ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ
ΚΙΝΗΣΕΩΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ
ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

ΑΘΗΝΑΙ 1956

ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΙΝΗΣΕΩΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ
ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ

- ΑΘΗΝΑΙ 1956 -

β.

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει
τήν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ἡ ἔκδοσις καί κυκλοφορία τοῦ παρόντος βιβλίου ὑπό τόν τίτλον "Ἀλγεβρικά προβλήματα κινήσεως" ἀποτελεῖ συνέχειαν τῆς ἐργασίας μου, ἡ ὁποία καταφαίνεται ἐκ τῶν ὑπ' ἐμοῦ ἐκδοθέντων μέχρι τοῦδε φροντιστηριακῶν βιβλίων διά τούς μαθητάς τῆς Μέσης ἐκπαιδεύσεως καί τούς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

Τήν ὕλην ἐνταῦθα ἐχώρισα εἰς τρία μέρη.

Α΄. Εἰς τήν Εἰσαγωγήν περιλαμβάνουσαν τούς ἀπαραιτήτους ὁρισμούς τῶν "στοιχείων κινήσεως" καί ὑποδειγματικάς λύσεις προβλημάτων κινήσεως, δι' ἀμέσου χρήσεως τῶν στοιχείων τούτων.

Β΄. Εἰς μίαν σειράν Προβλημάτων Κινήσεως, λελυμένων κατά ἀναλυτικόν τρόπον, πολλά τῶν ὁποίων ἔχουν δοθῆ κατά καιρούς εἰς τάς εἰσαγωγικάς ἐξετάσεις Ἀνωτάτων Σχολῶν καί δή τῆς Ἀνωτάτης Ἐμπορικῆς καί

Γ΄. Εἰς μίαν σειράν Προβλημάτων Ὡρολογίων.

Ἐπιθυμῶν νά καταστήσω τό βιβλίον τοῦτο χρήσιμον καί διά τούς μελετητάς ὀπτικοῦ τύπου παρέθεσα εἰς τά δύσκολα προβλήματα, πρό τῶν λύσεων, παραστατικά σχήματα ἀπεικονίζοντα τάς θέσεις καί ἀποστάσεις τῶν εἰς τάς ἐκφωνήσεις ἀναφερομένων κινητῶν, καθώς καί τάς τῶν σταθερῶν σημείων τοιαύτας.

Ἀθῆναι 25 Αὐγούστου 1956

Γ. Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

§ 1.- Προϋποθέσεις διά τήν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς κινήσεως.

Ἀπαραίτητος καί βασική προϋπόθεσις διά τήν κατανόησιν καί λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς κινήσεως είς τήν Ἄλγεβραν, ὅπως καί είς τήν Πρακτικήν Ἀριθμητικήν εἶναι, ἡ γνῶσις τῶν ὁρισμῶν τῶν στοιχείων ἤ συντελεστῶν τῆς κινήσεως καί τῶν σχέσεων, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τά στοιχεῖα αὐτά.

§ 2. Ὁρισμός τῶν στοιχείων κινήσεως.

Α΄. Χρόνος κινήσεως ἑνός κινητοῦ (πεζοῦ, ποδηλάτου, ἀτμοπλοίου κλπ.) καλεῖται ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν χρονικῶν μονάδων (δευτερολέπτων, λεπτῶν, ὡρῶν κλπ.), κατά τάς ὁποίας κινεῖται τό κινητόν αὐτό.

Β΄. Διάστημα εἰς τήν κίνησιν ὀνομάζεται τό συνολικόν μῆκος, τό ὁποῖον διανύει ἕν κινητόν κατά τόν χρόνον τῆς κινήσεώς του.

Γ΄. Ταχύτης ἑνός κινητοῦ καλεῖται τό πηλίκον τοῦ ὑπό τοῦ κινητοῦ διανυθέντος διαστήματος διά τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου.

Σημείωσις:

Μία κίνησις καλεῖται ὁμαλή, ὅταν καθ' ὅλην τήν διάρκειάν της, ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ παραμένει ἡ αὐτή. Ἄν ἡ ταχύτης ἀλλάζῃ, ἡ κίνησις καλεῖται μή ὁμαλή.

§ 3. Συμβολική παράστασις τῶν στοιχείων τῆς κινήσεως.

Α΄. Εἰς τήν Ἑλληνικήν γραφήν παριστῶμεν:
τόν χρόνον με τό χρ. ἤ χ
τήν ταχύτητα " " τ.
καί τό διάστημα " " δ.

Β΄. Εἰς τήν διεθνῆ γραφήν παριστῶμεν:

τόν χρόνον μέ τό t ἐκ τοῦ Λατινικοῦ tempus (χρόνος)
τήν ταχύτητα " " v " " " velocitas (ταχύτης)
καί τό διάστημα " " s " " " spatium (διάστημα)

"Ἀλγεβρικά Προβλήματα κινήσεως". Γ.Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

§ 4.- Βασικά προβλήματα κινήσεως

Συνήθως εἰς τά προβλήματα κινήσεως ζητοῦμεν τό διάστημα, τόν χρόνον ἤ τήν ταχύτητα, ὅταν μᾶς δίδονται δύο ἐκ τῶν στοιχείων αὐτῶν.

Διά τήν Ἀλγεβρικήν λύσιν τῶν προβλημάτων τῆς κινήσεως σχηματίζομεν ἐξισώσεις ἤ συστήματα ἐξισώσεων.

Πρός τοῦτο ἐξισώνομεν συνήθως χρόνους ἤ διαστήματα καί σπανίως ταχύτητας.

§ 5. Σχέσεις συνδέουσαι τά στοιχεῖα τῆς κινήσεως

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ταχύτητος ἑνός κινητοῦ ἔχομεν τόν τύπον

$$\boxed{\tau = \frac{\delta}{\chi}} \quad \text{ἤ} \quad \boxed{v = \frac{s}{t}}$$

Ἐκ τοῦ τύπου αὐτοῦ προκύπτουν:

οἱ τύποι $\boxed{\delta = \tau.\chi}$ ἤ $\boxed{s = v.t}$ καί

" " $\boxed{\chi = \frac{\delta}{\tau}}$ ἤ $\boxed{t = \frac{s}{v}}$

§ 6. Ὑποδειγματικαί λύσεις ἁπλῶν προβλημάτων κινήσεως.

Α΄. Πρόβλημα: Εὕρεσις τοῦ διαστήματος.

"Ποῖον διάστημα διήνυσεν πεζός κινηθείς ἐπί 10 ὥρας μέ ταχύτητα 4 χιλιομέτρων τήν ὥραν;"

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομεν $\chi = 10$ ὧραι

$\tau = 4$ χλμ. ἀνά ὥραν ἤ $\dfrac{4\text{χιλμ.}}{1\ \text{ὥραν}}$

$\delta = ;$

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\delta = \tau.\chi$, ὁ ὁποῖος δίδει τό δ ἐκ τῶν χ καί τ.

Ἀντικαθιστῶμεν τά δεδομένα καί ἔχομεν

$\delta = 4.\ 10$ ἤ

$\delta = 40$ χιλιόμετρα

"Ὥστε. Ὁ πεζός διήνυσεν 40 χιλιόμετρα.

Β΄ Πρόβλημα: Εὕρεσις τῆς ταχύτητος.

"Ποδηλάτης διανύει μίαν ἀπόστασιν 120 χιλιομέτρων εἰς 8 ὥρας. Ποία ἡ ταχύτης ἀνά ὥραν τοῦ ποδηλάτου; "

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομεν δ = 120 χιλιομ.
χ = 8 ὧραι

τ = ;

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\tau = \frac{\delta}{\chi}$, ὁ ὁποῖος δίδει τήν τ ἐκ τῶν δ καί χ.

Ἀντικαθιστῶμεν τά δεδομένα καί ἔχομεν

$$\tau = \frac{120}{8} \text{ ἤ } \tau = 15 \text{ χιλιόμετρα}$$

"Ὥστε. Ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ ποδηλάτου εἶναι 15 χιλιόμετρα.

Γ΄ Πρόβλημα: Εὕρεσις τοῦ χρόνου.

"Ἀτμόπλοιον διανύει μίαν ἀπόστασιν 300 μιλλίων, μεταξύ δύο λιμένων μέ ταχύτητα 25 μιλλίων τήν ὥραν. Πόσον χρόνον διαρκεῖ τό ταξείδιον;"

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομεν δ = 300 μίλλια
τ = 25 μίλλια

χ = ;

Λαμβάνομεν τόν τύπον $\chi = \frac{\delta}{\tau}$, ὁ ὁποῖος δίδει τόν χ ἐκ τῶν δ καί τ. Ἀντικαθιστῶμεν τά δεδομένα καί ἔχομεν

$$\chi = \frac{300}{25} \text{ ἤ } \chi = 12 \text{ ὥρας.}$$

"Ὥστε Τό ταξείδιον διαρκεῖ 12 ὥρας.

---

§ 7. Βασικαί παρατηρήσεις ἐπί τῆς λύσεως τῶν προβλημάτων τῆς κινήσεως.

Διά τήν λύσιν ἑνός προβλήματος καί μάλιστα κινήσεως εἶναι ἀπαραίτητον νά γνωρίζωμεν ἐπακριβῶς τί δίδεται καί τί ζητεῖται.

Πρός τοῦτο μελετῶμεν καλῶς τήν ἐκφώνησιν, ἵνα καθορίσωμεν τόν ἄγνωστον ἤ τούς ἀγνώστους τοῦ προβλήματος. Μετά ταῦτα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Α΄. Εὑρίσκομεν τά ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος.

Β΄. Συνδυάζομεν κατόπιν ταῦτα σχηματίζοντες μίαν ἐξίσωσιν ἤ ἕν σύστημα ἐξισώσεων.

Γ΄. Λύομεν τήν ἐξίσωσιν ἤ τό σύστημα τοῦ προβλήματος καί

Δ΄. Ἐξετάζομεν, ἐάν ἡ εὑρεθεῖσα τιμή τοῦ ἀγνώστου (ἤ τῶν ἀγνώστων) ἐπαληθεύῃ τήν ἐξίσωσιν (ἤ τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων).

Ἀκόμη λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μας καί τούς περιορισμούς τοῦ προβλήματος.

Οἱ περιορισμοί αὐτοί εἶναι τά πλαίσια, ἐντός τῶν ὁποίων πρέπει νά εὑρίσκεται ἡ τιμή τοῦ ἀγνώστου ,ἤ αἱ τιμαί τῶν ἀγνώστων καί τά ὁποῖα πλαίσια πηγάζουν ἐκ τῆς φύσεως τοῦ προβλήματος.

Ἐάν παρίσταται ἀνάγκη, χρησιμοποιοῦμεν καί σχῆμα διά τήν ταχεῖαν καί καλυτέραν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Τέλος χρησιμοποιοῦμεν, εἰς ὡρισμένα προβλήματα, καί βοηθητικόν ἄγνωστον, τόν ὁποῖον φροντίζομεν νά ἀπαλείφωμεν, ἵνα μή καθίσταται ἡ λύσις τοῦ προβλήματος δύσκολος.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Ι. Ἐκ δύο τόπων ἀπεχόντων 240 χλμ. ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο κινητά, κινούμενα ὁμαλῶς καί ἀντιθέτως, ὥστε νά συναντηθοῦν. Τό πρῶτον διανύει 40 χλμ. τήν ὥραν καί τό δεύτερον 32. Νά εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τόν πρῶτον τόπον θά συναντηθοῦν.

Λύσις.

Ἔστω ὅτι θά συνάντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν χ χλμ. ἀπό τόν πρῶτον τόπον. Τό σημεῖον συναντήσεώς των θά ἀπέχῃ τότε ἀπό τόν δεύτερον τόπον 240 - χ χλμ. Τό πρῶτον κινητόν διανύει τά χ χλμ. εἰς $\frac{\chi}{40}$ ὥρας καί τό δεύτερον διανύει τά 240-χ χλμ. εἰς $\frac{240-\chi}{32}$ ὥρας. Ἐπειδή ὅμως οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\chi}{40} = \frac{240-\chi}{32}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 133\frac{1}{3}$. Ἄρα θά συναντηθοῦν εἰς ἀπόστασιν $133\frac{1}{3}$ χλμ. ἀπό τόν πρῶτον τόπον.

2. Ἐκ τινος τόπου ἀνεχώρησεν κινητόν διανύον 24 χλμ. καθ'ὥραν. Μετά 3 ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ τόπου ἄλλο μέ τήν ἐντολήν νά φθάσῃ τό πρῶτον εἰς 6 ὥρας. Πόσα χλμ. πρέπει νά διανύῃ τοῦτο καθ'ὥραν;

Λύσις.

Ἔστω ὅτι πρέπει τοῦτο νά διανύῃ χ χλμ. καθ'ὥραν. Κατά τήν στιγμήν τῆς συναντήσεώς των τό πρῶτον κινητόν, κινηθέν ἐπί 9 ὥρας μέ ταχύτητα 24 χλμ., θά ἔχῃ διανύσει 24.9 = 216 χλμ. καί τό δεύτερον κινητόν κινηθέν ἐπί 6 ὥρας μέ ταχύτητα χ χλμ. θά ἔχῃ διανύσει 6χ χλμ. Ἐπειδή δέ τά διαστήματα αὐτά εἶναι ἴσα μεταξύ των, ἕπεται ὅτι :

$$6\chi = 216$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: χ=36. Ἄρα τό δεύτερον κινητόν πρέπει νά διανύῃ 36 χλμ. καθ'ὥραν.

3. Ἀτμόπλοιον Α, διανύον 13 μίλια τήν ὥραν, καταδιώκει ἕτερον Β, ἀναχωρήσαν 8 ὥρας πρό αὐτοῦ καί διανύον 9 μίλια τήν ὥραν. Ζητεῖται μετά πόσας ὥρας τό Α θέλει φθάσει τό Β.

Λύσις.

Ἔστω ὅτι μετά χ ὥρας τό ἀτμόπλοιον Α θά φθάσῃ τό Β. Τότε τό μέν Α κινηθέν ἐπί χ ὥρας, μέ ταχύτητα 13 μιλίων τήν ὥραν, διήνυσε 13χ μίλια, τό δέ Β κινηθέν ἐπί $\chi+8$ ὥρας, μέ ταχύτητα 9 μιλίων τήν ὥραν, διήνυσε $9(\chi+8)$ μίλια. Ἐπειδή δέ τά διαστήματα αὐτά εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι :

$$13\chi = 9\ (\chi+8)$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 18$, Ἄρα τό ἀτμόπλοιον Α θέλει φθάσει τό Β μετά 18 ὥρας.

4. Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης καί τό μῆκος μιᾶς ἁμαξοστοιχίας, ἡ ὁποία χρειάζεται 5 δευτερόλεπτα, διά νά διέλθῃ ἔμπροσθεν παρατηρητοῦ καί 20 δευτερόλεπτα διά νά διέλθῃ γέφυραν μήκους 187,5 μέτρων.

Λύσις.

Ἔστω χ μέτρα ἀνά δευτερόλεπτον ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας καί ψ μέτρα τό μῆκος αὐτῆς.

Ἐπειδή, ὅταν ἡ ἁμαξοστοιχία διέρχεται ἔμπροσθεν τοῦ παρατηρητοῦ, διανύει τό μῆκος της εἰς 5 δευτερόλεπτα, ἔπεται ὅτι:

$$\psi = 5\chi \qquad (1)$$

Ἐπίσης ἐπειδή, ὅταν ἡ ἁμαξοστοιχία διέρχεται τήν γέφυραν, διανύει τό μῆκος τῆς γεφύρας ηὐξημένον κατά τό μῆκος της, δηλαδή $187,5+\psi$ μέτρα εἰς 20 δευτερόλεπτα, ἔπεται ὅτι:

$$187,5+\psi = 20\chi \qquad (2)$$

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) εὑρίσκομεν: $\chi = 12,5$ καί $\psi = 62,5$. Ἄρα ἡ μέν ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας εἶναι 12,5 μ. κατά δευτερόλεπτον ἤ 45 χλμ. καθ'ὥραν, τό δέ μῆκος της εἶναι 62,5 τοῦ μέτρου.

5. Ἁμάξης τῶν μέν ἐμπροσθίων τροχῶν ἡ περιφέρεια εἶναι 2,20 τοῦ μέτρου, τῶν δέ ὀπισθίων 2,50. Νά εὑρεθῇ τό ὑπό τῆς ἁμάξης διανυθέν διάστημα, ὅταν οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοί αὐτῆς εἶχον κάμει 90 περιστροφάς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων.

Λύσις.

Ἔστω χ μέτρα τό ὑπό τῆς ἁμάξης διανυθέν διάστημα. Κατ'αὐτό, οἱ μέν ἐμπρόσθιοι τροχοί αὐτῆς ἔκαμον $\frac{\chi}{2,20}$ περιστροφάς, οἱ δέ ὀπίσθιοι $\frac{\chi}{2,50}$ περιστροφάς.

Ἐπειδή δέ οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοί εἶχον κάμει 90 περιστροφάς περισσοτέρας τῶν ὀπισθίων, ἔπεται ὅτι:

$$\frac{\chi}{2,20} - \frac{\chi}{2,50} = 90$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 1650$. Ἐπομένως τό ὑπό τῆς ἁμάξης διανυθέν διάστημα εἶναι 1650 μέτρα.

6. Λεμβοῦχος διήνυσεν 12 χλμ. εἰς 1 ὥραν καί 30 πρῶτα λεπτά ἀκολουθῶν τό ρεῦμα ἑνός ποταμοῦ καί ἔχων γραμμήν πορείας τό μέσον αὐτοῦ. Ἐπιστρέφων ἠκολούθησε τήν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ, ἔνθα ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἶναι ἴση πρός τά $\frac{2}{3}$ τῆς ταχύτητος αὐτοῦ εἰς τό μέσον καί διήνυσεν τήν αὐτήν ἀπόστασιν εἰς 4 ὥρας. Νά εὑρεθῆ ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἰς τό μέσον τοῦ ποταμοῦ.

Λύσις.

Ἔστω χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἰς τό μέσον τοῦ ποταμοῦ καί ψ χλμ. καθ'ὥραν ἡ δι'ἰδίων μέσων (κῶπαι ἤ μηχανή) ταχύτης τῆς λέμβου.

Κατά τήν κάθοδον ἡ λέμβος κατήρχετο μέ ταχύτητα (ψ+χ) χλμ. καθ'ὥραν (διότι εἰς τήν ταχύτητα τῆς λέμβου προστίθεται καί ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος) καί εἰς 1ω καί 30λ ἤ $1\frac{1}{2}$ ὥρας διήνυσε $1\frac{1}{2}$ (ψ+χ) χλμ. Ἐπειδή δέ, ὡς γνωστόν, διήνυσε 12 χλμ. ἕπεται ὅτι:

$$1\frac{1}{2}\,(\psi+\chi) = 12 \qquad (1)$$

Κατά τήν ἄνοδον ἡ λέμβος ἀκολουθοῦσα τήν ὄχθην ἀνήρχετο μέ ταχύτητα $(\psi - \frac{2\chi}{3})$ χλμ. καθ'ὥραν (διότι ἀπό τήν ταχύτητα τῆς λέμβου ἀφαιρεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος, ἡ ὁποία παρά τήν ὄχθην τοῦ ποταμοῦ εἶναι ἴση μέ $\frac{2\chi}{3}$ χλμ.) καί εἰς 4 ὥρας διήνυσεν $4(\psi - \frac{2\chi}{3})$ χλμ. Ἀλλά τό διάστημα τοῦτο εἶναι 12 χλμ. Ἐπομένως:

$$4\left(\psi - \frac{2\chi}{3}\right) = 12 \qquad (2)$$

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καί (2) εὑρίσκομεν:

$$\chi = 3$$

Ἄρα ἡ ταχύτης τοῦ ρεύματος εἰς τό μέσον τοῦ ποταμοῦ εἶναι 3 χλμ. καθ'ὥραν.

Σημ. Ἡ τιμή τοῦ ψ δέν μᾶς ζητεῖται καί ἐπομένως δέν τήν εὑρίσκομεν κατά τήν λύσιν τοῦ προβλήματος.

7. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας ἐχούσης μῆκος 360 μέτρων, ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως δύο κινητά Α καί Β, διευθυνόμενα πρός τό αὐτό μέρος αὐτῆς. Ἄν ἡ ταχύτης τοῦ Α εἶναι δεκαπλασία τῆς τοῦ

Β, νά ευρεθῆ πόσα μέτρα θά διανύσῃ τό Α μέχρις ὅτου φθάσῃ τό Β.

Λύσις.

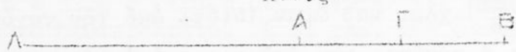
῎Εστω ὅτι τό κινητόν Α θά διανύσῃ χ μέτρα, μέχρις ὅτου φθάσῃ τό Β. Τότε τό κινητόν Β, ἔχον ταχύτητα ΙΟάκις μικροτέραν τοῦ Α, θέλει διανύσει κατά τόν αὐτόν χρόνον $\frac{\chi}{10}$ μέτρα. ᾽Αλλ᾽ἵνα τό κινητόν Α φθάσῃ τό κινητόν Β, πρέπει νά διανύσῃ μίαν ὁλόκληρον περιφέρειαν, δηλαδή 360 μ. καί ὅσα μέτρα ἔχει διανύσει τό Β, δηλαδή $\frac{\chi}{10}$ μ. ῾Επομένως:

$$\chi = 360 + \frac{\chi}{10}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 400$. ῎Αρα τό κινητόν Α θά διανύσῃ 400 μ., μέχρις ὅτου φθάσῃ τό Β.

8. Δύο βενζινόπλοια Α καί Β ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ λιμένος, μέ τήν αὐτήν γραμμήν πορείας καί μέ ταχύτητας 3 μιλ. καί 7 μιλ. καθ᾽ὥραν ἀντιστοίχως. Μετά I ὥραν καί ἐκ τοῦ αὐτοῦ λιμένος ἀναχωρεῖ τρίτον βενζινόπλοιον Γ ἀκολουθοῦν τήν αὐτήν γραμμήν πορείας τῶν δύο πρώτων καί μέ ταχύτητα 6 μιλ. καθ᾽ὥραν. Ζητεῖται μετά πόσας ὥρας τό τρίτον βενζινόπλοιον θά εὑρεθῆ εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων.

Λύσις.



῎Εστω ὅτι μετά χ ὥρας ἀπό τῆς ἀναχωρήσεώς του τό βενζινόπλοιον Γ θά εὑρεθῆ εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων.

Τό βενζινόπλοιον Γ μέ ταχύτητα 6 μιλ. τήν ὥραν διήνυσε τό διάστημα $ΛΓ = 6\chi$ μιλ. (Τό σημεῖον Λ δεικνύει τόν λιμένα).

Τά βενζινόπλοια Α καί Β ἀναχωρήσαντα I ὥραν ἐνωρίτερον τοῦ Γ, ἐκινήθησαν ἐπί χ+I ὥρας μέ ταχύτητας 3 μιλ. καί 7 μιλ. τήν ὥραν καί διήνυσαν τά διαστήματα $ΛΑ = 3(\chi+1)$ μιλ. καί $ΛΒ = 7(\chi+1)$ μιλ. ἀντιστοίχως.

῎Ηδη παρατηροῦμεν ὅτι:

$$ΑΓ = ΛΓ - ΛΑ = 6\chi - 3(\chi+1) \quad \text{καί}$$

$$ΓΒ = ΛΒ - ΛΓ = 7(\chi+1) - 6\chi$$

᾽Αλλά εἶναι ΑΓ = ΓΒ. ῾Επομένως

$$6\chi - 3(\chi+1) = 7(\chi+1) - 6\chi$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 5$.

῎Αρα μετά 5 ὥρας ἀπό τῆς ἀναχωρήσεώς του τό βενζινόπλοιον

Γ θά εὑρεθῆ εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων.

Σημείωσις: Κάμνοντες τήν ἐπαλήθευσιν παρατηροῦμεν ὅτι μετά 5 ὥρας τό βενζινόπλοιον Γ θά εὑρίσκεται εἰς τό 30ον μιλ. τό Α εἰς τό 18ον καί τό Β εἰς τό 42ον μιλ.

9. "Ἁμαξοστοιχία πρόκειται νά διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 730 χιλιομέτρων. Κινηθεῖσα ἐπί 10 ὥρας μέ ὡρισμένην ταχύτητα ὑπέστη βλάβην τινά, ὁπότε ἐμείωσε τήν ταχύτητα της κατά τό 1/4 αὐτῆς. Οὕτω διήνυσε τήν ὅλην ἀπόστασιν εἰς 21 ὥρας.

Νά εὑρεθῆ ἡ ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας, πρίν αὕτη ὑποστῆ τήν βλάβην.

Λύσις

Ἐδῶ ἔχομεν δ	=730 χλμ.
χρόνος ἀπό σημείου ἀφετηρίας μέχρι σημείου βλάβης	= 10 ὧραι
" " " βλάβης " τέρματος	= 21-10=11 ὥρ.
τ	= ;

Μετά προσεκτικήν μελέτην τῆς ἐκφωνήσεως παρατηροῦμεν ὅτι ὁ ἄγνωστος τοῦ προβλήματος εἶναι ἡ ἀρχική ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας. Ἔστω λοιπόν χ χιλιομ. η ταχύτης ἀνά ὥραν τῆς ἁμαξοστοιχίας. Τότε αὐτή εἰς 10 ὥρας διήνυσεν 10χ χιλιόμετρα.

Τήν ὑπόλοιπον διαδρομήν τήν διήνυσεν εἰς 11 ὥρας μέ ταχύτητα $\chi - \frac{\chi}{4} = \frac{4\chi}{4} - \frac{\chi}{4} = \frac{3\chi}{4}$ χιλιομ. ἀνά ὥραν. Οὕτω διήνυσεν $11 \cdot \frac{3\chi}{4}$ χιλ.

Προσθέτοντες τά δύο διαστήματα ἔχομεν τό ὅλον διάστημα τῶν 730 χιλιομέτρων.

Οὕτω ἔχομεν τήν ἐξίσωσιν τοῦ προβλήματος.

$$10\chi + 11 \cdot \frac{3\chi}{4} = 730$$

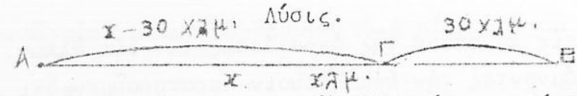
Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = 40$

Ὥστε: Ἡ ἀρχική ταχύτης τῆς ἁμαξοστοιχίας (πρίν δηλαδή ὑποστῆ αὕτη τήν βλάβην) ἦτο 40 χιλιομ. ἀνά ὥραν.

10. Πεζός ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α καί διευθύνεται εἰς τήν πόλιν Β διανύων 6 χιλ. τήν ὥραν. Μετά 4 ὥρας ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α αὐτοκίνητον, τό ὁποῖον, διανύον 30 χιλ. τήν ὥραν φθάνει εἰς τήν πόλιν Β καί μετά παραμονήν ἡμισείας ὥρας ἐπιστρέφει πρός τήν πόλιν Α μέ τήν αὐτήν ταχύτητα, ὅτε συναντᾶ τόν μή σταματήσαντα ἀλλά συνεχῶς βαδίζοντα πεζόν εἰς ἀπόστασιν 30 χιλ. ἀπό τῆς πόλεως Β. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων.

"Ἀλγεβρικά Προβλήματα κινήσεως". Γ.Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ.

Λύσις.



Ἔστω χ χλμ. ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων καί Γ τό σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΑΒ, εἰς τό ὁποῖον ἐπιστρέφον τό αὐτοκίνητον συναντᾶ τόν πεζόν. Ἐπειδή ΓΒ = 30 χλμ., θά εἶναι ΑΓ = χ-30 χλμ.

Ὁ πεζός διανύει τήν ἀπόστασιν ΑΓ = χ-30 χλμ. εἰς $\frac{\chi-30}{6}$ τῆς ὥρας καί τό αὐτοκίνητον ἐκτελεῖ τήν διαδρομήν ΑΒΓ = χ+30 χλμ. εἰς $\frac{\chi+30}{30} + \frac{1}{2}$ συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ χρόνου τῆς παραμονῆς του εἰς τήν πόλιν Β.

Ἀλλά χρόνος πεζοῦ - χρόνος αὐτοκινήτου = 4 ὧρες.

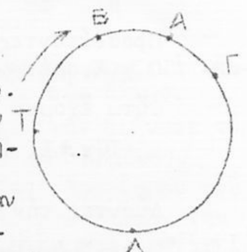
Ἐπομένως ἔχομεν $\frac{\chi-30}{6} - \left(\frac{\chi+30}{30} + \frac{1}{2}\right) = 4$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 78\frac{3}{4}$

Ἄρα ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων εἶναι $78\frac{3}{4}$ χλμ.

II. Ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας ἐχούσης μῆκος 280 μέτρων ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως τρία κινητά Α, Β, Γ διευθυνόμενα κατά τήν αὐτήν φοράν. Ἄν ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ Α εἶναι 30πλασία τῆς τοῦ Β, ἡ δέ ταχύτης τοῦ Β τό $\frac{1}{3}$ τῆς τοῦ Γ, πόσα μέτρα πρέπει νά διατρέξῃ τό κινητόν Α, ἵνα εὑρεθῇ εἰς τό μέσον τῶν δύο ἄλλων, ἔχον πρός τό μέρος τῆς διευθύνσεώς του τό κινητόν Γ;

Λύσις.



Ἔστω ὅτι τό κινητόν Α πρέπει νά διατρέξῃ χ μέτρα, ἵνα εὑρεθῇ εἰς τό μέσον τῶν δύο ἄλλων. (Πρός τοῦτο πρέπει νά διανύσῃ μίαν περιφέρειαν περισσότερον τοῦ ἔχοντος τήν μικροτέραν ταχύτητα δηλ. τοῦ Β). Τότε κατά τόν αὐτόν χρόνον τό μέν κινητόν Β ἔχον ταχύτητα 30 φοράς μικροτέραν τῆς τοῦ Α θέλει διατρέξει $\frac{\chi}{30}$ μέτρα, τό δέ κινητόν Γ ἔχον ταχύτητα 3 φοράς μεγαλυτέραν τῆς τοῦ Β θέλει διατρέξει $\frac{3\chi}{30}$ μέτρα.

Ἔστω ἀκόμη Τ τό σημεῖον ἐκκινήσεως καί Α, Β, Γ αἱ θέσεις τῶν τριῶν κινητῶν ἐπί τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας καθ' ἥν στιγμήν τό Α εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῶν Β καί Γ.

Προφανῶς εἶναι

τόξ. ΤΑΔΤΑ = χ μέτρα, ὁπότε τόξ. ΤΑ = χ-280 μ.

τόξ. ΤΒ = $\frac{\chi}{30}$ μ. καί τόξ. ΤΓ = $\frac{3\chi}{30}$ μ.

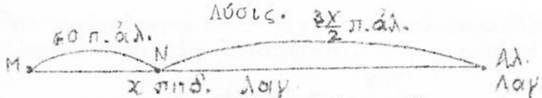
'Αλλ'εἶναι τόξ. ΤΑ = τόξ. ΤΒ+τόξ. ΒΑ
καί " ΤΑ = " ΤΓ- " ΒΑ (ἀφοῦ τόξ.ΒΑ=τοξ.ΑΓ)
Προσθέτοντες κατά μέλη εὑρίσκομεν;
2.τοξ. ΤΑ = τόξ. ΤΒ+τόξ. ΤΓ
'Αντικαθιστῶντες τά τόξα διά τῶν ἴσων των λαμβάνομεν:

$$2(\chi-280) = \frac{\chi}{30} + \frac{3\chi}{30}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 300$.
"Αρα τό κινητόν Α πρέπει νά διατρέξῃ 300 μέτρα, ἵνα εὑρεθῇ εἰς τό μέσον τῶν δύο ἄλλων.

I2. 'Αλώπηξ εἶχε κάμει 60 πηδήματα, ὅταν λαγωνικόν ἤρχισε νά διώκῃ αὐτήν. Ἡ ἀλώπηξ κάμνει 9 πηδήματα καθ'ὅν χρόνον τό λαγωνικόν κάμνει 6, ἀλλά 3 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ 7 τῆς ἀλώπεκος. Ζητεῖται πόσα πηδήματα θά κάμῃ τό λαγωνικόν,ἵνα φθάσῃ τήν ἀλώπεκα.

Λύσις.



"Εστω ὅτι τό λαγωνικόν θά κάμῃ χ πηδήματα,ἵνα φθάσῃ τήν ἀλώπεκα.
Διά νά λύσωμεν τό πρόβλημα,θά προσπαθήσωμεν νά τρέψωμεν τά πηδήματα ἀμφοτέρων τῶν ζώων εἰς πηδήματα τοῦ ἑνός μόνον, ἐκμεταλλευόμενοι τάς σχέσεις τάς ὁποίας μᾶς δίδει ἡ ἐκφώνησις.
'Επειδή ἡ ἀλώπηξ κάμνει 9 πηδήματα καθ'ὅν χρόνον τό λαγωνικόν κάμνει 6,ἔπεται ὅτι αὐτη θά κάμῃ $\frac{3\chi}{2}$ πηδήματα καθ'ὅν χρόνον τό λαγωνικόν θά κάμῃ τά χ πηδήματά του. Τοῦτο προκύπτει ἀπό τήν κατάταξιν:

9 πηδ. ἀλώπ.ἀντιστοιχοῦν εἰς 6 πηδ. λαγων.
; " " " " χ " "

'Οπότε $; = 9 \cdot \frac{\chi}{6} = \frac{9\chi}{6} = \frac{3\chi}{2}$. Οὕτω ὁ ἀριθμός τῶν πηδημάτων τῆς ἀλώπεκος εἶναι συνολικῶς $60 + \frac{3\chi}{2}$, μέχρις ὅτου τήν φθάσῃ τό λαγωνικόν.
'Αφ'ἑτέρου,ἐπειδή 3 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ 7 τῆς ἀλώπεκος, ἔπεται ὅτι τά χ πηδήματα αὐτοῦ θά ἰσοδυναμοῦν μέ $\frac{7\chi}{3}$ πηδήματα αὐτῆς, ὡς φαίνεται καί ἀπό τήν κατάταξιν:

3 πηδ. λαγων. ἰσοδυναμοῦν εἰς 7 πηδ. ἀλωπ.
χ " " " " ; " "

'Οπότε $; = 7 \cdot \frac{\chi}{3} = \frac{7\chi}{3}$

Ἤδη, ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $\frac{7\chi}{3}$ καί $60+\frac{3\chi}{2}$ ἐκφράζουν ἀμφότεροι πηδήματα ἀλώπεκος καί παριστοῦν τό αὐτό διάστημα, ἕπεται ὅτι

$$\frac{7\chi}{3} = 60+\frac{3\chi}{2}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 72$. Ἄρα τό λαγωνικόν θά κάμη 72 πηδήματα, ἵνα φθάση τήν ἀλώπεκα.

Ι3. Ἱππεύς καταδιώκει πεζόν εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 3600 βημάτων ἀπ' αὐτοῦ. Ὁ πεζός κάμνει 8 βήματα καθ' ὅν χρόνον ὁ ἵππος κάμνει 3 πηδήματα, ἀλλά 5 πηδήματα τοῦ ἵππου ἰσοδυναμοῦν μέ Ι6 βήματα τοῦ πεζοῦ. Ζητεῖται πόσα πηδήματα πρέπει νά κάμη ὁ ἵππος, ἵνα ὁ ἱππεύς φθάση τόν πεζόν.

Λύσις

Ἐργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον πρόβλημα εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι:

$$\frac{16\chi}{5} = 3600+\frac{8\chi}{3}$$

Λύοντες αὐτήν εὑρίσκομεν: $\chi = 6750$. Ἄρα ὁ ἵππος πρέπει νά κάμη 6750 πηδήματα, ἵνα ὁ ἱππεύς φθάση τόν πεζόν.

Ι4. Ἱππεύς καταδιώκει πεζόν εὑρισκόμενον εἰς ἀπόστασιν 350 βημάτων ἀπ' αὐτοῦ. Ὁ μέν ἵππος κάμνει 3 πηδήματα εἰς τό δευτερόλεπτον, ὁ δέ πεζός κάμνει 5, ἀλλά 4 πηδήματα τοῦ ἵππου ἰσοδυναμοῦν μέ 9 τοῦ πεζοῦ. Ζητεῖται μετά πόσα δευτερόλεπτα ὁ ἱππεύς θά φθάση τόν πεζόν.

Λύσις.

Ἔστω ὅτι μετά χ δευτερόλεπτα ὁ ἱππεύς θά φθάση τόν πεζόν. Ἐπειδή ὁ ἵππος κάμνει 3 πηδήματα εἰς τό δευτερόλεπτον καί ὁ πεζός 5, μετά παρέλευσιν χ δευτερολέπτων ὁ μέν ἵππος θά ἔχη κάμει 3χ πηδήματα, ὁ δέ πεζός 5χ. Οὕτω ὁ συνολικός ἀριθμός τῶν βημάτων τοῦ πεζοῦ εἶναι $350+5\chi$.

Ἀφ' ἑτέρου, ἐπειδή 4 πηδήματα τοῦ ἵππου ἰσοδυναμοῦν μέ 9 τοῦ πεζοῦ, ἕπεται ὅτι τά 3χ πηδήματα αὐτοῦ θά ἰσοδυναμοῦν μέ $\frac{27\chi}{4}$ βήματα τοῦ πεζοῦ, ὡς φαίνεται καί ἀπό τήν κατάταξιν:

4 πηδ. ἵππου	9 βημ. πεζ.
3χ " "	; " "

ὁπότε $; = 9.\frac{3\chi}{4} = \frac{27\chi}{4}$

"Ηδη, ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $\frac{27\chi}{4}$ καί $350+5\chi$ παριστοῦν ἀμφότεροι βήματα πεζοῦ καί τό αὐτό διάστημα, ἕπεται ὅτι $\frac{27\chi}{4} = 350+5\chi$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 200$. "Αρα ὁ ἵππος θά κάμη 200 δευτερόλεπτα, ἵνα φθάσῃ τόν πεζόν.

Ι5. 'Ατμόπλοιον Α καταδιώκει ἕτερον Β ἀναχωρῆσαν 2 ὥρας πρό αὐτοῦ. Οἱ τροχοί τοῦ μέν ἀτμοπλοίου Α κάμνουν Ι5 περιστροφάς κατά πρῶτον λεπτόν τῆς ὥρας, τοῦ δέ Β κάμνουν 25. 'Αλλά τό ἀτμόπλοιον Α διά 7 περιστροφῶν τῶν τροχῶν του διανύει τήν αὐτήν ἀπόστασιν, τήν ὁποίαν διανύει καί τό Β διά Ι5. Ζητεῖται μετά πόσα λεπτά τῆς ὥρας τό ἀτμόπλοιον Α θά φθάση τό Β.

Λύσις.

'Εργαζόμενοι ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον πρόβλημα εὑρίσκομεν, ὅτι ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι:

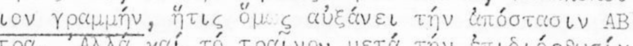
$$\frac{225\chi}{7} = 3000+25\chi$$

Λύοντες αὐτήν εὑρίσκομεν: $\chi = 420$ πρῶτα λεπτά τῆς ὥρας ἤ 7 ὧραι.

"Αρα τό ἀτμόπλοιον Α θά φθάση τό Β μετά 7 ὥρας.

Ι6. Τραῖνον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α διά τήν πόλιν Β μέ ταχύτητα 64 χιλιομέτρων καθ' ὥραν καί κινεῖται κανονικῶς ἐπί 3 ὥρας, μεθ' ὅ λόγῳ ἀτυχήματος σταματᾷ ἐπί 50 πρῶτα λεπτά καί ἐκκινεῖ ἐκ νέου. Μετά τήν στάθμευσιν, παρεμβληθέντος ἑτέρου τραίνου, ἀναγκάζεται, ἵνα φθάση εἰς τήν πόλιν Β, νά ἀκολουθήσῃ παρακαμπτήριον γραμμήν, ἥτις ὅμως αὐξάνει τήν ἀπόστασιν ΑΒ κατά 3Ι χιλιόμετρα. 'Αλλά καί τό τραῖνον, μετά τήν ἐπιδιόρθωσίν του, αὐξάνει τήν ταχύτητά του κατά 6 χιλιόμετρα τήν ὥραν καί οὕτω φθάνει εἰς τήν Β μέ καθυστέρησιν Ι ὥρας καί 5 πρώτων λεπτῶν. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις ΑΒ. ('Ανωτ. 'Εμπορ. Ι953).

Λύσις.



"Εστω ὅτι ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι χ χλμ. Τό τραῖνον μέ τήν ταχύτητα τῶν 64 χλμ. καθ' ὥραν θά διήνυεν αὐτήν εἰς $\frac{\chi}{64}$ ὥρας.

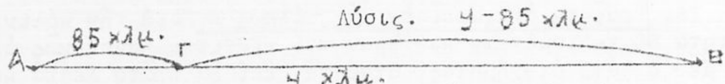
Τοῦτο ὅμως, ἀφοῦ ἐκινήθη ἐπί 3 ὥρας, διανύσαν $64.3 = 192$ χλμ., ἐσταμάτησεν λόγῳ ἀτυχήματος, ἐπί 50 πρῶτα λεπτά ἤ $\frac{50}{60} = \frac{5}{6}$

τῆς ὥρας καί κατόπιν, ἀκολουθῆσαν παρακαμπτήριον γραμμήν, διήνυσε τήν ἀπόστασιν $\chi-I92+3I = \chi-I6I$ χλμ. μέ ταχύτητα $64+6 = 70$ χλμ.καθ' ὥραν εἰς $\frac{\chi-I6I}{70}$ ὥρας. 'Επειδή ὅμως ἡ ὅλη καθυστέρησις ἀνῆλθεν εἰς Ι ὥραν καί 5 πρῶτα λεπτά ἤ $I\frac{5}{60} = I\frac{I}{I2} = \frac{I3}{I2}$ τῆς ὥρας, ἕπεται ὅτι $\frac{\chi}{64} = 3+\frac{5}{6}+\frac{\chi-I6I}{70}-\frac{I3}{I2}$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 336$.
'Επομένως ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι 336 χλμ.

I7. Ταξειδιώτης θέλει νά μεταβῇ ἐκ μιᾶς πόλεως Α εἰς ἄλλην Β. Πρός τοῦτο ἐπιβιβάζεται ἁμαξοστοιχίας, ἡ ὁποία ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α τήν 6 ὥραν καί 45 πρῶτα λεπτά μ.μ. μέ ταχύτητα 32 χλμ.καθ' ὥραν. Εἰς τήν πόλιν Γ, ἀπέχουσαν τῆς Α 85 χλμ., ὁ ταξειδιώτης κατέρχεται τῆς ἁμαξοστοιχίας αὐτῆς καί ἐπιβιβάζεται τῆς ταχείας, ἡ ὁποία ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α τήν 8ην ὥραν μ.μ. καί συνήντησεν τήν πρώτην ἁμαξοστοιχίαν εἰς τήν πόλιν Γ. Οὕτω ὁ ταξειδιώτης ἔφθασεν εἰς τήν πόλιν Β 4 ὥρας ἐνωρίτερον. Νά εὑρεθῇ: α'.) Ἡ ταχύτης τῆς ταχείας ἁμαξοστοιχίας. β'.) Ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων καί γ'.) Ἡ ὥρα τῆς ἀφίξεως τοῦ ταξειδιώτου εἰς τήν πόλιν Β.

Λύσις.



Ἔστω χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τῆς ταχείας ἁμαξοστοιχίας καί ψ χλμ. ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων Α καί Β.

Ἡ α'ἁμαξοστοιχία μέ ταχύτητα 32 χλμ.καθ'ὥραν διανύει τά 85 χλμ. εἰς $\frac{85}{32}$ τῆς ὥρας καί ἡ ταχεῖα μέ ταχύτητα χ χλμ καθ'ὥραν διανύει τήν ἰδίαν ἀπόστασιν εἰς $\frac{85}{\chi}$ τῆς ὥρας. Οἱ χρόνοι αὐτοί ὅμως ἔχουν διαφοράν $8-6\frac{3}{4} = I\frac{I}{4}$ τῆς ὥρας. 'Επομένως

$$\text{ἔχομεν} \quad \frac{85}{32}-\frac{85}{\chi} = I\frac{I}{4} \qquad (I)$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν (Ι) εὑρίσκομεν: $\chi = 60\frac{4}{9}$

Ἄρα ἡ ταχύτης τῆς ταχείας ἁμαξοστοιχίας εἶναι $60\frac{4}{9}$ χλμ. καθ'ὥραν.

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ α'. ἁμαξοστοιχία διανύει τήν ἀπόστασιν ΓΒ = ψ-85 χλμ. εἰς $\frac{\psi-85}{32}$ τῆς ὥρας καί ἡ ταχεῖα διανύει τήν αὐτήν ἀπόστασιν εἰς $\frac{\psi-85}{\chi}$ τῆς ὥρας.

Οἱ χρόνοι ὅμως αὐτοί ἔχουν διαφοράν 4 ὡρῶν.
Ἑπομένως ἔχομεν ὅτι:

$$\frac{\psi-85}{32} - \frac{\psi-85}{\chi} = 4$$ Ἐπειδή δέ $\chi = 60\frac{4}{9}$ χλμ.

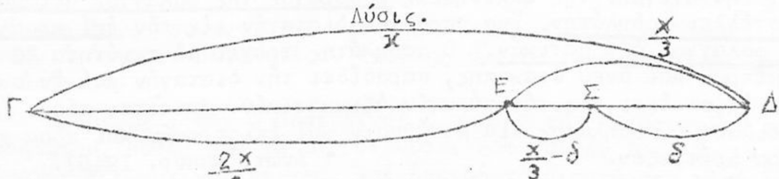
ἀντικαθιστῶμεν καί λαμβάνομεν

$$\frac{\psi-85}{32} - \frac{\psi-85}{60\frac{4}{9}} = 4 \quad (2)$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν (2) εὑρίσκομεν: $\psi = 357$.
Ἄρα ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων Α καί Β εἶναι 357 χλμ.
Τά 357 χλμ. τά διανύει ἡ ταχεῖα ἁμαξοστοιχία εἰς $357 : 60\frac{4}{9} =$ 5 ὥρ. 54 λ 22,5 δ. καί ἐπειδή αὕτη ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α τήν 8ην μ.μ. ἔφθασεν εἰς τήν πόλιν Β μετά 5 ὥρ. 54 λ. 22,5 δ. δηλαδή ἔφθασε τήν Ι ὥρ. 54λ. 22,5 δ. πρωϊνήν τῆς ἐπομένης ἡμέρας.
Ἄρα ἡ ὥρα ἀφίξεως τοῦ ταξειδιώτου εἰς τήν πόλιν Β εἶναι ἡ Ι ὥρ. 54λ 22,5 δ πρωϊνή τῆς ἐπομένης ἡμέρας.

Ι8. Τραῖνον Α ταχύτητος α ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ἐξ οὗ ἀνεχώρησεν τραινον Β ταχύτητος β, φθάνουσι δέ ἀμφότερα συγχρόνως εἰς τόν προορισμόν των. Ἐάν τό τραῖνον Β μετά τά δύο τρίτα τῆς διαδρομῆς ἠλάττωνε τήν ταχύτητά του εἰς τό ἥμισυ, τά δύο τραῖνα θά συνηντῶντο εἰς ἀπόστασιν δ ἀπό τοῦ σημείου τοῦ προορισμοῦ των. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς διαδρομῆς. (Ἀνωτ. Ἐμπορ. Ι949).

Λύσις.



Ἔστω χ τό μῆκος τῆς διαδρομῆς ΓΔ. Τό τραῖνον Β διανύει τήν ἀπόστασιν χ εἰς χρόνον $\frac{\chi}{\beta}$ καί τό τραῖνον Α διανύει αὐτήν εἰς χρόνον $\frac{\chi}{\alpha}$. Οὕτω ἡ διαφορά $\frac{\chi}{\beta} - \frac{\chi}{\alpha}$ (Ι) εἶναι ὁ μεταξύ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσας χρόνος.

Ἐάν τό τραῖνον Β μετά τά $\frac{2}{3}$ τῆς διαδρομῆς ἠλάττωνε τήν ταχύτητά του εἰς τό ἥμισυ, τά δύο τραῖνα θά συνηντῶντο εἴς τι σημεῖον Σ ἀπέχον ἀπόστασιν δ ἀπό τοῦ σημείου τοῦ προορισμοῦ των.

Τό τραῖνον Β διανύει τά $\frac{2}{3}$ τῆς διαδρομῆς εἰς χρόνον $\frac{\frac{2\chi}{3}}{\beta}$ καί τό ὑπόλοιπον διάστημα μέχρι τοῦ Σ, τό ὁποῖον εἶναι $\frac{\chi}{3}-\delta$ τό διανύει εἰς χρόνον $\frac{\frac{\chi}{3}-\delta}{\frac{\beta}{2}}$. Οὕτω τό τραῖνον Β διανύει τήν ἀπόστασιν

ΓΣ εἰς χρόνον $\frac{\frac{2\chi}{3}}{\beta}+\frac{\frac{\chi}{3}-\delta}{\frac{\beta}{2}}$ ἤ (μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων)

$\frac{4\chi-6\delta}{3\beta}$, τό δέ τραῖνον Α διανύει τήν αὐτήν ἀπόστασιν ΓΣ εἰς χρόνον

$\frac{\chi-\delta}{\alpha}$.

Κατά ταῦτα ἡ διαφορά $\frac{4\chi-6\delta}{3\beta}-\frac{\chi-\delta}{\alpha}$ (2)

εἶναι ὁ μεταξύ τῶν δύο ἀναχωρήσεων μεσολαβήσας χρόνος.

Ἐπειδή αἱ παραστάσεις (Ι) καί (2) δεικνύουν τόν αὐτόν χρόνον, ἔχομεν:

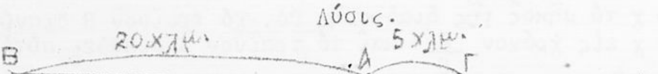
$$\frac{\chi}{\beta}-\frac{\chi}{\alpha}=\frac{4\chi-6\delta}{3\beta}-\frac{\chi-\delta}{\alpha}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi=\frac{3\delta(2\alpha-\beta)}{\alpha}$

Ἄρα τό μῆκος τῆς διαδρομῆς εἶναι: $\frac{3\delta(2\alpha-\beta)}{\alpha}$

Ι9. Φάλαγξ μήκους 20 χιλιομέτρων ἐκκινεῖ διά πορείαν βαδίζουσα 5 χιλιόμετρα καθ'ὥραν. Μετά πᾶσαν ὡριαίαν πορείαν σταθμεύει ἐπί Ι0΄. Τήν στιγμήν τῆς ἐκκινήσεως ὁ οὐραγός τῆς φάλαγγος ἀξιωματικός ἀποστέλλει ποδηλάτην, ἵνα παραδώσῃ διαταγήν εἰς τόν ἐπί κεφαλῆς τῆς φάλαγγος ἀξιωματικόν. Ὁ ποδηλάτης τρέχει μέ ταχύτητα 20 χιλιομέτρων καί ἄνευ διακοπῆς, παραδίδει τήν διαταγήν καί ἐν συνεχείᾳ ἐπιστρέφει εἰς τόν οὐραγόν ἀξιωματικόν. Ζητεῖται πόσην ὥραν ἐχρειάσθη ὁ ποδηλάτης διά μετάβασιν καί ἐπιστροφήν καί πόσα χιλιόμετρα διέτρεξεν. ('Ανωτ.'Εμπορ. Ι945).

Λύσις.



Ἔστω Α ἡ θέσις τοῦ ἐπί κεφαλῆς τῆς φάλαγγος ἀξιωματικοῦ καί Β ἡ θέσις τοῦ ποδηλάτου τήν στιγμήν τῆς ἐκκινήσεως τῆς φάλαγγος, τῆς ὁποίας τό μῆκος ΒΑ εἶναι 20 χλμ. Μετά Ι ὥραν ὁ ποδηλάτης διανύων 20 χλμ. καθ'ὥραν θά ἔχῃ φθάσει εἰς τό σημεῖον Α, ἐνῷ ὁ ἐπί κεφαλῆς ἀξιωματικός θά ἔχῃ προχωρήσει κατά 5 χλμ. καί θά ἔχῃ φθάσει εἰς τι σημεῖον Γ ὁπότε καί σταθμεύει ἐπί IO΄. Κατά τό δεκάλεπτον (IO΄$= \frac{IO}{60}$ ὥρ. $= \frac{I}{6}$ ὥρ.) τῆς σταθμεύσεως τῆς φάλαγγος, ὁ ποδηλάτης διανύει $20.\frac{I}{6} = \frac{20}{6} = \frac{IO}{3} = 3\frac{I}{3}$ χλμ. , δηλαδή διανύει διάστημα μικρότερον τῶν 5 χλμ.

Εἶναι λοιπόν φανερόν, ὅτι ὁ ποδηλάτης θά φθάση τόν ἐπί κεφαλῆς ἀξιωματικόν μετά τήν πρώτην στάθμευσιν τῆς φάλαγγος.

Κατά ταῦτα, ἐάν χ ὧραι εἶναι ὁ χρόνος τῆς μεταβάσεως τοῦ ποδηλάτου, οὗτος μέν θά ἔχη διανύσει κατ'αὐτόν 20χ χλμ., ὁ δέ ἐπί κεφαλῆς ἀξιωματικός $5\,(\chi-\frac{I}{6})$ χλμ. (ἀφαιρεῖται τό δεκάλεπτον τῆς σταθμεύσεως) καί ἐπειδή τά διαστήματα αὐτά διαφέρουν κατά 20 χλμ. , ἕπεται ὅτι:

$$20\chi-5\,(\chi-\frac{I}{6}) = 20$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = I\frac{5}{I8}$

"Ὥστε :Ὁ ποδηλάτης ἐχρειάσθη διά μετάβασιν $I\frac{5}{I8}$ τῆς ὥρας.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι μετά τήν α΄ στάθμευσιν (ἀφοῦ παρῆλθεν χρόνος $I\frac{5}{I8} - I\frac{I}{6} = I\frac{5}{I8} - I\frac{3}{I8} = \frac{2}{I8} = \frac{I}{9}$ τῆς ὥρας)

ὑπολείπονται $\frac{8}{9}$ τῆς ὥρας διά νά γίνη ἡ β΄ στάθμευσις, κατά τά ὁποῖα ὅμως ὁ ποδηλάτης καί ὁ οὐραγόςἀξιωματικός ἀντιθέτωςκινούμενοι καλύπτουν ὁμοῦ $20.\frac{8}{9} + 5.\frac{8}{9} = \frac{I60}{9} + \frac{40}{9} = \frac{200}{9} = 22\frac{2}{9}$ χλμ. καί ἑπομένως συναντῶνται πρό τῆς β΄σταθμεύσεως (ἐφ'ὅσον καλύπτουν ἀπόστασιν μεγαλυτέραν ἐκείνης τῶν 20 χλμ. κατά τήν ὁποίαν ἀπέχουν).

Ἑπομένως , ἐάν ψ ὧραι εἶναι ὁ χρόνος τῆς ἐπιστροφῆς τοῦ ποδηλάτου, οὗτος μέν θά ἔχη διανύσει κατ 'αὐτόν 20ψ χλμ., ὁ δέ οὐραγός ἀξιωματικός 5ψ χλμ. καί ἐπειδή τά διαστήματα αὐτά ἔχουν ἄθροισμα 20 χλμ. ἕπεται ὅτι, $20\psi+5\psi = 20$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\psi = \frac{4}{5}$.

"Ὥστε ὁ ποδηλάτης ἐχρειάσθη δι'ἐπιστροφήν $\frac{4}{5}$ τῆς ὥρας.

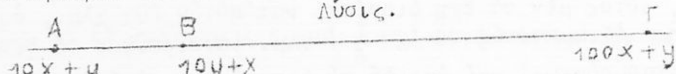
"Ἄρα ὁ ποδηλάτης ἐχρειάσθη διά μετάβασιν καί ἐπιστροφήν

$I\frac{5}{I8} + \frac{4}{5} = I\frac{25}{90} + \frac{72}{90} = I\frac{97}{90} = 2\frac{7}{90}$ τῆς ὥρας ἤ 2ὥρ.4λ 40 δ καί διήνυσε $20.2\frac{7}{90} = 40\frac{I40}{90} = 4I\frac{5}{9}$ χλμ.

"'Αλγεβρικά Προβλήματα κινήσεως" Γ.Π.ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

20. "Ἕνας ποδηλάτης διερχόμενος ἔμπροσθεν ἑνός χιλιομετρικοῦ δείκτου σημειώνει μίαν ἀπόστασιν, ἐκφραζομένην μέ ἕνα διψήφιον ἀριθμόν. Συνεχίζων τόν δρόμον του μέ σταθεράν ταχύτητα διέρχεται μετά I ὥραν ἔμπροσθεν ἄλλου δείκτου ἔχοντος τά αὐτά ψηφία κατ'ἀντίστροφον τάξιν. Τέλος 4 ὥρας ἀργότερον σταματᾶ ἔμπροσθεν ἑνός τρίτου δείκτου, ἔχοντος τά αὐτά ψηφία μέ τόν πρῶτον, ἀλλά μέ ἕνα μηδέν μεταξύ των. Νά εὑρεθῇ ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου καί οἱ ἀριθμοί τῶν δεικτῶν, δεδομένου ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων ἑκάστου ἀριθμοῦ εἶναι 4.

Λύσις.



"Ἔστω χ τό ψηφίον τῶν δεκάδων καί ψ τό ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ α΄. δείκτου. Τότε οἱ ἀριθμοί τῶν δεικτῶν θά εἶναι κατά σειράν $I0\chi+\psi$ τοῦ α΄., $I0\psi+\chi$ τοῦ β΄ καί $I00\chi+\psi$ τοῦ γ΄.

Ὁ ποδηλάτης μεταβαίνων ἐκ τοῦ α΄δείκτου εἰς τόν β΄διανύει εἰς I ὥραν διάστημα ἴσον μέ $I0\psi+\chi-(I0\chi+\psi) = I0\psi+\chi-I0\chi-\psi = 9\psi-9\chi$ χιλιόμετρα. Ἀκολούθως μεταβαίνων ἐκ τοῦ β΄ δείκτου εἰς τόν γ΄ διανύει εἰς 4 ὥρας διάστημα ἴσον μέ $I00\chi+\psi-(I0\psi+\chi) = I00\chi+\psi-I0\psi-\chi = 99\chi-9\psi$ χιλιόμετρα καί ἑπομένως εἰς μίαν ὥραν διανύει $\frac{99\chi-9\psi}{4}$ χιλιόμετρα.

Οἱ ἀριθμοί ὅμως αὐτοί τῶν χιλιομέτρων, ὡς ἐκφράζοντες τήν ταχύτητα τοῦ ποδηλάτου καθ'ὥραν, εἶναι ἴσοι. Ἑπομένως.

$$9\psi-9\chi = \frac{99\chi-9\psi}{4} \qquad (I)$$

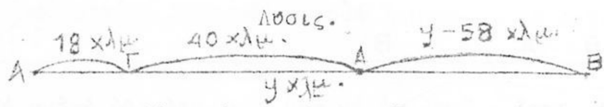
Ἐξ'ἄλλου δίδεται ὅτι: $\chi+\psi = 4 \qquad (2)$

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (I) καί (2), εὑρίσκομεν: $\chi = I$, $\psi = 3$.

Ἄρα οἱ ἀριθμοί τῶν δεικτῶν εἶναι I3, 3I καί I03, ἡ δέ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου 3I-I3= I8 χλμ. καθ'ὥραν.

2I. Πεζός καί ποδηλάτης βαίνουσιν ἐκ τῆς πόλεως Α πρός τήν Β. Ὁ πεζός βαδίζει μέ ταχύτητα 4 χιλιόμετρα καθ'ὥραν. Ὁ ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἕν τέταρτον τῆς ὥρας μετά τόν πεζόν καί φθάνει αὐτόν εἰς ἀπόστασιν I8 χιλιομέτρων.ἀπό τῆς Α. Ὁ ποδηλάτης συνεχίζει, φθάνει εἰς Β, ἀναπαύεται ἐπί ἡμίσειαν ὥραν καί εἶτα ἐκκινεῖ ἐκ νέου καί τρέχει πρός Α, ὅτε συναντᾷ τόν μή σταματήσαντα ἀλλά συνεχῶς βαδίζοντα πεζόν εἰς ἀπόστασιν 40 χιλιομέτρων ἀπό τοῦ σημείου τῆς πρώτης συναντήσεώς των. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου καί ἡ ἀπόστασις ΑΒ." ('Ανωτ.'Εμπορ. I952).

Λύσις.



῞Εστω χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου καί ψ χλμ. ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων.

῞Εστωσαν ἀκόμη Γ καί Δ τά σημεῖα, εἰς τά ὁποῖα ὁ ποδηλάτης συναντᾶ τόν πεζόν.

᾿Επειδή εἶναι ΑΓ = I8 χλμ., ΓΔ = 40 χλμ. καί ΑΒ = ψ χλμ., θά εἶναι προφανῶς :

ΔΒ = ΑΒ-ΑΔ = ΑΒ - (ΑΓ+ΓΔ) = ΑΒ -ΑΓ - ΓΔ = ψ-I8-40 = ψ-58 χλμ.

῾Ο πεζός διανύει τήν ἀπόστασιν ΑΓ = I8 χλμ. εἰς $\frac{18}{4}$ ὥρας καί καί ὁ ποδηλάτης διανύει αὐτήν εἰς $\frac{18}{\chi}$ ὥρας, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί διαφέρουν κατά $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας, ἕπεται ὅτι :

$$\frac{18}{4} - \frac{18}{\chi} = \frac{1}{4}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = 4\frac{4}{17}$

῎Αρα ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου εἶναι $4\frac{4}{17}$ χλμ. καθ'ὥραν .

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ὁ πεζός διανύει τό διάστημα ΓΔ = 40χλμ. εἰς $\frac{40}{4}$ = I0 ὥρας καί ὁ ποδηλάτης ἐκτελεῖ τήν διαδρομήν ΓΒ+ΒΔ= = (ψ-I8)+(ψ-58) = ψ-I8+ψ-58 = 2ψ - 76 χλμ. εἰς $\frac{2\psi-76}{\chi} + \frac{1}{2}$ ὥρας (συμπεριλαμβανομένης καί τῆς ἡμισείας ὥρας καθ'ἥν ἀνεπαύθη). ᾿Επειδή ὅμως οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι:

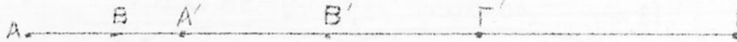
$$\frac{2\psi-76}{\chi} + \frac{1}{2} = 10$$

Θέτοντες $\chi = 4\frac{4}{17}$ καί λύοντες τήν ἐξίσωσιν ὡςπρός ψ εὑρίσκομεν $\psi = 58\frac{2}{17}$.

᾿Επομένως ἡ ἀπόστασις ΑΒ τῶν δύο πόλεων εἶναι $58\frac{2}{17}$ χλμ.

22. Τρία κινητά ἀναχωροῦν ταὐτοχρόνως ἐκ τῶν σημείων Α,Β,Γ, ἐκ τῶν ὁποίων τό Β κεῖται μεταξύ τῶν Α καί Γ. εἶναι δέ ΑΒ= I40 χλμ. καί ΒΓ = I004 χλμ. Τά ἐκ τῶν σημείων Α καί Β ἀναχωρήσαντα κινητά διευθύνονται πρός τό Γ, τό δέ Γ ἀντιθέτως πρός τοῦ ὄντος ὅτι αἱ ταχύτητες αὐτῶν εἶναι 32χλμ. 40 χλμ. καί 48 χλμ. καθ'ὥραν ἀντιστοίχως, νά εὑρεθῇ μετά πόσας ὥρας τό ἐκ τοῦ Β κινητόν θά ἀπέχῃ ἐξ ἴσου τῶν δύο ἄλλων καί πόσον θά ἀπέχῃ ἀπ'αὐτων.

Λύσις.



"Εστω ότι μετά χ ώρας τό έκ τοῦ Β κινητόν θά άπέχη έξ ἴσου τῶν δύο ἄλλων. "Αν Α΄, Β΄καί Γ΄εἶναι αί θέσεις τῶν τριῶν κινητῶν ἀντιστοίχως κατ'ἐκείνην τήν στιγμήν, θά εἶναι

Α΄Β΄= Β΄Γ΄ (Ι)

Τά τρία κινητά είς χ ὥρας ἔχουν διανύσει τά διαστήματα ΑΑ΄=32χ, ΒΒ΄=40χ καί ΓΓ΄= 48χ χιλιόμετρα ἀντιστοίχως.

<u>Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι:</u>

Α΄Β΄= ΑΒ΄- ΑΑ΄= ΑΒ+ΒΒ΄- ΑΑ΄= Ι40+40Χ-32χ = Ι40+8χ καί

Β΄Γ΄= ΒΓ - ΒΒ΄- ΓΓ = Ι004-40χ - 48χ = Ι004 - 88χ

οὕτω ἡ (Ι) γίνεται:

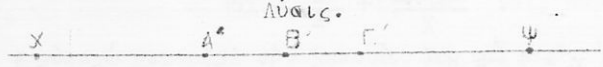
Ι40+8χ = Ι004-88χ

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: χ = 9 .

"Αρα μετά 9 ὥρας ἀπό τῆς ἀναχωρήσεώς των τό κινητόν Β θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν δύο ἄλλων καί μάλιστα θά ἀπέχη 2Ι2 χλμ. ἀπό ἑκάστου τούτων, διότι Α΄Β΄= Ι40+8χ = Ι40+8.9 = Ι40+72 = 2Ι2 καί Β΄Γ΄= = Ι004 - 88.9 = Ι004 - 792 = 2Ι2.

23. <u>Ἐπί εὐθείας ΧΨ μήκους Ι20 μέτρων</u> κινοῦνται τά μέν κινητά Α καί Β ἐκ τοῦ Χ πρός τό Ψ, τό δέ κινητόν Γ ἐκ τοῦ Ψ πρός Χ. Ἡ ταχύτης τοῦ Α εἶναι 4 μέτρα τοῦ Β 6 καί τοῦ Γ 7 μέτρα κατά δευτερόλεπτον. Ἐκκινοῦσι συγχρόνως. Ζητεῖται Ι) μετά πόσα δευτερόλεπτα τό Β θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Γ καί 2) μετά πόσα δευτερόλεπτα τό Γ θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Β. ('Ανωτ.'Εμπορ. Ι947).

Λύσις.



<u>Ι.</u> "Εστω ὅτι μετά χ δευτερόλεπτα τό κινητόν Β θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Γ. "Αν Α΄, Β΄καί Γ΄εἶναι αἱ θέσεις τῶν τριῶν κινητῶν ἀντιστοίχως κατ'ἐκείνην τήν στιγμήν, θά εἶναι:

Α΄Β΄= Β΄Γ΄ (Ι)

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ΧΑ΄= 4χ , ΧΒ΄= 6χ καί ΨΓ΄=7χ μέτρα.

Ἐπομένως Α΄Β΄= ΧΒ΄- ΧΑ΄= 6χ-4χ = 2χ μέτρα

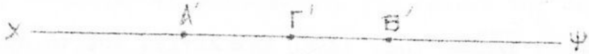
καί Β΄Γ΄= ΧΨ-ΧΒ΄- ΨΓ΄= Ι20-6χ-7χ = Ι20-Ι3χ μέτρα.

οὕτω ἡ (Ι) γίνεται:

2χ = Ι20-Ι3χ

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν χ = 8.

"Αρα μετά 8 δευτερόλεπτα τό κινητόν Β θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Γ



2. "Εστω ἤδη ὅτι μετά ψ δευτερόλεπτα τό κινητόν Γ θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Β, ὁπότε θά εἶναι: $A'\Gamma' = \Gamma'B'$ (2)

Παρατηροῦμεν ὅτι $XA' = 4\psi$, $XB' = 6\psi$ καί $\Psi\Gamma' = 7\psi$ μέτρα.

Ἑπομένως $A'\Gamma' = X\Psi - XA' - \Psi\Gamma' = I20 - 4\psi - 7\psi = I20 - II\psi$ καί

$\Gamma'B' = \Gamma'\Psi - B'\Psi = \Gamma'\Psi - (X\Psi - XB') = \Gamma'\Psi - X\Psi + XB' = 7\psi - I20 + 6\psi = I3\psi - I20$.

Οὕτω ἡ (2) γίνεται:

$$I20 - II\psi = I3\psi - I20$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\psi = I0$.

"Αρα μετά I0 δευτερόλεπτα τό κινητόν Γ θά ἀπέχη ἐξ ἴσου τῶν Α καί Β.

24. Ὁ Α καί ὁ Β εὑρισκόμενοι εἰς τήν πόλιν Χ ἔχουσι κληθῆ εἰς γεῦμα εἰς τήν πόλιν Ψ ἀπέχουσαν II7 χιλιόμετρα τῆς Χ. Οὗτοι εὑρόντες αὐτοκίνητον μονοθέσιον, διατρέχον 40 χιλιόμετρα καθ'ὥραν συμφωνοῦσιν, ὅπως ὁ Α ἐκκινήσῃ πεζοπορῶν καί ὁ Β ἐπ' αὐτοκινήτου. Ὁ Β νά σταματήσῃ καθ' ὁδόν εἰς σημεῖον τι καί νά συνεχίσῃ πεζοπορῶν τό ταξείδιόν του μέ ταχύτητα 4 χιλιομέτρων καθ'ὥραν. Τό αὐτοκίνητον ἀποβιβάζον τόν Β νά ἐπιστρέφῃ πρός τήν διεύθυνσιν τῆς Χ νά συναντήσῃ καθ'ὁδόν τόν Α, βαδίζοντα μέ ταχύτητα 4 χιλιομέτρων, νά παραλάβῃ τοῦτον καί νά τόν μεταφέρῃ εἰς Ψ. Ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον τῆς ὁδοῦ δέον τό αὐτοκίνητον νά ἀποβιβάσῃ τόν Β, ἵνα ὁ Α καί ὁ Β φθάσωσι εἰς Ψ συγχρόνως.

('Ανωτ. 'Εμπορ. I945).

Λύσις.

"Εστω Σ τό σημεῖον τῆς ὁδοῦ ΧΨ, εἰς τό ὁποῖον δέον τό αὐτοκίνητον νά ἀποβιβάσῃ τόν Β, ἀπέχον τῆς πόλεως Χ ἀπόστασιν $X\Sigma = \chi$ χλμ. Τότε $\Sigma\Psi = II7 - \chi$ χλμ. "Εστω ἀκόμη Τ τό σημεῖον, εἰς τό ὁποῖον τό αὐτοκίνητον ἐπιστρέφον συναντᾷ τόν Α βαδίζοντα καί ὅτι $XT = \psi$ χλμ., ὁπότε $T\Psi = II7 - \psi$ χλμ. καί $T\Sigma = \chi - \psi$ χλμ.

Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἡ ταχύτης τῶν πεζῶν εἶναι 4 χλμ. καθ' ὥραν καί τοῦ αὐτοκινήτου 40 χλμ., ἕπεται ὅτι ὁ Α διανύει τήν ἀπόστασιν ΧΨ = ΧΤ + ΤΨ εἰς $\frac{\psi}{4} + \frac{117-\psi}{40}$ ὥρας, ὁ Β τήν διανύει

εἰς $\frac{\chi}{40} + \frac{117-\chi}{4}$ ὥρας (ἀφοῦ ΧΨ= ΧΣ+ΣΨ) καί τό αὐτοκίνητον εἰς

$\frac{\chi+\chi-\psi+117-\psi}{40}$ (ἀφοῦ ΧΨ= ΧΣ+ΣΤ+ΤΨ $= \frac{\chi}{40} + \frac{\chi-\psi}{40} + \frac{117-\psi}{40}$) ὥρας

συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ χρόνου τῆς διαδρομῆς ΣΤ.

'Επειδή οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\psi}{4} + \frac{117-\psi}{40} &= \frac{\chi}{40} + \frac{117-\chi}{4} \\ \frac{\psi}{4} + \frac{117-\psi}{40} &= \frac{2\chi-2\psi+117}{40} \end{aligned}\right\}$$

Λύοντες τό σύστημα εὑρίσκομεν $\chi = 99$.

'Επομένως τό αὐτοκίνητον δέον νά ἀποβιβάση τόν Β εἰς τό 99 χλμ. τῆς ὁδοῦ ΧΨ.

25. <u>Τέσσαρα πρόσωπα βαίνουσιν</u> ἐκ τῆς πόλεως Α πρός τήν Β, ἥτις ἀπέχει τῆς Α 39,6 χιλιόμετρα. Τά πρόσωπα ταῦτα διαθέτουσι <u>διθέσιον αὐτοκίνητον β</u>αῖνον μέ ταχύτητα 36 χιλιομέτρων τήν ὥραν. Οἱ δύο ἐκ τῶν τεσσάρων, ὄντες νεώτεροι, βαδίζουσι 6 χιλιόμετρα καθ'ὥραν, οἱ δ'ἕτεροι δύο 4 χιλιόμετρα καθ'ὥραν. Οἱ 2 νεώτεροι ἐκκινοῦσι πεζῆ καί τό αὐτοκίνητον παραλαμβάνει τούς 2 γεροντοτέρους καί τούς ἀποβιβάζει εἰς τό σημεῖον Μ.

Οἱ γεροντότεροι συνεχίζουσι πεζῆ τήν πορείαν των πρός Β, ἐνῷ τό αὐτοκίνητον ἀναστρέφει πρός τήν διεύθυνσιν Α συναντᾶ τούς πεζοποροῦντας νέους εἰς Λ καί παραλαμβάνει τούτους καί ἀναστρέφει πρός τήν διεύθυνσιν Β, ὅπου φθάνουσιν πάντες συγχρόνως. Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν Μ καί Λ ἀπό τῆς Α. ('Ανωτ. Ἐμπορ. 1951).

Λύσις

Ἔστω ὅτι ΑΜ = χ χλμ. καί ΑΛ = ψ χλμ. , τότε θά εἶναι ΜΒ = $= 39,6 - \chi$ χλμ. ΛΒ = $39,6-\psi$ χλμ. καί ΛΜ = $\chi-\psi$ χλμ.

Οἱ νεώτεροι φθάνουνεἰς τήν πόλιν Β μετά $\frac{\psi}{6} + \frac{39,6-\psi}{36}$ ὥρας, οἱ γεροντότεροι μετά $\frac{\chi}{36} + \frac{39,6-\chi}{4}$ ὥρας καί τό αὐτοκίνητον μετά

$\frac{\chi+\chi-\psi+39,6-\psi}{36}$ ἤ $\frac{2\chi-2\psi+39,6}{36}$ ἤ (δι'ἁπλοποιήσεως μέ τό 2).

$\frac{\chi-\psi+I9,8}{I8}$ ὥρας (συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ χρόνου τῆς διαδρομῆς ΜΛ). Ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι

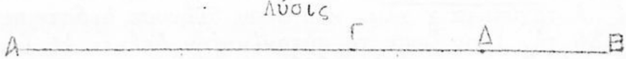
$$\left.\begin{aligned} \frac{\psi}{6}+\frac{39,6-\psi}{36} &= \frac{\chi}{36}+\frac{39,6-\chi}{4} \\ \frac{\psi}{6}+\frac{39,6-\psi}{36} &= \frac{\chi-\psi+I9,8}{I8} \end{aligned}\right\}$$

Λύοντες τό σύστημα εὑρίσκομεν $\chi = 33,6$ καί $\psi = 9,6$

Ἑπομένως ΑΜ = 33,6 χλμ. καί ΑΛ = 9,6 χλμ.

26. Οἱ Μ καί Ν βαδίζουσι παραπλεύρως ἐπί τῆς ὁδοῦ ΑΒ ἀποστάσεως 32 χλμ. Εἰς τό σημεῖον Γ συναντῶνται μετά τοῦ τράμ ἐκτελοῦντος τήν συγκοινωνίαν μεταξύ Α καί Β καί βαίνοντος πρός Β. Κατά τήν συνάντησιν ὁ μέν Μ στρέφει πρός τήν Α, ὁ δέ Ν συνεχίζει βαίνων πρός Β. Τό τράμ φθάνει εἰς Β, σταθμεύει Ι0 πρῶτα λεπτά καί ἀναχωρεῖ μέ κατεύθυνσιν πρός Α, ὅτε συναντᾶ τόν Ν εἰς τό σημεῖον Δ. Ὁ Ν ἀνέρχεται εἰς τό τράμ καί φθάνουν εἰς τό Α συγχρόνως ὁ Μ καί ὁ Ν (καί τό τράμ). Ἡ ταχύτης τῶν πεζῶν εἶναι 4 χλμ. καθ'ὥραν καί τοῦ τράμ Ι2 χλμ. Ζητεῖται νά προσδιορισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν Γ καί Δ ἀπό τοῦ Α. ('Ανωτ.'Εμπ.Ι949).

Λύσις



Ἔστω ΑΓ = χ χλμ. καί ΑΔ = ψ χλμ. αἱ ἀποστάσεις τῶν Γ καί Δ ἀπό τοῦ Α.

Ὁ Μ ἐκτελεῖ τήν διαδρομήν ΑΓ = χ χλμ. μέ ταχύτητα 4 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{\chi}{4}$ ὥρας (Ι). Ὁ Ν ἐκτελεῖ τήν μέν διαδρομήν ΓΔ = ψ-χ χλμ. μέ ταχύτητα 4 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{\psi-\chi}{4}$ ὥρας, τήν δέ διαδρομήν ΔΑ = ψ χλμ. (ἐπιβαίνων τοῦ τράμ) μέ ταχύτητα Ι2 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{\psi}{I2}$ ὥρας. Κατά ταῦτα ὁ Ν ἐκτελεῖ τήν ὅλην διαδρομήν ΓΔ+ΔΑ εἰς $\frac{\psi-\chi}{4}+\frac{\psi}{I2}$ ὥρας (2)

Τέλος τό τράμ ἐκτελεῖ τήν διαδρομήν ΓΒ+ΒΑ = 32-χ+32=64-χ χλμ. μέ ταχύτητα Ι2 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{64-\chi}{I2}+\frac{I}{6}$ ὥρας (3), συμπεριλαμβανομένου καί τοῦ χρόνου τῆς σταθμεύσεως. Ἀλλ'οἱ χρόνοι αὐτοί, (Ι), (2), (3) εἶναι ἴσοι μεταξύ των. Ἑπομένως:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\chi}{4} &= \frac{\psi-\chi}{4} + \frac{\psi}{I2} \\ \frac{\chi}{4} &= \frac{64-\chi}{I2} + \frac{I}{6} \end{aligned}\right\}$$

Λύοντες τό σύστημα εὑρίσκομεν $\chi = I6,5$ καί $\psi = 24,75$. Ἄρα αἱ ἀποστάσεις τῶν Γ καί Δ ἀπό τοῦ Α εἶναι: ΑΓ = Ι6,5 χλμ. καί ΑΔ = 24,75 χλμ.

27. Ἐπί ἀπεράντου εὐθείας ὁδοῦ, ἐν ᾗ ΑΒ=ΒΓ=40 χλμ. ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Α πρός Γ τήν Ι2ην μεσημβρινήν. Ἕτερος ποδηλάτης ἀναχωρεῖ τήν Ι3ην ὥραν ἐκ τοῦ Β πρός Α (ἀντιθέτως τοῦ πρώτου) καί τήν Ι4ην ὥραν αὐτοκίνητον ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ Γ πρός πρός Α. Ποδηλάται καί αὐτοκίνητον κινοῦνται κανονικῶς (ἰσοταχῶς). Ἡ ταχύτης τῶν 2 ποδηλατῶν εἶναι ἡ αὐτή. Ζητεῖται ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου καί τῶν ποδηλατῶν γνωστοῦ ὄντος ὅτι τήν Ι5ην ὥραν τό αὐτοκίνητον ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν δύο ποδηλατῶν καί τήν Ι6ην ὥραν τό αὐτοκίνητον συναντᾶ τόν δεύτερον ποδηλάτην. (Ἀνωτ. Ἐμπορ. Ι949).

Λύσις.

Σ Α Β Γ′ Β Α′ Γ

Ἔστω χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου καί ψ χλμ. καθ'ὥραν ἡ κοινή ταχύτης τῶν δύο ποδηλατῶν. Ἔστωσαν ἐπίσης Α′, Β′, Γ′ αἱ θέσεις τῶν δύο ποδηλατῶν καί τοῦ αὐτοκινήτου τήν Ι5ην ὥραν.

Ὁ πρῶτος ποδηλάτης ἀναχωρήσας τήν Ι2ην μεσημβρινήν ἐκινήθη μέχρι της Ι5 ὥρας ἐπί 3ωρον καί μέ ταχύτητα ψ χλμ. καθ'ὥραν διήνυσε διάστημα ΑΑ′= 3ψ χλμ.

Ὁ δεύτερος ποδηλάτης ἀναχωρήσας τήν Ι3η ὥραν ἐκινήθη μέχρι τῆς Ι5 ὥρας ἐπί 2ωρον καί μέ ταχύτητα ψ χλμ. καθ'ὥραν διήνυσε διάστημα ΒΒ′= 2ψ χλμ.

Τέλος τό αὐτοκίνητον ἀναχωρῆσαν τήν Ι4ην ὥραν ἐκινήθη ἐπί Ι ὥραν καί μέ ταχύτητα χ χλμ. καθ'ὥραν διήνυσε διάστημα ΓΓ′= χ χλμ.

Ἐπειδή τήν Ι5ην ὥραν τό αὐτοκίνητον ἀπέχει ἐξ ἴσου τῶν δύο ποδηλατῶν θά εἶναι $B'\Gamma' = \Gamma'A'$ (Ι)

Ἀλλά $B'\Gamma' = B'B - \Gamma'B = B'B - (\Gamma'\Gamma - B\Gamma) = B'B - \Gamma'\Gamma + B\Gamma = 2\psi - \chi + 40$ καί

$\Gamma'A' = \Gamma'\Gamma - A'\Gamma = \Gamma'\Gamma - (A\Gamma - AA') = \Gamma'\Gamma - A\Gamma + AA' = \chi - 80 + 3\psi$

Οὕτω ἡ (Ι) γίνεται: $2\psi - \chi + 40 = \chi - 80 + 3\psi$ ἢ $2\chi + \psi = I20$ (Ι′)

Ἔστω ἤδη ὅτι τό αὐτοκίνητον συναντᾶ τόν δεύτερον ποδηλάτην τήν Ι6ην ὥραν εἰς τό σημεῖον Σ. Θά εἶναι προφανῶς :

$$B\Sigma = 3\psi$$
$$\Gamma\Sigma = 2\chi$$

καί $\Gamma\Sigma - B\Sigma = \Gamma B$ ἤ

$$2\chi - 3\psi = 40 \quad (2)$$

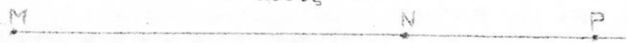
Λύοντες τό σύστημα
$$\left.\begin{aligned} 2\chi + \psi &= I20 \\ 2\chi - 3\psi &= 40 \end{aligned}\right\}$$
εὑρίσκομεν

$\chi = 50$ χλμ. καί $\psi = 20$ χλμ.

Ἑπομένως ἡ ταχύτης τοῦ αὐτοκινήτου εἶναι 50 χλμ. καθ'ὥραν καί ἡ κοινή ταχύτης τῶν δύο ποδηλατῶν 20 χλμ. καθ'ὥραν.

28. Ὁ Α βαδίζει μέ ταχύτητα 3 χιλιόμ. τήν ὥραν ὁ Β βαδίζει μέ ταχύτητα 4 χιλιόμ. καί ὁ Γ μέ ταχύτητα 5 χλμ. τήν ὥραν. Καί οἱ τρεῖς βαδίζουν πρός τήν αὐτήν κατεύθυνσιν καί ἐκκινοῦσιν ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Μ ὁδοῦ τινος, ἀλλά κατά διαστήματα μιᾶς ὥρας πρῶτος ὁ Α, δεύτερος ὁ Β, τρίτος ὁ Γ. Ὁ Β μόλις συναντήσῃ τόν Α ἀναστρέφει διεύθυνσιν καί βαδίζει πρός τό σημεῖον ἐκκινήσεως. Ζητεῖται εἰς ποῖον σημεῖον ἀπό τοῦ Μ θά συναντήσῃ ὁ Β τόν Γ; ('Ανωτ. 'Εμπορ. I95I).

Λύσις



Ἔστω Ν τό σημεῖον συναντήσεως τῶν Β καί Γ ἀπέχον τοῦ Μ ἀπόστασιν ΜΝ = χ χλμ. καί Ρ τό σημεῖον συναντήσεως τῶν Α καί Β ἀπέχον τοῦ Μ ἀπόστασιν ΜΡ = ψ χλμ.

Ὁ Α διανύει τά ψ χλμ. εἰς $\frac{\psi}{3}$ ὥρας καί ὁ Β διανύει αὐτά εἰς $\frac{\psi}{4}$ ὥρας, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί ἔχουν διαφοράν I ὥρας, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\psi}{3} - \frac{\psi}{4} = I$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: ψ = I2 χλμ.

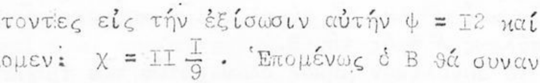
Ὁ Β διανύει τήν ἀπόστασιν ΜΡ+ΡΝ = ψ+ψ-χ = 2ψ-χ χλμ. εἰς $\frac{2\psi-\chi}{4}$ ὥρας καί ὁ Γ διανύει τά χ χλμ. εἰς $\frac{\chi}{5}$ ὥρας, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί διαφέρουν κατά I ὥραν, ἕπεται ὅτι $\frac{2\psi-\chi}{4} - \frac{\chi}{5} = I$.

Θέτοντες εἰς τήν ἐξίσωσιν αὐτήν ψ = I2 καί λύοντες ὡς πρός χ εὑρίσκομεν: $\chi = II\frac{I}{9}$. Ἑπομένως ὁ Β θά συναντήσῃ τόν Γ εἰς τό σημεῖον Ν ἀπέχον τοῦ Μ $II\frac{I}{9}$ χλμ.

29. Κινητόν ἀναχωρεῖ ἐκ τοῦ σημείου Α κατευθυνόμενον πρός τό σημεῖον Β τῆς εὐθείας ΑΒ καθ'ἥν στιγμήν ἐκ τοῦ Β ἀναχωροῦν δύο ἕτερα κινητά ἀντιθέτως κινούμενα μετά τῆς αὐτῆς ταχύτητος ἐπί τῆς εὐθείας ΑΒ. Τό ἐκ τοῦ Α κινητόν συναντᾷ τό πρός τό Α διευθυνόμενον καί ἐκ τοῦ Β ἐκκινῆσαν εἰς τό σημεῖον Γ (μεταξύ Α καί Β) καί τό ἕτερον ἐκ τοῦ Β ἐκκινῆσαν εἰς τό σημεῖον Δ πέραν τοῦ Β. Ἐάν ἡ ταχύτης τοῦ ἐκκινήσαντος ἐκ τοῦ Α εἶναι τριπλασία τῆς ταχύτητος τῶν ἄλλων καί ἡ ἀπόστασις ΓΔ εἶναι 6 χιλιόμετρα, νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ.

('Ανωτ. 'Εμπορ. I955).

Λύσις



'Επειδή ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τοῦ σημείου Α ἀναχωρήσαντος κινητοῦ εἶναι τριπλασία τῆς ταχύτητας ἑκάστου τῶν δύο ἄλλων, ἕπεται ὅτι εἰς τόν αὐτόν χρόνον τό α΄ κινητόν διανύει διάστημα τριπλάσιον τοῦ διαστήματος, τό ὁποῖον διανύει ἕκαστον τῶν δύο ἄλλων: Ἑπομένως, ἄν ΓΒ = χ χλμ., τότε ΑΓ = 3χ χλμ. καί ἄν ΒΔ = ψ χλμ, τότε ΑΔ = 3ψ χλμ. Ἀλλ' εἶναι ΓΒ+ΒΔ = ΓΔ ἤ χ+ψ = 6 (Ι).
'Επίσης εἶναι ΑΔ-ΑΓ = ΓΔ ἤ 3ψ-3χ = 6 ἤ ψ-χ = 2 (2).
Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (Ι) καί (2) εὑρίσκομεν:
χ = 2 καί ψ = 4.

Ἄρα ἡ ἀπόστασις ΑΒ εἶναι: ΑΒ = ΑΓ+ΓΒ = 3χ+χ = 4χ = 4.2=8 χλμ.

30. Ποδηλάτης μεταβαίνει ἐκ μιᾶς πόλεως Α εἰς ἄλλην Β ἀπέχουσαν τῆς Α Ι00 χιλιόμετρα καί διανύει 25 χλμ. τήν ὥραν ἐπί ὁριζοντίου ἐδάφους, Ι5 χλμ. τήν ὥραν ἐπί ἀνωφερικοῦ καί 30 χλμ. τήν ὥραν ἐπί κατωφερικοῦ. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ὁ ποδηλάτης ἐχρειάσθη 4 ὥρας καί 24 λεπτά κατά τήν μετάβασιν του καί ἀκολούθως 4 ὥρας καί 36 λεπτά διά νά ἐπιστρέψη ἐκ τῆς πόλεως Β εἰς τήν Α, νά εὑρεθῆ τό συνολικόν μῆκος τῶν ὁριζοντίων τῶν ἀνωφερικῶν καί τῶν κατωφερικῶν τμημάτων, τά ὁποῖα παρουσιάζει ἡ ὁδός ἡ συνδέουσα τάς δύο πόλεις κατά τήν ἐκ τῆς πόλεως Α πρός τήν Β μετάβασιν τοῦ ποδηλάτου.

Λύσις.

Ἔστω χ χλμ. τό σύνολον τῶν ὁριζοντίων, ψ χλμ. τό σύνολον τῶν ἀνωφερικῶν καί ω χλμ. τό σύνολον τῶν κατωφερικῶν τμημάτων τῆς ὁδοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α πρός τήν Β.

'Επειδή τό συνολικόν μῆκος ὅλων αὐτῶν τῶν τμημάτων εἶναι Ι00 χλμ., ἕπεται ὅτι:

$$χ+ψ+ω = 100 \quad (I)$$

'Ο ποδηλάτης κατά τήν μετάβασίν του ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τήν Β διανύει τά χ χλμ. μέ ταχύτητα 25 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{χ}{25}$ τῆς ὥρας, τά ψ χλμ. μέ ταχύτητα Ι5 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{ψ}{15}$ τῆς ὥρας καί τά ω χλμ. μέ ταχύτητα 30 χλμ. καθ'ὥραν εἰς $\frac{ω}{30}$ τῆς ὥρας.

Οὕτω ἐχρειάσθη $\frac{χ}{25}+\frac{ψ}{15}+\frac{ω}{30}$ ὥρας. 'Αλλ' ὁ χρόνος αὐτός εἶναι ἴσος μέ 4 ὥρας 24 λεπτά ἤ $4\frac{24}{60}$ ἤ $4\frac{2}{5}$ τῆς ὥρας. Ἑπομένως:

$$\frac{χ}{25}+\frac{ψ}{15}+\frac{ω}{30} = 4\frac{2}{5} \quad (2)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι κατά τήν ἐπιστροφήν τοῦ ποδηλάτου ἐκ τῆς πόλεως Β εἰς τήν Α, τά ὁριζόντια τμήματα τῆς ὁδοῦ παρέμειναν ὁριζόντια, τά ἀνωφερικά μετατρέπονται εἰς κατωφερικά καί τά κατωφερικά εἰς ἀνωφερικά.

Οὕτω ἐχρειάσθη $\frac{\chi}{25}+\frac{\psi}{30}+\frac{\omega}{15}$ ὥρας. Ἀλλ' ὁ χρόνος αὐτός εἶναι ἴσος μέ 4 ὥρας 36 λεπτά ἤ $4\frac{36}{60}$ ἤ $4\frac{3}{5}$ τῆς ὥρας. Ἐπομένως.

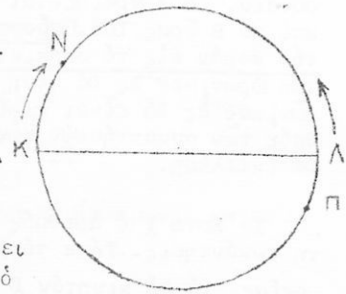
$$\frac{\chi}{25}+\frac{\psi}{30}+\frac{\omega}{15}=4\frac{3}{5} \quad (3)$$

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1), (2) καί (3) εὑρίσκομεν: $\chi=50$, $\psi=22$ καί $\omega=28$.

Ἄρα τό συνολικόν μῆκος τῶν ὁριζοντίων τμημάτων τῆς ὁδοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τήν Β εἶναι 50 χλμ., τῶν ἀνωφερικῶν 22 χλμ. καί τῶν κατωφερικῶν 28 χλμ.

31. Δύο δρομεῖς Α,Β τρέχουσιν ἐπί περιφερείας ἀναχωροῦντες συγχρόνως ἐκ δύο ἀντιθέτων σημείων Κ,Λ ἄκρων τῆς αὐτῆς διαμέτρου καί βαίνοντες ἀντιθέτως. Διασταυροῦνται διά πρώτην φοράν εἰς τό σημεῖον Ν ἀπέχον 40 μέτρα του Κ καί εἶτα δευτέραν φοράν εἰς τό σημεῖον Π ἀπέχον 20 μέτρα τοῦ Λ. Ζητεῖται 1) Τό μῆκος τῆς περιφερείας. 2) Δεδομένου ὅτι παρῆλθον 29 δεύτερα λεπτά μεταξύ τῶν δύο συναντήσεων, ζητεῖται ἡ εἰς μέτρα ταχύτης ἑκάστου δρομέως κατά δευτερόλεπτον. ('Ανωτ. 'Εμπορ. 1948).

Λύσις.



Ἔστω 2φ τό μῆκος τῆς περιφερείας καί χ καί ψ αἱ ταχύτητες τῶν δύο δρομέων Α καί Β ἀντιστοίχως.

Ἐπειδή ΚΝ = 40 μέτρα καί ΛΠ=20 μέτρα, ἔπεται ὅτι ΝΛ=φ-40, ΝΛΠ=ΝΛ+ΛΠ= = φ-40+20 = φ-20, ΚΠ= φ-20 καί ΝΚΠ = ΝΚ+ΚΠ = 40+φ-20 = φ+20.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι ὁ Α διανύει τό διάστημα ΚΝ εἰς χρόνον $=\frac{40}{\chi}$ καί ὁ Β τό διάστημα ΛΝ εἰς χρόνον $=\frac{\varphi-40}{\psi}$, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἔπεται ὅτι $\frac{40}{\chi}=\frac{\varphi-40}{\psi}$ ἤ δι' ἐναλλαγῆς τῶν μέσων $\frac{40}{\varphi-40}=\frac{\chi}{\psi}$ (1).

Ἐπίσης παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ Α διανύει τό διάστημα ΝΛΠ εἰς χρόνον $=\frac{\varphi-20}{\chi}$ καί ὁ Β τό διάστημα ΝΚΠ εἰς χρόνον $\frac{\varphi+20}{\psi}$, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί εἶναι ἴσοι μεταξύ των, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{\varphi-20}{\chi} = \frac{\varphi+20}{\psi}$$ ἤ δι'ἐναλλαγῆς τῶν μέσων $$\frac{\varphi-20}{\varphi+20} = \frac{\chi}{\psi} \quad (2)$$

Ἐκ τῆς συγκρίσεως τῶν (Ι) καί (2) προκύπτει ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{40}{\varphi-40} = \frac{\varphi-20}{\varphi+20}$$. Ἐφαρμόζομεν γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν καί εὑρίσκομεν:

$$\frac{40+\varphi-40}{40-\varphi+40} = \frac{\varphi-20+\varphi+20}{\varphi-20-\varphi-20} \text{ ἤ } \frac{\varphi}{80-\varphi} = \frac{2\varphi}{-40} \text{ ἤ } \frac{\varphi}{80-\varphi} = \frac{\varphi}{-20}$$, ἐξ οὗ $80-\varphi=-20$ καί $\varphi = 100$ μ.

Ἐπομένως τό μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $2\varphi=2.100$ = 200 μέτρα.

Τέλος, ἐπειδή μεταξύ τῶν δύο συναντήσεων παρῆλθον 29 δευτερόλεπτα, ἕπεται ὅτι ἡ μέν ταχύτης τοῦ Α δρομέως εἶναι:

$$\frac{N\Lambda\Pi}{29} = \frac{\varphi-20}{29} = \frac{100-20}{29} = \frac{80}{29} = 2\frac{22}{29}$$ μέτρα κατά δευτερόλεπτον,

ἡ δέ ταχύτης τοῦ Β δρομέως $$\frac{NK\Pi}{29} = \frac{\varphi+20}{29} = \frac{100+20}{29} = \frac{120}{29} = 4\frac{4}{29}$$ μέτρα κατά δευτερόλεπτον.

32. Δύο κινητά Α καί Β ἀναχωροῦσιν συγχρόνως ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου περιφερείας καί κινοῦνται ἰσοταχῶς κατά τήν αὐτήν διεύθυνσιν. Τό Α χρειάζεται 42 ὥρας, διά νά διανύσῃ τήν περιφέρειαν καί τό Β ὥρας 105. Παύουσι κινούμενα, ὅταν συναντηθῶσιν διά πρώτην φοράν εἰς τό σημεῖον ἐκκινήσεως των. Ζητεῖται. 1) Ὁ ἀριθμός τῶν ὡρῶν, μεθ'ἅς θά γίνῃ ἡ πρώτη συνάντησις. 2) Ὁ ἀριθμός τῶν ὡρῶν, καθ'ἅς θά εἶναι ἀμφότερα ἐν κινήσει μέχρι τέλους. 3) Ὁ ἀριθμός τῶν συναντήσεών των καί 4) Ὁ ἀριθμός τῶν γύρων, οὕς ἕκαστον θά ἐκτελέσῃ. ('Ανωτ. 'Εμπορ. 1948).

Λύσις.

1)Ἔστω χ ὁ ἀριθμός τῶν ὡρῶν, μετά τάς ὁποίας θά γίνῃ ἡ πρώτη συνάντησις. Τότε τό μέν κινητόν Α θά ἔχῃ διανύσει $\frac{\chi}{42}$ περιφερείας, τό δέ κινητόν Β $\frac{\chi}{105}$ περιφερείας καί θά εἶναι

$$\frac{\chi}{42} - \frac{\chi}{105} = 1 \quad (1)$$

(λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι τό κινητόν Α θά ἔχῃ κάμει 1 γῦρον περισσότερον τοῦ Β).

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν (Ι) εὑρίσκομεν: $\chi = 70$.

Ἐπομένως θά συναντηθοῦν διά πρώτην φοράν μετά 70 ὥρας.

2)Ἐπειδή παύουσι κινούμενα, ὅταν συναντηθῶσιν διά πρώτην φοράν εἰς τό σημεῖον ἐκκινήσεώς των, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ὡρῶν καθ' ἅς θά εἶναι ἀμφότερα ἐν κινήσει μέχρι τέλους, θά εἶναι τό ἐ.κ.π. των ἀριθμῶν 42 καί Ι05, δηλαδή ὁ ἀριθμός 2Ι0.

Ἑπομένως, θά εἶναι ἀμφότερα ἐν κινήσει μέχρι τέλους ἐπί 2Ι0 ὥρας.

3) Λαμβανομένου ὑπ'ὄψιν ὅτι συναντῶνται κάθε 70 ὥρας καί ὅτι εὑρίσκονται ἐν κινήσει ἐπί 2Ι0 ὥρας, ἕπεται ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν συναντήσεών των εἶναι 2Ι0 : 70 = 3.

4)'Εφ'ὅσον θά εὑρίσκωνται ἀμφότερα ἐν κινήσει ἐπί 2Ι0 ὥρας, θά ἔχουν κάμει τό μέν Α 2Ι0 : 42 = 5 γύρους, τό δέ Β' 2Ι0:Ι05= = 2 γύρους.

33. Δύο ταχυδρόμοι ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καί Β βαίνοντες ὁ μέν ἐκ της Α πρός τήν Β, ὁ δέ ἐκ τῆς Β πρός τήν Α. Μετά τήν συνάντησίν των ἐχρειάσθη ὁ μέν πρῶτος 9 ὥρας διά νά φθάση είς τήν πόλιν Β, ὁ δέ δεύτερος Ι6 ὥρας διά νά φθάση είς τήν πόλιν Α. Ζητεῖται ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων αὐτῶν.

Λύσις.

Α ———————— Γ ———— Β

"Εστω χ ἡ ταχύτης τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Α ἀναχωρήσαντος ταχυδρόμου, ψ ἡ τοῦ ἐκ τῆς πόλεως Β, ω ὁ κοινός χρόνος, ὁ μεσολαβήσας ἀπό της κοινῆς ἀναχωρήσεώς μέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν καί Γ τό σημεῖον συναντήσεώς των.

Προφανῶς εἶναι ΑΓ = ωχ διά τόν α'.
καί ΑΓ = Ι6ψ " " β'.

Ἑπομένως ωχ = Ι6ψ (Ι)

'Επίσης εἶναι ΓΒ = 9χ διά τόν α'.
καί ΓΒ = ωψ " " β'.

Ἑπομένως 9χ = ωψ (2)

Διαιροῦντες τάς (Ι) καί (2) κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{\omega\chi}{9\chi} = \frac{I6\psi}{\omega\psi} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\omega}{9} = \frac{I6}{\omega}, \text{ ἐκ τῆς ὁποίας}$$

$\omega = \pm I2$. Ἡ τιμή $\omega = -I2$ ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική. Θέτοντες είς τήν (Ι) $\omega = I2$, εὑρίσκομεν $I2\chi = I6\psi$, ἐκ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν $\dfrac{\chi}{\psi} = \dfrac{I6}{I2}$ ἤ $\dfrac{\chi}{\psi} = \dfrac{4}{3}$

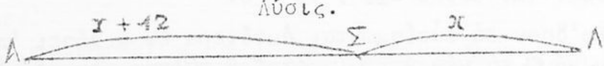
"Αρα ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων αὐτῶν εἶναι $\dfrac{4}{3}$.

"'Αλγεβρικά Προβλήματα κινήσεως!" Γ. Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ.

34. 'Ο Α καί ὁ Β ἀναχωροῦν τήν αὐτήν στιγμήν ὁ εἰς ἐξ 'Αθηνῶν καί ὁ ἕτερος ἐκ Λαρίσσης. Τήν στιγμήν της συναντήσεώς των ὁ Α ἔχει διανύσει I2 χλμ. πλέον τοῦ Β. Βαδίζοντες μετά τῆς ἰδίας αὐτοῦ ταχύτητος ἕκαστος φθάνουν ὁ μέν Α εἰς Λάρισσαν 4 ὥρας καί 40 λεπτά μετά τήν συνάντησίν των καί ὁ Β εἰς 'Αθήνας $7\frac{5}{7}$ ὥρας μετά ταύτην Ζητεῖται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων.

('Ανωτ.'Εμπορ. I946).

Λύσις.



Ἔστω Σ τό σημεῖον συναντήσεως. 'Εάν ΣΛ = χ χλμ. τότε ΑΣ= =χ+I2 χλμ. Ἔστωσαν ἀκόμη ψ καί ψ΄αἱ ταχύτητες αὐτῶν καί ω ὧραι ὁ κοινός χρόνος, ὁ μεσολαβήσας ἀπό τῆς ἀναχωρήσεωςμέχρι τῆς συναντήσεως αὐτῶν.

Προφανῶς εἶναι:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{διάστημα} & \text{ΑΣ} = \psi\omega = 7\frac{5}{7}\cdot\psi' \\ \text{καί} \quad " & \text{ΣΛ} = 4\frac{2}{3}\cdot\psi = \psi'\omega \end{array}\right\} \quad (\text{I})$$

Διαιροῦντες αὐτάς κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{\psi\omega}{4\frac{2}{3}\psi} = \frac{7\frac{5}{7}\psi'}{\psi'\omega} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\omega}{\frac{\text{I}4}{3}} = \frac{\frac{54}{7}}{\omega} \quad \text{ἤ}$$

$$\omega^2 = \frac{\text{I}4}{3}\cdot\frac{54}{7} = 36 \text{ καί } \omega = \pm 6 \text{, ἤτοι } \omega' = 6 \text{ καί } \omega'' = -6.$$

'Η ω΄΄= -6 ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική.

'Εκ τῶν (I) προκύπτει ἤδη:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΑΣ} = \chi+\text{I}2 = 6\psi \\ \text{ΣΛ} = \chi = 4\frac{2}{3}\psi \end{array}\right\}$$

Διαιροῦντες κατά μέλη εὑρίσκομεν:

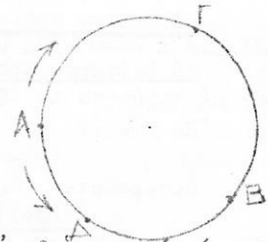
$$\frac{\chi+\text{I}2}{\chi} = \frac{6\psi}{4\frac{2}{3}\psi} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\chi+\text{I}2}{\chi} = \frac{6}{\frac{\text{I}4}{3}}$$

Λύοντες αὐτήν εὑρίσκομεν: χ = 42.

'Επομένως,ἡ ἀπόστασις 'Αθηνῶν-Λαρίσσης εἶναι ΑΛ= χ+I2+χ = = 2.42+I2 = 84+I2 = 96 χλμ.

35. 'Επί όδοῦ κυκλικῆς ἐκ σημείου Α ἀναχωρεῖ τήν πρώτην πρωϊνήν κινητόν βαῖνον κατά φοράν δεξιόστροφον. 'Εκ τοῦ αὐτοῦ σημείου καί ὥραν 8ην πρωϊνήν ἀναχωρεῖ ἕτερον κινητόν βαῖνον κατά φοράν ἀριστερόστροφον, ἤτοι ἀντίθετον τοῦ πρώτου. Τά 2 κινητά κινοῦνται πάντοτε κανονικῶς (μετά τῆς ἰδίας αὐτοῦ ἕκαστον ταχύτητος καί διευθύνσεως) συναντῶνται τήν 5ην μεταμεσημβρινήν καί συνεχίζοντα τούς δρόμους των φθάνουσιν ἀμφότερα τήν αὐτήν στιγμήν εἰς τό σημεῖον ἐκκινήσεως Α. Ζητεῖται ἡ ὥρα ἐπιστροφῆς των εἰς τό σημεῖον Α. ('Ανωτ. 'Εμπορ. I948).

Λύσις.



"Εστωσαν χ καί ψ αἱ ταχύτητες τῶν δύο κινητῶν καί ω ὧραι ὁ κοινός χρόνος ὁ μεσολαβῶν μεταξύ τῆς συναντήσεώς των εἰς τι σημεῖον Β καί τῆς κοινῆς ἀφίξεώς των εἰς τό Α.

Τό α΄ κινητόν διανύει τόν δρόμον ΑΒΓ εἰς I6 ὥρας καί τόν ΒΔΑ εἰς ω ὥρας, τό δέ β΄ κινητόν, διανύει τόν δρόμον ΑΔΒ εἰς 9 ὥρας καί τόν ΒΓΑ εἰς ω ὥρας.

Κατά ταῦτα εἶναι:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{διάστημα ΑΓΒ} & = 16\chi & = \omega\psi \\ \text{καί} \quad \text{" ΒΔΑ} & = \omega\chi & = 9\psi \end{array}\right\} \quad (\text{I})$$

Διαιροῦντες τάς (I) κατά μέλη εὑρίσκομεν:

$$\frac{16\chi}{\omega\chi} = \frac{\omega\psi}{9\psi} \quad \text{ἤ} \quad \frac{16}{\omega} = \frac{\omega}{9} \quad \text{ἤ} \quad \omega^2 = 144$$

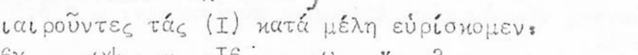
καί $\omega = \pm 12$, ἤτοι $\omega' = 12$ καί $\omega'' = -12$.

'Η $\omega'' = -12$ ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική.

'Επομένως ἐπιστρέφουν εἰς τό Α I2 ὥρας μετά τήν 5ην μεταμεσημβρινήν, δηλ. τήν 5ην πρωϊνήν τῆς ἐπομένης ἡμέρας.

36. Τραῖνον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς πόλεως Α τήν 3 μ.μ. ὥραν καί φθάνει εἰς τήν πόλιν Β τήν 2 μ.μ. της ἐπομένης. "Ετερον τραῖνον ἀναχωρεῖ ἐκ τῆς Α τήν 6 μ.μ. τῆς ἰδίας ἡμέρας ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου καί φθάνει εἰς Β τήν 7 πρωϊνήν ὥραν τῆς ἐπομένης. Ζητεῖται ποίαν ὥραν τό δεύτερον τραῖνον θά συναντήσῃ τό πρῶτον. ('Ανωτ. 'Εμπορ. I954).

Λύσις.



Τό πρῶτον τραῖνον ἐκτελεῖ τήν διαδρομήν μεταξύ τῶν δύο πόλεων εἰς 23 ὥρας καί τό δεύτερον ἐκτελεῖ αὐτήν εἰς I3 ὥρας.

Ἔστω ἤδη ὅτι τό δεύτερον τραῖνον θά συναντήση τό πρῶτον εἴς τι σημεῖον Γ, ω ὥρας μετά τήν 6ην μ.μ. Ἔστω ἀκόμη χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου τραίνου καί ψ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ δευτέρου.

Τό πρῶτον τραῖνον διανύει τήν ἀπόστασιν ΑΓ εἰς ω+3 ὥρας μέ ταχύτητα χ. Ἐπομένως εἶναι ΑΓ = (ω+3)χ (Ι)

Τό δεύτερον τραῖνον διανύει τήν ἀπόστασιν ΑΓ εἰς ω ὥρας μέ ταχύτητα ψ. Ἐπομένως εἶναι ΑΓ = ωψ (2)

Ἐκ τῶν (Ι) καί (2) προκύπτει:

$$(\omega+3)\chi = \omega\psi \quad (3)$$

Τό πρῶτον τραῖνον διανύει τήν ἀπόστασιν ΓΒ εἰς 23-(ω+3)= =23-ω-3 = 20-ω ὥρας μέ ταχύτητα χ. Ἐπομένως ΓΒ=(20-ω)χ (4).

Τό δεύτερον τραῖνον διανύει τήν ἀπόστασιν ΓΒ εἰς Ι3-ω ὥρας μέ ταχύτητα ψ. Ἐπομένως εἶναι ΓΒ = (Ι3-ω)ψ (5)

Ἐκ τῶν (4) καί (5) προκύπτει:

$$(20-\omega)\chi = (13-\omega)\psi \quad (6)$$

Διαιροῦντες τάς (3) καί (6) κατά μέλη ἔχομεν:

$$\frac{(\omega+3)\chi}{(20-\omega)\chi} = \frac{\omega\psi}{(13-\omega)\psi} \quad \text{ἤ}$$

$$\frac{\omega+3}{20-\omega} = \frac{\omega}{13-\omega}$$

Λύοντες τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: ω = 3,9 ὥρ. ἤ 3 ὥρ. 54 λ.

Ἄρα, τό δεύτερον τραῖνον θά συναντήση τό πρῶτον 3 ὥρ. 54 λ. μετά τήν 6 μ.μ., δηλαδή θά τό συναντήση τήν 9 ὥρ. 54λ. μ.μ.

37. Ὁ δρομεύς Α διανύει ὡρισμένην ἀπόστασιν εἰς 4 ὥρας. Ὁ δρομεύς Β διανύει κατά τόν αὐτόν χρόνον 8 χιλιόμετρα περισσότερα τοῦ Α. Χρειάζεται δέ ὁ Β 42 πρῶτα λεπτά ὀλιγώτερα τοῦ πρώτου διά νά διανύση 28 χιλιόμετρα. Ζητεῖται τό διανυθέν παρά τοῦ Α διάστημα εἰς 4 ὥρας καί ἡ ταχύτης ἑκάστου δρομέως.

(Ἀνωτ. Ἐμπορ. Ι947)

Λύσις.

Ἔστω χ χλμ. τό παρά τοῦ Α διανυθέν διάστημα εἰς 4 ὥρας. Τότε χ+8 χλμ. θά εἶναι τό παρά τοῦ Β διανυθέν διάστημα εἰς τόν αὐτόν χρόνον καί αἱ ταχύτητες αὐτῶν θά εἶναι ἀντιστοίχως

$\frac{\chi}{4}$ καί $\frac{\chi+8}{4}$.

Ὁ Α διανύει τά 28 χλμ. εἰς $\frac{28}{\frac{\chi}{4}} = \frac{112}{\chi}$ ὥρας καί ὁ Β διανύει αὐτά εἰς $\frac{28}{\frac{\chi+8}{4}} = \frac{112}{\chi+8}$ ὥρας, ἐπειδή δέ οἱ χρόνοι αὐτοί διαφέρουν κατά 42 πρῶτα λεπτά ἤ $\frac{42}{60}$ τῆς ὥρας, ἕπεται ὅτι:

$$\frac{112}{\chi} - \frac{112}{\chi+8} = \frac{42}{60}$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν· $\chi' = 32$ καί $\chi'' = -40$.
Ἡ $\chi'' = -40$ ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική.
Ἐπομένως, τό παρά τοῦ Α διανυθέν διάστημα εἰς 4 ὥρας εἶναι 32 χλμ. καί ἡ ταχύτης αὐτοῦ 32:4=8 χλμ. καθ'ὥραν, ἡ δέ ταχύτης τοῦ Β εἶναι 40:4 = 10 χλμ. καθ'ὥραν.

38. <u>Ταξειδιώτης ὁ ὁποῖος διήνυσε 56 χλμ. σιδηροδρομικῶς</u> καί τό ὑπόλοιπον τοῦ ταξειδίου του μέ <u>ἅμαξαν</u> παρετήρησεν, ὅτι μέ τό τραῖνον εἶχε κάμει τό τέταρτον του ταξειδίου του εἰς τόν αὐτόν χρόνον πού ἐχρειάζετο ἡ ἅμαξα νά διανύση 5 χλμ. καί ὅτι τήν στιγμήν πού ἔφθασε εἰς τήν οἰκίαν του, τό τραῖνον εἶχε ἀπομακρυνθῆ 35 χλμ. ἀπό ἐκεῖ. Νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων τοῦ τραίνου καί τῆς ἁμάξης.

Λύσις.

Α 56 Β φ Γ 35 Δ

Ἔστω χ χλμ. καθ'ὥραν ἡ ταχύτης τοῦ τραίνου καί ψ χλμ. καθ' ὥραν ἡ ταχύτης τῆς ἁμάξης.
Ζητεῖται ὁ λόγος $\frac{\chi}{\psi}$ τῶν ταχυτήτων τοῦ τραίνου καί τῆς ἁμάξης.
Ἄν φ χλμ. εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς οἰκίας του Γ ἀπό τοῦ σταθμοῦ Β, εἰς τόν ὁποῖον κατῆλθεν ἐκ τοῦ τραίνου, τότε τό ταξείδιον του εἶναι 56+φ χλμ. καί τό τέταρτον αὐτοῦ $\frac{56+\varphi}{4}$ χλμ. τό διήνυσεν δέ μέ τό τραῖνον εἰς $\frac{\frac{56+\varphi}{4}}{\chi}$ ἤ $\frac{56+\varphi}{4\chi}$ ὥρας. Ὁ χρόνος ὅμως οὗτος εἶναι ἴσος μέ τόν χρόνον $\frac{5}{\psi}$ ὥρας, εἰς τόν ὁποῖον διανύει τά 5 χλμ. μέ τήν ἅμαξαν. Ὅθεν:

$$\frac{56+\varphi}{4\chi} = \frac{5}{\psi} \quad ἤ \quad \frac{56+\varphi}{20} = \frac{\chi}{\psi} \qquad (1)$$

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι τά φ χλμ. τά διανύει μέ τήν ἅμαξαν εἰς $\frac{\varphi}{\psi}$ ὥρας κατά τόν αὐτόν δέ χρόνον τό τραῖνον διανύει φ+35 χλμ. εἰς $\frac{\varphi+35}{\chi}$ ὥρας, ὅθεν

$$\frac{\varphi+35}{\chi} = \frac{\varphi}{\psi} \quad ἤ \quad \frac{\varphi+35}{\varphi} = \frac{\chi}{\psi} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (I) καί (2) προκύπτει

$$\frac{56+\varphi}{20} = \frac{\varphi+35}{\varphi} \quad ἤ \quad 56\varphi+\varphi^2 = 20\varphi+700 \quad ἤ \quad \varphi^2+36\varphi-700 = 0.$$

Λύοντες αὐτήν εὑρίσκομεν:
$\varphi' =$ I4 χλμ. καί $\varphi'' = -50$ χλμ. Ἡ $\varphi'' = -50$ ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική.

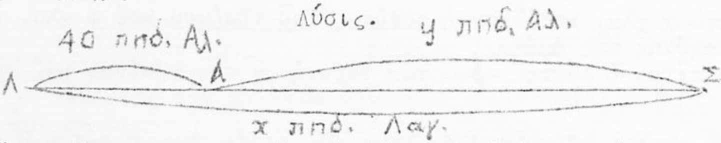
Τήν τιμήν $\varphi =$I4 χλμ. θέτομεν εἰς τήν (I) καί εὑρίσκομεν:

$$\frac{\chi}{\psi} = \frac{56+I4}{20} = \frac{70}{20} = \frac{7}{2}$$

Ἐπομένως, ὁ λόγος τῶν ταχυτήτων τοῦ τραίνου καί τῆς ἁμάξης εἶναι $\frac{7}{2}$.

39. Ἀλώπηξ εἶχε κάμει 40 πηδήματα, ὅταν λαγωνικόν ἤρχισε νά διώκη αὐτήν. Γενομένης παρατηρήσεως, εὑρέθη, ὅτι 6 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ I3 τῆς ἀλώπεκος καί ὅτι καθ᾽ ὅν χρόνον τό λαγωνικόν κάμνει ὅσα πηδήματα καί ἡ ἀλώπηξ, αὐτη κάμνει 45 πηδήματα ἐπί πλέον. Νά εὑρεθῆ μετά πόσα πηδήματα τό λαγωνικόν θά φθάση τήν ἀλώπεκα.

Λύσις.



Ἔστω ὅτι τό λαγωνικόν θά φθάση τήν ἀλώπεκα εἴς τι σημεῖον Σ μετά χ πηδήματα καί ὅτι κατά τόν αὐτόν χρόνον ἡ ἀλώπηξ θά κάμη ψ πηδήματα, ὁπότε $ΛΣ = 40+\psi$. Ἐπειδή 6 πηδήματα τοῦ λαγωνικοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ I3 τῆς ἀλώπεκος, τό I θά ἰσοδυναμῆ μέ $\frac{I3}{6}$ καί τά χ πηδήματα αὐτοῦ μέ $\frac{I3\chi}{6}$ πηδήματα ἀλώπεκος. Λαμβανομένου ὑπ᾽ ὄψιν ὅτι ἑκάστη τῶν παραστάσεων $\frac{I3\chi}{6}$ καί $\psi+40$ παριστᾶ τήν ἀπόστασιν ΛΣ εἰς πηδήματα ἀλώπεκος, ἔπεται ὅτι: $\frac{I3\chi}{6} = \psi+40$ (I)

Ἤδη παρατηροῦμεν, ὅτι καθ᾽ ὅν χρόνον τό λαγωνικόν κάμνει χ πηδήματα ἡ ἀλώπηξ κάμνει ψ, ἑπομένως, ὅταν αὐτό κάμνη I, ἡ ἀλώπηξ θά κάμη $\frac{\psi}{\chi}$ καί ὅταν τό λαγωνικόν κάμη ψ πηδήματα, αὐτη θά κάμη $\frac{\psi}{\chi}\cdot\psi$ ἤ $\frac{\psi^2}{\chi}$. Ἐπειδή, ὅμως ἡ ἀλώπηξ κάμνει τότε 45 πηδήματα ἐπί πλέον τοῦ λαγωνικοῦ, ἔπεται ὅτι

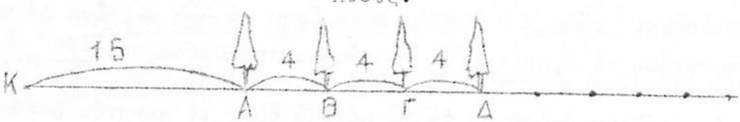
$$\frac{\psi^2}{\chi} = \psi+45 \qquad (2)$$

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (I) καί (2) εὑρίσκομεν: $\chi = 60$ καί $\psi = 90$.

Ἄρα, τό λαγωνικόν θά κάμη 60 πηδήματα μέχρις ὅτου φθάση τήν ἀλώπεκα.

40. <u>Κηπουρός ἔχει νά ποτίση</u> I2 δένδρα μιᾶς δενδροστοιχίας ἀπέχοντα ἀπ' ἀλλήλων 4 μέτρα. Πρός τοῦτο λαμβάνει τό ἀναγκαῖον ὕδωρ δι' ἕκαστον δένδρον ἔκ τινος κρουνοῦ εὑρισκομένου ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας, ἐπί τῆς ὁποίας εὑρίσκεται καί ἡ δενδροστοιχία καί εἰς ἀπόστασιν I5 μέτρων ἀπό τοῦ α΄ δένδρου. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ, πόσα μέτρα θά διανύση ὁ κηπουρός, ὅπως ρίψη ἀνά ἕν δοχεῖον ὕδατος εἰς ἕκαστον δένδρον καί ἐπαναφέρη τό δοχεῖον παρά τόν κρουνόν.

Λύσις.



Ἵνα ὁ κηπουρός ποτίση τό α΄δένδρον καί ἐπαναφέρη τό δοχεῖον εἰς τόν κρουνόν, θά διανύση διάστημα I5+I5 = 30 μέτρων. Ἵνα ποτίση τό β΄δένδρον καί ἐπαναφέρη τό δοχεῖον εἰς τόν κρουνόν, θά διανύση διάστημα (I5+4)+ (4+I5) = I9+I9 = 38 μέτρων. Ἵνα ποτίση τό γ΄ δένδρον καί ἐπαναφέρη τό δοχεῖον εἰς τόν κρουνόν, θά διανύση διάστημα (I5+4+4)+(4+4+I5) = 23+23 = 46 μέτρων κ.ο.κ.

Οὕτω ὁ κηπουρός θά διανύση

30+38+46 . . . . . . μέτρα

Ἀλλ' οἱ προσθετέοι τοῦ ἀνωτέρω ἀθροίσματος ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον μέ πρῶτον ὅρον α = 30, λόγον ω = 38-30=8 καί πλῆθος ν = I2.

Ἐφαρμόζοντες τόν τύπον τοῦ ἀθροίσματος

$$\Sigma = \frac{2\alpha + (\nu - I)\,\omega}{2} \cdot \nu$$

εὑρίσκομεν: $\Sigma = \frac{2.30+(I2-I).8}{2} . I2 =$

$$= \frac{60+II.8}{2} . I2 = \frac{60+88}{2} . I2 = \frac{I48}{2} . I2 = 74 . I2 = 888$$

Ἄρα, ὁ κηπουρός θά διανύση 888 μέτρα, ὅπως ρίψη ἀνά ἕν δοχεῖον ὕδατος εἰς ἕκαστον δένδρον καί ἐπαναφέρη τό δοχεῖον παρά τόν κρουνόν.

41. Δύο κινητά Α καί Β κινοῦνται ἐπί τῆς αὐτῆς ὁδοῦ. καί κατά τήν αὐτήν φοράν. Τό κινητόν Α εὑρίσκεται 360 μέτρα ὄπισθεν του Β, ἀλλά κινεῖται μέ διπλασίαν ταχύτητα ἐκείνου. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι τό κινητόν Α, διά νά συναντήση τό Β, πρέπει νά διανύση ἕνα διάστημα ἴσον μέ τό ἄθροισμα $360+\frac{360}{2}+\frac{360}{4}+\ldots\ldots$ καί νά ὑπολογισθῆ τό διάστημα τοῦτο.

Λύσις.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἵνα τό κινητόν Α συναντήση τό Β, πρέπει προηγουμένως νά διανύση τήν ἀπόστασιν, ἡ ὁποία τό χωρίζει ἀπ'αὐτό, δηλαδή τά 360 μ.

Ἀλλά καθ'ὅν χρόνον τό κινητόν Α διανύει τά 360 μ., τό Β, ἔχον ταχύτητα ἴσην μέ τό $\frac{1}{2}$ τῆς τοῦ Α, διανύει $\frac{360}{2}$ μ. Οὕτω τό κινητόν Β ἀπέχει ἤδη τοῦ Α ἀπόστασιν ἴσην μέ $\frac{360}{2}$ μ., ἵνα δέ τό τό Α συναντήση τό Β, πρέπει νά διανύση προηγουμένως τά $\frac{360}{2}$ μ., τά ὁποῖα τό χωρίζουν ἀπ'αὐτό, ἐν τῷ μεταξύ ὅμως τό κινητόν Β θά ἔχη προχωρήσει $\frac{360}{4}$ μ. κ.ο.κ.

Ὥστε, ἵνα τό κινητόν Α συναντήση τό Β, πρέπει νά διανύση ἕνα διάστημα ἴσον μέ τό ἄθροισμα

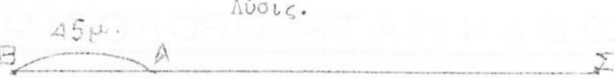
$$360+\frac{360}{2}+\frac{360}{4}+\ldots\ldots$$

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος αὐτοῦ ἀποτελοῦν φθίνουσαν γεωμετρικήν πρόοδον μέ ἀπείρους ὅρους, ἔχουσαν πρῶτον ὅρον τόν 360 καί λόγον τόν $\frac{1}{2}$, βάσει δέ τοῦ γνωστοῦ τύπου $\Sigma=\frac{\alpha}{1-\omega}$ ἔχομεν $\Sigma=\frac{360}{1-\frac{1}{2}}=\frac{360}{\frac{1}{2}}=720$.

Ἄρα, τό διάστημα τοῦτο εἶναι 720 μ.

42. Δύο κινητά Α καί Β κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς ὁδοῦ καί ἀρχίζουν κινούμενα συγχρόνως κατά τήν ἐκ τοῦ Β πρός τό Α φοράν. Ἡ ἀπόστασις αὐτῶν εἶναι 45 μέτρα. Τό κινητόν Α διανύει 1 μ. κατά τό πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του, 2μ. κατά τό δεύτερον, 3μ. κατά τό τρίτον κ.ο.κ. Τό κινητόν Β διανύει 1 μ. κατά τό πρῶτον δευτερόλεπτον τῆς κινήσεώς του, 3μ. κατά τό δεύτερον, 5μ. κατά τό τρίτον κ.οκ. Νά εὑρεθῆ μετά πόσα δευτερόλεπτα τό κινητόν Β θά φθάση τό Α.

Λύσις.



"Εστω ὅτι μετά χ δευτερόλεπτα τό κινητόν Β θά φθάση τό Α εἴς τι σημεῖον Σ.

Κατά τήν στιγμήν τῆς συαντήσεώς των τό κινητόν Α θά ἔχη διανύσει διάστημα ΑΣ = Ι+2+3 + ... καί τό Β διάστημα ΒΣ =Ι+3+ 5 + ..

Οἱ προσθετέοι τοῦ πρώτου ἀθροίσματος ἀποτελοῦν ἀριθμητικήν πρόοδον μέ πρῶτον ὅρον α = Ι, λόγον ω = Ι καί πλῆθος ὅρων ν = χ, διότι μετά χ δευτερόλεπτα θά γίνη ἡ συνάντησις.

'Εφαρμόζοντες τόν γνωστόν τύπον $\Sigma = \frac{2\alpha+(\nu-I)\omega}{2}\nu$ εὑρίσκομεν $\Sigma = \frac{2.I+(\chi-I).I}{2}.\chi = \frac{2+\chi-I}{2}\chi = \frac{I+\chi}{2}.\chi = \frac{\chi+\chi^2}{2}$ ἤ ΑΣ $= \frac{\chi+\chi^2}{2}$ (Ι)

'Εργαζόμενοι ὁμοίως καί διά τό δεύτερον ἄθροισμα εὑρίσκομεν: $\Sigma = \frac{2.I+(\chi-I).2}{2}\chi = \frac{2+2\chi-2}{2}.\chi = \frac{2\chi}{2}.\chi = \chi^2$ ἤ

ΒΣ $= \chi^2$ (2)

'Αλλ'ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΒΣ-ΑΣ = 45 καί ἕνεκα τῶν (Ι) καί (2) ἔχομεν.

$$\chi^2 - \frac{\chi+\chi^2}{2} = 45$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν : χ = Ι0 καί χ = -9(ἀπορρίπτεται ὡς ἀρνητική).

"Αρα, τό κινητόν Β θά φθάση τό Α μετά Ι0 δευτερόλεπτα ἀπό τῆς ἐκκινήσεώς των.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΩΡΟΛΟΓΙΩΝ

'Ως γνωστόν, ἡ περιφέρεια τῆς πλακός παντός ὡρολογίου εἶναι διῃρημένη εἰς 60 ἴσα μέρη (τόξα), ἕκαστον τῶν ὁποίων διανύεται ὑπό τοῦ λεπτοδείκτου εἰς Ι πρῶτον λεπτόν τῆς ὥρας.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι, ὅταν ὁ λεπτοδείκτης κάμνῃ ἕνα γῦρον, ὁπότε διανύει διάστημα 60 διαιρέσεων, ὁ ὡροδείκτης διανύει διάστημα 5 διαιρέσεων καί ἐπομένως ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ ὡροδείκτου εἶναι Ι2 φοράς μικροτέρα τῆς τοῦ λεπτοδείκτου.

Παρατηροῦμεν ἐπίσης, ὅτι, ὅταν ὁ δευτερολεπτοδείκτης κάμνῃ ἕνα γῦρον, ὁπότε διανύει διάστημα 60 διαιρέσεων, ὁ λεπτοδείκτης διανύει διάστημα Ι διαιρέσεως καί ἐπομένως ἡ ταχύτης περιστροφῆς τοῦ δευτερολεπτοδείκτου εἶναι 60 φοράς μεγαλυτέρα τῆς τοῦ λεπτοδείκτου.

Κατά ταῦτα, ὅταν λέγωμεν, ὅτι ἕνα γεγονός συμβαίνει μετά χ λεπτά τῆς ὥρας, θά ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν μας, ὅτι ὁ λεπτοδείκτης τοῦ ὡρολογίου θά ἔχῃ διανύσει διάστημα χ διαιρέσεων, ὁ ὡροδείκτης διάστημα $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων καί ὁ δευτερολεπτοδείκτης διάστημα 60χ διαιρέσεων.

---

43. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν θά συναντήσῃ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν;

Λύσις.

Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῇ μέτα χ λεπτά. Τότε ὁ μέν λεπτοδείκτης θά ἔχῃ διανύσει διάστημα χ διαιρέσεων, ὁ δέ ὡροδείκτης διάστημα $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων. Ἐπειδή δέ ὁ λεπτοδείκτης πρέπει νά διατρέξῃ μίαν περιφέρειαν ἐπί πλέον, διά νά συναντήσῃ τόν ὡροδείκτην, ἕπεται ὅτι ὁ λεπτοδείκτης θά διανύσῃ 60 διαιρέσεις περισσοτέρας τοῦ ὡροδείκτου.

Ἐπομένως $\chi - \frac{\chi}{12} = 60.$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 65\frac{5}{11}$ λ. ἤ Ιω καί $5\frac{5}{11}$ λ.

Ἄρα ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν θά συναντήσῃ τόνδείκτην τῶν ὡρῶν μετά Ιω καί $5\frac{5}{11}$ λ.

44. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά συναντήσῃ τόν δείκτην τῶν πρώτων λεπτῶν;

Λύσις.

Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά.

Τότε, ὁ μέν λεπτοδείκτης θά ἔχῃ διανύσει διάστημα χ διαιρέσεων, ὁ δέ δευτερολεπτοδείκτης διάστημα 60χ διαιρέσεων. Ἐπειδή δέ ὁ δευτερολεπτοδείτης πρέπει νά διατρέξῃ μίαν περιφέρειαν ἐπί πλέον, διά νά συναντήσῃ τόν λεπτοδείκτην, ἕπεται ὅτι ὁ δευτερολεπτοδείκτης θά διανύσῃ 60 διαιρέσεις περισσοτέρας τοῦ λεπτοδείκτου.

Ἑπομένως. $60\chi - \chi = 60$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 1\frac{1}{59}$ λ.

Ἄρα, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά συναντήσῃ τόν δείκτην τῶνπρώτων λεπτῶν μετά $1\frac{1}{59}$ τοῦ λεπτοῦ.

45. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά συναντήσῃ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν;

Λύσις.

Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά. Τότε ὁ μέν δευτερολεπτοδείκτης θά ἔχῃ διανύει διάστημα 60χ διαιρέσεων, ὁ δέ ὡροδείκτης διάστημα $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων. Ἐπειδή δέ ὁ δευτερολεπτοδείκτης πρέπει νά διατρέξῃ μίαν περιφέρειαν ἐπί πλέον διά νά συναντήσῃ τόν ὡροδείκτην, ἕπεται ὅτι ὁ δευτερολεπτοδείκτης, θά διανύσῃ 60 διαιρέσεις περισσοτέρας τοῦ ὡροδείκτου.

Ἑπομένως.

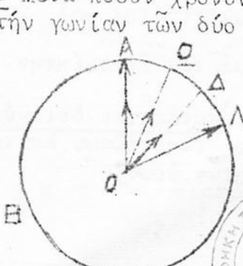
$$60\chi - \frac{\chi}{12} = 60$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = 1\frac{1}{719}$ λ.

Ἄρα, ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά συναντήσῃ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν μετά $1\frac{1}{719}$ τοῦ λεπτοῦ.

46. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά διχοτομήσῃ τήν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν;

Λύσις



Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά. Ἔστωσαν ἀκόμη ΟΩ, ΟΛ, ΟΔ αἱ θέσεις τοῦ ὡροδείκτου, τοῦ λεπτοδείκτου καί τοῦ δευτερολεπτοδείκτου ἀντιστοίχως.

Τότε ὁ ὡροδείκτης θά ἔχῃ διανύσει τόξον ΑΩ = $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων, ὁ λεπτοδείκτης τόξον ΑΛ=χ διαιρέσεων καί ὁ δευτερολεπτοδείκτης τόξον ΑΔΒΑΔ = 60χ διαιρέσεων, ὁπότε τόξον ΑΔ = 60χ - 60 διαιρέσεις.

'Αλλ'εἶναι τόξον ΑΔ = τόξον ΑΩ+τόξον ΩΔ
καί " ΑΔ = " ΑΛ- " ΔΛ

Προσθέτομεν κατά μέλη καί ἔχομεν:

2 τόξον ΑΔ = τόξον ΑΩ+ τόξον ΑΛ

'Αντικαθιστῶμεν τά τόξα διά τῶν ἴσων των καί λαμβάνομεν.

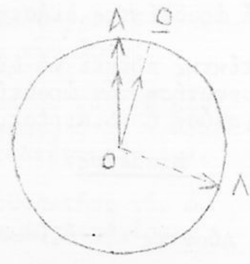
$$2(60\chi-60) = \frac{\chi}{12} + \chi$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν $\chi = 1\frac{13}{1427}$ λ.

"Αρα,ὁ δείκτης τῶν δευτερολέπτων θά διχοτομήση τήν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων δεικτῶν μετά $1\frac{13}{1427}$ τοῦ λεπτοῦ.

47. Ὡρολόγιον δεικνύει μεσημβρίαν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν σχηματίζει ὀρθήν γωνίαν μέ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν;

Λύσις.



"Εστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά. Τότε ὁ μέν λεπτοδείκτης θά ἔχη διανύσει διάστημα ΑΛ = χ διαιρέσεων, ὁ δέ ὡροδείκτης διάστημα ΑΩ = $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων.

'Επειδή δέ ΑΛ-ΑΩ=ΩΛ = 15 διαιρέσεις, ἕπεται ὅτι

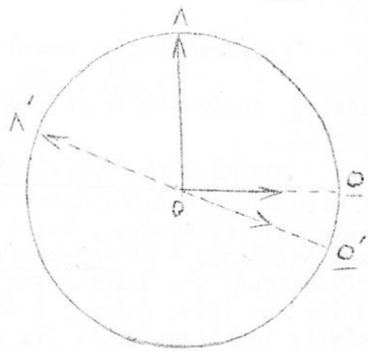
$$\chi - \frac{\chi}{12} = 15$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 16\frac{4}{11}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ ἤ 16 λ $21\frac{9}{11}$ δ.

"Αρα,μετά 16λ καί $21\frac{9}{11}$ δ ὁ λεπτοδείτκης σχηματίζει ὀρθήν γωνίαν μέ τόν ὡροδείκτην.

48. Ὡρολόγιον δεικνύει ὥραν 3ην πρωϊνήν. Κατά ποίαν ὥραν ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτων θά εὑρίσκεται εἰς τήν προέκτασιν τοῦ δείκτου τῶν ὡρῶν;

Λύσις



Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά.

Τότε ὁ μέν λεπτοδείκτης θά ἔχῃ διανύσει διάστημα ΛΩΛ΄= χ διαιρέσεων, ὁ δέ ὡροδείκτης διάστημα ΩΩ΄= $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων.

Ἐπειδή δέ ΛΩΛ΄- ΩΩ΄= ΛΩ+Ω΄Λ΄= 15 + 30 = 45 διαιρέσεις, ἕπεται ὅτι

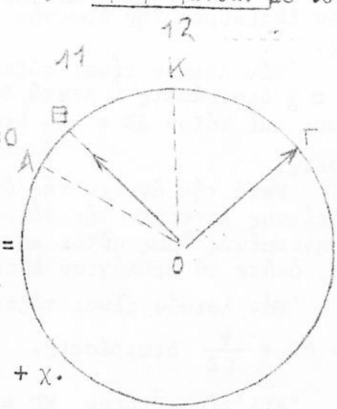
$$\chi - \frac{\chi}{12} = 45$$

Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 49\frac{1}{11}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ ἤ 49 π καί $5\frac{5}{11}$ δ.

Ἄρα, ὁ λεπτοδείκτης θά εὑρίσκεται εἰς τήν προέκτασιν τοῦ ὡροδείκτου τήν 3ω 49π $5\frac{5}{11}$ δ πρωϊνήν.

49. Ὡρολόγιον δεικνύει ὥραν 10ην πρωϊνήν. Μετά πόσον χρόνον ὁ δείκτης των πρώτων λεπτῶν σχηματίζει ὀρθήν γωνίαν μέ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν;

Λύσις.



Ἔστω ὅτι τό ζητούμενον θά συμβῆ μετά χ λεπτά ἀπό τῆς 10ης πρωϊνῆς. Τότε ὁ μέν λεπτοδείκτης θά ἔχῃ διανύσει διάστημα ΚΓ = χ διαιρέσεων, ὁ δέ ὡροδείκτης διάστημα ΑΒ = $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων.

Κατά ταῦτα θά εἶναι διάστημα ΒΚ = = ΑΚ-ΑΒ = $10 - \frac{\chi}{12}$ διαιρέσεων καί διάστημα ΒΚΓ = 15 διαιρέσεων (1).

Ἀλλ'εἶναι ΒΚΓ = ΒΚ+ΚΓ = $10 - \frac{\chi}{12} + \chi$.

Οὕτω ἡ (1) γίνεται:

$$10 - \frac{\chi}{12} + \chi = 15$$

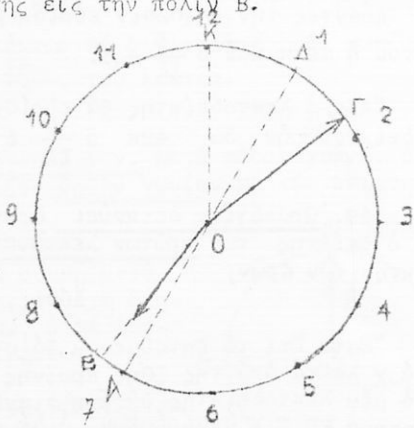
Λύοντες τήν ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $\chi = 5\frac{5}{11}$ διαιρέσεις ἤ λεπτά.

"Ἀλγεβρικά Προβλήματα κινήσεως" Γ.Π.ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ

"Αρα μετά $5\frac{5}{11}$ λεπτά ὁ δείκτης τῶν πρώτων λεπτῶν θά σχηματίζῃ ὀρθήν γωνίαν μέ τόν δείκτην τῶν ὡρῶν.

50. Κατά τήν πρωϊνήν ἀναχώρησιν ἀτμαμάξης ἐκ τινος πόλεως Α διευθυνομένης πρός ἄλλην Β, ὁ ὁδηγός αὐτῆς παρατηρῶν τό ὡρολόγιόν του διαπιστώνει, ὅτι ὁ μέν ὡροδείκτης εὑρίσκεται μεταξύ 7ης καί 8ης ὥρας, ὁ δέ λεπτοδείκτης μεταξύ Ιης καί 2ας ὥρας. Κατά τήν στιγμήν τῆς ἀφίξεως της ἀτμαμάξης εἰς τήν πόλιν Β μετά μεσημβρίαν τῆς ἰδίας ἡμέρας ὁ ὁδηγός αὐτῆς, παρατηρῶν ἐκ νέου τό ὡρολόγιόν του, διαπιστώνει ὅτι οἱ δεῖκται ἐνήλλαξαν ἀκριβῶς θέσιν. Νά εὑρεθοῦν: Ι) Ἡ ὥρα τῆς ἀναχωρήσεως τῆς ἀτμαμάξης ἐκ τῆς πόλεως Α καί 2) Ἡ ὥρα ἀφίξεως αὐτῆς εἰς τήν πόλιν Β.

Λύσις.



Κατά τήν πρωϊνήν ἀναχώρησιν τῆς ἀτμαμάξης, ἔστω ὅτι ὁ μέν ὡροδείκτης κατεῖχεν τήν θέσιν ΟΒ, ὁ δέ λεπτοδείκτης τήν θέσιν ΟΓ. Προηγουμένως ὅμως οὗτοι κατεῖχον τάς θέσεις ΟΑ καί ΟΚ ἀντιστοίχως, ὁπότε τό ὡρολόγιον ἐδείκνυεν 7ην πρωϊνήν ἀκριβῶς.

Ἐάν λοιπόν εἶναι τόξον ΚΓ = χ διαιρέσεις ἤ λεπτά θά εἶναι καί τόξον ΑΒ = $\frac{\chi}{12}$ διαιρέσεις.

Κατά τήν ἄφιξιν τῆς ἀτμαμάξης εἰς τήν πόλιν Β, ὁ μέν ὡροδείκτης κατεῖχεν τήν θέσιν ΟΓ, ὁ δέ λεπτοδείκτης τήν θέσιν ΟΒ. Προηγουμένως ὅμως οὗτοι κατεῖχον τάς θέσεις ΟΔ καί ΟΚ ἀντιστοίχως, ὁπότε τό ὡρολόγιον ἐδείκνυεν Ιην μ.μ. ἀκριβῶς.

Ἐάν λοιπόν εἶναι τόξον ΚΓΒ = ψ διαιρέσεις, θά εἶναι καί τόξον ΔΓ = $\frac{\psi}{12}$ διαιρέσεις.

Ἀλλ' εἶναι τόξον ΚΓ = τόξον ΚΔ+τόξον ΔΓ ἤ

$\chi = 5 + \frac{\psi}{12}$ (Ι), διότι τόξον ΚΔ = 5 διαιρέσεις

Ἐπίσης εἶναι τόξον ΚΓΒ = τόξον ΚΓΑ+τόξον ΑΒ ἤ

$\psi = 35 + \frac{\chi}{\cancel{35}\ 12}$ (2), διότι τόξον ΚΓΑ = 35 διαιρέσεις.

Λύοντες τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων (Ι) καί (2) εὑρίσκομεν:

$$\chi = 7\ \frac{139}{143}\ \text{λεπτά καί}\ \psi = 35\ \frac{95}{143}\ \text{λεπτά.}$$

Ἄρα ἡ ἁτμάμαξα ἀνεχώρησεν ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τάς 7 ὥρ. $7\ \frac{139}{143}$ λεπτ. τήν πρωΐαν καί ἔφθασεν εἰς τήν πόλιν Β εἰς τάς Ι ὥρ. $35\ \frac{95}{143}$ λεπτ. μ.μ.

ΠΙΝΑΞ ΔΙΟΡΘΩΤΕΩΝ

Σελίς	Στίχος.	
30	Ιος έκ τῶν κατω άντί	$\chi + 12 + X = 2.42 + 12$
	γράφε	$\chi + 12 + \chi = 2\chi + 12 = 2.42 + 12$

ΥΠΟΨΗΦΙΟΙ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Φέρομεν εἰς γνῶσιν ὑμῶν ὅτι ἀπό τοῦ προσεχοῦς 'Ακαδημαϊκοῦ Ἔτους 1956-57 θέλουσι κυκλοφορήσει τά κάτωθι βιβλία ἡμῶν γραμμένα κατά τρόπον βοηθοῦντα ἀποτελεσματικῶς τούς ὑποψηφίους τῶν διαφόρων Σχολῶν καί 'Οργανισμῶν, κυρίως δέ τούς ὑποψηφίους τῶν Στρατιωτικῶν Σχολῶν.

---

1. Γεωγραφία 'Ελλάδος καί λοιπῶν χωρῶν τῆς χερσονήσου τοῦ Αἵμου (Βαλκανικῆς).
2. Μαθηματική Γεωγραφία.
3. Πνευματικαί 'Ασκήσεις (Τέστ).

Διεύθυνσις συγγραφέως

Γεώργιος Π. Μπακοῦρος
Καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν
τῆς Μέσης 'Εκπαιδεύσεως
'Οδός Γριβαίων 7
(πάροδος Σκουφᾶ 64)
'Αθῆναι

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1. **Ὁ Ἀθλητισμός καὶ ἡ συμβολή του εἰς τὴν ἀνάπτυξιν τῶν διεθνῶν σχέσεων** (16σέλιδος μελέτη.—Ἔκδ. 1948).
2. **Σημειώσεις Γεωμετρίας**
3. **Περὶ Ριζῶν** (Τετραγωνικὴ καὶ κυβικὴ ρίζα).
4. **Θεωρία ἐπὶ τῶν Λογαρίθμων** (Ἀναλυτικὴ ἀνάπτυξις τῆς χρήσεως τῶν Λογαρίθμων μετὰ παραδειγμάτων.— Πρότυπον εἰς τὸ εἶδος του).
5. **Ἄλγεβρα** (Ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς Μέσης Ἐκπαιδεύσεως καὶ τοὺς ὑποψηφίους Ἀνωτάτων Σχολῶν).
6. **Πρακτικὴ Ἀριθμητικὴ** (Ἐκτὸς τῆς γενικῆς χρήσεως, ἀποτελεῖ καὶ εἰδικὸν βοήθημα διὰ τοὺς ὑποψηφίους Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν, Τραπεζῶν, καὶ Ἀνωτ. Ἐμπορικῆς).
7. **Ὑφαίρεσις** (Ἀναλυτικὴ θεωρία ἐπὶ τῆς ὑφαιρέσεως, μετὰ παραδειγμάτων καὶ προβλημάτων.— Χρησιμώτατον βιβλίον διὰ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Παιδαγωγικῶν Ἀκαδημιῶν καὶ τοὺς κ. κ. Δημοδιδασκάλους).
8. **Συλλογὴ προβλημάτων Πρακτικῆς Ἀριθμητικῆς.**
9. **Ἀλγεβρικὰ προβλήματα κινήσεως.** (Βιβλίον χρησιμώτατον διὰ τοὺς ὑποψηφίους ὅλων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν).

ΠΩΛΟΥΝΤΑΙ ΕΙΣ ΟΛΑ ΤΑ ΚΕΝΤΡΙΚΑ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ