

**002
ΚΛΣ
ΣΤ2Β
2591**

Δ 2 mm
Δ 2 mm
Κανέλλος (Σπυρίδων 5)

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ
Β' ΕΚΔΟΣΙΣ

16
ΥΠΟ
ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ



ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ
ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ
ΡΟΥΣΒΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56 - ΑΘΗΝΑΙ

ΑΘΗΝΑΙ 1958

Δ

2

mm1

Κανέλλος (Σπυρίδων Γ.)

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

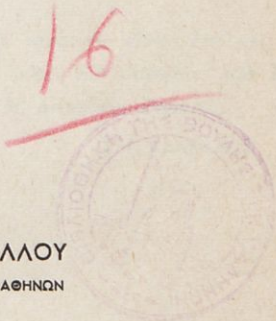
ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ

Β' ΕΚΔΟΣΙΣ

ΥΠΟ

ΣΠΥΡΙΔΩΝΟΣ Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΥ

ΥΦΗΓΗΤΟΥ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ ΑΘΗΝΩΝ



Καταχωρήθη ἐν τῇ βιβλίῳ τῶν προμηθευτῶν
ἐπ' αὐτῇ ἀρ.τ. 162 τοῦ 1964

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ

ΧΑΡΙΔΗΜΟΥ Ι. ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΡΟΥΣΣΕΛΤ (ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ) 56 - ΑΘΗΝΑΙ

ΑΘΗΝΑΙ 1958

002
ΕΛΣ
ΕΤ2Β
289/

*Απαγορεύεται η ανατύπωση οποιουδήποτε τμήματος του παρόντος βιβλίου
άνευ της έγγραφου άδειας του συγγραφέως.



ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Μὲ τὸν Β' τόμον «Μαθημάτων Ἀλγέβρας» συμπληροῦται ἡ ὕλη τῆς Ἀλγέβρας ἢ ὁποία εἶναι ἀπαιτητὴ κατὰ τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν.

Πάντα τὰ ἐξεταζόμενα θέματα ἔχουν συμπεριληφθῇ· ἔχουν δὲ σημειωθῇ δι' ἀστερίσκου ὅσα ἐνδιαφέρουν μόνον τοὺς ὑποψηφίους Μαθηματικούς καὶ Μηχανικούς καθὼς καὶ μερικὰ ἄλλα δυνάμενα ἐνδεχομένως νὰ παραλειφθοῦν.

Αἱ ἀπαντήσεις τῶν προτεινομένων ἀσκήσεων ἀναγράφονται εἰς τὸ τέλος τοῦ βιβλίου.

Ἐν γένει, κατεβλήθη φροντίς, ὥστε οἱ δύο τόμοι νὰ εἶναι ἐπαρκεῖς διὰ πλήρη κατάρτισιν εἰς τὸ μάθημα τῆς Ἀλγέβρας, τόσον τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Ἀντικείων, ὅσον καὶ τῶν ἐνδιαφερομένων δι' ἄνωτέρας Σπουδάς.

Σ. Γ. ΚΑΝΕΛΛΟΣ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΟΜΟΥ ΤΩΝ "ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΑΣ,"

- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι. ΟΙ μιγαδικοί ἀριθμοί.** Ὁρισμός τῶν μιγάνων καὶ τῶν πράξεων ἐπ' αὐτῶν (σελ. 1—7).—Μέτρα τῶν μιγάνων, ἰδιότητες τῶν μέτρων (σελ. 9—10).—Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου ἀριθμῶν (σελ. 11—12).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ. Τὸ δευτεροβάθμιον τριώνυμον.** Ἐπίλυσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (σελ. 13—15).—Σχέσεις ριζῶν καὶ συντελεστῶν τῆς δευτεροβαθμ. ἐξισώσεως (σελ. 17).—Συμμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν (σελ. 18—21).—Συνθήκαι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν θαναί ρίζαι πληροῦν δεδομένην σχέσιν (σελ. 22—24).—Κατασκευὴ ἐξισώσεως ἐχούσης δεδομένης ρίζας (σελ. 24—25).—Τριώνυμον: ρίζαι, μορφαὶ αὐτοῦ, θεωρήμα περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου (σελ. 26—29).—Ἐπίλυσις δευτεροβαθμίων ἀνισότητων (σελ. 30).—Θέσις ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου (σελ. 31—34).—Διάφοροι ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τοῦ τριωνύμου (σελ. 34—41).—Δυναταὶ τιμαὶ (μέγιστον ἢ ἐλάχιστον) τριωνύμου ἢ πηλίκου τριωνύμων (σελ. 43—44).—Μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου (σελ. 45—47).—Ἀπαλείφουσα δύο τριωνύμων (σελ. 48—49).—Ἀλληλουχία τῶν ριζῶν δύο τριωνύμων (σελ. 50—52).—Ἀνιούττες μὲ ριζικά (σελ. 52—53).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ. Ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ ἀναγόμεναι εἰς δευτεροβαθμίους.** Διτετράγωνοι ἐξισώσεις (σελ. 54—57).—Διτετράγωνον τριώνυμον (σελ. 57—59).—Ἀντιστροφοὶ ἐξισώσεις (σελ. 60—63).—Διώνυμοι καὶ τριώνυμοι ἐξισώσεις (σελ. 63—64).—Ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου (σελ. 64—66).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙV. Συστήματα ἐξισώσεων, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου** (σελ. 68—76).—Ἀπροσδιόριστος ἀνάλυσις δευτέρου βαθμοῦ (σελ. 78—82).—Προβλήματα δευτέρου βαθμοῦ (σελ. 82—86).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V. Γενικὰ περὶ ἐξισώσεων οἰοῦσθαι ποτε βαθμοῦ.** Μιγαδικαὶ ρίζαι (σελ. 88—89).—Σύμμετροι ρίζαι (σελ. 89—90).—Ρίζαι τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$ (σελ. 91—92).—Βαθμὸς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης (σελ. 92—93).—Σχέσεις ριζῶν καὶ συντελεστῶν (σελ. 94).—Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μὲ μιγαδικούς συντελεστάς (σελ. 94—96).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI. Ἀκολουθίαι, πρόοδοι, σειραί.** Ἀκολουθίαι (σελ. 97—101).—Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι (σελ. 103—107).—Ἀρμονικὴ πρόοδος (σελ. 109—110).—Γεωμετρικαὶ πρόοδοι (σελ. 110—113).—Φθίνουσα ἀπέραντος γεωμετρ. πρόοδος (σελ. 115—117).—Μικτὴ πρόοδος (σελ. 117—118).—Ἀπέραντος σειρά (σελ. 119).—Ἀθροιζόμεναι σειραὶ (σελ. 119—123).—Ἀναδρομικαὶ σειραὶ (σελ. 124—126).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII. Λογάρισμοι** (σελ. 127—135).—Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις (σελ. 136—137).—Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις (σελ. 138—139).—Ἀνατοκισμὸς (σελ. 139—141)—Χρεωλύσις (σελ. 141—142).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII. Μέγιστα καὶ ἐλάχιστα ὑπὸ συνθήκας** (σελ. 144—152).—
- ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IX. Προσθήκαι ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.** Ὁρισμα ἐνὸς μιγάνου (σελ. 153).—Τύπος τοῦ *de Moivre* (σελ. 154).—Ρίζαι μιγάνου (σελ. 155).—Γεωμετρικὴ παρὰστασις τῶν μιγάνων (σελ. 158).—
- Γενικαὶ ἀσκήσεις,** (σελ. 159—167).—

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοί.

1. Ὁρισμοί. Ἐνας μιγαδικὸς ἀριθμὸς z δύναται νὰ ὁρισθῇ ὡς ἓνα διατεταγμένον ζεύγος πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β (πρῶτος ὁ α , δεύτερος ὁ β), ὑπακούον εἰς ὁρισμένους κανόνας λογισμοῦ. Οὗτος γράφεται ὑπὸ μίαν τῶν δύο μορφῶν :

$$(1) \quad z = \alpha + \beta i \quad \text{ἢ} \quad z = \alpha + i\beta$$

ὅπου τὸ i καλεῖται φανταστικὴ μονάς.

Οἱ μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται καὶ «μιγάδες ἀριθμοί».

Ἐὰν $\alpha = 0$ τότε ὁ μιγαδικὸς $z = 0 + \beta i$ γράφεται ἀπλῶς $z = \beta i$ καὶ καλεῖται καθαρῶς φανταστικὸς ἀριθμὸς. Ἐὰν $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 1$ τότε ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z = 0 + 1i$ γράφεται ἀπλῶς i καὶ νοεῖται ὡς συμπύπτων μὲ τὴν φανταστικὴν μονάδα.

Ὁ ἀριθμὸς $\alpha + 1i$ γράφεται $\alpha + i$ καὶ ὁ $\alpha + (-1)i$ γράφεται $\alpha - i$.

Ἐὰν $\beta \neq 0$, ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $\alpha + \beta i$ καλεῖται συχνά, φανταστικὸς ἀριθμὸς ἀντί, μιγαδικὸς (ἢ μιγάς).

Ὁ α καλεῖται πραγματικὸν μέρος καὶ ὁ β , συντελεστὴς τοῦ καθαρῶς φανταστικοῦ μέρους τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $z = \alpha + \beta i$.

2. Ἰσότης καὶ πράξεις. I. Δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ $z = \alpha + \beta i$ καὶ $z' = \alpha' + \beta' i$ εἶναι ἴσοι ὅταν καὶ μόνον ὅταν $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$. Δηλαδή ἡ ἰσότης $z = z'$ συνεπάγεται δύο ἰσότητας : $\alpha = \alpha'$ καὶ $\beta = \beta'$.

II. Ἀθροισμα δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν $z = \alpha + \beta i$ καὶ $z' = \alpha' + \beta' i$ καλεῖται ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')i$ ὅστις παρίσταται μὲ $z + z'$.

Ἡ ἄθροισις περισσοτέρων τῶν δύο μιγαδικῶν ἀνάγεται εἰς τὴν ἄθροισιν δύο, ἀκριβῶς ὅπως γίνεται καὶ εἰς τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (βλέπε [1]^(*) §26, γ').

Ἰσχύει δηλαδή, ὅτι :

$$(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) + (\alpha'' + \beta'' i) + \dots = (\alpha + \alpha' + \alpha'' + \dots) + (\beta + \beta' + \beta'' + \dots)i.$$

III. Διαφορὰ δύο μιγαδικῶν : $z = \alpha + \beta i$ μεῖον $z' = \alpha' + \beta' i$ καλεῖται ὁ μιγαδικὸς $\alpha - \alpha' + (\beta - \beta')i$ (παριστώμενος μὲ $z - z'$) ὅστις προστιθέμενος εἰς τὸν z' (ἀφαιρετέον) μᾶς δίδει τὸν z (μειωτέον). Ἦτοι θὰ ἔχωμεν :

$$(\alpha + \beta i) - (\alpha' + \beta' i) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')i.$$

$$\text{Οὕτω π.χ. } (2 + 3i) + (7 + 2i) - (6 - 10i) = (9 + 5i) - (6 - 10i) = 3 + 15i.$$

(*) Διὰ τοῦ [1] θὰ ἐννοοῦμεν τὸν Α'. Τόμον τῶν «Μαθημάτων Ἀλγέβρας».

IV. Γινόμενον δύο μιγαδικῶν $z = \alpha + \beta i$ ἐπὶ $z' = \alpha' + \beta' i$ καλεῖται ὁ μιγαδικὸς $(\alpha\alpha' - \beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i$. Ὅτι ἐξ ὁρισμοῦ:

$$zz' = (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = \alpha\alpha' - \beta\beta' + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)i.$$

Τὸ γινόμενον τριῶν μιγαδικῶν εὐρίσκεται ἂν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς δύο πρῶτους καὶ τὸ ἐξαγόμενον πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ τὸν τρίτον. Ὅμοιως ὁρίζεται τὸ γινόμενον τεσσάρων μιγαδικῶν κ.ο.κ. (παράβαλε [1], § 31, β').

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. i) $(1+2i)(-1-i)(3+5i) = \{(-1+2)+(-1-2)i\}(3+5i) =$
 $= (1-3i)(3+5i) = (3+15) + (5-9)i = 18-4i.$

ii) «Ἐὰν δοθοῦν οἱ μιγαδικοὶ: $z = 2+i\sqrt{3}$, $z_1 = 4+5i$, $z_2 = 4-5i$ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $z_3 = z^2 + z_1 z_2$ ».

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τοὺς ὁρισμοὺς IV καὶ II λαμβάνομεν

$$z_3 = (2+i\sqrt{3})(2+i\sqrt{3}) + (4+5i)(4-5i) = (1+4\sqrt{3} \cdot i) + (41+0 \cdot i) = 42+4\sqrt{3} \cdot i.$$

V. Πηλίκον δύο μιγαδικῶν, $z = \alpha + \beta i$ διὰ $z' = \alpha' + \beta' i$ καλεῖται ἕνας μιγαδικὸς ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸν δεύτερον, δίδει τὸν πρῶτον. Ἀηλ. τὸ πηλίκον z/z' εἶναι ἕνας μιγαδικὸς z'' τοιοῦτος, ὥστε $z'' \cdot z' = z$.

Ἐφ' ὅσον εἶναι $\alpha'^2 + \beta'^2 \neq 0$, τὸ πηλίκον $z/z' = (\alpha + \beta i)/(\alpha' + \beta' i)$ ὑπάρχει πάντοτε καὶ εἶναι ἕν μόνον. Πράγματι, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τοὺς πραγματικούς ἀριθμοὺς x καὶ y οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι:

$$(x + yi)(\alpha' + \beta' i) = \alpha + \beta i$$

$$\eta \text{ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν IV): } \alpha'x - \beta'y + (\beta'x + \alpha'y)i = \alpha + \beta i$$

$$\eta \text{ (κατὰ τὸν ὁρισμὸν I): } \{ \alpha'x - \beta'y = \alpha, \beta'x + \alpha'y = \beta \}.$$

Τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει μίαν μόνην λύσιν:

$$x = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}, \quad y = \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha'^2 + \beta'^2}.$$

Ἄρα, ἐφ' ὅσον $\alpha'^2 + \beta'^2 \neq 0$ (δηλ. οἱ α' καὶ β' δὲν εἶναι καὶ οἱ δύο συγχρόνως μηδενικοί), τὸ πηλίκον τοῦ $\alpha + \beta i$ διὰ τοῦ $\alpha' + \beta' i$ ὑπάρχει καὶ εἶναι ὁ μιγαδικὸς

$$\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + i \frac{\alpha'\beta - \beta'\alpha}{\alpha'^2 + \beta'^2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Ν' ἀναχθοῦν εἰς τὴν μορφήν $\alpha + \beta i$ αἱ κάτωθι παραστάσεις:
 $\{(3+2i)-(4-i)\} - (-4+2i), \quad -4i + (-7+8i) + (9+10i) - i.$
- 2) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ γινόμενα $(2-3i)(-2+i)$, $i(2-7i)$.
- 3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον τοῦ $23+27i$ διὰ τοῦ $3+5i$.
- 4) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἕνας μόνον μιγὰς ὑπάρχει ὅστις προστιθέμενος εἰς πάντα ἄλλον τὸν ἀφήνει ἀμετάβλητον.
- 5) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἕνας μόνον μιγὰς ὑπάρχει ὅστις πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ ὅποιονδήποτε ἄλλον μιγὰδα, δὲν τὸν μεταβάλλει.
- 6) Λύσατε ὡς πρὸς x καὶ y ἐκάστην τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:
 $x-2yi=3+6i, \quad x-5yi=20i, \quad 2x+3yi=4=5x-yi+8i.$

3. Οἱ νόμοι τοῦ Ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ. Διὰ νὰ ἔχωμεν καὶ διὰ τοὺς μιγαδικούς, τοὺς ἰδίους κανόνες πράξεων τοὺς ὁποίους ἔχομεν καὶ διὰ τοὺς πραγματικούς ἀριθμούς πρέπει νὰ ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς μιγαδικούς οἱ τρεῖς θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων (βλ. [1], § 2).

Τοῦτο πράγματι συμβαίνει, ὅπως δυνάμεθα εὐκόλως ν' ἀποδείξωμεν βάσει τῶν ὁρισμῶν I, II καὶ IV τῆς προηγουμένης παραγράφου.

(Οὕτω, εἶναι φανερόν ὅτι ἰσχύει ὁ ἀντιμεταθετικὸς νόμος διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ διὰ τὸν πολλαπλασιασμόν:

$$(1) \quad (\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i) = (\alpha' + \beta' i) + (\alpha + \beta i) \quad \eta \quad z + z' = z' + z$$

$$(2) \quad (\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i) = (\alpha' + \beta' i)(\alpha + \beta i) \quad \eta \quad zz' = z'z.$$

Ἐπίσης, ὁ προσεταιριστικὸς νόμος διὰ τὴν πρόσθεσιν καὶ διὰ τὸν πολυσμὸν ἰσχύει:

$$(3) \quad (\alpha + \beta i) + \{(\alpha' + \beta' i) + (\alpha'' + \beta'' i)\} = \{(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i)\} + (\alpha'' + \beta'' i)$$

$$\eta \quad z + (z' + z'') = (z + z') + z'' \quad \text{καὶ}$$

$$(4) \quad (\alpha + \beta i)\{(\alpha' + \beta' i)(\alpha'' + \beta'' i)\} = \{(\alpha + \beta i)(\alpha' + \beta' i)\}(\alpha'' + \beta'' i) \quad \eta \quad z(z'z'') = (zz')z'',$$

δηλ. ὅτι τὸ γινόμενον δύο μιγαδίων πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τρίτον μιγάδα z ἂν ὁ ἑνας ἐκ τῶν δύο παραγόντων τοῦ γινομένου πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ τὸν z . Ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος (4) γίνεται φανερά, ὅταν εἰς ἀμφοτέρω τὰ μέλη ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν IV. Τότε εὐρίσκομεν, ὅτι καὶ τὰ δύο μέλη τῆς (4) ἰσοῦνται πρὸ τὸν μιγάδα:

$$\alpha\alpha'' - \alpha\beta'' - \beta\alpha'' - \beta\alpha'' + (\alpha\alpha'' + \alpha\alpha'' + \beta\alpha'' - \beta\beta'')i.$$

Τέλος καὶ ὁ ἐπιμεριστικὸς νόμος ἰσχύει, δηλ.

$$(5) \quad \{(\alpha + \beta i) + (\alpha' + \beta' i)\}(\alpha'' + \beta'' i) = (\alpha + \beta i)(\alpha'' + \beta'' i) + (\alpha' + \beta' i)(\alpha'' + \beta'' i)$$

$$\eta \quad (z + z')z'' = zz'' + z'z''$$

καὶ ἀποδεικνύεται δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς δύο μέλη τῆς (5) βάσει τῶν ὁρισμῶν I, II καὶ IV).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

7) Ἀποδείξατε τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον: $(z + z')z'' = zz'' + z'z''$ διὰ μιγ. ἀριθμούς.

8) Βάσει τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου δείξατε ὅτι: $z(z' + z'' + z''') = zz' + zz'' + zz'''$.

9) Βάσει τοῦ προσεταιριστικοῦ νόμου δείξατε ὅτι: $(z_1 z_2)^2 = z_1^2 z_2^2$.

4. Μιγαδικοὶ ταυτιζόμενοι μὲ πραγματικούς. Ἵνα τὸ σύστημα τῶν μιγαδικῶν ἀποτελῇ ἐπέκτασιν τοῦ συστήματος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, πρέπει μέσα εἰς τὸ πρῶτον νὰ περιέχεται καὶ τὸ δεύτερον, δηλαδὴ πρέπει πάντες οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ νὰ συμπεριλαμβάνωνται μεταξὺ τῶν μιγαδικῶν. Τοῦτο πράγματι συμβαίνει ἂν κάμωμεν μίαν ἀπλὴν σύμβασιν τὴν ὁποίαν ὑποβάλλει ἡ παράστασις $\alpha + \beta i$ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

Σύμβασις. Πᾶς μιγαδικὸς τῆς μορφῆς $\alpha + \beta i$ ἰσοδυναμεῖ μὲ τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν α . Δηλ. $\alpha + \beta i = \alpha$, ἥτοι ὁ μιγαδικὸς $z = \alpha + \beta i$ (α, β πραγματικοὶ) καθίσταται πραγματικὸς ἐὰν $\beta = 0$. Οὕτω, οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ταυτίζονται μὲ μιγαδικούς εἰδικῆς μορφῆς (μὲ τοὺς ἔχοντας συντελεστὴν τοῦ καθαρῶς φανταστικοῦ μέρους, ἴσον μὲ μηδέν). Συγχρόνως δέ, οἱ κανόνες καὶ οἱ νόμοι τῶν θεμελιωδῶν πράξεων οἱ περιγραφέντες διὰ τοὺς μιγαδικούς ἀριθμούς $\alpha + \beta i$ γίνονται κανόνες καὶ νόμοι πράξεων ἐπὶ πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅταν $\beta = 0$. Συνεπῶς, τὸ σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν περιέχεται μέσα εἰς τὸ σύστημα τῶν μιγαδικῶν (παράβαλε [1], § 37).

Πολλαπλασιασμὸς πραγματικοῦ ἐπὶ μιγαδικόν. Τὸ γινόμενον ἐνὸς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λ ἐπὶ ἓνα μιγαδικόν $\alpha + \beta i$ ἀποκτᾷ, τώρα νόημα, σύμφωνα μὲ τὴν ἀνωτέρω σύμβασιν: $\lambda(\alpha + \beta i) = (\lambda + 0i)(\alpha + \beta i) = \lambda\alpha + \lambda\beta i$. Ὡστε ἰσχύει ὁ κανὼν:

$$\lambda(\alpha + \beta i) = \lambda\alpha + \lambda\beta i.$$

Εἰδικώτερον, ἂν $z = \alpha + \beta i$ τότε $-z = -\alpha - \beta i$, ὅπου $-z = (-1)z$.

5. Ἡ φανταστική μονάς i . α') Ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $0 + 1i$ εἵδομεν ὅτι παρίσταται ἀπλῶς διὰ τοῦ γραμμάτος i καὶ καλεῖται φανταστικὴ μονάς. Χάρις εἰς τὸν ἀριθμὸν i συντελεσθῇ σημαντικωτάτη πρόοδος τῆς Ἀλγέβρας.

β') **Αἱ δυνάμεις τοῦ i .** Ἡ φανταστικὴ μονάς πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὸν ἑαυτὸν της δίδει τὴν ἀρνητικὴν μονάδα -1 . Διότι $i^2 = i \cdot i = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1$, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν IV τῆς § 2 καὶ μὲ τὴν σύμβασιν τῆς § 4. Ὡστε

$$\boxed{i^2 = -1}.$$

Ἐπομένως ὁ i εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -1 διὰ τοῦτο, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$i = \sqrt{-1}.$$

Ἐννοεῖται ὅτι καὶ ὁ $-i$ εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ -1 . (Διότι $(-i)^2 = -(-i)(-i) = (0 - 1i)(0 - 1i) = -1 + 0i = -1$ ἢ διότι $(-i)^2 = \{(-1)i\}^2 = (-1)^2 i^2 = (+1)(-1) = -1$). Γράφομεν δὲ $-i = -\sqrt{-1}$.

Εὐκόλα ἔπονται αἱ ἰσότητες:

$$i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, \dots i^{4k} = 1, (k \text{ φυσικός}).$$

Ἐξ ὁρισμοῦ, ἰσχύουν ἐπίσης αἱ ἰσότητες:

$$i^0 = 1, i^{-n} = \frac{1}{i^n}, \text{ ὅπου } n \text{ τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς.}$$

γ') **Αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.** Ἐὰν $\beta > 0$ τότε ὁ ἀριθμὸς $i\sqrt{\beta}$ εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $-\beta$. Διότι $(i\sqrt{\beta})^2 = i^2(\sqrt{\beta})^2 = (-1) \cdot \beta = -\beta$. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\sqrt{-\beta} = i\sqrt{\beta} \text{ ὅπου } \beta > 0.$$

Οὕτω π.χ.

$$\sqrt{-4} = 2i, \sqrt{-17} = i\sqrt{17}.$$

Ὁ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $-\beta$ ἔχει βεβαίως, δύο φανταστικὰς τετραγωνικὰς ρίζας, τὴν $i\sqrt{\beta}$ καὶ $-i\sqrt{\beta}$. Ἐπομένως τὸ σύμβολον $\sqrt{-\beta}$ εἶναι δισημάντων καὶ προκειμένου νὰ κάμωμεν χρῆσιν αὐτοῦ πρέπει νὰ δηλώσωμεν ἕκ τῶν προτέρων, ποῖον ἕκ τῶν δύο ἀριθμῶν: $i\sqrt{\beta}$ ἢ $-i\sqrt{\beta}$ θέλομεν νὰ παριστάνῃ τὸ σύμβολον $\sqrt{-\beta}$. Μία συμφωνία, ἡ ὁποία θὰ ἡδύνατο νὰ γίνῃ ἐν προκειμένῳ εἶναι ἡ ἐξῆς: «διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt{-\beta}$ παριστάνομεν τὴν $i\sqrt{\beta}$ δηλ. *ἐκείνην ἐκ τῶν δύο τετραγ. ριζῶν, ἡ ὁποία ἔχει τὸ i μὲ θετικὸν συντελεστήν*». Τὴν συμφωνίαν ταύτην θὰ τηροῦμεν κατὰ κανόνα εἰς τὰ ἐπόμενα.

Βάσει τῆς ἀνωτέρω συμφωνίας θὰ ἔχωμεν π.χ. $\sqrt{-9} = 3i$ ἐνῷ ἡ ἑτέρα τετραγ. ρίζα τοῦ -9 δηλ. ἡ $-3i$ θὰ παρίσταται μὲ $-\sqrt{-9}$. Ἐὰν δὲ $\alpha > 0$, $\beta > 0$ θὰ ἰσχύῃ τότε ὁ κανὼν: $\sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$. (Διότι $\sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta} = i\sqrt{\alpha} \cdot i\sqrt{\beta} = i^2\sqrt{\alpha\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$).

δ') **Ἀπλούστευσις τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.** Ὁ πολλαπλασιασμὸς τῶν μιγάδων δύναται νὰ γίνῃ ἐπιμεριστικῶς ὥς ἐὰν οὗτοι ἦσαν διώνυμα, μιᾶς

μεταβλητῆς i , ἀντικαθισταμένων τελικῶς τῶν δυνάμεων $i^2, i^3, i^4, \dots$ διὰ τῶν ἴσων των, $-1, -1, 1, \dots$. Οὕτω π.χ. θὰ ἔχωμεν :

$$(a + \beta i)(a' + \beta' i) = aa' + a\beta' i + \beta a' i + \beta\beta' i^2 = aa' - \beta\beta' + (a\beta' + \beta a')i$$

$(a + \beta i)^3 = a^3 + 3a^2\beta i + 3a\beta^2 i^2 + \beta^3 i^3 = a^3 + 3a^2\beta i - 3a\beta^2 - \beta^3 i = (a^3 - 3a\beta^2) + (3a^2\beta - \beta^3)i$,
διότι οἱ θεμελιώδεις νόμοι τοῦ ἀλγεβρικοῦ λογισμοῦ παραμένουν οἱ ἴδιοι καὶ διὰ τοὺς μιγάδας (βλ. § 3 καὶ § 6).

$$\text{ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. } (5 - \sqrt{-9})(4 + \sqrt{-49}) = (5 - 3i)(4 + 7i) = \\ = 20 + 35i - 12i - 21i^2 = 20 + 23i + 21 = 41 + 23i.$$

$$2\text{ον. } i^{51} = i^{4 \cdot 12 + 3} = (i^4)^{12} \cdot i^3 = 1^{12} \cdot (-i) = -i.$$

$$3\text{ον. } (2 - i)^4 = 2^4 + 4 \cdot 2^3(-i) + 6 \cdot 2^2(-i)^2 + 4 \cdot 2(-i)^3 + (-i)^4 = \\ = 16 - 32i - 24 + 8i + 1 = -7 - 24i \quad (\text{ἴδε [1], § 65}).$$

$$4\text{ον. Νὰ εὐρεθῶν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ } x \text{ καὶ } y \text{ ἂν πληροῦνται ἡ ἰσότης :} \\ (1 + i)x^2 + y^2 = 12 - xy - iy^2 + 20i.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $x^2 + y^2 + ix^2 = (12 - xy) + i(20 - y^2)$ καὶ δίδει, (ὁρισμὸς I, § 2): $\{x^2 + y^2 = 12 - xy, x^2 = 20 - y^2\}$. Ἐκ τῆς δευτέρας ἔχομεν $x^2 + y^2 = 20$ δυνάμει τῆς ὁποίας ἡ πρώτη γίνεται $20 = 12 - xy$ ἢ $xy = -8$. Ἐκ τῶν $\{x^2 + y^2 = 20, 2xy = -16\}$ λαμβάνομεν διὰ προσθέσεως $(x + y)^2 = 4$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως $(x - y)^2 = 36$. Ὡστε ἔχομεν τέσσαρα συστήματα $\{x + y = 2, x - y = 6\}, \{x + y = -2, x - y = 6\}, \{x + y = 2, x - y = -6\}, \{x + y = -2, x - y = -6\}$ ἐκ τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν τέσσαρα ζεύγη τιμῶν x καὶ y : $(x = 4, y = -2)$ ἢ $(x = 2, y = -4)$ ἢ $(x = -2, y = 4)$ ἢ $(x = -4, y = 2)$ ἅπαντα πληροῦντα τὴν δοθεῖσαν ἰσότητα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$10) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι: } (3 + i)(3 - i)(2 + i) = 20 + 10i.$$

$$11) \text{ Γράψατε τὰς δύο τετραγωνικὰς ρίζας ἐκάστου τῶν κάτωθι ἀριθμῶν :} \\ -16, -36, -11, -18.$$

$$12) \text{ Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι σημειουμένας πράξεις :}$$

$$4i^5(-2i), (3 + 6i)(5 + 8i), (4 - \sqrt{-9})(3 + \sqrt{-36}), \sqrt{-7} \cdot \sqrt{-2}, (\sqrt{-2} + 3\sqrt{-5})(\sqrt{2} + 3\sqrt{-20}).$$

$$13) \text{ Ὅρίσατε τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς } x \text{ καὶ } y \text{ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι :}$$

$$(2 + i)x + (1 - 3i)(5 + iy) + 4 - 7i = 0.$$

$$14) \text{ Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου :}$$

$$(3 + i)x^3 + 7x^2 - ix - (2 + 5i) \text{ διὰ τοῦ } x - 2 + i.$$

$$15) \text{ Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ } z = -\frac{1}{1} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μιγαδικὸς } z^8$$

(δλ. ὁ $z \cdot z \cdot z$).

$$16) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ δύο ἀριθμοὶ } z = 1 \pm i \text{ ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν: } z^3 - 2z + 2 = 0.$$

$$17) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ δύο μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ } z = (-1 \pm i\sqrt{2})/3 \text{ πληροῦν τὴν ἐξίσωσιν: } 3z^3 + 2z + 1 = 0.$$

$$18) \text{ Νὰ εὐρεθῇ μιγαδικὸς } z \text{ πληρῶν τὴν ἐξίσωσιν :}$$

$$\frac{z}{z_1} + z_2 = (z_1 - z_2)^2, \text{ ὅπου } z_1 = 1 - 2i \text{ καὶ } z_2 = 3 - 4i.$$

19) Ποῖοι φανταστικοὶ ἀριθμοὶ ἴσονται ἕκαστος μὲ τὸν ἀντίστροφόν του; (ἀντίστροφοι λέγονται δύο ἀριθμοὶ ἔχοντες γινόμενον = 1).

$$20) \text{ Νὰ δειχθῇ ὅτι } (1 - i)^4 = -4.$$

6. Ὁ μηδενικός μιγάς. Ὁ μιγαδικὸς ἀριθμὸς $0+0i$ λέγεται μηδενικός μιγάς ἢ ἀπλῶς μηδέν. Οὗτος συμπίπτει μὲ τὸ 0 τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (βλ. σύμβασιν τῆς § 4). Ἐπίσης, οὗτος προστιθέμενος εἰς οἰονδήποτε μιγάδα, δὲν τὸν μεταβάλλει: $(\alpha+\beta i)+(0+0i)=(\alpha+0)+(\beta+0)i=\alpha+\beta i$, πολλαπλασιαζόμενος δὲ ἐπὶ τυχόντα μιγάδα τὸν μηδενίζει: $(\alpha+\beta i)(0+0i)=(\alpha\cdot 0-\beta\cdot 0)+(\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0)i=0+0i=0$ (παράβαλε μὲ § 3 τοῦ [1]).

Διὰ τοῦ συμβολισμοῦ $z \neq 0$ ἐννοοῦμεν μιγάδα z ὅχι ἴσον μὲ τὸν μηδενικὸν μιγάδα. Ἐὰν $\alpha+\beta i \neq 0$, τότε $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$.

Θεώρημα. «Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο μιγάδων ἰσοῦται μὲ μηδέν, τότε ὁ εἷς τοῦλάχιστον τῶν παραγόντων ἰσοῦται μὲ μηδέν».

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὅτι $(\alpha+\beta i)(\alpha'+\beta' i)=0$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha'+\beta' i \neq 0$, τότε θὰ δεῖξωμεν ὅτι $\alpha+\beta i=0$. Πράγματι, ἐκ τῆς ὑποθέσεως ἔπεται $\alpha\alpha'-\beta\beta'+(\alpha\beta'+\alpha'\beta)i=0$ καὶ συνεπῶς $\alpha\alpha'-\beta\beta'=0$, $\alpha\beta'+\alpha'\beta=0$. Τετραγωνίζοντες καὶ προσθέτοντες τὰς δύο ταύτας ἰσότητας, λαμβάνομεν $(\alpha'^2+\beta'^2)(\alpha^2+\beta^2)=0$ καί, ἐπειδὴ $\alpha'^2+\beta'^2 \neq 0$, ἔπεται $\alpha^2+\beta^2=0$, ἄρα $\alpha=0$ καὶ $\beta=0$ ὥστε $\alpha+\beta i=0$.

Πόρισμα. Ὁ «νόμος τῆς διαγραφῆς» ἰσχύει διὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν τῶν μιγάδων, δηλαδὴ ἂν μεταξὺ τῶν μιγάδων z_1, z_2, z , ὅπου $z \neq 0$, ἰσχύει ἡ ἰσότης $z_1 z = z_2 z$, τότε θὰ ἰσχύη καὶ ἡ $z_1 = z_2$ (δηλαδὴ διαγράφεται ὁ παράγων z ἀπὸ τὰ δύο μέλη).

Πράγματι, ἐκ τῆς δοθείσης, ἔπεται $z_1 z - z_2 z = 0$ ἢ, κατὰ τὸν ἐπιμεριστικὸν νόμον, $(z_1 - z_2)z = 0$ καί, ἐπειδὴ $z \neq 0$, θὰ εἶναι $z_1 - z_2 = 0$, ἥτοι $z_1 = z_2$.

7. Μιγαδικὰ κλάσματα. Τὸ πηλίκον $\frac{z_1}{z_2}$, ὅπου z_1, z_2 εἶναι μιγαδικοί, δύναται νὰ ὀνομασθῇ μιγαδικὸν κλάσμα.

Μεταξὺ τῶν μιγαδικῶν κλασμάτων ἰσχύουν οἱ ἴδιοι κανόνες πράξεων, οἱ ὁποῖοι ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ πραγματικὰ κλάσματα, καὶ ἀποδεικνύονται ἐντελῶς ὁμοίως. Ὅσα ἐγράφησαν εἰς τὰς §§ 33 καὶ 34 τοῦ [1] ἰσχύουν λέξιν πρὸς λέξιν, καὶ ὅταν γράψωμεν, ὅπου «ἀλγεβρικὸν κλάσμα», τὰς λέξεις «μιγαδικὸν κλάσμα», ὅπου «πραγματικός», τὴν λέξιν «μιγαδικός», τὰ δὲ γράμματα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ κ.τ.λ. νὰ παρίστανουν μιγαδικοὺς ἀριθμούς.

Ὅττω π.χ., ἐὰν $z \neq 0$, τότε $\frac{z_1}{z_2} = \frac{zz_1}{zz_2}$, ὅπου z, z_1, z_2 μιγάδες. Διότι, ἂν τεθῇ $\frac{zz_1}{zz_2} = \lambda$, τότε, κατὰ τὸν ὀρισμὸν V τῆς § 2, θὰ εἶναι $\lambda(zz_2) = zz_1$ ἢ (προσεταίριστικός νόμος) $(\lambda z_2)z = z_1 z$ ἢ (νόμος τῆς διαγραφῆς) $\lambda z_2 = z_1$, ἄρα $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$ (σύμφωνα μὲ τὸν ὀρισμὸν V).

$$\text{Ὡστε } \frac{z_1}{z_2} = \frac{zz_1}{zz_2}.$$

Ἐπίσης, $\frac{z_1}{z} + \frac{z_2}{z} = \frac{z_1+z_2}{z}$. Διότι, ἂν $\frac{z_1}{z} = \lambda$, $\frac{z_2}{z} = \mu$, τότε $z_1 = \lambda z$, $z_2 = \mu z$, $z_1 + z_2 = \lambda z + \mu z = (\lambda + \mu)z$, ἄρα $\frac{z_1+z_2}{z} = \lambda + \mu = \frac{z_1}{z} + \frac{z_2}{z}$ κ.ο.κ.

Ἐκ τῶν προηγουμένως ἐκτεθέντων, καταφαίνεται ὅτι, προκειμένου περὶ τῶν ρητῶν πράξεων (προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολ)σμοῦ, ὑψώσεως εἰς δύναμιν, διαι-

ρέσεως), οἱ αὐτοὶ ἀκριβῶς κανόνες λογισμοῦ ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς καὶ διὰ τοὺς μιγάδας.

8. Συζυγεῖς μιγάδες. Οὕτω καλοῦνται δύο μιγάδες τῆς μορφῆς $\alpha + \beta i$ καὶ $\alpha - \beta i$. Αὐτοὶ ἔχουν ἄθροισμα πραγματικόν: $(\alpha + \beta i) + (\alpha - \beta i) = 2\alpha$ καὶ γινόμενον πραγματικόν καὶ μὴ ἀρνητικόν: $(\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = \alpha^2 - (\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2(i)^2 = \alpha^2 - \beta^2(-1) = \alpha^2 + \beta^2$. Ὁ συζυγὴς τοῦ z παρίσταται μὲ $\bar{z}$. Μὲ τὴν βοήθειαν τῶν συζυγῶν μιγάδων εὐρίσκεται εὐκόλα τὸ πηλίκον δύο μιγάδων:

$$\frac{\alpha + \beta i}{\gamma + \delta i} = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma - \delta i)}{(\gamma + \delta i)(\gamma - \delta i)} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta + (\beta\gamma - \alpha\delta)i}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2} i.$$

Παρατήρησις. Ὁ συζυγὴς τοῦ $\alpha + \beta i$ προκύπτει, ἂν εἰς τὸν δοθέντα τρέψωμεν τὸ i εἰς $-i$. Τοῦτο ὅμως ἰσχύει γενικώτερον διὰ κάθε ρητὴν παράστασιν περιέχουσαν μιγαδικούς. Οὕτω π. χ., ἐὰν εἰς τὴν παράστασιν:

$$z = \frac{(\alpha + \beta i)(\gamma + \delta i)^2 - 5(\epsilon + \eta i)}{(k + \lambda i)(\mu + \nu i)^2}$$

τεθῇ, ὅπου i τὸ $-i$, θὰ λάβωμεν τὴν παράστασιν:

$$z' = \frac{(\alpha - \beta i)(\gamma - \delta i)^2 - 5(\epsilon - \eta i)}{(k - \lambda i)(\mu - \nu i)^2},$$

θὰ εἶναι δὲ οἱ μιγάδες z καὶ z' συζυγεῖς, ὥς διαφέροντες μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ i . Ὑποτίθεται βεβαίως ὅτι τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \eta, k, \lambda, \mu, \nu$ εἶναι πραγματικοί. (Ἀκριβὴς ἀπόδειξις τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως δύναται νὰ γίνῃ βάσει τῆς ἀσκ. 31).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. $\frac{5 + \sqrt{-16}}{3 - \sqrt{-36}} = \frac{5 + 4i}{3 - 6i} =$

$$\frac{(5 + 4i)(3 + 6i)}{(3 - 6i)(3 + 6i)} = \frac{15 + 30i + 12i - 24}{9 + 36} = \frac{-9 + 42i}{45} = -\frac{3}{15} + \frac{14}{15}i.$$

2ον. $\frac{3 + 2i}{1 + i} \cdot \frac{4 - i}{1 + 2i} = \frac{12 - 3i + 8i + 2}{1 + 2i + i - 2} = \frac{14 - 5i}{-1 + 3i} = \frac{(14 - 5i)(-1 - 3i)}{(-1 + 3i)(-1 - 3i)} =$

$$= \frac{-14 - 42i - 5i + 15}{(-1)^2 - (3i)^2} = \frac{1 - 47i}{10} = 0,1 - 4,7i.$$

3ον. Πότε τὸ πηλίκον δύο μιγάδων $\alpha + \beta i$ καὶ $\alpha' + \beta' i$, ὅπου $\alpha' \neq 0$ καὶ $\beta' \neq 0$ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς;

Λύσις. Τὸ πηλίκον ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha\alpha' + \beta\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2} + i \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'^2 + \beta'^2}$ καὶ διὰ νὰ εἶναι πραγματικόν

πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ συντελεστὴς τοῦ i νὰ εἶναι μηδέν· ἤτοι $\alpha'\beta - \alpha\beta' = 0$ ἢ $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'}$.

4ον. Ὁ ἀριθμὸς $7 - i$ νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha(3 + 2i) + \beta(14 - i)$, ὅπου α καὶ β κατάλληλοι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Λύσις. Πρέπει νὰ ὑφίσταται ἡ ἰσότης $7 - i = \alpha(3 + 2i) + \beta(14 - i)$ ἢ $7 - i = 3\alpha + 14\beta + (2\alpha - \beta)i$ ἄρα καὶ αἱ: $\{3\alpha + 14\beta = 7, 2\alpha - \beta = -1\}$. Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν τὰ α καὶ β , $\alpha = -7/31$, $\beta = 17/31$.

5ον. Νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ ταυτότης τοῦ Lagrange διὰ τὰς δύο τριάδας τῶν ἀριθμῶν (x, y, i) καὶ (α, β, i) .

Λύσις. Ὡς γνωστὸν [ἴδε [1], § 53],

$$(x^2 + y^2 + i^2)(\alpha^2 + \beta^2 + i^2) - (\alpha x + \beta y + i^2)^2 = (\alpha y - \beta x)^2 + (x i - \alpha i)^2 + (y i - \beta i)^2.$$

Ἡ ἰσότης αὐτὴ παρέχει τὴν ταυτότητα :

$$(x^2+y^2-1)(\alpha^2+\beta^2-1)-(ax+\beta y-1)^2=(ay-\beta x)^2-(x-\alpha)^2-(y-\beta)^2$$

ἐξ ἧς προκύπτει ὅτι ἡ παράστασις $(x^2+y^2-1)(\alpha^2+\beta^2-1)+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

21) Ν' ἀναχθῇ εἰς τὴν μορφήν $\alpha+\beta i$ ἡ παράστασις: $\frac{1+2i}{3-4i} + \frac{2-i}{5i}$.

22) Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ μιγαδικὴ παράστασις

$$z=z_1 z_2+(z_1+z_2)+\frac{z_1}{z_2} \quad \text{ὅπου } z_1=2+i\sqrt{3}, \quad z_2=2-i\sqrt{3}.$$

23) Ὁμοίως ἡ παράστασις: $2i/(i-1)(i-2)(i-3)$.

24) Ἐὰν τὸ τετράγωνον τοῦ z ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ συζυγοῦς του δεῖ-
ξατε ὅτι ὁ z εἶναι ἢ πραγματικὸς ἢ καθαρῶς φανταστικὸς.

25) Ἐκτελέσατε τὰς κάτωθι σημειομένους πράξεις:

$$\frac{4}{-2+3i}, \quad \frac{6-\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}, \quad \frac{1+5i}{2-i} \cdot \frac{1+i}{2+3i}, \quad (1+i)^8,$$

$$\{2x-(4-i)\} \cdot \{2x-(4+i)\}, \quad \{x-(\alpha+\beta i)\} \cdot \{x-(\alpha-\beta i)\}.$$

26) Νὰ τραπῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων ἡ παράστασις:

$$x^2+y^2 \quad \text{καὶ ἡ } (x+1)^2+(y+2)^2.$$

27) Νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\alpha(3+i)^2+\beta(5-i)+\gamma$ καὶ $\alpha(3-i)^2+\beta(5+i)+\gamma$ εἶ-
ναι συζυγεῖς μιγάδες, ὅταν α, β, γ πραγματικοί.

28) Νὰ ἀναχθοῦν εἰς τὴν κανονικὴν μορφήν $\alpha+\beta i$ αἱ παραστάσεις:

$$\alpha') (3+4i)^8, \quad \beta') i^{27}, \quad \gamma') \frac{1}{3+4i} + \frac{1}{3-4i}, \quad \delta') i^{-9}, \quad \varepsilon') \frac{(1+i)^4}{(1-i)^2}.$$

29) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ
ἰσότητες: $\alpha') \frac{2}{1-i} + x+yi=(x+yi)(1+i), \quad \beta') (x+i)^2+(1/i)=(i-x)^2+y+1,$

$$\gamma') \frac{x-yi}{1+i} + \frac{1}{i} = \frac{x}{2} + \frac{1}{1-i}.$$

30) Νὰ τεθοῦν: $\alpha')$ ὁ $5-i$ ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha(1+i)+\beta(1-i)$, $\beta')$ ὁ 1 ὑπὸ τὴν μορφήν
 $\alpha(2+3i)+\beta(1+2i)$, $\gamma')$ ὁ $2-i$ ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha(1+2i)+\beta(1-2i)$, ὅπου α, β πραγματικοί.

31) Ἐὰν διὰ τοῦ συμβόλου $\bar{z}$ παραστήσωμεν τὸν συζυγὴ μιγάδα τοῦ z , δηλαδή
 $\overline{\alpha+\beta i}=\alpha-\beta i$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\alpha') \overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2, \quad \beta') \overline{z_1 z_2}=\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \gamma') \overline{z_1-z_2}=\bar{z}_1-\bar{z}_2, \quad \delta') \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \text{ὅπου } z_2 \neq 0.$$

Γενικεύσατε τὰς περιπτώσεις $\alpha')$ καὶ $\beta')$ δι' οἰονδήποτε πηλῆθος προσθετέων ἢ πα-
ραγόντων.

32) Δείξατε ὅτι, ἂν $z_1^{16}-4z_2^2+1=0$ τότε καὶ $(\bar{z}_1)^{16}-4(\bar{z}_2)^2+1=0$, ὅπου $\bar{z}$ ὁ συζυ-
γὴς μιγάς τοῦ z . Ἐπίσης δείξατε ὅτι ὁ $z_1 \bar{z}_2+z_2 \bar{z}_1$ εἶναι πραγματικὸς.

33) Ἐὰν $j_1=\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})$ καὶ $j_2=\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$ δείξατε ὅτι ἕκαστος ἐκ τῶν j_1
καὶ j_2 ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἄλλου καὶ ὅτι τὸσον ὁ j_1 ὅσον καὶ ὁ j_2 εἶναι
κυβικαὶ ρίζαι τοῦ 1 .

34) Νὰ ἐφαρμοσθῇ ἡ ταυτότης τοῦ Langrange εἰς δύο τετράδας τῶν ἀριθμῶν
(x, y, z, i) καὶ (α, β, γ, i) καὶ βάσει αὐτῆς νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις
 $(x^2+y^2+z^2-1)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1)+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2$
εἶναι μὴ ἀρνητικὴ. Ἐὰν δὲ τὰ α, β, γ εἶναι δεδομένοι πραγματικοὶ ἀριθμοί, διὰ ποίας
πραγματικὰς τιμὰς τῶν x, y, z μηδενίζεται ἡ ἀνωτέρω παράστασις;

9. Μέτρα μιγαδικῶν. Καλεῖται μέτρον ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ μιγάδος $z = \alpha + \beta i$ ὁ μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμὸς $+\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ καὶ παρίσταται μὲ $|z|$ ἢ $|\alpha + \beta i|$.
 Ὡστε

$$|z| = |\alpha + \beta i| = +\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Π.χ. $|i| = 1$, $|3 + 4i| = 5$, $|3 - 4i| = 5$.

Τὸ μέτρον εἶναι ἐν γένει θετικὸς ἀριθμὸς, πλὴν τῆς μοναδικῆς περιπτώσεως καθ' ἣν ὁ μιγάς εἶναι ὁ μηδενικὸς μιγάς, ὁπότε τὸ μέτρον τοῦ εἶναι μηδὲν (καὶ μόνον τότε).

Θεώρημα I. «Τὸ μέτρον τοῦ γινομένου δύο μιγάδων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων».

Δηλαδή: $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$. Τότε $z_1 z_2 = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) i$ καὶ συνεπῶς $|z_1 z_2| = \sqrt{(\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2)^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)^2} = \sqrt{\alpha_1^2 \alpha_2^2 + \beta_1^2 \beta_2^2 + \alpha_1^2 \beta_2^2 + \alpha_2^2 \beta_1^2} = \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} = \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \cdot \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = |z_1| \cdot |z_2|$.

Πόρισμα. Τὸ μέτρον τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε μιγάδων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων.

Δηλαδή: $|z_1 z_2 \dots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n|$.

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικῶς, ὅπως καὶ διὰ τοὺς πραγματικὸς ἀριθμοὺς (βλ. [1], § 31, γ').

Θεώρημα II. «Τὸ μέτρον τοῦ πηλίκου δύο μιγάδων ἰσοῦται μὲ τὸ πηλίκον τῶν μέτρων». Δηλαδή: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, ὅπου $z_2 \neq 0$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $\frac{z_1}{z_2} = \lambda$, τότε $z_1 = z_2 \lambda$, $|z_1| = |z_2 \lambda|$, $|z_1| = |z_2| \cdot |\lambda|$ καὶ

$$|\lambda| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{ἢ τέλος} \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Θεώρημα III. «Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγάδων εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων τῶν προσθετέων».

Δηλαδή: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$, $z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$, τότε $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) i$ καὶ ἔχομεν ν' ἀποδείξωμεν τὴν σχέσιν:

$$(1) \quad \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 + (\beta_1 + \beta_2)^2} \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Διὰ νὰ ἰσχύη ἡ (1), ἀρκεῖ νὰ ἰσχύη ἡ διὰ τετραγωνίσσεως τῶν μελῶν της προκύπτουσα (βλ. [1], § 40, πόρισμα 3ον τοῦ θεωρ. VI), δηλ. ἡ:

$$(2) \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 \leq \sqrt{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}.$$

Ἡ (2) ἰσχύει πάντοτε. Διότι, ἂν μὲν εἶναι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \leq 0$, προφανῶς ἰσχύει. Ἄν δὲ εἶναι $\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 > 0$, τότε ἀρκεῖ νὰ ἰσχύῃ ἡ διὰ τετραγωνίσσεως τῆς (2) προκύπτουσα:

$$(3) \quad 2\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \leq \alpha_1^2\beta_2^2 + \alpha_2^2\beta_1^2.$$

Ἄλλ' ἡ (3) ἰσχύει προφανῶς, διότι γράφεται $(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2 \geq 0$.

Πόρισμα. «Τὸ μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε μιγάδων εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς τὸ ἀθροίσμα τῶν μέτρων τῶν προσθετέων».

Δηλαδή: $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ἐπαγωγικῶς, ὅπως διὰ τὰς ἀπολύτους τιμὰς τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (ἰδὲ [1], § 90, πόρισμα 2ον τοῦ θεωρ. IV).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. Νὰ εὕρεθῇ τὸ μέτρον τοῦ μιγάδος $z = \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{i(-2+2i)^4}$.

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὰ περὶ μέτρον πηλίκου καὶ γινομένου λαμβάνομεν

$$|z| = \frac{|1-i\sqrt{3}|^3}{|i| \cdot |-2+2i|^4} = \frac{(\sqrt{1+3})^3}{1 \cdot (\sqrt{4+4})^4} = \frac{8}{64} = \frac{1}{8}.$$

2ον. «Ἐὰν ὁ μιγάς ἰσοῦται πρὸς πραγματικὸν x , τότε τὸ μέτρον τοῦ μιγάδος συμπίπτει μὲ τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ x ».

Λύσις. Ἐὰν $z = x + 0 \cdot i$, τότε $|z| = +\sqrt{x^2} = |x|$.

3ον. «Αἱ σχέσεις $|a| - |\beta| \leq |a - \beta| \leq |a + \beta| \leq |a| + |\beta|$, αἱ ἰσχύουσιν διὰ τυχόντας πραγματικῶν ἀριθμῶν a, β , ἰσχύουν καὶ ὅταν εἰς τὴν θέσιν τῶν a καὶ β τεθοῦν μιγάδες z_1, z_2 ».

Λύσις. Ἐστω $z_1 = x_1 + y_1 i$ καὶ $z_2 = x_2 + y_2 i$, ὅπου x_1, y_1, x_2, y_2 πραγματικοί. Ἡ πρώτη ἐκ τῶν ἀποδεικτέων: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$ ἰσχύει· διότι, ἂν τεθῇ $|z_1| = a, |z_2| = \beta$ θὰ εἶναι $a \geq 0, \beta \geq 0$ καὶ συνεπῶς $|z_1| = a, |z_2| = \beta$, ὅπου a, β πραγματικοί, καὶ ἡ ἀποδεικτέα γίνεται $|a| - |\beta| \leq ||a| - |\beta||$, ὅπου a, β πραγματικοί, ἅρα ἰσχύει, διότι πᾶς πραγματικὸς εἶναι $\leq$ τῆς ἀπολύτου τιμῆς του.

Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν ἀποδεικτέων: $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 \pm z_2|$ γράφεται:

$$|\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - \sqrt{x_2^2 + y_2^2}| \leq |(x_1 \pm x_2) + (y_1 \pm y_2)i| = \sqrt{(x_1 \pm x_2)^2 + (y_1 \pm y_2)^2}$$

καὶ ἀποδεικνύεται δι' ὑπόθεσιν εἰς τὸ τετράγωνον, ἀκριβῶς ὅπως ἡ (1) τοῦ θεωρ. III).

Ἡ $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ἔχει ἀποδειχθῇ εἰς τὸ θεώρημα III καὶ ἡ $|z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ἰσχύει, διότι ἔχομεν $|z_1 - z_2| = |z_1 + (-1)z_2| \leq |z_1| + |-z_2| = |z_1| + |z_2|$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

35) Εὑρετε τὰ μέτρα τῶν μιγάδων: $3-4i, -2i, 2-2i, 4$.

36) Ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ἕνας μιγάς ἰσοῦται μὲ μηδέν, εἶναι τὸ μέτρον του νὰ ἰσοῦται μὲ μηδέν.

37) Οἱ συζυγεῖς μιγάδες ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον.

38) Ἐὰν $z = x + yi$, ὅπου x, y πραγματικοί, δεῖξτε ὅτι $|z| \geq (|x| + |y|)/\sqrt{2}$.

39) Ἐὰν $z_1 \neq 0$, τότε, ἂν $z_1 z_2 = |z_1|^2$, οἱ z_1 καὶ z_2 θὰ εἶναι συζυγεῖς μιγάδες· καὶ ἀντιστρόφως.

40) Νὰ εὕρεθῇ τὸ μέτρον τῶν κάτωθι μιγάδων:

$$\alpha) \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^3}, \quad \beta) \left\{ \frac{-3i(2+2i)(-\sqrt{3}-i)}{3-3i} \right\}^4, \quad \gamma) \left(\frac{1+i}{\sqrt{3}} \right)^{100} \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{50}.$$

41) Ἐάν $\alpha > 0$ καὶ $\lambda > 1$, τότε πᾶς μιγὰς z πληρῶν τὴν ἐξίσωσιν $\left| \frac{z + \alpha\lambda^2/(\lambda^2 - 1)}{z + \alpha/(\lambda^2 - 1)} \right| = \lambda$

θὰ ἔχη μέτρον $= \frac{\alpha\lambda}{\lambda^2 - 1}$.

42) Ἐάν θ τυχοῦσα γωνία καὶ z τυχὼν μιγὰς, δείξατε ὅτι τὸ πραγματικὸν μέρος τοῦ μιγὰδος $|z| - z$ (συνθ+ιμθ) εἶναι μὴ ἀρνητικόν.

43) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ μόνοι μιγὰδες z , τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον ἔχει πραγματικὸν μέρος $-1/2$ εἶναι οἱ πληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

44) Ἐάν $|z_2| \neq |z_3|$, δείξατε ὅτι $\left| \frac{z_1}{z_2 + z_3} \right| \leq \frac{|z_1|}{||z_2| - |z_3||}$.

★ 10. Ἡ ἔννοια τοῦ πεδίου ἀριθμῶν. Προσθέτοντες ἢ ἀφαιροῦντες δύο ἀριθμοὺς μιᾶς ὥρισμένης κατηγορίας ἀριθμῶν, λαμβάνομεν πολλάκις ὡς ἐξαγόμενον ἓνα ἀριθμὸν τοῦ ἰδίου τύπου (δηλ. τῆς ἰδίας κατηγορίας). Ἔτσι π.χ. προσθέτοντες δύο συμμετρικοὺς ἀριθμοὺς λαμβάνομεν, πάλιν, συμμετρικὸν ἀριθμὸν. Ὅμοιως, ἀφαιροῦντες. Ὅταν ἡ ἰδιότης αὕτη ἐκτείνεται καὶ εἰς τὰς τέσσαρας ρητὰς πράξεις (ἥτοι πρόσθεσιν, ἀφαιρέσιν, πολ.) σμὸν, διαίρεσιν) ἐκτελουμένας μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν ἐνὸς ὥρισμένου τύπου, (δηλ. μιᾶς ὥρισμένης μορφῆς ἢ κατηγορίας), τότε τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τοῦ τύπου αὐτοῦ λέγομεν ὅτι ἀποτελεῖ ἓνα πεδίου ἀριθμῶν (ἢ ἀπλῶς, πεδίου). Ἔτσι π.χ. ἐπειδὴ αἱ τέσσαρες ρηταὶ πράξεις ἐκτελοῦμεναι μεταξὺ συμμετρικῶν δίδουν ὡς ἐξαγόμενον, συμμετρικὸν πάλιν ἀριθμὸν, διὰ τοῦτο τὸ σύνολον τῶν συμμετρικῶν ἀποτελεῖ ἓνα πεδίου ἀριθμῶν. Ἐπίσης ἂν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\alpha + \beta\sqrt{2}$ ὅπου α καὶ β οἰοῖδήποτε σύμμετροι εἶναι εὐκόλον νὰ ἐξακριβώσωμεν ὅτι: 1ον) Τὸ ἄθροισμα δύο τυχόντων ἀριθμῶν τῆς ὡς ἄνω μορφῆς, $\alpha + \beta\sqrt{2} + \alpha' + \beta'\sqrt{2} = (\alpha + \alpha') + (\beta + \beta')\sqrt{2}$ εἶναι πάλιν τῆς ἰδίας μορφῆς (τοῦ ἰδίου συνόλου) ἀριθμὸς. 2ον) Ἡ διαφορὰ ἐπίσης: $\alpha + \beta\sqrt{2} - (\alpha' + \beta'\sqrt{2}) = (\alpha - \alpha') + (\beta - \beta')\sqrt{2}$. 3ον) Τὸ γινόμενον δύο τοιούτων ἀριθμῶν: $(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha' + \beta'\sqrt{2}) = (\alpha\alpha' + 2\beta\beta') + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sqrt{2}$ εἶναι πάλιν τῆς ἰδίας μορφῆς ἀριθμὸς καὶ 4ον) Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν τῆς μορφῆς αὐτῆς:

$$\frac{\alpha + \beta\sqrt{2}}{\alpha' + \beta'\sqrt{2}} = \frac{(\alpha + \beta\sqrt{2})(\alpha' - \beta'\sqrt{2})}{\alpha'^2 - 2\beta'^2} = \frac{\alpha\alpha' - 2\beta\beta'}{\alpha'^2 - 2\beta'^2} + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'^2 - 2\beta'^2} \cdot \sqrt{2}$$

εἶναι πάλιν ἀριθμὸς τῆς αὐτῆς μορφῆς (ἢ κατηγορίας).

Συνεπῶς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $\alpha + \beta\sqrt{2}$ ὅπου α καὶ β σύμμετροι, ἀποτελεῖ ἓνα πεδίου ἀριθμῶν.

Ἀκριβέστερος ὁρισμὸς τοῦ πεδίου εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

«Πεδίου ἀριθμῶν εἶναι ἓνα σύνολον ἀριθμῶν πραγματικῶν ἢ μιγαδικῶν τοιοῦτον, ὥστε:

(i) Νὰ ὑπάρχουν δύο τοῦλάχιστον διαφορετικοὶ ἀριθμοὶ μέσα εἰς τὸ σύνολον αὐτό.

Αἱ δι' ἀστερίσκου σημειούμεναι παράγραφοι δύνανται νὰ παραλείπωνται χωρὶς τοῦτο νὰ ἔχη ἐπίδρασιν ἐπὶ τῆς συνεχείας τῆς θεωρίας.

(ii) "Αν α και β είναι δύο αριθμοὶ τοῦ συνόλου τότε $\delta \alpha + \beta$, $\delta \alpha - \beta$, $\delta \alpha \beta$ ἀνήκουν εἰς τὸ αὐτὸ σύνολον καὶ ἐὰν $\beta \neq 0$ τότε καὶ $\delta \alpha/\beta$ ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον».

Τὸ σύνολον τῶν μιγάνδων ἀποτελεῖ προφανῶς ἓνα πεδίου ἀριθμῶν. (Τὸ μιγαδικὸν πεδίου, ἐντὸς τοῦ ὁποίου περιέχονται καὶ οἱ πραγματικοί). Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐπίσης καὶ τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἐπίσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν δὲν ἀποτελεῖ πεδίου. Διότι ἡ διαφορὰ $\alpha - \beta$ δυνατόν νὰ μὴ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς ἐνῶ οἱ α καὶ β εἶναι.

2ον. Τὸ σύνολον τῶν μιγάνδων τῆς μορφῆς $(\alpha + \beta i)/(\gamma + \delta i)$ ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἀκέραιοι, ἀποτελεῖ πεδίου ἀριθμῶν. Διότι τὸ ἄθροισμα, ἡ διαφορὰ, τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον δύο τοιούτων ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς τοῦ αὐτοῦ πάλιν τύπου ὅπως δύναται ὁ ἀναγνώστης νὰ ἐπαληθεύσῃ εὐκόλως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

45) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha + \beta i\sqrt{3}$, ὅπου α καὶ β οἰοιδῇποτε σύμμετροι, ἀποτελοῦν πεδίου.

46) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἀποτελοῦν πεδίου οἱ ἀριθμοὶ τῆς μορφῆς $\alpha + \beta\sqrt{7}$, ὅπου α καὶ β τυχόντες σύμμετροι ἀριθμοί.

47) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ἀνήκοντες εἰς δύο συγχρόνως πεδία, ἀποτελοῦν καὶ αὐτοὶ πεδίου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙ

Τὸ δευτεροβάθμιον τριώνυμον.

ΙΙ. Ἐπίλυσις τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ βαθμοῦ μιᾶς ἐξισώσεως (βλ. [1], § 124, ὁρισμός), δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις εἶναι ἐκείνη ἣτις μετὰ τὴν τακτοποίησιν τῶν ὄρων τῆς λαμβάνει τὴν μορφήν

$$(1) \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{ὅπου } \alpha \neq 0.$$

Οἱ συντελεσταὶ α, β, γ θὰ ὑποτίθενται πραγματικοὶ ἀριθμοὶ εἰς ὅλον τὸ παρὸν κεφάλαιον.

Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν (1) μετασχηματίζομεν ὥς ἐξῆς τὸ πρῶτον μέλος τῆς :

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left(x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \\ &= \alpha \left(x^2 + 2 \frac{\beta}{2\alpha} x + \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right\}. \end{aligned}$$

Οὕτω ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(2) \quad \alpha \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2} \right\} = 0.$$

Διακρίνομεν τώρα, τρεῖς περιπτώσεις :

(i) **Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι θετικὴ.** Τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$ εἶναι τὸ τετράγωνον τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ καὶ ἡ (2) γράφεται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ :

$$\begin{aligned} \alpha \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right)^2 \right\} &= 0 \quad \text{ἢ, ἀκόμη} \\ (3) \quad \alpha \left[x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right] \cdot \left[x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right] &= 0. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ $\alpha \neq 0$, διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ ἐξίσωσις (3) πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἓνας ἐκ τῶν δύο ἄλλων παραγόντων νὰ εἶναι μηδέν. Ὡστε πρέπει : ἡ

$$(4) \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} - \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = 0, \quad \text{ὁπότε } x = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ἢ}$$

$$(5) \quad x + \frac{\beta}{2\alpha} + \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = 0, \text{ ὅποτε } x = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐπομένως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, καθ' ἣν $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχει δύο διαφόρους ρίζας (καὶ μόνον, αὐτάς) πραγματικὰς ἀμφοτέρως καὶ παρεχομένης ὑπὸ τῶν τύπων (4) καὶ (5).

(ii) Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ἰσοῦται μὲ μηδέν. Τότε οἱ ἀνωτέρω τύποι (4) καὶ (5) ἰσχύουν καὶ πάλιν ἀλλὰ παρέχουν τὴν ἰδίαν τιμὴν εἰς τὸ x , τὴν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ὡστε εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσως εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἴσαι.

Λέγομεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις ἔχει τότε μίαν διπλὴν ρίζαν.

(iii) Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ εἶναι ἀρνητικὴ. Τότε ἡ (2) γράφεται :

$\alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right] = 0$ ἡ δὲ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράστασις δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x μηδενίζεται. Διότι εἶναι ἄθροισμα τῆς μὴ ἀρνητικῆς ποσότητος $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2$ καὶ τῆς ποσότητος $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$ ἥτις ἐξ ὑποθέσεως εἶναι θετική. Ἄρα ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παράστασις εἶναι θετικὴ (καὶ συνεπῶς οὐδέποτε μηδενιζομένη) οἷανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ ὁ x . Ἐν τῇ περιπτώσει λοιπὸν ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει πραγματικὰς ρίζας.

Ὅταν ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει πραγματικὰς ρίζας, τότε ἔχει μιγαδικὰς (φανταστικὰς) ρίζας. Διότι ὑπάρχουν τότε δύο μιγαδικαὶ τιμαὶ τοῦ x ἱκανοποιουῦσαι τὴν ἐξίσωσιν. Πράγματι, ἐφ' ὅσον $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, ἡ $\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}$ εἶναι ἓνας φανταστικὸς ἀριθμὸς (ἴδε § 5, γ') καὶ ἡ ἐξίσωσις (1) γραφομένη καὶ πάλιν ὑπὸ τὴν μορφήν (3) ἀληθεύει ὅταν ὁ x μηδενίζει τὴν μίαν ἐκ τῶν δύο ἀγκυλῶν, ἥτοι ὅταν ὁ x ἔχη μίαν τῶν φανταστικῶν τιμῶν $\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$, ὅπου ἡ

$$\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma} = \sqrt{-(4\alpha\gamma - \beta^2)} = i\sqrt{4\alpha\gamma - \beta^2}.$$

Ὡστε ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ οἱ τύποι (4) καὶ (5) ἰσχύουν, παρέχοντες διὰ τὸν x δύο συζυγεῖς μιγαδικὰς τιμὰς (βλ. § 8).

Παρατήρησις 1η. Ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ἔχουσα ὡς εἶδομεν ἰδιάζουσαν σημασίαν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ καλεῖται διακρίνουσα τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσως καὶ παρίσταται συνήθως μὲ Δ . Ἦτοι

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma.$$

Τὰ ἀνωτέρω συμπεράσματα συνοψίζονται τώρα, ὡς ἑξῆς :

Εἶδος τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσως.

(i) Ἐὰν $\Delta > 0$, ἡ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους.

(ii) Ἐὰν $\Delta = 0$, ἡ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει μίαν διπλὴν πραγματικὴν ρίζαν (ἥτοι δύο ἴσας πραγματικὰς ρίζας).

(iii) Ἐὰν $\Delta < 0$, ἡ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας φανταστικὰς καὶ συζυγεῖς.

Παρατήρησις 2α. Εἰς πάσας τὰς περιπτώσεις, αἱ δύο ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (δηλ. αἱ δύο τιμαὶ τοῦ x αἱ ἱκανοποιούσαι τὴν ἐξίσωσιν) παρέχονται ὑπὸ τοῦ τύπου

$$(6) \quad x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ὁ (6) ἀπλοποιεῖται, ὅταν ὁ β εἶναι ἀκέραιος ἄρτιος, δηλ. ὅταν ἡ ἐξίσωσις ἔχει τὴν μορφήν $\alpha x^2 + 2\beta'x + \gamma = 0$.

$$\text{Τότε ἔχομεν } x = \frac{-2\beta' \pm \sqrt{4\beta'^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{ἥτοι}$$

$$(6') \quad x = \frac{-\beta' \pm \sqrt{\beta'^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. $N\alpha$ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Λύσις. Κατὰ τὸν ἀπλοποιημένον τύπον (6') θὰ ἔχομεν

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{1} = 1 \pm 2.$$

ἄρα $x' = 3$ καὶ $x'' = -1$ εἶναι αἱ ζητούμεναι λύσεις.

2ον. $N\alpha$ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4x^2 - 20x + 25 = 0$.

Λύσις. Ἐφαρμόζοντες τὸν τύπον (6') λαμβάνομεν

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 25}}{4} = \frac{10 \pm 0}{4}.$$

Δηλ. ἡ ἐξίσωσις ἔχει διπλὴν ρίζαν τὴν $x' = 5/2$.

3ον. $N\alpha$ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2 + x + 4 = 0$.

Λύσις. Κατὰ τὸν τύπον (6): $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{2}.$

Ὡστε ἔχομεν δύο συζυγεῖς μιγαδικὰς λύσεις

$$x' = \frac{-1 + i\sqrt{15}}{2} \quad \text{καὶ} \quad x'' = \frac{-1 - i\sqrt{15}}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

48) $N\alpha$ λυθοῦν ὡς πρὸς x ἢ y αἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} 2x^2 + x - 15 = 0, & 5x^2 - 18x - 8 = 0, & 8y^2 - 14y - 15 = 0, \\ 28x^2 - 9x - 9 = 0, & 14y^2 - 5y - 24 = 0, & x^2 - 2x - 1 = 0, \\ x^2 - 2x - 2 = 0, & 2y^2 - 2y - 1 = 0, & 16x^2 - 24x - 3 = 0. \end{array}$$

49) $N\alpha$ λυθοῦν ὡς πρὸς x ἢ y αἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{array}{lll} x^2 - x + 1 = 0, & x^2 - 4x + 5 = 0, & y^2 - 4y + 7 = 0, \\ 2x^2 - 6x + 27 = 0, & 25x^2 - 20x + 7 = 0, & 4y^2 - 4y + 29 = 0. \end{array}$$

50) $N\alpha$ λυθοῦν ὡς πρὸς x ἢ y αἱ ἐξισώσεις:

$$x^2 + 4kx - 21k^2 = 0, \quad 4x^2 - 4kx - 35k^2 = 0, \quad 8y^2 = 10ky + 3k^2.$$

51) $N\alpha$ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$2x + \frac{21}{x+4} = 9, \quad \frac{23}{x-1} + 3 + \frac{70}{x^2-4x+3} = 0, \quad \frac{3}{x} + \frac{5}{x-2} = 2.$$

52) Νά εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ λύσεις ἐκάστης τῶν ἐξισώσεων: $x^8+1=0$, $x^8+27=0$.

53) Προσδιορίσατε τὸ y , συναρτήσῃ τοῦ x , ἐκ τῶν ἐξισώσεων:

$$2y^2+3xy-7y=2x^2-11x+15, \quad 6y^2-4y-3xy=9x^2+9x+2.$$

54) Προσδιορίσατε τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῶν κάτωθι ἐξισώσεων χωρὶς νὰ εὐρήτε τὰς ρίζας:

$$x^2-2x-15=0, \quad x^2+8x+16=0, \quad 3x^2-8x+5=0,$$

$$5x^2+13x+9=0, \quad 9x^2-12x+4=0, \quad 7x-4-3x^2=0.$$

55) Προσδιορίσατε τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ k , διὰ τὰς ὁποίας αἱ ρίζαι ἐκάστης τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, εἶναι ἴσαι:

$$\begin{aligned} 9x^2+12x+k=0, & \quad 9x^2+2kx+16=0, & \quad 9x^2+3(k+1)x+2(k+1)=0, \\ 3kx^2-30x+8k+1=0, & \quad 3kx^2+x^2+24x+2k-1=0, & \quad kx^2+2kx+9=x^2-2x. \end{aligned}$$

56) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x} + \frac{3}{2} = \frac{1}{x+3}, \quad \beta) \frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2} = 7.$$

57) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) 1 + \frac{4x^2}{2x^2+8x} + \frac{27}{2x^2+7x-4} = \frac{6}{2x-1},$$

$$\beta) \frac{3x^3-5x^2+2x}{4x^2-20x+16} - \frac{5x+1}{6x^2-24x} + \frac{2x-1}{48-24x+3x^2} = \frac{11x^3+28x^2+21x+4}{6(x^2+x)[(x+4)^2-16x]}.$$

58) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+3=0,$$

$$\beta) (\alpha^2+\alpha-2)x^2+(2\alpha^2+\alpha+3)x+\alpha^2-1=0,$$

ὅπου α, β, γ πραγματικοὶ ἀριθμοί.

59) Νά εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ πραγματικαὶ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x^2-2x+|5-3x|=0$.

60) Δείξατε ὅτι, ἂν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ τὰ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημα, ἡ ἐξίσωσις ἔχει πραγματικὰς καὶ ἀντίσους ρίζας.

61) Ἐάν α, β, γ πραγματικοί, ἡ δὲ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἔχει δύο ρίζας, ἔστω τὰς ρ_1 καὶ ρ_2 , τοιαύτας, ὥστε $|\rho_1| \neq |\rho_2|$, τότε αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά.

62) Ὅρίσατε τὸ k οὕτως, ὥστε: i) ἡ ἐξίσωσις $5x^2-9kx-k+6=0$ νὰ δέχεται ὡς ρίζαν τὸ 0 ii) ἡ $3x^2-5kx+10x=7$ νὰ ἔχη ρίζας δύο ἀντιθέτους ἀριθμούς.

63) Ὅρίσατε τὰ k καὶ λ οὕτως, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $3x^2+8\lambda x-24x+5k=10$ νὰ ἔχη ὡς μόνον ρίζαν τὸ 0.

64) Νά εὑρεθοῦν αἱ πραγμ. λύσεις τῶν ἐξισώσεων (βλ. Α' τόμ. § 135, σελ. 224):

$$\sqrt{3x+7}=x+1,$$

$$\sqrt{7x+14}=x+2,$$

$$\sqrt{3x+13}=x+5,$$

$$\sqrt{3x+1}+3x=11,$$

$$\sqrt{5x-4}=2+\sqrt{2x},$$

$$\sqrt{8x+5}-\sqrt{2x+3}=1.$$

65) Νά εὑρεθοῦν αἱ πραγμ. λύσεις τῶν ἐξισώσεων:

$$\sqrt{2x+5}=\sqrt{4x+3}+1, \quad \sqrt{\sqrt{5x-1}-x}=1, \quad x^2+3x+6-3\sqrt{x^2+3x+6}=4.$$

66) Νά δειχθῇ ὅτι κάθε μιγαδικὸς ἀριθμὸς μέτρου 1 ἔχων πραγμ. μέρος $\neq -1$ δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $\frac{1+ia}{1-ia}$, ὅπου a πραγματικὸς ἀριθμὸς.

67) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$2\sqrt{8x^2-26x+16}-1=\frac{5-4\sqrt{8x^2-26x+16}}{\sqrt{8x^2-26x+16}}.$$

$$68) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(1-x)^2} = \sqrt[3]{1-x^2}.$$

69) Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ἐπόμεναι ἐξισώσεις ἔχουν ρίζας πραγματικές (α, β, γ πραγματικοί):
 α) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$, β) $(\alpha - \beta + \gamma)x^2 + 4(\alpha - \beta)x + (\alpha - \beta - \gamma) = 0$,
 γ) $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta^2 + 2\beta\gamma - \gamma^2 = 0$.

70) Ποῖον τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως: $\alpha^2/(x+1) - \gamma^2/x = \beta^2$, ὅταν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ ἐκφράζουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου;

71) Δεῖξτε ὅτι, ἂν ἡ ἐξίσωσις:

$$\left(1 - k + \frac{\pi^2}{2}\right)x^2 + \pi(1+k)x + k(k-1) + \frac{\pi^2}{2} = 0$$

ἔχει διπλὴν ρίζαν, τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνει καὶ διὰ τὴν $x^2 + \pi x + k = 0$ καὶ ἀντιστρόφως.

72) Δεῖξτε ὅτι, ἂν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ ὅπου $\beta \neq 0$, εἶναι πραγματικά, τότε αἱ τῆς: $(\alpha + \gamma)(\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma) = 2(\alpha\gamma - \beta^2)(x^2 + 1)$ εἶναι φανταστικά καὶ τάνάπαλιν.

73) Τί πρέπει νὰ συμβαίνει, ἵνα τῶν συντελεστῶν α, β, γ ὄντων ρητῶν καὶ αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ νὰ εἶναι ρηταί; Νά δειχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῶν ἐπομένων ἐξισώσεων

$$\alpha) (\alpha - \beta + \gamma)x^2 + 2\gamma x + (\beta + \gamma - \alpha) = 0,$$

$$\beta) \alpha\beta\gamma x^2 + 3\alpha^2\gamma x + \beta^2\gamma x - 6\alpha^2 - \alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

εἶναι ρηταί, ἐφ' ὅσον καὶ οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ρητοί.

12. Ἀθροισμα καὶ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως. Ἐστω ἡ δευτεροβάθμια ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ q_1 , q_2 τὰς δύο ρίζας αὐτῆς, τότε ὡς εἶδομεν, τὰ q_1 καὶ q_2 θὰ παρέχωνται

$$\text{ταὶ ὑπὸ τῶν τύπων } q_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}, \quad q_2 = \frac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς δύο ταύτας ἰσότητας λαμβάνομεν:

$$q_1 + q_2 = -\frac{2\beta}{2\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐὰν δὲ τὰς πολλαπλασιάσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$q_1 q_2 = \frac{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma})}{4\alpha^2} = \frac{\beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)}{4\alpha^2} = \frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2} = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἐτσι ἔχομεν τοὺς θεμελιώδεις τύπους:

$$(1) \quad \boxed{q_1 + q_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad q_1 q_2 = \frac{\gamma}{\alpha}}$$

ἰσχύοντας, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ εἶδος τῶν ριζῶν.

Παρατήρησις. Ἐὰν δεχθῶμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας q_1 καὶ q_2 διαφόρους ἀλλήλων τότε θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha(x - q_1)(x - q_2)$ (ἰδὲ [1], § 111, θεώρ. I). Ἡ ταυτότης αὕτη γράφεται: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \equiv \alpha x^2 - \alpha(q_1 + q_2)x + \alpha q_1 q_2$ καὶ δίδει $\beta = -\alpha(q_1 + q_2)$, $\gamma = \alpha q_1 q_2$ ἥτοι $q_1 + q_2 = -\beta/\alpha$ καὶ $q_1 q_2 = \gamma/\alpha$. Ἐπανευρίσκομεν οὕτω τοὺς θεμελιώδεις τύπους (1) χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν ἐξίσωσιν.

Σ. Γ. Κανέλλου: «Μαθήματα Ἀλγέβρας». Β'. τόμος

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

74) Ποῖον τὸ k ὅτανi) Ἡ $kx^2 - 4x - 35 = 0$ ἔχει ἄθροισμα ριζῶν $= 1$.ii) Ἡ $2x^2 + k(x - 6) = 0$ ἔχει ρίζας ὧν τὸ γινόμενον $= -1/2$.iii) Ἡ $6x^2 + 7x + k = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν ἴσην μὲ $4/3$.75) Ἐάν αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + bx + \gamma = 0$, εἶναι ρ_1 καὶ ρ_2 , νὰ εὗρεθοῦν συναρτήσῃ τῶν ρ_1 καὶ ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + 2 + \frac{1}{x} = \frac{\beta^2}{\alpha\gamma}$.76) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 - (\alpha + \gamma)x + \alpha\gamma - \beta^2 = 0$, νὰ εὗρεθοῦν αἱ ρίζαι τῆς $(y - \rho_1)(y - \rho_2) = -\beta^2$ χωρὶς νὰ χρησιμοποιηθῇ ὁ τύπος ὁ ἐπιλύων δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν.77) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς $9x^2 + 6x + \gamma = 0$ ἰσοῦται μὲ 2, εὗρετε τὰς ρίζας καὶ τὸ γ .78) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $x^2 - (\lambda + 5)x + \mu - 4 = 0$ νὰ προσδιορισθοῦν τὰ λ καὶ μ δοθέντος ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ διπλάσια τῶν ριζῶν τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.79) Ἐάν ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς $\lambda x^2 + 2(\lambda + 1)x - 3(\lambda + 2) = 0$, ποῖα σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ρ_1, ρ_2 , ἀνεξάρτητος τοῦ λ ;80) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + x - 1 = 0$ δεῖξατε ἄνευ εὐρέσεως τῶν ρ_1, ρ_2 ὅτι $\rho_1^2 = \rho_2 + 2$ καὶ $\rho_2^2 = \rho_1 + 2$.81) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς $x^2 - 5x + \lambda = 0$ πληροῦν τὴν σχέσιν

$$\left(\rho_1 - \frac{2}{\rho_2}\right)\left(\rho_2 - \frac{2}{\rho_1}\right) = \frac{8}{3};$$

82) Ἐάν αἱ ἐξισώσεις $x^2 - \alpha x + \alpha\beta = 0$, $x^2 - \beta x + \beta\gamma = 0$, $x^2 - \gamma x + \alpha\gamma = 0$ ἔχουν ἀντιστοίχως ρίζας (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) , (ρ_3, ρ_1) νὰ εὗρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ποσότητος $\alpha + \beta + \gamma$.83) Ἐάν μεταξὺ τῶν (πραγματικῶν) συντελεστῶν α, β, γ τῆς δευτεροβάθμιου ἐξισώσεως (1) $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ὑφίσταται ἡ ἀνισότης $|\alpha| > |\alpha + \beta + \gamma|$ τότε ἂν ἡ (1) ἔχει πραγματικὰς ρίζας ρ_1, ρ_2 ἡ μία τοῦλάχιστον τούτων περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 2.84) Ἐάν α καὶ β πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι ὥστε $|\alpha| - |\beta| > 1$, καὶ $\beta \neq 0$, νὰ δεῖχθῇ ὅτι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

13. Συμμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν. Οἱ ἀνωτέρω θεμελιώδεις τύποι (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου χρησιμεύουν διὰ τὸν ταχὺν ὑπολογισμὸν διαφόρων συμμετρικῶν ὡς πρὸς ρ_1 καὶ ρ_2 παραστάσεων, ὅπως αἱ κάτωθι κατὰ σειρὰν ἀναγραφόμεναι :

1ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν :*

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

2ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων :*

$$\rho_1^3 + \rho_2^3 = (\rho_1 + \rho_2)^3 - 3\rho_1\rho_2(\rho_1 + \rho_2) = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$$

3ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τετάρτων δυνάμεων :*

$$\begin{aligned} \rho_1^4 + \rho_2^4 &= (\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 - 2\rho_1^2\rho_2^2 = \{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1\rho_2\}^2 - 2(\rho_1\rho_2)^2 = \\ &= \left\{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2\frac{\gamma}{\alpha}\right\}^2 - 2\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2. \end{aligned}$$

4ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν πέμπτων δυνάμεων, $q_1^5 + q_2^5$.* Αναχωροῦντες ἀπὸ τῆν σχέσιν $q_1 + q_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ὑψοῦντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη ταύτης εἰς τὴν πέμπτῃν δύναμιν λαμβάνομεν $q_1^5 + 5q_1^4q_2 + 10q_1^3q_2^2 + 10q_1^2q_2^3 + 5q_1q_2^4 + q_2^5 = -\frac{\beta^5}{\alpha^5}$.

$$\eta \quad q_1^5 + q_2^5 + 5q_1q_2(q_1^3 + q_2^3) + 10q_1^2q_2^3(q_1 + q_2) = -\frac{\beta^5}{\alpha^5}.$$

* Ἀλλὰ τὰς παραστάσεις q_1q_2 , $q_1^3 + q_2^3$, $q_1 + q_2$ ὑπελογίσαμεν προηγουμένως. Ὡστε θὰ λάβωμεν :

$$q_1^5 + q_2^5 + 5 \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3} + 10 \left(\frac{\gamma}{\alpha} \right)^2 \cdot \left(-\frac{\beta}{\alpha} \right) = -\frac{\beta^5}{\alpha^5}$$

καὶ ἐξ αὐτῆς ὑπολογίζεται ἡ ποσότης $q_1^5 + q_2^5$.

5ον. *Τὸ ἄθροισμα $S_v = q_1^v + q_2^v$ ὅπου v τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς, δύναται νὰ ὑπολογισθῇ βαθμηδὸν δι' ἀναγωγικοῦ τύπου.*

* Ἐπειδὴ τὰ q_1 καὶ q_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + bx + \gamma = 0$ θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας

$$aq_1^2 + bq_1 + \gamma = 0, \quad aq_2^2 + bq_2 + \gamma = 0.$$

Πολύντες ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ q_1^{v-2} καὶ τὰ τῆς δευτέρας ἐπὶ q_2^{v-2} ἔχομεν :

$$aq_1^v + bq_1^{v-1} + \gamma q_1^{v-2} = 0, \quad aq_2^v + bq_2^{v-1} + \gamma q_2^{v-2} = 0.$$

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς δύο τελευταίας αὐτὰς ἐξισώσεις καὶ λαμβάνομεν

$$a(q_1^v + q_2^v) + b(q_1^{v-1} + q_2^{v-1}) + \gamma(q_1^{v-2} + q_2^{v-2}) = 0$$

$$\eta \quad (1) \quad aS_v + bS_{v-1} + \gamma S_{v-2} = 0.$$

* Ἐκ τοῦ ἀναγωγικοῦ τύπου (1) ὑπολογίζεται τὸ S_v ὅταν γνωρίζωμεν τὸ S_{v-1} καὶ τὸ S_{v-2} .

$$\text{Οὕτω π.χ. διὰ } v=6 \text{ ἡ (1) γίνεται } aS_6 + bS_5 + \gamma S_4 = 0 \text{ ἢ } S_6 = -\frac{\beta}{\alpha} S_5 - \frac{\gamma}{\alpha} S_4$$

γνωρίζοντες δὲ τὸ $S_4 = q_1^4 + q_2^4$ καὶ τὸ $S_5 = q_1^5 + q_2^5$ ὑπολογίζομεν τὸ S_6 , δηλαδὴ τὸ $q_1^6 + q_2^6$ κ.ο.κ.

6ον. *Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(q_1, q_2)$ συμμετρικὸν ὡς πρὸς q_1, q_2 ἐκφράζεται συναρτήσῃ τοῦ ἀθροίσματος $q_1 + q_2$ καὶ τοῦ γινομένου q_1q_2 τῶν ριζῶν q_1, q_2 καὶ συνεπῶς ὑπολογίζεται ῥητῶς συναρτήσῃ τῶν συντελεστῶν α, β, γ τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + bx + \gamma = 0$.*

Διότι, ἂν θεωρήσωμεν ὅρον τινὰ π.χ. τὸν $Aq_1^6q_2^2$ τοῦ πολυωνύμου, τότε θὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ πολυώνυμον καὶ ὁ ὅρος $Aq_1^3q_2^5$ διότι, ἄλλως τὸ πολυώνυμον δὲν θὰ ἦτο συμμετρικὸν ὡς πρὸς q_1, q_2 (δηλ. θὰ μετεβάλετο δι' ἐναλλαγῆς τῶν q_1 καὶ q_2).

Οἱ δύο αὐτοὶ ὅροι ὁμοῦ λαμβανόμενοι δίδουν :

$$Aq_1^3q_2^3(q_1^3 + q_2^3) = A(q_1q_2)^3[(q_1 + q_2)^3 - 3q_1q_2(q_1 + q_2)]$$

δηλ. ἄθροισμα μόνον ἀπὸ τὰ q_1q_2 καὶ $q_1 + q_2$ ἐξαχτώμενον.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ πολωνύμου, τῆς μορφῆς $A\varrho_1^{\mu}\varrho_2^{\nu}$ ($\mu < \nu$). Δηλαδή πρὸς ἕκαστον τοιοῦτον ὅρον θ' ἀντιστοιχεῖ εἰς δεύτερος $A\varrho_1^{\nu}\varrho_2^{\mu}$ (ὅστις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ εἰς τὸ πολωνύμου, ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι συμμετρικὸν ὡς πρὸς ϱ_1, ϱ_2). Οἱ δύο οὗτοι ὅροι ἔχουν ἄθροισμα $A\varrho_1^{\mu}\varrho_2^{\nu}(\varrho_1^{\nu-\mu} + \varrho_2^{\nu-\mu})$. Ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα $\varrho_1^{\nu-\mu} + \varrho_2^{\nu-\mu}$ ὅπως ἀπεδείχθη διὰ τοῦ ἀναγωγικοῦ τύπου (1) δύναται πάντοτε νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῶν $\varrho_1 + \varrho_2$ καὶ $\varrho_1\varrho_2$. Ὡστε ἀνὰ δύο οἱ ὅροι τοῦ συμμετρικοῦ πολωνύμου ἔχουν ἄθροισμα ἐκφραζόμενον συναρτήσῃ τῶν ποσοτήτων $\varrho_1 + \varrho_2$ καὶ $\varrho_1\varrho_2$.

Τέλος, δύναται νὰ ὑπάρχῃ ἐν τῷ πολωνύμῳ καὶ ὅρος τις τῆς μορφῆς $A\varrho_1^k\varrho_2^k$ ὅστις εἶναι συμμετρικὸς ὡς πρὸς ϱ_1 καὶ ϱ_2 καὶ ὅστις ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑαυτόν. Ἀλλὰ καὶ αὐτὸς ἐκφράζεται συναρτήσῃ τοῦ $\varrho_1\varrho_2$ διότι γράφεται $A(\varrho_1\varrho_2)^k$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. Ἐὰν ϱ_1, ϱ_2 αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + bx + \gamma = 0$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\varrho_1^3 + \varrho_2^3 + 5\varrho_1^2\varrho_2 + 5\varrho_1\varrho_2^2 + 7\varrho_1\varrho_2$ χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

Λύσις. Ἡ παράστασις εἶναι συμμετρικὴ ὡς πρὸς ϱ_1, ϱ_2 καὶ γράφεται:

$$\begin{aligned} k &= \varrho_1^3 + \varrho_2^3 + 5\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + 7\varrho_1\varrho_2 = (\varrho_1 + \varrho_2)^3 - 3\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + 5\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + 7\varrho_1\varrho_2 = \\ &= (\varrho_1 + \varrho_2)^3 + 2\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + 7\varrho_1\varrho_2 = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 + 2\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + 7\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-\beta^3 - 2\alpha\beta\gamma + 7\alpha^2\gamma}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. Ἄν ϱ_1, ϱ_2 αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + bx + \gamma = 0$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $(\varrho_1 - \varrho_2)^2$.

Λύσις. Ἡ συμμετρικὴ παράστασις $(\varrho_1 - \varrho_2)^2$ γράφεται: $(\varrho_1 + \varrho_2)^2 - 4\varrho_1\varrho_2$ καὶ συνεπῶς ἰσοῦται μὲ $\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 4\frac{\gamma}{\alpha}$. Ὡστε: (2) , $(\varrho_1 - \varrho_2)^2 = \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{\alpha^2}$. Ἐὰν αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά δηλ. $\beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$ συνάγομεν ἐκ τῆς (2) τὸν τύπον $|\varrho_1 - \varrho_2| = \frac{\sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{|\alpha|}$.

7ον. Συμμετρικαὶ κλασματικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν. Διάφοροι κλασματικαὶ παραστάσεις τῶν ριζῶν, δύναται νὰ ὑπολογισθῶν χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις ἐφ' ὅσον ἀνάγονται τελικῶς εἰς πηλίκον δύο ἀκεραίων πολωνύμων συμμετρικῶν ὡς πρὸς ϱ_1 καὶ ϱ_2 .

Οὕτω π.χ. ἡ παράστασις $\frac{1}{\varrho_1^{\nu}} + \frac{1}{\varrho_2^{\nu}} = \frac{\varrho_1^{\nu} + \varrho_2^{\nu}}{(\varrho_1\varrho_2)^{\nu}}$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\varrho_1^{\nu} + \varrho_2^{\nu}$ τὴν ὁποίαν ἐξητάσαμεν ἀνωτέρω.

Ἐπίσης ἡ παράστασις $\frac{(2\varrho_1^2 - \varrho_1)(2\varrho_2^2 - \varrho_2)}{(3\varrho_1 + \varrho_2)(3\varrho_2 + \varrho_1)}$ ἥτις εἶναι πηλίκον δύο συμμετρι-

κῶν πολωνύμων δύναται κατὰ τὰ προηγούμενα, νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ μόνον τοῦ $\varrho_1 + \varrho_2$ καὶ $\varrho_1\varrho_2$. Πράγματι, μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν πράξεων ἡ ἀνωτέρω παράστασις γράφεται καί:

$$\frac{4(\varrho_1\varrho_2)^2 - 2\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1\varrho_2}{9\varrho_1\varrho_2 + 3(\varrho_1^2 + \varrho_2^2) + \varrho_1\varrho_2} = \frac{4(\varrho_1\varrho_2)^2 - 2\varrho_1\varrho_2(\varrho_1 + \varrho_2) + \varrho_1\varrho_2}{3(\varrho_1 + \varrho_2)^2 + 4\varrho_1\varrho_2}.$$

Τέλος, ἄς φέρωμεν ἀκόμη ὡς παράδειγμα τὴν κλασματικὴν παράστασιν

$$k = \frac{1}{(\alpha_1 + \beta)^2} + \frac{1}{(\alpha_2 + \beta)^2}$$

ὅπου α_1, α_2 αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἐνταῦθα, παρατηροῦμεν ὅτι ἀφοῦ τὸ α_1 εἶναι ρίζα, θὰ ἐπαληθεύῃ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, ἥτοι θὰ ἔχωμεν, $\alpha_1^2 + \beta \alpha_1 + \gamma = 0$ καὶ συνεπῶς $\alpha_1(\alpha_1 + \beta) = -\gamma$ καὶ $\alpha_1 + \beta = -\frac{\gamma}{\alpha_1}$ καὶ

$$\text{τέλος } \frac{1}{\alpha_1 + \beta} = -\frac{\alpha_1}{\gamma}. \text{ Ὀμοίως, εἶναι } \frac{1}{\alpha_2 + \beta} = -\frac{\alpha_2}{\gamma}. \text{ Ὡστε ἡ παράστασις}$$

$$k \text{ ἰσοῦται πρὸς } \frac{\alpha_1^2}{\gamma^2} + \frac{\alpha_2^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}{\gamma^2} = \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha^2\gamma^2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

85) Δείξατε ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $5x^2 - 2(5\mu + 3)x + 5\mu^2 + 6\mu + 1 = 0$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ μ .

86) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ π καὶ k γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + \pi x + k = 0$ αὐξάνονται κατὰ μονάδα γίνονται ρίζαι τῆς $x^2 - \pi^2 x + \pi k = 0$.

87) Ὑποτιθεμένου ὅτι αἱ ἐξισώσεις $x^2 + \pi x + k = 0$ καὶ $x^2 + \pi' x + k' = 0$ ἔχουν ρίζας x_1, x_2 ἢ πρώτη καὶ x_1, x'' ἢ δευτέρα, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ $x_2 - x''$, ἢ x_1 καὶ τὸ ἄθροισμα $x_2 + x''$ συναρτήσει τῶν π, k, π', k' .

88) Ἐάν x_1, x_2 αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + \pi x + 1 = 0$ καὶ ρ_1, ρ_2 αἱ τῆς $x^2 + kx + 1 = 0$ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ π καὶ k ἂν δίδεται ἡ σχέση: $(x_1 - \rho_1)(x_2 - \rho_1)(x_1 + \rho_2)(x_2 + \rho_2) = 385$ καὶ ὅτι ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x ἐπαληθεύουσα συγχρόνως τὰς ἐξισώσεις $x^2 + \pi x + 1 = x(52 + x)$, $x^2 + kx + 1 = (x + 1)(x + 2)$.

89) Δίδεται ὅτι αἱ τρεῖς ἐξισώσεις $x^2 + \pi x + k = 0$, $x^2 + \pi' x + k' = 0$, $x^2 + \pi'' x + k'' = 0$ ἔχουν ἀντιστοίχως ρίζας: (ρ_1, ρ_2) , (ρ_2, ρ_3) , (ρ_3, ρ_1) . Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῶν ὑπάρχοντων τρεῖς σχέσεις ἀνεξάρτητοι τῶν ριζῶν. **Ἀντιστρόφως*, πληρουμένων τῶν σχέσεων τούτων, αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἔχουν ἀνὰ δύο, μίαν ρίζαν κοινήν.

90) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 - \pi x + k = 0$, νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν π καὶ k ἑκάστη τῶν παραστάσεων:

$$(3\rho_1 + 1)(3\rho_2 + 1) / (2\rho_1 + 9)(2\rho_2 + 9), (\rho_1 - \pi)^{-4} + (\rho_2 - \pi)^{-4}, \rho_1^2(\rho_1^2 \rho_2^{-1} - \rho_2) + \rho_2^2(\rho_2^2 \rho_1^{-1} - \rho_1).$$

91) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2 + \pi x + k = 0$ καθὼς καὶ τῆς $x^{2v} + \pi^v x^v + k^v = 0$, ὅπου v ἄρτιος ἀριθμός, δείξατε ὅτι τότε οἱ ἀριθμοὶ ρ_1/ρ_2 καὶ ρ_2/ρ_1 εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^v + 1 + (x + 1)^v = 0$.

$$92) \text{ Ἐάν } (x_1, y_1) \text{ καὶ } (x_2, y_2) \text{ εἶναι δύο λύσεις τῆς ἐξισώσεως } \frac{x}{2x - 24y} = \frac{y}{-x + 4y}$$

δείξατε ὅτι ἡ ποσότης $\left(\frac{y_2 x_1 - x_2 y_1}{x_1 x_2} \right)^2$ ἰσοῦται μὲ 0 ἢ μὲ $\frac{25}{144}$.

$$93) \text{ Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: } ax^2 + \beta x + \gamma + \lambda(\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma') = 0.$$

α) Νὰ δειχθῇ ὅτι μεταξὺ τῶν ριζῶν τῆς x' , x'' ὑφίσταται μία σχέση ἀνεξάρτητος τοῦ λ .

β) Ὑπάρχουν ἐν γένει δύο τιμαὶ λ_1, λ_2 τοῦ λ δι' ἃς ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει διπλὴν ρίζαν.

γ) Νὰ μορφωθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰς διπλὰς ρίζας x_1, x_2 τὰς ἀντιστοιχοῦσας εἰς τὰς τιμὰς λ_1 καὶ λ_2 τοῦ λ .

δ) Νά δειχθῇ, ὅτι ἔχομεν $\frac{(x'-x_1)(x''-x_2)}{(x'-x_2)(x''-x_1)} = -1$, ὅπου x' καὶ x'' εἶναι αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τυχούσαν τιμὴν τοῦ λ .

94) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, ($\alpha\beta\gamma \neq 0$) εὗρετε τοὺς συντελεστὰς τῆς ὡς πρὸς y ἐξισώσεως $\rho_1(y - \rho_2)^2 + \rho_2(y - \rho_1)^2 = 0$ συναρτήσει τῶν α, β, γ . Περαιτέρω δείξατε, ὅτι ἂν αἱ ρ_1, ρ_2 εἶναι πραγματικοὶ ἑτερόσημοι τότε καὶ αἱ ρίζαι τῆς δευτέρας εἶναι ὁμοίως. Ἐπίσης δείξατε ὅτι αἱ δύο ἐξισώσεις ἔχουν τὰς ἰδίας ρίζας μόνον ὅταν $\rho_1 = \rho_2$.

14. Συνθῆκαι μεταξὺ τῶν συντελεστῶν τῆς δευτ)θμίου ἐξισώσεως, ὅταν αἱ ρίζαι τῆς πληροῦν δεδομένην σχέσιν. Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, ζητεῖται ἐνίοτε νὰ εὗρεθῇ, χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, «ποῖα σχέσις πρέπει νὰ συνδῇ τοὺς συντελεστὰς α, β, γ , ὅταν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξισώσεως ταύτης ὑπάρχουν εἰς μίαν δέσμευσιν, δηλ. πληροῦν μίαν δεδομένην ἐξίσωσιν $f(\rho_1, \rho_2) = 0$;»

Ὁ γενικὸς τρόπος ἐργασίας, πρὸς λύσιν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος εἶναι ὁ ἀκόλουθος:

Συνάπτομεν εἰς τὴν δοθεῖσαν σχέσιν $f(\rho_1, \rho_2) = 0$, τὰς θεμελιώδεις σχέσεις $\rho_1 + \rho_2 = -\beta/\alpha$ καὶ $\rho_1 \rho_2 = \gamma/\alpha$ καὶ σχηματίζομεν οὕτω σύστημα τριῶν ἐξισώσεων περιεχουσῶν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 . Μεταξὺ τῶν τριῶν τούτων ἐξισώσεων ἀπαλείφομεν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 , δηλ. συνδυάζομεν καταλλήλως τὰς ἐξισώσεις οὕτως, ὥστε νὰ λάβωμεν ὡς ἀποτέλεσμα σχέσιν μὴ περιέχουσαν τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 , ἀλλὰ τὰ α, β, γ μόνον.

Π.χ. δυνάμεθα πολλάκις νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν δύο ἐξισώσεων

$$\{f(\rho_1, \rho_2) = 0, \rho_1 + \rho_2 = -\beta/\alpha\}$$

ὡς πρὸς ρ_1 καὶ ρ_2 καὶ τὰς οὕτω εὐρισκομένας τιμὰς τῶν ρ_1, ρ_2 ν' ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν: $\rho_1 \rho_2 = \gamma/\alpha$. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἀπαλείφομεν τὰ ρ_1, ρ_2 καὶ εὐρίσκομεν τὴν ζητουμένην μεταξὺ τῶν α, β, γ σχέσιν.

Παρατήρησις. Ἐάν ἡ δοθεῖσα σχέσις $f(\rho_1, \rho_2) = 0$ εἶναι γραμμικὴ (πρωτοβάθμιος) ὡς πρὸς ρ_1, ρ_2 τότε τὸ σύστημα:

$$\{f(\rho_1, \rho_2) = 0, \rho_1 + \rho_2 = -\beta/\alpha\}$$

εἶναι πρωτοβάθμιον καὶ δυνάμεθα πάντοτε νὰ τὸ ἐπιλύσωμεν ὡς πρὸς ρ_1, ρ_2 καὶ ν' ἀντικαταστήσωμεν κατόπιν τὰ ρ_1, ρ_2 εἰς τὴν $\rho_1 \rho_2 = \gamma/\alpha$.

Ἐάν ὅμως ἡ δεδομένη μεταξὺ τῶν ρ_1, ρ_2 σχέσις εἶναι μεγαλυτέρου βαθμοῦ τότε πρέπει πρῶτον νὰ ὑποβιβάσωμεν αὐτὴν εἰς πρωτοβάθμιον καὶ κατόπιν νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω. Τοῦτο εἶναι πάντοτε δυνατὸν.

Ἔστω π.χ., ὅτι δίδεται μεταξὺ τῶν ριζῶν ἡ σχέσις

$$(1) \quad \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 = 7.$$

Ἐπειδὴ τὸ ρ_1 εἶναι ρίζα τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ θὰ ἔχομεν $a\rho_1^2 + \beta\rho_1 + \gamma = 0$ ἢ

$$(2) \quad \rho_1^2 = -\frac{\beta}{\alpha}\rho_1 - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἐπὶ ρ_1 :

$$(3) \quad \varrho_1^3 = -\frac{\beta}{\alpha} \varrho_1^2 - \frac{\gamma}{\alpha} \varrho_1 = -\frac{\beta}{\alpha} \left\{ -\frac{\beta}{\alpha} \varrho_1 - \frac{\gamma}{\alpha} \right\} - \frac{\gamma}{\alpha} \varrho_1 = \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \varrho_1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}.$$

Ἡ (2) ἰσχύει καὶ διὰ τὴν ρίζαν ϱ_2 , δηλαδή:

$$(4) \quad \varrho_2^3 = -\frac{\beta}{\alpha} \varrho_2 - \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἡ δοθεῖσα σχέσις (1) δύναται νὰ γραφῇ:

$$\varrho_1^3 + 2\varrho_1\varrho_2 \cdot \varrho_2^2 = 7$$

ἀντικαθιστῶντες δὲ εἰς αὐτὴν τὸ ϱ_1^3 ἐκ τῆς (3) καὶ τὸ ϱ_2^3 ἐκ τῆς (4) λαμβάνομεν τὴν σχέσιν:

$$(5) \quad \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha} \right) \varrho_1 + \frac{\beta\gamma}{\alpha^2} + 2\frac{\gamma}{\alpha} \left(-\frac{\beta}{\alpha} \varrho_2 - \frac{\gamma}{\alpha} \right) = 7.$$

Ἡ τελευταία αὕτη σχέσις εἶναι πρωτοβάθμιος ὥς πρὸς ϱ_1 καὶ ϱ_2 . Οὕτω, ἀντὶ τῆς τεταρτοβαθμίου (1) δυνάμεθα νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν πρωτοβάθμιον (5) ἵνα προσδιορίσωμεν τὰ ϱ_1, ϱ_2 (συνάπτοντες αὐτὴν μετὰ τῆς $\varrho_1 + \varrho_2 = -\beta/\alpha$).

Κατὰ παρεμφερῆ τρόπον, δύναται βαθμὴδὸν νὰ ὑποβιβασθῇ εἰς πρωτοβάθμιον, πᾶσα ἀκεραία-ρητὴ παράστασις ὥς πρὸς ϱ_1, ϱ_2 .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Υπὸ ποίαν συνθήκην μεταξὺ τῶν α, β, γ αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^3 + \beta x + \gamma = 0$ πληροῦν τὴν σχέσιν $3\varrho_1 - 4\varrho_2 = 1$;».

Λύσις. Ἐκ τοῦ συστήματος $\{3\varrho_1 - 4\varrho_2 = 1, \varrho_1 + \varrho_2 = -\beta/\alpha\}$ εὐρίσκομεν:

$$\varrho_1 = \frac{\alpha - 4\beta}{7\alpha}, \quad \varrho_2 = -\frac{3\beta + \alpha}{7\alpha}.$$

Λόγῳ δὲ τῆς $\varrho_1\varrho_2 = \gamma/\alpha$ θὰ ἔχωμεν τὴν ἀναγκαίαν συνθήκην μεταξὺ τῶν α, β, γ :

$$-\frac{\alpha - 4\beta}{7\alpha} \cdot \frac{3\beta + \alpha}{7\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad 49\alpha\gamma + (\alpha - 4\beta)(3\beta + \alpha) = 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νὰ δρῇσθῇ ὁ λ , γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἐκ τῶν ριζῶν τῆς $x^3 - 56x + \lambda = 0$, ἡ μία ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης».

Λύσις. Ἡ δεδομένη σχέσις εἶναι $\varrho_2 = \varrho_1^2$. Διὰ νὰ τὴν καταστήσωμεν πρωτοβάθμιον λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι

$$\varrho_1^2 - 56\varrho_1 + \lambda = 0 \quad \text{ἢ} \quad \varrho_1^2 = 56\varrho_1 - \lambda.$$

Ἄρα ἡ δοθεῖσα σχέσις ἰσοδυναμεῖ πρὸς τὴν: $\varrho_2 = 56\varrho_1 - \lambda$.

Λύοντες ὥς πρὸς ϱ_1 καὶ ϱ_2 τὸ σύστημα:

$$\{\varrho_2 = 56\varrho_1 - \lambda, \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 56\}$$

εὐρίσκομεν

$$\varrho_1 = \frac{\lambda + 56}{57}, \quad \varrho_2 = \frac{3136 - \lambda}{57}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὰ ϱ_1, ϱ_2 εἰς τὴν $\varrho_1\varrho_2 = \lambda$, φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν

$$\frac{\lambda + 56}{57} \cdot \frac{3136 - \lambda}{57} = \lambda \quad \text{ἢ} \quad \lambda^2 - 169\lambda - 175616 = 0.$$

Λύοντες ὥς πρὸς λ εὐρίσκομεν:

$$\lambda = 343 \quad \text{ἢ} \quad \lambda = -512.$$

Ὡστε, ἐπὶ τῇ παραδοχῇ ὅτι ἡ μία ρίζα τῆς $x^3 - 56x + \lambda = 0$ ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης, εὐρίσκομεν ὅτι κατ' ἀνάγκην τὸ λ θὰ ἰσοῦται μὲ 343 ἢ -512.

Δὲν ἔχει ὁμως ἀποδειχθῇ καὶ τὸ ἀντίστροφον, ὅτι δηλ. ἂν $\lambda=343$ ἢ $\lambda=-512$, ἡ μία ρίζα ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης. Πρὸς τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ κάμωμεν ἐπαλήθευσιν. Θέτοντες $\lambda=343$ εἰς τὴν δεδομένην ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν ὅτι ἔχει ρίζας 7 καὶ 49, θέτοντες δὲ $\lambda=-512$ εὐρίσκομεν ὅτι ἔχει ρίζας -8 καὶ 64. Ἐπειδὴ εἰς ἀμφοτέρους τὰς περιπτώσεις ἡ μία ρίζα ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης. (Αἱ εὐρεθεῖσαι λοιπὸν τιμαὶ εἶναι ὄχι μόνον ἀναγκαῖαι ἀλλὰ καὶ ἱκαναί).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

95) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε ἡ μία ρίζα τῆς ἐξίσωσως $3x^2-20x+3\lambda+1=0$ νὰ εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

96) Νὰ ὁρισθῇ ὁ k οὕτως ὥστε αἱ ρίζαι τῆς $4x^2+kx-15=0$ νὰ διαφέρουν κατὰ 4.

97) Ἀφοῦ δεიχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις $3x^2-2(\alpha+\beta+\gamma)x+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς (τῶν α, β, γ ὄντων πραγματικῶν) νὰ εὐρεθῇ ποῖα σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ ἵνα ἡ μία ρίζα εἶναι τριπλασία τῆς ἄλλης.

98) Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ οὕτως ὥστε ἡ μία τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσως $9x^2-18(\mu-1)x-8\mu+24=0$, νὰ εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

99) Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ ὥστε αἱ ρίζαι τῆς $x^2+x+\mu=0$ νὰ πληροῦν τὴν σχέσιν. $\rho_1^2+\rho_1\rho_2(2\rho_1+\rho_2)+2\rho_2=1$.

100) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ἐξίσωσως, $(\lambda-1)x^2-(3\lambda+4)x+12\lambda+3=0$ νὰ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $4\rho_1-5\rho_2=13$.

101) Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα αἱ ρίζαι τῆς $ax^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ριζῶν τῆς $a'x^2+\beta'x+\gamma'=0$ μὲ δοθέντα λόγον λ . Περίπτωσις $\lambda=1$.

102) Νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν ρ_1, ρ_2 τῆς $ax^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ τῶν x_1, x_2 τῆς $a_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0$ ὑφίσταται ἡ σχέσις $\rho_1x_2=\rho_2x_1$.

103) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ εὐρεθεῖσα συνθήκη εἰς τὸ παράδειγμα 1ον τῆς § 14, εἶναι καὶ ἱκανή.

15. Μόρφωσις ἐξίσωσως ἐχούσης δεδομένης ρίζας. α) Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν ρ_1, ρ_2 δυνάμεθα νὰ καταστρώσωμεν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὡς ρίζας τοὺς ρ_1 καὶ ρ_2 .

Πράγματι, ἡ ἐξίσωσις $(x-\rho_1)(x-\rho_2)=0$ εἶναι δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ ἔχει προφανῶς ρίζας ρ_1, ρ_2 . Αὕτη μετὰ τὰς πράξεις λαμβάνει τὴν μορφήν

(1)

$$x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2=0$$

β) Δοθείσης τῆς ἐξίσωσως $ax^2+\beta x+\gamma=0$ δυνάμεθα νὰ μορφώσωμεν ἐξίσωσιν δευτέρου βαθμοῦ τῆς ὁποίας αἱ ρίζαι νὰ συνδέωνται διὰ συμμετρικῶν σχέσεων πρὸς τὰς ρίζας τῆς δοθείσης, χωρὶς νὰ λύσωμεν τὴν δοθεῖσαν. Τοῦτο καταφαίνεται ἐκ τῶν ἐπομένων παραδειγμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Νὰ μορφωθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ ἀντίστροφα τῶν ριζῶν τῆς $ax^2+\beta x+\gamma=0$, ($a\gamma \neq 0$)».

Λύσις. Ἐὰν x_1, x_2 κληθῶσιν αἱ ρίζαι τῆς $ax^2+\beta x+\gamma=0$ τότε αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς ζητούμενης θὰ εἶναι

$$\rho_1 = \frac{1}{x_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{x_2}.$$

Ἐπειδὴ ἡ ζητούμενη θὰ εἶναι (σύμφωνα μὲ τὸν (1)), τῆς μορφῆς:

$$(2) \quad x^2-(\rho_1+\rho_2)x+\rho_1\rho_2=0$$

πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς παραστάσεις $\rho_1+\rho_2$ καὶ $\rho_1\rho_2$.

*Εχομεν:

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{\beta}{a}}{\frac{\gamma}{a}} = -\frac{\beta}{\gamma}$$

(διότι $x_1 + x_2 = -\beta/a$, $x_1 x_2 = \gamma/a$).

*Επίσης,

$$\varrho_1 \varrho_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{a}{\gamma}.$$

*Ωστε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις (2) γίνεται

$$x^2 - \left(-\frac{\beta}{\gamma}\right)x + \frac{a}{\gamma} = 0 \quad \text{ἢ} \quad \gamma x^2 + \beta x + a = 0.$$

*Ἐχει δηλ. τοὺς συντελεστὰς τῆς πρώτης κατ' ἀντίστροφον τάξιν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Ἐάν x_1, x_2 αἱ ρίζαι τῆς $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ νὰ μορφωθῇ ἐξίσω-

σις ἔχουσα ρίζας $\frac{x_1^2}{x_2} + 1$ καὶ $\frac{x_2^2}{x_1} + 1$.

Λύσις. Αἱ ρίζαι τῆς ζητουμένης εἶναι ἐξ ὑποθέσεως

$$\varrho_1 = \frac{x_1^2}{x_2} + 1, \quad \varrho_2 = \frac{x_2^2}{x_1} + 1$$

$$\text{ἄρα} \quad \varrho_1 + \varrho_2 = 2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = 2 + \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = 2 + \left(\frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3} \right) / \frac{\gamma}{\alpha} = 2 + \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\gamma}$$

(ἴδε § 13, 3ον).

$$\begin{aligned} \text{*Επίσης,} \quad \varrho_1 \varrho_2 &= \left(\frac{x_1^2}{x_2} + 1 \right) \left(\frac{x_2^2}{x_1} + 1 \right) = x_1 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} + 1 = \\ &= x_1 x_2 + 1 + \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 x_2} = \frac{\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\gamma}. \end{aligned}$$

*Ωστε ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις: $x^2 - (\varrho_1 + \varrho_2)x + \varrho_1 \varrho_2 = 0$, εἶναι ἡ

$$x^2 - \left(2 + \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\gamma} \right) x + \frac{\gamma}{\alpha} + 1 + \frac{-\beta^3 + 3\alpha\beta\gamma}{\alpha^2\gamma} = 0$$

$$\text{ἢ τελικῶς} \quad \alpha^2 \gamma x^2 - (2\alpha^2 \gamma + 3\alpha\beta\gamma - \beta^3)x + \alpha\gamma^2 + \alpha^2 \gamma + 3\alpha\beta\gamma - \beta^3 = 0.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

104) Νὰ μορφωθῇ ἐξίσωσις με ἀκεραίους συντελεστὰς ἔχουσα ρίζας τὸ δεδομένον ζεύγος ἀριθμῶν:

$$\left(\frac{3}{7}, -\frac{4}{5} \right) \quad \text{ἢ} \quad (4 \pm 3\sqrt{5}) \quad \text{ἢ} \quad \left(-\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{2} \right)$$

$$\text{ἢ} \quad (2 \pm 3i) \quad \text{ἢ} \quad \left(\frac{2}{3} \pm \frac{5}{3}i \right) \quad \text{ἢ} \quad (3, 3) \quad \text{ἢ} \quad \left(0, \frac{3}{5} \right).$$

105) Νὰ μορφωθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τῆς $x^2 - px + q = 0$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν 4 καὶ μόνον ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $x^2 - px + q = 0$ αἵτινες δὲν μεταβάλλονται διὰν αἱ ρίζαι τῶν τετραγωνισθοῦν.

106) Νὰ μορφωθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας τὰ ἀντίστροφα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς $5x^2 - 4x + 1 = 0$.

107) Ἐάν ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς $x^2 + x - 1 = 0$, μορφώσατε ἐξίσωσιν ἔχουσαν ρίζας $\frac{\rho_1 + 1}{\rho_2 + 1}$ καὶ $\frac{\rho_2 + 1}{\rho_1 + 1}$.

108) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἐχούσης ρίζας x_1, x_2 νὰ μορφωθοῦν ἐξισώσεις (ἄνευ εὐρέσεως τῶν x_1, x_2), ἔχουσαι ρίζας:

$$\alpha') kx_1, kx_2, \beta') x_1^2, x_2^2, \gamma') 1/(\alpha x_1 + \beta), 1/(\alpha x_2 + \beta).$$

109) Δοθεσιῶν τῶν ἐξισώσεων $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' = 0$ ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἔχει ρίζας ρ_1, ρ_2 , ἡ δὲ δευτέρα x_1, x_2 νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας :

$$x_1 \rho_1 + x_2 \rho_2, \rho_1 x_2 + \rho_2 x_1.$$

110) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $x^2 + px + k = 0$ σχηματίζομεν τὴν $x^2 + \pi_1 x + k_1 = 0$ ἔχουσαν ρίζας π καὶ k καὶ ἀκολουθῶς τὴν $x^2 + \pi_2 x + k_2 = 0$ ἔχουσαν ρίζας π_1, k_1 κ.ο.κ. Ὑπολογίσατε τοὺς συντελεστὰς $\pi_2, \pi_4, \pi_6, \dots, \pi_{2n}$ δεδομένου, ὅτι $k=1$.

111) Ἐὰν ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ καὶ x_1, x_2 αἱ τῆς $\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma' = 0$, μορφώσατε ἐξίσωσιν ἔχουσαν ρίζας $\frac{\rho_1}{x_1} + \frac{\rho_2}{x_2}, \frac{\rho_1}{x_2} + \frac{\rho_2}{x_1}$.

16. Τὸ δευτεροβάθμιον τριώνυμον. Πᾶν πολώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (ὅπου $\alpha \neq 0$) καλεῖται *δευτεροβάθμιον τριώνυμον* τοῦ x ἢ ἀπλῶς, *τριώνυμον* τοῦ x . Οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι σταθεροὶ καὶ θὰ ὑποτίθενται εἰς ὁλόκληρον τὸ παρὸν κεφάλαιον, **πραγματικοὶ** ἐνῷ ὁ x μεταβάλλεται αὐθαίρετως δυνάμενος ἐν γένει νὰ λάβῃ πᾶσαν τιμὴν πραγματικὴν.

Ἐπομένως τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι συνάρτησις τοῦ x , ὠρισμένη, εἰς τὸ διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ὅταν δοθοῦν οἱ τρεῖς συντελεσταὶ α, β, γ καὶ διὰ τοῦτο παριστῶμεν πολλάκις τὸ τριώνυμον μὲ τὸ σύμβολον τῆς συναρτήσεως: $\varphi(x)$ ἢ $f(x)$ ἢ $\sigma(x)$ κ.λ.π.

Εἰς τὴν τυχοῦσαν τιμὴν τοῦ x , ἔστω τὴν ξ , ἀντιστοιχεῖ μία ὠρισμένη τιμὴ τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)$, ἢ $\varphi(\xi)$. [Ἴδὲ [1], § 97, παρὰδ. 3ον].

Καλοῦνται *ρίζαι* τοῦ *τριωνύμου* $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, οἱ ἀριθμοὶ οἵτινες τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ x δίδουν εἰς τὸ τριώνυμον ἀριθμητικὴν τιμὴν μηδέν. Οὕτω π.χ. τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = x^2 - 5x + 6$ ἔχει ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3, διότι $\varphi(2) = 0$ καὶ $\varphi(3) = 0$.

Τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ἐν γένει δύο ρίζας ρ_1 καὶ ρ_2 τὰς ὁποίας εὐρίσκομεν ἐπιλύοντες τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Συνεπῶς, αἱ ρίζαι τοῦ *τριωνύμου* $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι καὶ ρίζαι τῆς ἀντιστοίχου *δευτεροβαθμίου* ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$. Ἄρα θὰ πληροῦν τὰς σχέσεις:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ δυνατόν νὰ ἔχῃ δύο ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ἢ μία διπλὴν ἢ φανταστικὰς, διὰ τοῦτο καὶ τὸ τριώνυμον δύναται ἐπίσης νὰ ἔχῃ ἢ δύο πραγματικὰς ρίζας, ἢ μίαν διπλὴν πραγματικὴν ἢ φανταστικὰς (συζυγεῖς) καθ' ὅσον ἡ διακρίνουσά του

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν ἢ ἀρνητικὴ.

ΑΣΚΗΣΙΣ

112) Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι τριωνύμων ἔχουν ρίζας πραγματικὰς καὶ ποῖα φανταστικὰς;

$$12x^2 + x - 35, \quad 4x^2 + 20x - 2, \quad 4x^2 + 28x + 22, \quad x^2 + 8x + 41, \quad 9x^2 + 12x + 22.$$

(*) Διὰ τοῦ [1] ἐννοοῦμεν τὸν Δ τόμον τῶν «Μαθημάτων Ἀλγέβρας».

17. Μορφαὶ τοῦ τριωνύμου. Διὰ τὴν μελέτην τοῦ τριωνύμου χρησιμεύουν πολὺ αἱ δύο ἐπόμεναι μορφαὶ ὑπὸ τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὸ τριωνύμον $\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$:

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad \varphi(x) &= a \left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} + \frac{\beta^2}{4a^2} - \frac{\beta^2}{4a^2} \right) = \\ &= a \left\{ \left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\beta^2}{4a^2} \right) + \frac{\gamma}{a} - \frac{\beta^2}{4a^2} \right\} = a \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a^2} \right\}. \end{aligned}$$

Ὡστε:

$$(1) \quad \boxed{\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \equiv a \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{4a\gamma - \beta^2}{4a^2} \right\}}.$$

II) Ἐὰν ϱ_1, ϱ_2 αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\varphi(x) = a \left(x^2 + \frac{\beta}{a}x + \frac{\gamma}{a} \right) = a[x^2 - (\varrho_1 + \varrho_2)x + \varrho_1\varrho_2]$$

$$(\text{διότι } \varrho_1 + \varrho_2 = -\beta/a, \quad \varrho_1\varrho_2 = \gamma/a)$$

$$\eta \quad \varphi(x) = a\{x^2 - \varrho_1x - \varrho_2x + \varrho_1\varrho_2\} = a\{x(x - \varrho_1) - \varrho_2(x - \varrho_1)\}$$

ἢ τελικῶς:

$$(2) \quad \boxed{\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma \equiv a(x - \varrho_1)(x - \varrho_2)}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

113) Νὰ γραφοῦν ὡς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων τὰ τριώνυμα τῆς ἀσκ. 112 τὰ ἔχοντα πραγματικὰς ρίζας καὶ ὑπὸ τὴν μορφήν $(Ax+B)^2 + \Gamma^2$ τὰ ἔχοντα φανταστικὰς ρίζας.

114) Ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς x παραγόντων ἡ παράστασις $A \equiv (\alpha^2 - 4\beta^2)x^2 + 2(\alpha^3 + 2\beta^3)x + \alpha^4 - \beta^4$.

18. Σημεῖον τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, ὅταν τὸ x διατρέχη πάσας τὰς πραγματικὰς τιμάς. α') Ὡς θεωρήσωμεν τριωνύμον $\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ ἔχον ρίζας φανταστικὰς καὶ συνεπῶς δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x μηδενιζόμενον. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4a\gamma$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίθετος ποσότης $4a\gamma - \beta^2$ εἶναι θετικὴ, ἔστω ἴση μὲ k^2 .

Κατὰ τὸν τύπον (1) τῆς § 17 τὸ τριώνυμον γράφεται:

$$\varphi(x) = a \left\{ \left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2 + \frac{k^2}{4a^2} \right\}.$$

Ἡ ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ποσότης παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι θετικὴ, οἰανδήποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ ἡ μεταβλητὴ x . Διότι ὁ εἰς προσθετός, $\left(x + \frac{\beta}{2a} \right)^2$ εἶναι μὴ ἀρνητικὸς (μηδενιζόμενος μόνον ὅταν $x = -\beta/2a$) ὁ δὲ ἄλλος προσθετός $k^2/4a^2$ εἶναι θετικὸς.

Ὡστε, ἂν τὸ α εἶναι θετικὸν τότε καὶ τὸ $\varphi(x)$ εἶναι διαρκῶς θετικὸν διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x .

Ἄν τὸ α εἶναι ἀρνητικὸν τότε καὶ τὸ $\varphi(x)$ θὰ εἶναι ἀρνητικὸν διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x .

Ἐπομένως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ τὸ τριώνυμον **δὲν ἀλλάζει σημείου**, τοῦ x μεταβαλλομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Ἐκ τούτων συνάγομεν τὴν ἐπομένην πρότασιν :

ΠΡΟΤΑΣΙΣ I. «Ἐὰν τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ ἔχει ρίζας φανταστικὰς, τότε διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x λαμβάνει τιμὴν ὁμόσημον τοῦ a ».

β') Ἀς θεωρήσωμεν τώρα τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=ax^2+bx+\gamma$ ἔχον διπλὴν ρίζαν. Τότε θὰ εἶναι $\beta^2-4a\gamma=0$ καὶ ὁ τύπος (1) τῆς προηγουμένης παραγράφου δίδει

$$\varphi(x)=a\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2.$$

Βλέπομεν καὶ πάλιν, ὅτι διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x , ἐξαιρέσει τῆς τιμῆς $-\beta/2a$, τὸ $\varphi(x)$ λαμβάνει τιμὰς ὁμοσήμους τοῦ a . Διότι, διὰ $x \neq -\frac{\beta}{2a}$

ἡ ποσότης $\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2$ εἶναι θετικὴ καὶ συνεπῶς, ἂν $a>0$ θὰ εἶναι καὶ $\varphi(x)>0$, ἂν δὲ $a<0$ θὰ εἶναι καὶ $\varphi(x)<0$. Ὅταν $x=-\beta/2a$ τότε $\varphi(x)=0$. Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὴν πρότασιν :

ΠΡΟΤΑΣΙΣ II. «Ἐὰν τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=ax^2+bx+\gamma$ ἔχει διπλὴν ρίζαν, τότε διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x καθίσταται ὁμόσημον πρὸς τὸ a , ἐφ' ὅσον δὲν μηδενίζεται».

Καὶ πάλιν, δηλ. τὸ τριώνυμον λαμβάνει τιμὰς ὁμοσήμους πρὸς τὸ a ὅταν τὸ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ εἰς $+\infty$ πλὴν τῆς περιπτώσεως καθ' ἣν $x=-\beta/2a$, ὅτε τὸ τριώνυμον μηδενίζεται.

γ') Ἀς θεωρήσωμεν, τέλος, τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ ἔχον ρίζας $\rho_1<\rho_2$, πραγματικὰς καὶ ἀνίσους. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν τύπον (2) τῆς § 17

$$(1) \quad \varphi(x)=ax^2+bx+\gamma=a(x-\rho_1)(x-\rho_2).$$

Οἱ ἀριθμοὶ ρ_1, ρ_2 χωρίζουν τὸ διάστημα ὧλων τῶν πραγματικῶν τιμῶν τοῦ x εἰς τρία διαστήματα (ἰδὲ [1], § 131): ἀπὸ $-\infty$ $-\infty \leq \rho_1$ ἢ $\rho_2 \leq +\infty$ μέχρι ρ_1 , ἀπὸ ρ_1 ἕως ρ_2 καὶ ἀπὸ ρ_2 ἕως $+\infty$.

Ἀς θεωρήσωμεν εἰδικὴν τιμὴν τοῦ x , ἔστω τὴν ξ , ἀνήκουσαν εἰς τὸ πρῶτον διάστημα, δηλ. μικροτέραν καὶ τῶν δύο ριζῶν. Θὰ εἶναι τότε :

$$\xi<\rho_1, \xi<\rho_2, \text{ ἄρα } \xi-\rho_1<0, \xi-\rho_2<0 \text{ καὶ συνεπῶς } (\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)>0.$$

Ἡ πρὸς τὴν τιμὴν ξ ἀντιστοιχοῦσα τιμὴ $\varphi(\xi)$ τοῦ τριωνύμου θὰ εἶναι συμφώνως πρὸς τὸν ἀνωτέρω τύπον (1) : $\varphi(\xi)=a\xi^2+b\xi+\gamma=a(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)$, ἥτοι γινόμενον τοῦ a ἐπὶ ἓνα θετικὸν ἀριθμὸν $(\xi-\rho_1)(\xi-\rho_2)$. Ἀρα ὁ ἀριθμὸς $\varphi(\xi)$ εἶναι, προφανῶς, ὁμόσημος πρὸς τὸ a . Ὡστε :

ΠΡΟΤΑΣΙΣ III. «Τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ λαμβάνει τιμὴν δμόσημον τοῦ α , όταν δ x λάβῃ τιμὴν δι' ἀριθμοῦ ξ μικροτέρου καὶ τῶν δύο ριζῶν τοῦ τριωνύμου, (ὑποτιθεμένων πραγματικῶν)».

Ἐὰν τὸ x λάβῃ τιμὴν τινα ξ' μεγαλύτεραν ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν, τότε θὰ ἔχωμεν $\xi'-\rho_1>0$, $\xi'-\rho_2>0$ καὶ συνεπῶς $(\xi'-\rho_1)(\xi'-\rho_2)>0$.

Ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ $\varphi(\xi')$ τοῦ τριωνύμου θὰ εἶναι τότε

$$\varphi(\xi')=\alpha(\xi'-\rho_1)(\xi'-\rho_2)$$

δηλ. γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἀριθμὸν θετικόν, ἄρα δμόσημος τοῦ α . Ἐντεῦθεν ἡ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ IV. «Τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ λαμβάνει τιμὴν δμόσημον πρὸς τὸν α , όταν δ x λάβῃ τιμὴν ξ' μεγαλύτεραν ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν».

Αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ μικρότεροι ἢ μεγαλύτεραι ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν λέγονται συντόμως «τιμαὶ ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν» ἢ ἀπλῶς: «ἐκτὸς τῶν ριζῶν». Διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς καθίσταται ὡς εἶδομεν, τὸ τριώνυμον, **δμόσημον** τοῦ α .

Τέλος ἂς θεωρήσωμεν τιμὴν τινα τοῦ x , ἔστω τὴν η περιεχομένην μεταξὺ τῶν δύο ριζῶν, δηλαδὴ μεγαλύτεραν τῆς μικροτέρας καὶ μικροτέραν τῆς μεγαλυτέρας ρίζης. Τότε θὰ εἶναι $\eta>\rho_1$, $\eta<\rho_2$ ἄρα $\eta-\rho_1>0$, $\eta-\rho_2<0$ καὶ συνεπῶς, τὸ γινόμενον $(\eta-\rho_1)(\eta-\rho_2)$, **ἀρνητικόν**.

Ἡ πρὸς τὴν τιμὴν η ἀντίστοιχος τιμὴ $\varphi(\eta)$ τοῦ τριωνύμου θὰ εἶναι:

$$\varphi(\eta)=\alpha\eta^2+\beta\eta+\gamma=\alpha(\eta-\rho_1)(\eta-\rho_2),$$

δηλ. γινόμενον τοῦ α ἐπὶ ἀρνητικὸν ἀριθμὸν· συνεπῶς τὸ $\varphi(\eta)$ θὰ εἶναι θετικὸν ἂν τὸ α εἶναι ἀρνητικόν, καὶ ἀρνητικὸν ἂν τὸ α εἶναι θετικόν. Ἐντεῦθεν ἡ

ΠΡΟΤΑΣΙΣ V. «Τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ λαμβάνει τιμὴν ἑτερόσημον τοῦ α , όταν τὸ x λάβῃ τιμὴν **κειμένην** μεταξὺ τῶν ριζῶν (ὑποτιθεμένων πραγματικῶν)».

Ἡ τελευταία αὕτη περίπτωσις εἶναι ἡ μοναδικὴ καθ' ἣν τὸ τριώνυμον καθίσταται ἑτερόσημον τοῦ α , διότι εἰς ὅλας τὰς ἄλλας δυνατὰς περιπτώσεις εἴδομεν ὅτι τὸ τριώνυμον γίνεται δμόσημον τοῦ α (ἢ μηδενίζεται).

Αἱ ἀνωτέρω προτάσεις I ἕως V συνοψίζονται εἰς τὸ ἐπόμενον θεώρημα.

δ') **Θεώρημα περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου.** «Τὸ τριώνυμον δευτέρου βαθμοῦ $ax^2+bx+\gamma$ λαμβάνει τιμὴν ἑτερόσημον τοῦ α μόνον εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ὁ δὲ x λάβῃ τιμὴν **κειμένην** μεταξὺ τῶν ριζῶν. Εἰς πάσας τὰς ἄλλας περιπτώσεις τὸ τριώνυμον καθίσταται δμόσημον πρὸς τὸ α , ἢ μηδενίζεται. Οἱ συντελεσταὶ α , β , γ , **υποτίθενται** πραγματικοὶ ὁ δὲ x λαμβάνει μόνον πραγματικὰς τιμὰς».

Εἰς ἐπομένας πραγματικούς 19, 20, 21 καὶ 22 θ' ἀσχοληθῶμεν μὲ ἐφαρμογὰς τοῦ ἀνωτέρω σπουδαιοτάτου διὰ τὴν μελέτην τοῦ τριωνύμου θεωρήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115) Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x τὸ τριώνυμον $2x^2-7x+3$ εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικὸν ἢ μηδέν; Ὁμοίως διὰ τὸ τριώνυμον x^2+6x+5 . Ὁμοίως διὰ τὸ $x^2-12x+36$.

116) Διὰ ποίας πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ἐκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ;

$$\sqrt{2x^2-7x+3}, \sqrt{x^2-4x+3}, \sqrt{x^2+9x+18}, \sqrt{2x^2-x+1}.$$

117) Το x μεταβαλλομένου από 3 έως 5, τὸ σημεῖον τοῦ τριωνύμου $x^2-8x+12$ μεταβάλλεται;

118) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ , τὸ τριώνυμον $2x^2+4x+\lambda$ εἶναι α') μονίμως θετικόν. (Δηλ. θετικόν δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x). β') Μὴ ἀρνητικόν;

119) Ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἵτινες τιθέμενοι ἀντὶ τοῦ x δίδουν εἰς τὸ τριώνυμον $x^2-5x+10$ τιμὴν ἀρνητικὴν; Ὑπάρχουν μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες τὴν ἀνωτέρω ἰδιότητα;

120) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y οἱ πληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν:

$$(x-3)^2(2y^2-y+1)+(y-5)^2(4x^2+10x+21)=0.$$

121) Εἰς ποῖον διάστημα τιμῶν πρέπει νὰ μεταβάλλεται τὸ x ἵνα ἡ παράστασις $5\sqrt{x^2-4x+3}-2\sqrt{-x^2+6x+8}$ ἔχῃ πραγματικὴν τιμὴν;

122) Δείξατε, ὅτι ἡ παράστασις $(\alpha+\gamma)(\alpha x^2+2\beta x+\gamma)-2(\alpha\gamma-\beta^2)(x^2+1)$ διατηρεῖ τὸ αὐτὸ σημεῖον δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ ἔχει τὰς ρίζας τῆς πραγματικῆς.

19. Ἐπίλυσις δευτεροβαθμίων ἀνισοτήτων. Χρησιμοποιοῦντες τὸ ἀνωτέρω θεώρημα τῆς § 18 περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου δυνάμεθα νὰ ἐπιλύσωμεν (μέσα εἰς τὸ πεδῖον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν) πᾶσαν ἀνισότητα τῆς μορφῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma < 0$ ἢ > 0 ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἐπόμενα παραδείγματα.

1) Ἐστω πρὸς ἐπίλυσιν ἡ ἀνισότης $2x^2-3x+1 < 0$. Τὸ ζήτημα τοῦτο ἀνάγεται εἰς τὴν εὑρεσιν τῶν *πραγματικῶν* τιμῶν τοῦ x τῶν καθιστώσων τὸ τριώνυμον $2x^2-3x+1$, ἀρνητικόν. Ἐπειδὴ τὸ α τοῦ τριωνύμου εἶναι τώρα τὸ $+2$, ἥτοι θετικόν, ἀρκεῖ νὰ εὑρωμεν τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς καθιστώσας τὸ τριώνυμον $2x^2-3x+1$, *εἰρηγόσημον* τοῦ α . Κατὰ τὸ θεώρημα περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου, αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ x εἶναι αἱ μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου περιεχόμεναι. Εὐρίσκομεν λοιπὸν τὰς ρίζας τοῦ $2x^2-3x+1$, αἵτινες εἶναι $\frac{1}{2}$ καὶ 1 καὶ ἔχωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τοῦ x αἱ πληροῦσαι τὴν δοθεῖσαν ἀνισότητα εἶναι αἱ μεταξὺ $\frac{1}{2}$ καὶ 1 περιεχόμεναι καὶ μόνον αὗται, ἥτοι: $\frac{1}{2} < x < 1$.

2) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης $\lambda^2-11\lambda+10 > 0$. Ἐνταῦθα τὸ λ δέον νὰ λάβῃ τιμὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\lambda^2-11\lambda+10$, ἵνα τὸ τριώνυμον καταστῇ ὁμόσημον τοῦ α (δηλ. τοῦ $+1$), δηλ. θετικόν. Αἱ ρίζαι τοῦ $\lambda^2-11\lambda+10$ εἶναι ὁ 1 καὶ ὁ 10, ἄρα διὰ ν' ἀληθεύῃ ἡ ἀνισότης πρέπει $\lambda < 1$ ἢ $\lambda > 10$.

3) Ἐστω ἐπίσης πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης $3\mu^2-10\mu+14 > 0$. Ἐνταῦθα, τὸ τριώνυμον $3\mu^2-10\mu+14$ ἔχει ρίζας φανταστικὰς, ἄρα διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ μ καθίσταται ὁμόσημον τοῦ α , δηλ. θετικόν. Ὡστε ἡ ἀνισότης αὕτη ἀληθεύει διὰ πᾶσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ μ . (Μόνιμος ἀνισότης).

4) Ἐστω, τέλος πρὸς λύσιν ἡ ἀνισότης: $\omega^2+\omega+1,2 < 0$. Ἐνταῦθα. αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι φανταστικαί, ἄρα τοῦτο, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ω , λαμβάνει τιμὴν ὁμόσημον πρὸς τὸ α δηλ. τὸ $+1$, δηλ. εἶναι θετικόν. Συνεπῶς, ἡ ἀνισότης εἶναι *ἀδύνατος*, δηλ. δὲν ἀληθεύει δι' οὐδεμίαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ ω .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

123) Νά ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισότητες: $x^2-8x<0$, $x^2-5x+6>0$, $2x^2+x-15>0$, $6x^2-13x-28>0$, $5x^2+3x-2<3x^2-2x+10$, $6x^2-8<2x^2-3x+2$.

124) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ x συναλθεύουν αἱ δύο πρῶται ἀνισότητες τῆς προηγούμενης ἀκρίσεως; Διὰ ποίας συναλθεύουν αἱ τρεῖς πρῶται καὶ διὰ ποίας αἱ τέσσαρες πρῶται; (Βλέπε Α'. Τόμον, § 134, σελ. 222).

125) Κὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀνισότητες: i) $\frac{2x^2-4x+5}{x^2+2}>1$, ii) $\frac{x^2-4x+3}{x-2}>0$.

(Βλέπε Α'. Τόμον, § 133, σελ. 220).

126) Εὕρετε διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ k αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $kx^2+2x+4k-3=0$ εἶναι πραγματικά.

127) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ x ἡ παράστασις $\sqrt{x^2+8x+9}-24$ ἔχει νόημα πραγματικού ἀριθμοῦ;

128) Νά εὕρεθοῦν οἱ πραγματικοὶ καὶ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ x καὶ y οἱ πληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν $(y-1)x^2+(y+1)x+y=0$.

129) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ αἱ ρίζαι τῆς $\lambda x^2+2(\lambda+1)x-3(\lambda+2)=0$ εἶναι πραγματικά;

130) Νά ὁρισθῇ ὁ β , ὥστε ἡ ἀνισότης $\frac{(\alpha+1)x^2+\alpha x+\alpha}{x^2+x+1}>\beta$ νὰ ὑφίσταται δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμᾶς τοῦ x . (Τὸ α ὑποτίθεται δεδομένον).

20. Θέσις ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου. Ἐν τῇ περιπτώσει καθ' ἣν τὸ τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους $\rho_1<\rho_2$, τότε ἀριθμὸς τις A πραγματικὸς καὶ διάφορος τῶν ρ_1, ρ_2 δύναται νὰ κατέχῃ τρεῖς δυνατὰς θέσεις ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου. Ἡ νὰ εἶναι μικρότερος ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν, ἢ μεγαλύτερος ἀμφοτέρων ἢ νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ριζῶν.

Ἐκάστη τοιαύτη εἰδικὴ θέση τοῦ ἀριθμοῦ χαρακτηρίζεται ἀπὸ ὀρισμένης συνθήκας (ἀνισότητας) μεταξὺ τοῦ ἀριθμοῦ καὶ τῶν συντελεστῶν τριωνύμου.

I. Ἐὰν θεωρήσωμεν ἀριθμὸν ξ μικρότερον καὶ τῶν δύο ριζῶν ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου $\varphi(x)=ax^2+bx+\gamma$.

Ἐν πρώτοις θὰ εἶναι $\Delta=b^2-4a\gamma>0$ ἀφοῦ τὸ τριώνυμον ἔχει δύο ρίζας πραγματικά. Ἐπίσης, ὁ ξ τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ θὰ καθιστᾷ τοῦτο ὁμόσημον τοῦ a . Δηλ. τὸ $\varphi(\xi)$ καὶ ὁ a θὰ εἶναι ἀριθμοὶ ὁμόσημοι καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενόν των θὰ εἶναι θετικόν. Ὡστε θὰ πληροῦται ἡ συνθήκη:

$$a\varphi(\xi)>0.$$

Τέλος, ἐπειδὴ $\xi<\rho_1, \xi<\rho_2$, θὰ ἔχωμεν, προσθέτοντες κατὰ μέλη τὰς ἀνισότητας ταύτας: $2\xi<\rho_1+\rho_2$ ἢ $\xi<(\rho_1+\rho_2)/2$.

Ὡστε θὰ πληροῦται ἡ συνθήκη

$$\xi<\frac{\rho_1+\rho_2}{2} \quad \text{ἢ} \quad \xi<-\frac{\beta}{2a}.$$

Αἱ τρεῖς αὗται συνθήκαι εἶναι καὶ *ἰκαναί*. Δηλ. ἂν πληροῦνται αἱ τρεῖς συνθήκαι:

(1)

$$\Delta>0, \quad a\varphi(\xi)>0, \quad \xi<\frac{\rho_1+\rho_2}{2}$$

τότε ο αριθμός ξ είναι μικρότερος ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν τοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

Διότι, ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) ἔπεται ὅτι αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι· ἡ δευτέρα ἀποκλείει τὸ ξ νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, (διότι τότε θὰ ἦτο $\alpha f(\xi) < 0$) ἐκ δὲ τῆς τρίτης ἀποκλείεται νὰ εἶναι ὁ ξ μεγαλύτερος τῶν δύο ριζῶν. (Διότι ἂν ἦτο, θὰ εἴχομεν $\xi > \rho_1$, $\xi > \rho_2$, ἄρα $2\xi > (\rho_1 + \rho_2)$ καὶ $\xi > (\rho_1 + \rho_2)/2$, ὅπερ ἐνάντιον τῇ ὑποθέσει). Ὡστε ἡ μόνη ἐναπομένουσα θέσις τοῦ ξ εἶναι, νὰ εἶναι οὗτος μικρότερος καὶ τῶν δύο ριζῶν.

II. Ἀς θεωρήσωμεν ἀριθμὸν ξ' μεγαλύτερον καὶ τῶν δύο ριζῶν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Τότε θὰ ἔχωμεν κατ' ἀναλογίαν πρὸς τὰ προηγούμενα, ἰσχυοῦσας τὰς συνθήκας: $\Delta > 0$, $\alpha f(\xi') > 0$, $\xi' > (\rho_1 + \rho_2)/2$.

Ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως, ἂν πληροῦνται αἱ τρεῖς συνθήκαι:

(2)

$$\Delta > 0, \alpha f(\xi') > 0, \xi' > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

τότε ο αριθμός ξ' εἶναι μεγαλύτερος καὶ τῶν δύο ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$.

Διότι, λόγῳ τῆς πρώτης συνθήκης, αἱ ρίζαι εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι. Λόγῳ τῆς δευτέρας, τὸ ξ' δὲν περιέχεται μεταξὺ τῶν ριζῶν καὶ λόγῳ τῆς τρίτης, τὸ ξ' δὲν εἶναι μικρότερον ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν.

III. Τέλος, ἄς θεωρήσωμεν ἀριθμὸν η περιεχόμενον μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Τότε, κατὰ τὸ θεώρημα περὶ τοῦ σημείου τοῦ τριωνύμου, ὁ η τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ καθιστᾷ τοῦτο ἑτερόσημον τοῦ α . Δηλ. οἱ ἀριθμοὶ α καὶ $\varphi(\eta)$ εἶναι ἑτερόσημοι, συνεπῶς ἔχουν γινόμενον ἀρνητικόν.

Ὡστε: «ἂν $\rho_1 < \eta < \rho_2$ θὰ ἔχωμεν τὴν συνθήκην $\alpha f(\eta) < 0$ ».

Ἀντιστρόφως, ἰσχύει τὸ **Θεώρημα**: «Ἐὰν τοῦ η ὄντος πραγματικοῦ, πληροῦνται ἡ συνθήκη $\alpha f(\eta) < 0$, τότε αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου εἶναι πραγματικά καὶ ἄνισοι καὶ ὁ η κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν».

Διότι, ἂν αἱ ρίζαι ἦσαν φανταστικά ἢ ἴσαι, τότε θὰ ἦτο διὰ πᾶν η , $\alpha f(\eta) \geq 0$ ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ἐπίσης ἂν ὁ η ἔκειτο ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν, θὰ ἦτο τότε, $\alpha f(\eta) > 0$. Ἀποκλειομένων λοιπὸν τούτων, μένει ὡς μόνη δυνατὴ περίπτωσις:

$$\rho_2 < \eta < \rho_1.$$

Παρατήρησις. Χρησιμοποιοῦντες τὸ ἀμέσως προηγούμενον θεώρημα δυνάμεθα νὰ ἐλέγχωμεν ἐνίοτε ὅτι αἱ ρίζαι ἑνὸς τριωνύμου εἶναι πραγματικά χωρὶς νὰ σχηματίζωμεν τὴν διακρίνουσαν. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ εὐρίσκωμεν ἀριθμὸν ὅστις καθιστᾷ τὸ τριώνυμον ἑτερόσημον τοῦ α .

Ἐστω π.χ. τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = (x-k)(x-l) - \gamma^2$ ὅπου $\gamma \neq 0$. Τὸ α τοῦ τριωνύμου τούτου εἶναι τὸ +1. Ἐὰν σχηματίσωμεν τὸ $\varphi(k)$ εὐρίσκομεν $\varphi(k) = -\gamma^2 < 0$. Ὡστε τὸ $\varphi(k)$ εἶναι ἀρνητικόν, δηλ. ἑτερόσημον τοῦ α (δηλ. $\alpha f(k) < 0$), συνεπῶς κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, τὸ $\varphi(x)$ ἔχει ρίζας πραγματικάς καὶ ἀνίσους (καὶ ὁ k κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131) Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ 7 ὡς πρὸς τὰς ρίζας ἐκάστου τῶν κάτωθι τριωνύμων, χωρὶς νὰ εὑρεθοῦν αἱ ρίζαι τῶν τριωνύμων :

$$5x^2 + 122x - 1, \quad x^2 - 9x + 20, \quad x^2 - 14x + 45.$$

132) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως :

$$x^2 - (5 + \lambda)x + 3\lambda + \frac{125}{4} = 0$$

ὑπερβαίνουν ἀμφότεραι τὴν μονάδα;

133) Ἐὰν τὸ τριώνυμον $ax^2 + (\beta + 2\alpha\mu)x + \alpha\mu^2 + \beta\mu + \gamma$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς ρ_1, ρ_2 , νὰ δειχθῇ ὅτι ἕκαστος τῶν ἀριθμῶν ρ_1, ρ_2 κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου $ax^2 + \beta x + \gamma + \mu(2\alpha x + \beta) = 0$, ($\alpha\mu \neq 0$).

21. Θέσεις δύο ἀριθμῶν ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου. α') Δύο ἀριθμοὶ K καὶ Λ πραγματικοί, διάφοροι τῶν ριζῶν, δύνανται νὰ κατέχουν ἕξ διαφόρους θέσεις ὡς πρὸς τὰς ρίζας ρ_1 καὶ ρ_2 ἐνὸς τριωνύμου $\varphi(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ (ὑποτιθεμένας πραγματικὰς). Πράγματι, ἂν εἶναι $K < \Lambda$ καὶ $\rho_1 < \rho_2$, αἱ δυνατὰ περιπτώσεις εἶναι :

I. $K < \Lambda < \rho_1 < \rho_2$

IV. $\rho_1 < K < \Lambda < \rho_2$

II. $K < \rho_1 < \Lambda < \rho_2$

V. $\rho_1 < K < \rho_2 < \Lambda$

III. $K < \rho_1 < \rho_2 < \Lambda$

VI. $\rho_1 < \rho_2 < K < \Lambda$.

Δι' ἐκάστην τῶν ἕξ τούτων θέσεων ἔχομεν καὶ τὰς καταλλήλους συνθήκας μεταξὺ τῶν K, Λ καὶ τῶν συντελεστῶν τοῦ τριωνύμου. Πρὸς εὑρεσιν τῶν συνθηκῶν τούτων ἐκφράζομεν τὴν θέσιν ἐνὸς ἐκάστου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν K καὶ Λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας, χρησιμοποιοῦντες τὰς συνθήκας τῆς προηγουμένης § 20. Οὕτω λαμβάνομεν τὸ σύνολον τῶν ἱκανῶν καὶ ἀναγκαίων συνθηκῶν δι' ἐκάστην θέσιν.

Ἐὰς λάβωμεν ὡς παράδειγμα τὴν θέσιν III. Δηλ. **ἀμφότεραι** αἱ ρίζαι νὰ περιέχονται μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν K καὶ Λ . Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ μὲν K νὰ εἶναι μικρότερος ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν ὁ δὲ Λ μεγαλύτερος ἀμφοτέρων. Κατὰ τὴν προηγουμένην § διὰ νὰ εἶναι ὁ K μικρότερος τῶν ρ_1, ρ_2 πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\Delta > 0, \quad \alpha\varphi(K) > 0, \quad K < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

διὰ νὰ εἶναι δὲ ὁ Λ μεγαλύτερος τῶν ρ_1, ρ_2 πρέπει καὶ ἀρκεῖ :

$$\Delta > 0, \quad \alpha\varphi(\Lambda) > 0, \quad \Lambda > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Διὰ νὰ συμβαίνουν λοιπὸν καὶ τὰ δύο (δηλ. ὁ K μικρότερος καὶ ὁ Λ μεγαλύτερος τῶν ριζῶν), πρέπει καὶ ἀρκεῖ **νὰ συναληθεύουν αἱ πέντε ἀνισότητες :**

$$\Delta > 0, \quad \alpha\varphi(K) > 0, \quad \alpha\varphi(\Lambda) > 0, \quad K < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \Lambda > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον, βάσει τῶν συνθηκῶν διὰ τὴν θέσιν ἐνὸς ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου, εὐρίσκομεν τὰς ἀπαιτουμένας συνθήκας δι' ὅλας τὰς περιπτώσεις I ἕως VI.

Ἐὰς λάβωμεν ἀκόμη ἓν παράδειγμα, λ.χ. τὴν θέσιν I. Κατ' αὐτὴν πρέπει καὶ Σ. Γ. Κανέλλου : «Μαθήματα Ἀλγέβρας». Β'. τόμος

ὁ K καὶ ὁ Λ νὰ εἶναι μικρότεροι τῶν ριζῶν, πρὸς τοῦτο δὲ πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\Delta > 0, \text{ αφ}(K) > 0, K < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \text{ αφ}(\Lambda) > 0, \Lambda < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

Ἦτοι πάλιν ἔχομεν πέντε συνθήκας. Ἐὰν ὅμως γνωρίζωμεν ὅτι K εἶναι μικρότερος τοῦ Λ , τότε ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν μόνον ὅτι ὁ Λ εἶναι μικρότερος ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι καὶ ὁ K .

Ἐν γένει δὲ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ θέσις δύο ἀριθμῶν K καὶ Λ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ εἶναι ὁρισμένη ὅταν γνωρίζωμεν τὰ σημεῖα τῶν πέντε ποσῶν:

$$\Delta, \text{ αφ}(K), \text{ αφ}(\Lambda), K - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \Lambda - \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}.$$

β') Θεώρημα. «Ἐὰν οἱ πραγμ. ἀριθμοὶ K καὶ Λ τιθέμενοι διαδοχικῶς ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$, δίδουν ἐξαγόμενα ἑτεροσῆμα πρὸς ἄλληλα (δηλ. $\varphi(K)\varphi(\Lambda) < 0$), τότε αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι, μία δὲ τούτων περιέχεται μεταξὺ τῶν K καὶ Λ (καὶ ἡ ἄλλη ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $(K \dots \Lambda)$ ».

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ τὰ $\varphi(K)$ καὶ $\varphi(\Lambda)$ εἶναι ἑτερόσημα, τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο θὰ εἶναι ἑτερόσημον τοῦ a , ἔστω τὸ $\varphi(K)$. Θὰ εἶναι λοιπὸν $\text{αφ}(K) < 0$, ἄρα κατὰ τὴν § 20 αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι ὁ δὲ K κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν. Ἐξ ἄλλου τὸ $\varphi(\Lambda)$ θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ὁμόσημον πρὸς τὸ a , ἄρα τὸ Λ θὰ κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν: ἢ πρὸ τῆς ρ_1 $\frac{\rho_1}{K} \frac{\rho_2}{\rho_2}$ (ὁπότε ἡ ρ_1 θὰ περιέχεται μεταξὺ Λ καὶ K) ἢ μετὰ τὴν ρ_2 (ὁπότε ἡ ρ_2 θὰ περιέχεται μεταξὺ K καὶ Λ).

Παρατήρησις. Διὰ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος δυνάμεθα ἐνίστε νὰ ἐλέγχωμεν ὅτι αἱ ρίζαι ἑνὸς τριωνύμου εἶναι πραγματικαὶ χωρὶς νὰ σχηματίσωμεν τὴν διακρίνουσαν· ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ οἵτινες νὰ δίδουν εἰς τὸ τριώνυμον τιμὰς ἑτεροσήμευς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

134) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = (\mu - 2)x^2 - 2(\mu + 3)x + 4\mu = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν μεγαλυτέραν τοῦ 3 καὶ μίαν μικροτέραν τοῦ 2;

135) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ , ἀμφοτέραι αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσεως $(2\mu + 3)x^2 + (\mu + 1)x + 4 = 0$

περιέχονται μεταξὺ -1 καὶ 2;

22. Διάφοροι ἐφαρμογαὶ τῆς θεωρίας τοῦ τριωνύμου. 1ον) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἀπλοποιεῖται τὸ κλάσμα $\frac{147x^2 - 28x + 1}{63x^2 - 24x + 1}$.

Λύσις. Τρέπομεν ἕκαστον τῶν ὄρων τοῦ κλάσματος εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων καὶ ἂν συμβῇ νὰ ὑπάρχῃ κοινὸς παράγων εἰς τὸν ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστὴν (δηλ. ἂν ὑπάρχῃ κοινὴ ρίζα τῶν δύο τούτων) τότε εἶναι δυνατὴ ἡ ἀπλοποιήσις.

Αἱ δύο ρίζαι τοῦ ἀριθμητοῦ εἶναι $1/21$ καὶ $1/7$, ἄρα οὗτος γράφεται (§ 17):

$$147 \left(x - \frac{1}{21} \right) \left(x - \frac{1}{7} \right).$$

Αἱ ρίζαι τοῦ παρονομαστοῦ εἶναι $1/21$ καὶ $1/3$, ἄρα οὗτος γράφεται :

$$63 \left(x - \frac{1}{21} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right).$$

Ὡστε τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται :

$$\frac{147 \left(x - \frac{1}{21} \right) \left(x - \frac{1}{7} \right)}{63 \left(x - \frac{1}{21} \right) \left(x - \frac{1}{3} \right)} = \frac{147 \left(x - \frac{1}{7} \right)}{63 \left(x - \frac{1}{3} \right)} = \frac{21 \cdot 7 \left(x - \frac{1}{7} \right)}{21 \cdot 3 \left(x - \frac{1}{3} \right)} = \frac{7x-1}{3x-1}$$

δηλαδὴ εἶναι ἀπλοποιήσιμον.

2ον) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὑπάρχῃ ἀκέραιος ἀριθμὸς x πληρῶν καὶ τὰς τρεῖς συγχρόνως ἀνισότητας :

$$(α) \quad 2x^2 - 13x + 15 < 0, \quad (β) \quad x^2 - 2x > 0, \quad (γ) \quad x^2 - 4x + 3 > 0.$$

Λύσις. Πρέπει πρῶτον νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων τούτων.

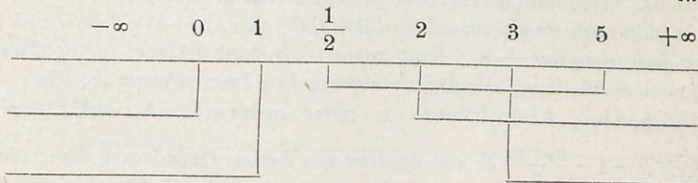
Πρὸς τοῦτο λύομεν ἐκάστην χωριστὰ (βλέπε § 19).

Αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου τῆς (α) εἶναι : $3/2$ καὶ 5 , συνεπῶς ἡ (α) ἀληθεύει διὰ τὰς τιμὰς τοῦ x τὰς μεταξὺ τῶν ριζῶν δηλ. διὰ $3/2 < x < 5$.

Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (β) ἔχει ρίζας 0 καὶ 2 , ἄρα ἡ (β) ἀληθεύει διὰ $x < 0$ καὶ διὰ $x > 2$.

Ἡ (γ), τέλος ἀληθεύει διὰ $x < 1$ καὶ $x > 3$.

Μένει τώρα νὰ εὕρωμεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν τριῶν. Πρὸς τοῦτο σχηματίζομεν τὸ κάτωθι διάγραμμα : (βλέπε [1], § 134) καὶ βλέπομεν ὅτι ὑπάρχει διά-



στημα τιμῶν εἰς τὸ ὁποῖον καὶ αἱ τρεῖς ἀληθεύουν. Τοῦτο εἶναι τὸ (ἀνοικτὸν) διάστημα : $3 < x < 5$ (βλ. [1], § 131). Εἰς τὸ διάστημα ὅμως τοῦτο εἰς μόνον ἀκέραιος περιέχεται, ὁ 4 . Ἄρα αἱ τρεῖς δοθεῖσαι ἀνισότητες πληροῦνται συγχρόνως ὑπὸ ἑνὸς μόνου ἀκεραίου, τοῦ 4 .

3ον) Πῶς πρέπει νὰ ληφθῇ ὁ μ , ἵνα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(\mu-2)x^2 + 2(\mu-1)x + \mu-3 = 0$ ὑπερβαίνουν ἀμφότεραι τὴν μονάδα;

Λύσις. Ἐὰν $0_1 \leq 0_2$, εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = (\mu-2)x^2 + 2(\mu-1)x + \mu-3$, πρέπει νὰ ἔχωμεν $1 < 0_1 \leq 0_2$. Αἱ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμεναι συνθῆκαι εἶναι κατὰ τὴν § 15 τρεῖς :

$$\Delta \geq 0, \quad \alpha\varphi(1) > 0, \quad 1 < \frac{0_1 + 0_2}{2}.$$

Ἐν προκειμένῳ εἶναι

$$\Delta = (\mu - 1)^2 - (\mu - 2)(\mu - 3) = 3\mu - 5.$$

Τὸ $\alpha = \mu - 2$ καὶ τὸ $\varphi(1) = \mu - 2 + 2(\mu - 1) + \mu - 3 = 4\mu - 7$, ἄρα τὸ $\alpha\varphi(1) = (\mu - 2)(4\mu - 7)$.

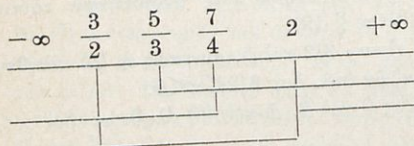
$$\text{Τὸ } \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{2(\mu - 1)}{\mu - 2} \text{ καὶ τὸ } \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = -\frac{\mu - 1}{\mu - 2}.$$

Ὡστε πρέπει καὶ ἄρκει, τὸ μ νὰ ἱκανοποιῇ τὰς σχέσεις

$$\left\{ 3\mu - 5 \geq 0, \quad (\mu - 2)(4\mu - 7) > 0, \quad 1 < -\frac{\mu - 1}{\mu - 2} \right\}.$$

Ἡ πρώτη ἀληθεύει διὰ $\mu \geq \frac{5}{3}$, ἡ δευτέρα, διὰ $\mu < \frac{7}{4}$ καὶ $\mu > 2$, ἡ δὲ τρίτη, διὰ $\frac{2}{3} < \mu < 2$. (Ἰδὲ λύσιν κλασματικῶν ἀνισοτήτων, [1], § 133)

Εὐρίσκομεν τὰς κοινὰς λύσεις τῶν τριῶν τούτων ἀνισοτήτων ὡς ἐμφαίνεται



εἰς τὸ παραπλεύρως διάγραμμα καὶ καταλήγουμεν ὅτι ὁ μ πρέπει νὰ λη-
φθῇ εἰς τὸ διάστημα: $\frac{5}{3} \leq \mu < \frac{7}{4}$.

4ον) Νὰ εὐρεθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν -1 καὶ $+1$ ὡς πρὸς τὰς

ρίζας τῆς ἐξισώσεως $(3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 4\lambda + 3$ κατὰ τὰς διαφόρους πραγματι-
κὰς τιμὰς τοῦ λ .

Λύσις. Ἐνταῦθα ζητεῖται πῶς μεταβάλλονται αἱ θέσεις τῶν 1 καὶ -1 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = (3\lambda + 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 4\lambda + 3$ ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Ἐνας πρακτικὸς τρόπος μελέτης τοῦ προβλήματος τούτου εἶναι ἡ μόρφωσις καταλλήλου πίνακος ἣτις ἐπιτυγχάνεται ὡς ἑξῆς:

Ἐν πρώτοις ὑπολογίζομεν τὰς πέντε ποσότητες, Δ , $\alpha\varphi(1)$, $\alpha\varphi(-1)$,

$$1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}, \quad -1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \text{ ἐκ τοῦ σημείου τῶν ὁποίων ἐξαρτᾶται ἡ θέσις τῶν } -1$$

καὶ $+1$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας (§ 21) καὶ εὐρίσκομεν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἕκαστον τῶν ποσῶν τούτων εἶναι θετικὸν ἢ ἀρνητικόν. Ἐχομεν ἔν προκειμένῳ:

$$\alpha') \Delta = (\lambda - 1)^2 - 4(3\lambda + 2)(4\lambda - 3) = -(47\lambda^2 + 70\lambda + 23), \text{ δηλ. ἡ } \Delta \text{ εἶναι τριώ-}$$

νυμον τοῦ λ ἔχον ρίζας -1 καὶ $-23/47$. Εἶναι δὲ $\Delta > 0$ ὅταν $-1 < \lambda < -\frac{23}{47}$.

(Ἰδὲ λύσιν δευτεροβαθμίων ἀνισοτήτων, § 19).

$$\beta') \alpha\varphi(1) = (3\lambda + 2) \cdot 4(2\lambda + 1). \text{ Εἶναι δὲ } \alpha\varphi(1) > 0 \text{ ὅταν } \lambda < -\frac{2}{3} \text{ ἢ } \lambda > -\frac{1}{2}.$$

$$\gamma') \alpha\varphi(-1) = (3\lambda + 2) \cdot 6(\lambda + 1). \text{ Εἶναι δὲ } \alpha\varphi(-1) > 0 \text{ ὅταν καὶ μόνον ὅταν:}$$

$$\lambda < -1 \text{ ἢ } \lambda > -\frac{2}{3}.$$

$$\delta') 1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = 1 + \frac{\lambda + 1}{2(3\lambda + 2)} = \frac{7\lambda + 3}{2(3\lambda + 2)}. \text{ Εἶναι δὲ } 1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} > 0 \text{ δηλ. τὸ } 1,$$

μεγαλύτερον τοῦ ἡμισυορίσματος τῶν ριζῶν, μόνον ὅταν $\lambda < -\frac{2}{3}$ ἢ $\lambda > -\frac{3}{7}$.

$$\varepsilon') -1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} = -1 + \frac{\lambda + 1}{2(3\lambda + 2)} = \frac{-5(\lambda + 1)}{2(3\lambda + 2)}.$$

Εἶναι δὲ $-1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} > 0$, ὅταν $-1 < \lambda < -\frac{2}{3}$.

Κατασκευάζομεν, τώρα, πίνακα μὲ 6 στήλας, ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἀφορᾷ τὰ διαστήματα τιμῶν τοῦ λ αἱ δὲ ἄλλαι τὸ σημεῖον ἐκάστου τῶν ποσῶν Δ , $\alpha\varphi(1)$, $\alpha\varphi(-1)$, $1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$, $-1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$. Ἐκ τῶν σημειῶν δὲ τῆς πρώτης κατακορύφου γραμμῆς εἰς τὰ ὁποῖα εἶναι προσγεγραμμένα αἱ τιμαὶ τοῦ λ (κατὰ σειρὰν αὐξήσαντος μεγέθους) φέρομεν ὁριζοντίως γραμμάς.

λ	Δ	$\alpha\varphi(1)$	$\alpha\varphi(-1)$	$1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$	$-1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}$	συμπέρασμα
$-\infty$	—	+	+	+	—	φανταστικά ρίζαι
-1	+	+	—	+	+	$\varrho_1 < -1 < \varrho_2 < 1$
$-\frac{2}{3}$	+	—	+	—	—	$-1 < \varrho_1 < 1 < \varrho_2$
$-\frac{1}{2}$	+	+	+	—	—	$-1 < 1 < \varrho_1 < \varrho_2$
$-\frac{23}{47}$	—	+	+	—	—	φανταστικά ρίζαι
$-\frac{3}{7}$	—	+	+	+	—	φανταστικά ρίζαι
$+\infty$	—	+	+	+	—	φανταστικά ρίζαι

Ἐπειδὴ τὸ Δ εἶναι θετικὸν ὅταν τὸ λ εἶναι μετὰξὺ -1 καὶ $-\frac{23}{47}$ διὰ

τοῦτο εἰς τὰ διαστήματα τῆς στήλης τοῦ Δ , ἀπὸ -1 ἕως $-\frac{23}{47}$ σημειοῦμεν $+$. Εἰς τὰ λοιπὰ διαστήματα τῆς στήλης ταύτης σημειοῦμεν $-$ διότι εἰς ταῦτα ἡ Δ εἶναι ἀρνητική.

Ἐπίσης, εἰς τὴν στήλην $\alpha\varphi(1)$ σημειοῦμεν τὰ διαστήματα εἰς τὰ ὁποῖα τὸ $\alpha\varphi(1)$ εἶναι θετικόν, γράφοντες εἰς αὐτὰ τὸ $+$. Εἰς τὰ ἄλλα γράφομεν $-$. Καθ' ὅμοιον τρόπον ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὰς ἄλλας στήλας. Εἰς τὸ πέρας ἐκάστης ὁριζοντίας λωρίδος γράφομεν, ἀκολουθῶς, τὸ συμπέρασμα διὰ τὴν θέσιν τῶν -1 καὶ $+1$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας, βασιζόμενοι εἰς τὰς συνθήκας τῆς § 20. Οὕτω π.χ. ἂν θεωρήσωμεν τὸ διάστημα ἀπὸ $-\frac{1}{2}$ ἕως $-\frac{23}{47}$, βλέπομεν ὅτι εἰς αὐτὸ εἶναι

$\Delta > 0$, ἄρα ὑπάρχουν πραγματικά ρίζαι ϱ_1, ϱ_2 . Ἐπίσης εἶναι $\alpha\varphi(1) > 0$, ἄρα τὸ 1 κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν. Ἐπίσης, εἶναι $1 - \frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} < 0$, ἄρα τὸ 1 εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμισυθροίσματος τῶν ριζῶν. Κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι καὶ τὸ -1 .

Διὰ τὰ συμπληρωθῇ τελείως ἡ διερεύνησις αὐτή, δέον νὰ ἐξετασθῶν αἱ ρίζαι καὶ διὰ τὰ συνοριακὰς τιμὰς τῶν διαστημάτων τοῦ λ . Δηλ. διὰ $\lambda = -1$, $\lambda = -\frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\lambda = -\frac{23}{47}$, $\lambda = -\frac{3}{7}$. Τοῦτο γίνεται δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ λ ἀπ' εὐθείας εἰς τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν. Π.χ. θέτοντες $\lambda = -1$ εἰς τὴν δοθεῖσαν εὐρίσκομεν ὅτι $\varrho_1 = \varrho_2 = -1$, ἄρα ἡ ἀντίστοιχος θέσις τῶν -1 καὶ 1 εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι: $-1 = \varrho_1 = \varrho_2 < 1$.

Ἐπίσης, διὰ $\lambda = \frac{2}{3}$ εὐρίσκομεν:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = 1/5, \text{ ἄρα } -1 < \varrho_1 = \varrho_2 < 1 \text{ κ.ο.κ.}$$

5ον) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ a ἡ μία μόνον ρίζα τῆς ἐξισώσεως $(a^2 - a - 2)x^2 + 2(a-1)x + 2 = 0$ περιέχεται μεταξὺ -1 καὶ $+1$;

Λύσις. Διὰ τὰ συμβαίνει τὸ ζητούμενον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ (κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 21) οἱ ἀριθμοὶ -1 καὶ $+1$ νὰ δίδουν εἰς τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = (a^2 - a - 2)x^2 + 2(a-1)x + 2$, τιμὰς ἑτεροσήμου. Δηλ. πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

$$\varphi(1)\varphi(-1) < 0.$$

$$\text{Ἀλλά, } \varphi(1) = a^2 - a - 2 + 2(a-1) + 2 = a^2 + a - 2 \text{ καὶ}$$

$$\varphi(-1) = a^2 - a - 2 - 2(a-1) + 2 = a^2 - 3a + 2.$$

Ὡστε τὸ a δέον νὰ πληροῖ τὴν ἀνισότητα:

$$(a^2 + a - 2)(a^2 - 3a + 2) < 0.$$

Πρὸς λύσιν ταύτης τρέπομεν ἕκαστον τῶν τριωνύμων τοῦ πρώτου μέλους εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων (ἐφ' ὅσον ἔχει ρίζας πραγματικάς). Τὸ πρῶτον, $a^2 + a - 2 = (a+2)(a-1)$ (διότι ἔχει ρίζας -2 καὶ 1) τὸ δὲ δεύτερον, $a^2 - 3a + 2 = (a-2)(a-1)$ (ἔχει ρίζας 2 καὶ 1). Ὡστε ἡ πρὸς λύσιν ἀνισότης εἶναι:

$$(a+2)(a-1)(a-2)(a-1) < 0, \text{ ἢ παραλείπομένου τοῦ θετικοῦ παραγόντος } (a-1)^2,$$

$$(a+2)(a-2) < 0.$$

Ὡστε τὸ ζητούμενον συμβαίνει ὅταν $-2 < a < 2$ καὶ $a \neq 1$.

6ον) Ν' ἀποδειχθῇ, ἄνευ χρήσεως τῆς διακρινούσης ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{\beta + \gamma}{x - \alpha} + \frac{\gamma + \alpha}{x - \beta} + \frac{\alpha + \beta}{x - \gamma} = 0,$$

ὅπου $\alpha^2 < \beta^2 < \gamma^2$, ἔχει ρίζας πραγματικάς.

Λύσις. Μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν ἡ ἐξίσωσις καθίσταται:

$$\varphi(x) \equiv (\beta + \gamma)(x - \beta)(x - \gamma) + (\gamma + \alpha)(x - \alpha)(x - \gamma) + (\alpha + \beta)(x - \alpha)(x - \beta) = 0.$$

Διὰ $x = \alpha$ καὶ $x = \beta$ λαμβάνομεν:

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Εκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$\varphi(\alpha) = (\beta + \gamma)(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma) \quad \text{καὶ} \quad \varphi(\beta) = (\gamma + \alpha)(\beta - \alpha)(\beta - \gamma).$$

$$\text{"Ὡστε:} \quad \varphi(\alpha)\varphi(\beta) = (\beta^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \gamma^2)[-(\alpha - \beta)^2].$$

Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως εἶναι $\beta^2 - \gamma^2 < 0$ καὶ $\alpha^2 - \gamma^2 < 0$, συνεπῶς $\varphi(\alpha)\varphi(\beta) < 0$. Ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 16 αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἡ μία ἐκ τούτων περιέχεται μεταξὺ α καὶ β.

7ον) Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ , οὕτως ὥστε τὸ τριώνυμον: $(\mu - 2)x^2 + 2(2\mu - 3)x + 5\mu + 14$ νὰ καθίσταται μεγαλύτερον τοῦ 20 διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x .

Λύσις. Πρέπει ἡ ἀνισότης $(\mu - 2)x^2 + 2(2\mu - 3)x + 5\mu + 14 > 20$ ἥτοι ἡ $(\mu - 2)x^2 + 2(2\mu - 3)x + 5\mu - 6 > 0$ νὰ ἰσχύη διὰ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x . Πρὸς τοῦτο πρέπει τὸ τριώνυμον $\varphi(x) = (\mu - 2)x^2 + 2(2\mu - 3)x + 5\mu - 6$ νὰ παραμένῃ θετικὸν δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ x , ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$. Κατὰ τὴν § 18 πρέπει καὶ ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ εἶναι $\alpha > 0$ καὶ $\Delta < 0$ δηλ. αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου φανταστικά. Πρέπει λοιπὸν τὸ μ νὰ ἱκανοποιῇ τὸ σύστημα τῶν ἀνισοτήτων

$$\mu - 2 > 0, \quad (2\mu - 3)^2 - (\mu - 2)(5\mu - 6) < 0.$$

Ἡ δευτέρα γράφεται: $-\mu^2 + 4\mu - 3 < 0$ καὶ ἀληθεύει διὰ $\mu < 1$ ἢ $\mu > 3$. Ἡ πρώτη δίδει $\mu > 2$. Ἄρα διὰ νὰ ἱκανοποιῶνται ἀμφοτέραι πρέπει ὁ μ νὰ λαμβάνῃ τιμὰς μεγαλυτέρας τοῦ 3.

8ον) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἔχει μίαν ἢ δύο λύσεις ἡ ἐξίσωσις

$$\sqrt{x + \alpha} - \sqrt{x - 1} = \sqrt{2x - 1};$$

Λύσις. Ἐν πρώτοις, ὡς λύσιν ἐξισώσεως μὲ ριζικά, θεωροῦμεν κατὰ κανόνα τὸν πραγματικὸν ἀριθμὸν ὅστις καθιστᾷ τὰ δύο μέλη, πραγματικούς καὶ ἴσους ἀριθμούς. (Ἐκτός, ἂν ἄλλῶς συμφωνηθῇ).

Ἀπομονοῦμεν, τώρα, τὸ ριζικὸν τὸ περιέχον τὴν παράμετρον καὶ ἔχομεν:

$$\sqrt{x + \alpha} = \sqrt{x - 1} + \sqrt{2x - 1} \quad \eta$$

(1) $\sqrt{A} = \sqrt{B} + \sqrt{\Gamma}$ ὅπου $A = x + \alpha$, $B = x - 1$, $\Gamma = 2x - 1$
θέτομεν δὲ τοὺς περιορισμοὺς

$$(2) \quad \boxed{A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad \Gamma \geq 0}.$$

Κατόπιν τῶν (2), ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν διὰ τετραγωνισμοῦ προκύπτουσαν (βλ. [1], § 135):

$$(3) \quad A - B - \Gamma = 2\sqrt{B\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ τὸ 2ον μέλος τῆς (3) εἶναι ≥ 0 θέτομεν τὸν περιορισμόν:

$$(4) \quad \boxed{A - B - \Gamma \geq 0}.$$

Κατόπιν τοῦ (4), ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν διὰ τετραγωνισμοῦ τῆς (3) προκύπτουσαν δηλ. τὴν

$$(5) \quad (A - B - \Gamma)^2 = 4B\Gamma$$

ἥτις μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν A, B, Γ γράφεται:

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$(5') \quad \varphi(x) = 4x^2 + 4(a-1)x - a^2 - 4a = 0.$$

Λύσεις λοιπὸν τῆς δοθείσης θὰ εἶναι κάθε λύσις τῆς (5') πληροῦσα τοὺς περιορισμοὺς (2) καὶ (4).

Οἱ περιορισμοὶ διὰ τὸ x καὶ τὸ a . Αἱ (2) καὶ (4) γράφονται :

$$x + a \geq 0, \quad x - 1 \geq 0, \quad x - \frac{1}{2} \geq 0, \quad x \leq 1 + \frac{a}{2}$$

καὶ ἐπειδὴ, πληρουμένης τῆς 2ας πληροῦται καὶ ἡ 3η, περιορίζονται εἰς τὰς

$$x + a \geq 0, \quad x - 1 \geq 0, \quad x \leq 1 + \frac{a}{2} \quad \eta$$

$$(6) \quad \left\{ x + a \geq 0, \quad 1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{2} \right\}.$$

Ἡ $1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{2}$ προϋποθέτει ὅτι $1 \leq 1 + \frac{a}{2}$, ὥστε πρέπει

$$(7) \quad a \geq 0.$$

Λόγῳ τῆς (7), ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (6) περιέχει καὶ τὴν πρώτην ἐκ τῶν (6).

Διότι ἀφοῦ πρέπει $1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{2}$, θὰ εἶναι $x \geq 1$, ἄρα θὰ εἶναι καὶ $x > 0$.

Ἐπειδὴ ὅμως εἶναι καὶ $a \geq 0$ (λόγῳ τῆς (7)) ἔπεται διὰ προσθέσεως, ὅτι $x + a \geq 0$, δηλ. ἡ πρώτη τῶν (6) ἀναγκαστικῶς θὰ πληροῦται. Ἐπομένως τὰ x καὶ a πρέπει νὰ πληροῦν τοὺς περιορισμοὺς :

$$(8) \quad \left\{ 1 \leq x \leq 1 + \frac{a}{2}, \quad a \geq 0 \right\}.$$

Περιπτώσεις μιᾶς λύσεως. i) Μίαν λύσιν θὰ ἔχωμεν ὅταν ἡ μία ρίζα τῆς

(5') κεῖται μεταξὺ 1 καὶ $1 + \frac{a}{2}$ ὁπότε εἶναι δεκτὴ, ὡς πληροῦσα τὰς (8) ἢ δὲ ἄλλη

ρίζα τῆς (5') κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $\left(1, 1 + \frac{a}{2}\right)$ ὁπότε εἶναι ἀπορριπτέα

(ὡς μὴ πληροῦσα τὰς (8)). Διὰ νὰ συμβαίῃ τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 21 νὰ εἶναι :

$$(9) \quad \varphi(1) \varphi\left(1 + \frac{a}{2}\right) < 0.$$

Εὐρίσκομεν : $\varphi(1) = -a^2$, $\varphi\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 2(a^2 + a)$ καὶ ἡ (9) γίνεται :

$$a^2(a^2 + a) > 0$$

καὶ πληροῦται ὅταν $a < -1$ καὶ $a > 0$. Ἐπειδὴ ὅμως πρέπει νὰ εἶναι $a > 0$, ἡ $a < -1$ ἀπορρίπτεται καὶ μένει, $a > 0$. Διὰ $a > 0$ πληροῦται ἡ (9) καὶ ἔχωμεν μίαν λύσιν παραδεκτὴν.

ii) Μίαν λύσιν θὰ ἔχωμεν ὅταν ἡ μία ρίζα τῆς (5') εἶναι $= 1$ (ἄρα δεκτὴ)

ἐνῶ συγχρόνως ἡ ἄλλη ρίζα δὲν κεῖται εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως $1 + \frac{a}{2}$ (ἀπορριπτέα). Διὰ νὰ συμβαίῃ τὸ πρῶτον πρέπει $\varphi(1) = 0$ ἢ $-a^2 = 0$ δηλ. $a = 0$ ὁπότε ἡ

(5') γίνεται $4x^2 - 4x = 0$ και έχει ρίζας $x=0$, $x=1$. Τότε, η $x=1$ είναι δεκτή και η $x=0$ απορριπτέα.

iii) Μίαν λύσιν θα έχουμε όταν η μία ρίζα της (5') ισοϋται με $1 + \frac{\alpha}{2}$ ενώ η άλλη ρίζα δὲν κείται εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως $1 + \frac{\alpha}{2}$. Πρὸς τοῦτο πρέπει πρώτον, $\varphi\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) = 0$ δηλ. $\alpha^2 + \alpha = 0$ δηλ. $\alpha = 0$ ἢ $\alpha = -1$. Ἐπειδὴ $\alpha \geq 0$, μένει πάλιν $\alpha = 0$, ὁπότε ὡς εἶδομεν, ἔχομεν μίαν λύσιν.

iv) Μίαν λύσιν θα ἔχομεν, ὅταν ἡ (5') ἔχει διπλὴν ρίζαν περιεχομένην εἰς τὸ διάστημα ἀπὸ 1 ἕως $1 + \frac{\alpha}{2}$. Πρὸς τοῦτο πρέπει $\Delta = 0$ ἢ $2\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$, πρᾶγμα μὴ συμβαῖνον διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ α .

Συνεπῶς «ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὅταν $\alpha \geq 0$ καὶ μόνον τότε».

Περίπτωσης δύο λύσεων. Διὰ νὰ εἶναι καὶ δύο ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς (5') δεκταί, ἀρκεῖ νὰ πληροῦν τὰς ἀνισότητας $1 < \rho_1 < \rho_2 < 1 + \frac{\alpha}{2}$ ὁπότε αἱ (8) ἱκανοποιούνται. Τότε ὅμως πρέπει νὰ εἶναι $\varphi(1) > 0$ ἢ $-\alpha^2 > 0$, πρᾶγμα ἀδύνατον.

Δύο λύσεις δεκτὰς θα εἴχομεν ἐπίσης ἂν ἡ μία ρίζα τῆς (5') ισοϋται με 1 ἢ δὲ ἄλλη πληροῖ τὴν σχέσιν $1 < \rho < 1 + \frac{\alpha}{2}$. Τοῦτο δὲ συμβαίνει, διότι ὡς εἶδομεν, ὅταν ἡ μία ρίζα εἶναι $1 + \frac{\alpha}{2}$ τότε ἡ ἄλλη εἶναι 0 συνεπῶς ἀπορριπτέα.

Τέλος, δύο λύσεις θα ἔχομεν ὅταν ἡ μία ρίζα ισοϋται με $1 + \frac{\alpha}{2}$ καὶ ἡ ἄλλη περιέχεται μεταξὺ 1 καὶ $1 + \frac{\alpha}{2}$. Οὔτε τοῦτο συμβαίνει διότι ὡς εἶδομεν, ὅταν ἡ μία ρίζα ισοϋται με $1 + \frac{\alpha}{2}$ τότε $\alpha = 0$ καὶ τότε ἡ ἄλλη ρίζα εἶναι ἴση με 0 καὶ συνεπῶς ὄχι δεκτή,

Ὡστε, ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις, οὐδέποτε ἔχει δύο λύσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136) Νὰ δεიχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνὸς πρωτοβαθμίου ὡς πρὸς x πολωνύμου ἔχοντος πραγματικούς συντελεστάς, ὅταν $\alpha > 0$ καὶ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$. Ἀκολουθῶς νὰ δεიχθῇ ὅτι ἂν αἱ παραστάσεις $(\alpha + \beta x)^2 + (\alpha' + \beta' x)^2$ καὶ $(\alpha + \gamma x)^2 + (\alpha' + \gamma' x)^2$ εἶναι τέλεια τετράγωνα, τότε τὸ αὐτὸ θα συμβαίνει καὶ διὰ τὴν παράστασιν: $(\beta + \gamma x)^2 + (\beta' + \gamma' x)^2$. Ὑποτίθεται $\alpha\beta\gamma \neq 0$.

137) Δοθέντος τοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει πάντοτε πραγματικὸς ἀριθμὸς λ τοιοῦτος ὥστε τὸ τριώνυμον: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \lambda(x^2 + 1)$ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον πρωτοβαθμίου πολωνύμου ἔχοντος πραγματικούς συντελεστάς.

138) Νὰ ὁρισθῇ ὁ μ οὕτως ὥστε τὸ τριώνυμον:

$$\phi(y) = y^2 + (2x + \mu)y + 2x + 3$$

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἑκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

νά ἔχῃ ρίζας αἱ ὁποῖαι νά εἶναι ρηταὶ ἀλγεβρικαὶ παραστάσεις ὡς πρὸς x . Ἀκολουθῶς νά τραπῇ τὸ $\phi(y)$ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων πολυωνύμων ὡς πρὸς x καὶ y .

139) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$ τρέπεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς x καὶ y παραγόντων (ἔχόντων συντελεστὰς ἢ πραγματικούς ἢ μιγαδικούς).

140) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $3x^2 + 2\alpha xy + 2y^2 + 2\alpha x - 4y + 1$ δύναται ν' ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς x καὶ y πολυωνύμων, μόνον ὅταν τὸ ρ ἱκανοποιεῖ τὴν ἐξίσωσιν: $\rho^2 + 4\alpha\rho + 2\alpha^2 + 6 = 0$.

141) Ἐάν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν $9x^2 + 2xy + y^2 - 92x - 20y + 244 = 0$ νά εὐρεθῇ εἰς ποῖον διάστημα τιμῶν περιέχεται ἕκαστος.

142) Ἀπὸ τὰ σημεῖα τίνων μεγεθῶν ἐξαρτῶνται τὰ σημεῖα τῶν (πραγματικῶν) ριζῶν τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$; Νά εὐρεθῇ πῶς μεταβάλλονται τὰ σημεῖα τῶν ριζῶν τῆς $\mu x^2 - (2\mu + 1)x + 3\mu - 1 = 0$ (ἐφ' ὅσον αὐταὶ εἶναι πραγματικά) ὅταν τὸ μ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, διὰ μορφώσεως καταλλήλου πίνακος.

143) Ἐάν τὰ τριώνυμα $x^2 + px + k$ καὶ $x^2 + \pi'x + k'$ ἔχουν ρίζας πραγματικάς, μία δὲ τουλάχιστον ρίζα τοῦ δευτέρου περιέχεται μεταξύ τῶν ριζῶν τοῦ πρώτου, τότε τὸ τριώνυμον $x^2 + px + k + \lambda(x^2 + \pi'x + k')$ ἔχει διὰ πᾶσαν θετικὴν τιμὴν τοῦ λ , ρίζας πραγματικάς καὶ ἀνίσους.

144) Ἐάν $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x + \alpha}{x - \alpha} + \frac{x + \beta}{x - \beta} + \frac{x + \gamma}{x - \gamma} = 3$$

ἔχει τὰς ρίζας τῆς, πραγματικάς.

145) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ , ἡ μία μόνον ρίζα ρ_1 τῆς ἐξισώσεως $(1 + \lambda)(7 - \lambda)x^2 + 2(3 + \lambda)x - 1 = 0$ πληροῖ τὴν ἀνισότητα, $(3 - \lambda)\rho_1 < 1$;

146) Νά μελετηθῇ ἡ θέσις τῶν ἀριθμῶν 1 καὶ 2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς $x^2 - 6(\lambda + 1)x + 12\lambda + 5 = 0$ διὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ , ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

147) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $x^2 - (\alpha + \beta + \gamma)x + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta - \mu^2 - \nu^2 = 0$ ὅπου α, β, γ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενὸς καὶ ἀλλήλων, νά δειχθῇ ὅτι ἐφ' ὅσον πληροῦται ἡ σχέση $\alpha\beta\gamma - \mu^2\beta - \nu^2\gamma = 0$, αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι πραγματικά καὶ ἀνίστοι.

148) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ μ ἐκάστη τῶν ποσοτήτων $1 - \frac{2}{\rho_1}$ καὶ $1 - \frac{2}{\rho_2}$ περιλαμβάνεται μεταξύ -1 καὶ 2 , ὅπου ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$(3\mu + 8)x^2 - (5\mu + 7)x - 2\mu + 3 = 0;$$

149) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ μ , ἡ ἐξίσωσις $\frac{x+3}{2} = |x| + \mu(x+1)(3-x)$ ἔχει τέσσαρας

διαφόρους πραγματικάς ρίζας;

150) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $(1 - \lambda)x^2 + (3\lambda - 5)x + 4(2 - \lambda) = 0$ εἶναι θετικά; Ἐάν δὲ αὗται παριστάνουν τὰς καθέτους πλευρὰς ὀρθογ. τριγώνου, πόση εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ εἰς τὸ τρίγωνον ἐγγεγραμμένου κύκλου;

151) Ἐάν τὸ τριώνυμον $\phi(x) = x^2 + px + k$ ἔχει ρίζας πραγματικάς καὶ ἀνίσους δείξατε ὅτι τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίη καὶ διὰ τὰ τριώνυμα: $\phi_1(x) = \phi(x) + \alpha(2x + \pi)$, $\phi_2(x) = \phi(x) + (x + \alpha)(2x + \pi)$, οἰοῦντις ὅντος τοῦ α .

152) Ἐάν $0 < \alpha < 1$, διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ γ πληροῦται ἡ ἀνισότης $\gamma(x+1)(3-x) > 0$ ὑπὸ τῶν ριζῶν τῆς $x^2 - 2x + \alpha = 0$;

153) Ἐάν ρ_1, ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι δὲ $|\rho_1| \neq |\rho_2|$ καὶ εἶναι M ὁ μεγαλύτερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν $\left| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right|$, $\left| \frac{\rho_2}{\rho_1} \right|$, νά δειχθῇ ὅτι

$$2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right| - 1 < M < 2 \left| 1 - \frac{\beta^2}{2\alpha\gamma} \right|.$$

154) Ἐάν α, β, γ πραγματικοὶ τοιοῦτοι ὥστε $|\gamma| \leq |\beta| \leq |\alpha| \leq \alpha\gamma$ τότε ἂν ρ_1, ρ_2 α ρίζαι τοῦ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δείξατε ὅτι θὰ πληροῦνται ἡ ἀνισότης: $|\rho_1^3 - \rho_2^3| < 2$.

155) Ἐάν μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β, γ πληροῦνται ἡ ἀνισότης $|\alpha(\beta - \gamma)| > |\beta^2 - \alpha\gamma| + |\gamma^2 - \alpha\beta|$ αἱ δὲ ρίζαι τῆς $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ εἶναι πραγματικάι, τότε ἡ μία καὶ μόνον ἡ μία ρίζα θὰ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ 2.

156) Ἄν τεθῇ $\Pi(x) = (x + \rho_1)(x + \rho_2) \cdots (x + \rho_n)$ ὅπου $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ εἶναι ἀριθμοὶ ἐκτός τοῦ διαστήματος $(-2, 0)$ τότε ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 \Pi(2) + \beta x \Pi(1) + \gamma \Pi(0) = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικάς ἐφ' ὅσον καὶ ἡ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει τοιαύτας.

157) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha') \sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = 3, \quad \beta') \sqrt{3x+1} + \sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}.$$

158) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ α ἡ ἐξίσωσις:

$$\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-1} = \alpha.$$

23. Δυνατάι τιμαὶ τοῦ δευτεροβάθμιου τριωνύμου ἢ πηλίκου τριωνύμων. α') Ἐς θεωρήσωμεν τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ὡς συνάρτησιν τῆς μεταβλητῆς x λαμβανούσης πάσας τὰς πραγματικάς τιμὰς καὶ ὡς ὑποθέσωμεν ὅτι τοῦτο, διὰ τινα τιμὴν x τῆς μεταβλητῆς λαμβάνει ἀντίστοιχον τιμὴν k . Τότε θὰ ἔχωμεν: $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = k$ ἢ

$$(1) \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma - k = 0.$$

Ἡ ἐξίσωσις (1) πρέπει νὰ ἔχῃ πραγματικάς ρίζας ὡς πρὸς x , διότι ἡ τιμὴ k ἀντιστοιχεῖ εἰς πραγματικὴν τινα τιμὴν τοῦ x . Ὡστε, ἡ διακρίνουσα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha(\gamma - k)$ πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ ἢ μηδέν. Δηλ. $\beta^2 - 4\alpha\gamma + 4\alpha k \geq 0$ ἢ

$$(2) \quad 4\alpha k \geq \alpha\gamma - \beta^2.$$

i) Ἐστω $\alpha > 0$. Τότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν:

$$k \geq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$$

ἥτοι ἡ τιμὴ k τοῦ τριωνύμου δὲν δύναται νὰ εἶναι κατωτέρα τοῦ ἀριθμοῦ $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$.

Ὡστε: ἂν $\alpha > 0$, τὸ τριώνυμον $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ λαμβάνει τιμὰς αἵτινες εἶναι πᾶσαι μεγαλύτεραι ἢ ἴσαι τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Δηλ. αἱ τιμαὶ τοῦ τριωνύμου δὲν κατέρχονται κάτω τοῦ ἀριθμοῦ $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$. Ὡστε ὁ ἀριθμὸς $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$ εἶναι ἡ μικροτέρα τιμὴ ἣν δύναται νὰ λάβῃ τὸ τριώνυμον καὶ λέγεται **ελάχιστον τοῦ τριωνύμου**.

ii) Ἐστω $\alpha < 0$. Τότε ἐκ τῆς (2) ἔχομεν

$$k \leq \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

Δηλ. ἂν $\alpha < 0$ μία οἱαδήποτε τιμὴ τοῦ τριωνύμου δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμὸν $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$. Ὁ ἀριθμὸς $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα τιμὴ ἣν δύναται νὰ

φθάσῃ τὸ τριώνυμον ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ καὶ λέγεται **μέγιστον τοῦ τριωνύμου**.

Ἐκ τῆς (1) (λύοντες ὡς πρὸς x) εὐρίσκομεν ὅτι τὸ τριώνυμον γίνεται ἴσον πρὸς k ὅταν ὁ x γίνῃ ἴσος πρὸς

$$(3) \quad \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha(\gamma - k)}}{2\alpha}.$$

Ἐάν ὅμως $k = (4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$, τὸ ὑπόρριζον τῆς (3) μηδενίζεται καὶ ἡ ἀντίστοιχος τιμὴ τοῦ x γίνεται, $-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸ

Θεώρημα. «Ἐάν $\alpha > 0$, τὸ $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει ἐλάχιστον τὸ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ τὸ ὁποῖον λαμβάνει διὰν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἐάν $\alpha < 0$, τὸ τριώνυμον ἔχει μέγιστον τὸ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$, τὸ ὁποῖον λαμβάνει ἐπίσης διὰν $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ».

β') Δι' ἀναλόγου τρόπου εὐρίσκομεν τὰς τιμὰς τὰς ὁποίας δύναται νὰ λάβῃ μία παράστασις τῆς μορφῆς $\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'}$, διὰν ὁ x διατρέχῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς. Ἐάν δηλ. παραστήσωμεν μὲ x , μίαν τιμὴν τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ παράστασις, τότε ἡ ἐξίσωσις

$$(4) \quad \frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'} = k$$

πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ πραγματικὰς ρίζας ὡς πρὸς x . Ἡ (4) λαμβάνει τὴν μορφήν

$$(5) \quad (\alpha - k\alpha')x^2 + (\beta - k\beta')x + \gamma - k\gamma' = 0$$

δυνάμεθα δὲ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι:

«Ἡ παράστασις $(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) / (\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma')$ δύναται νὰ λάβῃ μόνον ἐκεῖνας τὰς τιμὰς k , διὰ τὰς ὁποίας ἡ ἐξίσωσις (5) ἔχει ρίζας πραγματικὰς».

Δηλαδή αἱ δυνατὰι τιμαὶ τοῦ k εἶναι αἱ καθιστῶσαι τὴν διακρίνουσαν τῆς (5) θετικὴν ἢ μηδέν, συνεπῶς αἱ πληροῦσαι τὴν ἀνισότητα

$$(6) \quad (\beta - k\beta')^2 - 4(\alpha - k\alpha')(\gamma - k\gamma') \geq 0.$$

Ἐάν συμβῇ, ἡ (6) ν' ἀληθεύῃ διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ k , τότε ἡ παράστασις $\frac{\alpha x^2 + \beta x + \gamma}{\alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'}$ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

159) Εὑρετε διὰ ποῖαν τιμὴν τοῦ x καθίσταται μέγιστον ἢ ἐλάχιστον ἕκαστον τῶν κάτωθι τριωνύμων καὶ ποῖον τὸ ἀντίστοιχον μέγιστον ἢ ἐλάχιστον:

$$2x^2 + 6x - 1, \quad 4x^2 - 6x + 3, \quad x - 3x^2 + 4, \quad -2x^2 - 6x.$$

160) Νὰ ὀρίσθῃ ὁ α ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τῆς $x^2 + (2-\alpha)x - \alpha - 3 = 0$, νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

161) Νὰ ὀρίσθῃ ὁ α , ὥστε ἡ ἐλάχιστη τιμὴ τῆς παραστάσεως $\alpha(1-x)^2 + (1-\alpha)x^2$ νὰ εἶναι ὅσον τὸ δυνατόν μεγαλυτέρα.

162) Νὰ διαιρεθῇ τμήμα AB εἰς δύο μέρη AG καὶ BG τοιαῦτα ὥστε, ἂν ἐπὶ τῆς AG κατασκευασθῇ ἰσοπλευρὸν τρίγωνον $AG\Delta$ καὶ ἐπὶ τῆς BG τετράγωνον $GBEZ$ (πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AB) καὶ ἄρχῃ ἡ ΔZ , τὸ πεντάγωνον $ABEZ\Delta$ νὰ ἔχῃ τὸ ἐλάχιστον δυνατόν ἐμβαδόν.

163) Καθορίσατε συνάρτησιν τοῦ x τῆς μορφῆς $x^2 + \alpha x + \beta$ ἢ ὁποία νὰ μηδενίζεται διὰ $x=2$, νὰ εἶναι θετικὴ διὰ $x > 2$ καὶ νὰ ἔχῃ ἐλαχίστην τιμὴν τὴν -9 .

164) Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ δεδομένοι σταθεροὶ ἀριθμοί, εὑρετε διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x ἡ παράστασις $(x-\alpha_1)^2 + (x-\alpha_2)^2 + \dots + (x-\alpha_n)^2$ λαμβάνει τὴν μεγίστην αὐτῆς τιμὴν.

165) Νὰ δευχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ περιέχεται μεταξὺ $\frac{1}{3}$ καὶ 3 οἷανδὴ ποτε πραγματικὴν τιμὴν καὶ ἂν λάβῃ ὁ x .

166) Νὰ δευχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\frac{(x+\mu)^2-4\mu\nu}{2(x-\nu)}$ λαμβάνει μόνον τὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος $2\nu \dots 2\mu$ τιμὰς ὅταν ὁ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

167) Νὰ δευχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\frac{4x-3}{x^2-1}$ δύναται νὰ λαβῇ οἷανδὴ ποτε πραγματικὴν τιμὴν θέλομεν, ἔάν εἰς τὸ γράμμα x δοθῇ κατάλληλος πραγματικὴ τιμή.

168) Ἐάν τὸ x διατρέχῃ τὰς πράγμ. τιμὰς δεῖξατε ὅτι ἡ συνάρτησις $\frac{2x^2-5x+2}{x-1}$ λαμβάνει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς.

169) Διὰ ποίαν τιμὴν τῆς θετικῆς σταθερᾶς k , ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ συνάρτησις $(x^2-2x+1)/(x^2+k)$ εἶναι 3;

170) Νὰ ὁρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ α καὶ β οὕτως ὥστε ἡ συνάρτησις $\frac{2\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$ νὰ ἔχῃ μεγίστην τιμὴν τὸ 4 καὶ ἐλαχίστην τὸ -1 .

171) Νὰ ὁρισθοῦν αἱ πραγματικαὶ τιμαὶ τοῦ λ δι' ἃς ἡ παράστασις $\frac{\lambda x^2 + 3x - 4}{\lambda + 3x - 4x^2}$ δύναται νὰ λάβῃ πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς, ὅταν ὁ x μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

★ **24. Μεταβολὴ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$.** α') Ἡ μελέτη τῆς μεταβολῆς μιᾶς συναρτήσεως ἔγκειται κυρίως εἰς τὴν εὑρεσιν τῶν διαστημάτων εἰς τὰ ὁποῖα αὕτη εἶναι αὐξοῦσα καὶ τῶν διαστημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα (ἰδὲ [1], § 98) καθὼς καὶ ὁ προσδιορισμὸς τῶν τιμῶν μεταξὺ τῶν ὁποίων κυμαίνονται αἱ τιμαὶ τῆς.

Διὰ νὰ μελετήσωμεν τὴν μεταβολὴν τοῦ τριωνύμου $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ γράφομεν αὐτὸ ὑπὸ τὴν μορφήν

$$(1) \quad \varphi(x) = \alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \right]$$

καὶ μελετῶμεν κατὰ πρῶτον τὴν μεταβολὴν τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν παραστάσεως. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὰς ἐπομένους προφανεῖς προτάσεις (εὐκόλως ἀποδεικνυμένας βάσει τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀνισοτήτων καθὼς καὶ τῶν γραφέντων εἰς τὴν § 98 τοῦ [1]).

i) Ἐάν ἀρνητικὴ ποσότης αὐξάνῃ, τὸ τετράγωνόν της ἐλαττοῦται, ἔάν δὲ θετικὴ ποσότης αὐξάνῃ καὶ τὸ τετράγωνόν της αὐξάνει.

ii) Ἐάν ἡ συνάρτησις $\sigma(x)$ εἶναι αὐξοῦσα εἰς τι διάστημα τότε τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ σταθερὸν ἀριθμὸν α δηλ. τὸ $\alpha \cdot \sigma(x)$ εἶναι πάλιν αὐξοῦσα συνάρτησις ἂν $\alpha > 0$, φθίνουσα δὲ ἂν $\alpha < 0$.

* Παράγραφοι σημειοῦμεναι δι' ἀστερίσκου δύνανται ἐνδεχομένως νὰ παραλείπωνται.

iii) Ἐὰν ἡ $\sigma(x)$ εἶναι αὐξουσα, τότε καὶ τὸ ἄθροισμα $c + \sigma(x)$ ὅπου c σταθερά, εἶναι ἐπίσης αὐξουσα. Ἐὰν δὲ ἡ $\sigma(x)$ εἶναι φθίνουσα, ὁμοίως εἶναι καὶ ἡ $c + \sigma(x)$.

Παρατηροῦμεν ἤδη, ὅτι εἰς τὸ διάστημα $-\infty < x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ ποσότης $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι ἀρνητικὴ καὶ αὐξουσα μετὰ τοῦ x , ἄρα τὸ τετράγωνόν της $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ἐλαττοῦται ὅταν τὸ x αὐξάνῃ (σύμφωνα μετὰ τὴν πρότασιν (i)). Ἄρα καὶ ἡ $\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} = P$ ἐλαττοῦται τοῦ x αὐξάνοντος ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\beta/2\alpha$ (σύμφωνα μετὰ τὴν πρότασιν iii).

Διὰ $x = -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ ποσότης P γίνεται ἴση μετὰ $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2}$.

Τοῦναντίον, εἰς τὸ διάστημα $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ ἡ ποσότης $x + \frac{\beta}{2\alpha}$ εἶναι θετικὴ καὶ αὐξουσα, ἄρα καὶ τὸ τετράγωνόν της αὐξάνει μετὰ τοῦ x συνεπῶς καὶ ἡ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης (1) ποσότης P αὐξάνει μετὰ τοῦ x .

Ἄς ὑποθέσωμεν $\alpha > 0$. Τότε αὐξανομένης τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ποσότητος αὐξάνει καὶ τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ α δηλ. τὸ $\alpha\varphi(x)$ (σύμφωνα μετὰ τὴν πρότασιν (ii)) καὶ ἐλαττουμένης ἐλαττοῦται.

Ἡ μεταβολὴ τοῦ $\varphi(x)$ παρέχεται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ὑπὸ τοῦ κάτωθι πίνακος ὅπου τὸ σύμβολον $\nearrow$ σημαίνει αὐξησιν τὸ δὲ $\searrow$ ἐλάττωσιν :

$$x : -\infty \nearrow -\frac{\beta}{2\alpha} \nearrow +\infty \quad (1)$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 : +\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} : +\infty \searrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \nearrow +\infty$$

$$\varphi(x) : +\infty \searrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \nearrow +\infty \quad (2)$$

Ἐὰν λοιπὸν $\alpha > 0$, τοῦ x αὐξάνοντος ἀπὸ $-\infty$ ἕως τὸ $-\beta/2\alpha$ (σειρὰ (1)) τὸ τριώνυμον ἐλαττοῦται ἀπὸ τὸ $+\infty$ ἕως τὸ $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$ (σειρὰ (2)) καὶ τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\beta/2\alpha$ ἕως τὸ $+\infty$ (σειρὰ (1)), τὸ τριώνυμον αὐξάνει ἀπὸ τῆς τιμῆς $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$ μέχρι τοῦ ἀπείρου (σειρὰ (2)). Ὡστε δὲν κατέρχεται κάτω τῆς τιμῆς $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ ἥτις ἀποτελεῖ τὸ λεγόμενον «ἐλάχιστον τοῦ τριωνύμου».

Ἐὰν ὑποτεθῇ ὅτι $\alpha < 0$, τότε (κατὰ τὴν πρότασιν ii) αὐξανομένης τῆς ἐντὸς τῶν ἀγκυλῶν ποσότητος, τὸ γινόμενον αὐτῆς ἐπὶ α ἐλαττοῦται καὶ ἀντιστρόφως. Διὰ τὴν περίπτωσιν λοιπὸν αὐτὴν θὰ ἔχωμεν τὸν πίνακα :

$$x : -\infty \nearrow -\frac{\beta}{2\alpha} \nearrow +\infty \quad (3)$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 : +\infty \searrow 0 \nearrow +\infty$$

$$\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 + \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} : +\infty \searrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha^2} \nearrow +\infty$$

$$\varphi(x) : -\infty \nearrow \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha} \searrow -\infty \quad (4)$$

“Ωστε, ἂν $\alpha < 0$, τοῦ x αὐξανομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$ (σειρὰ (3)) τὸ $\varphi(x)$

αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$ (σειρὰ (4)) τοῦ δὲ

x αὐξανομένου ἀπὸ $-\frac{\beta}{2\alpha}$ μέχρι $+\infty$ (σειρὰ (3))

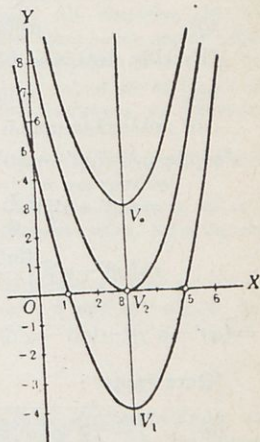
τὸ τριώνυμον ἐλαττωταί ἀπὸ τὴν τιμὴν $\frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}$

μέχρι τοῦ $-\infty$ (σειρὰ (4)). Συνεπῶς ἡ τιμὴ $(4\alpha\gamma - \beta^2)/4\alpha$ εἶναι ἡ μεγίστη τιμὴ ἢ τὸ «μέγιστον» τοῦ τριωνύμου.

Παρατηρητέον ὅτι εἴτε μέγιστον ἔχει (ἂν $\alpha < 0$) εἴτε ἐλάχιστον (ἂν $\alpha > 0$), τὸ λαμβάνει διὰ τὴν τιμὴν $x = -\beta/2\alpha$ ἴσην μὲ τὸ ἡμίαθροισμα τῶν ριζῶν του.

β') Ἡ μελέτη τῆς μεταβολῆς ἑνὸς τριωνύμου $\varphi(x)$ βοηθεῖ εἰς τὴν γραφικὴν παράστασιν τῆς συναρτήσεως $\varphi(x)$. (Ἰδὲ [1]*, § 102). Οὕτω π.χ.

τὸ τριώνυμον $y = x^2 - 6x + 5$ παρίσταται γραφικῶς εἰς τὸ σχ. (1) ὑπὸ τῆς καμπύλης V_1 τεμνουσῆς τὸν OX εἰς δύο σημεία ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς δύο ρίζας 1 καὶ 5. Τὸ $y = x^2 - 6x + 9$ ὑπὸ τῆς καμπύλης V_2 ἐφαπτομένης τοῦ OX εἰς τὸ σημεῖον μὲ τετμημένην 3 (διπλὴ ρίζα) καὶ τὸ $y = x^2 - 6x + 12$ ὑπὸ τῆς καμπύλης V_3 μὴ τεμνοῦσῆς τὸν OX (φανταστικαὶ ρίζαι).



(Σχ. 1)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

172) Νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ κάτωθι συναρτήσεις :

$$\alpha') y = -x^2 + 2x + 3, \beta') y = -x^2 - x - 1.$$

173) Εἰς ποῖον διάστημα τιμῶν τοῦ x ἐκάστη τῶν κάτωθι συναρτήσεων εἶναι αὐξουσα καὶ εἰς ποῖον φθίνουσα; $y = x^2 - 4x + 7$, $y = 4x + x^2 - 1$, $y = 3x^2 - 6$.

174) Ἐὰν τὰ α καὶ β εἶναι δεδομένοι ἀριθμοί, νὰ μελετηθῇ ἡ μεταβολὴ τῆς παραστάσεως $y = \frac{\alpha + \lambda\beta}{1 + \lambda}$ ὅταν τὸ λ αὐξάνῃ: 1ον) ἀπὸ -1 ἕως 0, 2ον) ἀπὸ 0 ἕως $+\infty$ καὶ 3ον) ἀπὸ $-\infty$ ἕως -1 .

(*) Διὰ τοῦ [1] ἐννοοῦμεν τὸν Α' Τόμον τῶν «Μαθημάτων Ἀλγέβρας».

25. Ἡ ἀπαλείφουσα δύο τριωνύμων. α') Δοθέντων τῶν τριωνύμων $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ καὶ $\varphi(x) = a'x^2 + b'x + \gamma'$ ἔξ ὧν τὸ πρῶτον ἔχει ρίζας ϱ_1, ϱ_2 καλεῖται ἀπαλείφουσα αὐτῶν ἡ ποσότης

$$(1) \quad R = a^2 \varphi(\varrho_1) \varphi(\varrho_2).$$

Πρὸς ὑπολογισμόν τῆς R συναρτήσῃ τῶν συντελεστῶν $a, b, \gamma, a', b', \gamma'$ τῶν δύο τριωνύμων θεωροῦμεν τὰς ἰσότητας

$$(2) \quad \varphi(\varrho_1) = a' \varrho_1^2 + b' \varrho_1 + \gamma', \quad 0 = a \varrho_1^2 + b \varrho_1 + \gamma$$

ἔξ ὧν δευτέρα εἶναι συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μας ὅτι τὸ ϱ_1 εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$.

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐκ τῶν (2) ἐπὶ a καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ $-a'$ καὶ κατόπιν τὰς προσθέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$(3) \quad a \varphi(\varrho_1) = (a\beta' - a'\beta) \varrho_1 + (a\gamma' - a'\gamma).$$

Ἐντελῶς ἀναλόγως θὰ ἔχωμεν

$$(4) \quad a \varphi(\varrho_2) = (a\beta' - a'\beta) \varrho_2 + (a\gamma' - a'\gamma).$$

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῶν (3) καὶ (4) κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\begin{aligned} a^2 \varphi(\varrho_1) \varphi(\varrho_2) &= (a\beta' - a'\beta)^2 \varrho_1 \varrho_2 + (a\beta' - a'\beta)(a\gamma' - a'\gamma)(\varrho_1 + \varrho_2) + (a\gamma' - a'\gamma)^2 = \\ &= (a\beta' - a'\beta)^2 \frac{\gamma}{a} - (a\beta' - a'\beta)(a\gamma' - a'\gamma) \frac{\beta}{a} + (a\gamma' - a'\gamma)^2 = \\ &= (a\beta' - a'\beta) \left\{ \frac{(a\beta' - a'\beta)\gamma}{a} - \frac{(a\gamma' - a'\gamma)\beta}{a} \right\} + (a\gamma' - a'\gamma)^2 = \\ &= (a\gamma' - a'\gamma)^2 + (a\beta' - a'\beta) \cdot \frac{a\beta'\gamma - a\beta\gamma'}{a} = (a\gamma' - a'\gamma)^2 - (a\beta' - a'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma). \end{aligned}$$

Ὡστε ἔχομεν :

$$(5) \quad \boxed{R = a^2 \varphi(\varrho_1) \varphi(\varrho_2) = (a\gamma' - a'\gamma)^2 - (a\beta' - a'\beta)(\beta\gamma' - \beta'\gamma)}.$$

β') Ὁ **μηδενισμὸς τῆς ἀπαλείφουσας** R συνεπάγεται τὴν ὑπαρξιν μιᾶς τουλάχιστον κοινῆς ρίζης τῶν δύο τριωνύμων $\varphi(x)$ καὶ $f(x)$. Διότι, ἂν $R=0$ τότε $a^2 \varphi(\varrho_1) \varphi(\varrho_2) = 0$ καὶ συνεπῶς θὰ ἔχωμεν : ἢ $\varphi(\varrho_1) = 0$ ἢ $\varphi(\varrho_2) = 0$ ἢ ἀμφοτέρω. Ἐὰν ὅμως $\varphi(\varrho_1) = 0$, τοῦτο σημαίνει ὅτι ὁ ϱ_1 ὅστις εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ θὰ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ $\varphi(x)$ δηλ. θὰ εἶναι κοινὴ ρίζα τῶν δύο τριωνύμων.

Ἀντιστρόφως, ἂν τὰ δύο τριώνυμα ἔχουν μίαν κοινήν ρίζαν, δηλ. ἂν ἡ ρίζα ϱ_1 τοῦ $f(x)$ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ $\varphi(x)$ τότε θὰ εἶναι $\varphi(\varrho_1) = 0$, ἄρα καὶ $R = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

175) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ ἐξισώσεις : $(1-2\mu)x^2 - 6\mu x - 1 = 0$ καὶ $\mu x^2 - \mu x + 1 = 0$ ἔχουν κοινήν ρίζαν, νὰ εὑρεθῇ ὁ μ καὶ ἡ κοινὴ ρίζα.

176) Εὑρετε, διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ α αἱ δύο ἐξισώσεις $(x-1)^2 = \alpha^2(x+\alpha)$ καὶ $(x-\alpha)^2 = x(\alpha-1)^2$ ἔχουν κοινήν ρίζαν.

177) Δοθέντων τῶν τριωνύμων $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ μὲ ρίζας ρ_1, ρ_2 καὶ $\varphi(x) = a'x^2 + b'x + \gamma'$ μὲ ρίζας x_1, x_2 , νὰ δεიχθῇ ὅτι ἡ ἀπαλείφουσα αὐτῶν R δύναται νὰ λάβῃ τὰς μορφάς :

$$\alpha') \quad R = \alpha^2 \alpha'^2 (x_1 - \rho_1)(x_1 - \rho_2)(x_2 - \rho_1)(x_2 - \rho_2).$$

$$\beta') R = \frac{1}{4} [(2\alpha'\gamma' + 2\alpha'\gamma - \beta\beta')^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma)(\beta'^2 - 4\alpha'\gamma')].$$

178) Δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2 + \beta x + \gamma + \gamma'(\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma') = 0$ δπου τὰ α, β, γ δὲν εἶναι ἀνάλογα τῶν α', β', γ' , νὰ δευχθῇ ὅτι τότε μόνον ὁ x ἐκφράζεται ρητῶς συναρτῆσει τοῦ y , ὅταν τὰ δύο τριώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$ ἔχουν μίαν κοινὴν ρίζαν.

26. Περαιτέρω ιδιότητες τῆς ἀπαλειφούσης. α') Θεώρημα I. «*Ἐὰν δύο τριωνύμων $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\varphi(x) = \alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$ ἔχόντων πραγματικούς συντελεστές, ἡ ἀπαλείφουσα ἰσοῦται μὲ μηδέν, ἐπὶ πλέον δὲ εἶναι $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ τότε τὰ δύο τριώνυμα ἔχουν μίαν καὶ μόνον πραγματικὴν κοινὴν ρίζαν*».

Ἀπόδειξις. Ὅπως εἶδομεν ἀνωτέρω, ἀφοῦ ἡ ἀπαλείφουσα R ἰσοῦται μὲ μηδέν, τὰ δύο τριώνυμα θὰ ἔχουν μίαν τοιλάχιστον κοινὴν ρίζαν. Δὲν δύναται ὁμως νὰ ἔχουν καὶ τὰς δύο ρίζας κοινὰς διότι τότε θὰ εἶχον συντελεστές ἀνάλογους καὶ ἐπομένως θὰ ἦτο $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 0$, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ὡστε θὰ ἔχουν μίαν μόνον κοινὴν ρίζαν, ἔστω τὴν ρ . Αὕτη θὰ εἶναι πραγματικὴ. Διότι ἐάν ἦτο μιγαδική, $K + Li$ τότε τὰ δύο τριώνυμα, ἔχοντα ἕκαστον ὡς ρίζαν τὴν $K + Li$ θὰ εἶχον καὶ τὴν συζυγὴ αὐτῆς $K - Li$ πάλιν ὡς ρίζαν. Ἐπομένως θὰ εἶχον δύο ρίζας κοινὰς, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει: $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$.

Παρατήρησις. Ὁ μηδενισμὸς τῆς ἀπαλειφούσης μαζί μὲ τὴν συνθήκην $\alpha\beta' - \alpha'\beta \neq 0$ ἐξασφαλίζει καὶ τὸ ὅτι αἱ ρίζαι ἀμφοτέρων τῶν τριωνύμων εἶναι πραγματικαί.

β') *Ἐῤῥεοις τῆς κοινῆς ρίζης.* Ἀφοῦ διαπιστωθῇ ὅτι ὑπαρξῆς μιᾶς κοινῆς ρίζης ρ , (βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος), δύναται καὶ νὰ προσδιορισθῇ αὕτη, διότι θὰ πληροῖ τὰς ἰσότητας: $\{\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0, \alpha'\rho^2 + \beta'\rho + \gamma' = 0\}$.

Ἐὰν πολλῶμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων μὲ $-\alpha'$ καὶ τὰ τῆς δευτέρας μὲ α καὶ προσθέσωμεν κατὰ μέλη, λαμβάνομεν: $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\rho + \alpha\gamma' - \alpha'\gamma = 0$ ἥτοι

$$\rho = -\frac{\alpha\gamma' - \alpha'\gamma}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}.$$

γ') Θεώρημα II. «*Ἐὰν ἡ ἀπαλείφουσα R δύο τριωνύμων $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\varphi(x) = \alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$ (ἐχόντων πραγμ. συντελεστές) εἶναι ἀρνητικὴ, τότε αἱ ρίζαι ἀμφοτέρων εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ χωρίζουν ἀλλήλας, (δηλ. μεταξὺ τῶν ριζῶν ἕκαστον περιέχεται μία ρίζα τοῦ ἑτέρου)*».

Ἀπόδειξις. Ἐστῶσαν ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τοῦ $f(x)$ καὶ x_1, x_2 αἱ τοῦ $\varphi(x)$. Ἐὰν αἱ ρ_1, ρ_2 ἦσαν φανταστικά, θὰ ἦσαν συζυγεῖς, δηλ. $\rho_1 = K + Li, \rho_2 = K - Li$ καὶ συνεπῶς αἱ ποσότητες $\varphi(\rho_1) = \varphi(K + Li)$ καὶ $\varphi(\rho_2) = \varphi(K - Li)$ θὰ ἦσαν καὶ αὐταὶ συζυγεῖς μιγαδικοὶ ἀριθμοὶ ὡς διαφέρουσαι μόνον κατὰ τὸ σημεῖον τοῦ i (ιδεὲ § 8, παρατ.), ἄρα θὰ εἶχον γινόμενον ὄχι ἀρνητικόν, δηλ. θὰ ἦτο $\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) \geq 0$ (ιδεὲ § 8) καὶ συνεπῶς θὰ εἴχομεν $\alpha^2\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) \geq 0$ δηλ. $R \geq 0$, ὅπερ ἀντίκειται τῇ ὑποθέσει. Ἐπομένως τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι πραγματικοὶ ἀριθμοί.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι $R < 0$, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) < 0$ δηλ. ὑπάρχουν δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ ρ_1, ρ_2 οἵτινες δίδουν εἰς τὸ $\varphi(x)$ τιμὰς ἑτεροσημίου, ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 21, αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ θὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ ἡ μία τούτων θὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ρ_1, ρ_2 . Ἦτοι θὰ ἔχωμεν: $x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2$ ἢ $\rho_1 < x_1 < \rho_2 < x_2$ ὁ. ἔ. δ.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

179) Ἐὰν τὰ τριώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$ ἔχουν συντελεστές συμμετρους καὶ μίαν μόνον ρίζαν κοινὴν, νὰ δευχθῇ ὅτι τότε αἱ διαφοραὶ, $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ καὶ $\beta'^2 - 4\alpha'\gamma'$ εἶναι τέλεια τετράγωνα συμμετρων.

Σ. Γ. Κανέλλου: «*Μαθήματα Ἀλγέβρας*». Β'. τόμος

180) 'Εάν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, ποία σχέσεις πρέπει να υπάρχει μεταξύ των α, β, γ ἵνα τὰ τριώνυμα $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\gamma x^2 + \beta x + \alpha$ ἔχουν μίαν μόνην ρίζαν κοινήν;

181) 'Εάν x_1, x_2 αἱ ρίζαι τοῦ $\alpha^2 x^2 + (\alpha + 2)x + 2\alpha$ καὶ ρ_1, ρ_2 αἱ τοῦ $\alpha^2 x^2 + (3\alpha + 2)x + 2\alpha$ νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τιμαὶ τοῦ α διὰ τὰς ὁποίας εἶναι $x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2$.

182) Νὰ ὁρισθοῦν πᾶσαι τιμαὶ τοῦ λ , δι' ἃς πληροῦνται αἱ ἀνισότητες $x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2$ ὅπου x_1, x_2 αἱ ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\lambda^2 x^2 + (3\lambda^2 - 5\lambda + 17)x + \frac{1}{\lambda}$ καὶ ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τοῦ

$$\lambda^2 x^2 - (2\lambda^2 - 19\lambda - 23)x + \frac{1}{\lambda}.$$

★ 27. Ἀλληλουχία τῶν ριζῶν δύο τριωνύμων. α') Ἀς θεωρήσωμεν δύο τριώνυμα $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ καὶ $\varphi(x) = \alpha' x^2 + \beta' x + \gamma'$ ἔχοντα πραγματικὰς ρίζας ρ_1, ρ_2 τὸ πρῶτον καὶ x_1, x_2 τὸ δεῦτερον καὶ μὴ ἔχοντα κοινήν ρίζαν. 'Εάν κατατάξωμεν τὰς τέσσαρας ρίζας ρ_1, ρ_2, x_1, x_2 κατὰ σειράν μεγέθους δύναται νὰ προκύψῃ ὅποιαδήποτε ἐκ τῶν ἑξ ἑκάστη διατάξεων ἑξ ὧν τρεῖς εἶναι οὐσιωδῶς διάφοροι.

$$\begin{array}{ll} \text{I} \alpha. & x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{αἱ ρίζαι «χωρίζουν ἀλλήλας»} \end{array} \right\} \\ \text{I} \beta. & \rho_1 < x_1 < \rho_2 < x_2 \\ \text{II} \alpha. & x_1 < \rho_1 < \rho_2 < x_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{αἱ ρίζαι τοῦ ἑνὸς περιέχονται} \\ \text{μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ ἄλλου} \end{array} \right\} \\ \text{II} \beta. & \rho_1 < x_1 < x_2 < \rho_2 \\ \text{III} \alpha. & x_1 < x_2 < \rho_1 < \rho_2 \left\{ \begin{array}{l} \text{αἱ ρίζαι τοῦ ἑνὸς εἶναι μικρότε-} \\ \text{ραι ἀμφοτέρων τῶν ριζῶν τοῦ ἄλλου} \end{array} \right\} \\ \text{III} \beta. & \rho_1 < \rho_2 < x_1 < x_2 \end{array}$$

Δι' ἑκάστην τῶν ἑξ διατάξεων τούτων δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ἱκανὰς καὶ ἀναγκαίαις συνθήκας, χρησιμοποιοῦντες τὰ κριτήρια διὰ τὴν θέσιν ἀριθμοῦ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τριωνύμου καθὼς καὶ τὴν ἀπαλείφουσαν.

β') **Ἡ περίπτωση I α.** Κατ' αὐτήν, τὰ ρ_1, ρ_2 πρέπει νὰ δίδουν εἰς τὸ $\varphi(x)$ τιμὰς ἑτεροσήμους δηλ. $\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) < 0$, ἄρα πρέπει $\alpha^2\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) < 0$ ἥτοι $R < 0$.

Ἐπίσης, ἀφοῦ θὰ εἶναι $x_1 < \rho_1, x_2 < \rho_2$ θὰ εἶναι καὶ $x_1 + x_2 < \rho_1 + \rho_2$. Ὡστε ἀναγκαίαι συνθήκαι διὰ τὴν I α εἶναι:

(1)

$$R < 0, \quad x_1 + x_2 < \rho_1 + \rho_2$$

Αἱ (1) εἶναι καὶ ἱκαναί. Διότι ἐφ' ὅσον $R < 0$ αἱ ρίζαι τῶν δύο τριωνύμων θὰ χωρίζουν ἀλλήλας (θεώρημα II, § 26) δηλαδή θὰ εἶναι ἢ $x_1 < \rho_1 < x_2 < \rho_2$ ἢ $\rho_1 < x_1 < \rho_2 < x_2$. Ἀλλὰ τὸ δεῦτερον ἀποκλείεται, διότι ἂν συνέβαινε, θὰ εἶχουμεν $\rho_1 + \rho_2 < x_1 + x_2$ ὅπερ ἀντιβαίνει πρὸς τὴν συνθήκην $x_1 + x_2 < \rho_1 + \rho_2$. Κατ' ἀναλογίαν θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν περίπτωσιν I β ὡς ἀναγκαίαις καὶ ἱκανὰς συνθήκας:

$$R < 0, \quad \rho_1 + \rho_2 < x_1 + x_2.$$

γ') **Ἡ περίπτωση II α.** Ἐάν ὑφίσταται ἡ ἀλληλουχία II α τότε θὰ ἔχωμεν:

(2)

$$\alpha'\varphi(\rho_1) < 0, \quad \alpha'\varphi(\rho_2) < 0 \quad \text{καὶ} \quad \Delta > 0$$

ὅπου Δ ἡ διακρίνουσα τοῦ $f(x)$. Αἱ τρεῖς αὗται συνθήκαι εἶναι καὶ ἱκαναί. Διότι ἐάν πληροῦνται, τότε προφανῶς τὸ $f(x)$ ἔχει ρίζας ρ_1, ρ_2 πραγματικὰς καὶ ἀνίσους, ἐπειδὴ δὲ $\alpha'\varphi(\rho_1) < 0$ καὶ $\alpha'\varphi(\rho_2) < 0$, τὰ ρ_1 καὶ ρ_2 θὰ περιέχωνται ἕκαστον μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ $\varphi(x)$, ἄρα θὰ εἶναι $x_1 < \rho_1 < \rho_2 < x_2$.

Τὰς συνθήκας (2) ἐνδείκνυνται ν' ἀντικαταστήσωμεν δι' ἄλλων συμμετρικῶν ὡς πρὸς ρ_1, ρ_2 . Τοῦτο δύναται νὰ γίνῃ ὡς ἑξῆς. Ἀφοῦ $\Delta > 0$, οἱ ἀριθμοὶ ρ_1, ρ_2 ἄρα καὶ οἱ $\alpha'\varphi(\rho_1)$ καὶ $\alpha'\varphi(\rho_2)$ εἶναι πραγματικοί. Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν οἱ δύο οὗτοι πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha'\varphi(\rho_1), \alpha'\varphi(\rho_2)$, ἀρνητικοί, ἀρκεῖ νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἀρνητικὸν καὶ γινόμενον θετικόν. Δηλ.

(3)

$$\alpha'\{\varphi(\rho_1) + \varphi(\rho_2)\} < 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha'^2\varphi(\rho_1)\varphi(\rho_2) > 0.$$

* Παράγραφοι σημειούμεναι δι' ἀστερίσκου δύναται νὰ παραλείπωνται.

*Αλλ' ἐκάστη τῶν παραστάσεων $\varphi(q_1)+\varphi(q_2)$ καὶ $\varphi(q_1)\varphi(q_2)$ εἶναι συμμετρικὴ παράστασις τῶν ριζῶν καὶ ὑπολογίζεται εὐχερῶς. Οὕτω,

$$\begin{aligned}\varphi(q_1)+\varphi(q_2) &= \alpha' q_1^2 + \beta' q_1 + \gamma' + \alpha' q_2^2 + \beta' q_2 + \gamma' = \alpha' (q_1^2 + q_2^2) + \beta' (q_1 + q_2) + 2\gamma' = \\ &= \alpha' \frac{\beta^2 - 2\alpha\gamma}{\alpha} - \beta' \frac{\beta}{\alpha} + 2\gamma.\end{aligned}$$

*Εξ ἄλλου ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (3) γράφεται $R > 0$ ὅπου R ἡ ἀπαλείφουσα τῶν δύο τριωνύμων. Οὕτω, ἀντὶ τῶν (2) ἔχομεν τὰς ἰσοδυνάμους, ἱκανὰς καὶ ἀναγκαίως συνθηκάς διὰ τὴν θέσιν Π_a :

(4)

$$\Delta > 0, R > 0, \alpha' \{ \varphi(q_1) + \varphi(q_2) \} < 0.$$

*Εντελῶς ἀναλόγως ἐργαζόμεθα διὰ τὴν εὔρεσιν τῶν συνθηκῶν τῆς ἀλληλου-
χίας Π_β .

δ') **Η περίπτωσης* Π_a . *Εάν πληροῦνται αἱ ἀνισότητες Π_a θὰ ἔχωμεν ἀναγκαίως $\Delta > 0$, $\Delta' > 0$ διότι αἱ ρίζαι ἀμφοτέρων τῶν τριωνύμων πρέπει νὰ εἶναι πραγμα-
καί. *Επίσης, ἐπειδὴ τὸ x_1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν q_1 , q_2 θὰ ἔχωμεν $af(x_1) > 0$, ὁμοίως
δὲ $af(x_2) > 0$. *Αλλὰ καὶ τὸ q_1 κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν x_1 , x_2 ἐπομένως θὰ εἶναι $\alpha' \varphi(q_1) > 0$
καὶ ὁμοίως, $\alpha' \varphi(q_2) > 0$. Τέλος θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἀνισότητα $x_1 + x_2 < q_1 + q_2$. *Εν συνόλῳ
θὰ ἔχωμεν:

(5)

$$\begin{aligned}\Delta &> 0, & \Delta' &> 0, & af(x_1) &> 0, & af(x_2) &> 0 \\ \alpha' \varphi(q_1) &> 0, & \alpha' \varphi(q_2) &> 0, & x_1 + x_2 &< q_1 + q_2.\end{aligned}$$

Αἱ (5) εἶναι καὶ ἱκαναὶ συνθήκαι. Διότι ἐκ τῶν δύο πρώτων ἔπεται ὅτι αἱ ρίζαι
ἀμφοτέρων τῶν τριωνύμων εἶναι πραγματικά. *Εκ τῆς 3ης καὶ τῆς 4ης ἔπεται ὅτι αἱ ρί-
ζαι δὲν ἀκολουθοῦν ἀλλήλας οὔτε κατὰ τὴν διάταξιν Π_β οὔτε κατὰ τὴν Π_a οὔτε κατὰ
τὴν Π_β . *Εκ τῆς 5ης καὶ 6ης ἀποκλείεται ἡ διάταξις Π_a καὶ ἐκ τῆς 7ης ἀποκλείεται ἡ
διάταξις Π_β .

*Ὅτε πληρουμένων τῶν (5), ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν ριζῶν εἶναι κατ' ἀνάγκην
ἡ Π_a .

*Αντικαθιστῶμεν τὰς (5) μὲ ἰσοδυνάμους ἀνισότητος συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὰς ρί-
ζας. Οὕτω, ἀντὶ τῶν δύο ἀνισότητων $af(x_1) > 0$, $af(x_2) > 0$ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς:

$$\alpha \{ f(x_1) + f(x_2) \} > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha^2 f(x_1) f(x_2) > 0$$

ἀντὶ δὲ τῶν $\alpha' \varphi(q_1) > 0$, $\alpha' \varphi(q_2) > 0$ νὰ γράψωμεν τὰς

$$\alpha' \{ \varphi(q_1) + \varphi(q_2) \} > 0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha'^2 \varphi(q_1) \varphi(q_2) > 0$$

(ὡς ἔγινε καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν Π_a).

$$\text{Εἶναι ὁμῶς} \quad \alpha^2 \varphi(q_1) \varphi(q_2) = \alpha^2 f(x_1) f(x_2) = R.$$

Οὕτω λαμβάνομεν διὰ τὴν περίπτωσιν Π_a τὰς ἐπομένας ἱκανὰς καὶ ἀναγκαίως
συνθηκάς:

(6)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta > 0 & \alpha' \{ \varphi(q_1) + \varphi(q_2) \} > 0 \\ \Delta' > 0 & \alpha \{ f(x_1) + f(x_2) \} > 0 \\ R > 0 & x_1 + x_2 < q_1 + q_2. \end{array} \right.$$

Αἱ συνθήκαι διὰ τὴν Π_β ἀλληλουχίαν δὲν διαφέρουν τῶν ἀνωτέρω, εἰμὴ μόνον
κατὰ τὴν τελευταίαν ἀνισότητα ἥτις εἰς τὴν περίπτωσιν Π_β εἶναι $q_1 + q_2 < x_1 + x_2$.

ε') **Διερεύνησις τῆς ἀλληλουχίας τῶν ριζῶν κατὰ τὰς τιμὰς μιᾶς παραμέτρου*. *Εκ
τῶν ἀνωτέρω διερευνήσεων προκύπτει ὅτι τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων:

$$(7) \quad \left\{ \Delta, \Delta', R, A = \alpha \{ f(x_1) + f(x_2) \}, A' = \alpha' \{ \varphi(q_1) + \varphi(q_2) \}, x_1 + x_2 - q_1 - q_2 \right\}$$

εἶναι ἱκανὰ νὰ μᾶς καθορίσουν τὴν διάταξιν τῶν ριζῶν x_1, x_2, ρ_1, ρ_2 κατὰ σειρὰν μεγέθους. Διὰ τοῦτο, προκειμένου νὰ ἐξετάσωμεν πῶς μεταβάλλεται ἡ πρὸς ἀλλήλας θέσις τῶν ριζῶν δύο τριωνύμων ὧν οἱ συντελεσταὶ ἑξαρθῶνται ἀπὸ μίαν παράμετρον λ , ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, καταρτίζομεν πίνακα παρέχοντα τὰ σημεῖα ὧν τῶν ποσοτήτων (7) κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῶν (7) συνάγεται μὲν τὴν ἐκάστοτε διάταξιν τῶν ριζῶν (βλέπε παράδειγμα 4ον § 22).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

183) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ καὶ αἱ δύο ρίζαι τοῦ τριωνύμου $x^2 + (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x + 4\lambda^2$ περιέχονται μετὰ τῶν ριζῶν τοῦ $x^2 + (\lambda^2 + 2\lambda + 3)x + 4\lambda^2$;

184) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ , ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς $x^2 - 3x + \lambda + 2 = 0$ εἶναι μικρότεροι καὶ τῶν δύο ριζῶν τῆς $x^2 - 7x + 3\lambda + 12 = 0$;

185) Νὰ εὕρεθῇ ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἵνα μία ρίζα τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ εἶναι διπλάσια μίᾳς τῶν ριζῶν τοῦ $\alpha'x^2 + \beta'x + \gamma'$.

186) Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως ὥστε μία ρίζα ρ_1 τῆς ἐξισώσεως $3x^2 + 5x + 4 - \lambda = 0$ καὶ μία ρίζα x_1 τῆς $x^2 - 5x + 4 + \lambda = 0$ νὰ πληροῦν τὴν σχέσιν: $3\rho_1 + x_1 = 1$.

187) Νὰ διαταχθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων $x^2 - \lambda x - 1 = 0$ καὶ $x^2 + \lambda x + 1 = 0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ .

28. Ἀνισότητες μερὶς ριζικά. Ἐὰν εἰς μίαν ἀνισότητα, ὁ ἄγνωστος περιέχεται ὑπὸ τὸ ριζικόν, τότε ἡ ἀνισότης λέγεται «μερὶς ριζικά» ἢ ἄρρητος ἀνισότης. Προκειμένου περὶ ἀνισοτήτων περιεχουσῶν ἀρτίας τάξεως ρίζας ἀγνωστων παραστάσεων **θὰ ὑποθέτωμεν πάντοτε τὰ ὑπόρριζα θετικά**, (ἢ μηδὲν) οὕτως ὥστε αἱ ρίζαι νὰ ἔχουν νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ· διότι, ἀνισότης μετὰ ξὺν φανταστικῶν ἀριθμῶν ἢ μετὰ ξὺν πραγματικοῦ καὶ φανταστικοῦ, δὲν ὑφίσταται ἐν τῇ Ἀλγέβρᾳ.

Διὰ νὰ μετατρέψωμεν τὴν ἄρρητον ἀνισότητα εἰς ρητὴν πρέπει ν' ἀπομώσωμεν τὸ ριζικόν καὶ νὰ ὑψώσωμεν ἀκολουθῶν τὰ δύο μέλη εἰς κατάλληλον δύναμιν. Ἐὰν δέ, ὑπάρχῃ καὶ ἄλλο ριζικόν, ἡ ἐργασία αὕτη δεόν νὰ γίνῃ ἐπανειλημένως (ὅπως εἰς τὰς ἐξισώσεις μερὶς ριζικά). Διὰ τῆς ὑψώσεως ὅμως τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος εἰς δύναμιν δὲν εὐρίσκομεν πάντοτε ἀνισότητα ἰσοδύναμον πρὸς τὴν ἀρχικὴν. Διὰ τοῦτο, πρὸ τῆς ὑψώσεως εἰς δύναμιν πρέπει νὰ θέτωμεν **κατάλληλους περιορισμούς**. Οὕτω, ἡ ἀνισότης μερὶς ριζικά παρουσιάζεται ὡς ἰσοδύναμος πρὸς **σύστημα ἀνισοτήτων** (ρητῶν) ἀποτελούμενον ἀπὸ τοὺς τεθέντας περιορισμοὺς καὶ ἀπὸ τὴν τελικὴν ἀνισότητα εἰς ἣν καταλήγομεν μετὰ τὴν ἐξάλειψιν τῶν ριζικῶν.

Ὁ τρόπος τῆς ἐργασίας, εἰς περιπτώσεις καθ' ἃς εἶναι δυνατὴ ἡ ἐπίλυσις τῆς ἀνισότητος φαίνεται ἐκ τῶν ἐπομένων παραδειγμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνισότης: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-8} > 3$.

Λύσις. Γράφομεν τὴν ἰσοδύναμον ἀνισότητα:

$$(1) \quad \sqrt{2x+1} > 3 + \sqrt{x-8}$$

καὶ θέτομεν πρῶτον, **περιορισμὸν** (i) $x \geq 8$ διὰ νὰ εἶναι τὰ ὑπόρριζα, μὴ ἀρρητικά. Τούτου πληρουμένου, ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς ἀνισότητος (1) εἶναι θετικά, ἄρα δι' ὑψώσεως εἰς τὸ τετράγωνον λαμβάνομεν ὁμοίότροπον ἀνισότητα, ἰσοδύναμον. Ἐχομεν οὕτω:

$$2x+1 > 9+x-8+6\sqrt{x-8} \quad \eta \quad 6\sqrt{x-8} < x.$$

Ἀπὸ τὸν τεθέντα περιορισμὸν ἔπεται ὅτι ἡ τελευταία αὕτη ἀνισότης ἔχει καὶ τὰ δύο μέλη της μὴ ἀρνητικὰ ἄρα δυνάμεθα καὶ πάλιν νὰ ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον ὁπότε λαμβάνομεν :

$$36x-288 < x^2 \quad \eta \text{τοι} \quad (ii) \quad x^2-36x+288 > 0.$$

Ὡστε τὰ x τὰ πληροῦνται τὴν (1) εὐρίσκονται ἐκ τοῦ συστήματος τῶν ἀνισότητων (i) καὶ (ii). Ἡ (ii) ἀληθεύει διὰ $x < 12$ ἢ $x > 24$ λαμβάνοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν (i) ἔχομεν ὡς τελικὸν ἐξαγόμενον $8 < x < 12$ καὶ $x > 24$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $4(x-1) < \sqrt{(x+5)(3x+4)}$.

Λύσις. Πρέπει : (i) $(x+5)(3x+4) \geq 0$.

Τὸ δεῦτερον μέλος εἶναι θετικὸν (ἢ μηδέν), συνεπῶς, ἐὰν τὸ πρῶτον μέλος εἶναι ἀρνητικόν, ἡ ἀνισότης ἀληθεύει προφανῶς. Ὡστε, μία περίπτωσις καθ' ἣν ἀληθεύει ἡ ἀνισότης εἶναι ὅταν ἰσχύουν συγχρόνως αἱ :

$$\{(x+5)(3x+4) \geq 0, \quad x-1 < 0\}.$$

Ἡ κοινὴ λύσις τούτων εἶναι : $x \leq -5$.

Ὡστε διὰ $x \leq -5$ ἡ δοθεῖσα ἀνισότης ἀληθεύει, **καθισταμένον τοῦ πρῶτου μέλους της ἀρνητικοῦ καὶ τοῦ δευτέρου θετικοῦ ἢ μηδέν.**

Ἐὰν πάλιν, τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸν ἢ μηδέν δηλ. ἂν ἔχωμεν τὸν περιορισμὸν (iii) : $x \geq 1$ τότε ἡ ἀνισότης ἰσοδυναμεῖ πρὸς τήν :

$$16(x-1)^2 < (x+5)(3x+4) \quad \eta \text{τις δίδει} \quad 13x^2-51x-4 < 0$$

ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν : $\frac{1}{18} < x < 4$. Λαμβάνοντες ὅμως ὑπ' ὄψιν τὸν περιορισμὸν

(iii) εὐρίσκομεν τελικῶς ὅτι $1 \leq x < 4$.

Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x ἡ ἀνισότης ἀληθεύει **καθισταμένων θετικῶν (ἢ μὴ ἀρνητικῶν) καὶ τῶν δύο μελῶν της.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

188) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

$$\alpha) \sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1} < 1, \quad \beta) \sqrt{2x-3} + \sqrt{3x-2} > \sqrt{x+10}.$$

189) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

$$\alpha) \sqrt{2x+1} > \sqrt{x^2-3x+2}, \quad \beta) 2(2x+1) + 3\sqrt{-x^2-x+6} > 0.$$

190) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες

$$\alpha) \sqrt{2x+1} < \frac{2(x+1)}{2-x}, \quad \beta) x-\alpha > \sqrt{x-\beta} \quad \alpha \neq \beta.$$

191) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ σχέσησις :

$$\sqrt{1+\lambda^2} \geq 1 + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8}$$

ἀληθεύει διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ λ .

192) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης

$$4x-7 > 4 \frac{|x|}{x} \sqrt{x+2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΙΙ

Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς δευτεροβαθμίους.

29. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις. α') Ὀνομάζεται διτετράγωνος ἐξίσωσις, πᾶσα ἐξίσωσις 4ου βαθμοῦ ἥτις μετὰ τὰς ἀναγωγάς, περιέχει μόνον ἀρτίας δυνάμεις τοῦ x . Συνεπῶς, ἡ μορφή τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι ἡ κάτωθι :

$$(1) \quad ax^4 + bx^2 + \gamma = 0 \quad (a \neq 0).$$

Ἐὰν τὴν παράστασιν x^2 παραστήσωμεν διὰ τοῦ y , θέσωμεν δηλαδὴ $x^2 = y$ τότε, ἐπειδὴ ἡ (1) γράφεται $a(x^2)^2 + bx^2 + \gamma = 0$, λαμβάνει τὴν νέαν μορφήν

$$(2) \quad ay^2 + by + \gamma = 0.$$

Ἡ (2) καλεῖται ἐπιλύουσα τῆς (1). Ἐκ τῆς (2) εὐρίσκομεν τὸν (βοηθητικὸν) ἄγνωστον y καὶ ἐκ τῆς $x^2 = y$ εὐρίσκομεν ἀκολουθῶς τὸν x . Ἐπειδὴ ὅμως ἡ (2) ἔχει ἐν γένει δύο λύσεις, y_1 καὶ y_2 , ἔπεται ὅτι καὶ ὁ x^2 ἔχει δύο τιμὰς, y_1 καὶ y_2 . Ἦτοι ἡ διτετράγωνος ἀναλύεται (μετὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ y) εἰς δύο δευτεροβαθμίους.

$$(3) \quad x^2 = y_1 \quad \text{καὶ} \quad x^2 = y_2,$$

ἐξ ὧν εὐρίσκομεν τέσσαρας ἐν γένει ρίζας τῆς διτετραγώνου :

$$(4) \quad x = \pm \sqrt{y_1}, \quad x = \pm \sqrt{y_2}.$$

Βάσει τῶν (4) δυνάμεθα νὰ εἰπώμεν ὅτι :

«Αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσης».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

Λύσις. Αὕτη γράφεται $(x^2)^2 - 10(x^2) + 9 = 0$ καὶ ὅταν τεθῇ $x^2 = y$, γίνεται $y^2 - 10y + 9 = 0$. Ἡ ἐπιλύουσα, $y^2 - 10y + 9 = 0$ ἔχει ρίζας $y_1 = 1$, $y_2 = 9$. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὰς ρίζας x τῆς διτετραγώνου, λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν ὅτι : $x^2 = y$ δηλ. $x^2 = 1$ ἢ $x^2 = 9$. Ὡστε $x = \pm 1$ καὶ $x = \pm 3$ εἶναι αἱ λύσεις τῆς δοθείσης.

2ον. Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 - 3x^2 - 10 = 0$.

Λύσις. Θέτοντες εἰς τὴν δοθεῖσαν, $x^2 = y$ λαμβάνομεν τὴν ἐπιλύουσαν $y^2 - 3y - 10 = 0$ ἥτις ἔχει ρίζας $y_1 = -2$, $y_2 = 5$.

Αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου εὐρίσκονται ἐκ τῶν ἐξισώσεων $x^2 = -2$, $x^2 = 5$ ἐξ ὧν ἡ πρώτη ἔχει φανταστικὰς λύσεις $\pm i\sqrt{2}$ ἡ δὲ δευτέρα παρέχει τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς διτετραγώνου : $+\sqrt{5}$ καὶ $-\sqrt{5}$.

β') **Διερεύνησις.** Ἀπὸ ἐκάστην θετικὴν ρίζαν y τῆς ἐπιλύουσης προέρχονται δύο πραγματικαί, ἀντίθετοι, ρίζαι $\pm \sqrt{y}$ τῆς διτετραγώνου. Συνεπῶς ἡ διτετράγωνος, ἔχει τόσα ζεύγη ἀντιθέτων—πραγματικῶν ριζῶν, ὅσας θετικὰς ρίζας ἔχει ἡ ἐπιλύουσα. Κατὰ ταῦτα :

«*Η διτετραγώνος έχει τέσσαρες πραγματικὰς καὶ ἀνίσους ρίζας, ὅταν ἡ ἐπιλύουσα ἔχη δύο ρίζας θετικὰς καὶ ἀνίσους.*»

Οὕτω, ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ ἔχει δύο θετικὰς ρίζας y_1, y_2 , ἡ διτετραγώνος ἔχει ρίζας $+\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_1}, +\sqrt{y_2}, -\sqrt{y_2}$. Ἐὰν δὲ εἶναι $0 < y_1 < y_2$ τότε αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς διτετραγώνου εἶναι *κατὰ σειράν μεγέθους* αἱ:

$$-\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}.$$

Διὰ τὰ συμβαίνον αὐτὰ πρέπει καὶ ἀρκεῖ:

Ἡ διακρίνουσα, τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσης νὰ εἶναι θετικὰ.

ἔχομεν λοιπόν:

Συνθῆκαι διὰ τὴν ὑπαρξιν τεσσάρων πραγματικῶν ριζῶν $\pm\sqrt{y_1}, \pm\sqrt{y_2}$ τῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εἶναι:

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \quad y_1 + y_2 = -\frac{\beta}{\alpha} > 0, \quad y_1 y_2 = \frac{\gamma}{\alpha} > 0.$$

Ἄλλη δυνατὴ περίπτωσις εἶναι, ἡ ἐπιλύουσα νὰ ἔχη μίαν ἀρνητικὴν καὶ μίαν θετικὴν ρίζαν. Ἀπὸ τὴν ἀρνητικὴν δὲν προέρχεται καμμία πραγματικὴ ρίζα τῆς διτετραγώνου· ἀπὸ τὴν θετικὴν προέρχονται δύο ἀντίθετοι. Ἐὰν ἔχωμεν λοιπόν:

$$y_1 < 0 < y_2$$

τότε ἡ διτετραγώνος ἔχει πραγματικὰς ρίζας, μόνον τὰς $+\sqrt{y_2}$ καὶ $-\sqrt{y_2}$.

Διὰ τὰ συμβαίνον αὐτὰ, ἀρκεῖ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλύουσης νὰ εἶναι ἀρνητικόν. Διότι τότε αὕτη θὰ ἔχη μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν ρίζαν. Ἐπομένως:

Συνθῆκαι διὰ τὴν ὑπαρξιν δύο μόνων πραγματικῶν ριζῶν $\pm\sqrt{y}$ τῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εἶναι:

$$y_1 y_2 = \frac{\gamma}{\alpha} < 0.$$

Ἐὰν ἦδη ὑποτεθῇ ὅτι ἡ ἐπιλύουσα ἔχει καὶ τὰς δύο ρίζας τῆς ἀρνητικᾶς: $y_1 < y_2 < 0$, τότε ἡ διτετραγώνος δὲν ἔχει ρίζας πραγματικὰς ἀλλὰ μόνον φανταστικὰς. Αἱ ρίζαι y_1, y_2 θὰ εἶναι ἀρνητικαὶ ὅταν

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0, \quad \frac{\gamma}{\alpha} > 0, \quad -\frac{\beta}{\alpha} < 0.$$

Ἐπίσης, ἂν ἡ ἐπιλύουσα ἔχη φανταστικὰς ρίζας τότε καὶ ἡ διτετραγώνος ἔχη ἐπίσης. Ἐκ τούτων ἔπεται ὅτι:

Συνθῆκαι διὰ τὴν μὴ ὑπαρξιν πραγματικῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εἶναι:

$$\begin{aligned} \eta & \quad \Delta > 0, \quad \gamma/\alpha > 0, \quad -\beta/\alpha < 0 \\ \eta & \quad \muόνον \quad \Delta < 0. \end{aligned}$$

Εἰδικώτεραι περιπτώσεις. Ἐὰν ἡ ἐπιλύουσα ἔχει διπλὴν θετικὴν ρίζαν, τότε ἡ διτετραγώνος ἔχει δύο μόνων ρίζας, ἀντιθέτους (διπλᾶς). Πρὸς τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ: $\Delta = 0, -\beta/\alpha > 0$.

Ἐάν ἡ ἐπιλύουσα ἔχῃ διπλὴν ἀρνητικὴν ρίζαν, τότε ἡ διτετραγώνος δὲν ἔχει πραγματικὰς ρίζας. Τοῦτο συμβαίνει ὅταν : $\Delta=0$, $-\beta/\alpha < 0$.

Τέλος, ὅταν $\gamma=0$, ἡ διτετραγώνος ἔχει μίαν (διπλὴν) ρίζαν μηδενικὴν καὶ δύο ἄλλας ἀκόμη πραγματικὰς ἂν $-\beta/\alpha > 0$, οὐδεμίαν δὲ ἄλλην πραγματικὴν ἂν $-\beta/\alpha < 0$. Διότι, ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ ἐξίσωσις γράφεται : $\alpha x^4 + \beta x^2 = 0$ ἢ $x^2(\alpha x^2 + \beta) = 0$ καὶ ἀναλύεται εἰς δύο ἐξισώσεις :

$$x^2=0, \quad x^2=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Ἐκ τούτων δέ, ἡ μὲν πρώτη ἔχει διπλὴν ρίζαν $x=0$, ἡ δὲ ἄλλη δύο πραγματικὰς ρίζας ἀντιθέτους ἐφ' ὅσον $-\frac{\beta}{\alpha} > 0$ ἢ οὐδεμίαν πραγματικὴν ἂν $-\frac{\beta}{\alpha} < 0$.

Ἐάν εἶναι καὶ $\beta=0$, τότε ἡ ἐξίσωσις περιορίζεται εἰς τὴν $\alpha x^4=0$ καὶ ἔχει μίαν μόνον ρίζαν $x=0$ (τετραπλὴν).

Παράδειγμα διερευνήσεως διτετραγώνου ἐξισώσεως. «Νὰ διερευνήθῃ τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς $(\mu-1)x^4-4x^2+\mu+2=0$ κατὰ τὰς διαφορὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ μ ».

Λύσις. Ἐς εὖρωμεν πρῶτον διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ , ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις $(\mu-1)y^2-4y+\mu+2=0$ ἔχει δύο ρίζας θετικὰς, ἀνίσους. Διὰ τὰ συμβαίνει τοῦτο, πρέπει :

$$\Delta=4-(\mu-1)(\mu+2)>0, \quad y_1+y_2=\frac{4}{\mu-1}>0, \quad y_1y_2=\frac{\mu+2}{\mu-1}>0.$$

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν τριῶν τούτων ἀνισοτήτων εὐρίσκομεν ὅτι αὗται συναληθεύουν, ὅταν $1 < \mu < 2$. Ὡστε διὰ τὰς τιμὰς αὐτὰς τοῦ μ , ἡ ἐπιλύουσα ἔχει δύο θετικὰς καὶ συνεπῶς ἡ διτετραγώνος, τέσσαρας πραγματικὰς ρίζας.

Ἡ ἐπιλύουσα ἐξίσωσις $(\mu-1)y^2-4y+\mu+2=0$ ἔχει μίαν θετικὴν καὶ μίαν ἀρνητικὴν ρίζαν, ὅταν τὸ $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\mu+2}{\mu-1} < 0$, δηλ. ὅταν $-2 < \mu < 1$. Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ μ ἡ διτετραγώνος ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ δύο φανταστικὰς ρίζας.

Ἐξετάζομεν ἀκολουθῶς τι συμβαίνει ὅταν τὸ μ λάβῃ μίαν ἐκ τῶν συνοριακῶν τιμῶν : $-2, 1, 2$. Ἐάν $\mu=-2$ ἡ ἐξίσωσις καθίσταται $3x^4+4x^2=0$ καὶ ἔχει μίαν πραγματικὴν (διπλὴν) ρίζαν, $x=0$ καὶ δύο φανταστικὰς. Ἐάν $\mu=1$ ἡ ἐξίσωσις γίνεται $-4x^2+3=0$ καὶ ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας $\pm\sqrt{3}/2$. Ἐάν $\mu=2$, ἡ ἐπιλύουσα καθίσταται $y^2-4y+4=0$ καὶ ἔχει διπλὴν θετικὴν ρίζαν $y=2$, ἄρα καὶ ἡ διτετραγώνος ἔχει τότε δύο (διπλὰς) ρίζας $\pm\sqrt{2}$.

Διὰ πάσας τὰς ἄλλας τιμὰς τοῦ μ , ἡ ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ κατ' ἀνάγκην φανταστικὰς ρίζας (διότι αὕτη εἶναι ἡ μόνη ἐναπομένουσα περίπτωσις).

Τὸ ἐξαγόμενον λοιπὸν τῆς διερευνήσεως εἶναι :

$\mu < -2$, οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα (τέσσαρες φανταστικαί)

$\mu = -2$, μία ρίζα μηδενικὴ (διπλὴ) καὶ δύο φανταστικαί

$-2 < \mu < 1$, δύο πραγματικαὶ ρίζαι καὶ δύο φανταστικαί

$\mu = 1$, δύο ρίζαι : $\pm\sqrt{3}/2$.

$1 < \mu < 2$, τέσσαρες πραγματικαὶ ρίζαι

$\mu = 2$, δύο πραγματικαὶ διπλᾶι ($\pm\sqrt{2}$)

$\mu > 2$, οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα (τέσσαρες φανταστικαί).

Ἡ αὐτὴ διερευνήσις δύναται νὰ γίνη τῇ βοηθείᾳ τοῦ πίνακος:

μ	Δ	$\frac{\gamma}{\alpha}$	$-\frac{\beta}{\alpha}$	Συμπέρασμα
$-\infty$	—	+	—	οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα
-3	+	+	—	οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα
-2	+	—	—	2 πραγματικά, 2 φανταστικά
1	+	+	+	4 πραγματικά
2	—	+	+	οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα
$+\infty$	—	+	+	οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα

Τὸν πίνακα σχηματίζομεν ἀφοῦ πρῶτον εὕρομεν τὰ σημεῖα τῶν ποσοτήτων Δ , γ/α , $-\beta/\alpha$. Εὕρισκομεν δὲ ὅτι $\Delta > 0$ ὅταν $-3 < \mu < 2$, $\gamma/\alpha > 0$ ὅταν $\mu < -2$ ἢ $\mu > 1$ καὶ $-\beta/\alpha > 0$ ὅταν $\mu > 1$ καὶ βάσει τούτων καταστρώνομεν τὸν πίνακα τὸν ὁποῖον συμπληροῦμεν μελετώντες τὴν ἐξίσωσιν διὰ τὰς «συνοριακάς» τιμὰς τοῦ μ : $-3, -2, 1, 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

193) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0, \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0, \quad x^4 + 2x^2 - 15 = 0, \quad 6x^4 + 17x^2 + 12 = 0.$$

194) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) x^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha^2 - \beta^2)^2 = 0, \quad \beta) \gamma^4 x^4 + (\alpha^2 \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2)x^2 - \alpha^2 \beta^2 = 0,$$

$$\gamma) \left(\frac{x}{x-1} \right)^2 + \left(\frac{x}{x+1} \right)^2 = \mu(\mu-2).$$

195) Νὰ λυθοῦν καὶ διερευνηθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) \frac{(1+x)^2}{1+x^2} + \frac{(1-x)^2}{1-x^2} = \alpha, \quad \beta) (\mu-3)x^4 - 2(3\mu-4)x^2 + 7\mu-6 = 0.$$

$$196) \text{ Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις: } \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} = \lambda.$$

197) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$x^4 - 2(\mu-1)x^2 + 2\mu + 1 = 0.$$

198) Νὰ μορφωθῇ διτετράγωνος ἐξίσωσις ἔχουσα ρίζας $\pm\sqrt{3}$ καὶ $\pm\sqrt{2}$.

199) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ μ ἡ ἐξίσωσις: $\mu x^4 - (\mu-3)x^2 + 3\mu = 0$ ἔχει μίαν ρίζαν μικρότερην τοῦ -2 καὶ τρεῖς ρίζας μεγαλύτερας τοῦ -1 ;

200) Ὑποτιθεμένου ὅτι ἡ ἐπιλύουσα μιᾶς διτετραγώνου ἐξισώσεως ἔχει τοὺς συντελεστὰς τῆς ρητοῦς καὶ ἔχει ρίζας θετικάς ὧν τὸ γινόμενον εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ, νὰ δειχθῇ ὅτι ἐκάστη ρίζα τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως δύναται νὰ τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος δύο ἀπλῶν ριζικῶν. Ἐφαρμογὴ εἰς τὴν $2x^4 - 17x^2 + 18 = 0$.

201) Νὰ λυθοῦν αἱ ἀνισότητες:

$$\alpha) x^4 - 6x^2 + 8 > 0, \quad \beta) x^4 + 5x^2 - 3 > 0, \quad \gamma) \frac{x^4 - 2x^2 - 2}{x^4 - x^2 - 6} > \frac{1}{2}.$$

★ 30. Τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$. α') Ἡ μελέτη τούτου ἀνάγεται ἐν γένει εἰς τὴν τοῦ δευτεροβαθμίου $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ προκύπτοντος ἐκ τοῦ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x^2 = y$.

Πίξαι τοῦ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ καλοῦνται αἱ ρίζαι τῆς ἀντιστοίχου διτετραγώνου ἑξισώσεως $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$. Ἡ δὲ θέσις ἀριθμοῦ τινὸς ξ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ εὐρίσκεται ἂν εὐρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ξ^2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλυοῦσης $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$. Οὕτω π.χ. ἂν ἡ $\alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας $y_1 < y_2$, θετικὰς, τὸ διτετράγωνον τριώνυμον θὰ ἔχη τέσσαρας πραγματικὰς ρίζας

$$-\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}.$$

Ἐὰν δὲ ὁ ξ^2 εἶναι μεγαλύτερος τῶν y_1 καὶ y_2 , τότε θὰ ἔχωμεν

$$(1) \quad \xi^2 > y_2 > y_1.$$

Καὶ ἂν μὲν $\xi > 0$, λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1) :

$$\xi > \sqrt{y_2} > \sqrt{y_1} > -\sqrt{y_1} > -\sqrt{y_2}$$

ἥτοι ὁ ξ εἶναι μεγαλύτερος καὶ τῶν τεσσάρων ριζῶν τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου.

Ἐὰν δὲ $\xi < 0$ τότε λαμβάνομεν ἐκ τῆς (1) :

$$\xi < -\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$$

δηλ. ὁ ξ εἶναι τότε μικρότερος καὶ τῶν τεσσάρων ριζῶν.

Ἀναλόγως, εὐρίσκεται ἡ θέσις τοῦ ξ ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ διτετραγώνου τριωνύμου καὶ εἰς τὰς ἄλλας περιπτώσεις, εὐρισκομένης πρῶτον τῆς θέσεως τοῦ ξ^2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας y_1, y_2 τῆς ἐπιλυοῦσης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «*Νὰ εὐρεθῇ ἡ θέσις τοῦ 2 καὶ τοῦ -2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τοῦ $x^4 - 15x^2 + 3$, χωρὶς νὰ εὐρεθοῦν αἱ ρίζαι.*»

Λύσις. Θεωροῦμεν τὸ τριώνυμον $y^2 - 15y + 3$ ὅπερ ἔχει ρίζας $y_1 < y_2$, πραγματικὰς, θετικὰς καὶ ἀνίσους (ὡς διαπιστοῦμεν εὐκόλως). Τὸ δοθὲν διτετράγωνον τριωνύμου θὰ ἔχη τότε τέσσαρας πραγματικὰς ρίζας :

$$-\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$$

καὶ διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν θέσιν τοῦ 2 ὡς πρὸς τὰς τέσσαρας αὐτὰς ρίζας, ἀρκεῖ νὰ εὐρωμεν τὴν θέσιν τοῦ $2^2 = 4$ ὡς πρὸς τὰς ρίζας y_1, y_2 τοῦ $\varphi(y) = y^2 - 15y + 3$.

Ἐχομεν, $\varphi(4) = 16 - 60 + 3 < 0$, ἄρα $0 < y_1 < 4 < y_2$. Ἐξάγοντες τὰς τετραγωνικὰς ρίζας τῶν μελῶν τῶν ἀνισοτήτων τούτων εὐρίσκομεν : $\sqrt{y_1} < 2 < \sqrt{y_2}$ ἥτοι

$$-\sqrt{y_2} < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < 2 < \sqrt{y_2}.$$

Ἔτσι ἔχομεν τὴν θέσιν τοῦ 2. Οὗτος κεῖται μεταξὺ 3ης καὶ 4ης ρίζης, ὅταν αἱ ρίζαι τεθοῦν κατὰ σειρὰν μεγέθους.

Διὰ τὴν εὐρεσιν τῆς θέσεως τοῦ -2, ἀλλάζομεν τὰ σημεῖα τῶν μελῶν τῶν εὐρεθεισῶν ἀνισοτήτων : $\sqrt{y_1} < 2 < \sqrt{y_2}$ καὶ λαμβάνομεν : $-\sqrt{y_2} < -2 < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < \sqrt{y_2}$.

Ὡστε εἶναι : $-\sqrt{y_2} < -2 < -\sqrt{y_1} < \sqrt{y_1} < 2 < \sqrt{y_2}$.

β') Θεώρημα. «*Τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$, ὅπου α, β, γ πραγματικοί, ἀναλύεται πάντοτε εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων τριωνύμων ἐχόντων πραγματικοὺς συντελεστάς.*»

Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ τριώνυμον $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ ἔχη ρίζας πραγματικὰς y_1, y_2 τότε ἔχομεν τὴν ταυτότητα :

$$\alpha y^2 + \beta y + \gamma = \alpha(y - y_1)(y - y_2)$$

ἥτις δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ y μὲ x^2 παρέχει τὴν :

$$(1) \quad \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x^2 - y_1)(x^2 - y_2),$$

ἥτις ἀναλύει τὸ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ εἰς γινόμενον δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων.

Ἄς ὑποθέσωμεν, τώρα, ὅτι τὸ $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ ἔχει ρίζας φανταστικές. Τότε θέτοντες

$$\frac{\gamma}{\alpha} = q \quad \text{καὶ} \quad \frac{\beta}{\alpha} = p$$

θὰ ἔχωμεν: 1ον) $q > 0$. Διότι ἂν ἦτο $q < 0$, δηλ. $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$, τὰ α, γ θὰ ἦσαν ἑτερό-

σημα καὶ συνεπῶς τὸ $\alpha y^2 + \beta y + \gamma$ θὰ εἶχε ρίζας πραγματικές.

2ον) $p^2 - 4q < 0$. Διότι ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$, ἄρα

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 4\frac{\gamma}{\alpha} < 0, \quad \text{δηλ.} \quad p^2 - 4q < 0.$$

Ἡ τελευταία αὐτὴ ἀνισότης γράφεται $(p + 2\sqrt{q})(p - 2\sqrt{q}) < 0$ καὶ συνάγονται ἐξ αὐτῆς τὰ ἐξῆς συμπεράσματα. Ἄν $p > 0$ τότε $p + 2\sqrt{q} > 0$ ἄρα $p - 2\sqrt{q} < 0$.

Ἄν πάλιν $p < 0$ τότε προφανῶς, πάλιν, $p - 2\sqrt{q} < 0$. Ὡστε ὅπωςδήποτε θὰ ἔχωμεν: $p - 2\sqrt{q} < 0$, ἥτοι

$$2\sqrt{q} - p > 0.$$

Ἐξ ἄλλου τὸ τριώνυμον γράφεται:

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha \left(x^2 + \frac{\beta}{\alpha} x^2 + \frac{\gamma}{\alpha} \right) = \alpha(x^4 + px^2 + q).$$

Ἐπειδὴ $q > 0$, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$x^4 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - 2x^2\sqrt{q},$$

ὁπότε τὸ τριώνυμον λαμβάνει τὴν μορφήν

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha[(x^2 + \sqrt{q})^2 - (2\sqrt{q} - p)x^2],$$

καὶ ἔπειδὴ ὡς εἶδομεν ἄνωτέρω, τὸ $2\sqrt{q} - p$ εἶναι > 0 , ἡ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης ποσότης εἶναι διαφορὰ τετραγώνων καὶ ἔχομεν τελικῶς:

$$(2) \quad \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x^2 + x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q})(x^2 - x\sqrt{2\sqrt{q} - p} + \sqrt{q}).$$

Ἡ (2) ἀποδεικνύει τὸ θεώρημα.

Παρατήρησις. Ἐὰν $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, ἡ (1) γράφεται

$$\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = \alpha(x + \sqrt{y_1})(x - \sqrt{y_1})(x + \sqrt{y_2})(x - \sqrt{y_2})$$

καὶ τὸ τριώνυμον εἶναι τότε γινόμενον τεσσάρων πρωτοβαθμίων, πραγματικῶν παραγόντων. Ἐὰν $y_1 > 0$, $y_2 < 0$ τὸ $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma$ τρέπεται εἰς γινόμενον τριῶν πραγματικῶν παραγόντων ἐξ ὧν ὁ εἷς εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

202) Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ ἀριθμοῦ 2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς $x^4 - 15x^2 + 3 = 0$ χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις. Ὁμοίως τοῦ -3 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς $15x^4 - 18x^2 + 1 = 0$ καὶ τέλος τοῦ -1 ὡς πρὸς τὰς τῆς $x^4 - x^2 - 1 = 0$.

203) Ὑπὸ ποίας συνθήκας τὸ διτετράγωνον τριώνυμον $ax^4+bx^3+\gamma$ παραμένει θετικὸν δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x ;

204) Ἀναλύσατε τὸ $4x^4+36x^2+625$ εἰς γινόμενον δύο πραγματικῶν δευτεροβαθμίων τριωνύμων.

31. Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις. α') Μία ἐξίσωσις $f(x)=0$ καλεῖται *ἀντίστροφος ἐξίσωσις* ὅταν τοῦ ἀκεραίου πολωνύμου $f(x)$ ὄντος διατεταγμένου, οἱ συντελεσταὶ τῶν ὅρων τῶν ἰσάκεις ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς ἄκρους εἶναι ἴσοι ἢ ἀνὰ δύο ἀντίθετοι, ἐφ' ὅσον ἐν τῇ τελευταίᾳ περιπτώσει δὲν ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦτον, αἱ ἐπόμεναι ἐξισώσεις:

$$ax^3+bx^2+bx+a=0, \quad ax^3+bx^2-bx-a=0$$

$$ax^4+bx^3+\gamma x^2+bx+a=0, \quad ax^4+bx^3-bx-a=0$$

$$ax^5+bx^4+\gamma x^3+\gamma x^2+bx+a=0, \quad ax^5+bx^4+\gamma x^3-\gamma x^2-bx-a=0$$

εἶναι πᾶσαι ἀντίστροφοι. Αὗται δὲν μεταβάλλονται (ἀπὸ ἀπόψεως λύσεων), ἂν ὅπου x γράψωμεν ἐν αὐταῖς $\frac{1}{x}$ καὶ ἀπαλείψωμεν τοὺς παρονομαστίδας.

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ ἐπίλυσις τῶν ἀντιστρόφων ἐξισώσεων τρίτου, τετάρτου καὶ πέμπτου βαθμοῦ ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

β') Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις *τρίτου βαθμοῦ*: $ax^3+bx^2+bx+a=0$ γράφεται:

$$a(x^3+1)+bx(x+1)=0 \quad \eta \quad a(x+1)(x^2-x+1)+bx(x+1)=0 \quad \eta$$

$$(x+1)[ax^2+(\beta-a)x+a]=0.$$

Αἱ ρίζαι τῆς λοιπὸν εἶναι, ἡ $x=-1$ καὶ αἱ δύο ρίζαι τῆς $ax^2+(\beta-a)x+a=0$ (αἵτινες εἶναι ἀντίστροφοι ἀλλήλων).

Κατ' ἀνάλογον τρόπον λύεται καὶ ἡ ἀντίστροφος:

$$ax^3+bx^2-bx-a=0$$

γραφομένη:

$$(x-1)[ax^2+(a+\beta)x+a]=0.$$

γ') Διὰ νὰ λύσωμεν τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν τετάρτου βαθμοῦ:

$$(1) \quad ax^4+bx^3+\gamma x^2+bx+a=0$$

διαιροῦμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη αὐτῆς διὰ x^2 , ὅποτε αὕτη λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$(2) \quad a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0.$$

Λαμβάνομεν νέον ἄγνωστον, τὸν $x+\frac{1}{x}$, θέτομεν δηλαδή:

$$\boxed{x+\frac{1}{x}=y}$$

ὅποτε θὰ ἔχωμεν δι' ὑπόθεσιν εἰς τὸ τετράγωνον:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2 \quad \eta \quad x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης, ἡ (2) λαμβάνει τὴν μορφήν:

Εἰδικαὶ περιπτώσεις εἶναι, ὅταν ἡ μία ρίζα τῆς ἐπιλύσεως εἶναι τὸ $+2$ ἢ τὸ -2 καθὼς καὶ ὅταν ἡ ἐπιλύουσα ἔχῃ διπλὴν ρίζαν. Εἰς τὰς περιπτώσεις αὐτὰς εὐρίσκομεν τὰς ρίζας τῆς ἐπιλύσεως καὶ ἐκ τῆς (4) ὑπολογίζομεν ἀπ' εὐθείας τὰς ρίζας τῆς ἀντιστρόφου καὶ οὕτω προσδιορίζομεν τὸ εἶδος τῶν ριζῶν.

Ἐν συμπεράσματι, τὸ εἶδος τῶν ριζῶν τῆς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως (1) (ἢ ἄλλως, τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν αὐτῆς) ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν ἀριθμῶν -2 καὶ 2 , ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλύσεως.

Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως ἐξαρτῶνται ἀπὸ μίαν παράμετρον λ , τότε δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς θέσεις τῶν ἀριθμῶν -2 καὶ 2 ὡς πρὸς τὰς ρίζας τῆς ἐπιλύσεως, κατὰ τὰς διαφοροὺς τιμὰς τῆς παραμέτρου λ (ὅπως εἰς τὸ παράδειγμα 4ον τῆς § 22) καὶ νὰ συνάγωμεν τὸ ἐκάστοτε πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἀντιστρόφου ἐξισώσεως κατὰ τὰς διαφοροὺς τιμὰς τῆς παραμέτρου ταύτης.

Δυνάμεθα ἐπίσης, ἀντὶ νὰ καταρτίσωμεν πίνακα (ὅπως εἰς τὸ 4ον, § 22) νὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἐξῆς. Εὐρίσκομεν πρῶτον διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις ἔχει δύο πραγματικὰς καὶ δύο φανταστικὰς ρίζας. Κατόπιν διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει πραγματικὰς ρίζας. Εἰς τὰ ἐναπομένοντα διαστήματα ἡ ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ τέσσαρας πραγματικὰς ρίζας.

ε') Ἡ ἀντίστροφος ἐξίσωσις: $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0$, γραφομένη:

$$\eta \quad a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = 0 \quad \eta \quad (x^2 - 1)[a(x^2 + 1) + bx] = 0$$

σχιζέται εἰς δύο ἐξισώσεις:

$$x^2 - 1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad ax^2 + bx + a = 0$$

καὶ ἔχει ὡς ρίζας, τὰς ρίζας τῶν δύο τούτων.

στ') Ἡ πεμπτοβάθμιος ἀντίστροφος ἐξίσωσις

$$ax^5 + bx^4 + \gamma x^3 + \gamma x^2 + bx + a = 0$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἀληθεύει διὰ $x = -1$, δηλ. τὸ πρῶτον μέλος τῆς μηδενίζεται διὰ $x = -1$. Συνεπῶς, τοῦτο διαιρεῖται διὰ $x + 1$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν διὰ $x + 1$ ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$ax^4 + (\beta - a)x^3 + (a - \beta + \gamma)x^2 + (\beta - a)x + a = 0$$

ἥτις εἶναι ἀντίστροφος τετάρτου βαθμοῦ καὶ ἐπιλύεται κατὰ τὰ γνωστά.

Ὅμοιως ἐπιλύομεν τὴν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν πέμπτου βαθμοῦ, $ax^5 + bx^4 + \gamma x^3 - \gamma x^2 - bx - a = 0$, παρατηροῦντες ὅτι ἔχει ὡς ρίζαν τὸ $+1$ καὶ ὅτι συνεπῶς τὸ πρῶτον μέλος τῆς διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $x - 1$.

ζ') *Γενικαὶ παρατηρήσεις*. Εἰς τὰς ἀντιστροφὰς ἐξισώσεις, πᾶσα ρίζα $\neq \pm 1$ συνοδεύεται ἀπὸ τὴν ἀντιστροφὴν τῆς. Διότι εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἂν ὁ ἀριθμὸς q ἐπαληθεύῃ τὴν ἀντίστροφον, τότε καὶ ὁ ἀριθμὸς $\frac{1}{q}$ ἐπίσης τὴν ἐπαληθεύει.

Ἡ ἐκτοβάθμιος ἀντίστροφος, $ax^6 + bx^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \gamma x^2 + bx + a = 0$ γράφεται κατὰ πιν διαίρεσιν διὰ x^3 , $a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \beta\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \gamma\left(x + \frac{1}{x}\right) + \delta = 0$ καὶ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x + \frac{1}{x} = y$ ἀνάγεται εἰς τριτοβάθμιον (λεγομένην «ἐπιλύουσαν»), ἡ ὁποία

ὅμως δὲν εἶναι γένει ἀντίστροφος. Ἡ ἀντικατάστασις $x + \frac{1}{x} = y$ ὑποβιβάζει ἐν γένει τὸν βαθμὸν μιᾶς ἀντιστροφῆς ἀρτίου βαθμοῦ, εἰς τὸ ἥμισυ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

205) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0, \quad \beta) (1+x)^4 = 2(1+x^4).$$

206) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $18x^4 + 51x^3 - 334x^2 + 51x + 18 = 0$.

207) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad \beta) \frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1} = x + \frac{1}{x}.$$

208) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 - \beta x + \alpha = 0$.

209) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta kx + \alpha k^2 = 0$.

210) Νὰ διερευνηθῇ κατὰ τὰς διαφόρους (πραγματικές) τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις: $x^4 + 2\lambda x^3 - 3(\lambda + 2)x^2 + 2\lambda + 1 = 0$.

211) Νὰ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις:

$$(3\lambda - 2)x^4 - 2\lambda x^3 + 3(2\lambda - 1)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda - 2 = 0.$$

212) Νὰ λυθῇ καὶ διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha|x^3| + \beta x^2 + \beta|x| + \alpha = 0, (\alpha \neq 0)$.

213) Ὑπὸ ποίας συνθήκας μεταξὺ τῶν α, β, γ , ἡ ἐπιλύουσα τῆς ἀντιστροφῆς ἐξισώσεως $x^6 + \alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 1 = 0$ εἶναι πάλιν ἀντίστροφος ἐξίσωσις;

214) Ἐὰν ἀκέρ. πολυώνυμον $f(x)$ ν βαθμοῦ πληροῖ τὴν σχέσιν $f(x) \equiv x^v f\left(\frac{1}{x}\right)$, ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ εἶναι ἀντίστροφος. Ἐὰν ν ἄρτιος καὶ πληροῦται ἡ ταυτότης $f(x) \equiv -x^v f\left(\frac{1}{x}\right)$, τότε τὸ $f(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $x^2 - 1$, τὸ δὲ πηλίκον $f(x)/(x^2 - 1) = f_1(x)$ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ νὰ εἶναι ἀντίστροφος.

32. Διωνύμοι καὶ τριωνύμοι ἐξισώσεις. α') Διωνύμος ἐξίσωσις

καλεῖται ἀκεραία ἐξίσωσις μὲ δύο ὅρους, δηλ. τῆς μορφῆς: $Ax^m + Bx^n = 0$. Ἐστὼ $m > n > 0$, ἡ ἐξίσωσις τότε γράφεται: $x^n (Ax^{m-n} + B) = 0$. Ἐπομένως ἡ ἐξίσωσις ἔχει ὡς ρίζας τὸ μηδὲν καὶ τὰς ρίζας τῆς $Ax^{m-n} + B = 0$. Ἐὰν δὲ καλέσωμεν ν τὸ $m - n$ καὶ α, τὸ $-B/A$, ἡ διωνύμος ἐξίσωσις ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν

(1)

$$x^v = a.$$

Ἐπομένως ὁ x εἶναι (κάθε) νιοστὴ ρίζα τοῦ α.

Ἐὰν ὁ α εἶναι πραγματικός, τότε καθ' ὃ γνωρίζομεν περὶ ριζῶν:

1) Ἐὰν ν ἄρτιος ἡ ἐξίσωσις $x^v = a$ ἔχει δύο πραγματικὰς ρίζας ὅταν $a > 0$ καὶ οὐδεμίαν πραγματικὴν ρίζαν ὅταν $a < 0$.

2) Ἐὰν ν, περιττός, ἡ ἐξίσωσις $x^v = a$ ἔχει πάντοτε μίαν καὶ μόνην πραγματικὴν ρίζαν.

Δὲν ἐξετάζομεν ἐνταῦθα εἰμὴ μόνον τὰς πραγματικὰς ρίζας τῆς διωνύμου ἐξισώσεως. Ἐν τούτοις ἀναφέρομεν ἀπλῶς, ὅτι τὸ ὅλικόν πληθὸς τῶν ριζῶν τῆς (1), πραγματικῶν καὶ φανταστικῶν, εἶναι ν. Αἱ φανταστικαὶ ρίζαι τῆς (1) εὐρίσκονται διὰ τοῦ τύπου τοῦ de Moivre (ἰδὲ ΚΕΦΑΛ. ΙΧ). Ἐν τούτοις διὰ μικρὰς τιμὰς τοῦ ν δυνάμεθα καὶ

χωρίς τὸν τύπον τοῦ de Moivre νὰ εὕρωμεν καὶ τὰς φανταστικὰς ρίζας τῆς (1). Οὕτω π.χ. ἡ $x^5=5$ γράφεται :

$$x^5 - (\sqrt[5]{5})^5 = 0, \quad (x - \sqrt[5]{5})(x^4 + \sqrt[5]{5}x^3 + \sqrt[5]{25}x^2 + \sqrt[5]{125}x + \sqrt[5]{625}) = 0$$

ἔχει δὲ ρίζας: $x = \sqrt[5]{5}$ καὶ τὰς δύο μιγαδικὰς ρίζας τῆς δευτεροβαθμίου ἐξίσωσης

$$x^2 + \sqrt[5]{5}x + \sqrt[5]{25} = 0.$$

Ἐπίσης ἡ $x^4 = -10$ γράφεται $\frac{x^4}{10} + 1 = 0$ ἢ $\left(\frac{x}{\sqrt[4]{10}}\right)^4 + 1 = 0$ καὶ ἂν τεθῇ

$$\frac{x}{\sqrt[4]{10}} = y, \quad \text{γίνεται} \quad y^4 + 1 = 0 \quad \text{ἢ} \quad y^4 + 2y^2 + 1 - 2y^2 = 0 \quad \text{ἢ} \quad (y^2 + 1)^2 - 2y^2 = 0 \quad \text{ἢ}$$

$(y^2 + y\sqrt{2} + 1)(y^2 - y\sqrt{2} + 1) = 0$. Ἡ τελευταία αὕτη ἐξίσωσις ἔχει ρίζας τὰ τέσσαρας φανταστικὰς ρίζας τῶν δύο δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων $y^2 + y\sqrt{2} + 1 = 0$, $y^2 - y\sqrt{2} + 1 = 0$.

β') Τριώνυμος ἐξίσωσις λέγεται, ἀκεραία ἐξίσωσις τῆς μορφῆς: $ax^m + \beta x^k + \gamma x^n = 0$. Ἡ τριώνυμος ἀνάγεται εἰς διωνύμους ὅταν $q - m = s - q$. Διότι ἂν καλέσωμεν k τὴν διαφορὰν $q - m$ καὶ $s - q$, θὰ εἶναι $q = m + k$, $s = m + 2k$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γράφεται :

$$ax^m + \beta x^{m+k} + \gamma x^{m+2k} = 0$$

$$\text{ἢ} \quad x^m (\alpha + \beta x^k + \gamma x^{2k}) = 0.$$

Ὅθεν, ἔχει ὡς ρίζας, τὴν $x=0$ καὶ τὰς ρίζας τῆς ἐξισώσεως $\gamma x^{2k} + \beta x^k + \alpha = 0$ ἥτις, ἂν τεθῇ $x^k = y$ λαμβάνει τὴν μορφήν δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως :

$$(2) \quad \gamma y^2 + \beta y + \alpha = 0.$$

Ἐκ τῆς (2) εὐρίσκομεν τὸ y καὶ ἐκ τῆς διωνύμου $x^k = y$ εὐρίσκομεν τὸ x .

33. Ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου. Πολλὰ ἐξισώσεις, βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ δευτέρου δύνανται ν' ἀναχθοῦν εἰς δευτεροβαθμίους τῇ βοηθείᾳ καταλλήλου ἀντικαταστάσεως, ὅπως π.χ. ἡ διτετράγωνος διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $x^2 = y$, ἡ ἀντίστροφος τετάρτου βαθμοῦ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ $x + \frac{1}{x}$ μετὰ y , ἡ τριώνυμος $\alpha x^{2k} + \beta x^k + \gamma = 0$ διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως τοῦ x^k μετὰ y . Ὁ y λέγεται «νέος ἀγνώστος» ἢ «βοηθητικὸς ἀγνώστος».

Ἡ ἀντικατάστασις αὕτη λέγεται ἀλλαγὴ τοῦ ἀγνώστου. Δι' αὐτῆς, ἐπιτυγχάνεται ἕνας μετασχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως, εἰς ἄλλην ἣτις δυνατόν νὰ εἶναι εὐκολωτέρα τῆς ἀρχικῆς. Τὴν ἔννοιαν τῆς ἀντικαταστάσεως καὶ τὸν τρόπον δι' οὗ ἐκτελεῖται αὕτη θὰ δώσωμεν ἐνταῦθα διὰ παραδειγμάτων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$(x^2 - x + 1)^4 - 6x^2(x^2 - x + 1)^3 + 5x^4 = 0.$$

Λύσις. Διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ x^4 ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^4 - 6\left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^2 + 5 = 0$$

και δια τῆς ἀντικατάστασεως

$$(1) \quad \frac{x^2-x+1}{x} = y$$

μετασχηματίζεται εἰς διτετραγώνων

$$y^4 - 6y^2 + 5 = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς προσδιορίζομεν τὰς τιμὰς τοῦ (βοηθητικοῦ) ἀγνώστου y . Εὐρίσκουμεν δὲ διὰ τὸ y τέσσαρας τιμὰς :

$$(2) \quad y_1 = 1, y_2 = -1, y_3 = \sqrt{5}, y_4 = -\sqrt{5}.$$

Ἐπειδὴ, y ἐκαλέσαμεν τὴν παράστασιν $(x^2-x+1)/x$ ἔπεται ὅτι :

$$(2) \quad \frac{x^2-x+1}{x} = 1 \quad \eta \quad \frac{x^2-x+1}{x} = -1 \quad \eta \quad \frac{x^2-x+1}{x} = \sqrt{5} \quad \eta \quad \frac{x^2-x+1}{x} = -\sqrt{5}$$

καὶ συνεπῶς ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις ἔχει ὡς λύσεις (ρίζας), τὰς λύσεις τῶν τεσσάρων τούτων δευτεροβαθμίων ἐξισώσεων (2).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\sqrt{x^2+x+37} = \frac{7}{25} \{x^2+(x+1)^2\}.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται ὡς ἀκολούθως :

$$(3) \quad \sqrt{(x^2+x)+37} = \frac{7}{25} \{2(x^2+x)+1\}.$$

Δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ὡς νέον ἀγνώστου τὴν ποσότητα x^2+x ἐκ τῆς ὁποίας ἐξαρθῶνται καὶ τὰ δύο μέλη.

Πρακτικώτερον ὅμως εἶναι νὰ τεθῇ :

$$(1) \quad x^2+x+37=y \quad \text{ἐξ ἧς: } x^2+x=y-37.$$

Τότε ἡ ἐξίσωσις (3) λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$(4) \quad \sqrt{y} = \frac{7}{25} \{2(y-37)+1\}.$$

Ἐκτελοῦμεν, τώρα, καὶ νέαν ἀντικατάστασιν, θέτοντες $\sqrt{y} = \omega$, ($\omega > 0$) ὁπότε $y = \omega^2$ καὶ ἡ (4) μετασχηματίζεται εἰς τὴν

$$(5) \quad \omega = \frac{7}{25} (2\omega^2 - 73).$$

Ἡ (5) γράφεται : $14\omega^2 - 25\omega - 511 = 0$ καὶ ἔχει δύο λύσεις : $\omega_1 = 7$ καὶ $\omega_2 = -74/14$, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ἀρνητικὴ ἀπορρίπτεται, διότι ω ἐκαλέσαμεν τὴν θετικὴν ποσότητα $\sqrt{y}$.

Ἐκ τῆς $\omega_1 = 7$ ἔπεται $\sqrt{y} = 7$ καὶ $y = 49$. Συνεπῶς ἡ (1) γίνεται τώρα : $x^2+x+37=49$ καὶ ἐξ αὐτῆς : $x_1 = 3$ καὶ $x_2 = -4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

Σ. Γ. Κανέλλου : «Μαθήματα Ἀλγέβρας Β' τόμος

Ψηφιοποιήθηκε ἀπὸ τὸ Ἰνστιτούτο Ἐκπαιδευτικῆς Πολιτικῆς

$$(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta)=k.$$

Λύσεις. Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται καί :

$$(6) \quad \{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} \cdot \{x^2 + (\gamma + \delta)x + \gamma\delta\} = k.$$

Εἰς ἀμφοτέρως τὰς ἀγκύλας παρουσιάζεται ἡ ποσότης $x^2 + (\alpha + \beta)x$, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς νέον ἄγνωστον. Δηλαδή θέτομεν :

$$(7) \quad x^2 + (\alpha + \beta)x = y$$

ὁπότε ἡ (6) καθίσταται :

$$(y + \alpha\beta)(y + \gamma\delta) = k$$

δηλ. δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς y . Λύομεν τὴν τελευταίαν ταύτην ὡς πρὸς y καὶ φέρομεν ἀκόλουθως τὰς τιμὰς τοῦ y εἰς τὴν (7) καὶ ἐξ αὐτῆς προσδιορίζομεν τὰς ρίζας τῆς ἀρχικῆς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

215) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\alpha) \quad x^4 + 5x^2 - 24 = 0, \quad \gamma) \quad (x^2 - 7x + 8)^2 + 10(x^2 - 7x + 3) + 26 = 0,$$

$$\beta) \quad x^4 - 15x^2 - 16 = 0, \quad \delta) \quad (2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0.$$

216) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$\alpha) \quad x^2 - x - 18 + \frac{72}{x^2 - x} = 0, \quad \beta) \quad \frac{1}{(x - \alpha)^2} + \frac{1}{(x - \beta)^2} = \lambda \quad (\alpha \neq \beta).$$

217) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{(x - \alpha)^4 + (x - \beta)^4}{(x - \alpha)^2 + (x - \beta)^2} = \frac{41}{20} (\alpha - \beta)^2 \quad (\alpha \neq \beta).$$

218) Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\frac{(\alpha - x)^8}{\beta - x} + \frac{(\beta - x)^8}{\alpha - x} = \frac{\alpha^8}{\beta} + \frac{\beta^8}{\alpha}$, ὅπου $\alpha\beta \neq 0$, $\alpha \neq \beta$. Πόσας πραγματικὰς λύσεις ἔχει ἡ ἐξίσωσις, ὅταν $\alpha\beta > 0$, καὶ πόσας, ὅταν $\alpha\beta < 0$;

$$219) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad 2x^2 - 3\sqrt{2x^2 - 7x + 7} = 7x - 3$$

$$220) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4.$$

$$221) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad 2x^2 - 15x + 5 + \sqrt{2x^2 - 15x + 11} = 0.$$

$$222) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad \sqrt[3]{(\alpha + x)^2} + 4\sqrt[3]{(\alpha - x)^2} = 5\sqrt[3]{(\alpha^2 - x^2)}.$$

$$223) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad x^5 + \frac{x^4}{2} - \frac{3x^3}{4} - \frac{3x^2}{8} + \frac{x}{16} + \frac{1}{32} = 0.$$

$$224) \quad \text{Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις} \quad (x - 5)(x - 7)(x + 6)(x + 4) = 504.$$

225) Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις :

$$\alpha y - \beta x = y\sqrt{(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2}$$

ἐκτὸς τῆς προφανοῦς λύσεως $x = \alpha$, $y = \beta$ δὲν ἔχει πραγματικὰς λύσεις (ὡς πρὸς x καὶ y) παρὰ μόνον ὅταν $\gamma^2 \leq \alpha^2 + \beta^2$ (α, β, γ πραγματικοί).

(Ὑπόδειξις. Νά τεθῇ $x - \alpha = \omega$, $y - \beta = \phi$ καὶ νά ἐξετασθῇ ἡ ὡς πρὸς ω καὶ ϕ προκύπτουσα νέα ἐξίσωσις).

226) Ἐάν α, β, x, y σύμμετροι, ὑφίσταται δὲ ἡ σχέσις $(\alpha y - \beta x)^2 + 4(x - \alpha)(y - \beta) = 0$, νά δειχθῇ ὅτι ἡ θά εἶναι $\{x = \alpha \text{ καὶ } y = \beta\}$ ἢ ὁ ἀριθμὸς $1 - \alpha\beta$ θά εἶναι τετράγωνον συμμέτρου.

227) α') Νά δειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $\alpha\omega^2 + 2\beta\omega\phi + \gamma\phi^2$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς πρὸς ω καὶ ϕ παραγόντων (ἐχόντων συντελεστὰς ἢ πραγματικούς ἢ μιγ/κούς). β') Ἐάν τὸ σύστημα $\{\alpha\omega + \beta\omega + \delta = 0, \beta\omega + \gamma\omega + \epsilon = 0, \delta\omega + \epsilon\omega + \zeta = 0\}$ δέχεται λύσιν, ἔστω τὴν $u=l, v=m$, τότε τὸ $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρὸς x καὶ y πολυωνύμων.

(Ὑπόδειξις. Θεάσαστε εἰς τὸ πολυώνυμον: $x=l+\omega, y=m+\phi$ καὶ θεωρήσατε τὸ νέον ὡς πρὸς ω καὶ ϕ προκύπτει πολυώνυμον).

$$228) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἀνισότης } \frac{x^3-1}{x^2} + \frac{3\sqrt{2}}{2} < 0, \text{ χρησιμοποιουμένης τῆς ἀντικαταστά-}$$

σεως $x=\lambda y$, ὅπου τὸ λ κατάλληλος ἀριθμός.

$$229) \text{ Ἐάν } \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \text{ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως:}$$

$$(1) \quad (x+2)(x+3)(x+6)(x-1) + x^2 + 5x - 6 = 0$$

λύσατε τὴν ἐξίσωσιν $(x+\rho_1)(x+\rho_2) + (x+\rho_3)(x+\rho_4) = 10$, ὅπου ρ_1 καὶ ρ_2 αἱ πραγματικαὶ ρίζαι τῆς (1).

230) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^3 + 3\beta x^2 + 3\gamma x + \delta = 0$ εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν $p(y-q)^3 = q(y-p)^3$, ὅπου $y = \alpha x + \beta$ καὶ p καὶ q αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως

$$(\alpha\gamma - \beta^2)\lambda^2 + (\alpha^2\delta - 3\alpha\beta\gamma + 2\beta^3)\lambda - (\alpha\gamma - \beta^2)^2 = 0$$

ὅποτεθέμεναι ἄνισοι. Λύσατε τὴν ἐξίσωσιν $x^3 - 15x^2 + 57x - 5 = 0$.

$$231) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } x(2x+1)(x-2)(2x-3) = 63.$$

$$232) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: } \sqrt{x^2+x} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-x}} = \frac{5}{2}.$$

$$233) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: } \sqrt{3x^2-4x+34} + \sqrt{3x^2-4x-11} = 9.$$

$$234) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις: } \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \frac{15}{8} \sqrt{\frac{x}{15}}.$$

$$235) \text{ Νά λυθῇ (διὰ καταλλήλου βοηθητικοῦ ἀγνώστου) ἡ ἐξίσωσις:}$$

$$6x^2 - (x+1)(x+4) = x^2(x-1)^2.$$

$$236) \text{ Νά εὔρεθοῦν αἱ θετικαὶ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως } \sqrt{x^{\mu} + v} = \frac{1}{2\alpha} (\sqrt{\mu} x + \sqrt{v}),$$

ὅπου μ, v φυσικοὶ ἀριθμοί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

Συστήματα εξισώσεων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου.

34. Ἡ μία μόνον εξίσωσις τοῦ συστήματος εἶναι δευτεροβάθμιος. α') Ἐὰν τὸ σύστημα σύγκειται ἀπὸ μίαν δευτεροβάθμιον καὶ μίαν πρωτοβάθμιον εξίσωσιν τότε ἡ λύσις του ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν δευτεροβαθμίου εξισώσεως. Διότι, ἂν $Ax + By = \Gamma$ εἶναι ἡ πρωτοβάθμιος, λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς

$$(1) \quad y = \frac{\Gamma - Ax}{B} \quad (\delta\text{που } B \neq 0)$$

καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν δευτεροβάθμιον τὴν πρὸς τὸ y ἴσην παράστασιν. Οὕτω λαμβάνομεν δευτεροβάθμιον εξίσωσιν ὡς πρὸς x ἐκ τῆς ὁποίας εὐρίσκομεν δύο ἐν γένει τιμὰς τοῦ x καὶ κατόπιν ἐκ τῆς (1) τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ y .

Γενικώτερον, ἂν τὸ σύστημα περιέχον n ἀγνώστους, σύγκειται ἐκ $n-1$ εξισώσεων πρωτοβαθμίων καὶ μιᾶς δευτεροβαθμίου, δυνάμεθα ἐν γένει ἐκ τοῦ συστήματος τῶν $n-1$ πρωτοβαθμίων νὰ ἐκφράσωμεν τοὺς $n-1$ ἀγνώστους $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ συναρτήσει τοῦ ὑπολειπομένου ἀγνώστου, ἔστω τοῦ x , λύοντες τὸ σύστημα τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν οἱ $n-1$ πρωτοβάθμιοι εξισώσεις, ὡς πρὸς $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Ἀντικαθιστῶμεν κατόπιν εἰς τὴν δευτεροβάθμιον τοὺς $n-1$ ἀγνώστους $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ συναρτήσει τοῦ x ἕκαστον καὶ οὕτω φθάνομεν πάλιν εἰς δευτεροβάθμιον εξίσωσιν.

β') Εἰς τινὰς περιπτώσεις, καὶ αἱ δύο εξισώσεις εἶναι δευτεροβάθμιοι, ἀλλὰ συνδυάζοντες αὐτὰς καταλλήλως εὐρίσκομεν εξίσωσιν πρωτοβάθμιον. Τοῦτο ἐπιτυγχάνεται ἐφ' ὅσον εἶναι δυνατόν ν' ἀπαλείψωμεν τοὺς δευτεροβαθμίους ὅρους μεταξὺ τῶν δύο εξισώσεων.

Ἐστω π. χ. τὸ σύστημα:

$$\{2x^2 - 6y^2 + 12x - y = 9, \quad 3y^2 - x^2 - 3x + 7y = 0\}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας ἐπὶ 2 καὶ προσθῶμεν κατόπιν κατὰ μέλη, οἱ δευτεροβάθμιοι ὅροι ἐξαλείφονται. Λαμβάνομεν δὲ οὕτω τὴν: $6x + 13y = 9$, ἣτις δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ μίαν τῶν δοθεισῶν (βλέπε [1], § 138). Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὸ σύστημα

$$\{3y^2 - x^2 - 3x + 7y = 0, \quad 6x + 13y = 9\},$$

τοῦ ὁποίου ἡ μία μόνον εξίσωσις εἶναι δευτεροβάθμιος.

γ') Παρουσιάζεται ἐπίσης περίπτωσις καθ' ἣν ἡ μία ἐκ τῶν δύο δευτεροβαθμίων εξισώσεων τοῦ συστήματος ἀναλύεται εἰς δύο πρωτοβαθμίους.

Τοῦτο π. χ. συμβαίνει ὅταν ἡ μία εξίσωσις εἶναι ὁμογενὴς δευτέρου βα-

θμοῦ, δηλ. τὸ πρῶτον μέλος τῆς εἶναι πολυώνυμον ὁμογενὲς ὡς πρὸς x, y καὶ τὸ δευτέρον μέλος, μηδέν.

Ἔστω π. χ. ὅτι ἡ μία ἐξίσωσις τοῦ συστήματος εἶναι ἡ :

$$(1) \quad x^2 - 5xy + 6y^2 = 0.$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη αὐτῆς διὰ y^2 (ὑποθέτοντες $y \neq 0$) εὐρίσκομεν τὴν :

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0 \quad \text{ἥτις λυομένη ὡς πρὸς } \frac{x}{y} \text{ δίδει } \frac{x}{y} = 2, \frac{x}{y} = 3.$$

Ἄρα ἡ θεωρουμένη ἐξίσωσις (1) περιέχει δύο πρωτοβαθμίους ἐξισώσεις :

$$x = 2y, \quad x = 3y$$

καὶ τὸ σύστημα σχίζεται εἰς δύο συστήματα ἕκαστον τῶν ὁποίων σύγκειται ἐκ μιᾶς πρωτοβαθμίου καὶ μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

Ἄλλο παράδειγμα ἔστω τὸ ἐξῆς. Τὸ σύστημα σύγκειται ἐκ δύο ἐξισώσεων, $A = 0$ (ὅπου A πολυώνυμον δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τοὺς ἀγνώστους x, y) καὶ $(x+y-1)^2 + 5x + 5y - 11 = 0$.

Τότε, ἡ δευτέρα γράφεται $(x+y-1)^2 + 5(x+y) - 11 = 0$ καὶ εἶναι δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς τὸν ἀγνώστον $x+y$. Θέτοντες $x+y = z$ λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς $(z-1)^2 + 5z - 11 = 0$, ἥτις μᾶς δίδει $z_1 = 2$ καὶ $z_2 = -5$. Ὡστε θὰ εἶναι $x+y = 2$ ἢ $x+y = -5$. Τὸ ἀρχικὸν λοιπὸν σύστημα ἀναλύεται εἰς δύο συστήματα :

$$\begin{cases} A=0 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \text{καὶ} \quad \begin{cases} A=0 \\ x+y=-5 \end{cases}$$

τὰ ὁποῖα σύγκεινται ἕκαστον ἐκ μιᾶς δευτεροβαθμίου καὶ μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως.

35. Ὅμογενῇ συστήματα. α')

Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύστημα :

$$(1) \quad \begin{cases} ax^2 + \beta xy + \gamma y^2 = \delta \\ \alpha_1 x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2 = \delta_1 \end{cases}$$

τοῦ ὁποίου τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων εἶναι ὁμογενῇ δευτέρου βαθμοῦ, τὰ δὲ δευτέρα μέλη σταθεροὶ ἀριθμοὶ διάφοροι τοῦ μηδενός. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τὸν λόγον y/x τῶν δύο ἀγνώντων.

Πρὸς τοῦτο, θέτομεν $y/x = \lambda$ ὁπότε $y = \lambda x$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὸν y καὶ εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις. Εὐρίσκομεν τότε δύο νέας ἐξισώσεις, μὲ ἀγνώστους x καὶ λ :

$$\{ax^2 + \beta\lambda x^2 + \gamma\lambda^2 x^2 = \delta, \quad \alpha_1 x^2 + \beta_1 \lambda x^2 + \gamma_1 \lambda^2 x^2 = \delta_1\}.$$

Αὗται γράφονται, ἀκόμη :

$$(2) \quad \{x^2(\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2) = \delta, \quad x^2(\alpha_1 + \beta_1\lambda + \gamma_1\lambda^2) = \delta_1\}$$

Διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη λαμβάνομεν τὴν δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς λ ἐξίσωσιν :

$$\frac{\alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2}{\alpha_1 + \beta_1\lambda + \gamma_1\lambda^2} = \frac{\delta}{\delta_1}$$

ἐκ τῆς ὁποίας προσδιορίζομεν τὸ λ . Ἀκολούθως προσδιορίζομεν τὸν x ἐκ μιᾶς τῶν (2) καὶ τέλος τὸν y ἐκ τῆς $y = \lambda x$. Τὸ σύστημα (1) ἔχει ἐν γένει τέσσαρας

λύσεις. Διότι ἀπὸ ἐκάστην τιμὴν τοῦ λ προκύπτουν δύο τιμαὶ τοῦ x (ἀντίθετοι) καὶ ἀπὸ ἐκάστην τιμὴν τοῦ x , μία τοῦ y .

β') Διὰ τῆς αὐτῆς μεθόδου ἐργαζόμεθα καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν τὰ πρῶτα μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων εἶναι ὁμογενῇ τρίτου βαθμοῦ. Τότε ὅμως καταλήγουμεν εἰς τριτοβάθμιον ἐξίσωσιν ὡς πρὸς λ τὴν ὁποίαν δὲν δυνάμεθα εἰς ὅλας τὰς περιπτώσεις νὰ λύσωμεν (μὲ τὰ ἤδη ἐκτεθέντα).

γ') Ἐὰν καὶ τὰ δευτέρω μέλη τῶν ἐξισώσεων εἶναι ἐπίσης ὁμογενῇ πολυώ-
νυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, ἡ μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως $y = \lambda x$ δύναται νὰ ἐφαρ-
μοσθῇ καὶ πάλιν. Ἔστω π. χ. τὸ σύστημα: (ἔχον τὴν προφανῇ λύσιν $x=y=0$)

$$\{ax^2 + \beta xy + \gamma y^2 = Ax + By, \quad a_1x^2 + \beta_1 xy + \gamma_1 y^2 = A_1x + B_1y\}.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ λ τὸν λόγον $y:x$, τότε $y = \lambda x$ καὶ ἀντικαθι-
στῶντες εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις τὸ y μὲ λx λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\{ax^2 + \beta \lambda x^2 + \gamma \lambda^2 x^2 = Ax + B \lambda x, \quad a_1x^2 + \beta_1 \lambda x^2 + \gamma_1 \lambda^2 x^2 = A_1x + B_1 \lambda x\},$$

Αὗται γράφονται:

$$(3) \quad \{x^2(a + \beta \lambda + \gamma \lambda^2) = x(A + B \lambda), \quad x^2(a_1 + \beta_1 \lambda + \gamma_1 \lambda^2) = x(A_1 + B_1 \lambda)\}.$$

Ὑποθέτοντες τὸ $x \neq 0$ καὶ διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (3) λαμβάνομεν τὴν
τριτοβάθμιον ὡς πρὸς λ ἐξίσωσιν:

$$\frac{a + \beta \lambda + \gamma \lambda^2}{a_1 + \beta_1 \lambda + \gamma_1 \lambda^2} = \frac{A + B \lambda}{A_1 + B_1 \lambda}$$

τὴν ὁποίαν ἐνίστε δυνάμεθα νὰ ἀνάγωμεν εἰς ἄλλας ἀπλουστεράς καὶ νὰ ἐπιλύσω-
μεν. Εὐρεθέντος τοῦ λ εὐρίσκομεν ἕκ μιᾶς τῶν (3) τὸν x καὶ ἕκ τῆς $y = \lambda x$, τὸν y .

36. Συμμετρικὰ συστήματα α') Ὅταν τὰ μέλη τῶν δύο ἐξισώσεων
εἶναι συμμετρικαὶ παραστάσεις τῶν ἀγνώστων x καὶ y , τὸ σύστημα καλεῖται *συμ-
μετρικόν*. Δι' ἐναλλαγῆς τῶν x καὶ y , αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος *δὲν μεταβάλλ-
ονται* καὶ τοῦτο εἶναι τὸ γνῶρισμα τοῦ συμμετρικοῦ ὡς πρὸς x καὶ y συστήματος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν συμμετρικοῦ συστήματος ἐπιδιώκομεν κατὰ κανόνα νὰ
προσδιορίσωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀγνώστων x καὶ y ὁπότε
ἀγόμεθα εἰς τὸ ἐπόμενον σύστημα:

β') **Δύσεις τοῦ συμμετρικοῦ συστήματος:** $\{x+y=a, \quad xy=\beta\}$. Ἐκ τῆς
πρώτης ἐξισώσεως λαμβάνομεν $y=a-x$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὸν y εἰς τὴν δευ-
τέραν ἥτις γίνεται: $x(a-x)=\beta$ ἢ (1) $x^2 - ax + \beta = 0$. Ὡστε ὁ x εἶναι ρίζα
τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως:

$$(2) \quad \omega^2 - a\omega + \beta = 0.$$

Ἐὰν ρ_1 καὶ ρ_2 εἶναι αἱ ρίζαι τῆς (2) (ὁπότε $\rho_1 + \rho_2 = a$), τότε θὰ εἶναι ἢ
 $x = \rho_1$ ἢ $x = \rho_2$. Ἐὰν $x = \rho_1$, τότε $y = a - \rho_1 = (\rho_1 + \rho_2) - \rho_1 = \rho_2$. Ἐὰν $x = \rho_2$, τότε
 $y = a - \rho_2 = \rho_1$. Ὡστε τὰ x καὶ y εἶναι αἱ δύο ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου ἐξι-
σώσεως $\omega^2 - a\omega + \beta = 0$. Τὸ σύστημα ἔχει δύο λύσεις: $\{x = \rho_1, y = \rho_2\}$ καὶ
 $\{x = \rho_2, y = \rho_1\}$ ὅπου ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τῆς (2).

Οὕτω π. χ. ἐὰν $x+y=10$ καὶ $xy=-11$, τότε τὰ x καὶ y θὰ εἶναι ρίζαι
τῆς ἐξισώσεως:

$$\omega^2 - 10\omega + 11 = 0.$$

Αὕτη ἔχει ρίζας 11 καὶ -1, ἄρα ἔχομεν δύο λύσεις :

$$\{x=11, y=-1\} \text{ καὶ } \{x=-1, y=11\}.$$

37. Παραδείγματα ἐπιλύσεως συστημάτων βαθμοῦ ἀνωτέρου τοῦ πρώτου. 1ον. *Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :*

$$\left\{ \begin{array}{l} 2xy - x + 2y = 16, \\ 3xy + 2x - \frac{y}{2} = 10 \end{array} \right\}.$$

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μόνος δευτεροβάθμιος ὅρος εἶναι ὁ xy καὶ συνεπῶς, ἀπαλειφομένου τούτου μεταξὺ τῶν δύο ἐξισώσεων θὰ προκύψῃ ἐξίσωσις πρωτοβάθμιος. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἐπὶ 3 καὶ τῆς δευτέρας ἐπὶ -2 καὶ προσθέτομεν. Λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν $-7x + 7y = 28$ ἢ $-x + y = 4$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν τὴν

$$(1) \quad y = 4 + x$$

δυνάμει τῆς ὁποίας ἡ πρώτη τῶν δοθεισῶν γίνεται :

$$2x(4+x) - x + 2(4+x) = 16, \quad \text{ἥτοι} \quad 2x^2 + 9x - 8 = 0.$$

Ἐκ τῆς τελευταίας ἔχομεν τὰς τιμὰς τοῦ x :

$$x_1 = \frac{-9 + \sqrt{145}}{4}, \quad x_2 = \frac{-9 - \sqrt{145}}{4}.$$

Τῇ βοηθείᾳ τῆς (1) εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοιχοῦσας τιμὰς τοῦ y :

$$y_1 = 4 + x_1 = \frac{7 + \sqrt{145}}{4}, \quad y_2 = 4 + x_2 = \frac{7 - \sqrt{145}}{4}.$$

Ὡστε τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει δύο λύσεις :

$$\text{τὴν} \quad \left\{ x = \frac{-9 + \sqrt{145}}{4}, \quad y = \frac{7 + \sqrt{145}}{4} \right\} \quad \text{καὶ}$$

$$\text{τὴν} \quad \left\{ x = \frac{-9 - \sqrt{145}}{4}, \quad y = \frac{7 - \sqrt{145}}{4} \right\}.$$

$$2\text{ον.} \quad \text{Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :} \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23 \\ x^2 + y^2 + xy = 19. \end{array} \right.$$

Λύσις. Τὸ σύστημα εἶναι συμμετρικόν, συνεπῶς θὰ λάβωμεν ὡς νέους ἀγνώστους τοὺς $x+y=\omega$, $xy=\varphi$. Αἱ ἐξισώσεις γράφονται :

$$\{ (x+y)^2 - 2xy + 2(x+y) = 23, \quad (x+y)^2 - 2xy + xy = 19 \}$$

ἢ μετὰ τὴν ἀλλαγὴν τῶν ἀγνώστων,

$$(2) \quad \{ \omega^2 - 2\varphi + 2\omega = 23, \quad \omega^2 - \varphi = 19 \}.$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) εὐρίσκομεν τὴν πρωτοβάθμιον σχέσιν : $-\varphi + 2\omega = 4$ ἢ $\varphi = 2\omega - 4$.

$$(3) \quad \varphi = 2\omega - 4.$$

Ἡ δευτέρα τῶν (2) γίνεται δι' ἀντικατάστασιν τοῦ φ :

$$\omega^2 - 2\omega + 4 = 19 \text{ ἢ } \omega^2 - 2\omega - 15 = 0, \text{ ἄρα } \omega_1 = 5 \text{ καὶ } \omega_2 = -3.$$

Ἐκ τῆς (3) εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ φ : $\varphi_1 = 2\omega_1 - 4 = 6$ καὶ $\varphi_2 = 2\omega_2 - 4 = -10$. Ὡστε ἔχομεν τὰς λύσεις:

$$\{\omega = 5, \varphi = 6\} \text{ καὶ } \{\omega = -3, \varphi = -10\}.$$

Δηλαδή, φθάνομεν εἰς τὰ συστήματα:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases} \text{ καὶ } \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=-10. \end{cases}$$

Τὸ πρῶτον ἔχει δύο λύσεις: $(x=2, y=3)$ καὶ $(x=3, y=2)$ καὶ τὸ δευτέρον ἐπίσης δύο: $(x=-5, y=2)$ καὶ $(x=2, y=-5)$. Ὡστε τὸ ἀρχικὸν σύστημα ἔχει τέσσαρας λύσεις.

$$\text{3ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 7 \\ x^2 - y^2 + 2xy = -17. \end{cases}$$

Λύσεις. Τὸ σύστημα εἶναι ὁμογενές, συνεπῶς θὰ ζητήσωμεν τὸν λόγον y/x . Θέτομεν $y/x = \lambda$ ὁπότε $y = \lambda x$ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὸ y εἰς τὰς δύο ἐξισώσεις λαμβάνομεν:

$$(1) \quad \begin{cases} x^2 + \lambda^2 x^2 + \lambda x^2 = 7, \\ x^2 - \lambda^2 x^2 + 2\lambda x^2 = -17 \end{cases}.$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ μετὰ τὴν ἀπλοποίησιν διὰ x^2 λαμβάνομεν τὴν ὡς πρὸς λ ἐξίσωσιν: $\frac{1+\lambda^2+\lambda}{1-\lambda^2+2\lambda} = -\frac{7}{17}$ ἥτις γράφεται, $10\lambda^2 + 31\lambda + 24 = 0$ καὶ λυομένη ὡς πρὸς λ δίδει: $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{8}{5}$.

Ἡ πρώτη τῶν (1) γράφεται $x^2(1+\lambda^2+\lambda) = 7$ καὶ μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τοῦ λ διὰ τοῦ $-\frac{3}{2}$ γίνεται: $x^2\left(1+\frac{9}{4}-\frac{3}{2}\right) = 7$ ἥτοι $x^2 = 4$ καὶ $x = \pm 2$.

Ἐπειδὴ $y = \lambda_1 x$ θὰ εἶναι $y = -\frac{3}{2} \cdot (\pm 2)$. Ὡστε ἔχομεν τὰς λύσεις:

$$(x=2, y=-3) \text{ καὶ } (x=-2, y=3).$$

Χρησιμοποιοῦντες τὴν δευτέραν τιμὴν $\lambda_2 = -8/5$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1):

$$x^2\left(1+\frac{64}{25}-\frac{8}{5}\right) = 7, \text{ ἥτοι } x^2 = \frac{25}{7} \text{ καὶ } x = \pm\sqrt{\frac{25}{7}}.$$

Τὸ y εὑρίσκεται ἐκ τῆς $y = \lambda_2 x$, ἥτοι $y = -\frac{8}{5}x$. Ἐχομεν, ἔτσι, δύο ἀκόμη λύσεις:

$$\left(x = \frac{5}{\sqrt{7}}, y = -\frac{8}{\sqrt{7}}\right) \text{ καὶ } \left(x = -\frac{5}{\sqrt{7}}, y = \frac{8}{\sqrt{7}}\right).$$

$$\text{4ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \begin{cases} x^2 - y^2 + 3y = 0 \\ x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 4y = 0. \end{cases}$$

Λύσεις. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη, ἐκ τῆς δευτέρας τὴν πρώτην, προκύ-

πτεϊ ἐξίσωσις, μὴ περιέχουσα x^2 καὶ συνεπῶς πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x , ἄρα δυναμένη νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x , ρητῶς. Τὸ σύστημα δηλ. ἰσοδυναμεῖ πρὸς τό :

$$(1) \quad \{ x^2 - y^2 + 3y = 0, \quad 3xy + 3y^2 + 2x + y = 0 \}.$$

Ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (1) λυομένη ὡς πρὸς x δίδει :

$$(2) \quad x = -\frac{y(3y+1)}{3y+2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν πρώτην τῶν (1) τὸ x διὰ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὸ παραστάσεως (2) λαμβάνομεν μετὰ τὰς σχετικὰς πράξεις :

$$(3) \quad y(7y^2 + 11y + 4) = 0.$$

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν τὰς τιμὰς τοῦ y :

$$y=0, \quad y=-1, \quad y=-\frac{4}{7}$$

πρὸς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν αἱ ἐξῆς τιμαὶ τοῦ x λαμβανόμεναι ἐκ τῆς (2) :

$$x=0, \quad x=2, \quad x=-\frac{10}{7}.$$

Οὕτω, ἔχομεν τρία ζεύγη τιμῶν (τρεῖς λύσεις) :

$$(0, 0), (2, -1), \left(-\frac{10}{7}, -\frac{4}{7}\right).$$

$$\text{6ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 4xz - 2yz + 3x - 4y - 13 = 0 \\ 7x - 3y + z + 6 = 0 \\ 5x - y - z - 2 = 0. \end{cases}$$

Λύσις. Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τοῦ συστήματος εἶναι πρωτοβάθμιοι δυνάμεθα λοιπὸν νὰ λύσωμεν αὐτὰς ὡς πρὸς δύο ἐκ τῶν ἀγνώστων, π.χ. ὡς πρὸς y καὶ z . Εὐρίσκομεν οὕτω : $y=3x+1$, $z=2x-3$ (δηλ. ἐκφράζομεν τοὺς δύο ἀγνώστους, συναρτήσει τοῦ τρίτου).

Εἰσάγομεν εἰς τὴν πρώτην τῶν δοθεισῶν τὰς ἴσας πρὸς y καὶ z παραστάσεις ὁπότε αὐτὴ γίνεται :

$$2x^2 + (3x+1)^2 - 4x(2x-3) - 2(3x+1)(2x-3) + 3x - 4(3x+1) - 13 = 0$$

ἥτοι :

$$9x^2 - 23x + 10 = 0.$$

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν : $x=2$ καὶ $x=5/9$. Εἰς τὴν τιμὴν $x=2$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαί :

$$y=3 \cdot 2 + 1 = 7 \quad \text{καὶ} \quad z=2 \cdot 2 - 3 = 1$$

εἰς δὲ τὴν τιμὴν $x=5/9$ ἀντιστοιχοῦν αἱ τιμαί :

$$y = \frac{8}{3} \quad \text{καὶ} \quad z = -\frac{17}{9}.$$

Ὡστε τὸ σύστημα ἔχει δύο λύσεις, τὴν ($x=2$, $y=7$, $z=1$) καὶ τὴν ($x=5/9$, $y=8/3$, $z=-17/9$).

$$\text{6ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \begin{cases} yz - 2z + 1 = 0 \\ zx - 3x + 1 = 0 \\ 2xy - 3y + 2 = 0. \end{cases}$$

Λύσεις. Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν :

$$(1) \quad y = \frac{2z-1}{z}, \quad x = \frac{1}{3-z}$$

καὶ φέροντες τὰς τιμὰς ταύτας εἰς τὴν τρίτην λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν

$$4z^2 - 11z + 7 = 0$$

ἣτις ἔχει ρίζας 1 καὶ $7/4$.

Ἐκ τῶν (1) λαμβάνομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν y καὶ x . Εὐρίσκομεν τελικῶς δύο λύσεις :

$$\left(x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1 \right) \text{ καὶ } \left(x = \frac{4}{5}, y = \frac{10}{7}, z = \frac{7}{4} \right).$$

7ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα : $\{x+y+z=a, x^2+y^2+z^2=\beta^2, z(x+y)=xy\}$.

Λύσεις. Ἐκ τῆς πρώτης λαμβάνομεν τὸ $x+y$ συναρτήσῃ τοῦ z καὶ ἐκ τῆς δευτέρας τὸ x^2+y^2 συναρτήσῃ τοῦ z , ἄρα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν καὶ τὸ xy συναρτήσῃ τοῦ z . Ἐκ τῶν $x+y=a-z$ καὶ $x^2+y^2=\beta^2-z^2$ λαμβάνομεν :

$$xy = \frac{2z^2 - 2az + a^2 - \beta^2}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν τρίτην τὸ $x+y$ καὶ τὸ xy συναρτήσῃ τοῦ z λαμβάνομεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$z(a-z) = \frac{2z^2 - 2az + a^2 - \beta^2}{2}$$

ἥτοι :

$$4z^2 - 4az + a^2 - \beta^2 = 0$$

ἔξ αὐτῆς εὐρίσκομεν :

$$z = (a \pm \beta) / 2.$$

Διὰ $z = \frac{a+\beta}{2}$ ἔχομεν :

$$(1) \quad \left\{ x+y = \frac{a-\beta}{2} \text{ καὶ } xy = \frac{a^2-\beta^2}{4} \right\}.$$

Ὡστε τὰ x καὶ y εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως :

$$(2) \quad 4\omega^2 - 2(a-\beta)\omega + a^2 - \beta^2 = 0.$$

Διὰ $z = \frac{a-\beta}{2}$ εἶναι :

$$(3) \quad \left\{ x+y = \frac{a+\beta}{2} \text{ καὶ } xy = \frac{a^2-\beta^2}{4} \right\}.$$

Ὡστε τώρα τὰ x, y θὰ εἶναι ρίζαι τῆς :

$$(4) \quad 4t^2 - 2(a+\beta)t + a^2 - \beta^2 = 0.$$

Τὸ σύστημα ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσεις, δύο προερχομένας ἀπὸ τὸ σύστημα (1) καὶ δύο ἀπὸ τὸ (3). Αἱ τέσσαρες λύσεις εἶναι πραγματικαὶ ἂν αἱ διακρίνουσαι τῶν (2) καὶ (4) εἶναι θετικαὶ κ.τ.λ.

$$\text{8ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \begin{cases} (x^2+y^2)(x^4-y^4) = \frac{800}{9}x^2y^2 \\ (x^2+y^2)(x+y) = \frac{40}{3}xy. \end{cases}$$

Λύσεις. Τὸ πρῶτον μέλος τῆς 1ης εἶναι ὁμογενὲς βου βαθμοῦ τὸ δὲ πρῶτον μέλος τῆς δευτέρας ὁμογενὲς 4ου βαθμοῦ. Ἐὰν ὑψώσωμεν τὰ μέλη τῆς δευτέρας εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἀκολούθως διαιρέσωμεν κατὰ μέλη μετὰ τὴν πρώτην, λαμβάνομεν (ὑποθέτοντες $xy(x+y) \neq 0$) πηλίκον ὁμογενῶν πολυωνύμων:

$$\frac{(x^2+y^2)(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2(x+y)^2} = \frac{800}{9} \cdot \frac{9}{1600}$$

$$\eta \quad \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} = \frac{1}{2} \quad \eta \quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{2} \quad \text{δηλ. } x=3y.$$

Θέτοντες εἰς τὴν δευτέραν τῶν δοθεῶν ὅπου x τὸ $3y$ λαμβάνομεν:

$$(9y^2+y^2)(3y+y) = \frac{40}{3} \cdot 3y \cdot y \quad \eta \quad y^3=y^2, \quad \alpha\gamma\alpha \quad y=1 \quad \text{ὅποτε } x=3.$$

Ἐτέρα προφανὴς λύσις εἶναι ἡ $x=y=0$.

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν ἀνωτέρω ἐπίλυσιν, ἀφ' ἑνὸς μὲν ὑψώσαμεν εἰς τὸ τετράγωνον τὰ μέλη μιᾶς τῶν ἐξισώσεων καὶ ἀφ' ἑτέρου διηρέσαμεν κατὰ μέλη δύο ἐξισώσεις, τὸ τελικὸν σύστημα εἰς τὸ ὁποῖον ἐφθάσαμεν, ἐνδέχεται νὰ μὴ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἀρχικόν, δηλ. δυνατὸν νὰ εἰσῃχθησαν καὶ ξένοι λύσεις. Ὁφείλομεν λοιπὸν νὰ κάμωμεν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀρχικοῦ συστήματος μετὰ τὰς εὐρεθείσας τιμὰς καὶ νὰ ἀπορρίψωμεν τὰς μὴ ἱκανοποιούσας αὐτό. Ἐνταῦθα εὐρίσκομεν ὅτι ἀμφότερα τὰ εὐρεθέντα ζεύγη $(0, 0)$ καὶ $(3, 1)$ ἱκανοποιοῦν τὸ σύστημα.

9ον. Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{ \omega + \varphi = 1, \quad \omega x + \varphi y = 2, \quad \omega x^2 + \varphi y^2 = 5, \quad \omega x^3 + \varphi y^3 = 14 \}.$$

Λύσεις. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης μετὰ y καὶ κατόπιν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη ἀπὸ τὴν δευτέραν, λαμβάνομεν τήν: $\omega(y-x) = y-2$.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὁμοίως μετὰ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην (δηλαδὴ ἀπαλείψωμεν τὸ φ μεταξὺ τούτων) εὐρίσκομεν: $\omega x(y-x) = 2y-5$.

Ἐὰν δὲ μεταξὺ τρίτης καὶ τετάρτης ἀπαλείψωμεν πάλιν τὸ φ (ἐκτελοῦντες τὸν ἴδιον συνδυασμὸν) εὐρίσκομεν: $\omega x^2(y-x) = 5y-14$.

Οὕτω φθάνομεν εἰς σύστημα μετὰ τρεῖς ἀγνώστους:

$$\{ \omega(y-x) = y-2, \quad \omega x(y-x) = 2y-5, \quad \omega x^2(y-x) = 5y-14 \}.$$

Διαιροῦντες κατὰ μέλη 2αν καὶ 1ην καθὼς καὶ 3ην μετὰ 2αν λαμβάνομεν:

$$(1) \quad x = \frac{2y-5}{y-2}, \quad x = \frac{5y-14}{2y-5}.$$

Ἐξ αὐτῶν δὲ ἔχομεν:

$$\frac{2y-5}{y-2} = \frac{5y-14}{2y-5}, \quad \eta\tau\omicron\iota \quad y^2-4y+3=0$$

καὶ ἐξ αὐτῆς, $y=1$ καὶ $y=3$.

Διὰ $y=1$ λαμβάνομεν ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1), $x=3$ καὶ διὰ $y=3$ λαμβάνομεν $x=1$. Τὰς τιμὰς τῶν λοιπῶν ἀγνώστων εὐρίσκομεν εὐκόλως καὶ οὕτω φθάνομεν εἰς δύο τετράδας τιμῶν τῶν ἀγνώστων:

($x=3$, $y=1$, $\omega=1/2$, $\varphi=1/2$), ($x=1$, $y=3$, $\omega=1/2$, $\varphi=1/2$).

Ἀμφότεραι αἱ τετράδες ἐπαληθεύουν τὸ ἀρχικὸν σύστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

237) Νὰ εὕρεθῶν αἱ πραγματικαὶ λύσεις τῶν κάτωθι συστημάτων:

$$\begin{aligned} \text{i)} \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + 2y^2 = 34 \end{cases} & \quad \text{ii)} \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 72 \\ x - 2y^2 + 3y - 1 = 0 \end{cases} & \quad \text{iii)} \begin{cases} 5x^2 + 9y^2 = 81 \\ 5x - 3y = 9 \end{cases} \\ \text{iv)} \begin{cases} x^2 - xy + y^2 + x - y = 12 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} & \quad \text{v)} \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 + x + 3 = 0 \\ x + 6y - 4 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

238) Νὰ ὁρισθῇ ὁ k οὕτως, ὥστε τὸ σύστημα:

$$\{x^2 - 2xy + y^2 - 4x - 8y - 21 = 0, \quad 7x - y + k = 0\}$$

νὰ ἔχῃ μίαν μόνην πραγματικὴν λύσιν.

239) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\left\{ \frac{6}{x} - \frac{5}{y} = 8, \quad \frac{12}{x^2} - \frac{35}{y^2} = -32 \right\}$.

240) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 2 \\ 2x^2 + xy - y^2 = 20 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 4x^2 - 3xy = 28 \\ 3x^2 - xy - 4y^2 = 0 \end{cases} \quad \text{iii)} \begin{cases} x(x+3y) = -20 \\ y(x+3y) = 12 \end{cases}$$

241) Νὰ εὕρεθῶν ὅλαι αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{x^2 + 5xy + y^2 = 5, \quad 3x^2 + 8xy + 3y^2 = 1\}.$$

242) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19 \\ x^2 + y^2 = 29 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 21 \\ xy = 4 \end{cases}$$

243) Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} xy(x+y) = 20 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} x^2 + y^2 + 2(x+y) = 23 \\ x^2 + y^2 + xy = 19 \end{cases}$$

244) Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα: $\{x+y=\alpha, \quad x^v+y^v=\beta\}$ διὰ $v=2, 3, 4, 5$, (ὕπολογιζομένου ἐκάστοτε τοῦ γινομένου xy).

245) Νὰ εὕρεθῶν αἱ πραγματικαὶ λύσεις τῆς ἐξίσωσως:

$$\sqrt[4]{x+27} + \sqrt[4]{55-x} = 4.$$

(Ὑπόδειξις. Θέτοντες $\sqrt[4]{x+27} = \omega$ καὶ $\sqrt[4]{55-x} = \varphi$ μεταβαίνομεν εἰς σύστημα ὁς πρὸς ω καὶ φ).

246) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\{x^2 + y^2 + x + y = 4, \quad x^2 y^2 + xy(x+y) + xy = 4\}$.

247) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\{x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 10, \quad x^2 + y^2 = 17\}$.

248) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\{xy = (x-1)/6, \quad x\omega = (\omega-1)/4, \quad y\omega = -(y-1)/3\}$.

249) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{xy + 2x + y = 7, \quad y\omega + 3y + 2\omega = 12, \quad x\omega + \omega + 3x = 15\}.$$

250) Ἐὰν $x\sqrt{6} + y\sqrt{3} + z\sqrt{2} + \omega = 0$ καὶ x, y, z, ω σύμμετροι ἀριθμοί, νὰ δεიχθῇ ὅτι $x=y=z=\omega=0$.

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$251) \left\{ \frac{x^6+y^6}{x^3+y^3} = \frac{31}{7}, \quad x^2+xy+y^2=3 \right\}.$$

$$252) \{ (x^2-y^2)(x-y)=16xy, \quad (x^4-y^4)(x^2-y^2)=640x^2y^2 \}.$$

$$253) \left\{ \frac{x^8+y^8}{(x+y)^2} + \frac{x^8-y^8}{(x-y)^2} = \frac{43x}{8}, \quad 5x-7y=4 \right\}.$$

$$254) \{ xy+\alpha\beta=2\alpha x, \quad x^2y^2+\alpha^2\beta^2=2\beta^2y^2 \}. \quad (\alpha \neq 0).$$

$$255) \left\{ \begin{aligned} x^2-y\sqrt{xy} &= 126 \\ y^2-x\sqrt{xy} &= -63 \end{aligned} \right\}.$$

$$256) \left\{ x+y+\frac{y^2}{x}=14, \quad x^2+y^2+\frac{y^4}{x^2}=84 \right\}.$$

257) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, y οἱ ἱκανοποιούντες τὸ σύστημα :

$$\left\{ \begin{aligned} \sqrt{x^2+\sqrt{x^4y^2}} + \sqrt{y^2+\sqrt{y^4x^2}} &= \alpha \\ x+y+3\sqrt{\beta xy} &= \beta. \end{aligned} \right.$$

*μ. εἰς πρῶτο
μ. εἰς δεύτερο*

ὅπου α, β δοθέντες πραγματικοί, $\alpha > 0$ καὶ $\alpha \neq 2|\beta|\sqrt{2}$.

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$258) \{ y^2(4x^2-108)=x(x^3-9y^3), \quad 2x^2+9xy+y^2=108 \}.$$

$$259) \{ 6x^4+x^2y^2+4^2=2x(12x+y^3), \quad x^2+xy-y^2=4 \}.$$

$$260) \left\{ x^4+x^2y^2+y^4-\frac{\alpha x-\beta y}{x^2-y^2}=0, \quad xy(x^2+y^2)-\frac{\alpha y-\beta x}{x^2-y^2}=0 \right\}.$$

$$261) \left\{ \begin{aligned} 3x^2-9xy+y^2-4y &= 0 \\ x^2-2xy-4y^2-3y &= 0. \end{aligned} \right. \quad 262) \left\{ \begin{aligned} xz+y &= 7z \\ yz+x &= 8z \\ x+y+z &= 12. \end{aligned} \right.$$

$$263) \left\{ \begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= 21\alpha^2 \\ yz+zx-xy &= 6\alpha^2 \\ 3x+y-2z &= 3\alpha. \end{aligned} \right. \quad 264) \left\{ \begin{aligned} (x+2z)(x+2y) &= 99 \\ (y+2x)(y+2z) &= 96 \\ (z+2x)(z+2y) &= 91. \end{aligned} \right.$$

$$265) \left\{ \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = 3, \quad x+y+z=3 \right\}.$$

$$266) \left\{ \begin{aligned} x+y+z-\phi &= 12 \\ x^2+y^2-z^2-\phi^2 &= 6 \\ x^3+y^3-z^3+\phi^3 &= 218 \\ xy+zx &= 45. \end{aligned} \right. \quad 267) \left\{ \begin{aligned} x^2+y^2 &= 25 \\ \omega^2+\phi^2 &= 61 \\ x\phi+y\omega &= 38 \\ x\omega+y\phi &= 39. \end{aligned} \right.$$

268) Δείξατε ὅτι ἡ τρίτη ἐκ τῶν ἐξισώσεων

$$x^2=\alpha x+\beta y, \quad xy=\gamma x+\delta y, \quad y^2=\frac{\gamma\delta}{\beta}x + \left\{ \gamma - \frac{\delta(\alpha-\delta)}{\beta} \right\}y$$

εἶναι συνέπεια τῶν δύο πρώτων. Ὑποτίθεται $\gamma\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$.

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ κάτωθι συστήματα :

$$269) \left\{ \begin{aligned} x^3+y^3-z^3-\phi^3 &= 133 \\ x^2+y^2-z^2-\phi^2 &= 15 \\ x+y-z-\phi &= 1 \\ xy &= z\phi. \end{aligned} \right. \quad 270) \left\{ \begin{aligned} x+y &= \omega+\phi \\ xy &= \omega\phi+3 \\ x^2+y^2+x+y &= \omega^2+\phi^2 \\ x^3+y^3+\omega^3+\phi^3 &= 198. \end{aligned} \right.$$

$$271) \left\{ \begin{aligned} \frac{x-y}{1-z} &= \frac{2}{3} \\ \frac{x^2-y^2}{1-z^2} &= \frac{4}{5} \\ \frac{x^4-y^4}{1-z^4} &= \frac{16}{17} \end{aligned} \right. \quad 272) \left\{ \begin{aligned} x+y+\omega+\phi &= 22 \\ xy\omega\phi &= 648 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{7}{12} \\ \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\phi} &= \frac{5}{18}. \end{aligned} \right.$$

$$273) \begin{cases} y^2 + yz + z^2 = 19 \\ z^2 + zx + x^2 = 28 \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$$

$$274) \begin{cases} 6(xy + xz) = 5(x + y + z) \\ 3(yz + yx) = 4(x + y + z) \\ 2(zx + zy) = 3(x + y + z). \end{cases}$$

275) Δίδεται τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, & x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz, & xy + yz + zx = \alpha^3. \end{cases}$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ λύσεις αὐτοῦ, ἂν ὑπάρχουν, ὅταν α πραγματικὸς $\neq 0$ καὶ ὅταν $\alpha = 0$.

276) Ἐὰν εἶναι συμβιβασταὶ αἱ ἐξισώσεις:

$$\frac{x}{\alpha^2 - y^2} = \frac{y}{\alpha^2 - x^2} = \frac{1}{\beta}, \quad xy = c^2, \quad \delta\text{που } \alpha \neq c$$

νὰ δεიχθῇ ὅτι τότε θὰ εἶναι $(\alpha^2 - c^2)^2 = \beta^2 c^2$ ἢ $\alpha^2 + c^2 = \beta^2$.

38. Διοφαντικά τινες ἐξισώσεις τῆς μορφῆς $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$. Ὅπως ἔχομεν ἀναφέρει καὶ ἀλλαχοῦ ([1], § 142), Διοφαντικὴ ἐξίσωσις εἶναι ἐκείνη τῆς ὁποίας καὶ οἱ συντελεσταὶ καὶ οἱ ἀγνωστοὶ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἐνταῦθα θὰ ἐξετάσωμεν εἰδικὰς τινὰς Διοφαντικὰς ἐξισώσεις δευτέρου βαθμοῦ, μὲ δύο ἀγνώστους, τῆς γενικῆς περιπτώσεως μὴ ὑπαρχομένης ἐντὸς τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

α') *Λεῖπει τὸ x^2 ἢ τὸ y^2 .* Ἐστω ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις:

$$(1) \quad \gamma y^2 + \beta xy + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0.$$

Αὕτη εἶναι πρωτοβάθμιος ὡς πρὸς x καὶ λυομένη ὡς πρὸς x , δίδει τήν:

$$(2) \quad x = \frac{-\gamma y^2 - \epsilon y - \zeta}{\beta y + \delta}.$$

Ἐκτελοῦμεν, τώρα, τὴν διαίρεσιν τοῦ $-\gamma y^2 - \epsilon y - \zeta$ διὰ τοῦ $\beta y + \delta$ καὶ ἔστω $ky + \lambda$ τὸ πηλίκον καὶ v τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης. Ἡ (2) λαμβάνει, οὕτω, τὴν μορφήν:

$$(3) \quad x = ky + \lambda + \frac{v}{\beta y + \delta}$$

καί, ἂν τὰ k, λ, v δὲν εἶναι πάντες ἀκέραιοι, ἀλλὰ σύμμετροι μὲ κοινὸν παρονομαστήν ρ , πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) ἐπὶ ρ καὶ ἔχομεν πρὸς λύσιν τήν:

$$(4) \quad \rho x = k_1 y + \lambda_1 + \frac{v_1}{\beta y + \delta},$$

ὅπου $\rho, k_1, \lambda_1, v_1$ εἶναι πάντες ἀκέραιοι. Ἐστω $v \neq 0$. Τότε, ἀφοῦ τὸ πρῶτον μέλος τῆς (4) εἶναι ἀκέραιος, πρέπει καὶ τὸ δεύτερον νὰ εἶναι καὶ συνεπῶς τὸ κλάσμα $v_1/(\beta y + \delta)$ ὀφείλει νὰ ἰσοῦται μὲ ἀκέραιον. Διὰ νὰ συμβαίῃ τούτο, πρέπει ὁ $\beta y + \delta$ νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν v_1 , δηλ. νὰ εἶναι ὁ $\beta y + \delta$ διαιρέτης τοῦ v_1 . Ἐξισοῦμεν λοιπὸν τὸν $\beta y + \delta$ μὲ ὅλους τοὺς διαιρέτας $\delta_1, \delta_2, \dots$ τοῦ v_1 καὶ ἐκ τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων $\beta y + \delta = \delta_1, \beta y + \delta = \delta_2, \dots$ εὐρίσκομεν διαφόρους τιμὰς τοῦ y ἐκ τῶν ὁποίων αἱ μὴ ἀκέραιοι ἀπορρίπτονται. Τέλος, τὰς εὑρεθείσας ἀκέραιας τιμὰς τοῦ y θέτομεν διαδοχικῶς εἰς τὴν (4) καὶ δεχόμεθα ἐκεῖνας (ἂν ὑπάρχουν) εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχεῖ ἐκ τῆς (4), ἀκέραιον x , (δηλ. τὸ β' μέρος τῆς (4) νὰ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ρ).

Ἐὰν $v=0$, τότε $-\gamma y^2 - \epsilon y - \zeta \equiv (\beta y + \delta)(\kappa y + \lambda)$ καὶ ἡ (1) γράφεται $x(\beta y + \delta) - (\beta y + \delta)(\kappa y + \lambda) = 0$ ἢ $(\beta y + \delta)(x - \kappa y - \lambda) = 0$ καὶ σχίζεται εἰς δύο πρωτοβαθμίους $\beta y + \delta = 0$ καὶ $x - \kappa y - \lambda = 0$. Ἡ πρώτη ἔχει λύσιν μόνον ὅταν ὁ β εἴναι διαιρέτης τοῦ δ (ὁπότε $y = -\delta/\beta$, $x = \text{αὐθαίρετος ἀκέραιος}$), ἡ δὲ δευτέρα λύεται κατὰ τὰ ἤδη ἐκτεθέντα περὶ πρωτοβαθμίων Διοφαντικῶν ἐξισώσεων (βλ. [1], § 142).

Ἐντελῶς ἀναλόγως λύεται ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις :

$$(5) \quad \alpha x^2 + \beta xy + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$$

λυομένη ὡς πρὸς y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «*Νὰ λυθῇ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις $(x+3)(y+5)=7xy$.*»

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $6xy - 5x - 3y - 15 = 0$ ἐκ τῆς ὁποίας: $x = \frac{3y+15}{6y-5}$ ἢ

μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ $3y+15$ διὰ $6y-5$:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\frac{35}{2}}{6y-5} \quad \text{ἢ} \quad (6) \quad 2x = 1 + \frac{35}{6y-5}.$$

Ὁ $6y-5$ πρέπει πρωτίστως, νὰ διαιρῇ τὸν 35, ἐπομένως αἱ «κατ' ἀρχὴν» τιμαὶ τοῦ y θὰ δίδονται ἀπὸ τὰς ἐξισώσεις: $6y-5=1$, $6y-5=-1$, $6y-5=5$, $6y-5=-5$, $6y-5=7$, $6y-5=-7$, $6y-5=35$, $6y-5=-35$.

Ἡ πρώτη δίδει $y=1$ καὶ ἐκ τῆς (6) εὐρίσκομεν $x=18$. Ἐχομεν οὕτω μίαν λύσιν: (18, 1). Ἡ δευτέρα καὶ τρίτη δίδουν κλασματικὴν καὶ συνεπῶς ἀπορριπτέαν τιμὴν διὰ τὸ y . Ἡ τετάρτη δίδει $y=0$ καὶ ἐκ τῆς (6) ἔχομεν τότε $x=-3$ κ.τ.λ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «*Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως :*»

$$x^2 + xy - 4x - 6y + 8 = 0.$$

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα, λυομένη ὡς πρὸς y , γίνεται :

$$y = \frac{-x^2 + 4x - 8}{x-6} \quad \text{ἢ} \quad (7) \quad y = -x - 2 - \frac{20}{x-6}$$

(μετὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ $-x^2+4x-8$ διὰ $x-6$). Ἐκ τῆς (7) ἔπεται ὅτι ὁ $x-6$ πρέπει νὰ εἴναι διαιρέτης τοῦ 20, ἐπομένως θὰ ἐξετάσωμεν τὰς περιπτώσεις: $x-6=1$, $x-6=-1$, $x-6=2$, $x-6=-2$, $x-6=4$, $x-6=-4$, $x-6=5$, $x-6=-5$, $x-6=10$, $x-6=-10$, $x-6=20$, $x-6=-20$. Ἡ πρώτη δίδει $x=7$, ὁπότε ἐκ τῆς (7) εὐρίσκομεν $y=-29$. Οὕτως ἔχομεν μίαν ἀκεραίαν λύσιν: (7, -29). Αἱ ἄλλαι 11 ἐξισώσεις δίδουν ἄλλας ἀκόμη 11 ἀκεραίας λύσεις τῆς δοθείσης ἐξισώσεως.

β') **Ἡ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν (8): $(\kappa x + \lambda y + \mu)(\nu x + \rho y + \sigma) = \tau$, ὅπου $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma, \tau$ ἀκέραιοι.** Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει οἱ παράγοντες $\kappa x + \lambda y + \mu$ καὶ $\nu x + \rho y + \sigma$ εἶναι διαιρέται τοῦ τ . Ἐὰν δὲ ἀναλυθῇ ὁ τ εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων, $\tau = \delta_1 \delta_2$, θέτομεν (9) $\{\kappa x + \lambda y + \mu = \delta_1, \nu x + \rho y + \sigma = \delta_2\}$ ἢ (9') $\{\kappa x + \lambda y + \mu = \delta_2, \nu x + \rho y + \sigma = \delta_1\}$. Ἐκ τῶν (9) προσδιορίζομεν τὰ x καὶ y καὶ ἂν εἴναι ἀμφότερα ἀκέραια, τότε εἶναι δεκτὰ καὶ λαμβάνομεν μίαν λύσιν τῆς ἐξισώσεως. Ὅμοίως καὶ ἐκ τῶν (9'). Τὸ αὐτὸ πράττομεν καὶ δι' ὅλας τὰς δυνατὰς ἀναλύσεις τοῦ τ εἰς γινόμενον δύο ἀκεραίων.

Παρατήρησις. Ἡ γενικὴ ἐξίσωσις (10) $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \eta = 0$, δύναται νὰ λάβῃ τὴν ἀνωτέρω μορφήν (8), ἂν ἡ ποσότης $\beta^2 - 4\alpha\gamma$ ἴσούται πρὸς τὸ τετράγωνον ἀκεραίου τινὸς $k \neq 0$. $\lambda \quad \kappa = 0$

Διότι τότε δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἀριθμὸν λ οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον (11): $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \lambda$ νὰ ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων. Πράγματι, τὸ (11) γράφεται ὡς τριώνυμον τοῦ x :

$$(12) \quad \alpha x^2 + (\beta y + \delta)x + \gamma y^2 + \epsilon y + \lambda,$$

τὸ ὁποῖον ἀναλύεται: $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ὅπου, ρ_1, ρ_2 αἱ ρίζαι τοῦ (12), δηλ. $\rho_{1,2} = \frac{-\beta y - \delta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Ὁ λ , δύναται νὰ ὁρισθῇ οὕτως, ὥστε ἡ διακρίνουσα Δ νὰ εἶ-

ναι τέλειον τετράγωνον πρωτοβαθμίου τινὸς πολωνύμου $ky + \rho$, δηλ. $\Delta = (ky + \rho)^2$ ὅπου ρ ἀκέραιος. Διότι ἡ $\Delta = (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \lambda) = (\beta^2 - 4\alpha\gamma)y^2 + 2(\beta\delta - 2\alpha\epsilon)y + \delta^2 - 4\alpha\lambda = k^2 y^2 + 2(\beta\delta - 2\alpha\epsilon)y + \delta^2 - 4\alpha\lambda$ καὶ διὰ νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον τὸ τελευταῖον τοῦτο πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ διακρίνουσά του νὰ εἶναι μηδὲν (βλέπε ἀσκ. 136). Οὕτω ὁρίζεται ὁ λ , καὶ τὸ (12) ἀναλύεται εἰς γινόμενον $\alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) = \alpha \left(x - \frac{-\beta y - \delta + ky + \rho}{2\alpha} \right) \cdot \left(x - \frac{-\beta y - \delta - ky - \rho}{2\alpha} \right)$ ἡ δὲ (10) γραφομένη: $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \lambda = \lambda - \eta$, λαμβάνει τὴν μορφήν (8).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. «*Νὰ λυθῇ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις: $2x^2 + xy - 3y^2 = 17$.*»

Λύσις. Τὸ πρῶτον μέλος γίνεται γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων ἐχόντων συμμέτρους συντελεστές. Διότι θεωρούμενον ὡς τριώνυμον τοῦ x ἔχει ρίζας: $\rho_{1,2} = \frac{-y \pm \sqrt{y^2 + 4y^2}}{4}$ δηλ. $\rho_1 = y, \rho_2 = -\frac{3}{2}y$, ἄρα γράφεται $2(x - y) \left(x + \frac{3}{2}y \right)$ καὶ ἡ

πρὸς λύσιν ἐξίσωσις γίνεται $(x - y)(2x + 3y) = 17$. Ἐπομένως ἡ $\{x - y = 17, 2x + 3y = 1\}$ ἢ $\{x - y = 1, 2x + 3y = 17\}$ ἢ $\{x - y = -17, 2x + 3y = -1\}$ ἢ $\{x - y = -1, 2x + 3y = -17\}$. Τὸ πρῶτον σύστημα δίδει, ὅχι ἀκεραῖαν λύσιν ἐνῶ τὸ δευτέρον δίδει τήν: $(x = 4, y = 3)$, τὸ τρίτον δὲν δίδει ἀκεραῖαν λύσιν καὶ τὸ τέταρτον δίδει τήν λύσιν $(x = -4, y = -3)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. «*Νὰ εὗρεθῶν αἱ ἀκεραῖαι λύσεις τῆς $x^2 - y^2 = 15$.*»

Λύσις. Ἡ δοθεῖσα γράφεται $(x + y)(x - y) = 15$ καὶ ἐπομένως δίδει, ἡ $\{x + y = 1, x - y = 15\}$ ἢ $\{x + y = 3, x - y = 5\}$ ἢ $\{x + y = 5, x - y = 3\}$ ἢ $\{x + y = 15, x - y = 1\}$ καὶ τέσσαρα ἀκόμη συστήματα προκύπτοντα ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἂν ἀλλάξωμεν τὰ σημεῖα τῶν δευτέρων μελῶν. Ἐκ τούτων εὕρισκομεν ὅλας τὰς λύσεις τῆς δοθείσης.

γ') **Περίπτωσις πεπερασμένου πλήθους δοκιμῶν.** Ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \epsilon y + \zeta = 0$ λυομένη ὡς πρὸς x δίδει:

$$(14) \quad x = \frac{-\beta y - \delta \pm \sqrt{(\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \zeta)}}{2\alpha}.$$

Τὸ y πρέπει νὰ καθιστᾷ τὴν διακρίνουσαν $\Delta = (\beta y + \delta)^2 - 4\alpha(\gamma y^2 + \epsilon y + \zeta)$ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου. Ζητοῦμεν λοιπὸν κατὰ πρῶτον, ποῖαι τιμαὶ τοῦ y καθιστοῦν τὸ ὑπόρριζον Δ ; **θετικόν.** Ἐὰν εἰς τὸ δευτεροβάθμιον ὡς πρὸς y τριώνυμον Δ , ὁ συντελεστὴς τοῦ y^2 εἶναι ἀρνητικός, καὶ αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 πραγματικά, τότε πρέπει ὁ y νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν, διὰ νὰ καθιστᾷ τὸ Δ , θετικόν. Ἐπομένως ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ **περιοριζόμεθα εἰς τὰς ἀκεραῖας τιμὰς y τὰς πληρούσας τὰς:**

$$\rho_1 \leq y \leq \rho_2.$$

Ἐκ τῶν ἀκεραίων τούτων τιμῶν ἐκλέγομεν ἐκείνας μόνον, αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τὸ Δ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου καὶ τέλος, ἐξ αὐτῶν, ἐκείνας αἱ ὁποῖαι τιθέμεναι εἰς τὴν (14) καθιστοῦν καὶ τὸ x ἀκέραιον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. «Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι θετικαὶ λύσεις τῆς

$$(10x+y)(x+y)=x^3+y^3.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ $x+y>0$, ἀπολοποιῶμεν διὰ $x+y$ καὶ φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $10x+y=x^2-xy+y^2$ ἣτις γράφεται $y^2-y(x+1)+x^2-10x=0$.

Ἐχομεν. λοιπόν, $y = \frac{x+1 \pm \sqrt{(x+1)^2 - 4(x^2-10x)}}{2}$ ἥτοι (15) $2y = x+1 \pm \sqrt{-3x^2+42x+1}$.

Πρέπει, πρωτίτως τὸ ὑπόρριζον νὰ εἶναι μὴ ἀρνητικόν. Ὡστε ὁ x πρέπει ἢ νὰ εἶναι οἷσα ἢ νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ $-3x^2+42x+1$ δηλ.:

$$7 - \frac{\sqrt{444}}{3} \leq x \leq 7 + \frac{\sqrt{444}}{3}.$$

Ἐπειδὴ x , ἀκέραιος θετικὸς περιοριζόμεθα εἰς τὴν:

$$1 \leq x \leq 14.$$

Τὸ ὑπόρριζον γράφεται $\varphi(x)=3x(14-x)+1$ εὐρίσκομεν δὲ ὅτι καθίσταται τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου διὰ $x=3, 4, 10, 11, 14$. Τὰ ἀντίστοιχα y εὐρίσκομεν ἐκ τῆς (15) καὶ οὕτω ἔχομεν πάσας τὰς ἀκέραιας θετικὰς λύσεις: (3, 7), (4, 8), (10, 11), (11, 11), (11, 1), (14, 8), (14, 7).

δ') **Ἀντικαταστάσεις.** Ἐνίοτε, συμπεραίνομεν ἀπὸ τὴν μορφήν τῆς ἐξισώσεως, ὅτι μία τῶν ἀγνώστων ποσοτήτων εἶναι πολλαπλάσιον ἐνὸς ὀρισμένου ἀκεραίου q . Τότε ἐνδείκνυται νὰ παριστάνωμεν τὴν ποσότητα αὐτὴν μὲ $q \cdot t$ ὅπου t νέος ἄγνωστος (ἀκέραιος).

Οὕτω π.χ. δοθείσης τῆς ἐξισώσεως $2(x+y)^2+(x-y)^2=664$ παρατηροῦμεν ὅτι ὁ $(x-y)^2$ εἶναι ἄρτιος (ὡς διαφορὰ τῶν ἀρτίων 664 καὶ $2(x+y)^2$), ἄρα καὶ ὁ $x-y$ θὰ εἶναι ἐπίσης. Ἀλλ' ὅταν ὁ $x-y$ εἶναι ἄρτιος, ἔπεται ὅτι καὶ ὁ $x+y$ θὰ εἶναι ἄρτιος. (Ἰδὲ [1]*). ἄσκ. 14). Θέτομεν λοιπόν:

$$x-y=2t, \quad x+y=2s$$

ὅπου t, s νέοι ἄγνωστοι, καὶ μεταβαίνομεν εἰς τὴν Διοφαντικὴν ἐξίσωσιν: $8s^2+4t^2=664$, ἣτις ἀπολοπιῖται καὶ γίνεται: $2s^2+t^2=166$. Εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην εἶναι φανερόν ὅτι ὁ t εἶναι ἄρτιος· θέτομεν λοιπὸν $t=2u$ καὶ φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $s^2+2u^2=83$. Ὁ s^2 πρέπει νὰ εἶναι περιττός, θέτομεν λοιπὸν $s=2v+1$ καὶ φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $u^2+2v(v+1)=41$ ἣτις ἔχει γνωστὸν ὅρον πολὺ μικρότερον τοῦ ἀρχικοῦ.

Ἐστω ἐπίσης, ἡ ἐξίσωσις $x^2+p(y^2-1)=p^2$ ὅπου p εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ p διαιρεῖ τὸν x^2 , ἄρα καὶ τὸν x (ἰδὲ [1], § 10). Θέτομεν λοιπὸν $x=pt$ καὶ ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$$(16) \quad pt^2+(y^2-1)=p^2.$$

Βλέπομεν τώρα ὅτι ὁ p διαιρεῖ τὸ $y^2-1=(y-1)(y+1)$, ἄρα θὰ διαιρῇ ἢ $y-1$ ἢ τὸ $y+1$. Ἄς θέσωμεν κατὰ πρῶτον, $y-1=pu$ ὁπότε $y+1=pu+2$. Τότε φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν $t^2+v(pu+2)=p^2$ ἣτις ἔχει σταθερὸν ὅρον μικρότερον τοῦ τῆς ἀρχικῆς. (Λύσεις τινὰς τῆς τελευταίας ταύτης εὐρίσκομεν, γράφοντες αὐτὴν $v(pu+2)=(\beta-t)(\beta+t)$ καὶ ἐξισοῦντες: $\{v=\beta-t, pu+2=\beta+t\}$ ἢ $\{v=\beta+t, pu+2=\beta-t\}$).

(*) Διὰ τοῦ [1] ἐννοοῦμεν τὸν A' τόμον τῶν «Μαθημάτων Ἀλγέβρας».

Σ. Γ. Κανέλλου: «Μαθήματα Ἀλγέβρας». Β' τόμος

Ἐχομεν ἀκόμη καὶ τὴν δευτέραν περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ p διαιρεῖ τὸ $y+1$. Τότε θέτομεν $y+1=pz$, $y-1=pz-2$ καὶ ἡ (16) γίνεται $t^2+z(pz-2)=\beta^2$.

Τέλος, διὰ καταλλήλων ἀντικαταστάσεων εὐκολύνεται πολλάκις ἡ λύσις τῆς ἐξισώσεως, ἀναγομένης εἰς ἀπλουστεράν. Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $y^2+2xy+x^2+y-x-4=0$ γράφεται $(x+y)^2-(x-y)-4=0$ καὶ διὰ τῶν ἀντικαταστάσεων: $x+y=\omega$, $x-y=\varphi$ ἀνάγεται εἰς τὴν $\omega^2-\varphi-4=0$ ἣς ἡ λύσις εἶναι προφανής. Διότι ἡ τελευταία αὕτη λύεται ὡς πρὸς φ , $\varphi=\omega^2-4$ καὶ ἀληθεύει ὅταν ὁ μὲν ω εἶναι τυχὼν ἀκέραιος ρ , ὁ δὲ $\varphi=\rho^2-4$. Δηλ. ἔχει λύσεις: $\{\omega=\rho, \varphi=\rho^2-4\}$. Ἐπομένως ἔχομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα $\{x+y=\rho, x-y=\rho^2-4\}$, ἐκ τοῦ ὁποίου εὐρίσκομεν τὴν γενικὴν λύσιν τῆς δοθείσης:

$$\left\{ x = \frac{\rho(\rho+1)}{2} - 2, \quad y = -\frac{\rho(\rho-1)}{2} + 2 \right\},$$

ὅπου ρ τυχὼν ἀκέραιος (καὶ ὅπου αἱ παραστάσεις $\rho(\rho+1)/2$ καὶ $\rho(\rho-1)/2$ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιοι [βλ. [1], ἄσκ. 15]).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

277) Προσδιορίσατε τὰ ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα τὰ ἔχοντα διαστάσεις ἀκεραίας καὶ τῶν ὁποίων τὸ ἐμβαδὸν ἰσοῦται μὲ τὸ τριπλάσιον τῆς περιμέτρου.

278) Νὰ λυθῇ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις: $4y^2+xy-3x^2-5x+6y-3=0$.

279) Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι καὶ θετικαὶ λύσεις τῆς $2xy-4x^2+12x-5y=11$.

280) Νὰ εὐρεθοῦν αἱ μικρότεροι τοῦ 10, μὴ ἀρνητικαὶ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $10x+y=(x+y)^2$.

281) Ὁμοίως, τῆς ἐξισώσεως: $4x+y=(x+y)^2$.

282) Ὁμοίως, τῆς ἐξισώσεως: $7x+y=(x+y)^2$.

283) Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι λύσεις τῆς ἐξισώσεως: $3(x^2+y^2)+2xy=664$.

(Ὑπόδ. Αὕτη γράφεται $2(x+y)^2+(x-y)^2=664$).

284) Νὰ λυθῇ ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις: $x^2+3(y^2-1)=3^2 \cdot 15^2$.

285) Νὰ εὐρεθῇ διψήφιος ἀριθμὸς, ὅστις αὐξανόμενος κατὰ μονάδα παρέχει τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του αὐξηθὲν κατὰ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ψηφίων του.

286) Νὰ εὐρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι x καὶ y οἱ πληροῦντες τὴν ἐξίσωσιν $1664y^2=351x^2$.

287) Εὐρετε τὴν γενικὴν μορφὴν τῶν ἀνίσων ἀκεραίων x, y, z τῶν πληρούντων ἀμφοτέρως τὰς ἐξισώσεις: $\{2y=x+z, 2y^2=x^2+z^2\}$.

288) i) Ἐὰν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ἀκέραιοι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο, τότε $\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 \neq \text{πολ.4}$. ii) Ἡ ἐξίσωσις, $5(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)=6(\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2)$ δὲν ἐπαληθεύεται ἀπὸ ἀκεραίους, πρῶτους πρὸς ἀλλήλους ἀνὰ δύο. iii) Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις δὲν ἔχει ἀκεραίας λύσεις, πλὴν τῆς (0, 0, 0).

289) i) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν α ἀκέραιος, τότε $\alpha^2+1 \neq \text{πολ.3}$. ii) Ἐὰν τρεῖς ἀκέραιοι x, y, z πληροῦν τὴν $x^2+y^2=3z^2$, τότε εἶναι πάντες ἀκέραια πολλαπλάσια τοῦ 3. iii) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ Διοφαντικὴ ἐξίσωσις $x^2+y^2=3z^2$ δὲν ἔχει ἄλλην ἀκεραίαν λύσιν, πλὴν τῆς (0, 0, 0).

39. Προβλήματα δευτέρου βαθμοῦ. Ἡ ἐπίλυσις τῶν δευτεροβαθμίων προβλημάτων, δηλ. ἐκείνων τὰ ὁποῖα ὁδηγοῦν εἰς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις (ἢ συστήματα), γίνεται μὲ τὸν αὐτὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον εἶδομεν ὅτι γίνεται καὶ ἡ ἐπίλυσις τῶν πρωτοβαθμίων [βλέπε [1], § 143]. Ἡ διερεύνησις μόνον, εἶναι ἐν γένει πολυπλοκωτέρα εἰς τὰ δευτεροβάθμια προβλήματα διότι αἱ δευτεροβά-

θμιοι ἐξισώσεις εἰς τὰς ὁποίας καταλήγομεν δυνατόν νὰ ἔχουν δύο λύσεις παραδεκίας, δηλ. πληρούσας τοὺς περιορισμοὺς τοῦ προβλήματος, ἢ μίαν μόνον δεκτὴν ἢ καμμίαν.

Μέθοδος τοῦ Μετασχηματισμοῦ. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι δευτεροβάθμιος

$$(1) \quad \varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma = 0,$$

ὁ δὲ ἄγνωστος x τοῦ προβλήματος ὑπόκειται εἰς τὸν περιορισμὸν νὰ εἶναι πραγματικὸς καὶ νὰ μὴ περιέχεται μεταξὺ δύο δεδομένων ἀριθμῶν A καὶ B , ὅπου $A < B$, δηλ. νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (A, B) , τότε ἡ διερεύνησις καθίσταται μακρά. Διότι τὸ πρόβλημα θὰ ἔχη δύο λύσεις, ὅταν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τοῦ $\varphi(x)$ εἶναι μικρότεραι τοῦ A ἢ μεγαλύτεραι τοῦ B ἢ ἡ μία μικροτέρα τοῦ A καὶ ἡ ἄλλη μεγαλύτερα τοῦ B . Μίαν λύσιν θὰ ἔχη ὅταν ἡ μία ρίζα περιέχεται μεταξὺ A καὶ B καὶ ἡ ἄλλη ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (A, B) ἢ ὅταν ἡ (1) ἔχει διπλὴν ρίζαν κειμένην ἐκτὸς τοῦ (A, B) . Οὐδεμίαν δὲ λύσιν, ὅταν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι περιέχονται μεταξὺ τῶν A καὶ B ἢ εἶναι φανταστικάι.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ, πολλάκις εἶναι σκόπιμον, ἡ διερεύνησις νὰ γίνε-ται διὰ τῆς ἐπομένης μεθόδου τοῦ μετασχηματισμοῦ διὰ τῆς ὁποίας ἀναγόμεθα εἰς ἄλλην δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν τῆς ὁποίας ἔξετάζομεν μόνον τὰ **σημεῖα τῶν ριζῶν**. Ἐὰν τεθῇ:

$$(2) \quad y = \frac{B-x}{x-A},$$

τότε, ἂν ὁ y εἶναι ἀρνητικὸς, ὁ x θὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (A, B) . Διότι, ἂν $y < 0$, τότε καὶ $(B-x)(x-A) < 0$ ἢ $(x-A)(x-B) > 0$, ἄρα ὁ x κεῖται ἐκτὸς τῶν ριζῶν A καὶ B . Ἐὰν δὲ $y > 0$, τότε εὐχερῶς προκύπτει ὅτι $A < x < B$. Ὡστε, ἵνα τὸ x κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (A, B) , πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ y νὰ εἶναι ἀρνητικόν.

Ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $x = \frac{Ay+B}{y+1}$ καὶ ἡ (1) γίνεται διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως ταύτης, ἐξίσωσις ὡς πρὸς y :

$$(3) \quad \varphi\left(\frac{Ay+B}{y+1}\right) = a\left(\frac{Ay+B}{y+1}\right)^2 + b\frac{Ay+B}{y+1} + \gamma = 0 \quad \text{ἢ}$$

$$\varphi(A) \cdot y^2 + [2aAB + b(A+B) + 2\gamma]y + \varphi(B) = 0.$$

Εἰς κάθε ἀρνητικὴν ρίζαν τῆς (3) ἀντιστοιχεῖ **μία δεκτὴ** τιμὴ τοῦ x , δηλ. κειμένη ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (A, B) . Ὡστε τὸ πρόβλημα θὰ ἔχη μίαν λύσιν ἂν ἡ (3) ἔχη μίαν ἀρνητικὴν ρίζαν, δύο δὲ λύσεις ἂν ἡ (3) ἔχει δύο ἀρνητικὰς ρίζας. Οὕτως ἡ διερεύνησις διευκολύνεται σημαντικῶς.

β') Ἐὰν ὁ x ὑπόκειται εἰς τὸν περιορισμὸν $A < x < B$, τότε ὁ y (ἐκ τῆς (2)) εἶναι θετικὸς, καὶ ἀντιστρόφως. Ὅσας λοιπὸν θετικὰς τιμὰς ἔχει ὁ y (ὑπολογιζόμενος ἐκ τῆς (3)), τόσας τιμὰς τοῦ x λαμβάνομεν πληρούσας τὸν περιορισμὸν. Συνεπῶς τὸ πρόβλημα ἔχει τόσας λύσεις, ὅσας θετικὰς ρίζας ἔχει ἡ (3).

Παραδείγματα δευτεροβαθμίων προβλημάτων. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «**Δοθέντος τριγώνου με μήκη πλευρῶν $a > \beta > \gamma$ νὰ εὕρεθῇ τμῆμα x , καθ' ὃ πρέπει νὰ ἐλαττωθῶν πᾶσαι αἱ πλευραὶ διὰ τὰ συνιστοῦν τρίγωνον ὀρθογώνιον**».

Δύσεις. Ὁ x πρέπει ἐν πρώτοις νὰ πληροῖ τὸν περιορισμὸν $0 < x < \gamma$. Μετὰ τὴν ἐλάττωσιν τῶν πλευρῶν κατὰ x , θὰ ἔχωμεν $\alpha - x > \beta - x > \gamma - x$, ἄρα ἡ $\alpha - x$ ὡς μεγαλυτέρα, πρέπει νὰ εἶναι ἢ ὑποτείνουσα. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ προβλήματος εἶναι λοιπὸν: $(\alpha - x)^2 = (\beta - x)^2 + (\gamma - x)^2$, ἥτοι:

$$(4) \quad \varphi(x) = x^2 - 2(\beta + \gamma - \alpha)x + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = 0.$$

Τὸ μῆκος x υπολογίζεται δι' ἐπιλύσεως τῆς (4).

Διερευνήσις. I. Περίπτωσις δύο λύσεων. ἵνα τὸ πρόβλημα ἔχη δύο λύσεις, πρέπει αἱ δύο ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς (4) νὰ εἶναι πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι καὶ νὰ πληροῦν ἀμφότεραι τὸν περιορισμὸν τοῦ προβλήματος. Δηλ. πρέπει νὰ ἔχωμεν:

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \gamma.$$

Αἱ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμεναι συνθήκαι εἶναι αἱ κάτωθι πέντε (βλ. § 21):

$$(5) \quad \varphi(0) > 0, \quad \varphi(\gamma) > 0, \quad \Delta > 0, \quad 0 < \beta + \gamma - \alpha, \quad \gamma > \beta + \gamma - \alpha.$$

Ἐκ τούτων, ἡ δευτέρα, δὲν πληροῦται. Διότι εἶναι $\varphi(\gamma) = (\alpha - \beta)(2\gamma - \beta - \alpha)$, ὅπου $\alpha - \beta > 0$ καὶ $2\gamma - \beta - \alpha < 0$ (διότι $\gamma < \beta$, $\gamma < \alpha$, $2\gamma < \beta + \alpha$, $2\gamma - \beta - \alpha < 0$). Ὡστε εἶναι $\varphi(\gamma) < 0$. Ἐπομένως, τὸ πρόβλημα οὐδέποτε ἔχει δύο λύσεις.

II. Περίπτωσις μιᾶς λύσεως. Διὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα, μίαν λύσιν ἀρκεῖ ἡ (4) νὰ ἔχη δύο ρίζας πραγματικάς, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία νὰ πληροῖ τὸν περιορισμὸν καὶ συνεπῶς νὰ εἶναι δεκτὴ ἢ δὲ ἄλλη νὰ μὴ πληροῖ τοῦτον καὶ συνεπῶς νὰ εἶναι ἀπορριπτέα. Ἡ δεκτὴ ρίζα πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ γ ἢ δὲ ἀπορριπτέα νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (0, γ). Ἀλλ' ἡ συνθήκη ἵνα ἡ μία μόνον ρίζα τῆς (4) περιέχεται μεταξὺ 0 καὶ γ , εἶναι:

$$(6) \quad \varphi(0)\varphi(\gamma) < 0.$$

Εἶδομεν ὅμως ἀνωτέρω ὅτι εἶναι $\varphi(\gamma) < 0$, ἄρα διὰ νὰ πληροῦται ἡ (6) πρέπει $\varphi(0) > 0$, δηλαδὴ, $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 > 0$ ἢ $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$.

Τέλος, μίαν λύσιν θὰ εἴχομεν, ἂν $0 < \rho_1 = \rho_2 < \gamma$. Τοῦτο ὅμως ἀπαιτεῖ, $\varphi(\gamma) > 0$, ὅπερ δὲν συμβαίνει.

Ὡστε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν ὅταν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ δηλ. καθ' ἃ γνωρίζομεν ἐκ τῆς Γεωμετρίας, ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νὰ ὑπολογισθεῖν αἱ πλευραὶ τριγώνου $AB\Gamma$, ὁρθογωνίου εἰς τὸ A , γνωστοῦ ὄντος ὅτι $(AB) + (B\Gamma) = \lambda$, $(A\Gamma) + (B\Gamma) = \mu$ ὅπου λ, μ δεδομένοι θετικοὶ ἀριθμοί. Πότε τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν;»

Δύσις. Ἀς τεθῇ $(B\Gamma) = x$, $(AB) = y$, $(A\Gamma) = z$. Τότε θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$(7) \quad \{ x + y = \lambda, \quad z + x = \mu, \quad x^2 = y^2 + z^2 \}.$$

Ἐκ τῶν δύο πρώτων εὐρίσκομεν τὰ y καὶ z συναρτήσας τοῦ x :

$$(8) \quad y = \lambda - x, \quad z = \mu - x$$

καὶ ἡ τρίτη γίνεται $x^2 = (\lambda - x)^2 + (\mu - x)^2$ ἥτοι:

$$(9) \quad \varphi(x) = x^2 - 2(\lambda + \mu)x + \lambda^2 + \mu^2 = 0.$$

Ἐκ τῆς (9) εὐρίσκεται ὁ x καὶ ἐκ τῶν (8) τὰ y καὶ z .

Διερεύνησις. Ὁ x πρέπει νὰ εἶναι θετικὸς, ἀλλὰ διὰ νὰ εἶναι καὶ τὰ y καὶ z θετικὰ πρέπει ὡς φαίνεται ἐκ τῶν (8) νὰ εἶναι, $x < \lambda$ καὶ $x < \mu$.

Ὑποθέτομεν $\lambda < \mu$. Τότε ἀρκεῖ νὰ εἶναι $0 < x < \lambda$. Δύο λύσεις θὰ ἔχωμεν ὅταν ἀμφότεραι αἱ ρίζαι τῆς (9) πληροῦν τὸν ἀνωτέρω περιορισμὸν ἥτοι ὅταν:

$$0 < \rho_1 < \rho_2 < \lambda.$$

Αἱ πρὸς τοῦτο ἀπαιτούμεναι συνθήκαι εἶναι ὡς γνωστόν:

$$\varphi(0) > 0, \quad 0 < \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \varphi(\lambda) > 0, \quad \lambda > \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}, \quad \Delta > 0.$$

Ἡ τετάρτη συνθήκη γράφεται $\lambda > \lambda + \mu$, συνεπῶς δὲν πληροῦται. Ὡστε τὸ πρό-

βλημα οὐδέποτε ἔχει δύο λύσεις. Μίαν λύσιν θὰ ἔχωμεν, ὅταν ἡ μία μόνον ρίζα πληροῖ τὸν περιορισμόν, τοῦτο δὲ συμβαίνει ὡς γνωρίζομεν, ὅταν

$$\varphi(0)\varphi(\lambda) < 0.$$

*Ἐπειδὴ $\varphi(0) > 0$, ἀρκεῖ $\varphi(\lambda) < 0$. Ἐχομεν:

$$\varphi(\lambda) = -2\lambda\mu + \mu^2 = \mu(\mu - 2\lambda).$$

Πρέπει λοιπὸν $\mu - 2\lambda < 0$ ἥτοι $\lambda > \mu/2$.

Θὰ εἴχομεν μίαν λύσιν καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν: $0 < \rho_1 = \rho_2 < \lambda$. Τοῦτο ὁμως ἀπαιτεῖ: $\lambda > \rho_1 + \rho_2$, ὅπερ ὡς εἶδομεν ἀποκλείεται.

*Ὡστε τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, ὅταν

$$\mu/2 < \lambda < \mu.$$

*Ἐάν υποθέσωμεν $\mu < \lambda$, ἡ συνθήκη ὑπάρξεως μιᾶς λύσεως γίνεται:

$$\lambda/2 < \mu < \lambda.$$

Τελικῶς, πρέπει ὁ μικρότερος ἐκ τῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ νὰ ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. «Νὰ δρισθοῦν τὰ α καὶ β οὕτως ὥστε τὰ πολώνυμα $x^3 + \alpha x^2 + 11x + 6$ καὶ $x^3 + \beta x^2 + 14x + 8$ νὰ ἔχουν κοινὸν παράγοντα τῆς μορφῆς $x^2 + \pi x + k$ (δηλ. νὰ ἔχουν δύο ρίζας κοινάς)».

Λύσις. Πρέπει ἀμφότερα νὰ διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $x^2 + \pi x + k$, συνεπῶς νὰ ἔχωμεν τὰς ταυτότητας:

$$(10) \quad x^3 + \alpha x^2 + 11x + 6 \equiv (x^2 + \pi x + k)(x + \lambda)$$

$$(10') \quad x^3 + \beta x^2 + 14x + 8 \equiv (x^2 + \pi x + k)(x + \mu)$$

ὅπου $x + \lambda$ καὶ $x + \mu$ εἶναι τὰ πηλίκια τῶν δύο τελείων διαιρέσεων. Διὰ νὰ ἰσχύουν αἱ ταυτότητες (10) καὶ (10') πρέπει εἰς ἐκάστην τούτων, οἱ συντελεσταὶ τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη νὰ εἶναι ἴσοι (βλ. [1], § 103). Ἐξισοῦντες λοιπὸν τοὺς συντελεστὰς τῶν ἴσων δυνάμεων τοῦ x τῶν δύο μελῶν ἐκάστης τῶν (10) καὶ (10') φθάνομεν εἰς τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha = \lambda + \pi, \quad 11 = \pi\lambda + k, \quad 6 = k\lambda$$

$$\beta = \mu + \pi, \quad 14 = \pi\mu + k, \quad 8 = k\mu.$$

*Ἐάν τὸ σύστημα τοῦτο ἔχει λύσιν, τὰ α καὶ β προσδιορίζονται.

*Ἐκ τῶν $6 = k\lambda$ καὶ $8 = k\mu$ λαμβάνομεν διὰ διαιρέσεως κατὰ μέλη: (11), $\lambda = \frac{3}{4}\mu$ καὶ δι' ἀφαιρέσεως: (12), $-2 = k(\lambda - \mu)$. Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, τῶν (13): $\{ 11 = \pi\lambda + k, 14 = \pi\mu + k \}$ λαμβάνομεν: $-3 = \pi(\lambda - \mu)$ καὶ διὰ συγκρίσεως μετ' τὴν (12) λαμβάνομεν: (14), $k = \frac{2\pi}{3}$. Αἱ (13) γίνονται βάσει τῶν (11) καὶ (14): $11 = \frac{3}{4}\pi\mu + \frac{2\pi}{3}$, $14 = \pi\mu + \frac{2\pi}{3}$ καὶ

διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη: $\frac{11}{14} = \left(\frac{3}{4}\mu + \frac{2}{3} \right) / \left(\mu + \frac{2}{3} \right)$ καὶ ἐξ αὐτῆς $\mu = 4$.

*Ἐκ τῆς (11) ἔχομεν $\lambda = 3$ καὶ ἐκ τῆς $-3 = \pi(\lambda - \mu)$, $\pi = 3$, ὥστε $\alpha = \lambda + \pi = 6$, $\beta = \mu + \pi = 7$ εἶναι αἱ ζητούμεναι τιμαί. Ὁ κοινὸς παράγων εἶναι ὁ $x^2 + 3x + 2$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. «Ποῖα σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, ὅταν τὸ πολώνυμον (1) $\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον πρωτοβαθμίου ὡς πρὸς x καὶ y πολυνόμου».

Λύσις. Ἐξ ὑποθέσεως, ὑπάρχει ἓνα πρωτοβάθμιον πολυνόμου $Kx + \Lambda y + M$ τὸ ὅποιον τετραγωνιζόμενον δίδει τὸ (1), δηλαδὴ ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$(2) \quad (Kx + \Lambda y + M)^2 \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 2\delta x + 2\epsilon y + \zeta,$$

ἢ $K^2x^2+2K\Lambda xy+\Lambda^2y^2+2KMx+2\Lambda My+M^2\equiv ax^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\epsilon y+\zeta$ καὶ ἐπομένως ἰσχύουν αἱ ἰσότητες:

$$(3) \quad \{ K^2=\alpha, K\Lambda=\beta, \Lambda^2=\gamma, KM=\delta, \Lambda M=\epsilon, M^2=\zeta \}.$$

Διὰ τὰ εὐρωμεν σχέσεις μεταξὺ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$, πρέπει ν' ἀπαλείψωμεν τὰ K, Λ, M μεταξὺ τῶν 6 ἐξισώσεων (3).

Πρὸς τοῦτο τετραγωνίζομεν τὴν 2αν, 4ην καὶ 5ην ἐκ τῶν (3) καὶ ἔχομεν: $\beta^2=K^2\Lambda^2$, $\delta^2=K^2M^2$, $\epsilon^2=\Lambda^2M^2$. Αἱ τελευταῖα αὐταί, λόγῳ τῆς 1ης, 3ης καὶ 6ης ἐκ τῶν (3), γίνονται:

$$(4) \quad \boxed{\beta^2=\alpha\gamma, \delta^2=\alpha\zeta, \epsilon^2=\gamma\zeta}.$$

Αἱ (4) εἶναι ἀναγκαῖαι συνθήκαι. Δηλ. ἂν τὸ πολυώνυμον $ax^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\epsilon y+\zeta$ εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε αἱ (4) θὰ ἰσχύουν κατ' ἀνάγκην. (Σημειωτέον ὅτι εἶναι δυνατόν ν' ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ (4) εἶναι καὶ ἱκαναί. Δηλ. ἂν ἰσχύουν αἱ (4) τὸ δοθὲν πολυώνυμον εἶναι τέλειον τετράγωνον πρωτοβαθμίου πολυωνύμου ἔχοντος ἡ πραγματικούς ἢ φανταστικούς συντελεστάς.

Ἡ γενικὴ γραμμὴ τῆς ἀποδείξεως εἶναι ἡ ἐξῆς: Ὑποτίθεται ὅτι τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ πληροῦν τὰς (4). Ζητοῦμεν τότε νὰ προσδιορίσωμεν ἀριθμούς K, Λ, M , οὔτινες νὰ πληροῦν τὸ σύστημα (3). Τοῦτου ἐπιτευχθέντος, τὸ (1) θὰ εἶναι $\equiv (Kx+\Lambda y+M)^2$.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

290) Ὡρισμένοι ἐργάται ἐπρόκειτο νὰ κτίσουν 432 m³ ἐνὸς ἔργου. Ἐπειδὴ 4 ἐκ τῶν ἐργατῶν δὲν προσήλθον, ἕκαστος τῶν ὑπολοίπων ἔκτισεν 9m³ ἐπὶ πλέον. Ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν ἐργατῶν.

291) Δύο ἀριθμοὶ γράφονται 504 καὶ 304 εἰς ἄγνωστον σύστημα ἀριθμῆσεως. Τὸ γινόμενόν των παρίσταται μὲ 106100 εἰς τὸ σύστημα ἀριθμῆσεως μὲ βάσιν 9. Ζητεῖται ἡ βάσις τοῦ πρώτου συστήματος.

292) Δύο ἐργάται ἐκτελοῦν ἔργον. Ὁ πρῶτος ἐργάζεται κατ' ἀρχὰς ἐπὶ τὸ 1/3 τοῦ χρόνου καθ' ὃν ὁ ἄλλος θὰ ἐξετέλει μόνος του τὸ ἔργον καὶ κατόπιν ὁ δεῦτερος ἐργάζεται ἐπὶ τὸ 1/3 τοῦ χρόνου, καθ' ὃν ὁ πρῶτος μόνος του θὰ ἐξετέλει τὸ ἔργον. Οὕτως ἐξετελέσθησαν τὰ 13/18 τοῦ ὅλου ἔργου. Γνωστοῦ ὄντος, ὅτι ἐργαζόμενοι ὁμοῦ ἐκτελοῦν τὸ ἔργον εἰς 3 ὥρας καὶ 3/5 τῆς ὥρας, νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος ὃν ἕκαστος χρειάζεται μόνος του διὰ νὰ ἐκτελέσῃ τὸ ἔργον.

293) Τριγώνου διδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ $\alpha > \beta > \gamma$. Ζητεῖται τὸ μῆκος τμήματος $x > 0$, καθ' ὃ πρέπει ν' αὐξήσῃ πᾶσαι αἱ πλευραί, ἵνα δύναται νὰ σχηματισθῇ ἐξ αὐτῶν τρίγωνον ὀρθογώνιον. Διερευνήσις.

294) Εἰς κύκλον ἀκτίνας R νὰ ἐγγραφῇ χορδὴ τῆς ὁποίας τὸ μῆκος αὐξήθῃν κατὰ τὸ ἀπόστημα αὐτῆς, νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ. Συνθῆκαι δυνατότητος.

295) Δίδεται σφαῖρα ἀκτίνας R. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς O πρέπει νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τέμνον τὴν σφαῖραν οὕτως, ὥστε ἡ πυραμὶς μὲ κορυφὴν τὸ O καὶ βάσιν τὸ εἰς τὴν τομὴν ἐγγεγραμμένον τετράγωνον, νὰ ἔχῃ ὁλικὴν ἐπιφάνειαν 4μ²; Διερευνήσις.

296) Ἡ διατομὴ μιᾶς σήραγγος, σχηματίζεται ἀπὸ ἓνα ὀρθογώνιον παρμόν καὶ ἀπὸ ἓν ἡμικύκλιον ἔχον βάσιν τὴν μίαν πλευρὰν τοῦ ὀρθογωνίου, καὶ ἔχει περίμετρον T καὶ ἐμβαδὸν E. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου μέρους, ἡ συνθήκη δυνατότητος τοῦ προβλήματος καὶ ἡ σχέσις ἥτις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ E καὶ T ἵνα τὸ ὀρθογώνιον τοῦτο εἶναι τετράγωνον.

297) Νὰ ὀρισθοῦν τὰ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οὕτως, ὥστε τὸ κλάσμα $\frac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+\gamma x+\delta}$ νὰ λαμβάνῃ τιμὴν 4 ὅταν $x=3$ καὶ τιμὴν 5 ὅταν $x=1$, τοῦ x δὲ μεταβαλλομένου ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, τὸ κλάσμα νὰ λαμβάνῃ μόνον τὰς ἐκτὸς τοῦ διαστήματος (4, 5) τιμὰς.

298) Νά εὑρεθῇ ἡ μορφή τῶν πολυωνύμων τετάρτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x , τὰ ὁποῖα δι' ἀντικαταστάσεως τοῦ x ὑπὸ τοῦ $1-x$ δὲν μεταβάλλονται. Νά δεიχθῇ δὲ ὅτι δύνανται νά εὑρεθοῦν καὶ αἱ ρίζαι τῶν πολυωνύμων τούτων.

299) Νά ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον $x^3-3\lambda x+2$ νά διαιρῇται ἀκριβῶς δι' ἑνὸς τέλειου τετραγώνου (δηλ. νά ἔχῃ διπλὴν ρίζαν) καὶ ἀκολούθως νά ὁρισθοῦν αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος.

300) Νά ὁρισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ οὕτως, ὥστε ἡ ἐξίσωσις $(81\beta-4\gamma)x^2+(9\alpha+5\gamma)x+9\delta-2\gamma^2+\beta+\alpha^2+\delta^2-33=0$, νά καθίσταται ταυτότης ὡς πρὸς x , ἐνῶ συγχρόνως ὁ λόγος τῶν δύο ριζῶν τοῦ $x^2+\gamma x+\delta$ νά εἶναι 2, τέλος δὲ καὶ τὰ τετράγωνα τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου τούτου νά εἶναι ρίζαι τοῦ $x^2+\alpha x+\beta$.

301) Ὑπὸ ποίας συνθήκας εἶναι τέλειον τετράγωνον τὸ πολυώνυμον:

$$\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\delta x+\zeta;$$

302) Νά ὁρισθοῦν οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ α, β, γ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀμφοτέρω τὰ πολυώνυμα:

$$x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+1 \quad \text{καὶ} \quad x^4+2\alpha x^3+2\beta x^2+2\gamma x+1,$$

εἶναι τέλεια τετράγωνα δευτεροβαθμίων πολυωνύμων.

303) Νά εὑρεθῇ ἰκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη μεταξὺ τῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἵνα τὸ πολυώνυμον $x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ δύναται νά τεθῇ ὑπὸ τὴν μορφήν $(x^2+\lambda x)^2+p(x^2+\lambda x)+q$. Ὡς ἐφαρμογή, νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4+6x^3+4x^2-15x+4=0$.

304) Νά εὑρεθοῦν τὰ α, β, γ γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ πολυώνυμον $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2-12x+10$ διαιρούμενον διὰ τῶν x^2+1 καὶ x^3+1 , ἀφήνει ἀντίστοιχα ὑπόλοιπα ἔχοντα γινόμενον $2x^2-12x+10$.

305) Νά δεიχθῇ ὅτι, ἂν τὸ πολυώνυμον $\alpha x^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, τότε τὸ μὲν πρῶτον εἶναι τέλειος κύβος, τὸ δὲ δεῦτερον τέλειον τετράγωνον.

306) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις (1), $\omega^3-\frac{9}{4}\omega^2-\frac{9}{16}\omega+\frac{177}{64}=0$. Νά ὁρισθῇ ὁ k , ὥστε διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως $\omega=x-k$, αὕτη νά λάβῃ τὴν μορφήν (2), $x^3+Ax+B=0$. Κατόπιν νά λυθῇ ἡ (2) προσδιοριζομένων τῶν σταθερῶν $\lambda, \alpha, \mu, \beta$ οὕτως, ὥστε ἡ (2) νά λάβῃ τὴν μορφήν $\lambda(x+\alpha)^3+\mu(x+\beta)^3=0$. Τέλος, νά λυθῇ ἡ (1). Νά εὑρεθοῦν μόνον πραγματικαὶ ρίζαι.

307) Δίδεται τὸ πολυώνυμον $f(x)=4x^4-8x^3+\alpha x+\beta$ καὶ ζητεῖται νά ὁρισθῇ ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $\phi(x)$ τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορά $f(x)-[\phi(x)]^2$ νά εἶναι τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ ὡς πρὸς x . Ἀκολούθως νά ὁρισθοῦν τὰ α καὶ β οὕτως, ὥστε τὸ $f(x)$ νά εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνὸς ἀκερ. πολυωνύμου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V

Γενικά περί εξισώσεων οίουδήποτε βαθμού.

Α' ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΣ

40. Εἰς τὸ πρῶτον μέρος τοῦ παρόντος κεφαλαίου θὰ ἐξετάσωμεν γενικάς τινας ιδιότητας τῶν εξισώσεων τῆς μορφῆς $f(x)=0$ ὅπου $f(x)$, ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x , ὅχι ἐκ ταυτότητος μηδέν, βαθμοῦ n οἰουδήποτε (n , φυσικὸς ἀριθμὸς) καὶ ἔχον πάντας τοὺς συντελεστὰς του πραγματικούς. **Ρίζα** τῆς $f(x)=0$ εἶναι κάθε ἀριθμὸς ρ πραγματικὸς ἢ φανταστικὸς, τοιοῦτος ὥστε $f(\rho)=0$. Ὁ αὐτὸς ἀριθμὸς ρ λέγεται ἐπίσης **ρίζα τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου** $f(x)$.

41. Μιγαδικαὶ ρίζαι. Θεώρημα. «Ἐὰν ἡ εξίσωσις $f(x) \equiv +a_0x^n + +a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ἔχη πραγματικούς συντελεστὰς καὶ ἔχη ὡς ρίζαν τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + \beta i$ ὅπου α, β πραγματικοὶ καὶ $\beta \neq 0$ τότε θὰ ἔχη ὡς ρίζαν καὶ τὸν συζυγῇ μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha - \beta i$ ».

Δηλαδή αἱ μιγαδικαὶ ρίζαι ἐμφανίζονται κατὰ ζεύγη ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς εξισώσεως εἶναι πραγματικοί.

*Απόδειξις. Ὡς σχηματίζωμεν τὴν παράστασιν

$$\varphi(x) \equiv [x - (\alpha + \beta i)] \cdot [x - (\alpha - \beta i)] \equiv x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$$

ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τοὺς συζυγεῖς μιγάδας $\alpha + \beta i$ καὶ $\alpha - \beta i$ καὶ διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ἴσχυη συνεπῶς ὅτι $\varphi(\alpha + \beta i) = 0$, $\varphi(\alpha - \beta i) = 0$.

Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ δευτεροβάθμιον τριώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $f(x)$. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὴν διαίρεσιν τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ $\varphi(x)$ θὰ εὕρωμεν ἓνα πηλίκον $\Pi(x)$ καὶ ἓνα ὑπόλοιπον, βαθμοῦ τὸ πολὺ πρῶτον, ἔστω τὸ $\gamma x + \delta$ (διότι ὁ διαιρέτης εἶναι 2ου βαθμοῦ). Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως:

$$(1) \quad f(x) \equiv \varphi(x)\Pi(x) + \gamma x + \delta.$$

Ἐὰν εἰς τὴν ταυτότητα (1) θέσωμεν ὅπου x τὸ $\alpha + \beta i$, τότε ἐπειδὴ τὸ $\alpha + \beta i$ εἶναι καὶ ρίζα τοῦ $f(x)$ καὶ ρίζα τοῦ $\varphi(x)$, θὰ ἔχωμεν $f(\alpha + \beta i) = 0$ καὶ $\varphi(\alpha + \beta i) = 0$. Ἐπομένως θὰ λάβωμεν ἐκ τῆς (1):

$$0 = 0 + \gamma(\alpha + \beta i) + \delta \quad \text{ἢ} \quad (\alpha\gamma + \delta) + \beta\gamma i = 0.$$

Ἐξισοῦντες μὲ τὸ μηδέν καὶ τὸ πραγματικὸν μέρος καὶ τὸν συντελεστήν τοῦ i , λαμβάνομεν:

$$(2) \quad \alpha\gamma + \delta = 0 \quad \text{καὶ} \quad \beta\gamma = 0.$$

Ἐπειδὴ $\beta \neq 0$, ἡ δευτέρα ἐκ τῶν (2) δίδει $\gamma = 0$ καὶ ἐκ τῆς πρώτης τῶν (2)

ἐπεται ὅτι $\delta=0$. Ὡστε τὸ ὑπόλοιπον $\gamma x + \delta$ εἶναι τὸ μηδενικὸν πολυώνυμον καὶ ἡ (1) καθίσταται

$$(3) \quad f(x) = \varphi(x) \cdot \Pi(x).$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν, ἐπειδὴ ὁ $\alpha - \beta i$ εἶναι ρίζα τοῦ $\varphi(x)$:

$$f(\alpha - \beta i) = \varphi(\alpha - \beta i) \cdot \Pi(\alpha - \beta i) = 0 \cdot \Pi(\alpha - \beta i) = 0.$$

Ὡστε ὁ $\alpha - \beta i$ εἶναι ἐπίσης ρίζα τοῦ $f(x)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. «Νὰ εὗρεθῶν αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $f(x) \equiv x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 2 = 0$, γνωστοῦ ὅντος ὅτι ὁ ἀριθμὸς i εἶναι μία ρίζα τῆς».

Λύσις. Ἐπειδὴ οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοὶ καὶ ὁ i εἶναι μία ρίζα, ἐπεταὶ ὅτι καὶ ὁ $-i$ θὰ εἶναι ἐπίσης ρίζα. Ἐπομένως τὸ $f(x)$ θὰ περιέχῃ ὡς παράγοντας τοὺς $x-i$ καὶ $x+i$, ἄρα καὶ τὸν $(x-i)(x+i) = x^2 + 1$. Ἐκτελούντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $f(x)$ διὰ $x^2 + 1$ εὐρίσκομεν: $f(x) \equiv (x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)$ συνεπῶς ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ ἔχει ὡς ρίζας, ἐκτὸς τῶν i καὶ $-i$ καὶ τὰς ρίζας τοῦ $x^2 + 2x + 2$ αἱ ὁποῖαι εἶναι $-1+i$ καὶ $-1-i$.

42. Σύμμετροι ρίζαι. Ἐρχόμεθα τώρα εἰς τὴν ἐιδικὴν ἀλλὰ συχνότατα παρουσιαζομένην περίπτωσιν καθ' ἣν ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ ἔχει ὅλους τοὺς συντελεστας τῆς ὅχι μόνον πραγματικούς ἀλλὰ καὶ *συμμέτρους*. Τότε αὕτη ἀνάγεται εἰς ἐξίσωσιν ἔχουσαν ὅλους τοὺς συντελεστας τῆς *ἀκέραιους*. Διότι ἀρκεῖ νὰ καταστήσωμεν ὅλους τοὺς συντελεστας ὁμώνυμα κλάσματα με κοινὸν παρονομαστήν c καὶ νὰ πολλαπλασιάσωμεν κατόπιν τὰ δύο μέλη τῆς $f(x) = 0$ ἐπὶ τὸν c .

Μία ἐξίσωσις με ἀκέραιους συντελεστας δυνατὸν νὰ μὴ ἔχῃ ρίζας *συμμέτρους*. Ἐὰν ὅμως ἔχῃ, τότε δυνάμεθα νὰ τὰς εὕρωμεν δυνάμει τοῦ ἐπομένου θεωρήματος.

Θεώρημα. «Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0$ ὅπου $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ εἶναι ἀκέραιοι καὶ $a_0 \neq 0$ καὶ $a_n \neq 0$, ἔχει μίαν *σύμμετρον* ρίζαν p/q ὅπου p καὶ q εἶναι ἀκέραιοι, *πρῶτοι* πρὸς ἀλλήλους, τότε ὁ p εἶναι *διαιρέτης* τοῦ a_n καὶ ὁ q *διαιρέτης* τοῦ a_0 ».

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ὁ p/q εἶναι ρίζα, θὰ ἔχωμεν

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \frac{p}{q} + a_n = 0.$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τὰ μέλη ἐπὶ q^n καὶ μεταφέροντες ὅρους ἔχομεν:

$$a_0 p^n = -a_1 p^{n-1} q - \dots - a_{n-1} p q^{n-1} - a_n q^n \quad \eta)$$

$$a_0 p^n = q(-a_1 p^{n-1} - \dots - a_{n-1} p q^{n-2} - a_n q^{n-1}).$$

Ἐπειδὴ τὰ $a_1, a_2, \dots, a_n, p, q$ εἶναι ἀκέραιοι, ὁ ἐντὸς παρενθέσεως ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος, συνεπῶς τὸ 2ον μέλος τῆς τελευταίας ἐξίσωσως εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ q . Ὁ q , διαιρῶν ἀκριβῶς τὸ δεῦτερον μέλος, θὰ διαιρῇ καὶ τὸ πρῶτον, δηλ. τὸν $a_0 p^n$. Ἐπειδὴ ὁ q εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν p , θὰ εἶναι πρῶτος καὶ πρὸς τὸν p^n (βλ. [1]^(*), § 10, παρατηρ. δ) καὶ ἀφοῦ ὁ q διαιρεῖ τὸ γινόμενον $a_0 p^n$ καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν p^n , ἐπεταὶ ὅτι θὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν a_0 , (βλέπε [1], § 9, θεωρ. I καθὼς καὶ § 41).

(*) Διὰ τοῦ [1] ἐννοοῦμεν τὸν Δ' Τόμον τῶν «Μαθημάτων Ἀλγέβρας».

Κατὰ τὸν ἴδιον ἀκριβῶς τρόπον, ἐκ τῆς ἰσότητος

$$a_n q^n = -a_0 p^n - a_1 p^{n-1} q - \dots - a_{n-1} p q^{n-1}$$

προκύπτει ὅτι ὁ p διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν a_n .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Νὰ εὐρεθοῦν αἱ σύμμετροι ρίζαι, ἐφ' ὅσον ὑπάρχουν, τῆς ἐξίσωσως $f(x) \equiv 9x^4 - 6x^3 - 53x^2 + 36x - 6 = 0$ ».

Λύσις. Ἐὰν ὑπάρχῃ σύμμετρος ρίζα p/q ὅπου p καὶ q σχετικῶς πρῶτοι, τότε ὁ p εἶναι διαιρέτης τοῦ -6 καὶ ὁ q τοῦ 9 . Ἐπομένως ὁ p εἶναι ἓνας ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ καὶ ὁ q ἓνας ἀπὸ τοὺς $\pm 1, \pm 3, \pm 9$. Διαιροῦντες ὅλας τὰς δυνατὰς τιμὰς τοῦ p μὲ ὅλας τὰς τοῦ q εὐρίσκομεν ὅτι αἱ ἐνδεχόμεναι σύμμετροι ρίζαι τῆς ἐξίσωσως εἶναι αἱ:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}.$$

Διὰ δοκιμῶν, εὐρίσκομεν ὅτι ὁ $1/3$ εἶναι μία ρίζα τῆς ἐξίσωσως καὶ τὸ $f(x)$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον $\left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot (3x^3 - x^2 - 18x + 6)$. Ἡ ἀρχικὴ λοιπὸν ἐξίσωσις καθίσταται:

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^3 - x^2 - 18x + 6\right) = 0.$$

Ἔργαζόμενοι ὁμοίως διὰ τὴν ἐξίσωσιν $3x^3 - x^2 - 18x + 6 = 0$ εὐρίσκομεν ὅτι αἱ ἐνδεχόμεναι σύμμετροι ρίζαι αὐτῆς εἶναι αἱ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 1/3, \pm 2/3$. Εὐρίσκομεν καὶ πάλιν ὅτι ὁ $1/3$ εἶναι ρίζα καὶ ὅτι $3x^3 - x^2 - 18x + 6 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 - 6\right)$. Οὕτω ἡ ἀρχικὴ ἐξίσωσις λαμβάνει τὴν μορφήν $9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2\left(x^2 - 6\right) = 0$ καὶ ἔχει ρίζας: $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \sqrt{6}, -\sqrt{6}$.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ δοκιμάσωμεν ἂν ὁ σύμμετρος q εἶναι ρίζα τῆς $f(x) = 0$ πρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $f(q)$. Πολλάκις, εἰς τὴν πρᾶξιν, εἶναι πρακτικώτερον νὰ εὐρίσκωμεν τὸ $f(q)$ ὅχι δι' ἀπ' εὐθείας ἀντικαταστάσεως τοῦ x ὑπὸ τοῦ q ἀλλὰ δι' ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως $f(x) : (x - q)$ διὰ τοῦ συντόμου τρόπου [1], § 112, ὅποτε τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τὸ $f(q)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νὰ εὐρεθοῦν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ k διὰ τὰς οποίας ἡ ἐξίσωσις $x^3 - (k+1)x + 2k = 0$ ἔχει σύμμετρον ρίζαν».

Λύσις. Ἐὰν ἔχῃ σύμμετρον ρίζαν p/q πρέπει κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ὁ q νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου συντελεστοῦ $a_0 = 1$. Ἐπομένως $q = \pm 1$. Ὡστε πᾶσα σύμμετρος ρίζα θὰ εἶναι ἀκεραία.

Ἐὰν q εἶναι μία ρίζα, τότε πρέπει $q^3 - (k+1)q + 2k = 0$ ἢ $2k - kq = q - q^3$ ἢ $k(2 - q) = q - q^3$. Βλέπομεν ὅτι $q \neq 2$ (διότι διὰ $q = 2$ δὲν ἀληθεύει ἡ ἐξίσωσις). Ἐπομένως, $k = \frac{q - q^3}{q - 2}$ καὶ ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν,

$$(1) \quad k = q^2 + 2q + 3 + \frac{6}{q-2}.$$

Διὰ νὰ εἶναι καὶ ὁ q καὶ ὁ k συγχρόνως ἀκέραιοι πρέπει ὁ $q-2$ νὰ εἶναι διαιρέτης τοῦ 6. Ἦτοι αἱ δυνατὰι τιμαὶ τοῦ $q-2$ εἶναι $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ καὶ τοῦ q : 1, 3, 0, 4, -1, 5, -4, 8. Εἰς τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ q ἀντιστοιχοῦν ἐκ τῆς (1) αἱ ἐξῆς ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ k : 0, 24, 0, 30, 0, 40, 10, 84, αἵτινες εἶναι καὶ αἱ ζητούμεναι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

308) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 16 = 0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔχει μίαν ρίζαν ἴσην πρὸς $-2i$.

Ὁμοίως ἢ $x^6 - 2x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x - 2 = 0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἔχει ρίζας τοὺς $1+i$ καὶ $-i$.

309) Νά μορφωθῇ ἐξίσωσις μὲ πραγματικούς συντελεστὰς καὶ ἔχουσα ὡς ρίζας τοὺς $1+i\sqrt{2}$ καὶ $1-i\sqrt{3}$.

310) Ἐάν α καὶ k εἶναι πραγματικοί, νά εὗρεθῶν οὔτοι γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^5 + 7x^3 + 2x^2 + kx + 18 = 0$ ἔχει ὡς ρίζαν τὸν αi .

311) Νά εὗρεθῶν αἱ σύμμετροι ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων, καὶ εἰ δυνατόν νά λυθῶν αὐταί: α) $9x^4 + 9x^3 + 8x^2 - x - 1 = 0$, β) $x^8 - 7x^2 + 2x - 3 = 0$,

γ) $9x^4 - 12x^3 + 13x^2 - 12x + 4 = 0$, δ) $8x^5 + 12x^4 + 14x^3 + 13x^2 + 6x + 1 = 0$.

312) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^n + 2kx + 2 = 0$, ὅπου $n \geq 2$ καὶ k ἀκέραιος, δὲν ἔχει συμμέτρους ρίζας.

313) Νά εὗρεθῶν αἱ ἀκέραιαι τιμαὶ τοῦ k (ἂν ὑπάρχουν), διὰ τὰς ὁποίας ἐκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχει σύμμετρον ρίζαν καὶ νά εὗρεθῶν αἱ σύμμετροι ρίζαι αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς ἐκάστην τιμὴν τοῦ k

$$\alpha) x^3 + kx^2 + kx + 2 = 0,$$

$$\beta) x^3 + (2-k)x^2 - (2k+3)x - 6 = 0,$$

$$\gamma) x^4 - 4x^3 - kx^2 + 6kx + 9 = 0,$$

$$\delta) kx^3 + (k-1)x^2 - 1 = 0.$$

314) Ἐάν δ x εἶναι σύμμετρος καὶ δ $2x^4 + 3x + 1$ εἶναι ἀκέραιος, τότε καὶ δ x εἶναι ἀκέραιος.

315) Νά καταστρωθῇ ἐξίσωσις τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ μὲ ἀκεραίους συντελεστὰς ἔχουσα ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις αὕτη δὲν ἔχει σύμμετρον ρίζαν καὶ νά συναχθῇ ἐξ αὐτοῦ ὅτι δ $\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος. Ὁμοίον ζήτημα μὲ τὸν ἀριθμὸν $(\sqrt{2} - \sqrt{3})/(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

316) Ἐάν τὸ πολυώνυμον $f(x)$ ἔχη ἀκεραίους συντελεστὰς, συμβαίνει δὲ οἱ ἀριθμοὶ $f(0)$ καὶ $f(1)$ νά εἶναι ἀμφοτέροι περιττοί, τότε ἡ ἐξίσωσις $f(x) = 0$ δὲν ἔχει ἀκεραίας ρίζας.

43. Ρίζαι τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$. Εἰς τὰς ἐξισώσεις μὲ συμμέτρους συντελεστὰς, πᾶσα ρίζα τῆς μορφῆς $\alpha + \sqrt{\beta}$, ὅπου α, β σύμμετροι καὶ β ὄχι τέλειον τετράγωνον, συνοδεύεται καὶ ἀπὸ τὴν συζυγῇ της, $\alpha - \sqrt{\beta}$, ἀκριβῶς ὅπως καὶ κάθε μιγαδικὴ ρίζα συνοδεύεται καὶ ἀπὸ τὴν συζυγῇ της ὅταν οἱ συντελεσταὶ εἶναι πραγματικοί. Τοῦτο φαίνεται ἀπὸ τὸ κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα. «Ἐάν ἡ ἐξίσωσις $f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ἔχη ρητοὺς (συμμέτρους) συντελεστὰς καὶ δέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $\alpha + \sqrt{\beta}$ ὅπου α καὶ β σύμμετροι καὶ $\sqrt{\beta}$ ἀσύμμετρος, τότε θὰ δέχεται ὡς ρίζαν καὶ τὸν ἀριθμὸν $\alpha - \sqrt{\beta}$ ».

Ἀπόδειξις. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς τὴν τοῦ θεωρήματος τῆς § 41. Μορφοῦμεν δηλ. τὴν παράστασιν

$$\varphi(x) = [x - (\alpha + \sqrt{\beta})] \cdot [x - (\alpha - \sqrt{\beta})] \equiv x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 - \beta$$

ἣτις ἔχει συμμέτρους συντελεστὰς καὶ ἀποδεικνύομεν ὅτι τὸ $\varphi(x)$ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ $f(x)$. Ἐκτελοῦντες τὴν διαίρεσιν τοῦ $f(x)$ διὰ τοῦ δευτεροβάθμιου $\varphi(x)$ θὰ λάβωμεν ἓνα πηλίκον $\Pi(x)$ καὶ ἓνα ὑπόλοιπον $\gamma x + \delta$ ἔχοντα συμμέτρους συντελεστὰς, διότι διαιρετέος καὶ διαιρέτης ἔχουν συντελεστὰς συμμέτρους. Εἰς τὴν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως:

$$(1) \quad f(x) = \varphi(x)\Pi(x) + \gamma x + \delta$$

θέτομεν ὅπου x τὸ $\alpha + \sqrt{\beta}$ ὁπότε, ἐπειδὴ ὁ $\alpha + \sqrt{\beta}$ εἶναι ρίζα τοῦ $f(x)$ καὶ τοῦ $\varphi(x)$, λαμβάνομεν :

$$0 = 0 \cdot \Pi(\alpha + \sqrt{\beta}) + \gamma(\alpha + \sqrt{\beta}) + \delta, \quad \text{ἥτοι} \quad \gamma\alpha + \delta + \gamma\sqrt{\beta} = 0$$

ὅπου $\gamma, \alpha, \beta, \delta$ σύμμετροι καὶ $\sqrt{\beta}$ ἀσύμμετρος. Ἡ τελευταία ἰσότης δὲν δύναται νὰ ἰσχύη εἰμὴ μόνον ὅταν :

$$(2) \quad \gamma\alpha + \delta = 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma = 0$$

(βλέπε [1], § 20). Ἐκ τῶν (2) ἔχομεν $\gamma = 0$ καὶ $\delta = 0$, ἄρα ἡ (1) καθίσταται : $f(x) = \varphi(x)\Pi(x)$. Ἐὰν εἰς τὴν τελευταίαν ταύτην τεθῇ ὅπου x τὸ $\alpha - \sqrt{\beta}$, ἐπειδὴ $\varphi(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$, λαμβάνομεν $f(\alpha - \sqrt{\beta}) = 0$, ἄρα τὸ $\alpha - \sqrt{\beta}$ εἶναι ρίζα τῆς $f(x) = 0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

317) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2x^4 - x^3 - 12x^2 - 16x - 8 = 0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ $1 + \sqrt{5}$ εἶναι ρίζα αὐτῆς. Ὁμοίως ἡ $x^3 - 7x^2 + 5x^2 + 32x^3 + x^2 - 81x + 21 = 0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ $2 + \sqrt{3}$ καὶ ὁ $3 + \sqrt{2}$ εἶναι ρίζαι αὐτῆς.

318) Νὰ μορφωθῇ πολυώνυμον μὲ ἀκεραίους συντελεστάς, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ ρίζας τὸ $1 + \sqrt{2}$ καὶ τὸ $(1 + \sqrt{2})^2$.

319) Νὰ μορφωθῇ ἐξίσωσις μὲ ἀκεραίους συντελεστάς ἔχουσα ὡς ρίζας τὸ i καὶ τὸ $7 - \sqrt{10}$.

320) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ρητοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ $1 - \sqrt{5}$ εἶναι μία ρίζα τῆς $2x^3 + 2\alpha x^2 + \beta x - 4 = 0$.

321) Δείξατε ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 4x^2 - 11x^4 + 40x^3 + 11x^2 - 4x - 1 = 0$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$ καὶ συνάγετε ὅτι ἔχει ὅλας τὰς ρίζας τῆς πραγματικῆς καὶ ἀσυμμέτρους.

322) i) Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἂν ἡ ἐξίσωσις $\alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \dots + \alpha_n = 0$ μὲ συμμετρους συντελεστάς, ἔχει ὡς ρίζαν τὸν $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, τότε θὰ ἔχῃ ὡς ρίζας καὶ τοὺς ἀριθμοὺς $\sqrt{2} - \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $-\sqrt{2} - \sqrt{3}$. ii) Γενικώτερον, ἂν ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωσις ἔχῃ ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, ὅπου $\alpha, \beta, \alpha\beta$ θετικοί, σύμμετροι καὶ ὄχι τέλεια τετράγωνα συμμετρων, τότε θὰ ἔχῃ ρίζας ὅλους τοὺς ἀριθμοὺς $\pm\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta}$.

44. Βαθμὸς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης. Ὡς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν (1) $f(x) \equiv \alpha(x - \rho_1)^{\mu_1}(x - \rho_2)^{\mu_2} \dots (x - \rho_k)^{\mu_k} = 0$, ὅπου $\alpha \neq 0$, $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ θετικοὶ ἀκέραιοι καὶ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο. Προφανῶς οἱ $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως (καὶ τοῦ πολωνύμου $f(x)$).

Ὁ ρ_1 καλεῖται ρίζα βαθμοῦ πολλαπλότητος μ_1 , ὁ ρ_2 βαθμοῦ πολλαπλότητος μ_2 κ.ο.κ. Ἐὰν ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος ἰσοῦται μὲ 1, τότε ἡ ρίζα καλεῖται **ἀπλῆ**. Ἐὰν ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης ἰσοῦται μὲ 2, ἡ ρίζα καλεῖται **διπλῆ** κ.ο.κ. Οὕτω π.χ. ἡ ἐξίσωσις $(x - \rho_1)(x - \rho_2)^2(x - \rho_3)^3 = 0$ ἔχει μίαν ἀπλὴν ρίζαν, τὴν ρ_1 , μίαν διπλὴν, τὴν ρ_2 , καὶ τριπλὴν, τὴν ρ_3 .

Συνήθως, λέγομεν ὅτι ἡ (1) ἔχει $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_k$ ρίζας, ἐξ ὧν αἱ μ_1 εἶναι ἴσαι πρὸς ρ_1 , αἱ μ_2 ἴσαι πρὸς ρ_2 , ... αἱ μ_k ἴσαι πρὸς ρ_k . Τοῦτο ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν κάτωθι γραφὴν τοῦ $f(x)$.

$$f(x) = \underbrace{\alpha(x-q_1)(x-q_1)\cdots(x-q_1)}_{\mu_1 \text{ φορές}} \cdot \underbrace{(x-q_2)(x-q_2)\cdots(x-q_2)}_{\nu_2 \text{ φορές}} \cdots$$

Δυνάμεθα εύκόλως νὰ συμπεράνωμεν ἐκ τῆς (1) ὅτι «ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης q τοῦ $f(x)$ εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ $x-q$, ἥτις διαιρεῖ τὸ $f(x)$ ».

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Νὰ εὐρεθῇ ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος τῆς ρίζης 2 τοῦ πολυωνύμου $x^4-3x^3+x^2+4$.

Λύσις. Διαπιστοῦμεν ὅτι τὸ πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ $x-2$ καὶ τὸ πηλίκον διαιρεῖται πάλιν διὰ $x-2$. Τὸ δεύτερον ὁμως πηλίκον δὲν διαιρεῖται πλέον διὰ $x-2$. Ὡστε τὸ πολυώνυμον διαιρεῖται διὰ $(x-2)^2$, ἀλλὰ ὄχι διὰ $(x-2)^3$. Ἐπομένως ἡ ρίζα $x=2$ εἶναι διπλῇ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

323) Νὰ ἐξετασθῇ ἂν ὁ 2 εἶναι ρίζα τοῦ $x^4-x^3-18x^2+52x-40$ καὶ ἂν εἶναι νὰ εὐρεθῇ ὁ βαθμὸς πολλαπλότητος.

*Ομοίως διὰ τὸ $2/3$ ὡς πρὸς τὴν ἐξίσωσιν $9x^4-12x^3+13x^2-12x+4=0$.

324) Νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ -2 δὲν δύναται νὰ εἶναι πολλαπλῇ ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^3+x^2-ax-4=0$.

325) Νὰ μορφοθῇ ἐξίσωσις μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς ἔχουσα τὴν $2+i$ ὥς διπλὴν ρίζαν ἢ τὸ 2 ὥς διπλὴν ρίζαν καὶ τὸ $1-i$ ὥς ἀπλῇ.

Β'. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΑΣ

45. Ἐὰν θεωρήσωμεν πολυώνυμον τοῦ x μὲ μιγαδικοὺς συντελεστάς, ἢ θεωρία τῆς διαιρέσεως τῶν πολυωνύμων [[1], Κεφάλ. IX] ἰσχύει καὶ δι' αὐτά, τῶν ἀποδείξεων παραμενουσῶν ὡς ἔχουν. Οὕτως, ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως (εὐρεσις πηλίκου καὶ ὑπολοίπου), καὶ ἡ εὕρεσις τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου, γίνονται ἀκριβῶς, ὅπως διὰ τὰ πολυώνυμα μὲ πραγματικοὺς συντελεστάς. Ἐπίσης τὰ θεωρήματα διαιρέσεως διὰ $x-a$, καὶ τὰ θεωρήματα περὶ τῶν ἐκ ταυτότητος μὴ δὲν πολυωνύμων παραμένουν ἐν ἰσχύει.

46. Ἡ γενικωτάτη ἐξίσωσις n βαθμοῦ εἶναι ἡ:

$$(1) \quad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0$$

ὅπου οἱ συντελεσταὶ $a_0, a_1, \dots, a_n$ εἶναι τυχόντες μιγαδικοὶ ἀριθμοί. Διὰ τὴν ἐξίσωσιν ταύτην ὁ Gauss ἀπέδειξε τὸ 1799 ὅτι ἔχει μίαν τοῦλάχιστον ρίζαν (θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας). Ἐκ τούτου ἔπεται ὅτι ἡ (1) ἔχει πάντοτε n ρίζας ἴσας ἢ ἀνίσους. Διότι, ἀφοῦ ἔχει κάποια ρίζαν q_1 (πραγματικὴν ἢ μιγαδικὴν) θὰ εἶναι $f(q_1)=0$ καὶ συνεπῶς τὸ πολυώνυμον $f(x)$ θὰ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-q_1$ καὶ θὰ δίδῃ πηλίκον $\Pi_1(x)$ βαθμοῦ $n-1$. Οὕτως ἀναγόμεθα εἰς τὴν ἐξίσωσιν $\Pi_1(x)=0$, βαθμοῦ κατὰ μονάδα μικροτέρου τῆς ἀρχικῆς, ἥτις θὰ ἔχῃ πάλιν μίαν τοῦλάχιστον ρίζαν ἔστω τὴν q_2 καὶ οὕτω προχωροῦντες θὰ φθάσωμεν τέλος εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἥτις θὰ ἔχῃ μίαν μόνην ρίζαν. Κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν θὰ εὕρωμεν n , ἀκριβῶς, ρίζας τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως (1), ἔστω τὰς $q_1, q_2, \dots, q_n$, αἵτινες ὁμως δὲν θὰ εἶναι πάντοτε διάφοροι ἀλλήλων. Ἐὰν αἱ k ἐξ αὐτῶν εἶναι

ἴσαι πρὸς 0, τότε ἡ 0 θὰ εἶναι ρίζα τῆς (1), βαθμοῦ πολλαπλότητος k . Ἐν πάσῃ περιπτώσει, ἡ (1) λαμβάνει τὴν μορφήν $\alpha_0(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_v)=0$ ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι δὲν δύναται νὰ ἔχη καὶ ἄλλην ρίζαν διάφορον τῶν $q_1, q_2, \dots, q_v$. Ἰσχύει δὲ καὶ ἡ ταυτότης :

$$(2) \quad \alpha_0 x^v + \alpha_1 x^{v-1} + \cdots + \alpha_v \equiv \alpha_0(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_v).$$

Ὅταν οἱ συντελεσταὶ τῆς ἐξισώσεως εἶναι μιγαδικοί, τὸ θεώρημα τῆς § 41 δὲν ἐφαρμόζεται. Ἡ (1) δύναται νὰ ἔχη οἰασθήποτε ρίζας (πραγματικὰς καὶ μιγαδικὰς) χωρὶς κάθε μιγαδικὴ ρίζα νὰ συνοδεύεται ἀπὸ τὴν συζυγῇ της.

Σχέσεις ριζῶν καὶ συντελεστών. Ἄν παραστήσωμεν μὲ $S_1, S_2, \dots, S_v$ τὰ στοιχειώδη συμμετρικὰ πολυώνυμα τῶν ριζῶν $q_1, q_2, \dots, q_v$ [βλ. [1], § 120], δηλαδή $S_1 = \tauὸ \text{ ἄθροισμα τῶν ριζῶν} = q_1 + q_2 + \cdots + q_v$, $S_2 = \text{ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους} = q_1 q_2 + q_1 q_3 + \cdots + q_1 q_v + q_2 q_3 + \cdots$, $S_3 = \text{ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ριζῶν ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους} = q_1 q_2 q_3 + q_1 q_2 q_4 + \cdots + q_1 q_2 q_v + q_2 q_3 q_4 + \cdots$ κ.ο.κ., τέλος δὲ $S_v = \tauὸ \text{ γινόμενον ὅλων} = q_1 q_2 \cdots q_v$ τότε, βάσει τῆς ταυτότητος :

$(x-q_1)(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_v) \equiv x^v - S_1 x^{v-1} + S_2 x^{v-2} - S_3 x^{v-3} + \cdots + (-1)^v S_v$ (βλ. [1], ἄσκ. 506), ἡ ἀνωτέρω σχέσις (2) γράφεται :

$\alpha_0 x^v + \alpha_1 x^{v-1} + \cdots + \alpha_v \equiv \alpha_0 \{ x^v - S_1 x^{v-1} + S_2 x^{v-2} - S_3 x^{v-3} + \cdots + (-1)^v S_v \}$
καὶ λαμβάνομεν ἐξ αὐτῆς τὰς ἰσότητας :

$$(3) \quad S_1 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}, \quad S_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0}, \quad S_3 = -\frac{\alpha_3}{\alpha_0}, \quad \dots, \quad S_v = (-1)^v \frac{\alpha_v}{\alpha_0}$$

παρεχούσας συναρτήσει τῶν συντελεστῶν τὰς συμμετρικὰς παραστάσεις $S_1, S_2, \dots, S_v$ τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως (1).

Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα, τὴν δευτεροβάθμιον ἐξίσωσιν μὲ μιγαδικούς συντελεστάς.

47. Τετραγωνικαὶ ρίζαι μιγάδος. Ἐστω ὁ μιγάς $\alpha + \beta i$ ὅπου α καὶ β πραγματικοὶ καὶ $\beta \neq 0$. Τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $\alpha + \beta i$ εἶναι κάθε μιγάς $x + yi$, τοιοῦτος ὥστε

$$(1) \quad (x + yi)^2 = \alpha + \beta i.$$

Ἄλλ' ἐκ τῆς (1) δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν τοὺς ~~πραγματικοὺς~~ ἀριθμοὺς x καὶ y διότι ἡ (1) γράφεται :

$$x^2 - y^2 + 2xyi = \alpha + \beta i$$

καὶ δίδει τὸ σύστημα :

$$(2) \quad \{ x^2 - y^2 = \alpha, \quad 2xy = \beta \},$$

Ἐκ τῆς 2ας τῶν (2) λαμβάνομεν (3) $x = \frac{\beta}{2y}$ καὶ ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν

πρώτην, ἡ ὁποία γίνεται :

$$\frac{\beta^2}{4y^2} - y^2 = \alpha \quad \eta \quad 4y^4 + 4ay^2 - \beta^2 = 0.$$

Ἐκ τῆς διτετραγώνου ταύτης εὐρίσκομεν δύο τιμὰς διὰ τὸ y^2 , ἔκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἀρνητικὴ (γινόμενον ριζῶν ἐπιλυοῦσης ἀρνητικόν) καὶ ἀπορρίπτεται, διότι ὁ y εἶναι πραγματικὸς ἀριθμὸς. Μένει λοιπὸν ἡ τιμὴ

$$y^2 = \frac{-2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\beta^2}}{4} \quad \text{καὶ} \quad y = \pm \sqrt{\frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}}.$$

Ἀκολουθῶς εὐρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ x ἔκ τῆς (3). Ἐχομεν λοιπὸν **δύο πραγματικὰς** λύσεις τοῦ συστήματος (2) ἥτοι δύο τετραγωνικὰς ρίζας τοῦ $\alpha + \beta i$, ἀντιθέτους.

Διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt{\alpha + \beta i}$ ὅπου ὑποτίθεται $\beta \neq 0$, θὰ παριστῶμεν κατὰ κανὸνα ἐκείνην τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν, ἥ ὁποία ἔχει πραγματικὸν μέρος, θετικόν. Δηλ.

$$\sqrt{\alpha + \beta i} = x + yi \quad \text{ὅπου} \quad x > 0.$$

καὶ διὰ τοῦ $-\sqrt{\alpha + \beta i}$ τὴν ἀντίθετον τετραγ. ρίζαν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $\sqrt{-40-42i}$.

Λύσις. Θέτομεν: $(x+yi)^2 = -40-42i$ ἢ $x^2 - y^2 + 2xyi = -40-42i$, ἄρα $\{x^2 - y^2 = -40, 2xy = -42\}$. Ἐχομεν $x = -\frac{21}{y}$ καὶ ἡ πρώτη γίνεται: $\frac{441}{y^2} - y^2 = -40$, $y^4 - 40y^2 - 441 = 0$, $y^2 = 20 \pm \sqrt{400 + 441} = 20 \pm 29$ καὶ ἐπειδὴ πρέπει $y^2 > 0$ λαμβάνομεν $y^2 = 49$ καὶ $y = 7$ ἢ $y = -7$. Διὰ $y = 7$ ἔχομεν $x = -3$ καὶ διὰ $y = -7$ ἔχομεν $x = 3$.

Ὡστε $\sqrt{-40-42i} = 3-7i$ καὶ $-\sqrt{-40-42i} = -3+7i$.

48. Δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ μιγαδικούς συντελεστές.

Ἐὰν a, b, c εἶναι μιγάδες, αἱ δύο ρίζαι ϱ_1, ϱ_2 τῆς δευτεροβαθμίου ὡς πρὸς z ἐξίσωσως

$$(1) \quad az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

δίδονται ἀπὸ τοὺς γνωστοὺς τύπους τοὺς ἰσχύοντας διὰ τὴν περίπτωσιν πραγματικῶν συντελεστῶν (§ 11). Διότι, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἂν οἱ a, b, c εἶναι πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοί, ἡ (1) μετασχηματίζεται (βλ. § 11) εἰς τὴν:

$$(2) \quad a \left\{ z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} \cdot \left\{ z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right\} = 0$$

καὶ ἐπειδὴ τὸ γινόμενον δύο μιγάδων εἶναι $= 0$ μόνον ὅταν ὁ εἷς τοῦλάχιστον τῶν παραγόντων εἶναι μηδέν, ἡ (2) σχίζεται εἰς δύο πρωτοβαθμίους καὶ λαμβάνομεν τὰς ρίζας τῆς (1):

$$(3) \quad \varrho_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \varrho_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ἐκ τῶν (3) ἔπεται ὅτι ἰσχύουν οἱ θεμελιώδεις τύποι:

$$(4) \quad \varrho_1 + \varrho_2 = -\frac{b}{a}, \quad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{c}{a}$$

καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν μιγαδικῶν συντελεστῶν.

Ἐκ τῶν (4) ἔπονται διὰ τὰ μέτρα τῶν ριζῶν αἱ σχέσεις (ἰδὲ § 9):

$$(6) \quad |\varrho_1| \cdot |\varrho_2| = \left| \frac{c}{a} \right|, \quad |\varrho_1| + |\varrho_2| \geq \left| \frac{b}{a} \right|.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(2-i)z^2+(1-i)z+2+6i=0$ ».
 Λύσις. Ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως:

$$z_{1,2} = \frac{-(1-i) \pm \sqrt{(1-i)^2 - 4(2-i)(2+6i)}}{2(2-i)}$$

Ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ ὑπόρριζον, ὁπότε τοῦτο λαμβάνει τὴν μορφήν:
 $1-2i-1-(8-4i)(2+6i)=-40-42i$.

Αἱ ρίζαι δίδονται τώρα διὰ τοῦ τύπου:

$$z_{1,2} = \frac{-1+i \pm \sqrt{-40-42i}}{2(2-i)}$$

Μένει νὰ εὗρωμεν τὴν $\sqrt{-40-42i}$. Αὕτη εὕρεθῇ εἰς τὸ παράδειγμα τῆς προηγουμένης § 47 καὶ εἶναι ἡ $3-7i$, ὥστε:

$$z_1 = \frac{-1+i-3+7i}{2(2-i)} = \frac{-4+8i}{2(2-i)} = \frac{-2+4i}{2-i} = \frac{(-2+4i)(2+i)}{4+1} = -\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$$

$$\text{καὶ } z_2 = \frac{-1+i+3-7i}{2(2-i)} = \frac{2-6i}{2(2-i)} = \frac{1-3i}{2-i} = \frac{(1-3i)(2+i)}{4+1} = 1-i.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Ἐὰν ὁ ρ εἶναι ρίζα τῆς $z^2+az+\beta=0$ ὅπου α, β πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοὶ $\neq 0$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $|\rho|$ οὐδέποτε κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ρ' ζῶν τῆς:

$$x^2+|\alpha|x-|\beta|=0.$$

Λύσις. Ἐπειδὴ ὁ ρ εἶναι ρίζα τῆς $z^2+az+\beta=0$ θὰ ἔχωμεν $\rho^2+a\rho+\beta=0$ καὶ $\rho^2=-a\rho-\beta$. Ἐὰν λάβωμεν τὰ μέτρα ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς τελευταίας ταύτης θὰ ἔχωμεν (βλέπε § 9):

$$|\rho^2| = |-a\rho-\beta| \quad \text{ἢ} \quad |\rho^2| = |a\rho+\beta| \geq |\beta|-|a\rho|.$$

Ὡστε $|\rho^2|+|\alpha|\cdot|\rho|-|\beta| \geq 0$, δηλαδή ὁ $|\rho|$ τιθέμενος ἀντὶ τοῦ x ἐν τῷ τριωνύμῳ $x^2+|\alpha|x-|\beta|$ τὸ καθιστᾷ ὄχι ἀρνητικόν. Συνεπῶς ὁ $|\rho|$ δὲν κεῖται μεταξὺ τῶν ριζῶν τοῦ τριωνύμου τούτου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

326) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$\alpha) iz^2+2(1-3i)z+6-8i=0, \quad \beta) (1+i)z^2+(1-9i)z+6i-8=0.$$

327) Νὰ εὕρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i}$ ὅπου τὸ σύμβολον $\sqrt{\alpha+\beta i}$ ἔχει τὴν εἰς τὴν § 47 καθορισθεῖσαν σημασίαν.

328) Ἐὰν ρ τυχοῦσα ρίζα τῆς $x^2+ax+\beta=0$, ὅπου α, β πραγματικοὶ ἢ μιγαδικοὶ $\neq 0$ καὶ θ ἡ θετικὴ ρίζα τῆς $x^2-|\alpha|x-|\beta|=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $|\rho| - \frac{|\beta|}{|\rho|} \leq \theta - \frac{|\beta|}{\theta}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ ὅτι κατ' ἀνάγκην $|\rho| \leq \theta$.

329) Ὑπὸ ποίας συνθήκας μεταξὺ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ἡ ἐξίσωσις: $(\alpha_1+\alpha_2)x^2+(\beta_1+\beta_2)x+\gamma_1+\gamma_2=0$ ἔχει μίαν πραγματικὴν ρίζαν καὶ μίαν φανταστικὴν, ἢ ἀμφοτέρας πραγματικὰς;

330) Νὰ εὕρεθοῦν ὅλαι αἱ κυβικαὶ ρίζαι τοῦ ἀριθμοῦ $-2-11i$.

331) Ἐὰν $A_1, A_2, \dots, A_n$ πραγματικοὶ καὶ $\neq 0$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ πραγματικοὶ καὶ διάφοροι ἀλλήλων ἀνὰ δύο καὶ B πραγματικός, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{A_1^2}{x-\alpha_1} + \frac{A_2^2}{x-\alpha_2} + \dots + \frac{A_n^2}{x-\alpha_n} - B$$

ἔχει ὅλας τὰς ρίζας τῆς πραγματικὰς.

332) Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὕφίσταται μεταξὺ τῶν p καὶ q ὅταν ἡ μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2+px+q=0$ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων; Ποῖαί τότε αἱ ρίζαι; Ἐφαρμογὴ: νὰ λυθῇ ἡ $x^2-6x-4=0$.

333) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο ρίζαι τῆς $x^3-13x^2+15x+189=0$ ἔχουν διαφορὰν ἴσην μὲ 2, νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

Ἀκολουθίαι. Πρόοδοι. Σειραί.

49. Ἀκολουθίαι. α') Ἐὰν νοήσωμεν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς γραμμῆς κατὰ σειρὰν αὖξοντος μεγέθους :

$$(1) \quad 1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

καὶ εἰς ἕκαστον φυσικὸν ἀριθμὸν k ἀντιστοιχίσωμεν, βάσει κάποιου νόμου, ἓνα ἀριθμὸν a_k , τότε, ἂν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (1) γράψωμεν τὸν ἀντίστοιχόν του ἀριθμὸν, θὰ προκύψῃ ἓνα ἄπειρον πλῆθος ἀριθμῶν διατεταγμένων εἰς μίαν ἀπέραντον σειρὰν :

$$(2) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Ἐξ ὧν ὁ πρῶτος a_1 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸν 1, ὁ δεύτερος a_2 εἰς τὸν 2, ... ὁ νουστός a_n εἰς τὸν n . Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ κατὰ τὴν ὠρισμένην αὐτὴν τάξιν γεγραμμένων ἀποτελεῖ μίαν **ἀκολουθίαν ἀριθμῶν**, οἱ δὲ ἀριθμοὶ $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ λέγονται **ὄροι** τῆς ἀκολουθίας (ὁ a_1 πρῶτος ὄρος, ὁ a_2 δεύτερος ὄρος, ... ὁ a_n νουστός ὄρος). Ἡ ἀκολουθία (2) γράφεται συντόμως καὶ $\{a_n\}$.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ δώσωμεν τὸν ἐξῆς ὀρισμόν : « Ἀκολουθία ἀριθμῶν εἶναι ἓνα ἄπειρον πλῆθος ἀριθμῶν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (ὅχι ἀναγκαίως ὄλων διαφορετικῶν μεταξὺ των), διατεταγμένων εἰς μίαν ἀπέραντον σειρὰν καὶ δημιουργουμένων βάσει ἐνὸς οἰουδήποτε νόμου ».

Ἡ ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν (1) καὶ τῶν ἀριθμῶν (2) δημιουργεῖ μίαν συνάρτησιν $a(n)$, τῆς ὁποίας ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ n λαμβάνει τὰς ἀκεραίας τιμὰς 1, 2, 3, ..., n , ... (δηλ. ἔχει πεδίον μεταβολῆς τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν (1), [βλέπε [1], § 95]), ἐνῶ αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τὰς τιμὰς 1, 2, 3, ..., n , ... εἶναι οἱ ἀριθμοὶ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ τῆς ἀκολουθίας [βλ. [1], § 97, ὀρισμός]. Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν τοὺς ὄρους τῆς ἀκολουθίας (2) ὡς τιμὰς μιᾶς συναρτήσεως $a(1), a(2), a(3), \dots, a(n), \dots$ μεταχειριζόμεθα δείκτας $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Οὕτω π. χ. ἡ ἀκολουθία :

$$(3) \quad \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad \text{ἢ συντόμως, ἢ} \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν (1), ὅταν εἰς τὴν θέσιν ἑκάστου φυσικοῦ ἀριθμοῦ γραφῇ ὁ ἀντίστροφός του. Οἱ ὄροι τῆς ἀκολουθίας (3) εἶναι αἱ τιμαὶ τῆς συναρτήσεως

$\frac{1}{n}$ διὰ $n=1, 2, 3, \dots, n, \dots$ ἐπ' ἄπειρον.

Ἐπίσης ἡ ἀκολουθία :

$$(4) \quad \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3, \dots \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v, \dots$$

ἡ συντόμως : $\left\{ \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v \right\}$ δημιουργεῖται ἀπὸ τὰς τιμὰς τῆς συναρτήσεως $a_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ διὰ $v=1, 2, 3, \dots v, \dots$ ἐπ' ἀπειρον. Ὁ νουστός ὅρος τῆς ἀκολουθίας $a_v = \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v$ τὴν καθορίζει πλήρως διότι ἐξ αὐτοῦ προκύπτουν πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ὅταν τὸ v διατρέχει ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς.

Ὅπως βλέπομεν ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων, τὸ ἀπλούστερον μέσον διὰ νὰ γνωρίζωμεν ὅλους τοὺς ὅρους μιᾶς ἀκολουθίας, εἶναι νὰ γνωρίζωμεν τί συνάρτησις τοῦ v εἶναι ὁ νουστός (καλούμενος καὶ «γενικὸς») ὅρος a_v , τῆς ἀκολουθίας.

Δὲν εἶναι ὅμως πάντοτε εὐκόλουν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἔκφρασιν τῆς συναρτήσεως $a(v)$ τῆς ὁποίας τιμαὶ εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας, οὔτε πάντοτε δυνατόν. Οὕτω π.χ. ἂν ὡς πρῶτος ὅρος μιᾶς ἀκολουθίας ληφθῇ ὁ 1, ὡς δεύτερος ὁ 1, ἔκαστος δὲ ἄλλος ληφθῇ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του, ἡ ἀκολουθία εἶναι ἐντελῶς ὥρισμένη :

$$(5) \quad a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, a_5=5, a_6=8, a_7=13, a_8=21 \dots$$

διότι κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ὅσους ὅρους θέλομεν, ἀλλ' ἡ ἔκφρασις τοῦ νουστοῦ ὅρου δὲν εἶναι φανερά. (Δύναται ὅμως νὰ εὗρεθῇ ἡ μορφὴ τοῦ a_v διὰ καταλλήλου ἐρευνῆς).

Ἡ (5) ὁρίζεται ἐκ τοῦ νόμου : $a_v = a_{v-1} + a_{v-2}$ καὶ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν : $a_1=1, a_2=1$.

Ὅμοιως ἐκ τοῦ νόμου $a_v = \sqrt{1 + \frac{1}{a_{v-1}}}$ δι' οὗ συνδέονται δύο τυχόντες διαδοχικοὶ ὅροι καὶ ἐκ τοῦ πρώτου ὅρου $a_1 > 0$ καθορίζεται μία ἀκολουθία. Διότι θὰ ἔχωμεν $a_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{a_1}}$, $a_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{a_2}}$ κ.ο.κ. συνεπῶς πάντες οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι τελείως καθωρισμένοι ἀριθμοὶ χωρὶς ἡ ἔκφρασις τοῦ νουστοῦ ὅρου νὰ εἶναι γνωστή.

β') Ἐνίοτε ὁ δείκτης v τοῦ a_v λαμβάνεται οὕτως ὥστε νὰ διατρέχη τὰς τιμὰς 0, 1, 2, 3, ... ὁπότε ἡ ἀκολουθία γράφεται $a_0, a_1, a_2, \dots a_v, \dots$ ὁ δὲ a_{v-1} εἶναι τότε ὁ νουστός ὅρος.

γ') **Φράγματα.** Ἐὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς k , μικρότερος ὅλων τῶν ὀρων τῆς ἀκολουθίας δηλ. ἂν ἡ ἀνισότης $k < a_v$ πληροῦται δι' ὅλα τὰ v ($v=1, 2, 3, \dots$) τοῦ k μένοντος σταθεροῦ, τότε ὁ k λέγεται κάτω φράγμα τῆς ἀκολουθίας.

Ὅμοιως, ἂν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος ὅλων τῶν ὀρων τῆς ἀκολουθίας, οὗτος λέγεται ἄνω φράγμα τῆς ἀκολουθίας.

Ἄν ὑπάρχῃ καὶ κάτω καὶ ἄνω φράγμα, ἡ ἀκολουθία λέγεται φραγμένη.

δ') **Μονότονοι ακολουθίαι.** Ἐὰν οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ βαίνουν αὐξανόμενοι ἢ μὴ ἐλαττούμενοι δηλ. ἂν εἶναι $a_n \leq a_{n+1}$ δι' ὅλα τὰ n ($n=1, 2, \dots$) τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **αὔξουσα**. Ἐὰν οἱ ὅροι βαίνουν ἐλαττούμενοι ἢ μὴ αὐξανόμενοι, δηλ. $a_n \geq a_{n+1}$ δι' ὅλα τὰ n , τότε ἡ ἀκολουθία λέγεται **φθίνουσα**. Αἱ αὔξουσαι καὶ αἱ φθίνουσες ἀκολουθίαι λέγονται μὲ ἓνα ὄνομα, **μονότονοι**.

ε') **Ὁριον τὸ μηδέν.** Ἐστω ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία :

$$a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \dots, a_n = \frac{1}{n}, \dots$$

Ταύτης, οὐδεὶς ὅρος εἶναι μηδέν. Ὅσον ὅμως αὐξάνει τὸ n , οἱ ὅροι της καθίστανται ὁλοὲν μικρότεροι, πλησιάζοντες ὁλοὲν καὶ περισσότερον πρὸς τὸ μηδέν. Συγκεκριμένως, ἂν δοθῇ ὅποιοσδήποτε θετικὸς ἀριθμὸς ε , ὅσονδήποτε μικρὸς καὶ ἂν εἶναι οὗτος, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι, ἀπὸ μιᾶς τάξεως (δείκτου) καὶ πέραν, μικρότεροι τοῦ ε . Πράγματι, ἡ ἀνισότης $a_n < \varepsilon$ ἦτοι $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ἀληθεύει ὅταν $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Ὑπάρχει λοιπὸν ὅρος τῆς ἀκολουθίας, μικρότερος τοῦ αὐθαίρετως μικροῦ, θετικοῦ ε καὶ πάντες οἱ μετ' αὐτὸν ὅροι εἶναι ἐπίσης μικρότεροι τοῦ ε . Τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν χαρακτηρίζομεν, ὥς τείνουσαν πρὸς τὸ μηδέν ἢ ἔχουσαν ὅριον τὸ μηδέν.

Ἐστω ἐπίσης ἡ ἀκολουθία :

$$a_1 = \frac{-1}{2}, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{-1}{3}, \dots, a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \dots$$

Δι' αὐτὴν συμβαίνει, ὅτι καὶ μὲ τὴν προηγουμένην, δηλ. οἱ ὅροι της πλησιάζουν ὁλοὲν καὶ στενώτερον πρὸς τὸ μηδέν μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι ταλαντεύονται ἑκατέρωθεν τοῦ μηδενός. Συνεπῶς θὰ εἰπώμεν δι' αὐτὴν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν.

Γενικῶς, μία ἀκολουθία $\{a_n\}$ λέγομεν ὅτι ἔχει ὅριον τὸ μηδέν, ὅταν δοθέντος οἰοσδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε (ὅσονδήποτε μικροῦ καὶ ἂν θέλῃ τις) οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μικρότεροι τοῦ ε , ἀπὸ τινος ὅρου καὶ πέραν. (Δηλ. δοθέντος τοῦ αὐθαίρετως μικροῦ ε , ὑπάρχει πάντοτε ἓνας δείκτης N τοιοῦτος ὥστε δι' ὅλους τοὺς δείκτας $n \geq N$ νὰ εἶναι $|a_n| < \varepsilon$).

Γράφομεν τότε συμβολικῶς :

$$\text{ὅρ } a_n = 0 \quad \text{ἢ ἐνίστε, } a_n \rightarrow 0.$$

$$\text{Ἐτσι π.χ. εἶναι } \text{ὅρ } \frac{1}{n} = 0, \quad \text{ὅρ } \frac{(-1)^n}{n} = 0.$$

Πολλάκις λέγομεν ὅτι ἡ «μεταβλητὴ ποσότης a_n ἔχει ὅριον τὸ μηδέν», ἀντὶ «ἡ ἀκολουθία $\{a_n\}$ ἔχει ὅριον τὸ μηδέν».

στ') **Ὁριον πεπερασμένον.** Δοθείσης τῆς ἀκολουθίας $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ἔὰν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς l τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἀκολουθία $a_1 - l, a_2 - l, a_3 - l, \dots, a_n - l, \dots$ νὰ τείνῃ πρὸς τὸ μηδέν, τότε λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα ἀκολουθία $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ἔχει ὅριον τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν l . Γράφομεν δὲ τότε :

ορ $a_n = l$ ή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$ ή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Με άλλας λέξεις, όταν η διαφορά $a_n - l$ τείνει προς τὸ μηδέν, τότε η μεταβλητή a_n τείνει προς τὴν σταθεράν l (ἔχει ὅριον τὴν l).

Οὕτω π. χ. η μεταβλητὴ $\frac{n+1}{n}$ τείνει πρὸς τὴν μονάδα, ὅταν $n \rightarrow \infty$, διότι η διαφορά $\frac{n+1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν.

ζ') "Οριον τὸ ἄπειρον. "Όταν τοῦ n αὐξάνοντος, τὸ a_n αὐξάνη ὑπερβαίνον κάθε φράγμα, ὅταν δηλ. δοθέντος οἰουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ M ὅσονδήποτε μεγάλου, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ὑπερβαίνουν τὸν M ἀπὸ τινος ὅρου καὶ ἔπειτα, τότε λέγομεν ὅτι η ἀκολουθία $\{a_n\}$ (ἢ η μεταβλητὴ ποσότης a_n) ἔχει ὅριον (ἢ τείνει πρὸς) τὸ ἄπειρον. Γράφομεν δέ :

ορ $a_n = \infty$ ή $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Παράδειγμα τοιαύτης ἀκολουθίας εἶναι ἡ $\{n\}$ ὅπου n , σταθερὸς > 1 (βλ. § 53).

η') "Υπαρξίς ὁρίου μονοτόνου ἀκολουθίας. Εἶναι ἐν γένει δύσκολον πρόβλημα τὸ νὰ ἐξακριβώσωμεν ἂν μία δεδομένη ἀκολουθία τείνη πρὸς κάποιο ὅριον. "Ενα πολύτιμον κανόνα δίδει πρὸς τὴν κατεύθυνσιν ταύτην τὸ κάτωθι θεώρημα :

Θεώρημα. «Εὰν μία ἀκολουθία εἶναι αὐξουσα καὶ ἔχει ἄνω φράγμα τὸ c , τότε η ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓνα ὅριον, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ c . "Εὰν μία ἀκολουθία εἶναι φθίνουσα καὶ ἔχει κάτω φράγμα k , τότε η ἀκολουθία αὕτη τείνει πρὸς ἓνα ὅριον, μεγαλύτερον ἢ ἴσον τοῦ k ».

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου ἀπαιτεῖ θεωρίας ἐξερχομένης τοῦ πλαισίου τῆς Στοιχειώδους Ἀλγέβρας καὶ συνεπῶς δὲν θὰ δοθῇ ἐνταῦθα.

Ἀς ἐφαρμόσωμεν τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἰς τὸ ἐξῆς ζήτημα: "Εάν θεωρήσωμεν τὴν ἀπέραντον ἀκολουθίαν τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἰς δοθέντα κύκλον ἐγγεγραμμένων κανονικῶν πολυγώνων: $E_3, E_4, E_5, \dots, E_n, \dots$ ὅπου E_n τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κανον. πολυγώνου μὲ n πλευράς, τείνει ἡ ἀκολουθία αὕτη πρὸς ἓνα ὅριον;

"Επειδὴ ἡ ἀκολουθία αὕτη ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι εἶναι αὐξουσα καὶ ἐπειδὴ ἔχει ὡς ἄνω φράγμα τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς οἰουδήποτε περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον κυρτοῦ πολυγώνου, συνάγομεν, βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ὅτι πράγματι τείνει πρὸς ἓνα ὁρισμένον ὅριον. Τὸ ὅριον τοῦτο καλεῖται ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

θ') ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. «Δοθέντος ὅτι $0 < x_0 < \beta$ καὶ $a > 0$ σχηματίζομεν τὴν ἀκολουθίαν $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ὡς κάτωθι :

$$x_1 = \sqrt{\frac{a\beta^2 + x_0^2}{a+1}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{a\beta^2 + x_1^2}{a+1}}, \quad \dots, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{a\beta^2 + x_n^2}{a+1}}, \quad \dots$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη ἔχει ἄνω φράγμα τὸ β καὶ ὅτι εἶναι αὐξουσα. Λύσις. Ἀφοῦ $0 < x_0 < \beta$ θὰ εἶναι καὶ $x_0^2 < \beta^2$, $a\beta^2 + x_0^2 < a\beta^2 + \beta^2 = \beta^2(a+1)$ καὶ

$\frac{a\beta^2 + x_0^2}{a+1} < \beta^2$ καὶ τέλος, $\sqrt{\frac{a\beta^2 + x_0^2}{a+1}} < \beta$, ἥτοι $x_1 < \beta$. Συνεπῶς, ἀφοῦ $0 < x_1 < \beta$, θὰ εἶναι δι' ὁμοίον λόγον καὶ: $x_2 < \beta$. Τοῦτο πάλιν συνεπάγεται $x_3 < \beta$ κ.ο.κ. Ὡστε γενικῶς $x_n < \beta$ διὰ πᾶν n (ἐπαγωγικῶς) δηλ. ἡ ἀκολουθία ἔχει ἄνω φράγμα τὸ β .

$$^{\circ}\text{Εξ ἄλλου } x_{v+1}^2 = \frac{\alpha\beta^2 + x_v^2}{\alpha+1} = \frac{(\alpha+1)x_v^2 + \alpha\beta^2 - \alpha x_v^2}{(\alpha+1)} = x_v^2 + \alpha \frac{\beta^2 - x_v^2}{\alpha+1}, \text{ ἄρα:}$$

$$x_{v+1}^2 - x_v^2 = \alpha \frac{\beta^2 - x_v^2}{\alpha+1} \text{ καί, ἐπειδὴ } \beta^2 - x_v^2 > 0 \text{ ὡς ἐδείχθη, διὰ τοῦτο } x_{v+1}^2 - x_v^2 > 0 \text{ ἢ } x_{v+1}^2 > x_v^2 \text{ ἢ } x_{v+1} > x_v. \text{ Τοῦτο δεικνύει ὅτι εἶναι αὐξοῦσα ἀκολουθία.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. <Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία :

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1 + \frac{\alpha_0}{\alpha_0 + 1}, \alpha_2 = 1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 1}, \dots, \alpha_{v+1} = 1 + \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1}, \dots$$

εἶναι αὐξοῦσα καὶ ἔχει ἄνω φράγμα>.

Δύσις. Ἐν σχηματίζωμεν τὴν διαφορὰν:

$$\alpha_{v+1} - \alpha_v = \frac{-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1}{\alpha_v + 1},$$

βλέπομεν ὅτι τὸ σημεῖον αὐτῆς ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ σημείου τῆς παραστάσεως $-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1$.

Ἐς ἴδωμεν τί γίνεται ἡ παράστασις αὐτή, ὅταν τὸ v γίνῃ $v+1$. Θὰ ἔχωμεν τότε:

$$-\alpha_{v+1}^2 + \alpha_{v+1} + 1 = -\left(1 + \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1}\right)^2 + \left(1 + \frac{\alpha_v}{\alpha_v + 1}\right) + 1 = \frac{-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1}{(\alpha_v + 1)^2},$$

δηλ. βλέπομεν ὅτι ἡ $-\alpha_{v+1}^2 + \alpha_{v+1} + 1$ εἶναι ὁμόσημος πρὸς τὴν $-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1$. Ἀλλ' ὅταν $v=1$, τὸ $-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1$ εἶναι θετικόν, συνεπῶς θὰ εἶναι καὶ διὰ $v=2$ πάλιν θετικόν, ἄρα καὶ διὰ $v=3$ κ. ο. κ., ἥτοι (κατὰ τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπαγωγῆς) δι' ὅλα τὰ v θὰ εἶναι τὸ $-\alpha_v^2 + \alpha_v + 1$ θετικόν. Ὡστε πάντοτε: $\alpha_{v+1} - \alpha_v > 0$, ἥτοι $\alpha_{v+1} > \alpha_v$, δηλ. ἡ ἀκολουθία εἶναι αὐξοῦσα.

$$^{\circ}\text{Εξ ἄλλου } \alpha_v = 1 + \frac{\alpha_{v-1}}{\alpha_{v-1} + 1} < 1 + 1, \text{ ἥτοι } \alpha_v < 2 \text{ δι' ὅλα τὰ } v, \text{ ἄρα ἔχει ἄνω}$$

φράγμα τὸ 2.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. <Δοθέντων τῶν σταθερῶν ἀριθμῶν α, β, λ , ὅπου $\lambda \neq 0$ καὶ $\neq 1$, σχηματίζωμεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$(6) \quad x_1 = \alpha, \quad x_2 = \lambda x_1 + \beta, \quad x_3 = \lambda x_2 + \beta, \dots, x_v = \lambda x_{v-1} + \beta, \dots$$

Νὰ εὕρεθῇ ὁ νουστός ὅρος ταύτης, συναρτήσει τοῦ v .

Δύσις. Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰ μέλη τῆς πρώτης ἰσότητος ἐκ τῶν (6) ἐπὶ λ^{v-1} , τῆς δευτέρας ἐπὶ λ^{v-2} , τῆς τρίτης ἐπὶ λ^{v-3} , ... καὶ τῆς προτελευταίας ἐπὶ λ θὰ λάβωμεν τὰς ἰσότητας: $\{\lambda^{v-1}x_1 = \lambda^{v-1}\alpha, \lambda^{v-2}x_2 = \lambda^{v-1}x_1 + \beta\lambda^{v-2}, \lambda^{v-3}x_3 = \lambda^{v-2}x_2 + \beta\lambda^{v-3}, \dots, \lambda x_{v-1} = \lambda^2 x_{v-2} + \beta\lambda, x_v = \lambda x_{v-1} + \beta\}$.

Ἐὰν ταύτας προσθέσωμεν κατὰ μέλη καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι οἱ εἰς τὰ πρῶτα μέλη εὐρισκόμενοι ὅροι, πλὴν τοῦ x_v , εὐρίσκονται καὶ εἰς τὰ δευτέρω καὶ συνεπῶς ἐξαλείφονται, λαμβάνομεν

$$x_v = \lambda^{v-1}\alpha + \beta(\lambda^{v-2} + \lambda^{v-3} + \dots + \lambda + 1)$$

ἢ ἐπειδὴ τὸ ἐντὸς παρενθέσεως εἶναι κατὰ γνωστὴν ταυτότητα $[[1] \S 64 \text{ ii}]$ ἴσον μὲ $(\lambda^{v-1} - 1)/(\lambda - 1)$ ἢ μορφή τοῦ νουστοῦ ὅρου τῆς ἀκολουθίας εἶναι:

$$x_v = \alpha\lambda^{v-1} + \beta \frac{\lambda^{v-1} - 1}{\lambda - 1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

334) Είς την ακολουθίαν $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ἕκαστος ὅρος συνδέεται μὲ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς σχέσεως $x_n = \frac{3+x_{n-1}}{1-x_{n-1}}$ εἶναι δὲ $x_1 \neq +1$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ πρῶτοι ὅροι τῆς ἀκολουθίας, συναρτήσῃ τοῦ x_1 καὶ νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ἐπαναλαμβάνονται περιοδικῶς. Ἐάν $x_1=2$, ποῖος εἶναι ὁ 1137ος ὅρος τῆς ἀκολουθίας;

335) Ἐάν $\alpha > 0$ νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ (αὐξουσα) ἀκολουθία:

$$x_1 = \sqrt{\alpha}, \quad x_2 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}, \quad x_3 = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha}}} \quad \text{κ.ο.κ.}$$

ἔχει ἄνω φράγμα τὸν $\alpha + 1$.

336) Ἐάν $\alpha > 0, \beta > 0$ καὶ σχηματίζωμεν τὴν ἀκολουθίαν

$$x_0 = \alpha, \quad x_1 = \alpha + \frac{\beta x_0}{\alpha x_0 + \beta}, \dots, \quad x_{n+1} = \alpha + \frac{\beta x_n}{\alpha x_n + \beta}, \dots$$

νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη, (βλέπε παρ/μα 2ον, § 49).

337) Ἐάν εἰς μίαν ἀκολουθίαν εἶναι $\alpha_1=1, \alpha_2=1$ καὶ $\alpha_\mu = \alpha_{\mu-1} + \alpha_{\mu-2}$ (διὰ $\mu=3, 4, \dots$) νὰ δειχθῇ τότε:

$$i) \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 = \alpha_n \alpha_{n+1}.$$

$$ii) \alpha_3 + \alpha_6 + \dots + \alpha_{3n} = \frac{1}{2} (\alpha_{3n+2} - 1).$$

$$iii) \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{2n+1} = \alpha_{2n+2}.$$

338) Διὰ τὴν ἀνωτέρω ἀκολουθίαν (Fibonacci) ν' ἀποδειχθοῦν οἱ τύποι:

$$i) \alpha_{n-1}^2 + \alpha_n^2 = \alpha_{2n-1}.$$

$$ii) 1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = \alpha_{2n+1}.$$

$$iii) \alpha_n^2 - \alpha_{n-1} \alpha_{n+1} = (-1)^{n-1}.$$

339) Δίδεται ὅτι μεταξὺ τριῶν οἰωνδήποτε διαδοχικῶν ὄρων τῆς ἀκολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ ὑφίσταται ἡ σχέσις: $2(n+2)\alpha_{n+2} - 3n\alpha_{n+1} + (n-1)\alpha_n = 0$ (δηλαδή διὰ $n=0, 1, 2, \dots$), ἐπίσης δίδεται ὅτι $\alpha_0=1$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α_n συναρτήσῃ τοῦ n διὰ $n \geq 2$.

340) Δίδονται δύο ἀκολουθίαι θετικῶν ἀριθμῶν: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ καὶ $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$ τῶν ὁποίων οἱ ὅροι συνδέονται διὰ τῶν σχέσεων:

$$\alpha_n = \frac{1}{2} (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) \quad \text{καὶ} \quad \alpha_n \beta_n = k^2 \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

ὅπου k σταθερὸς > 0 . Δίδεται ἐπίσης ὅτι $\alpha_0 > \beta_0$. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ πρώτη ἔχει κάτω φράγμα τὸν k καὶ εἶναι φθίνουσα, ἡ δὲ δευτέρα ἄνω φράγμα τὸν k καὶ εἶναι αὐξουσα. Ἐάν δὲ τεθῇ $\alpha_n = k(1+2\lambda_n)$ ($n=0, 1, \dots$) νὰ δειχθῇ ὅτι τότε $\lambda_n < (\lambda_{n-1})^2$ καὶ $\lambda_n < \lambda_0^n$.

341) Μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ δίδεται ὁ πρῶτος ὅρος α_1 καὶ ὅτι ὑφίσταται ἡ σχέσις $2\alpha_n \alpha_{n+1} = \alpha_n^2 + 1$, διὰ $n=1, 2, \dots$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ α_n συναρτήσῃ τοῦ n καὶ τοῦ α_1 .

342) Ἄνισότης τοῦ Bernoulli: «Ἐάν n φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ϵ ἀριθμὸς μεγάλου τερος τοῦ -1 , τότε ἀληθεύει ἡ σχέσις: $(1+\epsilon)^n \geq 1+n\epsilon$ ».

Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀνωτέρω σχέσις ἐπαγωγικῶς. (Ἡ ἀνισότης τοῦ Bernoulli εἶναι λίαν χρησιμὸς εἰς διάφορα ζητήματα τῶν ἀκολουθιῶν καὶ ἐν γένει διὰ τὴν ἀπόδειξιν διαφόρων ἀνισοτήτων).

343) Ἐάν $\alpha > 1$ καὶ n φυσικὸς ἀριθμὸς νὰ δειχθῇ ὅτι τότε διὰ τιμὰς τοῦ n ἀρκετὰ μεγάλας, ἡ $\sqrt[n]{\alpha}$ ὑπερβαίνει τὴν μονάδα κατὰ θετικὴν ποσότητα μικροτέραν οἰουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ϵ , ὅσονδήποτε μικροῦ. Ποῖον τὸ $\sqrt[n]{\alpha}$ ὅταν $n \rightarrow \infty$;

(Υπόδ. Νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἀνισότης τοῦ Bernoulli).

344) Ν' αποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία:

$$\sqrt[1]{2}, \sqrt[2]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{5}, \dots, \sqrt[n]{n+1}, \sqrt[n+1]{n+2}, \dots$$

εἶναι φθίνουσα.

50. Ἀριθμητικαὶ πρόοδοι. α') Καλεῖται ἀριθμητικὴ πρόοδος μία ἀκολουθία ἀριθμῶν ἐκ τῶν ὁποίων ἕκαστος γίνεται ἐκ τοῦ προηγουμένου του διὰ τῆς προσθήκης τοῦ αὐτοῦ πάντοτε σταθεροῦ ἀριθμοῦ, ὅστις καλεῖται λόγος τῆς προόδου. Ἡ διαφορὰ δύο διαδοχικῶν ὄρων εἶναι κατὰ συνέπειαν σταθερὰ εἰς τὴν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

β') **Εὗρεσις τοῦ νυοστοῦ ὄρου.** Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ α τὸν πρῶτον ὄρον τῆς προόδου καὶ διὰ τοῦ ω τὸν λόγον, τότε ὁ 2ος ὄρος θὰ εἶναι α+ω, ὁ 3ος, (α+ω)+ω=α+2ω, ὁ 4ος, (α+2ω)+ω=α+3ω κ.ο.κ. Βλέπομεν εὐκόλως ὅτι ὁ νυοστός ὄρος θὰ εἶναι: α+(ν-1)ω.

Οὕτω λαμβάνομεν τὸν τύπον:

$$(1) \quad \tau = \alpha + (n-1)\omega$$

ὅπου τ παριστᾷ τὸν ὄρον τάξεως ν.

Συνήθως ἐξετάζομεν μόνον πεπερασμένον πλήθος διαδοχικῶν ὄρων τῆς ἀριθμ. προόδου, ὅποτε ὑπάρχει πρῶτος καὶ τελευταῖος, καλούμενοι ἄκροι ὄροι τῆς προόδου.

γ') **Παρεμβολή.** Δοθέντων δύο ἀριθμῶν Α καὶ Β, καλεῖται παρεμβολὴ ἐνδιαμέσων ἀριθμητικῶν ἡ εὗρεσις ὠρισμένου πλήθους ἀριθμῶν, οἵτινες ὁμοῦ μετὰ τῶν δοθέντων ν' ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον ἔχουσαν πρῶτον ὄρον τὸν Α καὶ τελευταῖον τὸν Β.

Ἐστω ν τὸ πλήθος τῶν παρεμβλητέων ἀριθμῶν, τοὺς ὁποίους ἄς παραστήσωμεν μὲ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Οἱ ἀριθμοὶ Α, $x_1, x_2, \dots, x_n$, Β ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον. Ἡ πρόοδος αὕτη θὰ εἶναι ὠρισμένη ἂν εὗρεθῇ ὁ λόγος αὐτῆς ω. Ἐπειδὴ τὸ πλήθος ὄλων τῶν ὄρων τῆς προόδου εἶναι ν+2, ὁ Β θὰ εἶναι τάξεως ν+2 καὶ συνεπῶς θὰ ἰσοῦται μὲ $A + (n+2-1)\omega = A + (n+1)\omega$. Ὡστε $B = A + (n+1)\omega$ καὶ $\omega = \frac{B-A}{n+1}$.

Ὅρισθέντος τοῦ λόγου ω τῆς σχηματισθησομένης προόδου, αὕτη εἶναι πλέον ὠρισμένη. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ θὰ δίδωνται ὑπὸ τῶν ἰσοτήτων

$$x_1 = A + \frac{B-A}{n+1}, \quad x_2 = A + 2 \frac{B-A}{n+1}, \quad \dots, \quad x_n = A + n \frac{B-A}{n+1}, \quad \dots$$

δ') **Υπολογισμὸς τοῦ ἄθροίσματος τῶν ν πρώτων ὄρων ἀριθμ. προόδου.**

Θεώρημα I. «Εἰς πᾶσαν ἀριθμ. πρόοδον τὸ ἄθροισμα δύο ὄρων ἰσάκεις ἀπεχόντων ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὄρους εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων».

Ἀπόδειξις. Ἐστω α, β, γ, ..., ρ, σ, τ ἡ ἀριθμ. πρόοδος. Ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ ἐκάστου ὄρου μεῖον τὸν προηγουμένον του εἶναι σταθερὰ (ἴση πρὸς τὸν λόγον τῆς προόδου), θὰ ἔχωμεν: β-α=τ-σ, ἄρα: β+σ=α+τ. Ὁμοίως γ-β=σ-ρ, ἄρα: γ+ρ=β+σ κ.ο.κ.

Παρατήρησις 1^η. Ἐὰν ὑπάρχῃ μεσαῖος ὅρος, δηλ. ὅρος ἰσάκεις ἀπέχων ἀπὸ τοὺς δύο ἄκρους (καὶ τοῦτο θὰ συμβαίνει ὅταν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων εἶναι περιττόν), τότε τὸ διπλάσιον τοῦ μεσαίου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων. Ἐὰν π.χ. ἔχωμεν πρόοδον μὲ τρεῖς ὄρους α, β, γ, τότε $\beta - \alpha = \gamma - \beta$ καὶ συνεπῶς $2\beta = \alpha + \gamma$ ἢ $\beta = (\alpha + \gamma)/2$. Ἄν ἡ πρόοδος ἔχῃ πέντε ὄρους α, β, γ, δ, ε, τότε θὰ εἶναι προφανῶς: $2\gamma = \beta + \delta = \alpha + \epsilon$ ὁπότε $\gamma = (\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon)/5$ κ.ο.κ.

Παρατήρησις 2^α. Μέσος ἀριθμητικὸς ν ἀριθμῶν $a_1, a_2, \dots, a_n$ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς:

$$\mu = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) / n.$$

Θεώρημα II. «Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἀριθμ. προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν ἄκρων ἐπὶ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων».

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἀριθμ. πρόοδον α, β, γ, ..., ρ, σ, τ καὶ ἄς καλέσωμεν Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς. Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητες:

$$\Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \rho + \sigma + \tau$$

$$\Sigma = \tau + \sigma + \rho + \dots + \gamma + \beta + \alpha$$

καὶ διὰ προσθέσεως αὐτῶν κατὰ μέλη, ἔχομεν τὴν ἰσότητα:

$$2\Sigma = (\alpha + \tau) + (\beta + \sigma) + (\gamma + \rho) + \dots + (\rho + \gamma) + (\sigma + \beta) + (\tau + \alpha).$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν ἐντὸς τῶν παρενθέσεων ἀθροισμάτων εἶναι ὅσον καὶ τὸ πλῆθος τῶν ὄρων, δηλ. ν. Ἐπίσης ὅτι ἕκαστον τοιοῦτον ἄθροισμα ἰσοῦται μὲ τὸ $\alpha + \tau$ συμφώνως πρὸς τὸ προηγούμενον θεώρημα. Ὡστε $2\Sigma = (\alpha + \tau)\nu$ καί:

(2)

$$\Sigma = \frac{\alpha + \tau}{2} \nu \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

Πόρισμα. «Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἀριθμ. προόδου παρέχεται συναρτήσει τοῦ πρώτου ὄρου α τοῦ λόγου ω καὶ τοῦ πλῆθους ν τῶν ὄρων διὰ τοῦ τύπου:

(3)

$$\Sigma = \frac{2\alpha + (n-1)\omega}{2} \cdot n \quad \text{»}.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ εἰς τὸν τύπον $\Sigma = \frac{\alpha + \tau}{2} \cdot \nu$, νὰ ἀντικατασταθῇ τὸ τ συναρτήσει τῶν α, ω, ν ἐκ τῆς σχέσεως: $\tau = \alpha + (n-1)\omega$. Οὕτω θὰ λάβωμεν:

$$\Sigma = \frac{\alpha + \alpha + (n-1)\omega}{2} \cdot n = \frac{2\alpha + (n-1)\omega}{2} \cdot n \quad \text{ὁ.ἔ.δ.}$$

Ἐφαρμογή. «Ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ν πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$ ».

Πρὸς ὑπολογισμὸν τούτου χρησιμοποιοῦμεν τὴν ταυτότητα:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Ἐφαρμόζοντες αὐτὴν διὰ $n=1, 2, 3, \dots, n$ λαμβάνομεν ν ἰσότητας:

$$2^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$

$$3^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$

$$4^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$

$$= \dots \dots \dots$$

$$(v+1)^3 = v^3 + 3v^2 + 3v + 1$$

Ἐὰν προσθέσωμεν κατὰ μέλη τὰς v ταύτας ἰσότητες, φροντίσωμεν δὲ νὰ γίνῃ ἡ πρόσθεσις τῶν δευτέρων μελῶν κατὰ στήλας, θὰ λάβωμεν τὴν ἰσότητα :

$$2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + v^3 + (v+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3) + \\ + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + v) + v.$$

Οἱ ὅροι $2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + v^3$ ἐξαλείφονται ἀπὸ ἀμφοτέρω τὰ μέλη.

Ἐὰν τεθῇ : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + v^2 = \Sigma_2$ καὶ $1 + 2 + 3 + \dots + v = \Sigma_1$, θὰ ἔχωμεν :

$$(2) \quad (v+1)^3 = v + 1 + 3\Sigma_2 + 3\Sigma_1.$$

Ἀλλὰ τὸ Σ_1 εἶναι τὸ ἄθροισμα v ὅρων ἀριθμ. προόδου (μὲ λόγον 1), συνε-

$$\text{πῶς : } \Sigma_1 = \frac{1+v}{2} v.$$

Ἀντικαθιστῶντες τὸ Σ_1 εἰς τὴν (2) εὐρίσκομεν :

$$(v+1)^3 = (v+1) + 3\Sigma_2 + \frac{3}{2} v(v+1), \quad \text{ἥτοι :}$$

$$3\Sigma_2 = (v+1)^3 - (v+1) - \frac{3}{2} v(v+1) = (v+1) \left\{ (v+1)^2 - 1 - \frac{3v}{2} \right\} = \\ = (v+1) \frac{2v^2 + 4v + 2 - 2 - 3v}{2} = \frac{(v+1)(2v^2 + v)}{2} = \frac{v(v+1)(2v+1)}{2}.$$

Οὕτω φθάνομεν τελικῶς εἰς τὸν τύπον :

$$(4) \quad \boxed{\Sigma_2 = \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}}$$

παρέχοντα τὸ ἄθροισμα Σ_2 τῶν τετραγώνων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως v .

Παρατήρησις. Ἀναχωροῦντες ἀπὸ τὴν ταυτότητα $(v+1)^4 = v^4 + 4v^3 + 6v^2 + 4v + 1$ καὶ ἐργαζόμενοι ὁμοίως δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν καὶ τὸ ἄθροισμα Σ_3 τῶν κύβων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως v (ἀφοῦ λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν τύπον διὰ τὸ ἄθροισμα Σ_2 , τῶν τετραγώνων). Εὐρίσκεται δὲ ὅτι :

$$(5) \quad \boxed{\Sigma_3 = \left\{ \frac{v(v+1)}{2} \right\}^2}$$

δηλαδή : «Τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν v πρώτων ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν».

Ἡ μέθοδος εἶναι προφανῶς γενικὴ καὶ δι' αὐτῆς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν βαθμυδὸν καὶ τὸ Σ_4 , Σ_5 κ.ο.κ.

ε') **Παράστασις ἀριθμῶν ἐν ἀριθμ. προόδῳ.** Εἰς διάφορα ζητήματα εἰσέρχονται τρία, τέσσαρα κ.τ.λ. ἄγνωστα ποσὰ ἀποτελοῦντα ἀριθμ. πρόοδον. Τὰ

ποσά ταῦτα σκόπιμον εἶναι νὰ παριστῶμεν ὡς ἐξῆς: 1ον) Τρία ποσά α , β , γ ἐν ἀριθμ. προόδῳ δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν $x-\omega$, x , $x+\omega$. 2ον) Τέσσαρα ποσά α , β , γ , δ ἐν ἀριθμ. προόδῳ δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν: $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$. 3ον) Πέντε ποσά α , β , γ , δ , ϵ ἐν ἀριθμ. προόδῳ δύνανται νὰ παρασταθῶσι διὰ τῶν: $x-2\omega$, $x-\omega$, x , $x+\omega$, $x+2\omega$ κ.ο.κ.

Διὰ τῆς παραστάσεως ταύτης ὑπαιστέρονται εἰς τὸ πρόβλημα δύο μόνον ἄγνωστοι ὁ x καὶ ὁ ω .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. «Νὰ εὗρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν k πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν».

Λύσις. Θὰ εἶναι: $\Sigma = 1+3+5+7+\dots = \frac{2 \cdot 1 + (k-1) \cdot 2}{2} \cdot k$, συμφώνως πρὸς τὸν τύπον $\Sigma = \frac{2\alpha + (v-1)\omega}{2} v$, ὅπου ἐνταῦθα εἶναι: $\alpha=1$, $\omega=2$, $v=k$. Ὡστε $\Sigma = k^2$, δηλ. «τὸ ἄθροισμα τῶν k πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ πληθους αὐτῶν».

2ον. «Νὰ εὗρεθῶν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀποτελοῦντες ἀριθμ. πρόοδον, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα αὐτῶν 4α καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρέφων των $\frac{1}{\beta}$ ».

Λύσις. Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ θὰ εἶναι τῆς μορφῆς: $x-3\omega$, $x-\omega$, $x+\omega$, $x+3\omega$, θὰ ἔχωμεν δὲ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-3\omega + x-\omega + x+\omega + x+3\omega = 4\alpha, \\ \frac{1}{x-3\omega} + \frac{1}{x-\omega} + \frac{1}{x+\omega} + \frac{1}{x+3\omega} = \frac{1}{\beta} \end{array} \right\}$$

Ἡ πρώτη δίδει: $x=\alpha$, ἡ δὲ δευτέρα:

$$\left(\frac{1}{\alpha-3\omega} + \frac{1}{\alpha+3\omega} \right) + \left(\frac{1}{\alpha-\omega} + \frac{1}{\alpha+\omega} \right) = \frac{1}{\beta}, \quad \text{δηλαδή:}$$

$$(1) \quad \frac{2\alpha}{\alpha^2-9\omega^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2-\omega^2} = \frac{1}{\beta}.$$

Τὸ ω εὐρίσκεται λοιπὸν ἐκ τῆς διτετραγώνου ἐξισώσεως (1). Εὗρεθέντος τοῦ x καὶ τοῦ ω οἱ τέσσαρες ἀριθμοὶ εἶναι ὠρισμένοι.

3ον. «Νὰ εὗρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων σφαιρῶν τῶν διατεταγμένων εἰς σωρὸν σχήματος κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἂν ἐκάστη τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος περιέχῃ v σφαίρας».

Λύσις. Ὁ ὅλος σωρὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ τριγωνικὰ στρώματα κείμενα ἐπ' ἀλλήλων. Τὸ πρῶτον (βασικὸν) τριγωνικὸν στῶμα περιέχει v σφαίρας εἰς ἐκάστην πλευράν του· τὸ ἀμέσως ὑπερκείμενον περιέχει $v-1$ σφαίρας εἰς ἐκάστην πλευράν του, τὸ ἀμέσως ἐπόμενον $v-2$ σφαίρας κ.ο.κ., τὸ δὲ τελευταῖον ἔχει μίαν σφαῖραν.

Τὸ βασικὸν στῶμα πάλιν ἀποτελεῖται ἀπὸ v σειρὰς σφαιρῶν ἐξ ὧν ἡ πρώτη περιέχει v σφαίρας, ἡ 2α $v-1$, ἡ 3η $v-2$... καὶ ἡ νουστὴ 1 σφαῖραν. Ἄρα περιέχει $v+(v-1)+(v-2)+\dots+1$ σφαίρας, δηλ. $\frac{v(v+1)}{2} = \frac{v^2+v}{2}$ σφαίρας. Τὸ ἐπόμενον τριγων.

στῶμα, ἔχον $v-1$ σφαίρας εἰς ἐκάστην πλευράν, θὰ περιέχῃ $\frac{(v-1)^2+(v-1)}{2}$ σφαίρας κ.ο.κ.

Ἄρα τὸ συνολικὸν πλῆθος S τῶν σφαιρῶν ἰσοῦται μὲ:

$$\frac{v^2+v}{2} + \frac{(v-1)^2+(v-1)}{2} + \dots + \frac{1^2+1}{2}.$$

Ἀντιστρέφοντες τὴν τάξιν τῶν προσθετέων θὰ ἔχωμεν:

$$S = \frac{1}{2} \{ 1^2+2^2+3^2+\dots+v^2 \} + \frac{1}{2} \{ 1+2+3+\dots+v \} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \quad (\text{Σύμφωνα με τούς τύπους (4) και (2)}).$$

40ν. <Νά εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν θετικῶν ἀκεραίων τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον εἶναι πενταγώνιος ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 54>.

Λύσις. Πρέπει πρωτίστως νὰ εὐρωμεν τὴν γενικὴν μορφήν τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἐὰν x ὁ τυχὼν ἐκ τῶν ἀριθμῶν τούτων, τότε πρέπει $x^2 = 54k = 2 \cdot 3^3 \cdot k$, ὅπου k φυσικὸς ἀριθμὸς. Ἐπειδὴ ὁμοῦ τὸ $2 \cdot 3^3 \cdot k$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου x , πρέπει νὰ περιέχῃ ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντάς του εἰς ἀρτίαις δυνάμεις. Ἐπομένως ὁ k πρέπει νὰ περιέχῃ τοὺς παράγοντας 2, 3 καὶ ἀκόμῃ ὡς παράγοντα ἓνα τέλειον τετράγωνον. Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $k = 2 \cdot 3 \cdot q^2$ διὰ νὰ εἶναι τὸ $2 \cdot 3^3 \cdot k$ τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου. Ὡστε θὰ ἔχωμεν $x^2 = 2 \cdot 3^3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot q^2 = 2^2 \cdot 3^4 \cdot q^2$ καὶ συνεπῶς $x = 2 \cdot 3^2 \cdot q$ ἢ (1) $\boxed{x = 18q}$, ὅπου q ἀκέραιος θετικὸς. Αὕτῃ θὰ εἶναι ἡ μορφή τῶν ἀριθμῶν x . Ἐπειδὴ πρέπει ἐπιπροσθέτως νὰ εἶναι ὁ x^2 πενταγώνιος, δηλ. $10000 \leq x^2 < 100000$, θὰ ἔχωμεν ὅτι $10000 \leq 18^2 \cdot q^2 < 100000$, $100 \leq 18q < \sqrt{100000}$, $100 \leq 18q < 317, \dots, 5, \dots \leq q < 17, \dots$ καί, ἐπειδὴ q ἀκέραιος, αἱ δεκταὶ τιμαὶ τοῦ q εἶναι αἱ $q = 6, 7, 8, \dots, 17$. Οἱ ἀριθμοὶ $x = 18q$ θὰ εἶναι, σύμφωνα με τὴν (1), οἱ $18 \cdot 6, 18 \cdot 7, \dots, 18 \cdot 17$, ἥτοι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον με λόγον 18. Συνεπῶς τὸ ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι τὸ $S = 18(6 + 7 + \dots + 17) = 18 \cdot \frac{6+17}{2} \cdot 12 = 2484$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

345) Ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον οἱ ἀριθμοὶ: $3x+2y, 5x+y, 7x$; Ὁμοίως, οἱ ἀριθμοὶ: $7x-y, 4x+3y, x+7y$;

346) Ὅριστετε τὸ k οὕτως ὥστε οἱ ἀριθμοὶ $3k-7, k+2, 12-2k$ νὰ ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον. Ὁμοίως οἱ: $3k^2-2k+1, 2k^2+5k-4, 4k^2-3k+9$.

347) Εὑρετε τὸν 1001ον ὅρον τῆς ἀριθμ. προόδου: 3, 03, 2, 99, 2, 95, ..., καὶ τὸν 37ον τῆς: 11, 14, 17, ...

348) Νὰ παρεμβληθοῦν 7 ἐνδιάμεσοι ἀριθμητικοὶ μεταξὺ 4 καὶ 20 καὶ ἕτεροι 8 μεταξὺ 28 καὶ -26.

349) Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἐκάστης τῶν κάτωθι προόδων τῶν ὁποίων δίδεται: i) $\alpha=7, \tau=85, \nu=14$, ii) $\alpha=-20, \tau=78, \nu=12$, iii) $\alpha=52, \omega=0,03, \nu=12$, iv) $\alpha=12, \omega=-5, \nu=15$.

350) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ὅλων τῶν ὄρων τῆς ἀριθμ. προόδου με $\alpha=5, \tau=27, \nu=8$ καὶ τῆς: $\alpha=5, \tau=27, \nu=74$.

351) Ἐὰν ἀριθμ. προόδου ὁ πρῶτος ὄρος εἶναι α , ὁ τελευταῖος, τ καὶ τὸ πλήθος τῶν ὄρων ν ὅπου ν περιττός, ποῖος ὁ μεσαῖος ὄρος τῆς προόδου; Ποῖος ὁ μέσος ἀριθμητικὸς ὅλων τῶν ὄρων τῆς προόδου;

352) Ἐὰν α καὶ β ἀκέραιοι ἀριθμοὶ καὶ $\alpha < \beta$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ πλήθος τῶν ἀκεραίων ἀπὸ τοῦ α συμπεριλαμβανομένου μέχρι τοῦ β συμπεριλαμβανομένου ἴσουςται με $\beta - \alpha + 1$.

353) Ἐὰν α ὁ πρῶτος ὄρος, τ ὁ τελευταῖος, ω ὁ λόγος, ν τὸ πλήθος καὶ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἀριθμ. προόδου, νὰ εὑρεθοῦν δύο οἰαδήποτε ἐκ τῶν πέντε τούτων ποσῶν, συναρτήσῃ τῶν τριῶν ἄλλων.

354) Χωρίζομεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν περιττῶν ἀριθμῶν εἰς ὁμάδας, ὡς ἑξῆς: 1η ὁμάς ὁ 1, 2α ὁμάς 3, 5, 3η ὁμάς 7, 9, 11 κ.ο.κ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς νουστής ὁμάδος.

355) Νὰ ὀρισθῇ ἀριθμ. πρόοδος τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὄρων νὰ ἴσουςται με $\nu + 3\nu^2$, οἷοιδήποτε ὄντος τοῦ ν .

356) Θεωροῦμεν k ἀριθμ. προόδους τῶν ὁποίων οἱ πρῶτοι ὄροι εἶναι ἀντιστοίχως 1, 2, 3, ..., k καὶ οἱ λόγοι 1, 3, 5, ..., $2k-1$, ἀντιστοίχως. Ἐὰν $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_k$ εἶναι τὰ ἀθροί-

σματα τῶν n πρώτων ὄρων τῶν προόδων τούτων, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_k$.

357) Αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 , τοῦ τριωνύμου $x^2 - px + k$ καὶ αἱ x_1, x_2 τοῦ $x^2 - (5p-4)x + k$ γραφόμεναι κατὰ τὴν σειρὰν ρ_1, ρ_2, x_1, x_2 ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ π καὶ k .

358) Τίς ἡ μεταξὺ τῶν α, β, γ ὑφισταμένη σχέσηις, ὅταν οἱ κύβοι τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ εὐρίσκονται ἐν ἀριθμ. προόδῳ;

359) Ἐὰν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν n , τῶν $2n$ καὶ τῶν $3n$ πρώτων ὄρων τῆς αὐτῆς ἀριθμητικῆς προόδου, ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ποῖα σχέσις συνδέει πρὸς ἀλλήλα τὰ $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$;

360) Τὰ ἄθροίσματα τῶν n πρώτων ὄρων δύο ἀριθμητ. προόδων ἔχουν λόγον $\frac{7n+1}{4n+27}$ διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ n . Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν $11^{\text{ων}}$ ὄρων τῶν δύο προόδων καθὼς καὶ ὁ λόγος τῶν $20^{\text{ων}}$ ὄρων.

361) Ἐὰν ἀριθμ. προόδου ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α , τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν μ πρώτων ὄρων ἰσοῦται μὲ μηδέν, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν n ἐπομένων ὄρων θὰ εἶναι $-\alpha(\mu+n)/(\mu-1)$.

362) Ἐὰν τὸ ἄθροισμα, μ διαδοχικῶν ὄρων ἀριθμ. προόδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν n ἐπομένων καὶ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λ ἐπομένων τῶν μ πρώτων δείξατε ὅτι τότε $(\mu+n)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{\lambda}\right) = (\mu+\lambda)\left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{n}\right)$.

363) Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσῃ τοῦ n τὰ ἄθροίσματα:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n+1)(n+2).$$

364) Ἐπ' εὐθείας σημειοῦμεν n σημεία $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ ἀπέχοντα ἕκαστον τοῦ ἐπομένου του κατὰ α . Ζητεῖται ἡ ἀπὸ τοῦ A_1 ἀπόστασις ἑνὸς σημείου M τῆς εὐθείας, τοιούτου ὥστε τὸ ἄθροισμα:

$$(MA_1)^2 + 2(MA_2)^2 + 3(MA_3)^2 + \dots + n(MA_n)^2$$

νὰ εἶναι τὸ ἐλάχιστον δυνατόν.

365) Νὰ εὐρεθῇ ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς n γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἡ δευτεροβάθμιος ὡς πρὸς x ἐξίσωσις:

$$x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + \dots + (x+n-1)(x+n) = 10n$$

δέχεται ὡς ρίζας δύο διαδοχικοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς.

366) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὄρων ἀριθμ. προόδου $\alpha, \alpha+\omega, \alpha+2\omega, \dots$, ἐκ n ὄρων. Ἀκολουθῶς νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ὄρων λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

367) Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων οἱ ὅποιοι εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 100 καὶ μικρότεροι τοῦ 1000 καὶ οἱ ὅποιοι διαιρούμενοι εἴτε διὰ τοῦ 18 εἴτε διὰ τοῦ 30, ἀφήνουν ὑπόλοιπον 7.

368) Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅσωνδήποτε διαδοχικῶν περιττῶν ἀκεραίων, οὐδέποτε εἶναι πρῶτος ἀριθμός.

369) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ κατ' ἔλειψιν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν $1, 2, 3, 4, 5, \dots, (n+1)^2 - 1$, δηλαδὴ τῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων ἀπὸ τοῦ 1 μέχρι τοῦ $(n+1)^2 - 1$.

370) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν θετικῶν ἀκεραίων τῶν μικροτέρων τοῦ 10 000 καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα διαιρούμενα διὰ 17 δίδουν ὄλα ὑπόλοιπον 9.

371) Μιᾶς ἀριθμ. προόδου ὁ 30ος ὅρος ἰσοῦται μὲ $\frac{1}{20}$ καὶ ὁ 20ός μὲ $\frac{1}{30}$. Ὑπολογίσατε τὸ ἄθροισμα τῶν 600 πρώτων ὄρων.

372) Ἐστῶσαν k ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_k$ (ὅπου $k \geq 3$), πραγματικοὶ ἢ μιγαῖκοί. Δείξατε ὅτι ἐὰν περιέχονται ὡς ὅροι, ὅχι κατ' ἀνάγκην ὁμέσως διαδοχικοὶ ἀλλὰ

πάντως με τήρησιν τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς των, εἰς μίαν καὶ τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν πρόδο-
δον, τότε αἱ $k-1$ παραστάσεις $(\alpha_1 - \alpha_k)/(\alpha_1 - \alpha_2), (\alpha_2 - \alpha_k)/(\alpha_1 - \alpha_2), \dots, (\alpha_{k-1} - \alpha_k)/(\alpha_1 - \alpha_2)$
ἢ δὲν θὰ ἔχουν νόημα, ἢ θὰ παριστάνουν συμμετρους (ρητοὺς) θετικοὺς ἀριθμοὺς.

373) Νὰ προσδιορισθῇ ἀριθμ. πρόδος περιέχουσα ὡς ὅρους τῆς τοὺς ἀριθμοὺς
1/5, 1/4, 1/3, 1/2.

374) Ποῖαι εἶναι αἱ ἀριθμητικαὶ πρόδοι αἵτινες ἄρχονται ἀπὸ τοῦ ὅρου 5, ἔχουν
λόγον ἀκέραιον ἀριθμὸν καὶ περιέχουν ὡς ὅρους των τοὺς ἀριθμοὺς 57 καὶ 113;

375) Δύνανται οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ν' ἀποτελοῦν ὅρους (οἰασδήποτε τάξεως)
μῆς καὶ τῆς αὐτῆς ἀριθμ. προόδου;

376) Ὅρισατε ν ἀριθμοὺς $x_1, x_2, \dots, x_n$ περιεχομένους μεταξὺ δύο δοθέντων α καὶ
 β , ($\alpha < \beta$) καὶ τοιοῦτους ὥστε αἱ διαφοραὶ $x_1 - \alpha, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, \beta - x_n$ ν' ἀποτελοῦν
ἀριθμητικὴν πρόδοον με λόγον δ . Εὗρετε τὸ διάστημα τιμῶν εἰς τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ
κεῖται ὁ δ ὑποτιθέμενος > 0 .

377) Νὰ εὗρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ἴσων σφαιρῶν τῶν διατεταγμένων εἰς σωρὸν σχή-
ματος κολοῦρου τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ κάτω βᾶσις ἔχει 25 σφαῖρας εἰς
ἐκάστην πλευράν καὶ ἡ ἄνω 14.

378) Εἰς σωρὸν ἴσων σφαιρῶν, σχήματος κανονικῆς τετραγωνικῆς κολούρου πυ-
ραμίδος τὸ ἀνώτατον στρώμα περιέχει 1005 σφαῖρας ὀλιγωτέρας τοῦ κατωτάτου ἐνῶ
τὸ πλῆθος τῶν στρωμάτων εἶναι 16. Εὗρετε τὸ πλῆθος τῶν σφαιρῶν τοῦ σωροῦ.

379) Εὗρετε τρεῖς ἀκεραίους θετικοὺς ἐν ἀριθμ. προόδῳ, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον
νὰ ἴσῳται μετὰ τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος.

380) Ἐνα πλῆθος ἐξ 8000 ἀντικειμένων τὸ χωρίζομεν εἰς $n+1$ ὁμάδας ἐξ ὧν αἱ
ν πρῶται ἔχουν κατὰ σειρὰν: 5, 8, 11, 14, ... ἀντικείμενα, δηλ. ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ,
ἐνῶ ἡ $n+1$ ὁμάς δὲν ἐπαρκεῖ διὰ ν' ἀποτελέσῃ τὸν $n+1$ ον ὅρον τῆς προόδου τὴν ὁποίαν
ἀποτελοῦν αἱ ν πρῶται ὁμάδες. Ζητεῖται τὸ πλῆθος τῶν ὁμάδων καὶ τὸ πλῆθος τῶν
ἀντικειμένων τῆς τελευταίας ὁμάδος.

381) Ἐάν ἀριθμητικῆς προόδου $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ οὐδεὶς ὅρος εἶναι ἀκέραιος ἀρι-
θμός, ἀλλὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄκρων ὅρων εἶναι ἀκέραιος k , νὰ ὑπολογισθῇ τὸ
ἄθροισμα $[\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] + \dots + [\alpha_n]$ συναρτήσῃ τῶν n καὶ k . (Διὰ τοῦ συμβόλου $[x]$ ἐν-
νοοῦμεν τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἐκ τῶν μὴ ὑπερβαινόντων τὸν x , βλέπε [1], § 43).

51. Ἀρμονικὴ πρόδος. Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, λέγομεν ὅτι εὗρίσκον-
ται ἐν ἀρμονικῇ προόδῳ, ὅταν τὰ ἀντίστροφα αὐτῶν $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \dots, \frac{1}{\alpha_n}$ ἀποτελοῦν
ἀριθμητικὴν πρόδοον.

Κατὰ ταῦτα οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδοον, ὅταν οἱ $\frac{1}{\alpha},$
 $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόδοον. Ἀλλὰ τότε: $\frac{2}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$ ἢ $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha + \gamma}$. Ὁ
 β λέγεται μέσος ἀρμονικὸς τῶν α καὶ γ .

Παραμβολὴ ἐνδιαμέσων ἀρμονικῶν. Δοθέντων τῶν ἀριθμῶν A καὶ B
δυνάμεθα νὰ παρεμβάλωμεν μεταξὺ αὐτῶν n ἄλλους ἀριθμοὺς $x_1, x_2, \dots, x_n$ ἀποτε-
λοῦντας μετὰ τῶν A καὶ B ἀρμονικὴν πρόδοον.

Πράγματι, διὰ νὰ εἶναι ἡ σειρὰ $A, x_1, x_2, \dots, x_n, B$, ἀρμονικὴ, πρέπει καὶ ἀρ-
κεῖ ἡ σειρὰ τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{A}, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}, \frac{1}{B}$ νὰ εἶναι ἀριθμ. πρόδος.

Ἐὰν ω ὁ λόγος τῆς προόδου ταύτης, τότε ὁ $\frac{1}{B}$, ὡς τὰς $v+2$ θὰ συνδέεται μετὰ τοῦ πρώτου $\frac{1}{A}$ διὰ τῆς ἰσότητος $\frac{1}{B} = \frac{1}{A} + (v+1)\omega$.

Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν: $\omega = \frac{A-B}{(v+1)AB}$. Ὡστε οἱ ὅροι τῆς ἀριθμ. προόδου:

$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots$ θὰ δίδονται ὑπὸ τῶν σχέσεων:

$$\frac{1}{x_1} = \frac{1}{A} + \omega = \frac{1}{A} + \frac{A-B}{(v+1)AB}, \quad \frac{1}{x_2} = \frac{1}{A} + 2\frac{A-B}{(v+1)AB}, \dots, \frac{1}{x_v} = \frac{1}{A} + v\frac{A-B}{(v+1)AB}.$$

* Ἀρα οἱ ζητούμενοι παρεμβλητέοι ἀρμονικοὶ $x_1, x_2, \dots, x_v$ θὰ δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων:

$$x_1 = \frac{1}{\frac{1}{A} + \frac{A-B}{(v+1)AB}}, \quad x_2 = \frac{1}{\frac{1}{A} + 2\frac{A-B}{(v+1)AB}}, \dots, x_v = \frac{1}{\frac{1}{A} + v\frac{A-B}{(v+1)AB}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

382) Νὰ παρεμβληθοῦν 5 ἐνδιάμεσοι ἀρμονικοὶ μετὰ $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{5}{11}$.

383) Νὰ εὐρεθῇ ὁ 7ος ὅρος τῆς ἀρμονικῆς προόδου $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \dots$ καὶ ὁ 5ος

τῆς $1, \frac{1}{8}, \frac{1}{15}, \dots$

384) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον νὰ δειχθῇ ὅτι τότε οἱ $\beta^2, \alpha^2, \gamma^2$ ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν. Καὶ ἀντιστρόφως.

385) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀρμον. πρόδον δειξατε ὅτι τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνει καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς $\beta-\alpha, \beta, \beta-\gamma$ καθὼς ἐπίσης καὶ διὰ τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}, \frac{\beta}{\gamma+\alpha-\beta}, \frac{\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}.$$

386) Ἐὰν οἱ n ἀριθμοὶ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις:

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = (n-1)\alpha_1\alpha_n.$$

387) Ἐὰν οἱ ὁμόσημοι ἀριθμοὶ α, β, γ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, νὰ δειχθῇ ἡ ἀνισότης:

$$\frac{\alpha+\beta}{2\alpha-\beta} + \frac{\gamma+\beta}{2\gamma-\beta} > 4.$$

388) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ λ αἱ τέσσαρες ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $(\lambda+1)^2x^4 - (3\lambda+4)x^2 + 1 = 0$ εἶναι πραγματικαὶ καὶ γραφόμεναι κατὰ μίαν ὀρισμένην τάξιν ἀποτελοῦν ἀρμ. πρόδον;

389) Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξίσωσως $x^3 + 3\alpha x^2 + 3\beta x + \gamma$ ἀποτελοῦν ἀρμονικὴν πρόδον, εὑρετε ποίαν σχέσιν πληροῦν οἱ συντελεσταὶ α, β, γ .

52. Γεωμετρικαὶ πρόδοι. α') Καλεῖται *γεωμετρικὴ πρόδος*, μία ἀκολουθία ἀριθμῶν, τοιοῦτων ὥστε τὸ πηλίκον ἐκάστου διὰ τοῦ προηγουμένου του νὰ εἶναι σταθερόν. Τὸ πηλίκον τοῦτο καλεῖται *λόγος* τῆς προόδου.

Ἐὰν λ.χ. οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ ἀποτελοῦν γεωμ. πρόδον, θὰ εἶναι:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\epsilon}{\delta} = \dots = \omega, \quad \text{ὅπου } \omega \text{ ὁ λόγος τῆς προόδου.}$$

Ἐξ αὐτῶν ἔπεται, $\beta = \alpha\omega$, $\gamma = \beta\omega$, $\delta = \gamma\omega$, ... δηλ. ἕκαστος ὅρος τῆς προόδου ἰσοῦται μὲ τὸν προηγούμενόν του, ἐπὶ τὸν λόγον. Ἐὰν λοιπὸν ὁ πρῶτος ὅρος τῆς προόδου εἶναι α καὶ ὁ λόγος ω τότε ἡ γεωμ. πρόοδος θὰ εἶναι ἡ ἀκολουθία:

$$\alpha, \alpha\omega, \alpha\omega^2, \alpha\omega^3, \dots$$

Ὑπὸ τὴν μορφήν αὐτὴν δηλ. συναρτήσῃ μόνον τοῦ α καὶ τοῦ ω δυνάμεθα νὰ παραστήσωμεν τρία, τέσσαρα... ποσὰ εὐρισκόμενα ἐν γεωμ. προόδῳ.

Ἐὰν ὁ λόγος ω εἶναι κατ' ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλύτερος τῆς μονάδος τότε οἱ ὅροι βαίνουν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν αὐξοντες καὶ ἡ πρόοδος λέγεται αὐξουσα. Τοῦναντίον ἡ πρόοδος καλεῖται φθίνουσα, ἂν $|\omega| < 1$. Οἱ ὅροι τῆς φθινούσης προόδου βαίνουν κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἐλαττούμενοι.

β') **Ἐκφράσεις τοῦ νυοστοῦ ὅρου συναρτήσῃ τοῦ πρώτου καὶ τοῦ λόγου.** Εἶδομεν ὅτι ὁ δεύτερος ὅρος ἰσοῦται μὲ $\alpha\omega$, ὁ τρίτος μὲ $\alpha\omega^2$, ὁ τέταρτος μὲ $\alpha\omega^3$ κ.ο.κ. Δηλ. κάθε ὅρος ἰσοῦται μὲ τὸν πρῶτον ὅρον α πολλαπλασιασμένον τόσας φορὰς ἐπὶ ω , ὅσοι εἶναι οἱ προηγούμενοι ὅροι. Κατὰ ταῦτα ὁ ὅρος τ , τάξεως ν θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

(1)

$$\tau = \alpha\omega^{\nu-1}.$$

γ') **Παρεμβολὴ ἐνδιαμέσων γεωμετρικῶν.** «Μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β νὰ παρεμβληθοῦν ν ἄλλοι, αποτελοῦντες μετὰ τῶν δοθέντων α καὶ β γεωμ. πρόοδον, ἥς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ α καὶ τελευταῖος ὁ β ».

Ἐὰν ω κληθῇ ὁ λόγος τῆς σχηματισθησομένης προόδου, τότε θὰ εἶναι $\beta = \alpha\omega^{\nu+1}$, (κατὰ τὸν προηγούμενον τύπον, καθ' ὅσον ὁ β εἶναι τάξεως $\nu+2$).

Συνεπῶς $\omega = \sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}$. Εὐρεθέντος τοῦ ω εὐρίσκονται καὶ οἱ ζητούμενοι ἀριθμοί:

$$\alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^2}{\alpha^2}}, \dots, \alpha\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}}.$$

Παρατήρησις I. Ἐὰν μεταξὺ δύο ἀριθμῶν α καὶ β παρεμβληθῇ εἰς μέσος γεωμετρικός, οὗτος θὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\pm\sqrt{\alpha\beta}$, δηλ. ὁ λεγόμενος καὶ μέσος ἀνάλογος τῶν α καὶ β .

Παρατήρησις II. Ἐὰν μεταξὺ τῶν διαδοχικῶν ὁρων γεωμ. προόδου ὄντων θετικῶν παρεμβάλλωμεν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν μέσων γεωμετρικῶν ἐπίσης θετικῶν λαμβάνομεν μίαν συνεχῆ γεωμ. πρόοδον. Οἷτω π.χ. δοθείσης τῆς γεωμ. προόδου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἐχούσης λόγον ω , ἂν παρεμβάλλωμεν μεταξὺ α καὶ β καὶ μεταξὺ β καὶ γ ὁμοίως δὲ καὶ μεταξὺ γ καὶ δ , ν ἐνδιαμέσους γεωμετρικοὺς οἱ λόγοι τῶν μερικῶν προόδων ποὺ θὰ σχηματισθοῦν θὰ εἶναι κατὰ τὸν προηγ. τύπον:

$$\sqrt[\nu+1]{\frac{\beta}{\alpha}}, \sqrt[\nu+1]{\frac{\gamma}{\beta}}, \sqrt[\nu+1]{\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Ἐπεὶ δὲ ὁμοῦς $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\delta}{\gamma} = \dots = \omega$ πᾶσαι αἱ μερικαὶ αὗται πρόοδοι ἔχουν τὸν

αὐτὸν λόγον ἴσον πρὸς $\sqrt[\nu+1]{\omega}$. Ἄρα ὁμοῦ λαμβανόμεναι αποτελοῦν τὴν ἰδίαν γεωμ. πρόοδον.

δ') **Θεώρημα I.** «Τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ὁρων γεωμ. προόδου ἥς ὁ πρῶτος ὅρος εἶναι α , ὁ τελευταῖος τ καὶ ὁ λόγος ω , δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

(2)

$$\Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1} \gg. \quad (\omega \neq 1)$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω μία γεωμ. πρόοδος με πεπερασμένον πλῆθος ὄρων: $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho, \sigma, \tau$, ἥς ὁ λόγος εἶναι ω . Τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς εἶναι:

$$(3) \quad \Sigma = \alpha + \beta + \gamma + \dots + \varrho + \sigma + \tau.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) ἐπὶ ω καὶ παρατηρήσωμεν ὅτι: $\alpha\omega = \beta, \beta\omega = \gamma, \dots, \varrho\omega = \sigma, \sigma\omega = \tau$ λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα:

$$(4) \quad \Sigma\omega = \beta + \gamma + \dots + \sigma + \tau + \tau\omega.$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (3) καὶ (4), λαμβάνομεν:

$$\Sigma\omega - \Sigma = \tau\omega - \alpha \quad \eta \quad \Sigma(\omega - 1) = \tau\omega - \alpha \quad \text{καὶ τέλος} \quad \Sigma = \frac{\tau\omega - \alpha}{\omega - 1}.$$

Πόρισμα. Τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ν πρώτων ὄρων τῆς γεωμ. προόδου, ἥς ὁ λόγος εἶναι $\omega \neq 1$ καὶ ὁ πρώτος ὄρος α , δίδεται ἐπὶ τοῦ τύπου:

(5)

$$\Sigma = \frac{\alpha(\omega^\nu - 1)}{\omega - 1}.$$

Ἀρχεῖ εἰς τὸν προηγούμενον τύπον τοῦ Σ ν' ἀντικατασταθῇ τὸ τ διὰ τῆς ἴσης πρὸς αὐτὸ ποσότητος $\alpha\omega^{\nu-1}$.

ε') Θεώρημα II. «Τὸ γινόμενον δύο ὄρων γεωμ. προόδου, ἀπεχόντων ἰσάνκις ἀπὸ τοὺς ἄκρους ὄρους, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων».

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho, \sigma, \tau$ μία γεωμ. πρόοδος με λόγον ω . Ἐστω θ ὁ ὄρος ὁ κατέχων τὴν τάξιν μ ἀπὸ τῆς ἀρχῆς καὶ η ὁ ὄρος ὁ κατέχων τὴν τάξιν μ ἀπὸ τοῦ τέλους. Θὰ εἶναι τότε $\theta = \alpha \cdot \omega^{\mu-1}$ καὶ $\eta = \tau \left(\frac{1}{\omega} \right)^{\mu-1}$ καθ' ὅσον

ἂν θεωρηθῇ ὁ τ ὡς πρῶτος ὄρος, τότε ὁ η θὰ εἶναι ὁ μυστός καὶ ὁ λόγος $\frac{1}{\omega}$.

Διὰ τοῦ πολ)σμοῦ τῶν δύο ἰσοτήτων κατὰ μέλη λαμβάνομεν $\theta\eta = \alpha\tau$, ὅ.ἔ.δ.

ε') Θεώρημα III. «Ἐὰν α ὁ πρῶτος ὄρος, τ ὁ τελευταῖος καὶ ν τὸ πλῆθος τῶν ὄρων μιᾶς γεωμ. προόδου, τότε τὸ γινόμενον Γ τῶν ὄρων τῆς δίδεται ἐπὶ τοῦ τύπου:

(6)

$$\Gamma^2 = (\alpha \cdot \tau)^\nu.$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho, \sigma, \tau$, ἡ γεωμ. πρόοδος. Θὰ ἔχωμεν

$$\Gamma = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdots \varrho \cdot \sigma \cdot \tau$$

$$\Gamma = \tau \cdot \sigma \cdot \varrho \cdots \gamma \cdot \beta \cdot \alpha$$

καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη:

$$\Gamma^2 = (\alpha\tau)(\beta\sigma)(\gamma\varrho) \cdots (\varrho\gamma)(\sigma\beta)(\tau\alpha).$$

Ἐπειδὴ ἑκάστη παρένθεσις ἰσοῦται με $\alpha\tau$ κατὰ τὸ προηγούμενον, τὸ δὲ πλῆθος τῶν παρενθέσεων εἶναι ν , θὰ ἔχωμεν:

$$\Gamma^2 = (\alpha\tau)^\nu \quad \text{καὶ} \quad |\Gamma| = |(\alpha\tau)|^{\frac{\nu}{2}}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ. «Ποῖον τὸ πλῆθος καὶ ποῖον τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν (θετικῶν) διαιρετῶν τοῦ εἰς πρώτους παράγοντας ἀναλελυμένου ἀριθμοῦ $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma}$, ὅπου, p_1, p_2, p_3 πρώτοι ἀριθμοὶ καὶ α, β, γ φυσικοὶ ἀριθμοί;»

Λύσις. Ἄν θεωρήσωμεν τὰς τρεῖς ομάδας διαιρετῶν: 1η ομάς, $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^{\alpha}$ 2α ομάς, $1, p_2, p_2^2, \dots, p_2^{\beta}$, 3η ομάς, $1, p_3, p_3^2, \dots, p_3^{\gamma}$ τότε κάθε διαιρετὴς τοῦ ἀριθμοῦ N θὰ εἶναι ἓνα γινόμενον τὸ ὁποῖον σύγκειται ἐξ ἐνὸς παράγοντος ληφθέντος ἀπὸ τὴν 1ην ομάδα, ἐξ ἐνὸς ληφθέντος ἀπὸ τὴν 2αν καὶ ἐξ ἐνὸς ληφθέντος ἀπὸ τὴν 3ην. Διότι κάθε διαιρετὴς τοῦ N δὲν πρέπει νὰ περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἀπὸ τοὺς p_1, p_2, p_3 καὶ τοὺς μὲ ἐκθέτας $\leq \alpha, \leq \beta, \leq \gamma$, ἀντιστοίχως. Ὅλοι ὅμως αὐτοὶ οἱ διαιρεταὶ προκύπτουν ὡς ὅροι τοῦ γινομένου:

$$(7) \quad (1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha})(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\beta})(1+p_3+p_3^2+\dots+p_3^{\gamma}).$$

Ἀηλαδή ἐκτελουμένου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ (7) θὰ προκύψῃ ἓνα ἐξαγόμενον ἔχον ὡς ὅρους, ὅλα τὰ δυνατὰ γινόμενα ἐκ τριῶν παραγόντων ἐξ ὧν ὁ εἷς ἔχει ληφθῇ ἀπὸ τὴν 1ην, ὁ ἄλλος ἀπὸ τὴν 2αν καὶ ὁ τρίτος ἀπὸ τὴν 3ην ἐκ τῶν ἀνωτέρω ομάδων. Ἐπομένως τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ πλῆθος τῶν ὁρῶν τοῦ γινομένου (7). Τὸ ἐντὸς τῆς πρώτης παρενθέσεως ἄθροισμα ἔχει $\alpha+1$ ὅρους καὶ τὸ ἐντὸς τῆς δευτέρας, ἔχει $\beta+1$ ὅρους ἐπειδὴ δὲ ἕκαστος ὅρος τῆς πρώτης παρενθέσεως θὰ πολλαπλασιασθῇ μὲ ἕκαστον ὅρον τῆς δευτέρας, θὰ προκύψουν ἐκ τῶν δύο αὐτῶν $(\alpha+1)(\beta+1)$ ὅροι. Ἐκαστος τῶν $(\alpha+1)(\beta+1)$ αὐτῶν ὁρῶν θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐν συνεχείᾳ μὲ ἕκαστον ὅρον τῆς τρίτης παρενθέσεως ἣτις ἔχει $\gamma+1$ ὅρους· ἐπομένως θὰ προκύψουν τελικῶς $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ ὅροι οἵτινες καὶ θ' ἀποτελοῦν τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ N .

Ἵσως, τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma}$ ἴσονται μὲ:

$$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1).$$

Τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν διαιρετῶν τοῦ N εἶναι τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν ὁρῶν τοῦ γινομένου (7) καὶ συνεπῶς εἶναι ἴσον μὲ αὐτὸ τοῦτο τὸ γινόμενον (7). Ἀλλ' ἐκάστη παρένθεσις τοῦ (7) εἶναι ἄθροισμα διαδοχικῶν ὁρῶν γεωμ. προόδου καὶ βάσει τοῦ προηγούμενου τύπου (2) τὸ (7) γράφεται:

$$(8) \quad \frac{p_1^{\alpha+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\beta+1}-1}{p_2-1} \cdot \frac{p_3^{\gamma+1}-1}{p_3-1}.$$

Ἡ ποσότης (8) ἐκφράζει τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma}$.

Παρατήρησις 1η. Τὰ ἀνωτέρω γενικεύονται προφανῶς διὰ κάθε ἀριθμὸν N ἀναλελυμένον εἰς πρώτους παράγοντας: $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma} \dots p_k^{\epsilon}$. Τούτου τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν θὰ εἶναι $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\dots(\epsilon+1)$ καὶ τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν διαιρετῶν:

$$\frac{p_1^{\alpha+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\beta+1}-1}{p_2-1} \dots \frac{p_k^{\epsilon+1}-1}{p_k-1}.$$

Παρατήρησις 2α. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων πάντων τῶν διαιρετῶν τοῦ $N = p_1^{\alpha} p_2^{\beta} p_3^{\gamma}$ ἴσονται πρὸς τὸ γινόμενον:

$$(1+p_1^2+p_1^4+\dots+p_1^{2\alpha})(1+p_2^2+p_2^4+\dots+p_2^{2\beta})(1+p_3^2+p_3^4+\dots+p_3^{2\gamma})$$

τὸ ὁποῖον ὑπολογίζεται βάσει τοῦ τύπου (2):

$$\frac{p_1^{2\alpha+2}-1}{p_1^2-1} \cdot \frac{p_2^{2\beta+2}-1}{p_2^2-1} \cdot \frac{p_3^{2\gamma+2}-1}{p_3^2-1}.$$

Ὁμοίως εὐρίσκεται καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν διαιρετῶν κ.ο.κ.

Σ. Γ. Κανέλλου: «Μαθήματα Ἀλγέβρας» Β' τόμος

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

390) Ὅρισατε τὸ x οὕτως, ὥστε οἱ $2x-2$, $3x+6$, $12x+6$ ν' ἀποτελοῦν γεωμετρ. πρόδοον.

391) Ἐάν ὁ 3ος ὅρος Γ. Π. εἶναι 20 καὶ ὁ 7ος εἶναι 320, εὑρετε 1ον καὶ 9ον ὄρον.

392) Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν 7 πρώτων ὄρων τῆς: 5, -20, 80,...

393) Γεωμετρ. πρόοδος συνίσταται ἐξ 8 ὄρων, ἐξ ὧν ὁ 2ος = -384 καὶ ὁ 7ος = 12. Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων τῆς.

394) Ἐάν γεωμ. πρόοδου εἶναι $\Sigma = 781$, $\omega = \frac{3}{4}$, $\tau = 81$, εὑρετε τὰ α καὶ v .

395) Μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 81 καὶ $\frac{1}{3}$ νὰ παρεμβληθοῦν ἄλλοι σχηματίζοντες μετὰ τῶν δοθέντων γεωμ. πρόοδον, τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ὄρων ἰσοῦται μὲ $121 + \frac{1}{3}$.

396) Νὰ ὀρισθῇ γεωμ. πρόοδος, τῆς ὁποίας ὁ 5ος ὅρος ὑπερβαίνει τὸν τρίτον κατὰ 225, τὸν δὲ 4ον κατὰ 125.

397) Νὰ ὀρισθῇ μία ἀριθμητικὴ καὶ μία γεωμετρικὴ πρόοδος, αἵτινες ἔχουν τοὺς ἰδίους πρώτους καὶ τοὺς ἰδίους δευτέρους ὄρους. Ἡ ὑπεροχὴ δὲ τοῦ τετάρτου ὑπὲρ τὸν δεύτερον εἶναι 32 διὰ τὴν ἀριθμητικὴν καὶ 60 διὰ τὴν γεωμετρικὴν.

398) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 + \left(\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}\right)^2 + \left(\rho^3 - \frac{1}{\rho^3}\right)^2 + \dots + \left(\rho^n - \frac{1}{\rho^n}\right)^2.$$

399) Ἐάν Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 εἶναι τὰ ἄθροισματα τῶν v , τῶν $2v$ καὶ τῶν $3v$ πρώτων ὄρων μιᾶς γεωμ. πρόοδου, νὰ εὑρεθῇ ποία σχέσις ὑφίσταται μετὰ τῶν ποσῶν Σ_1 , Σ_2 , Σ_3 .

400) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος καὶ ὁ πρώτος ὅρος γεωμ. πρόοδου ἐκ v ὄρων, ὅταν δίδεται τὸ ἄθροισμα Σ_1 τῶν k πρώτων ὄρων καὶ τὸ ἄθροισμα Σ_2 τῶν k τελευταίων.

401) Ἐάν οἱ ὄροι τάξεως λ , μ , ν , ρ μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου, ἀποτελοῦν γεωμ. πρόοδον, νὰ δευχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\lambda - \mu$, $\mu - \nu$, $\nu - \rho$ εὐρίσκονται ἐν γεωμ. πρόοδῳ.

402) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ x , y , z , γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἀποτελοῦν γεωμ. πρόοδον, ἐνῶ οἱ xy , yz , zx καὶ xyz ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον.

403) Ὁ ἀκέραιος A γράφεται εἰς τὸ δεκαδικὸν σύστημα ἀριθμῆσεως μὲ $2v$ ψηφία ἴσα πρὸς 1, ὁ B μὲ $v+1$ ψηφία ἴσα πρὸς 1 καὶ ὁ Γ μὲ v ψηφία ἴσα πρὸς 6. Ν' ἀποδευχθῇ ὅτι ὁ $A+B+\Gamma+8$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

404) Ἐάν εἰς μίαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{v-1}, \alpha_v, \dots$$

ὑφίσταται ἡ σχέσις: $(v-1)\alpha_0\alpha_v = \alpha_1\alpha_{v-1} + \alpha_2\alpha_{v-2} + \dots + \alpha_{v-1}\alpha_1$ δι' ὅλα τὰ $v \geq 2$, τότε ἡ ἀκολουθία εἶναι γεωμετρικὴ πρόοδος.

405) Διὰ v ἀποτελῇ ἡ ἀκολουθία $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_v, \dots$ γεωμετρικὴν πρόοδον μὲ λόγον $\neq 1$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ὑπάρχουν δύο ὠρισμένοι ἀριθμοὶ α_0 καὶ k τοιοῦτοι, ὥστε ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$ πλὴν τοῦ πρώτου, νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα ὧν τῶν προηγουμένων του, πολλαπλασιασθὲν ἐπὶ k .

406) Ἐάν Σ_2 εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνά δύο τῶν ὄρων τῆς προόδου 1, x , $x^2, \dots, x^{v-1}$ καὶ Σ_{v-2} τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων ἀνά $v-2$ τῶν ἰδίων ὄρων, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος Σ_2/Σ_{v-2} συναρτήσῃ τῶν x καὶ v .

407) Ἐάν τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὄρων γεωμ. πρόοδου εἶναι ἴσον πρὸς 255 καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν ὄρων τούτων ἰσοῦται πρὸς 255/128, ὁ δὲ πρῶτος ὅρος εἶναι ὁ 1, εὑρετε τὸ v καὶ τὸν λόγον τῆς προόδου.

408) Ἐάν $x > 0$, $y > 0$ καὶ μ , γ , α ἀντιστοίχως, ὁ μέσος ἀριθμητικὸς, ὁ μέσος γεωμ.

μετρικός και ο μέσος αρμονικός τῶν x καὶ y , νὰ δειχθῇ ὅτι πάντοτε $\mu - \gamma > \gamma - \alpha$ καὶ νὰ ὁρισθοῦν τὰ x καὶ y , ὅταν $\mu - \gamma = 1,50$, $\gamma - \alpha = 1,44$. ($\gamma > 0$, $x \neq y$).

409) Εἰς κάθε αὐξοῦσαν γεωμ. πρόδοον μὲ θετικούς ὄρους, ὁ μέσος ἀριθμητικός τῶν δύο ἄκρων εἶναι μικρότερος τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ὄλων τῶν ὄρων.

53. Φθίνουσα ἀπέραντος γεωμετρικὴ πρόδοος. Θεώρημα I.
«*Ἐὰν ἀριθμὸς θ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ἢ δύναμις θ^v αὐξάνη ἀπεριορίστως, ὅταν ὁ ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἐκθέτης v αὐξάνεται ἀπεριορίστως*».

**Ἀπόδειξις.* Ἐχομεν, $\theta = 1 + \varepsilon$, ὅπου $\varepsilon > 0$ καὶ συνεπῶς $\theta^v = (1 + \varepsilon)^v > 1 + v\varepsilon$ διὰ $v = 2, 3, \dots$ (βλέπε ἀνισότητα τοῦ Bernuilli, ἀσκ. 342). Ἦτοι:

$$(1) \quad \theta^v > 1 + v(\theta - 1).$$

*Ἐπειδὴ τὸ 2ον μέλος τῆς (1) αὐξάνεται ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ v , κατὰ μείζονα λόγον καὶ τὸ 1ον μέλος θ^v αὐξάνεται ἀπεριορίστως. Πράγματι, δοθέντος ἀριθμοῦ M οἰουδήποτε (ὅσονδήποτε μεγάλου), δύναται τὸ $1 + v(\theta - 1)$ νὰ τὸν ὑπερβῇ. Διότι, ἵνα $1 + v(\theta - 1) > M$, ἀρκεῖ $v > \frac{M-1}{\theta-1}$. Ὡστε δι' ὅλα τὰ v , τὰ μεγαλύτερα τοῦ $(M-1)/(\theta-1)$, αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ θ^v εἶναι μεγαλύτεραι τοῦ αὐθαίρετως μεγάλου ἀριθμοῦ M . (Τοῦτο διατυπῶνται: $\text{or } \theta^v = \infty$ διὰ $v \rightarrow \infty$, βλέπε καὶ § 49).

Θεώρημα II. «*Ἐὰν $|\omega| < 1$, τότε ἡ δύναμις ω^v δύναται νὰ καταστῇ ἀπολύτως μικρότερα οἰουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ ε , ἀρκεῖ ὁ v νὰ ληφθῇ ἀρκετὰ μέγας*». (Δηλ. ἡ ω^v ἔχει ὄριον τὸ μηδὲν τοῦ v τείνοντος πρὸς τὸ ἀπειρον: $\text{or } \omega^v = 0$, ὅταν $|\omega| < 1$).

**Ἀπόδειξις.* Διὰ v ἀληθεύη ἡ ἀνισότης $|\omega^v| < \varepsilon$, ἀρκεῖ v ἀληθεύη ἡ ἀνισότης:

$$\left| \frac{1}{\omega^v} \right| > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \text{ἢτοι} \quad \left| \frac{1}{\omega} \right|^v > \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Ἀλλὰ ὁ ἀριθμὸς $\left| \frac{1}{\omega} \right|$ εἶναι > 1 (ἀφοῦ ὁ $|\omega| < 1$), συνεπῶς τοῦ ἐκθέτου

ὄντος ἀρκετὰ μεγάλου ἡ δύναμις $\left| \frac{1}{\omega} \right|^v$ ὑπερβαίνει πάντα δοθέντα ἀριθμόν, ἄρα καὶ τὸν $\frac{1}{\varepsilon}$. Ὡστε, τοῦ v αὐξάνοντος, ἡ ἀνισότης $\left| \frac{1}{\omega} \right|^v > \frac{1}{\varepsilon}$ θὰ λαμβάνη χώραν δι' ὅλα τὰ v τὰ μεγαλύτερα κάποιου καταλλήλου ἀριθμοῦ (ἴδε προηγουμένον).

Συνεπῶς καὶ ἡ $|\omega^v| < \varepsilon$. (Τοῦτο διατυπῶνται συμβολικῶς $\text{or } \omega^v = 0$ διὰ $v \rightarrow \infty$).

Θεώρημα III. «*Τὸ ἄθροισμα Σ_v τῶν v πρώτων ὄρων ἀπεράντου γεωμ. πρόδοον*:

1ον. *Αὐξάνει κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ v , ὅταν ἡ πρόδοος εἶναι αὐξοῦσα.*

2ον. «*Ὅταν ἡ πρόδοος εἶναι φθίνουσα, τὸ Σ_v διαφέρει ἀπὸ ὀρισμένον σταθερὸν ἀριθμόν, τὸσον ὀλιγώτερον, ὅσον μεγαλύτερον εἶναι τὸ v , ἢ δὲ διαφορά αὕτη δύναται κατ' ἀπόλυτον τιμὴν νὰ καταστῇ μικρότερα πάσης δοθείσης θετικῆς ποσότητος, ὅταν τὸ πλῆθος v τῶν προσθετέων αὐξήσῃ ἐπαρ-*

κῶς. Ὁ σταθερὸς οὗτος ἀριθμὸς ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{1-\omega}$ ὅπου α ὁ πρῶτος ὄρος καὶ ω ὁ λόγος τῆς φθινοῦσης προόδου καὶ καλεῖται ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς προόδου».

Ἀποδείξεις. 1ον. Ἐχομεν ὅτι $\Sigma_n = \alpha \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}$.

Ἐὰν $\omega > 1$ τότε κατὰ τὸ θεώρημα I, ἡ δύναμις ω^n αὐξάνει ἀπεριορίστως μετὰ τοῦ n , ἄρα τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίῃ καὶ διὰ τὸ Σ_n . Ἐὰν ω ἀρνητικὸς ἀλλὰ $|\omega| > 1$ τότε τὸ Σ_n αὐξάνει ἀπεριορίστως κατ' ἀπόλυτον τιμὴν.

2ον. Ἐστω $|\omega| < 1$. Ἐχομεν:

$$\Sigma_n = \frac{\alpha \omega^n}{\omega - 1} - \frac{\alpha}{\omega - 1} = \frac{\alpha \omega^n}{\omega - 1} + \frac{\alpha}{1 - \omega} \text{ καὶ } \Sigma_n - \frac{\alpha}{1 - \omega} = \frac{\alpha \omega^n}{\omega - 1}.$$

Ἡ διαφορὰ τῆς μεταβλητῆς Σ_n καὶ τῆς σταθερᾶς $\frac{\alpha}{1 - \omega}$ εἶναι ἡ $\frac{\alpha}{\omega - 1} \cdot \omega^n$, ἥτις δύναται νὰ γίνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν, μικροτέρα πάσης ποσότητος $\varepsilon > 0$. Πράγματι, ἡ ἀνισότης: $\left| \frac{\alpha \omega^n}{\omega - 1} \right| < \varepsilon$ διὰ νὰ ἀληθεύσῃ ἀρκεῖ ν' ἀληθεύῃ ἡ $|\alpha \omega^n| < \varepsilon |\omega - 1|$ ἢ $|\alpha| \cdot |\omega^n| < \varepsilon |\omega - 1|$ ἢ $|\omega^n| < \frac{\varepsilon |\omega - 1|}{|\alpha|}$.

Ἀλλὰ ἡ τελευταία αὕτη ἀληθεύει, ὅταν τὸ n ληφθῇ ἀρκετὰ μεγάλο, δεδομένου ὅτι κατὰ τὸ θεώρημα II ἡ $|\omega^n|$ δύναται νὰ γίνῃ μικροτέρα παντὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ.

Ὡστε, ὅσονδήποτε μικρὸν καὶ ᾗν εἶναι τὸ ε θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τινος καταλλήλου τιμῆς τοῦ n καὶ ἐφ' ἑξῆς:

$$\left| \Sigma_n - \frac{\alpha}{1 - \omega} \right| < \varepsilon.$$

δηλ. τὸ Σ_n θὰ διαφέρει ἀπὸ τὸ $\frac{\alpha}{1 - \omega}$ ὅσον θέλομεν ὀλίγον. (Κατὰ τὰ γραφέντα εἰς τὴν § 49, στ' εἶναι $\lim_{n \rightarrow \infty} \Sigma_n = \frac{\alpha}{1 - \omega}$). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς φθινοῦσης προόδου παρίσταται μὲ $\Sigma = \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} + \dots$ ἐπομένως ἰσχύει ὅτι:

$$(2) \quad \text{ἂν } |\omega| < 1, \text{ τότε } \alpha + \alpha\omega + \alpha\omega^2 + \dots + \alpha\omega^{n-1} + \dots = \frac{\alpha}{1 - \omega}.$$

Σημείωσις. Διὰ $-1 < \omega < 1$ ὑπάρχει τὸ ὅριον τοῦ Σ_n ὅταν $n \rightarrow \infty$ καὶ ἡ ἀπέραντος πρόοδος λέγεται τότε «συγκλίνουσα», (βλέπε § 55).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ (βάσει

τοῦ τύπου (2)). 2ον. $0,27272727\dots = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \dots = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{27}{99}.$

$$\text{3ον. } \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{(1+x^2)^3} + \dots = \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0).$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

410) Εύρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων ἐκάστης τῶν κάτωθι φθινουσῶν γεωμ. προόδου:

i) $12 - 9 + \frac{27}{4} - \dots$ ii) $5 + 3 + 1,8 + 1,08 + \dots$

iii) $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} - \dots$ ὅπου $x > 2$

411) Εύρετε μὲ ποῖον κλάσμα ἰσοδυναμεῖ ὁ ἀπέραντος περιοδικὸς ἀριθμὸς 0,4 581581581...

412) Φθινούσης γεωμετρ. προόδου τὸ γινόμενον τῶν τριῶν πρώτων ὄρων εἶναι 216 ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἰδίων ὄρων εἶναι 6056. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς προόδου.

413) Νὰ εὑρεθῇ φθίνουσα γεωμ. πρόοδος ἥς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων εἶναι 4 ἐνῶ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ἀπείρων ὄρων εἶναι 192.

414) Σῶμα ἀνέρχεται κατακορύφως πρὸς τὰ ἄνω μὲ ἀφετηρίαν τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἐδάφους καὶ διανύει εἰς μὲν τὸ πρῶτον λεπτὸν 50 μέτρα, εἰς ἕκαστον δὲ ἄλλο λεπτὸν διάστημα μικρότερον τοῦ προηγουμένου λεπτοῦ κατὰ τὰ $11/100$ αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι τὸ ὕψος τοῦ σώματος παραμένει πάντοτε μικρότερον τῶν 455 μέτρων καὶ εὑρετε κατὰ τὴν διάρκειαν ποίου λεπτοῦ ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῆς κινήσεως τὸ ὕψος τοῦ σώματος θὰ ἔχῃ ὑπερβῇ τὰ 300 μέτρα διὰ πρώτην φοράν.

415) Ἐάν $|r| < 1$ καὶ $|br| < 1$ ποῖον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων:

$$ar + (a + \alpha\beta)r^2 + (a + \alpha\beta + \alpha\beta^2)r^3 + \dots + (a + \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-1})r^n + \dots;$$

416) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ c ὑπάρχει ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων:

$$c + \frac{c^2}{1+c} + \frac{c^3}{(1+c)^2} + \frac{c^4}{(1+c)^3} + \dots;$$

Ἐάν διὰ $c=c_1$ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων εἶναι S_1 καὶ διὰ $c=c_2$, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων εἶναι S_2 , δείξατε ὅτι ἂν $c_1 > c_2$ τότε καὶ $S_1 > S_2$.

417) Εύρετε διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ x εἶναι συγκλίνουσα (δηλ. ἔχει ἄθροισμα ἀπείρων ὄρων) ἐκάστη τῶν κάτωθι προόδων:

i) $\frac{1}{1+x} - \frac{1-x}{(1+x)^2} + \frac{(1-x)^2}{(1+x)^3} - \frac{(1-x)^3}{(1+x)^4} + \dots$

ii) $\frac{1}{1+3x} + \frac{1+x}{(1+3x)^2} + \frac{(1+x)^2}{(1+3x)^3} + \frac{(1+x)^3}{(1+3x)^4} + \dots$

καὶ δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς πρώτης ἰσοῦται μὲ $1/2$.

54. Μικτὴ πρόοδος. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὄρους μιᾶς ἀριθμητ. καὶ μιᾶς γεωμ. προόδου (τὸν πρῶτον μὲ τὸν πρῶτον, τὸν δεῦτερον μὲ τὸν δεῦτερον κ.ο.κ.) λαμβάνομεν μίαν νέαν ἀκολουθίαν ἀριθμῶν τὴν ὁποίαν ἂς καλέσωμεν *μικτὴν πρόοδον*.

Ἐάν $a, a+\omega, a+2\omega, \dots$ εἶναι μία ἀριθμ. πρόοδος καὶ $\beta, \beta\lambda, \beta\lambda^2, \dots$ μία γεωμετρική, ἥ ἐξ αὐτῶν σχηματιζομένη μικτὴ πρόοδος θὰ εἶναι:

$$a\beta, (a+\omega)\beta\lambda, (a+2\omega)\beta\lambda^2, \dots, [a+(v-1)\omega]\beta\lambda^{v-1}.$$

Ἐὰν Σ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὅρων τῆς μικτῆς προόδου θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \Sigma = \alpha\beta + (\alpha + \omega)\beta\lambda + (\alpha + 2\omega)\beta\lambda^2 + \dots + [\alpha + (n-1)\omega]\beta\lambda^{n-1}.$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμ. προόδου λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα :

$$(2) \quad \Sigma\lambda = \alpha\beta\lambda + (\alpha + \omega)\beta\lambda^2 + \dots + [\alpha + (n-2)\omega]\beta\lambda^{n-1} + [\alpha + (n-1)\omega]\beta\lambda^n.$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$(3) \quad \Sigma(1-\lambda) = \alpha\beta + \omega\beta\lambda + \omega\beta\lambda^2 + \dots + \omega\beta\lambda^{n-1} - [\alpha + (n-1)\omega]\beta\lambda^n.$$

Οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους, ἐξαιρουμένου τοῦ πρώτου καὶ τελευταίου ἀποτελοῦν γεωμ. πρόοδον. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν :

$$\omega\beta\lambda + \omega\beta\lambda^2 + \dots + \omega\beta\lambda^{n-1} = \frac{\omega\beta\lambda^n - \omega\beta\lambda}{\lambda - 1} = \frac{\omega\beta(\lambda - \lambda^n)}{1 - \lambda}.$$

Ἡ (3) γίνεται :

$$\Sigma(1-\lambda) = \alpha\beta - [\alpha + (n-1)\omega]\beta\lambda^n + \frac{\omega\beta(\lambda - \lambda^n)}{1 - \lambda}$$

καὶ συνεπῶς :

$$\Sigma = \frac{\alpha\beta - [\alpha + (n-1)\omega]\beta\lambda^n}{1 - \lambda} + \frac{\omega\beta(\lambda - \lambda^n)}{(1 - \lambda)^2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὅρων τῆς ἀκολουθίας :

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \dots, \frac{n}{2^n}.$$

Λύσις. Ὁ γενικός ὅρος $n/2^n$ εἶναι γινόμενον τοῦ νηοστοῦ ὅρου μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου (τῆς 1, 2, 3, ..., n , ...) καὶ τοῦ νηοστοῦ ὅρου μιᾶς γεωμετρικῆς (τῆς $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$), συνεπῶς ἡ ἀκολουθία εἶναι μικτὴ πρόοδος. Θέτομεν :

$$\Sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{n}{2^n}$$

καὶ πολλαπλασιάζοντες ἐπὶ τὸν λόγον τῆς γεωμετρικῆς λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{2} \Sigma_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{n-1}{2^n} + \frac{n}{2^{n+1}}.$$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη λαμβάνομεν :

$$\frac{1}{2} \Sigma_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - \frac{n}{2^{n+1}}$$

$$\text{καὶ τελικῶς } \Sigma_n = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

418) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n προσθετέων :

$$\Sigma_n = 1 + \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2n-1}{2^{n-1}}.$$

419) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$\Sigma_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1}.$$

★ **55. Ἀπέραντος σειρά.** Οὕτω καλεῖται μία ἀτελεύτητος ἀκολουθία ἀθροισμάτων :

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$$

Οἱ ἀριθμοὶ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ (ἀπειροὶ κατὰ τὸ πλῆθος) λέγονται **ὄροι τῆς σειρᾶς**. Τὸ ἄθροισμα :

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

καλεῖται **ἄθροισμα τῶν ν πρώτων ὄρων τῆς σειρᾶς**.

Συνήθως, ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία τῶν ἀθροισμάτων $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$, δηλ. ἡ ἀπέραντος σειρά, γράφεται συμβολικῶς :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

Ἐὰν τὸ S_n τείνῃ πρὸς κάποιο πεπερασμένον ὄριον S ὅταν $n \rightarrow \infty$, τότε ἡ (ἀπέραντος) σειρά λέγεται **συγκλίνουσα** καὶ τὸ ὄριον S πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει νὰ φθάσῃ τὸ S_n διὰ $n \rightarrow \infty$ λεγεται **ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς σειρᾶς**, γράφομεν δὲ τότε συμβολικῶς :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$$

Οὕτω π. χ. ἡ σειρά $a + a\omega + a\omega^2 + \dots + a\omega^{n-1} + \dots$, ὅπου $|\omega| < 1$ εἶναι συγκλίνουσα* διότι ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 53 (θεώρημα III) τὸ ἄθροισμα S_n τῶν ν πρώτων ὄρων τῆς τείνει πρὸς ἕνα ὄριον (τὸ $a/(1-\omega)$) ὅταν $n \rightarrow \infty$. Συνεπῶς ὑπάρχει ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων καὶ εἶναι τὸ $S = a/(1-\omega)$.

Ὅταν τὸ S_n τείνῃ πρὸς τὸ ἀπειρον ἢ δὲν τείνῃ πρὸς κανένα ὄριον, τότε ἡ σειρά λέγεται **ἀποκλίνουσα** (π. χ. ἡ αὐξουσα γεωμ. πρόοδος).

★ **56. Ἀθροιζόμεναι σειραί.** Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα τὸ ἄθροισμα S_n τῶν ν πρώτων ὄρων σειρῶν τινων χωρὶς νὰ ἐνδιαφερωθῶμεν ἐν γένει διὰ τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ S_n ὅταν $n \rightarrow \infty$.

α') **Μέθοδος I.** Ὁ κυριώτερος τρόπος διὰ τοῦ ὁποῖου ἐπιτυγχάνομεν νὰ ἀθροίσωμεν τοὺς ν πρώτους ὄρους μιᾶς σειρᾶς, $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ἡ ὁποία δὲν ἀνήκει εἰς τοὺς γνωστοὺς ἤδη τύπους σειρῶν (ἀριθμητική, ἢ γεωμετρική, ἢ μικτή πρόοδος) εἶναι ὁ ἀκόλουθος.

Ἐπιδιώκομεν νὰ θέσωμεν τοὺς ὄρους τῆς σειρᾶς ὑπὸ τὴν μορφήν :

$$a_1 = \beta_1 - \beta_2, \quad a_2 = \beta_2 - \beta_3, \quad a_3 = \beta_3 - \beta_4, \dots, a_n = \beta_n - \beta_{n+1},$$

ὅπου $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1}$ κατάλληλοι ἀριθμοί. Τούτου ἐπιτευχθέντος τὸ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ὑπολογίζεται ἁμέσως, διότι :

$$S_n = (\beta_1 - \beta_2) + (\beta_2 - \beta_3) + (\beta_3 - \beta_4) + \dots + (\beta_n - \beta_{n+1}) = \beta_1 - \beta_{n+1}.$$

Διὰ νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν ἀνωτέρω γραφὴν τῶν ὄρων πρέπει νὰ εὑρεθῇ μία συνάρτησις $\varphi(n)$ τοιαύτη ὥστε ὁ νουστός ὄρος a_n νὰ λαμβάνῃ τὴν μορφήν :

(1)

$$a_n = \varphi(n) - \varphi(n+1) \quad \text{διὰ } n=1, 2, 3, \dots$$

* Παράγραφοι σημειοῦμεναι δι' ἀστερίσκου δύνανται νὰ παραλείπονται ἢ ὄχι ἀναλόγως πρὸς τὸ πρόγραμμα τῆς διδασκαλίας.

Πράγματι, τότε θὰ ἔχωμεν $\alpha_1 = \varphi(1) - \varphi(2)$, $\alpha_2 = \varphi(2) - \varphi(3)$, $\alpha_3 = \varphi(3) - \varphi(4)$ κ.ο.κ. καὶ συνεπῶς :

$S_v = \{\varphi(1) - \varphi(2)\} + \{\varphi(2) - \varphi(3)\} + \{\varphi(3) - \varphi(4)\} + \dots + \{\varphi(v) - \varphi(v+1)\}$,
δηλ. θὰ εἶναι τότε :

(2)

$$S_v = \varphi(1) - \varphi(v+1)$$

καὶ τὸ S_v προσδιορίζεται συναρτήσῃ τοῦ v (ὅπου v τυχὼν φυσικὸς ἀριθμὸς). Τοῦτο καλεῖται ἄθροισις τῶν v πρώτων ὄρων ἢ ἄθροισις τῆς σειρᾶς.

Ἡ εὗρεσις μιᾶς καταλλήλου συναρτήσεως $\varphi(v)$ πληρούσης τὴν συνθήκην (1) δὲν εἶναι πάντοτε δυνάτῃ· θὰ δεῖξωμεν διὰ παραδειγμάτων τινῶν πῶς εὐρίσκεται ἢ $\varphi(v)$ εἰς μερικὰς περιπτώσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1ον. «Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$S_v = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{v(v+1)}.$$

Λύσις. Ὁ γενικὸς ὄρος γράφεται : $\alpha_v = \frac{(v+1)-v}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} = \varphi(v) - \varphi(v+1)$
ὅπου $\varphi(v) = \frac{1}{v}$. Συνεπῶς (βλέπε ἀνωτέρω τύπον (2)), $S_v = \frac{1}{1} - \frac{1}{v+1} = \frac{v}{v+1}$. (Ἐνταῦθα, ὅρ $S_v = 1$ δηλ. ὑπάρχει τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς σειρᾶς).
 $v \rightarrow \infty$

2ον. «Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$S_v = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v(v+1)(v+2)}.$$

Λύσις. Ὁ γενικὸς ὄρος γράφεται :

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(v+2)-v}{v(v+1)(v+2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(v+2)}{v(v+1)(v+2)} - \frac{v}{v(v+1)(v+2)} \right\} = \\ &= \frac{1}{2v(v+1)} - \frac{1}{2(v+1)(v+2)} = \varphi(v) - \varphi(v+1) \end{aligned}$$

ὅπου $\varphi(v) = \frac{1}{2v(v+1)}$ καὶ συνεπῶς $S_v = \varphi(1) - \varphi(v+1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2(v+1)(v+2)}$. (Ἐνταῦθα ὅρ $S_v = \frac{1}{4}$ δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς σειρᾶς εἶναι τὸ $\frac{1}{4}$).

3ον. «Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα

$$S_v = \frac{3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{4}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{v+2}{v(v+1)} \cdot \frac{1}{2^v}.$$

Λύσις. Πρὸς μετασχηματισμὸν τοῦ νουστοῦ ὄρου, τρέπομεν πρῶτον τὸ κλάσμα $\frac{v+2}{v(v+1)}$ εἰς ἄθροισμα δύο ἀπλῶν κλασμάτων δηλαδὴ προσδιορίζομεν δύο σταθεροὺς ἀριθμοὺς A καὶ B οὕτως, ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ὡς πρὸς v ταυτότης :

$$(3) \quad \frac{v+2}{v(v+1)} \equiv \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1}.$$

Ἐξαλείφοντες τοὺς παρονομαστὰς τῆς (3) λαμβάνομεν $v+2 \equiv A(v+1) + Bv$ ἢ $v+2 \equiv (A+B)v + A$ καὶ διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ τελευταία αὕτη ταυτότης πρέπει καὶ ἀρκεῖ $A+B=1$, $A=2$. Ὡστε ἔχομεν $A=2$, $B=-1$ καὶ ἡ (3) γίνεται :

(4)

$$\frac{v+2}{v(v+1)} \equiv \frac{2}{v} - \frac{1}{v+1}.$$

Κατόπιν τῆς ἀναλύσεως τοῦ $(n+2)/(n+1)$ εἰς ἀπλὰ κλάσματα, ὁ νουστός ὅρος τῆς σειρᾶς γίνεται (βάσει τῆς (4)) :

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)} \cdot \frac{1}{2^n} = \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1)2^n} = \varphi(n) - \varphi(n+1)$$

ὅπου $\varphi(n) = 1/n \cdot 2^{n-1}$. Συνεπῶς κατὰ τὸν τύπον (2) θὰ εἶναι $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$. ('Ενταῦθα

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 = S = \text{ἄθροισμα τῶν ἀπειρῶν ὁρῶν}$).

β') *Μέθοδος II*. 'Εάν ὁ γενικὸς ὅρος a_n ἀναλύεται ὡς ἐξῆς :

$$(5) \quad a_n = A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2) \quad \text{ὅπου} \quad A+B+\Gamma=0$$

τότε πάλιν ἡ σειρά ἀθροίζεται. Διότι θὰ ἔχωμεν :

$$\begin{aligned} S_n &= \{ A\varphi(1) + B\varphi(2) + \Gamma\varphi(3) \} + \{ A\varphi(2) + B\varphi(3) + \Gamma\varphi(4) \} + \{ A\varphi(3) + B\varphi(4) + \Gamma\varphi(5) \} + \dots \\ &\dots + \{ A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2) \} = A\{ \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n) \} + \\ &+ B\{ \varphi(2) + \varphi(3) + \dots + \varphi(n) + \varphi(n+1) \} + \Gamma\{ \varphi(3) + \dots + \varphi(n) + \varphi(n+1) + \varphi(n+2) \} = \\ &= A\{ \varphi(1) + \varphi(2) \} + B\{ \varphi(2) + \varphi(n+1) \} + \Gamma\{ \varphi(n+1) + \varphi(n+2) \} + \\ &+ (A+B+\Gamma)\{ \varphi(3) + \varphi(4) + \dots + \varphi(n) \}. \end{aligned}$$

'Επειδὴ $A+B+\Gamma=0$ θὰ ἔχωμεν :

$$S_n = A\varphi(1) + (A+B)\varphi(2) + (B+\Gamma)\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2) \quad \eta \quad \kappa\alpha\iota$$

$$(6) \quad S_n = A\varphi(1) - \Gamma\varphi(2) - A\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. «Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν τῆς σειρᾶς τῆς ὁποίας γενικὸς ὅρος εἶναι ὁ $a = \frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)}$ ».

Λύσις. 'Αναλύομεν τὸν a_n εἰς τρία «ἀπλὰ κλάσματα» ἔχοντα παρ(στὰς $n, n+1, n+2$, ἥτοι προσδιορίζομεν τρεῖς σταθεροὺς ἀριθμοὺς οὕτως, ὥστε νὰ ὑφίσταται ἡ ταυ-

$$\text{τότης:} \quad \frac{2n+5}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{\Gamma}{n+2}.$$

Πρὸς εὗρεσιν τῶν A, B, Γ ἐξαλείφομεν τοὺς παρ(στὰς καὶ φθάνομεν εἰς τὴν ταυ-τότητα $2n+5 \equiv A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + \Gamma n(n+1)$ ἢ $2n+5 \equiv (A+B+\Gamma)n^2 + (3A+2B+\Gamma)n + 2A$ ὁπότε πρέπει $A+B+\Gamma=0, 3A+2B+\Gamma=2, 2A=5$. 'Εκ τοῦ συστήματος αὐτοῦ εὐρίσκομεν $A=5/2, B=-3, \Gamma=1/2$. 'Ωστε εἶναι $a_n = A\varphi(n) + B\varphi(n+1) + \Gamma\varphi(n+2)$ ὅπου $A+B+\Gamma=0$ καὶ $\varphi(n)=1/n$. 'Εφαρμόζομεν τὴν μέθοδον II καὶ εὐρίσκομεν :

$$S_n = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n+2}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. «Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὁρῶν τῆς σειρᾶς τῆς ὁποίας γενικὸς ὅρος εἶναι ὁ $a_n = \frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{3^n}$ ».

Λύσις. 'Αναλύομεν τὸ κλάσμα $(n+3)/(n(n+1)(n+2))$ εἰς τρία ἀπλὰ κλάσματα κατὰ τὴν μέθοδον τοῦ προηγούμενου παραδείγματος καὶ εὐρίσκομεν :

$$\frac{n+3}{n(n+1)(n+2)} \equiv \frac{3}{2n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)}.$$

'Επομένως ὁ γενικὸς ὅρος λαμβάνει τὴν μορφήν :

$$a_n = \frac{3}{2n \cdot 3^n} - \frac{2}{(n+1)3^n} + \frac{1}{2(n+2)3^n}.$$

Διὰ τὰ τὸν φέρομεν εἰς τὴν μορφὴν (5), γράφομεν αὐτὸν ὡς ἐξῆς :

$$a_v = \frac{3}{2v \cdot 3^v} - \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{2(v+1)3^{v+1}} + \frac{3^2}{2(v+2)3^{v+2}} = \frac{3}{2v \cdot 3^v} + \frac{-12}{2(v+1)3^{v+1}} + \frac{9}{2(v+2)3^{v+2}} =$$

$$= A\varphi(v) + B\varphi(v+1) + \Gamma\varphi(v+2) \quad \text{ὅπου } A=3, \quad B=-12, \quad \Gamma=9 \text{ καὶ } \varphi(v) = \frac{1}{2v \cdot 3^v}. \quad \text{Ἐπειδὴ}$$

$$A+B+\Gamma=0 \text{ ἐφαρμόζομεν τὴν μέθοδον (II).}$$

γ' Γενίκευσις τῆς Μεθόδου II. Ἐάν ὁ γενικὸς ὅρος a_v ἀναλύεται ὡς ἐξῆς :

$$(7) \quad a_v = A\varphi(v) + B\varphi(v+\alpha) + \Gamma\varphi(v+\beta), \quad A+B+\Gamma=0$$

(ὅπου α, β, γ ἀκέραιοι) καὶ πάλιν ἡ σειρὰ ἀθροίζεται. Π. χ. ἂν $a_v = A\varphi(v) + B\varphi(v+2) + \Gamma\varphi(v+4)$ ὅπου $A+B+\Gamma=0$, τότε εὐρίσκομεν ὅτι :

$$S_v = A\{\varphi(1)+\varphi(2)+\dots+\varphi(v)\} + B\{\varphi(3)+\varphi(4)+\dots+\varphi(v+2)\} +$$

$$+ \Gamma\{\varphi(5)+\varphi(6)+\dots+\varphi(v)+\varphi(v+1)+\varphi(v+2)+\varphi(v+3)+\varphi(v+4)\} =$$

$$= (A+B+\Gamma)\{\varphi(5)+\varphi(6)+\dots+\varphi(v)\} + A\{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)\} +$$

$$+ B\{\varphi(3)+\varphi(4)+\varphi(v+1)+\varphi(v+2)\} + \Gamma\{\varphi(v+1)+\varphi(v+2)+\varphi(v+3)+\varphi(v+4)+\varphi(v+5)\}$$

καὶ ἐπειδὴ $A+B+\Gamma=0$, τὸ S_v ἐκφράζεται συναρτήσῃ τῶν $\varphi(v+1), \varphi(v+2), \varphi(v+3), \varphi(v+4)$ καὶ $\varphi(v+5)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ὁν. «Ὁ νυσοτὸς ὁρος εἶναι $a_v = \frac{2v-1}{v(v+1)(v+3)}$, νὰ εὐρεθῇ τὸ S_v ».

Λύσις. Ἀναλύομεν τὸν a_v εἰς ἀθροίσματα τριῶν ἀπλῶν κλασμάτων $\frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} + \frac{\Gamma}{v+3}$, εὐρίσκομεν δὲ $A=-\frac{1}{3}$, $B=\frac{3}{2}$, $\Gamma=-\frac{7}{6}$, ἥτοι $a_v = A\varphi(v) + B\varphi(v+1) + \Gamma\varphi(v+3)$, ὅπου $\varphi(v) = \frac{1}{v}$ καὶ $A+B+\Gamma=0$.

$$\text{Ὡστε } S_v = A\{\varphi(1)+\dots+\varphi(v)\} + B\{\varphi(2)+\dots+\varphi(v+1)\} + \Gamma\{\varphi(4)+\dots+\varphi(v+3)\} =$$

$$= (A+B+\Gamma)\{\varphi(4)+\varphi(5)+\dots+\varphi(v)\} + A\{\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)\} + B\{\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(v+1)\} +$$

$$+ \Gamma\{\varphi(v+1)+\varphi(v+2)+\varphi(v+3)\} = A\varphi(1) - \Gamma\{\varphi(2)+\varphi(3)\} - A\varphi(v+1) +$$

$$+ \Gamma\{\varphi(v+2)+\varphi(v+3)\} = -\frac{1}{3} + \frac{7}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{v+1} - \frac{7}{6} \left\{ \frac{1}{v+2} + \frac{1}{v+3} \right\} =$$

$$= \frac{23}{36} + \frac{1}{3(v+1)} - \frac{7}{6(v+2)} - \frac{7}{6(v+3)}.$$

Προφανῶς τὸ ἀθροισμα τῶν ἀπείρων ὁρων τῆς σειρᾶς εἶναι $S = \lim_{v \rightarrow \infty} S_v = \frac{23}{36}$.

Παρατήρησις 1η. Πᾶν κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{f(x)}{(x-q_1)(x-q_2)\dots(x-q_k)}$ τοῦ ὁποῦν ὁ παρονομαστής ἔχει μόνον ἀπλᾶς ρίζας, ὁ δὲ ἀριθμητὴς $f(x)$ εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ, ἀναλύεται εἰς ἀθροισμα ἀπλῶν κλασμάτων :

$$\frac{A}{x-q_1} + \frac{B}{x-q_2} + \dots + \frac{T}{x-q_k}$$

προσδιοριζομένων τῶν σταθερῶν $A, B, \Gamma, \dots, T$ διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἐκ ταυτότητος ἴσων πολυωνύμων ὅπως ἔγινε εἰς τὸ παράδειγμα 4ον.

Ἐν τῇ περιπτώσει ὁ βαθμὸς τοῦ ἀριθμητοῦ $f(x)$ εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος πρὸς τὸν βαθμὸν τοῦ παρονομαστοῦ, τότε ἡ τοιαύτη ἀνάλυσις εἶναι ἀδύνατος. Πρέπει τότε νὰ ἐκτελεσθῇ πρῶτον ἡ διαίρεσις καὶ ἀφοῦ τὸ κλάσμα λάβῃ τὴν μορφὴν

$$\Pi(x) + \frac{v(x)}{(x-q_1)(x-q_2)\dots(x-q_k)}, \quad \text{ν' ἀναλυθῇ τὸ } \frac{v(x)}{(x-q_1)\dots(x-q_k)} \text{ εἰς ἀπλᾶ κλάσματα.}$$

Παρατήρησις 2α. Εἰς τὸν τύπον (7) τὸ δεύτερον μέλος δύναται νὰ ἔχη καὶ περισσύτερους τῶν τριῶν ὅρους. Πάλιν ἡ σειρὰ ἀθροίζεται. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὑπάρχει καθεὶν σειρὰ μὲ $\alpha_v = \frac{f(v)}{(v+\alpha)(v+\beta)(v+\gamma)\dots}$, ὅπου $f(v)$ ἀκέραιον πολυώνυμον βαθμοῦ κατὰ δύο μονάδας τοῦλάχιστον μικροτέρου τοῦ βαθμοῦ τοῦ παρονομαστοῦ καὶ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ἀκέραιοι διάφοροι ἀλλήλων. (*Ὅπως εἰς τὰ παραδείγματα 1ον, 4ον, 6ον).

δ') **Μέθοδος III.** Ὁ νυσοτὸς ὅρος ἀναλύεται εἰς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα ὅρων γνωστῶν σειρῶν. Ἐὰν $\alpha_v = \varphi_1(v) + \varphi_2(v) + \varphi_3(v)$, ὅπου $\varphi_1(v), \varphi_2(v), \varphi_3(v)$ εἶναι οἱ νυσοτοὶ ὅροι σειρῶν τὰς ὁποίας γνωρίζομεν νὰ ἀθροίζωμεν, τότε προφανῶς καὶ ἡ σειρὰ μὲ γενικὸν ὅρον α_v ἀθροίζεται:

$$S_v = \{\varphi_1(1) + \varphi_1(2) + \dots + \varphi_1(v)\} + \{\varphi_2(1) + \varphi_2(2) + \dots + \varphi_2(v)\} + \{\varphi_3(1) + \dots + \varphi_3(v)\} = S'_v + S''_v + S'''_v.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7ον. «Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$S_v = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \dots + \frac{2^v - 1}{4^{v-1}}.$$

Λύσις. Ὁ γενικὸς ὅρος $\alpha_v = \frac{2^v - 1}{4^{v-1}} = \frac{2^v - 1}{2^{2v-2}} = \frac{2^v}{2^{2v-2}} - \frac{1}{2^{2v-2}} = \frac{1}{2^{v-2}} - \frac{1}{2^{2v-2}} = \frac{4}{2^v} - \frac{4}{2^{2v}} = \frac{4}{2^v} - \frac{4}{4^v}$, ἀναλύεται δηλ. εἰς διαφορὰν δύο ὅρων, ὧν ἕκαστος ἀποτελεῖ τὸν νυσοτὸν ὅρον φθινούσης γεωμετρ. προόδου. Οὕτως ἔχομεν:

$$S_v = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^v} \right) - 4 \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^v} \right) =$$

$$= 4 \frac{\frac{1}{2^{v+1}} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} - 4 \frac{\frac{1}{4^{v+1}} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} - 1} = 4 \left(1 - \frac{1}{2^v} \right) - \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{4^v} \right) = \frac{8}{3} - \frac{1}{2^{v-2}} + \frac{1}{3 \cdot 4^{v-1}}.$$

Προφανῶς δὲ εἶναι $S = \lim_{v \rightarrow \infty} S_v = \frac{8}{3}.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὅρων καὶ εἰ δυνατόν καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὅρων ἑκάστης τῶν κάτωθι σειρῶν.

420) Τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον $\frac{1}{v(v+1)(v+2)\dots(v+k+1)}$ (βλέπε παράδειγ. 2ον).

421) $\frac{1}{(1+\alpha)(1+2\alpha)} - \frac{1}{(1+2\alpha)(1+3\alpha)} + \frac{1}{(1+3\alpha)(1+4\alpha)} + \dots$ ($\alpha > 0$).

422) $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2v-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2v+2)} + \dots$

423) $\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot 2 + \frac{10}{3 \cdot 4} \cdot 2^2 + \dots + \frac{v^2+1}{v(v+1)} \cdot 2^{v-1} + \dots$

424) $\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots + \frac{v}{(v+2)(v+3)(v+4)} + \dots$

425) Τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_v = \frac{2v+3}{v(v+1)} \cdot \frac{1}{3^v}$.

426) Τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον $\alpha_v = \frac{v^2+6v+12}{v(v+1)(v+2)} \cdot \frac{1}{2^{v+1}}$.

$$427) \text{ Τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον } \alpha_v = \frac{v \cdot 2^v}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (v+2)}$$

$$428) \text{ Τῆς σειρᾶς μὲ γενικὸν ὅρον } \alpha_v = \frac{v}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2v+1)}$$

★57. Ἀναδρομικαὶ σειραὶ 2ας τάξεως. α') Καλεῖται ἀναδρομικὴ σειρά (ἢ ἀκολουθία) 2ας τάξεως ἡ σειρά (ἢ ἡ ἀκολουθία) ἐκείνη τῆς ὁποίας ἕκαστος ὅρος (ἀπὸ τοῦ 3ου καὶ ἐφεξῆς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων του πολλαπλασιασμένων ἐπὶ σταθεροὺς ἀριθμοὺς ἀντιστοίχως. Οἱ σταθεροὶ πολλαπλασιαστικὰ καλοῦνται **σταθεραὶ** τῆς σειρᾶς. Δηλ. εἰς τὴν ἀναδρομικὴν σειράν 2ας τάξεως $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_v + \alpha_{v+1} + \alpha_{v+2} + \cdots$ θὰ ὑπάρχῃ ἡ σχέσηις :

$$(1) \quad \boxed{\alpha_{v+2} = p\alpha_{v+1} + q\alpha_v \text{ διὰ } v=1, 2, 3, \dots}$$

ὅπου p, q σταθεροὶ ἀριθμοί.

Ὅταν δοθοῦν αἱ σταθεραὶ p, q καὶ οἱ δύο πρῶτοι ὅροι α_1, α_2 τότε ἡ ἀναδρομικὴ σειρά εἶναι τελείως ὥρισμένη διότι : $\alpha_3 = p\alpha_2 + q\alpha_1, \alpha_4 = p\alpha_3 + q\alpha_2, \alpha_5 = p\alpha_4 + q\alpha_3$, κ.ο.κ., δηλ. δυνάμεθα νὰ εὗρωμεν ὅσουσδήποτε ὅρους θέλομεν. Διὰ τὴν εὕρεσιν τῆς μορφῆς τοῦ νηοστοῦ ὅρου δύναται νὰ χρησιμεύσῃ τὸ κάτωθι θεώρημα :

Θεώρημα. «Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμοταξίους ὅρους δύο γεωμετρικῶν προόδων ἐχουσῶν διαφόρους λόγους ω_1 καὶ ω_2 λαμβάνομεν ἀναδρομικὴν σειράν μὲ σταθεράς $p = \omega_1 + \omega_2$ καὶ $q = -\omega_1\omega_2$ ».

Ἀπόδειξις. Ἐστῶσαν $A, A\omega_1, A\omega_1^2, \dots, A\omega_1^v, \dots$ καὶ $B, B\omega_2, B\omega_2^2, \dots, B\omega_2^v, \dots$ αἱ δύο γεωμετρικαὶ πρόοδοι. Διὰ προσθέσεως τῶν ὁμοταγῶν ὅρων λαμβάνομεν τὴν ἀκολουθίαν :

$$(2) \quad A+B, A\omega_1+B\omega_2, \dots, A\omega_1^v+B\omega_2^v, A\omega_1^{v+1}+B\omega_2^{v+1}, A\omega_1^{v+2}+B\omega_2^{v+2}, \dots$$

Θὰ δείξωμεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας ταύτης (2) σχηματίζουν ἀναδρομικὴν σειράν. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ὑπάρχουν δύο σταθεροὶ ἀριθμοὶ p καὶ q τοιοῦτοι ὥστε νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης :

$$(3) \quad A\omega_1^{v+2} + B\omega_2^{v+2} = p(A\omega_1^{v+1} + B\omega_2^{v+1}) + q(A\omega_1^v + B\omega_2^v)$$

δι' ὅλας τὰς τιμὰς τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ v . Ἡ (3) γράφεται :

$$(4) \quad A\omega_1^v \{ \omega_1^2 - p\omega_1 - q \} + B\omega_2^v \{ \omega_2^2 - p\omega_2 - q \} = 0$$

καὶ διὰ v ἀληθεύῃ δι' ὅλα τὰ v , ἀρκεῖ νὰ εἶναι :

$$(5) \quad \{ \omega_1^2 - p\omega_1 - q = 0, \quad \omega_2^2 - p\omega_2 - q = 0 \}.$$

Ὡστε ἂν προσδιορίσωμεν τοὺς σταθεροὺς ἀριθμοὺς p καὶ q ὥστε νὰ ἐπαληθεύουν τὸ σύστημα (5), τότε ἡ (4) θ' ἀληθεύῃ, οἷοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς v , ἐπομένως καὶ ἡ (3) θὰ ἐφίσταται διὰ πᾶν v , ἄρα ἡ (2) θὰ εἶναι ἀναδρομικὴ μὲ σταθεράς p καὶ q . Πράγματι, λύοντες τὸ σύστημα (5) εὐρίσκουμεν μίαν καὶ μόνην λύσιν :

$$(6) \quad \boxed{p = \omega_1 + \omega_2, \quad q = -\omega_1\omega_2}.$$

“Ωστε υπάρχουν δύο σταθεραὶ ἀριθμοὶ p, q διδόμενοι ἀπὸ τὰς (6) τοιοῦτοι ὥστε ἡ (3) νὰ ἰσχύη δι’ ὅλα τὰ n . Ἐπομένως ἡ (2) εἶναι ἀκολουθία ἀναδρομικὴ μὲ σταθερὰς $p = \omega_1 + \omega_2, q = -\omega_1\omega_2$.

β’) **Ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος.** Ἐὰν δοθῇ μία ἀναδρομικὴ σειρὰ μὲ ἀρχικοὺς ὅρους a_1, a_2 καὶ σταθερὰς p, q , τότε δυνάμεθα ἐν γένει (πλὴν μιᾶς ἐξαιρετικῆς περιπτώσεως τὴν ὁποίαν θὰ ἐξετάσωμεν περαιτέρω), νὰ προσδιορίσωμεν δύο γεωμετρικὰς προόδους $A, A\omega_1, A\omega_1^2, \dots$ καὶ $B, B\omega_2, B\omega_2^2, \dots$ διὰ τῆς προσθέσεως τῶν ὁποίων νὰ προκύπτῃ ἡ δοθεῖσα ἀναδρομικὴ σειρὰ. Αἱ δύο αὗται πρόοδοι προστιθέμεναι δίδουν κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα, ἀναδρομικὴν σειρὰν μὲ σταθερὰς $\omega_1 + \omega_2$ καὶ $-\omega_1\omega_2$. Διὰ νὰ συμπίπτῃ αὕτη μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀρκεῖ νὰ ἔχῃ σταθερὰς τὰς τῆς δοθείσης καὶ τοὺς δύο πρώτους ὅρους ἴσους μὲ τοὺς τῆς δοθείσης. Ὡστε πρέπει :

$$\omega_1 + \omega_2 = p, \quad -\omega_1\omega_2 = q, \quad A + B = a_1, \quad A\omega_1 + A\omega_2 = a_2.$$

Ἐκ τῶν ἐξισώσεων τούτων καθορίζομεν τὰ ω_1, ω_2, A καὶ B , ὅποτε ἡ δοθεῖσα ἀναδρομικὴ σειρὰ συμπίπτει μὲ τὴν $(A+B) + (A\omega_1 + B\omega_2) + \dots + (A\omega_1^{n-1} + B\omega_2^{n-1}) + \dots$ καὶ συνεπῶς, $a_n = A\omega_1^{n-1} + B\omega_2^{n-1}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. «Νὰ εὐρεθῇ ὁ νουστὸς ὅρος καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων τῆς ἀναδρομικῆς σειρᾶς ἡ ὁποία ἔχει πρώτους ὀρους $a_1 = 2, a_2 = 5$ καὶ σταθερὰς $p = 5$ καὶ $q = -6$ ».

Λύσις. Οἱ ὅροι τῆς σειρᾶς εἶναι: $a_1 = 2, a_2 = 5, a_3 = 5 \cdot (5) + 2(-6) = 13, a_4 = 13 \cdot (5) + 5(-6) = 35, a_5 = 35 \cdot (5) + 13(-6) = 97$ κ.ο.κ. Ἐὰν προσθέσωμεν δύο γεωμετρ. προόδους $A, A\omega_1, A\omega_1^2, \dots$ καὶ $B, B\omega_2, B\omega_2^2, \dots$ θὰ λάβωμεν (ἐφ’ ὅσον $\omega_1 \neq \omega_2$) ἀναδρομικὴν σειρὰν μὲ $p = \omega_1 + \omega_2$ καὶ $q = -\omega_1\omega_2$. Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν δοθεῖσαν ἀναδρομικὴν σειρὰν πρέπει $\omega_1 + \omega_2 = 5$ καὶ $-\omega_1\omega_2 = -6$, ἄρα $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3$. Ἐπίσης πρέπει $A + B = 2, A\omega_1 + B\omega_2 = 5$ δηλ. $A + B = 2, 2A + 3B = 5$. Ἐκ τοῦ συστήματος τούτου εὐρίσκομεν $A = 1, B = 2$. Ὡστε αἱ πρόοδοι αἱ ὁποῖαι μᾶς δίδουν τὴν δοθεῖσαν ἀναδρομικὴν σειρὰν εἶναι αἱ $1, 2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{n-1}, \dots$ καὶ $1, 3, 3^2, \dots, 3^{n-1}, \dots$ Συνεπῶς θὰ εἶναι $a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$ καὶ

$$S_n = (1 + 2 + \dots + 2^{n-1}) + (1 + 3 + \dots + 3^{n-1}) = 2^n - 1 + \frac{3^n - 1}{2} = 2^n + \frac{1}{2} 3^n - \frac{3}{2}.$$

Παρατήρησις. Ἐὰν (7), $a_{n+2} - pa_{n+1} - qa_n = 0$ εἶναι ἡ ἀναδρομικὴ σχέσις, τότε οἱ λόγοι ω_1, ω_2 τῶν δύο γεωμετρικῶν προόδων αἰτινες μᾶς δίδουν τὴν ἀναδρομικὴν σειρὰν εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $t^2 - pt - q = 0$. Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχῃ διπλὴν ρίζαν, δηλ. ἂν εἶναι $p^2 + 4q = 0$ ὅποτε $\omega_1 = \omega_2$ τότε τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δὲν ἐφαρμόζεται διότι εἰς αὐτὸ ὑπετέθη $\omega_1 \neq \omega_2$.

Εἰς τὴν ἰδιαίχουσαν αὐτὴν περίπτωσιν ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ ἀναδρομικὴ σειρὰ εἶναι μία μικτὴ πρόοδος μὲ γενικὸν ὅρον $\omega^n (c_1 + c_2 n)$ ὅπου ω ἡ διπλὴ ρίζα τῆς $t^2 - pt - q = 0$ (δηλ. $\omega = \frac{p}{2}$) καὶ c_1, c_2 σταθεροὶ ἀριθμοὶ. Πράγματι, εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ σειρὰ μὲ νουστὸν ὅρον τὸν $\omega^n (c_1 + c_2 n)$ πληροῖ τὴν ἀναδρομικὴν σχέσιν (7) δηλ. ἔχομεν διὰ πᾶν n :

$$\omega^{n+2}(c_1 + c_2(n+2)) - p\omega^{n+1}(c_1 + c_2(n+1)) - q\omega^n(c_1 + c_2 n) = 0.$$

Διότι ἡ σχέσις αὕτη γράφεται :

$$c_1\omega^v(\omega^2-p\omega-q)+c_2v\omega^v(\omega^2-p\omega-q)+c_2\omega^{v+1}(2\omega-p)=0,$$

όποτε είναι φανερόν ότι ἀληθεύει, ἀφοῦ τὸ $\omega = \frac{p}{2}$ εἶναι ἡ διπλῇ ρίζα τῆς $t^2-pt-q=0$.

Ὅσον ἀφορᾷ τὰ c_1 καὶ c_2 , ταῦτα προσδιορίζονται οὕτως, ὥστε διὰ $v=1$ καὶ $v=2$ νὰ λαμβάνωμεν ἐκ τοῦ γενικοῦ ὅρου $\omega^v(c_1+c_2v)$ τοὺς δύο πρώτους ὅρους α_1 καὶ α_2 τῆς ἀναδρομικῆς. Κατόπιν τούτων, ταυτίζεται ἡ ἀναδρομικὴ σειρὰ μὲ τὴν ἔχουσαν νυσοστὸν ὅρον $\omega^v(c_1+c_2v)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

429) Μιᾶς ἀναδρομικῆς σειρᾶς $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_v+\dots$ δίδεται ὅτι $\alpha_1=1$, $\alpha_2=1$ καὶ ἡ ἀναδρομικὴ σχέσις $\alpha_{v+2}=\alpha_{v+1}+\alpha_v$ (δηλ. $p=1$, $q=1$). Νὰ εὑρεθῇ ὁ νυσοστὸς ὅρος τῆς σειρᾶς καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὅρων αὐτῆς. (Σειρὰ τοῦ Fibonacci).

430) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ σταθεραὶ p καὶ q καὶ ὁ νυσοστὸς ὅρος τῆς ἀναδρομικῆς σειρᾶς δευτέρας τάξεως, τῆς ὁποίας οἱ τέσσαρες πρῶτοι ὅροι εἶναι 1, $-7x$, $-x^2$, $-43x^3$.

431) Νὰ εὑρεθῇ ὁ νυσοστὸς ὅρος τῆς σειρᾶς $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_v+\dots$ εἰς τὴν ὁποίαν $\alpha_1=2$, $\alpha_2=4$, δεδομένου ὅτι ὑπάρχει ἡ σχέσις $\alpha_{v+2}=\alpha_{v+1}+\alpha_v+1$ διὰ πᾶν v .

432) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν v πρώτων ὅρων ἐκάστης τῶν ἐπομένων ἀναδρομικῶν σειρῶν 2ας τάξεως:

$$i) 2+7x+25x^2+91x^3+\dots$$

$$ii) -\frac{3}{2}+2+0+8+\dots$$

433) Ἐὰν προσθέσωμεν τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τριῶν γεωμετρικῶν προόδων ἔχουσιν λόγους ω_1 , ω_2 , ω_3 διαφόρους ἀλλήλων ἀνά δύο, λαμβάνομεν μίαν ἀκολουθίαν εἰς τὴν ὁποίαν ἕκαστος (ἀπὸ τοῦ τετάρτου καὶ ἐφεξῆς) ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν προηγούμενων τοῦ ὅρων πολλαπλασιασθέντων ἐπὶ σταθεροὺς ἀριθμοὺς p , q , r . Δηλ. θὰ εἶναι $\alpha_{v+3}=p\alpha_{v+2}+q\alpha_{v+1}+r\alpha_v$ διὰ $v=1, 2, \dots$. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ p , q , r συναρτήσει τῶν λόγων τῶν προόδων. (Ἀναδρομικὴ σειρὰ τρίτης τάξεως).

434) Πᾶσα μικτὴ πρόοδος εἶναι ἀναδρομικὴ σειρὰ δευτέρας τάξεως μὲ σταθεράς p , q πληρούσας τὴν σχέσιν $p^2+4q=0$.

435) Μιᾶς ἀκολουθίας $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots$ δίδεται ὅτι $\alpha_1=10$, $\alpha_2=26$ καὶ ὅτι $\alpha_v=2\alpha_{v-1}+\alpha_{v-2}+\alpha_{v-3}+\dots+\alpha_2+\alpha_1+6$ (διὰ $v \geq 3$). Νὰ δεიχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία αὕτη εἶναι ἀναδρομικὴ 2ας τάξεως καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ α_v .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

Λογάριθμοι. Ἀνατοκισμός. Χρεωλυσία.

58. Δυνάμεις με ἀσύμμετρον ἐκθέτην. Ἐὰν $a > 0$, γνωρίζομεν ὅτι τὸ σύμβολον a^x ἔχει μίαν ἐντελῶς καθωρισμένην ἔννοιαν ὅταν ὁ ἐκθέτης x εἴναι οἷοσδήποτε σύμμετρος ἀριθμὸς [βλ. [1], § 87, ε'). Θὰ δώσωμεν, τώρα, στοιχειωδῶς τὴν ἔννοιαν τοῦ συμβόλου a^x ὅταν ὁ ἐκθέτης x εἴναι ἀσύμμετρος.

Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ ὀρίσωμεν τὴν δύναμιν $a^{\sqrt{2}}$. Θεωροῦμεν πρὸς τοῦτο μίαν αὐξουσαν ἀκολουθίαν συμμέτρων ἀριθμῶν ἡ ὁποία νὰ τείνῃ πρὸς ὄριον τὸν $\sqrt{2}$, καὶ μάλιστα τὴν ἀκολουθίαν τῶν κατ' ἔλλειψιν ρητῶν προσεγγίσεων τοῦ $\sqrt{2}$ [βλ. [1], § 17] δηλ. τὴν

$$1, \quad 1,4, \quad 1,41, \quad 1,414, \quad 1,4142, \quad 1,41421, \dots$$

ἡ ὁποία ἔχει ὄριον τὸν $\sqrt{2}$. Σχηματίζομεν τώρα τὴν ἀκολουθίαν τῶν δυνάμεων με ρητοὺς ἐκθέτας :

$$a^1, \quad a^{1,4}, \quad a^{1,41}, \quad a^{1,414}, \quad a^{1,4142}, \quad a^{1,41421}, \dots$$

Ἐὰν $a > 1$, ἡ ἀκολουθία αὐτὴ εἶναι αὐξουσα καὶ φραγμένη, συνεπῶς τείνει πρὸς κάποιον ὄριον (§ 49, η). Τὸ ὄριον τοῦτο θὰ ὀνομάσωμεν, $a^{\sqrt{2}}$. Ἐὰν πάλιν $0 < a < 1$ ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία εἶναι φθίνουσα καὶ φραγμένη, συνεπῶς πάλιν ἔχει ὄριον. Τὸ ὄριον τοῦτο θεωρεῖται ὡς ἐκφράζον τὴν τιμὴν τῆς δυνάμεως $a^{\sqrt{2}}$.

Γενικῶς, ἂν β ἀσύμμετρος, ἔχων δεκαδικὸν ἀνάπτυγμα $\beta = \psi_0, \psi_1\psi_2\psi_3 \dots \psi_n \dots$ καὶ $a > 0$, θὰ καλεῖται δύναμις τοῦ a εἰς τὸν ἀσύμμετρον ἐκθέτην β , τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ ἀκολουθία τῶν δυνάμεων με ρητοὺς ἐκθέτας :

$$a^{\psi_0}, \quad a^{\psi_0\psi_1}, \quad a^{\psi_0\psi_1\psi_2}, \quad \dots \quad a^{\psi_0\psi_1\psi_2 \dots \psi_n}, \dots$$

Ἐν τῇ πράξει, ἡ δύναμις a^β ὅπου β ἀσύμμετρος ἀντικαθίσταται διὰ τῆς προσεγγισέως τῆς, a^σ ὅπου σ σύμμετρος προσεγγίζων ἐπαρκῶς τὸν ἀσύμμετρον β .

59. Ὁρισμός τοῦ Λογαρίθμου. Ἐστω a θετικὸς ἀριθμὸς διάφορος τῆς μονάδος, ὅστις ἂς ὀνομασθῇ **βάσις** τῶν λογαρίθμων καὶ A τυχὼν ἄλλος θετικὸς ἀριθμὸς. Ἐὰν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x πληροῖ τὴν ἰσότητα :

(1)

$$a^x = A$$

τότε λέγομεν ὅτι x εἶναι **λογάριθμος** τοῦ A ὡς πρὸς **βάσιν** a καὶ γράφομεν

$$x = \log_a A$$

Ὡστε: «Λογάριθμος ἀριθμοῦ A (θετικοῦ) εἶναι ὁ ἐκθέτης εἰς τὸν ὅποιον ὑψομένη ἡ βάσις μᾶς δίδει τὸν ἀριθμὸν A ».

Ἐπομένως ἡ (1) δύναται νὰ γραφῇ

(2)

$$\log_a A = A$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι δοθέντων τοῦ $a > 0$ καὶ $a \neq 1$ καὶ τοῦ $A > 0$ ὑπάρχει πάντοτε κατ'ἀλλήλους ἐκθέτης x σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος εἰς τὸν ὅποιον ὑψούμενος ὁ a δίδει τὸν A . Ἡ ἀπόδειξις ὅμως τούτου ἀπαιτεῖ μεθόδους εὐρισκομένης ἐκτὸς τῶν πλαισίων τῆς Στοιχειώδους Ἀλγέβρας.

Ἐν τῇ περιπτώσει ἡ βάσις εἶναι τὸ 10, παραλείπομεν τὸν δείκτην, γράφοντες ἀπλῶς $\log A$ ἀντὶ $\log_{10} A$. Ὡστε διὰ τοῦ συμβόλου $\log A$ ἐννοοῦμεν τὸν ἐκθέτην εἰς τὸν ὅποιον ὑψούμενος ὁ 10 μᾶς δίδει τὸν A . Οἱ ὥς πρὸς βάσιν 10 λογάριθμοι λέγονται καὶ «κοινοὶ» ἢ «δεκαδικοὶ» λογάριθμοι.

Σημειώσεις. Λογαρίθμους ἀρνητικῶν ἀριθμῶν οὔτε ὀρίζομεν οὔτε μεταχειρίζομεθα. Πάντες οἱ ἀριθμοὶ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν τὸν λογάριθμον θὰ θεωροῦνται εἰς ὅλα τὰ ἐπόμενα, **θετικοί**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. 1) $\log_2 8 = 3$ (διότι $2^3 = 8$). 2) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \frac{1}{3}$

$$(\text{διότι } 2^{1/3} = \sqrt[3]{2}). \quad 3) \log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad (\text{διότι } a^{1/2} = \sqrt{a}).$$

$$4) \log_a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right) = -\frac{1}{3} \quad \left(\text{διότι } a^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \right).$$

$$5) \log 100 = 2 \quad (\text{διότι } 10^2 = 100). \quad 6) \log 0,001 = -3.$$

$$7) 10^{\log y} = y. \quad 8) \log_a (a^x) = x.$$

9) Ὁ $\log 5$ εἶναι ἀριθμὸς ἀσύμμετρος. Διότι ἂν ἦτο $\log 5 = \mu/\nu$ ὅπου μ καὶ ν ἀκεραῖοι θετικοὶ τότε θὰ εἴχομεν $10^{\mu/\nu} = 5$ ἢ $10^\mu = 5^\nu$ ἢ $2^\mu \cdot 5^\mu = 5^\nu$. Ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης εἶναι ἀδύνατος, διότι ὁ 2 ὥς διαιρῶν τὸ πρῶτον μέλος θὰ ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὸ δεύτερον καὶ συνεπῶς θὰ ἔπρεπε νὰ διαιρῇ καὶ τὸν 5, (βλ. [1], § 10, πόρισμα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

436) Γράψατε τὰς κάτωθι (ἐκθετικὰς) ἰσότητας, ὑπὸ μορφήν λογαριθμικῶν ἰσοτήτων:

$$3^4 = 81, \quad 4^3 = 64, \quad \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt[3]{27} = 3, \quad 4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}, \quad 25^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{125}.$$

437) Γράψατε τὰς κάτωθι λογαριθμικὰς ἰσότητας, ὑπὸ μορφήν ἐκθετικῶν:

$$\log_5 25 = 2, \quad \log_3 32 = \frac{5}{3}, \quad \log_4 \left(\frac{1}{8} \right) = -\frac{3}{2}, \quad \log 0,001 = -3.$$

438) Εὗρετε τὸ x ἐκ τῶν κάτωθι ἰσοτήτων:

$$x = \log_4 49, \quad x = \log_7 10000, \quad x = \log_2 \left(\frac{1}{2} \right), \quad x = \log_{16} 4, \quad x = \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{32}} \right),$$

$$\log_x 16 = 2, \quad \log_x 8 = \frac{3}{2}, \quad \log_x \left(\frac{81}{16} \right) = 4, \quad \log_8 x = -\frac{7}{3}, \quad \log_a x = 1, \quad \log_a x = -1.$$

60. Πρακτικὸς ὁρισμὸς τοῦ Λογαρίθμου. Δοθέντος τοῦ θετικοῦ A , δυνατόν νὰ μὴ ὑπάρῃ οὐδείς σύμμετρος ἐκθέτης x εἰς τὸν ὁποῖον ὑφουμένη ἢ βάσις a νὰ παρέχῃ τὸν A , καὶ τότε ὁ λογαρίθμος τοῦ A θὰ εἶναι ἓνας (ἀσύμμετρος) ἀριθμὸς μὲ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία, μὴ περιοδικά.

Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ εὐρίσκεται ἐκθέτης ρητὸς x τοιοῦτος, ὥστε ἡ δύναμις a^x νὰ προσεγγίζῃ ὅσον θέλομεν τὸν A . Ἀντικαθιστῶμεν τότε τὸν A διὰ τῆς προσεγγίσεώς του, a^x καὶ τὸν λογαρίθμον x τῆς προσεγγίσεως ταύτης θεωροῦμεν ὡς λογαρίθμον τοῦ A .

Τοῦτο εἶναι ἐπιτρεπτόν διὰ τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς, οἱ ὁποῖοι γίνονται κατὰ κανόνα μὲ προσέγγισιν, ὑπὸ τὸν ὅρον βεβαίως ἢ προσέγγισις νὰ εἶναι ἐπαρκής.

Ὡστε: «Ἐν τῇ πράξει, καλεῖται λογαρίθμος τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ A ὡς πρὸς βάσιν a , ὁ σύμμετρος ἐκθέτης x εἰς ὃν ὑφουμένη ἢ βάσις a παρέχει τὸν ἀριθμὸν A ἢ ἱκανὴν προσέγγισιν τοῦ A ».

Εἰς τὴν ἐπομένην παράγραφον 61, εἰς τὴν ὁποίαν θὰ ἐξετάσωμεν τὰς ιδιότητας τῶν λογαρίθμων, θὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τὸν πρακτικὸν τοῦτον ὁρισμὸν τοῦ λογαρίθμου.

Σημείωσις. Διὰ τῶν λογαρίθμων ἐπιτυγχάνομεν τὴν ταχεῖαν καὶ μὲ ἱκανὴν προσέγγισιν ἐκτέλεσιν ὀρισμένων ἀριθμητικῶν πράξεων, ὅπως πολλαπλασιασμῶν, διαιρέσεων καὶ τὴν ἔξαγωγήν ριζῶν μὲ οἰονδήποτε δείκτην. Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν εἰδικούς πίνακας λογαρίθμων περιεχόντων τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 10000 ἢ καὶ περισσοτέρων. Ὡς βάσις τῶν λογαρίθμων λαμβάνεται εἰς τοὺς πίνακας τούτους ἢ τὸ 10 (κοινοὶ λογαρίθμοι) ἢ ὁ ἀσύμμετρος ἀριθμὸς $e=2,7182818284...$ Οἱ ὡς πρὸς βάσιν e λογαρίθμοι καλοῦνται «Νεπέριοι» ἢ «Φυσικοὶ» λογαρίθμοι.

61. Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων. Θεώρημα I. «Εἰς πᾶν σύστημα λογαρίθμων, ὁ λογαρίθμος τοῦ 1 εἶναι τὸ μηδέν, ὁ δὲ λογαρίθμος τῆς βάσεως εἶναι τὸ 1».

Ἀπόδειξις. Αὕτη προκύπτει ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ λογαρίθμου ὡς ἐκθέτου:

$$a^0=1, \quad a^1=a.$$

Θεώρημα II. «Ἐφ' ὅσον ἢ βάσις a τῶν λογαρίθμων εἶναι >1 , οἱ ἀριθμοὶ οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 1 ἔχουν θετικὸν λογαρίθμον, ἐνῶ οἱ μικρότεροι τοῦ 1 ἔχουν ἀρνητικόν».

Ἀπόδειξις. Διότι, ἀριθμὸς μεγαλύτερος τῆς μονάδος ὑφούμενος εἰς θετικὸν ἐκθέτην, καθίσταται μεγαλύτερος τῆς μονάδος ὑφούμενος δὲ εἰς ἀρνητικὸν ἐκθέτην γίνεται μικρότερος τῆς μονάδος. (Πράγματι, ἂν m/n ἓνας σύμμετρος ἐκθέτης, ὅπου m, n θετικοὶ ἀκέραιοι καὶ $a > 1$, τότε $a^m > 1$, ἄρα καὶ $\sqrt[n]{a^m} > 1$, δηλ. $a^{m/n} > 1$. Ἐὰν $-σ$ εἶναι ἓνας ἀρνητικὸς σύμμετρος ἐκθέτης, τότε, ὡς εἶδομεν, $a^{-σ} > 1$, ἄρα $\frac{1}{a^σ} < 1$, ἥτοι $a^{-σ} < 1$).

Θεώρημα III. «*Ο λογάριθμος τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων τῶν παραγόντων*».

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν A, B, Γ τρεῖς ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ x, y, z οἱ λογάριθμοι τῶν ὡς πρὸς βάσιν a . Θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσότητας: $A=a^x, B=a^y, \Gamma=a^z$ (αἵτινες δύνανται νὰ νοηθοῦν καὶ ὡς κατὰ προσέγγισιν ἰσότητες) καὶ ἐξ αὐτῶν τὴν $A \cdot B \cdot \Gamma = a^x \cdot a^y \cdot a^z = a^{x+y+z}$.

Ἀλλὰ ἡ ἰσότης $A \cdot B \cdot \Gamma = a^{x+y+z}$ δεικνύει ὅτι :

$$\log_a (AB\Gamma) = x + y + z = \log_a A + \log_a B + \log_a \Gamma.$$

Θεώρημα IV. «*Ο λογάριθμος ἐνὸς πηλίκου ἰσοῦται πρὸς τὸν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ μείον τὸν λογάριθμον τοῦ παρονομαστοῦ*».

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν A καὶ B δύο ἀριθμοὶ (θετικοὶ) καὶ x καὶ y οἱ λογάριθμοι αὐτῶν· θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸν ὅρισμὸν τῶν λογαρίθμων :

$$A = a^x, \quad B = a^y,$$

ὁπου a ἡ βάσις τῶν λογαρίθμων.

Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν : $\frac{A}{B} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ καὶ συνεπῶς :

$$\log_a \left(\frac{A}{B} \right) = x - y = \log_a A - \log_a B.$$

Πόρισμα. Οἱ ἀντίστροφοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἀντιθέτους λογαρίθμους. Διότι :

$$\log_a \left(\frac{1}{A} \right) = \log_a 1 - \log_a A = 0 - \log_a A = -\log_a A.$$

Θεώρημα V. «*Ο λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως ἐνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐκθέτου τῆς δυνάμεως ἐπὶ τὸν λογάριθμον τῆς βάσεως*».

Ἀπόδειξις. Ἐστω A^k μία δύναμις τοῦ ἀριθμοῦ A οὕτινος ὁ λογάριθμος ὡς πρὸς βάσιν a εἶναι x . Θὰ ἔχωμεν :

$$\log_a A = x \quad \text{καὶ} \quad A = a^x \quad \text{καὶ} \quad A^k = (a^x)^k = a^{kx}.$$

Ἡ ἰσότης $A^k = a^{kx}$ δεικνύει ὅτι $\log_a (A^k) = k \cdot \log_a A$.

Πόρισμα. «*Ο λογάριθμος τῆς νυοστικής ρίζης ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸν λογάριθμον τοῦ ὑπορρίζου διαιρεθέντα διὰ τοῦ δείκτου n τῆς ρίζης*».

Ἀρκεῖ εἰς τὴν ἀποδειχθεῖσαν ἰσότητα : $\log_a (A^k) = k \cdot \log_a A$ νὰ τεθῇ $k = \frac{1}{v}$. Λαμβάνομεν τότε :

$$\log_a \sqrt[v]{A} = \frac{\log_a A}{v}.$$

Θεώρημα VI. «*Τῆς βάσεως a τῶν λογαρίθμων οὐσης > 1 ὁ μεγάλυτερος ἐκ δύο ἀριθμῶν ἔχει μεγαλύτερον λογάριθμον*».

Ἀπόδειξις. Ἐστω $A > B$. Τότε $\frac{A}{B} > 1$ καὶ $\log_a \left(\frac{A}{B} \right) > 0$ (κατὰ τὸ II).

Ἄρα : $\log_a A - \log_a B > 0$, ἥτοι $\log_a A > \log_a B$.

Θεώρημα VII. «Ἐὰν γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν ὡς πρὸς βάσιν τινὰ α, εὐρίσκομεν τοὺς λογαρίθμους τῶν ὡς πρὸς νέαν βάσιν β, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τοὺς παλαιοὺς λογαρίθμους ἐπὶ τὸ ἀντίστροφον τοῦ λογαρίθμου τῆς νέας βάσεως β ὡς πρὸς τὴν παλαιάν».

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἔστω x ὁ λογαρίθμος τοῦ Α ὡς πρὸς τὴν νέαν βάσιν β. Θὰ ἔχωμεν: $\beta^x = A$. Ἄν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς ἰσότητος ταύτης ὡς πρὸς τὴν παλαιάν βάσιν α θὰ ἔχωμεν:

$$x \log_{\alpha} \beta = \log_{\alpha} A \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{1}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \log_{\alpha} A.$$

ἦτοι:

$$\log_{\beta} A = \frac{1}{\log_{\alpha} \beta} \cdot \log_{\alpha} A.$$

Ἡ σχέσις αὕτη παρέχει τὸν κανόνα εὐρέσεως τῶν λογαρίθμων ὡς πρὸς τὸ νέον σύστημα μετὰ βάσιν β.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ 1) $\log \frac{37 \cdot 219 \cdot 59}{90 \cdot 11} = \log 37 + \log 219 + \log 59 - \log 90 - \log 11.$

2) Ἐὰν $\log 2 = 0,301$, $\log 3 = 0,477$, νὰ εὐρεθῇ ὁ $\log 60$.

Δύοις. $\log 60 = \log(2 \cdot 3 \cdot 10) = \log 2 + \log 3 + \log 10 = 0,301 + 0,477 + 1 = 1,778.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

439) Ἐὰν $\log 2 = 0,301$, $\log 3 = 0,477$, εὑρετε τοὺς ἐπομένους λογαρίθμους:

$\log 4$, $\log 9$, $\log 6$, $\log 27$, $\log 15$, $\log \frac{2}{3}$, $\log \frac{4}{9}$, $\log 20$, $\log \frac{1}{3}$, $\log \frac{1}{400}$.

$\log 5$, $\log 15$, $\log 25$, $\log 45$, $\log 54$, $\log \sqrt{2}$, $\log \sqrt[10]{200}$, $\log \sqrt[10]{12}$.

✓ 440) Νὰ λυθῇ ὡς πρὸς x ἡ ἐξίσωσις $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 = 9 - \log_x 8$.

✓ 441) Ἐὰν $\log 2 = \alpha$ καὶ $\log 3 = \beta$ νὰ εὐρεθῇ συναρτήσει τῶν α καὶ β ὁ $\log \sqrt[5]{2,025}$.

✓ 442) Ἐὰν ἀριθμητικὴ πρόοδος ἔχῃ πρῶτον ὄρον τὸν $\log \alpha$ καὶ δεύτερον τὸν $\log \beta$ δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν n πρῶτων ὄρων τῆς εἶναι $S_n = \frac{1}{2} \log \left[\frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}} \right]$.

✓ 443) Ἄν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ κατέχουν ἀντιστοίχως τὰς τάξεις μ, ν, ρ εἰς μίαν γεωμ. πρόοδον καὶ εἰς μίαν ἀρμονικὴν δείξατε ὅτι:

$$\alpha(\beta - \gamma) \log \alpha + \beta(\gamma - \alpha) \log \beta + \gamma(\alpha - \beta) \log \gamma = 0.$$

✓ 444) Εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν 60 πρῶτων ὄρων τῆς σειρᾶς:

$$\log 5 + \log 5^2 + \log 5^3 + \dots$$

✓ 445) i) Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ $\log_{\beta} \alpha$ διὰ λογαρίθμων ὡς πρὸς βάσιν 10.

✓ ii) Δοθέντος, ὅτι $\log_{10} 2 = 0,3010$ ὑπολογίσατε (ἄνευ πινάκων) τοὺς $\log_2 0,64$ καὶ

$\log_8 \sqrt{1,25}$ μετὰ δύο δεκ. ψηφία.

✓ 446) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\log_2 x + \log_x 2 = 2,5$.

✓ 447) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\log_x 10 = \log_2(2x)$.

✓ 448) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\log_{10} x - \log_x 10 = 3/2$.

✓ 449) Νὰ δειχθῇ ἡ ἰσότης $\log_{\alpha} \beta \cdot \log_{\beta} \gamma \cdot \log_{\gamma} \alpha = 1$.

✓ 450) Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ α ἡ ἐξίσωσις $x^2 + 2(1 + \log \alpha)x + 1 - (\log \alpha)^2 = 0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς καὶ ἀνίσους;

451) Νά δειχθῇ ὅτι ἂν γνωρίζωμεν τοὺς λογαρίθμους ὄλων τῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων μεταξύ τοῦ 1 καὶ τῆς βάσεως α τῶν λογαρίθμων, τότε δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τοὺς λογαρίθμους ὄλων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν.

62. Δεκαδικοὶ λογάριθμοι. α') Οἱ ὡς πρὸς βάσιν 10 λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν καλοῦνται κοινοὶ ἢ δεκαδικοὶ λογάριθμοι. Ἐὰν ὁ ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος, ὁ λογάριθμός του θὰ εἶναι θετικὸς καὶ γραφόμενος ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν θ' ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓν ἀκέραιον καὶ ἓν δεκαδικὸν μέρος.

Τὸ ἀκέραιον μέρος λέγεται ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ *χαρακτηριστικὸν* τοῦ λογαρίθμου. Π. χ., ἂν $\log A = 3,02432$, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου εἶναι 3, ἂν δὲ $\log B = 0,83474$, τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι τὸ μηδέν. Ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, ὅποτε ὁ λογάριθμος εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμὸς, καὶ τότε πάλιν χαρακτηριστικὸν καλοῦμεν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, οἵτινες δὲν ὑπερβαίνουν τὸν ἀρνητικὸν τοῦτον λογάριθμον. Π. χ., ἂν $\log A = -(2,35712)$, ἐπειδὴ $-3 < -(2,35712)$, ἐν ᾧ $-2 > -(2,35712)$, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $-(2,35712)$ εἶναι τὸ -3 . Ὁμοίως ἂν $\log B = -(0,35000)$, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log B$ εἶναι -1 .

β') *Γραφὴ τῶν λογαρίθμων.* Ἐὰν ὁ λογάριθμος εἶναι θετικὸς, τότε γράφεται ὑπὸ τὴν συνήθη δεκαδικὴν μορφήν, δηλ. μὲ ἓν ἀκέραιον μέρος ἀκολουθοῦμενον ἀπὸ δεκαδικὰ ψηφία.

Ἐὰν ὅμως εἶναι ἀρνητικὸς χρησιμοποιοῦμεν ἰδιόζουσαν γραφὴν καταλλήλοτέραν διὰ τοὺς ὑπολογισμούς.

Ἐστω π. χ. ὁ ἀρνητικὸς λογάριθμος $-3,72154$. Γράφομεν αὐτὸν ὡς ἐξῆς:

$$-3 - 0,72154 = -3 - 1 + 1 - 0,72154 = -4 + 0,27846,$$

δηλ. ὡς ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τοῦ χαρακτηριστικοῦ καὶ ἑνὸς *θετικοῦ δεκαδικοῦ μέρους*. Ἀντὶ δὲ νὰ γράφωμεν: $-4 + 0,27846$, γράφομεν $\bar{4},27846$.

Δηλ. διὰ νὰ παραστήσωμεν ἀρνητικὸν λογάριθμον γράφομεν τὴν ἀπόλυτον τιμὴν τοῦ χαρακτηριστικοῦ ἐπιγεγραμμένην μὲ $-$ (διὰ νὰ δηλώσωμεν ὅτι τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ἀρνητικόν) κατόπιν δὲ τὸ κόμμα ἀκολουθοῦμενον ἀπὸ τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ θετικοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

γ') *Σημασίαι τοῦ χαρακτηριστικοῦ.* «Τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι ὁ ἐκθέτης τῆς μεγαλυτέρας ἀκεραίας δυνάμεως τοῦ 10, ἣτις δὲν ὑπερβαίνει τὸν ἀριθμόν».

Διότι, ἂν 10^k εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἀκεραία δύναμις τοῦ 10 ἢ μὴ ὑπερβαίνουσα τὸν θετικὸν A , τότε θὰ ἔχωμεν $10^k \leq A < 10^{k+1}$ καὶ συνεπῶς (λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους τῶν τριῶν μελῶν) $k \leq \log A < k+1$. Ἀρα ὁ $\log A$ ἢ θὰ εἶναι ἴσος μὲ k ἢ μὲ $k+\theta$ ὅπου θ θετικὸς μικρότερος τῆς μονάδος· συνεπῶς ὁ $\log A$ θὰ ἔχῃ χαρακτηριστικὸν τὸ k καὶ δεκαδικὸν (θετικὸν) μέρος τὸ θ .

Ἀνάλογον σημασίαν ἔχει τὸ χαρακτηριστικὸν καὶ ὡς πρὸς οἵανδήποτε βάσιν λογαρίθμων μεγαλυτέραν τοῦ 1.

δ') *Ἰδιότητες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων.* I. «Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος ἰσοῦται πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ, ἐλαττωθὲν κατὰ μονάδα».

**Απόδειξις.* Ἐὰν τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ περιέχει k ψηφία, τότε ὁ ἀριθμὸς εἶναι $\geq$ τοῦ 10^{k-1} καὶ $<$ τοῦ 10^k , ἄρα ὁ λογάριθμός του εἶναι $\geq k-1$ καὶ $< k$, συνεπῶς ἔχει ὡς ἀκέραιον μέρος τὸ $k-1$.

Οὕτω, ὁ ἀριθμὸς 1254,12 περιέχεται μεταξὺ τοῦ 1000 καὶ 10000, ἄρα ὁ λογ 1254,12 περιέχεται μεταξὺ 3 καὶ 4, συνεπῶς ἔχει ἀκέραιον μέρος (χαρκτηριστικὸν) τὸ 3 δηλ. ὅσον τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ μείον 1.

II. «Τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου ἐνὸς ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος, γεγραμμένον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν ἔχει τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὅσαι εἶναι τὰ μηδενικά, τὰ γεγραμμένα πρὸ τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου (συμπεριλαμβανομένον καὶ τοῦ μηδενικοῦ τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τῆς ὑποδιαστολῆς)».

*Ἐστω π.χ. ὁ ἀριθμὸς 0,000475. Ἐπειδὴ πρὸ τοῦ 4 ὑπάρχουν τέσσαρα μηδενικά, τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ λογαρίθμου του εἶναι τὸ -4 . Δηλαδή, λογ 0,000475 = $\bar{4}$,... Πράγματι ὁ ἀριθμὸς οὗτος περιέχεται μεταξὺ τοῦ 0,0001 καὶ τοῦ 0,001, δηλ. : $0,0001 < 0,000475 < 0,001$, ἄρα λογ 0,0001 < λογ 0,000475 < λογ 0,001 (βλ. § 61, VI) ἢ $-4 < \text{λογ } 0,000475 < -3$.

*Ἀρα πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸν -4 , μίαν θετικὴν ποσότητα μικροτέραν τῆς μονάδος διὰ νὰ φθάσωμεν εἰς τὸν λογ 0,000475.

*Ὡστε : λογ 0,000475 = $-4 + \vartheta$ (ὅπου $\vartheta > 0$ καὶ < 1) ἄρα τὸ χαρακτηριστικὸν εἶναι τὸ -4 . Ἡ γενίκευσις εἶναι προφανής.

III. «Ἐὰν εἰς ἀριθμὸν γεγραμμένον ὑπὸ δεκαδικὴν μορφήν μεταθέσωμεν τὴν ὑποδιαστολὴν κατὰ τινὰς θέσεις, τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ λογαρίθμου δὲν βλάπτεται, ἀλλὰ τὸ χαρακτηριστικὸν αὐξάνει, ἂν ἡ μετάθεσις γίνῃ πρὸς τὰ δεξιὰ, ἢ ἐλαττοῦται, ἂν γίνῃ πρὸς τ' ἀριστερὰ κατὰ τόσας μονάδας, ὅσαι εἶναι αἱ θέσεις, καθ' ὅς μετετέθη ἡ ὑποδιαστολή».

*Ἐὰν εἶναι π.χ. λογ 1,35 = 0,13033 τότε :

λογ 13,5 = 1,13033, λογ 0,0135 = $\bar{2}$,13033, λογ 1350 = 3,13033.

Διότι ἡ μετάθεσις τῆς ὑποδιαστολῆς κατὰ k θέσεις δεξιὰ ἰσοδυναμεῖ μὲ πολλαπλασιασμὸν τοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ 10^k . Ἀλλά, λογ $(A \cdot 10^k) = \text{λογ } A + \text{λογ } 10^k = k + \text{λογ } A$, ἥτοι ὁ λογ A αὐξάνει κατὰ k . Πρὸς τ' ἀριστερὰ μετάθεσις τῆς ὑποδιαστολῆς κατὰ k θέσεις σημαίνει διαίρεσιν τοῦ ἀριθμοῦ διὰ 10^k .

*Ἀλλά, λογ $\left(\frac{A}{10^k}\right) = \text{λογ } A - \text{λογ } 10^k = \text{λογ } A - k$ δηλ. ὁ λογ A ἐλαττοῦται

κατὰ k μονάδας (αἱ ὁποῖαι ἀφαιροῦνται ἀπὸ τὸ χαρακτηριστικόν).

ε') **Ο συλλογάρριθμος.* Οὕτω καλεῖται ὁ ἀντίθετος ἐνὸς λογαρίθμου.

*Ἐὰν π.χ. λογ $A = 0,30157$ τότε ὁ συλλογάρριθμος τοῦ A δηλ. ὁ

$-\text{λογ } A = -0,30157 = -1 + 1 - 0,30157 = -1 + 0,69843 = \bar{1},69843$.

*Ἐὰν λογ $A = \bar{3},40105$ τότε $-\text{λογ } A = -(\bar{3},40105) = -(-3 + 0,40105) = 3 - 0,40105 = 2 + 1 - 0,40105 = 2 + 0,59895 = 2,59895$.

*Ἐὰν λογ $A = \bar{1},47810$ τότε $-\text{λογ } A = 1 - 0,47810 = 0,52190$.

*Ἐὰν λογ $A = 0,27500$ τότε, $-\text{λογ } A = -1 + 1 - 0,27500 = \bar{1},72500$.

ἔχομεν λοιπὸν τὰ κάτωθι ἀποτελέσματα :

$$\log A = 0,30157 \dots \dots - \log A = \bar{1},69843$$

$$\log A = 3,40105 \dots \dots - \log A = 2,59895$$

$$\log A = \bar{1},47810 \dots \dots - \log A = 0,52190$$

$$\log A = 0,27500 \dots \dots - \log A = \bar{1},72500.$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν τὸν ἀνωτέρω πίνακα βλέπομεν ὅτι :

Διὰ τὰ εὗρωμεν τὸν ἀντίθετον δοθέντος λογαρίθμου προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν μίαν θετικὴν μονάδα καὶ τοῦ ἐξαγομένου ἀλλάζομεν τὸ σημεῖον· ἀκολουθῶς ἀφαιροῦμεν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ λογαρίθμου ἀπὸ τὸ 9, πλὴν τοῦ τελευταίου σημαντικοῦ, τὸ ὁποῖον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τοῦ 10.

στ') Ἡ πρόσθεσις πολλῶν λογαρίθμων γίνεται ὅπως καὶ ἡ τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν μὲ μόνην τὴν διαφορὰν ὅτι ἡ πρόσθεσις τῆς στήλης τῶν χαρακτηριστικῶν θὰ εἶναι μία ἀλγεβρική πρόσθεσις. Οὕτω λ. χ. ἔχομεν :

$$\log \alpha = 4,35703$$

$$\log \beta = \bar{2},74812$$

$$- \log \gamma = \bar{5},04709$$

$$\log \frac{\alpha\beta}{\gamma} = \bar{2},15224$$

Πολλαπλασιασμός ἀρνητικοῦ λογαρίθμου ἐπὶ ἀκεραίων.

Ἐστω π. χ. $\log 0,07 = \bar{2},84509$. Τότε $\log (0,07)^4 =$

$$= 4(\bar{2},84509) = 4 \cdot \bar{2} + 4 \cdot 0,84509 = \bar{8} + 3,38036 = \bar{5},38036.$$

Διαιρέσεις ἀρνητικοῦ λογαρίθμου δι' ἀκεραίου διαιρέτου.

Διὰ τὰ διαιρέσωμεν λογάριθμον μὲ ἀρνητικὸν χαρακτηριστικὸν δι' ἀκεραίου τινός, προσθέτομεν εἰς τὸ χαρακτηριστικὸν τόσας ἀρνητικὰς μονάδας, ὥστε νὰ γίνῃ ἀκριβῶς διαιρετὸν καὶ κατόπιν τὸ διαιροῦμεν· τὸ ἀκέραιον πηλίκον ποὺ προκύπτει εἶναι τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ ζητούμενου· ἀκολουθῶς προσθέτομεν εἰς τὸ δεκαδικὸν μέρος ἄλλας τόσας θετικὰς μονάδας καὶ κατόπιν διαιροῦμεν διὰ τοῦ διαιρέτου. Οὕτω λαμβάνομεν καὶ τὸ δεκαδικὸν μέρος τοῦ ἐξαγομένου.

$$\text{Π.χ. } \log 0,003 = \bar{3},47712, \quad \frac{1}{5} \log 0,003 =$$

$$= \frac{1}{5} \{-3 - 2 + 2,47712\} = -1 + 0,49542 = \bar{1},49242.$$

Ἐστω ἐπίσης: $\log 0,02 = 2,30103$. Τότε

$$\frac{1}{11} \log 0,02 = \frac{1}{11} \{-2 - 9 + 9 + 0,30103\} = -1 + \frac{9,30103}{11} = \bar{1},08455.$$

ζ') **Χρῆσις τῶν πινάκων.** Ἡ περιγραφὴ καὶ ἡ χρῆσις τῶν λογαριθμικῶν πινάκων ἐκτίθεται λεπτομερῶς εἰς ὅλα τὰ βιβλία λογαρίθμων καὶ διὰ τούτου δὲν θὰ ἀναπτυχθῇ ἐνταῦθα.

η') **Ἐφαρμογή.** Νὰ ὑπολογισθῇ κατὰ προσέγγισιν ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$x = \sqrt[3]{\frac{217^2 \cdot \sqrt{595}}{137 \sqrt{0,03}}}$$

Λαμβάνοντες τὸν λογάριθμον τῆς παραστάσεως x , συμφώνως πρὸς τὰς ἰδιότητας τῶν λογαρίθμων εὐρίσκομεν :

$$\log x = \frac{1}{3} \left\{ \log 217^2 + \log \sqrt{595} - \log 137 - \log \sqrt[3]{0,03} \right\}$$

$$\eta \quad 3 \log x = 2 \log 217 + \frac{1}{2} \log 595 - \log 137 - \frac{1}{3} \log 0,03.$$

Διάταξις τῶν πράξεων :

$$\begin{array}{r} 2 \log 217 = 1,16823 \\ \frac{1}{2} \log 595 = 1,35590 \\ - \log 137 = 2,86328 \\ - \frac{1}{3} \log 0,03 = 0,50892 \\ \hline 3 \log x = 1,89633 \\ \log x = 0,63211 \\ x = 4,2866 \end{array}$$

Προκειμένου νὰ ὑπολογισθῇ τὸ $-\frac{1}{3} \log 0,03$ εὐρίσκομεν πρῶτον τὸν $-\log 0,03$ συμφώνως πρὸς τὸν κανόνα τοῦ ἔδαφ. ε' καὶ ἀκολουθῶς διαιροῦμεν διὰ 3.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

452) Νὰ ὑπολογισθοῦν διὰ τῶν λογαριθμικῶν πινάκων (μὲ δσην προσέγγισιν παρέχουν οἱ πίνακες), αἱ κάτωθι ἀριθμητικαὶ παραστάσεις :

$$\alpha) 42,7 \cdot 372 \cdot 0,0836, \quad \beta) \sqrt[3]{\frac{4,362 \cdot (2,95)^2}{81,3 \cdot 32,41}}, \quad \gamma) \left(\frac{53,4 \cdot \sqrt{5,62}}{32,9 \cdot \sqrt[3]{0,0422}} \right)^4,$$

$$\delta) \sqrt[4]{\frac{21,3 \cdot \sqrt{62,1}}{37,9 \cdot (3,04)^2}}, \quad \epsilon) (34,855)^{-1}, \quad \sigma\tau') \sqrt[3]{318672}.$$

453) Ἐὰν $\log 2 = 0,30103$ καὶ $\log 3 = 0,47712$, νὰ εὐρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ $3^{12} \cdot 2^8$.

454) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^{1,23} = 0,12$.

455) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\log_x 0,028 = 3$.

456) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ $\log_{10} 63,8$.

457) Ὑποτιθεμένου ὅτι οἱ νόμοι τῶν δυνάμεων ἰσχύουν καὶ δι' ἀσυμμέτρους ἐκθέτας ὑπολογίσατε κατὰ προσέγγισιν τὰ x καὶ y ἐκ τοῦ συστήματος :

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{\sqrt{2}} + y^{\sqrt{2}} = 97/9, \\ xy = 2^{\sqrt{2}} \end{array} \right\}.$$

458) Ὑπολογίσατε μὲ 3 σημαντικὰ ψηφία, τὰς δυνατὰς τιμὰς τοῦ α διὰ τὰς ὁποίας: $\log_a 5 \cdot \log_a 2 = 10$.

459) Ἐάν $\alpha=3$, $v=40$ δείξατε ὅτι αἱ ποσότητες T καὶ $\frac{\alpha S}{\alpha-1}$, ὅπου

$$T = \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{\alpha^2} + \dots + \frac{v}{\alpha^v} \quad \text{καὶ} \quad S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} + \dots + \frac{1}{\alpha^v}$$

διαφέρουν ἀλλήλων (ἀπολύτως) ὀλιγώτερον τοῦ 10^{-17} . Δίδεται ὅτι $\log 3 = 0,47712$.

460) Οἱ τρεῖς πρῶτοι ὅροι φθινοῦσης γεωμ. προόδου ἔχουν ἄθροισμα 21 οἱ δὲ τρεῖς ἐπόμενοι, $\frac{21}{64}$. Νὰ εὕρεθῇ ὁ ὅρος τῆς μικροτέρας δυνατῆς τάξεως, τοιοῦτος ὥστε ἂν λάβωμεν ὅσουσδήποτε ἐπομένους του καὶ τοὺς προσθέσωμεν νὰ λαμβάνωμεν ἄθροισμα μικρότερον τοῦ $1/1000$. (Νὰ γίνῃ χρῆσις λογαρ. πινάκων).

461) Εὕρετε τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων x τοιούτων, ὥστε τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ $\log(1/x)$ (ὡς πρὸς βάσιν 10) εἶναι ἴσον μὲ -5 .

462) Ἐάν N εἶναι τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων οἱ λογάριθμοι ὡς πρὸς βάσιν 10 ἔχουν χαρακτηριστικὸν v καὶ M τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῶν ὁποίων οἱ ἀντίστροφοι ἔχουν λογάριθμον μὲ χαρακτηριστικὸν $-\mu$ ($\mu > 0$) δείξατε ὅτι:

$$\log_{10} N - \log_{10} M = v - \mu + 1.$$

63. Ἐκθετικαὶ ἐξισώσεις. α') Διὰ τῶν λογαρίθμων δυνάμεθα νὰ λύσωμεν ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: (1) $\alpha^x = \beta$, ὅπου α , β θετικοὶ ἀριθμοί. Ἡ ἐξίσωσις (1) λέγεται ἐκθετικὴ (ὡς ἔχουσα τὸν ἄγνωστον εἰς τὸν ἐκθέτην).

Ἐάν λάβωμεν τοὺς λογαρίθμους ἀμφοτέρων τῶν μελῶν τῆς (1), θὰ ἔχωμεν:

$$x \log \alpha = \log \beta \quad \text{καὶ} \quad x = \frac{\log \beta}{\log \alpha}.$$

Ἐστω π. χ. ἡ ἐξίσωσις: $3^x = 0,5$. θὰ ἔχωμεν:

$$x = \frac{\log 0,5}{\log 3} = \frac{1,69897}{0,47712} = \frac{-1+0,69897}{0,47712} = \frac{-0,30103}{0,47712} = -0,63092.$$

β') Ἐνίοτε ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (1) δύνανται νὰ λυθοῦν καὶ ἄνευ τῶν λογαρίθμων. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο ὁ β νὰ δύναται νὰ μετατραπῇ εἰς δύναμιν τοῦ α .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $9^x = 6561$ ».

Λύσις. Ὁ 6561 ἀναλνόμενος εἰς πρῶτους παράγοντας λαμβάνει τὴν μορφήν 9^4 .

Ὡστε ἡ ἐξίσωσις γράφεται $9^x = 9^4$ καὶ δίδει $x=4$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $\sqrt[4]{a^x} \cdot \sqrt{a^{2x-1}} = a^3 \cdot \sqrt{a}$ ὅπου $a > 0$ ».

Λύσις. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$a^{\frac{x}{4}} \cdot a^{\frac{2x-1}{2}} = a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \quad \eta \quad a^{\frac{5x-2}{4}} = a^{\frac{7}{2}}.$$

Προφανῶς πρέπει: (ἂν $a \neq 1$), $\frac{5x-2}{4} = \frac{7}{2}$ καὶ $x = \frac{16}{5}$.

γ') Εἰς τὴν μορφήν (1) δύνανται ν' ἀναχθοῦν καὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: $A \cdot \alpha^{2x} + B \cdot \alpha^x + \Gamma = 0$. Ἀρκεῖ νὰ τεθῇ $\alpha^x = y$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $4^{x+1} - 2^{x+4} = 128$ ».

Λύσις. Γράφομεν αὐτήν:

$$(2^2)^{x+1} - 2^{x+4} = 128 \quad \eta \quad 2^{2x+2} - 2^{x+4} = 128 \quad \eta \quad 2^{2x} \cdot 2^2 - 2^x \cdot 2^4 = 128 \quad \eta \quad 4 \cdot 2^{2x} - 16 \cdot 2^x - 128 = 0.$$

Ἄν τεθῇ $2^x = y$, λαμβάνομεν $4y^2 - 16y - 128 = 0$ καὶ ἐξ αὐτῆς $y = 8$ καὶ $y = -4$.

Ὡστε $2^x = 8$ ἢ $2^x = -4$.

Ἡ δευτέρα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος, ἡ δὲ πρώτη δίδει $x = 3$.

δ') Εἰς τὴν μορφὴν (1) δύνανται ν' ἀναχθοῦν καὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$A \cdot \alpha^x = B \cdot \beta^x. \text{ Διότι ἡ δοθεῖσα γράφεται: } \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = \frac{A}{B}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3 \cdot 2^{x+3} = 192 \cdot 3^{x-3}$ ».

$$\text{Λύσις. Γράφομεν αὐτὴν ὡς ἔπεται: } 3 \cdot 2^x \cdot 2^3 = 192 \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3^3} \text{ ἢ } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{192}{3 \cdot 2^3 \cdot 3^3} = \frac{2^6 \cdot 3}{2^3 \cdot 3^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \text{ καὶ συνεπῶς } x = 3.$$

ε') Εἰς τὴν μορφὴν (1) ἀνάγονται καὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς: $A \cdot \alpha^{2x} + \beta \cdot \alpha^x \cdot \beta^x + \Gamma \cdot \beta^{2x} = 0$. Διότι διὰ διαιρέσεως ἀμφοτέρων τῶν μελῶν διὰ β^{2x} ἡ ἐξίσωσις μετασχηματίζεται εἰς τὴν $A \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{2x} + B \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x + \Gamma = 0$, καὶ διὰ τῆς ἀν-

τικαταστάσεως $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x = y$ προσδιορίζομεν τὸ y .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $2 \cdot 4^x - 5 \cdot 6^x + 3^{2x+1} = 0$ ».

Λύσις. Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ παρουσιαζόμεναι δυνάμεις ἔχουν βάσεις 2 καὶ 3, διότι ἡ ἐξίσωσις γράφεται: $2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot 3^x \cdot 2^x + 3 \cdot 3^{2x} = 0$. Διαιροῦμεν τὰ δύο μέλη διὰ 3^{2x} καὶ λαμβάνομεν $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3 = 0$ καὶ ἐξ αὐτῆς $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$ ἢ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$. Αὗται γραφόμεναι $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ καὶ $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^0$ δίδουν $x = -1$ καὶ $x = 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ον. «Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα $\{x^y = y^x, \alpha^x = \beta^y\}$ ».

Λύσις. Λογαριθμίζοντες ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις λαμβάνομεν: (1) $y \log x = x \log y$ καὶ (2) $y \log \beta = x \log \alpha$. Διαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (1) καὶ (2) λαμβάνομεν (3) $\frac{\log x}{\log \beta} = \frac{\log y}{\log \alpha}$. Λογαριθμίζοντες ἐκ νέου τὴν (2) λαμβάνομεν $\log y + \log(\log \beta) = \log x + \log(\log \alpha)$

ἢ (4) $\log y - \log x = \log\left(\frac{\log \alpha}{\log \beta}\right)$. Ἐκ τοῦ συστήματος τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦν αἱ (3) καὶ (4), εὐρίσκομεν τοὺς λογαριθμοὺς τῶν δύο ἀγνώστων:

$$(5) \quad \log x = \frac{\log \beta}{\log \alpha - \log \beta} \cdot \log\left(\frac{\log \alpha}{\log \beta}\right), \quad \log y = \frac{\log \alpha}{\log \alpha - \log \beta} \cdot \log\left(\frac{\log \alpha}{\log \beta}\right).$$

Ἐκ τῶν λογαριθμῶν εὐρίσκομεν διὰ πινάκων καὶ τοὺς ἀριθμοὺς x καὶ y (κατὰ προσέγγισιν).

Διὰ νὰ ἔχουν νόημα τὰ δεύτερα μέλη τῶν (5) πρέπει νὰ εἶναι $\alpha > 0$, $\beta > 0$ καὶ $\frac{\log \alpha}{\log \beta} > 0$. Τὸ τελευταῖον τοῦτο ὑφίσταται ὅταν οἱ $\log \alpha$ καὶ $\log \beta$ εἶναι *δμόσημοι* δηλ. ἢ ἀμφότεροι οἱ α καὶ β νὰ εἶναι > 1 ἢ ἀμφότεροι < 1 .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

463) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$i) \quad 15^{3x+2} = 29 \cdot (8^{2x}), \quad ii) \quad (216)^x = 75 \cdot (6^x), \quad iii) \quad 11^{x^2-4x} = 16.$$

464) Νά λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

$$i) 5 \cdot (2^x) = 4^{1-x}, \quad ii) 6^{x+2} = 2(3^{2x}), \quad iii) \alpha^{\beta x} = \gamma,$$

ὅπου α, β, γ θετικοί συνθηκῇ καὶ δυνατότητος.

$$465) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : } 4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

$$466) \text{ Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις : } 2^{3x - \frac{9}{2}} + 3^{2x-4} = 2^{3x - \frac{13}{2}} + 3^{2x-8}.$$

467) Τοῦ x ὑποτιθεμένου ἀκεραίου νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$3^{2(x+1)} + 9 \left[-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - i \right]^{3x} - 810 \cdot 3^x = 0.$$

$$468) \text{ Νά λυθῇ τὸ σύστημα : } \frac{\{1 + 4^{x+\log y}\}^3}{1 + 6^{x+\log y}} = \frac{25}{13}, \quad x-1 = \log y.$$

$$469) \text{ Νά λυθῇ τὸ σύστημα : } \{ \alpha^x = \beta^y, \quad x^a = y^b \}. \text{ Διερευνήσις.}$$

$$470) \text{ Νά λυθῇ τὸ σύστημα : } \left\{ (\sqrt{x})^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = (\sqrt{y})^{\frac{2}{3}}, \quad (\sqrt{y})^{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = (\sqrt{x})^{\frac{2}{3}} \right\}.$$

471) Νά εὐρεθῇ ὁ x ἐκ τῶν σχέσεων : $\alpha^{x^2 - ax - a\beta} = \beta^{x^2 + \beta x + a^2}$ καὶ $x + \beta + 2a = 0$
ὅπου α καὶ β θετικοί (ὄχι δεδομένοι) καὶ ὁ β εἶναι ρίζα τοῦ πρώτου ἐκθέτου.

64. Λογαριθμικαὶ ἐξισώσεις. Οὕτω καλοῦνται ἐξισώσεις περιέχουσιν λογαρίθμους παραστάσεων ἐξαρτωμένων ἀπὸ τὸν ἄγνωστον ἢ τοὺς ἀγνώστους.

Μία λογαριθμικὴ ἐξίσωσις : $\alpha \log A + \beta \log B = \gamma$ ὅπου τὰ A καὶ B περιέχουν τὸν ἄγνωστον x , τὰ δὲ α, β, γ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί, δύναται νὰ γραφῇ :

$$\log A^a + \log B^b = \log 10^\gamma \quad \text{ἢ} \quad \log (A^a \cdot B^b) = \log 10^\gamma$$

καὶ τελικῶς νὰ γίνῃ : $A^a \cdot B^b = 10^\gamma$. Ἡ τελευταία αὕτη δὲν εἶναι λογαριθμικὴ.

Δηλ. διὰ νὰ ἀναγάγωμεν μίαν λογαριθμικὴν ἐξίσωσιν εἰς ἀλγεβρικὴν, τρέπομεν πάντας τοὺς ὅρους τῆς εἰς λογαρίθμους παραστάσεων, κατόπιν ἕκαστον μέλος τῆς εἰς λογάριθμον μιᾶς παραστάσεως καὶ τέλος ἐξισοῦμεν τὰς δύο ταύτας παραστάσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1ον. «Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{1}{2} \log (2x^2 - 5) = \log 3 + \log (x - 7).$$

Λύσις. Γράφομεν τὴν ἐξίσωσιν ὡς ἐξῆς : $\log \sqrt{2x^2 - 5} = \log 3(x - 7)$ καὶ λαμβάνομεν οὕτω : $\sqrt{2x^2 - 5} = 3(x - 7)$. Θέτομεν τὸν περιορισμὸν $x > 7$ καὶ ὑποῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον ὅποτε, $2x^2 - 5 = 9x^2 + 441 - 42x$ ἢ $7x^2 - 42x + 446 = 0$. Ἐξ αὐτῆς ἔχομεν :

$$x = \frac{21 + \sqrt{441 - 7 \cdot 446}}{7}$$

δηλ. δὲν ὑπάρχει πραγματικὴ λύσις.

2ον. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις :

$$\frac{x^{\log x}}{x^2 \sqrt{x}} = \frac{1}{10}.$$

Λύσις. Αὕτη γράφεται : $x^{\log x - 2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{10}$ καὶ λαμβάνοντες τοὺς λογαρίθμους

ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἔχομεν $\left(\log x - \frac{5}{2} \right) \log x = -1$ ἢ $(\log x)^2 - \frac{5}{2} (\log x) + 1 = 0$.

Ἐξ αὐτῆς εὐρίσκομεν $\log x=2$ ἢ $\log x=\frac{1}{2}$ καὶ συνεπῶς τὸ x θὰ ἰσοῦται πρὸς 100 ἢ $\sqrt{10}$.

Σημείωσις. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἀνήκει εἰς τὴν κατηγορίαν τῶν λυομένων διὰ λογαριθμώσεως, ὅπως καὶ τὸ σύστημα τοῦ 6ου παραδείγματος τῆς § 63.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$472) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } \frac{1}{3} \log(x-2) + \log \sqrt[3]{4x+5} = \frac{2}{3}.$$

$$473) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης } \log \left(\log \frac{4x-3}{-5x+2} \right) > 0.$$

$$474) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } (x^2+10x-200)^{\frac{1}{x}} = (x^2+10x-200)^{\frac{1}{2x}+5}.$$

$$475) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } x^{5+\log x} = 12$$

$$476) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις } (\log_3 x)^2 - 3^{\log_3 5 + \log_3 x^2} = \log_3 (x^6) - 9^{\log_3 \sqrt[3]{x}}.$$

$$477) \text{ Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: } \{(\alpha x)^{\log \alpha} = (\beta y)^{\log \beta}, \beta^{\log x} = \alpha^{\log y}\} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

$$478) \text{ Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: }$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \log y = 4 \log 8 - \log(10^{2 \log x}) + 4 \log \frac{5}{4} \\ \frac{1}{\log(10^{-\frac{1}{x}})} = \log \sqrt{x \sqrt{y}} + \sqrt[4]{y} \sqrt[3]{\frac{y}{\sqrt[4]{y}}} \end{array} \right\}$$

$$479) \text{ Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης } \log \left(\log \frac{13x-25}{x-1} \right) < 0.$$

$$480) \text{ Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: }$$

$$\{ \log_{x-y}(x+y) + \log_{x+y}(x-y) = \frac{5}{2}, 1 - \log_x y = \log_x 3 - \log_x 2 \}.$$

ΑΝΑΤΟΚΙΣΜΟΣ — ΧΡΕΩΛΥΣΙΑ

65. Ἀνατοκισμός. α') **Τόκος** καλεῖται χρῆμα πληρωνόμενον διὰ τὴν χρῆσιν χρήματος. Τὸ χρηματικὸν ποσὸν τὸ ὁποῖον δανεῖζει τις, λέγεται **κεφάλαιον**, ὃ δὲ τόκος εἶναι ἡ ἀμοιβὴ τὴν ὁποίαν καταβάλλει ὁ δανειζόμενος διὰ τὴν χρῆσιν τοῦ κεφαλαίου. Ὁ ὀφειλέτης ἀποκτᾷ μὲν κατὰ κυριότητα τὸ δανειζόμενον ποσόν, ὑποχρεοῦται ὅμως νὰ ἀποδώσῃ τοῦτο ηὔξημένον κατὰ τοὺς τόκους καὶ εἰς τὸν χρόνον λήξεως τοῦ δανείου.

Θεμελιώδης ἀρχὴ διὰ τὸν τόκον εἶναι ὅτι οὗτος εἶναι πάντοτε ἀνάλογος πρὸς τὸ κεφάλαιον καὶ πρὸς τὸν χρόνον καθ' ὃν διαρκεῖ ὁ δανεισμός.

Καλεῖται **ἐπιτόκιον**, ὁ τόκος τῶν 100 δραχ. εἰς 1 ἔτος. Τὸ ἐπιτόκιον εἰς γράφεται: $\epsilon \%$. Ὁ τόκος τῆς μιᾶς δραχμῆς εἰς ἓν ἔτος θὰ εἶναι $\frac{\epsilon}{100}$ καὶ τοῦτο πα-

ρίσταται συνήθως μὲ τ. (τ=τὸ ἑκατοστὸν τοῦ ἐπιτοκίου).

β') Τὸ κεφάλαιον λέγομεν ὅτι **ἀνατοκίζεται** ὅταν εἰς τὸ τέλος ἐκάστης χρονι-

κῆς μονάδος οἱ τόκοι προστίθενται εἰς τὸ κεφάλαιον καὶ ἀποτελοῦν μετ' αὐτοῦ νέον κεφάλαιον. Οὕτως ὁ τόκος κεφαλαιοποιεῖται καὶ τοκίζεται κατὰ τὰς ἐπομένους χρονικὰς μονάδας. Τὸ πρόβλημα τοῦ ἀνατοκισμοῦ δύναται νὰ διατυπωθῇ ὡς ἑξῆς:

«Ποσὸν α δρχ. κατατίθεται ἐπὶ ἀνατοκισμῶ, τοῦ τόκου τῆς δραχμῆς εἰς ἐν ἔτος ὄντος τ . Ζητεῖται, πόσον θὰ γίνῃ τὸ ποσὸν τοῦτο μετὰ ν ἔτη;» (Ὑποτίθεται ὅτι ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατ' ἔτος. Τοῦτο θὰ ὑποτίθεται καὶ εἰς τὰ ἐπόμενα ἐκτὸς ἂν δηλοῦται ῥητῶς τὸ ἀντίθετον).

Πρὸς λύσιν τούτου σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἡ μία δραχμὴ θὰ φέρῃ μετὰ ἐν ἔτος τόκον τ , ἄρα αἱ α δραχμαὶ θὰ φέρουν εἰς τὸ τέλος τοῦ πρώτου ἔτους, ατ δρχ. Οὕτω μετὰ ἐν ἔτος τὸ κεφάλαιον θὰ γίνῃ $\alpha + \alpha\tau$, διότι θὰ προστεθοῦν καὶ οἱ τόκοι. Ὡστε τὸ ποσὸν τῶν α δραχμῶν καθίσταται μετὰ ἐν ἔτος:

$$\alpha + \alpha\tau = \alpha(1 + \tau),$$

δηλ. μετὰ ἐν ἔτος τὸ κεφάλαιον πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸν (σταθερὸν) συντελεστήν $1 + \tau$.

Εἰς τὴν ἀρχὴν λοιπὸν τοῦ δευτέρου ἔτους θὰ θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι κατατεθειμένον κεφάλαιον $\alpha(1 + \tau)$, τὸ ὁποῖον πάλιν μετὰ ἐν ἔτος θὰ πολλαπλασιασθῇ ἐπὶ $1 + \tau$. Οὕτω μετὰ 2 ἔτη τὸ κεφάλαιον θὰ ἀνέλθῃ εἰς:

$$\alpha(1 + \tau)(1 + \tau) = \alpha(1 + \tau)^2.$$

Τὸ ποσὸν $\alpha(1 + \tau)^2$ μετὰ ἐν ἀκόμῃ ἔτος, δηλ. εἰς τὸ τέλος τοῦ 3ου ἔτους, θὰ ἀποβῇ (μετὰ τῶν τόκων του):

$$\alpha(1 + \tau)^2 \cdot (1 + \tau) = \alpha(1 + \tau)^3 \quad \kappa. \text{ ο. κ.}$$

Ἡ ἀξία λοιπὸν τοῦ κεφαλαίου μετὰ ν ἔτη θὰ εἶναι K :

$$(1) \quad K = \alpha(1 + \tau)^\nu.$$

Τὸ K λέγεται καὶ *τελικὴ ἀξία* ἢ *τελικὸν κεφάλαιον*, καὶ ὑπολογίζεται ἐν γένει ἐκ τοῦ ἄνω τύπου διὰ τῶν λογαρίθμων.

Διὰ τοῦ τύπου (1) τοῦ ἀνατοκισμοῦ δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν ἐπίσης τὸ ἐπιτόκιον ὅταν δίδεται ἡ ἀρχικὴ καὶ τελικὴ ἀξία τοῦ κεφαλαίου δηλ. τὸ α καὶ K καὶ τὸ πλῆθος ν τῶν ἐτῶν. Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ εὑρωμεν τὸ (ἀρχικὸν κεφάλαιον α ὅταν δοθοῦν τὰ ν , τ , K .

γ') *Περίπτωσις καθ'* ἣν ὁ χρόνος τῆς καταθέσεως δὲν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμὸς ἐτῶν. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ κεφάλαιον παρέμεινεν κατατεθειμένον ἐπὶ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας. Τότε μετὰ ν ἔτη θὰ ἀπέβῃ ἴσον πρὸς $\alpha(1 + \tau)^\nu$. Τὸ ποσὸν τοῦτο ἔμεινεν ἀκόμῃ η ἡμέρας, ἄρα δέον εἰς αὐτὸ νὰ προστεθοῦν οἱ τόκοι η ἡμερῶν. Ἐχομεν ὅτι 1 δρχ. φέρει τόκον τ εἰς 360 ἡμέρας, ἄρα $\frac{\tau}{360}$ εἰς μίαν ἡμέ-

ραν καὶ $\frac{\tau\eta}{360}$ εἰς η ἡμέρας. Συνεπῶς αἱ $\alpha(1 + \tau)^\nu$ δρχ. θὰ φέρουν εἰς η ἡμέρας:

$\alpha(1 + \tau)^\nu \frac{\tau\eta}{360}$. Οὕτω τὸ κεφάλαιον θ' ἀποβῇ μετὰ ν ἔτη καὶ η ἡμέρας:

$$(2) \quad K = a(1+\tau)^v \left(1 + \frac{\tau\eta}{360} \right) \quad (\eta < 360).$$

δ') *Περίπτωσις καθ' ἣν ζητεῖται ὁ χρόνος.* Ὅταν δίδεται τὸ a, K καὶ τ καὶ ζητεῖται ὁ χρόνος καθ' ὃν ἀνετοκίζετο τὸ κεφάλαιον, τότε δεόν νὰ μεταχειρισθῶμεν τὸν τύπον (2). Λογαριθμίζοντας τὸν τύπον (2) εὐρίσκομεν :

$$(3) \quad \log K - \log a = \log(1+\tau) \cdot v + \log \left(1 + \frac{\tau\eta}{360} \right).$$

Ἐὰς ὑποθέσωμεν ὅτι μεταχειριζόμεθα πενταψηφίους λογαρίθμους. Τότε ἂν τὰ μέλη τῆς (3) πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ 100000 ἀμφοτέρω, ἡ (3) μετατρέπεται εἰς μίαν ἰσότητα διαιρέσεως εἰς τὴν ὁποίαν διαιρετέος εἶναι ὁ 100000 ($\log K - \log a$) διαιρέτης ὁ 100000 $\log(1+\tau)$, ἀκέραιον πηλίκον τὸ v καὶ *ὑπόλοιπον* ὁ 100000 $\log \left(1 + \frac{\tau\eta}{360} \right)$, (διότι τὸ τελευταῖον τοῦτο εἶναι $<$ τοῦ διαιρέτου). Οὕτω μὲ τὴν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ταύτης προσδιορίζεται καὶ ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς v καὶ ὁ λογάριθμος τοῦ $1 + \frac{\tau\eta}{360}$, συνεπῶς καὶ ὁ $1 + \frac{\tau\eta}{360}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ τὸ η .

Παρατήρησις. Ἀντὶ τοῦ τύπου (2) χρησιμοποιεῖται ἐνίοτε ἡ κατὰ προσέγγισιν ἰσότης :

$$(4) \quad K = a(1+\tau)^{v + \frac{\eta}{360}}.$$

Ἐκ τοῦ (4) ὁρίζεται λογαριθμικῶς τὸ $v + \frac{\eta}{360}$. Ἐὰν $v + \frac{\eta}{360} = \sigma$ τότε τὸ $v =$ ἀκέραιον μέρος τοῦ σ καὶ $\frac{\eta}{360} = \sigma - v$.

66. Ἴσαι καταθέσεις καὶ χρεωλυσία. α') *Πρόβλημα τῶν ἴσων καταθέσεων.* «Καταθέτει τις εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους a δραχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ. Ζητεῖται τί ποσὸν θ' ἀποτελέσῃ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων μετὰ n ἔτη».

Λύσις. Ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ n ἔτη εἰς τὸν ἀνατοκισμόν, συνεπῶς θ' ἀποβῇ (ἀνατοκισομένη) ἴση πρὸς $a(1+\tau)^n$ ὅπου τὸ ἐτήσιος τόκος τῆς δραχμῆς. Ἡ δευτέρα κατάθεσις θὰ ἀνατοκίζεται ἐπὶ $n-1$ ἔτη, ἄρα κατὰ τὸν τύπον τοῦ ἀνατοκισμοῦ θ' ἀποβῇ ἴση πρὸς $a(1+\tau)^{n-1}$ κ.ο.κ. Ἡ τελευταία κατάθεσις θὰ μείνῃ 1 ἔτος εἰς τὸν ἀνατοκισμόν, ἄρα θὰ γίνῃ $a(1+\tau)$.

Τὸ κεφάλαιον ὅπερ διὰ τῶν καταθέσεων τούτων θ' ἀποτελεσθῇ, θὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα Σ τῶν ποσῶν εἰς ἃ θὰ ἀνέλθουν αἱ διάφοροι καταθέσεις, δηλ. :

$$\Sigma = a(1+\tau) + a(1+\tau)^2 + \dots + a(1+\tau)^{n-1} + a(1+\tau)^n.$$

Τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ἄθροισμα ὄρων γεωμετρικῆς προόδου, μὲ λόγον $1+\tau$, ἄρα κατὰ τὸν τύπον (2), § 52 τῶν γεωμετρικῶν προόδων θὰ ἰσοῦται μὲ $\frac{a(1+\tau)^n(1+\tau) - a(1+\tau)}{1+\tau-1}$. Ὡστε :

(1)

$$\Sigma = (1+\tau) \cdot \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$$

Αἱ δυνάμεις τοῦ $1+\tau$ παρέχονται ἀπὸ εἰδικoὺς πίνακας καὶ οὕτω διευκολύνεται ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ Σ .

β') **Χρεωλυτικαὶ καταθέσεις.** Οὕτω καλοῦνται δόσεις ἴσαι, καταβαλλόμεναι εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους.

Πρόβλημα. «Καταθέτει τις εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους α δοχ. ἐπὶ ἀνατοκισμῷ. Ζητεῖται, τί ποσὸν θ' ἀποτελεσθῇ ἅμα τῇ νυοστῇ καταθέσει;»

Λύσις. Ἐνταῦθα ἡ πρώτη κατάθεσις θὰ μείνῃ εἰς τὸν ἀνατοκισμόν, $v-1$ ἔτη, ἄρα θ' ἀποτελέσῃ ποσὸν $\alpha(1+\tau)^{v-1}$. Ἡ δευτέρα θὰ μείνῃ $v-2$ ἔτη, ἄρα θὰ γίνῃ ἴση πρὸς $\alpha(1+\tau)^{v-2}$, κ.ο.κ. Ἡ τελευταία δόσις δὲν τοκίζεται. Οὕτω θ' ἀποτελεσθῇ τὸ ποσόν:

$$\alpha(1+\tau)^{v-1} + \alpha(1+\tau)^{v-2} + \dots + \alpha = \frac{\alpha(1+\tau)^{v-1} \cdot (1+\tau) - \alpha}{1+\tau+1} = \alpha \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$$

Ὡστε τὸ ποσὸν Σ' τὸ σχηματιζόμενον ἅμα τῇ τελευταίᾳ καταθέσει δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον:

(2)

$$\Sigma' = \alpha \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$$

γ') **Χρεωλυσία** καλεῖται ἡ ἀπόσβεσις χρέους δι' ἴσων δόσεων καταβαλλομένων κατ' ἴσα χρονικὰ διαστήματα. Ἐκάστη τῶν ἴσων δόσεων καλεῖται **χρεωλύσιον**.

Πρόβλημα. «Ἐδανείσθῃ τις α δοχ. ἐπ' ἀνατοκισμῷ μὲ τὴν ὑποχρέωσιν νὰ τὰς ἐξοφλήσῃ διὰ ν ἴσων δόσεων καταβαλλομένων εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους. Ζητεῖται τί ποσὸν πρέπει νὰ πληρώνῃ κατ' ἔτος».

Λύσις. Ἐστω x δοχ. ἡ ζητούμενη ἐτησίᾳ δόσις (τὸ χρεωλύσιον), τότε ὁ δανειζόμενος θὰ καταβάλῃ εἰς τὸν δανειστὴν ἐν ὅλῳ ν δόσεις ἴσας πρὸς x . Αἱ δόσεις αὗται (μὲ τοὺς τόκους των) θ' ἀποτελέσουν κατὰ τὸν τύπον (2) τῆς παρούσης παραγράφου ποσὸν ἴσον πρὸς $x \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$. Ἐξ ἄλλου ὅμως μετὰ ν ἔτη τὸ δανεισθὲν ποσὸν ἀνατοκιζόμενον θὰ ἔχῃ ἀνέλθῃ εἰς $\alpha(1+\tau)^v$. Διὰ νὰ γίνῃ ἡ ἀπόσβεσις δέον τὸ ποσὸν τὸ ἀποτελεσθὲν ἀπὸ τὰ χρεωλύσια (μὲ τοὺς τόκους των, διότι ταῦτα τοκίζονται πρὸς ὄφελος τοῦ δανειζομένου) νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ποσὸν εἰς ὃ ἀνῆλθεν τὸ δανεισθὲν κεφάλαιον. Ἐντεῦθεν ἔχομεν τὴν **ἐξίσωσιν τῆς χρεωλυσίας**:

(3)

$$x \cdot \frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau} = \alpha(1+\tau)^v$$

Ἐκ τῆς ἐξίσωσως ταύτης προσδιορίζομεν τὸ ζητούμενον χρεωλύσιον x . Εἰς τοὺς πρακτικοὺς ὑπολογισμοὺς γίνεται χρῆσις πινάκων παρεχόντων τὰ ποσὰ $(1+\tau)^v$ καὶ τὰ $\frac{(1+\tau)^v - 1}{\tau}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

481) Ἐάν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται καθ' ἑξαμηνίαν (δηλ. οἱ τόκοι προστίθενται εἰς τὸ κεφάλαιον καθ' ἑξαμηνίαν) πόσον γίνεται τὸ κεφάλαιον α δρχ. μετὰ ν ἔτη, τοῦ τόκου τῆς δραχμῆς εἰς ἕν ἔτος ὄντος τ; Ὅμοιον πρόβλημα ἂν ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατὰ τριμηνίαν ἢ κατὰ μῆνα ἢ καθ' ἡμέραν.

482) Πρὸς ποῖον ἐπιτόκιον πρέπει νὰ κατατεθῇ κεφάλαιον, ἵνα τοῦ ἀνατοκισμοῦ γινομένου κατὰ μῆνα, μετὰ ν ἔτη γίνῃ ὅσον θὰ ἐγίνετο ἂν κατετίθετο πρὸς 8% τοῦ ἀνατοκισμοῦ γινομένου κατ' ἔτος;

483) Μετὰ πόσα ἔτη καὶ ἡμέρας, δύο κεφάλαια, τὸ ἕν ἐκ 5000 δρχ. καὶ τὸ ἄλλο ἐκ 8000 δρχ. κατατεθέντα ταυτοχρόνως, τὸ πρῶτον πρὸς 5% καὶ τὸ δεύτερον πρὸς 3,5% θὰ καταστοῦν ἴσα; Ὁ ἀνατοκισμὸς γίνεται κατ' ἔτος.

484) Παρετηρήθη ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ κορμοῦ δένδρου εἰς ὕψος 1 μέτρου ὑπὲρ τὸ ἔδαφος, ἐχρειάσθη 9 ἔτη διὰ νὰ διπλασιασθῇ. Ἐάν δεχθῶμεν ὅτι ἡ αὐξησις εἰς κάθε ἔτος εἶναι ἀνάλογος τῆς τιμῆς ποῦ ἔχει ἡ περίμετρος εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ ἔτους ἐκαστοτε, νὰ εὗρεθῇ κατὰ τὴν διάρκειαν τίνος ἔτους ἡ περίμετρος θὰ τριπλασιασθῇ; Δίδεται ὅτι $\log 4 = 0,602$ καὶ $\log 9 = 0,954$.

485) Τί ποσὸν πρέπει νὰ κατατεθῇ ἐπ' ἀνατοκισμῷ, ἵνα μετὰ ν ἔτη γίνῃ ὅσον καὶ ν ἴσαι καταθέσεις πρὸς α δρχ. ἐκάστη, κατατιθέμεναι εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους; Ὁ τόκος τῆς δραχμῆς εἰς ἕν ἔτος ὑποτίθεται ἴσος πρὸς τ.

486) Θέλει τις νὰ δίδῃ εἰς ἕνα πρόσωπον 10000 δρχ. ἐτησίως ἐπὶ 20 ἔτη, εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους. Τί ποσὸν πρέπει νὰ καταθέσῃ (ἐπ' ἀνατοκισμῷ) ἐφ' ἅπαξ εἰς μίαν τράπεζαν, ἢ ὅποια θ' ἀναλάβῃ νὰ παρέχῃ τὸ ἐτήσιον εἰσόδημα τῶν 10000 δρχ.; ὑποτίθεται ὅτι τὸ ἐπιτόκιον τοῦ λογαριασμοῦ εἶναι 4,5%.

487) Ὅφειλει τις νὰ πληρῶνῃ εἰς τὸ τέλος ἐκάστου ἔτους. 2000 δρχ. ἐπὶ 12 ἔτη. Μὲ τί ποσὸν δύναται ν' ἀντικαταστήσῃ τὰς 12 αὐτὰς δόσεις ἂν θέλῃ νὰ κάμῃ μίαν μόνον πληρωμὴν εἰς τὸ τέλος τοῦ 4ου ἔτους, τοῦ ἐπιτοκίου ὄντος 5%;

488) Συμφωνεῖ τις ὅπως καταβάλλῃ εἰς ἀσφαλιστικὴν ἑταιρείαν ἐπὶ ν ἔτη, α δρχ. εἰς τὴν ἀρχὴν ἐκάστου ἔτους μὲ τὸ δικαίωμα νὰ λαμβάνῃ ἀκολούθως ἐπὶ 2ν ἔτη 2α δρχ. ἐτησίως. Ἡ πρώτη δόσις τῶν 2α δρχ. θὰ τοῦ δοθῇ ἕν ἔτος μετὰ τὴν τελευταίαν (νυσσὴν) κατάθεσιν αὐτοῦ ὁ δὲ ἀνατοκισμὸς νὰ γίνεται μὲ ἐπιτόκιον 5%. Ζητεῖται τὸ ν.

489) Προκειμένου νὰ ἐκτελεσθῇ δημόσιον ἔργον διαρκείας 4 ἐτῶν, ὁ Δήμος συνάπτει δάνειον ἀπὸ τινος τραπεζίης, τὸ ὁποῖον θὰ ἐξοφληθῇ τοκοχρεωλυτικῶς εἰς 8 ἴσας δόσεις πρὸς 100.000 δρχ. ἐκάστη μὲ ἐπιτόκιον 6%, τῆς ἐξοφλήσεως ἀρχομένης ἀμέσως μετὰ τὸ πέρας τοῦ ἔργου. Ἡ ἀνάληψις (τοῦ δανείου) θὰ γίνῃ τμηματικῶς, ἦτοι τὰ 0,15 τοῦ ποσοῦ θ' ἀναληφθοῦν εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ πρώτου ἔτους, τὰ 0,35 εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ δευτέρου τὰ 0,30 εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τρίτου καὶ τὰ 0,20 εἰς τὴν ἀρχὴν τοῦ τετάρτου ἔτους. Ζητεῖται τὸ οὕτω δανεισθὲν τμηματικῶς ποσόν.

Μέγιστα καὶ Ἐλάχιστα ὑπὸ συνθήκας.

67. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν μεταβλητὴν ποσότητα ω πραγματικὴν καὶ ἑξαρτωμένην ἀπὸ ἄλλας μεταβλητὰς ποσότητας $x, y, z, \dots$ ἐπίσης πραγματικάς. Ἐὰν ὑπάρχει σταθερὸς ἀριθμὸς M τὸν ὁποῖον ἡ ω δὲν δύναται νὰ ὑπερβῇ ἀλλὰ δύναται νὰ φθάσῃ, τότε ὁ M λέγεται ἀπόλυτον **μέγιστον** (ἢ ἀπλῶς **μέγιστον**) τῆς ω .

Ὡστε ἂν ἡ συνάρτησις ω πληροῖ πάντοτε τὴν σχέσιν $\omega \leq M$ ὅπου τὸ $=$ νὰ λαμβάνῃ χώραν, διὰ καταλλήλους τιμὰς $x_0, y_0, z_0, \dots$ τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ἡ ω , τότε τὸ M εἶναι τὸ μέγιστον τῆς ω καὶ ἡ ω γίνεται μεγίστη ὅταν $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \dots$

Ὅμοιως, ἂν ὑπάρχῃ σταθερὸς ἀριθμὸς E τοιοῦτος, ὥστε ἡ συνάρτησις ω ἐν τῇ μεταβολῇ τῆς νὰ πληροῖ πάντοτε τὴν σχέσιν $\omega \geq E$ ὅπου τὸ $=$ νὰ λαμβάνῃ πράγματι χώραν διὰ καταλλήλους τιμὰς $x_0, y_0, z_0, \dots$ τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ἡ ω , τότε τὸ E λέγεται **ἀπόλυτον ἐλάχιστον** ἢ ἀπλῶς **ἐλάχιστον** τῆς ω , ἡ δὲ ω λέγομεν ὅτι γίνεται ἐλάχιστη διὰ $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \dots$

Οὔτω π.χ. ἡ $\omega = x^2 + y^2 + z^2 + 5$ ἔχει ἐλάχιστον τὸ 5 καὶ τὸ λαμβάνει (δηλ. καθίσταται ἐλάχιστη) ὅταν $x=0, y=0, z=0$. Ἐπίσης ἡ $\omega = 10 - (x-2)^2 - (y-3)^2$ ἔχει μέγιστον τὸ 10 καὶ τὸ λαμβάνει ὅταν $x=2, y=3$.

Ἐὰν δύο συναρτήσεις ω καὶ ω_1 τῶν ἰδίων μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$ γίνωνται ἀμφοτέραι μέγισται (ἢ ἐλάχισται) διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς $x=x_0, y=y_0, z=z_0, \dots$ τῶν μεταβλητῶν, τότε θὰ λέγωμεν χάριν συντομίας, ὅτι αἱ ω καὶ ω_1 γίνονται **συγχρόνως μέγισται** (ἢ ἐλάχισται).

Οὔτω π.χ. αἱ $\omega = x^2 + y^2 + z^2$ καὶ $\omega_1 = 3(x^2 + y^2 + z^2)$ γίνονται συγχρόνως ἐλάχισται (διὰ $x=0, y=0, z=0$).

Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου δυνάμεθα νὰ διατυπώσωμεν τὰς ἑξῆς προφανεῖς ιδιότητας.

I. Ἐὰν A σταθερά, τότε ἂν ἡ ω γίνῃ **μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**) καὶ ἡ $\omega + A$ γίνεται **συγχρόνως μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**).

Διότι ἂν $\omega \leq M$ τότε συγχρόνως καὶ $\omega + A \leq M + A$ καὶ ὅταν ἡ ω φθάσῃ τὸ μέγιστον αὐτῆς M , ἡ $\omega + A$ φθάσῃ ἐπίσης τὸ μέγιστον αὐτῆς $M + A$.

II. Ἐὰν $k > 0$ καὶ ἡ ω γίνῃ **μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**) τότε καὶ ἡ $k\omega$ γίνεται **συγχρόνως μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**).

III. Ἐὰν $\omega > 0$ καὶ ἡ ω καθίσταται **μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**) τότε καὶ ἡ ω^p (p φυσικὸς ἀριθμὸς) καθίσταται **συγχρόνως μεγίστη** (ἢ **ἐλάχιστη**).

IV. *Εὰν $\omega > 0$ καὶ ἡ ω καθίσταται μεγίστη, τότε ἡ $\frac{1}{\omega}$ καθίσταται συγχρόνως, ἐλαχίστη καὶ τανάπαλιν.

(Διότι ἡ σχέσις $\omega \leq M$ συνεπάγεται τότε τὴν $\frac{1}{\omega} \geq \frac{1}{M}$ καὶ ὅταν ἡ ω γίνηται μετὰ M , ἡ $\frac{1}{\omega}$ γίνεται (διὰ τὰς αὐτὰς τιμὰς τῶν μεταβλητῶν $x, y, z, \dots$) ἴση μετὰ $\frac{1}{M}$).

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες βοηθοῦν σημαντικῶς εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν μεγίστων ἢ ἐλαχίστων διαφορῶν παραστάσεων ἐν συνδυασμῷ μετὰ τὰ ἐπόμενα θεωρήματα τῆς § 68. Σημειωτέον ὅτι τὰ ἐν λόγῳ θεωρήματα μᾶς παρέχουν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον συναρτήσεων τινῶν ω μόνον διὰ περιπτώσεις καθ' αἷς αἱ μεταβληταὶ $x, y, z, \dots$ ἀφ' ὧν ἐξαρτᾶται ἡ ω πληροῦν ὀρισμένας συνθήκας (συνεπῶς δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταβληταί). Διὰ τοῦτο ὁμιλοῦμεν περὶ μεγίστου ἢ ἐλαχίστου τῆς ω , ὑπὸ συνθήκας.

68. Θεωρήματα περὶ τῶν μεγίστων καὶ ἐλαχίστων.

Θεώρημα I. «Εὰν τὸ ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν ποσοτήτων εἶναι σταθερόν, τὸ γινόμενον αὐτῶν λαμβάνει τὴν μεγίστην δυνατὴν τιμὴν, ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν μεταβλητῶν τούτων γίνηται ἀπόλυτον τιμὴν, ὅσον τὸ δυνατόν μικροτέραν».

*Απόδειξις. Ἐστωσαν x καὶ y αἱ δύο μεταβληταὶ ὧν τὸ ἄθροισμα ἴσουςται μετὰ τὸν σταθερὸν ἀριθμὸν a , δηλ. $x + y = a$.

*Ἐκ τῆς ταυτότητος: $xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$ ἔπεται ὅτι:

$$(1) \quad xy = \frac{a^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Ἡ (1) δεικνύει ὅτι τὸ γινόμενον xy αὐξάνει ὅταν τὸ $(x-y)^2$ ἐλαττωταί ἢ ὅπερ τὸ αὐτό, ὅσον ἡ $|x-y|$ ἐλαττωταί. Ὅταν ἡ $|x-y|$ λάβῃ τὴν μικροτέραν δυνατὴν τιμὴν τῆς, τότε καὶ τὸ xy λαμβάνει τὴν μεγαλυτέραν δυνατὴν τιμὴν του δηλ. γίνεται μέγιστον (Maximum).

Πόρισμα. «Εὰν οἱ δύο παράγοντες x καὶ y οἱ ἔχοντες σταθερὸν ἄθροισμα δύνανται νὰ καταστοῦν ἴσοι, τότε τὸ xy καθίσταται μέγιστον, ἐξισουμένων τῶν δύο τούτων παραγόντων».

Διότι, ἡ (1) δεικνύει, ὅτι ἂν $x=y$ τότε $xy = \frac{a^2}{4}$ ἐνῶ ὅταν x καὶ y ἀνίστοι, τότε ἀφαιρεῖται ἀπὸ τὸ $\frac{a^2}{4}$ θετικὴ ποσότης καὶ συνεπῶς τὸ xy εἶναι τότε μικρότερον τοῦ $\frac{a^2}{4}$.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς (1) ἀπορρέει ἡ σχέσις: $xy \leq \frac{a^2}{4}$ ἢ $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$.

Δηλ. τὸ γινόμενον δύο παραγόντων εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ γινομένου, περὶ προκύπτει ἂν οὗτοι ἀντικαθιστῶσιν ἕκαστος διὰ τοῦ μέσου ὄρου των (ἡμιαριθμοσμάτος των). Ἡ ἰσότης ὑφίσταται μόνον ὅταν οἱ δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1ον. «Δίδεται περιφέρεια O καὶ εὐθεΐα (ϵ) μὴ τέμνουσα τὴν O . Ἐὰν εὐθεΐα μετακινεῖται καθέτως πρὸς τὴν (ϵ) καὶ τέμνει τὴν (ϵ) εἰς τὸ A καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς B καὶ Γ ζητεῖται εἰς ποίαν θέσιν τῆς $AB\Gamma$ τὸ γινόμενον $AB \cdot B\Gamma$ καθίσταται μέγιστον».

Λύσις. Ἡ εὐθεΐα $AB\Gamma$ θὰ παραμένῃ κάθετος καὶ πρὸς τὴν ἐκ τοῦ O ἀγομένην παράλληλον τῇ (ϵ) , δηλ. τὴν Oy (Σχ. 2) καὶ τὸ τμήμα $B\Gamma$ θὰ διχοτομεῖται πάντοτε ὑπὸ τῆς Oy . Παρατηροῦμεν ἤδη ὅτι τὸ γινόμενον $AB \cdot B\Gamma$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $AB \cdot BA$, ἄρα γίνεται μέγιστον ὅταν καὶ τὸ ἡμισυ αὐτοῦ, δηλ. τὸ $AB \cdot BA$ γίνῃ μέγιστον. Ἀλλὰ οἱ δύο παράγοντες AB καὶ BA ἔχουν ἄθροισμα $AB + BA = AD = \text{σταθερόν} = KO$ καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενον $AB \cdot BA$ θὰ λάβῃ τὴν μεγίστην τιμὴν ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν AB καὶ BA λάβῃ τὴν ἐλαχίστην δυνατὴν τιμὴν τῆς. Διακρίνομεν ἤδη δύο περιπτώσεις:

(Σχ. 2)

I. $KA > LO$. Ἐν τῇ περιπτώσει ταύτῃ ἡ διαφορὰ $AB - BA$ δὲν δύναται νὰ μηδενισθῇ, καθίσταται ὅμως ἐλάχιστη ὅταν ἡ $AB\Gamma$ συμπέσῃ μὲ τὴν $KLOM$. Διότι ὁ μειωτέος τῆς διαφορᾶς δηλ. ὁ AB λαμβάνει τὴν μικρότεραν δυνατὴν τιμὴν ($=KA$), ὁ δὲ ἀφαιρετέος BA τὴν μεγαλυντέραν δυνατὴν τιμὴν LO . Ἄρα εἰς τὴν θέσιν KLM ἡ διαφορὰ $AB - BA$ ἔχει τὴν μικρότεραν δυνατὴν τιμὴν τῆς καὶ συνεπῶς τὸ γινόμενον $AB \cdot BA$ λαμβάνει τὴν μεγίστην τιμὴν του, ἄρα καὶ τὸ $AB \cdot B\Gamma$.

II. $KA < LO$ (Σχ. 3). Τότε ὑπάρχουν δύο θέσεις $A'B'\Gamma'$ καὶ $A''B''\Gamma''$ εἰς τὰς ὁποίας ἡ διαφορὰ $(AB - BA)$ μηδενίζεται, (ἡ $B'B'' \perp$ εἰς τὸ μέσον τῆς KO). Συνεπῶς εἰς τὰς θέσεις ταύτας τὸ γινόμενον γίνεται μέγιστον.

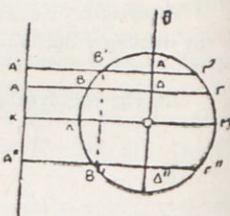
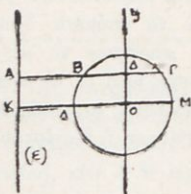
Θεώρημα II. «Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν τότε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν γίνεται ἐλάχιστον ὅταν ἡ διαφορὰ των γίνῃ κατ' ἀπόλυτον τιμὴν ὅσον τὸ δυνατόν μικρότερα».

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν x καὶ y οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ὧν τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, ἔστω a^2 . Θὰ ἔχωμεν δηλαδὴ $xy = a^2$. Ἐκ τῆς ταυτότητος $(x+y)^2 \equiv (x-y)^2 + 4xy$ ἔπεται ὅτι $(x+y)^2 = 4a^2 + (x-y)^2$ (1).

Ἐκ τῆς (1) γίνεται φανερόν ὅτι τὸ $(x+y)^2$ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ $x+y$ ἐλαττοῦται ταυτοχρόνως μὲ τὸ $(x-y)^2$ δηλ. μὲ τὴν $|x-y|$. Ἄρα ὅταν ἡ $|x-y|$ λάβῃ τὴν μικρότεραν δυνατὴν τιμὴν τῆς καὶ τὸ $(x+y)^2$ καὶ συνεπῶς καὶ τὸ $x+y$ λαμβάνει τὴν ἐλαχίστην τιμὴν του. (Minimum).

Πόρισμα. «Ἐὰν τὸ γινόμενον δύο θετικῶν μεταβλητῶν μένει σταθερόν, δύνανται δὲ αὗται νὰ καταστοῦν ἴσαι, τότε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο τούτων μεταβλητῶν καθίσταται ἐλάχιστον, ὅταν αὗται ἐξισωθῶν».

Διότι ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι τὸ $(x+y)^2$ ὑπερβαίνει τὸ $4a^2$ πλὴν τῆς περὶπτώσεως κατ' ἣν $x=y$ ὅτε τὸ $(x+y)^2$ φθάνει τὴν τιμὴν $4a^2$. Ἄρα τὸ ἐλάχιστον



(Σχ. 3)

τοῦ $(x+y)^2$ λαμβάνει χώραν ὅταν $x=y$ (ἐφ' ὅσον τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ). Τότε δὲ καὶ τὸ $x+y$ λαμβάνει τὴν ἐλάχιστην του τιμὴν $2a$ ($a>0$).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2ον. «*Ἐξ ὧν τῶν ἰσοδυνάμων ὀρθογωνίων τριγώνων, ποῖον ἔχει τὴν μικροτέραν ὑποτείνουσαν*»;

Λύσις. Ἐάν x καὶ y τὰ μῆκη τῶν καθέτων πλευρῶν ἐνὸς ἐκ τῶν θεωρουμένων ὀρθογωνίων τριγώνων, τότε θὰ εἶναι $(1) xy = \sigma\tau\alpha\theta = k^2$ (διότι τὸ ἐμβαδὸν $\frac{1}{2}xy$ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως σταθερὸν δι' ὅλα τὰ τρίγωνα ταῦτα). Ἐξ ἄλλου ἂν z ἡ ὑποτείνουσα, θὰ ἔχωμεν $z^2 = x^2 + y^2$ καὶ οὕτω τὸ z θὰ εἶναι ἐλάχιστον ὅταν τὸ z^2 δηλ. τὸ $x^2 + y^2$ γίνῃ ἐλάχιστον. Ἀλλὰ οἱ ἀριθμοὶ x^2, y^2 ἔχουν γινόμενον σταθερόν, $x^2 y^2 = k^2$ (ὡς προκύπτει ἐκ τῆς (1)), ἄρα τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $x^2 + y^2$ γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ δύο προσθετέοι ἐξισωθοῦν (ἐφ' ὅσον τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ). Δηλ. διὰ νὰ εἶναι τὸ z^2 ἐλάχιστον ἀρκεῖ $x^2 = y^2$ ἢ $x=y$ δηλ. τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Θεώρημα III. «*Τὸ γινόμενον πολλῶν θετικῶν παραγόντων εἶναι μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον πρὸς τὸ γινόμενον τὸ προκύπτον ὅταν οἱ παράγοντες τοῦ ἀρχικοῦ γινομένου ἀντικατασταθοῦν ἕκαστος διὰ τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ ὧν τῶν παραγόντων*».

Ἀπόδειξις. Μέσος ἀριθμητικὸς k ἀριθμῶν $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ καλεῖται ὁ ἀριθμὸς $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{k}$ δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν διαιρεθὲν διὰ τοῦ πλήθους αὐτῶν.

α') Θὰ δεῖξωμεν πρῶτον ὅτι ἂν τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ n παραγόντας τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ $2n$ παραγόντας. Ὑποθέσωμεν λοιπὸν ὅτι τὸ θεώρημα ἀληθεύει διὰ n παραγόντας καὶ θεωρήσωμεν ἐν γινόμενον $\Gamma = xyz \dots tx'y'z' \dots t'$ ἐκ $2n$ παραγόντων. Ἐάν καλέσωμεν α τὸν μέσον ὅρον τῶν παραγόντων τοῦ Γ θὰ εἶναι :

$$(1) \quad \alpha = \frac{x+y+z+\dots+t+x'+y'+z'+\dots+t'}{2n}.$$

Καλέσωμεν ἐπίσης β τὸν μέσον ὅρον τῶν n πρώτων παραγόντων τοῦ Γ καὶ β' τὸν μέσον ὅρον τῶν n τελευταίων παραγόντων αὐτοῦ. Θὰ ἔχωμεν τότε :

$$(2) \quad \beta = \frac{x+y+z+\dots+t}{n}, \quad (3) \quad \beta' = \frac{x'+y'+z'+\dots+t'}{n}.$$

Ἐκ τῶν (1), (2) καὶ (3) προκύπτει ἀμέσως : $2\alpha n = \beta n + \beta' n$ ἢτοι $2\alpha = \beta + \beta'$ ἢ

$$(4) \quad \alpha = \frac{\beta + \beta'}{2}.$$

Ἐκ τῆς ἀνισότητος $\beta\beta' \leq \left(\frac{\beta + \beta'}{2}\right)^2$ (ἰδὲ θεώρημα I, παρατήρησις) θὰ ἔχωμεν, δυνάμει τῆς (4) τήν :

$$(5) \quad \beta\beta' \leq \alpha^2.$$

Συμφώνως πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας θὰ ἔχωμεν :

$$xyz \dots t \leq \beta^n$$

$$x'y'z' \dots t' \leq \beta'^n$$

καὶ διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη :

$xyz \dots tx'y'z' \dots t' \leq (\beta\beta')^v$ δηλ. $\Gamma \leq (\beta\beta')^v$.

*Αλλά λόγω της (5), $(\beta\beta')^v \leq a^{2v}$ συνεπώς, αφού $\Gamma \leq (\beta\beta')^v$ θά είναι κατά μείζονα λόγον $\Gamma \leq a^{2v}$ ὁ.ἔ.δ.

β') *Επειδή τὸ θεώρημα III ἰσχύει διὰ δύο παράγοντας (ἴδὲ θεώρημα I, παρατήρησις), θά ἰσχύῃ ἄρα καὶ διὰ 4, διὰ 8 καὶ γενικῶς διὰ γινόμενα ὧν τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων εἶναι ἀκεραία δύναμις τοῦ 2.

γ') *Ἐστω γινόμενον P ἐκ μ παραγόντων θετικῶν, ὅπου μ δὲν εἶναι δύναμις τοῦ 2. Προσθέτομεν εἰς τὸν ἀκέραιον μ ἓνα κατάλληλον ἀκέραιον k οὕτως, ὥστε ὁ ἀριθμὸς $\mu+k$ νὰ εἶναι δύναμις τοῦ 2. *Ἐὰν a ὁ μέσος ὅρος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου P , εἰσάγομεν k ἀκόμη παράγοντας ἴσους πρὸς a καὶ ἔχομεν οὕτω ἓν γινόμενον ἐκ $\mu+k$ παραγόντων, τὸ $P \cdot a^k$. Ὁ μέσος ὅρος τῶν $\mu+k$ παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου εἶναι πάλιν a καὶ ἐπειδὴ τὸ πλῆθος $\mu+k$ τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου τούτου εἶναι δύναμις τοῦ 2, τὸ θεώρημα θά ἰσχύῃ, δηλ. :

$$P \cdot a^k \leq a^{\mu+k}.$$

*Ἀπλοποιούντες διὰ a^k λαμβάνομεν: $P \leq a^\mu$ ὁ.ἔ.δ.

Πόρισμα. «Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε θετικῶν μεταβλητῶν παραγόντων ἔχοντων σταθερὸν ἄθροισμα, γίνεται μέγιστον ὅταν οἱ παράγοντες κατασιῶσιν ἴσοι (ἔφ' ὅσον τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ)».

*Απόδειξις. Ἐστω $xyz \dots t$ γινόμενον μ μεταβλητῶν θετικῶν παραγόντων, ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον πρὸς $\mu \cdot a$ (a ὁ μέσος ὅρος αὐτῶν). Κατὰ τὸ προαποδειχθέν, θά ἔχωμεν $xyz \dots t \leq a^\mu$. Δηλ. ἡ μεγίστη τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ φθάσῃ τὸ γινόμενον τοῦτο εἶναι ἡ a^μ καὶ τὴν φθάσῃ ὅταν $x=y=z=\dots=t=a$. Ἐν ἡ περιπτώσει δύο παράγοντες εἶναι ἄνισοι, τὸ γινόμενον δὲν δύναται νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν μεγίστην ταύτην τιμὴν τοῦ a^μ . Διότι ἂν οἱ δύο οὗτοι παράγοντες ἀντικατασταθοῦν ἕκαστος διὰ τοῦ ἡμισυαριθμοῦ αὐτῶν (ἴδὲ παρατήρησιν τοῦ θεωρήματος I) τὸ γινόμενον αὐξάνει ἀκόμη. Ἄν λοιπὸν ἰσοῦται πρὸς a^μ , τότε μετὰ τὴν ἀντικατάστασιν τῶν δύο τούτων ἀνίσων παραγόντων θά ὑπερέβαινε τὸ a^μ ὅπερ ἀδύνατον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3ον. «Ἐξ ὧν τῶν ἰσοπεριμέτρων τριγώνων νὰ ὁρισθῇ τὸ ἔχον τὸ μέγιστον ἔμβαδόν».

Δύσις. Ἐστω $2t$ ἡ σταθερὰ περίμετρος τῶν τριγώνων τούτων καὶ x, y, z αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν. Τὸ ἔμβαδόν $E = \sqrt{t(t-x)(t-y)(t-z)}$ γίνεται μέγιστον ὅταν γίνῃ μέγιστον τὸ γινόμενον $\Gamma = (t-x)(t-y)(t-z)$.

*Ἄλλ' οἱ τρεῖς παράγοντες τοῦ Γ ἔχουν ἄθροισμα :

$$t-x+t-y-t-z=3t-(x+y+z)=3t-2t=t=\text{σταθερὸν}.$$

Συνεπῶς τὸ Γ γίνεται μέγιστον ὅταν :

$$t-x=t-y=t-z \quad \text{δηλ.} \quad \text{ὅταν} \quad x=y=z \left(= \frac{2t}{3} \right).$$

Θεώρημα IV. «Τὸ ἄθροισμα πολλῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι μεγάλτερον ἢ τοῦλάχιστον ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τὸ προκύπτον ὅταν ὅλοι οἱ προσθετέοι ἀντικατασταθοῦν διὰ τοῦ μέσου γεωμετρικοῦ αὐτῶν».

Ἀπόδειξις. Ἐστω τὸ ἄθροισμα $\Sigma = x + y + z + \dots + t$ ἐκ μ προσθετέων θετικῶν. Ἐξ ὁρισμοῦ, καλοῦμεν μέσον γεωμετρικὸν τῶν ἀριθμῶν $x, y, z, \dots, t$ τὴν μυστήν ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν τούτων. Ἐὰν κληθῇ γ ὁ μέσος γεωμετρικὸς τῶν $x, y, z, \dots, t$ θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad \gamma = \sqrt[\mu]{xyz \dots t} \quad \text{καὶ} \quad xyz \dots t = \gamma^\mu.$$

Ἐξ ἄλλου ὁ μέσος ὅρος τῶν $x, y, z, \dots, t$ θὰ εἶναι ὁ $\frac{\Sigma}{\mu}$ καὶ κατὰ τὸ θεώρημα III θὰ ἰσχύη ἡ ἀνισότης :

$$(2) \quad xyz \dots t \leq \left(\frac{\Sigma}{\mu} \right)^\mu$$

ἥτις λόγῳ τῆς (1) γράφεται :

$$\gamma^\mu \leq \left(\frac{\Sigma}{\mu} \right)^\mu \quad \text{ἢ} \quad \gamma \leq \frac{\Sigma}{\mu} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma \geq \gamma \cdot \mu \quad \text{δ.ξ.δ.}$$

Πόρισμα. « Ἄθροισμα θετικῶν, μεταβλητῶν προσθετέων, ἐχόντων σταθερὸν γινόμενον, γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι καταστῶσι ἴσοι (ἐφ' ὅσον τοῦτο εἶναι δυνατόν) ».

Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν ἄθροισμα $\Sigma = x + y + z + \dots + t$, μ μεταβλητῶν θετικῶν προσθετέων, ὧν τὸ γινόμενον εἶναι σταθερόν, ἔστω γ^μ . Ὁ μέσος γεωμετρικὸς αὐτῶν εἶναι ὁ σταθερὸς γ . Κατὰ τὸ ἀποδειχθὲν θὰ εἶναι διαρκῶς $\Sigma \geq \gamma \cdot \mu$, ἄρα τὸ Σ δὲν δύναται νὰ λάβῃ τιμὴν κατωτέραν τοῦ $\gamma \cdot \mu$, γίνεται ὅμως $\Sigma = \gamma \cdot \mu$, ὅταν πάντες οἱ προσθετέοι γίνουσι ἴσοι πρὸς γ . Ἀρα ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ Σ εἶναι ἡ $\gamma \cdot \mu$. Ἡ ἰσότης $\Sigma = \gamma \cdot \mu$ ἀποκλείεται ὅταν δύο προσθετέοι Σ εἶναι ἄνισοι, διότι ἡ σχέσις (2) ἐξ ἧς προέκυψεν τὸ θεώρημα IV δὲν εἶναι ἰσότης εἰς τὴν περὶπτωσιν δύο ἐκ τῶν γραμμάτων $x, y, z, \dots$ εἶναι ἄνισα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ον. « Ἐξ ὁλων τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον a^3 , νὰ δεισθῇ ποῖον ἔχει ἐλάχιστην ὀλικὴν ἐπιφάνειαν ».

Λύσις. Ἐστώσαν x, y, z αἱ διαστάσεις τυχόντος ἐκ τῶν παραλληλεπιπέδων τούτων. Θὰ ἔχωμεν :

$$(1) \quad xyz = a^3.$$

Ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια $E = 2(xy + yz + zx)$ γίνεται μεγίστη, συγχρόνως μὲ τὸ ἄθροισμα $xy + yz + zx$. Οἱ τρεῖς θετικοὶ προσθετέοι τοῦ ἄθροίσματος τούτου ἔχουν γινόμενον $(xy)(yz)(zx) = (xyz)^2 = a^6 = \text{σταθερόν}$, συνεπῶς τὸ ἄθροισμα $xy + yz + zx$ γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ προσθετέοι οὗτοι καταστῶσι ἴσοι, δηλ. $xy = yz = zx$, ἥτοι $x = y = z$.

Ὅποτε τὸ ζητούμενον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὁ κύβος.

Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι συγχρόνως μὲ τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν γίνεται ἐλάχιστη καὶ ἡ διαγώνιος $\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα $x + y + z$ τῶν τριῶν διαστάσεων.

Θεώρημα V. « Τὸ γινόμενον δυνάμεων μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν ἐχόντων ἄθροισμα σταθερὸν γίνεται μέγιστον ὅταν αἱ βάσεις γίνουσι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας (ἐφ' ὅσον τοῦτο δύναται νὰ συμβῇ) ».

Ἀπόδειξις. Ἐστω π.χ. τὸ γινόμενον $\Gamma = x^a y^b z^c$ ὅπου a, b, c σταθεροὶ θετικοὶ σύμμετροι ἐκθέται καὶ x, y, z μεταβλητοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες σταθερὸν ἄθροισμα $x + y + z = k$.

Ὑποθέσωμεν πρῶτον ὅτι α, β, γ εἶναι ἀκέραιοι. Τὸ γινόμενον Γ γίνεται προφανῶς μέγιστον ὅταν καὶ τὸ γινόμενον $\Pi = \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma}$ γίνῃ μέγιστον (ἀφοῦ ὁ παράγων $\frac{1}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma}$ εἶναι σταθερός).

$$\text{Ἀλλά: } \Pi = \frac{\frac{x}{\alpha} \cdot \frac{x}{\alpha} \dots \frac{x}{\alpha}}{\alpha \text{ φορές}} \cdot \frac{\frac{y}{\beta} \cdot \frac{y}{\beta} \dots \frac{y}{\beta}}{\beta \text{ φορές}} \cdot \frac{\frac{z}{\gamma} \cdot \frac{z}{\gamma} \dots \frac{z}{\gamma}}{\gamma \text{ φορές}}$$

δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς γινόμενον $\alpha + \beta + \gamma$ παραγόντων ὧν τὸ ἄθροισμα εἶναι :

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + \frac{x}{\alpha} + \dots + \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{y}{\beta} + \dots + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} + \frac{z}{\gamma} + \dots + \frac{z}{\gamma} = \\ = \alpha \cdot \frac{x}{\alpha} + \beta \cdot \frac{y}{\beta} + \gamma \cdot \frac{z}{\gamma} = x + y + z = k = \text{σταθερόν.} \end{aligned}$$

Ἄρα τὸ Π γίνεται μέγιστον ὅταν πάντες οἱ παράγοντες γίνουν ἴσοι, δη-
λαδὴ ὅταν :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἐὰν οἱ ἐκθέται α, β, γ εἶναι κλασματικοί, πάλιν τὸ θεώρημα ἰσχύει.

$$\text{Ἐστω π.χ. } \alpha = \frac{\mu}{\nu}, \quad \beta = \frac{\rho}{\nu}, \quad \gamma = \frac{\sigma}{\nu}.$$

Τότε τὸ Γ γράφεται $\Gamma = x^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot y^{\frac{\rho}{\nu}} \cdot z^{\frac{\sigma}{\nu}}$ καὶ γίνεται μέγιστον ὅταν ἡ νυοστή δύναμις αὐτοῦ $\Gamma^\nu = x^\mu y^\rho z^\sigma$ γίνῃται μεγίστη. Ἀλλὰ τοῦτο συμβαίνει κατὰ τὸ προαποδειχθὲν ὅταν $\frac{x}{\mu} = \frac{y}{\rho} = \frac{z}{\sigma}$ ἥτοι ὅταν

$$\left(\frac{x}{\mu} \right) = \left(\frac{y}{\rho} \right) = \left(\frac{z}{\sigma} \right) \quad \text{ἥτοι} \quad \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ον. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθῶν κυκλικῶν κόνων με δεδομένην κυρτὴν ἐπιφάνειαν $\pi \alpha^2$, νὰ καθορισθῇ ὁ ἔχων τὸν μέγιστον ὄγκον.

Δύσις. Ἐστω x ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ y τὸ ὕψος του. Ἡ κυρτὴ του ἐπιφάνεια εἶναι $\pi x \sqrt{x^2 + y^2} = \pi \alpha^2$. Ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν :

$$(1) \quad y = \frac{\sqrt{\alpha^4 - x^4}}{x}.$$

Ὁ ὄγκος ἐξ ἄλλου εἶναι $V = \frac{1}{3} \pi x^2 y$ ἢ λόγῳ τῆς (1), $V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{\sqrt{\alpha^4 - x^4}}{x} = \frac{1}{3} \pi x \sqrt{\alpha^4 - x^4}$. Ὁ ὄγκος V γίνεται μέγιστος ὅταν καὶ τὸ γινόμενον $x \sqrt{\alpha^4 - x^4}$ γίνῃ μέγιστον ἢ ὅταν ἡ τετάρτη δύναμις τοῦ γινομένου τούτου δηλ. ἡ $x^4 (\alpha^4 - x^4)^2$ γίνῃ μεγίστη. Ἡ παράστασις $\Gamma = (x^4)(\alpha^4 - x^4)^2$ εἶναι γινόμενον δυνάμεων τῶν θετικῶν μεταβλητῶν παραγόντων x^4 καὶ $\alpha^4 - x^4$ οἱ ὁποῖοι ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα $x^4 + \alpha^4 - x^4 = \alpha^4$.

Ἄρα τὸ Γ γίνεται μέγιστον ὅταν $\frac{x^4}{1} = \frac{a^4 - x^4}{2}$ ἢ $x^4 = \frac{a^4}{3}$ ἢ $x = a/\sqrt[4]{3}$. Ἀλλὰ

τότε $y = a\sqrt[4]{2}/\sqrt[4]{3}$.

Παρατήρησις. Διὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ μεγίστου τοῦ γινομένου $x\sqrt{a^4 - x^4}$ θὰ ἡδυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $(x^4)^{\frac{1}{4}} \cdot (a^4 - x^4)^{\frac{1}{2}}$ ὅτε ἔχομεν γινόμενον δυνάμεων, ποσοτήτων ἔχουσιν σταθερὸν ἄθροισμα. Διὰ τὸ μέγιστον πρέπει: $\frac{x^4}{\frac{1}{4}} = \frac{a^4 - x^4}{\frac{1}{2}}$ κ.τ.λ.

Θεώρημα VI. «Ἐὰν τὸ γινόμενον δυνάμεων, μεταβλητῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερὸν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οὗτοι καταστῶσιν ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἐκθέτας».

Ἀπόδειξις. Ἐστώσαν οἱ θετικοὶ x, y, z δι' οὓς ὑποθέτομεν ὅτι:

$$(1) \quad x^a \cdot y^b \cdot z^c = k \text{ (σταθερόν).}$$

Οἱ ρητοὶ ἐκθέται a, b, c ὑποτίθενται θετικοὶ ἀκέραιοι (ἂν δὲν εἶναι, ὑψοῦμεν τὰ μέλη τῆς (1) εἰς κατάλληλον δύναμιν οὕτως ὥστε οἱ ἐκθέται τῶν x, y, z νὰ γίνουν ἀκέραιοι).

Τὸ ἄθροισμα $\Sigma = x + y + z$ δύναται νὰ γραφῇ:

$$\Sigma = a \frac{x}{a} + b \frac{y}{b} + c \frac{z}{c} = \underbrace{\frac{x}{a} + \frac{x}{a} + \dots + \frac{x}{a}}_{a \text{ φορές}} + \underbrace{\frac{y}{b} + \dots + \frac{y}{b}}_{b \text{ φορές}} + \underbrace{\frac{z}{c} + \frac{z}{c} + \dots + \frac{z}{c}}_{c \text{ φορές}}.$$

Οὕτω τὸ Σ τίθεται ὑπὸ τὴν μαρφήν $a + b + c$ προσθετέων, ὧν τὸ γινόμενον $\frac{x}{a} \cdot \frac{x}{a} \dots \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \dots \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c} \dots \frac{z}{c} = \frac{x^a y^b z^c}{a^a b^b c^c}$ εἶναι σταθερόν.

Ἄρα κατὰ τὸ πόρισμα τοῦ θεωρήματος IV, τὸ Σ γίνεται ἐλάχιστον ὅταν οἱ προσθετέοι γίνουν ἴσοι, δηλ. ὅταν $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ ὁ.ἔ.δ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6ον. «Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων μὲ μίαν βάσιν, τῶν ἐχόντων δεδομένον ὄγκον $\frac{1}{6}\pi a^3$, νὰ εὕρεθῇ ποῖον ἔχει τὴν μικροτέραν κυρτὴν ἐπιφάνειαν».

Λύσις. Ἐὰν καλέσωμεν x τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ y τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ὁ ὄγκος αὐτοῦ εἶναι:

$$V = \frac{1}{6}\pi y^3 + \frac{1}{2}\pi x^2 y = \frac{1}{6}\pi a^3.$$

Ἐξ αὐτοῦ ἔχομεν τὴν σχέσιν:

$$(1) \quad y(y^2 + 3x^2) = a^3.$$

Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος εἶναι $E = \pi(x^2 + y^2)$ καὶ διὰ νὰ γίνῃ ἐλάχιστη ἀρκεῖ τὸ $x^2 + y^2$ νὰ γίνῃ ἐλάχιστον.

Διὰ νὰ χρησιμοποιήσωμεν τὴν (1) μετασχηματίζομεν τὸ ἄθροισμα ὡς ἑξῆς:

$$(2) \quad x^2 + y^2 = \left\{ 2y^2 + (y^2 + 3x^2) \right\} \cdot \frac{1}{3}.$$

Ἐὰν ἡ (1) ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον δίδει:

$$y^2(y^2 + 3x^2)^2 = a^6 \quad \text{καὶ} \quad (2y^2)^1 \cdot (y^2 + 3x^2)^2 = 2a^6 = \text{σταθερόν.}$$

Οὕτω ἡ ἀγκύλη τῆς (2) εἶναι ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον δυνάμεων εἶναι σταθερόν. Κατὰ τὸ VI, τὸ ἄθροισμα τοῦτο εἶναι ἐλάχιστον ὅταν:

$$\frac{2y^2}{1} = \frac{y^2 + 3x^2}{2}.$$

Ἐξ αὐτοῦ εὐρίσκομεν $x=y$, δηλ. τὸ σφαῖρ. τμήμα πρέπει νὰ καταστή ἡμισφαίριον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490) Ἐκ τῶν παραλληλεπιπέδων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ὁρισθῇ τὸ ἔχον τὸν μέγιστον ὄγκον.

491) Νὰ ἀχθῇ ἡ χορδὴ δοθέντος κύκλου ἥτις στρεφόμενη περὶ διάμετρον παραλήλου αὐτῇ, νὰ γραφῇ ἐπιφάνειαν τοῦ μεγίστου δυνατοῦ ἐμβαδοῦ.

492) Ἐκ τῶν τὴν αὐτὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν $2\pi a^2$ ἔχόντων κυλίνδρων, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

493) Δίδεται φύλλον χαρτονίου σχήματος τετραγώνου πλευρᾶς $2a$. Ζητεῖται ν' ἀποκοποῦν ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς τοῦ τέσσαρα ἴσα τετράγωνα οὕτως, ὥστε ἂν ἀνακλιθοῦν τὰ σχηματιζόμενα ὀρθογώνια ν' ἀποτελεσθῇ κυτίον τῆς μεγίστης δυνατῆς περιεκτικότητος.

494) Ποῖος ἐξ ὧλων τῶν ἰσοδυνάμων κυλίνδρων δύναται νὰ ἐγγραφῇ εἰς μικρότεραν σφαῖραν;

495) Ἐξ ὧλων τῶν κῶνων τῶν ἔχόντων τὸν αὐτὸν ὄγκον V , ποῖος ἔχει τὴν ἐλαχίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

496) Ἐξ ὧλων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθέντα κύκλον ποῖον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν;

497) Ἐξ ὧλων τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων εἰς α τὸ γινόμενον τοῦ ὕψους ἐπὶ τὸ $\varepsilon\eta$ τῶν τμημάτων εἰς α τὸ ὕψος τοῦτο χωρίζει τὴν ὑποτείνουσαν, εἶναι σταθερόν $=k^2$, ποῖον ἔχει τὴν μικρότεραν ὑποτείνουσαν;

498) Κῶνος ἔχει τὴν κορυφὴν του εἰς τὸ κέντρον δοθείσης σφαίρας ἀκτίνας R καὶ ἡ βάσις του εἶναι μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας. Ποῖον τὸ ὕψος του ἵνα ὁ ὄγκος του εἶναι μέγιστος;

499) Περὶ δοθέντα κύλινδρον μὲ ἀκτίνα a καὶ ὕψος b νὰ περιγραφῇ κῶνος ἔχων τὸν ἐλάχιστον δυνατόν ὄγκον.

500) Ἐάν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z ἔχουν σταθερόν ἄθροισμα πότε ἡ ποσότης $x^2 + y^2 + z^2$ γίνεται ἐλαχίστη;

501) Ἐάν $x^2 + y^2 + z^2 = \text{σταθερόν}$, πότε τὸ $xy + yz + zx$ γίνεται μέγιστον; Νὰ δοθῇ καὶ γεωμετρικὴ ἐρμηνεία;

502) Διὰ $0 < x < 1$ ποία ἡ μέγιστη τιμὴ τῆς παραστάσεως $x\sqrt{x}\sqrt{1-x^2}$;

503) Νὰ εὐρεθῇ ἡ μέγιστη καὶ ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ τιμὴ τῶν ἐπομένων κλασμάτων: α) $\frac{x^2+3x+5}{x^2+1}$, β) $\frac{5x^2+8x-1}{x^2+1}$, γ) $\frac{3y}{x^2+x+1}$ ὅπου τὸ x διατρέχει πάσας τὰς πραγματικὰς τιμὰς. (Βάσει τῶν δυνατῶν τιμῶν ἃς δύναται νὰ λάβῃ ἕκαστον, βλέπε § 23).

504) Ἐάν x, y, z θετικοὶ καὶ α, β, γ ρητοὶ θετικοὶ δείξατε ὅτι:

$$\frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{\alpha^\alpha \beta^\beta \gamma^\gamma} \leq \left(\frac{x+y+z}{\alpha+\beta+\gamma} \right)^{\alpha+\beta+\gamma}.$$

505) Ἐάν οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὴν $x^y + y^z = z^x$ ὅπου n φυσικὸς ἀριθμός, δείξατε ὅτι $\left(\frac{xy}{z^2} \right)^n < \frac{2}{5}$.

★ ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΙΧ

Προσθήκη ἐπὶ τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

69. Τύπος τοῦ de Moivre. α') "Ορισμα ἐνὸς μιγάδος. Ὁ τυχὼν μιγάς $\alpha + \beta i \neq 0$ δύναται νὰ γραφῇ ὑπὸ τὴν μορφήν: $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} i \right)$.

Ἐὰν δὲ τεθῇ: $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{συν}\theta$, $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \text{ημ}\theta$ καὶ $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \rho$, τότε ὁ μιγάς λαμβάνει τὴν **τριγωνομετρικὴν μορφήν** (ἥτις λέγεται καὶ «πολικὴ μορφή»):

$$z = \alpha + \beta i = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta).$$

Ἡ γωνία θ , τῆς ὁποίας τὸ μὲν συνημίτονον ἰσοῦται μὲ $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, τὸ δὲ

ἡμίτονον μὲ $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ καλεῖται **ὄρισμα** τοῦ μιγάδος $\alpha + \beta i$. Προφανῶς καὶ ἡ γωνία $\theta + 2k\pi$, ὅπου k ἀκέραιος δύναται νὰ χρησιμεύσῃ ὡς ὄρισμα. Ὡστε κάθε μιγάς ἔχει ἅπειρα ὄρισματα διαφέροντα μεταξὺ τῶν κατὰ ἀκέραιον ἀριθμὸν περιφερειῶν.

Κατὰ ταῦτα, ἡ παράστασις $\rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$ ὅπου $\rho > 0$ παριστάνει μιγάδα μὲ μέτρον ρ καὶ ὄρισμα θ . Ἐὰν $\theta = k\pi$ ὁ μιγάς καθίσταται πραγματικὸς. Ἐὰν δύο μιγάδες εἶναι ἴσοι, τότε ἔχουν μέτρα ἴσα καὶ ὄρισματα ἴσα, ἢ διαφέροντα κατὰ $2k\pi$ ($k = \text{ἀκέραιος}$).

Πολλάκις τὸ ὄρισμα θ λαμβάνεται μεταξὺ $-\pi$ καὶ $+\pi$ ὁπότε $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ καὶ συνεπῶς $\text{συν}\frac{\theta}{2} \geq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \left(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\text{ημ}\frac{\pi}{4} \right)$.

Τὸ ὄρισμα τοῦ $1 + i$ εἶναι $\frac{\pi}{4}$ ἢ γενικώτερον $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$.

β') Θεώρημα. «Τὸ γινόμενον δύο μιγάδων ἔχει ὄρισμα τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων τῶν παραγόντων».

Ἀπόδειξις. Ἐστωσαν οἱ μιγάδες $z = \rho(\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)$, $z' = \rho'(\text{συν}\theta' + i\text{ημ}\theta')$.

Ἄν σχηματίσωμεν τὸ γινόμενόν των:

$$\begin{aligned} zz' &= \rho\rho' [\text{συν}\theta\text{συν}\theta' - \text{ημ}\theta\text{ημ}\theta' + i(\text{συν}\theta\text{ημ}\theta' + \text{ημ}\theta\text{συν}\theta')] = \\ &= \rho\rho' [\text{συν}(\theta + \theta') + i\text{ημ}(\theta + \theta')] \end{aligned}$$

βλέπομεν ἀμέσως ὅτι τοῦτο ἔχει μέτρον ρρ' (τὸ γινόμενον τῶν μέτρων) καὶ ὄρισμα $\theta + \theta'$ δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων.

Πόρισμα. «Τὸ γινόμενον ὁσωνδήποτε μιγάδων ἔχει ὄρισμα τὸ ἄθροισμα τῶν ὁρισμάτων ὅλων τῶν παραγόντων».

Δηλ. ἂν $z_1 = \rho_1(\sin\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\sin\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$, ...

$z_n = \rho_n(\sin\theta_n + i\eta\mu\theta_n)$ τότε

$$(1) \quad z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n \{ \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) \}.$$

Ὁ τύπος (1) προκύπτει βαθμυδὸν (ἐπαγωγικῶς) ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

γ') **Τύπος τοῦ de Moivre.** «Ἐὰν n φυσικὸς ἀριθμὸς, ἰσχύει ὅτι :

$$(2) \quad \{ \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) \}^n = \rho^n \{ \sin(n\theta) + i\eta\mu(n\theta) \}.$$

Ὁ τύπος οὗτος πρὸκύπτει ἐκ τοῦ προηγουμένου τύπου (1), ἔὰν τεθῇ $z_1 = z_2 = \dots = z_n = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$ ἢ ἀποδεικνύεται ἀπ' εὐθείας διὰ τῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. 1. «Ἰσχύει ὁ τύπος τοῦ de Moivre ὅταν δ ν εἶναι ἀρνητικὸς ἀκέραιος»;
Δύσις. Ἐστω $n = -k$ ὅπου k φυσικὸς ἀριθμὸς. Θὰ ἔχωμεν τότε κατὰ σειράν :

$$\begin{aligned} \{ \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) \}^{-k} &= \frac{1}{\{ \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) \}^k} = \frac{1}{\rho^k \{ \sin(k\theta) + i\eta\mu(k\theta) \}} = \\ &= \rho^{-k} \frac{\sin(k\theta) - i\eta\mu(k\theta)}{\sin^2(k\theta) + \eta\mu^2(k\theta)} = \rho^{-k} \{ \sin(-k\theta) + i\eta\mu(-k\theta) \}. \end{aligned}$$

Ὡστε ὁ τύπος ἰσχύει καὶ δι' ἀρνητικὸς ἀκεραίους ἐκθέτας.

2. «Νὰ δευχθῇ ὅτι τὸ ὄρισμα τοῦ πηλίκου ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὁρισμάτων ἀριθμητοῦ καὶ παρονομαστοῦ».

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $z_1/z_2 = z_3$, τότε $z_1 = z_2 \cdot z_3$ καὶ ὄρισμα $z_1 =$ ὄρισμα $z_2 +$ ὄρισμα z_3 , ἄρα, ὄρισμα $z_3 =$ ὄρισμα $z_1 -$ ὄρισμα z_2 .

3. «Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄρισμα τοῦ μιγάδος : $z = (1+i)(\sqrt{3}+i)^3/(1-\sqrt{3}i)^3$ ».

Δύσις. $1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \sin(45^\circ + i\eta\mu 45^\circ)$, $\sqrt{3}+i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) =$
 $= 2(\sin 30^\circ + i\eta\mu 30^\circ)$, ἄρα κατὰ τὸν τύπον τοῦ de Moivre :

$$(\sqrt{3}+i)^3 = 8(\sin 90^\circ + i\eta\mu 90^\circ).$$

Ἐπίσης $1-\sqrt{3}i = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2(\sin(-60^\circ) + i\eta\mu(-60^\circ))$, ἄρα :

$$(1-\sqrt{3}i)^3 = 8[\sin(-180^\circ) + i\eta\mu(-180^\circ)].$$

Ἐξ ἄλλου τὸ ὄρισμα τοῦ ἀριθμητοῦ θὰ ἰσοῦται μὲ $45^\circ + 90^\circ$ τοῦ δὲ πηλίκου μὲ :

$$45^\circ + 90^\circ - (-180^\circ) = 315^\circ.$$

4. «Ἐὰν n φυσικὸς, δείξατε ὅτι $(\sin\theta - i\eta\mu\theta)^n = \sin(n\theta) - i\eta\mu(n\theta)$ ».

Ἀπόδειξις. $[\sin\theta - i\eta\mu\theta]^n = [\sin(-\theta) + i\eta\mu(-\theta)]^n = \sin(-n\theta) + i\eta\mu(-n\theta) =$
 $= \sin n\theta - i\eta\mu n\theta.$

5. «Νὰ εὐρεθῇ τὸ $\eta\mu 5\theta$ καὶ $\sin 5\theta$ συναρτήσῃ τῶν $\eta\mu\theta$ καὶ $\sin\theta$ ».

Δύσις. Ἐχομεν ὅτι $(\sin\theta + i\eta\mu\theta)^5 = \sin 5\theta + i\eta\mu 5\theta$ ἢ ἀναπτύσσοντες κατὰ τὸν τύπον τοῦ διωνύμου :

$$\sin^5\theta + 5\sin^4\theta(i\eta\mu\theta) - 10\sin^3\theta\eta\mu^2\theta - 10\sin^2\theta \cdot (i\eta\mu^3\theta) + 5\sin\theta\eta\mu^4\theta + i\eta\mu^5\theta = \sin 5\theta + i\eta\mu 5\theta.$$

Δι' ἐξισώσεις τῶν πραγματικῶν καὶ τῶν καθαρῶς φανταστικῶν μερῶν λαμβάνομεν:

$$\sin 5\theta = \sin^5 \theta - 10 \sin^3 \theta \eta^2 \theta + 5 \sin \theta \eta^4 \theta$$

$$\eta \mu 5\theta = 5 \sin^4 \theta \eta \mu \theta - 10 \sin^2 \theta \eta^3 \mu \theta + \eta^5 \mu \theta.$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὑπολογίζονται καὶ τὰ $\eta \mu(n\theta)$, $\sin(n\theta)$ ὅπου n φυσικὸς συναρ-
τήσῃ τῶν $\eta \mu \theta$, $\sin \theta$.

6. «Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^4 + 1 = 0$ ».

Λύσις. Ὁ x θὰ εἶναι μιγὰς ἔστω ὁ $\rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta)$ τέτοιος, ὥστε:

$$[\rho(\sin \theta + i \eta \mu \theta)]^4 = -1 \quad \eta \quad \rho^4(\sin 4\theta + i \eta \mu 4\theta) = 1 \cdot (\sin \pi + i \eta \mu \pi).$$

Ἐπομένως πρέπει: $\rho^4 = 1$, $\sin 4\theta = \sin \pi$, $\eta \mu 4\theta = \eta \mu \pi$, ἄρα $\rho = 1$ καὶ $4\theta = \pi + 2k\pi$ ἢ

$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ὅπου k τυχὼν ἀκέραιος. Διὰ $k=0, 1, 2, 3$ εὐρίσκομεν τέσσαρας διαφόρους
μιγάδας πληροῦντας τὴν $x^4 + 1 = 0$ οἵτινες εἶναι οἱ:

$$\sin \frac{\pi}{4} + i \eta \mu \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{3\pi}{4} + i \eta \mu \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sin \frac{5\pi}{4} + i \eta \mu \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{καὶ} \quad \sin \frac{7\pi}{4} + i \eta \mu \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Οὗτοι εἶναι αἱ τέσσαρες (μιγαδικαὶ) τέταρται ρίζαι τοῦ -1 .

Διὰ τὰς λοιπὰς ἀκεραίας τιμὰς τοῦ k ἐπανευρίσκομεν τὰς αὐτὰς ρίζας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

506) Γράψατε ὑπὸ τριγωνομετρικὴν (πολικὴν) μορφήν ἕκαστον τῶν κάτωθι μιγα-
δικῶν καὶ δώσατε τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ ὁρίσματος τοῦ:

i) $z = 1 + i\sqrt{3}$, ii) $z = i$, iii) $z = -2$, iv) $z = 2 - 2i$.

507) Νὰ γραφῇ ὑπὸ τριγωνομετρικὴν μορφήν ὁ μιγὰς:

$$z = \frac{(3\sqrt{3} - 1) + (3 + \sqrt{3})i}{2i + 6}.$$

508) Νὰ εὐρεθῇ τὸ ὄρισμα ἑκάστου τῶν κάτωθι μιγάδων:

$$\left\{ \frac{-3i(2+2i)(-\sqrt{3}-i)}{3-3i} \right\}^4, \quad \frac{(i-1)^6(\sqrt{3}-i)^4}{(2+2i)^4}.$$

509) Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ $(1-i)^{12}$ ὑπὸ τὴν μορφήν $\alpha + \beta i$ τῇ βοηθείᾳ τοῦ τύπου τοῦ
de Moivre.

510) Ἐὰν $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ τότε ἡ ἰσότης $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ ἰσχύει τότε καὶ μόνον τότε,
ὅταν οἱ z_1 καὶ z_2 ἔχουν κοινὸν ὄρισμα.

511) Δοθέντων τῶν $\eta \mu \theta$ καὶ $\sin \theta$ νὰ εὐρεθοῦν τὰ $\eta \mu 7\theta$ καὶ $\sin 7\theta$ τῇ βοηθείᾳ τοῦ
τύπου τοῦ de Moivre καὶ τοῦ διωνυμικοῦ τύπου.

512) Ἀποδείξατε τὸν τύπον: $1 + z + z^2 + \dots + z^n = (1 - z^{n+1}) / (1 - z)$ καὶ ἐξ αὐτοῦ
συνάγεται τοὺς τύπους:

$$1 + \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin(n\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\eta \mu \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right\}}{2 \eta \mu(\theta/2)}$$

$$\eta \mu \theta + \eta \mu 2\theta + \dots + \eta \mu(n\theta) = \frac{1}{2} \sigma \phi \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta \right\}}{2 \eta \mu(\theta/2)}.$$

70. Αἱ ρίζαι τῶν μιγάδων. Θεώρημα. «Ἐὰν n εἶναι ἀκέραιος θε-
τικὸς τότε πᾶς μιγὰς $\neq 0$ ἔχει ἀκριβῶς n νυσοστάς ρίζας, διαφόρους ἀλλήλων».

Ἀπόδειξις. Ἐστω ὁ τυχὼν μιγάς $z = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$ ὅπου $\rho > 0$ θὰ ζητήσωμεν μιγάδα $v = R(\sin\varphi + i\eta\mu\varphi)$ ὅστις ὑψούμενος εἰς τὴν νυοστήν νὰ μᾶς δίδῃ τὸν z , ἦτοι :

$$(1) \quad v^{\nu} = \{R(\sin\varphi + i\eta\mu\varphi)\}^{\nu} = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta).$$

Κατόπιν τὸν τύπον τοῦ de Moivre ἡ (1) γράφεται :

$$(2) \quad R^{\nu}(\sin\nu\varphi + i\eta\mu\nu\varphi) = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$$

καὶ συνεπῶς πρέπει καὶ ἀρκεῖ $R^{\nu} = \rho$ (δηλ. νὰ ἔχωμεν ἴσα μέτρα) καὶ $\nu\varphi = \theta + 2k\pi$ (ὁρίσματα διαφέροντα κατὰ $2k\pi$) διὰ νὰ εἶναι ἴσοι οἱ μιγάδες τῆς ἐξισώσεως (2).

Ὡστε πρέπει $R = \sqrt[\nu]{\rho}$ (πρωτεύουσα ρίζα) καὶ $\varphi = \frac{\theta}{\nu} + \frac{2k\pi}{\nu}$. Πᾶς ἀριθμὸς

λοιπὸν μὲ μέτρον $\sqrt[\nu]{\rho}$ καὶ ὄρισμα $\varphi = \frac{\theta}{\nu} + \frac{2k\pi}{\nu}$ εἶναι μία νυοστή ρίζα τοῦ δοθέντος z . Δίδοντες εἰς τὸ k , ν τιμὰς : 0, 1, 2, 3, ..., $(\nu-1)$ εὐρίσκομεν ν διαφορῶς νυοστάς ρίζας τοῦ z ἐχούσας τὸ αὐτὸ μέτρον $\sqrt[\nu]{\rho}$ καὶ ὁρίσματα ἀντιστοίχως :

$$\frac{\theta}{\nu}, \frac{\theta}{\nu} + \frac{2\pi}{\nu}, \frac{\theta}{\nu} + \frac{4\pi}{\nu}, \dots, \frac{\theta}{\nu} + \frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}.$$

Πᾶσαι αἱ λοιπαὶ τιμαὶ τοῦ k δίδουν ὁρίσματα διαφέροντα τῶν ἀνωτέρω κατὰ ἀκέραιον πολλαπλάσιον περιφερείας καὶ συνεπῶς δὲν παρέχουν νέας νυοστάς ρίζας.

Ὡστε ὁ $z = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta)$ ἔχει ν διακεκριμένας νυοστάς ρίζας παρεχόμενας ἀπὸ τὸν τύπον :

$$(3) \quad v = \sqrt[\nu]{\rho} \left[\sin\left(\frac{\theta}{\nu} + \lambda \frac{2\pi}{\nu}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\theta}{\nu} + \lambda \frac{2\pi}{\nu}\right) \right]$$

ὅταν τὸ λ ἀντικατασταθῇ διαδοχικῶς μὲ 0, 1, 2, ..., $(\nu-1)$.

Πρὸς ἐπαλήθευσιν, ἂν ὑψώσωμεν ἀμφοτέρω τὰ μέλη τῆς (3) εἰς τὴν ν καὶ ἐφαρμόσωμεν τὸν τύπον τοῦ de Moivre εὐρίσκομεν $v^{\nu} = \rho(\sin\theta + i\eta\mu\theta) = z$.

Ὡστε τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{z}$ ὅταν z μιγάς, ἔχει ν διαφορετικὰς τιμὰς (τὰς (3)) εἶναι δηλ. ν -σήμαντος συνάρτησις τοῦ z καὶ συνεπῶς δὲν δύναται νὰ χρησιμοποιεῖται εἰς τοὺς Ἀλγεβρικοὺς τύπους εἰμὴ μόνον ὅταν διὰ τινος τρόπου καθορισθῇ ποίαν ἐκ τῶν ν ριζῶν (3) παριστάνει.

Παρατήρησις. Τὸ σύμβολον $z^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὅπου z μιγάς καὶ μ καὶ ν φυσικοὶ ἀριθμοί, παριστάνει μίαν τῶν νυοστῶν ριζῶν τοῦ z^{μ} , ἐπομένως ἔχει καὶ αὐτὸ ν σημασίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ. 1η. «Νὰ εὐρεθῶν αἱ πέμπται ρίζαι τοῦ $-\sqrt{3} + i$ ».

Λύσις. Θέτομεν πρῶτον τὸν $-\sqrt{3} + i$ ὑπὸ τριγωνομ. μορφὴν :

$$z = -\sqrt{3} + i = 2\left(\sin\frac{5\pi}{6} + i\eta\mu\frac{5\pi}{6}\right)$$

καὶ ἐφαρμόζομεν τὸν τύπον (3) διὰ $v=5$, $q=2$, $\theta=\frac{5\pi}{6}$:

$$v=\sqrt[5]{2}\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{2\pi}{5}\right)+i\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\lambda\frac{2\pi}{5}\right)\right\}.$$

Διὰ $\lambda=0, 1, 2, 3, 4$, ἔχομεν τὰς 5 ζητουμένας ρίζας:

$$v_1=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\eta\mu\frac{\pi}{6}\right)=0,9949+i0,5744\cdot i$$

$$v_2=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{30}+i\eta\mu\frac{17\pi}{30}\right)=-9,2388+i1,1236\cdot i$$

$$v_3=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{30}+i\eta\mu\frac{29\pi}{30}\right)=-1,424+i0,1201\cdot i$$

$$v_4=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{30}+i\eta\mu\frac{41\pi}{30}\right)=-0,4672-i1,0434\cdot i$$

$$v_5=\sqrt[5]{2}\left(\cos\frac{53\pi}{30}+i\eta\mu\frac{53\pi}{30}\right)=0,8536-i0,7688\cdot i.$$

2α. «Νὰ εὕρεθοῦν αἱ ἔκται ρίζαι τοῦ 64».

Λύσις. Ἐχομεν $z=64=64(\cos 0^\circ+i\eta\mu 0^\circ)$, ἄρα ἡ τυχοῦσα ἑκτὴ ρίζα θὰ εἶναι κατὰ τὸν τύπον (3), τῆς μορφῆς:

$$v=\sqrt[6]{64}\left\{\cos\left(\frac{0^\circ}{6}+\lambda\frac{360^\circ}{6}\right)+i\eta\mu\left(\frac{0^\circ}{6}+\lambda\frac{360^\circ}{6}\right)\right\}.$$

Διὰ $\lambda=0, 1, 2, 3, 4, 5$, ἔχομεν τὰς 6 ρίζας τοῦ 64:

$$v_1=\sqrt[6]{64}(\cos 0^\circ+i\eta\mu 0^\circ)=2 \qquad v_4=\sqrt[6]{64}(\cos 180^\circ+i\eta\mu 180^\circ)=-2$$

$$v_2=\sqrt[6]{64}(\cos 60^\circ+i\eta\mu 60^\circ)=1+i\sqrt{3} \qquad v_5=\sqrt[6]{64}(\cos 240^\circ+i\eta\mu 240^\circ)=-1-i\sqrt{3}$$

$$v_3=\sqrt[6]{64}(\cos 120^\circ+i\eta\mu 120^\circ)=-1+i\sqrt{3} \qquad v_6=\sqrt[6]{64}(\cos 300^\circ+i\eta\mu 300^\circ)=1-i\sqrt{3}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

513) Δείξατε ὅτι αἱ δύο τετραγ. ρίζαι τοῦ i εἶναι: $\pm(1+i)/\sqrt{2}$.

514) Δείξατε ὅτι αἱ τρεῖς κυβικαὶ ρίζαι τοῦ 1 εἶναι: 1, $(-1\pm i\sqrt{3})/2$.

515) Νὰ εὕρεθοῦν: α) αἱ κυβικαὶ ρίζαι τοῦ $\frac{27\sqrt{2}}{2}(1+i)$, β) αἱ τέταρται ρίζαι τοῦ $-8-8\sqrt{3}i$, γ) αἱ πέμπται ρίζαι τοῦ 1.

516) Νὰ εὕρεθοῦν πᾶσαι αἱ λύσεις ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων $x^4=16$, $x^5+243=0$, $x^4+81=0$.

517) Ἐάν ω μία οἰαδήποτε νουστή ρίζα τοῦ 1, διάφορος τοῦ 1, δείξατε ὅτι:

$$1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots+\omega^{n-1}=0.$$

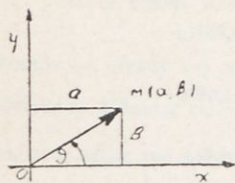
518) Ἐάν $\omega=\cos\frac{360^\circ}{n}+i\eta\mu\frac{360^\circ}{n}$ νὰ δεიχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 1, ω , ω^2 , ω^3 , ..., ω^{n-1} εἰ-

ναι αἱ νουσταὶ ρίζαι τῆς μονάδος.

519) Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ συζυγεῖς τῶν νουστῶν ριζῶν τοῦ z εἶναι νουσταὶ ρίζαι τοῦ συζυγοῦς τοῦ z .

71. Γεωμετρική παράσταση τῶν μιγάνδων. Γνωρίζομεν ὅτι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ δύνανται νὰ παρασταθοῦν γεωμετρικῶς ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐνὸς ἀπεράντου ἄξονος (βλ. [1], § 24). Εἰς κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἓνα (παραστατικὸν) σημεῖον τοῦ ἄξονος καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος ἀντιστοιχεῖ ἓνας πραγμ.)κὸς ἀριθμὸς. Κατὰ φυσικὴν ἐπέκτασιν, οἱ μιγάδες ἀριθμοί, ὡς ζεύγη πραγματικῶν, θὰ δύνανται νὰ παρασταθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα ἐνὸς ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἂν θεωρήσωμεν ἓν ἀπέραντον ἐπίπεδον Π καὶ ἐπ' αὐτοῦ δύο καθέτους ἄξονας ox καὶ oy (βλ. [1], § 101) τότε ὁ τυχὼν μιγάς $z = \alpha + \beta i$ ὁρίζομενος ἀπὸ τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς (α, β) θ' ἀντιστοιχεῖ πρὸς τὸ σημεῖον M τοῦ ἐπιπέδου Π , τὸ ἔχον (καρτεσιανὰς) συντεταγμένας (α, β) . Ἀντιστρόφως δέ, πᾶν σημεῖον $M(\alpha, \beta)$ τοῦ ἐπιπέδου ἔχον συντεταγμένας (α, β) θὰ ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἓνα ὁρισμένον μιγάδα, $\alpha + \beta i$.



(Σχ. 4)

Ὡστε, πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, μὲ τετμημένην α καὶ τεταγμένην β , παριστᾷ ἓνα μιγάδα, τὸν $\alpha + \beta i$ (δηλ. εἶναι ἡ εἰκὼν ἢ τὸ παραστατικὸν σημεῖον τοῦ μιγάδος) καὶ ἀντιστρόφως, πᾶς μιγάς $\alpha + \beta i$ ἔχει ἓν καὶ μόνον παραστατικὸν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Ὡστε ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν μιγάνδων καὶ τῶν σημείων ἐνὸς ἐπιπέδου. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τούτου, ὁ ἄξων τῶν x λέγεται *πραγματικὸς ἄξων* (ἢ ἄξων τῶν πραγματικῶν), ὁ δὲ oy *φανταστικὸς ἄξων* (ἢ ἄξων τῶν φανταστικῶν), ὁλόκληρον δὲ τὸ ἐπίπεδον Π , ἐφ' οὗ εἶναι ἀπεικονισμένοι πάντες οἱ μιγάδες, λέγεται *μιγαδικὸν ἐπίπεδον* ἢ *διάγραμμα τοῦ Argand*.

Ἀλλὰ καὶ τὸ διάνυσμα $\overline{OM}$ τὸ ἔχον συντεταγμένας (α, β) παριστᾷ ἐπίσης τὸν μιγάδα $\alpha + \beta i$. Καὶ μάλιστα τὸ μὲν μέτρον (μῆκος) OM τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ παριστᾷ τὸ μέτρον τοῦ μιγάδος, ἡ δὲ γωνία θ τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ μετὰ τοῦ ἄξονος ox παριστᾷ τὸ ὄρισμα τοῦ μιγάδος $\alpha + \beta i$. Πράγματι, εἶναι $OM = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ καὶ $\sin \theta = \frac{\beta}{OM} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ καὶ $\eta \mu \theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.

Ὡστε εἰς τὴν γεωμετρικὴν εἰκόνα τοῦ μιγάδος $\alpha + \beta i$ ὡς διανύσματος εἰκονίζεται καὶ τὸ μέτρον καὶ τὸ ὄρισμα αὐτοῦ.

Ἐὰν μιγάδες $z_1, z_2, z_3, \dots$ παρίστανται ὑπὸ διανυσμάτων $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}, \overline{OM_3}, \dots$ τότε τὸ ἄθροισμα αὐτῶν $z_1 + z_2 + z_3 + \dots$ παρίσταται ὑπὸ τοῦ (γεωμετρικοῦ) ἄθροίσματος τῶν διανυσμάτων: $\overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3} + \dots$. Διότι, ὡς εἶναι γνωστὸν, ἡ τετμημένη τοῦ γεωμ. ἄθροίσματος διανυσμάτων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετμημένων τῶν προσθέτων καὶ ἡ τεταγμένη ὁμοίως.

Ὁ πολ.)σμός μιγάδος ἐπὶ τὴν φανταστικὴν μονάδα i σημαίνει γεωμετρικῶς στροφὴν τοῦ διανύσματος τοῦ παριστῶντος τὸν μιγάδα, περὶ τὴν ἀρχὴν O κατὰ $+\frac{\pi}{2}$. Διότι τὸ γινόμενον iz ἔχει ὄρισμα τὸ ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων τοῦ i καὶ τοῦ z , δηλ. ἔχει ὄρισμα $\frac{\pi}{2} + \theta$ καὶ μέτρον, τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τοῦ z .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

520) Ἐπὶ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου σημειώσατε ἕκαστον τῶν ἐπομένων μιγαδικῶν ἀριθμῶν, μετὰ τοῦ συζυγοῦς καὶ τοῦ ἀντιθέτου τοῦ: $3+6i$, $4+5i$, $2-7i$, $-3+6i$, $1-i$.

521) Παραστήσατε μὲ διάνυσμα ἐπὶ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου ἕκαστον τῶν ἀριθμῶν $3+8i$, $2-5i$, $-6i$ καθὼς καὶ τὸ ἄθροισμα τούτων.

522) Παραστήσατε γεωμετρικῶς τὰς περιοχὰς τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου αἱ ὁποῖα καθορίζονται ἀπὸ τὰς ἀνισότηας:

$$i) |z| < 3, \quad ii) |z-4| \leq 1, \quad iii) 0 \leq \text{ῥοῖσμα τοῦ } z \leq \frac{\pi}{4}.$$

523) Ἐάν τὸ σημεῖον M_1 παριστᾷ τὸν z_1 καὶ τὸ M_2 παριστᾷ τὸν z_2 δείξατε ὅτι τότε τὸ $\overline{M_1 M_2}$ παριστᾷ τὸν $z_2 - z_1$ καὶ συνεπῶς $|z_2 - z_1| = |\overline{M_1 M_2}|$.

524) Ἐάν $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ πραγματικὸι $\neq 0$ δείξατε ὅτι διὰ τοὺς μιγαδικοὺς $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$:

$$i) \text{ Ἰσχύει ἡ ἰσότης } |z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2| \text{ ὅταν } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} < 0$$

$$ii) \text{ } > > > |z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2|| \text{ } > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} > 0$$

$$iii) \text{ } > > > |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \text{ } > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} > 0$$

$$iv) \text{ } > > > |z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2|| \text{ } > \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} < 0.$$

525) Ποῦ κεῖνται τὰ σημεῖα z τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι:

$$i) |z| = 1; \quad ii) \text{ πραγμ. μέρος τοῦ } z = 1/2;$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΦ' ΟΛΗΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

526) Ἄν n φυσικὸς, οἱ $2^n + 3^n$ καὶ $2^{n+1} + 3^{n+1}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

527) Ἐάν ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\frac{y-z}{1+yz} + \frac{z-x}{1+xz} + \frac{x-y}{1+xy} = 0$ νὰ δειχθῇ ὅτι τότε,

δύο ἐκ τῶν ἀριθμῶν x, y, z εἶναι μεταξὺ τῶν ἴσοι.

$$528) \text{ Ν' ἀποδειχθῇ ἡ ἀνισότης } \left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) > \frac{1}{(2n+3)^2}.$$

529) Δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

530) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^3 + 17x > 7x^2 + 11$.

531) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$a) \{x-y=2, \quad x^2-2y\omega-\omega^2=18, \quad y^2-2x\omega-\omega^2=-2\}$$

$$b) \{(x+y+z)(x+y-z)=24+\frac{3}{4}, \quad (x-y+z)(y+z-x)=\frac{9}{4}, \quad x^2+y^2=2z^2\}.$$

* 532) Δύο κρουνοὶ πληροῦν δεξαμενὴν εἰς 18 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ χρόνος τὸν ὁποῖον χρειάζεται ἕκαστος τῶν δύο κρουνῶν διὰ νὰ πληρώσῃ μόνος του τὴν δεξαμενὴν, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ὁ πρῶτος θὰ ἐχρειάζετο 27 ὥρας περισσότερον τοῦ δευτέρου.

* 533) Ἄν n φυσικὸς ἀριθμὸς, νὰ δειχθῇ ἡ ἀνισότης $\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ καὶ τῇ βοήθειᾳ ταύτης νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα S_n τῶν n πρώτων ὀρων τῆς σειρᾶς

$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$ δὲν ὑπερβαίνει τὴν μονάδα ὅσονδήποτε μέγας καὶ ἂν εἶναι ὁ n . Ὑπάρχει ὁ S_n ὅταν $n \rightarrow \infty$;

• 534) Ὑπάρχουν ἀκέραιαι τιμαὶ τῶν x, y διὰ τὰς ὁποίας νὰ συναληθεύουν αἱ σχέσεις: $\{5x-8y=12, xy-4y<4\}$;

535) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις: α) $x^2-3x-3=4\sqrt{x}$, β) $\sqrt[3]{12x-12}-\sqrt[3]{2x-3}=\sqrt[3]{x}$.

536) Δίδεται ἡ ἀκολουθία $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, a_{n+1}, \dots$ τῆς ὁποίας δύο τυχόντες διαδοχικοὶ ὅροι συνδέονται διὰ τῆς ἀναδρομικῆς σχέσεως $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right)$ ($n=1, 2, \dots$) καὶ διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $a_1 > 1$. Νὰ δεიχθῇ ὅτι $a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots > 1$ καὶ ὅτι $\frac{a_n-1}{a_n+1} = \left(\frac{a_1-1}{a_1+1} \right)^{2^{n-1}}$.

537) Δύνανται οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ ν' ἀποτελοῦν ὅρους οἰασδήποτε τάξεως, (ὄχι ἀναγκαίως, διαδοχικοὺς) γεωμετρικῆς προόδου;

538) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα:

$$1) \{2^x = 3y, 3^x = 2y\}, \quad 2) \left\{ x^{x+y} = y^{\frac{8}{3}}, y^{x+y} = x^{\frac{8}{3}} \right\}.$$

539) Νὰ δεიχθῇ ὅτι $\sqrt[3]{1+\sqrt{\frac{28}{27}}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{\frac{28}{27}}} = 1$ ὅπου λαμβάνονται μόνον αἱ πραγματικαὶ κυβικαὶ ρίζαι. Ὁμοίως, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}}.$$

540) Νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(4x+2)^4 - (3x-1)^4 = (2x+4)^4 - (x-3)^4$.

541) Τὸ ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρούμενον διὰ x^2+x+1 δίδει ὑπόλοιπον $1-x$, διαιρούμενον δὲ διὰ x^2-x+1 δίδει ὑπόλοιπον $3x+5$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦ x^4+x^2+1 .

542) Ἐάν β πρῶτος πρὸς τὸν α , οἱ ὅροι δὲ τῆς ἀπεράντου προόδου $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots$ διαιρεθοῦν διαδοχικῶς διὰ τοῦ β , τὰ προκύπτοντα ὑπόλοιπα θὰ ἐπαναλαμβάνωνται περιοδικῶς. (Νὰ δειχθῇ πρῶτον ὅτι θὰ ὑπάρχῃ ἐκθέτης $k \neq 0$ τοιοῦτος ὥστε τὸ α^k νὰ δίδῃ ὑπόλοιπον 1).

543) Ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς N ἀναλελυμένος εἰς γινόμενον πρῶτων παραγόντων εἶναι τῆς μορφῆς $N = p_1^x p_2^y p_3^z$. Ἐάν ὁ N διαιρεθῇ διὰ τοῦ p_1 τὸ προκύπτον πηλίκον ἔχει 252 διαιρέτας. Ἐάν ὁ N διαιρεθῇ διὰ p_2 , οἱ διαιρέται τοῦ N ὀλιγοστεύουν κατὰ 45, ἐνῶ ἐάν διαιρεθῇ διὰ p_3 οἱ διαιρέται γίνονται κατὰ 35 ὀλιγώτεροι. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ x, y, z , (βλ. § 52, ἐφαρμογή).

544) Ἐάν $\alpha = \beta^{\frac{1}{\lambda}} - \beta$, ὅπου λ φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ $\beta > 1$, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία $\sqrt[\lambda]{\alpha}, \sqrt[\lambda]{\alpha + \sqrt[\lambda]{\alpha}}, \sqrt[\lambda]{\alpha + \sqrt[\lambda]{\alpha + \sqrt[\lambda]{\alpha}}}, \dots$ ἔχει ἄνω φράγμα τὸ β .

545) Ἐάν β πρῶτος, νὰ εὑρεθῇ, πόσα διαφορετικὰ ὑπόλοιπα δίδουν οἱ ἀριθμοὶ $1^3, 2^3, 3^3, \dots, (\beta-1)^3$ διαιρούμενοι διὰ β ;

546) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\delta}$ ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ θετικοί, τότε $|\alpha - \delta| \geq 3|\beta - \gamma|$.

547) 'Εάν τὸ $x^2+αx+β$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $x-2$ τότε $|α|+|β| \geq 2$. Οἱ $α, β$ ὑποτίθενται πραγματικοί.

548) 'Εάν μεταξύ τῶν (πραγματικῶν) συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως $αx^2+βx^2+γx+δ=0$ πληροῦνται αἱ σχέσεις: $αδ=βγ, αγ>0$ τότε ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν πραγματικὴν καὶ δύο καθαρῶς φανταστικὰς ρίζας· καὶ ἀντιστρόφως.

549) 'Εάν ἡ ἐξίσωσις $αx^2-βx+γ=0$ ἔχει ρίζας πραγματικὰς, δείξατε ὅτι ἡ ἀπολύτως μεγαλύτερα ρίζα ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $\frac{β}{α}$ ἐνῶ ἡ ἀπολύτως μικρότερη ἔχει τὸ σημεῖον τοῦ $\frac{β}{γ}$.

550) Νὰ εὑρεθοῦν ν ἀκέραιοι θετικοὶ ἐν ἀριθμητικῇ προόδῳ ἔχοντες ἄθροισμα ν². Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν 2 λύσεις ἂν ν περιττὸς (ν ≥ 3).

551) Νὰ λυθοῦν αἱ ἐξισώσεις:

$$i) \log_x(2x-3) - \frac{1}{\log_{(x+6)}x} + \frac{1}{\log_{(x+2)}x} = 3\log_5\sqrt{2} \cdot \log_5 5,$$

$$ii) \log_3\sqrt{x+2} = \log_{27}(x-2) + \frac{1}{3}, \quad iii) \frac{\log_4 x}{\log_4 7} \cdot \log_{\frac{x}{343}} = 40.$$

552) Νὰ προσδιορισθῇ τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν κλασμάτων τῶν ἐχόντων ἀριθμητὴν 1 καὶ παρονομαστὴν φυσικὸν ἀριθμὸν, καὶ μὴ ὑπερβαίνοντων δεδομένον κλάσμα $\frac{α}{β} < 1$

ὅπου α καὶ β δοθέντες φυσικοὶ ἀριθμοί. Ἐφαρμογή: τὸ $\frac{7}{27}$ ν' ἀναλυθῇ εἰς ἄθροισμα κλασμάτων ἐχόντων ἀριθμητὰς 1. Ὁμοίως τὸ $\frac{53}{112}$.

553) Νὰ λυθῇ ἡ ἀνισότης $x^4+x^3-7x^2+αx+β>0$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι δύο ρίζαι τοῦ πρώτου μέλους τῆς εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 1 καὶ -3.

554) Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μ, τὸ σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{xy^2+x^2y}{x^3+y^3} = \frac{\mu^2-4}{\mu-4}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1-\mu \end{array} \right\}$$

ἔχει ὡς λύσεις, ἀρνητικὰς τιμὰς τῶν x καὶ y;

555) Ἄν οἱ συντελεσταὶ καὶ αἱ λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{αx^2+2βxy+γy^2=1, \quad δx^2+2εxy+ζy^2=1\}$$

εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, τότε ὁ ἀριθμὸς $(β-ε)^2-(α-δ)(γ-ζ)$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητοῦ.

556) Εἰς ἓνα παιχνίδιον μεταξύ ν παικτῶν συμφωνεῖται ὅπως ὁ χάνων, διπλασιάζει τὰ χρήματα τῶν ἄλλων. Ἐπαιξαν καὶ οἱ ν παῖκται κατὰ σειρὰν καὶ ἔχασαν ὅλοι. Εἰς τὸ τέλος εὑρέθη ὅτι εἶχον ὅλοι, α δοχ. ἕκαστος. Νὰ εὑρεθῇ τί ποσὸν εἶχεν ἕκαστος κατὰ τὴν ἑναρξιν τοῦ παιχνιδίου.

557) Ἐάν ὁ ἀριθμὸς $2^{n+1}-1$ εἶναι πρῶτος, ὁ $2^n(2^{n+1}-1)$ εἶναι τέλειος ἀριθμὸς.

558) Ἐάν α καὶ β σχετικῶς πρῶτοι ἀκέραιοι, τότε τὸ κλάσμα $\frac{α^2}{β^2} - \frac{α}{β}$ εἶναι

ἀνάγωγον (α $\neq$ β).

559) Ἄν ἡ ἐξίσωσις $x^n + A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$ δέχεται πραγματικὴν τινα ρίζαν ρ, δείξατε ὅτι τότε θὰ εἶναι $|ρ| < 1 + |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$.

560) Νὰ δειχθῇ ὁ τρόπος ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως $x^4+αx^3+βx^2+γx+δ=0$ ὅταν

ὀφίσταται ἡ σχέση $δ = \left(\frac{γ}{α}\right)^2$.

561) Ἐάν ὁ μὲν ὁρος ἀρμονικῆς προόδου ἴσῃται μὲ ν καὶ ὁ νῶς ὁρος αὐτῆς ἴσῃται μὲ μ, νὰ εὑρεθῇ συναρτήσῃ τῶν μ καὶ ν ὁ ὁρος τάξεως μ+ν.

Σ. Γ. Κανέλλου: «Μαθήματα Ἀλγέβρας» Β' τόμος

562) Νά εὐρεθῇ ἀκέραιος οὐτινος πάντες οἱ διαιρέται ἔχουν γινόμενον $3^{30} \cdot 5^{40}$.

563) Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι $\sqrt{x_1^2 + \alpha_1^2} + \sqrt{x_2^2 + \alpha_2^2} \geq \sqrt{(x_1 + x_2)^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2}$ νά εὐρεθῇ τὸ ἐλάχιστον τῆς παραστάσεως $y = \sqrt{x_1^2 + \alpha_1^2} + \sqrt{x_2^2 + \alpha_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2 + \alpha_n^2}$ ὅπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ σταθεροὶ θετικοὶ ἀριθμοί, ἐνῶ $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \lambda$ (σταθερόν) καὶ $\lambda > 0$.

564) Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ θετικοὶ ἀριθμοί, νά δειχθῇ ὅτι :

$$\sqrt{\alpha_1 \alpha_2} + \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} + \dots < \frac{n-1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$$

ὅπου τὸ πρῶτον μέλος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγ. ριζῶν ὄλων τῶν γινομένων ἀνά δύο τῶν ἀριθμῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Ἀκολούθως νά δειχθῇ ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν ὄλων τῶν γινομένων ἀνά δύο, εἶναι μικρότερος τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ τῶν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. (Οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ὑποτίθενται ὅχι ὅλοι ἴσοι).

565) Ἐάν $x > y > z$, $\omega + z > 0$ δείξατε ὅτι τότε :

$$(y-z)\sqrt{x+\omega} + (z-x)\sqrt{y+\omega} + (x-y)\sqrt{z+\omega} < 0,$$

(Ἵποδ. θέτομεν $x+\omega=A^2$, $y+\omega=B^2$, $z+\omega=C^2$).

566) Ἐάν y_1, z_1, y_2, z_2 ἀκέραιοι, νά δειχθῇ ὅτι κάθε πρῶτος ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν $\alpha = y_1^2 + y_1 z_1 + z_1^2$, $\beta = y_2^2 + y_2 z_2 + z_2^2$, διαιρεῖ μίαν τοῦλάχιστον τῶν διαφορῶν $\gamma = y_1 z_2 - y_2 z_1$ ἢ $\delta = y_1 y_2 - z_1 z_2$.

567) Ἐάν α δοθεῖς, νά λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\left\{ (x^2 + y^2 + \alpha^2)^{1/3} + (x - y + \alpha)^{2/3} = 2(4xy)^{1/3}, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha} \right\}.$$

568) Ν' ἀπαλειφθοῦν τὰ α καὶ β μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων :

$$x = \alpha(1 + \beta^3), \quad y = \beta(1 + \alpha^3), \quad \omega = (1 - \alpha\beta)(\alpha + \beta).$$

569) Ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος $AB = \alpha$ κινεῖται σημεῖον M ἀναχωροῦν ἀπὸ σημεῖον M_1 τοιοῦτον, ὥστε $AM_1 = \frac{\alpha}{2}(1 - \sqrt{0,8})$ καὶ κινούμενον πρὸς τὸ B μὲ σταθεράν ταχύτητα. Ἡ κίνησίς του διαρκεῖ ἐφ' ὅσον πληροῦται ἡ σχέση $(MA)^2 + (MB)^2 \leq 0,9\alpha^2$. Ζητεῖται πόσον διάστημα διήνυσεν.

570) Νά λυθῇ : $\log|21^{\log y + 1} - 42| + \log 4 = \log 21 - \log y + \log 76$.

571) Νά δειχθῇ διὰ τῆς μεθόδου τῆς τελείας ἐπαγωγῆς ὅτι :

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) \dots (1+x^{2^{n-1}}) = \frac{1-x^{2^n}+1}{1-x}.$$

572) Ἀκέραιον πολὺνυμον $\phi(x)$ διαιρούμενον διὰ $x+1$ δίδει ὑπόλοιπον 3 καὶ διὰ $(x-1)^3$ δίδει ὑπόλοιπον $3x+5$. Τί ὑπόλοιπον δίδει διαιρούμενον διὰ $(x+1)(x-1)^3$;

573) Νά εὐρεθοῦν οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ A , οἵτινες ἔχουν ὡς πρώτους παράγοντας μόνον τὸ 2 καὶ 3, ἂν τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ A^3 εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλῆθους τῶν διαιρετῶν τοῦ A .

574) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ ὕψη τριγώνου εὐρίσκονται ἐν αὐξοῦσῃ γεωμ. προόδῳ, προσδιορίσατε τὸ διάστημα εἰς τὸ ὁποῖον κεῖται ὁ λόγος ω τῆς προόδου ταύτης.

575) Ἀφοῦ σχηματισθοῦν, 1ον ἀριθμητικὴ πρόοδος καὶ 2ον ἀρμονικὴ πρόοδος ἐκ $n+2$ ὄρων ἐκάστη καὶ ἔχουσαι πρῶτον ὄρον A καὶ τελευταῖον B , νά δειχθῇ ὅτι ὁ ὄρος τάξεως λ τῆς πρώτης καὶ ὁ ὄρος τάξεως $n-\lambda+3$ τῆς δευτέρας, ἔχουν γινόμενον σταθερόν, ὅταν τὸ λ μεταβάλλεται ἀπὸ 1 ἕως $n+2$.

576) Ἐάν α καὶ β ἀκέραιοι > 1 καὶ σχετικῶς πρῶτοι, δείξατε ὅτι :

$$\left[\frac{\alpha}{\beta} \right] + \left[\frac{2\alpha}{\beta} \right] + \dots + \left[\frac{(\beta-1)\alpha}{\beta} \right] = \left[\frac{\beta}{\alpha} \right] + \left[\frac{2\beta}{\alpha} \right] + \dots + \left[\frac{(\alpha-1)\beta}{\alpha} \right]$$

δπου διὰ τοῦ συμβόλου $[x]$ παριστῶμεν τὸν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀκεραίων τῶν μὴ ὑπερβαίνοντων τὸν x .

577) Νὰ δειχθῇ ἡ σχέσις $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n} \right) \geq n^2$, δπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ὁμόσημοι, τυχόντες ἀριθμοί.

578) Ποῖον τὸ πηλίκον τοῦ $\frac{(x-1)^{2m}}{4^m} + \frac{(x+1)^n}{2^n} - 1$ διὰ $x^2 - 1$;

579) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα:

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha x + \beta y + \gamma z &= \lambda \frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}, & x + y + z &= \lambda, & xyz &= \frac{\lambda^3}{27} \end{aligned} \right\}.$$

580) Διὰ ποίας ἀκεραίας τιμᾶς τοῦ x καθίσταται τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου, τὸ τριώνυμον $x^2 - 14x - 256$;

581) Νὰ λυθῇ τὸ σύστημα: $\{(x+\lambda)^2(y-z) = \alpha^2, (y+\lambda)^2(z-x) = \beta^2, (z+\lambda)^2(x-y) = \gamma^2\}$.

582) Ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ μ, ν φυσικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\mu > \nu$, δείξατε ὅτι:

$$\frac{\log(1+\alpha^\mu)}{\mu} < \frac{\log(1+\alpha^\nu)}{\nu}.$$

583) Αἱ τρεῖς πλευραὶ τριγώνου ἀποτελοῦν ἀριθμ. πρόοδον μὲ λόγον $\lambda > 0$ ἐνῶ τὸ πηλίκον τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ ὀρθογώνιον τὸ ἔχον διαστάσεις τὰς δύο μικροτέρας πλευρὰς τοῦ τριγώνου, ἰσοῦται μὲ S (> 0). α') Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου. β') Διὰ ποίας τιμᾶς τοῦ S τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν ἢ δύο λύσεις;

584) Ἐὰν $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ καὶ $\gamma < \beta$, τὸ δὲ τριώνυμον $2\alpha x^2 + \beta x + \gamma - \alpha$ δὲν λαμβάνει ἀρνητικὰς τιμὰς διὰ $-1 \leq x \leq 1$ τότε θὰ ἰσχύη $7 \leq \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\beta - \gamma}$.

585) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ κυβικαὶ ρίζαι τῶν ἐπομένων παραστάσεων, εἶναι τῆς μορφῆς $A \pm \sqrt{B}$ ὅπου A, B ρητοὶ καὶ νὰ εὑρεθοῦν αὗται:

$$10 + 6\sqrt{3}, \quad 38 + 17\sqrt{5}, \quad 99 - 70\sqrt{2}.$$

586) Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ δύο ἀπέραντοι ἀκολουθίαι: α') $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2, \dots$ καὶ β') $12 \cdot 1 + 5, 12 \cdot 2 + 5, \dots, 12 \cdot n + 5, \dots$ οὐδένα κοινόν ὄρον ἔχουν.

587) Νὰ ὁρισθοῦν τὰ A καὶ B ἵνα τὸ πολυώνυμον $Ax^{n+1} + Bx^n + 1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ $(x-1)^2$.

588) Ἐὰν $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ εἶναι θετικοὶ ἀριθμοὶ ἔχοντες ἄθροισμα μικρότερον τοῦ 1, δείξατε ὅτι:

$$(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_n) < \frac{1}{1 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)}.$$

589) Θεωροῦντες τὴν μὴ ἀρνητικὴν παράστασιν:

$$(\alpha_1 x + \beta_1)^2 + (\alpha_2 x + \beta_2)^2 + \dots + (\alpha_n x + \beta_n)^2$$

ὥς δευτεροβάθμιον τριώνυμον τοῦ x , συνάγετε τὴν ἀνισότητα τοῦ Schwarz:

$$(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)^2 \leq (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_n^2).$$

590) Νὰ εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ ἀκέραιαι λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\{x = -y + 3z, \quad y = -5z + 3x, \quad z = 3x - 5y\}.$$

591) Νὰ διερευνηθῇ κατὰ τὰς τιμὰς τῆς παραμέτρου α τὸ σύστημα:

$$\{(\alpha + 2)x + \alpha(\alpha + 2)y = 5/6, \quad 3x + (2 - \alpha)y = 1\}.$$

592) Τὸ ἄθροισμα τῶν n πρώτων ὀρων μιᾶς σειρᾶς ἰσοῦται μὲ

$$\frac{n^2 + 1}{(n+1)(n+2)}$$

ὅπου $n = 1, 2, 3, \dots$. Ὑπολογίσατε τὸν ὄρον k τάξεως τῆς σειρᾶς αὐτῆς καὶ ἐλέγξατε ἂν ἡ σειρὰ εἶναι συγκλίνουσα.

593) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ σύστημα:

$$\{3\alpha=(\alpha-\gamma)z-(\beta-\alpha)y, \quad 3\beta=(\beta-\alpha)x-(\gamma-\beta)z, \quad 3\gamma=(\gamma-\beta)y-(\alpha-\gamma)x\}$$

ὅπου $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \neq 0$ δὲν ἔχει εἰς θετικούς ἀκεραίους x, y, z ἄλλην λύσιν, πλὴν τῆς $x=y=z=1$ ταύτην δὲ μόνον ἂν $\alpha+\beta+\gamma=0$.

594) Ἐάν λ, μ ἀκέραιοι σχετικῶς πρῶτοι καὶ $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ δύο ἀκέραιοι λύσεις τῆς $\mu x - \lambda y = k$ (k ἀκέραιος), τότε ἂν $|y_1 - y_2| < |\mu|$ θὰ ἔχωμεν $x_1 = x_2$ καὶ $y_1 = y_2$.

595) Ἐστῶσαν λ, μ, x_0, y_0 τέσσαρες θετικοὶ ἀκέραιοι πληροῦντες τὴν ἰσότητα $\mu x_0 - \lambda y_0 = 1$. i) Νά δειχθῇ ὅτι τὸ κλάσμα $(\lambda y_0 + \mu x_0) / \mu y_0$ εἶναι ἀνάγωγον. ii) Ὅτι

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{x_0}{y_0}.$$

596) Ἐάν οἱ συντελεστοὶ α, β, γ τῆς Διοφαντικῆς ἐξισώσεως (1) $\alpha x + \beta y = \gamma$ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοὶ καὶ α, β σχετικῶς πρῶτοι, νά δειχθῇ ὅτι i) ἂν οἱ α καὶ β διαιροῦν ἀκριβῶς τὸ γ , τὸ πλῆθος τῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν λύσεων τῆς (1) ἰσοῦται πρὸς $\frac{\gamma}{\alpha\beta} - 1$ ii) ἂν ὁ εἰς μόνον ἐκ τῶν α καὶ β διαιρεῖ τὸν γ τότε τὸ πλῆθος τῶν ἀκε-

ραίων θετικῶν λύσεων εἶναι $\left[\frac{\gamma}{\alpha\beta} \right]$ (=ἀκέραιον μέρος τοῦ $\gamma / \alpha\beta$).

597) Ἐάν οἱ συντελεστοὶ λ, μ τῆς Διαφαντικῆς ἐξισώσεως (1) $\mu x - \lambda y = 1$ εἶναι φυσικοὶ ἀριθμοὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους τότε i) δοθέντος τυχόντος φυσικοῦ ἀριθμοῦ n , μία μόνον λύσις τῆς (1), (x_0, y_0) ὑπάρχει διὰ τὴν ὁποίαν εἶναι $n - \mu < y_0 \leq n$. ii) Ἐάν α, β τυχόντες φυσικοὶ ἀριθμοὶ θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\beta = (\beta x_0 - \alpha y_0) \mu + (\alpha \mu - \beta \lambda) y_0$ iii) Πᾶν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ τὸ ὁποῖον μεσολαβεῖ μεταξὺ τῶν κλασμάτων $\frac{\lambda}{\mu}$ καὶ $\frac{x_0}{y_0}$ ἔχει παρονομαστήν $\beta > n$.

598) Τρεῖς ἀκέραιοι θετικοὶ α, β, γ εἶναι κατὰ σειράν μεγέθους: $\alpha < \beta < \gamma$ ἕκαστος δὲ ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. Νά εὑρεθῇ ἡ γενικὴ μορφή (δηλ. ὅλαι αἱ δυναταὶ τριάδες) τῶν ἀριθμῶν τούτων.

599) Νά εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ μιγάδες $z = \alpha + \beta i$ ἔχοντες μέτρον 1 καὶ ἕκαστος τῶν ὁποίων νά ἔχη μετὰ τοῦ συζυγοῦς του, ἄθροισμα, ἀκέραιον ἀριθμόν. Οἱ α καὶ β εἶναι πραγματικοὶ καὶ $\beta \neq 0$.

600) Δίδεται τὸ σύστημα μὲ τρεῖς ἀγνώστους, x, y, z :

$$\{x + (\mu + 1)y + z = 2 + \mu - \mu^2, \quad \mu x + y - z = 0, \quad x - 2y - \mu z = -2 + 3\mu - \mu^2\}$$

ὅπου μ παράμετρος. i) Νά λυθῇ καὶ διερευνηθῇ τὸ σύστημα κατὰ τὰς τιμὰς τοῦ μ . ii) Νά δειχθῇ ὅτι ὅταν τὸ σύστημα ἔχει μίαν μόνην λύσιν (x, y, z) , οἱ ἀριθμοί: $|x|, |y|, |z|$ παριστάνουν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. iii) Νά γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῶν μεταβολῶν τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ὅταν τὸ μ μεταβάλλεται εἰς τὸ διάστημα $0 \leq \mu < 2$.

601) Ἐάν $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ καὶ x_1, x_2 πραγματικοὶ διάφοροι ἀλλήλων νά δειχθῇ ὅτι $|f(x_1) - f(x_2)| < |x_1 - x_2|$.

602) Ἐάν $f(x) = \frac{\sqrt[5]{1+x} - \sqrt[5]{1-x}}{\sqrt[5]{1+x} + \sqrt[5]{1-x}}$ καὶ x_1, x_2 πραγματικοὶ διάφοροι ἀλλήλων, νά

δειχθῇ ὅτι $f(x_1) \neq f(x_2)$.

603) Νά ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\{x + y + z - \phi = 12, \quad x^2 + y^2 - z^2 - \phi^2 = 6, \quad x^2 + y^2 - z^2 + \phi^2 = 218, \quad xy + z\phi = 45\}.$$

604) Ποίας τιμὰς πρέπει νά ἔχουν τὰ α, β, γ ἵνα ἡ ἐξίσωσις $y^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχει τὴν ἰδιότητα: ἔαν πληροῦται ἀπὸ ἓνα ζεύγος τιμῶν x, y , νά πληροῦται καὶ ἀπὸ

τὸ ζεύγος $X=3x+2y$, $\psi=4x+3y$. Νὰ δειχθῇ δὲ ὅτι τότε θὰ πληροῦται καὶ ἀπὸ τὸ ζεύγος $X_1=3x-2y$, $\psi_1=-4x+3y$.

605) Νὰ λυθοῦν τὰ συστήματα :

$$i) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 14 \\ x^2 + y^2 = 2696 \end{array} \right\} \quad ii) \left\{ \begin{array}{l} x+y=3z, \quad x^2+y^2=5z^2 \\ x^4+y^4=34z^2-17 \end{array} \right\}.$$

606) Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $(x^2+px+1)^2=m^2$ ὅπου $m>0$. i) Ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ p καὶ m ἵνα ἡ ἐξίσωσις ἔχει τέσσαρας διακεκριμένας πραγματικὰς ρίζας; ii) Ποίαν σχέσιν πρέπει νὰ πληροῦν τὰ p καὶ m ἵνα αἱ τέσσαρες αὐταὶ ρίζαι ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόδοον;

607) Δίδεται κύκλος κέντρου O καὶ χορδὴ αὐτοῦ AB , μήκους $2a$. Χωρίζομεν τὸ ἥμισυ, GA τῆς χορδῆς εἰς n ἴσα μέρη καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς GA , τμήμα GA ἀποτελούμενον ἀπὸ μ ἐκ τῶν n μερῶν. Εἰς τὸ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν OD , τέμνουσαν εἰς E τὴν περιφέρειαν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τμημάτων DE , ὅταν τὸ μ διατρέχει τὰς ἀκεραίας τιμὰς ἀπὸ 0 ἕως n .

608) Ἄς θεωρήσωμεν Πυθαγόρειον πίνακα πολλαπλασιασμοῦ μὲ m στήλας (καὶ m σειράς). Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμῶν τοῦ πίνακος εἶναι τέλειον τετράγωνον· τὸ δὲ ἄθροισμα τῶν περιττῶν ἀριθμῶν τῶν ὑπαρχόντων εἰς τὸν πίνακα, εἶναι τελεία τετάρτη δύναμις.

	1	2	3		μ
	2	4	6		2μ
	3	6	9		3μ
	μ	2μ	3μ		μ^2

609) Νὰ εὑρεθῇ ἡ μεγίστη καὶ ἡ ἐλαχίστη τιμὴ τοῦ $|z-3-7i|$ ὅταν ὁ μιγαδικὸς z μεταβάλλεται οὕτως, ὥστε $|z-1-2i| \leq 3$. Νὰ εὑρεθῇ καὶ ἡ τιμὴ τοῦ z διὰ τὴν ὁποίαν λαμβάνει χῶραν τὸ μέγιστον ἢ τὸ ἐλάχιστον.

610) Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ διαστήματα τῶν τιμῶν εἰς τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ κεῖται ὁ λ , ἵνα αἱ ρίζαι p_1, p_2 τοῦ τριωνύμου $f(x) \equiv x^2 + \lambda x + 2\lambda - 1$ πληροῦν τὰς σχέσεις: $-2 < p_1 < 3 < p_2 < 4$.

611) Ἐὰν οἱ διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοὶ x, y, z πληροῦν τὰς ἐξισώσεις :

$$a(x^2+y^2)+bxy+cyz=δ$$

$$a(y^2+z^2)+byz+gx=δ$$

$$a(z^2+x^2)+bxz+gy=δ$$

δείξατε ὅτι θὰ πληροῦν καὶ τὴν $a^2(xy+yz+zx)=\gamma^2-\alpha\delta$.

612) Διὰ $n>3$ δείξατε ὅτι $\sqrt[n]{3} > \sqrt[n]{n}$ ὅπου n φυσικὸς ἀριθμὸς.

613) Νὰ γίνῃ γινόμενον ἡ παράστασις: $(1+x+x^2+\dots+x^n)^2-x^n$.

614) Νὰ δειχθῇ ἡ ἀνισότης: $\sqrt{4\alpha+1} + \sqrt{4\beta+1} + \sqrt{4\gamma+1} < 3+2(\alpha+\beta+\gamma)$, ὅπου τὰ ὑπόρριζα ὑποτίθενται >0 καὶ α, β, γ ὄχι ὅλα μηδενικά.

615) Ἐὰν x, y, z, ω πραγματικοὶ ἀριθμοὶ πληροῦντες τὴν σχέσιν $x\omega=yz$ τότε ἡ ποσότης $P=x^2+y^2+z^2+\omega^2+xz+y\omega$ εἶναι μὴ ἀρνητικὴ. Πότε εἶναι $P=0$;

616) Δίδονται πολυώνυμα $\sigma(x) \equiv x^2+1$ καὶ $\phi(x) \equiv 2x^2+3ix-1$ ἔνθα $i=\sqrt{-1}$. Προσδιορίσατε τοὺς συντελεστὰς ξ, η, ζ οὕτως, ὥστε τὸ πολυώνυμον $\mu(x) \equiv \sigma(x)(\xi x+\eta)+\phi(x)\cdot(x+\zeta)$

νὰ ἔχῃ τὸν ἐλάχιστον δυνατὸν βαθμὸν καὶ συντελεστὴν τῆς ἀνωτάτης δυνάμεως τοῦ x , τὴν μονάδα. Ἐπαληθεύσατε τότε ὅτι τὸ οὕτω προσδιορισθὲν πολυώνυμον εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $\sigma(x)$ καὶ $\phi(x)$.

617) Ἐστώσαν $\sigma(x)$ καὶ $\phi(x)$ δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x . Ἐὰν τὸ $\Delta(x)$ εἶναι Μ.Κ.Δ. τῶν $\sigma(x)$ καὶ $\phi(x)$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν ἀκέραια πολυώνυμα $A(x)$ καὶ $B(x)$ τοιαῦτα, ὥστε $A(x)\cdot\sigma(x)+B(x)\cdot\phi(x) \equiv \Delta(x)$.

618) Είς μίαν ακολουθίαν $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$, ἕκαστος ὄρος συνδέεται μὲ τὸν προηγούμενόν του διὰ τῆς σχέσεως: $\alpha_\rho = \frac{\alpha_{\rho-1}}{1+\alpha_{\rho-1}}$ διὰ $\rho=1, 2, \dots$ Νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha_1^2} + \frac{1}{\alpha_2^2} + \frac{1}{\alpha_3^2} + \dots + \frac{1}{\alpha_n^2} = \frac{v}{\alpha_0^2} + \frac{v(v+1)}{\alpha_0} + \frac{v(v+1)(2v+1)}{6}.$$

619) Ἐστω ἡ σειρά $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \frac{x^8}{1-x^{16}} + \dots$, ὅπου $0 < x < 1$. Ὑπο-

λογίσατε τὸ $S_n = \frac{x}{1-x}$ διὰ $x=1, 2, 3, 4$ καὶ ἀκολουθῶς εὑρετε τὴν μορφήν τοῦ S_n (δηλ. τοῦ ἀθροίσματος τῶν n πρώτων ὄρων) συναρτήσῃ τοῦ n καὶ x καὶ τέλος εὑρετε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπείρων ὄρων τῆς σειρᾶς.

620) i) Ἐάν $\rho < \rho'$ καὶ $k > k'$ ὅπου ρ, ρ', k, k' φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι δὲ $2^\rho + 2^k = 2^{\rho'} + 2^{k'}$ τότε θὰ εἶναι: $\rho = k'$ καὶ $k = \rho'$. ii) Ἐάν $\mu \leq n$ ὅπου μ, n φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἐκτελεσθῇ δὲ ἐπιμεριστικῶς ὁ πολ/σμός: $(x^{\mu^1} + x^{\mu^2} + \dots + x^{\mu^{\mu}})(x^{2^1} + x^{2^2} + \dots + x^{2^{\mu}})$, νὰ δειχθῇ ὅτι θὰ προκύψουν $n\mu - \frac{\mu(\mu-1)}{2}$ ἀνόμοιοι ὄροι.

621) Δοθέντων τῶν n ζευγῶν πραγμ. ἀριθμῶν: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ νὰ ὀρισθῇ ὁ λ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως $(y_1 - \lambda x_1)^2 + (y_2 - \lambda x_2)^2 + \dots + (y_n - \lambda x_n)^2$ νὰ εἶναι ἡ ἐλαχίστη δυνατὴ. Ὁμοίως, νὰ ὀρισθῇ ὁ μ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως: $\left(\frac{y_1}{\mu} - x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{y_n}{\mu} - x_n\right)^2$ νὰ εἶναι ἐλαχίστη. Πότε αἱ δύο προσδιορισθεῖσαι τιμαὶ (τοῦ λ καὶ τοῦ μ) εἶναι ἴσαι;

622) Δίδεται ἡ συνάρτησις $f(x) = 2x + \mu + 1 - \frac{1+\mu+x}{(x-1)^2}$. i) Νὰ ὀρισθῇ ὁ n συναρτήσῃ τοῦ μ , ἵνα $f(-1) = 0$. ii) Ἀντικατασταθέντος τοῦ n διὰ τῆς προηγουμένως εὑρεθείσης, ἴσης πρὸς αὐτὸ παραστάσεως, ἡ $f(x)$ καθίσταται, ἔστω $f_1(x)$ (μὴ περιέχουσα τὸ n). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $f_1(x) = 0$ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ μ . iii) Νὰ ὀρισθοῦν τὰ $\mu, \lambda, \alpha, \beta$ οὕτως, ὥστε ἡ παράστασις $(x-\lambda)^2(\alpha x + \beta) / (x-1)^2$ νὰ ταυτίζεται μὲ τὴν $f_1(x)$.

623) Ἐάν τὸ σύμβολον $[\omega]$ παριστάνει τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον ἐκ τῶν μὴ ὑπερβαίνοντων τὸν πραγμ. ἀριθμὸν ω καὶ τεθῇ:

$$f(\alpha, x) \equiv \left[\frac{1}{\alpha - x[\alpha/x] + 1} \right] \quad (\alpha, x, \text{θετικοὶ ἀκέραιοι})$$

δείξατε ὅτι:

$$f(\alpha, x) = \begin{cases} 1 & \text{ἐάν ὁ } x \text{ διαιρῇ τὸν } \alpha \\ 0 & \text{ἐάν ὁ } x \text{ δὲν διαιρῇ τὸν } \alpha \end{cases}$$

Ἀκολουθῶς νὰ δειχθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$f(\alpha, 1) + f(\alpha, 2) + \dots + f(\alpha, \alpha) = \sum_{x=1}^{\alpha} f(\alpha, x),$$

ἰσοῦται μὲ τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ α .

624) Ἐάν αἱ ρίζαι ρ_1, ρ_2 τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ ἔχοντος πραγματικοὺς συντελεστὰς $\neq 0$, πληροῦν τὴν σχέσιν $\frac{1}{(\rho_1 + \beta)^2} + \frac{1}{(\rho_2 + \beta)^2} > \frac{3}{\beta^2}$ νὰ δειχθῇ, ὅτι τότε θὰ εἶναι $-1 < \frac{3\alpha\gamma - \beta^2}{4\beta^2} < 0$.

625) Δοχεῖον περιέχει οἶνον βάρους ἴσου πρὸς μίαν μονάδα βάρους. Ἀφαιρεῖ τις οἶνον βάρους α , ($\alpha < 1$) καὶ τὸν ἀντικαθιστᾷ δι' ἴσου βάρους ὕδατος, ὅπερ μινύ-

ται τελείως. Κατόπιν αφαιρεί πάλιν βάρος α ἐκ τοῦ περιεχομένου τοῦ δοχείου καὶ τὸ ἀντικαθιστᾷ δι' ὕδατος. Τοῦτο πράττει ἐν ὄλῳ β φορές. Ἀκολουθῶς ἀφαιρεῖ πάλιν βάρος α ἐκ τοῦ περιεχομένου καὶ τὸ ἀντικαθιστᾷ δι' οἴνου. Τοῦτο πράττει πάλιν β φορές. Πόσος οἶνος ὑπάρχει τελικῶς εἰς τὸ δοχεῖον;

626) Ἀφοῦ δειχθῇ ὅτι $\alpha^{\log \beta} = \beta^{\log \alpha}$, νὰ λυθῇ τὸ σύστημα :

$$\{(2x)^{\log y} + y^{\log(2x)} = 8x^2, \frac{y}{4x^2} = y^{\log(2x)}\}.$$

627) Εἰς μίαν ἀκολουθίαν $\{x_v\}$ εἶναι $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_{v+2} = \frac{x_v + x_{v+1}}{2}$ ($v=1, 2, \dots$).

Δείξατε ὅτι θὰ εἶναι: $x_{v+2} - x_{v+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^v (\beta - \alpha)$.

628) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα ὄλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν περιεχομένων με-
ταξὺ 321 καὶ 567 καὶ οἱ ὅποιοι δὲν εἶναι διαιρετοὶ οὔτε διὰ τοῦ 3 οὔτε διὰ τοῦ 8.

629) Ἐστῶσαν u καὶ v πραγματικοὶ ἀριθμοὶ μεταβλητοί, πληροῦντες τὴν σχέσιν $u+v=1$. Θέτομεν $uv=z$ καὶ $u^v + v^u = S_v$, διὰ $v=0, 1, 2, \dots$ i) Νὰ δειχθῇ ὅτι εἶναι: $S_v = S_{v-1} - zS_{v-2}$ διὰ $v=2, 3, \dots$ ii) Νὰ ὀρισθοῦν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ οὕτως, ὥστε ἡ πο-
σότης $E \equiv 6S_2 + \beta S_4 + \gamma S_6$ νὰ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν u καὶ v . iii) Ὡς συνέπεια τοῦ ii) νὰ
δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $6(\eta\mu^{10}\theta + \sigma\upsilon\nu^{10}\theta) - 15(\eta\mu^8\theta + \sigma\upsilon\nu^8\theta) + 10(\eta\mu^6\theta + \sigma\upsilon\nu^6\theta)$ εἶναι ἀνε-
ξάρτητος τῆς θ .

630) Ἐστῶ $z_1, z_2, z_3, \dots, z_v, \dots$ ἀκολουθία μιγαδικῶν ἀριθμῶν τοιαύτη, ὥστε $z_i = i$

καὶ $z_{v+1} = \frac{|z_v| + z_v}{2}$, διὰ $v=1, 2, \dots$ Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ $|z_v|$ συναρτήσει τοῦ v καθὼς
καὶ τὸ $\operatorname{op}|z_v|$ ὅταν $v \rightarrow \infty$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

1. $3+i$, $2+13i$. 2. $-1+8i$, $7+2i$. 3. $6-i$. 6. $\{x=3, y=-3\}$, $\{0,-4\}$, $\{-4/3, 2\}$, $\{-2, 3\}$. 11. $\pm 4i$, $\pm 6i$, $\pm i\sqrt{11}$, $\pm 3i\sqrt{2}$. 15. $\frac{5}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{8}i$. 18. $-11+2i$. 19. $\pm 1+0i = \pm 1$.
 21. $-\frac{2}{5}$. 22. $\frac{78}{7} + \frac{4\sqrt{3}}{7}i$. 23. $\frac{1}{5}$. 25. $-\frac{8}{13} - \frac{12}{13}i$, $-\frac{2}{3} - 2i$, $-\frac{4}{65} + \frac{58}{65}i$, $-2+2i$, $4x^2-16x+17$. 26. $(x+yi)(x-yi)$, $\{(x+1)+(y+2)i\}$, $\{(x+1)-(y+2)i\}$.
 28. $-117+44i$, $-i$, $6/25$, $-i$, $-2i$. 29. α') $\{x=1, y=-1\}$, β') $\{\frac{1}{4}, -1\}$, γ') $\{-2, 1\}$.
 30. $\alpha=2$, $\beta=3$, $\alpha=2$, $\beta=-3$, $\alpha=3/4$, $\beta=5/4$. 34. Μηδενίζεται διὰ $x=a/(a^2+\beta^2+\gamma^2)$ και κυκλικῶς. 35. 5, 2, $2\sqrt{2}$, 4. 40. $\sqrt{2}$, 256, $(2/3)^{50}$. 45. Ἀποτελοῦν. 46. Ἀποτελοῦν.
 48. $\frac{5}{2}$, $-3\left|4, -\frac{2}{5}\right|\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\left|\frac{3}{4}, -\frac{3}{7}\right|\frac{3}{2}, -\frac{8}{7}\left|-1+\sqrt{2}\right|1+\sqrt{3}\left|-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right|\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. 49. $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $2+i$, $2+i\sqrt{3}$, $\frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i\sqrt{5}$, $\frac{2}{5} \pm \frac{1}{5}i\sqrt{3}$, $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{7}$.
 50. $x=3k$ ἢ $-7k$, $x=\frac{7k}{2}$ ἢ $-\frac{3k}{2}$, $y=-\frac{k}{4}$ ἢ $\frac{3k}{2}$. 51. $x=3$ ἢ $-\frac{5}{2}$, $x=-2$ ἢ $-\frac{5}{3}$, $x=3+\sqrt{6}$. 52. $\left\{-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$, $\left\{-3, \frac{3}{2} \pm i\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$.
 53. $y=\frac{x-3}{2}$ ἢ $-2x+5$, $y=\frac{3x}{2}+1$ ἢ $-x-\frac{1}{3}$.
 54. Πραγμ. ἄνιστοι|πραγμ. ἴσαι|πραγμ. ἄνιστοι|φανταστ. ἄνιστοι|πραγμ. ἴσαι|πραγμ. ἄνιστοι.
 55. $k=4$, $k=\pm 12$, $k=-1$ ἢ 7 , $k=3$ ἢ $-25/8$, $k=5$ ἢ $-29/6$, $k=2$ ἢ 5 .
 56. $x=-1$ ἢ -2 , $x=3$ ἢ -4 . 57. α') $x=-\frac{1}{3}$ ἢ $\frac{1}{2}$ β') $x=14/3$.
 58. α') $x=\frac{-(\alpha+\beta+\gamma)+i\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2}}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$, β') $x=-\frac{\alpha-1}{\alpha+2}$ ἢ $-\frac{\alpha+1}{\alpha-1}$.
 59. $x=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$. 62. i) $k=6$, ii) $k=2$. 63. $k=2$, $\lambda=3$.
 64. $x=3$, $x=5$ ἢ -2 , $x=-3$ ἢ -4 , $x=8/3$, $x=8$, $x=1/2$.
 65. $x=-1/2$, $x=1$ ἢ 2 , $x=2$ ἢ -5 . 67. $x=5/2$ ἢ $3/4$.
 68. $x=\{(1+\sqrt{5})^v-2^v\}/\{(1+\sqrt{5})^v+2^v\}$ όταν ν ἄρτιος, όταν δὲ ν περιττός, ἔχομεν ἐπὶ πλέον τὴν $x=\{(1-\sqrt{5})^v-2^v\}/\{(1-\sqrt{5})^v+2^v\}$. 70. Φανταστικά. 73. ἡ Δ=τέλειον τετράγωνον συμμετρου. 74. 4, $-1/2$, -20 . 75. Q_1/Q_2 , Q_2/Q_1 . 76. α, γ.
 77. ρίξαι: $2/3$, $-4/3$, $\gamma=-8$. 78. $\lambda=-3+\sqrt{33}$, $\mu=7+\sqrt{33}$ ἢ $\{-3-\sqrt{33}, 7-\sqrt{33}\}$.
 79. $3+3(Q_1+Q_2)-Q_1Q_2=0$. 81. $\lambda=6$ ἢ $2/3$. 82. 0. 86. $\{\pi=1, k=\alpha\theta\alpha\iota\rho\epsilon\tau\circ\varsigma\}$ ἢ

- $\{\pi=-2, k=-1\}$. 87. $\pi'-\pi, (k-k')/(\pi'-\pi), \{2(k'-k)-(\pi'^2-\pi^2)\}/(\pi'-\pi)$. 88. $\pi=31$, $k=24$. 90. $\frac{9k+3\pi+1}{4k+18\pi+81}, \frac{\pi^4-4\pi^2k+2k^2}{k^4}, \frac{\pi(\pi^2-k)(\pi^2-4k)}{k}$. 93. γ $(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\omega^2+$
 $+2(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)\omega+\beta\gamma'-\beta'\gamma=0$. 94. $\alpha\beta\gamma^2+4\alpha\gamma\gamma'+\beta\gamma=0$. 95. $\lambda=8$. 96. $k=4$.
 97. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$. 98. $\mu=2$ $\eta=-1$. 99. $\mu=-6$. 100. $\lambda=-1/4$ η
 $223/125$. 101. $\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta}\lambda=\frac{\gamma'}{\gamma}\lambda^2$. 102. $\beta^2/\alpha\gamma=\beta_1^2/\alpha_1\gamma_1$. 103. εἴναι. 104. $35x^2+$
 $+13x-12=0, x^2-8x-29=0, 16x^2+24x+7=0, x^2+12=0, 9x^2-12x+29=0, x^8-6x+$
 $+9=0, 5x^2-3x=0$. 105. i) $x^2-(p^2-2q)x+q^2=0$, ii) $x^2=0, x^2-x=0, x^2+x+1=0, x^2-2x+$
 $+1=0$. 106. $x^2-6x+25=0$. 107. $x^2+3x+1=0$. 108. α') $\alpha x^2+k\beta x+k^2\gamma=0$, β') α^2x^2-
 $-(\beta^2-3\alpha\beta\gamma)x+\gamma^2=0$, γ') $\alpha\gamma x^2-\beta x+1=0$. 109. $\alpha^2\alpha'^2x^2-\alpha\alpha'\beta\beta'x+\alpha'\gamma'(\beta^2-2\alpha\gamma)+$
 $+ \alpha\gamma(\beta'^2-2\alpha'\gamma')=0$. 110. $\pi_{2v}=1$. 111. $\alpha^2\gamma'x^2-\alpha\beta\beta'\gamma'x+(\beta^2\alpha'\gamma'+\beta'^2\alpha\gamma-4\alpha\alpha'\gamma\gamma')=0$.
 112. πραγματικάς: 1ον, 2ον, 3ον. 113. $(3x-5)(4x+7), (2x+5-3\sqrt{3})(2x+5+3\sqrt{3})$,
 $(2x+7-3\sqrt{3})(2x+7+3\sqrt{3}), (x+4)^2+5, (3x+2)^2+18$. 114. $\{(a-2\beta)x-a^2-\beta^2\}$,
 $\{(a+2\beta)x-a^2+\beta^2\}$. 115. α') Διά $\{x<-3 \text{ ή } x>-1/2\}$, θετικόν. Διά $-3<x<-1/2$,
 ἀρνητικόν. Διά $x=-3 \text{ ή } -1/2$, μηδέν. 116. α') $x\geq 3 \text{ ή } x\leq 1/2$, β') $x\geq 3 \text{ ή } x\leq 1$,
 γ') $x\geq -3 \text{ ή } x\leq -6$. δ') Διά κάθε πραγματ. ἀριθμὸν x . 117. *Οχι. 119. α') *Οχι. β') Οἱ
 μιγάδες τῆς μορφῆς $\frac{5}{2}+\lambda i$ ὅπου $-\frac{\sqrt{15}}{2}<\lambda<+\frac{\sqrt{15}}{2}$. 120. $x=3, y=5$. 121. $3-\sqrt{17}\leq$
 $\leq x\leq 1$ καὶ $3\leq x\leq 3+\sqrt{17}$. 123. $\{0<x<8\}, \{x<2 \text{ ή } x>3\}, \{x<-3, x>\frac{5}{2}\}$,
 $\{x<-\frac{4}{3}, x>\frac{7}{2}\}, \{-4<x<\frac{3}{2}\}, \{-2<x<\frac{5}{4}\}$. 124. α') διὰ $\{0<x<2 \text{ καὶ } 3<x<8\}$,
 β') διὰ $3<x<8$, γ') $\frac{7}{2}<x<8$. 125. i) $x>3 \text{ ή } x<1$, ii) $1<x<2 \text{ ή } x>3$. 126.
 $-1/4\leq k\leq 1$. 127. διὰ $x\geq -4+\sqrt{31}$ καὶ διὰ $x\leq -4-\sqrt{31}$. 128. $(x=0, y=0)$,
 $(x=2, y=0), (x=-2, y=2), (x=-1, y=2)$. 129. Διά $\lambda\leq \frac{-2-\sqrt{3}}{2}$ καὶ $\lambda\geq \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.
 130. $\beta<\alpha$. 131. i) Μεγαλύτερος καὶ τῶν δύο ριζῶν, iii) μεταξὺ τῶν ριζῶν.
 132. $\lambda>8$. 134. $2<\mu<5$. 135. $\mu<-6 \text{ ή } \mu>15+\sqrt{272}$. 138. $\mu=4, (y+1)(y+2x+3)$.
 141. $3\leq x\leq 6, 1\leq y\leq 10$. 142. Διά $\frac{2-\sqrt{6}}{4}<\mu<0$: δύο ἀρνητικαὶ ρίζαι. Διά $0<\mu<\frac{1}{3}$:
 ἑτερόσημοι. Διά $\frac{1}{3}<\mu<\frac{2+\sqrt{6}}{4}$: δύο θετικά. 145. $4\leq \lambda<7$. 146. Διά $-\infty<\lambda<-\frac{2}{3}$:
 $\rho_1<1<2<\rho_2$. Διά $-\frac{2}{3}<\lambda<-\frac{1}{3}$: $\rho_1<1<2<\rho_2$. Διά $-\frac{1}{3}<\lambda<0$: $\rho_1<1<2<\rho_2$. Διά
 $0<\lambda<\infty$: $1<\rho_1<2<\rho_2$. 148. $-\frac{10}{3}<\mu<-1-\frac{4\sqrt{6}}{7}$. 149. $0<\mu<\frac{1}{2}$. 150. $2<\lambda<$
 $<\frac{9+4\sqrt{2}}{7}$ ή $\frac{1-4\sqrt{2}}{7}<\lambda<1$, ἀκτὺς=1 ὅταν $\lambda\leq 3$ καὶ $=\frac{2(\lambda-2)}{\lambda-1}$ ὅταν $\lambda>3$. 152. $\gamma>0$.
 157. α') $x=23+\sqrt{406}$, β') $x=5$. 158. Διά $\alpha>\sqrt{3}$ ὑπάρχει μία λύσις. Διά $\sqrt{\frac{3}{2}}<\alpha<\sqrt{3}$,
 δύο λύσεις. Διά $\alpha<\sqrt{\frac{3}{2}}$, καμμία. Διά $\alpha=\sqrt{\frac{3}{2}}$, μία λύσις $(=\frac{5}{2})$. Διά $\alpha=\sqrt{3}$,

- δύο λύσεις: 1 και 13. 159. $x = -3/2$, $\epsilon\lambda\alpha\chi. = -11/2$ | $x = 3/4$, $\epsilon\lambda\alpha\chi. = 3/4$ | $x = 1/6$, μέγιστον $= 49/12$ | $x = -3/2$, μέγ. $= 9/2$. 160. $a = 1$. 161. $a = 1/2$. 162. "Αν $(AB) = a$, τότε $(AT) = 7a(3 - \sqrt{3})/12$. 163. $x^2 + 2x - 8$. 164. $x = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)/n$. 169. $k = 1/2$. 170. $\alpha = \pm 2$, $\beta = 3$. 171. $1 \leq \lambda \leq 7$. 173. Αὔξουσα εἰς τὸ διάστημα $2 \leq x < \infty$, φθίνουσα: $x \leq 2$. | Αὔξουσα, διὰ $x \geq -2$. | Αὔξουσα διὰ $x \geq 0$. 174. "Εάν $\alpha > \beta$ τότε α') ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἔως α , β') ἐλαττοῦται ἀπὸ α ἔως β , γ') ἐλαττοῦται ἀπὸ β ἔως $-\infty$. 175. $\mu = 0$, κοινὴ ρίζα, 1 ἢ $\mu = -3/4$ καὶ κοινὴ ρίζα ἢ -2 ἢ $\mu = 2/9$ καὶ κοινὴ ρίζα ἢ 3. 176. $a = 0$ ἢ -1 ἢ $(-1 \pm \sqrt{5})/2$. 180. $\beta^2 = (\alpha + \gamma)^2$. 181. $\alpha < 0$, $R = 8\alpha^5$. 182. $-10 < \lambda < -4$. 183. $\lambda < -3 - \sqrt{8}$ ἢ $\lambda > -3 + \sqrt{8}$ μὲ $\lambda \neq -1$ καὶ $\lambda \neq 0$. 184. $-2 < \lambda < 1/12$. 185. $(4\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)^2 = (2\alpha\beta' - \alpha'\beta)(4\beta\gamma' - 2\beta'\gamma)$. 186. $\lambda = 2$ ἢ $9/4$. 187. Διὰ $\lambda < -2$: $x_1 < x_2 < \rho_1 < \rho_2$. Διὰ $\lambda > 2$: $\rho_1 < \rho_2 < x_1 < x_2$. Διὰ $-2 < \lambda < 2$ αἱ x_1, x_2 φανταστικά. 188. α') $-1/2 \leq x < 3 - \sqrt{2}$ β') $x > (-17 + \sqrt{691})/4$. 189. α') $2 < x < (5 + \sqrt{21})/2$, β') $-2 < x < 2$. 190. α') $0 < x < 2$ ἢ $-1/2 \leq x < (11 - \sqrt{153})/4$, β') εἰάν $\beta > \alpha + \frac{1}{4}$ τότε $\{x > \alpha \text{ καὶ } x > \beta\}$. "Εάν $\beta < \alpha + \frac{1}{4}$ τότε εἰάν μὲν $\beta < \alpha$ θὰ εἶναι $x > \rho_2$ εἰάν δὲ $\beta > \alpha$ τότε: $x > \rho_2$ ἢ $\beta < x < \rho_1$ ὅπου $\rho_1 < \rho_2$ αἱ ρίζαι τοῦ $x^2 - (2\alpha + 1)x + \alpha^2 + \beta > 0$. 192. $x > 17/4$. 193. $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3} \pm 2$, $\pm i \pm \sqrt{3}$, $\pm i\sqrt{5} \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\pm \frac{1}{2}\sqrt{6}$. 194. $\pm(\alpha + \beta)$, $\pm(\alpha - \beta)$ | $\pm \beta/\gamma$ | $\pm \sqrt{(\mu^2 - 1)/(\mu^2 - 2\mu - 2)}$, $\pm \sqrt{(\mu - 1)(\mu - 2)/(\mu^2 - 2\mu - 2)}$. 195. α') Διὰ $\alpha < -4/\sqrt{3}$ ἢ $\alpha > 4/\sqrt{3}$ πᾶσαι αἱ ρίζαι μιγαδικαί. Διὰ $-4/\sqrt{3} < \alpha < 0$, πᾶσαι μιγαδικαί. Διὰ $0 < \alpha < 4/\sqrt{3}$, δύο πραγμ., δύο φανταστ. β') 4 ρίζαι πραγματικά ὅταν $\mu < -2$ ἢ $1/2 < \mu < 6/7$ ἢ $\mu > 3$. Δύο πραγμ. καὶ δύο μιγαδικαί ὅταν $6/7 < \mu < 3$. "Ολαί μιγαδικαί ὅταν $-2 < \mu < 1/2$. 196. Διὰ $\lambda < \frac{5}{3}$ πᾶσαι αἱ ρίζαι φαντ. Διὰ $\lambda = \frac{5}{3}$ δύο φανταστ. καὶ τὸ 0 διπλῇ ρίζα. Διὰ $\frac{5}{3} < \lambda \leq 10$ δύο φαντ. καὶ δύο πραγμ. Διὰ $\lambda > 3$, 4 πραγμ. 197. $\mu < -\frac{1}{2}$: 4 πραγμ. Διὰ $-\frac{1}{2} < \mu < 0$, δύο πραγμ., δύο φανταστικά. Διὰ $0 < \mu < 4$: ὅλαι φανταστικά. Διὰ $\mu > 4$: δύο πραγμ., δύο φανταστικά. 198. $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. 199. $-4/5 < \mu < 0$. 201. α') $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ ἢ $x > 2$, β') $x > \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{37}}{2}}$ ἢ $x < -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{37}}{2}}$, γ') $x < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{2} < x < -1$, $1 < x < \sqrt{2}$, $x > \sqrt{3}$. 202. Τὸ 2 μεταξὺ 3ης καὶ 4ης, τὸ -3 μικρότερον ὅλων, ὁ -1 μεταξὺ τῶν δύο πραγματικῶν ριζῶν. 203. $\alpha > 0$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$ ἢ $\alpha > 0$, $\gamma > 0$, $\beta > 0$, $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$. 204. $(2x^2 + 8x + 25)(2x^2 - 8x + 25)$. 205. α') 2, $1/2$, -3 , $-1/3$, β') $1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$. 206. 3, $1/3$, -6 , $-1/6$. 207. α') $\frac{\pm 3 + \sqrt{5}}{2}$, $\pm i$, β') $(1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1})/2$ αἱ πραγματικά ρίζαι. 210. Διὰ $\lambda < -4/7$: δύο ρίζαι πραγματικά, ὁμοίως, διὰ $\lambda > 4$. Διὰ $-4/7 < \lambda < 4$: τέσσαρες πραγματικά. 211. Τέσσαρες φανταστικά, ὅταν $\lambda < 7/16$ ἢ $\lambda > 7/8$. Δύο πραγματικά, ὅταν $7/16 < \lambda < 7/8$. 212. "Αν $\beta/\alpha < 1 - \sqrt{13}$, τέσσαρ. πραγμ. ρίζαι. "Αν $\beta/\alpha = 1 - \sqrt{13}$, δύο διπλᾶ, πραγματικά ρίζαι (ἀντίθετοι). "Αν $\beta/\alpha > 1 - \sqrt{13}$ οὐδεμία πραγματικὴ ρίζα. 213. $\alpha = \beta - 3 = (\gamma - 1)/2$ ἢ $\alpha = 3 - \beta = (\gamma + 1)/2$. 215. α') $-1 \pm i\sqrt{3}$, $(-\sqrt{3} \pm i\sqrt{243})/2$, 2, $\sqrt{3}$, β') ± 2 , $\pm 2i$, $\pm(1 \pm i)\sqrt{2}/2$, γ') 6, 1, $(7 \pm i\sqrt{31})/2$, δ') 1, $-5/2$, $1/2$, -2 . 216. α') -3 , -2 , 3, 4, β') εἰάν $0 < \lambda < \frac{8}{(\alpha - \beta)^2}$ δύο λύσεις. "Εάν $\lambda > \frac{8}{(\alpha - \beta)^2}$, τέσσαρες λύσεις (πραγματικά). 217.

- $x = \frac{3\alpha - \beta}{2} \quad \eta \quad \frac{3\beta - \alpha}{2} \quad \eta \quad \frac{5(\alpha + \beta) + 3\sqrt{5}(\alpha - \beta)i}{10}$. 218. "Αν $\alpha\beta > 0$, 4 πραγματικά. "Εάν $\alpha\beta < 0$, 2 πραγματικά. 219. $-1, 9/2$. 220. $-2 + \sqrt{3}, 1, 1$. 221. $7, 1/2$. 222. $x=0 \quad \eta \quad \frac{63\alpha}{65}$. 223. $x=1/2 \quad \eta \quad \pm(\sqrt{5}+1)/4 \quad \eta \quad \pm(\sqrt{5}-1)/4$. 224. $x=8, -7, 3, -2$. 228. $x < \sqrt{2}/2$ ενώ $x \neq -\sqrt{2}$. 229. $x=(5+\sqrt{43})/2$. 230. $x=(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})/(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 5=0,09$ και δύο φανταστικά. 231. $x=3, -3/2 \quad \eta \quad (3+i\sqrt{47})/4$. 232. $x=(-1\pm\sqrt{17})/2 \quad \eta \quad (-1\pm\sqrt{2})/2$. 233. $x=3 \quad \eta \quad -5/3$. 234. $x=0, 216/225, -216/225$. 235. $x=(1+\sqrt{5})/2 \quad \eta \quad (1+\sqrt{17})/2$. 236. $x=\omega^{\frac{2\mu\nu}{\mu-\nu}}$ όπου $\omega=a\pm\sqrt{a^2-1}$. Πρέπει $a>1$. 237. i) (4, 3), (-4, 3), (4, -3), (-4, -3). ii) (3, 2), (4, 1, -7). iii) (0, -3), (3, 2). iv) (3, 4), (-4, -3). v) (-2, 1). 238. $k=23$. 239. (2, -1) η (1/3, 1/2). 240. i) (3, 1), (-3, -1), $(\frac{7}{3}\sqrt{2}, \frac{8}{3}\sqrt{2})$, $(-\frac{7}{3}\sqrt{2}, -\frac{8}{3}\sqrt{2})$. ii) (2, -2), (-2, 2), (4, 3), (-4, -3). iii) (5, -3), (-5, 3). 241. (i, -2i), (-i, 2i), (2i, -i), (-2i, i). 242. i) (2, -5), (-2, 5), (5, -2), (-5, 2). ii) (4, 1), (1, 4), (-4, -1), (-1, -4). 243. i) (1, 4), (4, 1), $\{(-5\pm\sqrt{41})/2, (-5\mp\sqrt{41})/2\}$. ii) (2, 3), (3, 2), (2, -5), (-5, 2). 245. $x=-26 \quad \eta \quad 54$. 246. (1, 1), (1, -2), (-2, 1), (-2, -2). 247. (4, 1), (1, 4). 248. $(-1/2, 1/2, 1/3) \quad \eta \quad (2/5, -1/4, -5/3)$. 249. (2, 1, 3), (-4, -5, -9). 251. (2, -1), (-2, 1) και τέσσαρες φανταστικά $(\frac{+3+i\sqrt{6}}{7}, \frac{+3+i\sqrt{6}}{7})$. 252. (0, 0), (9, 3), (3, 9). 253. (0, -4/7), (5, 3), (10/23, -6/23). 254. $(\beta, \alpha), \{-\beta(1\pm\sqrt{3})/2, \alpha(1\pm\sqrt{3})/2\}$. 255. (12, 3), (-12, -3). 256. (8, 4), (2, 4). 257. $(2x)^3=\sqrt{\beta} \pm \sqrt[3]{\alpha^2-\sqrt{\beta^2}}, (2y)^3=\sqrt{\beta} \mp \sqrt[3]{\alpha^2-\sqrt{\beta^2}}$. 258. (3, 3), (-3, -3), $(3i\sqrt{2}, 3i\sqrt{2})$. 259. (2, 2), (-2, -2). 260. $(\sqrt[5]{2\alpha}, \sqrt[5]{2\beta})$. 261. (0, 0) και δύο φανταστικά. 262. (4, 6, 2), (60/7, 66/7, -6). 263. $(\alpha, 4\alpha, 2\alpha), (-2\alpha, \alpha, -4\alpha), \{\alpha(7\pm i\sqrt{15})/2, \alpha(-11\pm i\sqrt{15})/2, \alpha(1\pm i\sqrt{15})/2\}$. 264. (5, 2, 3), (-5/3, -14/3, -11/3), (-5, -2, -3), (5/3, 14/3, 11/3) και δύο φανταστικά. 265. (1, 1, 1). 266. (7, 3, 4, 6), (7, 3, -6, -4), (3, 7, 4, 6), (3, 7, -6, -4). 267. (3, 4, 5, 6), (-3, -4, -5, -6), (4, 3, 6, 5), (-4, -3, -6, -5). 269. (6, 2, 4, 3), (6, 2, 3, 4), (2, 6, 4, 3), (2, 6, 3, 4). 270. (2, 4, 5, 1), (2, 4, 1, 5), (4, 2, 5, 1), (4, 2, 1, 5). 271. (2, 4, 4), (1, 1/2, 1/4), (7, 2, 2), (3, 4, 6, 9), (3, 4, 9, 6), (4, 3, 6, 9), (4, 3, 9, 6). 273. (4, 3, 2), (-4, -3, -2), $(10/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -8/\sqrt{3}), (-10/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 8/\sqrt{3})$. 274. (0, 0, 0), (1, 2, 3). 275. "Εάν $\alpha \neq 0$, πραγματικός, δεν υπάρχουν πραγμ. λύσεις. "Αν $\alpha=0$, τότε $x=y=z=0$. 277. (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15), (12, 12). 278. (1, 1). 279. (1, -1), (2, -3), (3, 11), (4, 9). 280. (0, 0), (8, 1), (0, 1). 281. (0, 0), (0, 1), (2, 1), (4, 0). 282. (0, 0), (0, 1), (1, 2), (2, 2), (5, 1), (7, 0). 283. (11, 7), (-7, -11), (7, 11), (-11, -7). 284. (21, 23), (45, 1), (39, 13), (24, 22), (0, 26) και αἱ κατά τὰ πρόσημα διαφέρουσαι τούτων. 285. 13 η 83 η 91. 286. $x=2k^2, y=3k^2, k$ τυχόν άκέραιος. 287. $x=k, y=0, z=-k, k$ άκέραιος. 290. 16. 291. 8. 292. 6, 9. 293. "Αμβλυγώνιον: μία λύσις. 294. Μία λύσις όταν $R < \lambda < 2R$, δύο λύσεις όταν $2R < \lambda < R\sqrt{5}$. 295. $0 \leq \mu^2 \leq R^2$. 296. Συνθήκη δυνατότητος: $\frac{T^2}{E} \geq (\frac{3\pi}{2} + 4)$. Σχέσις: $T^2(\pi+8)=2E(\pi+6)^2$. 297. $\alpha=58, \beta=-119, \gamma=10, \delta=-23$. 298. $\alpha x^4-2\alpha x^3 + (a-8)x^2 + 8x + 8$ όπου α, δ, ϵ τυχόντες. 299. $\lambda=1$, ρίξει: 1, 1, -2. 300. $\alpha=-5, \beta=4, \gamma=+3, \delta=2$. 301. $4\alpha\beta\gamma-\beta^3=8\alpha^2\delta, (4\alpha\gamma-\beta^2)^2=64\alpha^2\epsilon$. 302. $(\alpha, \beta, \gamma)=(+2, 3, 2) \quad \eta \quad (+2, 3, -2) \quad \eta \quad (+2\sqrt{3}, 5, 2\sqrt{3}) \quad \eta \quad (+2\sqrt{3}, 5, -2\sqrt{3})$. 303. $\beta=\frac{\alpha^2}{4} + \frac{2\gamma}{\alpha}$. "Εφαρμ.: 1, -4,

- $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$. 304. $\alpha=2, \beta=1, \gamma=3$ η $-2, -1, -3$. 306. $k=-3/4, x=(3-\sqrt[3]{3})/(3-2\sqrt[3]{3})$.
 307. $\varphi(x) \equiv \pm(2x^2-2x+1)$, $\alpha=4, \beta=1$. 308. i) $-2, -2, \pm 2i$. ii) $1, -1, 1+i, -i$.
 309. $x^4-4x^3+11x^2-14x+12=0$. 310. $\alpha=\pm 3, k=-18$. 311. $\alpha') \pm \frac{1}{3}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$.
 $\beta')$ Δέν $\xi \chi \epsilon \iota$ $\rho \eta \tau \acute{\alpha} \varsigma$ $\rho \acute{\iota} \zeta \alpha \varsigma$. $\gamma')$ $\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \pm i, \delta')$ $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \pm i$. 313. $\alpha') k=3$,
 $\rho=-2$. $\beta')$ $k=-2, \rho=\pm 1, \beta$ $k=2, \rho=3$. $\gamma')$ $k=-4, \rho=3$. $\delta')$ $k=1, \rho=1$ η $k=10$,
 $\rho=-1/2, \eta$ $k=15, \rho=-1/3$. 315. i) $x^4-46x^2+169=0$. ii) $x^2-10x+1=0$. 317. $i+\sqrt{5}$,
 $(-3 \pm i\sqrt{7})/4$. ii) $2 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{2}, (-3 \pm i\sqrt{3})/2$. 318. $x^4-4x^3+2x^2+4x+1=0$. 319.
 $x^4-14x^2+40x^2-14x+39=0$. 320. $\alpha=-3/2, \beta=-10$. 323. i) 3. ii) 2. 325. i) $(x^2-2x+5)^2=0$
 ii) $(x-2)^2 \cdot \{(x-1)^2+1\}=0$. 326. i) $3(1 \pm \sqrt{2}) + i(\mp 1 + \sqrt{2})$. ii) $1+i, 3+4i$. 327. $\sqrt{10}$.
 329. i) $(a_1\gamma_2-a_2\gamma_1)^2-(a_1\beta_2-a_2\beta_1)(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=0$, $\alpha_1\beta_2 \neq a_2\beta_1$. ii) $\alpha_1/\alpha_2=\beta_1/\beta_2=\gamma_1/\gamma_2$,
 $\beta_1^2-4a_1\gamma_1 > 0$. 330. Μία $\kappa \upsilon \beta$. $\rho \acute{\iota} \zeta \alpha$ δ $-2-i$. 332. $(p-q)^2=-q$. Μία $\rho \acute{\iota} \zeta \alpha$ η -2 .
 333. $-3, 7, 9$. 334. $-1/3$. 339. $\alpha_v=1/2^v$. 341. $\alpha_1=\left\{1+\left(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+1}\right)^{2^{v-1}}\right\}/\left\{1-\left(\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1+1}\right)^{2^{v-1}}\right\}$.
 343. "Οριον $=1$. 346. i) 1. ii) 2. 347. i) $-36, 97$. ii) 119. 348. i) 6, 8, 10, ... iii) 22, 16, ...
 349. 644 | 348 | 625, 98 | -345 . 350. 16. 351. $(\alpha+\tau)/2$. 354. v^3 . 355. 4, 10, 14, ...
 356. $vk(vk+1)/2$. 357. $\pi=1, k=\alpha\theta\theta\alpha\iota\rho\epsilon\tau\omicron\varsigma$ η $\pi=2/3, k=1/12$. 358. $\beta^2\sqrt[3]{3}=\alpha\gamma$ $\left(1+\sqrt[3]{3}\right)^3$
 359. $\Sigma_2=3(\Sigma_2-\Sigma_1)$. 360. 148/111, 274/183... 363. i) $v(v+1)(v+2)/3$. ii) $v(v+1) \cdot$
 $\cdot (v+2)(v+3)/4$. 364. $2\nu\alpha/3$. 365. $v=11$. 366. i) $\nu a^2+v(v-1)a\omega+\frac{1}{6}v(v-1)(2v-1)\omega^2$. ii)
 $\frac{v(v-1)}{2}\left\{a^2+(v-1)a\omega+\frac{(v-2)(3v-1)}{12}\omega^2\right\}$. 367. 5920. 369. $v(v+1)(4v+5)/6$. 370. 5.887.647.
 371. 300,5. 373. $\alpha=\frac{1}{5}, \omega=\frac{1}{60}$. 374. $\omega=1$ η 2 η 4 . 375. "Οχι.
 376. $x_\rho = \alpha + \frac{1}{2} \rho \left\{ \frac{2(\beta-\alpha)-v(v+1)\delta}{v+1} + (\rho-1)\delta \right\}$ δ $\rho \upsilon \nu$ $\rho=1, 2, 3, \dots, v$. Τό δ $\pi \lambda \eta \rho \omicron \iota$ $\tau \acute{\alpha} \varsigma$
 $\sigma \upsilon \nu \theta \eta \kappa \alpha \varsigma$ $\alpha < x_1 < \beta, \alpha < x_v < \beta$. 377. 2470. 378. $(41.42.83-25.26.51)/6$. 379. (5, 25, 45),
 (6, 12, 18), (9, 9, 9). 380. $v=71$. 381. $(k-1)v/2$. 382. $10/7, 1, 10/13, 5/8, 10/19$.
 383. $1/15 | 1/29$. 388. $\lambda=0$. 389. $2\beta^2=\gamma(3\alpha\beta-\gamma)$. 390. $x=4$ η $-4/5$. 391. 5, 1280.
 392. 16385. 393. 510. 394. $\alpha=256, v=5$. 395. $1/3, 1, 3, 9, 27, 81$. 396. $\alpha=256, \omega=5/4$.
 397. 32, 48, ... η $-32/7, 80/7, \dots$ 398. $\{(q^{2v}-1)(q^{2v+2}+1)/q^{2v}(q^2-1)^{-2v}\}$.
 399. $\Sigma_1(\Sigma_2+\Sigma_3)=\Sigma_1^2+\Sigma_2^2$. 400. $\omega=\sqrt{\frac{\Sigma_2}{\Sigma_1}}$, $\alpha=\Sigma_1 \cdot \frac{\omega-1}{\omega^k-1}$. 402. (1, 1, 1) η $(-5, 5/2,$
 $-5/4)$. 406. $x = \frac{-1}{2}(v-1)(v-4)$. 407. $v=8, \omega=2$. 408. 27, 48. 410. $48/7, 25/2, 1/x$. 411.
 4577:9990. 412. 27. 413. $\alpha=6, \omega=-1/2$. 414. Το υ $10\omicron \nu$ $\lambda \epsilon \pi \tau \omicron \upsilon$. 415. $\alpha\rho/(1-\beta\rho)(1-\rho)$.
 416. $c > -1/2$. 417. i) $x > 0$, ii) $x > 0$ η $x < -1/2$. 418. $\Sigma_v=6-\frac{2v-1}{2^{v-1}}$. 419. $\Sigma_v=$
 $= \frac{vx^v}{x-1} - \frac{x^v-1}{(x-1)^2}$. 420. $S_v = \frac{1}{k+1} \left\{ \frac{1}{k+1} - \frac{1}{(v+1)(v+2)\dots(v+k+1)} \right\}$, $S_\infty = 1/(k+1)^2$.
 421. $S_v = \frac{1}{\alpha} \left\{ \frac{1}{1+\alpha} - \frac{1}{1+(v+1)\alpha} \right\}$, $S_\infty = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$. 422. $S_v = \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2v-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2v)}$.
 423. $S_v = \frac{v}{v+1} \cdot 2^v$. 424. $S_v = \frac{1}{6} + \frac{1}{v+3} - \frac{2}{v+4}$, $S_\infty = \frac{1}{6}$. 425. $S_v = \frac{1}{3} - \frac{1}{(v+1)3^v}$.

$$S_{\infty} = \frac{1}{3}. \quad 426. S_v = 1 - \frac{3}{(v+1)2^{v+1}} + \frac{1}{(v+2)2^v}, S_{\infty} = 1. \quad 427. S_v = 1 - \frac{2^{v+1}}{(v+2)!}. \quad 428.$$

$$S_v = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2v+1)} \right\}, S_{\infty} = \frac{1}{2}. \quad 429. \alpha_v = A \omega_1^{v-1} + B \omega_2^{v-1} \quad \delta \pi \omega \nu \quad \omega_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2},$$

$$\omega_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, A = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10}, B = -\frac{3\sqrt{5} - 5}{10} \quad \kappa \alpha \iota \quad S_v = A \frac{\omega_1^v - 1}{\omega_1 - 1} + B \frac{\omega_2^v - 1}{\omega_2 - 1}. \quad 430.$$

$$p = x, q = 6x^2, \alpha_v = x^{v-1} \{ -3^{v-1} - (-2)^v \}. \quad 431. \alpha_v = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{10} \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{v+1} -$$

$$- \frac{3\sqrt{5} - 5}{10} \cdot \left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{v+1} - 1. \quad 432. \text{ i) } \alpha_v = (4^{v-1} + 3^{v-1}) x^{v-1}, S_v = \frac{4^v x^v - 1}{4x - 1} +$$

$$+ \frac{3^v x^v - 1}{3x - 1}, \text{ ii) } \alpha_v = \frac{1}{5} \{ 8(-1)^v + 2^{2v-3} \}, S_v = \frac{4}{5} \{ (-1)^v - 1 \} + \frac{1}{80} (2^{2v-3}).$$

$$433. p = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3, q = -(\omega_1 \omega_2 + \omega_2 \omega_3 + \omega_3 \omega_1), r = \omega_1 \omega_2 \omega_3. \quad 435. \alpha_v = \frac{25 + 11\sqrt{5}}{2}.$$

$$\cdot \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{v-1} + \frac{25 - 11\sqrt{5}}{5} \cdot \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{v-1}. \quad 436. 4 = \log_5 81 \quad \kappa \tau \lambda. \quad 437. 5^2 = 25,$$

$$\frac{5}{8} = 32 \quad \kappa \tau \lambda. \quad 438. x = 2, 4, -1, 1/2, -5/2, 4, 4, 3/2, 2^{-1}, a, 1/a. \quad 439. 0,602, 0,954, 0,778, 1,431, 0,176, -0,176, -0,352, 1,801, -0,477, -2,602, 0,699, 1,176, 1,398, 2,130, 1,732, 0,100, 0,2301, 0,1079. \quad 440. x = 4 \quad \eta \quad 1/2. \quad 441. (4\beta - 2\alpha - 1)/5\beta. \quad 444. 1830 \log 5 = 1279,1. \quad 445. \text{ i) } \log \alpha / \log \beta, \text{ ii) } -0,64, 0,06. \quad 446. x = 4 \quad \eta \quad \sqrt{2}. \quad 447. x = 0,1 \quad \eta \quad 5. \quad 448. x = 100 \quad \eta \quad 1/\sqrt{10}. \quad 450. 0 < \alpha < 0,1 \quad \eta \quad \alpha > 1. \quad 452. 1928, 0,22585, 321507, 0,83154, 0,02869, 6,8305. \quad 453. 9. \quad 454. x = 0,1784. \quad 455. x = 0,3037. \quad 456. 2,319. \quad 457. x = 4,7, 0,83154, 0,02869, 6,8305. \quad 458. \alpha = 1,40 \quad \eta \quad 0,716. \quad 460. \text{ 'O } \delta \sigma \varsigma \delta \rho \sigma \varsigma. \quad 461. 90000. \quad 463. \text{ i) } -0,5168, \text{ ii) } 1,205, y = 1,5. \quad 458. \alpha = 1,40 \quad \eta \quad 0,716. \quad 460. \text{ 'O } \delta \sigma \varsigma \delta \rho \sigma \varsigma. \quad 461. 90000. \quad 463. \text{ i) } -0,5168, \text{ ii) } 1,205,$$

$$\text{iii) } 4,721 \quad \eta \quad -0,271. \quad 464. \text{ i) } -0,11, \text{ ii) } 7,129, \text{ iii) } x = \frac{1}{\log \beta} \log \left(\frac{\log \gamma}{\log \alpha} \right), \alpha \quad \kappa \alpha \iota \quad \gamma \quad \sigma \nu \gamma -$$

$$\chi \rho \acute{o} \nu \omega \varsigma > 1 \quad \eta \quad < 1. \quad 465. x = 3/2. \quad 466. x = 5/2. \quad 467. x = 2. \quad 468. (1, 1) \quad \eta \quad (0, 10^{-1}). \quad 469.$$

$$x = \left(\frac{\log \alpha}{\log \beta} \right)^{\beta/(\alpha - \beta)}, y = \left(\frac{\log \alpha}{\log \beta} \right)^{\alpha/(\alpha - \beta)}, \alpha > 0, \beta > 0, \log \alpha \log \beta > 0. \quad 470. x = y = 1/81 \quad \eta$$

$$x = y = 1. \quad 471. x = -8. \quad 472. x = (3 + \sqrt{1769})/8. \quad 473. 2/5 < x < 23/54. \quad 474. x = 1/10 \quad \eta$$

$$10 \quad \eta \quad -5 + \sqrt{226}. \quad 475. x = 1,6113. \quad 476. x = 3^{-1} \quad \eta \quad 3'. \quad 477. \text{ 'E} \acute{\alpha} \nu \alpha \neq \beta, x = 1/a, y = 1/\beta. \quad 478. x = 5, y = 400 \quad \eta \quad (20, 25). \quad 479. 2 < x < 5. \quad 480. x = 15, y = 10 \quad \eta \quad 3/25, 2/25. \quad 481.$$

$$\alpha \left(1 + \frac{\tau}{2} \right)^{2v}, \alpha \left(1 + \frac{\tau}{4} \right)^{4v} \quad \kappa \tau \lambda. \quad 482. 7,72\%. \quad 483. 32 \quad \epsilon \tau \eta \quad 228 \quad \acute{\eta} \mu \epsilon \rho. \quad 484. \text{ \text{Τ}ο} \upsilon \quad 15 \omega \nu$$

$$\acute{\epsilon} \tau \omega \varsigma. \quad 485. k = \alpha \{ (1 + \tau)^v - 1 \} / \tau (1 + \tau)^{v-1}. \quad 486. 130000. \quad 487. 17725 \quad \delta \rho \chi. \quad 488. v = 20, \acute{\eta}$$

$$20 \acute{\eta} \quad \delta \acute{o} \sigma \iota \varsigma \quad \kappa \alpha \tau \acute{\alpha} \quad \tau \iota \quad \mu \epsilon \gamma \alpha \lambda \upsilon \tau \epsilon \rho \alpha. \quad 489. 553393 \quad \delta \rho \chi. \quad 490. \text{ 'O } \kappa \acute{\upsilon} \beta \rho \varsigma. \quad 491. \text{ \text{Π}λευρά} \text{ τετραγώ-}$$

$$\nu \omega \nu \quad \acute{\epsilon} \gamma \gamma \epsilon \gamma \rho. \quad 492. \text{ 'Ακτίς βάσεως } \alpha \sqrt{3}/3, \acute{\upsilon} \phi \omega \varsigma \quad 2\alpha \sqrt{3}/3. \quad 493. \alpha/6 \quad \acute{\alpha} \rho \alpha \kappa \acute{o} \lambda \upsilon \pi \tau \epsilon \tau \alpha \iota. \quad 494.$$

$$\text{Πρέπει } x = y\sqrt{2}, \delta \pi \omega \nu \quad x \quad \acute{\eta} \quad \acute{\alpha} \kappa \tau \iota \varsigma, y \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\upsilon} \phi \omega \varsigma. \quad 495. x = \sqrt{\frac{3v}{\pi \sqrt{2}}}, y = \sqrt{\frac{6v}{\pi}}, \delta \pi \omega \nu \quad x \quad \acute{\eta}$$

$$\acute{\alpha} \kappa \tau \iota \varsigma \quad \beta \acute{\alpha} \sigma \epsilon \omega \varsigma \quad \kappa \alpha \iota \quad y \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\upsilon} \phi \omega \varsigma. \quad 496. \text{ \text{Τ}ὸ} \quad \text{ἰσοπλευρον}. \quad 497. \text{ \text{Τ}ὸ} \quad \acute{\epsilon} \chi \omega \nu \quad \mu \acute{\iota} \alpha \nu \quad \gamma \omega \nu \acute{\iota} \alpha \nu \quad 30^{\circ}.$$

$$498. R\sqrt{3}/3. \quad 499. 3\alpha/2 \quad \kappa \alpha \iota \quad 3\beta \quad \eta \quad \acute{\alpha} \kappa \tau \iota \varsigma \quad \beta \acute{\alpha} \sigma \epsilon \omega \varsigma \quad \kappa \alpha \iota \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\upsilon} \phi \omega \varsigma \quad \tau \acute{o} \upsilon \quad \kappa \acute{\omega} \nu \omega \nu. \quad 500. \text{ 'O} \tau \alpha \nu$$

$$x = y = z. \quad 501. \text{ 'O} \tau \alpha \nu \quad x = y = z. \quad 502. \text{Max} = 1/2. \quad 503. \alpha) 1/2 \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\epsilon} \lambda \acute{\alpha} \chi., 11/2 \quad \tau \acute{o} \quad \mu \acute{\epsilon} \gamma.,$$

$$\beta) -3 \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\epsilon} \lambda \acute{\alpha} \chi., 7 \quad \tau \acute{o} \quad \mu \acute{\epsilon} \gamma. \quad \gamma) -3 \quad \tau \acute{o} \quad \acute{\epsilon} \lambda \acute{\alpha} \chi., 1 \quad \tau \acute{o} \quad \mu \acute{\epsilon} \gamma. \quad 506. \text{ i) } 2 \left(\sin \frac{\pi}{3} + i \eta \mu \frac{\pi}{3} \right),$$

- $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{3}$, ii) $1 \cdot \left(\sin \frac{\pi}{2} + i\eta \mu \frac{\pi}{2} \right)$, $\theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, iii) $2\sqrt{2} \left(\sin \frac{7\pi}{4} + i\eta \mu \frac{7\pi}{4} \right)$, $\theta=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$. 507. $\sin \frac{\pi}{6} + i\eta \mu \frac{\pi}{6}$. 508. i) $120^\circ + K \cdot 360^\circ$, ii) $150^\circ + k \cdot 360^\circ$. 509. $-64+0 \cdot i$. 511. $\sin^7 \theta = \sin^6 \theta - 21 \sin^5 \theta \eta \mu^2 \theta + 35 \sin^4 \theta \eta \mu^4 \theta - 7 \sin^3 \theta \eta \mu^6 \theta$, $\eta \mu^7 \theta = \sin^6 \theta \eta \mu \theta - 35 \sin^4 \theta \eta \mu^3 \theta + 21 \sin^2 \theta \eta \mu^5 \theta - \eta \mu^7 \theta$. 515. i) $3 \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i\eta \mu \left(\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right\}$, διὰ $k=0, 1, 2$. ii) $\pm(1+i\sqrt{3})$, $\pm(\sqrt{3}-i)$. iii) $\frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$, 1. 516. i) ± 2 , $\pm 2i$, ii) $3 \left\{ \sin \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right) + i\eta \mu \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2k\pi}{5} \right) \right\}$, διὰ $k=0, 1, 2, 3, 4$, iii) $\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. 525. i) 'Επὶ περιφερείας, ii) ἐπὶ εὐθείας $\perp$ πρὸς τὸν παραγμ. ἄξονα. 530. $x>1$, 531. α) (5, 3, 1), (-3, -5, 9). β) 8 λύσεις: $\left(\varepsilon \cdot \frac{9}{2}, \varepsilon \cdot \frac{3}{2}, \eta \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \right)$, $\left(\varepsilon \cdot \frac{3}{2}, \varepsilon \cdot \frac{9}{2}, \eta \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2} \right)$ ὅπου $\varepsilon=+1$ ἢ -1 καὶ $\eta=+1$ ἢ -1 . 532. 27. 533. Ὑπάρχει. 534. ($x=4$, $y=1$). 535. α) $x=(1+\sqrt{13})^2/4$, β) $x=1$ ἢ 3. 537. *Οχι. 538. 1) $(-1, 1/6)$, 2) $(-3, -1/3)$ ἢ $(-1/3, -3)$. 539. β) 6. 540. ± 1 , $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$. 541. $-2x^3+2x^2+x+5$. 543. (4, 6, 8). 545. $(\beta-1)/2$, 550. (1, 3, ..., (2v-1)) καὶ $\left(\frac{v+1}{2}, \frac{v+3}{2}, \dots, \frac{3v-1}{2} \right)$ ἀν. v περιττ.). 551. i) 6, ii) 4, iii) 7^8 ἢ 7^{-5} . 552. $\frac{7}{27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{108} + \frac{53}{112} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{68} + \frac{1}{5712}$. 553. $x<-3$, $x>2$, $-1<x<1$. 554. $1<\mu\leq 2$. 556. $\eta \alpha \left(\frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{2^{2v}} \right)$ διὰ $\lambda=1, 2, 3, \dots, v$. 561. $\frac{\mu\nu}{\mu+\nu}$. 562. $3^3 \cdot 5^4$. 563. $\sqrt{\lambda^2+(a_1+a_2+\dots+a_v)^2}$. 567. $x=a(1+\varepsilon\sqrt{5})/2$, $y=a(-1+\varepsilon\sqrt{5})/2$ ὅπου $\varepsilon=\pm 1$. 568. $(x+y+\omega)^3 \cdot (-x+y+\omega) \cdot (-x-y+\omega) = 16\omega^2(x+y-\omega)$. 569. $\alpha\sqrt{0.8}$. 570. $y=10$. 572. $\frac{1}{4}(x-1)^2+3x+5$. 573. $2^2 \cdot 3^4$ ἢ $2^4 \cdot 3^2$. 574. $1<\omega<(1+\sqrt{5})/2$. 578. $\{(x-1)^{2\mu-2}-2(x-1)^{2\mu-3}+2^2(x-1)^{2\mu-4}+\dots+2^{2\mu-2}\}/4^\mu + \{(x+1)^{2\nu-2}+\dots+2^{2\nu-2}\}/2^\nu$. 579. $x=y=\omega=\lambda/3$ ἢ $x=-\frac{\lambda}{6} \frac{(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)} + \frac{\lambda}{3}$ καὶ κυκλικῶς. 580. $x=160$ ἢ 40. 581. Ἀνάγεται εἰς τὴν ἀσχ. 602, Α'. Τόμ. 582. Ἡ μικροτέρα πλευρὰ, εἶναι ρίζα τῆς $(16S^2-3)x^2-6\lambda x+9\lambda^2=0$. 1 λύσις ὅταν $0<S\leq \frac{\sqrt{3}}{4}$, ἢ $S=\frac{1}{2}$, 2 λύσεις ὅταν $\frac{\sqrt{3}}{4}<S<\frac{1}{2}$. 585. $1+\sqrt{3}$, $2+\sqrt{5}$, $3-2\sqrt{2}$. 587. $A=v$, $B=-(v+1)$. 590. $x=2q$, $y=q$, $z=q$, q , τυ' χὼν ἀκέραιος. 591. $(a+2)(2a-1)\neq 0$, μία λύσις, $a=-2$, καμμία, $a=1/2$, ἄπειροι λύσεις: $x=k$, $y=(2-6k)/3$, k αὐθαίρ. 592. $a_k = \frac{3k-4}{k(k+1)(k+2)}$, $S_\infty=1$. 598. $\alpha=q$, $\beta=2q$, $\gamma=3q$, q φυσικὸς ἀριθμ. 599. $\pm \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pm i$. 600. Ἐάν $\mu(\mu+1)(\mu-2)\neq 0$, μία λύσις: $x=2\mu/(1+\mu)$, $y=1-\mu$, $z=(1+\mu^2)/(1+\mu)$. Ἐάν $\mu=-1$, καμμία λύσις. Ἐάν $\mu=2$, ἄπειροι λύσεις: $4t$, $-3t$, $5t$, (t αὐθαίρ.). Ἐάν $\mu=2$, ἄπειροι λύσεις: $x=4$, $y=k$ (αὐθαίρ.), $z=8+k$. 603. (7, 3, 6, 4), (7, 3, -4, -6), (3, 7, 6, 4), (3, 7, -4, -6). 604. $\alpha=2$, $\beta=0$,

- $\gamma = \tau \nu \chi \acute{\omega} \nu$. 605. i) (50, 14), (50, -14), ii) (1, 2, 1), (2, 1, 1), (-1, -2, -1), (-2, -1, -1).
 606. i) $p^2 > 4(1+m)$. ii) $p^2 = 4+5m$. 607. $\alpha^2(\nu+1)(4\nu-1)/6\nu$. 609. $\pm 3 + \sqrt{29}$, $z =$
 $= \frac{\pm 6}{\sqrt{29}} + 1 + \left(\frac{\pm 15}{\sqrt{29}} + 2 \right) i$, τὸ + διὰ τὸ μέγιστον, τὸ - διὰ τὸ ἐλάχισ. 610. $-\frac{15}{6} < \lambda < -\frac{8}{5}$.
 613. $(1+x+x^2+\dots+x^{\nu-1})(1+x+\dots+x^{\nu+1})$. 615. $P=0$ μόνον ὅταν $x=y=z=\omega=0$. 616.
 $(-2, -4i/3, -i/3)$. 619. $S_\nu = \frac{x}{1-x} - \frac{x^{2\nu}}{1-x^{2\nu}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{2\nu}}$, οἱ $S_\nu = \frac{x}{1-x}$.
 621. $\lambda = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_\nu y_\nu}{x_1^2 + \dots + x_\nu^2}$, $\mu = \frac{y_1^2 + \dots + y_\nu^2}{x_1 y_1 + \dots + x_\nu y_\nu}$, ὅταν $\frac{x_1}{y_1} = \dots = \frac{x_\nu}{y_\nu}$ τότε $\lambda = \mu$.
 622. i) $\nu=3\mu-5$. ii) 'Εάν $\mu < -15$, τρεῖς διάφοροι πραγμ. ρίζαι. 'Εάν $\mu = -15$ μία ἀπλῇ
 $(x=-1)$ καὶ μία διπλῇ ($x=5$). 'Εάν $-15 < \mu < 1$, μία μόνη πραγματικὴ (ἢ $x=-1$).
 'Εάν $\mu=1$, μία ρίζα (ἢ $x=-1$). 'Εάν $\mu > 1$, τρεῖς ρίζαι ἐκτὸς ὅταν $\mu=3$ ὅποτε,
 μία διπλῇ (ἢ $x=-1$) καὶ μία ἀπλῇ ($x=+2$), iii) $\mu = -15$ ἢ 1 ἢ -1. 625. $1-(1-\alpha)^\beta +$
 $+(1-\alpha)^{2\beta}$. 626. $(\sqrt{10}/2, 100)$, $(1/2, 1)$. 628. 63936. 629. $\beta = -15$, $\gamma = 10$. 630. $|z_\nu| =$
 $= 1/2^{\nu-1} \eta \mu \frac{\pi}{2^\nu}$, οἱ $|z_\nu| = \frac{2}{\pi}$.
 $\nu \rightarrow \infty$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

'Η αὐτὴ μετὰ τὴν τοῦ Α'. τόμου. Τινὲς τῶν προτεινομένων ἀσκήσεων ἐλήφθησαν ἀπὸ ζητήματα τῶν εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων τοῦ Ε. Μ. Πολυτεχνείου (ὅπως αἱ ἐπ' ἀριθμ. 84, 92, 152, 153, 167, 178, 182, 227, 235, 275, 296, 306, 328, 329, 337, 367, 372, 373, 386, 402, 404, 405, 414, 418, 429, 467, 473, 478, 484, 489, 500, 536, 566, 577, 579, 584, 593, 597, 599, 602, 616, 620). 'Η ἐπ' ἀριθμ. 214 ἀσκησης ἐλήφθη ἀπὸ διάλεξιν τοῦ κ. Φ. Σπηλιώτη δοθεῖσαν ἐν τῇ Ἑλλην. Μαθημ. Ἐταιρείᾳ.



0020632705

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ ΒΟΥΛΗΣ

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής

