Νικόλαος Κοντός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Β' Λυκείου

Μιγαδικοί Ἀριθμοί

Ρέκος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ἐκδότες: *Γιάννης Ρέκος & Σία Ο.Ε.*
Τυπογραφική διόρθωση: *Α. Κεσόπουλος - Ν. Κοντός*
Φωτοστοιχειοθέτηση: *Θ. Γεωργιάδης & Σία Ο.Ε.*
Βασ. Ὄλγας 42, τηλ. 84.62.88, Θεσσαλονίκη.
Σελιδοποίηση: *Στέλλα Χατζησυμεών.*

Ἐκδοτικός Οἶκος Ι. Ρέκου & Σία Ο.Ε.
Θεσσαλονίκη: Ἁγ. Μηνᾶ 13, Τηλ. 271.063 - 269.062
Ἀθήνα: Κλεισθένους 15, Τηλ. 32.51.564 - 32.42.104
Ἐργοστάσιο Γραφικῶν Τεχνῶν: 7ο χλμ. Ὡραιοκάστρου, Τηλ. 696.587 - Θεσ/νίκη

EMM

Δ 3

Κοντός (Ν.Κ.)

Νικόλαος Κοντός

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Λυκείου

Βοήθημα γιά διδάσκοντες καί διδασκομένους

Ρέκος

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τό βιβλίο αὐτό περιέχει μία συλλογή ἀσκήσεων πάνω στούς Μιγαδικούς ἀριθμούς. Οἱ ἀσκήσεις αὐτές ἀναφέρονται στίς πρῶτες καί βασικές γνώσεις πού πρέπει κάποιος νά ἔχει γιά νά προχωρήσει βαθύτερα στήν μελέτη τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Οἱ γνώσεις αὐτές ἀποτελοῦν καί τήν ὕλη ἐπιλογῆς τῶν μαθητῶν τῆς Β΄ Λυκείου στό συγκεκριμένο κεφάλαιο καί ἔτσι ἀποτελεῖ ἕνα χρήσιμο βοήθημα γιά τίς ἐξετάσεις.

Στήν ὕλη περιέχεται μία συνοπτική θεωρία, λυμένες ὑποδειγματικά ἀσκήσεις, καί ἀσκήσεις γιά λύση.

Ἡ ἀπαραίτητη λύση προτάσεται δίχως ἀποδείξεις. Στή συνέχεια ἀκολουθοῦν 129 λυμένες ἀσκήσεις χωρισμένες σέ ὁμάδες ὡς ἑξῆς: Ἀπό τήν ἄσκηση 1 ὡς καί τήν 15 ἔχουμε ἀσκήσεις πάνω στήν ἰσότητα μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀπό τήν 16 ἄσκηση μέχρι καί τήν 55 ἔχουμε πάνω στή συζυγία καί τά μέτρα τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἀπό τήν 56η ἄσκηση μέχρι καί τήν 86η ὑπάρχουν ἀσκήσεις πάνω στήν τριγωνομετρική μορφή τῶν μιγαδικῶν καί τόν τύπο τοῦ Moivre. Ἀπό τήν ἄσκηση 87 μέχρι καί τήν 97 ἔχουμε ἀσκήσεις πάνω στίς μιγαδικές ρίζες τῆς μονάδας. Ἀπό τήν ἄσκηση 98 μέχρι καί τήν ἄσκηση 123 ἔχουμε ἀσκήσεις πάνω στίς ἐξισώσεις μέ μιγαδικούς ἀριθμούς. Ἀπό τήν ἄσκηση 124 μέχρι καί τήν ἄσκηση 129 ἔχουμε ἀσκήσεις καί ἀθροίσματα.

Ἀκολουθοῦν 258 ἄλυτες ἀσκήσεις ὁμαδοποιημένες μέ τήν ἴδια σειρά καί μέ τά ἑξῆς νούμερα: 1η ὁμάδα 1–39, 2η ὁμάδα 40–102, 3η ὁμάδα 103–171, 4η ὁμάδα 177–195, 5η ὁμάδα 201–248, 6η ὁμάδα 249–258.

Στή συνέχεια ἔχουμε οδηγίες γιά τή λύση αὐτῶν τῶν ἀσκήσεων. Ἔχουμε μετά μιά συνοπτική θεωρία στήν γεωμετρία τῶν μιγαδικῶν μέ 21 λυμένες ἀσκήσεις, οδηγίες γιά τή λύση καί 30 ἄλυτες.

Τέλος τό βιβλίο κλίνει μέ γενικές ἐρωτήσεις θεωρίας. Βέβαια ἡ παραπάνω κατανομή τῶν ἀσκήσεων δέν εἶναι ἀπόλυτη γιατί δέν εἶναι δυνατόν νά γίνει κάτι τέτοιο ἀφοῦ οἱ διάφορες γνώσεις συνδυάζονται γιά τή λύση τῶν διαφόρων ἀσκήσεων. Ἔγινε ὅμως ἡ ὁμαδοποίηση αὐτή στό μέτρο τοῦ δυνατοῦ.

Πιστεύω ὅτι τό βιβλίο αὐτό εἶναι ἕνα χρήσιμο βοήθημα καί γιά τούς μαθητές τῆς Β΄ Λυκείου ἀλλά καί γιά τούς συναδέλφους λόγω τῆς πληθώρας τῶν ἀσκήσεων καί τῆς μεθοδολογίας.

N.K.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Περιληπτική Θεωρία

1. Κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $\alpha \pm \beta i$ μέ $\alpha \in R$, $\beta \in R$ καί $i^2 = -1$, θά λέγεται ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ.

Οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, «συμπεριφέρονται» ὅπως καί τά διώνυμα $\alpha + \beta x$ μέ $x = i$.

Ἔτσι ἄν $\quad z_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$

$\qquad\qquad z_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$

θά ἔχουμε

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2)i$$

καί

$$z_1 . z_2 = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i$$

2. Θεωροῦμε τό σύνολο $C = \{z / z = (\alpha, \beta),\ \alpha \in R,\ \beta \in R\}$ ἐφοδιασμένο μέ τίς πράξεις:

ΠΡΟΣΘΕΣΗ $\quad (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2\ ,\ \beta_1 + \beta_2)$

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ $\quad (\alpha_1, \beta_1) . (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2\ ,\ \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$

ΙΣΟΤΗΤΑ $\quad (\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$ καί $\beta_1 = \beta_2$

Τό σύνολο C εἶναι τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, καί τό τυχόν στοιχεῖο $(\alpha, \beta) \in C$ παριστάνει τό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha + \beta i$.

Ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες:

I_1 $z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \; \forall \; z_1, z_2 \in C$ **(ἀντιμεταθετική)**

I_2 $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \; \forall \; z_1, z_2, z_3 \in C$ **(προσεταιριστική)**

I_3 $z_1 = z_2 \Leftrightarrow z_1 + z = z_2 + z, \; \forall \; z, \; z_1, z_2 \in C$ **(διαγραφῆς)** (στήν πρόσθεση)

I_4 Ὑπάρχει μοναδικός μιγαδικός $\mathbf{z^* = 0 + 0i = 0}$ μέ τήν ἰδιότητα

$z + z^* = z^* + z = z, \; \forall \; z \in C$ **(προσθετικό οὐδέτερο)**

I_5 Δοθέντος τοῦ $z = \alpha + \beta i$, ὑπάρχει μοναδικός μιγαδικός

$$\boxed{-z = -\alpha - \beta i,}$$

μέ τήν ἰδιότητα

$z + (-z) = (-z) + z = z^* = 0$ **(ἀντίθετος)**

I_6 $z_1.z_2 = z_2.z_1, \; \forall \; z_1, z_2 \in C$ **(ἀντιμεταθετική)**

I_7 $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3, \; \forall \; z_1, z_2, z_3 \in C$ **(προσεταιριστική)**

I_8 $\forall \; z, z_1, z_2 \in C$ καί $z_1 \neq 0, \; z_2 \neq 0, \; z \neq 0$, εἶναι

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow z.z_1 = z.z_2$ **(διαγραφῆς)** (στόν πολ/σμό)

I_9 Ὑπάρχει μοναδικός $z^* \in C$ ὥστε

$$z.z^* = z^*.z = z, \; \forall \; z \in C$$

Αὐτός εἶναι: $\mathbf{z^* = 1 + 0i = 1}$ **(πολ/κό οὐδέτερο)**

I_{10} Ὑπάρχει μοναδικός $z^* \in C$ ὥστε

$$z.z^* = z^*.z = 1, \; \forall \; z \in C$$

Αὐτός εἶναι: $z^* = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{-\beta}{\alpha^2+\beta^2} i$, ὅταν $z = \alpha + \beta i$

Ὁ z^* ὀνομάζεται **ἀντίστροφος** τοῦ z, συμβολίζεται μέ z^{-1} καί ὑπάρχει ὅταν $z \neq 0$.

I_{11} $z_1.(z_2 \pm z_3) = z_1.z_2 \pm z_1.z_3$, $\forall$ $z_1, z_2, z_3 \in C$ **(ἐπιμεριστική)**

3. **ΠΗΛΙΚΟ** τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z_1 διά τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ z_2, λέγεται ἕνας μιγαδικός z_3 μέ τήν ἰδιότητα

$$z_1 = z_2 . z_3$$

καί γράφουμε: $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$.

4. Ὀνομάζουμε **φανταστική μονάδα** τό μιγαδικό $i = (0,1)$. Προκύπτουν ἀμέσως τά ἀκόλουθα:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (-1,0) = -1$$

$$i^3 = i^2.i = (-1,0).(0,1) = (-1).(0,1) = -i$$

$$i^4 = i^2.i^2 = (-1,0).(-1,0) = (1,0) = 1$$

Γενικότερα ὁρίζεται ὁ ἀριθμός i^ν, $\nu \in N$ ὡς ἑξῆς: ὁ ν ὅταν διαιρεθεῖ μέ τόν ἀριθμό 4 θά πάρει μιά ἀπό τίς τιμές

$\nu = 4k$

$\nu = 4k + 1$

$\nu = 4k + 2$ ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots$

$\nu = 4k + 3$

Ἀντίστοιχα τό i^ν θά εἶναι:

$\nu = 4k$ $i^{4k} = 1$, $\nu = 4k + 2$ $i^{4k+2} = -1$

$\nu = 4k + 1$ $i^{4k+1} = i$, $\nu = 4k + 3$ $i^{4k+3} = -i$

5. Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, ὀνομάζουμε **ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ** τοῦ z τόν $\alpha \in R$ καί γράφουμε:

$$\boxed{Re(z) = \alpha}$$

Ἐπίσης ὀνομάζουμε **ΦΑΝΤΑΣΤΙΚΟ ΜΕΡΟΣ** τοῦ z τόν $\beta \in R$ καί γράφουμε:

$$\boxed{Im(z) = \beta}$$

6. Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, ὀνομάζουμε **ΣΥΖΥΓΗ** τοῦ z τό μιγαδικό $\bar{z} = \alpha - \beta i$.

Ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$$\boxed{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}} \qquad \boxed{Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$\mathbf{I_1}$ $\quad \bar{\bar{z}} = z$

$\mathbf{I_2}$ $\quad z = \bar{z} \Leftrightarrow Im(z) = 0$

$\mathbf{I_3}$ $\quad \overline{(-z)} = -\bar{z}$

$\mathbf{I_4}$ $\quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$

$\mathbf{I_5}$ $\quad \overline{z_1 . z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$\mathbf{I_6}$ $\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$

$$\mathbf{I_7} \quad \overline{z_1 \pm z_2 \pm \ldots \pm z_\nu} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \pm \ldots \pm \bar{z}_\nu$$

$\mathbf{I_8}$ $\quad \overline{z_1 . z_2 \ldots z_\nu} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2 \ldots \bar{z}_\nu$

$\mathbf{I_9}$ $\quad \overline{(z^\nu)} = \bar{z}^\nu, \quad \forall \; \nu \in N$

$$\mathbf{I_{10}} \quad \bar{i} = -i$$

7. Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, ὀνομάζουμε **ΜΕΤΡΟ** τοῦ z καί συμβολίζουμε μέ $|z|$, τό μή ἀρνητικό ἀριθμό $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καί γράφουμε:

$$|z| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

I_1 $\quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

I_2 $\quad |z| = |-z| = |\bar{z}|$

I_3 $\quad |z|^2 = z.\bar{z}$

I_4 $\quad \big| |z_1| - |z_2| \big| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

I_5 $\quad |z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_\nu|, \ \forall \nu \in N$

I_6 $\quad |z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

I_7 $\quad |z_1 . z_2 \ldots z_\nu| = |z_1| . |z_2| \ldots |z_\nu|, \quad \forall \nu \in N$

I_8 $\quad |z^\nu| = |z|^\nu, \quad \forall \nu \in N$

I_9 $\quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$

I_{10} $\quad |z^{-1}| = |z|^{-1}$

8. Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, ὀνομάζουμε **ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ** τοῦ z, κάθε μιγαδικό υ πού ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $\upsilon^2 = z$.

Κάθε μιγαδικός z ἔχει πάντοτε **δύο** διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες.

9. Κάθε μιγαδικός ἀριθμός $z = \alpha + \beta i$, μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή:

$$z \;=\; \rho.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \quad \text{(ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΜΙΓΑΔΟΣ)}$$

ὅπου

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\,, \quad \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,, \quad \eta\mu\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

Τά ρ, θ ὀνομάζονται ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ τοῦ z.

Τό ρ ἐκφράζει τό $|z|$.

Ἡ θ εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ὁ θετικός ἡμιάξονας Ox μέ τή διανυσματική ἀκτίνα πού συνδέει τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων μέ τήν εἰκόνα τοῦ z στό μιγαδικό ἐπίπεδο, μετρούμενη μέ τή θετική φορά διαγραφῆς τῶν γωνιῶν. Θά εἶναι πάντοτε:

$$\boxed{\mathbf{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi}}$$

Ἡ γωνία θ, λέγεται ΠΡΩΤΕΥΟΝ ΟΡΙΣΜΑ τοῦ z.

Κάθε ἄλλη γωνία τῆς μορφῆς $\theta + 2\lambda\pi$, $\lambda \in Z$ θά λέγεται ΟΡΙΣΜΑ τοῦ z.

Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, γιά τό πρωτεῦον ὄρισμα θά γράφουμε $\boxed{\mathbf{Arg(z) = \theta}}$, ἐνῶ γιά τό ὄρισμα θά γράφουμε $\boxed{\mathbf{arg(z) = \theta}}$.

Σέ πολλά βιβλία γιά τό πρωτεῦον ὄρισμα θ, ἀντί τοῦ περιορισμοῦ $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ χρησιμοποιεῖται ὁ περιορισμός $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Ἔστω $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$, $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$

I₁ $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ καί $Arg(z_1) = Arg(z_2)$

I₂ $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2$ καί $arg(z_1) = 2k\pi + arg(z_2)$, $k \in Z$

I₃ $|z_1 . z_2| = \rho_1 . \rho_2$ καί $Arg(z_1.z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

ἐνῶ $arg(z_1 . z_2) = arg(z_1) + arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in Z$

I_4 $|z_1 . z_2 \ldots z_\nu| = \rho_1 . \rho_2 \ldots \rho_\nu$ καί

$\operatorname{Arg}(z_1 . z_2 \ldots z_\nu) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2) + \ldots + \operatorname{Arg}(z_\nu)$

$\arg(z_1 . z_2 \ldots z_\nu) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \ldots + \arg(z_\nu) + 2k\pi,$

$k \in Z$ ὅπου $z_\lambda = \rho_\lambda(\sigma\upsilon\nu\theta_\lambda + i\eta\mu\theta_\lambda)$, $\lambda = 0, 1, 2, \ldots, \nu$

I_5 $|z^\nu| = \rho^\nu$ καί $\operatorname{Arg}(z^\nu) = \nu\theta$, $\nu \in N$

ὅπου $\rho = |z|$, $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$

I_6 $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ καί $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$,

ἐνῶ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi$, $k \in Z$

I_7 Ἄν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ θά εἶναι $|z^{-1}| = \dfrac{1}{\rho}$

καί $\operatorname{Arg}(z^{-1}) = -\operatorname{Arg}(z)$,

ἐνῶ $\arg(z^{-1}) = -\arg(z) + 2k\pi$, $k \in Z$

I_8 **ΤΥΠΟΣ DE MOIVRE**

Ἄν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ τότε

$$\boxed{z^\nu = \rho^\nu[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)], \quad \nu \in N}$$

Εἶναι προφανής ἡ σχέση: $\operatorname{Arg}(z^\nu) = \nu \operatorname{Arg} z$ καί

$$\arg(z^\nu) = \nu \arg z + 2k\pi, \quad k \in N$$

I_9 Ὁ τύπος τοῦ De Moivre, ἰσχύει καί ὅταν $\nu \in Z^- - \{0\}$.

Γενικά μποροῦμε νά γράφουμε:

$$\boxed{[\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)]^{\nu} = \rho^{\nu}(\sigma\upsilon\nu\,\nu\theta + i\eta\mu\,\nu\theta)\,, \quad \nu \in Z}$$

10. Δοθέντος τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\xi = \alpha + \beta i$, ὀνομάζουμε νιοστή ρίζα τοῦ ξ, κάθε μιγαδικό $z = x + iy$ μέ τήν ἰδιότητα

$$(x + iy)^{\nu} = \alpha + \beta i$$

Οἱ ρίζες τάξης ν τοῦ μιγαδικοῦ $\xi = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$, $\rho \neq 0$ δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\,.\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta+2k\pi}{\nu}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1}$$

Οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας δίνονται ἀπό τόν τύπο:

$$\boxed{z_k = \sigma\upsilon\nu\,\frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1}$$

Ἄν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, ἰσχύουν οἱ τύποι:

$$\boxed{z^{\nu} + z^{-\nu} = 2\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)}\,, \quad \boxed{z^{\nu} - z^{-\nu} = 2i\eta\mu(\nu\theta)}$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ἄν $z = 3 + 2i$, νά ὑπολογιστοῦν: **i)** ἡ τιμή τῆς παράστασης $2Re(z) - 4Im(z)$, **ii)** ὁ z^{-1}, **iii)** ὁ z^3.

Λύση

i) Ἐπειδή $Re(z) = 3$ καί $Im(z) = 2$ θά ἔχουμε:

$$2Re(z) - 4Im(z) = -2$$

ii) $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{3+2i} = \frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

iii) $z^3 = (3+2i)^3 = 27 + 54i + 36i^2 + 8i^3 = 27 + 54i - 36 - 8i =$
$= -9 + 46i.$

2. Ἄν $z_1 = 2\alpha - i$ καί $z_2 = 3 - 4\alpha i$, νά προσδιοριστεῖ ὁ $\alpha \in R$ ὥστε $2\operatorname{Re}(z_1 + z_2) + 3\operatorname{Im}(2z_1 - 3z_2) = 40$.

Λύση

Ἔχουμε:

$z_1 + z_2 = (2\alpha + 3) - (4\alpha + 1)i \Rightarrow 2\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = 2(2\alpha + 3)$

$2z_1 - 3z_2 = 2(2\alpha - i) - 3(3 - 4\alpha i) = (4\alpha - 9) + (12\alpha - 2)i \Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\operatorname{Im}(2z_1 - 3z_2) = 3(12\alpha - 2)$$

Ἄρα θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση:

$$2(2\alpha + 3) + 3(12\alpha - 2) = 40 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

3. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in R - \{0\}$ καί εἶναι $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma}$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$2(\alpha + \beta) + (\beta - \alpha).\gamma i = 5\alpha + i$$

Λύση

Ἄν ὀνομάσουμε τούς ἴσους λόγους k, θά ἔχουμε:

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{3} = \frac{1}{\gamma} = k \Leftrightarrow \alpha = 2k, \ \beta = 3k, \ \gamma = \frac{1}{k}$

Ἄρα

$$2(\alpha + \beta) + (\beta - \alpha)\gamma i = 2(2k + 3k) + (3k - 2k)\frac{1}{k} i =$$

$$= 10k + i = 5\alpha + i$$

4. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $z \in C$, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, δεῖξτε ὅτι:

$$(\beta + \gamma i) = (1 + \alpha)z \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1+zi}{1-zi} = \frac{\alpha+\beta i}{1+\gamma}$$

Λύση

Ἔχουμε:

$$z = \frac{\beta}{1+\alpha} + \frac{\gamma}{1+\alpha} i \Rightarrow zi = -\frac{\gamma}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\alpha} i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + zi = \frac{1+\alpha-\gamma}{1+\alpha} + \frac{\beta}{1+\alpha} i \quad (1)$$

Ἀντιστρόφως

Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότητα:

$$\frac{1+zi}{1-zi} = \frac{\alpha+\beta i}{1+\gamma}$$

θά ἔχουμε: $\dfrac{2zi}{2} = \dfrac{\alpha+\beta i-1-\gamma}{1+\gamma+\alpha+\beta i} =$

$$= \frac{[(\beta-(\alpha-\gamma-1)i].[(\alpha+\gamma+1)-\beta i]}{[(\alpha+\gamma+1)+\beta i].[(\alpha+\gamma+1)-\beta i]} =$$

$$= \frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \beta - [\alpha - (\gamma + 1)].[\alpha + (\gamma + 1)]i - \beta^2 i - (\alpha - \gamma - 1)\beta}{(\alpha + \gamma + 1)^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{\beta\gamma + \beta - [\alpha^2 - (\gamma + 1)^2]i - \beta^2 i + \beta\gamma + \beta}{(\alpha + \gamma + 1)^2 + \beta^2} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma + 2\beta - [\alpha^2 + \beta^2 - (\gamma + 1)^2]i}{\alpha^2 + \gamma^2 + 1 + 2\alpha\gamma + 2\alpha + 2\gamma + \beta^2} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma + 2\beta - [\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\gamma - 1]i}{2 + 2\alpha\gamma + 2\alpha + 2\gamma} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma + 2\beta - [1 - \gamma^2 - \gamma^2 - 2\gamma - 1]i}{2(1 + \alpha).(1 + \gamma)} =$$

$$= \frac{2\beta\gamma + 2\beta - [-2\gamma^2 - 2\gamma]i}{2(1 + \alpha).(1 + \gamma)} =$$

$$= \frac{2\beta(1 + \gamma) + 2\gamma(1 + \gamma)i}{2(1 + \alpha).(1 + \gamma)} = \frac{2(1 + \gamma).(\beta + \gamma i)}{2(1 + \alpha).(1 + \gamma)} = \frac{(\beta + \gamma i)}{1 + \alpha}$$

Ἄρα $\beta + \gamma i = (1 + \alpha) z$ καί ἀποδείχτηκε τό ἀντίστροφο.

'Ανάλογα βρίσκουμε ὅτι:

$$1 - zi = \frac{1+\alpha+\gamma}{1+\alpha} - \frac{\beta}{1+\alpha} i \quad (2)$$

'Από τίς (1) καί (2) προκύπτει:

$$\frac{1+zi}{1-zi} = \frac{(1+\alpha-\gamma)+\beta i}{(1+\alpha+\gamma)-\beta i} = \frac{[(1+\alpha-\gamma)+\beta i].[(1+\alpha+\gamma)+\beta i]}{[(1+\alpha+\gamma)-\beta i].[(1+\alpha+\gamma)+\beta i]} =$$

$$= \frac{(1+\alpha)^2-\gamma^2-\beta^2+\beta(1+\alpha-\gamma+1+\alpha+\gamma)i}{(1+\alpha+\gamma)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{1+\alpha^2+2\alpha-\beta^2-\gamma^2+2\beta(1+\alpha)i}{1+\alpha^2+\gamma^2+2\alpha+2\gamma+2\alpha\gamma+\beta^2} =$$

$$= \frac{1+\alpha^2+2\alpha+\alpha^2-1+2\beta(1+\alpha)i}{2+2\alpha+2\gamma+2\alpha\gamma} =$$

$$= \frac{2\alpha(1+\alpha)+2\beta(1+\alpha)i}{2(1+\alpha).(1+\gamma)} = \frac{\alpha+\beta i}{1+\gamma}.$$

5. Νά γραφοῦν στή μορφή $\alpha + \beta i$ οἱ μιγαδικοί:

i) $\dfrac{3}{2-i\sqrt{3}} - (5 + i\sqrt{2})^{-2}$ **ii)** $\dfrac{2\,\mathrm{Re}(3z+1)}{3i\,\mathrm{Im}(2iz+i)}$ ὅπου $z = 1 - 2i$

iii) $\dfrac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2.(2-3i)}$ **iv)** $\dfrac{(1-2i)^2-(1+i)^3}{(3-2i)^3-(2-i)^2}$

Λύση

i) $$\frac{3}{2-i\sqrt{3}} - (5+i\sqrt{2})^{-2} = \frac{3}{2-i\sqrt{3}} - \frac{1}{(5+i\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{3}{2-i\sqrt{3}} - \frac{1}{23+10\sqrt{2}i} =$$

$$= \frac{3(2+i\sqrt{3})}{(2-i\sqrt{3}).(2+i\sqrt{3})} - \frac{(23-10\sqrt{2}i)}{(23+10\sqrt{2}i).(23-10\sqrt{2}i)} =$$

$$= \frac{6+3\sqrt{3}i}{7} - \frac{23-10\sqrt{2}i}{729} =$$

$$= \left(\frac{6}{7} - \frac{23}{729}\right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{7} + \frac{10\sqrt{2}}{729}\right) i =$$

$$= \frac{4213}{5103} + \frac{2187\sqrt{3}+70\sqrt{2}}{5103} i.$$

ii) $3z + 1 = 3(1-2i) + 1 = 4 - 6i \Rightarrow 2Re(3z+1) = 8$

$$2iz + i = 2i(1-2i) + i = 2i + 4 + i = 4 + 3i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3Im(2iz+i) = 9.$$

Άρα $$\frac{2Re(3z+1)}{3iIm(2iz+i)} = \frac{8}{9i} = -\frac{8}{9}i$$

iii) $$\frac{(4-i)^2-2(1+2i)}{(3+i)^2.(2-3i)} = \frac{15-8i-2-4i}{(8+6i)(2-3i)} = \frac{13-12i}{34-12i} =$$

$$= \frac{(13-12i).(34+12i)}{(34-12i).(34+12i)} = \frac{586-252i}{1300} = \frac{586}{1300} - \frac{252}{1300}i$$

iv) $$\frac{(1-2i)^2-(1+i)^3}{(3-2i)^3-(2-i)^2} = \frac{-3-4i+2-2i}{-81-46i-3+4i} = \frac{-1-6i}{-84-42i} =$$

$$= \frac{1}{42}\cdot\frac{1+6i}{2+i} = \frac{1}{42}\cdot\frac{(1+6i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} =$$

$$= \frac{1}{42}\cdot\frac{8+11i}{5} = \frac{4}{105}+\frac{11}{210}i$$

6. Ἄν $\alpha, \beta, x, y \in R - \{0\}$, δεῖξτε ὅτι

$$x + yi = \frac{\alpha}{\beta+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta} \Rightarrow (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2) + \alpha^2 = 2\alpha\beta x$$

Λύση

Ἔχουμε:

$$x + yi = \frac{\alpha}{\beta+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta} \Leftrightarrow (x + yi)(\beta + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x\beta + x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta) + (x\eta\mu\theta + y\beta + y\sigma\upsilon\nu\theta)i = \alpha$$

Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} x\sigma\upsilon\nu\theta - y\eta\mu\theta = \alpha - x\beta \\ y\sigma\upsilon\nu\theta + x\eta\mu\theta = -y\beta \end{cases}$$ πού λύνουμε ὡς πρός ημθ καί συνθ

καί ἔχουμε $\eta\mu\theta = -\dfrac{\alpha y}{x^2+y^2}$ καί $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\alpha x-\beta(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$.

Ξέρουμε ὅμως ὅτι $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$. Ἄρα

$$\frac{\alpha^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{[\alpha x-\beta(x^2+y^2)]^2}{(x^2+y^2)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2y^2 + \alpha^2x^2 + \beta^2(x^2 + y^2)^2 - 2\alpha\beta x(x^2 + y^2) = (x^2 + y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2(x^2 + y^2) - 2\alpha\beta x = (x^2 + y^2) \Leftrightarrow \alpha^2 + (\beta^2 - 1)(x^2 + y^2) = 2\alpha\beta x$$

7. Ἂν $z = x + iy$ καί $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{\alpha+\beta i} + \dfrac{1}{\alpha+\gamma i}$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma \in R - \{0\}$ δεῖξτε ὅτι:

$$\text{i) } x^2 + y^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$$

ii) $(x - \alpha)^2 + y^2 = \dfrac{(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$ **iii)** $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{\alpha(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$

Λύση

Ἔχουμε: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{2\alpha+(\beta+\gamma)i}{(\alpha+\beta i).(\alpha+\gamma i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{(\alpha+\beta i).(\alpha+\gamma i)}{2\alpha+(\beta+\gamma)i} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{z} = \frac{(\alpha-\beta i).(\alpha-\gamma i)}{2\alpha-(\beta+\gamma)i}$$

i) $x^2 + y^2 = z.\bar{z} = \dfrac{(\alpha+\beta i).(\alpha+\gamma i)}{2\alpha+(\beta+\gamma)i} \cdot \dfrac{(\alpha-\beta i).(\alpha-\gamma i)}{2\alpha-(\beta+\gamma)i} =$

$$= \frac{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$$

ii) Θεωροῦμε τόν μιγαδικό

$$z_1 = z - \alpha = x + iy - \alpha = (x - \alpha) + iy =$$

$$= \frac{(\alpha+\beta i).(\alpha+\gamma i)}{2\alpha+(\beta+\gamma)i} - \alpha = -\frac{\alpha^2+\beta\gamma}{2\alpha+(\beta+\gamma)i}.$$

Ἄρα $\bar{z}_1 = -\dfrac{\alpha^2+\beta\gamma}{2\alpha-(\beta+\gamma)i}$

ὁπότε $x^2 - \alpha)^2 + y^2 = z_1.\bar{z}_1 = \dfrac{(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$

iii)᾿Από τίς σχέσεις (i) καί (ii), ἔχουμε:

$$x^2 + y^2 - (x-\alpha)^2 - y^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2+\gamma^2)-(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha x - \alpha^2 = \frac{(\alpha^2+\beta^2).(\alpha^2+\gamma^2)-(\alpha^2+\beta\gamma)^2}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$$

ἀπό ὅπου προκύπτει $x = Re(z) = \dfrac{\alpha(2\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{4\alpha^2+(\beta+\gamma)^2}$

8.῎Αν $\zeta^2 = 1 + z^2$, $\zeta = \xi + i\eta$, $z = x + iy$, $\xi, \eta, x, y \in R$, νά δειχτεῖ ὅτι:

i) $\dfrac{\xi+x}{\xi-x} = (\xi + x)^2 + (\eta + y)^2 = \dfrac{y+\eta}{y-\eta}$

ii) $2\xi^2 = \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} + 1 + x^2 - y^2$

iii) $2\eta^2 = \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} - 1 - x^2 + y^2$

Λύση

i)῎Εχουμε:

$$\zeta^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow \zeta^2 - z^2 = 1 \Leftrightarrow (\zeta - z).(\zeta + z) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \zeta - z = \frac{1}{\zeta+z} \Leftrightarrow (\xi + i\eta) - (x + iy) = \frac{1}{(\xi+i\eta)+(x+iy)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\xi - x) + (\eta - y)i = \frac{1}{(\xi+x)+(\eta+y)i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (\xi - x) + (\eta - y)i = \frac{(\xi+x)-(\eta+y)i}{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (\xi - x) + (\eta - y)i = \frac{\xi+x}{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2} - \frac{y+\eta}{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2} \cdot i$$

Ἄρα

$$\xi - x = \frac{\xi+x}{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2} \ (1) \quad \text{καί} \quad y - \eta = \frac{y+\eta}{(\xi+x)^2+(\eta+y)^2} \ (2)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1) καί (2) προκύπτει

$$\frac{\xi+x}{\xi-x} = \frac{y+\eta}{y-\eta} = (\xi + x)^2 + (y + \eta)^2$$

ii) Ἀπό τή σχέση $\zeta^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow (\xi + i\eta)^2 = 1 + (x + iy)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \ \xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta i = x^2 - y^2 + 2xyi + 1$$

Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{array}{ll} \xi^2 - \eta^2 = 1 + x^2 - y^2 & (3) \\ \xi\eta = xy & (4) \end{array}$$

Ἀπό (4) $\Rightarrow \eta = \dfrac{xy}{\xi}$ (5). Ἀπό (3) καί (5) ἔχουμε

$$\xi^2 - \frac{x^2y^2}{\xi^2} = 1 + x^2 - y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ \xi^4 - (1 + x^2 - y^2)\xi^2 - x^2y^2 = 0$$

Θεωρώντας τή σχέση πού βρήκαμε σάν ἐξίσωση 2ου βαθμοῦ ὡς πρός ξ^2, θά βροῦμε:

$$\xi^2 = \frac{1+x^2-y^2 \pm \sqrt{(1+x^2-y^2)^2+4x^2y^2}}{2}$$

ἤ $\quad 2\xi^2 = 1 + x^2 - y^2 \pm \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2} \quad (6)$

Εἶναι προφανής ἡ ἀνισότητα $(1 + x^2 - y^2)^2 < (1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 \Leftrightarrow$ $(1 + x^2 - y^2) < \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$. 'Επειδή τό δεύτερο μέλος τῆς (6) πρέπει νά εἶναι θετικός ἀριθμός, ἔχουμε τό ζητούμενο, δηλαδή

$$2\xi^2 = 1 + x^2 - y^2 + \sqrt{(1 + x^2 - y^2) + 4x^2y^2}$$

iii)'Από τό (Σ) βρίσκουμε μέ ἴδια διαδικασία τό η.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ (γιά τά ἐρωτήματα ii) καί iii)

'Από τή σχέση $\zeta^2 = 1 + z^2$ ἔχουμε $|\zeta|^2 = |1 + z^2| \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 =$ $= \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$ (7), $\zeta^2 = 1 + z^2 \Leftrightarrow (\xi + i\eta)^2 = 1 + (x + iy)^2 \Leftrightarrow$ $\xi^2 - \eta^2 + 2\xi\eta i = x^2 - y^2 + 2xyi + 1 \Rightarrow \xi^2 - \eta^2 = 1 + x^2 - y^2$ (8).

Προσθέτοντας κατά μέλη τίς (7) καί (8) ἔχουμε

$$2\xi^2 = 1 + x^2 - y^2 + \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

'Αφαιρώντας κατά μέλη ἔχουμε

$$2\eta^2 = -1 - x^2 + y^2 + \sqrt{(1 + x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2}$$

9. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων:

$$A = 1 + i + i^2 + \ldots + i^\nu$$
$$B = 1 - i + i^2 - i^3 + \ldots + (-1)^\nu i^\nu \quad \text{ὅταν } \nu \in N.$$

Λύση

Ἔχουμε: $A = 1 + i + i^2 + \ldots + i^\nu = \dfrac{1 - i^{\nu+1}}{1 - i}$

'Επειδή οἱ διαφορετικές τιμές τοῦ i^ν εἶναι $1, i, -1, -i$, καί λαμβάνονται γιά τίς τιμές τοῦ

ν, $\nu = 4k$, $\nu = 4k + 1$, $\nu = 4k + 2$, $\nu = 4k + 3$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

ἀντίστοιχα, γιά νά βροῦμε τίς διαφορετικές τιμές τῆς A, ἀρκεῖ νά ἀντικαταστήσουμε τό ν μέ τίς τιμές αὐτές.

"Αν $\nu = 4k$ τότε $A = \dfrac{1-i^{4k+1}}{1-i} = \dfrac{1-i}{1-i} = 1.$

"Αν $\nu = 4k + 1$ τότε $A = \dfrac{1-i^{4k+2}}{1-i} = \dfrac{1+1}{1-i} = 1 + i$

"Αν $\nu = 4k + 2$ τότε $A = \dfrac{1-i^{4k+3}}{1-i} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{2} = i$

"Αν $\nu = 4k + 3$ τότε $A = \dfrac{1-i^{4k+4}}{1-i} = \dfrac{1-1}{1-i} = 0$

Γιά τήν παράσταση B παρατηροῦμε ὅτι:

$$B = (-i)^0 + (-i)^1 + (-i)^2 + (-i)^3 + \ldots + (-1)^\nu i^\nu = \frac{1-(-i)^{\nu+1}}{1-(-i)}$$

"Αν ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο, θά βροῦμε τίς τιμές τῆς B πού εἶναι $1,\ 1-i,\ -i,\ 0.$

10. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παράστασης

$$i + (2 + 3i) + (4 + 5i) + (6 + 7i) + \ldots + [2\nu - 2 + (2\nu - 1)i] \quad \nu \in N$$

Λύση

Ἡ παράσταση γράφεται:

$$z = [2 + 4 + 6 + \ldots + (2\nu - 2)] + [1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2\nu - 1)]i$$

Τό Re(z) εἶναι τό ἄθροισμα τῶν $\nu - 1$ ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου πού ἔχει $\alpha_1 = 2$ καί $\omega = 2$. Ἄρα

$$Re(z) = \frac{(2+2\nu-2).(\nu-1)}{2} = \nu(\nu - 1) \quad (1).$$

Τό Im(z) εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου πού ἔχει $\alpha_1 = 1$ καί $\omega = 2$. Ἄρα

$$Im(z) = \frac{(1+2\nu-1)\nu}{2} = \nu^2 \quad (2).$$

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει

$$\boxed{z = \nu(\nu - 1) + i\nu^2}$$

Ἡ ἄσκηση μπορεῖ νά λυθεῖ καί μέ τήν παρατήρηση ὅτι ἡ δοθείσα παράσταση εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν ὅρων μιᾶς ἀριθμητικῆς προόδου μέ $\alpha_1 = i$ καί $\omega = 2 + 2i$.

11. Ἄν $z_1, z_2 \in C$, δεῖξτε ὅτι $Re(z_1\bar{z}_2) = Re(\bar{z}_1 z_2) = \dfrac{z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2}$

Λύση

Ἔστω $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $\alpha, \beta \in R$.

Τότε $\bar{z}_1 = \alpha_1 - i\beta_1$ καί $\bar{z}_2 = \alpha_2 - i\beta_2$. Ἄρα:

$$z_1\bar{z}_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)i$$

$$\Rightarrow Re(z_1\bar{z}_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \quad (1)$$

$$\bar{z}_1 z_2 = (\alpha_1 - i\beta_1).(\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)i$$

$$\Rightarrow Re(\bar{z}_1 z_2) = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \quad (2)$$

Γιά τό 2ο μέλος ἔχουμε:

$$\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2}[(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)i + (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) +$$

$$+ (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)i] = \frac{1}{2}[2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2) + (\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)i - (\alpha_2\beta_1 - (\alpha_1\beta_2)i] =$$

$$= \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \quad (3)$$

'Από τίς (1), (2) καί (3) προκύπτει τό ζητούμενο.

12. Νά προσδιοριστοῦν τά x, y ἀπό τήν ἰσότητα

$$\frac{2x+yi}{1-3i} = 1 - \frac{1+i}{1+2i}$$

Λύση

Ἔχουμε:

$$\frac{2x+yi}{1-3i} = 1 - \frac{1+i}{1+2i} \Leftrightarrow \frac{(2x+yi)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = 1 - \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-3y)+(6x+y)i}{10} = 1 - \frac{3-i}{5} \Leftrightarrow \frac{(2x-3y)+(6x+y)i}{10} = \frac{2+i}{5} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{2x-3y}{2} + \dfrac{6x+y}{2}i = 2 + i.$ Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dfrac{2x-3y}{2} = 2 \\ \dfrac{6x+y}{2} = 1 \end{cases}$$

Τό (Σ) μᾶς δίνει $x = 1/2,\ y = -1.$

13. Ἄν $z = x + iy$, $z_1 = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta, x, y \in R$, καί $z_1 = \dfrac{i+z}{i-z}$,

$z \neq i$, νά δειχτεῖ ὅτι

$$x = -\frac{2\beta}{(\alpha+1)^2+\beta^2}, \quad y = \frac{\alpha^2+\beta^2-1}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$$

Λύση

Ἀπό τή σχέση $z_1 = \dfrac{i+z}{i-z}$ παίρνουμε

$$\alpha + i\beta = \frac{i+x+iy}{i-x-iy} \Leftrightarrow \alpha + i\beta = -\frac{x+(y+1)i}{x+(y-1)i} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + i\beta).[x + (y - 1)i] = - x - (y + 1)i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\alpha x - \beta(y - 1)] + [\beta x + \alpha(y - 1)]i = - x - (y + 1)i.$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή ἔχουμε τό σύστημα

$$(\Sigma) \quad \begin{aligned} (\alpha + 1)x - \beta y &= -\beta \\ \beta x + (\alpha + 1)y &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

Τό (Σ) μᾶς δίνει $x = -\dfrac{-2\beta}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$, $y = \dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{(\alpha+1)^2+\beta^2}$

14. Ἄν

$$x + yi = \sqrt[3]{\alpha + \beta i} \quad \text{καί} \quad y + xi = \sqrt[4]{\alpha_1 + \beta_1 i}$$

καί $x, y, \alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1 \in R$, νά δειχθεῖ ὅτι $x^2 + y^2 = \dfrac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{\alpha^2+\beta^2}$

Λύση

Ἀπό τή σχέση $x + yi = \sqrt[3]{\alpha + \beta i}$ παίρνουμε

$$(x + yi)^3 = \alpha + \beta i \Leftrightarrow (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i = \alpha + \beta i.$$

Ἄρα

$$\alpha = x^3 - 3xy^2 \Rightarrow \alpha^2 = (x^3 - 3xy^2)^2 \Leftrightarrow \alpha^2 = x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4 \quad (1)$$

$$\beta = 3x^2y - y^3 \Rightarrow \beta^2 = (3^2y - y^3)^2 \Leftrightarrow \beta^2 = 9x^4y^2 - 6x^2y^4 + y^6 \quad (2)$$

'Από τίς (1) καί (2) παίρνουμε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = x^6 - 6x^4y^2 + 9x^2y^4 + 9x^4y^2 - 6x^2y^4 + y^6 =$$

$$x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = (x^2 + y^2)^3 \quad (3)$$

'Από τή σχέση $y + ix = \sqrt[4]{\alpha_1 + \beta_1}$, παίρνουμε

$$(y + ix)^4 = \alpha_1 + i\beta_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + i\beta_1 = y^4 + 4y^3(ix) + 6y^2(ix)^2 + 4y(ix)^3 + (ix)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 + i\beta_1 = y^4 + 4y^3xi - 6y^2x^2 - 4yx^3i + x^4.$$

"Αρα

$$\alpha_1 = y^4 - 6x^2y^2 + x^4 \Leftrightarrow \alpha_1^2 = (y^4 - 6x^2y^2 + x^4)^2 =$$

$$= y^8 + 36x^4y^4 + x^8 - 12x^2y^6 + 2x^4y^4 - 12x^6y^2 \quad (4)$$

$$\beta_1 = 4y^3x - 4yx^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta_1^2 = (4y^3x - 4yx^3)^2 = 16y^6x^2 - 32y^4x^4 + 16y^2x^6 \quad (5)$$

'Από τίς σχέσεις (4), (5), παίρνουμε

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = x^8 + 4x^6y^2 + 6x^4y^4 + 4x^2y^6 + y^8 = (x^2 + y^2)^4 \quad (6)$$

'Από τίς σχέσεις (3) καί (6) ἔχουμε

$$\frac{\alpha_1^2+\beta_1^2}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{(x^2+y^2)^4}{(x^2+y^2)^3} = x^2 + y^2$$

15. Δίνεται ἡ ἰσότητα $(\alpha + \beta i)^3 = x - ix\sqrt{x - 1}$. "Αν $\alpha, \beta \in Q$, $\beta \neq 0$ καί $\alpha =$ πολ.β, νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀκέραιες καί θετικές τιμές τοῦ x, καθώς καί τά α καί β.

Λύση

'Από τήν ἰσότητα $(\alpha + \beta i)^3 = x - ix\sqrt{x - 1}$ παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) + i(3\alpha^2\beta - \beta^3) = x - ix\sqrt{x - 1}$$

Ἄρα $\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = x$ (1) καί $3\alpha^2\beta - \beta^3 = -x\sqrt{x-1}$ (2)

Ἐπειδή τό πρῶτο μέλος τῆς (2) εἶναι ρητός, θά πρέπει καί τό δεύτερο μέλος νά εἶναι ρητός. Ἑπομένως, ἡ ὑπόρριζη ποσότητα πρέπει νά εἶναι τέλειο τετράγωνο ρητοῦ καί ὁ x ἐπίσης νά εἶναι ρητός. Ἄρα θά εἶναι

$$x - 1 = \lambda^2 \Leftrightarrow x = \lambda^2 + 1 \quad (3) \quad \lambda \in Q$$

Ἔτσι οἱ ἰσότητες (1), (2) λόγω τῆς (3) γίνονται:

$$\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 = \lambda^2 + 1 \quad (4)$$

$$3\alpha^2\beta - \beta^3 = -\lambda(\lambda^2 + 1) \quad (5).$$

Ἀπό τήν (5) προκύπτει λόγω τῆς (4) ἡ σχέση:

$$3\alpha^2\beta - \beta^3 = -\lambda(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2) \Leftrightarrow \frac{3\alpha^2\beta - \beta^3}{3\alpha\beta^2 - \alpha^3} = -\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3\dfrac{\alpha^2}{\beta^2} - 1}{3\dfrac{\alpha}{\beta} - \dfrac{\alpha^3}{\beta^3}} = -\lambda \quad (6)$$

Εἶναι ὅμως $\alpha = \text{πολ.}\beta \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} \in Z$. Ἔστω λοιπόν $\dfrac{\alpha}{\beta} = \rho \in Z$ (7)

Ἡ σχέση (6) λόγω τῆς (7) δίνει

$$\frac{3\rho^2 - 1}{3\rho - \rho^3} = -\lambda \Leftrightarrow \rho(3\rho - 3\lambda + \rho^2\lambda) = 1 \quad (8)$$

Ἀπό τήν (8) προκύπτουν οἱ ἰσότητες:

$\rho = 1$, $3\rho - 3\lambda + \rho^2\lambda = 1$ (A) $\qquad$ $\rho = -1$, $3\rho - 3\lambda + \rho^2\lambda = -1$ (B)

'Από τήν (A) παίρνουμε $\lambda = \rho = 1$ καί ἀπό τήν (B) $\lambda = \rho = -1$.

Ὅταν $\lambda = \rho = 1 \Rightarrow \alpha = \beta$ καί $x = 2$, ὁπότε ἀπό τήν (1) ἔχουμε

$$\alpha^3 - 3\alpha^3 = 2 \Leftrightarrow \alpha^3 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -1,$$

ἐφόσον $\alpha \in Q$. Ἄρα στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε τίς τιμές

$$\alpha = \beta = -1.\ x = 2.$$

Ὅταν $\lambda = \rho = -1 \Rightarrow \alpha = -\beta$, ὁπότε ἀπό τήν (1) ἔχουμε

$$\alpha^3 + 3\alpha^3 = 2 \Leftrightarrow 4\alpha^3 = 2 \Leftrightarrow \alpha^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Ἡ τιμή αὐτή ἀπορρίπτεται, γιατί $\alpha \in Q$.

Ἄρα οἱ ζητούμενες τιμές εἶναι $\alpha = \beta = 1,\ x = 2$.

16. Νά δειχτοῦν οἱ συνεπαγωγές.

i) $z^2 + |z|^2 = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$

ii) $z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow Im(z) = 0,\ z \neq 0$

Λύση

i) $z^2 + |z|^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 + z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z + \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow Re(z) = 0$$

ii) $z^2 = |z|^2 \Leftrightarrow z^2 = z\bar{z} \Leftrightarrow z^2 - z\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z(z - \bar{z}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow Im(z) = 0$$

17. Νά δειχθοῦν οἱ ἀνισότητες:

i) $\bar{z} + z \leqslant 2|z|$

ii) $2|Re(z).Im(z)| \leqslant |z|^2$

iii) $|Re(z)| + |Im(z)| \leqslant \sqrt{2}|z|$

Λύση

i)"Αν $z = \alpha + i\beta \Leftrightarrow \bar{z} = \alpha - i\beta$. "Αρα $z + \bar{z} = 2\alpha$.

'Επειδή $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ἀρκεῖ $2\alpha \leqslant 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

"Αν $\alpha \leqslant 0$, ἡ ἀνισότητα εἶναι προφανής.

"Αν $\alpha > 0$, μέ ὕψωση στό τετράγωνο προκύπτει $0 \leqslant \beta^2$ πού ἰσχύει.

ii)'Η ἀνισότητα $2|Re(z).Im(z)| \leqslant |z|^2$ γράφεται

$$2|\alpha.\beta| \leqslant \alpha^2 + \beta^2 \text{ ἤ } 0 \leqslant \alpha^2 + \beta^2 - 2|\alpha\beta| \Leftrightarrow 0 \leqslant (\alpha \pm \beta)^2$$

ἡ ὁποία ἰσχύει.

iii)'Η ἀνισότητα $|Re(z)| + |Im(z)| \leqslant \sqrt{2}|z|$ γράφεται:

$$|\alpha| + |\beta| \leqslant \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)} \Leftrightarrow (|\alpha| + |\beta|)^2 \leqslant \left(\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2.|\alpha.\beta| \leqslant 2\alpha^2 + 2\beta^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (\alpha \pm \beta)^2$$

ἡ ὁποία ἰσχύει.

18. Νά βρεθοῦν τά μέτρα τῶν μιγαδικῶν:

$$\text{i) } z = \frac{(1-\sqrt{i})^2.(3-i)}{i(2+\sqrt{3}i)^3} \qquad \text{ii) } z = \left[\frac{3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}}\right]^4$$

Λύση

$$\text{i) } |z| = \left|\frac{(1-\sqrt{2}i)^2.(3-i)}{i(2+\sqrt{3}i)^3}\right| = \frac{|(1+\sqrt{2}i)^2.(3-i)|}{|i(2+\sqrt{3}i)^3|} =$$

$$= \frac{|(1+\sqrt{2}i)^2|.|3-i|}{|i|.|(2+\sqrt{3}i)^3|} = \frac{|1+\sqrt{2}i|^2\sqrt{10}}{1.|2+\sqrt{3}i|^3} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^2 . \sqrt{10}}{\sqrt{7})^3} = \frac{3\sqrt{30}}{7\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{210}}{49}$$

ii) $|z| = \left| \left[\dfrac{3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}} \right]^4 \right| =$

$$= \left| \frac{3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})}{4-i\sqrt{3}} \right|^4 = \frac{|3i(\sqrt{3}+i\sqrt{5}).(1-i\sqrt{3})|^4}{|4-i\sqrt{3}|^4} =$$

$$= \frac{|3i|^4 . |\sqrt{3}+i\sqrt{5}|^4 . |1-i\sqrt{3}|^4}{(\sqrt{19})^4} = \frac{81.(\sqrt{8})^4.(\sqrt{4})^4}{361} = \frac{81.64.16}{361}$$

19. Ἂν z_1, z_2, z_3 εἶναι μιγαδικοί μέτρου 1, τότε

$$| z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 | = | z_1 + z_2 + z_3 |$$

Λύση

Ἐπειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = z_3\bar{z}_3 = 1.$

Ἄρα $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$, $\bar{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$. Ἔτσι θά ἔχουμε:

$$| z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 | = | z_1 z_2 z_3 | . \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| =$$

$$= | z_1 | . | z_2 | . | z_3 | . | \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 | =$$

$$= | \overline{z_1 + z_2 + z_3} | = | z_1 + z_2 + z_3 |$$

20. Δεῖξτε ὅτι: $\quad Re(z) > 1 \Leftrightarrow \left| \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2}$

Λύση

Έχουμε: $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{2-z}{2z}\right|<\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|2-z|}{2|z|}<\frac{1}{2} \Leftrightarrow |2-z|<|z| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2-z|^2<|z|^2 \Leftrightarrow (2-z).\overline{(2-z)}<z\bar{z} \Leftrightarrow (2-z).(2-\bar{z})<z\bar{z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4<2.(z+\bar{z}) \Leftrightarrow 4<4\mathrm{Re}(z) \Leftrightarrow 1<\mathrm{Re}(z).$$

21. Άν $|z|<\sqrt{2}-1$ δεῖξτε ὅτι $|2z\,\text{συν}\theta+z^2|<1$.

Λύση

Έχουμε $|2z\,\text{συν}\theta+z^2| = |z(2\text{συν}\theta+z)| =$

$$= |z|.|2\text{συν}\theta+z| < (\sqrt{2}-1)\,|2\text{συν}\theta+z| \leqslant$$

$$\leqslant(\sqrt{2}-1).(|2\text{συν}\theta|+|z|)\leqslant(\sqrt{2}-1).(2+|z|)<(\sqrt{2}-1).(2+\sqrt{2}-1)=$$

$$=(\sqrt{2}-1).(\sqrt{2}+1) = 2-1 = 1.$$

22. Άν $z_1, z_2, z_3 \in C$,

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1,\quad z_1+z_2+z_3=z_1.z_2.z_3=1,$$

νά δειχτεῖ ὅτι $\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=1$ καί νά ὑπολογισθοῦν οἱ z_1, z_2, z_3.

Λύση

Ἐπειδή $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1=\frac{1}{z_1},\ \bar{z}_2=\frac{1}{z_2},\ \bar{z}_3=\frac{1}{z_3}.$$ Άρα

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3=\overline{z_1+z_2+z_3}=\bar{1}=1$$

Ἡ σχέση $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} + \dfrac{1}{z_3} = 1$ γράφεται

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = z_1z_2z_3 \quad \Leftrightarrow \quad z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1.$$

Οἱ σχέσεις

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1$$

$$z_1z_2z_3 = 1$$

μᾶς δείχνουν ὅτι τά z_1, z_2, z_3 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$t^3 - t^2 + t - 1 = 0$ ἤ τῆς $(t-1).(t^2+1) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 1$, $t_2 = i$, $t_3 = -i$

πού εἶναι καί οἱ ζητούμενες τιμές τῶν z_1, z_2, z_3.

23.

Ἄν $\quad z = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & \bar{z}_1 \\ 1 & z_2 & \bar{z}_2 \\ 1 & z_3 & \bar{z}_3 \end{vmatrix} \quad z_1, z_2, z_3 \in C,$

δεῖξτε ὅτι $\operatorname{Re}(z) = 0$.

Λύση

Ἐπειδή $z = z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2$, θά ἔχουμε

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} =$$

$$= \frac{z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + \overline{z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}}{2} =$$

$$= \frac{z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2z_3 - z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2 + \bar{z}_2z_3 - z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_1z_3 + z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1z_2 - z_1\bar{z}_2}{2} = 0.$$

24. Νά δειχτεῖ ὅτι:

$$|z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2|^2 = (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) - |z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1|^2$$

(Ταυτότητα τοῦ Lagrange) $z_1, z_2, \zeta_1, \zeta_2 \in C$

Λύση

Ἔχουμε: $|z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2|^2 = (z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2).\overline{(z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2)} =$

$$= (z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2).(\overline{z_1\zeta_1} + \overline{z_2\zeta_2}) = (z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2).(\bar{z}_1\bar{\zeta}_1 + \bar{z}_2\bar{\zeta}_2) =$$

$$= |z_1|^2.|\zeta_1|^2 + |z_2|^2.|\zeta_2|^2 + z_1\bar{z}_2\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{z}_1 z_2\bar{\zeta}_1\zeta_2 =$$

$$= |z_1|^2.|\zeta_1|^2 + |z_2|^2.|\zeta_2|^2 + z_1\bar{z}_2\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{z}_1 z_2\bar{\zeta}_1\zeta_2 +$$

$$+ |z_1|^2.|\zeta_2|^2 - |z_1|^2.|\zeta_2|^2 + |z_2|^2.|\zeta_1|^2 - |z_2|^2.|\zeta_1|^2 =$$

$$= |z_1|^2.(|\zeta_1| + |\zeta_2|^2) + |z_2|^2.(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + z_1\bar{z}_2\zeta_1\bar{\zeta}_2 +$$

$$+ \bar{z}_1 z_2\bar{\zeta}_1\zeta_2 - |z_1|^2.|\zeta_2|^2 - |z_2|^2.|\zeta_1|^2 =$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + z_1\bar{z}_2\zeta_1\bar{\zeta}_2 + \bar{z}_1 z_2\bar{\zeta}_1\zeta_2 -$$

$$- z_1\bar{z}_1\zeta_2\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{z}_2\zeta_1\bar{\zeta}_1 =$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + z_1\bar{\zeta}_2(-\bar{z}_1\zeta_2 + \bar{z}_2\zeta_1) - z_2\bar{\zeta}_1(-\bar{z}_1\zeta_2 + \bar{z}_2\zeta_1) =$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) + (-\bar{z}_1\zeta_2 + \bar{z}_2\zeta_1).(+z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1) =$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + \zeta_2|^2) - (z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1).\overline{(z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1)} =$$

$$= (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2) - |z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1|^2.$$

Βάσει τῆς ταυτότητας τοῦ Lagrange ἀποδεικνύεται εὔκολα ἡ ἀνισότητα τοῦ Cauchy.

$$|z_1\bar{\zeta}_2 - z_2\bar{\zeta}_1|^2 \leqslant (|z_1|^2 + |z_2|^2).(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2).$$

25. Νά βρεθεῖ ὁ μιγαδικός z ὅταν $|z-1| = |z-2| = |z-i|$.

Λύση

Ἔστω $z = x + iy$. Τότε

$$z - 1 = (x-1) + iy \Leftrightarrow |z-1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2},$$

$$z - 2 = (x-2) + iy \Leftrightarrow |z-2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2},$$

$$z - i = x + (y-1)i \Leftrightarrow |z-i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἰσότητες:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \\ \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}(x-1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-2)^2\end{array} \quad (\Sigma)$$

Τό σύστημα (Σ) μᾶς δίνει $x = y = \frac{3}{2}$. Ἄρα $z = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$.

26. Ἄν $z_1, z_2 \in C$ δεῖξτε ὅτι:

i) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2)$

ii) $Re(z_1\bar{z}_2) \leqslant |z_1| . |z_2|$

iii) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

Λύση

i) Ἔχουμε:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2).\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2).(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) =$$

$$= z_1\bar{z}_1 + \bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2).$$ (Ἄσκ. 11).

ii) Ἐπειδή $Re(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2)$ ἡ ἀνισότητα γράφεται:

$$\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2 \leqslant 2.|z_1|.|z_2| \quad (1)$$

Ἄν τό πρῶτο μέλος τῆς (1) εἶναι ἀριθμός ἀρνητικός, ἡ ἀνισότητα εἶναι προφανής. Ἄν εἶναι ἀριθμός θετικός, ἔχουμε δικαίωμα νά ὑψώσουμε καί τά δύο μέλη στό τετράγωνο καί ἔτσι θά ἔχουμε:

$$(\bar{z}_1 z_2 + z_1\bar{z}_2)^2 \leqslant 4|z_1|^2.|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 z_2^2 + z_1^2\bar{z}_2^2 + 2z_1 z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 \leqslant 4z_1\bar{z}_1 z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1^2 z_2^2 + z_1^2\bar{z}_2^2 - 2z_1 z_2\bar{z}_1\bar{z}_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow (\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2)^2 \leqslant 0 \quad (2).$$

Ἀλλά $Im(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2i}(\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2) \Leftrightarrow \bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2 = 2i\,Im(z_1\bar{z}_2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\bar{z}_1 z_2 - z_1\bar{z}_2)^2 = -4Im^2(z_1\bar{z}_2) \leqslant 0.$$

Ἄρα ἰσχύει ἡ (2) καί ἑπομένως καί ἡ ζητούμενη.

iii) $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2Re(z_1\bar{z}_2) \leqslant$

$$\leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2| =$$

$= [|z_1| + |z_2|]^2$. Ἄρα $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$.

27. Ἄν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$, $z_3.z_4 \neq 0$ καί $|z_3|^2 + |z|^2 \leqslant 1$, δεῖξτε ὅτι

$$\left|\frac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{z_4}\right|^2 \geqslant |z_1 + z_2|^2$$

Λύση

Ἐπειδή $|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2| \Leftrightarrow [|z_1| + |z_2|]^2 \geqslant |z_1 + z_2|^2$.

Ἄρα ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$\left|\frac{z_1}{z_3}\right|^2 + \left|\frac{z_2}{z_4}\right|^2 \geqslant [|z_1| + |z_2|]^2 \text{ ἤ}$$

$$\frac{|z_1|^2}{|z_3|^2} + \frac{|z_2|^2}{|z_4|^2} \geqslant [\,|z_1| + |z_2|\,]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^2 + |z_2|^2 . |z_3|^2 \geqslant |z_3|^2 . |z_4|^2 . [\,|z_1| + |z_2|\,]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^2 + |z_2|^2 . |z_3|^2 \geqslant$$

$$\geqslant |z_3|^2 . |z_4|^2 . [\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1| . |z_2|\,] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^2 + |z_2|^2 . |z_3|^2 \geqslant$$

$$\geqslant |z_3|^2 . |z_4|^2 . [\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,|z_1| . |z_2|\,] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^2 + |z_2|^2 . |z_3|^2 - |z_1|^2 . |z_3|^2 . |z_4|^2 - |z_2|^2 . |z_3|^2 . |z_4|^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2\,|z_1| . |z_2| . |z_3|^2 . |z_4| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^2 . [1 - |z_3|^2] + |z_2|^2 . |z_3|^2 . [1 - |z_4|^2] \geqslant$$

$$\geqslant 2\,|z_1| . |z_2| . |z_3|^2 . |z_4|^2 .$$

'Αλλά $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leqslant 1$.

"Αρα $1 - |z_3|^2 \geqslant |z_4|^2$ καί $1 - |z_4|^2 \geqslant |z_3|^2$.

"Αρα ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι:

$$|z_1|^2 . |z_4|^2 . [\,|z_4|^2] + |z_2|^2 . |z_3|^2 . [\,|z_3|^2] \geqslant$$

$$\geqslant 2\,|z_1| . |z_2| . |z_3|^2 . |z_4|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 . |z_4|^4 + |z_2|^2 . |z_3|^4 - 2\,|z_1| . |z_2| . |z_3|^2 . |z_4|^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [\,|z_1| . |z_4|^2 - |z_2| . |z_3|^2]^2 \geqslant 0,$$ πού ἰσχύει.

"Αλλη λύση

'Ισχύει ἡ ἀνισότητα

$$(\alpha^2 + \beta^2).(x^2 + y^2) \geqslant (\alpha x + \beta y)^2, \quad \alpha, \beta, x, y \in R$$

Θέτουμε $\alpha = \left| \dfrac{z_1}{z_3} \right|$, $\beta = \left| \dfrac{z_2}{z_4} \right|$, $x = |z_3|$, $y = |z_4|$

καί ἔχουμε $\left(\left| \dfrac{z_1}{z_3} \right|^2 + \left| \dfrac{z_2}{z_4} \right|^2 \right) . (|z_3|^2 + |z_4|^2) \geqslant$

$$\geqslant \left(\left| \frac{z_1}{z_3} \right| |z_3| + \left| \frac{z_2}{z_4} \right| |z_4| \right)^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \geqslant$$

$$\geqslant |z_1 + z_2|^2$$

Ἐπειδή $|z_3|^2 + |z_4|^2 \leqslant 1$ ἔχουμε

$$\left| \frac{z_1}{z_3} \right|^2 + \left| \frac{z_2}{z_4} \right|^2 \geqslant |z_1 + z_2|^2.$$

28. Ἄν $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$ καί $|z_3| \neq |z_4|$, νά δειχθεῖ ὅτι

$$\left| \frac{|z_1| - |z_2|}{|z_3| + |z_4|} \right| \leqslant \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leqslant \left| \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_3| - |z_4|} \right|$$

Λύση

Γνωρίζουμε ὅτι $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leqslant |z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

καί $\left| |z_3| - |z_4| \right| \leqslant |z_3 \pm z_4| \leqslant |z_3| + |z_4|$

Ἄρα

$$\left| \frac{|z_1| - |z_2|}{|z_3| + |z_4|} \right| \leqslant \left| \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3| + |z_4|} \right| \leqslant \left| \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \right| =$$

$$= \frac{|z_1 + z_2|}{|z_3 + z_4|} \leqslant \left| \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_3 + z_4|} \right| \leqslant \frac{|z_1| + |z_2|}{|z_3| + |z_4|} \Big| .$$

29. Γιά τυχόντα μιγαδικό z δεῖξτε ὅτι:

$$|z + 1| + |z + 2| \leqslant |z| + |z + 3|$$

Λύση

Ἔστω $z = x + iy$. Ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι:

$$\sqrt{(x+1)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2} \leqslant \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)^2+y^2+(x+2)^2+y^2+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x+2)^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant x^2+y^2+(x+3)^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+x^2+4x+4+y^2+2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\sqrt{(x+2)^2+y^2} \leqslant$$

$$\leqslant x^2+y^2+x^2+6x+9+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2+y^2}.\sqrt{(x+2)^2+y^2} \leqslant 2+\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}.$$

Ἄρα ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι:

$$|z+1|.|z+2| \leqslant 2+|z|.|z+3|.$$

Ἀλλά $|z+1|.|z+2| =$

$$\leqslant |z^2+3z|+|2| \leqslant 2+|z|.|z+3|.$$

30. $\forall\, z_1, z_2, z_3 \in C$ νά δειχθεῖ ὅτι:

$$|(1-z_1).(1-z_2).(1-z_3)| \geqslant 1-|z_1|-|z_2|-|z_3|$$

Λύση

Ἔχουμε:

$$1-|z_1| \leqslant |1-z_1|,\ 1-|z_2| \leqslant |1-z_2|,\ 1-|z_3| \leqslant |1-z_3| \quad (A).$$

Ἄρα

$$(1-|z_1|).(1-|z_2|) \leqslant |1-z_1|.|1-z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-|z_1|-|z_2|+|z_1 z_2| \leqslant |(1-z_1).(1-z_2)| \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-|z_1|-|z_2| \leqslant |(1-z_1).(1-z_2)| \quad (B).$$

'Από τίς (A) καί (B) τώρα παίρνουμε:

$$(1 - |z_1| - |z_2|).(1 - |z_3|) \leqslant |(1 - z_1).(1 - z_2)|.\ |1 - z_3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - |z_1| - |z_2| - |z_3| + |z_1 z_3| + |z_2 z_3| \leqslant |(1-z_1).(1-z_2).(1-z_3)| \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - |z_1| - |z_2| - |z_3| \leqslant |(1 - z_1).(1 - z_2).(1 - z_3)|.$$

31. Δεῖξτε ὅτι $\forall z_1, z_2 \in C$ καί $\alpha > 0$ ἰσχύει ἡ ἀνισότητα:

$$|z_1 + z_2|^2 \leqslant (1+\alpha).\ |z_1|^2 + (1 + \frac{1}{\alpha}).\ |z_2|^2 \quad \text{('Ανισότητα τοῦ Bohr)}$$

Λύση

'Επειδή $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\ \mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leqslant |z_1|^2 + \alpha\,|z_1|^2 + |z_2|^2 + \frac{1}{\alpha}\,|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2) \leqslant \alpha\,|z_1|^2 + \frac{1}{\alpha}\,|z_2|^2 \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leqslant \alpha\,|z_1|^2 + \frac{1}{\alpha}\,|z_2|^2.$$

$$\Leftrightarrow \alpha z_1 \bar{z}_2 + \alpha \bar{z}_1 z_2 \leqslant \alpha^2 z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha z_1 \bar{z}_2 + \alpha \bar{z}_1 z_2 - \alpha^2 z_1 \bar{z}_1 - z_2 \bar{z}_2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha z_1 - z_2)\bar{z}_2 - \alpha^2 \bar{z}_1(\alpha z_1 - z_2) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha z_1 - z_2).(\bar{z}_2 - \alpha \bar{z}_1) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$-(\alpha z_1 - z_2).(\alpha \bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$-(\alpha z_1 - z_2).\overline{(\alpha z_1 - z_2)} \leqslant 0 \Leftrightarrow -|\alpha z_1 - z_2|^2 \leqslant 0 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

32. Ἂν $z \in C$, δεῖξτε ὅτι,

$$|2z + 1| + |2z - 1| - 2|z| \leqslant |z + 1| + |z - 1|.$$

Λύση

$$|2z - 1| = |z + z - 1| \leqslant |z| + |z - 1|.$$

$$|2z + 1| = |z + z + 1| \leqslant |z| + |z + 1|.$$

Ἄρα

$$|2z - 1| + |2z + 1| - 2|z| \leqslant |z| + |z - 1| + |z| + |z + 1| - 2|z| =$$

$$= |z - 1| + |z + 1|.$$

33. Δείξτε ὅτι $\mathrm{Im}(z) > 0 \iff \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1, \ \forall z \in C.$

Στή συνέχεια δείξτε ὅτι ἄν $\mathrm{Im}(z_k) > 0$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ καί

$$\left|\frac{z_k-i}{z_k+i}\right| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, \nu,$$

τότε $\left|\dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i}\right| < 1, \quad z_k \neq -i$

Λύση

Γιά τήν πρώτη σχέση ἔχουμε:

$$\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1 \iff \frac{|z-i|}{|z+i|} < 1 \iff$$

$$\iff |z - i| < |z + i| \iff |z - i|^2 < |z + i|^2 \iff$$

$$\iff (z - i)\overline{(z - i)} < (z + i)\overline{(z + i)} \iff$$

$$\iff (z - i)(\bar{z} - \bar{i}) < (z + i)(\bar{z} + \bar{i}) \iff$$

$$\iff (z - i)(\bar{z} + i) < (z + i)(\bar{z} - i) \iff$$

$$\iff 2i(\bar{z} - z) > 0 \iff 2i(-2i)\mathrm{Im}(z) > 0 \iff$$

$$\Leftrightarrow\ -4i^2 \mathrm{Im}(z) > 0 \ \Leftrightarrow\ 4\mathrm{Im}(z) > 0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Im}(z) > 0. \quad (1).$$

Γιά τή δεύτερη σχέση ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἔχουμε

$$\left|\frac{z_k - i}{z_k + i}\right| < 1 \ \Leftrightarrow\ 4\mathrm{Im}(z_k) > 0\,,\ k = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Ἄρα $4\big(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) + \ldots + \mathrm{Im}(z_\nu)\big) > 0 \ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -4i^2\big(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) + \ldots + \mathrm{Im}(z_\nu)\big) > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i(-2i)\big(\mathrm{Im}(z_1) + \mathrm{Im}(z_2) + \ldots + \mathrm{Im}(z_\nu)\big) > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i\big(-2i\mathrm{Im}(z_1) - 2i\mathrm{Im}(z_2) - \ldots - 2i\mathrm{Im}(z_\nu)\big) > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i(\bar{z}_1 - z_1 + \bar{z}_2 - z_2 + \ldots + \bar{z}_\nu - z_\nu) > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i[(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \ldots + \bar{z}_\nu) - (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu)] > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i[(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) - (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu)] > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2i(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) - 2i(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) > 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ -i(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) + i(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) <$$

$$< i(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) - i(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu).(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) -$$

$$- i(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) + i(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) - i^2 <$$

$$< (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu).(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) +$$

$$+ i(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu) - i(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu}) - i^2 \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i).(\overline{z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i}) <$$

$$< (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i).\overline{(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i).\overline{(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i)} <$$

$$< (z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i).\overline{(z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu - i|^2 < |z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu + i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i} \right| < 1.$$

34. Ἂν οἱ μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ἱκανοποιοῦν τή σχέση

$$\left| \frac{z_1-i}{z_1+i} \right| + \left| \frac{z_2-i}{z_2+i} \right| + \ldots + \left| \frac{z_\nu-i}{z_\nu+i} \right| < 1,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, \nu, \quad z_\nu \neq -i \quad \forall \nu$$

θά ἱκανοποιοῦν καί τή σχέση $\left| \dfrac{z_1+z_2+\ldots+z_\nu-i}{z_1+z_2+\ldots+z_\nu+i} \right| < 1.$

Λύση

Ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $\left| \dfrac{z_k-i}{z_k+i} \right|$, $k \in N$ εἶναι θετικοί καί ἔχουν ἄθροισμα μικρότερο τοῦ 1, ὁ κάθε ἕνας ἀπό αὐτούς θά εἶναι μικρότερος τοῦ 1. Ἑπομένως μέ τήν παρατήρηση αὐτή ἀνάγεται ἀμέσως στήν ἄσκηση 33.

Μιά ἄλλη ἀπόδειξη τῆς ἄσκησης αὐτῆς εἶναι ἡ ἑξῆς:

Θέτουμε $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ καί, ἀφοῦ δείξουμε ὅπως στήν (33) ὅτι $y_k > 0$, βρίσκουμε ἀμέσως ὅτι καί

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu > 0.$$

35. Ἄν οἱ ἀριθμοί z_1, z_2 πληροῦν τίς σχέσεις

$$|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| = k > 0$$

δεῖξτε ὅτι οἱ z_1, z_2 δέν εἶναι συγχρόνως πραγματικοί. Μετά δεῖξτε ὅτι $|z_1 - z_2| = \sqrt{3}\,|z_1|$.

Λύση

Ἔστω $z_1, z_2 \in R$. Τότε θά εἴχαμε τίς συνεπαγωγές

$$|z_1 + z_2| = k \Leftrightarrow z_1 + z_2 = \varepsilon_1 k \;,\quad \varepsilon_1 = \pm 1$$

$$|z_1| = k \Leftrightarrow z_1 = \varepsilon_2 k \;,\quad \varepsilon_2 = \pm 1$$

$$|z_2| = k \Leftrightarrow z_2 = \varepsilon_3 k \;,\quad \varepsilon_3 = \pm 1.$$

Ἄρα $z_1 + z_2 - z_1 - z_2 = 0 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3)k$.

Ἡ σχέση αὐτή εἶναι ἀδύνατη, ἀφοῦ τό πρῶτο μέλος εἶναι πάντα μηδέν, ἐνῶ τό δεύτερο ποτέ

$$(k \neq 0 \;,\; \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \neq 0).$$

Ἑπομένως δέν εἶναι δυνατό τά z_1, z_2 νά εἶναι συγχρόνως πραγματικοί.

Γιά τό δεύτερο μέλος ἔχουμε:

$$|z_1 + z_2| = |z_1| = |z_2| \Leftrightarrow \frac{|z_1 + z_2|}{|z_1|} = 1 = \left|1 + \frac{z_2}{z_1}\right| \quad (1)$$

$$\text{καί} \quad \frac{|z_2|}{|z_1|} = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1 \quad (2).$$

Θέτουμε $\dfrac{z_2}{z_1} = \alpha + \beta i = j$ καί ἔχουμε $|1 + j| = 1$ καί $|j| = 1$,

ὁπότε $(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = 1$ καί $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Ἄρα

$$(\alpha + 1)^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2}$$

καί ἑπομένως $\frac{1}{4} + \beta^2 = 1 \Leftrightarrow \beta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Συνεπῶς $j = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow z_2 = z_1\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)$. Ἄρα

$$|z_1 - z_2| = \left|z_1 - z_1\left(-\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)\right| = |z_1|\left|\frac{3}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = |z_1| \cdot \sqrt{3}.$$

36. Ἄν $z_1, z_2 \in C$ καί $\frac{z_1}{z_2} = \theta$, $\theta \in R$, δεῖξτε ὅτι

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

Ἐξετάστε ἄν ἰσχύει τό ἀντίστροφο.

Λύση

Ἔστω

$\frac{z_1}{z_2} = \theta \Leftrightarrow z_1 = \theta z_2$. Ἄρα $|z_1 + z_2| = |z_1 + \theta z_1| = |z_1|(1 + \theta)$ (1).

Ἐπίσης $|z_1| + |z_2| = |z_1| + |\theta z_1| = |z_1|(1 + \theta)$ (2).

Ἀπό τίς (1) καί (2) προκύπτει τό ζητούμενο.

Ἀντίστροφο

Ἔστω ὅτι

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 + z_2|^2 = [|z_1| + |z_2|]^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow \mathrm{Re}\left(z_1 \frac{|z_2|^2}{z_2}\right) = |z_1| \cdot |z_2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |z_2|^2 \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = |z_1|\cdot|z_2| \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \ (1).$$

Όταν ὅμως ἔχουμε ἕνα μιγαδικό z μέ τήν ἰδιότητα $\mathrm{Re}(z) = |z|$, ἐπειδή $|z|^2 = \mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z) \Leftrightarrow |z|^2 = |z|^2 + \mathrm{Im}^2(z)$, προκύπτει $\mathrm{Im}(z) = 0$. Ἑπομένως ὁ z εἶναι κάποιος πραγματικός ρ. Ἔτσι ἀπό τή σχέση (1) προκύπτει ὅτι $\dfrac{z_1}{z_2} = \theta \in R$. Ἄρα μποροῦμε νά γράφουμε

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = \theta \in R.$$

37. Ἄν $z_1, z_2, z_3 \in C$ καί

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0, \quad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0,$$

δεῖξτε ὅτι $|z_1| = |z_2| = |z_3|$

Λύση

Ἔχουμε:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow z_3 = -(z_1 + z_2) \Rightarrow z_3^2 = (z_1 + z_2)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_1^2 + z_2^2 + (z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1^2 + z_2^2 + z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 . z_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^2 + z_1 . z_2 + z_2^2 = 0 \Leftrightarrow (z_1 - z_2).(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^3 = z_2^3 \Rightarrow |z_1^3| = |z_2^3| \Leftrightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Ἀνάλογα δείχνουμε ὅτι $|z_1| = |z_3|$.

38. Ἄν γιά τούς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3 ἰσχύει ὅτι $z_1 . z_2 . z_3 \neq 0$ καί

$$|x|^2 + |y|^2 + |\omega|^2 \leqslant 1, \text{τότε} \left|\frac{z_1}{x}\right| + \left|\frac{z_2}{y}\right| + \left|\frac{z_3}{\omega}\right| \geqslant |z_1 + z_2 + z_3|^2,$$

$x, y, \omega \in C$ καί $|x . y . \omega| > 0$.

Λύση

Γνωρίζουμε ὅτι γιά πραγματικούς ἀριθμούς $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) . \left(\frac{\beta_1^2}{\alpha_1^2} + \frac{\beta_2^2}{\alpha_2^2} + \frac{\beta_3^2}{\alpha_3^2} \right) \geqslant (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2.$$

Ἄν ἀντικαταστήσουμε

$$\alpha_1 = |x| , \ \alpha_2 = |y| , \ \alpha_3 = |\omega| , \ \beta_1 = |z_1| , \ \beta_2 = |z_2| , \ \beta_3 = |z_3|$$

θά ἔχουμε

$$(|x|^2 + |y|^2 + |\omega|^2) . \left(\frac{|z_1|^2}{|x|^2} + \frac{|z_2|^2}{|y|^2} + \frac{|z_3|^2}{|\omega|^2} \right) \geqslant (|z_1| + |z_2| + |z_3|)^2 (1)$$

Ἀλλά $|x|^2 + |y|^2 + |\omega|^2 \leqslant 1$. Ἄρα ἀπό τήν (1) προκύπτει ὅτι

$$\frac{|z_1|^2}{|x|^2} + \frac{|z_2|^2}{|y|^2} + \frac{|z_3|^2}{|\omega|^2} \geqslant (|z_1| + |z_2| + |z_3|)^2 \quad (2)$$

Εἶναι ὅμως

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| \geqslant |z_1 + z_2 + z_3| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|z_1| + |z_2| + |z_3|)^2 \geqslant |z_1 + z_2 + z_3|^2 \quad (3)$$

Ἀπό τίς (2), (3) προκύπτει

$$\frac{|z_1|^2}{|x|^2} + \frac{|z_2|^2}{|y|^2} + \frac{|z_3|^2}{|\omega|^2} \geqslant |z_1 + z_2 + z_3|^2$$

Ἡ ἄσκηση γενικεύεται ὡς ἑξῆς:

Ἄν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu \in C$ καί

$$|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 + \ldots + |\lambda_\nu|^2 \leqslant 1, \ |\lambda_1 . \lambda_2 \ldots \lambda_\nu| > 0,$$

θά εἶναι

$$\left|\frac{z_1^2}{\lambda_1^2}\right| + \left|\frac{z_2^2}{\lambda_2^2}\right| + \ldots + \left|\frac{z_\nu^2}{\lambda_\nu^2}\right| \geqslant |z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu|^2.$$

39. Νά δειχτοῦν οἱ σχέσεις:

i) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

ii) $|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 . z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 . z_2}\right|.$

iii) $|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| = |z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|$

$\forall\ z_1, z_2 \in C$

Λύση

i) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) +$

$+ |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

ii) $\left[\left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 . z_2}\right| + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 . z_2}\right|\right]^2 =$

$$= \left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 . z_2}\right|^2 + \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 . z_2}\right|^2 +$$

$$+ 2\left|\frac{z_1+z_2}{2} + \sqrt{z_1 . z_2}\right| . \left|\frac{z_1+z_2}{2} - \sqrt{z_1 . z_2}\right| =$$

$$= \left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 + |\sqrt{z_1 . z_2}|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\overline{\sqrt{z_1 . z_2}}\right) + \left|\frac{z_1+z_2}{2}\right|^2 +$$

$$+ |\sqrt{z_1 . z_2}|^2 - 2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{2}\overline{\sqrt{z_1 . z_2}}\right) + 2\left|\frac{(z_1+z_2)^2}{4} - z_1 z_2\right| =$$

$$= \frac{|z_1+z_2|^2}{2} + 2|z_1 . z_2| + 2\frac{|z_1-z_2|^2}{4} =$$

$$= \frac{|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2}{2} + 2|z_1|\,.\,|z_2| =$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,.\,|z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

iii) Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι

$$(|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|)^2 = (|z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|)^2$$

Ἀλλά $\quad (|z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|)^2 =$

$$= |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 + 2|z_1 + z_2|\,.\,|z_1 - z_2| =$$

$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_1^2 - z_2^2| \quad (1)$$

Ἐπίσης $(|z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| + |z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|)^2 =$

$$= |z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|^2 + |z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|^2 + 2|z_1 - \sqrt{z_1^2 - z_2^2}|\,.\,|z_1 + \sqrt{z_1^2 - z_2^2}| =$$

$$= 2|z_1|^2 + 2|\sqrt{z_1^2 - z_2^2}|^2 + 2|z_1^2 - z_1^2 + z_2^2| =$$

$$= 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 + 2|z_1^2 - z_2^2| \quad (2)$$

Ἀπό (1), (2) προκύπτει τό ζητούμενο.

40. Ἄν $z_1, z_2, z_3 \in C$, δεῖξτε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ἰσχύει ἡ σχέση $|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2$ εἶναι νά ὑπάρχει $\lambda \in R$, ὥστε $z_2 - z_3 = \lambda i(z_1 - z_3)$, $z_1 \neq z_2 \neq z_3$.

Λύση

Ἔστω ὅτι

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_3 + z_3 - z_2|^2 = |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |(z_1 - z_3) - (z_2 - z_3)|^2 = |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2 - 2\mathrm{Re}[\overline{(z_1 - z_3)}(z_2 - z_3)] = |z_2 - z_3|^2 + |z_1 - z_3|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Re}[\overline{(z_1 - z_3)}(z_2 - z_3)] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}[\frac{|z_1 - z_3|^2}{z_1 - z_3}(z_2 - z_3)] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_3|^2 . \mathrm{Re}[\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}] = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}[\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}] = 0 \quad (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} = \lambda i, \quad \lambda \in R \Leftrightarrow z_2 - z_3 = \lambda i(z_1 - z_3).$$

41. Άν $z \in C$, $z \neq -1$ δείξτε ότι:

$$|z| = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(\frac{z-1}{z+1}) = 0.$$

Λύση

$$\mathrm{Re}(\frac{z-1}{z+1}) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\frac{z-1}{z+1} + \overline{\frac{z-1}{z+1}}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\frac{z-1}{z+1} + \frac{\overline{z-1}}{\overline{z+1}}] = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}[\frac{z-1}{z+1} + \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1}] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} . \frac{(z-1)(\bar{z}+1)+(z+1)(\bar{z}-1)}{(z+1)(\bar{z}+1)} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}+1) + (z+1)(\bar{z}-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{z} + z - 1 + z\bar{z} + \bar{z} - z - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

42. Άν

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta + \gamma i}, \quad \alpha > 0, \quad \beta + \gamma i \neq 0,$$

νά ὑπολογιστεῖ τό $|z|$.

Λύση

Εἶναι $\dfrac{1}{z} = \dfrac{(\alpha+\beta)+\gamma i}{\alpha(\beta+\gamma i)} \Leftrightarrow z = \dfrac{\alpha(\beta+\gamma i)}{(\alpha+\beta)+\gamma i}$.

Ἄρα $|z| = \left|\dfrac{\alpha(\beta+\gamma i)}{(\alpha+\beta)+\gamma i}\right| = \dfrac{|\alpha(\beta+\gamma i)|}{|(\alpha+\beta)+\gamma i|} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z|^2 = \frac{|\alpha(\beta+\gamma i)|^2}{|(\alpha+\beta)+\gamma i|^2} =$$

$$= \frac{\alpha(\beta+\gamma i)\alpha(\beta-\gamma i)}{[(\alpha+\beta)+\gamma i][(\alpha+\beta)-\gamma i]} = \frac{\alpha^2(\beta^2+\gamma^2)}{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}.$$

Ἄρα $|z| = \alpha\sqrt{\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}}$.

43. Ἄν $z_1, z_2 \in C$ νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες

i) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 + 1).(|z_2|^2 + 1)$

ii) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1).(|z_2|^2 - 1)$.

Λύση

Εἶναι

i) $|z_1\bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |z_1\bar{z}_2|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_1|^2 +$

$+ |z_2|^2 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2.|\bar{z}_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + 1 =$

$= |z_1|^2.|z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + 1 = (|z_1|^2 + 1).(|z_2|^2 + 1)$.

Ὅμοια

ii) $|z_1\bar{z}_2 - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = |z_1\bar{z}_2|^2 + 1 - 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) - |z_1|^2 -$

$$- |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1|^2.|\bar{z}_2|^2 + 1 - |z_1|^2 - |z_2|^2 =$$

$$= |z_1|^2.|z_2|^2 - |z_1|^2 - |z_2|^2 + 1 = (|z_1|^2 - 1).(|z_2|^2 - 1).$$

44. Ἄν $|z + 16| = 4|z + 1| \Leftrightarrow |z| = 4.$

Λύση

Ἔχουμε

$$|z + 16| = 4|z + 1| \Leftrightarrow |z + 16|^2 = 16|z + 1|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z + 16).(\bar{z} + 16) = 16(z + 1).(\bar{z} + 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 256 = 16z\bar{z} + 16z + 16\bar{z} + 16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15|z|^2 = 240 \quad |z|^2 = 16 \Leftrightarrow |z| = 4.$$

45. Ἄν z_1, z_2 εἶναι μιγαδικοί διάφοροι τοῦ μηδενός, δεῖξτε ὅτι

$$|z_1 + z_2| \leqslant \max(|z_1|,|z_2|).[1 + \frac{|z_1 . z_2|}{[\max(|z_1|,|z_2|)]^2}].$$

Λύση

Μποροῦμε νά ὑποθέσουμε ὅτι $|z_1| \geqslant |z_2|$. Τότε

$$\max(|z_1|,|z_2|) = |z_1|$$

καί ἡ σχέση πού θέλουμε νά ἀποδείξουμε γράφεται

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| \; [1 + \frac{|z_1 z_2|}{|z_1|^2}]$$

$$\text{ἤ} \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| \; [1 + \frac{|z_2|}{|z_1|}]$$

ἤ $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ πού προφανῶς ἰσχύει.

46. Ἄν $z_1, z_2 \in C$, δεῖξτε ὅτι

$$Re\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = \frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}.$$

Λύση

Εἶναι

$$Re\left(\frac{z_1+z_2}{z_1-z_2}\right) = \frac{\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\overline{\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}}}{2} =$$

$$= \frac{\dfrac{z_1+z_2}{z_1-z_2}+\dfrac{\overline{z_1+z_2}}{\overline{z_1-z_2}}}{2} = \frac{(z_1+z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)+(z_1-z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)}{2(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)} =$$

$$= \frac{2(z_1\bar{z}_1-z_2\bar{z}_2)}{2(z_1-z_2).\overline{(z_1-z_2)}} = \frac{|z_1|^2-|z_2|^2}{|z_1-z_2|^2}.$$

47. Ἄν $\alpha, z \in C$, καί $z_1 = \dfrac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha}$, $z \neq \alpha$ καί $0 < |\alpha| < 1$, δεῖξτε ὅτι $|z_1| > 1 \Leftrightarrow |z| < 1$.

Λύση

Ἔχουμε:

$$|z_1| > 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 > 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha}\right|^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha}\cdot\left(\overline{\frac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha}}\right) - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{\bar{\alpha}z-1}{z-\alpha}\cdot\frac{\alpha\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{\alpha}} - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\bar{\alpha}z-1)(\alpha\bar{z}-1)-(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})}{(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha\bar{\alpha}z\bar{z}+1-z\bar{z}-\alpha\bar{\alpha}}{|z-\alpha|^2}>0 \Leftrightarrow \frac{(1-|\alpha|^2)(1-|z|^2)}{|z-\alpha|^2}>0.$$

'Επειδή $0<|\alpha|<1 \Leftrightarrow |\alpha|^2<1 \Leftrightarrow 1-|\alpha|^2>0.$

'Επίσης $|z-\alpha|>0.$

"Αρα γιά νά εἶναι τό κλάσμα θετικό πρέπει

$$1-|z|^2>0 \Leftrightarrow |z|^2<1.$$

48. Δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $j = \dfrac{z}{1+z\bar{z}} + \dfrac{\bar{z}}{1+|z|^2}$

εἶναι πραγματικός $\forall z \in C$.

Λύση

'Αρκεῖ $Im(j) = 0$. 'Επειδή

$$j = \frac{z}{1+z\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{1+z\bar{z}} = \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}$$

καί $Im(j) = \dfrac{1}{2i}(j-\bar{j})$. "Αρα θά ἔχουμε

$$Im(j) = \frac{1}{2i}\left[\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} - \overline{\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}} - \frac{z+\bar{z}}{1+z\bar{z}}\right] = 0$$

49. Δεῖξτε ὅτι ἄν $z^2+z+1=0$, θά εἶναι $|z| = |z+1| = 1$ $\forall z \in C$, καί ἀντίστροφα.

Λύση

'Από τή σχέση

$$z^2+z+1=0 \Leftrightarrow 1+z=-z^2 \Rightarrow |1+z| = |-z^2| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |1+z| = |z^2| \Leftrightarrow |1+z| = |z|^2. \ (1)$$

Ἀπό τήν ἴδια σχέση ἔχουμε:

$$z^2 + z = -1 \Rightarrow |z^2 + z| = |-1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z(1 + z)| = -1 \Leftrightarrow |z|.|1 + z| = 1 \ (2).$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) προκύπτει ἀμέσως ὅτι

$$|z|^3 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Leftrightarrow |z + 1| = 1.$$

Ἀντίστροφα

Ἔστω ὅτι $|z| = |z + 1| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$.

Ἐπίσης $|z + 1|^2 = 1 \Leftrightarrow |z|^2 + 1 + 2\mathrm{Re}(z) = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + z + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow 1 + z + \frac{1}{z} = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 = 0.$$

50. Ἄν $z_1, z_2 \in C$, καί $|z_1| = |z_2| = 1$, δεῖξτε ὅτι:

i) $z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 = 0$.

ii) Νά βρεθοῦν οἱ z_1, z_2 πού ἱκανοποιοῦν τήν (i).

Λύση

i) Ἐπειδή

$$|z_1| = |z_2| = 1 \Leftrightarrow |z_1|^2 = |z_2|^2 = 1 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = z_2\bar{z}_2 = 1.$$

Ἄρα $\bar{z}_1 = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z}_2 = \frac{1}{z_2}$.

Ἀπό $z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \overline{z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 - \bar{z}_1\bar{z}_2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_1 z_2} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 = 0.$$

ii) Ἀπό τίς ἰσότητες

$$z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1 = 0$$

$$z_1 + z_2 + z_1 z_2 - 1 = 0$$

με πρόσθεση έχουμε $z_1 + z_2 = 0$

ενώ με αφαίρεση έχουμε $z_1 . z_2 = 1$.

Άρα τα z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $t^2 + 1 = 0$, επομένως

$$z_1 = i\ ,\ z_2 = -i\ ,\ \text{ή}\ z_1 = -i\ ,\ z_2 = i\ .$$

51. Αν $\alpha, \beta \in R, z \in C$, $|z| = 1$ καί $\alpha + \beta i = \dfrac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1}$

δείξτε ότι $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = \dfrac{16}{z^2+z^2+6}$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha + \beta i = \frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1} \Leftrightarrow (\alpha - 1) + \beta i = \frac{z^2+2iz+1}{z^2-2iz+1} - 1 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow |(\alpha - 1) + \beta i|^2 = \left| \frac{4iz}{z^2-2iz+1} \right|^2.$$

Άρα $(\alpha - 1)^2 + \beta^2 = \dfrac{16|i|^2|z|^2}{|z^2-2iz+1|^2} =$

$$= \frac{16}{(z^2-2iz+1)\overline{(z^2-2iz+1)}} = \frac{16}{(z^2-2iz+1)(\bar{z}^2-2i\bar{z}+1)} =$$

$$= \frac{16}{z^2\bar{z}^2-2iz\bar{z}^2+\bar{z}^2+2i\bar{z}^2z+4z\bar{z}+2i\bar{z}+z^2-2iz+1} =$$

$$= \frac{16}{|z|^4-2i\bar{z}|z|^2+\bar{z}^2+2iz|z|^2+4|z|^2+2i\bar{z}+z^2-2iz+1} =$$

$$= \frac{16}{\bar{z}^2+z^2+6}.$$

52. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί πού εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος (I) $3|z-12| = 5|z-8i|$

$|z-4| = |z-8|$

Λύση

Ἔστω $z = \alpha + \beta i$. Θά ἔχουμε

$$3|(\alpha - 12) + i\beta| = 5|\alpha + (\beta - 8)i|$$

$$|(\alpha - 4) + \beta i| = |(\alpha - 8) + \beta i|$$

ἤ $$9\,[(\alpha - 12)^2 + \beta^2\,] = 25[\alpha^2 + (\beta - 8)^2]$$

$$(\alpha - 4)^2 + \beta^2 = (\alpha - 8)^2 + \beta^2$$

Τό σύστημα μᾶς δίνει τίς λύσεις

$\alpha = 6, \quad \beta = 8$ καί $\alpha = 6, \quad \beta = 17.$

Ἄρα $z = 6 + 8i$ ἤ $z = 6 + 17i$.

53. Δίνονται οἱ μιγαδικοί z_1, z_2 μέ $z_1 - z_2 \neq 0$ γιά τούς ὁποίους ἰσχύει $|z_1 + z_2\sqrt{k^2}| = |z_2 + z_1\sqrt{k^2}|$ ὅπου $k \in R$, $k \neq 1$. Δεῖξτε ὅτι

$$\left|z_1 .\left|\frac{z_1^{3}}{z_2} + z_2^2\right| + z_2 .\left|\frac{z_2^{2}}{z_1} + z_1^2\right|\right| \leqslant 4|z_1|^3.$$

Λύση

Ἐπειδή $\sqrt{k^2} = |k|$ ἡ ὑπόθεση γράφεται

$$\left|z_1 + z_2|k|\right| = \left|z_2 + z_1|k|\right| \Leftrightarrow \left|z_1 + z_2|k|\right|^2 = \left|z_2 + z_1|k|\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|1 + \frac{z_2}{z_1}|k|\right|^2 = \left|\frac{z_2}{z_1} + |k|\right|^2.$$

Θέτουμε $\dfrac{z_2}{z_1} = j$ καί ἔχουμε $\left|1 + j|k|\right|^2 = \left|j + |k|\right|^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1 + j|k|).(1 + \bar{j}|k|) = (j + |k|).(\bar{j} + |k|) \Leftrightarrow (1 - |k|^2).(1 - |j|^2) = 0.$

'Επειδή $\kappa \neq 1 \Leftrightarrow (1 - |k|^2) \neq 0$. Ἄρα $1 - |j|^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$|j| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_2}{z_1}\right| = 1 \Leftrightarrow |z_1| = |z_2|.$$

Ἔτσι θά ἔχουμε $\left|z_1\left|\dfrac{z_1^3}{z_2} + z_2^2\right| + z_2\left|\dfrac{z_2^3}{z_1} + z_2^2\right|\right| \leqslant$

$$\leqslant \left|z_1\left|\frac{z_1^3}{z_2} + z_2^2\right|\right| + \left|z_2\left|\frac{z_2^3}{z_1} + z_1^2\right|\right| =$$

$$= |z_1|.\left|\frac{z_1^3}{z_2} + z_2^2\right| + |z_2|\left|\frac{z_2^3}{z_1} + z_1^2\right| \leqslant$$

$$\leqslant |z_1|.\left(\frac{|z_1|^3}{|z_2|} + |z|^2\right) + |z_2|.\left(\frac{|z_2|^3}{|z_1|} + |z_1|^2\right) =$$

$$= |z_1|\,(|z_1|^2 + |z_1|^2) + |z_1|\,(|z_1|^2 + |z_1|^2) = 4|z_1|^3.$$

54. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $z = (1 + i\sqrt{3})^6 + (1 - i\sqrt{3})^6$ εἶναι πραγματικός.

Λύση

$$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}\left[(1 + i\sqrt{3})^6 + (1 - i\sqrt{3})^6 - \left[\overline{(1 + i\sqrt{3})^6 + (1 - i\sqrt{3})^6}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(1 + i\sqrt{3})^6 + (1 - i\sqrt{3})^6 - \left[\overline{(1 + i\sqrt{3})^6} + \overline{(1 - i\sqrt{3})^6}\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[(1 + i\sqrt{3})^6 + (1 - i\sqrt{3})^6 - (1 - i\sqrt{3})^6 - (1 + i\sqrt{3})^6\right] = 0.$$

55. Ἂν $z_1, z_2, z_3 \in C$, νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{|z_1+z_2+z_3|}{k+|z_1+z_2+z_3|} \leqslant \frac{|z_1|}{k+|z_1|} + \frac{|z_2|}{k+|z_2|} + \frac{|z_3|}{k+|z_3|}$$

ὅπου $k \in R$.

Λύση

Ἔχουμε τίς προφανεῖς ἀνισότητες:

$$\frac{|z_1|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leqslant \frac{|z_1|}{k+|z_1|}$$

$$\frac{|z_2|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leqslant \frac{|z_2|}{k+|z_2|}$$

$$\frac{|z_3|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leqslant \frac{|z_3|}{k+|z_3|}$$

Μέ πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε

$$\frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leqslant \frac{|z_1|}{k+|z_1|} + \frac{|z_2|}{k+|z_2|} + \frac{|z_3|}{k+|z_3|} \quad (1)$$

Ἐπειδή $|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{|z_1+z_2+z_3|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \leqslant \frac{|z_1|+|z_2|+|z_3|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \quad (2)$$

Ἐπίσης

$$\frac{|z_1+z_2+z_3|}{k+|z_1+z_2+z_3|} \leqslant \frac{|z_1+z_2+z_3|}{k+|z_1|+|z_2|+|z_3|} \quad (3)$$

᾿Από τίς (1), (2), (3) προκύπτει

$$\frac{|z_1+z_2+z_3|}{k+|z_1+z_2+z_3|} \leqslant \frac{|z_1|}{k+|z_1|} + \frac{|z_1|}{k+|z_1|} + \frac{|z_3|}{k+|z_3|}.$$

56. Δεῖξτε ὅτι $|z_1 - z_2|^2 \leqslant (1 + |z_1|^2).(1 + |z_2|^2)$, $\forall\ z_1, z_2 \in C$.

Λύση

Γνωρίζουμε ὅτι

$$|z_1 - z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leqslant (|z_1| + |z_2|)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2| \quad (1).$$

῾Επομένως ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2| \leqslant (1 + |z_1|^2).(1 + |z_2|^2) \text{ ἤ}$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|.|z_2| \leqslant 1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_1|^2.|z_2|^2 \text{ ἤ}$$

$$|z_1|^2.|z_2|^2 + 1 - 2|z_1|.|z_2| \geqslant 0 \text{ ἤ}$$

$$(|z_1|.|z_2| - 1)^2 \geqslant 0 \quad \text{πού ἰσχύει.}$$

57. Νά βρεθεῖ ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-2i}{1+2i}$$

Λύση

Φέρνουμε πρῶτα τόν z στή μορφή $\alpha + \beta i$. Ἔχουμε

$$z = \frac{(1+i)^2}{2} + \frac{(1-2i)^2}{5} =$$

$$= \frac{5(1+i)^2+2(1-2i)^2}{10} = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Ἔστω $z_1 = \alpha + i\beta$ ἕνας μιγαδικός μέ τήν ἰδιότητα

$$z_1^2 = z.$$

Θά ἔχουμε

$$(\alpha + \beta i)^2 = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i \Leftrightarrow \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.$$

Ἄρα προκύπτει τό σύστημα:

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= -\frac{3}{5} \\ 2\alpha\beta &= \frac{1}{5} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2)^2 &= \frac{9}{25} \\ 2\alpha\beta &= \frac{1}{5} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \alpha^4+\beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 &= \frac{9}{25} \\ 4\alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{25} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha^4+\beta^4 + 2\alpha^2\beta^2 &= \frac{10}{25} \\ 4\alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{25} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} (\alpha^2+\beta^2)^2 &= \frac{10}{25} \\ 4\alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{25} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha^2+\beta^2 &= \frac{\sqrt{10}}{5} \\ \alpha^2\beta^2 &= \frac{1}{100}. \end{aligned}$$

Ἄρα τά α^2 καί β^2 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$t^2 - \frac{\sqrt{10}}{5}t + \frac{1}{100} = 0 \Leftrightarrow 100t^2 - 20\sqrt{10}t + 1 = 0$$

πού μᾶς δίνει $\alpha^2 = \dfrac{\sqrt{10}+3}{10}$, $\beta^2 = \dfrac{\sqrt{10}-3}{10}$.

Ἄρα $\alpha = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}+3}{10}}$, $\beta = \pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{10}-3}{10}}$.

Ἐπειδή ὅμως $\alpha.\beta = \dfrac{1}{10} > 0$, οἱ δεκτές λύσεις θά εἶναι

$$z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{10}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{10}},$$

$$z_1' = -\sqrt{\frac{\sqrt{10}+3}{10}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{10}-3}{10}}.$$

58. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τῶν μιγαδικῶν

i) $z_1 = 2 + 0i$, **ii)** $z_2 = 1 - i$

iii) $z_3 = \dfrac{1+i}{2-i}$, **iv)** $z_4 = \dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(16-8i)}$.

Λύση

i) $|z_1| = \rho_1 = 2$. Ἄν $\theta_1 = Arg(z_1)$ θά εἶναι $\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{2}{2} = 1$,

$\eta\mu\theta_1 = \frac{0}{2} = 0$. Ἄρα $Arg(z_1) = \theta_1 = 0$ καί $arg(z_1) = 2k\pi$, $k = 0, 1, 2...$

ii) $|z_2| = \rho_2 = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Ἄν $\theta_2 = Arg(z_2)$ θά εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta\mu\theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ἄρα

$$Arg(z_2) = \theta_2 = \frac{7\pi}{4} \text{ καί } arg(z_2) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

iii) Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ μέτρου τοῦ z_3 ἔχουμε δυό τρόπους. Μποροῦμε νά βροῦμε τό $|z_3| = \rho_3$ ἐφαρμόζοντας τίς ἰδιότητες τοῦ μέτρου ἤ μετατρέποντας τόν z_3 στή μορφή $\alpha + \beta i$.

Μέ τήν πρώτη μέθοδο ἔχουμε:

$$|z_3| = \rho_3 = \left|\frac{1+i}{2-i}\right| = \frac{|1+i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Μέ τή δεύτερη μέθοδο θά ἔχουμε:

$$z_3 = \frac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$$

Ἄρα $\quad |z_3| = \rho_3 = \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (\frac{3}{5})^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Ἄν $\theta_3 = \operatorname{Arg}(z_3)$ θά εἶναι $\text{συν}\theta_3 = \dfrac{1/5}{\sqrt{2}/\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (1)

καί $\quad \text{ημ}\theta_3 = \dfrac{3/5}{\sqrt{2}/\sqrt{5}} = \dfrac{3\sqrt{5}}{5\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$. (2)

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2) προκύπτει ὅτι $\quad 0 < \theta_3 < \pi/2$.

ἡ δέ γωνία θ_3 προσδιορίζεται ἀπό τούς τριγωνομετρικούς πίνακες.

iv) $|z_4| = \rho_4 = \left| \dfrac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(16-8i)} \right| =$

$$= \frac{|(2-3i)(3+4i)|}{|(6+4i)(16-8i)|} = \frac{|2-3i|.|3+4i|}{|6+4i|.|16-8i|} =$$

$$= \frac{\sqrt{13}.\sqrt{25}}{\sqrt{52}.\sqrt{320}} = \frac{\sqrt{5}}{16}.$$

Μετατρέπουμε τόν z_4 στή μορφή $\alpha + \beta i$. Ἔχουμε

$$z_4 = \frac{(2-3i).(3+4i)}{2(3+2i).8.(2-i)} = \frac{1}{16} \cdot \frac{6-9i+8i+12}{6+4i-3i+2} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{18-i}{8+i} = \frac{1}{16} \cdot \frac{(18-i).(8-i)}{(8+i).(8-i)} =$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{144-8i-18i-1}{64+1} = \frac{1}{16} \cdot \frac{143-26i}{65} = \frac{143}{16.65} - \frac{26}{16.65} \cdot i$$

Ἄν $\theta_4 = \mathrm{Arg}(z_4)$ θά εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta_4 = \frac{143\sqrt{5}}{325} \quad (3) \quad , \quad \eta\mu\theta_4 = -\frac{26\sqrt{5}}{325}. \quad (4)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3), (4) προκύπτει ὅτι $\frac{3\pi}{2} < \theta_4 < 2\pi.$

καί ἡ γωνία θ_4 προσδιορίζεται ἀπό τούς πίνακες τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

59. Νά γραφτοῦν στήν τριγωνομετρική τους μορφή οἱ μιγαδικοί

i) $z_1 = \frac{\sqrt{3}-3i}{-3+4i}$. **ii)** $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

iii) $z_3 = \sigma\upsilon\nu\alpha - i\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Λύση

i) $$z_1 = \frac{(\sqrt{3}-3i).(-3-4i)}{(-3+4i).(-3-4i)} = \frac{-3\sqrt{3}+9i-4\sqrt{3}i-12}{(-3)^2-(4i)^2} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{3}-12+(9-4\sqrt{3})i}{25}.$$

Ἄρα $$|z_1| = \rho_1 = \frac{\sqrt{(-3\sqrt{3}-12)^2+(9-4\sqrt{3})^2}}{25} =$$

$$= \frac{\sqrt{27+144+72\sqrt{3}+81+48-72\sqrt{3}}}{25} = \frac{\sqrt{300}}{25} =$$

$$= \frac{10\sqrt{3}}{25} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

῎Αν $\theta_1 = \text{Arg}(z_1)$ θά ἔχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta_1 = \frac{\dfrac{-3\sqrt{3}-12}{25}}{\dfrac{2\sqrt{3}}{5}} = -\frac{3+\sqrt{3}+12}{10\sqrt{3}} = -\frac{9+12\sqrt{3}}{30} = -\frac{3+4\sqrt{3}}{10}$$

᾿Επίσης $\eta\mu\theta_1 = \dfrac{9-4\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \dfrac{9\sqrt{3}-12}{30} = \dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

῎Αρα $\dfrac{3\pi}{2} < \theta_1 \leqslant 2\pi$, καί $z_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}.(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$.

ὅπου $\theta_1 = \tau o\xi\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{3+4\sqrt{3}}{10}\right)$.

ii) $|z_2| = \rho_2 = \left|\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right| = \dfrac{|-1+i\sqrt{3}|}{2} = 1$.

$\text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(-1+i\sqrt{3}) - \text{Arg}(2)$. Θά ὑπολογίσουμε τό $\text{Arg}(-1+i\sqrt{3})$.

῎Εστω $z = -1+i\sqrt{3}$. ᾿Επειδή $|z| = 2$, $\sigma\upsilon\nu\theta = -\dfrac{1}{2}$, $\eta\mu\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Θά εἶναι $\text{Arg}(z) = \dfrac{5\pi}{6}$. ᾿Επίσης $\text{Arg}(2) = 0$. ῎Αρα

$$\text{Arg}(z_2) = \frac{5\pi}{6} - 0 \quad \text{καί} \quad z_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6} + i\eta\mu\frac{5\pi}{6}.$$

iii) $z_3 = (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\theta) + i(\eta\mu\theta - \eta\mu\alpha) =$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha-\theta}{2} + 2i\eta\mu\frac{\theta-\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha+\theta}{2} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta-\alpha}{2} + 2i\eta\mu\,\frac{\theta-\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta-\alpha}{2} + i\eta\mu\,\frac{\theta-\alpha}{2}\right).$$

Ἄρα $|z_3| = \rho_3 = \left|2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2}\right|$

$$\left|\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta-\alpha}{2} + i\eta\mu\,\frac{\theta-\alpha}{2}\right| = \left|2\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2}\right|.$$

Γιά τό ὅρισμα τοῦ z_3 ἔχουμε τά ἑξῆς:

1) Ἔστω $\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\theta}{2} < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\pi < \alpha+\theta < \pi \Leftrightarrow -\pi-\alpha < \theta < \pi-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\pi-2\alpha < \theta-\alpha < \pi-2\alpha \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}-\alpha < \frac{\theta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}-\alpha \quad (1).$$

Ἀλλά $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < -\alpha < 0$ (2). Ἄρα $-\pi < \frac{\theta-\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$.

Ἀλλά γνωρίζουμε ὅτι τό $\mathrm{Arg}(z)$ ὁρίζεται στό διάστημα $(0,2\pi)$.

Ἄρα $\mathrm{Arg}(z_3) = \frac{\theta-\alpha}{2} + \pi$ ὅταν $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$.

2) Ὅταν $\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\alpha+\theta}{2} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \pi < \alpha+\theta < 3\pi \Leftrightarrow \pi-\alpha < \theta < 3\pi-\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \pi-2\alpha < \theta-\alpha < 3\pi-2\alpha \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-\alpha < \frac{\theta-\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}-\alpha$$

καί λόγω τῆς (2) θά ἔχουμε $0 < \frac{\theta-\alpha}{2} < \frac{3\pi}{2}$.

Ἄρα στήν περίπτωση αὐτή θά ἔχουμε $\operatorname{Arg}(z_3) = \dfrac{\theta-\alpha}{2}$.

60. Ἄν $z_1 = \dfrac{1+7i}{1-i}$, $z_2 = \dfrac{17-7i}{2+2i}$ νά ὑπολογιστεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα καί νά γραφτοῦν στήν τριγωνομετρική τους μορφή οἱ μιγαδικοί z_1, z_2, $z_1 + z_2$, $z_1 . z_2$.

Λύση

α) $|z_1| = \dfrac{|1+7i|}{|1-i|} = \dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = 5$,

$\operatorname{Arg}(z_1) = \operatorname{Arg}(1 + 7i) - \operatorname{Arg}(1 - i)$. Ἀλλά $\operatorname{Arg}(1 + 7i) = \theta_1$, ὅπου

$0 < \theta_1 < \dfrac{\pi}{2}$ (1), $\theta_1 = \text{τοξσυν}\,\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ καί $\operatorname{Arg}(1 - i) = \dfrac{7\pi}{4}$. Ἄρα

$\operatorname{Arg}(1 + 7i) - \operatorname{Arg}(1 - i) = \theta_1 - \dfrac{7\pi}{4}$. Πρέπει ὅμως $0 < \theta_1 - \dfrac{7\pi}{4} < 2\pi$.

Λόγω τῆς (1) προκύπτει

$$-\frac{7\pi}{4} < \theta_1 - \frac{7\pi}{4} < -\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} < \theta_1 - \frac{5\pi}{4} + 2\pi < \frac{5\pi}{4}.$$

Ἄρα $\operatorname{Arg}(z_1) = \theta_1 - \dfrac{7\pi}{4} + 2\pi$ καί ἡ τριγωνομετρική μορφή τοῦ z_1

εἶναι $z_1 = 5[\text{συν}(\theta_1 - \dfrac{7\pi}{4}) + i\,\text{ημ}(\theta_1 - \dfrac{7\pi}{4})]$.

β) $|z_2| = \dfrac{|17-7i|}{|2+2i|} = \dfrac{13\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \dfrac{13}{2}$.

$\operatorname{Arg}(z_2) = \operatorname{Arg}(17 - 7i) - \operatorname{Arg}(2 + 2i)$. Ἀλλά $\operatorname{Arg}(17 - 7i) = \theta_2$

$\dfrac{3\pi}{2} < \theta_2 < 2\pi$, $\theta_2 = \text{τοξσυν}\,\dfrac{17\sqrt{2}}{26}$. Ἐπίσης $\operatorname{Arg}(2 + 2i) = \dfrac{\pi}{4}$.

Ἄρα $\mathrm{Arg}(z_2) = \theta_2 - \frac{\pi}{4}$ καί τοῦτο εἶναι τό ζητούμενο ὅρισμα ἐφόσον $\frac{5\pi}{4} < \theta_2 - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4}$.

γ) $z_1 + z_2 = \frac{1+7i}{1-i} + \frac{17-7i}{2+2i} =$

$$= \frac{(1+7i).(2+2i)+(17-7i).(1-i)}{2.(1-i).(1+i)} = -\frac{1}{2} - 2i.$$

Ἄρα $|z_1 + z_2| = \frac{\sqrt{17}}{2}$ καί $\mathrm{Arg}(z_1 + z_2) = \theta_3$ ὅπου $\pi < \theta_3 < \frac{3\pi}{2}$

καί $\theta_3 = \text{τοξσυν}\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$ καί $z_1 + z_2 = \frac{\sqrt{17}}{2}(\text{συν}\theta_3 + i\,\text{ημ}\theta_3)$.

δ) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2| = 5 \cdot \frac{13}{2} = \frac{65}{2}$,

$$\arg(z_1 . z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) = \theta_1 - \frac{7\pi}{4} + \theta_2 - \frac{\pi}{4} = \theta_1 + \theta_2 - 2\pi.$$

Ἔχουμε ὅμως τίς σχέσεις $-\frac{7\pi}{4} < \theta_1 - \frac{7\pi}{4} < -\frac{5\pi}{4}$

$$\frac{5\pi}{4} < \theta_2 - \frac{\pi}{4} < \frac{7\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_1 + \theta_2 - 2\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Ἐπειδή πρέπει $0 < \theta_1 + \theta_2 - 2\pi < 2\pi$,

προσθέτοντας τό τόξο $\frac{\pi}{2}$ στούς ὅρους τῆς

$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 + \theta_2 - 2\pi < \frac{\pi}{2}$ ἔχουμε $0 < \theta_1 + \theta_2 - \frac{3\pi}{2} < \pi$.

Ἄρα $\quad Arg(z_1 . z_2) = \theta_1 + \theta_2 - \dfrac{3\pi}{2}$

καί $\quad z_1 . z_2 = \dfrac{65}{2}\left[\text{συν}(\theta_1 + \theta_2 - \dfrac{3\pi}{2}) + i\,\text{ημ}(\theta_1 + \theta_2 - \dfrac{3\pi}{2})\right].$

61. Δίνεται ὁ μιγαδικός $z = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}\right)^4 . \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5.$

Νά μετατραπεῖ στή μορφή $\alpha + \beta i$.

Λύση

Τρέπουμε τούς μιγαδικούς στήν τριγωνομετρική τους μορφή. Ἔχουμε

$$\sqrt{3} - i = 2.(\text{συν}\,\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{11\pi}{6}),\quad \sqrt{3} + i = 2.(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{6})$$

$$1 + i = \sqrt{2}.(\text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}),\quad 1 - i = \sqrt{2}.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{4}).$$

Ἄρα

$$z = \frac{2^4\,[\text{συν}\,\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}]^4}{2^4\,[\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{6}]^4} \cdot \frac{(\sqrt{2})^5[\text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}]^5}{(\sqrt{2})^5[\text{συν}\,\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{4}]^5} =$$

$$= \frac{\text{συν}\,\frac{44\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{44\pi}{6}}{\text{συν}\,\frac{4\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{4\pi}{6}} \cdot \frac{\text{συν}\,\frac{5\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{4}}{\text{συν}\,\frac{35\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{35\pi}{4}} =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu \frac{40\pi}{6} + i\eta\mu \frac{40\pi}{6}\right) \cdot \left[\sigma\upsilon\nu \left(-\frac{30\pi}{4}\right) + i\eta\mu \left(-\frac{30\pi}{6}\right)\right] =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \left(\frac{20\pi}{3} - \frac{15\pi}{2}\right) + i\eta\mu \left(\frac{20\pi}{3} - \frac{15\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\eta\mu \left(-\frac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{6} - i\eta\mu \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i.$$

62. Ἄν $\mathrm{Arg}z = \theta$, νά βρεθεῖ τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ $z_1 = z^2 - \bar{z}$, ὅπου $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$.

Λύση

$$z_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2 - (\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta =$$

$$= (\sigma\upsilon\nu 2\theta - \sigma\upsilon\nu\theta) + (\eta\mu 2\theta + \eta\mu\theta)i =$$

$$= 2\eta\mu \frac{3\theta}{2} \eta\mu \frac{(-\theta)}{2} + i \,.\, 2\eta\mu \frac{3\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} =$$

$$= 2\eta\mu \frac{3\theta}{2} \left[- \eta\mu \frac{\theta}{2} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\right] = 2\eta\mu \frac{3\theta}{2} \left[\eta\mu \frac{(-\theta)}{2} + i\sigma\upsilon\nu \frac{(-\theta)}{2}\right] =$$

$$= 2\eta\mu \frac{3\theta}{2} \left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right]. \text{ Ἄρα } |z_1| =$$

$$= \sqrt{4\eta\mu^2 \frac{3\theta}{2} \sigma\upsilon\nu^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + 4\eta\mu^2 \frac{3\theta}{2} \eta\mu^2 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)} = \left|2\eta\mu \frac{3\theta}{2}\right|.$$

Διακρίνουμε γιά τό ὅρισμα τίς περιπτώσεις:

α) $\eta\mu \frac{3\theta}{2} > 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{3\theta}{2} < \pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6}$$

Ἄρα $\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$ καί

$$z_1 = 2\eta\mu\frac{3\theta}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

β) $\eta\mu\frac{3\theta}{2} < 0 \Leftrightarrow \pi < \frac{3\theta}{2} < 2\pi \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \frac{\theta}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{5\pi}{6} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{6}$$

Ἄρα καί στήν περίπτωση αὐτή εἶναι $\operatorname{Arg}(z_1) = \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}$

καί $z_1 = -2\eta\mu\frac{3\theta}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + i\,\eta\mu\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right]$

63. Νά δειχτοῦν οἱ τύποι

i) $(1+i)^\nu + (1-i)^\nu = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}$

ii) $(1+i)^\nu - (1-i)^\nu = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\,i\,\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}$, $\nu \in N$

Λύση

Ἔχουμε $(1+i)^\nu = \left[\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{\pi}{4}\right)\right]^\nu =$

$$= 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4} + i\,\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}\right)$$

Ἐπίσης $(1-i)^\nu = \left[\sqrt{2}\left(\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^\nu =$

$$= 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4} - i\,\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}\right)$$

Ἄρα $(1+i)^\nu + (1-i)^\nu =$

$$= 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4}\right) + 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} - i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4}\right) =$$

$$= 2.2^{\frac{\nu}{2}}\,\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} = 2^{\frac{\nu}{2}+1}\,\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\,\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4}.$$

Ὅμοια $(1+i)^\nu - (1-i)^\nu =$

$$= 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4}\right) - 2^{\frac{\nu}{2}}\left(\text{συν}\,\frac{\nu\pi}{4} - i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4}\right) =$$

$$= 2.2^{\frac{\nu}{2}}\,i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\,i\,\text{ημ}\,\frac{\nu\pi}{4}.$$

64. Νά βρεθεῖ ἕνας μιγαδικός z ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$|z-4i| = |z-2i| \quad \text{καί} \quad \operatorname{Arg}(z-2i) = \frac{3\pi}{4}.$$

Λύση

$$|z-4i| = |z-2i| \Leftrightarrow |z-4i|^2 = |z-2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-4i).(\overline{z-4i}) = (z-2i).(\overline{z-2i}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z-4i).(\bar{z}+4i) = (z-2i).(\bar{z}+2i) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - 4i\bar{z} + 4iz + 16 = z\bar{z} - 2i\bar{z} + 2iz + 4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 2iz - 2i\bar{z} = -12 \Leftrightarrow (z-\bar{z})i = -6$. Ἀλλά $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

Ἄρα $2i\operatorname{Im}(z).i = -6 \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 3$. Ἄρα ὁ z εἶναι τῆς μορφῆς $z = x + 3i$. Πρέπει τώρα νά προσδιοριστεῖ ὁ x. Ἐπειδή $z - 2i = x + i$

$$\text{καί} \quad Arg(z-2i)=\frac{3\pi}{4}, \quad \text{ἔχουμε}$$

$$συν\frac{3\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{x^2+1} \Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Ἄρα $z=1+3i$ ἤ $z=-1+3i$. Ἡ λύση $z=1+3i$ ἀπορρίπτεται διότι $Arg(z-2i)=Arg(1+3i-2i)=Arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$. Ἄρα ὁ ζητούμενος μιγαδικός εἶναι $z=-1+3i$.

65. Ἄν $\theta = Arg(z)$ δεῖξτε ὅτι

$$\left|\frac{z-|z|}{z+|z|}\right|=\sqrt{\frac{1-συν\theta}{1+συν\theta}}$$

Λύση

Ἔστω $z=\rho(συν\theta+iημ\theta)$. Ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι

$$\left|\frac{z-|z|}{z+|z|}\right|^2=\frac{1-συν\theta}{1+συν\theta} \quad ἤ \quad \left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right).\left(\overline{\frac{z-|z|}{z+|z|}}\right)=\frac{1-συν\theta}{1+συν\theta} \quad ἤ$$

$$\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right).\left(\frac{\bar{z}-|\bar{z}|}{\bar{z}+|\bar{z}|}\right)=\frac{1-συν\theta}{1+συν\theta}.$$

Ἀλλά $\left(\frac{z-|z|}{z+|z|}\right).\left(\frac{\bar{z}-|\bar{z}|}{\bar{z}+|\bar{z}|}\right)=$

$$=\frac{\rho(συν\theta+iημ\theta)-\rho}{\rho(συν\theta+iημ\theta)+\rho}\cdot\frac{\rho(συν\theta-iημ\theta)-\rho}{\rho(συν\theta-iημ\theta)+\rho}=$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta-1).(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta-1)}{(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta+1).(\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta+1)} =$$

$$= \frac{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta-2\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta+2\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{2-2\sigma\upsilon\nu\theta}{2+2\sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

66."Αν $z_1, z_2 \in C$, $|z_1| = |z_2| = 1$, δεῖξτε ὅτι ὁ λόγος $\dfrac{(z_1+z_2)^\nu}{z_1^\nu+z_2^\nu}$ εἶναι πραγματικός ἀριθμός, ὅταν ὁ ν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

Λύση

"Εστω $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1$, $z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2$. "Αρα

$$z_1 + z_2 = (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + \sigma\upsilon\nu\theta_2) + i(\eta\mu\theta_1 + \eta\mu\theta_2) =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2} + 2i\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\eta\mu\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right].$$ 'Επομένως

$$(z_1 + z_2)^\nu = 2^\nu\sigma\upsilon\nu^\nu\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2} + i\eta\mu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}\right].$$

'Επίσης $z_1^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\theta_1 + i\eta\mu\nu\theta_1$, $z_2^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\theta_2 + i\eta\mu\nu\theta_2$.

"Αρα $z_1^\nu + z_2^\nu = (\sigma\upsilon\nu\nu\theta_1 + \sigma\upsilon\nu\nu\theta_2) + i(\eta\mu\nu\theta_1 + \eta\mu\nu\theta_2) =$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1-\theta_2)}{2} + 2i\eta\mu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1-\theta_2)}{2} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1-\theta_2)}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2} + i\eta\mu\frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}\right].$$

$$\text{Άρα}\ \frac{(z_1+z_2)^\nu}{z_1^\nu+z_2^\nu} = \frac{2^\nu \sigma\upsilon\nu^\nu \frac{\theta_1-\theta_2}{2}[\sigma\upsilon\nu \frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2} + i\eta\mu \frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}]}{2\sigma\upsilon\nu \frac{\nu(\theta_1-\theta_2)}{2}[\sigma\upsilon\nu \frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2} + i\eta\mu \frac{\nu(\theta_1+\theta_2)}{2}]} =$$

$$= 2^{\nu-1} \frac{\sigma\upsilon\nu^\nu \frac{\theta_1-\theta_2}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\nu(\theta_1-\theta_2)}{2}} \in R$$

Έστω ὅτι ὁ ν εἶναι ρητός καί ἔστω $\nu = \frac{k}{\rho}$ ὅπου $(k,\rho) = 1$.

Τότε θά ἔχουμε:

$$(z_1 + z_2)^{\frac{k}{\rho}} = \left[2\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\eta\mu \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\right]^{\frac{k}{\rho}} =$$

$$= 2^{\frac{k}{\rho}} \sigma\upsilon\nu^{\frac{k}{\rho}} \frac{\theta_1-\theta_2}{2} \left[\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1+\theta_2}{2} + i\eta\mu \frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right]^{\frac{1}{\rho}}\right]^k =$$

$$= 2^{\frac{k}{\rho}} \sigma\upsilon\nu^{\frac{k}{\rho}} \frac{\theta_1-\theta_2}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + 2\lambda\pi}{\rho} + i\eta\mu \frac{\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + 2\lambda\pi}{\rho}\right]^k$$

$\lambda = 0, 1, \ldots, \rho - 1$

$$= 2^{\frac{k}{\rho}} \sigma\upsilon\nu^{\frac{k}{\rho}} \frac{\theta_1-\theta_2}{2} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{k(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + 2\lambda\pi)}{\rho} + i\eta\mu \frac{k(\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + 2\lambda\pi)}{\rho}\right]$$

$\lambda = 0, 1, \ldots, \rho - 1$ (1).

Ἐπίσης: $z_1^\nu + z_2^\nu = z_1^{\frac{k}{\rho}} + z_2^{\frac{k}{\rho}} =$

$$= (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_2)^{\frac{k}{\rho}} + (\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_2)^{\frac{k}{\rho}} =$$

$$= \left[(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_2)^{\frac{1}{\rho}}\right]^k + \left[(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)^{\frac{1}{\rho}}\right]^k =$$

$$= \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_1 + 2\lambda_1\pi}{\rho} + i\eta\mu \frac{\theta_1 + 2\lambda_1\pi}{\rho}\right)^k +$$

$$+ \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta_2 + 2\lambda_2\pi}{\rho} + i\eta\mu \frac{\theta_2 + 2\lambda_2\pi}{\rho}\right)^k =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{k(\theta_1 + 2\lambda_1\pi)}{\rho} + i\eta\mu \frac{k(\vartheta_1 + 2\lambda_1\pi)}{\rho} +$$

$$+ \sigma\upsilon\nu \frac{k(\theta_2 + 2\lambda_2\pi)}{\rho} + i\eta\mu \frac{k(\theta_2 + 2\lambda_2\pi)}{\rho} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu \frac{\frac{k\theta_1 + 2\lambda_1 k\pi}{\rho} + \frac{k\theta_2 + 2\lambda_2 k\pi}{\rho}}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{k\theta_1 + 2\lambda_1 k\pi}{\rho} - \frac{k\theta_2 + 2\lambda_2 k\pi}{\rho}}{2} +$$

$$+ 2i\eta\mu \frac{\frac{k\theta_1 + 2\lambda_1 k\pi}{\rho} + \frac{k\theta_2 + 2\lambda_2 k\pi}{\rho}}{\rho} \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{k\theta_1 + 2\lambda_1 k\pi}{\rho} - \frac{k\theta_2 + 2\lambda_2 k\pi}{\rho}}{\rho} =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu \frac{k(\theta_1 - \theta_2) + 2k\pi(\lambda_1 - \lambda_2)}{2\rho} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{k(\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\rho} + \right.$$

$$\left. + i\eta\mu \frac{k(\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\rho}\right] \quad (2),$$

όπου $\lambda_1 = 0, 1, \ldots, \rho - 1$, $\lambda_2 = 0, 1, \ldots, \rho - 1$.

᾽Από τίς σχέσεις (1), (2) εἶναι προφανές ὅτι τό κλάσμα $\dfrac{(z_1+z_2)^\nu}{z_1^\nu+z_2^\nu}$

δέν εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

῾Η περίπτωση πού ὁ ν εἶναι ἄρρητος δέ μᾶς ἐνδιαφέρει.

67. ῎Αν $z \in C$, νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z_1 = z + i\bar{z}$$

Λύση

῎Εστω $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$. Τότε $z + i\bar{z} =$

$$= \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) + i\rho(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta) =$$

$$= \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta] =$$

$$= \rho[(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) + i(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)] = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta).(1 + i) =$$

$$= \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} + i\eta\mu\frac{\pi}{4}).$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1) $\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta > 0 \Leftrightarrow \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)\sqrt{2} > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z_1| = \rho\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) \text{ καί } Arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$$

2) $\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta < 0 \Leftrightarrow \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)\sqrt{2} < 0.$

Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε:

$$z_1 = [-\rho\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)].[-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - i\eta\mu\frac{\pi}{4}] =$$

$$= [-\rho\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)].[\sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{4}) - i\eta\mu(\pi - \frac{\pi}{4})] =$$

$$= [-\rho\sqrt{2}(\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta)].[\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{4} - i\eta\mu\frac{3\pi}{4}] =$$

$$= [-\rho\sqrt{2}(\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta)].[\text{συν}(-\frac{3\pi}{4}) + i\,\text{ημ}(-\frac{3\pi}{4})].$$

Ἄρα $|z_1| = -\rho\sqrt{2}(\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta)$, $\quad \text{Arg}(z_1) = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{5\pi}{4}$.

καί $z_1 = -\rho\sqrt{2}(\text{συν}\theta + \text{ημ}\theta).(\text{συν}\frac{5\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{4})$

68. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ ἀκέραιου k ὥστε ἡ παράσταση

$\dfrac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^k}$ νά εἶναι φανταστικός ἀριθμός.

Λύση

Τρέπουμε τούς ὅρους τοῦ κλάσματος στήν τριγωνομετρική τους μορφή. Ἔχουμε:

$$1 + i\sqrt{3} = 2(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow (1 + i\sqrt{3})^3 = 2^3.(\text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi).$$

Ἐπίσης: $\quad \sqrt{3} - i = 2(\text{συν}\frac{11\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{11\pi}{6}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3} - i)^k = 2^k.(\text{συν}\frac{11k\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{11k\pi}{6}).$$

Ἄρα το κλάσμα γίνεται:

$$k = \frac{(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^k} = \frac{2^3(\text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi)}{2^k(\text{συν}\frac{11k\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{11k\pi}{6})} =$$

$$= 2^{3-k}[\text{συν}(\pi - \frac{11k\pi}{6}) + i\,\text{ημ}(\pi - \frac{11k\pi}{6})].$$

Γιά νά εἶναι λοιπόν τό κλάσμα k φανταστικός ἀριθμός πρέπει

$$συν(π - \frac{11kπ}{6}) = 0 \Leftrightarrow π - \frac{11kπ}{6} = λπ + \frac{π}{2}, \text{ ὅπου } λ \in Z.$$

Ἁπλοποιώντας τό π ἔχουμε:

$$1 - \frac{11k}{6} = λ + \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6 - 11k = 6λ + 3 \Leftrightarrow 11k = 3 - 6λ \Leftrightarrow 6λ + 11k = 3 (1).$$

Ἡ ἐξίσωση (1) εἶναι μία ἐξίσωση 1ου βαθμοῦ μέ δύο ἀγνώστους λ, k. Ἐπειδή $(6, 11) = 1$ ἡ (1) ἔχει τουλάχιστον μία ἀκεραία λύση. Παρατηροῦμε ὅτι ὅταν $λ = -5$, $k = 3$. Γενικότερα ὅταν $λ = -5 + 11ρ$ θά ἔχουμε $k = 3 - 6ρ$ (2) ὅπου $ρ \in z$. Οἱ τιμές πού προκύπτουν ἀπό τόν τύπο (2) εἶναι οἱ ζητούμενες.

69. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = -ημ2θ + 2iσυν^2θ, \text{ ὅταν } θ \in (0, π).$$

Στή συνέχεια νά ὑπολογιστεῖ ὁ θ ὥστε οἱ μιγαδικοί z καί $1 - z$ νά ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

Λύση

Ἔχουμε

$$z = -ημ2θ + 2iσυν^2θ = -2ημθσυνθ + 2iσυν^2θ =$$

$$= 2συνθ(-ημθ + iσυνθ) = 2συνθ\,[συν(\frac{π}{2} + θ) + iημ(\frac{π}{2} + θ)].$$

Ἔχουμε τίς ἑξῆς περιπτώσεις:

1) $θ \in (0, \frac{π}{2}) \Rightarrow συνθ > 0$. Ἄρα $|z| = συνθ$ καί

$$Arg(z) = \frac{π}{2} + θ$$

2) $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \Leftrightarrow$ συν$\theta < 0$. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε

$$z = 2\sigma\upsilon\nu\theta\, [\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2})] =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\theta\, [-\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + \theta) - i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + \theta)] =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\theta\, [\sigma\upsilon\nu(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta) - i\eta\mu(\pi - \frac{\pi}{2} - \theta)] =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\theta\, [\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \theta) - i\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \theta)] =$$

$$= -2\sigma\upsilon\nu\theta\, [\sigma\upsilon\nu(\theta - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(\theta - \frac{\pi}{2})].$$

Ἄρα $|z| = -2\sigma\upsilon\nu\theta$ καί $\operatorname{Arg}(z) = \theta - \frac{\pi}{2}$.

Ἐπειδή τώρα θέλουμε

$$|z| = |1 - z| \Leftrightarrow |z|^2 = |1 - z|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} = (1 - z).(1 - \bar{z}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-\eta\mu 2\theta + 2i\sigma\upsilon\nu^2\theta).(-\eta\mu 2\theta - 2i\sigma\upsilon\nu^2\theta) =$$

$$= [(1 + \eta\mu 2\theta) - 2i\sigma\upsilon\nu^2\theta].[(1 + \eta\mu 2\theta) + 2i\sigma\upsilon\nu^2\theta] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 2\theta + 4\sigma\upsilon\nu^4\theta = (1 + \eta\mu 2\theta)^2 + 4\sigma\upsilon\nu^4\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 2\theta = (1 + \eta\mu 2\theta)^2 \Leftrightarrow \eta\mu^2 2\theta = 1 + \eta\mu^2 2\theta + 2\eta\mu 2\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\eta\mu^2 2\theta = 0 \Leftrightarrow 2\eta\mu 2\theta) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu 2\theta = -\frac{1}{2}.$$

Οἱ γενικές λύσεις τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς εἶναι

$$2\theta = 2k\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad 2\theta = 2k\pi + \pi - \frac{7\pi}{6} \text{ ἤ}$$

$$\theta = k\pi + \frac{7\pi}{12}, \quad \theta = k\pi - \frac{\pi}{12}.$$

Ἐπειδή τό θ εἶναι τό πρωτεῦον ὅρισμα τοῦ z θέτουμε $k = 0$

καί παίρνουμε $\theta = \frac{7\pi}{12}$ ἤ $\theta = -\frac{\pi}{12}$.

Ἐπειδή πρέπει $\theta \in (0,2\pi)$ ἡ τιμή $\theta = -\frac{\pi}{12}$

ἀντικαθίσταται μέ τή $\theta = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}$

70. Ἔστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in C$, καί $z_3 \neq z_4$. Θεωροῦμε τό μιγαδικό

$$z = \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}.$$

Δεῖξτε ὅτι ἄν $Arg(z_1 - z_2) = Arg(z_3 - z_4)$, ὁ z θά εἶναι πραγματικός ἀριθμός.

Λύση

Ἔστω $Arg(z_1 - z_2) = \hat{\theta}$ καί $Arg(z_3 - z_4) = \hat{\varphi}$.

Τότε θά εἶναι

$Arg(z) = Arg(z_1 - z_2) - Arg(z_3 - z_4) = \theta - \varphi = 0.$

Ἔτσι ὁ z γράφεται

$$z = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right| (\sigma\upsilon\nu 0^0 + i\eta\mu 0^0) = \left|\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}\right| \in R$$

71. Νά δειχτεῖ ὅτι κάθε μιγαδικός z μέ $|z| = 1$ γράφεται μέ τή μορφή $z = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ ὅπου λ κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός.

Λύση

Ἐπειδή $|z| = 1$ ὁ z θά γράφεται μέ τή μορφή

$$z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta.$$

Ἔτσι ἔχουμε $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} - \eta\mu^2\frac{\theta}{2} + 2i\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + \eta\mu^2\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + i^2\eta\mu^2\frac{\theta}{2} + i2\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} - i^2\eta\mu\frac{\theta}{2}} =$$

$$= \frac{(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + i\eta\mu\frac{\theta}{2})^2}{(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + i\eta\mu\frac{\theta}{2}).(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} - i\eta\mu\frac{\theta}{2})} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + i\eta\mu\frac{\theta}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} - i\eta\mu\frac{\theta}{2}} = \frac{1 + i\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}}{1 - i\varepsilon\varphi\frac{\theta}{2}} = \frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$$

ὅπου $\lambda = \varepsilon\varphi\frac{\theta}{2} \in R$. Πρέπει $\theta \neq 4k\pi$.

72. Νά δειχτεῖ ἡ σχέση $\left(\frac{1+i\varepsilon\varphi\theta}{1-i\varepsilon\varphi\theta}\right)^\nu = \frac{1+i\varepsilon\varphi(\nu\theta)}{1-i\varepsilon\varphi(\nu\theta)}$ $\forall\ \nu \in N$,

Λύση

$$\left(\frac{1+i\varepsilon\varphi\theta}{1-i\varepsilon\varphi\theta}\right)^{\nu} = \left(\frac{1+i\,\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}{1-i\,\dfrac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}}\right)^{\nu} = \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{\nu} =$$

$$= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)}\right)^{\nu} = (\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta)^{\nu} = \sigma\upsilon\nu 2\nu\theta + i\eta\mu 2\nu\theta =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2(\nu\theta)-\eta\mu^2(\nu\theta)+2i\eta\mu(\nu\theta)\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\nu\theta)+\eta\mu^2(\nu\theta)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2(\nu\theta)+i^2\eta\mu^2(\nu\theta)+2i\eta\mu(\nu\theta)\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^2(\nu\theta)-i^2\eta\mu^2(\nu\theta)} =$$

$$= \frac{[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)]^2}{[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)].[\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)-i\eta\mu(\nu\theta)]} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)+i\eta\mu(\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)-i\eta\mu(\nu\theta)} = \frac{1+i\varepsilon\varphi(\nu\theta)}{1-i\varepsilon\varphi(\nu\theta)}.$$

73. Ἂν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ καί $\alpha + \beta i = (1 + z).(1 + z^2)$ δεῖξτε ὅτι

i) $\dfrac{\beta}{\alpha} = \varepsilon\varphi\,\dfrac{3\theta}{2}$ **ii)** $\alpha^2 + \beta^2 = 16\sigma\upsilon\nu^2\theta.\sigma\upsilon\nu^2\,\dfrac{\theta}{2}$.

Λύση

$$\alpha + \beta i = (1 + z).(1 + z^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta i = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta).(1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta) =$$

$$= \left(2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} + i2\eta\mu \frac{\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\right).(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + i2\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta) =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} + i\eta\mu \frac{\theta}{2}\right).2\sigma\upsilon\nu\theta\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) =$$

$$= 2\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\, 2\sigma\upsilon\nu\theta \left(\sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} + i\eta\mu \frac{3\theta}{2}\right) =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2} \left(\sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} + i\eta\mu \frac{3\theta}{2}\right).$$ Ἄρα

$$\alpha = 4\sigma\upsilon\nu\theta.\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \beta = 4\sigma\upsilon\nu\theta.\sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\, \eta\mu \frac{3\theta}{2} \quad (2).$$

Ἀπό (1), (2) προκύπτει $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{4\sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\, \eta\mu \frac{3\theta}{2}}{4\sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}\, \sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2}} = \varepsilon\varphi \dfrac{3\theta}{2}$

Ἐπίσης

$$\alpha^2 + \beta^2 = 16\sigma\upsilon\nu^2\theta.\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2}\, \sigma\upsilon\nu^2 \frac{3\theta}{2} + 16\sigma\upsilon\nu^2\theta.\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2}\, \eta\mu^2 \frac{3\theta}{2} =$$

$$= 16\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} \left(\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2} + \eta\mu^2 \frac{\theta}{2}\right) = 16\sigma\upsilon\nu^2\theta\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\theta}{2}.$$

74. Νά δειχτεῖ ὅτι $\left(\dfrac{1 + \eta\mu \frac{2\pi}{9} + i\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{9}}{1 + \eta\mu \frac{2\pi}{9} - i\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{9}}\right)^{18} = -1$

Λύση

Έχουμε $\left(\dfrac{1+\eta\mu\dfrac{2\pi}{9}+i\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{9}}{1+\eta\mu\dfrac{2\pi}{9}-i\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{9}}\right)^{18}=$

$$=\left[\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)+i\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)-i\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)}\right]^{18}=$$

$$=\left[\frac{1+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)+i\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2\pi}{9}\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{9}-\dfrac{\pi}{2}\right)}\right]^{18}=$$

$$=\left[\frac{1+\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{18}+i\eta\mu\dfrac{5\pi}{18}}{1+\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{5\pi}{18}\right)+i\eta\mu\left(-\dfrac{5\pi}{18}\right)}\right]^{18}=$$

$$=\left[\frac{2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{5\pi}{36}+i2\eta\mu\dfrac{5\pi}{36}\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{36}}{2\sigma\upsilon\nu^2\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right)+i2\eta\mu\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right)\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right)}\right]^{18}=$$

$$=\left[\frac{2\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{36}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{36}+i\eta\mu\dfrac{5\pi}{36}\right)}{2\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right).\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right)+i\eta\mu\left(-\dfrac{5\pi}{36}\right)\right]}\right]^{18}=$$

$$= (\sigma\upsilon\nu \frac{10\pi}{36} + i\eta\mu \frac{10\pi}{36})^{18} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu(18 \cdot \frac{10\pi}{36}) + i\eta\mu(18 \cdot \frac{10\pi}{36}) = \sigma\upsilon\nu 5\pi + i\eta\mu 5\pi = -1.$$

75. Ἂν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$ νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τῶν μιγαδικῶν **i)** $1 + z^3$, **ii)** $1 - z^4$, **iii)** $(1 + z^3).(1 - z^4)$, **iv)** $(1 + z^3).(z^4 - 1)$.

Λύση

i) $1 + z^3 = 1 + (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^3 = 1 + \sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta =$

$$= 2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{3\theta}{2} + 2i\eta\mu \frac{3\theta}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} = 2\sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} (\sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2} + i\eta\mu \frac{3\theta}{2}).$$

Ἐπειδή $0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < \frac{3\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$. Ἄρα $|1 + z^3| = 2\sigma\upsilon\nu \frac{3\theta}{2}$

$$\text{καί } \operatorname{Arg}(1 + z^3) = \frac{3\theta}{2}.$$

ii) $1 - z^4 = 1 - (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^4 = 1 - \sigma\upsilon\nu 4\theta - i\eta\mu 4\theta =$
$= 1 - 1 + 2\eta\mu^2 2\theta - 2i\eta\mu 2\theta.\sigma\upsilon\nu 2\theta = 2\eta\mu 2\theta\ (\eta\mu 2\theta - i\sigma\upsilon\nu 2\theta) =$

$$= 2\eta\mu 2\theta.[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - 2\theta) - i\eta\mu(\frac{\pi}{2} - 2\theta)] =$$

$$= 2\eta\mu 2\theta[\sigma\upsilon\nu(2\theta - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(2\theta - \frac{\pi}{2})]$$

Ἐπειδή $0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < 2\theta < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\theta - \frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < 2\theta - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6}$$

Ἄρα

$$|1 - z^4| = 2\eta\mu 2\theta \quad \kappa\alpha\acute{\iota} \quad \mathrm{Arg}(1 - z^4) = 2\theta - \frac{\pi}{2} - 2\theta.$$

iii) $(1 + z^3).(1 - z^4) =$

$$= 2\sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2}(\sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2} + i\eta\mu\frac{3\theta}{2}).\, 2\eta\mu 2\theta.[\sigma\upsilon\nu(2\theta - \frac{\pi}{2}) + i\,\eta\mu(2\theta - \frac{\pi}{2})] =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2}\eta\mu 2\theta\,[\sigma\upsilon\nu(2\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(2\theta - \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2})] =$$

$$= 4\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\theta}{2}\,\eta\mu 2\theta\;[\sigma\upsilon\nu(\frac{7\theta}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(\frac{7\theta}{2} - \frac{\pi}{2})].$$

Ἐπειδή $4\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\theta}{2}\,\eta\mu 2\theta > 0$ θά εἶναι

$$|(1 + z^3).(1 - z^4)| = 4\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\theta}{2}\,\eta\mu 2\theta$$

$$\kappa\alpha\acute{\iota} \quad \mathrm{Arg}[(1 + z^3).(1 - z^4)] = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}.$$

iv) $z^4 - 1 = -(1 - z^4) =$

$$= -2\eta\mu 2\theta[\sigma\upsilon\nu(2\theta - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(2\theta - \frac{\pi}{2})] =$$

$$= 2\eta\mu 2\theta[-\sigma\upsilon\nu(2\theta - \frac{\pi}{2}) - i\eta\mu(2\theta - \frac{\pi}{2})] =$$

$$= 2\eta\mu 2\theta[\sigma\upsilon\nu(\pi + 2\theta - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(\pi + 2\theta - \frac{\pi}{2})] =$$

$$= 2\eta\mu 2\theta[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + 2\theta) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + 2\theta)].$$

Ἄρα $(1 + z^3).(z^4 - 1) = 2\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\theta}{2}\,(\sigma\upsilon\nu\,\frac{3\theta}{2} + i\eta\mu\,\frac{3\theta}{2})\,\cdot$

$$.\, 2\eta\mu 2\theta[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + 2\theta) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + 2\theta)] =$$

$$= 4\eta\mu 2\theta\sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2}[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+2\theta+\frac{3\theta}{2})+i\eta\mu(\frac{\pi}{2}+2\theta+\frac{3\theta}{2})] =$$

$$= 4\eta\mu 2\theta\sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2}[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}+\frac{7\theta}{2})+i\eta\mu(\frac{\pi}{2}+\frac{7\theta}{2})].$$

Ἔτσι θά ἔχουμε: $|(1+z^3).(z^4-1)| = 4\eta\mu 2\theta\ \sigma\upsilon\nu\frac{3\theta}{2}$ καί

$\mathrm{Arg}[(1+z^3).(z^4-1)] = \frac{\pi}{2}+\frac{7\theta}{2}$, διότι $\frac{\pi}{2} < \frac{7\theta}{2}+\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{3}$.

76. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παράστασης

$$\Pi = (z+\bar{z}).(z^2+\bar{z}^2)\ldots(z^\nu+\bar{z}^\nu)$$

Λύση

Ἔστω $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ ὁπότε

$$z^\nu = \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\nu = \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta)$$

καί $\bar{z}^\nu = \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta)^\nu = \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta - i\eta\mu\nu\theta)$. Ἄρα

$z^\nu + \bar{z}^\nu = \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta) + \rho^\nu(\sigma\upsilon\nu\nu\theta - i\eta\mu\nu\theta) = 2\rho^\nu\sigma\upsilon\nu\nu\theta$.

Ἔτσι ἡ παράσταση Π γίνεται:

$$\Pi = 2\rho\sigma\upsilon\nu\theta.2.\rho^2\sigma\upsilon\nu 2\theta\ldots 2\rho^\nu\sigma\upsilon\nu\nu\theta =$$

$$= 2^\nu\rho^{1+2+\cdots+\nu}\ \sigma\upsilon\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu 2\theta\ldots\sigma\upsilon\nu\nu\theta =$$

$$= 2^\nu\rho^{\frac{\nu+1}{2}.\nu}\ \sigma\upsilon\nu\theta.\sigma\upsilon\nu 2\theta\ldots\sigma\upsilon\nu\nu\theta .$$

77. Νά ἐκφραστεῖ τό συν4θ καί τό ημ4θ σάν πολυώνυμο τῶν συνθ καί ημθ.

Λύση

Θεωροῦμε τό μιγαδικό $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$. Θά εἶναι

$z^4 = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^4 = \sigma\upsilon\nu 4\theta + i\eta\mu 4\theta$ (1) ἀπό τόν τύπο τοῦ De Moivre.

$$z^4 = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^4 =$$
$$= \sigma\upsilon\nu^4\theta + 4\sigma\upsilon\nu^3\theta.(i\eta\mu\theta) + 6\sigma\upsilon\nu^2\theta.(i\eta\mu\theta)^2 + 4\sigma\upsilon\nu\theta(i\eta\mu\theta)^3 +$$
$$+ (i\eta\mu\theta)^4 = \sigma\upsilon\nu^4\theta + 4i\sigma\upsilon\nu^3\theta\,\eta\mu\theta - 6\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu^2\theta - 4i\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu^3\theta +$$
$$+ \eta\mu^4\theta = (\sigma\upsilon\nu^4\theta - 6\sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu^2\theta + \eta\mu^4\theta) +$$
$$+ i(4\sigma\upsilon\nu^3\theta\;\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta\;\eta\mu^3\theta)\ (2)$$

ἀπό τόν τύπο τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνα. Ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu 4\theta = \sigma\upsilon\nu^4\theta - 6\sigma\upsilon\nu^2\theta\eta\mu^2\theta + \eta\mu^4\theta$$
$$\eta\mu 4\theta = 4\sigma\upsilon\nu^3\theta\eta\mu\theta - 4\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu^3\theta\ .$$

78. Ἄν $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma = 0$ δεῖξτε ὅτι:

i) $\sigma\upsilon\nu\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\nu\gamma = 3\sigma\upsilon\nu\dfrac{\nu\alpha+\nu\beta+\nu\gamma}{3}$,

$\nu = 3k\ ,\ \ k \in Z$

ii) $\eta\mu\nu\alpha + \eta\mu\nu\beta + \eta\mu\nu\gamma = 3\eta\mu\dfrac{\nu\alpha+\nu\beta+\nu\gamma}{3}$,

$\nu = 3k\ ,\ \ k \in Z$

iii) $\sigma\upsilon\nu\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\nu\gamma = \eta\mu\nu\alpha + \eta\mu\nu\beta + \eta\mu\nu\gamma$,

$\nu \neq 3k\ ,\ \ k \in Z$

Λύση

Θεωροῦμε τούς μιγαδικούς

$$z_1 = \sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha\ ,\quad z_2 = \sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta\ ,\quad z_3 = \sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma$$

Τότε θά εἶναι

$$z_1 + z_2 + z_3 = (\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma) + i(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma) = 0\ (1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \bar{z_1} + \bar{z_2} + \bar{z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} =$$
$$= \frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3} = 0 \Leftrightarrow z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 0\ (2)$$

'Επίσης $z_1^3 + z_2^3 + z_3^3 = 3z_1z_2z_3 = 3\alpha$, $\alpha = z_1z_2z_3$ (3)

'Από τίς σχέσεις (1), (2), (3) παρατηροῦμε ὅτι τά z_1, z_2, z_3 εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $z^3 - 0z^2 + 0z - \alpha = 0$ δηλ. τῆς $z^3 = \alpha$ (4).

'Από τήν (4) ἔχουμε $z^3 . z^\nu = \alpha . z^\nu \Leftrightarrow z^{\nu+3} = \alpha . z^\nu$ (5).

i) Ἔστω $\nu = 3k$. Ἡ σχέση (5) γράφεται

$$z^{3k+3} = \alpha . z^\nu \Leftrightarrow z^3 . z^{3k} = \alpha z^\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha z^{3k} = \alpha z^\nu \Leftrightarrow z^{3k} = z^\nu$$

(λόγω τῆς (4)) $\Leftrightarrow (z^3)^k = z^\nu \Leftrightarrow \alpha^k = z^\nu$. Ἄρα

$z_1^\nu = \alpha^k$, $z_2^\nu = \alpha^k$, $z_3^\nu = \alpha^k$ ὁπότε

$z_1^\nu + z_2^\nu + z_3^\nu = 3\alpha^k$ (6). 'Αλλά

$z_1^\nu = (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\alpha + i\eta\mu\nu\alpha$ (7), $z_2^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\beta + i\eta\mu\nu\beta$ (8),

$z_3^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\gamma + i\eta\mu\nu\gamma$ (9).

$$\alpha^k = [(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha).(\sigma\upsilon\nu\beta + i\eta\mu\beta).(\sigma\upsilon\nu\gamma + i\eta\mu\gamma)]^k =$$

$$= [\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu(\alpha + \beta + \gamma)]^k =$$

$$= \sigma\upsilon\nu k(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu k(\alpha + \beta + \gamma) \quad (10).$$

'Από τίς σχέσεις (6, 7, 8, 9, 10), προκύπτει

$$\sigma\upsilon\nu\nu\alpha + i\eta\mu\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\nu\beta + i\eta\mu\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\nu\gamma + i\eta\mu\nu\gamma =$$

$$= 3[\sigma\upsilon\nu k(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu k(\alpha + \beta + \gamma)] \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sigma\upsilon\nu\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\nu\gamma) + i(\eta\mu\nu\alpha + \eta\mu\nu\beta + \eta\mu\nu\gamma) =$$

$$= 3[\sigma\upsilon\nu k(\alpha + \beta + \gamma) + i\eta\mu k(\alpha + \beta + \gamma)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\nu\gamma = 3\sigma\upsilon\nu k(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 3\sigma\upsilon\nu \frac{\nu(\alpha+\beta+\gamma)}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \eta\mu\nu\alpha + \eta\mu\nu\beta + \eta\mu\nu\gamma = 3\eta\mu k(\alpha + \beta + \gamma) =$$

$$= 3\eta\mu \frac{\nu(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$$

ii) Ἔστω $\nu \neq 3k$. Τότε $\nu = 3k + 1$ ἤ $\nu = 3k + 2$. Ἄν $\nu = 3k + 1$ ἀπό τήν (5) ἔχουμε:

$$z^{3k+3+1} = \alpha . z^\nu \Leftrightarrow z^{3k+4} = \alpha . z^\nu \Leftrightarrow (z^3)^k z^4 = \alpha z^\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^k.z^4 = \alpha.z^\nu \ \text{(λόγω τῆς (4))} \Leftrightarrow \alpha^{k+1}.z = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow z^\nu = \alpha^k.z.$$

$$\text{Ἄρα} \quad z_1^\nu = \alpha^k.z_1 , \quad z_2^\nu = \alpha^k.z_2 , \quad z_3^\nu = \alpha^k.z_3 \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1^\nu + z_2^\nu + z_3^\nu = \alpha^k.(z_1 + z_2 + z_3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\text{συν}\nu\alpha + \text{συν}\nu\beta + \text{συν}\nu\gamma) + i(\text{ημ}\nu\alpha + \text{ημ}\nu\beta + \text{ημ}\nu\gamma) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}\nu\alpha + \text{συν}\nu\beta + \text{συν}\nu\gamma = \text{ημ}\nu\alpha + \text{ημ}\nu\beta + \text{ημ}\nu\gamma = 0$$

Ἄν $\nu = 3k + 2$ θά ἔχουμε ἀπό τήν (5) ὅτι $z^{3k+2+3} = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z^{3k+5} = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow (z^3)^k.z^5 = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow \alpha^k.z^5 = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^{k+1}.z^2 = \alpha.z^\nu \Leftrightarrow z^\nu = \alpha^k.z^2. \ \text{Ἄρα}$$

$$z_1^\nu = \alpha^k.z_1^2 , \quad z_2^\nu = \alpha^k.z_2^2 , \quad z_3^\nu = \alpha^k.z_3^2 \quad \text{καί}$$

$$z_1^\nu + z_2^\nu + z_3^\nu = \alpha.(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) = 0,$$

ὁπότε προκύπτει ὅπως καί προηγουμένως ἡ ζητούμενη ἰσότητα.

79. Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση

$$A = \frac{(1-\text{ημ}\,3\alpha + i\,\text{συν}\,3\alpha)^2}{(1-\text{συν}\,\alpha - i\,\text{ημ}\,\alpha)^6}$$

Λύση

$$(1 - \text{ημ}\,3\alpha + i\,\text{συν}\,3\alpha)^2 = [1 + \text{συν}(\frac{\pi}{2} + 3\alpha) + i\,\text{ημ}(\frac{\pi}{2} + 3\alpha)]^2 =$$

$$= \left[2\text{συν}^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right) + 2i\,\text{ημ}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right).\text{συν}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= 4\text{συν}^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right).\left[\text{συν}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right) + i\,\text{ημ}\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= 4\text{συν}^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 3\alpha}{2}\right).[\text{συν}(\frac{\pi}{2} + 3\alpha) + i\,\text{ημ}(\frac{\pi}{2})] \quad (1).$$

'Επίσης $(1 - \sigma\upsilon\nu\alpha - i\eta\mu\alpha)^6 = \quad (2\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2} - 2i\eta\mu\frac{\alpha}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2})^6 =$

$$= 64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}(\eta\mu\frac{\alpha}{2} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2})^6 =$$

$$= 64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) - i\eta\mu(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2})]^6 =$$

$$= 64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}[\sigma\upsilon\nu(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2}) + i\eta\mu(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2})]^6 =$$

$$= 64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}[\sigma\upsilon\nu(3\alpha - 2\pi) + i\eta\mu(3\alpha - 2\pi)].$$

"Αρα ἡ παράσταση γίνεται:

$$A = \frac{4\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2}).[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + 3\alpha) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + 3\alpha)]}{64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}.[\sigma\upsilon\nu(3\alpha - 2\pi) + i\eta\mu(3\alpha - 2\pi)]} =$$

$$= \frac{4\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2})}{64\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}} \cdot [\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} + 3\alpha - 3\alpha + 2\pi) + i\eta\mu(\frac{\pi}{2} + 3\alpha - 3\alpha + 2\pi)] =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2})}{16\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}} \cdot (\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{2} + \frac{3\alpha}{2})}{16\eta\mu^6\frac{\alpha}{2}}.i$$

80. Δεῖξτε ὅτι

$$[(1 + i)\sigma\upsilon\nu\theta + (1 - i)\eta\mu\theta]^{2\nu} = (2i)^{2\nu}(\sigma\upsilon\nu 2\nu\theta - i\eta\mu 2\nu\theta), \quad \nu \in Z^+.$$

Λύση

$$[(1+i)\text{συν}\theta + (1-i)\text{ημ}\theta]^{2\nu} = \Big[\sqrt{2}\,(\text{συν}\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{4})\,\text{συν}\theta +$$

$$+ \sqrt{2}\,[\text{συν}(-\frac{\pi}{4}) + i\,\text{ημ}(-\frac{\pi}{4})]\,\text{ημ}\theta\Big] =$$

$$= (\sqrt{2})^{2\nu}\Big[\text{συν}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta + \text{συν}(-\frac{\pi}{4}\,\text{ημ}\theta +$$

$$+ i\,[\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta + \text{ημ}(-\frac{\pi}{4})\,\text{ημ}\theta]\Big]^{2\nu} =$$

$$= (\sqrt{2})^{2\nu}\Big[\text{συν}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta + \text{ημ}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})\,\text{ημ}\theta +$$

$$+ i\,\Big[\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta + \text{συν}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4})\,\text{ημ}\theta]\Big]^{2\nu} =$$

$$= 2^{\nu}\Big[\text{συν}\frac{\pi}{4}\text{συν}\theta + \text{ημ}\frac{3\pi}{4}\text{ημ}\theta + i[\text{ημ}\frac{\pi}{4}\text{συν}\theta + \text{συν}\frac{3\pi}{4}\text{ημ}\theta]\Big]^{2\nu} =$$

$$= 2^{\nu}\Big[\text{συν}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta + \text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{ημ}3 + i[\text{ημ}\frac{\pi}{4}\,\text{συν}\theta - \text{συν}\frac{\pi}{4}\,\text{ημ}\theta]\Big]^{2\nu} =$$

$$= 2^{\nu}\,[\text{συν}(\frac{\pi}{4} - \theta) + i\,\text{ημ}(\frac{\pi}{4} - \theta)]^{2\nu} =$$

$$= 2^{\nu}\,[\text{συν}(\frac{\nu\pi}{2} - 2\nu\theta) + i\,\text{ημ}(\frac{\nu\pi}{2} - 2\nu\theta)] = \Pi$$

Ἐξετάζουμε τίς περιπτώσεις $\nu = 4k$, $\nu = 4k+1$, $\nu = 4k+2$, $\nu = 4k+3$, $k = 0, 1, 2, \dots$

i) Ἄν $\nu = 4k$ ἔχουμε

$$\Pi = 2^{4k}\,[\text{συν}(2k\pi - 2\nu\theta) + i\,\text{ημ}(2k\pi - 2\nu\theta)] =$$

$$= 2^{4k}\,(\text{συν}\,2\nu\theta - i\,\text{ημ}\,2\nu\theta) =$$

$$= 2^{4k}.i^{4k}.\big(\text{συν}\,2(4k)\theta + i\,\text{ημ}\,2(4k)\theta\big) = (2i)^{\nu}\,(\text{συν}\,2\nu\theta - i\,\text{ημ}\,2\nu\theta).$$

ii) Ἄν $\nu = 4k+1$ ἔχουμε

$$\Pi = 2^{4k+1}\,\Big[\text{συν}\Big(\frac{(4k+1)\pi}{2} - 2\nu\theta\Big) + i\,\text{ημ}\Big(\frac{(4k+1)\pi}{2} - 2\nu\theta)\Big] =$$

$$= 2^{4k+1}\,[\sigma\upsilon\nu\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\nu\theta\right) + i\eta\mu\left(2k\pi + \frac{\pi}{2} - 2\nu\theta\right)] =$$

$$= 2^{4k+1}\,[\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - 2\nu\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - 2\nu\theta\right)] =$$

$$= 2^{4k+1}\,(\eta\mu 2\nu\theta + i\sigma\upsilon\nu 2\nu\theta) = 2^{4k+1}.i(\sigma\upsilon\nu 2\nu\theta - i\eta\mu 2\nu\theta) =$$

$$= 2^{4k+1}.i^{4k+1}(\sigma\upsilon\nu 2\nu\theta - i\eta\mu 2\nu\theta) =$$

$$= (2i)^{4\nu}\,(\sigma\upsilon\nu 2\nu\theta - i\eta\mu 2\nu\theta)$$

Ἀνάλογα ἐξετάζουμε καί τίς περιπτώσεις $\nu = 4k + 2$, $\nu = 4k + 3$.

81. Νά δειχτεῖ ὅτι τό πολυώνυμο

$$\Pi(x) = x^{\nu}\eta\mu\varphi - \lambda^{\nu-1}x\eta\mu\nu\varphi + \lambda^{\nu}\eta\mu(\nu - 1)\varphi$$

διαιρεῖται μέ τό πολυώνυμο $\rho(x) = x^2 - 2\lambda x\sigma\upsilon\nu\varphi + \lambda^2$.

Λύση

Οἱ ρίζες τοῦ $\rho(x)$ εἶναι

$$x_1 = \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi), \quad x_2 = \lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi - i\eta\mu\varphi)$$

Γιά νά συμβαίνει τό ζητούμενο πρέπει

$$\Pi(x_1) = \Pi(x_2) = 0.$$

$$\Pi(x_1) = [\lambda(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)]^{\nu}\eta\mu\varphi - \lambda^{\nu-1}.\lambda.(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)\eta\mu\nu\varphi +$$
$$+ \lambda^{\nu}\eta\mu(\nu - 1)\varphi =$$
$$= \lambda^{\nu}(\sigma\upsilon\nu\nu\varphi + i\eta\mu\nu\varphi)\eta\mu\varphi - \lambda^{\nu}(\sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi)\eta\mu\nu\varphi +$$
$$+ \lambda^{\nu}\eta\mu(\nu - 1)\varphi] =$$
$$= \lambda^{\nu}\,[\sigma\upsilon\nu\nu\varphi\,\eta\mu\varphi + i\eta\mu\nu\varphi\,\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi\,\eta\mu\nu\varphi -$$
$$- i\eta\mu\varphi\,\eta\mu\nu\varphi + \eta\mu(\nu - 1)\varphi] =$$
$$= \lambda^{\nu}[\eta\mu(1 - \nu)\varphi + \eta\mu(\nu - 1)\varphi] =$$
$$= \lambda^{\nu}[-\eta\mu(\nu - 1)\varphi + \eta\mu(\nu - 1)\varphi] = 0.$$

Ἀνάλογα προκύπτει $\Pi(x_2) = 0$.

82. Δεῖξτε ὅτι ἄν $z + \frac{1}{z} = 2\sigma\upsilon\nu\theta$, θά εἶναι καί $z^{\nu} + \frac{1}{z^{\nu}} = 2\sigma\upsilon\nu\nu\theta$.

Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι ἄν

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = 2\text{συν}\theta_1,\quad z_2 + \frac{1}{z_2} = 2\text{συν}\theta_2,\ \ldots,\ z_\nu + \frac{1}{z_\nu} = 2\text{συν}\theta_\nu$$

θά εἶναι $z_1 . z_2 \ldots z_\nu + \dfrac{1}{z_1 . z_2 \ldots z_\nu} = 2\text{συν}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu)$.

Λύση

Ἀπό τή σχέση $z + \dfrac{1}{z} = 2\text{συν}\theta \Rightarrow z^2 - 2z\text{συν}\theta + 1 = 0$.

Ἡ ἐξίσωση αὐτή μᾶς δίνει τίς ρίζες

$z_1 = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$, $z_2 = \text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta$. Ἄν

$z = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$ τότε $\dfrac{1}{z} = \text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta$ ὁπότε θά ἔχουμε:

$$z^\nu + \frac{1}{z^\nu} = (\text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta)^\nu + (\text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta)^\nu =$$

$$= \text{συν}\nu\theta + i\text{ημ}\nu\theta + \text{συν}\nu\theta - i\text{ημ}\nu\theta = 2\text{συν}\nu\theta.$$

Ἄν $z = \text{συν}\theta - i\text{ημ}\theta$ τότε $\dfrac{1}{z} = \text{συν}\theta + i\text{ημ}\theta$

καί πάλι $z_\nu + \dfrac{1}{z_\nu} = 2\text{συν}\nu\theta$.

Στή γενικότερη περίπτωση θά ἔχουμε

$z_i = \text{συν}\theta_i + i\text{ημ}\theta_i$, $z_i' = \text{συν}\theta_i - i\text{ημ}\theta_i$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$.

Ἄν $z_i = \text{συν}\theta_i + i\text{ημ}\theta_i$ τότε $\dfrac{1}{z_i} = \text{συν}\theta_i - i\text{ημ}\theta_i$ ὁπότε

$$z_1 . z_2 \ldots z_\nu + \frac{1}{z_1 . z_2 \ldots z_\nu} =$$

$$= (\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1).(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)\ldots(\text{συν}\theta_\nu + i\text{ημ}\theta_\nu) +$$

$$+ (\text{συν}\theta_1 - i\text{ημ}\theta_1).(\text{συν}\theta_2 - i\text{ημ}\theta_2)\ldots(\text{συν}\theta_\nu - i\text{ημ}\theta_\nu) =$$

$$= (\text{συν}\theta_1 + i\text{ημ}\theta_1).(\text{συν}\theta_2 + i\text{ημ}\theta_2)\ldots(\text{συν}\theta_\nu + i\text{ημ}\theta_\nu) +$$

$$+[\text{συν}(-\theta_1)+i\text{ημ}(-\theta_1)].[\text{συν}(-\theta_2)+i\text{ημ}(-\theta_2)]\ldots[\text{συν}(-\theta_\nu)+i\text{ημ}(-\theta_\nu)]=$$

$$= \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) +$$
$$+ \sigma\upsilon\nu(-\theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_\nu) + i\eta\mu(-\theta_1 - \theta_2 - \ldots - \theta_\nu) =$$
$$= \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) + i(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) +$$
$$+ \sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) - i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) =$$
$$= 2\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu).$$

Ἄν $z_i = \sigma\upsilon\nu\theta_i - i\eta\mu\theta_i$ τότε $\dfrac{1}{z_i} = \sigma\upsilon\nu\theta_i + i\eta\mu\theta_i$ καί ἐργαζόμαστε ὅπως καί προηγουμένως.

83. Νά βρεθεῖ ὁ μικρότερος φυσικός ἀριθμός ν γιά τόν ὁποῖο ὁ z^ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, ὅπου $z = -1 + i$.

Λύση

Τρέπουμε τόν z στήν τριγωνομετρική του μορφή καί ἔχουμε

$$z = \sqrt{2}\,(\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} + i\eta\mu\frac{3\pi}{4}). \text{ Ἄρα } z^\nu = (\sqrt{2})^\nu\,(\sigma\upsilon\nu \frac{3\nu\pi}{4} + i\eta\mu \frac{3\nu\pi}{4}).$$

Ἐπειδή θέλουμε ὁ z^ν νά εἶναι φυσικός, πρέπει

$$\eta\mu \frac{3\nu\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{3\nu\pi}{4} = k\pi \Leftrightarrow \frac{3\nu}{4} = k \ (1), \ \text{ ὅπου } k \in Z.$$

Ἀπό τή σχέση (1), ἀφοῦ τό 2ο μέρος εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, θά πρέπει καί τό 1ο μέλος νά εἶναι ἀκέραιος, ἑπομένως πρέπει

$$\nu = 4.\lambda\ , \ \lambda \in N \ (4).$$

Τότε ὅμως θά ἔχουμε

$$z^{4\lambda} = (\sqrt{2})^{4\lambda}\,(\sigma\upsilon\nu \frac{3.4\lambda.\pi}{4} + i\eta\mu \frac{3.4\lambda.\pi}{4}) =$$
$$= 4^\lambda.\big(\sigma\upsilon\nu(3\pi\lambda) + i\eta\mu(3\pi\lambda)\big) = 4^\lambda \sigma\upsilon\nu\, 3\pi\lambda.$$

Ἀλλά θά πρέπει $3\sigma\upsilon\nu 3\pi\lambda = 1$ ὥστε $z^\nu \in N$. Αὐτό σημαίνει ὅτι

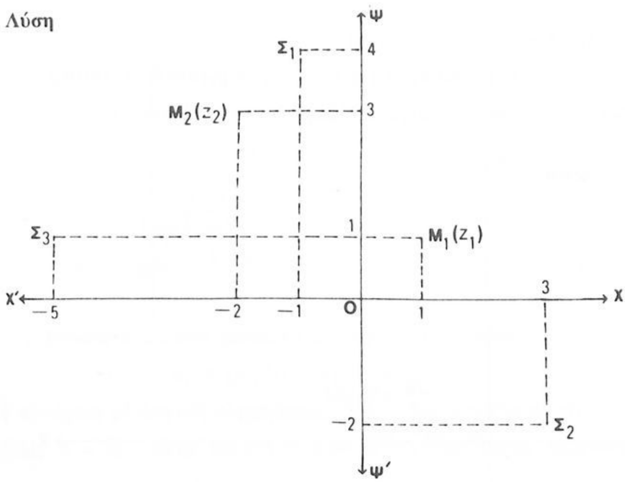
$$3\pi\lambda = 2\rho\pi\ , \ \rho \in Z \ \text{ δηλαδή } \rho = \frac{3\lambda}{2}\ (2).$$

'Επειδή τώρα τό 1ο μέλος τῆς (2) εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, θά πρέπει καί τό δεύτερο μέλος νά εἶναι ἀκέραιος. Ἄρα $\lambda = 2\mu$, $\mu \in Z$ (3). 'Από τίς σχέσεις (3), (4) προκύπτει ὅτι $\nu = 8\lambda$ (5) καί ἐπειδή ζητοῦμε τόν ἐλάχιστο ν, θέτουμε στήν (5) $\lambda = 1$ καί βρίσκουμε $\nu = 8$.

84. Νά τοποθετηθοῦν πάνω στό μιγαδικό ἐπίπεδο (ἐπίπεδο Argand), οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = 1 + i\ ,\quad z_2 = -2 + 3i\ ,\quad z_1 + z_2\ ,\quad z_1 - z_2\ ,\quad z_1 . z_2\ .$$

Λύση



Γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τοῦ συνόλου C καί τοῦ συνόλου $R^2 = \{(\alpha,\beta)/\alpha \in R,\ \beta \in R\}$. Τοῦτο μᾶς ἐπιτρέπει νά ἔχουμε τήν εἰκόνα κάθε μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, σάν ἕνα σημεῖο σέ ἕνα ὀρθογώνιο σύστημα ἀξόνων, ὅπου στόν ἄξονα xx' τοποθετοῦμε τό πραγματικό μέρος τοῦ μιγαδικοῦ, καί στόν ἄξονα yy' τοποθετοῦμε τό φανταστικό του μέρος. Ἔτσι λοιπόν θά ἔχουμε: $z_1 \longleftrightarrow (1,1) \longleftrightarrow M_1$, $z_2 \longleftrightarrow (-2,3) \longleftrightarrow M_2$, $z_1 + z_2 \longleftrightarrow (-1,4) \longleftrightarrow \Sigma_1$, $z_1 - z_2 \longleftrightarrow (3,-2) \longleftrightarrow \Sigma_2$,

$$z_1 . z_2 \longleftrightarrow (-5,1) \longleftrightarrow \Sigma_3.$$

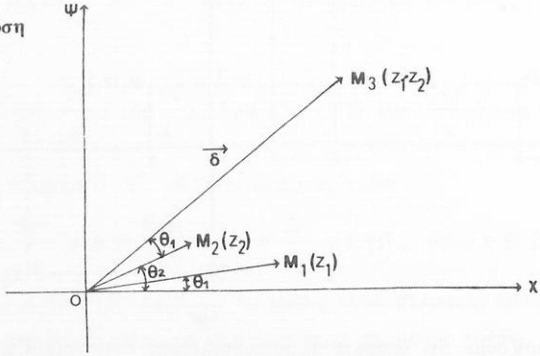
Παρατηροῦμε ὅτι ὑπάρχει μιά ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξύ τοῦ C καί τοῦ συνόλου τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, μέ ἀρχή τό σημεῖο O. Τό μῆκος τοῦ διανύσματος πού ἀντιστοιχεῖ σέ κάποιο τυχόντα μιγαδικό z ἐκφράζει τό μέτρο τοῦ μιγάδος z. Τό ἄθροισμα καί τή διαφορά δύο μιγαδικῶν πάνω στό μιγαδικό ἐπίπεδο μποροῦμε νά τά βροῦμε καί διανυσματικά, κάνοντας τή γνωστή διανυσματική πρόσθεση (κανόνας τοῦ παραλληλογράμμου).

85. Δίνονται οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)\ ,\quad z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2).$$

Νά παρασταθεῖ στό μιγαδικό ἐπίπεδο τό γινόμενο $z_1 . z_2$.

Λύση



Ἐπειδή $z_1 = \rho_1(\text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1)$ καί $z_2 = \rho_2(\text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2)$, οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν z_1, z_2 θά εἶναι ἀντίστοιχα (ρ_1, θ_1) καί (ρ_2, θ_2), ἐνῶ οἱ πολικές συντεταγμένες τοῦ γινομένου $z_1 . z_2$ θά εἶναι $(\rho_1 . \rho_2, \theta_1 + \theta_2)$. Ἔτσι ἔχουμε τήν ἀντιστοιχία:

$$z_1 \longleftrightarrow (\rho_1, \theta_1) \longleftrightarrow M_1 \quad \text{καί} \quad z_2 \longleftrightarrow (\rho_2, \theta_2) \longleftrightarrow M_2.$$

Θεωροῦμε ἐφαρμοστό διάνυσμα $\vec{\delta}$ μέ ἀρχή τό O, ὥστε

$$\sphericalangle(\overrightarrow{OM_2}, \vec{\delta}) = \theta_1\ ,\quad \text{ὅπου ἡ}\quad \sphericalangle(\overrightarrow{OM_2}, \vec{\delta})$$

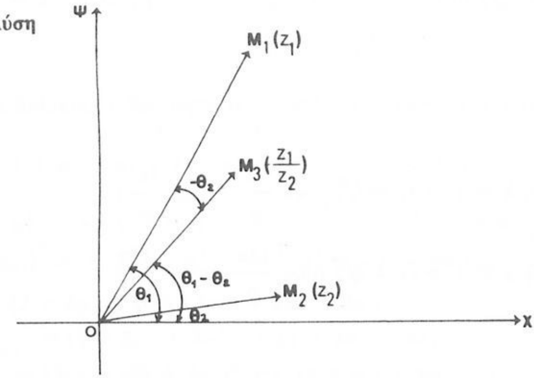
πρέπει νά σχηματίζεται κατά τή θετική φορά. Στό φορέα τοῦ $\vec{\delta}$ καί μέ ἀρχή τό O παίρνουμε μῆκος ἴσο πρός $\rho_1 . \rho_2$ καί σχηματίζουμε τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$. Τό σημεῖο M_3 εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ γινομένου $z_1 . z_2$.

86. Δίνονται οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)\ ,\quad z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2).$$

Νά παρασταθεῖ στό μιγαδικό ἐπίπεδο ὁ μιγαδικός $\dfrac{z_1}{z_2}$.

Λύση



Τοποθετοῦμε στό μιγαδικό ἐπίπεδο τούς μιγαδικούς

$$z_1 = (\rho_1, \theta_1)\ ,\quad z_2 = (\rho_2, \theta_2).$$

Στή συνέχεια μέ ἀρχική πλευρά τήν OM_1 κατασκευάζουμε τή γωνία $M_1\hat{O}M_3 = -\theta_1$. Στήν τελική πλευρά αὐτῆς τῆς γωνίας παίρνουμε μῆκος $OM_3 = \dfrac{\rho_1}{\rho_2}$ καί σχηματίζουμε τό ἐφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{OM_3}$.

Τό σημεῖο M_3 εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $\dfrac{z_1}{z_2}$.

87. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

Λύση

Τρέπουμε τό μιγαδικό $1 + i\sqrt{3}$ στήν τριγωνομετρική του μορφή.

$$|1 + i\sqrt{3}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\,, \quad συνθ = \frac{1}{2}\,,$$

$ημθ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Ἄρα $θ = \frac{π}{3}$ καί $1 + i\sqrt{3} = 2(συν\frac{π}{3} + iημ\frac{π}{3})$.

Ἑπομένως οἱ ρίζες τρίτης τάξης τοῦ μιγαδικοῦ $1 + i\sqrt{3}$ μᾶς δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_k = \sqrt[3]{2}\,(συν\frac{\frac{π}{3} + 2kπ}{3} + iημ\frac{\frac{π}{3} + 2kπ}{3})\,, \quad \text{ὅπου } k = 0,\ 1,\ 2.$$

i) $k = 0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2}\,(συν\frac{π}{9} + iημ\frac{π}{9})$

ii) $k = 1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}\,(συν\frac{7π}{9} + iημ\frac{7π}{9})$

iii) $k = 2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}\,(συν\frac{13π}{9} + iημ\frac{13π}{9})$.

88. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας. Νά δειχτεῖ ὅτι ἄν $ω_1, ω_2$ εἶναι οἱ δύο μιγαδικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδας, θά εἶναι καί $ω_1 = ω_2^2$ καί $ω_2 = ω_1^2$. Στή συνέχεια νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων **i)** $Π = 1 + ω_1 + ω_2$, **ii)** $Π = ω_1^{3ν+1} + ω_2^{3ν+1}$, **iii)** $Π = (2 + 3ω_1 + 2ω_2)^ν + (2 + 3ω_2 + 2ω_1)^ν \quad ν \in N$.

Λύση

Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $z^3 = 1$, $z \in C$. Ἐπειδή $1 = συν0^0 + iημ0^0$, οἱ κυβικές ρίζες τῆς μονάδας δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_k = \sqrt[3]{1}\,(συν\frac{0^0 + 360^0 k}{3} + iημ\frac{0^0 + 360^0 k}{3}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_k = συν120^0 k + iημ120^0 k\,, \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

i) $k = 0 \Rightarrow z_0 = \sigma\upsilon\nu 0^0 + i\eta\mu 0^0 = 1$

ii) $k = 1 \Rightarrow z_1 = \sigma\upsilon\nu 120^0 + i\eta\mu 120^0 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_1$

iii) $k = 2 \Leftrightarrow z_2 = \sigma\upsilon\nu 240^0 + i\eta\mu 240^0 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_2$

$$\omega_1^2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2\cdot\frac{1}{2}i\frac{\sqrt{3}}{2} =$$
$$= -\frac{2}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \omega_2$$

'Ανάλογα βρίσκουμε ὅτι $\omega_2^2 = \omega_1$.

i) $\Pi = 1 + \omega_1 + \omega_2 = 1 + \omega_1 + \omega_1^2 = \frac{1-\omega_1^3}{1-\omega_1} = 0 \ (1)$

ii) $\Pi = \omega_1^{3\nu+1} + \omega_2^{3\nu+1} = \omega_1^{3\nu+1} + (\omega_1^2)^{3\nu+1} = \omega_1^{3\nu}.\omega_1 + \omega_1^{6\nu}.\omega_1^2 =$
$= (\omega_1^3)^{\nu}.\omega_1 + (\omega_1^3)^{2\nu}.\omega_1^2 = \omega_1 + \omega_1^2 = -1$ λόγω τῆς (1).

iii) $\Pi = (2 + 3\omega_1 + 2\omega_2)^{\nu} + (2 + 3\omega_2 + 2\omega_1)^{\nu} =$
$= (2 + 3\omega_1 + 2\omega_1^2)^{\nu} + (2 + 3\omega_1^2 + 2\omega_1) =$
$= [2(1 + \omega_1^2) + 3\omega_1]^{\nu} + [2(1 + \omega_1) + 3\omega_1^2]^{\nu} =$
$= (-2\omega_1 + 3\omega_1)^{\nu} + (-2\omega_1^2 + 3\omega_1^2)^{\nu} = \omega_1^{\nu} + \omega_1^{2\nu}$

'Επειδή ὁ ν μπορεῖ νά πάρει τίς τιμές $\nu = 3\lambda$, $\nu = 3\lambda + 1$, $\nu = 3\lambda + 2$, θά ἔχουμε

α) $\nu = 3\lambda \Rightarrow \Pi = \omega_1^{3\lambda} + \omega_1^{6\lambda} = (\omega_1^3)^{\lambda} + (\omega_1^3)^{2\lambda} = 1^{\lambda} + 1^{2\lambda} = 2.$

β) $\nu = 3\lambda \Rightarrow \Pi = \omega_1^{3\lambda+1} + \omega_1^{6\lambda+2} = (\omega_1^3)^{\lambda}.\omega_1 + (\omega_1^3)^{2\lambda}.\omega_1^2 =$
$= \omega_1 + \omega_1^2 = -1.$

γ) $\nu = 3\lambda + 2 \Rightarrow \Pi = \omega_1^{3\lambda+2} + \omega_1^{6\lambda+4} = (\omega_1^3)^{\lambda}.\omega_1^2 + (\omega_1^3)^{2\lambda}.\omega_1^4 =$
$= \omega_1^2 + \omega_1^4 = \omega_1^2 + \omega_1^3.\omega_1 = -1.$

89. Ἄν $x_1 = \alpha + \beta$, $x_2 = \alpha\omega + \beta\omega^2$, $x_3 = \alpha\omega^2 + \beta\omega$, ὅπου ω κυβική ρίζα τῆς μονάδας, νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες:

i) $x_1x_2x_3 = \alpha^3 + \beta^3$

ii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6\alpha\beta$

iii) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(\alpha^3 + \beta^3)$

iv) $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18\alpha^2\beta^2$

v) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -3\alpha\beta$.

Λύση

i) $x_1x_2x_3 = (\alpha + \beta).(\alpha\omega + \beta\omega^2).(\alpha\omega^2 + \beta\omega) =$
$= (\alpha + \beta).(\alpha^2\omega^3 + \alpha\beta\omega^4 + \alpha\beta\omega^2 + \beta^2\omega^3) =$
$= (\alpha + \beta).(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta\omega + \alpha\beta\omega^2) = (\alpha + \beta).[\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta(\omega + \omega^2)] =$
$= (\alpha + \beta).(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta) = \alpha^3 + \beta^3$ $(1 + \omega + \omega^2 = 0$ Ἄσκ. 87).

ii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (\alpha + \beta)^2 + (\alpha\omega + \beta\omega^2)^2 + (\alpha\omega^2 + \beta\omega)^2 =$
$= \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta\omega^3 + \beta^2\omega^4 + \alpha^2\omega^4 + 2\alpha\beta\omega^3 + \beta^2\omega^2$.
Ἐπειδή $\omega^4 = \omega^3.\omega = \omega$ $(\omega^3 = 1)$ καί $1 + \omega + \omega^2 = 0$ θά ἔχουμε:
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta + \alpha^2\omega^2 + 2\alpha\beta + \beta^2\omega + \alpha^2\omega + 2\alpha\beta + \beta^2\omega^2 =$
$= \alpha^2.(1 + \omega + \omega^2) + \beta^2.(1 + \omega + \omega^2) + 6\alpha\beta = 6\alpha\beta$.

iii) $x_1 + x_2 + x_3 = \alpha + \beta + \alpha\omega + \beta\omega^2 + \alpha\omega^2 + \beta\omega =$
$= \alpha.(1 + \omega + \omega^2) + \beta.(1 + \omega + \omega^2) = 0$.
Ἄρα $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3x_1x_2x_3 = 3.(\alpha^3 + \beta^3)$.

iv) Γνωρίζουμε τήν ταυτότητα

$$(\alpha + \beta + \gamma).(\alpha + \beta - \gamma).(\alpha - \beta + \gamma).(\beta + \gamma - \alpha) =$$
$$= 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4 \quad \text{(Moivre)}$$

Ἄν $\alpha + \beta + \gamma = 0$ ἡ ταυτότητα αὐτή μᾶς δίνει

$$\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 = 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2$$

Στήν (iii) ἀποδείξαμε ὅτι

$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2$ (1)
Ἀλλά $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 = 36\alpha^2\beta^2 =$
$= x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + 2x_1^2x_2^2 + 2x_2^2x_3^2 + 2x_3^2x_1^2$ (2). Ἀπό (1), (2) προκύπτει

$$36\alpha^2\beta^2 = 2(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) \Leftrightarrow x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18\alpha^2\beta^2.$$

Ἡ ἄσκηση λύνεται ἐπίσης ἄν ἀντικαταστήσουμε τά x_1, x_2, x_3 μέ τά ἴσα τους καί κάνουμε πράξεις.

v) Ἐπειδή $x_1 + x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} = -3\alpha\beta.$$

90. Ἄν ω_1, ω_2 κυβικές μιγαδικές ρίζες τῆς μονάδας, νά δειχτοῦν οἱ σχέσεις:

i) $(1 + 2\omega_1 + 3\omega_2).(1 + 2\omega_2 + 3\omega_1) = 3$

ii) $(1 + \omega_1 - \omega_2)^3 = (1 - \omega_1 + \omega_2)^3$

iii) $\omega_1^\nu + \omega_2^\nu + 1 = \omega_1^\nu.\omega_2^\nu + \omega_1^\nu + \omega_2^\nu$

Λύση

i) $(1 + 2\omega_1 + 3\omega_2).(1 + 2\omega_2 + 3\omega_1) =$

$= [1 + 2(\omega_1 + \omega_2) + \omega_2].[1 + 2(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1] =$

$= [1 + 2(\omega_1 + \omega_1^2) + \omega_2].[1 + 2(\omega_1 + \omega_1^2) + \omega_1] =$

(Ἄσκ. 87). $= \big(1 + 2(-1) + \omega_2\big).\big(1 + 2(-1) + \omega_1\big) =$

$= (\omega_1 - 1).(\omega_2 - 1) = \omega_1.\omega_2 - (\omega_1 + \omega_2) + 1 =$

$= \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - (\omega_1 + \omega_1^2) + 1 =$

$= \frac{1}{4} - i^2\frac{3}{4} - (-1) + 1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 1 + 1 = 3.$

ii) $(1 + \omega_1 - \omega_2)^3 = (-\omega_1^2 - \omega_2)^3 = (-\omega_2 - \omega_2)^3 = (-2\omega_2)^3 = -8.$

$(1 - \omega_1 + \omega_2)^3 = (-\omega_2^2 - \omega_1)^3 = (-\omega_1 - \omega_1)^3 = (-2\omega_1)^3 = -8.$

Ἄρα $(1 + \omega_1 - \omega_2)^3 = (1 - \omega_1 + \omega_2)^3.$

iii) Γνωρίζουμε ὅτι $\omega_2 = \omega_1^2$ (87). Ἄρα θά ἔχουμε:

$\omega_1^\nu + \omega_2^\nu + 1 = \omega_1^\nu + \omega_1^{2\nu} + 1$ (1)

$$\omega_1^\nu.\omega_2^\nu + \omega_1^\nu + \omega_2^\nu = \omega_1^\nu.\omega_1^{2\nu} + \omega_1^\nu + \omega_1^{2\nu} =$$
$$= \omega_1^{3\nu} + \omega_1^\nu + \omega_1^{2\nu} = (\omega_1^3)^\nu + \omega_1^\nu = \omega_1^{2\nu} = 1 + \omega_1^\nu + \omega_1^{2\nu} \quad (2)$$

᾿Από τίς (1), (2) προκύπτει τό ζητούμενο.

91. Νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες

i) $(1 - \omega + \omega^2).(1 + \omega - \omega^2) = 4.$

ii) $(1 - \omega).(1 - \omega^2).(1 - \omega^4).(1 - \omega^5) = 9$

iii) $(\alpha + \beta + \gamma).(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$

iv) $(\alpha + \beta + \gamma)^3 + (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2)^3 + (\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega)^3 =$
$= 3.(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma)$

ὅπου ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας.

Λύση

i) Γνωρίζουμε ὅτι $1 + \omega + \omega^2 = 0$ (῎Ασκ. 87). ῎Αρα $1 + \omega^2 = -\omega$ καί $1 + \omega = -\omega^2$

$$(1 - \omega + \omega^2).(1 + \omega - \omega^2) = (-\omega - \omega).(-\omega^2 - \omega^2) = (-2\omega).(-\omega^2) = 4\omega^3 = 4.$$

ii) $1 - \omega^4 = (1 - \omega^2).(1 + \omega^2) = -\omega.(1 - \omega^2) = -\omega.(1 - \omega).(1 + \omega) =$
$= \omega^3.(1 - \omega) = 1 - \omega$

$1 - \omega^5 = (1 - \omega).(1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) = (1 - \omega).(\omega^3 + \omega^4) =$
$= \omega^3.(1 - \omega).(1 + \omega) = 1 - \omega^2.$

῎Αρα θά ἔχουμε:

$$(1 - \omega).(1 - \omega^2).(1 - \omega^4).(1 - \omega^5) = (1 - \omega).(1 - \omega^2).(1 - \omega).(1 - \omega^2) =$$
$$= [(1 - \omega).(1 - \omega^2)]^2 = (1 - \omega - \omega^2 + \omega^3)^2 = 3^2 = 9.$$

iii) $(\alpha + \beta + \gamma).(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega) =$
$= (\alpha + \beta + \gamma).(\alpha^2 + \alpha\beta\omega + \alpha\gamma\omega^2 + \alpha\beta\omega^2 + \beta^2\omega^3 + \beta\gamma\omega^4 + \alpha\gamma\omega +$
$+ \beta\gamma\omega^2 + \gamma^2\omega^3 =$
$= (\alpha + \beta + \gamma).[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta.(\omega + \omega^2) + \beta\gamma.(\omega + \omega^2) + \gamma\alpha.(\omega + \omega^2)] =$
$= (\alpha + \beta + \gamma).(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3\alpha\beta\gamma$

(Λόγω τῆς ταυτότητας τοῦ Euler)

iv) Γνωρίζουμε ὅτι

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + 3\alpha^2\gamma + 3\alpha\gamma^2 + $$
$$+ 3\beta^2\gamma + 3\beta\gamma^2 + 6\alpha\beta\gamma \quad (1)$$

Ἄρα θά ἔχουμε

$$(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2)^3 = \alpha^3 + \beta^3\omega^3 + \gamma^3\omega^6 + 3\alpha^2\beta\omega + 3\alpha\beta^2\omega^2 + 3\alpha^2\gamma\omega^2 + $$
$$+ 3\alpha\gamma^2\omega^4 + 3\beta^2\gamma\omega^4 + 3\beta\gamma^2\omega^5 + 6\alpha\beta\gamma\omega^3 = $$
$$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta\omega + 3\alpha\beta^2\omega^2 + 3\alpha^2\gamma\omega^2 + 3\alpha\gamma^2\omega + 3\beta^2\gamma\omega + $$
$$+ 3\beta\gamma^2\omega^2 + 6\alpha\beta\gamma \quad (2)$$

Ὅμοια

$$(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega)^3 = \alpha^3 + \beta^3\omega^6 + \gamma^3\omega^3 + 3\alpha^2\beta\omega^2 + 3\alpha\beta^2\omega^4 + 3\alpha^2\gamma\omega + $$
$$+ 3\alpha\gamma^2\omega^2 + 3\beta^2\gamma\omega^5 + 3\beta\gamma^2\omega^4 + 6\alpha\beta\gamma\omega^5 = $$
$$= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha^2\beta\omega^2 + 3\alpha\beta^2\omega + 3\alpha^2\gamma\omega + 3\alpha\gamma^2\omega^2 + $$
$$+ 3\beta^2\gamma\omega^2 + 3\beta\gamma^2\omega + 6\alpha\beta\gamma \quad (3)$$

Ἀπό τίς (1), (2), (3) προκύπτει:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^3 + (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2)^3 + (\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega)^3 = $$
$$= 3\alpha^3 + 3\beta^3 + 3\gamma^3 + 3\alpha^2\beta.(1 + \omega + \omega^2) + 3\alpha\beta^2.(1 + \omega + \omega^2) + $$
$$+ 3\alpha^2\gamma.(1 + \omega + \omega^2) + 3\alpha\gamma^2.(1 + \omega + \omega^2) + 3\beta^2\gamma.(1 + \omega + \omega^2) + $$
$$+ 3\beta\gamma^2.(1 + \omega + \omega^2) + 18\alpha\beta\gamma = 3.(\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 6\alpha\beta\gamma).$$

92. Δίνονται οἱ μιγαδικοί $\alpha_\nu = (1 + i).\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^\nu$.

Δεῖξτε ὅτι:

α) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

β) Προσδιορίστε τό k ὥστε οἱ μιγαδικοί α_ν νά εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $z^3 - k = 0$.

Λύση

α) Ὁ μιγαδικός $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ εἶναι μία κυβική ρίζα τῆς μονάδας.

$$\text{Έστω}\quad \omega = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Θά έχουμε:}$$

$\alpha_1 = (1+i).\omega$

$\alpha_2 = (1+i).\omega^2$. Ἄρα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (1+i).(1+\omega+\omega^2) = 0$.

$\alpha_3 = (1+i).\omega^3$.

(Ἄσκ. 87).

β) Ἐπειδή οἱ διαφορετικές τιμές τῆς παράστασης α_ν εἶναι οἱ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, θά σχηματίζουμε ἐξίσωση μέ ρίζες $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Ἔχουμε $S_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$.

$S_2 = \alpha_1.\alpha_2 + \alpha_1.\alpha_3 + \alpha_2.\alpha_3 = (1+i)^2\omega^3 + (1+i)^2.\omega^4 + (1+i)^2.\omega^5 =$
$= (1+i)^2 + (1+i)^2.\omega + (1+i)^2.\omega^2 = (1+i)^2.(1+\omega+\omega^2) = 0$.

$$S_3 = \alpha_1.\alpha_2.\alpha_3 = (1+i)^3.\omega^6 = (1+i)^3$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση πού ἔχει ρίζες τούς μιγαδικούς α_ν εἶναι ἡ

$$z^3 - (1+i)^3 = 0. \quad \text{Ἄρα}\quad k = (1+i)^3.$$

93. Δεῖξτε ὅτι

$$(1-\omega+\omega^2).(1-\omega^2+\omega^4).(1-\omega^4+\omega^8)\ldots(1-\omega^{2^{k-1}}+\omega^{2^k}) = 2^k$$

ὅπου ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας καί $k = 2\nu$, $\nu \in N$.

Λύση

Οἱ δύο τελευταῖοι ὅροι τοῦ γινομένου γράφονται

$(1-\omega^{2^{2\nu-2}}+\omega^{2^{2\nu-1}}).(1-\omega^{2^{2\nu-1}}+\omega^{2^{2\nu}})$ ἀφοῦ $k = 2\nu$, $\nu \in N$.

Θά δείξουμε ὅτι κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2^{2\nu}$ εἶναι τῆς μορφῆς $3\rho + 1$, $\rho \in Z_0^+$. Ἐργαζόμαστε ἐπαγωγικά.

Γιά $\nu = 1$, $2^{2\nu} = 2^2 = 4 = 3.1 + 1$ ἰσχύει.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = k$, δηλ. $2^{2k} = 3.\rho + 1$ (1), ὅπου $\rho \in Z_0^+$.

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = k+1$ δηλ. $2^{2(k+1)} = 3.\rho' + 1$. ὅπου $\rho' \in Z_0^+$.

Πολ/με καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ 2^2 καί ἔχουμε:

$$2^{2k}.2^2 = 2^2.(3\rho + 1) \Rightarrow 2^{2(k+1)} = 12.\rho + 4 = 3.(4\rho) + 3 + 1 =$$
$$= 3.(4\rho + 1) + 1 = 3\rho' + 1 \quad \text{ὅπου} \quad \rho' = 4\rho + 1.$$

Ἄρα κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2^{2\nu}$ εἶναι τῆς μορφῆς

$$3\rho + 1\,, \quad \rho \in Z_0^+.$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2^{2\nu-2}$ εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda + 1$, $\lambda \in Z_0^+$.

Γιά $\nu = 1$ ἔχουμε $2^0 = 1 = 3.0 + 1$

Γιά $\nu = 2$ ἔχουμε $2^2 = 4 = 3.1 + 1$.

Ὑποθέτουμε ὅτι ἰσχύει γιά $\nu = k$ δηλ. $2^{2k-2} = 3\lambda + 1$ (3).

Θά δείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά $\nu = k + 1$ δηλ.

$$2^{2(k+1)-2} = 3\lambda' + 1 \quad \text{ἤ} \quad 2^{2k} = 3\lambda' + 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας καί τά δύο μέλη τῆς (2) μέ 2^2 ἔχουμε:

$$2^{2k-2}.2^2 = 2^2.(3\lambda + 1) \Rightarrow 2^{2k} = 3\lambda' + 1 \quad \text{ὅπου} \quad \lambda' = 4\lambda + 1.$$

Ἀνάλογα ἀποδεικνύουμε ὅτι κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς $2^{2\nu-1}$ γράφεται μέ τή μορφή $3\mu + 2$.

Μετά ἀπό αὐτά ὁ προτελευταῖος ὅρος τοῦ γινομένου γράφεται:

$$1 - \omega^{2^{2\nu-2}} + \omega^{2^{2\nu-1}} = 1 - \omega^{3\lambda+1} + \omega^{3\mu+2} = 1 - (\omega^3)^\lambda.\omega + (\omega^3)^\mu.\omega^2 =$$
$$= 1 - \omega + \omega^2 = -2\omega \quad \text{καί ὁ τελευταῖος ὅρος γράφεται}$$
$$1 - \omega^{2^{2\nu-1}} + \omega^{2^{2\nu}} = 1 - \omega^{3\mu+2} + \omega^{3\rho+1} = 1 - (\omega^3)^\mu.\omega^2 + (\omega^3)^\rho.\omega =$$
$$= 1 - \omega^2 + \omega = -2\omega^2. \quad \text{Ἄρα}$$
$$(1 - \omega^{2^{2\nu-2}} + \omega^{2^{2\nu-1}}).(1 - \omega^{2^{2\nu-1}} + \omega^{2^{2\nu}}) = (-2\omega).(-2\omega^2) = 4\omega^3 = 4$$

Ἀπό τή σχέση αὐτή ἔχουμε:

Γιά $\nu = 1$ $(1 - \omega + \omega^2).(1 - \omega^2 + \omega^4) = 4$

Γιά $\nu = 2$ $(1 - \omega^4 + \omega^8).(1 - \omega^8 + \omega^{16}) = 4$

....

Γιά $\nu = \nu$ $(1 - \omega^{2^{2\nu-2}} + \omega^{2^{2\nu-1}}).(1 - \omega^{2^{2\nu-1}} + \omega^{2^{2\nu}}) = 4.$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τίς σχέσεις αὐτές βρίσκουμε:

$$(1 - \omega + \omega^2).(1 - \omega^2 + \omega^4).(1 - \omega^4 + \omega^8)\ldots(1 - \omega^{2^{2\nu-1}} + \omega^{2^{2\nu}}) =$$
$$= 4^\nu = 2^{2\nu} \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

94. Ἄν ω εἶναι μία κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

$$(1-\omega)^6+27=0.$$

Λύση

Γνωρίζουμε ὅτι $1+\omega+\omega^2=0 \Leftrightarrow 1+\omega^2=-\omega$. Ἄρα

$$(1-\omega)^6+27=\left[(1-\omega)^2\right]^3+27=(1+\omega^2-2\omega)^3+27=$$
$$=(-\omega-2\omega)^3+27=(-3\omega)^3+27=-27\omega^3+27=-27+27=0.$$

95. Ἄν $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1}$ εἶναι οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας καί $\omega_0=1$, δεῖξτε ὅτι $(1-\omega_1).(1-\omega_2)\ldots(1-\omega_{\nu-1})=\nu$.

Λύση

Τά $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{\nu-1}$ εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $\omega^\nu-1=0$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται

$$\omega^\nu-1=(\omega-1).(\omega-\omega_1).(\omega-\omega_2)\ldots(\omega-\omega_{\nu-1}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\omega-\omega_1).(\omega-\omega_2)\ldots(\omega-\omega_{\nu-1})=$$
$$=\frac{\omega^\nu-1}{\omega-1}=\omega^{\nu-1}+\omega^{\nu-2}+\cdots+\omega+1 \quad (1).$$

Ἡ σχέση (1) εἶναι μία ταυτότητα ὡς πρός ω. Γιά $\omega=1$ δίνει $(1-\omega_1).(1-\omega_2)\ldots(1-\omega_{\nu-1})=1^{\nu-1}+1^{\nu-2}+\cdots+1+1=\nu$.

96. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=(\alpha+\beta\omega+\gamma\omega^2).(\alpha+\beta\omega^2+\gamma\omega)$$

Χρησιμοποιώντας τήν παραπάνω σχέση δεῖξτε ὅτι ἄν

(1) $\alpha x+\beta y+\gamma z=x_1$

(2) $\beta x+\gamma y+\alpha z=x_2$ ὅπου ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας

(3) $\gamma x+\alpha y+\beta z=x_3$

τότε: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma).(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=$

$$=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3.$$

Λύση

Έχουμε $(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega) =$

$$= \alpha^2 + \alpha\beta\omega + \alpha\gamma\omega^2 + \alpha\beta\omega^2 + \beta^2.\omega^3 + \beta\gamma\omega^4 + \alpha\gamma\omega + \beta\gamma\omega^2 + \gamma^2.\omega^3 =$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \alpha\beta.(\omega + \omega^2) + \alpha\gamma.(\omega + \omega^2) + \beta\gamma.(\omega + \omega^2) =$$
$$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma. \quad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τήν (4) μπορούμε νά γράψουμε

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3 =$$
$$= (x_1 + x_2.\omega + x_3.\omega^2).(x_1 + x_2.\omega^2 + x_3.\omega) =$$
$$= [(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\beta x + \gamma y + \alpha z).\omega + (\gamma x + \alpha y + \beta z).\omega^2].$$
$$.[(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (\beta x + \gamma y + \alpha z).\omega^2 + (\gamma x + \alpha y + \alpha z).\omega] =$$
$$= (\alpha x + \beta y + \gamma z + \beta x\omega + \gamma y\omega + \alpha z\omega + \gamma x\omega^2 + \alpha y\omega^2 + \beta z\omega^2).$$
$$.(\alpha x + \beta y + \gamma z + \beta x\omega^2 + \gamma y\omega^2 + \alpha z\omega^2 + \gamma x\omega^2 +$$
$$.(\alpha x + \beta y + \gamma z + \beta x\omega^2 + \gamma y\omega^2 + \alpha z\omega^2 + \gamma x\omega + \alpha y\omega + \beta z\omega) =$$
$$= [(\alpha x + \beta x\omega + \gamma x\omega^2) + (\beta y + \gamma y\omega + \alpha y\omega^2) + (\gamma z + \alpha z\omega + \beta z\omega^2)].$$
$$.[(\alpha x + \beta x\omega^2 + \gamma x\omega) + (\beta y + \gamma y\omega^2 + \alpha y\omega) + (\gamma z + \alpha z\omega^2 + \beta z\omega)] = A.$$

Ἐπειδή $\beta y = \beta y\omega^3$, $\gamma y\omega = \gamma y\omega^4$, $\gamma z = \gamma z\omega^3$, $\beta z\omega = \beta z\omega^4$, ή παράσταση A γράφεται:

$$A = [(\alpha x + \beta x\omega + \gamma x\omega^2) + (\alpha y\omega^2 + \beta y\omega^3 + \gamma y\omega^4) +$$
$$+ (\alpha z\omega + \beta z\omega^2 + \gamma z\omega^3)].$$
$$.[(\alpha x + \beta x\omega^2 + \gamma x\omega) + (\alpha y\omega + \gamma y\omega^2 + \beta y\omega^3) + (\alpha z\omega^2 + \gamma z\omega^3 + \beta z\omega^4)] =$$
$$= [(\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).x + (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).y\omega^2 + (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).z\omega].$$
$$.[(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega).x + (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).y\omega + (\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega).z\omega^2] =$$
$$= (\alpha + \beta\omega + \gamma\omega^2).(x + z\omega + y\omega^2).(\alpha + \beta\omega^2 + \gamma\omega).(x + z\omega^2 + y\omega) =$$
$$= (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma).(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx).$$

97. Άν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας καί

$$\begin{aligned} x + y + z &= A \\ x + y\omega + z\omega^2 &= B \qquad (\Sigma) \\ x + y\omega^2 + z\omega &= \Gamma \end{aligned}$$

νά ὑπολογιστοῦν τά x, y, z συναρτήσει τῶν A, B, Γ, ω καί νά δειχτεῖ ὅτι

$$|A|^2 + |B|^2 + |\Gamma|^2 = 3.(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2).$$

Λύση

Λύνουμε τό σύστημα (Σ) μέ ἀγνώστους x, y, z.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega^2 - \omega^4) - (\omega - \omega^2) + (\omega^2 - \omega) = \omega^2 - \omega - \omega + \omega^2 + \omega^2 - \omega =$$

$$= 3\omega^2 - 3\omega = 3\omega.(\omega - 1).$$

$$Dx = \begin{vmatrix} A & 1 & 1 \\ B & \omega & \omega^2 \\ \Gamma & \omega^2 & \omega \end{vmatrix} =$$

$$= A.(\omega^2 - \omega^4) - (B\omega - \Gamma\omega^2) + (B\omega^2 - \Gamma\omega) =$$

$$= A\omega^2 - A\omega - B\omega + \Gamma\omega^2 + B\omega^2 - \Gamma\omega = (A + B + \Gamma)\omega^2 - (A + B + \Gamma)\omega =$$

$$= (A + B + \Gamma).(\omega^2 - \omega) = (A + B + \Gamma).\omega.(\omega - 1).$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 1 & A & 1 \\ 1 & B & \omega^2 \\ 1 & \Gamma & \omega \end{vmatrix} =$$

$$= (B\omega - \Gamma\omega^2) - A.(\omega - \omega^2) + (\Gamma - B) =$$

$$= B.(\omega - 1) - \Gamma.(\omega^2 - 1) + A.\omega.(\omega - 1) =$$

$$= (\omega - 1).[B - \Gamma.(\omega + 1) + A\omega] = (\omega - 1).(\Gamma\omega^2 + A\omega + B)$$

$$Dz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & A \\ 1 & \omega & B \\ 1 & \omega^2 & \Gamma \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega\Gamma - \omega^2 B) - (\Gamma - B) + A.(\omega^2 - \omega) =$$
$$= \omega\Gamma - \omega^2 B - \Gamma + B + A\omega.(\omega - 1) =$$
$$= \Gamma.(\omega - 1) - B.(\omega - 1).(\omega + 1) + A.(\omega - 1).\omega =$$
$$= (\omega - 1).[A\omega - B.(\omega + 1) + \Gamma] = (\omega - 1).(B\omega^2 + A\omega + \Gamma)$$

$$\text{Άρα } x = \frac{Dx}{D} = \frac{(A+B+\Gamma).\omega.(\omega-1)}{3.\omega.(\omega-1)} = \frac{A+B+\Gamma}{3}$$

$$y = \frac{Dy}{D} = \frac{(\omega-1).(\Gamma\omega^2+A\omega+B)}{3.\omega.(\omega-1)} =$$

$$= \frac{\Gamma\omega^2+A\omega+B}{3.\omega} = \frac{\Gamma\omega^4+A\omega^3+B\omega^2}{3.\omega^3} = \frac{B\omega^2+\Gamma\omega+A}{3}$$

$$z = \frac{Dz}{D} = \frac{(\omega-1).(B\omega^2+A\omega+\Gamma)}{3.\omega.(\omega-1)} =$$

$$= \frac{B\omega^2+A\omega+\Gamma}{3.\omega} = \frac{B\omega^4+A\omega^3+\Gamma\omega^2}{3.\omega^3} = \frac{\Gamma\omega^2+B\omega+A}{3}$$

Γιά τό δεύτερο σκέλος ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

$$|A|^2 = A.\bar{A} = (x + y + z).\overline{(x + y + z)} = (x + y + z).(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) =$$

$$= x\bar{x} + x\bar{y} + x\bar{z} + y\bar{x} + y\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x} + z\bar{y} + z\bar{z} =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \bar{x}.(y + z) + \bar{y}.(x + z) + \bar{z}.(x + y) \quad (1).$$

$$\text{Όμοια } |B|^2 = B.\bar{B} = (x + y\omega + z\omega^2).\overline{(x + y\omega + z\omega^2)} =$$

$$= (x + y\omega + z\omega^2).(\bar{x} + \bar{y}.\bar{\omega} + \bar{z}.\bar{\omega}^2) =$$

$$= (x + y\omega + z\omega^2).(\bar{x} + \bar{y}\omega^2 + \bar{z}\omega) = \qquad (\omega^2 = \bar{\omega}).$$

$$= x\bar{x} + x\bar{y}\omega^2 + x\bar{z}\omega + \bar{x}y\omega + y\bar{y}\omega^3 + y\bar{z}\omega^2 + \bar{x}z\omega^2 + \bar{y}z\omega^4 + z\bar{z}\omega^3 =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + |\omega|^2 + \bar{x}.(y\omega + z\omega^2) + \bar{y}.(z\omega + x\omega^2) + \bar{z}.(x\omega + y\omega^2) \, (2).$$

Όμοια $\quad |\Gamma|^2 = \Gamma\bar{\Gamma} = (x + y\omega^2 + z\omega).\overline{(x + y\omega^2 + z\omega)} =$

$$= (x + y\omega^2 + z\omega).(\bar{x} + \bar{y}\omega + \bar{z}\omega^2) =$$

$$= x\bar{x} + x\bar{y}\omega + x\bar{z}\omega^2 + \bar{x}y\omega^2 + y\bar{y}\omega^3 + y\bar{z}\omega^4 + \bar{x}z\omega + \bar{y}z\omega^2 + z\bar{z}\omega^3 =$$

$$= |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 + \bar{x}.(z\omega + y\omega^2) + \bar{y}.(x\omega + z\omega^2) + \bar{z}.(y\omega + x\omega^2) \quad (3).$$

Προσθέτοντας τίς ἰσότητες (1), (2), (3) βρίσκουμε

$$|A|^2 + |B|^2 + |\Gamma|^2 = 3.|x|^2 + 3.|y|^2 + 3.|z|^2 +$$

$$+ \bar{x}.(y + y\omega + y\omega^2 + z + z\omega + z\omega^2) + \bar{y}.(z + z\omega + z\omega^2 + x + x\omega + x\omega^2) +$$

$$+ \bar{z}.(x + x\omega + x\omega^2 + y + y\omega + y\omega^2) =$$

$$= 3.(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2) + \bar{x}.[y.(1 + \omega + \omega^2) + z.(1 + \omega + \omega^2)] +$$

$$+ \bar{y}.[z.(1 + \omega + \omega^2 + x.(1 + \omega + \omega^2)] +$$

$$+ \bar{z}.[y.(1 + \omega + \omega^2) + x.(1 + \omega + \omega^2)] = 3.(|x|^2 + |y|^2 + |z|^2).$$

διότι $\quad 1 + \omega + \omega^2 = 0.$

98. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας καί νά δειχτεῖ ὅτι γιά τίς νιοστές ρίζες $\omega_0, \omega_1, ..., \omega_{\nu-1}$ τῆς μονάδας ἰσχύουν:

α) $\omega_k = \omega_1^k, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1$

β) $\omega_0.\omega_1.\omega_2...\omega_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$

γ) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{\nu-1} = 0$

Λύση

Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $z^\nu = 1$. Ἐπειδή $1 = \sigma\upsilon\nu 0^0 + i\eta\mu 0^0$ οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας θά δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$\omega_k = \sigma\upsilon\nu\,\frac{0^0 + 360^0 k}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{0^0 + 360^0 k}{\nu}$$

$$\text{ἤ } \omega_k = \sigma\upsilon\nu \frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1.$$

α) Θά εἶναι $\omega_1 = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2\pi}{\nu}$ (1).

Ἐπίσης $\omega_k = \sigma\upsilon\nu \frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2k\pi}{\nu} = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} \cdot k + i\eta\mu \frac{2\pi}{\nu} \cdot k =$

$$= (\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2\pi}{\nu})^k = \omega_1^k \text{ λόγω τῆς (1).}$$

β) $\omega_0 \,.\, \omega_1 \,.\, \omega_2 \,...\, \omega_{\nu-1} =$

$$= (\sigma\upsilon\nu \frac{2.0.\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2.0.\pi}{\nu}) \cdot (\sigma\upsilon\nu \frac{2.1.\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2.1.\pi}{\nu}) \cdots$$

$$\cdots (\sigma\upsilon\nu \frac{2.(\nu-1).\pi}{\nu} + i\eta\mu \frac{2.(\nu-1).\pi}{\nu}) =$$

$$\sigma\upsilon\nu[\frac{2\pi}{\nu}(0 + 1 + ... + \nu - 1)] + i\eta\mu[\frac{2\pi}{\nu}(0 + 1 + ... + \nu - 1)] =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{\nu} \frac{\nu.(\nu-1)}{2} + i\eta\mu \frac{2\pi}{\nu} \frac{\nu.(\nu-1)}{2} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu(\nu - 1).\pi + i\eta\mu(\nu - 1).\pi.$$

Ἀλλά $\sigma\upsilon\nu(\nu - 1).\pi = (-1)^{\nu-1}$ καί $\eta\mu(\nu - 1).\pi = 0$. Ἄρα

$$\omega_0 \,.\, \omega_1 \,.\, \omega_2 \,...\, \omega_{\nu-1} = (-1)^{\nu-1}$$

γ) $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_{\nu-1} = \omega_1^0 + \omega_1 + \omega_1^2 + ... + \omega_1^{\nu-1} =$

$$= 1 + \omega_1 + \omega_1^2 + ... + \omega_1^{\nu-1} = \frac{1-\omega_1^\nu}{1-\omega_1} = \frac{1-1}{1-\omega_1} = 0 \quad (\omega_1 \neq 1).$$

99. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων

i) $\sqrt[4]{(1 - i\sqrt{3})^3}$ **ii)** $\sqrt[4]{-2\sqrt{3} - 2i}$ **iii)** $(\sqrt{3} + i)^{\frac{2}{3}}$

iv) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{\frac{1}{6}}$ v) $\left(\dfrac{8\sqrt{2}+i8\sqrt{2}}{\dfrac{384}{\sqrt{3}}-128i}\right)^{\frac{1}{6}}$

Λύση

i) Ἔστω $z = 1 - i\sqrt{3}$. Τότε $|z| = 2$, $συνθ = \dfrac{1}{2}$, $ημθ = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ἄρα $θ = \dfrac{5π}{3}$ καί $z = 2.(συν\dfrac{5π}{3} + iημ\dfrac{5π}{3}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^3 = 8.(συν\frac{5π}{3} + iημ\frac{5π}{3})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^3 = 8.(συν5π + iημ5π) \Rightarrow z^3 = 8.(συνπ + iημπ).$$

Ἐπειδή οἱ ζητούμενες τιμές εἶναι οἱ ρίζες τέταρτης τάξης τοῦ z^3, θά μᾶς δίνονται ἀπό τό γενικό τύπο

$$z_k = \sqrt[4]{8}\,(συν\frac{π+2kπ}{4} + iημ\frac{π+2kπ}{4}),\quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ἄρα $z_0 = \sqrt[4]{8}.(συν\dfrac{π}{4} + iημ\dfrac{π}{4}) =$

$$= \sqrt[4]{8}.(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt[4]{2}.(1 + i).$$

Ὅμοια $z_1 = \sqrt[4]{8}.(συν\dfrac{3π}{4} + iημ\dfrac{3π}{4}) =$

$$= \sqrt[4]{8}.(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt[4]{2}.(-1 + i).$$

Ὅμοια $z_2 = \sqrt[4]{8}.(συν\dfrac{5π}{4} + iημ\dfrac{5π}{4}) =$

$$= \sqrt[4]{8}.(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt[4]{2}.(1 + i).$$

Όμοια

$$z_3 = \sqrt[4]{8}.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{4}) = \sqrt[4]{8}.(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt[4]{2}.(1 - i).$$

ii) Έστω $z = -2\sqrt{3} - 2i$. Τότε $|z| = 4$, $\text{συν}\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{ημ}\theta = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Άρα $\theta = \frac{7\pi}{6}$ καί $z = 4.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{6})$.

Οἱ ρίζες τέταρτης τάξης τοῦ z θά μᾶς δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_k = 4^{\frac{1}{4}}(\text{συν}\,\frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi}{4})$$

$z_0 = \sqrt[4]{4}.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{24} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{24})$. $z_1 = \sqrt[4]{4}.(\text{συν}\,\frac{19\pi}{24} + i\,\text{ημ}\,\frac{19\pi}{24})$.

$z_2 = \sqrt[4]{4}.(\text{συν}\,\frac{31\pi}{24} + i\,\text{ημ}\,\frac{31\pi}{24})$. $z_3 = \sqrt[4]{4}.(\text{συν}\,\frac{43\pi}{24} + i\,\text{ημ}\,\frac{43\pi}{24})$.

iii) Έστω $z = \rho.(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$. Ὁ τύπος τοῦ Moivre ἰσχύει καί ὅταν ὁ ἐκθέτης τῆς δύναμης στήν ὁποία ὑψώνουμε τόν z εἶναι κλασματικός, μέ τή μορφή

$$z^{\frac{\mu}{\nu}} = \rho^{\frac{\mu}{\nu}}.(\text{συν}\,\frac{\mu\theta + 2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{\mu\theta + 2k\pi}{\nu}),\ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1 \quad (1)$$

Έστω $z = \sqrt{3} + i$. Τότε $|z| = 2$, $\text{συν}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{ημ}\theta = \frac{1}{2}$.

Άρα $\theta = \frac{\pi}{6}$ καί $z = 2.(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{6})$.

$$z^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}.(\text{συν}\,\frac{2\cdot\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{2\cdot\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{3}) =$$

$$= \sqrt[3]{4}.(\text{συν}\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\ \frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{3}) \quad \text{όπου}\ k = 0,\ 1,\ 2$$

Ἄρα $z_0 = \sqrt[3]{4}.(\text{συν}\ \frac{\pi}{9} + i\,\text{ημ}\ \frac{\pi}{9})$, $z_1 = \sqrt[3]{4}.(\text{συν}\ \frac{7\pi}{9} + i\,\text{ημ}\ \frac{7\pi}{9})$,

$$z_2 = \sqrt[3]{4}.(\text{συν}\ \frac{13\pi}{9} + i\,\text{ημ}\ \frac{13\pi}{9}).$$

iv) Ἐπειδή $1 + i = \sqrt{2}.(\text{συν}\ \frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\ \frac{\pi}{4})$

καί $1 - i = \sqrt{2}.(\text{συν}\ \frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\ \frac{7\pi}{4})$ θά εἶναι $\frac{1+i}{1-i} =$

$$= \frac{\sqrt{2}.(\text{συν}\ \frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\ \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2}.(\text{συν}\ \frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\ \frac{7\pi}{4})} = \text{συν}(-\frac{3\pi}{2}) + i\,\text{ημ}(-\frac{3\pi}{2}).$$

Οἱ ρίζες ἕκτης τάξης αὐτοῦ τοῦ μιγαδικοῦ μᾶς δίνονται ἀπό τόν τύπο (1) καί θά εἶναι

$$z_k = \text{συν}\ \frac{-\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6} + i\,\text{ημ}\ \frac{-\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{6} \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Ἄρα θά ἔχουμε

$$z_0 = \text{συν}.(-\frac{\pi}{4}) + i\text{ημ}.(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(1-i)$$

Ὅμοια $z_1 = \text{συν}\ \frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\ \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$z_2 = \text{συν}\ \frac{5\pi}{12} + i\,\text{ημ}\ \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\ \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Όμοια $z_3 = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{4} + i\,\eta\mu \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(-1+i)$

Όμοια $z_4 = \sigma\upsilon\nu \frac{13\pi}{12} + i\,\eta\mu \frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} - i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$z_5 = \sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{12} + i\,\eta\mu \frac{17\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

v) $\Pi = \left(\dfrac{8.\sqrt{2}+i8.\sqrt{2}}{\frac{384}{\sqrt{3}}-i128}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\dfrac{8.\sqrt{6}.(1+i)}{384-i128\sqrt{3}}\right]^{\frac{1}{4}} =$

$= \left[\dfrac{8.\sqrt{6}.(1+i)}{128.(3-i\sqrt{3})}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}} =$

$= 6^{-\frac{1}{8}}.\left(\dfrac{1+i}{3-i\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{4}}$. Ἀλλά $1+i = \sqrt{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu \frac{\pi}{4})$ καί

$3 - i\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.(\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} + i\,\eta\mu \frac{11\pi}{6})$. Ἄρα θά ἔχουμε

$$\Pi = 6^{-\frac{1}{8}}\left[\dfrac{\sqrt{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu \frac{\pi}{4})}{2.\sqrt{3}.(\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} + i\,\eta\mu \frac{11\pi}{6})}\right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 6^{-\frac{1}{4}}.\left(\dfrac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} + i\,\eta\mu \frac{\pi}{4}}{\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} + i\,\eta\mu \frac{11\pi}{6}}\right)^{\frac{1}{4}} =$$

$$= 6^{-\frac{1}{4}}\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i\,\eta\mu\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{4}}.$$

Ἄρα ἀπό τόν τύπο (1) θά ἔχουμε

$$z_k = 6^{-\frac{1}{4}} \left(\text{συν} \frac{-\frac{19\pi}{12} + 2k\pi}{4} + i\,\text{ημ} \frac{-\frac{19\pi}{12} + 2k\pi}{4}\right), \; k = 0, 1, 2, 3.$$

Ἄρα θά ἔχουμε $z_0 = \sqrt[4]{6}\left(\text{συν}\left(-\frac{19\pi}{48}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{19\pi}{48}\right)\right)$

$$z_1 = \sqrt[4]{6}\left(\text{συν} \frac{5\pi}{48} + i\,\text{ημ} \frac{5\pi}{48}\right) \qquad z_2 = \sqrt[4]{6}\left(\text{συν} \frac{29\pi}{48} + i\,\text{ημ} \frac{29\pi}{48}\right)$$

$$z_3 = \sqrt[4]{6}\left(\text{συν} \frac{53\pi}{48} + i\,\text{ημ} \frac{53\pi}{48}\right).$$

100. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^2 - 4z + 13 = 0$

ii) $z^2 + 2iz - 5 = 0$

iii) $z^2 - (3 + i).z + 4 + 3i = 0.$

Λύση

i) Ἡ ἐξίσωση εἶναι 2ου βαθμοῦ ὡς πρός z. Λύνοντας κατά τά γνωστά θά ἔχουμε $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$

ii) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 - i$

iii) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 1 + 2i.$

101. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 = i$, $z \in C$.

Λύση

Ἐπειδή $i = \text{συν} \frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ} \frac{\pi}{2}$, ἄν θέσουμε $\frac{z+1}{z-1} = j$, θά ἔχουμε τήν ἐξίσωση $j^2 = i \Leftrightarrow j^2 = συν\,\frac{\pi}{2} + i\,ημ\,\frac{\pi}{2}$. Ἄρα ὁ μιγαδικός j θά μᾶς δίνεται ἀπό τό γενικό τύπο

$$j_k = συν\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\,ημ\,\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}, \quad k = 0, 1.$$

Ἑπομένως προκύπτουν οἱ τιμές $j_0 = συν\,\frac{\pi}{4} + i\,ημ\,\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

$$j_1 = συν\,\frac{5\pi}{4} + i\,ημ\,\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.(1+i).$$

Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἐξισώσεις

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.(1+i)\ (1), \quad \frac{z+1}{z-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.(1+i)\ (2).$$

Ἐφαρμόζοντας ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν γιά τήν (1) θά ἔχουμε

$$\frac{z+1+z-1}{z+1-z+1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.(1+i)+1}{\frac{\sqrt{2}}{2}.(1+i)-1} \Leftrightarrow \frac{2z}{2} = \frac{(\sqrt{2}+2)+\sqrt{2}.i}{(\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}.i} \Leftrightarrow$$

$$z = \frac{[(\sqrt{2}+2)+\sqrt{2}i].[(\sqrt{2}-2)-\sqrt{2}i]}{[(\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}i].[(\sqrt{2}-2)-\sqrt{2}i]} =$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+2).(\sqrt{2}-2)+\sqrt{2}i.(\sqrt{2}-2)-\sqrt{2}i.(\sqrt{2}+2)+2}{(\sqrt{2}-2)^2+2} =$$

$$= \frac{2-4+\sqrt{2}i.(\sqrt{2}-2-\sqrt{2}-2)+2}{2+4-4\sqrt{2}+2} = \frac{-4\sqrt{2}i}{8-4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\,i =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}.(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2}).(2+\sqrt{2})}\cdot i = -\frac{2\sqrt{2}+2}{4-2}\cdot i = -(1+\sqrt{2}).i$$

Ἄν ἐργαστοῦμε παρόμοια μέ τήν ἐξίσωση (2) θά βροῦμε

$$z = (\sqrt{2}-1).i$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσή μας ἔχει τίς ρίζες:

$$z_1 = -(1+\sqrt{2}).i\ ,\quad z_2 = (\sqrt{2}-1).i$$

102. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(1+i).z + 2.(1-i).\bar{z} = (1+2i).|z|^2$

Λύση

Θέτουμε $z = x + iy$ καί ἡ ἐξίσωση γίνεται

$$(1+i).(x+iy) + 2.(1-i).(x-iy) = (1+2i).(x^2+y^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + ix + iy - y + 2x - 2ix - 2iy - 2y = (x^2+y^2) + 2.(x^2+y^2).i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x-3y) + (-x-y).i = (x^2+y^2) + 2.(x^2+y^2).i$$

Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα $\quad 3x - 3y = x^2 + y^2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x + y = -2.(x^2+y^2).$

Τό σύστημα μᾶς δίνει $y_1 = 0\ ,\ y_2 = -\dfrac{21}{37}$ ὁπότε $x_1 = 0\ ,\ x_2 = -\dfrac{105}{259}$

Ἄρα $z = 0$ ἤ $z = -\dfrac{105}{259} - \dfrac{21}{37}i$

103. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $|z|^2 - 2iz + 2\alpha.(1+i) = 0,\ \ \alpha \geqslant 0.$

Λύση

Θέτουμε $z = x + iy$ καί ἔχουμε

$$x^2 + y^2 - 2i.(x+iy) + 2\alpha.(1+i) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha) + (-2x + 2\alpha) = 0$$

Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha = 0 \\ -2x + 2\alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 2\alpha = 0 \\ x = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + y^2 + 2y + 2\alpha = 0 \\ x = \alpha \end{cases}$$

Γιά νά ἔχει ἡ ἐξίσωση $y^2 + 2y + \alpha^2 + 2\alpha = 0$ ρίζες πραγματικές, πρέπει $\Delta \geqslant 0 \Leftrightarrow 4 - 4.(\alpha^2 + 2\alpha) \geqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \alpha^2 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha - 1 \leqslant 0$. Γιά νά ἐπαληθεύεται ἡ ἀνισότητα αὐτή, πρέπει οἱ τιμές πού θά παίρνει ὁ α νά βρίσκονται ἐντός τοῦ διαστήματος τῶν ριζῶν. Ἄρα $-1 - \sqrt{2} \leqslant \alpha \leqslant -1 + \sqrt{2}$. Ἀλλά $\alpha \geqslant 0$. Ἄρα $0 \leqslant \alpha \leqslant -1 + \sqrt{2}$. Μέ τόν περιορισμό αὐτό ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση θά ἔχει δεκτές λύσεις

τῆς μορφῆς $z = \alpha + i\,\dfrac{-2 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

104. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z - \alpha)^\nu + z^\nu = 0$, $\alpha \neq 0$, $\nu \in N$.

Λύση

$(z - \alpha)^\nu + z^\nu = 0 \Leftrightarrow (z - \alpha)^\nu = -z^\nu \Rightarrow [\ (\dfrac{z - \alpha}{z})^\nu = -1$.

Θέτουμε $\dfrac{z - \alpha}{z} = j$ (2) καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση $j^\nu = -1$ (1).

Ἐπειδή $-1 = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$ ἡ (1) γράφεται $j^\nu = \sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi$.

Ἑπομένως οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί j δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$j_k = \sigma\upsilon\nu\,\frac{\pi + 2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\pi + 2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, ..., \nu - 1$$

Ἀπό τήν (2) προκύπτει $z = \dfrac{\alpha}{1 - j}$, ἄρα οἱ λύσεις z_k τῆς ἀρχικῆς ἐξίσωσης θά δίνονται ἀπό τό γενικό τύπο

$$z_k = \frac{\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu} - i\,\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu}} =$$

$$= \frac{\alpha.\left[(1 - \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu}) + i\,\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu}\right]}{(1 - \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu})^2 + \eta\mu^2 \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu}} =$$

$$= \frac{\alpha.(2\eta\mu^2 \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu} + i\,2\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu}\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu})}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu} - 2\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu} + \eta\mu^2 \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu}} =$$

$$= \frac{2\alpha\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu}(\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu} + i\,\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu})}{2.(1 - \sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{\nu})} =$$

$$= \frac{2\alpha\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu}(\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu} + i\,\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu})}{4\eta\mu^2 \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu}} =$$

$$= \frac{\alpha \cdot (\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu} + i\,\sigma\upsilon\nu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu})}{2\eta\mu \dfrac{\pi + 2k\pi}{2\nu}} = \frac{\alpha}{2} \cdot (1 + i\,\sigma\varphi \frac{\pi + 2k\pi}{2\nu}) .$$

105. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, z \in C$. Ἄν z_1 εἶναι μία ρίζα της καί $|z_1| = 1$ δεῖξτε ὅτι

$$|\bar{\alpha}\beta - \bar{\beta}\gamma| = |\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}|, \quad (\alpha, \gamma \neq 0).$$

Λύση

Ἐπειδή ἡ z_1 εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, θά εἶναι $\alpha z_1^2 + \beta z_1 + \gamma = 0$ (1). Πολ/με καί τά δύο μέλη τῆς (1) μέ $\bar{z}_1$ καί ἔχουμε

$$\alpha z_1^2 \bar{z}_1 + \beta z_1 \bar{z}_1 + \gamma \bar{z}_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha z_1 . |z_1|^2 + \beta . |z_1| + \gamma \bar{z}_1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha z_1 + \beta + \gamma \bar{z}_1 = 0 \ (2) \quad \text{γιατί} \quad |z_1| = 1$$

Ἀπό τή (2) προκύπτει

$$\overline{\alpha z_1 + \beta + \gamma \bar{z}_1} = \bar{0} \Leftrightarrow \overline{\alpha z_3} + \bar{\beta} + \overline{\gamma \bar{z}_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{z}_1 + \bar{\beta} + \bar{\gamma}\bar{\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{z}_1 + \bar{\beta} + \bar{\gamma} z_1 = 0 \ (3).$$

Ἀπό τίς ἐξισώσεις (2), (3) ἀπαλείφουμε τόν $\bar{z}_1$. Ἀπό (2) $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \bar{z}_1 = -\dfrac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma}$ (4). Ἀπό (3) $\Leftrightarrow \bar{z}_1 = -\dfrac{\bar{\gamma} z_1 + \bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ (5). Ἀπό (4), (5)

$$\text{προκύπτει} \quad \frac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma} = \frac{\bar{\gamma} z_1 + \bar{\beta}}{\bar{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} z_1 + \bar{\alpha}\beta = \gamma\bar{\gamma} z_1 + \bar{\beta}\gamma \Leftrightarrow (\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}) . z_1 = \bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{\bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\beta}{\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}}. \ \text{Ἀλλά} \ |z| = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\gamma}{\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}} \right| = 1 \Leftrightarrow |\bar{\beta}\gamma - \bar{\alpha}\beta| = |\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}| \ \text{ἤ}$$

$$\text{ἤ} \quad |\bar{\alpha}\beta - \bar{\beta}\gamma| = |\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma}| \quad (|z| = |-z|).$$

106. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z+1)^2 + (3z^2 - z + 2)^2 = 0$, $z \in C$.

Λύση

Ἡ ἐξίσωση μπορεῖ νά λυθεῖ κάνοντας τίς πράξεις καί καταλήγοντας σέ μιά ἐξίσωση 4ου βαθμοῦ ὡς πρός z. Ἡ λύση της τότε χρειάζεται εἰδικές γνώσεις, γι' αὐτό κάνουμε τό παρακάτω τέχνασμα.

$$(z+1)^2 + (3z^2 - z + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 - i^2(3z^2 - z + 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z + 1 + 3iz^2 - iz + 2i).(z + 1 - 3iz^2 + iz - 2i) = 0.$$

Ἄρα προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις

$$3iz^2 + (1-i).z + 1 + 2i = 0 \quad (1) \quad \text{καί}$$

$$-3iz^2 + (1+i).z + 1 - 2i = 0 \Leftrightarrow 3iz^2 - (1+i).z - (1-2i) = 0 \quad (2).$$

Γιά τήν (1) ἔχουμε $\Delta = (1-i)^2 - 4.(3i).(1+2i) = 24 - 14i$.

Χρειάζεται λοιπόν νά βροῦμε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ μιγαδικοῦ $24 - 14i$. Γιά τήν εὕρεση τῆς τετραγωνικῆς ρίζας ἑνός μιγαδικοῦ $z = x + iy$ ἐκτός τῆς γνωστῆς μεθόδου τοῦ βιβλίου τοῦ Ὀργανισμοῦ ὑπάρχει καί ὁ ἑξῆς τύπος

$$\sqrt{z} = \pm \left(\sqrt{\frac{|z| + x}{2}} + i \frac{y}{|y|} \sqrt{\frac{|z| - x}{2}} \right)*$$

Ἄρα $\sqrt{24 - 14i} =$

$$= \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{772} + 24}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{772} - 24}{2}} \right) = \sqrt{\Delta}. \quad \text{Ἄρα}$$

$$z_1 = \frac{-(1-i) + \sqrt{\Delta}}{6i}, \quad z_2 = \frac{-(1-i) - \sqrt{\Delta}}{6i}.$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καί γιά τήν (2).

Ἀπόδειξη τοῦ τύπου (*).

Ἔστω $z = x + iy$ καί μιγαδικός j ὥστε $j^2 = z$. Ἄν $j = k + i\lambda$

θά ἰσχύει $(k + i\lambda)^2 = x + iy \Leftrightarrow k^2 - \lambda^2 + i2k\lambda = x + iy \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} k^2 - \lambda^2 = x \text{ καί} \\ 2k\lambda = y \end{array}$$

Ἔχουμε λοιπόν τό σύστημα

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} k^2 - \lambda^2 = x \\ 2k\lambda = y \end{array}$$

καί $(k^2 - \lambda^2)^2 + 4k^2\lambda^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow k^2 + \lambda^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$

(Ἡ περίπτωση $k^2 + \lambda^2 = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ἀπορρίπτεται ἀφοῦ $k, \lambda \in R$).

Ἄρα $\begin{array}{l} 2k^2 = \sqrt{x^2 + y^2} + x \\ 2k\lambda = y \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} k = \pm\sqrt{\dfrac{|z| + x}{2}} \\ 2k\lambda = y \end{array}$

Ἔστω $k = \sqrt{\dfrac{|z| + x}{2}}$. Τότε

$$\lambda = \frac{y}{2\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}}} = \frac{y\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}}{2\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}}\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}} =$$

$$= \frac{y\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}}{2\sqrt{\dfrac{|z|^2-x^2}{4}}} = \frac{y\sqrt{\dfrac{|z|-x}{2}}}{\sqrt{y^2}} = \frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}$$

Ἄν $k = -\sqrt{\dfrac{|z|+x}{2}}$ θά βροῦμε

$$\lambda = -\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}.\ \text{Ἄρα}$$

$$j_1 = \sqrt{\frac{|z|+x}{2}} + i\,\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}$$

$$j_2 = -\sqrt{\frac{|z|+x}{2}} - i\,\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{|z|-x}{2}}$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι οἱ παραστάσεις $|z| + x$, $|z| - x$ εἶναι πάντοτε θετικές καί ἑπομένως οἱ τετραγωνικές τους ρίζες εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί, ἄρα δεκτές σάν τιμές τῶν k, λ. Ἀκόμη βλέπουμε ὅτι $j_1 = -j_2$, δηλαδή κάθε μιγαδικός z ἔχει πάντοτε δύο τετραγωνικές ρίζες j_1, j_2 διαφορετικές μεταξύ τους, καί μάλιστα ἀντίθετες, ἄρα δέν εἶναι δυνατό ποτέ νά ταυτίζονται ἐφόσο $z \neq 0$. Τέλος μποροῦμε νά δοῦμε ὅτι οἱ ρίζες αὐτές εἶναι καί μοναδικές. Ἔστω $j_3^2 = z$ μέ $j_3 \neq j_1 \neq j_2$. Θά ἔχουμε

$$\left.\begin{array}{l} j_1^2 = j_3^2 \\ \Leftrightarrow \\ j_2^2 = j_3^2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} (j_1 - j_3).(j_1 + j_3) = 0 \\ \\ j_2 - j_3).(j_2 + j_3) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{c} j_1 + j_3 = 0 \\ \Leftrightarrow \\ j_2 + j_3 = 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow j_1 = j_2 \ \text{ἄτοπο}$$

107. Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση

$$z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1 = 0\,,\quad \nu \in Z\,,\quad \nu > 2$$

πού ἔχει σάν ρίζα τό μιγαδικό $z_0 = x + iy$, $x, y \in R$, $x.y \neq 0$. Ἄν

$$f(z) = z + \frac{1}{z}\ \text{ δεῖξτε ὅτι }\ f(z_0) \in R.$$

Λύση

Ἔχουμε $\quad f(z_0) = z_0 + \dfrac{1}{z_0} = x + iy + \dfrac{1}{x+iy} =$

$$= x + iy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).i$$

Γιά νά εἶναι $f(z_0) \in R$ ἀρκεῖ νά δειχτεῖ ὅτι

$$y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{ἤ} \quad 1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \quad \text{ἤ} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Ἀλλά ὁ μιγαδικός z_0 εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης

$$z^{\nu-1} + z^{\nu-2} + \ldots + z + 1 = 0 \quad \text{ἤ τῆς} \quad \frac{z^{\nu}-1}{z-1} = 0$$

καί εἶναι $z_0 \neq 1$ ἀφοῦ $y \neq 0$. Ἄρα $z_0^{\nu} - 1 = 0 \Leftrightarrow z_0^{\nu} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x + iy)^{\nu} = 1 \Rightarrow |x + iy|^{\nu} = 1 \Leftrightarrow |x + iy| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

Ἄρα $f(z_0) \in R$.

108. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^2 + z + |z| + 2 = 0$, $z \in C$.

Λύση

Ἔστω $z = x + iy$. Ἡ ἐξίσωση γράφεται

$$(x + iy)^2 + (x + iy) + \sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + \sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + \sqrt{x^2 + y^2} + 2 + (2xy + y)i = 0.$$

Ἄρα ἔχουμε τό σύστημα

(Σ) $\quad x^2 - y^2 + x\ \sqrt{x^2 + y^2} + 2 = 0$

$\qquad 2xy + y = 0$ πού δίνει τά συστήματα

$$(\Sigma_1) \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 + x + \sqrt{x^2 + y^2} + 2 &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

$$(\Sigma_2) \quad \begin{aligned} x^2 - y^2 + x + \sqrt{x^2 + y^2} + 2 &= 0 \\ x &= -1/2 \end{aligned}$$

᾽Από τό (Σ_1) γιά $y = 0$ προκύπτει

$$x^2 + x + \sqrt{x^2 + 2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + |x| + 2 = 0 .$$

Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις

α) $x > 0 \Leftrightarrow |x| = x$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

πού δίνει τιμές μιγαδικές γιά τό x πού ἀπορρίπτονται.

β) Ἄν $x < 0 \Leftrightarrow |x| = -x$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση

$$x^2 + 2 = 0$$

πού μᾶς δίνει πάλι τιμές μιγαδικές γιά τό x.

᾽Επειδή οἱ (α), (β) περιπτώσεις δέ μᾶς δίνουν πραγματικές λύσεις τό (Σ_1) δέ δίνει λύση γιά τήν ἐξίσωση.

᾽Από τό (Σ_2) γιά $x = -1/2$ ἔχουμε

$$\frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + y^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 - 2 + 4\sqrt{\frac{1}{4} + y^2} + 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{1}{4} + y^2} = -7 + 4y^2 \Leftrightarrow 16.\left(\frac{1}{4} + y^2\right) = (-7 + 4y^2)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 16y^2 = 49 + 16y^4 - 56y^2 \Leftrightarrow 16y^4 - 72y^2 + 45 = 0.$$

᾽Επειδή ἡ διακρίνουσα τῆς ἐπιλύουσας τῆς διτετραγώνου εἶναι ἀρνητική, δέν προκύπτουν πραγματικές τιμές γιά τό y, ἑπομένως οὔτε τό σύστημα (Σ_2) μᾶς δίνει λύση γιά τήν ἐξίσωση. Ἄρα ἡ ἐξίσωση δέν ἔχει λύση.

109. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(1+z)^{2\nu}+(1-z)^{2\nu}=0$, $z\neq -1$.

Λύση

$$(1+z)^{2\nu}+(1-z)^{2\nu}=0 \Leftrightarrow (1+z)^{2\nu}=-(1-z)^{2\nu} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu}=-1$$

Ἐπειδή $-1=\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi$ θά ἔχουμε

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2\nu}=\sigma\upsilon\nu\pi+i\eta\mu\pi \Rightarrow$$

$$\frac{1+z}{1-z}=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu},\quad k=0,1,\ldots,2\nu-1$$

Λύνοντας ὡς πρός z βρίσκουμε

$$z=\frac{-1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}}{1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}}=$$

$$=\frac{-(1-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu})+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}}{(1+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu})+i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{2\nu}}=$$

$$=\frac{-2\eta\mu^2\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}+2i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}}{2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}+2i\eta\mu\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\sigma\upsilon\nu\frac{\pi+2k\pi}{4\nu}}=$$

$$= \frac{2\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\left(-\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\right)}{2\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}\right)} =$$

$$= \varepsilon\varphi \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} \cdot \frac{i^2\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}} =$$

$$= i\varepsilon\varphi \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu} + i\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}} =$$

$$= i\varepsilon\varphi \frac{\pi+2k\pi}{4\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2\nu - 1.$$

110. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $x^3 - 3ix^2 - 3x + i + 64 = 0$.

Λύση

Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση γράφεται

$$x^3 - 3ix^2 + 3i^2x - i^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow (x - i)^3 + 64 = 0.$$

Θέτουμε $x - i = z$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση $z^3 + 64 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -64$.

Ἐπειδή $-64 = 64.(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi)$, ἡ ἐξίσωση γράφεται

$$z^3 = 64.(\sigma\upsilon\nu\pi + i\eta\mu\pi). \text{ Ἄρα}$$

$$z_k = 4.\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi+2k\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi+2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Ἄρα γιά $k = 0$ ἔχουμε

$$z_0 = 4.\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\pi}{3}\right) = 4.\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } x_0 = z_0 + i = 2 + (2\sqrt{3} + 1).i$$

Όμοια γιά $k = 1$ ἔχουμε

$$z_1 = 4.(\text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi) = -4. \text{ Άρα } x_1 = z_1 + i = -4 + i$$

Όμοια γιά $k = 2$ ἔχουμε

$$z_2 = 4.(\text{συν}\frac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{5\pi}{3}) = 4.(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$\text{Άρα } x_3 = z_3 + i = 2 + (1 - 2\sqrt{3}).i$$

111. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$(z^2 - 1)^4 = 16.(\text{συν}\alpha + i\,\text{ημ}\alpha).z^4, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Λύση

Ἡ ἐξίσωση γράφεται $(\frac{z^2-1}{2z})^4 = (\text{συν}\alpha + i\,\text{ημ}\alpha)$. Θέτουμε $\frac{z^2-1}{2z} = j$ καί ἔχουμε τήν ἐξίσωση $j^4 = (\text{συν}\alpha + i\,\text{ημ}\alpha)$

$$\text{ἄρα } j_k = (\text{συν}\frac{\alpha+2k\pi}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\alpha+2k\pi}{4}), \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Ἔτσι θά ἔχουμε $j_0 = (\text{συν}\frac{\alpha}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\alpha}{4})$,

$$j_1 = (\text{συν}\frac{2\pi+\alpha}{4} + i\,\text{ημ}\frac{2\pi+\alpha}{4}), \quad j_2 = (\text{συν}\frac{4\pi+\alpha}{4} + i\,\text{ημ}\frac{4\pi+\alpha}{4}),$$

$$j_3 = (\text{συν}\frac{6\pi+\alpha}{4} + i\,\text{ημ}\frac{6\pi+\alpha}{4})$$

Γιά νά λύσουμε λοιπόν τήν ἀρχική ἐξίσωση, ἀρκεῖ νά λύσουμε τήν $\dfrac{z^2-1}{2z} = \text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k$, ὅπου τό θ_k παίρνει τίς τιμές

$$\frac{\alpha}{4},\quad \frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{2},\quad \frac{\alpha}{4}+\pi \quad \text{καί} \quad \frac{\alpha}{4}+\frac{3\pi}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωση αὐτή γράφεται $z^2 - 2z.(\text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k) - 1 = 0$

καί εἶναι δευτεροβάθμια ὡς πρός z.

$$\Delta = 4.(\text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k)^2 + 4 =$$

$$= 4.(\text{συν}^2\theta_k - \text{ημ}^2\theta_k + 2i\,\text{ημ}\theta_k\text{συν}\theta_k + 1) =$$

$$= 4.2(2\text{συν}^2\theta_k + 2i\,\text{ημ}\theta_k\text{συν}\theta_k) = 4.2\text{συν}\theta_k.(\text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k) =$$

$$= 4.2\text{συν}\theta_k.(\text{συν}^2\frac{\theta_k}{2} - \text{ημ}^2\frac{\theta_k}{2} + 2i\,\text{ημ}\frac{\theta_k}{2}\text{συν}\frac{\theta_k}{2}) =$$

$$= 4.2\text{συν}\theta_k.(\text{συν}\frac{\theta_k}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\theta_k}{2})^2.$$ Ἄρα

$$\sqrt{\Delta} = \pm\, 2.(\text{συν}\frac{\theta_k}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\theta_k}{2})\sqrt{2\text{συν}\theta_k}$$ καί

$$z = \frac{2(\text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k) \pm 2(\text{συν}\frac{\theta_k}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\theta_k}{2}).\sqrt{2\text{συν}\theta_k}}{2}$$ ἤ

$$z = \text{συν}\theta_k + i\,\text{ημ}\theta_k \pm (\text{συν}\frac{\theta_k}{2} + i\,\text{ημ}\frac{\theta_k}{2}).\sqrt{2\text{συν}\theta_k}$$

i) $\theta_k = \dfrac{\alpha}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z_1 = \text{συν}\frac{\alpha}{4} + i\,\text{ημ}\frac{\alpha}{4} + (\text{συν}\frac{\alpha}{8} + i\,\text{ημ}\frac{\alpha}{8})\sqrt{2\text{συν}\frac{\alpha}{4}}$$

$$z_2 = \sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} + i\eta\mu \frac{\alpha}{4} - (\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{8} + i\eta\mu \frac{\alpha}{8}) \cdot \sqrt{2\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4}}$$

ii) $\theta_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}$ $\quad z_3 = -\eta\mu \frac{\alpha}{4} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} + \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}) +\right.$

$$\left. + i\eta\mu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8})\right] \sqrt{-2\eta\mu \frac{\alpha}{4}} =$$

$$= -\eta\mu \frac{\alpha}{4} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} + \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}) +\right.$$

$$\left. + i\eta\mu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8})\right] . i . \sqrt{2\eta\mu \frac{\alpha}{4}}$$

$$z_4 = -\eta\mu \frac{\alpha}{4} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} - \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}) +\right.$$

$$\left. + i + \eta\mu(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{8})\right] . i . \sqrt{2\eta\mu \frac{\alpha}{4}}$$

iii) $\theta_k = \pi + \frac{\alpha}{4}$ $\quad z_5 = -\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} - i\eta\mu \frac{\alpha}{4} +$

$$+ (-\eta\mu \frac{\alpha}{8} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{8}) . i \sqrt{2\,\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4}}$$

$$z_6 = -\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} - i\eta\mu \frac{\alpha}{4} -$$

$$-(-\eta\mu \frac{\alpha}{8} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{8}) . i \sqrt{2\,\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4}}$$

iv) $\theta_k = \frac{3\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}$ $\quad z_7 = \eta\mu \frac{\alpha}{4} - i\sigma\upsilon\nu \frac{\alpha}{4} + \left[\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}) +\right.$

$$+ i\eta\mu(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{8})] \cdot \sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}$$

$$z_8 = \eta\mu\frac{\alpha}{4} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} - [\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{8}) +$$

$$+ i\eta\mu(\frac{3\pi}{4}+\frac{\alpha}{8})] \cdot \sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}.$$

Ἂν τώρα γράψουμε τίς ρίζες στή μορφή $\alpha + i\beta$, θά ἔχουμε

$$z_1 = (\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}) +$$

$$+ (\eta\mu\frac{\alpha}{4} + \eta\mu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}).i$$

$$z_2 = (\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}) +$$

$$+ (\eta\mu\frac{\alpha}{4} - \eta\mu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}).i$$

$$z_3 = [-\eta\mu\frac{\alpha}{4} - \eta\mu(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{8}).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}] +$$

$$+ [\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} + \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{8}).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}].i$$

$$z_4 = [-\eta\mu\frac{\alpha}{4} + \eta\mu(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{8}).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}] +$$

$$+ [\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} - \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{8}).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}].i$$

$$z_5 = \left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} - \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}\right) +$$

$$+ \left(-\eta\mu\frac{\alpha}{4} - \eta\mu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}\right).i$$

$$z_6 = \left(-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} + \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}\right) +$$

$$+ \left(-\eta\mu\frac{\alpha}{4} + \eta\mu\frac{\alpha}{8}\sqrt{2\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4}}\right).i$$

$$z_7 = \left[\eta\mu\frac{\alpha}{4} + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}\right] +$$

$$+ \left[-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} + \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}\right].i$$

$$z_8 = \left[\eta\mu\frac{\alpha}{4}\quad \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}\right] +$$

$$+ \left[-\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{4} - \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\alpha}{8}\right).\sqrt{2\eta\mu\frac{\alpha}{4}}\right].i$$

112. Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση $\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma, z, \in C$.

Λύση

i) Ἔστω $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$. Ἐπειδή

$$\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \overline{\alpha z + \beta\bar{z} + \gamma} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\beta}z + \bar{\gamma} = 0.$$

Ἔτσι ἔχουμε τό σύστημα (Σ) $\begin{array}{l}\alpha z + \beta\bar{z} = -\gamma \\ \bar{\beta}z + \bar{\alpha}\bar{z} = -\bar{\gamma}\end{array}$ πού μᾶς δίνει

$$z = \frac{\beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\gamma}{|\alpha|^2 - |\beta|^2} \quad (1) \qquad \bar{z} = \frac{\bar{\beta}\gamma - \alpha\bar{\gamma}}{|\alpha|^2 - |\beta|^2}$$

Προφανῶς τό σύστημα δέ μᾶς δίνει λύση στήν περίπτωση πού $|\alpha| = |\beta|$ καί $\beta\bar{\gamma} \neq \bar{\alpha}\gamma$. Τότε δέν ἔχει λύση καί ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση.

Ὅταν $|\alpha| = |\beta|$ καί $\beta\bar{\gamma} = \bar{\alpha}\gamma$, τό σύστημα εἶναι ἀόριστο καί ἑπομένως τό ἴδιο θά συμβαίνει γιά τήν ἐξίσωση.

ii) Ἔστω $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Ἡ ἐξίσωση γίνεται

$$\beta\bar{z} + \gamma = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -\frac{\gamma}{\beta} \Leftrightarrow z = -\frac{\bar{\gamma}}{\bar{\beta}}$$

iii) Ἔστω $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma \neq 0$. Ἡ ἐξίσωση εἶναι ἀδύνατη.

iv) Ἔστω $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Ἡ ἐςίσωση εἶναι ἀόριστη.

v) Ἔστω $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, $\gamma \neq 0$. Ἡ ἐξίσωση ἔχει τή λύση $z = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Ἄν $\beta = 0$, $\gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, ἡ ἐξίσωση ἔχει τή λύση $z = 0$.

vi) Ἄν $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma = 0$, ἡ ἐξίσωση γίνεται $\alpha z + \beta\bar{z} = 0$. Στήν περίπτωση αὐτή ἔχουμε μόνο τή λύση $z = 0$, ὅπως φαίνεται καί ἀπό τόν τύπο (1) γιά $\gamma = 0$.

113. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $z^2 + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha, \beta \in C$, $\alpha \neq 0$.

i) Νά δεχτεῖ ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε ἡ ἐξίσωση νά ἔχει μία πραγματική ρίζα εἶναι

$$(\beta - \bar{\beta})^2 + (\alpha - \bar{\alpha}).(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = 0$$

ii) Νά δειχτεῖ ὅτι ὅταν $|\alpha| \leqslant 2$, $|\beta| = 1$, $\arg\beta = 2k\pi + 2\arg\alpha$, $k \in Z$, τότε καί οἱ δύο ρίζες ἔχουν μέτρο τή μονάδα.

Λύση

i) Ἱκανή. Ἔστω ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μία πραγματική ρίζα ρ.

Τότε θά εἶναι (1) $\rho^2 + \alpha\rho + \beta = 0 \Rightarrow \overline{\rho^2 + \alpha\rho + \beta} = 0 \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{\rho}^2 + \bar{\alpha}\bar{\rho} + \bar{\beta} = 0 \Leftrightarrow \rho^2 + \bar{\alpha}\rho + \bar{\beta} = 0 \ (2).$$

Ἀφαιρώντας τή (2) ἀπό τήν (1) θά ἔχω

$$(\alpha - \bar{\alpha}).\rho + \beta - \bar{\beta} = 0 \Leftrightarrow \rho = -\frac{\beta - \bar{\beta}}{\alpha - \bar{\alpha}} \ (3).$$

Ἡ διαφορά $\alpha - \bar{\alpha}$ οὐδέποτε εἶναι μηδέν, ἀφοῦ $\alpha \neq 0$. Ἐπίσης ἄν λάβουμε ὑπόψη μας ὅτι $\beta - \bar{\beta} = 2i\,\mathrm{Im}(\beta)$ καί $\alpha - \bar{\alpha} = 2i\,\mathrm{Im}(\alpha)$

θά ἔχουμε $\rho = -\dfrac{2i\,\mathrm{Im}(\beta)}{2i\,\mathrm{Im}(\alpha)} = -\dfrac{\mathrm{Im}(\beta)}{\mathrm{Im}(\alpha)} \in R \ (4).$

Ἀντικαθιστώντας τώρα τήν τιμή τῆς ρ ἀπό τήν (3) στήν (1) θά ἔχουμε:

$$\left(-\frac{\beta - \bar{\beta}}{\alpha - \bar{\alpha}}\right)^2 + \alpha.\left(-\frac{\beta - \bar{\beta}}{\alpha - \bar{\alpha}}\right) + \beta = 0 \Leftrightarrow (\beta - \bar{\beta})^2 + (\alpha - \bar{\alpha}).(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = 0.$$

Ἀναγκαία. Ἔστω ὅτι μεταξύ τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξίσωσης

$z^2 + \alpha z + \beta = 0$ ἰσχύει ἡ σχέση $(\beta - \bar{\beta})^2 + (\alpha - \bar{\alpha}).(\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = 0.$

Θά δείξουμε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μία πραγματική ρίζα. Ἡ σχέση γράφεται:

$$(\beta - \bar{\beta})^2 + (\alpha - \bar{\alpha}).[-\alpha.(\beta - \bar{\beta}) + \beta.(\alpha - \bar{\alpha})] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \bar{\beta})^2 - \alpha.(\alpha - \bar{\alpha}).(\beta - \bar{\beta}) + \beta.(\alpha - \bar{\alpha})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\alpha - \bar{\alpha}}\right)^2 - \alpha.\left(\frac{\beta - \bar{\beta}}{\alpha - \bar{\alpha}}\right) + \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\beta-\bar{\beta}}{\alpha-\bar{\alpha}}\right)^2 + \alpha.\left(-\frac{\beta-\bar{\beta}}{\alpha-\bar{\alpha}}\right) + \beta = 0.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἀριθμός $\rho = -\dfrac{\beta-\bar{\beta}}{\alpha-\bar{\alpha}}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$. Ὁ ἀριθμός αὐτός, ὅπως φαίνεται ἀπό τή σχέση (4), εἶναι πραγματικός.

ii) Ἔστω τώρα z_1, z_2 δύο μιγαδικές ρίζες τῆς ἐξίσωσης $z^2 + \alpha z + \beta = 0$ θά ἰσχύουν οἱ σχέσεις $z_1 + z_2 = -\alpha$, $z_1 . z_2 = \beta$ (5). Γνωρίζουμε τώρα ὅτι γιά τούς τυχόντες μιγαδικούς z_1, z_2 ἰσχύει ἡ ἰσότητα $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2.(|z_1|^2 + |z_2|^2)$ πού γράφεται

$$|-\alpha|^2 + |(z_1 - z_2)^2| = 2.(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2| = 2.(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |(z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2| = 2.(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2 + |\alpha^2 - 4\beta| = 2.(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}\left[|\alpha|^2 + |\alpha^2 - 4\beta|\right] \quad (6).$$

Ἀλλά ἀπό τήν (5) ἔχουμε $2.|z_1|.|z_2| = 2.|\beta|$ (7). Ἀπό τίς (6), (7) προκύπτει $(|z_1| + |z_2|)^2 = \frac{1}{2}[|\alpha|^2 + |\alpha^2 - 4\beta|] + 2.|\beta|$. Ἄρα

$$|z_1| + |z_2| = \left[\frac{1}{2}[|\alpha|^2 + |\alpha^2 - 4\beta|] + 2.|\beta|\right]^{\frac{1}{2}}$$

καί ἐπειδή $|z_1|.|z_2| = |\beta|$ τά $|z_1|$ καί $|z_2|$ εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$t^2 - \left[\frac{1}{2}[|\alpha|^2 + |\alpha^2 - 4\beta|] + 2.|\beta|\right]^{\frac{1}{2}} . t + |\beta| = 0 \quad (8).$$

Θά ἀποδείξουμε τώρα ὅτι ἡ ἐξίσωση αὐτή ἔχει διπλή ρίζα τή μονάδα, ὁπότε $|z_1| = |z_2| = 1$. Ἔστω $\alpha = |\alpha|.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \beta = |\beta|.(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta)$ ἀφοῦ $\arg\beta = 2k\pi + \arg\alpha$, δηλαδή

$\beta = |\beta|.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2 = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2$ ἀφοῦ $|\beta| = 1$. Ἐπίσης

$$|\alpha^2 - 4\beta| = \Big|\ |\alpha|^2.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2 - 4.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2\Big| =$$

$$= \Big|\ (|\alpha^2| - 4).(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^2\Big| = \Big|\ |\alpha|^2 - 4\Big|.\ |\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta|^2 =$$

$$= \Big|\ |\alpha|^2 - 4\Big| = 4 - |\alpha|^2 \text{ ἀφοῦ } |\alpha| \leqslant 2$$

Μετά ἀπό αὐτά ἡ ἐξίσωση (8) γίνεται:

$$t^2 - \left[\frac{1}{2}[\ |\alpha|^2 + 4 - |\alpha|^2] + 2\right]^{\frac{1}{2}}.t + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t^2 - 4^{\frac{1}{2}}.t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Ἄρα $|z_1| = |z_2| = 1$.

114. Εἶναι δυνατό ὁ μιγαδικός ἀριθμός z_0 μέ $|z_0| \neq 1$ νά εἶναι ρίζα σέ μιά ἀλγεβρική ἐξίσωση τῆς μορφῆς

$$1 + z + z^2 + \ldots + z^{\nu-1} = 0, \quad \nu \in N$$

καί γιατί;

Λύση

Ἡ σχέση $1 + z + z^2 + \ldots + z^\nu = 0$ γράφεται $\dfrac{z^\nu - 1}{z - 1} = 0$. Γιά νά εἶναι ὁ z_0 ρίζα τῆς ἐξίσωσης αὐτῆς πρέπει $z_0^\nu - 1 = 0 \Leftrightarrow z_0^\nu = 1$.

Ἄν $z_0 = |z_0|.(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) \Rightarrow z_0^\nu = |z_0|^\nu.(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta)$.

Ἄρα θά πρέπει νά ἰσχύει ἡ ἰσότητα $|z_0|^\nu.(\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta) = 1$.

Γιά νά ἰσχύει ὅμως ἡ ἰσότητα αὐτή, πρέπει $|z_0|^\nu.\sigma\upsilon\nu\nu\theta = 1$ καί

$\eta\mu\nu\theta = 0$. Ἀπό τήν $\eta\mu\nu\theta = 0 \Leftrightarrow \nu\theta = k\pi$. Τότε ὅμως θά ἔχουμε

$|z_0|^\nu . \sigma\upsilon\nu k\pi = 1 \Rightarrow \pm 1 \, |z_0|^\nu = 1$ ἄτοπο, ἀφοῦ $|z_0| \neq 1$. Ἄρα ὁ

z_0 δέν εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης πού δόθηκε.

115. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{\nu-1} + z^\nu = 0$.

Λύση

Ἡ ἐξίσωση γράφεται

$$(1 + z + z^2 + \ldots + z^{\nu-1} + z^\nu) + (z + z^2 + \ldots + z^{\nu-1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^{\nu+1}-1}{z-1} + z.(1 + z + \ldots + z^{\nu-2}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z^{\nu+1}-1}{z-1} + z \cdot \frac{z^{\nu-1}-1}{z-1} = 0 \Leftrightarrow z^{\nu+1} - 1 + z.(z^{\nu-1} - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^{\nu+1} - 1 + z^\nu - z = 0 \Leftrightarrow -(z + 1) + z^\nu.(z + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z + 1).(z^\nu - 1) = 0.$$

Ἄρα μία λύση εἶναι ἡ $z = -1$ καί οἱ ἄλλες λύσεις δίνονται ἀπό τήν ἐξίσωση $z^\nu = 1$, δηλαδή

$$z_k = \sigma\upsilon\nu \frac{2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu \frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$$

Πρέπει νά παρατηρήσουμε ὅτι ἡ λύση $z_0 = 1$ δέν εἶναι δεκτή.

116. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $3iz + 2\bar{z} - 3i = 1 + 5i$ **ii)** $z\bar{z} + (z - \bar{z}) - 2.(2 + i) = i$

iii) $2z^2 - 8\bar{z} + 3.|2\bar{z} - 3|^2 = -3$

Λύση

i) Θέτουμε $z = x + iy$ καί ἡ ἐξίσωση γίνεται

$$3i.(x + iy) + 2.(x - iy) - 3i = 1 + 5i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3ix - 3y + 2x - 2iy - 3i = 1 + 5i \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x - 3y + (3x - 2y - 3).i = 1 + 5i.$$

Ἄρα ἔχουμε

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x - 2y - 3 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8+2y}{3} \\ 3x - 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \quad y = \frac{7}{3}$$

Ἄρα $z = 5 + \dfrac{7}{3}i$

ii) Ἄν ἐργαστοῦμε παρόμοια θά βροῦμε

$$z_1 = \frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}i, \quad z_2 = -\frac{\sqrt{7}}{2} + \frac{3}{2}i.$$

iii) $z_1 = 1$, $z_2 = \dfrac{15}{7}$, $z_3 = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}i$, $z_4 = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}i$.

117. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^5 = -1 + \sqrt{3}.i$, **ii)** $z^6 = \dfrac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$, **iii)** $\left(\dfrac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

Λύση

i) Τρέπουμε τό μιγαδικό $-1 + \sqrt{3}.i$ στήν τριγωνομετρική του μορφή καί ἔχουμε $-1 + i.\sqrt{3} = 2.(\text{συν}\dfrac{2\pi}{3} + i\,\text{ημ}\dfrac{2\pi}{3})$.

Ἄρα ἡ ἐξίσωση γράφεται

$$z^5 = 2.(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} + i\eta\mu \frac{2\pi}{3}) \quad \text{καί ἔχει λύσεις}$$

πού δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_k = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\eta\mu \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{5})$$

ὅπου $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

Ἄρα θά ἔχουμε

$$z_0 = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{15} + i\eta\mu \frac{2\pi}{15}), \quad z_1 = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{8\pi}{15} + i\eta\mu \frac{8\pi}{15}),$$

$$z_2 = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{14\pi}{15} + i\eta\mu \frac{14\pi}{15}), \quad z_3 = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{20\pi}{15} + i\eta\mu \frac{20\pi}{15}),$$

$$z_4 = \sqrt[5]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{26\pi}{15} + i\eta\mu \frac{26\pi}{15}).$$

ii) Ἐπειδή $\sqrt{3} - i = 2.(\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} + i\eta\mu \frac{11\pi}{6})$ καί

$$\sqrt{3} + i = 2.(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6}) \quad \text{θά ἔχουμε}$$

$$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{2.(\sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{6} + i\eta\mu \frac{11\pi}{6})}{2.(\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{6} + i\eta\mu \frac{\pi}{6})} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu \frac{10\pi}{6} + i\eta\mu \frac{10\pi}{6} = \sigma\upsilon\nu \frac{5\pi}{3} + i\eta\mu \frac{5\pi}{3}.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωση γράφεται $z^6 = \text{συν}\,\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{5\pi}{3}$ καί ἔχει ρίζες

$$z_k = \text{συν}\,\frac{\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{\dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi}{6}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Ἄρα θά ἔχουμε

$$z_0 = \text{συν}\,\frac{5\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{18}, \quad z_1 = \text{συν}\,\frac{11\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{11\pi}{18},$$

$$z_2 = \text{συν}\,\frac{17\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{17\pi}{18}, \quad z_3 = \text{συν}\,\frac{23\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{23\pi}{18},$$

$$z_4 = \text{συν}\,\frac{29\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{29\pi}{18}, \quad z_5 = \text{συν}\,\frac{35\pi}{18} + i\,\text{ημ}\,\frac{35\pi}{18}$$

iii) Θέτουμε $\dfrac{1+iz}{1-iz} = j$ καί ἡ ἐξίσωση γίνεται $j^4 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

Ἐπειδή $1 + i.\sqrt{3} = 2.(\text{συν}\,\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{\pi}{3})$ καί

$1 - i.\sqrt{3} = 2.(\text{συν}\,\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{5\pi}{3})$ θά ἔχουμε

$$j^4 = \frac{2.(\text{συν}\,\dfrac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{\pi}{3})}{2.(\text{συν}\,\dfrac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{5\pi}{3}}) = \text{συν}(-\frac{4\pi}{3}) + i\,\text{ημ}(-\frac{4\pi}{3}).$$

Ἄρα $j_k = \text{συν}\,\dfrac{-\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\dfrac{-\dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi}{4}$, $k = 0, 1, 2, 3$

Ὁπότε προκύπτουν οἱ τιμές

$$j_0 = \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$j_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\eta\mu\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$j_3 = \sigma\upsilon\nu\frac{7\pi}{6} + i\eta\mu\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

Ἄρα ἔχουμε νά λύσουμε τίς ἐξισώσεις

$$\frac{1+iz}{1-iz} = j_k, \quad k = 0, 1, 2, 3 \Leftrightarrow z = \frac{j_k - 1}{i.(j_k+1)}$$

Ἔτσι θά προκύψουν οἱ λύσεις:

$$z_0 = \frac{j_0 - 1}{i.(j_0+1)} = \frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{i.\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)} =$$

$$= \frac{-1-i\sqrt{3}}{(3-i\sqrt{3}).i} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3i} =$$

$$= -\frac{(1+i\sqrt{3}).(\sqrt{3}-3i)}{3+9} = -\frac{\sqrt{3}+3i-3i+3\sqrt{3}}{12} = -\frac{4\sqrt{3}}{12} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$z_1 = \frac{j_1 - 1}{i.(j_1+1)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}-1}{i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}+1\right)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-2)+i}{i.[(\sqrt{3}+2)+i]} = \frac{(\sqrt{3}-2)+i}{-1+(\sqrt{3}+2).i} = 2-\sqrt{3}$$

Ἀνάλογα βρίσκουμε ὅτι $z_3 = \sqrt{3}$ καί $z_4 = -(2+\sqrt{3})$.

Παρατηροῦμε ὅτι ὅλες οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης εἶναι πραγματικές

118. Νά δειχτεῖ ὅτι κάθε ἐξίσωση τῆς μορφῆς $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\nu} = \frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$

ὅπου $z \in C$, $\nu \in N^*$, $\alpha \in R$ ἔχει μόνο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Ἀφοῦ $\alpha \in R$, θά ὑπάρχει ὁπωσδήποτε τόξο θ τέτοιο ὥστε $\varepsilon\varphi\theta = \alpha$. Ἔτσι θά ἔχουμε $\frac{1+\alpha.i}{1-\alpha.i} = \frac{1+i\varepsilon\varphi\theta}{1-i\varepsilon\varphi\theta} = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta} =$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu(-\theta)+i\eta\mu(-\theta)} = \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^{\nu} = \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+iz}{1-iz} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\theta+2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\theta+2k\pi}{\nu} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu-1$$

Θέτουμε $\frac{2\theta+2k\pi}{\nu} = \omega_k$ καί ἔχουμε $\frac{1+iz}{1-iz} = \sigma\upsilon\nu\omega_k + i\eta\mu\omega_k = j_k$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{j_k-1}{i.(j_k+1)} = \frac{-1+\sigma\upsilon\nu\omega_k+i\eta\mu\omega_k}{i.(1+\sigma\upsilon\nu\omega_k+i\eta\mu\omega_k)} =$$

$$= \frac{-2\eta\mu^2 \frac{\omega k}{2} + i2\eta\mu \frac{\omega k}{2}\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2}}{i.(2\sigma\upsilon\nu^2 \frac{\omega k}{2} + i2\eta\mu \frac{\omega k}{2}\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2})} =$$

$$= \frac{2\eta\mu \frac{\omega k}{2}(-\eta\mu \frac{\omega k}{2} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2})}{i2\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2}(\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2} + i\eta\mu \frac{\omega k}{2})} =$$

$$= \varepsilon\varphi \frac{\omega k}{2} \cdot \frac{-\eta\mu \frac{\omega k}{2} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2}}{-\eta\mu \frac{\omega k}{2} + i\sigma\upsilon\nu \frac{\omega k}{2}} = \varepsilon\varphi \frac{\omega k}{2}.$$

Ἄρα $z = \varepsilon\varphi \dfrac{\theta + k\pi}{\nu} \in R.$

119. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ **ii)** $z^4 + 3iz^2 + 4 = 0$

iii) $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ **iv)** $z^6 + z^3.(z + 1)^3 + (z + 1)^6 = 0.$

Λύση

i) $z^2 = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-64}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{48}.i}{2} =$

$$= \frac{-4 \pm 4\sqrt{3}i}{2} = -2 \pm 2.\sqrt{3}.i$$

Ἄρα $z_1^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$ (1) καί $z_2^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ (2).

'Από (1) προκύπτει

$$z_1 = \pm \sqrt{2.(-1+\sqrt{3}.i)} = \pm\sqrt{2}\sqrt{-1+i\sqrt{3}} =$$

$$= \pm\sqrt{2}.\left(\sqrt{\frac{2+(-1)}{2}} + i\sqrt{\frac{2-(-1)}{2}}\right) =$$

$$= \pm\sqrt{2}.\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \pm(1+i\sqrt{3}).$$

'Από (2) προκύπτει

$$z_2 = \sqrt{-2.(1+i\sqrt{3})} = \pm i\sqrt{2}.\sqrt{1+i\sqrt{3}} =$$

$$= \pm i\sqrt{2}.\left(\sqrt{\frac{2+1}{2}} + i\sqrt{\frac{2-1}{2}}\right) =$$

$= \pm i\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm(-1+i\sqrt{3})$. Ἄρα ἔχουμε τίς ρίζες

$z_1' = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1'' = -1 - i\sqrt{3}$, $z_2' = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2'' = 1 - i\sqrt{3}$.

ii) 'Εργαζόμαστε παρόμοια καί βρίσκουμε

$$z_1 = \sqrt{2}.(-1+i), \quad z_2 = \sqrt{2}.(1-i)$$

$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \quad z_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$$

iii) Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση σάν δευτεροβάθμια ὡς πρός z^3 καί

ἔχουμε $z^3 = \dfrac{2\pm\sqrt{4-8}}{2} = \dfrac{2\pm 2i}{2} = 1 \pm i$

Ἔτσι προκύπτουν δύο ἐξισώσεις **α)** $z^3 = 1+i$, **β)** $z^3 = 1-i$

α) 'Επειδή $1 + i = \sqrt{2}.(\text{συν}\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{4})$ ἡ ἐξίσωση γράφεται

$z^3 = 2^{\frac{1}{2}}(\text{συν}\dfrac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\dfrac{\pi}{4})$ καί ἔχει ρίζες

$$z_k = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot (\text{συν}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}), \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Ἄρα

$$z_0 = \sqrt[6]{2}.(\text{συν}\,\frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\,(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)],$$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}.(\text{συν}\,\frac{3\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{3\pi}{4}) =$$

$$= \sqrt[6]{2}.(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}(-1+i)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}.(\text{συν}\,\frac{17\pi}{12} + i\,\text{ημ}\,\frac{17\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}.(-\text{συν}\,\frac{\pi}{12} - i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{12}) =$$

$$= \sqrt[6]{2}\,(-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,[(\sqrt{3}+1) + i(\sqrt{3}-1)]$$

β) Ἐπειδή $1 - i = \sqrt{2}.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{4})$ ἡ ἐξίσωση γίνεται

$$z^3 = 2^{\frac{1}{2}}\,(\text{συν}\,\frac{7\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{4})$$ καί ἔχει ρίζες

$$z_k = \sqrt[6]{2}.(\text{συν}\,\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{3}) \quad k = 0,\ 1,\ 2.$$

$$z'_0 = \sqrt[6]{2}.(\text{συν}\,\frac{7\pi}{12} + i\,\text{ημ}\,\frac{7\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\,(-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,[(-\sqrt{3}-1) + i(\sqrt{3}+1)]$$

$$z'_1 = \sqrt[6]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{15\pi}{12} + i\eta\mu \frac{15\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,[(1-i)$$

$$z'_2 = \sqrt[6]{2}.(\sigma\upsilon\nu \frac{23\pi}{12} + i\eta\mu \frac{23\pi}{12}) = \sqrt[6]{2}\,(\frac{\sqrt{3+1}}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3-1}}{2\sqrt{2}}) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}\,[(\sqrt{3+1}) - i(\sqrt{3-1})]$$

iv) Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τιμή $z = 0$ δέν εἶναι λύση τῆς ἐξίσωσης, ἄρα $z \neq 0$ καί ἑπομένως μποροῦμε νά διαιρέσουμε ὅλα τά μέλη τῆς ἐξίσωσης μέ z^6, ὁπότε ἡ ἐξίσωση γίνεται

$1 + (\frac{z+1}{z})^3 + (\frac{z+1}{z})^6 = 0$. Ἄν θέσουμε $(\frac{z+1}{z})^3 = j$

ἡ ἐξίσωση γίνεται $j^2 + j + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow j_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} + i\eta\mu \frac{2\pi}{3} \quad \text{καί}$$

$$j_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} + i\eta\mu \frac{4\pi}{3}.$$

Ἔτσι προκύπτουν οἱ ἐξισώσεις: $(\frac{z+1}{z})^3 = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} + i\eta\mu \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z} = \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi}{3} \quad k = 0,\ 1,\ 2\ (1)$$

καί $(\frac{z+1}{z})^3 = \sigma\upsilon\nu \frac{4\pi}{3} + i\eta\mu \frac{4\pi}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{z+1}{z} = \sigma\upsilon\nu \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\lambda\pi}{3} + i\eta\mu \frac{\frac{4\pi}{3} + 2\lambda\pi}{3} \quad \lambda = 0,\ 1,\ 2\ (2)$$

Θέτουμε $\dfrac{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} = \omega_k$ καί ἔχουμε

$$\frac{z+1}{z} = \sigma\upsilon\nu\omega_k + i\eta\mu\omega_k \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{z} = \sigma\upsilon\nu\omega_k + i\eta\mu\omega_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -1 + \sigma\upsilon\nu\omega_k + i\eta\mu\omega_k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -2\eta\mu^2\frac{\omega_k}{2} + 2i\eta\mu\frac{\omega_k}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_k}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{z} = -2\eta\mu\frac{\omega_k}{2}\left(\eta\mu\frac{\omega_k}{2} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_k}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{-\eta\mu\frac{\omega_k}{2}\left(\eta\mu\frac{\omega_k}{2} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_k}{2}\right)} = -\frac{\eta\mu\frac{\omega_k}{2} + i\sigma\upsilon\nu\frac{\omega_k}{2}}{2\eta\mu\frac{\omega_k}{2}}.$$

Δεδομένου ὅτι $\omega_k = \dfrac{\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\omega_k}{2} = \dfrac{\dfrac{\pi}{3}+k\pi}{3} \Leftrightarrow$

$$z = -\frac{\eta\mu\dfrac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{3} + i\sigma\upsilon\nu\dfrac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{3}}{2\eta\mu\dfrac{\frac{\pi}{3}+k\pi}{3}} \qquad k = 0,\ 1,\ 2.$$

Ἀπό τή (2) ἄν ἐργαστοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο θά βροῦμε

$$z = -\frac{\eta\mu\dfrac{\frac{2\pi}{3}+\lambda\pi}{3} + i\sigma\upsilon\nu\dfrac{\frac{2\pi}{3}+\lambda\pi}{3}}{2\eta\mu\dfrac{\frac{2\pi}{3}+\lambda\pi}{3}} \qquad \text{ὅπου } \lambda = 0,\ 1,\ 2.$$

120. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $x^2+(\alpha+\beta i)x+(\gamma+\delta i)=0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$. Δεῖξτε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη γιά νά ἔχει πραγματική ρίζα εἶναι ἡ σχέση $\delta^2+\beta^2\gamma=\alpha\beta\delta$. Ἐξετάστε ἄν μπορεῖ νά ἔχει δύο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Ἱκανή. Ἔστω ρ μία πραγματική ρίζα τῆς ἐξίσωσης. Τότε θά ἰσχύει ὅτι

$$\rho^2+(\alpha+\beta i)\rho+(\gamma+\delta i)=0 \Leftrightarrow (\rho^2+\alpha\rho+\gamma)+(\beta\rho+\delta)i=0.$$

Ἄρα θά ἔχουμε

$$\rho^2+\alpha\rho+\gamma=0 \ (1) \quad \text{καί} \quad \beta\rho+\delta=0 \ (2) \Leftrightarrow \rho=-\frac{\delta}{\beta} \ (3).$$

Ἀπό (1), (3) προκύπτει $\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^2+\alpha.\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)+\gamma=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\delta^2}{\beta^2}-\frac{\alpha.\delta}{\beta}+\gamma=0 \Leftrightarrow \delta^2+\beta^2\gamma=\alpha\beta\delta$$

Ἀναγκαία. Ἔστω ὅτι ἰσχύει ἡ ἰσότητα

$$\delta^2+\beta^2\gamma=\alpha\beta\delta \Leftrightarrow \frac{\delta^2}{\beta^2}+\gamma=\frac{\alpha.\delta}{\beta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^2+\gamma+\alpha.\left(-\frac{\delta}{\beta}\right)=0$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^2+\alpha x+\gamma=0$ (4) ἔχει σάν ρίζα τόν πραγματικό ἀριθμό $\rho=-\frac{\delta}{\beta}$. Ἀλλά καί ἡ ἐξίσωση $(\beta x+\delta)i=0$ (5) ἔχει σάν ρίζα τόν $\rho=-\frac{\delta}{\beta}$. Ἄρα ἡ ἐξίσωση πού προκύπτει ἀπό τό ἄθροισμα τῶν (4), (5) θά ἔχει σάν ρίζα τό $\rho = -\dfrac{\delta}{\beta}$. Ἡ ἐξίσωση αὐτή εἶναι $x^2 + \alpha x + \gamma + (\beta x + \delta)i = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2 + (\alpha + \beta i)x + \gamma + \delta i = 0$$

Γιά νά ἔχει ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση δύο πραγματικές ρίζες, θά ἔπρεπε τό σύστημα τῶν ἐξισώσεων νά ἔχει δύο κοινές ρίζες, πού εἶναι ἄτοπο, ἀφοῦ ἡ ἐξίσωση (2) εἶναι πρωτοβάθμια. Ἄρα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωση μπορεῖ νά ἔχει μόνο μία πραγματική ρίζα.

121. Νά λυθοῦν τά συστήματα

i) $(1 + i)z_1 - iz_2 = 3$
$-z_1 + 2iz_2 = 1 + i$

ii) $2z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0$
$3iz_1 - 5z_2 + 2iz_3 = 2 + 3i$
$iz_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 2 + i$

Λύση

i)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & -i \\ -1 & 2i \end{vmatrix} = (1+i)2i - i = 2i - 2 - i = -2 + i$$

$$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} 3 & -i \\ 1+i & 2i \end{vmatrix} = 6i + i(1+i) = 6i + i - 1 = -1 + 7i$$

$$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} 1+i & 3 \\ -1 & 1+i \end{vmatrix} = (1+i)^2 + 3 = 2i + 3$$

Ἄρα $\quad z_1 = \dfrac{\Delta z_1}{\Delta} = \dfrac{-1+7i}{-2+i} = \dfrac{9}{5} - \dfrac{13}{5}i$

$$z_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta} = \frac{3+2i}{-2+i} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$$

ii)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & i & -2 \\ 3i & -5 & 2i \\ i & i & 1-i \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -5 & 2i \\ i & 1-i \end{vmatrix} - i\begin{vmatrix} 3i & 2i \\ i & 1-i \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3i & -5 \\ i & i \end{vmatrix} =$$

$$= 2.(-5+5i+2) - i(3i+3+2) - 2.(-3+5i) =$$

$$= -6+10i+3-5i+6-10i = 3-5i$$

'Ανάλογα θά βροῦμε

$$\Delta z_1 = \begin{vmatrix} 0 & i & -2 \\ 2+3i & -5 & 2i \\ 2+i & i & 1-i \end{vmatrix} = -17-21i$$

$$\Delta z_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3i & 2+3i & 2i \\ i & 2+i & 1-i \end{vmatrix} = 14-14i$$

$$\Delta z_3 = \begin{vmatrix} 2 & i & 0 \\ 3i & -5 & 2+3i \\ i & i & 2+i \end{vmatrix} = -10-14i$$

"Αρα $z_1 = \dfrac{\Delta z_1}{\Delta} = \dfrac{-17-21i}{3-5i} = \dfrac{54}{34} - \dfrac{148}{34}i = \dfrac{27}{17} - \dfrac{72}{17}i$

$$z_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta} = \frac{14-14i}{3-5i} = \frac{56}{17} + \frac{14}{17}i$$

$$z_3 = \frac{\Delta z_3}{\Delta} = \frac{-10-14i}{3-5i} = \frac{20}{17} - \frac{46}{17}i$$

122. Νά λυθεῖ τό σύστημα

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0 \quad (1)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 0 \quad (2) \qquad z_1, z_2, z_3, \in C$$

Λύση

Ἀπό τήν (1) προκύπτει $\left|\dfrac{z_1}{z_3}\right| = \left|\dfrac{z_2}{z_3}\right| = 1$ (3) καί ἀπό τή (2) $\dfrac{z_1}{z_3} + \dfrac{z_2}{z_3} + 1 = 0$ (4). Θέτουμε $\dfrac{z_1}{z_3} = j_1$ καί $\dfrac{z_2}{z_3} = j_2$ καί οἱ ἐξισώσεις (3), (4) δίνουν τό σύστημα $|j_1| = |j_2| = 1$ (5)

$$j_1 + j_2 + 1 = 0 \quad (6).$$

Ἔστω $j_1 = x_1 + iy_1$. Ἀπό τήν (6) προκύπτει

$$j_2 = -(1 + j_1) \quad (7).$$

Από τίς (5), (7) προκύπτει $|j_1| = |j_1 + 1| = 1$. Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἐξισώσεις

$$x_1^2 + y_1^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = (x_1 + 1)^2 + y_1^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_1 + 1)^2 + y_1^2 = 1$$

$$x_1^2 = x_1^2 + 2x_1 + 1 \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} \quad \text{ὁπότε} \quad y_1 = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἑπομένως θά ἔχουμε

$$j_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{καί} \quad j_1' = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἄν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, θά εἶναι $j_1 = \omega$, $j_1' = \omega^2$.

Ἄν $j_1 = \omega \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_3} = \omega \Rightarrow z_1 = z_3.\omega$ καί $\dfrac{z_2}{z_3} = \omega^2 \Leftrightarrow z_2 = z_3.\omega^2$

Ἄν $j_1 = \omega^2 \Rightarrow \dfrac{z_1}{z_3} = \omega^2 \Leftrightarrow z_1 = z_3.\omega^2$ καί $\dfrac{z_2}{z_3} = \omega \Leftrightarrow z_2 = z_3.\omega$.

Παρατηροῦμε ὅτι τό σύστημα ἔχει ἀπειρία λύσεων, ἀφοῦ γιά αὐθαίρετο z_3 θά προκύπτουν οἱ τιμές γιά τά z_1, z_2.

123. Νά λυθεῖ τό σύστημα $z_1^3 + \bar{z}_2^7 = 0 \quad (1)$

$$z_1^5 \,.\, z_2^{11} = 1 \quad (2)$$

Λύση

Ἀπό (1) προκύπτει $z_1^3 = -\bar{z}_2^7$ καί ἀπό (2) προκύπτει

$$z_1^5 = \frac{1}{z_1^{11}}. \quad \text{Ἄρα} \quad z_1^{15} = -\bar{z}_2^{35}$$

καί $z_1^{15} = \dfrac{1}{z_2^{33}}$ ὁπότε $-\bar{z}_2^{35} = \dfrac{1}{z_2^{33}} \Leftrightarrow -\bar{z}_2^{35} \,.\, z^{33}{}_2 = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\bar{z}_2^{35} \,.\, z_2^{33}| = 1 \Leftrightarrow |\bar{z}_2|^{35} \,.\, |z_2^{33}| = 1 \Leftrightarrow |z_2|^{35} \,.\, |z_2|^{33} = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z_2|^{68} = 1 \Leftrightarrow |z_2| = 1$. Ἐπίσης ἀπό τή σχέση $\bar{z}_2^{35} \,.\, z_2^{33} = -1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \bar{z}_2^{33} \,.\, z_2^{33} \,.\, \bar{z}_2^2 = -1 \Rightarrow |z_2 . \bar{z}_2|^{33} \,.\, \bar{z}_2^2 = -1 \Leftrightarrow |z_2|^{66} \,.\, \bar{z}_2^2 = -1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \bar{z}_2^2 = -1 \Leftrightarrow \bar{z}_2 = \pm i$. Ἄρα $z_2 = i$ ἤ $z_2 = -i$.

Ἄν $z_2 = i$ τότε $z_1^5 = \dfrac{1}{z_2^{11}} = \dfrac{1}{i^{11}} = -\dfrac{1}{i} = i =$

$$= \text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Ἄρα} \quad z_{1,k} = \text{συν}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} + i\,\text{ημ}\,\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{5} \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Ἄρα ἔχουμε

$$z_{1,0} = \text{συν}\,\frac{\pi}{10} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{10} = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} + i\,\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$$

$$z_{1,1} = \text{συν}\,\frac{\pi}{2} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{2} = i$$

$$z_{1,2} = \sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{9\pi}{10} = -\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} + i\,\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$z_{1,3} = \sigma\upsilon\nu \frac{13\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{13\pi}{10} = -\sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{10} - i\,\eta\mu \frac{3\pi}{10} =$$

$$= -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} - i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$z_{1,4} = \sigma\upsilon\nu \frac{17\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{17\pi}{10} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} - i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Ἂν $z_2 = -i$ τότε $z_1^5 = \frac{1}{z_2^{11}} = \frac{1}{(-i)^{11}} = -\frac{1}{i^{11}} =$

$$= \frac{1}{i} = -i = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{2} + i\,\eta\mu \frac{3\pi}{2}$$

Ἄρα $z_{2,k} = \sigma\upsilon\nu \dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5} + i\,\eta\mu \dfrac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{5}$

ὁπότε ἔχουμε

$$z_{2,0} = \sigma\upsilon\nu \frac{3\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{3\pi}{10} \qquad z_{2,1} = \sigma\upsilon\nu \frac{7\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{7\pi}{10}$$

$$z_{2,2} = \sigma\upsilon\nu \frac{11\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{11\pi}{10} \qquad z_{2,3} = \sigma\upsilon\nu \frac{15\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{15\pi}{10} = -i$$

$$z_{2,4} = \sigma\upsilon\nu \frac{19\pi}{10} + i\,\eta\mu \frac{19\pi}{10}$$

Ἄρα

$$z_{2,0} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$z_{2,1} = -\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + i\,\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

$$z_{2,2} = -\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - i\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

$$z_{2,3} = -i$$

$$z_{2,4} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} - i\,\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

124. Νά λυθεῖ τό σύστημα $z_1^3 + z_2^5 = 0 \quad (1)$

$z_1^2 \cdot \bar{z}_2^4 = 1 \quad (2)$

Λύση

Ἀπό (1) $\Leftrightarrow z_1^3 = -z_2^5$ προκύπτει $z_1^6 = z_2^{10}$

Ἀπό (2) $\Leftrightarrow z_1^2 = \dfrac{1}{\bar{z}_2^{\,4}}$ προκύπτει $z_1^6 = \dfrac{1}{\bar{z}_2^{\,12}}$ $\Rightarrow$

Ἄρα $z_2^{10} = \dfrac{1}{\bar{z}_2^{\,12}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_2^{10} \cdot \bar{z}_2^{12} = 1 \Rightarrow |z_2|^{10} \cdot |\bar{z}_2|^{12} = 1 \Leftrightarrow |z_2|^{10} \cdot |z_2|^{12} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z_2|^{22} = 1 \Leftrightarrow |z_2| = 1.$$

Ἐπίσης ἀπό τή σχέση $z_2^{10} \cdot \bar{z}_2^{12} = 1 \Leftrightarrow z_2^{10} \cdot \bar{z}_2^{10} \cdot \bar{z}_2^{2} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |z_2|^{20} \cdot \bar{z}_2^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_2^2 = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_2^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\bar{z}_2 - 1)\cdot(\bar{z}_2 + 1) = 0.$$

Ἔτσι $\bar{z}_2 = -1 \Leftrightarrow z_2 = -1$ καί $\bar{z}_2 = 1 \Leftrightarrow z_2 = 1$.

Ἄν $z_2 = -1$ ἀπό τήν (1) παίρνουμε

$$z_1^3 = -z_2^5 = -(-1)^5 = 1 = \sigma\upsilon\nu\, 0^0 + i\,\eta\mu\, 0^0$$

Ἄρα $z_{1,k} = \sigma\upsilon\nu \dfrac{2k\pi}{3} + i\,\eta\mu \dfrac{2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2.$

Ἄρα θά ἔχουμε

$$z_{1,0} = 1, \quad z_{1,1} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad z_{1,2} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἄν $z_2 = 1$ θά ἔχουμε $z_1^3 = -1^5 = -1 = \text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi$.

$$\text{Ἄρα}\quad z_{1,\lambda} = \text{συν}\,\frac{\pi + 2\lambda\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi + 2\lambda\pi}{3}, \qquad \lambda = 0,\ 1,\ 2.$$

$$z'_{1,0} = \text{συν}\,\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'_{1,1} = \text{συν}\pi + i\,\text{ημ}\pi = -1$$

$$z'_{1,2} = \text{συν}\,\frac{5\pi}{3} + i\,\text{ημ}\,\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἄρα τό σύστημά μας ἔχει τίς λύσεις

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -1, \qquad z_1 = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = 1$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} \quad z_2 = -1, \qquad z_1 = -1 \quad z_2 = 1$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = -1, \qquad z_1 = \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = 1.$$

125. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα

$$\Sigma_1 = \text{συν}\theta + \text{συν}(\theta + \omega) + \text{συν}(\theta + 2\omega) + \ldots + \text{συν}[\theta + (\nu - 1)\omega]$$

$$\Sigma_2 = \text{ημ}\theta + \text{ημ}(\theta + \omega) + \text{ημ}(\theta + 2\omega) + \ldots + \text{ημ}[\theta + (\nu - 1)\omega]$$

Λύση

Θεωροῦμε τούς μιγαδικούς

$$z_1 = \text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta \quad , \quad z_2 = \text{συν}\omega + i\,\text{ημ}\omega$$

Τότε τό ἄθροισμα

$$\Sigma_1 + i\Sigma_2 = \text{συν}\theta + \text{συν}(\theta + \omega) + \text{συν}(\theta + 2\omega) + \ldots +$$

$$+ \sigma\upsilon\nu[\theta + (\nu - 1)\omega] + i\,\eta\mu\theta + i\,\eta\mu(\theta + \omega) + i\,\eta\mu(\theta + 2\omega) + \ldots +$$

$$+ i\,\eta\mu[\theta + (\nu - 1)\omega] =$$

$$= \{\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta\} + \{\sigma\upsilon\nu(\theta + \omega) + i\,\eta\mu(\theta + \omega)\} + \ldots +$$

$$+ \{\sigma\upsilon\nu[\theta + (\nu - 1)\omega] + i\,\eta\mu[\theta + (\nu - 1)\omega]\}$$

Στό ἄθροισμα αὐτό ὁ ὅρος πού βρίσκεται στήν $k + 1$ θέση εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu(\theta + k\omega) + i\,\eta\mu(\theta + k\omega) = (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta).(\sigma\upsilon\nu k\omega + i\,\eta\mu k\omega) =$$

$$= (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta).(\sigma\upsilon\nu\omega + i\,\eta\mu\omega)^k = z_1 \,.\, z_2^k.$$ Ἄρα

$$\Sigma_1 + i\Sigma_2 = z_1 + z_1 z_2 + z_1 z_2^2 + z_1 z_2^3 + \ldots + z_1 z_2^{\nu-1} =$$

$$= z_1.(1 + z_2 + z_2^2 + \ldots + z_2^{\nu-1}) = z_1 \frac{z_2^{\nu} - 1}{z_2 - 1} =$$

$$= z_1 \cdot \frac{(\sigma\upsilon\nu\omega + i\,\eta\mu\omega)^{\nu} - 1}{\sigma\upsilon\nu\omega + i\,\eta\mu\omega - 1} = z_1 \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\nu\omega + i\,\eta\mu\nu\omega - 1}{\sigma\upsilon\nu\omega + i\,\eta\mu\omega - 1} =$$

$$= z_1 \cdot \frac{-2\eta\mu^2\dfrac{\nu\omega}{2} + 2i\,\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\nu\omega}{2}}{-2\eta\mu^2\dfrac{\omega}{2} + 2i\,\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}} =$$

$$= z_1 \cdot \frac{-2\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}\left(\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2} - i\sigma\upsilon\nu\dfrac{\nu\omega}{2}\right)}{-2\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\left(\eta\mu\dfrac{\omega}{2} - i\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2}\right)} =$$

$$= z_1 \cdot \frac{\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\nu\omega}{2} + i\,\eta\mu\dfrac{\nu\omega}{2}\right)}{\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\omega}{2} + i\,\eta\mu\dfrac{\omega}{2}\right)} =$$

$$= z_1 \cdot \frac{\eta\mu \frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu \frac{\omega}{2}} \left[\sigma\upsilon\nu \frac{(\nu-1)\omega}{2} + i\,\eta\mu \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right] =$$

$$= (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta).\left[\sigma\upsilon\nu \frac{(\nu-1)\omega}{2} + i\,\eta\mu \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right] \frac{\eta\mu \frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu \frac{\omega}{2}} =$$

$$= \left[\sigma\upsilon\nu\left(\theta + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right) + i\,\eta\mu\left(\theta + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right)\right] \frac{\eta\mu \frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu \frac{\omega}{2}} .\ \text{Ἄρα}$$

$$\Sigma_1 = \sigma\upsilon\nu\left(\theta + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right) \frac{\eta\mu \frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu \frac{\omega}{2}}$$

καί $$\Sigma_2 = \eta\mu\left(\theta + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right) \frac{\eta\mu \frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu \frac{\omega}{2}}$$

126. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα

$$\Sigma_1 = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{\eta\mu 3\theta}{\sigma\upsilon\nu^3\theta} + \ldots + \frac{\eta\mu\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta}$$

$$\Sigma_2 = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\theta}{\sigma\upsilon\nu^3\theta} + \ldots + \frac{\sigma\upsilon\nu\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta}$$

Λύση

Σχηματίζουμε τό ἄθροισμα $\Sigma_2 + i\Sigma_1$ καί ἔχουμε

$$\Sigma_2 + i\Sigma_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} +$$

$$+ \frac{\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta}{\sigma\upsilon\nu^3\theta} + \ldots + \frac{\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta}$$

Θέτουμε $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta = z$ καί ἔχουμε

$$\Sigma_2 + i\Sigma_1 = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{z^2}{\sigma\upsilon\nu^2\theta} + \frac{z^3}{\sigma\upsilon\nu^3\theta} + \ldots + \frac{z^\nu}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta} =$$

$$= \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\left[1 + \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \left(\frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^{\nu-1}\right] =$$

$$= \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\,\frac{\left(\dfrac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^\nu - 1}{\left(\dfrac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right) - 1} = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\,\frac{\dfrac{z^\nu}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta} - 1}{\dfrac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta} - 1} =$$

$$= \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\,\frac{\dfrac{z^\nu - \sigma\upsilon\nu^\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta}}{\dfrac{z - \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}} = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\theta}\,\frac{\sigma\upsilon\nu\theta(z^\nu - \sigma\upsilon\nu^\nu\theta)}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta(z - \sigma\upsilon\nu\theta)} =$$

$$= z \cdot \frac{z^\nu - \sigma\upsilon\nu^\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta(z - \sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{z^{\nu+1} - z\sigma\upsilon\nu^\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu^\nu\theta(z - \sigma\upsilon\nu\theta)} =$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\theta + i\eta\mu(\nu+1)\theta - (\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)\sigma\upsilon\nu^\nu\theta}{i\sigma\upsilon\nu^\nu\theta\,\eta\mu\theta} =$$

$$= -\frac{i\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\theta - \eta\mu(\nu+1)\theta - i\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta + \eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta\,.\,\eta\mu\theta} =$$

$$= \frac{\eta\mu(\nu+1)\theta - \eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta\,\eta\mu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta - \sigma\upsilon\nu(\nu+1)\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta\,.\,\eta\mu\theta}\cdot i$$

Ἄρα $\Sigma_2 = \dfrac{\eta\mu(\nu+1)\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta\,\eta\mu\theta} - 1\,,\quad \Sigma_1 = 1 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\nu+1)\theta}{\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta\,.\,\eta\mu\theta}$

127. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα

$$\Sigma_1 = 1 + \nu\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{1.2.3}\sigma\upsilon\nu 3\theta + \ldots + \sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$$

$$\Sigma_2 = \nu\eta\mu\theta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\eta\mu 2\theta + \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{1.2.3}\eta\mu 3\theta + \ldots + \eta\mu(\nu\theta)$$

Λύση

Σχηματίζουμε τήν παράσταση

$$\Sigma_1 + i\Sigma_2 = 1 + \nu(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta) +$$

$$+ \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{1.2.3}(\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta) + \ldots + (\sigma\upsilon\nu\nu\theta + i\eta\mu\nu\theta)$$

Ἄν θέσουμε $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta = z$ θά ἔχουμε

$$\Sigma_1 + i\Sigma_2 = 1 + \frac{\nu}{1!}z + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}z^2 + \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{3!}z^3 + \ldots + z^{\nu} =$$

$$= (1+z)^{\nu} = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^{\nu} =$$

$$= \left[2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\theta}{2} + 2i\eta\mu\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\right]^{\nu} =$$

$$= \left[2\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{2} + i\eta\mu\frac{\theta}{2}\right)\right]^{\nu} =$$

$$= 2^{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\theta}{2} + i\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}\right) =$$

$$= 2^{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\theta}{2} + i\,2^{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta}{2}\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}$$

Ἄρα $\Sigma_1 = 2^{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\theta}{2}$ καί $\Sigma_2 = 2^{\nu}\sigma\upsilon\nu^{\nu}\frac{\theta}{2}\eta\mu\frac{\nu\theta}{2}$

128. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$z^{\nu} - 1 = \begin{cases} (z-1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{\nu-1}{2}}\left[z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{\nu}\right) + 1\right], \nu = 2\rho + 1, \rho \in Z \\ (z-1).(z+1)\prod\limits_{k=1}^{\frac{\nu-2}{2}}\left[z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2k\pi}{\nu}\right) + 1\right], \nu = 2\rho, \rho \in Z \end{cases}$$

Λύση

Θεωροῦμε τήν ἐξίσωση $z^{\nu} = 1$. Γνωρίζουμε ὅτι οἱ ρίζες της δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$z_k = \sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Ἔτσι θά ἔχουμε

$$z^{\nu} - 1 = (z - z_0).(z - z_1).(z - z_2) \ldots (z - z_{\nu-1}) =$$

$$= \prod_{k=0}^{\nu-1}\left[z - \left(\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2k\pi}{\nu}\right)\right].$$

θεωροῦμε τώρα τή ρίζα z_k τάξης k, καί τή ρίζα τάξης $\nu - k$ δηλαδή τή $z_{\nu-k}$.

Εἶναι $\quad \operatorname{Arg}(z_k) = \dfrac{2k\pi}{\nu} \quad$ καί $\quad \operatorname{Arg} z_{\nu-k} = \dfrac{2(\nu-k)\pi}{\nu}$.

Παρατηροῦμε ὅτι $\operatorname{Arg}(z_k) + \operatorname{Arg}(z_{\nu-k}) = \dfrac{2k\pi}{\nu} + \dfrac{2(\nu-k)\pi}{\nu} =$

$$= \frac{2k\pi}{\nu} + \frac{2\nu\pi}{\nu} - \frac{2k\pi}{\nu} = 2\pi \qquad (1)$$

Θά δείξουμε ὅτι οἱ ρίζες z_k καί $z_{\nu-k}$ πού ἔχουν τήν ἰδιότητα (1) εἶναι συζυγεῖς καί ἀντίστροφοι μιγαδικοί ἀριθμοί. Ἔστω

$$z_k = \text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu}. \quad \text{Τότε}$$

$$z_{\nu-k} = \text{συν}\,\frac{2(\nu-k)\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{2(\nu-k)\pi}{\nu} =$$

$$= \text{συν}\left(2\pi - \frac{2k\pi}{\nu}\right) + i\,\text{ημ}\left(2\pi - \frac{2k\pi}{\nu}\right) =$$

$$= \text{συν}\,\frac{2k\pi}{\nu} - i\,\text{ημ}\,\frac{2k\pi}{\nu} = \bar{z}_k.$$

Ἐπίσης $z_k \,.\, z_{\nu-k} = z.\bar{z}_k = |\,z_k\,|^2 =$

$= \text{συν}^2\,\dfrac{2k\pi}{\nu} + \text{ημ}^2\,\dfrac{2k\pi}{\nu} = 1.$ Ἄρα οἱ ἀριθμοί z_k, $z_{\nu-k}$ εἶναι καί ἀντίστροφοι.

i) Ἔστω ὅτι $\nu = 2\rho + 1$. Ἐπειδή $z_0 = 1$ θά ἔχουμε

$$z^\nu - 1 = (z-1).(z-z_1).(z-z_2)\ \dots\ (z-z_{\nu-1}).$$

Οἱ παράγοντες $z - z_1$, $z - z_2$, ..., $z - z_{\nu-1}$ εἶναι σέ πλῆθος $\nu - 1$, ὅπου ὁ ἀριθμός $\nu - 1$ εἶναι προφανῶς ἄρτιος. Ἑπομένως γιά κάθε παράγοντα $z - z_k$ θά ὑπάρχει καί ὁ $z - \bar{z}_k$ καί ἑπομένως θά ὑπάρχει καί τό γινόμενο $(z - z_k).(z - \bar{z}_k) = z^2 - (z_k + \bar{z}_k).z + z_k.\bar{z}_k =$

$$= z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + |z_k|^2 = z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + 1.$$

Ἔτσι θά ἔχουμε $\quad z^\nu - 1 = (z - 1)\prod_{k=0}^{\frac{\nu-1}{2}} (z^2 - 2z\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu} + 1).$

ii) Ἔστω ν ἄρτιος. Τότε στήν παράσταση

$z^\nu - 1 = (z - z_0).(z - z_1) \dots (z - z_{\nu-1})$ θά εἶναι $z_0 = 1$ καί

$$z_{\frac{\nu}{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\cdot\frac{\nu}{2}\cdot\pi}{\nu} = \sigma\upsilon\nu\frac{\nu.\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\nu.\pi}{\nu} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu(\pi) + i\eta\mu(\pi) = -1.$$ Ἄρα θά ἔχουμε

$$z^\nu - 1 = (z - 1).(z + 1).(z - z_1).(z - z_2) \dots$$

$$\dots (z - z_{\frac{\nu}{2}-1}).(z - z_{\frac{\nu}{2}+1}) \dots (z - z_{\nu-1}).$$

Οἱ παράγοντες τοῦ γινομένου αὐτοῦ ἐκτός ἀπό τούς $z - 1$, $z + 1$ εἶναι σέ πλῆθος $\nu - 2$, δηλαδή ἀριθμός ἄρτιος. Εἶναι ἐπίσης ἀνά δύο συζυγεῖς. Ἑπομένως, ἄν ἐργαστοῦμε ὅπως καί στήν προηγούμενη περίπτωση, θά βροῦμε

$$z^\nu - 1 = (z - 1).(z + 1)\prod_{k=1}^{\frac{\nu-2}{2}} [(z^2 - 2z(\sigma\upsilon\nu\frac{2k\pi}{\nu}) + 1]$$

129. Νά γραφοῦν τά $\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$ καί $\eta\mu(\nu\theta)$ συναρτήσει τῶν $\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta$.

Λύση

Θεωροῦμε τό μιγαδικό $z = συνθ + iημθ$. Τότε θά εἶναι

$$z^ν = (συνθ + iημθ)^ν = συν(νθ) + iημ(νθ) \quad (1).$$

Ἀλλά καί ἀπό τό διώνυμο τοῦ Νεύτωνα θά ἔχουμε

$$z^ν = (συνθ + iημθ)^ν =$$

$$= συν^ν θ + \frac{ν}{1!} συν^{ν-1}θ\,(iημθ) + \frac{ν(ν-1)}{2!} συν^{ν-2}θ\,(iημθ)^2 +$$

$$+ \frac{ν(ν-1).(ν-2)}{3!} συν^{ν-3}θ\,(iημθ)^3 + \cdots (iημθ)^ν =$$

$$= συν^ν θ + \frac{ν}{1!} συν^{ν-1}θ\, iημθ - \frac{ν(ν-1)}{2!} συν^{ν-2}θ\, ημ^2θ -$$

$$- \frac{ν(ν-1).(ν-2)}{3!} συν^{ν-3}θ . ημ^3θ + \cdots + (iημθ)^ν \quad (2)$$

Ἄρα ἀπό τίς (1), (2) προκύπτει

$$συν(νθ) = συν^ν θ - \frac{ν(ν-1)}{2!} συν^{ν-2}θ . ημ^2θ +$$

$$+ \frac{ν(ν-1).(ν-2).(ν-3)}{4!} συν^{ν-4}θ . ημ^4θ - \cdots$$

$$ημ(νθ) = \frac{ν}{1!} συν^{ν-1}θ . ημθ - \frac{ν(ν-1).(ν-2)}{3!} συν^{ν-1}θ . ημ^3θ +$$

$$+ \frac{ν(ν-1).(ν-2).(ν-3).(ν-4)}{5!} συν^{ν-5}θ . ημ^5θ - \cdots$$

Καί στούς δύο τύπους τά πρόσημα πηγαίνουν ἐναλλάξ $+, -$ καί οἱ δυνάμεις τοῦ i ἀντικαθίστανται ἀπό τούς γνωστούς τύπους

$$i^{4ν} = 1, \quad i^{4ν+1} = i, \quad i^{4ν+2} = -1, \quad i^{4ν+3} = -i$$

130. Νά ἐκφραστοῦν τό $\eta\mu^{\nu}\theta$ καί τό $\sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta$ συναρτήσει τῶν συνημιτόνων καί ἡμιτόνων τοῦ τόξου $\rho\theta$ ὅπου $\rho = 0, 1, 2, \ldots$

Λύση

Διακρίνουμε τίς περιπτώσεις $\nu = 2\rho$ καί $\nu = 2\rho + 1$

i) $\nu = 2\rho$

Γνωρίζουμε ὅτι ἄν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta$, εἶναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \eta\mu\theta = \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\text{ὅπου} \quad \frac{1}{z} = \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta. \quad \text{Ἄρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu^{2\rho}\theta = \frac{1}{2^{2\rho}}(z + z^{-1})^{2\rho} =$$

$$= \frac{1}{2^{2\rho}}\left[(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho} + \frac{2\rho}{1!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-1}(\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta) + \right.$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-2}(\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^{2} +$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1).(2\rho-2)}{3!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-3}(\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^{3} +$$

$$\left. + \cdots + (\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^{2\rho}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{2\rho}}\left[(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho} + \frac{2\rho}{1!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-2} + \right.$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-4} +$$

$$\left. + \frac{2\rho.(2\rho-1).(2\rho-1)}{3!}(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^{2\rho-6} + \cdots + (\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta^{-2\rho}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{2\rho}}[\sigma\upsilon\nu 2\rho\theta + \frac{2\rho}{1!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 2)\theta + \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 4)\theta +$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1).(2\rho-2)}{3!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 6)\theta + \cdots + \sigma\upsilon\nu(-2\rho\theta)] +$$

$$+ \frac{1}{2^{2\rho}}[\eta\mu 2\rho\theta + \frac{2\rho}{1!} + \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}\eta\mu(2\rho - 4)\theta +$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1).(2\rho-2)}{3!}\eta\mu(2\rho - 6)\theta + \cdots + \eta\mu(-2\rho\theta)]i$$

Γνωρίζουμε ὅμως ὅτι ὁ ἀριθμός $\frac{1}{2^{2\rho}}(z + z^{-1})^{2\rho}$ εἶναι πραγματικός. Ἄρα ὁ συντελεστής τοῦ i στήν παραπάνω ἰσότητα εἶναι 0.

Ἔτσι βρίσκουμε $\sigma\upsilon\nu^{2\rho}\theta = \frac{1}{2^{2\rho}}[2\sigma\upsilon\nu 2\rho\theta + \frac{2\rho}{1!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 2)\theta +$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 4)\theta + \cdots \frac{2\rho.(2\rho-1)\ldots 3.2}{(2\rho-1)!}\sigma\upsilon\nu(2 - 2\rho)\theta] =$$

$$= \frac{1}{2^{2\rho-1}}[\sigma\upsilon\nu 2\rho\theta + \frac{\rho}{1!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 2)\theta +$$

$$+ \frac{\rho.(2\rho-1)}{2!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 4)\theta + \cdots + \frac{\rho.(2\rho-1)\ldots 3.2}{(2\rho-1)!}\sigma\upsilon\nu(2 - 2\rho)\theta]$$

Ἀνάλογα θά βροῦμε

$$\eta\mu^{2\rho}\theta = \frac{(-1)^{\rho}}{2^{2\rho-1}}[\sigma\upsilon\nu 2\rho\theta - \frac{2\rho}{1!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 2)\theta +$$

$$+ \frac{2\rho.(2\rho-1)}{2!}\sigma\upsilon\nu(2\rho - 4)\theta - \cdots]$$

Ἄν ἐργαστοῦμε παρόμοια, θά βροῦμε $\eta\mu^{2\rho+1}\theta$, $\sigma\upsilon\nu^{2\rho+1}\theta$, συναρτήσει τῶν $\sigma\upsilon\nu\rho\theta$ καί $\eta\mu\rho\theta$, $\rho = 0, 1, 2, \ldots$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Νά γραφοῦν στή μορφή $\alpha + \beta i$ οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = 2i(1 - 3i) + 3(4 - i)\ ,\quad z_2 = i^3(1 + i) + i^5(3 - i) + i^7(2 + i)$$

2. Νά γραφοῦν στή μορφή $\alpha + \beta i$ οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = (2 - i)^2.(1 + 3i)^3\ ,\qquad z_2 = \frac{(3-i).(2+i)}{(1-i)^3}$$

$$z_3 = \frac{1+2i}{i^3(1-3i)} - \frac{1-2i}{(4-3i)^2}$$

3. Νά βρεθοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y ὥστε

i) $x(3 + 4i) - y(1 + 2i) + 5 = 0$

ii) $(x + iy)^2 = \dfrac{1+7i}{1-i}$

4. Δίνεται ὁ μιγαδικός ἀριθμός $z = \alpha + \beta i$. Νά προσδιοριστοῦν τό $Re(j)$ καί $Im(j^2)$, ὅταν $j = \dfrac{z+i}{z-i}$.

5. Ἄν $x + iy = \sqrt{(\alpha + \beta i).(\gamma + \delta i)}$ δεῖξτε ὅτι

i) $x^2 - y^2 = \alpha\gamma - \beta\delta$

ii) $2\alpha\beta = \alpha\delta + \beta\gamma$

iii) $2\alpha^2 = \alpha\gamma - \beta\delta + \sqrt{(\alpha^2 + \beta^2).(\gamma^2 + \delta^2)}$

6. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση

$$\Pi = \frac{i\,\mathrm{Re}(z) - 2\,\mathrm{Im}(z)}{z-1} - \frac{iz + \mathrm{Re}(z^2)}{\mathrm{Im}(z^2)} \quad \text{ὅταν} \quad z = 3 - 2i$$

7. Ἄν $x + iy = (\alpha + \beta i)^3$ δεῖξτε ὅτι
$\beta x + \alpha y = 4\alpha\beta.(\alpha^2 - \beta^2)$ $\quad \alpha, \beta, x, y \in R - \{0\}$

8. Νά προσδιοριστοῦν τά x, y ὥστε οἱ μιγαδικοί $j_1 = 1 + z + 2i$ καί $j_2 = 3 - 2z + i$ νά εἶναι συζυγεῖς, ὅταν

$$z = \frac{x - yi}{1 + i}$$

9. Ἄν $(x + iy)^3 = \alpha + i\beta$ δεῖξτε ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 = (x^2 + y^2)^3$ $\alpha, \beta, x, y \in R - \{0\}$.

10. Ἄν $z = x + iy$ καί $j = (x^3 - 3x^2y^2 + 2x) + (3x^2y + 2y - y^3)i$ νά βρεθεῖ ἡ σχέση πού συνδέει τούς z καί j.

11. Νά προσδιοριστοῦν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, y, ὥστε ὁ μιγαδικός $z = (2 + xi).(1 - i) + (x + 2yi).(3 + i)$ νά εἶναι **i)** πραγματικός **ii)** καθαρός φανταστικός.

12. Ἄν $x + iy = \dfrac{\alpha + i\beta}{\gamma + i\delta}$, δεῖξτε ὅτι τά x, y εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος $\gamma x - \delta y = \alpha \wedge \delta x + \gamma y = \beta \quad (\gamma + i\delta \neq 0)$.

13. Ἄν $z = x + iy$ καί $z^5 = 1$, δεῖξτε ὅτι $x(y^4 - x^4) = \dfrac{1}{4}$

14. Νά δειχτεῖ ὅτι $\dfrac{x + \nu y - (\nu x - y)i}{1 - \nu i} = x + iy$.

15. Νά ὁριστοῦν οἱ μιγαδικοί z, j πού ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα

$$z^2 + j^2 = 0$$

16. Ἄν $x = \dfrac{1 + \alpha\beta}{\alpha + \beta} \quad y = \dfrac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta} i \quad \omega = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$

δεῖξτε ὅτι $x^2 + y^2 + \omega^2 = 1 \quad (\alpha + \beta \neq 0)$.

17. Ἄν $z = x + iy$, $z = \alpha + \beta i$ καί

$j = \dfrac{i + z}{i - z}$ μέ $\alpha, \beta, x, y \in R - \{0\}$

δεῖξτε ὅτι $x = -\dfrac{2\beta}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}$, $y = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{(\alpha + 1)^2 + \beta^2}$

18. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί z, ὥστε νά ἰσχύουν οἱ σχέσεις:

$$z^3 \in R \quad \text{καί} \quad z^3 \geqslant 8$$

19. Ἄν $x + iy = \dfrac{\alpha^2 + i\beta^2}{\alpha + i\beta}$, νά ὑπολογιστοῦν τά x, y συναρτήσει τῶν α, β καί νά δειχτεῖ ὅτι $x + y = 1$ $(\alpha + i\beta \neq 0)$.

20. Ἄν $x = \frac{y}{2} = \frac{\omega}{3}$ δεῖξτε ὅτι

$$x + y - \omega + (x + y + \omega)i = 2\omega \ , \quad x, y, \omega \in R.$$

21. Ἄν $\delta_1 \alpha \beta_1 + \alpha_1 \beta \delta_1 i = \alpha_1 \beta \delta_1 + \alpha_1 \beta_1 \gamma i$ καί $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1, \gamma, \gamma_1, \delta, \delta_1 \in R^+$ δεῖξτε ὅτι

$$\sqrt{\alpha\alpha_1} + \sqrt{\beta\beta_1} + \sqrt{\gamma\gamma_1} = \sqrt{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1}$$

22. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός $j = \frac{z^2+1}{z^2-1}$ εἶναι πραγματικός, ὅταν

$$z = \frac{1+2i}{-1+2i}$$

23. Δεῖξτε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε τό κλάσμα $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+i\delta}$ εἶναι πραγματικός ἀριθμός εἶναι $\alpha\delta = \beta\gamma$.

24. Δίνονται οἱ μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$, $j = \gamma + \delta i$. **i)** Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες ὥστε $z.j \in R$. **ii)** Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες ὥστε

$$Im\left(\frac{z+j}{1+z.j}\right) = Im\left(\frac{z-j}{1+z.j}i\right) = Im\left(\frac{1-z.j}{1+z.j}\right) = 0$$

25. Δίνεται ὁ μιγαδικός $z = x + iy$ καί ὁ $j = \frac{z}{1-i}$. **i)** Νά ὑπολογιστοῦν τά $Re(j), Im(j)$. **ii)** Νά βρεθεῖ σχέση μεταξύ τῶν x, y ὥστε **α)** $ji \in R$, **β)** $(1+i)j \in C - R$. **iii)** Ἄν $y = 3$, νά προσδιοριστεῖ ὁ x ὥστε $ji \in R$.

26. Δίνονται οἱ μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4. Σχηματίζουμε τούς μιγαδικούς $j_1 = \dfrac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$, $j_2 = \dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_4}$, $j_3 = \dfrac{z_3 - z_1}{z_2 - z_4}$

ὅπου $z_3 - z_4 \neq 0$, $z_1 - z_4 \neq 0$, $z_2 - z_4 \neq 0$. Δεῖξτε ὅτι ἄν δύο ἀπό αὐτούς εἶναι καθαροί φανταστικοί, τότε καί ὁ τρίτος θά εἶναι καθαρός φανταστικός.

27. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$[2\alpha - \beta - \gamma + (\beta - \gamma).\sqrt{3}i]^3 = [2\beta - \gamma - \alpha + (\gamma - \alpha).\sqrt{3}i]^3$$

$\alpha, \beta, \gamma \in R$.

28. Ἄν $x + iy = \dfrac{3}{2 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta}$ καί $x, y, \theta \in R$, δεῖξτε ὅτι

$$x^2 + y^2 - 4x = 3$$

29. Ἄν $\alpha > 0$, $\beta > 1$ καί $Re(z) \geqslant \dfrac{(2-\beta^2).\alpha}{2.(\beta^2 - 1)}$, δεῖξτε ὅτι

$$|\alpha + z| \geqslant \frac{\alpha + |z|}{\beta}$$

30. Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα: **i)** $\sum\limits_{n=1}^{100} i^n$ **ii)** $\sum\limits_{n=-17}^{33} i^n$

31. Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παράστασης $\Pi = (1 + i^{\nu}).(1 + i^{2\nu})$ $\nu \in N$.

32. Νά δειχτεῖ ὅτι $\dfrac{(1+i)^{\nu}}{(1-i)^{\nu-2}} = 2i^{\nu-1}$.

33. Ἄν $(1+i)^{\nu}+(1-i)^{\nu}=x+iy$ ὅπου $x, y \in R$, $\nu \in N$, νά βρεθοῦν τά x, y.

34. Νά δειχτεῖ ὅτι $i^{\nu}+i^{\nu+1}+i^{\nu+2}+i^{\nu+3}=0$, $\nu \in N$.

35. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ τιμή τῆς παράστασης

$$A = \frac{(1+i)^{\nu}}{(1-i)^{\nu}} + \frac{(1-i)^{\nu}}{(1+i)^{\nu}}, \quad \nu \in N.$$

36. Ἄν $z_{\nu} = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{\nu} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^{\nu}$, $\nu \in N$

δεῖξτε ὅτι $z_{\nu+4}+z_{\nu}=0$.

37. Ἄν $z_1=7+5i$, $z_2=12+7i$, βρεῖτε τά $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1+z_2|$ καί ἐπαληθεύσετε ὅτι $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$.

38. Δίνεται $z=-9+12i$ καί $|j|=5$. Ὑπολογίστε τό μιγαδικό j στίς ἑξῆς περιπτώσεις: **i)** $|z+j|=|z|+|j|$, **ii)** $|z+j|=|z|-|j|$.

39. Νά ὑπολογιστεῖ τό μέτρο τῶν μιγαδικῶν: $z = \dfrac{(1+i)^{15}}{(1-i)^{20}}$,

$$z = \frac{(1+i)^3}{(1-i)^2.(2+3i)^5.(1-3i)}, \quad z = \frac{i(1+\sqrt{3}i)^3}{(\sqrt{3}-i)^2} + \frac{(\sqrt{3}-i)^2}{i(\sqrt{3}+i)^3}$$

40. Νά δειχτεῖ ὅτι γιά τυχόντες μιγαδικούς z_1, z_2 εἶναι

$$\big|\,|z_1|-|z_2|\,\big| \leqslant |z_1-z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$

Πότε ἰσχύουν οἱ ἰσότητες;

41. Δεῖξτε ὅτι
$$|1+z_1\bar{z}_2|^2 \leqslant (1+|z_1|^2).(1+|z_2|^2), \quad \forall\, z_1, z_2 \in C$$

42. Ἄν $\alpha, \beta \in R$ καί $\alpha \neq \beta$ καί $|z+\alpha i| = |z+\beta i|$ δεῖξτε ὅτι
$$\bar{z} - z = (\alpha+\beta)i$$

43. Ἄν $z_1, z_2 \in C$ καί $|z_1| = |z_2| = 1$ καί $\alpha \in R$ δεῖξτε ὅτι
$$|z_1+z_2+\alpha z_1 z_2 - 1| = |z_1+z_2-z_1z_2+\alpha|$$

44. Ἄν $\left|\dfrac{z}{z+1}\right| = 1$ καί $\dfrac{z}{\bar{z}} = i$ νά προσδιοριστεῖ ὁ z.

45. Νά δειχτεῖ ὅτι ὁ ἀριθμός
$$z = \frac{(\alpha+\beta i)^\nu}{(\gamma+\delta i)^\rho.(\varepsilon+\kappa i)^\lambda} + \frac{(\alpha-\beta i)^\nu}{(\gamma-\delta i)^\rho.(\varepsilon-\kappa i)^\lambda} \quad \text{εἶναι}$$
πραγματικός.

46. Ἄν $z_1, z_2, z_3 \in C$ καί $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ καί $z_1+z_2+z_3 = 1$ δεῖξτε ὅτι $|z_1-z_2| = |z_2-z_3| = |z_3-z_1|$.

47. Ἄν $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ καί $z \in C$, δεῖξτε ὅτι
$$\mathrm{Im}\,\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|\gamma z+\delta|^2}$$

48. Δεῖξτε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε ὁ z νά εἶναι πραγματικός εἶναι $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right| + \left|\dfrac{z-|z|}{2}\right| = |z|$.

49. Ἄν $|z_1| = |z_2| = |z_3| = k$ δεῖξτε ὅτι

$$|z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1| = k^2 \, |z_1 + z_2 + z_3|, \quad k > 0$$

50. Ἄν γιά τούς μιγαδικούς z_1, z_2 ἰσχύει ὅτι $|z_1 + z_2| = |z_1| =$ $= |z_2|$ δεῖξτε ὅτι $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 + \left(\frac{z_1}{z_2}\right) + 1 = 0$, $z_2 \neq 0$.

51. Ἄν $z_1, z_2 \in C$ καί $|z_1| = |z_2|$ δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός $j = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}$ εἶναι καθαρός φανταστικός.

52. Νά βρεθεῖ τό μέτρο τοῦ μιγαδικοῦ z ὅταν

$$\frac{1}{z - \gamma i} = \frac{1}{\alpha - \beta i} - \frac{1}{\alpha + \gamma i} \qquad \alpha - \beta i \neq 0, \quad \alpha + \gamma i \neq 0.$$

53. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί z_1, z_2 ἄν γνωρίζουμε ὅτι οἱ ἀριθμοί z_1, $z_1 + 2z_2$, $2z_1 + z_2$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου, ἐνῶ οἱ ἀριθμοί $(z_1 + 1)^2$, $z_1z_2 + 5$, $(z_2 + 1)^2$ εἶναι διαδοχικοί ὅροι γεωμετρικῆς προόδου.

54. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$\frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} = \frac{|z_1|^2 - |z_2|^2}{|z_1 - z_2|} + i\,\frac{z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1z_2}{|z_1 - z_2|^2}, \quad z_1, z_2 \in C$$

55. Ἄν $|z - 10| = 3\,|z - 2|$, δεῖξτε ὅτι $|z - 1| = 3$, $z \in C$.

56. Ἄν $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, δεῖξτε τίς σχέσεις

i) $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$

ii) $|z_1 + z_2 - 2z_3| = |z_2 + z_3 - 2z_1| = |z_3 + z_1 - 2z_2|$

$z_1, z_2, z_3 \in C$

57. Νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες

i) $|1 - \bar{z}_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2$

ii) $(|z_1 - z_2| + |z_1 - z_3|)^2 = \frac{1}{2}(|2z_1 - z_2 - z_3|^2 + |z_2 - z_3|^2)$

$z_1, z_2, z_3 \in C.$

58. Δεῖξτε ὅτι

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + \\ + |z_3 + z_1|^2, \quad z_1, z_2, z_3 \in C$$

59. Ἄν $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ δεῖξτε ὅτι ὁ $\frac{z_1}{z_2}$ εἶναι καθαρός φανταστικός ($z_1, z_2 \in C$, $z_2 \neq 0$).

60. Ἄν $z_1 z_2 = -1$ δεῖξτε ὅτι

$$|z_1| + |z_2| = \left|\frac{z_1 + z_2}{2} + i\right| + \left|\frac{z_1 + z_2}{2} - i\right|, \quad z_1, z_2 \in C$$

61. Ἄν $|z_1 + z_2| = |z_1| - 2|z_2|$ δεῖξτε ὅτι

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{6}\,|z_2|, \quad z_1, z_2 \in C.$$

62. Ἄν $\frac{z_1}{z_3} > 0$ καί $\frac{z_2}{z_3} > 0$ δεῖξτε ὅτι

$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$, $z_1, z_2, z_3 \in C.$

63. Ἄν $\left| z - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{12}$ καί $j = \frac{2-9z}{3(4z-1)}$ δεῖξτε ὅτι

$$\left| j + \frac{3}{4} \right| = \frac{1}{4}, \quad z \in C.$$

64. Δεῖξτε ὅτι ὅταν $|z+2| = |z-2| \Leftrightarrow z \in C - R$, ἐνῶ ὅταν $|z + 2i| = |z - 2i|$ τότε $z \in R$.

65. Ἄν $z = \alpha + \beta i$ καί $|2z - 1| = |z - 2|$ δεῖξτε ὅτι $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

66. Νά δειχτοῦν οἱ σχέσεις:

i) $\frac{z_1}{z_2} = \alpha < 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = \big| |z_1| - |z_2| \big|, \; z_1, z_2 \in C$

ii) $\frac{z_1}{z_2} = \theta > 0 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = \big| |z_1| - |z_2| \big|$

iii) $\frac{z_1}{z_2} = \alpha < 0 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1| + |z_2|$

67. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τοῦ μιγαδικοῦ z γιά τόν ὁποῖο ἔχουμε τίς σχέσεις $|z| = 6$ καί $|z - 5| = 5$.

68. Δίνονται οἱ μιγαδικοί z_1, z_2, z_3, z_4. Ἄν ὁ ἀριθμός

$$z = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} + \frac{z_3 + z_4}{z_3 - z_4}$$ εἶναι φανταστικός, δεῖξτε ὅτι

$$\left| \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4} \right|^2 = \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{|z_3|^2 - |z_4|^2}, \quad (z_1 \neq z_2,\; z_3 \neq z_4,\; |z_3| \neq |z_4|).$$

Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι ἄν ἐπιπλέον ἰσχύει καί ἡ σχέση

$|z_1 z_3| = |z_2 z_4|$ τότε ὁ ἀριθμός $\dfrac{z_2 z_4 - z_1 z_3}{z_1 z_4 + z_2 z_3}$ εἶναι καθαρός φανταστικός.

69. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί z γιά τούς ὁποίους

$$|z - i|^2 + |2z + 3i|^2 = 6$$

70. Νά βρεθεῖ ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε νά ἀληθεύουν συγχρόνως οἱ σχέσεις $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ καί $|z_1 + \bar{z}_2| = |z_1 - \bar{z}_2|$ $z_1, z_2 \in C$.

71. Δεῖξτε ὅτι ὅταν ἰσχύει ἡ σχέση $\left|\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}\right| = 1$, ἰσχύει καί ἡ σχέση $(|z_1| - 1).(|z_2| - 1) = 0$ καί ἀντίστροφα, $z_1, z_2 \in C$.

72. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z πού ἐπαληθεύουν τίς ἐξισώσεις $\left|\dfrac{z - 12}{z - 8i}\right| = \dfrac{5}{3}$, $\left|\dfrac{z - 4}{z - 8}\right| = 1$

73. Ἄν $x > 0$ καί $z \in C$, δεῖξτε ὅτι

i) $|z + \frac{1}{2}|^2 + i\,|z + \frac{i}{2}|^2 - (1 + i)\,|z|^2 - \frac{1}{4}(1 + i) = z$

ii) $\left|\dfrac{z + x}{1 + \dfrac{\bar{z}}{x}}\right| = x$

74. Ἄν $|z_1|^2 + |z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$, δεῖξτε ὅτι $Re(z_1 \bar{z}_2) = 0$ $z_1, z_2 \in C$.

75. Ἂν $z_1 \mid z_2 \mid - z_2 \mid z_1 \mid = 0$ καί $z_1 \mid z_2 \mid + z_2 \mid z_1 \mid = 0$ δεῖξτε ὅτι

$$z_1 . z_2 = 0 \quad , \quad z_1, z_2 \in C.$$

76. Δεῖξτε ὅτι

$$2(\mid z_1 \mid + \mid z_2 \mid)^2 = \mid z_1 + z_2 \mid^2 + 2 \mid z_1 - z_2 \mid^2 + 8 \mid z_1 . z_2 \mid$$

$$z_1, z_2 \in C.$$

77. Δεῖξτε ὅτι

$$2(\mid z_1 - z_2 \mid^2 + \mid z_1 - z_3 \mid^2) = \mid 2z_1 - z_2 - z_3 \mid^2 + \mid z_2 - z_3 \mid^2$$

$z_1, z_2, z_3 \in C.$

78. Ἂν $Re(z) \geqslant 0$ δεῖξτε ὅτι $\mid 1 + z \mid \geqslant \dfrac{1 + \mid z \mid}{\sqrt{2}}, \quad z \in C.$

79. Ἂν $Re(z) > 1$ δεῖξτε ὅτι $\left| \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{2}, \quad z \in C.$

80. Ἂν $\mid z \mid < \dfrac{1}{2}$ δεῖξτε ὅτι $\mid (1 + i)z^3 + iz \mid < \dfrac{3}{4}, \quad z \in C.$

81. Ἂν $\mid z \mid < 1$ δεῖξτε ὅτι

$$1 - \mid z \mid \leqslant \left| \frac{1}{1 - z} \right| \leqslant \frac{1}{1 - \mid z \mid}, \quad z \in C.$$

82. Δεῖξτε ὅτι ἄν $\mid z - 1 \mid \leqslant 1$ καί $\mid z - 2 \mid = 1$ τότε

$$1 \leqslant \mid z \mid \leqslant \sqrt{3}, \quad z \in C$$

83. Δεῖξτε ὅτι $\left| \dfrac{z + \bar{z}}{2} \right| + \left| \dfrac{z - \bar{z}}{2} \right| \leqslant \sqrt{2} \mid z \mid \quad , z \in C.$

84. Ἄν $|z| < 1$ δεῖξτε ὅτι

$$|1 + z + z^2 + \ldots + z^\nu| \leqslant \frac{1}{1-|z|}, \text{ ἐνῶ ἄν } |z| > 1 \text{ θά εἶναι}$$

$$|1 + z + z^2 + \ldots + z^\nu| \leqslant \frac{|z|^{\nu+1}}{|z|-1}, \quad z \in C.$$

85. Ἄν $Re(z) > 0$ καί $Re(j) > 0$ δεῖξτε ὅτι

$$\left|\frac{j-z}{j+z}\right| < 1, \quad z, j \in C.$$

86. Ἄν $z^\nu \sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + z^{\nu-1}[\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\theta] + z^{\nu-2}\sigma\upsilon\nu[(\nu-2)\theta] + \ldots + z\sigma\upsilon\nu\theta = 1$, ὅπου $z \in C$, θ εἶναι τυχούσα γωνία καί $\nu \in N^*$,

δεῖξτε ὅτι $|z| > \frac{1}{2}$.

87. Δεῖξτε ὅτι

$$\left|\frac{z_1}{|z_1|} + \frac{z_2}{|z_2|}\right|(|z_1| + |z_2|) \leqslant 2|z_1 + z_2|, \quad z_1, z_2 \in C.$$

88. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες:

i) $|1 + z_1| + |z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3| \geqslant 1$

ii) $|1 + z_1| + |z_1 + 2z_2| + |2z_2 + 3z_3| + \ldots + |(\nu - i)z_{\nu-1} + \nu z_\nu| + \nu|z_\nu| \geqslant 1$

iii) $|(1 - z_1).(1 - z_2)\ldots(1 - z_\nu)| \geqslant 1 - |z_1| - |z_2| - \ldots - |z_\nu|$
$\forall z \in C \quad \nu \in N$.

89. Ἂν $z^2 + 2\alpha z = z_1^2$ καί $z^2 - 2\beta z = z_2^2$ ὅπου $z, z_1, z_2 \in C$
$\alpha \in R^+$, $\beta \in R^+$ δεῖξτε ὅτι

$$\left|\sqrt{z_1^2+\alpha^2}\right| - \alpha \leqslant |z| \leqslant \left|\sqrt{z_2^2+\beta^2}\right| + \beta$$

90. Ἂν $z = \alpha + \beta i$ δεῖξτε ὅτι

$$|\alpha| - |\beta| \leqslant |z| \leqslant |\alpha| + |\beta|$$

91. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z πού πληροῦν τήν ἀνισότητα

$$\left|\frac{z-1}{z+1}\right| < 1$$

92. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

i) $|z+3| + |z+2| - |z| - |z+1| \leqslant 4$

ii) $|z| + |z+3| - |z+1| - |z+2| \geqslant 0 \quad \forall z \in C.$

93. Ἂν $\dfrac{z-z_1}{z_2-z} = \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ ὅπου $z, z_1, z_2 \in C$, $z_2 \neq 0$, $z \neq z_2$,

δεῖξτε τίς ἀνισότητες

i) $|z| \leqslant \dfrac{2|z_1 . z_2|}{|z_1| + |z_2|}$

ii) $|z - z_1| \leqslant \dfrac{|z_1| . |z_2 - z_1|}{|z_1| + |z_2|}$

94. Δεῖξτε ὅτι ἄν $|z-1+2i| < 4$ τότε $|z-4-2i| > 1$, $z \in C$.

95. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀνισότητα $\left|\dfrac{z+|z|}{2}\right| + \left|\dfrac{z-|z|}{2}\right| > |z|$

εἶναι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε ὁ z νά εἶναι καθαρός φανταστικός.

96. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

i) $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leqslant 2\,|z_1 z_2|$

ii) $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2$

iii) $\big|\,|z_1| - |z_2|\,\big| \leqslant |z_1 + z_2|$, $z_1, z_2 \in C$.

97. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

i) $|z+1| + |z-2| \leqslant 2 + |z| + |z-1|$

ii) $1 + \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| > |1+z_1| - |1+z_2|$ ὅταν $|z_1| > |z_2|$

$z_1, z_2 \in C$.

98. Ἄν $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ θά εἶναι $\left|\dfrac{z_1+z_2}{1+\bar{z}_1 z_2}\right| < 1$ $z_1, z_2 \in C$.

99. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

i) $|z_1 + 2z_2| + |2z_1 + z_2| - 2\,|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

ii) $\dfrac{|z_1|^2}{\alpha^2} + \dfrac{|z_2|^2}{\beta^2} \geqslant |z_1 + z_2|^2$ ὅπου $\alpha, \beta \in R$, $z_1, z_2 \in C$.

100. Ἄν $|z| = 1$ νά δειχτεῖ ὅτι δέν εἶναι δυνατό νά ἰσχύουν συγχρόνως οἱ ἀνισότητες $|z+1| < 1$ καί $|z^2+1| < 1$.

101. Νά δειχτοῦν οἱ ἀνισότητες

i) $\mathrm{Re}(z) < \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \frac{z}{1-z} \right| < 1$ $\quad z \in C$

ii) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) < \frac{1}{2} \Rightarrow |z| > 1$

102. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z ὅταν ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$|3z + 2| < |2z - 3| \quad \text{καί} \quad |z - 1| = 3$$

103. Νά βρεθοῦν οἱ τετραγωνικές ρίζες τῶν μιγαδικῶν:

i) $z = 3 + 4i$, ii) $z = -1 + 2\sqrt{2}i$, iii) $z = i\sqrt{7+24i}$

104. Νά βρεθοῦν οἱ τετραγωνικές ρίζες τῶν μιγαδικῶν

i) $z = i$, ii) $z = -i$, iii) $z = \frac{1-i}{1+i}$

105. Δεῖξτε ὅτι οἱ τετραγωνικές ρίζες ἑνός φανταστικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πάντοτε μιγαδικοί ἀριθμοί.

106. Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων

i) $z = \frac{1}{\sqrt{3+4i}} + \frac{1}{\sqrt{3-4i}}$

ii) $z = \sqrt{4 + 3\sqrt{20}\,i} + \sqrt{4 - 3\sqrt{20}\,i}$

107. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό πρωτεῦον ὅρισμα τῶν μιγαδικῶν:

$z_1 = -1$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -4i$, $z_4 = -\sqrt{8} + \sqrt{8}\,i$

$$z_5 = 7\,\text{συν}\,\frac{\pi}{7} + 7i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{7}$$

108. Ἄν $Arg(3+2i)=\theta$, βρεῖτε τά παρακάτω ὀρίσματα συναρτήσει τοῦ θ. **i)** $Arg(-3-2i)$, **ii)** $Arg(2+3i)$, **iii)** $Arg(-3+2i)$, **iv)** $Arg(2-3i)$.

109. Νά γραφοῦν στήν τριγωνομετρική τους μορφή οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = -3+3i \ , \quad z_2 = 2+2\sqrt{3}i$$

$$z_3 = \frac{2-i}{-1+3i} \ , \quad z_3 = -\frac{1}{2}+i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

110. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὄρισμα τῶν μιγαδικῶν

$$z_1 = \frac{2-i}{-1+3i} \ , \quad z_2 = \frac{-3+i}{2+i} \ , \quad z_3 = z_1+z_2$$

$$z_4 = (1+i).(1+\sqrt{3}\,i).(\sqrt{3}-i)$$

111. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὄρισμα καί νά γραφοῦν στήν τριγωνομετρική τους μορφή οἱ παρακάτω μιγαδικοί:

$$z_1 = \frac{5+11\sqrt{3}i}{7-4\sqrt{3}i} \ , \quad z_2 = \sqrt{2}-(\sqrt{2}+2)i \ ,$$

$$z_3 = \frac{1+i\,\varepsilon\varphi\theta}{1-i\,\varepsilon\varphi\theta}$$

112. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὄρισμα τῶν μιγαδικῶν

$$z_1 = (1+\sigma\upsilon\nu 2\theta+i\eta\mu 2\theta)^2 \ , \quad z_2 = \frac{1-\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta} \ , \quad 0<\theta<\pi$$

113. Ἄν

$$z_1 = 3(\text{συν}\,\frac{\pi}{4} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{4}) \quad \text{καί} \quad z_2 = 2^{-1}(\text{συν}\,\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{6})$$

νά βρεθοῦν οἱ πολικές συντεταγμένες τῶν μιγαδικῶν $z_1 . z_2$ καί $\frac{z_1}{z_2}$.

114. Νά γραφοῦν στήν τριγωνομετρική τους μορφή οἱ παρακάτω μιγαδικοί

$$z_1 = -2(\text{συν}\,\frac{\pi}{12} + i\,\text{ημ}\,\frac{\pi}{12}),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{3}(\text{συν}\,\frac{2\pi}{7} - i\,\text{ημ}\,\frac{2\pi}{7}),$$

$$z_3 = \frac{(1-i).(1+\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)}{(1+i).(1-\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)}, \quad z_4 = \frac{1+\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta}{\text{ημ}\theta - i(1-\text{συν}\theta)}$$

$$z_5 = (1+i)^{\frac{1}{2}}, \quad z_6 = (-\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2})^{\frac{1}{2}}$$

115. Ἄν $z = \rho(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)$ δεῖξτε ὅτι

$$z^{\frac{\mu}{\nu}} = \rho^{\frac{\mu}{\nu}}\left(\text{συν}\,\frac{\mu\theta + 2k\pi}{\nu} + i\,\text{ημ}\,\frac{\mu\theta + 2k\pi}{\nu}\right)$$

ὅπου $\mu, \nu \in Z$, $\nu \neq 0$, $(\mu, \nu) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι

$$(i^{\frac{1}{2}})^3 \neq (i^3)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{ἐνῶ} \quad (i^{\frac{1}{3}})^2 = (i^2)^{\frac{1}{3}}$$

καί βρεῖτε τίς συνθῆκες ὥστε νά ἰσχύει $(z^{\frac{1}{\nu}})^{\mu} = (z^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}$.

116. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων:

$$(3 + 3\sqrt{3}i)^6 , \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10} , \quad \frac{(1+i\sqrt{3})^5}{(1+i)^7},$$

$$(1 + i)^7.(\sqrt{3} - i)^{-4} \quad (3 + 3\sqrt{3})^{-2}.(4\sqrt{3} + 4i)^7$$

117. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων

$$\left(\frac{16+4i}{1-4i}\right)^{\frac{3}{4}} , \quad \left[8\left(\text{συν}\frac{3\pi}{8} + i\,\text{ημ}\frac{3\pi}{8}\right)\right]^{-\frac{2}{3}},$$

$$\left[81\left(\text{συν}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\,\text{ημ}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{-\frac{7}{4}}$$

118. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ παραστάσεις

$$\Pi_1 = (2 + i\sqrt{12})^{12} + (2 - i\sqrt{12})^{12} , \quad \Pi_2 = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$$

$$\Pi_3 = \left(\text{συν}\frac{\pi}{5} - i\,\text{ημ}\frac{\pi}{5}\right)^5 +$$

$$+ 2\left(\text{συν}\frac{\pi}{3} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{3}\right).\left(\text{συν}\frac{\pi}{6} + i\,\text{ημ}\frac{\pi}{6}\right),$$

$$\Pi_4 = (1 + i)^8 + (1 - i)^8$$

119. Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{\text{συν}\,156^0 + i\,\text{ημ}\,156^0}{\text{συν}\,126^0 + i\,\text{ημ}\,126^0} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

120. Ὁ μιγαδικός $z = \dfrac{(1+i\sqrt{3})^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{11}}$ νά γραφεῖ στή μορφή $\alpha + \beta i$.

121. Ἄν $\theta = \dfrac{k\pi}{3} - \dfrac{7\pi}{6}$ δεῖξτε ὅτι

$$\left[\frac{1-i\sqrt{3}}{2}(\eta\mu\theta - i\sigma\upsilon\nu\theta)\right]^6 = 1$$

122. Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{(\sigma\upsilon\nu 3\theta + i\,\eta\mu 3\theta)^5 . (\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^3}{(\sigma\upsilon\nu 5\theta + i\,\eta\mu 5\theta)^7 . (\sigma\upsilon\nu 2\theta - i\,\eta\mu 2\theta)^5} = \sigma\upsilon\nu 13\theta - i\,\eta\mu 13\theta$$

123. Ἄν $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\,\eta\mu\theta_1$, $z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\,\eta\mu\theta_2$ δεῖξτε ὅτι

$$z_1 . z_2 + \frac{1}{z_1 . z_2} = 2\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2)$$

124. Νά ὑπολογιστεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{(\eta\mu\theta - i\,\sigma\upsilon\nu\theta)^4}{(\sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^3}$$

125. Νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες

$$(1 + i\sqrt{3})^{33} = -2^{33} , \quad (1 + i\sqrt{3})^4 = -8(1 + i\sqrt{3}) ,$$

$$\left(\frac{5+5i}{10\sqrt{3}+10i}\right)^6 = -2^9 i , \quad \left(\frac{6\sqrt{3}+6i}{6+6i}\right)^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} i ,$$

$$(1 + i\sqrt{3})^8 + (1 - i\sqrt{3})^8 = -2^8 ,$$

$$\left[\frac{4(\sigma\upsilon\nu 30^0 + i\,\eta\mu 30^0) + 4(\sigma\upsilon\nu 60^0 + i\,\eta\mu 60^0)}{2(\sigma\upsilon\nu 15^0 + i\,\eta\mu 15^0)}\right] =$$

$$= (7 + 4\sqrt{3}).(-1 + i\sqrt{3})$$

126. Ἄν $z = \sigma\upsilon\nu \dfrac{2\pi}{9} + i\,\eta\mu \dfrac{2\pi}{9}$ δεῖξτε ὅτι

$$\begin{vmatrix} 1 & z^2 & z^7 \\ z^4 & z^6 & z^8 \\ z^5 & z & z^3 \end{vmatrix} = -3$$

127. Νά δειχτεῖ ὅτι

$$(1 + \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^\nu = 2^\nu \sigma\upsilon\nu^\nu \frac{\theta}{2}\left(\sigma\upsilon\nu \frac{\nu\theta}{2} - i\,\eta\mu \frac{\nu\theta}{2}\right)$$

καί νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα

$$\Sigma = (1 + \sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)^\nu + (1 + \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta)^\nu$$

128. Ἄν $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ δεῖξτε ὅτι

$$\operatorname{Arg}\frac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1} = \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\frac{z_2}{z_1}$$

129. Ἄν $|z_1| = |z_2|$ δεῖξτε ὅτι

$$\operatorname{Arg}(z_1 + z_2) - \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

130. Ἄν $\alpha = \dfrac{2\pi}{13}$ δεῖξτε ὅτι

$$(\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 6\alpha).(\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha).(\sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 6\alpha) = -\frac{1}{8}.$$

131. Δεῖξτε ὅτι:

i) $(1 + i\,\varepsilon\varphi\theta)^\nu + (1 - i\,\varepsilon\varphi\theta)^\nu = 2\tau\varepsilon\mu^\nu\theta\ \sigma\upsilon\nu\nu\theta$

ii) $Re\left(1 + i\,\varepsilon\varphi \frac{\pi}{8}\right)^8 = -64(17 - 12\sqrt{2})$.

132. Ἄν $z = \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi}{3} + i\,\eta\mu \frac{2\pi}{3}$, δεῖξτε ὅτι

i) $\frac{1}{z^{3\nu}} + \frac{1}{\bar{z}^{3\nu}} + \frac{1}{z^\nu \bar{z}^\nu} = 3$

ii) $(1 + z).(1 + 2z).(1 + 3z).(1 + 5z) = 2i$

133. Ἄν $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\,\eta\mu\theta)$, νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση

$$\Pi = (z - \bar{z}).(z^2 - \bar{z}^2)\ldots(z^\nu - \bar{z}^\nu)$$

134. Ἄν $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\,\eta\mu\theta_1$ καί $z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\,\eta\mu\theta_2$, νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$j = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}, \quad z_1.z_2 \neq -1, \quad 0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

135. Ἄν $|z| = 1$ καί $\frac{2z-1}{z-2i} + i\,\frac{2j-1}{j-2i} = 0$, $j \in C$,

δεῖξτε ὅτι $|j| = 1$.

136. Ἄν $|z_1| + |z_2| + \ldots + |z_\nu| = |z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu|$ ὅπου $z_1.z_2\ldots z_\nu \neq 0$, δεῖξτε ὅτι οἱ μιγαδικοί z_i, $i = 1, 2, \ldots, \nu$ ἔχουν τό ἴδιο πρωτεῦον ὅρισμα.

137. Δεῖξτε ὅτι

$$\left(\frac{1 + \eta\mu\theta + i\,\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta - i\,\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^\nu = \sigma\upsilon\nu\nu\left[\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] + i\,\eta\mu\left[\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$

138. Ἄν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$, $0 < \theta < \pi$. νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ $j = \dfrac{2}{1-z^2}$.

139. Νά βρεθοῦν οἱ διαφορετικές τιμές τῆς παράστασης

$$\Pi = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{\nu} + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{\nu}$$

140. Νά ἐκφραστοῦν τά $\eta\mu 5\theta$ καί $\sigma\upsilon\nu 5\theta$ συναρτήσει τῶν $\eta\mu\theta$ καί $\sigma\upsilon\nu\theta$. Ἐν συνεχεία νά ὑπολογιστοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων $\dfrac{\pi}{5}$ καί $\dfrac{2\pi}{5}$.

141. Δεῖξτε ὅτι $\eta\mu^7\theta = \dfrac{1}{64}(-\eta\mu 7\theta + 7\eta\mu 5\theta - 21\eta\mu 3\theta + 35\eta\mu\theta)$

καί $\sigma\upsilon\nu^7\theta = \dfrac{1}{64}(\sigma\upsilon\nu 7\theta + 7\sigma\upsilon\nu 5\theta + 21\sigma\upsilon\nu 3\theta + 35\sigma\upsilon\nu\theta)$.

142. Νά ὑπολογιστοῦν τά $\eta\mu 3\theta$, $\sigma\upsilon\nu 3\theta$ καί $\eta\mu 6\theta$, $\sigma\upsilon\nu 6\theta$ συναρτήσει τῶν $\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$. Ἐπίσης νά ὑπολογιστοῦν τά $\eta\mu^3\theta$, $\sigma\upsilon\nu^3\theta$ καί $\eta\mu^6\theta$, $\sigma\upsilon\nu^6\theta$ συναρτήσει τῶν $\eta\mu(k\theta)$, $\sigma\upsilon\nu(k\theta)$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

143. Νά ὑπολογιστεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = 1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta + i\eta\mu 2\theta \quad \text{ἄν} \quad 0 < \theta < \pi.$$

144. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ παραστάσεις

$$A = \sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu^3\theta \quad \text{καί} \quad B = \sigma\upsilon\nu^3\eta\mu^2\theta$$

συναρτήσει τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν πολλαπλασίων τοῦ τόξου θ $\big(\sigma\upsilon\nu(k\theta)$, $\eta\mu(k\theta)\big)$, ὅπου $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$).

145. Ἄν $z = \sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ καί $\alpha \in R$, δεῖξτε ὅτι:

$$|1 - \alpha z| \cdot |1 - \alpha z^2| \cdot |1 - \alpha z^3| \ldots |1 - \alpha z^\nu| =$$
$$= |\alpha - z| \cdot |\alpha - z^2| \cdot |\alpha - z^3| \ldots |\alpha - z^\nu|$$

146. Ἄν $z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμός z^{12k+6} εἶναι καθαρός φανταστικός, $k \in Z$.

147. Ἄν $z_1 = \sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1$, $z_2 = \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2$, δεῖξτε ὅτι ἰσχύει ἡ σχέση $z_1^{2\mu} + z_2^{2\nu} = 2z_1^\mu z_2^\nu\,\sigma\upsilon\nu(\mu\theta_1 - \nu\theta_2)$, $\mu, \nu \in N$.

148. Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{(1+i)^\nu - (1-i)^\nu}{i} = 2^{\frac{\nu+2}{2}}\,\eta\mu\frac{\nu\pi}{4}, \quad \nu \in Z.$$

149. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{1}{1+i\varepsilon\varphi\theta} \quad \text{ὅπου } \theta \in [0, 2\pi].$$

150. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \sigma\upsilon\nu 3\theta + i\eta\mu 3\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - i\eta\mu\theta \quad \text{ὅπου } 0 < \theta < \frac{\pi}{4}.$$

151. Ἄν $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ δεῖξτε ὅτι

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{3\pi}{2}$$

152. Δίνονται οἱ μιγαδικοί $z_1 = (\sigma\upsilon\nu\theta + \eta\mu\theta) + i(\sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu\theta)$ καί $z_2 = \sigma\upsilon\nu(2\nu\theta) - i\,\eta\mu(2\nu\theta)$. Δεῖξτε ὅτι $z_1^{2\nu} = (2i)^{\nu} z_2$ ὅπου $\nu \in Z$.

153. Νά γραφεῖ στή μορφή $\alpha + \beta i$ ὁ μιγαδικός $z = \dfrac{(1+\sqrt{3}i)^{13}}{(\sqrt{3}-i)^{11}}$.

154. Ἄν $\sigma\upsilon\nu\theta_1 + \sigma\upsilon\nu\theta_2 + \sigma\upsilon\nu\theta_3 = \eta\mu\theta_1 + \eta\mu\theta_2 + \eta\mu\theta_3 = 0$ δεῖξτε τίς σχέσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu 3\theta_1 + \sigma\upsilon\nu 3\theta_2 + \sigma\upsilon\nu 3\theta_3 = 3\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

ii) $\eta\mu 3\theta_1 + \eta\mu 3\theta_2 + \eta\mu 3\theta_3 = 3\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

iii) $\sigma\upsilon\nu 2\theta_1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta_2 + \sigma\upsilon\nu 2\theta_3 = \eta\mu 2\theta_1 + \eta\mu 2\theta_2 + \eta\mu 2\theta_3 = 0$

iv) $\sigma\upsilon\nu^2\theta_1 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta_3 = \eta\mu^2\theta_1 + \eta\mu^2\theta_2 + \eta\mu^2\theta_3 = \dfrac{3}{2}$

v) $\eta\mu^2(\theta_1 - \theta_2) + \eta\mu^2(\theta_2 - \theta_3) + \eta\mu^2(\theta_3 - \theta_1) = \dfrac{9}{4}$

155. Ἄν $\sigma\upsilon\nu\theta_1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta_2 + 3\sigma\upsilon\nu\theta_3 = \eta\mu\theta_1 + 2\eta\mu\theta_2 + 3\eta\mu\theta_3 = 0$ δεῖξτε ὅτι:

i) $\sigma\upsilon\nu 3\theta_1 + 8\sigma\upsilon\nu 3\theta_2 + 27\sigma\upsilon\nu 3\theta_3 = 18\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

ii) $\eta\mu 3\theta_1 + 8\eta\mu 3\theta_2 + 27\eta\mu 3\theta_3 = 18\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)$

156. Ἄν

$\sigma\upsilon\nu\theta_1 + \sigma\upsilon\nu\theta_2 + \ldots + \sigma\upsilon\nu\theta_\nu = \eta\mu\theta_1 + \eta\mu\theta_2 + \ldots + \eta\mu\theta_\nu = 0$

δεῖξτε ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu(\omega - \theta_1) + \sigma\upsilon\nu(\omega - \theta_2) + \ldots + \sigma\upsilon\nu(\omega - \theta_\nu) =$$
$$= \eta\mu(\omega - \theta_1) + \eta\mu(\omega - \theta_2) + \ldots + \eta\mu(\omega - \theta_\nu),$$

ὅπου $\omega = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu$.

157. Ἂν οἱ μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ἔχουν μέτρο τή μονάδα, δεῖξτε ὅτι τό κλάσμα

$$K = \frac{(z_1+z_2).(z_2+z_3)\ldots(z_{\nu-1}+z_\nu).(z_\nu+z_1)}{z_1.z_2\ldots z_\nu}, \quad \in R$$

158. Δεῖξτε ὅτι

$$(\alpha+\beta i)^\nu = [(\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} - \beta\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}) + i(\alpha\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + \beta\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu})]^\nu$$

ὅπου $\alpha, \beta \in R$ καί $\nu \in N^*$.

159. Δεῖξτε ὅτι $(1+i)^\nu + (1-i)^\nu = 2^{\frac{\nu+2}{2}} \sigma\upsilon\nu\frac{\nu\pi}{4}$, $\quad \nu \in N$.

160. Δεῖξτε ὅτι τό πολυώνυμο

$$\Pi(z) = (\sigma\upsilon\nu\theta + z\eta\mu\theta)^\nu - (\sigma\upsilon\nu\nu\theta + z\eta\mu\nu\theta)$$

διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό πολυώνυμο $\Pi_1(z) = z^2+1$.

161. Ἂν $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ καί $j = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ ὅπου $\rho > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, νά ὑπολογιστοῦν οἱ ἀριθμοί

$$|z+i\bar{z}|, \quad |j+i\bar{j}|, \quad Arg(z+i\bar{z}), \quad Arg(j+i\bar{j})$$

162. Νά προσδιοριστεῖ ἡ ἐλάχιστη τιμή τοῦ $\nu \in N$, ὥστε γιά τό μιγαδικό $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$ νά ἔχουμε: **i)** $z^\nu \in R$, **ii)** $z^\nu \in C - R$.

163. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ παράσταση $\left(\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta-i\eta\mu\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\pi<\theta<2\pi$

164. Νά βρεθεῖ ὁ μιγαδικός z ὅταν

$$\operatorname{Arg}(z+1) = \frac{\pi}{6} \quad \text{καί} \quad \operatorname{Arg}(z-1) = \frac{2\pi}{3}$$

165. Ἄν $z_1 = \text{συν}\theta_1 + i\,\text{ημ}\theta_1$ καί $z_2 = \text{συν}\theta_2 + i\,\text{ημ}\theta_2$, ὅπου $0 < \theta_1, \theta_2 < \frac{\pi}{2}$, νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$j = \frac{1+z_1^2}{1-i z_1 z_2}$$

166. Δεῖξτε ὅτι

$$\left(\frac{1+\text{ημ}\,\frac{2\pi}{9}+i\,\text{συν}\,\frac{2\pi}{9}}{1+\text{ημ}\,\frac{2\pi}{9}-i\,\text{συν}\,\frac{2\pi}{9}}\right)^{18} = -1$$

167. Νά ὑπολογιστεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{[\sqrt{3}(\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)]^5}{(\text{συν}\,2\theta - i\,\text{ημ}\,2\theta)^3}$$

168. Δεῖξτε ὅτι **i)** κάθε μιγαδικός z μέ $|z| = 1$ μπορεῖ νά γραφεῖ πάντοτε σάν πηλίκο δύο συζυγῶν μιγαδικῶν. **ii)** Ὑπάρχει πάντοτε $\alpha \in R$, ὥστε ὁ μιγαδικός z μέ $|z| = 1$ νά γράφεται μέ τή μορφή $\frac{1+\alpha i}{1-\alpha i}$. **iii)** Ὁ τυχόν μιγαδικός z μπορεῖ νά γραφεῖ μέ τή μορφή $|z|\left[\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + i\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right]$, ὅπου $\lambda \in R$.

169. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = 1 + i\sigma\varphi\theta \quad , \qquad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

170. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta - i\,\eta\mu\theta}$$

ὅταν **i)** $0 < \theta < \pi$, **ii)** $\pi < \theta < 2\pi$, **iii)** $\theta = 0$ ἤ $\theta = \pi$.

171. Ἄν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

$$(x + \omega y + \omega^2 \rho)^3 + (x + \omega^2 y + \omega\rho)^3 = (2x - y - \rho).(2y - x - \rho).(2\rho - x - y)$$

172. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ μιγαδικοί z ἀπό τίς σχέσεις

i) $z^5 = \left(16\sqrt{2} + i\,\dfrac{32}{\sqrt{2}}\right)^3$, **ii)** $z^3 = (-i)^{-\frac{1}{2}}$,

iii) $z^4 = \left(\dfrac{3 + \sqrt{15}\,i}{\sqrt{15} - 3i}\right)^3$

173. Νά γραφεῖ στή μορφή $\alpha + \beta i$ ἡ παράσταση

$$K = \frac{(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\,\eta\mu\theta_1).[1 - (\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\,\eta\mu\theta_2)]}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\,\eta\mu\theta_2}$$

174. Νά βρεθοῦν τά x, y ἀπό τή σχέση

$$x + iy = [3i(\sqrt{3} + i)]^{\frac{3}{5}}$$

175. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ μιγαδικοί z ἀπό τίς σχέσεις:

i) $z^4 = \dfrac{(1-i)^7.(1+\sqrt{3}i)^3}{(\sqrt{3}-i)^5}$

ii) $z^6 = \dfrac{(-i).(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^3.(\sqrt{3}+\sqrt{3}i)^4}{3(\sqrt{5}-\sqrt{5}i)^2}$

176. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ παραστάσεις

i) $z = i^{\frac{7}{4}}$, ii) $z = (-i)^{-\frac{3}{4}}$,

iii) $z = (1+i)^{-\frac{2}{5}} + (1-i)^{-\frac{2}{5}}$

177. Ἄν ω_1, ω_2 εἶναι κυβικές μιγαδικές ρίζες τῆς μονάδας, δεῖξτε τίς σχέσεις:

i) $\omega_1^4 + \omega_2^4 - \dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2} = 0$,

ii) $\omega_1^{2^{\nu-1}} + \omega_2^{2^{\nu-1}} = -1$, $\forall\, \nu \in N$.

178. Ἄν $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1}$ εἶναι οἱ νιοστές ρίζες τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

$(\alpha+\beta\omega_0).(\alpha+\beta\omega_1).(\alpha+\beta\omega_2)\ldots(\alpha+\beta\omega_{\nu-1}) = \alpha^\nu + (-1)^{\nu+1}.\beta^\nu$, $\alpha, \beta \in C$.

179. Ἄν ω εἶναι μία νιοστή ρίζα τῆς μονάδας, νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα

$$\Sigma = 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \ldots + \nu\omega^{\nu-1}$$

180."Αν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῆς παράστασης $\Pi_1 = \omega^{2\nu} + \omega^{\nu} + 1$ καί νά δειχτεῖ ὅτι $(1 - \omega).(1 - \omega^2).(1 - \omega^4).(1 - \omega^5) = 9$

181. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^7 - 1 = 0$ (1). "Αν ω_k εἶναι οἱ ρίζες τῆς (1) ὅπου $k = 0, 1, 2, \ldots, 6$ νά δείξετε ὅτι

$$\frac{\omega_k}{1+\omega_k^2} + \frac{\omega_k^2}{1+\omega_k^4} + \frac{\omega_k^3}{1+\omega_k^6} = -2$$

182."Αν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, δεῖξτε τίς σχέσεις

i) $(1 + \omega^2)^{12} = 1$

ii) $(1 + \omega).(1 + \omega^2).(1 + \omega^4).(1 + \omega^5).(1 + \omega^7).(1 + \omega^8) = 27$

183."Αν $1, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{\nu-1}$ εἶναι νιοστές ρίζες τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

$$1 + \omega_1^k + \omega_2^k + \ldots + \omega_{\nu-1}^k = \begin{cases} \nu & \text{ἄν } \nu \text{ διαιρεῖ τόν } k \\ 0 & \text{ἄν } \nu \text{ δέν διαιρεῖ τόν } k \end{cases}$$

184."Αν ω εἶναι κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

i) $(1 - \omega + \omega^2).(1 + \omega - \omega^2) = 4$

ii) $(x + y)^2 + (\omega x + \omega^2 y)^2 + (\omega y + \omega^2 x)^2 = 6xy$

185."Αν ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, νά ὑπολογιστοῦν οἱ τιμές τῶν παραστάσεων: $A = (1 + \omega^2)^{\nu}$, $B = (1 + \omega)^{\nu}$.

186. Νά βρεθοῦν οἱ κυβικές ρίζες τοῦ i. Ἄν ω_1, ω_2 εἶναι κυβικές ρίζες τοῦ i πού δέν εἶναι φανταστικές, δεῖξτε ὅτι

i) $\omega_1^2 + \omega_2^2 = 1$

ii) $\omega_1^{6k} + \omega_2^{6k} = 2.(-1)^k$ ὅπου $k \in Z$

187. Δεῖξτε ὅτι

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\omega - x} + \frac{\omega^2}{\omega^2 - x} = \frac{3}{1-x^3}$$

ὅπου ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας καί $x^3 \neq 1$.

188. Δεῖξτε ὅτι

$$\sum_{k=1}^{\nu} (-1)^k.(\omega_1 - \omega_2)^{2k} = \frac{3}{2}(3^{\nu} - 1)$$

ὅπου ω_1, ω_2 κυβικές μιγαδικές ρίζες τῆς μονάδας.

189. Ἄν ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, δεῖξτε τίς σχέσεις

i) $\omega^4 + \omega^8 + \dfrac{1}{\omega^3} = 0$, ii) $(2 + 5\omega + 2\omega^2)^6 = 729$

iii) $$\frac{\alpha}{|\omega|^2} + \frac{\beta}{\bar{\omega}} + \frac{\gamma}{\omega} = \frac{\alpha + k}{|\omega|^2} + \frac{\beta + k}{\bar{\omega}} + \frac{\gamma + k}{\omega}$$

ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, k \in R$.

190. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^5 - 1 = 0$ (1). Ἄν ω εἶναι μιά μιγαδική ρίζα τῆς (1), δεῖξτε ὅτι οἱ ἀριθμοί $z_1 = \omega + \omega^4$, $z_2 = \omega^2 + \omega^3$ εἶναι ρίζες τῆς $x^2 + x - 1 = 0$.

191. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^\nu = 1$. Στή συνέχεια δεῖξτε τίς ἰσότητες

$$\text{i) } \sigma\upsilon\nu\,\frac{2\pi}{\nu} + \sigma\upsilon\nu\,\frac{4\pi}{\nu} + \ldots + \sigma\upsilon\nu\,\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 0$$

$$\text{ii) } \eta\mu\,\frac{2\pi}{\nu} + \eta\mu\,\frac{4\pi}{\nu} + \ldots + \eta\mu\,\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} = 0\,,\ \nu = 2, 3, 4 \ldots$$

192. Ἄν οἱ μιγαδικοί $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ἱκανοποιοῦν τή σχέση $j_\nu = (1 + i)j^\nu$, ὅπου j κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας, ὅπου $\nu \in N$, δεῖξτε ὅτι **i)** $j_1 + j_2 + j_3 = 0$ **ii)** $j_{\nu+3} = j_\nu \ \forall\ \nu \in N$. **iii)** Οἱ ἀριθμοί j_k, j_{k+1}, j_{k+2} εἶναι ρίζες τῆς ἐξίσωσης $z^3 = 2(-1 + i)$.

193. Ἄν ω εἶναι μία κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας καί ὀνομάσουμε $x = \alpha + \beta$, $y = \alpha\omega + \beta\omega^2$, $\tau = \alpha\omega^2 + \beta\omega$, δεῖξτε τίς ἰσότητες **i)** $xy\tau = \alpha^3 + \beta^3$, **ii)** $x^2 + y^2 + \tau^2 = 6\alpha\beta$, **iii)** $x^3 + y^3 + \tau^3 = 3(\alpha^3 + \beta^3)$.

194. Ἄν ω εἶναι μία κυβική μιγαδική ρίζα τῆς ἐξίσωσης $z^7 - 1 = 0$ καί θέσουμε $\alpha = \omega + \omega^2 + \omega^4$, $\beta = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$, δεῖξτε τίς ἰσότητες

i) $\alpha + \beta = -1$, **ii)** $\alpha . \beta = 2$

iii) $1 + \omega + \omega^4 + \omega^9 + \omega^{25} + \omega^{36} = 1 + 2\alpha = i\sqrt{7}$

195. Ἄν ω εἶναι μία μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας 5ης τάξης, δεῖξτε τή σχέση $\omega^{5k+1} + \omega^{5k+2} + \omega^{5k+3} + \omega^{5k+4} = -1$.

196. Δεῖξτε τίς ἰσότητες

$$\text{i) } x^{2\nu} - 1 = (x^2 - 1)\prod_{k=1}^{\nu-1}\left(x^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{k\pi}{\nu} + 1\right)$$

ii) $x^{2\nu+1} - 1 = (x-1)\prod_{k=1}^{\nu}(x^2 - 2x\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{2k\pi}{2\nu+1} + 1)$

iii) $(1+z)^{2\nu+1} - (1-z)^{2\nu+1} = 2z\prod_{k=1}^{\nu}\left(z^2 + \varepsilon\varphi^2\left(\dfrac{k\pi}{2\nu+1}\right)\right)$

iv) $(1+z)^{2\nu} - (z-1)^{2\nu} = 4\nu z\prod_{k=1}^{\nu-1}\left(z^2 + \sigma\varphi^2\left(\dfrac{k\pi}{2\nu}\right)\right)$

v) $\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + \eta\mu(\nu\theta) = 2^{\frac{2\nu-1}{2}}\prod_{k=1}^{\nu-1}\eta\mu\left(\theta + \left(\dfrac{4k+1}{4\nu}\right)\pi\right)$

197. Ἂν ω_1, ω_2 κυβικές μιγαδικές ρίζες τῆς μονάδας, δεῖξτε ὅτι

$$\omega_1^{1462} + \omega_2^{1462} + \omega_1^{1463} + \omega_2^{1463} = -1$$

198. Δεῖξτε ὅτι οἱ συζυγεῖς τῶν νιοστῶν ριζῶν ἑνός μιγαδικοῦ z εἶναι ρίζες τοῦ $\bar{z}$. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι

$$1 + \bar{\omega} + \bar{\omega}^2 + \bar{\omega}^3 + \ldots + \bar{\omega}^{\nu-1} = 0$$

ὅπου ω κυβική μιγαδική ρίζα τῆς μονάδας.

199. Νά δειχτοῦν οἱ ἰσότητες

i) $x^{2\nu} - 2\alpha^{\nu}x^{\nu}\sigma\upsilon\nu\theta + \alpha^{2\nu} = \prod_{k=1}^{\nu-1}(x^2 - 2\alpha\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{\theta+2k\pi}{\nu} + \alpha^2)$

ii) $\dfrac{x^{2\nu}-\alpha^{2\nu}}{x^2-\alpha^2} = \prod_{k=1}^{\nu-1}(x^2 - 2\alpha x\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{k\pi}{\nu} + \alpha^2)$

200. Ἂν $\omega = \sigma\upsilon\nu\,\dfrac{2\pi}{9} + i\,\eta\mu\,\dfrac{2\pi}{9}$ ὑπολογίστε τήν παράσταση

$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}+2\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}+2\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}+2\right)^2+\left(\omega^4+\frac{1}{\omega^4}+2\right)^2$$

καί δεῖξτε ὅτι $\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{\pi}{9}+\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{2\pi}{9}+\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{3\pi}{9}+\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{4\pi}{9}=\dfrac{19}{16}$

201. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^5 + 64i = 0$, **ii)** $3x^6 + 24x^3 = 0$

iii) $(1+i)z^5 = \dfrac{i(1-i)}{\sqrt{3}+i}$

202. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $2z - 3\bar{z} = (1 - i\sqrt{3})\,|z|$, **ii)** $z^2 + \bar{z} = 0$, **iii)** $\bar{z} + 2z = 1$

203. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

i) $z^2 - 2(2+i)z + 6 = 0$

ii) $(1-i)z^2 - (1+i)z + i = 0$

iii) $iz^2 - iz + 4 = 0$

204. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_1}{z_3}+\frac{z}{z_1 z_2 z_3} = (iz_1 + z_2 - 2z_3)^2$$

ὅπου $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 4 + i$.

205. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $2\,|z| - 4\alpha z + 1 + i\alpha = 0 \quad \alpha \geqslant 0$, **ii)** $z + \alpha\,|z+1| + i = 0 \quad \alpha \geqslant 1$

206. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$, **ii)** $z^5 = 1 + i\sqrt{3}$, **iii)** $z^4 = (\sqrt{3} + i)^3$

207. Νά ὑπολογιστοῦν τά α, β ὥστε ὁ μιγαδικός $z = 2 + 2i$ νά εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης

$$ix^4 + 2x^3 + \alpha x^2 + (1 + i)x + \beta = 0$$

208. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$3^{2(x+1)} + 9\left(-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^{3x} - 810.3^x = 0$$

209. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

210. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^\nu = \bar{z}$, $\nu \in N$, $\nu > 1$

ii) $\alpha\ |z|^2 + \beta\ |z| + \gamma = 0$ $\quad \alpha, \beta, \gamma \in R$ $\quad \alpha \neq 0$.

211. Νά βρεθοῦν οἱ ἀκέραιες λύσεις τῆς ἐξίσωσης $(1 - i)^x = 2^x$.

212. Νά ὑπολογιστοῦν οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$z^2 - (\alpha + i\beta)z + \gamma = 0 , \quad \alpha, \beta, \gamma \in R , \quad \gamma > 0$$

καί $z_1 = iz_2$ ὅπου z_1, z_2 οἱ ρίζες.

213. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $z^2 - 2(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\varphi)z + 1 = 0$.

i) Νά βρεθεῖ ἡ σχέση πού ἐπαληθεύουν τά μέτρα καί τά ορίσματα τῶν ριζῶν της.

ii) **Γιά ποιές τιμές τοῦ** φ οἱ ρίζες z_1, z_2 εἶναι πραγματικές καί γιά ποιές φανταστικές.

iii) Νά ὑπολογιστοῦν τά μέτρα καί τά ὁρίσματα τῶν παραστάσεων

$z_1 - \rho$, $z_2 - \rho$, $z_1 \pm i$, $z_2 \pm i$, ὅπου $\rho = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\,\eta\mu\varphi$

214. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις

i) $z^3 = \dfrac{1}{\bar{z}}$, **ii)** $(z+1)^3 = 27(z-1)^3$, **iii)** $(1-z)^4 = -iz^4$.

215. Ἄν ἡ ἐξίσωση $(\alpha + \beta i)z = \gamma + \delta i$ ἔχει πραγματική ρίζα, δεῖξτε ὅτι $\alpha(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = (\alpha + \beta).(\alpha + \gamma)$.

216. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(1 + z)^\nu = z^\nu$ καί νά δειχτεῖ ὅτι τό πραγματικό μέρος κάθε ρίζας εἶναι τό $-\dfrac{1}{2}$.

217. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$\left(1 + \sqrt{1 - z^2}\right)^\nu = \left(1 - \sqrt{1 - z^2}\right)^\nu$$

218. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(z - \alpha)^\nu + z^\nu = 0$, $\alpha \neq 0$, $\nu \in N$.

219. Δεῖξτε ὅτι οἱ πραγματικές λύσεις τῆς ἐξίσωσης

$$\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right)^\nu = \left(x - i\sqrt{1 - x^2}\right)^\nu$$

πού ἀνήκουν στό διάστημα $[-1,1]$ δίνονται ἀπό τόν τύπο

$$x_k = \sigma\upsilon\nu\,\frac{k\pi}{\nu}, \quad \text{ὅπου} \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu.$$

220. Ἂν ἡ ἐξίσωση $z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ἔχει δύο μιγαδικές ρίζες τῆς μορφῆς $z_{1,2} = k \pm ki$, $k \in R$, δεῖξτε ὅτι θά εἶναι $\gamma^2 = (\beta^2 - 2\alpha\gamma).(\alpha^2 - 2\beta)$.

221. Ἂν ἡ ἐξίσωση $(\alpha + \beta i)z^2 + (\beta + \gamma i)z + \gamma + \delta i = 0$ ἔχει ρίζες πραγματικές δεῖξτε ὅτι

$$\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\alpha^3}{\beta^3} = \frac{\beta^3}{\gamma^3} = \frac{\gamma^3}{\delta^3}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R.$$

222. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\nu = 1, \quad z \neq 1.$

223. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\nu = \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha}, \quad \alpha \in R.$

224. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^{10} + 6iz^5 - 12 = 0$.

225. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^\nu = \rho$ ἔχει μόνο πραγματικές ρίζες, ὅπου ρ εἶναι μιγαδικός μέ $|\rho| = 1$.

226. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $(1 + i).(1 + y).(2 - i^3).(3 - x^3) = 15$.

227. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $j^3 + j^2 + j + 1 = 0$ ὅπου $j = \frac{z+i}{z-i}, z \neq i$.

228. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τῶν ριζῶν τῆς ἐξίσωσης $(1 + \sigma\upsilon\nu 2\theta)z^2 - 2\eta\mu 2\theta z + 2 = 0$ ὅπου $-\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$

229. Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση $\left(\frac{z-1}{z}\right)^3 = -i$. Ἄν z_1, z_2, z_3 εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξίσωσης, νά προσδιοριστεῖ ὁ $\alpha \in R$ ὥστε

$$z^3 = \alpha z_1 + (1-\alpha)z_2$$

230. Νά βρεθοῦν οἱ κοινές ρίζες τῶν ἐξισώσεων

$x^\nu - 1 = 0$, $x^\mu - 1 = 0$ ὅταν $(\mu,\nu) = 1$ καί $\mu, \nu \in N$.

231. Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση $(1+z)^{2\nu} - (1-z^2)^\nu + (1-z)^{2\nu} = 0$.

232. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: **i)** $z^5 = z$, **ii)** $z^5 = z - \bar{z}$, **iii)** $z^\nu = \bar{z}$.

233. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

i) $(z+1)^7 + (z-1)^7 = 0$

ii) $(z+i)^7 + (z-i)^7 = 0$

234. Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση $(z^2-1)^4 = 16z^4$.

235. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

i) $z^3 = (3-3z)^3$

ii) $\frac{z-2i}{z+2i} = 2\,\frac{z+2i}{z-2i}$

236. Νά λυθεῖ ή ἐξίσωση $z^3 = 4\sqrt{2}(1+i)$ καί νά δειχτεῖ ὅτι ἄν z_1, z_2, z_3 εἶναι οἱ ρίζες της, ἰσχύει ή σχέση

$$\frac{z_1 z_2}{z_3^2} = \frac{z_2 z_3}{z_1^2} = \frac{z_3 z_1}{z_2^2} = 1$$

237. Νά λυθοῦν οἱ ἐξισώσεις: **i)** $z^{\nu} + 1 = 0$

ii) $z^{\nu - k} = \bar{z}^{k}$, $\nu > k$, $\nu, k \in N$.

238. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση

$$(\sigma\upsilon\nu x + i\eta\mu x).(\sigma\upsilon\nu 2x + i\eta\mu 2x) \ldots \big(\sigma\upsilon\nu(\nu x) + i\eta\mu(\nu x)\big) = 1$$

239. Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση $z\bar{z} - 2\,|\,z\,|\, + 1 = 0$ ἔχει ἄπειρες λύσεις. Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι δέν ὑπάρχει ἀριθμός πού νά εἶναι ρίζα τῆς ἐξίσωσης $z\bar{z} + 2\sqrt{z\bar{z}} + 1 = 0$.

240. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $z^3 - (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z - 4 = 0$. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση ἔχει μία πραγματική ρίζα καί στή συνέχεια λύστε την.

241. Ἄν z_1, z_2 οἱ ρίζες τῆς ἐξίσωσης

$$2z^2 - (7 + i\sqrt{3})\alpha z + 2(3 + i\sqrt{3})\alpha^2 = 0$$

δεῖξτε ὅτι $z_2 - \alpha = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).(z_1 - \alpha)$

242. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $z^3 + 4z^2 - 10z + 12$ ἔχει ρίζα τό μιγαδικό $1 + i$ καί βρεῖτε τίς ἄλλες ρίζες.

243. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $243z^5 + 81z^4 + 27z^3 + 9z^2 + 3z + 1 = 0$.

244. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $z^7 + z^4 - z^3 = 1$.

245. Νά λυθεῖ τό σύστημα

$$\begin{aligned} 2iz_1 - z_2 &= 1 - 6i \\ z_1 + 2iz_2 &= i \end{aligned}$$

246. Νά λυθεῖ τό σύστημα $z_1^3 + z_2^5 = 0$

$$z_1^2 \,.\, \bar{z}_2^4 = 0$$

247. Νά λυθοῦν τά συστήματα

i) $iz_1 - (1+i)z_2 + z_3 = 1$

$2z_1 - 3iz_2 + 3z_3 = 1 - i$

$z_1 - z_2 + z_3 = 0$

ii) $z_1^3 + \bar{z}_2^7 = 0$

$z_1^5 \,.\, z_2^{11} = 1$

248. Νά λυθοῦν τά συστήματα

i) $iz_1 - 2z_2 = -4 + 3i$

$2\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = 3$

ii) $z^{13} \,.\, \omega^{19} = 1$

$z^5 \,.\, \omega^7 = 1$

$z^2 + \omega^2 = -2$

249. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα

$$\Sigma_1 = 1 + \nu\,\sigma\upsilon\nu\theta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{1.2.3}\sigma\upsilon\nu 2\theta + \ldots$$

$$\Sigma_2 = \nu\,\eta\mu\theta + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\eta\mu 2\theta + \frac{\nu(\nu-1).(\nu-2)}{1.2.3}\eta\mu 3\theta + \ldots$$

$$\Sigma_3 = \sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\,\eta\mu 2\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta\,\eta\mu 3\theta + \ldots + \sigma\upsilon\nu^\nu\theta\,\eta\mu(\nu\theta)$$

$$\Sigma_4 = \sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta\,\sigma\upsilon\nu 2\theta + \sigma\upsilon\nu^3\theta\,\sigma\upsilon\nu 3\theta + \ldots + \sigma\upsilon\nu^\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu(\nu\theta)$$

$$\Sigma_5 = 1 + 2\eta\mu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + 3\eta\mu 2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\eta\mu 3\theta\,\sigma\upsilon\nu^3\theta + \ldots + \nu\,\eta\mu(\nu-1)\theta\;\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta$$

$$\Sigma_6 = 1 + 2\sigma\upsilon\nu\theta\,\sigma\upsilon\nu\theta + 3\sigma\upsilon\nu 2\theta\,\sigma\upsilon\nu^2\theta + 4\sigma\upsilon\nu 3\theta\,\sigma\upsilon\nu^3\theta + \ldots + \nu\,\sigma\upsilon\nu(\nu-1)\theta\;\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta.$$

250. Δεῖξτε ὅτι $\sigma\upsilon\nu 6\theta = 32\sigma\upsilon\nu^6\theta - 48\sigma\upsilon\nu^4\theta + 18\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1$

Χρησιμοποιῆστε τήν παράσταση αὐτή γιά τή λύση τῶν ἐξισώσεων:

i) $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = 0$

ii) $32x^6 - 48x^4 + 18x^2 = \dfrac{3}{2}$

251. Δεῖξτε ὅτι $\sigma\upsilon\nu(n\theta) = \sigma\upsilon\nu^n\theta\left(1 - \dfrac{n(n-1)}{1.2}\varepsilon\varphi^2\theta + \right.$

$$\left. + \frac{n(n-1).(n-2).(n-3)}{1.2.3.4}\varepsilon\varphi^4\theta - \cdots\right)$$

καί $\quad \eta\mu(n\theta) = \sigma\upsilon\nu^n\theta\left(n\,\varepsilon\varphi\theta - \dfrac{n(n-1).(n-2)}{1.2.3}\varepsilon\varphi^3\theta + \ldots\right)$

252. Νά ἐκφραστεῖ τό $\sigma\upsilon\nu^5\theta$ στή μορφή

$$\alpha\,\sigma\upsilon\nu 5\theta + \beta\,\sigma\upsilon\nu 3\theta + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\theta$$

καί νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $16\sigma\upsilon\nu^5\theta = \sigma\upsilon\nu 5\theta$.

253. Νά βρεθεῖ τό μέτρο καί τό ὅρισμα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = 2 + \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + i\,\eta\mu\frac{2\pi}{3}.$$

Στή συνέχεια δεῖξτε ὅτι

$$2^n + n2^{n-1}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + \frac{n(n-1)}{1.2}2^{n-2}\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3} + \ldots +$$

$$+ \sigma\upsilon\nu\frac{2n\pi}{3} = 3^{\frac{n}{2}}\sigma\upsilon\nu\frac{n\pi}{6}.$$

254. Νά ὑπολογιστεῖ τό ἄθροισμα

$$\Sigma = \sigma\upsilon\nu\alpha + n\,\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) + \frac{n(n-1)}{1.2}\sigma\upsilon\nu(\alpha+2\beta) + \ldots + \sigma\upsilon\nu(\alpha+n\beta)$$

255. Νά ὑπολογιστοῦν τά ἀθροίσματα

$$\Sigma_1 = 1 + \sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta + \ldots + \sigma\upsilon\nu(n-1)\theta$$

$$\Sigma_2 = \eta\mu\theta + \eta\mu 2\theta + \ldots + \eta\mu(n-1)\theta$$

256. Χρησιμοποιώντας τόν τύπο $\sigma\upsilon\nu n\theta = \frac{1}{2}(z^n + z^{-n})$ ὑπολογίστε τήν παράσταση

$$\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 3\theta + \sigma\upsilon\nu 5\theta + \ldots + \sigma\upsilon\nu(2n-1)\theta$$

257. Ἔστω $f(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots + \alpha_n$ ὅπου $\alpha_i, z_i \in C$ γιά $i = 1, 2, \ldots, n$. Δεῖξτε ὅτι:

i) $|f(z)| \geqslant |z|^n - |\alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots + \alpha_n|$

ii) Ἔστω $M = \max(|\alpha_i|)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Δεῖξτε ὅτι

$$|\alpha_1 z^{n-1} + \alpha_2 z^{n-2} + \ldots + \alpha_n| \leqslant M(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \ldots + 1)$$

iii) Δεῖξτε ὅτι $|f(z)| \geqslant |z|^n - \dfrac{M(|z|^n - 1)}{|z|-1}$

iv) Ἄν $|z| - 1 > M$, δεῖξτε ὅτι $|f(z)| > 1$.

258. Νά λυθεῖ τό σύστημα : $|z - 3i| = |z + i|$

$|z - i| = |z - 1|$.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1. Τό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, ἐφοδιασμένο μέ τίς πράξεις «+» καί «.» γίνεται σῶμα. Ἄρα δοθέντος ἑνός μιγαδικοῦ, ὑπάρχει πάντοτε ὁ ἀντίθετος καί ὁ ἀντίστροφός του $(z \neq 0)$.

2. Μία ἰσότητα δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν συνεπάγεται πάντοτε δύο ἰσότητες πραγματικῶν ἀριθμῶν.

3. Γιά τίς δυνάμεις στούς μιγαδικούς ἰσχύουν ἀκριβῶς οἱ ἴδιες ἰδιότητες πού ἰσχύουν καί γιά τίς δυνάμεις στούς πραγματικούς.

4. Ὅταν θέλουμε νά βροῦμε τό ἀποτέλεσμα μιᾶς δύναμης τοῦ i, διαιροῦμε τόν ἐκθέτη μέ τό 4 καί ὑψώνουμε τό i μέ ἐκθέτη ἴσο πρός τό ὑπόλοιπο αὐτῆς τῆς διαίρεσης. Τό ἐξαγόμενο εἶναι τό ζητούμενο ἀποτέλεσμα.

5. Ὅταν ἔχουμε μιά παράσταση πού περιέχει τό i ὑψωμένο σέ δυνάμεις μέ ἀκέραιους ἐκθέτες, γιά νά βροῦμε τίς διάφορες τιμές αὐτῆς τῆς παράστασης ἐξετάζουμε διαδοχικά τίς περιπτώσεις πού οἱ ἐκθέτες ἔχουν τίς μορφές $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$.

6. Ὅταν ἔχουμε ἕνα κλάσμα μέ παρονομαστή ἕνα μιγαδικό, φέρνουμε τό κλάσμα στή μορφή $\alpha + \beta i$ πολ/ντας καί τούς δύο ὅρους του μέ τή συζυγή παράσταση τοῦ παρονομαστῆ.

7. Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι ἕνας μιγαδικός z εἶναι καθαρός πραγματικός, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\text{Im}(z) = 0$ δηλ.

$$\frac{z-\bar{z}}{2i} = 0 \quad \text{δηλ.} \quad z = \bar{z}.$$

Γιά νά δείξουμε ὅτι ὁ z εἶναι καθαρός φανταστικός, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι $\text{Re}(z) = 0$ δηλ.

$$\frac{z+\bar{z}}{2} = 0 \quad \text{δηλ.} \quad z = -\bar{z}.$$

8. Σέ ὁρισμένες ἀσκήσεις δίνονται σχέσεις μεταξύ μιγαδικῶν ἤ πραγματικῶν καί ζητεῖται νά ἀποδειχτοῦν ἄλλες σχέσεις. Στίς περιπτώσεις αὐτές παίρνουμε ἐκεῖνες τίς σχέσεις ἀπό τήν ὑπόθεση πού περιέχουν μιγαδικούς, τίς φέρνουμε στή μορφή $\alpha + \beta i$ καί ἐξισώνουμε τά πραγματικά τους καί τά φανταστικά τους μέρη. Στή συνέχεια ἔχουμε σχέσεις μόνο μεταξύ πραγματικῶν ἀριθμῶν.

9. Γιά νά ἀποδείξουμε ὅτι δύο μιγαδικοί εἶναι συζυγεῖς, ἀρκεῖ νά δείξουμε ὅτι τό ἄθροισμά τους καί τό γινόμενό τους εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

10. Σέ ἀσκήσεις πού ἐμφανίζονται μέτρα μιγαδικῶν ἀριθμῶν, συνήθως δουλεύουμε μέ τόν τύπο $z\bar{z} = |z|^2$. Ἕνας δεύτερος τρόπος εἶναι νά θέτουμε $z=x+iy$, ὁπότε $|z|^2 = x^2 + y^2$.

11. Στούς μιγαδικούς ἀριθμούς ΔΕΝ ἰσχύει ἡ ἔννοια τῆς ἀνισότητας.

12. Συζυγεῖς μιγαδικοί ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

13. Ὅταν ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μία ἰσότητα πού περιέχει **μιγα-**

δικούς καί μέτρα μιγαδικῶν, συνήθως **κάνουμε τήν ἀντικατάσταση** $z = x + iy$. Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε καί στίς ἐξισώσεις **πού** περιέχουν μιγαδικούς καί μέτρα μιγαδικῶν.

14."Οταν ἔχουμε νά ἀποδείξουμε μία ἰσότητα πού περιέχει μιγαδικούς ἤ μέτρα μιγαδικῶν z_1, z_2 καί εἶναι ὁμογενής ἡ ἰσότητα αὐτή ὡς πρός z_1 ἤ ὡς πρός z_2 ἤ ὡς πρός $|z_1|$, $|z_2|$, $z_1 . z_2$, διαιροῦμε ὅλους τούς ὅρους τῆς ἰσότητας μέ τήν κατάλληλη παράσταση ὑψωμένη στό βαθμό ὁμογενείας, ὁπότε ἔχουμε μόνη μεταβλητή τό πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ ἤ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$.

15."Οταν $|z + \alpha| = |z - \alpha|$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$, τότε $z \in C - R$.
"Οταν $|z + \alpha i| = |z - \alpha i|$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \in R$, τότε $z \in R$.

16."Οταν μία ἐξίσωση ἔχει σάν ρίζα τό μιγαδικό z_1, θά ἔχει ὁπωσδήποτε σάν ρίζα καί τό μιγαδικό $\bar{z}_1$.

17.'Η παράσταση $\rho(\text{συν}\varphi + i\,\text{ημ}\theta)$ εἶναι τριγωνομετρική μορφή κάποιου μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$, ἐφόσο $\rho > 0$ καί $\theta - \varphi = 2k\pi$.

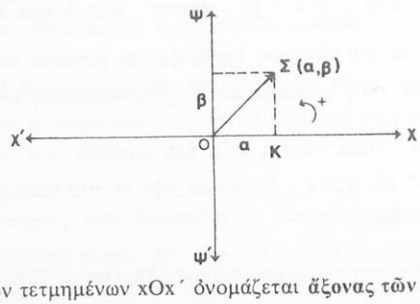
18."Οταν σέ μιά ἄσκηση ἐμφανίζονται μεγάλες δυνάμεις μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τούς τρέπουμε στήν τριγωνομετρική τους μορφή.

19."Αν ω εἶναι νιοστή ρίζα τῆς μονάδας, γιά νά βροῦμε τό ἐξαγόμενο ω^μ μέ $\mu > \nu$, ὑψώνουμε τήν ω στό ὑπόλοιπο τῆς διαίρεσης τοῦ μ διά ν.

20. Μία ἐξίσωση μιγαδικῶν ἀριθμῶν λύνεται ὡς ἑξῆς: **i)**"Αν στήν ἐξίσωση ἔχουμε μόνο ἄγνωστο τό z, δίχως νά ἐμφανίζονται τά $\bar{z}$ ἤ $|z|$, λύνουμε κανονικά ὅπως καί στούς πραγματικούς ἀριθμούς. **ii)**"Αν ἐμφανίζονται τά $\bar{z}$ καί $|z|$ ἀντικαθιστοῦμε μέ $z = x + iy$ καί βρίσκουμε τά x, y. **iii)** Χρησιμοποιοῦμε τήν τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγάδα καί προσπαθοῦμε νά βροῦμε τό μέτρο καί τό ὅρισμά του.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΤΩΝ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ

Στίς λυμένες ἀσκήσεις 83, 84, 85 χρησιμοποιήσαμε τό ὀρθογώνιο σύστημα συντεταγμένων στό ἐπίπεδο καί παραστήσαμε τό μιγαδικό $z = \alpha + \beta i$ μέ ἕνα σημεῖο Σ τοῦ ἐπιπέδου, μέ συντεταγμένες (α, β). Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἀντιστοιχία $z \longleftrightarrow (\alpha, \beta)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη. Τό σημεῖο Σ λέγεται **γεωμετρική εἰκόνα** τοῦ μιγαδικοῦ z.

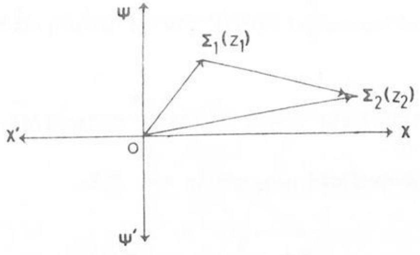


Ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων xOx΄ ὀνομάζεται **ἄξονας τῶν πραγματικῶν**, ἐνῶ ὁ ἄξονας τῶν τεταγμένων yOy΄ λέγεται **ἄξονας τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν.**

Ἕνα ἐπίπεδο ἐφοδιασμένο μέ ἕνα ὀρθοκανονικό σύστημα ἀξόνων, τοῦ ὁποίου τά σημεῖα ἔχουν ἀντιστοιχηθεῖ μέ μιγαδικούς ἀριθμούς, ὀνομάζεται **μιγαδικό ἐπίπεδο ἤ ἐπίπεδο Argand ἤ ἐπίπεδο τοῦ Gauss.**

Σέ κάθε μιγαδικό ἀριθμό $z = \alpha + i\beta$ ἀντιστοιχεῖ, ὅπως εἴδαμε, ἕνα σημεῖο $\Sigma(\alpha,\beta)$ τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, καί σέ κάθε σημεῖο Σ ἀντιστοιχεῖ μία διανυσματική ἀκτίνα $\overrightarrow{O\Sigma}$. Τό μέτρο αὐτῆς τῆς διανυσματικῆς ἀκτίνας εἶναι $\|\overrightarrow{O\Sigma}\| = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |z|$ ὅπως φαίνεται καί ἀπό τό σχῆμα (1). Ἐπίσης ἡ γωνία φ πού σχηματίζει ἡ διανυσματική ἀκτίνα μέ τόν ἄξονα τῶν πραγματικῶν, μετρούμενη κατά τή θετική φορά διαγραφῆς τῶν γωνιῶν, ἀπό 0 ὥς 2π, εἶναι τό πρωτεῦον ὅρισμα τοῦ z.

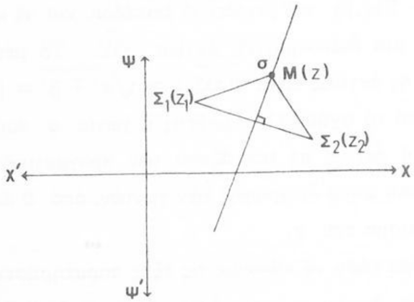
Μποροῦμε τώρα νά κάνουμε τίς ἑξῆς παρατηρήσεις: Ἄν ἔχουμε ν μιγαδικούς $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ ὥστε $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 = \ldots = \operatorname{Arg} z_\nu$ ἐνῶ $|z_1| \neq |z_2| \neq \ldots \neq |z_\nu|$, τότε οἱ μιγαδικοί αὐτοί θά βρίσκονται πάνω στήν ἴδια εὐθεία καί θά ἀπέχουν ἄνισες ἀποστάσεις ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων. Ἄν ἔχουμε ν μιγαδικούς ὥστε $\operatorname{Arg} z_1 \neq \operatorname{Arg} z_2 \neq \ldots \neq \operatorname{Arg} z_\nu$ καί $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_\nu|$, τότε οἱ μιγαδικοί αὐτοί θά βρίσκονται σέ μιά περιφέρεια κύκλου κέντρου O καί ἀκτίνας ἴσης πρός τό μέτρο τῶν μιγαδικῶν.



Ἔστω τώρα Σ_1 καί Σ_2 οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ καί $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$. Ἔχουμε τή διανυσματική ἰσότητα

$$\overrightarrow{O\Sigma_1} + \overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2} = \overrightarrow{O\Sigma_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2} = z_2 - z_1 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2}\| = \|z_2 - z_1\|$$

Παρατηροῦμε λοιπόν ὅτι στό μιγαδικό ἐπίπεδο, τό μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ἐκφράζεται μέ τό μέτρο $|z_2 - z_1|$. Ἡ παρατήρηση αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ εὔκολα στήν ἐξίσωση τῆς μεσοκαθέτου ἑνός εὐθύγραμμου τμήματος.



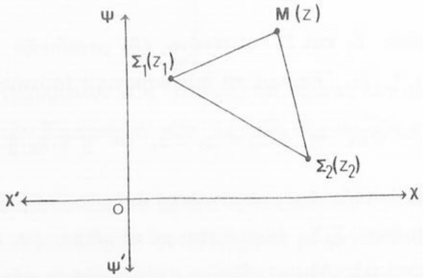
Ἔστω $\Sigma_1\Sigma_2$ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου, καί $M(z)$ τυχόν σημεῖο τῆς μεσοκάθετης τοῦ $\Sigma_1\Sigma_2$. Τότε θά εἶναι

$$\| \overrightarrow{M\Sigma_1} \| = \| \overrightarrow{M\Sigma_2} \| \Leftrightarrow | z - z_1 | = | z - z_2 | \quad (1).$$

Ἡ ἐξίσωση πού βρήκαμε ἱκανοποιεῖται μόνο ἀπό τούς μιγαδικούς, πού ἔχουν εἰκόνες πάνω στή μεσοκάθετη εὐθεία τοῦ εὐθ. τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$, καί εἶναι ἡ ζητούμενη ἐξίσωση. Ἀντίστροφα: Ἔστω τώρα ἕνας μιγαδικός z πού ἱκανοποιεῖ τήν (1). Ἄν M εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ z, θά ἔχουμε

$$| z - z_1 | = | \overrightarrow{M\Sigma_1} | \text{ καί } | z - z_2 | = | \overrightarrow{M\Sigma_2} | \text{ ὁπότε } \| \overrightarrow{M\Sigma_1} \| = \| \overrightarrow{M\Sigma_2} \|$$

δηλ. τό M ἀνήκει στή μεσοκάθετη τοῦ $\Sigma_1\Sigma_2$.



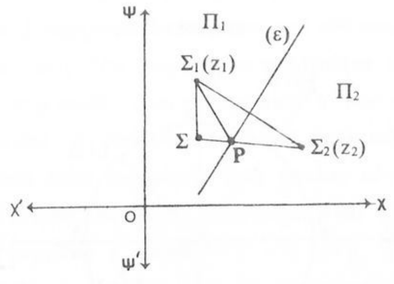
Ἔστω πάλι $\Sigma_1(z_1)$, $\Sigma_2(z_2)$ δύο σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Τό σύνολο τῶν σημείων τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου τῶν ὁποίων οἱ ἀποστάσεις ἀπό τά Σ_1, Σ_2 ἔχουν δοθέντα λόγο $\frac{\mu}{\nu}$ ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right| = \frac{\mu}{\nu}$.

Πράγματι, ἔστω σημεῖο M ὥστε $\frac{|\overrightarrow{M\Sigma_1}|}{|\overrightarrow{M\Sigma_2}|} = \frac{\mu}{\nu}$ (2).

Ἐπειδή $\|\overrightarrow{M\Sigma_1}\| = |z_1 - z|$ καί $\|\overrightarrow{M\Sigma_2}\| = |z_2 - z|$ ἡ (2) γράφεται

$$\frac{|z_1 - z|}{|z_2 - z|} = \frac{\mu}{\nu} \quad (3).$$

Ἀντίστροφα: Ἄν γιά τίς εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z, z_1, z_2 ἰσχύει ἡ σχέση (3), τότε οἱ εἰκόνες ὅλων τῶν μιγαδικῶν z βρίσκονται πάνω στόν Ἀπολλώνιο κύκλο πού γράφεται μέ διάμετρο τά συζυγή ἁρμονικά τῶν Σ_1, Σ_2 μέ λόγο ἁρμονικότητας $\frac{\mu}{\nu}$.



Ἔστω τώρα $\Sigma_1(z_1)$, $\Sigma_2(z_2)$ δύο σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου καί (ε) ἡ μεσοκάθετη τοῦ εὐθ. τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$. Ἡ μεσοκάθετη χωρίζει τό ἐπίπεδο σέ δύο ἡμιεπίπεδα Π_1, Π_2. Ἔστω z ἕνας μιγαδικός πού ἔχει εἰκόνα τό σημεῖο Σ τοῦ ἡμιεπιπέδου Π_1. Θά ἰσχύουν

$$\|\overrightarrow{\Sigma P}\| + \|\overrightarrow{P\Sigma_2}\| = \|\overrightarrow{\Sigma\Sigma_2}\|$$

'Αλλά $\| \overrightarrow{P\Sigma_2} \| = \| \overrightarrow{P\Sigma_1} \|$

"Αρα $\| \overrightarrow{\Sigma P} \| + \| \overrightarrow{P\Sigma_1} \| = \| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_2} \|$

"Εχουμε ὅμως ὅτι $\| \overrightarrow{\Sigma P} \| + \| \overrightarrow{P\Sigma_1} \| \geqslant \| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_1} \|$

"Αρα $\| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_2} \| \geqslant \| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_1} \|$ δηλ. $| z_2 - z | \geqslant | z_1 - z |$ (4).

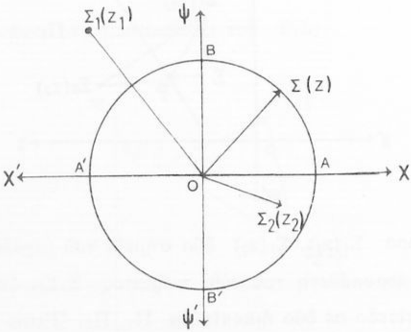
"Αν τό Σ βρισκόταν στό Π_2, θά βρίσκαμε μέ ἀνάλογο τρόπο ὅτι

$$| z_1 - z | \geqslant | z_2 - z | \quad (5).$$

'Αντίστροφα. "Εστω ὅτι ἰσχύει ἡ (4) θά ἔχουμε $\| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_2} \| \geqslant \| \overrightarrow{\Sigma\Sigma_1} \|$. 'Η σχέση αὐτή σημαίνει ὅτι τό Σ βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο Π_1 ἤ στή μεσοκάθετο (ε), διότι σέ ὁποιαδήποτε ἄλλη περίπτωση θά ἴσχυε ἡ (5).

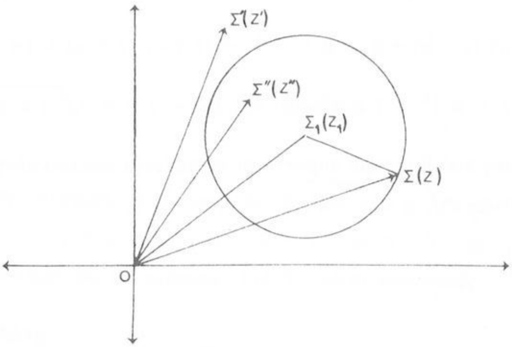
"Ετσι λοιπόν δοθέντων δύο μιγαδικῶν z_1, z_2 καί ἑνός τυχόντος τρίτου μιγαδικοῦ z, χρησιμοποιώντας τίς σχέσεις (4), (5) μποροῦμε νά καταλάβουμε ἀμέσως σέ ποιό ἡμιεπίπεδο ὡς πρός τή μεσοκάθετη τοῦ εὐθ. τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ βρίσκεται ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ z.

ΚΥΚΛΟΣ



"Εστω $z = x + iy$ ἕνας μιγαδικός καί Σ ἡ εἰκόνα του στό μιγαδικό ἐπίπεδο. "Αν $| z | = \rho$ (6), ὅλοι οἱ μιγαδικοί πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση (1) θά βρίσκονται στήν περιφέρεια ἑνός κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν συντεταγμένων καί ἀκτίνα ρ. Ἡ ἐξίσωση (6) εἶναι ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου (Ο,ρ).

Κάθε μιγαδικός πού ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα $|z_1| > \rho$ θά ἔχει προφανῶς εἰκόνα ἕνα σημεῖο Σ_1 ἐξωτερικό τοῦ κύκλου (Ο,ρ), ἐνῶ κάθε μιγαδικός z_2 πού ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα $|z_2| < \rho$ θά ἔχει εἰκόνα ἕνα σημεῖο Σ_2 ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (Ο,ρ).



Ἔστω τώρα Σ_1 καί Σ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1 καί z στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Γνωρίζουμε ὅτι τό μῆκος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma$ εἶναι $|z - z_1|$. Ἄν θεωρήσουμε τό μιγαδικό z_1 σταθερό καί τό μῆκος $\Sigma\Sigma_1 = \rho$ σταθ., ὅλοι οἱ μιγαδικοί z πού οἱ εἰκόνες τους ἀπέχουν ἀπόσταση ρ ἀπό τήν εἰκόνα τοῦ σταθεροῦ μιγαδικοῦ z_1 βρίσκονται πάνω στήν περιφέρεια ἑνός κύκλου κέντρου Σ_1 καί ἀκτίνας ρ. Ἡ ἐξίσωση αὐτῆς τῆς περιφέρειας εἶναι $|z - z_1| = \rho$ (7). Ἄν γιά κάποιο μιγαδικό z' ἰσχύει $|z' - z_1| > \rho$, ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ αὐτοῦ θά εἶναι σημεῖο Σ' ἐξωτερικό τοῦ κύκλου (Σ_1,ρ), ἐνῶ ἄν ἰσχύει $|z'' - z_1| < \rho$ ἡ εἰκόνα τοῦ z'' θά εἶναι σημεῖο Σ'' ἐσωτερικό τοῦ κύκλου (Σ_1,ρ).

Ἡ ἐξίσωση (7) μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$|z - z_1| = \rho \Rightarrow |z - z_1|^2 = \rho^2 \Rightarrow (z - z_1).(\bar{z} - \bar{z}_1) = \rho^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z\bar{z} - z_1\bar{z} - \bar{z}_1 z + z_1\bar{z}_1 = \rho^2 \Rightarrow |z|^2 + |z_1|^2 = 2\mathrm{Re}(z\bar{z}_1) + \rho^2$$

Θά δείξουμε τώρα ὅτι κάθε σχέση τῆς μορφῆς

$|z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$ (8), ὅπου $\alpha \in C$ καί $\beta \in R$ καί $|\alpha|^2 > \beta$

εἶναι ἐξίσωση κύκλου στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Πράγματι ἡ (8) γράφεται:

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \alpha\bar{\alpha} + \beta = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z+\alpha).(\bar{z}+\bar{\alpha}) + \beta - |\alpha|^2 = 0 \Leftrightarrow (z+\alpha).(\overline{z+\alpha}) = |\alpha|^2 - \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |z+\alpha|^2 = |\alpha|^2 - \beta \Leftrightarrow |z+\alpha| = \sqrt{|\alpha|^2 - \beta}.$$

Ἡ ἐξίσωση πού βρήκαμε παριστάνει περιφέρεια κύκλου κέντρου $-\alpha$ καί ἀκτίνας $\sqrt{|\alpha|^2 - \beta}$.

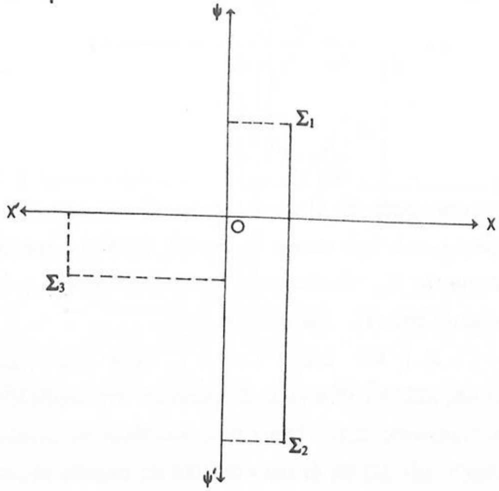
ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά βρεθοῦν οἱ εἰκόνες Σ_1, Σ_2, Σ_3 τῶν μιγαδικῶν

$$z_1 = 2 + 3i \,, \quad z_2 = 2 - 7i \,, \quad z_3 = -5 - 2i$$

καί νά δειχτεῖ ὅτι τό τρίγωνο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ εἶναι ἰσοσκελές.

Λύση



῾Υπολογίζουμε τά μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ $\overset{\triangle}{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$. Ἔχουμε:

$$\Sigma_1\Sigma_3 = |\ z_3 - z_1\ | = |\ -5 - 2i - 2 - 3i\ | = |\ -7 - 5i\ | =$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-5)^2} = \sqrt{74}$$

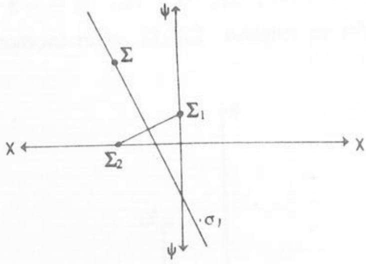
$$\Sigma_2\Sigma_3 = |\ -5 - 2i - 2 + 7i\ | = |\ -7 + 5i\ | = \sqrt{74}$$

$$\Sigma_1\Sigma_2 = |\ 2 - 7i - 2 - 3i\ | = |\ -10i\ | = 10$$

Ἄρα τό $\overset{\triangle}{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$ εἶναι ἰσοσκελές.

2. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου γιά τά ὁποῖα ἔχουμε τήν ἰσότητα $|\ z - i\ | = |\ z + 2\ |$.

Λύση



῾Η ἰσότητα γράφεται: $|\ z - i\ | = |\ z - (-2)\ |$ (1). ῾Ο φανταστικός ἀριθμός $z_1 = i$ ἔχει εἰκόνα τό σημεῖο Σ_1, ἐνῶ ὁ πραγματικός $z_2 = -2$, τό σημεῖο Σ_2. Ἄν Σ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ τυχόντος μιγαδικοῦ z πού ἱκανοποιεῖ τήν (1), γνωρίζουμε ὅτι

$\Sigma_2\Sigma = |\ z - (-2)\ |$ καί $\Sigma_1\Sigma = |\ z - i\ |$. Ἄρα $\Sigma_1\Sigma = \Sigma_2\Sigma$ (2).
῾Η σχέση (2) μᾶς λέει ὅτι τό σημεῖο Σ βρίσκεται στή μεσοκάθετη τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$. ῾Επομένως καί ὅλοι οἱ μιγαδικοί z πού ἱκανοποιοῦν τήν (1) θά ἔχουν σάν εἰκόνες σημεῖα τῆς μεσοκάθετης (σ).

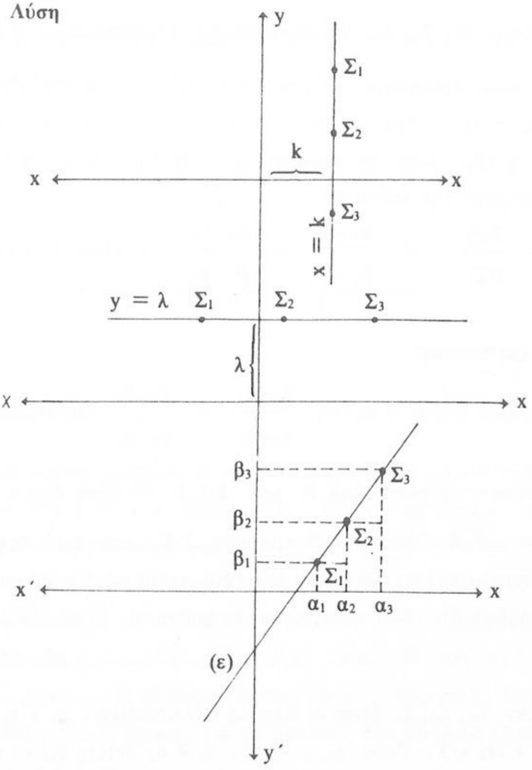
3. Δεῖξτε ὅτι οἱ μιγαδικοί

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1 \ , \quad z_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \ , \quad z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

ἔχουν εἰκόνες, σημεῖα συνευθειακά ἄν καί μόνο ἄν

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 \quad \text{ἤ} \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 \quad \text{ἤ} \quad \frac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{\beta_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$$

Λύση



i) Ἔστω $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = k$. Τότε θά ἔχουμε

$$z_1 = k + i\beta_1 \ , \quad z_2 = k + i\beta_2 \ , \quad z_3 = k + i\beta_3 .$$

Ἑπομένως οἱ εἰκόνες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ τῶν z_1, z_2, z_3 θά εἶναι σημεῖα τῆς εὐθείας $x = k$.

ii) Ἄν $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \lambda$ θά ἔχουμε

$$z_1 = \alpha_1 + i\lambda\ ,\quad z_2 = \alpha_2 + i\lambda\ ,\quad z_3 = \alpha_3 + i\lambda .$$

Ἄρα οἱ εἰκόνες $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ τῶν z_1, z_2, z_3 θά εἶναι σημεῖα τῆς εὐθείας $y = \lambda$.

Τά ἀντίστροφα τῶν i), ii) εἶναι

iii) Ἔστω τά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ συνευθειακά. Τά τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Sigma_1 A \Sigma_2}$ καί $\overset{\triangle}{\Sigma_2 B \Sigma_3}$ εἶναι ὀρθογώνια. Τό σημεῖο A εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_A = \alpha_2 + i\beta_1$, ἐνῶ τό σημεῖο B εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_B = \alpha_3 + i\beta_2$. Ἀπό τήν προφανή ὁμοιότητα τῶν δυό αὐτῶν τριγώνων παίρνουμε τήν ἰσότητα

$$\frac{\Sigma_1 A}{A\Sigma_2} = \frac{\Sigma_2 B}{B\Sigma_3} \Leftrightarrow \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\beta_3 - \beta_2}$$ πού εἶναι ἡ ζητουμένη.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ

Ἀφοῦ ἰσχύει ἡ σχέση $\dfrac{\beta_2 - \beta_1}{\alpha_2 - \alpha_1} = \dfrac{\beta_3 - \beta_2}{\alpha_3 - \alpha_2}$ παρατηροῦμε ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Sigma_2\Sigma_1 B}$ καί $\overset{\triangle}{\Sigma_3\Sigma_2 B}$ θά εἶναι ὅμοια. Ἄρα $\Sigma_2\hat{\Sigma}_1 A = \Sigma_3\hat{\Sigma}_2 B$. Ἄρα τά εὐθ. τμήματα $\Sigma_1\Sigma_2$ καί $\Sigma_2\Sigma_3$ ἔχουν ἕνα κοινό σημεῖο καί σχηματίζουν τήν ἴδια γωνία μέ τόν ἄξονα xx', πού σημαίνει ὅτι εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα τῆς ἴδιας εὐθείας (ε).

4. Ἄν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ καί $z_1 + iz_2\sqrt{3}$, ὅπου $z_1, z_2 \in C$, $z_2 \neq 0$, δεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο $\overset{\triangle}{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$ εἶναι ἰσόπλευρο.

Λύση

Ἔχουμε $\Sigma_1\Sigma_2 = |(z_1 - z_2) - (z_1 + z_2)| = |-2z_2| = 2|z_2|$

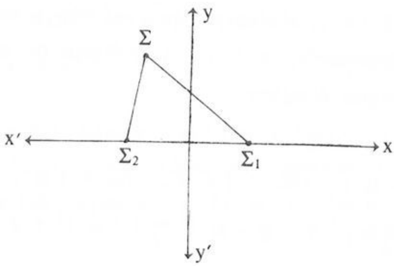
$$\Sigma_1\Sigma_3 = |\, z_1 + i\sqrt{3}\, z_2 - z_1 - z_2 \,| = |\, z_2 \,|\, |\, -1 + i\sqrt{3} \,| = 2\, |\, z_2 \,|$$

$$\Sigma_2\Sigma_3 = |\, z_1 + i\sqrt{3}\, z_2 - z_1 + z_2 \,| = |\, z_2 \,|\, |\, 1 + i\sqrt{3} \,| = 2\, |\, z_2 \,|$$

Ἄρα τό $\overset{\triangle}{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$ εἶναι ἰσόπλευρο τρίγωνο.

5. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου γιά τά ὁποῖα ἰσχύει ἡ ἀνισότητα $|\, z - 1 \,| > |\, z + 1 \,|$.

Λύση



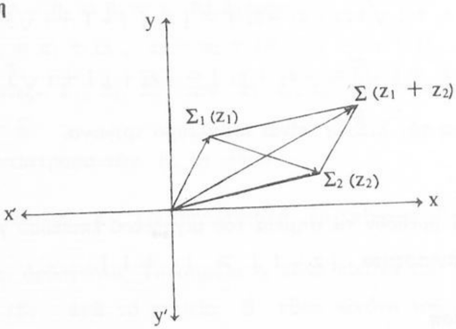
Ἡ σχέση γράφεται $|\, z - (1 + 0i) \,| > |\, z - (-1 + 0i) \,|$ (1). Ἔστω $z_1 = 1 + 0i$ καί $\Sigma_1(z_1)$, $z_2 = -1 + 0i$ καί $\Sigma_2(z_2)$. Ἄν $\Sigma(z)$ εἶναι ἡ εἰκόνα τοῦ τυχόντος μιγαδικοῦ z πού ἱκανοποιεῖ τήν (1) θά ἔχουμε $\Sigma_1\Sigma > \Sigma_2\Sigma$. Ἄρα τό σημεῖο Σ θά βρίσκεται στό ἡμιεπίπεδο πού περιέχει τό σημεῖο Σ_2, σέ σχέση μέ τή μεσοκάθετη τοῦ $\Sigma_1\Sigma_2$. Ἐπειδή ἡ μεσοκάθετη τοῦ $\Sigma_1\Sigma_2$ εἶναι ὁ ἄξονας yy', οἱ ζητούμενοι μιγαδικοί εἶναι αὐτοί γιά τούς ὁποίους $Re(z) < 0$, $Im(z) \in R$.

Ἕνας ἄλλος τρόπος γιά νά λύσουμε τήν ἄσκηση εἶναι νά θέσουμε $z = x + iy$.

6. Νά δειχτεῖ γεωμετρικά ἡ σχέση

$$|\, z_1 + z_2 \,|^2 + |\, z_1 - z_2 \,|^2 = 2\, |\, z_1 \,|^2 + 2\, |\, z_2 \,|^2$$

Λύση



Ἔστω Σ_1 καί Σ_2 οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1 καί z_2, καί Σ ἡ εἰκόνα τοῦ ἀθροίσματος $z_1 + z_2$. Γνωρίζουμε ὅτι σέ κάθε παραλληλόγραμμο ἰσχύει ἡ σχέση

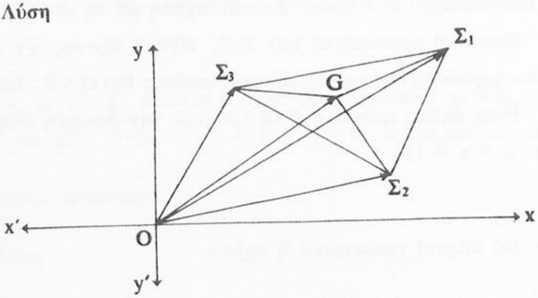
$O\Sigma^2 + \Sigma_2\Sigma_1^2 = 2O\Sigma_1^2 + 2O\Sigma_2^2$ (1). Ἐπειδή $O\Sigma = |z_1 + z_2|$ $\Sigma_2\Sigma_1 = |z_1 - z_2|$, $O\Sigma_1 = |z_1|$, $O\Sigma_2 = |z_2|$ ἡ (1) γράφεται

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

7. Ἄν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3, δεῖξτε ὅτι τό Κ.Β. G τοῦ τριγώνου $\overset{\triangle}{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$ εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ

$$z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

Λύση



Ἔχουμε τίς διανυσματικές ἰσότητες:

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O\Sigma_1} + \overrightarrow{\Sigma_1 G} \ , \qquad \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O\Sigma_2} + \overrightarrow{\Sigma_2 G} \ ,$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O\Sigma_3} + \overrightarrow{\Sigma_3 G}$$

Προσθέτοντας τίς τρεῖς ἰσότητες κατά μέλη θά ἔχουμε:

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O\Sigma_1} + \overrightarrow{O\Sigma_2} + \overrightarrow{O\Sigma_3} + \overrightarrow{\Sigma_1 G} + \overrightarrow{\Sigma_2 G} + \overrightarrow{\Sigma_3 G}$$

Ἄν λάβουμε ὑπόψη ὅτι σέ κάθε τρίγωνο ἰσχύει

$$\overrightarrow{\Sigma_1 G} + \overrightarrow{\Sigma_2 G} + \overrightarrow{\Sigma_3 G} = \overrightarrow{0} \qquad \text{ἔχουμε}$$

$$3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{O\Sigma_1} + \overrightarrow{O\Sigma_2} + \overrightarrow{O\Sigma_3} \qquad \text{δηλαδή}$$

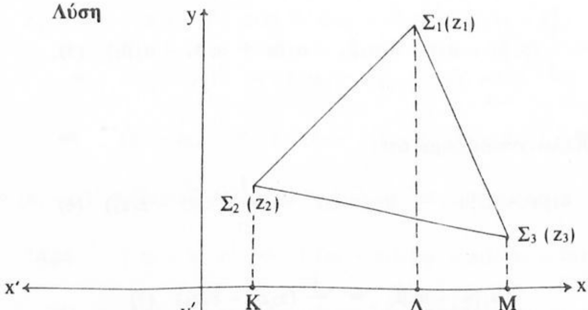
$$3z = z_1 + z_2 + z_3 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{3}(z_1 + z_2 + z_3)$$

8. Ἄν $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 δεῖξτε ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ δίνεται ἀπό τή σχέση

$$E = \frac{1}{4} i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$$

ἄν τά $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἶναι σημεῖα τοῦ πρώτου τεταρτημόριου.

Λύση



Ἔστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν

$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$, $z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$. Ἔχουμε

$$(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3) = (\Sigma_1\Sigma_2 K\Lambda) + (\Sigma_1\Sigma_3 M\Lambda) - (\Sigma_2\Sigma_3 MK) \quad (1)$$

Ἀλλά $(\Sigma_1\Sigma_2 K\Lambda) = \frac{1}{2}(\Sigma_1\Lambda + \Sigma_2 K) K\Lambda = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2).(\alpha_1 - \alpha_2) \quad (2)$

$$(\Sigma_1\Sigma_3 M\Lambda) = \frac{1}{2}(\Sigma_1\Lambda + \Sigma_3 M)\Lambda M = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3).(\alpha_3 - \alpha_1) \quad (3)$$

$$(\Sigma_2\Sigma_3 MK) = \frac{1}{2}(\Sigma_2 K + \Sigma_3 M) KM = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3).(\alpha_3 - \alpha_2) \quad (4)$$

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2), (3), (4) προκύπτει:

$$(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3) = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2).(\alpha_1 - \alpha_2) + \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3).(\alpha_3 - \alpha_1) -$$

$$- \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3).(\alpha_3 - \alpha_2) =$$

$$= \frac{1}{2}[\alpha_1\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 - \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_3\beta_3 - \alpha_1\beta_1 -$$

$$- \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_3\beta_3 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\beta_3] =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2) \quad (5).$$

Ἀλλά γνωρίζουμε ὅτι:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = \frac{1}{2i}(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2) \quad (6)$$

$$\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_2 = \frac{1}{2i}(z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3) \quad (7)$$

$$\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3 = \frac{1}{2i}(z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_3) \quad (8)$$

'Από τίς (5), (6), (7), (8) προκύπτει ὅτι:

$$(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3) = \frac{1}{4} i\,(z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2 + z_2\bar{z}_3 - \bar{z}_2 z_3 + z_3\bar{z}_1 - \bar{z}_1 z_3) =$$

$$= \frac{1}{4} i \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ \bar{z}_1 & \bar{z}_2 & \bar{z}_3 \end{vmatrix}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ τύπος πού μᾶς δίνει τό $(\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3)$ εἶναι ἕνας καθαρά φανταστικός ἀριθμός. 'Ανάλογα μέ τή θέση τοῦ τριγώνου $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ ὡς πρός τούς ἄξονες, τό ἀποτέλεσμα μπορεῖ νά βγεῖ πραγματικός ἀριθμός, θετικός ἤ ἀρνητικός ἤ καί μηδέν.

9. Ἄν Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 μέ $z_1 \neq z_2 \neq z_3$ καί ἰσχύει ἡ σχέση $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$, δεῖξτε ὅτι τό τρίγωνο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ εἶναι ἰσόπλευρο.

Λύση

῾Η σχέση πού δόθηκε γράφεται

$$z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 - 2z_1z_2 - z_3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = z_2z_3 + z_3z_1 - z_1z_2 - z_3^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = z_3.(z_2 - z_3) - z_1.(z_2 - z_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (z_1 - z_2)^2 = (z_3 - z_1).(z_2 - z_3) \Leftrightarrow (z_1 - z_2)^3 = (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)$$

Ἄρα $\quad |z_1 - z_2|^3 = |(z_1 - z_2).(z_2 - z_3).(z_3 - z_1)|.$

῾Η παράσταση στό 2ο μέλος δέ μεταβάλλεται μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν z_1, z_2, z_3. Ἄρα θά ἔχουμε

$$|z_1 - z_2|^3 = |z_2 - z_3|^3 = |z_3 - z_1|^3 \quad \text{ὁπότε}$$

$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$ καί $\Sigma_2\Sigma_1 = \Sigma_3\Sigma_2 = \Sigma_1\Sigma_3$.

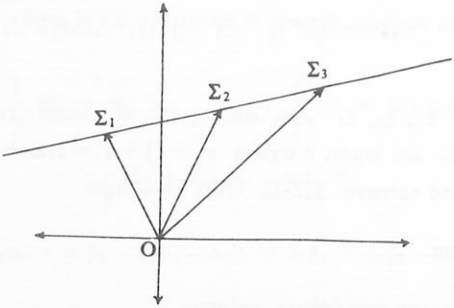
Τό τρίγωνο λοιπόν $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ εἶναι ἰσόπλευρο.

10. Ἄν Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν

$$z_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad z_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad z_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

δεῖξτε ὅτι ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ὥστε τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι συνευθειακά εἶναι νά ὑπάρχουν $\alpha, \beta \in R$ ὥστε $z_3 = \alpha z_2 + \beta z_1$.

Λύση



Ἔστω τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι συνευθειακά, θά ἔχουμε

$$\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_3} = \lambda . \overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Sigma_3} - \overrightarrow{O\Sigma_1} = \lambda . (\overrightarrow{O\Sigma_2} - \overrightarrow{O\Sigma_1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z_3 - z_1 = \lambda . (z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_3 \doteq (1 - \lambda) z_1 + \lambda z_2.$$

Ἄν θέσουμε $1 - \lambda = \alpha$, $\lambda = \beta$ ὅπου $\lambda \in R$, προκύπτει

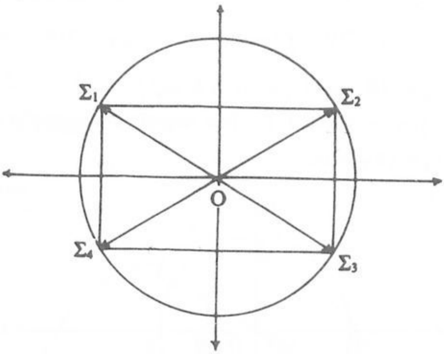
$$z_3 = \alpha z_1 + \beta z_2.$$

11. Γιά τούς μιγαδικούς z_1, z_2, z_3, z_4 ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ καί $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \rho > 0$.

Δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες τους Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι κορυφές ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

Λύση



Θά δείξουμε πρῶτα ὅτι οἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ διχοτομοῦνται. Ἔστω Μ τό μέσο. τῆς $\Sigma_1\Sigma_2$. Θά ἔχουμε

$$\vec{OM} = \frac{\vec{O\Sigma_1} + \vec{O\Sigma_3}}{2}$$

δηλαδή τό μέσο Μ τοῦ $\Sigma_1\Sigma_3$ εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $\dfrac{z_1 + z_3}{2}$.

Ἄν Ν τώρα τό μέσο τοῦ $\Sigma_2\Sigma_4$ θά εἶναι $\vec{ON} = \dfrac{\vec{O\Sigma_2} + \vec{O\Sigma_4}}{2}$.

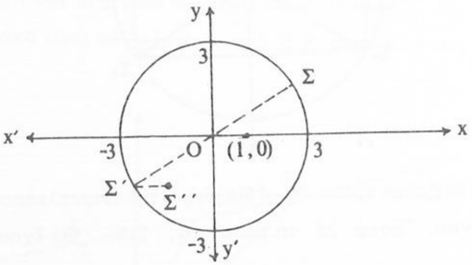
Ἔτσι τό Ν εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $\dfrac{z_2 + z_4}{2}$. Ἐπειδή ὅμως $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ προκύπτει ἀμέσως ὅτι $M \equiv N$. Ἄρα τό τετράπλευρο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἐπειδή $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| = \rho > 0$, προκύπτει ὅτι τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 ἀνήκουν στόν κύκλο (O,ρ). Ἄρα τό παραλληλόγραμμο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι ὀρθογώνιο.

12."Αν $|z| = 3$, βρεῖτε τά σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $j_1 = -2z$, $j_2 = 1 - z$, $j_3 = 3z - 1$.

Λύση

i)"Εστω $z = \alpha + i\beta$. Τότε $-2z = -2\alpha - 2i\beta$ καί $|-2z| = |-2\alpha - 2i\beta| = |-2| . |\alpha + i\beta| = 2.3 = 6$. "Αρα οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν j_1 εἶναι σημεῖα τῆς περιφέρειας $(O, 6)$ ὅπου O ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων.

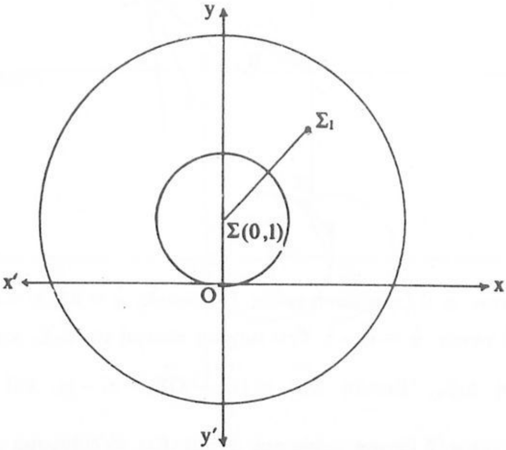


ii)'Επειδή $|z| = |-z| = 3$ καταλαβαίνουμε ὅτι οἱ μιγαδικοί $-z$ θά ἔχουν εἰκόνες στήν περιφέρεια τοῦ κύκλου $(O, 3)$. "Εστω Σ ἡ εἰκόνα κάποιου μιγαδικοῦ z μέ $|z| = 3$. Τότε ἡ εἰκόνα Σ΄ τοῦ μιγαδικοῦ $-z$, εἶναι τό συμμετρικό σημεῖο τοῦ Σ ὡς πρός τήν ἀρχή O. "Αρα ἡ εἰκόνα Σ΄΄ τοῦ μιγαδικοῦ $1 - z$ εἶναι τό σημεῖο Σ΄΄ πού βρίσκουμε μετατοπίζοντας τό Σ΄ κατά 1 μονάδα καί κατά τή θετική φορά, παράλληλα πρός τόν ἄξονα Ox. Τοῦτο συμβαίνει γιατί ὁ μιγαδικός $-z$ διαφέρει ἀπό τό μιγαδικό $1 - z$ κατά μία μονάδα μόνο στό πραγματικό μέρος. Εὔκολα τώρα βλέπουμε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $j_2 = 1 - z$ βρίσκονται πάνω στήν περιφέρεια ἑνός κύκλου πού προκύπτει ἀπό τόν $(O, 3)$, μέ παράλληλη μετατόπιση κατά διάνυσμα $\vec{\delta} = +1$, παράλληλα πρός τόν ἄξονα Ox. "Αρα τό κέντρο τοῦ νέου κύκλου εἶναι τό σημεῖο $(1, 0)$ καί ἡ ἀκτίνα του θά εἶναι $\rho = 3$.

iii)"Αν σκεφτοῦμε ἀνάλογα, θά δοῦμε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $3z$ εἶναι τά σημεῖα μιᾶς περιφέρειας κέντρου $(0,0)$ καί ἀκτίνας $\rho = 9$. Ἄρα οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $j = 3z - 1$ εἶναι τά σημεῖα τῆς περιφέρειας μέ κέντρο $(-1,0)$ καί ἀκτίνα $\rho = 9$.

13. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $1 \leqslant |z - i| \leqslant 3$.

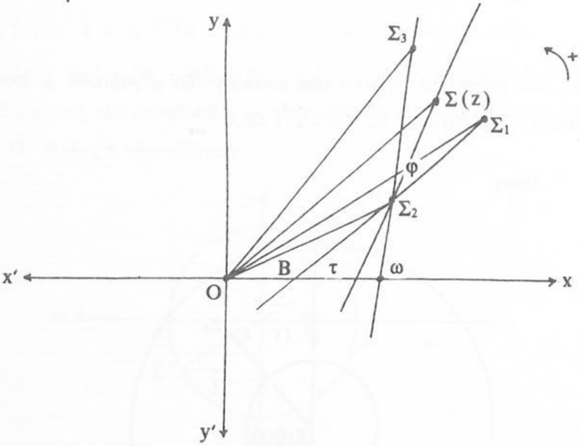
Λύση



Ἔστω Σ_1 ἡ εἰκόνα ἑνός μιγαδικοῦ z πού ἐπαληθεύει τή δοθεῖσα σχέση. Ἄν Σ ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z = i$ γνωρίζουμε ὅτι $\Sigma\Sigma_1 = |z - i|$. Ἄρα πρέπει $1 \leqslant \Sigma\Sigma_1 \leqslant 3$. Ἡ σχέση αὐτή μᾶς λέει ὅτι τά σημεῖα Σ_1 εἶναι σημεῖα τῆς κυκλικῆς στεφάνης πού ὁρίζεται ἀπό τούς κύκλους $(\Sigma,1)$, $(\Sigma,3)$.

14. i)Ἔστω $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3. Νά ὑπολογιστεῖ ἡ θετική γωνία $\widehat{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$. **ii)** Νά βρεθεῖ ἡ σχέση πού πρέπει νά πληροῦν οἱ μιγαδικοί z, ὥστε οἱ εἰκόνες τους νά εἶναι ἐσωτερικά σημεῖα τῆς γωνίας $\widehat{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$.

Λύση



i)Ἔστω $\hat{\varphi}$ ἡ ζητούμενη γωνία. Προφανῶς $\hat{\varphi} = \widehat{B\Sigma_2 A} = \hat{\omega} - \hat{\tau}$ (1). Ἡ θετική γωνία $\hat{\varphi} = \hat{\omega} - \hat{\tau}$ ἔχει ἀρχική πλευρά τή $\Sigma_2\Sigma_1$ καί τελική πλευρά τή $\Sigma_2\Sigma_3$. Ἐπειδή $\overrightarrow{\Sigma_2\Sigma_1} = \overrightarrow{O\Sigma_1} - \overrightarrow{O\Sigma_2} = z_1 - z_2$, καί ἡ γωνία $\hat{\tau} = \widehat{xB\Sigma_1}$ εἶναι ἡ θετική γωνία πού σχηματίζει τό διάνυσμα $\overrightarrow{\Sigma_1\Sigma_2}$ μέ τόν ἄξονα xx', θά εἶναι $\operatorname{Arg}(z_1 - z_2) = \tau$ (2). Ἐπίσης

$\overrightarrow{\Sigma_2\Sigma_3} = \overrightarrow{O\Sigma_3} - \overrightarrow{O\Sigma_2} = z_3 - z_2$. Ἄρα $\operatorname{Arg}(z_3 - z_2) = \omega$ (3).

Ἀπό τίς σχέσεις (1), (2), (3) προκύπτει

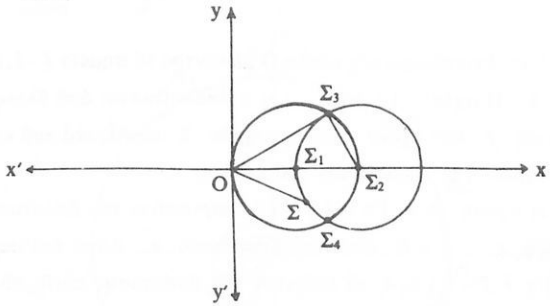
$\hat{\varphi} = \operatorname{Arg}(z_3 - z_2) - \operatorname{Arg}(z_1 - z_2) = \operatorname{Arg}\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$ διότι $\operatorname{Arg}\dfrac{\theta_1}{\theta_2} = \operatorname{Arg}\theta_1 - \operatorname{Arg}\theta_2$. Ἄρα ἡ θετική πρωτεύουσα γωνία

$\widehat{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$ τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 εἶναι $\operatorname{Arg}\dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}$.

ii)"Εστω Σ ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ z. Θά βροῦμε τή συνθήκη ὥστε τό Σ νά εἶναι ἐντός τῆς θετικῆς πρωτεύουσας γωνίας $\widehat{\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3}$. Ὑπάρχει ἡ προφανής σχέση $\hat{\tau} < \hat{\rho} < \hat{\omega}$. Ἀπό τή σχέση αὐτή προκύπτει ἡ ζητούμενη $\operatorname{Arg}(z_1 - z_2) < \operatorname{Arg}(z - z_2) < \operatorname{Arg}(z_3 - z_2)$.

15."Αν $|z - 1| \leqslant 1$ καί $|z - 2| = 1$ δεῖξτε ὅτι $1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{3}$, $z \in C$.

Λύση

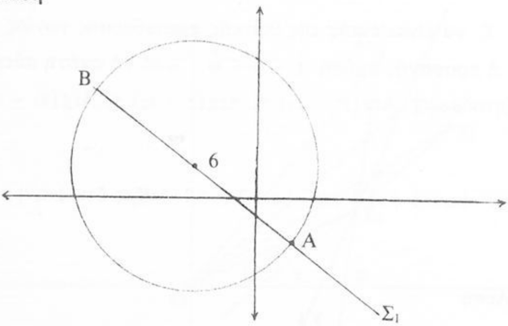


Ἡ σχέση $|z - 1| \leqslant 1$ ἐπαληθεύεται μέ ὅλους τούς μιγαδικούς πού ἔχουν εἰκόνες στό ἐσωτερικό ἤ τήν περιφέρεια τοῦ κύκλου μέ κέντρο τό σημεῖο Σ_1 πού εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_1 = 1 + 0i$ καί ἀκτίνα $\rho_1 = 1$. Ἡ σχέση $|z - 2| = 1$ ἐπαληθεύεται ἀπό τούς μιγαδικούς πού ἔχουν εἰκόνες πάνω στήν περιφέρεια κέντρου Σ_2, πού εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_2 = 2 + 0i$ καί ἀκτίνα $\rho_2 = 1$. Γιά νά ἰσχύουν συγχρόνως καί οἱ δύο σχέσεις πρέπει ἡ εἰκόνα Σ τοῦ τυχαίου μιγαδικοῦ z νά εἶναι σημεῖο τοῦ τόξου $\widehat{\Sigma_3\Sigma_1\Sigma_4}$. Ἀλλά $O\Sigma = |z|$ καί $O\Sigma_1 \leqslant O\Sigma \leqslant O\Sigma_3$. Ἀλλά $O\Sigma_1 = 1$ καί $O\Sigma_3 = \sqrt{O\Sigma_2^2 - \Sigma_2\Sigma_3^2} = \sqrt{3}$. "Αρα $1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{3}$.

16. Νά βρεθοῦν τό max καί τό min τῆς παράστασης

$$A = | z - 4 + 7i | \quad \text{ὅταν} \quad | z + 2 - i | \leqslant 4.$$

Λύση



Κατασκευάζουμε τόν κύκλο Ο μέ κέντρο τό σημεῖο $(-2, 1)$ καί ἀκτίνα 4. Ἡ σχέση $| z + 2 - i | \leqslant 4$ ἐπαληθεύεται ἀπό ὅλους τούς μιγαδικούς z πού ἔχουν εἰκόνες σημεῖα Σ ἐσωτερικά τοῦ κύκλου Ο, ἤ σημεῖα τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου Ο.

Ἡ σχέση $A = | z - 4 + 7i |$ παριστάνει τήν ἀπόσταση τοῦ μιγαδικοῦ $z_1 = 4 - 7i$ ἀπό τούς μιγαδικούς z. Λόγω τοῦ περιορισμοῦ $| z + 2 - i | \leqslant 4$ τό ἐλάχιστο τῆς ἀπόστασης αὐτῆς εἶναι τό μῆκος $\Sigma_1 A$ καί τό μέγιστο εἶναι τό $\Sigma_1 B$. Ἄρα

$A_{max} = \Sigma_1 B = \Sigma_1 O + OB$. Ἀλλά $\Sigma_1 \Sigma = | (-2 + i) - (4 - 7i) | =$

$$= | -6 + 8i | = \sqrt{100} = 10.$$

Ἑπομένως $A_{max} = 10 + 4 = 14$ καί $A_{min} = \Sigma_1 O - OA = 10 - 4 = 6$.

Ὑπάρχει καί ἡ ἀλγεβρική λύση τοῦ προβλήματος, πού εἶναι ἡ ἑξῆς:

$A = | z - 4 + 7i | = | (z + 2 - i) - (6 - 8i) | \leqslant | z + 2 - i | + | 6 - 8i | \leqslant$

$$\leqslant 4 + 10 = 14. \text{ Ἄρα } A_{max} = 14.$$

$$A = | z - 4 + 7i | = | (z + 2 - i) - (6 - 8i) | =$$
$$= | 6 - 8i - (z + 2 - i) | \geqslant | 6 - 8i | - | z + 2 - i | \geqslant 10 - 4 = 6.$$

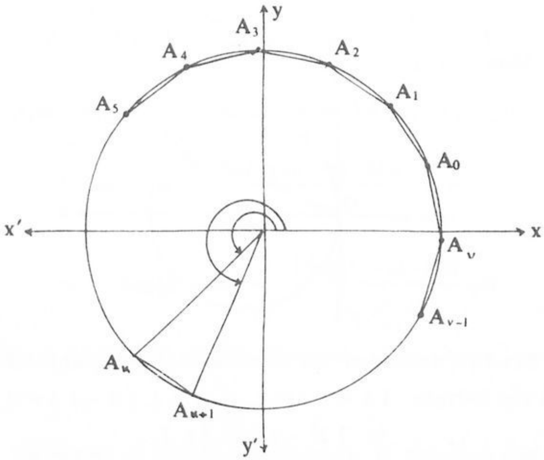
$A_{min} = 6.$

17. Δίνεται ἡ ἐξίσωση $z^{\nu} - \rho = 0$. Δεῖξτε ὅτι οἱ ρίζες της

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\,(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\,\eta\mu\,\frac{\theta + 2k\pi}{\nu})$$

παριστάνουν στό μιγαδικό ἐπίπεδο κορυφές κανονικοῦ ν-γώνου ἐγ-γεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας $\sqrt[\nu]{\rho}$ καί κέντρου Ο.

Λύση



Προφανῶς $| z_k | = \sqrt[\nu]{\rho}$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu\text{-}1$. Ἄρα τά σημεῖα Σ_k εἶναι σημεῖα μιᾶς περιφέρειας ἑνός κύκλου κέντρου Ο καί ἀκτίνας $\sqrt[\nu]{\rho}$. Ἐπίσης

$$\operatorname{Arg} z_k = \frac{\theta + 2k\pi}{\nu}, \quad \operatorname{Arg} z_{k+1} = \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{\nu}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1.$$

Ἄρα $\quad Arg z_{k+1} - Arg z_k = \dfrac{\theta + 2(k+1)\pi}{\nu} - \dfrac{\theta + 2k\pi}{\nu} = \dfrac{2\pi}{\nu}$

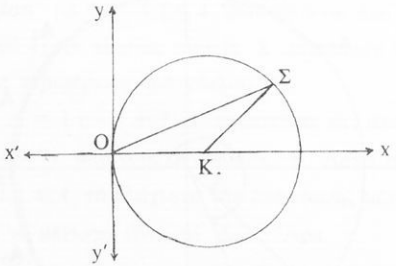
Παρατηροῦμε ὅτι ἡ κεντρική γωνία τοῦ πολυγώνου $A_0A_1\ldots A_\nu$ εἶναι σταθερή. Ἄρα τοῦτο εἶναι κανονικό.

18. Μία περιφέρεια ἔχει κέντρο τό σημεῖο $K(1,0)$ καί ἀκτίνα $\rho = 1$. Ἄν τό σημεῖο Σ, πού εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ z, εἶναι σημεῖο αὐτῆς τῆς περιφέρειας, δεῖξτε ὅτι

i) $|z^2 - z| = |z|$

ii) $Arg(z-1) = Arg z^2 - 2k\pi = \dfrac{2Arg(z^2 - z) - 2k\pi}{3}$

Λύση



i) Ἐπειδή ἡ ἀπόσταση ΚΣ εἶναι $K\Sigma = |z-1|$ καί $K\Sigma = 1$, θά ἔχουμε τήν ἰσότητα $|z-1| = 1$ ἤ $|z|.|z-1| = |z| \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow |z^2 - z| = |z|.$$

ii) Ἔστω $Arg(z-1) = \varphi$ καί $Arg z = \theta$. Τότε θά εἶναι

$$z - 1 = \sigma\upsilon\nu\varphi + i\eta\mu\varphi \Leftrightarrow z = (1 + \sigma\upsilon\nu\varphi) + i\eta\mu\varphi$$

Ἐπειδή ὅμως $Arg z = \theta$, θά ἔχουμε

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu\varphi}{|z|} \; (1) \qquad \text{καί} \qquad \eta\mu\theta = \frac{\eta\mu\varphi}{|z|} \; (2)$$

Διαιρώντας τίς σχέσεις (1), (2) ἔχουμε ὅτι $\quad εφθ = \dfrac{ημφ}{1+συνφ} =$

$$= \frac{2ημ\dfrac{φ}{2}συν\dfrac{φ}{2}}{2συν^2\dfrac{φ}{2}} = εφ\frac{φ}{2}. \quad \text{Ἄρα} \quad θ = \frac{φ}{2} + λπ\,, \quad λ \in R$$

$$\text{Ἄρα} \quad 2θ = φ + 2λπ \Leftrightarrow φ = 2θ - 2λπ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Arg(z-1) = 2Arg z - 2λπ \Leftrightarrow Arg(z-1) = Arg z^2 - 2λπ \;(3).$$

Ἐπίσης $Arg(z^2 - z) = Arg z(z-1) = Arg z + Arg(z-1) =$

$$= θ + φ = \frac{φ}{2} + φ + λπ = \frac{3φ}{2} + λπ.$$

Ἄρα $2Arg(z^2 - z) = 3φ + 2λπ \Leftrightarrow 2Arg(z^2 - z) - 2λπ = 3φ \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad φ = \frac{2Arg(z^2-z)-2λπ}{3} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad Arg(z-1) = \frac{2Arg(z^2-z)-2λπ}{3} \;(4).$$

Ἀπό τίς σχέσεις (3), (4) προκύπτει τό ζητούμενο.

19. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων $Σ$ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $z\bar{z} + 3(z + \bar{z}) = 7$.

Λύση

Θέτουμε $z = x + iy$, ὁπότε ἡ δοθείσα σχέση γράφεται

$$(x+iy).(x-iy) + 3(x+iy+x-iy) = 7 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 6x = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + 6x + 9 + y^2 - 9 = 7 \ \Leftrightarrow\ (x+3)^2 + y^2 = 16 \ \Leftrightarrow$$

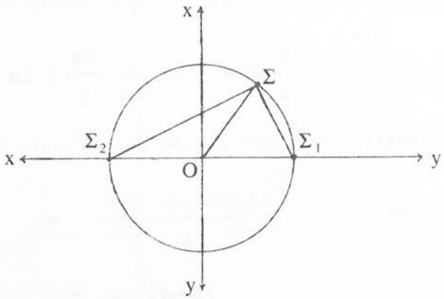
$$\Leftrightarrow\ |\, z + 3 \,| = 16 \ \Leftrightarrow\ |\, z + 3 \,| = 4.$$

Ἄρα τό ζητούμενο σημειοσύνολο εἶναι περιφέρεια κύκλου κέντρου $(3,0)$ καί ἀκτίνας $\rho = 4$.

20. Νά βρεθοῦν οἱ μιγαδικοί z γιά τούς ὁποίους ἔχουμε

$$|\, z - 1 \,|^2 + |\, z + 1 \,|^2 = 4$$

Λύση



Ἔστω Σ ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ z πού ἐπαληθεύει τή δοθεῖσα ἰσότητα. Παρατηροῦμε ὅτι ἡ ἰσότητα γράφεται

$$|\, z - (1 + 0i) \,|^2 + |\, z - (-1 + 0i) \,|^2 = 4$$

Ἄν Σ_1 καί Σ_2 οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 = 1 + 0i$ καί $z_2 = -1 + 0i$, θά ἔχουμε τήν ἰσότητα $\Sigma\Sigma_1^2 + \Sigma\Sigma_2^2 = 4$. Ἄρα τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Σ ἀπό δύο σταθερά σημεῖα Σ_1 καί Σ_2 εἶναι σταθερό. Ἀπό τό 1ο Θ. τῶν διαμέσων στό τρίγωνο

$\Sigma_1\Sigma_2\Sigma$ ἔχουμε $\quad \Sigma\Sigma_1^2 + \Sigma\Sigma_2^2 = 2\Sigma O^2 + \dfrac{(\Sigma_1\Sigma_2)^2}{2} \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 2(\Sigma O)^2 + \frac{(\Sigma_1\Sigma_2)^2}{2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Sigma O^2 + \frac{4}{2} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2\Sigma O^2 = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ $\Sigma O^2 = 1$ $\Leftrightarrow$ $\Sigma O = 1$. Οἱ συν/νες τοῦ σημείου Ο εἶναι προφανῶς (0,0). Ἄρα τό Σ ἀπέχει ἀπό τό σταθερό σημεῖο Ο(0,0) σταθερή ἀπόσταση $\Sigma O = 1$ καί ἑπομένως βρίσκεται στήν περιφέρειας ἑνός κύκλου κέντρου (0,0) καί ἀκτίνας $\rho = 1$.

21. Δεῖξτε ὅτι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί πού ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση

$$\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda \,, \quad \lambda \neq 1$$

καί z_1, z_2 γνωστοί μιγαδικοί ἀριθμοί ἔχουν εἰκόνες στήν περιφέρεια ἑνός κύκλου μέ κέντρο τήν εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ

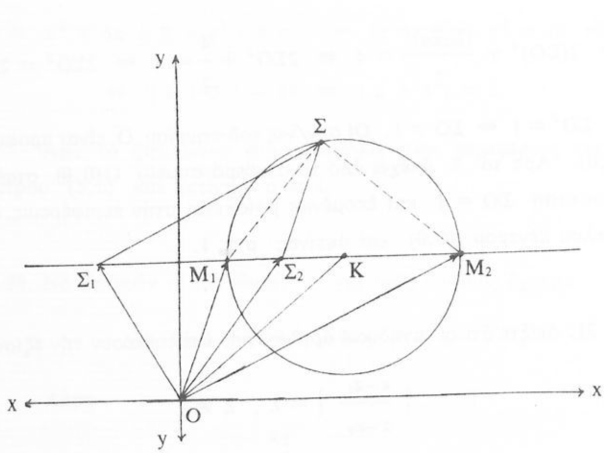
$$z_0 = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \quad \text{καί ἀκτίνα} \quad \rho = \lambda \frac{|z_1^2 - z_2^2|}{|1-\lambda^2|}$$

Λύση

Ἔστω Σ, Σ_1, Σ_2 οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z, z_1, z_2 ἀντίστοιχα, στό μιγαδικό ἐπίπεδο. Ἡ σχέση

$$\left| \frac{z-z_1}{z-z_2} \right| = \lambda \quad \text{μᾶς δίνει τήν ἰσότητα} \quad \frac{\Sigma\Sigma_1}{\Sigma\Sigma_2} = \lambda.$$

Παρατηροῦμε ὅτι τό σημεῖο Σ ἀπέχει ἀπό τά σταθερά σημεῖα Σ_1, Σ_2 ἀποστάσεις τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι σταθερός. Ἄρα σύμφωνα μέ γνωστό θεώρημα τῆς γεωμετρίας, τό σημεῖο Σ εἶναι σημεῖο τῆς περιφέρειας ἑνός κύκλου μέ διάμετρο M_1M_2, ὅπου τά M_1, M_2 εἶναι συζυγή ἁρμονικά τῶν Σ_1, Σ_2 μέ λόγο ἁρμονικότητας λ (Ἀπολλώνιος κύκλος).



Ἄρα θά ἔχουμε τίς ἰσότητες

$$\frac{M_1\Sigma_1}{M_1\Sigma_2} = \lambda \ (1) \qquad \text{καί} \qquad \frac{M_2\Sigma_1}{M_2\Sigma_2} = \lambda \ (2).$$

Ἔστω j_1 καί j_2 οἱ μιγαδικοί πού ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα M_1 καί M_2. Οἱ ἀντίστοιχες διανυσματικές ἰσότητες τῶν (1), (2) εἶναι

$$\frac{\overrightarrow{M_1\Sigma_1}}{\overrightarrow{M_1\Sigma_2}} = -\lambda \ (3) \qquad \text{καί} \qquad \frac{\overrightarrow{M_2\Sigma_1}}{\overrightarrow{M_2\Sigma_2}} = \lambda \ (4).$$

Ἀπό τήν (3) ἔχουμε $\overrightarrow{O\Sigma_1} - \overrightarrow{OM_1} = -\lambda(\overrightarrow{O\Sigma_2} - \overrightarrow{OM_1}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O\Sigma_1} - \overrightarrow{OM_1} = -\lambda\overrightarrow{O\Sigma_2} + \lambda\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow \overrightarrow{O\Sigma_1} + \lambda\overrightarrow{O\Sigma_2} = (1+\lambda)\overrightarrow{OM_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_1} = \frac{\overrightarrow{O\Sigma_1} + \lambda\overrightarrow{O\Sigma_2}}{1+\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad j_1 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \ (5).$$

Ἀπό τήν (4) ἔχουμε: $\overrightarrow{O\Sigma_1} - \overrightarrow{OM_2} = \lambda(\overrightarrow{O\Sigma_2} - \overrightarrow{OM_2}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{O\Sigma_1} - \overrightarrow{OM_2} = \lambda\overrightarrow{O\Sigma_2} - \lambda\overrightarrow{OM_2} \Leftrightarrow (1-\lambda)\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{O\Sigma_1} - \lambda\overrightarrow{O\Sigma_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OM_2} = \frac{\overrightarrow{O\Sigma_1} - \lambda\,\overrightarrow{O\Sigma_2}}{1-\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad j_2 = \frac{z_1 - \lambda z_2}{1-\lambda} \ (6).$$

Ἡ ἀπόσταση M_1M_2 μᾶς δίνει τή διάμετρο τοῦ ζητούμενου κύκλου. Ἀπό τίς (5), (6) ἔχουμε:

$$M_1M_2 = |j_1 - j_2| = \left| \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} - \frac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda} \right| =$$

$$= \left| \frac{z_1 - \lambda z_1 + \lambda z_2 - \lambda^2 z_2 - z_1 + \lambda z_2 - \lambda z_1 + \lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \right| =$$

$$= \left| \frac{2\lambda z_2 - 2\lambda z_1}{1-\lambda^2} \right| = 2\lambda \frac{|z_2 - z_1|}{|1-\lambda^2|}.$$

Ἄρα ἡ ἀκτίνα τοῦ ζητούμενου κύκλου εἶναι $\rho = \lambda \dfrac{|z_2 - z_1|}{|1-\lambda^2|}$ (7).

Ἄν K τό κέντρο αὐτοῦ τοῦ κύκλου ἔχουμε

$$\overrightarrow{OK} = \frac{\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = \frac{j_1 + j_2}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad z_0 = \frac{\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} + \dfrac{z_1-\lambda z_2}{1-\lambda}}{2} =$$

$$= \frac{z_1 - \lambda z_1 + \lambda z_2 - \lambda^2 z_2 + z_1 - \lambda z_2 + \lambda z_1 - \lambda^2 z_2}{2(1-\lambda^2)} =$$

$$= \frac{2(z_1 - \lambda^2 z_2)}{2(1-\lambda^2)} = \frac{z_1 - \lambda^2 z_2}{1-\lambda^2} \ (8).$$

Ἀπό τίς (7) καί (8) προκύπτουν τά ζητούμενα.

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗ ΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.Ἂν Σ_1, Σ_2 εἶναι οἱ εἰκόνες δύο μιγαδικῶν z_1, z_2 τότε:

i) Εἶναι σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα xOx' ὅταν

$$Re(z_1) = Re(z_2) \quad \text{καί} \quad Im(z_1) = -Im(z_2).$$

ii) Εἶναι σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τόν ἄξονα yOy' ὅταν

$$Re(z_1) = -Re(z_2) \quad \text{καί} \quad Im(z_1) = Im(z_2).$$

iii) Εἶναι σημεῖα συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχή O ὅταν

$$Re(z_1) = -Re(z_2) \quad \text{καί} \quad Im(z_1) = -Im(z_2)$$

2.Ἂν Σ_1, Σ_2 εἶναι οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2 καί O ἡ ἀρχή τῶν συν/νων τότε

$$\widehat{\Sigma_1 O \Sigma_2} = |\,Argz_2 - Argz_1\,| = \left|\,Arg\frac{z_2}{z_1}\,\right|.$$

3.Ἂν $Re(z) = Im(z)$, τότε ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ z εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς 1ης γωνίας τῶν ἀξόνων, ἐνῶ ὅταν $Re(z) =$

$=$ - Im(z) εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς 2ης γωνίας τῶν ἀξόνων.

4. Ἡ σύγκριση μηκῶν στό μιγαδικό ἐπίπεδο ἀνάγεται πάντοτε στή σύγκριση τῶν μέτρων τῆς διαφορᾶς τῶν ἀντιστοίχων μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

5. Ἡ ἐπίλυση ἑνός προβλήματος πού ἀναφέρεται στό μιγαδικό ἐπίπεδο μπορεῖ νά γίνει ὡς ἑξῆς:

i) Ἀντικαθιστώντας τό μιγαδικό z μέ x + iy, ὁπότε ἔχουμε ἀλγεβρική λύση.

ii) Ἀντικαθιστώντας τούς μιγαδικούς μέ τά ἀντίστοιχα διανύσματα θέσης καί ἐργαζόμενοι διανυσματικά.

iii) Ἀντικαθιστώντας —ἐφόσο τοῦτο εἶναι δυνατό— τίς διαφορές τῶν μέτρων τῶν μιγαδικῶν πού τυχόν ὑπάρχουν στό πρόβλημα μέ μήκη εὐθυγράμμων τμημάτων, ὁπότε τό πρόβλημά μας θά ἀναχθεῖ σέ κάποιο γνωστό γεωμετρικό πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἐπαληθεύουν τή σχέση

i) $|z+1| = |z-2i|$

ii) $|z-i| = 2|z+i|$

iii) $|Re(z)| + |Im(z)| \leqslant 1$ καί $|z| \geqslant 1$

2. Ἄν $\Sigma_1\Sigma_2\ldots\Sigma_\nu$ εἶναι κορυφές κανονικοῦ πολυγώνου ἐγγεγραμμένου στό μοναδιαῖο κύκλο, δεῖξτε ὅτι

$$(\Sigma_1\Sigma_2)(\Sigma_1\Sigma_3)\ldots(\Sigma_1\Sigma_\nu) = \nu.$$

3. Νά βρεθεῖ ἡ ἐξίσωση τοῦ κύκλου πού περνάει ἀπό τά σημεῖα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 = 1-4i$, $z_2 = 5-3i$, $z_3 = 1-3i$.

4. Νά λυθεῖ ἡ ἐξίσωση $|z-3i|^2 + |z-1-2i|^2 = 16$.

5. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν εἰκόνων τῶν μιγαδικῶν z γιά τούς ὁποίους ἡ παράσταση $\dfrac{iz^2}{z+1}$, $z \neq -1$ εἶναι καθαρά φανταστικός ἀριθμός.

6. Νά βρεθοῦν οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3 - 2i$, $z_3 = 6$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο καί νά ἐξεταστεῖ τί σχῆμα εἶναι τό $ΟΣ_1Σ_2Σ_3$, ὅπου Ο ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων καί $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3.

7. Ἄν $\dfrac{z_3 - z_1}{z_1 - z_2} = \dfrac{z_2 - z_3}{z_3 - z_1}$, δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_2$ τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 στό μιγαδικό ἐπίπεδο εἶναι κορυφές ἰσοπλεύρου τριγώνου.

8. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἐπαληθεύουν τήν ἰσότητα $\operatorname{Arg}\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

9. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἐπαληθεύουν τίς σχέσεις $|z - 1 - 2i| \leqslant 1$ καί $|z| \geqslant 5$.

10. Ἄν $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ καί $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, δεῖξτε ὅτι τά σημεῖα $Σ_1$, $Σ_2$, $Σ_3$ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 ἀνήκουν σέ περιφέρεια μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

11. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν πού ἐπαληθεύουν τή σχέση $\mathrm{Re}\left(\frac{z-2i}{2z-1}\right)=0$.

12. Νά ὁριστοῦν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z, ὥστε ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων Ο νά εἶναι τό κέντρο τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περί τό τρίγωνο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$, ὅπου $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z, z^2, z^3 ἀντίστοιχα.

13. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z, οἱ ὁποῖοι ἐπαληθεύουν τίς παρακάτω σχέσεις ξεχωριστά:

i) $|z| = |z-2|$

ii) $|z+2| > 4$

iii) $1 \leqslant |z+4i| \leqslant 5$

iv) $\mathrm{Re}(z+5+7i) = \mathrm{Im}(z-2-6i)$

v) $|z+8+2i| = |z-6+2i| = |z-4-4i|$

14. Δεῖξτε ὅτι ἄν $|z-2-i| \leqslant 2$, τότε $\sqrt{5}-2 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{5}+2$.

15. Δεῖξτε ὅτι

$\{z: |z-2+7i| \geqslant 10\} \cap \{z: |z+4+2i| \leqslant 2\} = \varnothing$

16. Ἄν οἱ τρεῖς κορυφές ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_1 = -3+2i$, $z_2 = -1-i$, $z_3 = 4-3i$, νά βρεθεῖ ὁ μιγαδικός πού ἀντιστοιχεῖ στήν τέταρτη κορυφή.

17. Ἄν τά σημεῖα Σ_1, Σ_2 εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2 καί

$z_1 . z_2 \neq 0$ δεῖξτε ὅτι

i) $O\Sigma_1 \perp O\Sigma_2 \Leftrightarrow z_2 = \lambda z_1 i$, $\lambda \in R$

ii) $O\Sigma_1 \perp O\Sigma_2 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$.

18. Τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν z_1, z_2, z_3, z_4. Δεῖξτε ὅτι $\Sigma_1\Sigma_2 \perp \Sigma_3\Sigma_4 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow z_1\bar{z}_3 + \bar{z}_1 z_3 + z_2\bar{z}_4 + \bar{z}_2 z_4 = z_1\bar{z}_4 + \bar{z}_1 z_4 + z_2\bar{z}_3 + \bar{z}_2 z_3$$

19. Νά βρεθοῦν τά σημεῖα Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἐπαληθεύουν μία ἀπό τίς παρακάτω σχέσεις ξεχωριστά:

i) $\arg z = \frac{2\pi}{3}$, ii) $\arg(z - 3i) = 0$, iii) $\arg(z + 4) \leqslant \frac{\pi}{2}$

iv) $\arg(z + 3 + i) > 0$, v) $\frac{\pi}{4} \leqslant \arg(z + 4 - 2i) \leqslant \frac{\pi}{3}$

20. Νά βρεθεῖ ἡ τομή τῶν συνόλων

$$\{ z: | z - 4 - 2i | \leqslant 3 \} \cap \{ z: \arg(z + 1 + 2i) \geqslant \frac{\pi}{4} \}$$

21. Ἄν $k \in R$ καί $| z | \leqslant k$ δεῖξτε ὅτι $0 \leqslant | z + k | \leqslant 2k$ καί $-\frac{\pi}{2} < \arg(z + k) < \frac{\pi}{2}$. Βρεῖτε τή μέγιστη καί τήν ἐλάχιστη τιμή τοῦ $| z + 2k |$ καί τοῦ $\text{Arg}(z + 2k)$.

22. Δεῖξτε ὅτι

$$\{ z: \arg(z - 1) = \arg(z + 1) + \frac{\pi}{4} \} \subseteq \{ z: | z - i | = \sqrt{2} \}$$

23. Τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3, z_4 ἀντίστοιχα. Δεῖξτε ὅτι

i) Ἄν $z_1 - z_2 + z_3 - z_4 = 0$, τό $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι παραλληλόγραμμο.

ii) Ἄν $z_1 + iz_2 - z_3 - iz_4 = 0$, τό $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι τετράγωνο.

24. Δίνεται ὅτι τό τετράπλευρο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$ εἶναι ἕνα τετράγωνο τοῦ μιγαδικοῦ ἐπιπέδου. Ἄν τό σημεῖο Σ_1 εἶναι εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_1 = 3 + 2i$ καί τό Σ_4 εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_4 = 4 + 3i$, βρεῖτε τούς μιγαδικούς z_2, z_3 πού ἔχουν εἰκόνες τά σημεῖα Σ_2 καί Σ_3.

25. Νά βρεθεῖ ὁ $\alpha \in R$ ὅταν γνωρίζουμε ὅτι ἡ εἰκόνα Σ τοῦ μιγαδικοῦ $z = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{2+3i}{3+i}$ εἶναι σημεῖο τῆς διχοτόμου τῆς 1ης γωνίας τῶν ἀξόνων.

26. Ἔστω Σ_1 ἡ εἰκόνα τοῦ μιγαδικοῦ $z_1 = 1$ καί Σ ἡ εἰκόνα τοῦ τυχόντα μιγαδικοῦ z.

i) Νά βρεθεῖ ἡ συνθήκη ὥστε $\Sigma O \perp \Sigma\Sigma_1$, ὅπου O ἡ ἀρχή τῶν ἀξόνων.

ii) Ἄν $z = \dfrac{1}{1+ki}$, $k \in R$ νά δειχτεῖ ὅτι ἡ εἰκόνα τοῦ z εἶναι κύκλος μέ διάμετρο τή μονάδα.

27. Ἄν $|z_1 - 2i| = 2$ καί $|z_2 - 4| = 1$ νά βρεθεῖ τό μέγιστο καί τό ἐλάχιστο τῆς παράστασης $|z_1 - z_2|$.

28. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $z + \bar{z} = k \mid z \mid$ ὅπου k ἀκέραιος.

29. Νά βρεθεῖ τό σύνολο τῶν σημείων Σ πού εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z πού ἱκανοποιοῦν τή σχέση $z^3 \geqslant 8$.

30."Αν τά σημεῖα Σ_1, Σ_2, Σ_3 εἶναι εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν z_1, z_2, z_3 καί $z_3 = (1 - k)z_1 + kz_2$ δεῖξτε ὅτι:

i)"Αν $k \in R$, τότε τό σημεῖο Σ_3 εἶναι σημεῖο τῆς εὐθείας $\Sigma_1\Sigma_2$ καί διαιρεῖ τό εὐθ. τμῆμα $\Sigma_1\Sigma_2$ σέ λόγο $\dfrac{1}{1-k}$.

ii)"Αν $k \in C$, τότε στό τρίγωνο $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3$ θά ἔχουμε

$$\frac{\Sigma_1\Sigma_3}{\Sigma_1\Sigma_2} = \mid k \mid \quad \text{καί} \quad \Sigma_2\hat{\Sigma}_1\Sigma_3 = \text{Argk}.$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ

1. Πῶς ὁρίζεται τό σύνολο C τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν; Ποιά εἶναι ἡ γενική μορφή τῶν στοιχείων τοῦ C; Ποιά σχέση ἔχουν τά σύνολα R καί C;

2. Πῶς ὁρίζεται τό σύνολο $C - R$; Ποιά σχέση ἔχουν τά σύνολα $C - R$ καί C; Ποιά σχέση ἔχουν τά σύνολα $C - R$ καί R;

3. Πῶς ὁρίζονται οἱ πράξεις "+" καί "." (πρόσθεση καί πολ/σμός) στό C;

4. Δεῖξτε ὅτι $i^2 = -1$.

5. Βρεῖτε τίς διαφορετικές τιμές τῆς παράστασης, i^ν, $\nu \in N$.

6. Ποιό εἶναι τό οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς πρόσθεσης καί ποιό τό οὐδέτερο στοιχεῖο τοῦ πολ/μοῦ στό σύνολο C;

7. Δεῖξτε ὅτι $z_1(z_2 + z_3) = z_1.z_2 + z_1z_3$, $\forall z_1, z_2, z_3 \in C$.

8. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $z_1 + z = z_2$, $z_1, z_2 \in C$ ἔχει μοναδική λύση στό C τή $z = z_2 + (-z_1)$.

9. Δεῖξτε ὅτι ἡ ἐξίσωση $z_1.z = z_2$, $z_1, z_2 \in C$ ἔχει μοναδική λύση στό C τή $z = z_2.z_1^{-1}$, $z_1 \neq 0$.

10. Πῶς ὁρίζεται ὁ συζυγής δοθέντος μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$; Ποιές ἰδιότητες γνωρίζετε γιά τούς συζυγεῖς μιγαδικούς;

11. Τί σημαίνουν οἱ ἰσότητες **α)** $z = \bar{z}$, **β)** $z + \bar{z} = 0$;

12. Ἄν $z_1, z_2 \in C$, $(z_1 + z_2) \in R$, $(z_1z_2) \in R$, τί συμπεραίνουμε γιά τούς μιγαδικούς z_1 καί z_2;

13. Πῶς ὁρίζεται ἡ τετραγωνική ρίζα δοθέντος μιγαδικοῦ z; Ἐξηγῆστε γιατί κάθε μιγαδικός z ἔχει ἀκριβῶς δύο διακεκριμένες τετραγωνικές ρίζες;

14. Πῶς ὁρίζεται τό μέτρο δοθέντος μιγαδικοῦ z; Ποιές ἰδιότητες γνωρίζετε;

15. Πότε ἰσχύει ἡ ἰσότητα $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$;

16. Δεῖξτε ὅτι $|z_1 + z_2 + \ldots + z_\nu| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_\nu|$. Πότε ἰσχύει τό ἴσον;

17. Περιγράψτε τό μιγαδικό ἐπίπεδο. Πῶς βρίσκουμε τήν εἰκόνα ἑνός μιγαδικοῦ στό μιγαδικό ἐπίπεδο;

18. Τί παριστάνει τό μέτρο ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ στό μιγαδικό ἐπίπεδο;

19. Ἄν $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ καί $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ δύο μιγαδικοί, σχεδιάστε τό ἄθροισμα καί τή διαφορά τους στό μιγαδικό ἐπίπεδο.

20. Ἄν $z_1 = \alpha + i\beta$ εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός μέ εἰκόνα τό σημεῖο Σ_1 καί Σ_2, Σ_3, Σ_4 οἱ εἰκόνες τῶν μιγαδικῶν $z_2 = \alpha - i\beta$, $z_3 = -\alpha + i\beta$, $z_4 = -\alpha - i\beta$. Τί σχῆμα εἶναι τό $\Sigma_1\Sigma_2\Sigma_3\Sigma_4$;

21. Τί παριστάνουν οἱ σχέσεις $|z| \geqslant \rho$ καί $|z - z_0| \leqslant \rho$ στό μιγαδικό ἐπίπεδο;

22. Βρεῖτε τίς πολικές συντεταγμένες τοῦ μιγαδικοῦ $z = \alpha + \beta i$ καί γράψτε τον στήν τριγωνομετρική του μορφή.

23. Τί ὀνομάζουμε πρωτεῦον ὄρισμα ἑνός μιγαδικοῦ z καί ποιά ἡ διαφορά ἀπό τό ὄρισμα τοῦ z;

24. Δεῖξτε ὅτι $\mathrm{Arg}z^{-1} + \mathrm{Arg}z = 0$.

25. Ἀποδεῖξτε τόν τύπο τοῦ De Moivre.

26. Δεῖξτε ὅτι $\operatorname{Arg}(z^{\nu}) = \nu \operatorname{Arg}z$ καί $\operatorname{Arg}(z^{-\nu}) = -\nu \operatorname{Arg}(z)$, $\nu \in N$.

27. Δεῖξτε ὅτι $\operatorname{Arg}(z^{\frac{1}{\nu}}) = \dfrac{\operatorname{Arg}z}{\nu}$ καί

$$\arg(z^{\frac{1}{\nu}}) = \frac{\arg z + 2k\pi}{\nu}, \quad \nu \in N, \quad k \in Z.$$

28. Δεῖξτε ὅτι δύο μιγαδικοί $z_1 = \rho_1(\sigma\upsilon\nu\theta_1 + i\eta\mu\theta_1)$ καί $z_2 = \rho_2(\sigma\upsilon\nu\theta_2 + i\eta\mu\theta_2)$ εἶναι ἴσοι, ἄν καί μόνο ἄν $\rho_1 = \rho_2$ καί $\theta_2 - \theta_1 = 2k\pi$, $k \in R$.

29. Δεῖξτε ὅτι

$$2k\pi + \operatorname{Arg}(z_1 . z_2 ... z_\nu) = \operatorname{Arg}z_1 + \operatorname{Arg}z_2 + \ldots + \operatorname{Arg}z_\nu$$

$z_1, z_2, \ldots, z_\nu \in C$.

30. Δεῖξτε ὅτι ἄν $\xi = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ μέ $\rho \neq 0$, τότε οἱ μιγαδικοί

$$z_k = \sqrt[\nu]{\rho}\,\left(\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta + 2k\pi}{\nu} + i\eta\mu\,\frac{\theta + 2k\pi}{\nu}\right), \text{ ὅπου } k = 0, 1, 2, \ldots \nu - 1$$

εἶναι διαφορετικοί μεταξύ τους καί ἐπαληθεύουν τήν ἐξίσωση $z^{\nu} = \xi$.

31. Βρεῖτε τίς νιοστές ρίζες τῆς μονάδας καί δεῖξτε ὅτι $\omega_k = \omega_1^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$.

32. Δεῖξτε ὅτι οἱ εἰκόνες τῶν νιοστῶν ριζῶν ἑνός μιγαδικοῦ $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ εἶναι κορυφές κανονικοῦ ν-γώνου ἐγγεγραμμένου σέ κύκλο ἀκτίνας $\sqrt[\nu]{\rho}$ καί κέντρου μέ ἀρχή τό Ο.

33. Πότε ἔχει ἔννοια ἡ ἀνισότητα **i)** $z \geqslant 0$, **ii)** $z^2 < 0$;

34. Ποιό πρέπει νά εἶναι τό ὅρισμα ἑνός μιγαδικοῦ, ὥστε νά εἶναι αὐτός **i)** πραγματικός; **ii)** Καθαρός φανταστικός;