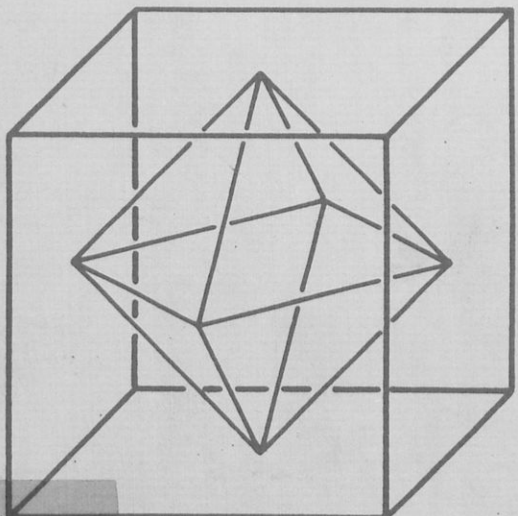
ΧΡΗΣΤΟΥ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

στοιχεια γεωμετριας

μερος β'
στερεομετρια



ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΑΦΩΝ ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΣΟΛΩΝΟΣ 99 - ΑΘΗΝΑΙ - ΤΗΛ. 612.412

Δ 2 ΜΜΙ

Παπανικολάου, Χρήστος Γ.

ΧΡΗΣΤΟΥ Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

μερος β'
στερεομετρια

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΕΡΩΝ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
"ΠΑΠΑΔΗΜΗΤΡΟΠΟΥΛΟΥ"
ΣΟΛΩΝΟΣ 99 - ΤΗΛ. 612412

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει τήν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τό ἀνά χεῖρας βιβλίον ἀποτελεῖ τό β΄ μέρος τοῦ ἔργου μου **"Στοιχεῖα Γεωμετρίας"** καί πραγματεύεται ἁπλᾶ καί διεξοδικά τήν Εὐκλείδειον Γεωμετρίαν τοῦ χώρου (Στερεομετρίαν).

Ἀπευθύνεται, ὅπως καί τό α΄ μέρος, εἰς τούς μαθητάς τῶν τελευταίων τάξεων τοῦ Γυμνασίου καί συνεπῶς εἶναι κατάλληλον διά τούς ὑποψηφίους τῶν ἀνωτέρων καί ἀνωτάτων σχολῶν τοῦ Κράτους.

Κύρια χαρακτηριστικά του, προσεπάθησα νά εἶναι, ὁ σαφής καί πλήρης καθορισμός τῶν νέων ἐννοιῶν, γενικώτερον ἡ σαφής ἀνάπτυξις τῶν θεμάτων του καί ἡ βραχυλογία.

Μέ τήν πεποίθησιν ὅτι ἔχω ἐπιτύχει τόν σκοπόν μου, παραδίδω τό βιβλίον εἰς τήν σπουδάζουσαν νεολαίαν, ἐμπλουτισμένον καί μέ ἕνα ἱκανό πλῆθος ἀσκήσεων.

Ἀθῆναι - Δεκέμβριος 1973

ΧΡ. Γ. ΠΑΠΑΝΙΚΟΛΑΟΥ
Καθηγητής Μαθηματικῶν
Τακτικός Βοηθός ΑΣΟΕΕ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

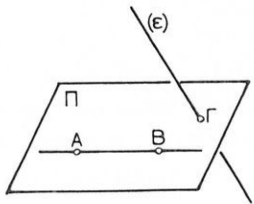
1. Τὸ ἐπίπεδον.

1.1. Ἐπίπεδον. Ἡ ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου, ἤ ἐπιπέδου ἐπιφανείας εἶναι ἤδη γνωστή ἀπό τήν ἐπιπεδομετρίαν, ὡς πρωταρχική ἔννοια. Ἡ ἐπιφάνεια ἠρεμοῦντος ὕδατος (περιορισμένων διαστάσεων), δύναται νά δώσῃ τήν εἰκόνα μέρους ἐπιπέδου ἐπιφανείας, χωρίς ὅμως τοῦτο νά ἀποτελῇ καί ὁρισμόν τοῦ ἐπιπέδου.

1.2. Ἀξιώματα τοῦ ἐπιπέδου. **Ἀξίωμα I.** Ἕνα ἐπίπεδον, περιέχει τουλάχιστον τρία σημεῖα, μή κείμενα ἐπ᾽εὐθείας.

Ἀξίωμα II. Διά τριῶν σημείων μή κειμένων ἐπ᾽εὐθείας, ἕνα καί μόνον ἕνα ἐπίπεδον διέρχεται.

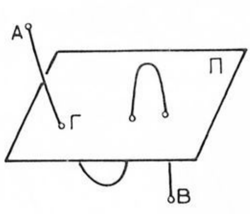
Ἀξίωμα III. Ἐάν Α καί Β εἶναι δύο διακεκριμένα σημεῖα ἑνός ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα ΑΒ, εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), (σχ.1).



σχ.1

Πόρισμα. Μία εὐθεῖα (ε) μή ἀνήκουσα εἰς ἐπίπεδον (Π), δύναται νά τέμνῃ τό ἐπίπεδον (Π) μόνον εἰς ἕνα σημεῖον Γ. Τό Γ καλεῖται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π), (σχ.1).

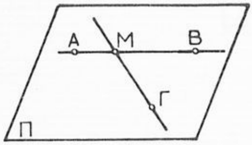
Ἀξίωμα IV. Ἐάν Α καί Β εἶναι δύο σημεῖα τοῦ χώρου, ἑκατέρωθεν ἐπιπέδου (Π), τότε πᾶσα γραμμή διερχομένη διά τῶν Α καί Β ἔχει ἕνα τουλάχιστον κοινόν σημεῖον Γ, μετά τοῦ ἐπιπέδου (σχ.2).



σχ.2

1.3. Θεώρημα. Ἕνα ἐπίπεδον περιέχει ἀπείρους εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καί τρία σημεῖα Α, Β καί Γ αὐτοῦ μή κείμενα ἐπ᾽εὐθείας (σχ.3). Θεωροῦμεν τήν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία ἀ-



σχ.3

νήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Ἔστω τυχόν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας ΑΒ $\Rightarrow$ Μ $\in$ (Π) καί κατά συνέπειαν ἡ εὐθεῖα ΓΜ ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π).

Τό σημεῖον Μ, ὡς δυνάμενον νά διατρέχῃ τήν εὐθεῖαν ΑΒ, δίδει ἀπείρους εὐθείας ΓΜ αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς τό ἐπίπεδον (Π). Ἄρα τό ἐπίπεδον (Π) περιέχει ἀπείρους εὐθείας.

1.4. Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον ἐκτείνεται ἀπεριορίστως.

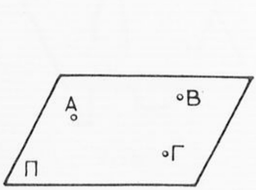
Πράγματι, τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος διότι ἡ τυχοῦσα καί ἀπεριόριστος εὐθεῖα ΓΜ, ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τό ἐπίπεδον (Π).

1.5. Παρατήρησις. Ἀπό τό προηγούμενον θεώρημα (§ 1.3), ἕπεται ὅτι ἐάν μία εὐθεῖα ΓΜ κινῆται, οὕτως ὥστε τό σημεῖον Γ νά παραμένῃ σταθερόν καί τό Μ νά ἀνήκῃ πάντοτε εἰς εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΓΜ διαγράφει ἐπίπεδον (Π). Ἐξ αὐτοῦ προκύπτει ὅτι τό ἐπίπεδον (Π) ἐσχηματίσθη ἐκ τῆς τοιαύτης κινήσεως τῆς εὐθείας ΓΜ, διά τοῦτο καί καλεῖται εὐθειογεννής ἐπιφάνεια. Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καλεῖται ὁδηγός διά τήν κίνησιν τῆς εὐθείας ΓΜ, ἐνῶ τό σημεῖον Γ καλεῖται πόλος.

Κάθε εὐθειογενής ἐπιφάνεια, ἤτοι κάθε ἐπιφάνεια διαγραφομένη ἀπό τήν κίνησιν κάποιας εὐθείας, ἐν γένει δέν εἶναι ἐπίπεδον (κυματοειδής ἐπιφάνεια κ.ἄ.).

1.6. Καθορισμὸς ἐπιπέδου.

1.6.1. Τρία σημεῖα μή κείμενα ἐπ᾽εὐθείας, καθορίζουν τήν θέσιν ἑνός ἐπιπέδου.



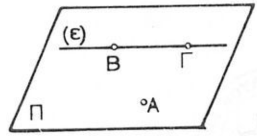
σχ.4

Δεχόμεθα ὅτι τρία σημεῖα Α, Β καί Γ μή κείμενα ἐπ᾽εὐθείας, εἶναι ἱκανά διά νά καθορίσουν τό μοναδικόν ἐπίπεδον (Π) (σχ.4) τό ὁποῖον διέρχεται δι᾽αὐτῶν (ἀξίωμα ΙΙ).

1.6.2. Πόρισμα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινά σημεῖα μή κείμενα ἐπ᾽εὐθείας, συμπίπτουν.

1.6.3. Μία εὐθεῖα καί ἕνα σημεῖον ἐκτός αὐτῆς, καθορίζουν τήν θέσιν ἑνός μόνον ἐπιπέδου.

Πράγματι, ἔστω εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Β καί Γ τῆς εὐθείας (ε). Τά τρία σημεῖα Α, Β καί Γ καθορίζουν ἕνα ἐπίπεδον (Π) (σχ.5), εἰς τό ὁποῖον ἀνήκουν ἀφ'ἑνός μέν τό σημεῖον Α, ἀφ'ἑτέρου δέ ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς ἔχουσα δύο σημεῖα της Β καί Γ ἐπί τοῦ (Π). Δυνάμεθα ἑπομένως νά θεωρήσωμεν ὅτι τό ἐπίπεδον (Π) ὁρίζεται ἀπό τήν εὐθεῖαν (ε) καί ἀπό τό σημεῖον Α.

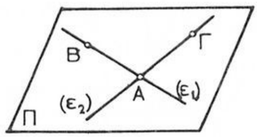


σχ.5

1.6.4. Πόρισμα. 'Εάν δύο ἐπίπεδα ἔχουν μίαν κοινήν εὐθεῖαν καί ἕνα κοινόν σημεῖον ἐκτός τῆς εὐθείας, συμπίπτουν.

1.6.5. Δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καθορίζουν τήν θέσιν ἑνός μόνον ἐπιπέδου.

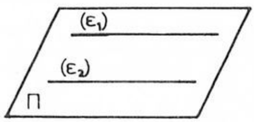
Πράγματι, ἔστωσαν (ε_1) καί (ε_2) αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι καί Α τό κοινόν σημεῖον των (σχ.6). Λαμβάνομεν ἀνά ἕν σημεῖον Β καί Γ ἑκάστης καί θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον (Π) τό διερχόμενον διά τῶν τριῶν σημείων Α, Β καί Γ. Εἰς τό (Π) ἀνήκουν καί αἱ δύο εὐθεῖαι, ἐφ'ὅσον ἑκάστη ἔχει δύο σημεῖα της ἐπί τοῦ (Π) (ἀξίωμα ΙΙΙ). Δυνάμεθα ἑπομένως νά θεωρήσωμεν ὅτι τό ἐπίπεδον (Π), ἔχει ὁρισθῆ ἀπό τάς δύο τεμνομένας εὐθείας.



σχ.6

1.6.6. Δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν τήν θέσιν ἑνός μόνον ἐπιπέδου.

Τοῦτο ἕπεται ἀπό τόν ὁρισμόν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, ὡς δύο συνεπιπέδων εὐθειῶν χωρίς κοινόν σημεῖον.



σχ.7

1.6.7. Πόρισμα. 'Εάν δύο ἐπίπεδα ἔχουν δύο κοινάς εὐθείας (τεμνομένας ἤ παραλλήλους), συμπίπτουν.

1.6.8. 'Ανακεφαλαίωσις διά τόν καθορισμόν ἑνός ἐπιπέδου.

"Ενα ἐπίπεδον καθορίζεται πλήρως καί συνεπῶς θά θεωρῆται γνωστόν, εἰς τάς κάτωθι περιπτώσεις :

i) "Οταν γνωρίζωμεν τρία σημεῖα αὐτοῦ μή κείμενα ἐπ'εὐθείας.

ii) Όταν γνωρίζωμεν μίαν εὐθεῖαν καί ἕνα σημεῖον αὐτοῦ ἐκτός τῆς εὐθείας κείμενον.

iii) Όταν γνωρίζωμεν δύο τεμνομένας εὐθείας αὐτοῦ.

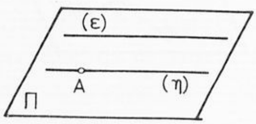
iv) Όταν γνωρίζωμεν δύο παραλλήλους εὐθείας αὐτοῦ.

1.6.9. Παρατήρησις. Εἰς τάς ἀνωτέρω τέσσαρας στοιχειώδεις περιπτώσεις, τό ἐπίπεδον θά θεωρῆται καί κατασκευάσιμον. 'Επίσης μαζί μέ κάθε δεδομένον ἐπίπεδον σχῆμα (π.χ. τρίγωνον, κύκλος, κανονικόν πολύγωνον κ.ἄ.) θά θεωρῆται ὡς δεδομένον καί τό ἐπίπεδον αὐτοῦ.

Εἰς τά σχήματα, ὅπου εἴμεθα ἀναγκασμένοι νά ἀπεικονίζωμεν ἕνα στερεόν ἐπί τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τάς περισσοτέρας φοράς τά ἐπίπεδα θά τά ἀπεικονίζωμεν μέ ἕνα ὀρθογώνιον τμῆμα αὐτῶν, τό ὁποῖον ὅμως θά σχεδιάζωμεν συνήθως ὡς πλάγιον παραλληλόγραμμον (βλέπε καί § 9.9).

1.7. Θεώρημα. 'Επί ἐπιπέδου (Π) θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) καί σημεῖον Α. 'Εκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν (η)//(ε). 'Η εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π).

'Απόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καί (η) καθορίζουν ἐπίπεδον (σχ.8). Τοῦτο, μετά τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἔχει κοινήν τήν εὐθεῖαν (ε) καί τό σημεῖον Α καί ἑπομένως συμπίπτει μετά τοῦ (Π) (§ 1.6.4). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (η) ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π).



σχ.8

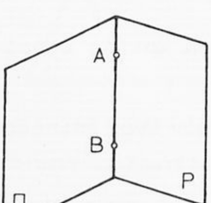
2. Εὐθεῖαι εἰς τόν χῶρον.

2.1. Συνεπίπεδοι εὐθεῖαι ἤ ὁμοεπίπεδοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο διακεκριμέναι εὐθεῖαι, ὅταν ὑπάρχη ἐπίπεδον τό ὁποῖον νά τάς περιέχη. Τότε αἱ δύο εὐθεῖαι ἤ θά τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον ἤ θά εἶναι παράλληλοι.

2.2. 'Ασύμβατοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο μή συνεπίπεδοι εὐθεῖαι. 'Αποκλείονται τά ἐνδεχόμενα "νά τέμνωνται" ἤ "νά εἶναι παράλληλοι".

3. 'Επίπεδα εἰς τόν χῶρον.

3.1. Θεώρημα. 'Εάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β, τότε ἔχουν καί κοινήν εὐθεῖαν τήν ΑΒ.



σχ.9

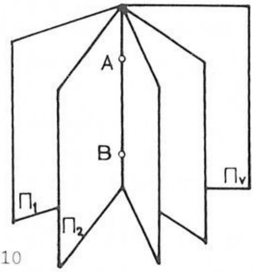
'Απόδειξις. $A \in (\Pi)$, $B \in (\Pi) \Rightarrow$ εὐθ.$AB \in (\Pi)$.
'Επίσης $A \in (P)$, $B \in (P) \Rightarrow$ εὐθ.$AB \in (P)$ (σχ.9).

Ἄρα ἡ εὐθ.AB εἶναι κοινή διά τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

Παρατήρησις. Τό θεώρημα δύναται νά ἐπεκταθῆ διά ν ἐπίπεδα, ἤτοι :

Ἐάν ν ἐπίπεδα (Π_1), (Π_2), (Π_3), ..., (Π_ν) ἔχουν δύο κοινά σημεῖα Α καί Β, τότε ἔχουν καί κοινήν εὐθεῖαν τήν ΑΒ.

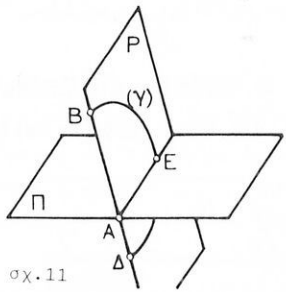
Τά ν ἐπίπεδα λέγομεν ὅτι ἀποτελοῦν ἀξονικήν δέσμην ἐπιπέδων (σχ.10).



σχ.10

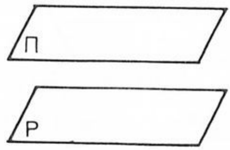
3.2. Θεώρημα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον Α, τότε ἔχουν καί κοινήν εὐθεῖαν διερχομένην διά τοῦ σημείου Α.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) διερχομένην διά τοῦ σημείου Α (σχ.11). Ἐπ'αὐτῆς καί ἑκατέρωθεν τοῦ Α, λαμβάνομεν δύο σημεῖα Β καί Δ καί γράφομεν γραμμήν (γ) (ὄχι εὐθεῖαν), ἀνήκουσαν εἰς τό ἐπίπεδον (Ρ), ἡ ὁποία νά διέρχεται διά τῶν Β καί Δ. Αὕτη θά τμήση τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Ε (§ 1.2,IV). Τό σημεῖον Ε ἀνήκει προφανῶς καί εἰς τά δύο ἐπίπεδα καί συνεπῶς ἡ εὐθεῖα ΑΕ εἶναι κοινή διά τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Ἄρα ἡ τομή δύο ἐπιπέδων ἐν γένει εἶναι εὐθεῖα.



σχ.11

3.3. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καλοῦνται παράλληλα, ἐάν ἡ τομή τους εἶναι τό κενόν σύνολον (σχ.12).



σχ.12

Ἀσκήσεις

1. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά τριῶν σημείων κειμένων ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας, διέρχονται ἄπειρα ἐπίπεδα.

2. Ἐάν τρεῖς εὐθεῖαι τέμνωνται ἀνά δύο, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον ἤ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

3. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἕνας κύκλος (O,R) μή κείμενος ἐπί ἐπιπέδου (Π), τό πολύ δύο κοινά σημεῖα δύναται νά ἔχη μετά τοῦ ἐπιπέδου (Π).

4. Νά ἀποδεχθῆ ὅτι δύο ἴσοι καί ὁμόκεντροι κύκλοι μή ἀνήκοντες ὅμως εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον, ἔχουν μίαν μόνον κοινήν διάμετρον.

5. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Ἐπί τῆς (ε_1) λαμβάνομεν σημεῖα Α, Β καί ἐπί τῆς (ε_2) σημεῖα Γ, Δ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ. καί ΒΔ εἶναι ἀσύμβατοι.

6. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐφαπτομένη κύκλου εἰς ἕνα σημεῖον του, εἶναι εὐθεῖα ἀνήκουσα εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

7. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι 10 ἐπίπεδα τέμνονται κατά 45 τό πολύ εὐθείας.

8. Νά εὑρεθῇ τό πλῆθος τῶν εὐθειῶν κατά τάς ὁποίας ν τό πλῆθος ἐπίπεδα τέμνονται ἀνά δύο.

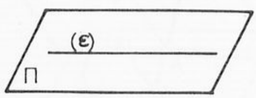
9. Δίδονται σημεῖον Α, εὐθεῖα (ε) καί κύκλος (Κ,R) ἐν τῷ χώρῳ. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Α εὐθεῖα (ζ), τέμνουσα τήν εὐθεῖαν (ε) καί τόν κύκλον (Κ,R).

10. Δίδονται δύο τεμνόμεναι καί δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νά ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καί τάς τέσσαρας δοθείσας εὐθείας.

11. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μή κείμενα ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νά εὑρεθῇ σημεῖον Μ τοῦ χώρου, διά τό ὁποῖον τό ἄθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2$ εἶναι ἐλάχιστον.

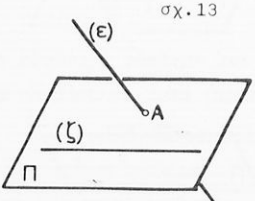
4. Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδον εἰς τὸν χῶρον.

4.1. Θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Τρεῖς εἶναι αἱ διάφοροι δυναταί θέσεις εὐθείας (ε) καί ἐπιπέδου (Π) εἰς τόν χῶρον:



σχ.13

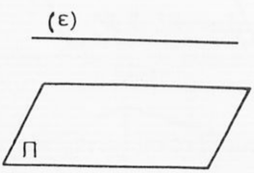
4.1.1. Ἡ εὐθεῖα (ε) ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.13).



σχ.14

4.1.2. Ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α (σχ.14). Τό Α καλεῖται ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Παρατήρησις. Κάθε εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ.14) εἶναι ἀσύμβατος τῆς εὐθείας (ε).



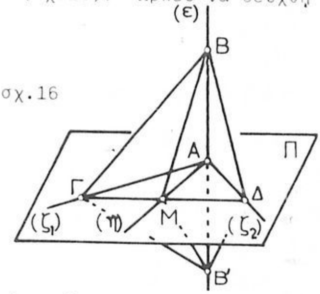
σχ.15

4.1.3. Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος τοῦ ἐπιπέδου (Π). Μέ τόν ὅρον "παράλληλος" ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) δέν ἔχει κοινόν σημεῖον μετά τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ.15). Τότε καί τό ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

4.2. Εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. **Ὁρισμός.** Μία εὐθεῖα (ε) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ, καλεῖται κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), τότε καί μόνον τότε, ὅταν εἶναι κάθετος ἐπί ὅλων τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου (Π) τῶν διερχομένων διά τοῦ σημείου Α.

4.3. Θεώρημα. Ἐάν μία εὐθεῖα (ε) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, εἶναι κάθετος ἐπί δύο εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π) διερχομένας διά τοῦ Α, τότε εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

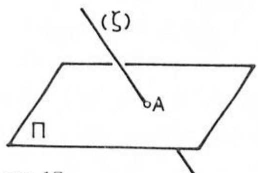
Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τάς εὐθείας (ζ_1) καί (ζ_2) τοῦ ἐπιπέδου (Π), εἰς τό Α (σχ.16). Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τήν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π) τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου Α.



σχ.16

Ἐπί τῆς εὐθείας (ε) λαμβάνομεν σημεῖα Β καί Β' τοιαῦτα ὥστε νά εἶναι ΑΒ=ΑΒ' καί ἐπί τῶν (ζ_1) καί (ζ_2) τυχόντα σημεῖα Γ καί Δ. Τό τρίγωνον ΓΒΒ' εἶναι ἰσοσκελές μέ ΓΒ=ΓΒ' (1), διότι ἔχει τήν ΓΑ ὡς ὕψος καί διάμεσον. Ὁμοίως καί τό τρίγωνον ΔΒΒ' εἶναι ἰσοσκελές μέ ΔΒ=ΔΒ' (2). Τότε, ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2), ἕπεται ὅτι τριγ.ΒΓΔ=τριγ.Β'ΓΔ (ἡ ΓΔ εἶναι κοινή). Ἄρα $\text{Β}\hat{\Gamma}\Delta=\text{Β}'\hat{\Gamma}\Delta$ (3). Ἔστω Μ τό σημεῖον εἰς τό ὁποῖον ἡ τυχοῦσα εὐθεῖα (η) τοῦ ἐπιπέδου (Π), τέμνει τήν ΓΔ. Τριγ.ΒΓΜ=τριγ.Β'ΓΜ λόγῳ τῶν σχέσεων (1), (3) καί τῆς ΓΜ=ΓΜ. Ἄρα ΜΒ=ΜΒ', ἤτοι τό τριγ.ΒΜΒ' εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τήν ΜΑ ὡς διάμεσον. Ἑπομένως εἶναι καί ὕψος αὐτοῦ ἤτοι ΜΑ$\perp$ΒΒ' $\Rightarrow$ (ε)$\perp$(η). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

4.3.1. Παρατήρησις. Πᾶσα εὐθεῖα (ζ) τέμνουσα ἐπίπεδον (Π) καί μή κάθετος πρός αὐτό, καλεῖται πλαγία ὡς πρός τό (Π) (σχ.17).

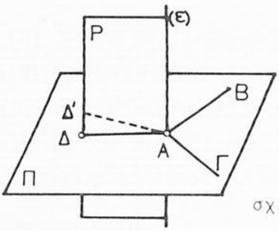


σχ.17

4.4. Θεώρημα. Ἔστω εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α αὐτῆς. Τό σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου τῶν καθέτων ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε) εἰς τό σημεῖον Α, ἀποτελεῖ ἐπίπεδον (Π) κάθετον ἐπί τήν (ε) εἰς τό Α.

Ἀπόδειξις. Δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν τοῦ συνόλου τούτου, αἱ ΑΒ καί ΑΓ, καθορίζουν ἐπίπεδον (Π) τό ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε) εἰς τό σημεῖον Α, διότι (ε)$\perp$ΑΒ καί (ε)$\perp$ΑΓ (σχ.18). Ἔστω ἀκόμη μία εὐθεῖα ΑΔ$\perp$(ε). Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ΑΔ $\in$(Π).

Θεωροῦμεν ἐπίπεδον (Ρ) τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό τάς εὐθείας (ε) καί ΑΔ. Αὐτό τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) κατ' ἀνάγκην κατά τήν εὐθεῖαν ΑΔ. Διότι ἐάν ἔτεμνε τό (Π) κατ' ἄλλην εὐθεῖαν ΑΔ', θά ἦτο (ε)$\perp$ΑΔ' καθ' ὅτι εἶ-



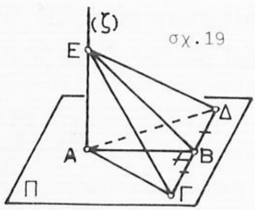
σχ.18

ναι $(\varepsilon)\perp(\Pi)$. Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν ὅτι $(\varepsilon)\perp ΑΔ$, ὅπερ ἄτοπον, διότι ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), θά ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΑΔ καί ΑΔ′ κάθετοι ἐπί τήν (ε), Ἄρα $(\Pi)\cap(Ρ)=ΑΔ$, ἤτοι ἡ ΑΔ ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π).

4.5. Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων.

4.5.1. Θεώρημα. Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπί ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α. Ἀπό τό ἴχνος της Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν $ΑΒ\perp ΓΔ$, ὅπου ἡ ΓΔ εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἐάν Ε εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), τότε εἶναι $ΕΒ\perp ΓΔ$.

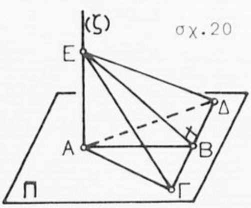
Ἀπόδειξις. Τά σημεῖα Γ καί Δ τά λαμβάνομεν οὕτως ὥστε νά εἶναι



σχ.19

$ΒΓ=ΒΔ$ (σχ.19). Τότε τό τριγ.ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τήν ΑΒ ὡς ὕψος καί διάμεσον $\Rightarrow ΑΓ=ΑΔ$. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καί ΕΑΔ, $\left(ΕΑ\perp(\Pi)\right)$, ὡς ἔχοντα τήν ΑΕ κοινήν καί $ΑΓ=ΑΔ$, εἶναι ἴσα $\Rightarrow ΕΓ=ΕΔ$, ἤτοι τό τριγ. ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Αὐτό ἔχει τήν ΕΒ ὡς διάμεσον. Ἄρα εἶναι καί ὕψος του $\Rightarrow ΕΒ\perp ΓΔ$.

4.5.2. Θεώρημα (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Εὐθεῖα (ζ) εἶναι κάθετος ἐπί ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α. Ἐάν ἀπό τυχόν σημεῖον Ε τῆς (ζ) φέρομεν κάθετον ΕΒ ἐπί τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΓΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π), τότε ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν ΓΔ.



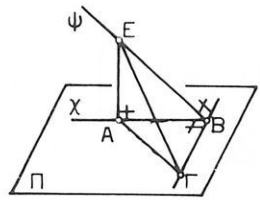
σχ.20

Ἀπόδειξις. Ἐάν τά σημεῖα Γ καί Δ ληφθοῦν οὕτως ὥστε νά εἶναι $ΒΓ=ΒΔ$ (σχ.20). Τό τρίγ. ΕΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, μέ $ΕΓ=ΕΔ$, διότι ἔχει τήν ΕΒ ὡς ὕψος καί διάμεσον. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΕΑΓ καί ΕΑΔ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα τήν ΕΑ κοινήν καί $ΕΓ=ΕΔ$. Ἄρα εἶναι καί $ΑΓ=ΑΔ$ ἤτοι τριγ.ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές. Τοῦτο ἔχει τήν ΑΒ ὡς διάμεσον. Ἑπομένως εἶναι καί ὕψος του, ἤτοι $ΑΒ\perp ΓΔ$.

4.5.3. Θεώρημα. Δύο ἡμιευθεῖαι Βx καί Βy μέ κοινήν ἀρχήν, εἶναι κάθετοι ἐπί τρίτην εὐθεῖαν ΒΓ. Αἱ Βx καί ΒΓ ὁρίζουν τήν θέσιν ἑνός ἐπιπέδου (Π). Ἀπό τυχόν σημεῖον Ε τῆς Βy φέρομεν

ΕΑ⊥Βx. Τότε εἶναι ΕΑ⊥(Π).

'Απόδειξις. 'Εξ ὑποθέσεως εἶναι ΕΑ⊥Βx (σχ.21). 'Αρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ἡ ΕΑ εἶναι κάθετος καί ἐπί μιᾶς ἀκόμη εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου (Π).

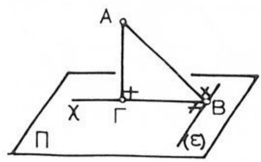


σχ.21

Τά τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΒΓ καί ΕΒΓ εἶναι ὀρθογώνια. 'Εφαρμόζομεν εἰς αὐτά τό Πυθαγόρειον θεώρημα καί ἔχομεν ἀντιστοίχως : $ΒΕ^2 = ΑΒ^2 + ΑΕ^2$ (1), $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 + ΒΓ^2$ (2) καί $ΓΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (3). 'Από τήν σχέσιν (1) λαμβάνομεν $ΑΕ^2 = ΒΕ^2 - ΑΒ^2$ (4). Προσθέτομεν τάς σχέσεις (2) καί (4) κατά μέλη καί λαμβάνομεν: $ΑΓ^2 + ΑΕ^2 = ΒΓ^2 + ΒΕ^2$ (5). 'Εκ τῶν σχέσεων (3) καί (5) ἕπεται $ΓΕ^2 = ΑΓ^2 + ΑΕ^2$. 'Εκ τῆς τελευταίας ἕπεται ὅτι τό τριγ.ΑΓΕ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Α, διότι εἰς αὐτό ἰσχύει ἡ σχέσις τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος. "Αρα ΕΑ⊥ΑΓ καί ἐπομένως ΕΑ⊥(Π).

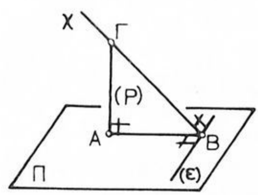
4.6. Κατασκευή εὐθείας διερχομένης ἀπό δοθέν σημεῖον Α καί καθέτου ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου (Π).

i) Τό σημεῖον Α δέν ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.22). 'Από τό Α φέρομεν εὐθεῖαν ΑΒ⊥(ε), ὅπου (ε) τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). 'Εκ τοῦ Β φέρομεν εὐθεῖαν Βx ⊥(ε) **ἀνήκουσαν** εἰς τό (Π). 'Εκ τοῦ Α φέρομεν ΑΓ⊥Βx. 'Η ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).



σχ.22

ii) Τό σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.23). Φέρομεν ΑΒ⊥(ε), ὅπου (ε) εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π). 'Εκ τοῦ Β φέρομεν Βx⊥(ε), μή ἀνήκουσαν εἰς τό (Π). Αἱ ΑΒ καί Βx καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). 'Επ'αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν ΑΓ⊥ΑΒ. 'Η ΑΓ εἶναι ἡ ζητουμένη κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

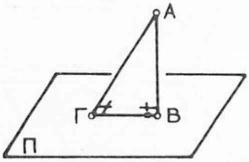


σχ.23

'Η ἀπόδειξις καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις εἶναι φανερά, τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος 4.5.3

4.6.1. Παρατήρησις. Αἱ δύο προηγούμεναι κατασκευαί, ἀποδεικνύουν τήν ὕπαρξιν εὐθείας καθέτου ἐπί ἐπίπεδον, ἀπό σημεῖον ἐκτός αὐτοῦ κειμένον ἤ ἐπί αὐτοῦ.

4.7. Θεώρημα. Ἀπό δοθέν σημεῖον Α κείμενον ἐκτός ἐπιπέδου (Π), μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.

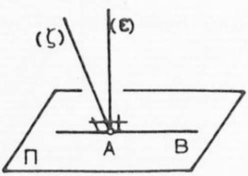


σχ.24

Ἀπόδειξις. Εἶναι βέβαιον ὅτι ἐκ τοῦ Α ὑπάρχει μία κάθετος ΑΒ (σχ.24) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) (4.6,i). Ἐάν ὑπῆρχε καί δευτέρα κάθετος ΑΓ ἐπί τοῦ (Π), τό τριγ.ΑΒΓ θά ἦτο ὀρθογώνιον εἰς τάς δύο γωνίας του Β καί Γ, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μοναδική κάθετος ἐκ τοῦ Α πρός τό (Π).

4.7.1. Ἀπόστασις σημείου Α ἀπό ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τό μῆκος τοῦ καθέτου τμήματος ἐκ τοῦ σημείου Α πρός τό ἐπίπεδον (Π).

4.8. Θεώρημα. Ἀπό δοθέν σημεῖον Α ἐπιπέδου (Π), μία μόνον κάθετος εὐθεῖα ἄγεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου.



σχ.25

Ἀπόδειξις. Εἶναι βέβαιον ὅτι ἐκ τοῦ Α ὑπάρχει μία εὐθεῖα (ε)⊥(Π) (4.6,ii). Ἐάν ὑπῆρχε καί δευτέρα εὐθεῖα (ζ) κάθετος ἐπί τοῦ (Π) εἰς τό Α (σχ.25), τότε τό ἐπίπεδον τῶν εὐθειῶν (ε) καί (ζ) θά ἔτεμνε τό ἐπίπεδον (Π) κατά τήν εὐθεῖαν ΑΒ καί θά ἦτο (ε)⊥ΑΒ καί (ζ)⊥ΑΒ. Τοῦτο ὅμως δέν δύναται νά συμβαίνῃ, διότι θά ὑπῆρχον εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον ἐκ τοῦ Α δύο κάθετοι ἐπί τῆς ΑΒ. Ἄρα ἡ (ε)⊥(Π) εἶναι ἡ μοναδική κάθετος ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τό σημεῖον Α.

Ἀσκήσεις

12. Σημεῖον Α ἀπέχει ἀπό ἐπίπεδον (Π) ἀπόστασιν 10 cm. Φέρομεν ΑΒ ⊥(Π) καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) γράφομεν κύκλον κέντρου Β καί ἀκτῖνος 8 cm. Φέρομεν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς σημεῖον Γ αὐτοῦ καί ἐπ'αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $ΓΔ=2\sqrt{7}$ cm. Νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΔ.

13. Ἀπό τό κέντρον Κ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ, φέρομεν εὐθεῖαν (ε)⊥(ΑΒΓΔ) καί ἐπ'αὐτῆς λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Μ. Ἐάν Ζ εἶναι τό μέσον τῆς ΑΒ, δείξατε ὅτι ΜΖ⊥ΑΒ.

14. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β καί Γ.

15. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διά δοθείσης εὐθείας (ε) καί ἰσαπέχον ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καί Β.

16. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον εἰς ἴσας ἀποστάσεις ἀπό τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

17. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καί σημεῖον Β ἐκτός αὐ-

τοῦ..Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν τοῦ Β ἐπί τάς εὐθείας τοῦ (Π) τάς διερχομένας διά τοῦ Α.

18. Νά εὑρεθῆ σημεῖον τό ὁποῖον νά ἰσαπέχῃ ἀπό τέσσαρα δοθέντα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μή κείμενα ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

19. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό τρεῖς συνεπιπέδους εὐθείας.

20. 'Εάν εὐθεῖα (ε) σχηματίζει ἴσας γωνίας μέ τρεῖς εὐθείας ἑνός ἐπιπέδου (Π), νά ἀποδειχθῆ ὅτι εἶναι (ε)$\perp$(Π).

21. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), τά ὁποῖα ἀπέχουν ἐκ τοῦ Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

22. Δίδεται παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι τά Α καί Γ ἰσαπέχουν ἀπό κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ΒΔ.

23. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τέμνονται κατά εὐθεῖαν ΑΒ. 'Εκ τυχόντος σημείου Γ φέρομεν ΓΔ$\perp$(Π), ΓΕ$\perp$(Ρ) καί ἐκ τῶν Δ καί Ε φέρομεν καθέτους ἐπί τῆς ΑΒ. Δείξατε ὅτι αὗται διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

24. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ=2α ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἀπό τά ὁποῖα τό τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπό ὀρθήν γωνίαν.

26. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί εὐθεῖα (ε) πλαγία ὡς πρός αὐτό. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία μόνον εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε).

27. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. 'Εκ τοῦ Α φέρομεν τό κάθετον τμῆμα ΑΒ ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) καί δύο πλάγια τμήματα ΑΓ καί ΑΔ. 'Επ'αὐτῶν λαμβάνομεν σημεῖα Ε,Ζ,Η ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νά εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΓ}=\frac{ΑΗ}{ΑΔ}$. Δείξατε ὅτι ΑΒ$\perp$(ΕΖΗ).

28. 'Επί ἐπιπέδου (Π) δίδεται κύκλος (Κ,R). 'Από σημεῖον Α τοῦ κύκλου φέρομεν τήν διάμετρον ΑΒ καί ὑψώνομεν κάθετον Αx ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. 'Επί τῆς Αx λαμβάνομεν σημεῖον Γ καί τό συνδέομεν μέ τυχόν σημεῖον Δ τοῦ κύκλου. α) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ΓΔ$\perp$ΒΔ. β) Φέρομεν ΑΕ$\perp$ΒΓ καί ΑΖ$\perp$ΓΔ. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τριγ.ΓΒΔ ≈ τριγ.ΓΖΕ. γ) Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ΒΓ$\perp$(ΑΕΖ).

29. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διά τά ὁποῖα εἶναι : $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = λ^2$, ἔνθα λ δεδομένον μῆκος.

30. Δίδεται εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ διά τά ὁποῖα εἶναι: $ΜΑ^2 - ΜΒ^2 = λ^2$, ὅπου λ δοθέν μῆκος.

31. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διά τά ὁποῖα εἶναι: $3ΜΑ^2 + 4ΜΒ^2 = Κ^2$, ἔνθα Κ δεδομένον μῆκος.

32. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π), διά τά ὁποῖα εἶναι : $\frac{ΜΑ}{ΜΒ} = λ$, ἔνθα λ δοθείς λόγος.

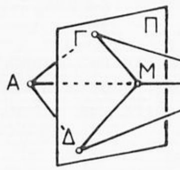
33. Δίδεται στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ (στρεβλόν καλεῖται τό τετράπλευρον τοῦ ὁποίου αἱ τέσσαρες κορυφαί δέν ἀνήκουν εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον). 'Από τά μέσα Ε καί Ζ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του ΑΒ καί ΓΔ, φέρομεν ἐπί-

πεδον (Π) τό ὁποῖον τέμνει τάς ΑΔ καί ΒΓ εἰς τά σημεῖα Η καί Θ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι : $\frac{HA}{H\Delta} = \frac{\Theta B}{\Theta\Gamma}$.

4.9. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος. Ὁρισμός. Μεσοκάθετον ἐπίπεδον εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καλεῖται τό ἐκ τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΑΒ κάθετον ἐπίπεδον ἐπ᾽αὐτοῦ.

4.9.1. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π) εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ, ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος καί ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον τό ὁποῖον ἰσαπέχει ἀπό τά ἄκρα τοῦ τμήματος, εὑρίσκεται ἐπί τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Γ τυχόν σημεῖον τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου (Π), τοῦ τμήματος $AB \Rightarrow \Gamma M \perp AB$. Ἐπειδή ἐπί πλέον εἶναι $MA = MB$, ἔπεται ὅτι τό τριγ.ΓΑΒ εἶναι ἰσοσκελές, ἐφ᾽ὅσον ἔχει τήν ΓΜ ὡς ὕψος καί διάμεσον. Ἄρα $\Gamma A = \Gamma B$ (σχ.26).

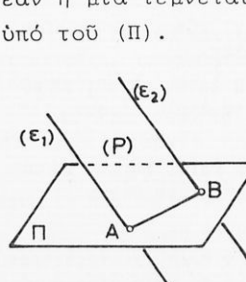


σχ.26

Ἀντιστρόφως. Ἔστω Δ τυχόν σημεῖον, ἰσαπέχον ἐκ τῶν Α καί Β, ἤτοι $\Delta A = \Delta B \Rightarrow$ τό τριγ.ΔΑΒ εἶναι ἰσοσκελές. Τότε ἡ διάμεσος ΔΜ εἶναι καί ὕψος του, ἤτοι $\Delta M \perp AB$. Ἄρα τό σημεῖον Δ ἀνήκει εἰς τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον (Π) τοῦ τμήματος ΑΒ.

4.9.2. Παρατήρησις. Ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, ἔπεται ὅτι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ δύο δοθέντων σημείων Α καί Β, εἶναι τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΑΒ.

4.10. Θεώρημα. Ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), ἐάν ἡ μία τέμνεται ὑπό ἐπιπέδου (Π), τότε καί ἡ ἄλλη τέμνεται ὑπό τοῦ (Π).

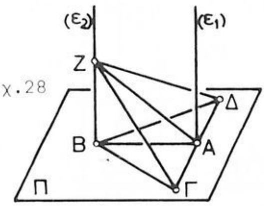


σχ.27

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ (ε_1) τέμνεται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τό σημεῖον Α (σχ. 27). Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2), καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ), τό ὁποῖον ἔχει μετά τοῦ (Π) κοινόν τό σημεῖον Α. Ἄρα ἔχουν καί κοινήν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία, ὡς ἀνήκουσα εἰς τό ἐπίπεδον (Ρ) καί τέμνουσα τήν εὐθεῖαν (ε_1) εἰς τό Α, θά τέμνη καί τήν παράλληλόν της εἰς τό Β. Τό Β ἐπομένως, ὡς ἀνῆκον εἰς τήν τομήν τῶν δύο ἐπιπέδων, ἀνήκει καί εἰς τό (Π), ἤτοι τό ἐπίπεδον (Π) τέμνει καί τήν (ε_2) εἰς τό Β.

4.11. Θεώρημα. Ἐάν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) εἶναι κάθετοι ἐπί ἐπίπεδον (Π), εἶναι μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Κατ' ἀρχάς παρατηροῦμεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) ἀποκλείεται νά τέμνωνται, διότι τότε, ἀπό τό κοινόν σημεῖον των θά ὑπῆρχον δύο κάθετοι ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον (Π). Ἀρκεῖ ἐπομένως νά δειχθῇ ὅτι αἱ (ε_1) καί (ε_2) εἶναι συνεπίπεδοι (σχ. 28).

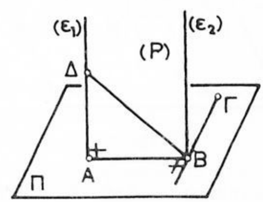


σχ.28

Α καί Β εἶναι τά ἴχνη τῶν (ε_1) καί (ε_2) ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν εὐθεῖαν τοῦ (Π) κάθετον ἐπί τήν ΑΒ καί ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν ΑΓ = ΑΔ. Τότε τό τριγ. ΒΓΔ εἶναι ἰσοσκελές, διότι ἔχει τήν ΒΑ ὡς ὕψος καί διάμεσον. Ἄρα ΒΓ = ΒΔ. Αἱ εὐθεῖαι (ε_1) καί ΑΒ καθορίζουν τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΓΔ, διότι $(\varepsilon_1) \perp ΓΔ$ καί $ΑΒ \perp ΓΔ$. Τό σημεῖον Β τῆς (ε_2) ἀνήκει προφανῶς εἰς τό ἐπίπεδον τοῦτον. Ἔστω Ζ τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_2). Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΖΒΓ καί ΖΒΔ, ἔχουν τήν ΖΒ κοινήν καί ΒΓ = ΒΔ. Ἄρα εἶναι ἴσα $\Rightarrow$ ΖΓ = ΖΔ. Ἐξ αὐτῆς ἔπεται ὅτι τό σημεῖον Ζ ἀνήκει εἰς τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον τοῦ τμήματος ΓΔ. Τότε καί ἡ εὐθεῖα (ε_2) ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον τοῦτον καί ἐπομένως εἶναι συνεπίπεδος τῆς (ε_1). Ἄρα εἶναι $(\varepsilon_1) /\!/ (\varepsilon_2)$.

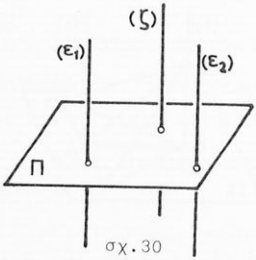
4.12. Θεώρημα. Ἐάν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλοι καί ἐπίπεδον (Π) εἶναι κάθετον ἐπί τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν, τότε τό (Π) εἶναι κάθετον καί ἐπί τῆς ἄλλης.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $(\Pi) \perp (\varepsilon_1)$ εἰς τό σημεῖον Α (σχ.29). Τό ἐπίπεδον (Π) θά τέμνῃ ὁπωσδήποτε καί τήν εὐθεῖαν (ε_2) εἰς σημεῖον Β, διότι εἶναι $(\varepsilon_1) /\!/ (\varepsilon_2)$ (§ 4.10) καί θά εἶναι $(\varepsilon_1) \perp ΑΒ \Rightarrow (\varepsilon_2) \perp ΑΒ$ (σχ. 29). Ἀρκεῖ ἐπομένως νά δειχθῇ ὅτι ἡ (ε_2) εἶναι κάθετος καί εἰς ἄλλην μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).



σχ.29

Ἐκ τοῦ σημείου Β καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) φέρομεν τήν $ΒΓ \perp ΑΒ$ καί ἔστω Δ τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας (ε_1). Γνωρίζομεν ὅτι $ΔΒ \perp ΒΓ$ (θεώρ. τριῶν καθέτων) καί ἐπομένως ΒΓ ⊥(ΑΒΔ). Τό ἐπίπεδον ὅμως (ΑΒΔ) συμπίπτει μέ τό ἐπίπεδον (Ρ) τῶν δύο παραλλήλων (ε_1) καί (ε_2), διότι ἔχουν κοινήν τήν εὐθεῖαν (ε_1) καί τό σημεῖον Β. Ἄρα θά εἶναι (ε_2)⊥ΒΓ. Τότε ὅμως εἶναι (ε_2) ⊥(Π).



σχ.30

4.13. Θεώρημα. Ἐάν δύο εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) εἶναι παράλληλοι πρός τρίτην εὐθεῖαν (ζ), εἶναι καί μεταξύ των παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π)⊥(ζ) (σχ.30). Τότε θά εἶναι (Π)⊥(ε_1) διότι (ε_1)// (ζ) (§ 4.12). Διά τόν αὐτόν λόγον θά εἶναι καί (Π)⊥(ε_2). Ἄρα (ε_1)// (ε_2), ὡς κάθετοι ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον (Π) (§ 4.11).

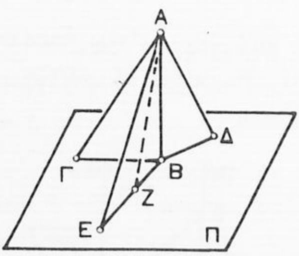
5. Κάθετα καί πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα.

5.1. Θεώρημα. Ἐκ σημείου Α ἐκτός ἐπιπέδου (Π) κειμένου:

i) Τό κάθετον τμῆμα πρός τό ἐπίπεδον (Π) εἶναι μικρότερον παντός πλαγίου.

ii) Τά ἴχνη δύο ἴσων πλαγίων τμημάτων, ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

iii) Τά ἴχνη δύο ἀνίσων τμημάτων ἀπέχουν ὁμοιστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.



σχ.31

Ἀπόδειξις.

i) ΑΒ⊥(Π). Τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Β (σχ.31) καί ἐπομένως εἶναι ΑΒ < ΑΓ.

ii) Ἔστωσαν ΑΓ καί ΑΔ δύο ἴσα πλάγια εὐθύγραμμα τμήματα. Τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καί ΑΒΔ, ἔχουν τάς ὑποτεινούσας των ἴσας καί τήν ΑΒ κοινήν. Ἄρα εἶναι ἴσα ⇒ ΒΓ = ΒΔ.

iii) Ἔστωσαν ΑΕ > ΑΔ δύο ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐπί τῆς ΕΒ λαμβάνομεν σημεῖον Ζ τοιοῦτον ὥστε νά εἶναι ΑΖ = ΑΔ ⇒ ΒΖ = ΒΔ καί ΑΕ > ΑΖ ⇒ ΒΕ > ΒΖ ⇒ ΒΕ > ΒΔ.

5.2. Θεώρημα. (ἀντίστροφον τοῦ προηγουμένου). Εἰς τό σύνολον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου Α πρός ἐπίπεδον (Π):

i) μικρότερον ὅλων εἶναι τό κάθετον,

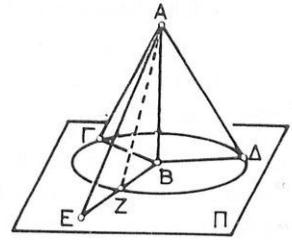
ii) δύο τμήματα εἶναι ἴσα ἐάν τά ἴχνη των ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) ἰσαπέχουν ἀπό τό ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος,

iii) δύο τμήματα εἶναι ἄνισα, ἐάν τά ἴχνη των ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) ἀπέχουν ὁμοιοστρόφως ἀνίσους ἀποστάσεις ἀπό τό ἴχνος τοῦ καθέτου τμήματος.

'Απόδειξις.

i) Ἕπεται ὡς πόρισμα ἀπό τό προηγούμενον θεώρημα 5.1.i.

ii) $AB \perp (\Pi)$ (σχ.32) καί ἔστω $B\Gamma = B\Delta$ $\Rightarrow$ τριγ.$AB\Gamma$ = τριγ.$AB\Delta$ διότι εἶναι ὀρθογώνια μέ $B\Gamma = B\Delta$ καί τήν AB κοινήν. Ἄρα $A\Gamma = A\Delta$.



σχ.32

iii) Ἔστω $BE > B\Delta$. Ἐπί τῆς BE λαμβάνομεν τμῆμα $BZ = B\Delta \Rightarrow AZ = A\Delta$ καί $BE > BZ \Rightarrow AE > AZ \Rightarrow AE > A\Delta$.

'Ασκήσεις

34. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου. Νά εὑρεθῆ ἐπί τῆς εὐθείας (ε) σημεῖον Μ, τό ὁποῖον νά ἰσαπέχη ἐκ τῶν Α καί Β.

35. Δίδονται δύο σημεῖα Α καί Β καί εὐθεῖα (ε) εἰς τόν χῶρον. Νά εὑρεθῆ σημεῖον Γ τῆς εὐθείας (ε), τοιοῦτον ὥστε τό τριγ.ΑΒΓ νά εἶναι ἰσοσκελές α) μέ κορυφήν τό Γ, β) μέ κορυφήν τό Α.

36. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τῶν Α καί Β.

37. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί τρία σημεῖα Α,Β,Γ πρός τό αὐτό μέρος του. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων Α,Β καί Γ ἀπό τό ἐπίπεδον (Π), ἰσοῦται πρός τό τριπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κ.βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἀπό τό ἐπίπεδον (Π).

38. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου (τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί δέν κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου), εἶναι κορυφαί παραλληλογράμμου. Πότε τοῦτο εἶναι ρόμβος ;

39. Ἐάν στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καί $A\Delta = B\Gamma$, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ἡ διερχομένη ἀπό τά μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό τά μέσα τῶν πλευρῶν του.

40. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), κύκλος (K,R) ἐπ'αὐτοῦ καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Νά ἀχθῆ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου (K,R) καί ἀπέχουσα ἐκ τοῦ σημείου Α δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ.

41. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α. Διά τοῦ Α νά ἀχθῆ εὐθύγραμμον τμῆμα ἔχον τά ἄκρα του Β καί Γ ἐπί τῆς εὐθείας (ε) καί τοῦ ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νά εἶναι: α) $\frac{\vec{AB}}{\vec{A\Gamma}} = \frac{1}{2}$, β) $\frac{\vec{AB}}{\vec{A\Gamma}} = -\frac{1}{2}$.

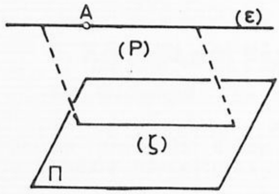
42. Ἐπί ἐπιπέδου (Π) δίδονται δύο σημεῖα Α καί Β. Ἐκ τῶν Α καί Β φέρομεν πρός τό αὐτό μέρος τοῦ (Π) καθέτους ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) καί ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΓ = κ καί ΒΔ = λ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπό τά ὁποῖα τά τμήματα ΑΓ καί ΒΔ φαίνονται ὑπό ἴσας γωνίας.

6. Παραλληλία εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.

6.1. Ὁρισμός. Εὐθεῖα (ε) καλεῖται παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), ἐάν ἡ τομή των εἶναι τό κενόν σύνολον : (ε) // (Π) $\Leftrightarrow$ (ε) $\cap$ (Π) = $\varnothing$ (σχ.33).

Τότε καί τό ἐπίπεδον (Π) καλεῖται παράλληλον τῆς εὐθείας (ε).

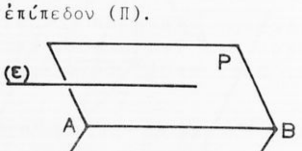
6.2. Θεώρημα. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ζ) αὐτοῦ καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ε) // (ζ). Τότε ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον (Π).



σχ.33

Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καί (ζ), ὡς παράλληλοι, καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) (σχ. 33), τό ὁποῖον τέμνεται μετά τοῦ (Π) κατά τήν εὐθεῖαν (ζ). Ἡ εὐθεῖα (ε), ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς αὐτό. Ἑπομένως ἐάν ἡ (ε) ἔτεμνε τό (Π) εἰς σημεῖον Σ, θά ἔπρεπε αὐτό νά ἀνήκῃ εἰς τό κοινόν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων, ἤτοι εἰς τήν εὐθεῖαν (ζ). Τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον καθ' ὅτι εἶναι (ε) // (ζ). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον (Π).

6.2.1. Παρατήρησις. Ἀπό τό προηγούμενον θεώρημα ἕπεται ὅτι, ἀπό σημεῖον Α ἐκτός ἐπιπέδου (Π), ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι παράλληλοι πτός τό ἐπίπεδον (Π).

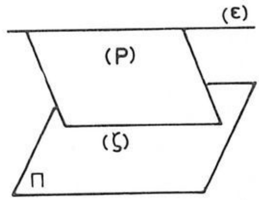


σχ.34

6.2.2. Πόρισμα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός τήν τομήν ΑΒ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) (σχ. 34), εἶναι παράλληλος πρός ἀμφότερα τά ἐπίπεδα.

6.3. Θεώρημα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), πᾶν ἐπίπεδον (Ρ) διερχόμενον διά τῆς εὐθείας (ε) καί τέμνον τό ἐπίπεδον (Π), τό τέμνει κατά εὐθεῖαν (ζ) // (ε).

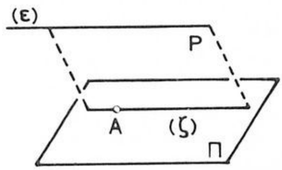
Ἀπόδειξις. Αἱ εὐθεῖαι (ε) καί (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι (σχ.35). Ἀρκεῖ ἑπομένως νά δειχθῇ ὅτι δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον. Ἀσφαλῶς ὅμως δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον, διότι ἐάν ὑπῆρχε κοινόν σημεῖον Σ, τοῦτο ὡς σημεῖον τῆς εὐθείας (ζ), θά εὑρίσκετο ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀλλά τότε, ἡ εὐθεῖα (ε), θά εἶχε τό σημεῖον της Σ, ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π), ὅπερ ἄτοπον διότι εἶναι (ε)//(Π). Ἄρα εἶναι (ε)//(ζ).



σχ.35

6.4. Θεώρημα. Ἔστω ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καί εὐθεῖα (ε)//(Π). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν εὐθεῖαν (ζ)//(ε). Τότε ἡ εὐθεῖα (ζ) εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π).

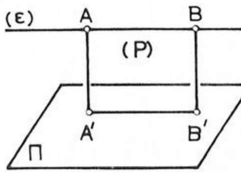
Ἀπόδειξις. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε) καί (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ)(σχ. 36). Τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἔχουν κοινόν σημεῖον τό Α. Ἑπομένως θά ἔχουν καί κοινήν εὐθεῖαν καί μάλιστα αὕτη πρέπει νά εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας (ε) (§ 6.3). Ἐπειδή ἐπί πλέον πρέπει νά διέρχεται ἀπό τό σημεῖον Α, δέν εἶναι ἄλλη παρά ἡ ἰδία ἡ εὐθεῖα (ζ). Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ζ), ὡς κοινή διά τά δύο ἐπίπεδα, ἀνήκει καί εἰς τό ἐπίπεδον (Π).



σχ.36

6.5. Θεώρημα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), ὅλα τά σημεῖα της ἰσαπέχουν ἀπό τό ἐπίπεδον καί ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α καί Β δύο σημεῖα τῆς εὐθείας (ε) (σχ.37). Φέρομεν ΑΑ΄⊥(Π) καί ΒΒ΄⊥(Π) ⇒ ΑΑ΄//ΒΒ΄. Αἱ παράλληλοι ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ). Τό (Ρ) τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) κατά τήν εὐθεῖαν Α΄Β΄ καί ἑπομένως θά εἶναι Α΄Β΄//(ε) (§ 6.4). Τότε τό τετράπλευρον ΑΒΒ΄Α΄ εἶναι παραλληλόγραμον, ὡς ἔχον τάς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἑπομένως εἶναι ΑΑ΄=ΒΒ΄.



σχ.37

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι τά σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας (ε), ἰσαπέχουν ἀπό τό ἐπίπεδον (Π), ἤτοι εἶναι ΑΑ΄=ΒΒ΄. Τότε τό τετράπλευρον ΑΒΒ΄Α΄ εἶναι παραλληλόγραμμον, ὡς ἔχον τάς ΑΑ΄ καί ΒΒ΄ ἴσας καί παραλλήλους (κάθετοι ἐπί τό (Π)). Ἄρα εἶναι ΑΒ//Α΄Β΄ καί ἑπομένως (ε)//(Π) (§ 6.2).

Ἀσκήσεις

43. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τέμνονται κατά εὐθεῖαν ΑΒ. Ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον τῆς ΑΒ τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ τομαί εἶναι παράλληλοι.

44. Ἀπό δοθέν σημεῖον Α νά ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

45. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Νά ἀχθῇ διά τῆς εὐθείας (ε) ἐπίπεδον τέμνον τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κατά εὐθείας παραλλήλους.

46. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2) καί (ε). Νά ἀχθοῦν διά τῶν (ε_1) καί (ε_2) δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), τεμνόμενα κατά εὐθεῖαν ΑΒ // (ε).

47. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι τοποθετημένα οὕτως ὥστε νά εἶναι ΑΒ// Α΄Β΄, ΒΓ// Β΄Γ΄, ΓΑ// Γ΄Α΄. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤ εἶναι παράλληλοι.

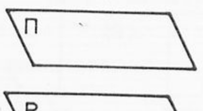
48. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), εὐθεῖα (ε)// (Π) καί σημεῖον Σ. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Σ εὐθεῖα τέμνουσα τήν εὐθεῖαν (ε) εἰς τό σημεῖον Α καί τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Β, οὕτως ὥστε νά εἶναι $AB=\lambda$, ὅπου λ δοθέν μῆκος.

49. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α, Β καί εὐθύγραμμον τμῆμα α// (Π). Διά τῶν σημείων Α καί Β νά ἀχθοῦν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι, τέμνουσαι τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τά Α΄ καί Β΄ ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νά εἶναι Α΄Β΄//=α

50. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εἶναι τοποθετημένα εἰς τρόπον ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καί Α΄Β΄ νά τέμνωνται εἰς σημεῖον Κ, αἱ ΒΓ καί Β΄Γ΄ νά τέμνωνται εἰς σημεῖον Λ καί αἱ ΓΑ καί Γ΄Α΄ νά τέμνωνται εἰς σημεῖον Μ. Δείξατε ὅτι α) τά σημεῖα Κ,Λ,Μ εὑρίσκονται ἐπ᾽ εὐθείας, β) αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤ εἶναι παράλληλοι.

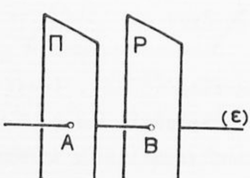
51. Δίδεται στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρός τάς δύο ἀπέναντι πλευράς του ΑΒ καί ΓΔ τό ὁποῖον τέμνει τάς ΑΔ καί ΒΓ εἰς τά σημεῖα Ε καί Ζ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: $\frac{EA}{E\Delta}=\frac{ZB}{Z\Gamma}$

7. Παράλληλα ἐπίπεδα.



σχ.38

7.1. Ὁρισμός. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καλοῦνται παράλληλα, ἐάν ἡ τομή των εἶναι τό κενόν σύνολον : $(\Pi)//(P) \Longleftrightarrow (\Pi)\cap(P) = \varnothing$ (σχ.38).



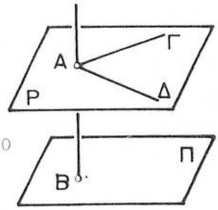
σχ.39

7.2. Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κάθετα ἐπί τήν αὐτήν εὐθεῖαν (ε), εἶναι μεταξύ των παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἰς τά σημεῖα Α καί Β (σχ39). Τά ἐπίπεδα ἀποκλείεται νά τέμνωνται. Διότι ἐάν ὑπῆρχε ἕνα κοινόν σημεῖον Σ αὐτῶν, ἐκ τοῦ Σ θά ὑπῆρχον δύο εὐθεῖαι ΣΑ καί ΣΒ κάθετοι ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα.

7.3. Θεώρημα. Ἀπό σημεῖον Α ἐκτός ἐπιπέδου (Π) κείμενον, δύναται νά ἀχθῇ ἕνα μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό (Π).

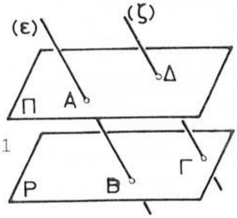
Ἀπόδειξις. Ἐκ τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν ΑΒ⊥(Π) (σχ.40). Φέρομεν ἐπίσης ΑΓ⊥ΑΒ καί ΑΔ⊥ΑΒ, αἱ ὁποῖαι καθορίζουν τό μοναδικόν κάθετον ἐπίπεδον (Ρ) ἐπί τῆς ΑΒ εἰς τό σημεῖον Α. Εἶναι φανερόν τώρα ὅτι (Ρ)//(Π) ὡς κάθετα ἐπί τήν αὐτήν εὐθεῖαν ΑΒ.



σχ.40

7.4. Θεώρημα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τό ἕν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καί τό ἄλλο.

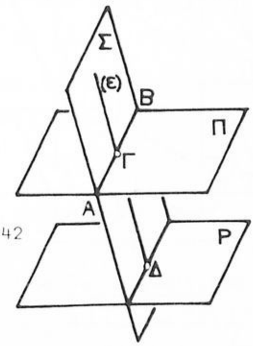
Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τό σημεῖον Α (σχ. 41). Λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Γ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καί ἐξ αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν (ζ)//(ε). Τό ἐπίπεδον (Π), ὡς τέμνον τήν εὐθεῖαν (ε), θά τέμνη καί τήν παράλληλον αὐτῆς (ζ) εἰς σημεῖον Δ. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ζ), ὡς ἔχουσα σημεῖον της Δ ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), δέν εἶναι εὐθεῖα τοῦ (Ρ). Τό ἐπίπεδον (Ρ) ὅμως, τέμνει τήν εὐθεῖαν (ζ) εἰς τό Γ καί ἑπομένως θά τέμνη καί τήν παράλληλον τῆς (ε) εἰς σημεῖον Β.



σχ.41

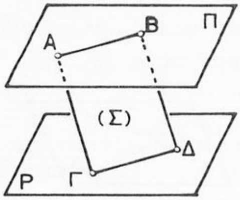
7.5. Θεώρημα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶν ἐπίπεδον (Σ) τέμνον τό ἕν ἐξ αὐτῶν, τέμνει καί τό ἄλλο.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι τό ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τό (Π) κατά τήν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 42). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Σ) τέμνουσαν τήν ΑΒ εἰς τό Γ. Ἡ εὐθεῖα (ε), τέμνουσα τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τό σημεῖον Γ, θά τέμνη καί τό παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (Ρ) εἰς σημεῖον Δ. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι τό ἐπίπεδον (Σ), ἔχει τό σημεῖον του Δ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Ρ) καί ἑπομένως τό τέμνει.



σχ.42

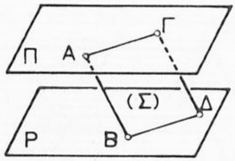
7.6. Θεώρημα. Αἱ τομαί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), ὑπό τρίτου ἐπιπέδου (Σ), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.



σχ.43

ʼΑπόδειξις. Ἔστω ὅτι τό ἐπίπεδον (Σ) τέμνει τά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κατά τάς εὐθείας ΑΒ καί ΓΔ ἀντιστοίχως (σχ. 43). Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καί ΓΔ εἶναι συνεπίπεδοι ὡς εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου (Σ). ʼΑποκλείεται νά ἔχουν κοινόν σημεῖον διότι ἀνήκουν εἰς τά παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ). Ἄρα εἶναι ΑΒ // ΓΔ.

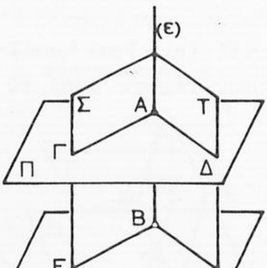
7.6.1. Πόρισμα. Δύο παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ μέ τά ἄκρα των ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), εἶναι ἴσα.



σχ.44

ʼΑπόδειξις. Τά παράλληλα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ), τό ὁποῖον τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) κατά τάς ΑΓ καί ΒΔ (σχ.44). Τότε θά εἶναι ΑΓ// ΒΔ (§ 7.6) καί ἑπομένως τό ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ ΑΒ = ΓΔ.

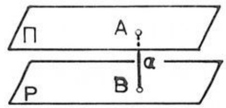
7.7. Θεώρημα. ʼΕάν δύό ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἶναι παράλληλα, πᾶσα εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπί τό ἕν ἐξ αὐτῶν, εἶναι κάθετος καί ἐπί τό ἄλλο.



σχ.45

ʼΑπόδειξις. Ἔστω ὅτι (ε)⊥(Π) (σχ. 45). Ἡ εὐθεῖα (ε), ἐφʼὅσον τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, θά τέμνη καί τό παράλληλον αὐτοῦ ἐπίπεδον (Ρ) εἰς σημεῖον Β. ʼΕκ τοῦ σημείου Α, θεωροῦμεν δύο τυχούσας εὐθείας ΑΓ καί ΑΔ τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἡ (ε) μετά τῶν ΑΓ καί ΑΔ καθορίζει δύο ἐπίπεδα (Σ) καί (Τ) ἀντιστοίχως, τά ὁποῖα, ὡς τέμνοντα τό (Π) κατά τάς ΑΓ καί ΑΔ, θά τέμνουν καί τό παράλληλόν του ἐπίπεδον (Ρ) κατά τάς ΒΕ καί ΒΖ ἀντιστοίχως καί θά εἶναι μάλιστα ΑΓ// ΒΕ καί ΑΔ// ΒΖ (§ 7.6). ʼΕπειδή (ε)⊥(Π) $\Rightarrow$ (ε)⊥ΑΓ καί (ε)⊥ΑΔ. Τότε ὅμως θά εἶναι καί (ε)⊥ΒΕ καί (ε) ⊥ΒΖ $\Rightarrow$ (ε)⊥(Ρ).

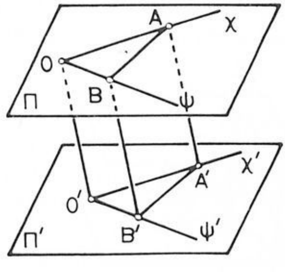
7.7.1. ʼΑπόστασις δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) κα-



σχ.46

λεῖται τό μῆκος α τοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος AB τῶν δύο ἐπιπέδων. Τά A καί B εἶναι σημεῖα τῶν ἐπιπέδων (Π) καί (P) ἀντιστοίχως (σχ.46).

7.8. Θεώρημα. Δύο γωνίαι $x\hat{O}y$ καί $x'\hat{O'}y'$, ἔχουσαι τάς πλευράς των παραλλήλους καί ὁμορρόπους, εἶναι ἴσαι τά δέ ἐπίπεδα τά καθοριζόμενα ὑπ'αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

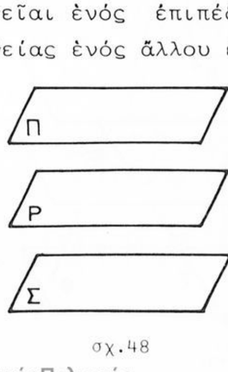


σχ.47

'Απόδειξις. 'Επί τῶν παραλλήλων εὐθειῶν Ox καί O'x' λαμβάνομεν σημεῖα A καί A' ἀντιστοίχως οὕτως ὥστε νά εἶναι $\vec{OA}=\vec{O'A'}$ $\Rightarrow$ τό OAA'O' εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ OO'$/\!\!/=$AA' (1) (σχ.47). 'Ομοίως ἐπί τῶν Oy καί O'y' λαμβάνομεν $\vec{OB}=\vec{O'B'}$ $\Rightarrow$ τό OBB'O' εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ OO'$/\!\!/=$BB' (2). 'Εκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται ὅτι AA'$/\!\!/=$BB' $\Rightarrow$ τό ABB'A' εἶναι παραλληλόγραμμον $\Rightarrow$ AB = A'B'. Ἄρα τριγ.OAB = τργ.O'A'B', ὡς ἔχοντα καί τάς τρεῖς πλευράς των ἴσας. 'Επομένως θά εἶναι καί $\hat{O}=\hat{O'}$ $\Rightarrow$ $x\hat{O}y = x'\hat{O'}y'$.

Αἱ δύο γωνίαι $x\hat{O}y$ καί $x'\hat{O'}y'$ καθορίζουν τά ἐπίπεδα (Π) καί (Π') ἀντιστοίχως. 'Επειδή Ox$/\!\!/$O'x' $\Rightarrow$ Ox$/\!\!/$(Π') (§ 6.2), ἤτοι ἡ Ox ἀποκλείεται νά τέμνῃ τό ἐπίπεδον (Π'). 'Ομοίως ἡ Oy, διότι Oy$/\!\!/$Oy' $\Rightarrow$ Oy$/\!\!/$(Π'). Τότε ἀποκλείεται νά τέμνωνται καί τά ἐπίπεδα (Π) καί (Π'), διότι ἐάν ἐτέμνοντο κατά εὐθεῖαν ΚΛ, αὕτη ὡς εὐθεῖα τοῦ (Π), θά ἔπρεπε νά τέμνῃ τουλάχιστον μίαν ἐκ τῶν Ox καί Oy καί αὐτό σημαίνει ὅτι μία τουλάχιστον ἐκ τῶν Ox καί Oy, θά εἶχε σημεῖον της ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π'), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα εἶναι (Π)$/\!\!/$(Π').

7.8.1. Πόρισμα. 'Εάν δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ἑνός ἐπιπέδου εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρός δύο εὐθείας ἑνός ἄλλου ἐπιπέδου, τά ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα.



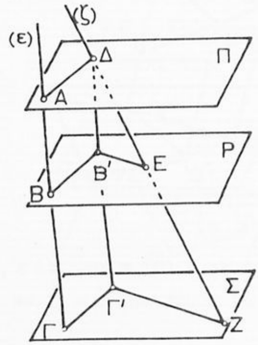
σχ.48

7.9. Θεώρημα. 'Εάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (P) εἶναι παράλληλα πρός τρίτον ἐπίπεδον (Σ), εἶναι καί μεταξύ των παράλληλα

'Απόδειξις. (Π)$/\!\!/$(Σ), (P)$/\!\!/$(Σ) (σχ. 48). Τά ἐπίπεδα (Π) καί (P) ἀποκλείεται νά τέμνωνται, διότι ἐάν ἐτέμνοντο, ἐξ ἑνός τῶν κοινῶν σημείων των θά ὑπῆρχον δύο παράλληλα ἐπίπεδα πρός τό (Σ), ὅπερ ἄτοπον (§ 7.3). Ἄρα εἶναι (Π)//(Ρ).

7.10. Θεώρημα τοῦ Θαλοῦ. Ἐάν τρία τουλάχιστον ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καί (Σ) εἶναι παράλληλα καί τέμνωνται ὑπό δύο εὐθειῶν (ε) καί (ζ) εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ καί Δ,Ε,Ζ ἀντιστοίχως, τά ἀποκοπτόμενα τμήματα ἐκ τῶν εὐθειῶν ὑπό τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἀνάλογα.

Ἀπόδειξις. Θά ἀποδείξωμεν ὅτι $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$ (σχ.49). Ἐκ τοῦ σημείου Δ φέρομεν εὐθείαν ΔΒ'Γ'// ΑΒΓ. Αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι καθορίζουν ἐπίπεδον τό ὁποῖον τέμνει τά ἐπίπεδα (Π), (Ρ) καί (Σ), κατά εὐθείας παραλλήλους ΑΔ//ΒΒ'//ΓΓ'. Ἄρα τά τετράπλευρα ΑΒΒ'Δ καί ΒΓΓ'Β' εἶναι παραλληλόγραμμα $\Rightarrow AB=\Delta B'$ καί $B\Gamma=B'\Gamma'$.

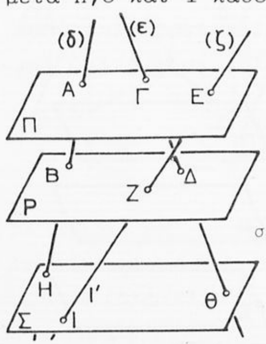


σχ.49

Αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΔΕΖ καί ΔΒ'Γ', καθορίζουν ἐπίπεδον τό ὁποῖον τέμνει τά ἐπίπεδα (Ρ) καί (Σ) κατά εὐθείας παραλλήλους Β'Ε // Γ'Ζ. Ἄρα θά εἶναι (θεώρημα τοῦ Θαλοῦ εἰς τό ἐπίπεδον) $\frac{\Delta B'}{B'\Gamma'}=\frac{\Delta E}{EZ} \Rightarrow \frac{AB}{B\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$.

Τό θεώρημα δύναται νά ἐπεκταθῇ καί διά περισσότερα τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

7.11. Θεώρημα. Τρεῖς εὐθεῖαι (δ), (ε) καί (ζ) ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου τέμνουν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἰς τά σημεῖα Α,Β, Γ,Δ, καί Ε,Ζ ἀντιστοίχως (σχ.50). Ἐάν ἐπ' αὐτῶν λάβωμεν σημεῖα Η,Θ καί Ι ἀντιστοίχως καί πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τοιαῦτα ὥστε νά εἶναι : $\frac{AB}{BH}=\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\Theta}=\frac{EZ}{ZI}$, τά σημεῖα Η,Θ καί Ι καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ) παράλληλον πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).



σχ.50

Ἀπόδειξις. Ἐάν τό ἐπίπεδον (Σ) (σχ. 50) τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό τά σημεῖα Η, Θ καί Ι, δέν ἦτο παράλληλον πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἐκ τῶν σημείων Η καί Θ θά διήρχετο ἕνα μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρός τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί θά ἔτεμνε τήν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον Ι'. Τότε θά ἦτο (προηγούμενον θεώρημα): $\frac{AB}{BH}=\frac{EZ}{ZI'}$ (1). Ἐξ ὑποθέσεως ὅμως ἔχομεν : $\frac{AB}{BH}=\frac{EZ}{ZI}$ (2). 'Εκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται $\frac{EZ}{ZI'}=\frac{EZ}{ZI} \iff$ $ZI'=ZI$, ἤτοι θά ἔπρεπε τό σημεῖον Ι΄ νά συμπίπτει μετά τοῦ σημείου Ι. 'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι (Σ)//(Π)//(Ρ).

'Ασκήσεις

52. Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῇ ἐπίπεδον ἰσαπέχον ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα Β,Γ,Δ.

53. Διά δοθείσης εὐθείας (ε) νά ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρός δοθέν ἐπίπεδον (Π).

54. 'Επί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), εὑρίσκονται δύο κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) ἀντιστοίχως. Νά ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ), ἡ ὁποία νά τέμνῃ τούς δύο κύκλους.

55. Τρεῖς εὐθεῖαι τοῦ χώρου Οx, Οy, καί Οz ἔχουν κοινόν σημεῖον Ο καί τέμνονται ὑπό δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ καί Δ,Ε,Ζ ἀντιστοίχως. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι τριγ.ΑΒΓ ≈ τριγ.ΔΕΖ.

56. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί εὐθεῖα (ε) ἐκτός αὐτοῦ. Νά τοποθετηθῇ τμῆμα δοθέντος μήκους λ μέ τά ἄκρα του ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) καί τῆς εὐθείας (ε) καί παράλληλον πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

57. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π)//(Ρ) καί σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (Π). Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου (Π), τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἐκ τοῦ σημείου Α καί τοῦ ἐπιπέδου (Ρ).

58. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Α,Β αὐτοῦ καί σημεῖον Κ ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τά ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως διά τῶν ΚΑ καί ΚΒ καί τέμνουν τό ἐπίπεδον (Π) κατά εὐθείας παραλλήλους.

59. 'Από σημεῖον Α νά ἀχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε).

60. Τρία παράλληλα ἐπίπεδα (Π),(Ρ),(Σ) κατά σειράν, ἀπέχουν τά μέν (Π) καί (Ρ) 12cm, τά δέ (Ρ) καί (Σ) 8cm. Εὐθεῖα (ε) τέμνει αὐτά εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ ἀντιστοίχως καί εἶναι ΑΒ=18cm. Νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος ΒΓ.

61. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Συνδέομεν τό Α μέ τυχόν σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου (Π) καί ἐπί τοῦ τμήματος ΑΜ λαμβάνομεν σημεῖον Ι, τοιοῦτον ὥστε: $\frac{IA}{IM}=\frac{\kappa}{\lambda}$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Ι.

62. Δίδεται κύκλος (O,R) καί σημεῖον Α. 'Εάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τοῦ κύκλου, νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ μέσου Δ τοῦ τμήματος ΑΜ. Νά γίνῃ γενίκευσις ἐάν $\frac{A\Delta}{AM}=\frac{\kappa}{\lambda}$.

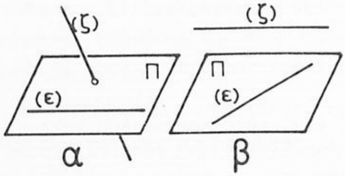
63. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ. Νά κατασκευασθοῦν τέσσαρα ἰσαπέχοντα ἐπίπεδα, διερχόμενα διά τῶν τεσσάρων δοθέντων σημείων ἀντιστοίχως.

64. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τά ὁποῖα διαιροῦν εἰς δεδομένον λόγον μ/ν τά τμήματα τά ὁποῖα ἔχουν τά ἄκρα των ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ).

65. Δίδεται κύκλος (O,R) καί δύο σημεῖα Β καί Γ ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου του. Μεταβλητόν σημεῖον Α διαγράφει τόν κύκλον. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ κ.βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

66. 'Εάν τρεῖς εὐθεῖαι $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2),(\varepsilon_3)$ τέμνουν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (δ_1) καί (δ_2) εἰς μέρη ἀνάλογα, δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον πρός τό ὁποῖον αἱ (ε_1), (ε_2) καί (ε_3) εἶναι παράλληλοι.

8. 'Ασύμβατοι εὐθεῖαι.

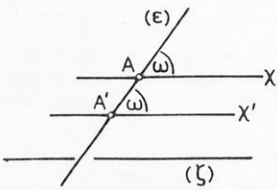


σχ.51

8.1. Ὁρισμός. Εἰς τήν § 2.2 εἴδομεν ὅτι ἀσύμβατοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο μή συνεπίπεδοι εὐθεῖαι.

8.2. Πόρισμα. Πᾶν ἐπίπεδον (Π), περιέχον μίαν ἐκ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), τέμνει τήν ἑτέραν ἤ εἶναι παράλληλον πρός αὐτήν (σχ.51 α καί β).

8.3. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ἔστωσαν (ε) καί (ζ) δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (σχ.52). 'Εκ τυχόντος σημείου Α τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν εὐθεῖαν $Ax /\!/ (\zeta)$. Ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν (ε) καί Ax, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Α ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε) καί καλεῖται γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ).

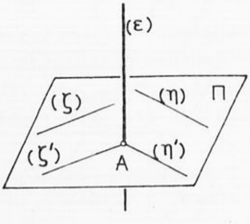


σχ.52

Πράγματι, ἐάν Α' εἶναι ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας (ε) καί ἐξ αὐτοῦ φέρομεν εὐθεῖαν $A'x' /\!/ (\zeta)$, θά εἶναι $Ax /\!/ A'x'$, ὡς παράλληλοι πρός τήν αὐτήν εὐθεῖαν (ζ). Ἄρα θά εἶναι καί $\hat{A}=\hat{A}'=\omega$.

8.4. 'Ορθογώνιοι εὐθεῖαι καλοῦνται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι τῶν ὁποίων ἡ γωνία εἶναι ὀρθή.

8.5. Θεώρημα. 'Εάν μία εὐθεῖα (ε) εἶναι ὀρθογώνιος πρός δύο εὐθείας (ζ) καί (η) ἑνός ἐπιπέδου (Π), ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

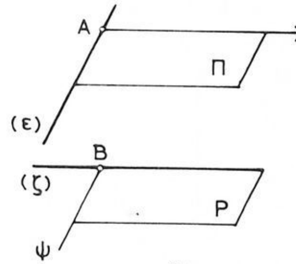


σχ.53

'Απόδειξις. 'Από τό ἴχνος Α τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π), φέρομεν τάς εὐθείας $(\zeta') /\!/ (\zeta)$ καί $(\eta') /\!/ (\eta)$ (σχ.53). Αἱ εὐθεῖαι (ζ') καί (η') ἀνήκουν εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (§ 1.7). 'Επειδή εἶναι $(\varepsilon)\perp(\zeta) \Rightarrow (\varepsilon)\perp(\zeta')$. 'Ομοίως εἶναι καί $(\varepsilon)\perp(\eta')$. Ἄρα ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), ὡς κάθετος ἐπί δύο εὐθείας του.

8.6. Θεώρημα. Δοθέντων δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), ὑπάρχουν δύο μόνον παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἐξ ὧν ἕκαστον περιέχει ἀνά μίαν τῶν ἀσυμβάτων.

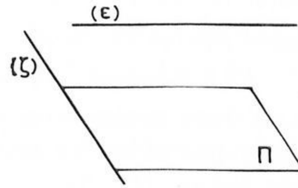
'Απόδειξις. 'Από δύο σημεῖα Α καί Β ἑκάστης τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) ἀντιστοίχως, φέρομεν ἀνά μίαν εὐθεῖαν Αx καί Βy παράλληλον τῆς (ζ) καί (ε) ἀντιστοίχως (σχ.54). Τά δύο καθοριζόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), εἶναι παράλληλα διότι δύο εὐθεῖαι τοῦ ἑνός εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλοι πρός δύο εὐθείας τοῦ ἄλλου.



σχ.54

Εἶναι καί τά μόνα παράλληλα ἐπίπεδα τά ὁποῖα περιέχουν τάς δύο ἀσυμβάτους, διότι ἐάν ἐκ τοῦ οἱουδήποτε σημείου Α΄ τῆς εὐθείας (ε) ἀχθῇ Α΄x΄ // (ζ) ⟹ Α΄x΄ ∈ (Π) (§ 6.4).

8.6.1. Πόρισμα. Δοθέντων δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), ὑπάρχει ἕνα μόνον παράλληλον ἐπίπεδον (Π) πρός τήν εὐθεῖαν (ε) τό ὁποῖον περιέχει τήν εὐθεῖαν (ζ) (σχ.55).

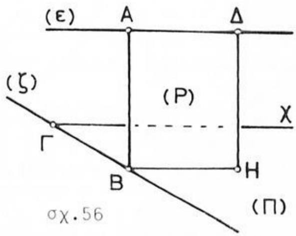


σχ.55

8.7. Κοινή κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

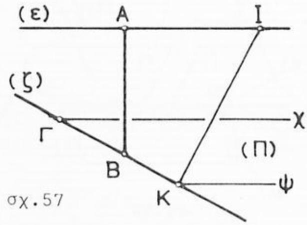
8.7.1. Θεώρημα. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), ὑπάρχει μία καί μόνον μία κοινή κάθετος αὐτῶν.

'Απόδειξις. 'Εκ τυχόντος σημείου Γ τῆς εὐθείας (ζ) φέρομεν εὐθεῖαν Γx//(ε) (σχ. 56). Αἱ δύο εὐθεῖαι (ζ) καί Γx καθορίζουν ἐπίπεδον (Π). 'Εκ τυχόντος σημείου Δ τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν ΔΗ⊥(Π) καί ἐκ τοῦ Η τήν εὐθεῖαν ΗΒ//(ε). 'Η εὐθεῖα ΗΒ ἀνήκει ἀσφαλῶς εἰς τό ἐπίπεδον (Π) (§ 6.4) καί ἑπομένως τέμνει τήν εὐθεῖαν (ζ) εἰς σημεῖον Β (ἀποκλείεται νά εἶναι παράλληλοι, διότι τότε θά ἦτο καί (ε)//(ζ)). Αἱ δύο παράλληλοι (ε) καί (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει προφανῶς καί ἡ ΔΗ. 'Από τό σημεῖον Β φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρός τήν ΔΗ, ἡ ὁποια, ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), τέμνει τήν εὐθεῖαν (ε) εἰς σημεῖον Α. Τό τετράπλευρον ΑΔΒΗ εἶναι ἐκ κατα-



σχ.56

σκευής παραλληλόγραμμον καί μάλιστα όρθογώνιον, διότι εἶναι $ΔΗ \perp (Π) \Rightarrow ΔΗ \perp ΗΒ$. Ἄρα θά εἶναι καί $\hat{A}=1^{L} \Rightarrow AB \perp (ε)$. Ἐπειδή ἐπί πλέον εἶναι $ΔΗ \perp (Π) \Rightarrow AB \perp (Π) \Rightarrow AB \perp (ζ)$. Ἑπομένως ἡ ΑΒ εἶναι κοινή κάθετος διά τάς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας (ε) καί (ζ).

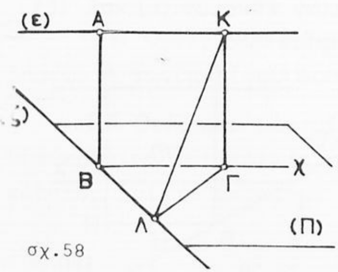


σχ.57

Ἡ κοινή κάθετος ΑΒ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν εἶναι καί ἡ μοναδική. Πράγματι ἔστω ὅτι ἡ ΙΚ (σχ.57) εἶναι μία ἄλλη κοινή κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν Κy //(ε). Τότε ἡ ΙΚ θά εἶναι κάθετος καί ἐπί τήν Κy, ὡς κάθετος ἐπί τήν παράλληλόν της (ε). Ἡ Κy ὅμως ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (Π) διότι Κy//(ε)//Γx. Ἄρα $ΙΚ \perp (Π)$, ὡς κάθετος ἐπί τάς δύο εὐθείας του (ζ) καί Κy $\Rightarrow$ ΑΒ//ΙΚ ὡς κάθετοι ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον (Π) $\Rightarrow$ αἱ ΑΒ καί ΙΚ καθορίζουν ἐπίπεδον εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει ἡ $ΑΙ \equiv (ε)$ καί ἡ $ΒΚ \equiv (ζ)$, ἤτοι αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καί (ζ) εἶναι συνεπίπεδοι, ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα, μία μόνον εἶναι ἡ κοινή κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

8.7.2. Θεώρημα. Ἐξ ὅλων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν ὁποίων τά ἄκρα εὑρίσκονται ἐπί δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), μικρότερον εἶναι τό κοινόν κάθετον τμῆμα ΑΒ τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒ τό κοινόν κάθετον τμῆμα τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) (σχ.58). Ἐκ τοῦ Β φέρομεν τήν Βx// (ε), ἡ ὁποία μετά τῆς εὐθείας (ζ) καθορίζουν ἐπίπεδον (Π)//(ε). Ἐάν ΚΛ εἶναι τυχόν εὐθύγραμμον τμῆμα μέ τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε) καί (ζ), ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι ΑΒ < ΚΛ. Φέρομεν $ΚΓ \perp (Π) \Rightarrow ΑΒ = ΚΓ$ (§ 6.5). Ἀπό τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΛ λαμβάνομεν ΚΓ < ΚΛ $\Rightarrow$ ΑΒ < ΚΛ.



σχ.58

8.7.3. Ἐλαχίστη ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ἤ ἁπλῶς "ἀπόστασις δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν" καλεῖται τό μῆκος τοῦ κοινοῦ καθέτου εὐθυγράμμου τμήματος αὐτῶν.

Ἀσκήσεις

67. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $(ε_1)$ καί $(ε_2)$ καί σημεῖον Α. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Α εὐθεῖα τέμνουσα τάς δύο ἀσυμβάτους.

68. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Νά ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τάς δύο ἀσυμβάτους καί ἔχουσα δοθεῖσαν διεύθυνσιν (δ).

69. Ἡ κοινή κάθετος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2) ἔχει μῆκος 12cm, ἡ δέ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εἶναι 60^0. Ἐπί τῆς (ε_1) λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ=6cm καί ἐπί τῆς (ε_2) τμῆμα ΒΔ=8cm. Νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΓΔ (δύο περιπτώσεις).

70. Ἀπό τό μέσον Γ τοῦ κοινοῦ καθέτου τμήματος ΑΒ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), φέρομεν ἐπίπεδον (Π) παράλληλον πρός τάς ἀσυμβάτους. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τμῆμα μέ τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων, διχοτομεῖται ὑπό τοῦ ἐπιπέδου (Π).

71. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό δύο ἀσυμβάτους εὐθείας.

72. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) παράλληλοι πρός τό (Π). Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ κοινή κάθετος τῶν δύο ἀσυμβάτων, εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

73. Μεταβλητοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ κορυφαί Α,Β,Γ διατηροῦνται σταθεραί, ἐνῷ ἡ κορυφή Δ διαγράφει εὐθεῖαν (ε). Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ ἐπί τῆς εὐθείας (ε), οὕτως ὥστε τό παραλληλόγραμμον τό ἔχον κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, εἶναι : α) ὀρθογώνιον, β) ρόμβος.

74. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α αὐτοῦ καί εὐθεῖα (ε) τέμνουσα τό (Π) εἰς τό Β. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Α εὐθεῖα (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), τοιαύτη ὥστε ἡ κοινή κάθετος τῶν ἀσυμβάτων (ε) καί (ζ) νά διέρχεται i) διά τοῦ σημείου Α, ii) διά τοῦ σημείου Β.

75. Εἰς στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ=ΓΔ καί ΑΔ=ΒΓ. Δείξατε ὅτι ἡ συνδέουσα τά μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι ἡ κοινή κάθετος αὐτῶν.

76. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ε) καί (ζ). Εὐθύγραμμον τμῆμα σταθεροῦ μήκους λ, ἔχει τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΒ.

77. Διά νά εἶναι ὀρθογώνια δύο ἀσύμβατα εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καί ΓΔ, δείξατε ὅτι πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι $\Gamma A^2-\Gamma B^2=\Delta A^2-\Delta B^2$.

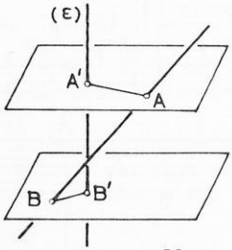
78. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2) τέμνουσαι ἐπίπεδον (Π) εἰς τά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως. Νά κατασκευασθῇ τμῆμα δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον (Π) καί ἔχον τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων.

79. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε) καί (ζ) τέμνουσαι αὐτό εἰς τά σημεῖα Α καί Β. Μεταβλητόν εὐθύγραμμον τμῆμα ΓΔ, ἔχει τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καί παραμένει παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον (Π). Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ μέσου του Ι.

80. Δίδονται τρεῖς ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3). Μεταβλητόν ἐπίπεδον (Π), τό ὁποῖον παραμένει παράλληλον πρός δύο σταθεράς διευθύνσεις, τέμνει τάς ἀσυμβάτους εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ κ.βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

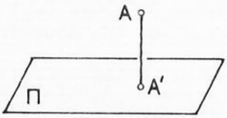
9. Ὀρθαί προβολαί.

9.1. Ὀρθή προβολή σημείου Α ἐπί εὐθεῖαν (ε) καλεῖται τό ἴχνος Α' τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε).



σχ.59

9.2. 'Ορθή προβολή εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπί εὐθεῖαν (ε) καλεῖται τό σύνολον τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ, ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε) (σχ.59). Τό σημειοσύνολον τοῦτον εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα μέ ἄκρα τάς ὀρθάς προβολάς Α' καί Β' τῶν Α καί Β, ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε).

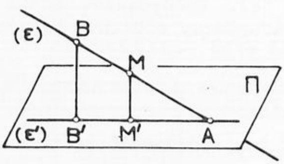


σχ.60

9.3. 'Ορθή προβολή σημείου Α ἐπί ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τό ἴχνος Α' τῆς ἐκ τοῦ Α καθέτου εὐθείας ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.60).

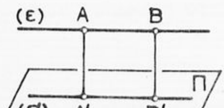
9.4. 'Ορθή προβολή σχήματος (Σ) ἐπί ἐπίπεδον (Π) καλεῖται τό σύνολον τῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ) ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

9.5. Θεώρημα. 'Η ὀρθή προβολή εὐθείας (ε) ἐπί ἐπίπεδον (Π) εἶναι ἐν γένει εὐθεῖα.



σχ.61

'Απόδειξις. 'Η εὐθεῖα (ε) τέμνει ἐν γένει τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α (σχ.61). 'Εκ τυχόντος σημείου Β τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν τήν ΒΒ'⊥(Π). 'Η εὐθεῖα ΒΒ' καί τό σημεῖον Α, καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) τό ὁποῖον τέμνει τό ἐπίπεδον (Π) κατά τήν εὐθεῖαν (ε'). Τό τυχόν σημεῖον Μ τῆς εὐθείας (ε), προβάλλεται ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Μ' ἐπί τῆς εὐθείας (ε'), διότι ἡ ΜΜ' ὡς κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), εἶναι παράλληλος τῆς εὐθείας ΒΒ' καί ἑπομένως εἶναι εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). 'Επομένως τό σημεῖον Μ' κατά τό ὁποῖον τέμνει τό ἐπίπεδον (Π), πρέπει νά ἀνήκῃ εἰς τό κοινόν μέρος τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), ἤτοι εἰς τήν εὐθεῖαν (ε'). Ἄρα ἡ ὀρθή προβολή τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἡ εὐθεῖα (ε').

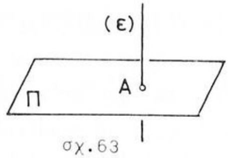


σχ.62

'Εάν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.62), ἡ ὀρθή προβολή της (ε') ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), καθορίζεται ἀπό τάς ὀρθάς προβολάς Α' καί Β' δύο σημείων Α καί

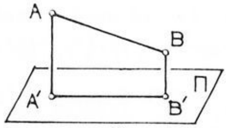
Β τῆς εὐθείας (ε), ἐπί τό ἐπίπεδον (Π). Αἱ εὐθεῖαι (ε) καί (ε΄) εἶναι παράλληλοι. Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ὁμοία.

Ἐάν ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.63), ἡ ὀρθή προβολή της ἐπί τό (Π) εἶναι τό ἴχνος της Α ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).



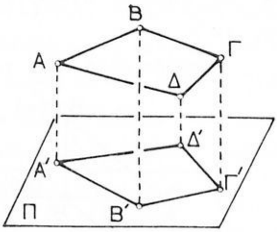
σχ.63

9.6. Παρατήρησις. Ἡ ὀρθή προβολή εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπί ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα μέ ἄκρα τάς ὀρθάς προβολάς Α΄ καί Β΄ τῶν Α καί Β ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) (σχ.64).



σχ.64

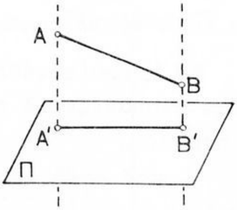
9.6.1. Πόρισμα. Ἡ ὀρθή προβολή εὐθυγράμμου σχήματος ἐπί ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθύγραμμον σχῆμα μέ κορυφάς τάς ὀρθάς προβολάς τῶν κορυφῶν τοῦ ἀρχικοῦ σχήματος (σχ.65).



σχ.65

9.6.2. Θεώρημα. Ἡ ὀρθή προβολή εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ἐπί ἐπίπεδον (Π), εἶναι μικροτέρα ἤ ἴση πρός τό τμῆμα ΑΒ.

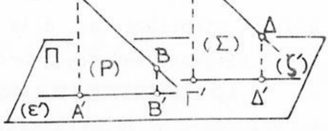
Ἀπόδειξις. Ἔστω Α΄Β΄ ἡ προβολή τοῦ τμήματος ΑΒ ἐπί τό ἐπίπεδον (Π). Εἶναι φανερόν ὅτι Α΄Β΄ $\leq$ ΑΒ, διότι τό τμῆμα Α΄Β΄ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΑ΄ καί ΒΒ΄. Τό = ἰσχύει μονον εἰς τήν περίπτωσιν τῆς παραλληλίας τοῦ τμήματος ΑΒ μετά τοῦ ἐπιπέδου (Π).



σχ.66

9.7. Θεώρημα. Αἱ ὀρθαί προβολαί δύο παραλλήλων εὐθειῶν (ε) καί (ζ) ἐπί ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καί Β τῆς εὐθείας (ε) καί τά προβάλλομεν ἐπί τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τά σημεῖα Α΄ καί Β΄ ἀντιστοίχως (σχ.67). Τά σημεῖα Α΄ καί Β΄ καθορίζουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) τήν ὀρθήν προβολήν τῆς εὐθείας (ε). Ὁμοίως ἡ

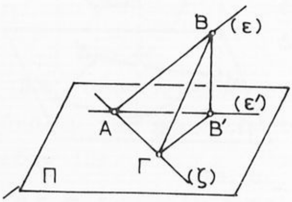


σχ.67

εὐθεῖα (ζ) προβάλλεται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τήν εὐθεῖαν (ζ'), διά τῶν ὀρθῶν προβολῶν Γ' καί Δ' δύο τυχόντων σημείων της Γ καί Δ. Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΑ' καί ΒΒ' καθορίζουν ἐπίπεδον (Ρ) εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ε). 'Ομοίως αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΓΓ' καί ΔΔ' καθορίζουν ἐπίπεδον (Σ) εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει ἡ εὐθεῖα (ζ). 'Επειδή εἶναι (ε)// (ζ) καί ΑΑ'// ΓΓ' (ὡς κάθετοι ἐπί τό αὐτό ἐπίπεδον (Π)), ἕπεται ὅτι (Ρ)// (Σ) (§ 7.8). "Αρα θά εἶναι καί (ε') // (ζ'), ὡς τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό τρίτου.

9.8. Θεώρημα. 'Εάν εὐθεῖα (ε) τέμνει ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Α, σχηματίζει γωνίας μέ τάς εὐθεῖας τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἐκ τῶν ὁποίων μικροτέρα εἶναι ἡ σχηματιζομένη μέ τήν προβολήν της (ε').

'Απόδειξις. 'Εκ τυχόντος σημείου Β τῆς εὐθείας (ε) φέρομεν ΒΒ'⊥ (Π) (σχ.68). 'Η εὐθεῖα ΑΒ'≡(ε') εἶναι ἡ προβολή τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τό ἐπίπεδον (Π)."Ας θεωρήσωμεν καί τυχοῦσαν εὐθεῖαν (ζ) τοῦ ἐπιπέδου (Π), διερχομένην διά τοῦ σημείου Α. 'Επ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΑΓ=ΑΒ' καί ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι $B\hat{A}B' < B\hat{A}\Gamma$.



σχ.68

ΒΒ'<ΒΓ διότι ἡ ΒΓ εἶναι ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΒ'Γ ($\hat{B}'=1^{L}$). Τότε, ἀπό τά τρίγωνα ΒΑΒ' καί ΒΑΓ τά ὁποῖα ἔχουν τήν ΒΑ κοινήν καί ΑΒ'=ΑΓ, ἕπεται ὅτι $B\hat{A}B' < B\hat{A}\Gamma$.

9.8.1. Γωνία εὐθείας καί ἐπιπέδου καλεῖται ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ἐν λόγῳ εὐθεῖα, μέ τήν προβολήν της ἐπί τό ἐπίπεδον.

'Η αὐτή γωνία καλεῖται καί γωνία κλίσεως τῆς εὐθείας ὡς πρός τό ἐπίπεδον.

9.9. Τὰ σχήματα εἰς τὴν Στερεομετρίαν. 'Η στερεομετρία, ἀποτελοῦσα ἐπέκτασιν τῆς ἐπιπεδομετρίας, μέ πρώτην σκέψιν δέν θά πρέπει νά παρουσιάζῃ μεγαλυτέραν δυσχέρειαν εἰς τήν ἀντιμετώπισιν τῶν θεμάτων της, ἀπό ἐκείνην τῆς ἐπιπεδομετρίας. Παρά ταῦτα ὅμως, ὑπάρχει μεγαλυτέρα δυσχέρεια καί τοῦτο ὀφείλεται εἰς τό γεγονός ὅτι δέν ἐργαζόμεθα μέ αὐτά τά ἴδια τά στερεά τῆς στερεομετρίας, ἀλλά ἀπεικονίζομεν αὐτά ἐπί ἐπιπέδου (φύλλου χάρτου ἤ πίνακος) καί ἐργαζόμεθα μέ τάς εἰκόνας των.

Αἱ εἰκόνες τῶν στερεῶν, μέ τάς ὁποίας ἐργαζόμεθα, δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά αἱ ὀρθαί προβολαί τῶν ἐν λόγῳ στερεῶν, ἐπί τό ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Διά τήν σχεδίασιν επομένως τῶν σχημάτων, πρέπει νά ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν ὡρισμένους ἀπαραβάτους κανόνας ἤτοι :

i) 'Εάν τό πρός ἀπεικόνισιν στερεόν περιέχει παραλλήλους εὐθείας αὗται θά σχεδιασθοῦν ὡς παράλληλοι (§ 9.5).

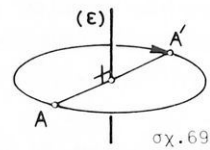
ii) Τά μήκη ἐν γένει δέν διατηροῦνται ἀλλά προβάλλονται εἰς μικρότερα (§ 9.4.2).

iii) Δύο παράλληλα καί ἴσα τμήματα, ἔχουν παραλλήλους καί ἴσας προβολάς.

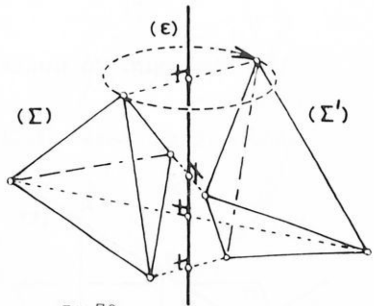
iv) Αἱ γωνίαι ἐν γένει δέν διατηροῦνται ἀλλά προβάλλονται εἰς μεγαλυτέρας ἤ εἰς μικροτέρας γωνίας καί τοῦτο θά ἐξαρτᾶται ἀπό τήν φανταστικήν θέσιν τοῦ στερεοῦ ὡς πρός τό ἐπίπεδον σχεδιάσεως. Τά ἐπίπεδα τμήματα, ἐπί παραδείγματι, τά ὁποῖα φανταζόμεθα ὡς ὀρθογώνια, τά σχεδιάζομεν συνήθως ὡς πλάγια παραλληλόγραμμα, δηλαδή ἐκ τῶν ὀρθῶν γωνιῶν των, αἱ δύο ἀπέναντι προβάλλονται ὡς ἀμβλεῖαι καί αἱ ἄλλαι δύο ὡς ὀξεῖαι.

'Εν τέλει, ἡ ὀρθή καί παραστατική σχεδίασις τῶν σχημάτων ἐξαρτᾶται κατά πολύ καί ἀπό τήν ἐμπειρίαν τοῦ ἀσχολουμένου.

10. 'Αξονική συμμετρία. Καθορίζεται ἐπακριβῶς ὅπως καί εἰς τό ἐπίπεδον ὡς μετατόπησις. Οὕτω τό συμμετρικόν σημείου Α ὡς πρός ἄξονα εὐθεῖαν (ε) (σχ.69), εἶναι σημεῖον Α' τό ὁποῖον προκύπτει ἀπό τήν περιστροφήν τοῦ σημείου Α περί τήν εὐθεῖαν (ε), κατά γωνίαν 180^0. Τό ἐπίπεδον περιστροφῆς εἶναι κάθετον ἐπί τόν ἄξονα συμμετρίας (ε). Τό τμῆμα ΑΑ' ἔχει ὡς μεσοκάθετον τόν ἄξονα συμμετρίας (ε).



σχ.69

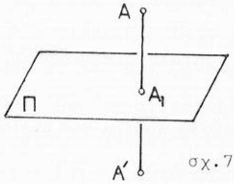


σχ.70

Τό συμμετρικόν (Σ') ἑνός στερεοῦ (Σ) ὡς πρός ἕνα ἄξονα συμμετρίας (ε) ἀπαρτίζεται ἀπό τό σύνολον τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων τοῦ στερεοῦ (Σ) ὡς πρός τόν αὐτόν ἄξονα (σχ.70). Τά δύο στερεά (Σ) καί (Σ') εἶναι ἴσα, διότι τό (Σ') προκύπτει ἀπό μετατόπισιν (περιστροφήν) τοῦ στερεοῦ (Σ).

11. Συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδον (κατοπτρισμός).

11.1. 'Ορισμός. Ἔστω ἐπίπεδον (Π) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ (σχ.71).



σχ.71

Συμμετρικόν τοῦ σημείου A ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π), καλεῖται ἕνα σημεῖον A, τοιοῦτον ὥστε τό ἐπίπεδον (Π) νά εἶναι τό μεσοκάθετον τοῦ τμήματος AA'.

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, διά νά κατασκευάσωμεν τό συμμετρικόν A' τοῦ σημείου A ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π), φέρομεν ἐκ τοῦ A τήν $AA_1 \perp (\Pi)$ καί εἰς τήν προέκτασιν λαμβάνομεν τμῆμα $A_1A' = A_1A$.

11.2. Πόρισμα. Τό συμμετρικόν τοῦ σημείου A' ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π), εἶναι τό σημεῖον A, ἤτοι ἡ συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδον εἶναι ἐνελικτικός σημειακός μετασχηματισμός.

11.3. Πόρισμα. Τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π), παραμένουν ἀναλλοίωτα εἰς τήν συμμετρίαν ὡς πρός τό (Π), ἤτοι συμπίπτουν μέ τά συμμετρικά των.

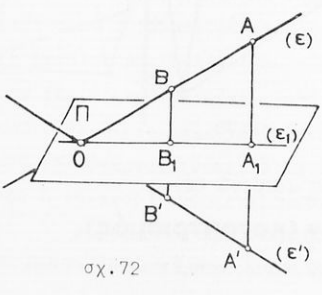
11.4. Ὁρισμός. Συμμετρικόν σχήματος (Σ) ὡς πρός ἐπίπεδον (Π) καλεῖται ἕνα σχῆμα (Σ') τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό τά συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π).

Ἐάν ὑπάρχει ἐπίπεδον ὡς πρός τό ὁποῖον τό συμμετρικόν (Σ') ἑνός σχήματος (Σ), συμπίπτει μέ τό σχῆμα (Σ), θά λέγομεν ὅτι τό σχῆμα (Σ) ἔχει ἐπίπεδον συμμετρίας.

Παράδειγμα. Τά ὄντα τῆς φύσεως ἐν γένει, ἔχουν ἐπίπεδον συμμετρίας.

11.5. Θεώρημα. Τό συμμετρικόν εὐθείας ὡς πρός ἐπίπεδον, εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω εὐθεῖα (ε) καί (Π) τό ἐπίπεδον συμμετρίας (σχ. 72). Λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καί B τῆς εὐθείας (ε) καί κατασκευάζομεν τά συμμετρικά των A' καί B' ἀντιστοίχως ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π). Αἱ εὐθεῖαι AA' καί BB' τέμνουν τό ἐπίπεδον (Π) εἰς τά σημεῖα A_1 καί B_1 ἀντιστοίχως, τά ὁποῖα καθορίζουν τήν ὀρθήν προβολήν (ε_1) τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π). Τότε ἡ συμμετρία τῆς εὐθείας (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π), δύναται νά θεωρηθῇ καί ά



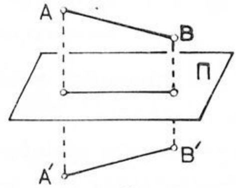
σχ.72

νική συμμετρία ὡς πρός ἄξονα τήν εὐθεῖαν (ε_1). Ἑπομένως, λόγῳ συνυπαρχούσης ἀξονικῆς συμμετρίας, τό συμμετρικόν τῆς εὐθείας (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθεῖα (ε΄).

11.6. Πόρισμα. Ἐάν εὐθεῖα (ε) τέμνη ἐπίπεδον (Π) εἰς σημεῖον Ο, ἡ συμμετρική εὐθεῖα (ε΄) τῆς (ε) ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διά τοῦ σημείου Ο.

Ἐάν ἡ εὐθεῖα (ε) ἦτο παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον (Π) καί ἡ συμμετρική της θά ἦτο παράλληλος πρός τό (Π).

11.7. Πόρισμα. Τό συμμετρικόν εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ ὡς πρός ἐπίπεδον (Π), εἶναι εὐθύγραμμον τμῆμα Α΄Β΄ τό ὁποῖον ἔχει ὡς ἄκρα τά συμμετρικά τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 73).

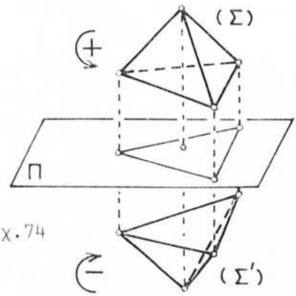


σχ.73

11.8. Πόρισμα. Τό συμμετρικόν ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ὡς πρός ἐπίπεδον (Π), εἶναι ἴσον τριγώνου Α΄Β΄Γ΄, διότι τά δύο τρίγωνα ἔχουν τάς πλευράς των ἀντιστοίχως ἴσας. Κατά συνέπειαν καί τό συμμετρικόν οἱουδήποτε <u>ἐπιπέδου</u> εὐθυγράμμου σχήματος, ὡς πρός ἐπίπεδον, εἶναι ἴσον σχῆμα καί γενικώτερον τό συμμετρικόν οἱουδήποτε <u>ἐπιπέδου</u> σχήματος, εἶναι ἴσον σχῆμα.

11.9. Παρατηρήσεις.

i) Τό συμμετρικόν (Σ΄) ἑνός στερεοῦ (Σ) ὡς πρός ἐπίπεδον (Π), ἐν γένει δέν εἶναι σχῆμα ἴσον πρός τό σχῆμα (Σ) καί τοῦτο διότι τά δύο στερεά εἶναι ἀντιθέτως προσανατολισμένα (σχ.74).



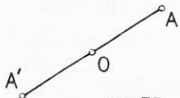
σχ.74

Παράδειγμα. Αἱ παλάμαι τῶν χειρῶν μας, τιθέμεναι ἀντιμέτωποι, δύνανται νά θεωρηθοῦν συμμετρικαί ἀλλήλων ὡς πρός ἐνδιάμεσον ἐπίπεδον. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δέν εἶναι ἴσαι, διότι ἐάν ἦσαν ἄϋλαι, δέν θά ἠδύναντο νά ταυτισθοῦν τιθέμεναι ἡ μία ἐπί τῆς ἄλλης.

ii) Ἡ συμμετρία ὡς πρός ἐπίπεδον καλεῖται καί κατοπτρισμός, διότι δύο συμμετρικά ἀλλήλων στερεά ὡς πρός ἐπίπεδον, ἔχουν τοιαύτην σχέσιν, οἵαν σχέσιν ἔχει τό ἕνα ἐξ αὐτῶν μέ τό κατοπτρικόν του εἴδωλον ἐντός ἐπιπέδου κατόπτρου.

12. Κεντρική συμμετρία.

12.1. Ὁρισμός. Δοθέντος σημείου Α καί σημείου Ο καλουμένου κέντρου, καλοῦμεν συμμετρικόν τοῦ σημείου Α ὡς πρός κέντρον τό σημεῖον Ο ἕνα σημεῖον Α΄, τοιοῦτον ὥστε τό τμῆμα ΑΑ΄ νά ἔχῃ ὡς μέσον τό κέντρον Ο (σχ.75).

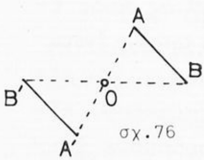


σχ.75

12.2. Πόρισμα. Τό συμμετρικόν τοῦ σημείου Α΄ ὡς πρός τό κέντρον Ο εἶναι τό σημεῖον Α, ἤτοι ἡ κεντρική συμμετρία εἶναι ἐνελικτικός σημειακός μετασχηματισμός.

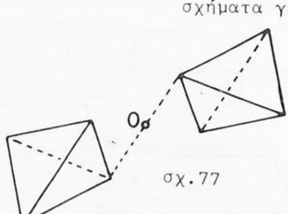
12.3. Ὁρισμός. Συμμετρικόν σχήματος (Σ) ὡς πρός κέντρον σημεῖον Ο καλεῖται ἕνα σχῆμα (Σ΄) τό ὁποῖον ἀπαρτίζεται ἀπό τά συμμετρικά τῶν σημείων τοῦ σχήματος (Σ), ὡς πρός τό κέντρον Ο.

Ἐάν τό σχῆμα (Σ΄) συμπίπτει μέ τό σχῆμα (Σ), λέγομεν ὅτι τό (Σ) ἔχει κέντρον συμμετρίας τό σημεῖον Ο.



σχ.76

12.4. Ἡ κεντρική συμμετρία ὡς σημειακός μετασχηματισμός, ἀπεικονίζει ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ εἰς ἴσον τμῆμα Α΄Β΄ (Βλ. [Α] § 68), ἤτοι, ὡς σημειακός μετασχηματισμός, εἶναι ἰσομετρία καί ἑπομένως τά ἐπίπεδα σχήματα γενικῶς τά ἀπεικονίζει εἰς ἴσα σχήματα. Ἕνα διάνυσμα ὅμως $\vec{AB}$ τό ἀπεικονίζει εἰς τό ἀντίθετόν του $\vec{A'B'}$, ἤτοι εἶναι $\vec{AB}=-\vec{A'B'}$ καί ἑπομένως τά στερεά τά ἀπεικονίζει ἀντιθέτως προσανατολισμένα, ἤτοι μή ἐφαρμόσημα $\Longleftrightarrow$ μή ἴσα (σχ.77).



σχ.77

Ἀσκήσεις

81. Ἐάν εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ προβάλλεται ἐπί ἐπίπεδον (Π) εἰς τό Α΄Β΄, δείξατε ὅτι εἶναι $AB \geq A'B' \geq 0$.

82. Δείξατε ὅτι τό μέσον εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τό μέσον τῆς προβολῆς του ἐπί τυχόν ἐπίπεδον.

83. Τρία σημεῖα Α,Β,Γ κεῖνται ἐπ᾽εὐθείας καί προβάλλονται ἐπί ἐπίπεδον (Π) εἰς τά Α΄,Β΄,Γ΄ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι : $\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

84. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ προβολαί δύο παραλλήλων καί ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων ἐπί τήν αὐτήν εὐθεῖαν, εἶναι ἴσαι.

85. Δίδεται ὀρθή γωνία $x\hat{K}y$. Ἐάν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολή τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπί τό ἐπίπεδον

(Π) εἶναι ὀρθή γωνία.

86. Δίδεται ὀρθή γωνία $x\hat{K}y$ τῆς ὁποίας αἱ πλευραί τέμνουν ἐπίπεδον (Π) εἰς τά Α καί Β. Δείξατε ὅτι ἡ προβολή τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπί τό ἐπίπεδον, εἶναι ἀμβλεῖα γωνία.

87. Πότε ἡ προβολή μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπί ἐπίπεδον εἶναι ὀξεῖα γωνία;

88. Δίδεται ὀξεῖα γωνία $x\hat{O}y$. 'Εάν ἡ μία πλευρά της εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολή τῆς γωνίας ἐπί τό ἐπίπεδον, εἶναι ὀξεῖα γωνία.

89. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ καί σημεῖα Β καί Γ τοῦ (Π). 'Η ἀπόστασις τοῦ σημείου Α ἀπό τό ἐπίπεδον (Π) εἶναι 3λ καί ἀπό τήν εὐθεῖαν ΒΓ εἶναι 5λ. 'Εάν Α' εἶναι ἡ προβολή τοῦ Α ἐπί τό (Π), δείξατε ὅτι : $(A'B\Gamma)=\frac{4}{5}(AB\Gamma)$.

90. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ μήκους 20cm ἔχει προβολήν Α'Β' ἐπί ἐπίπεδον (Π) μήκους 10cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ὡς πρός τό ἐπίπεδον.

91. Σημεῖον Α ἀπέχει ἀπό ἐπίπεδον (Π) 8cm καί σημεῖον Β ἀπέχει ἀπό τό (Π) 10cm. 'Εάν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ ὡς πρός τό ἐπίπεδον (Π) εἶναι 30^0 νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ ὅταν : α) τά Α καί Β εὑρίσκονται πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου (Π), β) τά Α καί Β εὑρίσκονται ἑκατέρωθεν τοῦ (Π).

92. Νά ἐξετασθῇ τό αὐτό πρόβλημα ἐάν ἡ γωνία κλίσεως τοῦ τμήματος ΑΒ ὡς πρός τό (Π), εἶναι 45^0.

93. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ὀρθῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος, ἐπί τρεῖς εὐθείας ἀνά δύο ὀρθογωνίους, ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον δοθέντος τμήματος.

94. Δίδεται στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καί σημεῖον Σ. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Σ ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ὁποίου τό τετράπλευρον νά προβάλεται κατά παραλληλόγραμμον.

95. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν ὀρθῶν προβολῶν τοῦ σημείου Α, ἐπί τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῆς εὐθείας (ε).

96. Ὑπό ποίας συνθήκας ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας προβάλλεται ἐπί ἐπιπέδου κατά τήν διχοτόμον τῆς προβολῆς της;

97. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Μεταβλητόν τμῆμα σταθεροῦ μήκους λ ἔχει τά ἄκρα του ἐπί τῶν δύο ἀσυμβάτων. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει ἐπίπεδον ὡς πρός τό ὁποῖον τό τμῆμα σχηματίζει σταθεράν γωνίαν κλίσεως καί προβάλλεται ἐπ' αὐτοῦ κατά σταθερόν μῆκος.

98. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο ἄξονες συμμετρίας ὅπου μέσῳ ἑκάστου ἐξ αὐτῶν, ἡ μία ἐκ τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν, ἀπεικονίζεται ἐπί τῆς ἄλλης.

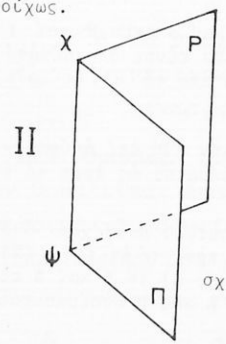
99. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρός τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῆς εὐθείας (ε).

100. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά σημεῖα Α καί Β νά εἶναι ἐλάχιστον.

101. Τό αὐτό πρόβλημα, ὅταν ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά σημεῖα Α καί Β, πρέπει νά εἶναι μεγίστη.

102. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί δύο σημεῖα Α καί Β ὄχι μεταξύ τῶν ἐπιπέδων. Νά εὑρεθῆ ὁ συντομώτερος δρόμος ἐκ τοῦ Α πρός τό Β, ὅταν αὐτός πρέπει νά ἐγγίζη τά δύο ἐπίπεδα καί τό ἐντός τῶν ἐπιπέδων τμῆμα του νά ἔχη καθορισμένον μῆκος λ.

103. Νά κατασκευασθῆ εὐθύγραμμον τμῆμα, ἔχον ὡς μέσον δοθέν σημεῖον Ο καί τά ἄκρα του νά εὑρίσκωνται ἐπί εὐθείας (ε) καί ἐπιπέδου (Π) ἀντιστοίχως.



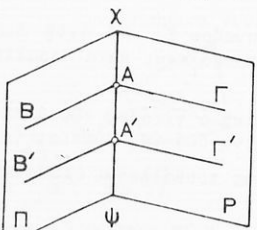
σχ.78

13. Δίεδροι γωνίαι.

13.1. Ὁρισμός. Δύο ἡμιεπίπεδα (Π) καί (Ρ) μέ κοινήν ἀρχήν εὐθεῖαν xy, διαιροῦν τόν χῶρον εἰς δύο περιοχάς Ι καί ΙΙ (σχ.78). Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν καλεῖται δίεδρος γωνία μέ ἀκμήν τήν εὐθεῖαν xy καί μέ ἕδρας τά ἡμιεπίπεδα (Π) καί (Ρ).

Τήν δίεδρον γωνίαν συμβολίζομεν μέ (Π)xy(Ρ).

13.2. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου. Ἔστω δίεδρος γωνία (Π)xy(Ρ) καί Α τυχόν σημεῖον τῆς ἀκμῆς της xy (σχ.79). Ἐκ τοῦ Α θεωροῦμεν κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν xy, τό ὁποῖον τέμνει τάς ἕδρας τῆς διέδρου κατά τάς ἡμιευθείας ΑΒ καί ΑΓ. Ἡ σχηματιζομένη ἐπίπεδος γωνία $B\hat{A}\Gamma$, εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ σημείου Α ἐπί τῆς xy καί καλεῖται "ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ)".



σχ.79

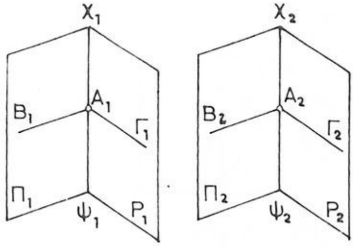
Πράγματι, ἐάν Α′ εἶναι ἕνα ἄλλο σημεῖον τῆς ἀκμῆς xy καί φέρομεν ἐξ αὐτοῦ τό κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν xy, θά καθορισθῆ ἀντιστοίχως ἡ ἐπίπεδος γωνία $B'\hat{A}'\Gamma'$, ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἴση μέ τήν $B\hat{A}\Gamma$, ὡς ἔχουσαι τάς πλευράς των παραλλήλους καί ὁμορρόπους (§ 7.8)

Δέον νά σημειωθῆ ὅτι αἱ πλευραί τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου γωνίας, εὑρίσκονται ἐπί τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου καί εἶναι κάθετοι ἐπί τήν ἀκμήν.

13.3. Θεώρημα. Ἐάν δύο δίεδροι γωνίαι $(\Pi_1)x_1y_1(P_1)$ καί $(\Pi_2)x_2y_2(P_2)$ εἶναι ἴσαι, τότε καί αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῶν εἶναι ἴσαι καί ἀντιστρόφως.

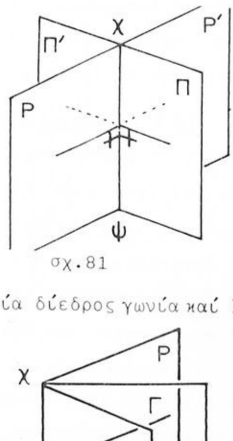
Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι, δύνανται νά συμπέσουν μέ μετατόπισιν καί έπομένως δύνανται νά άποκτήσουν κοινήν $\Rightarrow$ ἴσην ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν, μέ κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν κοινήν ἀκμήν των.

Ἀντιστρόφως. Ἔστω $B_1\hat{A}_1\Gamma_1 = B_2\hat{A}_2\Gamma_2$ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι τῶν διέδρων (σχ.80). Φανταζόμεθα μετατόπισιν τῆς ἐπιπέδου γωνίας $B_2\hat{A}_2\Gamma_2$, οὕτως ὥστε νά συμπέσῃ μέ τήν $B_1\hat{A}_1\Gamma_1$. Τότε κατ'ἀνάγκην ἡ ἀκμή x_2y_2 θά ταυτισθῇ μετά τῆς ἀκμῆς x_1y_1, διότι ἄλλως, ἐπί τό ἐπίπεδον $B_1A_1\Gamma_1$ θά ὑπῆρχον δύο κάθετοι εὐθεῖαι εἰς τό σημεῖον A_1, ὅπερ ἄτοπον. Τότε ὅμως τό ἡμιεπίπεδον (Π_2) εἰς τήν νέαν θέσιν του θά ταυτισθῇ μετά τοῦ (Π_1), διότι θά ἔχῃ μετ'αὐτοῦ κοινάς τάς A_1B_1 καί x_1y_1. Ὁμοίως καί τό ἡμιεπίπεδον (P_2) θά ταυτισθῇ μετά τοῦ (P_1). Ἄρα αἱ δίεδροι εἶναι ἴσαι ἐφ'ὅσον δύνανται νά ταυτισθοῦν.



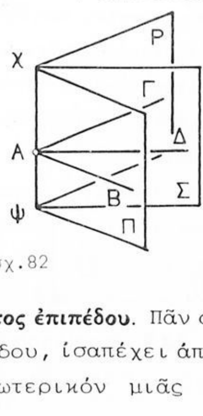
σχ.80

13.4. Κατ' ἀκμήν δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι (Π)xy(P) καί (Π')xy(P') (σχ.81), αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινήν ἀκμήν xy καί εἶναι συμμετρικαί ἀλλήλων, ὡς πρός ἄξονα συμμετρίας τήν ἀκμήν των xy. Ἑπομένως, δύο κατ'ἀκμήν δίεδροι γωνίαι, εἶναι ἴσαι (§ 10). Αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι αὐτῶν, αἱ προκύπτουσαι ἀπό τό αὐτό κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν ἀκμήν xy, εἶναι κατά κορυφήν.



σχ.81

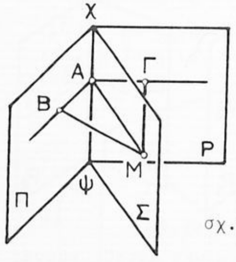
13.5. Διχοτομοῦν ἐπίπεδον. Ἔστω (Π)xy(P) μία δίεδρος γωνία καί $B\hat{A}\Gamma$ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος αὐτῆς (σχ.82). Ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπί τήν xy ὡς εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου ΒΑΓ καί καθορίζει μετά τῆς xy ἐπίπεδον (Σ). Τό ἐπίπεδον (Σ) καλεῖται διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον (Π)xy(P) καί τήν διαιρεῖ εἰς δύο ἴσας διέδρους. Πράγματι εἶναι (Π)xy(Σ) = (P)xy(Σ) $\Leftrightarrow$ $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}\Delta$.



σχ.82

13.6. Χαρακτηριστική ἰδιότης τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου. Πᾶν σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος διέδρου γωνίαν ἐπιπέδου, ἰσαπέχει ἀπό τάς ἕδρας της καί ἀντιστρόφως, πᾶν σημεῖον ἐσωτερικόν μιᾶς διέδρου καί ἰσαπέχον ἀπό τάς ἕδρας της, ἀνήκει είς τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω δίεδρος γωνία (Π)xy(Ρ), (Σ) τό διχοτομοῦν αὐτῆς ἐπίπεδον καί Μ τυχόν σημεῖον τοῦ (Σ) (σχ.83). Ἐκ τοῦ Μ φέρομεν ΜΑ ⊥ xy, ΜΒ ⊥ (Π), ΜΓ ⊥ (Ρ) ⇒ ΑΒ ⊥ xy καί ΑΓ ⊥ xy (θεώρ. τριῶν καθέτων), ἤτοι ἡ γωνία ΒÂΓ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ), ὡς καί αἱ ΒÂΜ καί ΓÂΜ αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῶν (Π)xy(Σ) καί (Ρ)xy(Σ). Ἐπειδή τό σημεῖον Μ ἀνήκει είς τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ), ἕπεται ὅτι ΒÂΜ = ΓÂΜ. Ἄρα τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΒΑΜ καί ΓΑΜ εἶναι ἴσα διότι ἐπί πλέον ἔχουν καί τήν ΜΑ κοινήν ⇒ ΜΒ = ΜΓ.



σχ.83

Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι αἱ ἀποστάσεις ΜΒ καί ΜΓ τοῦ σημείου Μ ἀπό τάς ἕδρας τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ) εἶναι ἴσαι. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί τότε τά αὐτά ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ΜΒ = ΜΓ καί ΜΑ κοινήν. Ἄρα ΒÂΜ = ΓÂΜ καί ἐπομένως τό σημεῖον Μ ἀνήκει είς τό διχοτομοῦ ἐπίπεδον (Σ) τῆς διέδρου (Π)xy(Ρ).

13.7. Μέτρησις διέδρου γωνίας. Ἐκ τῶν προηγουμένων (13.3, 13.4) ἕπεται ὅτι ἡ διχοτόμησις μιᾶς διέδρου γωνίας συνεπάγεται τήν διχοτόμησιν τῆς ἀντιστοίχου αὐτῆς ἐπιπέδου καί ἀντιστρόφως. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι ἡ διαίρεσις μιᾶς διέδρου εἰς ν ἴσας διέδρους συνεπάγεται τήν διαίρεσιν εἰς ν ἴσας ἐπιπέδους τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου. Ἄρα τά γεωμετρικά στοιχεῖα "δίεδροι γωνίαι" καί "ἀντίστοιχοι αὐτῶν ἐπίπεδοι" εἶναι ἀνάλογα καί ἐπομένως δέχονται ἀριθμητικῶς μόνον τάς ἰδίας μονάδας μετρήσεως. Λέγομεν ἐπί παραδείγματι ὅτι μία δίεδρος γωνία εἶναι 60^0, ἐάν καί μόνον ἡ ἀντίστοιχος αὐτῆς ἐπίπεδος εἶναι 60^0. Εὐνόητον εἶναι ὅτι ὅλαι αἱ μονάδες μετρήσεως τῶν γωνιῶν, ἔχουν τάς ἀντιστοίχους των διά τήν μέτρησιν τῶν διέδρων γωνιῶν.

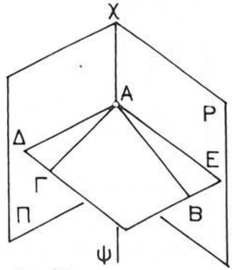
Αἱ πράξεις τῆς προσθέσεως καί τῆς ἀφαιρέσεως μεταξύ διέδρων γωνιῶν ὡς καί τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἤ διαιρέσεως διέδρου μέ φυσικόν ἀριθμόν, ἀνάγονται εἰς τάς ἀντιστοίχους πράξεις μεταξύ τῶν ἀντιστοίχων ἐπιπέδων γωνιῶν των.

13.8. Συμπληρωματικαί δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι μία ὀρθή δίεδρος.

13.9. Παραπληρωματικαί δίεδροι καλοῦνται δύο δίεδροι γωνίαι τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι μία πεπλατυσμένη δίεδρος.

13.10. Θεώρημα. Ἐάν ἀπό τυχόν σημεῖον A τῆς ἀκμῆς xy διέδρου γωνίας (Π)xy(P), ἀχθοῦν ἡμιευθεῖαι AB καί AΓ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας τῆς διέδρου καί πρός τό μέρος τῶν ἑδρῶν της, αἱ ἡμιευθεῖαι AB καί AΓ καθορίζουν δίεδρον μέ ἀκμήν τήν xy, παραπληρωματικήν τῆς διέδρου (Π)xy(P).

Ἀπόδειξις. $AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \perp xy$, $A\Gamma \perp (P) \Rightarrow A\Gamma \perp xy$ (σχ.84). Ἄρα τό ἐπίπεδον τῶν ἡμιευθειῶν AB καί AΓ, εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἀκμήν xy καί ἑπομένως αἱ τομαί του AΔ καί AE μέ τάς ἕδρας τῆς διέδρου, δίδουν τήν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν $\Delta\hat{A}E$ τῆς διέδρου. Ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι εἶναι $B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = 2^{L}$. $B\hat{A}\Delta = 1^{L}$, $\Gamma\hat{A}E = 1^{L} \Rightarrow B\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}E = 2^{L} \Rightarrow (B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta) + (\Gamma\hat{A}B + B\hat{A}E) = 2^{L} \Rightarrow B\hat{A}\Gamma + (\Gamma\hat{A}\Delta + \Gamma\hat{A}B + B\hat{A}E) = 2^{L} \Rightarrow B\hat{A}\Gamma + \Delta\hat{A}E = 2^{L}$.

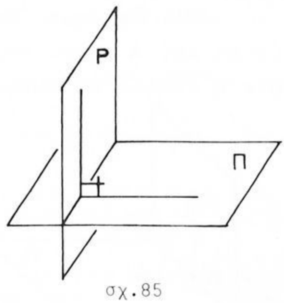


σχ.84

14. Κάθετα ἐπίπεδα.

14.1. Ὁρισμός. Δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (P) καλοῦνται κάθετα ἀλλήλων, ὅταν μία ἐκ τῶν τεσσάρων διέδρων τάς ὁποίας σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή (σχ.85).

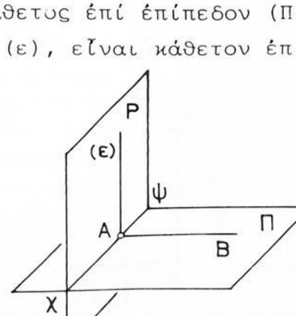
Εὐνόητον εἶναι ὅτι καί αἱ τέσσαρες σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ὀρθαί.



σχ.85

14.2. Θεώρημα. Ἔστω εὐθεῖα (ε) κάθετος ἐπί ἐπίπεδον (Π). Πᾶν ἐπίπεδον (P) περιέχον τήν εὐθεῖαν (ε), εἶναι κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

Ἀπόδειξις. Ἔστω A τό ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) (σχ.86). Τά ἐπίπεδα (Π) καί (P), ὡς ἔχοντα κοινόν τό σημεῖον A, ἔχουν κοινήν εὐθεῖαν, τήν xy. Ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π), φέρομεν εὐθεῖαν $AB \perp xy$. Ἐπειδή $(\varepsilon) \perp (\Pi) \Rightarrow (\varepsilon) \perp xy$ καί $(\varepsilon) \perp AB$. Ἄρα ἡ ὀρθή γωνία $(\varepsilon)\hat{A}B$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος

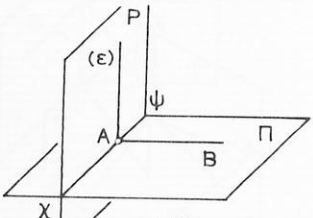


σχ.86

ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου (Π)xy(P) καί ἐπομένως τά δύο ἐπίπεδα (Π) καί (P) εἶναι κάθετα.

14.3. Θεώρημα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα (Π) καί (P) εἶναι κάθετα ἀλλήλων, πᾶσα εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐπιπέδου (Π) κάθετος ἐπί τήν τομήν των xy, εἶναι κάθετος καί ἐπί τό ἐπίπεδον (P).

Ἀπόδειξις. Ἔστω A τό ἴχνος τῆς εὐθείας (ε) ἐπί τήν xy (σχ.87).

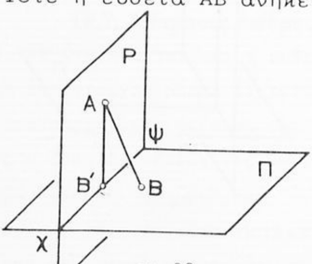


σχ.87

Ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί τήν εὐθεῖαν xy τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἀρκεῖ ἐπομένως νά δειχθῆ ὅτι ἡ εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος καί ἐπί μίαν ἄλλην εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Π).

Φέρομεν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) εὐθεῖαν $AB \perp xy$. Τότε ἡ γωνία $(\varepsilon)\hat{A}B$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου (Π)xy(P) καί ἐπειδή εἶναι $(\Pi)\perp(P) \Rightarrow (\varepsilon)\perp AB$. Ἄρα $(\varepsilon)\perp(\Pi)$, ὡς κάθετος ἐπί τάς δύο εὐθείας του xy καί AB.

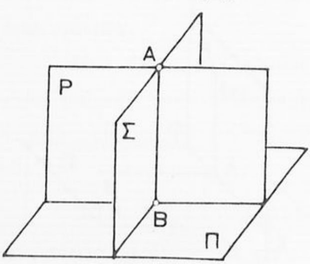
14.4. Θεώρημα. Ἔστωσαν (Π) καί (P) δύο κάθετα ἀλλήλων ἐπίπεδα καί A τυχόν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (P). Φέρομεν $AB \perp (\Pi)$. Τότε ἡ εὐθεῖα AB ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (P)



σχ.88

Ἀπόδειξις. Ἐάν ἡ εὐθεῖα AB δέν ἀνῆκε εἰς τό ἐπίπεδον (P), δέν θά ἔτεμνε τήν τομήν xy τῶν δύο ἐπιπέδων (σχ.88). Θά ὑπῆρχε ἐπομένως εὐθεῖα $AB' \perp xy$. Τότε ὅμως, κατά τό προηγούμενον θεώρημα, θά ἦτο $AB' \perp (\Pi)$, ἤτοι θά ὑπῆρχον δύο κάθετοι AB καί AB΄ ἐκ τοῦ σημείου A πρός τό ἐπίπεδον (Π), ὅπερ ἄτοπον. Ἄρα ἡ $AB \perp (\Pi)$ ἀνήκει εἰς τό ἐπίπεδον (P).

14.5. Θεώρημα. Ἐάν δύο ἐπίπεδα (P) καί (Σ) εἶναι κάθετα ἐπί ἐπίπεδον (Π), τότε καί ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).



σχ.89

Ἀπόδειξις. Ἔστω A τυχόν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (P) καί (Σ) (σχ.89). Ἐξ αὐτοῦ φέρομεν $AB \perp (\Pi) \Rightarrow AB \in (P)$ καί $AB \in (\Sigma)$ (§ 14.4). Ἄρα ἡ εὐθεῖα AB εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων (P) καί (Σ) καί ἐπομένως εἶναι κάθετος έπί τό έπίπεδον (Π).

'Ασκήσεις

104. Νά άποδειχθῆ ὅτι τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο κατ'ἀκμήν διέδρων γωνιῶν, ἀποτελοῦν ἐπίπεδον.

105. 'Εάν δύο παράλληλα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), τμηθοῦν ὑπό τρίτου ἐπιπέδου (Σ), δείξατε ὅτι αἱ ἐντός καί ἐναλλάξ σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ἴσαι, αἱ δέ ἐντός καί ἐπί τά αὐτά μέρη δίεδροι, εἶναι παραπληρωματικαί.

106. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἀνήκουσα εἰς τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας, εἶναι ἴσον κεκλιμένη πρός τάς ἕδρας τῆς διέδρου.

107. 'Εάν δύο δίεδροι γωνίαι ἔχουν τάς ἕδρας των παραλλήλους, δείξατε ὅτι αἱ ἀκμαί των εἶναι παράλληλοι.

108. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ).

109. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό δύο τεμνομένας εὐθείας (ε) καί (ζ).

110. 'Ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ πλευρᾶς α, ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π). 'Εάν τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου σχηματίζει μέ τό ἐπίπεδον (Π) γωνίαν 60^0, νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

111. Νά ἐξετασθῆ τό ἀνωτέρω πρόβλημα, ἐάν ἡ σχηματιζομένη δίεδρος γωνία εἶναι 45^0 ἤ 30^0.

112. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπό δύο δοθέντα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ), ἔχουν λόγον μ:ν.

113. 'Εάν εὐθεῖα εἶναι ἐξ ἴσου κεκλιμένη πρός τάς ἕδρας διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι τά ἴχνη της ἐπί τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου, ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπό τήν ἀκμήν καί ἀντιστρόφως.

114. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο ἐφεξῆς καί παραπληρωματικῶν διέδρων γωνιῶν, εἶναι κάθετα.

115. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπό δύο παραλλήλους εὐθείας.

116. Εὐθεῖα (ε) εἶναι πλαγία ὡς πρός ἐπίπεδον (Π). Δείξατε ὅτι διά τῆς (ε) διέρχεται ἕνα μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τό (Π).

117. 'Εάν εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι πᾶν ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τήν εὐθεῖαν (ε), εἶναι κάθετον καί ἐπί τό ἐπίπεδον (Π).

118. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) τεμνόμενα καθέτως. Δείξατε ὅτι ἵνα μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἶναι ὀρθογώνιος ὡς πρός μίαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου (Ρ), πρέπει καί ἀρκεῖ μία τουλάχιστον τῶν εὐθειῶν τούτων νά εἶναι κάθετος ἐπί τήν τομήν xy τῶν δύο ἐπιπέδων.

119. Εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ ἔχει τά ἄκρα του Α καί Β ἐπί τῶν ἑδρῶν δοθείσης διέδρου γωνίας. Τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου, τέμνει τό τμῆμα ΑΒ εἰς σημεῖον Γ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Γ ἀπό τά Α καί Β εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καί Β ἀπό τήν

ἀκμήν τῆς διέδρου.

120. Δείξατε ὅτι, ἐάν ἕνα στερεόν ἔχει δύο ἐπίπεδα συμμετρίας κάθετα ἀλλήλων, ἔχει καί ἄξονα συμμετρίας τήν τομήν τῶν ἐπιπέδων.

121. Ἐάν ἕνα ἐπίπεδον (Π), εἶναι κάθετον ἐπί τήν τομήν δύο ἐπιπέδων (Ρ) καί (Σ), δείξατε ὅτι τό (Π) εἶναι κάθετον ἐπί τά (Ρ) καί (Σ).

122. Ἐάν εὐθεῖα (ε) εἶναι κάθετος ἐπί ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι ἡ προβολή της ἐπί ἐπίπεδον (Ρ) τό ὁποῖον τέμνει τό (Π), εἶναι κάθετος ἐπί τήν τομήν τῶν δύο ἐπιπέδων.

123. Δίδεται ἐπίπεδον (Π), δύο σημεῖα Β καί Γ αὐτοῦ καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Ἐάν Α΄ εἶναι ἡ ὀρθή προβολή τοῦ σημείου Α ἐπί τό ἐπίπεδον (Π), δείξατε ὅτι $(A'B\Gamma)=(AB\Gamma)\cdot$συνφ, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζει τό ἐπίπεδον (Π) μετά τοῦ ἐπιπέδου (ΑΒΓ).

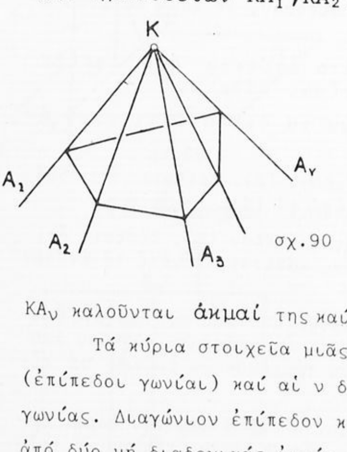
124. Ἐάν Ε καί Ε΄ εἶναι τό ἐμβαδόν ἐπιπέδου πολυγώνου καί τό ἐμβαδόν τῆς ὀρθῆς προβολῆς του ἐπί ἐπίπεδον (Π) ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι $E'=E$συνφ, ὅπου φ εἶναι ἡ γωνία τήν ὁποίαν σχηματίζουν τό ἐπίπεδον (Π) καί τό ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου.

125. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος ἐπί τρία ἐπίπεδα ἀνά δύο κάθετα, ἰσοῦται πρός τό διπλάσιον τετράγωνον τοῦ δοθέντος τμήματος.

126. Δίδεται εὐθεῖα (ε) καί δύο σημεῖα Α καί Β ἐκτός αὐτῆς. Νά εὑρεθῆ σημεῖον Ζ τῆς εὐθείας (ε) τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά σημεῖα Α καί Β νά εἶναι ἐλάχιστον.

15. Στερεαί γωνίαι.

15.1. Ὁρισμός. Μέ ἀρχήν σημεῖον Κ θεωροῦμεν μίαν διαδοχήν ἡμιευθειῶν $KA_1, KA_2, KA_3, \ldots, KA_\nu, KA_1$, $\nu \geq 3$ μή κειμένων ἀνά τριῶν διαδοχικῶν ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (σχ.90). Τό σύνολον τῶν (ἐπιπέδων) γωνιῶν μέ πλευράς δύο διαδοχικάς ἡμιευθείας, ἀπαρτίζει ἕνα στερεόν σχῆμα τό ὁποῖον καλεῖται ν-εδρος στερεά γωνία.

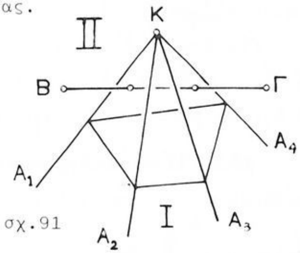


σχ.90

Τό σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφή** τῆς στερεᾶς γωνίας, αἱ ἡμιευθεῖαι $KA_1, KA_2, KA_3, \ldots$ KA_ν καλοῦνται **ἀκμαί** της καί αἱ γωνίαι $A_1\hat{K}A_2, A_2\hat{K}A_3, \ldots, A_\nu\hat{K}A_1$ **ἕδραι** αὐτῆς.

Τά κύρια στοιχεῖα μιᾶς ν-εδρου στερεᾶς γωνίας, εἶναι αἱ ν ἕδραι της (ἐπίπεδοι γωνίαι) καί αἱ ν δίεδροι αὐτῆς μέ ἀκμάς τάς ἀκμάς τῆς στερεᾶς γωνίας. Διαγώνιον ἐπίπεδον καλεῖται κάθε ἐπίπεδον τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό δύο μή διαδοχικάς ἀκμάς. Τά διαγώνια ἐπίπεδα μιᾶς ν-έδρου γωνίας εἶ ναι τόσα, ὅσαι καί αἱ διαγώνιοι ἑνός ν-γώνου τό ὁποῖον προκύπτει μέ ἐπίπεδον τομήν τῆς διέδρου, ἤτοι $\frac{\nu(\nu-3)}{2}$.

Μία ν-εδρος στερεά γωνία καλεῖται **κανονική**, ἐάν ἔχῃ ὅλας τάς ἕδρας της ἴσας καί ὅλας τάς διέδρους της ἐπίσης ἴσας.

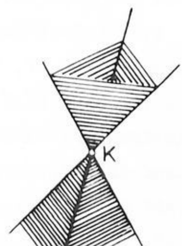


σχ.91

15.2. Κυρτὴ στερεὰ γωνία. Μία στερεά γωνία καλεῖται κυρτή, ἐάν εἶναι δυνατόν ὅλαι αἱ ἕδραι της νά τμηθοῦν ὑπό ἐπιπέδου καί ἡ τομή νά εἶναι κυρτόν πολύγωνον (σχ.91).

Μία κυρτή στερεά γωνία, διαιρεῖ τόν χῶρον εἰς δύο περιοχάς I καί II. Ἐξ αὐτῶν ἡ περιοχή I ἔχει τήν ἑξῆς ἰδιότητα: Διά κάθε ζεῦγος σημείων της, τό εὐθύγραμμον τμῆμα μέ ἄκρα τά σημεῖα ταῦτα, ἀνήκει εἰς τήν περιοχήν. Ἡ περιοχή αὕτη καλεῖται κυρτή περιοχή τοῦ χώρου καί ἀποτελεῖ τό ἐσωτερικόν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας. Ἡ ἄλλη περιοχή II, ὅπου ὑπάρχει ἕνα τουλάχιστον ζεῦγος σημείων {Β,Γ} τοιοῦτον ὥστε τό τμῆμα ΒΓ δέν ἀνήκει ἐξ ὁλοκλήρου εἰς τήν περιοχήν, καλεῖται μή κυρτή περιοχή καί ἀποτελεῖ τό ἐξωτερικόν τῆς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας.

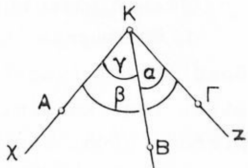
Αἱ δύο περιοχαί εἰς τάς ὁποίας μία μή κυρτή στερεά γωνία διαιρεῖ τόν χῶρον, εἶναι μή κυρταί περιοχαί.



σχ.92

15.3. Κατά κορυφήν στερεαί γωνίαι καλοῦνται δύο στερεαί γωνίαι μέ κοινήν κορυφήν Κ καί συμμετρικαί ἀλλήλων ὡς πρός τήν κοινήν κορυφήν των (σχ.92).

Δύο κατά κορυφήν στερεαί γωνίαι, ἔχουν τάς ἕδρας των ἀντιστοίχως ἴσας καί τάς διέδρους των ἐπίσης ἴσας, ἀλλά αἱ στερεαί γωνίαι δέν εἶναι ἴσαι (§ 12.4) διότι εἶναι ἀντιθέτου προσανατολισμοῦ.



σχ.93

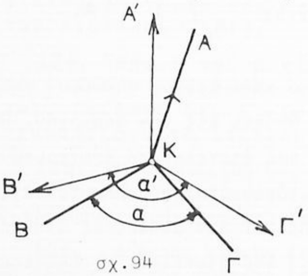
15.4. Τρίεδροι γωνίαι. Εἶναι αἱ ἁπλούστεραι ἀλλά καί αἱ βασικώτεραι ἐκ τῶν στερεῶν (πολυέδρων) γωνιῶν, διότι πᾶσα πολύεδρος γωνία δύναται νά διαιρεθῇ εἰς τριέδρους, μέ διαγώνια ἐπίπεδα ἐκ μιᾶς ἀκμῆς της.

Ἔστω K.xyz μία τρίεδρος γωνία (σχ.93).

Τοποθετοῦντες ἐπί τῶν ἀκμῶν της τρία σημεῖα Α,Β καί Γ, τά ἕξ κύρια στοιχεῖα της τά συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς. Τάς διέδρους γωνίας της μέ $\hat{A},\hat{B},\hat{\Gamma}$ καί τάς ἕδρας της μέ $\hat{\alpha}$ τήν εὑρισκομένην ἀπέναντι τῆς διέδρου $\hat{A}$ καί μέ $\hat{\beta}$ καί $\hat{\gamma}$ ἀντιστοίχως τάς ἄλλας.

Τά θεωρήματα τά ὁποῖα ἀφοροῦν τάς τριέδρους γωνίας, εἶναι ἀντίστοιχα ἐκείνων τά ὁποῖα ἀφοροῦν τά τρίγωνα, ὡς θά φανῇ εἰς τά ἑπόμενα καί αὐτό διευκολύνει εἰς τήν ἀπομνημόνευσιν.

15.5. Ἡ παραπληρωματική τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Ἔστω Κ.ΑΒΓ μία τρίεδρος στερεά γωνία (σχ.94). Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΑ΄ κάθετον ἐπί τήν ἕδραν ΒΚΓ καί πρός τό μέρος τῆς ἀκμῆς ΚΑ. Ὁμοίως φέρομεν ΚΒ΄⊥ΑΚΓ καί πρός τό μέρος τῆς ΚΒ, ὡς ἐπίσης καί ΚΓ΄⊥ΑΚΒ καί πρός τό μέρος τῆς ΚΓ. Αἱ τρεῖς ἡμιευθεῖαι ΚΑ΄, ΚΒ΄, καί ΚΓ΄ καθορίζουν τρίεδρον στερεάν γωνίαν, ἡ ὁποία καλεῖται παραπληρωματική τῆς τριέδρου Κ.ΑΒΓ.



σχ.94

Ἀπό τόν ἀνωτέρω καθορισμόν τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου μιᾶς δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἕπονται τά ἑξῆς:

i) Ἡ παραπληρωματική Κ.Α΄Β΄Γ΄ τῆς Κ.ΑΒΓ καθορίζεται κατά ἕνα μόνον τρόπον καί ἑπομένως εἶναι μοναδική.

ii) Ἑκάστη ἕδρα τῆς Κ.Α΄Β΄Γ΄ εἶναι παραπληρωματική τῆς ἀντιστοίχου διέδρου τῆς Κ.ΑΒΓ, ἤτοι εἶναι $\hat{\alpha}'+\hat{A}=2^{\llcorner}$, $\hat{\beta}'+\hat{B}=2^{\llcorner}$, $\hat{\gamma}'+\hat{\Gamma}=2^{\llcorner}$ (§ 13.10).

iii) Ἡ τρίεδρος Κ.ΑΒΓ εἶναι παραπληρωματική τῆς Κ.Α΄Β΄Γ΄. Πράγματι, εἶναι ΚΒ΄⊥ΑΚΓ ⇒ ΚΒ΄⊥ΚΑ (1) καί ΚΓ΄⊥ΑΚΒ ⇒ ΚΓ΄⊥ΚΑ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται ΚΑ⊥Β΄ΚΓ΄. Ὁμοίως εἶναι ΚΒ⊥Α΄ΚΓ΄ καί ΚΓ⊥Α΄ΚΒ΄. Ἄρα ἡ Κ.ΑΒΓ εἶναι ἡ παραπληρωματική τῆς Κ.Α΄Β΄Γ΄ (ὅπερ ἡ ἔννοια τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας, εἶναι συμμετρική καί διά τάς τριέδρους).

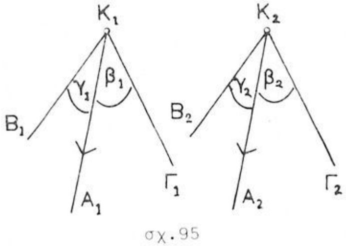
iv) Ἡ τρίεδρος Κ.ΑΒΓ ὡς παραπληρωματική τῆς Κ.Α΄Β΄Γ΄, εἶναι τοιαύτη ὥστε: $\hat{\alpha}+\hat{A}'=2^{\llcorner}$, $\hat{\beta}+\hat{B}'=2^{\llcorner}$, $\hat{\gamma}+\hat{\Gamma}'=2^{\llcorner}$.

Θεωρήματα τῆς ἰσότητος εἰς τάς τριέδρους στερεάς.

15.6. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι, ἔχουν δύο ἕδρας ἀντιστοίχως ἴσας καί τήν ὑπ᾿αὐτῶν περιεχομένην δίεδρον γωνίαν ἴσην καί ἐπί πλέον εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τρίεδροι μέ $\hat{\beta}_1=$

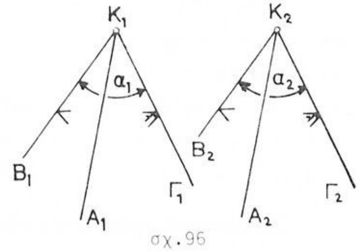
$\hat{\beta}_2$, $\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}_2$, $\hat{A}_1=\hat{A}_2$ καί ἐπί πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ.95). Αἱ δύο τρίεδροι προφανῶς δύνανται νά ταυτισθοῦν μέ μετατόπισιν τοιαύτην ὥστε νά συμπέσουν αἱ δύο ἴσαι δίεδροι $\hat{A}_1$ καί $\hat{A}_2$. Διότι αὐτό θά ἔχη ὡς συνέπειαν νά συμπέσουν καί αἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι ἕδραι $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ καί $\hat{\gamma}_1$, $\hat{\gamma}_2$. Ἄρα αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.



σχ.95

15.7. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καί τάς προσκειμένας εἰς αὐτήν διέδρους γωνίας ἴσας καί ἐπί πλέον εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.

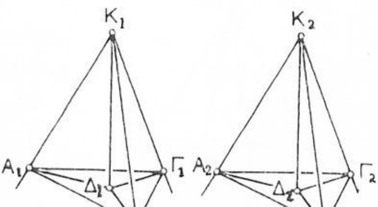
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τρίεδροι μέ $\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2$, $\hat{B}_1=\hat{B}_2$, $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ καί ἐπί πλέον τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ (σχ.96). Αἱ δύο τρίεδροι προφανῶς δύνανται νά ταυτισθοῦν μέ μετατόπισιν τοιαύτην ὥστε νά συμπέσουν αἱ ἴσαι ἕδραι $\hat{\alpha}_1$, καί $\hat{\alpha}_2$. Διότι αὐτό θά ἔχη ὡς συνέπειαν νά συμπέσουν καί αἱ ἑκατέρωθεν αὐτῶν ἴσαι δίεδροι $\hat{B}_1$,$\hat{B}_2$ καί $\hat{\Gamma}_1$,$\hat{\Gamma}_2$. Ἄρα αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.



σχ.96

15.8. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι ἔχουν τάς τρεῖς ἕδρας των ἀντιστοίχως ἴσας καί εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ τρίεδροι στερεαί γωνίαι μέ $\hat{\alpha}_1=\hat{\alpha}_2$, $\hat{\beta}_1=\hat{\beta}_2$ καί $\hat{\gamma}_1=\hat{\gamma}_2$ (σχ.97). Δέν βλάπτεται ἡ γενικότης ἐάν ἐπί πλέον ὑποθέσωμεν ὅτι $K_1A_1=K_1B_1=K_1\Gamma_1=K_2A_2=K_2B_2=K_2\Gamma_2$. Τότε εἶναι προφανῶς τριγ.$A_1K_1B_1$ = τριγ.$A_2K_2B_2$, τριγ.$B_1K_1\Gamma_1$ = τριγ.$B_2K_2\Gamma_2$, τριγ.$\Gamma_1K_1A_1$ = τριγ.$\Gamma_2K_2A_2$ ὡς ἔχοντα δύο πλευράς ἴσας καί τήν περιεχομένην ὑπ' αὐτῶν γωνίαν ἴσην. Ἄρα $A_1B_1=A_2B_2$, $B_1\Gamma_1=B_2\Gamma_2$, $\Gamma_1A_1=\Gamma_2A_2$ ⇒ τριγ. $A_1B_1\Gamma_1=A_2B_2\Gamma_2$. Φέρομεν $K_1\Delta_1\perp(A_1B_1\Gamma_1)$ ⇒ τά ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$, $K_1B_1\Delta_1$, $K_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα ἴσας ὑποτεινούσας καί τήν $K_1\Delta_1$ κοινήν



σχ.97

$\Rightarrow$ $\Delta_1A_1 = \Delta_1B_1 = \Delta_1\Gamma_1$, ἤτοι τό Δ_1 εἶναι τό περίκεντρον τοῦ τριγ.$A_1B_1\Gamma_1$. 'Ὁμοίως φέρομεν τήν $K_2\Delta_2 \perp (A_2B_2\Gamma_2)$ καί τό Δ_2 θά εἶναι τό περίκεντρον τοῦ τριγ.$A_2B_2\Gamma_2$. 'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι, μετατοπίζοντες τήν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ εἰς τρόπον ὥστε τό τριγ.$A_1B_1\Gamma_1$ νά ταυτισθῆ μετά τοῦ ἴσου του $A_2B_2\Gamma_2$, τό σημεῖον Δ_1 θά συμπέση μετά τοῦ Δ_2. 'Επί πλέον ἀπό τήν παρατήρησιν ὅτι τά ὀρθογώνια τρίγωνα $K_1A_1\Delta_1$ καί $K_2A_2\Delta_2$ εἶναι ἴσα, ὡς ἔχοντα $K_1A_1 = K_2A_2$ καί $\Delta_1A_1 = \Delta_2A_2$, ἕπεται ὅτι $\Delta_1K_1 = \Delta_2K_2$. Ἄρα εἰς τήν μετατόπισιν ἡ κορυφή K_1 θά συμπέση μετά τῆς K_2. 'Επομένως, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι, ἐφ' ὅσον δύνανται νά ταυτισθοῦν.

15.9. Θεώρημα. 'Εάν δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι ἔχουν τάς τρεῖς διέδρους των ἀντιστοίχως ἴσας καί εἶναι τοῦ αὐτοῦ προσανατολισμοῦ, αἱ τρίεδροι εἶναι ἴσαι.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν $K_1.A_1B_1\Gamma_1$ καί $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ αἱ δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι μέ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ (σχ.97). Φανταζόμεθα τάς παραπληρωματικάς αὐτῶν τριέδρους (§ 15.5), αἱ ὁποῖαι κατ' ἀνάγκην θά ἔχουν τάς ἕδρας των ἴσας ἐφ' ὅσον αἱ ἀρχικαί ἔχουν τάς διέδρους των ἴσας καί ἐπομένως, κατά τό προηγούμενον θεώρημα, θά εἶναι ἴσαι. Τότε ὅμως καί αἱ τρίεδροι $K_1.A_1B_1\Gamma_1$, $K_2.A_2B_2\Gamma_2$ θά εἶναι ἴσαι ὡς παραπληρωματικαί ἴσων τριέδρων.

'Ανισοτικαὶ σχέσεις εἰς τὰς στερεὰς γωνίας.

15.10. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν, ἑκάστη ἕδρα εἶναι:

i) μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καί

ii) μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

σχ.98

'Απόδειξις.

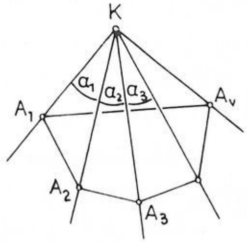
i) Τό θεώρημα ἔχει προφανῶς ἀνάγκην ἀποδείξεως μόνον διά τήν μεγαλυτέραν ἕδραν (σχ.98). 'Ας θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι: $\hat{\alpha} \geq \hat{\beta}$ καί $\hat{\alpha} \geq \hat{\gamma}$. 'Εντός αὐτῆς λαμβάνομεν ἡμιευθεῖαν ΚΔ, τοιαύτην ὥστε νά εἶναι : $\Gamma\hat{K}\Delta = \Gamma\hat{K}A = \hat{\beta}$ $\Rightarrow$ $B\hat{K}\Delta = \hat{\alpha} - \hat{\beta}$ (1). Δέν βλάπτεται ἡ γενικότης, ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι εἶναι $KA = K\Delta$ καί ὅτι τά σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι συνεπίπεδα. Τότε εἶναι τριγ.ΓKA = τριγ.$\Gamma K\Delta$, ὡς ἔχοντα τήν ΓK κοινήν, $KA = K\Delta$ καί $\Gamma\hat{K}A = \Gamma\hat{K}\Delta$. Ἄρα $\Gamma A = \Gamma\Delta$ $\Rightarrow$ $\Delta B = \Gamma B - \Gamma A$ (2). 'Εκ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν: $AB > \Gamma B - \Gamma A$ (3). 'Η σχέσις (3), λόγῳ τῆς (2) γράφεται $AB > B\Delta$ $\Rightarrow$ $B\hat{K}A > B\hat{K}\Delta$ διότι τά τρίγωνα BKA καί $BK\Delta$ ἔχουν δύο πλευράς ἴσας καί τάς τρίτας πλευράς των ἀνίσους. Ἄρα $\hat{\gamma} > B\hat{K}\Delta$ καί λόγῳ τῆς σχέσεως (1) $\Rightarrow \hat{\gamma} > \hat{\alpha} - \hat{\beta} \Rightarrow \hat{\alpha} < \hat{\beta} + \hat{\gamma}$.

ii) Ἀπεδείχθη ὅτι εἶναι $\hat{\beta} < \hat{\alpha} + \hat{\gamma} \Rightarrow \hat{\alpha} > \hat{\beta} - \hat{\gamma}$ (4) καί $\hat{\gamma} < \hat{\alpha} + \hat{\beta} \Rightarrow \hat{\alpha} > \hat{\gamma} - \hat{\beta}$ (5). Ἐκ τῶν σχέσεων (4) καί (5) ἕπεται ὅτι $\hat{\alpha} > |\hat{\beta} - \hat{\gamma}|$. Ὁμοίως εἶναι $\hat{\beta} > |\hat{\alpha} - \hat{\gamma}|$ καί $\hat{\gamma} > |\hat{\alpha} - \hat{\beta}|$.

Αἱ ἀνωτέρω ἕξ ἀνισοτικαί σχέσεις δύνανται νά συγχωνευθοῦν εἰς τήν διπλήν ἀνισοτικήν σχέσιν: $|\hat{\beta} - \hat{\gamma}| < \hat{\alpha} < \hat{\beta} + \hat{\gamma}$.

15.11. Θεώρημα. Πάσης πολυέδρου κυρτῆς στερεᾶς γωνίας, τό ἄθροισμα τῶν ἑδρῶν της εἶναι μικρότερον τῶν 4^L.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ἡ κυρτή στερεά γωνία $K.A_1A_2...A_\nu$ (σχ.99), ὅπου τά σημεῖα A_1, A_2,...A_ν εὑρίσκονται ἐπί ἐπιπέδου τομῆς. Θά συμβολίσωμεν μέ $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, ..., \hat{\alpha}_\nu$ τάς ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας καί μέ $\hat{A}_1, \hat{A}_2, ..., \hat{A}_\nu$ τάς γωνίας τοῦ πολυγώνου $A_1A_2A_3...A_\nu$ ἀντιστοίχως. Τότε, ἀπό τά τρίγωνα KA_1A_2, KA_2A_3, ..., $KA_\nu A_1$, ἔχομεν:



σχ.99

$\alpha_1 = 2^L - (K\hat{A}_1A_2 + K\hat{A}_2A_1)$, $\alpha_2 = 2^L - (K\hat{A}_2A_3 + K\hat{A}_3A_2)$, ..., $\alpha_\nu = 2^L - (K\hat{A}_\nu A_1 + K\hat{A}_1A_\nu)$. Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνωτέρω ν ἰσότητας καί λαμβάνομεν:

$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + ... + \hat{\alpha}_\nu = 2\nu^L - (K\hat{A}_1A_2 + K\hat{A}_2A_1 + K\hat{A}_2A_3 + K\hat{A}_3A_2 + ... + K\hat{A}_\nu A_1 + K\hat{A}_1A_\nu)$ (1).

Τά σημεῖα $A_1, A_2, ..., A_\nu$ εἶναι κορυφαί τριέδρων στερεῶν γωνιῶν καί ἑπομένως (§ 15.10) θά εἶναι:

$\hat{A}_1 < K\hat{A}_1A_\nu + K\hat{A}_1A_2$, $\hat{A}_2 < K\hat{A}_2A_1 + K\hat{A}_2A_3$, ..., $\hat{A}_\nu < K\hat{A}_\nu A_{\nu-1} + K\hat{A}_\nu A_1$.

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς ἀνωτέρω ν ἀνισότητας καί λαμβάνομεν:

$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_\nu < K\hat{A}_1A_2 + K\hat{A}_2A_1 + K\hat{A}_2A_3 + K\hat{A}_3A_2 + ... + K\hat{A}_\nu A_1 + K\hat{A}_1A_\nu$.

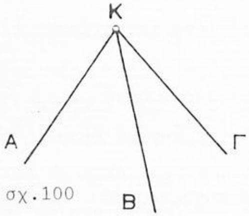
Γνωρίζομεν ὅτι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + ... + \hat{A}_\nu = (2\nu - 4)^L$ καί ἑπομένως ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται:

$$(2\nu - 4)^L < K\hat{A}_1A_2 + K\hat{A}_2A_1 + K\hat{A}_2A_3 + K\hat{A}_3A_2 + ... + K\hat{A}_\nu A_1 + K\hat{A}_1A_\nu \quad (2).$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς σχέσεις (1) καί (2) καί λαμβάνομεν:

$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + ... + \hat{\alpha}_\nu + (2\nu - 4)^L \Rightarrow \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 + \hat{\alpha}_3 + ... + \hat{\alpha}_\nu < 4^L$.

15.12. Θεώρημα. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν, τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν της, εὑρίσκεται μεταξύ 2 καί 6 ὀρθῶν γωνιῶν, ἑκάστη δέ αὐξανομένη κατά 2^L ὑπερβαίνει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.



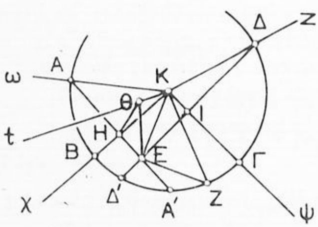
σχ.100

'Απόδειξις. "Εστω Κ.ΑΒΓ μία τρίεδρος στερεά γωνία (σχ.100). 'Ας φαντασθῶμεν τήν παραπληρωματικήν της Κ.Α'Β'Γ' (§ 15.5) τῆς ὁποίας αἱ ἕδραι εἶναι $\hat{\alpha}', \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$. Γνωρίζομεν ὅτι $\hat{A} + \hat{\alpha}' = 2^L$, $\hat{B} + \hat{\beta}' = 2^L$, $\hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 2^L \Rightarrow \hat{A} + \hat{\alpha}' + \hat{B} + \hat{\beta}' + \hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 6^L$ (1) $\Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^L$ (2). 'Από τό προηγούμενον θεώρημα, γνωρίζομεν ὅτι εἶναι $\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' < 4^L \Rightarrow 4^L > \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}'$ (3). Προσθέτομεν κατά μέλη τάς σχέσεις (1) καί (3) καί λαμβάνομεν: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' + 4^L > 6^L + \hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}' \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} > 2^L$ (4). Αἱ ἀνισότητες (2) καί (4) συγχωνεύονται εἰς τήν διπλήν ἀνισότητα $2^L < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^L$.

'Επίσης εἶναι (§ 15.10) $\hat{\beta}' + \hat{\gamma}' > \hat{\alpha}' \Rightarrow 2^L - \hat{B} + 2^L - \hat{\Gamma} > 2^L - \hat{A} \Rightarrow \hat{A} + 2^L > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. 'Ομοίως εὑρίσκομεν $\hat{B} + 2^L > \hat{A} + \hat{\Gamma}$ καί $\hat{\Gamma} + 2^L > \hat{A} + \hat{B}$.

15.13. Πρόβλημα. Νά κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεά γωνία, τῆς ὁποίας δίδονται αἱ τρεῖς ἕδραι $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$.

Λύσις. Διά νά ὑπάρχῃ λύσις τοῦ προβλήματος, πρέπει νά εἶναι $|\hat{\beta} - \hat{\gamma}| < \hat{\alpha} < \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ καί $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma} < 4^L$ (§ 15.10, 15.11). "Εστω ὅτι $\hat{\alpha}$ εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα. Τοποθετοῦμεν αὐτήν ἐπί ἐπιπέδου εἰς τήν θέσιν $x\hat{K}y$ (σχ.101) καί ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τάς μικροτέρας ἕδρας $y\hat{K}z = \hat{\beta}$ καί $x\hat{K}\omega = \hat{\gamma}$. Μέ κέντρον τό Κ καί τυχοῦσαν ἀκτῖνα R, γράφομεν κύκλον ὁ ὁποῖος τέμνει τάς Κω,Κx,Κy,Κz εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ,Δ ἀντιστοίχως.



σχ.101

Φέρομεν $AHA' \perp Kx$ καί $\Delta I \Delta' \perp Ky$. 'Επειδή ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\hat{\beta} + \hat{\gamma} > \hat{\alpha} \Rightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow \overset{\frown}{\Gamma\Delta'} + \overset{\frown}{BA'} > \overset{\frown}{B\Gamma} \Rightarrow$ τό Δ' εὑρίσκεται μεταξύ τῶν Β καί Α' $\Rightarrow$ αἱ χορδαί ΑΑ' καί ΔΔ' τέμνονται εἰς σημεῖον Ε ἐσωτερικόν τοῦ κύκλου. Φέρομεν τήν ΚΕ καί τήν $EZ \perp KE$. 'Υψοῦμεν ἐκ τοῦ Ε κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἐπί τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμῆμα ΕΘ = ΕΖ. Φέρομεν τήν ΚΘ καί τότε ἡ τρίεδρος μέ ἀκμάς τάς Κx,Κy,ΚΘ εἶναι ἡ ζητουμένη.

'Απόδειξις. Τριγ.ΚΕΘ = τριγ.ΚΕΖ διότι εἶναι ὀρθογώνια εἰς τό Ε, ἔχουν τήν ΚΕ κοινήν καί ΕΘ = ΕΖ. "Αρα ΚΘ = ΚΖ = R.

'Η ΘΕ εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, $EH \perp KH \Rightarrow \Theta H \perp KH$. "Αρα τό τρίγωνον ΚΗΘ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τό Η καί μάλιστα εἶναι ἴσον πρός τό ὀρθογώνιον τριγ. ΚΗΑ διότι ἔχουν τήν ΚΗ κοινήν καί ΚΘ = ΚΑ = R. "Αρα είναι $\Theta\hat{K}H = A\hat{K}H = \hat{\gamma}$.

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι εἶναι $\Theta\hat{K}I = Z\hat{K}I = \hat{\beta}$. 'Επομένως ἡ τρίεδρος στερεά γωνία K.xyθ = K.xyt εἶναι ἡ ζητουμένη.

15.14. Πρόβλημα. Νά κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεά γωνία, τῆς ὁποίας δίδονται αἱ τρεῖς δίεδροι $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$.

Λύσις. Θά κατασκευάσωμεν τήν παραπληρωματικήν τῆς ζητουμένης καί ἐν συνεχείᾳ τήν ζητουμένην τρίεδρον.

'Η παραπληρωματική τῆς ζητουμένης τριέδρου, θά ἔχῃ ἕδρας $\hat{\alpha}', \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$: $\hat{\alpha}' = 2^L - \hat{A}$, $\hat{\beta}' = 2^L - \hat{B}$ καί $\hat{\gamma}' = 2^L - \hat{\Gamma}$. "Αρα κατασκευάζεται ἐφ' ὅσον ἔχει γνωστάς ἕδρας (προηγούμενον πρόβλημα).

'Εν συνεχεία ἡ κατασκευή τῆς ζητουμένης τριέδρου, θεωρεῖται γνωστή (§ 15.5).

Συνθήκη ὑπάρξεως λύσεως: Πρέπει νά εἶναι $2^L < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^L$ (§ 15.12) ὡς ἐπίσης καί $\hat{A} + 2^L > \hat{B} + \hat{\Gamma}$, $\hat{B} + 2^L > \hat{A} + \hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma} + 2^L > \hat{A} + \hat{B}$.

'Ασκήσεις

127. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν δείξατε ὅτι τά τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων της, διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας.

128. Δείξατε ὅτι τά τρία ἐπίπεδα, τά ὁποῖα διέρχονται ἀνά ἕν ἀπό τάς ἀκμάς μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας καί ἀπό τάς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν, τέμνονται κατά τήν αὐτήν εὐθεῖαν.

129. 'Εάν μία τρίεδρος στερεά γωνία ἔχει δύο ἴσας διέδρους, δείξατε ὅτι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς τρίτης διέδρου εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἀπέναντι ἕδραν.

130. Δείξατε ὅτι ἐάν δύο τρίεδροι στερεαί γωνίαι ἔχουν τάς διέδρους γωνίας των ἴσας μίαν πρός μίαν, τότε αἱ παραπληρωματικαί αὐτῶν θά ἔχουν τάς ἕδρας των ἴσας μίαν πρός μίαν καί ἀντιστρόφως.

131. 'Εάν δύο ἕδραι μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι καί αἱ ἀπέναντι αὐτῶν δίεδροι εἶναι ἴσαι καί ἀντιστρόφως.

132. Τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας, αἱ ἀκμαί τέμνονται δι' ἐπιπέδου εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ. 'Εάν εἶναι $KA = 3\alpha$, $KB = 4\alpha$, $K\Gamma = 5\alpha$, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφή τῆς στερεᾶς γωνίας, νά ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

133. 'Επί τῶν ἀκμῶν τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας (μέ τάς ἕδρας της ὀρθάς), λαμβάνομεν τμήματα $KA = KB = K\Gamma = \alpha$. Δείξατε ὅτι τό τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρον τοῦ ὁποίου τό ἐμβαδόν εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς α.

134. Δίδεται κυρτή τετράεδρος στερεά γωνία καί σημεῖον Σ. Νά ἀχθῇ διά τοῦ σημείου Σ ἐπίπεδον (Π) τό ὁποῖον νά τέμνῃ τήν δοθεῖσαν στερεάν γωνίαν κατά παραλληλόγραμμον.

135. 'Από τήν κορυφήν Κ δοθείσης τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας, φέρομεν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν ΚΧ εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς στερεᾶς γωνίας. Δείξατε

ὅτι αἱ γωνίαι τάς ὁποίας σχηματίζει ἡ Κx μέ τάς τρεῖς ἀκμάς καί τάς τρεῖς ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας, ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν.

136. Τέμνομεν τάς ἀκμάς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Κ δι'ἐπιπέδου εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ. Δείξατε ὅτι ἡ προβολή τῆς κορυφῆς Κ ἐπί τό ἐπίπεδον ΑΒΓ, συμπίπτει μέ τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

137. Εἰς τήν προηγουμένην ἄσκησιν, ἐάν Η εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι :
α) $(KAB)^2 = (\Gamma AB)(HAB)$, β) $(KAB)^2 + (KB\Gamma)^2 + (K\Gamma A)^2 = (AB\Gamma)^2$, γ) $\frac{1}{KA^2} + \frac{1}{KB^2} + \frac{1}{K\Gamma^2} = \frac{1}{KH^2}$.

138. 'Εάν μία τρίεδρος στερεά γωνία ἔχει τάς τρεῖς ἕδρας της ἴσας, δείξατε ὅτι θά ἔχη καί τάς τρεῖς διέδρους της ἴσας καί ἀντιστρόφως.

139. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεάν, δείξατε ὅτι τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα ἐξ ἑκάστης ἀκμῆς καί κάθετα ἐπί τήν ἀπέναντι ἕδραν, διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας.

140. Τρισορθογώνιος στερεά γωνία τέμνεται δι'ἐπιπέδου εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ. 'Εάν α,β,γ εἶναι αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, νά ὑπολογισθοῦν ἐξ αὐτῶν τά τμήματα ΚΑ,ΚΒ,ΚΓ, ὅπου Κ εἶναι ἡ κορυφή τῆς τρισορθογωνίου.

141. 'Εκ τῆς κορυφῆς Κ τριέδρου στερεᾶς γωνίας Κ.ΑΒΓ φέρομεν τρεῖς εὐθείας κειμένας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ἑκάστης ἕδρας καί καθέτους ἐπί τήν ἀπέναντι τῆς ἕδρας ἀκμήν. Δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αὗται κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

142. Τέμνομεν τρίεδρον στερεάν γωνίαν δι'ἐπιπέδων παραλλήλων πρός δύο γνωστάς διευθύνσεις. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος α) τοῦ κέντρου βάρους, β) τοῦ ὀρθοκέντρου, γ) τοῦ περικέντρου τῶν ἀποτεμνομένων τριγώνων.

143. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν, ἀπέναντι μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἕδρα καί ἀντιστρόφως.

144. 'Εάν αἱ ἕδραι μιᾶς στερεᾶς γωνίας εἶναι 60^0 ἑκάστη, πόσας τό πολύ ἕδρας δύναται νά ἔχη ἡ στερεά γωνία;

145. Τό αὐτό νά ἐξετασθῇ ἐάν αἱ ἕδραι της εἶναι 90^0 ἑκάστη.

146. Μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, αἱ δύο δίεδροι εἶναι 120^0 καί 100^0. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταί τιμαί διά τήν τρίτην δίεδρον αὐτῆς;

147. Μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας αἱ δύο ἕδραι εἶναι 80^0 καί 120^0. Ποῖαι εἶναι αἱ δυναταί τιμαί διά τήν τρίτην ἕδραν αὐτῆς;

148. Δείξατε ὅτι, τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνός στρεβλοῦ τετραπλεύρου, εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν.

149. Δίδεται τρίεδρος στερεά γωνία Κ.ΑΒΓ. Φέρομεν ἡμιευθεῖαν ΚΔ ἐντός τῆς στερεᾶς γωνίας. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι $\Delta\hat{K}A + \Delta\hat{K}B < \Gamma\hat{K}A + \Gamma\hat{K}B$.

150. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς κυρτῆς στερεᾶς γωνίας μέ ν ἀκμάς, περιέχεται μεταξύ 2ν-4 καί 6ν-12 ὀρθῶν γωνιῶν.

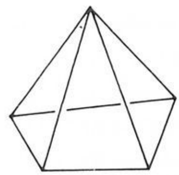
151. Δίδεται τετράεδρος στερεά γωνία κορυφῆς Κ καί δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β ἐπί δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν της. Μεταβλητόν ἐπίπεδον διέρχεται πάντοτε διά τῶν Α καί Β καί τέμνει τάς ἄλλας δύο ἀκμάς της εἰς τά Μ καί Ν. i) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΝ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου. ii) Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καί ΒΝ. iii) Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς τομῆς τῶν ΑΝ καί ΒΜ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

Πολύεδρα.

16. Ὁρισμός. Πολύεδρον καλεῖται τό στερεόν τό ὁποῖον περατοῦται πανταχόθεν εἰς ἐπίπεδα τμήματα.

Τά ἐπίπεδα ταῦτα τμήματα, εἶναι κατ'ἀνάγκην πολύγωνα καί καλοῦνται ἕδραι τοῦ πολυέδρου (σχ.102). Αἱ πλευραί τῶν πολυγώνων ἑδρῶν καλοῦνται **ἀκμαί** τοῦ πολυέδρου καί εἶναι αἱ τομαί δύο διπλανῶν ἑδρῶν. Αἱ κορυφαί τῶν πολυγώνων ἑδρῶν καλοῦνται **κορυφαί** τοῦ πολυέδρου. Αὗται ἀνήκουν εἰς τρεῖς τουλάχιστον ἕδρας καί εἶναι σημεῖα εἰς τά ὁποῖα συμβάλλουν τρεῖς τουλάχιστον ἀκμαί. Ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα μέ ἄκρα δύο κορυφάς αἱ ὁποῖαι δέν ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν ἕδραν, καλεῖται **διαγώνιος** τοῦ πολυέδρου. Διαγώνιοι δέν ὑπάρχουν εἰς ὅλα τά πολύεδρα.



σχ.102

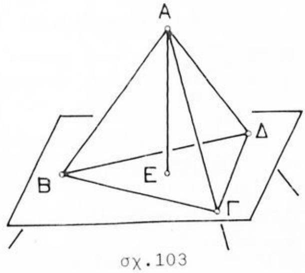
Ἕνα πολύεδρον καλεῖται **κυρτόν**, ἐάν τό ἐπίπεδον τῆς οἱασδήποτε ἕδρας του ἀφήνει πρός τήν αὐτήν περιοχήν τοῦ χώρου ὁλόκληρον τό πολύεδρον.

Παντός κυρτοῦ πολυέδρου, αἱ ἕδραι εἶναι κυρτά πολύγωνα καί ἀντιστρόφως.

Ἡ τομή κυρτοῦ πολυέδρου μέ ἐπίπεδον εἶναι κυρτόν πολύγωνον, ἐνῶ μία εὐθεῖα μή ἀνήκουσα εἰς ἕδραν, ἔχει τό πολύ δύο κοινά σημεῖα μέ τήν πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν.

17. Τό τετράεδρον.

17.1. Τά στοιχεῖα τοῦ τετραέδρου. Εἶναι τό ἁπλούστερον ἐκ τῶν πολυέδρων. Ἔχει τέσσαρας τριγωνικάς ἕδρας, τέσσαρας κορυφάς καί ἕξ ἀκμάς. Τετράεδρον δυνάμεθα νά λάβωμεν, ἐάν τμήσωμεν τάς ἀκμάς τριέδρου στερεᾶς γωνίας δι'ἐπιπέδου (σχ.103).



σχ.103

Κάθε τετράεδρον εἶναι κυρτόν πολύεδρον, ἔχει ἕξ διέδρους γωνίας αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς ἕξ ἀκμάς του καί τέσσαρας τριέδρους στερεάς, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τέσσαρας κορυφάς του.

Ὕψος τετραέδρου καλεῖται τό κάθετον τμῆμα τό ὁποῖον ἄγεται ἐξ ἑκάστης κορυφῆς, πρός τήν ἀπέναντι ἕδραν (σχ.103). Τό τετράεδρον ἑπομένως ἔχει τέσσαρα ὕψη. Τά ὕψη ἑνός τετραέδρου, ἐν γένει δέν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

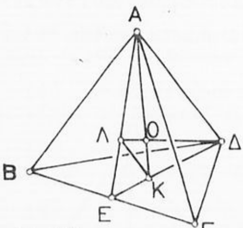
Διάμεσος τετραέδρου καλεῖται τό τμῆμα μέ ἄκρα μίαν κορυφήν καί τό κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Τό τετράεδρον ἑπομένως ἔχει τέσσαρας διαμέσους.

17.2. Εἴδη τετραέδρων. Εἰς τό σύνολον τῶν τυχόντων τετραέδρων, ἀξιοσημείωτα εἶναι τά κανονικά καί τά ὀρθοκεντρικά τετράεδρα.

Κανονικόν τετράεδρον καλεῖται ἕνα τετράεδρον τό ὁποῖον ἔχει καί τάς ἕξ ἀκμάς του ἴσας. Αἱ ἕδραι ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου, εἶναι ἴσα ἰσόπλευρα τρίγωνα.

Ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον καλεῖται ἕνα τετράεδρον τοῦ ὁποίου τά τέσσαρα ὕψη διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τό κοινόν σημεῖον τῶν ὑψῶν του καλεῖται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τετραέδρου. Εἰς τά ὀρθοκεντρικά μόνον τετράεδρα καί τά τρία ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του, εἶναι ὀρθογώνια (βλ.ἄσκ. 156).

17.3. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον, αἱ τέσσαρες διάμεσοι διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου τό ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου καί ἀπέχει ἐξ ἑκάστης κορυφῆς, ἀπόστασιν ἴσην πρός τά 3/4 τῆς ἀντιστοίχου διαμέσου τοῦ τετραέδρου.



σχ.104

Ἀπόδειξις. Ἔστω τετράεδρον ΑΒΓΔ καί Κ,Λ τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του ΒΓΔ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Τό σημεῖον Κ εὑρίσκεται ἐπί τῆς διαμέσου ΔΕ τῆς ἕδρας ΒΓΔ καί τό σημεῖον Λ ἐπί τῆς διαμέσου ΑΕ τῆς ἕδρας ΑΒΓ. Ἑπομένως αἱ διάμεσοι ΑΚ καί ΔΛ τοῦ τετραέδρου, τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, διότι εἶναι ἐσωτερικά τμήματα τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.

Ἐπειδή τά σημεῖα Κ καί Λ, εἶναι κέντρα βάρους ἑδρῶν, ἔπεται ὅτι $\frac{\vec{E\Delta}}{\vec{EK}} = \frac{\vec{EA}}{\vec{E\Lambda}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \Delta A // K\Lambda \Rightarrow$ τριγ.ΕΔΑ ≈ τριγ.ΕΚΛ $\Rightarrow \frac{\vec{\Delta A}}{\vec{K\Lambda}} = \frac{3}{1}$. Ἐπίσης, ἀπό τήν παραλληλίαν τῶν τμημάτων ΔΑ καί ΚΛ ἔπεται ὅτι τριγ.ΟΑΔ ≈ τριγ.ΟΚΛ $\Rightarrow \frac{\vec{OA}}{\vec{OK}} = \frac{\vec{A\Delta}}{\vec{K\Lambda}} =$

$$\frac{-\vec{\Delta A}}{\vec{K\Lambda}} = \frac{-3}{1} \Rightarrow \frac{\vec{OA}}{\vec{OK}} = \frac{-3}{1} \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{OK}} = \frac{3}{1} \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{AO}+\vec{OK}} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{\vec{AO}}{\vec{AK}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \vec{AO} = \frac{3}{4}\vec{AK}.$$

'Ομοίως ἀποδεικνύεται ἡ αὐτή σχέσις καί διά τάς ἄλλας διαμέσους τοῦ τετραέδρου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο.

'Η ὀνομασία **κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου** διά τό σημεῖον Ο, ἔχει ληφθῆ ἐκ τῆς Φυσικῆς, διότι συμπίπτει μέ τό κέντρον βάρους τετραέδρου ἐξ ὁμογενοῦς ὑλικοῦ.

'Ασκήσεις

152. **Περίκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετράεδρον, δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπί τάς ἕδρας του εἰς τά περίκεντρα αὐτῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τό σημεῖον τοῦτο καλεῖται περίκεντρον τοῦ τετραέδρου καί ἰσαπέχει ἀπό τάς κορυφάς του.

153. **῎Εκκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ἕξ διέδρων γωνιῶν του, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τό σημεῖον τοῦτο καλεῖται ἔκκεντρον τοῦ τετραέδρου καί ἰσαπέχει ἀπό τάς ἕδρας του.

154. **Παράκεντρον τετραέδρου.** Εἰς πᾶν τετράεδρον δείξατε ὅτι ἐντός ἑκάστης στερεᾶς γωνίας του καί ἐκτός τοῦ τετραέδρου, ὑπάρχει σημεῖον ἀπό τό ὁποῖον διέρχονται τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν τριῶν διέδρων τῶν ὁποίων αἱ ἀκμαί συγκλίνουν εἰς τήν κορυφήν τῆς ἐν λόγῳ στερεᾶς γωνίας καί τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν ὑπολοίπων τριῶν ἐξωτερικῶν διέδρων. Τό σημεῖον τοῦτο καλεῖται παράκεντρον τοῦ τετραέδρου καί ἰσαπέχει ἀπό τά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τοῦ στερεοῦ. Κάθε τετράεδρον ἔχει τέσσαρα παράκεντρα.

155. Νά ὑπολογισθοῦν τά ὕψη ἑνός κανονικοῦ τετραέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς α αὐτοῦ. Συμπεράνατε ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα.

156. Δείξατε ὅτι ἐάν ἕνα τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν, αἱ ἀπέναντι ἀκμαί του εἶναι ὀρθογώνιοι καί ἀντιστρόφως.

157. Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν ὀρθόκεντρικόν τετράεδρον τά ἴχνη τῶν τεσσάρων ὑψῶν του, εἶναι ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν του. Τό κανονικόν τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικόν;

158. Δείξατε ὅτι αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου, διέρχονται διά τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου.

159. 'Εάν τά δύο ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνια, δείξατε ὅτι καί τό τρῖτον ζεῦγος ἀκμῶν εἶναι ὀρθογώνιον καί ἑπομένως τό τετράεδρον θά εἶναι ὀρθοκεντρικόν.

160. 'Εάν εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ τά ὕψη ἐκ τῶν κορυφῶν Α καί Β τέμνωνται εἰς σημεῖον Κ, δείξατε ὅτι καί τά ὕψη ἐκ τῶν κορυφῶν Γ καί Δ θά τέμνωνται εἰς σημεῖον Λ, ἡ δέ ΚΛ εἶναι ἡ κοινή κάθετος τῶν ἀκμῶν ΑΒ καί ΓΔ.

161. Εἰς κανονικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ, δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συνδέουν τό μέσον Ε τοῦ ὕψους ΑΗ μέ τάς κορυφάς Β, Γ καί Δ εἶναι ἀκμαί τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

162. Εἰς κάθε τετράεδρον:α) Δείξατε ὅτι τά τμήματα μέ ἄκρα τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) 'Εάν αἱ ἀπέναντι

ἀκμαί εἶναι ἀνά δύο ἴσαι, τά τμήματα ταῦτα εἶναι κάθετα ἐπί τάς ἀπέναντι ἀκμάς καί ἐπί πλέον εἶναι ἀκμαί τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας.

163. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῇ σημεῖον Μ, διά τό ὁποῖον τό ἄθροισμα $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2$ εἶναι ἐλάχιστον.

164. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ, διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + MB^2 = 2M\Gamma^2 + 3M\Delta^2$.

165. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαί τῆς κορυφῆς Α ἐπί τά ἐσωτερικά καί ἐξωτερικά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους μέ ἀκμάς τάς ΒΓ,ΓΔ,ΔΒ, κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

166. Δείξατε ὅτι τά ἕξ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

167. Εἰς κανονικόν τετράεδρον, δείξατε ὅτι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἕξ ἀκμῶν του εἶναι ἐπίπεδα συμμετρίας καί αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν του εἶναι ἄξονες συμμετρίας.

168. Δείξατε ὅτι τό κ.βάρους ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου, ἰσαπέχει ἀπό τά μέσα τῶν ἀκμῶν του.

169. Εἰς ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον, δείξατε ὅτι αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας του εἰς τά κέντρα βάρους αὐτῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον εὑρίσκεται ἐπί τῆς εὐθείας τῆς διερχομένης ἀπό τό ὀρθόκεντρον καί τό κ.βάρους τοῦ τετραέδρου.

170. Ἐάν τετραέδρου ΚΑΒΓ ἡ στερεά γωνία Κ εἶναι τρισορθογώνιος, δείξατε ὅτι τό ὕψος ΚΗ πληροῖ τήν σχέσιν: $\dfrac{1}{KH^2} = \dfrac{1}{KA^2} + \dfrac{1}{KB^2} + \dfrac{1}{K\Gamma^2}$.

171. Εἰς κάθε τετράεδρον δείξατε ὅτι τά ἐπίπεδα τά ὁριζόμενα ἐξ ἑκάστης ἀκμῆς καί τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

172. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Μεταβλητόν ἐπίπεδον παραμένει παράλληλον πρός τήν ἕδραν ΒΓΔ καί τέμνει τό τετράεδρον κατά τό τρίγωνον Β΄Γ΄Δ΄. α) Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Β΄Γ΄Δ΄ μέ τάς ἀπέναντι αὐτῶν κορυφάς τοῦ τετραέδρου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ι. β) Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ Ι.

173. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Μεταβλητόν ἐπίπεδον διέρχεται διά τῆς ἀκμῆς ΑΒ καί τέμνει τήν ἀπέναντι ἀκμήν εἰς τό Ε. Φέρομεν τά ὕψη ΑΖ καί ΒΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΕ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος α) τοῦ σημείου Ζ, β) τοῦ σημείου Η.

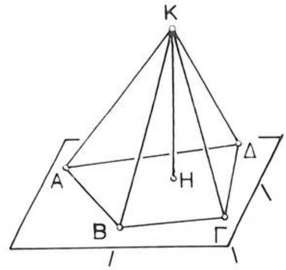
18. Ἡ πυραμίς.

18.1. Ὁρισμοί. Πυραμίς καλεῖται τό πολύεδρον τοῦ ὁποίου ἡ μία ἕδρα εἶναι τυχόν πολύγωνον τό ὁποῖον καλεῖται βάσις τῆς πυραμίδος, αἱ δέ λοιπαί ἕδραι εἶναι τρίγωνα μέ κοινήν κορυφήν ἕνα σημεῖον τό ὁποῖον καλεῖται κορυφή τῆς πυραμίδος.

Πυραμίδα δυνάμεθα νά λάβωμεν ἐάν τμήσωμεν τάς ἀκμάς στερεᾶς γωνίας κορυφῆς Κ δι'ἐπιπέδου εἰς τά σημεῖα Α,Β,Γ, ... (σχ.105)

Μία πυραμίς εἶναι κυρτή ἤ μή κυρτή, ἀναλόγως τοῦ ἐάν ἡ βάσις της

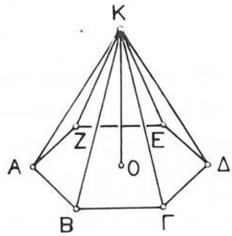
ΑΒΓΔ εἶναι κυρτόν ἤ μή κυρτόν πολύγωνον ἀντιστοίχως. Αἱ τριγωνικαί ἕδραι ΚΑΒ, ΚΒΓ, ... καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι** τῆς πυραμίδος, αἱ δέ ἀκμαί ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ... αἱ ὁποῖαι συγκλίνουν εἰς τήν κορυφήν Κ τῆς πυραμίδος, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί**.



σχ.105

Μία πυραμίς χαρακτηρίζεται ὡς **τριγωνική, τετραπλευρική, πενταγωνική** κλπ, ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεώς της.

Ὕψος τῆς πυραμίδος καλεῖται τό κάθετον τμῆμα ΚΗ ἐκ τῆς κορυφῆς της Κ πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

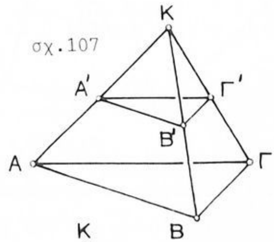


σχ.106

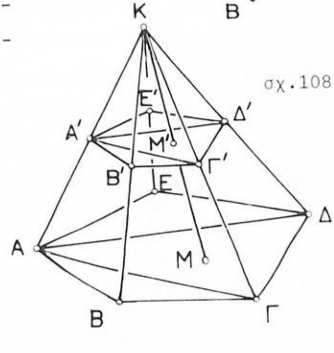
Κανονική καλεῖται κάθε πυραμίς ἡ ὁποία ἔχει ὡς βάσιν κανονικόν πολύγωνον, ἡ δέ κορυφή της προβάλλεται εἰς τό κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως (σχ.106).

18.2. Θεώρημα. Ἐάν πυραμίς τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν της, ἡ τομή εἶναι πολύγωνον ὅμοιον πρός τό πολύγωνον τῆς βάσεως.

Ἀπόδειξις. Τό θεώρημα θά ἀποδειχθῇ κατ'ἀρχάς διά τριγωνικήν πυραμίδα Κ.ΑΒΓ (σχ. 107). Ἐάν Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ἡ παράλληλος τομή πρός τήν βάσιν ΑΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι Α΄Β΄// ΑΒ, Β΄Γ΄//ΒΓ καί Γ΄Α΄//ΓΑ, ὡς τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπό τρίτου. Ἄρα εἶναι τριγ.Α΄Β΄Γ΄ ≈ τριγ.ΑΒΓ, ὡς ἔχοντα τάς πλευράς των παραλλήλους (τό σχετικόν θεώρημα τῆς ἐπιπεδομετρίας ἰσχύει αὐτούσιον καί εἰς τόν χῶρον, ὡς ἕπεται ἐκ τῆς § 7.8 τοῦ παρόντος).

σχ.107


Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τυχοῦσαν πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔΕ καί τήν τομήν Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ παράλληλον πρός τήν βάσιν (σχ.108). Μέ τά ἐπίπεδα ΑΚΓ, ΑΚΔ τά ὁποῖα τέμνουν τήν βάσιν καί τήν παράλληλον τομήν κα-

σχ.108


τά διαγωνίους, διαιρεῖται ἡ πυραμίς εἰς τριγωνικάς πυραμίδας. Ἄρα εἶναι Α΄Β΄Γ΄≈ΑΒΓ, Α΄Γ΄Δ΄≈ΑΓΔ, Α΄Δ΄Ε΄≈ΑΔΕ καί ἑπομένως Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄≈ΑΒΓΔΕ.

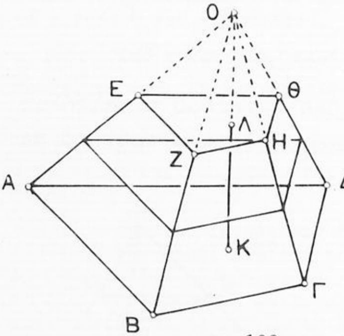
Παρατηρήσεις:

i) Ὁ λόγος ὁμοιότητος $\frac{Α'Β'}{ΑΒ}$ τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον $\frac{ΚΑ'}{ΚΑ}$, διότι εἶναι ΚΑ΄Β΄≈ΚΑΒ. Ὁ ἴδιος λόγος μεταφέρεται καί ἐπί τοῦ τυχόντος τμήματος ΚΜ΄Μ, μέ τά Μ΄ καί Μ ἐπί τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καί ἀσφαλῶς καί ἐπί τῶν ὑπολοίπων παραπλεύρων ἀκμῶν ΚΒ΄Β, ΚΓ΄Γ, κλπ. Τοῦτο ἕπεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦ.

ii) Τά ἐμβαδά τῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον πρός τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος, ἤτοι $\frac{(Α'Β'Γ'Δ'Ε')}{(ΑΒΓΔΕ)} = (\frac{Α'Β'}{ΑΒ})^2 = (\frac{ΚΜ'}{ΚΜ})^2$.

19. Κόλουρος πυραμίς.

19.1. Ὁρισμοί. Κόλουρος πυραμίς καλεῖται τό μέρος μιᾶς πυραμίδος τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως καί μιᾶς παραλλήλου πρός τήν βάσιν τομῆς τῆς πυραμίδος.



σχ.109

Μία κόλουρος πυραμίς ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ. 109), ἔχει τάς ἕδρας της ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ παραλλήλους, καλοῦνται **βάσεις** τῆς πυραμίδος καί εἶναι ὅμοια πολύγωνα (§ 18.2). Αἱ παράπλευροι ἕδραι της εἶναι τραπέζια.

Ἡ ἀπόστασις ΚΛ τῶν δύο παραλλήλων βάσεων, καλεῖται **ὕψος** τῆς κολούρου πυραμίδος.

Μία κόλουρος πυραμίς καλεῖται **κανονική**, ἐάν ἔχη προκύψει ἀπό κανονικήν πυραμίδα. Ἄρα μία κανονική κόλουρος πυραμίς, ἔχει ὡς βάσεις κανονικά ὅμοια πολύγωνα, τό δέ τμῆμα μέ ἄκρα τά κέντρα βάρους τῶν δύο βάσεων, εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτάς.

Μεσαία τομή ἤ μέση τομή τῆς κολούρου πυραμίδος, καλεῖται ἡ τομή αὐτῆς ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις της καί ἰσαπέχουσα ἀπ' αὐτάς. Ἡ μεσαία τομή εἶναι πούγωνον ὅμοιον πρός τάς βάσεις καί διχοτομεῖ τάς παραπλεύρους ἀκμάς τῆς κολούρου πυραμίδος ὡς καί τό ὕψος της καί γενικῶς κάθε τμῆμα μέ τά ἄκρα του ἐπί τῶν βάσεων.

Ἀσκήσεις

174. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κάθε κανονικήν πυραμίδα, αἱ παρά-

πλευροι ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

175. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό κανονικόν τετράεδρον εἶναι κανονική τριγωνική πυραμίς. Κατά τί διαφέρει τό κανονικόν τετράεδρον ἀπό μίαν κανονικήν τριγωνικήν πυραμίδα ;

176. Πυραμίς ἔχει ἐμβαδόν βάσεως Ε καί ὕψος υ. Τέμνομεν αὐτήν δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν καί διερχομένου ἀπό τό μέσον μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς. Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς ἐκ τοῦ ἐμβαδοῦ Ε τῆς βάσεως.

177. Πυραμίς ἔχει ἐμβαδόν βάσεως Ε καί ὕψος υ. Τέμνομεν αὐτήν δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν εἰς ἀπόστασιν α ἀπό τῆς κορυφῆς ($\alpha < \upsilon$). Νά ἐκφρασθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς ἐκ τῶν Ε, α καί υ.

178. Νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος μιᾶς τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως καί τοῦ ὕψους υ.

179. Τό αὐτό πρόβλημα, ἐάν ἡ κανονική πυραμίς εἶναι α) τριγωνική, β) ἑξαγωνική.

180. Κανονική τετραγωνική πυραμίς ἔχει ἀκμήν βάσεως α καί ὕψος 2α. Τέμνομεν αὐτήν δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καί σχηματίζοντος γωνίαν 45^0 μέ τήν βάσιν. α) Δείξατε ὅτι ἡ τομή εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον. β) Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς.

181. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ παράπλευροι ἕδραι κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια.

182. Κόλουρος πυραμίς ἔχει ἐμβαδά βάσεων E_1 καί E_2. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς μεσαίας τομῆς. Νά γίνῃ ἐφαρμογή ἐάν αἱ βάσεις εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα μέ πλευράς α καί 3α ἀντιστοίχως.

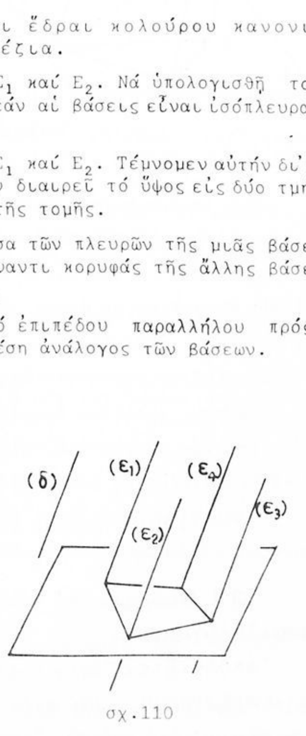
183. Κόλουρος πυραμίς ἔχει ἐμβαδά βάσεων E_1 καί E_2. Τέμνομεν αὐτήν δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις, τό ὁποῖον διαιρεῖ τό ὕψος εἰς δύο τμήματα μέ λόγον μ/ν. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς.

184. Δείξατε ὅτι τά τμήματα μέ ἄκρα τά μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως κολούρου τριγωνικῆς πυραμίδος καί τάς ἀπέναντι κορυφάς τῆς ἄλλης βάσεως, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

185. Δοθεῖσα κόλουρος πυραμίς νά τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις της, οὕτως ὥστε ἡ τομή νά εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν βάσεων.

20. Τό πρῖσμα.

20.1. Πρισματική ἐπιφάνεια θεωροῦμεν μίαν διαδοχήν εὐθειῶν (ε_1), (ε_2), (ε_3), ..., (ε_ν) παραλλήλων πρός μίαν εὐθεῖαν (δ) (σχ.110). Ἀνά δύο διαδοχικαί, σχηματίζουν ἐπιπέδους ζώνας, τό σύνολον τῶν ὁποίων ἀπαρτίζει μίαν ἐπιφάνειαν ἡ ὁποία καλεῖται **πρισματική**. Αἱ ἐπίπεδοι ζῶναι καλοῦνται **ἕδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας καί αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι κα-

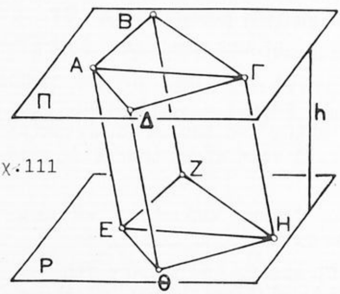


σχ.110

λοῦνται **ἀκμαί** αὐτῆς. Ἡ πρισματική ἐπιφάνεια καλεῖται **κυρτή**, ἐάν ἡ τομή της ὑπό τυχόντος ἐπιπέδου εἶναι κυρτόν πολύγωνον, ἄλλως ἡ πρισματική ἐπιφάνεια καλεῖται **μή κυρτή**.

Κάθετος τομή πρισματικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἡ τομή αὐτῆς ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τάς ἀκμάς της. Ἡ κάθετος τομή εἶναι πολύγωνον.

20.2. Πρῖσμα. Ἐάν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπό δύο παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) (σχ.111), ἀποκόπτεται στερεόν τό ὁποῖον καλεῖται πρῖσμα.



σχ.111

Αἱ παράλληλοι τομαί εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ) τά ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ πρίσματος, ἐνῶ αἱ λοιπαί ἕδραι τοῦ στερεοῦ καλοῦνται **παράπλευροι ἕδραι**.

Κάθετος τομή πρίσματος, καλεῖται ἡ κάθετος τομή τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ἐκ τῆς ὁποίας προῆλθεν τό πρῖσμα.

Αἱ ἀκμαί τοῦ πρίσματος (ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ καί ΔΘ), αἱ ὁποῖαι δέν ἀνήκουν εἰς τάς βάσεις του, καλοῦνται **παράπλευροι ἀκμαί**.

Ὕψος τοῦ πρίσματος καλεῖται ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο βάσεων αὐτοῦ.

Ἕνα πρῖσμα χαρακτηρίζεται ὡς τριγωνικόν, τετραπλευρικόν, πενταγωνικόν κλπ. ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Διαγώνιον ἐπίπεδον καλεῖται ἕνα ἐπίπεδον τό ὁποῖον καθορίζεται ἀπό δύο παραπλεύρους ἀκμάς (ΑΕ καί ΓΗ), μή κειμένας ἐπί τῆς αὐτῆς ἕδρας. Ἕνα διαγώνιον ἐπίπεδον τέμνει τάς βάσεις τοῦ πρίσματος, κατά διαγωνίους. Τά τριγωνικά πρίσματα δέν ἔχουν οὐδένα διαγώνιον ἐπίπεδον.

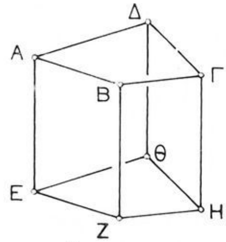
Ὀρθόν καλεῖται ἕνα πρῖσμα, ἐάν αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κάθετοι ἐπί τάς βάσεις του. Εἰς τά ὀρθά μόνον πρίσματα, τό ὕψος εἶναι ἴσον μέ τάς παραπλεύρους ἀκμάς καί ἡ κάθετος τομή ἴση πρός τάς βάσεις του.

Κανονικόν καλεῖται ἕνα **ὀρθόν** πρῖσμα τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι κανονικά πολύγωνα.

20.3. Θεώρημα. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάθε πρίσματος, εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχόν πρῖσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ.112). Ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ΑΕ//ΒΖ//ΓΗ//ΔΘ. Ἐπί πλέον εἶναι ΑΒ//ΕΖ, ὡς τομαί παραλλήλων ἐπιπέδων (τῶν βάσεων) ὑπό τρίτου. Ἄρα τό τετράπλευρον ΑΒΖΕ εἶναι παραλληλόγραμον.

Ὁμοίως καί αἱ λοιπαί παράπλευροι ἕδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα.



σχ.112

20.3.1. Πόρισμα. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί κάθε πρίσματος, εἶναι ἴσαι.

20.3.2. Πόρισμα. Αἱ παράπλευροι ἕδραι ὀρθοῦ πρίσματος, εἶναι ὀρθογώνια.

20.3.3. Πόρισμα. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κανονικοῦ πρίσματος, εἶναι ἴσα ὀρθογώνια.

20.4. Θεώρημα. Αἱ βάσεις κάθε πρίσματος εἶναι ἴσα πολύγωνα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τυχόν πρῖσμα ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ (σχ.112). Ἐπειδή αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι ἴσαι καί παράλληλοι, ἕπεται ὅτι ἐάν ἡ βάσις ΑΒΓΔ μετατοπισθῇ κατά τόν δείκτην $\vec{\text{ΑΕ}}$, θά συμπέσῃ μετά τῆς ἄλλης βάσεως ΕΖΗΘ. Ἄρα αἱ βάσεις εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις

186. Ἐάν πρῖσμα τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς παραπλεύρους ἀκμάς του, δείξατε ὅτι ἡ τομή εἶναι παραλληλόγραμμον.

187. Δείξατε ὅτι ἡ τομή δύο διαγωνίων ἐπιπέδων πρίσματος, εἶναι παράλληλος καί ἴση πρός τάς παραπλεύρους ἀκμάς του.

188. Κανονικόν τρίγωνικόν πρῖσμα τέμνεται δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καί διά τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τῆς ἄνω βάσεως. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος τοῦ πρίσματος ἐκ τῆς ἀκμῆς α τῆς βάσεως αὐτοῦ, ἐάν τό ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζει μέ τήν βάσιν γωνίαν 60^0.

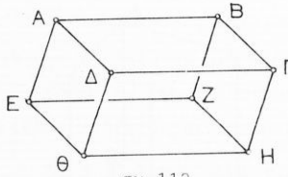
189. Τό αὐτό πρόβλημα, ἐάν τό ἐπίπεδον τομῆς σχηματίζει γωνίαν 15^0 μέ τήν βάσιν.

190. Κανονικόν τριγωνικόν πρῖσμα ἔχει ἀκμήν βάσεως α καί ὕψος α. Τέμνομεν αὐτό δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά μιᾶς ἀκμῆς τῆς βάσεως καί σχηματίζοντος γωνίαν 60^0 μέ τήν βάσιν. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τομή εἶναι ἰσοσκελές τραπέζιον καί νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν του ἐκ τῆς ἀκμῆς α.

191. Δίδεται τριγωνικόν πρῖσμα ΑΒΓ.ΔΕΖ. Τέμνομεν αὐτό δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν ἕδραν ΒΓΖΕ. Δείξατε ὅτι α) ἡ τομή εἶναι παραλληλόγραμμον β) Ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς τομῆς πρός τό ἐμβαδόν τῆς παραλλήλου ἕδρας, ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῆς ἀκμῆς ΑΔ ἀπό τό ἐπίπεδον τομῆς καί τῆς παραλλήλου ἕδρας.

20.5. Παραλληλεπίπεδον καλεῖται ἕνα πρῖσμα τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα (σχ.113).

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα τό παραλληλεπίπεδον δύναται νά θεωρηθῇ ὑπό τριπλήν

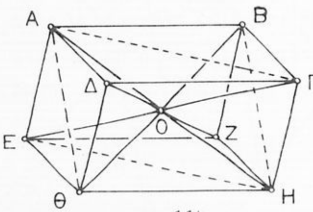


σχ.113

ἔννοιαν πρῖσμα μέ βάσεις δύο οἱασδήποτε ἀπέναντι ἕδρας του ἐκ τῶν ἕξ. Ἑπομένως αἱ ἀπέναντι ἕδραι του εἶναι ἴσα παραλληλόγραμμα καί αἱ ἀκμαί του ἀποτελοῦν τρεῖς ὁμάδας ἐκ τεσσάρων παραλλήλων καί ἴσων ἀκμῶν. Τό παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ὕψη.

20.5.1. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι κάθε παραλληλεπιπέδου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ τυχόν παραλληλεπίπεδον (σχ.114). Αἱ ἀκμαί του ΑΕ καί ΓΗ εἶναι ἴσαι καί παράλληλοι καί ἑπομένως τό τετράπλευρον ΑΕΗΓ εἶναι παραλληλόγραμμον ⇒ αἱ διαγώνιοι ΑΗ καί ΓΕ τέμνονται εἰς σημεῖον Ο, τό ὁποῖον μάλιστα εἶναι καί μέσον ἑκάστης.

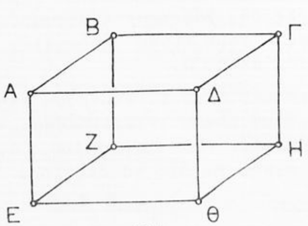


σχ.114

Ὁμοίως ἐκ τῶν παραλληλογράμμων ΑΒΗΘ καί ΑΖΗΔ ἕπεται ὅτι καί αἱ διαγώνιοι ΒΘ καί ΔΖ ἀντιστοίχως, διέρχονται ἀπό τό μέσον Ο τῆς διαγωνίου ΑΗ. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο, τό ὁποῖον καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Παρατήρησις. Τό σημεῖον Ο, ὡς μέσον τῆς κάθε διαγωνίου τοῦ παραλληλεπιπέδου, εἶναι καί κέντρον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ, ἐξ οὗ καί καλεῖται ἁπλῶς κέντρον αὐτοῦ.

20.5.2. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον καλεῖται τό παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι ὀρθογώνια (σχ.115).



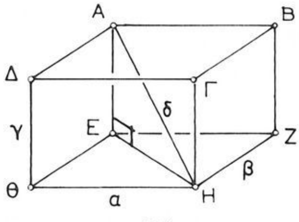
σχ.115

Αἱ στερεαί γωνίαι ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τρισορθογώνιοι καί τά τρία ὕψη του εἶναι ἴσα πρός τρεῖς ἀκμάς του αἱ ὁποῖαι συντρέχουν εἰς τήν αὐτήν στερεάν γωνίαν, καλοῦνται δέ καί διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

20.5.3. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν α, β, γ αἱ διαστάσεις ἑνός ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου (σχ.116) καί ΑΗ = δ ἡ τυχοῦσα διαγώνιος αὐτοῦ. Ἀπό τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΕΗ λαμβάνομεν: $\delta^2 = ΕΗ^2 + \gamma^2$ (1). Ἀπό τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΘΗ λαμβάνομεν: $ΕΗ^2 = \alpha^2 + \beta^2$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται:

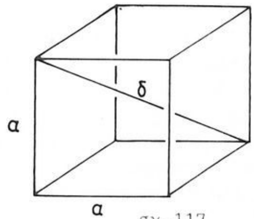
$$\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \quad \Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$



σχ.116

Τό αὐτό ἀποδεικνύεται καί διά τάς λοιπάς διαγωνίους. Ἄρα αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι.

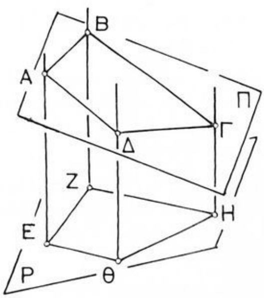
20.6. Κύβος καλεῖται τό ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι εἶναι τετράγωνα.



σχ.117

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ κύβου εἶναι ἴσαι. Ἐάν α εἶναι ἡ ἀκμή τοῦ κύβου (σχ.117) καί δ ἡ διαγώνιος αὐτοῦ, ἐκ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος ἕπεται ὅτι $\delta = \alpha\sqrt{3}$

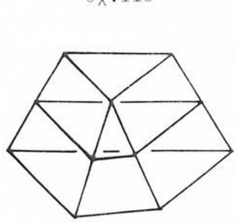
20.7. Κολοβὸν πρῖσμα. Ἐάν πρισματική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπό δύο μή παραλλήλων ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) (σχ.118), ἀποκόπτεται στερεόν, τό ὁποῖον καλεῖται κολοβόν πρῖσμα.



σχ.118

Αἱ τομαί ὑπό τῶν δύο ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ), εἶναι πολύγωνα (ΑΒΓΔ καί ΕΖΗΘ ὄχι ἴσα), τά ὁποῖα καλοῦνται **βάσεις** τοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Αἱ λοιπαί ἕδραι καλοῦνται παράπλευροι ἕδραι καί εἶναι ἐν γένει τραπέζια. Ὕψος εἰς τό κολοβόν πρῖσμα δέν ὁρίζεται.

20.8. Πρισματοειδές καλεῖται τό πολύεδρον τό ὁποῖον ἔχει δύο παραλλήλους ἕδρας, αἱ ὁποῖαι καλοῦνται βάσεις καί δέν ἔχει ἄλλας κορυφάς ἐκτός ἀπό τάς κορυφάς τῶν βάσεων (σχ. 119).


σχ.119

Αἱ λοιπαί ἕδραι αἱ ὁποῖαι καλοῦνται

παράπλευροι, εἶναι τρίγωνα ἤ τραπέζια. 'Η ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων καλεῖται ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς.

Μεσαία τομή καλεῖται ἡ τομή τοῦ στερεοῦ, ὑπό τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου τῶν βάσεων αὐτοῦ.

'Ασκήσεις

192. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν παραλληλεπιπέδου ἀπό ἐπίπεδον μή τέμνον αὐτό, ἰσοῦται πρός τό ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τοῦ παραλληλεπιπέδου ἀπό τό ἐπίπεδον.

193. 'Εάν αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, δείξατε ὅτι τοῦτον εἶναι ὀρθογώνιον.

194. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἑνός παραλληλεπιπέδου, ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του.

195. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπό τάς ὀκτώ κορυφάς ἑνός παραλληλεπιπέδου, ἰσοῦται πρός τό ὀκταπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως αὐτοῦ ἀπό τό κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου, ηὐξημένον κατά τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

196. Διά μιᾶς ἀκμῆς παραλληλεπιπέδου θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον μή τέμνον τό στερεόν καί ἐπ' αὐτοῦ φέρομεν καθέτους ἀπό τάς ὑπολοίπους ἕξ κορυφάς τοῦ παραλληλεπιπέδου. Δείξατε ὅτι ἐκ τῶν ἕξ καθέτων τμημάτων, τά δύο μεγαλύτερα ἔχουν ἄθροισμα ἴσον πρός τά τέσσαρα ὑπόλοιπα κάθετα τμήματα.

197. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ἔχει τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

198. Δίδονται τρεῖς ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3) καί μεταβλητόν κατά θέσιν εὐθύγραμμον τμῆμα σταθεροῦ μήκους δ. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν του ἐπί τάς τρεῖς ἀσυμβάτους εὐθείας, παραμένει σταθερόν.

199. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεά γωνία Oxyz καί μεταβλητόν κατά θέσιν εὐθύγραμμον τμῆμα μήκους δ. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τοῦ τμήματος ἐπί τάς τρεῖς ἕδρας τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς, παραμένει σταθερόν.

200. Δίδεται κύβος ἀκμῆς α. Τέμνομεν αὐτόν διά τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου μιᾶς τῶν διαγωνίων του. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ τομή εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον καί νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν του ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

201. Δίδεται παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ. Δείξατε ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΗ, τριχοτομεῖται ὑπό τῶν ἐπιπέδων ΒΔΕ καί ΓΖΘ.

202. Νά κατασκευασθῆ παραλληλεπίπεδον τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαί νά εὑρίσκονται ἐπί τριῶν δοθεισῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

203. Νά ἐξετασθῆ ἡ προβολή κύβου ἐπί ἐπιπέδου καθέτου πρός μίαν διαγώνιόν του, νά ὑπολογισθῆ δέ καί τό ἐμβαδόν τῆς προβολῆς, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ κύβου.

204. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε κύβον, ἡ προβολή μιᾶς ἀκμῆς ἐπί μίαν διαγώ-

νιον, ἰσοῦται πρός τό 1/3 τῆς διαγωνίου.

205. Ἐάν εἰς ἕνα παραλληλεπίπεδον δύο προσκείμεναι ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, δείξατε ὅτι ἡ τομή τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τήν κοινήν ἀκμήν τῶν ἰσοδυνάμων ἑδρῶν, εἶναι ρόμβος.

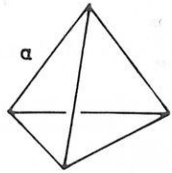
206. Κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος δίδονται τά μήκη α, β, γ τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν βαρυκέντρων τῶν βάσεων αὐτοῦ.

Μέτρησις τῶν πολυέδρων.

21. Μέτρησις τῆς ἐπιφανείας πολυέδρου. Διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας ἑνός τυχόντος πολυέδρου, μετρῶμεν τάς ἐπιφανείας τῶν ἑδρῶν του (ἐμβαδά ἐπιπέδων πολυγώνων) καί ἀθροίζομεν. Ἡ ἐργασία αὕτη ὅμως, εἰς εἰδικάς τινάς περιπτώσεις τυποποιεῖται καί συνεπῶς ἁπλουστεύεται, ὡς θά φανῇ εἰς τά ἑπόμενα.

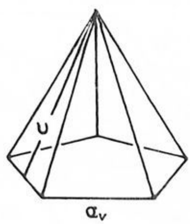
21.1. Ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α. Ἀποτελεῖται ἀπό τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α (σχ.120). Τό ἐμβαδόν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν ἰσοῦται πρός $\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ καί ἑπομένως ἡ ἐπιφάνεια τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι $4.\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} = \alpha^2\sqrt{3}$, ἤτοι

$$E = \alpha^2\sqrt{3}$$



σχ.120

21.2. Ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος. Εἰς κανονικήν πυραμίδα, ὅπου ὅλαι αἱ παράπλευροι ἕδραι εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα, ὑπολογίζομεν τό ἐμβαδόν ἑνός μόνον τριγώνου καί ἐν συνεχείᾳ πολλαπλασιάζομεν μέ τό πλῆθος ν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Ἐάν α_ν εἶναι ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καί υ εἶναι τό παράπλευρον ὕψος (σχ.121), μία παράπλευρος ἕδρα ἔχει ἐμβαδόν $\frac{1}{2}\alpha_\nu\upsilon$ καί ἑπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια



σχ.121

εἶναι $\nu\frac{1}{2}\alpha_\nu\upsilon = \frac{\nu\alpha_\nu}{2}\upsilon = \frac{P_\nu}{2}\upsilon$, ὅπου P_ν εἶναι ἡ περίμετρος τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς πυραμίδος, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

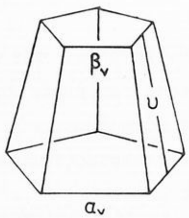
$$E_\pi = \frac{P_\nu}{2}\upsilon$$

Ἐάν εἰς τήν ἐπιφάνειαν αὐτήν προσθέσωμεν καί τό ἐμβαδόν E_ν τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως, λαμβάνομεν τόν τύπον:

$$E_{\text{ολ.}} = \frac{P_\nu\upsilon}{2} + E_\nu$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

21.3. Ἐπιφάνεια κολούρου κανονικῆς πυραμίδος. Αἱ παράπλευροι ἕδραι μιᾶς κολούρου κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσα ἰσοσκελῆ τραπέζια. Ἐάν α_ν, β_ν, καί υ εἶναι αἱ βάσεις καί τό ὕψος ἀντιστοίχως ἑνός ἐξ αὐτῶν (σχ. 122), τό ἐμβαδόν του θά εἶναι $\frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} . \upsilon$ καί ἑπομένως ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι : $\nu . \frac{\alpha_\nu + \beta_\nu}{2} . \upsilon = \frac{\nu\alpha_\nu + \nu\beta_\nu}{2}\upsilon = \frac{P_\nu + p_\nu}{2}\upsilon$, ὅπου P_ν καί p_ν εἶναι αἱ περίμετροι τῶν κανονικῶν πολυγώνων τῶν βάσεων. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:



σχ.122

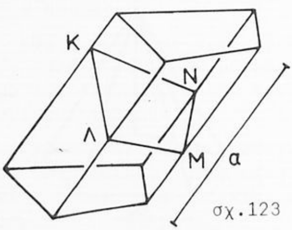
$$E_\pi = \frac{P_\nu + p_\nu}{2} . \upsilon$$

Ἐάν εἰς τήν ἐπιφάνειαν αὐτήν προσθέσωμεν καί τά ἐμβαδά E_ν καί ε_ν τῶν δύο βάσεων, λαμβάνομεν τόν τύπον :

$$E_{o\lambda} = \frac{P_\nu + p_\nu}{2}\upsilon + E_\nu + \varepsilon_\nu$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ.

21.4. Πρισματική ἐπιφάνεια. Αἱ παράπλευροι ἕδραι κάθε πρίσματος, εἶναι παραλληλόγραμμα τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρά ἔχει μῆκος α ἴσον πρός τήν παράπλευρον ἀκμήν τοῦ πρίσματος (σχ.123). Φέρομεν μίαν κάθετον τομήν ΚΛΜΝ καί εἶναι φανερόν ὅτι αἱ πλευραί τοῦ πολυγώνου ΚΛΜΝ εἶναι ὕψη διά τάς παραπλεύρους ἕδρας τοῦ πρίσματος. Τότε ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια, ὡς ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν, ἰσοῦται πρός $\alpha.ΚΛ + \alpha.ΛΜ + \alpha.ΜΝ + \alpha.ΝΚ = \alpha(ΚΛ + ΛΜ + ΜΝ + ΝΚ) = \alpha.P$. Ἄρα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια παντός πρίσματος, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :



σχ.123

$$E_\pi = \alpha.P$$

ὅπου α εἶναι ἡ παράπλευρος ἀκμή τοῦ πρίσματος καί P ἡ περίμετρος τῆς καθέτου τομῆς του.

Ἐάν εἰς τήν προηγουμένην ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν καί τάς δύο ἴσας βάσεις Β τοῦ πρίσματος, λαμβάνομεν τόν τύπον :

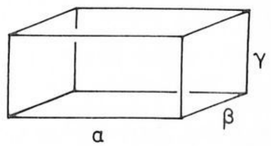
$$E_{ολ} = α.P + 2B$$

τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

21.4.1. 'Επιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος. Οἱ τύποι τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύουν βεβαίως καί διά τά ὀρθά πρίσματα, ὅπου ὅμως ἡ περίμετρος P τῆς καθέτου τομῆς εἶναι ἡ αὐτή μέ τήν περίμετρον τῆς βάσεως, ἐνῶ τό μῆκος α τῆς παραπλεύρου ἀκμῆς δύναται νά ἀντικατασταθῆ μέ τό ὕψος h τοῦ πρίσματος. Οὕτω λαμβάνομεν:

$$E_{π} = P.h \quad καί \quad E_{ολ} = P.h + 2B$$

21.4.2. 'Επιφάνεια ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. 'Εάν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι α, β, γ (σχ.124), ὁ τύπος τῆς προηγουμένης παραγράφου διά τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν αὐτοῦ, γίνεται: $E_{ολ} = (2α+2β)γ + 2αβ = 2(αβ+αγ+βγ)$, ἤτοι :



σχ.124

$$E_{ολ} = 2(αβ + αγ + βγ)$$

21.4.3. Πόρισμα. 'Η ἐπιφάνεια κύβου ἀκμῆς α, ἰσοῦται πρός $6α^2$.

'Ασκήσεις

207. Κανονική ἑξαγωνική πυραμίς ἔχει ἀκμήν βάσεως 5α καί ὕψος 6α. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

208. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος, ἡ παράπλευρος ἀκμή ἰσοῦται πρός τά 5/6 τῆς ἀκμῆς τῆς βάσεως. 'Εάν ἡ ὁλική ἐπιφάνεια αὐτῆς εἶναι $84cm^2$, νά εὑρεθῆ ἡ ἀκμή τῆς βάσεως καί τό ὕψος της.

209. Κανονική τετραγωνική πυραμίς ἔχει βάσιν πλευρᾶς α καί αἱ παράπλευροι ἕδραι της σχηματίζουν μετά τῆς βάσεως γωνίας 30^0. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνεια αὐτῆς.

210. Τρίεδρος στερεά γωνία μέ κορυφήν Κ, ἔχει τάς ἕδρας της 60^0 ἑκάστην. 'Επί μιᾶς ἀκμῆς της λαμβάνομεν τμῆμα ΚΑ=α καί φέρομεν ἐπίπεδον (ΑΒΓ)⊥ΚΑ τό ὁποῖον τέμνει τάς ἄλλας ἀκμάς τῆς τριέδρου εἰς τά Β καί Γ. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου ΚΑΒΓ.

211. Κανονική τετραγωνική πυραμίς ἔχει ἀκμήν βάσεως α καί παράπλευρον ἀκμήν α. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια αὐτῆς.

212. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἕδραι ΑΒΓ καί ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α καί ἡ δίεδρος $\widehat{ΒΓ}$ εἶναι 60^0. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

213. 'Ορθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ καθέτους πλευράς 9α καί 12α. Νά εὑρεθῆ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρίσματος, ἐάν τό ὕψος του ἰσοῦται πρός τήν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως.

214. Νά εὑρεθῆ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια ὀρθοῦ πρίσματος μέ ὕψος h, ὅταν ἡ βά-

σις του εἶναι κανονικόν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἑξάγωνον,περιγεγραμμένον περί κύκλον ἀκτῖνος ρ.

215. Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο κανονικῶν πρισμάτων τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνον τοῦ ἑνός, ὀκτάγωνον τοῦ ἄλλου,ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτῖνος R καί τά ὕψη των εἶναι ἴσα πρός τά ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

216. Τέμνομεν κύβον δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά τῶν ἄκρων τριῶν ἀκμῶν συντρεχουσῶν εἰς τήν αὐτήν στερεάν γωνίαν. Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύβος.

217. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α καί τό ὕψος εἶναι 2α, τέμνεται δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά τῶν ἄκρων τῶν ἀκμῶν τῆς αὐτῆς στερεᾶς γωνίας. Νά εὑρεθῇ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τῆς ἀποκοπτομένης πυραμίδος.

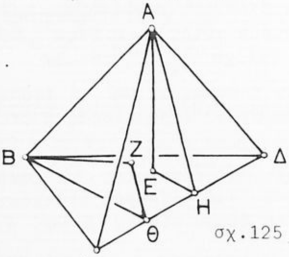
218. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1,3,4 καί ἡ ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 342 cm^2. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

219. Ὀρθόν κολοβόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Αἱ δύο παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι $α(1+\sqrt{3})$ καί ἡ τρίτη α. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.

220. Δείξατε ὅτι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου ἑνός τετραέδρου, διαιρεῖ τήν ἀπέναντι ἀκμήν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν προσκειμένων εἰς αὐτά ἑδρῶν.

22. Ὄγκοι τῶν πολυέδρων.

22.1. Θεώρημα. Εἰς κάθε τετράεδρον, τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἕδρας του ἐπί τό ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, εἶναι τό αὐτό δι'ὅλας τάς ἕδρας.



σχ.125

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ τυχόν τετράεδρον. Φέρομεν τά ὕψη ΑΕ, ΒΖ (σχ.125) καί ἀρκεῖ νά δειχθῇ ὅτι (ΒΓΔ)·ΑΕ = (ΑΓΔ)·ΒΖ.

Φέρομεν ΑΗ⊥ΓΔ καί ΒΘ⊥ΓΔ ⇒ ΕΗ⊥ΓΔ καί ΖΘ⊥ΓΔ (θεώρ. τριῶν καθέτων). Ἄρα αἱ γωνίαι $Α\hat{Η}Ε$ καί $Β\hat{Θ}Ζ$ εἶναι ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι τῆς διέδρου ΓΔ, ⇒ $Α\hat{Η}Ε = Β\hat{Θ}Ζ$. Τότε τά ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΕ καί ΒΘΖ εἶναι ὅμοια ⇒ $\frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}$ (1). Τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΒΓΔ, ἔχουν τήν ΓΔ κοινήν. Ἄρα $\frac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)} = \frac{ΑΗ}{ΒΘ}$ (2). Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καί (2) ἕπεται: $\frac{ΑΕ}{ΒΖ} = \frac{(ΑΓΔ)}{(ΒΓΔ)}$ ⇒ (ΒΓΔ)·ΑΕ = (ΑΓΔ)·ΒΖ.

22.1.1. Ὁρισμός. Ὄγκος τετραέδρου καλεῖται τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς ἐκ τῶν ἑδρῶν του ἐπί τό ἀντίστοιχον αὐτῆς ὕψος, ἐπί σταθερόν τινα συντελεστήν k, ἐξαρτώμενον ἀπό τήν αὐθαίρετον ἐκλογήν τῆς μονάδος μετρήσεως τῶν ὄγκων.

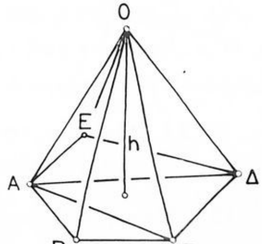
Ὁ ὄγκος τετραέδρου ΑΒΓΔ, συμβολίζεται μέ (ΑΒΓΔ) ἤ $V_{(ΑΒΓΔ)}$ ἤ ἁπλῶς μέ V, ὅταν προηγουμένως ἔχει μνημονευθεῖ τό τετράεδρον εἰς τό ὁποῖον ἀναφέρεται ὁ ὄγκος. Οἱ αὐτοί συμβολισμοί ἐπεκτείνονται καί διά τόν ὄγκον τυχόντος πολυέδρου.

Δύο τετράεδρα ἤ ἐν γένει δύο στερεά μέ ἴσους ὄγκους, καλοῦνται ἰσοδύναμα.

22.1.2. Πόρισμα. Δύο τετράεδρα μέ ἰσεμβαδικάς βάσεις καί ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

22.1.3. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων μέ ἰσεμβαδικάς βάσεις εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς μονάδος μετρήσεως (τοῦ συντελεστοῦ k) καί ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρός τάς βάσεις ὑψῶν.

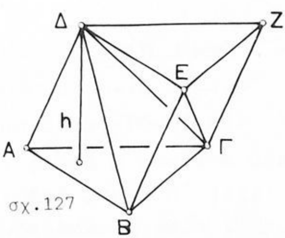
22.1.4. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων μέ ἴσα ὕψη, ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτά βάσεων.



σχ.126

22.1.5. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος πυραμίδος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον kBh, ὅπου B ἡ βάσις καί h τό ὕψος τῆς πυραμίδος

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο.ΑΒΓΔΕ τυχοῦσα πυραμίς μέ ὕψος h (σχ.126). Τήν διαιροῦμεν εἰς τετράεδρα μέ τά ἐπίπεδα ΟΑΓ, ΟΑΔ. Τότε ἔχομεν : (Ο.ΑΒΓΔΕ) = (Ο.ΑΒΓ) + (Ο.ΑΓΔ) + (Ο.ΑΔΕ) (1). Κατά τόν ὁρισμόν ὅμως 22.1.1 εἶναι : (Ο.ΑΒΓ) = k(ΑΒΓ)h, (Ο.ΑΓΔ) = k(ΑΓΔ)h, (Ο.ΑΔΕ) = k(ΑΔΕ)h καί ἑπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται: (Ο.ΑΒΓΔΕ) = k{(ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ)}h = k(ΑΒΓΔΕ)h ⇒ (Ο.ΑΒΓΔΕ) = kBh.



σχ.127

22.2. Θεώρημα. Κάθε τριγωνικόν πρῖσμα, δύναται νά διαιρεθῆ εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓ.ΔΕΖ τυχόν τριγωνικόν πρῖσμα (σχ.127). Διαιροῦμεν αὐτό εἰς τρία τετράεδρα :

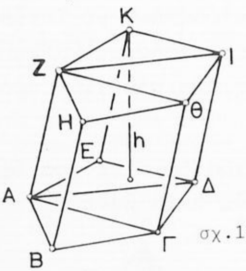
(ΑΒΓ.ΔΕΖ) = (Δ.ΑΒΓ) + (Γ.ΔΕΖ) + (Δ.ΒΓΕ) (1).

Παρατηροῦμεν ὅτι (Δ.ΑΒΓ) = (Γ.ΔΕΖ) διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καί ἴσα ὕψη. Ἐπίσης εἶναι (Γ.ΔΕΖ) = (Δ.ΒΓΕ) διότι ἔχουν ἴσας βάσεις τάς ΓΕΖ καί ΓΕΒ καί ἴσα ὕψη ἐκ τῆς κοινῆς κορυφῆς των Δ. Ἄρα τό τριγωνικόν πρῖσμα διαιρεῖται εἰς τρία ἰσοδύναμα τετράεδρα καί ἐπομένως ἡ σχέσις (1) γράφεται :

$$(ΑΒΓ.ΔΕΖ) = 3(Δ.ΑΒΓ)$$

22.2.1. Πόρισμα. Ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός $3k\cdot Bh$, ὅπου B ἡ βάσις του καί h τό ὕψος του.

22.3. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τυχόντος πρίσματος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς βάσεως ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ, ἐπί τόν σταθερόν συντελεστήν 3k.



σχ.128

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔΕ.ΖΗΘΙΚ τυχόν πρῖσμα μέ ὕψος h (σχ.128). Διά μιᾶς παραπλεύρου ἀκμῆς του τῆς ΑΖ, φέρομεν ὅλα τά διαγώνια ἐπίπεδα καί τό πρῖσμα διαιρεῖται εἰς τριγωνικά πρίσματα.

Τότε ἔχομεν : $(ΑΒΓ...Κ) = 3k(ΑΒΓ)h + 3k(ΑΓΔ)h + 3k(ΑΔΕ)h = 3k(ΑΒΓΔΕ)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό γινόμενον $3kBh$, ὅπου B ἡ βάσις τοῦ πρίσματος.

22.3.1. Πόρισμα. Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ ἰσοῦται πρός τό γινόμενον $3k\cdot αβγ$.

22.4. Μονάς μετρήσεως τῶν ὄγκων. Προσδιορισμός συντελεστοῦ K. Πρακτικοί λόγοι ἔχουν ἐπιβάλει ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν ὄγκων τήν κυβικήν, ἤτοι ἕναν κύβον μέ ἀκμήν τήν μονάδα μετρήσεως τῶν μηκῶν. Ὁ ὄγκος τῆς μονάδος μετρήσεως, κατά τό προηγούμενον πόρισμα, ἰσοῦται πρός $3k\cdot1\cdot1\cdot1$ καί βεβαίως πρέπει νά εἶναι $3k\cdot1\cdot1\cdot1 = 1$. Ἄρα :

$$k = \frac{1}{3}$$

22.4.1. Πόρισμα. Ἀπό τά προηγούμενα ἔπεται ὅτι:

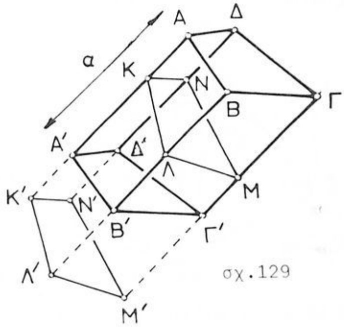
i) Ὁ ὄγκος πυραμίδος δίδεται ἀπό τόν τύπον $V = \frac{1}{3}Bh$.

ii) Ὁ ὄγκος πρίσματος δίδεται ἀπό τόν τύπον $V = Bh$, ὅπου B εἶναι ἡ βάσις τοῦ στερεοῦ καί h τό ὕψος του.

iii) Ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου μέ διαστάσεις α, β, γ δίδεται ἀπό τόν τύπον $V = αβγ$.

iv) Ὁ ὄγκος κύβου ἀκμῆς α δίδεται ἀπό τόν τύπον $V = \alpha^3$

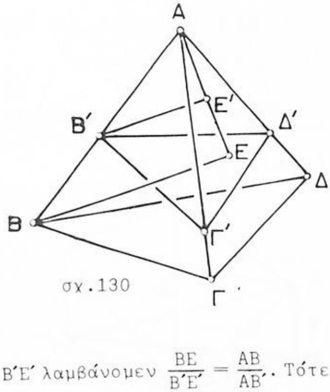
22.4.2. Θεώρημα. Κάθε πρῖσμα εἶναι ἰσοδύναμον πρός ὀρθόν πρῖσμα μέ βάσιν τήν κάθετον τομήν καί ὕψος τήν παράπλευρον ἀκμήν του.



σχ.129

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′ ἕνα (πλάγιον) πρῖσμα μέ παράπλευρον ἀκμήν ΑΑ′ = α καί ΚΛΜΝ μία κάθετος τομή αὐτοῦ (σχ.129). Προεκτείνοντες τάς παραπλεύρους ἀκμάς του κατά τήν αὐτήν φοράν λαμβάνομεν τμήματα Α′Κ′ = ΑΚ, Β′Λ′ = ΒΛ, Γ′Μ′ = ΓΜ καί Δ′Ν′ = ΔΝ. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι ΚΚ′ = ΑΑ′ = α, διότι ἀποτελοῦνται ἀπό τό κοινόν τμῆμα ΚΑ′ καί τά ἴσα τμήματα ΑΚ καί Α′Κ′ ἀντιστοίχως. Ὁμοίως εἶναι ΛΛ′ = ΜΜ′ = ΝΝ′ = α. Ἄρα δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ὅτι τό στερεόν τμῆμα ΑΒΓΔ.ΚΛΜΝ ἔχει μετατοπισθῆ κατά τόν δείκτην $\overrightarrow{ΑΑ'}$ εἰς τήν θέσιν Α′Β′Γ′Δ′.Κ′Λ′Μ′Ν′ καί ἑπομένως εἶναι : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) (1). Ἀλλά τό ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′ εἶναι ὀρθόν πρῖσμα, μέ βάσιν τήν κάθετον τομήν (ΚΛΜΝ) = Β καί ὕψος τήν ἀκμήν ΚΚ′ = α. Ἑπομένως εἶναι (ΚΛΜΝ.Κ′Λ′Μ′Ν′) = Β·α καί τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται : (ΑΒΓΔ.Α′Β′Γ′Δ′) = Β·α.

22.4.3. Θεώρημα. Ἐάν δύο τετράεδρα ἔχουν μίαν στερεάν γωνίαν ἴσην, ὁ λόγος τῶν ὄγκων τους εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τάς ἴσας στερεάς γωνίας.



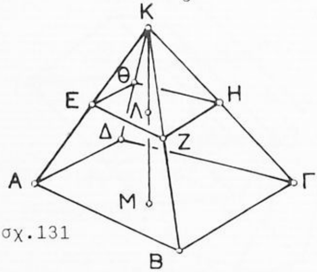
σχ.130

Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν ΑΒΓΔ καί ΑΒ′Γ′Δ′ τά δύο τετράεδρα (σχ.130) τοποθετημένα εἰς τρόπον ὥστε νά συμπίπτουν αἱ ἴσαι στερεαί γωνίαι εἰς τό Α. Φέρομεν ΒΕ⊥ΑΓΔ καί Β′Ε′ ⊥ΑΓ′Δ′. Τότε θά εἶναι:

$$\frac{(ΑΒΓΔ)}{(ΑΒ'Γ'Δ')} = \frac{\frac{1}{3}(ΑΓΔ)\,ΒΕ}{\frac{1}{3}(ΑΓ'Δ')\,Β'Ε'} = \frac{(ΑΓΔ)}{(ΑΓ'Δ')}\cdot\frac{ΒΕ}{Β'Ε'} \quad (1)$$

Ἐπειδή τά τρίγωνα ΑΓΔ καί ΑΓ′Δ′ ἔχουν κοινήν τήν γωνίαν $\hat{Α}$, ἔχομεν $\frac{(ΑΓΔ)}{(ΑΓ'Δ')} = \frac{ΑΓ\cdot ΑΔ}{ΑΓ'\cdot ΑΔ'}$, ἐνῶ ἀπό τά ὅμοια ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καί ΑΒ′Ε′ λαμβάνομεν $\frac{ΒΕ}{Β'Ε'} = \frac{ΑΒ}{ΑΒ'}$. Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται: $\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄)} = \dfrac{ΑΓ\cdot ΑΔ}{ΑΓ'\cdot ΑΔ'}\cdot\dfrac{ΑΒ}{ΑΒ'} \Rightarrow \dfrac{(ΑΒΓΔ)}{(Α΄Β΄Γ΄Δ΄)} = \dfrac{ΑΒ\cdot ΑΓ\cdot ΑΔ}{ΑΒ'\cdot ΑΓ'\cdot ΑΔ'}$.

22.5. Θεώρημα. ῾Ο ὄγκος κολούρου πυραμίδος, δίδεται ἀπό τόν **τύπον** : $V = \frac{1}{3}(Β + \sqrt{Ββ} + β)h$.


σχ.131

᾽Απόδειξις. ῎Εστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗΘ μία κόλουρος πυραμίς μέ βάσεις τά ὅμοια πολύγωνα (ΑΒΓΔ) = Β, (ΕΖΗΘ) = β καί ὕψος h (σχ.131).

Θεωροῦμεν τό σημεῖον Κ εἰς τό ὁποῖον τέμνονται αἱ παράπλευροι ἀκμαί της καί τό κάθετον τμῆμα ΚΛΜ ἐπί τάς βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος. ῾Ο ὄγκος V αὐτῆς, ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων Κ.ΑΒΓΔ καί Κ.ΕΖΗΘ, ἤτοι εἶναι $V = \frac{1}{3}Β\cdot ΚΜ - \frac{1}{3}β\cdot ΚΛ$ (1).

Γνωρίζομεν ὅτι (§ 18.2.ii) $\dfrac{Β}{β} = \dfrac{ΚΜ^2}{ΚΛ^2} \Rightarrow \dfrac{ΚΜ}{ΚΛ} = \dfrac{\sqrt{Β}}{\sqrt{β}}$ (2). ᾽Από τήν σχέσιν (2) λαμβάνομεν ἀφ᾽ἑνός μέν $\dfrac{ΚΜ}{ΚΜ - ΚΛ} = \dfrac{\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \Rightarrow \dfrac{ΚΜ}{h} = \dfrac{\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} \Rightarrow ΚΜ = \dfrac{h\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}$, ἀφ᾽ἑτέρου δέ $\dfrac{ΚΜ - ΚΛ}{ΚΛ} = \dfrac{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}{\sqrt{β}} \Rightarrow \dfrac{h}{ΚΛ} = \dfrac{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}{\sqrt{β}} \Rightarrow ΚΛ = \dfrac{h\sqrt{β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}$.

᾽Αντικαθιστῶμεν ἐξ αὐτῶν τάς τιμάς τῶν ΚΜ καί ΚΛ εἰς τήν σχέσιν (1) καί λαμβάνομεν :

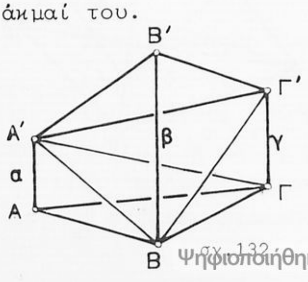
$V = \frac{1}{3}\left[Β\dfrac{h\sqrt{Β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}} - β\dfrac{h\sqrt{β}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}\right] = \frac{1}{3}\left[\dfrac{\sqrt{Β^3} - \sqrt{β^3}}{\sqrt{Β} - \sqrt{β}}\right]h = \frac{1}{3}(\sqrt{Β^2} + \sqrt{Ββ} + \sqrt{β^2})h = \frac{1}{3}(Β + \sqrt{Ββ} + β)h$, ἤτοι:

$$V = \frac{1}{3}(Β + \sqrt{Ββ} + β)h$$

22.6. Θεώρημα. ῾Ο ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{1}{3}Β(α + β + γ),$$

ὅπου Β εἶναι ἡ κάθετος τομή αὐτοῦ καί α, β, γ αἱ παράπλευροι ἀκμαί του.

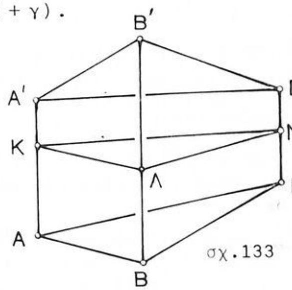

σχ.132

᾽Απόδειξις.

i) ῎Εστω ὅτι τό κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα ΑΒΓ.Α΄Β΄Γ΄ (σχ.132) εἶναι ὀρθόν. Τότε ἡ βάσις του (ΑΒΓ) = Β εἶναι καί κάθετος τομή αὐτοῦ καί ὁ ὄγκος του V ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, ὡς ἑξῆς :

V = ([illegible]) + ([illegible]) + ([illegible]ΒΓ΄) (1).

Ἐκτελοῦμεν τούς ἑξῆς προφανεῖς μετασχηματισμούς (§ 22.1.2): $(Α'.ΒΒ'Γ') = (Α.ΒΒ'Γ') = (Γ'.ΑΒΒ') = (Γ.ΑΒΒ') = (Β.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Ββ$ καί $(Α'.ΒΓΓ') = (Α.ΒΓΓ') = (Γ'.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Βγ$. Ἐπειδή ἐπί πλέον εἶναι $(Α'.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Βα$, ἡ σχέσις (1) γράφεται : $V = \frac{1}{3}Βα + \frac{1}{3}Ββ + \frac{1}{3}Βγ \Rightarrow V = \frac{1}{3}Β(α + β + γ)$.



σχ.133

ii) Ἔστω ὅτι τό τριγωνικόν κολοβόν πρῖσμα, δέν εἶναι ὀρθόν (σχ.133). Φέρομεν μίαν κάθετον τομήν (ΚΛΜ) = Β αὐτοῦ καί τότε τό στερεόν ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο ὀρθῶν κολοβῶν τριγωνικῶν πρισμάτων μέ κοινήν βάσιν τήν (ΚΛΜ) = Β, ἤτοι : $V = (ΚΛΜ.ΑΒΓ) + (ΚΛΜ.Α'Β'Γ')$ (2). Κατά τό προηγούμενον θά ἔχωμεν : $(ΚΛΜ.ΑΒΓ) = \frac{1}{3}Β(ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ)$ καί $(ΚΛΜ.Α'Β'Γ') = \frac{1}{3}Β(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ')$, ἑπομένως ἡ σχέσις (2) γράφεται :

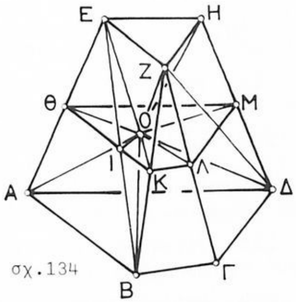
$V = \frac{1}{3}Β(ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ) + \frac{1}{3}Β(ΚΑ' + ΛΒ' + ΜΓ') = \frac{1}{3}Β(ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ') = \frac{1}{3}Β(α+β+γ)$, ἤτοι

$$V = \frac{1}{3}Β\,(α + β + γ)$$

22.7. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος πρισματοειδοῦς πολυέδρου, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου :

$$V = \frac{1}{6}(Β + β + 4Ε)h$$

ὅπου Β, β αἱ βάσεις του, Ε ἡ μεσαία τομή καί h τό ὕψος τοῦ στερεοῦ.



σχ.134

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ.ΕΖΗ ἕνα πρισματοειδές πολύεδρον καί ΘΙΚΛΜ ἡ μεσαία τομή αὐτοῦ (σχ.134). Λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Ο τῆς μεσαίας τομῆς καί διαιροῦμεν τό στερεόν εἰς πυραμίδας μέ κοινήν κορυφήν τό Ο καί βάσεις τάς ἕδρας τοῦ στερεοῦ. Ἐξ αὐτῶν, αἱ Ο.ΑΒΓΔ καί Ο.ΕΖΗ ἔχουν ἄθροισμα ὄγκων: $\frac{1}{3}Β\frac{h}{2} + \frac{1}{3}β\frac{h}{2} = \frac{1}{6}(Β + β)h$ (1).

Αἱ λοιπαί πυραμίδες, ἔχουν ὡς βάσεις τάς παραπλεύρους ἕδρας αἱ ὁποῖαι εἶναι τρίγωνα ἤ τραπέζια. Αἱ πυραμίδες ὅμως μέ βάσεις τραπέζια, δύνανται νά διαιρεθοῦν εἰς δύο τριγωνικάς, ὡς ἡ Ο.ΓΔΗΖ ἡ ὁποία διαιρεῖται εἰς τάς δύο τριγωνικάς Ο.ΓΔΖ καί ΟΔΗΖ. Ἄρα τά ὑπόλοιπα τμήματα τοῦ στερεοῦ εἶναι τριγωνικαί πυραμίδες. Ὑπολογίζομεν τόν ὄγκον μιᾶς ἐξ αὐτῶν, ἔστω τῆς Ο.ΑΒΕ. 'Επειδή τά Θ καί Ι εἶναι μέσα τῶν ΑΕ καί ΒΕ ἀντιστοίχως, ἕπεται ὅτι $(I\Theta E)=\frac{1}{4}(ABE) \Rightarrow (ABE)=4(I\Theta E) \Rightarrow (O.ABE)=4(O.\Theta IE)$ (§ 22. 1.4) $\Rightarrow (O.ABE)=4\,\frac{1}{3}(O\Theta I)\frac{h}{2} \Rightarrow (O.ABE)=\frac{4}{6}(O\Theta I)h$. 'Ομοίως ὑπολογίζομεν τόν ὄγκον τῶν λοιπῶν τριγωνικῶν πυραμίδων καί ἡ ἄθροισις αὐτῶν θά δώση προφανῶς $\frac{4}{6}(\Theta IK\Lambda M)\,h=\frac{4}{6}Eh$ (2), διότι εἰς τούς προσθετέους ὑπάρχει ὡς κοινός παράγων τό $\frac{4}{6}h$, ἐνῶ οἱ λοιποί παράγοντες προστιθέμενοι δίδουν τήν μεσαίαν τομήν.

'Εκ τῶν σχέσεων (1) καί (2), διά προσθέσεως, λαμβάνομεν τόν ὄγκον τοῦ στερεοῦ : $V=\frac{1}{6}(B+\beta)h+\frac{4}{6}Eh$. "Αρα :

$$V=\frac{1}{6}(B+\beta+4E)h$$

'Ασκήσεις

221. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α.

222. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1), (ε_2), (ε_3), ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. 'Επί τῆς (ε_1) ὀλισθαίνει τμῆμα ΑΒ σταθεροῦ μήκους καί ἐπί τῶν (ε_2) καί (ε_3) δύο σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ μεταβλητοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερός.

223. 'Ο ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου νά ἐκφρασθῇ α) ἐκ τοῦ ὕψους του h, β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του Ε.

224. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τετραέδρου ἰσοῦται πρός τό 1/3 τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς του ἐπί τήν προβολήν τοῦ στερεοῦ εἰς ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τήν ἀκμήν ταύτην.

225. 'Εάν τετραέδρου αἱ δύο ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ὀρθογώνιοι, δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος του ἰσοῦται πρός τό 1/6 τοῦ γινομένου τῶν ἀκμῶν τούτων, ἐπί τήν ἐλαχίστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

226. Δείξατε ὅτι τά μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαί ὀκταέδρου τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

227. 'Εάν τετραέδρου ἡ μία κορυφή προβάλλεται ἐπί τήν ἀπέναντι ἕδραν εἰς τό ὀρθόκεντρον αὐτῆς, δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο οἱωνδήποτε ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου ἐπί τήν κοινήν κάθετον αὐτῶν, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς ἐκλογῆς τῶν ἀκμῶν τούτων.

228. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἕδραι ΑΒΓ καί ΔΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἡ ἀκμή ΑΔ = α καί ἡ δίεδρος $\widehat{B\Gamma}$ εἶναι 60^0. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

229. 'Εντός τετραέδρου νά εὑρεθῇ σημεῖον Κ τοιοῦτον ὥστε τά τετράεδρα μέ κορυφήν τό Κ καί βάσεις τάς ἕδρας τοῦ τετραέδρου, νά εἶναι ἰσοδύναμα.

230. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί ἡ παράπλευρος ἀκμή εἶναι β.

231. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια εἶναι διπλασία τῆς βάσεως. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

232. Πυραμίδος Κ.ΑΒΓΔ ή βάσις ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος της ἰσοῦται πρός τά 2/3 τῆς ἕδρας ΚΑΒ ἐπί τήν ἐλαχίστην ἀπόστασιν τῶν ἀκμῶν ΚΑ καί ΓΔ.

233. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί αἱ παράπλευροι ἕδραι της σχηματίζουν γωνίας 45^0 μέ τήν βάσιν. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος της.

234. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ ἀκμή τῆς βάσεως εἶναι α καί αἱ παράπλευροι ἕδραι σχηματίζουν μέ τήν βάσιν γωνίας 15^0. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος της.

235. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. 'Από τάς κορυφάς Α καί Γ φέρομεν καθέτους ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου πρός τό αὐτό μέρος του καί ἐπ' αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΕ=ΑΓ καί ΓΖ=ΑΒ. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΕΖ.

236. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος τῆς ὁποίας ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εἶναι $10α^2$ καί αἱ παράπλευροι ἕδραι σχηματίζουν διέδρους γωνίας 30^0 μέ τήν βάσιν.

237. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. 'Από τάς κορυφάς του Β καί Δ φέρομεν κάθετα τμήματα ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου ΒΕ=3α, ΔΖ=2α καί πρός τό αὐτό μέρος. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΓΕΖ.

238. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος πρίσματος μέ ὕψος h, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι κανονικόν α) τρίγωνον, β) τετράγωνον, γ) ἑξάγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτῖνος R.

239. 'Ορθοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἡ βάσις εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον μέ καθέτους πλευράς 8α καί 15α, τό δέ ὕψος του ἰσοῦται μέ τήν ὑποτείνουσαν τῆς τριγωνικῆς βάσεως. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος αὐτοῦ.

240. Τριγωνικόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καί αἱ παράπλευροι ἀκμαί του εἶναι κεκλιμέναι κατά 60^0 πρός τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τῆς καθέτου τομῆς του.

241. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τριγωνικοῦ πρίσματος, ἰσοῦται πρός τό ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας του, ἐπί τήν ἀπόστασιν τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς ἀπ'αὐτήν.

242. Νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο πρισμάτων τῶν ὁποίων αἱ βάσεις εἶναι κανονικόν ἑξάγωνον τοῦ ἑνός, ὀκτάγωνον τοῦ ἄλλου, ἐγγεγραμμένα εἰς ἴσους κύκλους ἀκτῖνος R τά δέ ὕψη των ἴσα πρός τά ἀποστήματα τῶν βάσεων ἀντιστοίχως.

243. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν δύο πυραμίδων μέ κοινήν κορυφήν τυχόν σημεῖον ἐσωτερικόν δοθέντος πρίσματος καί βάσεις τάς βάσεις τοῦ πρίσματος, εἶναι σταθερόν.

244. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις ἀποτελοῦν ἀριθμητικόν πρόοδον μέ ἄθροισμα 27cm καί τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $454cm^2$.

245. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος κύβου τοῦ ὁποίου ἡ ἐπιφάνεια εἶναι $486cm^2$.

246. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος κύβου α) ἐκ τῆς διαγωνίου του δ καί β) ἐκ τῆς ἐπιφανείας του Ε.

247. Αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀ-

ρυθμῶν 2, 3, 4 καί ὁ ὄγκος του εἶναι $648cm^3$. Νά εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις του.

248. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι 3α, 4α, 5α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἐάν ὡς μονάς μετρήσεως τῶν ὄγκων ληφθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου μέ ἀκμήν α.

249. Ἐπί τῶν ἀκμῶν τῶν συντρεχουσῶν εἰς τήν αὐτήν κορυφήν Α κύβου ἀκμῆς α, λαμβάνομεν τμήματα $AB' = A\Gamma' = A\Delta' = \alpha/3$ Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ κύβου καί τοῦ τετραέδρου $AB'\Gamma'\Delta'$.

250. Δοθέν παραλληλεπίπεδον νά διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς ἀκμῆς του.

251. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἐάν ἡ διαγώνιος αὐτοῦ εἶναι 26cm, ἡ διαγώνιος μιᾶς ἕδρας του 10cm καί ἡ ἐπιφάνειά του $768cm^2$.

252. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων παραλληλεπιπέδου καί τοῦ ὀκταέδρου μέ κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

253. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων παραλληλεπιπέδου καί τοῦ τετραέδρου τοῦ ὁποίου τρεῖς ἀκμαί συντρέχουν εἰς μίαν κορυφήν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

254. Δείξατε ὅτι οἱ ὄγκοι δύο παραλληλεπιπέδων μέ μίαν στερεάν γωνίαν κοινήν, εἶναι ὅπως τά γινόμενα τῶν ἀκμῶν τῶν περιεχουσῶν τήν κοινήν στερεάν γωνίαν.

255. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολούρου πυραμίδος, δίδεται ἐκ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{3}B(1 + \lambda + \lambda^2)h$, ἔνθα λ εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο βάσεων.

256. Κανονική τετραγωνική πυραμίς μέ ἀκμήν βάσεως α καί ὕψος h, τέμνεται δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν καί διερχομένου ἀπό τό μέσον τοῦ ὕψους. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ὁλική ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τῆς σχηματιζομένης κολούρου πυραμίδος.

257. Κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος ἡ βάσις ἔχει πλευράν α καί αἱ παράπλευροι ἀκμαί σχηματίζουν γωνίας 60^0 μετά τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Νά εὑρεθῇ εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τήν βάσιν πρέπει νά ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν, οὕτως ὥστε ἡ ἀποκοπτομένη κόλουρος πυραμίς νά ἔχῃ ὄγκον $\alpha^3/6$.

258. Νά τμηθῇ πυραμίς ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν, οὕτως ὥστε νά χωρισθῇ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

259. Νά τμηθῇ πυραμίς ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν, οὕτως ὥστε νά χωρισθῇ εἰς δύο στερεά μέ δεδομένον λόγον μ/ν.

260. Ὀρθόν κολοβόν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α καί παραπλεύρους ἀκμάς α, 2α, 3α. Νά ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.

261. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς μιᾶς βάσεως ἐπί τήν ἀπόστασιν τοῦ κ.βάρους τῆς ἄλλης ἀπ' αὐτήν.

262. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρός τό ἐμβαδόν τῆς καθέτου τομῆς του ἐπί τήν ἀπόστασιν τῶν κ.βάρους τῶν βάσεων.

263. Τριγωνικού πρίσματος αί παράπλευροι άκμαί έχουν μήκος 20cm. Έπί δύο παραπλεύρων άκμών λαμβάνομεν σημεία Η καί Θ άπέχοντα άπό τάς άντιστοίχους κορυφάς τής αύτής βάσεως άποστάσεις 12cm καί 15cm. Έπί τής τρίτης παραπλεύρου άκμής νά όρισθή σημείον Ι, ούτως ώστε τό έπίπεδον (ΗΘΙ) νά διαιρή τό πρίσμα είς δύο ίσοδύναμα μέρη.

264. Δείξατε ότι ό όγκος κολοβού παραλληλεπιπέδου ίσούται πρός τό 1/4 τού γινομένου τής καθέτου τομής του έπί τό άθροισμα τών παραπλεύρων άκμών του.

265. Δείξατε ότι ό όγκος κολοβού παραλληλεπιπέδου ίσούται πρός τό έμβαδόν τής καθέτου τομής του έπί τήν άπόστασιν τών κέντρων τών βάσεων αύτού.

266. Δείξατε ότι ό όγκος κολοβού παραλληλεπιπέδου ίσούται πρός τό έμβαδόν μιάς βάσεως έπί τήν άπόστασιν τού κέντρου τής άλλης άπ'αύτήν.

267. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους $ΑΓ=2α$ καί $ΒΔ=α$. Έπί τό έπίπεδον τού ρόμβου καί πρός τό αύτό μέρος ύψούμεν έκ τών Α, Β, Γ κάθετα τμήματα $ΑΑ'=3α$ $ΒΒ'=4α$, $ΓΓ'=α$. Δείξατε ότι: i) τό τρίγωνον Α'Β'Γ' είναι όρθογώνιον, ii) τό έπίπεδον (Α'Β'Γ') διέρχεται άπό τό Δ, iii) νά εύρεθή ό όγκος τού στερεού ΑΒΓΔ.Α'Β'Γ'Δ.

268. Δίδεται όρθογώνιον ΑΒΓΔ διαστάσεων $ΑΒ=α$ καί $ΑΔ=β$. Διά τών τεσσάρων πλευρών του άγονται ήμιεπίπεδα πρός τό αύτό μέρος τού όρθογωνίου, σχηματίζοντα μετ'αύτού διέδρους γωνίας 30^0. Νά ύπολογισθή ή έπιφάνεια καί ό όγκος τού σχηματιζομένου στερεού.

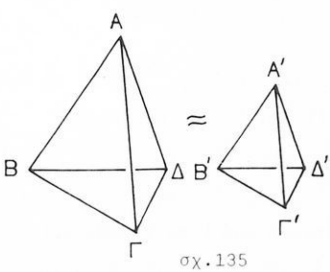
269. Δίδεται κανονική τετραγωνική πυραμίς μέ άκμήν βάσεως α καί ύψος α. i) Νά ύπολογισθή ή έπιφάνεια καί ό όγκος της. ii) Τέμνομεν αύτήν δι'έπιπέδου διερχομένου διά μιάς άκμής τής βάσεως καί σχηματίζοντος μέ τήν βάσιν γωνίαν 45^0. Νά ύπολογισθή ό λόγος τών όγκων τών δύο τμημάτων είς τά όποία διαιρείται ή πυραμίς.

270. Τρισορθογώνιος στερεά γωνία Κ τέμνεται δι'έπιπέδου είς τά Α, Β καί Γ. Έάν $ΚΑ = α$, $ΚΒ = β$ καί $ΚΓ = γ$, νά ύπολογισθή i) τό έμβαδόν τής τομής καί ii) τό ύψος ΚΗ τού τετραέδρου ΚΑΒΓ.

23. Όμοια πολύεδρα.

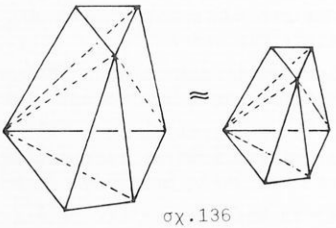
23.1. Όμοια τετράεδρα. Όρισμός. Δύο τετράεδρα καλούνται όμοια, όταν έχουν τάς έδρας των όμοίας μίαν πρός μίαν καί όμοίως τοποθετημένας (σχ.135).

Ό λόγος όμοιότητος τών τριγωνικών έδρών είναι ό αύτός δι'όλα τά ζεύγη τών όμοίων έδρών καί καλείται λόγος όμοιότητος τών τετραέδρων. Αί άντίστοιχοι στερεαί ώς καί αί δίεδροι γωνίαι τών δύο τετραέδρων είναι ίσαι.



σχ.135

23.2. "Ομοια πολύεδρα. 'Ορισμός. Δύο πολύεδρα καλοῦνται ὅμοια, ἐάν δύνανται νά διαιρεθοῦν δι'ἐπιπέδων ἀγομένων ἐκ μιᾶς κορυφῆς των ἀντιστοίχως, είς ὅμοια τετράεδρα καί ὁμοίως τοποθετημένα (σχ.136).



σχ.136

'Από τά προηγούμενα ἕπονται τά ἑξῆς:

i) 'Υπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ ἑνός πολυέδρου (ἕδραι, κορυφαί, ἀκμαί, γωνίαι κλπ.) πρός τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου. Δύο ἀντίστοιχα στοιχεῖα, καλοῦνται **ὁμόλογα.**

ii) Αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μέ τόν αὐτόν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

iii) Αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων (ἐπίπεδοι, δίεδροι, στερεαί) εἶναι ἴσαι (§ 15.8).

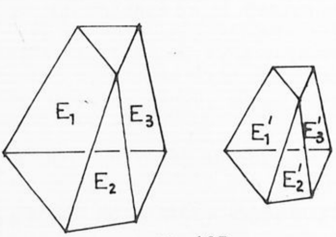
iv) 'Η σχέσις τῆς ὁμοιότητος δύο πολυέδρων, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ τό ≈ , εἶναι σχέσις ἀνακλαστική, συμμετρική καί μεταβατική, ἤτοι:

α) $(\Sigma)\approx(\Sigma)$,

β) $(\Sigma_1)\approx(\Sigma_2) \Leftrightarrow (\Sigma_2)\approx(\Sigma_1)$,

γ) $(\Sigma_1)\approx(\Sigma_2) \wedge (\Sigma_2)\approx(\Sigma_3) \Rightarrow (\Sigma_1)\approx(\Sigma_3)$

"Αρα ἡ σχέσις τῆς ὁμοιότητος εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.



σχ.137

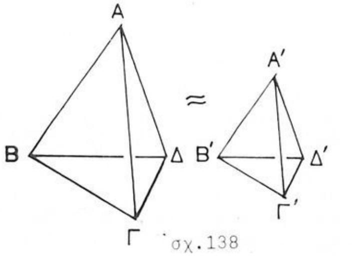
23.3. Θεώρημα. 'Ο λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

'Απόδειξις. "Ας θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα μέ λόγον ὁμοιότητος λ (σχ.137) καί τῶν ὁποίων αἱ ἕδραι ἔχουν ἐμβαδά E_1, E_2, ..., E_ν καί E'_1, E'_2, ..., E'_ν ἀντιστοίχως. 'Επειδή αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι ὅμοια πολύγωνα μέ λόγον ὁμοιότητος λ, ἔχομεν:

$$\frac{E_1}{E'_1}=\lambda^2,\ \frac{E_2}{E'_2}=\lambda^2,\ \dots,\ \frac{E_\nu}{E'_\nu}=\lambda^2 \Rightarrow \lambda^2=\frac{E_1}{E'_1}=\frac{E_2}{E'_2}=\dots=\frac{E_\nu}{E'_\nu}=\frac{E_1+E_2+\dots+E_\nu}{E'_1+E'_2+\dots+E'_\nu}=\frac{E}{E'}$$

ὅπου E καί E' αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο πολυέδρων. "Αρα εἶναι $\frac{E}{E'}=\lambda^2$.

23.4. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων τετραέδρων, ἰσοῦται πρός τόν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

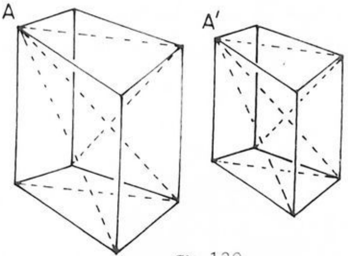


σχ.138

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια τετράεδρα ΑΒΓΔ καί Α′Β′Γ′Δ′ (σχ. 138) καί ἔστω λ ὁ λόγος ὁμοιότητος αὐτῶν. Τότε θά εἶναι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \lambda$ $\Rightarrow$ $AB = \lambda A'B'$, $A\Gamma = \lambda A'\Gamma'$, $A\Delta = \lambda A'\Delta'$. Ἐπειδή αἱ τρίεδροι γωνίαι $\hat{A}$ καί $\hat{A}'$ εἶναι ἴσαι, ἔπεται ὅτι (§ 22.4.3): $\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \frac{AB\cdot A\Gamma\cdot A\Delta}{A'B'\cdot A'\Gamma'\cdot A'\Delta'} = \frac{\lambda A'B'\cdot\lambda A'\Gamma'\cdot\lambda A'\Delta'}{A'B'\cdot A'\Gamma'\cdot A'\Delta'} = \lambda^3$. Ἄρα

$$\frac{(AB\Gamma\Delta)}{(A'B'\Gamma'\Delta')} = \lambda^3$$

23.5. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων, ἰσοῦται πρός τόν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.



σχ.139

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν δύο ὅμοια πολύεδρα (σχ.139), τῶν ὁποίων οἱ ὄγκοι εἶναι V καί V′. Ἐκ δύο ὁμολόγων κορυφῶν Α καί Α′, φέρομεν ἐπίπεδα καί διαιροῦμεν τά δύο στερεά εἰς ζεύγη ὁμοίων τετραέδρων μέ τόν αὐτόν λόγον ὁμοιότητος λ, ἔστωσαν δέ $V_1, V_2, \ldots, V_\nu$ καί $V'_1, V'_2, \ldots, V'_\nu$ οἱ ὄγκοι αὐτῶν. Τότε θά εἶναι (§ 23.4):

$$\frac{V_1}{V'_1} = \lambda^3,\ \frac{V_2}{V'_2} = \lambda^3, \ldots,\ \frac{V_\nu}{V'_\nu} = \lambda^3 \Rightarrow \lambda^3 = \frac{V_1}{V'_1} = \frac{V_2}{V'_2} = \ldots = \frac{V_\nu}{V'_\nu} = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_\nu}{V'_1 + V'_2 + \ldots + V'_\nu} = \frac{V}{V'}.$$

Ἄρα εἶναι :

$$\frac{V}{V'} = \lambda^3$$

Ἀσκήσεις

271. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καί ἔστωσαν Κ,Λ,Μ,Ν τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν του.

α) Δείξατε ὅτι ΑΒΓΔ ≈ ΚΛΜΝ.

β) Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

272. Δίδεται πυραμίς Κ.ΑΒΓΔ. Τέμνομεν αὐτήν δι᾽ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν της καί διερχομένου ἀπό τό μέσον Α′ τῆς ἀκμῆς ΚΑ.

α) Δείξατε ότι σχηματίζεται νέα πυραμίς ομοία τῆς δοθείσης.

β) Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων.

273. Ἡ βάσις πυραμίδος ἔχει ἐμβαδόν 144 cm^2. Τέμνομεν μέ ἐπίπεδον παράλληλον τῆς βάσεως εἰς ἀπόστασιν 4 cm ἀπό τῆς κορυφῆς καί ἡ τομή ἔχει ἐμβαδόν 64 cm^2. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος τῆς πυραμίδος.

274. Δύο ἰσουψεῖς πυραμίδες ἔχουν βάσεις 120 cm^2 καί 180 cm^2 ἀντιστοίχως. Τέμνομεν αὐτάς δι'ἐπιπέδων παραλλήλων πρός τάς βάσεις των εἰς τήν αὐτήν ἀπόστασιν ἀπ'αὐτῶν καί ἡ τομή τῆς πρώτης πυραμίδος εἶναι 70 cm^2. Νά εὑρεθῇ ἡ τομή τῆς δευτέρας πυραμίδος.

275. Δείξατε ὅτι οἱ κύβοι τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ὅπως τά τετράγωνα τῶν ὄγκων των.

276. Δοθεῖσα κόλουρος πυραμίς νά διαιρεθῇ δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις της εἰς δύο ὁμοίας κολούρους πυραμίδας.

277. Δίδεται πολύεδρον ΑΒΓ...Ν. Ἐπί τῶν ἡμιευθειῶν ΑΒ, ΑΓ, ..., ΑΝ λαμβάνομεν σημεῖα Β', Γ', ..., Ν' ἀντιστοίχως, οὕτως ὥστε νά εἶναι $\frac{AB'}{AB}=\frac{A\Gamma'}{A\Gamma}=\dots=\frac{AN'}{AN}=\lambda$. Δείξατε ὅτι τό πολύεδρον ΑΒ'Γ'...Ν' εἶναι ὅμοιον πρός τό ΑΒΓ...Ν. Νά γίνῃ γενίκευσις λαμβάνοντας ἀντί τοῦ Α τυχόν σημεῖον Ο.

ΒΙΛΒΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

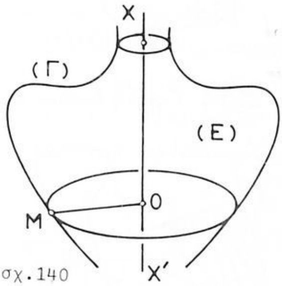
Ἐπιφάνειαι καὶ στερεὰ ἐκ περιστροφῆς.

24. Ὁρισμοί.

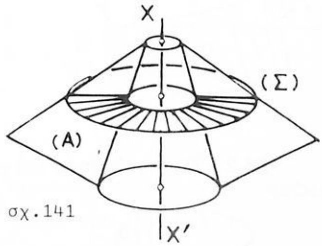
i) Κάθε γραμμή (Γ) περιστρεφομένη περί ἄξονα xx΄ κατά μίαν πλήρη γωνίαν (360^0), διαγράφει ἐπιφάνειαν Ε ἡ ὁποία καλεῖται ἐπιφάνεια ἐκ περιστροφῆς.

ii) Κάθε σχῆμα (Α) στρεφόμενον περί ἄξονα xx΄ κατά μίαν πλήρη γωνίαν, δημιουργεῖ στερεόν (Σ) τό ὁποῖον καλεῖται στερεόν ἐκ περιστροφῆς (σχ.141).

Σημείωσις. Εἰς τά ἑπόμενα θά λέγωμεν χάριν συντομίας "σχῆμα στρέφεται περί ἄξονα" καί θά ἐννοοῦμεν "σχῆμα στρέφεται πλήρη στροφήν περί ἄξονα".



σχ.140



σχ.141

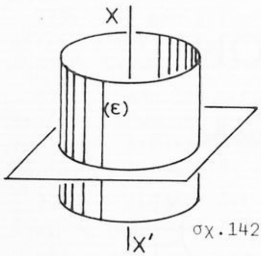
24.1. Πόρισμα. Ἐκ τυχόντος σημείου Μ τῆς γραμμῆς (Γ) (σχ.140), φέρομεν ΜΟ⊥xx΄. Εἰς τήν περιστροφήν τό τμῆμα ΜΟ παραμένει σταθερόν κατά μέγεθος, τό σημεῖον Ο σταθερόν κατά θέσιν καί ἐπομένως τό σημεῖον Μ διαγράφει κύκλον (Ο,ΟΜ) τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπί τόν ἄξονα περιστροφῆς. Ἄρα ἡ τομή ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τόν ἄξονα, εἶναι κύκλος.

24.2. Πόρισμα. Ἡ τομή στερεοῦ ἐκ περιστροφῆς, ὑπό ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τόν ἄξονα περιστροφῆς (σχ.141), εἶναι ἐν γένει κυκλικός δακτύλιος.

24.3. Πόρισμα. Κάθε ἐπιφάνεια ἤ κάθε στερεόν ἐκ περιστροφῆς, ἔχει ἄξονα συμμετρίας τόν ἄξονα περιστροφῆς, ὁ ὁποῖος καλεῖται καί ἄξων τοῦ σχήματος.

25. Κύλινδρος.

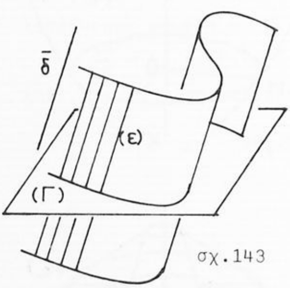
25.1. Ὀρθή κυλινδρική ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ ὁποία διαγράφεται ἀπό εὐθεῖαν (ε) παράλληλον πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς xx′ (σχ.142).



σχ.142

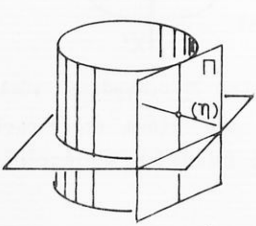
Αἱ διαδοχικαί θέσεις τῆς εὐθείας (ε) εἰς τήν περιστροφήν, καλοῦνται **γενέτειραι ἀκμαί** τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί εἶναι μεταξύ των παράλληλοι, ἐφ᾽ὅσον ἑκάστη εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς.

25.1.1. Γενική ἔννοια κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐν γένει, καλεῖται κάθε εὐθειογεννής ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ εὐθεῖα (ε) πού τήν διαγράφει παραμένει πάντοτε παράλληλος πρός δεδομένην διεύθυνσιν $\vec{\delta}$ καί τέμνει σταθεράν γραμμήν (Γ) (σχ.143). Ἡ γραμμή (Γ) καλεῖται **ὁδηγός** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια ἐν γένει δέν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια. Εἰς τά ἑπόμενα θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ ὀρθάς κυλινδρικάς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς).



σχ.143

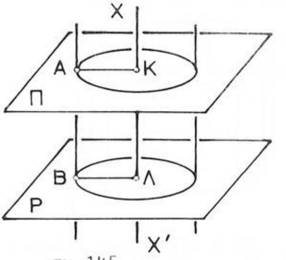
25.2. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π) τό ὁποῖον ἔχει μετά τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κοινήν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμήν (σχ.144). Κάθε εὐθεῖα (η) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς), καλεῖται **ἐφαπτομένη** εὐθεῖα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί ἔχει ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον μέ τήν ἐπιφάνειαν.



σχ.144

25.3. Θεώρημα. Αἱ τομαί κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπό ἐπιπέδων καθέτων πρός τόν ἄξονα τῆς ἐπιφανείας, εἶναι ἴσοι κύκλοι.

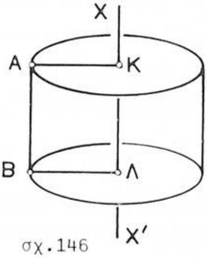
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομάς μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὑπό ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) καθέτων πρός τόν ἄξονα xx′ τῆς ἐπιφανείας (σχ.145). Αἱ τομαί είναι οπωσδήποτε κύκλοι, εφ' όσον η επιφάνεια είναι εκ περιστροφής (§ 24.1) καί έστωσαν Κ καί Λ τά κέντρα των επί τού άξονος xx'. Μία γενέτειρα ακμή, τέμνει τά επίπεδα τομής εις τά Α καί Β. Τό τετράπλευρον ΑΚΛΒ είναι ορθογώνιον, διότι ΑΒ//= ΚΛ καί ΚΛ ⊥ (Ρ). Άρα είναι ΚΑ = ΛΒ καί επομένως οι δύο κύκλοι είναι ίσοι.



σχ.145

25.4. Κύλινδρος. Εάν κυλινδρική επιφάνεια τμηθή υπό επιπέδων (Π) καί (Ρ) καθέτων επί τού άξονος xx' (σχ.145), τό αποκοπτόμενον στερεόν μεταξύ τών επιπέδων καλείται κύλινδρος.

Οι ίσοι κύκλοι κατά τούς οποίους τά δύο επίπεδα τέμνουν τήν κυλινδρικήν επιφάνειαν, καλούνται **βάσεις** τού κυλίνδρου καί η απόστασις τών δύο βάσεων καλείται **ύψος** τού στερεού. Τό τμήμα ΑΒ τής γενετείρας ακμής τής κυλινδρικής επιφανείας, καλείται **γενέτειρα ακμή** τού κυλίνδρου. Η γενέτειρα ακμή τού κυλίνδρου, εις τήν περιστροφήν της περί τόν άξονα xx', διαγράφει τήν παράπλευρον επιφάνειαν τού κυλίνδρου, η οποία καλείται καί **κυρτή επιφάνεια** τού στερεού.



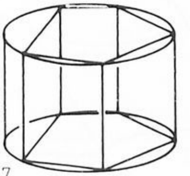
σχ.146

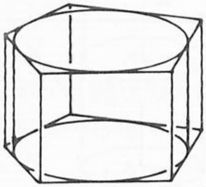
Παρατήρησις. Ως ορισμόν τού ορθού κυκλικού κυλίνδρου, δυνάμεθα νά χρησιμοποιούμεν καί τήν ακόλουθον ισοδύναμον πρότασιν:

Κύλινδρος καλείται τό στερεόν τό παραγόμενον από τήν περιστροφήν ορθογωνίου ΑΚΛΒ περί μίαν πλευράν του (σχ.146).

25.5. Εγγεγραμμένον καί περιγγεγραμμένον πρίσμα εις κύλινδρον.

i) Ένα πρίσμα καλείται **εγγεγραμμένον** εις κύλινδρον (σχ.147), όταν αι βάσεις του είναι πολύγωνα εγγεγραμμένα εις τούς κύκλους - βάσεις τού κυλίνδρου. Αι παράπλευροι ακμαί τού πρίσματος είναι γενέτειραι ακμαί διά τόν κύλινδρον.

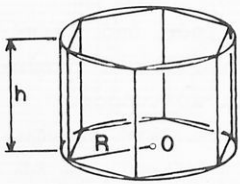

σχ.147



σχ.148

ii) Ἕνα πρῖσμα καλεῖται **περιγεγραμμένον** περί κύλινδρον (σχ.148), ὅταν αἱ βάσεις του εἶναι πολύγωνα περιγεγραμμένα περί τούς κύκλους - βάσεις τοῦ κυλίνδρου. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τοῦ πρίσματος, εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

25.6. Μέτρησις κυλίνδρου. Ἄς θεωρήσωμεν ὀρθόν κύλινδρον μέ βάσιν κύκλον (O,R), ὕψος h καί ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτόν κανονικόν πρῖσμα (σχ.149). Φανταζόμεθα τό πρῖσμα μεταβλητόν, οὕτως ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως αὐτοῦ, αὐξανόμενον συνεχῶς νά τείνη πρός τό ἄπειρον. Τότε τό πρῖσμα θά ταυτισθῆ μετά τοῦ κυλίνδρου καί οἱ τύποι πού ἀφοροῦν εἰς τά πρίσματα ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καί διά τούς κυλίνδρους, μετασχηματιζόμενοι ὡς ἑξῆς:



σχ.149

i) Ἐπιφάνεια ὀρθοῦ κυλίνδρου. Διά τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ πρίσματος γνωρίζομεν τόν τύπον $E_\pi = P_\nu \cdot h$ (§ 21.4.1). Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρός $E_\kappa = \lim\limits_{\nu\to\infty} P_\nu \cdot h = 2\pi R h$, (περίμετρος βάσεως × ὕψος) ἤτοι εἶναι:

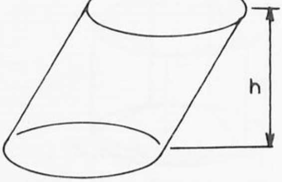
$$E_\kappa = 2\pi R h$$

Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἐάν εἰς τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τάς δύο βάσεις τοῦ κυλίνδρου, ἤτοι εἶναι:

$$E_{o\lambda} = 2\pi R h + 2\pi R^2 = 2\pi R\,(h + R)$$

ii) **Ὄγκος κυλίνδρου.** Ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τόν ὄγκον V κυλίνδρου, προέρχεται ἀπό τόν τύπον Bh τοῦ ὄγκου πρίσματος καί εἶναι: $V = \lim\limits_{\nu\to\infty} E_\nu h = \pi R^2 h$, ὅπου E_ν τό ἐμβαδόν τῆς κανονικῆς βάσεως τοῦ ἐγγεγραμμένου πρίσματος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \pi R^2 h$$



σχ.150

Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί διά τούς πλαγίους κυκλικούς κυλίνδρους (σχ.150), ἤτοι κυλίνδρους μέ τάς γενετείρας ἀκμάς τους πλαγίας ὡς πρός τάς κυκλικάς βάσεις τους. Γενικῶς ἰσχύει ὁ τύπος "**Ὄγκος = Βάσις × Ὕψος**" διά κάθε κύλινδρον (ὀρθόν ἤ πλάγιον) τοῦ ὁποίου ἡ βάσις δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην κύκλος καί τοῦτο διότι δυνάμεθα, ὡς καί προηγουμένως, νά θεωρήσωμεν ὅτι ὁ κάθε κύλινδρος προέρχεται ἀπό κάποιο μεταβλητό ἐγγεγραμμένον πρῖσμα, ὅπου τό πλῆθος τῶν πλευρῶν του τείνει πρός τό ἄπειρον, ταυτοχρόνως δέ ἡ κάθε πλευρά του τείνει εἰς τό μηδέν.

'Ασκήσεις

278. 'Εάν δύο ὀρθοί κύλινδροι ἔχουν ἴσας βάσεις, δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῶν ὑψῶν των.

279. 'Εάν δύο ὀρθοί κύλινδροι ἔχουν ἴσα ὕψη, δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων.

280. 'Ορθογώνιον ΑΒΓΔ διαστάσεων $ΑΒ=4α$ και $ΑΔ=3α$ στρέφεται περί τήν ΑΒ. 'Επί τῶν πλευρῶν του ΔΑ καί ΓΒ λαμβάνομεν τμήματα $ΔΕ=ΓΖ=α$. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ διαγραφομένου ἀπό τό ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ.

281. 'Η περίμετρος τῆς βάσεως ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 31,4 cm καί τό ὕψος του 6 cm. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.

282. 'Ορθοῦ κυλίνδρου ἡ κυρτή ἐπιφάνει εἶναι τριπλασία τῆς βάσεως. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του ἐάν ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως εἶναι 4 cm.

283. 'Η διάμετρος τῆς βάσεως ὀρθοῦ κυλίνδρου εἶναι 10 cm καί ἡ κυρτή ἐπιφάνεια αὐτοῦ εἶναι 125,6 cm^2. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

284. 'Ο ὄγκος κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι $6\sqrt{3}$ cm^3. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου περί αὐτό κυλίνδρου.

285. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος ὀρθοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρός τό 1/2 τοῦ γινομένου τῆς ἀκτῖνος του ἐπί τήν κυρτήν ἐπιφάνειάν του.

286. Δίδεται κανονικόν τετραγωνικόν πρῖσμα μέ ἀκμήν βάσεως α καί ὕψος 2α. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ εἰς αὐτό α) ἐγγεγραμμένου κυλίνδρου, β) περιγεγραμμένου κυλίνδρου.

287. 'Ορθογωνίου αἱ διαστάσεις εἶναι α καί β μέ $α<β$. Περί ποίαν τῶν πλευρῶν του πρέπει νά στραφῇ τό ὀρθογώνιον ὥστε ὁ προκύπτων κύλινδρος νά ἔχῃ α) τήν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν, β) τόν μεγαλύτερον ὄγκον.

288. 'Εάν κύλινδρος τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τόν ἄξονα αὐτοῦ, δείξατε ὅτι ἡ τομή εἶναι ὀρθογώνιον.

289. Νά εὑρεθοῦν τά ἐπίπεδα συμμετρίας ἑνός κυλίνδρου καί τό κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

290. Διά τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ κυλίνδρου, φέρομεν δύο ἡμιεπίπεδα σχηματίζοντα γωνίαν 60^0. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο στερεῶν εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

291. Δίδεται ὀρθός κύλινδρος μέ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος R καί ὕψος h. Φέρομεν χορδήν ΑΒ τῆς βάσεως ἴσην πρός τήν πλευράν ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν ἰσοπλεύρου τριγώνου καί διά τῆς ΑΒ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τόν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγ-

κων τῶν δύο στερεῶν εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κύλινδρος.

292. **Χορδή** κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καλεῖται ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα μέ τά ἄκρατου ἐπί τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας. Δείξατε ὅτι ἡ κοινή κάθετος τοῦ ἄξονος μιᾶς ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας καί μιᾶς χορδῆς της, διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς χορδῆς.

293. Ὀρθογώνιον στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του παράλληλον μιᾶς πλευρᾶς του καί μή τέμνοντα τό ὀρθογώνιον. Δείξατε ὅτι α) Ἡ ἐπιφάνεια τοῦ παραγομένου στερεοῦ ἰσοῦται πρός τήν περίμετρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου τόν ὁποῖον διαγράφει τό κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου. β) Ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἰσοῦται πρός τό ἐμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου τόν ὁποῖον διαγράφει τό κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου.

294. Δίδονται τρία ἐπίπεδα (Π), (Ρ), (Σ) τεμνόμενα ἀνά δύο καί παράλληλα πρός τήν αὐτήν εὐθεῖαν (δ). Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν τέσσαρες ὀρθαί κυλινδρικαί ἐπιφάνειαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται καί εἰς τά τρία ἐπίπεδα

295. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπό δοθεῖσαν εὐθεῖαν (ε) εἶναι α.

296. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν εὐθειῶν σταθερᾶς διευθύνσεως καί ἐφαπτομένων δοθείσης ὀρθῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

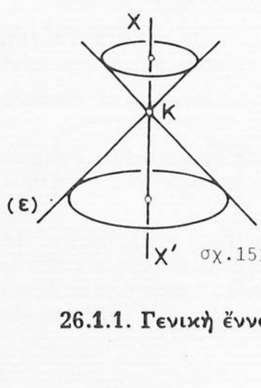
297. Δίδεται σταθερά εὐθεῖα (ε) καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτῆς. Μεταβλητή εὐθεῖα (ζ) διέρχεται πάντα διά τοῦ Α καί ἔστω ΚΛ ἡ κοινή κάθετος τῶν δύο εὐθειῶν (τό Λ ἐπί τῆς (ζ)). α) Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Λ. β) Ἐάν ἡ κοινή κάθετος ΚΛ διατηρεῖ σταθερόν μῆκος α, νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς εὐθείας (ζ).

298. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό τάς δύο εὐθεῖας εἶναι κ/λ.

299. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (ε_1) καί (ε_2). Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό τάς παραλλήλους, εἶναι σταθερόν.

26. Κῶνος.

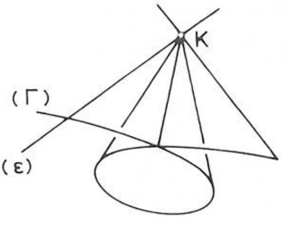
26.1. Ὀρθή κωνική ἐπιφάνεια καλεῖται ἡ ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ἀπό εὐθεῖαν (ε) τέμνουσαν τόν ἄξονα περιστροφῆς xx′ εἰς σημεῖον Κ (σχ151).



σχ.151

Τό σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καί αἱ διαδοχικαί θέσεις τῆς εὐθείας (ε) εἰς τήν περιστροφήν της, καλοῦνται **γενέτειραι ἀκμαί** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

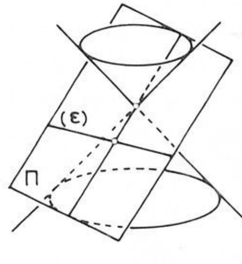
26.1.1. Γενική ἔννοια κωνικῆς ἐπιφανείας. Κωνική ἐπιφάνεια ἐν γένει, καλεῖται κάθε εὐθειογεννής ἐπιφάνεια ὅπου ἡ εὐθεῖα (ε) πού τήν διαγράφει διέρχεται πάντοτε διά σταθεροῦ σημείου Κ καί τέμνει σταθεράν γραμμήν (Γ) (σχ.152). Τό σημεῖον Κ καλεῖται **κορυφή** τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καί ἡ γραμμή (Γ) **ὁδηγός** τῆς κινήσεως τῆς εὐθείας (ε). Ἡ κωνική ἐπιφάνεια, ἐν γένει, δέν εἶναι ἐκ περιστροφῆς ἐπιφάνεια.



σχ.152

Εἰς τά ἑπόμενα θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ τάς ὀρθάς κωνικάς ἐπιφανείας (ἐκ περιστροφῆς).

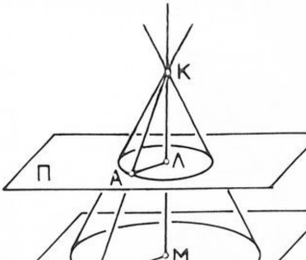
26.2. Ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κωνικῆς ἐπιφανείας καλεῖται κάθε ἐπίπεδον (Π) τό ὁποῖον ἔχει μετά τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κοινήν μίαν μόνον γενέτειραν ἀκμήν (σχ.153), Κάθε εὐθεῖα (ε) τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου (ἐξαιρέσει τῆς γενετείρας ἀκμῆς) ἔχει ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον μετά τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καί καλεῖται **ἐφαπτομένη** εὐθεῖα τῆς ἐπιφανείας.



σχ.153

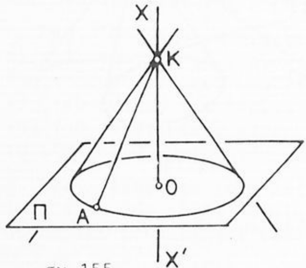
26.3. Θεώρημα. Αἱ τομαί κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπό ἐπιπέδων καθέτων πρός τόν ἄξονά της, εἶναι κύκλοι καί ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων των εἶναι ἴσος πρός τόν λόγον τῶν ἀποστάσεών των ἀπό τήν κορυφήν.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν δύο τομάς μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας ὑπό ἐπιπέδων (Π) καί (Ρ) καθέτων πρός τόν ἄξονα xx΄ τῆς ἐπιφανείας (σχ.154). Αἱ τομαί εἶναι ὁπωσδήποτε κύκλοι, ἐφ᾽ ὅσον ἡ ἐπιφάνεια εἶναι ἐκ περιστροφῆς (§ 24.1) καί ἔστωσαν Λ καί Μ τά κέντρα των, ἐπί τοῦ ἄξονος xx΄. Μία γενέτειρα ἀκμή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τέμνει τά ἐπίπεδα τομῆς εἰς τά Α καί Β. Τά ὀρθογώνα τρίγωνα ΚΛΑ καί



σχ.154

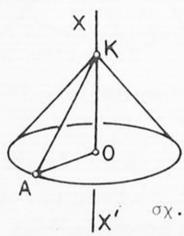
ΚΜΒ εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν κοινήν τήν γωνίαν των εἰς τό Κ. Ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν : $\frac{ΛΑ}{ΜΒ} = \frac{ΚΛ}{ΚΜ} = \frac{ΚΑ}{ΚΒ}$.



σχ.155

26.4. Κῶνος. Ἐάν κωνική ἐπιφάνεια τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου (Π) καθέτου πρός τόν ἄξονα αὐτῆς xx' (σχ. 155), τό στερεόν τό περιεχόμενον μεταξύ τῆς κορυφῆς Κ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καί τῆς ἐπιπέδου τομῆς καλεῖται κῶνος.

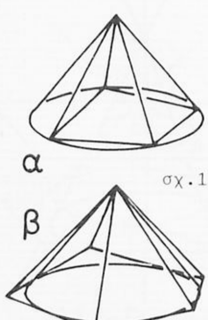
Ὁ κύκλος κατά τόν ὁποῖον τέμνεται ἡ κωνική ἐπιφάνεια καλεῖται βάσις τοῦ κώνου καί ἡ ἀπόστασις ΚΟ τῆς κορυφῆς Κ ἀπό τήν βάσιν καλεῖται ὕψος τοῦ στερεοῦ. Γενέτειρα ἀκμή τοῦ κώνου καλεῖται τό τμῆμα ΚΑ ἀπό τήν κορυφήν τοῦ κώνου ἕως τοῦ κύκλου τῆς βάσεως. Ἡ γενέτειρα ἀκμή ΚΑ τοῦ κώνου, εἰς τήν περιστροφήν της περί τόν ἄξονα xx', διαγράφει τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου, ἡ ὁποία καλεῖται καί κυρτή ἐπιφάνεια τοῦ στερεοῦ.



σχ.156

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμόν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν καί τήν ἀκόλουθον ἰσοδύναμον πρότασιν : Κῶνος καλεῖται τό στερεόν τό παραγόμενον ἀπό τήν περιστροφήν ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΚ περί μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του (σχ.156).

26.5. Ἐγγεγραμμένη καί περιγγεγραμμένη πυραμίς εἰς κῶνον.

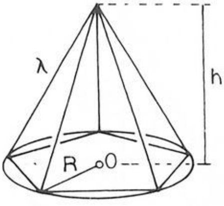


σχ.157

i) Μία πυραμίς καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς κῶνον (σχ.157α), ὅταν τά δύο στερεά ἔχουν κοινήν κορυφήν καί ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς τόν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἀκμαί τῆς πυραμίδος εἶναι γενέτειραι ἀκμαί διά τόν κῶνον.

ii) Μία πυραμίς καλεῖται περιγεγραμμένη περί κῶνον (σχ.157β), ὅταν τά δύο στερεά ἔχουν κοινήν κορυφήν καί ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι πολύγωνον περιγεγραμμένον περί τόν κύκλον - βάσιν τοῦ κώνου. Αἱ παράπλευροι ἕδραι τῆς πυραμίδος εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

26.6. Μέτρησις τοῦ κώνου. Ἄς θεωρήσωμεν κῶνον ἐκ περιστροφῆς μέ βάσιν κύκλον (O,R), ὕψος h, γενέτειραν ἀκμήν λ καί ἐγγεγραμμένην εἰς αὐτόν κανονικήν πυραμίδα (σχ.158). Φανταζόμεθα τήν πυραμίδα μεταβλητήν, εἰς τρόπον ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της νά τείνη πρός τό ἄπειρον. Τότε ἡ μεταβλητή πυραμίς τείνη νά ταυτισθῇ μετά τοῦ κώνου καί οἱ τύποι πού ἀφοροῦν εἰς τάς πυραμίδας ἰσχύουν οὐσιαστικῶς καί διά τούς κώνους, μετασχηματιζόμενοι ὡς ἀκολούθως :



σχ.158

i) Ἐπιφάνεια κώνου ἐκ περιστροφῆς. Διά τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν κανονικῆς πυραμίδος, γνωρίζομεν τόν τύπον $E_\pi = \frac{P_\nu \upsilon}{2}$ (§ 21.2), ὅπου P_ν ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου τῆς βάσεως καί υ τό παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κώνου ἰσοῦται πρός : $E_\kappa = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{P_\nu \upsilon}{2} = \frac{2\pi R\lambda}{2} = \pi R\lambda$, ἤτοι εἶναι :

$$E_\kappa = \pi R\lambda$$

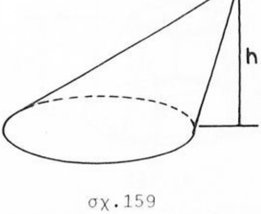
Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἐάν εἰς τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τήν βάσιν τοῦ κώνου, ἤτοι εἶναι:

$$E_{o\lambda} = \pi R\lambda + \pi R^2 = \pi R(\lambda + R)$$

ii) Ὄγκος κώνου. Ὁ τύπος ὁ ὁποῖος δίδει τόν ὄγκον V τοῦ κώνου, προέρχεται ἀπό τόν τύπον $\frac{1}{3}Bh$ τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος καί εἶναι: $V = \lim\limits_{\nu\to\infty}\frac{1}{3}E_\nu h = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, ὅπου E_ν τό ἐμβαδόν τῆς κανονικῆς βάσεως τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος. Ἄρα εἶναι :

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

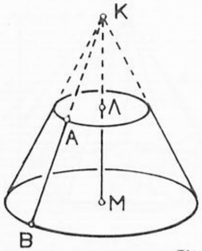
Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί διά τούς πλαγίους κώνους (σχ.159) καί γενικῶς ἰσχύει ὁ τύπος "Ὄγκος $= \frac{1}{3}$[Βάσις × Ὕψος]" διά τούς τυχαίους κώνους, δηλαδή κώνους τῶν ὁποίων ἡ βάσις δέν εἶναι κατ'ἀνάγκην κύκλος. Ἡ ἀπόδειξις μέ τήν ἰδίαν διαδικασίαν τῆς ἐγγεγραμμένης πυραμίδος.



σχ.159

27. Κόλουρος κῶνος.

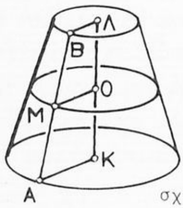
27.1. Ὁρισμός. Κόλουρος κῶνος καλεῖται τό τμῆμα ἑνός κώνου τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως καί μιᾶς παραλλήλου πρός τήν βάσιν τομῆς τοῦ κώνου.



σχ.160

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι τοῦ κολούρου κώνου καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ καί ἡ ἀπόστασίς των καλεῖται ὕψος τοῦ στερεοῦ (σχ.160).

Γενέτειρα ἀκμή καλεῖται τό εὐθύγραμμον τμῆμα AB τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του. Ἡ γενέτειρα ἀκμή, προεκτεινομένη, διέρχεται ἀπό τήν κορυφήν K τοῦ κώνου ἀπό τόν ὁποῖον προῆλθεν ὁ κόλουρος κῶνος.



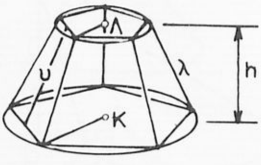
σχ.161

Μεσαία τομή κολούρου κώνου καλεῖται ἡ τομή τοῦ στερεοῦ δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις, τό ὁποῖον διχοτομεῖ τό ὕψος του (σχ.161). Ἡ μεσαία τομή εἶναι κύκλος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς OM ἰσοῦται πρός τό ἡμιάθροισμα τῶν ἀκτίνων KA καί ΛB τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

Παρατήρησις. Ὡς ὁρισμόν τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κολούρου κώνου, δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν καί τήν ἑξῆς ἰσοδύναμον πρότασιν :

Κόλουρος κῶνος καλεῖται τό στερεόν τό παραγόμενον ἀπό τήν περιστροφήν ὀρθογωνίου τραπεζίου ΑΒΛΚ, στρεφομένου περί τήν πλευράν ΚΛ ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπί τάς βάσεις (σχ.161).

27.2. Μέτρησις κολούρου κώνου. Ἄς θεωρήσωμεν κόλουρον κῶνον ἐκ περιστροφῆς μέ βάσεις κύκλους (K,R), (Λ,ρ), ὕψος h καί γενέτειραν ἀκμήν λ (σχ.162). Ἐγγράφομεν εἰς αὐτόν κανονικήν κόλουρον πυραμίδα τήν ὁποίαν ὅμως θεωροῦμεν μεταβλητήν οὕτως ὥστε τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών της νά τείνῃ πρός τό ἄπειρον. Τότε ἡ κόλουρος πυραμίς τείνει νά ταυτισθῇ μετά τοῦ κολούρου κώνου καί ἑπομένως οἱ τύποι πού ἀφοροῦν εἰς τάς κολούρους πυραμίδας, ἰσχύουν καί διά τούς κολούρους κώνους, μετασχηματιζόμενοι ὡς ἀκολούθως:



σχ.162

i) Ἐπιφάνεια κολούρου κώνου ἐκ περιστροφῆς. Διά τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν τῆς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, γνωρίζομεν τόν τύπον $E_\pi = \frac{P_\nu + p_\nu}{2} \upsilon$ (§ 21.3), ὅπου P_ν, p_ν αἱ περίμετροι τῶν βάσεων αὐτῆς καί υ τό παράπλευρον ὕψος. Τότε ἡ κυρτή (παράπλευρος) ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου, ἰσοῦται πρός: $E_\varkappa = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{P_\nu + p_\nu}{2} \upsilon = \frac{2\pi R + 2\pi\rho}{2} \lambda = \pi(R+\rho)\lambda$ ἤτοι εἶναι :

$$E_\varkappa = \pi(R+\rho)\lambda$$

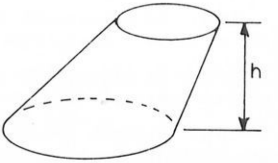
Ἡ ὁλική ἐπιφάνεια εὑρίσκεται ἐάν εἰς τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν προσθέσωμεν τάς δύο βάσεις τοῦ κολούρου κώνου, ἤτοι εἶναι:

$$E_{o\lambda} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi R^2 + \pi\rho^2$$

ii) Ὄγκος κολούρου κώνου. Ὁ τύπος τοῦ ὄγκου τοῦ κολούρου κώνου, προέρχεται ἀπό τόν τύπον $\frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$ τοῦ ὄγκου κολούρου πυραμίδος ὡς ἑξῆς: $V = \lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{3}(E_\nu + \sqrt{E_\nu \varepsilon_\nu} + \varepsilon_\nu)h = \frac{1}{3}(\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \pi\rho^2} + \pi\rho^2)h = \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h$, ὅπου E_ν καί ε_ν τά ἐμβαδά τῶν κανονικῶν βάσεων τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος. Ἄρα εἶναι:

$$V = \frac{\pi}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)h$$

Παρατήρησις. Ὁ προηγούμενος τύπος τοῦ ὄγκου ἰσχύει καί διά τούς πλαγίους κυκλικούς κολούρους κώνους (σχ.163). Γενικῶς δι'ὅλους τούς κολούρους κώνους ἰσχύει ὁ τύπος $V = \frac{1}{3}(B + \sqrt{B\beta} + \beta)h$. Ἡ ἀπόδειξις μέ τήν αὐτήν διαδικασίαν τῆς ἐγγεγραμμένης κολούρου πυραμίδος.



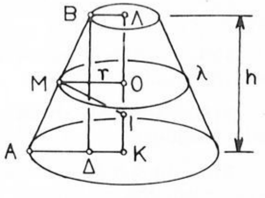
σχ.163

27.2.1. Πόρισμα. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια $E_\varkappa = \pi(R+\rho)\lambda$ κολούρου κώνου, μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$E_\varkappa = 2\pi r\lambda$$

ὅπου r ἡ ἀκτίς τῆς μεσαίας τομῆς.

Τοῦτο εἶναι προφανές διότι $R + \rho = 2r$ ὡς προκύπτει ἀπό τό τραπέζιον ΑΒΛΚ (σχ.164).



σχ.164

27.2.2. Πόρισμα. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια $E_\varkappa = 2\pi r\lambda$ κολούρου κώνου, μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$E_\varkappa = 2\pi\, MI\, h$$

ὅπου ΜΙ μεσοκάθετος τῆς γενετείρας ΑΒ μέχρις τοῦ ἄξονος.

Τοῦτο ἕπεται ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων ΜΟΙ καί ΒΔΑ (ΒΔ$\perp$ΚΑ) ἐκ τῶν ὁποίων λαμβάνομεν: $\frac{MO}{MI} = \frac{B\Delta}{BA} \Rightarrow \frac{r}{MI} = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow r\lambda = MI \cdot h$. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος $E_\varkappa = 2\pi r\lambda$ μετασχηματίζεται εἰς τόν $E_\varkappa = 2\pi \cdot MI \cdot h$.

'Ασκήσεις

300. **'Ισόπλευρος κῶνος** καλεῖται ὁ κῶνος πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφήν ἰσοπλεύρου τριγώνου περί ἕνα ὕψος του.

Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου, ἐκ τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἐκ τοῦ ὁποίου παρήχθη.

301. 'Ισοπλεύρου κώνου μέ ἐπιφάνειαν Ε, νά ὑπολογισθῇ ἡ μεσαία τομή.

302. **"Ομοιοι κῶνοι** καλοῦνται δύο κῶνοι παραγόμενοι ἀπό τήν περιστροφήν δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων, περί μίαν τῶν ὁμολόγων καθέτων πλευρῶν των ἀντιστοίχως. Λόγος ὁμοιότητος καλεῖται ὁ λόγος δύο ἀντισιοίχων γραμμικῶν στοιχείων των.

Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων, ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

303. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων κώνων, ἰσοῦταιπρός τόν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος αὐτῶν.

304. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κώνου τοῦ ὁποίου ἡ κυρτή ἐπιφάνεια εἶναι 20π cm^2 καί ἡ ἀκτίς βάσεως αὐτοῦ εἶναι 4 cm.

305. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια κώνου τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι 96 cm^3 καί τό ὕψος του 8 cm.

306. Δίδεται κανονική τετραγωνική πυραμίς μέ ὄγκον 6 cm^3. Νά ὑπολογισθῇ i) ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου περί αὐτήν κώνου ii) ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν κώνου.

307. 'Η κυρτή ἐπιφάνεια κώνου εἶναι Ε καί ὁ ὄγκος του V. Νά εὑρεθῇ ἡ γενέτειρα ἀκμή καί τό ὕψος τοῦ κώνου.

308. 'Η κυρτή ἐπιφάνεια κώνου εἶναι Ε καί τό ὕψος του h. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος του.

309. 'Ο ὄγκος κώνου εἶναι V καί ἡ γενέτειρα ἀκμή του λ. Νά εὑρεθῇ ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του.

310. Δίδεται κῶνος καί ζητεῖται νά χωρισθῇ ἡ κυρτή ἐπιφάνειά του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν.

311. 'Ορθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περί τάς τρεῖς πλευράς του. 'Εάν V_1, V_2 εἶναι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι διά τῆς περιστροφῆς του περί τάς καθέτους πλευράς του καί V εἶναι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος διά τῆς περιστροφῆς του περί τήν ὑποτείνουσαν, δείξατε ὅτι: $\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} = \frac{1}{V}$.

312. 'Ισοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ μέ ΑΒ$=$ΑΓ$=$α καί $\hat{A} = 120^0$, στρέφεται περί τήν ΑΒ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

313. Δίδεται κανονική ἑξαγωνική πυραμίς μέ πλευράν βάσεως α καί ὕψος h. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ὁλική ἐπιφάνεια τοῦ εἰς αὐτήν ἐγγεγραμμένου κώνου.

314. Περί δοθεῖσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν νά περιγραφῇ κωνική ἐπιφάνεια (ἐκ περιστροφῆς).

315. Είς δοθείσαν τρίεδρον στερεάν γωνίαν νά έγγραφῆ κωνική έπιφάνεια (έκ περιστροφῆς).

316. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρός τήν κυρτήν έπιφάνειαν αὐτοῦ, έπί τήν ἀπόστασιν τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπό μίαν γενέτειραν ἀκμήν.

317. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται πρός τό έμβαδόν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου έκ τοῦ ὁποίου παράγεται, έπί τό μῆκος τοῦ κύκλου τόν ὁποῖον διαγράφει τό κ.βάρους αὐτοῦ.

318. Δίδεται κῶνος μέ ἀκτίνα βάσεως R καί ὕψος h. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πρός τήν βάσιν έπιπέδων, έκ τῶν ὁποίων τό ἕνα διαιρεῖ τήν κυρτήν έπιφάνειαν τοῦ κώνου είς δύο ἰσοδύναμα μέρη καί τό ἄλλο διαιρεῖ τόν ὄγκον τοῦ κώνου είς δύο ἴσους ὄγκους.

319. Ἡ κυρτή έπιφάνεια δοθέντος κώνου, νά διαιρεθῆ δι'έπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν του, είς δύο τμήματα μέ λόγον μ/ν.

320. Δοθείς κῶνος νά διαιρεθῆ δι'έπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν του, είς δύο τμήματα τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὄγκων νά εἶναι μ/ν.

321. Δίδεται κῶνος μέ κορυφήν Κ καί είς τήν βάσιν του φέρομεν χορδήν ΑΒ ἴσην πρός τήν πλευράν τοῦ έγγεγραμμένου είς αὐτήν κανονικοῦ τριγώνου. Νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν είς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος, ὑπό τοῦ έπιπέδου ΚΑΒ.

322. Κολούρου κώνου· αἱ βάσεις εἶναι έγγεγραμμέναι είς κανονικά έξάγωνα μέ πλευράς 6 cm, 4 cm ἀντιστοίχως καί τό ὕψος του εἶναι 1 cm. Νά ὑπολογισθῆ ἡ κυρτή έπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου.

323. Δοχεῖον σχήματος κολούρου κώνου μέ κάτω βάσιν έσωτερικῆς διαμέτρου 20 cm, ἄνω βάσιν έσωτερικῆς διαμέτρου 30 cm καί γενέτειραν ἀκμήν 30 cm, πληροῦται διά πετρελαίου μέχρις ὕψους 5 cm ἀπό τῆς ἄνω βάσεως. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου πετρελαίου είς λίτρα καί τό βάρος του (είδ. βάρος 0,8).

324. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καί εὐθεῖα (ε) έφαπτομένη αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διάμετρον ΚΛ καί περιστρέφομεν τό σχῆμα περί τήν εὐθεῖαν (ε). Δείξατε ὅτι ἡ έπιφάνεια τήν ὁποίαν διαγράφει ἡ διάμετρος ΚΛ εἶναι σταθερά.

325. Κόλουρος κῶνος ἔχει ὄγκον V, ὕψος h καί κυρτήν έπιφάνειαν Ε. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες του.

326. Κόλουρος κῶνος ἔχει ὁλικήν έπιφάνειαν Ε, ὕψος h καί ἡ μία ἀκτίνα του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης. Νά ὑπολογισθῆ ἡ κυρτήν έπιφάνεια καί ὁ ὄγκος του.

327. Κόλουρος κῶνος ἔχει βάσεις μέ ἀκτίνας ρ καί 3ρ. Νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν έπιφανειῶν καί ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο κολούρων κώνων είς τούς ὁποίους διαιρεῖται ὁ δοθείς κόλουρος κῶνος ὑπό τῆς μεσαίας τομῆς του.

328. 'Επί τοῦ ἄξονος κολούρου κώνου λαμβάνομεν σημεῖον Μ καί σχηματίζομεν τούς κώνους μέ βάσεις τάς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου. Ποίαν θέσιν πρέπει νά ἔχη τό σημεῖον Μ, οὕτως ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο κώνων i) νά εἶναι έλάχιστον, ii) νά εἶναι μέγιστον, iii) νά εἶναι δεδομένον.

329. Δίδεται κόλουρος κώνος μέ ἀκτίνας βάσεων ρ, R καί ὕψος h. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πρός τάς βάσεις ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα διαιρεῖ τήν κυρτήν ἐπιφάνειαν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη καί τό δεύτερον διαιρεῖ τόν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου εἰς δύο ἴσους ὄγκους.

330. Ἡ κυρτή ἐπιφάνεια δοθέντος κολούρου κώνου, νά διαιρεθῇ δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν του, εἰς δύο τμήματα μέ λόγον μ/ν.

331. Δοθείς κόλουρος κῶνος νά διαιρεθῇ δι'ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τάς βάσεις του, εἰς δύο κολούρους κώνους τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ὄγκων νά εἶναι μ/ν.

332. 'Ορθογώνιον τρίγωνον μέ καθέτους πλευράς 6 cm καί 8 cm στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του παράλληλον τῆς ὑποτεινούσης του καί ἀπέχοντα 6 cm ἀπ'αὐτῆς. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

333. Κανονικόν ἑξάγωνον στρέφεται περί ἕναν ἄξονα συμμετρίας αὐτοῦ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ (δύο περιπτώσεις).

334. 'Ισόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περί ἄξονα διερχόμενον διά τῆς κορυφῆς του Α καί κάθετον ἐπί τήν πλευράν ΑΒ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

335. Τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του διερχόμενον διά τῆς κορυφῆς Α καί κάθετον ἐπί τήν διαγώνιον ΑΓ. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

336. Τό αὐτό πρόβλημα δι'ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μέ διαστάσεις α καί β.

337. 'Ισοσκελές τραπέζιον μέ βάσεις α, 2α καί ὕψος $\alpha\sqrt{3}/2$, στρέφεται διαδοχικῶς περί τάς βάσεις του. i) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο παραγομένων στερεῶν καί νά γίνῃ σύγκρισις αὐτῶν ii) 'Ομοίως διά τούς ὄγκους.

338. Τό αὐτό ἰσοσκελές τραπέζιον τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, στρέφεται περί μίαν τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν του. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

339. Κύλινδρος καί κῶνος ἔχουν τό αὐτό ὕψος h καί ἰσοδυνάμους ἐπιφανείας. 'Ο ὄγκος τοῦ κώνου ἰσοῦται πρός τά 3/4 τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεών των.

340. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καί ἔστω Κ τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΓΔ. Φέρομεν τάς ΚΑ, ΚΒ καί $KO \perp AB$. Τό σχῆμα στρέφεται περί τόν ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καί τό μέν ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον, τό δέ ἰσοσκελές τρίγωνον ΚΑΒ διαγράφει κῶνον, ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τόν κύλινδρον. Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἐάν τό ὀρθογώνιον εἶναι τετράγωνον, ii) ἐάν εἶναι $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{3}{2}$.

341. Δίδεται ἰσοσκελές τρίγωνον ΚΑΒ (ΚΑ = ΚΒ). 'Εγγράφομεν εἰς αὐτό ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ μέ τήν ΕΖ ἐπί τῆς ΑΒ καί φέρομεν $KO \perp AB$. Τό σχῆμα στρέφεται περί τόν ἄξονα συμμετρίας του ΚΟ καί τό μέν τρίγωνον διαγράφει κῶνον, τό δέ ὀρθογώνιον διαγράφει κύλινδρον ὁ ὁποῖος καλεῖται **ἐγγεγραμμένος** εἰς τόν κῶνον. Νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο στερεῶν i) ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον καί τό ὀρθογώνιον εἶναι

τετράγωνον, ii) ἐάν εἶναι $\frac{KA}{AB}=\frac{5}{6}$ καί $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma Z}=2$.

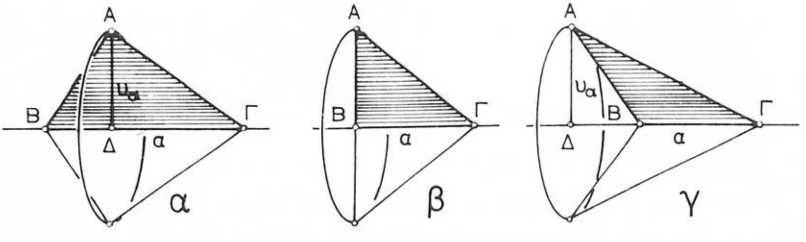
28. Περιστροφή τριγώνου περί ἄξονα.

28.1. Θεώρημα. Τρίγωνον ΑΒΓ στρεφόμενον περί τήν πλευράν του α, παράγει ὄγκον ἴσον πρός $\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_\alpha^2$.

Ἀπόδειξις.

i) Ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον εἰς τάς γωνίας του $\hat{B}$ καί $\hat{\Gamma}$, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς ἄθροισμα δύο κώνων (σχ.165α) μέ κοινήν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος υ_α. Τότε ἔχομεν:

$$V=\frac{1}{3}\pi\upsilon_\alpha^2\cdot\Delta B+\frac{1}{3}\pi\upsilon_\alpha^2\cdot\Delta\Gamma=\frac{1}{3}\pi(\Delta B+\Delta\Gamma)\upsilon_\alpha^2=\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_\alpha^2$$



σχ.165

ii) Ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον εἰς μίαν τῶν γωνιῶν του $\hat{B}$ ἤ $\hat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τήν $\hat{B}$ (σχ.165β), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός τόν ὄγκον κώνου μέ βάσιν κύκλον ἀκτῖνος $AB=\upsilon_\alpha$ καί ὕψος $B\Gamma=\alpha$, ἤτοι εἶναι:

$$V=\frac{1}{3}\pi\upsilon_\alpha^2\cdot B\Gamma=\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_\alpha^2$$

iii) Ἐάν τό τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς μίαν ἐκ τῶν γωνιῶν του $\hat{B}$ ἤ $\hat{\Gamma}$, ἔστω εἰς τήν $\hat{B}$ (σχ.165γ), ὁ παραγόμενος ὄγκος ἀναλύεται εἰς διαφοράν δύο κώνων μέ κοινήν βάσιν κύκλον ἀκτῖνος υ_α. Τότε ἔχομεν:

$$V=\frac{1}{3}\pi\upsilon_\alpha^2\cdot\Delta\Gamma-\frac{1}{3}\pi\upsilon_\alpha^2\cdot\Delta B=\frac{1}{3}\pi(\Delta\Gamma-\Delta B)\upsilon_\alpha^2=\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_\alpha^2$$

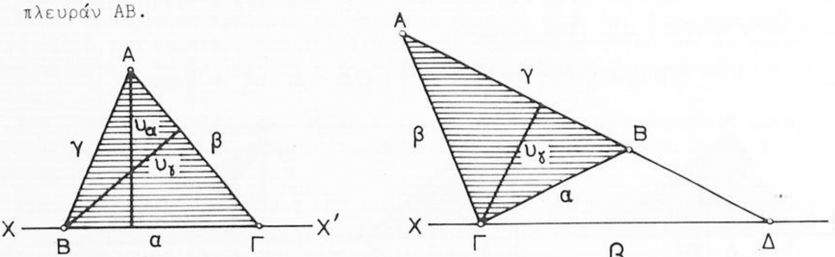
Ἄρα καί εἰς τάς τρεῖς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός:

$$V=\frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_\alpha^2$$

28.2. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπό τριγώνου στρεφομένου περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του διερχόμενον διά μιᾶς κορυφῆς του καί μή τέμνοντα τό τρίγωνον, ἰσοῦται πρός τό τρίτον τῆς ἐπιφανείας τήν ὁποίαν διαγράφει ἡ ἀπέναντι πλευρά ἐπί τό ἐπ'αὐτήν ὕψος.

'Απόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ καί xx΄ ὁ ἄξων περιστροφῆς διερχόμενος διά τῆς κορυφῆς Γ.

i) 'Ας θεωρήσωμεν ὅτι ὁ ἄξων xx΄ περιέχει τήν πλευράν ΒΓ (σχ.166α). Τότε ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός $V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}\pi\alpha\upsilon_{\alpha}^{2}$ (§ 28.1) καί μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς: $V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}\pi(\alpha\upsilon_{\alpha})\upsilon_{\alpha} = \frac{1}{3}\pi(\gamma\upsilon_{\gamma})\upsilon_{\alpha} = \frac{1}{3}(\pi\upsilon_{\alpha}\gamma)\upsilon_{\gamma} = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_{\gamma}$, ὅπου $E_{AB} = \pi\upsilon_{\alpha}\gamma$ εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἡ διαγραφομένη ἀπό τήν πλευράν ΑΒ.

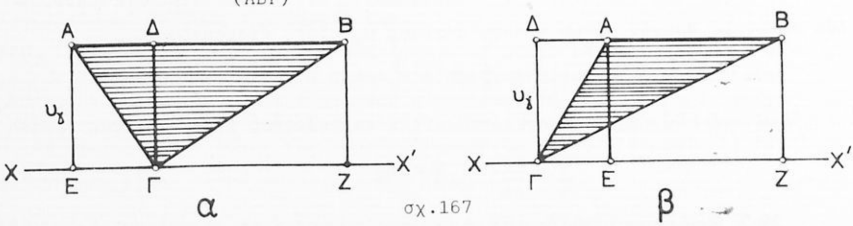


σχ.166

ii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρά ΑΒ προεκτεινομένη τέμνει τόν ἄξονα περιστροφῆς εἰς σημεῖον Δ (σχ.166β). Τότε ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(ΑΒΓ)}$ ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν $V_{(ΑΓΔ)} - V_{(ΒΓΔ)}$ καί κατά τήν προηγουμένην περίπτωσιν εἶναι:

$$V_{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{3}E_{AΔ}\upsilon_{\gamma} - \frac{1}{3}E_{BΔ}\upsilon_{\gamma} = \frac{1}{3}(E_{AΔ} - E_{BΔ})\upsilon_{\gamma} = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_{\gamma}.$$

iii) Ἔστω ὅτι ἡ πλευρά ΑΒ εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα περιστροφῆς. Φέρομεν ΑΕ$\perp$xx΄, ΒΖ$\perp$xx΄ καί εἶναι προφανῶς $ΑΕ = ΒΖ = \upsilon_{\gamma}$. 'Εάν τό Γ προβάλλεται ἐπί τῆς ΑΒ εἰς σημεῖον Δ ἐνδιάμεσον τῶν Α καί Β (σχ.167α), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(ΑΒΓ)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς:



σχ.167

$$V_{(ΑΒΓ)} = V_{(ΑΒΖΕ)} - V_{(ΑΓΕ)} - V_{(ΒΓΖ)} = \pi\upsilon_{\gamma}^{2}\,AB - \frac{1}{3}\pi\upsilon_{\gamma}^{2}\,EΓ - \frac{1}{3}\pi\upsilon_{\gamma}^{2}\,ZΓ =$$
$$\frac{1}{3}[3\pi\upsilon_{\gamma}\,AB - \pi\upsilon_{\gamma}\,EΓ - \pi\upsilon_{\gamma}\,ZΓ]\,\upsilon_{\gamma} = \frac{1}{3}[\pi\upsilon_{\gamma}(3AB - EΓ - ZΓ)]\,\upsilon_{\gamma} =$$

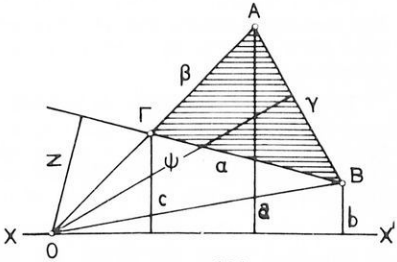
$\frac{1}{3}\left[\pi\upsilon_\gamma(3AB - AB)\right]\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}\left[\pi\upsilon_\gamma(2AB)\right]\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}(2\pi\upsilon_\gamma AB)\upsilon_\gamma = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma$.

Ἐάν ἡ προβολή Δ τοῦ Γ ἐπί τῆς ΑΒ εἶναι ἐκτός τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 167β), ὁ παραγόμενος ὄγκος $V_{(AB\Gamma)}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς: $V_{(AB\Gamma)} = V_{(ABZE)} + V_{(A\Gamma E)} - V_{(B\Gamma Z)}$ καί διά τοῦ αὐτοῦ ὡς ἄνω τρόπου καταλήγομεν εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα.

Ἄρα καί εἰς τάς τρεῖς περιπτώσεις ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός

$$V_{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}E_{AB}\upsilon_\gamma$$

28.3. Θεώρημα τοῦ Πάππου. Ἐάν τρίγωνον στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του ὁ ὁποῖος δέν τό τέμνει, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου τόν ὁποῖον διαγράφει τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου κατά τήν περιστροφήν.



σχ.168

Ἀπόδειξις. Ἔστω τρίγωνον ΑΒΓ μέ πλευράς α, β, γ (σχ.168) καί xx΄ ὁ ἄξων περιστροφῆς του. Ἐάν ἡ πλευρά ΑΓ προεκτεινομένη τέμνει τόν ἄξονα περιστροφῆς εἰς σημεῖον Ο, ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ἀπό τά τρίγωνα ΑΟΒ καί ΓΟΒ. Ἄς συμβολίσωμεν μέ y, z τάς ἀποστάσεις τοῦ Ο ἀπό τάς εὐθείας ΑΒ, ΒΓ ἀντιστοίχως καί μέ a, b, c τάς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπό τόν ἄξονα περιστροφῆς ἀντιστοίχως. Ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας εἶναι γνωστή ἡ σχέσις $a + b + c = 3m$ (1), ὅπου m εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κ.βάρους τοῦ τριγώνου ἀπό τόν ἄξονα xx΄. Τότε ἔχομεν:

$$V_{(AB\Gamma)} = V_{(OAB)} - V_{(OB\Gamma)} = \frac{1}{3}E_{AB}\cdot y - \frac{1}{3}E_{B\Gamma}\cdot z = \frac{1}{3}\pi(a+b)\gamma y - \frac{1}{3}\pi(b+c)\alpha z = \pi\frac{a+b}{3}\gamma y - \pi\frac{a+c}{3}\alpha z \quad (2).$$

Ἀπό τήν σχέσιν (1) λαμβάνομεν: $\frac{a+b}{3} = m - \frac{c}{3}$ καί $\frac{b+c}{3} = m - \frac{a}{3}$ καί τότε ἡ σχέσις (2) γράφεται: $V_{(AB\Gamma)} = \pi(m - \frac{c}{3})\gamma y - \pi(m - \frac{a}{3})\alpha z = \pi m(\gamma y - \alpha z) + \frac{\pi}{3}(a\alpha z - c\gamma y) = \pi m\left[2(OAB) - 2(OB\Gamma)\right] + \frac{\pi}{3}(a\alpha z - c\gamma y) = 2\pi m\,(AB\Gamma) + \frac{\pi}{3}(a\alpha z - c\gamma y)$ (3). Ἀρκεῖ πλέον νά δειχθῇ ὅτι εἶναι $a\alpha z - c\gamma y = 0 \Leftrightarrow \frac{a\alpha z}{c\gamma y} = 1$

Ἀλλά εἶναι: $\frac{a\alpha z}{c\gamma y} = \frac{a}{c}\cdot\frac{\alpha z}{\gamma y} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{(OB\Gamma)}{(OBA)} = \frac{OA}{O\Gamma}\cdot\frac{O\Gamma}{OA} = 1$. Ἄρα ἡ σχέσις (3) γράφεται:

$$V_{(AB\Gamma)} = (AB\Gamma)\cdot 2\pi m$$

28.3.1. Τό προηγούμενον θεώρημα τοῦ Πάππου ἐπεκτείνεται δι' οἱονδήποτε πολύγωνον καί γενικώτερον δι' οἱονδήποτε κλειστόν ἐπίπεδον σχῆμα στρεφόμενον περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, διατυπούμενον ὡς ἑξῆς :

Πᾶν κλειστόν ἐπίπεδον σχῆμα, στρεφόμενον περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του μή τέμνοντα αὐτό, παράγει ὄγκον ἴσον πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος ἐπί τό μῆκος τοῦ κύκλου τόν ὁποῖον διαγράφει τό κέντρον βάρους τοῦ σχήματος κατά τήν περιστροφήν.

'Η ἀπόδειξις παραλείπεται, ὡς ἐκφεύγουσα τῶν πλαισίων τοῦ παρόντος βιβλίου.

'Ασκήσεις

343. 'Ορθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}=1^{L}$) στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του διερχόμενον διά τῆς κορυφῆς Α καί ἐφαπτόμενον τοῦ περιγεγραμμένου περί αὐτό κύκλου. Νά ὑπολογισθῇ ὁ παραγόμενος ὄγκος ἐκ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

344. Δίδεται κανονικόν ἡμιεξάγωνον ΑΒΓΔ διαμέτρου ΑΔ. Φέρομεν τάς διαγωνίους ΑΓ καί ΒΔ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τό Ε. 'Εκ τοῦ Ε φέρομεν τήν κάθετον ἐπί τάς ΑΔ καί ΒΓ ἡ ὁποία τάς τέμνει εἰς τά Ζ καί Η ἀντιστοίχως. Τό σχῆμα στρέφεται περί τήν ΑΔ. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι οἱ διαγραφόμενοι ἀπό τά τρίγωνα ΕΒΗ καί ΕΑΖ ἐκ τῆς πλευρᾶς α τοῦ ἡμιεξαγώνου.

345. 'Από τό κ.βάρους τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται ἄξων παράλληλος τῆς ΒΓ. Νά εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν διαγραφομένων ἀπό τά δύο μέρη εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται τό τρίγωνον, διά περιστροφῆς αὐτῶν περί τοῦ ἄξονος.

346. Τρίγωνον ΑΒΓ μέ $\alpha>\beta>\gamma$ στρέφεται διαδοχικῶς περί τάς τρεῖς πλευράς του. Νά εὑρεθῇ ὁ μέγιστος ἐκ τῶν τριῶν παραγομένων ὄγκων.

347. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Σ τοῦ ἐπιπέδου του καί ἐκτός τοῦ τριγώνου. Νά ἀχθῇ διά τοῦ Σ εὐθεῖα μή τέμνουσα τό τρίγωνον οὕτως ὥστε ἡ περιστροφή τοῦ τριγώνου περί αὐτήν νά δίδῃ τόν μέγιστον δυνατόν ὄγκον.

348. Νά διατυπωθῇ καί ἀποδειχθῇ τό θεώρημα τοῦ Πάππου διά παραλληλόγραμμον. 'Ομοίως διά κανονικόν ἑξάγωνον.

349. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καί τυχόν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. 'Εκ τοῦ Δ φέρομεν παραλλήλους πρός τάς ΑΒ καί ΑΓ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τάς πλευράς τοῦ τριγώνου εἰς τά Ε καί Ζ. Τό σχῆμα στρέφεται περί τήν πλευράν ΒΓ. Νά εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ οὕτως ὥστε ὁ ὄγκος ὁ διαγραφόμενος ὑπό τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ, i) νά εἶναι ὁ μέγιστος δυνατός, ii) νά ἰσοῦται πρός τά 2/5 τοῦ ὄγκου τοῦ παραγομένου ἀπό τό ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ.

350. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. 'Επί τῶν πλευρῶν του καί ἐκτός τοῦ τετραγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου. Τό ὅλον σχῆμα στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, ἀπέχοντα ἀπό τό κέντρον τοῦ τετραγώνου ἀπόστασιν 2α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ παραγόμενος ὄγκος καί νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς κλίσεως τοῦ ἄξονος περιστροφῆς ὡς πρός τάς πλευράς τοῦ τετραγώνου.

351. Νά διατυπωθῆ καί ἀποδειχθῆ τό θεώρημα τοῦ Πάππου. διά κανονικόν πολύγωνον μέ 2ν πλευράς. Νά γίνη ἐπέκτασις τοῦ θεωρήματος καί διά κύκλον στρεφόμενον περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, μή τέμνοντα αὐτόν.

352. Ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἔχει διαστάσεις ΑΒ=α καί ΒΓ=2α. Μέ διαμέτρους τάς ΑΒ καί ΓΔ γράφομεν δύο ἡμικύκλια εἰς τό ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου καί ἐκτός αὐτοῦ. Τό ὅλον σχῆμα στρέφεται περί ἄξονα τοῦ ἐπιπέδου του, μή τέμνοντα αὐτό παράλληλον τῆς ΒΓ καί εἰς ἀπόστασιν α/2 ἀπ'αὐτῆς. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

29. Σφαῖρα.

29.1. Ὁρισμοί. Δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο, καλούμενον **κέντρον** καί σταθεροῦ μήκους R, καλούμενον **ἀκτίς**, καλοῦμεν:

i) **Σφαῖραν** τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου διά τά ὁποῖα ἰσχύει $OM \leqq R$ καί συμβολίζομεν (O,R)

ii) **Σφαιρικήν ἐπιφάνειαν** τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου διά τά ὁποῖα ἰσχύει $OM = R$.

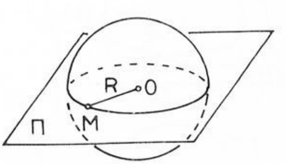
Εἰς τά ἑπόμενα, ὡρισμένας φοράς, λέγοντες "σφαῖρα" θά ἐννοοῦμεν τήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν.

iii) **Χορδή** καλεῖται κάθε εὐθύγραμμον τμῆμα μέ τά ἄκρα του ἐπί τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

iv) **Διάμετρος** καλεῖται κάθε χορδή διερχομένη ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας. Εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἐξ ὅλων τῶν χορδῶν καί ἔχει μῆκος ἴσον πρός τό διπλάσιον τῆς ἀκτῖνος. Τά ἄκρα μιᾶς διαμέτρου καλοῦνται **ἀντιδιαμετρικά** σημεῖα καί εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τό κέντρον τῆς σφαίρας.

29.2. Συνέπειαι τῶν ὁρισμῶν. Ἀπό τούς ἀνωτέρω ὁρισμούς ἕπονται εὐκόλως τά ἀκόλουθα:

29.2.1. Ἄς θεωρήσωμεν ἐπίπεδον (Π), διερχόμενον ἀπό τό κέντρον Ο σφαίρας (O,R) (σχ.169). Ἐπ'αὐτοῦ, τά σημεῖα Μ τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, εἶναι τοιαῦτα ὥστε $OM = R$ καί ἑπομένως ἀπαρτίζουν κύκλον (O,R) ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π). Ἕνας τοιοῦτος κύκλος καλεῖται **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας καί τό ἐπίπεδον αὐτοῦ καλεῖται **διαμετρικόν** ἐπίπεδον.



σχ.169

29.2.2. Συμμετρίαι εἰς τήν σφαῖραν ὑπάρχουν:

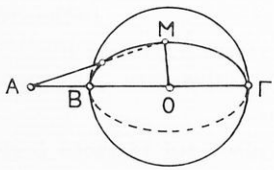
i) **Κεντρική συμμετρία** ὡς πρός τό κέντρον της.

ii) **Ἀξονική συμμετρία** ὡς πρός κάθε διάμετρόν της.

iii) **Συμμετρία ἐπιπέδου** ὡς πρός κάθε διαμετρικόν ἐπίπεδον.

29.2.3. Ἡ σφαῖρα εἶναι στερεόν ἐκ περιστροφῆς. Παράγεται ἀπό τήν περιστροφήν κύκλου (O,R) περί μίαν διάμετρόν του.

29.3. Ἀποστάσις σημείου ἀπὸ σφαῖραν. Ἄς θεωρήσωμεν σφαῖραν (O,R), σημεῖον A καί διάμετρον ΒΓ διερχομένην ἐκ τοῦ A (σχ.170). Ἐάν M εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἀπό τό τρίγωνον AOM λαμβάνομεν:

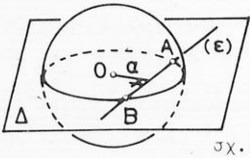


σχ.170

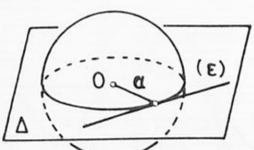
i) $AM \geqq |AO - OM| \Rightarrow AM \geqq |AO - OB| \Rightarrow AM \geqq AB \Rightarrow AB \leqq AM$. Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τήν ἀπόστασιν AB ὁρίζομεν ὡς **ἐλαχίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπό τήν σφαῖραν καί εἶναι ἴση πρός $|\delta - R|$, ὅπου $\delta = AO$.

ii) $AM \leqq AO + OM \Rightarrow AM \leqq AO + O\Gamma \Rightarrow AM \leqq A\Gamma \Rightarrow A\Gamma \geqq AM$. Λόγῳ τῆς τελευταίας σχέσεως, τήν ἀπόστασιν ΑΓ ὁρίζομεν ὡς **μεγίστην ἀπόστασιν** τοῦ σημείου A ἀπό τήν σφαῖραν καί ἰσοῦται πρός $\delta + R$.

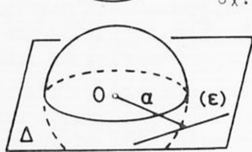
29.4. Σχετικαὶ θέσεις εὐθείας καὶ σφαίρας. Μία εὐθεῖα (ε) καί μία σφαῖρα (O,R), ὅπως καί ἄν εὑρίσκονται, ἔχουν πάντα ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας τό διαγώνιον ἐπίπεδον (Δ) τῆς σφαίρας πού περιέχει τήν εὐθεῖαν (ε) (σχ.171). Ἡ εὐθεῖα (ε) δέν δύναται νά ἔχῃ σημεῖα της ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου (Δ) καί ἑπομένως τά κοινά σημεῖα τῶν δύο σχημάτων θά τά ἀναζητήσωμεν ἐπί τοῦ (Δ). Τό ἐπίπεδον (Δ) τέμνει τήν σφαῖραν κατά μέγιστον κύκλον (O,R) καί ἑπομένως αἱ σχετικαί θέσεις εὐθείας καί σφαίρας ἀνάγονται εἰς τάς γνωστάς σχετικάς θέσεις εὐθείας καί κύκλου, ἤτοι, ἐάν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπό τήν εὐθεῖαν, ἔχομεν:



σχ.171



σχ.172



σχ.173

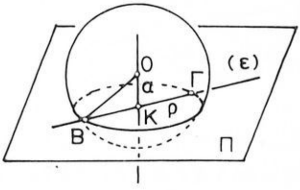
i) Ἡ σφαῖρα καί ἡ εὐθεῖα ἔχουν δύο κοινά σημεῖα (τέμνονται) $\Leftrightarrow$ $\alpha < R$ (σχ.171).

ii) Ἡ σφαῖρα καί ἡ εὐθεῖα ἔχουν ἕνα

κοινόν σημεῖον (ἐφάπτονται) $\Leftrightarrow$ $\alpha = R$ (σχ.172).

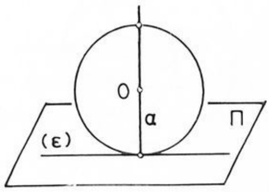
iii) Ἡ σφαῖρα καί ἡ εὐθεῖα δέν ἔχουν κοινά σημεῖα $\Leftrightarrow \alpha > R$ (σχ.173).

29.5. Σχετικαὶ θέσεις σφαίρας καὶ ἐπιπέδου. Μία σφαῖρα παράγεται ἀπό περιστροφήν κύκλου περί διάμετρον. Ἕνα ἐπίπεδον παράγεται ἀπό περιστροφήν εὐθείας περί ἄξονα κάθετον αὐτῆς. Ἑπομένως τό σχῆμα "σφαῖρα - ἐπίπεδον" παράγεται ἀπό τό ἐπίπεδον σχῆμα "κύκλος - εὐθεῖα" στρεφόμενον περί ἄξονα διερχόμενον ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου καί κάθετον ἐπί τήν εὐθεῖαν. Ἄρα αἱ σχετικαί θέσεις σφαίρας - ἐπιπέδου, εἶναι ἀντίστοιχοι ἐκείνων τοῦ σχήματος κύκλου εὐθείας εἰς τό ἐπίπεδον, ἤτοι, ἐάν α εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου σφαίρας (O,R) διαγραφομένη ἀπό κύκλον (O,R) καί (Π) τό ἐπίπεδον τό διαγραφόμενον ἀπό εὐθεῖαν (ε), ἔχομεν:



σχ.174

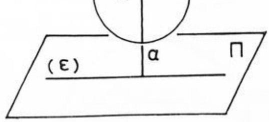
i) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεῖαν (ε) τέμνονται εἰς τά B καί Γ (σχ. 174) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδον (Π) τέμνονται, $\Leftrightarrow$ $\alpha < R$. Τά B καί Γ, στρεφόμενα περί τήν μεσοκάθετον OK τῆς χορδῆς BΓ, διαγράφουν ἐπί τοῦ ἐπιπέδου (Π) κύκλον (K,ρ). Ἄρα **ἡ τομή σφαίρας καί ἐπιπέδου εἶναι κύκλος μέ ἀκτίνα $\rho \leq R$.** Ἐάν τό ἐπίπεδον (Π) δέν διέρχεται ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι $\rho < R$ καί ὁ κύκλος (K,ρ) καλεῖται **μικρός κύκλος** τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἐάν τό (Π) διήρχετο ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας (διαγώνιον ἐπίπεδον), θά ἦτο $\rho = R$ καί ἡ τομή θά ἦτο **μέγιστος κύκλος** τῆς σφαίρας (§ 29.2.1).



σχ.175

ii) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεῖαν (ε) ἐφάπτονται εἰς τό A (σχ.175) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδον (Π) ἐφάπτονται εἰς τό A (ἔχουν ἕνα μόνον κοινόν σημεῖον) $\Leftrightarrow$ $\alpha = R$.

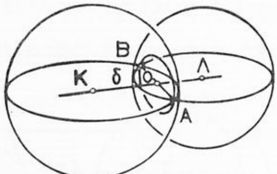
iii) Ὁ κύκλος (O,R) μέ τήν εὐθεῖαν (ε) δέν τέμνονται (σχ.176) $\Leftrightarrow$ ἡ σφαῖρα (O,R) μέ τό ἐπίπεδον (Π) δέν τέμνονται $\Leftrightarrow$ $\alpha > R$.



σχ.176

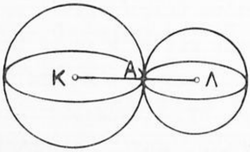
29.5.1. Πόρισμα. Διά τριῶν σημείων μιᾶς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, διέρχεται ἕνας κύκλος τῆς σφαίρας.

29.6. Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν. Διάκεντρος δύο σφαιρῶν (K,R) καί (Λ,ρ) καλεῖται τό τμῆμα ΚΛ καί συμβολίζομεν μέ δ. Δύο σφαῖραι παράγονται ἀπό τήν περιστροφήν δύο κύκλων περί τήν διάκεντρον αὐτῶν. Ἐπομένως αἱ σχετικαί θέσεις δύο σφαιρῶν εἶναι ἀντίστοιχοι τῶν σχετικῶν θέσεων δύο κύκλων εἰς τό ἐπίπεδον καί ἐπομένως ἔχομεν:



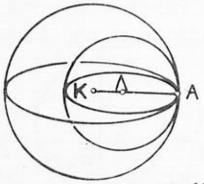
σχ.177

i) Δύο κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) τέμνονται εἰς τά Α καί Β (σχ.177) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ) τέμνονται $\Leftrightarrow$ $|R-\rho| < \delta < R+\rho$. Τά κοινά σημεῖα Α καί Β, τῶν δύο κύκλων, στρεφόμενα περί τήν μεσοκάθετον ΚΛ, διαγράφουν κύκλον. Ἄρα ἡ τομή δύο σφαιρῶν εἶναι κύκλος. Τό κέντρον του Ο εὑρίσκεται ἐπί τῆς διακέντρου τῶν δύο σφαιρῶν καί τό ἐπίπεδόν του εἶναι κάθετον ἐπί τήν διάκεντρον.



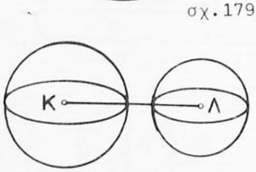
σχ.178

ii) Οἱ κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (σχ.178) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον) $\Leftrightarrow$ $\delta = R+\rho$. Τό σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπί τῆς διακέντρου.



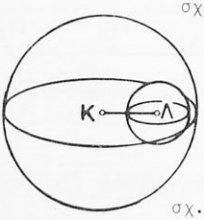
σχ.179

iii) Οἱ κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς σημεῖον Α (σχ.179) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ) ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τό Α (ἔχουν ἕνα κοινόν σημεῖον) $\Leftrightarrow$ $\delta = |R-\rho|$. Τό σημεῖον Α εὑρίσκεται ἐπί τῆς εὐθείας τῆς διακέντρου καί ἡ μία σφαῖρα εὑρίσκεται ἐντός τῆς ἄλλης.



σχ.180

iv) Οἱ κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον καί ὁ ἕνας εὑρίσκεται ἐκτός τοῦ ἄλλου (σχ.180) $\Leftrightarrow$ αἱ δύο σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ) δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον καί ἡ μία εὑρίσκεται ἐκτός τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow$ $\delta > R+\rho$



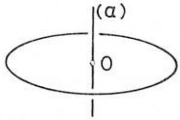
σχ.181

v) Οἱ κύκλοι (K,R) καί (Λ,ρ) δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον καί ὁ ἕνας εὑρίσκεται ἐντός τοῦ ἄλλου (σχ.181) $\Leftrightarrow$ αἱ σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ) δέν ἔχουν κοινόν σημεῖον καί ἡ μία εὑρίσκεται ἐντός τῆς ἄλλης $\Leftrightarrow$ $\delta < |R-\rho|$.

29.7. Γωνία δύο σφαιρῶν. 'Αναφέρεται μόνον εἰς τάς τεμνομένας σφαίρας καί εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο κύκλων ἀπό τήν περιστροφήν τῶν ὁποίων προῆλθον αἱ δύο σφαῖραι.

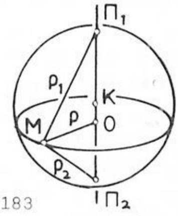
29.8. Ὁρισμοί.

i) Ἄξων κύκλου καλεῖται ἡ εὐθεῖα (α) ἡ διερχομένη ἀπό τό κέντρον O κύκλου καί εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου (σχ.182).



σχ.182

ii) Πόλοι κύκλου σφαίρας. 'Εάν κύκλος (O,ρ) ἀνήκει εἰς σφαῖραν (K,R) (σχ. 183), τά σημεῖα Π_1 καί Π_2 εἰς τά ὁποῖα ὁ ἄξων τοῦ κύκλου τέμνει τήν σφαῖραν, καλοῦνται πόλοι τοῦ κύκλου (O,ρ) τῆς σφαίρας (K,R).



σχ.183

iii) Πολική ἀπόστασις. Ἕκαστος πόλος (σχ.183) ἰσαπέχει προφανῶς ἀπό ὅλα τά σημεῖα M τοῦ κύκλου (O,ρ). 'Εκάστη τῶν ἀποστάσεων τούτων, καλεῖται πολική ἀπόστασις τοῦ κύκλου. Κάθε κύκλος ἐπομένως ἔχει δύο πολικάς ἀποστάσεις ρ_1 καί ρ_2. 'Επειδή οἱ πόλοι Π_1 καί Π_2 εἶναι ἀντιδιαμετρικά σημεῖα τῆς σφαίρας, τό τρίγωνον $\Pi_1 M \Pi_2$ εἶναι ὀρθογώνιον καί ἐπομένως θά εἶναι $\rho_1^2+\rho_2^2=4R^2$.

iv) Ἐγγεγραμμένον πολύεδρον εἰς σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν. 'Η σφαῖρα καλεῖται περιγεγραμμένη περί τό πολύεδρον καί τό κέντρον της καλεῖται περίκεντρον τοῦ πολυέδρου.

v) Περιγεγραμμένον πολύεδρον περί σφαῖραν καλεῖται κάθε πολύεδρον τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι ἐφάπτονται εἰς τήν αὐτήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν. 'Η σφαῖρα εὑρίσκεται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ πολυέδρου καί καλεῖται ἐγγεγραμμένη εἰς αὐτό. Τό κέντρον της καλεῖται ἔκκεντρον τοῦ πολυέδρου.

'Ασκήσεις

353. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι κάθε τετράεδρον εἶναι i) ἐγγράψιμον εἰς σφαῖραν καί ii) περιγράψιμον περί σφαῖραν.

354. 'Εάν δύο κύκλοι, ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τέμνωνται, δείξατε ὅτι ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν.

355. Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι ὑπό τάς ὁποίας δύο κύκλοι, ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν.

356. Δίδεται σφαῖρα ἀκτῖνος 5 cm καί ἐπίπεδον ἀπέχον ἀπό τό κέντρον

3 cm. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τήν σφαῖραν κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἡ τομή τῆς σφαίρας καί τοῦ ἐπιπέδου.

357. Δείξατε ὅτι κύκλος καί σημεῖον ἐκτός αὐτοῦ ὁρίζουν τήν θέσιν μιᾶς μόνον σφαίρας.

358. Δύο σφαῖραι μέ ἀκτίνας 3 cm καί 4 cm ἀντιστοίχως, ἔχουν διάκεντρον 5 cm. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς των.

359. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς τομῆς δύο τεμνομένων σφαιρῶν, ἐκ τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν καί τῆς διακέντρου αὐτῶν.

360. Δείξατε ὅτι: κάθε ὀρθός κυκλικός κύλινδρος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἤτοι, ὑπάρχει σφαῖρα ἐπί τῆς ὁποίας εὑρίσκονται αἱ βάσεις τοῦ κυλίνδρου.

361. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν κυλίνδρου τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως εἶναι R/2.

362. Νά εὑρεθῇ ἡ συνθήκη ὑπό τήν ὁποίαν ἕνας ὀρθός κυκλικός κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν, ἤτοι, νά ὑπάρχῃ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν βάσεων καί τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

363. Δείξατε ὅτι κάθε κυκλικός κῶνος εἶναι ἐγγράψιμος εἰς σφαῖραν, ἤτοι, ὑπάρχει σφαῖρα ἐπί τῆς ὁποίας εὑρίσκεται ἡ βάσις καί ἡ κορυφή τοῦ κώνου.

364. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν.

365. Δείξατε ὅτι κάθε ὀρθός κυκλικός κῶνος εἶναι περιγράψιμος περί σφαῖραν, ἤτοι, ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῆς βάσεως καί τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

366. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς κῶνον ἀκτῖνος α καί ὕψους 3α.

367. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος ἰσοπλεύρου κώνου περιγεγραμμένου περί δοθεῖσαν σφαῖραν (O,R).

368. Δίδεται κανονικόν τετράεδρον ΚΑΒΓ ἀκμῆς α. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης εἰς τήν ἕδραν ΑΒΓ καί εἰς τάς ἀκμάς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ.

369. Δείξατε ὅτι κάθε παραλληλεπίπεδον ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν, εἶναι ὀρθογώνιον.

370. Δείξατε ὅτι ἵνα ἕνα παραλληλεπίπεδον εἶναι περιγεγραμμένον περί σφαῖραν, πρέπει καί ἀρκεῖ αἱ ἕδραι του νά εἶναι ἰσοδύναμα παραλληλόγραμμα.

371. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί σημεῖον Κ ἐκτός αὐτῆς. Τρισορθογώνιος στερεά γωνία ἔχει τήν κορυφήν της εἰς τό Κ καί στρέφεται περί αὐτό, οὕτως ὥστε αἱ ἕδραι της νά τέμνουν τήν σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν κύκλων κατά τούς ὁποίους αἱ ἕδραι τῆς στερεᾶς γωνίας τέμνουν τήν σφαῖραν, εἶναι σταθερόν.

372. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος περιγεγραμμένου περί σφαῖραν πολυέδρου, ἰσοῦται πρός τό 1/3 τῆς ἐπιφανείας του ἐπί τήν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

373. Τετραέδρου ΚΑΒΓ ἡ στερεά γωνία Κ εἶναι τρισορθογώνιος καί ἔχει ΚΑ = α, ΚΒ = β, ΚΓ = γ. Νά ὑπολογισθοῦν ἐκ τῶν α, β, γ

i) ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης περί αὐτό σφαίρας

ii) ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτό σφαίρας.

374. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἐπιφάνεια κανονικοῦ τετραέδρου
i) ἐκ τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης περί αὐτό σφαίρας
ii) ἐκ τῆς ἀκτῖνος ρ τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτό σφαίρας
Νά εὑρεθῆ ἐπί πλέον σχέσις συνδέουσα τάς ἀκτίνας R καί ρ.

375. Νά ἀχθῆ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O,R) καί παράλληλον πρός δοθέν ἐπίπεδον (P).

376. Νά ἀχθῆ ἐπίπεδον (Π) ἐφαπτόμενον δοθείσης σφαίρας (O,R) καί διερχόμενον διά δοθείσης εὐθείας (ε).

377. Νά γραφῆ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R, διερχομένη διά τριῶν δοθέντων σημείων A, B, Γ.

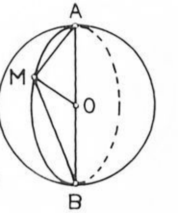
378. Νά γραφῆ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος R, ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν δοθείσης τριέδρου στερεᾶς γωνίας Kxyz.

379. 'Εάν σφαῖρα διέρχεται ἐκ σημείου A καί ἐφάπτεται τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας, δείξατε ὅτι διέρχεται καί ἀπό τό συμμετρικόν τοῦ A ὡς πρός τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου.

380. Νά κατασκευασθῆ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἑδρῶν δοθείσης διέδρου γωνίας καί διερχομένη ἐκ δύο δοθέντων σημείων A καί B εὑρισκομένων ἐντός τῆς διέδρου.

29.9. Γεωμετρικοί τόποι. 'Εκτός τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἀπό σταθερόν σημεῖον ἀπέχουν σταθεράν ἀπόστασιν, ἐνδιαφέροντες γεωμετρικοί τόποι εἶναι καί οἱ ἀκόλουθοι:

i) 'Ο γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἀπό τά ὁποῖα δοθέν εὐθύγραμμον τμῆμα AΓ φαίνεται ὑπό ὀρθήν γωνίαν, εἶναι σφαῖρα διαμέτρου AB (σχ.184).



σχ.184

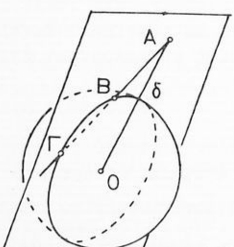
Πράγματι ἐάν M εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπειδή $MO = AB/2 \Rightarrow A\hat{M}B = 1^L$. 'Ισχύει καί τό ἀντίστροφον, ἤτοι ἐάν $A\hat{M}B = 1^L \Rightarrow MO = AB/2$ καί ἑπομένως τό M εἶναι σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

ii) 'Ο γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο δεδομένα σημεῖα A καί B εἶναι μ/ν, εἶναι σφαῖρα διαμέτρου ΓΔ ('Απολλώνειος σφαῖρα), ὅπου τά Γ καί Δ διαιροῦν τό τμῆμα AB ἐσωτερικῶς καί ἐξωτερικῶς εἰς λόγον μ/ν (σχ.185).

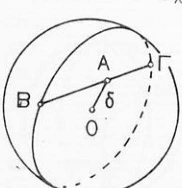
σχ.185

Πράγματι, ἔστω M τυχόν σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε $MA/MB=\mu/\nu$. Τότε, ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθοριζομένου ὑπό τοῦ M καί τῆς εὐθείας AB, ὁ γ.τόπος τοῦ M εἶναι Ἀπολλώνειος κύκλος σταθερᾶς διαμέτρου ΓΔ. Ἐάν τό σχῆμα στραφῆ περί τήν AB, ὁ Ἀπολλώνειος κύκλος θά διαγράψη Ἀπολλώνειον σφαῖραν διαμέτρου ΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου M.

29.10. Δύναμις σημείου πρὸς σφαῖραν. Θεώρημα. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί σταθερόν σημεῖον A. Ἐάν διά τοῦ A θεωρήσωμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν εἰς τά B καί Γ, τό γινόμενον $(\vec{AB})(\vec{A\Gamma})$ εἶναι σταθερός ἀριθμός ἴσος πρός $|\delta|^2 - |R|^2$, ὅπου $\delta = AO$ καί καλεῖται δύναμις τοῦ σημείου A ὡς πρός τήν σφαῖραν (O,R).



σχ.186



σχ.187

Ἀπόδειξις. Τό σημεῖον A εὑρίσκεται ἐκτός τῆς σφαίρας (σχ.186) ἤ ἐντός αὐτῆς (σχ. 187). Καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις θεωροῦμεν τό ἐπίπεδον πού καθορίζεται ἀπό τήν τέμνουσαν ΑΒΓ καί τό κέντρον O τῆς σφαίρας. Τοῦτο τέμνει τήν σφαῖραν κατά μέγιστον κύκλον (O,R) καί ἑπομένως τό γινόμενον $(\vec{AB})(\vec{A\Gamma})$ ἰσοῦται πρός $|\delta|^2 - |R|^2$ (δύναμις τοῦ σημείου A ὡς πρός τόν κύκλον (O,R)).

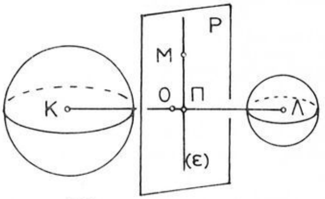
Τήν δύναμιν τοῦ σημείου A ὡς πρός τήν σφαῖραν (O,R) συμβολίζομεν μέ $\mathfrak{D}A/(O,R)$ ἤτοι εἶναι $\mathfrak{D}A/(O,R) = (\vec{AB})(\vec{A\Gamma}) = |\delta|^2 - |R|^2$

Παρατηρήσεις: i) Ἐάν τό σημεῖον A εὑρίσκεται ἐπί τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, εἶναι $\mathfrak{D}A/(O,R) = |\delta|^2 - |R|^2 = |R|^2 - |R|^2 = 0$

ii) Τό σημεῖον τοῦ ἀριθμοῦ $|\delta|^2 - |R|^2$, χαρακτηρίζει τήν θέσιν τοῦ σημείου A ὡς πρός τήν σφαῖραν, ἤτοι ἐάν εἶναι $|\delta|^2 - |R|^2 > 0$ τό σημεῖον A εὑρίσκεται ἐκτός τῆς σφαίρας, ἐνῶ ἐάν εἶναι $|\delta|^2 - |R|^2 < 0$ τό A εὑρίσκεται ἐντός αὐτῆς.

29.11. Ριζικὸν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τά ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις ὡς πρός δύο δεδομένας σφαῖρας (K,R) καί (Λ,ρ), εἶναι ἐπίπεδον (P), καλούμενον ριζικόν ἐπίπεδον, κάθετον ἐπί τήν διάκεντρον ΚΛ τῶν δύο σφαιρῶν, εἰς σημεῖον Π ἀπέχον ἀπό τό μέσον O τῆς διακέντρου ἀπόστασιν $ΟΠ = \frac{|R^2 - ρ^2|}{2ΚΛ}$ καί εὑρισκόμενον πρός τό μέρος τῆς μικροτέρας σφαίρας.

'Απόδειξις. Ἔστω Μ ἕνα σημεῖον μέ ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τάς δύο σφαίρας (σχ.188). Τό ἐπίπεδον πού καθορίζεται ἀπό τήν ΚΛ καί τό σημεῖον Μ,τέμνει τάς δύο σφαῖρας κατά μεγίστους κύκλους (Κ,R) καί (Λ,ρ). Εἰς τό ἐπίπεδον αὐτό, ὁ γ.τόπος τοῦ Μ εἶναι, ὁ ριζικός ἄξων (ε) τῶν δύο κύκλων (Κ,R) καί (Λ,ρ), κάθετος ἐπί τήν διάκεντρον ΚΛ εἰς σημεῖον Π αὐτῆς, ἀπέχον ἀπό τό μέσον Ο τῆς διακέντρου ἀπόστασιν $ΟΠ = \frac{|R^2 - ρ^2|}{2ΚΛ}$ καί εὑρισκόμενος πρός τό μέρος τοῦ μικροτέρου κύκλου. 'Εάν τό σχῆμα στραφῆ περί τήν ΚΛ, οἱ μέν κύκλοι θά διαγράφουν τάς σφαῖρας (Κ,R) καί (Λ,ρ), ὁ δέ ριζικός ἄξων (ε) θά διαγράφη τό ριζικόν ἐπίπεδον (Ρ), κάθετον ἐπί τήν ΚΛ, τό ὁποῖον εἶναι προφανῶς ὁ γ.τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου μέ ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τάς δύο σφαῖρας.



σχ.188

29.12. Ριζικὸς ἄξων τριῶν σφαιρῶν. Θεώρημα. 'Ο γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων τῶν ἐχόντων ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τρεῖς σφαῖρας τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας, εἶναι εὐθεῖα κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον πού καθορίζεται ἀπό τά κέντρα τῶν σφαιρῶν καί καλεῖται ριζικός ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν.

'Απόδειξις. Ἔστωσαν $(K_1, R_1), (K_2, R_2), (K_3, R_3)$, τρεῖς σφαῖραι μέ τά κέντρα τους K_1, K_2, K_3, ὄχι ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τά ζητούμενα σημεῖα. ὡς ἔχοντα ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τάς τρεῖς σφαῖρας, θά εὑρίσκονται ἀφ' ἑνός μέν εἰς τό ριζικόν ἐπίπεδον (P_1) τῶν δύο πρώτων σφαιρῶν, ἀφ' ἑτέρου δέ εἰς ρό ριζικόν ἐπίπεδον (P_2) τῆς δευτέρας καί τρίτης σφαίρας. Ἄρα ὁ ζητούμενος γεωμετρικός τόπος εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων (P_1) καί (P_2), ἤτοι εὐθεῖα καλουμένη ριζικός ἄξων τῶν τριῶν σφαιρῶν. 'Ο ριζικός ἄξων εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον $(K_1 K_2 K_3)$ τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν διότι $(P_1) \perp K_1K_2 \Rightarrow (P_1) \perp (K_1 K_2 K_3) \wedge (P_2) \perp K_2 K_3 \Rightarrow (P_2) \perp (K_1 K_2 K_3)$. Ἄρα καί ἡ τομή των εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον $(K_1 K_2 K_3)$.

29.13. Ριζικὸν κέντρον τεσσάρων σφαιρῶν. Θεώρημα. Δοθεισῶν τεσσάρων σφαιρῶν τῶν ὁποίων τά κέντρα δέν εὑρίσκονται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί ἀνά τρία δέν εὑρίσκονται ἐπ' εὐθείας, ὑπάρχει σημεῖον μέ ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τάς τέσσαρας σφαῖρας καί καλεῖται ριζικόν κέντρον αὐτῶν.

'Απόδειξις. 'Ο ριζικός ἄξων τῶν τριῶν πρώτων σφαιρῶν (§ 29.12) τέμνεται μέ τό ριζικόν ἐπίπεδον πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν τετάρτην σφαῖραν μετά μιᾶς τῶν τριῶν πρώτων εἰς σημεῖον Ο. Τό Ο ἔχει προφανῶς ἴσας δυνάμεις ὡς πρός τάς τέσσαρας σφαῖρας καί καλεῖται ριζικόν κέντρον αὐτῶν.

'Ασκήσεις

381. Δίδονται δύο σταθερά σημεῖα Ο καί Α. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος: i) τῶν προβολῶν τοῦ Α ἐπί τάς εὐθείας τάς διερχομένας διά τοῦ Ο καί ii) τῶν συμμετρικῶν τοῦ Α ὡς πρός τάς εὐθείας τάς διερχομένας διά τοῦ Ο.

382. Δίδεται σφαῖρα (K,R). Μεταβλητή εὐθεῖα (ε) εἶναι παράλληλος πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν (δ) καί ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον Μ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ Μ.

383. Δίδεται σφαῖρα (K,R) καί εὐθεῖα (ε). Μεταβλητόν ἐπίπεδον (Π) διέρχεται διά τῆς εὐθείας (ε) καί τέμνει τήν σφαῖραν κατά κύκλον (Ο,ρ). Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ κέντρου Ο.

384. Μεταβλητόν τρίγωνον ΑΒΓ διατηρεῖ σταθεράν κατά θέσιν καί μέγεθος τήν βάσιν ΒΓ=α καί σταθεράν κατά μέγεθος τήν διάμεσον ΑΜ=μ_α. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῆς κορυφῆς Α ἐάν εἶναι ΑΒ = 2ΑΓ.

385. Δίδεται σφαῖρα (K,R) καί σταθερά διάμετρος ΑΚΒ αὐτῆς. 'Εάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τήν ΑΜ καί ἐκ τοῦ Κ παράλληλον τῆς ΑΜ, ἡ ὁποία τέμνει τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαίρας ἐκ τοῦ Μ εἰς τό Ι. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Ι.

386. Δίδεται σφαῖρα (K,R) καί σταθερά διάμετρος ΑΚΒ αὐτῆς. 'Εάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τήν ΒΜ καί εἰς τήν προέκτασιν αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα ΜΓ=ΜΒ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Ι τῆς τομῆς τῶν ΑΜ καί ΚΓ.

387. Δίδεται σφαῖρα (K,R) καί σταθερόν ἐπίπεδον (Π) διερχόμενον ἀπό τό κέντρον της Κ. 'Εάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν ΜΑ$\perp$(Π) καί ἐπί τῆς ΚΜ λαμβάνομεν ΚΙ=ΜΑ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Ι.

388. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί σημεῖον Α. 'Εάν Μ εἶναι τυχόν σημεῖον τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, φέρομεν τήν ΚΜ καί ἐπ'αὐτῆς λαμβάνομεν ΜΚ = ΜΑ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Κ.

389. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί δύο σταθερά σημεῖα Α καί Β αὐτοῦ.Δύο μεταβληταί σφαῖραι κέντρων Κ καί Λ ἐφάπτονται τοῦ ἐπιπέδου (Π) εἰς τά Α καί Β καί μεταξύ των εἰς τό Μ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ σημείου Μ.

390. Δίδεται ἐπίπεδον (Π) καί σταθερόν σημεῖον Α αὐτοῦ. Μεταβλητή σφαῖρα κέντρου Κ ἐφάπτεται τοῦ (Π) εἰς τό Α καί εὐθεῖα (ε), σχηματίζουσα σταθεράν γωνίαν μετά τοῦ (Π), ἐφάπτεται τῆς σφαίρας εἰς σημεῖον Μ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τοῦ Μ.

391. Νά εὑρεθῆ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καί Β σταθερά σημεῖα καί k δεδομένον τμῆμα.

392. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 - MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καί Β σταθερά σημεῖα καί k δεδομένον τμῆμα.

393. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + 3MB^2 = k^2$, ἔνθα Α καί Β σταθερά σημεῖα καί k δεδομένον τμῆμα.

394. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 = k^2$, ἔνθα Α, Β, Γ σταθερά σημεῖα καί k δεδομένον τμῆμα.

395. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου διά τά ὁποῖα εἶναι: $MA^2 + MB^2 + M\Gamma^2 + M\Delta^2 = k^2$, ἔνθα Α, Β, Γ, Δ σταθερά σημεῖα καί k δεδομένον τμῆμα.

396. Νά κατασκευασθῇ :
- i) Τό ριζικόν ἐπίπεδον δύο σφαιρῶν.
- ii) Ὁ ριζικός ἄξων τριῶν σφαιρῶν
- iii) Τό ριζικόν κέντρον τεσσάρων σφαιρῶν.

397. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη ἐκ τριῶν σημείων Α, Β, Γ καί ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (O,R).

398. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη ἐκ δύο σημείων Α, Β καί ἐφαπτομένη δύο σφαιρῶν (K,R) καί (Λ,ρ).

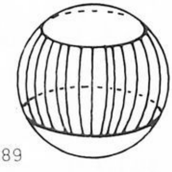
399. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη διά δοθέντος σημείου καί ἐφαπτομένη δύο ἐπιπέδων καί μιᾶς σφαίρας.

400. Δίδεται κύκλος (O,R) καί ἐπίπεδον (Π). Νά γραφῇ σφαῖρα περιέχουσα τόν κύκλον καί ἐφαπτομένη τοῦ ἐπιπέδου (Π).

401. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ὄχι τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νά γραφῇ σφαῖρα τῆς ὁποίας τά ἐφαπτόμενα τμήματα ἐκ τῶν Α, Β, Γ καί Δ νά ἔχουν δεδομένα μήκη α, β, γ καί δ ἀντιστοίχως.

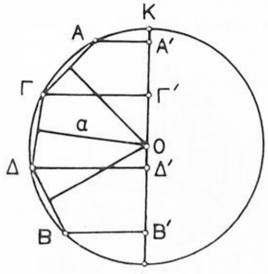
30. Μέτρησις τῆς σφαίρας.

30.1. Σφαιρική ζώνη καλεῖται τό τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τό περιεχόμενον μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων τά ὁποῖα τέμνουν τήν σφαῖραν (σχ.189).



σχ.189

Αἱ τομαί εἶναι κύκλοι καί καλοῦνται **βάσεις** τῆς σφαιρικῆς ζώνης καί ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων καλεῖται **ὕψος** αὐτῆς.



σχ.190

Διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαιρικῆς ζώνης, θεωροῦμεν ἡμικύκλιον διαμέτρου ΚΟΛ (σχ.190) καί ἕνα τόξον $\widehat{AB}$ αὐτοῦ, εἰς τό ὁποῖον ἐγγράφομεν κανονικήν πολυγωνικήν γραμμήν ΑΓΔΒ. Ἐάν τό σχῆμα στραφῇ περί τήν διάμετρον ΚΛ, τό ἡμικύκλιον θά διαγράφη σφαῖραν ἐνῶ τό τόξον $\widehat{AB}$ θά διαγράφη σφαιρικήν ζώνην ὕψους Α΄Β΄, ὅπου ΑΑ΄⊥ΚΛ καί ΒΒ΄⊥ΚΛ. Ἡ ἐγγεγραμμένη πολυγωνική γραμμή ΑΓΔΒ, θά διαγράφη ἐπιφάνειαν ἴσην πρός τό ἄθροισμα τῶν ἐπιφανειῶν πού διαγράφουν αἱ πλευραί της. Φέρομεν ΓΓ΄⊥ΚΛ, ΔΔ΄⊥ΚΛ καί τά ἀποστήματα α ἐκ τοῦ κέντρου Ο τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ἐπιφάνειαι πού διαγράφουν αἱ πλευραί τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, εἶναι κυρταί ἐπιφάνειαι κολούρων κώνων καί ἑπομένως ἔχομεν (§ 27.2.2) : $E_{ΑΓ} = 2\pi α\, Α΄Γ΄$, $E_{ΓΔ} = 2\pi α\, Γ΄Δ΄$, $E_{ΔΒ} = 2\pi α\, Δ΄Β΄$. Διά προσθέσεως αὐτῶν λαμβάνομεν : $E_{ΑΓΔΒ} = 2\pi α(Α΄Γ΄ + Γ΄Δ΄ + Δ΄Β΄) = 2\pi α\, Α΄Β΄$ (1). Ἐάν φαντασθῶμεν ὅτι αἱ πλευραί τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμεναι τείνουν εἰς τό ἄπειρον, τότε ἡ πολυγωνική γραμμή τείνει νά ταυτισθῇ μετά τοῦ τόξου $\widehat{AB}$ καί ἑπομένως ἡ γραφομένη ἐπιφάνεια ὑπ'αὐτῆς τείνει εἰς τήν ζητουμένην ἐπιφάνειαν τῆς σφαιρικῆς ζώνης μέ ὕψος Α΄Β΄ = h. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν, τό μόνον πού θά μεταβληθῆ εἰς τήν ἔκφρασιν (1) τῆς γραφομένης ἐπιφανείας, εἶναι τό ἀπόστημα α τό ὁποῖον θά ταυτισθῇ μέ τήν ἀκτῖνα R καί ἑπομένως ἔχομεν διά τήν ἐπιφάνειαν σφαιρικῆς ζώνης ὕψους h τόν τύπον :

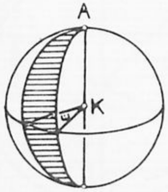
$$E = 2\pi R h$$

30.1.1. Μονοβασική σφαιρική ζώνη. Ἐάν ἕνα ἐκ τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἐφαπτόμενον τῆς σφαίρας, ἡ ὑπ'αὐτῶν καθοριζομένη σφαιρική ζώνη ἔχει μίαν βάσιν καί καλεῖται μονοβασική. Ἡ ἐπιφάνειά της δίδεται ἀπό τόν ἴδιον τύπον τῆς προηγουμένης παραγράφου.

30.1.2. Σφαιρική ἐπιφάνεια. Ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια δύναται νά θεωρηθῇ ἐπιφάνεια σφαιρικῆς ζώνης μέ ὕψος h=2R. Τότε ὁ προηγούμενος τύπος δίδει

$$E_{σφ.} = 4\pi R^2$$

30.1.3. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν, ἰσοῦται πρός τό τετράγωνον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων των.



σχ.191

30.1.4. Σφαιρική ἄτρακτος καλεῖται τό τμῆμα τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας τῆς ὁποίας ἡ ἀκμή ΑΒ εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ.191).

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι δύο σφαιρικαί ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἤ ἴσων σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι καθορίζονται ἀπό ἴσας διέδρους γωνίας, εἶναι ἴσαι.

'Εξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου, εἶναι ἀνάλογος τοῦ μέτρου ω τῆς διέδρου γωνίας ἀπό τήν ὁποίαν καθορίζεται καί θά καλεῖται **σφαιρική ἄτρακτος γωνίας ω.**

'Επειδή ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια, δύναται νά θεωρηθῇ σφαιρική ἄτρακτος πλήρους γωνίας (360^0), ἡ ἐπιφάνεια E μιᾶς σφαιρικῆς ἀτράκτου γωνίας ω θά εἶναι τοιαύτη ὥστε: $\frac{E}{\omega} = \frac{4\pi R^2}{360^0} \Rightarrow E = \frac{4\pi R^2 \omega^0}{360^0}$

Σημείωσις. 'Εάν ἡ γωνία ω^0, μετρουμένη εἰς ἀκτίνια εἶναι α, ὁ ἀνωτέρω τύπος τῆς ἐπιφανείας σφαιρικῆς ἀτράκτου μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς: $E = \frac{4\pi R^2 \alpha}{2\pi} = 2R^2\alpha$

'Ασκήσεις

402. Νά ὑπολογισθῇ τό ὕψος σφαιρικῆς ζώνης ἰσοδυνάμου πρός μέγιστον κύκλον σφαίρας ἀκτῖνος R.

403. Σφαιρική ἐπιφάνεια ἀκτῖνος R, νά διαιρεθῇ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι'ἐπιπέδων παραλλήλων.

404. Τέμνομεν σφαῖραν (O,R) δι'ἐπιπέδου διερχομένου διά μιᾶς ἕδρας τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν κύβου. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια ἑκάστης τῶν δύο μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν εἰς τάς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

405. Σφαῖρα ἀκτῖνος α φωτίζεται ἀπό σημειακήν φωτεινήν πηγήν Φ, εὑρισκομένην εἰς ἀπόστασιν 2α ἀπό τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας. Νά ὑπολογισθῇ ἡ φωτιζομένη ἐπιφάνεια.

406. Νά καθορισθῇ ἐπί δοθείσης σφαίρας μονοβασική σφαιρική ζώνη τῆς ὁποίας ἡ ἐπιφάνεια νά ἔχῃ λόγον 2 ὡς πρός τήν βάσιν της.

407. Τό ἐπίπεδον μικροῦ κύκλου σφαίρας ἀκτῖνος 4 cm ἀπέχει ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας 1 cm. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν δύο μονοβασικῶν ζωνῶν εἰς τάς ὁποίας διαιρεῖται ἡ σφαῖρα.

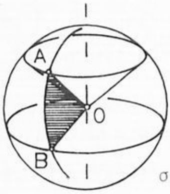
408. Σφαῖρα (O,R) νά τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδων ἰσαπεχόντων ἀπό τό κέντρον της εἰς τρόπον ὥστε τό ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νά εἶναι ἴσον πρός τό ἐμβαδόν τῆς ζώνης τήν ὁποίαν περικλείουν.

409. Δείξατε ὅτι ἡ σφαιρική ζώνη πού καθορίζεται ἀπό δύο ὁμοκέντρους σφαῖρας ἐπί τρίτης μεταβλητῆς σφαίρας διερχομένης ἀπό τό κέντρον των, ἔχει σταθεράν ἐπιφάνειαν.

410. Κύκλος διαμέτρου 4 cm στρέφεται περί διάμετρόν του κατά γωνίαν 45^0. Νά ὑπολογισθῇ ἡ παραγομένη ἐπιφάνεια.

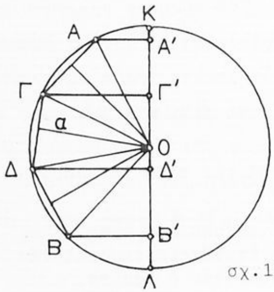
411. 'Υποτιθεμένης τῆς γῆς σφαιρικῆς μέ ἀκτίνα R=6350 km, i) νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς ὡριαίας ἀτράκτου. ii) Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό γεωγραφικόν πλάτος τῶν 'Αθηνῶν εἶναι 38^0, νά ὑπολογισθῇ τό μῆκος τοῦ κυκλικοῦ τόξου τό ὁποῖον διαγράφει ἡ πόλις τῶν 'Αθηνῶν, κατά τήν περιστροφήν τῆς γῆς, ἐντός μιᾶς ὥρας (συν38^0=0,788).

30.2. Σφαιρικὸς τομεύς καλεῖται τό στερεόν τό παραγόμενον ἀπό κυκλικόν τομέα ΑΟΒ, στρεφόμενον περί διάμετρον μή τέμνουσαν αὐτόν. (σχ. 192).



σχ. 192

Τό τόξον $\overset{\frown}{AB}$ διαγράφει σφαιρικήν ζώνην ἡ ὁποία καλεῖται **βάσις** τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καί **ὕψος** αὐτοῦ καλεῖται τό ὕψος τῆς βάσεώς του, ἤτοι τῆς σφαιρικῆς ζώνης πού ἀντιστοιχεῖ εἰς αὐτόν.



σχ. 193

Διά τήν μέτρησιν τοῦ ὄγκου σφαιρικοῦ τομέως, θεωροῦμεν εἰς τό τόξον $\overset{\frown}{AB}$ (σχ. 193) τοῦ κυκλικοῦ τομέως ἀπό τόν ὁποῖον παράγεται, ἐγγεγραμμένην κανονικήν πολυγωνικήν γραμμήν. Ὁ ὄγκος πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφήν τοῦ ἐπιπέδου σχήματος ΟΑΓΔΒΟ περί τήν ΚΛ, ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων πού παράγουν τά τρίγωνα ΟΑΓ, ΟΓΔ, ΟΔΒ κατά τήν περιστροφήν. Φέρομεν ἐκ τοῦ κέντρου Ο τά ἀποστήματα α καί ἔχομεν (§ 28.2) :

$$V_{OA\Gamma} = \frac{1}{3}E_{A\Gamma}\alpha,\ V_{O\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}E_{\Gamma\Delta}\alpha,\ V_{O\Delta B} = \frac{1}{3}E_{\Delta B}\alpha \Rightarrow V_{OA\Gamma\Delta BO} = \frac{1}{3}[E_{A\Gamma} + E_{\Gamma\Delta} + E_{\Delta B}]\cdot\alpha = \frac{1}{3}E_{A\Gamma\Delta B}\cdot\alpha \quad (1).$$

Ἐάν τό πλῆθος τῶν πλευρῶν τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τό τόξον $\overset{\frown}{AB}$ πολυγωνικῆς γραμμῆς αὐξανόμενον τείνει εἰς τό ἄπειρον, τό ἀπόστημα α τείνει εἰς τήν ἀκτίνα R καί ὁ παραγόμενος ὄγκος ἰσοῦται πρός τόν ὄγκον V τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. Τότε ἀπό τήν προηγουμένην σχέσιν (1) ἔχομεν: $V = \frac{1}{3}E_{AB}R$ καί ἐπειδή $E_{AB} = 2\pi Rh$ (§ 30.1), ἕπεται ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως ἰσοῦται πρός:

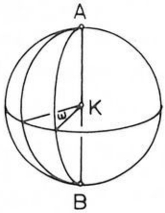
$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

30.2.1. Ὄγκος σφαίρας. Ἡ σφαῖρα δύναται νά θεωρηθῇ σφαιρικός τομεύς μέ ὕψος $h = 2R$ καί ἑπομένως ἀπό τόν προηγούμενον τύπον λαμβάνομεν:

$$V_{\sigma\varphi} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

30.2.2. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν ἰσοῦται πρός τόν κύβον τοῦ λόγου τῶν ἀκτίνων των.

30.2.3. Σφαιρικὸς ὄνυξ καλεῖται τό τμῆμα τῆς σφαίρας τό περ



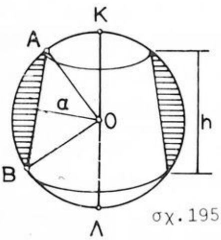
σχ.194

λαμβανόμενον μεταξύ τῶν ἑδρῶν διέδρου γωνίας τῆς ὁποίας ἡ ἀκμή AB εἶναι διάμετρος τῆς σφαίρας (σχ.194).

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος εἶναι ἀνάλογος τῆς διέδρου γωνίας αὐτοῦ, ἤτοι εἶναι: $\frac{V}{\omega} = \frac{V\sigma\varphi.}{360^0}$ καί ἐπομένως δίδεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\omega^0}{360^0}$$

30.3. Σφαιρικὸς δακτύλιος καλεῖται τό στερεόν τό παραγόμενον ἀπό κυκλικόν τμῆμα AB στρεφόμενον περί διάμετρον ΚΛ μή τέμνουσαν αὐτό (σχ.195).



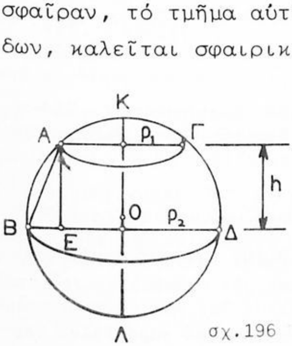
σχ.195

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων κύκλων πού διαγράφουν τά σημεῖα A καί B, καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου, ὑπολογίζεται ὡς ἡ διαφορά τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ τομέως πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφήν τοῦ κυκλικοῦ τομέως AOB καί τοῦ ὄγκου πού παράγεται ἀπό τήν περιστροφήν τοῦ τριγώνου AOB. Φέρομεν τό ἀπόστημα α καί ἔχομεν: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}E_{AB}\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}(2\pi\alpha h)\alpha = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{2}{3}\pi\alpha^2 h = \frac{2}{3}\pi(R^2 - \alpha^2)h = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 h = \frac{1}{6}\pi AB^2 h$. Ἄρα ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$V = \frac{1}{6}\pi AB^2 h$$

30.4. Σφαιρικὸν τμῆμα. Ἐάν δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν σφαῖραν, τό τμῆμα αὐτῆς τό περιλαμβανόμενον μεταξύ τῶν ἐπιπέδων, καλεῖται σφαιρικόν τμῆμα (σχ.196).

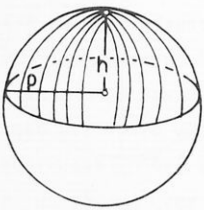


σχ.196

Ἡ ἀπόστασις h τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καλεῖται ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καί οἱ κύκλοι κατά τούς ὁποίους τά ἐπίπεδα τέμνουν τήν σφαῖραν, καλοῦνται βάσεις αὐτοῦ.

Ἄς θεωρήσωμεν διάμετρον ΚΟΛ τῆς σφαίρας κάθετον ἐπί τάς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καί ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ΚΛ τέμνον τούς κύκλους - βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος είς τά Α, Γ καί Β, Δ ἀντιστοίχως. Ὁ ὄγκος V τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου ΑΒ ἀφ'ἑνός καί τοῦ κολούρου κώνου ΑΒΔΓ ἀφ'ἑτέρου. Ἐάν ρ_1 καί ρ_2 εἶναι αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἔχομεν : $V = \frac{1}{6}\pi AB^2h + \frac{1}{3}\pi(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)h = \frac{1}{6}\pi\,[AB^2 + 2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + 2\rho_2^2\,]h$. Φέρομεν $AE \perp B\Delta \Rightarrow AE = h \Rightarrow AB^2 = h^2 + (\rho_2 - \rho_1)^2 = h^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2$ καί ὁ ὄγκος μετασχηματίζεται ὡς ἀκολούθως: $V = \frac{1}{6}\pi\,[(h^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2) + 2\rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2]h = \frac{1}{6}\pi\,[h^2 + 3\rho_1^2 + 3\rho_2^2]h = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho_1^2 + \rho_2^2)h$. Ἄρα ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho_1^2 + 2_2^2)h.$$



σχ.197

30.4.1. Μονοβασικὸν σφαιρικὸν τμῆμα. Σφαῖρα τεμνομένη ὑπό ἐπιπέδου διαιρεῖται είς δύο τμήματα δυνάμενα νά θεωρηθοῦν σφαιρικά τμήματα μέ μίαν βάσιν τήν τομήν ἀκτῖνος ρ (σχ.197) καί τήν ἄλλην μηδενικήν, ἐξ οὗ καί καλοῦνται **μονοβασικά** σφαιρικά τμήματα. Ἐάν h εἶναι τό ὕψος ἑνός ἐξ αὐτῶν, ὁ ὄγκος του δίδεται ἐκ τοῦ τύπου τῆς προηγουμένης παραγράφου, ὁ ὁποῖος μετασχηματίζεται ὡς ἑξῆς:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi\rho^2 h$$

Ἀσκήσεις

412. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος σφαίρας περιγεγραμμένης περί κύβον ἀκμῆς α.

413. Νά εὑρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος σφαίρας ἐγγεγραμμένης είς κῶνον μέ ἀκτῖνα βάσεως α καί ὕψος 3α.

414. Κύβος ἀκμῆς α πληροῦται ὑπό ἴσων σφαιρῶν διαμέτρου α/ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους των.

415. Ἐάν V_1 εἶναι ὁ ὄγκος σφαίρας, V_2 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου V_3 ὁ ὄγκος τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου, δείξατε ὅτι: $\frac{V_1}{4} = \frac{V_2}{6} = \frac{V_3}{9}$. Ἐπίσης νά ἀποδειχθῇ ὅτι διά τῆς αὐτῆς σχέσεως συνδέονται καί αἱ ἐπιφάνειαι E_1, E_2, E_3 τῶν αὐτῶν στερεῶν.

416. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καί δύο ἴσαι καί παράλληλοι χορ-

δαί αὐτῶν. Δείξατε ὅτι οἱ σφαιρικοί δακτύλιοι πού παράγονται ἀπό τά δύο κυκλικά τμήματα, ὅταν ταῦτα στραφοῦν περί μίαν διάμετρον, εἶναι ἰσοδύναμοι.

417. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου ἰσοῦται πρός τά 2/3 τοῦ ὕψους του, ἐπί τό ἐμβαδόν τῆς μεσοπαραλλήλου πρός τάς βάσεις τομῆς του.

418. Κωνικόν δοχεῖον ἰσοπλεύρου κώνου, πληροῦται δι'ὑγροῦ μέχρις ὕψους 5 cm. 'Εντός αὐτοῦ βυθίζεται σφαῖρα ἀκτῖνος 1 cm. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀνύψωσις τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ. 'Επίσης νά ὑπολογισθῇ πόσος θά ἔπρεπε νά ἦτο ὁ ὄγκος τοῦ περιεχομένου εἰς τό δοχεῖον ὑγροῦ, ὥστε ἡ βυθιζομένη εἰς αὐτό σφαῖρα νά ἐφάπτεται τῆς ἐλευθέρας ἐπιφανείας τοῦ ὑγροῦ.

419. Δύο σφαῖραι (Κ, 3α) καί (Λ, 4α) ἔχουν διάκεντρον ΚΛ = 5α. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους των.

420. 'Εάν B_1, B_2 καί B, εἶναι τά ἐμβαδά τῶν βάσεων καί τῆς μεσαίας τομῆς ἀντιστοίχως σφαιρικοῦ τμήματος ὕψους h, δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος του ἰσοῦται πρός : $V = \frac{1}{6}(B_1 + B_2 + 4B)h$.

421. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος μονοβασικοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ἰσοῦται πρός $\pi h^2 R - \frac{1}{3}\pi h^3$, ἔνθα R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας καί h τό ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

422. Κυκλικός τομεύς γωνίας 60^0 καί ἀκτῖνος ρ, στρέφεται περί μίαν τῶν ἀκραίων ἀκτίνων του. Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἐπιφάνεια καί ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

423. Κῶνος ἔχει ὕψος 2α καί ἀκτῖνα βάσεως α. Μέ κέντρον τήν κορυφήν του θεωροῦμεν σφαῖραν ἀκτῖνος α. Νά ὑπολογισθῇ i) ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τμήματος τῆς σφαίρας πού εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κώνου καί ii) ὁ ὄγκος τοῦ ἐντός τῆς σφαίρας εὑρισκομένου τμήματος τοῦ κώνου.

424. Δίδονται δύο κύκλοι (Κ,ρ) καί(Λ,3ρ) ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς εἰς σημεῖον Γ. Φέρομεν τήν κοινήν ἐξωτερικήν ἐφαπτομένην ΑΒ καί στρέφομεν τό σχῆμα περί τήν διάκεντρον ΚΛ. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος πού παράγεται ἀπό τό μικτόγραμμον τρίγωνον ΑΒΓ κατά τήν περιστροφήν.

425. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρός τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περί αὐτήν ἰσοπλεύρου κώνου, ἔχει λόγον 4/9. Τόν αὐτόν λόγον ἔχουν καί οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

426. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας πρός τήν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου περί αὐτήν κυλίνδρου, ἔχουν λόγον 2/3. Τόν αὐτόν λόγον ἔχουν καί οἱ ὄγκοι τῶν δύο στερεῶν.

427. Σφαῖρα (O,R) τέμνεται δι'ἐπιπέδου. 'Εάν τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο σχηματιζομένων μονοβασικῶν ζωνῶν, νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου τομῆς ἀπό τό κέντρον τῆς σφαίρας.

428. Δίδεται σφαῖρα, ὁ περιγεγραμμένος κύλινδρος καί ὁ διπλοῦς κῶνος μέ κορυφήν τό κέντρον τῆς σφαίρας καί βάσεις τάς βάσεις τοῦ κυλίνδρου. 'Εάν φέρωμεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπί τόν κοινόν ἄξονα τῶν τριῶν στερεῶν, δείξατε ὅτι τό ἐμβαδόν τῆς τομῆς τῆς σφαίρας, ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τοῦ κυλίνδρου καί τοῦ κώνου.

429. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Μεταβλητή σφαῖρα ἀκτῖνος x διέρχεται πάντοτε διά τοῦ O καί τέμνει τήν πρώτην σφαῖραν. Δείξατε ὅτι ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαιρικῆς ζώνης τῆς μεταβλητῆς σφαίρας πού εὑρίσκεται ἐντός τῆς πρώτης σφαίρας , εἶναι σταθερά.

430. Κῶνος ἀκτῖνος α καί ὕψους υ εἶναι περιγεγραμμένος περί σφαῖραν ἀκτῖνος R. Δείξατε ὅτι: $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{2}{R\upsilon}$.

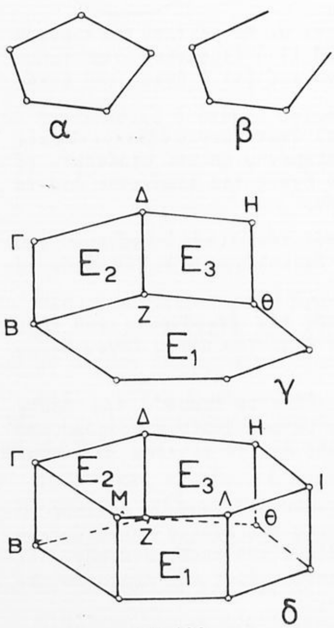
431. Ἰσόπλευρος κῶνος εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς σφαῖραν ἀκτῖνος R. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν τοῦ κώνου καί τέμνον τά δύο στερεά, οὕτως ὥστε ἡ διαφορά τῶν τομῶν νά εἶναι ἰσοδύναμος πρός κύκλον ἀκτῖνος α.

432. Ὀρθός κυκλικός κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως α καί ὕψος 3α. Σφαῖρα μέ κέντρον της ἐπί τοῦ ἄξωνος τοῦ κώνου, ἔχει ἀκτῖνα α καί διέρχεται ἀπό τήν κορυφήν τοῦ κώνου. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν δύο τμημάτων εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ὑπό τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

433. Εἰς σφαῖραν νά ἐγγραφῇ κύλινδρος ἰσοδύναμος πρός τόν σφαιρικόν δακτύλιον ὁ ὁποῖος τόν περιβάλλει.

434. Ὀρθός κυκλικός κῶνος ἔχει ἀκτῖνα βάσεως α καί ὕψος 2α. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν δύο μερῶν εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται ὁ κῶνος ὑπό σφαίρας ἐχούσης ὡς μέγιστον κύκλον τήν βάσιν τοῦ κώνου.

31. Θέματα τινὰ ἐπὶ τῶν πολυέδρων.



σχ.198

31.1. Θεώρημα τοῦ Euler. Εἰς κάθε κυρτόν πολύεδρον, τό πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν καί τό πλῆθος Ε τῶν ἑδρῶν, ἰσοῦται πρός τό πλῆθος Α τῶν ἀκμῶν του ηὐξημένον κατά 2.

Ἀπόδειξις. Θά φαντασθῶμεν ὅτι συνθέτομεν τό ἐξεταζόμενον πολύεδρον, τοποθετοῦντες τάς ἕδρας του μίαν μίαν. Ἡ ἀπόδειξις θά στηριχθῇ εἰς τάς ἀκολούθους δύο παρατηρήσεις:

i) Μιᾶς κλειστῆς ἐπιπέδου πολυγωνικῆς γραμμῆς (σχ.198α), τό πλῆθος Α τῶν ἀκμῶν της εἶναι ἴσον πρός τό πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν της, ἤτοι εἶναι Α = Κ $\Rightarrow$ Α - Κ = 0.

ii) Μιᾶς ἀνοικτῆς ἐπιπέδου πολυγωνικῆς γραμμῆς (σχ.198β), τό πλῆθος Α τῶν ἀκμῶν της εἶναι κατά μονάδα μεγαλύτερον ἀπό τό πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν της, ἤτοι εἶναι $A = K + 1 \Rightarrow A - K = 1$.

Κατόπιν αὐτῶν, τοποθετοῦμεν κατ'ἀρχάς τήν πρώτην ἕδραν E_1 (σχ.198γ). Τό πλῆθος A_1 τῶν ἀκμῶν της εἶναι τό αὐτό μέ τό πλῆθος K_1 τῶν κορυφῶν της, ἤτοι $A_1 - K_1 = 0$. Ἐν συνεχείᾳ τοποθετοῦμεν τήν δευτέραν ἕδραν E_2 ἐπισυνάπτοντες οὐσιαστικῶς εἰς τήν πρώτην ἕδραν τήν ἀνοικτήν πολυγωνικήν γραμμήν ΒΓΔΖ καί ἑπομένως ἐδῶ θά ἔχωμεν διά τάς ἀκμάς καί τάς κορυφάς της $A_2 - K_2 = 1$. Ὁμοίως ἡ τρίτη ἕδρα E_3 προστίθεται διά τῆς ἀνοικτῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ΔΗΘ, ἤτοι εἶναι $A_3 - K_3 = 1$ καί ὁμοίως προχωροῦμεν διά τάς λοιπάς ἕδρας μέχρι καί τῆς προτελευταίας.

Ἡ τελευταία φάσις (σχ.198δ) εἶναι νά κλείσῃ τό πολύεδρον συμπληρούμενον μέ τήν τελευταίαν ἕδραν του ΓΔΗΙΛΜ. Εἰς τήν φάσιν αὐτήν δέν προστίθενται εἰς τό στερεόν οὔτε ἀκμαί οὔτε κορυφαί διότι ἤδη ὑπάρχουν καί ἑπομένως εἶναι $A_\varepsilon = 0$, $K_\varepsilon = 0 \Rightarrow A_\varepsilon - K_\varepsilon = 0$.

Κατά τά προηγούμενα ἔχομεν:

Διά	τήν	1ην	ἕδραν		$A_1 - K_1 = 0$
"	"	2αν	"		$A_2 - K_2 = 1$
"	"	3ην	"		$A_3 - K_3 = 1$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
Διά	τήν	ἕδραν	τάξεως	$\varepsilon-1$	$A_{\varepsilon-1} - K_{\varepsilon-1} = 1$
"	"	"	"	ε	$A_\varepsilon - K_\varepsilon = 0$

Προσθέτομεν κατά μέλη, τάς ε τό πλῆθος προηγουμένας ἰσότητας καί λαμβάνομεν: $(A_1 + A_2 + \ldots + A_\varepsilon) - (K_1 + K_2 + \ldots + K_\varepsilon) = 0 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 0$:

$$A - K = E - 2 \Leftrightarrow K + E = A + 2$$

31.2. Ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν πολύεδρον καλεῖται κάθε πολύεδρον τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί εἶναι σημεῖα μιᾶς καί τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις:

i) Εἰς κάθε ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν πολύεδρον α) αἱ ἕδραι του εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον πολύγωνα, β) αἱ κάθετοι ἐπί τάς ἕδρας εἰς τά περίκεντρα αὐτῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ii) Τά πολύεδρα α) κανονικόν πρῖσμα, β) κανονική πυραμίς, γ) κόλουρος κανονική πυραμίς, εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς σφαῖραν.

31.3. Περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν πολύεδρον καλεῖται κάθε πολύεδρον τοῦ ὁποίου αἱ ἕδραι ἐφάπτονται μιᾶς καί τῆς αὐτῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας.

Εὐκόλως ἀποδεικνύονται αἱ ἀκόλουθοι προτάσεις:

i) Εἰς κάθε περιγεγραμμένον περί σφαῖραν πολύεδρον, τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν διέδρων γωνιῶν του, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

ii) Ὁ ὄγκος V κάθε περιγεγραμμένου περί σφαῖραν πολυέδρου, παρέχεται ἐκ τοῦ τύπου:

$$V = \frac{1}{3} E_{o\lambda} \cdot \rho$$

ὅπου $E_{o\lambda}$ ἡ ὁλική ἐπιφάνειά του καί ρ ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς αὐτό σφαίρας.

32. Κανονικὰ πολύεδρα.

32.1. Κανονικὴ στερεὰ γωνία καλεῖται μία κυρτή στερεά γωνία μέ ὅλας τάς ἕδρας της ἴσας καί ὅλας τάς διέδρους της ἴσας.

32.2. Κανονικὸν πολύεδρον καλεῖται ἕνα κυρτόν πολύεδρον μέ ὅλας τάς ἕδρας του ἴσα κανονικά πολύγωνα καί ὅλας τάς στερεάς γωνίας του κανονικάς καί ἴσας.

Ἐπειδή αἱ ἕδραι ἑκάστης στερεᾶς γωνίας κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι καί γωνίαι κανονικοῦ πολυγώνου καί γνωστοῦ ὄντος ὅτι τό ἄθροισμα αὐτῶν πρέπει νά εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν (§ 15.11), ἕπεται ὅτι τά δυνατά ὑπάρχοντα εἴδη στερεῶν γωνιῶν διά κανονικά πολύεδρα, εἶναι τά ἀκόλουθα:

i) Τρίεδρος μέ κάθε ἕδρα της 60^0 (ἀπό τό ἰσόπλευρον τρίγωνον).

ii) Κανονική τετράεδρος μέ κάθε ἕδρα της 60^0.

iii) Κανονική πεντάεδρος μέ κάθε ἕδρα της 60^0.

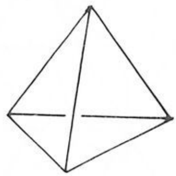
iv) Τρίεδρος μέ κάθε ἕδρα της 90^0 (ἀπό τό τετράγωνον)

v) Τρίεδρος μέ κάθε ἕδρα της 108^0(ἀπό τό κανονικόν πεντάγωνον)

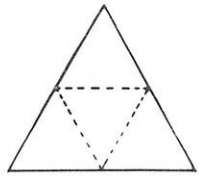
Ἀπό τά ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι πέντε τό πολύ εἴδη κανονικῶν πολυέδρων δύνανται νά ὑπάρχουν.

32.3. Τὰ 5 εἴδη κανονικῶν πολυέδρων. Εἰς ἑκάστην τῶν 5 περιπτώσεων τῆς προηγουμένης παραγράφου, θά ἐξετάσωμεν ἐάν ὑπάρχῃ κανονικόν πολύεδρον καί ποῖα τά στοιχεῖα αὐτοῦ, βοηθούμενοι ἀπό τήν ἐξίσωσιν τοῦ Euler $K + E = A + 2$, ἡ ὁποία συνδέει τό πλῆθος τῶν κορυφῶν, ἑδρῶν καί ἀκμῶν τυχόντος πολυέδρου.

i) Αἱ στερεαί γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι τρίεδροι μέ τάς ἕδρας των 60^0 ἑκάστην. Τότε αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου θά εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καί ἔστω Ε τό πλῆθος αὐτῶν. Θά ἐκφράσωμεν τό πλῆθος Κ τῶν κορυφῶν καί Α τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, ἐκ τοῦ πλήθους Ε τῶν ἑδρῶν του: Ἑκάστη ἕδρα ἔχει 3 κορυφάς, ἀλλά ἑκάστη κορυφή ἀνήκει καί εἰς 3 ἕδρας. Ἄρα τό πολύεδρον θά ἔχη $\frac{3E}{3} = E$ κορυφάς, ἤτοι εἶναι $K = E$ (1). Ἑκάστη ἕδρα ἔχει 3 ἀκμάς, ἀλλά ἑκάστη ἀκμή ἀνήκει εἰς 2 ἕδρας. Ἄρα τό πολύεδρον θά ἔχη $\frac{3E}{2}$ ἀκμάς, ἤτοι εἶναι $A = \frac{3E}{2}$ (2). Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Euler γράφεται: $E + E = \frac{3E}{2} + 2 \Rightarrow 4E = 3E + 4 \Rightarrow E = 4$ (3) καί ἐπομένως τό κανονικόν πολύεδρον εἶναι **τετράεδρον** (σχ.199). Εἰς τό σχῆμα 200 δεικνύεται τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας του. Ἀπό τάς σχέσεις (1) (2) καί (3) ἕπεται ὅτι τό κανονικόν τετράεδρον ἔχει 4 κορυφάς καί 6 ἀκμάς.

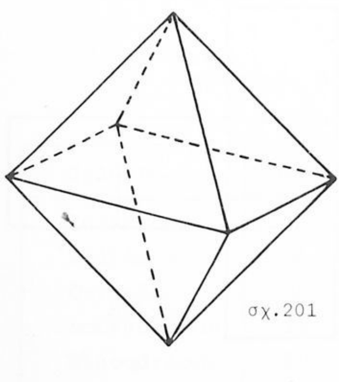


σχ.199

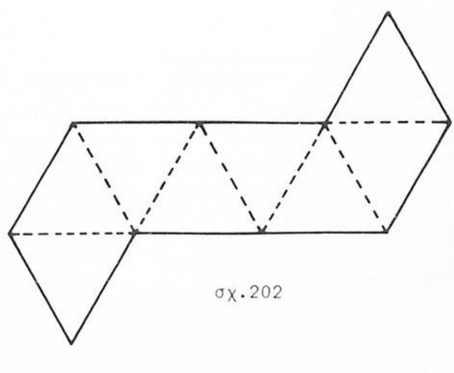


σχ.200

ii) Αἱ στερεαί γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι τετράεδροι μέ τάς ἕδρας των 60^0 ἑκάστην. Τότε αἱ ἕδραι τοῦ πολυέδρου θά εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καί ἔστω Ε τό πλῆθος αὐτῶν. Ἑκάστη ἕδρα ἔχει 3 κορυφάς, ἀλλά ἑκάστη κορυφή ἀνήκει εἰς 4 ἕδρας. Ἄρα αἱ κορυφαί του εἶναι: $K = \frac{3E}{4}$ (4). Ἐπίσης ἑκάστη ἕδρα ἔχει 3 ἀκμάς, ἀλλά ἑκάστη ἀκμή ἀνήκει εἰς 2 ἕδρας. Ἄρα αἱ ἀκμαί του εἶναι $A = \frac{3E}{2}$ (5). Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Euler γράφεται: $\frac{3E}{4} + E = \frac{3E}{2} + 2 \Rightarrow 3E + 4E = 6E + 8 \Rightarrow E = 8$ (6) καί ἐπομένως τό κανονικόν πολύεδρον εἶναι **ὀκτάεδρον** (σχ.201). Εἰς τό σχῆμα 202 δεικνύεται



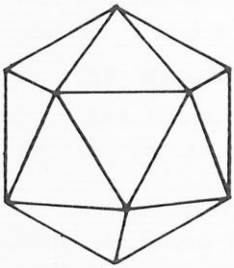
σχ.201



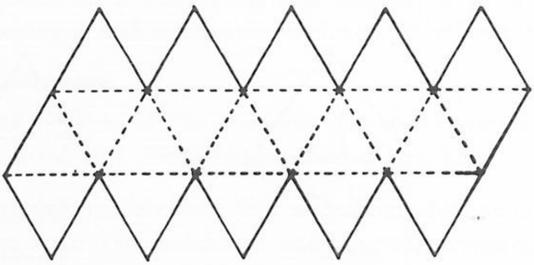
σχ.202

τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας του. Ἀπό τάς σχέσεις (4), (5) καί (6) ἕπεται ὅτι τό κανονικόν ὀκτάεδρον ἔχει 6 κορυφάς καί 12 ἀκμάς.

iii) Αἱ στερεαί γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι πεντάεδροι 60^0 ἑκάστη. Τότε αἱ ἕδραι του θά εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα καί ἔστω Ε εἶναι τό πλῆθος αὐτῶν. Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν $\frac{3E}{5}$ κορυφάς καί $\frac{3E}{2}$ ἀκμάς. Τότε, ἀπό τήν ἐξίσωσιν τοῦ Euler ἔχομεν $\frac{3E}{5} + E = \frac{3E}{2} + 2 \Rightarrow E = 20$ καί ἑπομένως τό κανονικόν πολύεδρον εἶναι **εἰκοσάεδρον** (σχ.203). Εἰς τό σχῆμα 204 δεικνύεται τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας του. Τό κανονικόν εἰκοσάεδρον



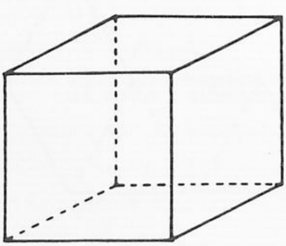
σχ.203



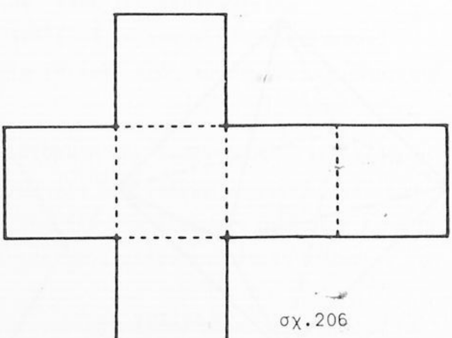
σχ.204

ἔχει 12 κορυφάς καί 30 ἀκμάς.

iv) Αἱ στερεαί γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι τρίεδροι 90^0 ἑκάστη. Τότε αἱ ἕδραι του θά εἶναι τετράγωνα καί ἔστω Ε τό πλῆθος αὐτῶν. Αἱ κορυφαί του τότε θά εἶναι $\frac{4E}{3}$ καί αἱ ἀκμαί του $\frac{4E}{2} = 2E$. Τότε ἡ ἐξίσωσις τοῦ Euler γράφεται: $\frac{4E}{3} + E = 2E + 2 \Rightarrow E = 6$ καί ἑπομένως τό κανονικόν πολύεδρον εἶναι **ἑξάεδρον** (σχ.205). Εἰς τό σχῆμα 206 δεικνύεται τό ἀνάπτυγμα



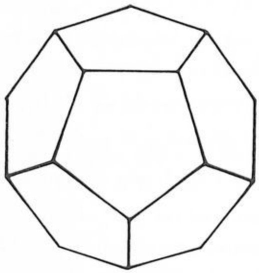
σχ.205



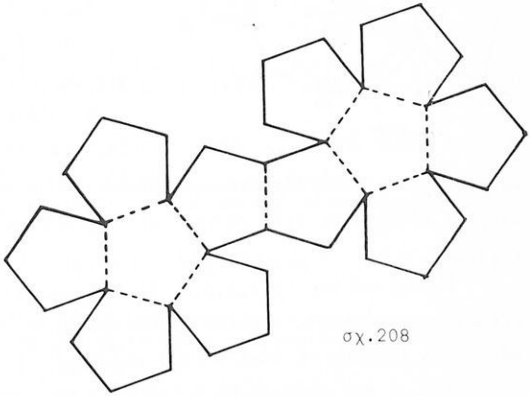
σχ.206

τῆς ἐπιφανείας του. Τό κανονικόν ἑξάεδρον (κύβος) ἔχει 8 κορυφάς καί 12 ἀκμάς.

v) Αἱ στερεαί γωνίαι τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι τρίεδροι 108^0 ἑκάστη. Τότε αἱ ἕδραι του θά εἶναι κανονικά πεντάγωνα καί ἔστω Ε τό πλῆθος αὐτῶν. Αἱ κορυφαί του τότε θά εἶναι $\frac{5E}{3}$ καί αἱ ἀκμαί του $\frac{5E}{2}$. Ἡ ἐξίσωσις τοῦ Euler γράφεται: $\frac{5E}{3} + E = \frac{5E}{2} + 2 \Rightarrow E = 12$ καί ἐπομένως τό κανονικόν πολύεδρον εἶναι **δωδεκάεδρον** (σχ.207). Εἰς τό σχῆμα 208 δεικνύεται τό ἀνάπτυγμα τῆς ἐπιφανείας του. Τό κανονικόν δωδεκάεδρον ἔχει 20 κορυφάς καί 30 ἀκμάς.



σχ.207



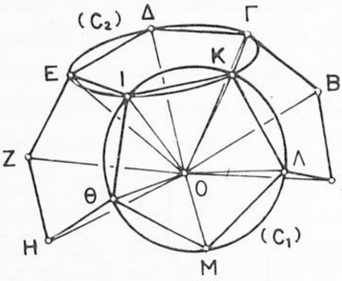
σχ.208

Σημείωσις. Τά πέντε κανονικά πολύεδρα, ὀνομάσθησαν ὑπό τοῦ μελετήσαντος αὐτά Ἥρωνος (2ος μ.Χ. αἰών) **Πλατωνικά στερεά.**

Συνοπτικός πίναξ κανονικῶν πολυέδρων μετά τῶν στοιχείων των

Πολύεδρον	Ἕδραι	Εἶδος ἑδρῶν	Κορυφαί	Ἀκμαί
Τετράεδρον	4	Τρίγωνα	4	6
Ἑξάεδρον	6	Τετράγωνα	8	12
Ὀκτάεδρον	8	Τρίγωνα	6	12
Δωδεκάεδρον	12	Πεντάγωνα	20	30
Εἰκοσάεδρον	20	Τρίγωνα	12	30

32.4. Θεώρημα. Διά κάθε κανονικόν πολύεδρον ὑπάρχουν τρεῖς ὁμόκεντροι σφαῖραι, ἡ πρώτη περιγεγραμμένη, ἡ δεύτερη ἐγγεγραμμένη καί ἡ τρίτη ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν του.



σχ.209

Ἀπόδειξις. Ἄς θεωρήσωμεν ἕνα τμῆμα τῆς ἐπιφανείας ΑΒΓ...ΛΜ τυχόντος κανονικοῦ πολυέδρου (σχ.209). Μία κορυφή Κ μέ τάς ἀκμάς ΚΓ, ΚΙ, ΚΛ πού συντρέχουν εἰς αὐτήν, ὁρίζουν κανονικήν πυραμίδα καί ἑπομένως ἐγγεγραμμένη εἰς σφαῖραν (S_1), ἤτοι τά σημεῖα Γ,Ι,Κ,Λ ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν. Τότε οἱ περιγεγραμμένοι κύκλοι (C_1) καί (C_2) περί τά κανονικά πολύγωνα ΘΙΚΛΜ καί ΓΔΕΙΚ ἀντιστοίχως, ἀνήκουν εἰς τήν σφαῖραν (S_1), διότι ἕκαστος ἐξ'αὐτῶν ἔχει τρία σημεῖα του (Ι,Κ,Λ) καί (Ι,Κ,Γ) ἐπί τῆς σφαίρας (S_1).

Ὁμοίως τά σημεῖα Ι,Ε,Θ,Κ, ὡς κορυφαί ἑτέρας κανονικῆς πυραμίδος, ὁρίζουν σφαῖραν (S_2), εἰς τήν ὁποίαν μάλιστα παρατηροῦμεν, ὡς καί προηγουμένως ὅτι ἀνήκουν οἱ κύκλοι (C_1) καί (C_2).

Ἄρα αἱ δύο σφαῖραι (S_1) καί (S_2) συμπίπτουν εἰς μίαν καί τήν αὐτήν σφαῖραν (S), ἐφ'ὅσον ἔχουν δύο κοινούς κύκλους (C_1) καί (C_2). Εὐκόλως παρατηροῦμεν τώρα ὅτι καί οἱ κύκλοι πού ὁρίζονται ἀπό τάς κορυφάς Α,Β,Γ,Κ,Λ καί Ε,Ζ,Η,Θ,Ι ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν (S) καί γενικῶς ὅλαι αἱ κορυφαί τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου, ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν. Ἄρα διά κάθε κανονικόν πολύεδρον, ὑπάρχει περιγεγραμμένη σφαῖρα.

Ἔστω Ο τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, τό ὁποῖον προφανῶς ἰσαπέχει ἀπό τάς κορυφάς τοῦ πολυέδρου. Τότε τό πολύεδρον δύναται νά διαιρεθῇ εἰς ν ἴσας κανονικάς πυραμίδας μέ κοινήν κορυφήν τό κέντρον Ο καί βάσεις τάς ἕδρας τοῦ κανονικοῦ ν/έδρου.

Αἱ ν ἴσαι κανονικαί πυραμίδες ἔχουν :

i) Ἴσα ὕψη, ἄρα ὑπάρχει ἐγγεγραμμένη εἰς τό πολύεδρον σφαῖρα, μέ κέντρον τό Ο καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασίν του ἀπό μίαν ἕδραν. Ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας καλεῖται καί **ἀπόστημα** τοῦ κανονικοῦ πολυέδρου.

ii) Ἴσα παράπλευρα ὕψη, ἄρα ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, μέ κέντρον τό Ο καί ἀκτίνα τήν ἀπόστασιν τοῦ Ο ἀπό μίαν ἀκμήν.

'Ασκήσεις

435. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἐπιφάνειαι τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἐκ τῆς ἀκμῆς των α.

436. 'Εξετάσατε ὡς πρός τήν συμμετρίαν (ἀξονικήν, κεντρικήν καί συμμετρίαν ἐπιπέδου)τό κανονικόν ὀκτάεδρον.

437. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ τετραέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς του α.

438. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ τετραέδρου, εἶναι κορυφαί κανονικοῦ πολυέδρου. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος του καί νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ τετραέδρου.

439. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ἐξαέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς του α.

440. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ ὀκταέδρου, εἶναι κορυφαί κανονικοῦ πολυέδρου. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος του καί νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγγος του, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ ὀκταέδρου.

441. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ ὀκταέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς του α.

442. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ ἐξαέδρου, εἶναι κορυφαί κανονικοῦ πολυέδρου. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος του καί νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ ἐξαέδρου.

443. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ δωδεκαέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς του α.

444. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, εἶναι κορυφαί κανονικοῦ πολυέδρου. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος του καί ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ εἰκοσαέδρου.

445. Νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος κανονικοῦ εἰκοσαέδρου, ἐκ τῆς ἀκμῆς του α.

446. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ἑδρῶν κανονικοῦ δωδεκαέδρου, εἶναι κορυφαί κανονικοῦ πολυέδρου. Νά εὑρεθῇ τό εἶδος του καί νά ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του, ἐκ τῆς ἀκμῆς α τοῦ δωδεκαέδρου.

447. 'Εκ τῆς ἀκτίνος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκμή ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτήν.

448. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν περιγεγραμμένων σφαιρῶν εἰς ἕν ἕκαστον ἐκ πέντε κανονικῶν πολυέδρων, ἐκ τῆς ἀκμῆς των α.

449. 'Εκ τῆς ἀκμῆς α ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς αὐτά σφαιρῶν.

450. 'Εκ τῆς ἀκμῆς α ἑνός ἑκάστου ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων, νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν τῶν ἐφαπτομένων εἰς τάς ἀκμάς των.

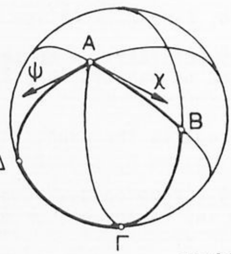
451. 'Εκ τῆς ἀκτίνος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας (ἀπόστημα), εἰς ἕκαστον ἐκ τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων.

452. 'Εάν σφαῖρα (K,R) τμηθῇ ὑπό ἐπιπέδου κατά κύκλον (O,ρ), οὕτως ὥστε νά εἶναι $\rho^2 = \frac{2}{3}R^2$, δείξατε ὅτι ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ἡ πλευρά τοῦ εἰς αὐτήν ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καί ἡ πλευρά τοῦ εἰς αὐτήν ἐπίσης ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου, εἶναι ἴσα πρός τήν ἀκμήν κανονικοῦ τετραέδρου, ἐξαέδρου καί ὀκταέδρου ἀντιστοίχως, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τήν σφαῖραν.

453. Ἑξαέδρου αἱ ἕδραι εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα, ἴσα πρός τάς ἕδρας κανονικοῦ ὀκταέδρου. i) Δείξατε ὅτι εἰς τό ἑξάεδρον ὑπάρχει ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, ii) Δείξατε ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγγεγραμμένων σφαιρῶν εἰς τά δύο στερεά, εἶναι 2/3.

33. Σφαιρικὰ πολύγωνα.

33.1. Ὁρισμοί. Σφαιρικόν πολύγωνον καλεῖται ἕνα τμῆμα σφαιρικῆς ἐπιφανείας, περατούμενον εἰς κυκλικά τόξα μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας, τά ὁποῖα νοοῦνται ὄχι μεγαλύτερα ἡμικυκλίου (σχ.210)



σχ.210

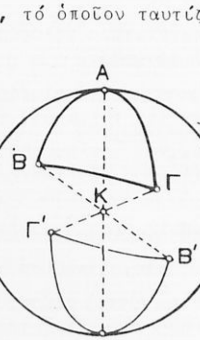
Τά κυκλικά τόξα εἰς τά ὁποῖα περατοῦται ἕνα σφαιρικόν πολύγωνον, καλοῦνται **πλευραί** τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου καί τά κοινά σημεῖα τῶν πλευρῶν καλοῦνται **κορυφαί** αὐτοῦ.

Διαγώνιος σφαιρικοῦ πολυγώνου καλεῖται τό ἔλασσον κυκλικόν τόξον μεγίστου κύκλου (π.χ. ΑΓ) τό ὁποῖον περατοῦται εἰς δύο κορυφάς τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου αἱ ὁποῖαι δέν ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν πλευράν.

Γωνία δύο διαδοχικῶν πλευρῶν ΑΒ καί ΑΔ σφαιρικοῦ πολυγώνου, καλεῖται ἡ γωνία $x\hat{A}y$ τῶν δύο ἐφαπτομένων ἡμιευθειῶν, τῶν ὁμορρόπων πρός τά τόξα ΑΒ καί ΑΔ (σχ.210). Ἡ γωνία αὕτη, ἡ ὁποία συμβολίζεται καί ὡς γωνία $\hat{A}$ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου ἤ καί ὡς $B\hat{A}\Delta$, ἰσοῦται πρός τήν δίεδρον γωνίαν τήν ὁποίαν σχηματίζουν τά ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων τῶν τόξων ΑΒ καί ΑΔ.

Τό ἁπλούστερον τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων, εἶναι τό **σφαιρικόν δίγωνον**, τό ὁποῖον ταυτίζεται μέ σφαιρικήν ἄτρακτον (§ 30.1.4).

33.2. Σφαιρικὸν τρὶγωνον. Τά κύρια στοιχεῖα ἑνός σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 211), εἶναι αἱ τρεῖς πλευραί του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ καί αἱ τρεῖς γωνίαι του $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ αἱ ὁποῖαι, κατά μέτρον, εἶναι ἴσαι πρός τάς διέδρους $K\hat{A}$, $K\hat{B}$, $K\hat{\Gamma}$, ὅπου Κ τό κέντρον τῆς σφαίρας.



σχ.211

Εἰς τά σφαιρικά τρίγωνα διακρίνομεν, ὡς δευτερεύοντα στοιχεῖα, **ὕψη**, **διαμέσους**, **διχοτόμους** τά ὁποῖα εἶναι κυκλικά τόξα μεγίστων κύκλων, καθοριζόμενα ἀντιστοίχως ὅπως καί εἰς τά ἐπίπεδα τρίγωνα. Ἐπίσης διακρίνομεν ἀκτίνας περιγεγραμμένου καί ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Οἱ χαρακτηρισμοί **ἰσοσκελές** καί **ἰσόπλευρον** τρίγωνον, μεταφέρονται καί εἰς τά σφαιρικά τρίγωνα, μέ ἔννοιαν,αὐτῆς τῶν ἐπιπέδων τριγώνων.

Συμμετρικόν τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου ΑΒΓ, καλεῖται τό συμμετρικόν αὐτοῦ ὡς πρός τό κέντρον Κ τῆς σφαίρας. Αὐτό εἶναι σφαιρικόν τρίγωνον τῆς αὐτῆς σφαίρας.

Εἰς κάθε σφαιρικόν τρίγωνον ΑΒΓ, ἀντιστοιχεῖ μία τρίεδρος στερεά γωνία Κ.ΑΒΓ τῆς ὁποίας αἱ δίεδροι γωνίαι, εἶναι ἴσαι κατά μέτρον, μέ τάς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἐξ αὐτοῦ ἕπεται ὅτι διά τάς γωνίας $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ ἑνός σφαιρικοῦ τριγώνου, ἰσχύουν αἱ γνωσταί σχέσεις τῶν διέδρων γωνιῶν μιᾶς τριέδρου στερεᾶς γωνίας, ἤτοι : $2^{L} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6^{L}$ καί $\hat{A} + 2^{L} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$, $\hat{B} + 2^{L} > \hat{A} + \hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma} + 2^{L} > \hat{A} + \hat{B}$.

Τονίζομεν ἰδιαιτέρως ὅτι, ὡς ἕπεται ἀπό τήν πρώτην τῶν προηγουμένων σχέσεων, τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου **δέν εἶναι σταθερόν** καί μάλιστα ὑπερβαίνει τάς δύο ὀρθάς κατά γωνίαν μικροτέραν τῶν 4^{L}, ἡ ὁποία καλεῖται **σφαιρική ὑπεροχή**.

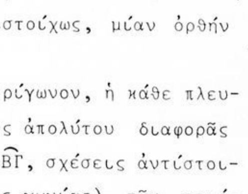
Ἕνα σφαιρικόν τρίγωνον, καλεῖται **ὀρθογώνιον** ἤ **μονορθογώνιον, δισορθογώνιον** ἤ **τρισορθογώνιον**, ἐάν ἔχη ἀντιστοίχως, μίαν ὀρθήν γωνίαν, δύο ἤ τρεῖς.

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, διά κάθε σφαιρικόν τρίγωνον, ἡ κάθε πλευρά εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος καί μεγαλυτέρα τῆς ἀπολύτου διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν, ἤτοι εἶναι $|\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma}| < \widehat{AB} < \widehat{A\Gamma} + \widehat{B\Gamma}$, σχέσεις ἀντίστοιχοι πρός ἐκείνας πού ἰσχύουν διά τάς ἕδρας (ἐπιπέδους γωνίας) τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν.

Ἰσότης. Τά τέσσαρα θεωρήματα πού ἀναφέρονται εἰς τήν ἰσότητα τῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν (§ 15.6 ἕως 15.9), μεταφέρονται καί διά τήν ἰσότητα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καί συνοψίζονται εἰς τήν ἀκόλουθον πρότασιν:

Δύο σφαιρικά τρίγωνα εἶναι ἴσα, ἐάν ἀνήκουν εἰς ἴσας σφαῖρας καί εἰς αὐτά ἀντιστοιχοῦν ἴσαι ἐπίκεντροι στερεαί γωνίαι.

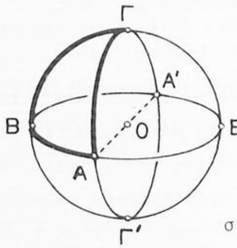
Πολικά σφαιρικά τρίγωνα. Εἰς κάθε σφαιρικόν τρίγωνον ΑΒΓ, καθορίζεται διαδικῶς ἕνα ἄλλο σφαιρικόν τρίγωνον Α΄Β΄Γ΄ τῆς ἰδίας σφαίρας, καλούμενον **πολικόν τρίγωνον** τοῦ ΑΒΓ, τοιοῦτον ὥστε, αἱ ἀντιστοιχοῦσαι εἰς τά δύο τρίγωνα τρίεδροι γωνίαι Κ.ΑΒΓ καί Κ.Α΄Β΄Γ΄, νά εἶναι παραπληρωματικαί. (σχ.212). Διά τά δύο τρίγωνα ἰσχύουν αἱ γνωσταί



σχ.212

σχέσεις τῶν παραπληρωματικῶν τριέδρων στερεῶν γωνιῶν, ἤτοι, ἐάν $\hat{A}, \hat{B}, \hat{\Gamma}$, $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ καί $\hat{A}', \hat{B}', \hat{\Gamma}'$, $\hat{\alpha}', \hat{\beta}', \hat{\gamma}'$ εἶναι τά ἕξ κύρια στοιχεῖα τῶν δύο τριγώνων ἀντιστοίχως, τότε: $\hat{A} + \hat{\alpha}' = \hat{B} + \hat{\beta}' = \hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 2^L$ καί $\hat{\alpha} + \hat{A}' = \hat{\beta} + \hat{B}' = \hat{\gamma} + \hat{\Gamma}' = 2^L$.

33.3. Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου. Ἔστω ΑΒΓ σφαιρικόν τρίγωνον ἐπί σφαίρας (Ο,R) καί (ΑΒΓ) τό ἐμβαδόν του (σχ.213). Αἱ πλευραί τοῦ τριγώνου, ὡς κυκλικά τόξα μεγίστων κύκλων, τέμνονται ἀνά δύο εἰς τά Α΄, Β΄, Γ΄ τά ὁποῖα εἶναι ἀντιδιαμετρικά τῶν Α, Β, Γ ἀντιστοίχως. Τά Β, Γ, Β΄, Γ΄ εὑρίσκονται ἐπί τοῦ αὐτοῦ μεγίστου κύκλου, διαιροῦντος τήν σφαῖραν εἰς δύο ἡμισφαίρια, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀνήκουν τά Α καί Α΄. Τό ἡμισφαίριον εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει τό σημεῖον Α, διαιρεῖται εἰς τέσσαρα σφαιρικά τρίγωνα καί ἐάν μέ Ε συμβολίσωμεν τήν σφαιρικήν ἐπιφάνειαν, ἔχομεν :



σχ.213

$$(AB\Gamma) + (AB\Gamma') + (AB'\Gamma) + (AB'\Gamma') = \frac{E}{2} \qquad (1).$$

Ἀλλά εἶναι :

$$(AB\Gamma) + (AB\Gamma') = \{\text{"Ατρ.}\Gamma\Gamma'\}$$

$$(AB'\Gamma) = \{\text{"Ατρ.}BB' - (AB\Gamma)\} \quad \text{καί}$$

$$(AB'\Gamma') = \{\text{"Ατρ.}AA' - (A'B'\Gamma')\} = \{\text{"Ατρ.}AA' - (AB\Gamma)\}$$

Τότε ἡ σχέσις (1) γράφεται:

$$\{\text{"Ατρ.}\Gamma\Gamma'\} + \{\text{"Ατρ.}BB' - (AB\Gamma)\} + \{\text{"Ατρ.}AA' - (AB\Gamma)\} = \frac{E}{2} \Rightarrow (\text{"Ατρ.}AA') + (\text{"Ατρ.}BB') + (\text{"Ατρ.}\Gamma\Gamma') - 2(AB\Gamma) = \frac{E}{2} \Rightarrow (AB\Gamma) = \frac{1}{2}\{(\text{"Ατρ.}AA') + (\text{"Ατρ.}BB') + (\text{"Ατρ.}\Gamma\Gamma') - \frac{E}{2}\} = \frac{1}{2}\{E\frac{\hat{A}}{4^L} + E\frac{\hat{B}}{4^L} + E\frac{\hat{\Gamma}}{4^L} - \frac{E}{2}\} = \frac{E}{8}\{\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}-2^L}{1^L}\}$$

. Ἄρα τό ἐμβαδόν σφαιρικοῦ τριγώνου, δίδεται ἀπό τόν τύπον:

$$(AB\Gamma) = \frac{E}{8}\cdot\frac{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}-2^L}{1^L}$$

ὅπου Ε ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια.

Παρατήρησις. Ἐπειδή $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma} - 2^L$ εἶναι ἡ σφαιρική ὑπεροχή τοῦ τριγώνου, ἕπεται ἀπό τόν προηγούμενον τύπον ὅτι:

Τό ἐμβαδόν σφαιρικοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρός τό 1/8 τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας, ἐπί τό μέτρον τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς τοῦ τριγώνου, ἐκπεφρασμένης εἰς ὀρθάς γωνίας.

Ἀσκήσεις

454. Δείξατε ὅτι τά ὕψη παντός σφαιρικοῦ τριγώνου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

455. Δείξατε ότι αί διάμεσοι παντός σφαιρικοῦ τριγώνου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

456. Δείξατε ότι αί διχοτόμοι παντός σφαιρικοῦ τριγώνου, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

457. 'Εάν σφαιρικόν τρίγωνον ἔχει δύο πλευράς παραπληρωματικάς, δείξατε ότι καί αί ἀπέναντι αὐτῶν γωνίαι τοῦ τριγώνου εἶναι παραπληρωματικαί. 'Επίσης νά δειχθῆ ότι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν παραπληρωματικῶν πλευρῶν, διέρχεται ἀπό τό μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς

458. Δείξατε ότι ἑκάστη γωνία σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς αὐτοῦ.

458. 'Εάν σφαιρικόν τετράπλευρον ἔχει ὅλας τάς γωνίας του ἴσας, δείξατε ότι ἔχει καί τάς διαγωνίους του ἴσας.

459. 'Εάν σφαιρικοῦ τετραπλεύρου ὅλαι αί πλευραί εἶναι ἴσαι, δείξατε ότι αί διαγώνιοι αὐτοῦ εἶναι κάθετοι καί ἀλληλοδιχοτομοῦνται.

460. Δείξατε ότι ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια δύναται νά διαιρεθῆ εἰς τέσσαρα ἰσόπλευρα καί ἴσα σφαιρικά τρίγωνα.

461. Δείξατε ότι ἡ σφαιρική ἐπιφάνεια, δύναται νά διαιρεθῆ εἰς δώδεκα ἴσα σφαιρικά πεντάγωνα.

462. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν δισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ μή ὀρθή γωνία εἶναι 150^0 καί ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας $R=6$ cm.

463. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τρισορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου εἰς σφαῖραν (O,R) καί νά ὑπολογισθῆ ὁ λόγος αὐτοῦ πρός τήν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΝΑΤΟΝ

34. Σημειακοί μετασχηματισμοί.

34.1. Γενικά. Οἱ σημειακοί μετασχηματισμοί, ὅπως καθορίσθησαν εἰς τό ἐπίπεδον, ἰσχύουν αὐτούσιοι σχεδόν καί εἰς τόν χῶρον. Ἐπαναλαμβάνομεν τά κυριώτερα θέματα, γενικεύοντας αὐτά, ὅπου εἶναι ἀπαραίτητον, διά τόν χῶρον.

Ὁρισμός. Σημειακός μετασχηματισμός καλεῖται κάθε μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῶν σημείων τοῦ χώρου, εἰς τόν χῶρον.

Ἡ ἀπεικόνισις γίνεται ἐπί τῇ βάσει ἑνός αὐθαιρέτως ἐκλεγέντος, ἀλλά **καθορισμένου νόμου** F. Ἐάν ἕνα σημεῖον A, ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον A', συμβολικῶς γράφομεν $A \xrightarrow{F} A'$. Ἐάν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος, τότε ὁ μετασχηματισμός ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τό A' εἰς τό A, καλεῖται **ἀντίστροφος** τοῦ προηγουμένου καί συμβολίζεται μέ F^{-1}. Ἔχομεν δηλαδή ὅτι $A' \xrightarrow{F^{-1}} A$ ἤ $A \underset{F^{-1}}{\overset{F}{\rightleftarrows}} A'$.

Ταυτοτικός μετασχηματισμός καλεῖται ὁ μετασχηματισμός ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει κάθε σημεῖον εἰς ἑαυτό καί συμβολίζεται μέ F^0, ἤτοι εἶναι: $A \xrightarrow{F^0} A$.

Ἰσοδύναμοι μετασχηματισμοί καλοῦνται δύο μετασχηματισμοί F_1 καί F_2, ὅταν τό τυχόν σημεῖον A τό ἀπεικονίζουν, τόσον ὁ ἕνας ὅσον καί ὁ ἄλλος, εἰς τό αὐτό σημεῖον A'. Συμβολίζομεν $F_1 = F_2$.

Γινόμενον μετασχηματισμῶν. Ἄς θεωρήσωμεν δύο σημειακούς μετασχηματισμούς F_1 καί F_2 καί τυχόν σημεῖον X τοῦ χώρου, τοιοῦτον ὥστε: $X \xrightarrow{F_1} \Psi$ καί $\Psi \xrightarrow{F_2} Z$. Ὁ μετασχηματισμός F' ὁ ὁποῖος ἀπεικονίζει τό σημεῖον X εἰς τό Z, καλεῖται γινόμενον τῶν δύο μετασχηματισμῶν F_1 καί F_2 καί συμβολίζεται $F' = F_1 \circ F_2$, ἤτοι εἶναι:

$$X \xrightarrow{F'} Z \quad ἤ \quad X \xrightarrow{F_1 \circ F_2} Z$$

Ἐάν εἶναι $F_1 = F_2 = F$, τότε συμβολίζομεν $F_1 \circ F_2 = F \circ F = F^2$

Ἐπαγωγικῶς καθορίζεται τό γινόμενον ν μετασχηματισμῶν, ἀντιστοίχως τό F^{ν}.

Τό γινόμενον μετασχηματισμῶν, ἐν γένει, δέν εἶναι πρᾶξις ἀντιμεταθετική, ἤτοι : $F_1 \circ F_2 \neq F_2 \circ F_1$.

Περιοδικός μετασχηματισμός καλεῖται κάθε μετασχηματισμός F, διά τόν ὁποῖον ἰσχύει $F^{\nu} = F^{0}$, ὅπου φυσικός ἀριθμός. Ὁ μικρότερος φυσικός ἀριθμός ν, διά τόν ὁποῖον ἰσχύει ἡ ἀνωτέρω σχέσις, καλεῖται περίοδος τοῦ μετασχηματισμοῦ F.

Ἐνελικτικός μετασχηματισμός ἤ ἐνέλιξις καλεῖται κάθε περιοδικός μετασχηματισμός μέ περίοδον $\nu = 2$.

Σύμμορφος καλεῖται ἕνας σημειακός μετασχηματισμός ἐάν διατηρῇ τά μέτρα τῶν γωνιῶν.

Ἰσομετρία καλεῖται ἕνας σημειακός μετασχηματισμός, ἐάν διατηρῇ τά μήκη. Ἡ ἰσομετρία διατηρεῖ καί τάς γωνίας καί ἑπομένως μία ἰσομετρία εἶναι καί σύμμορφος μετασχηματισμός.

34.2. Γνωστοὶ σημειακοὶ μετασχηματισμοὶ ἀπὸ τὰ προηγούμενα.

Εἰς τά προηγούμενα, ἔχουν μελετηθῆ οἱ ἀκόλουθοι σημειακοί μετασχηματισμοί.

i) **Ἀξονική συμμετρία** (βλ. ἐδάφ. 10).

ii) **Συμμετρία ἐπιπέδου** (βλ. ἐδάφ. 11).

iii) **Κεντρική συμμετρία** (βλ. ἐδάφ. 12).

Καί οἱ τρεῖς προαναφερθέντες μετασχηματισμοί, εἶναι ἰσομετρίαι.

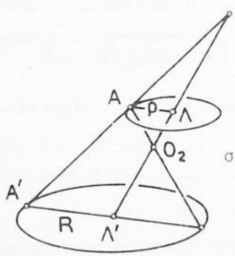
34.3. Μεταφορά. Εἶναι γνωστή ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, δοθέντος ἑνός διανύσματος $\vec{\alpha}$, καλουμένου **δείκτου**, τό τυχόν σημεῖον Α τοῦ χώρου, ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον Α΄, τοιοῦτον ὥστε $\vec{AA'} = \vec{\alpha}$. Ἡ μεταφορά εἶναι ἰσομετρία καί τά σχήματα τά ἀπεικονίζει εἰς ἴσα, διότι ἐπί πλέον διατηρεῖ τόν προσανατολισμόν.

34.4. Ὁμοιοθεσία. Εἶναι γνωστή ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο, καλουμένου **κέντρου** καί πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$, καλουμένου **λόγου**, τό τυχόν σημεῖον Α τοῦ χώρου, ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον Α΄, τοιοῦτον ὥστε $\vec{OA'} = k\cdot\vec{OA}$. Ἡ ὁμοιοθεσία, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ $F(O,k)$, εἶναι σύμμορφος μετασχηματισμός καί καλεῖται θετική ἤ ἀρνητική ἀντιστοίχως, ἐάν ὁ πραγματικός ἀριθμός k εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός.

Τό ἀντίστροφον μιᾶς ὁμοιοθεσίας $F(O,k)$, εἶναι ὁμοιοθεσία $F(O,\frac{1}{k})$ τοῦ αὐτοῦ κέντρου καί ἀντιστρόφου λόγου.

Τό γινόμενον δύο ὁμοιοθεσιῶν $F_1(O_1,k_1)$ καί $F_2(O_2,k_2)$, εἶναι ὁμοιοθεσία $F(O,k)$, μέ τό κέντρον της Ο ἐπί τῆς εὐθείας O_1O_2 καί μέ λόγον ἴσον πρός τό γινόμενον $k_1\cdot k_2$ τῶν λόγων τῶν δύο ὁμοιοθεσιῶν.

Συμπληρωματικῶς ἀναφέρομεν τάς ἀκολούθους προτάσεις τῶν ὁποίων αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογοι ἐκείνων τῆς ἐπιπεδομετρίας.



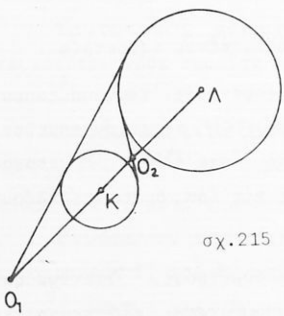
σχ.214

i) Τό ὁμοιόθετον ἐπιπέδου, μή διερχομένου διά τοῦ κέντρου τῆς ὁμοιοθεσίας, εἶναι ἐπίπεδον παράλληλον.

ii) Τό ὁμοιόθετον κύκλου εἶναι κύκλος (σχ.214). Τά ἐπίπεδα τῶν δύο κύκλων εἶναι παράλληλα, ὅταν τό κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας δέν ἀνήκει εἰς οὐδέν ἐξ αὐτῶν.

iii) Δύο κύκλοι μέ τά ἐπίπεδά των παράλληλα, ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας (ἤ ὁμοιότητος) O_1 καί O_2 (σχ.214), τά ὁποῖα μετά τῶν κέντρων τῶν κύκλων ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα. Πράγματι, εἶναι : $\frac{O_1\Lambda}{O_1\Lambda'}=\frac{\rho}{R}$, $\frac{O_2\Lambda}{O_2\Lambda'}=\frac{\rho}{R}$ $\Rightarrow$

$\frac{O_1\Lambda}{O_1\Lambda'}=\frac{O_2\Lambda}{O_2\Lambda'}$ $\Rightarrow$ $(O_1, O_2, \Lambda, \Lambda')=-1$. Ἐκ τῶν δύο κέντρων, τό O_1 καλεῖται ἐξωτερικόν καί τό O_2 ἐσωτερικόν.



σχ.215

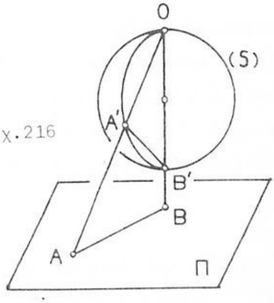
iv) Τό ὁμοιόθετον σφαίρας εἶναι σφαῖρα.

v) Δύο σφαῖραι ἔχουν δύο κέντρα ὁμοιοθεσίας (ἤ ὁμοιότητος) O_1 καί O_2 (σχ.215), τά ὁποῖα μετά τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν Κ καί Λ, ἀποτελοῦν ἁρμονικήν τετράδα. Ἐξ αὐτῶν, τό O_1 καλεῖται ἐξωτερικόν καί τό O_2 ἐσωτερικόν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

34.5. Ἀντιστροφή. Εἶναι γνωστή ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας. Ὑπενθυμίζομεν ὅτι, δοθέντος σταθεροῦ σημείου Ο, καλούμενον **κέντρον** ἤ **πόλος** τῆς ἀντιστροφῆς καί πραγματικοῦ ἀριθμοῦ $k \neq 0$ καλούμενος **δύναμις** τῆς ἀντιστροφῆς, τό τυχόν σημεῖον Α τοῦ χώρου ἀπεικονίζεται εἰς σημεῖον Α΄, τοιοῦτον ὥστε νά εἶναι $(\vec{OA})(\vec{OA'})=k$. Ἡ ἀντιστροφή, ἡ ὁποία συμβολίζεται μέ $H(O,k)$, καλεῖται θετική ἤ ἀρνητική ἀντιστοίχως, ἐάν ὁ ἀριθμός k εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός. Εὐκόλως παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν : $A \xrightarrow{H(O,k)} A' \Leftrightarrow A' \xrightarrow{H(O,k)} A$, δηλαδή τό ἀντίστροφον μιᾶς ἀντιστροφῆς εἶναι ἡ αὐτή ἀντιστροφή, ἤτοι $H^{-1}(O,k)=H(O,k)$ καί ἑπομένως ἡ ἀντιστροφή εἶναι **ἐνέλιξις**.

Συμπληρωματικῶς ἀναφέρομεν τάς ἀκολούθους προτάσεις, τῶν ὁποίων αἱ ἀποδείξεις εἶναι ἀνάλογοι ἐκείνων τῆς ἐπιπεδομετρίας.

i) Τό ἀντίστροφον ἐπιπέδου (Π) μέ πόλον ἀντιστροφῆς σημεῖον Ο ἐκτός αὐτοῦ, εἶναι σφαῖρα (S) διερχομένη ἀπό τόν πόλον ἀντιστροφῆς (σχ.216). Πράγματι, εἶναι : $(\vec{OA})(\vec{OA'}) = (\vec{OB})(\vec{OB'}) = k$ σταθερόν, $\hat{B} = 1^{\llcorner} \Rightarrow \hat{A'} = 1^{\llcorner} \Rightarrow A' \in (S)$.

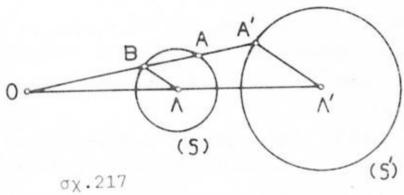


σχ.216

ii) Τό ἀντίστροφον ἐπιπέδου μέ πόλον ἀντιστροφῆς ἐπ'αὐτοῦ, εἶναι τό αὐτό ἐπίπεδον.

iii) Τό ἀντίστροφον σφαίρας (S) μέ πόλον ἀντιστροφῆς Ο ἐπί τῆς ἐπιφανείας της, εἶναι ἐπίπεδον (Π) (σχ.216).

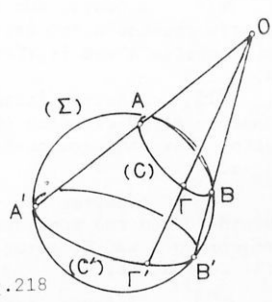
iv) Τό ἀντίστροφον σφαίρας (S) μέ πόλον ἀντιστροφῆς σημεῖον Ο ὄχι ἐπί τῆς ἐπιφανείας της (σχ.217), εἶναι σφαῖρα (S') ὁμοιόθετος τῆς (S) μέ λόγον ὁμοιοθεσίας $k_1 = \frac{k}{\mathscr{D}}$, ὅπου k ἡ δύναμις τῆς ἀντιστροφῆς καί $\mathscr{D}$ ἡ δύναμις τοῦ πόλου Ο ὡς πρός τήν σφαῖραν (S). Πράγματι, ἐάν $A \xrightarrow{H(O,k)} A'$ ἔχομεν:



σχ.217

$$(\vec{OA})(\vec{OA'}) = k, \text{ ἀλλά } (\vec{OA})(\vec{OB}) = \mathscr{D} \Rightarrow \frac{(\vec{OA})(\vec{OA'})}{(\vec{OA})(\vec{OB})} = \frac{k}{\mathscr{D}} \Rightarrow (\vec{OA'}) = \frac{k}{\mathscr{D}}(\vec{OB}),$$ σχέσις χαρακτηριστική τῆς ὁμοιοθεσίας.

v) Τό ἀντίστροφον κύκλου (C) μέ πόλον ἀντιστροφῆς σημεῖον Ο ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου του, εἶναι κύκλος (C'), ὑπάρχει δέ σφαῖρα (Σ), περιέχουσα καί τούς δύο κύκλους (σχ.218). Πράγματι, ἀπό τόν κύκλον (C) διέρχονται ἄπειροι σφαῖραι. Ἄς φαντασθῶμεν δύο ἐξ αὐτῶν (S_1) καί (S_2). Τό ἀντίστροφον τοῦ κύκλου (C), ἀνήκει ἀσφαλῶς ἐπί σφαίρας (S_1') ἀντιστρόφου τῆς (S_1), ὅπως ἐπίσης καί ἐπί σφαίρας (S_2') ἀντιστρόφου τῆς (S_2). Ἄρα τό ἀντίστροφον τοῦ κύκλου (C) εἶναι ἡ τομή δύο σφαιρῶν (S_1') καί (S_2') καί ἑπομένως εἶναι κύκλος (C'). Διά τόν ἐντοπισμόν τοῦ κύκλου (C'), ἀρκεῖ νά λάβωμεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ κύκλου (C) καί νά κατα-



σχ.218

σκευάσωμεν τά ἀντίστροφα αὐτῶν Α΄, Β΄, Γ΄, τά ὁποῖα καθορίζουν τόν κύκλον (C΄) πίσης παρατηροῦμεν ὅτι, ἐπειδή $(\vec{OA})(\vec{OA'}) = (\vec{OB})(\vec{OB'}) = (\vec{O\Gamma})(\vec{O\Gamma'}) = k$, ὅπου k ἡ δύναμις τῆς ἀντιστροφῆς, τά ἕξ σημεῖα Α, Α΄, Β, Β΄, Γ, Γ΄ εἶναι ὁμοσφαιρικά, ἤτοι ὑπάρχει σφαῖρα (Σ) διερχομένη ἐξ αὐτῶν. Τό k μάλλιστα, παριστᾶ καί τήν δύναμιν τοῦ σημείου Ο ὡς πρός τήν σφαῖραν (Σ).

'Ασκήσεις

464. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ παραλλήλους ἄξονας, εἶναι μεταφορά.

465. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο ἀξονικῶν συμμετριῶν μέ τεμνομένους ἄξονας, εἶναι στροφή περί ἄξονα κάθετον ἐπί τῶν δύο ἀξόνων.

466. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο ἐπιπέδων συμμετριῶν ὡς πρός παράλληλα ἐπίπεδα, εἶναι μεταφορά.

467. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο ἐπιπέδων συμμετριῶν ὡς πρός ἐπίπεδα τεμνόμενα, εἶναι στροφή περί τήν τομήν των.

468. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο κεντρικῶν συμμετριῶν, εἶναι μεταφορά.

469. 'Εάν τέσσαρα σχήματα εἶναι ἀνά δύο ὁμοιόθετα, δείξατε ὅτι τά ἕξ κέντρα τῶν ὁμοιοθεσιῶν των, εὑρίσκονται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

470. Δίδονται δύο σφαῖραι (K,R) καί (Λ,ρ). Μεταβλητή σφαῖρα (S) ἐφάπτεται αὐτῶν ἐξωτερικῶς εἰς τά Α καί Β. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου.

471. Δείξατε ὅτι τό τετράεδρον μέ κορυφάς τά κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν δοθέντος τετραέδρου, εἶναι ὁμοιόθετον τοῦ δοθέντος.

472. Δίδεται σφαῖρα (K,R) καί σημεῖον Σ ἐκτός αὐτῆς. Νά κατασκευασθῇ τό σύνολον τῶν εὐθειῶν τῶν διερχομένων διά τοῦ Σ καί τεμνουσῶν τήν σφαῖραν εἰς τά Α καί Β, οὕτως ὥστε νά εἶναι 2 ΣΒ = 5 ΣΑ.

473. Δοθεισῶν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν (ε_1) καί (ε_2), δείξατε ὅτι ὑπάρχουν δύο ἀξονικαί συμμετρίαι, φέρουσαι τήν μίαν τῶν ἀσυμβάτων ἐπί τῆς ἄλλης.

474. Δίδονται δύο ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί σταθερόν σημεῖον Ο. Μεταβλητόν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπεικονίζεται μέσω ὁμοιοθεσίας F(O,-2) εἰς σημεῖον Α΄ τοῦ ἐπιπέδου (Ρ). Νά εὑρεθοῦν οἱ γ.τόποι τῶν σημείων Α καί Α΄.

475. Δίδονται ἐπίπεδον (Π), σφαῖρα (K,R) καί σημεῖον Ο. Μεταβλητόν σημεῖον Α τοῦ ἐπιπέδου (Π), ἀπεικονίζεται μέσω ὁμοιοθεσίας F(O,3) εἰς σημεῖον Α΄ ἐπί τῆς σφαιρικῆς ἐπιφανείας. Νά εὑρεθοῦν οἱ γ.τόποι τῶν σημείων Α καί Α΄.

476. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) καί σημεῖον Ο. Μεταβλητή εὐθεῖα (ε) διερχομένη διά τοῦ Ο, τέμνει τά ἐπίπεδα (Π) καί (Ρ) εἰς τά σημεῖα Α καί Β, οὕτως ὥστε νά εἶναι $(OA)(OB)=k^2$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς εὐθείας (ε).

477. Δίδονται ἐπίπεδον (Π), σφαῖρα (O,R) καί σημεῖον Α. Μεταβλητή εὐθεῖα (ε) διερχομένη διά τοῦ Α, τέμνει τήν σφαῖραν καί τό ἐπίπεδον εἰς τά σημεῖα Β καί Γ, οὕτως ὥστε νά εἶναι $(OA)(OB)=k^2$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ.τόπος τῆς εὐθείας (ε).

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ