\frac{-2\beta'\pm2\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-\beta'\pm\sqrt{\beta'^2-\alpha\gamma}}{\alpha} \qquad (2)$$

2) Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἀνάγεται εἰς τὴν μορφὴν $\chi^2+\frac{\beta}{\alpha}\chi+\frac{\gamma}{\alpha}=0$ $(\alpha\neq0)$ ἤ, ἐὰν θέσωμεν $\frac{\beta}{\alpha}=\pi$, $\frac{\gamma}{\alpha}=\kappa$ εἰς τὴν $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$, ὁπότε ὁ τύπος (1) γίνεται

$$\chi=\frac{-\pi\pm\sqrt{\pi^2-4\kappa}}{2}=-\frac{\pi}{2}\pm\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-\kappa} \qquad (3)$$

3) Ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δοθῇ μὲ τὴν μορφὴν $(\chi-\alpha)^2=\beta$ αἱ ρίζαι αὐτῆς εὑρίσκονται ἀμέσως, διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἀμφοτέρων τῶν μελῶν καὶ εἶναι $\chi=\alpha\pm\sqrt{\beta}$.

Π. δ. 1). *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $5\chi^2-11\chi-12=0$

Ὁ τύπος (1) δίδει $\chi'=\frac{11\pm\sqrt{11^2-4.5.(-12)}}{2.5}=\frac{11\pm\sqrt{361}}{10}=\frac{11\pm19}{10}$

ἤτοι $\chi=\frac{11+19}{10}=3$ καὶ $\chi=\frac{11-19}{10}=-\frac{4}{5}$

2) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^2-10\chi+25=0$.

Ὁ τύπος (2) δίδει $\chi=5\pm\sqrt{5^2-25}=5$

3) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^2-4\chi+13=0$.

Ἔχομεν $\chi=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm3i$

ἤτοι $\chi=2+3i$ καὶ $\chi=2-3i$

4) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^2-5\alpha\chi+6\alpha^2=0$.

Κατὰ τὸν τύπον (3) εἶναι $\chi=\dfrac{5\alpha\pm\sqrt{25\alpha^2-24\alpha^2}}{2}=\dfrac{5\alpha\pm\alpha}{2}$

ἤτοι $\chi=\dfrac{5\alpha+\alpha}{2}=3\alpha$ καὶ $\chi=\dfrac{5\alpha^2-\alpha}{2}=2\alpha$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις καὶ κατόπιν νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις (εἰς ὅσας ἐξισώσεις αἱ ρίζαι δὲν εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί, νὰ εὑρεθοῦν αὗται κατὰ προσέγγισιν 0,001).

577) $\chi^2-18\chi+45=0$, $-15\chi^2-2\chi+8=0$, $2+\chi-6\chi^2=0$

578) $3\chi(\chi-1)=2(\chi+4)$, $6\chi(4\chi+15)=-7(4\chi+5)$, $12(5\chi-2)\chi=-9(5\chi-2)$

579) $\chi^2-5{,}2\chi+1=0$, $5\chi^2-11\chi+6{,}25=0$, $\chi^2-0{,}55\chi+0{,}025=0$

580) $6\chi^2+26\frac{1}{4}=25\frac{1}{2}\chi$, $\chi^2-\frac{3}{2}\chi=-49\frac{9}{16}$, $\frac{\chi(5\chi-7)}{30}=\frac{3(\chi-8)}{9}+4$

581) $(4\chi+1)^2-(\chi-2)^2=33$, $(5\chi-2)^2-(10\chi+11)^2=-45$

582) $\left(2\chi+\frac{1}{2}\right)^2-\left(3\chi-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{19}{16}$, $\left(2\chi-\frac{3}{4}\right)^2+\left(\chi+\frac{3}{4}\right)^2=\left(3\frac{5}{7}\right)\chi$

583) $(\chi-3)(\chi-1)+(\chi+7)(\chi+2)=50$

584) $(5\chi-7)(2\chi-3)+126=9(\chi-1)(2\chi-3)$

585) $3(\chi-6)(16-\chi)-24(\chi-11)=(\chi-6)(\chi-4)$

586) $\chi(\chi+3)(\chi-4)+\chi(\chi-5)(\chi-3)=2(\chi^3-1)$

587) $\chi(\chi-1)(\chi-2)+\chi(\chi-4)(\chi-5)=2\chi(\chi-1)(\chi+2)$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

588) $3\chi+\frac{1}{\chi}=4$ 589) $\frac{\chi}{5}-\frac{21-\chi}{1+\chi}=1$ 590) $\frac{\chi}{4}-\frac{21-\chi}{4-\chi}=1$

591) $\frac{1}{\chi-3}+\frac{5}{3\chi+7}=1$ 592) $\frac{\chi+1}{\chi-3}=\frac{2(\chi+1)}{\chi+3}$ 593) $\frac{5\chi}{\chi-7}-\frac{4(3\chi+1)}{\chi^2-49}=\frac{8-3\chi}{\chi+7}$

594) $\frac{24}{\chi}-\frac{5}{\chi-3}-\frac{3}{\chi-1}=0$ 595) $\frac{\chi^2-2\chi+3}{\chi^2-3\chi+2}=\frac{\chi+1}{\chi-1}$

596) $\frac{3\chi-1}{\chi-3}+\frac{5\chi+1}{\chi+1}=\frac{8\chi-11}{\chi-2}$ 597) $\frac{2\chi-3}{\chi-2}+\frac{\chi+1}{\chi-1}=\frac{3\chi+11}{\chi+1}$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

598) $\chi^2-11\alpha\chi=-30\alpha$ 599) $\alpha(\chi^2-3\beta)=(3\alpha^2-\beta)\chi$.

600) $\chi^2-2\alpha\chi=\beta^2-\alpha^2$ 601) $(\chi+\alpha)(\chi-\alpha)=2\alpha+1$

602) $(\chi-\alpha)(\chi+\alpha)=\beta\chi-\alpha^2$ 603) $(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\alpha^2\beta\chi+\alpha^2\beta^2=0$

604) $(\alpha+\beta)^2(\chi^2-\chi)+\alpha\beta=0$ 605) $(\alpha^2-\beta^2)\chi^2-2\chi(\alpha^2+\beta^2)=\beta^2-\alpha^2$

606) $\frac{\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\beta}{\chi-\alpha}=2$ 607) $\chi+\frac{1}{\chi}=\alpha+\frac{1}{\alpha}$ 608) $\chi-\frac{1}{\chi}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}$

609) $\frac{\chi^2+1}{\chi}=\frac{\alpha^2+1}{\alpha}$ 610) $\frac{\chi+\alpha}{\chi-\beta}+\frac{\chi+\beta}{\chi-\alpha}=2$ 611) $\frac{\chi}{2\alpha}+\frac{\alpha}{2\chi}=\frac{2\beta}{\chi}-\frac{2\chi}{\beta}$

612) Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί, ὁ συντελεστὴς β εἶναι 0.

613) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+2\beta\chi=\gamma^2$ εἶναι πραγματικαὶ (οἱ ἐγγράμματοι συντελεσταὶ ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι σύμμετροι ἀριθμοί).

614) Νὰ δειχθῇ ὁμοίως ὡς ἄνω διὰ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $(\chi+\alpha).(\chi+\beta)=\gamma^2$.

615) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ εἶναι πάντοτε πραγματικαί, ὅταν τὸ κ εἶναι ἀρνητικόν.

616) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $2\chi^2+(4+\gamma)\chi+2\gamma=0$ εἶναι σύμμετροι.

617) Ὁμοίως διὰ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha(\chi^2-3\beta)=(3\alpha^2-\beta)\chi$

618) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-2(\kappa+2)\chi-\kappa^2=0$ $(\kappa\neq0)$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ρίζας ἴσας. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ κ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ἀντίθετοι;

619) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι μία δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις δὲν δύναται νὰ ἔχῃ ρίζας περισσοτέρας τῶν δύο,

620) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ δι' ἣν ἡ ἐξίσωσις $9\chi^2-3\chi+\mu=0$ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν.

621) Ὁμοίως ὡς ἄνω καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $(\mu-1)\chi^2+12\chi+\mu+4=0$.

622) Ὁμοίως καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $(2\mu-1)\chi^2-2(\mu+1)\chi+(\mu-1)=0$.

623) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ μ, δι' ἃς ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+\mu=0$ ἔχει 1) ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ 2) φανταστικάς.

624) Ὁμοίως καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2+9\chi+\mu=0$.

Σχέσεις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$.

190. Ἂν παραστήσωμεν διὰ χ' καὶ χ'' τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἔχομεν

$$\chi'=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad \chi''=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^3-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

Προσθέτοντες τὰς ἰσότητας ταύτας κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\chi'+\chi''=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha},$$

πολλαπλασιάζοντες δὲ ταύτας, εὑρίσκομεν

$$\chi'.\chi''=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=$$

$$=\frac{(-\beta)^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ὥστε: *Τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ τὸ μὲν ἄθροισμα τῶν δύο ριζῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον, λαμβανόμενον μὲ ἀντίθετον σημεῖον, τοῦ συν-*

τελεστοῦ χ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2, τὸ δὲ γινόμενον ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τοῦ γνωστοῦ ὅρου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἀληθεύουν καὶ ὅταν μία μόνη ρίζα ὑπάρχῃ, *ἐὰν θεωρηθῇ αὕτη ὡς διπλῆ*, διότι τότε τὰ χ' καὶ χ'' γίνονται ἴσα.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχει τὴν μορφὴν $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ ἔχομεν $\chi'+\chi''=-\pi$ καὶ $\chi'\chi''=\kappa$.

Κατὰ ταῦτα εἰς τὴν ἐξίσωσιν $16\chi^2-8\chi-15=0$ εἶναι $\chi'+\chi''=$

$$=\frac{8}{16}=\frac{1}{2} \text{ καὶ } \chi'.\chi''=-\frac{15}{16}.$$

Εἰς δὲ τὴν $\chi^2+6\chi+9=0$ εἶναι $\chi'+\chi''=-6$ καὶ $\chi'.\chi''=9$.

191 **Ἐφαρμογαί.**—Διὰ τῶν ὡς ἄνω ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ κάτωθι ζητήματα.

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, πρὶν ἢ λυθῇ αὕτη.

Διὰ νὰ λυθῇ τὸ ζήτημα τοῦτο πρέπει ὁ ἀριθμὸς $\beta^2-4\alpha\gamma$ νὰ εἶναι θετικός. Διότι, ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες ἀριθμοί.

Ἔστω λοιπὸν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Τότε

α') Ἐὰν τὸ γινόμενον $\chi'.\chi''$ εἶναι *θετικόν*, ἤτοι ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, αἱ δύο ρίζαι εἶναι *ὁμόσημοι*. Διὰ νὰ ἴδωμεν δέ, ἂν εἶναι θετικαὶ ἢ ἀρνητικαί, θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἄθροισμα $\chi'+\chi''=-\frac{\beta}{\alpha}$. Ἐὰν δὲ τοῦτο εἶναι *θετικόν*, ἤτοι ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$, θὰ εἶναι *θετικαὶ* αἱ ρίζαι. Ἐὰν ὅμως εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, αἱ ρίζαι θὰ εἶναι *ἀρνητικαί*.

β') Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι *ἀρνητικόν*, ἤτοι ἐὰν εἶναι $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, αἱ ρίζαι εἶναι *ἑτερόσημοι* καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ θετική, ἂν $-\frac{\beta}{\alpha}>0$. Ἂν ὅμως $-\frac{\beta}{\alpha}<0$, μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν εἶναι ἡ ἀρνητική.

γ') Ἐὰν $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, ἤτοι ἐὰν $\gamma=0$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $\alpha\chi^2+\beta\chi=0$, τῆς ὁποίας (§ 185) ἡ μὲν μία ρίζα εἶναι 0, ἡ δὲ ἄλλη $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Ἀνακεφαλαιοῦντες λοιπὸν τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν:

Ὅταν $\quad\quad$ ***$\beta^2-4\alpha\gamma>0$ καὶ***

1) $\frac{\gamma}{\alpha}>0$, αἱ δύο ρίζαι ἔχουν τὸ σημεῖον τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

2) $\frac{\gamma}{\alpha}<0$, αἱ ρίζαι εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ ἔχουσα τὸ σημεῖον τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

3) $\frac{\gamma}{\alpha}=0$, αἱ ρίζαι εἶναι 0 καὶ $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Π. χ. 1) Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+4\chi-9=0$ (τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ) ἔχει ρίζας ἑτεροσήμους· διότι $\chi'.\chi''=-9$ καὶ μεγαλυτέραν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τὴν ἀρνητικήν, διότι $\chi'+\chi''=-4$.

2) Ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+4=0$ (ἧς αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ) ἔχει τὰς ρίζας της ἀμφοτέρας θετικάς.

2) Πῶς μεταβάλλονται αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ὅταν οἱ μὲν συντελεσταὶ β καὶ γ μένουν ἀμετάβλητοι, ὁ δὲ α ἐλαττοῦται συνεχῶς καὶ τείνῃ πρὸς τὸ 0;

Ἐπειδὴ μὲ τὴν ἀνωτέρω ὑπόθεσιν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ τείνει πρὸς τὴν $\beta\chi+\gamma=0$ (1) συμπεραίνομεν, ὅτι ἡ μία ρίζα τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\gamma}{\beta}$, ὅστις πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν (1)· ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $-\frac{\beta}{\alpha}$. Ὥστε ἡ ἄλλη ρίζα διαφέρει ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\beta}$ τόσῳ ὀλιγώτερον, ὅσῳ τὸ α εἶναι μικρότερον.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν ὅτι ἡ δευτέρα αὕτη ρίζα καταντᾷ μεγαλυτέρα παντὸς ἀριθμοῦ (κατ' ἀπόλυτον τιμήν), ὅταν τὸ α γίνῃ ἱκανῶς μικρόν.

3) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν α καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν γ.

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ χ', χ'' δι' οὓς ἔχομεν $\chi'+\chi''=\alpha$ καὶ $\chi'.\chi''=\gamma$ εἶναι κατὰ τὰ προηγούμενα περὶ τῶν σχέσεων τῶν συντελεστῶν καὶ τῶν ριζῶν, αἱ δύο ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως

$$\chi^2-\alpha\chi+\gamma=0$$

Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\chi=\frac{\alpha}{2}\pm\frac{\sqrt{\alpha^2-4\gamma}}{2}$

ἤτοι $\chi' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$ καὶ $\chi'' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$

ἢ $\chi'' = \frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$ καὶ $\chi' = \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$

διότι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις τῶν λύσεων ἔχομεν ἄθροισμα τῶν ριζῶν α καὶ γινόμενον αὐτῶν γ. Ὥστε οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ $\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$ καὶ $\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - 4\gamma}}{2}$

Κατὰ ταῦτα οἱ δύο ἀριθμοὶ οἱ ἔχοντες ἄθροισμα 3 καὶ γινόμενον —40, εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - 3\chi - 40 = 0$, ἤτοι οἱ 8 καὶ —5.

4) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἐπαρκὴς συνθήκη, καθ' ἣν αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ

$$\varphi(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0 \qquad \alpha \neq 0$$
$$\sigma(\chi) = \alpha'\chi^2 + \beta'\chi + \gamma' = 0 \qquad \alpha' \neq 0$$

ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν.

Ἔστωσαν ρ καὶ μ αἱ ρίζαι τῆς πρώτης ἐξισώσεως καὶ ρ καὶ ν αἱ τῆς δευτέρας· τότε δὲ ἔχομεν

$$\rho + \mu = -\frac{\beta}{\alpha} \qquad \rho\mu = \frac{\gamma}{\alpha}$$
$$\rho + \nu = -\frac{\beta'}{\alpha'} \qquad \rho\nu = \frac{\gamma'}{\alpha'}$$

καὶ δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη

$$\mu - \nu = \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha\alpha'} \quad (1) \qquad \rho(\mu - \nu) = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha\alpha'} \quad (2)$$

Α : Ἤδη ὑποθέτοντες $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$, συνάγομεν ὅτι καὶ $\mu - \nu \neq 0$, ἤτοι ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν ρίζαν, τὴν ρ. Τότε διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (1), ὁπότε εὑρίσκομεν $\rho = \frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}$. Ἡ τιμὴ δὲ αὕτη τῆς κοινῆς ρίζης ρ ἐπαληθεύει ἀμφοτέρας τὰς δοθείσας ἐξισώσεις. Θέτομεν λοιπὸν ταύτην ἀντὶ τοῦ χ εἰς μίαν τούτων π.χ. εἰς τὴν σ(χ) καὶ λαμβάνομεν

$$\sigma(\rho) = \alpha'\left(\frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right)^2 + \beta'\left(\frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}\right) + \gamma' = 0 \qquad \text{ἤτοι}$$

$(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.\sigma(\rho) = \alpha'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 + (\alpha\beta' - \alpha'\beta)[\beta'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma') + \gamma'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)] = 0$, $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)^2.\sigma(\rho) = \alpha'(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')^2 - \alpha'(\alpha\beta' - \alpha'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma) = 0$

$$\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.\sigma(\rho)}{\alpha'}=(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)=0$$

Ἡ παράστασις $(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\beta'\gamma)$ παρίσταται συνήθως διὰ τοῦ R καὶ λέγεται *ἐπιλύουσα* τῶν δύο δοθεισῶν ἐξισώσεων δευτέρου βαθμοῦ.

Ἡ ἀναγκαία λοιπὸν συνθήκη ἵνα αἱ δύο ὡς ἄνω ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν, εἶναι ἡ ἐπιλύουσα αὐτῶν νὰ εἶναι μηδέν.

Εἶναι δὲ αὕτη καὶ ἐπαρκής. Διότι, ὡς ἐκ τῶν ἄνω φαίνεται, δυνάμεθα νὰ θέσωμεν

$$R=\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.\sigma(\rho)}{\alpha'}$$

Ἐὰν δὲ κάμωμεν, ὁμοίας ὡς ἄνω πράξεις καὶ εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\varphi(\chi)$, εὑρίσκομεν

$$R=\frac{(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2.\varphi(\rho)}{\alpha}$$

Ἐκ τῶν παραστάσεων δὲ τούτων τῆς R συνάγομεν ὅτι ἐὰν $R=0$ θὰ εἶναι καὶ $\sigma(\rho)=0$, $\varphi(\rho)=0$. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς ρ εἶναι κοινὴ ρίζα τῶν ἐξισώσεων $\varphi(\chi)=0$ καὶ $\sigma(\chi)=0$.

Β. Ἤδη ὑποθέτομεν ὅτι $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$. Ἀλλὰ τότε ὡς ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) συνάγεται θὰ εἶναι καὶ $\mu-\nu=0$, ἤτοι $\mu=\nu$ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ $\gamma\alpha'-\alpha\gamma'=0$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, αἱ δύο δοθεῖσαι ἐξισώσεις ἔχουν *δύο* ρίζας κοινάς, ἤτοι ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας.

Ἐὰν δὲ εἶναι β' καὶ γ' διάφορα τοῦ μηδενός, ἐκ τῶν σχέσεων $\alpha\beta'-\alpha'\beta=0$ καὶ $\gamma\alpha'-\alpha\gamma'=0$ ἐξάγονται αἱ $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$.

Ὥστε: *Ὅταν δύο ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουν δύο ρίζας κοινὰς οἱ συντελεσταὶ τῶν αὐτῶν δυνάμεων τοῦ χ εἶναι ἀνάλογοι.*

Ἡ συνθήκη δὲ αὕτη εἶναι καὶ ἐπαρκής, διότι ἐὰν λ εἶναι ὁ εἷς τῶν ὡς ἄνω λόγων, θὰ ἔχωμεν $\alpha=\alpha'\lambda$, $\beta=\beta'\lambda$, $\gamma=\gamma'\lambda$· τότε δὲ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(\chi)$ γράφεται $\lambda(\alpha'\chi^2+\beta'\chi+\gamma')=0$. Εἶναι λοιπὸν αὕτη ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δευτέραν.

Π. δ. *Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ ὥστε αἱ ἐξισώσεις* $\chi^2-10\chi+\lambda=0$ *καὶ* $\chi^2-8\chi+\lambda-6=0$ *νὰ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν.*

Εἶναι $R=36-2\ -2\lambda+60)=4\lambda-84$. Διὰ νὰ ἔχουν δὲ αἱ δοθεῖσαι ἐξισώσεις μίαν ρίζαν κοινὴν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $R=4\lambda-84=0$ ἤτοι $\lambda=21$.

Αἱ δοθεῖσαι λοιπὸν ἐξισώσεις γίνονται $\chi^2-10\chi+21=0$ καὶ $\chi^2-8\chi+15=0$ ἡ δὲ κοινὴ αὐτῶν ρίζα εἶναι ἡ $\rho=\frac{\gamma\alpha'-\alpha\gamma'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}=\frac{21-15}{-8+10}=3$

Σημείωσις. Ἡ εὕρεσις τῆς ἀναγκαίας καὶ ἐπαρκοῦς συνθήκης, ἵνα δύο ἐξισώσεις μὲ ἕνα ἄγνωστον χ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινὴν λέγεται ἀπαλοιφὴ τοῦ ἀγνώστου τούτου χ μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων.

Εἰς τὸ προηγούμενον π. δ. 4) τὸ ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\varphi(\chi)=0$ καὶ $\sigma(\chi)=0$ εἶναι $R=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

625) Τῆς ἐξισώσεως $15\chi^2+19\chi+6$ ἡ μία ρίζα εἶναι $-\frac{2}{3}$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

626) Τῆς ἐξισώσεως $2{,}5\chi^2-8{,}79\chi+7{,}58=0$ ἡ μία ρίζα εἶναι 2. Νὰ εὑρεθῇ ὁμοίως ἡ ἄλλη.

627) Ὁμοίως τῆς ἐξισώσεως $\alpha(\chi^2+\beta)=\chi(\alpha^2+\beta)$ ἡ μία ρίζα εἶναι α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

628) $\chi^2-14\chi+40=0$ 629) $\chi^2+10\chi+24=0$ 630) $6\chi^2-\chi-1=0$

651) $20\chi^2+6\chi-3=0$ 632) $\frac{\chi^2-3}{\chi-2}=\frac{1}{4}$ 633) $\frac{\chi^2+\chi-1}{\chi}=4$.

634) Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα ἕνα τῶν ἀριθμῶν 16, 4, -10, -4. 5, $\frac{34}{15}$, $\frac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$ καὶ γινόμενον ἀντιστοίχως 48, -21, 21, 2, 1, 1, 1.

635) Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς -4, -9.

636) 7 καὶ -7 637) $-0,9$ καὶ $0,5$ 638) $\frac{2}{3}$ καὶ $-\frac{3}{5}$.

639) $2+\sqrt{3}$ καὶ $2-\sqrt{3}$ 640) $1+i$ καὶ $1-i$ 641) $3+i\sqrt{5}$ καὶ $3-i\sqrt{5}$.

642) α καὶ β 643) $\alpha+\beta$ καὶ $\alpha-\beta$ 644) $\alpha+\beta\sqrt{5}$ καὶ $\alpha-\beta\sqrt{5}$.

645) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2-2\chi+32\alpha^2=0$ ἔχει ρίζας ὧν τὸ ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν.

646) Διὰ ποίας τιμὰς τῶν π καὶ κ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ ἔχει ρίζας αὐτοὺς τούτους τοὺς συντελεστὰς π καὶ κ.

647) Νὰ συμπληρωθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+3\chi+\ldots=0$ διὰ τοῦ γνωστοῦ ὅρου ὥστε ἡ μία ρίζα αὐτῆς νὰ εἶναι 9.

648) Ὁμοίως νὰ συμπληρωθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+\ldots\chi-15=0$ διὰ τοῦ συντελεστοῦ τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ χ, ὥστε ἡ μία ρίζα αὐτῆς νὰ εἶναι -5.

649) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ γ ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $9\chi^2-18\chi+\gamma=0$ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

650) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ γ ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2-8\chi+\gamma=0$ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

651) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $9\chi^2+\beta\chi+2=0$ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

652) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4\chi^2+\beta\chi+1=0$ εἶναι τετραπλασία τῆς ἄλλης.

653) Νὰ εὑρεθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.

'Εφαρμογὴ εἰς τὰς ἐξισώσεις.

$\chi^2-16\chi+63=0$, $16\chi^2-16\chi+3=0$, $16\chi^2+3\chi-1=0$.

654) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ συνδέουσα τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἵνα ἡ μία ρίζα αὐτῆς εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ἢ τριπλασία.

655) Νὰ γίνῃ ἡ ἀπαλοιφὴ τοῦ ἀγνώστου χ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων $\chi^2+\alpha\chi+\beta^2=0$ καὶ $\chi^2-\beta\chi+\alpha^2=0$.

Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ λ, ὥστε τὰ κάτωθι ζεύγη τῶν ἐξισώσεων νὰ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν.

656) $2\chi^2-5\chi+\lambda-8=0$, $2\chi^2+11\chi+\lambda=0$

657) $\chi^2+\lambda\chi-10=0$, $4\chi^2+\lambda\chi-85=0$

658) $3\chi^2-(\lambda-1)\chi+\lambda+1=0$, $2\chi^2-(2\lambda-1)\chi+2(\lambda+1)=0$

192. Ἄθροισμα ὁμοίων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.—Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι αἱ χ', χ'' καὶ ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὰ ἀθροίσματα $\sigma_2=\chi'^2+\chi''^2$, $\sigma_3=\chi'^3+\chi''^3$, . . . $\sigma_\nu=\chi'^\nu+\chi''^\nu$ (ὅπου ν ἀκέραιος θετικός). Ἐὰν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν θέσωμεν κατὰ σειρὰν ἀντὶ χ, τὰ χ' καὶ χ'' θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} \alpha\chi'^2+\beta\chi'+\gamma&=0 \\ \alpha\chi''^2+\beta\chi''+\gamma&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη

$$\alpha(\chi'^2+\chi''^2)+\beta(\chi'+\chi'')+2\gamma=0$$

ἤ, ἐὰν, θέσωμεν $\quad \chi'+\chi''=\sigma_1$

$$\alpha\sigma_2+\beta\sigma_1+2\gamma=0 \quad (2)$$

Ἤδη ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν ταυτοτήτων (1) ἐπὶ χ' καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας τούτων ἐπὶ χ'' καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\alpha(\chi'^3+\chi''^3)+\beta(\chi'^2+\chi''^2)+\gamma(\chi'+\chi'')=0$$

ἤτοι $\quad \alpha\sigma_3+\beta\sigma_2+\gamma\sigma_1=0 \quad (3)$

καὶ γενικῶς ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης τῶν ταυτοτήτων (1) ἐπὶ $\chi'^{\nu-2}$ καὶ τὰ μέλη τῆς δευτέρας τούτων ἐπὶ $\chi''^{\nu-2}$ καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\alpha(\chi'^\nu+\chi''^\nu)+\beta(\chi'^{\nu-1}+\chi''^{\nu-1})+\gamma(\chi'^{\nu-2}+\chi''^{\nu-2})=0$$

ἤτοι $\quad \alpha\sigma_\nu+\beta\sigma_{\nu-1}+\gamma\sigma_{\nu-2}=0 \quad (4)$

ὁ τύπος δὲ οὗτος (4) δεικνύει ὅτι, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ ἀθροίσματα τῶν δυνάμεων $\sigma_{\nu-1}$ καὶ $\sigma_{\nu-2}$ εὑρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων σ_ν. Εὐνόητον δὲ εἶναι ὅτι ἐπιτυγχάνομεν τοῦτο εὑρίσκοντες διαδοχικῶς καὶ κατὰ σειρὰν τὰ ἀθροίσματα σ_2, σ_3, σ_4 κ.ο.κ.

Οὕτω δὲ ἐκ τοῦ τύπου (2) εὑρίσκομεν

$$\sigma_2=-\frac{\beta\sigma_1+2\gamma}{\alpha}$$

ἢ ἐπειδὴ $\sigma_1 = \chi' + \chi'' = -\frac{\beta}{\alpha}$

$$\sigma_2 = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

Ἐκ δὲ τοῦ τύπου (3) εὑρίσκομεν

$$\sigma_3 = -\frac{\beta\sigma_2 + \gamma\sigma_1}{\alpha} = \frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\alpha^3} \text{ κ.ο.κ.}$$

Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις εἶναι τῆς μορφῆς $\chi^2 + \pi\chi + \kappa = 0$, ὁ τύπος (4) γίνεται $\sigma_\nu = -\pi\sigma_{\nu-1} - \kappa\sigma_{\nu-2}$ καὶ ἐπειδὴ $\sigma_1 = -\pi$, εὑρίσκομεν $\sigma_2 = \pi^2 - 2\kappa$, $\sigma_3 = 3\pi\kappa - \pi^3$, κ.ο.κ.

Ἐφαρμογή. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων δυνάμεων, τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους ἀρνητικούς.

Τὸ ἄθροισμα $\sigma_{\nu-1} = \chi'^{-\nu} + \chi''^{-\nu}$ ἰσοῦται μὲ

$$\sigma_{-\nu} = \frac{1}{\chi'^\nu} + \frac{1}{\chi'^\nu} = \frac{\chi''^\nu + \chi'^\nu}{\chi'^\nu \cdot \chi''^\nu} = \frac{\chi''^\nu + \chi'^\nu}{(\chi' \cdot \chi'')^\nu}$$

ἢ ἐπειδὴ $\chi'^\nu + \chi''^\nu = \sigma_\nu$ καὶ $\chi' \cdot \chi'' = \frac{\gamma}{\alpha}$

$$\sigma^{-\nu} = \frac{\alpha^\nu \cdot \sigma_\nu}{\gamma^\nu}. \quad (5)$$

Ὁ τύπος (5) δεικνύει ὅτι οὐδεμία τῶν ριζῶν χ', χ'' εἶναι 0 ἤτοι ὅτι τὸ γ εἶναι διάφορον τοῦ 0.

Κατὰ ταῦτα εἶναι

$$\sigma_{-1} = \frac{\alpha . \sigma_1}{\gamma} = -\frac{\beta}{\gamma}, \quad \sigma_{-2} = \frac{\alpha^2 . \sigma_2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\gamma^2}, \quad \sigma_{-3} = \frac{3\alpha\beta\gamma - \beta^3}{\gamma^3}.$$

Σημείωσις. Ἡ ἀνωτέρω ἐφαρμογὴ διατυποῦται καὶ ὡς ἑξῆς: Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων (θετικῶν) δυνάμεων τῶν ἀντιστρόφων τῶν ριζῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

659) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ ὡς καὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \pi\chi + \kappa = 0$.

660) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων, τῶν τετάρτων δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$ ὡς καὶ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 + \pi\chi + \kappa = 0$.

661) Ἐὰν χ' καὶ χ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $3\chi^2 + 2\chi - 5 = 0$ νὰ εὑρεθοῦν, χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη, αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων $\frac{\chi'}{\chi''} + \frac{\chi''}{\chi'}$ καὶ $\chi'^3 + \chi''^3 + 5\chi'^2 + 5\chi''^2$.

662) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2 - (\mu - 11)\chi + \mu = 0$ εἶναι 41;

663) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ μ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-(\mu-10)\chi+\mu-1=0$ εἶναι ἴσον μὲ 45;

193. Μετασχηματισμὸς τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. — *Πρόβλημα Ι. Ἐὰν χ′ καὶ χ″ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας χ′+ε καὶ χ″+ε, ὅπου ε εἶναι δοθεὶς ἀριθμός.*

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-(\chi'+\varepsilon+\chi''+\varepsilon)\,\chi+(\chi'+\varepsilon)(\chi''+\varepsilon)=0$$

$$\text{ἤτοι } \chi^2-(\chi'+\chi''+2\varepsilon)\,\chi+\chi'\chi''+\varepsilon(\chi'+\chi'')+\varepsilon^2=0$$

$$\text{ἢ ἐπειδὴ } \chi'+\chi''+2\varepsilon=-\frac{\beta}{\alpha}+2\varepsilon=-\frac{\beta-2\alpha\varepsilon}{\alpha}$$

$$\text{καὶ}\quad \chi'\chi''+\varepsilon(\chi'+\chi'')+\varepsilon^2=\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}\varepsilon+\varepsilon^2=\frac{\gamma-\beta\varepsilon+\alpha\varepsilon^2}{\alpha}$$

$$\alpha\chi^2+(\beta-2\alpha\varepsilon)\chi+\alpha\varepsilon^2-\beta\varepsilon+\gamma=0.$$

Πρόβλημα ΙΙ. — *Ἐὰν χ′ καὶ χ″ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας εχ′ καὶ εχ″*

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-\varepsilon\,(\chi'+\chi'')\,\chi+\varepsilon^2\chi'\,\chi''=0$$

$$\text{ἤτοι}\quad \text{ἡ}\quad \alpha\chi^2+\varepsilon\beta\chi+\varepsilon^2\gamma=0$$

Πρόβλημα ΙΙΙ. — *Ἐὰν χ′ καὶ χ″ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας $\frac{1}{\chi'}$ καὶ $\frac{1}{\chi''}$.*

Ἐργαζόμενοι ὡς ἄνω εὑρίσκομεν

$$\chi^2-\left(\frac{\chi'+\chi''}{\chi'\cdot\chi''}\right)\chi+\frac{1}{\chi'\chi''}=0 \quad \text{ἤτοι}$$

$$\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$$

Εὐνόητον δὲ εἶναι ὅτι ὁ μετασχηματισμὸς οὗτος εἶναι δυνατὸς ὅταν $\chi'\neq 0$ καὶ $\chi''\neq 0$, ἤτοι ὅταν $\gamma\neq 0$.

Πρόβλημα IV. *Ἐὰν χ′ καὶ χ″ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ῥίζας $\frac{\chi'^2}{\chi''}$, $\frac{\chi''^2}{\chi'}$.*

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις εἶναι ἡ

$$\chi^2-\left(\frac{\chi'^2}{\chi''}+\frac{\chi''^2}{\chi'}\right)\chi+\chi'\chi''=0 \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐπειδὴ}$$

$$\chi\,\chi''=\frac{\gamma}{\alpha} \text{ καὶ } \frac{\chi'^2}{\chi''}+\frac{\chi''^2}{\chi'}=\frac{\chi'^3+\chi''^3}{\chi'\chi''}=-\frac{\beta^3-3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\gamma}$$

$$\alpha^2\gamma\chi^2+(\beta^3-3\alpha\beta\gamma)\,\chi+\alpha\gamma^2=0$$

Ἐκ τῶν προηγουμένων παραδειγμάτων γίνεται φανερὸν ὅτι μετασχηματισμὸς μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι ἡ εὕρεσις ἄλλης ἐξισώσεως δευτεροβαθμίου, τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι συνδέονται δι' ὡρισμένης σχέσεως μὲ τὰς ρίζας τῆς δοθείσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ἐὰν χ' καὶ χ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας:

664) $-\chi', -\chi''$ 665) $\frac{\varepsilon}{\chi'}, \frac{\varepsilon}{\chi''}$, 666) $\frac{\chi'}{\chi''}, \frac{\chi''}{\chi'}$ 667) $\frac{\mu\chi'}{\chi''}, \frac{\mu\chi''}{\chi'}$

668) $\mu\chi'-\chi'', \mu\chi''-\chi'$ 669) χ'^2, χ''^2, 670) $\frac{1}{\chi'^2}+\frac{1}{\chi''^2}$, 671) χ'^3, χ''^3

672) Ἐὰν χ', χ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-\pi\chi-\pi^2=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτεροβάθμιος ἔχουσα ρίζας $\frac{\chi'^2}{\chi''}, \frac{\chi''^2}{\chi'}$.

673) Ἐὰν χ', χ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας $\chi'+\chi'', \chi'.\chi''$.

674) Ἐὰν χ', χ'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+2\beta\chi-\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας χ'^3, χ''^3.

194. *Ἀνάλυσις παντὸς τριωνύμου δευτέρου βαθμοῦ εἰς γενόμενον παραγόντων πρώτου βαθμοῦ.*

Ἡ παράστασις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ. Ἐὰν τὸ τριώνυμον τοῦτο ἐξισωθῇ μὲ τὸ 0 ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$$

ἧς τὰς ρίζας παριστῶμεν διὰ χ', χ''.

Τότε δὲ ἔχομεν $\chi'+\chi''=-\frac{\beta}{\alpha}$ ἤτοι $\beta=-\alpha(\chi'+\chi'')$

καὶ $\chi'\chi''=\frac{\gamma}{\alpha}$ ἤτοι $\gamma=\alpha\chi'\chi''$.

Ἐπομένως τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha\chi^2-\alpha(\chi'+\chi'')\chi+\alpha\chi'\chi''=\alpha[\chi^2-(\chi'+\chi'')\chi+\chi'\chi'']$$

ἀλλ' εἶναι $\chi^2-(\chi'+\chi'')\chi+\chi'\chi''=\chi^2-\chi'\chi-\chi''\chi+\chi'\chi''=\chi(\chi-\chi')-$
$-\chi''(\chi-\chi')=(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$

Εἶναι λοιπὸν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ (1)

Ἐὰν εἶναι $\chi'=\chi''$ τότε ἡ ἀνάλυσις τοῦ τριωνύμου δίδει

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi')=\alpha(\chi-\chi')^2$$

Π.δ. 1) *Ν' ἀναλυθῇ τὸ τριώνυμον* $\chi^2-7\chi+12$.

Τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-7\chi+12=0$ ρίζαι εἶναι αἱ $\chi'=3$, $\chi''=4$.

Ἔχομεν λοιπὸν κατὰ τὰ ἀνωτέρω $\chi^2-7\chi+12=(\chi-3)(\chi-4)$

2) *Νὰ ἀναλυθῇ τὸ τριώνυμον* $3\chi^2+13\chi-10$.

Αἱ ρίζαι αὐτοῦ εἶναι -5 καὶ $\frac{2}{3}$. Ὥστε εἶναι

$$3\chi^2+13\chi-10=3(\chi+5)\left(\chi-\frac{2}{3}\right)$$

ἢ $$3\chi^2+13\chi-10=3(\chi+5).\frac{(3\chi-2)}{3}=(\chi+5)(3\chi-2).$$

Παρατηρήσεις.—1) Ἡ ἀνωτέρω ἀνάλυσις ἐξηγεῖ διατὶ ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχει δύο ρίζας. Διότι τὸ γινόμενον $\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ γίνεται 0, ὅταν εἷς τῶν παραγόντων αὐτοῦ εἶναι 0. Ἀλλ' εἶναι $\alpha\neq0$. Ἑπομένως ἢ θὰ εἶναι $\chi-\chi'=0$ ἤτοι $\chi=\chi'$, ἢ $\chi-\chi''=0$. ἤτοι $\chi=\chi''$. Δύο λοιπὸν ἀριθμοὶ μηδενίζουν τὸ ἀνωτέρω γινόμενον.

2) Δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσαν ρίζας δύο, ὡς ἔτυχε, δεδομένους ἀριθμοὺς λ καὶ ρ σχηματίζοντες τὸ γινόμενον $(\chi-\lambda)(\chi-\rho)$ καὶ ἐξισοῦντες αὐτὸ μὲ τὸ μηδέν, ἤτοι θέτομεν $(\chi-\lambda)(\chi-\rho)=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ τραποῦν εἰς γινόμενα τὰ κάτωθι τριώνυμα.

675) $\chi^2-4\chi-45$, 676) $2\chi^2+3\chi+2$, 677) $25\chi^2+10\chi+1$,
678) $12\chi^2+5\chi-3$, 679) $35\chi^2-\chi-6$, 680) $35\chi^2-3\chi-2$.

Ν' ἀπλοποιηθοῦν τὰ κλάσματα.

681) $\frac{7\chi^2+31\chi+12}{7\chi^2-32\chi-15}$ 682) $\frac{2\chi^2-\chi-3}{4\chi^2-12\chi+9}$ 683) $\frac{7\chi+2}{15\chi^2+53\chi+14}$

Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ ἔχουσα ρίζας

684) $2+\frac{\sqrt{2}}{2}$, $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 685) $\alpha+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$, $\alpha-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ 686) $-3+\frac{i\sqrt{3}}{2}$, $-3-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

687) Ποία σχέσις πρέπει νὰ συνδέῃ τοὺς συντελεστὰς π καὶ κ ἵνα τὸ τριώνυμον $\chi^2-8\pi\chi+\kappa$ εἶναι τέλειον τετράγωνον;

688) Πότε τὸ τριώνυμον $\chi^2-5\pi\chi+\kappa^2$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $\chi-\pi$;

689) Πότε τὸ διώνυμον $\alpha\chi-\pi$ εἶναι παράγων τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$;

195. Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ διαφόρους τῶν ριζῶν του.

Ἔστω τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ καὶ ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐξετάσωμεν τὸ σημεῖον αὐτοῦ, ὅταν τὸ χ λαμβάνῃ πραγματικὰς τιμάς, αἵτινες δὲν μηδενίζουν αὐτό, δηλαδὴ διαφόρους τῶν ριζῶν του. Πρὸς τοῦτο διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

α΄) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, ἤτοι ἂν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου χ' καὶ χ'' εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, ἔχομεν·

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$$

Ἄς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι $\chi'<\chi''$, ἀλλὰ τότε εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι

1) $\chi>\chi''$ ἄρα καὶ $\chi>\chi'$

ἀλλ' εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ παράγοντες $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$ εἶναι ἀμφότεροι θετικοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θετικόν· ὥστε τὸ γινόμενον $\alpha(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ ἤτοι τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

2) $\chi<\chi'$ ἄρα καὶ $\chi<\chi''$

Ἤδη οἱ παράγοντες $\chi-\chi'$ καὶ $\chi-\chi''$ εἶναι ἀμφότεροι ἀρνητικοὶ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν θετικόν, καὶ τὸ τριώνυμον ἔχει πάλιν τὸ σημεῖον τοῦ α.

καὶ 3) $\chi'<\chi<\chi''$

Ἐν τῇ ὑποθέσει ταύτῃ ὁ παράγων $\chi-\chi'$ εἶναι θετικός, ὁ δὲ $\chi-\chi''$ εἶναι ἀρνητικός. Ἑπομένως τὸ γινόμενον $(\chi-\chi')(\chi-\chi'')$ εἶναι ἀρνητικὸν καὶ τὸ τριώνυμον ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α.

Π.δ. Τὸ τριώνυμον $\chi^2+3\chi-4$, οὗ αἱ ρίζαι εἶναι -4 καὶ 1 εἶναι θετικὸν μὲν ὅταν τὸ χ λάβῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν, δηλαδὴ ὅταν τὸ χ εἶναι μικρότερον τῆς μικροτέρας ρίζης -4 καὶ μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης 1, ἀρνητικὸν δὲ ὅταν τὸ χ λάβῃ τιμὰς ἐντὸς τῶν ριζῶν, δηλαδὴ κειμένας μεταξὺ -4 καὶ 1.

β΄) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἤτοι ἂν αἱ ρίζαι χ' καὶ χ'' εἶναι ἴσαι, ἔχομεν $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha(\chi-\chi')^2$.

Ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ τριώνυμον ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ (πλὴν τῆς $\chi=\chi'$).

Π. δ. Τὸ τριώνυμον $\chi^2+6\chi+9$ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ (πλὴν τῆς $\chi=-3$).

γ΄) Ἂν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ ἤτοι ἂν αἱ ρίζαι χ' καὶ χ'' τοῦ τριωνύμου εἶναι μιγάδες συζυγεῖς ἤτοι ἂν $\chi'=\mu+\lambda i$ καὶ $\chi''=\mu-\lambda i$, τότε θὰ εἶναι

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha[(\chi-\mu)-\lambda i)][(\chi-\mu)+\lambda i]$$

ἤτοι
$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=\alpha[(\chi-\mu)^2+\lambda^2]$$

Ἐπειδὴ δὲ ὡς βλέπομεν τὸ τριώνυμον εἶναι γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἄθροισμα δύο τετραγώνων, ὅπερ εἶναι θετικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἕπεται ὅτι τοῦτο ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α.

Π. δ. Τὸ τριώνυμον $-\chi^2+8\chi-20$, οὗ αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες συζυγεῖς, εἶναι ἀρνητικὸν διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ (διαφόρου τῶν ριζῶν) πλὴν ὅταν τοῦ τριωνύμου ἔχον-

τος ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, τὸ χ λαμβάνῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν.

196. *Σύγκρισις ἑνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πρὸς τὰς ρίζας δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.* — Ἔστω ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς μ, τὸν ὁποῖον θέλω νὰ συγκρίνω πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+$ $+\gamma=0$ χωρὶς νὰ τὴν λύσω. Πρὸς τοῦτο θέτω εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, ἀντὶ τοῦ χ τὸ μ καὶ

α΄) Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὁ ἀριθμὸς μ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Διότι, ἂν ἡ ἐξίσωσις εἶχε ρίζας φανταστικὰς ἢ ἴσας, τὸ ἐξαγόμενον θὰ εἶχε τὸ σημεῖον τοῦ α· ἂν δὲ ἐξ ἄλλου τὸ μ ἔκειτο ἐκτὸς τῶν ριζῶν, τὸ ἐξαγόμενον πάλιν θὰ εἶχε τὸ σημεῖον τοῦ α. Οὔτε δὲ τὸ μ δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ μίαν τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως, διότι τότε τὸ ἐξαγόμενον θὰ ἦτο ἴσον μὲ 0.

β΄) Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α, τότε δύναται:

1) νὰ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$, ὁπότε δὲν δύναται νὰ γίνῃ σύγκρισις, διότι αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες συζυγεῖς.

2) $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις ἔχῃ μίαν μόνον ρίζαν τὴν $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ καὶ πρὸς αὐτὴν συγκρίνεται ἀμέσως ὁ ἀριθμὸς μ.

3) $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ὁ δὲ μ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Μένει λοιπὸν νὰ ἐξετάσωμεν ἂν ὁ μ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης ἢ μικρότερος τῆς μικροτέρας. Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι ἂν εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης θὰ εἶναι καὶ μεγαλύτερος παντὸς ἀριθμοῦ κειμένου μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ ἂν εἶναι μικρότερος θὰ εἶναι μικρότερος καὶ παντὸς ἀριθμοῦ κειμένου πάλιν μεταξὺ τῶν ριζῶν. Ὥστε ἀρκεῖ νὰ συγκρίνωμεν τὸν μ πρὸς ἕνα οἱονδήποτε ἀριθμὸν κείμενον μεταξὺ τῶν ριζῶν. Εἷς δὲ τοιοῦτος ἀριθμὸς εἶναι ὁπωσδήποτε τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν, διότι ἐὰν $\chi'<\chi''$ ἔπεται

$$2\chi'<\chi'+\chi''<2\chi'' \text{ ἤτοι}$$

$$\chi'<\frac{\chi'+\chi''}{2}<\chi'' \text{ δηλαδὴ } \chi'<-\frac{\beta}{2\alpha}<\chi'',$$

Ἀντὶ τοῦ $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ λαμβάνομεν πρὸς σύγκρισιν τὸ 0, ὅταν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι ἑτερόσημοι, διότι τότε τὸ 0 κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν.

γ΄) Ἐὰν τὸ ἐξαγόμενον $\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ 0, τότε ὁ μ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως, ὁπότε θὰ συγκρίνωμεν αὐτὸν μὲ τὸν ἀριθμὸν $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Π.δ. 1) *Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 3 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως* $5\chi^2-13\chi+6=0$.

Τὸ ἐξαγόμενον $5.3^2-13.3+6=12$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ 5. Ἐπειδὴ δὲ ἡ διακρίνουσα $13^2-4.5.6=49$ εἶναι θετική, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὅτι ὁ ἀριθμὸς 3 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $3>\frac{13}{10}$, ἕπεται πάλιν ὅτι ὁ 3 εἶναι μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας ρίζης.

2) *Νὰ συγκριθῇ ὁ ἀριθμὸς 3 πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως* $2\chi^2-6\chi+\lambda+7=0$ *κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ.*

Διὰ $\chi=3$ ἔχομεν $2.3^2-6.3+\lambda+7=\varphi(3)$

Διὰ $\lambda<-7$ εἶναι $\varphi(3)<0$· τὸ σημεῖον λοιπὸν τοῦ ἐξαγομένου εἶναι ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2· ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ ὁ 3 κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν.

Διὰ $\lambda>-7$ εἶναι $\varphi(3)>0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἐξετάσωμεν τὴν διακρίνουσαν $\beta'^2-\alpha\gamma=-(2\lambda+5)$. Καὶ διὰ μὲν $-(2\lambda+5)<0$ ἤτοι διὰ $\lambda>-\frac{5}{2}$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας μιγάδας συζυγεῖς. Διὰ δὲ $-(2\lambda+5)>0$ ἤτοι διὰ $\lambda<-\frac{5}{2}$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους· ἀλλ' ὅταν τὸ λ κεῖται μεταξὺ -7 καὶ $-\frac{5}{2}$, τὸ $\varphi(3)$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ α καὶ τὸ 3 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν καὶ εἶναι μεγαλύτερον τῆς μεγαλυτέρας ρίζης διότι εἶναι $3>-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἤτοι $3>\frac{3}{2}$.

Διὰ $\lambda=-7$ ἔχομεν $\varphi(3)=0$. Ὁ 3 εἶναι λοιπὸν τότε ρίζα τῆς ἐξισώσεως καὶ ἡ μεγαλυτέρα, διότι εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ριζῶν.

Διὰ $\lambda=-\frac{5}{2}$ ἡ διακρίνουσα εἶναι 0, ἤτοι ἡ ἐξίσωσις ἔχει εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν μίαν μόνην ρίζαν ἴσην μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν ἤτοι ἴσην μὲ $\frac{3}{2}<3$.

197. *Σύγκρισις δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς τὰς ρίζας δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.*— Ἔστωσαν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ λ καὶ μ τοὺς ὁποίους θέλω νὰ συγκρίνω πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως

$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ χωρὶς νὰ τὴν λύσω. Πρὸς τοῦτο θέτομεν εἰς τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ ἀντὶ τοῦ χ πρῶτον τὸ λ καὶ ἔπειτα τὸ μ, ὁπότε ἔχομεν τὰ ἐξαγόμενα $\varphi(\lambda)=\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$, $\varphi(\mu)=\alpha\mu^2+\beta\mu+\gamma$.

1) Ἐὰν τὰ ἐξαγόμενα αὐτὰ εἶναι ἑτερόσημα, ἤτοι ἐὰν $\varphi(\lambda).\varphi(\mu)<0$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, διότι ἄλλως τὰ ἐξαγόμενα $\varphi(\lambda)$ καὶ $\varphi(\mu)$ θὰ ἦσαν ὁμόσημα· μία δὲ ἐξ αὐτῶν περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν λ καὶ μ. Διότι ἀφοῦ τὰ ἐξαγόμενα $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\mu)$ εἶναι ἑτερόσημα, τὸ ἓν τούτων ἔστω τὸ $\varphi(\lambda)$ θὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ α καὶ ἑπομένως ὁ λ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ἐνῷ ὁ μ θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἀφοῦ τὸ ἐξαγόμενον $\varphi(\mu)$ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α· μία λοιπὸν τῶν ριζῶν περιέχεται μεταξὺ λ καὶ μ. Ἐὰν δὲ εἶναι $\lambda<\mu$ καὶ $\chi'<\chi''$, θὰ ἔχωμεν τὴν ἑξῆς διάταξιν λ, χ', μ, χ''.

2) Ἐὰν τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ὁμόσημα, ἤτοι ἐὰν $\varphi(\lambda).\varphi(\mu)>0$, ἀλλ' ἔχουν σημεῖον ἀντίθετον τοῦ α, ἡ ἐξίσωσις, μεθ' ὅσα εἴπομεν προηγουμένως, ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἐντὸς τῶν ὁποίων κεῖνται οἱ λ καὶ μ. ὥστε ἔχομεν τὴν ἑξῆς διάταξιν χ', λ, μ, χ''.

3) Ἐὰν τὰ ἐξαγόμενα $\varphi(\lambda)$, $\varphi(\mu)$ ἔχουν τὸ σημεῖον τοῦ α, θὰ ἐξετάσωμεν τὴν διακρίνουσαν $\beta^2-4\alpha\gamma$. Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ ἡ αἰτουμένη σύγκρισις δὲν δύναται νὰ γίνῃ διότι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι μιγάδες. Ἐὰν δὲ εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἡ σύγκρισις γίνεται ἀμέσως πρὸς τὴν μόνην ρίζαν $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐὰν τέλος εἶναι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, εὐκόλως συνάγομεν ἐκ τῶν προηγουμένων, ὅτι οὐδεὶς τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι ἀμφότεροι ἢ μεγαλύτεροι τῆς μεγαλυτέρας ρίζης ἢ μικρότεροι τῆς μικροτέρας ἢ νὰ εἶναι ὁ εἷς μικρότερος τῆς μικροτέρας ρίζης, ὁ δὲ ἄλλος μεγαλύτερος τῆς μεγαλυτέρας, θὰ ἔχωμεν δὲ τὴν τοιαύτην ἢ τοιαύτην διάταξιν κατὰ τὴν σύγκρισιν μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ριζῶν $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ὅταν μεταξὺ τῶν δύο ἀριθμῶν λ καὶ μ ὑπάρχῃ μία καὶ μόνη ρίζα τῆς ἐξισώσεως λέγομεν ὅτι οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοὶ χωρίζουν μίαν ρίζαν τῆς ἐξισώσεως.

Π.δ. 1) *Νὰ συγκριθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως* $-2\chi^2+9\chi-10=0$, *πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς* 1 *καὶ* $2\frac{1}{4}$, *χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.*

Ἔχομεν $\varphi(1)=-3$ καὶ $\varphi\left(2\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}$, ἀφοῦ λοιπὸν τὰ ἐξαγόμενα εἶναι ἀντίθετα, συνάγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, μία τῶν ὁποίων περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ $2\frac{1}{4}$. Ἄρα ἔχομεν τὴν ἑξῆς διάταξιν 1, χ΄, $2\frac{1}{4}$, χ΄΄ (χ΄<χ΄΄).

2) *Νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 2 καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-4(3\lambda+2)\chi+24\lambda=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ.*

Ἔχομεν $\varphi(0)=24\lambda$ καὶ $\varphi(2)=-12$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ ἐξαγόμενον φ(2) ἔχει πάντοτε σημεῖον ἀντίθετον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ χ^2, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ λ.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι δι' ἀρνητικὰς τιμὰς τοῦ λ, τὸ ἐξαγόμενον φ(0) εἶναι ὁμόσημον μὲ τὸ φ(2). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 2 κεῖνται ἐντὸς τῶν ριζῶν, ἡ δὲ διάταξις εἶναι χ΄, 0, 2, χ΄΄.

Διὰ $\lambda=0$ καὶ $\lambda>0$ τὸ ἐξαγόμενον φ(0) ἔχει σημεῖον ἀντίθετον μὲ τὸ σημεῖον τοῦ φ(2). Ὥστε ὁ μὲν 0 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν, ὁ δὲ 2 κεῖται μεταξὺ αὐτῶν καὶ ἡ διάταξις εἶναι 0, χ΄, 2, χ΄΄.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ χ τὰ κάτωθι τριώνυμα ἔχουν τιμὰς θετικάς, ἀρνητικάς, ἢ μηδέν.

690) $\chi^2-10\chi+21$ 691) $-2\chi^2+14\chi-20$ 692) $9\chi^2-12\chi+4$
693) $-\chi^2+6\chi-34$ 694) $16\chi^2-10\chi+1$ 695) $-72\chi^2+17\chi-1$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν −3, −2, −1, 2, 3 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται.

696) $4\chi^2+8\chi-5=0$, 697) $9\chi^2-15\chi+6=0$ 698) $\chi^2-4\chi+3,99=0$.

699) Νὰ δειχθῇ, χωρὶς χρῆσιν τῆς διακρινούσης, ὅτι ἡ ἐξίσωσις $-3\chi^2+13\chi-13=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους καὶ κατόπιν νὰ γίνῃ ἡ διάταξις τῶν ριζῶν αὐτῆς κατὰ τάξιν μεγέθους πρὸς τοὺς διαδοχικοὺς ἀκεραίους, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

700) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ 4 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $5\chi^2-20\chi+\lambda+5=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ.

701) Νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ 0 καὶ 1 καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-5(3\lambda+7)\chi+15\lambda=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ.

702) Νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ −1 καὶ 0 καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\lambda-2)\chi^2-3(2\lambda+1)\chi+9\lambda=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ.

703) Νὰ διαταχθοῦν κατὰ τάξιν μεγέθους οἱ ἀριθμοὶ −2 καὶ 1 καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\lambda+3)\chi^2-2(\lambda-1)\chi+2\lambda-5=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ.

198. ***Λύσις ἀνισοτήτων δευτέρου βαθμοῦ.*** Ἡ ἀνισότης τοῦ δευτέρου βαθμοῦ δύναται ν' ἀναχθῇ ἐν γένει εἰς τὴν μορφὴν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0.$$

Ἀλλὰ καὶ ἡ δευτέρα μορφὴ ἀνάγεται εἰς τὴν πρώτην, ὅταν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων αὐτῆς, ὁπότε ἀντιστρέφεται καὶ τὸ σημεῖον τῆς ἀνισότητος.

Λύσις τῆς ἀνισότητος $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma>0$ *λέγεται ἡ εὕρεσις τῶν τιμῶν τοῦ* χ *διὰ τὰς ὁποίας τὸ τριώνυμον γίνεται θετικόν.* Ὥστε διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀνισότητα αὐτὴν θὰ ἐξετάσωμεν τὸ τριώνυμον εἰς τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ διακρίνουσα εἶναι :

1) $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, ὁπότε αἱ ρίζαι χ' καὶ χ'' τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι.

Τότε, ἐὰν $\alpha>0$, πρέπει τὸ χ νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας ἐκτὸς τῶν ριζῶν, δηλαδὴ ἂν $\chi'<\chi''$ πρέπει νὰ εἶναι $\chi''<\chi<\chi'$. Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha<0$, τότε τὸ χ πρέπει νὰ λάβῃ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\chi'<\chi<\chi''$.

2) $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ὁπότε, ἐὰν $\alpha>0$ ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ διάφορον τῆς τιμῆς τῆς ρίζης, ἐὰν δὲ $\alpha<0$, ἡ ἀνισότης δὲν ἐπαληθεύεται δι' οὐδεμίαν τιμὴν τοῦ χ.

3) $\beta^2-4\alpha\gamma<0$· ἡ ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ ἐὰν $\alpha>0$, δι' οὐδεμίαν δὲ ἐὰν $\alpha<0$.

Π.δ. 1) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $2\chi^2-7\chi+6>0$.

Ἐπειδὴ εἶναι $\chi'=2$ καὶ $\chi''=\dfrac{3}{2}$ πρὸς δὲ καὶ $2>0$, ἕπεται ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ $\chi>2$ καὶ $\chi<\dfrac{3}{2}$.

2) *Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης* $\chi+\dfrac{10}{\chi}>7$.

Ἔχομεν $\dfrac{\chi^2-7\chi+10}{\chi}>0$ (1). Διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ κλάσμα πρέπει οἱ ὅροι του νὰ εἶναι ὁμόσημοι, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι συγχρόνως $\chi>0$ καὶ $\chi^2-7\chi+10>0$ ἢ $\chi<0$ καὶ $\chi^2-7\chi+10<0$.

Ἀλλ' αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι $\chi'=2$ καὶ $\chi''=5$, ἐπειδὴ δὲ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^2 εἶναι θετικός, ἕπεται ὅτι τὸ τριώνυμον εἶναι θετικὸν διὰ $\chi<2$ καὶ $\chi>5$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $\chi>2$ καὶ $\chi<5$.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης θὰ ἐπαληθεύεται διὰ $\chi>5$ καὶ $0<\chi<2$.

Διὰ $\chi<0$ τὸ τριώνυμον $\chi^2-7\chi+10$ εἶναι θετικόν. Ἑπομένως αἱ ἀνισότητες $<\chi<0$ καὶ $\chi^2-7\chi+10<0$ δὲν συναληθεύουν.

Τὴν ἀνωτέρω ἀνισότητα δυνάμεθα νά λύσωμεν καὶ ὡς ἑξῆς. Πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (1) ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ (διὰ νὰ εἶναι ὁ πολλαπλασιαστὴς θετικός), ὁπότε λαμβάνομεν τὴν ἀνισότητα $\chi(\chi^2-7\chi+10)>0$. Ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι τὸ γινόμενον τῶν δύο παραγόντων χ καὶ $\chi^2-7\chi+10$ θετικόν, πρέπει νὰ εἶναι οὗτοι ὁμόσημοι· τοῦτο δὲ εἴδομεν καὶ μὲ τὸν προηγούμενον τρόπον.

3) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης:

$$(\chi-3)^2.(\chi^2-8\chi+15).(2\chi^2+5\chi+2)>0.$$

Εἰς τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ πρῶτος παράγων $(\chi-3)^2$ εἶναι πάντοτε θετικός. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ τὸν παραλείψωμεν καὶ νὰ θεωρήσωμεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα

$$(\chi^2-8\chi+15)(2\chi^2+5\chi+2)>0.$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\chi^2-8\chi+15$ εἶναι 3 καὶ 5. Ἑπομένως εἶναι τοῦτο θετικὸν διὰ $5<\chi<3$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $3<\chi<5$.

Τοῦ δευτέρου τριωνύμου $2\chi^2+5\chi+2$ αἱ ρίζαι εἶναι -2 καὶ $-\frac{1}{2}$. Ἑπομένως εἶναι τοῦτο θετικὸν διὰ $-\frac{1}{2}<\chi<-2$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $-2<\chi<+\frac{1}{2}$.

Ὥστε διὰ $\chi<-2$ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοί. Διὰ $-2<\chi<-\frac{1}{2}$ ὁ πρῶτος παράγων εἶναι θετικὸς καὶ ὁ δεύτερος ἀρνητικός.

Διὰ $-\frac{1}{2}<\chi<3$ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοί.

Διὰ $3<\chi<5$ ὁ πρῶτος παράγων εἶναι ἀρνητικὸς καὶ ὁ δεύτερος θετικός.

Διὰ $\chi>5$ ἀμφότεροι οἱ παράγοντες εἶναι θετικοί.

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἐπαληθεύεται διὰ

$$\chi<-2, \text{ ἤ, } -\frac{1}{2}<\chi<3 \text{ ἢ } \chi>5$$

4) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\lambda\chi^2-2(\lambda-1)\chi+\lambda+1=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς παραμέτρου λ.

Ἡ διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως εἶναι $(\lambda-1)^2-\lambda(\lambda+1)=-3\lambda+1$.

Όταν δὲ $-3\lambda+1>0$ ἤτοι ὅταν $\lambda<\frac{1}{3}$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{\lambda+1}{\lambda}$, θὰ εἶναι δὲ τοῦτο θετικόν, ἐὰν εἶναι $\lambda>0$ ἢ $\lambda<-1$ καὶ ἀρνητικόν, ἐὰν εἶναι $-1<\lambda<0$.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ριζῶν εἶναι $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}$ θὰ εἶναι δὲ τοῦτο θετικὸν διὰ $\lambda>1$ καὶ $\lambda<0$ καὶ ἀρνητικὸν διὰ $0<\lambda<1$.

Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἑξῆς σειρὰν σημαντικῶν τιμῶν τῆς λ.

$$-1<0<\frac{1}{3}$$

Ὅταν εἶναι $\lambda<-1$ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν εἶναι θετικὸν καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα. Ἀμφότεραι λοιπὸν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι θετικαί.

Ὅταν εἶναι $-1<\lambda<0$ τὸ γινόμενον εἶναι ἀρνητικόν· αἱ ρίζαι λοιπὸν εἶναι ἑτερόσημοι καὶ μεγαλυτέρα κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἡ θετική.

Ὅταν εἶναι $0<\lambda<\frac{1}{3}$ τὸ γινόμενον εἶναι θετικόν, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀρνητικόν. Αἱ ρίζαι ἐπομένως εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικαί.

Τέλος ἐὰν $\lambda>\frac{1}{3}$ αἱ ρίζαι εἶναι μιγάδες.

Διὰ $\lambda=\frac{1}{3}$ ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνην ρίζαν τὴν $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}=-4$

Διὰ $\lambda=-1$ ὁ σταθερὸς ὅρος $\lambda+1$ μηδενίζεται καὶ ἡ ἐξίσωσις ἔχει ρίζας 0 καὶ $\frac{2(\lambda-1)}{\lambda}=4$.

Ὅταν ὁ λ τείνῃ πρὸς τὸ 0 ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως (§ 191,2) τείνει πρὸς τὸν ἀριθμὸν $\frac{\lambda+1}{2(\lambda-1)}=-\frac{1}{2}$, ὅστις πληροῖ τὴν ἐξίσωσιν $-2(\lambda-1)\chi+\lambda+1=0$, ἐνῷ ἡ ἄλλη γίνεται ἀπείρως μεγάλη κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

704) $\chi^2+2\chi-15<0$ 705) $\chi^2-8>0$ 706) $\chi^2+4\chi-1>0$

707) $\chi^2+2\chi+6<0$ 708) $\chi^2+\chi+10>0$ 709) $2\chi^2-5\chi-3<(\chi-1)^2$

710) $\chi(\chi^2-4\chi+5)(2\chi^2-15\chi+27)>0$ 711) $(\chi-2)^2(\chi^2-7\chi+6)(2\chi^2+9\chi+4)>0$

712) $\frac{1}{\chi+1}-\frac{1}{\chi}<-\frac{1}{30}$ 713) $\frac{(\chi-1)(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-4)}>1$ 714) $\frac{\chi+1}{\chi-1}<\frac{\chi+3}{\chi+1}$

715) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀνισότης $\chi^2-2\chi+\lambda>0$ ἐπαληθεύεται δι' οἱανδήποτε τιμὴν τοῦ χ;

716) Ὁμοίως ὡς ἄνω καὶ διὰ τὴν ἀνισότητα $\chi^2-4\chi+\lambda>4$.

717) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις $\lambda\chi^2-(\lambda-1)\chi+3\lambda=0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

718) Ὁμοίως ὡς ἄνω καὶ διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-(3\lambda-2)\chi+2\lambda-5\chi+2=0$.

719) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $(2\lambda-3)\chi^2+2(\lambda+3\chi+\lambda-17=0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τῆς λ.

720) Ὁμοίως νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $(\lambda-1)\chi[(\lambda-2)\chi+1]=1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς δευτεροβαθμίους.

199. *Ἐξισώσεις ἔχουσαι ριζικὰ δευτέρας τάξεως.*—*1ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\chi-\sqrt{\chi}=2.$$

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει τετραγωνικὴν ρίζαν, ὑπὸ τὴν ὁποίαν ὑπάρχει ὁ ἄγνωστος χ. Διὰ νὰ λύσωμεν αὐτὴν (ὡς καὶ πᾶσαν ἄλλην ἐξίσωσιν, ἔχουσαν ἓν ριζικὸν δευτέρας τάξεως) κατορθοῦμεν ὥστε τὸ ριζικὸν μόνον νὰ ἀποτελῇ τὸ ἓν τῶν μελῶν καὶ ἔπειτα ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον, ὅτε ἡ ρίζα ἐξαφανίζεται. Κατὰ ταῦτα δὲ ἔχομεν

$$\chi-2=\sqrt{\chi} \text{ καὶ } (\chi-2)^2=\chi \text{ ἢ } \chi^2-5\chi+4=0. \quad (1)$$

Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν (1), εὑρίσκομεν $\chi'=4$, $\chi''=1$. Ἐὰν ὅμως κάμωμεν τὴν ἐπαλήθευσιν εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν παρατηροῦμεν ὅτι $4-\sqrt{4}=4-2=2$ ἐνῷ $1-\sqrt{1}=1-1=0$ καὶ ὄχι ἴσον μὲ 2. Τοῦτο δὲ συμβαίνει διότι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-5\chi+4=0$ (Θ . . . .) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν δοθεῖσανκαὶ πρὸς τὴν $\chi+\sqrt{\chi}=2$, πρὸς ἣν ἁρμόζει ἡ ρίζα 1.

Αἱ ἐξισώσεις $\chi-\sqrt{\chi}=2$ καὶ $\chi+\sqrt{\chi}=2$ πρὸς ἃς εἶναι ἰσοδύναμος ἡ (1) λέγονται *συζυγεῖς* ἀλλήλων.

2ον) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις*

$$\chi+\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4.$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως ὡς ἄνω εὑρίσκομεν $\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4-\chi$, $2\chi^2-2\chi-11=(4-\chi)^2$ ἢ $\chi^2+6\chi-27=0$, ἧς ρίζαι εἶναι αἱ $\chi'=3$, $\chi''=-9$. Ἐπαληθεύουν δὲ ἀμφότεραι τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Ἑπομένως ἡ συζυγὴς πρὸς αὐτὴν $\chi-\sqrt{2\chi^2-2\chi-11}=4$, δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν.

3ον) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{2\chi-1}-\sqrt{\chi-1}=1.$$

Εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχουν δύο ριζικὰ δευτέρας τάξεως. Διὰ νὰ λύσωμεν δὲ αὐτήν, θὰ ἀπομονώσωμεν τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο ριζικῶν εἰς τὸ ἓν μέλος καὶ θὰ ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς νέας ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον. Θὰ εὕρωμεν δὲ οὕτω ἐξίσωσιν μὲ ἓν ριζικόν, τὴν ὁποίαν γνωρίζομεν νὰ λύωμεν. Ἔχομεν δὲ οὕτω

$$\sqrt{2\chi-1}=1+\sqrt{\chi-1}$$

καὶ

$$2\chi-1=(1+\sqrt{\chi-1})^2$$

ἤτοι

$$\chi-1=2\sqrt{\chi-1}. \qquad (1)$$

Ἐὰν ἤδη τὰ μέλη τῆς νέας αὐτῆς ἐξισώσεως ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$(\chi-1)^2=4(\chi-1)$$

ἤτοι

$$\chi^2-6\chi+5=0 \qquad (2).$$

Λύοντες δὲ τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὰς ρίζας

$$\chi'=5 \quad \chi''=1.$$

Ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν (1), ἤτοι πρὸς τὴν

$$\chi-1=2\sqrt{\chi-1}.$$

καὶ πρὸς τὴν συζυγῆ της

$$\chi-1=-2\sqrt{\chi-1}. \qquad (3).$$

Ἀλλ' ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$$\sqrt{2\chi-1}-\sqrt{\chi-1}=1, \qquad -\sqrt{2\chi-1}+\sqrt{\chi-1}=1,$$

ἡ δὲ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὰς ἐξισώσεις

$$-\sqrt{2\chi-1}-\sqrt{\chi-1}=1, \qquad \sqrt{2\chi-1}+\sqrt{\chi-1}=1.$$

Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (2) εἶναι ἰσοδύναμος καὶ πρὸς τὰς τέσσαρας αὐτὰς ἐξισώσεις. Ἐπειδὴ δὲ αἱ εὑρεθεῖσαι ρίζαι

$$\chi'=5, \qquad \chi''=1$$

ἐπαληθεύουν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν, ἕπεται ὅτι αἱ ἄλλαι τρεῖς ἐξισώσεις δὲν ἔχουν οὐδεμίαν λύσιν.

Σημείωσις.—Αἱ ἐξισώσεις αἱ ἔχουσαι ριζικὰ λύονται ἐνίοτε εὐκολώτερον διὰ τῆς ἀλλαγῆς τοῦ ἀγνώστου. Οὕτως ἡ πρώτη ἂν τεθῇ $\sqrt{\chi}=\omega$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\omega^2-\omega-2=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\omega=2$ ἢ -1· ἄρα $\chi=4$ ἢ 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

721) $\sqrt{\chi+4}=\chi-2$ 722) $\chi+\sqrt{\chi+3}=4\chi-1$. 723) $5\chi-4\sqrt{\chi-11}=3(\chi-2)$.

724) $\sqrt{\chi+7}=1+\sqrt{\chi+2}$ 725) $\sqrt{\chi-3}+\sqrt{\chi+9}=6$ 726) $\sqrt{2\chi}+2\sqrt{\chi+2}=2$

727) $\sqrt{5\chi-1}-\sqrt{8-2\chi}=\sqrt{\chi-1}$ 728) $2\sqrt{\chi+1}+\sqrt{\chi-2}=2\sqrt{\chi+2}$

729) $\sqrt{\chi+7-\sqrt{5(\chi-2)}}=3$ 730) $\sqrt{3\chi+7+3\sqrt{3\chi-4}}=7$

731) $\sqrt{\dfrac{\chi}{\chi+\alpha}}-\sqrt{\dfrac{\chi+\alpha}{\chi}}=2$ 732) $\alpha-\sqrt{\alpha^2-\chi^2}=\chi$

733) $\sqrt{\alpha^2-\chi}+\sqrt{\beta^2+\chi}=\alpha+\beta$ 734) $2\chi+2\sqrt{\alpha^2+\chi^2}=\dfrac{5\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\chi^2}}$

Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{7+\chi^3}=1+\chi$. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι πρέπει νὰ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς τὴν τρίτην δύναμιν. Ἡ δὲ προκύπτουσα ἐξίσωσις, $7+\chi^3=(1+\chi)^3$ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν δοθεῖσαν. Διότι ὑψώσαμεν ἀμφότερα τὰ μέλη εἰς περιττὴν δύναμιν καὶ ἑπομένως τὰ σημεῖα τῶν μελῶν τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εἶναι ἀντιστοίχως τὰ αὐτὰ μὲ τὰ σημεῖα τῶν μελῶν τῆς δοθείσης. Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἡ δευτέρα ἐξίσωσις μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων καὶ τῶν ἀναγωγῶν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν $\chi^2+\chi-2=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\chi=1$ ἢ -2. Αἱ ρίζαι δὲ αὗται εἶναι καὶ ρίζαι τῆς δοθείσης. Καὶ πράγματι διότι εἶναι $\sqrt[3]{7+1}=\sqrt[3]{8}=2$ καὶ $1+1=2$, ἐξ ἄλλου δὲ εἶναι $\sqrt[3]{7-8}=\sqrt[3]{-1}=-1$ καὶ $1-2=-1$

200. ***Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.***—Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=0 \qquad (1)$$

αἱ ὁποῖαι εἶναι, ὡς βλέπομεν τοῦ τετάρτου βαθμοῦ καὶ περιέχουν μόνον τὰς ἀρτίας δυνάμεις τοῦ ἀγνώστου, λέγονται ***διτετράγωνοι***. Ἡ λύσις δὲ αὐτῶν ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Διότι ἐὰν θέσωμεν $\chi^2=\psi$ θὰ εἶναι $\chi^4=\psi^2$. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $\alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma=0$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν

$$\psi=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ ἢ ἐπειδὴ } \chi=\pm\sqrt{\psi}$$

$$\chi=\pm\sqrt{\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}} \qquad (2)$$

Εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι ὁ τύπος (2) περιέχει τὰς ἑξῆς τέσσαρας ρίζας

$$\text{ἤτοι } \chi_1=+\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}, \qquad \chi_2=-\sqrt{\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

$$\chi_3=+\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}\,,\qquad \chi_4=-\sqrt{\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}}$$

Οὕτως αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-14\chi^2+16=0$ εἶναι

$$+\sqrt{\frac{13+5}{2}}\,,-\sqrt{\frac{13+5}{2}}\,,+\sqrt{\frac{13-5}{2}}\,,-\sqrt{\frac{13-5}{2}}$$

δηλαδὴ $+3$, -3, $+2$, -2 ἢ συντομώτερον ± 3, ± 2.

201. *Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως.*—Διὰ νὰ ἴδωμεν, ἂν μία διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχῃ ὅλας τὰς ρίζας της ἢ μερικὰς μόνον πραγματικὰς ἢ φανταστικάς, θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου, ἡ ὁποία προκύπτει ἐξ αὐτῆς. Οὕτως, ἐὰν πρὸς τὸν σκοπὸν τοῦτον μᾶς δοθῇ π. χ. ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-5\chi^2+4=0$, θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\psi^2-5\psi+4=0$. Ἐπειδὴ δὲ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἀμφότεραι θετικαί, συνάγομεν, ὅτι καὶ αἱ 4 ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι πραγματικαί. Διὰ δὲ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4+8\chi^2-9=0$ ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ἐκ τῶν 4 ριζῶν αὐτῆς αἱ 2 εἶναι πραγματικαὶ καὶ αἱ ἄλλαι 2 φανταστικαί, διότι ἐκ τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου $\psi^2+8\psi-9=0$, αἱ ὁποῖαι εἶναι πραγματικαί, ἡ μία εἶναι θετικὴ καὶ ἡ ἄλλη ἀρνητική. Τέλος διὰ τὴν ἐξίσωσιν $\chi^4+5\chi^2+4=0$ εὑρίσκομεν ὅτι καὶ αἱ 4 ρίζαι εἶναι φανταστικαί, διότι αἱ ρίζαι τῆς $\psi^2+5\psi+4=0$ εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικαί.

Εὐνόητον δὲ εἶναι ὅτι ἐὰν ἡ δευτεροβάθμιος ἔχει μίαν ρίζαν διπλῆν καὶ αὕτη εἶναι θετική, ἡ διτετράγωνος ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς τὰς ὁποίας θεωροῦμεν ὡς ***διπλᾶς***. Ἐὰν ὅμως ἡ διπλῆ ρίζα εἶναι ἀρνητική, τότε αἱ δύο ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι φανταστικαί.

202. *Ἀνάλυσις διτετραγώνου τριωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων.*—Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων μὲ τὸν ἴδιον τρόπον, μὲ τὸν ὁποῖον ἀναλύεται τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ (§ 0,194).

Οὕτως, ἐὰν π. χ. ἔχωμεν τὸ τριώνυμον $4\chi^4-37\chi^2+9$ καὶ θέσωμεν $\chi^2=\psi$, τοῦτο τρέπεται εἰς τὸ $4\psi^2-37\psi+9$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ ρίζαι αὐτοῦ εἶναι 9 καὶ $\frac{1}{4}$, ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστὰ

$$4\psi^2-37\psi+9=4(\psi-9)\left(\psi-\frac{1}{4}\right)$$

ἤτοι $\quad 4\chi^4-37\chi^2+9=4(\chi^2-3^2).\left[\chi^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$

ἤ, τέλος, $4\chi^4-37\chi^2+9=4(\chi-3)(\chi+3)\left(\chi-\frac{1}{2}\right)\left(\chi+\frac{1}{2}\right)$.

Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $-3, +3, -\frac{1}{2}$ καὶ $+\frac{1}{2}$ εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ δοθέντος διτετραγώνου τριωνύμου. Γενικῶς δέ, ἐὰν αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$ εἶναι $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$, θὰ εἶναι

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma=\alpha(\chi-\chi_1)(\chi-\chi_2)(\chi-\chi_3)(\chi-\chi_4).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

735) $\chi^4-26\chi^2+25=0$ 736) $36\chi^4-13\chi^2+1=0$ 737) $25\chi^4-26\chi^2+1=0$

738) $49\chi^4+24\chi^2=25$ 739) $4\chi^4-197\chi^2+49=0$ 740) $25\chi^4+224\chi^2=9$

741) $(\chi^2+8)^2+(\chi^2-5)^2=97$ 742) $(\chi^2-7)^2+(\chi^2-3)^2=49$

743) $\frac{\chi^2+2}{11}+\frac{32}{\chi^2-32}=7$ 744) $\frac{3}{\chi^2-12}-\frac{\chi^2-4}{8}=-3\frac{7}{8}$

745) $\chi^4-\beta\chi^2+\gamma=0$ 746) $\alpha\chi^4-(\alpha^2\beta^2+1)\chi^2+\alpha\beta^2=0$

747) $\chi^4-4(\alpha+\beta)\chi^2+16(\alpha-\beta)^2=0$ 748) $\chi^4+(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+\alpha^2\beta^2=0$

749) $\chi^2+\beta=\alpha-\frac{\beta^2}{\chi^2}$ 750) $\chi-\frac{2\alpha}{\chi}=\frac{16\beta^2-\alpha^2}{\chi^3}$

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πραγματικῶν ῥιζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων πρὶν ἢ λυθοῦν:

751) $\chi^4-18\chi^2+65=0$ 752) $15\chi^4+13\chi^2+2=0$

753) $\chi^4+9\chi^2-136=0$ 754) $\chi^4-14\chi^2+149=0$

755) $2\chi^4-4\chi^2+3=0$ 756) $10\chi^4-9{,}6\chi^2+0{,}1=0$

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ τριώνυμα:

757) $\chi^4-41\chi^2-400$ 758) $\chi^4+48\chi^2-49$

759) $400\chi^4-9\chi^2-1$ 760) $36\chi^4+143\chi^2-4$

761) $\chi^4-24\chi^2+143$ 762) $\chi^4-3\chi^2+2$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ῥίζας τάς:

763) $\pm1, \pm\frac{1}{4}$ 764) $\pm3, \pm\frac{2}{3}$ 765) $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{4}$

766) $\pm5, \pm\sqrt{2}$ 767) $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{5}$ 768) $\pm\sqrt{7}, \pm5i$

769) $\pm\alpha, \pm\sqrt{\alpha}$ 770) $\pm\beta i, \pm\beta$ 771) $\pm\alpha i, \pm i$

203. *Ἐξισώσεις ἀντίστροφοι.* — *Μία ἐξίσωσις ἀκεραία $\varphi(\chi)=0$ λέγεται ἀντίστροφος, ὅταν ἔχουσα ῥίζαν ἀριθμὸν τινὰ ὡρισμένον, ἔχει ῥίζαν καὶ τὸν ἀντίστροφον αὐτοῦ ἀριθμόν.*

Οὕτως ἡ ἐξίσωσις $5\chi^2-26\chi+5=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εἶναι 5 καὶ $\frac{1}{5}$, ἤτοι ἀντίστροφοι ἀριθμοί, εἶναι ἀντίστροφος.

204. *Πρόβλημα.* — *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἱκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθῆκαι, ἵνα μία ἐξίσωσις εἶναι ἀντίστροφος.*

Ἔστω ἡ ἀρτίου βαθμοῦ ἐξίσωσις

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\delta\chi+\varepsilon=0, \text{ ὅπου } \alpha\neq0.$$

Ἐὰν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς δι' α καὶ θέσωμεν

$$\frac{\beta}{\alpha}=B,\quad \frac{\gamma}{\alpha}=\Gamma,\quad \frac{\delta}{\alpha}=\Delta \quad \text{καὶ} \quad \frac{\varepsilon}{\alpha}=E \tag{1}$$

λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν

$$\chi^4+B\chi^3+\Gamma\chi^2+\Delta\chi+E=0 \tag{2}$$

Ἀλλ' ἐὰν θέσωμεν εἰς αὐτὴν $\frac{1}{\chi}$ ἀντὶ τοῦ χ, θὰ λάβωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\left(\frac{1}{\chi}\right)^4+B\left(\frac{1}{\chi}\right)^3+\Gamma\left(\frac{1}{\chi}\right)^2+\Delta\left(\frac{1}{\chi}\right)+E=0$$

ἢ τὴν ἰσοδύναμον

$$\chi^4+\frac{\Delta}{E}\chi^3+\frac{\Gamma}{E}\chi^2+\frac{B}{E}\chi+\frac{1}{E}=0 \tag{3}$$

τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι εἶναι φανερὸν ὅτι εὑρίσκονται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν μονάδα 1 διαδοχικῶς δι' ὅλων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (2). Ὥστε ἐὰν ἡ ἐξίσωσις (2), ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα, εἶναι ἀντίστροφος, αἱ ρίζαι αὐτῆς θὰ εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως (3). Ἑπομένως τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) θὰ εἶναι τὰ αὐτά. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν αἱ ἐξισώσεις (2) καὶ (3) ταὐτίζονται, ἡ ἐξίσωσις (2), ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα, θὰ εἶναι ἀντίστροφος. Διότι ἀφοῦ ταυτίζονται, θὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ρίζας καὶ ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς (2), ἄρα καὶ τῆς δοθείσης, θὰ εὑρεθοῦν, ἐὰν διαιρεθῇ ἡ μονὰς διαδοχικῶς δι' ἑκάστης τούτων.

Ὥστε: *Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα μία ἐξίσωσις ἀκεραία* $\varphi(\chi)=0$ *εἶναι ἀντίστροφος, εἶναι νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν* $\varphi\left(\frac{1}{\chi}\right)=0$.

Κατὰ ταῦτα λοιπόν, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\chi^4+B\chi^3+\Gamma\chi^2+\Delta\chi+E=0$, ἑπομένως καὶ ἡ δοθεῖσα, εἶναι ἀντίστροφος, πρέπει νὰ ταυτίζεται μὲ

$$\text{τὴν} \quad \chi^4+\frac{\Delta}{E}\chi^3+\frac{\Gamma}{E}\chi^2+\frac{B}{E}\chi+\frac{1}{E}=0.$$

Ἀλλὰ τότε πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$B=\frac{\Delta}{E},\quad \Gamma=\frac{\Gamma}{E},\quad \Delta=\frac{B}{E} \quad \text{καὶ} \quad E=\frac{1}{E}.$$

Ἀλλ' ἡ ἰσότης $E=\frac{1}{E}$ δίδει $E=\pm1$. Ἐκ δὲ τῶν ἄλλων, ἐὰν λάβωμεν $E=1$, θὰ ἔχωμεν $B=\Delta$ ἤ, ἐπειδὴ ἐθέσαμεν

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}=E,\quad \frac{\beta}{\alpha}=B \text{ καὶ } \frac{\delta}{\alpha}=\Delta$$

θὰ ἔχωμεν $\varepsilon=\alpha$ καὶ $\beta=\delta$.

Ἐὰν δὲ λάβωμεν $E=-1$, θὰ ἔχωμεν $B=-\Delta$, $\Gamma=-\Gamma$, δηλαδὴ $2\Gamma=0$, ἤτοι $\Gamma=0$ καὶ $\varepsilon=-\alpha$, $\delta=-\beta$ καὶ $\gamma=0$, ἐπειδὴ ἐθέσαμεν $\frac{\gamma}{\alpha}=\Gamma$.

Ὥστε αἱ ἐξισώσεις αἱ ἀντίστροφοι τοῦ 4ου βαθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$ ἢ $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\beta\chi+\alpha=0$

$$\alpha\chi^4+\beta\chi^3-\beta\chi-\alpha=0.$$

Καὶ τῶν μὲν δύο πρώτων οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσοι, τῆς δὲ τρίτης οἱ συντελεσταὶ αὐτοὶ εἶναι ἀντίθετοι καὶ ἐπὶ πλέον εἰς αὐτὴν δὲν ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος.

Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἀντίστροφοι ἐξισώσεις 3ου βαθμοῦ εἶναι τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha=0 \quad ἢ \quad \alpha\chi^3+\beta\chi^2-\beta\chi-\alpha=0$$

Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι: *Ἵνα ἐξίσωσις ἀκεραία $\varphi(\chi)=0$ εἶναι ἀντίστροφος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, τοῦ πολυωνύμου $\varphi(\chi)$, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ὁμοίους ὅρους καὶ εἶναι διατεταγμένον, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἰσάκις ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων νὰ εἶναι ἴσοι ἢ ἀντίθετοι· ἀλλ' ἐν τῇ δευτέρᾳ ταύτῃ περιπτώσει δέον νὰ μὴ ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος.*

Ἐκ τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων αἱ 3ου, 4ου καὶ 5ου βαθμοῦ ἀνάγονται εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων ὡς ἑξῆς φαίνεται.

205. α) *Λύσις ἀντιστρόφων ἐξισώσεων 3ου βαθμοῦ.* 1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις

$$\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha=0.$$

Ἐπειδὴ διὰ $\chi=-1$ λαμβάνομεν $-\alpha+\beta-\beta+\alpha=0$, ἔπεται, ὅτι τὸ αον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ $\chi+1$ ἐπὶ τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως $(\alpha\chi^3+\beta\chi^2+\beta\chi+\alpha):(\chi+1)$. Ἤτοι ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται $(\chi+1)[\alpha\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha]=0$, ἧς αἱ ῥίζαι εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi+1=0$ καὶ $\alpha\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha=0$.

Π.δ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2\chi^3+7\chi^2+7\chi+2=0$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi+1=0$ καὶ $2\chi^2+(7-2)\chi+2=0$. Καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης εὑρίσκομεν $\chi=-1$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\chi=-2 \quad καὶ \quad \chi=-\frac{1}{2}.$$

2) Ἔστω ἤδη ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις $\alpha\chi^3+\beta\chi^2-\beta\chi-\alpha=0$.

Ἐπειδὴ αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=1$, εὑρίσκομεν, σκεπτόμενοι ὡς ἄνω, ὅτι γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(\chi-1)[\alpha\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha]=0$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi-1=0$ καὶ $\alpha\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha=0$.

Π.δ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3\chi^3+7\chi^2-7\chi-3=0$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi-1=0$ καὶ $3\chi^2+(3+7)\chi+3=0$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι $1, -3$ καὶ $-\frac{1}{3}$.

β) Λύσις ἀντιστρόφων ἐξισώσεων 4ου βαθμοῦ. 1) Ἔστω πρὸς λύσιν ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰ μέλη αὐτῆς διὰ χ^2 λαμβάνομεν

$$\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma+\frac{\beta}{\chi}+\frac{\alpha}{\chi^2}=0 \quad \text{ἢ τὴν}$$

$$\alpha\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+\beta\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+\gamma=0.$$

Ἐὰν ἤδη θέσωμεν $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$ θὰ εἶναι

$$\psi^2=\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad \psi^2-2=\chi^2+\frac{1}{\chi^2}$$

Ὥστε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται

$$\alpha(\psi^2-2)+\beta\psi+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha\psi^2+\beta\psi+\gamma-2\alpha=0.$$

ἧς αἱ ρίζαι ἔστωσαν ψ_1 καὶ ψ_2. Θέτοντες ἤδη τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$, εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ χ, ἤτοι τὰς ρίζας τῆς δοθείσης ἐξισώσεως, λύοντες τὰς ἐξισώσεις

$$\psi_1=\chi+\frac{1}{\chi} \quad \text{καὶ} \quad \psi_2=\chi+\frac{1}{\chi} \quad \text{ἤτοι τὰς}$$

$$\chi^2-\psi_1\chi+1=0 \quad \text{καὶ} \quad \chi^2-\psi_2\chi+1=0$$

Π. δ. α) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $6\chi^4+35\chi^3+62\chi^2+35\chi+6=0$.

Αὕτη κατὰ τὰ ἀνωτέρω τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$6\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)+35\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)+62=0.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἐν αὐτῇ $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$ εὑρίσκομεν τὴν $6\psi^2+35\psi+50=0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι $-\frac{5}{2}$ καὶ $-\frac{10}{3}$. Ἐπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$2\chi^2+5\chi+2=0 \quad \text{καὶ} \quad 3\chi^2+10\chi+3=0$$

Εἶναι δὲ αὗται αἱ $-2,\ -\frac{1}{2},\ -3,\ -\frac{1}{3}$.

β) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^4-\chi^2-\chi+1=0$. Αὕτη τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν

$$\left(\chi^2+\frac{1}{\chi^2}\right)-\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)=0.$$

Ἐὰν δὲ θέσωμεν ἐν αὐτῇ $\psi=\chi+\frac{1}{\chi}$, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $\psi^2+\psi-2=0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι -2 καὶ 1. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi^2+2\chi+1=0$ καὶ $\chi^2-\chi+1=0$. Εἶναι δὲ αὗται αἱ

$$-1,\ -1,\quad \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{2}.$$

2) Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^3-\beta\chi-\alpha=0$. Ἐπειδὴ αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=\pm1$, καὶ ἑπομένως ἐπειδὴ τὸ α΄ μέλος αὐτῆς διαιρεῖται διὰ $(\chi-1)(\chi+1)=\chi^2-1$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $(\chi^2-1)(\alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha)=0$. Ἑπομένως αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$\chi^2-1=0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\chi^2+\beta\chi+\alpha=0.$$

Π.δ. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\chi^4-26\chi^3+26\chi-5=0$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω αἱ ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ τῶν ἐξισώσεων

$\chi^2-1=0$ καὶ $5\chi^2-26\chi+5=0$ ἤτοι αἱ $1,\ -1,\ 5,\ \frac{1}{5}$.

γ) Λύσις ἀντιστρόφων ἐξισώσεων 5ου βαθμοῦ.—Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις 5ου βαθμοῦ τῆς μορφῆς

$$\alpha\chi^5+\beta\chi^4+\gamma\chi^3+\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0,$$

εὐκόλως βλέπομεν, ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=-1$, ἡ δὲ τῆς μορφῆς $\alpha\chi^5+\beta\chi^4+\gamma\chi^3-\gamma\chi^2-\beta\chi-\alpha=0$, ὅτι ἐπαληθεύεται διὰ $\chi=1$. Ἐὰν ἑπομένως διαιρέσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης καὶ τῆς δευτέρας ἀντιστοίχως διὰ $\chi+1$ καὶ $\chi-1$, εὑρίσκομεν ὅτι ἡ πρώτη γράφεται

$$(\chi+1)[\alpha\chi^4+(\beta-\alpha)\chi^3+(\alpha-\beta+\gamma)\chi^2+(\beta-\alpha)\chi+\alpha]=0$$

καὶ ἡ δευτέρα

$$(\chi-1)]\alpha\chi^4+(\alpha+\beta)\chi^3+(\alpha+\beta+\gamma)\chi^2+(\alpha+\beta)\chi+\alpha]=0.$$

Ἀλλ' εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις, παρατηροῦμεν, ὅτι διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ζητουμένας ρίζας πλὴν τῆς $\chi=-1$ ἢ τῆς $\chi=1$, πρέπει νὰ λύσωμεν μίαν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν 4ουβαθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

772) $\chi^3+2\chi^2+2\chi+1=0$ 773) $\chi^3-3\chi^2-3\chi+1=0$

774) $\chi^3-2\chi^2+2\chi-1=0$ 775) $3\chi^3-13\chi^2+13\chi-3=0$

776) $6\chi^3-19\chi^2+19\chi-6=0$ 777) $6\chi^3-7\chi^2-7\chi+6=0$

778) $\chi^2=\dfrac{3\chi-2}{2\chi-3}$ 779) $\chi^2=\dfrac{12-37\chi}{12\chi-37}$

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

780) $2\chi^4+5\chi^3-5\chi-2=0$ 781) $3\chi^4-10\chi^3+10\chi-3=0$

782) $2\chi^4-5\chi^3+4\chi^2-5\chi+2=0$ 783) $\chi^4-4\chi^3+5\chi^2-4\chi+1=0$

784) $3\chi^4-16\chi^3+26\chi^2-16\chi+3=0$ 785) $4\chi^4-9\chi^3-26\chi^2-9\chi+4=0$

786) $6\chi^4-25\chi^3+38\chi^2-25\chi+6=0$ 787) $\chi^4-\chi^3+\dfrac{5}{4}\chi^2-\chi+1=0$

788) $\chi^3=\dfrac{41\chi-15}{15\chi-41}$ 789) $\chi^3=\dfrac{4-17\chi}{4\chi-17}$

Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις.

790) $2\chi^5+3\chi^4-5\chi^3-5\chi^2+3\chi+2=0$ 791) $2\chi^5-3\chi^4-5\chi^3+5\chi^2+3\chi-2=0$

792) $3\chi^5-7\chi^4-10\chi^3+10\chi^2+7\chi-3=0$ 793) $6\chi^5+11\chi^4-33\chi^3-33\chi^2+11\chi+6=0$

794) $6\chi^5-7\chi^4-\chi^3-\chi^2-7\chi+6=0$

795) $\chi^4=\dfrac{11\chi-6}{6\chi-11}$ 796) $\chi^4=\dfrac{13\chi^2-4}{4\chi^2-13}$

797) $\dfrac{(\chi^2+1)(\chi^3+1)}{(\chi^2-1)(\chi^3-1)}=\dfrac{35}{26}$ 798) $\dfrac{(\chi+1)^5}{\chi(\chi^3+1)}=\dfrac{625}{42}$

799) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2-\beta\chi+\alpha=0$

Θέτομεν πρὸς τοῦτο $\chi-\dfrac{1}{\chi}=y$.

800) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi^4+\beta\chi^3+\gamma\chi^2+\beta k\chi+\alpha k^2=0$.

801) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^4+2\chi^3+3\chi^2+4\chi+4=0$.

206. ***Ἐξισώσεις διώνυμοι.*** — Μία ἐξίσωσις ἀκεραία πρὸς χ ἔχουσα δύο μόνον ὅρους λέγεται ***διώνυμος***. Οὕτως αἱ ἐξισώσεις $A\chi^\mu+B\chi^\nu=0$ (1) καὶ $\chi^\lambda=\Gamma$ (2) εἶναι διώνυμοι.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\mu>\nu$, ἡ (1) γράφεται $\chi^\nu(A\chi^{\mu-\nu}+B)=0$. Ἐπομένως πρέπει νὰ εἶναι ἢ $\chi^\nu=0$ ἢ $A\chi^{\mu-\nu}+B=0$. Ὅθεν αἱ ρίζαι τῆς (1) εἶναι, ἐκτὸς τῆς $\chi=0$, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς $\chi^\nu=0$ καὶ αἱ ρίζαι τῆς $A\chi^{\mu-\nu}+B=0$ ἢ τῆς $\chi^\lambda=\Gamma$, ἐὰν τεθῇ $\mu-\nu=\lambda$ καὶ $-\dfrac{B}{A}=\Gamma$.

Ὥστε ἡ λύσις τῶν διωνύμων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς $\chi^\lambda=\Gamma$.

Καὶ ἐὰν μὲν εἶναι λ ἄρτιον καὶ Γ θετικόν, αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εἶναι αἱ $+\sqrt[\lambda]{\Gamma}$ καὶ $-\sqrt[\lambda]{\Gamma}$, αἱ δὲ λοιπαὶ εἶναι φανταστικαί, εὑρισκόμεναι ἐν γένει ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως, ἡ ὁποία προκύπτει ἐὰν ἐξισώσωμεν πρὸς τὸ 0, τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\chi^\lambda - \Gamma$ διὰ τοῦ $\left(\chi-\sqrt[\lambda]{\Gamma}\right)\left(\chi+\sqrt[\lambda]{\Gamma}\right)=\chi^2-\left(\sqrt[\lambda]{\Gamma}\right)^2$.

Ἐὰν λ εἶναι ἄρτιον καὶ Γ ἀρνητικὸν ἡ ἐν λόγῳ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς.

Ἐὰν λ εἶναι περιττὸν ἡ ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὴν τὴν ρίζαν

$+\sqrt[\lambda]{\Gamma}$, ἐὰν $\Gamma>0$ ἢ τὴν $-\sqrt[\lambda]{\Gamma}$, ἐὰν $\Gamma<0$.

Π. δ. 1) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^3-1=0$.

Αὕτη ἐπειδὴ ἔχει τὴν ρίζαν $\chi=1$ διαιρεῖται διὰ $\chi-1$ καὶ τὸ πηλίκον αὐτῆς εἶναι $\chi^2+\chi+1$· ὥστε ἔχομεν $\chi^3-1=(\chi-1)(\chi^2+\chi+1)$.

Αἱ ρίζαι λοιπὸν τῆς δοθείσης εἶναι 1 καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς $\chi^2+\chi+1=0$ ἤτοι αἱ $\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

2) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^4-1=0$.

Αὕτη γράφεται $(\chi^2-1)(\chi^2+1)=0$. Ὥστε ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς τὰς $\chi=\pm1$, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-1=0$ καὶ δύο φανταστικάς, αἵτινες εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$\chi^2+1=0$ ἤτοι τὰς $\chi=\pm i$.

3) *Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις* $\chi^3-27=0$.

Αὕτη γράφεται $(\chi-3)(\chi^2+3\chi+9)=0$. Αἱ ρίζαι λοιπὸν αὐτῆς εἶναι αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $\chi-3=0$ καὶ $\chi^2+3\chi+9=0$.

ἤτοι αἱ $\chi=3$ καὶ $\chi=\dfrac{-3\pm3i\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{3}{2}(1\mp i\sqrt{3})$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

802) $\chi^3+1=0$	803) $\chi^4+1=0$	804) $\chi^5-1=0$
805) $\chi^5+1=0$	806) $\chi^6-1=0$	807) $\chi^6+1=0$
808) $\chi^6=64$	809) $\chi^6=729$	810) $64\chi^6=1$

207. ***Ἐξισώσεις τριώνυμοι.***— Αἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha\chi^\mu+\beta\chi^\nu+\gamma\chi^\rho=0$ καλοῦνται τριώνυμοι. Αὗται γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς: $\chi^\rho(\alpha\chi^{\mu-\rho}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma)=0$. Περιέχουν δὲ ἐκτὸς τῆς ρίζης $\chi=0$, ἥτις προκύπτει ἐκ τῆς $\chi^\rho=0$ καὶ τὰς ρίζας τῆς $\alpha\chi^{\mu-\rho}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma=0$. Ὥστε ἡ λύσις τῶν τριωνύμων ἐξισώσεων ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν τῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha\chi^{\mu-\rho}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma=0$· αὕτη δὲ ἀνάγεται εἰς τὴν λύσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ὡς καὶ ἡ ἀρχικῶς δοθεῖσα ἐξίσωσις, ἐὰν εἶναι $\mu-\rho=2(\nu-\rho)$ ἤτοι $\mu=2\nu-\rho$. Διότι αὕτη γράφεται

$\alpha\chi^{2(\nu-\rho)}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma=0$ ἢ ἐὰν τεθῆ $\chi^{\nu-\beta}=y$, $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$. Ἡ δὲ ἀρχικὴ γράφεται

$$\alpha\chi^{2\nu-\rho}+\beta\chi^{\nu}+\gamma\chi^{\rho}=\chi^{\rho}(\alpha\chi^{2\nu-2\rho}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma)=\chi^{\rho}\cdot(\alpha y^2+\beta y+\gamma)=0.$$

Καλοῦντες ἤδη τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\alpha y^2+\beta y+\gamma=0$ y_1 καὶ y_2, λαμβάνομεν τὰς διωνύμους ἐξισώσεις $\chi^{\nu-\rho}=y_1$ καὶ $\chi^{\nu-\rho}=y_2$, ἃς ἐπιλύοντες, λαμβάνομεν ὅλας τὰς ρίζας τῆς $\alpha\chi^{2(\nu-\rho)}+\beta\chi^{\nu-\rho}+\gamma=0$.

Π.δ. Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^9-17\chi^5+16\chi=0$. Ἐπειδὴ εἶναι $9=2\cdot5-1$, ἕπεται ὅτι αἱ ρίζαι αὐτῆς θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, καὶ ἐξισώσεων διωνύμων.

Καὶ πράγματι, ἡ δοθεῖσα γράφεται $\chi(\chi^8-17\chi^4+16)=0$ ἢ $\chi(y^2-17y+16)=0$, ἐὰν τεθῆ $\chi^4=y$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ρίζαν $\chi=0$ καὶ τὰς ρίζας τὰς εὑρισκομένας ἐκ τῆς λύσεως τῶν διωνύμων ἐξισώσεων $\chi^4=16$ καὶ $\chi^4=1$, διότι αἱ ρίζαι τῆς $y^2-17y+16=0$ εἶναι 16 καὶ 1. Καὶ ἐκ μὲν τῆς $\chi^4=16$ εὑρίσκομεν τὰς πραγματικὰς ρίζας ±2 καὶ ἐκ τῆς $\chi^4=1$, τὰς ±1. Αἱ δὲ λοιπαὶ τέσσαρες ρίζαι εὑρίσκονται ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων $\chi^2+4=0$ καὶ $\chi^2+1=0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

811) $10\chi^3+3\chi=11\chi^2$
812) $43\chi^2=5\chi^3+24\chi$
813) $\chi^8-7\chi^5-8\chi^2=0$
814) $8\chi^8+65\chi^5+8\chi^2=0$
815) $(\chi^5+4)^2-8(\chi^5+4)+15=0$
816) $(\chi+2)^6-9(\chi+2)^3+8=0$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Συστήματα ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

208. Ἔστω τὰ κατωθι συστήματα

$$\begin{cases}\chi^2+\psi_2=34\\ \chi^2-\psi^2=16\end{cases}\qquad \begin{cases}\chi+\psi=2\\ \chi\psi=-35\end{cases}\qquad \begin{cases}\chi^2+\psi^2+\varphi^2=5\\ \chi+\psi+\varphi=3\\ \chi-\psi-\varphi=1.\end{cases}$$

Παρατηροῦμεν δὲ, ὅτι καθὲν ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖται ἢ ἀπὸ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ, ἢ ἀπὸ ἐξισώσεις δευτέρου, καὶ πρώτου βαθμοῦ. Τὰ τοιαῦτα συστήματα λέγονται δευτέρου βαθμοῦ. Ὥστε: *Ἓν σύστημα ἐξισώσεων λέγεται δευτέρου βαθμοῦ, ὅταν ἀποτελῆται μόνον ἀπὸ ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ ἢ δευτέρου καὶ πρώτου βαθμοῦ.*

Αἱ μέθοδοι τῆς λύσεως τῶν συστημάτων δευτέρου βαθμοῦ εἶναι διάφοροι, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν κατωτέρω παραδειγμάτων.

209. ***Συστήματα μὲ μίαν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ, ἐνῷ αἱ ἄλλαι εἶναι πρώτου βαθμοῦ.*** — Τὰ τοιαῦτα συστήματα δύνανται νὰ λυθοῦν πάντοτε διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως. Π. χ.

1) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\chi^2+2\chi\psi-3\psi^2=14(\chi-\psi) \quad 2\chi-\psi=7$$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως λαμβάνομεν $\psi=2\chi-7$, ἐὰν δὲ ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ θέσωμεν εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν, ἔχομεν

$$\chi^2+2\chi(2\chi-7)-3(2\chi-7)^2=14(\chi-2\chi+7).$$

Αὕτη μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων γίνεται $\chi^2-12\chi+35=0$, ἐξ ἧς λύοντες εὑρίσκομεν $\chi_1=7$ καὶ $\chi_2=5$.

Αἱ τιμαὶ ἤδη τοῦ ψ εὑρίσκονται ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\psi=2\chi-7$ καὶ εἶναι $\psi_1=2.7-7=7$ καὶ $\psi_2=2.5-7=3$

$$\text{ἤτοι} \quad \begin{matrix} \chi_1=7 \\ \psi_1=7 \end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix} \chi_2=5 \\ \psi_2=3 \end{matrix}$$

2) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\chi+\psi=\alpha$$
$$\chi\psi=\beta$$

Ἐκ τῆς πρώτης ἐξισώσεως ἐξάγομεν τὴν τιμὴν τοῦ $\psi=\alpha-\chi$ (1) ἥν θέτοντες εἰς τὴν δευτέραν, λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν

$$\chi^2-\alpha\chi+\beta=0$$

Λύοντες ἤδη αὐτὴν καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν (1) εὑρίσκομεν, τὰ ἑξῆς δύο συστήματα λύσεων

$$\chi_1=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta} \qquad \chi_2=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}$$

$$\psi_1=\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta} \qquad \psi_2=\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4\beta}$$

τὰ ὁποῖα, ὡς παρατηροῦμεν, εἶναι κυρίως ἓν μόνον σύστημα λύσεων. Καὶ πράγματι διότι οἱ ἄγνωστοι χ καὶ ψ ὧν γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (§ 191, 3)

$$\omega^2-\alpha\omega+\beta=0$$

ἐξ ὧν ἡ μία εἶναι ὁ χ (ἢ ὁ ψ) καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ὁ ψ (ἢ ὁ χ).

3) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\chi-\psi=\alpha$$
$$\chi\psi=\beta$$

Ἐργαζόμενοι μὲ τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως εὑρίσκομεν ἐκ τῆς πρώτης $\psi = \chi - \alpha$ (1) καὶ κατόπιν ἐκ τῆς δευτέρας $\chi^2 - \alpha\chi - \beta = 0$. Ἐὰν δὲ χ_1 καὶ χ_2 εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς θὰ ἔχωμεν ἐκ τῆς

$$
\begin{array}{llll}
(1) \text{ διὰ} & \chi_1 & \psi_1 = \chi_1 - \alpha & \\
 & \chi_2 & \psi_2 = \chi_2 - \alpha & \text{ἢ ἐπειδὴ } \chi_1 + \chi_2 = \alpha \\
\text{διὰ} & \chi_1 & \psi_1 = -\chi_2 & \\
 & \chi_2 & \psi_2 = -\chi_1 &
\end{array}
$$

Ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος, δύναται νὰ ἀναχθῇ εἰς τὴν λύσιν τοῦ προηγουμένου συστήματος, ἐὰν θέσωμεν $\phi = -\psi$, ὁπότε τὸ σύστημα, γίνεται

$$\chi + \phi = \alpha, \quad \chi\phi = -\beta.$$

Οἱ ἄγνωστοι λοιπὸν χ καὶ ϕ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2 - \omega\alpha - \beta = 0$. Ἐὰν δὲ χ_2 καὶ χ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς θὰ ἔχωμεν

$$
\begin{matrix} \chi = \chi_1 \\ \phi = \chi_2 \end{matrix} \quad \text{ἤτοι} \quad \begin{matrix} \chi = \chi_1 \\ \psi = -\chi_2 \end{matrix} \quad \text{ἢ} \quad \begin{matrix} \chi = \chi_2 \\ \phi = \chi_1 \end{matrix} \quad \text{ἤτοι} \quad \begin{matrix} \chi = \chi_2 \\ \psi = -\chi_1 \end{matrix}
$$

4) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\quad \chi^2 + \psi^2 - \alpha^2$

$$\chi + \psi = \beta$$

Παραλείπομεν τὴν μέθοδον τῆς ἀντικαταστάσεως καὶ λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο, παρατηροῦντες ὅτι :

$$\chi^2 + \psi^2 = (\chi + \psi)^2 - 2\chi\psi.$$

Τὸ δοθὲν λοιπὸν σύστημα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ

τὸ $\quad (\chi + \psi)^2 - 2\chi\psi = \alpha^2, \quad \chi + \psi = \beta,$ ἤτοι μὲ

τὸ $\quad \chi + \psi = \beta, \quad \chi\psi = \dfrac{\beta^2 - \alpha^2}{2}.$

Οἱ χ καὶ ψ εἶναι ἑπομένως ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\omega^2 - \beta\omega + \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} = 0.$$

Ἄλλος τρόπος εἶναι καὶ ὁ ἑξῆς : Ἀφοῦ ἔχομεν

$$\chi^2 + \psi^2 = \alpha^2 \quad \text{καὶ} \quad 2\chi\psi = \beta^2 - \alpha^2, \text{ ἕπεται ὅτι}$$

$$\chi^2 + \psi^2 - 2\chi\psi = 2\alpha^2 - \beta^2, \text{ ἤτοι } (\chi - \psi)^2 = 2\alpha^2 - \beta^2$$

καὶ κατὰ συνέπειαν $\chi - \psi = \pm\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2}$.

Λύοντες ἤδη τὰ συστήματα

$$
\begin{matrix} \chi + \psi = \beta \\ \chi - \psi = \sqrt{2\alpha^2 - \beta^2} \end{matrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{matrix} \chi + \psi = \beta \\ \chi - \psi = -\sqrt{2\alpha^2 - \beta^2} \end{matrix}
$$

εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

5) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\quad \chi^2 + \psi^2 + \phi^2 = 14, \quad \chi + \phi = 4, \quad \psi + \phi = 3.$

Λαμβάνοντες τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ ἐκ τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων καὶ θέτοντες αὐτὰς εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν $(4-\varphi)^2+(3-\varphi)^2+\varphi^2=14$, ἤτοι τὴν $3\varphi^2-14\varphi+11=0$, ἧς αἱ ρίζαι εἶναι αἱ 1 καὶ $\frac{11}{3}$.

Ὥστε εἶναι διὰ $\qquad \varphi_1=1, \quad \chi_1=3 \quad \psi_1=2$

καὶ διὰ $\qquad \varphi_2=\frac{11}{3}, \quad \chi_2=\frac{1}{3}, \quad \psi_2=-\frac{2}{3}$

210. Συστήματα εἰς ἃ αἱ ἐξισώσεις βου βαθμοῦ εἶναι περισσότεραι τῆς μιᾶς. Π.δ.

1) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$3\chi^2+2\psi^2=66$$
$$2\chi^2-3\psi^2=5$$

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τὰ συστήματα πρώτου βαθμοῦ, εὑρίσκομεν

$$\begin{array}{r} 9\chi^2+6\psi^2=198 \\ 4\chi^2-6\psi^2=10 \\ \hline 13\chi^2 \qquad =208 \\ \chi^2 \qquad = 16 \end{array} \quad \text{ἤτοι}$$

$\chi_1=4$, $\chi_2=-4$ καὶ δι' ἀντικαταστάσεως εἰς τὴν δεύτεραν $\psi_1=3$, $\psi_2=-3$.

2) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\chi^2+\psi^2=29$$
$$\chi\psi=10$$

Ἐκ τῆς δευτέρας εὑρίσκομεν $\psi=\frac{10}{\chi}$ (1) καὶ κατόπιν ἐκ τῆς πρώτης $\chi^2+\frac{100}{\chi^2}=29$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν τὴν διτετράγωνον ἐξίσωσιν $\chi^4-29\chi^2+100=0$. Ἐξ αὐτῆς δὲ καὶ ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ.

Λύομεν ὅμως τὸ ἀνωτέρω σύστημα καὶ ὡς ἑξῆς: Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=29$, $2\chi\psi=20$· ἐὰν δὲ προσθέσωμεν καὶ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$(\chi+\psi)^2=49 \qquad \text{ἤτοι} \qquad \chi+\psi=\pm 7$$
$$(\chi-\psi)^2=9 \qquad \text{»} \qquad \chi-\psi=\pm 3$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὰς τιμὰς τῶν χ καὶ ψ πρέπει νὰ λύσωμεν τὰ κάτωθι συστήματα πρώτου βαθμοῦ.

$$\begin{array}{c} \chi+\psi=7, \\ \chi-\psi=3, \\ \hline \chi_1=5, \\ \psi_1=2, \end{array} \qquad \begin{array}{c} \chi+\psi=7, \\ \chi-\psi=-3, \\ \hline \chi_2=2, \\ \psi_2=5, \end{array} \qquad \begin{array}{c} \chi+\psi=-7, \\ \chi-\psi=3, \\ \hline \chi_3=-2, \\ \psi_3=-5, \end{array} \qquad \begin{array}{c} \chi+\psi=-7 \\ \chi-\psi=-3 \\ \hline \chi_4=-5 \\ \psi_4=-2 \end{array}$$

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα λύεται καὶ ὡς ἑξῆς, ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων αὐτοῦ εἶναι πολυώνυμα, ὁμογενῆ καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ.

Θέτομεν εἰς ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις $\psi=\varphi\chi$ (ἢ $\chi=\varphi\psi$), ὅπου φ εἶναι νέος ἄγνωστος, τότε δὲ θὰ ἔχωμεν

$$\chi^2+\varphi^2\chi^2=29$$
$$\chi^2\varphi\quad=10$$

ἢ ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ μέλη

$\dfrac{\chi^2(1+\varphi^2)}{\chi^2\varphi}=\dfrac{29}{10}$ ἤτοι $\dfrac{1+\varphi^2}{\varphi}=\dfrac{29}{10}$ ἢ τέλος $10\varphi^2-29\varphi+10=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\varphi_1=\dfrac{5}{2}$ καὶ $\varphi_2=\dfrac{2}{5}$. Ὥστε εἶναι $\psi=\dfrac{5}{2}\chi$ ἢ $\psi=\dfrac{2}{5}\chi$.

Ἡ δευτέρα λοιπὸν ἐξίσωσις τοῦ δοθέντος συστήματος δίδει

$$\chi\cdot\frac{5}{2}\chi=10 \quad \text{ἤτοι} \quad \chi^2=4\cdot \quad \text{ἄρα } \chi=\pm2 \text{ καὶ } \psi=\pm5$$

ἢ

$$\chi\cdot\frac{2}{5}\chi=10 \quad \text{ἤτοι} \quad \chi^2=25\cdot \quad \text{ἄρα } \chi=\pm5 \text{ καὶ } \psi=\pm2.$$

3) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\chi+\psi+\chi\psi=-1$

$$\chi^2\psi+\chi\psi^2=-20$$

Τοῦτο γράφεται

$$\chi+\psi+\chi\psi=-1$$
$$\chi\psi(\chi+\psi)=-20$$

ἢ ἐὰν θέσωμεν $\chi+\psi=\varphi$ καὶ $\chi\psi=\omega$

$$\varphi+\omega=-1$$
$$\varphi\omega=-20$$

Ὥστε οἱ ἄγνωστοι φ καὶ ω εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$\upsilon^2+\upsilon-20=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\varphi=4 \text{ καὶ } \omega=-5 \quad \text{ἢ} \quad \varphi=-5 \text{ καὶ } \omega=4$$

καὶ ἑπομένως εἶναι

1) $\chi+\psi=4$, $\chi\psi=-5$ καὶ 2) $\chi+\psi=-5$, $\chi\psi=4$

Λύοντες ἤδη τὰ δύο συστήματα κατά τὰ γνωστὰ εὑρίσκομεν

$$\chi_1=5,\quad \chi_2=-1,\quad \chi_3=-1,\quad \chi_4=-4$$
$$\psi_1=-1\quad \psi_2=5,\quad \psi_3=-4,\quad \psi_4=-1$$

4) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$3\chi^2-5\chi=7\chi\psi+5$$
$$5\sqrt{\chi\psi}=\chi\psi-6$$

Ἐὰν θέσωμεν $\sqrt{\chi\psi}=\varphi$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται $\varphi^2-5\varphi-6=0$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$\varphi_1=-1$, $\varphi_2=6$ καὶ ἑπομένως $\sqrt{\chi\psi}=-1$, $\chi\psi=1$; $\sqrt{\chi\psi}=6$, $\chi\psi=36$

Θέτοντες ἤδη διαδοχικῶς τὰς εὑρεθείσας τιμὰς τοῦ χψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν λαμβάνομεν

α) $3\chi^2-5\chi-12=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\chi_1=3 \text{ καὶ ἑπομένως } \psi_1=\frac{1}{3}$$

$$\chi_2=-\frac{4}{3} \quad » \quad » \quad \psi_2=-\frac{3}{4}$$

β) $3\chi^2-5\chi-257=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$$\chi_1=\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{3109}, \qquad \chi_2=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{3109}$$

$$\psi_1=\frac{36}{\chi_1} \qquad \psi_2=\frac{36}{\chi_2}$$

5) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\chi+\psi=\frac{35}{3}$$

$$\chi\psi=4\varphi$$

$$\chi^2+\psi^2=\varphi^2$$

Ὑψοῦντες τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εἰς τὸ τετράγωνον εὑρίσκομεν

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\frac{1225}{9}, \quad \text{ἤτοι} \quad \varphi^2+8\varphi=\frac{1225}{9}$$

λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν

$$\varphi=\frac{25}{3} \quad \text{ἢ} \quad \varphi=-\frac{49}{3}$$

Ὥστε εἶναι

$$\chi+\psi=\frac{35}{3} \qquad\qquad \chi+\psi=\frac{35}{3}$$

$$\text{ἢ}$$

$$\chi\psi=\frac{100}{3} \qquad\qquad \chi\psi=-\frac{196}{3}$$

Ἑπομένως τὰ χ καὶ ψ θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$\omega^2-\frac{35}{3}\omega+\frac{100}{3}=0$$

$$\omega^2-\frac{35}{3}\omega-\frac{196}{3}=0$$

καὶ ἐκ μὲν τῆς πρώτης εὑρίσκομεν 5 καὶ $\frac{20}{3}$, ἐκ δὲ τῆς δευτέρας

$$\frac{35}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{3577} \quad \text{καὶ} \quad \frac{35}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{3577}$$

Ὥστε αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων εἶναι

$$\frac{25}{3},\quad \frac{20}{3} \quad \text{καὶ} \quad 5 \quad \text{ἢ}$$

$$-\frac{49}{3},\quad \frac{35}{6}+\frac{1}{6}\sqrt{3577} \quad \text{καὶ} \quad \frac{35}{6}-\frac{1}{6}\sqrt{3577}$$

6) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$8\chi=3\psi\phi$$
$$\psi^2=\phi\chi$$
$$\frac{1}{\phi}-\frac{1}{\psi}=\frac{3}{4\chi}$$

Πολλαπλασιάζοντες κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις, εὑρίσκομεν $8\chi\psi^2=3\chi\psi\phi^2$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν, ἐπειδὴ $\chi\neq 0$ καὶ $\psi\neq 0$, $\psi=\frac{3\phi^3}{8}$.

Θέτοντες ἤδη τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ ψ εἰς τὴν πρώτην ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi=\frac{9\phi^3}{64}$.

Ὥστε, ἡ τρίτη ἐξίσωσις, εἰς ἣν ἀντικαθιστῶμεν τὰ χ καὶ ψ διὰ τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν, γίνεται

$$\frac{1}{\phi}-\frac{8}{3\phi^2}=\frac{16}{3\phi^3} \quad \text{ἢ ἐπειδὴ } \phi\neq 0$$

$$1-\frac{8}{3\phi}=\frac{16}{3\phi^2} \quad \text{ἤτοι } 3\phi^2-8\phi-16=0, \text{ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν}$$

$$\phi=4 \quad \text{ἢ} \quad \phi=-\frac{4}{3} \quad \text{καὶ ἑπομένως}$$

$$\psi=6 \quad \text{ἢ} \quad \psi=\frac{2}{3}$$

$$\chi=9 \quad \text{ἢ} \quad \chi=-\frac{1}{3}$$

211. Συστήματα ἀνωτέρου βαθμοῦ.—*1) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*

$$\chi^3+\psi^3=91$$
$$\chi\psi(\chi+\psi)=84.$$

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐξισώσεως ἐπὶ 3 καὶ τὴν οὕτω προκύπτουσαν ἐξίσωσιν $3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=252$ προσθέτομεν εἰς τὴν πρώτην, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\chi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2+\psi^3=343 \quad \text{ἤτοι} \quad (\chi+\psi)^3=7^3.$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως δὲ αὐτῆς εὑρίσκομεν $\chi+\psi=7$· ὥστε ἡ δευτέρα ἐξίσωσις τοῦ συστήματος γίνεται $\chi\psi=12$.

Γνωρίζοντες ἤδη ὅτι $\chi+\psi=7$ καὶ $\chi\psi=12$, εὑρίσκομεν, τὰ χ καὶ ψ ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-7\omega+12=0$, ἥτις δίδει

$$\chi_1=3,\quad \psi_1=4 \quad \text{ἢ} \quad \chi_2=4,\quad \psi_2=3.$$

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα λύεται καὶ ὡς ἑξῆς. Ἐπειδὴ τὰ πρῶτα μέλη τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι πολυώνυμα ὁμογενῆ καὶ τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ θέτομεν $\chi=\varphi\psi$, ὁπότε ἔχομεν

$$\begin{array}{lcl} \varphi^3\psi^3+\psi^3=91 & \text{ἤτοι} & \psi^3(\varphi^3+1)=91 \\ \varphi\psi^2(\varphi\psi+\psi)=84 & & \varphi\psi^3(\varphi+1)=84 \end{array}$$

Διαιροῦντες δὲ ἤδη τὰς δύο τελευταίας ἐξισώσεις κατὰ μέλη εὑρίσκομεν $$\frac{\varphi^3+1}{\varphi(\varphi+1)}=\frac{91}{84}$$

ἢ ἐπειδὴ $$\frac{\varphi^3+1}{\varphi+1}=\varphi^2-\varphi+1$$

$$\frac{\varphi^2-\varphi+1}{\varphi}=\frac{91}{84}, \text{ἤτοι } 84\varphi^2-175\varphi+84=0.$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη λυομένη δίδει $\varphi=\frac{4}{3}$ ἢ $\varphi=\frac{3}{4}$.

Ὥστε εἶναι $\chi=\frac{4}{3}\psi$ ἢ $\chi=\frac{3}{4}\psi$.

Ἤδη θέτοντες διαδοχικῶς τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ χ εἰς τὴν δευτέραν ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, εὑρίσκομεν

α) $\frac{4}{3}\psi^2\left(\frac{4}{3}\psi+\psi\right)=84$, ἤτοι $\frac{28\psi^3}{9}=84$, $\psi^3=\frac{9\cdot 84}{28}$, $\psi^3=27$.

Ὥστε εἶναι $\psi=3$ καὶ $\chi=\frac{4}{3}.3=4$

β) $\frac{3}{4}\psi^3\left(\frac{3}{4}\psi+\psi\right)=84$, ἤτοι $\frac{21\psi^3}{16}=84$, $\psi^3=\frac{84.16}{21}$, $\psi^3=64$.

Ὥστε ἔχομεν $\psi=4$ καὶ $\chi=\frac{3}{4}.4=3$.

2) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*
$$\begin{array}{l} \chi^3+\psi^3=35 \\ \chi\psi=6.. \end{array}$$

Ἐκ τῆς δευτέρας ἐξισώσεως εὑρίσκομεν $\chi=\frac{6}{\psi}$. Θέτοντες δὲ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ εἰς τὴν πρώτην, εὑρίσκομεν

$\psi^6-35\psi^3+216=0$ ἢ ἐὰν θέσωμεν $\psi^3=\varphi$

$\varphi^2-35\varphi+216=0$ ἐξ ἧς εὑρίσκομεν

$\varphi=27$ ἢ $\varphi=8$ ἤτοι

$\psi=3$ καὶ $\chi=2$ ἢ $\psi=2$ καὶ $\chi=3$.

3) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*
$$\begin{array}{l} \chi+\psi=\alpha \\ \chi^3+\psi^3=\beta. \end{array}$$

Πρὸς τοῦτο ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης εἰς τὸν κύβον, ὁπότε εὑρίσκομεν $(\chi+\psi)^3=\alpha^3$ ἤτοι

$$\chi^3+\psi^3+3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3.$$

ἀλλ' ἐπειδὴ $\chi^3+\psi^3=\beta$ ἔχομεν $3\chi^2\psi+3\chi\psi^2=\alpha^3-\beta$

ἢ $3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3-\beta$

ἢ $3\alpha\chi\psi=\alpha^3-\beta$

καὶ ἑπομένως $\chi\psi=\dfrac{\alpha^3-\beta}{3\alpha}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν καὶ $\chi+\psi=\alpha$, οἱ δύο ἀριθμοὶ χ καὶ ψ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\omega^2-\alpha\omega+\dfrac{\alpha^3-\beta}{3\alpha}=0$,

ἐκ τῆς λύσεως τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν, ὅτι οἱ χ καὶ ψ εἶναι οἱ

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^3}{3\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4\beta-\alpha^3}{3\alpha}}\,.$$

Διερεύνησις. Ἐὰν γράψωμεν τὴν ὑπόρριζον παράστασιν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\dfrac{4\beta}{3\alpha}-\dfrac{\alpha^2}{3}$ βλέπομεν ὅτι, ἵνα αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι ἀριθμοὶ πραγματικοί, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β νὰ εἶναι ὁμόσημοι καὶ νὰ εἶναι $\dfrac{4\beta}{3\alpha}\geqslant\dfrac{\alpha^2}{3}$ ἤτοι $\dfrac{4\beta}{3\alpha}\geqq\dfrac{\alpha^3}{3\alpha}$ δηλαδὴ $4\beta\geqslant\alpha^3$

καὶ ἑπομένως $\beta\geqslant\dfrac{\alpha^3}{4}$.

4) *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα* $\chi+\psi=\alpha$

$\chi^4+\psi^4=\gamma$.

Πρὸς τοῦτο ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐξισώσεως εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε ἔχομεν

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\alpha^2 \qquad (1)$$

ἐὰν δὲ καὶ ταύτης τὰ μέλη ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον, εὑρίσκομεν

$$\chi^4+\psi^4+6\chi^2\psi^2+4\chi^3\psi+4\chi\psi^3=\alpha^4 \qquad (2)$$

ἀλλ' ἐπειδὴ $\chi^4+\psi^4=\gamma$ ἡ (2) γίνεται

$$6\chi^2\psi^2+4\chi\psi(\chi^2+\psi^2)=\alpha^4-\gamma \qquad (3)$$

καὶ ἐπειδὴ πάλιν ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν $\chi^2+\psi^2=\alpha^2-2\chi\psi$ ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται $6\chi^2\psi^2+4\chi\psi(\alpha^2-2\chi\psi)=\alpha^4-\gamma$ ἢ

$$4\alpha^2\chi\psi-2\chi^2\psi^2=\alpha^4-\gamma \quad \text{ἢ}$$

$$2(\chi\psi)^2-4\alpha^2(\chi\psi)-(\gamma-\alpha^4)=0 \qquad (4)$$

Λύοντες δὲ αὐτὴν πρὸς $\chi\psi$ εὑρίσκομεν

$$\chi\psi=\frac{2\alpha^2\pm\sqrt{2\alpha^4+2\gamma}}{2} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\chi\psi=\alpha^2\pm\sqrt{\frac{\alpha^4+\gamma}{2}}$$

Ἑπομένως αἱ δύο τιμαὶ τοῦ γινομένου εἶναι

$$\alpha^2-\sqrt{\frac{\alpha^4+\gamma}{2}}, \qquad \alpha^2+\sqrt{\frac{\alpha^4+\gamma}{2}} \qquad (5)$$

Γνωρίζοντες λοιπὸν τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ καὶ τὸ γινόμενον $\chi\psi$, εὑρίσκομεν τὰ χ καὶ ψ διὰ τῆς λύσεως δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, ὡς γνωρίζομεν. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν ὡς $\chi\psi$ τὴν πρώτην τῶν τιμῶν (5) εὑρίμεν διὰ χ καὶ ψ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\gamma+8\alpha^4}}$$

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2+\sqrt{8\gamma+8\alpha^4}}$$

Ἐὰν δὲ λάβωμεν ὡς $\chi\psi$ τὴν δευτέραν τῶν τιμῶν (5) εὑρίσκομεν διὰ χ καὶ ψ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2-\sqrt{8\gamma+8\alpha^2}}\cdot$$

$$\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3\alpha^2-\sqrt{8\gamma+8\alpha^4}}$$

ἑπομένως οἱ τελευταῖοι οὗτοι δύο ἀριθμοὶ εἶναι μιγάδες.

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη λύσις ἀποτελεῖται ἐκ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐὰν $\sqrt{8\gamma+8\alpha^4} \geqslant 3\alpha^2$ ἤτοι ἂν

$$8\gamma+8\alpha^4 \geqslant 9\alpha^4 \quad \text{ἢ ἂν} \quad \gamma \geqslant \frac{\alpha^4}{8}$$

δηλαδή, ἂν ὁ γ εἶναι θετικὸς καὶ ὄχι μικρότερος τοῦ $\frac{\alpha^4}{8}$

5) ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*** $\chi+\psi=\alpha$

$$\chi^5+\psi^5=\delta$$

Ἵνα λύσωμεν τοῦτο ὑψοῦμεν τὴν πρώτην ἐξίσωσιν πρῶτον εἰς τὸν κύβον, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\chi^3+\psi^3+3\chi\psi(\chi+\psi)=\alpha^3 \qquad (1)$$

καὶ ἔπειτα εἰς τὸ τετράγωνον, ὁπότε ἔχομεν

$$\chi^2+\psi^2+2\chi\psi=\alpha^2 \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ ἤδη πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν τὴν πέμπτην δύναμιν τῆς πρώτης ἐξισώσεως, ἤτοι τὴν

$$\chi^5+\psi^5+5\chi\psi(\chi^3+\psi^3)+10\chi^2\psi^2(\chi+\psi)=\alpha^5$$

Ἐὰν δὲ εἰς τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα

$\chi^5+\psi^5$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του δ, τὸ δὲ ἄθροισμα $\chi^3+\psi^3$ ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) ὑπὸ τοῦ ἴσου του $\alpha^3-3\chi\psi(\chi+\psi)$ καὶ τέλος τὸ $\chi+\psi$ ὑπὸ τοῦ ἴσου του α, εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$(\chi\psi)^2-\alpha^2(\chi\psi)=\frac{\delta-\alpha^5}{5\alpha}$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ χψ εἶναι ἴσον πρὸς τὸν ἕτερον τῶν ἀριθμῶν

$$\text{ἢ}\quad \frac{\alpha^2}{2}-\sqrt{\frac{4\delta+\alpha^5}{20\alpha}}\qquad \text{ἢ}\quad \frac{\alpha^2}{2}+\sqrt{\frac{4\delta+\alpha^5}{20\alpha}}\qquad (3)$$

Καὶ ἂν μὲν λάβωμεν τὸν πρῶτον ὡς γινόμενον τῶν ζητουμένων ἀριθμῶν, εὑρίσκομεν τοὺς δύο ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha^2+2\sqrt{\frac{4\delta+\alpha^5}{5\alpha}}}\qquad (4)$$

ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν δεύτερον, εὑρίσκομεν τοὺς ἐκ τούτων προκύπτοντας, ὅταν ἡ ἐντὸς τῆς ἄλλης ρίζα ληφθῇ μετὰ τοῦ σημείου —, ἑπομένως τὸ δεύτερον τοῦτο ζεῦγος εἶναι μιγάδες ἀριθμοί.

6) ***Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα*** $\chi+\psi=\alpha$

$$\chi^2\psi^2+\chi\psi=\beta$$

Ἐὰν θέσωμεν $\chi\psi=\varphi$, ἡ δευτέρα ἐξίσωσις γίνεται

$$\varphi^2+\varphi-\beta=0$$

ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $\varphi=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4\beta}}{2}$. Ὥστε διὰ τὸ γινόμενον χψ ἔχομεν τοὺς ἀριθμοὺς $\dfrac{-1+\sqrt{1+4\beta}}{2}$, $\dfrac{-1-\sqrt{1+4\beta}}{2}$.

Ἤδη γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$ καὶ τὸ γινόμενον χψ· ἑπομένως θὰ εὕρωμεν τὰ χ, ψ ἐκ τῆς λύσεως τῶν ἐξισώσεων

$$\omega^2-\alpha\omega+\frac{-1+\sqrt{1+4\beta}}{2}=0$$

$$\omega^2-\alpha\omega+\frac{-1-\sqrt{1+4\beta}}{2}=0$$

ὁπότε εὑρίσκομεν ἐξ ἀμφοτέρων, τὸν τύπον τῶν ζητουμένων τιμῶν

$$\text{τῶν χ καὶ ψ}\quad \frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2+2\pm2\sqrt{1+4\beta}}}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα

817) $\chi^2-\psi^2=13$
$2\chi-3\psi=-4$

818) $7\chi^2-5\chi^3=23$
$10\chi-6\psi=8$

819) $5\chi-7\psi=-6$
$\chi^2+\psi^2=18$

820) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=-\dfrac{1}{6}$
$\chi+\psi=1$

821) $\dfrac{3}{\chi}-\dfrac{3}{\psi}=3$
$\chi-\psi=-\dfrac{1}{20}$

822) $\dfrac{3\chi}{\psi+5}+\dfrac{\psi}{\chi}=\dfrac{2\psi+12}{\psi+5}$
$\chi-\psi=4$

823) $(3\chi-\psi)^2+(\chi-3\psi)^2=64$
$3\chi-2\psi=7$

824) $(\chi+\psi)^2-5=5\chi\psi$
$13\psi-2\chi-5=0$

825) $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$
$\alpha\chi^2+\beta\psi^2=\gamma^2$

826) $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$
$\chi\psi=\delta^2$

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

827) $\chi+\psi=5$
$\chi\psi=4$

828) $\chi+\psi=2$
$\chi\psi=-72$

829) $\chi-\psi=18$
$\chi\psi=-45$

830) $\chi^2+\psi^2=61$
$\chi+\psi=11$

831) $\chi^2+\psi^2=25$
$\chi+\psi=-1$

832) $\chi^2+9\psi^2=85$
$\chi+3\psi=13$

833) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{\psi}=10$
$\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{\psi^2}=58$

834) $\dfrac{1}{\chi}-\dfrac{1}{\psi}=2$
$\dfrac{1}{\chi^2}-\dfrac{1}{\psi^2}=24$

835) $\dfrac{1}{\chi}+\dfrac{1}{2\psi}=3$
$\dfrac{1}{\chi^2}+\dfrac{1}{4\psi^2}=10$

836) $\chi+\psi=73$
$\sqrt{\chi}+\sqrt{\psi}=11$

837) $\sqrt{\chi}-\sqrt{\psi}=1$
$\chi-\psi=5$

838) $\sqrt{3\chi}-\sqrt{2\psi}=1$
$3\chi-2\psi=5$

839) $\chi^2+\psi^2=41$
$\chi+\phi=24$
$\psi+\phi=25$

840) $\chi^2+\psi^2+\phi^2=293$
$\chi+\psi+\phi=27$
$\psi-\phi=5$

841) $\chi+\psi=2\phi$
$\chi-\psi+3\phi=10$
$\chi^2+\psi^2+\phi^2=50$

842) $\chi+\psi=4\alpha$
$\chi\psi=4\alpha^2-\beta^2$

843) $\dfrac{\chi+\psi}{5}=\alpha+\beta$
$\chi\psi=6(\alpha^2+\beta^2)+13\alpha\beta$

844) $\dfrac{\chi+\psi}{3}=\alpha+\beta$
$\chi^2+\psi^2=5(\alpha^2+\beta^2)+8\alpha\beta$

Ὁμοίως νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

845) $2\chi^2-3\psi^2=6$
$3\chi^2-2\psi^2=19$

846) $2\chi^2+3\psi=71$
$\chi^2-\psi=18$

847) $3\chi\psi+\chi^2=42$
$5\chi^2+6\chi\psi=192$

848) $\chi^2+3\chi\psi+2\psi^2=70$
$\chi^2+3\chi\psi-2\psi^2=34$

849) $\chi^2+\psi^2+\chi+\psi=18$
$\chi^2-\psi^2+\chi-\psi=6$

850) $\chi=4+\sqrt{\chi\psi}$
$\chi^2=208+4\sqrt{\chi\psi}$

851) $\alpha\chi^2+\beta\psi^2=\gamma$
$\alpha'\chi^2-\beta'\psi^2=\gamma'$

852) $\alpha\chi^2-\beta\psi^2=\gamma^2$
$\alpha_1\chi^2+\beta_1\psi^2=\gamma^2_1$

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

853) $9\chi^2+4\psi^2=2$, $6\chi\psi=1$ 854) $25\chi^2+16\psi^2=13$, $10\chi\psi=3$ 855) $9\chi^2+\psi^2=234$, $\chi\psi=-15$

856) $\chi\psi+\chi+\psi=-1$, $2\chi^2\psi+2\psi^2\chi=-84$ 857) $\chi+\psi-\chi\psi=12$, $\chi^2\psi+\chi\psi^2=-35$ 858) $\chi-\psi+\chi\psi=21$, $\chi^2\psi-\chi\psi^2=54$

859) $\chi^2+\psi^2=25$, $\chi\psi+\chi+\psi=5$ 860) $\chi^2+\psi^2-\chi+\psi=18$, $\chi\psi+\chi-\psi=-5$ 861) $\chi+\chi\psi+\psi=5$, $\chi^2+\chi^2\psi^2+\psi^2=7$

862) $5\chi^2-12\chi-3\chi\psi=468$, $\chi\psi-3\sqrt{\chi\psi}-18=0$ 863) $\chi\psi+2\sqrt{\chi\psi}=8$, $\chi^2+\psi^2=17$ 864) $\sqrt{\chi\psi(\chi-\psi)}=60$, $\sqrt{\chi-\psi}+\sqrt{\chi\psi}=19$

65) $\chi+\sqrt[3]{\chi\psi^2}=10$, $\psi+\sqrt[3]{\chi^2\psi}=5$ 866) $\frac{\chi^3-\psi^3}{(\chi-\psi)^3}=61$, $\chi\psi=20$ 867) $\chi+y+\frac{\psi^2}{\chi}=14$, $\chi^2+\psi^2+\frac{\psi^4}{\chi^2}=84$

Προβλήματα.

1ον) *Ἔμπορος πωλήσας πρᾶγμά τι ἀντὶ 16 δραχμῶν ἐζημιώθη τόσον τοῖς ἑκατόν, ὅσον εἶχεν ἀγοράσει αὐτό. Ζητεῖται ἀντὶ πόσων δραχμῶν εἶχεν ἀγοράσει τὸ πρᾶγμα.*

Ἔστω ὅτι ἠγόρασε τὸ πρᾶγμα ἀντὶ χ δραχμῶν. Ἡ ζημία τότε θὰ εἶναι $\chi-16$· ἰσοῦται δὲ αὕτη μὲ $\frac{\chi^2}{100}$, διότι ἐζημιώθη τὸν τόκον τῶν χ δραχμῶν πρὸς χ τοῖς ἑκατὸν δι' ἓν ἔτος. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi^2}{100}=\chi-16$. Πρέπει δὲ νὰ εἶναι χ θετικόν. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν ἢ $\chi=80$ ἢ $\chi=20$. Ἀμφότεραι δὲ αἱ λύσεις αὗται πληροῦν ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

2ον) *Εἷς ἠγόρασεν ὕφασμα ἀντὶ 800 δραχμῶν. Ἐὰν δὲ ἀντὶ τῶν αὐτῶν χρημάτων ἐλάμβανε 2 πήχεις περισσότερον, ἡ τιμὴ τοῦ πήχεως θὰ ἦτο κατὰ 20 δραχμὰς μικροτέρα. Πόσους πήχεις ἠγόρασεν;*

Ἔστω χ ὁ ἀριθμὸς τῶν πήχεων. Ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς πήχεως εἶναι $\frac{800}{\chi}$. Ἐὰν δὲ οἱ πήχεις ἦσαν $\chi+2$, ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς θὰ ἦτο $\frac{800}{\chi+2}$. Ὅθεν ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος $\frac{800}{\chi}-\frac{800}{\chi+2}=20$, πρέπει δὲ νὰ εἶναι χ θετικόν.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς εὑρίσκομεν τὴν

$$\chi^2+2\chi-80=0.$$

τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι αἱ

$$\chi'=8 \quad \text{καὶ} \quad \chi''=-10,$$

ἐκ τῶν ὁποίων μόνον ἡ πρώτη εἶναι παραδεκτὴ ὡς πληροῦσα παντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος.

3ον) *Ἐὰν ἀριθμός τις αὐξηθῇ κατὰ μονάδα, ὁ κύβος αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 397. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς οὗτος;*

Ἐὰν χ εἶναι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς θὰ εἶναι $(\chi+1)^3-\chi^3=397$ (1) καὶ ἐπειδὴ εἶναι $(\chi+1)^3=\chi^3+3\chi^2+3\chi+1$ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται $3\chi^2+3\chi+1=397$ ἢ $3\chi^2+3\chi=396$ ἢ τέλος $\chi^2+\chi-132=0$. Λύοντες ἤδη τὴν ἐξίσωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν ἢ $\chi=11$ ἢ $\chi=-12$.

4ον) *Δύο ταχυδρόμοι, ὁμαλῶς κινούμενοι, ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ὁ μὲν πορευόμενος ἐκ τῆς Α πρὸς τὴν Β, ὁ δὲ ἐκ τῆς Β πρὸς τὴν Α. Συνέβη δὲ ὁ μὲν πρῶτος νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α ἐννέα ὥρας μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δὲ δεύτερος εἰς τὴν Α δεκαὲξ ὥρας μετ' αὐτήν. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων, μεθ' ὧν ἐβάδιζον.*

Α Γ Β

Ἔστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἐκκινήσαντος καὶ ψ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β· ἔστω πρὸς τούτοις Γ τὸ σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ, εἰς ὃ ἐγένετο ἡ συνάντησις τῶν ταχυδρόμων. Ὁ πρῶτος ταχυδρόμος διήνυσε τὸ διάστημα ΒΓ εἰς 9 ὥρας· ἄρα εἶναι $ΓΒ=9\chi$. Ὁ δεύτερος διήνυσε τὸ διάστημα ΓΑ εἰς 16 ὥρας· ἄρα εἶναι τὸ διάστημα $ΓΑ=16\psi$.

Ἐπειδὴ δὲ συγχρόνως ἐξεκίνησαν καὶ συγχρόνως ἔφθασαν εἰς τὸ Γ, ἕπεται, ὅτι ὁ χρόνος ἐν ᾧ διήνυσε ὁ πρῶτος τὸ διάστημα ΑΓ $\left(\text{ὅστις εἶναι } \frac{ΑΓ}{\chi}, \text{ ἤτοι} \frac{16\psi}{\chi}\right)$, εἶναι ἴσος μὲ τὸν χρόνον, ἐν ᾧ διήνυσεν ὁ δεύτερος τὸ διάστημα ΒΓ· ὥστε ἔχομεν $\frac{16\psi}{\chi}=\frac{9\chi}{\psi}$, ἤτοι $16\psi^2=9\chi^2$, ἐξ ἧς καὶ $\frac{\chi^2}{\psi^2}=\frac{16}{9}$ καὶ ἐξάγοντες τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν:

$$\frac{\chi}{\psi}=\frac{4}{3}$$

5ον) *Ἓν ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἔκ τινος χωρίου Α, φθάνει εἰς τὸ Β καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ Α μετὰ $10\frac{2}{3}$ ὥρας. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο χωρίων Α καὶ Β εἶναι 24 χιλιόμετρα, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 3 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου.*

Ἔστω, ὅτι ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου ἦτο χ χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τότε ἡ ταχύτης του, ὅταν ἀνήρχετο τὸ ρεῦμα, ἦτο $\chi - 3$ καὶ ὅταν κατήρχετο $\chi + 3$, ὁ δὲ χρόνος τοῦ ταξιδίου κατὰ τὴν ἄνοδον ἦτο $\frac{24}{\chi-3}$ καὶ κατὰ τὴν κάθοδον $\frac{24}{\chi+3}$. Ἔχομεν λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν $\frac{24}{\chi-3}+\frac{24}{\chi+3}=\frac{32}{3}$.

Πρέπει δὲ ὁ χ νὰ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Ἐκ τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τὴν

$$2\chi^2-9\chi-18=0.$$

τῆς ὁποίας λύσεις εἶναι αἱ

$$\chi'=6 \quad \text{καὶ} \quad \chi''=-\frac{3}{2}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ παραδεκτὴ εἶναι ἡ $\chi'=6$.

6ον) *Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ γινόμενον τῶν ψηφίων ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμά των κατὰ 11. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 36.*

Ἔστω χ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ ψ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Τότε κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι

$$\chi\psi-(\chi+\psi)=11$$

καὶ

$$(10\chi+\psi)-(10\psi+\chi)=36$$

Πρέπει δὲ οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ νὰ εἶναι θετικοί, ἀκέραιοι καὶ μικρότεροι τοῦ 10. Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν τὰ ἑξῆς συστήματα λύσεων:

α') $\quad \chi_1=7$ καὶ $\psi_1=3$

καὶ β') $\quad \chi_2=-1, \quad \psi_2=-5.$

Ἐξ αὐτῶν δὲ παραδεκτὸν εἶναι τὸ πρῶτον. Ὥστε ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 73.

7ον) *Νὰ διαιρεθῇ ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, ἤτοι εἰς δύο μέρη, ὧν τὸ ἕτερον νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ ἑτέρου μέρους.*

Α   Μ   Β

Ἔστω α ὁ τὸ μῆκος τῆς δοθείσης γραμμῆς ΑΒ παριστῶν ἀριθμὸς καὶ χ ὁ παριστῶν τὸ ἄγνωστον μέρος αὐτῆς ΑΜ, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον· τότε τὸ λοιπὸν μέρος ΜΒ παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha-\chi$. Θὰ εἶναι δὲ $\alpha:\chi=\chi:(\alpha-\chi)$, ἤτοι $(\alpha-\chi)\alpha=\chi^2$· πρέπει δὲ νὰ εἶναι καὶ χ θετικὸν καὶ μικρότερον τοῦ α. Λύοντες τὴν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\alpha}{2}\sqrt{5}$, ἐκ δὲ τούτων τῶν τιμῶν μόνη ἡ πρώτη, ἡ $\frac{\alpha}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$ πληροῖ πάντας τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος καὶ παριστᾷ τὸ μῆκος τοῦ ζητουμένου μέρους ΑΜ.

Σημείωσις. Ἐπὶ τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων (ὡς εἶναι τὸ ἀνωτέρω) δυνάμεθα νὰ ἐφαρμόσωμεν τὸν ἀλγεβρικὸν λογισμόν, διότι, ὡς ἐκ τῆς Γεωμετρίας γνωρίζομεν, τὸ μέγεθος πάσης γραμμῆς ἐν σχέσει πρὸς ἄλλην δοθεῖσαν γραμμὴν παρίσταται ὑπό τινος ἀριθμοῦ καὶ ἀντιστρόφως πᾶς ἀριθμὸς παριστᾷ τὸ μέγεθος γραμμῆς, ὅταν ὁρισθῇ ἡ γραμμή, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος παρίσταται μὲ τὴν μονάδα.

8ον) Εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον ἔχον περίμετρον ἴσην πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου καὶ μίαν τῶν κορυφῶν αὐτοῦ εἰς τὸ Α.

Ἐὰν ἔκ τινος σημείου τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, θὰ λάβωμεν ὀρθογώνιον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Διὰ τοῦτο ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης τὴν κορυφὴν τοῦ ζητουμένου ὀρθογωνίου· ἔστω δὲ αὕτη τὸ σημεῖον Μ. Ἐπίσης ἔστω ὅτι β καὶ γ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες παριστοῦν τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ καὶ χ, ψ οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες παριστοῦν τὰς ἀποστάσεις ΜΚ καὶ ΜΠ τοῦ Μ ἀπὸ τῶν πλευρῶν ΑΓ καὶ ΑΒ ἀντιστοίχως καὶ θὰ εἶναι $0 < \chi < \gamma$ καὶ $0 < \psi < \beta$, ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $2\chi + 2\psi = \beta + \gamma$ (1).

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν φέρωμεν τὴν ΑΜ, τὸ δοθὲν τρίγωνον διαιρεῖται εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΒ, ἔχον βάσιν τὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὸ ΜΠ καὶ εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ, ἔχον βάσιν τὴν ΑΓ καὶ ὕψος τὸ ΜΚ. Ὥστε εἶναι

$$\frac{1}{2}\beta\chi + \frac{1}{2}\gamma\psi = \frac{1}{2}\beta\gamma, \text{ ἤτοι } \beta\chi + \gamma\psi = \beta\gamma \quad (2).$$

Ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) καὶ ἐν τῇ ὑποθέσει $\beta \neq \gamma$, εὑρίσκομεν

$$\chi = \frac{1}{2}\gamma, \quad \psi = \frac{1}{2}\beta$$

ἤτοι ὅτι ἡ κορυφὴ Μ κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης.

Ἐὰν ὅμως εἶναι $\beta = \gamma$, αἱ δύο ἐξισώσεις γίνονται μία μόνη καὶ τὸ σύστημα ἀποβαίνει ἀόριστον. Ὥστε ἂν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσοσκελές, πᾶν σημεῖον τῆς ὑποτεινούσης, εἶναι κορυφὴ ὀρθογωνίου πληροῦντος τοὺς ὅρους τοῦ προβλήματος

9ον) Ἐκ τοῦ στομίου φρέατος ἀφέθη λίθος εἰς αὐτό, ἠκούσθη δὲ ὁ κρότος τοῦ λίθου, ὅστις ἔπληξε τὸν πυθμένα, μετὰ παρέλευσιν τ δευτέ-

ρων λεπτῶν ἀπὸ τῆς στιγμῆς τῆς πτώσεως. Ζητεῖται τὸ βάθος τοῦ φρέατος.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, δέον νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τοὺς ἑξῆς νόμους τῆς Φυσικῆς.

1) Ὁ ἦχος διαδίδεται μεθ' ὁμαλῆς κινήσεως μὲ ταχύτητα $\alpha=340$ περίπου μέτρων καθ' ἕκαστον δευτερόλεπτον.

2) *Ἐὰν σῶμα βαρύ, ἀφιέμενον ἀπό τινος ὕψους πίπτῃ ἐπὶ τ δεύτερα λεπτά, τὸ διανυθὲν ὑπ' αὐτοῦ διάστημα εἶναι*

$$\frac{1}{2}\gamma\tau^2, \text{ ὅπου } \gamma=9{,}8088 \text{ μέτρα.}$$

(ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

Κατόπιν τούτου ἔστω χ τὸ βάθος τοῦ φρέατος εἰς μέτρα, ἀλλὰ φανερὸν εἶναι ὅτι ὁ χρόνος τ εἶναι ἄθροισμα τοῦ χρόνου τ_1 (εἰς δεύτερα λεπτὰ) μετὰ τὸν ὁποῖον ὁ λίθος ἔπληξε τὸν πυθμένα καὶ τοῦ χρόνου τ_2, τὸν ὁποῖον ἐχρειάσθη ὁ ἦχος ἵνα φθάσῃ ἐκ τοῦ πυθμένος μέχρι τοῦ στομίου.

Καὶ ὁ μὲν χρόνος τ_1 εὑρίσκεται κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκ τοῦ τύπου $\chi=\frac{1}{2}\gamma\tau_1{}^2$, ἐξ οὗ $\tau_1=+\sqrt{\frac{2\chi}{\gamma}}$, ὁ δὲ χρόνος τ_2, θὰ εὑρεθῇ ἐκ τοῦ τύπου $\chi=\alpha\tau_2$, ἐξ οὗ $\tau_2=\frac{\chi}{\alpha}$.

Ἐκ τούτων ἕπεται ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος

$$\frac{\chi}{\alpha}+\sqrt{\frac{2\chi}{\gamma}}=\tau \qquad (1)$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) μετὰ τὴν ἀπαλλαγήν της ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ γίνεται $\chi^2-2\alpha\left(\tau+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\chi+\alpha^2\tau^2=0$

καὶ ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν

$$\chi=\alpha\left(\tau+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\pm\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}+2\tau\right)}$$

Αἱ ρίζαι αὗται εἶναι ἀμφότεραι θετικαί, διότι τὸ γινόμενόν των εἶναι θετικὸν ὡς καὶ τὸ ἄθροισμά των. Δὲν εἶναι ὅμως ἀμφότεραι παραδεκταί. Διότι τότε θὰ εἴχομεν δύο φρέατα μὲ διάφορον βάθος ἕκαστον καὶ εἰς ἃ ὁ χρόνος τ θὰ ἦτο ὁ αὐτός. Ἀλλ' ἵνα διακρίνωμεν ποία ἐκ τῶν δύο εὑρεθεισῶν ριζῶν εἶναι παραδεκτή, παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τ δεύτερα λεπτὰ ὁ ἦχος διανύει διάστημα μεγαλύτερον τοῦ βάθους τοῦ φρέατος, ἄρα τὸ βάθος τοῦτο εἶναι μικρότερον τοῦ ατ. Ἀλλ' ἡ μία τῶν ριζῶν τοῦ χ ἡ

$$\chi=\alpha\left(\tau+\frac{\alpha}{\gamma}\right)+\alpha\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\gamma}+2\tau\right)}$$

εἶναι προφανῶς μεγαλυτέρα τοῦ ατ καὶ διὰ τοῦτο δὲν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως (1) ἀλλὰ τῆς συζυγοῦς αὐτῆς· ἡ δὲ ἄλλη εἶναι μικροτέρα τοῦ ατ διότι τὸ γινόμενον τῶν δύο ριζῶν εἶναι $\alpha^2\tau^2=\alpha\tau.\alpha\tau$, ἑπομένως δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἀμφότεραι μεγαλύτεραι τοῦ ατ. Ἡ δευτέρα αὕτη ρίζα εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως (1), διότι δι' αὐτὴν τὸ $\tau-\dfrac{\chi}{\alpha}$ εἶναι θετικόν, ἑπομένως αὐτὴ λύει τὸ πρόβλημα.

10) Ἐπὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται διὰ δύο φωτεινῶν σημείων Α, Β, νὰ εὑρεθῇ σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν.

Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα τοῦτο, πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν ἑξῆς φυσικὸν νόμον.

Τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς ὅπερ δέχεται μία ἐπιφάνεια εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ἀπὸ τοῦ φωτεινοῦ σημείου.

Κατὰ τὸν νόμον αὐτόν, ἐὰν μ εἶναι τὸ ποσόν τοῦ φωτὸς ποὺ δέχεται μία ἐπιφάνεια ἐκ φωτεινοῦ σημείου κειμένου εἰς ἀπόστασιν 1 μέτρου ἀπ' αὐτοῦ καὶ ω εἶναι τὸ ποσὸν τοῦ φωτὸς ποὺ δέχεται ἡ ἰδία ἐπιφάνεια, ὅταν κεῖται εἰς ἀπόστασιν λ μέτρων θὰ εἶναι

$$\omega:\mu=1:\lambda^2 \quad \text{ἤτοι} \quad \omega=\frac{\mu}{\lambda^2}.$$

Κατόπιν τούτων ἔστω Μ τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον δύ-

M A M B M

ναται νὰ ὑποτεθῇ ἢ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α ἢ μεταξὺ Α καὶ Β ἢ πέραν τοῦ Β. Ἐὰν δὲ παραστήσωμεν διὰ δ τὴν ἀπόστασιν ΑΒ, διὰ χ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Μ ἀπὸ τοῦ Α, διὰ τοῦ α^2 τὸ ποσὸν τοῦ φωτός, ποὺ δέχεται ἐκ τοῦ Α τὸ σημεῖον τὸ ἀπέχον ἀπ' αὐτοῦ ἀπόστασιν 1 καὶ διὰ τοῦ β^2 τό ὅμοιον ποσὸν τοῦ φωτεινοῦ σημείου Β, εὑρίσκομεν, ὅτι, τὸ σημεῖον Μ ποὺ ὑποτίθεται ὅτι κεῖται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, δέχεται ἐκ τοῦ Α ποσὸν φωτὸς $\dfrac{\alpha^2}{\chi^2}$ καὶ ἐκ τοῦ Β ποσὸν φωτὸς $\dfrac{\beta^2}{(\delta+\chi)^2}$ $(\chi>0)$. Ἐπειδὴ δὲ τὰ ποσὰ αὐτὰ εἶναι ἴσα, ἔχομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta+\chi)^2}$$

Διὰ δὲ τὰς δύο ἄλλας προϋποθέσεις λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2} \qquad \chi>0.$$

Ἀλλ' ἐὰν αἱ ἀποστάσεις αἱ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α παρίστανται ὑπὸ ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, ἡ πρώτη ἐξίσωσις τρέπεται εἰς τὴν δευτέραν· ὥστε ὡς ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος δύναται νὰ ληφθῇ ἡ

$$\frac{\alpha^2}{\chi^2}=\frac{\beta^2}{(\delta-\chi)^2} \qquad (1)$$

ὁπότε ἂν εἶναι $\chi<0$, τὸ Μ κεῖται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, ἐὰν δὲ $0<\chi<\delta$ τὸ Μ κεῖται μεταξὺ Α καὶ Β καὶ ἂν $\chi>\delta$, τοῦτο κεῖται πέραν τοῦ Β.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) διὰ τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τῶν μελῶν αὐτῆς λαμβάνομεν τὰς ἰσοδυνάμους πρὸς αὐτὴν δύο ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha}{\chi}=\frac{\beta}{\delta-\chi} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\chi}=-\frac{\beta}{\delta-\chi}$$

ἐξ ὧν εὑρίσκομεν τὰς λύσεις

$$\chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{ἢ} \quad \chi=\delta.\frac{\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Διερεύνησις. Ἡ πρώτη τῶν λύσεων αὐτῶν εἶναι πάντοτε θετική· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}<1$, ἕπεται ὅτι $\chi<\delta$.

Ὥστε πάντοτε ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ Α καὶ Β σημεῖόν τι ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ὑπ' αὐτῶν. Καὶ

1) ἂν εἶναι $\alpha=\beta$, τότε εἶναι $\chi=\frac{\delta}{2}$, ἤτοι τὸ Μ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ.

2) ἂν εἶναι $\alpha>\beta$ θὰ εἶναι καὶ $2\alpha>\alpha+\beta$ ἤτοι $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}>\frac{\alpha}{2\alpha}$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}>\frac{1}{2}$ καὶ ἐπομένως $\chi>\frac{\delta}{2}$, τοῦτο δὲ δηλοῖ ὅτι τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον τοῦ Β.

3) ἂν εἶναι $\alpha<\beta$ ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι $\chi<\frac{\delta}{2}$ ἤτοι ὅτι τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον τοῦ Α.

Ὥστε ἂν $\alpha\neq\beta$ τὸ Μ κεῖται πλησιέστερον πρὸς τὸ ἀσθενέστερον σημεῖον.

Ἡ δευτέρα λύσις ὑπάρχει μόνον ὅταν $\alpha\neq\beta$. Διότι ἂν $\alpha=\beta$, ἡ ἐξίσωσις $\frac{\alpha}{\chi}=-\frac{\alpha}{\delta-\chi}$ γίνεται $\alpha\delta=0$ καὶ ὁ ἄγνωστος δὲν ὁρίζεται. Καὶ ἂν ὑποτεθῇ $\alpha<\beta$, ἡ λύσις εἶναι ἀρνητική, ἤτοι ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Α, ἂν δὲ ὑποτεθῇ $\alpha>\beta$, ἡ λύσις εἶναι θετικὴ καὶ μεγαλυτέρα τοῦ δ, διότι $\frac{\alpha}{\alpha-\beta}>1$. Ὥστε τότε ὑπάρχει σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον πέραν τοῦ Β. Ὥστε ἐν συνόλῳ ὑπάρχει, πλὴν τοῦ μεταξὺ τῶν δύο σημείων κειμένου σημείου, καὶ δεύτερον σημεῖον ἐξ ἴσου φωτιζόμενον κείμενον καὶ τοῦτο πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἀσθενεστέρου φωτός.

Ἐὰν τὸ φῶς Β ἀσθενέστερον ὂν τοῦ Α αὐξάνῃ καὶ τείνῃ νὰ γίνῃ ἴσον πρὸς τὸ Α ἡ δευτέρα λύσις δίδει τιμὴν τοῦ χ ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον αὐξανομένην καὶ δυναμένην νὰ ὑπερβῇ πάντα δοθέντα ἀριθμόν, ὅταν ἡ διαφορὰ τοῦ Β ἀπὸ τοῦ Α γίνῃ ἱκανῶς μικρά, ἤτοι τὸ σημεῖον τὸ ἐκτὸς τῆς ΑΒ ὑπάρχον καὶ ἐξ ἴσου φωτιζόμενον ἀπομακρύνεται ἀπὸ τῶν φωτεινῶν σημείων ὁλοὲν περισσότερον καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτοῦ ἀπὸ τούτων δύναται νὰ ὑπερβῇ πᾶσαν δοθεῖσαν ἀπόστασιν καὶ ἀπέχει ἀπ' αὐτῶν τόσῳ περισσότερον, ὅσῳ τὰ φῶτα διαφέρουν ἀπ' ἀλλήλων ὀλιγώτερον. Ἐὰν τὸ ἕτερον τῶν φώτων, ἔστω τὸ Β, γίνεται ὁλοὲν ἀσθενέστερον, τὰ ἐξ ἴσου φωτιζόμενα δύο σημεῖα πλησιάζουν ὁλοὲν περισσότερον πρὸς τὸ σημεῖον τοῦτο Β. Διότι, ὅσῳ μικρότερον γίνεται τὸ β, τόσῳ ἀμφότεραι αἱ τιμαὶ τοῦ χ πλησιάζουν πρὸς τὸ δ.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

868) Τὸ ἄθροισμα ἀριθμοῦ τινος καὶ τοῦ ἀντιστρόφου του εἶναι $2\frac{1}{6}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

869) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀκέραιοι διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ἐπὶ τὸν τρίτον ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ δευτέρου σὺν 3.

870) Νὰ διαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 900 εἰς δύο μέρη, τοιαῦτα ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων των νὰ ἰσοῦται μὲ τὸν ἀντίστροφον τοῦ 221.

871) Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 13, τὸ δὲ γινόμενον αὐτοῦ ἐπὶ τὸν προκύπτοντα, διὰ τῆς ἀντιστροφῆς τῶν ψηφίων του εἶναι 4930. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

872) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 10 καὶ τὸ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι 370. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

873) Ἡ διαφορὰ δύο ἀριθμῶν εἶναι 10 καὶ ἡ τῶν κύβων αὐτῶν εἶναι 2170. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

874) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 4706 καὶ τὸ τῶν κυβικῶν ριζῶν αὐτῶν εἶναι 26. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

875) Τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ δεκαπλασίου τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν κατὰ 135 καὶ τοῦ δεκαπλασίου τοῦ δευτέρου κατὰ 95. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

876) Διψήφιος ἀριθμὸς διαιρούμενος διὰ τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων του δίδει πηλίκον 5 καὶ ὑπόλοιπον 2. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ ἀντιστραφοῦν καὶ ὁ προκύπτων ἀριςμὸς διαιρεθῇ διὰ τοῦ ἰδίου γινομένου θὰ δώσῃ πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 5. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

877) Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι 6, ἡ δὲ διαφορὰ τοῦ γεωμετρικοῦ μέσου αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ἀθροίσματός των εἶναι 76. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί.

878) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων των δίδει γινόμενον 1296, ἐνῷ ἡ διαφορὰ τῶν ἰδίων ἀριθμῶν πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των δίδει γινόμενον 680. Εὑρεῖν τοὺς ἀριθμοὺς τούτους.

879) Ἐπρόκειτο νὰ μοιρασθοῦν 600 δρχ. εἰς πτωχοὺς ἐξ ἴσου Ἀλλ' ἐπειδὴ κατὰ τὴν διανομὴν ἀπουσίαζον 4, τὸ μερίδιον ἑκάστου τῶν ἄλλων ηὐξήθη κατὰ 5 δρχ. Πόσοι ἦσαν οἱ πτωχοί.

880) Ἐξοφλεῖ τις χρέος 3600 δραχμῶν διὰ μηνιαίων δόσεων. Ἐὰν ἐπλήρωνε κατὰ μῆνα 60 δραχμὰς περισσότερον, τὸ χρέος θὰ ἐξωφλεῖτο εἰς 5 μῆνας ἐνωρίτερον. Ποία εἶναι ἡ μηνιαία δόσις καὶ εἰς πόσους μῆνας θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του.

881) Ἡ ταχύτης κινητοῦ τινος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος ἄλλου κατὰ 5 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Τὸ πρῶτον διήνυσεν ἀπόστασιν 150 χιλιομέτρων εἰς χρόνον κατὰ μίαν ὥραν μικρότερον τοῦ χρόνου, ὃν ἐχρειάσθη τὸ ἄλλο διὰ νὰ διανύσῃ τὸ αὐτὸ διάστημα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες.

882) Ἓν ποταμόπλοιον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ χωρίου Α, φθάνει εἰς τὸ Β καὶ ἐπανέρχεται εἰς τὸ Α μετὰ 16 ὥρας. Τὰ δύο χωρία ἀπέχουν 60 χιλιόμετρα, ἡ δὲ ταχύτης τοῦ ρεύματος τοῦ ποταμοῦ εἶναι 2 χιλιόμετρα τὴν ὥραν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἰδία ταχύτης τοῦ πλοίου.

883) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 60000 δραχμῶν καὶ ἔλαβε μετὰ ὡρισμένον χρόνον τόκον 3500 δραχμῶν. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἐτόκιζεν ἐπὶ ἕνα μῆνα περισσότερον καὶ μὲ ἐπιτόκιον κατὰ 1 μεγαλύτερον τοῦ προηγουμένου θὰ ἐλάμβανε τόκον 4500 δραχμῶν. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον καὶ ἐπὶ πόσον χρόνον ἐτόκιζε τὸ κεφάλαιον ;

884) Ἐτόκισέ τις κεφάλαιον 50000 δραχμῶν. Μετὰ ἓν ἔτος τὸν τόκον αὐτοῦ προσέθεσεν εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ὅλον ποσὸν ἔμεινε τοκισμένον ἐπὶ ἓν ἔτος ἀκόμη μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον. Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον ἐτοκίσθη, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι εἰς τὸ τέλος τῶν δύο ἐτῶν ἔλαβεν ἐν ὅλῳ τόκον 8320 δραχμὰς ;

885) Κεφάλαιόν τι μετὰ τῶν τόκων ἑνὸς ἔτους ἀνέρχεται εἰς 5250 δρχ. Ἐὰν τὸ κεφάλαιον ἦτο κατὰ 600 δραχμὰς μεγαλύτερον ὡς καὶ τὸ ἐπιτόκιον κατὰ $\frac{1}{2}$ %, θὰ ἀνήρχετο ὁ τόκος εἰς 5908 δραχμάς. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον;

886) Δύο κρῆναι γεμίζουν ὁμοῦ μίαν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Ἡ μία μόνη τὴν γεμίζει εἰς 27 ὥρας ἐπὶ πλέον τῆς ἄλλης. Εἰς πόσας ὥρας γεμίζει ἑκάστη κρήνη τὴν δεξαμενὴν αὐτήν ;

887) Δύο ἐργάται ὅταν ἐργάζωνται ὁμοῦ, ἐκτελοῦν ἓν ἔργον εἰς 3 ὥρας. Ἐὰν ὅμως ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν μόνος ἐκτελέσῃ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔργου καὶ

ὁ ἄλλος τὸ ἄλλο ἥμισυ, θὰ χρειασθοῦν ἐν ὅλῳ 8 ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος ἐργάτης ἤθελεν ἐκτελέσει μόνος του τὸ ἔργον;

888) Ἀνέμειξέ τις καθαρὸν οἰνόπνευμα μὲ ὕδωρ· ἡ διαφορὰ τῶν βαρῶν τῶν εἰδῶν τούτων εἶναι 60 ὀκάδες· ἂν ἔρριπτεν εἰς τὸ μεῖγμα ἀνὰ 25 ὀκάδας ἐξ ἑκάστου εἴδους, ὁ βαθμὸς τοῦ νέου μείγματος θὰ ἦτο κατὰ 10 μικρότερος τοῦ πρώτου. Πόσας ὀκάδας ὕδατος ἀνέμειξεν;

889) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ χαλκοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ πρώτου εἶναι κατὰ 10,4 μεγαλύτερον τοῦ εἰδικοῦ βάρους τοῦ δευτέρου καὶ ὅτι κρᾶμα 28 γραμμαρίων χρυσοῦ μετὰ 11 γραμμαρίων χαλκοῦ ἔχει εἰδικὸν βάρος 14,4.

890) Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ψηφίων εἶναι 104· τὸ τετράγωνον τοῦ μέσου ψηφίου ὑπερβαίνει κατὰ 4 τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν δύο ἄλλων. Ἐὰν δὲ τὰ ψηφία αὐτοῦ γραφοῦν κατὰ τάξιν ἀντίστροφον, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ ζητουμένου κατὰ 594.

891) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίας, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ λόγος αὐτῆς εἶναι 2, τὸ ἄθροισμα τῶν ἡγουμένων 20 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὅρων 260.

892) Τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ δύο δοθέντων α καὶ β, ἵνα τὰ τετράγωνα αὐτῶν γίνουν ἴσα;

893) Κλάσματος ὑψοῦνται ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἰς τὸ τετράγωνον καὶ προκύπτει νέον κλάσμα· ζητεῖται τίς ἀριθμὸς πρέπει νὰ προστεθῇ εἰς ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ νέου κλάσματος, ἵνα γίνῃ ἴσον μὲ τὸ ἀρχικόν;

894α) Τίς ἀριθμὸς ἀφαιρούμενος ἀπ' ἀμφοτέρων τῶν παραγόντων γινομένου δὲν βλάπτει αὐτό; καὶ τίς ἔχει τὴν αὐτὴν ἰδιότητα εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων;

894β) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τέσσαρες ὅροι ἀναλογίας, γνωστῶν ὄντων τοῦ ἀθροίσματος 2α τῶν ἄκρων ὅρων, τοῦ ἀθροίσματος 2β τῶν μέσων καὶ τοῦ ἀθροίσματος $4\gamma^2$ τῶν τετραγώνων τῶν 4 ὅρων αὐτῆς.

895) Ἡ διαγώνιος ὀρθογωνίου εἶναι 85 μέτρα. Ἐὰν ἑκάστη πλευρὰ αὐτοῦ αὐξηθῇ κατὰ 2 μέτρα τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνεται κατὰ 230 τ. μ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τούτου.

896) Ἡ μία τῶν πλευρῶν τριγώνου κειμένη ἀπέναντι ὀξείας γωνίας εἶναι 37 μέτρα, ἡ διαφορὰ τῶν ἄλλων πλευρῶν εἶναι 27 μέτρα καὶ ἡ ὀρθὴ προβολὴ τῆς μικροτέρας ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἄλλην εἶναι 5 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ τοῦ τριγώνου.

897) Δοθέντων δύο ὀρθογωνίων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθοῦν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτῶν κατὰ τὴν αὐτὴν γραμμήν, ὥστε νὰ γίνουν ἴσα τὴν ἐπιφάνειαν.

898) Δοθέντων δύο τριγώνων, ζητεῖται νὰ ἐλαττωθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ πρώτου κατά τινα γραμμὴν καὶ αἱ τοῦ δευτέρου κατ' ἄλλην ὥστε νὰ γίνουν ὅμοια.

899) Δοθέντος ὀρθογωνίου νὰ ἐλαττωθοῦν αἱ πλευραὶ κατά τινα γραμμήν, ὥστε τὸ ἐμβαδόν του νὰ γίνῃ τὸ ἥμισυ ἢ πρότερον.

900) Δοθέντος τριγώνου, νὰ ἐλαττωθοῦν ὅλαι αἱ πλευραὶ αὐτοῦ κατὰ μίαν γραμμήν, ὥστε νὰ γίνῃ ὀρθογώνιον.

901) Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ αὐξάνεται μὲν ἡ πλευρὰ ΑΓ κατὰ

τινα εὐθεῖαν ΓΓ', ἐλαττοῦται δὲ ἡ ΑΒ κατὰ τὴν ἴσην ΒΒ'. Ζητεῖται, ἂν ἀχθῇ ἡ Β' Γ', εἰς ποῖον σημεῖον θὰ τέμνῃ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Ἀσκήσεις ἀνάμεικτοι.—Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

902) $(\alpha+\sqrt{\chi})^4-(\alpha-\sqrt{\chi})^4$ 903) $(\alpha+\sqrt{\chi})^5+(\alpha-\sqrt{\chi})^5$

904) Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

Νὰ ἀπαλλαγοῦν τῶν ριζικῶν οἱ παρονομασταὶ τῶν κλασμάτων:

905) $\dfrac{A}{\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta}}$ 906) $\dfrac{B}{\sqrt[5]{\alpha}+\sqrt[5]{\beta}}$ 907) $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι

908) $\sqrt{1+\chi}=1+\frac{1}{2}\chi-\frac{1}{8}\chi^2+\frac{1}{16}\chi^3-\frac{5}{128}\chi^4+\frac{7}{256}\chi^5-\frac{21}{1024}\chi^6+\ldots\ldots$

909) $\sqrt{1-\chi}=1-\frac{1}{2}\chi-\frac{1}{8}\chi^2-\frac{1}{16}\chi^3-\frac{5}{128}\chi^4-\frac{7}{256}\chi^5-\frac{21}{1024}\chi^6-\ldots\ldots$

(Οἱ τύποι οὗτοι ἔχουν ἐφαρμογὴν διὰ $|\chi|<1$)

910) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ μεταξὺ τῶν συντελεστῶν α,β,γ τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+2\beta\chi\psi+\gamma\psi^2$, ἵνα τοῦτο εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι

911) $\sqrt{2i}$ 912) $\sqrt{-i}$ 913) $\sqrt{5+12i}$

914) $\sqrt{63-16i}$ 915) $\sqrt{15+8i}$ 916) $\sqrt{9+40i}$

Σημείωσις. Θέτομεν $\sqrt{\alpha+\beta i}=\gamma+\delta i$, ὑψοῦμεν ἔπειτα τὰ μέλη εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἐξισοῦμεν κατόπιν τὰ πραγματικὰ μέρη ὡς καὶ τὰ φανταστικά.

917) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $-2\chi^2+\psi^2+\chi\psi+11\chi-2\psi-15=0$, πρὸς ψ, θεωροῦντες τὸν χ ὡς γνωστόν.

918) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4\left(\chi^{\frac{1}{2}}-1\right)^2=\chi+1$,

Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

919) $\chi^4-5\chi^3+5\chi^2+5\chi-6=0$ $\chi^4-7\chi^3+8\chi^2+28\chi-48=0$

920) $\chi^4-4(\alpha^2+\beta^2)\chi^2+4\alpha^2\beta^2=0$ $(\chi^2+\alpha\chi)^2+\beta(\chi^2+\alpha\chi)=\gamma$

921) Ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι $2\beta^2=9\alpha\gamma$ νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ριζῶν αὐτῆς.

922) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τοὺς συντελεστὰς τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$, ἧς ἡ μία τῶν ριζῶν εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha=0$

923) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐν τῇ ἐξισώσει $\chi^2-\chi=2+\sqrt{5}$ ἡ μία ρίζα εἶναι τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης.

924) Νὰ ἀποδειχθῇ 1ον) ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-(\alpha+\gamma)\chi+\alpha\gamma-\beta^2=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους οἱοιδήποτε καὶ ἂν εἶναι οἱ πραγματικοὶ συντελεσταὶ α, β, γ καὶ 2ον) ὅτι ἐὰν χ_1 καὶ χ_2 εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\psi-\chi')(\psi-\chi'')=-\beta^2$ εἶναι οἱ ἀριθμοὶ α καὶ γ.

925) Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μ, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$(2\mu-1)\chi^2+2(1-\mu)\chi+3\mu=0$$

νὰ εἶναι ἴσον μὲ 4.

926) Νὰ ὁρισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ α, ὥστε αἱ δύο ἐξισώσεις $\chi^2+\alpha\chi+1=0$ καὶ $\chi^2+\chi+\alpha=0$ νὰ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν.

927) Ἐὰν αἱ ἐξισώσεις $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ $\beta\gamma\chi^2+\gamma\alpha\chi+\alpha\beta=0$ ἔχουν μίαν ρίζαν κοινήν, πρὸς δὲ εἶναι καὶ $\alpha+\beta+\gamma=0$, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\beta^4(\alpha-\gamma)^2=\alpha^2\gamma^2(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)$$

928) Ἐὰν α, β εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^2+\pi\chi+\kappa=0$ νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις 2ου βαθμοῦ τῆς ὁποίας ρίζαι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $\mu\alpha^2+\nu\beta^2$ καὶ $\mu\beta^2+\nu\alpha^2$.

929) Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ νὰ σχηματισθῇ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τὰς $\frac{1-\rho_1}{1+\rho_1}$, καὶ $\frac{1-\rho_2}{1+\rho_2}$.

930) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{1}{\chi-\alpha}+\frac{1}{\chi-\beta}+\frac{1}{\chi-\gamma}=0$ καὶ ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἔχει πάντοτε δύο ρίζας πραγματικάς.

931) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις

$$(\lambda-5)\chi^2-4\lambda\chi+\lambda-2=0$$

ἔχει νὰς ρίζας της 1) πραγματικὰς καὶ 2) μὲ σημεῖα ἀντίθετα ;

932) Ἐὰν χ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς τὸ κλάσμα $\frac{\chi^2-4\chi-20}{\chi-7}$ δὲν δύναται νὰ ἔχῃ πραγματικὴν τιμὴν κειμένην μεταξὺ 8 καὶ 12.

933) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν α,β,γ εἶναι αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου, τὸ τριώνυμον τοῦ δευτέρου βαθμοῦ $\beta^2\chi^2+(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)\chi+\gamma^2$ εἶναι πάντοτε θετικὸν οἱαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ πραγματικὴ τιμὴ τοῦ χ.

934) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς τῆς $\pi\chi^2+\kappa\chi+\lambda=0$ ηὐξημένας κατὰ μονάδα. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι $\pi:\kappa:\lambda=\alpha:\beta+2\alpha$ $\gamma+\alpha+\beta$.

Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα

935) $\chi^2+\psi^2-4\chi+2\psi+1=0$, $7\chi+\chi\psi+4\psi-20=0$

936) $\chi^2+\psi^2+2\chi+5\psi=15$, $3\chi+\chi\psi+3\psi=9$

937) $3\chi^2+11\chi\psi+3\psi^2=207$, $2\chi^2-3\chi\psi+2\psi^2=14$

938) $2(\chi^4+\psi^4)+7\chi\psi(\chi^2+\psi^2)=740$, $2(\chi^2+\psi^2)-\chi\psi=20$

939) $\chi+\sqrt{\chi+\psi}=12-\psi$, $\chi^2+\psi^2=41$

940) $\sqrt{\frac{\chi}{\psi}}+\sqrt{\frac{\psi}{\chi}}=\frac{61}{\sqrt{\chi\psi}}+1$, $\sqrt[4]{\chi^3\psi}+\sqrt[4]{\chi\psi^3}=78$

941) Ἐὰν $\alpha>0$, $\beta>0$, $\alpha^2-\beta>0$ καὶ τὸ β δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\sqrt{\alpha\pm\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha+\gamma}{2}}\pm\sqrt{\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

καὶ ὅπου $\gamma^2=\alpha^2-\beta$.

Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις :

942) $\sqrt{7\pm13}$ 943) $\sqrt{13\pm\sqrt{48}}$ 944) $\sqrt{28\pm5\sqrt{12}}$

945) $\frac{\alpha}{4}\sqrt{6\pm2\sqrt{5}}$ 946) $\sqrt{\frac{5}{3}\pm\frac{1}{6}\sqrt{91}}$ 947) $\sqrt{\frac{3}{5}\pm\frac{1}{20}\sqrt{23}}$

948) $\sqrt{\alpha^2+\beta+2\alpha\sqrt{\beta}}$ 949) $\sqrt{\alpha^2+2\chi\sqrt{\alpha^2-\chi^2}}$ 950) $\sqrt{\lambda-2\sqrt{\lambda-1}}$

951) Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-20\chi^2+81=0$ νὰ εὑρεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\pm\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$ ἀπ' εὐθείας.

952) Νὰ εὑρεθοῦν ὁμοίως ὡς ἄνω καὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-8\chi^2+9=0$.

953) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις $\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{17-12\sqrt{2}}}-\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{17+12\sqrt{2}}}$

954) Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις τῆς ἰσότητος

$$\sqrt{19+4\sqrt{21}}+\sqrt{7}-\sqrt{12}-\sqrt{29-2\sqrt{28}}=1.$$

955) Ζητεῖται ἡ τρίτη πλευρὰ τριγώνου οὗ γνωρίζομεν τὰς δύο πλευρὰς β καὶ γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν $\dfrac{1}{2}$ μ².

956) Ζητοῦνται αἱ τρεῖς πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, οὗ γνωρίζομεν τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὴν διαφορὰν δ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.

957) Αἱ τρεῖς διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχουν ἄθροισμα 19 μέτρα, ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι 13 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι 12 τ.μ. Ζητοῦνται αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ παραλληλεπιπέδου τούτου.

958) Τὸ ὕψος κώνου ὀρθοῦ εἶναι 12 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 135π τ. μ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πλευρὰ ὡς καὶ ἡ ἀκτὲς τῆς βάσεως τοῦ κώνου τούτου.

959) Περὶ ἡμισφαίριον ἀκτῖνος 3 μ. εἶναι περιγεγραμμένος κόλουρος κῶνος. οὗ ὁ ὄγκος εἶναι 31π κ. μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

960) Εἰς σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος νὰ ἐγγραφῇ κῶνος τοιοῦτος ὥστε ἐκ τῶν δύο ζωνῶν εἰς ἃς διαιρεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ὑπὸ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἡ ἔναντι τῆς κορυφῆς αὐτοῦ νὰ ἔχῃ ἐμβαδὸν ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

961) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες δύο σφαιρῶν ἐκ τῆς διαφορᾶς των καὶ ἐκ τῆς διαφορᾶς τῶν ὄγκων των, ἴσης μὲ τὸν ὄγκον σφαίρας, δοθείσης ἀκτῖνος.

962) Νὰ εὑρεθοῦν ἅπαντα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων μία μὲν ἐκ τῶν καθέτων πλευρῶν εἶναι ἴση μὲ 12 μέτρα, αἱ δὲ λοιπαὶ πλευραὶ αὐτῶν σύγκεινται ἐξ ἀκεραίων ἀριθμῶν μέτρων.

Ἔστω χ ἡ ὑποτείνουσα καὶ ψ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ἑνὸς τοιούτου τριγώνου. Τότε δὲ θὰ εἶναι

$$\chi^2-\psi^2=144 \text{ ἢ}$$

$$(\chi+\psi)(\chi-\psi)=144.$$

Βλέπομεν λοιπὸν ἤδη ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ χ+ψ καὶ χ−ψ εἶναι συζυγεῖς διαιρέται τοῦ 144, ἤτοι τοιοῦτοι ὥστε τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι 144. Ἑπομένως, ἵνα λύσωμεν τὸ πρόβλημα, πρέπει νὰ εὕρωμεν πάντας τοὺς διαιρέτας τοῦ 144 εἶναι δὲ οὗτοι (ἴδε Θεωρ. ἀριθμ.)

χ+ψ =	144	72	48	36	24	18	16	12
χ−ψ =	1	2	9	4	6	8	9	12

καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι $\begin{array}{l|l|l|l} \chi = 37 & 20 & 15 & 13 \\ \psi = 35 & 16 & 9 & 5 \end{array}$

963. (Πρόβλημα τῆς ἀπροδιορίστου ἀναλύσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ). *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως*

$$\chi^2+\psi^2=\omega^2 \qquad (1).$$

Ἐάν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν λύσιν τινὰ τῆς ἐξισώσεως (1) ἔχουν κοινόν τινα διαιρέτην δ καὶ τὰ πηλίκα αὐτῶν, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ δ, ἐπαληθεύουν τὴν αὐτὴν ἐξίσωσιν· ὥστε ἀρκεῖ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις, τῶν ὁποίων οἱ ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω, ὄντες πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν, εἷς ἐκ τῶν χ καὶ ψ εἶναι ἄρτιος, οἱ δὲ δύο ἄλλοι εἶναι περιττοί. Διότι καὶ οἱ τρεῖς δὲν δύνανται νὰ εἶναι περιττοί· ἐπειδὴ τὰ τετράγωνα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι περιττοὶ ἀριθμοί, τὸ ἄθροισμα δέ, ὂν ἄρτιος ἀριθμός, δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ ω^2, ἤτοι μὲ περιττὸν ἀριθμόν. Δὲν δύνανται ὅμως νὰ εἶναι δύο ἐξ αὐτῶν ἄρτιοι· διότι ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει καὶ τὸ τετράγωνον τοῦ τρίτου θὰ ἦτο ἄρτιον, ἄρα καὶ ὁ τρίτος ἄρτιος καὶ θὰ εἶχον οἱ τρεῖς κοινὸν διαιρέτην τὸν 2. Ἀλλ' ὁ ω πρέπει νὰ εἶναι περιττός· διότι ἂν ἦτο ἄρτιος τὸ τετράγωνον αὐτοῦ ω^2 ἢ $\chi^2+\psi^2$ θὰ ἦτο διαιρετὸν διὰ 4· τὸ ἄθροισμα ὅμως $\chi^2+\psi^2$ τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν χ καὶ ψ διαιρεῖται μόνον διὰ 2 καὶ ὄχι διὰ 4· διότι ἂν εἶναι $\chi=2\mu+1$ καὶ $\psi=2\nu+1$ θὰ εἶναι $\chi^2+\psi^2=4(\mu^2+\nu^2+\mu+\nu)+2$. Ὥστε ὁ ω εἶναι περιττὸς ἀριθμός, εἷς δὲ μόνον ἐκ τῶν χ καὶ ψ εἶναι ἄρτιος. Ἔστω δὲ ἄρτιος ὁ χ, ἤτοι, $\chi=2\chi'$· ἀλλὰ τότε ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$4\chi'^2=\omega^2-\psi^2$$

$$\text{ἢ} \qquad \chi'^2=\frac{1}{2}(\omega+\psi)\cdot\frac{1}{2}(\omega-\psi) \qquad (2)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι οἱ δύο ἀκέραιοι $\frac{1}{2}(\omega+\psi)$, $\frac{1}{2}(\omega-\psi)$ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὸν διαιρέτην· διότι ἂν ἀριθμός τις πρῶτος διῄρει αὐτοὺς θὰ διῄρει καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν ὡς καὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν ψ καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν χ'^2 ἤτοι καὶ τὸν χ'. Ὥστε οἱ τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, ω θὰ εἶχον κοινὸν διαιρέτην, ἐνῷ ἡμεῖς τοὺς ὑπεθέσαμεν πρώτους πρὸς ἀλλήλους.

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενον δύο ἀριθμῶν πρώτων πρὸς ἀλλήλους τότε μόνον εἶναι τετράγωνον, ὅταν ἕκαστος τούτων εἶναι τετράγωνον, ἕπεται ὅτι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{1}{2}(\omega+\psi)=\alpha^2 \text{ καὶ } \frac{1}{2}(\omega-\psi)=\beta^2$$

Ἐὰν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται τεθοῦν εἰς τὴν ἐξίσωσιν (2), προκύπτει $\chi' = \alpha\beta$ ἤτοι $\chi = 2\alpha\beta$. Ὅθεν ἕπεται ὅτι ὅλαι αἱ ζητούμεναι λύσεις περιέχονται εἰς τοὺς τύπους

$$\chi = 2\alpha\beta, \qquad \psi = \alpha^2 - \beta^2, \qquad \omega = \alpha^2 + \beta^2 \qquad (3),$$

ὅπου α καὶ β εἶναι τυχόντες ἀκέραιοι,

Ἡ ἁπλουστάτη τῶν λύσεων εἶναι ἡ (3, 4, 5) καὶ δίδεται ὑπὸ τῶν τύπων (3) ἂν τεθῇ $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Μετ' αὐτὴν ἔρχονται αἱ ἑξῆς

(5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (9, 40, 41)

ἂν τεθοῦν $\begin{array}{l|l|l|l} \alpha = 3 & 4 & 4 & 5 \\ \beta = 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}$

Οἱ τὴν ἐξίσωσιν (1) ἐπαληθεύοντες ἀριθμοὶ χ, ψ, ω μετροῦν τὰς πλευρὰς ὀρθογωνίου τριγώνου· ὥστε διὰ τῶν προηγουμένων ἐλύθη καὶ τὸ ἑπόμενον γεωμετρικὸν πρόβλημα:

Νὰ εὑρεθοῦν ἅπαντα τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι σύμμετροι πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ΄

ΟΡΙΑ - ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Περὶ τῶν ὁρίων.

212. Σταθερὰ καὶ μεταβλητὰ ποσά.—Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τετραγώνου γνωρίζομεν, ὅτι εἶναι σταθερόν, ἐνῷ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι μεταβλητή. Ἐκ τῶν ποσῶν λοιπὸν ἄλλα μὲν ἔχουν τὴν αὐτὴν πάντοτε τιμὴν καὶ τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο λέγονται *σταθερά*, ἄλλα δὲ λαμβάνουν διαφόρους τιμὰς ἢ καταστάσεις καὶ τὰ ὁποῖα διὰ τοῦτο λέγονται *μεταβλητά*. Αἱ τιμαὶ τῶν σταθερῶν ἢ μεταβλητῶν ποσῶν εἶναι ἀριθμοὶ σταθεροὶ ἢ μεταβλητοί. Ἐκ τῶν συγκεκριμένων δὲ τούτων ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ θεωρῶμεν καὶ ἀφῃρημένους ἀριθμούς, σταθεροὺς ἢ μεταβλητούς.

Οἱ σταθεροὶ ἀριθμοὶ παρίστανται συνήθως διὰ τῶν πρώτων γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου ὡς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κλπ., ἐνῷ οἱ μεταβλητοὶ παρίστανται συνήθως διὰ τῶν τελευταίων γραμμάτων αὐτοῦ, ὡς χ, ψ, ϕ, ω κλπ.

213. Θεώρημα.—*Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων καὶ μεγαλυτέρα ἢ ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν.*

Ἤτοι ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο δοθέντες ἀριθμοὶ εἶναι

$$|\alpha|-|\beta| \leqslant |\alpha+\beta| \leqslant |\alpha|+|\beta|.$$

Καὶ πράγματι· ἐὰν οἱ α καὶ β εἶναι ὁμόσημοι, θὰ ἔχωμεν (§ 12, 1ον) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ καὶ κατὰ συνέπειαν $|\alpha+\beta|>|\alpha|-|\beta|$ ἐὰν δὲ οἱ α καὶ β εἶναι ἑτερόσημοι ἔχομεν (§ 12, 2ον) $|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta|$ καὶ κατὰ συνέπειαν $|\alpha+\beta|<|\alpha|+|\beta|$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀληθεύει προδήλως καὶ διὰ τὴν διαφορὰν δύο ἀριθμῶν.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ τὰ ἑξῆς θεωρήματα.

214. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ γινομένου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων αὐτοῦ.* Ἤτοι

$$|\alpha . \beta . \gamma| = |\alpha| . |\beta| . |\gamma| .$$

215. *Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρετέου διὰ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ διαιρέτου.* Ἤτοι $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$.

216. ***Ὅρια μεταβλητῶν ἀριθμῶν:*** *1). Ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ, καὶ νὰ μένῃ μικροτέρα αὐτοῦ καὶ διὰ τὰς ἑπομένας τιμάς του, τότε λέγομεν, ὅτι τοῦ μεταβλητοῦ τούτου ἀριθμοῦ ὅριον εἶναι τὸ μηδέν.* Σημειοῦμεν δὲ τοῦτο ὡς ἕπεται: ὅρχ=0. Ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἐξαρτᾶται ἀπὸ ἕνα ἢ περισσοτέρους ἄλλους μεταβλητοὺς καθεὶς τῶν ὁποίων διανύει σειρὰν ἀπείρων τιμῶν προδιαγεγραμμένων. Ἑπόμεναι δὲ τιμαὶ αὐτοῦ λογίζονται, ὅλαι αἱ τιμαὶ τὰς ὁποίας λαμβάνει οὗτος, ὅταν οἱ μεταβλητοὶ ἀριθμοί, ἀπὸ τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται, προχωροῦν ἕκαστος εἰς τὴν προδιαγεγραμμένην σειρὰν τῶν τιμῶν αὐτοῦ.

2) *Τοῦ μεταβλητοῦ ἀριθμοῦ χ λέγεται ὅριον ὁ σταθερὸς ἀριθμὸς α, ὅταν τῆς διαφορᾶς χ—α ὅριον εἶναι τὸ 0.*

Ἤτοι ἂν ὅρ (χ—α) = 0 εἶναι καὶ ὅρχ = α· καὶ ἀντιστρόφως, ἂν ὅρχ = α, εἶναι καὶ ὅρ (χ—α) = 0.

Π. χ. Ἐὰν ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς χ διατρέχῃ τὰς τιμὰς 1, 2, 3, 4.... ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς $\dfrac{\chi}{\chi+1}$ ἔχει ὅριον τὴν μονάδα 1, διότι τῆς διαφορᾶς $\dfrac{\chi}{\chi+1} - 1$ ὅριον εἶναι τὸ 0.

3) *Ἐὰν ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἀριθμοῦ χ ἀπείρους λαμβάνοντος τιμάς, δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλυτέρα δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ Α, ὁσονδήποτε μεγάλου, τότε λέγομεν, ὅτι τοῦ μεταβλητοῦ τούτου ἀριθμοῦ ὅριον εἶναι τὸ ἄπειρον* (∞.)

Ἐὰν ὁ μεταβλητὸς χ, ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς εἶναι θετικός, τότε λέγομεν, ὅτι ὅριον τοῦ χ εἶναι τὸ θετικὸν ἄπειρον (+∞), ἐνῷ ἂν ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ὁ χ εἶναι ἀρνητικός, τότε λέγομεν, ὅτι ὅριον τοῦ χ εἶναι τὸ ἀρνητικὸν ἄπειρον (—∞).

Ὁμοίως ὁρίζονται καὶ τὰ ὅρια μεταβλητῶν *ποσῶν*.

217. Θεώρημα.—*Ἐὰν μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ, ἀπείρους λαμβάνων τιμάς, αὐξάνεται ἀπαύστως, μένει δὲ πάντοτε μικρότερος δοθέντος ἀριθμοῦ Α, ὁ ἀριθμὸς οὗτος ἔχει ὅριον.*

Ἔστω $A>0$. Ὁ μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ ὑπερβαίνει τινὰς τῶν ἀκεραίων $0, 1, 2, 3 \ldots \rho, \rho+1, \ldots$ ὅμως ὄχι ὅλους, π. χ. ὄχι τοὺς μεγαλυτέρους τοῦ Α. Ἂς ὑποτεθῇ δὲ ὅτι ὑπερβαίνει μὲν τὸν ρ ($\rho<A$) ἀλλ' ὄχι καὶ τὸν $\rho+1$· ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ρ, $\rho+\frac{1}{10}$, $\rho+\frac{2}{10}, \ldots \rho+\frac{10}{10}$ ἀνάγκη νὰ εὑρίσκεται εἷς τὸν ὁποῖον οὐδέποτε φθάνει ὁ ἀριθμός, ἐνῷ τὸν ἀμέσως προηγούμενον φθάνει καὶ ὑπερβαίνει καὶ ἔστω $\rho+\frac{\rho_1}{10}$ ὁ τελευταῖος οὗτος ἀριθμός· ἐξακολουθοῦντες οὕτω βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει ἀριθμός τις ἐντελῶς ὡρισμένος $\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\ldots$, ὅστις λέγω ὅτι εἶναι ὅριον τοῦ μεταβλητοῦ χ· διότι προφανῶς ὅριον τῆς διαφορᾶς $\chi-(\rho+\frac{\rho_1}{10}+\frac{\rho_2}{100}+\ldots)$ εἶναι τὸ 0.

Παρατήρησις. Τὸ ὅριον τοῦτο τοῦ χ εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ Α. Καὶ ὅταν μεταβλητὸς ἀριθμὸς ψ ἐλαττοῦται ἀπαύστως, μένει δὲ πάντοτε μεγαλύτερος δοθέντος ἀριθμοῦ τινος Β, ἔχει ὅριον. Τὸ ὅριον δὲ τοῦ ψ εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ Β.

218. Θεώρημα.—*Τὸ ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἐὰν δηλ. $ὅρ\chi=\alpha$ καὶ $ὅρ\psi=\beta$, θὰ εἶναι καὶ

$$ὅρ(\chi+\psi)=\alpha+\beta=ὅρ\chi+ὅρ\psi.$$

Διότι ἡ διαφορὰ $(\chi+\psi)-(\alpha+\beta)$ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαφορῶν $(\chi-\alpha)+(\psi-\beta)$· γνωρίζομεν δὲ ὅτι (§ 213)

$$|\,\chi-\alpha)+(\psi-\beta)\,| \leqslant |\,\chi-\alpha\,|+|\,\psi-\beta\,|,$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν $ὅρ(\chi-\alpha)=0$ καὶ $ὅρ(\psi-\beta)=0$, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ ἑκάστης τῶν διαφορῶν $\chi-\alpha$ καὶ $\psi-\beta$ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα τοῦ ἐλαχίστου θετικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\varepsilon}{2}$· ἤτοι $|\,\chi-\alpha\,|<\frac{\varepsilon}{2}$ καὶ $|\,\psi-\beta\,|<\frac{\varepsilon}{2}$· προσθέτοντες δὲ τὰς δύο ταύτας ἀνισότητας κατὰ μέλη λαμβάνομεν $|\,\chi-\alpha\,|+|\,\psi-\beta\,|<\varepsilon$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $|\,(\chi-\alpha)+(\psi-\beta)\,|<\varepsilon$ δηλαδὴ $|\,(\chi+\psi)-(\alpha+\beta)\,|<\varepsilon$. ἑπομένως

$$ὅρ(χ+ψ)=α+β=ὅρχ+ὅρψ.$$

Τὸ θεώρημα ἐκτείνεται προφανῶς ἐπὶ τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε ἀριθμῶν, ἀλλ' εἰς πεπερασμένον πλῆθος.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ ἑξῆς θεώρημα.

Ἡ διαφορὰ δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὴν διαφορὰν τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.

219 Τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ὧν ὁ εἷς ἔχει ὅριον τὸ 0, ὁ δὲ ἄλλος μένει μικρότερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ, ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Ἔστω μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ ἔχων ὅριον τὸ μηδεν, καὶ ἄλλος ψ, ὅστις μένει μικρότερος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ Α. Λέγω, ὅτι ὅρ(χψ)=0· ἀλλ' ἵνα ὅρ(χψ)=0, πρέπει ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου χψ νὰ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι δυνατόν, διότι ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ψ, ὅπερ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ ὁσονδήποτε μικροῦ, ἄρα καὶ τοῦ $\frac{ε}{Α}$ ἤτοι $|ψ|<\frac{ε}{Α}$ ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ γινομένου χψ εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων (214) ἤτοι ἐπειδὴ $|χψ|=|χ|.|ψ|$, ἕπεται ὅτι $|χψ|<\frac{ε}{Α}\;Α$ ἢ $|χψ|<ε$· ὅ. ἔ. δ.

220. Θεώρημα.—*Τὸ γινόμενον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον τὸ γινόμενον τῶν ὁρίων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἐὰν δηλ. εἶναι ὅρχ= α καὶ ὅρψ = β εἶναι καὶ ὅρ (χψ)=αβ==ὅρχ.ὅρψ.

Διότι ἡ διαφορὰ χψ—αβ εἶναι ἄθροισμα τῶν διαφορῶν

$$(χψ-αψ)+(αψ-αβ) \quad ἢ \quad χψ-αβ=ψ(χ-α)+α(ψ-β)$$

καὶ ὅρ (χψ—αβ)=ὅρ[ψ(χ—α)] + ὅρ [α(ψ—β)] (218)· ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα τὸ γινόμενον ψ(χ—α) ἔχει ὅριον τὸ 0, ἐπειδὴ ὁ μὲν χ—α ἔχει ὅριον τὸ 0, ὁ δὲ ψ καταντᾷ νὰ μένῃ μικρότερος σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ. Ὡσαύτως καὶ τὸ γινόμενον α(ψ—β) ἔχει ὅριον τὸ 0 κατὰ τὸ ἴδιον θεώρημα· διότι εἶναι γινόμενον τοῦ σταθεροῦ ἀριθμοῦ α ἐπὶ τὸν ψ—β, ὅστις ἔχει ὅριον τὸ 0· ἀφοῦ λοιπὸν ὅρ(χψ—αβ)=0, ἔχομεν ὅρχψ=αβ=ὅρχ.ὅρψ.

Τὸ θεώρημα ἐκτείνεται καὶ ἐπὶ τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων, ἀλλ' εἰς πεπερασμένον πλῆθος· διότι ἂν π. χ. ἔχωμεν τοὺς μεταβλητοὺς ἀριθμοὺς χ, ψ, φ, ω, οἵτινες ἔχουν ὅρια ἀντιστοίχως τοὺς σταθεροὺς α, β, γ, δ, θὰ εἶναι ὅρ (χ.ψ.φ.ω.)=α.β.γ.δ· διότι τὸ γινόμενον χ.ψ.φ.ω δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον δύο παραγόντων. τοῦ χψφ καὶ τοῦ ω, ὁπότε κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι

$$\text{ὄρ}\,(\chi.\psi.\varphi\,\omega) = \text{ὄρ}(\chi.\psi.\varphi).\text{ὄρ}\omega\cdot$$

καὶ κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν, ὅτι εἶναι ὄρ(χ. ψ. φ)=ὄρ (χψ). ὄρ. φ· ἐπειδὴ δὲ καὶ ὄρ (χψ)=ὄρ χ. ὄρ. ψ, ἕπεται ὅτι

$$\text{ὄρ}(\chi.\psi.\varphi.\omega)=\text{ὄρ}\chi.\text{ὄρ}\psi.\text{ὄρ}\varphi.\text{ὄρ}\omega=\alpha.\beta.\gamma.\delta.$$

221. Θεώρημα.—*Τὸ πηλίκον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν ἔχει ὅριον τὸ 0, ἂν ὁ διαιρετέος ἔχῃ ὅριον τὸ 0, ὁ δὲ διαιρέτης μένει μεγαλύτερος κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ.*

Ἤτοι ἂν ὄρχ=0, ὁ δὲ ψ μένῃ μεγαλύτερος κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ μ, θὰ εἶναι ὄρ $\frac{\chi}{\psi}=0$.

Διότι ἡ ἐξ ὑποθέσεως ἀνισότης $|\psi|>\mu$, εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\left|\frac{1}{\psi}\right|<\frac{1}{\mu}$ (προκύπτει δὲ αὕτη, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ $\frac{1}{|\psi|\,\mu}$ τὸ δὲ πηλίκον $\frac{\chi}{\psi}$ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον τοῦ χ, ὅστις ἔχει ὅριον τὸ 0 ἐπὶ τὸν $\frac{1}{\psi}$, ὅστις, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς ἀνισότητος $\left|\frac{1}{\psi}\right|<\frac{1}{\mu}$ εἶναι μικρότερος κατ᾽ ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ σταθεροῦ $\frac{1}{\mu}$. ἄρα (219) ὄρ$\frac{\chi}{\psi}=0$.

222. Θεώρημα.—*Ἐὰν μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ ἔχῃ ὅριον τὸν σταθερὸν α διάφορον τοῦ 0, ὁ ἀντίστροφος $\frac{1}{\chi}$ ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν $\frac{1}{\alpha}$.*

Ἤτοι ἂν ὄρχ=α θὰ εἶναι ὄρ$\frac{1}{\chi}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\text{ὄρ}\,\chi}$.

Διότι ἡ διαφορὰ $\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\alpha}$ γράφεται $\frac{\alpha-\chi}{\alpha\chi}$· ἀλλὰ τὸ πηλίκον τῆς διαφορᾶς α—χ, ἥτις ἔχει ἐξ ὑποθέσεως ὅριον τὸ 0, διὰ τοῦ αχ, ὅπερ ἔχει ὅριον διάφορον τοῦ 0, καὶ καταντᾷ ἑπομένως νὰ μένῃ μεγαλύτερος σταθεροῦ τινος ἀριθμοῦ, ἔχει (221) ὅριον τὸ 0. Ἤτοι

$$\text{ὄρ}\left(\frac{1}{\chi}-\frac{1}{\alpha}\right)=0 \text{ ἄρα καὶ ὄρ}\frac{1}{\chi}=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\text{ὄρ}\chi}.$$ ὅ. ἔ. δ.

223. Πόρισμα.—*Τὸ πηλίκον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ἐχόντων ὅρια, ἔχει ὅριον, τὸ πηλίκον τῶν ὁρίων, ἐὰν τὸ ὅριον τοῦ διαιρέτου διαφέρῃ τοῦ 0.*

Ἤτοι ἂν ὄρχ = α καὶ ὄρψ = β, εἶναι δὲ β ≠ 0, θὰ εἶναι καὶ

$$\text{ὅρ}\,\frac{\chi}{\psi}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ὅρ}\chi}{\text{ὅρ}\psi}.$$

Καὶ πράγματι, ἐπειδὴ $\frac{\chi}{\psi}=\chi\cdot\frac{1}{\psi}$ θὰ εἶναι καὶ ὅρ $\frac{\chi}{\psi}=$ ὅρχ. ὅρ $\frac{1}{\psi}$· ἀλλὰ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ὅρ $\frac{1}{\psi}=\frac{1}{\beta}$. Ὥστε

$$\text{ὅρ}\,\frac{\chi}{\psi}=\alpha.\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\text{ὅρ}\chi}{\text{ὅρ}\psi}.$$

224. Θεώρημα.— *Ἐὰν μεταβλητὸς ἀριθμὸς χ ἔχῃ ὅριον τὸ 0, ὁ ἀντίστροφος $\frac{1}{\chi}$ ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.*

Δηλαδὴ ἂν ὅρχ$=0$, εἶναι ὅρ $\frac{1}{\chi}=\infty$· Ἵνα ὅρ $\frac{1}{\chi}=\infty$, πρέπει ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\frac{1}{\chi}$ νὰ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλυτέρα θετικοῦ ἀριθμοῦ Α, ὁσονδήποτε μεγάλου: ἤτοι $\left|\frac{1}{\chi}\right|>A$ ἢ $\frac{1}{|\chi|}>A$· ἀλλ' ἡ ἀνισότης αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $|\chi|<\frac{1}{A}$, ἥτις ἀληθεύει ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, διότι ἐξ ὑποθέσεως ὅρχ$=0$· ἀληθεύει ἄρα ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς ἡ $\left|\frac{1}{\chi}\right|>A$, ἤτοι ὅρ $\frac{1}{\chi}=\infty$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ τὸ θεώρημα.

225. *Ἐὰν μεταβλητὸς ἀριθμὸς ἔχῃ ὅριον τὸ ∞ ὁ ἀντίστροφος $\frac{1}{\chi}$ ἔχει ὅριον τὸ 0.*

226. Θεώρημα.— *Ἐὰν μεταβλητός τις ἀριθμὸς ἔχῃ ὅριον τὸ ἄπειρον καὶ τὸ ἄθροισμα τοῦ μεταβλητοῦ τούτου ἀριθμοῦ καί τινος σταθεροῦ ἔχει ἐπίσης ὅριον τὸ ἄπειρον.*

Ἤτοι ἐὰν ὅρχ$=\infty$, καὶ μ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν ὅρ$(\chi+\mu)=\infty$. Διότι ἵνα εἶναι ὅρ$(\chi+\mu)=\infty$ πρέπει ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ $\chi+\mu$ νὰ εἶναι μεγαλυτέρα θετικοῦ τινος ἀριθμοῦ Α ὁσονδήποτε μεγάλου, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $|\chi+\mu|>A$· ἀλλ' ἐπειδὴ (213) $|\chi+\mu|\geqq|\chi|-|\mu|$, ἀρκεῖ νὰ εἶναι $|\chi|-|\mu|>A$ ἢ $|\chi|>A+|\mu|$. ἀλλ' ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ χ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μεγαλυτέρα τοῦ $A+|\mu|$, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ὅρχ$=\infty$.

227. Θεώρημα.—*Ἐὰν μεταβλητός τις ἀριθμὸς ἔχῃ ὅριον τὸ ἄπειρον καὶ τὸ γινόμενον αὐτοῦ ἐπί τινα σταθερὸν ἀριθμὸν ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον.*

Ἤτοι ἐὰν ὅρ$\chi=\infty$ καὶ μ σταθερὸς ἀριθμός, θὰ ἔχωμεν καὶ ὅρ$(\chi\mu)=\infty$.

Διότι ἵνα ὅρ$(\chi\mu)=\infty$, δέον ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς νὰ εἶναι $|\chi\mu|>A$ ἢ $|\chi|.|\mu|>A$ ἢ $|\chi|>\dfrac{A}{|\mu|}$. ἀλλ' ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης ἀληθεύει ἀπό τινος καὶ ἐφεξῆς, διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ὅρ$\chi=\infty$.

228. Θεώρημα.—*Δύναμις ἀκεραία θετική, ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος 1, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, αὐξάνει μετὰ τοῦ ἐκθέτου της καὶ τείνει εἰς τὸ θετικὸν ἄπειρον, ὅταν καὶ ὁ ἐκθέτης τείνῃ πρὸς τὸ αὐτὸ ἄπειρον.*

Ἔστω α θετικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος καὶ μ ἀκέραιος θετικός

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha=1+\varepsilon$, ὅπου ε θετικὸς ἀριθμός, παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχομεν $(1+\varepsilon)^2=1+2\varepsilon+\varepsilon^2$, ἐξ ἧς ἰσότητος ἕπεται ὅτι

$$(1+\varepsilon)^2 > 1+2\varepsilon \text{ καὶ}$$
$$(1+\varepsilon)^3 > (1+2\varepsilon).(1+\varepsilon) > 1+3\varepsilon \text{ καὶ}$$
γενικῶς
$$(1+\varepsilon)^\mu > 1+\mu\varepsilon \text{ ἢ}$$
$$\alpha^\mu > 1+\mu\varepsilon.$$

Ἄρα πᾶσα δύναμις ἀκεραία θετικὴ ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος, αὐξάνεται δὲ αὐξανομένου τοῦ ἐκθέτου, διότι ἐὰν π καὶ ρ εἶναι ἀκέραιοι θετικοὶ καὶ $\pi>\rho$ θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\pi-\rho}>1$ ἢ $\dfrac{\alpha^\pi}{\alpha^\rho}>1$, ἤτοι $\alpha^\pi>\alpha^\rho$. ἐὰν δὲ ὅρ$\mu=+\infty$ θὰ εἶναι καὶ ὅρ$\alpha^\mu=+\infty$. Διότι ἀφοῦ $\alpha^\mu>1+\mu\varepsilon$ καὶ ὅρ$\mu=+\infty$, θὰ εἶναι καὶ ὅρ$(1+\mu\varepsilon)=+\infty$ (§ 226,227) ἄρα καὶ ὅρ$\alpha^\mu=+\infty$.

229. Θεώρημα.—*Δύναμις ἀκεραία θετικὴ ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος· ἐλαττοῦται ὅταν ὁ ἐκθέτης αὐξάνῃ καὶ ἔχει ὅριον τὸ 0 ὅταν ὁ ἐκθέτης ἔχῃ ὅριον τὸ θετικὸν ἄπειρον.*

Ἔστω α θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος· τότε ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ α' εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\alpha=\dfrac{1}{\alpha'}$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha^\mu=\dfrac{1}{\alpha'^\mu}$ (μ ἀκέραιος θετικός)· ἀλλ' ἐπειδὴ πάλιν $\alpha'>1$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha'^\mu>1$ κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα· ἄρα $\dfrac{1}{\alpha'^\mu}$ ἢ $\alpha^\mu<1$· ὅταν δὲ ὁ ἐκθέτης αὐξάνῃ, ἡ δύναμις ἐλαττοῦται, διότι ἐὰν π καὶ ρ εἶναι ἀκέραιοι θετικοὶ καὶ $\pi>\rho$, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\pi-\rho}<1$ ἢ

$\frac{\alpha^\pi}{\alpha^\rho} < 1$ ἢ $\alpha^\pi < \alpha^\rho$· ἐὰν δὲ ὅρμ$=+\infty$, θὰ εἶναι ὅρ$\alpha^\mu = 0$· διότι ἐκ τῆς ἰσότητος $\alpha^\mu = \frac{1}{\alpha'^\mu}$ λαμβάνομεν ὅρ$\alpha^\mu = \frac{1}{\text{ὅρ}\alpha'^\mu}$· ἀλλὰ (§ 228) ὅρ$\alpha'^\mu = +\infty$, ἑπομένως (§ 225) ὅρ$\alpha^\mu = 0$.

230. ***Θεώρημα.***—*Ἐὰν α εἶναι ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, ἡ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος καὶ ἔχει ὅριον αὐτήν, ὅταν ὁ δείκτης μ αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.*

Ἔστω ὅτι $\sqrt[\mu]{\alpha} = \rho$. Λέγω κατὰ πρῶτον ὅτι $\rho > 1$· διότι ἐὰν ἦτο $\rho < 1$, θὰ ἦτο καὶ $\rho^\mu < 1$ (§229)· ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἄτοπον, διότι $\rho^\mu = \alpha$ ἤτοι $\rho^\mu > 1$. Εἶναι λοιπὸν $\sqrt[\mu]{\alpha} > 1$. Ἤδη λέγω ὅτι, ὅταν ὁ μ αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, θὰ ἔχωμεν ὅρ$\sqrt[\mu]{\alpha} = 1$.

Ἵνα ὅρ$\sqrt[\mu]{\alpha} = 1$, πρέπει ἡ διαφορὰ $\sqrt[\mu]{\alpha} - 1$ νὰ δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἀλλ' ἡ ἀνισότης $\sqrt[\mu]{\alpha} - 1 < \varepsilon$, θὰ ἀληθεύῃ, ὅταν ἔχωμεν $\sqrt[\mu]{\alpha} < 1 + \varepsilon$ ἢ $\alpha < (1+\varepsilon)^\mu$ · θὰ ἔχωμεν δὲ $\alpha < (1+\varepsilon)^\mu$ ἂν ἔχωμεν $\alpha < 1 + \mu\varepsilon$ (1), διότι εἶναι γνωστὸν ὅτι $1 + \mu\varepsilon < (1+\varepsilon)^\mu$ · ἀλλ' ἡ ἀνισότης (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $\mu > \frac{\alpha - 1}{\varepsilon}$. Ὥστε ἂν λ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ $\frac{\alpha - 1}{\varepsilon}$, διὰ $\mu > \lambda$, θὰ ἔχωμεν καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha} - 1 < \varepsilon$· ἀλλὰ τότε

$$\text{ὅρ}\left(\sqrt[\mu]{\alpha} - 1\right) = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad \text{ὅρ}\sqrt[\mu]{\alpha} = 1.$$

231. ***Θεώρημα.***—*Ἐὰν α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος 1, ἡ $\sqrt[\mu]{\alpha}$ εἶναι μικροτέρα τῆς μονάδος καὶ ἔχει ὅριον αὐτὴν ὅταν ὁ μ αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.*

Ἀφοῦ ὁ α εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ὁ ἀντίστροφος αὐτοῦ α' εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι

$$\sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{1}{\sqrt[\mu]{\alpha'}} \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\mu]{\alpha'} > 1, \text{ ἕπεται ὅτι } \sqrt[\mu]{\alpha} < 1.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἔχομεν καὶ ὅρ $\sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{1}{\text{ὅρ}\sqrt[\mu]{\alpha'}}$, εἶναι δὲ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα ὅρ $\sqrt[\mu]{\alpha'} = 1$, ὅταν τὸ μ αὐξάνῃ καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον, ἕπεται ὅτι ὅρ $\sqrt[\mu]{\alpha} = \frac{1}{1} = 1$.

232. Θεώρημα.—Θετικὴ κλασματικὴ δύναμις ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος 1 εἶναι μεγαλυτέρα τῆς μονάδος καὶ τείνει πρὸς τὸ θετικὸν ἄπειρον μετὰ τοῦ ἐκθέτου της.

Ἔστω $\alpha > 1$ καὶ μ καὶ ν ἀκέραιοι θετικοί.

Ἐπειδὴ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ καὶ $\alpha^\mu > 1$ (§ 228), ἕπεται ὅτι καὶ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu} > 1$. Ἐὰν ἤδη $\frac{\mu}{\nu}$ αὐξάνηται ἀπαύστως καὶ λ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ $\frac{\mu}{\nu}$, ἔχομεν προδήλως $\alpha^\lambda < \alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$. ἐπειδὴ δὲ ὅταν ὅρλ$=+\infty$ εἶναι καὶ ὅρ $\alpha^\lambda = +\infty$ (§ 228) θὰ ἔχωμεν κατὰ μείζονα λόγον καὶ ὅρ $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = +\infty$.

233. Ἐὰν $\alpha < 1$ καὶ $\frac{\mu}{\nu}$ τείνῃ πρὸς τὸ $+\infty$ ἡ δύναμις $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει ὅριον τὸ 0.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν τοῦ θεωρήματος 229.

234. Ὁρισμὸς δυνάμεων μὲ ἀσύμμετρον ἐκθέτην.— Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὁρίσωμεν τὴν δύναμιν α^χ, ὅπου α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1 καὶ χ ἀσύμμετρος ἀριθμός, π. χ. ϙ 3, 1415926 . . .

Ἐὰν ἀντὶ τοῦ χ θέσωμεν τὸν σύμμετρον ἀριθμὸν $\chi_\nu = 3{,}1415926...$ (ἔχοντα τὰ ν πρῶτα δεκαδικὰ ψηφία τοῦ χ) ἡ δύναμις α^{χ_ν} (τῆς ὁποίας λαμβάνομεν πάντοτε τὴν θετικὴν τιμὴν) αὐξάνει αὐξανομένου τοῦ ν. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ τοῦ ν αὐξανομένου ἐπ᾽ ἄπειρον ὁ χ_ν αὐξάνει ἀλλ᾽ οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸν 4 ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ δύναμις α^{χ_ν} οὐδέποτε ὑπερβαίνει τὸν α^4· ἔχει ἄρα ὅριον ἡ α^{χ_ν} (§ 217) ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ α^4.

Ἐὰν ὁ α εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος 1, ἡ δύναμις $\alpha^{\nu\chi}$ ἐλαττοῦται αὐξανομένου τοῦ ν, ἀλλὰ μένει πάντοτε μεγαλυτέρα τοῦ α^4 ἔχει ἄρα ὅριον ἴσον ἢ μεγαλύτερον τοῦ α^4.

Τὸ ὅριον τοῦτο τῆς α^{χ_ν} ὅταν ὁ ν αὐξάνῃ ἐπ᾽ ἄπειρον, θεωροῦμεν ὡς τὴν τιμὴν τῆς α^χ.

235. Ἰδιότητες.—Αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων διατηροῦνται καὶ εἰς τὰς δυνάμεις μὲ ἀσύμμετρον ἐκθέτην. Ἀποδεικνύομεν δὲ τοῦτο στηριζόμενοι εἰς τὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁρίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Γενικὰ περὶ συναρτήσεων

236. Εἴδομεν (§ 63) ὅτι, *ὅταν μεταβλητὸς ἀριθμὸς συνδέεται πρὸς ἄλλον μεταβλητὸν χ οὕτως, ὥστε δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ νὰ ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη τιμὴ* (ἢ ὡρισμέναι τιμαὶ) *τοῦ πρώτου, τότε οὗτος λέγεται συνάρτησις τοῦ χ.* Ὁ χ ὡς δυνάμενος νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμὴν λέγεται *ἀνεξάρτητος* μεταβλητή, ἡ δὲ συνάρτησις αὐτοῦ λέγεται *ἐξηρτημένη.* Ὁμοίως ἐκεῖ εἴδομεν ὅτι αἱ συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς χ παρίστανται συνήθως διὰ ψ ἢ διὰ τοῦ συμβόλου σ(χ), φ(χ) κτλ., ἐνῷ αἱ συναρτήσεις πλειόνων μεταβλητῶν παρίστανται διὰ τοῦ συμβόλου σ(χ,ψ) ὅταν περιέχουν τὰς μεταβλητὰς χ,ψ κ.ο.κ.

237. *Συναρτήσεις ὡρισμέναι ἔν τινι διαστήματι.* Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=3\chi^2-7$. Εἰς αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι, ὁ ψ ὁρίζεται διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Δι' ὃ λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὕτη ψ εἶναι *ὡρισμένη* διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ. Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν τὴν συνάρτησιν $\psi=\sqrt{1-\chi^2}$, παρατηροῦμεν εἰς αὐτήν, ὅτι εἶναι ὡρισμένη διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον θετικόν, ἤτοι διὰ τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιεχομένας μεταξὺ -1 καὶ 1· διότι διὰ τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ χ τὸ ὑπόρριζον εἶναι ἀρνητικόν. Δι' ὃ λέγομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{1-\chi^2}$ εἶναι ὡρισμένη ἐν τῷ διαστήματι $(-1, 1)$, ἤτοι διὰ τὰς τιμὰς $-1\leqslant\chi\leqslant1$. Κατόπιν τούτων δίδομεν τοὺς κάτωθι ὁρισμούς.

1) Ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α < β, λέγομεν διάστημα (α,β) τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν διπλῆν ἀνισότητα

$$\alpha\leqslant\chi\leqslant\beta.$$

Τὸ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ χ τοιούτων, ὥστε $\chi\leqslant\alpha$ *ἀποτελεῖ τὸ διάστημα* $(-\infty, \alpha)$, *τὸ δὲ σύνολον τῶν τιμῶν τοῦ χ τοιούτων, ὥστε* $\chi\geqslant\beta$ *ἀποτελεῖ τὸ διάστημα* $(\beta, +\infty)$.

2) Μία συνάρτησις τοῦ χ λέγεται ὡρισμένη ἔν τινι διαστήματι (α,β), ἐὰν ἔχῃ μίαν τιμὴν καὶ μίαν μόνην, δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.

Οὕτως ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{7-\chi^2}$ εἶναι ὡρισμένη ἐν τῷ διαστήματι $(-7,7)$, ἡ δὲ $\psi=5-2\chi^2$ εἶναι ὡρισμένη ἐν τῷ διαστήματι $(-\infty,+\infty)$, ἤτοι διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.

238. ***Ἀλγεβρικαὶ καὶ ὑπερβατικαὶ συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς χ.***— Ὅταν ἡ ἐξάρτησις τῆς μεταβλητῆς ψ ἀπὸ τῆς ἀνεξαρτήτου

χ ἐκφράζεται δι' ἐξισώσεως, ἧς τὰ δύο μέλη εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα πρὸς χ καὶ ψ, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται *ἀλγεβρική*· ἄλλως λέγεται *ὑπερβατική*. Οὕτως αἱ συναρτήσεις

$$ψ=αχ^2+βχ+γ, \quad ψ=\frac{αχ+β}{α'χ+β'}, \quad ψ=\sqrt{χ^2-1}$$

εἶναι ἀλγεβρικαί, ἐνῷ ὑπερβατικαὶ εἶναι αἱ συναρτήσεις

$$ψ=ημχ, \quad ψ=συνχ, \quad ψ=λογχ.$$

239. ***Ρηταὶ καὶ ἄρρητοι ἀλγεβρικαὶ συναρτήσεις.***— Ὅταν ἡ ἐξάρτησις τῆς μεταβλητῆς ψ ἀπὸ τῆς χ ἐκφράζεται διὰ κλάσματος, τοῦ ὁποίου ἀμφότεροι οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιαι συναρτήσεις μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν, τότε ἡ συνάρτησις λέγεται *ρητή*. Ἐκφράζεται δὲ δι' ἐξισώσεως πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς ψ· ἐν ἐναντίᾳ δὲ περιπτώσει ἡ συνάρτησις λέγεται *ἄρρητος*.

Οὕτως αἱ συναρτήσεις $ψ=αχ^3+βχ^2+γχ+δ$, $ψ=\sqrt{2}.χ^2+8χ-4$ εἶναι ἀκέραιαι.

Αἱ συναρτήσεις $ψ=\dfrac{αχ^2+βχ+γ}{α'χ^2+β'χ+γ'}$, $ψ=\dfrac{χ-\sqrt{5}}{χ+\sqrt{5}}$ εἶναι ρηταί,

αἱ δὲ $ψ=\sqrt{χ^2-α^2}$, $ψ=χ+χ^{\frac{1}{2}}$, $(ψ^3-χ^2)=χ$ εἶναι ἄρρητοι.

240. ***Αὔξουσα καὶ φθίνουσα συνάρτησις.***— Ἡ συνάρτησις $ψ=3χ-5$ αὐξάνεται αὐξανομένου τοῦ χ καὶ ἐλαττοῦται ἐλαττουμένου, ἤτοι μεταβάλλεται καθ' ἣν φορὰν μεταβάλλεται καὶ ὁ χ. Δι' ὃ ἡ συνάρτησις αὕτη λέγεται *αὔξουσα*. Ἐνῷ ἡ συνάρτησις $ψ=-3χ-5$, ἥτις μεταβάλλεται κατ' ἀντίθετον φορὰν τῆς μεταβλητῆς χ, ἤτοι ἐλαττοῦται, ὅταν ὁ χ αὐξάνεται καὶ αὐξάνεται, ὅταν ὁ χ ἐλαττοῦται, λέγεται *φθίνουσα*.

241. ***Θεωρήματα ἐπὶ τῶν συναρτήσεων.***—1) Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις ψ καὶ ψ+α, ὅπου α εἶναι σταθερόν. Ἐὰν $ψ_1$ καὶ $ψ_2$ εἶναι δύο διάφοροι τιμαὶ τῆς ψ καὶ εἶναι $ψ_1<ψ_2$ ἔχομεν προφανῶς καὶ $ψ_1+α<ψ_2+α$. Ὥστε: *Αἱ συναρτήσεις ψ καὶ ψ+α, ὅπου α σταθερόν, μεταβάλλονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν.*

2) Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις ψ καὶ αψ (α σταθερόν). Ἐὰν $ψ_1<ψ_2$ καὶ $α>0$, θὰ εἶναι καὶ $αψ_1<αψ_2$, ὁπότε ἡ συνάρτησις αψ εἶναι αὔξουσα. Ἐὰν ὅμως $α<0$ θὰ εἶναι $αψ_1>αψ_2$, ὁπότε ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα· ὥστε: *Αἱ συναρτήσεις ψ καὶ αψ (α σταθερὸν) μεταβάλλονται κατὰ τὴν αὐτὴν μὲν φοράν, ἐὰν α εἶναι θετικὸν καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον, ἐὰν α εἶναι ἀρνητικόν.*

3) Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ καὶ $ψ_1$, $ψ_2$ δύο τιμαὶ τῆς συναρτήσεως.

Ἀλλ' εἶναι φανερὸν ὅτι, ἐὰν $\psi>0$ καὶ $0<\psi_1<\psi_2$ θὰ εἶναι καὶ $0<\psi_1^2<\psi_2^2$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις ψ^2 εἶναι αὔξουσα.

Ἀλλ' ἐὰν $\psi<0$ καὶ $\psi_1<\psi_2<0$ θὰ εἶναι $\psi_1^2>\psi_2^2>0$ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις ψ^2 εἶναι φθίνουσα.

Ὥστε: *Τὸ τετράγωνον μιᾶς συναρτήσεως ψ μεταβάλλεται καθ' ἣν φορὰν μεταβάλλεται καὶ ἡ συνάρτησις ψ εἰς πᾶν διάστημα, εἰς ὃ τὸ ψ εἶναι θετικὸν καὶ κατ' ἀντίθετον φοράν, εἰς πᾶν διάστημα εἰς ὃ τὸ ψ εἶναι ἀρνητικόν.*

4) Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ, ἡ ὁποία ἔν τινι διαστήματι ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον. Ἔστω δὲ ἐπίσης καὶ ψ_1, ψ_2 δύο τιμαὶ αὐτῆς ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ καὶ $\psi_1<\psi_2$. Ἀλλ' ἀφοῦ αἱ ψ_1 καὶ ψ_2 εἶναι ὁμόσημοι τὸ γινόμενον $\psi_1\psi_2$ εἶναι θετικὸν καὶ ἑπομένως εἶναι

$$\frac{\psi_1}{\psi_1\psi_2}<\frac{\psi_2}{\psi_1\psi_2} \quad \text{ἤτοι} \quad \frac{1}{\psi_2}<\frac{1}{\psi_1}$$

καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\dfrac{1}{\psi}$ εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ θεωρηθέντι διαστήματι.

Ὥστε: *Αἱ συναρτήσεις ψ καὶ $\dfrac{1}{\psi}$ μεταβάλλονται ἀντιθέτως εἰς πᾶν διάστημα, εἰς ὃ ἡ ψ ἔχει τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

5) Ἔστωσαν ψ καὶ φ δύο συναρτήσεις, αἱ ὁποῖαι ἃς ὑποθέσωμεν, ὅτι εἶναι αὔξουσαι.

Ἐὰν $\psi_1<\psi_2$ καὶ $\varphi_1<\varphi_2$ θὰ εἶναι καὶ $\psi_1+\varphi_1<\psi_2+\varphi_2$ ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\psi+\varphi$ εἶναι αὔξουσα.

Ὥστε: *Το ἄθροισμα δύο συναρτήσεων, αἱ ὁποῖαι μεταβάλλονται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μεταβάλλεται καθ' ἣν φορὰν μεταβάλλονται καὶ αἱ συναρτήσεις αὗται.*

242. Συνεχεῖς συναρτήσεις.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2-3\chi+1$, ἥτις εἶναι ὡρισμένη διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. Αὕτη διὰ

$\chi=2$ λαμβάνει τὴν τιμὴν $\psi=-1$ καὶ διὰ
$\chi=1{,}5$ » » $\psi=-1{,}25$.

Ἑπομένως εἰς τὴν αὔξησιν τῆς μεταβλητῆς $1{,}5-2=-0{,}5$ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὔξησις τῆς συναρτήσεως $=-1{,}25-(-1)=-0{,}25$.

Γενικῶς δέ, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν μεταβλητὴν χ τὰς τιμὰς χ_0 καὶ $\chi_0+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ καὶ ἐὰν παραστήσωμεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς τῆς συναρτήσεως διὰ ψ_0 καὶ $\psi_0+\eta$, θὰ ἔχωμεν

$$\psi_0=\chi_0^2-3\chi_0+1$$
$$\psi_0+\eta=(\chi_0+\varepsilon)^2-3(\chi_0+\varepsilon)+1 \quad \text{ἤ}$$
$$\psi_0+\eta=\chi_0^2-3\chi_0+1+\varepsilon(2\chi_0-3+\varepsilon).$$

Ἑπομένως ἡ αὔξησις $\eta=\psi_0+\eta-\psi_0$ τῆς συναρτήσεως (δυναμένη νὰ εἶναι θετικὴ ἢ ἀρνητική) ἡ ἀντιστοιχοῦσα εἰς τὴν αὔξησιν $\varepsilon = \chi_0 + \varepsilon - \chi_0$ τῆς μεταβλητῆς, εἶναι $\eta = \varepsilon(2\chi_0 - 3 + \varepsilon)$.

Ἐὰν δὲ ἡ αὔξησις ε τείνῃ πρὸς τὸ 0, ἤτοι, ἐὰν ὅρε=0, θὰ εἶναι καὶ ὅρη=ὅρε.ὅρ$(2\chi_0 - 3 + \varepsilon)$, ἤτοι ὅρη=0. Ὥστε ἡ αὔξησις η τείνει πρὸς τὸ 0 συγχρόνως μετὰ τῆς ε. Τὴν ἀνωτέρω δοθεῖσαν συνάρτησιν, ἕνεκα τῆς ἰδιότητος αὐτῆς, τὴν λέγομεν συνεχῆ διὰ $\chi = \chi_0$.

Γενικῶς δὲ μία συνάρτησις σ(χ) εἶναι συνεχὴς διὰ τὴν τιμὴν $\chi = \chi_0$, ἐάν:

1) *Εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη διὰ τὴν τιμὴν $\chi = \chi_0$.*

2) *Ἐὰν ἡ αὔξησις $\eta = \sigma(\chi_0 + \varepsilon) - \sigma(\chi_0)$ τῆς συναρτήσεως τείνῃ πρὸς τὸ 0, συγχρόνως μὲ τὴν αὔξησιν ε τῆς μεταβλητῆς.*

Ὁ ὡς ἄνω δεύτερος ὅρος τῆς συνεχείας ἐκφράζει, ὅτι ἡ συνάρτησις σ(χ) ἔχει ὡς ὅριον, ὅταν ἡ χ τείνῃ πρὸς τὸ χ_0, τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν λαμβάνει αὕτη διὰ $\chi = \chi_0$.

243. Συνεχὴς συνάρτησις ἐν τῷ διαστήματι (α,β). — *Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(χ) εἶναι συνεχὴς διὰ πάσας τὰς τιμὰς τῆς χ τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α,β), λέγομεν, ὅτι αὕτη εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.* Πρέπει ὅμως εἰς ταῦτα νὰ προσθέσωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις σ(χ) πρέπει νὰ εἶναι ἐντελῶς ὡρισμένη διὰ χ=α καὶ διὰ χ=β καὶ ἐπὶ πλέον, ὅτι τὸ σ(α+ε) πρέπει νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ σ(α) καὶ τὸ σ(β−ε) νὰ ἔχῃ ὅριον τὸ σ(β), ὅταν τὸ ε, λαμβάνον θετικὰς τιμὰς οἱασδήποτε, τείνῃ πρὸς τὸ 0.

Εἰς μίαν λοιπὸν συνάρτησιν σ(χ) συνεχῆ διὰ $\chi = \chi_0$, ἐπειδὴ τὸ η τείνει πρὸς τὸ 0 συγχρόνως μετὰ τοῦ ε, δυνάμεθα νὰ λάβωμεν τὸ $\varepsilon = \chi_0 + \varepsilon - \chi_0$, τόσον μικρόν, ὥστε ἡ αὔξησις $\eta = \sigma(\chi_0 + \varepsilon) - \sigma(\chi_0)$ νὰ εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ὅσον θέλομεν μικρὰ καὶ ἑπομένως νὰ μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις, ὅσον θέλομεν ὀλίγον. Μία λοιπὸν συνεχὴς συνάρτησις μεταβάλλεται βαθμιαίως καὶ κατὰ βαθμὸν ἀνεπαίσθητον καὶ δὲν δύναται νὰ μεταπηδᾷ ἀποτόμως ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην.

244. Ἀσυνεχεῖς συναρτήσεις. — *Μία συνάρτησις σ(χ) εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, ἐὰν ὁ εἷς τῶν προηγουμένων ὅρων τῆς συνεχείας δὲν πληροῦται.*

Μία λοιπὸν συνάρτησις σ(χ) θὰ εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $\chi = \chi_0$, ἐὰν 1) δὲν ἔχῃ ὡρισμένην τιμὴν διὰ $\chi = \chi_0$ καὶ 2) ἐὰν διὰ τὴν τιμὴν αὐτὴν $\chi = \chi_0$ μεταπηδᾷ ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην.

Οὕτως ἡ συνάρτησις $\psi = \dfrac{1}{\chi}$ εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ, πλὴν διὰ τὴν τιμὴν χ=0, διότι διὰ ταύτην δὲν ἔχει τιμήν. Καὶ πράγματι, ὅταν ἡ χ τείνῃ πρὸ τὸ 0, διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν, ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ἀρνητικὴ καὶ αὐξάνει ἀπεριορίστως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ ἑπομένως τείνει πρὸς τὸ $-\infty$. Ἐὰν ὅμως ἡ χ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν, ἡ συνάρτησις αὕτη τείνει πρὸς τὸ $+\infty$. Ἡ συνάρτησις λοιπὸν $\psi=\frac{1}{\chi}$ μεταπηδᾷ ἀποτόμως ἀπὸ τοῦ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$, ὅταν τὸ χ αὐξανόμενον διέρχεται διὰ τοῦ 0.

Ὁμοίως καὶ ἡ συνάρτησις $\psi=\chi+\frac{\sqrt{\chi^2}}{\chi}$ εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $\chi=0$, διότι, ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν, εἶναι ὅρ$\psi=-1$ καὶ ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν, εἶναι ὅρ$\psi=1$.

245. *Θεωρήματα ἐπὶ τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.* — Ὅλα τὰ γνωστὰ θεωρήματα ἐπὶ τῶν ὁρίων, ἔχουν τὰ ἀντίστοιχά των εἰς τὰς συνεχεῖς συναρτήσεις καὶ ἀποδεικνύονται ἐπὶ τῇ βάσει ἐκείνων. Οὕτως:

Ἐὰν δύο ἢ περισσότεραι συναρτήσεις $\sigma(\chi)$, $\varphi(\chi)$, $\upsilon(\chi)$ κλπ. εἶναι συνεχεῖς διὰ $\chi=\chi_0$, τὰ ἀθροίσματα, αἱ διαφοραὶ καὶ τὰ γινόμενα αὐτῶν εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις διὰ $\chi=\chi_0$. Ἐὰν ἐπὶ πλέον εἶναι $\varphi(\chi_0)\neq 0$, τὸ πηλίκον $\frac{\sigma(\chi)}{\varphi(\chi)}$ εἶναι συνάρτησις συνεχής.

Καὶ πράγματι: Ἐὰν αἱ συναρτήσεις $\sigma(\chi)$, $\varphi(\chi)$, $\upsilon(\chi)$ εἶναι συνεχεῖς διὰ $\chi=\chi_0$, τοῦτο σημαίνει ὅτι αὗται, ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ χ_0, ἔχουν ὡς ὅρια τὰς τιμὰς $\sigma(\chi_0)$, $\varphi(\chi_0)$, $\upsilon(\chi_0)$. Ἀλλὰ διὰ $\chi=\chi_0$ τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων $\sigma(\chi)+\varphi(\chi)+\upsilon(\chi)$ ἔχει τὴν τιμὴν $\sigma(\chi_0)+\varphi(\chi_0)+\upsilon(\chi_0)$ καὶ κατὰ τὸ γνωστὸν θεώρημα περὶ τοῦ ὁρίου τοῦ ἀθροίσματος, ὅπερ εἶναι ἄθροισμα τῶν ὁρίων, τὸ ἄθροισμα $\sigma(\chi)+$ $+\varphi(\chi)+\upsilon(\chi)$ ἔχει ὅριον τὸ ἄθροισμα $\sigma(\chi_0)+\varphi(\chi_0)+\upsilon(\chi_0)$ τῶν ὁρίων τῶν συναρτήσεων διὰ $\chi=\chi_0$. Ἑπομένως τὸ ἄθροισμα $\sigma(\chi)+\varphi(\chi)+\upsilon(\chi)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ, διὰ $\chi=\chi_0$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύονται καὶ αἱ προτάσεις περὶ τῆς διαφορᾶς τοῦ γινομένου κλπ. τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

1) Πᾶσα δύναμις ἀκεραία καὶ θετικὴ συνεχοῦς συναρτήσεως εἶναι συνάρτησις συνεχής.

2) Πᾶν πολυώνυμον ἀκέραιον πρὸς χ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ, διὰ πᾶσαν τιμὴν αὐτοῦ χ.

Οὕτω τὸ πολυώνυμον $\alpha_0\chi^\mu+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\ldots+\alpha_\mu$, ὅπου μ ἀκέραιον θετικόν, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ διὰ πᾶσαν τιμὴν αὐτοῦ. Διότι αἱ συναρτήσεις χ^2, χ^3, ... χ^μ εἶναι συναρτήσεις συνεχεῖς τοῦ χ. Ὥστε τὸ ἀνωτέρω πολυώνυμον, ἀφοῦ εἶναι τὸ ἄθροισμα συναρτήσεων συνεχῶν τοῦ χ, εἶναι συνάρτησις συνεχὴς τοῦ χ.

3) *Πᾶν κλάσμα ῥητὸν τοῦ χ,* $\frac{\varphi(\chi)}{\sigma(\chi)}$ *εἶναι συνάρτησις συνεχὴς τοῦ χ δι' ὅλας τὰς τιμὰς αὐτοῦ πλὴν ἐκείνης, ἥτις μηδενίζει τὸν παρονομαστήν.*

Διότι εἶναι τὸ πηλίκον δύο συνεχῶν συναρτήσεων.

4) *Ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα ἀκεραίου πολυωνύμου πρὸς χ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τοῦ χ διὰ πᾶσαν τιμὴν αὐτοῦ, ἥτις καθιστᾷ τὸ ὑπόρριζον θετικόν.*

246. Θεμελιώδης ἰδιότης τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.— *Ὅταν μία συνάρτησις σ(χ) εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς χ, τὰς περιεχομένας ἔν τινι διαστήματι (α,β), διέρχεται δι' ὅλων τῶν τιμῶν τῶν περιεχομένων ἐν τῷ διαστήματι [σ(α),σ(β)].* Τοῦτο καθίσταται ἀντιληπτόν, ἐξ ὅσων εἴπομεν περὶ τῆς βαθμιαίας καὶ ἀνεπαισθήτου μεταβολῆς τῶν συνεχῶν συναρτήσεων.

Οὕτως, ὅταν διὰ $\chi=1$ καὶ $\chi=5$ εἶναι π. χ. $\sigma(\chi)=\sigma(1)=3$ καὶ $\sigma(\chi)=\sigma(5)=10$ καὶ ἐὰν ἡ σ(χ) εἶναι συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιεχομένας μεταξὺ 1 καὶ 5, τότε, ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸ χ μίαν τιμὴν $1<\chi<5$, ἡ συνάρτησις σ(χ) θὰ ἔχῃ ἀσφαλῶς μίαν τουλάχιστον τιμὴν περιεχομένην μεταξὺ 3 καὶ 10.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν μία συνάρτησις συνεχής, ἐὰν ἀπὸ θετικὴ γίνεται ἀρνητική, πρέπει νὰ διέλθῃ διὰ τῆς ἐνδιαμέσου τιμῆς 0.

Ὥστε: *Μία συνάρτησις συνεχής, διὰ νὰ ἀλλάξῃ σημεῖον, πρέπει προηγουμένως νὰ γίνῃ 0.*

Σημείωσις. Μία ἀσυνεχὴς συνάρτησις δύναται νὰ ἀλλάξῃ σημεῖον, χωρὶς νὰ μηδενισθῇ.

247. Θεώρημα.—*Μία συνάρτησις σ(χ) πάντοτε αὔξουσα (ἢ πάντοτε φθίνουσα) ἐν τῷ διαστήματι (α,β), ἐὰν λαμβάνῃ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς περιεχομένας μεταξὺ σ(α) καὶ σ(β), ὅταν τὸ χ μεταβάλλεται μεταξὺ α καὶ β εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α β).*

Ἔστω $\sigma(\alpha)<\sigma(\beta)$· ἀλλ' ἐὰν $\alpha<\chi_0<\beta$, θὰ ἔχωμεν

$$\sigma(\alpha)<\sigma(\chi_0)<\sigma(\beta).$$

Ἤδη ἔστω εἷς ἀριθμὸς ε θετικὸς καὶ ἀρκετὰ μικρὸς καὶ τοιοῦτος, ὥστε

$$\varepsilon<\sigma(\chi_0)-\sigma(\alpha) \quad \text{καὶ} \quad \varepsilon<\sigma(\beta)-\sigma(\chi_0)$$

ἢ

$$\sigma(\alpha)<\sigma(\chi_0)-\varepsilon<\sigma(\chi_0)<\sigma(\chi_0)+\varepsilon<\sigma(\beta).$$

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως $\sigma(\chi_0)-\varepsilon$ καὶ $\sigma(\chi_0)+\varepsilon$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ χ, $\chi_0-\kappa$ καὶ $\chi_0+\lambda$, ὅπου κ καὶ λ εἶναι θετικά, ἐπειδὴ ἡ συνάρτησις σ(χ) εἶναι αὔξουσα· ἀλλ' ἐπειδὴ ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις σ(χ) λαμβάνῃ ὅλας τὰς τιμὰς τὰς περιεχομένας μεταξὺ σ(α) καὶ σ(β), ὅταν τὸ χ μεταβάλλεται μεταξὺ α καὶ β ἔπεται ὅτι ὅταν τὸ χ μεταβάλλεται ἀπὸ $\chi_0-\kappa$

ἕως $\chi_0+\lambda$ ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi)$ διέρχεται δι' ὅλων τῶν τιμῶν τῶν περιεχομένων μεταξὺ $\sigma(\chi_0)-\varepsilon$ καὶ $\sigma(\chi_0)+\varepsilon$. Ἀλλ' ἐὰν θ εἶναι ἡ μικροτέρα τῶν δύο τιμῶν κ καὶ λ, βλέπομεν, ὅτι θὰ ἔχωμεν

$$\text{διὰ}\quad |\chi-\chi_0|<\theta,\quad |\sigma(\chi)-\sigma(\chi_0)|<\varepsilon$$

καὶ ἑπομένως: διὰ $\chi=\chi_0$ εἶναι ὅρ$\sigma(\chi)=\sigma(\chi_0)$ ἤτοι ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi)$ εἶναι συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α,β). Ὁμοίως δὲ γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἐὰν ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi)$ εἶναι πάντοτε φθίνουσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἀποδειχθῇ ἀπ' εὐθείας ἡ συνέχεια τῶν συναρτήσεων

964) $\psi=2\chi+3$, 965) $\psi=\chi^2+5\chi-2$, 966) $\psi=\chi^3+2$.

248. *Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi+\beta$.*

Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi+\beta$, ὅπου α καὶ β εἶναι σταθερὰ καὶ $\alpha\neq 0$. Δι' αὐτὴν συνάγομεν ἐκ τῶν προηγουμένων περὶ ὁρίων καὶ τῶν περὶ συναρτήσεων ὅτι:

1) *Εἶναι αὔξουσα ὅταν τὸ α εἶναι θετικὸν καὶ φθίνουσα, ὅταν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν.*

2) *Δύναται νὰ λάβῃ οἱανδήποτε τιμὴν θέλομεν, ἀρκεῖ ὁ χ νὰ λάβῃ ἁρμοδίαν τιμήν.*

3) *Εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ.*

Σημείωσις. Ἐὰν γράψωμεν $\alpha\chi+\beta=\alpha\left(\chi+\frac{\beta}{\alpha}\right)$ βλέπομεν ὅτι, δίδοντες εἰς τὸν χ τιμὰς αὐξανομένας ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν) θὰ φθάσωμεν ὥστε τὸ $\chi+\frac{\beta}{\alpha}$ νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ χ καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ $\alpha\chi+\beta$ νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον τοῦ $\alpha\chi$.

Τὰ ἀνωτέρω λοιπὸν δυνάμεθα νὰ ἐκφράσωμεν συντόμως ὡς ἑξῆς:

ὅταν $\alpha>0$	διὰ $\chi=+\infty$	ἔχομεν $\alpha\chi+\beta=+\infty$
	» $\chi=-\infty$	» $\alpha\chi+\beta=-\infty$
ὅταν $\alpha<0$	διὰ $\chi=+\infty$	» $\alpha\chi+\beta=-\infty$
	» $\chi=-\infty$	» $\alpha\chi+\beta=+\infty$

249. *Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.*

1) *Τὸ τριώνυμον $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς χ, διὰ πᾶσαν τιμὴν αὐτῆς χ.*

2) Ἐὰν θέσωμεν τὴν συνάρτησιν αὐτὴν ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=\alpha\left[\left(\chi+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$ παρατηροῦμεν ὅτι

Ἐὰν ἡ μεταβλητὴ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὸ διώνυμο

$\chi + \frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$ καὶ γίνεται 0 διὰ τὴν τιμὴν $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Ὁμοίως παρατηροῦμεν ὅτι (§ 241,3) τὸ τετράγωνον τοῦ διωνύμου αὐτοῦ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν ἢ τὴν ἀντίθετον φορὰν καθ' ὅσον τὸ $\chi + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν ποσότης μεταβάλλεται ὡς μεταβάλλεται τὸ $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ καὶ ἑπομένως ἡ συνάρτησις ψ μεταβάλλεται ὡς τὸ $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἢ ἀντιθέτως καθ' ὅσον τὸ α εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν ἕπεται ὅτι, ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τὸ διώνυμον $\chi + \frac{\beta}{2\alpha}$ αὐξάνει καὶ εἶναι ἀρνητικόν, δηλαδὴ ἡ ἀπόλυτος τιμὴ αὐτοῦ ἐλαττοῦται καὶ κατὰ συνέπειαν τὸ $\left(\chi + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ καὶ φθάνει εἰς τὸ 0. Ὥστε ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν ποσότης ἀναχωρεῖ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ καὶ φθάνει εἰς τὴν τιμὴν $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$.

Ὅταν τὸ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως τὸ $+\infty$, τὸ διώνυμον $\chi + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετικὸν καὶ αὐξάνει ἀπὸ τοῦ 0 ἕως τὸ $+\infty$. Ἑπομένως ἡ ἐντὸς ἀγκυλῶν ποσότης αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$ ἕως τὸ $+\infty$.

Τὸ τριώνυμον λοιπὸν $\psi = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$ λαμβάνει διὰ $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἐλαχίστην τιμὴν ἢ μεγίστην τὴν $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$ καθ' ὅσον εἶναι ὁ συντελεστὴς α θετικὸς ἢ ἀρνητικός.

Σημείωσις.—Ἡ τιμὴ ἡ μεγαλυτέρα ἢ ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας τὰς ὁποίας δύνανται νὰ λάβῃ μία συνάρτησις ἔν τινι διαστήματι εἶναι τὸ *ἀπόλυτον μέγιστον* ἢ τὸ *ἀπόλυτον ἐλάχιστον αὐτῆς*.

250. Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{\alpha\chi + \beta}{\alpha'\chi + \beta'}$.

Βλέπε: Συμπλήρωμα τῆς Ἀλγέβρας Χ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 27 § 20.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων.

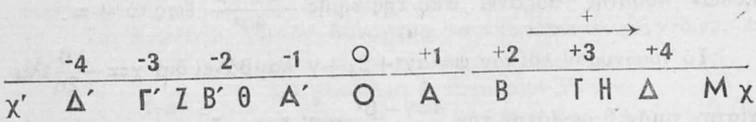
251. Εἰς τὴν συνάρτησιν $\psi = \sigma(\chi)$, ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς δυνατὰς τιμάς· ἐν τοιαύτῃ δὲ περιπτώσει παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη νὰ ἐξετασθῇ, πῶς μεταβάλλεται ἡ συνάρτησις. Καὶ πρὸς τοῦτο καταρτίζομεν πίνακα τιμῶν, ὅστις περιέχει τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως. Οὕτω λαμβάνομεν τὸν κάτωθι πίνακα διὰ τὴν συνάρτησιν π. χ. $\psi = 2\chi - 3$.

διὰ	$\chi = 0$	εἶναι	$\psi = -3$	
»	$\chi = 1$	»	$\psi = -1$	
»	$\chi = 2$	»	$\psi = 1$	
»	$\chi = 3$	»	$\psi - -3$	κ. ο. κι

Ἀλλ' εἷς τοιοῦτος πίναξ, οὔτε πλήρης δύναται νὰ εἶναι, οὔτε μᾶς διευκολύνει εἰς τὴν ἐξέτασιν τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως. Διὰ τοῦτο εὑρέθη ἄλλος τρόπος παραστατικώτερος τῶν ἐν λόγῳ μεταβολῶν καὶ ὅστις ἐκτίθεται κατωτέρω.

252. ***Παράστασις τῶν θετικῶν καὶ τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν διὰ σημείων μιᾶς εὐθείας.***

Λαμβάνομεν ἐπὶ εὐθείας $\chi'\chi$, ἐπ' ἄπειρον ἐκτεινομένης, ἓν σημεῖον Ο ὡς ἀρχὴν καὶ κατόπιν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα ΟΑ, ΑΒ, ΒΓ,...ΟΑ΄ Α΄Β΄, Β΄Γ΄.., ἴσα ἕκαστον πρὸς τὴν μονάδα τοῦ μήκους· τὰ σημεῖα Α, Β, Γ... τὰ



ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ δεξιὰ τοῦ Ο, ἀριθμοῦμεν διὰ τῶν ἀριθμῶν $+1$, $+2$, $+3$, $+4$... τὰ δὲ Α΄, Β΄, Γ΄.. τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ Ο, διὰ τῶν ἀριθμῶν -1, -2, -3,.. Λέγομεν δὲ τότε, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 3,... -1, -2, -3 κλπ. παριστοῦν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α, Β, Γ,...Α΄, Β΄, Γ΄...

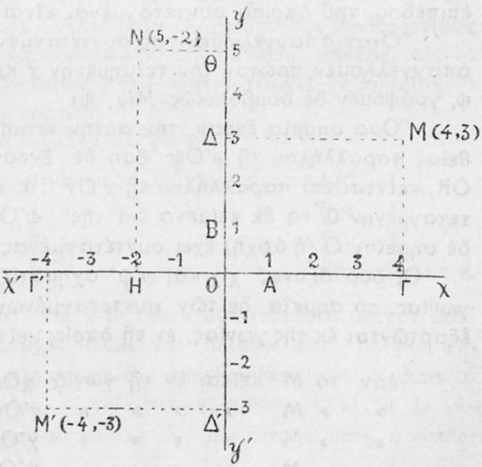
Οὕτως ὁ ἀριθμὸς $-2\frac{1}{2}$ παριστᾷ τὸ σημεῖον Ζ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἀριστερὰ τοῦ Ο καὶ εἰς ἀπόστασιν $2\frac{1}{2}$ μονάδων μήκους.

Ὥστε εἰς δοθέντα ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον εὐθείας ἀπέχον ἀπὸ τῆς ἀρχῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸν ἀριθμὸν (κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ κατὰ σημεῖον). Ὁ ἀριθμὸς 0 παριστᾷ τὴν ἀρχήν. Ἀντιστρόφως δὲ εἰς ἕκαστον σημεῖον εὐθείας ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμὸς ὡρισμένος, ὅστις παριστᾷ κατὰ μέγεθος καὶ κατὰ φορὰν τὴν ἀπόστασιν αὐτοῦ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς. Οὕτως εἰς τὸ σημεῖον Η ἀντιστοιχεῖ ὁ $3\frac{2}{5}$ καὶ εἰς τὸ Θ ὁ $-1\frac{3}{4}$.

253.—Εἴδομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Β παρίσταται ὑπὸ τοῦ ἀριθμοῦ 2. Ἀλλ' ἐκ τοῦ σημείου τούτου ὁρίζεται ἐντελῶς καὶ τὸ τμῆμα ΟΒ, ὅπως καὶ ἐκ τοῦ τμήματος ΟΒ ὁρίζεται καὶ τὸ σημεῖον Β· διὰ τοῦτο καὶ τὸ τμῆμα ΟΒ παριστῶμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 2, ὅπως καὶ τὸ τμῆμα ΟΓ' παριστῶμεν διὰ τοῦ -3 κ. ο. κ.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος παριστᾷ ἓν σημεῖον Μ ἢ καὶ τὸ τμῆμα ΟΜ, λέγεται *τετμημένη* τοῦ σημείου Μ, τὸ δὲ σημεῖον Ο λέγεται *ἀρχὴ* τῶν τετμημένων.

Τὸ μέρος τῆς εὐθείας, τοῦ ὁποίου τὰ σημεῖα παρίστανται διὰ θετικῶν ἀριθμῶν, ὅπως τὸ Οχ, λέγεται *θετικὸν* μέρος τῆς εὐθείας αὐτῆς, ἡ δὲ φορὰ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ λέγεται θετικὴ φορὰ τῆς εὐθείας χ'χ· τὸ Οχ' λέγεται *ἀρνητικὸν* καὶ ἡ φορὰ ἡ ἀπὸ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ' λέγεται ἀρνητικὴ φορὰ τῆς εὐθείας αὐτῆς.



254. Παράστασις δύο δοθέντων ἀριθμῶν διὰ σημείου ἐπιπέδου. Λαμβάνομεν δύο εὐθείας καθέτους πρὸς ἀλλήλας καὶ ἐπὶ ἑκάστης τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἡ θετικὴ φορά. Ἔστωσαν δὲ αἱ χ'Οχ, θετικὴ φορὰ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ χ καὶ ψ'Οψ, τῆς ὁποίας θετικὴ φορὰ εἶναι ἡ ἐκ τοῦ Ο πρὸς τὸ ψ· ἐπὶ ἑκάστης τούτων λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ ἴσα πρὸς $+1$, τὰ ὁποῖα χρησιμοποιοῦμεν ὡς μονάδας μήκους.

Κατόπιν τούτων ἔστω ὁ ἀριθμὸς $χ=4$, ὅστις παριστᾷ τὸ σημεῖον Γ τῆς χ΄Οχ καὶ ὁ $ψ=3$, ὅστις παριστᾷ τὸ σημεῖον Δ τῆς ψ΄Οψ. ἐὰν ἤδη φέρωμεν διὰ τοῦ Γ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ψ΄Οψ καὶ διὰ τοῦ Δ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν χ΄Οχ, αἱ παράλληλοι αὗται θὰ τμηθοῦν εἰς ἓν σημεῖον Μ· τὸ σημεῖον τοῦτο Μ τοῦ ἐπιπέδου λέγομεν, ὅτι παριστοῦν οἱ δοθέντες ἀριθμοί· καὶ ὁ μὲν $χ=4$ λέγεται *τετμημένη* αὐτοῦ, ἡ δὲ εὐθεῖα χ΄Οχ ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δὲ $ψ=3$ λέγεται *τεταγμένη*, ἡ δὲ ψ΄Οψ ἄξων τῶν τεταγμένων. Οἱ δύο ὁμοῦ λέγονται *συντεταγμέναι* τοῦ σημείου Μ.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον παριστοῦν οἱ ἀριθμοὶ $χ=(ΟΓ')=-4$ καὶ $ψ=(ΟΔ')=-3$ εἶναι τὸ Μ΄.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν δοθῇ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Ν καὶ φέρωμεν ἐξ αὐτοῦ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν χ΄Οχ τέμνουσαν τὴν ψ΄Οψ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ψ΄Οψ, τέμνουσαν τὴν ἄλλην εἰς τὸ Η, οἱ ἀριθμοὶ $χ=(ΟΗ)=-2$ καὶ $ψ=(ΟΘ)=5$, λέγομεν, ὅτι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ σημεῖον αὐτὸ Ν· εἶναι δὲ τετμημένη τοῦ Ν ὁ χ καὶ τεταγμένη αὐτοῦ ὁ ψ.

Ὥστε εἰς ἕκαστον σημεῖον ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο ἀριθμοὶ παριστῶντες τὰ μήκη τῶν συντεταγμένων ὡς πρὸς δύο ἄξονας· ἀντιστρόφως δὲ εἰς δοθέντας δύο ἀριθμοὺς ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου συντεταγμέναι εἶναι οἱ δοθέντες ἀριθμοί.

Ὅταν ἀπαγγέλωμεν τὰς συντεταγμένας χ, ψ σημείου τινὸς Μ, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τὴν τετμημένην χ καὶ ἔπειτα τὴν τεταγμένην ψ, γράφομεν δὲ συμβολικῶς Μ(χ, ψ).

Ὅσα σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην ΟΠ κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου τῇ ψ΄Οψ· ὅσα δὲ ἔχουν τὴν αὐτὴν τεταγμένην ΟΚ, κεῖνται ἐπὶ παραλλήλου τῇ χ΄Οχ. Τὰ κείμενα ἐπὶ τῆς χ΄Οχ ἔχουν τεταγμένην 0, τὰ δὲ κείμενα ἐπὶ τῆς ψ΄Οψ ἔχουν τετμημένην 0· τὸ δὲ σημεῖον Ο (ἡ ἀρχὴ) ἔχει συντεταγμένας (0,0).

Οἱ δύο ἄξονες χ΄χ καὶ ψ΄ψ σχηματίζουν περὶ τὸ Ο τέσσαρας γωνίας, τὰ σημεῖα δὲ τῶν συντεταγμένων χ καὶ ψ σημείου τινὸς Μ ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς γωνίας, ἐν τῇ ὁποίᾳ κεῖται τὸ σημεῖον Μ· εἶναι δέ,

ἐὰν	τὸ	Μ	κεῖται	ἐν	τῇ	γωνίᾳ	χΟψ	χ	θετ.	ψ	θετ.
»	»	Μ	»	»	»	»	χ΄Οψ	χ	ἀρν.	ψ	»
»	»	Μ	»	»	»	»	χ΄Οψ΄	χ	»	ψ	ἀρν.
»	»	Μ	»	»	»	»	ψ΄Οχ	χ	θετ.	ψ	»

Ὥστε, γνωρίζοντες τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται τὸ Μ, γνωρίζομεν καὶ τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων αὐτοῦ· ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα τῶν συντεταγμένων σημείου τινὸς Μ, γνωρίζομεν καὶ τὴν γωνίαν, ἐντὸς τῆς ὁποίας κεῖται. Οὕτω σημεῖόν τι, οὗ ἀμφότεραι αἱ συντεταγμέναι εἶναι ἀρνητικαί, κεῖται ἐν τῇ γωνίᾳ χ΄Οψ΄ κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

967) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων συντεταγμέναι εἶναι:

$(2\ ,\ 1)$	$(-2, -3)$	$\left(-3\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}\right)$
$(-7,\ 5)$	$(-5,\ 7)$	$\left(-9\frac{3}{5}, -6\frac{3}{4}\right)$
$(8,\ -6)$	$(-8,\ 6)$	$(0\ , -7)$
$\left(-2,\ 4\frac{1}{2}\right)$	$\left(5\frac{1}{2}, -6\right)$	$(-6\ ,\ 0)$

255. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν συναρτήσεων***.—Ἡ παράστασις δύο δοθέντων ἀριθμῶν διὰ σημείου ἐπιπέδου ἐφαρμόζεται εἰς τὰ ζεύγη τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν μιᾶς συναρτήσεως.

Ἔστω $ψ=σ(χ)$ μία συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ. δηλαδὴ ἔστω ψ ἡ τιμὴ τῆς συναρτήσεως, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τιμὴν χ τῆς μεταβλητῆς. Ἡ ἐξίσωσις $ψ=σ(χ)$ δεικνύει, ὅτι εἰς ἑκάστην τιμὴν τῆς μεταβλητῆς χ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ τῆς συναρτήσεως (ἢ ὡρισμέναι τιμαί). Ἀλλ' ἐὰν λάβωμεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας συντεταγμένων καὶ ὁρίσωμεν τὴν μονάδα μήκους, εἰς τὸ ζεῦγος τῶν ἀντιστοιχουσῶν τιμῶν χ καὶ ψ ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων τούτων.

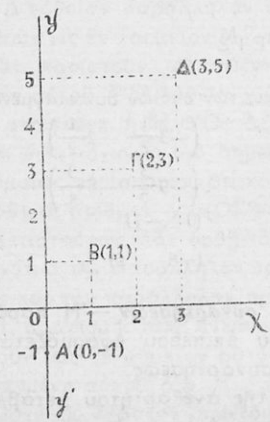
Π.χ. ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι $ψ=2χ-1$,

εἶναι διὰ	$χ=0$,	$ψ=-1$	καὶ τὸ σημεῖον εἶναι	$A(0,-1)$
»	$χ=1$,	$ψ=\ 1$	» » » »	$B(1,\ 1)$
»	$χ=2$,	$ψ=\ 3$	» » » »	$Γ(2,\ 3)$
»	$χ=3$,	$ψ=\ 5$	» » » »	$Δ(3,\ 5)$ κ.ο.κ.

Ἐπειδὴ δέ, ἂν αἱ τιμαὶ τῆς χ βαίνουν αὐξανόμεναι ὀλίγον κατ' ὀλίγον καὶ αἱ τιμαὶ τῆς ψ μεταβάλλονται ὀλίγον κατ' ὀλίγον, ἐννοοῦμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν εὑρισκομένων σημείων (καὶ τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν $ψ=2χ-1$) εἶναι ἐν γένει γραμμή τις. *Τὴν γραμμὴν δὲ ταύτην λέγομεν, ὅτι παριστᾷ ἡ συνάρτησις.*

Ὥστε εἰς πᾶσαν συνάρτησιν, ἐὰν νοήσωμεν τὰς μεταβλητὰς αὐτῆς ὡς συντεταγμένας σημείου, ἀντιστοιχεῖ γραμμή τις, ἥτις δεικνύει ἀκριβῶς τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως διὰ τῆς προόδου τῶν τεταγμένων αὐτῆς.

Ἐὰν συνάρτησίς τις εἶναι γνωστὴ εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχούσας τιμὰς αὐτῆς πρός τινα σειρὰν τιμῶν τῆς χ καὶ ἔχομεν οὕτω σειράν τινα σημείων τῆς γραμμῆς ἣν παριστᾷ ἡ συνάρτησις· ἑνοῦντες δὲ τὰ διαδοχικὰ σημεῖα δι' εὐθειῶν γραμμῶν, εὑρίσκομεν τὴν γραμμὴν ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν γνωστὴν συνάρτησιν καὶ ἥτις δεικνύει τὴν μεταβολὴν τῆς συναρτήσεως ψ μὲ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλυτέραν, ὅσῳ περισσότερα εἶναι τὰ σημεῖα καὶ ὅσῳ πυκνότερα κεῖνται.



256. *Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων ψ=αχ καὶ ψ=αχ+β.*

α') Τῆς συναρτήσεως ψ=αχ.

Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=2χ, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς, ἤτοι να εὕρωμεν τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ αὕτη.

Διὰ χ=0 εὑρίσκομεν ψ=0 καὶ τὸ σημεῖον εἶναι (0,0) δηλ. ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων· διὰ χ=1 εὑρίσκομεν ψ=2 καὶ τὸ σημεῖον εἶναι Α (1, 2) κ. ο. κ., ἐὰν δὲ εὕρωμεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν σημείων, θὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι ὅλα αὐτὰ τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας γραμμῆς Μ'ΟΜ διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο.

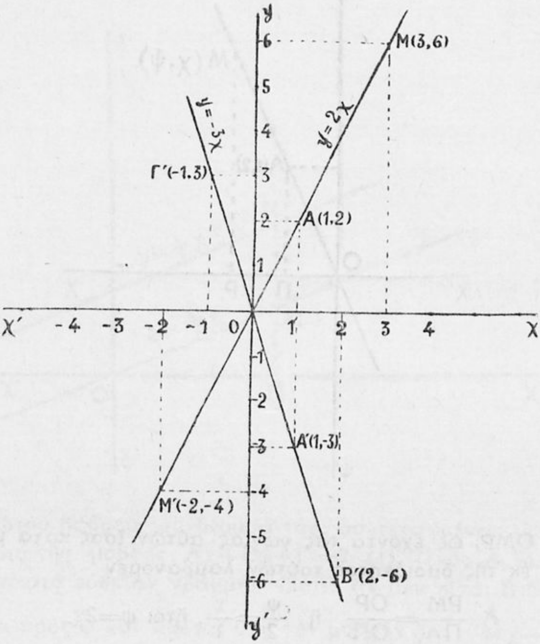
Ἔστω καὶ ἡ συνάρτησις ψ=—3χ, δι' ἣν εὑρίσκομεν

διὰ χ=0 ψ= 0 καὶ σημεῖον Ο (0,0)
» χ=1 ψ=—3 » » Α' (1, —3)
» χ=2 ψ=—6 » » Β' (2, —6) κ. ο. κ.

Παρατηροῦμεν δὲ καὶ πάλιν, ὅτι πάντα ταῦτα τὰ εὑρεθέντα σημεῖα κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς διερχομένης διὰ τῆς ἀρχῆς Ο. Ὥστε: Ἡ *συνάρτησις ψ=αχ, ὅπου α εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος, παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς.*

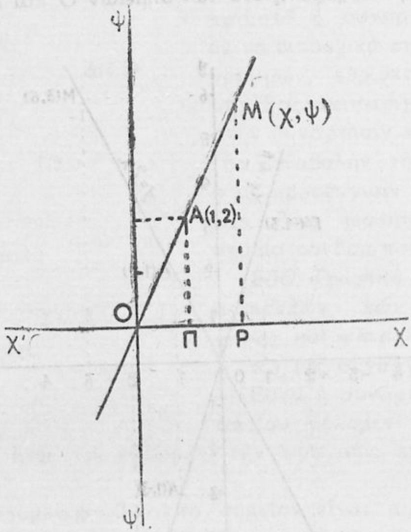
Τὴν ἀνωτέρω πρότασιν δυνάμεθα νὰ τὴν ἀποδείξωμεν.

Ἂς λάβωμεν πάλιν τὴν συνάρτησιν ψ=2χ, δι' ἣν εὕρομεν τὰ σημεῖα Ο (0, 0) καὶ Α (1, 2), τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν γραμμήν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις. Λέγομεν, δέ, ὅτι ἡ ζητουμένη γραμμὴ εἶναι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων Ο καὶ Α.



Καὶ πράγματι, πᾶν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τῶν θεωρουμένων ἀξόνων, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι χ καὶ ψ πληροῦν τὴν σχέσιν ψ=2χ, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ. Τὸ σημεῖον Μ θὰ κεῖται ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας χΟψ, ἐὰν $\chi>0$, (ὁπότε καὶ $\psi>0$), ἢ ἐντὸς τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς χ΄Οψ΄, ἐὰν $\chi<0$ (ὁπότε καὶ $\psi<0$). Ἂς ὑποθέσωμεν $\chi>0$· ἂν φέρωμεν τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου Μ, ΡΜ, (σχ. σελ. 274) ἔχομεν ΑΠ=2.ΟΠ· καὶ ΜΡ=2.ΟΡ ἤτοι $\frac{ΑΠ}{ΟΠ}=\frac{ΜΡ}{ΟΡ}$ Τὰ ὀρθογώνια ἑπομένως τρίγωνα ΟΜΡ καὶ ΟΑΠ ἔχοντα τὰς πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἀναλόγους, εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΠ καὶ ΜΟΡ εἶναι ἴσαι, ἤτοι, τὰ σημεῖα Ο, Α, Μ κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἀντιστρόφως δέ, πᾶν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ ἔχει συντεταγμένας χ καὶ ψ, αἵτινες πληροῦν τὴν σχέσιν ψ=2χ. Διότι τὰ τρίγωνα



ΟΑΠ καὶ ΟΜΡ, ὡς ἔχοντα τὰς γωνίας αὐτῶν ἴσας κατὰ μίαν, εἶναι ὅμοια καὶ ἐκ τῆς ὁμοιότητος τούτων λαμβάνομεν

$$\frac{PM}{\Pi A}=\frac{OP}{O\Pi} \quad ἢ \quad \frac{\psi}{2}=\frac{\chi}{1}, \text{ ἤτοι } \psi=2\chi.$$

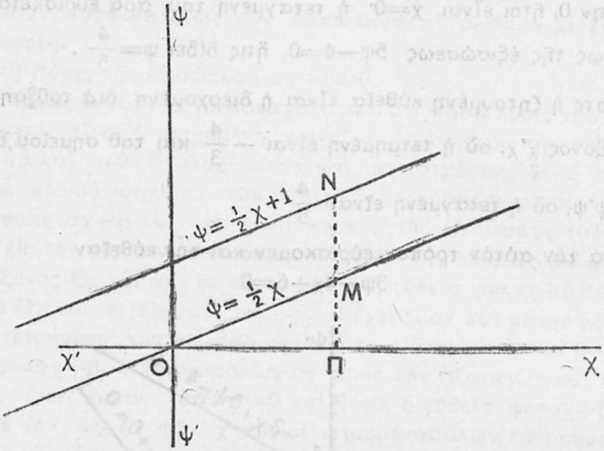
Ὁμοίως δεικνύεται καὶ γενικῶς, ὅτι *πᾶσα συνάρτησις τῆς μορφῆς ψ=αχ, ἔνθα α εἶναι ἀριθμός τις ὡρισμένος, παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ διὰ τοῦ σημείου (1, α). Ἀντιστρόφως δέ, πᾶσα εὐθεῖα, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο καὶ τοῦ σημείου (1, α) παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τῆς μορφῆς ψ=αχ.*

β΄) Παράστασις τῆς συναρτήσεως ψ=αχ+β.

Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=αχ+β. Κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις ψ=αχ καὶ ἔπειτα τὰς τεταγμένας τῆς εὐθείας ψ=αχ αὐξάνομεν πάσας (ἂν β εἶναι θετικόν), ἢ ἐλαττώνομεν πάσας (ἂν β εἶναι ἀρνητικὸν) κατὰ μῆκος β. *Παριστᾷ ἄρα ἡ ψ=αχ+β εὐθεῖαν παράλληλον τῇ εὐθείᾳ ψ=αχ.*

Π. χ. ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{1}{2}\chi+1$ παριστᾷ τὴν εὐθεῖαν ΤΝ τὴν παράλληλον τῇ ΟΜ, δι' ἣν εἶναι ΟΠ=2, ΠΜ=1, ΜΝ=1. *Ἀντιστρόφως δὲ πᾶσα εὐθεῖα παρίσταται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως τῆς μορφῆς* $\psi=\alpha\chi+\beta$.

Παρατηρήσεις. Ἐξ ὅσων εἴπομεν ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι πᾶσα



ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ, συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ, ψ, ἤτοι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A\chi+B\psi+\Gamma=0$ (1) (ἔνθα Α, Β, Γ εἶναι σταθερὰ) παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν· διότι, ἂν μὲν εἶναι Β διάφορον τοῦ 0, λύεται πρὸς ψ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\psi=-\frac{A}{B}\chi-\frac{\Gamma}{B}$ ἤ, θέτοντες $\alpha=-\frac{A}{B}$ καὶ $\beta=-\frac{\Gamma}{B}$, $\psi=\alpha\chi+\beta$ · ἂν δὲ εἶναι Β=0, λύεται πρὸς τὴν χ καὶ τίθεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $\chi=-\frac{\Gamma}{A}$ ἤ, θέτοντες $\gamma=-\frac{\Gamma}{A}$, $\chi=\gamma$, παριστᾷ δὲ τότε εὐθεῖαν παράλληλον τῇ Οψ.

Ἀντιστρόφως δὲ πᾶσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἔχει ἐξίσωσιν πρωτοβάθμιον, ἤτοι αἱ δύο συντεταγμέναι χ, ψ παντὸς σημείου αὐτῆς συνδέονται διὰ μιᾶς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς (1).

Παράδειγμα. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $-3\chi+5\psi-4=0$.

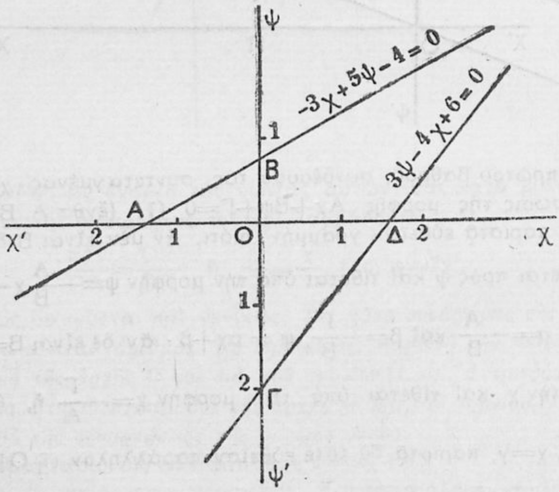
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν ζητουμένην εὐθεῖαν, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν δύο σημεῖα αὐτῆς, π. χ. τὰ σημεῖα εἰς ἃ αὕτη συναντᾷ τοὺς ἄξονας συντεταγμένων ἀλλὰ τὸ σημεῖον εἰς ὃ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα χ΄χ, ἔχει τεταγμένην 0, ἤτοι εἶναι $ψ=0$· ἡ τετμημένη αὐτοῦ ἄρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $-3χ-4=0$, ἐξ ἧς εὑρίσκομεν $χ=-\frac{4}{3}$.

Ἐπίσης τὸ σημεῖον, εἰς ὅ αὕτη συναντᾷ τὸν ἄξονα ψ΄ψ ἔχει τετμημένην 0, ἤτοι εἶναι $χ=0$· ἡ τεταγμένη του ἄρα εὑρίσκεται ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἐξισώσεως $5ψ-4=0$, ἥτις δίδει $ψ=\frac{4}{5}$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ διερχομένη διὰ τοῦ σημείου Α τοῦ ἄξονος χ΄χ, οὗ ἡ τετμημένη εἶναι $-\frac{4}{3}$ καὶ τοῦ σημείου Β τοῦ ἄξονος ψ΄ψ, οὗ ἡ τεταγμένη εἶναι $\frac{4}{5}$.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον εὑρίσκομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν

$$3ψ-4χ+6=0$$



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, τὰς ὁποίας παριστάνουν αἱ ἐξισώσεις :

968) $ψ=-2χ$ 971) $ψ=2χ+1$

969) $ψ=\frac{2}{3}χ$ 972) $ψ=5χ-3$

970) $\psi = -\frac{1}{2}\chi$ 973) $4\chi+3\psi+2=0$.

Ὁμοίως νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι:

974) $\chi \quad =3$ 977) $3\chi+4\psi \quad =0$

975) $2\psi+5=0$ 978) $2\chi-3\psi+5=0$

976) $\chi-\psi=0$ 979) $7\chi-2\psi-3=0$.

257. ***Γραφικὴ λύσις τῶν ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ μὲ ἕνα ἢ δύο ἀγνώστους.***

α΄) Λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$.

Εὐκόλως δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν, ὅτι πᾶσα λύσις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως εἶναι ἡ τετμημένη κοινοῦ τινος σημείου τῆς εὐθείας $\psi=\alpha\chi+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος τῶν χ καὶ ἀντιστρόφως, ὅτι ἡ τετμημένη παντὸς κοινοῦ σημείου τῶν δύο τούτων εὐθειῶν εἶναι λύσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta=0$. Ἡ λύσις λοιπὸν τῆς ἐξισώσεως ταύτης ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν κοινῶν σημείων τῆς εὐθείας $\psi=\alpha\chi+\beta$ καὶ τοῦ ἄξονος $O\chi$. Ἐὰν δὲ εἶναι $\alpha\neq 0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ τέμνει τὸν ἄξονα $O\chi$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta=0$ ἔχει μίαν καὶ μόνην λύσιν, ἥτις εἶναι τετμημένη τοῦ σημείου τῆς τομῆς. Ἐὰν $\alpha=0$, καὶ $\beta\neq 0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $O\chi$ καὶ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν. Ἐὰν $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$, ἡ εὐθεῖα $\psi=\alpha\chi+\beta$ συμπίπτει μὲ τὸν ἄξονα τῶν χ καὶ αἱ τετμημέναι ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἄξονος $\chi'\chi$ εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως.

β΄) Λύσις τοῦ συστήματος

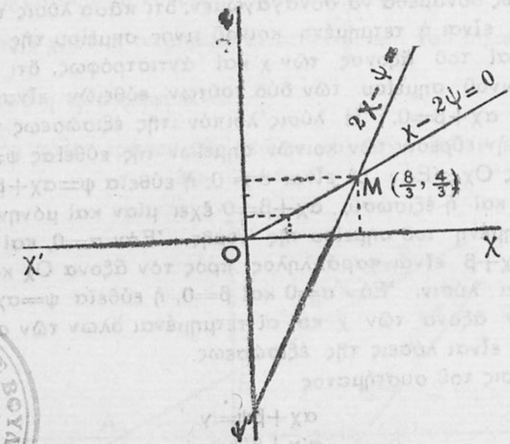
$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$$
$$\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'.$$

Ἡ ἐξίσωσις $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$, ἡ συνδέουσα τὰς συντεταγμένας χ, ψ γνωρίζομεν, ὅτι παριστᾷ εὐθεῖαν τινα, ἡ δὲ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$ παριστᾷ ἄλλην τινὰ εὐθεῖαν· ἀλλὰ τὸ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας, εἶναι ἐν γένει ὡρισμένον· διότι πρέπει νὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣν παριστᾷ ἡ πρώτη ἐξίσωσις καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ἣν παριστᾷ ἡ δευτέρα. Ὥστε εἶναι τὸ κοινὸν σημεῖον τῶν δύο τούτων εὐθειῶν καὶ μόνον τοῦτο. Αἱ συντεταγμέναι ἄρα τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν εὐθειῶν τούτων ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ συστήματος τούτου. Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι αἱ συντεταγμέναι τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν δύο εὐθειῶν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$.

Ἡ λύσις ἄρα τοῦ προκειμένου συστήματος ἀνάγεται εἰς τὴν εὕρεσιν τοῦ κοινοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ καὶ $\alpha'\chi+\beta'\psi=\gamma'$. πρὸς τοῦτο δὲ κατασκευάζομεν πρῶτον τὴν μίαν εὐθεῖαν, ἔπειτα τὴν ἄλλην καὶ εὑρίσκομεν ἀκολούθως τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Π. χ. νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$2χ - ψ = 4$$
$$χ - 2ψ = 0$$

Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν $2χ - ψ = 4$ καὶ ἔπειτα τὴν $χ - 2ψ = 0$· αἱ συντεταγμέναι δὲ τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν Μ ἀποτελοῦν τὴν λύσιν τοῦ δοθέντος συστήματος.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς τὰ ἑπόμενα συστήματα :

980) $χ + 2ψ = 12$, $χ - 3ψ = 2$ 981) $2χ - 3ψ = 4$, $3χ + 4ψ = -11$ 982) $ψ = 3$, $\frac{χ}{8} + \frac{ψ}{6} = 1$

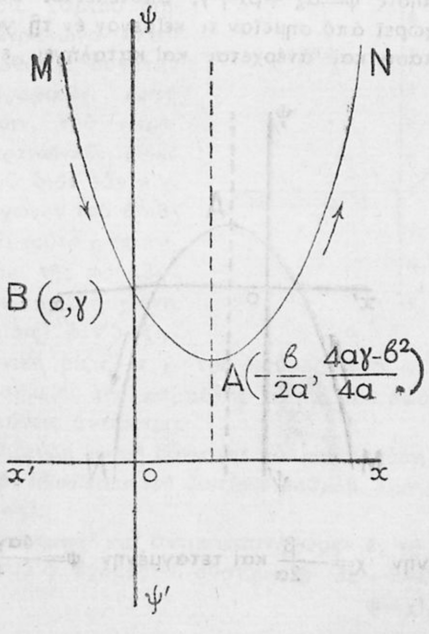
983) $4χ - ψ = 10$, $2χ - ψ = 4$ 984) $χ = 5$, $ψ - χ = 3$ 985) $χ = -3$, $\frac{χ}{2} - \frac{ψ}{3} = 2$

Παρατήρησις. Ὁ τρόπος οὗτος τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῶν μεταβολῶν μιᾶς συναρτήσεως εἶναι ἐν εὐρυτάτῃ χρήσει εἰς τὸν πρακτικὸν βίον· διότι εἰς αὐτὸν παρουσιάζονται δύο ποσά, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓν εἶναι συνάρτησις τοῦ ἄλλου· ὡς παραδείγματα ἀναφέρομεν τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῶν μεταβολῶν τοῦ πυρετοῦ ἀσθενοῦς τινος, τῶν διαφόρων τιμῶν τοῦ συναλλάγματος, τὰς γραφικὰς παραστάσεις τῆς κινήσεως ἑνὸς σιδηροδρόμου, τῶν μεταβολῶν τῆς βαρομετρικῆς πιέσεως, τῆς θερμοκρασίας κτλ.

Γίνεται δὲ τοῦτο, διότι, ἐὰν π.χ. θέλωμεν νὰ παραστήσωμεν γραφικῶς τὰς μεταβολὰς τῆς θερμοκρασίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι συνάρτησις τοῦ χρόνου, παριστῶμεν τὰς μὲν τιμὰς τοῦ χρόνου ὡς τετμημένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οχ, τὰς δὲ ἀντιστοίχους τιμὰς τῆς θερμοκρασίας ὡς εταγμένας ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οψ· τότε ἑκάστη τιμὴ τοῦ χρόνου καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς θερμοκρασίας παρίστανται ὡς συντεταγμέναι ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου· ἐὰν δὲ ἑνώσωμεν ἕκαστον σημεῖον δι' εὐθείας μετὰ τοῦ ἑπομένου του, λαμβάνομεν τεθλασμένην γραμμήν, ἐκ τοῦ σχήματος τῆς ὁποίας βλέπομεν, ἂν ἡ θερμοκρασία αὐξάνῃ σὺν τῷ χρόνῳ ἢ ἐλαττοῦται, πότε αὐξάνει ταχύτερον καὶ πότε βραδύτερον, πότε γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη κτλ.

258. ***Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.***

Λαμβάνομεν ἐπὶ ἐπιπέδου δύο ἄξονας Οχ καὶ Οψ καὶ κατασκευάζομεν τὴν γραμμὴν (ἢ καμπύλην) ἥτις ἔχει ὡς ἐξίσωσιν $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$.

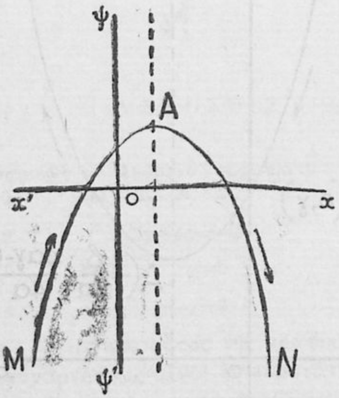


Παρατηροῦμεν δὲ τὸ σημεῖον τοῦ α καὶ ἔστω:

1) $\alpha>0$. Ἐκ τῶν προηγουμένων γνωρίζομεν, ὅτι ὅταν ἡ χ αὐξάνηται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ καμπύλη ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κλάδον ΜΑ, (σχ. σελ. 279) ἀρχόμενον ἀπό τινος σημείου κειμένου ἐν τῇ γωνίᾳ ψΟχ′ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν, ὅστις κατέρχεται καὶ καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον Α ἔχον τετμημένην $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\psi=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἔπειτα, τοῦ χ αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ καμπύλη συνεχίζεται δι᾽ ἑτέρου κλάδου, ΑΝ ἀναχωροῦντος ἀπὸ τοῦ Α καὶ ἀνερχομένου καὶ ὅστις ἀπομακρύνεται εἰς τὸ ἄπειρον ἐν τῇ γωνίᾳ χΟψ.

2) Ἔστω ἤδη $\alpha<0$.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὅταν ἡ χ αὐξάνηται, ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ ψ αὐξάνεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ καὶ ἡ καμπύλη ἣν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα κλάδον ΜΑ, ὅστις ἀναχωρεῖ ἀπὸ σημεῖον τι κείμενον ἐν τῇ γωνίᾳ ψ′Οχ′ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ ἀνέρχεται καὶ καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον



Α ἔχον τετμημένην $\chi=-\frac{\beta}{2\alpha}$ καὶ τεταγμένην $\psi=\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$· ἀλλ᾽ ὅταν ἡ χ αὐξάνηται ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ ψ ἐλαττοῦται ἀπὸ $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἕως τὸ $-\infty$ καὶ ἡ καμπύλη συνεχίζεται δι' ἄλλου κλάδου ΑΝ, ὅστις ἄρχεται ἀπὸ τοῦ Α, κατέρχεται καὶ ἀπομακρύνεται ἐν τῇ γωνίᾳ ψ'Οχ εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν.

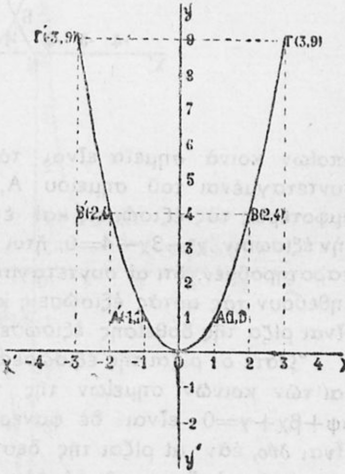
Ἡ καμπύλη τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ λέγεται π α ρ α β ο λ ή.

Π. δ. ***Νὰ*** *παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως* $\psi=\chi^2$.

Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδὴ

διὰ $\chi=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4, \ldots$
εἶναι $\psi=0,\ 1,\ 4,\ 9\ 16, \ldots$

ἡ παραβολὴ διερχομένη διὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων Ο (κορυφὴ τῆς παραβολῆς) εἶναι συμμετρικὴ πρὸς τὸν ἄξονα Οψ.



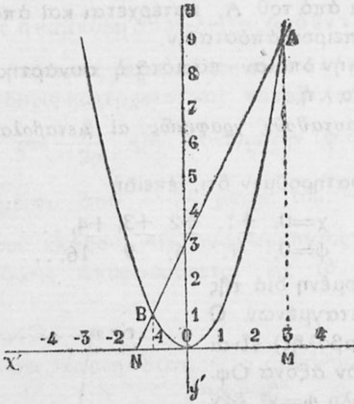
259. Ἡ καμπύλη $\psi=\chi^2$, ἐὰν γίνῃ μετ' ἀκριβείας (πρὸς τοῦτο δὲ γίνεται χρῆσις χάρτου διῃρημένου εἰς τετράγωνα πλευρᾶς 0.001), καθιστᾷ δυνατὴν τὴν εὕρεσιν *γραφικῶς*, κατὰ μίαν προσέγγισιν, τοῦ *τετραγώνου* ἢ τῆς *τετραγωνικῆς ῥίζης* δοθέντος ἀριθμοῦ· διότι ἐὰν π.χ. ζητηθῇ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ 3, 5 θὰ εἶναι τοῦτο ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου τῆς παραβολῆς, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι 3, 5 (μία λύσις)· ἐὰν δὲ ζητηθῇ ἡ τετραγωνική ῥίζα, π. χ. τοῦ ἀριθμοῦ 6,25, αὕτη θὰ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου τῆς καμπύλης αὐτῆς, τοῦ ὁποίου τεταγμένη εἶναι 6,25 (δύο λύσεις ἀντίθετοι).

260. Ἡ καμπύλη $\psi=\chi^2$ δύναται νὰ χρησιμεύσῃ εἰς καὶ τὴν *γραφικὴν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ δευτέρου βαθμοῦ*. Διότι ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\chi^2-3\chi-4=0$.

Ἐὰν θέσωμεν $\psi=\chi^2$ καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἐν τῇ δοθείσῃ ἐξισώσει τὸ χ^2 διὰ τοῦ ψ, ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\psi-3\chi-4=0$$
$$\psi=\chi^2.$$

ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ ὁποίου παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν, ἡ δὲ δευτέρα παραβολήν· ἀλλ' ἐὰν κατασκευάσωμεν τὰς γραμμὰς αὐτὰς τῶν



ὁποίων κοινὰ σημεῖα εἶναι τὰ A καὶ B, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου A, $\psi=(MA)$, $\chi=(OM)$ ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως ὁ ἀριθμὸς χ ἐπαληθεύει τὴν ἐξίσωσιν $\chi^2-3\chi-4=0$, ἤτοι ὁ $\chi=(OM)$ εἶναι ρίζα αὐτῆς· ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ B, $\psi=(NB)$, $\chi=(ON)$ ἐπαληθεύουν τὰς αὐτὰς ἐξισώσεις καὶ ἑπομένως, ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\chi=(ON)$ εἶναι ρίζα τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

Ὥστε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ εἶναι αἱ τετμημέναι τῶν κοινῶν σημείων τῆς παραβολῆς $\psi=\chi^2$ καὶ τῆς εὐθείας $\alpha\psi+\beta\chi+\gamma=0$· εἶναι δὲ φανερόν, ὅτι τὰ κοινὰ ταῦτα σημεῖα θὰ εἶναι *δύο*, ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, *ἓν* δέ, ἐὰν εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι· ἀλλ' ἐὰν εἶναι μιγάδες συζυγεῖς, ἡ εὐθεῖα $\alpha\psi+\beta\chi+\gamma=0$ καὶ ἡ παραβολὴ $\psi=\chi^2$ *δὲν ἔχουν κανὲν κοινὸν σημεῖον.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων.

986) $\psi=-\chi^2$ 987) $\psi=2\chi^2$ 988) $\psi=-\frac{4}{5}\chi^2$

989) $\psi=\frac{3}{4}\chi^2$ 990) $2\psi=3\chi^2$ 991) $-3\psi=\chi^2$

992) $\psi=2\chi^2-\chi-10$ 993) $\psi=-2\chi^2+\chi+10$

994) $\psi=4\chi^2-4\chi-15$ 995) $\chi^2\psi=-\chi^2+2\chi+15$

Νὰ λυθοῦν γραφικῶς αἱ ἐξισώσεις

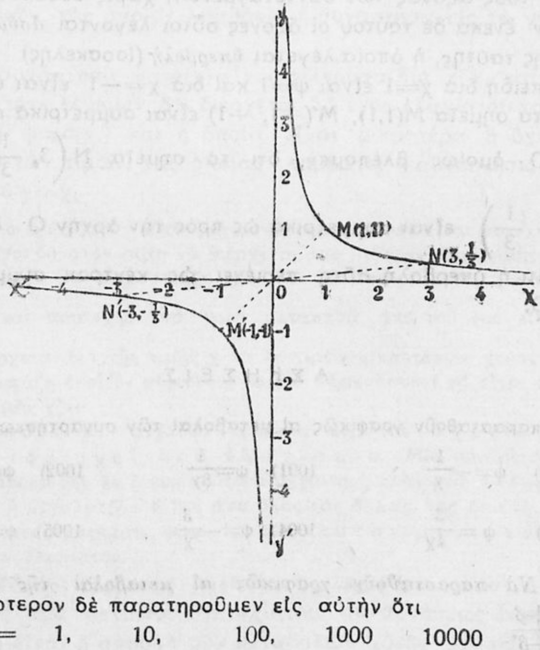
996) $\chi^2+\chi-2=0$ 997) $\chi^2-6\chi+9=0$

998) $\chi^2-2\chi-8=0$ 999) $\chi^2+8\chi+16=0$

261 *Γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως* $\psi=\dfrac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}$.

α) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\psi=\dfrac{1}{\chi}$.

Ἡ συνάρτησις αὐτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ πλὴν διὰ τὴν τιμὴν χ=0.



Εἰδικώτερον δὲ παρατηροῦμεν εἰς αὐτὴν ὅτι

διὰ	χ=	1,	10,	100,	1000	10000
εἶναι	ψ=	1,	0,1	0,01,	0,001,	0,0001 καὶ
διὰ	χ=	0 1,	0,01,	0,001,	0,0001,	
εἶναι	ψ=	10,	100,	1000,	10000,	καὶ
διὰ	χ=	−0,1,	−0,01,	−0,001	κ.λ.π.	

εἶναι $\psi=-10$, -100, -1000, κ.λ.π., ἤτοι, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ χ καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ εἶναι ὁμοειδεῖς καὶ ὅτι, ὅταν ὁ χ αὐξάνηται κατ' ἀπόλυτον τιμήν, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ ἐλαττοῦνται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τείνουν πρὸς τὸ 0· ὅταν δὲ αἱ τιμαὶ τοῦ χ ἐλαττοῦνται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν καὶ τείνουν πρὸς τὸ 0, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ ψ αὐξάνονται ἀπολύτως καὶ τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον· διὰ τὴν τιμὴν δὲ $\chi=0$, ἡ συνέχεια διακόπτεται.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω εὐκόλως συνάγομεν τὴν καμπύλην, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{1}{\chi}$ καὶ ἡ ὁποία δεικνύεται εἰς τὸ σχῆμα· τῆς σελ. 283, παρατηροῦμεν δέ, ὅτι αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη, ἕκαστον τῶν ὁποίων σύγκειται ἐκ δύο κλάδων ἐκτεινομένων εἰς ἄπειρον ἀπόστασιν καὶ οἱ ὁποῖοι, ἀπομακρυνόμενοι πλησιάζουν διαρκῶς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων, χωρὶς οὐδέποτε νὰ τοὺς φθάσουν· ἕνεκα δὲ τούτου οἱ ἄξονες οὗτοι λέγονται *ἀσύμπτωτοι* τῆς καμπύλης ταύτης, ἡ ὁποία λέγεται *ὑπερβολὴ* (ἰσοσκελής).

Ἐπειδὴ διὰ $\chi=1$ εἶναι $\psi=1$ καὶ διὰ $\chi=-1$ εἶναι $\psi=-1$, ἔπεται ὅτι τὰ σημεῖα $M(1,1)$, $M'(-1,\ -1)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο· ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι τὰ σημεῖα $N\left(3,\ \frac{1}{3}\right)$ καὶ $N'\left(-3,\ -\frac{1}{3}\right)$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν Ο· ὅθεν συνάγομεν, ὅτι ἡ ὑπερβολὴ αὕτη περιέχει ὡς κέντρον συμμετρίας τὴν ἀρχὴν Ο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων

1000) $\psi=-\frac{1}{\chi}$ 1001) $\psi=\frac{1}{3\chi}$ 1002) $\psi=\frac{2}{\chi}$

1003) $\psi=\frac{3}{4\chi}$ 1004) $\psi=-\frac{3}{\chi}$ 1005) $\psi=-\frac{2}{5\chi}$

β) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως $\psi=\frac{\alpha\chi+\beta}{\alpha'\chi+\beta'}$.

Βλέπε συμπλήρωμα τῆς ἀλγέβρας Χ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 32 § 23.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Περὶ μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

262. Ἡ ἔννοια τοῦ μεγίστου καὶ ἐλαχίστου εἶναι μεγίστης ὠφελιμότητος εἰς τὰς πρακτικὰς ἐφαρμογάς, διότι εἶναι σημαντικὸν νὰ γνωρίζῃ τις π. χ. τὸ ἐλάχιστον κόστος μιᾶς ἐργασίας ἢ τὸ μέγιστον τῆς ἀποδόσεως αὐτῆς.

263. Ἐκ τῶν προηγουμένων συνάγομεν ὅτι:

Μία συνάρτησις $ψ=σ(χ)$ αὔξουσα εἰς τὰς γειτονικὰς τιμὰς τοῦ χ ἔν τινι διαστήματι $χ_1<χ<χ_2$ εἶναι δυνατὸν νὰ παύσῃ αὐξανομένη διὰ τὴν τιμὴν $χ_1$ καὶ νὰ ἐλαττοῦται ἀπὸ τῆς τιμῆς $χ>χ_1$. Λέγομεν δὲ τότε, ὅτι διὰ $χ=χ_1$ ἡ συνάρτησις διέρχεται δι᾽ ἑνὸς μεγίστου καὶ εἶναι τοῦτο ἡ τιμὴ $ψ=σ(χ_1)$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι μεγαλυτέρα ἢ ὄχι μικροτέρα ὅλων τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὰ γειτονικὰ τοῦ $χ=χ_1$.

Ἐὰν ἡ συνάρτησις $ψ=σ(χ)$ εἶναι φθίνουσα διὰ $χ<χ_1$ καὶ αὔξουσα διὰ $χ>χ_1$ τότε λέγομεν, ὅτι διέρχεται δι᾽ ἑνὸς ἐλαχίστου καὶ εἶναι τοῦτο ἡ τιμὴ $ψ=σ(χ_1)$ καὶ ἡ ὁποία εἶναι μικροτέρα ἢ ὄχι μεγαλυτέρα ὅλων τῶν τιμῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἡ συνάρτησις εἰς τὰ γειτονικὰ τοῦ $χ=χ_1$.

Σημείωσις α΄. Ὅταν μία συνάρτησις ψ δὲν εἶναι συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι, εἶναι δυνατὸν αὕτη νὰ διέρχεται ἀπὸ μιᾶς μεγάλης τιμῆς εἰς μίαν μικροτέραν χωρὶς νὰ παρουσιάζῃ ἐκεῖ ἓν μέγιστον. Οὕτως ἡ συνάρτησις $\frac{-1}{χ-α}$, ἥτις εἶναι ἀσυνεχὴς διὰ $χ=α$ μεταπηδᾷ ἀπὸ τοῦ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$, ὅταν τὸ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $χ=α$ ἐκ τιμῶν μικροτέρων, χωρὶς ἐν τούτοις νὰ παρουσιάζῃ ἐκεῖ ἓν μέγιστον. Διότι ἐξακολουθεῖ νὰ εἶναι αὔξουσα καὶ διὰ τὰς τιμὰς $χ>α$.

Σημείωσις β΄. Ἐνταῦθα πρόκειται περὶ τοῦ σχετικοῦ μεγίστου ἢ τοῦ σχετικοῦ ἐλαχίστου. Μία συνάρτησις εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιάζῃ ἓν ἢ περισσότερα μέγιστα ἢ ἐλάχιστα ἔν τινι διαστήματι. Ἡ τιμὴ ἡ μεγαλυτέρα ἢ ἴση ἀπὸ ὅλας τὰς ἄλλας, τὰς ὁποίας ἔχει μία συνάρτησις ἔν τινι διαστήματι, εἶναι τὸ ἀπόλυτον μέγιστον ἢ τὸ ἀπόλυτον ἐλάχιστον.

264. ***Μέθοδοι εὑρέσεως μεγίστου ἢ ἐλαχίστου.*** Μία τῶν μεθόδων εὑρέσεως τοῦ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου συναρτήσεως ἔν τινι διαστήματι (α,β) εἶναι ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν αὐτῆς ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.

Ἄλλη μέθοδος εἶναι ἡ *τῆς τετραγωνικῆς ῥίζης*. Ἔστω π.χ ὅτι ζητεῖται ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ τριωνύμου $χ^2-4χ+3$. Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν τιμὴν αὐτοῦ, τὴν ἀντιστοιχοῦσαν πρὸς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ χ, διὰ τοῦ ψ θὰ ἔχωμεν $\chi^2-4\chi+3=\psi$ καὶ λύοντες πρὸς χ εὑρίσκομεν $\chi=2\pm\sqrt{1+\psi}$. Ἡ ἐλαχίστη λοιπὸν τιμὴ τοῦ τριωνύμου εἶναι $\psi=-1$ καὶ λαμβάνεται διὰ $\chi=2$.

Τὸ τριώνυμον $-\chi^2+4\chi-3$ διὰ τὴν αὐτὴν τιμὴν $\chi=2$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν 1. .

Διὰ τὴν συνάρτησιν $\dfrac{2\chi^2+4\chi-1}{\chi^2+1}$, ἐὰν θέσωμεν $\psi=\dfrac{2\chi^2+4\chi-1}{\chi^2+1}$ λαμβάνομεν $(\psi-2)\chi^2-4\chi+\psi+1=0$ καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\chi=\frac{2\pm\sqrt{4-(\psi-2)(\psi+1)}}{\psi-2}\quad \text{ἤτοι}$$

$$\chi=\frac{2\pm\sqrt{-\psi^2+\psi+6}}{\psi-2}$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἐπειδὴ αἱ ῥίζαι τοῦ τριωνύμου $-\psi^2+\psi+6$ εἶναι -2 καὶ 3, τοῦτο εἶναι θετικὸν διὰ τιμὰς τοῦ ψ κειμένας μεταξὺ -2 καὶ 3. Ὥστε διὰ νὰ εἶναι τὸ χ πραγματικὸν πρέπει ἡ ψ νὰ λάβῃ τὴν ἐλαχίστην τιμὴν -2 ἢ τὴν μεγίστην τιμὴν 3 ἢ καὶ τιμὰς κειμένας μεταξὺ τῶν -2 καὶ 3. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν συνάρτησις ἔχει ἓν ἐλάχιστον ἴσον μὲ -2 καὶ ἓν μέγιστον ἴσον μὲ 3. Γίνεται δὲ αὕτη ἐλαχίστη διὰ $\chi=\dfrac{2}{-2-2}=-\dfrac{1}{2}$ καὶ μεγίστη διὰ $\chi=\dfrac{2}{3-2}=2$.

265. **Ἐφαρμογαί.** *I. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβλητῶν τῆς συναρτήσεως* $\psi=\dfrac{1}{\chi^2-3\chi+2}$.

Ἐπειδὴ $\chi^2-3\chi+2=(\chi-1)(\chi-2)$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ πλὴν διὰ $\chi=1$ καὶ $\chi=2$, καὶ εἶναι θετικὴ διὰ τιμάς τῆς χ κειμένας ἐκτὸς τῶν ῥιζῶν τοῦ τριωνύμου $\chi^2-3\chi+2$ καὶ ἀρνητικὴ διὰ τιμὰς τῆς χ κειμένας μεταξὺ τῶν ῥιζῶν. Εἶναι δὲ $\psi=0$ διὰ $\chi=\pm\infty$.

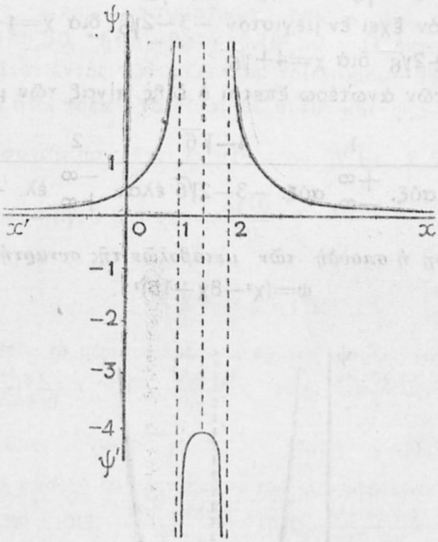
Ὅταν ἡ χ αὐξάνῃ ἀπὸ $-\infty$ ἕως 1 ἡ συνάρτησις αὐξάνει ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$, διὰ δὲ $\chi=0$ εἶναι $\psi=1$. Ὅταν ἡ χ διερχομένη διὰ τῆς τιμῆς 1 ὑπερβῇ αὐτήν, ἡ ψ μεταπηδᾷ ἀπὸ τὸ $+\infty$ εἰς τὸ $-\infty$ καὶ αὐξάνεται μέχρι τῆς μεγίστης τιμῆς -4, ὅταν ἡ χ αὐξάνεται ἀπὸ 1 ἕως $\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{3}{2}$ καὶ ἐλαττοῦται ἀπὸ -4 ἕως $-\infty$, ὅταν ἡ χ αὐξάνεται ἀπὸ $\dfrac{3}{2}$ ἕως 2.

Ὅταν ἡ χ διερχομένη διὰ τῆς τιμῆς 2 ὑπερβῇ αὐτήν, ἡ ψ μεταπηδᾷ ἀπὸ τὸ $-\infty$ εἰς τὸ $+\infty$ καὶ ἐλαττοῦται μέχρι τοῦ 0, ὅταν ἡ χ αὐξάνῃ ἀπὸ 2 ἕως $+\infty$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν τὸν κάτωθι πίνακα τῶν μεταβολῶν.

χ	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
ψ	0	αὐξ.	$\pm\infty$	αὐξ.	-4	ἐλατ.	$\mp\infty$	ἐλατ.	0

Τὸ κάτωθι σχῆμα ἀποτελεῖ τὴν γραφικὴν παράστασιν τῶν μεταβολῶν τῆς δοθείσης συναρτήσεως.



II. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆ. συναρτήσεως

$$\psi = \frac{2\chi^2 - 7\chi + 8}{\chi^2 - 3\chi + 2} \qquad (1)$$

Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ πλὴν διὰ τὰς τιμὰς $\chi=1$ καὶ $\chi=2$ δι᾽ ἃς μηδενίζεται ὁ παρονομαστής. Δεδομένου δέ, ὅτι ὁ ἀριθμητὴς δὲν ἔχει πραγματικὰς ρίζας (διότι $\beta^2-4\alpha\gamma=-15$) ἡ ψ οὐδέποτε μηδενίζεται διὰ πραγματικὰς τιμὰς τῆς χ. Ἐὰν δὲ διαιρέσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος διὰ $χ^2$ εὑρίσκομεν

$$ψ=\frac{2-\dfrac{7}{χ}+\dfrac{8}{χ^2}}{1-\dfrac{3}{χ}+\dfrac{2}{χ^2}}.$$

Ἑπομένως δι' ὅρχ$=\pm\infty$ εἶναι ὅρ $ψ=2$. Κατόπιν τούτων λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς χ εὑρίσκομεν

$$χ=\frac{3ψ-7\pm\sqrt{ψ^2+6ψ-15}}{2(ψ-2)}.$$

Καὶ ἐπειδὴ αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $ψ_2+6ψ-15$ εἶναι $-3\pm2\sqrt{6}$, ἕπεται ὅτι ἵνα αἱ τιμαὶ τῆς χ εἶναι πραγματικαὶ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $ψ\leqslant-3-2\sqrt{6}$ καὶ $ψ\geqslant-3+2\sqrt{6}$.

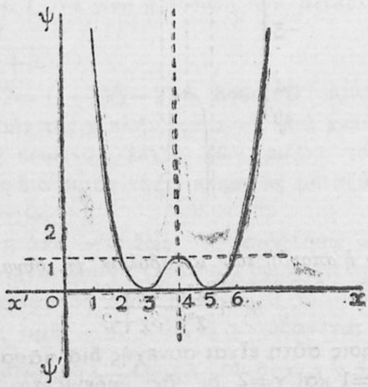
Ἡ ψ λοιπὸν ἔχει ἓν μέγιστον $-3-2\sqrt{6}$ διὰ $χ=4-\sqrt{6}$ καὶ ἓν ἐλάχιστον $-3+2\sqrt{6}$ διὰ $χ=4+\sqrt{6}$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς πίναξ τῶν μεταβολῶν

χ	$-\infty$		0		1		$4-\sqrt{6}$		2		$4+\sqrt{6}$		$+\infty$
ψ	2	αὐξ.	4	αὐξ.	$\begin{matrix}+\infty\\-\infty\end{matrix}$	αὐξ.	$-3-2\sqrt{6}$	ἐλατ.	$\begin{matrix}-\infty\\+\infty\end{matrix}$	ἐλ.	$-3+\sqrt{6}$	αὐξ.	2

III. *Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως.*

$$ψ=(χ^2-8χ+15)^2$$



Τὸ τριώνυμον $χ^2-8χ+15$ γίνεται 0 διὰ $χ=3$ καὶ $χ=5$ καὶ ἔχει ἓν ἐλάχιστον ἴσον μὲ -1 διὰ $χ=4$. Ὥστε διὰ $χ=3$ καὶ $χ=5$ εἶναι $ψ=0$ καὶ διὰ $χ=4$ εἶναι $ψ=1$.

Ἐξ ἄλλου διὰ $\chi=\pm\infty$ εἶναι $\psi=+\infty$.

Κατόπιν τούτων λαμβάνομεν τὸν ἑξῆς πίνακα μεταβολῶν:

χ	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
ψ	$+\infty$	ἐλατ.	0	αὐξ.	1	ἐλατ.	0	αὐξ.	$+\infty$

IV. *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως* $\psi=\chi+3\sqrt{6^2-\chi^2}$.

Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως λαμβάνομεν $3\sqrt{6^2-\chi^2}=\psi-\chi$ καὶ ἐὰν ὑψώσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς εἰς τὸ τετράγωνον

$$10\chi^2-2\psi\chi+\psi^2-18^2=0.$$

Ἵνα χ εἶναι πραγματικὸν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\psi^2-10(\psi^2-18^2)\geqslant 0$, ἤτοι $-9\psi^2+10.18^2\geqslant 0$. Πρέπει λοιπὸν ἡ τιμὴ τοῦ ψ νὰ κεῖται ἐντὸς τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $-9\psi^2+10.18^2$, αἵτινες εἶναι $\pm 6\sqrt{10}$, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\psi\leqslant 6\sqrt{10}$ καὶ $\psi\geqslant -6\sqrt{10}$. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν συνάρτησις ἔχει ἓν μέγιστον $6\sqrt{10}$ διὰ $\chi=\frac{6\sqrt{10}}{10}$ καὶ ἓν ἐλάχιστον $-6\sqrt{10}$ διὰ $\chi=-\frac{6\sqrt{10}}{10}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα ἑκάστης τῶν συναρτήσεων:

1006) $\frac{3(4+\chi^2)}{2(2+\chi)}$ 1007) $\frac{18+2\chi^2}{9-\chi^2}$ 1008) $\frac{\chi^2-5\chi+6}{\chi}$ 1009) $\frac{2\chi^2+1}{\chi^2-4\chi+4}$

1010) $\chi+2\sqrt{9-\chi^2}$ 1011) $\chi-2\sqrt{25-\chi^2}$

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων:

1012) $(2\chi-3)^2$ 1013) $\frac{3\chi^2-8\chi-3}{\chi^2+1}$ 1014) $\frac{\chi^2-4\chi+4}{\chi^2-1}$ 1015) $\frac{\chi^2-2\chi-3}{\chi^2-4\chi+4}$

1016) $(\chi^2-5\chi+6)^2$.

Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὑπὸ συνθήκας.

266. Θεώρημα I. — *Τὸ γινόμενον δύο θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα μένει σταθερόν, γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες γίνουν ἴσοι.*

Ἔστωσαν χ καὶ ψ οἱ δύο θετικοὶ μεταβλητοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα α εἶναι σταθερόν.

Ἐκ τῆς ταυτότητος

$$(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2=4\chi\psi \quad (1)$$

λαμβάνομεν
$$\chi\psi=\frac{\alpha^2-(\chi-\psi)^2}{4} \quad (2)$$

Ὅταν λοιπὸν οἱ παράγοντες χ καὶ ψ γίνουν ἴσοι, ἤτοι ὅταν $\chi-\psi=0$, τὸ γινόμενον $\chi\psi$ γίνεται μέγιστον.

Ἐφαρμογή.—*Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.*

Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι αἱ διαστάσεις αὐτοῦ καὶ 2α ἡ περίμετρος του θὰ ἔχωμεν $\chi+\psi=\alpha$ (σταθερόν). Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν $\chi\psi$ εἶναι μέγιστον ὅταν εἶναι $\chi=\psi=\frac{\alpha}{2}$.

267. Θεώρημα ΙΙ.—*Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν ὧν τὸ ἄθροισμα μένει σταθερὸν γίνεται μέγιστον, ὅταν οἱ παράγοντες γίνουν ἴσοι* (ἐὰν δύνανται).

Διότι ἄν τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ χ, ψ, φ,.....ω καὶ δύο ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι ἴσοι, π. χ. οἱ χ καὶ ψ, καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον τούτων διὰ τοῦ ἀριθμητικοῦ των μέσου (ποὺ δὲν βλάπτει τὸ ἄθροισμά των) εὑρίσκομεν γινόμενον $\frac{\chi+\psi}{2}\cdot\frac{\chi+\psi}{2}$ μεγαλύτερον τοῦ $\chi\psi$ κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα· ἄρα καὶ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀριθμῶν θὰ γίνῃ μεγαλύτερον.

Ἐφαρμογή.—*Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.*

Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου καὶ 2τ ἡ περίμετρός του, θὰ ἔχωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ (σταθερόν). Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν $\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ εἶναι μέγιστον, ὅταν εἶναι μέγιστον τὸ γινόμενον $(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$,
τοῦ ὁποίου οἱ παράγοντες ἔχουν ἄθροισμα τ σταθερόν. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει ὅταν εἶναι $\alpha=\beta=\gamma$.

268. Θεώρημα ΙΙΙ.—*Τὸ γινόμενον δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικούς, παραγόντων θετικῶν μεταβλητῶν, ὧν τὸ ἄθροισμα μένει σταθερόν, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ παράγοντες γίνουν* (ἄν δύνανται) *ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας.*

Ἔστωσαν κατὰ πρῶτον δύο τοιοῦτοι παράγοντες χ, ψ, δι' οὓς ἔχομεν $\chi+\psi=\alpha$ (σταθερὸν) καὶ μ, ν θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν τὸ γινόμενον $\chi^\mu\ \psi^\nu$ γίνῃ μέγιστον θὰ γίνῃ καὶ τὸ γινόμενον $(\nu\chi)^\mu\cdot(\mu\psi)^\nu$ θὰ γίνῃ μέγιστον καὶ ἀντιστρόφως. Διότι εἶναι $(\nu\chi)^\mu\cdot(\mu\psi)^\nu=(\chi^\mu\cdot\psi^\nu)\cdot(\nu^\mu\cdot\mu^\nu)$, ὁ δὲ παράγων ν^μ.

μ^ν εἶναι σταθερός. Ἐξ ἄλλου τὸ δεύτερον γινόμενον $(\nu\chi)^\mu \cdot (\mu\psi)^\nu$ ἔχει $\mu+\nu$ παράγοντας, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν. Διότι $(\nu\chi+\nu\chi+\ldots+\nu\chi)+(\mu\psi+\mu\psi+\ldots+\mu\psi)=\mu\nu(\chi+\psi)=\mu\nu\alpha$.

Ἑπομένως τὸ γινόμενον τοῦτο θὰ γίνῃ μέγιστον ὅταν γίνῃ $\nu\chi=\mu\psi$ ἤτοι $\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}$, ἤτοι ὅταν οἱ ἀριθμοὶ χ καὶ ψ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας μ καὶ ν. Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως αὐτὴν θὰ γίνῃ μέγιστον καὶ τὸ γινόμενον $\chi^\mu \cdot \psi^\nu$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἐὰν χ, ψ, φ εἶναι μεταβλητοὶ θετικοὶ ἀριθμοὶ δι' οὓς εἶναι $\chi+\psi+\varphi=\alpha$ (σταθερὸν) καὶ μ, ν, ρ ἀκέραιοι θετικοί, τὸ γινόμενον $\chi^\mu \cdot \psi^\nu \cdot \varphi^\rho$ γίνεται μέγιστον ὅταν γίνῃ

$$\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\varphi}{\rho}.$$

Διότι τότε θεωροῦμεν τὸ γινόμενον $(\chi\nu\rho)^\mu \cdot (\psi\rho\mu)^\nu \cdot (\varphi\mu\nu)^\rho$ ὅπερ ἔχει $\mu+\nu+\rho$ παράγοντας ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερόν, ἐπειδὴ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $(\chi^\mu \cdot \psi^\nu \cdot \varphi^\rho)$, ἐπὶ σταθερὸν παράγοντα. Φανερὸν δὲ εἶναι ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ θετικοὶ μεταβλητοὶ παράγοντες, ποὺ ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα, εἶναι ὁσοιδήποτε.

Ἡ ὡς ἄνω πρότασις ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ, ν, ρ εἶναι κλασματικοὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Διότι ἂν εἶναι $\mu=\frac{\mu_1}{\sigma}$, $\nu=\frac{\nu_1}{\sigma}$, $\rho=\frac{\rho_1}{\sigma}$ καὶ ὑψώσωμεν τὸ γινόμενον $\chi^{\frac{\mu_1}{\sigma}} \cdot \psi^{\frac{\nu_1}{\sigma}} \cdot \varphi^{\frac{\rho_1}{\sigma}}$ εἰς τὴν σ δύναμιν εὑρίσκομεν τὸ γινόμενον $\chi^{\mu_1}. \psi^{\nu_1}. \varphi^{\rho_1}$, ὅπερ εἶναι φανερὸν ὅτι γίνεται μέγιστον, ὅταν καὶ τὸ πρῶτον γίνῃ μέγιστον καὶ ἀντιστρόφως.

Ὥστε ἵνα τὸ γινόμενον $\chi^{\mu_1}.\psi^{\nu_1}.\varphi^{\rho_1}$ γίνῃ μέγιστον πρέπει νὰ γίνῃ

$$\frac{\chi}{\mu_1}=\frac{\psi}{\nu_1}=\frac{\varphi}{\rho_1} \quad ἢ \quad \frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\varphi}{\rho}\cdot$$

ἀλλὰ τότε τὸ γινόμενον $\chi^\mu \cdot \psi^\nu \varphi^\rho$ γίνεται μέγιστον.

Σημείωσις. Ἐὰν ἀντὶ νὰ εἶναι $\chi+\psi+\varphi=\alpha$ (σταθερὸν), εἶναι $\chi^\sigma+\psi^\tau+\varphi^\lambda=\beta$ (σταθερόν), θέτομεν $\chi^\sigma=\chi_1$, $\psi^\tau=\psi_1$, $\varphi^\lambda=\varphi_1$.

Ἐφαρμογή. — *Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν $2\pi\alpha^2$, νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος.*

Ἔστω χ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου καὶ ψ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Τότε εἶναι $2\pi\chi^2+2\pi\chi\psi=2\pi\alpha^2$ ἤτοι $\chi^2+\chi\psi=\alpha^2$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\psi=\frac{\alpha^2-\chi^2}{\chi}$. Ὥστε διὰ τὸν ὄγκον Ο τοῦ κυλίνδρου ἔχομεν

$$O=\frac{\pi\chi^2(\alpha^2-\chi^2)}{\chi}=\pi\chi(\alpha^2-\chi^2) \quad \text{ἢ}$$

$$O=\pi(\chi^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(\alpha^2-\chi^2)^1.$$

Ἤδη ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι $\chi^2+(\alpha^2-\chi^2)=\alpha^2$ (σταθερόν). Ὁ ὄγκος λοιπὸν θὰ γίνῃ μέγιστος ὅταν εἶναι $\dfrac{\chi^2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{\alpha^2-\chi^2}{1}$ ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{3}$.

269. Θεώρημα IV.—*Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν θετικῶν μεταβλητῶν, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ γίνουν ἴσοι.*

Ἔστωσαν χ, ψ δύο τοιοῦτοι ἀριθμοί, εἰς οὓς εἶναι $\chi\psi=\alpha^2$ (σταθερόν). Ἐκ τῆς ταυτότητος

$$(\chi+\psi)^2-(\chi-\psi)^2=4\chi\psi$$

λαμβάνομεν

$$(\chi+\psi)^2=4\alpha^2+(\chi-\psi)^2.$$

Ἀλλ' ἡ παράστασις $(\chi+\psi)^2$—ἐπομένως καὶ τὸ ἄθροισμα $\chi+\psi$— θὰ γίνῃ ἐλαχίστη ὅταν γίνουν οἱ χ καὶ ψ ἴσοι, διότι τότε θὰ εἶναι $\chi-\psi=0$.

Ἐφαρμογή.—*Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν α^2, νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.*

Ἐὰν χ καὶ ψ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου ἔχομεν $\chi\psi=\alpha^2$ καὶ περίμετρος$=2(\chi+\psi)$. Ἵνα δὲ αὕτη γίνῃ ἐλαχίστη πρέπει νὰ εἶναι $\chi=\psi$.

270. Θεώρημα V.—*Τὸ ἄθροισμα πολλῶν θετικῶν μεταβλητῶν ἀριθμῶν, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν ἴσοι* (ἐὰν δύνανται).

Διότι ἂν τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ χ, ψ, φ,....ω καὶ δύο ἐξ αὐτῶν δὲν εἶναι ἴσοι, π. χ. οἱ χ καὶ ψ, καὶ ἀντικαταστήσωμεν ἕκαστον τούτων διὰ τοῦ γεωμετρικοῦ των μέσου, ἤτοι διὰ $\sqrt{\chi\psi}$ (ποὺ δὲν βλάπτει τὸ γινόμενον αὐτῶν), εὑρίσκομεν ἄθροισμα $\sqrt{\chi\psi}+\sqrt{\chi\psi}$ μικρότερον τοῦ $\chi+\psi$, ἄρα καὶ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν θὰ γίνῃ μικρότερον.

Ἐφαρμογή.—*Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.*

Ἐὰν χ, ψ, φ εἶναι αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου θὰ ἔχωμεν διὰ τὸν ὄγκον του $O=\chi\psi\varphi$ καὶ διὰ τὴν ἐπιφάνειάν του $E=\chi\psi+\psi\varphi+\varphi\chi$.

Τὸ γινόμενον ὅμως τῶν τριῶν προσθετέων $(\chi\psi).(\psi\varphi).(\varphi\chi)=O^2$ εἶναι σταθερὸν καὶ ἐπομένως τὸ ἄθροισμα Ε θὰ γίνῃ ἐλάχιστον, ὅταν γίνουν

$$\chi\psi=\psi\varphi=\varphi\chi \quad \text{ἤτοι} \quad \chi=\psi=\varphi.$$

271. Θεώρημα VI.—*Τὸ ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν μεταβλητῶν, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον δυνάμεων μὲ ἐκθέτας θετικοὺς μένει σταθερόν, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι γίνουν* (ἂν δύνανται) *ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας.*

Ἔστωσαν χ, ψ, φ, τοιοῦτοι ἀριθμοί, δι' οὓς εἶναι $\chi^\mu.\psi^\nu.\varphi^\rho=$ $=\alpha$ (σταθερὸν) καὶ ὅπου μ, ν, ρ, εἶναι θετικοὶ ἀκέραιοι ἀριθμοί. Κατόπιν τούτων γράφομεν τὸ ἄθροισμα $\Sigma=\chi+\psi+\varphi$ ὡς ἑξῆς:

$\Sigma=\frac{\chi}{\mu}\cdot\mu+\frac{\psi}{\nu}\cdot\nu+\frac{\varphi}{\rho}\cdot\rho$, τὸ ὁποῖον ἤδη ἔχει $\mu+\nu+\rho$ θετικοὺς προσθετέους, ἤτοι μ προσθετέους ἴσους μὲ $\frac{\chi}{\mu}$, ν ἴσους μὲ $\frac{\psi}{\nu}$ καὶ ρ ἴσους μὲ $\frac{\varphi}{\rho}$. Τὸ γινόμενον ὅμως τῶν προσθετέων τούτων εἶναι σταθερόν, διότι εἶναι

$$\left(\frac{\chi}{\mu}\right)^\mu\cdot\left(\frac{\psi}{\nu}\right)^\nu\cdot\left(\frac{\varphi}{\rho}\right)^\rho=\frac{\alpha}{\mu^\mu.\nu^\nu.\rho^\rho}.$$

Τὸ ἄθροισμα λοιπὸν Σ θὰ γίνῃ ἐλάχιστον, ἐὰν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι

$$\frac{\chi}{\mu}=\frac{\psi}{\nu}=\frac{\varphi}{\rho}.$$

Ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ ὅταν οἱ ἐκθέται μ, ν, ρ εἶναι θετικοὶ κλασματικοὶ ἀριθμοί. Διότι ἂν ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\chi^\mu.\psi^\nu.\varphi^\rho.=\alpha$ εἰς τὴν δύναμιν μὲ ἐκθέτην τὸν κοινὸν παρονομαστὴν τῶν κλασμάτων μ, ν, ρ, θὰ ἀχθῶμεν εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ἀκεραίων ἐκθετῶν.

Ἐφαρμογή.— *Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον νὰ εὑρεθῇ ὁ ἔχων τὴν ἐλαχίστην ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.*

Ἐὰν χ εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως καὶ ψ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου θὰ ἔχωμεν

$$O=\pi\chi^2\psi \quad \text{καὶ} \quad E=2\pi(\chi^2+\chi\psi).$$

Ἐκ τῆς πρώτης σχέσεως λαμβάνομεν $\chi^2\psi = \frac{O}{\pi}$ καὶ ἐξ αὐτῆς τὴν $\chi^4\psi^2 = \frac{O^2}{\pi^2}$ (σταθερόν), ἥτις γράφεται $\left(\chi^2\right)^1\left(\chi\psi\right)^2 = \frac{O^2}{\pi^2}$.

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐπιφάνεια Ε θὰ γίνῃ ἐλαχίστη ὅταν γίνῃ ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα $\chi^2 + \chi\psi$. Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει οἱ ἀριθμοὶ χ^2 καὶ $\chi\psi$ νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας 1 καὶ 2, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\chi^2}{1} = \frac{\chi\psi}{2}, \quad \text{ἤτοι } \psi = 2\chi.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1017) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ τὸ γινόμενον $2\chi(3\alpha - \chi)$ γίνεται μέγιστον ἂν $\alpha > 0$;

1018) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ τὸ γινόμενον $\chi\sqrt{\alpha^2 - \chi^2}$ γίνεται μέγιστον;

1019) Τὸ γινόμενον $\chi^4(\alpha - \chi)$ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ χ γίνεται μέγιστον;

1020) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην διαγώνιον;

1021) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων καὶ ἐχόντων τὴν αὐτὴν βάσιν νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον.

1022) Δοθέντος τετραγώνου, ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τῶν τεσσάρων κορυφῶν τέσσαρα τετράγωνα ἴσα πρὸς ἄλληλα καὶ τὰ πέριξ σχηματιζόμενα τέσσαρα ὀρθογώνια ἀνυψοῦμεν εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἐπίπεδα αὐτῶν νὰ γίνουν κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου· πόση πρέπει νὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τῶν ἀφαιρουμένων τετραγώνων, ἵνα τὸ προκῦπτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον (ἄνευ καλύμματος) ἔχῃ τὴν μεγίστην χωρητικότητα;

1023) Ἐκ τῶν κώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν κωνικὴν ἐπιφάνειαν νὰ εὑρεθῇ ὁ μέγιστος.

1024) Δοθεῖσαν εὐθεῖαν διαιροῦμεν εἰς τρία μέρη καὶ ἐπὶ ἑκάστου τούτων ὡς διαμέτρου γράφομεν ἡμικύκλιον· ποῖα πρέπει νὰ εἶναι τὰ μέρη ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἡμικυκλίων γίνῃ ἐλάχιστον;

1025) Ἐκ τῶν τριγώνων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὴν ἐλαχίστην περίμετρον.

1026) Ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

1027) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

1028) Ἐκ τῶν ἰσοπεριμέτρων ὀρθογωνίων ποῖον στρεφόμενον περὶ τὴν ἑτέραν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ γράφει τὸν μέγιστον κύλινδρον;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Ἀπροσδιόριστοι μορφαί,

272. Μία συνάρτησις $\Sigma(\chi)=\dfrac{\sigma_1(\chi)}{\sigma_2(\chi)}$ εἶναι δυνατὸν διά τινα τιμὴν α τῆς χ νὰ λάβῃ τὴν μορφὴν $\dfrac{0}{0}$ ἢ τὴν $\dfrac{\infty}{\infty}$. Αἱ τοιαῦται μορφαὶ λέγονται *ἀπροσδιόριστοι* (ἀόριστοι). Ἀπροσδιορίστους μορφὰς εἶναι δυνατὸν νὰ λάβωμεν καὶ ἀπὸ ἀθροίσματα ἢ γινόμενα συναρτήσεων μιᾶς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, ὡς εἶναι αἱ μορφαὶ $\infty-\infty$ ἢ $\infty.0$

273. *Ἀληθὴς τιμὴ συναρτήσεως φ(χ)*. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\dfrac{\chi^2-4}{\chi^2-5\chi+6}$, ἥτις διὰ χ=2 λαμβάνει τὴν ἀπροσδιόριστον μορφὴν $\dfrac{0}{0}$ ἀλλ' ἐπειδὴ αὕτη ἰσοῦται μὲ $\dfrac{(\chi-2)(\chi+2)}{(\chi-2)(\chi-3)}=\dfrac{\chi+2}{\chi-3}$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ πλὴν διὰ χ=2 ἔχομεν, ὅταν ὅρχ=2

$$ὅρ\,\frac{\chi^2-4}{\chi^2-5\chi+6}=ὅρ\,\frac{\chi+2}{\chi-3}=\frac{2+2}{2-3}=-4.$$

Ἡ οὕτως εὑρεθεῖσα τιμὴ -4 λέγεται *ἀληθὴς* τιμὴ τῆς δοθείσης συναρτήσεως, διὰ χ=2.

Γενικῶς δέ: *Ἀληθὴς τιμὴ συναρτήσεως φ(χ), ἥτις διὰ χ=α καθίσταται ἀόριστος, λέγεται τὸ ὅριον τῆς φ(χ), ὅταν ὅρχ=α*. Ἡ δὲ εὕρεσις τοῦ ὁρίου τούτου λέγεται *ἄρσις* τῆς ἀοριστίας.

274. *Ἀληθὴς τιμὴ τῆς ρητῆς συναρτήσεως.* $\Sigma(\chi)=\dfrac{\sigma(\chi)}{\varphi(\chi)}$ διὰ χ=α.—

Μορφὴ $\dfrac{0}{0}$.

Ἐὰν διὰ χ=α εἶναι σ(α)=0 καὶ φ(α)=0, τότε ἡ Σ(χ) λαμβάνει διὰ χ=α τὴν ἀόριστον μορφὴν $\dfrac{0}{0}$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιροῦμεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τῆς Σ(χ) διὰ χ—α καὶ ἐπαναλαμβάνομεν τὴν διαίρεσιν αὐτὴν ἐφ' ὅσον ἀπομένει κοινὸς διαιρέτης ὁ χ—α. Τότε δὲ θὰ λάβωμεν συνάρτησιν $\Sigma_1(\chi)=\dfrac{\sigma_1(\chi)}{\varphi_1(\chi)}$ ἴσην μὲ τὴν Σ(χ), πλὴν διὰ χ=α, καί:

1) Ἐὰν $\varphi_1(\alpha)\neq 0$, ὁ ἀριθμὸς $\Sigma_1(\alpha)$ εἶναι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως Σ(χ) δι' ὅρχ=α

2) Ἐὰν ὅμως $\varphi_1(\alpha)=0$, τότε ὅρ$\Sigma_1(\chi)=$ὅρ $\Sigma(\chi)=\infty$, ὅταν ὅρ$\chi=\alpha$

Π.δ. 1΄) Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{\chi^2-4\chi+3}{\chi^2-2\chi-3}$ ὅταν ὅρ$\chi=3$ εἶναι $\dfrac{1}{2}$.

2΄) Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\dfrac{\chi^2-7\chi+10}{\chi^2-4\chi+4}=\dfrac{(\chi-2)(\chi-5)}{(\chi-2)^2}=$ $=\dfrac{\chi-5}{\chi-2}$, δι' ὅρ$\chi=2$ εἶναι τὸ ὅρ $\dfrac{\chi-5}{\chi-2}=\infty$.

275. *Ἀληθὴς τιμὴ τῆς ῥητῆς συναρτήσεως $\Sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\infty$. Μορφὴ $\dfrac{\infty}{\infty}$.*

Ἔστω ἡ συνάρτησις

$$\Sigma(\chi)=\frac{\alpha_0\chi^\mu+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\dots\dots+\alpha_\mu}{\beta_0\chi^\nu+\beta_1\chi^{\nu-1}+\dots\dots+\beta_\nu}\quad(\alpha_0 \text{ καὶ } \beta_0\neq 0)$$

τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν ὅταν ἡ χ τείνῃ πρὸς τὸ ∞.
Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται

$$\Sigma(\chi)=\frac{\alpha_0\chi^\mu}{\beta_0\chi^\nu}\cdot\frac{1+\dfrac{\alpha_1}{\alpha_0\chi}+\dfrac{\alpha_2}{\alpha_0\chi^2}+\dots+\dfrac{\alpha_\mu}{\alpha_0\chi^\mu}}{1+\dfrac{\beta_1}{\beta_0\chi}+\dfrac{\beta_2}{\beta_0\chi^2}+\dots+\dfrac{\beta_\nu}{\beta_0\chi^\nu}}.$$

Ἤδη ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι, δι' ὅρ$\chi=\infty$ τὸ ὅριον τοῦ δευτέρου κλάσματος ἰσοῦται μὲ 1. Ἑπομένως εἶναι

$$\text{ὅρ } \Sigma(\chi)=\text{ὅρ } \frac{\alpha_0\chi^\mu}{\beta_0\chi^\nu} \quad \text{ὅταν ὅρ}\chi=\infty.$$

καὶ 1) Ἐὰν $\mu=\nu$ εἶναι ὅρ $\Sigma(\chi)=\dfrac{\alpha_0}{\beta_0}$

2) » $\mu<\nu$ » ὅρ $\Sigma(\chi)=$ὅρ$\dfrac{\alpha_0}{\beta_0\chi^{\nu-\mu}}=0$

3) » $\mu>\nu$ » ὅρ $\Sigma(\chi)=$ὅρ$\dfrac{\alpha_0\chi^{\mu-\nu}}{\beta_0}=\infty$

Π. δ. Ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως

1) $\dfrac{2\chi^2-\chi-1}{3\chi^2+\chi-4}$ ὅταν ὅρ$\chi=\infty$ εἶναι $\dfrac{2}{3}$.

2) τῆς $\dfrac{\chi+5}{4\chi^2+\chi-1}$ ὅταν ὅρ$\chi=\infty$ εἶναι 0 καὶ

3) τῆς $\dfrac{\chi^2-2\chi-3}{2\chi+5}$ ὅταν ὅρ$\chi=\infty$ εἶναι ∞

276. *Μορφὴ* $\infty - \infty$. Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{2}{\chi^2-1} - \frac{3}{\chi^3-1}$, ἥτις διὰ $\chi=1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\infty - \infty$. Ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἰσοῦται μὲ

$$\psi = \frac{2(\chi^3-1)-3(\chi^2-1)}{(\chi^2-1)(\chi^3-1)} = \frac{2\chi^2-\chi-1}{(\chi+1)(\chi^3-1)}$$

ἀλλ' αὕτη διὰ $\chi=1$ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{0}{0}$. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $2\chi^2-\chi-1=(2\chi+1)(\chi-1)$ καὶ $\chi^3-1=(\chi^2+\chi+1)(\chi-1)$ ἔχομεν

$$\psi = \frac{2\chi+1}{(\chi+1)(\chi^2+\chi+1)} \text{ καὶ ἑπομένως}$$

δι' ὅρχ$=1$ εἶναι ὅρψ$=\frac{1}{2}$.

277. *Μορφὴ* $0.\infty$. Τὸ γινόμενον $\sigma(\chi).\varphi(\chi)$, ἐὰν διὰ $\chi=\alpha$ εἶναι $\sigma(\chi)=0$ καὶ $\varphi(\chi)=\infty$ παρουσιάζεται ὑπὸ τὴν μορφὴν $0.\infty$. Αὐτὴ ὅμως ἡ περίπτωσις ἀνάγεται εἰς τὴν $\frac{0}{0}$, ἐὰν γράψωμεν

$\sigma(\chi).\varphi(\chi) = \dfrac{\sigma(\chi)}{\dfrac{1}{\varphi(\chi)}}$ ἢ εἰς τὴν $\frac{\infty}{\infty}$, ἐὰν γράψωμεν $\sigma(\chi).\varphi(\chi) = \dfrac{\varphi(\chi)}{\dfrac{1}{\sigma(\chi)}}$.

278. ***Ἀληθεῖς τιμαὶ ἀρρήτων συναρτήσεων.*** — α) *Μορφὴ* $\frac{0}{0}$ —. Π.δ.

1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\frac{\sqrt{\chi}-\sqrt{5}}{\chi-5}$, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ 5.

Ἐὰν θέσωμεν $\chi=\psi^2$ καὶ $5=\beta^2$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται $\frac{\psi-\beta}{\psi^2-\beta^2} = \frac{1}{\psi+\beta}$.

Ἑπομένως δι' ὅρψ$=\beta$ ἔχομεν ὅρ $\frac{1}{\psi+\beta} = \frac{1}{2\beta}$. Ὥστε ἡ ζητουμένη τιμὴ εἶναι $\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi = \frac{\sqrt{\chi^2-4}-\sqrt{\chi-2}}{\sqrt{\chi^2-5\chi+6}}$ διὰ $\chi=2$.

Ἐπειδὴ $\chi^2-4=(\chi-2)(\chi+2)$ καὶ $\chi^2-5\chi+6=(\chi-2)(\chi-3)$ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις γράφεται $\psi=\frac{\sqrt{\chi-2}\,.\,(\sqrt{\chi+2}-1)}{\sqrt{\chi-2}\,.\,\sqrt{\chi-3}}=\frac{\sqrt{\chi+2}-1}{\sqrt{\chi-3}}$

Ἑπομένως δι' ὅρχ=2 ἔχομεν ὅρψ=ὅρ $\frac{\sqrt{\chi+2}-1}{\sqrt{\chi-3}}=\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{-1}}$ ἤτοι ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν ἔχει ἀληθῆ τιμὴν διὰ χ=2.

β) Μορφὴ $\frac{\infty}{\infty}$. Π.δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως

$\psi=\frac{5\chi}{3\chi+1+\sqrt{9\chi^2+2\chi+1}}$, ὅταν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

Ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς δὲν μηδενίζεται δι' οὐδεμίαν τιμὴν τῆς χ καὶ τὸ ὑπόρριζον εἶναι πάντοτε θετικόν, ἡ δοθεῖσα συνάρτησις, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$. Καὶ α'. Ἐὰν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν θετικῶν ἔχομεν $\chi=\sqrt{\chi^2}$ καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\psi=\frac{5}{3+\frac{1}{\chi}+\sqrt{9+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}}$$ καὶ δι' ὅρχ=∞ ἔχομεν ὅρψ=

$$=\frac{5}{3+\sqrt{9}}=\frac{5}{6}.$$

β'. Ἐὰν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν ἔχομεν $\chi=-\sqrt{\chi^2}$ καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\psi=\frac{5}{3+\frac{1}{\chi}-\sqrt{9+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}}$$ ἢ

$$\psi=\frac{5\left(3+\frac{1}{\chi}+\sqrt{9+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right)}{\left(3+\frac{1}{\chi}\right)^2-\left(9+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}\right)}$$ ἤτοι

$$\psi=5\chi\left(3+\frac{1}{\chi}+\sqrt{9+\frac{2}{\chi}+\frac{1}{\chi^2}}\right)$$

Ἑπομένως δὲ ὅρχ=−∞ εἶναι ὅρψ=−∞.

Μορφὴ ∞−∞.—Π. δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς συναρτήσεως $\psi=\sqrt{\chi^2+1}-\chi$, ὅταν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.

1') Ἐὰν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν, ὁ μὲν πρῶτος ὅρος τῆς διαφορᾶς τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν θετικῶν, ὁ δὲ δεύτερος διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ τῶν ψ τείνει πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν θετικῶν.

2) Ἐὰν ὁ χ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον διὰ τιμῶν θετικῶν, ἡ συνάρτησις ψ λαμβάνει τὴν μορφὴν $\infty - \infty$. Καὶ διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν αὐτῆς πολλαπλασιάζομεν καὶ διαιροῦμεν τὴν ψ ἐπὶ τὴν συζυγῆ της παράστασιν, ὁπότε ἔχομεν

$$\psi = \frac{(\sqrt{\chi^2+1}-\chi)(\sqrt{\chi^2+1}+\chi)}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi} = \frac{1}{\sqrt{\chi^2+1}+\chi}.$$

Ὥστε δι' ὅρχ$=\infty$ εἶναι ὅρψ$=0$.

Παρατήρησις. Ἡ εὕρεσις τῆς ἀληθοῦς τιμῆς συναρτήσεως $\dfrac{\sigma(\chi)}{\varphi(\chi)}$ δι' ὅρχ$=\alpha$, ὅταν αὕτη διὰ $\chi=\alpha$ λαμβάνει ἀόριστον μορφήν, γίνεται ταχυτέρα καὶ εὐκολωτέρα διὰ τῶν κανόνων τοῦ Hospital. Βλέπε δὲ πρὸς τοῦτο τὸ συμπλήρωμα τῆς ἀλγέβρας Χρ. Μπαρμπαστάθη σελὶς 71 § 71.

279. Ὅρια τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$. — Εἰς τὴν § 191, ἐφαρμογὴ 2, εἴδομεν, ὅτι ὅταν ὅρα$=0$, οἱ δὲ β καὶ γ μένουν ἀμετάβλητοι, ἡ μὲν μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma=0$ ἔχει ὅριον τὸν ἀριθμὸν $-\dfrac{\gamma}{\beta}$, ἡ δὲ ἄλλη ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον (κατ' ἀπόλυτον τιμήν). Ἤδη θὰ ζητήσωμεν τὰ ὅρια τῶν ριζῶν τῆς ρηθείσης ἐξισώσεως ὑποθέτοντες τοὺς συντελεστὰς α, β, γ 1) συνεχεῖς συναρτήσεις μιᾶς παραμέτρου λ καὶ 2) ὅτι οὗτοι ἔχουν ὅρια τοὺς ὡρισμένους ἀριθμοὺς α_0, β_0, γ_0, ὅταν ὅρλ $=\lambda_0$.

Κατόπιν τούτων παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν 1) $\alpha_0 \neq 0$ καὶ 2) $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ ἢ τείνει πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν τὰ ὅρια τῶν ριζῶν

$$\chi' = \frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad \chi'' = \frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$$

ὅταν ὅρλ$=\lambda_0$ εἶναι

$$\text{ὅρχ}' = \frac{-\beta_0-\sqrt{\beta_0^2-4\alpha_0\gamma_0}}{2\alpha_0}, \quad \text{ὅρχ}'' = \frac{-\beta_0+\sqrt{\beta_0^2-4\alpha_0\gamma_0}}{2\alpha_0}$$

Διερεύνησις. Α. Ὑποθέτομεν κατ' ἀρχὰς ὅτι $\alpha_0=0$· ἀλλ' ἐὰν $\beta_0 \neq 0$, τὸ 4αγ τείνει πρὸς τὸ 0 καὶ ἡ διακρίνουσα Δ τείνει πρὸς τὸ β_0^2. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ

1) Ἐὰν $\beta_0>0$, ἔχομεν $\beta_0=\sqrt{\beta_0^2}$ καὶ ἡ πρώτη ρίζα ἔχει ὅριον τὸ ∞ κατ' ἀπόλυτον τιμήν.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸ ὅριον τῆς δευτέρας ρίζης χ'', τῆς ὁποίας ἀμφότεροι οἱ ὅροι τείνουν πρὸς τὸ 0, πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὴν $-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$ $(\alpha\neq 0)$, ὁπότε ἔχομεν $\chi''=\dfrac{2\gamma}{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}$, τότε δὲ εὑρίσκομεν ὅτι $\text{ὅρ}\chi''=-\dfrac{\gamma_0}{\beta_0}$.

2) Ἐὰν $\beta_0<0$, ἔχομεν $\beta_0=-\sqrt{\beta_0^2}$ καὶ ἡ ρίζα χ'' ἔχει ὅριον τὸ ἄπειρον κατ' ἀπόλυτον τιμήν. Διὰ νὰ εὕρωμεν ὅμως τὸ ὅριον τῆς ρίζης χ' πολλαπλασιάζομεν τοὺς ὅρους αὐτῆς ἐπὶ τὴν παράστασιν $-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}$, ὁπότε λαμβάνομεν

$$\chi'=\frac{2\gamma}{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}, \quad \text{καὶ ὅρ}\chi'=-\frac{\gamma_0}{\beta_0}.$$

3) Ἐὰν $\beta_0=0$ καὶ $\gamma_0\neq 0$ καὶ ἡ Δ τείνει πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἔχουν ὅριον τὸ ἄπειρον.

Β. Ἤδη ὑποθέτομεν ὅτι $\gamma_0=0$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἐὰν $\beta\neq 0$, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει ρίζας πραγματικάς. Καὶ ἐὰν

1) $\beta_0>0$ ἔχομεν $\text{ὅρ}\chi'=\dfrac{-\beta_0}{\alpha_0}$ καὶ $\text{ὅρ}\chi''=0$

2) $\beta_0<0$ » $\text{ὅρ}\chi'=0$ καὶ $\text{ὅρ}\chi''=-\dfrac{\beta_0}{\alpha_0}$

3) $\beta_0=0$ » $\text{ὅρ}\chi'=\text{ὅρ}\chi''=0$, ἐὰν ἡ διακρίνουσα Δ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν.

Γ. Ἐὰν τέλος $\alpha_0=\beta_0=\gamma_0=0$, θὰ ζητήσωμεν ἀπ' εὐθείας τὰς ἀληθεῖς τιμὰς τῶν ριζῶν χ', χ''.

Π. δ. *Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως* $(\lambda^2-\lambda-2)\chi^2+2\lambda(\lambda+1)\chi+\lambda(\lambda-2)=0$ *ὅταν* $\text{ὅρ}\lambda=2$ ἢ $\text{ὅρ}\lambda=-1$.

1) Ὅταν $\text{ὅρ}\lambda=\lambda_0=2$, εἶναι $\text{ὅρ}\alpha=\alpha_0=0$, $\text{ὅρ}\beta=\beta_0>0$ καὶ $\text{ὅρ}\gamma=\gamma_0=0$. Ἑπομένως ἐκ τῶν δύο ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἡ μὲν μία ἔχει ὅριον τὸ ∞, ἡ δὲ ἄλλη τὸ $-\dfrac{\gamma_0}{\beta_0}=0$.

2) Ὅταν $\text{ὅρ}\lambda=\lambda_0=-1$, εἶναι $\text{ὅρ}\alpha=\alpha_0=0$, $\text{ὅρ}\beta=\beta_0=0$ καὶ $\text{ὅρ}\,\gamma=\gamma_0>0$. Ἀλλ' ἡ διακρίνουσα $\Delta=\lambda(\lambda+1)(4\lambda-3)$, ὅταν ὁ λ τείνῃ πρὸς -1, ἔχει τοὺς παράγοντας λ καὶ $4\lambda-3$ ἀρνητικούς. Ἑπομένως ὅταν ὁ λ τείνῃ πρὸς τὴν -1 διὰ τιμῶν αὐξανομένων, ἤτοι ὅταν $\lambda<-1$ καὶ ὁ παράγων τῆς Δ, $\lambda+1$ εἶναι ἀρνητικός. Ἀλλὰ τότε ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζας πραγματικάς. Ἐὰν ὅμως ὁ λ τείνῃ πρὸς τὴν -1 διὰ τιμῶν μειουμένων, ἤτοι ἐὰν $\lambda>-1$, ὁ $\lambda+1$ εἶναι θετικός. Ἡ δοθεῖσα λοιπὸν ἐξίσωσις ἔχει τότε ρίζας πραγματικάς, αἱ ὁποῖαι ἀμφότεραι τείνουν πρὸς τὸ ἄπειρον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀληθεῖς τιμαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1029) $\dfrac{\chi^2-9\chi+20}{\chi^2+\chi-20}$ διὰ $\chi=4$ 1030) $\dfrac{\chi^3+\chi^2+\chi+1}{\chi^2-3\chi-4}$ διὰ $\chi=-1$

1031) $\dfrac{\chi^5-\alpha^5}{\chi-\alpha}$ διὰ $\chi=\alpha$ 1032) $\dfrac{\chi^3-\alpha^3}{\chi^2-\alpha^2}$ διὰ $\chi=\alpha$

1033) $\dfrac{5\chi-1}{\chi^2-\chi+1}$ διὰ $\chi=\infty$ 1034) $\dfrac{-3\chi^2+\chi+1}{3\chi+2}$ διὰ $\chi=-\infty$

1035) $\dfrac{3\chi^2-2\chi-1}{2\chi+3}$ διὰ $\chi=\infty$ 1036) $\dfrac{\chi(\chi-1)}{(\chi-2)(\chi-3)}$ διὰ $\chi=\infty$

1037) $\dfrac{2}{1-\chi^2}-\dfrac{3}{1-\chi^3}$ διὰ $\chi=1$ 1038) $\chi^2-5\chi+4\,\dfrac{\chi-2}{\chi^2-7\chi+12}$ διὰ $\chi=4$

1039) $\dfrac{\sqrt{\chi+1}-2}{\chi-3}$ διὰ $\chi=3$ 1040) $\dfrac{\sqrt{3\chi-3}-3}{\chi-4}$ διὰ $\chi=4$

1041) $\dfrac{\sqrt{\chi+4}-2}{\chi}$ διὰ $\chi=0$ 1042) $\dfrac{\chi^3-2\chi+1}{\sqrt{\chi-1}}$ διὰ $\chi=1$

1043) $\dfrac{\chi}{2\chi+1+\sqrt{4\chi^2+\chi+1}}$ διὰ $\chi=\infty$ 1044) $\dfrac{3\chi+2}{2\chi+\sqrt{\chi^2+5}}$ διὰ $\chi=-\infty$

1045) $\sqrt{\chi^2+\chi+1}-\chi$ διὰ $\chi=\infty$ 1046) $\chi-\sqrt{\chi^2-2\chi+3}$ διὰ $\chi=\infty$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

1047) $(\lambda-2)\chi^2-4\lambda\chi+4\lambda=0$ ὅταν εἶναι 1) ὅρλ$=2$ καὶ 2) ὅρλ$=0$.

1048) $(\lambda^2-1)\chi^2-2(\lambda^2-2\lambda-3)\chi+(\lambda^2+4\lambda+3)=0$ ὅταν εἶναι 1) ὅρλ$=+1$ ἢ -1 καὶ 2) ὅρλ$=+\infty$ ἢ $-\infty$.

Ἀσκήσεις ἀνάμεικτοι. 1049) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ τριωνύμου

$$\psi=5\chi^2-8\lambda\chi+5\lambda^2$$

ὅταν ἡ χ μεταβάλλεται ἀπὸ 0 ἕως $\dfrac{5\lambda^2}{2}$.

1050) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον ἑκάστης τῶν συναρτήσεων 1) $\psi=(\alpha-\chi)(\beta-\chi)$ καὶ 2) $\psi=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων καὶ νὰ παρασταθοῦν αὗται γραφικῶς

1051) $\dfrac{\chi^2-1}{4\chi^2-3\chi}$ 1052) $\dfrac{\chi^2-1}{(\chi-2)^2}$ 1053) $\dfrac{\chi^2-1}{\chi}$.

1054) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέγιστα καὶ τὰ ἐλάχιστα τῆς συναρτήσεως $\dfrac{\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma}{\alpha\chi^2-\beta\chi+\gamma}$.

1055) Ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ κλάσματι $\dfrac{\chi^2+\pi\chi+\kappa}{\chi-1}$ νὰ ὁρισθοῦν οἱ π καὶ κ εἰς τρόπον ὥστε νὰ μὴ δύναται νὰ λάβῃ τοῦτο τιμὰς κειμένας μεταξὺ 5 καὶ 9, πρὸς δὲ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ χ αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰ ὅρια ταῦτα.

1055α) Ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ κλάσματι $\frac{\alpha\chi+\beta}{\chi^2+1}$ εἰς ὃ τὸ χ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς, νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β εἰς τρόπον ὥστε νὰ ἔχῃ τοῦτο μέγιστον 9 καὶ ἐλάχιστον —1.

1056) Νὰ γίνῃ ἡ διερεύνησις τῆς παραστάσεως $\frac{\chi(\chi-2)}{(\chi-3)(\chi-\alpha)}$ ὅπου α εἶναι μεταβλητὸς ἀριθμός.

1057) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου $\alpha\chi^4+\beta\chi^2+\gamma$.

Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῶν συναρτήσεων :

1058) $\chi^4+3\chi^2-4$ 1059) $\chi^4-\chi^2-2$ 1060) $-\chi^4+5\chi^2-4$

1061) $\frac{2\chi^4+8\chi^2+3}{2\chi^4+\chi^2-1}$ 1062) $\frac{\chi^4+\chi^2-1}{\chi^4+4\chi^2+1}$ 1063) $\frac{1}{\chi^4-5\chi^2+4}$.

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον τῶν παραστάσεων εἰς ἃς τὰ α καὶ β παριστοῦν θετικοὺς ἀριθμούς.

1064) $\chi(\alpha^2-\chi^2)$ 1065) $\chi^2(\alpha-\beta\chi)$ 1066) $\chi^4(4\alpha^2-\chi^2)$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῶν παραστάσεων :

1067) $\frac{\chi^3}{(\chi-\alpha)^2}$ 1068) $\frac{\alpha^3+\beta^3\chi^6}{\chi^2}$ 1069) $\chi^2+\frac{\alpha^3}{\chi}$.

1070) Νὰ ἐγγραφῇ ἐν ἡμικυκλίῳ τραπέζιον τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μέγιστον. (Ἡ βάσις τοῦ τραπεζίου κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου).

1071) Ἐν ἰσοπλεύρῳ τριγώνῳ νὰ ἐγγραφῇ ἰσόπλευρον τρίγωνον οὗ τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

1072) Ἐν τετραγώνῳ νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

1073) Ἐν ρόμβῳ νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον οὗ τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μέγιστον.

1074) Νὰ ἐγγραφῇ ἐν κύκλῳ ὀρθογώνιον οὗ ἡ περίμετρος νὰ εἶναι μεγίστη.

1075) Ἐν κύκλῳ νὰ ἐγγραφῇ τρίγωνον ἰσοσκελές, οὗ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους νὰ εἶναι μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.

1076) Τραπεζίου εἶναι γνωστὴ ἡ μικροτέρα βάσις καὶ μία τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν αὐτοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη ἐπιφάνεια τοῦ τραπεζίου.

1077) Εἰς περιφέρειαν νὰ περιγραφῇ ρόμβος δοθείσης ἐπιφανείας καὶ ἔπειτα νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς ἐπιφανείας τοῦ ρόμβου.

1078) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς ἐπιφανείας ρόμβου περιγεγραμμένου εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον.

1079) Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ ἡμιπεριφερείας, λαμβάνομεν σημεῖον Γ καὶ ἐπ' αὐτῆς φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ μέχρι τῆς ἡμιπεριφερείας. Νὰ ὁρισθῇ τὸ σημεῖον Γ εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα ΑΓ+ΓΔ νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

1080) Νὰ εὑρεθῇ τὸ παραλληλεπίπεδον τοῦ μεγίστου ὄγκου, ὅπερ εἶναι ἐγγεγραμμένον ἐν δοθείσῃ σφαίρᾳ.

1081) Νὰ περιγραφῇ περὶ σφαῖραν κῶνος, ὅστις νὰ ἔχῃ τὴν ἐλαχίστην κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

1082) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς σφαῖραν κόλουρος κῶνος ἔχων ὡς βάσιν μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας καὶ τὴν μεγίστην κωνικὴν ἐπιφάνειαν.

1083) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ὄγκου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν.

1084) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, ὡς καὶ τῆς ὁλικῆς, κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς σφαῖραν.

1085) Τριγώνου ἰσοσκελοῦς ἡ βάσις εἶναι χορδὴ κύκλου καὶ ἡ ἀπέναντι κορυφὴ εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, στρέφεται δὲ τοῦτο περὶ διάμετρον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν. Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τοῦ ὄγκου τοῦ οὕτω προκύπτοντος στερεοῦ.

1086) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις $\chi^2+\psi^2=\rho^2$ καὶ $(\chi-\alpha)^2+(\psi-\beta)^2=\rho^2$ παριστοῦν κύκλους.

1087) Νὰ γίνῃ ἡ σπουδὴ τῶν μεταβολῶν τῆς συναρτήσεως $\psi=\sqrt{1-\chi^2}$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν συναρτήσεων:

1088) $\dfrac{\chi^\nu-\alpha^\nu}{\chi-\alpha}$ δια $\chi=\alpha$ 1089) $\dfrac{\chi^\nu-\alpha^\nu}{\chi^\mu-\alpha^\mu}$ διὰ $\chi=\alpha$

1090) $\dfrac{2\chi^2+\chi-1}{4\chi^2-1}$ διὰ $\chi=\dfrac{1}{2}$ 1091) $\dfrac{3\chi^2+2\chi-1}{3\chi^2-\chi}$ διὰ $\chi=\dfrac{1}{3}$.

1092) $\dfrac{\chi^2+\chi+10}{2\chi^2+5}$ διὰ $\chi=\infty$ 1093) $\dfrac{5\chi^2-8}{10\chi^2+\chi}$ διὰ $\chi=\infty$.

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὅρια τῶν ριζῶν τῶν ἐξισώσεων:

1094) $\lambda(\lambda-1)\chi^2-2\lambda^2\chi-1=0$ ὅταν ὅρλ$=1$ καὶ ὅρλ$=0$.

1095) $\chi^2-2(\lambda+1)\chi+2\lambda+10=0$, ὅταν ὅρλ$=\infty$.

1096) $\lambda\chi^4-2\chi^2+1-\lambda^2=0$ ὅταν ὅρλ$=0$.

1097) $\lambda\chi^4-2\lambda^2\chi+\lambda-1=0$ ὅταν ὅρλ$=\infty$.

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε

ΠΡΟΟΔΟΙ—ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

Α΄. Πρόοδοι ἀριθμητικαί.

280. **Ὁρισμοί.**—Διὰ τὴν φυσικὴν σειρὰν τῶν ἀριθμῶν 1, 2, 3, 4, κτλ. (1) γνωρίζομεν ὅτι καθεὶς τούτων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τῆς μονάδος 1. Ὁμοίως καθεὶς τῶν ἀριθμῶν τῆς σειρᾶς τῶν περιττῶν ἀριθμῶν 1, 3, 5, 7, 9, κτλ. (2) γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον αὐτοῦ διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 2. Ἐκ δὲ τῆς σειρᾶς ἀρτίων ἀριθμῶν 20, 18, 16, 14, κτλ. (3) παρατηροῦμεν, ὅτι καθεὶς τούτων γίνεται ἀπὸ τὸν προηγούμενον διὰ τῆς προσθέσεως τοῦ —2. Αἱ τοιαῦται σειραὶ ἀριθμῶν λέγονται *ἀριθμητικαὶ πρόοδοι*. Ὥστε: *Ἀριθμητικὴ πρόοδος λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθέσεως ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πρόοδον, λέγονται **ὅροι** τῆς προόδου. Ὁ δὲ σταθερὸς ἀριθμός, ὅστις προστιθέμενος εἰς ἕκαστον ὅρον σχηματίζει τὸν ἑπόμενον, λέγεται *λόγος* τῆς προόδου. Οὕτω λόγος τῆς ἄνω προόδου (1) εἶναι ἡ μονὰς 1, τῆς προόδου (2) εἶναι ὁ 2 καὶ τῆς (3) εἶναι ὁ —2.

Ὁμοίως ἡ σειρὰ 19, 16, 13, 10, 7, κτλ. (4) εἶναι ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ λόγος αὐτῆς εἶναι ὁ —3, διότι

$$16-19=13-16=10-13=\text{κλπ.}=-3,$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς προόδου ἀριθμητικῆς εἶναι σταθερὰ (καὶ ἴση πρὸς τὸν λόγον), αἱ ἀριθμητικαὶ πρόοδοι λέγονται καὶ πρόοδοι *κατὰ διαφοράν*.

Οἱ ὅροι τῆς προόδου (1), ὡς καὶ τῆς (2), προβαίνουν αὐξανόμενοι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς καὶ διὰ τοῦτο λέγονται *αὔξουσαι*, ἐνῷ ἡ πρόοδος (3), ὡς καὶ ἡ (4), τῶν ὁποίων οἱ ὅροι προβαίνουν ἐλαττούμενοι, διότι ὁ λόγος αὐτῶν εἶναι ἀρνητικός, λέγονται *φθίνουσαι*.

281. ***Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν τῇ προόδῳ.***—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν 25ον ὅρον τῆς ἀριθμητικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 7 καὶ λόγος ὁ $+3$.

Ἀλλὰ τότε θα εἶναι πρῶτος ὅρος ὁ 7, δεύτερος ὁ $7+3$, τρίτος ὁ $7+3+3=7+3.2$, τέταρτος ὁ $7+3+3+3=7+3.3$ καὶ προφανῶς 25ος εἶναι ὁ $7+3.24=79$. Γενικῶς δέ, ἄν ὁ πρῶτος ὅρος παρασταθῇ διὰ τοῦ α καὶ ὁ λόγος διά του λ, ὁ δεύτερος θὰ εἶναι $\alpha+\lambda$, ὁ τρίτος $\alpha+2\lambda$, ὁ τέταρτος $\alpha+3\lambda$ καὶ ὁ $\nu^{ος}$, τὸν ὁποῖον ἄς παραστήσωμεν διὰ τοῦ τ, θὰ εἶναι

$$\alpha+(\nu-1)\lambda, \quad \text{ἤτοι} \quad \tau=\alpha+(\nu-1)\lambda.$$ Ὥστε:

Ἕκαστος ὅρος ἀριθμητικῆς τινος προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον αὐτῆς αὐξηθέντα κατὰ τὸ γινόμενον τοῦ λόγου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων αὐτοῦ ὅρων.

Οὕτως ὁ 15ος ὅρος τῆς προόδου 3, 5, 7, 9, κτλ. εἶναι ὁ $3+14.2=31$, ὁ δὲ 31ος ὅρος τῆς προόδου 70, 65, 60, κτλ. εἶναι ὁ $70+30.(-5)=-80$.

Ἐὰν δὲ γνωρίζωμεν, ὅτι π. χ. ὁ 5ος ὅρος μιᾶς προόδου εἶναι ὁ -2 καὶ ὁ 10ος εἶναι ὁ 8 καὶ ζητῆται ἡ πρόοδος, ἔχομεν τὸ σύστημα

$$\alpha+4\lambda=-2$$
$$\alpha+9\lambda=8$$

ἐκ τοῦ ὁποίου, λύοντες, εὑρίσκομεν

$5\lambda=10$, ἤτοι $\lambda=2$ καὶ $\alpha+8=-2$. ἤτοι $\alpha=-10$.

Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι ἡ -10, -8, -6 κτλ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1098) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος, 40ος, ὁ $\nu^{ος}$ ὅρος τῶν ἀριθμητικῶν προόδων

1) 8, 15, 22... 2) $1, \frac{1}{2}, 0$... 3) $3, -1, -5$...

4) $\frac{1}{4}, 3, 5\frac{3}{4}$... 5) $\alpha+\beta, 2\alpha, 3\alpha-\beta$... 6) $2\alpha-\beta, 2\alpha, 2\alpha+\beta$...

7) $\alpha+4\beta, 2\alpha+2\beta, 3\alpha$... 8) $\alpha+3\beta, \alpha-\beta, \alpha-5\beta$...

1099) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος Α.Π., εἰς ἣν εἶναι $\tau=51$, $\nu=15$, $\lambda=4$.

1100) Τῆς Α.Π. $49\frac{2}{5}$, $48\frac{4}{5}$, $48\frac{1}{5}$ ποίαν τάξιν κατέχει ὁ ὅρος $34\frac{2}{5}$;

1101) Εἰς Α.Π. ὁ 3ος ὅρος εἶναι -14 καὶ ὁ 15ος, 46. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1102) Νὰ εὑρεθῇ ἡ Α.Π. ἧς ὁ 5ος ὅρος εἶναι 20 καὶ ὁ 21ος, 16.

1103) Ἐὰν προστεθοῦν οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι δύο Α.Π. προκύπτει ἄλλη Α.Π

282. ***Ἄθροισμα τῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου.***—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα Κ τῶν ἀριθμῶν 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, οἱ ὁποῖοι, ὅπως βλέπομεν, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἀλλ' ἐνταῦθα παρατηροῦμεν, ὅτι

$$3+17=20,\quad 5+15=20 \text{ κ.ο.κ.}$$

Ἑπομένως, ἂν γράψωμεν

$$\begin{array}{ll} & K=3+5+7+9+11+13+15+17 \\ & K=17+15+13+11+9+7+5+3 \\ \hline \text{ἔχομεν} & 2K=20+20+20+20+20+20+20+20=20.8 \end{array}$$

$$\text{καὶ } K=\frac{20.8}{2}=80.$$

Ἔστω ἤδη, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, . . . ρ, σ, τ, τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι ν, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον μὲ λόγον λ καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν το ἄθροισμα Κ τῶν ὅρων αὐτῶν. Ἀλλ' ἡ ἀνωτέρω πρόοδος γράφεται:

$$\alpha,\ \alpha+\lambda,\ \alpha+2\lambda,\ \ldots\ \tau-2\lambda,\ \tau-\lambda,\ \tau.$$

Ὥστε ἔχομεν

$$\begin{array}{l} K=\alpha+(\alpha+\lambda)+(\alpha+2\lambda)+\ldots+(\tau-2\lambda)+(\tau-\lambda)+\tau \\ K=\tau+(\tau-\lambda)+(\tau-2\lambda)+\ldots+(\alpha+2\lambda)+(\alpha+\lambda)+\alpha \\ \hline 2K=(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+\ldots+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau)+(\alpha+\tau) \end{array}$$

ἤτοι $$2K=(\alpha+\tau).\nu \quad \text{καὶ} \quad K=\frac{(\alpha+\tau).\nu}{2} \qquad (2)$$

ἤτοι: *Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων πάσης ἀριθμητικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν τῶν ὅρων.*

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δὲ συνάγεται καὶ ἡ ἰδιότης, κατὰ τὴν ὁποίαν *ἐν πάσῃ ἀριθμητικῇ προόδῳ τὸ ἄθροισμα δύο ὅρων ἐξ ἴσου ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων.*

Σημείωσις: Ἐὰν ἐν τῷ τύπῳ (2) ἀντικαταστήσωμεν τὸ τ διὰ τοῦ ἴσου $\alpha+(\nu-1)\lambda$, λαμβάνομεν

$$K=\frac{[\alpha+\alpha+(\nu-1)\lambda]\nu}{2}=\frac{2\alpha\nu+\nu(\nu-1)\lambda}{2}$$

ἤτοι $$K=\alpha\nu+\frac{\nu(\nu-1)}{2}.\lambda \qquad (3).$$

Διὰ τοῦ τύπου (3) εὑρίσκομεν τὸ Κ, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ α, ν καὶ λ.

Πδ. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 500. Τότε ἔχομεν $\alpha=1$, $\tau=500$ καὶ $\nu=500$. Ὥστε εἶναι

$$K=\frac{(1+500).500}{2}=125250.$$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα 51 ὅρων τῆς ἀριθμητικῆς προόδου 3, 7, 11, 15 κλπ.

Κατὰ τὸν τύπον (3) ἔχομεν

$$K=3.51+\frac{51.50}{2}.4=153+5100$$

ἤτοι $$K=5253.$$

283. ***Παρεμβολὴ ἀριθμητικῶν μέσων.***—Εἰς τὴν πρόοδον 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19 παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὅρος 4 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν ἑκατέρωθεν αὐτοῦ ὅρων 1 καὶ 7, ἐπίσης, ὅτι ὁ 7 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 4 καὶ 10 καὶ ὁ 16 εἶναι ἀριθμητικὸν μέσον τῶν 13 καὶ 19. Ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι μεταξὺ 1 καὶ 19 ὑπάρχουν 5 ἀριθμητικὰ μέσα. Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν μᾶς ζητηθῇ νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 19 πέντε ἀριθμητικὰ μέσα, ἤτοι 5 ὅρους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν 1 καὶ 19 νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον, θὰ σκεφθῶμεν ὡς ἑξῆς: Οἱ 5 αὐτοὶ ὅροι μετὰ τῶν 1 καὶ 19 κάμνουν 5+2=7 ὅρους. Ὥστε εἶναι $19=1+(7-1).\lambda$· ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\lambda=\frac{19-1}{6}=3$. Ὥστε ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

1, 4, 7, 10, 13, 16, 19.

Γενικῶς δέ, ἐὰν μεταξὺ α καὶ β θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν ν ἀριθμητικὰ μέσα, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ζητουμένης προόδου εἶναι $\nu+2$. Ὥστε εἶναι $$\beta=\alpha+(\nu+1)\lambda$$

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $$\lambda=\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}.$$

ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\quad \alpha+\frac{\beta-\alpha}{\nu+1},\quad \alpha+2\frac{\beta-\alpha}{\nu+1}\cdots$$

Οὕτως, ὅταν ζητῆται νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 2 καὶ 10 τρία ἀριθμητικὰ μέσα, θὰ ἔχωμεν $\lambda=\frac{10-2}{3+1}=2$ καὶ ἡ πρόοδος ἡ ζητουμένη θὰ εἶναι 2, 4, 6, 8, 10.

Ἀσκήσεις.

1104) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 300 καὶ γενικῶς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

1105) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 100 περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς κατὰ σειρὰν καὶ γενικῶς νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.

1106) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

τῶν 20 πρώτων ὅρων τῆς ἀριθ. προόδου 1, 4, 7 . . .

» 13 » » » » 18, 12, 6 . . . .

» 25 » » » » » $15\frac{1}{3}$, $14\frac{2}{3}$, 14. . .

1107) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5 τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ 1 καὶ τοῦ 200, ὡς καὶ ὅλων τῶν πολλαπλασίων τοῦ 7 τῶν περιεχομένων μεταξὺ 20 καὶ 300.

1108) Ὁ πρῶτος ὅρος ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι 3 καὶ ὁ 30ὸς εἶναι 148. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 30 πρώτων ὅρων αὐτῆς.

1109) Χρέος τι ἐπληρώθη διὰ μηνιαίων δόσεων ἐντὸς ἑνὸς ἔτους. Ἡ πρώτη μηνιαία δόσις ἦτο 500 δρχ., ἡ δευτέρα 550 δρχ., ἡ τρίτη 600 δρχ. κ.ο.κ. Εἰς πόσας δραχμὰς ἀνήρχετο τὸ χρέος;

1110) Ὡρολόγιον κτυπᾷ μόνον τὰς ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ πόσα κτυπήματα κάμνει ἐντὸς ἑνὸς ἡμερονυκτίου.

1111) Γνωρίζομεν ἐκ τῆς φυσικῆς, ὅτι σῶμα τι βαρύ, ἀφιέμενον ἐλεύθερον ἐξ ὕψους, διανύει εἰς τὸ πρῶτον δευτερόλεπτον 4,9 μέτρα καὶ εἰς ἕκαστον ἑπόμενον 9,8 μέτρα περισσότερον ἀπὸ ὅ,τι διήνυσεν εἰς τὸ προηγούμενον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος, ἐξ οὗ κατέπεσε σῶμα τι εἰς τὴν γῆν, ὅταν ὁ χρόνος τῆς πτώσεως εἶναι 12''. (Ἡ ἀντίστασις τοῦ ἀέρος δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).

1112) Σῶμα τι ἀφίεται ἐλεύθερον ἐξ ὕψους 490 μέτρων. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα θὰ φθάσῃ εἰς τὴν γῆν;

1113) Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\alpha=7$, $\nu=12$ καὶ $K=414$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τ ὡς καὶ ὁ λ,

1114) Ἀριθμητικῆς προόδου εἶναι $\alpha=5$, $\tau=59$ καὶ $K=621$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ν καὶ ὁ λ.

1115) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ εἶναι 9 καὶ τὸ τῶν τετραγώνων των εἶναι 45. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1116) Αἱ ἐξισώσεις $\tau=\alpha+(\nu-1)\lambda$ καὶ $K=\dfrac{(\alpha+\tau)\nu}{2}$ συνδέουν μεταξύ των τοὺς 5 ἀριθμοὺς α, λ, ν, τ καὶ K, ἐκ τῶν ὁποίων, ὡς γνωρίζομεν, εὑρίσκονται οἱ δύο, ὅταν οἱ ἄλλοι τρεῖς εἶναι γνωστοί. Δυνάμεθα λοιπὸν ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν τούτων νὰ προτείνωμεν δέκα διάφορα προβλήματα. Καταρτίσατε πίνακα δεικνύοντα τὰ προβλήματα αὐτά.

1117) Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 1 καὶ 33 ἑπτὰ ἀριθμητικὰ μέσα.

1118) Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων ἀριθμητικῆς προόδου παρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ἀριθμητικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

1119) Μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 4.$$

νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἀριθμητικὰ μέσα.

1120) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τῆς μονάδος μέχρι τοῦ ν. Πρὸς τοῦτο εἰς τὴν ταὐτότητα $(\alpha+1)^3=\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$ θέτομεν κατὰ σειρὰν $\alpha=1, 2, 3, \ldots \nu$ καὶ ἔπειτα προσθέτομεν τὰς ἰσότητας ποὺ προκύπτουν κατὰ μέλη κτλ.

1121) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=(1+2+3+\ldots+\nu)^2.$$

Β'. Πρόοδοι γεωμετρικαί.

284. ***Ὁρισμοί.***— Ἐκτὸς τῶν προηγουμένων σειρῶν ὑπάρχουν καὶ ἄλλαι σειραὶ ἀριθμῶν, π. χ. ἡ σειρὰ 1, 4, 8, 16 κτλ. (1). Εἰς αὐτὴν βλέπομεν ὅτι

$$4=2.2, \quad 8=4.2, \quad 16=8.2 \text{ κ.ο.κ.}$$

Αἱ τοιαῦται σειραὶ λέγονται *πρόοδοι γεωμετρικαί*: Ὥστε: *Πρόοδος γεωμετρικὴ λέγεται σειρὰ ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ἕνα καὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀποτελοῦν πρόοδον, λέγονται *ὅροι* αὐτῆς, ὁ δὲ σταθερὸς ἀριθμός, ὅστις πολλαπλασιάζων ἕκαστον ὅρον δίδει τὸν ἑπόμενον, λέγεται ***λόγος*** τῆς προόδου.

Οὕτω λόγος τῆς ἄνω προόδου εἶναι ὁ 2. Ὁμοίως ἡ σειρὰ

$$1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{8} \quad \text{κτλ.} \qquad (2)$$

εἶναι πρόοδος γεωμετρική, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι $\frac{1}{2}$

διότι $\quad \frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}:\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{8}:\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ κ. ο. κ.

Ὁμοίως τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{4}, \quad -\frac{1}{8} \quad \text{κ. ο. κ.} \qquad (3)$$

λόγος εἶναι ὁ $-\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ δὲ τὸ πηλίκον δύο διαδοχικῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εἶναι σταθερόν, λέγεται αὕτη καὶ πρόοδος *κατὰ πηλίκον*.

Ἡ πρόοδος εἶναι *αὔξουσα*, ἐὰν οἱ ὅροι αὐτῆς, λαμβανόμενοι ἀπολύτως, προβαίνουν αὐξανόμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὑπερβαίνῃ τὴν μονάδα 1· *φθίνουσα* δέ, ἐὰν οἱ ὅροι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν προβαίνουν ἐλαττούμενοι, ὅπερ συμβαίνει, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος 1 κατ' ἀπόλυτον τιμήν. Οὕτως ἡ πρόοδος (1) εἶναι αὔξουσα, αἱ δὲ (2) καὶ (3) εἶναι φθίνουσαι.

285. Εὕρεσις τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος ὡρισμένην τάξιν ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν 7ον ὅρον τῆς γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 2 καὶ λόγος ὁ 3. Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι πρῶτος ὁ ὅρος 2, δεύτερος ὁ 2.3, τρίτος ὁ $2.3.3=2.3^2$, τέταρτος ὁ 2.3^3 καὶ προφανῶς ἕβδομος εἶναι ὁ

$$2.3^6=2.729=1458.$$

Γενικῶς δέ, ἂν α εἶναι ὁ πρῶτος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου καὶ λ ὁ λόγος αὐτῆς, ὁ δεύτερος ὅρος θὰ εἶναι $\alpha\lambda$, ὁ τρίτος $\alpha\lambda^2$, ὁ τέταρτος $\alpha\lambda^3$, καὶ ὁ $\nu^{o\varsigma}$ τὸν ὁποῖον, ἂν παραστήσωμεν διὰ τ, θὰ εἶναι $\alpha\lambda^{\nu-1}$ ἤτοι $\tau=\alpha\lambda^{\nu-1}$. Ἤτοι: *Εἰς πᾶσαν γεωμετρικὴν πρόοδον ἕκαστος ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ πρώτου ὅρου ἐπὶ δύναμιν τοῦ λόγου, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸν ἀριθμὸν τῶν προηγουμένων ὅρων.*

1) Οὕτως ὁ 10ος ὅρος τῆς προόδου 3, 6, 12, 24 κτλ. εἶναι $3(2)^9=3.512=1536$, καὶ ὁ 20ὸς ὅρος αὐτῆς εἶναι $3(2)^{19}=3.524288=$ $=1572864$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1122) Νὰ εὑρεθῇ:

ὁ 7ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου		1, 3, 9....
ὁ 6ος » » »		1, 4, 16....
ὁ 9ος » » »		$\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$....
ὁ 6ος » » »		900, 300, 100....
ὁ 8ος » » »		54, —18, 6....
ὁ $\nu^{o\varsigma}$ » » »		$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^5}$...,

1123) Ὁ 5ος ὅρος γεωμετρικῆς προόδου, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι 4, εἶναι 768. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1124) Ἐκ βαρελίου, τὸ ὁποῖον περιέχει 256 ὀκάδας οἰνοπνεύματος, ἀφαιροῦμεν τὸ ἥμισυ τοῦ περιεχομένου, ἔπειτα τὸ ἥμισυ τοῦ ὑπολοίπου κ. ο. κ. ἐπὶ 8 φοράς. Τί ποσὸν οἰνοπνεύματος θὰ μείνῃ εἰς τὸ βαρέλιον;

1125) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς πᾶσαν Γ. Π. μὲ ὡρισμένον πλῆθος ὅρων τὸ γινόμενον δύο ὅρων ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων.

286. *Παρεμβολὴ γεωμετρικῶν μέσων.* — Νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β, ν γεωμετρικὰ μέσα, σημαίνει νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ τῶν δοθέντων ἀριθμῶν ν ὅρους, οἱ ὁποῖοι μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος νὰ εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β.

Ἐὰν λ εἶναι ὁ ἄγνωστος λόγος, ἔχομεν, ἐπειδὴ τὸ πλῆθος τῶν ὅρων εἶναι $\nu+2$, $\beta=\alpha\lambda^{\nu+1}$,

ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\lambda^{\nu+1}=\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $\lambda=\sqrt[\nu+1]{\dfrac{\beta}{\alpha}}$,

ἄρα ἡ ζητουμένη πρόοδος εἶναι

$$\alpha,\ \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}},\quad \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}.\quad \ldots\ \alpha.\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}},\qquad \beta.$$

Οὕτως, ἂν θέλωμεν νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ 1 καὶ 16 τρία γεωμετρικὰ μέσα θὰ ἔχωμεν $\lambda=\sqrt[4]{16}=2$ καὶ ἡ ζητουμένη πρόοδος θὰ εἶναι 1, 2, 4, 8, 16.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1126) Νὰ παρεμβληθοῦν μεταξὺ 1 καὶ 10 ἐννέα γεωμετρικὰ μέσα, ὡς καὶ 5 γεωμετρικὰ μέσα μεταξὺ 54 καὶ $\frac{27}{32}$, καὶ μεταξὺ 21 καὶ $\frac{448}{243}$.

1127) Ἐὰν μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου παρεμβληθῇ ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς γεωμετρικῶν μέσων, σχηματίζεται νέα πρόοδος συνεχής.

1128) Μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὅρων τῆς προόδου 1, 4, 16, 64, 256, νὰ παρεμβληθῇ ἀνὰ ἓν γεωμετρικὸν μέσον.

287. *Ἄθροισμα τῶν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου.*— Ἔστω πρὸς εὕρεσιν τὸ ἄθροισμα

$$K=\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3+\ldots+\alpha\lambda^{\nu-1} \qquad (1).$$

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰ ἴσα ἐπὶ τὸν λόγον λ τῆς γεωμετρικῆς προόδου, εὑρίσκομεν

$$K\lambda=\alpha\lambda+\alpha\lambda^2+\alpha\lambda^3+\ldots+\alpha\lambda^{\nu} \qquad (2).$$

ἀφαιροῦντες δὲ κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (1) εὑρίσκομεν

$$K\lambda-K=\alpha\lambda^{\nu}-\alpha \text{ ἢ } K.(\lambda-1)=\alpha\lambda^{\nu}-\alpha'$$

καὶ ἂν ὁ λ διαφέρῃ τῆς μονάδος 1,

$$K=\frac{\alpha\lambda^{\nu}-\alpha}{\lambda-1}=\frac{\alpha(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}$$

ἤ, ἂν γράψωμεν $K=\frac{\alpha\lambda^{\nu-1}.\lambda-\alpha}{\lambda-1}$, $\quad K=\frac{\tau\lambda-\alpha}{\lambda-1}$ (3).

ἤτοι : *Τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων μιᾶς γεωμετρικῆς προόδου εὑρίσκεται, ἂν ὁ τελευταῖος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λόγον καὶ ἀπὸ τοῦ γινομένου ἀφαιρεθῇ ὁ πρῶτος ὅρος, τὸ δὲ ὑπόλοιπον διαιρεθῇ διὰ τοῦ λόγου ἠλαττωμένου κατὰ μονάδα.*

Παρατήρησις. Ὁ τύπος $K=\frac{\alpha(\lambda^{\nu}-1)}{\lambda-1}$ χρησιμοποιεῖται διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ K, ὅταν δίδωνται οἱ ἀριθμοὶ α, λ καὶ ν.

Πδ. 1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

$$K=3+6+12+24+48+96+192.$$

Ἐνταῦθα ἔχομεν $\alpha=3$, $\tau=192$ καὶ $\lambda=2$.

Ὥστε εἶναι $\quad K=\frac{192.2-3}{2-1}=\frac{384-3}{1}=381$

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 10 πρώτων ὅρων τῆς γεωμετρικῆς προόδου 1, 2, 4 κτλ.

Ἔχομεν $K=\frac{1.(2^{10}-1)}{2-1}=2^{10}-1=1024-1=1023.$

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν 8 πρώτων ὅρων τῆς προόδου 27, 9, 3 κτλ.

Ἔχομεν

$$K=\frac{27.\left[\left(\frac{1}{3}\right)^8-1\right]}{\frac{1}{3}-1}=\frac{27\left(-\frac{6560}{6561}\right)}{-\frac{2}{3}}=\frac{27.6560.3}{6561.2}=\frac{3280}{81}.$$

4) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ. Τὸ ἄθροισμα αὐτῶν εἶναι 39 καὶ ἡ διαφορὰ τοῦ πρώτου ἀπὸ τὸν τρίτον εἶναι 24. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

Ἐὰν οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι οἱ α, $\alpha\lambda$, $\alpha\lambda^2$, ἔχομεν

$$\alpha+\alpha\lambda+\alpha\lambda^2=39 \qquad\qquad \alpha(1+\lambda+\lambda^2)=39$$
$$\text{ἤτοι}$$
$$\alpha\lambda^2-\alpha=24 \qquad\qquad \alpha(\lambda^2-1)=24.$$

Διαιροῦντες τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη εὑρίσκομεν

$$\frac{1+\lambda+\lambda^2}{\lambda^2-1}=\frac{13}{8},$$

ἐξ αὐτῆς δὲ εὑρίσκομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$5\lambda^2-8\lambda-21=0,$$

τῆς ὁποίας ῥίζαι εἶναι $\lambda=3$ ἢ $-\frac{7}{5}$. Ὥστε εἶναι $\alpha=3$ ἢ 25. Οἱ ζητούμενοι λοιπὸν ἀριθμοὶ εἶναι οἱ 3, 9, 27 ἢ 25, —35, 49.

Ἀσκήσεις

1129) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα

τῶν	6	πρώτων	ὅρων	τῆς	γεωμετρικῆς	προόδου	1, 3, 9	
»	7	»	»	»	»	»	2, 10, 50	
»	6	»	»	»	»	»	120, 60, 30	
»	5	»	»	»	»	»	$3, \frac{3}{4}, \frac{3}{16}$	
»	7	»	»	»	»	»	$\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$	

1130) Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες Γ. Π. τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι 36 καὶ ἡ διαφορὰ αὐτοῦ ἀπὸ τοῦ τρίτου εἶναι 28.

1131) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 91 εἰς τρεῖς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι νὰ ἀποτελοῦν Γ. Π, ὁ δὲ τελευταῖος νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν πρῶτον κατὰ 80.

1132) Τριῶν ἀριθμῶν ἐν Γ. Π. τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 10 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τελευταίων 15. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τρεῖς οὗτοι ἀριθμοί.

1133) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν Γ. Π. Ἔχουν δὲ ἄθροισμα 21 καὶ γινόμενον 64. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1134) Ἐὰν $1-\chi$, $1+\chi$ καὶ $35-\chi$ ἀποτελοῦν Γ. Π., νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

1135) Ἐὰν $\chi+2$, $\chi-2$, $8-\chi$ ἀποτελοῦν Γ. Π. νὰ εὑρεθῇ ὁ χ.

1136) Εἰς Γ. Π. ἐκ 10 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων περιττῆς τάξεως εἶναι 1023, τὸ δὲ τῶν ἀρτίας 2046. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου ταύτης.

1137) Εἰς Γ. Π. ἐξ 8 ὅρων τὸ ἄθροισμα τῶν 4 πρώτων εἶναι 40, τὸ δὲ τῶν 4 ἑπομένων εἶναι 3240. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος αὐτῆς καὶ ὁ πρῶτος ὅρος.

288. Ἄθροισμα τῶν ὅρων φθινούσης Γ. Π. ἐχούσης ἀπείρους ὅρους.—Θεώρημα. *Τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου ἐχούσης ἄπειρον πλῆθος ὅρων, τείνει πρὸς ὅριον, ὅπερ εἶναι τὸ πηλίκον τοῦ πρώτου ὅρου διὰ τῆς διαφορᾶς τοῦ λόγου ἀπὸ τῆς μονάδος, ὅταν ὁ ν αὐξάνηται καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον.*

Διότι τὸ ἄθροισμα $K=\alpha.\dfrac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$K=\frac{\alpha}{1-\lambda}-\frac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda}.$$

Ἀλλ' ὅταν ἡ πρόοδος εἶναι φθίνουσα κατὰ τὸ θεώρημα 229 δι' ὅρν$=\infty$ εἶναι ὅρ$\lambda^\nu=0$, ἑπομένως καὶ ὅρ$\dfrac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda}=0$. Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\alpha}{1-\lambda}$ εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς ἕπεται ὅτι ὅρ$K=$ ὅρ$\dfrac{\alpha}{1-\lambda}-$ ὅρ$\dfrac{\alpha\lambda^\nu}{1-\lambda}$

ἤτοι ὅρ$K=\dfrac{\alpha}{1-\lambda}$.

Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συντόμως ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς: ***Τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων φθινούσης Γ. Π. ἐχούσης ἀπείρους ὅρους ἀποτελεῖ τὸν ἀριθμὸν** $\dfrac{\alpha}{1-\lambda}$.*

Π. χ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς Γ. Π.

$1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}+\ldots$ εἶναι $K=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{2}{3}$ καὶ τὸ ἄθροισμα πάντων τῶν ὅρων τῆς προόδου $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\alpha^3}+\ldots$ ὅπου $\alpha>1$, εἶναι $K=\dfrac{1}{\alpha-1}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1138) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἑκάστης τῶν γεωμετρικῶν προόδων:

1) $8, \quad 4, \quad 2, \ldots$ 6) $0{,}5888\ldots$

2) $10, \quad 5, \quad 2\frac{1}{2}\ldots$ 7) $1, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{1}{2}, \ldots$

3) $22. \quad 11. \quad \frac{11}{2}, \ldots$ 8) $3 \quad \sqrt{3}, \quad 1, \quad \frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots$

4) $\frac{5}{3}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{15}{16}, \ldots$ 9) $\frac{\alpha}{\beta}, \quad \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2. \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 \ldots$ ὅταν $\beta > \alpha$.

5) $\frac{52}{100}, \quad \frac{52}{100^2}, \quad \frac{52}{100^3}$ $(0{,}5252\ldots)$ 10) $\sqrt{\alpha} \quad 1, \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \ldots$ ὅταν $\sqrt{\alpha} > 1$.

1139) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῶν προόδων,

1) $\frac{1}{3}, \quad -\frac{1}{9}, \quad \frac{1}{27}, \quad -\frac{1}{81} \ldots$

2) $22, \quad -12\frac{4}{7}, \quad 7\frac{9}{49}, \ldots$

3) $1, \quad -\frac{1}{\chi}, \quad \frac{1}{\chi^2}$ ὅπου εἶναι $\chi > 1$

4) $\sqrt{3}, \quad -\sqrt{2} \quad +\frac{2}{\sqrt{3}}, \ldots$

1140) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων τῆς σειρᾶς.

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots + \frac{\nu}{2\nu} + \ldots$$

1141) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου τῆς ὁποίας ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι $\frac{1}{4}$ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς $\frac{1}{2}$.

1142) Γεωμετρικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων ὅρων εἶναι 20. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1143) Τὸ ἄθροισμα τῶν τεσσάρων πρώτων ὅρων γεωμετρικῆς προόδου εἶναι 65, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων αὐτῆς εἶναι 81. Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρόοδος.

1144) Εἰς δοθὲν τετράγωνον ἐγγράφομεν ἄλλο τετράγωνον συνάπτοντες τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ, εἰς τοῦτο πάλιν ἄλλο κ. ο. κ. εἰς ἄπειρον. Ζητεῖται α') τὸ ἄθροισμα τῶν περιμέτρων πάντων τούτων τῶν τετραγώνων καὶ β') τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

1145) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ ζήτημα ὅταν δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον.

1146) Εἰς δοθέντα κύκλον ἐγγράφομεν τετράγωνον, εἰς τοῦτο ἐγγράφομεν κύκλον, εἰς τοῦτον ἄλλο τετράγωνον κ. ο. κ. εἰς ἄπειρον. Νὰ εὑρεθῇ α') τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων καὶ β') τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τετραγώνων.

1147) Τριγώνου τινὸς δίδεται ἡ περίμετρος 2τ καὶ ἡ μικροτέρα πλευρὰ γ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ δύο ἄλλαι πλευραί, γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου τούτου ἀποτελοῦν γεωμετρικὴν πρόοδον.

1148) Ἄνθρωπός τις διέταξε ἐν τῇ διαθήκῃ του νὰ μερισθῇ ἡ περιουσία του είς τοὺς τρεῖς υἱούς του ὡς ἑξῆς· ὁ μὲν πρωτότοκος νὰ λάβῃ τὸ $\frac{1}{2}$ ὁ δεύτερος τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ ὁ τελευταῖος τὸ $\frac{1}{5}$ τῆς περιουσίας· δὲν ἐσυλλογίσθη ὅμως, ὅτι τὰ τρία ταῦτα μέρη (τὸ ἥμισυ, τὸ τέταρτον καὶ τὸ πέμπτον) δὲν συναποτελοῦν τὴν ὅλην περιουσίαν ἀλλὰ μόνον τὰ $\frac{19}{20}$ αὐτῆς· πῶς πρέπει νὰ γίνῃ ἡ διανομή, ἵνα ὅσον τὸ δυνατὸν πραγματοποιηθῇ ἡ θέλησις τοῦ διαθέτου;

1149) Δύο κινητὰ Α καὶ Β κινοῦνται ὁμαλῶς ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ ἀπέχουν τὴν στιγμὴν ταύτην ἀπόστασιν ἴσην μὲ α· ἡ κίνησις ἀμφοτέρων γίνεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν ΑΒ, εἶναι δὲ ἡ ταχύτης τ τοῦ Α μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος τ′ τοῦ Β. Ζητεῖται, μετὰ πόσον χρόνον ἀπὸ τῆς παρούσης στιγμῆς τὸ Α θὰ φθάσῃ τὸ Β.

Ἵνα τὸ Α φθάσῃ τὸ Β χρειάζεται ἄπειρα τὸ πλῆθος χρονικὰ διαστήματα, τὰ ἑξῆς; $\frac{\alpha}{\tau}$, $\frac{\alpha}{\tau}\cdot\frac{\tau'}{\tau}$, $\frac{\alpha}{\tau}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^2$, $\frac{\alpha}{\tau}\cdot\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)^3$ . . . .
δὲν πρέπει ὅμως ἐκ τούτου νὰ συμπεράνωμεν*, ὅτι τὸ Α οὐδέποτε θὰ φθάσῃ τὸ Β διότι τὰ ἀπειροπληθῆ ταῦτα χρονικὰ διαστήματα συναποτελοῦν χρονικόν τι διάστημα πεπερασμένον. Καὶ ὄντως τὰ χρονικὰ ταῦτα διαστήματα εἶναι ὅροι μιᾶς φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου· ἄρα τὸ σύνολον αὐτῶν ἀποτελεῖ τὸν χρόνον

$\dfrac{\frac{\alpha}{\tau}}{1-\frac{\tau'}{\tau}}$, ἤτοι $\dfrac{\alpha}{\tau-\tau'}$, εἰς τὸ τέλος τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις α τῶν κινητῶν θὰ εἶναι 0.

Γ′. Πρόοδοι ἁρμονικαί.

289. Ὁρισμός.—*Ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ, ὑπάρχῃ ἡ σχέσις* $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$, *τότε λέγομεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ. Καὶ μία σειρὰ ἀριθμῶν λέγομεν, ὅτι ἀποτελεῖ ἁρμονικὴν πρόοδον, ὅταν τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι αὐτῆς πληροῦν τὴν ἄνω σχέσιν.*

290. Θεώρημα.—*Οἱ ἀντίστροφοι τῶν ὅρων ἁρμονικῆς προόδου ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.*

Ἔστω μιᾶς ἁρμονικῆς προόδου τρεῖς διαδοχικοὶ ὅροι α, β, γ. Τότε ὅμως εἶναι

$\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}$ ἤτοι $\alpha\beta-\gamma\alpha=\gamma\alpha-\beta\gamma$ ἤτοι $\frac{\alpha\beta-\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\gamma\alpha-\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma}$. Ἑπομένως

*. Οὕτω συνεπέραινον οἱ ἀρχαῖοι (σοφισταί) καὶ ἀπεδείκνυον, ὅτι ὁ ὠκύπους Ἀχιλλεὺς δὲν ἠδύνατο νὰ φθάσῃ τὴν χελώνην, οὐδὲ ἓν μόνον βῆμα ἂν ὑπελείπετο αὐτῆς.

εἶναι $\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}$, ἤτοι οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἐὰν $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, οἱ α, β, γ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ. Δυνάμεθα ἑπομένως νὰ δώσωμεν καὶ τὸν ἑξῆς ὁρισμόν: *Μία σειρὰ ἀριθμῶν λέγεται ὅτι ἀποτελεῖ ἁρμονικὴν πρόοδον, ἐὰν οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.*

291. *Παρεμβολὴ ἁρμονικῶν μέσων.* — *Πρόβλημα. Νὰ παρεμβληθοῦν 3 ἁρμονικὰ μέσα μεταξὺ τῶν* $4\frac{1}{2}$ *καὶ* $\frac{9}{14}$. Πρὸς τοῦτο παρεμβάλλομεν τρία ἀριθμητικὰ μέσα μεταξὺ τῶν ἀντιστρόφων τῶν δοθέντων ἀριθμῶν, ἤτοι μεταξὺ $\frac{2}{9}$ καὶ $\frac{14}{9}$, εἶναι δὲ ταῦτα $\frac{5}{9}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{11}{9}$.

Τὰ ζητούμενα λοιπὸν ἁρμονικὰ μέσα εἶναι $\frac{9}{5}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{9}{11}$.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἐὰν παρεμβάλωμεν ἓν ἁρμονικὸν μέσον μεταξὺ χ, ψ καὶ ὀνομάσωμεν αὐτὸ Η, θὰ ἔχωμεν $H=\frac{2\chi\psi}{\chi+\psi}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐὰν Α εἶναι τὸ ἀριθμητικὸν μέσον τῶν χ. ψ καὶ Γ τὸ γεωμετρικὸν μέσον αὐτῶν, ἔχομεν

$$A.\,H=\frac{\chi+\psi}{2}\cdot\frac{2\chi\psi}{\chi+\psi}=\chi\psi=\Gamma^2 \text{ ἤτοι } \frac{\Gamma}{A}=\frac{H}{\Gamma}.$$

Ὥστε τὰ Α, Γ, Η δύο ἀριθμῶν εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1150) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 6ος, ὁ 12ος ὅρος τῶν ἁρμονικῶν προόδων

1) $\frac{1}{2}, \frac{4}{9}, \frac{2}{5}\ldots$ 2) $1, \frac{3}{8}, \frac{3}{13}, \ldots$ 3) $-\frac{1}{5}, -1, \frac{1}{3}, \ldots$

1151) Νὰ παρεμβληθοῦν 4 ἁρμονικὰ μέσα μεταξὺ 1 καὶ 6, 2 καὶ 12, 12 καὶ $\frac{3}{4}$.

1152) Ἐὰν α, β, γ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ, νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι

$$\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{1}{\beta-\gamma}+\frac{4}{\gamma-\alpha}=\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}.$$

1153) Ἐὰν $\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma+\alpha}$, $\frac{\gamma}{\alpha+\beta}$ εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ, νὰ δειχθῇ, ὅτι β+γ, γ+α, α+β εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ.

1154) Ἐὰν β+γ, γ+α, α+β εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ νὰ δειχθῇ ὅτι α^2, β^2, γ^2 εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

1155) Ἐὰν τὸ ἀριθμητικὸν μέσον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα 1, τὸ ἁρμονικὸν μέσον τῶν ἀριθμῶν τούτων ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ γεωμετρικοῦ των μέσου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Λογάριθμοι

292. Ὁρισμός.—Ἔστω α θετικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος 1, χ πραγματικὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε καὶ Α θετικὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε. *Ἐὰν εἶναι* $\alpha^{\chi}=A$, θὰ λέγωμεν, *ὅτι ὁ χ εἶναι λογάριθμος τοῦ Α ὡς πρὸς βάσιν α·* παρίσταται δὲ τοῦτο, ὡς ἕπεται: $\lambda o \gamma_{\alpha} A = \chi$. Ἤτοι: *Λογάριθμος ἀριθμοῦ τινος Α, ὡς πρὸς βάσιν α, λέγεται ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἰς ὃν πρέπει νὰ ὑψωθῇ ἡ βάσις α, ἵνα δώσῃ τὸν Α.*

Οὕτως: Ἐπειδὴ $3^2=9$ ἔχομεν $\lambda o\gamma_3 9=2$

Καὶ » $5^3=125$ » $\lambda o\gamma_5 125=3$

» » $4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ » $\lambda o\gamma_4 \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$.

Ἐπειδὴ ὡς βάσις α δύναται νὰ ληφθῇ οἱοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος 1, διὰ τοῦτο δύνανται νὰ σχηματισθοῦν διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα. ***Ἀλλ'*** *εἰς πᾶν λογαριθμικὸν σύστημα ἡ μονὰς 1 ἔχει λογάριθμον τὸ 0 καὶ ἡ βάσις τὴν μονάδα 1.* Διότι εἶναι $\alpha^0=1$ καὶ $\alpha^1=\alpha$, οἱοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ α.

293. Συνέχεια τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως α^{χ}.—Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμὸς τῶν λογαρίθμων ὑποθέτει, ὅτι διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ χ ἀντιστοιχεῖ ὡρισμένη τιμὴ τοῦ Α (θετική). Πρὸς τοῦτο δὲ ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι αὐξανομένου τοῦ χ συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἡ συνάρτησις α^{χ} μεταβάλλεται συνεχῶς ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$.

Ἂς ὑποθέσωμεν ἤδη, ὅτι εἶναι $\alpha > 1$ καὶ ἂς δοθῇ εἰς τὸν χ ὡρισμένη τιμὴ χ_0, ὁπότε ἡ α^{χ} θὰ λάβῃ τὴν τιμὴν α^{χ_0}, διὰ δὲ $\chi=\chi_0+\frac{1}{\nu}$ ὅπου ν ἀκέραιος θετικός, ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι $\alpha^{\chi_0+\frac{1}{\nu}}$.

Ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἵνα ἡ συνάρτησις εἶναι συνεχὴς πρέπει τοῦ $\frac{1}{\nu}$ τείνοντος πρὸς τὸ 0, τὸ ὅριον τῆς διαφορᾶς $\alpha^{\chi_0+\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\chi_0}$ νὰ εἶναι 0· ἀλλ' εἶναι $\alpha^{\chi_0+\frac{1}{\nu}}-\alpha^{\chi_0}=\alpha^{\chi_0}\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}-1\right)$, ὅταν δὲ ὁ ν αὐξάνη καὶ τείνῃ πρὸς τὸ ∞ (ἤτοι ὅταν $\frac{1}{\nu}$ τείνῃ πρὸς τὸ 0), ἔχομεν

ἀποδείξει (§ 230) ὅτι $\text{ὅρ}\,\alpha^{\frac{1}{\nu}} = 1$. Ἑπομένως εἶναι $\text{ὅρ}\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}} - 1\right)$ $=0$ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ $\text{ὅρ}\left(\alpha^{\chi_0 + \frac{1}{\nu}} - \alpha^{\chi_0}\right) = 0.$

Ἤδη ἂς διαιρέσωμεν τὴν μονάδα 1 εἰς ν ἴσα μέρη καὶ ἂς δώσωμεν εἰς τὸν χ διαδοχικῶς τὰς τιμάς:

$$0,\ \frac{1}{\nu},\ \frac{2}{\nu},\ \frac{3}{\nu},\ \ldots$$

Αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως α^{χ} θὰ εἶναι τότε

$$1,\ \alpha^{\frac{1}{\nu}},\ \alpha^{\frac{2}{\nu}},\ \alpha^{\frac{3}{\nu}},\ldots$$

ἀλλ' ὅταν ὁ ν ληφθῇ ἀρκετὰ μέγας, ἡ διαφορὰ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν τιμῶν τούτων ἀπὸ τῆς ἑπομένης δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ ε, ὁσονδήποτε μικροῦ· ἑπομένως, ὅταν ὁ χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 0 μέχρι τοῦ $+\infty$, ἡ α^{χ} αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ τῆς 1 μέχρι τοῦ $+\infty$· διότι ἂν μετέβαινεν ἀποτόμως ἀπὸ μιᾶς τιμῆς εἰς ἄλλην, θὰ εἶχον αἱ τιμαὶ αὗται διαφορὰν ἀριθμοῦ ὡρισμένου, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἀφοῦ ἀπεδείξαμεν ὅτι ἡ συνάρτησις α^{χ} εἶναι συνεχής, ἡ διαφορὰ αὕτη δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς ἀριθμοῦ δοθέντος.

Ἂς δοθοῦν ἤδη εἰς τὸν χ αἱ διαδοχικαὶ τιμαὶ

$$0,\ -\frac{1}{\nu},\ -\frac{2}{\nu},\ -\frac{3}{\nu},\ldots$$

Τότε αἱ ἀντιστοιχοῦσαι τιμαὶ τῆς συναρτήσεως θὰ εἶναι:

$$1,\ \alpha^{-\frac{1}{\nu}},\ \alpha^{-\frac{2}{\nu}},\ \alpha^{-\frac{3}{\nu}},\ldots$$

$$\text{ἢ}\quad 1,\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\nu}},\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{2}{\nu}},\ \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{3}{\nu}},\ldots$$

ἐπειδὴ δὲ καὶ ἐνταῦθα, ὅταν τὸ ν ληφθῇ ἱκανῶς μέγα, ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τῆς διαφορᾶς μεταξὺ μιᾶς οἱασδήποτε τῶν τιμῶν τούτων ἀπὸ τῆς ἑπομένης δύναται νὰ γίνῃ καὶ νὰ μείνῃ μικροτέρα παντὸς δοθέντος ἀριθμοῦ ε ὁσονδήποτε μικροῦ, ἕπεται ὅτι τοῦ χ ἐλαττουμένου συνεχῶς ἀπὸ 0 μέχρι τοῦ $-\infty$, ἡ συνάρτησις ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ 0.

Ἑπομένως, ὅταν ὁ χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἡ ἐκθετικὴ συνάρτησις α^{χ} αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$ καὶ διέρχεται ἅπαξ δι' ἑκάστου θετικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐὰν εἶναι $0<\alpha<1$, πάλιν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ συνάρτησις α^{χ} εἶναι συνεχής· ὅταν δὲ ὁ χ αὐξάνεται συνεχῶς ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ἡ α^{χ} ἐλαττοῦται συνεχῶς ἀπὸ $+\infty$ μέχρι τοῦ 0 καὶ διέρχεται ἅπαξ δι' ἑκάστου θετικοῦ ἀριθμοῦ.

Παρατήρησις. Ἐὰν εἰς τὸν χ δοθοῦν τιμαὶ κλασματικαί, ὧν ὁ παρονομαστὴς εἶναι ἄρτιος ἡ α^{χ} δίδει καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ἀλλ' ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ συνάρτησις α^{χ} θὰ εἶναι ἀσυνεχής. Ὥστε *οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ δὲν ἔχουν λογαρίθμους.*

294. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

1) Ἕκαστος πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι λογάριθμος ἑνὸς καὶ μόνον θετικοῦ ἀριθμοῦ.

2) Ἕκαστος θετικὸς ἀριθμὸς ἔχει λογάριθμον ἕνα καὶ μόνον πραγματικὸν ἀριθμόν.

3) Ὅταν ἡ βάσις συστήματός τινος λογαρίθμων εἶναι >1, οἱ μεγαλύτεροι τῆς μονάδος 1 ἀριθμοὶ ἔχουν λογαρίθμους θετικούς, ἐνῷ οἱ μικρότεροι αὐτῆς ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, τὸ ἐναντίον δὲ συμβαίνει, ὅταν ἡ βάσις εἶναι <1.

4) Ὅταν $\alpha>1$, αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ αὐξάνεται καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ καὶ τἀνάπαλιν· ἐὰν δὲ $\alpha<1$ αὐξανομένου τοῦ ἀριθμοῦ ἐλαττοῦται ὁ λογάριθμος.

295. Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. — *1. Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου πολλῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τούτων.*

Ἔστωσαν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ Α, Β, Γ, ὧν οἱ λογάριθμοι ἐν τῷ συστήματι τῆς βάσεως α εἶναι ἀντιστοίχως οἱ χ, ψ, φ· ἤτοι $\lambda o\gamma_{\alpha} A=\chi$, $\lambda o\gamma_{\alpha} B=\psi$, $\lambda o\gamma_{\alpha} \Gamma=\varphi$. Ἀλλὰ κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν $\alpha^{\chi}=A$, $\alpha^{\psi}=B$, $\alpha^{\varphi}=\Gamma$· ἄρα καὶ $A.B.\Gamma=\alpha^{\chi}.\alpha^{\psi}.10^{\varphi}=\alpha^{\chi+\psi+\varphi}$. Ἐξ αὐτῆς δὲ λαμβάνομεν $\lambda o\gamma\alpha(A.B.\Gamma)=\chi+\psi+\varphi$ ἢ

$$\lambda o\gamma_{\alpha}(A.B.\Gamma)=\lambda o\gamma_{\alpha} A+\lambda o\gamma_{\alpha} B+\lambda o\gamma_{\alpha} \Gamma.$$

2. Ὁ λογάριθμος τοῦ πηλίκου δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τοῦ λογαρίθμου τοῦ διαιρετέου.

Διότι, ἐὰν Α καὶ Β εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ εἶναι $\lambda o\gamma_{\alpha}^{A}=\chi$, $\lambda o\gamma_{\alpha}^{A}=\psi$, θὰ ἔχωμεν $\alpha^{\chi}=A$ καὶ $\alpha^{\psi}=B$· ὅθεν εὑρίσκομεν

$\frac{A}{B}=\frac{\alpha^{\chi}}{\alpha^{\psi}}=\alpha^{\chi-\psi}$ καὶ ἐξ αὐτῆς

$$\lambda o\gamma_{\alpha}\frac{A}{B}=\chi-\psi=\lambda o\gamma_{\alpha} A-\lambda o\gamma_{\alpha} B.$$

3. Ὁ λογάριθμος πάσης δυνάμεως ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν ἐκθέτην.

Ἔστω $A>0$ καὶ $\log_\alpha A=\chi$· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\alpha^\chi=A$ καὶ $(\alpha^\chi)^\mu=A^\mu$ Ἀλλ' οἱοσδήποτε καὶ εἶναι ὁ μ, ἔχομεν $(\alpha^\chi)=\alpha^{\mu\chi}$· ὥστε εἶναι $\alpha^{\chi\mu}=A^\mu$ καὶ ἑπομένως $\log_\alpha(A^\mu)=\mu.\chi$· δηλαδὴ $\boldsymbol{\log_\alpha(A)=\mu\log_\alpha A}$.

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λοιπόν, ἐπειδὴ $\sqrt[\nu]{A}=A^{\frac{1}{\nu}}$, ἔχομεν

$\boldsymbol{\log_\alpha\sqrt[\nu]{A}=\frac{1}{\nu}\log_\alpha A}$, ***ἤτοι***

4. Ὁ λογάριθμος πάσης ρίζης ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1156) Νὰ μετασχηματισθοῦν αἱ παραστάσεις εἰς ἃς ἡ βάσις εἶναι οἱαδήποτε, ἀλλ' ἡ αὐτή:

1) $\log(\alpha\beta^2\gamma^3)$
2) $\log\frac{\alpha^3\beta}{\gamma^4}$
3) $\log\frac{5\sqrt{\alpha^3}}{\beta\gamma}$
4) $\log\frac{\alpha^2\sqrt{\beta}}{\sqrt[3]{\gamma^2}}$
5) $\log\alpha+\log\beta-\log\gamma$
6) $2\log\chi+3\log\psi-\log\varphi-\log\omega$
7) $4\log\chi-\frac{1}{2}\log\psi$
8) $\frac{1}{3}\log\chi+\log5-\frac{2}{3}\log\psi$

1157) Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1) $\log210=\log2+\log3+\log5+\log7$
2) $\log30+\log36=\log24+\log45$
3) $\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{5}+\log\frac{5}{2}=0$
4) $\log\frac{25}{8}+\log\frac{2}{35}-\log\frac{5}{14}=-\log2$
5) $\frac{1}{2}\log16+\frac{1}{2}\log8+\frac{1}{5}\log32=4\log2$
6) $\log(\chi^4)+\log(\chi^3)+\log\left(\frac{1}{\chi^5}\right)=2\log\chi$

296. Πρόβλημα. *Ἐκ τοῦ λογA ὡς πρὸς βάσιν α νὰ εὑρεθῇ ὁ λογA ὡς πρὸς βάσιν β.*

Ἔστω χ ὁ δοθεὶς λογA ὡς πρὸς βάσιν α καὶ ψ ὁ λογάριθμος Α ὡς πρὸς βάσιν β. Τότε θὰ εἶναι $\alpha^\chi=A$ καὶ $\beta^\psi=A$ ἤτοι $\alpha^\chi=\beta^\psi$. Ἐὰν δὲ ἤδη λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν δύο ἴσων, πρῶτον μὲν ὡς πρὸς βάσιν α καὶ ἔπειτα ὡς πρὸς βάσιν β εὑρίσκομεν $\chi=\psi\log_\alpha\beta$, $\psi=\chi\log_\beta\alpha$.

Ἤτοι ὁ ζητούμενος λογάριθμος ψ εὑρίσκεται ἐκ τοῦ χ ὅταν οὗτος πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς πρώτης βάσεως ὡς πρὸς τὴν δευτέραν.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων τούτων προκύπτει $\log_\alpha\beta.\log_\beta\alpha=1$.

297. Δεκαδικοὶ λογάριθμοι.— Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι δύνανται νὰ σχηματισθοῦν διάφορα λογαριθμικὰ συστήματα· ἐν χρήσει ὅμως ἐν μὲν τῇ ἀνωτέρᾳ μαθηματικῇ εἶναι οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, πασῶν τῶν ἄλλων ἁρμοδιωτέρα πρὸς τὰς μαθηματικὰς θεωρίας (οὗτος εἶναι ὁ $e=2{,}71828 1828\ldots$) καὶ οἵτινες καλοῦνται Νεπέριοι λογάριθμοι, ἐκ τοῦ ἐπινοήσαντος αὐτοὺς Jean Neper, ἐν δὲ ταῖς πρακτικαῖς ἐφαρμογαῖς εἶναι ἐν χρήσει οἱ λογάριθμοι μὲ βάσιν 10, οἵτινες διὰ τοῦτο λέγονται ***δεκαδικοὶ λογάριθμοι*** ἢ ***κοινοὶ λογάριθμοι***. Τοὺς δεκαδικοὺς λογαρίθμους σημειοῦν διὰ οῦ συμβόλου λογ. ἄνευ δείκτου.

Οὕτως ἔχομεν $\text{λογ}\,10=1$, $\text{λογ}\,100=2$,

$$\text{λογ}\left(\sqrt[3]{10000}\right)=\frac{4}{3},\quad \text{λογ}\,\frac{1}{100}=-2 \quad \text{κ. τ. λ.}$$

Ἐν τοῖς ἑφεξῆς γίνεται λόγος μόνον περὶ δεκαδικῶν λογαρίθμων.

298. Δεκαδικὴ μορφὴ τῶν λογαρίθμων.—Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῶν λογαρίθμων ἕπεται ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ 10 ἔχουν λογαρίθμους συμμέτρους ἀριθμοὺς καὶ εἶναι οὗτοι οἱ ἐκθέται τῶν δυνάμεων τούτων. Δι' ὅλους τοὺς ἄλλους ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοί, ἀλλ' ἀντ' αὐτῶν λαμβάνομεν συμμέτρους ἀριθμούς, κατὰ προσέγγισιν, διὰ τοῦτο δὲ θὰ γράφωμεν *πάντοτε* τοὺς λογαρίθμους ὑπὸ *δεκαδικὴν μορφήν*.

Ἀλλ' ὅταν θὰ πρόκειται περὶ λογαρίθμων τῶν μικροτέρων τῆς μονάδος ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀρνητικοί, *θὰ τρέπωμεν αὐτοὺς εἰς ἄλλους, τῶν ὁποίων μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος θὰ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος θετικόν.*

Ἡ τροπὴ αὕτη γίνεται ὡς ἑξῆς : Ἔστω ὁ ὅλως ἀρνητικὸς λογάριθμος $-3{,}15742$.

Ἔχομεν $-3{,}15742=-3-0{,}15742$. Ἐὰν δὲ προσθέσωμεν εἰς αὐτὸν $+1$ καὶ -1, ὅπερ δὲν τὸν μεταβάλλει, λαμβάνομεν.

$$-3-1+1-0{,}15742=-4+(1-0{,}15742),$$

Ὥστε εἶναι $\quad -3{,}15742=-4+0{,}84258.$

Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀκεραίου ἀρνητικοῦ μέρους -4 καὶ τοῦ δεκαδικοῦ θετικοῦ $0{,}84258$ συμφωνοῦμεν νὰ τὸ γράφωμεν ὡς ἑξῆς : $\bar{4}{,}84258$.

Ὁμοίως ἔχομεν

$$-1{,}37894=-1-1+1-0{,}37894=\bar{2}{,}62106.$$

Ὥστε : *Ἵνα τρέψωμεν λογάριθμον ὅλως ἀρνητικὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, **προσθέτομεν** εἰς τὸ* *ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ τὴν μονάδα —1 καὶ γράφομεν τὸ σημεῖον — ὑπεράνω αὐτοῦ, μετὰ δὲ ταῦτα ἀφαιροῦμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀπὸ τῆς μονάδος 1.*

Τὸ δεκαδικὸν μέρος ἀφαιρεῖται ἀπὸ τῆς μονάδος 1 εὐκόλως, ἐὰν ἀφαιρεθῇ τὸ τελευταῖον σημαντικὸν ψηφίον ἀπὸ τοῦ 10 καὶ ὅλα τὰ ἄλλα ἀπὸ τοῦ 9.

*299. **Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου.**—* Χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου λέγεται τὸ *ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ*. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἀριθμοῦ τινος εὑρίσκεται εὐκολώτατα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν ἑξῆς:

α') Ἔστω ἀριθμός τις μεγαλύτερος τῆς μονάδος 1, π. χ. ὁ 458,24.

Δι' αὐτὸν παρατηροῦμεν, ὅτι

$$100<458{,}24<1000 \quad \text{ἤτοι} \quad 10^2<458{,}24<10^3$$

Ἑπομένως εἶναι καὶ

$$\text{λογ}(10^2)<\text{λογ}458{,}24<\text{λογ}(10)^3$$

ἢ

$$2<\text{λογ}458{,}24<3,$$

ἤτοι ὁ λογάριθμος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 3 καὶ ἑπομένως τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ εἶναι 2, ἤτοι τοῦτο *ἔχει τόσας μονάδας, ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους του ἠλαττωμένα κατὰ 1.*

Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται, ὅτι, *ἂν ἀριθμοῦ τινος Α τὰ ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους εἶναι μ, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου τοῦ Α εἶναι μ—1*, διότι διὰ τὸν δοθέντα ἀριθμὸν Α ἔχομεν

$$10^{\mu-1}<A<10^{\mu}, \quad \text{ἄρα καὶ} \quad (\mu-1)\text{λογ}10<\text{λογ}A<\mu\text{λογ}10$$

Καὶ ἐπειδὴ

$$\text{λογ}10=1$$

ἔχομεν

$$\mu-1<\text{λογ}A<\mu$$

Ἀφοῦ λοιπὸν ὁ λογΑ περιέχεται μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων μ—1 καὶ μ, ἕπεται, ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογΑ εἶναι μ—1.

β') Ἔστω ἤδη εἷς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος, π. χ. ὁ 0,4352. Ἀλλ' οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$0{,}4352=\frac{4{,}352}{10}.$$

Ὥστε εἶναι

$$\text{λογ}0{,}4352=\text{λογ}4{,}352-\text{λογ}10=\text{λογ}4{,}352-1.$$

'Αλλ' ὁ $\lambda o\gamma 4{,}352$ ἔχει χαρακτηριστικὸν 0. Ἐὰν δὲ ὑποτεθῇ, ὅτι τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εἶναι 63869, ἔχομεν

$$\lambda o\gamma 0{,}4352=0{,}63869-1=\overline{1}{,}63869.$$

Ἐὰν δὲ ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς ἦτο ὁ 0,04352, θὰ εἴχομεν

$$0{,}04352=\frac{4{,}352}{100} \quad \text{καὶ} \quad \lambda o\gamma 0{,}04352=\lambda o\gamma 4{,}352-\lambda o\gamma 100=\overline{2}{,}63869.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν, ὅτι: *Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς δεκαδικοῦ κλάσματος ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσας μονάδας ἔχει ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὴν τάξιν τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου μετὰ τὴν ὑποδιαστολήν.*

Οὕτω τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\lambda o\gamma 0{,}004$ εἶναι $\overline{3}$ καὶ τοῦ $\lambda o\gamma 0{,}00053$ εἶναι $\overline{4}$.

300. Ἀνωτέρω εἴδομεν, ὅτι

$$\lambda o\gamma 0{,}04352=\overline{2}{,}63869$$
$$\lambda o\gamma 0{,}4352=\overline{1}{,}63869$$

Ὁμοίως βλέπομεν, ὅτι, ἐὰν

$$\lambda o\gamma 2=0{,}30103,$$

θὰ εἶναι

$$\lambda o\gamma 20=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 10=0{,}30103+1=1{,}30103$$
$$\lambda o\gamma 200=\lambda o\gamma 2+\lambda o\gamma 100=0{,}30103+2=2{,}30103$$
$$\lambda o\gamma\frac{2}{1000}=\lambda o\gamma 2-\lambda o\gamma 1000=0{,}30103-3=\overline{3}{,}30103.$$

Καὶ γενικῶς, ἐὰν εἶναι $\lambda o\gamma A=\chi$, θὰ εἶναι καὶ

$$\lambda o\gamma(10^{\nu}.A)=\lambda o\gamma 10^{\nu}+\lambda o\gamma A=\nu+\chi$$

(ν ἀκέραιος θετικὸς) καὶ

$$\lambda o\gamma\frac{A}{10^{\nu}}=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma 10^{\nu}=-\nu+\chi.$$

Ὥστε: *Ἐὰν εἷς ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ ἢ διαιρεθῇ διὰ 10^{ν}, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν μεταβάλλεται, τὸ χαρακτηριστικὸν ὅμως αὐτοῦ αὐξάνεται ἢ ἐλαττοῦται κατὰ ν μονάδας.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1158) Οἱ κάτωθι ὅλως ἀρνητικοὶ λογάριθμοι νὰ τραποῦν εἰς ἄλλους τῶν ὁποίων τὸ ἀκέραιον μέρος νὰ εἶναι ἀρνητικόν, τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος νὰ εἶναι θετικόν:

$$-1{,}47893, \quad -0{,}37687, \quad -4{,}68090$$

1159) Γράψατε τὸ χαρακτηριστικὸν τῶν λογαρίθμων:

λογ514 λογ1527 λογ15,27 λογ0,544

λογ0,0035 λογ0,058 λογ30007 λογ0,00009.

1160) Δοθέντος ὅτι λογ7=0,84510, εὕρετε τοὺς λογαριθμους τῶν ἀριθμῶν 70, 700, 0,07 0,007.

1161) Δοθέντος, ὅτι λογ5=0,69897, εὕρετε τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν 5.10^3 5.10^4 $\frac{5}{10^2}$ $\frac{5}{10^5}$.

1162) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα:

λογ375 — λογ3,75 λογ15,62—λογ1,562 λογ0,45—λογ4,5

301. Περὶ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.—Εἴδομεν προηγουμένως, ὅτι, πλὴν τῶν ἀριθμῶν 1, 10, 100 κτλ., πάντων τῶν ἄλλων ἀκεραίων οἱ λογάριθμοι εἶναι ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ καὶ ἔχουν διὰ τοῦτο ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά. Καὶ ἕνεκα τούτου εὑρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν τούτων κατὰ προσέγγισιν (συνήθως 0,00001).

Οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 καὶ ἐφεξῆς, συνήθως μέχρι τοῦ 10000, εὑρέθησαν καὶ ἐγράφησαν εἰς πίνακας καλουμένους ***λογαριθμικούς***. Οἱ πίνακες τῶν λογαρίθμων, οἱ ὁποῖοι χρησιμοποιοῦνται συνηθέστερον, περιέχουν λογαρίθμους μετὰ 5 δεκαδικῶν ψηφίων, ὑπάρχουν ὅμως καὶ πίνακες μὲ 4, μὲ 7 ἢ καὶ 12 δεκαδικὰ ψηφία.

Ὡς πρὸς τὴν διάταξιν τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τῶν ἀριθμῶν ἀναφέρομεν τὰ ἑξῆς γενικά:

1) Τὰ χαρακτηριστικὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν δὲν ἀναγράφονται εἰς τοὺς πίνακας, διότι γνωρίζομεν νὰ τὰ εὑρίσκωμεν εὐκολώτατα.

2) τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς σχετικῆς ἀξίας τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

302. Διάταξις τῶν πινάκων.—Αὕτη φαίνεται εἰς τὸν πίνακα τῆς ἑπομένης σελίδος. Εἰς τὴν πρὸς τὰ ἀριστερὰ στήλην, ὅπου τὸ γράμμα Α (ἀριθμὸς) εἶναι γραμμέναι αἱ δεκάδες τῶν ἀριθμῶν, αἱ δὲ μονάδες αὐτῶν εἶναι εἰς τὴν ἄνω ὁριζοντίαν γραμμήν. Εἰς τὰς ἄλλας στήλας εἶναι γραμμένα τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων. Τὰ δύο ψηφία, τὰ ὁποῖα εἰς τὴν δευτέραν στήλην βλέπομεν ὅτι ἐξέχουν, νοοῦνται ἐπαναλαμβανόμενα, μέχρις οὗ ἀλλάξουν. Καὶ τοῦτο, διότι πολλοὶ ἐφεξῆς λογάριθμοι ἔχουν τὰ δύο αὐτὰ ψηφία κοινά. Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εὑρίσκεται εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς σειρᾶς, εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκονται αἱ μονάδες του, εἶναι τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ.

Κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον βλέπομεν, ὅτι εἶναι

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
640	80 618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
1	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
2	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
3	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
4	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
5	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
6	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
7	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
8	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
9	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351

λογ6432=3,80835 λογ6450=3,80956

λογ6458=3,81010 λογ6409=3,80679

Σημείωσις. Ὁ ἀστερίσκος, τὸν ὁποῖον βλέπομεν εἰς τοὺς πενταψηφίους πίνακας, φανερώνει, ὅτι τὰ δύο πρῶτα ψηφία ἤλλαξαν καὶ πρέπει νὰ λαμβάνωνται τὰ ἀμέσως ἑπόμενα.

303. *Χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων.* — Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τοὺς λογαρίθμους, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν νὰ λύωμεν τὰ ἑξῆς δύο προβλήματα:

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ, καὶ

2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον.

304. *1ον Πρόβλημα.* — *Νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος δοθέντος ἀριθμοῦ.* Διὰ τὴν λύσιν τοῦ προβλήματος ὑποθέτομεν πρῶτον, ὅτι ὁ δοθεὶς ἀριθμὸς εἶναι πάντοτε γραμμένος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν, καὶ δεύτερον, ὅτι χρησιμοποιοῦμεν πενταψηφίους πίνακας. Οἱ πίνακες δὲ οὗτοι θὰ μᾶς δώσουν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διότι τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ θὰ τὸ εὕρωμεν μόνοι μας. Ἀλλὰ κατὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ καθιστῶμεν τὸν δοθέντα ἀριθμὸν ἀκέραιον, ἤτοι θὰ παραλείπωμεν τὴν ὑποδιαστολήν. Τοῦτο δέ, ὡς εἴδομεν (§ 300), δὲν μεταβάλλει τὸ ζητούμενον δεκαδικὸν μέρος. Κατόπιν τούτου διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1η Περίπτωσις. — *Ὁ ἀριθμὸς περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας.* Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς δὲν ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων. Τότε, ἀφοῦ εὕρωμεν αὐτὸν εἰς τοὺς πίνακας, εὑρίσκομεν ἀμέσως καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

Οὕτως εἶναι $λογ6843=3,83525$ $\qquad λογ0,8035=\overline{1},90499$

$λογ68,43=1,83525$ $\qquad λογ0,08035=\overline{2},90499$.

Τὸ δὲ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ 3,52 θὰ τὸ εὕρωμεν εἰς τὸν ἀριθμὸν 3520, οὕτω δὲ ἔχομεν

$$λογ3,52=0,54654.$$

2α Περίπτωσις.—Ὁ ἀριθμὸς δὲν περιέχεται εἰς τοὺς πίνακας. Ἤτοι ὁ ἀριθμὸς ἔχει περισσότερα τῶν τεσσάρων ψηφίων. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν πρῶτον τὸ χαρακτηριστικόν. Κατόπιν διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου θὰ χωρίσωμεν τὰ τέσσαρα πρῶτα ψηφία δι' ὑποδιαστολῆς καὶ θὰ ἐργασθῶμεν ἀκολούθως ὡς ἑξῆς:

Ἔστω π. χ. ὁ ἀριθμὸς 24647. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι 4. Κατόπιν γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: 2464,7. Ἀλλ' ὁ ἀριθμὸς 2464,7 περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2464 καὶ 2465. Συνάγομεν λοιπόν, ὅτι καὶ ὁ λογάριθμος αὐτοῦ περιέχεται μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀκεραίων τούτων.

Ἀλλὰ $\qquad λογ2464=3,39164$

$\qquad λογ2465=3,39182$.

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τούτων εἶναι 18 μονάδες τῆς πέμπτης δεκαδικῆς τάξεως. Ἐπειδὴ δὲ δεχόμεθα, ὅτι *ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος τῆς αὐξήσεως τῶν ἀριθμῶν* (καὶ τοῦτο διότι π. χ. ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων γειτονικῶν πρὸς τοὺς ἄνω ἀριθμοὺς εἶναι πάλιν 18), λέγομεν

ἐὰν ὁ 2464 αὐξηθῇ κατὰ 1, ὁ λογ. αὐτοῦ αὐξάνεται κατὰ 18 (ἑ. χ.)

» » 2464 » » 0,7 » » » » » 18. 0,7= =12,6, ἤτοι κατὰ 13 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ἔχομεν λοιπὸν

$$λογ2464,7=3,39164+0,00013=3,39177$$

καὶ κατὰ συνέπειαν $λογ24647=4,39177$.

Ἔστω προσέτι ὁ ἀριθμὸς 0,587984. Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι $\overline{1}$. Ἤδη, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, γράφομεν πρῶτον αὐτὸν ὡς ἑξῆς: 5879,84 καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν $λογ5879=3,76930$.

Ἡ διαφορὰ τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 5879 καὶ 5880 εἶναι 8 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ὥστε, διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν λογ5879,84, πρέπει εἰς τὸν 3,76930 νὰ προσθέσωμεν $8.0,84=6,72$, ἤτοι 7 ἑκατοντάκις χιλιοστά. Ὥστε εἶναι λογ5879,84=3,76937 καὶ λογ0,587984=$\overline{1}$,76937.

305. 2ον Πρόβλημα.—Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς δοθέντα λογάριθμον. Πρὸς τοῦτο θὰ ἀσχοληθῶμεν πρῶτον μὲ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου, διὰ νὰ εὕρωμεν τὰ ψηφία, διὰ τῶν ὁποίων κατὰ σειρὰν γράφεται ὁ ἀριθμός. Ἔπειτα δὲ θὰ ἀσχοληθῶμεν μὲ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐτοῦ, διὰ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν ἀξίαν ἑκάστου ψηφίου. Κατόπιν τούτων διακρίνομεν δύο περιπτώσεις.

1η Περίπτωσις.—Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας. Τότε εὑρίσκομεν ἀμέσως ἀπέναντι τὰ τέσσαρα ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ δεκαδικὸν τοῦτο μέρος. Ζητοῦμεν δὲ τοῦτο πάντοτε μεταξὺ τῶν λογαρίθμων τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν.

Ἔστω π χ. ὁ λογάριθμος 2,59095. Τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ εὑρίσκεται εἰς τοὺς πίνακας. Εἶναι δὲ τοῦ ἀριθμοῦ 3899. Ἐπειδὴ δὲ ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 2, ἕπεται, ὅτι ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς πρέπει νὰ ἔχῃ 3 ἀκέραια ψηφία.

Εἶναι λοιπὸν οὗτος ὁ 389,9 Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι εἰς τὸν λογάριθμον 5,58095 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 389900, εἰς δὲ τὸν λογάριθμον $\overline{2}$,18808 ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς 0,01542.

2α Περίπτωσις —Τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν ὑπάρχει εἰς τοὺς πίνακας. Ἀλλὰ τότε θὰ περιέχεται τοῦτο μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀκεραίων.

Ἔστω π.χ. ὁ λογ4,55575. Τὸ δεκαδικὸν μέρος 55575 περιέχεται μεταξὺ τῶν δεκαδικῶν μερῶν 55570 καὶ 55582 τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν 3595 καὶ 3596. Ἀλλὰ παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν τούτων διαφέρουν κατὰ 12 (ἑκατοντάκις χιλιοστά), ὁ δὲ λογάριθμος τοῦ 3595 ἀπὸ τοῦ δοθέντος διαφέρει κατὰ 5 (ἑκατοντάκις χιλιοστά). Ἐπειδὴ δὲ καὶ τώρα δεχόμεθα, ὅτι ἡ αὔξησις τῶν λογαρίθμων εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν αὔξησιν τῶν ἀριθμῶν, λέγομεν: Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐξηθῇ κατὰ 12, ὁ ἀριθμὸς αὐξάνει κατὰ 1. Ἐὰν τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου αὐξηθῇ κατὰ 5, ὁριθμὸς αὐξάνει κατὰ $\frac{1.5}{13}=0,416=0,42$.

Ὥστε ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου ὁ λογάριθμος ἔχει δεκαδικὸν μέρος τὸ 55575, εἶναι ὁ 3595+0,42=3595,42.

Ἀλλ' ἐπειδὴ ὁ δοθεὶς λογάριθμος ἔχει χαρακτηριστικὸν 4, ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ 35954,2.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι ὁ ἀριθμός, ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν λογάριθμον $\overline{1}$,95094, εἶναι ὁ 0,89318.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἐὰν δοθῇ λογάριθμος ὅλως ἀρνητικός, τρέπομεν αὐτὸν εἰς ἄλλον, τοῦ ὁποίου μόνον τὸ χαρακτηριστικὸν νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1163) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν

52	407	31,50	4,568
47245	483,743	0,46579	0,0684555

1164) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τοὺς λογαρίθμους.

3,76571	2,93034	5.03941	$\overline{1},97007$
3,94722	4,47239	$\overline{2},95416$	$\overline{3},02050$

Παραδείγματα λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων.

1) ***Πρόσθεσις.***—Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων $\overline{4},78345$ καὶ 5,86592.

$$\begin{array}{r} \overline{4},78345 \\ 5,86592 \\ \hline 2,64937 \end{array}$$

Θὰ ἀρχίσωμεν τὴν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν καὶ ἀφοῦ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα, θὰ εὕρωμεν 16 δέκατα, ἤτοι 1 θετικὴν ἀκεραίαν μονάδα καὶ 6 δέκατα. Κατόπιν δὲ θὰ εὕρωμεν

$$1+5=6 \quad \text{καὶ} \quad 6+\overline{4}=2.$$

Ὥστε τὸ ἄθροισμα εἶναι 2,64937.

2) ***Ἀφαίρεσις.***—Νὰ γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις $\overline{1},57345-2,63459=\overline{4},93886$.

$$\begin{array}{r} \overline{1},57345 \\ 2,63459 \\ \hline \overline{4},93886 \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δεκάτων, θὰ εἴπωμεν 6 ἀπὸ 15=9, 1 τὸ κρατούμενον καὶ 2=3. Διὰ νὰ ἀφαιρέσωμεν ἤδη τὸ 3 ἀπὸ τὸ —1 προσθέτομεν εἰς τὸ —1 τὸ —3 καὶ εὑρίσκομεν —4· ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι $\overline{4},93886$.

Ὁμοίως διὰ τὴν διαφορὰν $2,48593-\overline{4},53284=5,95309$.

$$\begin{array}{r} 2,48593 \\ \overline{4},53284 \\ \hline 5,95309 \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα, θὰ εἴπωμεν 5 ἀπὸ 14=9. 1

τὸ κρατούμενον καὶ $\overline{4}=-3$. Ἤδη τὸ -3 ἀφαιρούμενον γίνεται $+3$ καὶ $2=5$. ὥστε ἡ ζητουμένη διαφορὰ εἶναι 5,95309.

3) ***Πολλαπλασιασμός***.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ πολλαπλασιάσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{3},81257$ ἐπὶ 4

$$\begin{array}{r} \overline{3},81257 \\ 4 \\ \hline \overline{9},25028 \end{array}$$

Ὅταν θὰ φθάσωμεν εἰς τὰ δέκατα θὰ εἴπωμεν 8 ἐπὶ $4=32$. Γράφομεν 2 καὶ κρατοῦμεν 3. Ἔπειτα θὰ εἴπωμεν -3 ἐπὶ $4=-12$. -12 καὶ $+3=-9$. Ὥστε τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι $\overline{9},25028$.

4) ***Διαίρεσις***.—Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{1},53128$ διὰ 4. Πρὸς τοῦτο προσθέτομεν -3 εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν διὰ νὰ γίνῃ διαιρετὸν διὰ 4. Ἀλλὰ διὰ νὰ μὴ ἀλλάξῃ ἡ ἀξία τοῦ δοθέντος λογαρίθμου προσθέτομεν εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος αὐτοῦ $+3$, γράφομεν δηλαδὴ τὸν δοθέντα λογάριθμον ὡς ἑξῆς: $\overline{4}+3,53128$ καὶ διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν του χωριστὰ διὰ 4, εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον $\overline{1},88282$.

Ὁμοίως διὰ νὰ διαιρέσωμεν τὸν λογάριθμον $\overline{4},15703$ διὰ 3, γράφομεν αὐτὸν ὡς ἑξῆς: $\overline{6}+2,15703$ καὶ ἔπειτα διαιροῦμεν ἕκαστον τῶν μερῶν χωριστὰ διὰ 3. Εὑρίσκομεν δὲ πηλίκον $\overline{2},71901$.

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον 35,32.0,7508.

Ἔστω χ τὸ ζητούμενον γινόμενον· ἐφαρμόζοντες ὅμως τὴν πρώτην ἰδιότητα τῶν λογαρίθμων ἔχομεν:

λογχ=λογ.35,32+λογ0,7508

$$\begin{array}{r} \text{λογ}35,32=1,54802 \\ \text{λογ}0,7508=\overline{1},87552 \\ \hline \text{λογχ}=1,42354 \end{array}$$

Ἀλλ' ὁ πρὸς τὸν λογάριθμον 1,42354 ἀντιστοιχῶν ἀριθμὸς εἶναι 26,518, ἤτοι χ=26,518, κατὰ προσέγγισιν 0,001.

6) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον ψ=853,54 : 195,817.

Ἔχομεν λογψ=λογ853,54—λογ195,817

$$\begin{array}{r} \text{λογ}853,54=2,93122 \\ \text{λογ}195,817=2,29185 \\ \hline \text{λογψ}=0,63937 \end{array}$$

καὶ ψ=4,3588 (προσ. 0,0001)

7) Νὰ εὑρεθῇ ἡ δύναμις $\chi=(1,05)^{20}$.

Ἔχομεν λογχ=20λογ1,05

$$\begin{array}{rr} & \lambda o\gamma 1{,}05 = 0{,}02119 \\ \text{ἐπὶ} & 20 \\ \hline & \lambda o\gamma \chi = 0{,}42380 \end{array}$$

Ἐπειδὴ δὲ ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ 1,05 δύναται νὰ διαφέρῃ ἀπὸ τὸν ὑπάρχοντα ἐν τῷ πίνακι κατὰ ἡμίσειαν μονάδα τῆς τελευταίας τάξεως, ἕπεται ὅτι ὁ εὑρεθεὶς λογάριθμος τοῦ $(1{,}05)^{20}$ δύναται νὰ διαφέρῃ τοῦ ἀληθοῦς κατὰ 10 μονάδας τῆς αὐτῆς τάξεως. Ἑπομένως ὁ ἀληθὴς λογάριθμος τοῦ $(1.05)^{20}$ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,42370 καὶ τοῦ 0,42390, ἄρα, ὡς φαίνεται ἐκ τῶν πινάκων, ἡ ζητουμένη δύναμις περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 2,652 καὶ 2,654. Ἐκ τούτου ἕπεται ὅτι ἡ ζητουμένη δύναμις εἶναι $\chi = 2{,}653$ (προσ. 0,001).

8) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi = \sqrt[3]{120^2}$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\psi = \frac{2}{3}\lambda o\gamma 120$

$$\begin{array}{lr} & \lambda o\gamma 120 = 2{,}07918 \\ \text{ἐπὶ} & \frac{2}{3} \\ \hline & \lambda o\gamma\psi = 1{,}38612 \\ \text{καὶ} & \psi = 24{,}329 \end{array}$$

9) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\psi = \sqrt[5]{0{,}854}$.

Λαμβάνομεν $\lambda o\gamma\,\psi = \frac{1}{5}\,\lambda o\gamma 0{,}854$

$$\begin{array}{lr} & \lambda o\gamma 0{,}854 = \overline{1}{,}93146 \\ \text{ἐπὶ} & \frac{1}{5} \\ \hline & \lambda o\gamma\psi = \overline{1}{,}98629 \end{array}$$

$$\text{καὶ } \psi = \sqrt[5]{0{,}854} = 0{,}968925.$$

10) Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράστασις $\chi = \dfrac{(\sqrt{28})^3 \cdot \sqrt[5]{53}}{8993}$.

Ἔχομεν $\lambda o\gamma\chi = \frac{3}{2}\,\lambda o\gamma 28 + \frac{1}{5}\,\lambda o\gamma 53 - \lambda o\gamma 8993.$

Διάταξις τῶν πράξεων

$λογ28=1,44716$	$\frac{3}{2}$ $λογ28=2,17074$
$λογ53=1,72428$	$\frac{1}{5}$ $λογ53=0,34486$
	ἄθροισμα $2,51560$
$λογ8993=3,95390$	ἀφαιρεῖται $3,95390$
	ὑπόλοιπον $\overline{2},56170$
καὶ $χ=0,03645$	

Σημείωσις. Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα ἀρκοῦν διὰ νὰ δείξουν τὴν ὠφέλειαν τοῦ λογισμοῦ διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι διὰ τῶν ἰδιοτήτων τῶν λογαρίθμων κατορθώνομεν νὰ ἀνάγωμεν τὰς πράξεις ἐπὶ τῶν ἀριθμῶν εἰς ἄλλας ἁπλουστέρας, ἤτοι τὸν πολλαπλασιασμὸν εἰς πρόσθεσιν, τὴν διαίρεσιν εἰς ἀφαίρεσιν, τὴν ὕψωσιν εἰς δυνάμεις εἰς πολλαπλασιασμὸν καὶ τὴν ἐξαγωγὴν τῶν ριζῶν εἰς διαίρεσιν, χρησιμοποιοῦντες προς τοῦτο τοὺς πίνακας τῶν λογαρίθμων. Οὕτω δι' αὐτῶν ἐκτελοῦνται πράξεις, αἱ ὁποῖαι, ὡς εἴπομεν καὶ προηγουμένως θὰ ἦσαν μακρόταται καὶ ἐπιπονώταται.

Ὅταν αἱ παραστάσεις εἶναι ἄθροισμα μονωνύμων ἢ διαφορά, οἱ λογάριθμοι ἐφαρμόζονται μετὰ δυσκολίας· π.χ. εἰς τὴν παράστασιν $36α^2—49β^2$. Διότι εἰς αὐτὴν πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον χωριστὰ τὰ μονώνυμα $36α^2$ καὶ $49β^2$ καὶ ἔπειτα ὅλην τὴν παράστασιν. Οὕτω δὲ ἔχομεν περισσοτέρας πράξεις νὰ κάμωμεν. Ἐκτὸς δὲ τούτου καὶ τὸ ἐξαγόμενον δὲν εἶναι πολὺ ἀκριβές. Διὰ τοῦτο, ἐὰν εἶναι δυνατόν, μετασχηματίζομεν τὴν δεδομένην παράστασιν εἰς μονώνυμον, τὸ ὁποῖον εἶναι λογιστὸν διὰ τῶν λογαρίθμων. Οὕτω τὴν ἄνω παράστασιν μετασχηματίζομεν εἰς τὴν $(6α+7β)(6α—7β)$ Ἐπειδὴ δὲ τὸ α καὶ β ὑποτίθενται δεδομένα, εὑρίσκομεν τοὺς παράγοντας $6α+7β$ καὶ $6α—7β$ καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τοὺς λογαρίθμους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1165) Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαρίθμων αἱ παραστάσεις:

$9,814.0,0625$	$898.9.0,05377$	$\frac{0,8948}{3,155}$	$\frac{0,7469}{0,6743}$
$(1,04)^{80}$,	$(0\ 034)^{4}$	$\left(\frac{109}{83}\right)^{6}$	$\left(\frac{81}{67}\right)^{9}$
$\sqrt{719}$	$\sqrt[3]{14}$	$\sqrt{0,374}$	$\sqrt[3]{0,00478}$
$19^{\frac{2}{3}}$	$28^{\frac{1}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{42,5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2,144}}$

1166) Νά ὑπολογισθοῦν ὁμοίως αἱ παραστάσεις

$$\frac{69(32{,}5)^2}{0{,}31} \qquad \frac{20\sqrt[4]{15}}{0{,}04} \qquad \frac{23}{29}\sqrt[7]{\frac{0{,}25}{0{,}15}} \qquad \frac{\sqrt[3]{23}\cdot\sqrt[4]{5^6}}{142}$$

1167) Νὰ εὑρεθῇ ὁ 21ος ὅρος τῆς γεωμετρικῆς προόδου

$$3, \quad 15, \quad 75, \quad 375\ldots$$

1168) Ὁμοίως νὰ εὑρεθῇ ὁ 25ος ὅρος τῆς προόδου

$$1, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{4}{9}, \quad \frac{8}{27}\ldots$$

1169) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, οὗ αἱ τρεῖς πλευραί εἶναι $\alpha=18{,}20$. $\beta=22{,}50$, $\gamma=36{,}24$ $(E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, ὅπου τ εἶναι ἡ ἡμιπερίμετρος τοῦ τριγώνου.

Ἀνατοκισμός.

306.—Εἰς τὴν ἀριθμητικὴν εἴδομεν τί λέγεται τόκος, τί ἐπιτόκιον καὶ τί κεφάλαιον. Εἴδομεν δὲ ἐπίσης, ὅτι, ὅταν τὸ κεφάλαιον μένῃ τὸ αὐτὸ καθ' ὅλην τὴν διάρκειαν τοῦ δανείου, ὁ τόκος λέγεται *ἁπλοῦς*.

Ἀλλὰ πολλάκις ὁ τόκος ἑκάστης χρονικῆς μονάδος, π. χ. ἑνὸς ἔτους, καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτῆς προστίθεται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελεῖται οὕτω νέον κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὴν ἑπομένην χρονικὴν μονάδα.

Ἡ πρόσθεσις τοῦ τόκου εἰς τὸ κεφάλαιον, ἤτοι ἡ κεφαλαιοποίησις τοῦ τόκου λέγεται, *ἀνατοκισμός*, ὁ δὲ τόκος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ἀπὸ τὸν ἀνατοκισμόν, λέγεται *σύνθετος*.

307. ***Πρόβλημα.***—*Κεφάλαιον α δραχμῶν, ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη, ἐὰν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ ;*

Ἀφοῦ ὁ τόκος τῆς 1 δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ., ὁ τόκος τῶν α δραχμῶν εἰς ἓν πάλιν ἔτος εἶναι ατ. Ὥστε τὸ ἀρχικὸν κεφάλαιον α εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha+\alpha\tau$ ἢ $\alpha(1+\tau)$, ἤτοι τὸ κεφάλαιον, τὸ ὁποῖον τοκίζεται κατὰ τὸ δεύτερον ἔτος, εἶναι $\alpha(1+\tau)$. Ὥστε αἱ $\alpha(1+\tau)$ δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς ἓν ἔτος, τόκον $\alpha(1+\tau)\tau$. Ἑπομένως τὸ κεφάλαιον εἰς τὸ τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ.

$$\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)\tau \quad \text{ἢ} \quad \alpha(1+\tau)(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^2.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω βλέπομεν λοιπόν, ὅτι *ἡ ἀξία οἱουδήποτε κεφαλαίου μετὰ ἓν ἔτος εὑρίσκεται, ἐὰν πολλαπλασιασθῇ τοῦτο ἐπὶ (1+τ).*

Κατὰ ταῦτα εἰς τὸ τέλος τοῦ τρίτου ἔτους τὸ κεφάλαιον θὰ γίνῃ

$$\alpha(1+\tau)^2.(1+\tau)=\alpha(1+\tau)^3$$

καὶ γενικῶς εἰς τὸ τέλος τοῦ νυοστοῦ ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^\nu$. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Κ τὴν ἀξίαν τοῦ δανείου, εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν

$$K=\alpha(1+\tau)^{\nu} \qquad (1).$$

Φανερὸν δὲ ὅτι ἡ αὐτὴ προκύπτει ἐξίσωσις καὶ ὅταν ὁ ἀνατοκισμὸς συμβαίνῃ οὐχὶ κατ' ἔτος, ἀλλὰ κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα οἱαδήποτε, π. χ. κατὰ ἑξάμηνα, τρίμηνα κτλ., ἀρκεῖ νὰ παρασταθῇ διὰ τοῦ τ ὁ τόκος τῆς δραχμῆς εἰς ἓν τῶν διαστημάτων τούτων καὶ διὰ τοῦ ν τὸ πλῆθος τῶν ἑξαμήνων, τριμήνων κτλ.

Ἡ ἐξίσωσις (1) βλέπομεν ὅτι περιέχει τέσσαρα ποσά, τὰ Κ, α, τ καὶ ν· ὅταν δὲ ἐκ τῶν τεσσάρων αὐτῶν ποσῶν γνωρίζωμεν τὰ τρία, εὑρίσκομεν τὸ τέταρτον λύοντες τὴν ἐξίσωσιν (1). Γίνεται δὲ τοῦτο εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων, διότι λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma\alpha+\nu\lambda o\gamma(1+\tau) \qquad (1').$$

308. Προβλήματα ἀνατοκισμοῦ.—1ον) *Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον 30000 δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 8 %. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 12 ἔτη;*

Ἔχομεν $\nu=12,\quad \alpha=30000,\quad \tau=0{,}08.$

Ὅθεν ὁ τύπος (1') γίνεται

$$\lambda o\gamma K=\lambda o\gamma 30000+12\lambda o\gamma(1{,}08)$$

$$\lambda o\gamma 30000=4{,}47712$$

$$\lambda o\gamma(1{,}08)=0{,}03342 \qquad 12\lambda o\gamma(1{,}08)=0{,}40104$$

$$\lambda o\gamma K=4{,}87816$$

$$\text{καὶ } K=75536{,}7.$$

2ον) *Πόσας δραχμὰς πρέπει νὰ δανείσῃ τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6%, ἵνα λάβῃ μετὰ 15 ἔτη 60000;*

Ἔχομεν $K=60000,\quad \tau=0{,}06,\quad \nu=15,$

Ὅθεν ἕπεται ἐκ τοῦ τύπου (1')

$$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 60000-15\lambda o\gamma(1{,}06)$$

$$\lambda o\gamma 60000=4{,}77815$$

$$\lambda o\gamma(1{,}06)=0{,}02531 \qquad 15\lambda o\gamma(1{,}06)=0{,}37965$$

$$\lambda o\gamma\alpha=4{,}39850$$

$$\alpha=25032{,}4$$

3ον) *Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον 40000 δρχ. ἀνατοκιζόμεναι ἐπὶ 20 ἔτη ἔγιναν 87632;*

Ἔχομεν $\nu=20,\quad K=87632,\quad \alpha=40000$

Ὅθεν

$$\lambda o\gamma(1+\tau)=\frac{1}{20}(\lambda o\gamma 87632-\lambda o\gamma 40000)$$

$$\lambda o\gamma 87632=4{,}94266$$

$$\lambda o\gamma 40000=4{,}60206$$

$$\text{διαφορὰ}=0{,}34060$$

$\frac{1}{20}$ τῆς διαφορᾶς ἢ $\quad log(1+τ)=0,01703$

$$(1+τ)=1,04$$

ὅθεν $\quad τ=0,04$

καὶ τὸ ἐπιτόκιον 100τ εἶναι 4 %.

4ον) Μετὰ πόσα ἔτη κεφάλαιον 40000 δρχ. ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4,5 % γίνεται 67841,6 ;

Ὁ τύπος (1′) δίδει

$$ν=\frac{λογ67841{,}6-λογ40000}{λογ1{,}045}$$

Ἔχομεν

$$λογ67841{,}6=4{,}83150$$
$$λογ40000=4{,}60206$$

διαφορὰ $\quad =0{,}22944$

$$λογ1{,}045=0{,}01912$$

Ὥστε $\quad ν=\frac{0{,}22944}{0{,}01912}=\frac{22944}{1912}=12$ ἔτη

5ον) Μετὰ πόσα ἔτη 12589 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι πρὸς **5%** *γίνονται 45818 ;*

Ὁ τύπος (1′) δίδει

$$ν=\frac{λογ45818-λογ12589}{λογ(1{,}05)}$$

Ἔχομεν

$$λογ45818=4{,}66104$$
$$λογ12589=4{,}09999$$

διαφορὰ $\quad =0{,}56105$

$$λογ(1.05)=0{,}02119$$

καὶ $\quad ν=\frac{0{,}56105}{0{,}02119}=\frac{56105}{2119}=26$ ἔτη καί τι πλέον.

Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὸ μέρος τοῦ 27ου ἔτους, θὰ εὕρωμεν πρῶτον τί γίνονται αἱ 12589 δραχμαὶ εἰς τὸ τέλος τοῦ 26ου ἔτους. Εὑρίσκομεν δέ, ὅτι $12589.(1{,}05)^{26}=44764$.

Ὥστε αἱ 44764 δραχμαὶ διὰ τὸν ὑπόλοιπον χρόνον φέρουν ἁπλοῦν τόκον 45818—44764=1054 δραχμάς. Κατόπιν τούτου εὑρίσκομεν τὸν χρόνον διὰ τοῦ γνωστοῦ τύπου τοῦ ἁπλοῦ τόκου

$$χ=\frac{1054.36000}{44764\ 5}=172 \text{ ἡμέραι.}$$

Σημείωσις. Ἐν τῇ πράξει πρὸς εὐκολίαν γίνεται συνήθως τὸ ἑξῆς: Ἡ ἄνω διαίρεσις $\frac{56105}{2119}$ μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου 26 δίδει ὑπόλοιπον 1011. Λαμβάνομεν δὲ ὡς τὸν ζητούμενον χρόνον 26 ἔτη καὶ $\frac{1011}{2119}$ τοῦ ἔτους, τὸ ὁποῖον τρέπομεν εἰς μῆνας καὶ ἡμέρας. Εὑρίσκομεν δὲ 5 μῆνας καὶ 22 περίπου ἡμέρας, ἤτοι 172 ἡμέρας. Εἰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον, διαφέρει τοῦ ἀκριβοῦς πολὺ ὀλίγον.

6ον) *Κεφάλαιον 4000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται καθ' ἑξάμηνον. Τί γίνεται μετὰ 15 ἔτη ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 4 %;*

Εἰς τὸ πρόβλημα τοῦτο εἶναι

$$\nu=15.2=30 \quad \text{καὶ} \quad \tau=\frac{0{,}04}{2}=0{,}02.$$

Ἔχομεν λοιπὸν $K=4000.(1.02)^{30}$.

Εὑρίσκομεν δὲ διὰ τῶν λογαρίθμων, ὅτι

$K=7245{,}50$ δραχμαί.

309. *Οἱ τύποι τοῦ ἀνατοκισμοῦ ἐφαρμόζονται καὶ εἰς ζητήματα πληθυσμοῦ.* — *Π. χ. ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως εἶναι α, αὐξάνει δὲ οὗτος κατὰ 3 % ἐτησίως. Πόσος θὰ εἶναι μετὰ ν ἔτη;*

Ἐὰν συλλογισθῶμεν ὡς εἰς τὸ πρόβλημα τῆς παραγράφου 307 εὑρίσκομεν, ὅτι $K=\alpha(1{,}03)^{\nu}$.

310. *Πρόβλημα.* — *Εἰς μίαν πόλιν, ἡ κατ' ἔτος αὔξησις τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι 8 ‰. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς αὐτῆς θὰ διπλασιασθῇ;*

Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς εἶναι α, θὰ ἔχωμεν $K=2\alpha$. Εἶναι δὲ καὶ $\tau=0{,}008$. Ἔχομεν λοιπὸν

$$2\alpha=\alpha(1{,}008)^{\nu} \qquad 2=(1{,}008)^{\nu}.$$

Ὥστε $\quad \lambda o\gamma 2=\nu \lambda o\gamma 1{,}008$

καὶ $\quad \nu=\frac{\lambda o\gamma 2}{\lambda o\gamma 1{,}008}=\frac{0{,}30103}{0{,}00346}$, ἤτοι $\nu=87$ ἔτη.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

1170) Εἰς ποῖον ποσὸν θὰ ἀνέλθουν τὰ κάτωθι κεφάλαια, ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος:

1) 25000 δραχμῶν	πρὸς	4 %	ἐπὶ 20 ἔτη;
2) 10000	»	4,5 %	» 10 »
3) 7300	»	» $6\frac{1}{2}$ %	» 15 »
4) 100 λιρῶν	»	$4\frac{1}{5}$ %	» 18 »

1171) Κατὰ τὴν ἡμέραν τῆς γεννήσεως τοῦ τέκνου του κατέθεσέ τις εἰς τὸ ταμιευτήριον 12500 δραχμάς, τὰς ὁποίας ἀφῆκεν ἀνατοκιζομένας κατ' ἔτος πρὸς 4 % ἐπὶ 21 ἔτη. Πόσας δραχμὰς θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ἐτῶν τούτων;

1172) Μία πόλις ἔχει πληθυσμὸν 20000 κατοίκων. Αὐξάνει δὲ οὗτος κατὰ 7 ‰ κατ' ἔτος. Πόσος θὰ γίνῃ μετὰ 25 ἔτη;

1173) Κεφάλαιον 50000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται καθ' ἑξάμηνον. Πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 10 ἔτη, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;

1174) Ποῖα κεφάλαια πρέπει νὰ καταθέσῃ τις ἐπὶ ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος, ἵνα λάβῃ;

1) 6500 δραχ. μετὰ 10 ἔτη τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 %;

2) 25000 » » 5 » » » 4,5 %!

4) 37675 » » 15 » » » » 4 %;

1175) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ ἀνατοκισθῇ κατ' ἔτος κεφάλαιο 24850 δραχμῶν, ἵνα μετὰ 12 ἔτη γίνῃ 50000 δραχμαί;

1176) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος διπλασιάζεται μετὰ 15 ἔτη;

1177) Μετὰ πόσα ἔτη 7000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς 5 % γίνονται 9850 δραχμαί;

1178) Μετὰ πόσον χρόνον 35000 δραχμαὶ ἀνατοκιζόμεναι κατ' ἔτος πρὸς $6\frac{1}{2}$ % γίνονται 60000 δραχμαί;

1179) Μετὰ πόσον χρόνον κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 4 % ἢ (4.50 %) διπλασιάζεται καὶ μετὰ πόσον χρόνον ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος πρὸς 6 % τριπλασιάζεται;

1180) Κεφάλαιον 15000 δραχμῶν ἀνατοκίζεται κατ' ἔτος πρὸς 5 %. Εἰς ποῖον ποσὸν θὰ ἀνέλθῃ, ἐὰν ὁ χρόνος εἶναι 6 ἔτη καὶ 9 μῆνες;

1181) Ἐὰν ὁ πληθυσμὸς τόπου τινὸς αὐξάνεται κατ' ἔτος πρὸς 5 ‰ αὐτοῦ καὶ εἶναι σήμερον 2000000, πόσον θὰ γίνῃ μετὰ 100 ἔτη;

1182) Εἰς μίαν πόλιν αἱ γεννήσεις ἀνέρχονται κατ' ἔτος εἰς 44 ‰ ἐπὶ τοῦ πληθυσμοῦ, οἱ δὲ θάνατοι εἰς 19 ‰. Μετὰ πόσα ἔτη ὁ πληθυσμὸς τῆς πόλεως θὰ εἶναι ηὐξημένος κατὰ τὸ ἥμισυ τοῦ πληθυσμοῦ τῆς σήμερον;

311. Προβλήματα ἴσων καταθέσεων.—*Ἐὰν εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους καταθέτῃ τις εἰς τράπεζαν τὸ αὐτὸ ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ ν ἔτη, ὅταν ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ;*

Ἡ πρώτη κατάθεσις τῶν α δραχμῶν θὰ γίνῃ μετὰ ν ἔτη $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἡ δευτέρα κατάθεσις ἡ γενομένη εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-1}$, διότι ἐπὶ (ν—1) ἔτη θὰ ἀνατοκισθῇ. Ἡ τρίτη κατάθεσις θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)^{\nu-2}$ κ.ο.κ. Τέλος ἡ τελευταία κατάθεσις θὰ τοκισθῇ ἐπὶ 1 ἔτος καὶ θὰ γίνῃ $\alpha(1+\tau)$.

Ὥστε, ἐὰν διὰ τοῦ Σ παραστήσωμεν τὸ ποσόν, ὅπερ θὰ λάβῃ εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ εἶναι

$$\Sigma=\alpha(1+\tau)+\alpha(1+\tau)^2+\alpha(1+\tau)^3+\ldots+\alpha(1+\tau)^{\nu},$$

ἤτοι
$$\Sigma=\alpha.\frac{(1+\tau)^{\nu+1}-\alpha(1+\tau)}{1+\tau-1}=\frac{\alpha(1+\tau)[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}.$$

Ἵνα ὑπολογίσωμεν τὴν παράστασιν ταύτην διὰ τῶν λογαρίθμων, πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὴν δύναμιν $(1+\tau)^{\nu}$ καὶ νὰ ἐλαττώσωμεν ἔπειτα αὐτὴν κατὰ μονάδα· τὸ δὲ ὑπόλοιπον νὰ θέσωμεν εἰς τὴν παράστασιν ἀντὶ τοῦ παράγοντος $(1+\tau)^{\nu}_{\nu}-1$ καὶ νὰ ἐφαρμόσωμεν ἐπ᾽ αὐτῆς τοὺς λογαρίθμους.

Σημείωσις α'. Τὰς δυνάμεις $(1+\tau)^{\nu}$ διὰ $\tau=0{,}03\ldots\tau=0{,}06$ καὶ διὰ $\nu=1,2\ldots50$ ἔχουν οἱ πίνακες, λογαρίθμων Χ. Μπαρμπαστάθη εἰς σελ. 133. Ὥστε δυνάμεθα νὰ λαμβάνωμεν αὐτὰς ἐκεῖ.

Σημείωσις β'. Ἐὰν αἱ καταθέσεις τοῦ ἄνω προβλήματος γίνωνται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, θὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον αὐτοῦ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον. Ἡ διαφορὰ εἶναι, ὅτι ἑκάστη κατάθεσις θὰ ἀνατοκίζεται τώρα ἐπὶ ἓν ἔτος ὀλιγώτερον. Οὕτως ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ ἀνατοκισθῇ ἐπὶ $\nu-1$ ἔτη, ἡ δευτέρα ἐπὶ $\nu-2$ ἔτη κλπ. Ἡ δὲ τελευταία κατάθεσις θὰ μείνῃ α. Ἂν λοιπὸν παραστήσωμεν διὰ Σ' τὸ ζητούμενον, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma'=\frac{\alpha(1+\tau)^{\nu}-\alpha}{1+\tau-1} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma'=\frac{\alpha[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}.$$

Παράδειγμα 1ον. — *Καταθέτει τις εἰς τράπεζαν εἰς τὴν ἀρχὴν ἑκάστου ἔτους 1000 δραχμὰς ἐπὶ ἀνατοκισμῷ πρὸς 6 %. Πόσα θὰ ἔχῃ νὰ λάβῃ μετὰ 20 ἔτη;*

Ἔχομεν $\alpha=1000$ $\tau=0{,}06$ καὶ $\nu=20$.

Ὥστε εἶναι $$\Sigma=\frac{1000.1{,}06[(1{,}06)^{20}-1]}{0{,}06} \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Μπαρμπαστάθη σελὶς 133) $(1{,}06)^{20}=3{,}20713$, ἔπεται ὅτι

$$\lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 1000+\lambda o\gamma(1{,}06)+\lambda o\gamma(2{,}20713)-\lambda o\gamma(0{,}06).$$

$$\begin{array}{r}
\gamma o\gamma 1000=3 \\
\lambda o\gamma(1{,}06)=0{,}0\ 531 \\
\lambda o\gamma(2.20713)=0{,}34383 \\
\hline
\text{ἄθροισμα}=3{,}36914 \\
\lambda o\gamma(0{,}06)=\overline{2}.77815 \\
\hline
\text{ὑπόλοιπον}=\lambda o\gamma\Sigma=4{,}59099 \\
\text{καὶ}\ \Sigma=38993{,}6
\end{array}$$

Σημείωσις. Τὴν παράστασιν (1) δυνάμεθα προηγουμένως νὰ καταστήσωμεν ἁπλουστέραν. Θὰ ἔχωμεν δὲ οὕτω

$$\Sigma=\frac{106000.2{,}20713}{6} \text{ καὶ } \lambda o\gamma\Sigma=\lambda o\gamma 106000+\lambda o\gamma(2{,}20713)-\lambda o\gamma 6.$$

$$\begin{array}{r}
\lambda o\gamma 106000=5{,}02531 \\
\lambda o\gamma(2{,}20713)=0{,}34383 \\
\hline
\text{ἄθροισμα}=5{,}36914 \\
\lambda o\gamma 6=0{,}77815 \\
\hline
\lambda o\gamma\Sigma=4{,}59099 \text{ κτλ.}
\end{array}$$

***Παράδειγμα 2ον.**—Τί ποσὸν πρέπει νὰ καταθέτη τις ἐπ' ἀνατοκισμῷ εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους πρὸς 5 %, ἵνα μετὰ 15 ἔτη ἔχη 100000 δραχμάς ;*

Ἔχομεν $\Sigma'=100000$, $\tau=0{,}05$ καὶ $\nu=15$

ὥστε εἶναι $$100000=\frac{\alpha[(1{,}05)^{15}-1]}{0{,}05}$$

ἤτοι $$\alpha=\frac{0{,}05.100000}{(1{,}05)^{15}-1}$$

Ἐπειδὴ εἰς τοὺς πίνακας Μπαρμπαστάθη εὑρίσκομεν
$$(1{,}05)^{15}=2{,}0789$$

ἔχομεν $\alpha=\dfrac{5000}{1{,}0789}$ καὶ $\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 5000-\lambda o\gamma 1{,}0789$.

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma 5000 &= 3{,}69897 \\ \lambda o\gamma 1{,}0789 &= 0{,}03298 \\ \hline \lambda o\gamma \alpha &= 3{,}66599 \\ \text{καὶ}\quad \alpha &= 4634{,}3 \end{aligned}$$

Χρεωλυσία.

312. Συνήθως τὰ σχετικῶς μεγάλα δάνεια, τῶν ὁποίων ἡ διάρκεια εἶναι μᾶλλον μακρά, ἐξοφλοῦνται δι' ἴσων δόσεων, αἱ ὁποῖαι πληρώνονται κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα, π.χ. ἐτήσια, ἑξάμηνα, τρίμηνα κλπ.

Τὸ ποσὸν τὸ ὁποῖον πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου χρονικοῦ διαστήματος λέγεται *χρεωλύσιον*.

313. ***Πρόβλημα.**—Ἔστω, ὅτι ἐδανείσθη τις ἓν ποσὸν α δραχμῶν ἐπ' ἀνατοκισμῷ, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξοφλήσῃ διὰ ν ἐτησίων δόσεων. Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ὅταν ὁ τόκος ἑκάστης δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος εἶναι τ ;*

Ἐὰν τὸ ποσὸν τῶν α δραχμῶν ἐπρόκειτο νὰ πληρωθῇ μετὰ τῶν τόκων του διὰ μιᾶς εἰς τὸ τέλος τῶν ν ἐτῶν, θὰ ἐχρειάζοντο δραχμαὶ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἀλλ' ἐπειδὴ θὰ ἐξοφληθῇ χρεωλυτικῶς, εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων των πρέπει νὰ ἀποτελέσῃ ποσότητα ἴσην μὲ $\alpha(1+\tau)^{\nu}$. Ἀλλ' ἐὰν διὰ χ παραστήσωμεν τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον, τὸ ὁποῖον, ὡς εἴπομεν προηγουμένως, πληρώνεται εἰς τὸ τέλος ἑκάστου ἔτους, θὰ ἔχωμεν ἄθροισμα τῶν ν χρεωλυσίων μετὰ τῶν συνθέτων τόκων των, κατὰ τὴν σημείωσιν β' τοῦ προβλήματος 311, ἴσον μὲ
$$\frac{\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau}$$

Ὡς δὲ εἴπομεν προηγουμένως, θὰ εἶναι

$$\alpha(1+\tau)^{\nu}=\frac{\chi[(1+\tau)^{\nu}-1]}{\tau} \qquad (1).$$

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἓν τῶν ποσῶν χ, α, τ ,ν, ὅταν τὰ ἄλλα τρία εἶναι γνωστά, ἑπομένως καὶ τὸ χ. Λύοντες λοιπὸν τὴν ἐξίσωσιν (1) πρὸς χ εὑρίσκομεν

$$\chi=\frac{\alpha\tau(1+\tau)^{\nu}}{(1+\tau)^{\nu}-1} \qquad (2).$$

Παραδείγματα. *—1) Ἐδανείσθη τις 80000 δραχμὰς πρὸς 7 ο/ο καὶ θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος τοῦτο δι' ἐτησίων δόσεων εἰς 12 ἔτη. Πόσον θὰ εἶναι τὸ χρεωλύσιον;*

Ἔχομεν $\alpha=80000,\quad \tau=0{,}07\quad \nu=12.$

Κατὰ πρῶτον ὑπολογίζομεν τὴν δύναμιν $(1{,}07)^{12}$

$$\lambda o\gamma(1{,}07)=0{,}02938 \qquad 12\lambda o\gamma(1{,}07)=0{,}35256.$$

ὅθεν

$$(1{,}07)^{12}=2{,}2519$$

καὶ κατὰ τὴν ἐξίσωσιν (2) ἔχομεν

$$\chi=\frac{80000(2{,}2519)(0{,}07)}{1{,}2519}$$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma 80000&=4{,}90309\\
\lambda o\gamma 2{,}2519&=0{,}35256\\
\lambda o\gamma(0{,}07)&=\overline{2},84510\\
\hline
\text{ἄθροισμα}\quad&=4{,}10075\\
\lambda o\gamma(1{,}2519)&=0{,}09657\\
\text{ὑπόλοιπον}=\quad \lambda o\gamma\chi&=4{,}00418\\
\text{καὶ}\quad \chi&=10093.
\end{aligned}$$

2) *Πόσον εἶναι τὸ χρέος, ὅπερ ἐξοφλεῖται εἰς 25 ἔτη διὰ χρεωλυσίου 8900 δραχμῶν, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 6 ο/ο;*

Ἐνταῦθα ἔχομεν

$$\chi=8900,\quad \tau=0{,}06,\quad \nu=25$$

καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται

$$\alpha=8900.\frac{(1{,}05)^{25}-1}{0{,}06(1{,}06)^{25}}$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι (Μπαρμπαστάθη σελ. 133) $(1{,}06)^{25}=4{,}29187$, ἔπεται
$\lambda o\gamma\alpha=\lambda o\gamma 8900+\lambda o\gamma(3{,}29187)-\lambda o\gamma(0{,}06)-\lambda o\gamma(4{,}29187)$

$$\begin{aligned}
\lambda o\gamma 0{,}06&=\overline{2},77815 \qquad & \lambda o\gamma 8900&=3{,}94939\\
\lambda o\gamma 4{,}29187&=0{,}63264 & \lambda o\gamma 3{,}29187&=0{,}51744\\
\hline
&\ \overline{1},41079 & &\ 4{,}46683
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4,46683 \\ \bar{1},41079 \\ \hline \lambda o\gamma\alpha = 5,05604 \\ \text{καὶ} \quad \alpha = 113773. \end{array}$$

3) *Εἰς πόσα ἔτη ἐξοφλεῖται δάνειον 1200000 δραχμῶν, ὅταν τὸ ἐτήσιον χρεωλύσιον εἶναι 150000 δραχμαὶ καὶ τὸ ἐπιτόκιον 8 o/o;*

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως (1) λαμβάνομεν

$$\chi(1+\tau)^\nu - \chi = \alpha\tau(1+\tau)^\nu$$

$$\chi(1+\tau)^\nu - \alpha\tau(1+\tau)^\nu = \chi$$

$$(1+\tau)^\nu(\chi - \alpha\tau) = \chi$$

καὶ

$$(1+\tau)^\nu = \frac{\chi}{\chi - \alpha\tau}$$

Ἐκ τῆς τελευταίας δὲ αὐτῆς ἐξισώσεως ἔχομεν

$$\nu\lambda o\gamma(1+\tau) = \lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma(\chi - \alpha\tau)$$

καὶ

$$\nu = \frac{\lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma(\chi - \alpha\tau)}{\lambda o\gamma(1+\tau)}.$$

Ἤδη δὲ παρατηροῦμεν, ὅτι, διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα τοῦτο δυνατόν, πρέπει ὁ ἀριθμὸς $(\chi - \alpha\tau)$ νὰ εἶναι θετικός, δηλαδὴ πρέπει νὰ εἶναι $\chi > \alpha\tau$, ἢ μὲ ἄλλους λόγους πρέπει τὸ χρεωλύσιον νὰ ὑπερβαίνῃ τὸν ἐτήσιον τόκον τοῦ ἀρχικοῦ κεφαλαίου, ὅπερ εἶναι καὶ ἀφ' ἑαυτοῦ φανερόν. Εἰς τὸ δοθὲν πρόβλημα εἶναι $\alpha = 1200000$ καὶ $\tau = 0,08$. Ὥστε $\alpha\tau = 96000$ καὶ ἑπομένως

$\chi - \alpha\tau = 150000 - 96000 = 54000$

$\lambda o\gamma(1,08) = 0,03342$

$$\begin{array}{r} \lambda o\gamma 150000 = 5,17609 \\ \lambda o\gamma 54000 = 4,73239 \\ \hline \text{διαφορὰ} \quad = 0,44370 \end{array}$$

$$\nu = \frac{0,44370}{0,03342} = \frac{44370}{3342} = 13 \text{ ἔτη καί τι πλέον.}$$

Ὥστε μὲ 13 δόσεις δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξοφληθῇ ἐντελῶς τὸ χρέος· πρέπει νὰ πληρωθῇ ἀκόμη ἓν ποσόν, τὸ ὁποῖον εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι μικρότερον τοῦ χρεωλυσίου. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ εὕρωμεν πόσον γίνεται τὸ δάνειον εἰς τὸ τέλος τῶν 14 ἐτῶν, ἔπειτα τί γίνονται αἱ 13 δόσεις εἰς τὸ τέλος τῶν αὐτῶν ἐτῶν, καὶ ἔπειτα νὰ ἀφαιρέσωμεν τὸ δεύτερον ποσὸν ἀπὸ τοῦ πρώτου. Οὕτως εὑρίσκομεν, ὅτι πρέπει νὰ πληρωθοῦν ἀκόμη 42520 δρχ.

Σημείωσις α'. Πρόβλημα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ ζητῆται τὸ τ, δὲν δυνάμεθα νὰ λύσωμεν. Οὔτε καὶ ἐν τῇ πράξει παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη τοιούτου προβλήματος, διότι τὰ ἐπιτόκια καθορίζονται ἐκ τῶν προτέρων καὶ εἶναι γνωστά. Ἐν τούτοις ὅμως ὑπάρχουν πίνακες διὰ δάνεια 100 δραχμῶν, τῇ βοηθείᾳ τῶν ὁποίων δι' ἁπλουστάτων πράξεων δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸ τ.

Σημείωσις β', Τὰ δάνεια, τὰ ὁποῖα κάμνει τὸ Κράτος καὶ περὶ ὧν γίνεται λόγος εἰς τὴν ἀριθμητικήν, ἐξοφλοῦνται συνήθως ὡς ἑξῆς: Ἕκαστον ἔτος ἢ ἑξάμηνον ἐξοφλεῖται εἷς ὡρισμένος ἀριθμὸς ὁμολογιῶν καὶ πρὸς τοῦτο γίνεται κλήρωσις. Αἱ δὲ ὁμολογίαι, αἱ ὁποῖαι ἐκληρώθησαν, πληρώνονται εἰς τὸ ἄρτιον, ἤτοι εἰς τὴν τιμὴν τὴν ὁποίαν ἀναγράφουν. Τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται εἰς ἑκάστην περίοδον διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν κληρουμένων ὁμολογιῶν καὶ διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν τόκων τῶν ὁμολογιῶν, αἱ ὁποῖαι ἀπομένουν, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀποτελεῖ τὸ χρεωλύσιον. Οὕτω δὲ μετὰ τὴν πάροδον τῶν καθωρισμένων ἐτῶν τὸ δάνειον ἐξοφλεῖται. Ἀλλ' ὑπάρχουν δάνεια, εἰς τὰ ὁποῖα εἷς ὡρισμένος ἀριθμὸς ὁμολογιῶν ἐξοφλεῖται κατ' ἔτος ἢ καθ' ἑξάμηνον εἰς τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ ἀρτίου. Τὰ δάνεια αὐτὰ εἶναι τὰ λαχειοφόρα. Τὸ δὲ χρεωλύσιον αὐτῶν ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν τόκον, ἀπὸ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται διὰ τὴν ἐξόφλησιν τῶν ὁμολογιῶν αἱ ὁποῖαι κληροῦνται εἰς τὸ ἄρτιον, καὶ ἀπὸ τὸ ποσόν, τὸ ὁποῖον διατίθεται διὰ τὴν πληρωμὴν τῶν λαχνῶν.

Προβλήματα πρὸς ἄσκησιν

1183) Πατὴρ τις ἀπέκτησε τέκνον καὶ ἀπὸ τῆς γεννήσεως αὐτοῦ καὶ χάριν αὐτοῦ καταθέτει κατ' ἔτος ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 5% τὸ ποσὸν τῶν 2000 δραχμῶν. Πόσα θὰ ἔχῃ εἰς τὸ τέλος τοῦ 18ου ἔτους;

1184) Πατὴρ τις ἀπέκτησε τέκνον καὶ θέλει νὰ καταθέτῃ ἓν ποσὸν δι' αὐτὸ κατ' ἔτος, ὥστε τὰ ποσὰ αὐτὰ ἀνατοκιζόμενα κατ' ἔτος πρὸς 4% νὰ γίνουν μετὰ 20 ἔτη 150000 δραχμαί. Πόσων δραχμῶν πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἐτησία κατάθεσις;

1185) Καταθέτει τις κατ' ἔτος ἐπ' ἀνατοκισμῷ πρὸς 4% τὸ ποσὸν τῶν 1000 δρχ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἔχῃ 50000 δραχμάς;

1186) Δῆμος τις ἐδανείσθη 3000000 δραχμὰς πρὸς 5% μὲ τὴν συμφωνίαν, ἵνα τὸ ποσὸν αὐτὸ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐντὸς 30 ἐτῶν. Πόσον εἶναι τὸ χρεωλύσιον;

1187) Ποῖον χρέος ἐξώφλησεν εἷς, ὁ ὁποῖος ἐπλήρωνεν ἐτήσιον χρεωλύσιον 5000 δραχμὰς πρὸς 4% ἐπὶ 20 ἔτη;

1188) Ἐδανείσθη τις 250000 δραχμὰς ἐπ' ἀνατοκισμῷ κατ' ἔτος πρὸς 6% μὲ τὴν συμφωνίαν, ἵνα ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του χρεωλυτικῶς δι' ἴσων ἐτησίων δόσεων ἐκ 40000 δραχμ. Μετὰ πόσα ἔτη θὰ ἐξοφλήσῃ τὸ χρέος του;

1189) Δῆμος τις ἐδανείσθη τὸ ποσὸν τῶν 3000000 δραχμῶν διὰ τὴν ἀνέγερσιν διδακτηρίων, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξοφλήσῃ χρεωλυτικῶς διὰ 12 ἴσων ἐτησίων δόσεων ἀρχομένων 3 ἔτη μετὰ τὴν σύναψιν τοῦ δανείου. Ποῖον εἶναι τὸ χρεωλύσιον, ὅταν τὸ ἐπιτόκιον εἶναι 5%;

314. ***Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις.***—Οὕτω λέγονται αἱ ἐξισώσεις, αἵτινες ἔχουν *τὸν ἄγνωστον εἰς τὸν ἐκθέτην*· τοιαύτη εἶναι ἡ ἐξίσωσις $2^x = 125$.

Αἱ τοιαῦται ἐξισώσεις λύονται εὐκόλως διὰ τῶν λογαρίθμων. Καὶ ὄντως, λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν ἴσων εὑρίσκομεν $\chi\lambda o\gamma 2 = \lambda o\gamma 125$· ὅθεν $\chi = \dfrac{\lambda o\gamma 125}{\lambda o\gamma 2}$.

Ἔστω ἐπίσης ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[\chi]{9977} = 2{,}5113$.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως ταύτης εὑρίσκομεν ὁμοίως $\dfrac{\lambda o\gamma 9977}{\chi} = \lambda o\gamma 2{,}5113$

Ὅθεν $\chi = \dfrac{\lambda o\gamma 9977}{\lambda o\gamma 2{,}5113}$.

Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $5^{(\chi^2-6\chi+8)} = 250$.

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν ὁμοίως $(\chi^2-6\chi+8).\lambda o\gamma 5 = \lambda o\gamma 250$ ἢ $\chi^2-6\chi+8 = \dfrac{\lambda o\gamma 250}{\lambda o\gamma 5}$, ἡ δὲ ἐξίσωσις αὕτη εἶναι δευτέρου βαθμοῦ πρὸς χ καὶ ἐπομένως λύεται κατὰ τὰ ἤδη γνωστά.

315. Ἐκθετικαί τινες ἐξισώσεις λύονται καὶ ἄνευ λογαρίθμων, ὅταν τὸ δεύτερον μέλος τῆς τοιαύτης ἐξισώσεως εἶναι δύναμις ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου δύναμις εἶναι καὶ τὸ πρῶτον μέλος αὐτῆς.

α΄) Ἔστω ὡς παράδειγμα ἡ ἐξίσωσις $3^\chi = 729$.

Ἀλλ' ἐπειδὴ $729 = 3^6$, ἔχομεν $3^\chi = 3^6$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 6$.

β΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $\left(\dfrac{3}{5}\right)^\chi = \dfrac{125}{27}$.

Ἀλλὰ $\dfrac{125}{27} = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3$ ἢ $\dfrac{125}{27} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$.

Ὥστε εἶναι $\left(\dfrac{3}{5}\right)^\chi = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3}$ καὶ $\chi = -3$.

γ΄) Ἔστω ἡ ἐξίσωσις $3^{(\chi^2-9\chi+20)} = 1$.

Ἀλλὰ $1 = 3^0$, ἤτοι $3^{(\chi^2-9\chi+20)} = 3^0$, ἐξ ἧς ἔχομεν $\chi^2-9\chi+20 = 0$ ἐκ τῆς λύσεως δὲ τῆς τελευταίας ταύτης λαμβάνομεν τὰς τιμὰς τοῦ χ.

δ΄) Ἔστω προσέτι ἡ ἐξίσωσις $2^{\chi+1}-3^{\chi-1} = 2^{\chi-3}+3^{\chi-3}$. Ἐκ ταύτης λαμβάνομεν $2^{\chi+1}-2^{\chi-3} = 3^{\chi-1}+3^{\chi-3}$.

ἢ $2^\chi(2-2^{-3}) = 3^\chi(3^{-1}+3^{-3})$, ἤτοι

$2^\chi.\dfrac{15}{8} = 3^\chi.\dfrac{10}{27}$· ἐπομένως ἔχομεν $\dfrac{2^\chi}{3^\chi} = \dfrac{8.10}{15.27}$ ἢ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^\chi = \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

Ὅθεν $\chi = 4$.

ε΄) Ἔστω ἤδη ἡ ἐξίσωσις $3^{2\chi} - 5.3^\chi - 36 = 0$.

Αὐτὴ παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι β^ου^ βαθμοῦ ὡς πρὸς 3^χ, λαμβάνομεν δὲ $3^x = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$, ἤτοι ἢ $3^x = 9$ ἢ $3^x = -4$. ἐκ τῶν λύσεων δὲ τούτων ἁρμόζει μόνον ἡ $3^x = 9$, ἐξ ἧς λαμβάνομεν $\chi = 2$.

Σημείωσις. Ἡ ἐκθετικὴ ἐξίσωσις $\alpha^x = \beta$ (α καὶ β θετικὰ καὶ $\neq 1$) δύναται νὰ λυθῇ καὶ ἄνευ τῶν λογαρίθμων ὡς ἑξῆς· (ἐὰν τὸ β εἶναι δύναμις τοῦ α, ἡ ἐξίσωσις αὕτη λύεται ἄνευ τῶν λογαρίθμων, ὡς εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα τοῦ ἀνωτέρω ἐδαφίου).

Ἂν θέλωμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὸν ἄγνωστον χ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, πρέπει νὰ εὕρωμεν κλάσμα τι $\frac{\rho}{\nu}$ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\alpha^{\frac{\rho}{\nu}} < \beta < \alpha^{\frac{\rho+1}{\nu}}$ διότι τότε ὁ ἄγνωστος χ θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ $\frac{\rho}{\nu}$ καὶ $\frac{\rho+1}{\nu}$.

Ἐκ τῶν ἀνισοτήτων τούτων προκύπτουν τὰ ἑξῆς $\alpha^\rho < \beta^\nu < \alpha^{\rho+1}$, ἐξ ὧν βλέπομεν, ὅτι πρὸς εὕρεσιν τοῦ χ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ἀρκεῖ νὰ ὑψώσωμεν τὸν β εἰς τὴν δύναμιν ν καὶ ἔπειτα νὰ εὕρωμεν δύο ἐφεξῆς δυνάμεις τοῦ α, ἔστω τὰς α^ρ καὶ $\alpha^{\rho+1}$ περιλαμβανούσας τὴν δύναμιν β^ν, τότε θὰ εἶναι $\chi = \frac{\rho}{\nu}$ μὲ προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1190) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$10^x = 2 \qquad 10^x = 5 \qquad 100^x = 9 \qquad 100^x = 12$

$2^x = 10 \qquad 5^x = 10 \qquad 9^x = 100 \qquad 12^x = 100$

1191) Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις

$3{,}45^x = 2{,}48 \qquad 6{,}15^x = 9{,}037 \qquad 4{,}5^x = 6{,}842 \qquad 3{,}6^x = \frac{1}{5}$.

1192) Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$\sqrt[x]{4096} = 8 \qquad \sqrt[3]{5x} = 16625 \qquad \sqrt[x-1]{7{,}530} = 1{,}4 \qquad 7^{\sqrt{x}} = 2401$

1193) Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$2^{3x-5} = 0{,}25 \qquad 2^{2x^2-5x+3} = 0{,}125 \qquad 1{,}3^{x^2-3x+10} = 8{,}157$

1194) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις (ἄνευ λογαρίθμων) :

$5^x = 125 \qquad 2^x = 1024 \qquad 5^x = 3125 \qquad 7^x = 16807$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{81} \qquad \left(\frac{1}{5}\right)^{2x} = \frac{1}{3125} \qquad 3^{2x-4} = 729 \qquad 2^{4x-1} = 512$

1195) Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$0{,}5^x = 0{,}125 \qquad \left(\frac{3}{4}\right)^{3x-8} = (0{,}75)^{2x-4}$

$5^{\frac{3x-4}{2}} = 1 \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$

1196) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$2^{\chi}+2.3^{\chi+1}=3^{\chi+3}-5.2^{\chi+2}$$
$$2.5^{\chi-2}+2^{\chi}=12.5^{\chi-3}+3.2^{\chi-3}$$

1197) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$2^{\chi}=512^{\frac{1}{\chi}} \qquad 3^{\chi}=27^{\frac{1}{\chi}} \qquad 4^{\chi}=\sqrt[\chi]{256}$$

$$10^{(5-\chi)(6-\chi)}=100 \qquad 100.10^{\chi}=\sqrt[\chi]{1000} \qquad 3.2^{2\chi}-2^{\chi}-44=0$$

1198) Ὁμοίως νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

1) $2^{2\chi}-7.2^{\chi}-8=0$ 3) $3.2^{2\chi}+16^{\chi}=28$

2) $9^{\chi}-3^{\chi}-72=0$ 4) $8^{2\chi+1}-2^{3\chi+2}=480$

1199) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$2\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma 3=\lambda o\gamma 135+\lambda o\gamma 5 \qquad 2\lambda o\gamma(4\chi-15)-\lambda o\gamma(2\chi)$$
$$\lambda o\gamma\sqrt{7\chi-9}+\lambda o\gamma\sqrt{3\chi-4}=1 \qquad \lambda o\gamma\sqrt{2\chi-1}+\lambda o\gamma\sqrt{\chi-9}=1$$

1200) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\alpha^{\chi}.\alpha^{\psi}=\alpha^{10}$
$\chi-\psi=4$

2) $\alpha^{2\chi-3}.\alpha^{3\psi-2}=\alpha^{8}$
$\chi-2\psi=17$

3) $2^{\chi}.2^{\psi}=32$
$25^{\chi}.5^{\psi}=625$

4) $(3^{\chi})^{\psi}=27$
$\left(\frac{3}{5}\right)^{\chi}\left(\frac{9}{25}\right)^{\psi}=\frac{243}{3125}$

1201) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

1) $\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma\psi=3$
$\chi+\psi=133$

2) $\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma\psi=3$
$\chi^2+\psi^2=2225$

3) $2\lambda o\gamma\chi+2\lambda o\gamma\psi=2$
$\chi^4+\psi^4=641$

4) $\lambda o\gamma\chi-\lambda o\gamma\psi=1$
$\lambda o\gamma\chi+\lambda o\gamma\psi=1+\lambda o\gamma 4.$

Ἀσκήσεις ἀνάμεικτοι.

1202) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha\,\alpha^2.\alpha^3.\alpha^4\ldots\alpha^{\nu}$.

1203) Νὰ εὑρεθῇ τὸ γινόμενον $\alpha.\alpha^{\frac{1}{2}}.\alpha^{\frac{1}{4}}.\alpha^{\frac{1}{8}}\ldots$ ἀπείρου πλήθους παραγόντων.

1204) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι συγχρόνως ἐν ἀριθμητικῇ καὶ γεωμετρικῇ προόδῳ εἶναι ἴσοι.

1205) Τὸ ἀριθμητικὸν μέσον μεταξὺ χ καὶ ψ ἰσοῦται μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ γεωμετρικοῦ των μέσου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος $\chi:\psi$.

1206) Ἐὰν ἀριθμητικῆς προόδου, οἱ ὅροι τάξεως μ, ν, λ εἶναι οἱ Μ, Ν, Λ ἀντιστοίχως, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι

$$M(\nu-\lambda)+N(\lambda-\mu)+\Lambda(\mu-\nu)=0.$$

1207) Ἐλαστικὴ σφαῖρα πίπτουσα ἐπὶ τραπέζης ἐξ ὕψους υ ἀναπηδᾷ εἰς ὕψος ἴσον μὲ τὸ προηγούμενον πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ $\lambda^2(\lambda<1)$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ διάστημα πού διέτρεξεν ή σφαῖρα αὐτὴ ἀπ' ἀρχῆς μέχρι τοῦ πέρατος τῆς κινήσεώς της.

1208) Εἰς μίαν σειρὰν ὀρθογωνίων τριγώνων μία πλευρὰ ἔχει μήκη διαδοχικῶς 1×4 μ., 2×6 μ., 3×8 μ., 4×10 μ. κ.ο.κ., ἡ δὲ ὑποτείνουσα διαφέρει ἀπὸ ταύτης κατὰ 1 μέτρον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ μήκη τῶν τρίτων πλευρῶν τῶν τριγώνων τούτων εἶναι ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ.

1209) Ἡ σειρὰ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται εἰς ὁμάδας ὡς ἑξῆς : αη) 1 βα) 2, 3 γη) 4, 5, 6 κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὅρων τῆς νυοστῆς ὁμάδος.

1210) Νὰ εὑρεθῇ σειρὰ ἀριθμῶν εἰς ἣν τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων νὰ εἶναι $3\nu^2$ δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ ν.

1211) Ἐὰν α, β, γ εἶναι ἐν ἁρμονικῇ προόδῳ, ἡ παράστασις $\alpha(\beta-\gamma)\chi^2+$ $+\beta(\gamma-\alpha)\chi\psi+\gamma(\alpha-\beta)\psi^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1212) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς 1.3, 3.5, 5.7, 7.9....

1213) Εἰς ἁρμονικὴν πρόοδον ὁ ὅρος τάξεως μ εἶναι ν καὶ ὁ ὅρος τάξεως ν εἶναι μ. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ὅρος τάξεως $\mu+\nu$ εἶναι $\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}$.

1214) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς 1.4.5, 2.5.6, 3.6.7., 4.7.8...

1215) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων τῆς σειρᾶς ἧς ὁ ὅρος τάξεως ρ εἶναι $3\rho^2+5\rho$. (ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς εἶναι $3.1^2+5.1$).

1216) Δίδονται δύο ἀριθμητικαὶ πρόοδοι καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν οἱ κοινοὶ ὅροι αὐτῶν.

1217) Ἐὰν μεταξὺ δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β παρεμβάλωμεν δύο ἀριθμητικὰ μέσα A_1, A_2, δύο γεωμετρικὰ μέσα Γ_1, Γ_2 καὶ δύο ἁρμονικὰ μέσα H_1, H_2 νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{H_1H_2}=\frac{A_1+A_2}{H_1+H_2}$.

1218) Τρεῖς ἀριθμοὶ εἶναι ἐν Γ.Π. Ἐὰν εἰς τὸν δεύτερον ἐξ αὐτῶν προσθέσωμεν τὸν 40, τότε οὗτοι εἶναι ἐν Α.Π. Ἐὰν δὲ ἔπειτα προσθέσωμεν εἰς τὸν τρίτον τὸν 80, οἱ νέοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται πάλιν ἐν Γ. Π. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1219) Τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ἐν Α.Π. Ἐὰν εἰς αὐτοὺς προσθέσωμεν τοὺς 1, 2, 21, 112 ἀντιστοίχως, οἱ νέοι ἀριθμοὶ εἶναι ἐν Γ.Π. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1220) Ἀριθμητικῆς προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι χ καὶ ὁ λόγος ψ, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι ν, ἐνῷ τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὅρων αὐτῆς εἶναι μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu+\nu$ πρώτων ὅρων αὐτῆς, ὡς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν $\mu-\nu$ πρώτων ὅρων της.

1221) Ἀριθμητικῆς προόδου ἧς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι χ καὶ ὁ λόγος ψ τὸ ἄθροισμα τῶν μ ὅρων, οἵτινες εἶναι μετὰ τὸν μυοστὸν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ν ὅρων, οἵτινες εἶναι μετὰ τὸν νυοστὸν εἶναι ἴσα μὲ Κ. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ χ καὶ ψ.

1222) Τὸ ἄθροισμα πέντε ἀριθμῶν οἵτινες εἶναι ἐν Α.Π. εἶναι 5α καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν εἶναι β^5. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1223) Τὸ ἄθροισμα πέντε ἀριθμῶν, ἐν Γ.Π. εἶναι α καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν β^5. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

1224) Ἐν δοθείσῃ σφαίρα ἐγγράφομεν κύβον, ἐν τῷ κύβῳ ἐγγράφομεν δευτέραν σφαῖραν καὶ ἐν αὐτῇ ἐγγράφομεν δεύτερον κύβον κ.ο.κ. ἀδιαλείπτως. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες ὅλων τῶν σφαιρῶν τούτων ὡς καὶ τὸ ἄθροισμά των.

1225) Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα σφαῖρα οὕτως ὥστε τὰ ἐμβαδά τῶν οὕτω λαμβανομένων τριῶν ζωνῶν νὰ εἶναι ἐν Α.Π. καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τομῶν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος α.

1226) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν μὲ βάσιν 2.

$$\frac{1}{4},\quad \frac{1}{8},\quad \sqrt[8]{2},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[5]{8}$$

1227) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λογάριθμοι τῶν κάτωθι ἀριθμῶν μὲ βάσιν 3

$$\frac{1}{27},\quad \frac{1}{81},\quad \sqrt[4]{27},\quad \sqrt[3]{3^2},\quad \sqrt[5]{9}.$$

1228) Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις χ τῶν λογαρίθμων $\lambda o \gamma_\chi\, 5329=2$, $\lambda o \gamma_\chi\, 83521=$ $=4$, $\lambda o \gamma_\chi\, 1728=6$, $\lambda o \gamma_\chi \sqrt{2}=3$.

1229) Ἐκ τοῦ λογαρίθμου τοῦ 2 ὡς πρὸς βάσιν 10 νὰ εὑρεθῇ ὁ λογάριθμος τοῦ 1000 ὡς πρὸς βάσιν 4.

1230) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν λογαρίθμων ἀριθμοῦ (θετικοῦ) εἰς δύο συστήματα διάφορα εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ ἀριθμοῦ τούτου.

1231) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν λογαρίθμων δύο ἀριθμῶν ἐν τῷ αὐτῷ συστήματι λογαρίθμων εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ συστήματος τούτου.

1232) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\lambda o \gamma_\alpha \beta \,.\, \lambda o \gamma_\beta \gamma = \lambda o \gamma_\alpha \gamma$.

1233) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\dfrac{1}{\lambda o \gamma_\beta \alpha} + \dfrac{1}{\lambda o \gamma_\gamma \alpha} = \dfrac{1}{\lambda o \gamma_{\beta\gamma} \alpha}$

1234) Κεφάλαιόν τι ἀνατοκιζόμενον κατ' ἔτος γίνεται μετὰ 3 ἔτη 5625 δραχμαί, μετ' ἄλλα δὲ δύο ἔτη ἀκόμη γίνεται 6084. Ποῖον εἶναι τὸ ἐπιτόκιον;

1235) Ἐὰν ἔχῃ τις νὰ λαμβάνῃ ἐπὶ 30 ἔτη 5000 δραχμὰς κατ' ἔτος ἀντὶ πόσου δύναται νὰ πωλήσῃ σήμερον τὰ δικαιώματά του, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5 ο/ο;

1236) Εἷς δανείζεται μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώνῃ β δραχμὰς ἐκ τοῦ χρέους καὶ τὸν τόκον τοῦ μένοντος χρέους, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐξοφληθῇ εἰς ν ἔτη. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐτήσιαι δόσεις;

1237) Νὰ λυθῇ τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ὅταν ἑκάστη δόσις ἰσοῦται μὲ τὴν προηγουμένην εἰς ἣν προστίθεται ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτῆς.

1238) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $15^{2\chi} \,.\, 5^{\chi-4} \,.\, 11^{\chi-2} = 7^{\chi-1}$

1239) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\alpha^{3\chi-2}\, \beta^{2\chi-3} = \gamma^{4\chi-5}$.

1240) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\lambda o \gamma \sqrt{7\chi+9} + \lambda o \gamma \sqrt{11\chi-3} = 1 + \lambda o \gamma 3$

1341) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $5\lambda o\gamma \frac{\chi}{2} + 2\lambda o\gamma \frac{\chi}{3} = 3\lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma \frac{32}{9}$

1242) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\lambda o\gamma\chi + \lambda o\gamma\psi = 1 + \lambda o\gamma 7$$
$$\lambda o\gamma\chi - \lambda o\gamma\psi = \lambda o\gamma 56 - \lambda o\gamma 20$$

1243) Διὰ ποίας θετικὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\chi^2 - 2\chi + \lambda o\gamma\mu = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς;

Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τούτων κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ μ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ΄

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ - ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ - ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ. ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ - ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ - ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι.

1. Μεταθέσεις.

316.—Ἐὰν ἔχωμεν ν διάφορα πράγματα, οἱ διάφοροι τρόποι καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ταῦτα εἰς μίαν σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου λέγονται *μεταθέσεις* τῶν ν πραγμάτων.

Δύο γράμματα α, β εἶναι φανερόν, ὅτι δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς μίαν σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου κατὰ δύο μόνον τρόπους: αβ καὶ βα. Ὁμοίως εἶναι φανερὸν ὅτι μὲ τὰ ψηφία 1 καὶ 2 δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ἀριθμοὺς 12 καὶ 21 καὶ ὄχι ἄλλους. Ἐὰν δὲ ἤδη ζητηθῇ νὰ εὕρωμεν τοὺς τριψηφίους ἀριθμοὺς τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3 θὰ θέσωμεν τὸ νέον ψηφίον 3 εἰς ἕκαστον, τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 21 ποὺ εὕρομεν προηγουμένως, εἰς ὅλας τὰς θέσεις καὶ αἱ ὁποῖαι δι' ἕκαστον τούτων εἶναι τρεῖς. Οὕτω δὲ θὰ σχηματισθοῦν οἱ ἑξῆς τριψήφιοι ἀριθμοὶ

$$\begin{array}{ccc} 123 & 132 & 312 \\ 213 & 231 & 321. \end{array}$$

Εὐκόλως δὲ ἐννοοῦμεν, ὅτι ἐκτὸς τῶν ἓξ αὐτῶν ἀριθμῶν, οὐδεὶς ἄλλος τριψήφιος ἀριθμὸς δύναται νὰ σχηματισθῇ μὲ τὰ δοθέντα ψηφία 1, 2, 3. Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων δύο διαφόρων πραγμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $1.2=2$ καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων τριῶν πραγμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον $1.2.3=6$ καὶ γενικῶς: *ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ν διαφόρων πραγμάτων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον ὅλων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ ν.* Σημειοῦμεν δὲ τοῦτον συμβολικῶς διὰ τοῦ M_ν,

Θὰ ἀποδείξωμεν δὲ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύοντες ὅτι

$$M_\nu = M_{\nu-1}.\nu$$

ἤτοι ἀποδεικνύοντες ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν μεταθέσεων ν πραγμάτων ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν μεταθέσεων τῶν ν—1 πραγμάτων πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ ν.

Πρὸς τοῦτο ἔστω ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τὸν πίνακα τῶν μεταθέσεων τῶν (ν—1) διαφόρων πραγμάτων. Διὰ νὰ εὕρωμεν δὲ ἐκ τούτων ὅλας τὰς μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων, θέτομεν τὸ νέον πρᾶγμα εἰς ἑκάστην μετάθεσιν εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις· ἔχει δὲ ἑκάστη μετάθεσις ν θέσεις. Αἱ οὕτω προκύπτουσαι μεταθέσεις διαφέρουν μεταξύ των, διότι, ὅσαι μὲν προέρχονται ἐκ τῆς αὐτῆς μεταθέσεως διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τοῦ νέου πράγματος, ὅσαι δὲ προέρχονται ἐκ διαφόρων, διαφέρουν κατὰ τὴν θέσιν τῶν ἄλλων πραγμάτων. Δὲν ὑπάρχουν δὲ ἄλλαι μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων. Διότι ἂν θεωρήσωμεν μίαν μετάθεσιν αὐτῶν οἱανδήποτε καὶ παραλείψωμεν ἐξ αὐτῆς τὸ νέον πρᾶγμα, θὰ μείνῃ προφανῶς μία μετάθεσις τῶν (ν—1) πραγμάτων· ταύτην δὲ εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὴν θέσωμεν τὸ νέον πρᾶγμα εἰς ὅλας τὰς δυνατὰς θέσεις, θὰ εὕρωμεν καὶ τὴν μετάθεσιν τὴν ὁποίαν ἐθεωρήσαμεν.

Ἐπειδὴ ἑκάστη τῶν μεταθέσεων τῶν (ν—1) πραγμάτων παράγει ν μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων καὶ αἱ πρῶται μεταθέσεις εἶναι $M_{\nu-1}$· ἕπεται ὅτι αἱ δεύτεραι εἶναι $M_{\nu-1}.\nu$, ἤτοι εἶναι

$$M_\nu = M_{\nu-1}.\nu$$

Διὰ τοὺς αὐτοὺς ὡς ἄνω λόγους εἶναι

$$\begin{aligned} M_{\nu-1} &= M_{\nu-2}\,.\,(\nu-1) \\ M_{\nu-2} &= M_{\nu-3}\,(\nu-3) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_3 &= M_2.3 \\ M_2 &= M_1.2 \\ M_1 &= 1 \end{aligned}$$

διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ μετάθεσις ἑνὸς πράγματος εἶναι μία. Πολλαπλασιάζοντες ἤδη τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας κατὰ μέλη καὶ ἁπλοποιοῦντες ἔπειτα εὑρίσκομεν ὅτι

$$M_\nu = 1.2.3\,\ldots\ldots(\nu-2).(\nu-1).\nu$$

Τὸ γινόμενον 1.2.3..... (ν—1).ν σημειοῦται συνήθως πρὸς συντομίαν διὰ τοῦ συμβόλου ν'. Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι $M_\nu = \nu'$.

Ἐφαρμογή. Κατὰ πόσους διαφόρους τρόπους δύνανται νὰ σταθοῦν 6 ἄνθρωποι πέριξ μιᾶς τραπέζης ;

Κατὰ $M_6 = 1.2.3.4.5.6 = 720$ διαφόρους τρόπους.

2. *Διατάξεις*

317. ***Πρόβλημα.***—*Πόσους διψηφίους ἀριθμοὺς δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3;*

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ζητούμενον, ἀρκεῖ νὰ θέσωμεν κατόπιν ἑκάστου ψηφίου διαδοχικῶς τὰ ἄλλα δύο. Ἤτοι κατόπιν τοῦ 1 νὰ θέσωμεν πρῶτον τὸ 2 καὶ ἔπειτα τὸ 3. Κατόπιν τοῦ 2 πρῶτον τὸ 1 καὶ ἔπειτα τὸ 3 καὶ τέλος κατόπιν τοῦ 3 νὰ θέσωμεν πρῶτον τὸ 1 καὶ ἔπειτα τὸ 2. Οὕτω δὲ θὰ σχηματισθοῦν οἱ ἀριθμοί:

12, 13, 21, 23, 31, 32.

Οἱ τρόποι οὗτοι κατὰ τοὺς ὁποίους ἠδυνήθημεν νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν τριῶν δοθέντων ψηφίων τὰ δύο, διὰ νὰ σχηματίσωμεν τοὺς ὡς ἄνω ἓξ διαφόρους ἀριθμοὺς λέγονται ***διατάξεις*** τῶν τριῶν ψηφίων ἀνὰ δύο. Γενικῶς δέ:

Διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι καθ' οὓς δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐκ μ πραγμάτων τὰ ν $(\nu<\mu)$ καὶ νὰ θέσωμεν αὐτὰ εἰς μίαν σειρὰν τὸ ἓν κατόπιν τοῦ ἄλλου.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἕκαστον πρᾶγμα εὑρίσκεται ἅπαξ εἰς ἑκάστην διάταξιν. Δύο δὲ διατάξεις ἐξ αὐτῶν διαφέρουν εἴτε κατὰ ἓν τοὐλάχιστον πρᾶγμα, εἴτε κατὰ τὴν τάξιν τῶν πραγμάτων.

Σημειοῦμεν τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων. ἀνὰ ν διὰ τοῦ συμβόλου Δ_μ^ν.

318 ***Θεώρημα.***—*Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν ν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, ἀπὸ τοῦ μ καὶ ἑξῆς πρὸς τοὺς μικροτέρους.*

Ἤτοι εἶναι $\Delta_\mu^\nu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

Πρὸς τοῦτο, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἐσχηματίσαμεν τὰς διατάξεις τῶν μ πραγμάτων.

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ldots\ldots \alpha_\mu$$

ἀνὰ (ν—1), τῶν ὁποίων τὸ πλῆθος εἶναι $\Delta_\mu^{\nu-1}$. Ἐξ αὐτῶν δὲ θὰ εὕρωμεν τὰς διατάξεις τῶν ἰδίων πραγμάτων ἀνὰ ν. Διότι ἑκάστη τῶν πρώτων διατάξεων περιέχει (ν—1) πράγματα. Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ τέλος ἑκάστης τούτων θέσωμεν ἕκαστον τῶν $\mu-(\nu-1)=\mu-\nu+1$ ἄλλων πραγμάτων, τὰ ὁποῖα δὲν ἔχει, θὰ προκύψουν ἐξ ἑκάστης $\mu-\nu+1$ διατάξεις τῶν ἰδίων μ πραγμάτων, ἀνὰ ν. Ἑπομένως ἐξ ὅλων τῶν $\Delta_\mu^{\nu-1}$ διατάξεων θὰ προκύψουν κατὰ τὸν τρόπον τοῦτον $\Delta_\mu^{\nu-1}.(\mu-\nu+1)$ διατάξεις ἀνὰ ν· αὗται δὲ διαφέρουν μεταξύ των, διότι ὅσαι μὲν προέρχονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν διάταξιν διαφέρουν κατὰ τὸ τελευταῖον πρᾶγμα, ὅσαι δὲ προέρχονται ἐκ διαφόρων διαφέρουν κατὰ τὰ ἄλλα. Πλὴν δὲ αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη διάταξις ὑπάρχει τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν. Διότι ἂν θεωρήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ παραλείψωμεν ἐξ αὐτῆς τὸ τελευταῖον πρᾶγμα, θὰ λάβωμεν διάταξιν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ (ν—1), τὴν ὁποίαν εἴχομεν ἀρχικῶς. Ἂν δὲ εἰς τὸ τέλος αὐτῆς θέσωμεν ἕκαστον τῶν πραγμάτων τὰ ὁποῖα δὲν ἔχει, ἀναγκαίως θὰ εὕρωμεν καὶ τὴν διάταξιν τὴν ὁποίαν ἐθεωρήσαμεν. Ὥστε : Ὁ ἀριθμὸς τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν εἶναι

$$\Delta_\mu^\nu = \Delta_\mu^{\nu-1}\cdot(\mu-\nu+1).$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν ἔχομεν

$$\Delta_\mu^2 = \Delta_\mu^1\cdot(\mu-1)$$
$$\Delta_\mu^3 = \Delta_\mu^2\cdot(\mu-2)$$
$$\Delta_\mu^4 = \Delta_\mu^3\cdot(\mu-3)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$\Delta_\mu^\nu = \Delta_\mu^{\nu-1}(\mu-\nu+1)$$

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἀνωτέρω ἰσότητας κατὰ μέλη ἁπλοποιήσωμεν καὶ λάβωμεν ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι $\Delta_\mu^1=\mu$, λαμβάνομεν τὸν τύπον $\Delta_\mu^\nu=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)$.

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\Delta_7^2=7.6.5=210$.

Σημείωσις. Ἐὰν τὰ μ πράγματα λαμβάνωνται ἀνὰ μ, αἱ διατάξεις γίνονται μεταθέσεις, διότι μόνον κατὰ τὴν τάξιν δύνανται νὰ διαφέρουν. Ἔχομεν ἄλλως τε $\Delta_\mu^\mu=\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\mu+1)=1\,2\ldots\mu=M_\mu$.

3. Συνδυασμοί

319. **Πρόβλημα**.—*Πόσα διάφορα ἀπ᾽ ἀλλήλων γινόμενα δύο παραγόντων δύνανται νὰ σχηματισθοῦν, ὅταν οἱ παράγοντες λαμβάνωνται ἐκ τῶν ψηφίων 1,2,3,4,5 ;*

Πρὸς τοῦτο θὰ λάβωμεν κατὰ σειρὰν ἕκαστον τῶν πέντε αὐτῶν ψηφίων, τὸ ὁποῖον θὰ πολλαπλασιάσωμεν διαδοχικῶς μὲ ἕκαστον τῶν ἑπομένων του. Οὕτω δὲ θὰ λάβωμεν τὰ γινόμενα

Ἐκ τοῦ 1, τὰ 1.2, 1,3, 1.4, 1.5
» » 2 » 2.3, 2.4, 2 5
» » 3 » 3.4, 3,5 καὶ
» » 4 τὸ 4.5

Οἱ διάφοροι τρόποι καθ᾽ οὓς ἐλάβομεν ἐκ τῶν πέντε δοθέντων ψηφίων τὰ 2 καὶ ἐσχηματίσαμεν τὰ ἀνωτέρω διάφορα ἀπ᾽ ἀλλήλων γινόμενα, λέγονται ***συνδυασμοὶ*** τῶν πέντε ψηφίων ἀνὰ δύο. Γενικῶς δὲ :

Συνδυασμοὶ μ διαφόρων πραγμάτων ἀνὰ ν (ν⩽μ) λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι κατὰ τοὺς ὁποίους δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐκ τῶν μ πραγμάτων τὰ ν,

ἤτοι αἱ διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν μεταξύ των κατὰ ἕν τοὐλάχιστον πρᾶγμα. Οὕτω μὲ τὰ τρία γράμματα α, β, γ, λαμβανόμενα ἀνὰ δύο, σχηματίζομεν τὰς ἓξ διατάξεις αβ, αγ, βα, βγ, γα, γβ.

Ἐξ αὐτῶν ὅμως αἱ τρεῖς αβ, αγ, γβ ἀποτελοῦν τοὺς συνδυασμοὺς τῶν γραμμάτων αὐτῶν ἀνὰ δύο ἢ αἱ βα, γα, βγ, διότι ἡ τάξις τῶν γραμμάτων εἰς τοὺς συνδυασμοὺς μας εἶναι ἀδιάφορος. (Ἀντιστρόφως δέ, ἐὰν εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν αὐτῶν συνδυασμῶν κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν δύο γραμμάτων θὰ εὕρωμεν τὰς διατάξεις τῶν 3 γραμμάτων ἀνὰ δύο).

Τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν σημειοῦμεν διὰ τοῦ συμβόλου Σ_μ^ν.

320. Πλῆθος τῶν συνδυασμῶν. Θεώρημα.—*Μεταξὺ τῶν διατάξεων τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, τῶν συνδυασμῶν τῶν αὐτῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν καὶ τῶν μεταθέσεων τῶν ν πραγμάτων ὑπάρχει ἡ σχέσις.*

$$\Delta_\mu^\nu = \Sigma_\mu^\nu \times M_\nu.$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχομεν σχηματίσει τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν. Ἐὰν δὲ εἰς ἕκαστον τούτων κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων ποὺ περιέχει, ἤτοι ἐὰν σχηματίσωμεν τὰς μεταθέσεις τῶν ν τούτων πραγμάτων, θὰ λάβωμεν ὅλας τὰς διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν, αἱ ὁποῖαι θὰ περιέχουν μὲν τὰ αὐτὰ πράγματα, θὰ διαφέρουν ὅμως κατὰ τὴν θέσιν των.

Αἱ διατάξεις αὗται διαφέρουν ἀπ᾽ ἀλλήλων· διότι ὅσαι μὲν προκύπτουν ἐκ τοῦ αὐτοῦ συνδυασμοῦ διαφέρουν κατὰ τὴν τάξιν τῶν ν πραγμάτων, ὅσαι δὲ προκύπτουν ἐκ διαφόρων, διαφέρουν τοὐλάχιστον κατὰ ἓν πρᾶγμα· πλὴν δὲ αὐτῶν οὐδεμία ἄλλη διάταξις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ὑπάρχει. Διότι ἂν θεωρήσωμεν μίαν ἐξ αὐτῶν καὶ λάβωμεν τὰ ν πράγματα ποὺ περιέχει κατὰ μίαν τάξιν θὰ ἔχωμεν ἕνα συνδυασμὸν τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν. Τοῦτον δὲ εἴχομεν ἐξ ἀρχῆς· ἐὰν δὲ εἰς αὐτὸν κάμωμεν ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν πραγμάτων ποὺ περιέχει, θὰ εὕρωμεν καὶ τὴν διάταξιν τὴν ὁποίαν ἐθεωρήσαμεν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λοιπὸν συνάγομεν ὅτι ἐκ τῶν Σ_μ^ν συνδυασμῶν, ὅταν κάμωμεν εἰς ἕκαστον τούτων ὅλας τὰς δυνατὰς μεταθέσεις τῶν ν πραγμάτων αὐτοῦ θὰ προκύψουν $\Sigma_\mu^\nu \times M_\nu$ διατάξεις καὶ ὅτι αὗται εἶναι ὅλαι αἱ διατάξεις τῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν. Ἤτοι συνάγομεν ὅτι

$$\Delta_\mu^\nu = \Sigma_\mu^\nu \times M_\nu \text{ ὅθεν καὶ}$$

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\Delta_\mu^\nu}{M_\nu} \text{ δηλαδὴ}$$

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu} \qquad (1)$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$\Sigma_6^3 = \frac{6\,5.4}{1.2.3} = 20$$

$$\Sigma_{10}^4 = \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} = 210 \quad \text{καὶ}$$

$$\Sigma_\mu^\mu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots3.2.1}{1.2.3.\ldots(\mu-1).\mu} = 1$$

Σημείωσις.—Ἐπειδὴ ὁ ἀριθμὸς Σ_μ^ν εἶναι πάντοτε ἀκέραιος, ἕπεται ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου, ὅτι τὸ γινόμενον ν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε διαιρετὸν διὰ τοῦ γινομένου 1.2.3. . . . ν.

321. **Θεώρημα**.—*Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ μ—ν.*

Διότι, ἐὰν ἐκ τῶν μ πραγμάτων λάβωμεν τὰ ν, θὰ ἀπομείνουν μ—ν πράγματα. Οὕτως εἰς ἕκαστον συνδυασμὸν τῶν ν ληφθέντων πραγμάτων ἀντιστοιχεῖ εἷς συνδυασμὸς τῶν μ—ν πραγμάτων ποὺ ἀπέμειναν καὶ ἀντιστρόφως. Ὥστε εἶναι

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_\mu^{\mu-\nu}$$

Ἐπαληθεύομεν ἄλλως τε τὴν εὑρεθεῖσαν ἰσότητα τῶν ἀριθμῶν

$$\Sigma_\mu^\nu = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3.\ldots\nu}$$

$$\Sigma_\mu^{\mu-\nu} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\nu+1)}{1.2.3.\ldots(\mu-\nu)}$$

πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ δευτέρου καὶ τοὺς ὅρους τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸν παρονομαστὴν τοῦ πρώτου, ὁπότε εὑρίσκομεν

$$\Sigma_\mu^\nu = \Sigma_\mu^{\mu-\nu} = \frac{1.2.3.\ldots\mu}{(1.2.3.\ldots\nu)\times 1.2.3.\ldots(\mu-\nu)}$$

Κατὰ ταῦτα εἶναι $\Sigma_5^4 = \Sigma_5^1 \quad \Sigma_6^2 = \Sigma_6^4$

322. **Θεώρημα**.—*Ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν μ πραγμάτων ἀνὰ ν ἰσοῦται μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν* *ηὐξημένον κατὰ τὸν ἀριθμὸν τῶν συνδυασμῶν τῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν—1.*

Οἱ συνδυασμοὶ τῶν μ πραγμάτων α, β, γ . . . κ, λ ἀνὰ ν δύνανται νὰ διαιρεθοῦν εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι περιέχουν ἓν ὡρισμένον πρᾶγμα λ καὶ εἰς ἐκείνους οἱ ὁποῖοι δὲν τὸ περιέχουν καὶ οἵτινες προφανῶς εἶναι συνδυασμοὶ τῶν μ—1 πραγμάτων ἀνὰ ν· λαμβάνομεν δὲ τοὺς ἄλλους, σχηματίζοντες τοὺς συνδυασμοὺς τῶν μ—1 πρώτων πραγμάτων α, β, γ . . . κ καὶ θέτοντες εἰς ἕκαστον τούτων τὸ πρᾶγμα λ· τοῦτο δὲ δὲν μεταβάλλει τὸν ἀριθμὸν $\Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$. Ὥστε ἔχομεν.

$$\Sigma_{\mu}^{\nu} = \Sigma_{\mu-1}^{\nu} + \Sigma_{\mu-1}^{\nu-1}$$

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$\Sigma_{8}^{5} = \Sigma_{7}^{5} + \Sigma_{7}^{4}$$

Ἄλλως τε δὲ εἶναι

$$\Sigma_{8}^{5} = \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} = 56$$

$$\Sigma_{7}^{5} = \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5} = 21$$

$$\Sigma_{7}^{4} = \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4} = 35$$

$$56 = 21 + 35$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1244) Πόσους τετραψηφίους ἀριθμοὺς καὶ ποίους δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μὲ τὰ ψηφία 1, 2, 3, 4;

1245) Κατὰ πόσους τρόπους δύνανται νὰ παραταχθοῦν 8 στρατιῶται εἰς μίαν γραμμήν;

1246) Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ σημαντικὰ ψηφία διάφορα;

1247) Πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ σχηματισθοῦν μὲ ψηφία διάφορα;

1248) Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\Delta_{\mu}^{\nu} : \Delta_{\mu}^{\nu-1}$

1249) Ἐὰν $\Delta_{\mu}^{3} : \Delta_{\mu}^{4} = \frac{1}{7}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1250) Ἐὰν $\Delta_{\mu}^{4} = 840$ νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.

1251) Ἐὰν $\Delta_{\mu}^{\nu} = 120\ \Sigma_{\mu}^{\nu}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

1252) Ἐὰν $\Sigma_{15}^{\nu} = \Sigma_{15}^{6}$ νὰ εὑρεθῇ ὁ ν.

1253) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma_{12}^{5}+\Sigma_{12}^{4}$.

1254) Ἐξ 8 ἀνδρῶν καὶ 9 γυναικῶν πρόκειται νὰ γίνῃ ἐπιτροπὴ περιλαμβάνουσα 5 μέλη ἐξ ἑκάστου φύλου. Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐπιτροπὴ αὐτή;

1255) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων ὀκταγώνου.

1256) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων εὐθυγράμμου σχήματος μὲ μ πλευρὰς καὶ μ κορυφάς.

1257) Πόσα τρίγωνα δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ 9 δοθείσας εὐθείας γραμμάς, ὑποτιθεμένου ὅτι δύο δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ τρεῖς δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου;

1258) Πόσα σημεῖα γίνονται, ἐὰν αἱ μ πλευραὶ ἐπιπέδου πολυγώνου προεκταθοῦν ἐπ' ἄπειρον καὶ ὑποτιθεμένου ὅτι δὲν εἶναι δύο παράλληλοι;

1259) Ἐκ 10 ἀνδρῶν καὶ 8 γυναικῶν πρόκειται νὰ σχηματισθῇ 7μελὴς ἐπιτροπὴ περιλαμβάνουσα 4 ἄνδρας καὶ 3 γυναῖκας. Κατὰ πόσους τρόπους δύναται νὰ σχηματισθῇ αὕτη;

Τύπος τοῦ διωνύμου.

323. Πρόβλημα. *Νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ τὸ γινόμενον μ διωνύμων πρώτου βαθμοῦ.*

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)\ \ldots\ (\chi+\kappa)$$

Τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τὰ ὁποῖα προκύπτουν ἐὰν λάβωμεν καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους ἕνα ὅρον, καὶ μόνον ἕνα, ἐξ ἑκάστου διωνύμου. Θὰ λάβωμεν δὲ οὕτως ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ μ πρὸς χ. Ἐὰν λάβωμεν τοὺς μ πρώτους ὅρους, θὰ ἔχωμεν τὸν πρῶτον ὅρον χ^{μ} τοῦ γινομένου. Ἐὰν λάβωμεν τὸν ὅρον α τοῦ πρώτου διωνύμου καὶ τὸν πρῶτον ὅρον χ ὅλων τῶν ἄλλων θὰ εὕρωμεν $\alpha\chi^{\mu-1}$, ἐὰν δὲ λάβωμεν τὸν ὅρον β τοῦ δευτέρου διωνύμου καὶ τὸν ὅρον χ ὅλων τῶν ἄλλων, θὰ εὕρωμεν $\beta\chi^{\mu-1}$. Ἐξακολουθοῦντες δὲ οὕτω θὰ εὕρωμεν γινόμενα $\gamma\chi^{\mu-1}$ ... ... $\kappa\chi^{\mu-1}$. Ὁ συντελεστὴς λοιπὸν τοῦ $\chi^{\mu-1}$ ἐν τῷ ἀναπτύγματι θὰ εἶναι

$$\alpha+\beta+\gamma+\ \ldots\ +\kappa=A_1$$

Ἄρα ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι $A_1\chi^{\mu-1}$.

Ἤδη λαμβάνοντες τοὺς δευτέρους ὅρους δύο οἱωνδήποτε διωνύμων καὶ τοὺς πρώτους ὅρους χ ὅλων τῶν ἄλλων, θὰ εὕρωμεν γινόμενα βαθμοῦ μ—2 πρὸς χ, ὡς τὰ $\alpha\beta\chi^{\mu-2}$, $\alpha\gamma\chi^{\mu-2}$, $\beta\gamma\chi^{\mu-2}$ κλπ., τὰ ὁποῖα προστιθέμενα θὰ δώσουν τὸν τρίτον ὅρον $A_2\chi^{\mu-2}$ τοῦ ζητουμένου γινομένου, ὅπου A_2 παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν μ ὅρων α, β, γ, ... κ λαμβανομένων ἀνὰ δύο.

Γενικῶς δέ, ἐὰν λάβωμεν τοὺς δευτέρους ὅρους ν οἱωνδήποτε διωνύμων καὶ τοὺς πρώτους ὅρους χ τῶν ὑπολοίπων μ—ν διωνύμων θὰ εὕρωμεν γινόμενα βαθμοῦ μ—ν πρὸς χ, ὧν τὸ ἄθροισμα θὰ δώσῃ τὸν γενικὸν ὅρον $A_\nu \chi^{\mu-\nu}$ τοῦ ζητουμένου γινομένου, ὅπου A_ν παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν μ ὅρων α, β, γ, ... κ λαμβανομένων ἀνὰ ν.

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ προτελευταῖος ὅρος τοῦ ζητουμένου γινομένου εἶναι ὁ $A_{\mu-1}\chi$, διότι λαμβάνεται ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου χ ἑνὸς διωνύμου καὶ ἐκ τῶν δευτέρων ὅρων ὅλων τῶν ἄλλων. Φανερὸν δὲ εἶναι, ὅτι ὁ τελευταῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι τὸ γινόμενον $\alpha.\beta.\gamma....\kappa = A_\mu$ βαθμοῦ 0 πρὸς χ.

Κατὰ τὰ ἀνώτερω λοιπὸν τὸ ζητούμενον γινόμενον εἶναι

$$(\chi+\alpha)(\chi+\beta)(\chi+\gamma)...(\chi+\kappa)= \\ =\chi^\mu + A_1\chi^{\mu-1} + A_2\chi^{\mu-2} + ... + A_\nu\chi^{\mu-\nu} + ... A_{\mu-1}\chi + A_\mu \quad (1)$$

Π. δ' $(\chi+1)(\chi+2)(\chi+3)(\chi+4)=$

$$=\chi^4 + A_1\chi^3 + A_2\chi^2 + A_3\chi + A_4$$

$$A_1 = 1+2+3+4 = 10$$

$$A_2 = 1.2+1.3+1.4+2.3+2.4+3.4 = 35$$

$$A_3 = 1.2.3+1.3.4+1.2.4+2.3.4 = 50$$

$$A_4 = 1.2.3.4 = 24$$

Ὥστε εἶναι

$$(\chi+1)(\chi+2)(\chi+3)(\chi+4) = \chi^4 + 10\chi^3 + 35\chi^2 + 50\chi + 24.$$

324. *Ἀνάπτυγμα τῆς δυνάμεως $(\chi+\alpha)^\mu$ κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ χ.*—Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha=\beta=\gamma=...=\kappa$, τὸ πρῶτον μέλος τοῦ τύπου (1) γίνεται $(\chi+\alpha)^\mu$. Διὰ δὲ τὸ δεύτερον μέλος αὐτοῦ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^μ εἶναι πάλιν ἡ μονὰς 1, ὁ συντελεστὴς A_1 εἶναι προφανῶς ἴσος μὲ μα, ὁ συντελεστὴς $A_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$ κτλ. γίνεται $\alpha^2+\alpha^2+\alpha^2+...$ Ὁ ἀριθμὸς δὲ τῶν ὅρων τοῦ ἀθροίσματος τούτου εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν μ γραμμάτων ἀνὰ δύο. Ὥστε εἶναι $A_2 = \Sigma_\mu^2.\alpha^2 = \dfrac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2$.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν, ὅτι $A_3 = \Sigma_\mu^3.\alpha^3 = \dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}$, $A_\nu = \Sigma_\mu^\nu.$

$\alpha^\nu = \dfrac{\mu(\mu-1)....(\mu-\nu+1)}{1.2.3....\nu}$ καὶ $A_\mu = \alpha^\mu$

Ὥστε εἶναι

$$(\chi+\alpha)^\mu = \chi^\mu + \Sigma_\mu^1\alpha\chi^{\mu-1} + \Sigma_\mu^2\alpha^2\chi^{\mu-2} + \Sigma_\mu^3\alpha^3\chi^{\mu-3} + ... + \Sigma_\mu^\nu\alpha^\nu$$

$$\chi^{\mu-\nu} + \ldots + \Sigma_\mu^{\mu-2}\, \alpha^{\mu-2} \chi^2 + \Sigma_\mu^{\mu-1}\, \alpha^{\mu-1} \chi + \alpha^\mu \qquad (2)$$

ἤτοι

$$(\chi+\alpha)^\mu = \chi^\mu + \frac{\mu}{1}\alpha\chi^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\chi^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\alpha^3\chi^{\mu-3}$$

$$+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}\alpha^\nu\chi^{\mu-\nu}+\ldots+\frac{\mu}{1}\alpha^{\mu-1}\chi+\alpha^\mu \quad (2').$$

Ὁ τύπος οὗτος λέγεται *τύπος τοῦ διωνύμου* ἢ *διώνυμον τοῦ Νεύτωνος* καὶ εἶναι συνηθεστάτης χρήσεως.

Ὁ ὅρος $\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}\alpha^\nu\chi^{\mu-\nu}$

λέγεται *γενικὸς ὅρος* τοῦ ἀναπτύγματος τῆς δυνάμεως $(\chi+\alpha)^\mu$, διότι ἐξ αὐτοῦ εὑρίσκομεν ὅλους τοὺς ὅρους αὐτοῦ ὑποθέτοντες τὸν ν διαδοχικῶς ἴσον μὲ τοὺς ἀριθμοὺς

$$1, 2, 3, \ldots\ldots \mu$$

325. Ἀνάπτυγμα τοῦ $(\chi-\alpha)^\mu$.—Ἐὰν εἰς τὸν τύπον (2′) ἀντικαταστήσωμεν τὸ α διὰ τοῦ —α λαμβάνομεν $(\chi-\alpha)^\mu = \chi^\mu - \frac{\mu}{1}\alpha\chi^{\mu-1}$

$$+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\alpha^2\chi^{\mu-2} - \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\alpha^3\chi^{\mu-3} + \ldots \pm\alpha^\mu$$

μὲ τὰ σημεῖα τῶν ὅρων ἐναλλασσόμενα

Π.δ. $(\chi+\alpha)^6 = \chi^6 + 6\alpha\chi^5 + 15\alpha^2\chi^4 + 20\alpha^3\chi^3 + 15\alpha^4\chi^2 + 6\alpha^5\chi + \alpha^6$

$$(\chi-\alpha)^7 = \chi^7 - 7\alpha\chi^6 + 21\alpha^2\chi^5 - 35\alpha^3\chi^4 + 35\alpha^4\chi^3 - 21\alpha^5\chi^2 + 7\alpha^6\chi - \alpha^7$$

Παρατηρήσεις. α) Εἰς τὸν τύπον τοῦ διωνύμου παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἐκθέται τοῦ χ βαίνουν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ μ ἕως 0, ἐνῷ οἱ ἐκθέται τοῦ α βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ 0 ἕως μ. Τὸ ἀνάπτυγμα λοιπὸν τοῦ $(\chi+\alpha)^\mu$ εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς βαθμοῦ μ πρὸς χ καὶ α καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων του εἶναι μ+1.

β) *Οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἴσον ἀπεχόντων ἀπὸ τῶν ἄκρων εἶναι ἴσοι.*

Τοῦτο συνάγεται ἐκ τοῦ τύπου 2. Διότι ἐξ αὐτοῦ βλέπομεν ὅτι οἱ ἄκροι ὅροι χ^μ καὶ α^μ ἔχουν συντελεστὴν τὴν μονάδα. Οἱ δεύτεροι ὅροι ἀπὸ τῶν ἄκρων ἔχουν συντελεστὰς Σ_μ^1 καὶ $\Sigma_\mu^{\mu-1}$, οἵτινες, εἶναι ἴσοι (§ 322), ἐπίσης ἴσοι εἶναι καὶ οἱ συντελεσταὶ Σ_μ^2, $\Sigma_\mu^{\mu-2}$ τῶν τρίτων ὅρων ἀπὸ τῶν ἄκρων κ.ο.κ. Ὅθεν ὅταν κατὰ τὴν ἀνάπτυξιν τοῦ $(\chi+\alpha)^\mu$ φθάσωμεν εἰς τὸν μεσαῖον ὅρον, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὑπολοίπων ὅρων γράφονται κατὰ τάξιν ἀντίστροφον.

γ) Ὁ ὅρος ὁ κατέχων τὴν τάξιν $\nu+1$ εἶναι

$$\frac{\mu(\mu-1).....(\mu-\nu+2)}{1.2.....(\nu-1)}\cdot\frac{\mu-\nu+1}{\nu}\alpha^{\nu}\,\chi^{\mu-\nu}$$

ὁ δὲ προηγούμενος αὐτοῦ νυοστὸς ὅρος εἶναι

$$\frac{\mu(\mu-1).....(\mu-\nu+2)}{1.2.....(\nu-1)}\alpha^{\nu-1}\cdot\chi^{\mu-\nu+1}$$

Ἐκ τούτων συνάγομεν τὸν ἑξῆς κανόνα εὑρέσεως ἔκ τινος ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος $(\chi+\alpha)^{\mu}$, τὸν ἑπόμενον αὐτοῦ.

Ἵνα ἔκ τινος ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος εὕρωμεν τὸν ἑπόμενον, πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ εὑρεθέντος ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ χ ἐν αὐτῷ καὶ τὸν διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἐκθέτου τοῦ α ηὐξημένου κατὰ 1. Ἔπειτα δὲ ἐλαττοῦμεν τὸν ἐκθέτην τοῦ χ κατὰ 1 ἐνῷ τὸν τοῦ α αὐξάνομεν κατὰ 1.

Κατὰ ταῦτα ἀφοῦ ὁ δεύτερος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(\chi+\alpha)^8$ εἶναι $8\alpha\chi^7$, ὁ συντελεστὴς τοῦ τρίτου ὅρου εἶναι $\frac{8.7}{2}=28$. Ὥστε ὁ τρίτος ὅρος εἶναι $28\alpha^2\chi^6$ καὶ ὁ τέταρτος $\frac{28.6}{3}\alpha^3\chi^5=56\alpha^3\chi^5$ καὶ ὁ πέμπτος $\frac{56.5}{4}\alpha^4\chi^4=70\alpha^4\chi^4$· οὗτος δὲ εἶναι ὁ μεσαῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος, διότι ὅλοι οἱ ὅροι αὐτοῦ εἶναι $8+1=9$. Ὥστε οἱ ὑπόλοιποι ὅροι αὐτοῦ εὑρίσκονται κατὰ τὴν παρατήρησιν β.

$$(\chi+\alpha)^8=\chi^8+8\alpha\chi^7+28\alpha^2\chi^6+56\alpha^3\chi^5+70\alpha^4\chi^4+56\alpha^5\chi^3+$$
$$+28\alpha^6\chi^2+8\alpha^7\chi+\alpha^8$$

δ) Ὁ λόγος τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ὅρου τοῦ κατέχοντος τὴν $\nu+1$ τάξιν πρὸς τὸν συντελεστὴν τοῦ $\nu^{οῦ}$ ὅρου εἶναι ὡς εἴδομεν προηγουμένως

$$\frac{\mu-\nu+1}{\nu}$$

καὶ ἐπ' αὐτὸν πολλαπλασιάζεται ὁ συντελεστὴς τοῦ $\nu^{οῦ}$ ὅρου, διὰ νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑπομένου. Ὅταν λοιπὸν εἶναι $\frac{\mu-\nu+1}{\nu}>1$ οἱ συντελεσταὶ αὐξάνουν. Πρὸς τοῦτο ὅμως πρέπει νὰ εἶναι $\nu<\frac{\mu+1}{2}$. Ἀλλὰ $\frac{\mu+1}{2}$ εἶναι τὸ ἥμισυ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος. Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτων ὅτι:

Οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος $(\chi+\alpha)^{\mu}$ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ τοῦ πρώτου ὅρου μέχρι τοῦ μεσαίου καὶ ἐλαττούμενοι ἀπ' αὐτοῦ μέχρι τοῦ τελευταίου.

Καὶ ὅταν μὲν ὁ μ εἶναι ἄρτιος ὑπάρχει εἷς συντελεστὴς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ἄλλων, ὁ μεσαῖος, διότι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὅρων $\mu+1$ εἶναι περιττός, ὅταν ὅμως ὁ μ εἶναι περιττὸς ὑπάρχουν εἰς τὸ μέσον δύο συντελεσταὶ ἴσοι καὶ μεγαλύτεροι ὅλων τῶν ἄλλων.

ε) Ἐὰν ἐν τῷ ἀναπτύγματι $(\chi+\alpha)^\mu$ θέσωμεν $\chi=1$ καὶ $\alpha=1$, εὑρίσκομεν $2^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} + \ldots + 1$ ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι :

Τὸ ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος $(\chi+\alpha)^\mu$ *ἰσοῦται μὲ* 2^μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ δυνάμεις

1260) $(\alpha+\beta)^{10}$ 1261) $(1-\chi)^8$ 1262) $\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)^8$

1263) $(3\chi+2\psi)^6$ 1264) $(\alpha^3-\beta^3)^5$ 1265) $(5+\sqrt{7})^4$

1266) $(1+\chi)^6-(1-\chi)^6$ 1267) $(\alpha+\beta\sqrt{2})^8+(\alpha-\beta\sqrt{2})^8$

1268) Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἕκτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $(\alpha^2+\chi^2)^{11}$

1269) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μεσαῖος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος $\left(\chi+\frac{1}{\chi}\right)^{12}$

1270) Νὰ εὑρεθῇ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ^7 τοῦ ἀναπτύγματος $(2\chi+\chi^2)^5$

1271) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\Sigma_\mu^1+\Sigma_\mu^3+\Sigma_\mu^5\ldots=1+(\Sigma_\mu^2+\Sigma_\mu^4+\Sigma_\mu^6\ldots)$$

1272) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθρ. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος $(3\chi+2\psi)^\mu$

1273) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθρ. τῶν συντελεστῶν τοῦ ἀναπτύγματος $(5\alpha-4\beta)^\mu$

Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ σχέσεις

1274) $\Sigma_\mu^1+\Sigma_\mu^3+\Sigma_\mu^5+\ldots=2^{\mu-1}$

1275) $\Sigma_\mu^1+2\Sigma_\mu^2+3\Sigma_\mu^3+\ldots+\mu\Sigma_\mu^\mu=\mu 2^{\mu-1}$

1276) $\Sigma_\mu^0+\frac{1}{2}\Sigma_\mu^1+\frac{1}{3}\Sigma_\mu^2+\ldots+\frac{1}{\mu+1}\Sigma_\mu^\mu=\frac{2^{\mu+1}-1}{\mu+1}$

326. Περὶ πιθανότητος.—Ὅλοι ἔχομεν τὴν ἔννοιαν τοῦ πιθανοῦ, τῆς πιθανότητος. Ὅταν π. χ. ρίπτωμεν ἓν νόμισμα εἰς τὸν ἀέρα, λέγομεν ὅτι πιθανὸν νὰ πέσῃ τοῦτο ἐπὶ τοῦ προσώπου ἢ ἐπὶ τῶν γραμμάτων. Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι ἐκ τῶν δύο αὐτῶν περιπτώσεων, ὁπωσδήποτε θὰ συμβῇ ἡ μία, χωρὶς ὅμως νὰ δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν ἐκ τῶν προτέρων ποία θὰ εἶναι αὕτη, διότι δὲν γνωρίζομεν οὐδεμίαν αἰτίαν, ἡ ὁποία νὰ εὐνοῇ τὴν μίαν ἢ τὴν ἄλλην περίπτωσιν. Δι' ὃ λέγομεν ὅτι αἱ περιπτώσεις αὗται εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί, ἤτοι ἔχουν τὴν αὐτὴν πιθανότητα νὰ συμβοῦν. *Ἡ πιθανότης τοῦ ὅτι θὰ συμβῇ τι ἐκφράζεται διὰ τοῦ λόγου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων πρὸς τὸν ἀριθμὸν ὅλων τῶν δυνατῶν περιπτώσεων, αἱ ὁποῖαι ὑποτίθεται, ὅτι εἶναι ἐξ ἴσου πιθαναί.*

Οὕτως ἡ πιθανότης ὅτι τὸ νόμισμα τοῦ προηγουμένου παραδείγματος θὰ πέσῃ ἐπὶ τῶν γραμμάτων εἶναι $\frac{1}{2}$· διότι ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι δύο καὶ εἶναι αὗται ἐξ ἴσου πιθαναί. Ἡ εὐνοϊκὴ δὲ περίπτωσις, ἥτις ἐνταῦθα εἶναι ἡ ἐπὶ τῶν γραμμάτων, εἶναι μία.

***Παραδείγματα.*—1ον.** *Εἰς μίαν κάλπην ἔχομεν 10 σφαίρας ἴσου μεγέθους, 3 λευκὰς καὶ 7 μαύρας. Ἐξάγομεν δὲ ἐξ αὐτῆς κατὰ τύχην μίαν σφαῖραν. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι αὕτη θὰ εἶναι λευκὴ καὶ ποία ὅτι αὕτη θὰ εἶναι μαύρη ;*

Ἐνταῦθα ὑπάρχουν 10 δυναταὶ περιπτώσεις, ἐξ ἴσου πιθαναί, 3 διὰ τὰς λευκὰς σφαίρας καὶ 7 διὰ τὰς μαύρας. Ὥστε ἡ πιθανότης, ὅτι ἡ σφαῖρα ποὺ θὰ ἐξαχθῇ θὰ εἶναι λευκὴ εἶναι $\frac{3}{10}$ καὶ ὅτι θὰ εἶναι μαύρη εἶναι $\frac{7}{10}$.

2ον. *Ρίπτομεν δύο κύβους, οἱ ὁποῖοι ἀμφότεροι ἔχουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν των τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, 5, 6 κατὰ σειράν. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν αἵτινες θὰ ἔλθουν ἐπάνω, θὰ ἔχουν ἄθροισμα 5 ;*

Ὅλαι αἱ δυναταὶ περιπτώσεις εἶναι 36· αἱ δὲ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι αἱ δίδουσαι τὸ ἄθροισμα 5. Εἶναι δὲ αὗται αἱ 1+4, 2+3, 4+1, 3+2. Ἡ ζητουμένη λοιπὸν πιθανότης εἶναι $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

3ον. *Ἕνα λαχεῖον ἔχει 100 ἀριθμοὺς καὶ ἐξ αὐτῶν κερδίζουν οἱ 5 οἱ ὁποῖοι ἐξάγονται κατὰ τύχην. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι μεταξὺ τῶν 5 αὐτῶν ἀριθμῶν θὰ ὑπάρχουν 3 ἀριθμοὶ τοῦ λαχείου ποὺ ἠγοράσθησαν προηγουμένως ;*

Ὁ ἀριθμὸς τῶν δυνατῶν περιπτώσεων εἶναι προφανῶς ὁ ἀριθμὸς τῶν συνδυασμῶν τῶν 100 ἀριθμῶν ἀνὰ 5

$$\Sigma_{100}^{5}=\frac{100.99.98.97.96}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$$

Αἱ εὐνοϊκαὶ περιπτώσεις εἶναι οἱ συνδυασμοὶ οἵτινες περιέχουν τοὺς 3 ἀγορασθέντας ἀριθμοὺς καὶ διὰ νὰ τοὺς εὕρωμεν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς : Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τοὺς 3 ὡς ἄνω ἀριθμούς, συνδυάσωμεν ἔπειτα τοὺς 100—3=97 ὑπολοίπους ἀριθμοὺς ἀνὰ 5—3=2 καὶ τέλος θέσωμεν εἰς ἕκαστον τῶν συνδυασμῶν τούτων τοὺς 3 ἀγορασθέντας ἀριθμούς, θὰ λάβωμεν ὅλους τοὺς συνδυασμούς, οἱ ὁποῖοι θὰ περιέχουν τοὺς 3 ἀριθμούς. Ὥστε ὁ ἀριθμὸς τῶν εὐνοϊκῶν περιπτώσεων εἶναι

$$\Sigma_{97}^{2}=\frac{97.96}{1.2}$$

καὶ ἡ ζητουμένη πιθανότης εἶνσι $\quad \dfrac{\Sigma_{97}^{2}}{\Sigma_{100}^{5}}=\dfrac{1}{16170}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1277) Ἕνα λαχεῖον ἔχει 90 ἀριθμοὺς καὶ ἐξ αὐτῶν οἱ πέντε ποὺ ἐξάγονται κατὰ τύχην κερδίζουν. Ἐὰν ἀγοράσῃ τις ἕναν ἀριθμὸν π. χ. τὸν 20, ποίαν πιθανότητα ἔχει ὅτι θὰ κερδίσῃ;

1278) Ρίπτομεν δύο κύβους. Ποία εἶναι ἡ πιθανότης, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν αἱ ὁποῖαι θὰ ἔλθουν πρὸς τὰ ἄνω θὰ ἔχουν ἄθροισμα 7;

1279) Ἐξ 100 λαχνῶν ἀπὸ τοῦ 1 ἕως 100 ἐξάγεται εἷς κατὰ τύχην. Ποίαι εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι ὁ ἀριθμός του θὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3;

1280) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι θὰ εἶνα πρῶτος ἀριθμός;

1281) Ἐὰν ρίψωμεν τρεῖς κύβους συγχρόνως ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι οἱ ἀριθμοὶ τῶν ἑδρῶν θὰ ἔχουν ἄθροισμα 12;

1282) Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ποία εἶναι ἡ πιθανότης ὅτι εἰς ἕνα καὶ μόνον εἰς ἕνα θὰ ἔχωμεν τὸν ἀριθμὸν 1;

1283) Ἐὰν ρίψωμεν ἕνα νόμισμα κατὰ τύχην τρεῖς φοράς, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ δείξῃ καὶ τὰς τρεῖς φορὰς πρόσωπον.

1284) Ἐὰν ρίψωμεν δύο νομίσματα 10 φοράς, ποία εἶναι ἡ πιθανότης νὰ δείξουν ἀμφότερα καὶ τὰς 10 φορὰς πρόσωπον:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

Περὶ ὁριζουσῶν

327. ***Ὁρισμοί.*** Διὰ τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} \alpha\chi+\beta\psi&=\gamma \\ \alpha'\chi+\beta'\psi&=\gamma' \qquad (1) \end{aligned}$$

γνωρίζομεν ὅτι (§ 139), ἐὰν $\alpha\beta'-\alpha'\beta\neq 0$, ἔχει τὴν λύσιν

$$\chi=\frac{\gamma\beta'-\gamma'\beta}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}, \qquad \psi=\frac{\gamma'\alpha-\gamma\alpha'}{\alpha\beta'-\alpha'\beta}. \quad (2)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἐὰν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἀγνώστων γράψωμεν μὲ τὴν τάξιν, τὴν ὁποίαν ἔχουν ἐν τῷ συστήματι (1).

$$\begin{matrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{matrix}$$

ὁ κοινὸς παρονομαστὴς τῶν τύπων (2) εἶναι ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα δύο γινομένων, ἐξ ὧν τὸ μὲν πρῶτον εὑρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συντελεστῶν α, β′ τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς διαγωνίου τῆς ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιά, τὸ δὲ δεύτερον εὑρίσκεται διὰ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν συντελεστῶν α', β τῶν κειμένων ἐπὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου, μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι τὸ δεύτερον αὐτὸ γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ —1.

Τὸ ἄθροισμα τῆς μορφῆς αβ'—α'β καλοῦμεν *ὁρίζουσαν* τῶν $2^2(=4)$ ἀριθμῶν α, β', α', β τὴν ὁποίαν κατὰ συνθήκην παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} \quad \text{ἤτοι θέτομεν} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \alpha'\beta \qquad (3)$$

Οἱ ἀριθμοὶ α, β' κ.τ.λ. λέγονται *στοιχεῖα* τῆς ὁριζούσης. Ἐπειδὴ δὲ οἱ ὅροι αὐτῆς ἔχουν ἕκαστος δ ύ ο παράγοντας ἢ ἐπειδὴ ἐν τῷ συμβόλῳ τὰ στοιχεῖα εἶναι τεταγμένα εἰς δύο σειρὰς ὁριζοντίους ἢ *γραμμὰς* καὶ δύο καθέτους ἡ ὁρίζουσα αὕτη λέγεται *δευτέρας τάξεως* ἢ δευτέρου βαθμοῦ.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν τύπων (2) εἶναι ὁρίζουσαι δευτέρας τάξεως. Ὥστε γράφομεν

$$\chi = \frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}} \qquad \psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix}}$$

328. ***Ὁρίζουσα τρίτης τάξεως.***—Ἡ ὁρίζουσα,

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

ἥτις, ὡς βλέπομεν, ἀποτελεῖται ἐκ $3^2(=9)$ στοιχείων τεταγμένων εἰς τρεῖς γραμμὰς καὶ τρεῖς στήλας, λέγεται ὁρίζουσα *τρίτης* τάξεως ἢ τρίτου βαθμοῦ.

329. ***Ἀνάπτυγμα ὁριζούσης.*** *Ἐλάσσων ὁρίζουσα.*— Τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (3) λέγεται *ἀνάπτυγμα* τῆς ὁριζούσης κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης. Διὰ νὰ εὕρωμεν ἤδη τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης Δ_3, πρέπει νὰ γνωρίζωμεν τὰ ἑξῆς :

Ἐλάσσων ὁρίζουσα.— *Ἐλάσσων* ὁρίζουσα ἀντίστοιχος πρὸς ἓν *στοιχεῖον* μιᾶς ὁριζούσης λέγεται ἡ ὁρίζουσα ἡ προκύπτουσα δι' ἀπο κοπῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἃς ἀνήκει τὸ *στοιχεῖον* πολλαπλασιασθεῖσα ἐπὶ + ἢ —, καθ' ὅσον τὸ *ἄθροισμα* τῶν ἀριθμῶν ποὺ δεικνύουν τὴν τάξιν τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἃς ἀνήκει τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἶναι *ἄρτιον* ἢ *περιττόν*.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τῆς ὁριζούσης Δ_3 αἱ ἀντίστοιχοι πρὸς τὰ στοιχεῖα α_1 β_1, γ_1 τῆς δευτέρας γραμμῆς, εἶναι ἀντιστοίχως αἱ

$$-\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad +\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad -\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

καὶ ἐξ αὐτῶν ἡ πρώτη πολλαπλασιάζεται ἐπὶ —, διότι τὸ ἀντίστοιχον στοιχεῖον α_1 εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς δευτέρας γραμμῆς καὶ 1ης στήλης, τὸ δὲ ἄθροισμα $2+1=3$ εἶναι περιττὸν κ.ο.κ.

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον στοιχεῖον τῆς δευτέρας γραμμῆς ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐλάσσονα ὁρίζουσαν καὶ προσθέσωμεν κατόπιν τὰ γινόμενα λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης Δ_3 *κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας γραμμῆς*· ἤτοι λαμβάνομεν

$$-\alpha_1\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} +\beta_1\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} -\gamma_1\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$=-\alpha_1\beta\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma+\beta_1\alpha\gamma_2-\beta_1\alpha_2\gamma-\gamma_1\alpha\beta_2+\gamma_1\alpha_2\beta. \quad (4)$$

Ἐὰν δὲ ἀναπτύξωμεν τὴν ἰδίαν ὁρίζουσαν Δ_3 κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης εὑρίσκομεν

$$\Delta_3=\alpha\begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} -\alpha_1\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} +\alpha_2\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} =$$

$$=\alpha\beta_1\gamma_2-\alpha\beta_2\gamma_1-\alpha_1\beta\gamma_2+\alpha_1\beta_2\gamma+\alpha_2\beta\gamma_1-\alpha_2\beta_1\gamma \quad (5)$$

Συγκρίνοντες ἤδη τὰ ἀναπτύγματα (4) καὶ (5) βλέπομεν ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα. Συνάγομεν λοιπὸν ἐκ τούτου ὅτι : *Δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν μίαν ὁρίζουσαν κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς ἢ στήλης.*

Οὕτως ἀναπτύσσοντες τὴν ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης εὑρίσκομεν

$$4\begin{vmatrix}5 & 2\\ -2 & 4\end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix}5 & -3\\ -2 & 4\end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix}5 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix} =$$

$$=4(20+4)-1(10-6)+3(10+15)=80+16-20+6+30+45=157.$$

Ἐάν δὲ ἀναπτύξωμεν τὴν δοθεῖσαν ὁρίζουσαν κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης γραμμῆς εὑρίσκομεν

$$3(10+15)+2(8+3)+4(20-5)=30+45+16+6+80-30=157.$$

330. ***Κανὼν τοῦ*** Sarrus.—Διὰ τοῦ πρακτικοῦ τούτου κανόνος εὑρίσκομεν τὸ ἀνάπτυγμα ὁριζούσης τρίτης τάξεως. Πρὸς τοῦτο γράφομεν δεξιὰ τῆς τρίτης στήλης διὰ δευτέραν φορὰν τὴν πρώτην καὶ ἔπειτα τὴν δευτέραν στήλην.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ & & + & + & + \end{array}$$

Κατόπιν σχηματίζομεν τὰ τρία γινόμενα $\alpha\beta_1\gamma_2$, $\beta\gamma_1\alpha_2$, $\gamma\alpha_1\beta_2$ πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν τὸ σημεῖον $+$, τῶν στοιχείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν διαγωνίων, αἵτινες βαίνουν ἐκ τῶν ἄνω ἀριστερὰ πρὸς τὰ κάτω δεξιά· ἔπειτα σχηματίζομεν τὰ τρία γινόμενα $\alpha_2\beta_1\gamma$, $\beta_2\gamma_1\alpha$, $\gamma_2\alpha_1\beta$, πρὸ τῶν ὁποίων θέτομεν τὸ σημεῖον —, τῶν στοιχείων τῶν κειμένων ἐπὶ τῶν διαγωνίων τῶν ἐκ τῶν κάτω ἀριστερὰ πρὸς τὰ ἄνω δεξιά. Τέλος προσθέτοντες τὰ ἕξ αὐτὰ γινόμενα λαμβάνομεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης $\alpha\beta_1\gamma_2+\beta\gamma_1\alpha_2+\gamma\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\alpha-\beta_2\gamma_1\alpha-\gamma_2\alpha_1\beta$

π.δ.

$$\begin{array}{ccc|cc} & & -45 & -7 & -16 \\ 7 & 2 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ & & 42 & 10 & 12 \end{array} =42+10+12-45-7-16=-4$$

331. *Παρατηρήσεις*. Ἐπὶ τῶν προηγουμένων παρατηροῦμεν τὰ ἑξῆς:

1) *Ἕκαστος ὅρος* (τοῦ ἀναπτύγματος) *τῆς ὁριζούσης περιέχει ἓν στοιχεῖον καὶ ἓν μόνον ἐξ ἑκάστης γραμμῆς καὶ ἐξ ἑκάστης στήλης.*

2) *Ἡ ἐλάσσων ὁρίζουσα ἡ ἀντίστοιχος ἑνὸς στοιχείου εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τῶν ἄλλων στοιχείων τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης εἰς ἃς κεῖται τὸ στοιχεῖον τοῦτο.*

3) *Ἐὰν πάντα τὰ στοιχεῖα γραμμῆς ἢ στήλης εἶναι μηδὲν πλὴν ἑνός,*

ἡ ὁρίζουσα ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ στοιχείου τούτου (τοῦ διαφόρου τοῦ μηδενὸς) *ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον ἐλάσσονα ὁρίζουσαν.*

π.δ.

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ 0 & \beta_2 & \gamma_2 \\ 0 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

332. Ὁρίζουσαι ἀνωτέρας τάξεως.—Κατὰ τὰ ἀνωτέρω τὸ σύμβολον

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

τῶν $4^2(=16)$ ἀριθμῶν τεταγμένων εἰς τέσσαρας γραμμὰς καὶ τέσσαρας στήλας καλοῦμεν ὁρίζουσαν *τετάρτης* τάξεως.

Τὸ ἀνάπτυγμα αὐτῆς κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώ ης στήλης εἶναι

$$\Delta_4 = \alpha \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} - \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{vmatrix} - \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta & \gamma & \delta \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

Δεικνύεται δὲ ὡς καὶ εἰς τὴν ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἀναπτύξωμεν ὁρίζουσαν 4ης τάξεως κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς ἢ στήλης. Διότι θὰ εὑρίσκωμεν πάντοτε τὸ αὐτὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα :

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον ὁρίζομεν τὰς ὁριζούσας πέμπτης, ἕκτης, νυοστῆς τάξεως. Δεικνύεται δὲ ὁμοίως ὅτι μία ὁρίζουσα τάξεως ,ν δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα οἱασδήποτε γραμμῆς ἢ στήλης. Ὡσαύτως αἱ παρατηρήσεις τῆς § 331 ἐκτείνονται καὶ εἰς τὰς ὁριζούσας οἱασδήποτε τάξεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ ὁρίζουσαι

1285) $\begin{vmatrix} 4 & -6 & 8 \\ 3 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$ 1286) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ \frac{7}{3} & 4 & -3 \\ \frac{25}{6} & -7 & 4 \end{vmatrix}$ 1287) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & \frac{5}{6} \\ 1 & 1 & \frac{7}{12} \end{vmatrix}$

1288) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 1289) $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \beta & \beta \\ \alpha & \gamma & \gamma \end{vmatrix}$ 1290) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & \beta \\ \alpha & \alpha+\gamma & \gamma \\ \beta & \gamma & \beta+\gamma \end{vmatrix}$

1291) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 8 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ 1292) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}$ 1293) $\begin{vmatrix} 5 & 9 & 2 & 6 \\ 0 & 5 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν.

333. *Ἡ ὁρίζουσα δὲν μεταβάλλεται ἐὰν ἑκάστη γραμμὴ ἀντιμετατεθῇ μετὰ τῆς στήλης τῆς αὐτῆς τάξεως.*

Ἤτοι α΄ διὰ τὴν ὁρίζουσαν Δ_2 θὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$$ διότι ἀμφότεραι εἶναι ἴσαι μὲ $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1$.

β΄. Διὰ τὴν ὁρίζουσαν Δ_3 θὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Διότι ἐὰν A_1, B_1, Γ_1 εἶναι αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τῶν στοιχείων τῆς πρώτης γραμμῆς τῆς ὁριζούσης τοῦ α^ου μέλους καὶ A'_1 B_1' Γ_1' εἶναι αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τῶν στοιχείων τῆς πρώτης στήλης τῆς ὁριζούσης τοῦ β^ου μέλους θὰ ἔχωμεν τὰ ἀντίστοιχα ἀναπτύγματα

$$\alpha_1A_1+\beta_1B_1+\gamma_1\Gamma_1 \text{ καὶ } \alpha_1A_1'+\beta_1B'_1+\gamma_1\Gamma_1'$$

Ἀλλ' αἱ ὁρίζουσαι 2ας τάξεως

$$A_1=\begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad A'_1=\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

εἶναι κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν ἴσαι. Ὡσαύτως εἶναι καὶ

$$B_1=B'_1, \qquad \Gamma_1=\Gamma'_1$$

Τὰ δύο λοιπὸν ἀναπτύγματα τῶν ὁριζουσῶν τῆς ἰσότητος (6) εἶναι ἴσα. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ἡ ἰδιότης αὐτὴ καὶ δι' ὁριζούσης ἀνωτέρας τάξεως.

334. *Ἡ ὁρίζουσα ἀλλάσσει σημεῖον ὅταν ἀντιμετατεθοῦν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαι.*

α. Διὰ τὴν ὁρίζουσαν Δ_2 ἔχομεν

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = -(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1) = -\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

β. Καὶ διὰ τὰς ὁριζούσας Δ_3 ἀληθεύει ἡ ἰδιότης αὕτη. Διότι ἔστω αἱ ὁρίζουσαι

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \qquad \Delta'_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

Ἐὰν ἀναπτύξωμεν αὐτὰς κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης καὶ παραστήσωμεν τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας διὰ

A_1, A_2, A_3 καὶ A'_1, A'_2, A'_3 ἀντιστοίχως θὰ ἔχωμεν

$$\Delta_3 = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \quad \Delta'_3 = \alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 + \alpha_3 A'_3$$

$$\text{ἀλλὰ } A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad A'_1 = \begin{vmatrix} \gamma_2 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$$

καὶ ἑπομένως $A_1 = -A'_1$ καὶ ἐπειδὴ ὁμοίως εἶναι

$A_2 = -A'_2$, $A_3 = -A'_3$, ἕπεται ὅτι

$$\Delta_3 = -\Delta'_3.$$

Ὁμοίως δὲ ἀποδεικνύεται ἡ ἀνωτέρω πρότασις καὶ διὰ τὴν ὁρίζουσαν 4ης, 5ης, κ.ο.κ. τάξεως.

335.—*Ἡ ὁρίζουσα εἶναι 0, ἐὰν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαι εἶναι αἱ αὐταί*, Διότι μὲ τὴν ἀντιμετάθεσιν τῶν γραμμῶν ἢ τῶν στηλῶν αὐτῶν ἡ ὁρίζουσα Δ μένει ἀμετάβλητος, ἀλλάσσει ὅμως σημεῖον (334). Ὥστε εἶναι

$$\Delta = -\Delta \quad \text{καὶ} \quad 2\Delta = 0 \quad \text{ἤτοι} \quad \Delta = 0.$$

336.—*Ἐὰν τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ ἕνα ἀριθμόν, ἡ ὁρίζουσα πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.*

Διότι (§ 331 παρατ. 1) ἕκαστος ὅρος τῆς ὁριζούσης περιέχει ἓν ἐκ τῶν στοιχείων καὶ ἓν μόνον τῆς γραμμῆς ἢ τῆς στήλης ἥτις ἐπολλαπλασιάσθη ἐπὶ τὸν ἀριθμόν. Ὥστε ὅλοι οἱ ὅροι τῆς ὁριζούσης πολλαπλασιάζονται ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν.

Κατὰ ταῦτα λοιπὸν εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \kappa\beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \kappa\beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \kappa\beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{καὶ} \quad \begin{vmatrix} 12 & 2 & 3 \\ 15 & 3 & 1 \\ 21 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

337 Πόρισμα. *Ἡ ὁρίζουσα εἶναι μηδὲν ἐὰν δύο γραμμαὶ ἢ δύο στῆλαι ἔχουν στοιχεῖα ἀνάλογα.*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \kappa\beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \kappa\beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \kappa\beta_3 \end{vmatrix} = \kappa \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

338. *Ἐὰν ἕκαστον τῶν στοιχείων μιᾶς γραμμῆς ἢ στήλης εἶναι ἄθροισμα ν ἀριθμῶν, ἡ ὁρίζουσα εἶναι ἄθροισμα ν ὁριζουσῶν τῆς αὐτῆς τάξεως.* Π. χ.
ἤτοι εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\beta_1+\gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2+\beta_2+\gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3+\beta_3+\gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \beta_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \beta_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_1 & \delta_1 & \varepsilon_1 \\ \gamma_2 & \delta_2 & \varepsilon_2 \\ \gamma_3 & \delta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

Διότι ἐὰν ἀναπτύξωμεν τὴν ὁρίζουσαν τοῦ πρώτου μέλους κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης καὶ παραστήσωμεν τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας τῶν στοιχείων ταύτης δι᾽ A_1, A_2, A_3, ἀντιστοίχως, θὰ λάβωμεν

$$(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1)A_1+(\alpha_2+\beta_2+\gamma_2)A_2+(\alpha_3+\beta_3+\gamma_3)A_3=$$
$$=(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3)+(\alpha_1A_1+\beta_2A_2+\beta_6A_3)+(\gamma_1A_1+\gamma_2A_2+\gamma_3A_3). \quad (2)$$

Ἀλλ᾽ ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι τὸ δεύτερον μέλος τῆς προηγουμένης ταυτότητος (2) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀναπτυγμάτων κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης τῶν τριῶν ὁριζουσῶν τὴν (1). Ἡ ἀνωτέρω λοιπὸν πρότασις ἀπεδείχθη.

339.—*Ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς γραμμῆς* (ἢ στήλης) *προσθέσωμεν κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα ἄλλης γραμμῆς* (ἢ στήλης) *πολλαπλασιασθέντα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν λ, ἡ ὁρίζουσα δὲν μεταβάλλεται.*

ἤτοι εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\alpha_2 & \beta_1+\lambda\beta_2 & \gamma_1+\lambda\gamma_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

διότι ἡ ὁρίζουσα τοῦ δευτέρου μέλους ἀναλύεται εἰς τὰς ἑξῆς δύο ὁριζούσας

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda\alpha_2 & \lambda\beta_2 & \lambda\gamma_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ δευτέρα εἶναι 0 (§ 337). Ὁμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda\beta_1 & \beta_2 & \gamma_1 \\ \alpha_2-\lambda\beta_2 & \beta_1 & \gamma_2 \\ \alpha_3-\lambda\beta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

καὶ γενικώτερον ἀκόμη, ὅτι εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1-\lambda\beta_1+\mu\gamma_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2-\lambda\beta_2+\mu\gamma_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3-\lambda\beta_3+\mu\gamma_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Ἐφαρμογαί : 1) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 22 & 8 & 11 \\ 12 & 5 & 7 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης στήλης ἐπὶ —2 καὶ τὰ προκύπτοντα γινόμενα προσθέτομεν εἰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν

$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 11 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ Κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὰ στοιχεῖα τῆς τρίτης γραμμῆς ἐπὶ —2 καὶ προσθέτομεν τὰ γινόμενα εἰς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς δευτέρας γραμμῆς. Οὕτω δὲ λαμβάνομεν

$$\begin{vmatrix} 0 & 8 & 11 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 . \begin{vmatrix} 8 & 11 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1(-8+11) = -3$$

2) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὁρίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Προσθέτοντες εἰς τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης γραμμῆς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν δύο ἄλλων, λαμβάνομεν

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Κατόπιν ἀφαιροῦντες ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας καὶ τρίτης στήλης τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς πρώτης εὑρίσκομεν

$$6 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6.1. \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 6(2+1) = 18$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1294) Νὰ γίνῃ ἡ ἐπαλήθευσις τῶν κάτωθι ἰσοτήτων ἄνευ ὑπολογισμοῦ τῶν ὁριζουσῶν

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 \\ 7 & 4 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 8 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κάτωθι ὁρίζουσαι εἶναι μηδὲν

1295) $\begin{vmatrix} \alpha+\delta & \alpha & 1 \\ \beta+\delta & \beta & 1 \\ \gamma+\delta & \gamma & 1 \end{vmatrix}$ 1296) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \beta-\alpha & \beta \\ \beta+\gamma & \gamma-\beta & \gamma \\ \gamma+\alpha & \alpha-\gamma & \alpha \end{vmatrix}$

1297) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3+\chi \end{vmatrix} = 0$$

ἐν τῇ ὑποθέσει ὅτι $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0$.

Αἱ κάτωθι ὁρίζουσαι ν' ἀναλυθοῦν εἰς ἄθροισμα (ἢ διαφορὰν) δύο ὁριζουσῶν.

1298) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 1299) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 4 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 13 & 7 \\ 12 & 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$

Τὰ κάτωθι ἀθροίσματα (ἢ διαφοραὶ) νὰ παρασταθοῦν διὰ μιᾶς ὁριζούσης.

1300) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 7 & 4 & 4 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 7 & 4 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 1301) $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}$

1302) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$

Αἱ κάτωθι ὁρίζουσαι νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῆς ἰδιότητος 339.

1303) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ 1304) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \alpha+\gamma \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ 1305) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \gamma+\delta & 1 \\ \beta+\gamma & \delta+\alpha & 1 \\ \gamma+\alpha & \beta+\delta & 1 \end{vmatrix}$

1306) $\begin{vmatrix} 13 & 6 & 4 & 2 \\ 26 & 10 & 3 & 9 \\ 91 & 14 & 49 & 35 \\ 52 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$ 1307) $\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 & 2 \\ 11 & 27 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 5 & 18 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι

1308) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

1309) $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\,[\,(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\,]$

Λύσις συστήματος πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων διὰ τῶν ὁριζουσῶν.

340.— *Λύσις συστήματος ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους.* Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα (I).

$$\mathrm{I}\quad \begin{aligned} &\alpha_1\chi+\beta_1\psi+\gamma_1\varphi+\delta_1\omega=\varepsilon_1 && (1)\\ &\alpha_2\chi+\beta_2\psi+\gamma_2\varphi+\delta_2\omega=\varepsilon_2 && (2)\\ &\alpha_3\chi+\beta_3\psi+\gamma_3\varphi+\delta_3\omega=\varepsilon_3 && (3)\\ &\alpha_4\chi+\beta_4\psi+\gamma_4\varphi+\delta_4\omega=\varepsilon_4 && (4) \end{aligned}$$

Καὶ ἔστω ὅτι ἡ ὁρίζουσα

$$\Delta=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων, ἥτις λέγεται *ὁρίζουσα τοῦ συστήματος* I, εἶναι διάφορος τοῦ 0.

Ἐὰν ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος I κατὰ σειρὰν ἐπὶ τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας τῆς Δ, A_1, A_2, A_3, A_4, ἀντιστοίχους πρὸς τὰ στοιχεῖα α_1, α_2, α_3, α_4, καὶ προσθέσωμεν ἔπειτα τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν

$$\begin{aligned}&(\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3+\alpha_4A_4)\chi+(\beta_1A_1+\beta_2A_2+\beta_3A_3+\beta_4A_4)\psi\\&+(\gamma_1A_1+\gamma_2A_2+\gamma_3A_3+\gamma_4A_4)\varphi+(\delta_1A_1+\delta_2A_2+\delta_3A_3+\delta_4A_4)\omega\\&=\varepsilon_1A_1+\varepsilon_2A_2+\varepsilon_3A_3+\varepsilon_4A_4\end{aligned}\tag{5}$$

Ἀλλ' ἤδη παρατηροῦμεν ὅτι

$$\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\alpha_3A_3+\alpha_4A_4=\Delta \text{ καὶ } (\S\ 335)$$

ὅτι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἄλλων ἀγνώστων ψ, φ, ω εἶναι 0. Ὥστε ἡ ἐξίσωσις (5) ἀνάγεται εἰς τὴν

$$\Delta.\chi=\varepsilon_1A_1+\varepsilon_2A_2+\varepsilon_3A_3+\varepsilon_4A_4\tag{5'}$$

$$\text{Ἀλλὰ } \varepsilon_1A_1+\varepsilon_2A_2+\varepsilon_3A_3+\varepsilon_4A_4=\begin{vmatrix}\varepsilon_1&\beta_1&\gamma_1&\delta_1\\\varepsilon_2&\beta_2&\gamma_2&\delta_2\\\varepsilon_3&\beta_3&\gamma_3&\delta_3\\\varepsilon_4&\beta_4&\gamma_4&\delta_4\end{vmatrix}=\Delta_1$$

ἥτις Δ_1 ὡς βλέπομεν προκύπτει ἐκ τῆς Δ, διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως κατὰ σειρὰν τῶν στοιχείων τῆς πρώτης στήλης (δηλαδὴ τῶν συντελεστῶν τοῦ χ) ὑπὸ τῶν δευτέρων μελῶν ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Ἐκ τῆς ἐξισώσεως λοιπὸν (5') εὑρίσκομεν ὅτι

$$\chi=\frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Καθ' ὅμοιον δὲ τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι

$$\psi=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad \varphi=\frac{\Delta_3}{\Delta},\quad \omega=\frac{\Delta_4}{\Delta}$$

ὅπου αἱ ὁρίζουσαι Δ_2, Δ_3, Δ_4 προκύπτουν ἐκ τῆς Δ, ὅταν ἐν αὐτῇ ἀντικατασταθοῦν κατὰ σειρὰν τὰ στοιχεῖα τῆς δευτέρας, τρίτης καὶ τετάρτης στήλης ὑπὸ τῶν δευτέρων μελῶν ε_1, ε_2, ε_3, ε_4.

Ὁμοίως δὲ δεικνύεται ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν ἓν σύστημα ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους

$$\chi_1,\ \chi_2,\ \chi_3 \dots \chi_\nu$$

καὶ οὗ ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι διάφορος τοῦ 0, ἡ τιμὴ τοῦ χ_μ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$\chi_\mu=\frac{\Delta_\mu}{\Delta}$$

εἰς ὃν *ὁ ἀριθμητὴς* Δ_μ *προκύπτει ἐκ τῆς ὁριζούσης τοῦ συστήματος* Δ, *ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῆς μυοστῆς στήλης, ἤτοι οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου* χ_μ *,ἀντικατασταθοῦν ὑπὸ τῶν δευτέρων μελῶν* ε_1, ε_2, $\varepsilon_3 \dots \varepsilon_\nu$.

Π.δ. Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα

$$\begin{aligned} 2\chi+3\psi-\phi&=3\\ 3\chi-5\psi+2\phi&=9\\ \chi+8\psi-3\phi&=-2 \end{aligned}$$

Εὑρίσκομεν

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 3 & -5 & 2\\ 1 & 8 & -3 \end{vmatrix}=2 \qquad \Delta_1=\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1\\ 9 & -5 & 2\\ -2 & 8 & -3 \end{vmatrix}=4$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1\\ 3 & 9 & 2\\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}=2 \qquad \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3\\ 3 & -5 & 9\\ 1 & 8 & -2 \end{vmatrix}=8$$

ὅθεν εἶναι $\chi=\frac{4}{2}=2, \quad \psi=\frac{2}{2}=1, \quad \phi=\frac{8}{2}=4$

Σημείωσις. Ἡ ἀνάπτυξις τῶν ὁριζουσῶν Δ, Δ_1, Δ_2, Δ_3 κ.τ.λ. δίδει τοὺς τύπους κατὰ τὸν κανόνα τοῦ Cramer (§ 144), ὅστις οὕτω λαμβάνει ἐνταῦθα τὴν ἀπόδειξίν του.

341. Περίπτωσις καθ' ἣν ἡ ὁρίζουσα Δ τοῦ συστήματος (I) εἶναι 0.—Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα Δ τοῦ συστήματος (I) τῆς προηγουμένης παραγράφου εἶναι 0, παρατηροῦμεν ὅτι:

Ἐκ τῶν ἐλασσόνων ὁριζουσῶν τρίτης, δευτέρας καὶ πρώτης τάξεως, αἵτινες προκύπτουν ἐκ τῆς Δ, μία τουλάχιστον θὰ εἶναι διάφορος τοῦ 0, διότι ἄλλως ὅλοι οἱ συντελεσταὶ α_1, β_1, κ.τ.λ. τῶν ἀγνώστων θὰ ἦσαν μηδέν. Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ὅλαι αἱ ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τρίτης τάξεως εἶναι 0 καὶ ὅτι ἐκ τῶν ἐλασσόνων δευτέρας τάξεως μία τουλάχιστον, ἤτοι ἡ

$A=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ εἶναι διάφορος τοῦ 0. Τὴν ὁρίζουσαν ταύτην καλοῦμεν *σημαντικὴν* ἐλάσσονα τῆς ὁριζούσης Δ.

Ἐπειδὴ δὲ τὰ στοιχεῖα ταύτης εἶναι οἱ συντελεσταὶ τῶν ἀγνώστων χ, ψ εἰς τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις, γράφομεν ταύτας ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \alpha_1\chi+\beta_1\psi&=\varepsilon_1-\gamma_1\phi-\delta_1\omega\\ \alpha_2\chi+\beta_2\psi&=\varepsilon_2-\gamma_2\phi-\delta_2\omega \end{aligned}$$

Ἐκ τοῦ συστήματος δὲ αὐτοῦ λαμβάνομεν

$$\chi=\frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1-\gamma_1\phi-\delta_1\omega & \beta_1\\ \varepsilon_2-\gamma_2\phi-\delta_2\omega & \beta_2 \end{vmatrix}}{A}, \quad \psi=\frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1-\gamma_1\phi-\delta_1\omega\\ \alpha_2 & \varepsilon_2-\gamma_2\phi-\delta_2\omega \end{vmatrix}}{A}$$

$$\text{ἤτοι}\quad \chi = \frac{\begin{vmatrix} \varepsilon_1 & \beta_1 \\ \varepsilon_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{A} - \frac{\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{A}\varphi - \frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 \\ \delta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}}{A}\omega$$

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \varepsilon_2 \end{vmatrix}}{A} - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}}{A}\varphi - \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 \end{vmatrix}}{A}\omega \qquad (6)$$

Αἱ τιμαὶ (6) ἐπαληθεύουν τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν οἱ ἄγνωστοι φ καὶ ω. Διὰ νὰ ἐπαληθεύουν ὅμως καὶ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}\varphi + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3 \end{vmatrix}\omega$$

εὑρίσκεται δὲ ἡ τελευταία αὕτη σχέσις, ἐὰν ἐν τῇ ἐξισώσει (3) τοῦ συστήματος 1 ἀντικαταστήσωμεν τοὺς ἀγνώστους χ, ψ διὰ τῶν τιμῶν (6) καὶ ἐκτελέσωμεν ἔπειτα τοὺς ἀναγκαίους μετασχηματισμούς. Τῆς ἰσότητος δὲ ταύτης τὸ δεύτερον μέλος εἶναι 0, ἐπειδὴ αἱ ἐν αὐτῷ ὁρίζουσαι τρίτης τάξεως, ὡς ἐλάσσονες ὁρίζουσαι τῆς Δ, εἶναι ἐξ ὑποθέσεως 0. Καταντᾷ λοιπὸν αὕτη

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (7)$$

Κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι ἵνα αἱ τιμαὶ (6) τῶν χ καὶ ψ ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τετάρτην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος (1) πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \varepsilon_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \varepsilon_2 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \varepsilon_4 \end{vmatrix} = 0 \qquad (8)$$

Ὥστε ἂν αἱ ὁρίζουσαι (7) καὶ (8) εἶναι ἀμφότεραι ἴσαι μὲ 0, αἱ τιμαὶ (6) τῶν χ καὶ ψ αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὰς δύο πρώτας ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (I) ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ὑπολοίπους ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1) οἱασδήποτε τιμὰς καὶ ἂν λάβουν οἱ λοιποὶ ἄγνωστοι. Τὸ σύστημα λοιπὸν (I) εἶναι *ἀόριστον*. Ἂν ὅμως μία τῶν ὁριζουσῶν (7) καὶ (8) ἢ καὶ ἀμφότεραι εἶναι διάφοραι τοῦ μηδενὸς αἱ λύσεις (6) δὲν ἐπαληθεύουν ὅλας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (1), ἤτοι τοῦτο εἶναι *ἀδύνατον*.

Ἡ ὁρίζουσα (7) λέγεται *χαρακτηριστικὴ* τῆς τρίτης ἐξισώσεως· λαμβάνομεν δὲ ταύτην συμπληροῦντες τὴν σημαντικὴν ὁρίζουσαν διὰ μιᾶς στήλης ἐκ τῶν γνωστῶν ὅρων τῶν λυθεισῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς ἐξισώσεως (τῆς τρίτης) πρὸς ἣν εἶναι ἀντίστοιχος ἡ χαρακτηριστική. Κατὰ ταῦτα δὲ ἡ ὁρίζουσα (8) εἶναι χαρακτηριστικὴ ὁρίζουσα τῆς τετάρτης ἐξισώσεως.

342. Ἐξ ὅσων εἴπομεν εἰς τὰς προηγουμένας δύο παραγράφους, δυνάμεθα νὰ συναγάγωμεν τὰ ἑξῆς:

Τὸ σύστημα ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων μετὰ ν ἀγνώστων ἔχει ἓν καὶ μόνον σύστημα λύσεων, ἐὰν ἡ ὁρίζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι διάφορος τοῦ 0. Ἐὰν δὲ ἡ ὁρίζουσα Δ εἶναι 0 τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον ἢ ἀδύνατον· καὶ ἀδύνατον μὲν εἶναι ἂν μία τῶν χαρακτηριστικῶν ὁριζουσῶν εἶναι διάφορος τοῦ 0, ἀόριστον δὲ ἂν ὅλαι αἱ χαρακτηριστικαὶ ὁρίζουσαι εἶναι 0.

Ἐὰν μ εἶναι ὁ ἀριθμὸς ὁ δεικνύων τὴν τάξιν τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος Α, ὁ ἀριθμὸς ν—μ λέγεται *βαθμὸς* τῆς ἀοριστίας τοῦ συστήματος, φανερώνει δὲ οὗτος τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων, οἵτινες μένουν ἀόριστοι καὶ δύνανται ἐπομένως νὰ λάβουν αὐθαιρέτους τιμάς.

343. ***Ὁμογενεῖς ἐξισώσεις.*** — Ἐὰν οἱ γνωστοὶ ὅροι ε_1, ε_2, ε_3, ...ε_ν τῶν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων εἶναι ὅλοι ἴσοι μὲ μηδέν, αἱ ἐξισώσεις λέγονται *ὁμογενεῖς*.

Ἐὰν ἔχωμεν σύστημα ν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων ὁμογενῶν μετὰ ν ἀγνώστων χ_1, χ_2... χ_ν καὶ ἐφαρμόσωμεν τὰ προηγούμενα συνάγομεν τὰ ἑξῆς:

1) *Ἐὰν ἡ ὁρίζουσα Δ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι διάφορος τοῦ 0 αἱ τιμαὶ τῶν ἀγνώστων αἱ ἐπαληθεύουσαι τὸ δοθὲν ὁμογενὲς σύστημα εἶναι μόνον αἱ:*

$$\chi_1=0, \quad \chi_2=0, \quad \chi_3=0, \ldots\ldots \chi_\nu=0$$

2) *Ἐὰν ἡ ὡς ἄνω ὁρίζουσα Δ εἶναι 0 τὸ δοθὲν ὁμογενὲς σύστημα εἶναι ἀόριστον καὶ βαθμὸς ἀοριστίας αὐτοῦ εἶναι ἡ διαφορὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος τὴν τάξιν τῆς σημαντικῆς ἐλάσσονος Α ἀπὸ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δεικνύοντος τὴν τάξιν τῆς ὁριζούσης Δ.*

344. ***Ἀπαλοιφὴ ν ἀγνώστων μεταξὺ ν+1 πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων.*** —Ἐὰν ἔχωμεν ν+1 πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις αἱ ὁποῖαι περιέχουν ν ἀγνώστους, λαμβάνομεν πάντοτε διὰ τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ν ἀγνώστων μίαν τοὐλάχιστον ἰσότητα συνδέουσαν τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν, ἡ ὁποία ἐκφράζει τὸν ὅρον ὑπὸ τὸν ὁποῖον αἱ ἐξισώσεις συμβιβάζονται πρὸς ἀλλήλας.

Διότι ἔστωσαν πρὸς συντομίαν αἱ 4 ἐξισώσεις

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\chi_1+\alpha_{12}\chi_2+\alpha_{13}\chi_3 &= \beta_1 \\ \alpha_{21}\chi_1+\alpha_{22}\chi_2+\alpha_{23}\chi_3 &= \beta_2 \\ \alpha_{31}\chi_1+\alpha_{32}\chi_2+\alpha_{33}\chi_3 &= \beta_3 \\ \alpha_{41}\chi_1+\alpha_{42}\chi_2+\alpha_{43}\chi_3 &= \beta_4 \end{aligned} \qquad (9)$$

Καλοῦμεν Δ τὴν ὁρίζουσαν

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \beta_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \beta_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \beta_4 \end{vmatrix}$$

καὶ Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 τὰς ἐλάσσονας ὁριζούσας τῆς Δ τὰς ἀντιστοίχους κατὰ σειρὰν πρὸς τὰ στοιχεῖα β_1, β_2, β_3, β_4.

Ἐὰν τρεῖς ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9) περιέχουν ὡρισμένον σύστημα λύσεων, ἕπεται ὅτι ἡ μία τῶν ὁριζουσῶν Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, εἶναι διάφορος τοῦ 0. Ἐὰν δὲ ἤδη πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἐξισώσεις (9) ἀντιστοίχως ἐπὶ Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 καὶ κατόπιν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὸ ἄθροισμα τὸ προκῦπτον ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν πρώτων μελῶν θὰ εἶναι ἴσον μὲ 0, διότι εἰς αὐτὸ ὁ συντελεστὴς τοῦ χ_1 θὰ εἶναι ἡ παράστασις $\alpha_{11}\Delta_1+\alpha_{21}\Delta_2+\alpha_{31}\Delta_3+\alpha_{41}\Delta_4$ ἥτις ἰσοῦται μὲ 0, ὁμοίως δὲ μὲ 0 ἰσοῦνται καὶ οἱ συντελεσταὶ τῶν χ_2 καὶ χ_3.

Τὸ ἄθροισμα ὅμως τὸ προκῦπτον ἐκ τῆς προσθέσεως τῶν δευτέρων μελῶν εἶναι ἡ ὁρίζουσα Δ.

Ὥστε ἵνα τὸ σύστημα τῶν λύσεων τριῶν ἐκ τῶν ἐξισώσεων (9) ἐπαληθεύῃ καὶ τὴν ἀπομένουσαν ἐξίσωσιν, ἤτοι ἵνα αἱ ἐξισώσεις (9) συμβιβάζωνται πρὸς ἀλλήλας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\Delta=0$.

Γενικῶς δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι, *ἵνα $\nu+1$ πρωτοβάθμιοι ἐξισώσεις μετὰ ν ἀγνώστων συμβιβάζωνται πρὸς ἀλλήλας πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἡ ὁρίζουσα Δ ἡ συγκροτουμένη ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ τῶν γνωστῶν ὅρων νὰ εἶναι 0, ἐφ᾽ ὅσον μία τοὐλάχιστον τῶν ὁριζουσῶν ν τάξεως συγκροτουμένη ἐκ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων εἶναι διάφορος τοῦ 0.*

Ἡ ὡς ἄνω ὁρίζουσα Δ λέγεται *ἀπαλείφουσα* τοῦ συστήματος τῶν $(\nu+1)$ ἐξισώσεων.

Π. χ. 1) *Αἱ ἐξισώσεις*

$$5\chi-3\psi=-1,\ 3\chi+2\psi=7,\ 7\chi+\psi=9$$

συμβιβάζονται πρὸς ἀλλήλας, διότι εἶναι

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{καὶ} \quad \Delta=\begin{vmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \\ 7 & 1 & 9 \end{vmatrix}=0$$

2) *Νὰ γίνῃ ἡ ἀπαλοιφὴ τῶν ἀγνώστων χ, ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων*

$$2\chi+\alpha\psi=5, \quad \chi+\beta\psi=1, \quad \chi+\gamma\psi=7.$$

ἤτοι νὰ εὑρεθοῦν οἱ ὅροι ἵνα αἱ ἐξισώσεις αὗται συμβιβάζωνται πρὸς ἀλλήλας.

Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἵνα ἡ ἀπαλείφουσα

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 5 \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \gamma & 7 \end{vmatrix}$$ εἶναι ἴση μὲ 0, μία δὲ τοὐλάχιστον τῶν

ὁριζουσῶν 2ας τάξεως τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων νὰ εἶναι διάφορος τοῦ 0, ἤτοι πρέπει νὰ εἶναι $\alpha\neq 2\beta$ ἢ $\alpha\neq 2\gamma$ ἢ $\beta\neq\gamma$ καὶ $2\alpha=3\beta+\gamma$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν διὰ τῶν ὁριζουσῶν τὰ συστήματα

1311) $\chi-3\psi+\varphi=-2$, $2\chi-\psi-\varphi=3$, $3\chi-4\psi+\varphi=2$

1312) $5\chi+3\psi-11\varphi=13$, $4\chi-5\psi+4\varphi=18$, $9\chi-2\psi-7\varphi=25$

1313) $2\chi-3\psi+2\varphi=5$, $\psi+4\varphi-4\omega=3$, $6\varphi-8\omega+\chi=6$, $12\omega+3\chi-7\psi=4$

1314) $4\chi+\psi+5\varphi+\omega=2$, $6\chi+\psi-2\varphi+3\omega=4$, $5\chi+3\psi+6\varphi-4\omega=3$, $\chi-2\psi-8\varphi+7\omega=1$

1315) $7\chi+3\psi+\varphi=0$, $2\chi+5\psi+3\varphi=0$, $4\chi+\psi+2\varphi=0$

1316) $2\chi+2\psi+\varphi+3\omega=0$, $4\chi+3\psi+3\varphi+6\omega=0$, $6\chi+4\psi+5\varphi+9\omega=0$, $5\chi+\psi+4\varphi+5\omega=0$

1317) $\chi+\psi+\varphi=1$, $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=0$, $\alpha^2\chi+\beta^2\psi+\gamma^2\varphi=0$

1318) $\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\delta$, $\alpha^2\chi+\beta^2\psi+\gamma^2\varphi=\delta^2$, $\alpha^3\chi+\beta^3\psi+\gamma^3\varphi=\delta^3$

1319) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\psi+\varphi=1, \quad \chi+\alpha\psi+\varphi=\alpha, \quad \chi+\psi+\alpha\varphi=\alpha^2$$

1320) Αἱ ἐξισώσεις

1) $\chi+\psi=1$, $\quad 2\chi+3\psi=6$, $\quad 4\chi+9\psi=24$

2) $3\chi+2\psi=1$, $\quad 2\chi+3\psi=6$, $\quad 8\chi+27\psi=72$

συμβιβάζονται πρὸς ἀλλήλας; Καὶ ποῖαι τιμαὶ τῶν ἀγνώστων χ,ψ ἐπαληθεύουν αὐτάς;

1321) Ν' ἀπαλειφθοῦν οἱ ἄγνωστοι χ,ψ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha\chi+\beta\psi=\gamma, \qquad \alpha^2\chi+\beta^2\psi=\gamma^2, \qquad \alpha^3\chi+\beta^3\psi=\gamma^3$$

1322) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α,β,γ εἶναι θετικοὶ καὶ ἄνισοι πρὸς ἀλλήλους αἱ ἐξισώσεις

$$\alpha\chi+\beta\psi+\gamma\varphi=\beta+\gamma \qquad \gamma\chi+\alpha\psi+\beta\varphi=\alpha+\beta$$
$$\beta\chi+\gamma\psi+\alpha\varphi=\gamma+\alpha \qquad \chi+\psi+\varphi=2$$

συμβιβάζονται πρὸς ἀλλήλας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

Περὶ παραγώγων.

345. Ὁρισμὸς τῆς παραγώγου.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιεχομένας ἐν τῷ ὡρισμένῳ διαστήματι (α, β) καὶ ἥτις διὰ τὴν τιμὴν $\chi=\chi_0$ περιεχομένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ λαμβάνει τὴν τιμὴν ψ_0, ἤτοι εἶναι $\psi_0=\sigma(\chi_0)$. Ἐὰν ἤδη δώσωμεν εἰς τὸ χ_0 μίαν αὔξησιν ε (θετικὴν ἢ ἀρνητικήν), ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ ψ, ψ_0 θὰ λάβῃ ὡσαύτως μίαν αὔξησιν η (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\eta=\sigma(\chi_0+\varepsilon)-\sigma(\chi_0)$.

Ἑπομένως ὁ λόγος τῆς αὐξήσεως η τῆς συναρτήσεως πρὸς τὴν ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν ε τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς εἶναι

$$\frac{\eta}{\varepsilon}=\frac{\sigma(\chi_0+\varepsilon)-\sigma(\chi_0)}{\varepsilon}$$

Ἐὰν ὁ λόγος οὗτος $\frac{\eta}{\varepsilon}$ ἔχῃ ὅριον ὡρισμένον, ὅταν τῆς τιμῆς $\chi=\chi_0$ μενούσης σταθερᾶς ἡ αὔξησις ε τείνει πρὸς τὸ μηδέν, τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\chi_0$.

Ὥστε ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\chi_0$ εἶναι τὸ ὅρ $\frac{\sigma(\chi_0+\varepsilon)-\sigma(\chi_0)}{\varepsilon}$, ὅταν ὅρε=0.

Κατὰ ταῦτα λοιπόν, ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\chi^2$ συνεχὴς διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ καὶ ἔστω $\chi=3$. Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὴν χ μίαν αὔξησιν ε, ἡ ψ θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν η καὶ θὰ ἔχωμεν $\psi+\eta=(\chi+\varepsilon)^2$

ἢ ἐπειδὴ $\qquad \chi=3$ καὶ $\psi=9$

$$9+\eta=(3+\varepsilon)^2=9+6\varepsilon+\varepsilon^2$$

ἤτοι $\eta=6\varepsilon+\varepsilon^2$, $\frac{\eta}{\varepsilon}=6+\varepsilon$ καὶ δι' ὅρε=0 θὰ εἶναι ὅρ $\frac{\eta}{\varepsilon}=6$. Ἤτοι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\chi^2$ διὰ $\chi=3$ εἶναι 6.

Ὁμοίως εὑρίσκομεν ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\chi^2$ διὰ $\chi=2$ εἶναι 4.

346. Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\chi_0$ σημειοῦται διὰ τοῦ συμβόλου $\sigma'(\chi_0)$ ἢ ψ_0'.

Ἐὰν δὲ ἡ $\psi=\sigma(\chi)$ τὴν ὁποίαν ὑπεθέσαμεν συνεχῆ διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ κειμένην ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ἔχῃ παράγωγον διὰ πᾶσαν τιμὴν τῆς χ κειμένην ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, τότε σημειοῦμεν $\sigma'(\chi)$ ἢ ψ'.

347. Ὁ λόγος $\dfrac{\eta}{\varepsilon}$ διὰ νὰ ἔχῃ ὅριον πεπερασμένον καὶ ὡρισμένον ἐντελῶς πρέπει, ἵνα τὸ η τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν συγχρόνως μετὰ τοῦ ε. Ἐξ οὗ ἕπεται, ὅτι: *Μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$, ὅταν ἔχῃ παράγωγον διά τινα τιμὴν τοῦ χ, εἶναι συνεχὴς συνάρτησις διὰ τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ χ.* Δὲν ἕπεται ὅμως ἐκ τούτου, ὅτι μία συνάρτησις συνεχὴς ἔχει ἀναγκαίως παράγωγον. Διότι εἶναι δυνατόν, ὅταν τὸ η καὶ τὸ ε ἔχουν ὅριον τὸ 0, ὁ λόγος $\dfrac{\eta}{\varepsilon}$ νὰ μὴ ἔχῃ ὅριον.

Συνήθως τὴν αὔξησιν τοῦ χ (θετικὴν ἢ ἀρνητικὴν) τὴν παριστῶμεν διὰ τοῦ $\Delta\chi$, τὴν δὲ ἀντιστοιχοῦσαν αὔξησιν τῆς συναρτήσεως διὰ τοῦ $\Delta\psi$· ἤτοι γράφομεν $\Delta\psi=\Delta\sigma(\chi)=\sigma(\chi+\Delta\chi)-\sigma(\chi)$ καὶ ἑπομένως $\psi'=\sigma'(\chi)=$ ὅρ $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$, ὅταν $\Delta\chi$ καὶ $\Delta\psi$ τείνουν πρὸς τὸ μηδέν.

348. ***Παραδείγματα.*** — 1) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\chi$· ἀλλὰ τότε εἶναι $\Delta\psi=\Delta\chi$, ἤτοι $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=1$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=1$.

Ὥστε: *Ἡ παράγωγος τοῦ χ ἰσοῦται μὲ τὴν 1.*

2) Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sqrt{\chi}$. Ἐὰν εἰς τὸ χ δώσωμεν τὴν αὔξησιν $\Delta\chi$, θὰ ἔχωμεν $\Delta\psi=\sqrt{\chi+\Delta\chi}-\sqrt{\chi}$. καὶ

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\sqrt{\chi+\Delta\chi}-\sqrt{\chi}}{\Delta\chi}=\frac{(\sqrt{\chi+\Delta\chi}-\sqrt{\chi})(\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi})}{\Delta\chi(\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi})}$$

ἢ

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\Delta\chi}{\Delta\chi(\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi})}=\frac{1}{\sqrt{\chi+\Delta\chi}+\sqrt{\chi}}.$$

Ὅταν δὲ ὅρ$\Delta\chi=0$ τότε ὅρ$\sqrt{\chi+\Delta\chi}=\sqrt{\chi}$ καὶ ἑπομένως ὅρ $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$

$= \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$. Ὥστε ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $\psi = \sqrt{\chi}$ εἶναι $\psi' = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}$.

3) Ἔστω, ὅτι ἡ συνάρτησις ψ τοῦ χ εἶναι ἡ σταθερὰ Α, ἤτοι ὅτι ἡ συνάρτησις ψ διατηρεῖ πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμήν. Ἀλλὰ τότε εἰς οἱανδήποτε αὔξησιν Δχ τῆς χ ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις Δψ τῆς συναρτήσεως εἶναι πάντοτε μηδέν. Ὥστε, ἀφοῦ $\Delta\psi = 0$, θὰ εἶναι καὶ

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi} = 0 \text{ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ὅρ} \frac{\Delta\psi}{\Delta\chi} = 0.$$

Ὥστε : *Ἡ παράγωγος σταθερᾶς εἶναι μηδέν.*

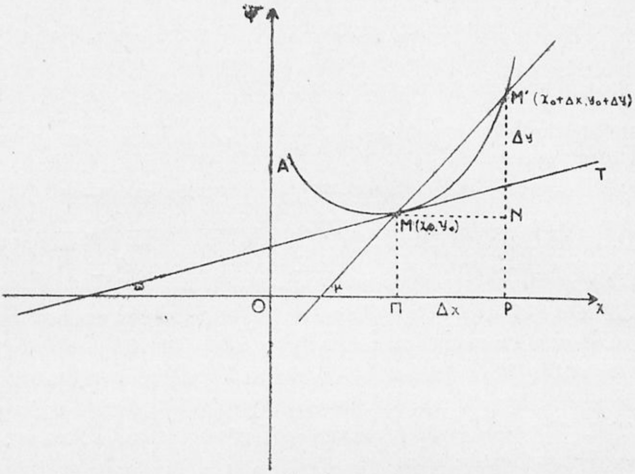
349. Γεωμετρικὴ σημασία τῆς παραγώγου.—Γνωρίζομεν ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $\psi = \alpha\chi + \beta$ παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμὴν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\psi = \alpha\chi$.

Ἡ εὐθεῖα $\psi = \alpha\chi + \beta$ τέμνει τὸν ἄξονα Οψ εἰς σημεῖον ἔχον τετμημένην β, δι᾽ ὃ ὁ β λέγεται *τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχήν*, ἐνῷ ὁ συντελεστὴς α τοῦ χ λέγεται ***συντελεστὴς** κατευθύνσεως* τῆς εὐθείας $\psi = \alpha\chi + \beta$. Ἐκ τοῦ β λοιπὸν ὁρίζομεν ἓν σημεῖον τῆς εὐθείας αὐτῆς κείμενον ἐπὶ τοῦ ἄξονος Οψ καὶ ἐκ τοῦ α γνωρίζομεν τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐθείας ταύτης. Διότι ἡ εὐθεῖα $\psi = \alpha\chi$, ἥτις διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων, ὁρίζεται, ὅταν ὁρίσωμεν τὸ σημεῖον Μ τὸ ἔχον συντεταγμένας (1,α). Φέρομεν λοιπὸν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ καὶ κατόπιν ἐκ τοῦ σημείου τοῦ ἄξονος Οψ τὸ ἔχον τετμημένην β, φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΟΜ, ἥτις παράλληλος εἶναι ἡ εὐθεῖα $\psi = \alpha\chi + \beta$. Ὥστε ἐκ τῆς κατευθύνσεως τῆς $OM = \alpha\chi$. γνωρίζομεν καὶ τὴν κατεύθυνσιν τῆς εὐθείας $\psi = \alpha\chi + \beta$.

350. Ἤδη, ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(\chi)$, ἡ ὁποία ὑποθέτομεν, ὅτι ἔχει παράγωγον διὰ $\chi = \chi_0$. Ἔστω δὲ ΑΜΜ΄ ἡ καμπύλη ἡ ἀναφερομένη εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας καὶ τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις. Εἰς τὴν τιμὴν χ_0 τῆς μεταβλητῆς ἀντιστοιχεῖ ἡ τιμὴ ψ_0 τῆς συναρτήσεως. Ἔστω δὲ Μ τὸ σημεῖον τῆς καμπύλης τὸ ἔχον συντεταγμένας τὰς χ_0 καὶ ψ_0. Ἐὰν ἤδη δώσωμεν εἰς τὸ χ_0 μίαν αὔξησιν Δχ ἡ συνάρτησις θὰ λάβῃ μίαν αὔξησιν Δψ καὶ τὸ σημεῖον $M'(\chi_0 + \Delta\chi_0\ \psi_0 + \Delta\psi)$ θὰ εἶναι σημεῖον τῆς καμπύλης ΑΜΜ΄. Ἀφοῦ λοιπὸν τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι σημεῖα τῆς καμπύλης καὶ τῆς εὐθείας ΜΜ΄, τῆς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις ἔστω $\psi = \alpha\chi + \beta$ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Μ καὶ Μ΄

θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν τῆς εὐθείας, ἤτοι θὰ εἶναι

$$\psi_0+\Delta\psi=\alpha(\chi_0+\Delta\chi)+\beta \quad \text{καὶ} \quad \psi_0=\alpha\chi_0+\beta$$



Ἀφαιροῦντες ἤδη τὰς ἐξισώσεις αὐτὰς κατὰ μέλη ἔχομεν

$$\Delta\psi=\alpha\Delta\chi \qquad \text{ἤτοι} \qquad \frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\alpha.$$

Ὥστε ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς εὐθείας ΜΜ′ εἶναι ὁ λόγος $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$. Ἀλλ' ὅταν τὸ $\Delta\chi$ τείνῃ πρὸς τὸ μηδὲν καὶ τὸ $\Delta\psi$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν, διότι ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ὑπετέθη, ὅτι ἔχει παράγωγον, ἤτοι ὅτι εἶναι συνεχής. Ἐπομένως τὸ σημεῖον Μ′ τείνῃ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Μ καὶ ἡ χορδὴ ΜΜ′ θὰ ἔχῃ ὡς ὅριον τὴν εὐθεῖαν ΜΤ, τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ἐφαπτομένην τῆς καμπύλης ΑΜΜ′ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τῆς ὁποίας ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$, ἤτοι ἡ τιμὴ τῆς παραγώγου τῆς δοθείσης συναρτήσεως διὰ $\chi=\chi_0$.

Κατόπιν τούτων συνάγομεν τὸ θεώρημα :

*Ὅταν μία **συνάρτησις** $\psi=\sigma(\chi)$ περιέχῃ παράγωγον διὰ $\chi=\chi_0$, ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις, ἔχει ἐφαπτομένην εἰς τὸ σημεῖον τὸ ἔχον τετμημένην χ_0, συντελεστὴς **κατευθύνσεως** (ἢ γωνιακὸς συντελεστὴς) τῆς ὁποίας εἶναι ἡ τιμὴ **τῆς παραγώγου** τῆς συναρτήσεως διὰ $\chi=\chi_0$.*

Σημείωσις 'Εκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝΜ', εἰς ὃ εἶναι (ΜΝ)=Δχ καὶ (ΝΜ')=Δψ, λαμβάνομεν $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$=εφ(Μ'ΜΝ), ἤτοι $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$=εφμ. 'Επειδὴ δὲ ὅριον τῆς γωνίας μ, ὅταν τὸ Μ' τείνῃ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Μ, εἶναι ἡ γωνία ω τῆς ΜΤ μετὰ τοῦ ἄξονος Οχ, ἔχομεν ὁρ $\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}$ = εφω, ἤτοι σ'(χ)=εφω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων ἐπὶ τῇ βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τῆς παραγώγου.

1323) $\psi=\chi^5$ 1324) $\psi=17\chi^7$ 1325) $\psi=\chi^2-\alpha^2$

1326) $\psi=4\chi^2-12\chi+7$ 1327) $\psi=-\frac{1}{6}\chi^3+\frac{1}{8}\chi^2-\frac{1}{8}\chi$

1328) $\psi=3\sqrt{\chi}$ 1329) $\psi=\sqrt{\alpha\chi}$ 1330α) $\psi=\sqrt[3]{\chi}$

351. *Θεωρήματα.*— 'Ενταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις καθ' ἃς ἡ συνάρτησις ψ τῆς μεταβλητῆς χ εἶναι τὸ ἄθροισμα, τὸ γινόμενον ἢ τὸ πηλίκον ἄλλων συναρτήσεων ω, φ, υ τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς χ, τὰς ὁποίας ὑποθέτομεν συνεχεῖς καὶ ἐχούσας παραγώγους ω', φ', υ'. 'Εκ τούτων δὲ ἡ παράγωγος ψ' εὑρίσκεται εὐκόλως, ὡς θὰ ἴδωμεν ἀμέσως κατωτέρω.

α') Παράγωγος ἀθροίσματος.*— *'Η συνάρτησις ψ τῆς χ, $\psi=\omega+\varphi+\upsilon$ ἔχει παράγωγον $\psi'=\omega'+\varphi'+\upsilon'$.

Διότι ἐὰν ἡ χ αὐξηθῇ κατὰ Δχ, αἱ συναρτήσεις ω, φ, υ, καὶ ψ θὰ αὐξηθοῦν κατὰ Δω, Δφ, Δυ, Δψ. Ὥστε θὰ εἶναι

$$\psi+\Delta\psi=(\omega+\Delta\omega)+(\varphi+\Delta\varphi)+(\upsilon+\Delta\upsilon)$$

καὶ ἑπομένως $\Delta\psi=\Delta\omega+\Delta\varphi+\Delta\upsilon$

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}+\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}+\frac{\Delta\upsilon}{\Delta\chi}$$

ἀλλὰ διʼ ὁρΔχ=0, ἔχομεν καθʼ ὑπόθεσιν ὁρ$\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}=\omega'$, ὁρ $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}=\varphi'$,

καὶ ὁρ $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta\chi}=\upsilon'$ καὶ ὁρ$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\psi'$.

Ὥστε εἶναι: $\psi'=\omega'+\varphi'+\upsilon'$.

β') Παράγωγος γινομένου.*— *'Η συνάρτησις $\psi=\varphi\omega$ ἔχει παράγωγον $\psi'=\varphi\omega'+\omega\varphi'$.

Ἔχομεν κατὰ τὰς προηγουμένας ὑποθέσεις

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{(\varphi+\Delta\varphi)(\omega+\Delta\omega)-\varphi\omega}{\Delta\chi}=\varphi\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}+\omega\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}+\frac{\Delta\varphi}{\Delta\chi}.\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}.\Delta\chi.$$

'Αλλὰ διʼ ὁρΔχ=0, ἔχομεν

$$ὅρ\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}=\omega', \; ὅρ\frac{\Delta\phi}{\Delta\chi}=\phi', \; ὅρ\left(\frac{\Delta\phi}{\Delta\chi}.\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}.\Delta\chi)\right)=\phi'\omega'.0=0$$

ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι ἡ συνάρτησις ψ ἔχει παράγωγον

$$\psi'=\phi\omega'+\omega\phi'$$

Ἐὰν εἶναι $\psi=\phi\omega\upsilon$, *τότε θὰ εἶναι* $\psi'=\phi\omega\upsilon'+\upsilon\phi\omega'+\upsilon\omega\phi'$

Διότι ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ γινόμενον φω ὡς ἕνα παράγοντα, θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ ἀνωτέρω

$$\psi'=(\phi\omega)\upsilon'+\upsilon(\phi\omega)'$$
$$\psi'=\phi\omega\upsilon'+\upsilon\phi\omega'+\upsilon\omega\phi'$$

Αὕτη δὲ γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς: $=\psi'\phi\omega\upsilon\left[\frac{\phi'}{\phi}+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\upsilon'}{\upsilon}\right]$

Ἀποδεικνύεται δὲ καὶ γενικῶς

ἐὰν $\psi=\phi\omega\upsilon w\ldots$, θὰ εἶναι $\psi'=\phi\omega\upsilon w\ldots\left[\frac{\phi'}{\phi}+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\upsilon'}{\upsilon}+\frac{w'}{w}+..\right]$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ἐπίσης, ὅτι *ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου αω τῆς συναρτήσεως ω ἐπὶ τὴν σταθερὰν α, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθεράν.*

Ἤτοι εἶναι $\psi'=\alpha\omega'$.

*γ') **Παράγωγος πηλίκου.** — Ἡ συνάρτησις* $\psi=\frac{\varphi}{\omega}$ $(\omega\neq 0)$ *ἔχει παράγωγον*

$$\psi=\frac{\omega\phi'-\phi\omega'}{\omega^2}$$

Διότι ἀφοῦ

$$\Delta\psi=\frac{\phi+\Delta\phi}{\omega+\Delta\omega}-\frac{\phi}{\omega}=\frac{\omega\Delta\phi-\phi\Delta\omega}{\omega^2+\omega\Delta\omega}$$

καὶ ἑπομένως

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\omega\frac{\Delta\phi}{\Delta\chi}-\phi\frac{\Delta\omega}{\Delta\chi}}{\omega^2+\omega\Delta\omega}$$

θὰ εἶναι, ὅταν ὅρ$\Delta\chi=0$, ὅριον τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ δευτέρου μέλους $\omega\phi'-\phi\omega'$ καὶ ὅριον τοῦ παρονομαστοῦ ω^2.

$$\text{Ἄρα εἶναι } \psi'=\frac{\omega\phi'-\phi\omega'}{\omega^2}.$$

δ') ***Παράγωγος δυνάμεως.*** *— Ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως* $\psi=\chi^\mu$ *εἶναι* $\psi'=\mu\chi^{\mu-1}$.

Περίπτωσις 1η: μ εἶναι ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός.

Εἴδομεν προηγουμένως ὅτι ἐὰν $\psi=\phi\omega\upsilon w\ldots$.θὰ εἶναι

$$\psi'=\phi\omega\upsilon w..\left[\frac{\phi'}{\phi}+\frac{\omega'}{\omega}+\frac{\upsilon'}{\upsilon}+\frac{w'}{w}+\ldots\right]$$

Ἐὰν δὲ ἤδη θέσωμεν $\varphi = \omega = \upsilon = w$... καὶ ἐὰν οἱ παράγοντες εἶναι μ ἤτοι ἐὰν $\psi = \chi^\mu$ θὰ εἶναι. ἐπειδὴ

$$\chi' = 1,\ \psi' = \chi^\mu \left[\frac{1}{\chi} + \frac{1}{\chi} + \dots \frac{1}{\chi}\right] = \chi^\mu \cdot \frac{\mu}{\chi} = \mu\chi^{\mu-1}.$$

Ὥστε εἶναι $\psi' = \mu\chi^{\mu-1}$.

Περίπτωσις 2α. μ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{\nu}$ ἢ $\frac{\lambda}{\nu}$ ἢ $-\nu$ (λ καὶ ν ἀκέραιοι θετικοί).

Ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἀληθεύει ὁ εὑρεθεὶς τύπος $\psi' = \mu\chi^{\mu-1}$.

Βλέπε δὲ πρὸς τοῦτο τὸ Συμπλήρωμα Ἀλγέβρας Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 53—54 § 46—48.

352. *Παραδείγματα.*—Κατὰ τὰ προηγούμενα λοιπὸν εἶναι

1) Ἐὰν $\psi = 3\chi^4 - 4\chi^3 + 2\alpha\chi^2 - \beta\chi + \beta^2$

$$\psi' = 12\chi^3 - 12\chi^2 + 4\alpha\chi - \beta$$

2) Ἐὰν $\psi = \chi^2.(2\chi - 3)(4\chi^2 - 5\chi - 7)$

$$\psi' = 2\chi(2\chi-3)(4\chi^2-5\chi-7) + 2.\chi^2(4\chi^2-5\chi-7) + (8\chi-5).\chi^2.(2\chi-3).$$

ἤτοι $\psi' = 40\chi^4 - 88\chi^3 + 3\chi^2 + 42\chi$

3) Ἐὰν $\psi = \dfrac{3\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^2 - 1}$

$$\psi' = \frac{(\chi^2-1)(6\chi-2) - (3\chi^2-2\chi+1).2\chi}{(\chi^2-1)^2}$$

ἤτοι $\psi' = \dfrac{2\chi^2 - 8\chi + 2}{(\chi^2-1)^2}$

4) Ἐὰν $\psi = \sqrt{\chi}$ ἤτοι ἐὰν $\psi = \chi^{\frac{1}{2}}$

$$\psi' = \frac{1}{2}\chi^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}\chi^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}.$$

353. *Παράγωγος συναρτήσεως συναρτήσεως.*—Ἐὰν $\psi = \sigma(\omega)$ εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς μεταβλητῆς ω καὶ ἐὰν $\omega = \varphi(\chi)$ εἶναι ὡσαύτως συνεχὴς συνάρτησις τῆς χ, εἶναι φανερὸν ὅτι σ(ω) εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς χ. Ἡ ψ λοιπὸν εἶναι συνάρτησις συναρτήσεως καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς εὑρίσκεται κατὰ τὸ κάτωθι:

Θεώρημα.—*Ἐὰν ἡ συνάρτησις $\psi = \sigma(\omega)$ ἔχει παράγωγον πρὸς ω, $\sigma'(\omega)$, καὶ ἐὰν ἡ $\omega = \varphi(\chi)$ ἔχῃ παράγωγον πρὸς χ, ω'_χ ἡ ψ ἔχει παράγωγον πρὸς χ ἴσην μὲ $\psi_\chi' = \sigma'(\omega).\ \omega'_\chi$.*

Ἐὰν εἰς τὴν χ δοθῇ ἡ αὔξησις Δχ, ἡ ζητουμένη παράγωγος ψ'_χ εἶναι τὸ ὅριον τοῦ λόγου $\dfrac{\sigma(\omega + \Delta\omega) - \sigma(\omega)}{\Delta\chi}$, ὅταν ὅρ $\Delta\chi = 0$. Ἀλλὰ πρὸς τὴν αὔξησιν $\Delta\chi$, ἀντιστοιχεῖ ἡ αὔξησις $\Delta\omega$ τῆς ω. Ὥστε εἶναι

$$\Delta\omega=\varphi(\chi+\Delta\chi)-\varphi(\chi)$$

καὶ ἐπομένως

$$\frac{\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)}{\Delta\chi}=\frac{\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)}{\Delta\omega}\cdot\frac{\varphi(\chi+\Delta\chi)-\varphi(\chi)}{\Delta\chi}$$

Ἀλλὰ ὅταν ὅρ $\Delta\chi=0$, εἶναι καὶ ὅρ $\Delta\omega=0$ καὶ ὅρ $\Delta\psi=0$, διότι αἱ συναρτήσεις ω καὶ ψ ὡς ἔχουσαι παραγώγους εἶναι συνεχεῖς καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\text{ὅρ}\,\frac{\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)}{\Delta\chi}=\psi'_\chi$$

$$\text{ὅρ}\,\frac{\sigma(\omega+\Delta\omega)-\sigma(\omega)}{\Delta\omega}=\sigma'(\omega) \qquad \text{καὶ}$$

$$\text{ὅρ}\,\frac{\varphi(\chi+\Delta\chi)-\varphi(\chi)}{\Delta\chi}=\varphi'(\chi)=\omega'_\chi$$

Ἀπεδείχθη λοιπὸν ὅτι

$$\psi'_\chi=\sigma'(\omega).\omega'_\chi$$

π. δ. 1) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς* $\psi=(2\chi^3+3)^5$. Θέτομεν $2\chi^3+3=\omega$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν τὴν $\psi=\omega^5$, ἤτοι συνάρτησιν συναρτήσεως.

Καὶ κατὰ τὸν εὑρεθέντα τύπον θὰ εἶναι $\sigma'(\omega)=5\omega^4$ καὶ $\omega'_\chi=6\chi^2$ ὥστε εἶναι $\psi'_\chi=5\omega^4.6\chi^2=30\,(2\chi^3+3)^4.\chi^2$.

2) *Νὰ εὑρεθῇ ἡ παράγωγος τῆς* $\psi=\sqrt[\nu]{\omega}$ $(\omega\neq 0)$, *ὅπου* ω *εἶναι συνεχὴς συνάρτησις τῆς* χ, *ἔχουσα παράγωγον* ω'.

Ἐπειδὴ $\psi=\omega^{\frac{1}{\nu}}$ εἶναι

$$\psi'=\frac{1}{\nu}\omega^{\frac{1}{\nu}-1}.\omega'=\frac{\omega'}{\nu\omega^{1-\frac{1}{\nu}}}=\frac{\omega'}{\nu\omega^{\frac{\nu-1}{\nu}}}=\frac{\omega'}{\nu\sqrt[\nu]{\omega^{\nu-1}}}.$$

Εἰδικῶς δὲ ἐὰν $\nu=2$, θὰ εἶναι $\psi'=\dfrac{\omega'}{2\sqrt{\omega}}$.

Κατὰ ταῦτα ἐὰν $\psi=\sqrt{\chi^2+\chi+1}$ εἶναι $\psi'=\dfrac{2\chi+1}{2\sqrt{\chi^2+\chi+1}}$.

Καὶ ἐὰν $\psi=\sqrt[3]{\chi^5}$ εἶναι $\psi'=\dfrac{5\chi^4}{3\sqrt[3]{\chi^{10}}}$ διότι $\omega=\chi^5$ καὶ $\nu=3$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1330) $\psi=(\chi^2-5)+(3\chi^2+8)$

1331) $\psi=(7\chi^3+4\chi^2+9)-(6\chi^2-12)$.

1332) $\psi=(12\chi^3-27)-(3\chi^2+11)-37\chi$.

1333) $\psi=(\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma)+(\alpha\chi^2-\beta\chi)+(\alpha^2-\beta^2)$

1334) $\psi=(\chi-5)(\chi+5)$ 1335) $(\chi^2-9)(\chi^2+3)$

1336) $\psi=\chi^5.4\chi^4.5\chi^3.8$ 1337) $\psi=(2\chi-1)(1-2\chi)(4\chi^2+1)$

1338) $\psi=(\alpha\chi^\mu+\beta)(\gamma\chi^\nu+\delta)\chi^\rho$ 1339) $\psi=\alpha\chi^\mu+\beta\chi^\nu+\gamma\chi^\rho)(\chi^\mu-\chi^\nu)$.

1940) $\psi=\dfrac{1}{1-\chi^2}$ 1341) $\psi=\dfrac{\chi}{\chi+1}$ 1342) $\psi=\dfrac{2\chi-3}{2\chi+3}$

1343) $\psi=\dfrac{(\chi-2)^3}{(\chi+1)^2}$ 1344) $\psi=\dfrac{\chi(\chi-4)}{(5\chi-2)^2}$ 1345) $\psi=\dfrac{\chi^\nu+\alpha^\nu}{\chi^\mu-\alpha^\mu}$

1346) $\psi=\sqrt{\chi^2-3\chi-2}$ 1347) $\psi=\chi-2\sqrt{\chi}$ 1348) $\psi=\sqrt[3]{\chi^4}$

1349) $\psi=\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\chi}}$ 1350) $\psi=\dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha\chi}}$ 1351) $\psi=\alpha\sqrt[4]{\chi^3}$

354. Παράγωγοι διαφόρων τάξεων.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=5\chi^4$. Ἡ παράγωγος αὐτῆς εἶναι $\psi=20\chi^3$. Ἀλλὰ βλέπομεν ὅτι ἡ παράγωγος αὕτη εἶναι νέα συνάρτησις τῆς χ, ἔχουσα καὶ αὕτη παράγωγον, ἥτις λέγεται ***δευτέρα*** παράγωγος τῆς ἀρχικῆς συναρτήσεως καὶ σημειοῦται ψ''. Ὥστε εἶναι $\psi''=60\chi^2$. Ἀλλὰ καὶ ἡ παράγωγος αὕτη ἔχει παράγωγον, ἥτις εἶναι ἡ τρίτη τῆς δοθείσης συναρτήσεως· εἶναι δὲ αὕτη $\psi'''=120\chi$, ἡ δὲ τετάρτη παράγωγος τῆς δοθείσης συναρτήσεως εἶναι $\psi''''=120$.

Ὅθεν: Ἐὰν ἡ συνάρτησις σ(χ) ἔχῃ παράγωγον διὰ πάσας τὰς τιμὰς τοῦ χ, ἔν τινι διαστήματι (α, β), ἡ παράγωγος εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι νέα συνάρτησις τοῦ χ ἐν τῷ ἰδίῳ διαστήματι καὶ ἑπομένως εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ καὶ αὕτη παράγωγον, καλουμένην δευτέραν παράγωγον τῆς δοθείσης συναρτήσεως, Ἐπειδὴ δὲ τὸ αὐτὸ δύναται νὰ συμβαίνῃ καὶ εἰς τὴν δευτέραν παράγωγον, θὰ ἔχωμεν καὶ τρίτην παράγωγον, ἀκολούθως καὶ τετάρτην καὶ πέμπτην κτλ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν παράγωγον, ἥτις δὲν εἶναι συνάρτησις τοῦ χ, ὁπότε δὲν ὑπάρχει ἄλλη παράγωγος.

Οὕτως εὑρίσκοντες τὰς διαδοχικὰς παραγώγους τῆς συναρτήσεως $\psi=\alpha\chi^\mu$, ὅπου μ ἀκέραιος θετικός, θὰ φθάσωμεν εἰς τὴν παράγωγον $\psi^{(\mu)}$ τάξεως μ, ἥτις εἶναι σταθερά.

Ἀσκήσεις

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι ὅλων τῶν τάξεων τῶν συναρτήσεων :

1352) $\psi=3\chi^3-2\chi+5$ 1353) $\psi=(\chi-\alpha)^3$

1354) $\psi=5\chi^4-8\chi^3+6\chi^2-\chi+3$ 1355) $\chi(\chi-1)(\chi+1)(\chi^2-1)$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ πρώτη καὶ ἡ δευτέρα παράγωγος ἑκάστης τῶν συναρτήσεων :

1356) $\psi=\sqrt{1-\chi}$ 1357) $\psi=\chi\sqrt{1-\chi^2}$

1358) $\psi=\dfrac{\chi^2+5}{\chi+5}$ 1359) $\psi=\dfrac{\alpha-\chi}{\alpha^2+\chi^2}$.

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ παράγωγοι τῶν συναρτήσεων :

1360) $\psi=(\chi^{\mu}-\chi^{\mu-2}+1)^2$ 1361) $\psi=(\chi^2-\chi+1)(\chi^2+\chi+1)$

1362) $\psi=\chi\sqrt{\chi\sqrt{\chi}}$ 1363) $\psi=\sqrt[3]{\dfrac{1}{\chi^2}}-\dfrac{2}{\sqrt[5]{\chi}}-35$

1364) Ἐὰν $\psi=\dfrac{1}{2}\chi^3$, $\varphi=3(\psi+\psi^2)$ καὶ $\omega=\dfrac{1}{\varphi^2}$, εὑρεῖν τὴν $\omega'\chi$

1365) Ἐὰν $\psi=3\chi^2+\sqrt{2}$, $\varphi=\sqrt{1+\psi}$ καὶ $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{3+4\varphi}}$ εὑρεῖν τὴν $\omega'\chi$

1366) Ἐὰν $\psi=\dfrac{\chi^3}{\sqrt{3}}$, $\varphi=(1+\psi)^2$ καὶ $\omega=\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi}}$, εὑρεῖν τὴν $\omega'\chi$.

Παράγωγοι κυκλικῶν συναρτήσεων

355. *Κυκλικαὶ συναρτήσεις*.— Αἱ συναρτήσεις ημχ, συνχ, εφχ, σφχ, τεμχ, καὶ συνδχ λέγονται *κυκλικαὶ συναρτήσεις*.

Ἡ μεταβλητὴ χ εἶναι τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον εἰς ἀκτίνια, τοῦ τόξου τοῦ κύκλου.

356. *Συνέχεια κυκλικῶν συναρτήσεων*.— Ἐξ ὅσων γνωρίζομεν ἐκ τῆς τριγωνομετρίας, εὔκολον εἶναι νὰ κατανοηθῇ, ὅτι τὸ ημχ τείνει πρὸς τὸ 0 συγχρόνως μετὰ τοῦ χ. Διότι $|\eta\mu\chi|<\chi$. Ἐὰν δὲ λάβωμεν θετικόν τινα ἀριθμὸν ε ὁσονδήποτε μικρόν, διὰ νὰ εἶναι $|\eta\mu\chi|<\varepsilon$, πρέπει νὰ ληφθῇ $|\chi|<\varepsilon$.

1. ***Συνέχεια τοῦ ἡμιτόνου*.**— Εἰς τὴν αὔξησιν ε τῆς μεταβλητῆς χ ἀντιστοιχεῖ ἡ αὔξησις η τοῦ ημχ. Ὅθεν ἔχομεν

$$\eta=\eta\mu(\chi+\varepsilon)-\eta\mu\chi=2\eta\mu\frac{\varepsilon}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Ἀλλὰ τὸ ημ $\dfrac{\varepsilon}{2}$ τείνει πρὸς τὸ 0 συγχρόνως μετὰ τοῦ ε, εἶναι δὲ καὶ $\left|\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\dfrac{\varepsilon}{2}\right)\right|\leqslant 1$. Ὥστε, ὅταν ὅρε=0 θὰ εἶναι καὶ ὅρη=0, ἤτοι ἡ συνάρτησις ημχ εἶναι συνεχής.

2. ***Συνέχεια τοῦ συνημιτόνου.***—Εἰς τὴν αὔξησιν ε τοῦ χ ἡ ἀντιστοιχοῦσα αὔξησις η τοῦ συνχ εἶναι

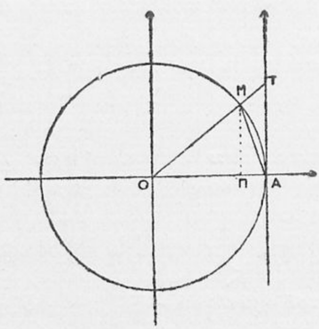
$$η=συν(χ+ε)-συνχ=-2ημ\frac{ε}{2}ημ\left(χ+\frac{ε}{2}\right)$$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ ημ $\frac{ε}{2}$ τείνει πρὸς τὸ 0 μετὰ τοῦ ε καὶ $\left|ημ\left(χ+\frac{ε}{2}\right)\right| \leqslant 1$, ἕπεται ὅτι καὶ τὸ η τείνει πρὸς τὸ 0 μετὰ τοῦ ε. Ἤτοι ἡ συνάρτησις συνχ εἶναι συνεχής.

3. ***Συνέχεια τῶν ἄλλων συναρτήσεων.***—Ἐπειδὴ $εφχ=\frac{ημχ}{συνχ}$, ἤτοι ἐπειδὴ ἡ εφχ εἶναι πηλίκον δύο συνεχῶν συναρτήσεων, εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ εφχ εἶναι συνάρτησις συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ, αἱ ὁποῖαι δὲν μηδενίζουν τὸν παρονομαστήν. Ὁμοίως συμβαίνει καὶ διὰ τὰς συναρτήσεις $σφχ=\frac{συνχ}{ημχ}$, $τεμχ=\frac{1}{συνχ}$ καὶ $συνδχ=\frac{1}{ημχ}$.

357. Ὅριον τοῦ λόγου $\frac{χ}{ημχ}$, ὅταν δρχ=0.

1) Τὸ τόξον (ΑΜ)=χ τείνει πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν θετικῶν καὶ



ἑπομένως δύναται νὰ ὑποτεθῇ $χ<\frac{π}{2}$. Ἐὰν δὲ εἶναι ημχ=(ΠΜ) καὶ εφχ=(ΑΤ) παρατηροῦμεν

ὅτι ἐμ. τριγ. ΟΑΜ < ἐμβ. τομ. ΟΑΜ < ἐμ. τριγ. ΟΑΤ

ἤτοι $\frac{1}{2}(ΟΑ)ημχ<\frac{1}{2}(ΟΑ).χ<\frac{1}{2}(ΟΑ).εφχ$

» $ημχ<χ<\frac{ημχ}{συνχ}$

ἢ ἐπειδὴ ημχ>0, $1 < \frac{\chi}{\eta\mu\chi} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

Ἀλλ' ὅταν ὅρχ=0, ἐπειδὴ συνχ εἶναι συνάρτησις συνεχής, καὶ συν0=1, εἶναι ὅρ συνχ=1. Ἑπομένως καὶ ὁ λόγος $\frac{\chi}{\eta\mu\chi}$, ὅστις περιέχεται μεταξὺ δύο ἀριθμῶν τεινόντων πρὸς τὴν 1, ἔχει ὅριον τὴν 1.

2) Τὸ τόξον χ τείνει πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν. Τότε γράφομεν χ=—χ' (χ'>0), ὁπότε θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\chi}{\eta\mu\chi}=\frac{-\chi'}{\eta\mu(-\chi')}=\frac{-\chi'}{-\eta\mu\chi'}=\frac{\chi'}{\eta\mu\chi'}.$$

Ὅταν λοιπὸν τὸ χ τείνῃ πρὸς τὸ 0 διὰ τιμῶν ἀρνητικῶν, τὸ χ' τείνει πρὸς τὸ μηδὲν διὰ τιμῶν θετικῶν καὶ ἐπειδὴ τότε εἶναι

$$\text{ὅρ}\,\frac{\chi'}{\eta\mu\chi'}=1 \quad \text{θὰ εἶναι καὶ ὅρ}\,\frac{\chi}{\eta\mu\chi}=1.$$

358. ***Παράγωγος τοῦ ἡμιτόνου.***— Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=ημχ: Ἔχομεν :

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\eta\mu(\chi+\Delta\chi)-\eta\mu\chi}{\Delta\chi}=\frac{2\eta\mu\frac{\Delta\chi}{2}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\Delta\chi}{2}\right)}{\Delta\chi}=\frac{\eta\mu\frac{\Delta\chi}{2}}{\frac{\Delta\chi}{2}}\sigma\upsilon\nu\left(\chi+\frac{\Delta\chi}{2}\right).$$

Ἀλλὰ δι' ὅρΔχ=0, ὁ πρῶτος παράγων ἔχει ὅριον τὴν 1 καὶ ὁ δεύτερος τὸ συνχ. Ὥστε εἶναι ψ'=συνχ, ἤτοι *ἡ παράγωγος τοῦ ἡμιτόνου διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ εἶναι συνχ.*

359. ***Παράγωγος τοῦ συνημιτόνου.*** — Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=συνχ. Ἔχομεν :

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\sigma\upsilon\nu(\chi+\Delta\chi)-\sigma\upsilon\nu\chi}{\Delta\chi}=\frac{-2\eta\mu\frac{\Delta\chi}{2}\eta\mu\left(\chi+\frac{\Delta\chi}{2}\right)}{\Delta\chi}=-\frac{\eta\mu\frac{\Delta\chi}{2}}{\frac{\Delta\chi}{2}}\eta\mu\left(\chi+\frac{\Delta\chi}{2}\right).$$

Ἀλλ' ὅταν ὅρΔχ=0, ὁ πρῶτος παράγων ἔχει ὅριον —1 καὶ ὁ δεύτερος ἔχει ὅριον τὸ ημχ. Ὥστε εἶναι ψ'=—ημχ, ἤτοι *ἡ παράγωγος τοῦ συνχ εἶναι —ημχ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ.*

360. ***Παράγωγος τῆς ἐφαπτομένης.***— Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=εφχ. Ἔχομεν

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta\chi}=\frac{\varepsilon\varphi(\chi+\Delta\chi)-\varepsilon\varphi\chi}{\Delta\chi}=\frac{\eta\mu\Delta\chi}{\Delta\chi.\sigma\upsilon\nu(\chi+\Delta\chi)\sigma\upsilon\nu\chi}=\frac{\eta\mu\Delta\chi}{\Delta\chi}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(\chi+\Delta\chi).\sigma\upsilon\nu\chi}$$

Ἀλλ' ὅταν ὅρΔχ=0, ὁ πρῶτος παράγων ἔχει ὅριον τὴν 1 καὶ ὁ δεύτερος ἔχει ὅριον τὸ $\frac{1}{συν^2χ}=1+εφ^2χ$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ χ, ἥτις δὲν μηδενίζει τὸ συνχ. Ὥστε εἶναι $ψ'=\frac{1}{συν^2χ}=1+εφ^2χ$.

361. *Παράγωγος τῆς συνεφαπτομένης.* — Ἔστω ψ=σφχ. Ἐπειδὴ $ψ=\frac{συνχ}{ημχ}$ ἔχομεν κατὰ τὰ γνωστὰ περὶ παραγώγου πηλίκου

$$ψ'=\frac{(συνχ)'ημχ-(ημχ)'συνχ}{ημ^2χ}$$

ἤτοι $$ψ'=\frac{-ημ^2χ-συν^2χ}{ημ^2χ}=-\frac{1}{ημ^2χ}=-(1+σφ^2χ).$$

362. *Παράγωγος τῆς τεμχ καὶ συνδχ.*

$ψ=τεμχ.=\frac{1}{συνχ}$ καὶ $ψ'=-\frac{1}{συν^2χ}\cdot(-ημχ)=\frac{ημχ}{συν^2χ}=τεμχ\,.\,εφχ.$

$ψ=συνδχ=\frac{1}{ημχ}$ καὶ $ψ'=\frac{-1}{ημ^2χ}\,.\,συνχ=-\frac{συνχ}{ημ^2χ}=-συνδχ.σφχ.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1367) $ψ=αημχ$	1368) $ψ=ημ2χ$	1369) $ψ=συν5χ$
1370) $ψ=αημβχ$	1371) $ψ=ημ\left(χ+\frac{π}{2}\right)$	1372) $ψ=σημ\left(χ-\frac{π}{2}\right)$
1373) $ψ=ημ^2χ$	1374) $ψ=ημ^5χ$	1375) $ψ=συν^3χ$
1376) $ψ=χ^2ημ2χ$	1377) $ψ=χ^3συν3χ$	1378) $ψ=χ^2σφ4χ$
1379) $ψ=\sqrt{ημχ}$	1380) $ψ=\sqrt{συνχ}$	1381) $ψ=ημ\sqrt{χ^2+1}$

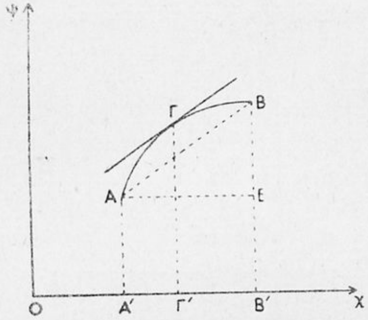
Νὰ εὑρεθῇ ἡ δευτέρα παράγωγος τῶν κάτωθι συναρτήσεων

1382) $ψ=ημχ$	1383) $ψ=συνχ$	1384) $ψ=εφχ$

Ἐφαρμογαὶ τῆς παραγώγου διὰ τὴν σπουδὴν τῶν συναρτήσεων

363. *Θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων.* — Ἔστω ἡ συνάρτησις ψ=σ(χ) ὡρισμένη, συνεχὴς καὶ ἔχουσα παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ, τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α, β). Ἐπὶ τῆς καμπύλης, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις, θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Β τὰ ἔχοντα τετμημένας ἀντιστοίχως (ΟΑ')=α καὶ (ΟΒ')=β καὶ ἑπομένως τεταγμένας σ(α) καὶ σ(β). Ἐὰν ἤδη φέρωμεν τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ τὴν ΑΕ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα Οχ τέμνουσαν τὴν Β'Β εἰς τὸ Ε, ἔχομεν ΑΕ=Α'Β'=ΟΒ'−ΟΑ'=β−α καὶ ΕΒ= Β'Β−Β'Ε=σ(β)−σ(α). Ἀλλ' ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΕΒ εὑρίσκομεν. ὅτι ὁ λόγος $\frac{EB}{AE}=\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}$ ἰσοῦται πρὸς τὴν ἐφαπτομένην τῆς γωνίας ΕΑΒ, ἤτοι τῆς γωνίας τοῦ ἄξονος Οχ μετὰ τῆς εὐθείας ΑΒ. Ὥστε ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς χορδῆς ΑΒ εἶναι $\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ τῆς καμπύλης $\psi=\sigma(\chi)$, τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὸ διάστημα (α, β), ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Γ, ἔχον τετμημένην $(O\Gamma')=\gamma$ περιεχομένην μεταξὺ α καὶ β



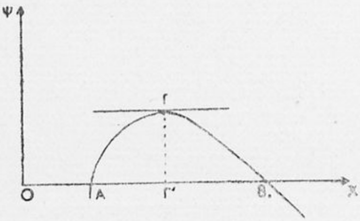
Σχ. 10

τοιοῦτον, ὥστε ἡ εἰς τὸ σημεῖον τοῦτο ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ. Ἀλλ' ἡ ἐφαπτομένη αὕτη γνωρίζομεν, ὅτι ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως τὴν παράγωγον τῆς συναρτήσεως $\psi=\sigma(\chi)$ διὰ $\chi=\gamma$, ἤτοι ἔχει συντελεστὴν κατευθύνσεως $\sigma'(\gamma)$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ ἕπεται, ὅτι $\frac{\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)}{\beta-\alpha}=\sigma'(\gamma)$ ἤτοι $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha).\sigma'(\gamma)$. Ἐκ τούτων, λοιπόν, ἕπεται τὸ θεώρημα:

Ὅταν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἔχῃ παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι (α, β), ὑπάρχει εἷς ἀριθμὸς γ περιεχόμενος μεταξὺ α καὶ β τοιοῦτος, ὥστε νὰ εἶναι $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma)$

364. Θεώρημα τοῦ Rolle.—Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ὡρισμένη συνεχὴς καὶ ἔχουσα παράγωγον ἐν τῷ διαστήματι (α, β) καὶ ἔστω ὅτι ἡ καμπύλη, τὴν ὁποίαν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις τέμνει τὸν ἄξονα Οχ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἔχοντα τετμημένας ἀντιστοίχως $\chi=(OA)=\alpha$ καὶ $\chi=(OB)=\beta$. Ἀλλ' εἶναι φανερόν, ὅτι εἰς τὸ τόξον ΑΒ τῆς καμπύλης, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὸ διάστημα (α, β), ὑπάρχει ἓν τοὐλάχιστον σημεῖον Γ, ἔχον τετμημένην $\chi=(O\Gamma')=\gamma$ μεταξὺ α καὶ β, εἰς ὃ ἡ ἐφαπτομένη τῆς καμπύλης εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Οχ. Ἀλλ' ὁ συντελεστὴς κατευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, ἥτις εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Οχ καὶ σχηματίζει μετ' αὐτοῦ γωνίαν 0, εἶναι μηδέν. Ἑπομένως εἶναι $\sigma'(\gamma)=0$. Ἄλλως τε τοῦτο προκύπτει ἀμέσως ἐκ τῆς ἀποδειχθείσης σχέσεως $\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)=(\beta-\alpha).\sigma'(\gamma)$. Διότι ἀφοῦ ὑπετέθη $\sigma(\beta)=0$ καὶ $\sigma(\alpha)=0$, ἕπεται ὅτι $(\beta-\alpha)\sigma'(\gamma)=0$ καὶ ἐπειδὴ $\beta-\alpha\neq0$, θὰ εἶναι $\sigma'(\gamma)=0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται τὸ θεώρημα: *Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι (α, β) μηδενίζεται διὰ $\chi=\alpha$*



καὶ $\chi=\beta$ καὶ ἐὰν ἔχῃ παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιεχομένας ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, ὑπάρχει μία τουλάχιστον τιμὴ γ τῆς χ, περιεχομένη μεταξὺ α καὶ β, δι' ἣν ἡ παράγωγος μηδενίζεται.

365. Θεώρημα.—*Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ἔχῃ παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ τὰς περιεχομένας μεταξὺ α καὶ β καὶ δι' ὅλας τὰς τιμὰς αὐτὰς ἡ παράγωγος αὕτη εἶναι μηδέν, ἡ συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ἔχει σταθερὰν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι (α, β).*

Ἔστωσαν χ_1 καὶ χ_2 δύο οἱαιδήποτε τιμαὶ τοῦ χ ἐν τῷ διαστήματι (α, β). Ἀλλὰ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν πεπερασμένων αὐξήσεων εἶναι $\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)=(\chi_2-\chi_1)\sigma'(\gamma)$, τοῦ γ ὄντος μεταξὺ χ_1 καὶ χ_2. Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι $\sigma'(\gamma)=0$, ἕπεται καὶ $\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)=0$, ἤτοι $\sigma(\chi_2)=\sigma(\chi_1)$. Ἤτοι ἡ συνάρτησις σ(χ) ἔχει πάντοτε τὴν αὐτὴν τιμὴν ἐν τῷ διαστήματι (α, β).

366. Θεώρημα.— *Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ ἔχῃ παράγωγον δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ τὰς περιεχομένας ἔν τινι διαστήματι (α, β) καὶ ἡ παράγωγος αὕτη εἶναι πάντοτε θετική, ἡ συνάρτησις σ(χ) εἶναι αὔξουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, εἶναι δὲ φθίνουσα ἐν αὐτῷ, ἐὰν ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητική.*

Ἔστωσαν δύο τιμαὶ χ_1 καὶ χ_2 τοῦ χ κείμεναι ἐν τῷ διαστήματι (α,β) ὁπότε ἔχομεν

$$\frac{\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}=\sigma'(\gamma)$$

τοῦ γ ὄντος μεταξὺ χ_1 καὶ χ_2. Ἀλλ' ἐὰν $\sigma'(\gamma)>0$, ἕπεται ὅτι καὶ

$$\frac{\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}>0$$

ἤτοι, ὅτι αἱ διαφοραὶ $\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)$ καὶ $\chi_2-\chi_2$ εἶναι ὁμόσημοι. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi)$ μεταβάλλεται καθ' ἣν φορὰν μεταβάλλεται καὶ ὁ χ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ συνάρτησις $\sigma(\chi)$ εἶναι αὔξουσα. Ἐὰν ὅμως εἶναι $\sigma'(\gamma)<0$, θὰ εἶναι καὶ $\dfrac{\sigma(\chi_2)-\sigma(\chi_1)}{\chi_2-\chi_1}<0$ καὶ ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα.

367. Θεώρημα ἀντίστροφον.—*Ἐὰν μία συνάρτησις $\psi=\sigma(\chi)$ εἶναι ὡρισμένη, συνεχὴς καὶ ἔχῃ παράγωγον ἔν τινι διαστήματι (α,β).*

1) Ἐὰν εἶναι αὔξουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, ἡ παράγωγος εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ καὶ

2) Ἐὰν εἶναι φθίνουσα ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ, ἡ παράγωγος εἶναι ἀρνητικὴ ἢ μηδὲν ἐν αὐτῷ, δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ χ.

Ἔστωσαν δύο τιμαὶ χ_0 καὶ $\chi_0+\varepsilon$ κείμεναι ἐν τῷ διαστήματι (α,β). Ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, ὁ λόγος $\dfrac{\sigma(\chi_0+\varepsilon)-\sigma(\chi_0)}{\varepsilon}$ εἶναι θετικὸς καὶ τὸ ὅριον αὐτοῦ, ὅταν τὸ ε τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, εἶναι ἡ παράγωγος $\sigma'(\chi)$. Ἀλλὰ τὸ ὅριον μιᾶς ποσότητος θετικῆς εἶναι ποσότης θετικὴ ἢ 0. Ὥστε $\sigma'(\chi)\geqslant 0$.

Ὁμοίως δὲ γίνεται ἡ ἀπόδειξις, ἐὰν ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα.

Σημείωσις. Ἡ παράγωγος ἐὰν εἶναι 0, θὰ εἶναι διὰ μεμονωμένας τιμὰς τοῦ χ καὶ ὄχι διά τι διάστημα ἐν τῷ διαστήματι (α,β). Διότι τότε ἡ συνάρτησις θὰ ἦτο σταθερὰ ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ.

368. Σημεῖον τῆς παραγώγου.—*Μέγιστον καὶ ἐλάχιστον.* Ἤδη μεταβαίνομεν εἰς τὴν ἐξέτασιν τοῦ τρόπου, διὰ τοῦ ὁποίου θὰ εὑρίσκωμεν, ἐὰν μία συνάρτησις ἔχῃ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον καὶ διὰ ποίαν τιμὴν τῆς χ. Τὸν τρόπον δὲ τοῦτον δίδει ταχέως ἡ ἐξέτασις τοῦ σημείου τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως. Διότι, ὅταν π.χ. μία συνάρτησις αὔξουσα κατ' ἀρχάς, γίνεται κατόπιν φθίνουσα, ἡ παράγωγος αὐτῆ ἀπὸ θετικὴ γίνεται ἀρνητική, ὅταν ἡ συνάρτησις παύουσα αὐξανομένη ἀρχίζῃ νὰ ἐλαττοῦται· ὥστε: *Ὅταν ἡ συνάρτησις διέρχεται δι ἑνὸς μεγίστου, ἡ παράγωγος αὐτῆς ἀλλάσσει σημεῖον, καθισταμένη ἀπὸ θετικῆς ἀρνητική.*

Ὅταν μία συνάρτησις φθίνουσα κατ' ἀρχὰς γίνεται κατόπιν αὔξουσα, ἡ παράγωγος αὐτῆς ἀπὸ ἀρνητικὴ γίνεται θετική, ὥστε: *Ὅταν ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἑνὸς ἐλαχίστου, ἡ παράγωγος αὐτῆς ἀλλάσσει σημεῖον, καθισταμένη ἀπὸ ἀρνητικῆς θετική.*

Ἀντιστρόφως δέ: *Ὅταν ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως ἀλλάσσει σημεῖον καὶ ἀπὸ θετικὴ γίνεται ἀρνητική, ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἑνὸς μεγίστου· ἐὰν ὅμως ἡ παράγωγος ἀπὸ ἀρνητικὴ γίνεται θετική, ἡ συνάρτησις διέρχεται δι' ἑνὸς ἐλαχίστου.*

369. Συνήθως ἡ παράγωγος μιᾶς συναρτήσεως ὡρισμένης καὶ συνεχοῦς εἶναι καὶ αὕτη ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἔν τινι διαστήματι. Ἐν τῇ περιπτώσει δὲ ταύτῃ, ὅταν ἡ παράγωγος ἀλλάσσῃ σημεῖον διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς 0. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ εἴπωμεν γενικῶς ὅτι: *Αἱ τιμαὶ τοῦ χ, δι' ἃς μία συνάρτησις γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον, εἶναι ἐκεῖναι, αἵτινες μηδενίζουν τὴν παράγωγον καὶ ἀπὸ τὰς ὁποίας, ὅταν διέρχεται ἡ χ, ἀλλάσσει συγχρόνως ἡ παράγωγος σημεῖον.*

Ἐφαρμογαί

370. *1) Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως*

$$\psi=-\chi^2+13\chi-36.$$

α') Ἡ σύνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι $(-\infty, +\infty)$ καὶ διὰ $\chi=\pm\infty$ ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $-\chi^2$.

β') Ἡ παράγωγος αὐτῆς $\psi'=-2\chi+13=-2\left(\chi-\frac{13}{2}\right)$ ὡρισμένη καὶ συνεχὴς ἐν τῷ διαστήματι $(-\infty, +\infty)$, γίνεται μηδὲν διὰ $\chi=\frac{13}{2}$ καὶ ἔχει σημεῖον ἀντίθετον τοῦ -2 διὰ τὰς τιμὰς $\chi<\frac{13}{2}$ καὶ τὸ σημεῖον τοῦ -2 διὰ τὰς τιμὰς $\chi>\frac{13}{2}$.

Ἐπομένως ἡ παράγωγος ἀλλάσσει σημεῖον, ὅταν ἡ χ διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $\chi=\frac{13}{2}$ καθισταμένη ἀπὸ θετικῆς ἀρνητική. Ὥστε ἡ συνάρτησις ἔχει ἓν μέγιστον διὰ $\chi=\frac{13}{2}$ ἴσον μὲ $\frac{25}{4}$.

γ') Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς δοθείσης συναρτήσεως, εἶναι ὡς γνωρίζομεν παραβολὴ (§ 258), ἡ ὁποία στρέφει τὰ κοῖλα πρὸς τὰ κάτω, ἡ δὲ ἐφαπτομένη αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον $\left(\frac{13}{2}, \frac{25}{4}\right)$, εἰς ὃ ἡ συνάρτησις εἶναι μεγίστη, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα Οχ, διότι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς αὐτῆς $\psi' = -2\left(\chi - \frac{13}{2}\right)$ εἶναι 0, διὰ $\chi = \frac{13}{2}$.

2) *Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως*

$$\psi = \frac{\chi+2}{\chi-2} = \frac{1+\frac{2}{\chi}}{1-\frac{2}{\chi}}$$

α) Ἡ συνάρτησις αὕτη εἶναι ὡρισμένη καὶ συνεχὴς δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς χ πλὴν διὰ τὴν τιμὴν $\chi=2$. Διὰ δὲ $\chi=\pm\infty$ αὕτη ἔχει ὅριον τὸ $\frac{1}{1}=1$, διότι ὅρ $\frac{2}{\chi}=0$.

β) Ἡ παράγωγος αὐτῆς $\psi' = \frac{\chi-2-(\chi+2)}{(\chi-2)^2} = \frac{-4}{(\chi-2)^2}$ (ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς εἶναι πάντοτε θετικὸς) ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ ἀριθμοῦ —4 καὶ ἑπομένως εἶναι πάντοτε ἀρνητική. Ἄρα ἡ δοθεῖσα συνάρτησις εἶναι πάντοτε φθίνουσα (366).

γ) Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν αὐτῆς εἶναι ὑπερβολὴ (Συμ. Ἀλγ. § 23), τῆς ὁποίας ἀσύμπτωτοι εἶναι αἱ εὐθεῖαι $\chi=2$ καὶ $\psi=1$.

3) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς χ, δι' ἃς ἡ συνάρτησις*

$$\psi = \frac{1}{3}\chi^3 - 3\chi^2 + 5\chi + 2$$

γίνεται μεγίστη ἢ ἐλαχίστη.

Ἡ συνάρτησις αὕτη ὡς καὶ ἡ παράγωγος αὐτῆς $\psi'=\chi^2-6+\chi+5$ εἶναι ὡρισμέναι καὶ συνεχεῖς ἐν τῷ διαστήματι $(-\infty, +\infty)$. Μηδενίζεται δὲ ἡ παράγωγος διὰ $\chi=1$ καὶ $\chi=5$ καὶ μεταβαίνει ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν, ὅταν ἡ χ αὐξανομένη διέρχεται διὰ τοῦ 1 καὶ ἐκ τοῦ ἀρνητικοῦ εἰς τὸ θετικόν, ὅταν ἡ χ διέρχεται αὐξανομένη διὰ τοῦ 5. Ὥστε ἡ δοθεῖσα συνάρτησις ἔχει ἓν μέγιστον $\left(4\frac{1}{3}\right)$ διὰ $\chi=1$ καὶ ἓν ἐλάχιστον $(-6\frac{1}{3})$ διὰ $\chi=5$.

4) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῆς χ δι' ἃς ἡ συνάρτησις* $\psi=\chi^3+12\chi+5$ *γίνεται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον.*

Ἡ παράγωγος $\psi'=3\chi^2+12$ εἶναι διαρκῶς αὔξουσα ἐν τῷ διαστήματι $(-\infty, +\infty)$ καὶ ἐπὶ πλέον μηδενίζεται διὰ φανταστικῶν τιμῶν τοῦ $\chi=\pm 2i$. Ἑπομένως ἡ δοθεῖσα συνάρτησις δὲν ἔχει οὔτε μέγιστον, οὔτε ἐλάχιστον.

5) *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ μεγίστου ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον δοθείσης ἀκτῖνος α.*

Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ἐγγεγραμμένον ὀρθογώνιον, οὗ εἶναι ΑΒ)=χ καὶ (ΑΔ)=ψ. Τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι $E=\chi\psi$. Ἀλλ' ἡ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου τούτου εἶναι διάμετρος τοῦ δοθέντος κύκλου. Ἔχομεν ἑπομένως $\psi=\sqrt{4\alpha^2-\chi^2}$ καὶ $E=\chi\sqrt{4\alpha^2-\chi^2}$. Τὸ ἐμβαδὸν λοιπὸν Ε εἶναι συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβολῆς χ. Ἡ παράγωγος δὲ αὐτοῦ εἶναι $E'=\dfrac{4\alpha^2-2\chi^2}{\sqrt{4\alpha^2-\chi^2}}$ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ χ δι' ἣν μηδενίζεται εἶναι εἶναι ἡ $\chi=\alpha\sqrt{2}$, ἥτις εἶναι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως $4\alpha^2-2\chi^2=0$, καὶ μεταβαίνει ἐκ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν, ὅταν ὁ χ αὐξανόμενος διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $\alpha\sqrt{2}$. Ὥστε τὸ ἐμβαδὸν Ε γίνεται μέγιστον, ὅταν $\chi=\alpha\sqrt{2}$, τότε δὲ εἶναι $\psi=\sqrt{4\alpha^2-2\alpha^2}=\alpha\sqrt{2}$.

Ὥστε: *Ἐκ τῶν ἐγγεγραμμένων ὀρθογωνίων εἰς δοθέντα κύκλον μέγιστον εἶναι τὸ τετράγωνον.*

6) *Ποία εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως κώνου, δοθείσης πλευρᾶς λ, ὥστε ὁ κῶνος νὰ εἶναι μέγιστος;*

Ἔστω χ ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ὁ ὄγκος V τοῦ ὁποίου εἶναι $V=\frac{1}{3}\pi\chi^2\sqrt{\lambda^2-\chi^2}$.

Ὥστε ὁ ὄγκος οὗτος εἶναι συνάρτησις τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, ἡ δὲ παράγωγος αὐτοῦ εἶναι $V'=$

$$=\frac{2}{3}\pi\chi\sqrt{\lambda^2-\chi^2}+\frac{1}{3}\pi\chi^2\cdot\frac{-2\chi}{2\sqrt{\lambda^2-\chi^2}} \quad \text{ἤτοι} \quad V'=\frac{\pi\chi(2\lambda^2-3\chi^2)}{3\sqrt{\lambda^2-\chi^2}}.$$

Ἡ παράγωγος αὕτη μηδενίζεται διὰ $\chi=\lambda\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, ἥτις εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $\pi\chi(2\lambda^2-3\chi^2)=0$, καὶ μεταβαίνει ἀπὸ τοῦ θετικοῦ εἰς τὸ ἀρνητικόν, ὅταν ὁ χ αὐξανόμενος διέρχεται διὰ τῆς τιμῆς $\chi=\lambda\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ὁ ὄγκος λοιπὸν εἶναι μέγιστος, ὅταν $\chi=\lambda\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

371. **Ἐφαρμογαὶ τῆς παραγώγου εἰς τὴν Μηχανικὴν καὶ Φυσικήν.**

Βλέπε Συμπλήρωμα Ἀλγέβρας Χρ. Μπαρμπαστάθη σελ. 68 § 70.

372. **Χρῆσις τῆς παραγώγου εἰς τὰς ἀπροσδιορίστους μορφάς.** — *Κανόνες τοῦ* Hospital.

Βλέπε Συμπλήρωμα Ἀλγέβρας Χ. Μπαρμπαστάθη σελ. 71—74 § 71—74.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῶν συναρτήσεων:

1385) $\psi=\chi+5$ 1386) $\psi=-2\chi+3$ 1387) $\psi=\alpha\chi+\beta$

1388) $\psi=-\frac{\chi^2}{5}$ 1389) $\psi=\chi^2+2$ 1390) $\psi=\chi^2-5\chi+4$

1391) $\psi=\chi^3-8$ 1392) $\psi=(\chi-2)^3$ 1393) $\psi=\chi(\chi-1)^2$

1394) $\psi=\chi^3-5\chi-4$ 1395) $\psi=\chi^3+5\chi^2-7$ 1396) $\psi=\chi^3+2\chi^2-\chi-2$

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τῶν συναρτήσεων:

1397) $\psi=\chi^2-\chi-6$ 1398) $\psi=(4-2\chi)^2-(1-3\chi)^2$ 1399) $\psi=3\chi^3+2\chi^2$

1400) $\psi=(\chi+\alpha)(\chi+\beta)$ 1401) $\psi=(\alpha-\chi)(\beta-\chi)$ 1402) $\psi=(\chi-\alpha)^2(\chi-\beta)$

1403) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν περίμετρον ποῖον εἶναι τὸ μέγιστον;

1404) Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τῶν ἐχόντων τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν α^2 ποῖον ἔχει τὴν ἐλαχίστην περίμετρον;

1405) Δίδεται τὸ ἄθροισμα 2λ τῆς ὑποτεινούσης ὀρθογωνίου τριγώνου καὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ζητεῖται τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἔχῃ τὸ τρίγωνον τοῦτο.

1406) Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος, ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος;

1407) Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐχόντων τὴν αὐτὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν, ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος;

1408) Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς σφαῖραν δοθείσης ἀκτῖνος, ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

1409) Ἐκ τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς δοθέντα κῶνον, οὗ τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως, ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος;

1410) Ἐκ τῶν κυλίνδρων τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Ἀρχικαὶ συναρτήσεις

373. Ὁρισμός.—Ἡ συνάρτησις $\Phi(\chi)=3\chi^2-5\chi$ ἔχει παράγωγον τὴν συνάρτησιν $\varphi(\chi)=6\chi-5$. Δι' ὃ ἡ $\Phi(\chi)$ λέγεται ***ἀρχικὴ*** συνάρτησις τῆς $\varphi(\chi)$:

Ὥστε: *Ἀρχικὴ συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως $\varphi(\chi)$ λέγεται μία ἄλλη συνάρτησις $\Phi(\chi)$* (ἐὰν ὑπάρχῃ) *ἥτις ἔχει τὴν δοθεῖσαν ὡς παράγωγον.*

374. Θεωρήματα.—Γνωρίζομεν (§ 350) ὅτι ἡ παράγωγος τοῦ γινομένου μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ σταθεράν, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς παραγώγου τῆς συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθεράν.

Ἐξ οὗ ἕπεται ὅτι: *Τὸ γινόμενον μιᾶς συναρτήσεως ἐπὶ σταθερὰν* *ἔχει ὡς ἀρχικὴν συνάρτησιν τὸ γινόμενον τῆς ἀρχικῆς τῆς δοθείσης συναρτήσεως ἐπὶ τὴν σταθεράν.*

Π.χ. Ἡ ἀρχικὴ τῆς $\varphi(\chi)=\chi^3$ εἶναι $\Phi(\chi)=\frac{\chi^4}{4}$, διότι εἶναι $\Phi'(\chi)=\frac{4}{4}\chi^{4-1}=\chi^3$ καὶ γενικῶς ἡ ἀρχικὴ τῆς $\varphi(\chi)=\chi^\mu$ εἶναι $\Phi(\chi)=\frac{\chi^{\mu+1}}{\mu+1}$, ἐὰν $\mu\neq-1$.

Ἑπομένως ἡ ἀρχικὴ τῆς $2.\chi^3$ εἶναι $2.\frac{\chi^4}{4}$ καὶ ἡ τῆς $\alpha\chi^\mu$ εἶναι

$$\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

2) Ὁμοίως γνωρίζομεν (§ 349) ὅτι: Ἡ παράγωγος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν παραγώγων τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.

Ἐξ οὗ ἕπεται:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων συναρτήσεων ἔχει ὡς ἀρχικὴν τὸ ἄθροισμα τῶν ἀρχικῶν τῶν δοθεισῶν συναρτήσεων.

Οὕτως ἡ συνάρτησις $2\chi^2-5\chi+8$ ἔχει ὡς ἀρχικὴν τὴν

$$\frac{2\chi^3}{3}-\frac{5\chi^2}{2}+8\chi.$$

3) Ἡ ἀρχικὴ τῆς $\varphi(\chi)=\chi^5$ εἶναι $\Phi(\chi)=\frac{\chi^6}{6}$, διότι εἶναι $\Phi'(\chi)=\frac{6\chi^5}{6}=\chi^5$. Ἀλλὰ καὶ αἱ συναρτήσεις $\frac{\chi^6}{6}+5$, $\frac{\chi^6}{6}+8$, $\frac{\chi^6}{6}-9$, ἔχουν τὴν αὐτὴν παράγωγον $\varphi(\chi)=\chi^5$. Ὥστε καὶ αὗται εἶναι ἀρχικαὶ συναρτήσεις τῆς δοθείσης ὡς καὶ ἡ $\frac{\chi^6}{6}+\Gamma$, ὅπου Γ εἶναι εἷς σταθερὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε. Γενικῶς δέ:

Ἐὰν μία συνάρτησις $\varphi(\chi)$ τοῦ χ ὡρισμένη δι' ἑκάστην τιμὴν τοῦ χ, ἔν τινι διαστήματι, ἔχῃ ὡς ἀρχικὴν τὴν συνεχῆ συνάρτησιν $\Phi(\chi)$., θὰ ἔχῃ ὡς ἀρχικὰς καὶ τὰς συναρτήσεις $\Phi(\chi)+\Gamma$, ὅπου Γ εἶναι εἷς σταθερὸς ἀριθμὸς οἱοσδήποτε.

Διότι, ἐὰν αἱ συνεχεῖς συναρτήσεις $\Phi(\chi)$ καὶ $\Sigma(\chi)$ ἔχουν ὡς παράγωγον τὴν αὐτὴν συνάρτησιν $\varphi(\chi)$, θὰ ἔχουν, ὡς παράγωγον τῆς διαφορᾶς $\Sigma(\chi)-\Phi(\chi)$, τὴν διαφορὰν $\varphi(\chi)-\varphi(\chi)=0$.

Ὥστε (§ 348,3) ἡ συνάρτησις $\Sigma(\chi)-\Phi(\chi)$ ἥτις ἔχει παράγωγον σταθερῶς μηδέν, εἶναι ποσότης σταθερὰ Γ καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι

$$\Sigma(\chi)-\Phi(\chi)=\Gamma \quad \text{ἤτοι} \quad \Sigma(\chi)=\Phi(\chi)+\Gamma.$$

Σημείωσις. Ἡ ἀρχικὴ συνάρτησις δοθείσης συναρτήσεως λέγεται καὶ *παράγουσα* αὐτῆς.

375. Εἰς τὰ περὶ παραγώγων ἔχομεν εὕρει τὰς παραγώγους ὡρισμένου ἀριθμοῦ συναρτήσεων.

Ἐξ ἐκείνων λοιπὸν εὔκολος εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν ἀρχικῶν ὡρισμένου ἀριθμοῦ συναρτήσεων καὶ αἱ ὁποῖαι περιέχονται εἰς τὸν κάτωθι πίνακα.

Συναρτήσεις	Ἀρχικαί
χ^{μ}	$\frac{\chi^{\mu+1}}{\mu+1}+\Gamma$
$\alpha\chi^{\mu}$	$\frac{\alpha\chi^{\mu+1}}{\mu+1}+\Gamma$
$\frac{1}{\sqrt{\chi}}$	$2\sqrt{\chi}+\Gamma$
$\eta\mu\chi$	$-\sigma\upsilon\nu\chi+\Gamma$
$\sigma\upsilon\nu\chi$	$\eta\mu\chi+\Gamma$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$	$\varepsilon\varphi\chi+\Gamma$
$\frac{1}{-\eta\mu^2\chi}$	$\sigma\varphi\chi+\Gamma$

376. Χρησιμότης τῶν ἀρχικῶν συναρτήσεων, εἰς τὴν εὕρεσιν ἐμβαδῶν ἐπιπέδων ἐπιφανειῶν καὶ ὄγκων.

Βλέπε συμπλ. Ἀλγέβρας Χ. Μπαρμπαστάθη σελ. 77 —85 § 78—85.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀρχικαὶ τῶν κάτωθι συναρτήσεων:

1411) χ 1412) $7\chi^3$ 1413) χ^{-3}

1414) $\frac{1}{\chi^2}$ 1415 $-\frac{1}{\chi^3}$ 1416) $-\frac{36}{\chi^7}$

1417) $\frac{81}{\chi^{10}}$ 1418) $\frac{1}{3\sqrt[3]{\chi^2}}$ 1419) $\frac{2}{3\sqrt[3]{\chi}}$

1420) $5\chi^3+2\chi^2+3\chi+1$ 1421 $4\chi^2-3\chi+2$ 1422) $(\chi+1)^3$

1423) $(\chi+3)^3$ 1424) $(\sqrt{\chi}+\sqrt[3]{\chi})$ 1425) $(\sqrt{\chi}+\sqrt[3]{\chi}+\sqrt[4]{\chi})$

1426) $-\sigma\upsilon\nu\chi$ 1427) $\frac{\eta\mu\chi}{2}$ 1428) $\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi$

1429) συν2χ 1430) ημ2χ 1431) συν$^2\chi$
1432) ημ$\chi^2\chi$ 1433) εφ$^2\chi$ 1434) εφ$^2\alpha\chi$.

Ζητήματα πρὸς ἐπανάληψιν
Δοθέντα εἰς τὰς ἰδικάς μας καὶ ξένας σχολάς

Α. Ζητήματα δοθέντα εἰς τὰς ἰδικάς μας σχολάς.

1435) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\chi^2+4\chi-12=0$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς $\frac{7\chi_1+9}{9\chi_1+7}+\frac{7\chi_2+9}{9\chi_2+7}$ (ἔνθα χ_1, χ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως) χωρὶς νὰ λυθῇ αὕτη.
(Παν. Ἀθηνῶν)

1436) Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἀριθμὸς ἀκέραιος καὶ θετικός, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $2^{4\nu+1}-2^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετὴ διὰ 9.
(Παν. Θεσσαλονίκης)

1437) Ἐὰν εἷς τῶν ἀριθμῶν α, β, γ εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ ὅτι $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$ καὶ ἀντιστρόφως.
(Παν. Θεσσαλονίκης)

1438) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi+\sqrt{\chi^2-\alpha^2}}{\chi-\sqrt{\chi^2-\alpha^2}}=\frac{\chi}{\alpha}$.
(Σχ. Ν. Δοκίμων)

1439) Νὰ ἐγγραφῇ εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ἀκτῖνος ρ τὸ μέγιστον τραπέζιον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς τὸ οὕτως ἐγγραφὲν τραπέζιον, ὀρθογώνιον, οὗ τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπεζίου. Διερεύνησις.
(Σχ. Εὐελπίδων)

1440) Ἐξοδεύει τις τὰ 3/4 τῶν ὅσων ἔχει μεῖον 4 δρχ· ἔπειτα τὸ 1/4 τοῦ ὑπολοίπου πλέον 3 δρχ· καὶ τέλος τὰ 2/5 τοῦ νέου ὑπολοίπου πλέον 1,20 δρχ. Οὕτω δὲ τοῦ μένουν 24 δραχμαὶ ἀκόμη. Πόσας δραχμὰς εἶχεν;
(Ἀν. Γεωπ. Σχολή)

1441) Ἔχει τις δύο ἐντόκους καταθέσεις εἰς δύο τραπέζας μὲ ἄνισα ἐπιτόκια. Τὸ ἄθροισμα τῶν κεφαλαίων εἶναι 60000 δραχμαί, τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν ἐπιτοκίων 12 δρχ. Τὸ α΄ κεφάλαιον δίδει τόκον 1320 δρχ. κατ' ἔτος καὶ τὸ β΄ 2340 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια καὶ τὰ ἀντίστοιχα ἐπιτόκια.
(Ἀν. Γεωπ. Σχολή)

1442) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ 4 ὅροι ἀναλογίας γνωστοῦ ὄντος, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν εἶναι 120 καὶ ὅτι τὰ γινόμενα τοῦ πρώτου ὅρου ἐφ' ἕκαστον τῶν τριῶν ἄλλων εἶναι κατὰ σειρὰν 6, 12, 18.
(Ἀν. Γεωπ. Σχολή)

1443) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi+\psi=\frac{1}{15}\chi\psi\omega$, $\psi+\omega=\frac{13}{120}\chi\psi\omega$, $\omega+\chi=\frac{11}{120}\chi\psi\omega$.
(Παν. Ἀθηνῶν)

1444) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα

$$\alpha\chi+\beta(\psi+\phi+\omega)=\gamma,\qquad \alpha\phi+\beta_2(\chi+\psi+\omega)=\gamma_2$$
$$\alpha\psi+\beta_1(\chi+\phi+\omega)=\gamma_1,\qquad \alpha\omega+\beta_3(\chi+\psi+\phi)=\gamma_3$$

(Σχ. Ἀεροπορίας)

1445) Δύο ἀριθμοὶ χ, ψ εἶναι τοιοῦτοι ὥστε $\chi\psi=\alpha$, $\chi^2+\psi^2=\beta$ καὶ $\frac{\chi}{\psi}=\gamma$. Ποία εἶναι ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν α, β, γ;

(Παν. Ἀθηνῶν)

1446) Πότε ἡ διαίρεσις $(\chi^\mu+\alpha^\mu):(\chi+\alpha)$ εἶναι τελεία; Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον χωρὶς νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

(Σχ. Δοκίμων)

1447) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi^2+\psi^2=218$, $\chi\psi-\psi^2=42$.

(Σχ. Χημ. Μηχανικῶν)

1448) Δίδεται τὸ τριώνυμον $\chi^2+\beta\chi+\gamma$, ἔχον ρίζας χ_1 καὶ χ_2. Νὰ σχηματισθῇ ἄλλο τριώνυμον, ὅπερ νὰ ἔχῃ ρίζας $\frac{\chi_1^2+\chi_2^2}{\chi_1+\chi_2}$ καὶ $\chi_1^3+\chi_2^3$

(Σχ. Χημ. Μηχανικῶν)

1449) Ζητοῦνται τρεῖς ἀριθμοὶ χ, ψ, z ἀποτελοῦντες γεωμετρικὴν πρόοδον καὶ τῶν ὁποίων τὰ γινόμενα ἀνὰ δύο καὶ τὸ γινόμενον αὐτῶν κατὰ τὴν τάξιν $\chi\psi$, ψz, $z\chi$, $\chi\psi z$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

(Παν. Ἀθηνῶν)

1450) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἑξῆς ν ἀριθμῶν:

$$1.2,\ 2.3,\ 3.4,\ 4.5,\ \ldots\ldots,\ \nu(\nu+1).$$

(Σχ. Εὐελπίδων)

1451) Εὕρετε ἂν οἱ ἀριθμοὶ 12, 20, 35 δύνανται νὰ εἶναι ὁπωσδήποτε ὅροι τυχούσης γεωμετρικῆς προόδου.

(Σχ. Ν. Δοκίμων)

1452) Δίδεται τὸ τριώνυμον $\chi^2-(8\lambda-2)\chi+15\lambda^2-2\lambda-7$ καὶ ζητεῖται α') νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν του νὰ εἶναι 24. β') νὰ ὁρισθῇ ὁ λ ἵνα τὸ τριώνυμον εἶναι θετικὸν διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ χ.

(Ἀν. Γεωπονική).

1453) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\chi^4+\chi^3-31\chi^2-25\chi+150=0$.

(Σχ. Ἀεροπορίας)

1454) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\chi}}+\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\chi}}=\beta$.

(Σχ. Ν. Δοκίμων)

1455) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ μ διὰ τὰς ὁποίας αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος

$$\frac{\chi\psi^2+\chi^2\psi}{\chi^3+\psi^3}=\frac{\mu^2-4}{\mu-4},\qquad \frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}=1-\mu$$

εἶναι ἀμφότεραι ἀρνητικαί.

(Σχ. Ν. Δοκίμων)

1456) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ λ δι' ἃς αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\chi^4-(3\lambda+5)\chi^2+(\lambda+1)^2=0$, ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

(Πολυτεχνεῖον)

1457) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, δ εἶναι θετικοί, ἡ παράστασις $\sqrt[\kappa+\lambda+\mu+\nu]{\alpha\beta\gamma\delta}$ περιέχεται μεταξὺ τῆς μεγαλυτέρας καὶ τῆς μικροτέρας ἐκ τῶν παραστάσεων $\sqrt[\kappa]{\alpha}$, $\sqrt[\lambda]{\beta}$, $\sqrt[\mu]{\gamma}$, $\sqrt[\nu]{\delta}$.

(Πολυτεχνεῖον)

1458) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ οὐδεμίαν ἔχοντος κοινὴν ρίζαν μετὰ τοῦ $\gamma\chi^2+\beta\chi+\alpha$, ὅταν μεταξὺ μὲν τῶν ριζῶν χ_1 καὶ χ_2 ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha\chi_1^2+\beta\chi_1\chi_2+\gamma\chi_2^2=0$ (α), μεταξὺ δὲ τῶν συντελεστῶν ἡ σχέσις $\chi_1\beta^2-(\chi_1+\chi_2)\beta\gamma+\gamma_2\chi^2=0$ (β).

(Πολυτεχνεῖον)

1459) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\chi\psi=\omega\upsilon$, $\chi+\psi=10$, $\upsilon+\omega=14$, $\frac{\chi}{\omega}+\frac{\upsilon}{\psi}=4$.

(Πολυτεχνεῖον)

1460) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $3^\chi-5^\psi=4$, $2^{2\chi}+5^{2\psi}=106$.

(Πολυτεχνεῖον)

1461) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{\chi^{\lambda o\gamma\chi}}{\chi^2\sqrt{\chi}}=\frac{1}{10}$.

(Πολυτεχνεῖον).

1462) Δίδεται τὸ σύστημα $(\delta-3)\chi+\psi=4-\gamma$, $(2-\alpha)\chi+\psi=\beta-5$ καὶ ἡ ἐξίσωσις $\Lambda\chi^2+M\chi\psi+N\psi^2=P$ ἔνθα

$$\Lambda=(\delta-3)^2.(\delta-2)(\alpha+\beta^2+\gamma^2+\delta-45)$$
$$M=(\delta-3)(\delta-2)(\alpha+\gamma^2-16)$$
$$N=\delta-2 \text{ καὶ } P=(4-\gamma)^2(3-\alpha)$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ τιμαὶ τῶν γραμμάτων α, β, γ, δ δι' ἃς τὸ μὲν σύστημα καθίσταται ἀόριστον, ἡ δὲ ἐξίσωσις πληροῦται ὑπὸ πάσης λύσεως τοῦ ἀορίστου συστήματος.

(Πολυτεχνεῖον)

1463) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[3]{\alpha+\chi}-\sqrt[3]{\alpha-\chi}=\sqrt[6]{\alpha^2-\chi^2}$.

(Π]χνεῖον)

1464) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ τὸ πολυώνυμον

$$(\chi-\rho_1)(\chi-\rho_2)+(\chi-\rho_2)(\chi-\rho_3)+(\chi-\rho_3)(\chi-\rho_1)$$

ἔχει ρίζας πραγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μὲν μία εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν $\rho_1+\frac{\delta_1}{3}$ καὶ $\rho_1-\frac{\delta_1}{3}$, ἡ δὲ ἄλλη μεταξὺ τῶν $\rho_2+\frac{\delta_2}{3}$ καὶ $\rho_2-\frac{\delta_2}{3}$ ἔνθα $\delta_1=\rho_2-\rho_1$ καὶ $\delta_2=\rho_3-\rho_2$.

(Π]χνεῖον)

1465) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $A\chi+B\psi+\Gamma$ μηδενιζόμενον διὰ πᾶν σύστημα τιμῶν τῶν χ, ψ τὸ ὁποῖον σύστημα ἐπαληθεύει εἴτε μίαν πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν πρὸς χ, ψ διάφορον τῆς $A\chi+B\chi+\Gamma=0$, εἴτε μίαν δευτεροβάθμιον διάφορον τῆς $(A\chi+B\psi+\Gamma)^2=0$, εἶναι ἐκ ταυτότητος μηδέν.

1466) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{1}{\chi-1}>\frac{2}{3\chi+1}$.

(Π]χνεῖον)

1467) Ἐὰν διὰ χ_1, χ_2 καὶ ρ_1, ρ_2 παρασταθοῦν ἀντιστοίχως αἱ ρίζαι τῶν τριωνύμων

$$\lambda^2\chi^2+(3\lambda^2-5\lambda+17)\chi+\frac{1}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \lambda^2\chi^2+(2\lambda^2-19\lambda-23)\chi+\frac{1}{\lambda}$$

νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τοῦ λ δι' ἃς τὰ τριώνυμα ταῦτα ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ τοιαύτας ὥστε νὰ εἶναι

$$\chi_1<\rho_1<\chi_2<\rho_2.$$

(Π]νεῖον)

1468) Ἐὰν Κ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων φθινούσης γεωμετρικῆς προόδου, α ὁ πρῶτος ὅρος αὐτῆς καὶ λ ὁ λόγος, εὑρεῖν τὴν πρόοδον γνωστοῦ ὄντος ὅτι $Κ-α=\frac{3}{4}$ καὶ $Κ+λ=\frac{31}{12}$.

(Πχνεῖον)

1469) Ἵνα τὸ σύστημα $χ^2α+ψ^2β+φ^2γ=0$, $χα^2+ψβ^2+φγ^2=0$ ἀληθεύῃ διὰ πραγματικοὺς καὶ διαφέροντας τοῦ 0 ἀριθμούς, πρέπει νὰ εἶναι $αβγ(α^3+β^3+γ^3)\leqslant 0$ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν τοῦτο συμβαίνῃ ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενὸς πληροῦντες τὸ σύστημα.

(Π]νεῖον)

1470) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἵνα τὸ γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μηδὲν πρέπει νὰ εἶναι μηδὲν ὁ εἷς ἐξ αὐτῶν.

(Π]νεῖον)

1471) Εἶναι δυνατὸν νὰ ἀληθεύῃ τὸ σύστημα $χ|ψ|+ψ|φ|+φ=0$, $ψ|χ|+φ|ψ||χ|+χ|φ|=0$ διὰ χ, ψ, φ διάφορα τοῦ μηδενός ;

(Π]νεῖον)

1472) Ἐὰν τὰ μήκη l, m, n καὶ λ, μ, ν τῶν πλευρῶν δύο τριγώνων συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων $l=\frac{μ^2-ν^2}{λ}$, $m=\frac{ν^2-λ^2}{μ}$ καὶ $n=\frac{λ^2-μ^2}{ν}$ τὰ τρίγωνα δύνανται νὰ ἐγγραφοῦν εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον.

(Π]νεῖον)

Β) Ζητήματα δοθέντα εἰς ξένας σχολάς.

1473) Δίδεται τὸ σύστημα $αχ-6ψ=5α-3$, $2χ+(α-7)ψ=-7α+29$ εἰς ὃ ἄγνωστοι εἶναι οἱ χ καὶ ψ καὶ ζητοῦνται αἱ τιμαὶ τοῦ α δι' ἅς:

1) Αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι ἀσυμβίβαστοι πρὸς ἀλλήλας

2) Αἱ ἐξισώσεις αὗται συνιστοῦν σύστημα ἀπροσδιόριστον.

3) Ἡ λύσις αὐτοῦ δίδει διὰ χ καὶ ψ τιμὰς ἴσας.

1474) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐὰν τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ λαμβάνῃ διὰ $χ=1, 2, 3$ τὰς τιμὰς 0, 1 καὶ 4 ἀντιστοίχως, διὰ $χ=κ$ θὰ λάβῃ τὴν τιμὴν $(κ-1)^2$.

1475) Δίδονται αἱ δύο ἐξισώσεις:

$$χ^2+2χ+u=0$$

$$(1+u)(χ^2+2χ+u)-2(u-2)(χ^2+1)=0$$

καὶ ζητεῖται νὰ δειχθῇ ὅτι, ὅταν αἱ ῥίζαι τῆς δευτέρας εἶναι φανταστικαί, αἱ ῥίζαι τῆς πρώτης εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἀντιστρόφως.

1476) Εὑρεῖν τὴν συνθήκην ἵνα $(α+βχ)^2+(α'+β'χ)^2$ εἶναι τὸ τέλειον τετράγωνον παραστάσεως πρώτου βαθμοῦ πρὸς χ καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι ἐάν:

$$(α+βχ)^2+(α'+β'χ)^2 \text{ καὶ } (α+γχ)^2+(α'+γ'χ)^2$$

εἶναι ὡσαύτως τέλεια τετράγωνα καὶ ἡ παράστασις $(β+γχ)^2+(β'+γ'χ)^2$ θὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1477) Ἐν τῷ τριωνύμῳ $αχ^2+βχ+γ$, ὁ α εἶναι γνωστός, ζητεῖται δὲ νὰ ὁρισθοῦν οἱ β καὶ γ εἰς τρόπον ὥστε τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου τούτου νὰ εἶναι ἴσον μὲ Α καὶ διὰ $χ=k$ ἡ τιμὴ αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴση μὲ Β.

1478) Τριψήφιος ἀριθμὸς σύγκειται ἐκ τῶν ψηφίων χ, ψ, z διαφόρων πρὸς ἄλληλα καὶ ὁριζομένων ὑπὸ τῶν σχέσεων

$\chi - \psi^2 - \psi z - z = 0$, $\chi - \psi - \psi^2 - z^2 = 0$, $\chi + \psi - \psi^3 - z = 0$.

Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

1479) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ δι' οὓς ἡ παράσσις $\chi^2(\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta+\gamma)-2\chi(\alpha^3+\beta^3-\alpha-\beta)+\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta-\gamma$.

1) νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον 2) διὰ $\chi=-1$ νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν 2 καὶ 3) διὰ $\chi=1$ νὰ λάβῃ τὴν τιμὴν μ, καὶ ἥτις μ εἶναι ρητὴ δοθεῖσα ποσότης.

1480) Ἐὰν $\chi+\psi+z=\alpha$ καὶ $\frac{1}{\chi}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z}=\alpha$, ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν χ, ψ, z ἰσοῦται μὲ α.

1481) Δίδεται $\alpha\chi+\beta\psi=1$, $-(\beta+1)\chi+(\alpha+1)\psi=1$ καὶ ζητεῖται 1) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα τοῦτο 2) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ α καὶ β ἐὰν ἡ μία ρίζα εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης ἢ ὁ κοινὸς παρονομαστὴς νὰ εἶναι ἐλάχιστος καὶ 3) ἐν τῇ διπλῇ ταύτῃ ὑποθέσει νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν χ καὶ ψ.

1482) α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη καθ' ἣν τὸ πολυώνυμον

$$\chi^4 + 4\beta\chi^3 + 6\gamma\chi^2 + 4\delta\chi + \varepsilon$$

δύναται νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο τριωνύμων δευτέρου βαθμοῦ πρὸς χ καὶ ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι τέλειον τετράγωνον.

β) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἀνωτέρω συνθήκη πληροῦται διὰ $\beta=3$, $\gamma=9$, $\delta=27$, $\varepsilon=27$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$\chi^4 + 12\chi^3 + 54\chi^2 + 108\chi + 27 = 0$$

1483) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ 41 εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι Α καὶ Β τοιοῦτοι ὥστε νὰ εἶναι $A^2+B^2=41^6$.

1484) Νὰ ὁρισθοῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, α', β' τῶν δύο διωνύμων $\alpha\chi+\beta$, $\alpha'\chi+\beta'$ εἰς τρόπον ὥστε 1) τὸ ἄθροισμα $(\alpha\chi+\beta)^2+(\alpha'\chi+\beta')^2$ νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον μὲ χ^2+1 καὶ 2) τὸ γινόμενον $(\alpha\chi+\beta)(\alpha'\chi+\beta')$ διὰ $\chi=2$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2.

1485) Μεταξὺ τῶν συστημάτων λύσεως τῆς ἐξισώσεως $\alpha\chi+\beta\psi=\gamma$ νὰ ζητηθῇ, ἐὰν ὑπάρχῃ ἕν, ὅπερ νὰ καθιστᾷ μέγιστον ἢ ἐλάχιστον τὸ ἄθροισμα $\alpha'\chi^2+\beta'\psi^2$.

1486) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις ἡ συνδέουσα τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\chi^2-2\chi\sqrt{2p-2q}+p^2-2q=0$ πρὸς τὰς ρίζας τῆς $\chi^2+p\chi+q=0$. Ἐὰν δὲ κατασκευάσωμεν ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις τὰς ρίζας τῆς δευτέρας ἐξισώσεως, ποίας γραμμὰς παριστοῦν αἱ ρίζαι τῆς πρώτης;

1487) Νὰ ὁρισθοῦν οἱ p καὶ q εἰς τρόπον ὥστε τὸ μέγιστον τῆς $\frac{\chi^2+p\chi+q}{\chi}$ νὰ εἶναι α καὶ τὸ ἐλάχιστον αὐτῆς β.

1488) Δίδεται ἡ συνάρτησις $\psi=\frac{\chi^2+2\beta\chi+1}{\chi^2+2\beta'\chi+1}$ καὶ ζητεῖται 1) Νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν συντελεστῶν β καὶ β' δι' ἣν τὸ ἐλάχιστον ψ_1 καὶ τὸ μέγιστον ψ_2 τῆς συναρτήσεως ψ ἔχουν τιμὰς ἀντιθέτους καὶ 2) νὰ εὑρεθοῦν τά ψ_1 καὶ ψ_2 καὶ νὰ ἐξετασθοῦν αἱ μεταβολαὶ τῆς συναρτήσεως ψ διὰ $\beta=5$.

1489) Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις δευτέρου βαθμοῦ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι χ', χ'' πληροῦν τὰς δύο σχέσεις $4\chi'\chi''-5(\chi'+\chi'')+4=0$ καὶ $(\chi'-1)(\chi''-1)=\frac{1}{1-\alpha}$ καὶ κατόπιν νὰ ἐξετασθῇ ἡ θέσις τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς -1 καὶ $+1$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ α.

1490) 1. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐὰν χ, ψ, z εἶναι τρεῖς ἀριθμοὶ ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ, ἔχομεν

$$(\chi+\psi+z)(\chi-\psi+z)=\chi^2+\psi^2+z^2$$

2. Νὰ εὑρεθοῦν τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των καὶ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων των. Διερεύνησις

1491) Ἐπὶ εὐθείας $\chi'\chi$, σημειοῦνται ν σημεῖα Α, Β, Γ, . . . Ν ἔχοντα μεταξύ των τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν καὶ ἴσην πρὸς α. Τὰ δὲ τμήματα τὰ ὁριζόμενα ὑπὸ τῶν σημείων τούτων ἀριθμοῦμεν κατὰ σειρὰν διὰ τῶν 1, 2, 3, . . . ν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ πρώτου σημείου Α, ἑνὸς σημείου Υ τῆς εὐθείας τοιούτου ὥστε τὸ ἄθροισμα.

$$1.(\mathrm{A\Upsilon})^2+2.(\mathrm{B\Upsilon})^2+3.(\Gamma\Upsilon)^2 \ldots +(\mathrm{N\Upsilon})^2$$

νὰ εἶναι ἐλάχιστον·

1492) Δίδεται ἡ γεωμετρικὴ πρόοδος

$$\alpha, \quad \alpha\lambda, \quad \alpha\lambda^2 \ldots\ldots$$

καὶ ἡ ἀριθμητικὴ

$$\beta, \quad \beta+\omega \quad \beta+2\omega, \ldots$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ἵνα

1. Τὸ γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ὅρων τῆς πρώτης εἶναι ὅρος τῆς ἰδίας προόδου.

2. Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ὅρων τῆς δευτέρας προόδου εἶναι ὅρος τῆς δευτέρας αὐτῆς προόδου.

3. Τὸ ἄθροισμα δύο οἱωνδήποτε ὅρων τῆς δευτέρας προόδου ἀντιστοιχῇ εἰς τὸ γινόμενον τῶν ὅρων τῆς αὐτῆς τάξεως τῆς πρώτης.

1493) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἵνα

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon)^2$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ, οἱ α, β, γ, δ, ε νὰ εἶναι ἐν γεωμετρικῇ προόδῳ.

1494) Ἐὰν $\chi=\lambda o\gamma_\alpha \beta\gamma$, $\psi=\lambda o\gamma_\beta \gamma\alpha$, $z=\lambda o\gamma_\gamma \alpha\beta$ νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi\psi\zeta=$ $=\chi+\psi+z+2$.

1495) Ἐὰν $\chi+2\left(\chi-\frac{1}{\nu}\right)+3\left(\chi-\frac{2}{\nu}\right)+4\left(\chi-\frac{3}{\nu}\right) \ldots$ ἕως $(\nu+1)$ ὅρους $=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι $\chi=\frac{2}{3}$.

1496) Ἐὰν $\varphi(\chi)$ εἶναι ἀκεραία συνάρτησις τοῦ χ καὶ διαιρεθῇ διὰ $(\chi-\alpha)(\chi-\beta)$ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι

$$\chi\frac{\varphi(\alpha)-\varphi(\beta)}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha\varphi(\beta)-\beta\varphi(\alpha)}{\alpha-\beta}$$

ΤΕΛΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Α'— Η ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΙ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

Σελίς

ΒΙΒΛΙΟΝ Β'.— ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Γ'.—ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

ΒΙΒΛΙΟΝ Δ'.— ΟΡΙΑ, ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΙΣ ΑΥΤΩΝ

ΒΙΒΛΙΟΝ Ε'.—ΠΡΟΟΔΟΙ—ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΙ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΣΤ' — ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ — ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ — ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ — ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ — ΑΡΧΙΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ