

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Δ 2 ΜΜΤ
Seymour's (M)-Koumpouris (S)

ΡΜΑΝΟΥ
Ι. ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΣΑΡΛΙΝΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Α. ΑΡΡ. ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

137

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
"Ι ΣΙΔΕΡΗΣ",
ΑΘΗΝΑΙ

Γερμανός (Μ.) - Κατσαρλίνος (Σ.)

Μ. ΓΕΡΜΑΝΟΥ

ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΓΕΝ. ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ

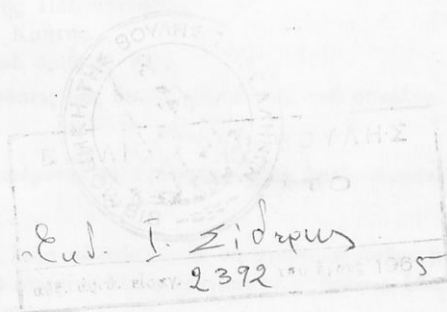
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β' ΓΥΜΝ. ΑΡΡ. ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Νέο αναλυτικό πρόγραμμα)

Β. Δ. 651/17.10.1964



ΕΚΔΟΣΕΙΣ "Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ," ΑΘΗΝΑΙ

252
K15
ΣΤ28
2581

ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΗ

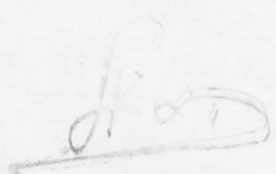
ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΗ
ΕΚΔΟΣΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κάθε αντίτυπο φέρει την υπογραφή του ενός συγγραφέως.

ΕΚΔΟΣΗ

ΕΚΔΟΣΗ



ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'

§ 1. Σύνολα *N*

1.1 Έννοια του συνόλου

Αρχίζουμε με μια άπλη έννοια πολύ χρήσιμη για να κατανοήσουμε τα Μαθηματικά, με την έννοια του Συνόλου.

Στη καθημερινή ζωή χρησιμοποιούμε φράσεις σαν τις επομένους :

1. 'Η άνθοδέσμη του γραφείου μας.
2. Τα εργαλεία της κασετίνας μου.
3. 'Η συλλογή των γραμματοσήμων μου.
4. Τα λουλούδια του κήπου μας.
5. 'Η τάξη μου.
6. 'Η σχολική μας αθλητική ομάδα.
7. Οί κάτοικοι της Γής
8. Οί μαθηταί των Γυμνασίων της Θεσ/νίκης.
9. 'Ο σύλλογος των καθηγητών μας.
10. Τα ψηφία της λέξεως «βιβλίο».
11. Το κοπάδι (πρόβατα και γίδια) του Νίκα.
12. Οί λίμνες της Πελοποννήσου.
13. Τα ὄρη της Κρήτης.
14. Τα ψηφία του αριθμοῦ 1524.

Οί παραπάνω φράσεις μᾶς δίνουν την έννοια του συνόλου. Πρόκειται για μία :

Έννοια που αναφέρεται σέ αντικείμενα τὰ ὅποια ἀποτελοῦν μία ὁλότητα.

Σημείωση : Τη λέξη «ἀντικείμενο» τη χρησιμοποιούμε με εὐρύτερη σημασία. Μπορεῖ νὰ σημαίνει ὕλικά πράγματα π.χ. βόλους, ζῶα. Ἀλλά καὶ ιδέες, αἰσθήματα, ἀρχές.

Τὰ ἀντικείμενα που ἀποτελοῦν ἓνα σύνολο τὰ ὀνομάζουμε **στοιχεῖα** τοῦ συνόλου. Ἐτσι τοῦ συνόλου τῶν ψηφίων τῆς λέξεως «καὶ» στοιχεῖα εἶναι τὰ κ, α, ι.

1.2 «Καλῶς ὀρισμένο» σύνολο

Ἄν σᾶς ρωτήσουν :

α) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν ποὺ ἀποτελοῦν τὴν ἀθλητικὴ ὁμάδα τοῦ σχολείου σας.

β) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ὑψηλῶν φίλων σας ;

Στὴ α' ἐρώτηση θὰ ἀπαντήσετε χωρὶς δισταγμούς. Μπορεῖτε νὰ βρῆτε ἂν ἓνας μαθητὴς εἶναι ἢ δὲν εἶναι μέλος τῆς ἀθλητικῆς ὁμάδος.

Στὴ β' ἐρώτηση μερικοὺς φίλους πιθανὸν νὰ διστάσετε νὰ τοὺς χαρακτηρίσετε ὑψηλοὺς. Γιατί ; Τὸ κριτήριον «ὑψηλὸς φίλος» δὲν εἶναι σαφές. Ἀντίθετα ἂν σᾶς ρωτοῦσαν «ποῖο εἶναι τὸ σύνολο τῶν φίλων σας ποὺ εἶναι ὑψηλότεροι ἀπὸ 1,60 μ. θὰ μπορούσατε νὰ ἀπαντήσετε χωρὶς δισταγμούς.

«Ὅταν μπορούμε νὰ ἀπαντήσουμε μὲ βεβαιότητα ὅτι ἓνα ὁποιοδήποτε ἀντικείμενο ἀνήκει ἢ δὲν ἀνήκει σ' ἓνα σύνολο, τότε τὸ σύνολο λέγεται «καλῶς ὀρισμένο».

Ἔτσι τὸ σύνολο «τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ 125» εἶναι ἓνα «καλῶς ὀρισμένο» σύνολο, γιατί μπορούμε μὲ βεβαιότητα νὰ ἀπαντήσουμε ἂν ἓνα ψηφίο π.χ. τὸ 7 ἀνήκει ἢ δὲν ἀνήκει σ' αὐτό.

Τὸ σύνολο «καλοὶ μαθηταὶ» δὲν εἶναι «καλῶς ὀρισμένο» γιατί ὑπάρχουν περιπτώσεις στὶς ὁποῖες διστάζουμε νὰ χαρακτηρίσουμε ἂν ἓνας μαθητὴς εἶναι καλὸς ἢ δὲν εἶναι.

Ἐνῶ τὸ σύνολο «ἀριστοῦχοι μαθηταὶ» εἶναι «καλῶς ὀρισμένο»· γιατί ὑπάρχει σαφὲς γνῶρισμα, ὁ βαθμὸς, μὲ τὸν ὁποῖο κρίνουμε ἂν ἓνας μαθητὴς εἶναι ἀριστοῦχος ἢ δὲν εἶναι.

Στὰ ἐπόμενα ὅταν μιλάμε γιὰ σύνολα θὰ ἐννοοῦμε τὰ «καλῶς ὀρισμένα» σύνολα.

1.3 Συμβολισμοὶ

Συνηθίζουμε, γιὰ λόγους ἀπλότητος καὶ γενικότητος,

α) Ἐνα σύνολο νὰ τὸ συμβολίζουμε μ' ἓνα κεφαλαῖο γράμμα π.χ. τὸ σύνολο Α ἢ τὸ σύνολο Β κλπ.

β) Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου νὰ τὸ συμβολίζουμε μ' ἓνα μικρὸ γράμμα. π.χ. τὸ στοιχεῖο α ἢ τὸ στοιχεῖο β κλπ.

γ) Τὴ φράση «τὸ στοιχεῖο α ἀνήκει στὸ σύνολο Α» νὰ τὴν σημειώνουμε:

$$a \in A$$

(τὸ $\in$ εἶναι σύμβολο «ἀνήκει»)

ένω τή φράση «τὸ στοιχείο β δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο A νὰ τὴ σημειώσουμε:

$$\beta \notin A.$$

(τὸ $\notin$ εἶναι σύμβολο τοῦ «δὲν ἀνήκει»).

Παράδειγμα: Ἄς ὀνομάσουμε A τὸ σύνολο τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 125. θὰ ἔχουμε

$$1 \in A$$

$$2 \in A$$

$$3 \notin A$$

$$4 \notin A$$

$$5 \in A$$

δ) Γιὰ νὰ δηλώσουμε ὅτι μερικὰ ἀντικείμενα ἀποτελοῦν ἓνα σύνολο τὰ τοποθετοῦμε μεταξὺ 2 ἀγκίστρων.

Παράδειγμα: Τὸ σύνολο Φ τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας γράφεται

$$\Phi = \{ \alpha, \epsilon, \eta, \iota, \omicron, \upsilon, \omega \}$$

ὁ τρόπος αὐτὸς τοῦ συμβολισμοῦ τοῦ συνόλου λέγεται «**δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του**» ἢ πιὸ σύντομα «**δι' ἀναγραφῆς**».

Παρατηρήσεις

α) Ἡ σειρὰ τοποθετήσεως τῶν στοιχείων μεταξὺ τῶν ἀγκίστρων μπορεῖ νὰ εἶναι ὅποιαδήποτε

π.χ. τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως ΤΑΚΗΣ γράφεται

$$\{ A, H \} \quad \text{ἢ} \quad \{ H, A \}$$

β) Κάθε στοιχεῖο ἐνὸς συνόλου λαμβάνεται καὶ γράφεται μιὰ μόνο φορὰ

π.χ. τὸ σύνολο τῶν ψηφίων τῆς λέξεως «βιβλίον» εἶναι τὸ

$$\{ \beta, \iota, \lambda, \omicron \}$$

$$\text{καὶ ὅχι} \quad \{ \beta, \iota, \beta, \lambda, \iota, \omicron \}$$

1.4 Ἄλλοι τρόποι συμβολισμοῦ τοῦ συνόλου

Μάθαμε πὼς γιὰ νὰ σημειώσουμε ὅτι μερικὰ στοιχεῖα ἀποτελοῦν ἓνα σύνολο, τὰ τοποθετοῦμε μεταξὺ δύο ἀγκίστρων.

Πὼς θὰ δηλώσουμε ὅτι ἓνα μεγάλο πλῆθος στοιχείων ἀποτελεῖ ἓνα σύνολο;

α) Νὰ γράψουμε συμβολικὰ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων μέχρι 100.000.

Παρατηρούμε ότι τα στοιχεία του συνόλου τούτου παρουσιάζουν μία διάταξη (σειρά). Αντί λοιπόν να γράψουμε όλους τους άκεραίους γράφουμε τους τρεις πρώτους (κατά τη σειρά τους) έπειτα τρεις τελείες (πού σημαίνουν και ούτω καθεξής) και τέλος τó τελευταίο στοιχείο του συνόλου

$$\text{π. χ. } A = \{ 0, 1, 2, \dots, 100.000 \}$$

β) "Αν θελήσουμε να παραστήσουμε τó σύνολο A των μαθητών των Γυμνασίων Πατρών, δέν είναι εύκολο να θέσουμε τά όνόματα όλων αυτών των μαθητών μεταξύ άγκίστρων αλλά ούτε και βρίσκονται σε διάταξη (σειρά) όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

Γι' αυτό έχουμε έναν άλλο άπλό τρόπο :

1ον) Θέτουμε μεταξύ των 2 άγκίστρων ένα τυχαίο στοιχείο του συνόλου, πού τó παριστάνουμε συχνά με τó x ή ψ

2ον) Βάζουμε έπειτα δύο τελείες : ή ένα μικρό κατακόρυφο τμήμα | πού αντικαθιστά τη λέξη «όπου» ή τη φράση «τοιούτον ώστε».

3ον) Θέτουμε πάλι τó x ακολουθούμενο από τó χαρακτηριστικό γνώρισμα (ιδιότητα) πού έχουν τά στοιχεία του συνόλου. Έτσι τó σύνολο A γράφεται :

$A = \{ x \mid x \text{ μαθητής γυμνασίου Πατρών} \}$ και διαβάζεται :
σύνολο A με στοιχεία x όπου x μαθητής γυμνασίου Πατρών.

"Άλλα παραδείγματα :

1) Τó σύνολο $A = \{ \text{Δευτέρα, Τρίτη, Τετάρτη, Πέμπτη, Παρασκευή, Σάββατο, Κυριακή} \}$ γράφεται

$$A = \{ x \mid x \text{ ήμέρα της εβδομάδος} \}$$

2) τó σύνολο $B = \{ 0, 1, 2, 3, \dots, 9 \}$ γράφεται

$$B = \{ x \mid x \text{ άκεραίος μικρότερος του } 10 \}$$

3) Τó σύνολο $\Gamma = \{ \alpha, \epsilon, \upsilon, \omicron, \omega, \iota, \eta \}$ γράφεται

$$\Gamma = \{ x \mid x \text{ φωνήεν του } \alpha\lambda\phi\alpha\beta\eta\tau\omicron\upsilon \text{ μας} \}$$

Ό τρόπος αυτός της γραφής ενός συνόλου λέγεται «**διά περιγραφής**».

1.5 Είδικα σύνολα

α) Τó σύνολο A των φωνηέντων της λέξεως $\Gamma\eta$ είναι

$$A = \{ \eta \}$$

Τό σύνολο B των φωνηέντων της λέξεως «φώς» είναι $B = \{ \omega \}$

Καθώς βλέπουμε καθένα από τά σύνολα A, B έχει ένα μόνο μέλος ή στοιχείο.

Όταν ένα σύνολο έχει ένα μόνο στοιχείο ή μέλος, λέγεται «**μονομελές σύνολο**».

Ανάλογα, τα σύνολα που έχουν δύο στοιχεία ή μέλη, λέγονται **διμελή** ή **ζεύγη**.

β) Ποιό είναι το σύνολο των μηνών που αρχίζουν από Α

1η απάντηση: Δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο

2η απάντηση: Είναι ένα σύνολο χωρίς στοιχεία

Είναι σκόπιμο να δεχθούμε τη 2η απάντηση. Ανάλογα ενεργούμε και στην Αριθμητική όταν χρησιμοποιούμε τον αριθμό μηδέν που δηλώνει την έλλειψη μονάδων.

Ένα σύνολο χωρίς στοιχείο το συμβολίζουμε με το $\emptyset$ ή $\{\}$ και το διαβάζουμε «**κενό σύνολο**».

Προσοχή. Δεν πρέπει να συγχέουμε το κενό σύνολο $\emptyset$ με τον αριθμό 0 ή με το μονομελές σύνολο $\{0\}$. Το κενό σύνολο δεν έχει στοιχεία ενώ το σύνολο $\{0\}$ έχει ένα στοιχείο το 0.

1.6 Γραφική παράσταση συνόλου

Συχνά μας διευκολύνει να δώσουμε ένα διάγραμμα ή γεωμετρική εικόνα σ' ένα σύνολο

Ας πάρουμε το σύνολο $A = \{a, b, \gamma\}$

Για να δείξουμε ότι τα στοιχεία a, b, γ αποτελούν ένα σύνολο, τα τοποθετούμε στο εσωτερικό μιās κλειστής γραμμής σχ. (1). Το διάγραμμα (1) λέγεται διάγραμμα του Venn.

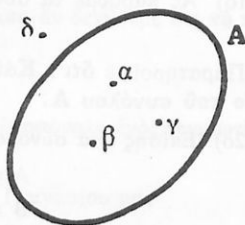
Απ' αυτό συνάγουμε :

ότι $a \in A$

$b \in A$

$\gamma \in A$

$\delta \notin A$



Σχ. 1

Σημείωση : Η συστηματική χρησιμοποίηση των διαγραμμάτων στα μαθηματικά οφείλεται στον Άγγλο μαθηματικό Venn (1834—1923).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Να δώσετε τρία παραδείγματα συνόλων
- 2) Να γράψετε με δύο τρόπους (με «**άναγραφή**» και με «**περιγραφή**») το σύνολο των αισθήσεών σας.

3) Νά βρῆτε δύο λέξεις πού τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τους νά εἶναι μονομελές.

4) Νά γράψετε μὲ «ἀναγραφή» τὰ σύνολα

$$\alpha) A = \{ x \mid x \text{ ἡπειρος τῆς Γῆς} \}$$

$$\beta) B = \{ x \mid x \text{ φωνῆεν τῆς λέξεως «καί»} \}$$

$$\gamma) \Gamma = \{ x \mid x \text{ μάθημα τῆς τάξεώς μας} \}$$

5) Νά γράψετε μὲ «περιγραφή» τὰ σύνολα

$$A = \{ \text{Ἰούνιος, Ἰούλιος, Αὐγουστος} \}$$

$$B = \{ \text{Μάιος, Μάρτιος} \}$$

$$\Gamma = \{ \alpha, \epsilon, \upsilon, \iota, \omicron, \omega, \eta \}$$

6) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν συμμαθητῶν σας μὲ ἡλικία 5 ἐτῶν

7) Νά παραστήσετε γραφικῶς—μὲ διάγραμμα—τὸ σύνολο. $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$ καὶ νά γράψετε συμβολικὰ ὅτιτὰ στοιχεῖα α, β, γ ἀνήκουν στὸ σύνολο.

8) Νά ἐξηγήσετε γιατί τὸ σύνολο τῶν ωραίων πόλεων τῆς Ἑλλάδος δὲν εἶναι «καλῶς ὀρισμένο σύνολο».

9) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν μηνῶν πού ἔχουν 31 ἡμέρες.

10) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἐβδομάδος πού ἀρχίζουν ἀπὸ Τ.

§ 2. Ὑποσύνολα

1ο) Ἀς πάρουμε τὰ σύνολα $A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$

$$B = \{ \alpha, \gamma \}$$

Παρατηροῦμε ὅτι : **Κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου B εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου A.**

2ο) Ἐπίσης στὰ σύνολα A καὶ B

$$A = \{ x \mid x \text{ ἄνθρωπος} \}$$

$$B = \{ x \mid x \text{ ἄνδρας} \}$$

Κάθε στοιχεῖο τοῦ B (κάθε ἄνδρας) εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ A (εἶναι καὶ ἄνθρωπος).

«Ὅταν κάθε στοιχεῖο ἐνὸς συνόλου B εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου A, τότε λέγομε ὅτι τὸ σύνολον B εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου A.

Γράφουμε $B \subseteq A$ (1)

καὶ διαβάζουμε «τὸ σύνολο B εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου A».

Ίσοδύναμες φράσεις είναι : «**τὸ B περιέχεται στὸ A**» καὶ «**τὸ A περιέχει τὸ B**».

Παρατηρήσεις :

α) Εἶναι λογικὸ νὰ δεχθοῦμε ὅτι ἓνα σύνολο A περιέχει τὸ ἴδιο τὸ A ἢ ἄλλοιῶς : τὸ σύνολο A εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του

$$A \subseteq A$$

Παράδειγμα : "Αν πάρουμε τὸ σύνολο A τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου καὶ τὸ ὑποσύνολο αὐτοῦ B, τῶν μαθητῶν ποὺ μαθαίνουν Ἀγγλικά, θὰ ἔχουμε $B \subseteq A$ (1)

"Αν ὅλοι οἱ μαθηταὶ τοῦ γυμνασίου ἀποφασίσουν νὰ μάθουν Ἀγγλικά τότε θὰ εἶναι $B = A$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται $A \subseteq A$

β) Γιὰ νὰ τονίσουμε ὅτι ἓνα σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ περιέχει κι' ἄλλα στοιχεῖα ἐκτὸς ἀπὸ ἐκεῖνα ποὺ περιέχει ἓνα ὑποσύνολό του, τὸ $B = \{1, 2\}$, λέγομε ὅτι τὸ B εἶναι **εἶναι γνήσιο ὑποσύνολο** τοῦ A καὶ γράφουμε

$$B \subset A$$

$$\text{Π.χ. ἂν } A = \{2, 5, 8, 12\}$$

$$B = \{5, 8, 12\}$$

Ἔχουμε B γνήσιο **ὑποσύνολο** τοῦ A καὶ γράφουμε $B \subset A$.

Ἐνῶ τὸ A **δὲν** εἶναι γνήσιο τοῦ ἑαυτοῦ του A ἀλλὰ ἀπλῶς **ὑποσύνολο**

$$A \subseteq A$$

γ) Συμφωνοῦμε μὲ τὸν ὀρισμὸ τοῦ **ὑποσυνόλου** ἂν δεχθοῦμε ὅτι **τὸ κενὸ σύνολο εἶναι ὑποσύνολο κάθε συνόλου A**

$$\emptyset \subseteq A$$

δ) Συχνὰ ἐργαζόμαστε μὲ σύνολα ποὺ εἶναι ὑποσύνολα ἐνὸς γενικωτέρου συνόλου π.χ.

τὸ σύνολο A τῶν μαθητῶν τῆς A' τάξεως τοῦ Γυμνασίου μας

$$A = \{x \mid x \text{ μαθητῆς } A' \text{ τάξ. Γυμνασίου μας}\}$$

τὸ σύνολο B τῶν μαθητῶν τῆς B' τάξ. τοῦ Γυμνασίου μας

$$B = \{x \mid x \text{ μαθητῆς } B' \text{ τάξ. Γυμνασίου μας}\}$$

εἶναι ὑποσύνολα γνήσια τοῦ συνόλου Γ τοῦ μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου μας

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ μαθητῆς τοῦ Γυμνασίου μας}\}$$

Τὸ σύνολο Γ ποὺ περιέχει τὰ σύνολα A καὶ B λέγεται σύνολο ἀναφορᾶς ἢ ὑπερσύνολο τῶν A καὶ B.

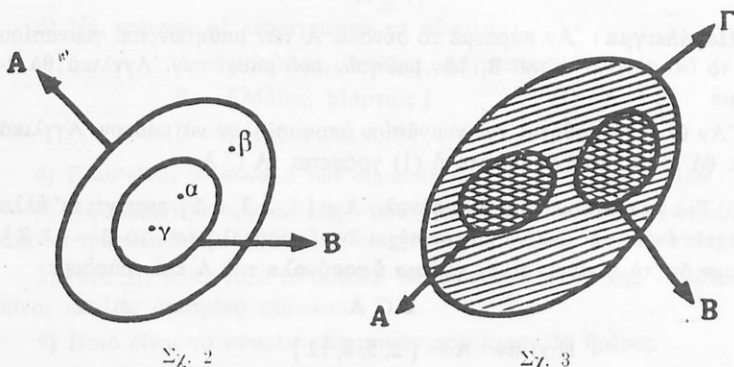
Γραφική Παράσταση

Στο σχ. (2) έχουμε μία γραφική εικόνα τών συνόλων

$$A = \{ a, \beta, \gamma \}$$

$$B = \{ a, \gamma \}$$

$$\text{ώστε } B \subset A$$



Στο σχ. (3) έχουμε μία γραφική εικόνα τών συνόλων

$$A = \{ x \mid x \text{ μαθητής Α' τάξ. Γυμνασίου μας} \}$$

$$B = \{ x \mid x \text{ μαθητής Β' τάξ. Γυμνασίου μας} \}$$

$$\Gamma = \{ x \mid x \text{ μαθητής του Γυμνασίου μας} \}$$

2.1 'Ιδιότητες τής σχέσεως «τò A υποσύνολο τού B»

α) Είδαμε ότι : κάθε σύνολο A είναι υποσύνολο τού έαυτού του

$$A \subset A$$

ή ιδιότης αυτή ονομάζεται **'Ανακλαστική**.

β) 'Ας πάρουμε σύνολα

$$A = \{ 2, 3 \}$$

$$B = \{ 2, 3, 4 \}$$

και

$$\Gamma = \{ 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε

$$A \subset B \quad \left. \vphantom{A \subset B} \right\} \quad (1)$$

$$B \subset \Gamma \quad \left. \vphantom{B \subset \Gamma} \right\} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι και $A \subset \Gamma$ (3)

Δηλ. η σχέση $A \subset \Gamma$ είναι λογική συνέπεια ή αλλιώς συνάγεται από τις σχέσεις $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$

Αυτό σημειώνεται συμβολικά

$$\left. \begin{array}{l} A \subset B \\ B \subset \Gamma \end{array} \right\} \Rightarrow A \subset \Gamma$$

Η ιδιότητα αυτή λέγεται μεταβατική ιδιότητα.

(Το σύμβολο $\Rightarrow$ χρησιμοποιείται αντί για τη φράση «άπό αυτό συμπεραίνουμε» ή «άπό αυτό συνάγουμε» και λέγεται σύμβολο της συναγωγής).

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

11) Νά βρῆτε όλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου

$$\alpha) A = \{2, 3\} \quad \beta) \text{ τοῦ συνόλου } B = \{2, 3, 5\}$$

12) Ἐν $A = \{2, 3\}$

$$B = \{2, 3, 4\}$$

$\Gamma = \{2, 3, 4, 5\}$ Νά παραστήσετε γραφικῶς τὰ σύνολα καὶ νά βρῆτε τίς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξύ τους.

13) Νά σχηματίσετε γραφικὴ παράσταση τῶν συνόλων A καὶ B στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις

$$\alpha) \text{ Ἐν } A = \{1, 2\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{2, 3, 4\}$$

$$\beta) \text{ Ἐν } A = \{1, 2\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$\gamma) \text{ Ἐν } A = \{1, 2\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{3, 4\}$$

14) Ποιὲς σχέσεις ὑπάρχουν μεταξύ τῶν συνόλων

$$A = \{x \mid x \text{ ἄνθρωπος}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ Εὐρωπαῖος}\}$$

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ Ἰταλὸς}\}$$

Νά σχηματίσετε καὶ τὰ σχετικὰ διαγράμματα.

15) Ἐν $A \subset B$ καὶ $B \subset A$ ἰὶ συνάγετε γιὰ τὰ σύνολα A καὶ B

16) Νά βρῆτε ἓνα γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν ζώων.

§ 3. Ίσα σύνολα

“Ας γράψουμε τὰ σύνολα A καὶ B τῶν συμφώνων τῶν λέξεων «Γράμματα» καὶ «Γεωμετρία».

$$A = \{ \gamma, \rho, \mu, \tau \}$$

$$B = \{ \gamma, \mu, \tau, \rho \}$$

(ὕπενθυμίζουμε ὅτι τὸ ἴδιο στοιχεῖο τὸ λαμβάνουμε μία μόνο φορά).

“Αν προσέξουμε τὰ σύνολα A καὶ B διαπιστώνουμε ὅτι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα.

«Ὅταν δύο σύνολα ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα λέγονται ἴσα».

Παραδείγματα ἴσων συνόλων

$$1) \quad \{ \alpha, \beta \} = \{ \beta, \alpha \}$$

$$2) \quad \{ \alpha, \beta, \gamma \} = \{ \alpha, \gamma, \beta \}$$

$$3) \quad \{ \alpha, \beta, \gamma \} = \{ \beta, \alpha, \gamma \}$$

$$4) \text{ “Αν } A = \{ x \mid x \text{ ἄρτιος ἀριθμὸς} \}$$

$$\text{καὶ } B = \{ x \mid x \text{ ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖται διὰ } 2 \}$$

$$\text{τότε } A = B$$

3.1 Ἰδιότητες ἴσων συνόλων

Εἶναι φανερό 1) ὅτι $A = A$ **Ἀνακλαστική ἰδιότης**

2) ἂν $A = B$ τότε καὶ $B = A$

ἢ συμβολικὰ $A = B \implies B = A$ **Συμμετρική ἰδιότης**

ἡ ἰδιότης αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει τὴν ἀντικατάσταση τοῦ συνόλου A μὲ τὸ ἴσο τοῦ B ἀλλὰ καὶ τὴν ἀντικατάσταση τοῦ B μὲ τὸ ἴσο τοῦ A

$$3) \left. \begin{array}{l} A = B \\ B = \Gamma \end{array} \right\} \implies A = \Gamma \text{ **Μεταβατική ἰδιότης**}$$

ἡ μεταβατική ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διαπιστώσουμε τὴν ἰσότητα δύο συνόλων A καὶ Γ χωρὶς νὰ τὰ συγκρίνουμε ἀπ’ εὐθείας ἀλλὰ διὰ μέσου ἑνὸς ἄλλου συνόλου B ἴσου μὲ αὐτά.

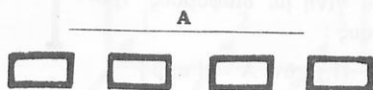
(Π.χ. δύο κύπελλα ποὺ βγῆκαν ἀπὸ τὸ ἴδιο καλοῦπι λέμε ὅτι εἶναι ἴσα χωρὶς νὰ τὰ συγκρίνουμε. Τὸ συμπεραίνουμε ἀπὸ τὸ ὅτι βγῆκαν ἀπ’ τὸ ἴδιο καλοῦπι).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 17) Να βρῆτε ἓνα σύνολο ἴσο μὲ τὸ σύνολον $A = \{a, b\}$
 18) Να βρῆτε σύνολα ἴσα μὲ τὸ σύνολο $A = \{1, 2, 3\}$.
 19) Μπορεῖ ἓνα μονομελὲς σύνολο νὰ εἶναι ἴσο μ' ἓνα διμελές. Ἐξηγήσατε τὴν ἀπάντησί σας.
 20) Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{b, \gamma, \rho\}$ $B = \{5, 3, 6\}$ $\Gamma = \{\rho, \gamma, b\}$
 $\Delta = \{8, 9\}$ $Z = \{o\}$ $H = \{b, 3, 5\}$ $\Theta = \{9, 8\}$ $I = \emptyset$. Ποιὰ ἀπ' αὐτὰ εἶναι ἴσα.
 21) Να βρῆτε τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν λέξεων «στρατός», «ἀόρατος» καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἴσα.

§ 4. Ἴσοδύναμα σύνολα

Ἄς προσέξουμε τὰ σύνολα A καὶ B τοῦ σχήματος 4.



Παρατηροῦμε ὅτι

1) Σὲ κάθε ὀρθογώνιο τοῦ συνόλου A ἀντιστοιχεῖ ἓνα **μόνο** ἰσόπλευρο τρίγωνο τοῦ B .



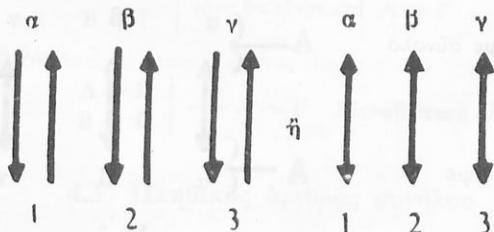
2) Ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε ἰσόπλευρο τρίγωνο ἀντιστοιχεῖ ἓνα **μόνο** ὀρθογώνιο.

Σχ. 4

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὰ σύνολα Γ καὶ Δ τοῦ σχήματος (5).

$$\Gamma = \{a, b, \gamma\}$$

$$\Delta = \{1, 2, 3\}$$



Σχ. 5

Ἡ διπλὴ αὐτὴ ἀντιστοίχιση μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν δύο συνόλων λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία** ἢ **ἀντιστοιχία ἓνα-μ' ἓνα**.

«Όταν μεταξύ των στοιχείων 2 συνόλων A και B υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ή αντιστοιχία, ένα-μ' ένα τότε τα σύνολα λέγονται ισοδύναμα».

ή σχέση «το σύνολο A είναι ισοδύναμο με το σύνολο B » γράφεται

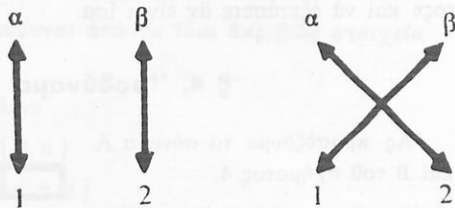
$$A \sim B$$

Αντιπαράδειγμα. Στα σύνολα $A = \{a, \beta\}$ και $B = \{1, 2, 3\}$ παρατηρούμε ότι σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί ένα στοιχείο του B . Δεν είναι όμως ισοδύναμο, γιατί και σε κάθε στοιχείο του B δεν αντιστοιχεί ένα στοιχείο του A .

Σημειώνουμε ότι μια αντιστοίχιση **ένα μ' ένα** μπορεί να γίνει με διάφορους τρόπους :

Π.χ. αν $A = \{a, \beta\}$

$B = \{1, 2\}$



Σχ. 6

έχουμε τις αντιστοιχίσεις που δείχνει το σχήμα 6.

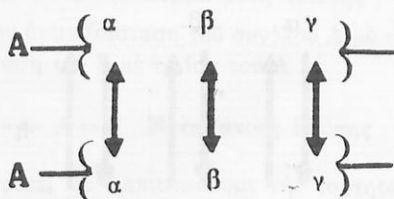
Παρατήρηση

Πρέπει να προσέχουμε να μη συγχέουμε τα ίσα σύνολα με τα ισοδύναμα. Τα ίσα είναι και ισοδύναμα αλλά τα ισοδύναμα δεν είναι κατ' ανάγκην ίσα.

Τα σύνολα $A = \{a, \beta\}$ και $B = \{1, 2\}$ ενώ είναι ισοδύναμα δεν είναι ίσα.

4.2 Ίδιότητες ισοδυνάμων συνόλων

Ας λάβουμε σύνολο



ξαναγράφουμε

Σχ. 7

α) Από την παραπάνω αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση συνάγουμε ότι :

$$A \sim A \quad \text{Ανακλαστική ιδιότητα}$$

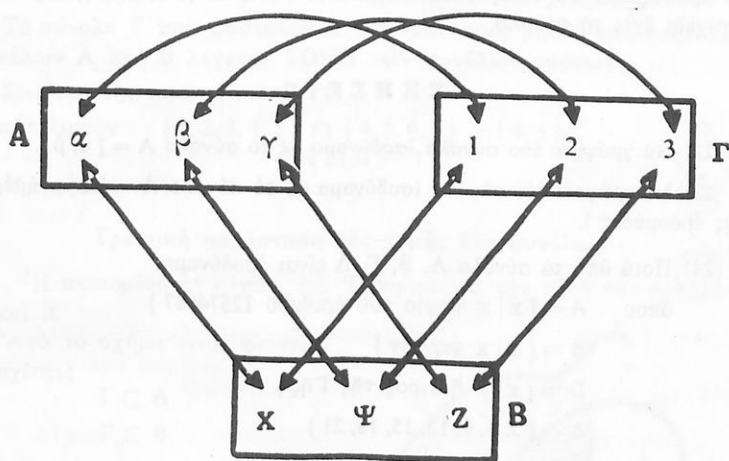
β) Είναι φανερή ή «συνεπαγωγή»

$$A \sim B \implies B \sim A$$

Δηλ. "Αν σύνολο A είναι ισοδύναμο με άλλο σύνολο B τότε και το B θα είναι ισοδύναμο με το A . Συμμετρική ιδιότητα

γ) ὥς πάρουμε ένα σύνολο $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ ένα άλλο σύνολο B ισοδύναμο με το A , $B = \{x, y, z\}$ κι' ένα τρίτο σύνολο Γ ισοδύναμο με το B

$$\Gamma = \{1, 2, 3\}$$



Σχ. 8

ἀπὸ τὶς ἀντιστοιχίσεις τοῦ σχ. (8) συνάγουμε ὅτι:

$$\left. \begin{array}{l} \text{ὅν} \quad A \sim B \\ \text{καὶ} \quad B \sim \Gamma \end{array} \right\} \text{ τότε θὰ εἶναι καὶ } A \sim \Gamma$$

ἢ πιὸ συμβολικὰ

$$\left. \begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{array} \right\} \implies A \sim \Gamma \quad \text{Μεταβατικὴ ιδιότης}$$

4.3 Πληθικὸς ἀριθμὸς συνόλου

"Ας γράψουμε δύο ισοδύναμα σύνολα A καὶ B

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να γράψουμε κι' άλλα όσα θέλουμε, σύνολα ισοδύναμα με αυτά.

Όλα τα σύνολα τα ισοδύναμα με το Α έχουν ένα κοινό **χαρακτηριστικό γνώρισμα**. Έχουν **το ίδιο πλήθος** στοιχείων.

Αυτό το χαρακτηριστικό γνώρισμα συμβολίζει ο αριθμός **4** και λέγεται **πληθικός** αριθμός του συνόλου Α και κάθε άλλου ισοδυνάμου με το Α Είναι δηλαδή ο πληθικός αριθμός μιὰ **έννοια** που σχηματίζουμε αν πάρουμε ισοδύναμα σύνολα και προσέξουμε μόνο το πλήθος των στοιχείων τους χωρίς να προσέξουμε το είδος τους. Είναι απάντησις στην ερώτηση «**πόσα**» στοιχεία έχει το σύνολο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 22) Να γράψετε δύο σύνολα ισοδύναμα με το σύνολο $A = \{ \alpha, \beta \}$.
 23) Να γράψετε δύο σύνολα ισοδύναμα με το σύνολο $A = \{ x \mid x \text{ ήμερα της εβδομάδος} \}$.

- 24) Ποιά από τα σύνολα Α, Β, Γ, Δ είναι ισοδύναμα.

όπου $A = \{ x \mid x \text{ ψηφίο του αριθμού } 12574687 \}$

$B = \{ x \mid x \text{ φωνήεν} \}$

$\Gamma = \{ x \mid x \text{ ήπειρος της Γης} \}$

$\Delta = \{ 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21 \}$

- 25) Είναι ίσοι οι πληθικοί αριθμοί των συνόλων.

$A = \{ x \mid x \text{ κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου} \}$

$B = \{ x \mid x \text{ μικρό γράμμα του αλφαβήτου} \}$

Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

- 26) Κατά πόσους τρόπους μπορούν να αντιστοιχισθούν ένα - μ' ένα τα στοιχεία των συνόλων

$A = \{ \text{Πέτρος, Μαρία} \}$

$B = \{ \text{Νίκος, Έλένη} \}$

- 27) Κατά πόσους τρόπους μπορούν ν' αντιστοιχισθούν ένα - μ' ένα τα στοιχεία των συνόλων

$A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$

$B = \{ 1, 2, 3 \}$

§ 5. Πράξεις με σύνολα

5.1 Τομή συνόλων

Θα μάθουμε, πώς από τα δύο σύνολα σχηματίζουμε ένα νέο σύνολο την **Τομή** τους

αν είναι σύνολο $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

και σύνολο $B = \{4, 5, 6, 7\}$

Παρατηρούμε ότι τα σύνολα A και B έχουν τα στοιχεία 4 και 5 κοινά.

Το σύνολο Γ που αποτελείται από τα κοινά μόνον στοιχεία δύο συνόλων A και B λέγεται **ΤΟΜΗ** των συνόλων τούτων

Σύμβολο της τομής είναι το $\cap$

Έχουμε λοιπόν $\{1, 2, 3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6, 7\} = \{4, 5\}$

$$\Gamma \quad A \cap B = \Gamma$$

και διαβάζουμε A τομή $B = \Gamma$

Γραφική παράσταση της τομής δύο συνόλων

Η σκιασμένη επιφάνεια σχ. 9 παριστάνει την τομή των συνόλων A και B .

Από το σχήμα είναι φανερό οι σχέσεις

$$\Gamma \subset A$$

$$\Gamma \subset B$$

"Άλλο παράδειγμα τομής

αν είναι

$$A = \{x \mid x \text{ τριαντάφυλλο}\}$$

$$B = \{x \mid x \text{ κόκκινο άνθος}\}$$

τότε

$$A \cap B = \Gamma = \{x \mid x \text{ κόκκινο τριαντάφυλλο}\}$$

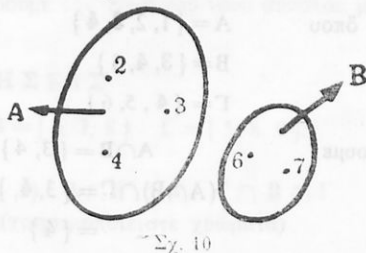
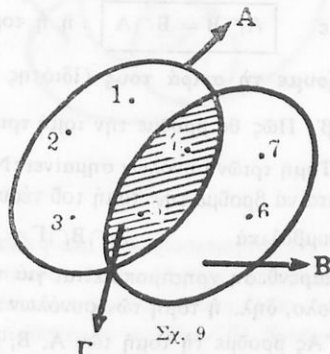
Ειδικές περιπτώσεις τομής

α) αν $A = \{2, 3, 4\}$

$$B = \{6, 7\}$$

είναι φανερό ότι $A \cap B = \emptyset$

Τα σύνολα A και B που δεν έ-



χουν κοινά στοιχεία λέγονται **ξένα** μεταξύ τους.

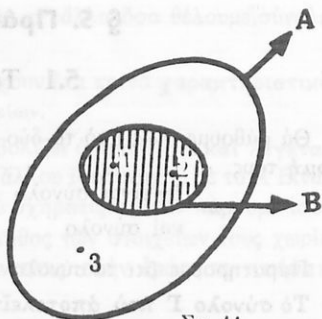
$$\beta) \text{ αν } A = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{και } B = \{1, 2\}$$

τότε

$$A \cap B = \{1, 2\} = B$$

$$\text{"Ωστε } B \subset A \implies A \cap B = B$$



Σχ. 11

5.2 'Ιδιότητες της τομής συνόλων

α'. Ας λάβουμε

$$A = \{2, 3, 4\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

τότε

$$A \cap B = \{4\}$$

$$B \cap A = \{4\}$$

ώστε

$$A \cap B = B \cap A$$

ή η τομή δύο συνόλων **δεν αλλάζει αν άλ-**

λάξουμε τη σειρά τους (ιδιότης αντιμεταθέσεως).

β'. Πώς θα βρούμε την τομή τριών συνόλων ;

Τομή τριών συνόλων σημαίνει : Νά βρούμε την τομή των δύο πρώτων και έπειτα νά βρούμε την τομή του νέου συνόλου με το τρίτο σύνολο

ή συμβολικά

$$A \cap B \cap \Gamma = (A \cap B) \cap \Gamma$$

(ή παρένθεση χρησιμοποιείται για νά δείξει ότι μέσα σ' αυτήν υπάρχει ένα σύνολο, δηλ. η τομή των συνόλων A και B.

"Ας βρούμε τη τομή των A, B, Γ

όπου

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{3, 4, 5\}$$

$$\Gamma = \{4, 5, 6\}$$

έχουμε

$$A \cap B = \{3, 4\}$$

$$(A \cap B) \cap \Gamma = \{3, 4\} \cap \{4, 5, 6\}$$

$$= \{4\}$$

Άλλά θα μπορούσαμε να συνδυάσουμε και διαφορετικά τα τρία σύνολα A, B, Γ. Θα μπορούσαμε π.χ.

Να βρούμε 1) $B \cap \Gamma = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 5\}$
και έπειτα

$$2) A \cap (B \cap \Gamma) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 5\} \\ = \{4\}$$

Παρατηρούμε ότι και με τους δύο τρόπους βρήκαμε το ίδιο αποτέλεσμα.

$$\text{Άρα} \quad (A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$$

δηλ. για να βρούμε την τομή τριών συνόλων μπορούμε 1) Να βρούμε την τομή των δύο πρώτων και έπειτα να βρούμε την τομή του νέου συνόλου με το τρίτο ή 2) Να βρούμε την τομή του 2ου και 3ου συνόλου κι' έπειτα να βρούμε την τομή του 1ου συνόλου με την τομή που βρήκαμε από το 2ο και 3ο σύνολο.

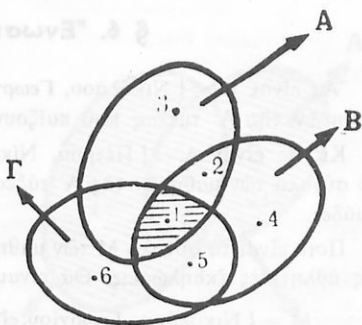
Η ιδιότης αυτή λέγεται **προσεταιριστική**.

Γραφική παράσταση της τομής τριών συνόλων (σχ. 12).

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 4, 5\}$$

$$\Gamma = \{1, 5, 6\}$$



Σχ. 12

Παρατηρήσεις

α) Αν συνδυάσουμε την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα καταλήγουμε ότι οποιαδήποτε σειρά κι αν ακολουθήσουμε στην εύρεση της τομής τριών συνόλων το τελικό αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο (Δοκιμάστε).

2) Για να βρούμε τη τομή 4 ή περισσότερων συνόλων θα βρούμε την τομή των 3 πρώτων και έπειτα θα βρούμε την τομή του νέου συνόλου με το 4ο σύνολο κ.ο.κ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

28) Αν σύνολο $A = \{2, 5\}$ $B = \{5, 7, 8\}$ $\Gamma = \{5, 8, 9\}$.

Να σχηματίσετε τα σύνολα

$$1) A \cap B \quad 2) A \cap \Gamma \quad 3) B \cap \Gamma \quad 4) A \cap B \cap \Gamma$$

και να τα παραστήσετε γραφικώς (χρησιμοποιείτε χρώματα)

$$29) \text{ ἄν } \begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ φωνῆεν}\} \\ B &= \{x \mid x \text{ ψηφίο τῆς λέξεως «και»}\} \end{aligned}$$

Νά σχηματίσετε τὸ σύνολο $A \cap B$

$$30) \text{ ἄν } \begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ μονοψήφιος ἀριθμὸς}\} \\ B &= \{x \mid x \text{ ἀκέραιος μεγαλύτερος τοῦ } 5\} \end{aligned}$$

Νά εὑρεθῇ τὸ σύνολο $A \cap B$

$$31) \text{ ἄν } \begin{aligned} A &= \{x \mid x \text{ ψηφίο τῆς λέξεως «μητέρας»}\} \\ \text{καὶ} \quad B &= \{x \mid x \text{ ψηφίο τῆς λέξεως «πατέρας»}\} \end{aligned}$$

Νά βρῆτε τὸ σύνολο $A \cap B$

$$32) \text{ Νά βρῆτε τὸ σύνολο } A \cap A$$

§ 6. "Ενωση συνόλων

Ἄς εἶναι $K = \{\text{Νικολάου, Γεωργίου, Νίκας, Σάρλης}\}$ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως ποὺ παίζουν στὴν ομάδα τοῦ βόλεϋ.

Κι' ἄς εἶναι $\Lambda = \{\text{Πέτρου, Νίκας, Καλῆς}\}$ τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως ποὺ μετέχουν στὶς ἄλλες ἀθλητικὲς ομάδες.

Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο M τῶν μαθητῶν τῆς Α' τάξεως ποὺ μετέχει σ' ὅλες τὶς ἀθλητικὲς ἐκδηλώσεις; Θὰ εἶναι

$$M = \{\text{Νικολάου, Γεωργίου, Νίκας, Σάρλης, Πέτρου, Καλῆς}\}$$

Παρατηροῦμε ὅτι: τὸ σύνολο M ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων K καὶ Λ καὶ καθένα ἀπὸ μία μόνο φορά (ὁ Νίκας ποὺ μετέχει καὶ στὸ K καὶ στὸ Λ περιέχεται μία φορά στὸ M).

Τὸ σύνολο M λέγεται **ἐνωση** τῶν συνόλων K καὶ Λ .

Γενικὰ

«Ἐνωση δύο συνόλων K καὶ Λ εἶναι ἓνα σύνολο M ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων K καὶ Λ καὶ μόνο ἀπ' αὐτὰ»

ὑπογραμμίζουμε ὅτι τὸ κάθε στοιχεῖο τὸ λαμβάνουμε μία μόνο φορά. Σύμβολο τῆς Ἐνώσεως εἶναι τὸ $\cup$.

Παράδειγμα

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ B &= \{1, 2\} \\ \hline A \cup B &= \{1, 2, 3\} \end{aligned}$$

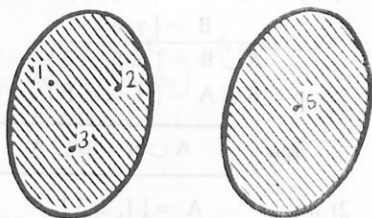
6.2 Γραφική παράσταση της ένωσης

Ιον ἂν τὰ A καὶ B εἶναι ξένα μεταξύ τους

$$\begin{array}{l} \text{π. χ.} \quad A = \{1, 2, 3\} \\ \quad \quad B = \{5\} \end{array}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$$

ἡ ἔνωση τῶν A καὶ B εἶναι τὸ γραμμοσκιασμένο μέρος τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 13).



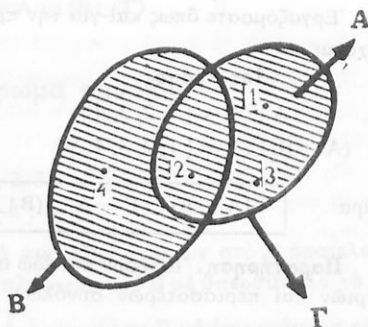
Σχ. 13

2) Ἄν τὰ A καὶ B ἔχουν κοινὰ στοιχεία χωρὶς τὸ ἓνα νὰ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου (σχ. 14)

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$$



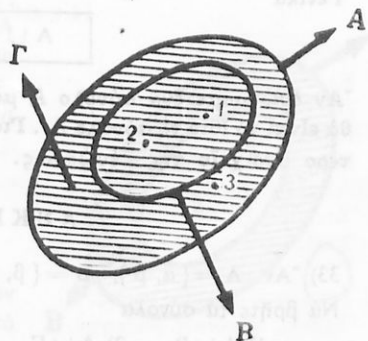
Σχ. 14

3) Ἄν τὸ ἓνα σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἄλλου (σχ. 15)

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}$$



Σχ. 15

6.3 Ίδιότητες της ένωσης

$$\begin{aligned} 1) \text{ ἄς είναι } & A = \{a, \beta, \gamma\} \\ & B = \{\gamma, \delta\} \\ \hline & A \cup B = \{a, \beta, \gamma, \delta\} \\ & B \cup A = \{\gamma, \delta, a, \beta\} \end{aligned}$$

ἄρα

$$A \cup B = B \cup A$$

ιδιότης αντιμεταθέσεως

$$\begin{aligned} 2) \text{ ἄν } & A = \{1, 2, 3\} \\ & B = \{2, 3, 4\} \\ & \Gamma = \{3, 5\} \end{aligned}$$

Εργαζόμαστε ὅπως καὶ γιὰ τὴν προσεταιριστικὴ ιδιότητα τῆς τομῆς καὶ ἔχουμε

1ος τρόπος

$$\begin{aligned} & A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \\ (A \cup B) \cup \Gamma &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

2ος τρόπος

$$\begin{aligned} & B \cup \Gamma = \{2, 3, 4, 5\} \\ A \cup (B \cup \Gamma) &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{aligned}$$

ἄρα

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$$

Προσεταιριστικὴ ιδιότης

Παρατήρηση. Ἰσχύουν καὶ ἐδῶ οἱ παρατηρήσεις ποὺ ἐγιναν γιὰ τὴν τομὴ τριῶν καὶ περισσοτέρων συνόλων.

3η Ίδιότης

Μιὰ ιδιότης τοῦ κενοῦ συνόλου: εἶναι φανερό ὅτι $\{1, 2\} \cup \emptyset = \{1, 2\}$

Γενικά

$$A \cup \emptyset = A$$

Ἄν ἐνώσουμε ἓνα σύνολο A μὲ τὸ κενὸ σύνολο τὸ ἀποτέλεσμα θὰ εἶναι τὸ ἴδιο τὸ σύνολο A . Γιὰ τὸ λόγο αὐτὸ τὸ $\emptyset$ λέγεται οὐδέτερο στοιχείο τῆς ἐνώσεως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

33) Ἄν $A = \{a, \beta\}$, $B = \{\beta, \gamma, \delta\}$, $\Gamma = \{\gamma, \delta, \epsilon\}$.

Νὰ βρῆτε τὰ σύνολα

1) $A \cup B$ 2) $A \cup \Gamma$ 3) $B \cup \Gamma$ 4) $A \cup B \cup \Gamma$

καὶ νὰ σχηματίσετε γραφικὴ παράσταση

- 34) "Αν $A = \{x \mid x \text{ φωνήεν του αλφαβήτου}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ σύμφωνο του αλφαβήτου}\}$
 $\Gamma = \{x \mid x \text{ γράμμα του αλφαβήτου}\}$

Νά βρῆτε τὰ σύνολα

$$A \cup B, \quad A \cup \Gamma, \quad B \cup \Gamma, \quad A \cup B \cup \Gamma, \quad A \cup B \cup \Gamma$$

- 35) "Αν $A = \{x \mid x \text{ νομός της Πελοποννήσου}\}$
 $B = \{x \mid x \text{ νομός της Ελλάδος}\}$

Νά βρῆτε τὸ σύνολο $A \cup B$

- 36) Νά βρῆτε τὸ σύνολο $A \cup A$

- 37) Τι συμπεραίνετε ἀπὸ τὴ σχέση $A \cup B = A$.

- 38) "Αν $A = \{1, 2\}$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ $\Gamma = \{1, \beta\}$

Νά ἐπαληθεύσετε τὴν ιδιότητα

$$(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$$

§ 7. Συμπλήρωμα συνόλου

"Ας πάρουμε τὰ σύνολα

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

Τὰ στοιχεία 1, 3, 5 τοῦ συνόλου A ποὺ ΔΕΝ ἀνήκουν στὸ B ἀποτελοῦν ἓνα ἄλλο σύνολο B' ποὺ λέγεται **συμπλήρωμα τοῦ B** μετὰ ὑπερσύνολο τὸ A .

Γενικά : Καλοῦμε συμπλήρωμα ἑνὸς συνόλου B μετὰ ὑπερσύνολο τὸ A τὸ σύνολο B' ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ὑπερσυνόλου A ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ B .

"Ετσι τὸ σκιασμένο μέρος τοῦ A (σχ. 16) παριστάνει τὸ συμπλήρωμα B' τοῦ B μετὰ ὑπερσύνολο τὸ A .

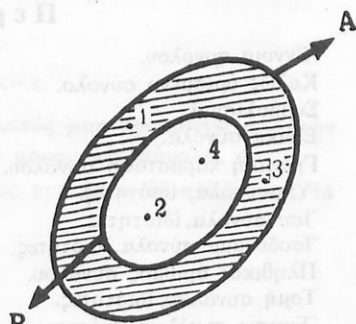
"Αν παρατηρήσουμε προσεκτικὰ τὸ σχῆμα θὰ βροῦμε τὶς σχέσεις

$$1) \quad B \cup B' = A$$

$$2) \quad B \cap B' = \emptyset$$

"Άλλο παράδειγμα

"Αν ὀνομάσουμε A τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τοῦ αλφαβήτου καὶ B τὸ σύνολο τῶν φωνηέντων τότε θὰ ἔχουμε



Σχ. 16

1) Το συμπλήρωμα του B με υπερέσυνολο το A είναι το σύνολο B' των συμφώνων του αλφαβήτου και είναι φανερό οι σχέσεις

$$1) B \cup B' = A$$

$$2) B \cap B' = \emptyset$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

39) "Αν $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$$B = \{2\}$$

$$\Gamma = \{2, 3\}$$

$$\Delta = \{2, 3, 4\}$$

Ποιά είναι τα συμπληρώματα των συνόλων B, Γ, Δ ως προς υπερέσυνολο το A

40) "Αν $A = \{x \mid x \text{ φωνήεν της λέξεως «μητέρα»}\}$

$$B = \{x \mid x \text{ γράμμα της λέξεως «μητέρα»}\}.$$

Ποιό είναι το συμπλήρωμα του συνόλου A ως προς υπερέσυνολο το B .

41) Ποιό είναι το συμπλήρωμα του συνόλου των μαθητών της A' τάξεως του Γυμνασίου σας ως προς υπερέσυνολο το σύνολο των μαθητών του Γυμνασίου σας.

42) Ποιό είναι το συμπλήρωμα ενός συνόλου ως προς υπερέσυνολο τον εαυτό του και ποιό είναι το συμπλήρωμα του $\emptyset$ ως προς υπερέσυνολο το σύνολο A .

43) "Αν πάρουμε ως υπερέσυνολο το $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και τα υποσύνολα αυτού $B = \{1, 3, 4\}$ $\Gamma = \{1, 2\}$.

Να σχηματίσετε τα σύνολα

α) Γ' β) B' γ) $\Gamma' \cap B$

Περίληψη

Έννοια συνόλου.

Καλώς ορισμένο σύνολο.

Συμβολισμοί.

Ειδικά σύνολα.

Γραφική παράσταση συνόλου.

Υποσύνολα, ιδιότητες.

Ίσα σύνολα, ιδιότητες.

Ίσοδύναμα σύνολα, ιδιότητες.

Πληθικός αριθμός συνόλου.

Τομή συνόλων, ιδιότητες.

Ένωση συνόλων, ιδιότητες.

Συμπλήρωμα συνόλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'.

§ 8. Οί φυσικοί αριθμοί. Τὸ μηδέν

8.1. Τοποθετούμε πάνω στο ἄδειο τραπέζι ἓνα ἀντικείμενο (π.χ. βόλο). Ἐπειτα τοποθετοῦμε κι' ἄλλον ἓνα βόλο. Καί πάλι ἓναν ἄλλο βόλο κ.ο.κ.

Σχηματίζουμε ἔτσι μιά σειρά ἀπὸ σύνολα $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3 \dots$

Μετὴν α'. τοποθέτηση ἔχουμε στὸ τραπέζι τὸ σύνολο $\Sigma_1 = \{ \bullet \}$

» » β'. » » » » $\Sigma_2 = \{ \bullet \bullet \}$

» » γ'. » » » » $\Sigma_3 = \{ \bullet \bullet \bullet \}$

κ.ο.κ.

Παρατηροῦμε ὅτι

α) Στὸ σύνολο Σ_1 καί σ' ὅλα τὰ ἰσοδύναμά του ὑπάρχει ἓνα κοινὸ χαρακτηριστικόν : Ἔχουν τὸ ἴδιον πληθὸς στοιχείων, εἶναι ὅλα μονομελῆ. Αὐτὸ τὸ χαρακτηριστικὸ ἐννοοῦμε ὅταν λέμε ὅτι:

Κάθε μονομελὲς σύνολο ἔχει πληθικὸ ἀριθμὸ ἘΝΑ

Ἔτσι λέγομε : Τὸ Σ_2 καί κάθε ἰσοδύναμό του ἔχει πληθικὸ ἀριθμὸ ΔΥΟ
Τὸ Σ_3 καί κάθε ἰσοδύναμό του ἔχει πληθικὸ ἀριθμὸ ΤΡΙΑ κ.ο.κ.

β) Πῶς παράγεται τὸ Σ_2 ἀπὸ τὸ Σ_1

τὸ Σ_3 » » Σ_2

τὸ Σ_4 » » Σ_3 κ.ο.κ.

Εἶναι φανερό ὅτι $\Sigma_1 \cup \{ \bullet \} = \{ \bullet \} \cup \{ \bullet \} = \{ \bullet \bullet \} = \Sigma_2$

ἢ $\Sigma_1 \cup \{ \bullet \} = \Sigma_2$

ἀνάλογα ἔχουμε $\Sigma_2 \cup \{ \bullet \} = \Sigma_3$

$\Sigma_3 \cup \{ \bullet \} = \Sigma_4$ κ.ο.κ.

Ἄρα «Κάθε σύνολο τοῦ παραδείγματός μας προκύπτει ἀπὸ τὴν ἔνωση τοῦ προηγούμενου του μ' ἓνα μονομελὲς σύνολο.

Ἀντίστοιχα : Κάθε πληθικὸς ἀριθμὸς προκύπτει ἂν αὐξήσουμε τὸ προηγούμενόν του κατὰ μιά μονάδα.

Δηλ. ἔχουμε $2 = 1 + 1$

$3 = 2 + 1$

$4 = 3 + 1$

$5 = 4 + 1$

Είναι φανερό ότι η εργασία αυτή μπορεί να συνεχισθῇ χωρίς τέλος, ἀπεριόριστα. Οἱ πληθ. ἀριθμοὶ 1, 2, 3, 4... λέγονται **φυσικοὶ ἀριθμοὶ** καὶ τὸ σύνολό τους παριστάνεται μὲ τὸ Φ .

ὥστε $\Phi = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

*Έχουν δὲ τὶς ἐπόμενες ιδιότητες

1) Καθένας προκύπτει ἀπὸ τὴν αὐξηση τοῦ προηγούμενου του κατὰ μία μονάδα.

2) Δὲν ὑπάρχει τελευταῖος φυσικὸς ἀριθμὸς ἀφοῦ μπορούμε κάθε ἓνα ὁποιοδήποτε νὰ τὸν αὐξήσουμε κατὰ μία μονάδα καὶ νὰ βροῦμε νέο ἀριθμὸ, τὸν ἐπόμενόν του.

8.2 Τὸν πληθ. ἀριθμὸ τοῦ κενοῦ συνόλου τὸν ὀνομάζουμε **μηδέν**.

Ἡ ἔνωση τοῦ 0 μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μᾶς δίδει τὸ σύνολο Φ_0 τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς. $\Phi_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

Παρατήρηση : Ἀπὸ τὰ προηγούμενα προκύπτει ὅτι κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς ἀποτελεῖται ἀπὸ μία ἢ περισσότερες μονάδες.

8.3 Πεπερασμένα καὶ μὴ πεπερασμένα σύνολα

Καθὼς εἶδαμε τὸ σύνολο Φ ἔχει ἀπεριόριστο πλῆθος στοιχείων γι' αὐτὸ λέγεται **μὴ πεπερασμένο σύνολο** ἢ **ἀπειροσύνολο**.

***Αντίθετα** τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἴων κατοίκων τῆς Ἑλλάδος μπορούμε νὰ τὰ ἀντιστοιχίσουμε μὲ ἓνα ἀρχικὸ τμήμα (ἀπόκομμα) τοῦ συνόλου Φ π.χ. ἀπὸ τὸ 1 - ἕως τὸ 8.500.000. Γι' αὐτὸ τὸ σύνολο τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδος λέγεται **πεπερασμένο σύνολο**.

Παραδείγματα

Πεπερασμένα σύνολα

- 1) Οἱ κάτοικοι τῆς Γῆς.
- 2) Τὰ αὐτοκίνητα ποὺ κυκλοφοροῦν στὴν Ἑλλάδα.
- 3) Οἱ λέξεις ἐνὸς λεξικοῦ.
- 4) Τὰ δένδρα ἐνὸς δάσους.
- 5) Οἱ σπόροι σταριοῦ μῆς σιταποθήκης.

Μὴ πεπερασμένα

- 1) Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί.
- 2) Οἱ περιττοὶ ἀριθμοί.
- 3) Τὸ σύνολο τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας.
- 4) Τὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν ποὺ διέρχονται ἀπὸ ἓνα σημεῖο.

8.4 Δύο χρήσεις τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

“Όταν οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ χρησιμοποιοῦνται γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου λέγονται **πληθικοὶ ἀριθμοί**.”

Π. χ. στὴν ἐρώτηση : «Πόσους καθηγητὰς ἔχει τὸ γυμνάσιό σας» ἀπαντᾷτε μ’ ἓνα **πληθικὸ ἀριθμὸ**.

“Όταν ρωτᾷμε σὲ ποιά σειρά εἶναι ὁ Νίκος στὴ γραμμὴ ἢ ὅταν λέμε ὅτι ὁ Μίμης ἦλθε 4ος στοὺς ἀγῶνες δισκοβολίας, τότε χρησιμοποιοῦμε ἓνα **ἀριθμὸ διατάξεως ἢ διατακτικὸ ἀριθμὸ**.”

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

44) Νὰ βρῆτε ἓνα πεπερασμένο σύνολο κι’ ἓνα μὴ πεπερασμένο.

45) Τὰ πλοῖα τοῦ ἐμπορικοῦ μας στόλου ἀποτελοῦν πεπερασμένο ἢ μὴ πεπερασμένο σύνολο;

46) Στὶς ἐπόμενες προτάσεις νὰ διακρίνετε τοὺς πληθικοὺς ἀπὸ τοὺς διατακτικοὺς ἀριθμοὺς :

«Κάθομαι στὸ δεῦτερο θρανίο».

«Ἔχω δύο ἀδελφια».

«Ἡ ομάδα μας ἦλθε πρώτη στοὺς ἀγῶνες».

«Τὸ σχολεῖο μας ἔχει 400 μαθητὰς».

§ 9. Δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως

9.1 Τί εἶναι ἀρίθμηση

Μὲ τὴν ἐπινόηση τοῦ συνόλου τῶν Φυσικῶν ἀριθμῶν ἐδημιουργήθησαν δύο προβλήματα.

α) Πῶς θὰ δώσουμε ἰδιαίτερα ὀνόματα σὲ ἄπειρο πλῆθος ἀριθμῶν.

“Όλες οἱ λέξεις ἑνὸς μεγάλου λεξικοῦ δὲν θὰ μᾶς ἐφθάναν γι’ αὐτὸ.

β) Πῶς θὰ γράψουμε, μὲ τί σύμβολα, ὅλους αὐτοὺς τοὺς ἀριθμοὺς ;

Οἱ ἄνθρωποι ἐπέτυχαν μὲ μερικὰ σύμβολα καὶ μὲ λίγους κανόνες νὰ ἐπιλύσουν καὶ τὰ δύο αὐτὰ προβλήματα.

«Τὸ σύνολο τῶν κανόνων μὲ τοὺς ὁποίους κατορθώνουμε νὰ συνδυάζουμε λίγα σύμβολα γιὰ νὰ γράφουμε καὶ νὰ διαβάσουμε τοὺς ἀριθμοὺς λέγεται **ἀρίθμηση**.”

Διακρίνουμε : α) Τὴν **προφορικὴ** ἀρίθμηση ποὺ μᾶς διδάσκει πῶς νὰ ὀνομάζουμε τοὺς ἀριθμοὺς.

β) Τὴν **γραφτὴ** ἀρίθμηση ποὺ μᾶς διδάσκει τὴν γραφὴ τῶν ἀριθμῶν.

9.2 Προφορική αρίθμηση

Πώς θα μετρήσουμε ένα σύνολο από νομίσματα της δραχμής;

α) "Αν οι δραχμές είναι λιγότερες από 10 χρησιμοποιούμε τα έννεα ονόματα των αριθμών : ένα, δύο, τρία, τέσσερα, πέντε, έξι, επτά, οκτώ, έννεα.

β) "Αν οι δραχμές είναι περισσότερες από δέκα τις χωρίζουμε σε υποσύνολα (σφουρξ) των δέκα δρχ. έως ότου μείνουν δραχμές λιγότερες από δέκα.

Τότε ο αριθμός των δραχμών θα αποτελείται από **δεκάδες** και **μονάδες**. Κάθε δεκάδα λέγεται **μονάς 2ας τάξεως**, ενώ κάθε μονάδα λέγεται **άπλη μονάδα**, ή **μονάς 1ης τάξεως**.

γ) "Αν οι δραχμές είναι εκατό και περισσότερες ενώνουμε δέκα - δέκα τα υποσύνολα των δεκάδων κι' έτσι δημιουργείται **μιά νέα μονάδα ή εκατοντάδα** ή **μονάδα 3ης τάξεως**. Με αυτό τον τρόπο συνεχίζουμε.

"Εχουμε λοιπόν

Μονάδες α'. τάξεως ή **άπλες μονάδες**

» β'. » ή **δεκάδες**

» γ'. » ή **εκατοντάδες**

Κ.Ο.Κ.

Γενικά : Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως σχηματίζουν **μιά μονάδα** αμέσως ανωτέρας τάξεως.

"Αν υπάρχουν πολλές τάξεις τις χωρίζουμε σε κλάσεις όπως φαίνεται στο πίνακα.

Τάξεις μονάδων	Όνόματα τάξεων	Γραφή με ψηφία	Κλάσεις
1η	άπλη μονάδα	1	} 1η κλάση (μονάδων)
2η	Δεκάδα	10	
3η	εκατοντάδα	100	
4η	Χιλιάδα	1.000	} 2η Κλάση (χιλιάδων)
5η	Δεκάδα χιλιάδων	10.000	
6η	Έκατοντάδα χιλιάδων	100.000	
7η	Έκατομμύριο	1.000.000	} 3η Κλάση (εκατομμυρίων)
8η	Δέκα εκατομμύρια	10.000.000	
9η	Έκατό εκατομμύρια	100.000.000	

Κ.Ο.Κ.

Μ' αυτό το τρόπο: «κάθε αριθμός αποτελείται από μονάδες διαφόρων τάξεων».

9.3 Γραπτή ἀρίθμηση

α) Γιὰ νὰ παραστήσουμε **τὸ μηδέν** καὶ τοὺς ἑννέα πρώτους φυσικοὺς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμε τὰ γνωστὰ σύμβολα 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, τὰ ὁποῖα ὀνομάζονται ἀραβικά ψηφία ἐπειδὴ οἱ ἄραβες τὰ διέδωσαν στὴν Εὐρώπη.

β) Ἐνας ἀκέραιος γράφεται μ' ἓνα ἢ περισσότερα ψηφία τὸ ἓνα δίπλα στὸ ἄλλο. Τὸ πρῶτο ψηφίο πρὸς τὰ δεξιὰ παριστάνει ἀπλὲς μονάδες ἢ μονάδες 1ης τάξεως τὸ 2ο ψηφίο (ἀπὸ δεξιὰ) παριστάνει μονάδες 2ας τάξεως (δεκάδες) τὸ 3ο μονάδες 3ης τάξεως (ἐκατοντάδες) κ.ο.κ.

Καὶ ἔτσι κάθε ψηφίο γραμμένο ἀμέσως ἀριστερὰ ἐνὸς ἄλλου παριστάνει μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

γ) Τέλος ὅταν δὲν ὑπάρχουν μονάδες μιᾶς τάξεως τοποθετοῦμε στὴ θέση τους τὸ μηδέν.

Ἐφαρμογές :

α) Τί θὰ συμβῇ ἂν παραλείψουμε τὸ 0 ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 305.

β) Τί θὰ συμβῇ ἂν στὸ τέλος τοῦ ἀριθμοῦ 45 τοποθετήσουμε ἓνα, δύο μηδενικά.

γ) Πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερη ἡ ἀξία τοῦ πρὸς τὰ ἀριστερὰ 3 ἀπὸ τὸ ἄλλο 3 στὸν ἀριθμὸ 33 καὶ γιατί :

9.4 Ἀπαγγελία ἀριθμοῦ γραμμένου μὲ ψηφία

Πῶς θὰ διαβάσουμε τὸν ἀριθμὸ 14 562 034.

α) τὸν χωρίζουμε σὲ τριωνήφια τμήματα ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά. Τὸ τελευταῖο πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα μπορεῖ νὰ ἔχῃ 1 ἢ 2 ἢ καὶ 3 ψηφία. Στὸν ἀριθμὸ 14 562 034 ἔχει δύο ψηφία (τὸ 14). Τὸ κάθε τμήμα ἀντιπροσωπεύει μία κλάση. Πρῶτη κλάση εἶναι τὸ πρὸς τὰ δεξιὰ τμήμα, δευτέρη τὸ ἐπόμενο κ.ο.κ.

Γιὰ νὰ διαβάσουμε τὸν ἀριθμὸ ἀρχίζουμε ἀπὸ ἀριστερὰ καὶ διαβάσουμε κάθε **τμήμα-κλάση** μὲ τὸ ὄνομά της.

Ἔτσι ὁ ἀριθμὸς 14 562 034 διαβάζεται 14 ἑκατομμύρια 562 χιλιάδες 34 μονάδες.

Ἀντίστροφα

Ὁ ἀριθμὸς 5 ἑκατομμύρια 18 χιλιάδες 328 μονάδες γράφεται.

5 018 328

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 47) Ἀπαγγείλατε τοὺς ἀριθμοὺς 10003, 512084, 2204351.
- 48) Γράψατε τοὺς ἀριθμοὺς α) ἑκατὸν τρεῖς χιλιάδες διακόσιες δύο, β) πέντε δισεκατομμύρια δώδεκα ἑκατομμύρια.
- 49) Πόσες δεκάδες, χιλιάδες, δεκάδες χιλιάδες περιέχονται σὲ δέκα ἑκατομμύρια.
- 50) Πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι, οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί.
- 51) Ποιὰ εἶναι ἡ μονάδα 4ης, 5ης, 6ης τάξεως διὰ δεκαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως.
- 52) Πόσες μονάδες 1ης, 2ας, 3ης, 4ης, 5ης τάξεως ἔχει ὁ ἀριθμὸς 524013.
- 53) Ποιὰ μεταβολὴ θὰ πάθῃ ὁ ἀριθμὸς 32 ἂν προσθέσουμε ἓνα ἢ δύο μηδενικά στὸ τέλος.
- 54) Ἄν ἀντιστρέψουμε τὴ σειρὰ τῶν ψηφίων ἑνὸς διψηφίου ἀριθμοῦ ἀλλάζει ὁ ἀριθμὸς ἢ ὄχι; Μπορεῖτε νὰ βρῆτε ἀριθμοὺς ποὺ νὰ μὴν ἀλλάζουν;
- 55) Πόσους διψηφίους, τριψηφίους ἀριθμοὺς μπορεῖτε νὰ γράψετε μὲ τὸ ἴδιο ψηφίο μονάδων.

§ 10. Ἑλληνικὴ γραφὴ τῶν ἀριθμῶν

10.1 Οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν γνῶριζαν τὴν ἀραβικὴ γραφὴ καὶ χρησιμοποιοῦσαν τὰ 24 γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ τὰ σύμβολα ζ (στίγμα), ι (κόππα) καὶ ϗ (σαμπι)

ἔτσι γιὰ τὶς ἀπλές μονάδες 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
εἶχαν τὰ σύμβολα μὲ τόνο α', β', γ', δ', ε', ζ', η', θ'

γιὰ τὶς δεκάδες 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90

χρησιμοποιοῦσαν τὰ ι', κ', λ', μ', ν', ξ', ο', π', ι' ἀντιστοίχως

γιὰ τὶς ἑκατοντάδες 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900

ρ', σ', τ', υ', φ', χ', ψ', ω', ϗ'

γιὰ τὶς χιλιάδες μετεχειρίζοντο τὰ ἴδια γράμματα ἀλλὰ μὲ τόνο ἀριστερὰ κάτω

π.χ. 1000 2000 3000

α β γ κ.ο.κ.

Ἡ γραφὴ τῶν ἄλλων ἀκεραίων γίνεται μὲ τὴ συμφωνία «ὁ ἀριθμὸς ποὺ σχηματίζεται ὅταν γράψουμε γράμματα στὴ σειρὰ παριστάνει τὸ ἄθροισμα τῶν μονάδων ὅλων τῶν ψηφίων.

π.χ. ια' σημαίνει $10 + 1 = 11$

ξη' σημαίνει $60 + 8 = 68$

ὁ ἀριθμὸς 1821

γράφεται αωκα'

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

56) Ποιους αριθμούς παριστάνουν νά σύμβολα Ι) κγ', λη', ραγ'.

57) Γράψατε στην Έλληνική γραφή τούς αριθμούς : 24, 37, 145, 1895

§ 11 Ρωμαϊκή ή Λατινική γραφή

Οί Ρωμαίοι χρησιμοποιούσαν τὰ γράμματα I V X L C D M πού παριστάνουν ἀντιστοίχως τούς αριθμούς 1, 5, 10, 50, 100, 500 1000

Ἡ Γραφή τῶν ἄλλων ἀριθμῶν ἀκολουθοῦσε τούς κανόνες

α) Ὅμοια γράμματα ὅταν γράφονται τὸ ἓνα δίπλα στὸ ἄλλο προστίθενται. Π.χ.

$$XX = 10 + 10 = 20$$

$$CC = 100 + 100 = 200$$

$$MM = 1000 + 1000 = 2000$$

β) Ὅταν ἓνα γράμμα γράφεται ἀριστερά μεγαλυτέρου τοῦ ἀφαιρεῖται ἀπὸ αὐτό· **ἀντίθετα** ὅταν γράφεται δεξιά μεγαλυτέρου τοῦ, προστίθεται. Π.χ.

$$IV = 4$$

$$VI = 6$$

γ) Ὅταν ἓνα γράμμα ἔχη μιὰ ὀριζόντια γραμμὴ ἐπάνω τοῦ παριστάνει χιλιάδες, ὅταν ἔχη δύο γραμμὲς ἑκατομμύρια κ.ο.κ.

$$\overline{XIX} = 19\,000$$

$$\overline{\overline{XIX}} = 19\,000\,000$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

58) Γράψτε μὲ Ρωμαϊκή γραφή τούς αριθμούς 6, 16, 36, 136, 1965

59) Γράψτε μὲ δεκαδική γραφή τούς αριθμούς XXV, XXIV, XIV, XLII, XC, CCV, MXV.

§ 12. Ἴσοι — Ἀνισοὶ ἀριθμοὶ

Ἄν μποῦμε σ' ἓνα κινηματογράφο καὶ συγκρίνουμε ἀπὸ ἀπόψεως πλήθους τὰ δύο σύνολα, **θεαταὶ** καὶ **καθίσματα**, τότε τρεῖς περιπτώσεις ὑπάρχουν:

I) Νά εἶναι τὸ σύνολο **θεαταὶ** ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο **καθίσματα**.

II) Κάθε θεατὴς νά κάθεται σ' ἓνα κάθισμα καὶ νά μένουν κενὰ καθίσματα.

III) Νά υπάρχει σέ κάθε κάθισμα ένας θεατής και επί πλέον νά υπάρχουν και ὄρθιοι θεαταί.

Ἄς ὀνομάσουμε α τὸν πληθ. ἀριθμὸ τοῦ συνόλου **θεαταί**
 β τὸν πληθ. ἀριθμὸ τοῦ συνόλου **καθίσματα**

Τότε στὴ **I** περίπτωσι ἔχουμε $\alpha = \beta$ καὶ διαβάζουμε α ἴσον με β .

Στὴ **II** περίπτωσι $\alpha < \beta$ καὶ διαβάζουμε α μικρότερο τοῦ β .

Στὴ **III** περίπτωσι $\alpha > \beta$ καὶ διαβάζουμε α μεγαλύτερο τοῦ β .

Γενικά: Δύο ἀριθμοὶ λέγονται ἴσοι ὅταν εἶναι πληθικοὶ ἀριθμοὶ ἰσοδυνάμων συνόλων.

Παρατήρησι: Ὅταν λέγουμε ἢ γράφουμε ὅτι δύο ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι δὲν πρόκειται γιὰ δύο ἀριθμοὺς ἀλλὰ γιὰ δύο διαφορετικὰ ὀνόματα ἢ σύμβολα τοῦ **ἴδιου** ἀριθμοῦ.

Π.χ. τὸ 2×3 καὶ τὸ 6 εἶναι δύο διαφορετικὰ σύμβολα (γραφές) τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ.

§ 12.2 Ἰδιότητες τῶν ἴσων ἀριθμῶν.

α) Εἶναι φανερό ὅτι κάθε ἀριθμὸς εἶναι ἴσος με τὸν ἑαυτοῦ του

$$\alpha = \alpha \text{ Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης}$$

β) Ἄν $\alpha = 3$ εἶναι φανερό ὅτι καὶ $3 = \alpha$ γενικά

$$\alpha = \beta \implies \beta = \alpha \text{ Συμμετρικὴ ἰδιότης}$$

γ) Ἀπὸ τίς σχέσεις :

$$3 \times 5 = 15$$

$$15 = 30 : 2$$

ἔχουμε :

$$3 \times 5 = 30 : 2$$

Γενικά

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \beta \\ \beta = \gamma \end{array} \right\} \implies \alpha = \gamma \text{ Μεταβατικὴ ἰδιότης}$$

Οἱ ἰδιότητες αὗτὲς εἶναι συνέπεια τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἴσων συνόλων.

12.3 Ἰδιότητες τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν

α) Εἶναι φανερό ὅτι ἡ σχέση $\alpha > \alpha$ δὲν εἶναι ὀρθή ἄρα: Δὲν ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.

β) Επίσης ή συνεπαγωγή

$$5 > 3 \Rightarrow 3 > 5$$

δεν είναι ὀρθή ἄρα:

δεν ισχύει ή συμμετρική ιδιότης.

γ) ἂν εἶναι:

$$a > 4$$

καὶ

$$4 > \beta$$

συνάγουμε ὅτι:

$$a > \beta$$

καὶ γενικά ἔχουμε

$$\left. \begin{array}{l} a > \beta \\ \beta > \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow a > \gamma$$

Ισχύει δηλ. ή Μεταβατική ιδιότης.

§ 13. Διάταξη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν

13.1 Τί εἶναι διάταξη :

Ἐνα λεξικό ἔχει πάρα πολλές λέξεις καὶ ὅμως εὐκόλα μποροῦμε νὰ βροῦμε ὅποια λέξη θελήσουμε. Αὐτὸ ὀφείλεται στὸ ὅτι εἶναι τοποθετημένες με ἀλφαβητική σειρά.

Ὅταν ἀντικείμενα εἶναι τοποθετημένα σύμφωνα με ἓνα κανόνα τότε λέγομε ὅτι εὐρίσκονται σὲ διάταξη.

Οἱ μαθηταὶ στὴ γραμμὴ «διατάσσονται» κατ' ἀνάστημα.

Εἶναι οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ σὲ διάταξη; Ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ σχηματίζονται (καθένας προκύπτει ἀπὸ τὸν προηγούμενό του ἂν αὐξήσουμε αὐτὸν κατὰ μία μονάδα) ἐννοοῦμε ὅτι βρίσκονται σὲ διάταξη κατὰ μέγεθος ἀπὸ τὸ μικρότερο πρὸς τὸ μεγαλύτερο. Τέτοια διάταξη μποροῦμε νὰ δώσουμε σὲ κάθε σύνολο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Π.χ. τὸ σύνολο

$$A = \{ 3, 8, 5, 2 \} \text{ γράφεται}$$

$$A = \{ 2, 3, 5, 8 \}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

60) Ἄν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας καὶ β εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐπωνύμων τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας σημειώστε τὴν σχέση ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β.

61) Ἄν α, β, γ εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ τῶν μαθητῶν τῆς Α', τῆς Β' καὶ τῆς Γ' τάξεως τοῦ Γυμνασίου σας γράψατε τὶς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α, β, γ.

62) Γράψτε τὶς σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν α καὶ β στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις.

1) "Αν α = αριθμός των μηνών και β = αριθμός των ψηφίων του άλφα-βήτου.

2) "Αν α = αριθμός των φωνηέντων και β = αριθμός των ημερών της εβδομάδος.

63) Ποιά από τις συνεπαγωγές

$$\alpha > \beta \implies \beta > \alpha$$

$$\alpha = \beta \implies \beta = \alpha$$

$$\alpha < \beta \implies \beta < \alpha$$

είναι ὀρθή.

64) Στο σύνολο $A = \{7, 2, 8\}$ δώστε μία διάταξη των στοιχείων του κατά σειράν μεγέθους από τὸ μεγαλύτερο πρὸς τὸ μικρότερο.

65) Στὸν κατάλογο τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας τὰ ἐπώνυμά σας βρίσκονται σὲ διάταξη;

Περίληψη

Οἱ φυσικοὶ ἀριθμοί, τὸ μηδέν.

Πεπερασμένα καὶ μὴ πεπερασμένα σύνολα.

Πληθικοὶ καὶ διατακτικοὶ ἀριθμοί.

Ἀρίθμηση, προφορική καὶ γραπτή.

Ἑλληνική, Λατινική γραφή τῶν ἀριθμῶν.

Ἴσοι, Ἄνισοι ἀριθμοί, Ἰδιότητες.

Διάταξη τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ'

§ 14. Εισαγωγή στη Γεωμετρία

14.1 Τι είναι Γεωμετρικά στερεά

Τα διάφορα στερεά σώματα που βρίσκονται γύρω μας, βιβλία, πίνακας, θρανία, οικοδομές, εργαλεία κ.λ.π., έχουν μερικά βασικά γνωρίσματα.

α) **Τὸν ὄγκο** : Κάθε σῶμα «πιάνει» τόπο, κατέχει ἓνα μέρος τοῦ γύρω μας διαστήματος. Τὸ μέρος τοῦ χώρου ποὺ κατέχει ἓνα σῶμα λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος. Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος ἐκτείνεται σὲ μήκος, ὕψος καὶ πλάτος, ἢ ὅπως λέγομε ἔχει τρεῖς **διαστάσεις**.

β) **Τὸ σχῆμα** : Ἐνα πορτοκάλι ἔχει διαφορετικὸ σχῆμα ἀπὸ ἓνα λεμόνι. Γενικὰ μὲ τὴ λέξη σχῆμα ἐννοοῦμε τὴν ἐξωτερικὴ μορφή ἑνὸς στερεοῦ σώματος.

γ) **Τὴν ὕλη** : Κάθε σῶμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ὀρισμένη ὕλη.

δ) **Τὸ βάρος** : Κάθε στερεὸ σῶμα ἔχει βάρος.

Ἡ μελέτη τῶν στερεῶν γίνεται πιὸ εὐκόλα ἂν τὰ ἐξετάσουμε ἀπὸ διαφορὰς ἀπόψεις.

Στὰ Μαθηματικά π.χ. ἐξετάζομε τὰ σώματα ἀπὸ δυὸ ἀπόψεις:

α'. Ἀπὸ τὴν **ἀποψη τοῦ σχήματος**.

β'. Ἀπὸ τὴν **ἀποψη τοῦ ὄγκου**.

Θεωροῦμε δὲ ὅτι οὔτε τὸ σχῆμα οὔτε ὁ ὄγκος ἀλλάζουν κατὰ τὶς μετακινήσεις τῶν στερεῶν.

Δὲν ἐνδιαφέρει τὰ Μαθηματικά οὔτε ἡ ἀξία, οὔτε τὸ βάρος οὔτε τὸ ὕλικο ἑνὸς στερεοῦ. Μ' αὐτὰ ἀσχολοῦνται ἄλλες ἐπιστῆμες.

Ὅταν ἐξετάζοντας ἓνα στερεὸ λαμβάνωμε ὑπ' ὄψιν μας μόνο τὸ **σ χ ῆ μ α** καὶ τὸ **μ έ γ ε θ ο ς** του, τότε αὐτὸ τὸ ὀνομάζομε **μ α θ η μ α τ ι κ ὸ ἢ γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ὸ σ τ ε ρ ε ὸ**.

14.2 Στοιχεῖα τῶν Γεωμετρικῶν στερεῶν

α) **Σημεῖο** : Ἄν ἀκουπήσουμε τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ στὸ χαρτί θὰ ἔχουμε τὴν **εἰκόνα** ἑνὸς σημείου. Ἐνα μακρινὸ μικρὸ ἄστρο, ἓνας λεπτὸς κόκκος σκόνης μᾶς δίνουν τὴν ἰδέα τοῦ σημείου.

Συνήθως ονομάζουμε ένα σημείο μ' ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου και το παριστάνουμε με μία τελεία στο χαρτί. Υπογραμμίζουμε ότι ή τελεία, ό κόκκος σκόνης, είναι εικόνες, παραστάσεις του σημείου το όποιον δέν έχει διαστάσεις.

β) **Γραμμή** : "Αν μετακινήσουμε τη μύτη του μολυβιού πάνω στο χαρτί θά έχουμε την **είκόνα** μιās γραμμής. "Αν μετακινήσουμε γρήγορα ένα ραβδί που είναι φωτεινό στην άκρη του, τότε αντί νά βλέπουμε πολλά σημεία το ένα πολύ κοντά στο άλλο, βλέπουμε μιā γραμμή. Τό ίδιο συμβαίνει κι' όταν «πέφτει» ένα άστέρι, και με τη μύτη τής σβούρας που στρέφεται.

"Αρα : ή γραμμή είναι ένα σύνολο σημείων (σημειοσύνολο).

§ 15. Είδη γραμμών

Διακρίνουμε τέσσερα είδη γραμμών.

15.1 Τήν εὐθεία γραμμή : "Αν τεντώσουμε μιā λεπτή κλωστή θά έχουμε το σχήμα μιās εὐθείας γραμμής.

15.2 Τεθλασμένη γραμμή : Τα γράμματα Μ, Ν, Τ, Σ είναι ένώσεις από τμήματα εὐθειών αλλά δέν είναι εὐθείες. Τέτοια σχήματα λέγονται τεθλασμένες γραμμές.

15.3 Καμπύλη γραμμή : Τό Ο έχει σχήμα γραμμής χωρίς κανένα τμήμα εὐθείας.

Γραμμές που δέν έχουν κανένα τμήμα εὐθείας λέγονται καμπύλες γραμμές.

15.4 Μεικτή γραμμή : Τό Ρ είναι μιā γραμμή που αποτελείται και από καμπύλη και από εὐθεία γραμμή. Γι' αυτό λέγεται **μεικτή γραμμή**.

"Ωστε έχουμε τα εξής είδη γραμμών.

- 1) Εὐθεία γραμμή.
- 2) Τεθλασμένη γραμμή.
- 3) Καμπύλη γραμμή.
- 4) Μεικτή γραμμή.

§ 16. Ἐπιφάνεια

Κάθε στερεό τελειώνει ή χωρίζεται από το χώρο που το περιβάλλει με την επιφάνεια αὐτοῦ. Ἡ ἐπιδερμίδα μας, ή πολύ λεπτή φλούδα του μήλου, ένα φύλλο χαρτί, μās δίνουν την **ιδέα** τής επιφανείας.

Εἶδη ἐπιφανειῶν

Διακρίνουμε τέσσερα εἶδη ἐπιφανειῶν.

16.1 Ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδο: Ἄν στὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα ἢ ἐνὸς συνηθισμένου τζαμιοῦ τοποθετήσουμε τὴν εἰκόνα μιᾶς εὐθείας π.χ. τὴν ἀκμὴ τοῦ χάρακα, παρατηροῦμε ὅτι ἐφαρμόζει παντοῦ σ' ὅποια θέση καὶ διεύθυνση τοποθετήσουμε τὸ χάρακα. Μιά τέτοια ἐπιφάνεια λέγεται **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἢ ἐπίπεδο**.

Παράδειγμα: ἡ ἐπιφάνεια τοῦ νεροῦ ποῦ ἡρεμεῖ.

16.2 Τεθλασμένη ἐπιφάνεια: Ἄν πάρουμε ἓνα φύλλο χαρτί καὶ τὸ τσακίσουμε κατὰ μία εὐθεῖα καὶ ἔπειτα τὸ ἀνοίξουμε πάλι τότε θὰ ἔχουμε μιὰ τεθλασμένη ἐπιφάνεια. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια λέγεται ἡ ἐπιφάνεια ποῦ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα μέρη χωρὶς ὁλόκληρη νὰ εἶναι ἓνα ἐπίπεδο.

Παράδειγμα: ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κουτιοῦ σπέρτων.

16.3 Καμπύλη Ἐπιφάνεια: Ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς τοπιοῦ, ἐνὸς βόλου μᾶς δίδει τὴν ιδέα τῆς καμπύλης ἐπιφανείας.

16.4 Μεικτὴ ἐπιφάνεια: Ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς κουτιοῦ κονσέρβας ἀποτελεῖται ἀπὸ ἐπίπεδα καὶ ἀπὸ καμπύλες ἐπιφάνειες καὶ λέγεται **μεικτὴ ἐπιφάνεια**.

Ὡστε ἔχουμε 4 εἶδη ἐπιφανειῶν

- 1) Τὸ ἐπίπεδο.
- 2) Τὴν τεθλασμένη ἐπιφάνεια.
- 3) Τὴν καμπύλη ἐπιφάνεια.
- 4) Τὴ μεικτὴ ἐπιφάνεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

66) Νὰ δείξετε τὶς διαστάσεις τῆς αἰθούσης διδασκαλίας.

67) Δείξατε ἓνα σημεῖο, μιὰ γραμμὴ καὶ μιὰ ἐπιφάνεια.

68) Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ἀπ' ὅλα τὰ εἶδη τῶν γραμμῶν.

69) Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ἀπ' ὅλα τὰ εἶδη τῶν ἐπιφανειῶν.

70) Τὶ γραμμὴ σχηματίζει καθένα ἀπὸ τὰ γράμματα Δ, Ι, Κ, Ω, Ο,

§ 17. Ιδιότητες της εὐθείας

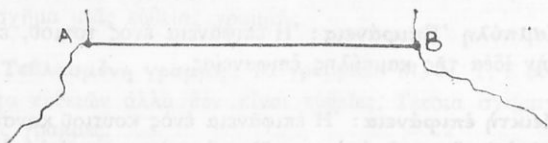
α) Σὲ μιὰ πινακίδα στερεώνουμε 2 καρφάκια, πού παριστάνουν 2 σημεία, τὰ Α καὶ Β. Ἐν μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τεντώσουμε ἓνα νήμα, θὰ ἔχουμε τὴν εἰκόνα ἑνὸς τμήματος εὐθείας (σχ. 17).

Ἐν πάλι μεταξὺ τῶν σημείων Α καὶ Β τεντώσουμε ἓνα ἄλλο νήμα, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὰ τμήματα τῶν εὐθειῶν τῶν δύο τεντωμένων νημάτων συμπίπτουν.

Ἄρα: « Ἀπὸ δύο σημεία Α καὶ Β περνάει μία καὶ μόνο μία εὐθεΐα ».

Γι' αὐτό, γιὰ νὰ ὀρίσουμε μιὰ εὐθεΐα μᾶς χρειάζονται δύο μόνο σημεία.

Γιὰ νὰ ὀνομάσουμε μιὰ εὐθεΐα χρησιμοποιοῦμε τὰ ὀνόματα δύο σημείων Χ καὶ Ψ ἀπὸ τὰ ὁποῖα περνάει ἡ εὐθεΐα καὶ τὴ διαβάσουμε «εὐθεΐα ΧΨ ἢ ΨΧ».



Σχ. 17

Εἶναι φανερό ὅτι :

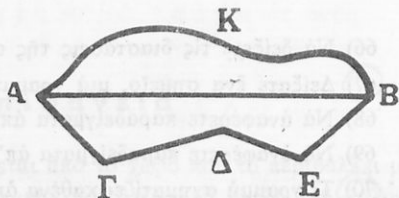
Μποροῦμε νὰ προεκτείνουμε μιὰ εὐθεΐα καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῶν ἄκρων της ὅσο θέλουμε.

Τὸ τμήμα μιᾶς ἀπέραντης εὐθείας πού εὑρίσκεται μεταξὺ δύο σημείων Α καὶ Β ὀνομάζεται εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ ἢ ΒΑ (σχ. 17).

β) Στὰ καρφάκια, πού παριστάνουν τὰ σημεία Α καὶ Β μποροῦμε νὰ δέσουμε κι' ἄλλα νήματα χωρὶς νὰ τὰ τεντώσουμε. Θὰ ἔχουμε ἔτσι τὴν εἰκόνα κι' ἄλλων γραμμῶν πού ἔχουν ἄκρα τὰ Α καὶ Β.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ τεντωμένο νήμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ ὅλα τὰ ἄλλα πού ἔχουν τὰ ἴδια ἄκρα.

Ἄρα: « Ἡ εὐθεΐα γραμμὴ εἶναι συντομώτερη ἀπὸ κάθε ἄλλη γραμμὴ μὲ τὰ ἴδια ἄκρα » (σχ. 18).



Σχ. 18

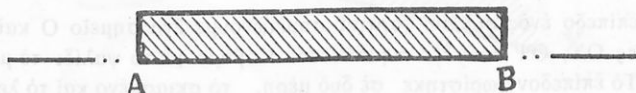
17.1 Ήμιευθεία

Πάνω σ'ε μιὰ εὐθεία XY παίρνουμε ἓνα σημεῖο O . Τότε ἡ XY χωρίζεται σ'ε δυὸ μέρη—ὑποσύνολα—τὰ OX καὶ OY . Καθένα ἀπὸ τὰ δυὸ αὐτὰ μέρη ἔχει τὸ ἓνα ἄκρο O σταθερό, ἐνῶ μπορεῖ νὰ προεκταθῇ πρὸς τὸ ἄλλο ἄκρο ὅσο θέλομε. Γι' αὐτὸ τὰ OX καὶ OY ὀνομάζονται **ἡμιευθεῖες**.

Σημειώνουμε ὅτι τὸ O εἶναι κοινὸ σημεῖο τῶν OX καὶ OY , δηλαδὴ τομῇ τῶν σημειοσυνόλων OX καὶ OY .

17.2 Χάραξη εὐθειῶν

Γιὰ τὴ χάραξη εὐθειῶν στὸ χαρτὶ χρησιμοποιοῦμε ἓνα ἀπλὸ ὄργανο, τὸν κανόνα ἢ χάρακα σχ. (19).



Σχ. 19

Οἱ ξυλουργοί, οἱ κτίστες, οἱ κηπουροὶ χρησιμοποιοῦν καὶ τὸ τεντωμένο νῆμα τὸ ὁποῖο χρωματίζουν.

Γιὰ νὰ χαράξουν τὴν εὐθεῖα τεντώνουν πρῶτα τὸ χρωματισμένο νῆμα, ἔπειτα τὸ τραβοῦν ἀπὸ τὸ μέσον του καὶ τὸ ἀφήνουν ἀπότομα, τότε μὲ τὴ βαφή τοῦ νήματος ἀποτυπώνεται ἡ εὐθεῖα.

Ἀνάλογα μὲ τὸ μέγεθος τῆς εὐθείας χρησιμοποιοῦν καὶ πασσάλους ἢ σανίδες.

§ 18. Ἰδιότητες τοῦ ἐπιπέδου

18.1 Ἐνα φύλλο χαρτιοῦ τὸ ἀπλώνουμε στὸ ἐπίπεδο τοῦ τραπεζιοῦ. Τότε τὸ ἐπίπεδο τοῦ τραπεζιοῦ φαίνεται σὰν προέκταση τοῦ ἐπιπέδου τοῦ φύλλου τοῦ χαρτιοῦ. Ἀνάλογα μποροῦμε νὰ φανταστοῦμε τὸ ἐπίπεδο τοῦ τραπεζιοῦ νὰ προεκτείνεται ὅσο θέλομε.

«Τὰ ἄκρα ἐνὸς ἐπιπέδου μποροῦν νὰ προεκταθοῦν ὅσο θέλομε»

18.2 Χαράζουμε στὸν πίνακα ἢ σ' ἓνα φύλλο χαρτὶ μιὰ εὐθεῖα ϵ καὶ ἐπάνω της σημειώνουμε σημεῖο A . Τοποθετοῦμε τὴν ἀκμὴ τοῦ κανόνα κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας ϵ . Ἐπειτα στρέφουμε τὸν κανόνα περὶ τὸ σημεῖο A , ἔτσι ὥστε ἡ ἀκμὴ του νὰ παραμῇν στὸ ἐπίπεδο τοῦ πίνακα. Ὅταν ὁ κανόνας κά-

νη μια όλόκληρη στροφή περί τὸ σημεῖο Α, θὰ ἔχη διαγράψει τὴν ἐπιφάνεια τοῦ πίνακα, δηλαδή ἓνα ἐπίπεδο.

Ὡστε: ἀπὸ τὴ μετατόπιση μιᾶς εὐθείας μπορεῖ νὰ διαγραφῇ (νὰ γεννηθῇ) ἓνα ἐπίπεδο.

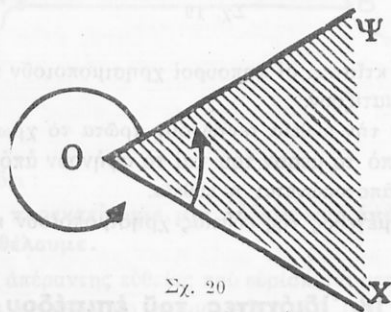
Γι' αὐτὸ ὀνομάζομε ἐπίπεδο τὴν ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἐφαρμόζει παντοῦ ἡ εὐθεῖα γραμμὴ.

§ 19. Ἐπίπεδα σχήματα

Κάθε σχῆμα, ποὺ ἔχει ὅλα του τὰ σημεῖα πάνω σ' ἓνα ἐπίπεδο, λέγεται ἐπίπεδο σχῆμα.

19.1 Γωνία

Στὸ ἐπίπεδο ἑνὸς φύλλου χαρτιοῦ σημειώνουμε ἓνα σημεῖο Ο καὶ δυὸ ἡμιευθεῖες ΟΧ, ΟΨ ποὺ δὲν συμπίπτουν. Κόβομε μὲ τὸ ψαλίδι τὸ μέρος ΧΟΨ. Τὸ ἐπίπεδον χωρίστηκε σὲ δυὸ μέρη, τὸ σκιασμένο καὶ τὸ λευκὸ,



καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὀνομάζεται **γωνία**. Τὸ σημεῖον Ο ποὺ εἶναι ἀρχὴ τῶν ἡμιευθεῖδων λέγεται **κορυφὴ** τῆς γωνίας (σχ. 20).

Οἱ ἡμιευθεῖες ΟΧ καὶ ΟΨ λέγονται **πλευρὲς τῶν γωνιῶν**.

19.2 Ὀνομασίες γωνίας

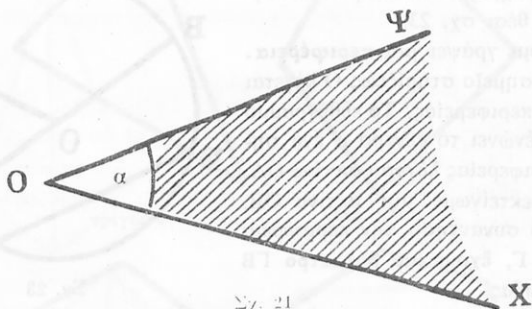
Ἄν περιοριστοῦμε πρὸς τὸ παρὸν στὴ σκιασμένη γωνία, ἔχομε τοὺς ἐξῆς τρόπους ὀνομασίας.

α) Λέγομε γωνία Ο (ὅπου Ο τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς).

β) Στὸ ἄνοιγμα τῆς γωνίας, κοντὰ στὴν κορυφὴ, βάζομε ἓνα μικρὸ γράμμα, π.χ. α καὶ λέγομε γωνία α σχ. 21.

γ) Χρησιμοποιούμε τα ονόματα των πλευρών της γωνίας και λέγουμε γωνία $ΧΟΨ$ ή γωνία $ΨΟΧ$ (προσέχουμε τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς νὰ εἶναι μεσοῖο).

δ) Χρησιμοποιούμε τα ονόματα των πλευρών της χωριστά και λέγουμε γωνία $ΟΧ$, $ΟΨ$ ή γωνία $(ΟΨ, ΟΧ)$.



Σχ. 21

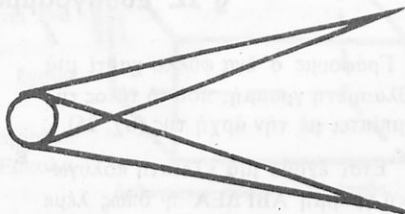
Ἡ λέξη «γωνία» συμβολίζεται μετὸ σύμβολο $\angle$. Ἐτσι γιὰ τὴ γωνία τοῦ σχ. 21 ἔχομε τὰ σύμβολα:

- 1) $\angle O$
- 2) $\angle \alpha$
- 3) $\angle ΧΟΨ$ ἢ $\angle ΨΟΧ$
- 4) $\angle (ΟΧ, ΟΨ)$

§ 20. Διαβήτης

Ὁ διαβήτης εἶναι ἓνα γεωμετρικὸ ὄργανο σχ. 22. Ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα σκέλη τὰ ὁποῖα συνδέονται στὰ ἄκρα των μὲ μία βίδα. Ἡ βίδα ἐπιτρέπει νὰ ἀνοιγοκλείνουμε, ὅποτε θέλουμε τὰ σκέλη, ὥστε νὰ μεγαλῶνῃ ἢ νὰ μικραίνῃ ἡ ἀπόστασις των δύο ἄλλων ἄκρων τοῦ διαβήτη. Στὸ ἓνα ἄκρο τοῦ ἐνὸς σκέλους ὑπάρχει μία βελόνη, ἐνῶ στὸ ἄκρο τοῦ ἄλλου σκέλους ὑπάρχει μιὰ μύτη μολυβιῶ.

Χρήσεις : Χρησιμοποιούμε τὸν διαβήτη γιὰ νὰ χαράξουμε διάφορα γεωμετρικὰ σχήματα, γιὰ νὰ συγκρίνουμε εὐθύγραμμα τμήματα κλπ.



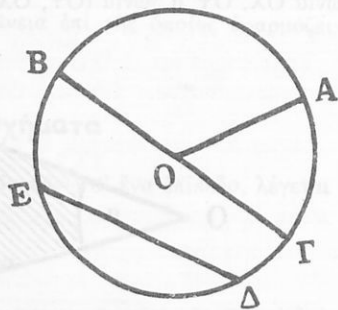
Σχ. 22

§ 21. Περιφέρεια

Άνοίγουμε τὸ διαβήτη μας καὶ στηρίζουμε σταθερὰ τὸ ἓνα σκέλος πάνω σ' ἓνα ἐπίπεδο ἐνῶ περιστρέφουμε τὸ ἄλλο σκέλος (προσέχοντας νὰ μὴ μεταβληθῇ τὸ ἀνοιγμὰ του κατὰ τὴν περιστροφή), μέχρις ὅτου ἔλθῃ πάλι στὴν ἀρχικὴ του θέσι σχ. 23.

Τότε ἔχομε γράψει μιὰ **περιφέρεια**. Τὸ σταθερὸ σημεῖο στηρίξεως O λέγεται **κέντρο** τῆς περιφερείας. Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ποὺ ἐνώνει τὸ κέντρο μ' ἓνα σημεῖο τῆς περιφερείας λέγεται **ἀκτίνα** OA .

Ἄν προεκτείνουμε μιὰ ἀκτίνα OB , μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρεια στὸ σημεῖο Γ , ἔχομε μιὰ **διάμετρο** GB τῆς περιφερείας.



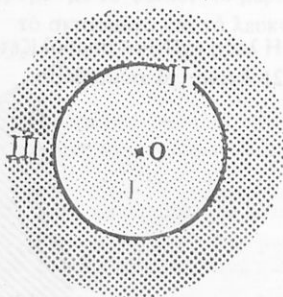
Σχ. 23

Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ποὺ ἐνώνει δύο σημεῖα Δ, E τῆς περιφερείας λέγεται **χορδὴ** ΔE .

Τὸ μέρος τῆς περιφερείας μεταξύ δύο σημείων τῆς Δ καὶ E λέγεται **τόξο** ΔE .

Ἡ περιφέρεια μὲ κέντρο O καὶ ἀκτίνα ρ συμβολίζεται: περιφέρεια (O, ρ) .

Ἡ περιφέρεια χωρίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ τρία μέρη—ὑποσύνολα αὐτοῦ—σχ. 24.



Σχ. 24

I τὸ ἐντὸς τῆς περιφερείας μέρος τοῦ ἐπιπέδου ποὺ λέγεται **δίσκος** ἢ **κύκλος**.

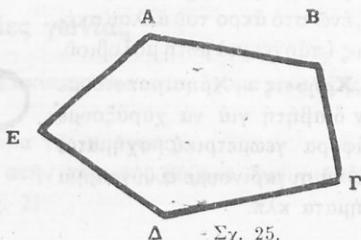
II τὴν ἴδια τὴν περιφέρεια.

III τὸ ἐκτὸς τῆς περιφερείας.

§ 22. Εὐθύγραμμα σχήματα

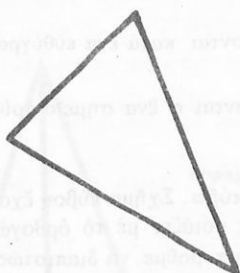
Γράφουμε σ' ἓνα φύλλο χαρτί μιὰ τεθλασμένη γραμμὴ, ποὺ τὸ τέλος τῆς συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴ τῆς (σχ. 25).

Ἔτσι ἔχομε μιὰ κλειστὴ πολυγωνικὴ γραμμὴ $AB\Gamma\Delta E A$ ἢ ὅπως λέμε ἓνα **πολύγωνο**.

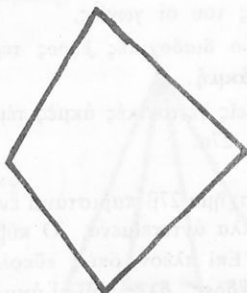


Σχ. 25.

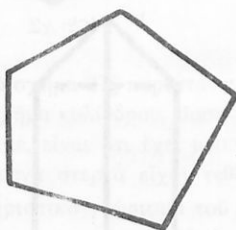
Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ποὺ ἀποτελοῦν τὸ πολυγώνον, λέγονται **πλευρὲς τοῦ πολυγώνου**.



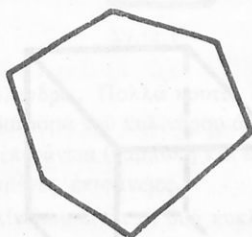
τρίγωνο



τετράπλευρο



πεντάπλευρο



ἑξάπλευρο

Σχ. 26

Ἀνάλογα μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου ἔχομε διάφορα εἶδη: **Τρίγωνα** ἢ **τρίπλευρα**, **τετράπλευρα**, **πεντάπλευρα** ἢ **πεντάγωνα** κ.ο.κ. σχ. 26.

§ 23 Γεωμετρικὰ στερεὰ

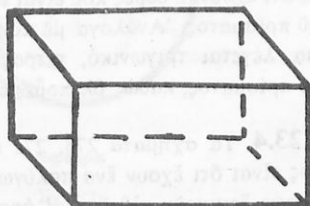
Ἀπλὰ γεωμετρικὰ στοιχεῖα αὐτῶν.

23.1 Τὸ σχῆμα 27α παριστάνει ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Ἐνα κουτί σπέρτα, ἓνα τοῦβλο ἔχουν σχῆμα ὀρθογών. παρ/δου.

Σ' ἓνα ὀρθογ. παρ/δο παρατηροῦμε ἕξι ἐπίπεδα ποὺ λέγονται **ἑδρες**. Εὐκόλα διακρίνομε :

α) Ὅτι οἱ ἀπέναντι ἑδρες εἶναι ἴσες.

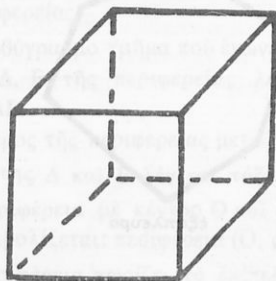


ὀρθογώνιο παραλληλεπίπεδο

Σχ. 27α

- β) "Οτι κάθε έδρα έχει σχήμα όρθογωνίου παραλληλογράμμου.
 γ) "Οτι οί άπέναντι πλευρές του όρθογ. παρ/μου είναι ίσες, όπως είναι
 ίσες και όλες του οί γωνίες.
 δ) "Οτι δύο διαδοχικές έδρες τέμνονται κατά ένα ευθύγραμμο τμήμα,
 που λέγεται **άκμή**.
 ε) "Οτι τρεις γειτονικές άκμές τέμνονται σ' ένα σημείο που ονομάζεται
κορυφή. Σχ. 27α.

23.2 Το σχήμα 27β παριστάνει ένα **κύβο**. Σχήμα κύβου έχουν τά ζάρια
 και πολλά άλλα αντικείμενα. Ο κύβος μοιάζει με το όρθογώνιο παραλ-
 ληλεπίπεδο. Επί πλέον, όπως εύκολα μπορούμε νά διαπιστώσουμε
όλες του οί έδρες, όλες του οί άκμές, όλες του οί γωνίες είναι ίσες.
 Η κάθε έδρα έχει σχήμα **τετραγώνου**. Σχ. 27β.



κύβος

Σχ. 27β



πρίσμα

Σχ. 27γ

23.3 Το σχήμα 27γ παριστάνει ένα **πρίσμα**. Το όρθογ. παραλληλεπί-
 πεδο, ο κύβος, είναι είδη πρισμάτων. Χαρακτηριστικό των πρισμάτων εί-
 ναι ότι έχουν 2 έδρες που είναι ίσες και παράλληλες και λέγονται **βάσεις**
 του πρίσματος. Ανάλογα με το είδος του πολυγώνου της βάσεως το πρί-
 σμα λέγεται τριγωνικό, τετραγωνικό, πενταγωνικό κ.ο.κ. Οί άλλες έδρες
 του πρίσματος, καθώς βλέπομε, είναι όρθογώνια παραλληλόγραμμα.

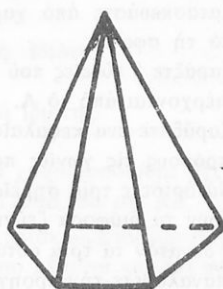
23.4 Τα σχήματα 27δ, 27ε παριστάνουν **πυραμίδες**. Χαρακτηριστικό
 τους είναι ότι έχουν ένα πολύγωνο σάν βάση και ότι από κάθε κορυφή της
 βάσεως ξεκινούν ευθείες, οί όποιες, όλες, συναντώνται σ' ένα σημείο που
 βρίσκεται εκτός του επιπέδου της βάσεως. Το σημείο αυτό λέγεται **κο-
 ρυφή της πυραμίδος**.

Ἀνάλογα μετὸ εἶδος τῆς πολυγωνικῆς βάσεως ἔχομε τριγωνικῆς, τετραγωνικῆς, πενταγωνικῆς κ.ο.κ. πυραμίδες.



Σχ. 27δ

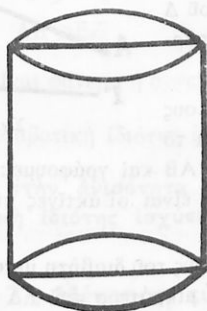
πυραμίδες



Σχ. 27ε

23.5 Τὸ σχῆμα 27ζ παριστάνει **κύλινδρο**. Πολλὰ κουτιά ἀπὸ κονσέρβες ἔχουν σχῆμα κυλίνδρου. Βασικὴ διαφορὰ τοῦ κυλίνδρου ἀπὸ τὰ στερεὰ ποὺ ἐξετάσαμε, εἶναι ὅτι ἔχει μεικτὴ ἐπιφάνεια (καμπύλη καὶ ἐπίπεδη) ἐνῶ τὰ προηγούμενα στερεὰ εἶχαν τεθλασμένες ἐπιφάνειες.

Χαρακτηριστικὸ γνῶρισμα τοῦ κυλίνδρου εἶναι οἱ δύο κυκλικές βάσεις του, ποὺ εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες. Ἔτσι στὸν κύλινδρο διακρίνομε περιφέρειες, ποὺ δὲν εἶδαμε στὰ ἄλλα στερεὰ.



κύλινδρος

Σχ. 27ζ



σφαῖρα

Σχ. 27η

23.6 Τὸ σχῆμα 27η παριστάνει **σφαῖρα**. Ἕνα τόπι, μιὰ μπάλλα τοῦ μπυλιάρδου ἔχει σχῆμα σφαίρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71) Αναγνωρίσατε τὸ σχῆμα τῆς αἰθούσης τοῦ σχολείου κι' ἔπειτα ἀναγνωρίσατε τὰ ἐπίπεδα σχήματα, τὶς ἀκμές, κορυφές, ἔδρες καὶ γωνίες.

72) Κατασκευάστε ἀπὸ χαρτόνι, τὰ διάφορα στερεὰ πού γνωρίζατε, ἐκτὸς ἀπὸ τὴ σφαῖρα.

73) Χαράξτε 5 εὐθεῖες πού διέρχονται ἀπὸ ἓνα σημεῖο Α. Πόσες ἄλλες εὐθεῖες διέρχονται ἀπὸ τὸ Α.

74) Χαράξτε ἓνα κεφαλαῖο ταῦ (Τ) κι' ἔπειτα νὰ ὀνομάσετε μὲ διαφόρους τρόπους τὶς γωνίες πού σχηματίζονται.

75) Νὰ ὀρίσετε τρία σημεῖα Α, Β, Γ κι' ἔπειτα νὰ χαράξετε τὶς εὐθεῖες πού ὀρίζουν τὰ διάφορα ζεύγη τῶν σημείων αὐτῶν.

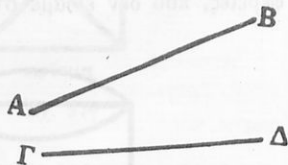
Εἶναι δυνατόν τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα νὰ ὀρίζουν μόνο μία εὐθεῖα;

Νὰ ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἄσκηση καὶ μὲ 4 σημεῖα.

§ 24. Σύγκριση εὐθυγράμμων σχημάτων

Ἴσα - ἄνισα εὐθύγραμμο τμήματα. Μέτρηση εὐθυγράμμου τμήματος

Χαράζουμε δύο εὐθύγραμμο τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ σχ. 28. Ἀνοίγουμε τὰ σκέλη τοῦ διαβήτη καὶ τὸ ἓνα ἄκρο του στηρίζουμε στὸ Α καὶ τὸ ἄλλο στὸ Β. Κρατοῦμε σταθερὸ τὸ ἄνοιγμα τοῦ διαβήτη, τοποθετοῦμε τὸ ἓνα σκέλος στὸ Γ καὶ φέρνομε τὸ ἄλλο σκέλος πρὸς τὸ μέρος τοῦ Δ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΓΔ. Τρία ἐνδεχόμενα ὑπάρχουν :



Σχ. 28

1. Νὰ πέση τὸ ἄλλο ἄκρο τοῦ σκέλους τοῦ διαβήτη πάνω στὸ Δ. Τότε λέμε ὅτι τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΓΔ εἶναι **ἴσο** μὲ τὸ ΑΒ καὶ γράφουμε : $AB = \Gamma\Delta$.

Παράδειγμα ἴσων εὐθυγρ. τμημάτων εἶναι οἱ ἀκτίνες τῆς περιφερείας, οἱ ἀκμές κύβου.

2. Νὰ πέση τὸ ἄκρο τοῦ ἄλλου σκέλους τοῦ διαβήτη μεταξύ τοῦ Γ καὶ Δ ὁπότε τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ εἶναι μικρότερο τοῦ ΓΔ καὶ γράφουμε : $AB < \Gamma\Delta$.

3. Νὰ πέση τὸ ἄκρο τοῦ ἄλλου σκέλους τοῦ διαβήτη μετὰ τὸ Δ. Τότε τὸ ΑΒ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ ΓΔ καὶ γράφουμε : $AB > \Gamma\Delta$.

Στὴ 2η καὶ 3η περίπτωση τὰ τμήματα λέγονται **ἄνισα**.

Σημείωση : Ἡ παραπάνω ἐργασία μπορεῖ νὰ γίνη μὲ διαφανές χαρτί.

§ 25. Ίδιότητες ισότητας εὐθυγράμμων τμημάτων

Στὴν ισότητα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $AB=ΓΔ$ εἶναι φανερό ὅτι :

- 1) $AB=AB$ Ἀνακλαστική ιδιότης.
- 2) $AB=ΓΔ \implies ΓΔ=AB$ συμμετρική ιδιότης.
- 3) $\left. \begin{array}{l} AB=ΓΔ \\ ΓΔ=EZ \end{array} \right\} \implies AB=EZ$ μεταβατική ιδιότης.

Ἡ συμμετρική ιδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ χρησιμοποιοῦμε ὄχι μόνο ἀντὶ τοῦ AB τὸ ἴσο τοῦ $ΓΔ$ ἀλλὰ καὶ ἀντὶ τοῦ $ΓΔ$ τὸ ἴσο τοῦ AB .

Ἡ μεταβατική ιδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ βρίσκουμε ἂν δυὸ τμήματα εἶναι ἴσα, συγκρίνοντάς τα μὲ ἓνα ἄλλο τμήμα ἴσο μὲ αὐτά καὶ ὄχι μεταξὺ τους.

§ 26. Ίδιότητες ἀνίσων εὐθυγράμμων τμημάτων

1. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀνισότης $AB>AB$ δὲν εἶναι ὀρθή. Ἄρα δὲν ἀληθεύει ἡ ἀνακλαστική ιδιότης.

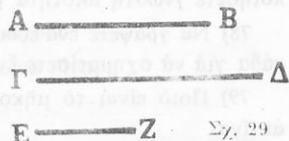
2. Ἐπίσης ἡ συνεπαγωγή $AB>ΓΔ \implies ΓΔ>AB$ δὲν εἶναι ὀρθή. Ὡστε καὶ ἡ συμμετρική ιδιότης δὲν ἀληθεύει.

3. Λαμβάνουμε τρία εὐθύγραμμα τμήματα $AB, ΓΔ, EZ$ (σχ. 29).

ὅπου $ΓΔ>AB$

καὶ $AB>EZ$

τότε εἶναι φανερή ἡ συνεπαγωγή $\left. \begin{array}{l} ΓΔ>AB \\ AB>EZ \end{array} \right\} \implies ΓΔ>EZ$



Σχ. 29

Ἄρα ἡ μεταβατική ιδιότης ἰσχύει.

Ὡστε στὴν ἀνισότητα εὐθυγράμμων τμημάτων μόνον ἡ μεταβατική ιδιότης ἰσχύει.

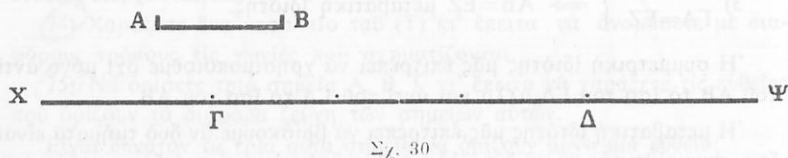
§ 27. Μέτρηση εὐθυγράμμων τμημάτων

Γράφουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB καὶ μιὰ εὐθεῖα $ΧΨ$ (σχ. 30).

Ἐπάνω στὴ $ΧΨ$ παίρνουμε διαδοχικὰ τρεῖς φορές τὸ AB (μὲ τὴ βοήθεια τοῦ διαβήτη), ἔτσι σχηματίζουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα $ΓΔ$ τρεῖς φορές μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ AB καὶ γράφουμε $ΓΔ=3 \cdot AB$.

Μέτρηση ενός εὐθυγράμμου τμήματος ΓΔ καλοῦμε τὴ σύγκριση αὐτοῦ μὲ ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ ποὺ τὸ παίρνουμε ὡς μονάδα.

Ὁ ἀριθμὸς 3 ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴ σύγκριση αὐτὴ καὶ μᾶς δείχνει πόσες φορές τὸ ΓΔ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ΑΒ, (τὴ μονάδα), λέγεται **μῆκος** ἢ **μέτρο τοῦ ΓΔ**.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

76) Νὰ σχηματίσετε ἓνα κεφαλαῖο ἄλφα κι' ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὰ τρία εὐθυγρ. τμήματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα, ἀποτελεῖται.

77) Νὰ σχηματίσετε τρία ἄνισα εὐθυγρ. τμήματα καὶ νὰ τὰ συγκρίνετε. Γράψατε συμβολικὰ τὰ ἀποτελέσματα συγκρίσεως. Μπορεῖτε νὰ χρησιμοποιήσετε γνωστὴ ιδιότητα γιὰ νὰ κάνετε λιγώτερες συγκρίσεις.

78) Νὰ γράψετε ἓνα εὐθυγρ. τμήμα ΑΒ καὶ χρησιμοποιεῖστε το ὡς μονάδα γιὰ νὰ σχηματίσετε ἓνα ἄλλο εὐθυγρ. τμήμα ΓΔ μήκους 5 μονάδων.

79) Ποιὸ εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου ἂν πάρουμε γιὰ μονάδα τὴν ἀκτῖνα.

80) Σὲ μιὰ εὐθεῖα ΧΨ σημειώστε 5 διαδοχικὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα $AB = BG = GD = DE = EZ$. Μὲ μονάδα τὸ ΑΒ νὰ βρῆτε τὸ μῆκος τῶν ΑΓ, ΓΖ, ΒΖ.

81) Νὰ γράψετε 2 ἡμιευθεῖες ΑΧ καὶ ΑΨ. Στὴν ΑΧ πάρτε δύο τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ ἴσα. Ἐπίσης στὴν ΑΨ πάρτε δύο ἴσα τμήματα ΑΔ καὶ ΔΕ. Ἐπειτα νὰ γράψετε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΓΕ καὶ ΒΔ καὶ νὰ τὰ συγκρίνετε. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ΓΕ, ἂν πάρουμε ὡς μονάδα τὸ ΒΔ.

§ 28. Μονάδες μήκους

Καθὼς εἶδαμε γιὰ νὰ μετρήσουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα πρέπει νὰ ἔχουμε ἓνα ἄλλο τμήμα, τὸ ὁποῖο θὰ χρησιμοποιήσουμε ὡς μονάδα. Τὴ μονάδα μήκους μποροῦμε βέβαια νὰ τὴ διαλέξουμε αὐθαίρετα. Ἐτσι ἐξηγεῖται τὸ πλῆθος τῶν μονάδων μήκους.

Γιὰ ευκολία ὁμῶς συμφώνησαν οἱ πολιτισμένοι λαοὶ νὰ χρησιμοποιοῦν τὴν ἴδια μονάδα.

I. Βασικὴ μονὰς μήκους εἶναι τὸ μέτρο ἢ Γαλλικὸ μέτρο (m). Εἶναι ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα τὸ ὁποῖο ὀρίζεται μεταξὺ δυὸ παραλλήλων χαραγῶν πάνω σὲ μιὰ μεταλλικὴ ράβδο ἀπὸ λευκόχρυσο καὶ ἰρίδιο, σὲ θερμοκρασίᾳ 0° Κελσίου καὶ φυλάγεται στὸ διεθνὲς γραφεῖο βαρῶν καὶ μέτρων κοντὰ στὸ Παρίσι.

Τὸ μέτρο εἶναι ἴσο μὲ $\frac{1}{40\,000\,000}$ τοῦ μεσημβρινοῦ τῆς γῆς.

II. Οἱ μονάδες μήκους ποὺ ἔχουν βάσι τὸ μέτρο εἶναι 10, 100, 1000 κ.ο.κ., φορὲς μεγαλύτερες τοῦ μέτρου ἢ 10, 100, 1000 κ.ο.κ. φορὲς μικρότερες αὐτοῦ. Μ' ἄλλα λόγια ἀκολουθοῦν τὸ δεκαδικὸ νόμο.

28.1 Ὑποδιαίρέσεις τοῦ μέτρου

Τὸ δεκατόμετρο (dm) = ἓνα δέκατο τοῦ μέτρου· συμβολίζεται μὲ ἑλληνικὰ γράμματα δμ.

Τὸ ἑκατοστόμετρο (cm) = ἓνα ἑκατοστὸ τοῦ μέτρου. Μὲ ἑλληνικὰ γράμματα γράφεται ἐκ.

Τὸ χιλιοστόμετρο (mm) = ἓνα χιλιοστὸ μέτρου

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου χρησιμοποιούμενα εἶναι :

Τὸ δεκάμετρο (dam) = 10 m

Τὸ ἑκατόμετρο (hm) = 100 m

Τὸ χιλιόμετρο (km) = 1000 m

Ἀπὸ τὰ παραπάνω ἔχουμε τὶς ἐξῆς σχέσεις :

$$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 100\text{ cm} = 1000\text{ mm}$$

$$1\text{ dm} = 10\text{ cm} = 100\text{ mm}$$

$$1\text{ cm} = 10\text{ mm}$$

$$1\text{ km} = 1000\text{ m} = 10000\text{ dm} = 100000\text{ cm} = 1000000\text{ mm}$$

Γιὰ μεγάλες ἀποστάσεις χρησιμοποιοῦμε τὸ χιλιόμετρο ἢ στάδιο (χμ) = 1000 m.

Σημείωση : Οἱ ὑποδιαίρέσεις τοῦ μέτρου καὶ τὰ πολλαπλάσιά του ἀκολουθοῦν τὸν δεκαδικὸ νόμο, ὁ ὁποῖος ἐπιτρέπει νὰ γράφωμε τὸ μήκος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος στὸ δεκαδικὸ μας σύστημα τῶν ἀριθμῶν π.χ. ἓνα μήκος α ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 4 m 8 dm 5 mm μπορεῖ νὰ γραφῇ μὲ τὴ μορφή ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ :

$$\alpha = 4,805 \text{ m}$$

$$\eta \quad \alpha = 48,05 \text{ dm}$$

$$\eta \quad \alpha = 480,5 \text{ cm}$$

$$\eta \quad \alpha = 4805 \text{ mm}$$

Ένα μήκος β που αποτελείται από 23 km 45 m 7 dm γράφεται έτσι :

$$\beta = 23,0457 \text{ km}$$

$$\eta \quad \beta = 23045,7 \text{ m}$$

$$\eta \quad \beta = 230457 \text{ dm}$$

III. Άλλες μονάδες μήκους που χρησιμοποιούνται στο τόπο μας είναι :

$$\text{ο τεκτονικός πήχυς} = 75 \text{ cm} = 0,75 \text{ m} = \frac{3}{4} \text{ m.}$$

Στο εμπόριο και στα τεχνικά έργα χρησιμοποιούνται οι αγγλοσαξωνικές μονάδες μήκους.

28.2 Η Υάρδα (yrd) διαιρείται σε 3 ίσα μέρη που ονομάζονται πόδες (ft), και σε 36 ίσα μέρη, τις ίντσες (in).

$$\text{δηλαδή} \quad 1 \text{ yrd} = 3 \text{ ft} = 36 \text{ in}$$

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$$

Μεταξύ της ίντσας και του μέτρου ισχύουν με μεγάλη προσέγγιση οι σκέσεις:

$$1 \text{ yrd} = 0,9144 \text{ m} = 91,44 \text{ cm} = 914,4 \text{ mm}$$

$$1 \text{ ft} = 0,305 \text{ m} = 30,5 \text{ cm}$$

$$1 \text{ in} = 2,54 \text{ cm}$$

28.3 Άλλες μονάδες μήκους είναι :

Το αγγλοσαξωνικό μίλι = 1609 m = 1,609 km.

Στη ναυτιλία χρησιμοποιείται διεθνώς **το Γαλλικό ναυτικό μίλι** = 1852 m = 1,852 km.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

82) Με πόσα μέτρα αντιστοιχούν 1) τα 80 dam 2) 21 km 3) 4 c.m
5) 3 m.m

83) Με πόσα μέτρα αντιστοιχούν 1) 5 yrd, 2) 2 ft, 3) 6 in

84) Με πόσα km αντιστοιχούν α) 7000 m, β) 300 m

85) Με πόσα km αντιστοιχούν 2 m, 3 dm

86) Για τὰ εὐθύγρ. τμήματα AB καὶ ΓΔ συμπληρώστε τὶς συνεπαγωγές.

$$\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} AB = 5 \text{ cm} \\ \Gamma\Delta = 5 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots$$

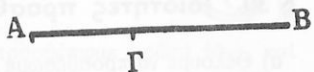
$$\beta) \quad \left. \begin{array}{l} AB = \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta = 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

§ 29. Πράξεις με εὐθύγραμμα τμήματα

*Αθροισμα καὶ διαφορά εὐθυγράμμων τμημάτων

Χαράζουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB καὶ σημειώνουμε πάνω του ἓνα σημείο Γ (σχ. 31). Ἐτσι ἔχουμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΒ καὶ ΑΒ.

Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ καλοῦμε **ἄθροισμα** τῶν διαδοχικῶν τμημάτων ΑΓ καὶ ΓΒ καὶ σημειώνουμε :



Σχ. 31

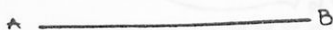
$$ΑΓ + ΓΒ = ΑΒ \quad (1)$$

(Διαδοχικὰ καλοῦμε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, ὅταν ἔχουν ἓνα κοινὸ ἄκρο καὶ εὐρίσκονται ἀπὸ τὰ δύο μέρη αὐτοῦ).

Τὸ εὐθύγραμμο τμήμα ΓΒ καλοῦμε **διαφορά** τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ σημειώνουμε : $ΑΒ - ΑΓ = ΓΒ$ (2)

*Ἀν ἔχουμε δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ πὼς θὰ βροῦμε

α' τὸ ἄθροισμά τους καὶ β' τὴν διαφορά τους ;



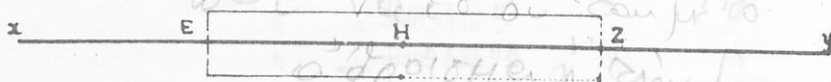
Σχ. 32

α) Χαράζουμε μιὰ εὐθεΐα τὴν ΧΨ καὶ μὲ τὸ διαβήτη λαμβάνουμε πάνω της διαδοχικὰ τμήματα $EZ = ΑΒ$ καὶ $ZH = ΓΔ$ τότε

$$EZ + ZH = EH$$

$$\text{ἢ } ΑΒ + ΓΔ = EH \quad (\text{σχ. 32})$$

β) Στην ευθεία XY σχ. 33 παίρνουμε τμήμα $EZ=AB$ και έπειτα άλλο τμήμα $EH=ΓΔ$



Σχ. 33

Τότε θα έχουμε $EZ-EH=ZH$
ή $AB-ΓΔ=ZH$

Πώς θα ελέγξουμε αν η διαφορά ZH είναι όρθη ;

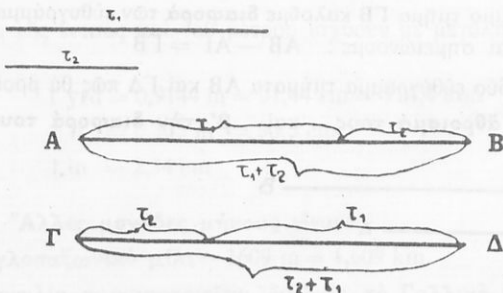
Είναι φανερό ότι θα πρέπει $ZH+HE=ZE$

§ 30. Ιδιότητες προσθέσεως ευθυγράμμων τμημάτων

α) Θέλουμε να προσθέσουμε δυο ευθύγραμμα τμήματα τ_1 και τ_2 (σχ. 34). Τουτό μπορεί να γίνει κατά δύο τρόπους :

$$\alpha' \quad \tau_1 + \tau_2 = AB$$

$$\beta' \quad \tau_2 + \tau_1 = ΓΔ$$



Σχ. 34

Εύκολα εξακριβώνουμε με τὸ διαβήτη ἢ τὸ ὑποδεκάμετρο ὅτι $AB=ΓΔ$

δηλαδή

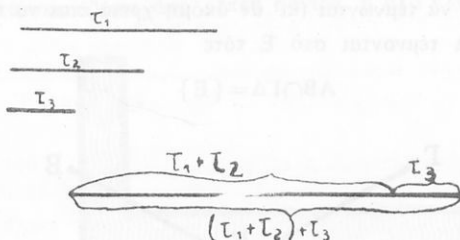
$$\tau_1 + \tau_2 = \tau_2 + \tau_1$$

Συμπεραίνουμε λοιπὸν ὅτι :

«Αν αλλάξουμε τὴ σειρά τῶν προσθετέων τμημάτων τὸ ἄθροισμα δὲν αλλάζει» Ἰδιότητες ἀντιμεταθέσεως.

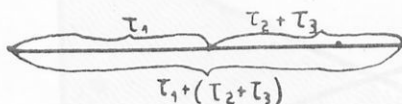
β) "Αν ἔχουμε νὰ προσθέσωμε τρία τμήματα, εἶναι φανερό ὅτι θὰ χρειασθοῦμε δύο προσθέσεις.

"Ας πάρουμε τὰ τμήματα τ_1 , τ_2 , τ_3 . Εὐρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν τ_1 καὶ τ_2 δηλαδὴ $(\tau_1 + \tau_2)$ σχ. 35 καὶ ἔπειτα σ' αὐτὸ προσθέτομε τὸ τ_3 .



Σχ. 35

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ καταλήξωμε, ἂν προσθέσωμε πρώτα τὸ τ_2 καὶ τὸ τ_3 , ὁπότε βρίσκομε $(\tau_2 + \tau_3)$ καὶ σ' αὐτὸ προσθέσωμε τὸ τ_1 (σχ. 36).



Σχ. 36

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι :

$$(\tau_1 + \tau_2) + \tau_3 = \tau_1 + (\tau_2 + \tau_3)$$

Ἰσχύει λοιπὸν ἡ προσεταιριστικὴ ιδιότης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

87) Νὰ γράψετε δύο εὐθύγραμμα τμήματα καὶ νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμα καὶ τὴν διαφορά τους.

88) Νὰ γράψετε μία τεθλασμένη γραμμὴ μὲ τρεῖς πλευρές. Ἡ δευτέρα πλευρὰ νὰ εἶναι τριπλασία ἀπὸ τὴν πρώτη καὶ ἡ τρίτη διπλασία ἀπὸ τὴν πρώτη. Νὰ σχηματίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθυγράμμων τμημάτων καὶ νὰ τὸ ἐλέγξετε μὲ τὴν χρησιμοποίησιν τῆς προσεταιριστικῆς ιδιότητος.

89) Σημειώστε τρία σημεῖα Α, Β, Γ (νὰ μὴ εἶναι καὶ τὰ τρία στὴν ἴδια εὐθεῖα) καὶ ἔπειτα νὰ σχηματίσετε εὐθύγραμμα τμήματα ΔΕ καὶ ΗΖ τέτοια ὥστε :

$$\Delta E = AB + B\Gamma + \Gamma A$$

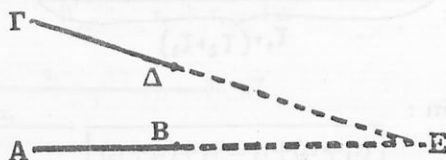
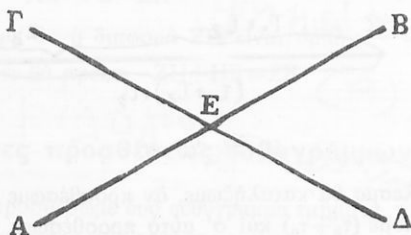
$$H Z = AB + B\Gamma - A\Gamma$$

§ 31. Θέσεις δύο ευθειών στο επίπεδο

Χρησιμοποιούμε ένα φύλλο χαρτί σαν επίπεδο και χαράζουμε δύο ευθείες. Υπάρχουν τότε οι ακόλουθες περιπτώσεις:

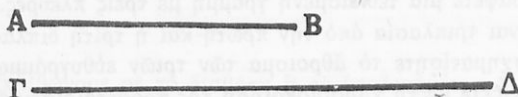
- α) Οι ευθείες να τέμνονται (κι' αν ακόμη χρειάζεται να προεκταθούν)
Οι AB και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο E τότε

$$AB \cap \Gamma\Delta = \{E\}$$



Σχ. 37

- β) Οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο να μη συναντώνται, όσο κι' αν προεκταθούν. Τότε $AB \cap \Gamma\Delta = \emptyset$ και λέμε ότι οι ευθείες AB και $\Gamma\Delta$ είναι παράλληλες σημειώνονται δε $AB \parallel \Gamma\Delta$.



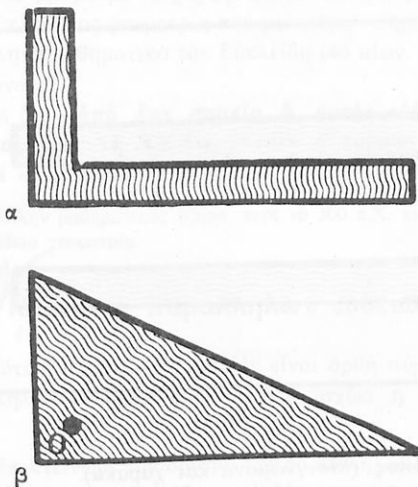
Σχ. 38

Παράλληλες λέγονται δύο ευθείες, που βρίσκονται πάνω σ' ένα επίπεδο, και' δεν τέμνονται όσο κι' αν προεκταθούν.

§ 32. Χάραξη παραλλήλων εὐθειῶν

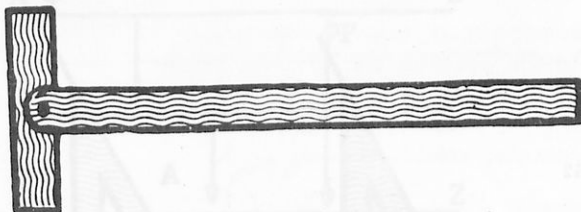
32.1 Γνώμων καὶ χρήση αὐτοῦ

Ὁ γνώμων εἶναι γεωμετρικὸ ὄργανο σχήματος ὀρθογωνίου τριγώνου (β), τὸ ὁποῖο κατασκευάζεται ἀπὸ λεπτὴ σανίδα, ἢ ἀπὸ πλαστικὸ ἢ ἀπὸ μέ-



Σχ. 39

ταλλο. Οἱ τεχνίται μεταχειρίζονται μία μεταλλινὴ γωνία (α). Μὲ τὸν γνώμονα χαράσσουμε ἰδίως καθέτους καὶ παραλλήλους εὐθείας σχ. 39.



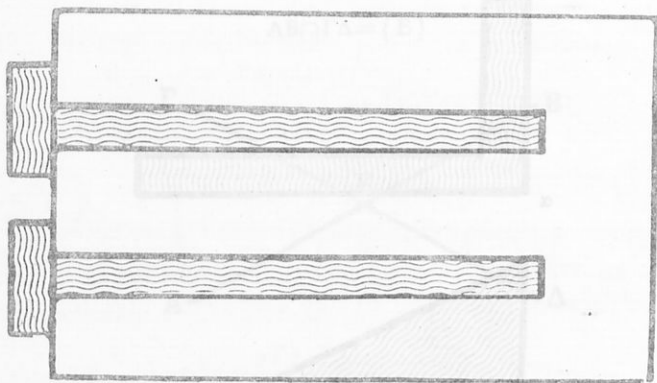
Σχ. 40

32.2 Ἄλλο Γεωμετρικὸ ὄργανο εἶναι καὶ τὸ Ταῦ σχ. 40 μὲ τὸ ὁποῖο χαράσσουμε εὐθεῖες γραμμές.

Χάραξη παραλλήλων εὐθειῶν

32.3 1ος τρόπος (Με T ταῦ).

Προσαρμόζουμε τὴν κεφαλὴ τοῦ T (ταῦ) σὲ μία πλευρὰ τοῦ πίνακος ἢ τῆς πινακίδος (σχ. 41). Ἐπειτα ὀλισθαίνουμε τὸ T (ταῦ) στὸ ἐπίπεδο, προσέχοντας ὥστε ἡ κεφαλὴ του νὰ μένῃ προσαρμοσμένη στὴ μία πλευρὰ. Τότε στὶς διάφορες θέσεις τοῦ T (ταῦ) χαράζουμε παράλληλες εὐθείες.

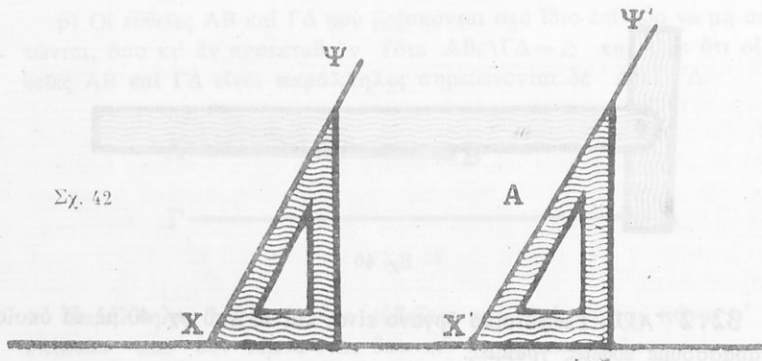


Σχ. 41

32.4 2ος τρόπος (Με γνῶμονα καὶ χάρακα).

Πρόβλημα. Ἀπὸ ἓνα σημεῖο A νὰ χαράξουμε μία εὐθεῖα παράλληλὴ πρὸς εὐθεῖαν $X\Psi$ ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο A .

α) Τοποθετοῦμε κατὰ μῆκος τῆς $X\Psi$ τὴν μία πλευρὰ τοῦ γνῶμονος. Κατὰ μῆκος μιᾶς ἀπὸ τὶς ἄλλες πλευρὲς του ἐφαρμόζουμε τὸ χάρακα.



Σχ. 42

β) Κρατάμε σταθερό το χάρακα και ολισθαίνουμε το γνώμονα κατά μήκος της άκμης του χάρακα ώσπου να συναντήσει το σημείο Α σύμφωνα με το σχήμα (42). Από τη θέση αυτή μπορούμε να χαράξουμε ευθεία $X'Y'$ που να διέρχεται απ' το σημείο Α και να είναι παράλληλη προς την ευθεία XY .

Με τόν τρόπο αυτό μάθαμε να χαράζουμε από ένα σημείο Α μία ευθεία $X'Y'$ παράλληλη προς μία άλλη XY που δέν διέρχεται από το σημείο Α. Μήπως μ' άλλο τρόπο μπορούμε να χαράξουμε κι' άλλη παράλληλη απ' το Α προς τη XY ; Η εὐκλείδειος γεωμετρία που μελετάμε—πῆρε τὸ ὄνομά της απ' τὸ διάσημο Ἑλληνα μαθηματικὸ τὸν Εὐκλείδη (4ο αἰων. π.Χ.)—δέχεται ὅτι τοῦτο εἶναι ἀδύνατο.

Ὡστε δεχόμαστε ὅτι «ἀπὸ ἑνα σημείο Α ἐκτὸς εὐθείας XY μία μόνον παράλληλος πρὸς τὴ XY διέρχεται» ἡ παραδοχὴ αὐτὴ εἶναι γνωστὴ μετὰ τὸ ὄνομα «αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου».

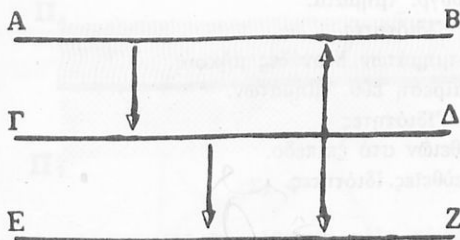
Εὐκλείδης: Διάσημος Ἕλληνας μαθηματικὸς ἔζησε περὶ τὸ 300 π.Χ. καὶ συνέγραψε τὴν περίφημη Εὐκλείδειο γεωμετρία.

§ 33. Ἰδιότητες παραλλήλων εὐθειῶν

α) Εἶναι φανερό ὅτι ἡ σχέση $AB \parallel AB$ δέν εἶναι ὀρθὴ σύμφωνα μετὰ τὸν ὅρισμό τῶν παραλλήλων εὐθειῶν· δηλαδὴ δέν ἰσχύει ἡ ἀνακλαστικὴ ιδιότης.

Σημείωση: Ἄν ἐπεκτείνουμε τὸν ὅρισμό τῶν παραλλήλων ἔτσι: «Παραλλῆλες λέγονται δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ποὺ δέν συναντῶνται ὅσο κι' ἂν προεκταθοῦν ἢ ποὺ συμπίπτουν», τότε ἡ σχέση $AB \parallel AB$ εἶναι ὀρθή.

Στὴν περίπτωσι ποὺ δύο εὐθεῖες συμπίπτουν λέμε ὅτι εἶναι **παράλληλες μετὰ εὐρείᾳ σημασίᾳ**.



Σχ. 43

β) Ἡ συνεπαγωγὴ $AB \parallel \Gamma\Delta \implies \Gamma\Delta \parallel AB$ εἶναι ὀρθὴ ἄρα:

Ἴσχύει ἡ **συμμετρικὴ ιδιότης**.

γ) Ἐπίσης ἡ συνεπαγωγή $\left. \begin{array}{l} AB \parallel \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta \parallel EZ \end{array} \right\} \Rightarrow AB \parallel EZ$ εἶναι ὀρθή.

Ἄρα ἰσχύει καὶ ἡ μεταβατικὴ ιδιότης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(90) Νὰ γράψετε δύο εὐθεῖες παράλληλες καὶ ἔπειτα δύο ἄλλες παράλληλες ποὺ νὰ τέμνουν τὶς πρώτες.

91) Νὰ γράψετε μία εὐθεῖα $X\Psi$ καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ σημεῖο A νὰ φέρετε εὐθεῖα ϵ_1 παράλληλο πρὸς τὴν $X\Psi$ καὶ ἀπὸ τὸ B εὐθεῖα ϵ_2 παράλληλο πρὸς τὴν ϵ_1 . Ποιὰ θέση ἔχουν οἱ εὐθεῖες ϵ_2 καὶ $X\Psi$.

(92) Νὰ γράψετε μία κυρτὴ γωνία $XO\Psi$ καὶ ἀπὸ ἓνα σημεῖο A ἐντὸς αὐτῆς νὰ χαράξετε παράλληλες πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας.

Περίληψη

Γεωμετρικὸ στερεό.

Στοιχεῖα γεωμετρικῶν στερεῶν.

Εἶδη γραμμῶν.

Εἶδη ἐπιφανειῶν.

Ἰδιότητες εὐθείας.

Ἰδιότητες ἐπιπέδου.

Ἐπίπεδα σχήματα.

Γωνία, περιφέρεια.

Εὐθύγραμμα σχήματα.

Τὰ κυριώτερα γεωμετρικὰ στερεά.

Ἰσα ἄνισα εὐθυγρ. τμήματα.

Ἰδιότητες

Μέτρησις εὐθ-τμημάτων Μονάδες μήκους.

Πρόσθεσις ἀφαίρεσις εὐθ. τμημάτων.

Ἰδιότητες

Θέσεις δύο εὐθειῶν στὸ ἐπίπεδο.

Παράλληλες εὐθεῖες, ιδιότητες.

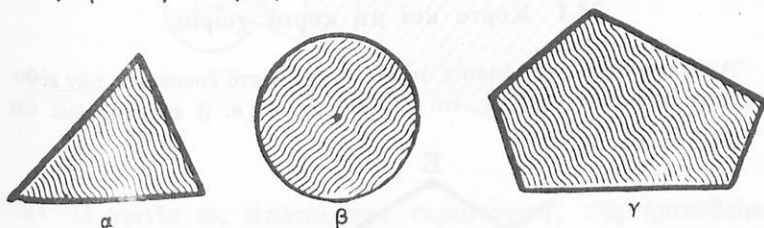
ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ'

§ 34. Ἐπίπεδα χωρία

Ἐνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου λέγεται ἐπίπεδο χωρίο.

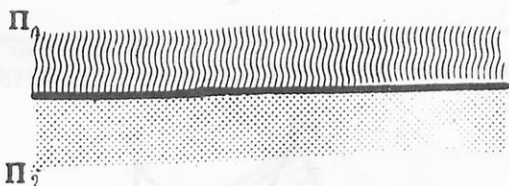
Εἶδη ἐπιπέδων χωρίων

Τὸ ἐσωτερικὸ ἑνὸς τριγώνου, μιᾶς περιφερείας, ἑνὸς πολυγώνου εἶναι ἐπίπεδα χωρία, τὰ ὁποῖα καταλαμβάνουν περιορισμένη ἔκτασι καὶ λέγονται **περιορισμένα ἢ πεπερασμένα ἐπίπεδα χωρία** σχ. 44.



Σχ. 44

Ἄν χαράξωμε μιὰ εὐθεῖα $ΧΨ$ πάνω σ' ἓνα ἐπίπεδο, τότε χωρίζεται τὸ ἀπεριόριστο ἐπίπεδο σὲ δύο **ἡμιεπίπεδα**, πού εἶναι ἐπίπεδα χωρία μὲ ἀπεριόριστη ἔκτασι καὶ λέγονται **ἀπεριόριστα ἢ μὴ πεπερασμένα χωρία**.



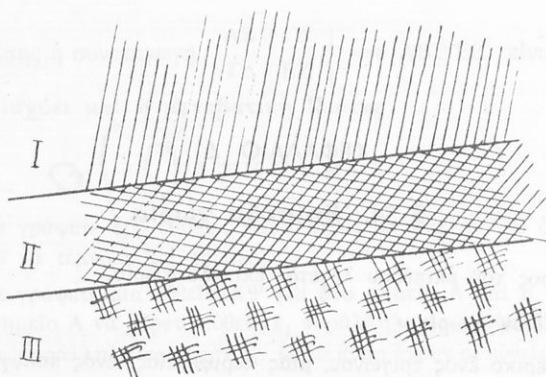
Σχ. 45

Ἄν χαράξωμε δύο παράλληλες εὐθεῖες $ε_1$ καὶ $ε_2$ πάνω σ' ἓνα ἀπεριόριστο ἐπίπεδο, τοῦτο χωρίζεται σὲ τρία μὴ πεπερασμένα χωρία:

Τὰ **I, II, III**.

Τὰ **I καὶ III** εἶναι **ἡμιεπίπεδα**

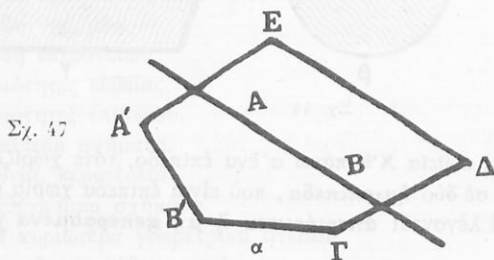
Τὸ χωρίο **II** λέγεται **ταινία**



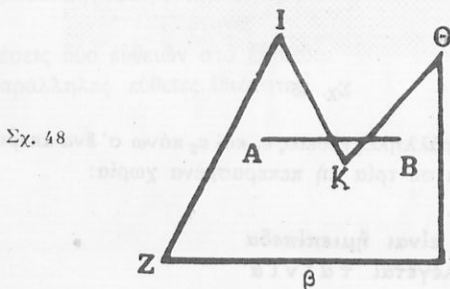
Σχ. 46

34.1 Κυρτά και μη κυρτά χωρία

“Αν πάρουμε δυό οποιαδήποτε σημεία A και B στο έσωτερικό των εὐθυγράμμων σχημάτων $A'B'ΓΔΕ$ και $ZHΘΙΚ$ σχ. 47 α, β παρατηρούμε ότι



τὸ τμήμα AB στὸ σχ. α βρίσκεται ολόκληρο στὸ έσωτερικὸ τοῦ $A'B'ΓΔΕ$ ἐνῶ τὸ AB στὸ σχ. 48 δὲν βρίσκεται ολόκληρο στὸ έσωτερικὸ τοῦ σχήματος.



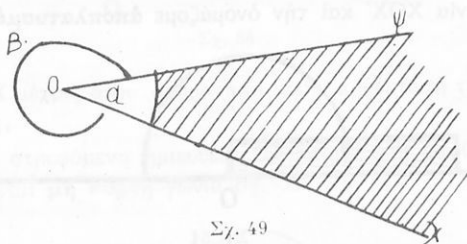
Γι' αυτό το σχήμα α λέγεται **κυρτό**, ενώ το σχήμα β λέγεται **μη κυρτό**.

Κυρτά σχήματα είναι το τρίγωνο, ή περιφέρεια. κ. ά.

Γ Ω Ν Ι Ε Σ

§. 35. Κυρτή και μη κυρτή γωνία

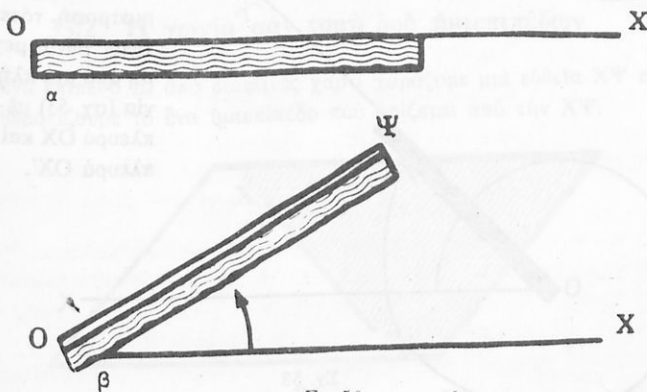
Είδαμε ότι δύο ημιευθείες OX και $O\Psi$, που δέν αποτελούν μία ημιευθεία, χωρίζουν το επίπεδο σε δύο γωνιές σχ. 49 τη γωνία α και τη γωνία β . Είναι φανερό ότι η γωνία α είναι **κυρτή** ή δέ γωνία β **μη κυρτή**.



Σχ. 49

35.1 Ἡ γωνία ὡς ἀποτέλεσμα περιστροφῆς τῆς ἡμιευθείας OX περὶ τὸ O .

Μ' ἓνα χάρακα χαράζομε μιὰ ἡμιευθεία OX . Ἐπειτα κρατᾶμε σταθερὰ τὴ μιὰ ἄκρη τοῦ χάρακα στὸ σημεῖο O καὶ περιστρέφομε γύρω ἀπὸ τὸ O τὸν χάρακα σχ. 50 πάντοτε στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα β,

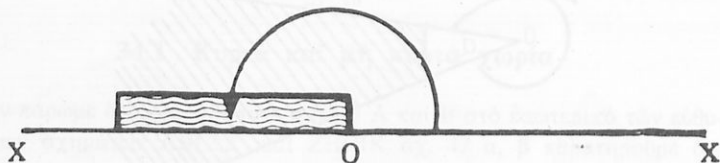


Σχ. 50

μέχρι τη θέσι ΟΨ. Τότε ή ΟΧ κατά τήν περιστροφή της γύρω από τὸ Ο θά διαγράψῃ μιὰ κυρτὴ γωνία τήν ΧΟΨ. Ἡ περιστροφή ἐγίνε ἀντίθετα ἀπὸ τὴ φορά κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ρολοιοῦ. Μποροῦσε ὅμως νὰ ἀκολουθήσῃ καὶ τὴ φορά τῶν δεικτῶν τοῦ ρολοιοῦ. Πρὸς τὸ παρὸν θά χρησιμοποιοῦμε τὴν ἀντίθετη φορά.

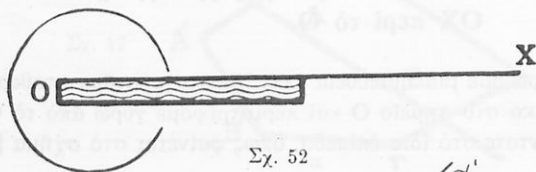
Ὡστε: «Μιὰ γωνία δημιουργεῖται ἀπὸ τὴν περιστροφικὴ κίνηση μιᾶς ἡμιευθείας στὸ ἐπίπεδό, γύρω ἀπὸ τὸ ἄκρο της Ο

Ἄν συνεχίσουμε τὴν περιστροφή τῆς ἡμιευθείας ΟΧ θά ἔλθῃ σὲ μιὰ θέσι ΟΧ', ἡ ὁποία θά εἶναι προέκταση τῆς ἀρχικῆς σχ. 51. Τότε λέμε ὅτι δημιουργήθηκε ἡ γωνία ΧΟΧ' καὶ τὴν ὀνομάζουμε ἀποπλατυσμένη γωνία.



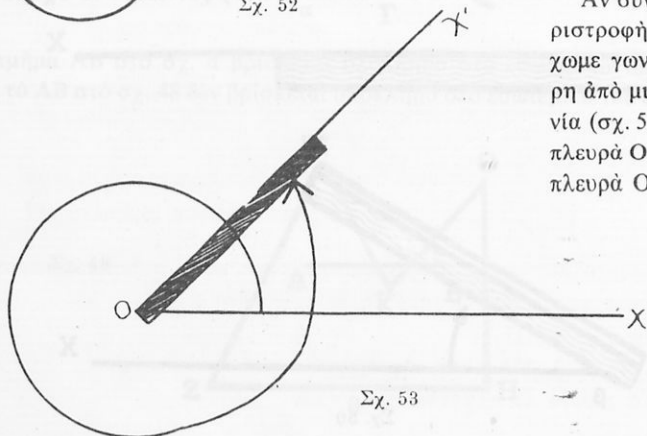
Σχ. 51

Μποροῦμε νὰ συνεχίσουμε τὴν περιστροφή ἕως ὅτου ἡ ΟΧ ἐπανεέλθῃ στὴν ἀρχικὴ τῆς θέσι ΟΧ (σχ. 52). Τότε ἔχουμε μιὰ **πλήρη** γωνία.



Σχ. 52

Ἄν συνεχισθῇ ἡ περιστροφή τότε θά ἔχουμε γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ μιὰ πλήρη γωνία (σχ. 53) με ἀρχικὴ πλευρὰ ΟΧ καὶ τελικὴ πλευρὰ ΟΧ'.



Σχ. 53

Παρατηρούμε ότι:

α') Η γωνία που δημιουργείται από την περιστροφή της ημιευθείας OX πριν να κάνει μισή στροφή (δηλαδή πριν να φθάσει στην προέκτασή της) είναι **κυρτή**.

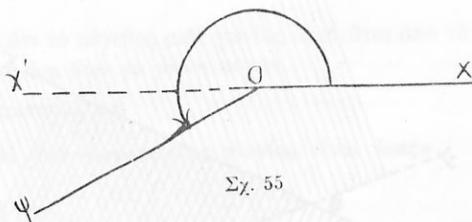
β') Αν η ημιευθερα OX που στρέφεται σταματήσει στην προέκτασή της OX' , δημιουργείται πάλι **κυρτή** γωνία, η οποία λέγεται **άποπλευ-σμένη** σχ. 54. Ωστε όλες οι γωνίες που δημιουργούνται από την περι-



Σχ. 54

στροφή της OX μέχρις ότου σταματήσει στην προέκτασή της OX' είναι **κυρτές γωνίες**.

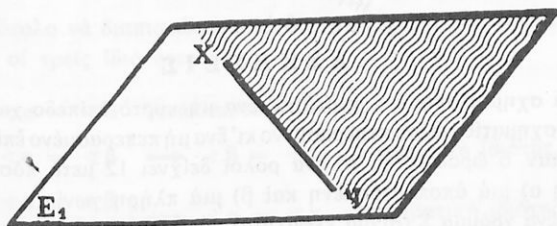
γ') Όταν η στρεφόμενη ημιευθεία OX σταματήσει αφού περάσει την OX' , σχηματίζεται **μη κυρτή** γωνία σχ. 55



Σχ. 55

35.2 Η γωνία σαν τομή δυο ημιεπιπέδων

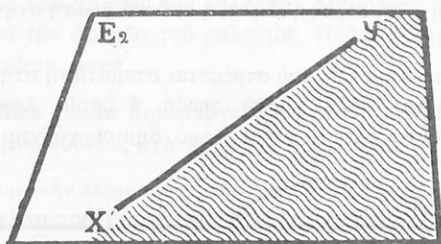
Σ' ένα επίπεδο E_1 από διαφανές χαρτί χαράζουμε μια ευθεία $X\Psi$ σχ. 56 και χρωματίζουμε το ένα ημιεπίπεδο που ορίζεται από την $X\Psi$.



Σχ. 56

Ἐπίσης σ' ἄλλο ἐπίπεδο E_2 ἀπὸ διαφανὲς χαρτὶ σχ. 57 χαράζομε εὐθεῖα $X' \Psi'$ καὶ σκιάζομε τὸ ἓνα ἡμιεπίπεδο.

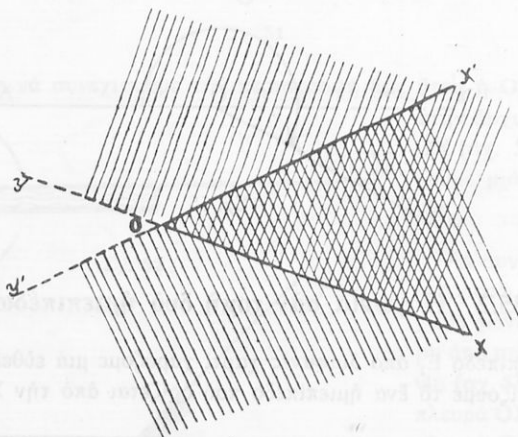
Σχ. 57



Τοποθετοῦμε τὰ δύο φύλλα τὸ ἓνα ἐπάνω στὸ ἄλλο ὥστε οἱ εὐθεῖες $X\Psi$ καὶ $X' \Psi'$ νὰ τέμνονται σ' ἓνα σημεῖο O . Τότε θὰ ἔχωμε τὴν εἰκόνα μιᾶς κυρτῆς γωνίας ὡς **τομή** δύο ἡμιεπιπέδων E_1, E_2 σχ. 58.

$$E_1 \cap E_2 = \angle XO X'$$

Σχ. 58

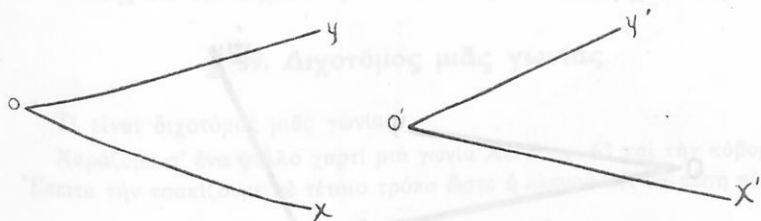


ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 93) Νὰ σχηματίσετε ἓνα κυρτὸ καὶ ἓνα μὴ κυρτὸ ἐπίπεδο χωρίο.
- 94) Νὰ σχηματίσετε ἓνα πεπερασμένο καὶ ἓνα μὴ πεπερασμένο ἐπίπεδο χωρίο.
- 95) Ὄταν ὁ ὥροδείκτης σ' ἓνα ρολοῖ δείχνει 12 μετὰ πόσες ὥρες θὰ διαγράψῃ α) μιὰ ἀποπλατυσμένη καὶ β) μιὰ πλήρη γωνία.
- 96) Σ' ἓνα γράμμα Σ (σίγμα κεφαλαῖο) σημειώστε κυρτὲς καὶ μὴ κυρτὲς γωνίες.

§ 36. Ίσες γωνίες

Κατασκευάζουμε μια γωνία XOY σχ. 59α. Έπειτα παίρνουμε το άποτύπωμά της με διαφανές χαρτί και κατασκευάζουμε μια άλλη γωνία X'O'Y' . Έτσι έχουμε δύο ίσες γωνίες. $\angle \text{XOY} = \angle \text{X'O'Y'}$



Σχ. 59

«Δύο γωνίες λέγονται ίσες, όταν ή μία μπορεί να εφαρμόζη ακριβώς πάνω στην άλλη.»

Σημειώνουμε ότι το μέγεθος μιας γωνίας εξαρτάται από το άνοιγμα των πλευρών της και όχι από τα μήκη αυτών.

Εύκολα διακρίνουμε ότι :

«Όλες οι αποπλατυσμένες γωνίες είναι ίσες».

Εφαρμογή

Να συγκρίνετε τις γωνίες των εδρών του ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου.

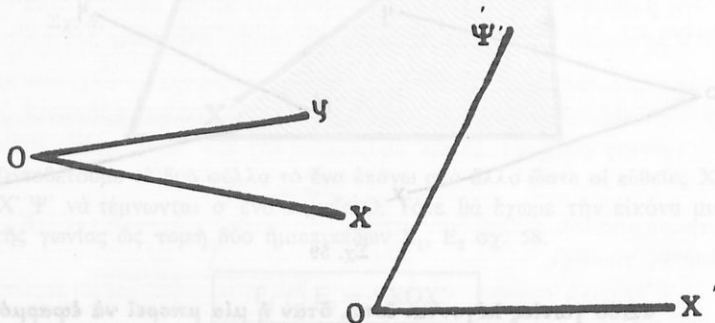
§ 37. Ιδιότητες ίσων γωνιών

Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε με διαφανές χαρτί ότι στις ίσες γωνίες άληθεύουν οι τρεις ιδιότητες.

- I. $\angle \alpha = \angle \alpha$ Ανακλαστική ιδιότητα.
- II. $\angle \alpha = \angle \beta \implies \angle \beta = \angle \alpha$ Συμμετρική ιδιότητα.
- III. $\left. \begin{array}{l} \angle \alpha = \angle \beta \\ \angle \beta = \angle \gamma \end{array} \right\} \implies \angle \alpha = \angle \gamma$ Μεταβατική ιδιότητα.

§ 38. Άνισες γωνίες

Κατασκευάζουμε δυο γωνίες $\angle XO\Psi$ και $\angle X'O'\Psi'$ (σχ. 60) και μεταφέρουμε τη $\angle XO\Psi$ πάνω στη $\angle X'O'\Psi'$ με διαφανές χαρτί έτσι, ώστε το O να πέσει στο O' , ή OX στην $O'X'$ ή δέ $O\Psi$ προς το μέρος της $O'\Psi'$, τότε υπάρχουν τρία ένδεχόμενα.



Σχ. 60

α') 'Η $O\Psi$ να πέσει εντός της γωνίας $\angle X'O'\Psi'$ όποτε ή γωνία $\angle XO\Psi$ είναι μικρότερη από την $\angle X'O'\Psi'$ και γράφουμε :

$$\angle XO\Psi < \angle X'O'\Psi'$$

β') 'Η $O\Psi$ να πέσει επί της $O'\Psi'$ όποτε :

$$\angle XO\Psi = \angle X'O'\Psi'$$

γ') 'Η $O\Psi$ να πέσει εκτός της γωνίας $\angle X'O'\Psi'$ Τότε ή γωνία $\angle XO\Psi$ θα είναι μεγαλύτερη της γωνίας $\angle X'O'\Psi'$.

$$\angle XO\Psi > \angle X'O'\Psi'.$$

Έφαρμογή

Να σχηματίσετε ένα (τυχαίο) τρίγωνο και έπειτα να συγκρίνετε τις γωνίες του. Γράψατε συμβολικά τὰ αποτελέσματα της συγκρίσεως.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΑΝΙΣΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

Εύκολα εξακριβώνομε ότι

α') ή σχέση $\angle \alpha > \angle \alpha$ δέν είναι όρθή

β') ή συνεπαγωγή $\angle \alpha > \angle \beta \implies \angle \beta > \angle \alpha$ δέν είναι όρθή

$\gamma')$ ή συνεπαγωγή

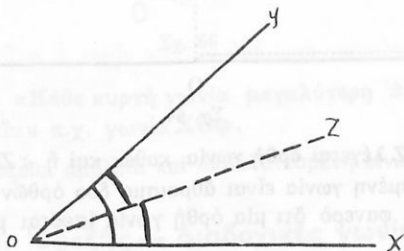
$$\left. \begin{array}{l} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha > \gamma \text{ είναι όρθη — (Μεταβατική ιδιότητα).}$$

Όστε : «Στις άνισες γωνίες ισχύει μόνον ή μεταβατική ιδιότης και δέν ισχύουν ή ανακλαστική και ή συμμετρική».

§ 39. Διχοτόμος μιᾶς γωνίας

Τί είναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας;

Χαράζουμε σ' ένα φύλλο χαρτί μιᾶ γωνία XOY σχ. 63 και τήν κόβομε. Έπειτα τήν τσακίζουμε μέ τέτοιο τρόπο ὥστε ή πλευρά OX νά πέση πάνω



Σχ. 63

στήν OY . Άνοίγουμε τὸ χαρτί ὥστε νά σχηματισθῇ πάλι ή ἀρχική γωνία XOY . Παρατηροῦμε τότε διτ ή ήμιευθεία OZ , πού σχηματίσθηκε ἀπό τὸ τσάκισμα, χωρίζει τή γωνία XOY σέ δύο ἴσες γωνίες XOZ καί ZOY .

«Καλοῦμε διχοτόμο μιᾶς γωνίας τήν ήμιευθεία, ή ὁποία χωρίζει τήν γωνία σέ δύο ἴσες γωνίες».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

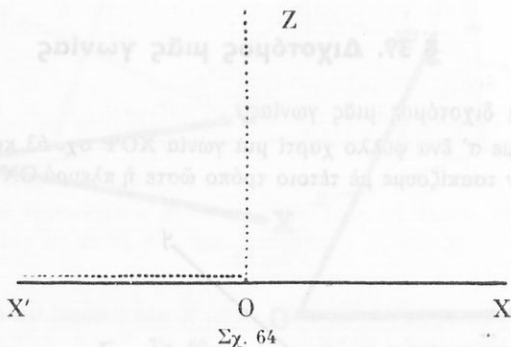
97) Νά σχεδιάσετε δύο κυρτές γωνίες κι' ἔπειτα νά τίς συγκρίνετε καί νά γράψετε τὸ ἀποτέλεσμα συμβολικά.

98) Νά γράψετε ἕνα κάππα κεφαλαίο κι' ἔπειτα νά συγκρίνετε τίς γωνίες του καί νά γράψετε συμβολικά τὰ ἀποτελέσματα τῆς συγκρίσεως.

99) Όταν χρησιμοποιήτε διαφανές χαρτί γιά νά συγκρίνετε γωνίες μήπως χρησιμοποιεῖτε τή μεταβατική ιδιότητα.

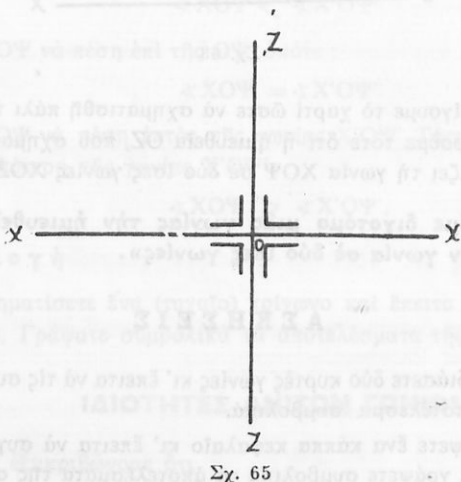
§ 40. Ὀρθή γωνία — ὀξεῖα — ἀμβλεῖα

Λαμβάνομε τὴν ἀποπλατυσμένη γωνία XOX' σχ. 64 καὶ τὴν τσακίζομε ἔτσι, ὥστε ἡ πλευρὰ OX νὰ πέσῃ στὴν OX' . Ὅταν ἡ OX ἐπανεέλθῃ στὴ θέσιν της, ἡ ἡμιευθεῖα OZ , ποὺ σχηματίσθηκε ἀπὸ τὸ τσάκισμα, χωρίζει τὴν ἀποπλατυσμένην σὲ δύο ἴσες γωνίες $\angle XOZ = \angle ZOX'$.



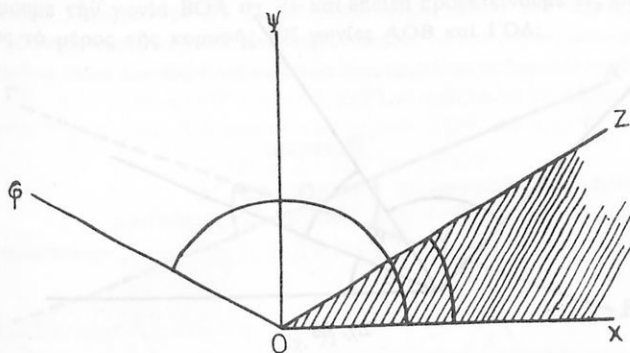
Ἡ γωνία XOZ λέγεται **ὀρθή** γωνία, καθὼς καὶ ἡ $\angle ZOX'$. Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀποπλατυσμένη γωνία εἶναι ἄθροισμα δύο ὀρθῶν γωνιῶν.

Ἐπίσης εἶναι φανερό ὅτι μία ὀρθή γωνία ἰσοῦται μὲ τὸ τέταρτο μιᾶς



στροφῆς. σχ. 65. Οἱ πλευρὲς τῆς ὀρθῆς γωνίας καθὼς καὶ οἱ εὐθεῖες στίς ὁποῖες ἀνήκουν λέγονται **κάθετες καὶ σημειώνονται $ZZ' \perp XX'$** .

Ὀξεῖα γωνία. «Κάθε γωνία μικρότερη ἀπὸ τὴν ὀρθή λέγεται ὀξεῖα» π.χ. $\angle XOZ$ (σχ. 66).



Σχ. 66

Ἀμβλεία γωνία «Κάθε κυρτή γωνία μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν ὀρθή λέγεται ἀμβλεία» π.χ. γωνία $XO\Phi$.

Οἱ γωνίες ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεία καὶ ἀποπλατυσμένη εἶναι κυρτές γωνίες.

§ 41. Ἐφεξῆς — Διαδοχικὲς γωνίες

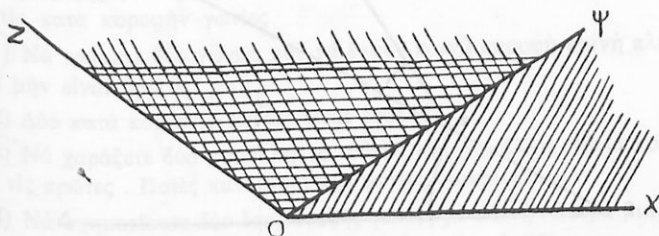
α) Σ' ἓνα σημεῖο O τοῦ ἐπιπέδου φέρνομε τρεῖς ἡμιευθεῖες τὶς OX , $O\psi$, OZ (σχ. 67). Ἄν προσέξωμε τὶς γωνίες $XO\psi$ καὶ ψOZ βλέπομε ὅτι αὐτὲς ἔχουν:

α') κοινὴ κορυφὴ τὸ O

β') κοινὴ πλευρὰ τὴν $O\psi$.

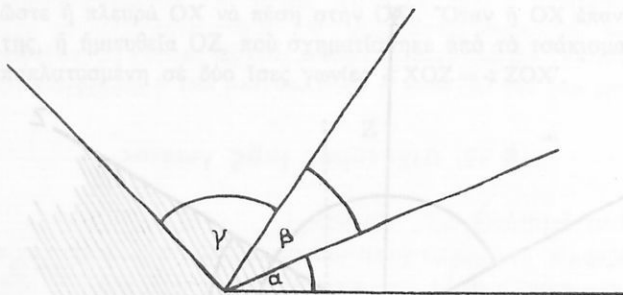
γ') Τὶς ἄλλες πλευρὲς OX , OZ τὶς ἔχουν τὴ μιὰ ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος καὶ τὴν ἄλλη ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τῆς κοινῆς πλευρᾶς.

Δυὸ γωνίες μὲ αὐτὰ τὰ γνωρίσματα λέγονται ἐφεξῆς.



Σχ. 67

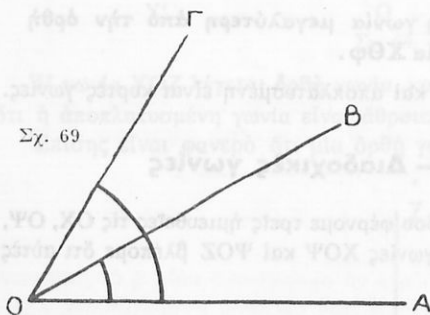
β) Στο σχήμα 68 οι γωνίες α και β είναι έφεξις. Επίσης και οι γωνίες β και γ είναι έφεξις.



Σχ. 68

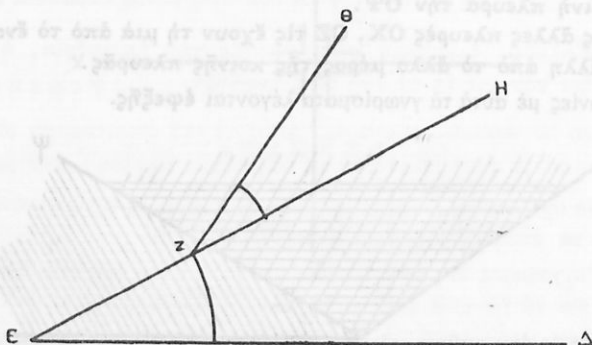
“Αν περισσότερες από δυο γωνίες είναι ή κάθε μία με την έπομένη της έφεξις, τότε οι γωνίες αυτές λέγονται διαδοχικές».

Σχ. 69



Π.χ. οι γωνίες α , β , γ του σχ. 68 είναι διαδοχικές.

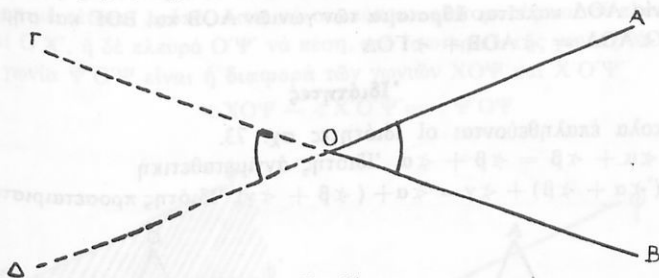
Παρατηρούμε ότι οι γωνίες AOB και ΑΟΓ σχ. 69 δέν είναι έφεξις. Όμοίως οι γωνίες ΔΕΗ και ΗΖΘ σχ. 70 δέν είναι έφεξις; Γιατί;



Σχ. 70

§ 41. Κατὰ κορυφήν γωνίες

Γράφουμε τὴν γωνία BOA σχ. 71 καὶ ἔπειτα προεκτείνουμε τὶς πλευρὰς τῆς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς. Οἱ γωνίες AOB καὶ ΓΟΔ :



Σχ. 71

- α') Ἐχουν κοινὴ κορυφὴ τὸ O .
 β') Οἱ πλευρὰς τῆς μιᾶς γωνίας εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.
 Οἱ γωνίες αὐτὲς λέγονται **κατὰ κορυφὴν**.

Μὲ διαφανὲς χαρτὶ ἐξακριβώνουμε ὅτι

$$\sphericalangle \text{ΓΟΔ} = \sphericalangle \text{ΑΟΒ}$$

«Οἱ κατὰ κορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 100) Νὰ χαράξετε μία ἀμβλεία, γωνία καὶ νὰ προεκτείνετε τὶς πλευρὰς τῆς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς.

Ἐπειτα νὰ σημειώσετε,

- τὶς ὀξείες γωνίες
- τὶς ἴσες γωνίες
- τὶς ἐφεξῆς γωνίες
- τὶς κατὰ κορυφὴν γωνίες

- 101) Νὰ γράψετε δύο γωνίες ποὺ νὰ ἔχουν κοινὴ κορυφὴ κοινὴ πλευρὰ καὶ νὰ μὴν εἶναι ἐφεξῆς.

- 102) Δύο κατὰ κορυφὴν γωνίες εἶναι ἐφεξῆς;

- 103) Νὰ χαράξετε δύο παράλληλες εὐθεῖες καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα ποὺ νὰ τέμνῃ τὶς πρῶτες. Ποιὲς κατὰ κορυφὴν γωνίες διακρίνετε.

- 104) Νὰ σχηματίσετε δύο ἴσες ἐφεξῆς γωνίες μὲ κοινὴ πλευρὰ μιὰ ὀρι-
σμένη ἡμιευθεῖα OX ποιά ἄλλη ιδιότητα θὰ ἔχῃ τότε ἡ OX .

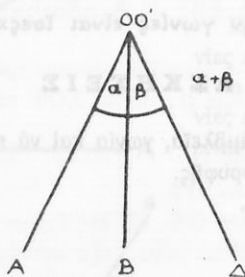
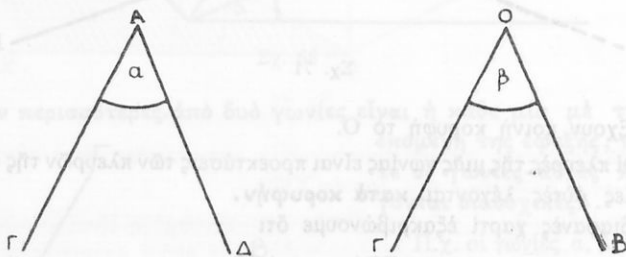
§ 42. Πρόσθεση γωνιών

Γράφουμε δυό γωνίες AOB και ΓΟΔ σχ. 72. Μὲ διαφανὲς χαρτί ἀντιγράφουμε τὶς γωνίες καὶ τὶς τοποθετοῦμε ἔτσι, ὥστε νὰ γίνουν ἐφεξῆς σχ. 73. Ἡ γωνία ΑΟΔ καλεῖται **ἄθροισμα** τῶν γωνιῶν ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ καὶ σημειώνεται $\angle \text{ΑΟΔ} = \angle \text{ΑΟΒ} + \angle \text{ΓΟΔ}$

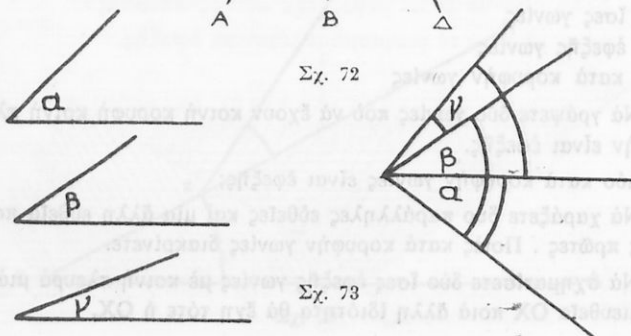
Ἰδιότητες

Εὐκόλα ἐπαληθεύονται οἱ ἰδιότητες σχ. 73.

- 1) $\angle \alpha + \angle \beta = \angle \beta + \angle \alpha$. Ἰδιότης ἀντιμεταθετικῆ
- 2) $(\angle \alpha + \angle \beta) + \angle \gamma = \angle \alpha + (\angle \beta + \angle \gamma)$. Ἰδιότης προσεταιριστικῆ.



Σχ. 72

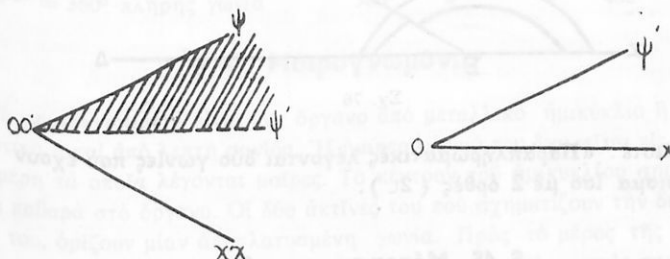


Σχ. 73

§ 43. Ἀφαίρεση γωνιῶν

Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ δυὸ γωνιῶν $\angle XO\Psi$ καὶ $\angle X'O'\Psi'$ σχ. 74 τοποθετοῦμε τὴν μικρότερη, μὲ τὴ βοήθεια διαφανοῦς χαρτιοῦ, πάνω στὴ μεγαλύτερη μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε νὰ συμπίπτουν οἱ κορυφές καὶ οἱ πλευρές OX καὶ $O'X'$, ἡ δὲ πλευρὰ $O'\Psi'$ νὰ πέσῃ, στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας $\angle XO\Psi$. Τότε ἡ γωνία $\Psi'O'\Psi$ εἶναι ἡ **διαφορὰ** τῶν γωνιῶν $\angle XO\Psi$ καὶ $\angle X'O'\Psi'$

$$\angle XO\Psi - \angle X'O'\Psi' = \angle \Psi'O'\Psi$$

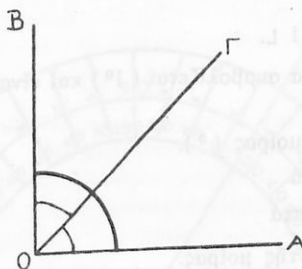


Σχ. 74

§ 44. Συμπληρωματικὲς καὶ παραπληρωματικὲς γωνίες

α') Κατασκευάζουμε ὀρθή γωνία $\angle AOB$ καὶ γράφουμε τὴν ἡμιευθεία OG στὸ ἐσωτερικὸ τῆς γωνίας. Οἱ δύο γωνίες σχ. 75 $\angle AOG$ καὶ $\angle GOB$ ἔχουν ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς

$$\angle AOG + \angle GOB = 1 \text{ ὀρθή ἢ } (1L).$$

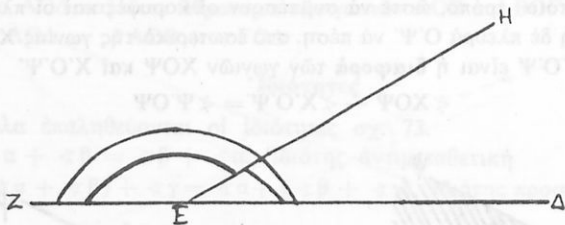


Σχ. 75

Ὡστε: Συμπληρωματικὲς λέγονται δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ 1 ὀρθή (1L).

β') Γράφουμε μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία ΔΕΖ σχ. 76 καὶ χαράζουμε τὴν ἡμιευθεῖα ΕΗ. Ἔτσι σχηματίζονται οἱ γωνίες ΔΕΗ καὶ ΗΕΖ. Αὐτὲς ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ 2 ὀρθές (2L) καὶ λέγονται **παραπληρωματικές**.

$$\angle \Delta Ε Η + \angle Η Ε Ζ = 2L.$$



Σχ. 76

Ὡστε: «**Παραπληρωματικές** λέγονται δύο γωνίες πού ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ 2 ὀρθές (2L).

§ 45. Μέτρηση γωνιῶν

Ὅπως καὶ στὴ μέτρηση τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, μέτρηση μιᾶς γωνίας εἶναι ἡ **σύγκρισή της** μὲ μιὰ ἄλλη γωνία πού τὴν ἐκλέγουμε γιὰ μονάδα.

Μέτρο μιᾶς γωνίας εἶναι ὁ ἀριθμὸς πού μᾶς δείχνει πόσες φορές εἶναι μεγαλύτερη ἢ μικρότερη ἡ γωνία ἀπὸ τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν.

§ 46. Μονάδες γωνιῶν

Ι) ἡ ὀρθή γωνία ἢ 1 L.

ΙΙ) Ἡ μοῖρα, ἡ ὁποία συμβολίζεται (1°) καὶ εἶναι τὸ 1/90 τῆς ὀρθῆς γωνίας.

Ὑποδιαιρέσεις τῆς μοίρας (°).

1° = 60' πρῶτα λεπτά

1' = 60'' δεύτερα λεπτά

Ὡστε τὸ 1' = 1/60 τῆς μοίρας.

Τὸ 1'' = 1/60 τοῦ πρώτου λεπτοῦ

Ἔτσι 1° = 60' = (60 × 60' = 3600'')

καὶ μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία εἶναι ἴση μὲ 180°.

III) 'Ο βαθμός, ό οποίος έχει δεκαδική ύποδιαίρεση.

$$1^b = \frac{1}{100} \text{ της } \acute{\alpha}\rho\theta\eta\varsigma \text{ } \gamma\omega\nu\iota\alpha\varsigma \left\{ \begin{array}{l} 1^b = 100' = 10000'' \\ 1' = 100'' \end{array} \right.$$

Έφαρμογή

$$1^{\circ}\rho\theta. = 90^{\circ}$$

$$2^{\circ}\rho\theta. = 180^{\circ}$$

$$3^{\circ}\rho\theta. = 270^{\circ}$$

$$4^{\circ}\rho\theta. = 360^{\circ} \text{ πλήρης } \gamma\omega\nu\iota\alpha$$

Άντίστοιχα

$$90^{\circ} \text{ ισοδυναμούν με } 100^b$$

$$180^{\circ} \quad \gg \quad 200^b$$

$$270^{\circ} \quad \gg \quad 300^b$$

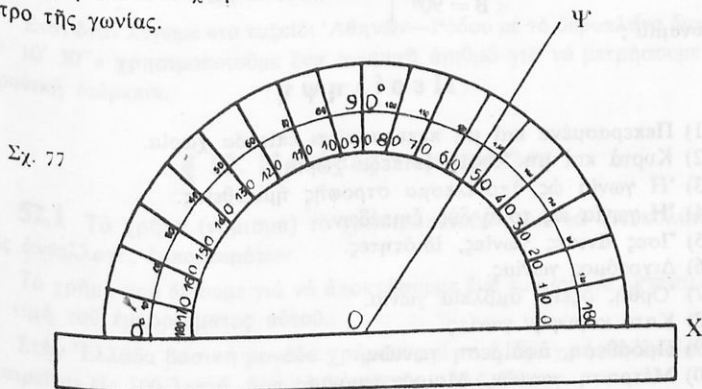
$$360^{\circ} \quad \gg \quad 400^b$$

§ 47. Μοιρογνώμονιο

Τό **μοιρογνώμονιο** είναι ένα όργανο από μεταλλικό ήμικύκλιο ή από πλαστικό ή και από λεπτή σανίδα. Η ήμικυκλεία του διαιρείται εις 180° ίσα μέρη τὰ όποια λέγονται μοίρες. Τό κέντρον τού ήμικυκλείου σημειώνεται καθαρά στό όργανο. Οί δύο άκτινες του πού σχηματίζουν τήν διάμετρόν του, όρίζουν μίαν άποπλατυσμένη γωνία. Πρός τό μέρος της ήμικυκλείας ύπάρχουν άκτινωτές ευθύγραμμες χαραγές. Οί χαραγές σημειώνονται ανά 10 και βαθμολογείται ή ήμικυκλεία από δεξιά προς τὰ άριστερά και από τὰ άριστερά προς τὰ δεξιά 0°, 10°, 20°, ... 180°.

§ 48. Μέτρηση γωνίας

Γιά νά μετρήσουμε μιá κυρτή γωνία ΧΟΨ τοποθετούμε τό κέντρο τού μοιρογνώμονιου στη κορυφή της γωνίας έτσι ώστε ή μιá πλευρά της γωνίας π.χ. ή ΟΧ νά δείχνη τό 0° σχ. (77). Τότε ή πλευρά ΟΨ μäs δείχνει τό μέτρο της γωνίας.



§ 49. Κατασκευή γωνίας

Χαράζουμε τη μιὰ πλευρά π.χ. ΟΧ της γωνίας και τοποθετούμε τὸ μοιρογώνιο ἔτσι, ὥστε τὸ κέντρον νὰ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ Ο καὶ ἡ διάμετρος τοῦ ΟΧ νὰ δείχνῃ ὑποδιαίρεση 0^0 . Καὶ στὴ διαίρεση 55^0 σημειώνουμε τὸ σημεῖο Ψ. Ἔτσι σχηματίζεται ἡ γωνία $(ΟΧ, ΟΨ) = 55^0$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(105) Νὰ σχηματίσετε μιὰ γωνία 60^0 κι' ἔπειτα νὰ σχηματίσετε καὶ νὰ ὑπολογίσετε—χωρὶς μοιρογώνιο—τὴ συμπληρωματικὴ τῆς.

(106) Νὰ σχηματίσετε μιὰ γωνία 120^0 κι' ἔπειτα νὰ σχηματίσετε καὶ νὰ ὑπολογίσετε χωρὶς τὸ μοιρογώνιο—τὴ παραπληρωματικὴ τῆς.

(107) Νὰ σχηματίσετε—μὲ τὸ μοιρογώνιο—μιὰ ὀρθή γωνία ΧΟΥ καὶ στὸ ἐσωτερικὸ τῆς νὰ χαράξετε ἡμιευθεῖα ΟΖ. Ποιὲς γωνίες σχηματίζονται; Ποιὰ σχέση ὑπάρχει μεταξύ τους.

(108) Νὰ σχηματίσετε δύο γωνίες ἐφεξῆς παραπληρωματικές. Νὰ μετρήσετε τὴ μικρότερη μὲ τὸ μοιρογώνιο καὶ νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἄλλη χωρὶς μοιρογώνιο.

(109) Μὲ τὸ μοιρογώνιο νὰ σχηματίσετε μιὰ γωνία 70^0 ἔπειτα νὰ προεκτείνετε τὶς πλευρές τῆς πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς καὶ νὰ ὑπολογίσετε κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίσθηκαν.

110) Νὰ συμπληρώσετε τὶς συνεπαγωγές

$$\alpha) \left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = 60^0 \\ \sphericalangle A = \sphericalangle B \end{array} \right\} \Rightarrow \quad \beta) \left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = 50^0 \\ \sphericalangle B = 50^0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

111) Εἶναι ἡ συνεπαγωγή

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = 90^0 \\ \sphericalangle B = 90^0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle B$$

ισοδυναμία ;

Περίληψη

- 1) Πεπερασμένα καὶ μὴ πεπερασμένα ἐπίπεδα χωρία.
- 2) Κυρτὰ καὶ μὴ Κυρτὰ ἐπίπεδα χωρία.
- 3) Ἡ γωνία ὡς ἀποτέλεσμα στροφῆς ἡμιευθείας.
- 4) Ἡ γωνία ὡς τομὴ δύο ἐπιπέδων.
- 5) Ἴσες ἄνισες γωνίες, ιδιότητες.
- 6) Διχοτόμος γωνίας.
- 7) Ὀρθή, ὀξεῖα, ἀμβλεῖα γωνία.
- 8) Κατὰ κορυφὴν γωνίες.
- 9) Πρόσθεση, ἀφαίρεση γωνιῶν.
- 10) Μέτρηση γωνιῶν, Μοιρογώνιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

§ 50. Συμμιγεῖς ἀριθμοὶ

Τὶ εἶναι **συμμιγεῖς ἀριθμοὶ**: «Μία γωνία α ἔχει μέτρο $40^{\circ} 20' 30''$ »

Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ τὴ μέτρηση τῆς γωνίας α

1) Χρησιμοποιοῦμε ὄχι μόνο ἓναν ἀριθμὸ ἀλλὰ περισσοτέρους (40° , $20'$, $30''$).

2) Καθένας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς ἀναφέρεται σὲ διάφορες μονάδες (μοῖρες, πρῶτα, δεύτερα λεπτά) ποὺ δὲν εἶναι ἄσχετες μεταξύ τους ἀλλὰ εἶναι ὑποδιαίρεσεις **μιας μονάδος** (τῆς μοίρας). Τέτοιοι ἀριθμοὶ ὀνομάζονται **συμμιγεῖς**. Συμμιγεῖς ἀριθμοὺς χρησιμοποιοῦμε γιὰ τὴ μέτρηση τοῦ χρόνου, ὄγκου, χωρητικότητος, στά νομίσματα κλπ.

§ 51. Μονάδες χρόνου

Ἡ χρονικὴ διάρκεια μιᾶς ἡμέρας (ἡμερονυκτίου) διαιρεῖται σὲ 24 ὥρες. Ἡ κάθε ὥρα διαιρεῖται σὲ 60 πρῶτα λεπτά ($'$), τὸ κάθε πρῶτο λεπτό ($'$) διαιρεῖται σὲ 60 δεύτερα λεπτά ($''$).

ἄρα ἔχουμε: $1 \text{ ὥρα (h)} = 60'$
 $1' = 60''$

Ἔτσι ὅταν λέγωμε «τὸ ταξεῖδι Ἀθηνῶν—Ρόδου μὲ τὸ ἀεροπλάνο διαρκεῖ $1^{\text{h}} 10' 30''$ » χρησιμοποιοῦμε ἓνα συμμιγῆ ἀριθμὸ γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ χρονικὴ διάρκεια.

§ 52. Μονάδες νομισμάτων

52.1 Τὸ χρῆμα (νόμισμα) τὸ χρησιμοποιοῦμε γιὰ νὰ διευκολύνουμε τὴν ἀνταλλαγὴς ἐμπορευμάτων.

Τὸ χρῆμα ποὺ δίδουμε γιὰ νὰ ἀποκτήσουμε ἓνα ἐμπόρευμα λέγεται **ἄξια** ἢ **τιμὴ** τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ.

Στὴν Ἑλλάδα βασικὴ μονάδα χρήματος εἶναι ἡ **δραχμὴ**, ἡ ὁποία ὑποδιαιρεῖται εἰς 100 λεπτά, ἄρα τὸ λεπτό εἶναι (0,01) δρχ.

52.2 Στην 'Αγγλία αρχική μονάδα είναι ή 'Αγγλική λίρα **Στερλίνα** £ ή οποία υποδιαιρείται σε σελίνια S ή Ch, πέννες d, φαρδίνια

$$1 \text{ λίρα} = 20 \text{ σελ.} = 240 \text{ π} = 960 \text{ φαρδίνια}$$

$$1 \text{ σελ.} = 12 \text{ πεν}$$

$$1 \text{ πεν} = 4 \text{ φαρδίνια}$$

Στην 'Αμερική κυκλοφορεί τὸ δολλάριο \$ (δρχ. 30)

§ 53. Μονάδες ἐπιφανειῶν

Τὸ ἐσωτερικὸ ἐνὸς ἐπιπέδου σχήματος λέγεται **ἐπιφάνεια τοῦ σχήματος**.

Γιὰ νὰ μετρήσουμε μιὰ ἐπιφάνεια, ὅπως κι' ἓνα εὐθυγρ. τμήμα, πρέπει νὰ τὴ συγκρίνουμε μὲ μιὰ ἄλλη ἐπιφάνεια, τὴ μονάδα ἐπιφανείας. Ἀπὸ τὴ σύγκριση θὰ προκύψῃ ἓνας ἀριθμὸς ποὺ λέγεται **ἐμβαδὸν** τῆς ἐπιφανείας.

Μονάδες ἐπιφανειῶν

Βασικὴ μονάδα ἐπιφανείας εἶναι ἡ ἐπιφάνεια ἐνὸς τετραγώνου πλευρᾶς 1 m λέγεται **τετραγωνικὸ μέτρο** καὶ γράφεται 1 m²

Ὑποδιαιρέσεις:

1 τετραγωνικὴ παλάμη: Τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου πλευρᾶς 1 παλάμη καὶ γράφεται 1 dm²

Ἀνάλογα ἔχουμε: 1 τετραγ. ἑκατοστό: 1 cm²

1 τετραγ. χιλιοστό 1 mm²

Εἶναι δὲ

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ cm}^2$$

$$1 \text{ cm}^2 = 100 \text{ mm}^2$$

ἄρα ἔχουμε

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2$$

$$= 10000 \text{ cm}^2$$

$$= 1.000.000 \text{ mm}^2$$

Πολλαπλάσια

1 τετραγ. δεκάμετρο (ἐπιφάνεια τετραγώνου πλευρᾶς 10 m)

1 τετραγ. ἑκατόμετρο (ἐπιφάνεια τετραγώνου πλευρᾶς 100 m)

1 τετρ. χιλιόμετρο (ἐπιφάνεια τετραγώνου πλευρᾶς 1000 m)

Στή μέτρηση οικόπεδων χρησιμοποιείται και ο τετραγ. τεκτονικός πήχυς.

$$1 \text{ τεκτονικός πήχυς} = \frac{3}{4} \text{ m} = 75 \text{ cm}$$

$$1 \text{ τετ. τεκτ. πήχυς} = \frac{9}{16} \text{ m}^2$$

Επίσης στους άγρους χρησιμοποιείται το στρέμμα

$$1 \text{ στρέμμα} = 1000 \text{ m}^2$$

Όπως στις μετρήσεις αποστάσεων έτσι και στη μέτρηση επιφανειών προτιμούμε να χρησιμοποιούμε μονάδες του δεκαδικού συστήματος γιατί μās διευκολύνουν στη γραφή και στους υπολογισμούς.

Π.χ. ο αριθμός $20 \text{ m}^2 \ 48 \text{ dm}^2 \ 15 \text{ cm}^2$ γράφεται $20,4815 \text{ m}^2$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

112) Να τραπούν σε cm^2 α) τα 21 m^2 και 8 dm^2 β) 5 cm^2 και 12 mm^2 .

113) Τα 24 m^2 να τραπούν σε τετρ. τεκτ. πήχεις.

114) Οι 24 τετρ. τεκτ. πηχ. να τραπούν σε m^2 .

115) Τα 180 στρέμματα να τραπούν σε τετρ. χιλιόμ.

116) Ένα οικόπεδο 1600 τετρ. τεκτ. πηχ. πουλήθηκε με 120 δρ. το m^2 .
Πόση είναι ή τιμή του οικόπεδου.

§ 54. Μονάδες όγκου

Όγκος είναι ο αριθμός που προκύπτει από τη σύγκριση του έσωτερικού ενός στερεού με το έσωτερικό ενός άλλου στερεού που το χρησιμοποιούμε ως μονάδα.

Μονάδες όγκου

Βασική μονάδα είναι το **κυβικό μέτρο** που είναι το έσωτερικό ενός κύβου με άκμή 1 m και γράφεται 1 m^3 .

Υποδιαίρεσεις:

1 κυβική παλάμη: 1 dm^3

1 κυβικός δάκτυλος: 1 cm^3

1 κυβικό χιλιοστό: 1 mm^3

έχουμε

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$$

άρα

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3$$

$$= 1000000 \text{ cm}^3$$

$$= 1.000.000.000 \text{ mm}^3$$

§ 55. Μονάδες χωρητικότητας

Για τη μέτρηση της χωρητικότητας των δοχείων σε υγρά ή αέρια χρησιμοποιείται το **λίτρο**.

1 λίτρο είναι η χωρητικότητας μιᾶς κυβικής παλάμης.

Για τη χωρητικότητα των πλοίων χρησιμοποιείται ο **τόννος πλοίων** ή **κόρος**

$$1 \text{ κόρος} = 2,83 \text{ m}^3$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

(117) Να εκφράσετε τα 12 m^3 σε dm^3 και cm^3 .

(118) Να εκφράσετε τα 12000 cm^3 σε dm^3 .

(119) Να εκφράσετε τα 12000 dm^3 σε m^3 .

(120) Ένα δοχείο 120 dm^3 πόσα λίτρα νερού χωρεί.

(121) Με πόσα m^3 ισοδυναμεί η χωρητικότητα πλοίου 6000 τόννων.

§ 56. Μονάδες βάρους

Βασική μονάδα βάρους είναι το 1 γραμμάριο. Αν γεμίσουμε ένα κύβο ακμής 1 cm με νερό θερμοκρασίας 4°K τότε το νερό θα έχει βάρος 1 γραμμαρίου. Πολλαπλάσια του γραμμαρίου είναι

1) Το χιλιόγραμμα ή κιλό = 1000 γραμμάρια

2) Ο μετρικός τόννος = 1000 χιλιόγραμμα

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

(122) 1800 γραμμάρια με πόσα χιλιόγραμμα ισοδυναμούν.

(123) 5 τόννοι με πόσα χιλιόγραμμα ισοδυναμούν;

(124) 12 χιλιόγραμμα με πόσα γραμμάρια ισοδυναμούν;

Τροπή συμμιγῶν σὲ μονάδες κατωτέρας τάξεως καὶ ἀντιστροφῶς

Πρόβλημα :

Νὰ τραπῇ ὁ συμμιγῆς $1^h 10' 30''$ σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως, σὲ δευτερόλεπτα.

$$\begin{array}{lcl} \text{ἔχουμε} & & 1^h = 60' \\ \text{ἄρα ἢ} & 1^h \text{ καὶ } 10' = & 60' + 10' = 70' \\ \text{τὰ } 70' & & = 70 \cdot 60 \\ & & = 420'' \end{array}$$

ὥστε συνολικὰ ἔχουμε: $420'' + 30'' = 450''$

Πρόβλημα : (ἀντίστροφο) :

Νὰ ἐκφρασθοῦν σὲ ὥρες, πρῶτα λεπτά, δεύτερα λεπτά τὰ $7525''$

- 1) Μετατρέπουμε τὰ $7525''$ σὲ πρῶτα καὶ δεύτερα λεπτά
 $7525 : 60 = 125'$ μὲ ὑπόλοιπο $25''$
- 2) Μετατρέπουμε τὰ $125'$ σὲ ὥρες καὶ σὲ πρῶτα λεπτά
 $125 : 60 = 2^h$ μὲ ὑπόλοιπο $5'$

ὥστε ἔχουμε: $7525'' = 2^h 5' 25''$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

125) Οἱ $15^o 26' 10''$ νὰ τραποῦν σὲ δευτερόλεπτα.

126) Οἱ $6^h 30' 5''$ νὰ τραποῦν σὲ δευτερόλεπτα.

127) Τὰ $2520''$ νὰ τραποῦν σὲ συμμιγῇ.

§ 57. Πράξεις μὲ συμμιγεῖς ἀριθμοὺς

57.1 Πρόσθεση

Νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α καὶ β ποὺ ἔχουν μέτρα $25^o 12' 40''$ καὶ $30^o 40' 15''$

$$\begin{array}{rcl} \text{ἔχουμε} & & 25^o 32' 40'' \\ & & 30^o 40' 15'' \\ \hline & & 55^o 72' 55'' \\ & & 56^o 12' 55'' \text{ (γιατί } 72' = 60' + 12' = 1^o \text{ καὶ } 12' \text{)} \end{array}$$

Διηλαθῇ : Προσθέτουμε χωριστὰ τὶς μονάδες κάθε τάξεως ἀρχίζοντας ἀπὸ τὶς μονάδες κατωτέρας τάξεως. Ἐν ἑνῷ ἄθροισμα περιέχ., μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως τὴν ἀφαιροῦμε καὶ τὴν προσθέτουμε στὶς μονάδες τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

57.2 'Αφαίρεση

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad \begin{array}{r} 8^h \ 45' \ 30'' \\ 5^h \ 20' \ 10'' \\ \hline 3^h \ 25' \ 20'' \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta) \quad \begin{array}{r} 60' \\ 5^h \ 20' \ 40'' \\ 2^h \ 35' \ 20'' \\ 1^h \\ \hline 2^h \ 45' \ 20'' \end{array} \end{array}$$

Στή β' αφαίρεση έπειδι δέν μπορούσαμε νά αφαιρέσουμε τά 35' από τά 20' γι' αυτό προσθέσαμε 60' (1^h) στά 20' και για νά μήν αλλάξει ή διαφορά προσθέτουμε τη 1^h στις ώρες του αφαιρετέου.

57.3 Πολ/σμός συμμιγούς με ένα άκέραιο άριθμό

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad \begin{array}{r} 12^0 \ 5' \ 4'' \\ 3 \quad \times \\ \hline 36^0 \ 15' \ 12'' \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta) \quad \begin{array}{r} 12^0 \ 25' \ 4'' \\ 3 \quad \times \\ \hline 36^0 \ 75' \ 12'' \\ 37^0 \ 15' \ 12'' \end{array} \end{array}$$

Δηλαδή: Πολλαπλασιάζουμε χωριστά τις μονάδες κάθε τάξεως με τόν άκέραιο άρχίζοντας από τις μονάδες κατωτέρας τάξεως. Έπειτα ξεετάζουμε μήπως κανένα από τά γινόμενα περιέχει μονάδες άνωτέρας τάξεως. Στη περίπτωση αυτή αφαιρούμε άπ' τόν όρο αυτό τις μονάδες άνωτέρας τάξεως και τις προσθέτουμε στις μονάδες της άμέσως άνωτέρας τάξεως.

57.4 Διαίρεση συμμιγούς δια άκεραίου

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 15^0 \qquad 12' \ 20'' \\ 3^0 \times 60' = 180' \\ \hline 192' \qquad 0 \\ 32 \\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} 4 \\ 20 \\ 0 \\ \hline 3^0 \ 48' \ 5'' \end{array} \right. \end{array}$$

Διαιρούμε χωριστά τις μονάδες κάθε μιᾶς τάξεως διὰ τοῦ ἀκεραίου ἀρχίζοντας ἀπὸ τις μονάδες **ἀνωτέρας** τάξεως. Ἐὰν σὲ μιὰ διαίρεση μείνῃ ὑπόλοιπο τὸ τρέπουμε σὲ μονάδες τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καὶ τὸ προσθέτουμε σ' αὐτὲς πρὶν συνεχίσουμε τὴ διαίρεση.

Ἐξετάσαμε παραπάνω τις ἀπλὲς πράξεις μὲ συμμιγεῖς ἀριθμούς. Ἐὰν ἔχουμε πρὸ σύνθετες π.χ. πράξεις συμμιγῶν μὲ κλάσματα ἢ μὲ συμμιγεῖς τότε ἐκφράζουμε τοὺς συμμιγεῖς σὲ μονάδες τῆς κατωτέρας τάξεως πὺν περιέχουν κι' ἐργαζόμαστε ἔτσι χωρὶς συμμιγεῖς. Σὲ ἐπόμενα κεφάλαια θὰ συναντήσουμε τέτοιες περιπτώσεις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128) Ἐνας υπάλληλος ἐργάζεται ἀπὸ τις $8^h 10'$ π.μ. ὡς τις $2^h 20'$ μ.μ. Πόσες ὥρες ἐργάζεται τὴν ἡμέρα.

129) Μία γωνία εἶναι $36^\circ 12' 40''$. Πόση εἶναι ἡ συμπληρωματικὴ τῆς καὶ πόση ἡ παραπληρωματικὴ τῆς.

130) Ἐνα σχολεῖο λειτουργεῖ ἀπὸ τις $8^h 10'$ π.μ. ὡς τις $6^h 50'$ μ.μ. μὲ διακοπὴ $1^h 30'$. Πόσες ὥρες τὴν ἡμέρα λειτουργεῖ τὸ σχολεῖο.

131) Ἐνας δορυφόρος χρειάζεται $1^h 10'$ γιὰ μία περιφορὰ τῆς Γῆς. Γιὰ νὰ κάνῃ 6 περιφορὰς πόσο χρόνο θὰ χρειασθῇ.

132) Ἐνας δείκτης σὲ 1 ὥρα στρέφεται κατὰ γωνίαν $20^\circ 10' 30''$. Κατὰ πόση γωνία θὰ στραφῇ σὲ 5 ὥρες;

133) Ἐνας δορυφόρος χρειάζεται $1^h 15'$ γιὰ μία περιφορὰ τῆς Γῆς. Πόσες περιφορὰς τῆς Γῆς θὰ κάνῃ σὲ $7^h 30'$;

134) Ἐνα αὐτοκίνητο γιὰ νὰ διατρέξῃ 120 χιλιόμετρα χρειάστηκε $1^h 14'$. Πόσο χρόνο χρειάζεται γιὰ νὰ διατρέξῃ ἀπόσταση ἑνὸς χιλιόμετρον;

Περίληψη

Συμμιγεῖς ἀριθμοί.

Χρόνου, νομισμάτων.

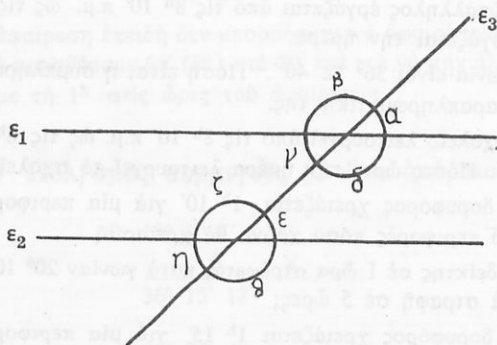
Μονάδες ἐπιφανείας, ὄγκου, βάρους, χωρητικότητος.

Πράξεις μὲ συμμιγεῖς.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ'

§ 58. Γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες εὐθεΐες τεμνόμενες από τρίτη εὐθεΐα

Γράφουμε δύο εὐθεΐες παράλληλες και μιὰ τρίτη εὐθεΐα που τέμνει αὐτὲς $\epsilon_1 \parallel \epsilon_2$ καὶ ϵ_3 που τέμνει τὶς παράλληλες σχ. 78.



Σχ. 78

Παρατηροῦμε ὅτι σχηματίζονται ὀκτὼ γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$.

I. Οἱ τέσσερες γωνίες γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο O εἶναι, οἱ μὲν ἀπέναντι κατὰ κορυφήν, ἄρα ἴσες. $\alpha = \gamma$ καὶ $\beta = \delta$

Οἱ δὲ γωνίες $\alpha + \beta = 2 \text{ } | \text{ } ______$ (ἐφεξῆς παραπληρωματικές)

Ἐπίσης εἶναι $\gamma + \delta = 2 \text{ } | \text{ } ______$ » » »

» » $\alpha + \delta = 2 \text{ } | \text{ } ______$ » » »

» » $\beta + \gamma = 2 \text{ } | \text{ } ______$ » » »

Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὶς τέσσερες γωνίες γύρω ἀπὸ τὸ σημεῖο O' ($\epsilon, \zeta, \eta, \theta$).

II. Ἄν μετρήσουμε μὲ τὸ μοιρογινωμόνιο δύο τετράδες γωνιῶν εὐρίσκουμε ὅτι :

$$\alpha = \gamma = \epsilon = \eta$$

$$\beta = \delta = \zeta = \theta$$

Δηλαδή: "Όλες οι όξείες γωνίες είναι ίσες και όλες οι αμβλείες γωνίες είναι ίσες.

(Μπορούμε να εργαστούμε και με διαφανές χαρτί). Συνέπεια τούτου είναι ότι αν μετρήσουμε μόνο την μία από τις οκτώ γωνίες, μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις άλλες.

Εφαρμογή: "Αν $\alpha = 50^\circ$ έχουμε

$$1) \alpha = \gamma = \varepsilon = \eta = 50^\circ$$

$$2) \beta = \delta = \zeta = \theta = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

58.1 Όνομασία των σχηματιζόμενων γωνιών

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \gamma \\ \beta = \delta \end{array} \right\} \text{κατά κορυφήν}$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \varepsilon \\ \delta = \theta \end{array} \right\} \text{καθώς και } \left. \begin{array}{l} \beta = \zeta \\ \gamma = \eta \end{array} \right\} \text{'Εντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \varepsilon \\ \zeta = \delta \end{array} \right\} \text{ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίες τῶν παραλλήλων } \varepsilon_1 \text{ καὶ } \varepsilon_2 \text{ τεμνομέ-} \\ \text{νων ἀπὸ τὴν } \varepsilon_3.$$

$$\text{οἱ δὲ } \left. \begin{array}{l} \beta = \theta \\ \alpha = \eta \end{array} \right\} \text{ἐκτὸς ἐναλλάξ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

135) Νὰ χαράξετε δύο εὐθείες παράλληλες κι' ἔπειτα μία ἄλλη εὐθεῖα ποὺ νὰ τὶς τέμνῃ. Νὰ μετρήσετε μὲ τὸ μοιρογνομόνιο μία ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται κι' ἔπειτα — χωρὶς μοιρογνομόνιο — νὰ υπολογίσετε τὶς ἄλλες.

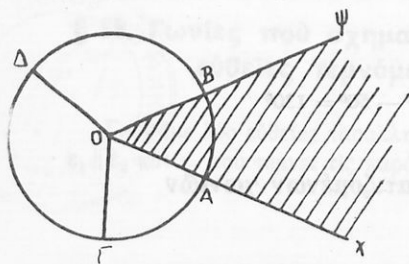
136) "Αν υποθέσουμε ὅτι μία ἀπὸ τὶς γωνίες τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{5}$ — μὲ πόσες μοῖρες ἰσοῦται κάθε μία ἀπὸ τὶς ἄλλες γωνίες;

137) "Αν μία ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζονται ὅταν ἔχωμε δύο παράλληλες εὐθείες καὶ μία ἄλλη ποὺ τὶς τέμνει, εἶναι διπλασία τῆς παραπληρωματικῆς τῆς νὰ υπολογίσετε ὅλες τὶς ἄλλες γωνίες.

§ 59. Θέση γωνίας ως πρὸς μία περιφέρεια

59.1 Ἐπίκεντρος γωνία

Χαράζουμε περιφέρεια (O, ρ) καὶ δυὸ ἡμιευθεῖες OX καὶ $O\Psi$. σχ. 79. Σχηματίζονται δυὸ γωνίες πού ἔχουν τὴν κορυφή τους στὸ κέντρο καὶ λέ-



Σχ. 79

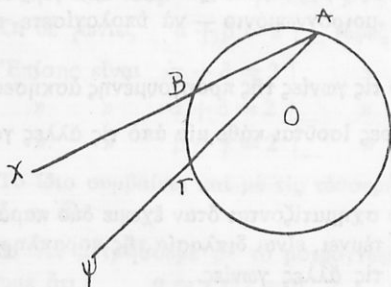
γονται **ἐπίκεντροι**. Ἐάν κόψουμε τὴν κυρτὴ γωνία AOB , τότε κόβεται ἀπὸ τὴν περιφέρεια τόξο AB . Παρατηροῦμε ὅτι σὲ κάθε ἐπίκεντρο γωνία ἀντιστοιχεῖ ἓνα τόξο, πού ὀνομάζεται **ἀντίστοιχο τόξο τῆς ἐπικέντρου γωνίας**.

Ἀντίστροφα: Ἐάν λάβουμε πάνω στὴ περιφέρεια ἓνα τόξο $\Gamma\Delta$ καὶ φέρουμε τὶς ἀκτίνες $O\Gamma$ καὶ $O\Delta$, τότε σχηματίζεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\Gamma O\Delta$. Ὡστε σὲ κάθε τόξο ἀντιστοιχεῖ μιὰ ἐπίκεντρος γωνία.

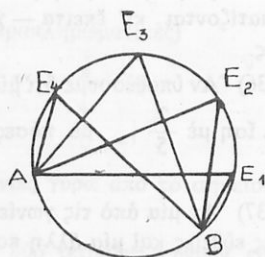
Ἄρα: Ὑπάρχει μιὰ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν τόξων μιᾶς περιφερείας καὶ τῶν ἀντιστοίχων ἐπικέντρων γωνιῶν.

59.2 Ἐγγεγραμμένη γωνία

Ἀπὸ ἓνα σημεῖο A τῆς περιφερείας (O, ρ) χαράζουμε δυὸ ἡμιευθεῖες ABX καὶ $A\Gamma\Psi$. Ἡ γωνία (σχ. 80) ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφή της A πάνω στὴν περιφέρεια οἱ δὲ πλευρές της τέμνουν τὴν περιφέρεια στὰ σημεῖα B, Γ , λέγεται **ἐγγεγραμμένη**. Παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία κόβει ἓνα μέρος τῆς περιφερείας πού λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο** τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας. Ἀντίθετα πρὸς τὶς ἐπικέντρους γωνίες, σὲ κάθε τόξο τῆς περιφερείας ἀντιστοιχοῦν ἄπειρες ἐγγεγραμμένες γωνίες. σχ. 81.



Σχ. 80



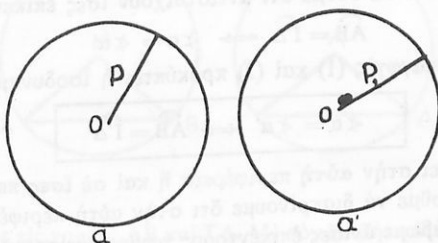
Σχ. 81

59.3 Ίσες περιφέρειες

Γράφουμε περιφέρεια (O, ρ) , έπειτα (μὲ διαφανὲς χαρτὶ) μὴ ἄλλη περιφέρεια ἴση μ' αὐτή. Εὐκόλα διαπιστώνουμε ὅτι ἔχουν ἴσες ἀκτίνες.

ἄρα

$$\text{περ. } O = \text{περ. } O' \implies \rho = \rho'$$



Σχ. 82

Ἄν πάλι μὲ τὸ διαβήτη καὶ μὲ ἴσες ἀκτίνες γράψουμε δύο περιφέρειες. θὰ ἔχωμε

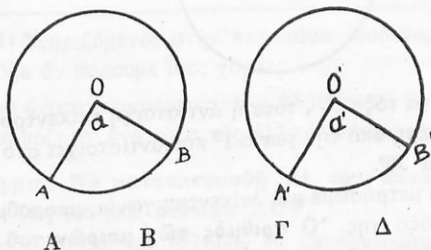
$$\rho = \rho' \implies \text{περ. } O = \text{περ. } O'$$

ὥστε

$$\text{περ. } O = \text{περ. } O' \iff \rho = \rho'$$

§ 60. Σχέση ἐπικέντρων γωνιῶν καὶ ἀντιστοίχων τόξων.

Γράφουμε δύο περιφέρειες ἴσες (O, ρ) καὶ (O', ρ) καὶ ἐπικέντρες γωνίες ἴσες $\alpha = \alpha'$ (σχ. 83).



Σχ. 83

Με διαφανές χαρτί αποτυπώνουμε την γωνία α και την τοποθετούμε πάνω στην γωνία α' . Παρατηρούμε ότι το τόξο $\widehat{AB}$ εφαρμόζει πάνω στο τόξο $\widehat{\Gamma\Delta}$.

Άρα: Σε δύο ίσες περιφέρειες ίσες επίκεντροι γωνίες αντιστοιχούν σε ίσα τόξα».

ή συμβολικά $\angle \alpha = \angle \alpha' \implies \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$ (1)

Αντίστροφα: "Αν στις ίσες περιφέρειες (O, ρ) και O', ρ) πάρουμε ίσα τόξα $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$, τότε θα δούμε ότι αντιστοιχούν ίσες επίκεντροι γωνίες.

Αν $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \implies \angle \alpha = \angle \alpha'$ (2)

Από τις συνεπαγωγές (1) και (2) προκύπτει η ισοδυναμία:

$$\angle \alpha = \angle \alpha' \iff \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$$

Αυτό συμβαίνει στην αυτή περιφέρεια ή και σε ίσες περιφέρειες.

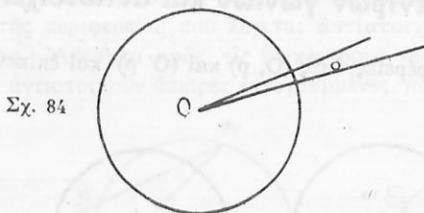
Εύκολα μπορούμε να διακρίνουμε ότι στην αυτή περιφέρεια ή σε ίσες περιφέρειες αν λάβουμε άνισες επίκεντρος γωνίες αντιστοιχούν άνισα τόξα και μάλιστα στη μεγαλύτερη επίκεντρη γωνία αντιστοιχεί το μεγαλύτερο τόξο και αντίστροφα.

Σπουδαία εφαρμογή.

Από τα παραπάνω εύκολα καταλαβαίνουμε ότι αν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.ο.κ. μιὰ επίκεντρο γωνία, τότε διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.ο.κ. και το αντίστοιχο τόξο.

Αντίστροφα: "Αν διπλασιάσουμε, τριπλασιάσουμε κ.ο.κ. ένα τόξο, τότε και η αντίστοιχη επίκεντρος γωνία διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κ.ο.κ.

Ας λάβουμε μιὰ επίκεντρο γωνία ίση με 1° . Το αντίστοιχο τόξο της το εκλέγουμε σαν μονάδα τόξου και το ονομάζουμε τόξο (1°) μιᾶς μοίρας σχ. 84.

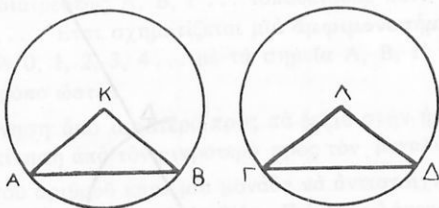


Αν λάβουμε ένα τόξο 30° , τότε η αντίστοιχη επίκεντρος γωνία θα είναι 30 φορές μεγαλύτερη από την γωνία 1° που αντιστοιχεί στο τόξο 1° , δηλαδή η γωνία θα είναι 30° .

Ωστε αντί να μετρήσουμε μιὰ επίκεντρη γωνία, μπορούμε να μετρήσουμε το αντίστοιχο τόξο της. Ο αριθμός των μοιρών του τόξου θα είναι αριθμός των μοιρών της γωνίας.

§ 61. Σχέση τόξων και χορδών

Σε δύο ίσες περιφέρειες (K, ρ) , (Λ, ρ) σχ. 85 χαράζουμε δύο ίσες επίκεντρους γωνίες, $\widehat{AKB}$ και $\widehat{\Gamma\Lambda\Delta}$, όποτε θα έχουμε $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.



Σχ. 85

“Ας χαράξουμε τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$. Με τόν διαβήτη εξακριβώνουμε ότι χορδ. $AB = \text{χορδ. } \Gamma\Delta$.

“Οστε

$$\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \implies \text{χορδ. } AB = \text{χορδ. } \Gamma\Delta \quad (1)$$

‘Αντίστροφα: “Αν στις ίδιες περιφέρειες χαράξουμε δύο ίσες χορδές AB και $\Gamma\Delta$, με τὸ διαφανές χαρτί εξακριβώνουμε ὅτι $\widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

“Οστε

$$\text{χορδ } AB = \text{χορδ } \Gamma\Delta \iff \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$$

(Με μιὰ χορδὴ ἢ περιφέρεια χωρίζεται σὲ δύο τόξα, ἓνα μικρότερο ἀπὸ τὴν ἡμιπερίφereia κι’ ἓνα μεγαλύτερο. Στὸ παράδειγμά μας ἐννοοῦμε ἢ τὰ δύο μικρότερα ἢ τὰ δύο μεγαλύτερα).

“Αρα: Σε δύο ἴσους κύκλους ἢ στὸν ἴδιο κύκλο ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία

$$\text{χορδ } AB = \text{χορδ } \Gamma\Delta \implies \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta} \quad (2)$$

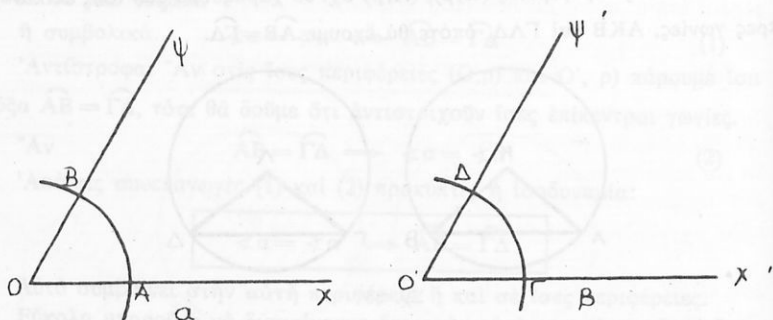
Παρατηρήσεις 1) Στηριζόμενοι στὴν παραπάνω ἰσοδυναμία μποροῦμε νὰ παίρνομε ἴσα τόξα ἂν πάρομε ἴσες χορδές.

2) “Αν ἔχουμε δύο ἄνισες περιφέρειες εἶναι ἀδύνατο νὰ βροῦμε ἓνα τόξο τῆς μιᾶς ποὺ νὰ ἐφαρμόζη σ’ ἓνα τόξο τῆς ἄλλης. Δοκιμάστε.

61.1 Πρόβλημα: Νὰ κατασκευασθῇ με τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτη μιὰ γωνία ἴση με μιὰ δοθεῖσα $\widehat{XO\Psi}$.

“Ας ὑποθέσουμε ὅτι ἡ γωνία ποὺ θέλομε νὰ κατασκευάσουμε ἔχει μιὰ πλευρὰ τὴν OX .

1) Με κέντρο τη κορυφή O σχ. 86α και ακτίνα όση θέλουμε γράφουμε μια περιφέρεια που τέμνει τις πλευρές της γωνίας XOY στα σημεία A και B .



Σχ. 86

2) Με κέντρο την κορυφή O' σχ. 86β και ακτίνα ίση με την προηγούμενη γράφουμε περιφέρεια που τέμνει την $O'X'$ στο σημείο Γ .

3) Σημειώνουμε τόξο $\Gamma\Delta$ ίσο με το τόξο AB .

4) Χαράζουμε την ευθεία $O'\Delta$

ή γωνία $\Gamma O'\Delta$ είναι η ζητούμενη

Διότι 1) κύκλος $O =$ κύκλος O'

$$2) \widehat{AB} = \widehat{\Gamma\Delta}$$

Άρα και $\angle AOB = \angle \Gamma O'\Delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

138) Ποιό είναι το μέτρο (σε μοίρες σε όρθες και σε βαθμούς) 1) της ήμιπεριφερείας, 2) του τεταρτημορίου της περιφερείας.

139) Πόσων μοιρών είναι το τόξο που διαγράφει το άκρο του ώροδεικτιού ενός ωρολογιού σε 1^h , 2^h , 6^h .

140) Ποιό είναι το μέτρο μίας επίκεντρης γωνίας που αντιστοιχεί α) σε μία ήμιπεριφέρεια, β) σ' ένα τεταρτοκύκλιο.

141) Σε μία περιφέρεια με ακτίνα 4 cm να σημειώσετε ένα τόξο 80° (χρησιμοποιείτε μοιρογνωμόνιο).

142) Πώς με τη βοήθεια του διαβήτη θα σημειώσουμε δύο ίσα τόξα σε μία περιφέρεια.

143) Σε μία περιφέρεια να χαράξετε 2 τόξα, το ένα διπλάσιο του άλλου. Να εξετάσετε αν και η χορδή του ενός είναι διπλασία από τη χορδή του άλλου.

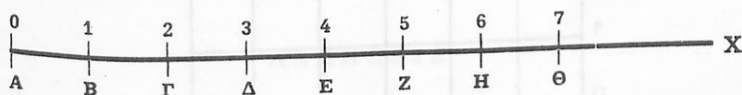
§ 62. Ήμιευθεία διατάξεως του Φ_0

Χαράζουμε μία ήμιευθεία AX και επάνω σ' αυτήν λαμβάνουμε ίσα τμήματα $AB=BG=\Gamma\Delta=\Delta E=EZ\ldots=1\text{ cm}$.

Στά σημεία διαιρέσεως $A, B, \Gamma, \ldots$ τοποθετούμε κατά σειρά τους αριθμούς $0, 1, 2, 3, \ldots$. Έτσι σχηματίζεται μια **άμφιμονοσήμαντη αντιστοίχια** των αριθμών $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ με τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, \ldots$ και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε :

α) Ἡ μετακίνηση από αριστερά πρὸς τὰ δεξιά στὴν ήμιευθεία νὰ ἀντιστοιχῇ σὲ μετακίνηση ἀπὸ τὸν μικρότερο πρὸς τὸν μεγαλύτερο ἀριθμό.

β) Αὐξηση τοῦ ἀριθμοῦ κατὰ μία μονάδα νὰ ἀντιστοιχῇ σὲ μετακίνηση κατὰ μία μονάδα μήκους στὴν ήμιευθεία. Γιὰ τοὺς λόγους αὐτοὺς ἡ ήμιευθεία AX λέγεται **ήμιευθεία διατάξεως** τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν (σχ. 87).



Σχ. 87

Ἡ **άμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση** μεταξύ σημείων τῆς ήμιευθείας καὶ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν θὰ βοηθήσῃ στὴν καλύτερη κατανόηση τῶν πράξεων καὶ τῶν ιδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν.

§ 63. Τετραγωνισμένο χαρτί

Χαράζουμε δύο ήμιευθείες διατάξεως τοῦ Φ_0 κάθετες μεταξύ τους (τὴ μία ὀριζόντια καὶ τὴν ἄλλη κατακόρυφη) με τὴ ἴδια ἀρχή, τὸ σημεῖο O .

Ἐπειτα ἀπὸ τὰ σημεία διαιρέσεως τῆς κάθε μιᾶς ήμιευθείας ὑψώνουμε καθέτους· ἔτσι ἔχουμε ἓνα τετραγωνισμένο χαρτί (σχ. 88).

Τὰ σημεία τομῆς τῶν διαφόρων καθέτων λέγονται **κόμβοι**.

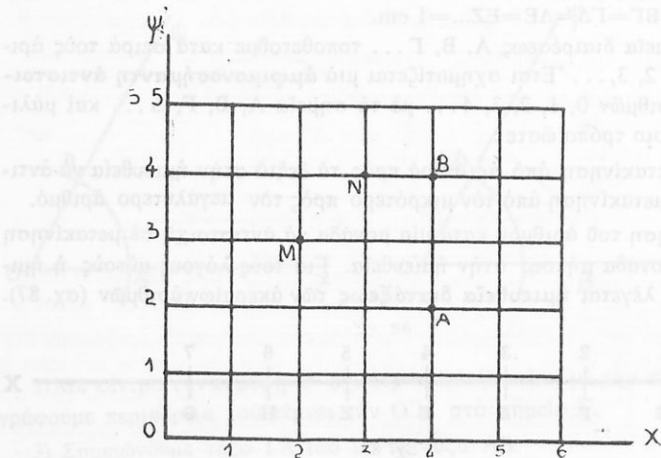
Ἀς προσέξουμε ἓνα κόμβο π.χ. τὸ M

Παρατηροῦμε

α) Στὸν κόμβο M , ὅπως καὶ σὲ κάθε κόμβο, ἀντιστοιχοῦν δύο εὐθεῖες οἱ ὁποῖες περνοῦν ἢ μία ἀπὸ τὸ σημεῖο 2 τῆς OX καὶ ἡ ἄλλη ἀπὸ τὸ σημεῖο 3 τῆς OY . Γι' αὐτὸ λέγομε ὅτι τὸ σημεῖο κόμβος M **παριστάνει ἓνα ζεύγος ἀριθμῶν τὸ ζεύγος $M(2, 3)$** .

β) **Ἀντίστροφα**: Σὲ κάθε ζεύγος ἀριθμῶν π.χ. τὸ ζεύγος $(3, 4)$ ἀντιστοιχοῦν 2 εὐθεῖες ἢ 1η ποὺ εἶναι κάθετος στὴ OX στὸ σημεῖο τῆς 3 καὶ ἡ 2η

που είναι κάθετος στην ΟΥ στο σημείο της 4· οι ημιευθείες αυτές τέμνονται και ορίζουν ένα σημείο το Ν.



Σχ. 88

63.1 Διατεταγμένο ζεύγος

Στο ζεύγος 2, 3 αντιστοιχεί ο κόμβος Μ

Ένώ στο ζεύγος 3, 2 αντιστοιχεί άλλος κόμβος (ποιός;).

Βλέπουμε λοιπόν ότι υπάρχουν περιπτώσεις, όπου έχει σημασία ή σειρά των στοιχείων ενός ζεύγους.

Όταν τα στοιχεία ενός ζεύγους τα λαμβάνουμε με ορισμένη σειρά (το ένα πρώτο και το άλλο δεύτερο) τότε το ζεύγος λέγεται διατεταγμένο.

Για να σημειώσουμε ότι ένα ζεύγος είναι διατεταγμένο κλείνουμε τα δυο στοιχεία του σε παρένθεση.

Παράδειγμα. Ο κόμβος Μ του τετραγωνισμένου χαρτιού ορίζεται από το διατεταγμένο ζεύγος (2, 3) ο κόμβος Ν απ' το (3, 4). Ποιό κόμβο ορίζει το ζεύγος (4,3) ;

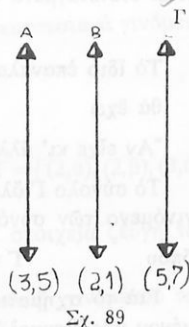
(Άλλο παράδειγμα διατεταγμένου ζεύγους είναι οι όροι ενός κλάσματος.

Π.χ. οι όροι του κλάσματος $\frac{3}{5}$ είναι το διατεταγμένο ζεύγος (3, 5).)

63.2 Σπουδαία παρατήρηση στο τετραγωνισμένο χαρτί

Παρατηρούμε ότι: Σε κάθε κόμβο αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζεύγος άκεραίων αλλά και σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος άκεραίων αντιστοιχεί ένας κόμβος. Έχουμε δηλαδή· μια άμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των κόμβων του τετραγωνισμένου χαρτιού και των διατεταγμένων ζευγών των άκεραίων αριθμών.

Σημειώνουμε ότι ο κανόνας ισχύει κι' όταν το διατεταγμένο ζεύγος αποτελείται από δύο ίσα στοιχεία. Π.χ. ποιο κόμβο όρίζει το διατεταγμένο ζεύγος (4, 4).



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

144) Σ' ένα τετραγωνισμένο χαρτί να χαράξετε 2 ήμιευθείες OX OY διατάξεως των άκεραίων (τη μία οριζόντια και την άλλη κατακόρυφη). Έπειτα να σημειώσετε τα σημεία κόμβους που ορίζονται από τα διατεταγμένα ζεύγη (2,4), (4,2), (5,3), (3,0), (0,3), (0,0).

145) Να βρῆτε τα διατεταγμένα ζεύγη άκεραίων που αντιστοιχούν σε κόμβους

α) μιᾶς οριζόντιας ευθείας

β) μιᾶς κατακόρυφης ευθείας του τετραγωνισμένου χαρτιού

Τι παρατηρεῖτε;

§ 64. Καρτεσιανό γινόμενο*

Μάθαμε από δύο σύνολα A και B να σχηματίζουμε άλλα σύνολα π.χ. τα $A \cup B$ και $A \cap B$. Θα δοῦμε ένα νέο τρόπο για να σχηματίσουμε ένα άλλο σπουδαίο σύνολο Γ από τα A και B .

64.1 Ἀς πάρουμε τα σύνολα

$$A = \{2, 3\} \quad B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

Παίρνω ένα στοιχείο του A

* Σημείωση: Ἡ ονομασία δόθηκε πρὸς τιμὴν τοῦ διασέμου γάλλου Μαθηματικοῦ-Φιλοσόφου Descartes ὁ ὁποῖος πρῶτος συνέλαβε τὴν ἐξυπνὴν ἰδέα νὰ παραστήσῃ ἓνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μ' ἓνα διατεταγμένο ζεύγος ἀριθμῶν.

Π.χ. τὸ 2 καὶ τὸ συνδυάζω με **κάθε** ἓνα στοιχείο τοῦ B γιὰ νὰ σχηματίσω διατεταγμένα ζεύγη με πρῶτο στοιχείο τὸ 2 θὰ ἔχω ἔτσι τὰ ζεύγη

$$(2, \alpha) \quad (2, \beta) \quad (2, \gamma)$$

Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνω καὶ με τὸ ἄλλο στοιχείο τοῦ A τὸ 3

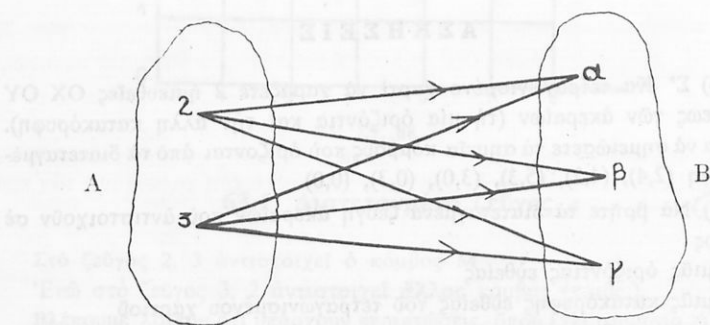
$$\text{θὰ ἔχω} \quad (3, \alpha) \quad (3, \beta) \quad (3, \gamma)$$

Ἄν εἶχε κι' ἄλλα στοιχεία τὸ A θὰ συνέχιζα με τὸν ἴδιο τρόπο.

Τὸ σύνολο Γ ὅλων αὐτῶν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν λέγεται **καρτεσιανὸ γινόμενο** τῶν συνόλων A καὶ B καὶ γράφεται $A \times B = \Gamma$

$$\text{ὅπου} \quad \Gamma = \{ (2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (3, \alpha), (3, \beta), (3, \gamma) \}$$

Γιὰ τὸ σχηματισμὸ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου μᾶς διευκολύνει ἡ παρακάτω εἰκόνα σχ. 90.



Σχ. 90

Παρατηρήσεις.

1) Σ' ἓνα καρτεσιανὸ γινόμενο Π.χ. $\Gamma = \{ (2, 3), (2, 5) \}$ στοιχεῖα εἶναι τὰ ζεύγη (2, 3), (2, 5) καὶ ὄχι χωριστὰ οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5.

2) Ἄν $A = \{ \alpha, \beta \}$ καὶ $B = \{ \gamma, \delta \}$

τότε $A \times B = \{ (\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma), (\beta, \delta) \}$

Ἐνῶ $B \times A = \{ (\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta) \}$

ἄρα $A \times B \neq B \times A$ γιατί $(\alpha, \gamma) \neq (\gamma, \alpha)$ (ὁρισμὸς διατεταγμένου ζεύγους)

3) Τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο παριστάνει ἓνα σύνολο σημείων (κόμβων) στὸ τετραγωνισμένο χαρτί.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 146) Στο τετραγωνισμένο χαρτί να παραστήσετε τα καρτεσιανά γινόμενα
- 1) $A \times B$ όπου $A = \{2, 3\}$ $B = \{1, 4\}$
 - 2) $\Gamma \times \Delta$ όπου $\Gamma = \{0, 1\}$ $B = \{2, 3, 4\}$
 - 3) $A \times A$ όπου $A = \{1, 2, 3\}$
- 147) Ποιά σύνολα έχουν καρτεσιανό γινόμενο το $\Gamma = \{(2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}$
- 148) αν $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$ ποιά είναι τα ίσα στοιχεία ζεύγη του $A \times B$.
- 149) Ποιός είναι ο πληθικός αριθμός του καρτεσιανού γινομένου των συνόλων A και B όπου
- 1) $A = \{0, 1\}$, $B = \{1\}$
 - 2) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2\}$
 - 3) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$

Περίληψη

1. Γωνίες παραλλήλων ευθειών που τέμνονται από άλλη ευθεία.
3. Θέσεις γωνίας και περιφέρειας.
3. Ίσες περιφέρειες, ίσες επίκεντρες γωνίες και τόξα.
4. Σχέση τόξων και αντιστοίχων χορδών.
5. Κατασκευή γωνίας ίσης με άλλη δοθείσα.
6. Ήμιευθεία διατάξως των άκεραίων.
7. Διατεταγμένο ζεύγος.
8. Καρτεσιανό γινόμενο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ'

§ 65. Πράξεις με άκεραίους αριθμούς

65.1 Πρόσθεση άκεραίων

Ο Γιάννης έχει τρεις βόλους κι' ο Νίκος πέντε. Τοποθετούν κι' οι δύο τους βόλους τους πάνω στο άδειο τραπέζι. Με την τοποθέτηση αυτή έχουμε μιὰ **ένωση** του συνόλου Α των βόλων του Γιάννη με το σύνολο Β, των βόλων του Νίκου.

Επειδή τα σύνολα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους ή ένωσή τους έχει πληθ. αριθμό 8

«Τόν αριθμό 8 πού είναι πληθικός αριθμός της ένώσεως των δύο ξένων, μεταξύ τους, συνόλων με πληθικούς αριθμούς 3 και 5, ονομάζουμε άθροισμα των αριθμών 3 και 5».

και γράφουμε $3 + 5 = 8$.

Γενικά: "Άθροισμα δύο αριθμών α και β είναι ο πληθικός αριθμός γ της ένώσεως δύο συνόλων ξένων μεταξύ τους, με πληθικούς αριθμούς α και β.

και γράφεται $\alpha + \beta = \gamma$.

Η πράξη με την οποία βρίσκουμε το άθροισμα λέγεται **Πρόσθεση**. Οι αριθμοί α και β λέγονται **όροι της προσθέσεως** ή **προσθετέοι**· το σημείο (+ συν) είναι σύμβολο της προσθέσεως

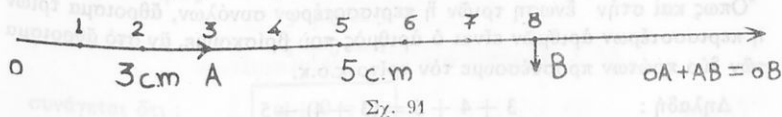
Παρατήρηση. Πρέπει να μη συγχέουμε την πρόσθεση με το άθροισμα. Πρόσθεση είναι ή πράξη, άθροισμα είναι το αποτέλεσμα (αριθμός)

65.2 Γεωμετρική έρμηνεία της προσθέσεως

Χαράζουμε την ήμιευθεία διατάξεως των άκεραίων αριθμών σχ. 91.

α) Τόν αριθμό 3 τόν παριστάνουμε με το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ μήκους 3 cm και τόν 5 με το διαδοχικό του ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 5 cm τότε το άθροισμα $3 + 5$ παριστάνεται με το άθροισμα $ΟΑ + ΑΒ = ΟΒ$.

β) Τὸν ἀριθμὸ 3 τὸν παριστάνουμε μὲ μία μετακίνηση ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο κατὰ 3 cm πρὸς τὰ δεξιὰ (δηλ. μέχρι τὸ σημεῖο Α).



Τὴν πρόσθεση τοῦ 5 στὸ 3 τὴν παριστάνουμε μὲ μετακίνηση τοῦ Α κατὰ 5 cm πρὸς τὰ δεξιὰ ὅποτε τὸ ἄθροισμα $3+5$ παριστάνεται ἀπὸ μία μετακίνηση τοῦ Ο κατὰ 8 cm πρὸς τὰ δεξιὰ.

65.3 Βασικὲς ιδιότητες προσθέσεως

Εἶδαμε ὅτι ἡ ἔνωση συνόλων ἔχει τὶς ιδιότητες

- 1) Ἀντιμεταθετικὴ
- 2) Προσεταιριστικὴ
- 3) Ἐχει τὸ $\emptyset$ ὡς οὐδέτερο στοιχεῖο.

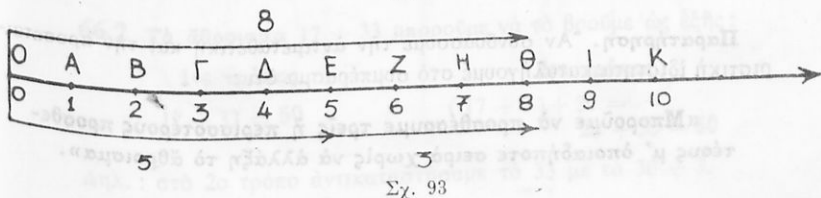
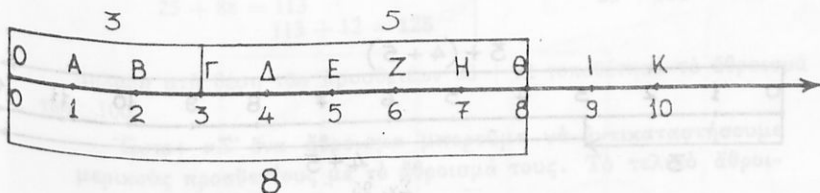
Ἀπὸ τὶς ιδιότητες αὐτὲς προκύπτουν οἱ ιδιότητες τῆς προσθέσεως ἀκεραίων ἀριθμῶν.

1) Ἀντιμεταθετικὴ ιδιότης:

Στὸ σχ. 92 φαίνεται τὸ ἄθροισμα $3+5$
καὶ στὸ σχ. 93 » » » $5+3$
ἄρα $3+5=5+3$

καὶ γενικὰ:

$$a + b = b + a$$



II) Προσεταιριστική ιδιότης :

Όπως και στην ένωση τριών ή περισσότερων συνόλων, άθροισμα τριών ή περισσότερων αριθμών είναι ο αριθμός που βρίσκουμε, αν στο άθροισμα των δύο πρώτων προσθέσουμε τον τρίτο κ.ο.κ.

$$\text{Δηλαδή : } 3 + 4 + 5 = (3 + 4) + 5$$

$$\text{ή } 3 + 4 = 7$$

$$7 + 5 = 12$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και ως εξής

$$4 + 5 = 9$$

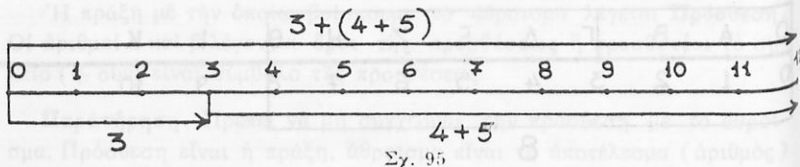
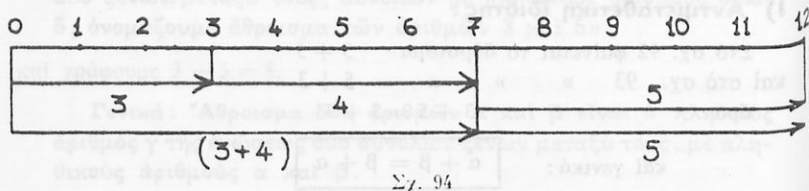
$$3 + 9 = 12$$

$$\text{ώστε } (3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$$

και γενικά

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Στο σχ. 94 βλέπουμε το άθροισμα $(3 + 4) + 5$
και στο σχ. 95 » » » $3 + (4 + 5)$



Παρατήρηση. "Αν συνδυάσουμε την αντιμεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι :

«Μπορούμε να προσθέσουμε τρεις ή περισσότερους προσθετέους μ' οποιαδήποτε σειρά χωρίς να αλλάξει το άθροισμα».

III) Σημασία του αριθμού 0 στη πρόσθεση :

$$\begin{array}{lcl} \text{από τις ισότητες} & 2 + 0 = 2 \\ & 3 + 0 = 3 \\ & 4 + 0 = 4 \end{array}$$

συνάγεται ότι :

$$a + 0 = a$$

Άρα το 0 είναι ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως.

Σύνοψη των ιδιοτήτων προσθέσεως

I) $a + \beta = \beta + a$	Άντιμεταθετική
II) $(a + \beta) + \gamma = a + (\beta + \gamma)$	Προσεταιριστική
III) $a + 0 = a$	Ουδέτερο στοιχείο το μηδέν

Οι ιδιότητες αυτές είναι οι βασικές ιδιότητες της προσθέσεως. Από διαφορούς συνδυασμούς αυτών παράγονται κι' άλλες ιδιότητες που μ'ας διευκολύνουν στους υπολογισμούς.

§ 66. Άλλες ιδιότητες της προσθέσεως

66.1 Το άθροισμα $7 + 18 + 88 + 12$ μπορούμε νά τὸ βρούμε ὡς ἑξῆς :

1ος τρόπος	2ος τρόπος
$7 + 18 = 25$	$7 + 18 = 25$
$25 + 88 = 113$	$25 + 100 = 125$
$113 + 12 = 125$	

Δηλαδή στὴ θέση τῶν προσθετέων $88 + 12$ τοποθέτησα τὸ ἄθροισμά των 100

Ὡστε : «Σ' ἓνα ἄθροισμα μπορούμε νά ἀντικαταστήσουμε μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους. Τὸ τελικὸ ἄθροισμα δὲν ἀλλάζει.

66.2 Τὸ ἄθροισμα $17 + 33$ μπορούμε νά τὸ βρούμε ὡς ἑξῆς :

1ος τρόπος	2ος τρόπος
$17 + 33 = 50$	$(17 + 3) + 30 =$
	$20 + 30 = 50$

Δηλ. : στὸ 2ο τρόπο ἀντικαταστήσαμε τὸ 33 μὲ τὸ $30 + 3$.

Ώστε: «Αν σ' ένα άθροισμα αντικαταστήσουμε ένα προσθετέο με άλλους που έχουν άθροισμα αυτόν, το τελικό άθροισμα δεν αλλάζει».

66.3 Πρόσθεση δύο άθροισμάτων

Έπειδή : $(2 + 3) + (7 + 13) = 5 + 20 = 25$
 αλλά και $2 + 3 + 7 + 13 = 25$

συνάγουμε ότι : «Για να προσθέσουμε 2 άθροισματα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα άθροισμα που να αποτελείται από όλους τους προσθετέους των δύο άθροισμάτων και μόνο από αυτούς».

66.4 Ίδιότης της διαγραφής στις ισότητες

Μία ισότης π.χ. ή $a = b$ μπορεί να παρασταθῇ μ' ένα ζυγό σχ. 96 που εürίσκεται σὲ θέση ισορροπίας.

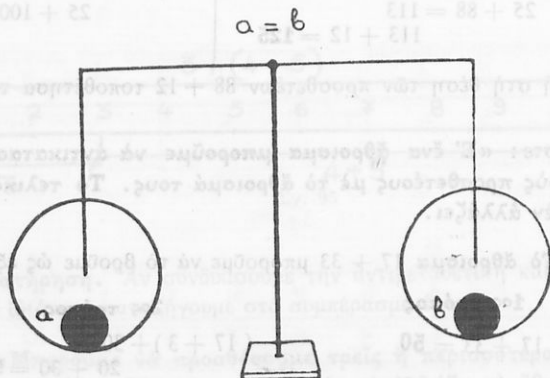
Τοποθετούμε καὶ στὶς δύο πλευρὲς τοῦ ζυγοῦ ἴσα βάρη. Θὰ ἔχουμε τὴν εἰκόνα τοῦ σχήματος 97. Ἀπ' αὐτὸ συμπεραίνουμε ὅτι :

Ἄν καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος προσθέσουμε τὸν ἴδιο ἀριθμὸ θὰ βροῦμε ἴσα ἀθροίσματα.

$$a = b \Rightarrow a + \gamma = b + \gamma \quad (1)$$

Ἀπὸ τὰ σχήματα σχ. 96 καὶ 97 εἶναι φανερὴ καὶ ἡ **συνεπαγωγὴ**

$$a + \gamma = b + \gamma \Rightarrow a = b \quad (2)$$



Σχ. 96

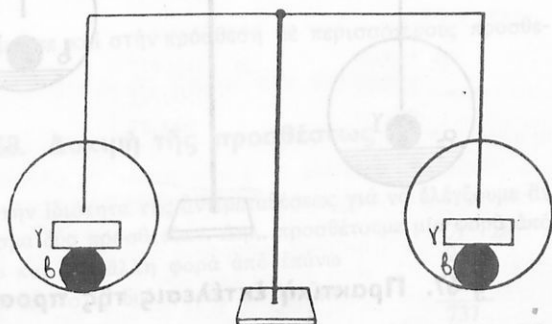
Με συνδυασμό των (1) και (2) έχουμε τη ισοδυναμία

$$a = \beta \Leftrightarrow a + \gamma = \beta + \gamma$$

ή ιδιότης αυτή λέγεται ιδιότης της **διαγραφής**.

$$a + \gamma = \beta + \gamma$$

Σχ. 97

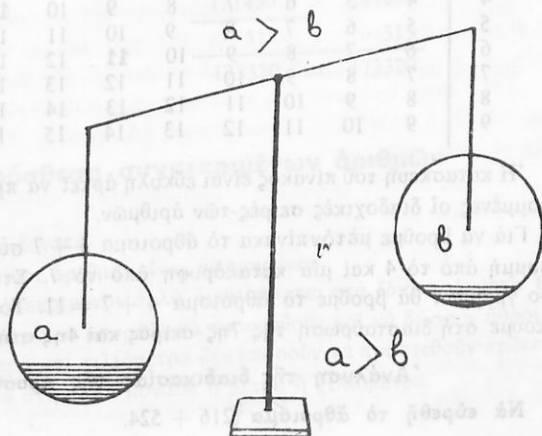


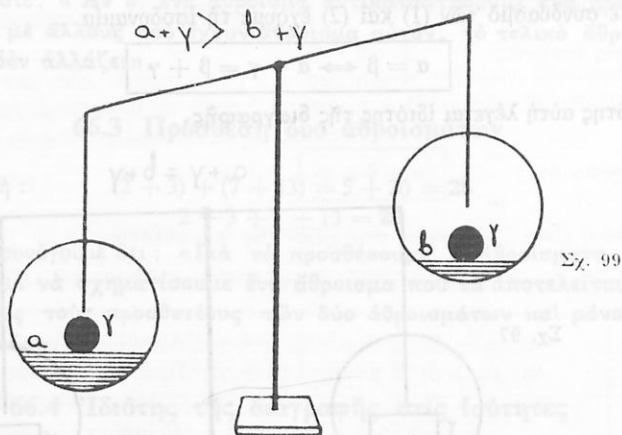
66.5 'Ιδιότης διαγραφής στις ανισότητες

Αν παραστήσουμε την ανισότητα $a > \beta$ με το σχ. 98 τότε από τα σχήματα 98 και 99 έχουμε την ισοδυναμία

$$a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$$

Σχ. 98





§ 67. Πρακτική εκτέλεσις τῆς προσθέσεως

Ἡ πρόσθεσις δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν ἀνάγεται σὲ προσθέσεις μονοψηφίων. Στὴν πρόσθεσις μονοψηφίων μποροῦμε νὰ ἀσκηθοῦμε μὲ τὸ γνωστὸ πῖνακα ποὺ ἀκολουθεῖ

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Ἡ κατασκευὴ τοῦ πίνακος εἶναι εὐκόλῃ ἀρκεῖ νὰ προσέξουμε πῶς εἶναι γραμμένες οἱ διαδοχικὲς σειρὲς τῶν ἀριθμῶν.

Γιὰ νὰ βροῦμε μετὸν πίνακα τὸ ἄθροισμα $4 + 7$ σύρουμε μία ὀριζόντια γραμμὴ ἀπὸ τὸ 4 καὶ μία κατακόρυφη ἀπὸ τὸ 7. Στὴ διασταύρωσι τῶν δύο γραμμῶν θὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $4 + 7 = 11$. Τὸν ἴδιο ἀριθμὸ εὐρίσκουμε στὴ διασταύρωσι τῆς 7ης σειρᾶς καὶ 4ης στήλης (ἀντιμετάθεσις).

Ἀνάλυσις τῆς διαδικασίας τῆς προσθέσεως

Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἄθροισμα $216 + 524$.

$$\text{ἔχουμε} \quad 216 = 2 \text{ εκ} + 1 \text{ δεκ} + 6 \text{ μον}$$

$$524 = 5 \text{ εκ} + 2 \text{ δεκ} + 4 \text{ μον}$$

$$\begin{aligned} \text{ἄρα} \quad 216 + 524 &= (2 \text{ εκ} + 1 \text{ δεκ} + 6 \text{ μον}) + (5 \text{ εκ} + 2 \text{ δεκ} + 4 \text{ μον}) \\ &= (2 + 5) \text{ εκ} + (1 + 2) \text{ δεκ} + (6 + 4) \text{ μον} \quad (\text{προσεταιριστική και} \\ &\quad \text{ἀντιμεταθετική ιδιότης}) \end{aligned}$$

$$= 7 \text{ εκ} + 3 \text{ δεκ} + 10 \text{ μον}$$

$$= 7 \text{ εκ} + 4 \text{ δεκ} + 0 \text{ μον} \quad (\text{διότι } 10 \text{ μον} = 1 \text{ δεκ}).$$

$$= 740$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ στὴν πρόσθεση μὲ περισσότερους προσθετέους

§ 68. Δοκιμὴ τῆς προσθέσεως

Χρησιμοποιοῦμε τὴν ιδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ἂν εἶναι ὀρθὸ τὸ ἄθροισμα δύο προσθετέων. Δηλ. προσθέτουμε μία φορά ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ ἐπάνω καὶ μία ἄλλη φορά ἀπὸ ἐπάνω πρὸς τὰ κάτω πρέπει καὶ στὶς δύο φορές νὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἄθροισμα

213

524

737

Ἄν ἔχουμε πολλοὺς προσθετέους μπορούμε νὰ προσθέσουμε κατὰ τμήματα. Πρέπει τὰ ἀθροίσματά τῶν τμηματικῶν προσθέσεων νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ ἐκεῖνο ποὺ βρίσκουμε ἂν προσθέσουμε ὅλους τοὺς προσθετέους μονομιᾶς. π.χ.

124

5247

5371

315

45869

121450

167634

315

315

173320 = 173320

§ 69. Πρόσθεση συγκεκριμένων ἀριθμῶν

Ἡ πρόσθεση εἶναι δυνατὴ

- 1) ὅταν οἱ προσθετέοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀφηρημένοι
- 2) ὅταν εἶναι συγκεκριμένοι ἀλλὰ ἀναφέρονται στὰ ἴδια πράγματα ἢ μονάδες π.χ. μέτρα καὶ μέτρα μπορούν νὰ προστεθοῦν καὶ νὰ δώσουν ἄθροισμα μέτρα. Ἀλλὰ μέτρα καὶ χιλιόμετρα δὲν μπορούν νὰ προστεθοῦν· πρέπει νὰ τραποῦν καὶ τὰ δύο στὴν ἴδια μονάδα ἢ μέτρα ἢ χιλιόμετρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

150) Να υπολογίσετε από μνήμης

$$\begin{array}{llll} 36 + 64 & 117 + 50 & 107 + 229 & 204 + 32 \\ 57 + 10 & 162 + 38 & 525 + 75 & 219 + 61 \end{array}$$

151) $47 + 30 + 23$

$$52 + 24 + 16$$

$$151 + 70 + 29$$

$$39 + 59$$

$$131 + 71$$

$$331 + 721$$

$$546 + 37$$

$$325 + 72$$

$$275 + 865 + 25 + 135$$

152) Να εκτελεσθούν οι προσθέσεις

$$\alpha) 380006$$

$$\beta) 12406975$$

$$\gamma) 565000078$$

$$135472 +$$

$$30500792 +$$

$$9572003 +$$

$$\underline{509807}$$

$$\underline{900087}$$

$$\underline{24089689}$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

153. Έμπορος ηγόρασε εμπόρευμα αντί 2560 δρχ. και έπώλησε αυτό με κέρδος δρχ. 512. Αντί πόσων δραχμών τó έπώλησε.

154. Αγοράζει ένας καφέ τó κιλό 85 δρχ. και τó πωλεί 10 δρχ. ακριβότερα. Αντί πόσων δραχμών πωλεί τó κιλό.

155. Τó καθαρό βάρος ένός έμπορεύματος ήτο 3508 χλγρ. τó δέ άπόβαρο 374 χλγρ. Πόσο ήτο τó μικτό βάρος του.

156. Είναι σήμερα ένας 39 έτών. Ποία ηλικία θά έχη μετά 18 έτη ;

157. Παντοπώλης ηγόρασε τρία βαρέλια λάδι. Τó ένα βαρέλι περιείχε καθαρό βάρος 349 κιλά και έπλήρωσε 4980 δρχ. Τó άλλο είχε καθαρό βάρος 189 κιλά και έπλήρωσε 3969 δρχ. και τó τρίτο 205 κιλά και έπλήρωσε 3895 δρχ. Να εύρεθί πόσο καθαρό λάδι ηγόρασε και πόσες δρχ. έπλήρωσε.

158. Τρεις πόλεις Α, Β, Γ εύρίσκονται σέ μιá εύθεια όδό. Η άπόσταση Α Β είναι 148 χιλιομ. ή ΒΓ είναι 137 χιλ. Πόση είναι ή άπόσταση τών πόλεων Α και Γ ; (Η πόλις Β είναι μεταξύ τών Α και Γ).

159. Ένας ηγόρασε δύο κατοικίες. Για τή μία έπλήρωσε 205639 δρχ. για τή άλλη 76085 δρχ. περισσότερες τής πρώτης. Πόσες δρχ. έπλήρωσε διά τίς δύο κατοικίες ;

160. Ένα ποσό χρημάτων έμοιράσθη στους κατοίκους 3 χωρίων πλημυροπαθών. Τó α' έλαβε 705.609 δρχ., τó β' 1.008 δρχ. έπί πλέον του α' και τó γ' 896 δρχ. περισσότερες του β'. Να εύρεθί τó μοιρασθέν ποσόν.

161. Είς τήν α' τάξη ένός σχολείου φοιτούν 8 μαθηταί περισσότεροι τών όσων φοιτούν στή β' τάξη. Είς τή β' φοιτούν 7 περισσότεροι τών όσων φοιτούν στή γ' τάξη. Έάν στή τρίτη φοιτούν 36 μαθηταί, πόσοι φοιτούν στή α', πόσοι στήν β', και πόσοι και στίς τρεις τάξεις.

162. Έκ τριών αριθμών ό πρώτος είναι 125306, ό δεύτερος κατά 18496,

μεγαλύτερος του α', ό δέ τρίτος όσο ό πρώτος και ό δεύτερος μαζί. Πόσο είναι τό άθροισμα και τών τριών ;

163. Τέσσερα χωριά Α, Β, Γ, Δ, εύρίσκονται σέ εύθεία όδό. Ή απόσταση ΑΒ, είναι 1648 μέτρα, ή ΒΓ είναι 7108 μέτρα, ή δέ ΓΔ είναι 7418 μέτρα. Πόσα μέτρα απέχουν μεταξύ των τά χωριά Α και Γ και τά χωριά Α και Δ ; (Τά χωριά εύρίσκονται κατά τη σειρά Α, Β, Γ, Δ).

164. Να εύρεθώ τό άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ όταν $\alpha = 2504$, $\beta = 4078$ και $\gamma = 28073$.

§ 70. Άφαίρεση άκεραίων αριθμών

70.1 "Αν έχουμε ένα καλάθι μήλα (σύνολο Α) και ξεχωρίσουμε μερικά απ' αυτά (υποσύνολο Β) τά μήλα πού θά μείνουν στο καλάθι αποτελούν ένα νέο σύνολο Γ πού λέγεται **διαφορά** του συνόλου Α από τό σύνολο Β και γράφεται

$$A - B = \Gamma \quad (1)$$

Είναι φανερό ότι τά σύνολα Α, Β, Γ συνδέονται και με μία άλλη σχέση τη σχέση

$$B \cup \Gamma = A \quad (2)$$

70.2 "Ας είναι 10 ό πληθικός αριθμός του συνόλου Α

$$6 \gg \gg \gg \gg \gg B$$

$$\text{τότε θα είναι} \quad 4 \gg \gg \gg \gg \gg \Gamma$$

Άπό τίς σχέσεις (1) και (2) μεταξύ των συνόλων Α, Β, Γ είναι φανερό οί σχέσεις

$$10 - 6 = 4 \quad (3)$$

$$6 + 4 = 10 \quad (4)$$

"Η πράξη με την όποία από τους αριθμούς 10 και 6 εύρίσκουμε έναν αριθμό τό 4, πού αν τον προσθέσουμε στο 6 εύρίσκουμε τό 10, λέγεται **άφαίρεση**".

Όνομασίες :

α) ό αριθμός 10 πού «μειώνεται» λέγεται **μειωτέος**

β) » » 6 πού «άφαιρείται» » **άφαιρετέος**

γ) » » 4 πού βρίσκεται από την άφαίρεση λέγεται **διαφορά** ή **ύπόλοιπο**.

Παρατήρηση : Δεν πρέπει νά συγχέουμε την **άφαίρεση** με τη **διαφορά** ή άφαίρεση είναι ή πράξη ενώ διαφορά είναι τό αποτέλεσμα αριθμός.

"Αν άντι νά εργασθούμε ειδικά με τους αριθμούς 10 και 6 εργασθούμε με

όποιουσδήποτε άλλους άκεραίους α και β πάλι ή διαφορά δ θά είναι τέτοιος αριθμός ώστε $\beta + \delta = \alpha$.

Ώστε: "Αφαίρεση είναι ή πράξη κατά την οποία μās δίδονται δύο (πεπερασμένοι) αριθμοί α (μειωτέος) και β (άφαιρετέος) και εύρίσκουμε ένα άλλον αριθμό(διαφορά) τέτοιον ώστε, αν τον προσθέσουμε στο β νά βρούμε το α .

$$\begin{array}{l} \alpha - \beta = \delta \\ \delta + \beta = \alpha \end{array}$$

Είναι φανερό ότι πρέπει το β νά είναι μικρότερο από το α αλλιώς ή άφαιρεση δέν είναι δυνατή. Σε άλλη τάξη θά γνωρίσουμε ένα ευρύτερο σύνολο αριθμών μέσα στο οποίο ή άφαιρεση νά είναι πάντοτε δυνατή.

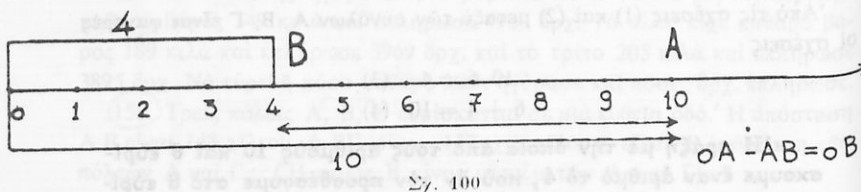
70.3 Γεωμετρική παράσταση της άφαιρέσεως

Η άφαιρεση μπορεί νά παρασταθ ή με άφαιρεση ενός ευθυγρ. τμήματος από ένα άλλο π.χ.

ή άφαιρεση $10 - 6 = 4$ παριστάνεται με την άφαιρεση ευθ. τμήματος AB μήκους 6 cm από το ευθ. τμήμα OA μήκους 10 cm

$$OA - AB = OB$$

Η ίδια άφαιρεση μπορεί νά παρασταθ ή σάν μετακίνηση του σημείου A κατά 6 μονάδες προς τα άριστερά



§ 71. Σχέσις άφαιρέσεως και προσθέσεως

Η πρόσθεση του 2 στο 3 παριστάνεται με μετατόπιση προς τα δεξιά του σημείου 3 κατά 2 μονάδες δηλαδή ως το σημείο 5 της ήμειουθείας διατάξεως.

Η άφαιρεση πάλι του 2 από το 5 παριστάνεται με μετατόπιση προς τα άριστερά του 5 κατά δύο μονάδες δηλαδή «έπιστροφή» στο 3.

"Αρα: "Αν σ' ένα αριθμό α προσθέσουμε ένα αριθμό β και έπειτα από το άθροισμα άφαιρέσουμε το β , θά επανέλθουμε στο α .

Με άλλα λόγια ή πρόσθεση και ή αφαίρεση του ίδιου αριθμού όταν εκτελεστούν διαδοχικά «**ἀναιροῦν**» ή μία τήν ἄλλη.

Γι' αὐτὸ ή πρόσθεση και ή αφαίρεση λέγονται **ἀντίστροφοι πράξεις**.

$$\begin{array}{l|l} \text{π.χ.} & \\ \hline 3 + 2 = 5 & \text{ἢ } (3 + 2) - 2 = 3 \\ 5 - 2 = 3 & \\ \\ 3 - 2 = 1 & \text{ἢ } (3 - 2) + 2 = 3 \\ 1 + 2 = 3 & \end{array}$$

γενικά έχουμε :
και

$$\begin{array}{l} (a + \beta) - \beta = a \\ (a - \beta) + \beta = a \end{array}$$

72.1 Ἴσοδύναμοι σχέσεις

Όταν δίνουμε ένα 10δραχμο για να αγοράσουμε μία σοκολάτα τῶν 6 δρχ. ὁ περιπτεροῦχος δίνοντας μας τὰ ρέστα (ὑπόλοιπο) ὑπολογίζει :

$$6 + 4 = 10. \text{ Δηλαδή ἀντικαθιστᾷ τὴ σχέση } 10 - 6 = 4$$

με τήν $6 + 4 = 10$ και τοῦτο γιατί οἱ σχέσεις

$$10 - 6 = 4 \text{ και } 6 + 4 = 10 \text{ εἶναι ἰσοδύναμοι και μπορεῖ ἡ μία νὰ}$$

ἀντικαταστήσῃ τήν ἄλλη

Πραγματικά :

Ἀπὸ τὴ $10 - 6 = 4$ συνάγεται ὅτι $4 + 6 = 10$ (ὁρισμὸς τῆς ἀφαιρέσεως)

Ὡστε ἔχουμε τὴ συνεπαγωγὴ :

$$10 - 6 = 4 \implies 4 + 6 = 10 \quad (1)$$

Ἀλλά και ἀπὸ τὴ $4 + 6 = 10$ ἔχουμε ὅτι $10 - 6 = 4$

$$\text{δηλ.} \quad 4 + 6 = 10 \implies 10 - 6 = 4 \quad (2)$$

Οἱ συνεπαγωγὲς (1) και (2) μᾶς δίδουν τὴν ἰσοδυναμία

$$10 - 6 = 4 \iff 4 + 6 = 10$$

και γενικά

$$a - \beta = \gamma \iff \gamma + \beta = a \quad (3)$$

ὅπου $\beta < a$

72.2 Μία ἄλλη ἰσοδυναμία

Εἶδαμε ὅτι ἡ αφαίρεση $10 - 6 = 4$ εἶναι ἰσοδύναμη με τήν πρόσθεση $6 + 4 = 10$

ἢ συμβολικά

$$10 - 6 = 4 \iff 6 + 4 = 10$$

ἀλλὰ καὶ ἡ ἀφαίρεση $10 - 4 = 6$ εἶναι φανερόν ὅτι εἶναι ἰσοδύναμη μετὰ τὴν πρόσθεση $6 + 4 = 10$ ἢ συμβολικὰ

$$10 - 6 = 4 \iff 6 + 4 = 10$$

Γενικὰ λοιπὸν ἔχουμε τὶς ἰσοδυναμίες

$$\text{I)} \quad \alpha - \beta = \gamma \iff \gamma + \beta = \alpha \quad \text{ὅπου} \quad \beta < \alpha$$

$$\text{II)} \quad \alpha - \gamma = \beta \iff \beta + \gamma = \alpha \quad \gamma < \alpha$$

ἄρα θὰ ἔχουμε καὶ τὴν ἰσοδυναμία

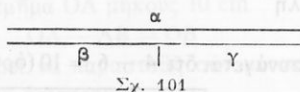
$$\boxed{\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha - \gamma = \beta}$$

§ 73. Γραφικὴ παράσταση τῶν ἰσοδυναμιῶν

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \gamma + \beta = \alpha$$

$$\alpha - \beta = \gamma \iff \alpha - \gamma = \beta$$

Στὸ σχῆμα 101 βλέπετε τὰ τμήματα α , β , γ ποὺ συνδέονται μετὰ τὴν σχέσιν $\beta + \gamma = \alpha$. Ἄν προσέξουμε καλὰ τὸ σχῆμα βλέπουμε ὅτι μαζί με τὴν σχέση $\beta + \gamma = \alpha$ ἀληθεύουν καὶ οἱ σχέσεις $\alpha - \beta = \gamma$ καὶ $\alpha - \gamma = \beta$



§ 74. Ἐξισώσεις

Ἔχουμε συναντήσει μερικές ἐνδιαφέρουσες ἰσότητες μετὰ γράμματα

$$\text{π.χ.} \quad \alpha + 0 = \alpha \quad (1)$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha \quad (2)$$

Σ' αὐτὲς τὶς περιπτώσεις χρησιμοποιοῦμε γράμματα στὴ θέση ἀριθμῶν μ' ἓνα σπουδαῖο σκοπὸ : Γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι ἡ ἰσότης π.χ. (1) ἀληθεύει ὅχι μόνο στὴν **εἰδικὴ περίπτωση ἐνὸς ἀριθμοῦ** π.χ. στὴν περίπτωση τοῦ 3 ὁπότε εἶναι $3 + 0 = 3$ ἀλλὰ καὶ στὴν περίπτωση ὁποιουδήποτε ἄλλου ἀριθμοῦ π.χ. 4, 5, 12.

$$4 + 0 = 4$$

$$5 + 0 = 5$$

$$12 + 0 = 12$$

Εἶδη ἰσοτήτων :

$$\text{Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἰσότητες} \quad \alpha + 0 = \alpha$$

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha$$

ἀληθεύουν ὁποιουδήποτε ἀριθμούς κι' ἂν τοποθετήσουμε στὴ θέση τῶν α καὶ β

$\alpha \nu \text{ π.χ. } \alpha = 1$
 $\beta = 3$ έχουμε $1 + 3 = 3 + 1$

$\alpha \nu$
 $\alpha = 5$
 $\beta = 7$ έχουμε $5 + 7 = 7 + 5$

«Οι ισότητες που αληθεύουν για κάθε τιμή των γραμμάτων που έχουν λέγονται ταυτότητες».

Αντίθετα : η ισότητα $5 + 3 = \chi$ αληθεύει μόνον όταν αντικαταστήσουμε το χ με τον αριθμό 8 $5 + 3 = 8$

Αν θέσουμε αντί για το χ ένα άλλο αριθμό, π.χ. το 10 έχουμε την ισότητα $5 + 3 = 10$ που δεν είναι ορθή.

«Οι ισότητες που αληθεύουν με μία μόνο ορισμένη τιμή του γράμματος—άγνωστου—που περιέχουν λέγονται εξισώσεις».

Με το σύμβολο της ισότητας ή εξίσωσης χωρίζεται σε 2 μέλη. Στο α' μέλος και στο β' μέλος.

Σημείωση. Σε άλλη τάξη θα γνωρίσουμε εξισώσεις που αληθεύουν για περισσότερες από μία τιμές του άγνωστου.

Παράδειγματα

Εξισώσεις

$$3 + 12 = \chi$$

$$12 - 5 = \chi$$

Ταυτότητες

$$\alpha + 3 = 3 + \alpha$$

$$\chi + 0 = \chi$$

§ 75. Επίλυση εξισώσεων

Επίλυση μιας εξίσωσης είναι η εργασία που κάνουμε για να βρούμε με ποιά τιμή του άγνωστου αληθεύει η εξίσωση. Η τιμή αυτή του άγνωστου λέγεται **ρίζα** ή **λύση** της εξίσωσης.

75.1 Να επιλυθῇ ἡ εξίσωση : $5 + \chi = 17$ (1) σχ. 102.

Στὴν εξίσωση παρατηροῦμε ὅτι ὁ ἄγνωστος χ δὲν εἶναι μόνος του. Γιὰ νὰ τὸν «ἀπομονώσουμε» δηλαδὴ νὰ τὸν ἔχουμε μόνον του σ' ἓνα μέλος, ἀντικαθιστοῦμε τὴ σχέση (1) μὲ μιὰ ἄλλη ἰσοδύναμη μὲ αὐτήν.

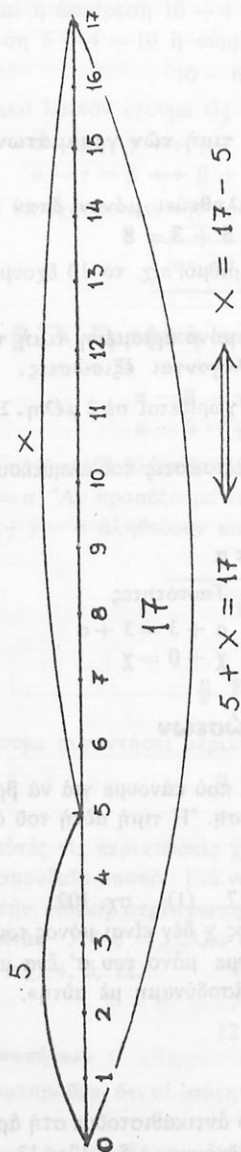
Εἶναι $5 + \chi = 17 \Leftrightarrow \chi = 17 - 5$

ἢ

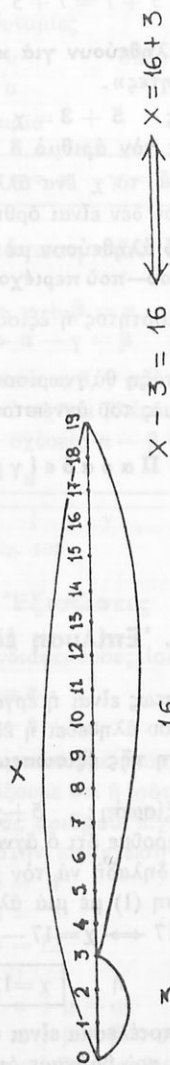
$$\boxed{\chi = 12}$$

Γιὰ νὰ ἐλέγξουμε ἂν τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι ὀρθὸ ἀντικαθιστοῦμε στὴ ἀρχικὴ εξίσωση τὸ χ μὲ τὴν τιμὴν ποὺ βρήκαμε ὁπότε ἔχουμε $5 + 12 = 17$. Ἡ σχέση αὐτὴ εἶναι ὀρθή. Ἀρα τὸ 12 εἶναι ἡ ρίζα τῆς εξίσωσης.

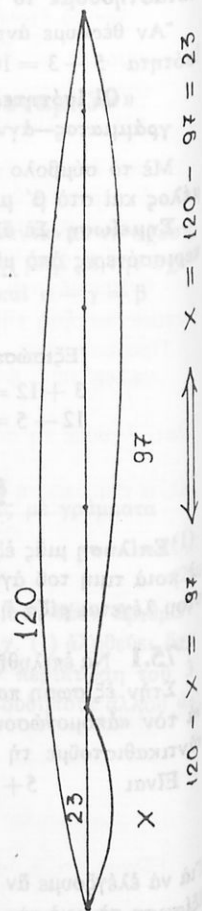
Γραφική παράσταση τών εξισώσεων



Σχ. 102



Σχ. 103



Σχ. 104

2) Νά επιλυθῇ ἡ ἐξίσωση

$$\chi - 3 = 16 \quad \text{Γραφικὴ παράσταση τῆς ἐξισώσεως : σχ. 103}$$

$$\text{Ἐπίλυση : } \chi - 3 = 16 \Leftrightarrow \chi = 16 + 3$$

$$= 19$$

$$\text{Ἐπαλήθευση : } 19 - 3 = 16 \quad (\delta\theta\theta\eta)$$

3) Νά επιλυθῇ ἡ ἐξίσωση

$$120 - \chi = 97$$

$$\text{Γραφικὴ παράσταση : σχ. 104}$$

$$120 - \chi = 97 \Leftrightarrow \chi = 120 - 97$$

$$\text{Ἐπίλυση : } \chi = 23$$

$$\text{Ἐπαλήθευση : } 120 - 23 = 97 \quad (\delta\theta\theta\eta)$$

Παρατήρηση : ἡ γραφικὴ παράσταση τῆς ἐξισώσεως διευκολύνει τὴν εὕρεση τῆς κατάλληλης ἰσοδυναμίας.

§ 76. Ἐπίλυση προβλημάτων με ἐξισώσεις

1) Ρωτήθηκε ἓνας γιὰ τὴν ἡλικία του καὶ ἀπάντησε ὅτι μετὰ 19 ἔτη θὰ εἶναι 72 ἐτῶν. Ποιὰ εἶναι ἡ σημερινή του ἡλικία ;

Ἄς παραστήσουμε με χ τὸν ἀριθμὸ πού παριστάνει τὴ σημερινή του ἡλικία σύμφωνα με τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε

$$\chi + 19 = 72$$

Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωσι

$$\chi + 19 = 72 \Leftrightarrow \chi = 72 - 19$$

$$= 53$$

$$\chi = 53$$

Ὡστε ἡ σημερινή του ἡλικία εἶναι 53 ἔτη

2) Ἐχασε ἓνας 27 δρχ. καὶ τοῦ ἔμειναν 143 δρχ. Πόσες δρχ. εἶχε ;

Ἄς παραστήσουμε με χ τὸν ἀριθμὸ τῶν δραχμῶν πού εἶχε

σύμφωνα με τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε

$$\chi - 27 = 143$$

Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωση

$$\chi - 27 = 143 \Leftrightarrow \chi = 143 + 27$$

$$\chi = 170$$

ὥστε εἶχε 170 δρχ.

3ον) Ἐνας πατέρας εἶναι 37 ἐτῶν. Εἶναι δὲ μεγαλύτερος ἀπὸ τὴν κόρη του κατὰ 21 ἔτη. Ποιὰ εἶναι ἡ ἡλικία τῆς κόρης ;

“Ας παραστήσουμε με x την ηλικία της κόρης τότε σύμφωνα με το πρόβλημα έχουμε

$$37 - x = 21$$

επιλύουμε την εξίσωση

$$37 - x = 21 \iff 37 - 21 = x$$

$$\text{ή } x = 16$$

ώστε η κόρη είναι 16 ετών

76.1 Ειδικές περιπτώσεις αφαίρεσεως

1) Να εύρεθῇ ἡ διαφορά $\alpha - \alpha$

θέτουμε $\alpha - \alpha = x$ ὁπότε έχουμε $\alpha - \alpha = x \iff \alpha = \alpha + x$
σύμφωνα ὅμως με τὴν III ιδιότητα τῆς προσθέσεως πρέπει $x = 0$

ἄρα

$$\alpha - \alpha = 0$$

2) Πότε ἡ διαφορά δύο ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι 0;

ἔχουμε $\alpha - \beta = 0 \iff \alpha = \beta + 0$ ἄρα, σύμφωνα με τὴν III ιδιότητα τῆς προσθέσεως, $\beta = \alpha$

3) Να εύρεθῇ ἡ διαφορά $\alpha - 0$

ἔχουμε $\alpha - 0 = x \iff \alpha = 0 + x$ ἄρα $x = \alpha$.

§ 77. Ἰδιότητες τῆς ἀφαίρεσεως

77.1 Παρατηροῦμε ὅτι $5 - 2 = 3$

$$\text{ἐνῶ } 2 - 5 = \text{ἀδύνατον}$$

ἄρα δὲν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ιδιότης

77.2 Μήπως ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ιδιότης ;

ἔχουμε $(10 - 6) - 3 = ;$

$\beta) 10 - (6 - 3) = ;$

$$\alpha) 10 - 6 = 4$$

$$6 - 3 = 3$$

$$4 - 3 = 1$$

$$10 - 3 = 7$$

$$\text{ὥστε } (10 - 6) - 3 = 1$$

$$\text{ὥστε } 10 - (6 - 3) = 7$$

Εἶναι δὲ

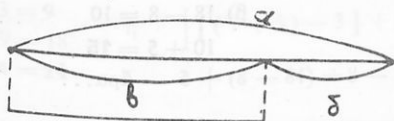
$$1 \neq 7$$

$$\text{ἢ } (10 - 6) - 3 \neq 10 - (6 - 3)$$

ὥστε στὴν ἀφαίρεση δὲν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ιδιότης.

§ 78. Άλλες ιδιότητες της αφαιρέσεως

78.1 Στο σχ. 105 βλέπετε 2 εὐθ. τμήματα a και β καθώς και την διαφορά τους $a - \beta = \delta$



$$a - \beta = \delta$$

Σχ. 105

Στό σχ. 106 βλέπετε τὰ ἴδια τμήματα a και β πού τοὺς ἔχομε προσθέσει (ἀριστερά) ἴσα εὐθ. τμήματα γ . Καθὼς παρατηροῦμε ἡ διαφορά $(a + \gamma) - (\beta + \gamma)$ μένει πάλι ἴση μὲ δ .

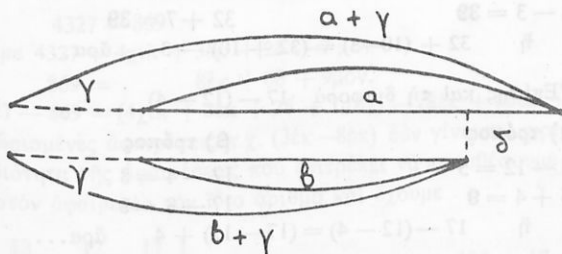
ὥστε ἔχομε $a - \beta = \delta$

και $(a + \gamma) - (\beta + \gamma) = \delta$

ἢ

$$a - \beta = (a + \gamma) - (\beta + \gamma)$$

«Ἄν προσθέσουμε στὸν μειωτέο και στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμὸ ἡ διαφορά δὲν ἀλλάζει».



Σχ. 106

78.2 Ἄν ἐργασθοῦμε ἀνάλογα μὲ τὸ προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώνουμε ὅτι ἂν ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ μειωτέο και ἀπὸ τὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμὸ (πού νὰ ἀφαιρεῖται) ἡ διαφορά δὲν ἀλλάζει.

$$a - \beta = (a - \gamma) - (\beta - \gamma)$$

$$\gamma < \beta$$

78.3 Ὅπως μὲ τὸ ζυγὸ ἐννοήσαμε τὶς ἰσοδυναμίες

$$a = \beta \Leftrightarrow a + \gamma = \beta + \gamma$$

$$\text{και } a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$$

ἀνάλογα μπορούμε νὰ ἐννοήσουμε και τὶς ἰσοδυναμίες

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

και $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \gamma > \beta - \gamma$ όπου $\gamma < \beta$

78.4 Τη διαφορά $(18 + 5) - 8$ μπορούμε να τη βρούμε με 2 τρόπους :

$$\begin{array}{ll} \alpha) & 18 + 5 = 23 \\ & 23 - 8 = 15 \\ & \eta \quad (18 + 5) - 8 = (18 - 8) + 5 \quad \text{Άρα...} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \beta) & 18 - 8 = 10 \\ & 10 + 5 = 15 \end{array}$$

78.5 Τη διαφορά $109 - (9 + 5)$ μπορούμε να την υπολογίσουμε με δύο τρόπους :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ τρόπος} & \beta) \text{ τρόπος} \\ 9 + 5 = 14 & 109 - 9 = 100 \\ 109 - 14 = 95 & 100 - 5 = 95 \\ \eta \quad 109 - (9 + 5) = (109 - 9) - 5 & \text{Άρα...} \end{array}$$

78.6 Το άθροισμα $32 + (10 - 3)$ μπορούμε να το υπολογίσουμε με δύο τρόπους :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ τρόπος} & \beta) \text{ τρόπος} \\ 32 + 10 = 42 & 10 - 3 = 7 \\ 42 - 3 = 39 & 32 + 7 = 39 \\ \eta \quad 32 + (10 - 3) = (32 + 10) - 3 & \text{Άρα...} \end{array}$$

78.7 Έπίσης και τη διαφορά $17 - (12 - 4)$

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ τρόπος} & \beta) \text{ τρόπος} \\ 17 - 12 = 5 & 12 - 4 = 8 \\ 5 + 4 = 9 & 17 - 8 = 9 \\ \eta \quad 17 - (12 - 4) = (17 - 12) + 4 & \text{Άρα...} \end{array}$$

§ 79. Αριθμητικό πολυώνυμο

‘Η ταμίας σ’ ένα κατάστημα εισπράττει χρήματα και όποτε είναι ανάγκη δίδει (για ρέστα)

Οί πράξεις αυτές είναι μία σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις
π.χ. $7 + 5 - 3 + 9 - 4$

Μιά σειρά από προσθέσεις και αφαιρέσεις ονομάζεται **αριθμητικό πολυώνυμο**.

Οί αριθμοί που περιέχονται στο πολυώνυμο λέγονται **όροι** του πολυωνύμου το δε τελικό αποτέλεσμα των πράξεων **αριθμητική τιμή** του πολυωνύμου.

Τὸ ἀριθμητικὸ πολυώνυμο

$$7 + 5 - 3 + 9 - 4 \text{ σημαίνει}$$

τὴν ἀκόλουθη σειρά πράξεων

$$7 + 5 = 12$$

$$12 - 3 = 9$$

$$9 + 9 = 18$$

$$18 - 4 = 14$$

$$\text{ἢ } \left[[(7 + 5) - 3] + 9 \right] - 4 = 14$$

§ 80. Πρακτικὴ ἐκτέλεση τῆς ἀφαιρέσεως

Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ ἀφαίρεση:

α) $574 - 232$

ἔχουμε $574 = 5 \text{ ἑκ} + 7 \text{ δεκ} + 4 \text{ μον.}$

$232 = 2 \text{ ἑκ} + 3 \text{ δεκ.} + 2 \text{ μον.}$

ἄρα $574 - 232 =$

$(5\text{εκ} + 7\text{δεκ} + 4\text{μον}) - (2\text{εκ} + 3\text{δεκ} + 2\text{μον})$

$= (5 - 2)\text{εκ} + (7 - 3)\text{δεκ} + (4 - 2)\text{μον.}$

$= 3\text{εκ} + 4\text{δεκ} + 2\text{μον.}$

$= 342$

β) $4327 - 869$

ἔχουμε $4327 = 4\text{χιλ} + 3\text{εκ} + 2\delta + 7\text{μον}$

$869 = 8\text{εκ} + 6\delta + 9\text{μον.}$

ἄρα $4327 - 869 = (4\text{χιλ} + 3\text{εκ} + 2\delta + 7\text{μον}) - (8\text{εκ} + 6\delta + 9\text{μον}).$

Ἐπειδὴ ὠρισμένες ἀφαιρέσεις π.χ. $(3\text{εκ} - 8\text{εκ})$ δὲν γίνονται χρησιμοποιοῦμε τὴν ιδιότητα τῆς ἀφαιρέσεως ποὺ ἐπιτρέπει νὰ προσθέσουμε στὸν μειωτέο καὶ στὸν ἀφαιρετέο τὸν ἴδιο ἀριθμὸ καὶ ἔχουμε

$$\left. \begin{array}{r} 13 \quad 12 \quad 17 \\ 4\text{χιλ} + 3\text{εκ} + 2\delta + 7\mu \\ 9 \quad 7 \\ 1\text{χιλ} + 8\text{εκ} + 6\delta + 9\mu \end{array} \right\}$$

ἢ

$$4\text{χιλ} + 13\text{εκ} + 12\delta + 17\mu$$

$$\underline{1\text{χιλ} + 9\text{εκ} + 7\delta + 9\mu}$$

$$3\text{χιλ} + 4\text{εκ} + 5\delta + 8\mu = 3458$$

ἢ

$$\begin{array}{r} 4327 \\ - 869 \\ \hline 3458 \end{array}$$

Σημείωση: Στὸ μειωτέο προσθέσαμε $1\delta = 10\mu$, $1\text{εκ} = 10\delta$, $1\text{χιλ} = 10\text{εκ}$ καὶ στὸν ἀφαιρετέο 1δ , 1εκ 1χιλ .

80.1 Δοκιμή της αφαιρέσεως

4327	δοκιμή: υπόλοιπο	3458
- 869	αφαιρετέος	869 +
3458	Μειωτέος	4327

Έφαρμογή των ιδιοτήτων της αφαιρέσεως (από μνήμης αφαιρέσεις).

α'. $745 - 592 = 745 - (500 + 90 + 2)$
 $745 - 500 - 90 - 2 = 153$

β'. Έαν ο μειωτέος και αφαιρετέος λήγουν στο αυτό ψηφίο π.χ.

I. $175 - 95 = (175 - 5) - (95 - 5)$
 $170 - 90 = 80$

II. $637 - 497 = (630 - 7) - (490 - 7)$
 $630 - 490 = 140$

γ'. "Αν ο αφαιρετέος λήγη εις 9 ή 8

π.χ. α'. $85 - 19$ $= (85 + 1) - (19 + 1)$ $= 86 - 20 = 66$		β'. $67 - 28$ $= (67 + 2) - (28 + 2)$ $= 69 - 30 = 39$
---	--	--

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

165) Να υπολογισθούν από μνήμης οι διαφορές

$150 - 30$	$45 - 4$	$333 - 23$
$600 - 400$	$37 - 6$	$641 - 51$
$79 - 64$	$17 - 8$	$274 - 174$

166. Να εκτελεσθούν οι αφαιρέσεις

$45 - 10$	$732 - 100$	$15672 - 100$
$248 - 10$	$1524 - 100$	$32007 - 1000$
$3075 - 10$	$9305 - 100$	$740356 - 100000$

167. Να εκτελεσθούν οι αφαιρέσεις

$48 - 9$	$287 - 99$	$2573 - 999$
$158 - 9$	$345 - 99$	$12135 - 999$

168. Να εκτελεσθούν οι αφαιρέσεις

$70 - 50$	$300 - 200$	$5000 - 2000$
$60 - 20$	$2500 - 900$	$17000 - 8000$

169. Να αντικατασταθούν οι στιγμές με τα κατάλληλα ψηφία ώστε να επαληθεύονται οι αφαιρέσεις

6758		900
-	5689	5.3
3809	3204	377

170. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τοῦ πολυωνύμου

$$120 - 17 + 24 - 12$$

Με χρησιμοποίηση ἐξισώσεως νά λυθοῦν τὰ προβλήματα.

171. Αὐξάνουμε ἓναν ἀριθμὸ κατὰ 3865 καὶ βρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ 4332. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;
172. Ὁ Νίκος λέει στὸ Γιώργο. "Ἄν κερδίσω 23 βόλους θὰ ἔχω 79. Πόσους βόλους εἶχε ὁ Νίκος ;
173. "Ενας πατέρας ἦταν 32 ἐτῶν ὅταν γεννήθηκε ὁ γιὸς του. Πόσων ἐτῶν θὰ εἶναι ὁ γιὸς του, ὅταν ὁ πατέρας θὰ εἶναι 67 ἐτῶν ;
174. Πόσοι μαθηταὶ φοιτοῦν στὴν Α'. τάξη τοῦ Γυμνασίου μας ἂν στῇ Β'. ποὺ εἶναι 18 ὀλιγώτεροι φοιτοῦν 72 μαθηταὶ ;
175. Μιὰ γωνία εἶναι $45^{\circ} 40'$. Πόση εἶναι ἡ συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας καὶ πόση ἡ παραπληρωματικὴ τῆς ;

Προβλήματα ἀφαιρέσεως

176. Α'. Ὁμάς. Ἐμπορὸς ἠγόρασε ἐμπορεύματα ἀντὶ 35608 δρχ. καὶ μετεπώλησε αὐτὰ ἀντὶ 48573 δρχ. Πόσο ἐκέρδισε ἀπὸ τὴ πώληση.
177. Μαθητὴς ἀπεφοίτησε τοῦ Γυμνασίου τὸ 1961 σὲ ἡλικία 19 ἐτῶν. Ποῖο ἔτος ἐγεννήθη.
178. Ἐνα γεγονὸς ἄρχισε στὸ τέλος 1657 μ.Χ. καὶ τελείωσε τὴν ἀρχὴ τοῦ 1679. Νά εὑρεθῇ πόσο χρόνον διήρκεσε τὸ γεγονὸς.
179. Γεωργὸς ἠγόρασε μία σταφιδάμπελο καὶ μία κατοικία ἀντὶ 45300 δρχ. Ἡ κατοικία εἶχε 27950 δρχ. Πόσο ἠγόρασε τὴν σταφιδάμπελο. Καὶ πόσο ὀλιγώτερο ἠγόρασε τὴν σταφιδάμπελο ἀπὸ τὴν κατοικία ;
180. Ἐργάτης κερδίζει τὸν μῆνα 1950 δρχ. ὁ δὲ γιὸς του ὀλιγώτερα ἀπὸ τὸν πατέρα κατὰ 720 δρχ. Νά εὑρεθῇ πόσα κερδίζουν καὶ οἱ δύο ;
181. Αὐξάνουμε ἓνα ἀριθμὸ κατὰ 3875 καὶ εὐρίσκομε τὸν ἀριθμὸ 4392. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς ;
182. Ἐχει ἓνας περιουσία 52864 δρχ. καὶ δωρίζει εἰς φιλανθρωπικὸ κατὰστημα 2864 δρχ., εἰς ἄλλο 3562 δρχ. καὶ εἰς τρίτο 7826 δρχ. Πόσες δραχμὲς τοῦ ἔμειναν ; (Νά λυθῇ μὲ δύο τρόπους).
183. Σιδηρόδρομος εἰσπράττει κατὰ τοὺς μῆνας Ἰανουάριον, Φεβρουάριον καὶ Μάρτιον τὰ ἐξῆς ποσὰ ἀντιστοίχως. 224561 δρχ. 198213 δρχ. 234787 δρχ. Τὰ ἔξοδα κατὰ τοὺς τρεῖς μῆνας ἦταν ἀντιστοίχως 218415 δρχ. 100816 δρχ. 218793 δρχ. Πόσο κέρδος εἶχε τοὺς τρεῖς μῆνες ;
184. Ἀπὸ τὸ ἴδιον σημεῖο ἀναχωροῦν δύο κινητὰ διευθυνόμενα πρὸς τὴν αὐτὴ κατεύθυνση. Πόσο θὰ ἀπέχουν μεταξύ των, ἐὰν τὸ ἓνα διατρέξῃ 586 χιλ. καὶ τὸ ἄλλο 489 χιλιόμετρα ;

185. Έκ δύο τόπων Α και Β οί οποίοι απέχουν 35 χιλιόμετρα αναχωρούν δύο ταχυδρόμοι κατά τη διεύθυνση Α προς Β. Πόσο θα απέχουν, όταν ό εκ του Α αναχωρήσας διανύση 273 χιλ. ό δέ εκ του Β 392 χιλ.

186. Από τέσσερες αριθμούς ό ένας είναι 3896, καθένας δέ απ' τους άλλους κατά σειράν 675 μικρότερος του προηγούμενου του. Πόσο είναι τό άθροισμα και των τεσσάρων ;

187. Έκ τριών προσώπων Α, Β, Γ, ό Α έχει 4826 δρχ. ό Β 625 δρχ. λιγώτερες του Α και ό Γ 178 δρχ. λιγώτερες του Β. Ό Α δίδει εις τόν Γ 48 δρχ. ό Γ όμως δίδει εις τόν Β 245 δρχ. Πόσες δραχμές θα έχη έκαστος ;

188. Νά εύρεθί τό εξαγόμενον του αριθμητικού πολυνόμου $a + \beta - \gamma$, όταν $a = 5039$, $\beta = 7604$ και $\gamma = 2972$.

189. Νά αντικατασταθούν οί στιγμές με τά κατάλληλα ψηφία, ώστε νά επαληθεύονται αί άφαιρέσεις.

$$\begin{array}{r} \text{α) } 6758 \quad \text{β) } \dots \quad \text{γ) } 900 \quad \text{δ) } 5.83 \\ \hline \dots \quad \quad \quad 5689 \quad \quad \quad 5.3 \quad \quad \quad 32.4 \\ \hline 3809 \quad \quad \quad 3204 \quad \quad \quad 325 \end{array}$$

§ 81. Πολλαπλασιασμός άκεραίων αριθμών

“Ας πάρουμε τά σύνολα

$$A = \{ \alpha, \beta, \gamma \}$$

$$B = \{ \delta, \epsilon \}$$

κι' ως σχηματίσουμε τό καρτεσιανό γινόμενο

$$A \times B = \{ (\alpha, \delta), (\alpha, \epsilon), (\beta, \delta), (\beta, \epsilon), (\gamma, \delta), (\gamma, \epsilon) \}$$

Ό πληθικός αριθμός του $A \times B$ δηλ. τό 6, λέγεται γινόμενο των πληθικών αριθμών 3 και 2 των συνόλων Α και Β

και σημειώνεται : $3 \times 2 = 6$ ή $3 \cdot 2 = 6$

“Η πράξη με την οποία εύρίσκουμε τό γινόμενο δύο αριθμών λέγεται πολλαπλασιασμός

Οί αριθμοί 3 και 2 λέγονται παράγοντες του γινομένου : Ειδικά ό 3 λέγεται πολλαπλασιαστής και ό 2 πολλαπλασιαστέος.

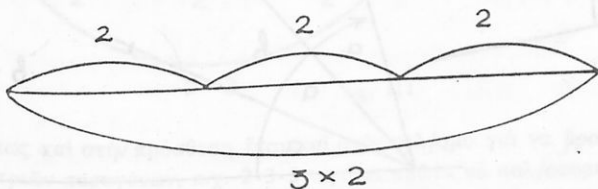
Παρατηρούμε ότι ό πληθικός αριθμός του $A \times B$ δηλ. ό 6 μπορεί νά εύρεθί άν επαναλάβουμε τό πληθικό αριθμό του Β, τό 2, τόσες φορές, όσες μονάδες έχει ό πληθ. αριθμός 3, του Α δηλ. έχουμε

$$6 = 2 + 2 + 2$$

ήρα:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 &= 2 + 2 + 2 \\ &= 3 \text{ φορές τὸ } 2 \end{aligned}$$

Γραφική παράσταση



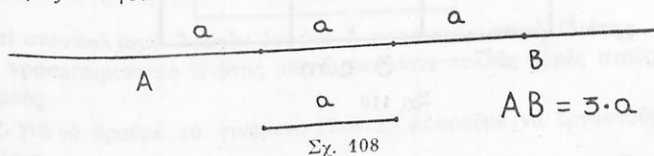
Σχ. 107

γενικά

$$a \cdot \beta = \underbrace{\beta + \beta + \beta + \dots + \beta}_{\text{«α' φορές»}}$$

81.1 Γινόμενο άκεραίου με εὐθ. τμήμα

Παίρνουμε ένα εὐθυγ. τμήμα μήκους a . Ἐπάνω σὲ μία εὐθεΐα παίρνουμε τμήμα $AB = a + a + a$ και σημειώνουμε $AB = 3 \cdot a$ ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται πολλαπλασιαστής ἢ ἐκτελεστής.



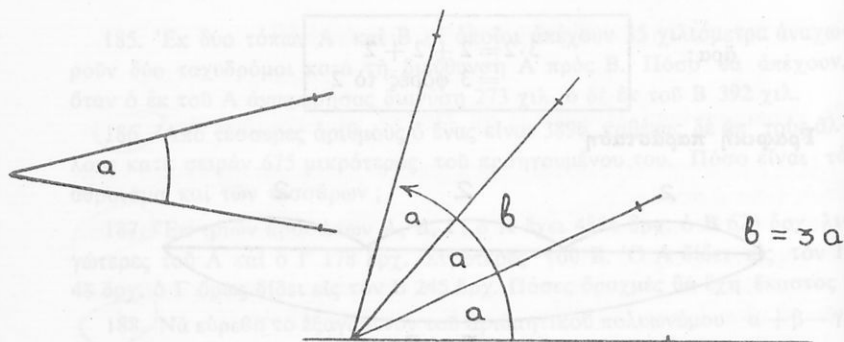
81.2 Γινόμενο άκεραίου με γωνία

Κατασκευάζουμε μία γωνία a και ἔπειτα σχηματίζουμε μία ἄλλη γωνία β ἴση με $a + a + a$ και γράφουμε $\beta = 3 \cdot a$. σχ. 109.

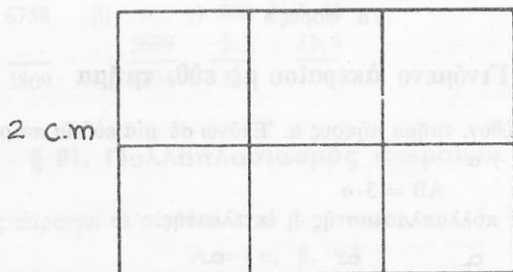
81.3 Γεωμετρική σημασία τοῦ γινομένου

Κατασκευάζουμε ένα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκη πλευρῶν 3 cm και 2 cm

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ γινόμενο $3 \cdot 2$ παριστάνει τὸν ἀριθμὸ τῶν τετραγώνων πλευρᾶς 1 cm ποὺ χωροῦν στὸ ὀρθογώνιο



Σχ. 109



Σχ. 110

§ 82. Βασικές ιδιότητες του πολλαπλασιασμού

- 1) Παρατηρούμε ότι $2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$
 αλλά και $3 \cdot 2 = 2 + 2 + 2 = 6$

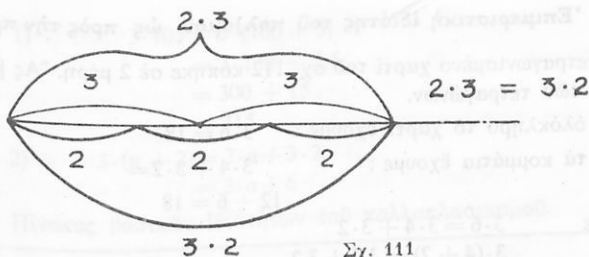
Άρα

$$2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$$

και γενικά :

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Ώστε : Στόν πολλαπλασιασμό ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότης.



II) Όπως και στην πρόσθεση έτσι και στον πολ/σμο για να βρούμε το γινόμενο τριών παραγόντων, π.χ. $2 \cdot 3 \cdot 5$ πρέπει πρώτα να πολ/σουμε τον α' παράγοντα με τον β' και το γινόμενο να τον πολ/σουμε με το γ' παράγοντα έχουμε δηλ.

$$\left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3 = 6 \\ 6 \cdot 5 = 30 \end{array} \right\} \text{ ή } (2 \cdot 3) \cdot 5 = 30$$

Στο ίδιο όμως αποτέλεσμα καταλήγουμε αν πολ/σουμε πρώτα τους δύο τελευταίους παράγοντες κι' έπειτα τον α' παράγοντα με το γινόμενό τους

δηλ.

$$\left. \begin{array}{l} 3 \cdot 5 = 15 \\ 2 \cdot 15 = 30 \end{array} \right\} \text{ ή } 2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$$

άρα:

$$(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5)$$

και γενικά:

$$(a \cdot b) \cdot \gamma = a \cdot (b \cdot \gamma)$$

Και στον πολ)σμό λοιπόν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότης

Η προσεταιριστική ιδιότης μᾶς διευκολύνει πολλές φορές στους υπολογισμούς

π.χ. για να βρούμε το γινόμενο $17 \cdot 4 \cdot 25$ μπορούμε να εργαστούμε με 2 τρόπους

α) 1) $17 \cdot 4 = 68$

β) $4 \cdot 25 = 100$

2) $68 \cdot 25 = 1700$

$17 \cdot 100 = 1700$

Είναι φανερό ότι θα προτιμήσουμε το β' τρόπο.

III. Ίδιότης της μονάδος

από τις σχέσεις

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$3 \cdot 1 = 3$$

$$4 \cdot 1 = 4$$

συνάγουμε ότι για κάθε ακέραιο αριθμό α

έχουμε:

$$a \cdot 1 = a$$

“Ωστε η μονάς είναι ουδέτερο στοιχείο στον πολ)σμό.”

IV. Ἐπιμεριστική ιδιότης τοῦ πολ)σμοῦ ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση.

Τὸ τετραγωνισμένο χαρτί τοῦ σχ. 112 κόπηκε σὲ 2 μέρη. Ἄς βροῦμε τὸ πλῆθος τῶν τετραγώνων.

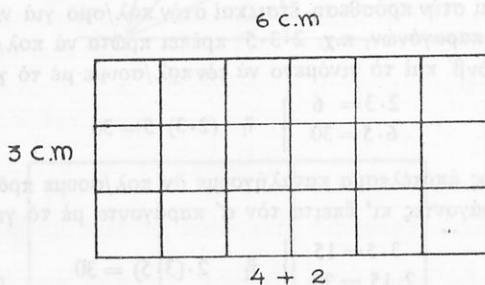
α) ἀπὸ ὁλόκληρο τὸ χαρτί ἔχουμε : $3 \cdot 6 = 18$

β) ἀπὸ τὰ κομμάτια ἔχουμε : $3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 =$

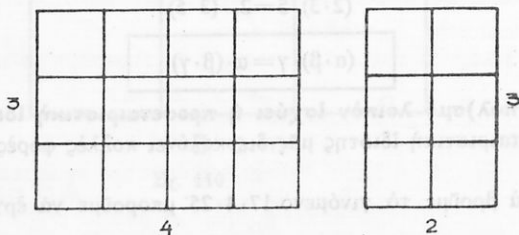
$$12 + 6 = 18$$

ὥστε $3 \cdot 6 = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$

ἢ $3 \cdot (4 + 2) = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2$



Σχ. 112



2ος τρόπος :

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4 + 2) &= (4 + 2) + (4 + 2) + (4 + 2) \\ &= (4 + 4 + 4) + (2 + 2 + 2) \\ &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

καὶ γενικὰ

$$a \cdot (\beta + \gamma) = a \cdot \beta + a \cdot \gamma$$

«Γιὰ νὰ πολ)σουμε ἓνα ἀριθμὸ μ' ἓνα ἄθροισμα μποροῦμε νὰ πολλαπλασιάσουμε—ἂν μᾶς ἐξυπηρετῇ— τὸν ἀριθμὸ μὲ κάθε προσθετέο τοῦ ἀθροίσματος κι' ἔπειτα νὰ προσθέσουμε τὰ γινόμενα».

$$\begin{aligned} \text{π.χ. } 1) \quad 3 \cdot 105 &= 3 \cdot (100 + 5) \\ &= 3 \cdot 100 + 3 \cdot 5 \\ &= 300 + 15 \\ &= 315 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 3 \cdot (a + 2) &= 3 \cdot a + 3 \cdot 2 \\ &= 3 \cdot a + 6 \end{aligned}$$

Πίνακας βασικῶν ιδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

I	$\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$	ἀντιμεταθετική
II	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$	προσεταιριστική
III	$\alpha \cdot 1 = \alpha$	οὐδέτερο στοιχείο ἢ μονάς
VI	$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$	ἐπιμεριστική

§ 83. Εἰδικὲς περιπτώσεις πολ/σμοῦ

$$1) 3 \cdot 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \quad \text{ὥστε} \quad \alpha \cdot 0 = 0$$

$$2) 0 \cdot 3 = 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{ὥστε} \quad 0 \cdot \alpha = 0$$

«Τὸ μηδὲν ὡς παράγων μηδενίζει τὸ γινόμενο».

83.1 Ἀπὸ τὴ γνωστὴ ἰσοδυναμία

$$\alpha = \beta \iff \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

$$\text{ἔχουμε} \quad \alpha = \beta \iff \alpha + \alpha = \beta + \alpha \quad \text{ἢ} \quad \text{ἐπειδὴ} \quad \alpha = \beta$$

$$\alpha = \beta \iff \alpha + \alpha = \beta + \beta$$

$$\text{ἢ} \quad \alpha = \beta \iff 2 \cdot \alpha = 2 \cdot \beta$$

ἂν συνεχίσουμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἔχουμε

$$\alpha = \beta \iff \mu \cdot \alpha = \mu \cdot \beta$$

ὅπου $\mu \in \Phi$

«Ὡστε ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ 2 μέλη μιᾶς ἰσότητος

μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμὸ θὰ προκύψῃ πάλι ἰσότης».

$$\text{Ἐφαρμογὴ:} \quad 3 \cdot x = 12 \iff 3 \cdot x = 3 \cdot 4 \iff x = 4$$

83.2 Ἄν ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο καὶ στὴν περίπτωσιν τῆς ἰσοδυναμίας

$$\alpha > \beta \iff \alpha + \gamma > \beta + \gamma$$

ἔχουμε

$$\alpha > \beta \iff \mu \cdot \alpha > \mu \cdot \beta$$

ὅπου $\mu \in \Phi$

«Ὡστε ἂν.....

Σημείωση: Νὰ ἐξετάσετε τίς παραπάνω ἰσοδυναμίες ὅταν $\mu = 0$.

83.3 Γινόμενο αριθμού με διαφορά

$$\begin{aligned}\text{έχουμε} \quad 3 \cdot (10 - 4) &= 3 \cdot 6 \\ &= 18\end{aligned}$$

στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και ως εξής

$$\begin{aligned}3 \cdot (10 - 4) &= 3 \cdot 10 - 3 \cdot 4 \\ &= 30 - 12 \\ &= 18\end{aligned}$$

$$\text{ή} \quad 3 \cdot (10 - 4) = 3 \cdot 10 - 3 \cdot 4 \quad \text{άρα...}$$

83.4 Γινόμενο αθροίσματος με άθροισμα

$$(3 + 4) \cdot (10 + 2) = ;$$

1ος τρόπος

$$3 + 4 = 7$$

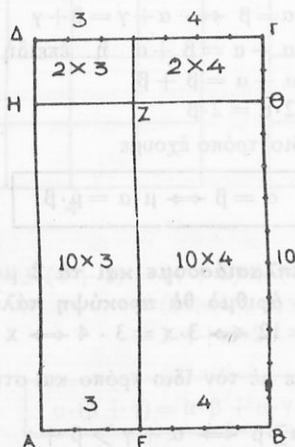
$$10 + 2 = 12$$

$$7 \cdot 12 = 84$$

2ος τρόπος: χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα και έχουμε

$$\begin{aligned}(3 + 4) \cdot (10 + 2) &= (3 + 4) \cdot 10 + (3 + 4) \cdot 2 \\ &= (3 \cdot 10) + (4 \cdot 10) + (3 \cdot 2) + (4 \cdot 2) \\ &= 30 + 40 + 6 + 8 = 84 \quad (\text{Σχ. 113})\end{aligned}$$

άρα.....



Σχ. 113

$$\begin{aligned}(3 + 4) (10 + 2) &= (3 + 4) \cdot 10 + (3 + 4) \cdot 2 \\ &= 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 \\ &= 30 + 40 + 6 + 8 = 84\end{aligned}$$

§ 84. Άλλα αριθμητικά πολυώνυμα

Στην παράσταση $2 + 4 \cdot 7$ υπάρχουν σύμβολα αριθμών (αριθμοί) και σύμβολα πράξεων (προσθέσεως και πολλαπλασιασμού).

Η παράσταση αυτή ονομάζεται **αριθμητικό πολυώνυμο**.

Γενικά κάθε παράσταση που αποτελείται από σύμβολα αριθμών και σύμβολα των γνωστών μας πράξεων ονομάζεται **αριθμητικό πολυώνυμο**.

(άρκει βέβαια οι σημειωμένες πράξεις να είναι δυνατές).

Πώς θα βρούμε την αριθμητική τιμή του πολυωνύμου

$$2 + 4 \cdot 7$$

Θά μπορούσε κανείς

$$\begin{array}{ll} \alpha) \text{ Να προσθέση πρώτα το } 2 \text{ με το } 4 & 2 + 4 = 6 \\ \text{κι' έπειτα το άθροισμα να το πολ/ση με } 7 & 6 \cdot 7 = 42 \end{array}$$

$$\beta) \text{ Να πολ/ση πρώτα το } 4 \text{ με το } 7 \quad 4 \cdot 7 = 28$$

$$\text{κι' έπειτα να προσθέση το } 2 \text{ με το } 28 \quad 2 + 28 = 30$$

Καθώς βλέπουμε οι δύο τρόποι δέν δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα.

Συμφωνούμε: «Όταν σ' ένα αριθμητικό πολυώνυμο είναι σημειωμένες προσθέσεις ή αφαιρέσεις και πολ)σμοί να εκτελούμε πρώτα τους πολ)σμούς κι' έπειτα τις προσθέσεις ή αφαιρέσεις».

Έτσι το πολυώνυμο $12 - 4 \cdot 2$ ισούται με 4

$$\text{διότι } 4 \cdot 2 = 8$$

$$12 - 8 = 4$$

Ποία είναι ή αριθ. τιμή του πολυωνύμου $10 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 11$

$$\text{έχουμε } 10 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 5 - 11 = 10 - 6 + 20 - 11$$

$$= 4 + 20 - 11$$

$$= 24 - 11$$

$$= 13$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

190) Να τεθούν σε μορφή γινομένου τα άθροίσματα

$$\alpha) 7 \text{ πορτ.} + 7 \text{ πορτ.} + 7 \text{ πορτ.} + 7 \text{ πορτ.}$$

$$\beta) 5 \text{ μ\eta\lambda.} + 5 \text{ μ\eta\lambda.} + 5 \text{ μ\eta\lambda.}$$

$$\gamma) 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ + 30^\circ$$

191) Να γραφούν ως άθροίσματα τα γινόμενα

$$\alpha) 5 \cdot (8 \text{ λεμόνια})$$

$$\beta) 4 \cdot 70^\circ$$

$$\gamma) 6 \cdot 4$$

192) Να συμπληρώσετε τις συνεπαγωγές

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \alpha \cdot \beta = 0 \\ \alpha \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \beta = \dots$$

$$\beta) \alpha \cdot \beta = \alpha \Rightarrow \beta = \dots$$

193) Να εύρεθούν τὰ γινόμενα (μὲ δύο τρόπους)

$$\alpha) 8 \cdot (5 + 7) \quad \beta) 4 \cdot (8 - 2) \quad \gamma) (3 + 6) \cdot (2 + 5)$$

194) Να εύρεθούν τὰ γινόμενα $3 \cdot (a + 2)$ $a \cdot (5 + \beta)$

β) Χρησιμοποιήσατε τὴν ἐπιμεριστικὴ ιδιότητα γιὰ τὸν εὐκόλο ὑπολογισμό τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου $14 \cdot 7 + 14 \cdot 3$

195) Να ὑπολογίσετε καὶ τὸ ἐξαγόμενο τῶν ἀριθμ. πολυωνύμων

$$\alpha) 25 - 7 \cdot 3 + 4 \cdot 12 \quad \beta) 95 - 2 \cdot 9 - 7 \cdot 3$$

§ 85. Γινόμενο πολλῶν παραγόντων

Τὸ γινόμενο $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$ σημαίνει :

1) Να πολλαπλασιάσουμε τοὺς δύο πρώτους παράγοντες $2 \cdot 3 = 6$.

2) Τὸ γινόμενο νὰ τὸ πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸν 3^ο παράγοντα $6 \cdot 5 = 30$

3) Τὸ νέο γινόμενο νὰ τὸ πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸν 4^ο παράγοντα

$$30 \cdot 4 = 120$$

$$\text{ὥστε } 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = [(2 \cdot 3) \cdot 5] \cdot 4 = 120$$

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε κι' ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι περισσότεροι.

Ἰδιότητες

85.1 Εἶδαμε ὅτι $[(2 \cdot 3) \cdot 5] \cdot 4 = 120$

ἂν πάρουμε τοὺς παράγοντες μὲ ἄλλη σειρὰ θὰ ἔχουμε

$$[(2 \cdot 5) \cdot 4] \cdot 3 = 10 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 40 \cdot 3$$

$$= 120$$

ὥστε ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ιδιότης

85.2 Ἄς ἀντικαταστήσουμε στὸ γινόμενο $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4$ τὸ $4 \cdot 5$ μὲ τὸ 20 θὰ ἔχουμε

$$2 \cdot 3 \cdot 20 = 6 \cdot 20$$

$$= 120$$

Ὡστε: Ἄν ἀντικαταστήσουμε μερικοὺς παράγοντες μὲ τὸ γινόμενό τους τὸ τελικὸ γινόμενο δὲν ἀλλάζει.

85.3 Ἄς ἀντικαταστήσουμε στὸ ἴδιο γινόμενο τὸν παράγοντα 4 μὲ τὸ γινόμενο $2 \cdot 2$ θὰ ἔχουμε

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 6 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 = 30 \cdot 2 \cdot 2 = 60 \cdot 2 = 120$$

“Ωστε: “Αν αντικαταστήσουμε ένα παράγοντα με άλλους που έχουν γινόμενο αυτόν, τὸ τελικὸ γινόμενο δὲν ἀλλάζει.

85.4 Πῶς πολ/ζουμε γινόμενο με ἀριθμό

“Αν θέλουμε νὰ υπολογίσουμε τὸ γινόμενο $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4$ σύμφωνα με ὅσα μάθαμε πρέπει πρῶτα νὰ βροῦμε τὸ γινόμενο $2 \cdot 3 \cdot 5$ κι’ ἔπειτα νὰ τὸ πολλαπλασιάσουμε με τὸ 4

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$$

$$30 \cdot 4 = 120$$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ 4 με ἓνα παράγοντα τοῦ γινομένου π.χ. τὸ 5

$$\text{καὶ ὅα ἔχουμε} \quad 5 \cdot 4 = 20$$

$$2 \cdot 3 \cdot 20 = 6 \cdot 20$$

$$= 120$$

ὥστε

$$(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4)$$

«Γιὰ νὰ πολ)σουμε ἓνα γινόμενο μ’ ἓναν ἀριθμὸ μπορούμε νὰ πολ)σουμε ἓνα παράγοντα τοῦ γινομένου με τὸν ἀριθμὸ».

Σημείωση: Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὸ γινόμενο $(2 + 3 + 5) \cdot 4$ με τὸ γινόμενο $(2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4$

$$\text{διότι} \quad (2 + 3 + 5) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 + 5 \cdot 4 = 8 + 12 + 20 = 40$$

$$\text{Τὸ δὲ} \quad (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot (5 \cdot 4) = 2 \cdot 3 \cdot 20 = 6 \cdot 20 = 120 \quad \text{ὅπου} \quad 40 \neq 120$$

§ 86. Ἑρμηνεία τοῦ γνωστοῦ κανόνος ἐκτελέσεως πολ/σμοῦ

86.1 Πολλαπλασιασμός μονοψηφίων (με τὸν πίνακα)

Ὁ πίνακας ποὺ παρατίθεται στὴν ἐπομένη σελίδα περιέχει 100 τετραγωνάκια: κάθε σειρὰ καὶ κάθε στήλῃ ἀποτελεῖται ἀπὸ 10 τετραγωνάκια. Ἡ πρώτη σειρὰ ἢ σημειωμένη με τὸ 0 ἔχει στὰ τετραγωνάκια τὰ γινόμενα $0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $0 \times 2 = 0, \dots$ $0 \times 9 = 0$.

Ἡ δευτέρα σειρὰ ἢ σημειωμένη με τὸ 1 ἔχει στὰ τετραγωνάκια τὰ γινόμενα $1 \times 0 = 0$, $1 \times 2 = 2$, $1 \times 3 = 3, \dots$ $1 \times 9 = 9$.

Ἡ τρίτη σειρὰ ἢ σημειωμένη με τὸ 2 ἔχει τὰ γινόμενα $2 \times 0 = 0$, $2 \times 1 = 2$, $2 \times 2 = 4, \dots$ $2 \times 9 = 18$

Προχωροῦμε με αὐτὸ τὸν τρόπο στὶς ἄλλες σειρὲς καὶ τέλος στὴ δεκάτη σειρὰ ποὺ σημειώνεται με τὸ 9 περιέχονται τὰ γινόμενα $9 \times 0 = 0$, $9 \times 1 = 9$, $9 \times 2 = 18, \dots$ $9 \times 9 = 81$.

Πώς εύρισκομε τὸ γινόμενο δύο μονοψηφίων ἀριθμῶν.

Τὸ γινόμενο 6×8 εὐρίσκεται στὴν διασταύρωση τῆς 6ης σειρᾶς καὶ 8ης στήλης ἢ τῆς 8ης σειρᾶς καὶ 6ης στήλης $6 \times 8 = 8 \times 6 = 48$.

Ἔτσι ἐφαρμόζεται καὶ ἡ ιδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.

Πυθαγόρειος πίνακας

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

86.2 Πολ./σμός με 10, 100, 1000

$$24 \cdot 10 = 24 \text{ δεκάδες} \\ = 240$$

$$24 \cdot 100 = 24 \text{ ἑκατοντάδες} \\ = 2400$$

Κανὼν: ὥστε

86.3 Πολ./σμός με μονοψήφιο

$$257 \cdot 7 = (2 \text{ ἑκατ.} + 5 \text{ δεκ.} + 7 \text{ μον.}) \cdot 7 \\ = (14 \text{ ἑκατ.} + 35 \text{ δεκ.} + 49 \text{ μον.}) \quad \text{ἐπιμεριστική ιδιότητα} \\ = 1 \text{ χιλ.} + 7 \text{ ἑκατ.} + 9 \text{ δεκ.} + 9 \text{ μον.} \\ = 1799$$

86.4 Πολ/σμός με πολυψήφιο

$$= 315 \times 243 = 315 \cdot (2 \text{ \acute{e}\kappa.} + 4 \text{ δεκ.} + 3 \text{ μον})$$

$$= 315 \cdot 200 + 315 \cdot 40 + 315 \cdot 3$$

υπολογίζουμε τὰ γινόμενα κι' \acute{ε}πειτα προσθέτουμε

$$315 \cdot 3 = 945 \quad (\text{μερικὸ γινόμενο με } 3)$$

$$315 \cdot 40 = 12600 \quad (\quad \gg \quad \gg \quad \text{με } 40)$$

$$315 \cdot 200 = 63000 \quad (\quad \gg \quad \gg \quad \text{με } 200)$$

$$315 \cdot 3 + 315 \cdot 40 + 315 \cdot 200 = 76545 \quad \text{ὅλικὸ γινόμενο}$$

ἡ πράξη καθὼς ξέρουμε γίνεται με τὴν ἀκόλουθη διάταξη

315	
243	
945	(γινόμενο με 3)
1260	(γινόμενο με 40)
630	(γινόμενο με 200)
76545	ὅλικὸ γινόμενο

86.5 Μία εἰδικὴ περίπτωση

Πολλαπλασιασμός με ἀριθμὸ ποὺ ἔχει ἐνδιάμεσα μηδενικά 3157·1006
ἔχουμε

3157	
1006	×
18942	
0000	
0000	
3157	
3175942	

ἡ διάταξη αὐτὴ γράφεται πιὸ σύντομα

3157	
1006	
18942	
3157	
3175942	

§ 87. Δοκιμὴ τοῦ πολ/σμοῦ

Ὁ \acute{ε}λεγχος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ στηρίζεται στὴν ἀντιμεταθετικὴ ιδιότητα.

Μετά τὴν ἐκτέλεση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐναλλάσσουμε τοὺς παράγοντες καὶ ἐκτελοῦμε πάλι τὸν πολλαπλασιασμό. Πρέπει νὰ βροῦμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

§ 88. Συντομίες πολ/σμοῦ

Σὲ πολλὰς περιπτώσεις ἡ ἐφαρμογὴ τῶν γνωστῶν ἰδιοτήτων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μᾶς ὁδηγεῖ πρὸ σύντομα στὸ ἀποτέλεσμα π.χ.

88.1 Πολ/σμός με 11 101

$$\begin{aligned}\text{Π.χ. } 24 \cdot 11 &= 24 \cdot (10 + 1) \quad (\text{'Επιμεριστικὴ ἰδιότης}) \\ &= 240 + 24 \\ &= 264 \\ 24 \cdot 101 &= 24 \cdot (100 + 1) \\ &= 24 \cdot 100 + 24 \cdot 1 \\ &= 2400 + 24 \\ &= 2424 \quad \text{κλπ.}\end{aligned}$$

88.2 Πολ/σμός με 9 99 999

$$\begin{aligned}27 \cdot 9 &= 27 \cdot (10 - 1) \\ &= 27 \cdot 10 - 27 \cdot 1 \\ &= 270 - 27 = 243\end{aligned}$$

88.3 Πολ/σμός με 4

$$\begin{aligned}32 \cdot 4 &= (32 \cdot 2) \cdot 2 \\ &= 64 \cdot 2 \\ &= 128\end{aligned}$$

§ 89. Ἐπίλυση προβλημάτων με πολλαπλασιασμό

1) Τὸ ἓνα κιλὸ ντομάτες ἔχουν 4 δρχ. Πόσο ἔχουν τὰ 5 κιλά;
ἔχουμε: ἀξία 5 κιλῶν = 4 δρ. + 4 δρ. + 4 δρ. + 4 δρ. + 4 δρ.
= 5 · 4 δρ.
= 20 δρ.

2) Ἐνα πλοῖο τρέχει σταθερὰ με ταχύτητα 15 μίλια τὴν ὥρα. Πόσα μίλια θὰ διατρέξῃ σὲ 3 ὥρες.

$$\begin{aligned}\text{Θά διατρέξη} & 15 \text{ μιλ.} + 15 \text{ μιλ.} + 15 \text{ μιλ.} \\ & = 3 \cdot 15 \text{ μιλ.} \\ & = 45 \text{ μιλ.}\end{aligned}$$

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγουμε

Ὅταν ξέρουμε τὴ τιμὴ τῆς μιᾶς μονάδος καὶ ζητοῦμε τὴν τιμὴ τῶν πολλῶν ὁμοειδῶν μονάδων πολ)ζουμε τὴν τιμὴ τῆς μονάδος μὲ τὸν ἀριθμὸ ποὺ ἐκφράζει τὸ πλῆθος τῶν ὁμοειδῶν μονάδων.

Παρατηροῦμε ὅτι :

- α) ὁ πολλαπλασιαστικὸς ποὺ μᾶς δείχνει πόσες φορές ἐπαναλαμβάνεται ἡ τιμὴ τῆς μονάδος λαμβάνεται ἀφηρημένος.
β) Τὸ γινόμενο εἶναι ὁμοειδὲς μὲ τὴν τιμὴ τῆς μονάδος.
Ὑπάρχουν περιπτώσεις ὅπου καὶ ὁ πολλαπλασιαστικὸς καὶ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι συγκεκριμένοι καὶ ὁμοειδεῖς καὶ τὸ γινόμενο εἶναι ἑτεροειδὲς μὲ αὐτούς.

Π.χ. ἂν ζητᾶμε τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 2 cm καὶ 3 cm ἔχουμε $2 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$$\begin{aligned}\text{Νὰ ἐκτελεσθοῦν ἀπὸ μνήμης οἱ πράξεις} \\ 3 \times 7 \times 5 \times 2, \quad 12 \times 10 \times 11 \times 5, \quad 18 \times 11, \quad 74 \times 25 \times 4, \quad 7006 \times 25 \times 4.\end{aligned}$$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις

$$40357 \times 445 \times 32 \quad 723 \times 25003 \times 15$$

Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες πράξεις

$$2845 \cdot (678 - 508) + 70 \cdot (405 - 180)$$

$$53062 \cdot (736 - 478) - 3004 \cdot (16 + 34)$$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

196. Σὲ ἐργοστάσιο ἐργάζονται 45 ἐργάτες. Ἀπὸ αὐτοὺς οἱ ὀκτὼ λαμβάνουν ἡμερομίσθιο 65 δρχ. οἱ 16 λαμβάνουν 50 δρχ. τὴν ἡμέρα καὶ οἱ ὑπολοίποι 48 δρχ. καθένας. Πόσα πληρώνει τὴν ἡμέρα τὸ ἐργοστάσιο;

197. Ἀπὸ ἓνα τόπο ἀναχωροῦν δύο κινητὰ διευθυνόμενα ἀντιθέτως. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν μετὰ 14 ὥρες ἂν τὸ μὲν ἓνα κινεῖται μὲ ταχύτητα 85 χιλιομέτρων τὴν ὥρα, τὸ δὲ ἄλλο μὲ ταχύτητα 67 χιλιομέτρων. τὴν ὥρα

Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν αὐτῶν κινητῶν, ἂν κινεῖται κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνση;

198. Ἐνας πατέρας ἀφῆκε μὲ διαθήκη τὴν περιουσία του εἰς τοὺς 3 γιούς του καὶ 2 κόρες καὶ καθένας ἀπὸ τοὺς γιούς ἔλαβε 43.000 δρχ.

κάθε μία κόρη 27.580 δρχ. καὶ τὸ Κράτος γιὰ φόρο 12.680 δρχ. Πόση ἦτο ὀλόκληρη ἡ περιουσία;

199. Ἀπὸ τρεῖς ἀριθμοὺς ὁ ἓνας εἶναι ὁ 8, ὁ β' 4 φορές μεγαλύτερος τοῦ α', ὁ δὲ γ' 12 φορές μεγαλύτερος τοῦ β'. Πόσο εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν;

200. Τρεῖς πόλεις Α, Β, Γ, εὐρίσκονται ἐπὶ εὐθείας ὁδοῦ. Ἡ ἀπόσταση ΑΒ εἶναι 35 χιλιόμετρα, ἡ ΒΓ εἶναι 8 χιλιόμετρα μεγαλύτερη τοῦ τριπλασίου τῆς ἀπόστασεως τῶν πόλεων Α καὶ Β. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση τῶν πόλεων Β καὶ Γ καὶ πόση ἡ ἀπόσταση τῶν Α καὶ Γ.

201. Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος τιμᾶται α δραχμῆς. Ἐὰν ἀγοράσωμε τὴν μία ἡμέρα β' μέτρα καὶ τὴν ἄλλη γ μέτρα. Πόσες δραχμῆς θὰ δώσουμε.

§ 90. Διαιρέση ἀκεραίων

90.1 Μερισμός

Πρόβλημα: Νὰ μοιρασθοῦν 15 τετράδια ἐξ ἴσου σὲ 5 παιδιά.

Λύσις. Μοιράζουμε ἀπὸ ἓνα τετράδιο στὸ κάθε παιδί. Ἐπειτα ἐπαναλαμβάνουμε τὸ ἴδιο μέχρι νὰ μοιρασθοῦν ὅλα τὰ τετράδια. Μ' αὐτὸ τὸ τρόπο θὰ ἐκτελέσωμε τὶς ἀφαιρέσεις.

$$\alpha'. \quad 15 - 5 = 10$$

$$\beta'. \quad 10 - 5 = 5$$

$$\gamma'. \quad 5 - 5 = 0$$

Ἄρα τὸ κάθε παιδί θὰ πάρῃ ἀπὸ 3 τετράδια.

Δοκιμή: Εἶναι φανερὸ ὅτι τὰ τετράδια ποὺ μοιράσαμε πρέπει νὰ εἶναι $5 \cdot 3 = 15$.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι : Πρόβλημα **μερισμοῦ**. Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε ὅτι :

Στὸ μερισμὸ ἔχουμε ἓνα σύνολο μὲ α ὁμοειδῆ στοιχεῖα καὶ τὸ χωρίζουμε σὲ β ἴσα ὑποσύνολα, ξένα μεταξύ των. Ὁ πληθ. ἀριθμὸς κάθε τέτοιου ὑποσυνόλου ἂν πολλαπλασιασθῇ μὲ τὸν ἀριθμὸ τῶν ὑποσυνόλων β μᾶς δίδει τὸν πληθ. ἀριθμὸ α τοῦ συνόλου.

90.2 Μέτρηση

Πρόβλημα. Θέλουμε νὰ τοποθετήσουμε 15 τετράδια κατὰ πεντάδες. Πόσες πεντάδες θὰ σχηματίσουμε.

Λύσις. Παίρνουμε 5 ἀπ' τὰ 15 τετράδια καὶ σχηματίζουμε τὴ 1η πεντάδα. Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνουμε ὥσπου νὰ τελειώσουν τὰ τετράδια. Θὰ ἔχουμε πάλι τὶς ἀφαιρέσεις

$$\alpha'. \quad 15 - 5 = 10$$

$$\beta'. \quad 10 - 5 = 5$$

$$\gamma'. \quad 5 - 5 = 0$$

“Ωστε θά σχηματίσουμε 3 πεντάδες τετραδίων

Δοκιμή. “Αν συγκεντρώσουμε πάλι τις 3 πεντάδες πρέπει να έχουμε τα 15 τετράδια
δηλαδή $3 \cdot 5 = 15$

Τò πρόβλημα αυτό είναι πρόβλημα **μετρήσεως**. “Απ’ αυτό καταλαβαίνουμε ότι:

Στή μέτρηση έχουμε ένα σύνολο με α όμοιδη στοιχεία και βρίσκουμε πόσα υποσύνολα με β στοιχεία τὸ καθένα, περιέχει.

§ 91. Όρισμός διαιρέσεως

Τὰ δύο παραδείγματά μας είναι δύο διαφορετικά προβλήματα.

“Ωστόσο έχουν κοινὰ γνωρίσματα.

1) Καὶ στὰ δύο προβλήματα μᾶς δίδεται ἓνας ἀριθμὸς Δ τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ μοιράσουμε (μερισμός) ἢ νὰ μετρήσουμε (πόσα χωρεῖ, μέτρηση) καὶ λέγεται **διαιρετέος**.

2) Καὶ στὰ δύο μᾶς δίδεται καὶ ἓνας δεύτερος ἀριθμὸς δ πὺν λέγεται **διαιρέτης**.

3) Καὶ στὰ δύο βρίσκουμε ἓνα τρίτο ἀριθμὸ, τὸ **Πηλίκο** Π , τέτοιον ὥστε ἂν τὸν πολλαπλασιάσουμε με τὸ διαιρέτη νὰ βροῦμε τὸ διαιρετέο. “Η ἰδιότης τοῦ πηλίκου Π γράφεται

$$\Pi \cdot \delta = \Delta \quad (1)$$

“Ωστε: **Διαίρεση** εἶναι ἡ πράξη στὴν ὁποία μᾶς δίδονται δύο ἀριθμοί, διαιρετέος Δ καὶ ὁ διαιρέτης δ , καὶ βρίσκουμε ἓνα τρίτο ἀριθμὸ, τὸ πηλίκο Π . τὸ ὁποῖον πολ)μενο με τὸ διαιρέτη μᾶς δίδει τὸ διαιρετέο».

§ 92. Τελεία, ἀτελὴς διαίρεσεις

“Αν στὰ προηγούμενα παραδείγματα ὁ διαιρετέος Δ ἦταν 17, καὶ ὄχι 15 εἶναι φανερό ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμὸς Π πὺν νὰ πολλαπλασιασθῇ με τὸ διαιρέτη 5 καὶ νὰ μᾶς δώσῃ γινόμενο τὸ 17. Στὴν περίπτωσιν αὐτὴ ἡ διαίρεση λέγεται **ἀτελὴς** ἐνῶ στὴν προηγούμενη περίπτωσιν **τελεία**. Στὴν

άτελη διαίρεση για πηλίκο παίρνουμε το μεγαλύτερο άκέραιο πού αν πολ)σθῇ με τὸν διαιρέτη χωρεῖ στὸν διαιρετέο.

Τῇ διαφορᾷ $\Delta = \delta \cdot \pi$ ἡ ὁποία εἶναι φανερό ὅτι πρέπει νὰ εἶναι μικρότερη τοῦ δ τὴν ὀνομάζουμε ὑπόλοιπο Υ τῆς διαιρέσεως. Εἶναι φανερό ὅτι στὴν άτελῇ διαίρεση ἔχουμε τὶς σχέσεις $17 = 5 \cdot 3 + 2$

$$2 < 5$$

ἢ γενικά :

$$\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$$

$$\upsilon < \delta$$

§ 93. Γραφικὴ παράστασις τῆς διαιρέσεως

1) Τελεία διαίρεση $15 : 5 = 3$ (σχ. 114)

2) Ἀτελῆς διαίρεση $17 = 5 \cdot 3 + 2$ (σχ. 115)

§ 94. Σχέσις πολ/σμοῦ καὶ τελείας διαιρέσεως

Εἶδαμε ὅτι ἡ πρόσθεση καὶ ἡ ἀφαίρεση εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι. Ἀς δοῦμε μήπως συμβαίνει τὸ ἴδιο μετὸν πολλαπλασιασμό καὶ τὴ διαίρεση;

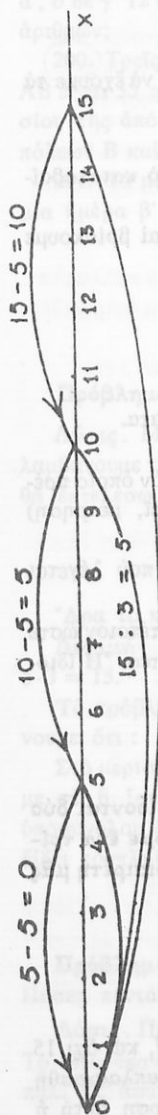
$$\begin{array}{l} \text{ἔχουμε} \\ 3 \cdot 5 = 15 \\ 15 : 5 = 3 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{ἔχουμε} \\ 3 \cdot 5 = 15 \\ 15 : 5 = 3 \end{array}} \right\} \text{ ἢ } (3 \cdot 5) : 5 = 3$$

$$\text{καὶ γενικά } (a \cdot \beta) : \beta = a$$

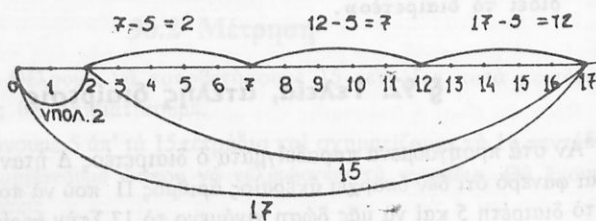
$$\begin{array}{l} \text{Ἐπίσης} \\ 15 : 5 = 3 \\ 3 \cdot 5 = 15 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{Ἐπίσης} \\ 15 : 5 = 3 \\ 3 \cdot 5 = 15 \end{array}} \right\} \text{ ἢ } (15 : 5) \cdot 5 = 15$$

$$\text{καὶ γενικά } (a : \beta) \cdot \beta = a$$

Ὡστε ἡ τελεία διαίρεση καὶ ὁ πολ)σμός εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι.



Σχ. 114



Σχ. 115

§ 95. Ίσοδυναμίες

Όταν δώσουμε 15 δρ. στο μανάβη για να μᾶς δώσει ντομάτες τῶν 5 δρ. κατὰ κιλό μᾶς δίνει 3 κιλά ντομάτες καὶ για να κάνει τὸ λογαριασμὸ λέγει :

$$3 \cdot 5 = 15$$

Δηλαδή: ἀντικαθιστᾷ τὴν διαίρεση $15 : 5 = 3$ μὲ τὸ πολ./σμὸ $3 \cdot 5 = 15$.

Πραγματικὰ ὅταν ὠρίσαμε τὴν διαίρεση $15 : 5$ ζητήσαμε νὰ βροῦμε ἓνα ἀκέραιο, τὸν 3, τέτοιον ὥστε $3 \cdot 5 = 15$

ἄρα ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία

$$15 : 5 = 3 \iff 3 \cdot 5 = 15$$

καὶ γενικὰ

$$a : b = \gamma \iff \gamma \cdot b = a \quad (\text{"Αν } a : b \text{ Τελ. δ/ση})$$

Ἐφαρμογές: Νὰ γράψουμε δύο ἰσότητες ἰσοδύναμες μὲ τὴν ἰσότητα

$$3 \cdot 4 = 12$$

ἔχουμε

$$3 \cdot 4 = 12 \iff 12 : 3 = 4$$

καὶ

$$3 \cdot 4 = 12 \iff 12 : 4 = 3$$

§ 96. Εἰδικὲς περιπτώσεις διαιρέσεως

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $12 : 0$
ὡς θέσουμε $12 : 0 = \chi$
ὁπότε θὰ ἔχουμε

$$12 : 0 = \chi \iff \chi \cdot 0 = 12$$

ἀλλὰ μάθαμε ὅτι τὸ 0 μ' ὅποιον ἀριθμὸ κι' ἂν πολ./σθῇ θὰ δώσει γινόμενο 0.
ἄρα δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς χ τέτοιος ὥστε $\chi \cdot 0 = 12$. Δηλ. ἡ διαίρεση $12 : 0$ εἶναι **ἀδύνατη** γι' αὐτὸ πρέπει σὲ κάθε διαίρεση ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι διάφορος ἀπὸ τὸ 0.

2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $0 : 0$
θέτουμε $0 : 0 = \chi$
ὁπότε ἔχουμε

$$0 : 0 = \chi \iff \chi \cdot 0 = 0$$

ἀλλὰ ὅποιος κι' ἂν εἶναι ὁ χ θὰ ἔχουμε $\chi \cdot 0 = 0$ ὥστε ἡ διαίρεση $0 : 0$ δὲν ἔχει πηλίκο ἐναναριθμὸ. Κάθε ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ εἶναι τὸ πηλίκο αὐ-
τῆς τῆς διαιρέσεως. Γι' αὐτὸ λέγουμε ὅτι ἡ διαίρεση $0 : 0$ εἶναι **ἀόριστη**.

3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκο $0 : a$ ὅπου $a \in \Phi$
(ὁ περιορισμὸς $a \in \Phi$ μᾶς ἀποκλείει τὴν περίπτωση $a = 0$)
θέτουμε $0 : a = \chi$
ὁπότε

$$0 : a = \chi \iff \chi \cdot a = 0$$

Καθώς ξέρουμε ένα γινόμενο ισούται με τὸ 0, ὅταν ἕνας παράγων εἶναι 0 ἐπειδὴ δὲ $a \neq 0$ ἄρα πρέπει $\chi = 0$ ὥστε $0 : a = 0$

4) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $a : 1$

θέτουμε $a : 1 = \chi$

ὁπότε ἔχουμε $a : 1 = \chi \iff \chi \cdot 1 = a$

Ἐπειδὴ τὸ 1 εἶναι οὐδέτερο στοιχεῖο στὸ πολ/σμὸ πρέπει $\chi = a$

Ὡστε $a : 1 = a$

5) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκο $a : a = \chi$

ἔχουμε $a : a = \chi \iff \chi \cdot a = a$

ἄρα πρέπει $\chi = 1$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

232) Ποιὲς διαιρέσεις συνάγετε ἀπὸ τὶς ισότητες 1) $12 = 3 \cdot 4$ 2) $36 = 4 \cdot 9$

203) Ἡ ισότης $32 = 5 \cdot 6 + 2$ εἶναι ισότης γιὰ δύο διαιρέσεις, ποιὲς εἶναι αὐτές;

204) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ πηλικά τῶν διαιρέσεων $12 : 1$, $a : 1$, $5 : 5$, $0 : 5$

205) Ποιὲς ἀπὸ τὶς διαιρέσεις $3 : 0$, $0 : 3$, $5 : 0$, $0 : 5$ εἶναι ἀδύνατοι;

§ 97. Ἰδιότητες διαιρέσεως

97.1 Ἀντιμεταθετική

Παρατηροῦμε ὅτι ἐνῶ $15 : 5 = 3$, ἡ διαίρεση $5 : 15 =$ ἀδύνατη (στὸ σύνολο Φ) ἄρα δὲν ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικὴ ιδιότης καὶ τὸ ζεύγος Δ, δ εἶναι διατεταγμένο ζεύγος.

97.2 Προσεταιριστικὴ ιδιότης

Ἄς πάρουμε τὶς διαιρέσεις $(60 : 6) : 2$

ἔχουμε $\left. \begin{array}{l} 60 : 6 = 10 \\ 10 : 2 = 5 \end{array} \right\} \text{ ἢ } (60 : 6) : 2 = 5$

Ἄν πάρουμε $\left. \begin{array}{l} 6 : 2 = 3 \\ 60 : 3 = 20 \end{array} \right\} \text{ ἢ } 60 : (6 : 2) = 20$

ὥστε $(60 : 6) : 2 \neq 60 : (6 : 2)$

ἄρα δὲν ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ιδιότης.

97.3 Στὸ σχῆμα 40 ἔχουμε συγκεντρώσει τὰ στοιχεῖα ἀπὸ τρεῖς διαιρέσεις. Ἄν προσέξουμε τοὺς διαιρετέους τῶν διαιρέσεων αὐτῶν (17, 34, 51)

παρατηρούμε ότι ο 2ος είναι διπλάσιος του 1ου και ο 3ος 3πλάσιος του α'. Το ίδιο βλέπουμε και στους διαιρέτας και στα υπόλοιπα: αντίθετα τα πηλίκα είναι τα ίδια και στις τρεις διαιρέσεις

“Ωστε: «Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε διαιρέτέο και διαιρέτη με τον ίδιο φυσικό αριθμό τότε το πηλίκο δεν αλλάζει ενώ το υπόλοιπο πολλαπλασιάζεται ή διαιρείται με τον ίδιο αριθμό».

Δ	δ	π	υ
17	5	3	2
34	10	3	4
51	15	3	6

Σχ. 116

97.4 Διάρθρωση αθροίσματος με φυσικό αριθμό

Το πηλίκο $(25 + 35) : 5$ εύρεται με δύο τρόπους

1ος τρόπος

$$25 + 35 = 60$$

$$60 : 5 = 12$$

2ος τρόπος

$$25 : 5 = 5$$

$$35 : 5 = 7$$

$$5 + 7 = 12$$

$$\eta \quad (25 + 35) : 5 = 25 : 5 + 35 : 5$$

Άρα....

Εφαρμογή: $110 : 5 = (100 + 10) : 5 = 20 + 2 = 22$.

97.5 Διάρθρωση διαφορᾶς με φυσ. αριθμό

Το πηλίκο $(24 - 6) : 3$ εύρεται με 2 τρόπους

1ος τρόπος

$$24 - 6 = 18$$

$$18 : 3 = 6$$

2ος τρόπος

$$24 : 3 = 8$$

$$6 : 3 = 2$$

$$8 - 2 = 6$$

$$\eta \quad (24 - 6) : 3 = 24 : 3 - 6 : 3$$

Άρα....

Εφαρμογή: $92 : 4 = (100 - 8) : 4 = 100 : 4 - 8 : 4 = 25 - 2 = 23$.

97.6 Γινόμενο διαιρούμενο διὰ φυσ. αριθμοῦ

Το πηλίκο $(12 \cdot 10) : 6$ εύρεται με δύο τρόπους:

1ος τρόπος

$$12 \cdot 10 = 120$$

$$120 : 6 = 20$$

2ος τρόπος

$$12 : 6 = 2$$

$$2 \cdot 10 = 20$$

$$\eta \quad (12 \cdot 10) : 6 = (12 : 6) \cdot 10$$

Άρα....

Εφαρμογή: $(24 \cdot 39) : 24 = (24 : 24) \cdot 39 = 1 \cdot 39 = 39$.

97.7 Πηλίκο ἀριθμοῦ διὰ γινομένου

Τὸ πηλίκο $60 : (2 \cdot 3)$ εὐρίσκεται με 2 τρόπους :

1ος τρόπος

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$60 : 6 = 10$$

$$\text{ἢ } 60 : (2 \cdot 3) = (60 : 2) : 3$$

2ος τρόπος

$$60 : 2 = 30$$

$$30 : 3 = 10$$

ἄρα.....

Ἐφαρμογή : $180 : (5 \cdot 18) = (180 : 18) : 5 = 10 : 5 = 2$

§ 98. Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως μονοψήφιου καὶ πολυψήφιου πηλίκου

Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεση $4785 : 694$. Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι μονοψήφιο, διότι ἂν γράψωμε εἰς τὸν διαιρέτη ἓνα μηδενικὸ εἰς τὴν δεξιὰ του, εὐρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ 6940, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου. Ὅμοιως στὴν διαίρεση $7945 : 95$ τὸ πηλίκο εἶναι πολυψήφιο, διότι ἂν γράψωμε δεξιὰ τοῦ διαιρέτου ἓνα μηδενικὸ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 950, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 7945. Γενικὰ γιὰ νὰ γνωρίζωμε πρὶν ἐκτελέσωμε τὴν διαίρεση, ἂν τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιο ἢ πολυψήφιο πολλαπλασιάζουμε τὸν διαιρέτην ἐπὶ 10 γράφοντες εἰς τὸ τέλος του 0, καὶ ἂν μὲν προκύψῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιο. Ἐὰν δὲ προκύψῃ μετὰ τὸν πολλαπλασιασμὸ ἐπὶ 10 ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ διαιρετέου τότε τὸ πηλίκο εἶναι πολυψήφιο.

Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως

Α'. Περίπτωση

1ο. Τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιο. Τὸ πηλίκο εὐρίσκεται με τὴ βοήθεια τοῦ πυθαγορείου πίνακος. Εἶναι $45 : 9 = 5$, διότι ὁ διαιρέτης 9 πολλαπλασιαζόμενος ἐπὶ τὸ πηλίκο δίδει γινόμενο $9 \times 5 = 45$. Ἡ διαίρεσις $35 : 8$ δίδει πηλίκο 4 καὶ ὑπόλοιπο 3, διότι $8 \times 4 = 32$ καὶ $35 = 32 + 3$.

2ο. Διαιρέτης πολυψήφιος καὶ τὸ πηλίκο μονοψήφιο. Ἡ διαίρεσις $845 : 258$. Διακρίνομε ὅτι τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιο, διότι $2580 > 845$. Ἀνὰ εὖρωμε τὸ πηλίκο ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν διαιρέτην. $258 \times 1 = 258$, $258 \times 2 = 516$, $258 \times 3 = 774$, $258 \times 4 = 1032$. Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πηλίκον εἶναι ὁ 3 τὸ δὲ ὑπόλοιπο $845 - 774 = 71$. Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς εὐρέσεως τῶν πηλίκων εἶναι μὲν ἀσφαλὴς, ἀλλὰ κουραστικός. Γι' αὐτὸ ἐκτελοῦμε τὴν διαίρεση: $845 : 258$. Γιὰ νὰ εὖρωμε πόσες φορές ὁ 258 χωρεῖ στὸ 845 ἀρκεῖ νὰ εὖρωμε πόσο χωροῦν οἱ δύο ἑκατοντάδες τοῦ διαιρέτου στίς ἑκατοντάδες τοῦ διαιρετέου. Φανερό εἶναι ὅτι ἄλλες τόσες φορές ἢ λ

γώτερες, οὐδέποτε δὲ περισσότερες, θὰ χωρῇ ὁ διαιρέτης εἰς τὸ διαιρετέο. Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $8 : 2 = 4$ πολλαπλασιαζόμενο μετὸν διαιρέτη $258 \times 4 = 1032$ γίνεται μεγαλύτερο τοῦ διαιρετέου. Ἔνεκα τούτου δοκιμάζουμε τὸ κατὰ μονάδα μικρότερο ψηφίο τὸ 3, τὸ ὁποῖον πολλαπλασιάζουμε μετὸ διαιρέτη καὶ εὐρίσκουμε τὸ γινόμενο $258 \times 3 = 774$ ἀριθμὸ μικρότερο τοῦ διαιρετέου. Ὡστε τὸ 3 εἶναι τὸ ζητούμενο πηλίκο. Ἀφαιροῦμε τὸ γινόμενο 774 ἀπὸ τὸν διαιρετέο καὶ εὐρίσκουμε $845 - 774 = 71$ (ὑπόλοιπο). Ἡ πρῆξις διατάσσεται :

$$\begin{array}{r|l} 845 & 258 \\ - 774 & 3 \\ \hline & 71 \end{array}$$

Ἐπίσης ἡ διαίρεση $2547 : 578$. Παρατηροῦμε ὅτι, τὸ ψηφίο τῆς ἀνωτάτης τάξεως τοῦ διαιρέτου εἶναι οἱ ἑκατοντάδες 5. Διὰ τοῦτο χωρίζουμε ἀπὸ τὸ διαιρετέο τὶς ἑκατοντάδες 25 καὶ εὐρίσκουμε διὰ διαιρέσεως $25 : 5 = 5$ τὸ πηλίκο. Πολλαπλασιάζουμε τὸ πηλίκο ἐπὶ τὸν διαιρέτη $578 \times 5 = 2890$ γινόμενο μεγαλύτερο τοῦ διαιρετέου. Δοκιμάζουμε τὸν κατὰ μονάδα μικρότερο ἀριθμὸ τοῦ 5, τὸν ἀριθμὸ 4 καὶ εὐρίσκουμε τὸ γινόμενο $578 \times 4 = 2312$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου. Ἐπομένως τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως εἶναι ὁ 4 καὶ τὸ ὑπόλοιπο $2547 - (578 \times 4) = 2547 - 2312 = 235$. Ἡ πρῆξις διατάσσεται:

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ - 2312 & 4 \\ \hline & 235 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ἢ} \\ \text{ὑπόλοιπο} \end{array} \begin{array}{r|l} 2547 & 578 \\ 235 & 4 \\ \hline \end{array}$$

Στὴ πράξη ἀντὶ νὰ γράψωμε τὸ γινόμενο 2312, ἀφαιροῦμε νοερῶς ἀπὸ τὸν διαιρετέο καθένα τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου αὐτοῦ.

Παρατήρηση. Στὴ διαίρεση $2547 : 295$ τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τῶν ἑκατοντάδων $25 : 2 = 12$ (πηλίκο). Ἀλλὰ γνωρίζουμε ὅτι $2950 > 2547$ ἄρα τὸ πηλίκο εἶναι μονοψήφιο καὶ πρέπει νὰ γίνῃ δοκιμὴ ἀπὸ τοῦ ψηφίου 9 καὶ κάτω. Εὐρίσκουμε πηλίκο 8 καὶ ὑπόλοιπο 187. Διότι εἶναι $295 \times 8 = 2360$. $2547 - 2360 = 187$ (ὑπόλοιπο).

$$\begin{array}{r|l} 2547 & 295 \\ 187 & 8 \end{array}$$

Β'. Περίπτωση

"Ὅταν τὸ πηλίκο εἶναι πολυψήφιο. Ἐστω ἡ διαίρεση $12837 : 42$. Παρατηροῦμε, ὅτι τὸ πηλίκο εἶναι πολυψήφιο, διότι ἐὰν εἰς τὸν διαιρέτη

42 θέσωμε ένα μηδενικό εύρισκομε $420 < 12837$, ἄρα τὸ πηλίκον ἔχει ψηφίον περισσότερα τοῦ ενός. Ἐὰν δεξιὰ τοῦ διαιρέτου θέσωμε δύο μηδενικά εύρισκομε $4200 < 12837$. Συνεπῶς τὸ πηλίκον ἔχει περισσότερα τῶν δύο ψηφίων. Ἄν δὲ εἰς τὸν διαιρέτη θέσωμε τρία μηδενικά προκύπτει $42000 > 12837$, ἄρα τὸ πηλίκον περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 100 καὶ τοῦ 1000 δηλαδὴ εἶναι τριψήφιο. Ἐργαζόμεθα δὲ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{r|l}
 12837 & 42 \\
 \hline
 126 & 305 \\
 \hline
 23 & \\
 \hline
 00 & \\
 \hline
 237 & \\
 \hline
 210 & \\
 \hline
 = 27 &
 \end{array}$$

Λαμβάνουμε ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ τόσα ψηφία, ὅσα ἔχει ὁ διαιρέτης, ὥστε νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς μεγαλύτερος ἢ ἴσος, οὐδέποτε δὲ μικρότερος. Ἐὰν δὲ προκύψῃ ἀριθμὸς μικρότερος, ὅπως συμβαίνει εἰς τὸ ἄνω παράδειγμα $12 < 42$, τότε χωρίζομε ἄλλο ἓνα ψηφίον καὶ προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 128. Ὁ χωρισθεὶς ἀριθμὸς $128 : 42$ δίδει πηλίκον μονοψήφιο τὸ 3. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 128 φανερώνη ἑκατοντάδες, καὶ τὸ πηλίκον θὰ φανερώνη ἑκατοντάδες καὶ τὸ ὑπόλοιπον εἶναι ἑκατοντάδες. Κατεβάζουμε τὸ ἀκόλουθο ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου, ὁπότε ἔχουμε νὰ διαιρέσωμε 23 δεκάδες διὰ τοῦ 42, δὲν διαιρεῖται καὶ εἰς τὴν θέσιν τοῦ πηλίκου θέτουμε δεξιὰ τοῦ 3 τὸ μηδέν. Ἦδη εἰς τὸν ἀριθμὸν 23 τοῦ διαιρετέου καταβιβάζουμε τῆς 7 μονάδες καὶ ἔχουμε 237 μονάδες, τῆς ὁποίας διαιροῦμε διὰ 42 καὶ εύρισκομε $237 : 42 = 5$ μονάδες πηλίκον καὶ ὑπόλοιπον 27 μονάδες. Ἡ πράξις ἐκτελεῖται χωρὶς νὰ γράψωμε τὸ γινόμενον, ἀλλὰ νοερῶς ἀφαιροῦμε ἀνὰ ἓνα τὰ ψηφία τοῦ προκύπτοντος γινομένου ἀπὸ τὰ ἀντίστοιχα ψηφία τοῦ διαιρετέου. π.χ.

$$\begin{array}{r|l}
 12837 & 42 \\
 \hline
 \uparrow & 305 \\
 23 & \\
 \hline
 237 & \\
 \hline
 \text{ὑπολ. } 27 &
 \end{array}$$

Δοκιμὴ τῆς διαιρέσεως

Στηρίζεται στὴν ἰσότητα $\Delta = \delta \cdot \pi \times \Upsilon$

Δηλαδή: Πολλαπλασιάζουμε τὸ πηλίκον μὲ τὸ διαιρέτη κι' ἔπειτα προ-

σθέτουμε τὸ υπόλοιπο. Ἐτσι θὰ πρέπει νὰ βροῦμε τὸ διαιρετέο ἀλλοιῶς ὑπάρχει λάθος.

§ 99. Συντομίες διαιρέσεως

99.1 Διαίρεση διὰ 10, 100, κ.ο.κ.

α) Ἐπειδὴ $3852 = 385 \cdot 10 + 2$ τὸ 2 εἶναι υπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ 3852 διὰ τοῦ 10 καὶ τὸ 385 τὸ πηλίκον

β) Ἐπειδὴ $3852 = 38 \cdot 100 + 52$ τὸ 52 εἶναι τὸ υπόλοιπο διαιρέσεως τοῦ 3852 διὰ 100 καὶ τὸ 38 τὸ πηλίκον.

Ὡστε: Γιὰ νὰ διαιρέσουμε διὰ 10, 100 κ.ο.κ. χωρίζουμε ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ ἀριθμοῦ ἓνα, δύο ψηφία κ.ο.κ. καὶ τότε τὸ μὲν πρὸς τὰ ἀριστερὰ τμήμα εἶναι τὸ πηλίκον τὸ δὲ πρὸς τὰ δεξιὰ τὸ υπόλοιπον.

Π.χ. στὸν ἀριθμὸ 485,7 τὸ 7 εἶναι υπόλοιπον τὸ δὲ 485 πηλίκον τῆς διαιρέσεως διὰ 10.

99.2 Διαίρεση διὰ 4

Διαιροῦμε διὰ 2 καὶ ἔπειτα πάλιν διὰ 2

$$\begin{aligned}\text{Π.χ. } 360 : 4 &= (360 : 2) : 2 \\ &= 180 : 2 \\ &= 90\end{aligned}$$

99.3 Μετασχηματισμὸς τοῦ ἀριθμοῦ σὲ ἄθροισμα ἢ διαφορά.

$$\begin{aligned}\alpha) \quad 848 : 8 &= (800 + 48) : 8 \\ &= 800 : 8 + 48 : 8 \\ &= 100 + 6 \\ &= \mathbf{106}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) \quad 92 : 4 &= (100 - 8) : 4 \\ &= 100 : 4 - 8 : 4 \\ &= 25 - 2 \\ &= \mathbf{23}\end{aligned}$$

Προβλήματα λυόμενα μὲ διαίρεση

1) 792 κιλά ἀλεύρι νὰ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου σὲ 72 οἰκογένειες.

Εἶναι φανερό, ὅτι πρόκειται γιὰ διαίρεση μερισμοῦ θὰ διαιρέσουμε τὰ 792 κιλά διὰ τοῦ 72.

$$792 \text{ κιλ.} : 72 = 11 \text{ κιλά}$$

2) Ένας τεχνίτης για 5 ώρες εργασίας πήρε 90 δρ. Πόσο πληρώνεται την ώρα ο τεχνίτης;

Είναι κι' αυτό πρόβλημα μερισμού γιατί πρέπει να μοιράσουμε τις 90 δρχ. σε 6 ίσα μέρη.

Άρα έχουμε

$$90 \text{ δρ.} : 6 = 15 \text{ δρχ.}$$

Και στα δύο προηγούμενα προβλήματα ξέραμε στο α' την τιμή των πολλών μονάδων (αλεύρι των 72 οικογενειών), στο β' (χρήματα των 6 ωρών) και ζητούσαμε να βρούμε την τιμή της μιας μονάδος όμοειδους με αυτές.

Όταν «Ξέρουμε τη τιμή των πολλών μονάδων και ζητούμε τη τιμή της μιας όμοειδους με αυτές, διαιρούμε την τιμή των πολλών δια του αριθμού των μονάδων αυτών. Το πηλίκο είναι όμοειδές με το διαιρετέο ενώ ο διαιρέτης άφηρημένος».

3) Το ένα κιλό ρύζι έχει 7 δρ. Πόσα κιλά θα αγοράσουμε με 84 δρ.

Είναι φανερό ότι θα αγοράσουμε τόσα κιλά όσες φορές χωρούν οι 7 δρχ. στις 84 δρχ. Άρα έχουμε μέτρηση :

$$84 \text{ δρ.} : 7 \text{ δρ.} = 12$$

ώστε θα αγοράσουμε 12 κιλά.

4) Ένα δοχείο χωρεί 15 κιλά λάδι. Πόσα τέτοια δοχεία θα χρειασθούμε για 165 κιλά λάδι.

Είναι κι' εδώ φανερό ότι θα χρειασθούμε τόσα δοχεία όσες φορές χωρούν τα 15 κιλά στα 165 κλ.

Άρα έχουμε μέτρηση

$$165 \text{ κλ.} : 15 \text{ κλ.} = 11$$

ώστε θα χρειασθούμε 11 δοχεία.

Στα προηγούμενα προβλήματα ξέραμε την τιμή της μιας μονάδος (α' 7 δρ. β' 15 κιλά) και την τιμή των πολλών μονάδων (α' 84 δρ., β' 165 κιλά) και ζήτησαμε το πλήθος των μονάδων· τα λύσαμε δε με διαίρεση μετρήσεως.

«Όταν ξέρουμε 1) την τιμή της μιας μονάδος, 2) τη τιμή των πολλών όμοειδων μονάδων και ζητούμε το πλήθος διαιρούμε τη τιμή των πολλών μονάδων δια της τιμής της μιας μονάδος».

Ο διαιρέτος κι' ο διαιρέτης είναι όμοειδείς.

§ 100. Λύση προβλημάτων με εξισώσεις

Πολλά προβλήματα μπορούν να λυθούν με εξισώσεις.

1) Με ποιόν αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσουμε τον 24 για να βρούμε γινόμενο 600.

"Αν παραστήσουμε με χ τὸ ζητούμενο ἀριθμὸ τότε σύμφωνα με τὸ πρόβλημα ἔχουμε $24 \cdot \chi = 600$.

Ἐπίλυση: "Αν χρησιμοποιήσουμε τὴν ἰσοδυναμία

$$\begin{aligned} a \cdot b &= \gamma \iff \gamma : a = b \\ 24 \cdot \chi &= 600 \iff 600 : 24 = \chi \\ \chi &= 25. \end{aligned}$$

Ἐπαλήθευση: $24 \cdot 25 = 600$.

2) Σὲ πόσες οἰκογένειες πρέπει νὰ μοιράσουμε 5550 δρχ. διὰ νὰ πάρη ἀπὸ 150 δρχ. ἡ κάθε μία.

"Ας παραστήσουμε με χ τὸν ἀριθμὸ τῶν οἰκογενειῶν. Σύμφωνα με τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε

$$5550 : \chi = 150$$

Ἐπίλυση: $5550 : \chi = 150 \iff 150 \cdot \chi = 5550$

$$\text{καὶ } 150 \cdot \chi = 5550 \iff \chi = 5550 : 150$$

$$\chi = 37$$

ὥστε πρέπει νὰ τὰ μοιράσουμε σὲ 37 οἰκογένειες.

Ἐπαλήθευση: $37 \cdot 150 = 5550$.

3) Πόσα χρήματα πρέπει νὰ μοιράσουμε σὲ 12 οἰκογένειες γιὰ νὰ πάρη ἀπὸ 156 δρχ. ἡ κάθε μία.

"Ας παραστήσουμε με χ τὸν ἀριθμὸ τῶν δρχ. πού πρέπει νὰ μοιράσουμε, τότε σύμφωνα με τὸ πρόβλημα θὰ ἔχουμε

$$\chi : 12 = 156$$

Ἐπίλυση: $\chi : 12 = 156 \iff \chi = 156 \cdot 12$

$$= 1872$$

ὥστε πρέπει νὰ μοιράσουμε 1872 δρχ.

Ἐπαλήθευση: $1872 : 12 = 156$

Παρατηροῦμε ὅτι: Γιὰ νὰ λύσουμε τὰ παραπάνω προβλήματα

1) Ὀνομάσαμε με χ τὸ ζητούμενο ἀριθμὸ.

2) Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ χ σχηματίσαμε μία ἐξίσωση, τὴν ἐξίσωση τοῦ προβλήματος.

3) Μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἰσοδυναμίας πού ὑπάρχει μεταξὺ διαιρέσεως καὶ πολ)σμοῦ ἐπιλύσαμε τὴν ἐξίσωση.

4) Κάναμε ἐπαλήθευση.

Προβλήματα διαιρέσεως (μὲ ἐξισώσεις καὶ χωρὶς ἐξισώσεις)

Χρησιμοποιήσατε ἐξισώσεις γιὰ τὴ λύση τῶν ἐπομένων προβλημάτων.

- 206) Τὸ 8/πλάσιο ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 136 ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμός;
 207) Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρὲπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ 132 γὰ νὰ βροῦμε γινόμενο 1188;
 208) Ἐνα πλοῖο διέτρεξε 156 μίλια σὲ 12 ὥρες πόσα μίλια τρέχει τὴν ὥρα.
 209) Ἐνα οἰκόπεδο 105 m^2 ἐπωλήθη ἀντὶ 84630 δρχ. Πόση ἦτο ἡ τιμὴ τοῦ 1 m^2 .

§ 101. Προβλήματα διαιρέσεως

210. Ἐνας ὀπωροπώλης ἠγόρασε 375 κιλά μήλα καὶ ἐπλήρωσε 2250 δρχ. πόσο κοστίζει τὸ κιλό;
 211. Τὸ φῶς ἔχει ταχύτητα 300.000 χιλιόμετρα σὲ ἓνα δευτερόλεπτο, ὁ δὲ ἥλιος ἀπέχει ἀπὸ τῆς γῆς 150.000.000 χλμ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα δευτερόλεπτα χρειάζεται τὸ φῶς γὰ νὰ φθάσῃ ἀπὸ τὸν ἥλιο στὴ γῆ;
 212. Ἐνας ἔμπορος ἐπλήρωσε γι' ἀξία 318 κιλῶν ἐμπορεύματος 4452 δρχ. ἐπώλησε δὲ 238 κιλά ἀντὶ 3570 δρχ. Πόσα ἐκέρδισεν στὸ κιλό;
 213. Βαρέλι γεμάτο λάδι ἀξίζει 3200 δρ. Ἐξάγομε 85 κιλά λάδι καὶ μένει λάδι ἀξίας 1500 δρχ. Πόσα κιλά λάδι εἶχε τὸ βαρέλι;
 214. Ἐνας ἠγόρασε ὕφασμα καὶ ἐπλήρωσε 19200 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα μέτρα ἠγόρασε, ἐὰν γνωρίζουμε ὅτι, γιὰ 10 μέτρα ἐπὶ πλέον θὰ ἐπλήρωνε 3200 δρχ. περισσότερο.
 215. Κτηνοτρόφος ἐπώλησε 28 πρόβατα καὶ 4 ἀρνιά ἀντὶ 37100 δρχ. Κάθε ἓνα πρόβατο ἐπώλησε ἀντὶ 650 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπώλησε τὸ ἓνα ἀρνί;
 216. Ἐνα ὑφαντουργεῖο ἔχει ἡμερησία παραγωγὴ 250 μ. ὑφάσματος ἀπὸ κάθε ἀργαλεῖο καὶ ἀπασχολεῖ 12 ἀργαλειούς. Νὰ εὑρεθῇ σὲ πόσες ἡμέρες παράγει 750.000 μέτρα;
 217. Ὁ ἤχος διατρέχει 340 μέτρα κατὰ δευτερόλεπτο. Μετὰ πόσα δευτερόλεπτα θὰ ἀκούσῃμε τὸν κρότο τηλεβόλου, ποῦ ἔχει τοποθετηθῇ σὲ ἀπόσταση 9860 μέτρων;
 218. Πατέρας ἀποθανὼν ἀφῆκε περιουσίαν 74600 δρχ. γράφει δὲ στὴ διαθήκη του 1100 δρχ. νὰ δοθοῦν εἰς πτωχοὺς, τὸ δὲ ὑπόλοιπο νὰ μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου τὰ 3 παιδιὰ του. Ποιό εἶναι τὸ μερίδιο ἐκάστου παιδιοῦ;
 219. Ἐνας παντοπώλης ἠγόρασε βούτυρο πρὸς 85 δρχ. τὸ κιλό καὶ μετέπώλησε αὐτὸ 89 δρχ. τὸ κιλό καὶ ἐκέρδισε 7200 δρχ. Πόσα κιλά βουτύρου εἶχε ἀγοράσει;
 220. Ἐνας πατέρας ἀποθανὼν ἀφῆκε 6822 πρόβατα στὰ παιδιὰ του. Ὁ α' νὰ λάβῃ τὸ ἥμισυ, οἱ δὲ ἄλλοι ἀπὸ 1137 πρόβατα καθένας. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἦσαν τὰ παιδιὰ;

Προβλήματα ἐπὶ τῶν τεσσάρων πράξεων τῶν ἀκεραίων.

221. Ἐμπορος ἠγόρασε 235 μέτρα ὕφασμα πρὸς 27 δρχ. τὸ μέτρο. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ μέτρο τοῦ ὕφασματος διὰ νὰ κερδίσῃ 2350 δρχ. καὶ πόσα θὰ εἰσπράξῃ ἀπὸ τὴν πώλησιν.

222. Ἐνας ἠγόρασε μία οἰκία ἀντὶ 378.560 δρχ. ἔκαμε σ' αὐτὴ ἐπισκευὰς γιὰ τὶς ὁποῖες ἐπλήρωσε 78540 δρχ. Κατόπιν μετεπώλησε αὐτὴ μὲ κέρδος 83475 δρχ. Πόσας δραχμὰς εἰσέπραξε ἀπὸ τὴν πώλησιν.

223. Μία ράφτρα εἰσπράττει τὴν ἐβδομάδα 840 δρχ. καὶ ἐξοδεύει τὴν ἡμέρα 36 δρχ. Μετὰ πόσον χρόνον θὰ ἐξοικονομήσῃ 5880 δρχ. γιὰ νὰ ἀγοράσῃ μία ραπτομηχανή;

224. Ἐνας ἐλαττώνει κατὰ 35 τὸν μειωτέον μιᾶς διαφορᾶς καὶ αὐξάνει τὸν ἀφαιρετέον κατὰ 16. Ποία μεταβολὴ γίνεται στὴ διαφορὰ

225. Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἀριθμῶν εἶναι 53775. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων εἶναι 43253 καὶ ὁ δεῦτερος εἶναι 17473. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι ἀριθμοί.

226. Ἐνας ὀφείλει 300.000 δραχμὰς κατέβαλε ἀπέναντι τοῦ χρέους του διαδοχικῶς 27450 δρχ. 65880 δρχ. 84978 δρχ. Πόσα χρήματα ὀφείλει ἀκόμη;

227. Εἰς τὸ γινόμενον 427×25 αὐξάνουμε τὸν πολλαπλασιαστέον κατὰ 36. Νὰ εὑρεθῇ πόσο αὐξάνει τὸ γινόμενον χωρὶς νὰ ἐκτελέσωμε κανονικῶς τὸν πολλαπλασιασμό;

228. Ἐνας ἀγοράζει ἠλεκτρικὸ ψυγεῖο ἀντὶ 10870 δρχ. μὲ τὴν συμφωνίαν νὰ πληρώσῃ ἀμέσως 2500 δρχ. τὸ δὲ ὑπόλοιπον εἰς τριμηνιαίας δόσεις πρὸς 558 δρχ. ἐκάστῃ. Ἀφοῦ κατέβαλεν 8 τριμηνιαίας δόσεις, θέλει νὰ ἐξοφλήσῃ ἐντελῶς. Πόσας δραχμὰς ὀφείλει νὰ πληρώσῃ;

229. Αὐτοπώλης ἠγόρασε 4 κιβώτια τῶν 1000 αὐγῶν πρὸς 1608 δρχ. τὴ χιλιάδα. Ἀπὸ αὐτὰ τὰ 45 εὑρέθησαν σπασμένα, τὰ δὲ ὑπόλοιπα ἐπώλησε πρὸς 2 δρχ. τὸ ἓνα. Ἐκέρδισε ἢ ἐξημιώθη καὶ πόσο;

230. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 2100 καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶναι 6. Ποῖοι εἶναι οἱ δύο ἀριθμοί;

231. Δύο ἀδελφοὶ λαμβάνουν ἀπὸ τὸν πατέρα τους 1200 δρ. μὲ τὴν ἐντολὴν ὁ μεγαλύτερος νὰ λάβῃ 150 δρχ. περισσότερες ἀπὸ τὸν ἄλλο. Πόσας δραχμὰς ἔλαβε καθένας;

232. Μία ἀγελάδα μὲ τὸ μουσχαρακὶ τῆς ἐπωλήθησαν ἀντὶ 4800 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς ἀγελάδας ἦτο 8πλάσια τῆς ἀξίας τοῦ μοσχarioῦ σὺν 300 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία καθενὸς ζώου.

233. Ἀτμόπλοιο τρέχει 15 μίλια τὴν ὥραν. Ἀναχωρεῖ ἐκ Πειραιῶς τὴν 8 π.μ. Ποία ὥρα θὰ φθάσῃ στὴ Πάτρα, πού ἀπέχει ἀπὸ τὸν Πειραιᾶ 105 μίλια;

234. Μὲ ποῖον ἀριθμὸν πρέπει νὰ πολλαπλασιάσωμε τὸν 49 διὰ νὰ λάβωμεν ἀριθμὸν κατὰ 25 μεγαλύτερον τοῦ 784.

235. Πόσες φορές πρέπει να επαναλάβουμε τὸν 289 διὰ νὰ εὗρωμε τὸν ἀριθμὸ 2023;

236. Ἐὰν γνωρίζης τὸ πηλίκο τῆς τελείας διαιρέσεως $A : B$ ὅτι εἶναι Π δύνασαι νὰ βρῆς πόσο θὰ εἶναι τὸ πηλίκο $(A \times \rho) : (B \times \rho)$;

237. Νὰ ὑπολογίσετε $(\alpha + \beta + \gamma) : \gamma$ ἐὰν $\alpha = 24$, $\beta = 32$, $\gamma = 4$.

238. Νὰ εὗρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ πού, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ 3 δίδουν πηλίκο διπλάσιο τοῦ ὑπολοίπου.

Λύση: Διαιρετέος Δ
Διαιρέτης 3
πηλίκο 2υ
ὑπόλοιπον υ

$$\Delta \begin{array}{l} 3 \\ 2\upsilon \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 3 \cdot 2\upsilon + \upsilon \\ \Delta &= 6\upsilon + \upsilon \\ \Delta &= 7\upsilon \end{aligned}$$

$$\upsilon < 3 \quad \Delta = 7 \cdot 1 = 7$$

$$\upsilon = 1, 2 \quad \Delta = 7 \cdot 2 = 14$$

Οἱ ζητούμενοι ἀριθμοὶ εἶναι 7, 14.

239. Νὰ εὗρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ πού, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ 5, δίδουν πηλίκο διπλάσιο τοῦ ὑπολοίπου.

240. Νὰ εὗρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ πού, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ 7, δίδουν πηλίκο τριπλάσιο τοῦ ὑπολοίπου.

241. Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ οἱ ὁποῖοι, ὅταν διαιρεθοῦν διὰ 11 δίδουν πηλίκο ἴσο μὲ τὸ ὑπόλοιπο.

242. Ὁ διαιρετέος εἶναι 357, τὸ πηλίκο 15 καὶ τὸ ὑπόλοιπο 12. Νὰ εὗρεθῇ ὁ διαιρέτης.

§ 101. Δυνάμεις

Τὸ ἄθροισμα $5+5+5+5$ γράφεται πιδ σύντομά σὲ μορφή γινομένου

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \cdot 5$$

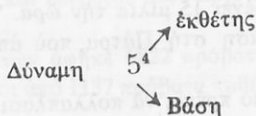
Πῶς θὰ γράψουμε πιδ σύντομα τὸ γινόμενο

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$$

Τὸ γινόμενο αὐτὸ γράφεται: 5^4 ὥστε $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$

ἡ γραφή 5^4 πού δηλώνει τὸ γινόμενο $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ λέγεται **δύναμη** τοῦ 5.

Ὁ ἀριθμὸς 5 λέγεται **βάση** τῆς δυνάμεως ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 4 λέγεται **ἐκθέτης** τῆς δυνάμεως.



Από τὰ παραπάνω ἐννοοῦμε ὅτι ὁ ἐκθέτης δηλώνει τὸ πλῆθος τῶν ἴσων παραγόντων.

$$\text{Γενικά: } a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ φορές}}$$

Εἶναι φανερό ὅτι γιὰ νὰ ἔχη ἔννοια μιὰ δύναμη πρέπει ὁ n νὰ εἶναι ἀκέραιος καὶ μεγαλύτερος τῆς μονάδος $n > 1$.

101.1 Εἰδικὲς περιπτώσεις

Δυνάμεις τοῦ 0

$$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$$

$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

$$\vdots$$

$$\text{Γενικά } 0^n = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot \dots = 0$$

ὥστε ...

ὅπου n φυσικὸς ἀριθμὸς > 1 .

101.2 Δυνάμεις τῆς μονάδος

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^3 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$1^4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\text{Γενικά } 1^n = 1.$$

ὥστε **κάθε δύναμη τῆς μονάδος ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα.**

101.3 Δυνάμεις τοῦ 10

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$$

$$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10.000$$

Ἄρα: Κάθε δύναμη τοῦ 10 ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα ἀκολουθουμένη ἀπὸ τόσα μηδενικὰ ὅσες μονάδες ἔχει ὁ ἐκθέτης.

Στὴν ἀστρονομία χρησιμοποιοῦμε δυνάμεις τοῦ 10 γιὰ τὴ σύντομη γραφὴ μεγάλων ἀριθμῶν.

$$\text{Π.χ. } 300.000.000 = 3 \cdot 100.000.000 = 3 \cdot 10^8$$

Σημειώσεις: α) ἡ δευτέρα δύναμις κάθε ἀριθμοῦ λέγεται καὶ τετράγωνο αὐτοῦ, ξυνὴ ἡ τρίτη δύναμις κύβος αὐτοῦ.

β) Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τὸ 2^3 μὲ τὸ $2 \cdot 3$

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$2 \cdot 3 = 3 + 3 = 6$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

243. Νά γραφούν τὰ παρακάτω γινόμενα ὡς δυνάμεις.

$$7 \times 7 \times 7, \quad 8 \times 8 \times 8 \times 8 \times 8, \quad a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a, \quad 3 \times 3 \times 3 \times 3 \cdot 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9, \quad \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta.$$

244. Νά εὑρετε. α) Τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν 7, 9, 10, 11, 12, 15, 16, 20.
β) Τοὺς κύβους τῶν ἀριθμῶν 10, 20, 30, 40, 50. γ) Τὴν 4η δύναμι τοῦ 3 καὶ τὴ 5η δύναμι τοῦ 2.

245. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ δυνάμεις 1^8 , 5^3 , 4^2 , 12^3 , 24^2 .

246. Νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις. α) $2^3 + 5^2 + 3^3 + 1^8$.
β) $7^2 + 6^2 + 2^4 + 5^2 + 1^{10}$ γ) $7^2 \times 10^3 \times 1^5$ δ) $9^2 \times 10^2 \times 1^8$

§ 102. Πράξεις με δυνάμεις

102.1 Γινόμενο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ

$$a^2 \cdot a^3 = ;$$

$$a^3 \cdot a^4 = ;$$

$$\begin{aligned} \text{ἔχουμε } a^2 \cdot a^3 &= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &= a^5 = a^{2+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 \cdot a^4 &= (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) \\ &= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \\ &= a^7 = a^{3+4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Γενικά: } a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ a^m \cdot a^n \cdot a^p &= a^{m+n+p} \end{aligned}$$

«Τὸ γινόμενο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμη τοῦ ἰδίου με ἐκθέτη τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν».

102.2 Πῶς ὑψώνουμε ἓνα γινόμενο σὲ δύναμη

$$\begin{aligned} \alpha) \quad (2 \cdot 3)^2 &= (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 3) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ &= 2^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 &= (2 \cdot 3 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \\ &= 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \end{aligned}$$

$$\text{γενικά} \quad (a \cdot \beta \cdot \gamma)^v = a^v \cdot \beta^v \cdot \gamma^v$$

Ὡστε: Γιὰ νὰ ὑψώσουμε ἓνα γινόμενο σὲ δύναμη ὑψώνουμε κάθε παράγοντα στὴ ἴδια δύναμη.

102.3 Πώς υψώνουμε μια δύναμη σε άλλη δύναμη

$$\begin{aligned} \alpha) \quad (2^3)^2 &= ; \\ (2^3)^2 &= 2^3 \cdot 2^3 \\ &= 2^{3+3} \\ &= 2^2 \cdot 3 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad (2^3)^4 &= 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^3 \\ &= 2^{3+3+3+3} \\ &= 2^{1 \cdot 3} \\ &= 2^{12} \end{aligned}$$

Γενικά : $(a^v)^\mu = a^{v \cdot \mu}$

«Για να υψώσουμε μια δύναμη σε άλλη δύναμη σχηματίζουμε μια δύναμη με την ίδια βάση και με εκθέτη το γινόμενο των εκθετών».

102.4 Διαίρεση δυνάμεων του αυτού αριθμού

$$\begin{aligned} 2^5 : 2^2 &= \\ (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) : (2 \cdot 2) \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \\ &= 2^3 \end{aligned}$$

Γενικά : $a^u : a^v = a^{u-v}$

«Το ηγλίοο δύο δυνάμεων του αυτού αριθμού είναι δύναμη του ίδιου με εκθέτη τη διαφορά των εκθετών».

102.5 Τα σύμβολα a^0 και a^1

α) Το σύμβολο a^1

Όπως ώρίσαμε τη δύναμη πρέπει ό εκθέτης να είναι φυσικός αριθμός μεγαλύτερος από τη μονάδα

άλλὰ $a^4 : a^3 = a^{4-3} = a^1$ (σύμφωνα με τόν κανόνα διαιρέσεως δυνάμεων)

$$\begin{aligned} \text{καί} \quad a^4 : a^3 &= \\ &= (a \cdot a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a) \\ &= a \end{aligned}$$

Για να ισχθούν χωρίς εξαιρέσεις οι ιδιότητες των δυνάμεων πρέπει $a = a^1$.

Όστε : ή πρώτη δύναμη κάθε αριθμού είναι ίση με τόν ίδιο τόν αριθμό.

β) Τὸ σύμβολο a^0

Ἄν ἀπὸ τῆς διαιρέσεως $5^3 : 5^3$ ἔχουμε $5^3 : 5^3 = 1$ (διότι $\Delta = \delta$).

Ἄν ἐφαρμόσουμε τὴν ιδιότητα διαιρέσεως δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ ἔχουμε

$$5^3 : 5^3 = 5^{3-3} = 5^0$$

Γιὰ νὰ ἰσχύουν οἱ ιδιότητες πρέπει νὰ δίδουν ἴσα ἀποτελέσματα ἄρα πρέπει $5^0 = 1$

γενικὰ $a^0 = 1 \quad a \neq 0$

Ὡστε: ἡ μηδενικὴ δύναμη κάθε φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὴ μονάδα.

Παραδείγματα:

$$\begin{array}{ll} 5^1 = 5 & a^1 = a \\ a^0 = 1 & 5^0 = 1 \end{array}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

247. Νὰ γραφοῦν μὲ μία δύναμη τὰ παρακάτω γινόμενα:

α) $6^3 \times 6^2$, $9^5 \times 9^2$, $4^3 \times 4^5 \times 4^1 \times 4^2$.

248. Ὅμοιως τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω διαιρέσεων:

α) $8^5 : 8^3$, $9^7 : 9^2$, $5^{12} : 5^8$, β) $a^9 : a^3$, $\beta^8 : \beta^6$, $\gamma^v : \gamma^p$ ὅπου $v > p$.

249. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν παρακάτω πράξεων:

α) $2^3 \times 2^2 + 5^2 \times 2^4 + 7^2 \times 2^4 \times 3^3$.

250. Νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸ τετράγωνο τὰ γινόμενα.

α) $5 \times 3 \times 4$, β) $2 \times 5 \times 10$ γ) $6 \times 1 \times 1 =$

• 251. Ὅμοιως νὰ ὑψωθοῦν εἰς τὸν κύβο.

α) $2 \times 3 \times 1$, β) $5 \times 2 \times 10$, γ) $5 \times 2 \times 1$.

252. Νὰ τραπῇ σὲ δύναμη τοῦ 2 ἡ δύναμη 4^6 , σὲ δύναμη τοῦ 4 ἡ δύναμη 16^4 . Νὰ τρέψητε τὰ παρακάτω γινόμενα σὲ μία δύναμη.

$3^3 \times 4^3 =$, $2^3 \times 5^3$, $2 \times 8 \times 10^4$, $9 \times 27 \times 3^2$.

• 253. Νὰ τραπῇ σὲ δύναμη τοῦ 10 καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ γινόμενο $2^4 \times 5^4$.

§ 103. Χρῆση τῶν δυνάμεων τοῦ 10 γιὰ γραφὴ ἀκεραίου ἀριθμοῦ στὸ δεκαδικὸ σύστημα

Γνωρίζουμε ὅτι ὁ ἀριθμὸς 254 ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 ἑκατοντάδες 5 δεκάδες καὶ 4 μονάδες.

Γράφεται: $254 = 2 \text{ ἑκ.} + 5 \text{ δεκ.} + 4 \text{ μονάδες}$

ἢ $254 = 2 \times 100 + 5 \times 10 + 4$.

Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 5836 γράφεται:

$$5835 = 5 \text{ χιλ.} + 8 \text{ ἐκ.} + 3 \text{ δεκ.} + 6 \text{ μονάδες}$$

$$\text{ἢ } 5836 = 5 \times 1000 + 8 \times 100 + 3 \times 10 + 6$$

Κι' ἂν χρησιμοποιήσουμε δυνάμεις τοῦ 10 ἀντὶ τῶν ἀριθμῶν 10, 100, 1000 κλπ. ἔχουμε

$$5836 = 5 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$\text{ὁμοίως } 32569 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$$

Παρατηροῦμε ὅτι: «Κάθε ἀριθμὸς μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ ὡς ἄθροισμα δυνάμεων τοῦ δέκα, πολλαπλασιαζομένων ἐπὶ 0, 1, 2, 3, . . . 9».

Ἀντίστροφα: Τὸ ἄθροισμα $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$ γράφεται:

$$7 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 5$$

$$\text{ἢ } 7 \text{ δεκ. χιλ.} + 4 \text{ χιλ.} + 2 \text{ ἐκ.} + 9 \text{ δεκ.} + 5 \text{ μονάδες}$$

$$\text{ἢ } 74295$$

§ 104. Ἄλλα συστήματα ἀριθμῆσεως

Χαρακτηριστικὸ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος εἶναι ὅτι δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν (συγκροτοῦν) μιὰ μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως.

Μιὰ ἀπλή μονάδα $= 10^0 = 1 = \text{μονάδα α' τάξεως}$

$$10 \text{ μονάδες} = 1 \text{ δεκάς} = 10^1$$

$$10 \text{ δεκάδες} = 1 \text{ ἑκατοντάς} = 10^2$$

$$10 \text{ ἑκατοντάδες} = 1 \text{ χιλιάς} = 10^3$$

κ.ο.κ.

Εἶναι δυνατόν ἀντὶ νὰ χρησιμοποιοῦμε 10 μονάδες κάθε φορὰ γιὰ νὰ δημιουργοῦμε μιὰ μονάδα ἀνωτέρας τάξεως, νὰ χρησιμοποιοῦμε π.χ. 12 μονάδες καὶ νὰ δημιουργοῦμε μονάδες ἀνωτέρας τάξεως.

Μιὰ ἀπλή μονάδα $= 12^0 = 1 = \text{μονάδα α' τάξεως}$

$$12 \text{ μονάδες} = 12^1 = \text{δωδεκάς} \quad (\text{μονάδα 2ας τάξεως})$$

$$12 \text{ δωδεκάδες} = 12^2 = \quad (\text{μονάδα 3ης τάξεως})$$

$$12 \text{ μονάδες 3ης τάξεως} = 12^3 = 1 = (\text{μονάδα 4ης τάξεως})$$

κ.ο.κ.

Τότε θὰ εἶχαμε δωδεκαδικὸ σύστημα (τέτοιο σύστημα ἐχρησιμοποιεῖτο παλιότερα).

Γιὰ νὰ γραφῇ ἀριθμὸς στὸ 12δικὸ σύστημα εἶναι ἀνάγκη νὰ ἔχουμε 11 σύμβολα καὶ τὸ 0 (μηδέν).

Ἐπίσης μποροῦμε νὰ δημιουργήσουμε π.χ. πενταδικὸ σύστημα γραφῆς τῶν ἀριθμῶν, δημιουργώντας τὶς μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων του.

Μιὰ ἀπλή μονάδα $= 5^0 = 1 = \text{μονάδα α' τάξεως.}$

$$5 \text{ μονάδες} = 5^1 \quad (\text{μονάδα 2ας τάξεως})$$

5 μονάδες δευτέρας τάξεως = 5^2 απλές μονάδες = 1 μονάς 3ης τάξεως
 » » τρίτης » = 5^3 » » » 4ης τάξεως
 Κ.Ο.Κ.

Για να γραφεί δὲ ἀριθμὸς στὸ πενταδικὸ σύστημα χρειάζομαστε 4 σύμβολα καὶ τὸ 0 δηλ. (0, 1, 2, 3, 4).

Σήμερα χρησιμοποιούμε στίς ηλεκτρονικὲς ὑπολογιστικὲς μηχανὲς τὸ **δυναδικὸ σύστημα**.

104.1 Δυναδικὸ σύστημα

Μονάδες διαφόρων τάξεων

Για τὴν δημιουργία τῶν μονάδων τῶν διαφόρων τάξεων στὸ δυναδικὸ σύστημα, ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ γιὰ τὸ δεκαδικό.

ἀπλὴ μονάς = $1 = 2^0$ ἢ μίᾱ μονάδα 1ης τάξεως.

2 ἀπλές μονάδες ἀποτελοῦν μίᾱ 2άδα = $2 = 2^1$ ἢ μίᾱ μονάδα 2ας τάξεως.

2 μονάδες 2ας τάξεως ἢ 2 2άδες ἀποτελοῦν μίᾱ 4άδα ἢ 2^2 ἢ μίᾱ μονάδα 3ης τάξεως.

2 μονάδες 3ης τάξεως ἢ 2 4δες ἢ 2^3 ἢ μίᾱ μονάδα 4ης τάξεως.

2 μονάδες 4ης τάξεως ἢ 2 8άδες ἢ 2^4 ἢ μίᾱ μονάδα 5ης τάξεως.

2 μονάδες 5ης τάξεως ἢ 2 16άδες ἢ 2^5 ἢ μίᾱ μονάδα 6ης τάξεως.

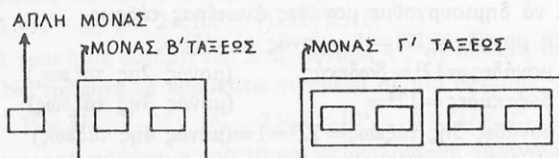
Κ.Ο.Κ.

Δηλαδή ὅπως οἱ **μονάδες διαφόρων τάξεων τοῦ 10δικοῦ συστήματος** εἶναι: $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots$

Ἔτσι καὶ οἱ **μονάδες τοῦ δυναδικοῦ συστήματος** εἶναι:

$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots$

Γραφικὴ εἰκόνα.



Σχ. 117

104.2 Ἀπαρίθμηση στὸ δυναδικὸ σύστημα

Παίρνουμε τὸ πεπερασμένο σύνολο Α με 15 στοιχεῖα.

$$A = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

καὶ σχηματίζουμε ὑποσύνολα με 2 στοιχεῖα.

$$\{00, 00, 00, 00, 00, 00, 00, 0\}$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε 7 μονάδες 2ας τάξεως και μία άπλή μονάδα.

Ενώνουμε τις 7 διάδες στοιχείων δύο - δύο.

$$\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 0 \\ \hline \end{array} \}$$

Έτσι έχουμε τρεις μονάδες 3ης τάξεως, 1 μονάδα 2ας τάξεως και μία άπλή μονάδα.

Ενώνουμε δύο - δύο τις μονάδες 3ης τάξεως και έχουμε:

$$\{ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 00 & 0 \\ \hline \end{array} \}$$

1 μονάδα 4ης τάξεως δηλ. μία όκτάδα,
 1 » 3ης » » 4 δα
 1 » 2ας » » 2 δα
 1 άπλή μονάδα

Επομένως ό πληθικός αριθμός του συνόλου Α είναι:

1 άπλή μονάς, 1 μονάς 2ας τάξεως και 1 μονάς 3ης τάξεως και μία μονάς 4ης τάξεως.

Άς δοϋμε πώς γράφεται στο δυαδικό σύστημα ό αριθμός 15.

Αριθμοί δεκαδικού συστήματος	Αριθμοί δυαδικού συστήματος
1	1 άπλή μονάς
2	Μία μονάς 2ας τάξεως
3	Μία μονάς 2ας τάξεως και μία άπλή μονάς
4	2 μονάδες 2ας τάξεως ή μία μονάδα 3ης τάξεως
5	1 μονάς 3ης τάξεως και μία άπλή μονάς
6	1 μονάς 3ης τάξεως και 2 μονάδες άπλές = 1 μονάς 3ης τάξεως και μονάς 2ας τάξεως.
7	1 μονάς 3ης τάξεως, 1 μονάς 2ας τάξεως και μία μονάς 1ης τάξεως κ.ο.κ.

Όπως βλέπουμε ή πορεία αυτή είναι κουραστική, γι' αυτό θα βρούμε ένα σύντομο τρόπο.

Παράδειγμα 1ο. Έχουμε τον αριθμό 15 του δεκαδικού συστήματος και προσπαθούμε νά τον γράψωμε στο δυαδικό.

1) Πόσες μονάδες 2ας τάξεως του δυαδικού συστήματος περιέχει; Άρκεί νά βρούμε πόσο δυάρια περιέχει ό 15.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 2 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

Βλέπουμε ότι έχει 7 δυάρια και μία άπλη μονάδα, δηλαδή 7 μονάδες 2ας τάξεως και μία άπλη μονάδα.

2) Πόσες μονάδες τρίτης τάξεως περιέχει ;

Για να γίνη μία μονάδα 3ης τάξεως χρειάζονται 2 μονάδες 2ας τάξεως.

$$\begin{array}{r|l} \text{"Αρα έχει} & 7 \overline{) 2} \\ & 1 \quad 3 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \text{ μονάδες 3ης τάξεως και} \\ \text{μία μονάδα 2ας τάξεως.} \end{array}$$

3) Πόσες μονάδες τετάρτης τάξεως περιέχει ;

Για να γίνη μία μονάδα 4ης τάξεως χρειάζονται 2 μονάδες τρίτης τάξεως. "Ωστε θα έχη μία μονάδα 4ης τάξεως και μία μονάδα της 3ης τάξεως.

$$\begin{array}{r|l} & 3 \overline{) 2} \\ & 1 \quad 1 \end{array}$$

"Ωστε ο αριθμός 15 περιέχει

1 μονάδα 4ης τάξεως

1 μονάδα 3ης τάξεως

1 μονάδα 2ας τάξεως

1 άπλη μονάδα

Γράφεται δε στο δυαδικό σύστημα : 1111_2 (ο δείκτης 2 κάτω δεξιά του αριθμού δείχνει τη βάση του συστήματος στο οποίο είναι γραμμένος ο αριθμός).

Π α ρ α δ ε ι γ μ α 2ο. Πόσες μονάδες διαφόρων τάξεων έχει ο αριθμός 11 του δεκαδικού συστήματος και πώς γράφεται στο δυαδικό.

$$\begin{array}{r|l} \alpha' \text{ Μονάδες 2ας τάξεως έχει} & 11 \overline{) 2} \\ 5 \text{ και μία άπλη μονάδα} & 1 \quad 5 \rightarrow \text{μονάδες 2ας τάξεως} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \beta' \text{ Μονάδες 3ης τάξεως έχει} & 5 \overline{) 2} \\ 2 \text{ και 1 μονάδα 2ας τάξεως} & 1 \quad 2 \rightarrow \text{μονάδες 3ης τάξεως} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \gamma' \text{ Μονάδες 4ης τάξεως έχει} & 2 \overline{) 2} \\ 1 \text{ και 0 μονάδες 3ης τάξεως} & 0 \quad 1 \rightarrow \text{μονάδα 4ης τάξεως} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} \delta' \text{ Μονάδες 5ης τάξεως έχει} & 1 \overline{) 2} \\ 0 \text{ και 1 μονάδα 4ης τάξεως} & 1 \quad 0 \rightarrow \text{μονάδες 5ης τάξεως} \end{array}$$

"Ωστε ο αριθμός 11 του δεκαδικού συστήματος περιέχει

1 μονάδα 4ης τάξεως $= 2^3 = 8$ δεκαδικού συστήματος

0 μονάδες 3ης τάξεως $= 0^3 = 0$ » »

1 μονάδα 2ας τάξεως $= 2^1 = 2$ » »

1 άπλη μονάδα $= 1 = 1$ » »

Σύνολο 11 μονάδες του δεκαδικού συστήματος

Γράφεται δε 1011_2

Για να βρούμε πόσες μονάδες διαφόρων τάξεων του δυαδικού συστήματος περιέχει ένας αριθμός του δεκαδικού συστήματος
 α') διαιρούμε τον αριθμό διὰ 2 και τὸ πηλίκο φανερώνει μονάδες δευτέρας τάξεως, τὸ δὲ ὑπόλοιπο ἀπλές μονάδες.

β') διαιρούμε τὸ πηλίκο (μονάδες 2ας τάξεως) διὰ τοῦ 2 και βρίσκουμε πηλίκο μονάδες γ' τάξεως και ὑπόλοιπο μονάδες 2ας τάξεως.

γ') διαιρούμε τὸ πηλίκο (μονάδες 3ης τάξεως) διὰ τοῦ 2 και βρίσκουμε νέο πηλίκο (μονάδες 4ης τάξεως) και ὑπόλοιπο μονάδες 3ης τάξεως.

Ἐξακολουθοῦμε τὴν διαίρεση μέχρις ὅτου βρούμε πηλίκο μηδέν (0)

Τὰ ὑπόλοιπα ἀπὸ τὴν α' διαίρεση κατὰ σειρά παριστάνουν μονάδες 1ης, 2ας, 3ης, 4ης κ.ο.κ. τάξεως.

1ο Πρόβλημα: Ὁ ἀριθμὸς 14_{10} νὰ γραφῇ στὸ δυαδικὸ σύστημα.

$$\begin{array}{r}
 14 \mid 2 \\
 0 \mid 7 \mid 2 \\
 \quad 1 \mid 3 \mid 2 \\
 \qquad 1 \mid 1 \mid 2 \\
 \qquad \quad 1 \mid 0
 \end{array}
 \quad \text{ὥστε } 14_{10} = 1110_2$$

2ο Πρόβλημα: ὁ ἀριθμὸς 100 νὰ γραφῇ στὸ δυαδικὸ σύστημα.

$$\begin{array}{r}
 \text{Ἔχουμε } 100 \mid 2 \\
 0 \mid 50 \mid 2 \\
 0 \mid 25 \mid 2 \\
 \quad 1 \mid 12 \mid 2 \\
 \qquad 0 \mid 6 \mid 2 \\
 \qquad \quad 0 \mid 3 \mid 2 \\
 \qquad \qquad 1 \mid 1 \mid 2 \\
 \qquad \qquad \quad 1 \mid 0
 \end{array}
 \quad \text{ἄρα } 100_{10} = 1100100_2$$

Ἀντίστροφα: ὁ ἀριθμὸς 1110_2 νὰ γραφῇ στὸ δεκαδικὸ σύστημα.

Ἀναλύουμε τὸν ἀριθμὸ σὲ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ποὺ περιέχει
 Θὰ ἔχουμε

$1110_2 = 0$ ἀπλές μονάδες + 1 μονάδα 2ας τάξεως + 1 μονάδα 3ης τά-

ξεως + 1 μον 4ης τάξεως. Ἐπειδὴ οἱ μονάδες τῶν διαφορῶν τάξεων εἶναι δυνάμεις τοῦ 2 ἔχουμε

$$\begin{aligned} 1110_2 &= 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 \\ &= 0 + 2 + 4 + 8 \\ &= 14_{10} \end{aligned}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἔχουμε.

$$\begin{aligned} 11001_2 &= 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 \\ &= 1 + 0 + 0 + 8 + 16 \\ &= 25_{10} \end{aligned}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

254) Ποιὲς εἶναι ἡ μονάδες 1ης, 2ας, 3ης, 4ης τάξεως α) τοῦ τριαδικοῦ συστήματος, β) τοῦ δυαδικοῦ συστήματος

255) Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἰσοῦται ὁ ἀριθμὸς

α) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$

β) $2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8$

256) Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ τοῦ δυαδικοῦ συστήματος ἰσοῦται ὁ ἀριθμὸς $1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1$

257) Νὰ γραφοῦν στὸ δυαδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοὶ 7, 9, 12, 35 τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος

258) Νὰ γραφοῦν στὸ δεκαδικὸ σύστημα οἱ ἀριθμοὶ

101, 111, 10101 τοῦ δυαδικοῦ συστήματος

Γενικὲς ἀσκήσεις γιὰ τὴν ἐπανάληψη τῶν Κεφαλαίων

A, B, Γ, Δ, E, ΣΤ, Ζ,

259) Γράψατε τὸ σύνολο τῶν Ἰονίων νήσων.

260) Γράψατε τὸ σύνολο τῶν νομῶν τῆς Πελοποννήσου. Ὁ νομὸς Πρεβέζης εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου;

261) Γράψατε τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἐβδομάδος.

262) Γράψατε τὸ σύνολον τῶν μηνῶν ποὺ ἔχουν 31 ἡμέρες. Ὁ μὴν Σεπτέμβριος εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου;

263) Γράψατε τὸ σύνολον τῶν ζωδίων ποὺ ἀρχίζουν ἀπὸ Κ καὶ Τ.

264) Νὰ γραφῇ τὸ σύνολον τῶν διψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ 20.

265) Τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως Πελοπόννησος.

266) Νὰ γραφῇ τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως Ρόδος.

267) Νὰ γραφῇ τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασιῶν τοῦ 5 (διὰ περιγραφῆς).

- 268) Ἀπὸ τὰ γράμματα τοῦ συνόλου $\{\Theta, E, O, X, A, P, H, \Sigma\}$ νὰ σχηματισθοῦν διάφορες λέξεις καὶ νὰ γραφοῦν τὰ σύνολα τῶν γραμμάτων τῶν.
- 269) Ἄν $H = \{\chi / \chi \text{ εἶναι ἡμέρα τῆς ἐβδομάδος}\}$. Νὰ σχηματισθοῦν τρία γνήσια ὑποσύνολα τοῦ H .
- 270) Ἄν $\Pi = \{\chi / \chi \text{ διαιρέτης τοῦ } 6\}$. Νὰ γραφοῦν τὰ γνήσια ὑποσύνολα τοῦ Π .
- 271) Νὰ εὑρεθοῦν λέξεις ποὺ τὰ γράμματά τῶν εἶναι στοιχεῖα ἴσων συνόλων. Π.χ. (ΜΙΚΡΑ, ΚΡΙΜΑ).
- 272) Νὰ σχηματισθοῦν ἰσοδύναμα σύνολα τοῦ $\Sigma = \{A, N, \Delta, P, O, \Sigma\}$
- 273) Ἐνας γεωργὸς παράγει $\Pi = \{\text{σιτάρι, σταφίδα, κριθάρι, καρπούζια}\}$, ἕνας ἄλλος παράγει $\Phi = \{\text{πεπόνια, κριθάρι, σταφίδα, πατάτες}\}$. Νὰ σχηματίσετε τὴν τομὴ καὶ τὴν ἔνωση τῶν συνόλων.
- 274) Ἄς λάβωμεν τὸ σύνολο $\Pi = \{I, K, A, P, O, \Sigma\}$ καὶ τὰ ὑποσύνολα $A = \{P, I, K, O, \Sigma\}$, $B = \{A, K, P, O, \Sigma\}$, $\Gamma = \{\Sigma, I, K, O, \Sigma\}$, $\Delta = \{P, I, K, A\}$. Νὰ γράψετε τὰ συμπληρωματικά τους.
- 275) Ἄς λάβωμεν τὰ σύνολα $M = \{T, P, A, \Gamma, E, \Lambda, A, \Phi, O, \Sigma\}$ καὶ $A = \{\Gamma, \Lambda, A, P, O, \Sigma\}$, $B = \{E, \Lambda, A, \Phi, O, \Sigma\}$. Νὰ σχηματισθοῦν τὰ $A \cap B$, $A \cup B$, $M \cap A$, $M \cap B$.
- 276) Ἀπὸ τὰ ἄνω σύνολα, M , A , B , νὰ εὑρεθοῦν τὰ συμπληρωματικά A' , B' καὶ τὰ $A' \cap B$, $B' \cap A$, $A' \cup B$, $B' \cup A$.
- 277) Νὰ ἐξετάσετε τὴ σχέση $(M \cap A) \cap (M \cap B) = \Gamma$
 ἂν $M = \{T, P, A, \Gamma, E, \Lambda, A, \Phi, O, \Sigma\}$ $A = \{\Gamma, \Lambda, A, P, O, \Sigma\}$
 $B = \{E, \Lambda, A, \Phi, O, \Sigma\}$ $\Gamma = \{O, \Sigma, A\}$
- 278) Τὰ πολύγωνα ἀποτελοῦν ἓνα σύνολο ἐπιπέδων σχημάτων. $\Pi = \{\chi / \chi \text{ εἶναι πολύγωνον}\}$. Ἀναγράψατε γνήσια ὑποσύνολά του ;
- 279) Ἄς λάβωμεν τὰ σύνολα $A = \{A, \Gamma, E, P, I\}$, $B = \{A, E, P, I, K, O\}$, $\Gamma = \{A, \Lambda, \Gamma, O, \Sigma\}$. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ἐπιμεριστικὴ ιδιότης $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$.
- 280) Νὰ θέσετε σὲ ἀντιστοιχία ἓνα μ' ἓνα μ'' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων α) τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως «παίκτης» καὶ β) τῶν ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1225.
- 281) Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $A = \{\chi / \chi \text{ ψηφίο τῆς λέξεως «διά»}\}$.
- 282) Γράψατε παραδείγματα κενῶν συνόλων.
- 283) Ποιὲς μεταβολὲς παθαίνει ὁ ἀριθμὸς 125 ἂν γράψουμε δύο μηδενικά δεξιά του;
- 284) Πόσοι διψήφιοι, πόσοι τριψήφιοι ἀριθμοὶ ὑπάρχουν ποὺ ἔχουν ψηφίο μονάδων τὸ 3.

285) $A = \{ \chi / \chi \text{ σύμφωνο της λέξεως «πατέρας»} \}$

$$B = \{ 1, 2, 3 \}$$

$$\Gamma = \{ 1, \Pi, \rho \}.$$

Με αυτά τα σύνολα νά επαληθεύσετε τη προσεταιριστική ιδιότητα της ένωσης.

286) $A = \{ 0, 2, 43 \}, B = \{ 2, 5, 8 \}, \Gamma = \{ 0, 1 \}.$

Νά σχηματίσετε τα σύνολα:

α) $A \cap B \cap \Gamma$

β) $A \cap B \cup \Gamma$

γ) $A \cup B \cup \Gamma$

287) Το σύνολο $\{ \nu, \kappa, \gamma, \rho, \varsigma \}$ είναι ή ένωση του συνόλου των συμφώνων της λέξεως «Νίκος» με το σύνολο των συμφώνων μιᾶς λέξεως που είναι γνωστό ονομα. Ποιό είναι αυτό το όνομα;

288) Ποιά τιμή πρέπει νά δώσουμε στο a ώστε ή ισότης

$$a + \beta = \beta + 7 \text{ νά είναι ταυτότης ;}$$

289) Νά συμπληρώσετε τις συνεπαγωγές:

α) $a + \beta = a \implies \beta =$

β) $a - \beta = 0 \implies a =$

γ) $a - \beta = a \implies \beta =$

290) Νά συμπληρώσετε τις συνεπαγωγές:

$a \cdot \beta = a \implies \beta =$

$a^2 = a \implies a =$

$3 \cdot a = 0 \implies a =$

$5 \cdot (a - 7) = 0 \implies a =$

291) Νά γράψετε με «άναγραφή» το σύνολο $A = \{ \chi / \chi \text{ πλανήτης του ήλιακού συστήματος} \}.$

292) "Av $A = \{ \chi / \chi \text{ μήν του έτους} \}$

$$B = \{ \chi / \chi \text{ μήν του φθινοπώρου} \}$$

νά γράψετε με «άναγραφή» τα σύνολα $A \cup B, A \cap B$

293) Νά γράψετε ένα κεφαλαίο γράμμα του αλφαβήτου που νά έχη σχήμα τεθλασμένης γραμμής, έπειτα νά σχηματίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με την τεθλασμένη αυτή γραμμή.

294) Νά σημειώσετε ένα σημείο O στο επίπεδο και από αυτό νά φέρετε πολλά ίσα ευθύγραμμα τμήματα $OA = OB = OG = OD = OE = \dots$. Μήπως διακρίνετε το σχήμα που όρίζουν τα άκρα των ευθυγράμμων αυτών τμημάτων;

295) Νά χαράξετε ένα τρίγωνο κι' έπειτα ένα ευθύγραμμο τμήμα ίσο με τη περίμετρο αυτού (περίμετρος ευθ. σχήματος είναι το άθροισμα των πλευρών του).

- 296) Νά χαράξετε ένα κυρτό τετράπλευρο κι' έπειτα νά σχηματίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ. Τί παρατηρεῖτε;
- 297) Νά χαράξετε ένα πεντάγωνο κι' έπειτα ένα εὐθύγραμμο τμήμα ἴσο μὲ τὴ περίμετρο αὐτοῦ.
- 298) Νά χαράξετε ένα τρίγωνο κι' έπειτα νά συγκρίνετε μιὰ πλευρὰ αὐτοῦ μὲ τὴ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.
- 299) Νά σχηματίσετε μὴ κυρτὰ πολύγωνα.
- 300) Μιὰ γωνία εἶναι διπλασία τῆς συμπληρωματικῆς τῆς, πόση εἶναι ἡ κάθε γωνία;
- 301) Μιὰ γωνία εἶναι τριπλασία τῆς παραπληρωματικῆς τῆς. Πόση εἶναι ἡ κάθε γωνία ;
- 302) Δύο εὐθεῖες παράλληλες τέμνονται ἀπὸ μιὰ εὐθεῖα καὶ σχηματίζουν μιὰ γωνία $25^{\circ} 40'$. Νά εὑρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν ποὺ σχηματίζονται.
- 303) Νά χαράξετε μιὰ εὐθεῖα $\chi\psi$, κι' ἀπὸ ἕνα σημεῖο O αὐτῆς νά φέρετε πρὸς τὸ ἕνα ἡμιεπίπεδο τὶς ἡμιεὐθεῖες OA , OB , OG . Ἐν ὑποθέσουμε ὅτι σχηματίζονται τέσσερις ἴσες γωνίες, νά ὑπολογίσετε τὸ μέτρο μιᾶς τῶν ἴσων γωνιῶν.
- 304) Γράψατε 4 εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ποὺ διέρχονται ἀπ' τὸ ἴδιο σημεῖο O . Ἐν ὑποθέσουμε ὅτι σχηματίζονται ὀκτὼ ἴσες γωνίες, ποιὸ εἶναι τὸ μέτρο τῆς κάθε μιᾶς;
- 305) Ἐνα ἀεροπλάνο σὲ $15'$ διέτρεξε 40 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα θὰ διατρέξῃ σὲ $1h 20'$;
- 306) Ἐνα δορυφόρος σὲ $1'$ διαγράφει τόξο 13° , σὲ πόσες ὥρες θὰ διαγράψῃ ὁλόκληρη τὴ περιφέρεια;
- 307) Τὸ μέτρο ἑνὸς ὑφάσματος ἔχει 4 λίρες 5 σελ. 2 πεν. Πόσες δραχμὲς ἔχει τὸ μέτρο (1 λίρα = 80 δρχ.).
- 308) Μία γωνία ἔχει μέτρο $28^{\circ} 15'$. Ποιὸ εἶναι τὸ μέτρο τῆς συμπληρωματικῆς καὶ ποιὸ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς;
- 309) Ἐνα οἰκόπεδο $50 m^2$ πουλήθηκε μὲ 200 δρχ. τὸ τετρ. τεκτ. πήχυ. Πόσες δραχμὲς πουλήθηκε τὸ οἰκόπεδο;
- 310) Μιὰ δεξαμενὴ ἔχει ὄγκο $25 m^3$. Σὲ πόσο χρόνο θὰ γεμίσῃ νερὸ ἀπὸ μιὰ βρύση ποὺ τρέχει 600 γραμ. νεροῦ, στὸ λεπτό;
- 311) Μιὰ βρύση τρέχει 400 γραμμάρια νερὸ στὸ λεπτό ($1'$). Μιὰ ἄλλη τρέχει 30 χιλιόγραμμα νερὸ τὴν ὥρα. Ἐν τρέξουν καὶ οἱ δύο βρύσες μαζὶ σὲ πόσο χρόνο θὰ γεμίσουν δεξαμενὴ $30 m^3$;
- 312) $A = \{2, 5, 6\}$ καὶ $B = \{1, 3\}$, νά εὑρεθῇ α) τὸ $A \times B$, β) τὸ $B \times A$.
- 313) Ἐν $A = \{2, 3, 5\}$ καὶ $B = \{1, 4\}$, νά παραστήσετε στὸ τετραγωνισμένο χαρτί τὸ σύνολο $A \times B$.
- 314) Ποιὰ εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ $A \times B$ (τῆς προηγουμένης ἀσκίσεως)

που παριστάνουν σημεῖα τῆς αὐτῆς καθέτου πρὸς τὴν Οχ. Τί παρατηρεῖτε ;

315) Μὲ τὴ βοήθεια τῆς προσεταιριστικῆς ιδιότητος νὰ ὑπολογισθοῦν σύντομα τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha) 171 + 27 + 29$$

$$\beta) 18 + 49 + 182$$

316) Μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἐπιμεριστικῆς ιδιότητος νὰ γραφοῦν πιδ ἅπλᾶ τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha) 3 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$$

$$\beta) 12 \cdot \beta + 7 \cdot \beta$$

$$\gamma) 3 \cdot 5^4 + 12 \cdot 5^4$$

317) Νὰ χρησιμοποιεῖτε τὴν ἐπιμεριστικὴ ιδιότητα γιὰ νὰ γράψετε σὲ γνωστὲς μορφὲς τὶς ἐξισώσεις:

$$5 \cdot \chi + 2 \cdot \chi = 56$$

$$\chi + 8 \cdot \chi = 72$$

κι' ἔπειτα νὰ τὶς ἐπιλύσετε .

318) Τό αὐτὸ γιὰ τὶς ἐξισώσεις:

$$12 \cdot \chi - 7 \cdot \chi = 30$$

$$14 \cdot \chi + \chi = 45$$

319) Μὲ τὴ βοήθεια γνωστῆς ιδιότητος τῆς διαιρέσεως νὰ ὑπολογίσετε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως:

$$(24 \cdot \alpha^3) : (3 \cdot \alpha^3)$$

320) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα:

$$\alpha) (15 - 2) \cdot 3 - 4 \cdot 2$$

$$\beta) 8 \cdot 9 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (15 - 4 \cdot 2)$$

$$\gamma) 112 - 3 \cdot (15 - 7)$$

321) Νὰ γράψετε δύο ἀριθμοὺς κι' ἔπειτα νὰ ὑπολογίσετε τὸ γινόμενο τοῦ ἀθροίσματος των μὲ τὴ διαφορὰ των. Ἐπαναλάβετε τὸ ἴδιο καὶ μ' ἄλλους ἀριθμοὺς. Τί παρατηρεῖτε;

Π ε ρ ῖ λ η ψ η

Πρόσθεση ἀκεραίων

Ἰδιότητες.

Ἐκτέλεσις τῆς προσθέσεως.

Δοκιμὴ

Ἀφαίρεση ἀκεραίων

Ἰσοδύναμοι σχέσεις.

Ἐξισώσεις

Προβλήματα.

- Ἰδιότητες
- Ἀριθμητικὸ πολυώνυμο.
- Ἐκτέλεση τῆς ἀφαιρέσεως
- Δοκιμὴ τῆς ἀφαιρέσεως.
- Ἀσκήσεις — Προβλήματα

Πολλαπλασιασμός ἀκεραίων

- Ἰδιότητες.
- Ἀριθμητικὰ πολυώνυμα
- Γινόμενον πολλῶν παραγόντων.
- Ἑρμηνεία τοῦ γνωστοῦ κανόνος ἐκτελέσεως πολλαπλασιασμοῦ.
- Δοκιμή.
- Προβλήματα

Διαίρεση Ἀκεραίων

- Ἀντίστροφοι πράξεις.
- Ἰσοδυναμίες
- Ἰδιότητες.
- Ἐκτέλεσις διαιρέσεως
- Δοκιμὴ — συντομίες.
- Προβλήματα — ἐξισώσεις.
- Δυνάμεις.
- Ἰδιότητες
- Χρήσις τῶν δυνάμεων τῶν 10 στὴ γραφὴ ἀκεραίων.
- Δυαδικὸ σύστημα ἀριθμήσεως.
- Ἀσκήσεις

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η'.

Διαιρετότης

§ 105. Ἀριθμὸς διαιρετὸς δι' ἄλλου

105.1 Στὴν ἰσότητα $12:3=4$ διακρίνουμε ὅτι ὁ 12 διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ τοῦ 3. Γι' αὐτὸ λέγομε ὅτι ὁ 12 εἶναι διαιρετὸς διὰ τοῦ 3. Ὁ ἀριθμὸς 3, ποὺ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸν 12, λέγεται διαιρέτης τοῦ 12.

Γενικὰ ἓνας ἀκέραιος α εἶναι διαιρετὸς δι' ἐνὸς ἄλλου φυσικοῦ ἀριθμοῦ β , ὅταν διαιρεῖται ἀκριβῶς ἀπὸ αὐτόν.

Ἐνας φυσικὸς ἀριθμὸς β εἶναι διαιρέτης ἄλλου ἀκεραίου α , ὅταν διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν α .

105.2 Πολλαπλάσια ἐνὸς ἀριθμοῦ

Ἄς πάρωμε τὸν ἀκέραιο ἀριθμὸ 3 καὶ ὥς τὸν πολλαπλασιάσωμε μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς 0, 1, 2, 3, ...

$$0 \cdot 3 = 0$$

$$1 \cdot 3 = 3$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$3 \cdot 3 = 9$$

$$4 \cdot 3 = 12$$

$$5 \cdot 3 = 15$$

κ.ο.κ.

Προκύπτει τὸ σύνολο $A = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

Τὰ στοιχεῖα τοῦ A λέγονται **πολλαπλάσια** τοῦ 3. Εἶναι φανερό ὅτι τὰ πολλαπλάσια ἐνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν ἓνα σύνολο μὲ **μὴ πεπερασμένους πλήθους στοιχεῖα** καὶ προκύπτουν ἀπὸ τοὺς πολλαπλασιασμοὺς τοῦ ἀκεραίου, μὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Φ_0 .

105.3 Διαιρετότης. Στὰ μαθηματικὰ συχνὰ θά συναντήσουμε προβλήματα ὅπου θά χρειάζεται νὰ γνωρίζουμε, ἂν ἓνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς δι' ἐνὸς ἄλλου. Βέβαια αὐτὸ μπορούμε νὰ τὸ διαπιστώσουμε ἐκτελῶντας τὴν διαίρεση, ἀλλὰ θά μάθωμε τρόπους μὲ τοὺς ὁποίους θά διακρίνωμε πολὺ εὐκόλα ἂν ἓνας ἀκέραιος ἀριθμὸς α διαιρεῖται ἀκριβῶς δι' ἐνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ β .

Τὸ κεφάλαιο τὸ ὁποῖο ἀσχολεῖται μὲ τὸ θέμα αὐτὸ λέγεται **Διαιρετότης**.

§ 106. Πρώτοι καὶ σύνθετοι ἀριθμοὶ

106.1 Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 ...

Ἀκεραίοι ἀριθμοὶ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Διαιρέται	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2			2	3	2	5	2	7	2	3	2	11	2
3					4		3		4	9	5		3
4							6		8		10		4
5													6
6													12
...													

Ἀπὸ τὸν πίνακα συνάγουμε :

α) Κάθε ἀκεραῖος μεγαλύτερος τοῦ 1 ἔχει **τούλάχιστον δύο διαιρέτας**, τὴ μονάδα καὶ τὸν ἑαυτὸ του.

β) Μερικοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν **καὶ ἄλλους διαιρέτας**, ἐκτὸς τῆς μονάδος καὶ τοῦ ἑαυτοῦ των. Π.χ. οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, 5, 7, 11 ... ἔχουν διαιρέτας **μόνο** τὴ μονάδα καὶ τὸν ἑαυτὸ τους, ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 4, 6, 8, 9, 10, 12 ἔχουν ἐκτὸς ἀπὸ τὴ μονάδα καὶ τὸν ἑαυτὸν των καὶ **ἄλλους** διαιρέτας.

Μὲ βάσι τὸ πλῆθος τῶν διαιρετῶν χωρίζουμε τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς, **ἐκτὸς ἀπὸ τὴ μονάδα**, σὲ δύο κατηγορίες.

Α) Σ' ἐκείνους ποὺ ἔχουν μόνο δύο διαιρέτας, τὴ μονάδα καὶ τοὺς ἑαυτοὺς τους καὶ λέγονται **πρώτοι ἀριθμοί**.

Β) Σ' ἐκείνους ποὺ ἔχουν κι' ἄλλους διαιρέτας ἐκτὸς ἀπὸ τὴ μονάδα καὶ τὸν ἑαυτὸ τους· αὐτοὶ λέγονται **σύνθετοι ἀριθμοί**.

Ἐπεὶτα ἀπὸ τὰ παραπάνω ἔχουμε

$$\Phi_0 = \{0, 1\} \cup \{\chi \mid \chi \text{ πρῶτος ἀριθμὸς}\} \cup \{\chi \mid \chi \text{ σύνθετος ἀριθμὸς}\}.$$

106.2 Πρώτοι ἀριθμοὶ ἕως τὸ 100

Γιὰ νὰ βροῦμε τοὺς πρώτους ἀριθμοὺς ἕως τὸ 100 γράφουμε τοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, ... 100 κι' ἔπειτα διαγράφουμε

1) τὴ μονάδα,

2) τὰ πολλαπλάσια τοῦ 2 ἀρχίζοντας ἀπὸ τὸ $2^2 = 4$

3) » » » 3 » » $3^2 = 9$

4) » » » 5 » » $5^2 = 25$

5) » » » 7 » » $7^2 = 49$

Έτσι απομένουν οι πρώτοι αριθμοί έως το 100 οι οποίοι είναι :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως κόσκινο του Έρατοσθένη.

(Ο Έρατοσθένης υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους σοφούς της αρχαιότητας, γεννήθηκε στην Κυρήνη της Β. Αφρικής κατά το έτος 276 ή 275 π.Χ.).

§ 107. Ιδιότητες διαιρετών

1. "Ας προσέξουμε τις σχέσεις μεταξύ των αριθμών 12 και 3 στη συνεπαγωγή

$$12 : 3 = 4 \implies 4 \cdot 3 = 12$$

Από την ισότητα $12 : 3 = 4$ συνάγουμε ότι ο 12 είναι διαιρετός διὰ 3

Από την ισότητα $4 \cdot 3 = 12$ » ότι ο 12 είναι πολλαπλάσιο του 3.

Ωστε : "Αν ένας αριθμός είναι διαιρετός δι' άλλου θά είναι πολ)σιο αὐτοῦ.

2. Από τη συνεπαγωγή

$$4 \cdot 3 = 12 \implies 12 : 4 = 3$$

συνάγουμε ότι

"Αν ένας αριθμός είναι πολ)σιο ἑνὸς ἄλλου θά είναι καὶ διαιρετὸς δι' αὐτοῦ.

3. Οἱ αριθμοί 15 καὶ 21 είναι πολλαπλάσια τοῦ 3 θά είναι καὶ τὸ ἄθροισμά τους πολλαπλάσιο τοῦ 3 ;

Αφοῦ $15 = 3 \cdot 5$

καὶ $21 = 3 \cdot 7$

θά ἔχουμε $15 + 21 = 3 \cdot 5 + 3 \cdot 7$
 $= 3 \cdot (5 + 7)$ (ἐπιμεριστική ιδιότης)

Ωστε τὸ ἄθροισμα $15 + 21$ τὸ ὁποῖον ἰσοῦται μὲ $3 \cdot (5 + 7)$ είναι πολλαπλάσιο τοῦ 3.

Δηλαδή : ἂν ἓνας φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρῇ δύο -(ῆ) περισσοτέρους) ἄλλους θά διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἐφαρμογή : Διαιρεῖ ὁ ἀριθμὸς 4 τὸν ἀριθμὸ 420 ;

Γράφουμε $420 = 400 + 20$.

Εὐκόλα διακρίνουμε ὅτι ὁ 4 διαιρεῖ τὸ 400 καὶ τὸ 20 ἄρα θά διαιρῇ καὶ τὸ ἄθροισμά τους $400 + 20 = 420$.

4. Σύμφωνα με την προηγούμενη ιδιότητα ο αριθμός 3 αφού διαιρεί τον αριθμό 12 θά διαιρη και το άθροισμα $12 + 12 + 12 + 12 = 4 \cdot 12$ και γενικά το $\lambda \cdot 12$ όπου $\lambda \in \Phi$.

"Ωστε : αν ένας φυσικός αριθμός διαιρη έναν άλλον, θά διαιρη και τὰ πολ)σια αὐτοῦ.

'Εφαρμογή : διαιρεί ο αριθμός 4 τον αριθμό 280; 'Αφού ο 4 διαιρεί το 28 θά διαιρη και το $28 \cdot 10 = 280$.

5. 'Ο αριθμός 3 διαιρεί τους αριθμούς 27 και 12. θά διαιρη και τη διαφορά τους ;
έχουμε

$$27 = 3 \cdot 9$$

$$12 = 3 \cdot 4$$

$$\begin{aligned} \text{ἄρα } 27 - 12 &= 3 \cdot 9 - 3 \cdot 4 \\ &= 3 \cdot (9 - 4) \end{aligned}$$

"Ωστε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρη δυο άλλους θά διαιρη (και τη διαφορά αὐτῶν.

6. 'Από τη 2η ισότητα της συνεπαγωγής

$$\Delta = (\delta \cdot \pi) + Y \implies Y = \Delta - (\delta \cdot \pi)$$

συνάγουμε ότι : αν ένας φυσικός αριθμός διαιρη το Διαιρετέο Δ και το διαιρέτη δ μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως (τότε θά διαιρη και το πολλαπλάσιο αὐτοῦ $(\delta \cdot \pi)$ θά διαιρη και τη διαφορά $\Delta - (\delta \pi) = Y$

"Ωστε αν ένας φυσικός αριθμός διαιρη το διαιρετέο και το διαιρέτη μιᾶς ἀτελοῦς διαιρέσεως θά διαιρη και το υπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς.

Παράδειγμα : στη διαίρεση

$$\begin{array}{r} 69 \mid 9 \\ 6 \mid 7 \end{array}$$

παρατηροῦμε ότι ο αριθμός 3 που διαιρεί το διαιρετέο 69 και το διαιρέτη 9 διαιρεί και το υπόλοιπο τῆς διαιρέσεως 6.

Σύνοψη

"Αν ένας φυσικός αριθμός διαιρη δύο (ή περισσότερους) άλλους θά διαιρη και

1) τὸ ἄθροισμα

2) τὴ διαφορά

3) τὸ γινόμενο

4) τὸ υπόλοιπο τῆς ἀτελοῦς διαιρέσεως αὐτῶν

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

322) Στο σύνολο $A = \{2, 4, 5, 8, 10, 11, 20\}$ ποιά στοιχεΐα είναι πρώτοι καί ποιά σύνθετοι αριθμοί;

323) Το διπλάσιο ενός πρώτου αριθμού είναι πρώτος ή σύνθετος αριθμός;

324) Οί αριθμοί α και β όπου $\alpha > \beta$ είναι διαιρετοί διά του 7. Να σχηματίσετε με αυτούς άλλους αριθμούς διαιρετούς διά 7.

325) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο των πολλαπλασίων του 4 που περιέχονται μεταξύ 30 και 60.

326) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $X = 5 \cdot \alpha + 20$ είναι διαιρετός διά 5.

327) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $X = 18 \cdot \alpha^2 \cdot \beta$ είναι διαιρετός διά 9.

§ 108. Κριτήρια διαιρετότητας

Οί ιδιότητες των διαιρετών θα μᾶς βοηθήσουν νά βρούμε πρακτικούς κανόνες με τούς οποίους θα διακρίνουμε αν ένας αριθμός διαιρείται ακριβώς από ένα φυσικό αριθμό. Οί κανόνες αὐτοί λέγονται **κριτήρια διαιρετότητας**.

Τρόπος εργασίας: Για νά διακρίνουμε αν ένας αριθμός π.χ. ο 2520 διαιρείται ακριβώς από ένα φυσικό αριθμό π.χ. 24 αναλύουμε τόν αριθμό 2520 σέ δύο μέρη

$$2520 = 2400 + 120$$

ἀπό τὰ ὁποῖα τὸ ἕνα νά φαίνεται εὐκόλα ὅτι διαιρεῖται διὰ 24 (ὅπως εἶναι τὸ 2400) κι' ἔτσι ἡ προσπάθειά μας περιορίζεται στήν εξέταση τοῦ ἄλλου μέρους τοῦ ἀριθμοῦ (τοῦ 120).

Γενικά: γιά νά διακρίνουμε αν ὁ ἀριθμός α διαιρεῖται (ἀκριβῶς) διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β αναλύουμε τὸν α κατὰ τὸν τύπο

$$\alpha = \text{πολ. } \beta + \upsilon$$

1^ο Κριτήριο. Πότε ένας αριθμός είναι διαιρετός
διὰ 10, 100, 1000,

“Ας πάρουμε τὸν ἀριθμὸ 12534

ἔχουμε

$$12534 = 1253 \cdot 10 + 4$$

ἢ

$$12534 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 10 + 4$$

Ώστε: Ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ 10 ἂν τὸ τελευταῖο του ψηφίο διαιρεῖται διὰ 10 δηλ. ἂν εἶναι 0.

ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ γιὰ τὸ 100, 1000 κλπ.

$$\begin{aligned} \text{π.χ.} \quad 12534 &= 125 \cdot 100 + 34 \\ &= \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 100 + 34 \end{aligned}$$

Ώστε: Ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ 10, 100, 1000... ἂν τελειώνη τοῦλάχιστο σὲ 1, 2, 3... μηδενικά.

Παράδειγμα. Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 125, 1260, 48500, 3824, οἱ 1260 καὶ 48500 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 10, ὁ δὲ 48500 διὰ 100

2^ο Κριτήριο. Πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διὰ 2 ἢ 5

Ἄς πάρουμε τὸν ἀριθμὸ 1356

ἐπειδὴ $2 \cdot 5 = 10$ γράφουμε:

$$1356 = 135 \cdot 10 + 6$$

$$\text{ἢ } 1356 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 10 + 6$$

$$\text{ἢ } 1356 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 2 \text{ (ἢ τοῦ } 5) + 6$$

Ώστε: Ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ 2 ἢ 5 ἂν τὸ τελευταῖο ψηφίο του εἶναι διαιρετὸ διὰ 2 ἢ 5.

Παράδειγμα: Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 47, 136, 252, 1170, 841, 4765 διαιρετοὶ διὰ 2 εἶναι οἱ ἀριθμοὶ 136, 252, 1170
διὰ 5 οἱ 1170 καὶ 4765.

Σημείωση: Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2 λέγονται **ἄρτιοι**, ἐνῶ οἱ μὴ διαιρετοὶ διὰ 2 λέγονται **περιττοί**.

3^ο Κριτήριο. Πότε ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διὰ 4 ἢ 25

Ἄς πάρουμε τὸν ἀριθμὸ 76475

Ἐπειδὴ $4 \cdot 25 = 100$

$$\text{γράφουμε} \quad 76475 = 764 \cdot 100 + 75$$

$$\text{ἢ } 76475 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 100 + 75$$

$$\text{ἢ } 76475 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 4 \text{ (ἢ } 25) + 75$$

Ώστε: Ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ 4 ἢ 25 ἂν τὸ τελευταῖο διψήφιο τμήμα του εἶναι διαιρετὸ διὰ 4 ἢ 25.

Παράδειγμα: Ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς: 1275, 148, 5372, 76836, 745271, 38504700, οἱ ἀριθμοὶ 148, 5372, 76836, 4700 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 4.

Ἐνῶ οἱ ἀριθμοὶ 1275, 3850, 4700 εἶναι διαιρετοὶ διὰ 25.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

328) Ποιοί από τους αριθμούς 240, 125, 3471, 3834, 85678, 538900 είναι διαιρετοί α) διὰ 2, β) διὰ 5, γ) διὰ 10, δ) διὰ 4 και ε) διὰ 25.

329) Ποιά ψηφία μπορούμε να γράψουμε δεξιά του 54 για να προκύψη τετραψήφιος αριθμός διαιρετός διὰ 25;

330) Ποιά ψηφία μπορούμε να γράψουμε δεξιά του 17 για να προκύψη τριψήφιος αριθμός διαιρετός διὰ 4;

331) Ποιό ψηφίο πρέπει να τοποθετήσετε δεξιά του αριθμού 36 για να προκύψη τριψήφιος αριθμός διαιρετός διὰ 2 και διὰ 4 και διὰ 5;

332) Να συμπληρώσετε τις συνεπαγωγές:

$$\alpha) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = \text{πολλαπλάσιο του } 4 \\ \beta = \text{πολλαπλάσιο του } 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta \text{ πολλαπλάσιο του } 4$$

$$\beta) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = \text{πολλαπλάσιο του } 8 \\ \beta = \text{πολλαπλάσιο του } 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha + \beta = \text{πολλαπλάσιο του } 4$$

$$\gamma) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha = \text{πολλαπλάσιο του } 6 \\ \beta = \text{πολλαπλάσιο του } 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \cdot \beta = \text{πολλαπλάσιο του } 12$$

4ο Κριτήριο. Πότε ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ 9 ή 3

"Ας πάρουμε τον αριθμό 2754

$$\text{έχουμε} \quad 9 \cdot 11 = 99 \Rightarrow 100 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 1$$

$$9 \cdot 111 = 999 \Rightarrow 1000 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 1$$

κ.ο.κ.

$$\text{και} \quad 2754 = 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4$$

$$\text{άλλα} \quad 2 \cdot 1000 = 2 \cdot (\text{πολ. } 9 + 1) = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + 2$$

$$7 \cdot 100 = 7 \cdot (\text{πολ } 9 + 1) = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + 7$$

$$5 \cdot 10 = 5 \cdot (\text{πολ } 9 + 1) = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + 5$$

$$\quad \quad \quad 4 \quad \quad \quad = \quad \quad \quad 4$$

$$\text{"Αρα} \quad 2 \cdot 1000 + 7 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 4 = \text{πολλαπλάσιο του } 9 + (2 + 7 + 5 + 4)$$

"Ωστε: "Ένας αριθμός είναι διαιρετός διὰ του 9 ή του 3 αν το άθροισμα των ψηφίων του είναι διαιρετό διὰ 9 ή 3.

Παρατήρηση: "Επειδή το 9 είναι διαιρετό διὰ του 3 γι'αυτό ο κανόνας που ισχύει γιὰ το 9 ισχύει και γιὰ το 3. Προσοχή όμως, δεν ισχύει το αντίστροφο. Μπορεί ένας αριθμός να διαιρείται με το 3 όχι όμως με το 9. Π.χ. ο αριθμός 33.

Παράδειγμα: "Από τους αριθμούς 7965, 439, 171, 75237, 602408, 12003, διὰ 9 διαιρούνται οι αριθμοί 7965, 171, διὰ 3 οι αριθμοί 7965, 171, 75237, 12003.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

333) Ποιοί από τους αριθμούς 315, 1284, 2815, 382, 1152, 312 είναι πολλαπλάσια του 3 ή του 9;

334) Να αντικαταστήσετε το τετραγωνίδιο μ' ένα ψηφίο ώστε να προκύψουν αριθμοί διαιρετοί διά 9 $15 \square$, $\square 34$, $38 \square 5$.

335) Να αντικαταστήσετε το τετραγωνίδιο μ' ένα ψηφίο για να προκύψουν αριθμοί διαιρετοί συγχρόνως διά 5 και 9 $13 \square$, $63 \square$, $22 \square$.

336) Να αντικαταστήσετε το τετραγωνίδιο με ένα ψηφίο ώστε ο αριθμός $35 \square$ αν διαιρεθῇ διά 9 να ἀφήσῃ υπόλοιπο 4.

§ 109. Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καὶ τῆς διαιρέσεως μὲ τὰ ὑπόλοιπα διαιρέσεως διὰ 9

Παράδειγμα 1ο.

Δοκιμή τοῦ πολλαπλασιασμοῦ: $148 \times 39 = 5772$

ἔχουμε

Πολλαπλασιαστέος: $148 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 4$ (διότι $1 + 4 + 8 = 13$)

Πολλαπλασιαστής: $39 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 3$

$$48 \times 39 = (\text{πολλαπλάσιο } 9 + 4) \times (\text{πολλαπλάσιο } 9 + 3)$$

$$= \text{πολλαπλάσιο } 9 + 12$$

$$= \text{πολλαπλάσιο } 9 + 3$$

$$5772 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 3$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 148×39 καὶ 5772 ἔχουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπο διαιρέσεως διὰ 9 συνάγουμε ὅτι εἶναι ἴσοι ἢ διαφέρουν κατὰ πολ)σιο τοῦ 9.

Διάταξη δοκιμῆς πολ)σμοῦ

Ἵπόλοιπο πολλαπλασιαστέου 4	Ἵπόλοιπο πολλαπλασιαστοῦ 3
Ἵπόλοιπο γινομένου ὑπολοίπων 3	Ἵπόλοιπο γινομένου 3

Παράδειγμα 2ο.**Δοκιμή τῆς διαιρέσεως**

$$\begin{array}{r|l} 1837 & 47 \\ 427 & 39 \\ \hline = 4 & \end{array}$$

Διαιρετέος $1837 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 1$ Διαιρέτης $47 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 2$ Πηλίκο $39 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 3$ Ύπόλοιπο $4 = \text{πολλαπλάσιο } 9 + 4$

$$\begin{aligned} 47 \times 39 + 4 &= (\text{πολ } 9 + 2) \times (\text{πολ } 9 + 3) + 4 \\ &= \text{πολ } 9 + 2 \times 3 + 4 \\ &= \text{πολ/σιο } 9 + 10 \\ &= \text{πολ/σιο } 9 + 1 \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ 1837 καὶ $47 \times 39 + 4$ ἔχουν τὸ ἴδιο ὑπόλοιπο διαιρέσεως διὰ 9 εἶναι ἴσοι ἢ διαφέρουν κατὰ πολ/σιο τοῦ 9.

Διάταξη δοκιμῆς διαιρέσεως

Ύπόλοιπο διαιρετέου Δ_v 1	Ύπόλοιπο διαιρέτου δ_v 2
Ύπόλοιπο τοῦ $\delta_v \cdot \Pi_v + Y_v$ 1	Ύπόλοιπο πηλίκου Π_v 3

Παρατήρηση

Καθὼς εἶδαμε ἡ μέθοδος αὐτὴ τῆς «δοκιμῆς» δὲν μᾶς λέγει τὸ σφάλμα ὅταν εἶναι τοῦτο πολλαπλάσιο τοῦ 9.

§ 110. Ἀνάλυση ἀριθμοῦ σὲ πρώτους παράγοντες

Ἄς προσέξουμε τὶς ἰσότητες :

$$2 \cdot 3 = 6 \quad (1)$$

$$3 \cdot 4 = 12 \quad (2)$$

τὰ α' μέλη των παριστάνουν τοὺς ἀριθμοὺς 6 καὶ 12 σὲ μιὰ ἄλλη μορφή. Σὲ μορφή γινομένου παραγόντων.

Υπάρχει όμως μια διαφορά μεταξύ των δύο γινομένων.

Το γινόμενο $2 \cdot 3$ αποτελείται από πρώτους παράγοντες.

Ενώ το γινόμενο $3 \cdot 4$ έχει και ένα σύνθετο παράγοντα τον 4.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε πώς θα θέτουμε **ένα σύνθετο αριθμό**

σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Η εργασία αυτή λέγεται «**ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων ή πλήρης παραγοντοποίηση του αριθμού**».

110.1 'Ο σύνθετος αριθμός 18 να αναλυθῇ σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

α) Με τη βοήθεια των κριτηρίων διαιρετότητας εύρισκω τον μικρότερο πρώτο παράγοντα του 18 ο οποίος είναι ο 2

$$\text{έχω } 18 : 2 = 9 \iff 18 = 2 \cdot 9 \quad (1)$$

Έτσι έχουμε μιὰ παραγοντοποίηση του 18 που όμως δεν είναι πλήρης· γιατί; γιατί ο παράγων 9 δεν είναι πρώτος.

β) Με τον ίδιο τρόπο αναλύω το 9

$$\text{έχω } 9 = 3 \cdot 3 \quad (2)$$

γ) Αντικαθιστούμε το 9 με το ίσο του $3 \cdot 3$

$$\begin{array}{l} \text{στην ισότητα} \\ \text{και έχουμε} \\ \quad \eta \\ \quad \eta \end{array} \quad \begin{array}{l} 18 = 2 \cdot 9 \\ 18 = 2 \cdot (3 \cdot 3) \\ 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \\ 18 = 2 \cdot 3^2 \end{array} \quad (3)$$

110.2 'Ο αριθμός 60 ν' αναλυθῇ σε πρώτους παράγοντες

$$\begin{array}{l} \text{έχουμε } 60 = 2 \cdot 30 \quad (\text{ο } 2 \text{ είναι ο μικρότερος πρώτος διαιρέτης του } 60) \\ \quad \eta \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 15 \quad (\gg \gg \gg \gg \gg \gg \gg 30) \\ \quad \eta \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad (\gg 3 \gg \gg \gg \gg \gg 15) \\ \text{ώστε } 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ \quad \eta \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \end{array}$$

Οι διαδοχικές τέλειαι διαιρέσεις που έγιναν γράφονται σχηματικά με τον ακόλουθο τρόπο:

	60	2	ελάχιστος πρώτος παράγων του	60
1ο πηλίκιο	30	2	»	30
2ο »	15	3	»	15
3ο »	5	5	»	5
4ο »	1			

$$\text{Έτσι } 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$$

Είναι φανερό ότι μπορούμε να ακολουθήσουμε και άλλη σειρά στις διαιρέσεις

π.χ.	60		5
	12		2
	6		2
	3		3
	1		

Όποτε πάλι έχουμε $60 = 5 \times 2^2 \times 3$.

Οί αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **οποιαδήποτε πορεία κι' αν ακολουθήσουμε στην ανάλυση, θα φθάσουμε τελικά στο ίδιο γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Μόνο ή σειρά των παραγόντων μπορεί να είναι διαφορετική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

337) Να αναλυθούν σε πρώτους παράγοντες οί αριθμοί 90, 120, 180, 576.

338) Ποιόν αριθμό αντιπροσωπεύει ό χ στις ισότητες

$$\alpha) \chi = 2^3 \cdot 5$$

$$\beta) \chi = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

338) Να συγκρίνετε τούς αριθμούς α και β όπου

$$\alpha = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$\beta = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

§ III. Έφαρμογές της ανάλυσεως σε πρώτους παράγοντες

111.1 Γινόμενο δύο ή περισσότερων αριθμών

Να υπολογισθί το γινόμενο $156 \cdot 12$

156		2	12		2
78		2	6		2
39		3	3		3
13		13	1		
1					

ώστε $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

όποτε $156 \cdot 12 = (2^2 \cdot 3 \cdot 13) \cdot (2^2 \cdot 3)$

$$= 2^2 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 2^2 \cdot 3$$

$$= 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 13$$

$$= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $2^4 \cdot 3^2 \cdot 13$ αποτελείται απ' όλους τούς πρώτους παράγοντες τών αριθμών 156 και 12 και με έκθετες τó άθροισμα τών έκθετών των

Ανάλογα εργαζόμαστε και στην περίπτωση περισσότερων παραγόντων.

Παράδειγμα. Να εύρεθῇ τὸ γινόμενο $156 \cdot 24 \cdot 72$

$$\text{ἔχουμε } 156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

$$\begin{array}{r} 156 \cdot 24 \cdot 72 = (2^2 \cdot 3 \cdot 13) \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot (2^3 \cdot 3^2) \\ = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 13 \end{array}$$

111.2 Πῶς διακρίνουμε ἂν ἀριθμὸς α εἶναι διαιρετὸς διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β

Ἄς ἀναλύσουμε σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων τὸν ἀριθμὸ 840 καὶ τὸ διαιρέτη του 60.

$$840 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

Παρατηροῦμε ὅτι : ὁ ἀριθμὸς 840 περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντες τοῦ 60 μὲ τοὺς ἴδιους ἢ καὶ μεγαλύτερους ἐκθέτες.

(Αὐτὸ εἶναι φυσικὸ ἀφοῦ $840 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 60$

$$\text{ἢ } 840 = \text{πολλαπλάσιο τοῦ } 2^2 \cdot 3 \cdot 5)$$

Ἐπειτα ἀπὸ τὴν παρατήρηση αὐτὴ μποροῦμε νὰ διακρίνουμε ἂν ἀριθμὸς α εἶναι διαιρετὸς διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β.

«Ἄν ἓνας ἀριθμὸς α εἶναι διαιρετὸς διὰ φυσικοῦ ἀριθμοῦ β τότε ὁ α περιέχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντες τοῦ β καὶ μὲ ἐκθέτες ἀντιστοίχως ἴσους ἢ μεγαλύτερους.

Ἐφαρμογή: Εἶναι ὁ ἀριθμὸς 720 διαιρετὸς διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 24; ἀναλύουμε κι' ἔχομε :

720	2	24	2
360	2	12	2
180	2	6	2
90	2	3	3
45	3	1	
15	3		
5	5		
1			

$$\text{ὥστε } 720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ 720 ἔχει ὅλους τοὺς πρώτους παράγοντες τοῦ 24 καὶ μάλιστα μὲ μεγαλύτερους ἐκθέτες ἄρα εἶναι διαιρετὸς διὰ 24.

111.3 Πηλίκo δύο ἀριθμῶν

Νὰ εὐρεθῇ τὸ πηλίκo $720 : 24$

ἔχουμε : $720 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$

$$24 = 2^3 \cdot 3$$

ἄρα :

$$\begin{aligned} 720 : 24 &= (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) : (2^3 \cdot 3) = [(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) : 2^3] : 3 = \\ &= [(2^4 : 2^3) \cdot 3^2 \cdot 5] : 3 = \\ &= 2^1 \cdot (3^2 : 3) \cdot 5 = \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ πηλίκo δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ γινόμενο ὧν τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ διαιρετέου μὲ ἐκθέτες τὶς διαφορῆς τῶν ἀντιστοιχῶν ἐκθετῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

340) Νὰ εὐρεθῇ τὸ γινόμενο $840 \cdot 576 \cdot 180$ μὲ ἀνάλυση τῶν παραγόντων τοῦ σὲ γινόμενα πρώτων παραγόντων.

341) Νὰ ἐξετάσετε ποιὸ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς $\alpha = 2^3 \cdot 3$ $\beta = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ $\gamma = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, διαιροῦν τὸν ἀριθμὸ $\delta = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

342) Νὰ εὐρεθῇ τὸ πηλίκo $(2^3 \cdot 3^3) : 18$

343) Νὰ εὐρεθῇ τὸ πηλίκo $72^3 : (2^3 \cdot 3)$

§ 112. Μέγιστος κοινὸς διαιρέτης

112.1 "Ας πάρουμε δύο ἀριθμοὺς τοὺς 18 καὶ 24 κι' ὡς σχηματίσουμε τὰ σύνολα τῶν διαιρετῶν αὐτῶν ἔχουμε :

Σύνολο Α τῶν διαιρετῶν τοῦ 18 : $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

Σύνολο Β τῶν διαιρετῶν τοῦ 24 : $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

"Ας σχηματίσουμε τὴν τομὴ τῶν Α καὶ Β.

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$$

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ τομὴ τῶν Α καὶ Β ἔχει γιὰ στοιχεῖα τοὺς **κοινούς διαιρέτες** τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 24. Ὁ ἀριθμὸς 6 ποὺ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπὸ τοὺς κοινούς διαιρέτες λέγεται **μέγιστος κοινὸς διαιρέτης** τῶν ἀριθμῶν 18 καὶ 24 καὶ σημειώνεται μὲ τὰ ἀρχικὰ τῶν λέξεων αὐτῶν.

π.χ. τὸ 6 εἶναι ὁ Μ. Κ. Δ. τῶν 18 καὶ 24.

Παρατηρήσεις :

1) Μποροῦσε τὸ σύνολο $A \cap B$ νὰ ᾔταν κενό ;

Ξέρουμε ότι όλοι οι αριθμοί έχουν διαιρέτη τη μονάδα. Άρα το $A \cap B$ έχει ένα τουλάχιστον στοιχείο : τη μονάδα.

2) Μπορούσε να μην υπήρχε μεγαλύτερο στοιχείο στο σύνολο $A \cap B$;

Ξέρουμε ότι ο μεγαλύτερος διαιρέτης κάθε αριθμού είναι ο εαυτός του. Άρα υπάρχει μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης.

3) Άς προσέξουμε δύο σύνολα:

α) το σύνολο $A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$

β) το σύνολο Γ των διαιρετών του Μ.Κ.Δ. του 6, $\Gamma = \{1, 2, 3, 6\}$

Παρατηρούμε ότι $A \cap B = \Gamma$

Ώστε: Το σύνολο των διαιρετών του Μ.Κ.Δ. ταυτίζεται με το σύνολο των κοινών διαιρετών.

112.2 Ανάλογα μπορούμε να εργαστούμε για να βρούμε το Μ.Κ.Δ. τριών ή περισσότερων αριθμών.

Π.χ. Να εύρεθῇ ο Μ.Κ.Δ. των αριθμών 12, 20, 32

Έχουμε :

σύνολο διαιρετών του 12 : $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

» » » 20 : $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$

» » » 32 : $\Gamma = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$

Σύνολο κοινών διαιρετών

$$\Delta = A \cap B \cap \Gamma$$

$$= \{1, 2, 4\}$$

Ώστε Μ.Κ.Δ. των 12, 20, 32 είναι το 4.

§ 113. Ειδική περίπτωση

Άς ζητήσουμε τον Μ.Κ.Δ. των αριθμών 7 και 12

Έχουμε: Σύνολο διαιρετών 7 : $A = \{1, 7\}$

Σύνολο διαιρετών 12 : $B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Άρα Μ.Κ.Δ. των 7 και 12 είναι η μονάς.

«Όταν δύο ή περισσότεροι άκέραιοι έχουν Μ.Κ.Δ. την μονάδα λέγονται πρώτοι μεταξύ τους».

Δέν πρέπει να συγχέουμε τις έννοιες :

1) Πρώτος αριθμός. Π.χ. ο 5 είναι πρώτος αριθμός και

2) Πρώτοι μεταξύ τους αριθμοί. Π.χ. 3, 4, 8, 7 είναι πρώτοι μεταξύ τους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 344) Ποιό είναι το σύνολο των διαιρετών του αριθμού 36;
 345) Να εύρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. α) τῶν ἀριθμῶν 24 καὶ 30, β) τῶν ἀριθμῶν 32, 48 καὶ 64.
 346) Ὁ Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι 12· ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν;
 347) Δύο ἀριθμοὶ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους. Ὁ ἕνας εἶναι ἄρτιος ἡμπορεῖ καὶ ὁ ἄλλος νὰ εἶναι ἄρτιος ἢ ὄχι καὶ γιατί.
 348) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ μηδενός;

§ 114. Ἰδιότητες τοῦ Μ.Κ.Δ.

114.1 Ἄς θεωρήσουμε τὸ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 12 καὶ 32 ποὺ εἶναι ὁ 4· κ' ἄς ἀντικαταστήσουμε τὸ 32 μὲ τὴ διαφορά $32 - 12 = 20$.
 Βλέπουμε ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν 12 καὶ 20 εἶναι πάλι ὁ 4.

Ὡστε : Ὁ Μ.Κ.Δ. ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸν ἕνα ἀπ' αὐτοὺς μὲ τὴ διαφορά αὐτοῦ καὶ ἑνὸς ἄλλου ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς.

114.2 Ἄς συνεχίζουμε νὰ ἐφαρμόζουμε τὴν ιδιότητα αὐτή· θὰ ἔχουμε Μ.Κ.Δ. (12 καὶ 32) = Μ.Κ.Δ. (12, 20) = Μ.Κ.Δ. (12, 8). Ἀλλὰ τὸ 8 εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως 32 διὰ 12 ἄρα :

Ὁ Μ.Κ.Δ. ἀκεραίων ἀριθμῶν δὲν ἀλλάζει ἂν ἀντικαταστήσουμε ἕναν ἀπὸ αὐτοὺς μὲ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ μὲ ἕνα ἄλλον ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς./

§ 115. Εὐκλείδειος Ἀλγόριθμος*

Στὴ 2η ιδιότητα τοῦ Μ.Κ.Δ. στηρίζεται μιὰ σύντομη μέθοδος γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων. Ἡ μέθοδος αὐτὴ λέγεται **Εὐκλείδειος Ἀλγόριθμος** ἀπὸ τὸ ὄνομα τοῦ μεγάλου μας μαθηματικοῦ ποὺ τὴ δίδαξε.

Νὰ εύρεθῇ ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 32, 190 :
 ἔχουμε

$$\begin{aligned} \text{Μ.Κ.Δ. (32, 190)} &= \text{Μ.Κ.Δ. (32, 30)} \\ &= \text{Μ.Κ.Δ. (2, 30)} \\ &= \text{Μ.Κ.Δ. (2, 0)} \\ &= \text{Μ.Κ.Δ. τοῦ 2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

* **Σημείωση :** Ἡ λέξις ἀλγόριθμος ἔχει ἀραβικὴ προέλευσι καὶ χρησιμοποιεῖται μὲ τὴν ἔννοια τῆς συνοπτικῆς διαδικασίας πράξεων γιὰ τὴν εὕρεσιν τοῦ Μ.Κ.Δ. ἢ ἄλλου ἀποτελέσματος.

Ἡ πράξη διατάσσεται κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Πηλικά		5	1	15
Ἀριθμοὶ	190	32	30	2 Μ.Κ.Δ.
Υπόλοιπα	30	2	0	

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸν Μ.Κ.Δ. δύο ἀκεραίων α καὶ β ὅπου $\alpha > \beta$, ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Διαίροῦμε τὸ α διὰ τοῦ β . Ἄν τὸ ὑπόλοιπο εἶναι 0, τότε Μ.Κ.Δ. τῶν α , β εἶναι τὸ β .

Ἄν ὅμως ἡ διαίρεση τοῦ α διὰ τοῦ β δίνη ὑπόλοιπο $u_1 \neq 0$ διαίροῦμε τὸ β διὰ τοῦ u_1 καὶ ἂν ὑπόλοιπο εἶναι τὸ 0, τότε τὸ u_1 εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. Ἄν ὅμως ἡ διαίρεση $\beta : u_1$ δίνη ὑπόλοιπο $u_2 \neq 0$

διαίροῦμε τὸ $u_1 : u_2$ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου βροῦμε μιὰ διαίρεση μὲ ὑπόλοιπο 0.

Αὐτὸ θὰ τὸ ἐπιτύχουμε ἐπειδὴ οἱ ἀκέραιοι β , u_1 , u_2 διαρκῶς μικραίνουν $\beta > u_1 > u_2 > \dots$

Ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας διαιρέσεως εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων α καὶ β .

§ 116. Εὕρεση Μ.Κ.Δ. περισσοτέρων ἀκεραίων

α) Ποιὸς εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀκεραίων 36, 48, 60, 12

Παρατηροῦμε ὅτι ὁ Μ.Κ.Δ. δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν μικρότερό τους τὸν 12 (γιατὶ τότε δὲν θὰ διαιροῦσε τὸν 12). Ἐπειδὴ ὅμως $12 \mid 36, 12 \mid 48, 12 \mid 60, 12 \mid 12$ συμβαίνει νὰ διαιρῇ ὅλους τοὺς ἄλλους συνάγουμε ὅτι Μ.Κ.Δ. τῶν (36, 48, 60, 12) = 12.

β) Ποιὸς εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν 180, 120, 256.

Μάθαμε ὅτι τὸ σύνολο τῶν κοινῶν διαιρετῶν δύο ἀριθμῶν εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ σύνολο τῶν διαιρετῶν τοῦ Μ.Κ.Δ. αὐτῶν. Ἄρα μποροῦμε νὰ ἀντι-καταστήσουμε τοὺς δύο ἀριθμοὺς 120 καὶ 180 μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν, τὸν 60. Ἔτσι καταλήγουμε στὴ περίπτωση τοῦ Μ.Κ.Δ. τῶν δύο ἀριθμῶν 60 καὶ 256.

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε ἂν ζητοῦμε τὸ Μ.Κ.Δ. πολλῶν ἀριθμῶν. Ἀντι-καθιστοῦμε δηλαδὴ δύο-δύο μὲ τὸν Μ.Κ.Δ. αὐτῶν ὥσπου νὰ καταλήξουμε στὴν περίπτωση Μ.Κ.Δ. δύο ἀριθμῶν.

Παρατηρήσεις.

α) "Αν ένας από τους άκεραίους είναι ή μονάδα, τότε ό Μ.Κ.Δ. είναι ή μονάδα (γιατί;)

β) "Αν ένας από τους άκεραίους είναι τό 0 τότε μπορούμε νά τόν παραλείψουμε (γιατί;)

§ 117. Εύρεση Μ.Κ.Δ. διὰ τῆς ἀναλύσεως σέ πρώτους παράγοντες

Ποιός είναι ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών 120, 180, 48.

Αναλύουμε κατά τό γνωστό τρόπο σέ πρώτους παράγοντες.

$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

Οί κοινοί πρώτοι παράγοντες είναι 2 και 3. Θα πάρουμε τούτους μέ τούς μικρότερους εκθέτες,

$$\text{δηλ. } \text{Μ.Κ.Δ.} (120, 120, 48) = 2^2 \cdot 3^1 = 12.$$

Δέν μπορούμε νά λάβουμε τόν 5 διότι δέν είναι διαιρέτης τοῦ 48, οὔτε τή δύναμη 2^4 διότι τό 2^4 δέν είναι διαιρέτης τών αριθμών 120, 180.

"Ωστε: «**Ο Μ.Κ.Δ. άκεραίων πού ἔχουν ἀναλυθῇ σέ πρώτους παράγοντες είναι τό γινόμενο τών κοινών πρώτων παραγόντων αὐτῶν μέ τόν μικρότερό τους εκθέτη.**

π.χ. ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών

$$2^3 \cdot 3^5 \cdot 7^2 \quad \text{καί} \quad 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \quad \text{είναι τό} \quad 2^3 \cdot 3 \cdot 7.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

349) Ποιός είναι ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών α) 240, 48, 64, β) 576, 36;

350) Μέ τόν πιό κατάλληλο τρόπο νά εύρεθῇ ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών 4200, 1800, 160.

351) Ποιός είναι ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών $2^3 \cdot 5$ καί 600;

352) Έχουμε 60 τετράδια, 90 μολύβια. Πόσα τό πολύ ὅμοια δεματάκια μπορούμε νά σχηματίσουμε μέ αὐτά καί τί θά περιέχη τό κάθε δεματάκι;

353) Ένα σχολεῖο διαθέτει 24 τύμπανα καί 18 σάλπιγγες. Πόσες, τό πολύ ὁμοιόμορφες ὁμάδες μπορούμε νά σχηματίσουμε μέ αὐτά;

354) Ποιός είναι ό Μ.Κ.Δ. τών αριθμών 1250, 2560, 3600, 12500;

118. Πολλαπλάσια ενός ἀριθμοῦ. Ἰδιότητες αὐτῶν.

118.1 Τὰ πολλαπλάσια ενός ἀκεραίου ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 4 εἶναι :

$$0 \cdot 4 = 0$$

$$1 \cdot 4 = 4$$

$$2 \cdot 4 = 8$$

$$3 \cdot 4 = 12$$

$$4 \cdot 4 = 16$$

$$5 \cdot 4 = 20$$

Κ.Ο.Κ.

Γενικά: Για νὰ βροῦμε τὰ πολλαπλάσια ενός ἀριθμοῦ τὸν πολλαπλασιάζουμε μὲ τοὺς ἀκεραίους ἀριθμοὺς $0, 1, 2, 3, 4, 5 \dots$

118.2 Ἄς πάρουμε τὰ σύνολα τῶν πολλαπλασίων τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ ἀκεραίου $0 = \{0\}$

» » » » $1 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = \Phi_0$

Σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ $2 = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

» » » » $3 = \{0, 3, 6, 9, 12, \dots\}$

» » » » $4 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, \dots\}$

Παρατηροῦμε ὅτι

α) Τὸ σύνολο τῶν πολλαπλασίων τοῦ 0 εἶναι μονομελές

β) » » » » » ὁποιοῦδήποτε φυσικοῦ ἀριθμοῦ

ἔχει μὴ πεπερασμένου πλήθους στοιχεῖα μὲ ἐλάχιστο στοιχεῖο τὸ 0 καὶ ἀμέσως ἐπόμενο τὸν ἴδιο τὸν ἀριθμό.

118.3 Ἄς πάρουμε τὸ σύνολο Σ τῶν πολλαπλασίων ενός φυσικοῦ ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 3. Ἔχουμε $\Sigma = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}$. Ἄν προσθέσουμε δύο ὁποιαδήποτε στοιχεῖα τοῦ Σ π.χ. $6 + 9 = 15$ τότε τὸ ἄθροισμά τους, τὸ 15, εἶναι στοιχεῖο τοῦ ἰδίου συνόλου. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὴ διαφορά καὶ τὸ γινόμενο δυὸ στοιχείων τοῦ Σ

$$15 - 9 = 6 \in \Sigma$$

$$12 \cdot 6 = 72 \in \Sigma$$

Ὡστε : Ἄν προσθέσουμε ἢ ἀφαιρέσουμε ἢ πολ)σουμε δύο πολ)σια ενός ἀριθμοῦ θὰ βροῦμε πάλι πολ)σιο τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ.

§ 119. Κοινὰ πολλαπλάσια δύο φυσικῶν ἀριθμῶν

Ἄς πάρουμε δύο φυσικοὺς ἀριθμοὺς π.χ. τοὺς 4 καὶ 5 κι' ἄς σχηματίσουμε τὰ σύνολα Σ_1 καὶ Σ_2 τῶν πολλαπλασίων αὐτῶν : ἔχουμε :

Σύνολο Σ_1 τῶν πολλαπλασίων τοῦ 4 : $\Sigma_1 = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, \dots\}$

Σύνολο Σ_2 των πολλαπλασίων του 5: $\Sigma_2 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$
 τότε το σύνολο $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ αποτελείται από τα **κοινά πολλαπλάσια** αυτών
 $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0, 20, 40, 60, \dots\}$

Παρατηρούμε ότι το $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ έχει (εκτός από το 0) ένα ελάχιστο στοιχείο το 20, το όποιον ονομάζουμε **ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των αριθμών 4 και 5** ή πιο σύντομα Ε.Κ.Π. των 4 και 5. Άνάλογα ισχύουν και για την περίπτωση τριών ή περισσότερων αριθμών.

Παρατήρηση:

Ας προσέξουμε τα δύο σύνολα:

α) το $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{0, 20, 40, \dots\}$

β) το $\Sigma_3 = \{\chi / \chi \text{ πολλαπλάσιο του Ε.Κ.Π.}\} = \{0, 20, 40, \dots\}$

Παρατηρούμε ότι ταυτίζονται

Άρα: Το σύνολο των κοινών πολ)σίων ταυτίζεται με το σύνολο των πολ)σίων του Ε.Κ.Π.

§ 120. Εύρεση του Ε.Κ.Π

120.1 Ποιό είναι το Ε.Κ.Π των αριθμών 8 και 24

Παρατηρούμε ότι το 24 είναι το μικρότερο (εκτός από το 0) πολλαπλάσιο του 8 και του 24, επομένως είναι και πολλαπλάσιο του 8 έχουμε

Ε.Κ.Π. των 8 και 24 είναι το 24
 ανάλογα έχουμε

Ε.Κ.Π. των 8, 24, 48 είναι το 48.

120.2. Ποιό είναι το Ε.Κ.Π των αριθμών 12, 15, 20

Το σύνολο Α των πολλαπλασίων του 12: $A = \{0, 12, 24, 36, 48, 60, \dots\}$

» » Β » » » 15: $B = \{0, 15, 30, 45, 60, 75, \dots\}$

» » Γ » » » 20: $\Gamma = \{0, 20, 40, 60, 80, \dots\}$

$A \cap B = \{0, 60, 120, 180, \dots\}$

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{0, 60, 120, 180, \dots\} \cap \{0, 20, 40, 60, 80, \dots\}$

$= \{0, 60, 120, \dots\}$

ώστε Ε.Κ.Π. των αριθμών (12, 15, 20) είναι το 60

120.3 Εύρεση του Ε.Κ.Π. δι' αναλύσεως σε πρώτους παράγοντες

Ας πάρουμε δύο ή περισσότερους αριθμούς κι' ας αναλύσουμε αυτούς καθώς και το Ε.Κ.Π. αυτών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Παράδειγμα 1ο

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

Ε.Κ.Π. των (15, 20) είναι το 60
 $= 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Παράδειγμα 2ο

$$18 = 2 \cdot 3^2$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

Ε.Κ.Π. των (18, 30) είναι το 90
 $= 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

Παράδειγμα 3ο

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$20 = 2^2 \cdot 5$$

Ε.Κ.Π. των (12, 15, 20) είναι το 60
 $= 2^2 \cdot 3 \cdot 5$

"Αν προσέξουμε τους πρώτους παράγοντες του Ε.Κ.Π. και τους πρώτους παράγοντες των αριθμών διακρίνουμε ότι:

Το Ε.Κ.Π. αποτελείται από όλους τους πρώτους παράγοντες των αριθμών, κοινούς και μη κοινούς και με τους μεγαλύτερους εκθέτας.

Εφαρμογή. Ποιό είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών 24 και 150;

έχουμε $24 = 2^3 \cdot 3$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

άρα $\text{Ε.Κ.Π.} = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

355) Ποιό είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών

α) 15, 30

β) 15, 30, 40

356) Ποιό είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών:

α) 72, 120

β) 72, 120, 150

357) Ποιό είναι το Ε.Κ.Π. των αριθμών: $2^3 \cdot 5$ και 92

358) "Ένα λεωφορείο ξεκινάει από την αφετηρία κάθε 4', άλλο λεωφορείο β κάθε 5'. "Αν τώρα ξεκινήσουν μαζί, μετά πόσο χρόνο θα ξεκινήσουν πάλι μαζί και πόσα δρομολόγια θα έχει κάνει στο διάστημα αυτό το κάθε λεωφορείο ;

359) Ένα πλοίο α ξεκινάει απ' τὸν Πειραιᾶ κάθε 3 ἡμέρες, ἄλλο πλοίο β κάθε 4 ἡμέρες καὶ τρίτο πλοίο γ κάθε 6 ἡμέρες. Ἐν ξεκινήσουν μιὰ ἡμέρα καὶ τὰ 3 πλοῖα μαζί, σὲ πόσες ἡμέρες τὸ λιγώτερο θὰ συμβῇ τὸ ἴδιο;

360) Οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεώς μας μποροῦν νὰ παραταχθοῦν σὲ τριάδες ἢ τετράδες ἢ πεντάδες χωρὶς νὰ περισσεύη κανεὶς, εἶναι δὲ λιγώτεροι ἀπὸ 80. Πόσους μαθητὲς ἔχει ἡ τάξη;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

361) Στὸ τέλος τῶν ἀριθμῶν 38 46 715 38145
νὰ τοποθετήσετε ἓνα ἀκόμη ψηφίο ὥστε νὰ σχηματισθοῦν ἀριθμοὶ διαιρε-
τοὶ διὰ 9.

362) Ὅλα τὰ ψηφία ἐνὸς ἀριθμοῦ εἶναι 5. Εἶναι δυνατόν νὰ εἶναι διαι-
ρετὸς διὰ 2 ἢ 3 ἢ 4 ἢ 9;

363) Ἐν ἓνας ἀριθμὸς εἶναι διαιρετὸς διὰ 9 καὶ ἀλλάξουμε τὴ σειρὰ τῶν
ψηφίων του θὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 9;

364) Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς τὸν ὁποῖο πρέπει νὰ προσθέσουμε
στὸν ἀριθμὸ 614 γιὰ νὰ προκύψῃ ἀριθμὸς διαιρετὸς διὰ 3, 4, 9;

365) Οἱ μαθηταὶ ἐνὸς σχολείου εἶναι τόσοι, ὥστε ἂν τοποθετηθοῦν κατὰ
10δες λείπει ἓνας, ἐνῶ ἂν τοποθετηθοῦν κατὰ 9δες περισσεύουν 7. Ποιὸς
εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου τούτου, ἂν μᾶς εἶναι γνωστὸ ὅτι
εἶναι περισσότεροι ἀπὸ 300 καὶ λιγώτεροι ἀπὸ 400;

366) Νὰ ἀναλύσετε σὲ πρώτους παράγοντες τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν:

$$6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 12 = 2^2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3^2$$

Τί παρατηρεῖτε στοὺς ἐκθέτες, εἶναι ἄρτιοι ἢ περιττοί;

367) Ἡ διαίρεση ἐνὸς ἀκεραίου α διὰ 72 ἀφήνει ὑπόλοιπο 64. Ποιὸς
εἶναι ὁ Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν α καὶ 72;

368) Δίδεται ὅτι Μ.Κ.Δ. τῶν ἀριθμῶν χ καὶ 1524 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 127
Ποιὲς τιμὲς μπορεῖ νὰ ἔχῃ ὁ χ;

369) 4 εὐθύγραμμα τμήματα μὲ μήκη 240 m, 165 m, 210 m, 255 m ἐμε-
τρήθησαν μὲ τὸ ἴδιο εὐθύγραμμο τμήμα καὶ τὰ ἀποτελέσματα τῶν μετρή-
σεων ἦσαν ἀκέραιοι. Ποιὸ ἦταν τὸ μῆκος (σὲ m) τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ
τμήματος;

370) Νὰ εὑρετε τὸ Μ.Κ.Δ. καὶ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν ἀριθμῶν $A = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$
καὶ $B = 2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὸ γινόμενο $A \cdot B$ μὲ τὸ γινόμενο
τοῦ Μ.Κ.Δ. μὲ τὸ Ε.Κ.Π. Τί παρατηρεῖτε;

371) Τὰ πλοῖα μιᾶς ἀκτοπλοϊκῆς γραμμῆς ἀναχωροῦν ἀπ' τὸν Πειραιᾶ
κάθε 4 ἡμέρες, μιᾶς ἄλλης γραμμῆς κάθε 5 ἡμέρες καὶ μιᾶς τρίτης κάθε 6
ἡμέρες. Ἐν οἱ ἀναχωρήσεις τῶν πλοίων καὶ τῶν τριῶν γραμμῶν ἔγιναν τὴν
ἴδια ἡμέρα, μετὰ πόσες ἡμέρες θὰ ἐπαναληφθῇ αὐτό;

Περίληψη

- 1) Πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί.
- 2) Ιδιότητες διαιρετών.
- 3) Κριτήρια διαιρετότητας.
- 4) Δοκιμή πολλαπλασιασμού και διαιρέσεως με τα υπόλοιπα διὰ 9.
- 5) Ανάλυση αριθμού σε πρώτους παράγοντες.
- 6) Γινόμενο, ηλίκο αριθμών που έχουν αναλυθῇ σε πρώτους παράγοντες.
- 7) Μέγιστος κοινός διαιρέτης. Εὐκλείδειος ἀλγόριθμος.
- 8) Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο.
- 9) Γενικὲς ἀσκήσεις.



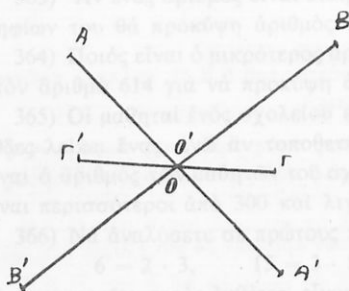


ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ

§ 121. Συμμετρία ως προς σημείο στο επίπεδο

121.1 Συμμετρικό ενός σημείου

Παίρνουμε στο επίπεδο δύο σημεία O και A σχ. 118. Χαράζουμε το εὐθύγραμμο τμήμα AO κι' ἔπειτα τὸ προεκτείνουμε πρὸς τὸ O κατὰ τμήμα $OA' = AO$. Τὸ σημείο A' λέγεται **συμμετρικὸ τοῦ σημείου A ως πρὸς τὸ O** .



Σχ. 118

Παίρνουμε, στὸ ἴδιο ἐπίπεδο, κι' ἄλλο σημείο B . Φέρουμε τὴν OB κι' ἔπειτα τὴν προεκτείνουμε κατὰ τμήμα $OB' = OB$. Τότε θὰ ἔχουμε τὸ σημείο **B' συμμετρικὸ τοῦ σημείου B ως πρὸς τὸ σημείο O** .

Ποιό εἶναι τὸ συμμετρικὸ O' τοῦ σημείου O ως πρὸς τὸν ἑαυτοῦ του; Εἶναι φανερό ὅτι τὸ O' ταυτίζεται μὲ τὸ O . ($O' \equiv O$).

Ποιό εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ A' ως πρὸς τὸ O ;

Εἶναι $A'O = OA$ ἄρα τὸ A εἶναι συμμετρικὸ τοῦ A' ως πρὸς τὸ O .

Τὰ σημεία A καὶ A' λέγονται **συμμετρικά μετὰ κέντρο συμμετρίας τὸ σημείο O** .

Ἄν ἔχουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα GG' ἢ ἓνα ζεύγος σημείων G καὶ G' εἶναι φανερό ὅτι τὸ μέσον O τοῦ GG' εἶναι κέντρο συμμετρίας στὴν ὁποία τὰ G καὶ G' εἶναι συμμετρικά μεταξύ των.

121.2 Ἡ συμμετρία ως στροφὴ

Καρφώνουμε ἓνα διαφανὲς χαρτί στὸ σημείο O σχῆμα 118, ἀποτυπώνουμε πάνω σ' αὐτὸ τὰ σημεία A καὶ B κι' ἔπειτα στρέφουμε τὸ χαρτί ἐπάνω στὸ ἐπίπεδο περὶ τὸ σημείο O κατὰ 180° . Τότε παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεία A καὶ B ταυτίζονται μὲ τὰ συμμετρικά τους A' καὶ B' .

Γενικά: ἂν στρέψουμε τὸ ἐπίπεδο περὶ τὸ O πάνω στὸν ἑαυτό του κατὰ γωνία 180° , τότε κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου θὰ ἔλθῃ νὰ «πέσῃ» στὸ συμμετρικό του ὡς πρὸς τὸ σημεῖο O .

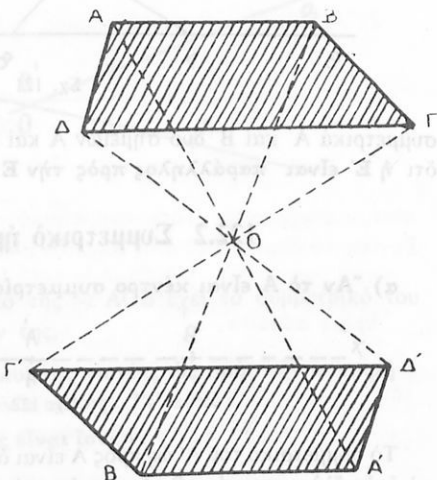
Ἄρα: Ἡ συμμετρία στὸ ἐπίπεδο ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας O ἰσοδυναμεῖ μὲ μιὰ στροφή περὶ τὸ O κατὰ 180° .

121.3 Συμμετρικὰ σχήματα καὶ σύγκριση αὐτῶν

Ἐπειδὴ κάθε ἐπίπεδο σχῆμα Σ εἶναι ἓνα σύνολο σημείων $\Sigma = \{A, B, \Gamma, \dots\}$ τοῦ ἐπιπέδου, μπορούμε νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ Σ' τοῦ Σ ἂν βροῦμε τὰ συμμετρικὰ σημεία $A', B', \Gamma', \dots$ τῶν σημείων $A, B, \Gamma, \dots$.

Ὅπως εἶδαμε τὰ συμμετρικὰ σημεία κατὰ μιὰ στροφή περὶ τὸ O κατὰ 180° ταυτίζονται. Ἄρα κατὰ τὴν ἴδια περιστροφή θὰ ταυτίζονται καὶ τὰ συμμετρικὰ σχήματα Σ καὶ Σ' .

Ὡστε: «Δύο συμμετρικὰ σχήματα Σ καὶ Σ' ὡς πρὸς O εἶναι ἴσα».

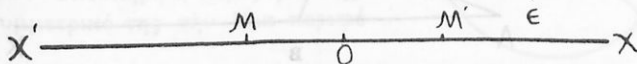


Σχ. 119

§ 122. Ἀξιοσημείωτες περιπτώσεις συμμετρικῶν σχημάτων

122.1 Συμμετρικὸ εὐθείας

α) Ὅταν ἡ εὐθεῖα διέρχεται ἀπ' τὸ κέντρο συμμετρίας O σχ. 120. Τὸ κέντρο O χωρίζει τὴν εὐθεῖα ϵ σὲ δύο ἡμιευθεῖες $O\chi$ καὶ $O\chi'$. Τὸ συμμετρικὸ κάθε σημείου M τῆς $O\chi$ εἶναι ἓνα σημεῖο M' τῆς $O\chi'$.



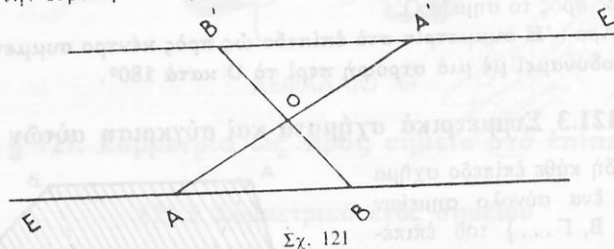
Σχ. 120

Ὡστε: τὸ συμμετρικὸ τῆς $O\chi$ εἶναι ἡ $O\chi'$ καὶ ἀντίστροφα:

Τὸ συμμετρικὸ τῆς $O\chi'$ εἶναι ἡ $O\chi$.

Ἄρα: Τὸ συμμετρικὸ ϵ' τῆς ϵ εἶναι ἡ ἴδια ἡ ϵ . $\epsilon' \equiv \epsilon$

β) "Όταν ή εὐθεΐα E δέν διέρχεται ἀπό τὸ κέντρο O σχ. 121
Γιά τὴν εὕρεση τοῦ συμμετρικοῦ E' τῆς E ὡς πρὸς τὸ O , εὐρίσκουμε τὰ

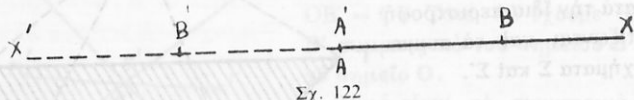


Σχ. 121

συμμετρικά A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B αὐτῆς. Εὐκόλα ἐξακριβώνουμε ὅτι ή E' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν E .

122.2 Συμμετρικὸ ἡμιευθεΐας $A\chi$.

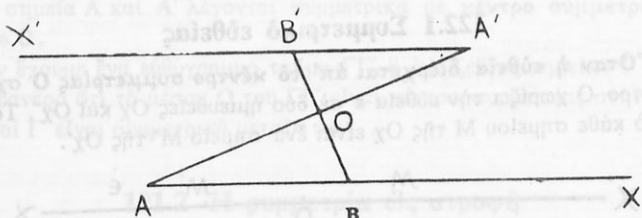
α) "Αν τὸ A εἶναι κέντρο συμμετρίας σχ. 122



Σχ. 122

Τὸ συμμετρικὸ τοῦ A' ὡς πρὸς A εἶναι ὁ ἑαυτὸς του. $A' = A$. Τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς ἄλλου σημείου B τῆς $A\chi$ ὡς πρὸς τὸ A εἶναι ἓνα σημεῖο B' ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $A\chi$ πρὸς τὸ A . "Αρα: τὸ συμμετρικὸ τῆς $A\chi$ ὡς πρὸς A εἶναι ή ἡμιευθεΐα $A\chi'$

β) "Αν τὸ κέντρο συμμετρίας O εἶναι ἐκτὸς τῆς $A\chi$ σχ. 123



Σχ. 123

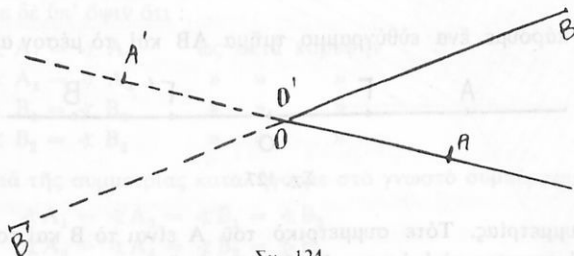
Εὐρίσκομε καὶ πάλι τὰ συμμετρικά A' καὶ B' δύο σημείων A καὶ B τῆς $A\chi$ κι' ἔτσι ἔχουμε τὸ συμμετρικὸ τῆς $A\chi$ ὡς πρὸς κέντρο ἐκτὸς αὐτῆς ποὺ εἶναι μιὰ ἡμιευθεΐα $A'\chi'$ παράλληλος πρὸς τὴν $A\chi$.

122.3 Συμμετρικό μιᾶς κυρτῆς γωνίας AOB

Ως πρὸς τὴν κορυφὴν αὐτῆς.

Τὸ συμμετρικὸ O' τοῦ O εἶναι τὸ ἴδιο τὸ O .

Τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων A καὶ B εἶναι τὰ σημεία A' καὶ B' ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν OA , OB .



Σχ. 124

Κάθε σημεῖο H στὸ ἐσωτερικὸ τῆς $\angle AOB$ ἔχει τὸ συμμετρικὸ του στὸ ἐσωτερικὸ τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς.

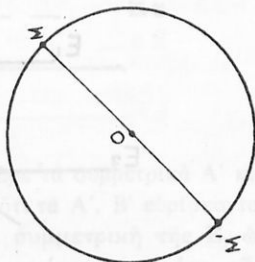
Ἄρα τὸ συμμετρικὸ μιᾶς κυρτῆς γωνίας ὡς πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς εἶναι ἡ κατὰ κορυφὴν γωνία αὐτῆς. Γι' αὐτὸ:

«Οἱ κατὰ κορυφὴν γωνίες εἶναι ἴσες».

§ 123. Κέντρο συμμετρίας ἑνὸς σχήματος

123.1 Ἀς χαράξουμε περιφέρεια (O, OM) σχ. 125 καὶ ἂς βροῦμε τὸ συμμετρικὸ σχῆμα αὐτῆς ὡς πρὸς τὸ κέντρο O . Εὐκόλα ἐξακριβώνουμε ὅτι τὸ συμμετρικὸ κάθε σημείου M αὐτῆς εὐρίσκεται στὸ ἄκρο M' τῆς διαμέτρου ποὺ περνάει ἀπὸ τὸ M , δηλαδὴ εἶναι σημεῖο τῆς ἴδιας περιφέρειας.

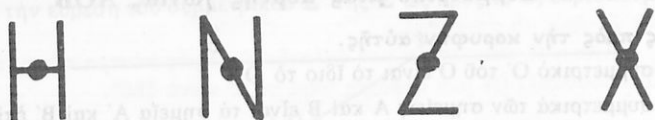
Ἄρα: Ὁλόκληρη ἡ περιφέρεια ἔχει ὡς συμμετρικὸ τῆς τὴν ἴδια περιφέρεια.



Σχ. 125

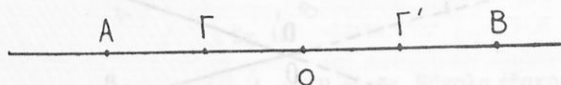
Ὅταν συμβῇ τὸ συμμετρικὸ Σ' ἑνὸς σχήματος Σ ὡς πρὸς ἓνα σημεῖο O νὰ εἶναι τὸ ἴδιο τὸ σχῆμα, τότε λέγομε ὅτι τὸ σχῆμα ἔχει κέντρο συμμετρίας τὸ σημεῖο O .

Παραδείγματα 1) Τα σύμβολα H, N, Z, X έχουν κέντρο συμμετρίας.



Σχ. 126

2) "Ας πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και το μέσον αυτού O ως



Σχ. 127

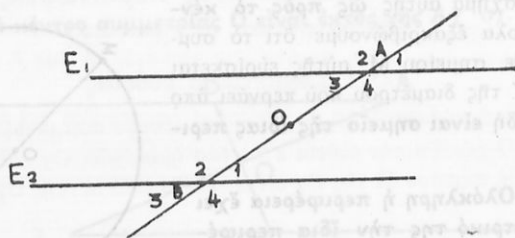
κέντρο συμμετρίας. Τότε συμμετρικό του A είναι το B και του B το A. Γενικά το συμμετρικό ενός σημείου Γ του AB είναι σημείο Γ' του AB.

"Αρα: «Το μέσον O του τμήματος AB είναι κέντρο συμμετρίας αυτού».

Αντίθετα: "Αν πάρουμε ήμικυκλεία Aχ και κέντρο συμμετρίας το A, τότε το συμμετρικό της Aχ ΔΕΝ είναι ή ίδια ή Aχ.

"Ωστε: Το A δεν είναι κέντρο συμμετρίας της Aχ.

123.2 "Ας πάρουμε το σχήμα που ορίζεται από 2 ευθείες παράλληλες E_1 και E_2 τεμνόμενες από μιá άλλη ευθεία σχ. 128. Παίρνουμε το μέσον O της AB ως κέντρο συμμετρίας και παρατηρούμε ότι:



Σχ. 128

α) Τα σημεία A και B είναι συμμετρικά ως προς O (επειδή $OA = OB$).

β) Οί ευθείες E_1 E_2 είναι συμμετρικές ως προς το O. (Μπορείτε να το επαληθεύσετε με το συμμετρικό ενός ή περισσότερων σημείων της E_2 ως προς το O).

Άρα : Τὸ σημεῖο O εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Ἀπὸ αὐτὸ συνάγουμε ὅτι :

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_3 \text{ (συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸ } O)$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle B_4 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$\sphericalangle A_3 = \sphericalangle B_1 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$\sphericalangle A_4 = \sphericalangle B_2 \quad \gg \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

ἂν λάβουμε δὲ ὑπ' ὄψιν ὅτι :

$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_3 \quad \text{ὡς κατὰ κορυφὴν}$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_4 \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$\sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3 \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

$$\sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_4 \quad \gg \quad \gg \quad \gg$$

Ἔτσι διὰ τῆς συμμετρίας καταλήγουμε στὸ γνωστὸ συμπέρασμα

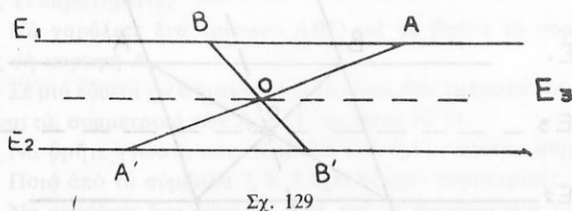
$$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle A_3 = \sphericalangle B_1 = \sphericalangle B_3$$

$$\sphericalangle A_2 = \sphericalangle A_4 = \sphericalangle B_2 = \sphericalangle B_4$$

Δηλαδή : "Ὅλες οἱ ὀξείες κί' ὅλες οἱ ἀμβλεῖς γωνίες ποὺ σχηματίζονται ὅταν μία εὐθεῖα τέμνῃ δύο παράλληλες εὐθεῖες, εἶναι μεταξύ τους ἴσες.

123.3 Κέντρα συμμετρίας ταινίας

Χαράζουμε δύο παράλληλες εὐθεῖες τῖς E_1 , E_2 κί' ἔπειτα στή ταινία τῶν E_1 , E_2 τὴ μεσοπαράλληλη εὐθεῖα E_3 σχ. 129.



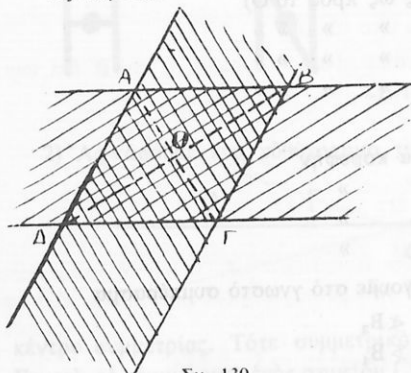
Σχ. 129

Ἄς πάρουμε ἓνα σημεῖο O τῆς E_3 κί' ἄς βροῦμε τὰ συμμετρικὰ A' καί B' δύο σημείων A καί B τῆς E_1 . Παρατηροῦμε ὅτι τὰ A' , B' εὐρίσκονται ἑπάνω στὴν E_2 . Αὐτὸ σημαίνει ὅτι ἡ E_2 εἶναι συμμετρικὴ τῆς E_1 ὡς πρὸς τὸ σημεῖο O . Ἄρα τὸ O εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων E_1 , E_2 . Τὸ ἴδιο ὁμοῦς συμβαίνει κί' ἂν πάρουμε ἄλλο σημεῖο τῆς E_3 .

Ὡστε : Κάθε σημεῖο τῆς μεσοπαράλληλου E_3 εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων E_1 , E_2 .

123.4 Παραλληλόγραμμα

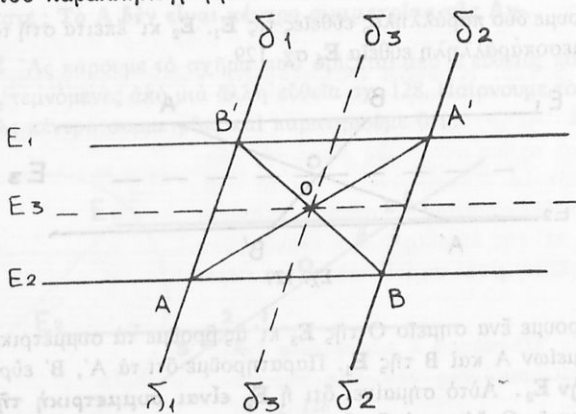
“Ας πάρουμε δύο ταινίες· την ταινία των ϵ_1, ϵ_2 ($\epsilon_1 // \epsilon_2$) και την ταινία των δ_1, δ_2 ($\delta_1 // \delta_2$) σχήμα 130. Ορίζεται έτσι το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες και γι’ αυτό λέγεται **παραλληλόγραμμα**.”



Σχ. 130

123.5 Ίδιότητες παραλληλογράμμου

Παρατηρούμε ότι η τομή O των μεσοπαράλλελων ϵ_3 και δ_3 σχ. 131 είναι κοινό κέντρο συμμετρίας των δύο ταινιών· άρα είναι κέντρο συμμετρίας του παραλληλογράμμου $ΑΒΑ'Β'$.



Σχ. 131

‘Από αυτό συνάγουμε:

- α) Οί απέναντι κορυφές A, A' καθώς και B, B' είναι συμμετρικές ως πρὸς τὸ O . Άρα:

$$OA = OA'$$

$$BO = OB' \quad \text{ὥστε:}$$

Αί διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνονται στὰ μέσα των δηλ. διχοτομοῦνται.

β) Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς εἶναι **συμμετρικὲς** ὡς πρὸς τὸ **Ο** ἄρα ἴσες.

Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

γ) Οἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι **συμμετρικὲς** ὡς πρὸς τὸ **Ο** ἄρα ἴσες.

Οἱ ἀπέναντι γωνίαι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσες.

Ὅλες αὐτὲς τὶς ιδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου μπορεῖτε νὰ τὶς ἐπαληθεύσετε μὲ διαφανὲς χαρτί.

§ 124. Ρόμβος

Ἄν πάρουμε δύο ἴσες ταινίες καὶ τὶς τοποθετήσουμε ἔτσι ὥστε νὰ τέμνονται, στὴν τομὴ τους σχηματίζεται ἓνα **εἰδικὸ παραλληλόγραμμο** ποὺ ἔχει **ὅλες** τὶς πλευρὲς ἴσες καὶ λέγεται **ρόμβος**. Ἄν προσέξουμε τὶς διαγωνίους τοῦ παρατηροῦμε ὅτι εἶναι **κάθετοι**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

372) Σημειώστε τρία σημεῖα **A, B, Γ**, ἔπειτα νὰ βρῆτε τὰ συμμετρικά τους ὡς πρὸς κέντρο τὸ ἓνα ἀπὸ αὐτὰ π.χ. τὸ **A**.

373) Νὰ χαράξετε μία περιφέρεια (**O, OA**) καὶ μία χορδὴ **AB** αὐτῆς. Ἐπειτα νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ τῆς χορδῆς **AB** ὡς πρὸς τὸ κέντρο τῆς περιφέρειας. Τί παρατηρεῖτε;

374) Νὰ χαράξετε ἓνα τρίγωνο **ABΓ** καὶ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ὡς πρὸς τὴ κορυφὴ **A**.

375) Σὲ μιὰ εὐθεῖα **χψ** σημειώστε διαδοχικὰ ἴσα τμήματα **OA = AB = BΓ**. Ποιὰ εἶναι τὰ συμμετρικά τῶν **A, B, Γ**, ὡς πρὸς τὸ **O**;

376) Νὰ βρῆτε γνωστὰ σας σύμβολα ποὺ ἔχουν κέντρο συμμετρίας.

377) Ποιό ἀπὸ τὰ σύμβολα **7, 8, 9** ἔχει κέντρο συμμετρίας;

378) Νὰ χαράξετε ἓνα τρίγωνο **ABΓ** καὶ νὰ σχηματίσετε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ὡς πρὸς τὸ μέσον **M** μιᾶς πλευρᾶς αὐτοῦ. Τὸ σχῆμα ποὺ ἀποτελοῦν τὰ 2 τρίγωνα ἔχει κέντρο συμμετρίας;

379) Νὰ σχηματίσετε μιὰ κυρτὴ γωνία **χOγ** καὶ ἔπειτα τὴ συμμετρικὴ τῆς ὡς πρὸς τὸ **O**. Τὸ σχῆμα τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν ἔχει κέντρο συμμετρίας;

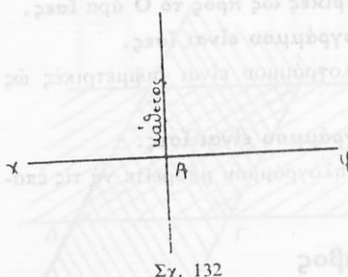
380) Νὰ χαράξετε δύο εὐθεῖες παράλληλες καὶ μιὰ ἄλλη εὐθεῖα. Ἄν μιὰ ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ ἐσχηματίσθησαν εἶναι 70° νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες γωνίες.

381) Σ' ἓνα παραλληλόγραμμο ἡ μιὰ γωνιά εἶναι 80° . Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἄλλες γωνίες αὐτοῦ.

§ 125. Χάραξη καθέτων εὐθειῶν

Ἀπὸ ἑνὸς σημείου A νὰ χαράξουμε κάθετο πρὸς μίαν εὐθεῖαν $\chi\psi$.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι δύο εὐθεῖες εἶναι κάθετοι ὅταν τέμνονται καὶ σχηματίζουν ὀρθές γωνίες.



Σχ. 132

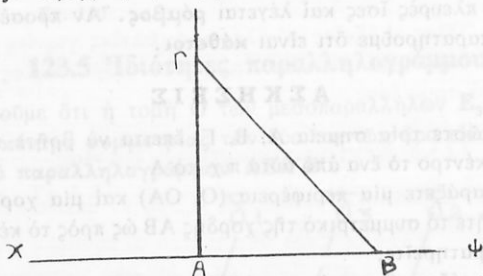
125.1 α) Ἄν τὸ A βρίσκεται πᾶνω στὴ $\chi\psi$. σχ. 132

αὐτὸς τρόπος. Τσακίζουμε τὸ χαρτί

ἔτσι ὥστε ἡ $A\chi$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν $A\psi$

Ἡ εὐθεῖα ποὺ σχηματίζει τὸ τσάκισμα εἶναι ἡ μόνη κάθετος ἀπὸ τὸ σημείο A πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\chi\psi$. σχ. 132.

βος τρόπος. Ἐφαρμόζουμε τὴ μία κάθετο πλευρὰ τοῦ ὀρθογωνίου τρι-

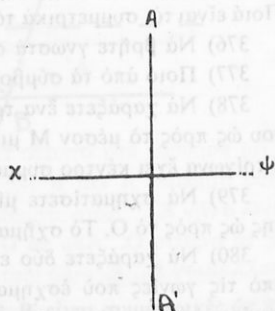


Σχ. 133

γώνου μας (Γνώμονα) στὴ $\chi\psi$ μὲ τρόπο ὥστε ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας τοῦ τριγώνου νὰ «συμπέση» μὲ τὸ A . Τότε ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τοῦ τριγώνου ὀρίζει τὴν κάθετο εὐθεῖαν πρὸς τὴ $\chi\psi$ στὸ σημείο A . σχ. 133

125.2 β) Ἄν τὸ σημείο A βρίσκεται ἐκτὸς τῆς εὐθείας $\chi\psi$.

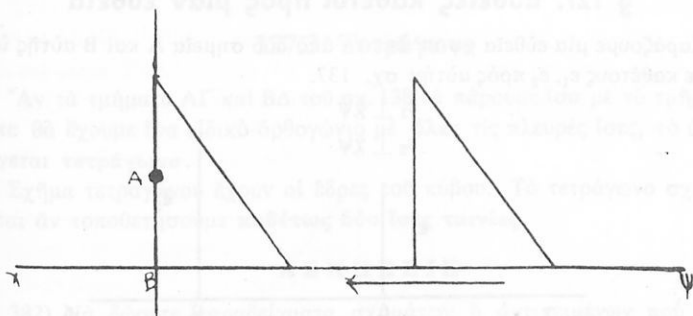
αὐτὸς τρόπος. Πάλι τσακίζουμε τὸ χαρτί περὶ τὴν $\chi\psi$. Τότε τὸ σημείο A θὰ πέσῃ σ' ἕνα σημείο A' , σχῆμα 134. Ἀνοίγουμε πάλι τὸ χαρτί καὶ χαράζουμε τὴν εὐθεῖαν AA' ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἀπ' τὸ σημείο A πρὸς τὴν εὐθεῖαν $\chi\psi$.



Σχ. 134

βος τρόπος. Τοποθετοῦμε τὴ μία κάθετο πλευρὰ τοῦ τριγώνου μας

πάνω στη $\chi\psi$ και μετακινούμε το τρίγωνο (μέ προσοχή ώστε η κάθετη πλευρά του τριγώνου να εφαρμόζει πάντα στη $\chi\psi$) ώσπου η άλλη κάθετος πλευρά να συναντήσει το σημείο Α. σχήμα 135, τότε η ευθεία ΑΒ είναι κάθετος προς τη $\chi\psi$.



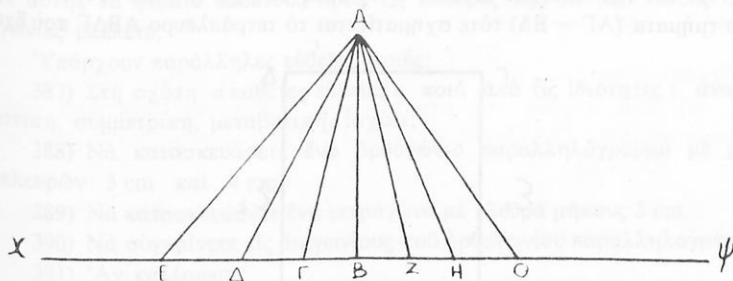
Σχ. 135

Από τούς τρόπους κατασκευής της καθέτου συνάγουμε ότι:

«Από ένα σημείο προς μία ευθεία μία μόνο κάθετος υπάρχει».

§ 126. Απόσταση σημείου από ευθεία

Χαράζουμε ευθεία $\chi\psi$ και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α μπορούμε να φέρουμε όσες θέλουμε ευθείες που να συναντούν την $\chi\psi$ και μεταξύ αυτών την κάθετο ΑΒ, σχ. 136.



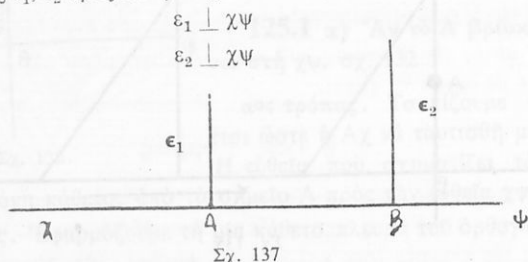
Σχ. 136

Με το διαβήτη συγκρίνουμε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΑΕ, ΑΖ, ΑΗ, ΑΘ. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το τμήμα ΑΒ της καθέτου είναι μικρότερο απ' όλα τα άλλα τμήματα που ονομάζονται πλάγια. Το μήκος του τμήματος ΑΒ λέγεται απόσταση του σημείου Α από την ευθεία $\chi\psi$.

Σημείωση. Δεν πρέπει να συγχέουμε την απόσταση ενός σημείου από μια ευθεία με την απόσταση δύο σημείων Α και Β, που είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

§ 127. Ευθείες κάθετοι προς μίαν ευθεία

Χαράζουμε μία ευθεία $\chi\psi$ κι' έπειτα από δύο σημεία Α και Β αυτής ύψώνουμε καθέτους ϵ_1, ϵ_2 προς αυτήν σχ. 137.



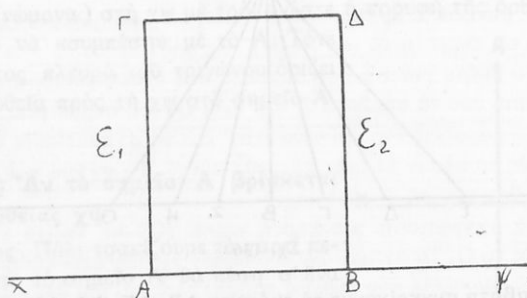
Εύκολα διαπιστώνουμε (με τὸ γνῶμονα) ὅτι $\epsilon_1 // \epsilon_2$.

Ὡστε: «δύο ευθείες κάθετοι προς μίαν ἄλλη ευθεία εἶναι μεταξύ τους παράλληλοι»
ἢ συμβολικά

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon_1 \perp \chi\psi \\ \epsilon_2 \perp \chi\psi \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_1 \parallel \epsilon_2$$

127.2 Ὁρθογώνιο παραλληλόγραμμο

Ἄν ἐπὶ τῶν καθέτων ευθειῶν ϵ_1, ϵ_2 πρὸς τὴν $\chi\psi$ (σχῆμα 138) πάρουμε ἴσα τμήματα ($ΑΓ = ΒΔ$) τότε σχηματίζεται τὸ τετράπλευρο ΑΒΔΓ πὺ ἔχει:



α) Τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες.

β) Ὅλες τὶς γωνίες ὀρθές καὶ λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο**.

Δηλαδή τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο εἶναι ἓνα **εἰδικὸ** παραλληλόγραμμο. Σχήμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου ἔχουν οἱ ἔδρες τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπίδου. Τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο σχηματίζεται ἂν τοποθετήσουμε καθέτως δύο ταινίες.

127.3 Τετράγωνο

Ἄν τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ σχ. 138 τὰ πάρουμε ἴσα μὲ τὸ τμήμα ΑΒ, τότε θὰ ἔχουμε ἓνα εἰδικὸ ὀρθογώνιο μὲ **ὅλες** τὶς πλευρὲς ἴσες, τὸ ὁποῖον λέγεται **τετράγωνο**.

Σχήμα τετραγώνου ἔχουν οἱ ἔδρες τοῦ κύβου. Τὸ τετράγωνο σχηματίζεται ἂν τοποθετήσουμε **καθέτως δύο ἴσες ταινίες**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

382) Νὰ δώσετε παραδείγματα σχημάτων ἢ ἀντικειμένων ποὺ ἔχουν κάθετες εὐθεῖες.

383) Νὰ χαράξετε δύο εὐθεῖες e_1 e_2 παράλληλες κι' ἔπειτα ἀπὸ ἓνα σημεῖο Α νὰ χαράξετε μία κάθετο πρὸς τὴν e_1 καὶ νὰ τὴν προεκτείνετε ὅπου νὰ συναντήσῃ τὴν e_2 . Τί παρατηρεῖτε;

384) Νὰ χαράξετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ βρῆτε τὴν ἀπόσταση τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὴν πλευρὰ ΒΓ.

385) Ἀπὸ τὶς τρεῖς κορυφὲς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ νὰ χαράξετε καθέτους πρὸς τὶς ἀπέναντι πλευρὲς. Τί παρατηρεῖτε;

386) Νὰ χαράξετε μία ὀρθή γωνία χογ κι' ἀπὸ ἓνα ἐσωτερικὸ σημεῖο Α αὐτῆς νὰ φέρετε καθέτους πρὸς τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας. Πόσες ὀρθές γωνίες βλέπετε;

Ὑπάρχουν παράλληλες εὐθεῖες, ποιές;

387) Στὴ σχέση «καθετες εὐθεῖες» ποιά ἀπὸ τὶς ιδιότητες : ἀνακλαστική, συμμετρική, μεταβατική, ἰσχύει;

388) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ μήκη πλευρῶν 3 cm καὶ 4 cm.

389) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ μήκους 3 cm.

390) Νὰ συγκρίνετε τὶς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου.

391) Ἄν καλέσωμε :

Π τὸ σύνολο τῶν παραλληλογράμμων

P » » » ρόμβων

O » » » ὀρθογωνίων

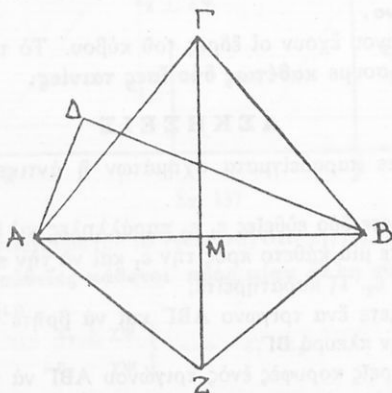
T » » » τετραγώνων.

Ποιά σχέση ὑπάρχει μεταξὺ τῶν Π, Ρ, Ο, Τ; Νὰ τὴν ἀποδώσετε μὲ διάγραμμα.

§ 128. Κάθετος στο μέσον ευθυγράμμου τμήματος ή μεσοκάθετος

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η κάθετος στο μέσον ευθυγράμμου τμήματος (μεσοκάθετος).

"Ας πάρουμε τὸ μέσον M ευθυγράμμου τμήματος AB σχ. 139, κ' ὡς ὑψώσουμε τὴν κάθετο ἐπὶ τῆς AB στὸ σημεῖο M αὐτῆς. "Αν Γ εἶναι ἓνα σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου, μετὸν διαβήτη διαπιστώνομε ὅτι : $GA = GB$.



Σχ. 139

"Αν Δ εἶναι ἓνα σημεῖο ἐκτὸς τῆς μεσοκαθέτου διαπιστώνομε ὅτι:

$$\Delta A \neq \Delta B$$

"Ωστε:

α) "Ενα σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ AB . Τὴν ἴδια ιδιότητα ἔχει κάθε ἄλλο σημεῖο τῆς μεσοκαθέτου. $ZA = ZB$.

β) "Ενα σημεῖο ποὺ ΔΕΝ κείται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ἀπέχει ἄνισα ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος AB .

"Αρα: Τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου καὶ μόνο αὐτὰ ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ ευθυγράμμου τμήματος AB .

"Αν λοιπὸν χρειασθοῦμε ἓνα σημεῖο ποὺ νὰ ἀπέχη ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B ἐνὸς ευθυγράμμου τμήματος, θὰ τὸ ἀναζητήσουμε ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB .

§ 129. Θέσεις ευθείας ως προς περιφέρεια

Ποιές είναι οι δυνατές θέσεις μιᾶς ευθείας ως προς μιὰ περιφέρεια ;

Στὸ σχῆμα 110 βλέπετε τρεῖς περιπτώσεις :

I Ἡ ευθεῖα E_1 εἶναι στὸ ἐξωτερικὸ τῆς περιφερείας.

II Ἡ ευθεῖα E_2 τέμνει τὴν περιφέρεια σὲ δύο σημεῖα B καὶ Γ.

III Ἡ E_3 «ἐφάπτεται» στὴν περιφέρεια.

Ἄς καλέσουμε Π τὸ σύνολο τῶν σημείων τῆς περιφερείας. Ἔχουμε :

$$\Pi \cap E_1 = \emptyset \quad (1\eta \text{ περίπτωση})$$

$$\Pi \cap E_2 = \{B, \Gamma\} \quad (2\eta \text{ » })$$

$$\Pi \cap E_3 = \{A\} \quad (3\eta \text{ » })$$

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον ἔχει ἡ IIIη περίπτωση. Θυμίζει ρόδα καὶ γραμμὴ τοῦ τραίνου. Ἡ περιφέρεια καὶ ἡ ευθεῖα ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸ σημεῖο, τὸ A, ποὺ λέγεται **σημεῖο ἐπαφῆς**· ἡ δὲ ευθεῖα ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Ἄν προσέξουμε τὴν ἀκτῖνα KA διακρίνουμε ὅτι εἶναι **κάθετος** πρὸς τὴν E_3 (Μπορεῖτε νὰ τὸ ἐξακριβώσετε μὲ τὸ τρίγωνο).

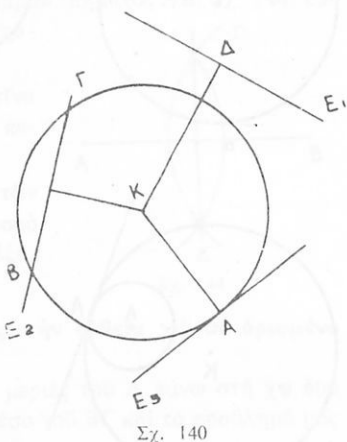
Ὅστε : «**ἡ ἀκτῖνα στὸ σημεῖο ἐπαφῆς εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἐφαπτομένη**».

Ἄν συγκρίνουμε τὸ μῆκος τῆς ἀκτίνος ρ μὲ τὶς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὶς ευθεῖες E_1, E_2, E_3 ἔχουμε :

$$I \quad \rho < (KA)$$

$$II \quad \rho > (KE)$$

$$III \quad \rho = (KA)$$



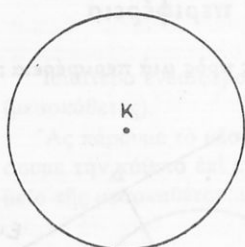
§ 130. Θέσεις δύο περιφερειῶν

Δύο περιφέρειες ποιές θέσεις μπορεῖ νὰ ἔχουν μεταξύ των;

I Μπορεῖ ἡ μία νὰ εἶναι στὸ ἐξωτερικὸ ἢ στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ἄλλης, σχ. 141 α, β.

II Μπορεῖ νὰ ἐφάπτονται, σχ. 142 α, β.

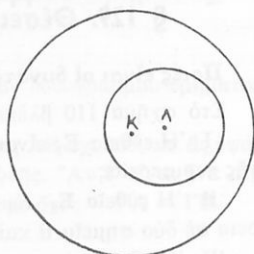
III Μπορεῖ νὰ τέμνονται, σχ. 143.



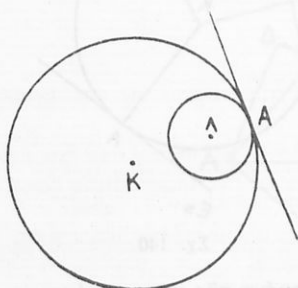
α



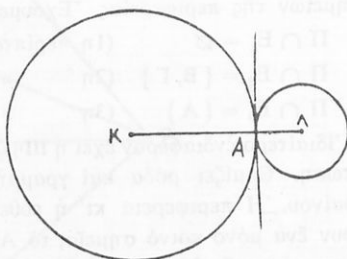
Σχ. 141



β

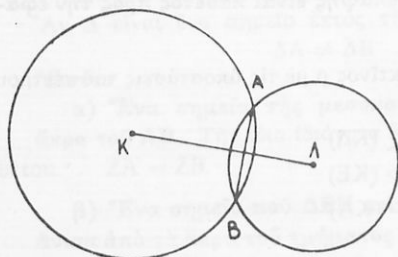


α



β

Σχ. 142



Σχ. 143

“Αν καλέσουμε με Π_1 και Π_2 τα σημειοσύνολα των περιφερειών αυτών, έχουμε :

- I περίπτωση $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$
 II » $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{A\}$
 III » $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{A, B\}$

“Όταν δύο περιφέρειες έχουν ένα μόνο κοινό σημείο A, λέγουμε ότι **ἐφάπτονται** τὸ δὲ σημείο A λέγεται **σημείο ἐπαφῆς**. “Αν χα-

ράξουμε τὴν ἐφαπτομένη στὸ A, παρατηροῦμε ὅτι εἶναι **κάθετος** πρὸς τὴν εὐθεῖα ποὺ ἐνώνει τὰ δύο κέντρα καὶ λέγεται **διάκεντρος**. Ἐπίσης ὅταν οἱ περιφέρειες τέμνονται, εὐκόλα μπορούμε νὰ ἐξακριβώσουμε ὅτι ἡ **διάκεντρος** εἶναι **κάθετος** στὴν κοινὴ χορδὴ AB.

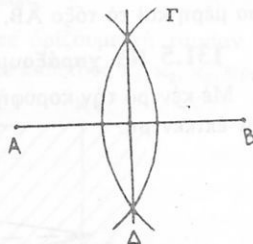
§ 131. "Άλλες γεωμετρικές κατασκευές με τὸ χάρακα καὶ τὸ διαβήτη

131.1 Χάραξη μεσοκαθέτου.

α) Μὲ κέντρο τὸ ἓνα ἄκρο A εὐθυγράμμου τμήματος AB , σχ. 144, καὶ ἄκτινα μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ μισό τοῦ AB χαράζουμε περιφέρεια.

β) Μὲ κέντρο τὸ ἄλλο ἄκρο B καὶ ἄκτινα ἴση μὲ τὴν προηγούμενη γράφουμε ἄλλη περιφέρεια.

γ) Χαράζουμε τὴν κοινὴ χορδὴ $\Gamma\Delta$ τῶν δύο περιφερειῶν. Αὐτὴ εἶναι ἡ κάθετος στὸ μέσο τῆς AB . Μποροῦμε εὐκόλα νὰ τὸ ἐξακριβώσουμε.

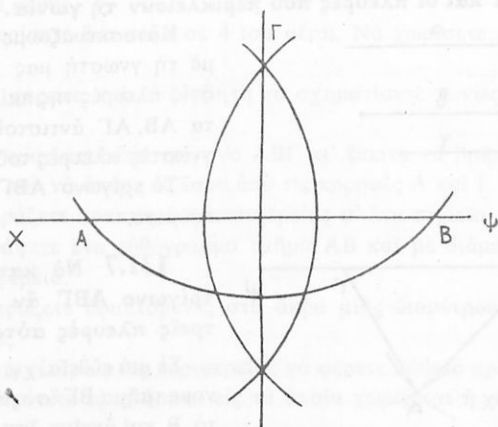


Σχ. 144

131.2 Νὰ χαράξουμε κάθετο πρὸς τὴν εὐθεΐα $\chi\psi$ σὲ ὀρισμένο σημεῖο A αὐτῆς.

Μὲ τὸ διαβήτη παίρνομε ἀπ' τὴς δύο μεριῆς τοῦ A πάνω στὴ $\chi\psi$ δύο ἴσα τμήματα $AB = A\Gamma$. Ἐτσι τὸ A ἔγινε μέσο τοῦ $B\Gamma$ καὶ τὸ πρόβλημά μας ἀνάγεται στὸ προηγούμενο.

131.3 Ἀπὸ ἓνα σημεῖο Γ ἐκτὸς τῆς εὐθείας $\chi\psi$ νὰ χαράξουμε κάθετο πρὸς τὴ $\chi\psi$.



Σχ. 145

Μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Γ , σχ. 145, γράφουμε μιὰ περιφέρεια ποὺ νὰ τέμνῃ

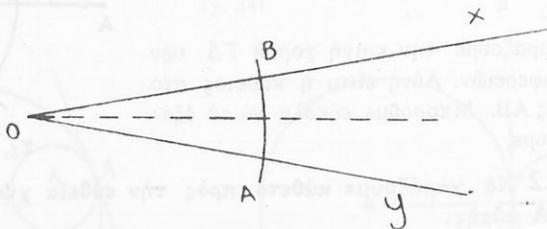
τῇ $\chi\psi$. "Ας εἶναι Α καὶ Β τὰ σημεῖα τομῆς. "Αν χαράξουμε τὴ μεσοκάθετο πρὸς τὴν ΑΒ, εὐκολὰ ἐξακριβώνουμε ὅτι διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ.

131.4 Νὰ χωρίσουμε ἓνα τόξο ΑΒ σὲ δύο ἴσα μέρη.

Φέρουμε τὴν χορδὴ ΑΒ καὶ ἔπειτα τὴ μεσοκάθετό της ΓΜΕ. Μὲ τὸ διαφανὲς χαρτί ἐξακριβώνουμε ὅτι ἡ μεσοκάθετος τῆς χορδῆς χωρίζει σὲ δύο ἴσα μέρη καὶ τὸ τόξο ΑΒ, δηλ. $\widehat{ΑΕ} = \widehat{ΕΒ}$.

131.5 Νὰ χαράξουμε τὴ διχοτόμο μιᾶς γωνίας $\chi\theta\psi$.

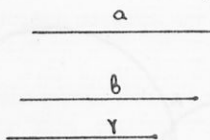
Μὲ κέντρο τὴν κορυφὴ Ο γράφουμε μία περιφέρεια, ὁπότε ἡ γωνία γίνε-
ται ἐπίκεντρον.



Σχ. 146

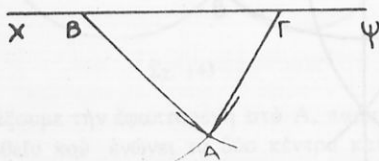
"Αν χωρίσουμε σὲ δύο ἴσα μέρη τὸ τόξο ΑΒ, σχ. 146, καὶ ἐνώσουμε μὲ εὐθεῖα τὴν κορυφὴ μὲ τὸ μέσον τοῦ τόξου ΑΒ, τότε διχοτομεῖται καὶ ἡ γωνία. (Γιατί;).

131.6 Νὰ κατασκευάσουμε τρίγωνο ΑΒΓ ἂν μᾶς εἶναι γνωστὰ ἡ μία γωνία Α καὶ οἱ πλευρὲς ποὺ περικλείουν τὴ γωνία.



Κατασκευάζουμε μιὰ γωνία ἴση μὲ τὴ γνωστὴ μας Α καὶ πάνω στὶς πλευρὲς τῆς παίρνουμε τμήμα-
τα ΑΒ, ΑΓ ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὶς
γνωστὲς πλευρὲς τοῦ τριγώνου.

Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ζη-
τούμενο.



Σχ. 147

131.7 Νὰ κατασκευάσουμε τρίγωνο ΑΒΓ ἂν ξέρουμε τὶς τρεῖς πλευρὲς αὐτοῦ.

Σὲ μιὰ εὐθεῖα $\chi\psi$, σχ. 147, παίρ-
νομε τμήμα ΒΓ ἴσο μὲ α. Μὲ κέντρο
τὸ Β καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ β γράφου-
με περιφέρεια καὶ τέλος μὲ κέν-

τρο τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ γ γράφουμε ἄλλη περιφέρεια.

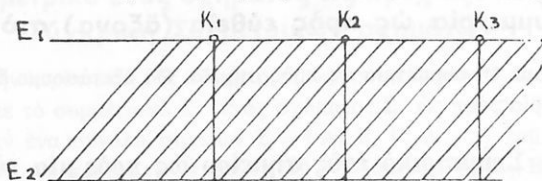
Ενώνουμε (μέ ευθείες) τὸ ἓνα σημεῖο τομῆς Α τῶν δύο περιφερειῶν μέ τις κορυφές Β καὶ Γ κι' ἔχουμε τὸ ζητούμενο τρίγωνο.

Σημείωση: Γιά νά τέμνονται οἱ περιφέρειες πρέπει $\beta + \gamma < \alpha$.

Όπου α ἡ μεγαλύτερη πλευρά.

§ 132. Πλάτος ταινίας

Χαράζουμε 2 εὐθεῖες E_1, E_2 παράλληλες, ὁπότε ὀρίζουμε τὴ ταινίαν Τ, σχ. 148. Ἐπειτα στά σημεῖα K_1, K_2, K_3 , χαράζουμε καθέτους $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, πρὸς



Σχ. 148

τὴν E_1 καὶ τις προεκτείνουμε ὥσπου νά συναντήσουν τὴν E_2 . Μέ τὸ διαβήτη εὐκόλα εξακριβώνουμε ὅτι τὰ τμήματα τῶν καθέτων $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, πού ἀποκόπτονται ἀπὸ τὴν ταινία, εἶναι ἴσα. Τὸ σταθερὸ αὐτὸ μῆκος τῶν καθέτων τμημάτων λέγεται **πλάτος τῆς ταινίας**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

393) Νά χωρίσετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα σὲ 4 ἴσα μέρη . Πῶς θὰ τὸ χωρίσετε σὲ 8 ἴσα μέρη;

394) Νά χωρίσετε ἓνα τόξο σὲ 4 ἴσα μέρη. Νά χωρίσετε μιὰ γωνία σὲ 4 ἴσα μέρη.

395) Μέ τὸ χάρακα καὶ τὸ διαβήτη νά σχηματίσετε γωνίες $45^\circ, 22^\circ 30', 135^\circ$.

396) Νά σχηματίσετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ κι' ἔπειτα νά βρῆτε πάνω στὴ ΒΓ ἓνα σημεῖο πού νά ἀπέχη ἐξ ἴσου ἀπὸ τις κορυφές Α καὶ Γ.

397) Νά χαράξετε ἐφαπτομένη περιφέρειας σ' ἓνα σημεῖο Α αὐτῆς.

398) Νά γράψετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ καὶ μέ διάμετρο αὐτὸ νά χαράξετε περιφέρεια.

399) Νά χαράξετε ἐφαπτόμενες στά ἄκρα μιᾶς διαμέτρου περιφέρειας. Τί παρατηρεῖτε;

400) Ἀπὸ τὸ κέντρο μιᾶς περιφέρειας νά φέρετε κάθετο πρὸς μιὰ χορδὴ αὐτῆς. Νά συγκρίνετε τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ χορδὴ ἀπὸ τὴν κάθετο.

401) Νά κατασκευάσετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ μέ $\angle A = 60^\circ$ καὶ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ μέ μήκη 4 cm καὶ 5 cm.

402) Νά κατασκευάσετε τρίγωνο με $\angle A = 60^\circ$ και πλευρές $AB = AG = 4$ cm. Νά συγκρίνετε τις πλευρές.

403) Νά κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 5 cm.

404) Νά κατασκευάσετε τρίγωνο με μήκη πλευρών 3 cm, 4 cm, 5 cm.

405) Νά κατασκευάσετε δύο ταινίες πλάτους 3 cm και μ' αυτές νά σχηματίσετε :

α) Ένα ρόμβο

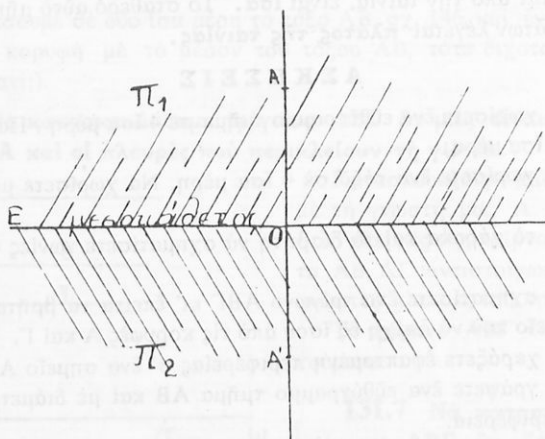
β) Ένα τετράγωνο.

§ 133. Συμμετρία ως προς εὐθεΐα (ἄξονα) στὸ ἐπίπεδο

Ἐξετάσαμε τὴν συμμετρία ὡς πρὸς σημεῖο. Θὰ ἐξετάσουμε ἓνα ἄλλο εἶδος συμμετρίας.

133.1 Συμμετρικὸ ἐνὸς σημείου ὡς πρὸς μία εὐθεΐα

Χαράζουμε μία εὐθεΐα **E**, σχ. 149, ἡ ὁποία χωρίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ δύο ἡμιεπίπεδα Π_1, Π_2 . Στὸ Π_1 σημειώνουμε ἓνα σημεῖο **A** καὶ α) Ἀπὸ τὸ **A** φέρουμε κάθετο **AO** πρὸς τὴν **E**. β) προεκτείνουμε τὴν **AO** κατὰ τμήμα



Σχ. 149

$OA' = AO$. Τὸ σημεῖο **A'** ὀνομάζουμε **συμμετρικὸ τοῦ A ὡς πρὸς τὴν εὐθεΐα E**, ἡ ὁποία ὀνομάζεται καὶ **ἄξων συμμετρίας**. Εὐκόλα καταλαβαίνουμε ὅτι καὶ τὸ **A** εἶναι συμμετρικὸ τοῦ **A'** ὡς πρὸς τὴν **E**. Γι' αὐτὸ τὰ σημεῖα **A** καὶ **A'** λέγονται **συμμετρικά μεταξύ τους ὡς πρὸς τὴν E**, ἡ ὁποία εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος **AA'**, σχ. 149.

133.2 Ἡ συμμετρία (ὡς πρὸς ἄξονα) ὡς στροφή

Ἄν περιστρέψουμε τὸ Π_1 περὶ τὴν E κατὰ 180° (τσακίζουμε τὸ χαρτί κατὰ μῆκος τῆς E), τότε παρατηροῦμε ὅτι τὰ συμμετρικὰ A καὶ A' συμπίπτουν. Τὸ ἴδιο θὰ συμβῇ καὶ μὲ κάθε ἄλλο ζευγὸς συμμετρικῶν σημείων.

Ἄρα: ἡ συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα εἶναι μία στροφή τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὸν ἄξονα κατὰ 180° .

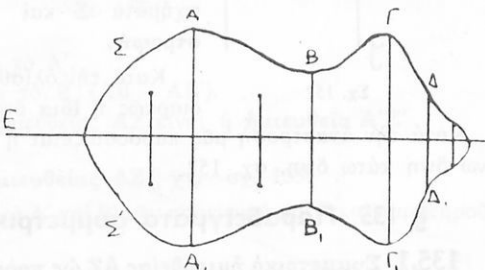
§ 134. Συμμετρικὸ ἐνὸς σχήματος ὡς πρὸς ἄξονα (εὐθεΐα)

Σύγκριση Συμμετρικῶν σχημάτων

Ὅπως στὴν περίπτωση τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον O , ἔτσι καὶ ἐδῶ, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ Σ' ἐνὸς σχήματος Σ ὡς πρὸς εὐθεΐα E , τὸ θεωροῦμε σὰν ἓνα σύνολο σημείων $\Sigma = \{A, B, \Gamma, \Delta, \dots\}$ τοῦ ἐπιπέδου. Εὐρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ Σ τὰ (ὁποῖα εἶναι $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1, \dots$) ὡς πρὸς τὴν εὐθεΐα E , ὁπότε θὰ λάβουμε ἓνα σημειοσύνολο

$\Sigma' = \{A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1, \dots\}$

Τὸ σύνολο αὐτὸ θὰ σχηματίζῃ ἓνα σχῆμα Σ' , σχ. 150, τὸ ὁποῖο λέγεται **συμμετρικὸ** τοῦ Σ ὡς πρὸς τὴν εὐθεΐα E .



Σχ. 150

Ἀντίστροφα : Συμμετρικὸ τοῦ σχήματος Σ' ὡς πρὸς τὴν E θὰ εἶναι τὸ Σ .

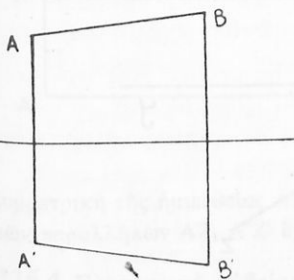
Ἐπειδὴ δὲ, καθὼς εἶδαμε, κατὰ τὴν περιστροφή 180° τὰ συμμετρικὰ σημεία συμπίπτουν, τότε ὁλόκληρο τὸ σχῆμα Σ ἐφαρμόζει στὸ συμμετρικὸ τοῦ Σ' .

Ἄρα: «Τὰ συμμετρικὰ σχήματα ὡς πρὸς εὐθεΐα εἶναι ἴσα».

Παραδείγματα.

1ον. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB εὐρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν σημείων του (μάλιστα ἄρκουν τὰ συμμετρικὰ δύο σημείων του), σχ. 151.

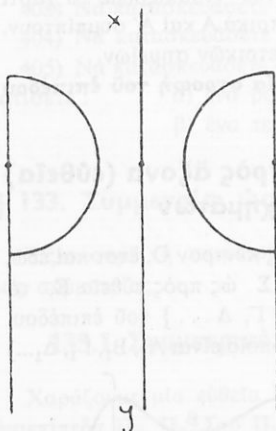
2ον. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ τῶν κορυφῶν του.



Σχ. 151

Σπουδαία παρατήρηση.

Σχήματα ίσα κατ' εὐθείαν ἢ κατ' ἀναστροφὴν.



Σχ. 152

Στὴν περίπτωση τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς σημεῖο O πετύχαμε τὴ σύμπτωση τῶν συμμετρικῶν σχημάτων Σ καὶ Σ' με περιστροφήν περὶ τὸ O , δηλαδή με **ὀλίσθησιν** τοῦ ἐπιπέδου πάνω στὸ **ἐπίπεδό του**.

Στὴν περίπτωση τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς εὐθεῖα, ἡ σύμπτωση τῶν συμμετρικῶν σχημάτων Σ καὶ Σ' γίνεται **χωρὶς ὀλίσθησιν** ἀλλὰ με **ἀναστροφήν** (ἀναποδογύρισμα) τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν εὐθεῖα. Γι' αὐτὸ στὴν α' περίπτωση τὰ σχήματα Σ καὶ Σ' λέγονται **ίσα κατ' εὐθείαν**. Ἐνῶ στὴ β' περίπτωση τὰ σχήματα Σ καὶ Σ' εἶναι **ίσα με ἀναστροφήν**.

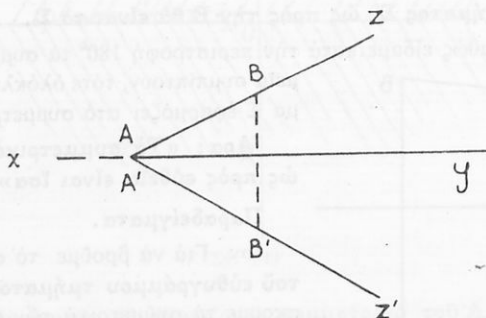
Κατὰ τὴν ὀλίσθησιν τοῦ ἐπιπέδου φαίνεται διαρκῶς ἡ **ἴδια** ὄψη τοῦ σχήματος.

Κατὰ τὴν ἀναστροφήν μᾶς παρουσιάζεται ἡ κάτω ὄψη ἂν ὡ ὄψη καὶ ἡ ἂν ὄψη κάτω ὄψη, σχ. 152.

§ 135. Παραδείγματα συμμετρικῶν σχημάτων

135.1 Συμμετρικὸ ἡμιευθείας AZ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας $\chi\alpha\psi$.

Εὐρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ δύο σημείων A καὶ B .



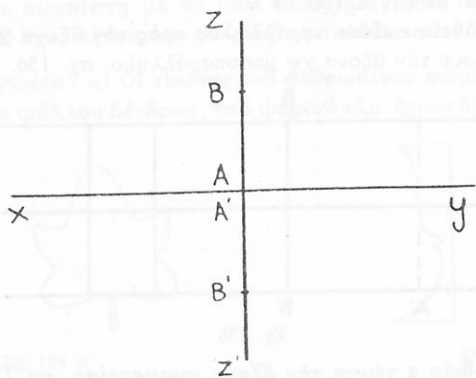
Σχ. 153

1) Συμμετρικὸ τοῦ A εἶναι τὸ A' , πάνω στὸν ἄξονα.

2) Συμμετρικὸ τοῦ B εἶναι τὸ B' .

Τότε ἡ $A'Z'$ εἶναι ἡ **συμμετρικὴ** τῆς AZ σχ. 153.

135.2 Συμμετρικὸ ἡμιευθείας AZ καθετοῦ πρὸς τὸν ἄξονα $\chi\psi$
 σχ. 154.



Σχ. 154

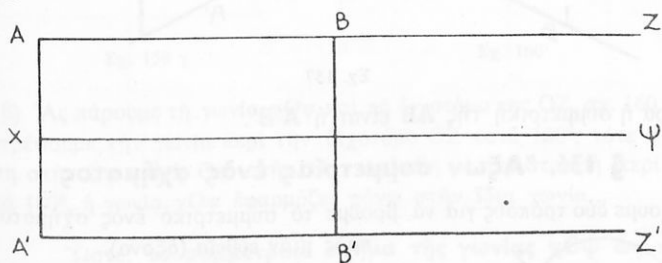
Συμμετρικὸ τοῦ A εἶναι τὸ A' .

Συμμετρικὸ τοῦ B εἶναι τὸ B' ($AB = AB'$).

Ἄρα συμμετρικὴ τῆς ἡμιευθείας AZ εἶναι ἡ ἡμιευθεῖα $A'Z'$.

135.3 Συμμετρικὸ ἡμιευθείας $AZ \parallel \chi\psi$ σχ. 155.

Εὐρίσκουμε τὰ συμμετρικὰ A' καὶ B' τῶν σημείων A καὶ B καὶ παρατηροῦμε ὅτι:



Σχ. 155

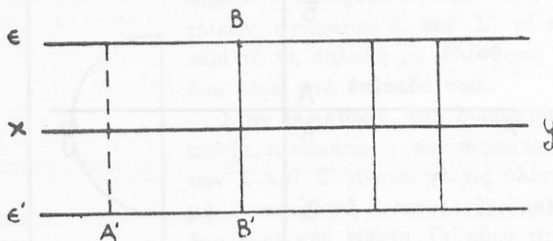
Συμμετρικὴ τῆς ἡμιευθείας AZ εἶναι ἡ παράλληλός της $A'Z'$ καὶ ἡ ταὶνία τῶν παραλλήλων $AZ, A'Z'$ ἔχει ὡς μεσοπαράλληλο τὸν ἄξονα $\chi\psi$.

135.4 Συμμετρικὸ εὐθείας ϵ .

α) Ἄν ἡ εὐθεῖα ϵ εἶναι ὁ ἴδιος ἄξων $\chi\psi$, τότε ταυτίζεται με τὴν συμμετρικὴ τῆς ($\epsilon' \equiv \epsilon$).

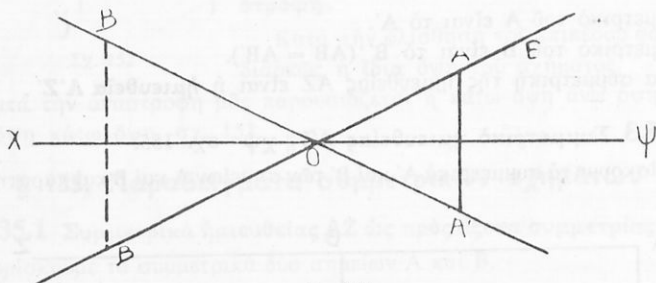
β) "Αν ἡ εὐθεῖα ϵ εἶναι κάθετος πρὸς τὸν ἄξονα $\chi\psi$. Ἡ συμμετρικὴ τῆς ϵ' ταυτίζεται μὲ τὴν ϵ ($\epsilon \equiv \epsilon'$).

γ) "Αν ἡ εὐθεῖα ϵ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $\chi\psi$. Τότε $\epsilon // \epsilon'$ καὶ μάλιστα ἔχουν τὸν ἄξονα $\chi\psi$ μεσοπαράλληλο, σχ. 156.



Σχ. 156

δ) "Αν ἡ εὐθεῖα ϵ τέμνῃ τὸν ἄξονα συμμετρίας. σχ. 157, τότε τὸ A ἔχει συμμετρικὸ τοῦ τὸ A' . Τὸ B ἔχει συμμετρικὸ τοῦ τὸ B' .



Σχ. 157

"Αρα ἡ συμμετρικὴ τῆς AB εἶναι ἡ $A'B'$.

§ 136. "Αξων συμμετρίας ἐνὸς σχήματος

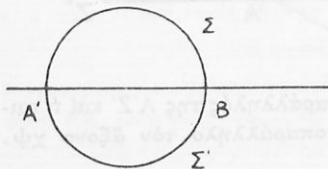
"Εχουμε δύο τρόπους γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ ἐνὸς σχήματος ὡς πρὸς μιὰν εὐθεῖα (ἄξονα).

α) Μὲ τὰ **συμμετρικά** τῶν σημείων τοῦ σχήματος.

β) Μὲ **περιστροφή** τοῦ σχήματος κατὰ 180° περὶ τὴν εὐθεῖα (τσάκισμα).

Χρησιμοποιοῦμε τὸν β' τρόπο γιὰ νὰ βροῦμε τὸ συμμετρικὸ Σ' μιᾶς περι-

φερείας Σ ὡς πρὸς μιὰ διάμετρό της σχ. 158. Εἶναι φανερό ὅτι κατὰ τὴν περιστροφή περὶ τὴν διάμετρο AB κατὰ 180° θὰ ἔχουμε $\Sigma \equiv \Sigma'$.



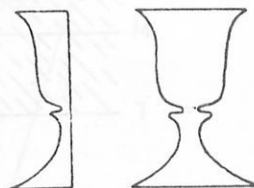
Σχ. 158

"Όταν τὸ συμμετρικὸν Σ' ἐνὸς σχήματος Σ ὡς πρὸς μιὰ εὐθεΐα ϵ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἴδιον τὸ σχῆμα, τότε λέγομε ὅτι τὸ σχῆμα Σ ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν εὐθεΐα ϵ .

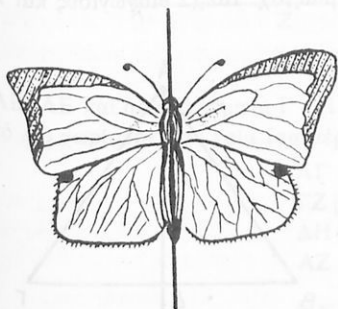
Παραδείγματα . α) Οἱ εἰκόνες τοῦ ἀνθρωπίνου σώματος, τῆς πεταλούδας, ἐνὸς φύλλου δένδρου, τοῦ ψαριοῦ κλπ. ἔχουν ἄξονα συμμετρίας.



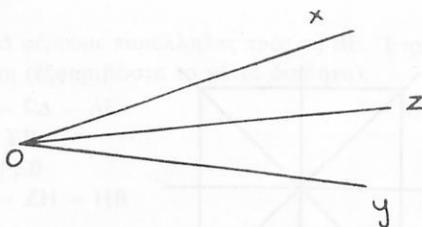
Σχ. 159 α



Σχ. 159 β



Σχ. 159 γ



Σχ. 160

β) "Ας πάρουμε τὴ γωνία $\chi\omicron\psi$ καὶ τὴ διχοτόμο τῆς OZ , σχ. 160. "Αν περιστρέψουμε τὴν γωνία περὶ τὴν διχοτόμο OZ κατὰ 180° , τότε ἡ $O\chi$ θὰ πέσῃ στὴν $O\psi$ καὶ ἡ $O\psi$ στὴν $O\chi$. Δηλαδή μὲ περιστροφή περὶ τὴν OZ κατὰ 180° , ἡ γωνία $\chi\omicron\psi$ ἐφαρμόζει πάνω στὴν ἴδια γωνία.

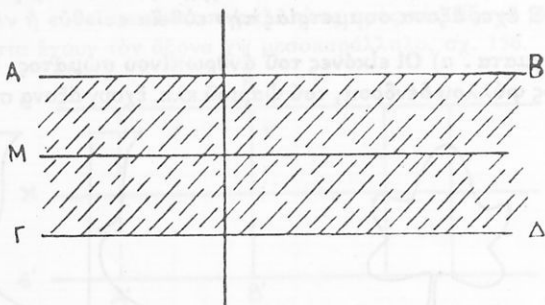
"Ὡστε: τὸ συμμετρικὸ σχῆμα τῆς γωνίας $\chi\omicron\psi$ ὡς πρὸς τὴ διχοτόμο τῆς εἶναι ἡ ἴδια ἡ γωνία. "Αρα ἡ διχοτόμος OZ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας.

γ) Κάθε διάμετρος μιᾶς περιφέρειας εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

δ) Ἡ μεσοκάθετος ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ τοῦ σχήματος.

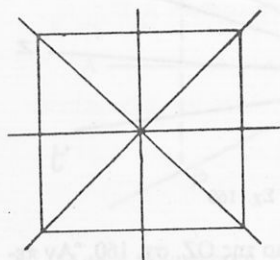
ε) Κάθε κάθετος πρὸς μιὰ εὐθεΐα ϵ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς τῆς εὐθείας.

στ) Μιά ταινία έχει άξονα συμμετρίας 1ον κάθε κάθετο πρὸς αὐτὴ καὶ 2ον τὴ μεσοπαράλληλό της, σχ. 161.

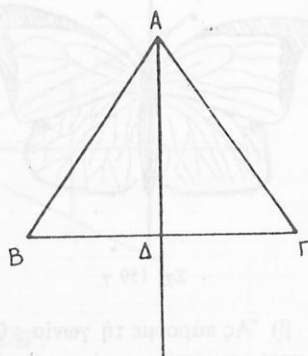


Σχ. 161

ζ) Τὸ τετράγωνο ἔχει 4 ἄξονες συμμετρίας, σχ. 162, (2 διαγωνίους καὶ 2 μεσοκαθέτους πρὸς τὶς πλευρές).



Σχ. 162



Σχ. 163

η) Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο (δηλαδή τὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει 2 πλευρὲς ἴσες) ἔχει ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμο τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας A τὴν AD σχ. 163.

§ 137. Διαίρεση εὐθυγρ. τμήματος σὲ 3 ἴσα μέρη

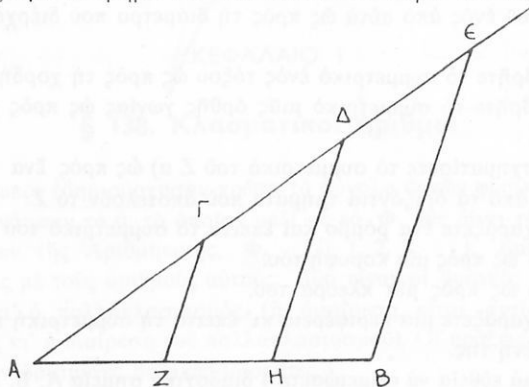
Μάθαμε νὰ διαιροῦμε ἓνα τμήμα σὲ 2 ἴσα μέρη ὅποτε μποροῦμε νὰ τὸ διαιρέσουμε σὲ 4, 8, 16 ἴσα μέρη.

Πὼς θὰ χωρίσουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ σὲ 3 ἴσα μέρη :

Ἀπὸ τὸ ἄκρο Α φέρουμε ἡμιευθεῖα ΑΧ ποὺ νὰ σχηματίζει ὀξεῖα γωνία μὲ τὸ ΑΒ.

α) Πάνω στην ΑΧ παίρνουμε 3 ίσα τμήματα $ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$.

β) Χαράζουμε το τμήμα ΒΕ που ένώνει τα άκρα των εὐθ. τμημάτων



Σχ. 164

ΑΒ, ΑΕ και από τα σημεία Γ και Δ φέρουμε παράλληλες πρὸς τὴ ΒΕ. Ἔτσι τὸ ΑΒ χωρίστηκε σὲ τρία ἴσα μέρη (ἐξακριβώστε το μὲ τὸ διαβήτη).

$$ΑΓ = ΓΔ = ΔΕ$$

$$ΓΖ \parallel ΕΒ$$

$$ΔΗ \parallel ΕΒ$$

$$ΑΖ = ΖΗ = ΗΒ$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

406) Νὰ σχηματίσετε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ του ὡς πρὸς ἄξονα τὸν φορέα τῆς πλευρᾶς ΒΓ.

407) Νὰ γράψετε μιὰ ἡμιπερίφεια μὲ διάμετρο ΑΒ καὶ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ της ὡς πρὸς τὴν ΑΒ.

408) Νὰ γράψετε μιὰ ὀρθή γωνία καὶ νὰ βρῆτε τὴ συμμετρική της ὡς πρὸς τὴ μία πλευρὰ αὐτῆς.

409) Νὰ χαράξετε ἓνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ,νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ του α) ὡς πρὸς μία πλευρὰ του

β) ὡς πρὸς μία διαγώνιό του.

410) Νὰ χαράξετε μιὰ περίφεια καὶ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ της ὡς πρὸς μία ἐφαπτομένη αὐτῆς.

411) Πόσους ἄξονες συμμετρίας ἔχει ἡ περίφεια;

412) Νὰ βρῆτε ἀντικείμενα, ἢ σχέδια μὲ ἄξονα συμμετρίας.

413) Ποιά κεφαλαῖα γράμματα ἔχουν ἄξονα συμμετρίας καὶ ποιά δὲν ἔχουν;

- 414) Νά χωρίσετε ένα εὐθύγραμμο τμήμα σὲ 5 ἴσα μέρη.
- 415) Νά χωρίσετε μιὰ περιφέρεια σὲ 4 ἴσα τόξα καὶ ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρο ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ ἕνα ἄκρο του.
- 416) Νά βρῆτε τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς τόξου ὡς πρὸς τὴν χορδὴ του.
- 417) Νά βρῆτε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ὡς πρὸς μιὰ πλευρά της.
- 418) Νά σχηματίσετε τὸ συμμετρικὸ τοῦ Z α) ὡς πρὸς ἕνα σημεῖο, β) ὡς πρὸς ἕνα ἀπὸ τὰ ὀριζόντια τμήματα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ Z.
- 419) Νά χαράξετε ἕνα ρόμβο καὶ ἔπειτα τὸ συμμετρικὸ του
α) ὡς πρὸς μιὰ κορυφή του.
β) ὡς πρὸς μιὰ πλευρά του.
- 420) Νά χαράξετε μιὰ περιφέρεια κι' ἔπειτα τὴν συμμετρικὴ της ὡς πρὸς μιὰ ἐφαπτομένη της.
- 421) Σὲ μιὰ εὐθεῖα νὰ σημειώσετε 4 διαδοχικὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ, τέτοια ὥστε $B\Gamma = 2 AB$ $\Gamma\Delta = AB$ κι' ἔπειτα νὰ προσδιορίσετε τὰ συμμετρικὰ τοὺς A', B', Γ', Δ' ὡς πρὸς B. Ποιᾶς σχέσεις ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν τμημάτων A'B', B'Γ', Γ'Δ';
- 422) Νά χαράξετε μιὰ ταινία πλάτους 5 cm κι' ἔπειτα τὴν μεσοπαράλληλό της.
- 423) Νά χαράξετε ἕνα ἀμβλυγώνιο τρίγωνο (μὲ μιὰ γωνία $A > 1 \square$) κι' ἔπειτα τὸ συμμετρικὸ του ὡς πρὸς τὴν AB. Ἡ ἔνωση τῶν δύο τριγώνων εἶδους τετράπλευρο εἶναι;
- 424) Νά διχοτομήσετε δύο κατὰ κορυφὴν γωνίες. Τί παρατηρεῖτε;
- 425) Νά διχοτομήσετε δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικὰς γωνίες. Τί παρατηρεῖτε;

Π ε ρ ῖ λ η ψ η

Συμμετρία ὡς πρὸς κέντρο.

Κέντρο συμμετρίας.

Εὐθεῖες κάθετοι.

Μεσοκάθετος.

Θέσεις εὐθείας πρὸς περιφέρεια.

Θέσεις 2 περιφερειῶν.

Γεωμετρικὲς κατασκευές.

Πλάτος ταινίας.

Συμμετρία ὡς πρὸς ἄξονα.

Ἄξων συμμετρίας.

Ἀσκήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

§ 138. Κλασματικοί αριθμοί

Οί άνθρωποι έδημιούργησαν πρώτα τὸ σύνολο Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἐπειτα ἐπενόησαν τὸ 0, τὸ ὁποῖον μαζί με τὸ Φ μᾶς δίνει τὸ σύνολο Φ_0 τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς, $\Phi_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Ἔμαθαν νὰ κάνουν πράξεις με τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς. Δύο εἶναι οἱ βασικὲς πράξεις : Ἡ πρόσθεση κι' ὁ πολλαπλασιασμός (ἡ ἀφαίρεση εἶναι ἀντίστροφη τῆς προσθέσεως κι' ἡ διαίρεση τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). Οἱ πράξεις αὐτὲς, καθὼς εἶδαμε, ἔχουν ὁρισμένες βασικὲς ιδιότητες :

I Τὴν ἀντιμεταθετικὴν $a + b = b + a$

$$a \cdot b = b \cdot a$$

II Τὴν προσεταιριστικὴν $(a + b) + \gamma = a + (b + \gamma)$

$$(a \cdot b) \cdot \gamma = a \cdot (b \cdot \gamma)$$

III Ὑπάρχουν δύο εἰδικοί ἀριθμοί, τὸ 0 καὶ τὸ 1, τοὺς ὁποῖους καλοῦμε οὐδέτερα στοιχεῖα, διότι :

$$a + 0 = a$$

$$a \cdot 1 = a$$

IV Τὴν ἐπιμεριστικὴν ιδιότητα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ, ὡς πρὸς τὴν πρόσθεση

$$a \cdot (b + \gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$$

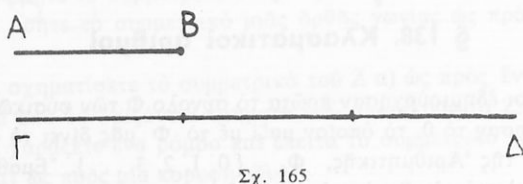
Ἄν συνδυάσουμε τὶς ιδιότητες αὐτὲς εὐρίσκουμε κι' ἄλλες.

Τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων μαζί με τὶς πράξεις καὶ τὶς ιδιότητες αὐτῶν ἀποτελοῦν ἓνα σύστημα : Τὸ σύστημα τῶν ἀκεραίων τῆς ἀριθμητικῆς. Με τὸ σύστημα αὐτὸ λύουμε πολλὰ προβλήματα.

Ὑπάρχουν ὅμως καὶ μερικὰ πού μένουν ἄλυτα. Π.χ. νὰ μοιράσουμε τρεῖς σοκολάτες σὲ τέσσερα ἴσα μέρη. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πρόβλημα τῆς διαιρέσεως $3 : 4$, ἡ ὁποία διαίρεση καθὼς μάθαμε δὲν εἶναι δυνατὴ μέσα στὸ σύνολο Φ_0 . Γιὰ νὰ γίνη δυνατὴ χρειάζονται νέοι ἀριθμοί, οἱ **κλασματικοί**, πού εἶναι ἓνα εὐρύτερο σύνολο καὶ μέσα σ' αὐτὸ λύνονται ὅλα τὰ προβλήματα τῆς διαιρέσεως.

§ 139. Κλασματική μονάδα

Μάθαμε να πολλαπλασιάζουμε έναν άκεραίο μ' ένα ευθύγραμμο τμήμα.
Π.χ. $3 \cdot AB = \Gamma\Delta$ σχ. 165. Ο άκεραίος 3 λέγεται και έκτελεστής.
Για τη μετάβαση από το AB στο $\Gamma\Delta$ χρησιμοποιούμε τον έκτελεστή 3.



Ποιόν έκτελεστή χ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να επιστρέψουμε από το $\Gamma\Delta$ στο AB;

$$\Gamma\Delta = \chi \cdot AB$$

Γεωμετρικά από το $\Gamma\Delta$ εύρισκουμε το AB αν χωρίσουμε το $\Gamma\Delta$ σε 3 ίσα μέρη.

Ο έκτελεστής χ με τον οποίον «επιστρέφουμε» από το $\Gamma\Delta$ (που είναι τριπλάσιο του AB) στο AB λέγεται αντίστροφος έκτελεστής του 3 και σημειώνεται $\frac{1}{3}$.

Ωστε έχουμε $AB = \frac{1}{3} \cdot \Gamma\Delta$ και διαβάζουμε: AB είναι ίσο με το ένα τρίτο του $\Gamma\Delta$.

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι:

όταν είναι $\Gamma\Delta = 3 \cdot AB$ θα είναι και $AB = \frac{1}{3} \cdot \Gamma\Delta$ και αντιστρόφως:

όταν είναι $AB = \frac{1}{3} \cdot \Gamma\Delta$ θα είναι και $\Gamma\Delta = 3 \cdot AB$ σχ. 166.

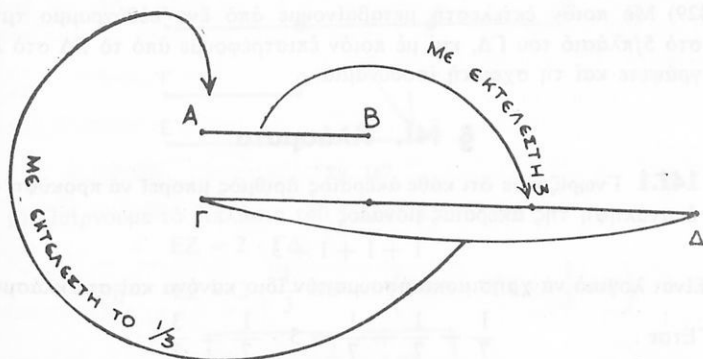
Άρα έχουμε την ισοδυναμία:

$$\Gamma\Delta = 3 \cdot AB \iff AB = \frac{1}{3} \cdot \Gamma\Delta$$

Γενικά:

«Όπως για τον αριθμό 3 υπάρχει ένας αντίστροφος έκτελεστής αριθμός $\frac{1}{3}$, έτσι για κάθε φυσικό αριθμό (έκτελεστή) v , υπάρχει ένας αντίστροφος έκτελεστής $\frac{1}{v}$ ».

Οί αντίστροφοι εκτελεσταί τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 5, ... ποὺ εἶναι οἱ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ λέγονται **κλασματικές μονάδες**.



Σχ. 166

Τὰ ζεύγη 2, $\frac{1}{2}$ 3, $\frac{1}{3}$ 4, $\frac{1}{4}$ κ.ο.κ. λέγονται **αντίστροφοι εκτελεσταί**, ἐπειδὴ ὁ ἓνας «ἀναιρεῖ» τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ ἄλλου σχ. 166.

§ 140. Χρησιμοποιήσαμε κλασματικές μονάδες στὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἀπὸ τὴν πείρα μας ξέρουμε ὅτι κλασματικές μονάδες χρησιμοποιοῦνται γιὰ νὰ μετρήσουμε κι' ἄλλα μεγέθη.

π.χ. α) 1 ὥρα = 60' $\Leftrightarrow$ 1' = $\frac{1}{60}$ τῆς ὥρας.

β) 1 λίρα = 20 σελίνια $\Leftrightarrow$ 1 σελίνι = $\frac{1}{20}$ λίρας.

γ) 1 kg = 1000 gr $\Leftrightarrow$ 1 gr = $\frac{1}{1000}$ kg

δ) 1° = 60' $\Leftrightarrow$ 1' = $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας.

ε) 1 ⊥ = 90° $\Leftrightarrow$ 1° = $\frac{1}{90}$ ⊥

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

426) Μὲ ποιὸν ἐκτελεστή μεταβαίνουμε ἀπὸ μία ὀρθή γωνία, α) σὲ μία ἀποπλατυσμένη, β) σὲ μία πλήρη γωνία;

427) Μὲ ποιὸν ἐκτελεστή μεταβαίνουμε ἀπὸ μιὰ ἀποπλατυσμένη γωνία σὲ μιὰ ὀρθή γωνία;

428) Με ποιόν εκτελεστή μεταβαίνουμε από το 1 m στο 1 cm και με ποιόν εκτελεστή «έπιστρέφουμε» από το 1 m στο 1 cm. Να γράψετε και τη σχετική ισοδυναμία.

429) Με ποιόν εκτελεστή μεταβαίνουμε από ένα ευθύγραμμο τμήμα AB στο 5/πλάσιό του ΓΔ, και με ποιόν επιστρέφουμε από το ΓΔ στο AB; Να γράψετε και τη σχετική ισοδυναμία.

§ 141. Κλάσματα

141.1 Γνωρίζουμε ότι κάθε άκεραιος αριθμός μπορεί να προκύψει από την επανάληψη της άκεραίας μονάδος

$$1 + 1 + 1 = 3$$

Είναι λογικό να χρησιμοποιήσουμε τον ίδιο κανόνα και στα κλάσματα.

Έτσι :

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = 3 \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Αυτό αντιστοιχεί στο γεγονός ότι τα $\frac{3}{7}$ του μήλου σημαίνουν :

$$\frac{1}{7} \text{ μήλου} + \frac{1}{7} \text{ μήλου} + \frac{1}{7} \text{ μήλου} = 3 \cdot \left(\frac{1}{7} \text{ μήλου} \right)$$

Γενικά $\underbrace{\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} + \dots + \frac{1}{\beta}}_{\alpha \text{ φορές}} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \in \Phi)$

«Ωστε από τις κλασματικές μονάδες σχηματίζονται τα κλάσματα και κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι γινόμενο του άκεραίου α με το $\frac{1}{\beta}$ ».

Στο κλάσμα $\frac{3}{7}$ οι αριθμοί 3 και 7 λέγονται όροι του κλάσματος και ο μὲν 5 λέγεται αριθμητής ο δὲ 7 λέγεται παρονομαστής.

Παρατήρηση: Ο αριθμητής ενός κλάσματος μπορεί να είναι οποιοσδήποτε άκεραιος αριθμός, ενώ ο παρονομαστής είναι οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός. (αργότερα θα εννοήσουμε γιατί).

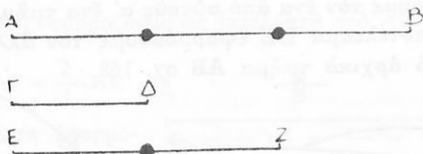
Π.χ. $\frac{0}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \dots$

141.2 Τα κλάσματα ως εκτελεσται

Μας έχουν δώσει το ευθύγραμμο τμήμα AB και ζητούμε ένα άλλο ίσο με τα $\frac{2}{3}$ αυτού, σχ. 167.

α) Χωρίζουμε τὸ AB σὲ τρία ἴσα μέρη, ὁπότε ἔχουμε:

$$\Gamma\Delta = \frac{1}{3} \cdot AB \quad (1)$$



Σχ. 167

β) Παίρνουμε τὸ διπλάσιο τοῦ $\Gamma\Delta$, τὸ EZ

$$EZ = 2 \cdot \Gamma\Delta$$

$$\text{ἢ} \quad EZ = 2 \cdot \frac{1}{3} AB \quad \left(\text{διότι} \quad \Gamma\Delta = \frac{1}{3} AB \right) \quad (2)$$

Ὡστε :

$$EZ = \frac{2}{3} \cdot AB^*$$

Δηλαδή : "Αν ἐφαρμόσουμε στὸ τμήμα AB ὡς ἐκτελεστή τὸ κλάσμα $\frac{2}{3}$ παίρνουμε τὸ τμήμα EZ ἴσο μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ AB .

§ 142. Ἀντίστροφοι ἀριθμοί

Στὸ προηγούμενο παράδειγμα ἀπὸ τὸ τμήμα AB μὲ ἐκτελεστή τὸ $\frac{2}{3}$ σχηματίσαμε τὸ τμήμα EZ ὅπου $EZ = \frac{2}{3} \cdot AB$ (1)

Μὲ ποῖο ἐκτελεστή χ μποροῦμε νὰ ἐπανέλθουμε στὸ AB ἀπὸ τὸ EZ ;
 $AB = \chi \cdot EZ$

Ἀπὸ τὸ σχῆμα 167 φαίνεται ὅτι μποροῦμε ἀπὸ τὸ EZ νὰ «ἐπιστρέψουμε» στὸ AB ἂν βροῦμε πρῶτα τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ EZ καὶ ἔπειτα τὸ πάρουμε 3 φορές.

$$\text{ἄρα :} \quad AB = 3 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot EZ \right)$$

$$\text{ἢ} \quad AB = \frac{3}{2} \cdot EZ \quad (2)$$

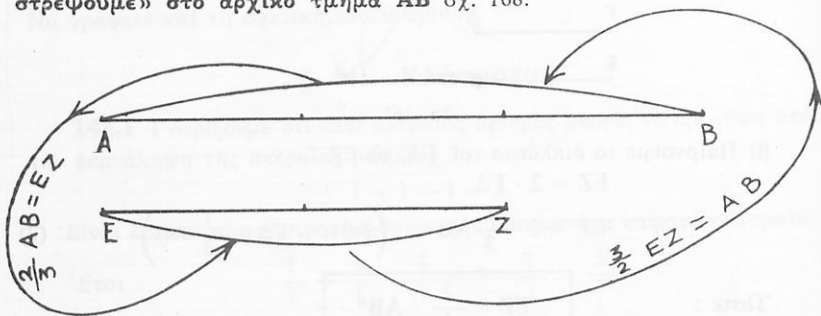
Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία:

$$EZ = \frac{2}{3} \cdot AB \iff AB = \frac{3}{2} \cdot EZ$$

* Συμφωνοῦμε ὅτι : $2 \cdot \left(\frac{1}{3} AB \right) = \left(2 \cdot \frac{1}{3} \right) AB$.

Οί αριθμοί $\frac{2}{3}$ και $\frac{3}{2}$ λέγονται **αντίστροφοι** κι' έχουν την ακόλουθη σημασία :

“Αν εφαρμόσουμε τὸν ἓνα ἀπὸ αὐτοὺς σ' ἓνα τμήμα AB ὡς ἐκτελεστή και στὸ ἀποτέλεσμα EZ εφαρμόσουμε τὸν ἄλλο τότε θὰ «ἐπιστρέψουμε» στὸ ἀρχικὸ τμήμα AB σχ. 168.



Σχ. 168

Γενικά : Τὰ κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\beta}{\alpha}$ παριστάνουν ἀντιστρόφους ἀριθμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

430) Νά γράψετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB κι' ἔπειτα νά εφαρμόσετε σ' αὐτὸ τὸν ἐκτελεστή $\frac{3}{4}$ γιὰ νά βρῆτε ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$.

431) Ποιὸν ἐκτελεστή πρέπει νά εφαρμόσετε στὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ τοῦ προηγούμενου προβλήματος γιὰ νά «ἐπιστρέψετε» στὸ AB ; Νά γράψετε τὴ σχετικὴ ἰσοδυναμία.

432) Νά κατασκευάσετε μιὰ ὀρθή γωνία και σ' αὐτὴν νά εφαρμόσετε ὡς ἐκτελεστή τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$. Πόσων μοιρῶν θὰ εἶναι ἡ γωνία ποὺ θὰ βρῆτε;

433) Ποιοὶ εἶναι οἱ ἀντίστροφοι ἐκτελεσταὶ τῶν :

$$\frac{2}{3}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{11}{17}, \quad \frac{\gamma}{\delta}$$

434) Νά χαράξετε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα AB κι' ἔπειτα ἓνα ἄλλο $\Gamma\Delta$ ἴσο μετὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ AB . Ποιὸν ἐκτελεστή πρέπει νά εφαρμόσετε στὸ $\Gamma\Delta$ γιὰ νά βρῆτε τὸ AB ; Νά ἐπαληθεύσετε τὴν ἀπάντησή σας.

§ 143. Κλάσματα ισοδύναμα (ή ίσα)

I. Στο σχήμα 169 έχουμε δύο φορές τὸ ἴδιο εὐθύγραμμο τμήμα AB.

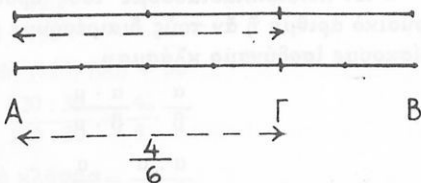
Στὴν α' περίπτωση ἐφαρμόζουμε ὡς ἐκτελεστή στὸ AB τὸ $\frac{2}{3}$ κι' εὐρί-

σκουμε τὸ τμήμα $AG = \frac{2}{3} \cdot AB$.



Στὴν β' περίπτωση ἐφαρμό-

ζουμε ὡς ἐκτελεστή τὸ $\frac{4}{6}$ κι' εὐρίσκουμε τὸ τμήμα



$$AG' = \frac{4}{6} \cdot AB.$$

Παρατηροῦμε ὅτι : $AG = AG'$.

Σχ. 169

“Ὡστε τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{6}$ ἐφαρμόζονται ὡς ἐκτελεστὲς στὸ ἴδιο τμήμα AB καὶ μᾶς δίδουν ἴσα τμήματα $AG = AG'$.”

“Ὅταν δύο κλάσματα ἐφαρμοζόμενα ὡς ἐκτελεστὲς στὸ ἴδιο εὐθύγραμμο τμήμα δίδουν ἴσα τμήματα, τότε τὰ κλάσματα λέγονται ισοδύναμα ἢ ἴσα.

Τὰ ισοδύναμα κλάσματα ἐννοοῦνται ὡς διαφορετικὰ σύμβολα, ἢ ὀνόματα ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

II. “Ἄν ἀντὶ τοῦ ἐκτελεστοῦ $\frac{2}{3}$ χρησιμοποιήσουμε τὸ $\frac{6}{9}$ θὰ ἔχουμε πάλι τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα

ὥστε
$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \dots$$

ἢ
$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 3} = \dots$$

καὶ γενικὰ
$$\frac{a}{\beta} = \frac{2 \cdot a}{2 \cdot \beta} = \frac{3 \cdot a}{3 \cdot \beta} = \dots$$

$$\boxed{\beta \in \Phi}$$

(ὀπογραμμίζουμε ὅτι ὅλα τὰ ισοδύναμα κλάσματα

$$\frac{a}{\beta}, \frac{2 \cdot a}{2 \cdot \beta}, \frac{3 \cdot a}{3 \cdot \beta} \dots$$

δὲν εἶναι διάφοροι ἀριθμοί, παρὰ διαφορετικὲς γραφὲς τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ).

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2 \cdot \alpha}{2 \cdot \beta}$$

$$\frac{2 \cdot \alpha}{2 \cdot \beta} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Διακρίνουμε ὅτι:

«Ἄν πολλαπλασιάσουμε τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν ἴδιο φυσικὸ ἀριθμὸ ἢ ἂν τοὺς διαιρέσουμε μ' ἓνα κοινὸ διαιρέτη τοὺς εὐρίσκουμε ἰσοδύναμο κλάσμα».

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \mu}$$

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\beta \cdot \mu} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \begin{matrix} \beta \in \Phi \\ \mu \in \Phi \end{matrix}$$

Ἐφαρμογές

§ 144. Ἀπλοποίηση κλασμάτων

Σύμφωνα μὲ τὴ προηγούμενη ιδιότητα ἔχουμε:

$$\frac{120}{150} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

τὰ κλάσματα $\frac{120}{150}$ $\frac{4}{5}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ $\frac{4}{5}$ ἔχει μικρότερους ὅρους χρησιμοποιεῖται πιο συχνά.

Ἡ ἐργασία τῆς μετατροπῆς ἑνὸς κλάσματος σὲ ἄλλο ἰσοδύναμο ἀλλὰ μὲ μικρότερους ὅρους λέγεται **ἀπλοποίηση** τοῦ κλάσματος.

Καθὼς βλέπουμε οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος $\frac{4}{5}$ δὲν ἔχουν κοινὸ διαιρέτη (διάφορο τῆς μονάδος) γι' αὐτὸ καὶ τὸ κλάσμα δὲν ἀπλοποιεῖται περισσότερο.

Τὸ κλάσμα $\frac{4}{5}$ καὶ κάθε ἄλλο πού ἔχει τοὺς ὅρους του **πρώτους μεταξύ τους** λέγεται **ἀνάγωγο**. Τὸ χρησιμοποιοῦμε δὲ συχνά ὡς ἀντιπρόσωπο ὅλων τῶν ἰσοδυνάμων μὲ αὐτὸ κλασμάτων.

Παραδείγματα :

Τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{5}{9}$ εἶναι **ἀνάγωγα**, ἐνῶ τὰ κλά-

σματα $\frac{2}{6}$, $\frac{4}{10}$, $\frac{15}{50}$ **δὲν εἶναι ἀνάγωγα**.

Παρατήρηση: Μπορούμε από το κλάσμα $\frac{120}{150}$ να βρούμε κατ' εὐθείαν τὸ ἀνάγωγό του, ἂν διαιρέσουμε τοὺς ὅρους του μὲ τὸν Μ.Κ.Δ αὐτῶν.

Παραδείγματα:

1ο Νὰ τραπῇ σὲ ἀνάγωγο τὸ κλάσμα

$$\frac{120}{150}$$

$$\text{Μ.Κ.Δ. τῶν } (120, 150) = 30$$

$$\text{ἔχουμε: } \frac{120}{150} = \frac{120 : 30}{150 : 30} = \frac{4}{5}$$

2ο Νὰ τραπῇ σὲ ἀνάγωγο τὸ κλάσμα

$$\frac{54}{90}$$

$$\text{Μ.Κ.Δ. } (54, 90) = 18$$

$$\text{εἶναι: } \frac{54}{90} = \frac{54 : 18}{90 : 18} = \frac{3}{5}$$

3ο Νὰ τραπῇ σὲ ἀνάγωγο τὸ κλάσμα

$$\frac{2 \cdot a}{5 \cdot a} \quad a \in \Phi$$

$$\text{εἶναι: } \frac{2 \cdot a}{5 \cdot a} = \frac{(2 \cdot a) : a}{(5 \cdot a) : a} = \frac{2}{5}$$

4ο Νὰ τραπῇ σὲ ἀνάγωγο τὸ κλάσμα.

$$\frac{2 \cdot a + 3 \cdot a}{5 \cdot a + 4 \cdot a} \quad a \in \Phi$$

$$\text{εἶναι: } \begin{aligned} 2 \cdot a + 3 \cdot a &= (2 + 3) \cdot a = 5 \cdot a \\ 5 \cdot a + 4 \cdot a &= (5 + 4) \cdot a = 9 \cdot a \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \text{ἐπιμεριστική και} \\ \text{συμμετρική ιδιότης} \end{array} \right)$$

$$\text{ἄρα: } \frac{2 \cdot a + 3 \cdot a}{5 \cdot a + 4 \cdot a} = \frac{5 \cdot a}{9 \cdot a} = \frac{5}{9}$$

§ 145. Τροπὴ ἑτερωνύμων κλασμάτων σὲ ὁμώνυμα

Τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$ ἔχουν τὸν ἴδιο παρονομαστή καὶ λέγονται ὁμώνυμα.

Ἀντίθετα: Τὰ κλάσματα $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{8}$ ἔχουν διαφόρους παρονομαστές καὶ λέγονται ἑτερώνυμα.

145.1 Νά τραπούν τὰ ἑτερόνυμα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ σὲ ὁμόνυμα.

$$\text{ἔχουμε : } \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{3}{9} = \frac{8}{12} = \boxed{\frac{10}{15}} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \dots$$

$$\text{καὶ } \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \boxed{\frac{12}{15}} = \frac{16}{20} = \frac{20}{25} = \dots$$

Μποροῦμε ἀντὶ γιὰ τὰ $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{4}{5}$ νὰ πάρουμε τὰ ἰσοδύναμα αὐτῶν $\frac{10}{15}$, $\frac{12}{15}$ ποὺ εἶναι ὁμόνυμα.

Παρατηροῦμε ὅτι: Ὁ κοινὸς παρονομαστής, τὸ 15, εἶναι τὸ Ε.Κ.Π. τῶν **δύο παρονομαστῶν**. Ἀντὶ λοιπὸν νὰ ἀναζητοῦμε μεταξὺ τῶν ἰσοδυνάμων κλασμάτων τὰ ὁμόνυμα, ἐργαζόμεστε ὅπως μᾶς δείχνει τὸ ἐπόμενο παράδειγμα.

145.2 Νά τραπούν σὲ ὁμόνυμα τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{7}{15}$.

α) Εὐρίσκουμε τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν 3, 6, 15 ποὺ εἶναι τὸ 30.

β) Διαιροῦμε τὸ 30 μὲ καθένα παρονομαστή

$$30 : 3 = 10$$

$$30 : 6 = 5$$

$$30 : 15 = 2$$

γ) Πολλαπλασιάζουμε τοὺς ὅρους κάθε κλάσματος ἀντίστοιχα μὲ τὰ πηλίκια 10, 5, 2.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\frac{2}{3} = \frac{10 \cdot 2}{10 \cdot 3} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{5}{30}$$

$$\frac{7}{15} = \frac{2 \cdot 7}{2 \cdot 15} = \frac{14}{30}$$

Παρατήρηση: Ἄν οἱ παρονομασταὶ εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν, τότε τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν εἶναι τὸ γινόμενό τῶν.

Παράδειγμα: **Νά τραποῦν σὲ ὁμώνυμα τὰ κλάσματα :**

$$\alpha'. \quad \frac{2}{5}, \frac{4}{9} \quad \text{Ε.Κ.Π. παρον. : } 5 \cdot 9$$

$$\frac{2}{5} = \frac{9 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{18}{45}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 4}{5 \cdot 9} = \frac{20}{45}$$

$$\beta'. \quad \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \quad \text{Ε.Κ.Π. παρον. : } 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{εἶναι} \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{20}{30}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 1}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{15}{30}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 5} = \frac{24}{30}$$

145.3 Σύγκριση κλασμάτων

Είδαμε ὅτι δύο κλάσματα εἶναι ἴσα, ὅταν ἐφαρμοζόμενα (ὡς ἐκτελεσται) στὸ ἴδιο εὐθύγραμμο τμήμα δίδουν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.

Ἀντίθετα : Ἄν δώσουν ἄνισα εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται **ἄνισα**.

Παράδειγμα :

Ἄν ἐφαρμόσουμε τὰ κλάσματα $\frac{1}{3}$ καὶ $\frac{2}{3}$ στὸ εὐθύγραμμο τμήμα AB

θὰ μᾶς δώσουν ἀντιστοίχως τμήματα ΓΔ καὶ ΕΖ τέτοια ὥστε:

$$\Gamma\Delta = \frac{1}{3} \cdot AB$$

$$ΕΖ = \frac{2}{3} \cdot AB$$

Ἐπειδὴ $ΕΖ > \Gamma\Delta$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$

Μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο ἐργαζόμενοι διακρίνουμε ὅτι :

1) Μεταξὺ τῶν ὁμωνύμων κλασμάτων μεγαλύτερο εἶναι ἐκεῖνο ποῦ ἔχει μεγαλύτερο ἀριθμητὴ

$$\text{π.χ.} \quad \frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

2) Μεταξύ των κλασμάτων που έχουν ίδιους αριθμητές μεγαλύτερο είναι εκείνο που έχει μικρότερο παρονομαστή

$$\text{π.χ.} \quad \frac{4}{5} > \frac{4}{6}$$

"Αν έχουμε έτερώνυμα κλάσματα τα τρέπουμε σε όμώνυμα.

Παράδειγμα: Να συγκριθούν τα κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{15}$

έχουμε : α) Ε.Κ.Π. παρον.: 15

$$\beta) \quad 15 : 3 = 5 \quad 15 : 5 = 3 \quad 15 : 15 = 1$$

$$\gamma) \quad \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15}, \quad \frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}, \quad \frac{6}{15} = \frac{6 \cdot 1}{15 \cdot 1} = \frac{6}{15}$$

$$\text{και} \quad \frac{12}{15} > \frac{10}{15} > \frac{6}{15}$$

$$\text{άρα :} \quad \frac{4}{5} > \frac{2}{3} > \frac{6}{15} \quad \checkmark$$

§ 146. Χαρακτηριστική ιδιότης των ίσων κλασμάτων

$$\text{Στα ίσα κλάσματα} \quad \frac{2}{3} = \frac{4}{6} \quad \text{παρατηρούμε ότι} \quad 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

$$\text{» » »} \quad \frac{3}{5} = \frac{9}{15} \quad \text{» »} \quad 3 \cdot 15 = 5 \cdot 9$$

$$\text{» » »} \quad \frac{4}{7} = \frac{8}{14} \quad \text{» »} \quad 4 \cdot 14 = 7 \cdot 8$$

$$\text{Γενικά: αν έχουμε} \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \text{τα τρέπουμε σε όμώνυμα}$$

$$\text{κι' έχουμε} \quad \frac{\alpha \cdot \delta}{\beta \cdot \delta} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\delta \cdot \beta} \quad \text{επειδή δέ είναι ίσα και όμώνυμα}$$

$$\text{έχουμε} \quad \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

"Ωστε :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \implies \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma}$$

'Αντίστροφα : Από δύο ίσα γινόμενα π.χ. $2 \cdot 9 = 6 \cdot 3$ μπορούμε να σχηματίσουμε τα ίσα κλάσματα

$$\frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

$$\text{δηλαδή:} \quad 2 \cdot 9 = 6 \cdot 3 \implies \frac{2}{6} = \frac{3}{9}$$

Γενικά ἂν ἔχουμε τὰ ἴσα γινόμενα $a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ θὰ ἔχουμε $\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

ὥστε

$$a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \implies \frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Ἀπὸ τὶς δύο συνεπαγωγές

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \implies a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

$$a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \implies \frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία

$$\frac{a}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff a \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Σύμφωνα μ' αὐτὴν ἔχουμε ὅτι :

Δύο κλάσματα εἶναι ἰσοδύναμα ἂν τὰ γινόμενα ποὺ ἔχουν παράγοντες τὸν ἀριθμητὴ τοῦ ἐνὸς καὶ τὸν παρονομαστή τοῦ ἄλλου εἶναι ἴσα.

Ἐφαρμογή : Τὰ κλάσματα $\frac{8}{20}$ καὶ $\frac{6}{15}$ εἶναι ἰσοδύναμα διότι :

$$8 \cdot 15 = 120$$

$$20 \cdot 6 = 120$$

$$\text{ἄρα: } 8 \cdot 15 = 20 \cdot 6$$

ἐνῶ τὰ κλάσματα $\frac{2}{5}$ καὶ $\frac{8}{21}$ **δὲν** εἶναι ἰσοδύναμα διότι

$$2 \cdot 21 = 42$$

ἐνῶ

$$5 \cdot 8 = 40$$

§ 147. Τὸ κλάσμα ὡς διατεταγμένο ζεῦγος

Ἄς πάρουμε ἓνα κλάσμα π.χ. τὸ $\frac{2}{3}$ κι' ἄς ἐναλλάξουμε τοὺς ὅρους του. Θὰ ἔχουμε τὸ κλάσμα $\frac{3}{2}$. Εἶναι φανερό ὅτι

$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} \quad (\text{ἀφοῦ } 2 \cdot 2 \neq 3 \cdot 3)$$

Ἄρα : Οἱ ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι διατεταγμένο ζεῦγος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

435) Να άπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:

$$\frac{12}{18}, \quad \frac{25}{45}, \quad \frac{256}{400}, \quad \frac{42}{441}$$

436) Να γράψετε τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἰσοδύναμα μετὰ τὸ $\frac{3}{4}$.

437) Να γράψετε τὸ σύνολο τῶν κλασμάτων ποὺ εἶναι ἰσοδύναμα μετὰ τὸ $\frac{3}{5}$ κι' ἔχουν παρονομαστή μικρότερο τοῦ 40.

438) Να άπλοποιήσετε τὸ κλάσμα $\frac{6+3 \cdot \alpha}{9}$ (χρησιμοποιεῖστε πρῶτα τὴν ἐπιμεριστική ιδιότητα στὸν ἀριθμητή).

439) Να άπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:

$$\frac{2^3 \cdot 5}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7}, \quad \frac{2^5 \cdot 3^7 \cdot 7^3}{2^4 \cdot 3^{18} \cdot 7}$$

440) Να τρέψετε σὲ ὁμόνυμα τὰ κλάσματα:

$$\begin{array}{ll} \alpha) \frac{2}{5}, \frac{4}{20} & \beta) \frac{1}{3}, \frac{3}{11}, \frac{5}{44} \\ \gamma) \frac{3}{25}, \frac{7}{35}, \frac{1}{3} & \delta) \frac{2^3}{5^2}, \frac{2^4}{3^2 \cdot 5^3} \end{array}$$

441) Ποιά ἴσα κλάσματα συνεπάγεται ἡ ἰσότης $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$;

442) Ποιόν ἀριθμὸ ἀντιπροσωπεύει ὁ χ στὴν ἰσότητα $\frac{4}{5} = \frac{\chi}{45}$;

443) Να διατάξετε κατὰ μέγεθος τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}$

444) Να συγκρίνετε τὰ κλάσματα $\frac{8}{120}$ καὶ $\frac{1}{15}$

445) Να άπλοποιήσετε τὰ κλάσματα:

$$\alpha) \frac{3 \cdot \alpha^2 + 5 \cdot \alpha^2}{4 \cdot \alpha^2} \quad \beta) \frac{4 \cdot \chi - \chi}{9 \cdot \chi} \quad \chi \in \Phi$$

§ 147. Κλασματική γραφή τῶν ἀκεραίων

α) Εἶναι φανερό ὅτι ἂν χρησιμοποιήσουμε ὡς ἐκτελεστὰς τὸ 1 καὶ τὸ $\frac{3}{3}$ στὸ τμήμα AB θὰ ἔχουμε τὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

Άρα : Οι εκτελεσται $\frac{3}{3}$ και 1 είναι ίσοι.

είναι δηλαδή $\frac{3}{3} = 1$

και γενικά: $1 = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \frac{4}{4} = \dots = \frac{a}{a}$. Όπου $a \in \Phi$ και $a \neq 1$.

Επεκτείνουμε τόν κανόνα και στην περίπτωση του κλάσματος $\frac{1}{1}$ κι' έχουμε

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \dots = \frac{a}{a}. \quad \text{Όπου } a \in \Phi$$

ώστε : η άκεραία μονάδα γράφεται ως κλάσμα με ίσους δρους.

β) Παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} 2 &= 2 \cdot 1 & \text{ή} & & 3 &= 3 \cdot 1 \\ &= 2 \cdot \frac{5}{5} & & & &= 3 \cdot \frac{7}{7} \\ &= 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{5} & & & &= 3 \cdot 7 \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{2 \cdot 5}{5} & & & &= \frac{3 \cdot 7}{7} \end{aligned}$$

Ώστε: «Κάθε άκεραίος γράφεται ως κλάσμα με όποιον θέλουμε παρονομαστή a (όπου $a \in \Phi$) και άριθμητή τó γινόμενο τού άκεραίου με τόν παρονομαστή a ».

π.χ. $3 = \frac{a \cdot 3}{a}, \quad 4 = \frac{a \cdot 4}{a}, \quad 5 = \frac{a \cdot 5}{a}$

Γενικά:

$$v = \frac{a \cdot v}{a} \quad \text{όπου } a \in \Phi$$

Έφαρμογή: Ποιόν άριθμό άντιπροσωπεύει ó χ στην ισότητα $8 = \frac{\chi}{7}$

Σύμφωνα με τόν κανόνα πρέπει $8 = \frac{7 \cdot 8}{7}$

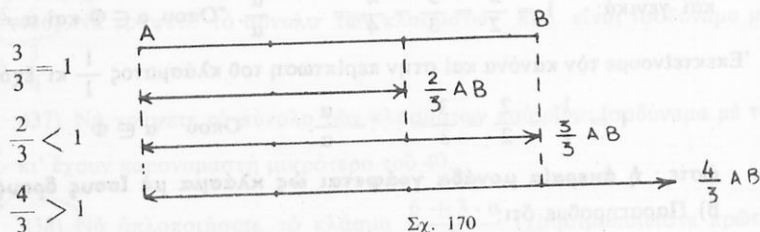
άρα $\chi = 7 \cdot 8 = 56$.

Παρατήρηση: Άφού κάθε άκεραίος γράφεται και ως κλάσμα, τó σύνολο τών άκεραίων είναι ύποσύνολο τού συνόλου τών κλασματικών άριθμών.

Κάθε άριθμός τής μορφής $\frac{a}{\beta}$ (όπου $a \in \Phi_0$ και $\beta \in \Phi$), δηλαδή κάθε άκεραίος ή κλασματικός άριθμός λέγεται ρητός ή σύμμετρος.

§ 148. Σύγκριση κλασμάτων με την άκεραία μονάδα

“Αν σ’ ένα τμήμα AB εφαρμόσουμε τα κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$ ως εκτελεστάς, σχήμα 170, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι:



“Ωστε: α) “Αν οί ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι ἴσοι, τὸ κλάσμα εἶναι ἴσο μετὴν ἀκεραία μονάδα.

$$a = b \iff \frac{a}{b} = 1$$

β) “Αν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τότε τὸ κλάσμα εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα.

$$a < b \iff \frac{a}{b} < 1$$

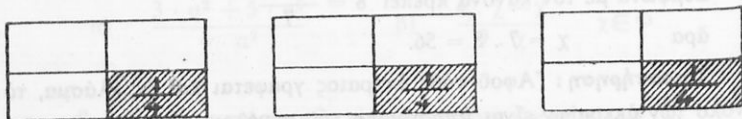
γ) “Αν ὁ ἀριθμητὴς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν παρονομαστή, τότε τὸ κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὴν ἀκεραία μονάδα

$$a > b \iff \frac{a}{b} > 1 \quad b \in \Phi$$

§ 149. Τὸ κλάσμα ὡς πηλίκο διαιρέσεως

α) Νὰ μοιρασθοῦν τρεῖς σοκολάτες σὲ τέσσερα ἴσα μέρη.

Πρόκειται διὰ τὴν διαίρεση μερισμοῦ $3 : 4$, σχ. 171.



Σχ. 171

Στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων δὲν ὑπάρχει λύση αὐτοῦ τοῦ προβλήματος, ἀφοῦ $3 < 4$.

Πρακτικά θα λύναμε το πρόβλημα αν μοιράζαμε κάθε σοκολάτα σε 4 ίσα μέρη, οπότε το κάθε μερίδιο θα ήταν

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Ωστε με τη βοήθεια του κλάσματος $\frac{3}{4}$ έγινε δυνατή η διαίρεση $3:4$ το δε $\frac{3}{4}$ παριστάνει το ακριβές πηλίκο της διαιρέσεως $3:4$.

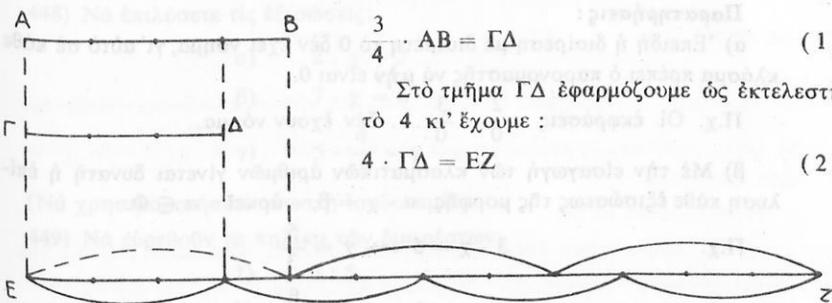
β) Νά υπολογισθῇ τὸ γινόμενο $4 \cdot \frac{3}{4}$.

Στὸ τμήμα AB σχ. 172 ἐφαρμόζουμε ὡς ἐκτελεστή τὸ $\frac{3}{4}$ κι' ἔχουμε :

$$\frac{3}{4} \cdot AB = \Gamma\Delta \quad (1)$$

Στὸ τμήμα $\Gamma\Delta$ ἐφαρμόζουμε ὡς ἐκτελεστή τὸ 4 κι' ἔχουμε :

$$4 \cdot \Gamma\Delta = EZ \quad (2)$$



Σχ. 172

κι' ἂν ἀντικαταστήσουμε τὸ $\Gamma\Delta$ μὲ τὸ ἴσο του $\frac{3}{4} \cdot AB$ θὰ ἔχουμε :

$$4 \cdot \frac{3}{4} \cdot AB = EZ. \quad (3)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχῆμα διακρίνουμε ὅτι $EZ = 3 \cdot AB$.

$$\text{Ἄρα} \quad 4 \cdot \frac{3}{4} \cdot AB = 3 \cdot AB$$

$$\text{ἢ} \quad 4 \cdot \frac{3}{4} = 3.$$

Γενικά :

$$\boxed{\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha}$$

$$\beta \in \Phi \quad (4)$$

Τὸ γινόμενο ἑνὸς κλάσματος μὲ τὸν παρονομαστή του εἶναι ἴσο μὲ τὸν ἀριθμητὴ τοῦ κλάσματος.

Ἡ ἰσότης (4) μᾶς λέγει καὶ κάτι ἄλλο : Τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἓνας ἀριθμὸς ποὺ πολλαπλασιαζόμενος μὲ τὸ β μᾶς δίδει τὸ α . Μ' ἄλλα λόγια εἶναι τὸ ἀκριβὲς πηλίκο τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$.

Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι :

1) Κάθε διαίρεση εἶναι δυνατὴ καὶ τελεία (ἄρκει ὁ διαιρέτης νὰ εἶναι $\neq 0$).

2) Τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως δύο ἀκεραίων α καὶ β ($\beta \in \Phi$) εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

3) Κάθε κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του.

Παρατηρήσεις :

α) Ἐπειδὴ ἡ διαίρεση μὲ διαιρέτη τὸ 0 δὲν ἔχει νόημα, γι' αὐτὸ σὲ κάθε κλάσμα πρέπει ὁ παρονομαστὴς νὰ μὴν εἶναι 0.

Π.χ. Οἱ ἐκφράσεις $\frac{2}{0}$ $\frac{3}{0}$... δὲν ἔχουν νόημα.

β) Μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν γίνεται δυνατὴ ἡ ἐπίλυση κάθε ἐξισώσεως τῆς μορφῆς $\alpha \cdot \chi = \beta$, ἄρκει $\alpha \in \Phi$.

Π.χ. $3 \cdot \chi = 5 \iff \chi = \frac{5}{3}$

$$\alpha \cdot \chi = \beta \iff \chi = \frac{\beta}{\alpha} \quad \alpha \in \Phi$$

Ἐφαρμογές :

1) Ποιὸν ἀριθμὸ ἀντιπροσωπεύει ὁ χ στὴν ἰσότητα

$$7 \cdot \frac{3}{7} = \chi$$

Ἐπειδὴ $\beta \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \alpha$ θὰ εἶναι καὶ $7 \cdot \frac{3}{7} = 3$

ἄρα $\chi = 3$.

2) Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸ 3 γιὰ νὰ ἔχουμε γινόμενο 2 ;

Ἄν καλέσουμε χ τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ, τότε θὰ πρέπει

$$\chi \cdot 3 = 2$$

ὁπότε

$$\chi \cdot 3 = 2 \iff \chi = 2 : 3 \quad (\text{ἰσοδυναμία διαιρέσεως})$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = \frac{2}{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

446) Ποιόν αριθμό παριστάνει ο χ σε κάθε μία από τις ισότητες:

$$\alpha) 2 = \frac{\chi}{1} \quad \beta) 2 = \frac{\chi}{5} \quad \gamma) 7 = \frac{\chi}{8} \quad \delta) 7 = \frac{21}{\chi}$$

447) Να συμπληρώσετε τις συνεπαγωγές:

$$\alpha) \quad a > 5 \Rightarrow \frac{a}{5} > \dots$$

$$\beta) \quad a > 5 \Rightarrow \frac{5}{a} \dots$$

$$\gamma) \quad a = 5 \Rightarrow \frac{5}{a} = \dots$$

448) Να επιλύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \quad 2 \cdot \chi = 3$$

$$\beta) \quad 7 \cdot \chi = 8$$

$$\gamma) \quad 5 \cdot \frac{4}{5} = \chi$$

(Να χρησιμοποιήσετε γνωστή ισοδυναμία).

449) Να εύρεθούν τα ηλίκα των διαιρέσεων:

$$1) \quad 2 : 5$$

$$2) \quad a : 3.$$

450) Ποιές διαιρέσεις έχουν ηλίκα:

$$1) \quad \frac{2}{5},$$

$$2) \quad \frac{3}{4},$$

$$3) \quad \frac{a}{7}$$

§ 150. Ρητοί αριθμοί

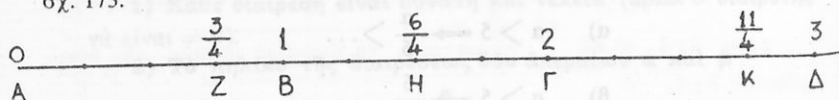
Οί κλασματικοί αριθμοί αποτελούν ένα **νέο σύνολο**, το σύνολο των **ρητῶν** ή **συμμέτρων** αριθμῶν, το ὁποῖον συνήθως ὀνομάζουμε με τὸ P. Βέβαια στὸ P ἀνήκουν καὶ οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοὶ τῆς ἀριθμητικῆς, ἀφοῦ γράφονται καὶ σὲ κλασματικὴ μορφή.

$$\text{Π.χ.} \quad 7 = \frac{7}{1}, \quad a = \frac{a}{1}$$

Ἔτσι βλέπουμε ὅτι : Τὸ σύνολο P ἀποτελεῖται ἀπὸ τοὺς ἀκεραίους καὶ ἀπὸ τὰ **μὴ ἀκέραια ηλίκα ἐνὸς ἀκεραίου με ἓνα φυσικὸ ἀριθμὸ**.

§ 151. Γραφική παράσταση του συνόλου τῶν ρητῶν ἀριθμῶν

Ἔχουμε μάθει νὰ παριστάνουμε σὲ μιὰ ἡμιευθεῖα τὸ σύνολο Φ_0 (ἡμιευθεῖα διατάξεως). Στὴν ἴδια ἡμιευθεῖα μπορούμε νὰ παραστήσουμε καὶ τὸ σύνολο P τῶν ρητῶν ἀριθμῶν. Χαράζουμε τὴν ἡμιευθεῖα διατάξεως τοῦ Φ_0 , σχ. 173.



Σχ. 173

Γιὰ νὰ παραστήσουμε ἓνα κλάσμα π.χ. τὸ $\frac{3}{4}$ στὴν $A\chi$ παίρνουμε τμῆμα AZ τέτοιο ὥστε $AZ = \frac{3}{4} \cdot AB$, σχῆμα 173.

Τὸ σημεῖο Z παριστάνει τὸ κλάσμα $\frac{3}{4}$ καὶ κάθε ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμο μὲ αὐτό. Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε γιὰ τὴν παράσταση κάθε ρητοῦ στὴν ἡμιευθεῖα διατάξεως.

Παρατηροῦμε δὲ ὅτι:

α) Σὲ κάθε κλάσμα (γενικὰ ρητὸ) ἀντιστοιχεῖ **ἓνα μόνο** σημεῖο τῆς ἡμιευθεῖας (ὅλα τὰ ἰσοδύναμα κλάσματα ἀντιστοιχοῦν σ' ἓνα σημεῖο γιατί, καθὼς εἶπαμε, εἶναι διαφορετικὲς γραφὲς ἢ ὀνόματα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ).

β) Σὲ δύο ἄνισα κλάσματα ἀντιστοιχοῦν δύο διάφορα σημεῖα κατὰ τέτοιο τρόπο ὥστε, ἂν ἓνας ρητὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἄλλον ρητὸ β , τότε τὸ ἀντίστοιχο σημεῖο τοῦ α εἶναι δεξιὰ τοῦ ἀντιστοίχου σημείου τοῦ β .

γ) Ἄν διπλασιάσουμε ἓναν ἀριθμὸ, διπλασιάζεται καὶ ἡ ἀπόσταση τοῦ σημείου του ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἡμιευθεῖας.

Ἔχουμε δηλ. τὸ σύνολο P σὲ διάταξη μεγέθους ἀπὸ τὸ μικρότερο πρὸς τὸ μεγαλύτερο, ἢ δὲ ἡμιευθεῖα λέγεται **ἡμιευθεῖα διατάξεως τοῦ P** .

Σημείωση :

Τὸ σύνολο P ἀντιστοιχεῖ σ' ἓνα σύνολο σημείων E τῆς ἡμιευθεῖας διατάξεως. Κάθε στοιχεῖο τοῦ P ἔχει ἓνα ἀντίστοιχο σημεῖο στὴν ἡμιευθεῖα. Ἀλλὰ σὲ κάθε σημεῖο τῆς ἡμιευθεῖας **δὲν** ἀντιστοιχεῖ ἓνας ρητὸς. Ὑπάρχουν δηλαδὴ σημεῖα τῆς ἡμιευθεῖας τὰ ὁποῖα δὲν παριστάνουν ρητοὺς ἀριθμοὺς ἀλλὰ ἓνα ἄλλο εἶδος ἀριθμῶν, ποὺ θὰ συναντήσουμε ἀργότερα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

451) Να χαράξετε την ήμικυκλidia διατάξεως του P και να βρῆτε σ' αὐτὴν σημεία ποὺ νὰ ἀντιστοιχοῦν στὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$

452) Πόσα σημεία τῆς ήμικυκλidia διατάξεως τοῦ P ἀντιστοιχοῦν στὰ κλάσματα: $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$;

453) Πῶς μὲ τὴ βοήθεια τῆς ήμικυκλidia διατάξεως τοῦ P μποροῦμε νὰ συγκρίνουμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{4}$;

454) Ἄν $\frac{3}{4}$ πλασιάσετε ἓναν ἀριθμὸ τί παθαίνει τὸ ἀντίστοιχο σημεῖο τοῦ στὴν ήμικυκλidia διατάξεως τοῦ P;

§ 152. Πρόσθεση κλασμάτων

152.1 Πρόσθεση ὁμώνυμων κλασμάτων

Μία μηχανὴ ὑφαίνει τὴν α' ὥρα ὑφασμα μήκους 4 παλ, τὴ β' ὥρα ὑφασμα μήκους 3 παλ. Πόσο μήκος θὰ ὑφάνη στὶς 2 ὥρες.

Θὰ ὑφάνη

$$4 \text{ παλ} + 3 \text{ παλ} = 7 \text{ παλ}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{4}{10} \mu + \frac{3}{10} \mu = \frac{7}{10} \mu$$

Ἄν σὲ εὐθύγρ. τμήμα α ἐφαρμόσω ὡς ἐκτελεστὰς τὰ κλάσματα

$$\frac{4}{10}, \frac{3}{10}, \frac{7}{10}$$

$$\text{θὰ ἔχω} \quad \frac{4}{10} \cdot \alpha + \frac{3}{10} \cdot \alpha = \frac{7}{10} \cdot \alpha$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

ἢ

$$\boxed{\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha + \beta}{\gamma} \quad \gamma \in \Phi}$$

Ὡστε: Τὸ ἄθροισμα ὁμώνυμων κλασμάτων εἶναι κλάσμα ὁμόνυμο μὲ αὐτὰ μὲ ἀριθμητὴ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν.

152.2 Πρόσθεση ἑτερόνυμων κλασμάτων

Ἐπειδὴ πάντοτε τὰ ἑτερόνυμα κλάσματα τρέπονται σὲ ὁμόνυμα, γιὰ τοῦτο, γιὰ νὰ προσθέσουμε ἑτερόνυμα τὰ τρέπουμε πρῶτα σὲ ὁμόνυμα καὶ ἔπειτα ἐκτελοῦμε τὴν πρόσθεση.

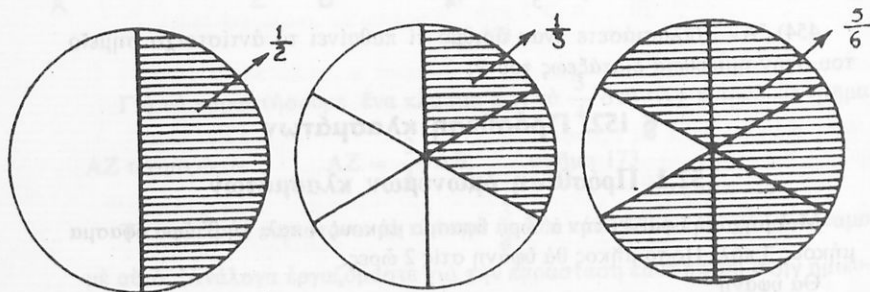
Έτσι έχουμε :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \chi$$

ή $\chi = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$ (Επειδή Ε.Κ.Π. = 6 και $6:2=3$
 $6:3=2$)

ή $\chi = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}$

ή $\chi = \frac{5}{6}$



Σχ. 174

Οι δύο από τους 3 κυκλικούς δίσκους του σχήματος 174 παριστάνουν τους προσθετέους $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ και ο 3ος το άθροισμα $\frac{5}{6}$.

§ 153. Ίδιότητες

Καθώς βλέπουμε ή πρόσθεση κλασμάτων ανάγεται σε πρόσθεση των αριθμητών **ομωνύμων κλασμάτων** δηλ. σε πρόσθεση **άκεραίων**.

Άρα: Στην πρόσθεση κλασμάτων ισχύουν οι ιδιότητες προσθέσεως άκεραίων.

Έπαλήθευση των ιδιοτήτων της προσθέσεως.

1) Είναι $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

αλλά και $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

άρα $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7} + \frac{2}{7}$

καί γενικά :

$$\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\alpha}{\gamma} \quad \gamma \in \Phi \quad \text{Ιδιότης αντιμεταθέσεως}$$

2) Είναι

$$\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7} \right) + \frac{1}{7} = \frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

αλλά και

$$\frac{2}{7} + \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7} \right) = \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = \frac{6}{7}$$

άρα

$$\left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7} \right) + \frac{1}{7} = \frac{2}{7} + \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{7} \right)$$

καί
γενικά :

$$\left(\frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} \right) + \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma} + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} \right) \quad \gamma \in \Phi \quad \text{Προσεταιριστική ιδιότητα}$$

3)

$$\frac{2}{7} + \frac{0}{7} = \frac{2+0}{7} = \frac{2}{7}$$

Γενικά :

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{0}{\beta} = \frac{\alpha+0}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \beta \in \Phi \quad \text{ουδέτερο στοιχείο της προσθέσεως.}$$

§ 154. Μεικτοί αριθμοί

Το άθροισμα $2 + \frac{1}{3}$ για λόγους συντομίας, γράφεται $2\frac{1}{3}$ και λέγεται **μεικτός αριθμός**.

Τροπή μεικτού σε κλάσμα.

Είναι:

$$2\frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3} = \frac{7}{3}$$

«Για να τρέψουμε ένα μεικτό σε κλάσμα πολλαπλασιάζουμε τον άκεραίο με τον παρονομαστή και στο γινόμενο προσθέτουμε τον αριθμητή. Το άθροισμα αυτό θέτουμε ως αριθμητή και παρονομαστή αφήνουμε τον ίδιο».

Αντίστροφα : Το κλάσμα $\frac{25}{7}$ που είναι μεγαλύτερο απ' την άκεραία μονάδα τρέπεται σε μεικτό με τη βοήθεια της διαιρέσεως $25 : 7$

$$\begin{array}{r} 25 \mid 7 \\ 4 \end{array} \quad \frac{25}{7} = 3\frac{4}{7}$$

$$\eta \quad \frac{25}{7} = \frac{3 \cdot 7 + 4}{7} = \frac{3 \cdot 7}{7} + \frac{4}{7} \\ = 3 \frac{4}{7}$$

Σημείωση: Ὁ μεικτὸς $7 \frac{4}{7}$ διαφέρει ἀπὸ τὸ γινόμενο $7 \cdot \frac{4}{7}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

455) Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀθροίσματα:

$$1) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \quad 2) \quad \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9} \quad 3) \quad \frac{a}{5} + \frac{a+1}{5}$$

456) Μὲ τὴ βοήθεια τῆς προσεταιριστικῆς ιδιότητος νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀθροίσματα:

$$\alpha) \quad \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \quad \beta) \quad 2 \frac{3}{7} + 1 \frac{4}{9} + 2 \frac{5}{9}$$

457) Ποιὸν ἀριθμὸ ἀντιπροσωπεύει τὸ χ στὴν ἰσότητα:

$$5 \frac{3}{4} + \frac{\chi}{4} = 5 \frac{3}{4}$$

458) Νὰ ὑπολογίσετε (μὲ δύο τρόπους) τὸ ἄθροισμα $2 \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$

459) Νὰ χρησιμοποιήσετε μία ιδιότητα τῆς προσθέσεως γιὰ νὰ ὑπολογίσετε πὺρ σύντομα τὸ ἄθροισμα: $2 \frac{4}{5} + 1 \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$

460) Ἐνα δοχεῖο περιέχει 1234 χιλιόγρ. λάδι κι' ἓνα ἄλλο $2 \frac{4}{5}$ χιλιόγρ. περισσότερο. Πόσο λάδι χωροῦν καὶ τὰ δύο δοχεῖα;

461) Ἐνας ἔμπορος πούλησε ἀπὸ ἓνα βαρέλι τυρὶ $5 \frac{3}{4}$ χιλγρ. Τὴν ἄλλη μέρα πούλησε $12 \frac{4}{5}$ χιλγρ., τὴν ἐπομένη $13 \frac{4}{8}$ χιλγρ. καὶ τέλος $10 \frac{9}{10}$ χιλγρ. Πόσο τυρὶ πούλησε συνολικά;

462) Ἐνας ἔμπορος ἀγόρασε τρία σακκιὰ καφέ, ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ α' ζύγιζε $120 \frac{3}{8}$ χιλγρ., τὸ β' $119 \frac{1}{4}$ χιλγρ. καὶ τὸ γ' $97 \frac{25}{100}$ χιλγρ. Πόσα χιλιόγραμμα ἀγόρασε συνολικά;

463) Μιὰ ὑφάντρια ὑφαίνει σὲ μιὰ μέρα $3 \frac{7}{10}$ m, ἄλλη ὑφάντρια $1 \frac{5}{8}$ m

περισσότερο από την πρώτη και τρίτη $\frac{2}{5}$ m περισσότερο από τη δεύτερη. Πόσα μέτρα θα ύφάνουν σε μιὰ μέρα και οί τρεῖς μαζί ;

464) Ἀπὸ ἓνα σακκὶ καφέ ὁ ἔμπορος πούλησε $7\frac{1}{2}$ χλγρ. σ' ἓνα πελάτη, $\frac{3}{20}$ χλγρ. σὲ ἄλλον, σ' ἓνα τρίτο πούλησε ὅσο και στοὺς δύο πρώτους και 15 χλγρ. ἀκόμη, ἔμειναν δὲ στὸ σακκὶ $21\frac{3}{4}$ χλγρ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα χιλιόγραμμα εἶχε τὸ σακκί.

§ 155. Ἀφαίρεση κλασμάτων

Ὅπως διαφορά $\alpha - \beta$ δύο ἀκεραίων α και β ($\alpha > \beta$) εἶναι ἓνας ἄλλος ἀκεραῖος χ , τέτοιος

$$\text{ὥστε} \quad \chi + \beta = \alpha$$

ἢ συμβολικὰ $\alpha - \beta = \chi \Leftrightarrow \chi + \beta = \alpha$,

ἔτσι και διαφορά δύο ὁμώνυμων κλασμάτων π.χ. $\frac{7}{11} - \frac{4}{11}$ εἶναι

ἓνα ὁμώνυμο κλάσμα $\frac{\chi}{11}$ τέτοιο,

$$\text{ὥστε} \quad \frac{\chi}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$$

ἢ συμβολικὰ :

$$\boxed{\frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{\chi}{11} \Leftrightarrow \frac{\chi}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}}$$

155.1 Ὑπολογισμὸς τοῦ χ

Ἀπὸ τὸ 2ο μέρος τῆς ἰσοδυναμίας ἔχουμε :

$$\frac{\chi + 4}{11} = \frac{7}{11}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi + 4 = 7$$

$$\text{ἢ} \quad \chi + 4 = 7 \Leftrightarrow \chi = 7 - 4$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{7}{11} - \frac{4}{11} = \frac{7-4}{11}$$

και γενικὰ :

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta} \quad \text{ὅπου} \quad \begin{matrix} \beta \in \Phi \\ \gamma < \alpha \end{matrix}}$$

“Ωστε : «Για να αφαιρέσουμε ομώνυμα κλάσματα αφαιρούμε τους αριθμητές και αφήνουμε τον ίδιο παρονομαστή».

‘Η αφαίρεση έτερωνύμων γίνεται αφού πρώτα τα τρέψουμε σε ομώνυμα

$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} = \frac{7}{8} - \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$$

Παραδείγματα :

$$1) \quad \frac{13}{25} - \frac{9}{25} = \frac{13-9}{25} = \frac{4}{25}$$

$$2) \quad \frac{5}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9} - \frac{3}{9} = \frac{5-3}{9} = \frac{2}{9}$$

$$3) \quad 8 - \frac{5}{7} = \frac{8}{1} - \frac{5}{7} = \frac{56}{7} - \frac{5}{7} = \frac{51}{7} = 7 \frac{2}{7}$$

$$\eta \quad 8 - \frac{5}{7} = 7 + 1 - \frac{5}{7} = 7 + \left(\frac{7}{7} - \frac{5}{7} \right) = 7 + \frac{2}{7} = 7 \frac{2}{7}$$

$$4) \quad \frac{25}{8} - 3 = \frac{25}{8} - \frac{3}{1} = \frac{25}{8} - \frac{24}{8} = \frac{1}{8}$$

$$5) \quad \frac{7}{9} - 0 = \frac{7}{9} - \frac{0}{1} = \frac{7}{9} - \frac{0}{9} = \frac{7-0}{9} = \frac{7}{9}$$

155.2 ‘Η αφαίρεση ρητών πράξη αντίστροφη της προσθέσεως.

‘Επειδή είναι $\left(\frac{7}{11} - \frac{4}{11} \right) + \frac{4}{11} = \frac{7}{11} \quad \eta \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\gamma}{\beta} \right) + \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

$$\gamma < \alpha, \quad \beta \in \Phi$$

και $\left(\frac{7}{11} + \frac{4}{11} \right) - \frac{4}{11} = \frac{7}{11} \quad \eta \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} \right) - \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$

συμπεραίνουμε ότι :

‘Η αφαίρεση μεταξύ των ρητών είναι πράξη αντίστροφη της προσθέσεως.

§ 156. ‘Ιδιότητες αφαιρέσεως

‘Επειδή η αφαίρεση κλασμάτων ανάγεται σε αφαίρεση των αριθμητών που είναι άκεραιοι, οι ιδιότητες αφαιρέσεως των άκεραίων θα ισχύουν και στην αφαίρεση κλασματικών αριθμών.

‘Επαλήθευση

1) Είναι $\frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12}$

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{12} \right) - \left(\frac{5}{12} + \frac{3}{12} \right) = \frac{10}{12} - \frac{8}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{ἄρα :} \quad \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \left(\frac{7}{12} + \frac{3}{12} \right) - \left(\frac{5}{12} + \frac{3}{12} \right)$$

$$2) \quad \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad \left(\frac{7}{12} - \frac{2}{12} \right) - \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{12} \right) = \frac{5}{12} - \frac{3}{12} = \frac{2}{12}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{7}{12} - \frac{5}{12} = \left(\frac{7}{12} - \frac{2}{12} \right) - \left(\frac{5}{12} - \frac{2}{12} \right)$$

3) Πῶς ἀφαιροῦμε ἀθροισμα ἀπὸ ἀριθμό.

$$\frac{12}{15} - \left(\frac{4}{15} + \frac{5}{15} \right) = ;$$

αος τρόπος

$$\frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15}$$

$$\frac{12}{15} - \frac{9}{15} = \frac{3}{15}$$

βος τρόπος

$$\frac{12}{15} - \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} - \frac{5}{15} = \frac{3}{15}$$

ἄρα

$$\boxed{\frac{12}{15} - \left(\frac{4}{15} + \frac{5}{15} \right) = \left(\frac{12}{15} - \frac{4}{15} \right) - \frac{5}{15}}$$

4) Πῶς προσθέτουμε διαφορά σὲ ἀριθμό.

$$\frac{11}{18} + \left(\frac{5}{18} - \frac{3}{18} \right) = ;$$

αος τρόπος

$$\frac{5}{18} - \frac{3}{18} = \frac{2}{18}$$

$$\frac{11}{18} + \frac{2}{18} = \frac{13}{18}$$

βος τρόπος

$$\frac{11}{18} + \frac{5}{18} = \frac{16}{18}$$

$$\frac{16}{18} - \frac{3}{18} = \frac{13}{18}$$

ἄρα

$$\boxed{\frac{11}{18} + \left(\frac{5}{18} - \frac{3}{18} \right) = \left(\frac{11}{18} + \frac{5}{18} \right) - \frac{3}{18}}$$

5) Πῶς ἀφαιροῦμε διαφορά ἀπὸ ἀριθμό.

$$\frac{29}{35} - \left(\frac{21}{35} - \frac{12}{35} \right) = ;$$

αος τρόπος

$$\begin{array}{r} 21 \\ 35 \end{array} - \begin{array}{r} 12 \\ 35 \end{array} = \begin{array}{r} 9 \\ 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ 35 \end{array} - \begin{array}{r} 9 \\ 35 \end{array} = \begin{array}{r} 20 \\ 35 \end{array}$$

βος τρόπος

$$\begin{array}{r} 29 \\ 35 \end{array} - \begin{array}{r} 21 \\ 35 \end{array} = \begin{array}{r} 8 \\ 35 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 35 \end{array} + \begin{array}{r} 12 \\ 35 \end{array} = \begin{array}{r} 20 \\ 35 \end{array}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{29}{35} - \left(\frac{21}{35} - \frac{12}{35} \right) = \left(\frac{29}{35} - \frac{21}{35} \right) + \frac{12}{35}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(465) Νά γίνουν οί ἀφαιρέσεις:

$$\alpha) \quad \frac{11}{18} - \frac{5}{9} \quad \beta) \quad 3\frac{1}{4} - \frac{7}{8} \quad \gamma) \quad 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3}$$

466) Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά προσθέσουμε στό κλάσμα $\frac{3}{7}$ γιά νά βροῦ-
με ἄθροισμα $1\frac{1}{3}$; (Χρησιμοποιεῖστε ἐξίσωση).

467) Ποιόν ἀριθμό πρέπει νά ἀφαιρέσουμε ἀπ' τὸ $3\frac{2}{5}$ γιά νά βροῦμε
ὑπόλοιπο $1\frac{7}{20}$; (Χρησιμοποιεῖστε ἐξίσωση).

468) Τί παθαίνει ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{2}{3}$ ἂν προσθέσουμε καί
στοὺς δύο ὁρους τοῦ τῆ μονάδα;

469) Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις :

$$\alpha) \quad \frac{x}{7} - \frac{1}{3} = \frac{5}{14} \quad \beta) \quad \frac{3}{5} - \frac{x}{3} = \frac{1}{10} \quad \gamma) \quad \frac{5 \cdot x}{8} - \frac{3 \cdot x}{8} = 4$$

470) Ἐνας ἀγρότης ἀγόρασε $24\frac{7}{10}$ χλγρ. ἀραβόσιτο γιά τίς κότες
τοῦ. Σέ λίγες μέρες εἶδε ὅτι ἔμειναν $15\frac{3}{5}$ χλγρ. Πόσα χλγρ. ἀραβόσι-
το ἔφαγαν οἱ κότες;

471) Ἀεροπλάνο ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ ἀεροδρόμιο τοῦ Ἑλληνικοῦ τῆν
 $8\frac{1}{3}$ ὥρα π.μ. καὶ φθάνει στὴ Ρώμη τῆν $11\frac{7}{10}$ π.μ. Πόσο χρόνο χρειά-
ζεται γιά νά φθάσῃ στὴ Ρώμη;

472) Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ $9\frac{5}{8}$. Ὁ ἓνας προσθετέος

είναι $3 \frac{11}{12}$. Ποιός είναι ο άλλος προσθετός και ποιά η διαφορά αυτών;

473) Χαράξτε ευθεία ΧΟΨ κι' έπειτα τις ήμιευθείες ΟΑ και ΟΒ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΧΨ. Ἐν ἡ γωνία ΧΟΑ ἔχη μέτρο $36^\circ 20'$ καὶ ἡ ΑΟΒ $45^\circ 32'$ νὰ υπολογίσετε τὸ μέτρο τῆς γωνίας ΨΟΒ.

474) Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει ν' ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ $12 \frac{2}{9}$ γιὰ νὰ μείνῃ ὑπόλοιπο $3 \frac{7}{15}$;

475) Γράψτε δύο ἰσότητες ἰσοδύναμες μετὰ τὴν ἰσότητα

$$3 \frac{7}{9} + 4 \frac{5}{9} = 8 \frac{1}{3}.$$

476) Νὰ ἐκτελέσετε (μετὰ 2 τρόπους) τὶς ἀφαιρέσεις

$$3 \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right), \quad 3 \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

477) Νὰ υπολογίσετε τὴν τιμὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ πολωνύμου

$$14 \frac{1}{2} - \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right)$$

Πολλαπλασιασμός καὶ διαίρεση κλασμάτων

§ 157. Πολλαπλασιασμός

Καθὼς εἶδαμε, ὅταν ἔχουμε ἓνα εὐθύγραμμο τμήμα ΑΒ καὶ ζητοῦμε νὰ βροῦμε ἓνα τμήμα ΓΔ ἴσο μετὰ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ, ἐφαρμόζουμε ὡς ἐκτελεστὴ τὸ $\frac{2}{3}$ στὸ ΑΒ.

Γράφουμε δὲ $\Gamma\Delta = \frac{2}{3} \cdot \text{ΑΒ}$

καὶ διαβάζουμε ΓΔ εἶναι ἴσο μετὰ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ΑΒ.

Ὡστε: Ὅταν ἔχουμε $\frac{2}{3} \cdot \alpha$, αὐτὸ σημαίνει νὰ βροῦμε τὰ

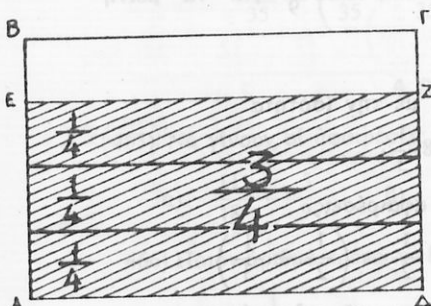
$\frac{2}{3}$ τοῦ α .

Νὰ υπολογισθῇ τὸ γινόμενο $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

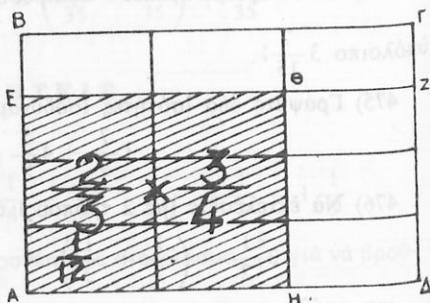
Στο σχήμα 175 διακρίνουμε ότι $ΑΕΖΔ = \frac{3}{4} \cdot ΑΒΓΔ$ (1)

Στο σχήμα 176 διακρίνουμε ότι $ΑΕΘΗ = \frac{2}{3} \cdot ΑΕΖΔ$ (2)

$$\text{Άρα} \quad ΑΕΘΗ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ΑΒΓΔ$$



Σχ. 175



Σχ. 176

άλλα το $ΑΕΘΗ$ αποτελείται από τα $\frac{6}{12}$ του $ΑΒΓΔ$ (περιέχει 6 από τα 12 ίσα ορθογώνια του $ΑΒΓΔ$).

$$\text{Άρα} \quad \frac{6}{12} \cdot ΑΒΓΔ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot ΑΒΓΔ$$

$$\eta \quad \frac{6}{12} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\eta \quad \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

$$\eta \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} \quad (\text{συμ/κή ιδιότητας})$$

γενικά:

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{a \cdot \gamma}{\beta \cdot \delta}$$

$\beta, \delta \in \Phi$

"Ωστε: Το γινόμενο δύο κλασμάτων είναι κλάσμα με αριθμητή το γινόμενο των αριθμητών και παρονομαστή το γινόμενο των παρονομαστών.

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε ως εξής :

α) Ἐφαρμόζουμε σ' ἓνα τμήμα AB τὸν ἔκτελεστή $\frac{3}{4}$ καὶ εὐρίσκου-

με τμήμα $\Gamma\Delta = \frac{3}{4} \cdot AB$, σχ. 177

β) Στὸ $\Gamma\Delta$ ἐφαρμόζουμε τὸ $\frac{2}{3}$ καὶ εὐρίσκουμε τμήμα

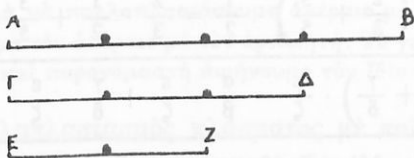
$$EZ = \frac{2}{3} \cdot \Gamma\Delta$$

$$\text{ἢ} \quad EZ = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} AB$$

γ) Στὸ τμήμα EZ καταλήγουμε κατ' εὐθείαν ἀπὸ τὸ AB, ἂν ἐφαρμόσουμε

ἔκτελεστή τὸ κλάσμα $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12}$ δηλ. εἶναι $EZ = \frac{6}{12} \cdot AB$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4}$$



Σχ. 177

Ἐπαλήθευση τῶν ἰδιοτήτων πολλαπλασιασμοῦ.

$$1\eta) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{2}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ιδιότης ἀντιμεταθέσεως.}}$$

$$2\eta) \quad \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{60}$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{20} = \frac{6}{60}$$

$$\text{ἄρα} \quad \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{4} \right)$$

$$\text{ἢ} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \left(\frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \right) \quad \text{Προσεταιριστική ἰδιότητα}$$

$$3\eta) \quad \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta} \cdot 1 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{οὐδέτερο στοιχείο}$$

$$4\eta) \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{15} \cdot \frac{1}{2} = \frac{19}{30}$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{10} = \frac{19}{30}$$

$$\text{ἄρα} \quad \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{5} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \right) \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} + \frac{\gamma}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad \left(\text{'Ἐπιμεριστική ἰδιότητα'} \right)$$

Παρατήρηση: Μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἐπιμεριστικῆς ἰδιότητος ἐξηγεῖται ὁ κανόνας προσθέσεως ὁμωνύμων κλασμάτων.

$$\begin{aligned} \text{Π.χ.} \quad \frac{2}{7} + \frac{3}{7} &= 2 \cdot \frac{1}{7} + 3 \cdot \frac{1}{7} \quad \left(\text{διότι } \frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta} \right) \\ &= (2+3) \cdot \frac{1}{7} \\ &= 5 \cdot \frac{1}{7} \\ &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Γενικά: } \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} &= \alpha \cdot \frac{1}{\beta} + \gamma \cdot \frac{1}{\beta} \quad \beta \neq 0 \\ &= (\alpha + \gamma) \cdot \frac{1}{\beta} \\ &= \frac{\alpha + \gamma}{\beta} \end{aligned}$$

'Ανάλογα ἐργαζόμαστε καὶ στὴν ἀφαίρεση.

Ἐπίσης μετὰ τὴ βοήθεια τοῦ οὐδετέρου στοιχείου τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἔχουμε :

$$\frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$$

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{a}{a} = \frac{2}{5} \quad a \neq 0$$

$$\eta \quad \frac{2 \cdot a}{5 \cdot a} = \frac{2}{5} \quad (\text{γνωστὴ ιδιότης τῶν κλασμάτων})$$

§ 159. Εἰδικές περιπτώσεις

29.1 Γινόμενο ἀκεραίου μετὰ κλάσμα

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{2}{5} &= \frac{3}{1} \cdot \frac{2}{5} \quad \left(\text{διότι } 3 = \frac{3}{1} \right) \\ &= \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 2}{5} \end{aligned}$$

Ὡστε : Γιά νά πολλαπλασιάσουμε ἀκέραιο μετὰ κλάσμα, πολλαπλασιάζουμε τὸν ἀκέραιο μετὰ τὸν ἀριθμητὴ. Τὸ γινόμενο θέτουμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ ἀφήνουμε τὸν ἴδιο».

159.2 Πολλαπλασιασμός κλάσματος μετὰ πολλαπλάσιο τοῦ παρονομαστοῦ

$$\begin{aligned} \text{Εἶναι } 6 \cdot \frac{2}{3} &= (2 \cdot 3) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 2 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} \right) \quad \left(\text{ἐπειδὴ δὲ } 3 \cdot \frac{2}{3} = 2 \right) \\ &= 2 \cdot 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad 9 \cdot \frac{2}{3} &= (3 \cdot 3) \cdot \frac{2}{3} \\ &= 3 \cdot \left(3 \cdot \frac{2}{3} \right) \\ &= 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Ὡστε : «Τὸ γινόμενο κλάσματος μετὰ τὸ 2πλάσιο, 3πλάσιο . . . τοῦ παρονομαστοῦ ἰσοῦται μετὰ τὸ 2πλάσιο - 3πλάσιο . . . τοῦ ἀριθμητοῦ».

§ 160. Γινόμενο μεικτοῦ μὲ κλάσμα

$$2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} =$$

α' τρόπος: $\left(2 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{5}{6} = \left(2 \cdot \frac{5}{6}\right) + \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}\right)$ (ἐπιμεριστική ἢ ἰδιότης)

$$= \frac{5}{3} + \frac{15}{24}$$

$$= \frac{5 \cdot 8}{3 \cdot 8} + \frac{15}{24}$$

$$= \frac{40 + 15}{24}$$

$$= \frac{55}{24} = 2\frac{7}{24}$$

β' τρόπος $2\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{11}{4} \cdot \frac{5}{6}$

$$= \frac{11 \cdot 5}{4 \cdot 6}$$

$$= \frac{55}{24}$$

$$= 2\frac{7}{24}$$

§ 161. Γινόμενο μεικτῶν

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{4}{5}$$

α' τρόπος. Τρέπουμε τοὺς μεικτοὺς σὲ κλάσματα

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{19}{5} = \frac{5 \cdot 19}{2 \cdot 5} = \frac{19}{2} = 9\frac{1}{2}$$

β' τρόπος. Εἶναι $2\frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2}$

$$3\frac{4}{5} = 3 + \frac{4}{5}$$

Άρα $2 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{4}{5} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{5}\right)$ εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα

$= 2 \cdot \left(3 + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(3 + \frac{4}{5}\right)$ εφαρμόζουμε πάλι την επιμεριστική

$= (2 \cdot 3) + \left(2 \cdot \frac{4}{5}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot 3\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}\right)$

$= 6 + \frac{8}{5} + \frac{3}{2} + \frac{4}{10} = 9 \frac{1}{2}$

§ 162. Γινόμενο αντίστροφων αριθμών

Από τα παραδείγματα: α) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2} = \frac{2}{2} \cdot \frac{3}{3} = 1$

β) $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3 \cdot 1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

συνάγουμε ότι :

Το γινόμενο δύο αντίστροφων αριθμών είναι ίσο με τη μονάδα.

ή συμβολικά:

$$\frac{a}{\beta} \cdot \frac{\beta}{a} = 1 \quad \text{όπου } a \in \Phi, \quad \beta \in \Phi$$

Γινόμενο κλάσματος με διαιρέτη το παρονομαστού του.

4. $\frac{5}{12} = \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{12} = \frac{4 \cdot 5}{12 \cdot 1} = \frac{5}{3}$ αλλά $\frac{5}{3} = \frac{5}{12 : 4}$

Άρα $4 \cdot \frac{5}{12} = \frac{5}{12 : 4}$

«Για να πολλαπλασιάσουμε ένα κλάσμα μ' ένα διαιρέτη του παρονομαστού του, αρκεί να διαιρέσουμε τον παρονομαστή διά του διαιρέτου του».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

478) Να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς:

α) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ β) $\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{25}$

479) Ποιοί είναι οι αντίστροφοι των αριθμών $\frac{2}{5}$, $1 \frac{1}{3}$, $2 \frac{4}{5}$

480) Νά εκτελεσθοῦν (μὲ δύο τρόπους) οἱ πράξεις:

$$\alpha) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4}{5} - \frac{1}{2} \right) \quad \beta) \left(\frac{3}{5} + \frac{1}{2} \right) \cdot 4$$

481) Νά ὑπολογίσετε, μὲ τὸν πιὸ σύντομο τρόπο, τὰ γινόμενα:

$$\alpha) 15 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{9} \quad \beta) \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{8} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{4}$$

482) Ἕνας φιλόσοφος ἐμοίρασε 120.000 σὲ 3 σχολεῖα μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Τὸ α' σχολεῖο νὰ πάρῃ τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ποσοῦ, τὸ β' σχολεῖο νὰ πάρῃ τὰ $\frac{7}{8}$ τῶν ὧσων πάρει τὸ πρῶτο σχολεῖο καὶ τὸ γ' σχολεῖο τὰ ὑπόλοιπα. Πόσα χρήματα θὰ πάρῃ τὸ κάθε σχολεῖο;

483) Ἕνας ποδηλάτης διατρέχει τὴν α' ὥρα τὰ $\frac{3}{8}$ μιᾶς ἀποστάσεως, τὴν β' ὥρα τὰ $\frac{5}{6}$ τῶν χλμ. τῆς α' ὥρας. Ὅλη ἡ ἀπόστασις ἦταν 60 χλμ. Πόσα χιλιόμετρα διέτρεξε κάθε ὥρα;

484) Ἕνας ἔμπορος ἀγοράζει ὕφασμα ἀξίας 6.000 δρχ. καὶ πληρώνει τὰ $\frac{7}{12}$ τοῦ ποσοῦ αὐτοῦ. Πόσα ὀφείλει ἀκόμα;

485) Ἕνα δοχεῖο χωρεῖ 400 γρ. νεροῦ. Πόσο νερὸ χωροῦν τὰ $\frac{2}{3}$ τῶν $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ;

486) Νά ὑπολογίσετε τὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως $2 \cdot \alpha - \alpha \cdot \beta + 3 \cdot \beta$ ὅταν $\alpha = \frac{2}{3}$ $\beta = \frac{1}{2}$

Διαίρεση διὰ ρητοῦ

Πρόβλημα: Τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς ἀποστάσεως εἶναι 12 χιλ. Πόση εἶναι ὁλόκληρὴ ἡ ἀπόστασις;

Ἐπίλυση: α) Ἄν καλέσωμε χ τὸ μῆκος τῆς ἀποστάσεως, θὰ πρέπει

$$\frac{2}{3} \cdot \chi = 12 \quad (1)$$

ἢ $\chi = 12 : \frac{2}{3}$ (σύμφωνα μὲ τὸν ὅρισμό τῆς διαιρέσεως). (2)

β) Ὑπολογισμὸς τοῦ πηλίκου.

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ χ , πολλαπλασιάζουμε τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος

(1) μὲ τὸν ἀντίστροφο ἀριθμὸ τοῦ $\frac{2}{3}$, δηλαδὴ μὲ τὸ $\frac{3}{2}$

$$\frac{2}{3} \cdot \chi = 12$$

$$\frac{2}{3} \cdot \chi \cdot \frac{3}{2} = 12 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \chi = 12 \cdot \frac{3}{2}$$

$$\text{ἀλλὰ} \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$\text{ὁπότε} \quad 1 \cdot \chi = 12 \cdot \frac{3}{2} \quad \text{ἢ} \quad \chi = 12 \cdot \frac{3}{2} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (2) καὶ (3) ἔχουμε

$$\chi = 12 : \frac{2}{3} = 12 \cdot \frac{3}{2}$$

καὶ γενικά :

$$a : \frac{\beta}{\gamma} = a \cdot \frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ὅπου } \gamma, \beta \neq 0$$

«Γιὰ νὰ διαιρέσουμε διὰ κλάσματος ἀντιστρέφουμε τὸν κλασματικὸ διαιρέτη καὶ κάνουμε πολλαπλασιασμό».

Παραδείγματα :

$$8 : \frac{3}{5} = 8 \cdot \frac{5}{3}$$

$$\frac{4}{7} : \frac{2}{5} = \frac{4}{7} \cdot \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{8} : 5 = \frac{3}{8} : \frac{5}{1}$$

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{5}$$

§ 163. Ειδικὲς περιπτώσεις

161.1 Μεικτὸς δι' ἀκεραίου

$$8\frac{4}{7} : 2 = \dots$$

α' τρόπος

$$\begin{aligned}
 8\frac{4}{7} : 2 &= \frac{60}{7} : 2 \\
 &= \frac{60}{7} \cdot \frac{1}{2} \\
 &= \frac{60}{14} = 4\frac{4}{14} = 4\frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned}
 8\frac{4}{7} : 2 &= \left(8 + \frac{4}{7}\right) : 2 \\
 \left(8 + \frac{4}{7}\right) : 2 &= 8 : 2 + \frac{4}{7} : 2 \\
 &= 4 + \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{2} = 4\frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

"Ωστε: Για να διαιρέσουμε μεικτό δι' άκεραίου . . .

163.2 Μεικτός διά κλάσματος

$$5\frac{3}{4} : \frac{3}{7} = ;$$

α' τρόπος

$$\begin{aligned}
 5\frac{3}{4} : \frac{3}{7} &= \frac{23}{4} : \frac{3}{7} \\
 &= \frac{23}{4} \cdot \frac{7}{3} = \frac{23 \cdot 7}{4 \cdot 3} \\
 &= 13\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

β' τρόπος

$$\begin{aligned}
 5\frac{3}{4} : \frac{3}{7} &= \left(5 + \frac{3}{4}\right) : \frac{3}{7} \\
 &= \left(5 + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{7}{3} \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

και συνεχίζουμε με τη βοήθεια της έπιμεριστικής ιδιότητας

"Ωστε: " Για να διαιρέσουμε μεικτό διά κλάσματος . . .

163.3 Μεικτός διά μεικτού

α' τρόπος:

$$\begin{aligned}
 6\frac{2}{3} : 5\frac{1}{2} &= \frac{20}{3} : \frac{11}{2} \\
 &= \frac{20}{3} \cdot \frac{2}{11} = \frac{20 \cdot 2}{3 \cdot 11} \\
 &= 1\frac{7}{33}
 \end{aligned}$$

β' τρόπος:

$$\begin{aligned}
 6\frac{2}{3} : 5\frac{1}{2} &= \left(6 + \frac{2}{3}\right) : \frac{11}{2} \\
 &= \left(6 + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{2}{11} = \dots
 \end{aligned}$$

"Ωστε: Για να διαιρέσουμε μεικτό διά μεικτού . . .

§ 164. Δυνάμεις ρητών αριθμών

Μάθαμε ότι το γινόμενο ίσων παραγόντων $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4$. Με την ίδια

σημασία γράφουμε: $\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^4$

καί γενικά :

$$\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^4$$

και

$$\underbrace{\frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdots \frac{\alpha}{\beta}}_{\text{ν φορές}} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\nu}$$

Υπολογισμός δυνάμεως

Σύμφωνα με τον ορισμό της δυνάμεως είναι

$$\left(\frac{2}{5} \right)^3 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{2}{5} \right)^3 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5}$$

$$\text{ή} \quad \left(\frac{2}{5} \right)^3 = \frac{2^3}{5^3}$$

Γενικά

$$\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} \quad \text{όπου} \quad \beta \in \Phi$$

Όπως στους άκεραίους, όπου $\alpha^1 = \alpha$ και $\alpha^0 = 1$, με τον ίδιο τρόπο συμφωνούμε και

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^1 &= \frac{\alpha}{\beta} \\ \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^0 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad \beta \in \Phi$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε τις ιδιότητες των δυνάμεων και στην περίπτωση που οι βάσεις είναι κλάσματα.

$$\left(\frac{2}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^5$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^5 : \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^{5-2} = \left(\frac{2}{3} \right)^3$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} \right)^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 \left(\frac{5}{7} \right)^3$$

$$\left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right]^3 = \left(\frac{2}{3} \right)^{2 \cdot 3} = \left(\frac{2}{3} \right)^6$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

487) Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις :

α) $\frac{3}{5} : \frac{4}{7}$ β) $\frac{2}{3} : 4$ γ) $4 : \frac{2}{3}$ δ) $2\frac{1}{2} : 3$

ε) $3 : 2\frac{1}{2}$ στ) $\left(2 - \frac{1}{3}\right) : 3$ η) $\left(5 - \frac{3}{5}\right) : \frac{1}{2}$

488) Με ποιόν αριθμό πρέπει να πολλαπλασιάσετε το κλάσμα $\frac{2}{7}$ για να βρήτε γινόμενο $\frac{3}{14}$;

489) Με ποιόν αριθμό πρέπει να διαιρέσουμε τον άκεραιο 5 για να βρούμε πηλίκο $\frac{3}{4}$;

(Στις ασκήσεις 488 και 489 χρησιμοποιείτε εξισώσεις).

490) Να εκτελέσετε τις διαιρέσεις :

α) $2 : \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right)$ β) $\left(2 \cdot \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2}$ γ) $\left(\frac{2}{3} : \frac{3}{5}\right) : \frac{1}{2}$

491) Να εύρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ ἀριθμητικοῦ πολυωνύμου :

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} + 4 : \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}$$

492) Να υπολογίσετε τις δυνάμεις :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 \quad \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}\right)^2$$

493) Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$a^2 + a \cdot \beta + \beta \quad \text{όπου} \quad a = \frac{2}{3} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

§ 165. Σύνθετα κλάσματα

Μάθαμε να εκφράζουμε μ' ένα κλάσμα τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως ἑνὸς ἀκεραίου δι' ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ. Μποροῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο νὰ ἐκφράζουμε τὸ πηλίκο δύο ὁποίωνδήποτε ρητῶν ἀριθμῶν.

(Ύπενθυμίζουμε ὅτι ρητὸς εἶναι κάθε ἀριθμὸς ποὺ εἶναι ἢ μπορεῖ νὰ τεθῇ στὴ μορφή κλάσματος $\frac{a}{\beta}$, ὅπου $\beta \neq 0$).

Π.χ. για τὰ πηλικά $2:3$, $\frac{2}{5}:4$, $5:\frac{4}{7}$, $\frac{7}{8}:\frac{2}{5}$, $5\frac{2}{3}:6\frac{1}{2}$
 έχουμε :

$$2:3 = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{5}:4 = \frac{\frac{2}{5}}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$5:\frac{4}{7} = \frac{5}{\frac{4}{7}} = \frac{5 \cdot 7}{4} = \frac{35}{4}$$

$$\frac{7}{8}:\frac{2}{5} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{2} = \frac{35}{16}$$

$$5\frac{2}{3}:6\frac{1}{2} = \frac{5\frac{2}{3}}{6\frac{1}{2}} = \frac{5\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{2}}{6\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2}} = \frac{5\frac{4}{3}}{12\frac{1}{2}} = \frac{16\frac{4}{3}}{25} = \frac{52}{375}$$

Όστε $\frac{\frac{2}{7}}{\frac{3}{4}}$ σημαίνει τὸ πηλίκο $\frac{2}{7}:\frac{3}{4}$

Τὰ σύμβολα $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{4}{7}}$, $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}}$ συμβολίζουν κλάσματα με ὁρους

ρητῶν ἀριθμῶν καὶ λέγονται **σύνθετα κλάσματα**. Τὰ συνήθη κλάσματα γιὰ νὰ τὰ διακρίνουμε ἀπὸ τὰ σύνθετα τὰ ὀνομάζουμε **ἀπλά**.

§ 166. Τροπὴ συνθέτου κλάσματος σὲ ἀπλὸ

Γιὰ νὰ κάνουμε πράξεις με σύνθετα κλάσματα τὰ **τρέπουμε σὲ ἀπλά**.

Νὰ τραπῇ σὲ ἀπλὸ τὸ σύνθετο κλάσμα $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}$

α' τρόπος :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 5}{\frac{4}{5} \cdot 3 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5}{4 \cdot 3}$$

Δηλαδή : Πολλαπλασιάζουμε τούς όρους του συνθέτου κλάσματος με κατάλληλο αριθμό για να απολείψουμε τούς παρονομαστές. Γι' αυτό συμφέρει να πολλαπλασιάσουμε με τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομασῶν.

β' τρόπος :

$$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4}$$

Δηλαδή : Στηριζόμαστε στο γεγονός ότι τὸ κλάσμα παριστάνει τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ του καὶ ἐκτελοῦμε τὴ διαίρεση αὐτή.

"Αν προσέξουμε τὸ ἀποτέλεσμα στὸ ὁποῖο καταλήξαμε, διακρίνουμε ὅτι ἔχει ὡς ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο τοῦ ἀριθμητοῦ τοῦ α' κλάσματος με τὸ παρονομαστή τοῦ β' κλάσματος καὶ ὡς παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ α' κλάσματος με τὸν ἀριθμητὴ τοῦ β' κλάσματος.

$$\frac{\frac{a}{\beta}}{\frac{\gamma}{\delta}} = \frac{a \cdot \delta}{\beta \cdot \gamma}$$

Παρατήρηση : "Αν οἱ ὅροι τοῦ συνθέτου κλάσματος ἔχουν σημειωμένες πράξεις, ἐκτελοῦμε πρῶτα τὶς πράξεις καὶ μετὰ τρέπουμε τὸ κλάσμα σὲ ἄλλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

494) Να φέρετε σε άπλά τα ακόλουθα σύνθετα κλάσματα :

$$\alpha) \frac{\frac{3}{2}}{\frac{2}{5}}$$

$$\beta) \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{7}}$$

$$\gamma) \frac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{5}}$$

$$\delta) \frac{2\frac{1}{3}}{2:\frac{3}{4}}$$

$$\epsilon) \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{15}}$$

495) Να εκτελέσετε τις πράξεις :

$$\alpha) \frac{1}{2} + \frac{2\frac{1}{3}}{3} - \frac{1}{2}$$

$$\beta) \frac{\frac{2}{3}}{4} \cdot \frac{3}{5} - \frac{4}{9}$$

496) Να υπολογίσετε το αριθμητικό πολυώνυμο :

$$\frac{4}{5} + \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} + 1 \right)$$

$$497) \text{ "Αν } \alpha = \left(\frac{\frac{2}{3}}{5} \right)^2 \quad \beta = \frac{2}{\frac{4}{5}}$$

να υπολογίσετε την παράσταση $\alpha + 3 \cdot \beta$.

§ 167. Επίλυση προβλημάτων με τη μέθοδο αναγωγής στη μονάδα

1ο Πρόβλημα :

Τὰ 4 κιλά αλεύρι έχουν 20 δρχ. Πόσο έχουν τὰ 7 κιλά αλεύρι ;

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ μπορεῖ νὰ ἀναλυθῇ σὲ δυὸ ἀπλὰ προβλήματα :

α) Τὰ τέσσερα κιλά αλεύρι έχουν 20 δρχ. Τὸ 1 κιλό αλεύρι πόσο έχει ;

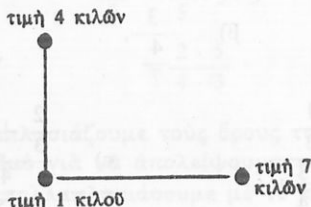
$$\text{ἔχει : } \frac{20}{4} = 5 \text{ δρχ.}$$

β) Τὸ ἓνα κιλό αλεύρι ἔχει 5 δρχ. Τὰ 7 κιλά πόσο έχουν ;

Ἔχουν $7 \cdot 5 \text{ δρχ.} = 35 \text{ δρχ.}$

Στά παραπάνω διακρίνουμε ότι :

«Για να βρούμε από την τιμή των 4 κιλών την τιμή των 7 κιλών, βρήκαμε πρώτα την τιμή του ενός κιλού κι' έπειτα την τιμή των 7 κιλών».



Γι' αυτό ο τρόπος αυτός λέγεται : μέθοδος αναγωγής στη μονάδα.
Οι λύσεις των δύο απλών προβλημάτων γράφονται σύντομα με τον ακόλουθο τρόπο :

Τὰ 4 κιλά αλεύρι έχουν 20 δρχ.

1 » » έχει $\frac{20}{4}$ δρχ.

7 » » έχουν $\frac{20}{4} \times 7$ δρχ.
 $= \frac{20 \times 7}{4} = 35$ δρχ.

2ο Πρόβλημα : Τὰ $\frac{2}{3}$ μίλες απόστασεως είναι 24 χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα είναι τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς απόστασεως αὐτῆς ;

Ἑπίλυση.

Τρέπουμε τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{2}{5}$

σὲ ὁμώνυμα $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{10}{15}$ $\frac{6}{15}$

καὶ ἔχουμε

τὰ $\frac{10}{15}$ τῆς ἀποστ. εἶναι 24 χιλμ.

$\frac{1}{15}$ » » » $\frac{24}{10}$

$\frac{6}{15}$ » » » $\frac{24}{10} \cdot 6 = \frac{24 \cdot 6}{10} = 14 \frac{2}{5}$ χιλμ.

3ο Πρόβλημα: Τὰ $2\frac{1}{2}$ κιλά ζάχαρη ἔχουν 30 δρχ. Πόσο ἔχουν τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ;

Ἐπίλυση: τὰ $\frac{5}{2}$ ἢ $\frac{10}{4}$ κιλά ἔχουν 30 δρχ.

τὸ $\frac{1}{4}$ ἔχει $\frac{30}{10}$

$\frac{3}{4}$ ἔχουν $\frac{30}{10} \times 3 = 9$ δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ λυθοῦν μετὰ τὴ μέθοδο τῆς ἀναγωγῆς στὴ μονάδα.

498) Ἐνας ποδηλάτης εἶχε νὰ διατρέξῃ μιὰ ἀπόσταση 25 χιλιομ. Στὶς δύο πρῶτες ὥρες διέτρεξε τὰ $\frac{3}{5}$ αὐτῆς. Πόσα χιλιόμετρα ἔχει νὰ διατρέξῃ ἀκόμα;

499) Μιὰ πλεκτομηχανὴ πλέκει σὲ 1 ὥρᾳ $\frac{4}{15}$ κιλά νήματος. Πόσο νῆμα

θα πλέξῃ σὲ $\frac{5}{6}$ τῆς ὥρας;

500) Τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ μέτρου ἑνὸς ὑφάσματος ἀξίζουν 90 $\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο ἀξίζει τὸ μέτρο;

501) Τὰ 5 $\frac{1}{2}$ χιλιόγραμμα πορτοκάλια ἀξίζουν 27 $\frac{1}{2}$ δρχ. Πόσο κοστίζει τὸ χιλιόγραμμο;

502) Τὸ τριπλάσιο καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀποτελοῦν τὸν ἀριθμὸ 11.

Ποῖός εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

503) Ἐνας ἐργάτης τελειώνει τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς ἔργου σὲ μιὰ ὥρᾳ. Σὲ πόσες

ὥρες θὰ τελειώσῃ τὰ $\frac{7}{10}$ τοῦ ἔργου;

504) Ἄν ἀπὸ τὸ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀφαιρέσουμε τὸ $\frac{1}{12}$ αὐτοῦ, εὐρίσκουμε τὸν ἀριθμὸ 7. Ποῖός εἶναι ὁ ἀριθμὸς ἐκεῖνος;

505) Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κιλοῦ λάδι ἔχουν 18 δρχ. Πόσο ἔχουν τὰ $2\frac{4}{5}$ κιλά;

506) Ένας πατέρας άφησε την περιουσία του στους δυό γιούς του, οι όποιοι την μοίρασαν κατά τόν έξής τρόπο :

Ό α' πήρε τὰ $\frac{5}{9}$ τής περιουσίας κι' ό β' την υπόλοιπη. Πόση ήταν όλόκληρη ή περιουσία, άν μäs είναι γνωστό ότι ό β' πήρε 1800 δρχ. λιγώτερες από τόν α' ;

§ 168. Έπισκόπηση επίλυσως προβλημάτων με εξισώσεις.

Ι Έξισώσεις :

Κατά τη σπουδή των πράξεων με ρητούς αριθμούς μάθαμε τις ακόλουθες ισοδυναμίες :

$$1) \alpha - \beta = \gamma \iff \beta + \gamma = \alpha \quad (1)$$

$$2) \alpha - \beta = \gamma \iff \alpha - \gamma = \beta \quad (2)$$

$$3) \alpha : \beta = \gamma \iff \gamma \cdot \beta = \alpha$$

Οι ισοδυναμίες αυτές μäs βοηθούν νά επιλύσουμε εξισώσεις.

Παραδείγματα : Νά επιλυθοούν οι άξισώσεις :

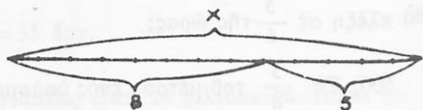
$$1) \chi - 5 = 8 \quad \text{σχ. 178}$$

Έπίλυση :

$$\chi - 5 = 8 \iff \chi = 8 + 5$$

$$\text{ή } \chi = 13$$

Έπαλήθευση $13 - 5 = 8$



Σχ. 178

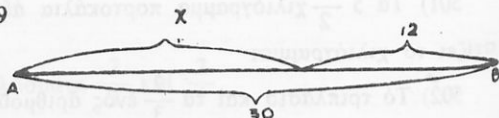
$$2) \chi + 12 = 30 \quad \text{σχ. 179}$$

Έπίλυση :

$$\chi + 12 \iff \chi = 30 - 12$$

$$\text{ή } \chi = 18$$

Έπαλήθευση : $18 + 12 = 30$



Σχ. 179

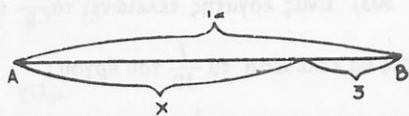
$$3) 12 - \chi = 3 \quad \text{σχ. 180}$$

Έπίλυση :

$$12 - \chi = 3 \iff \chi = 12 - 3$$

$$\text{ή } \chi = 9$$

Έπαλήθευση : $12 - 9 = 3$



Σχ. 180

Παρατήρηση : Η χρησιμοποίηση γραφικής παραστάσεως εξισώσεων των παραπάνω τύπων μäs διευκολύνει στην έκλογή της κατάλληλης κάθε φορά ισοδυναμίας.

"Άλλες εξισώσεις

1) $3 \cdot \chi = 126$

Έπίλυση: $3 \cdot \chi = 126 \Leftrightarrow \chi = 126 : 3$
 ή $\chi = 42$

Επαλήθευση: $3 \cdot 42 = 126$

2) $\frac{126}{\chi} = 6$

Έπίλυση: $\frac{126}{\chi} = 6 \Leftrightarrow 6 \cdot \chi = 126 \Leftrightarrow \chi = \frac{126}{6} = 21$

Επαλήθευση: $\frac{126}{21} = 6$

3) $\frac{\chi}{5} = \frac{7}{8}$

Έπίλυση: $\frac{\chi}{5} = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \chi = 5 \cdot \frac{7}{8}$

ή $\chi = \frac{35}{8} = 4 \frac{3}{8}$

Επαλήθευση: $\frac{\frac{35}{8}}{5} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8}$

§ 169. Γενική παρατήρηση για τις εξισώσεις

Η εξίσωση είναι πρόβλημα γραμμένο στη μαθηματική γλώσσα.

Παραδείγματα:

1) Με την εξίσωση $\chi + 32 = 71$ μπορούμε να παραστήσουμε το πρόβλημα: «Σε ποιόν αριθμό πρέπει να προσθέσουμε το 32 για να έχουμε άθροισμα 71;»

2) Με την εξίσωση $41 \cdot \chi = 204$ μπορούμε να παραστήσουμε το πρόβλημα: «Ποιός αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 41 και δίνει γινόμενο 204;»

Σκεφθήτε και σεις ένα πρόβλημα που να έχει εξίσωση την $\frac{\chi}{5} = 80$.

§ 170. Επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις

1) Ο Γιάννης έχασε 12 βόλους και του έμειναν 37. Πόσους βόλους είχε πρώτα ο Γιάννης;

Αν παραστήσουμε με χ τον αριθμό των βόλων που είχε, τότε, σύμφωνα με το πρόβλημα, έχουμε:

$$\chi - 12 = 37$$

4) Τὰ $\frac{2}{5}$ ἑνὸς δοχείου χωροῦν $4\frac{3}{4}$ κιλά λάδι. Πόσο λάδι χωρεῖ ὁλόκληρο τὸ δοχεῖο ;

Ἄν παραστήσουμε μὲ x τὸν ἀριθμὸ τῶν κιλῶν λαδιοῦ ποὺ χωρεῖ τὸ δοχεῖο, τότε ἔχουμε :

$$\frac{2}{5} \cdot x = 4\frac{3}{4}$$

Ἐπίλυση :

$$\frac{2}{5} \cdot x = 4\frac{3}{4} \iff x = 4\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$$

$$\text{ἢ} \quad x = 4\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= 4 \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2}$$

$$= 10 + \frac{15}{8}$$

$$= 11\frac{7}{8}$$

ὥστε ὁλόκληρο τὸ δοχεῖο χωρεῖ $11\frac{7}{8}$ κιλά λάδι.

$$\text{Ἐπαλήθευση :} \quad \frac{2}{5} \cdot 11\frac{7}{8} = \frac{2}{5} \cdot \frac{95}{8}$$

$$= \frac{95}{20} = 4\frac{15}{20}$$

$$= 4\frac{3}{4}$$

§ 171. Νὰ χρησιμοποιήσετε ἐξισώσεις γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀκολουθῶν προβλημάτων

507) Ποιόν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στὸ $\frac{4}{7}$ γιὰ νὰ μᾶς δώσῃ ἄθροισμα $1\frac{6}{11}$;

508) Πόσα κιλά λάδι πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ ἓνα δοχεῖο, ποὺ ἔχει $18\frac{3}{4}$ κιλά λάδι, γιὰ νὰ μείνουν $6\frac{4}{5}$ κιλά ;

509) Ἄν ἀφαιρέσουμε $2\frac{3}{4}$ κιλά νερὸ ἀπὸ ἓνα δοχεῖο, θὰ μείνουν $12\frac{1}{5}$ κιλά. Πόσο νερὸ εἶχε τὸ δοχεῖο ;

510) Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸ $2\frac{3}{5}$ γιὰ νὰ ἔχουμε γινόμενο $7\frac{4}{9}$;

511) Δυὸ ἀριθμοὶ ἔχουν γινόμενο ἴσο μὲ $32\frac{1}{2}$. Ὁ ἓνας ἀπὸ αὐτοὺς εἶναι τὸ 21. Ποιὸς εἶναι ὁ ἄλλος;

512) Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε διὰ τοῦ $2\frac{3}{5}$ γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο ἴσο μὲ 12;

513) Μὲ ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ διαιρέσουμε τὸ 36 γιὰ νὰ βροῦμε πηλίκο $12\frac{1}{2}$;

514) Ρωτήθηκε ἓνας πότε γεννήθηκε καὶ ἀπάντησε: "Ἄν διαιρέσετε τὸ ἔτος πὺ γεννήθηκα διὰ 5 κι' ἔπειτα τὸ πολλαπλασιάσετε μὲ 4, θὰ βρῆτε 1540. Πότε γεννήθηκε;

Γενικά προβλήματα καὶ ἀσκήσεις μὲ ρητοὺς ἀριθμούς.

515) Τὸ τριπλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ κάνουν τὸν ἀριθμὸ 1250. Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτός;

516) "Ενας λαδέμπορος πωλεῖ τὸ λάδι πρὸς 24 δραχμὲς τὸ χιλιόγραμμο. Ἀπὸ τὸ λάδι ἑνὸς βαρελιοῦ ἔμειναν τὰ $\frac{7}{10}$ αὐτοῦ, ἀπὸ ἐκεῖνο δὲ πὺ πούλησε εἰσέπραξε 2520 δρχ. Πόσο λάδι χωράει τὸ βαρέλι;

517) "Ενα τεμάχιο ὑφάσματος ἔχει μῆκος 200 μέτρα. Πουλήθηκαν δὲ διαδοχικὰ τὸ $\frac{1}{4}$ καὶ τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ. Πόσα μέτρα ἔμειναν;

518) "Ενας ἀγόρασε δύο ἀγελάδες μὲ 9750 δρχ. Ἡ ἀξία τῆς μιᾶς εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἀξίας τῆς ἄλλης. Πόσο ἀξίζει ἡ κάθε μία;

519) "Ενας ἄνθρωπος ἀφήνει μὲ τὴ διαθήκη του στὸ γιὸ του τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς περιουσίας του, στὴν κόρη του τὰ $\frac{3}{8}$ αὐτῆς καὶ τὸ ὑπόλοιπο στὴ σύζυγό του. Ἡ σύζυγος ἔλαβε 31500 δρχ. Ποία ἦτο ἡ περιουσία του καὶ πόσα ἔλαβε καθένα ἀπὸ τὰ παιδιὰ του;

520) Ἀτμάμαξα πρέπει νὰ διατρέξῃ 350 χιλιόμετρα σὲ 8 ὥρες. Κατὰ

τις $3\frac{1}{2}$ πρώτες ώρες διέτρεξε τα $137\frac{3}{4}$ χιλιόμετρα. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει να διατρέξει τώρα κάθε ώρα;

521) Μια δεξαμενή δέχεται σε $1\frac{1}{2}$ ώρα 150 χιλιόγραμμα νερό και χάνει στον ίδιο χρόνο $45\frac{3}{4}$ χιλιόγραμμα. Πόσα χιλιόγραμμα θα περιέχει σε $7\frac{1}{2}$ ώρες;

522) Ένα βαρέλι περιέχει 360 χιλιόγραμμα κρασί. Αφαιρούμε 24 χιλιόγραμμα και αναπληρώνουμε αυτό με νερό. Κατόπι βγάζουμε 24 χιλιόγραμμα από το μείγμα. Να εύρεθῇ πόσο κρασί περιέχεται στο βαρέλι.

523) Πατέρας και γιός αν εργασθούν μαζί καλλιεργούν ένα κτήμα σε 3 ημέρες. Μόνος ο πατέρας το καλλιεργεί σε 4 ημέρες. Σε πόσες ημέρες καλλιεργεί το κτήμα μόνος του ο γιός;

524) Μια βρύση γεμίζει μια δεξαμενή σε 7 h ενώ μια άλλη την αδειάζει σε 12 h. Αν ανοίξουμε μαζί και τις δύο βρύσες, σε πόσες ώρες θα γεμίσει ή δεξαμενή;

525) Γιατί μπορείτε να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{32 \cdot 7}{8 \cdot 63}$ και όχι το $\frac{32 + 7}{8 + 63}$;

526) Επιλύσατε τις εξισώσεις:

$$\frac{3}{4} \cdot x = \frac{4}{3}, \quad \frac{4}{5} \cdot x = 1, \quad \frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{2}$$

527) Επιλύσατε τις εξισώσεις:

$$\frac{2}{5} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x = 3 \quad \frac{4}{7} x - \frac{1}{3} \cdot x = 2$$

(Χρησιμοποιήσατε πρώτα γνωστή ιδιότητα για να τεθούν οι εξισώσεις σε γνωστή μορφή).

528) Υπολογίσατε τις δυνάμεις:

$$\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}\right)^2, \quad \left(\frac{\frac{3}{4}}{2}\right)^3$$

529) Να υπολογίσετε τα κλάσματα:

$$\frac{1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} \quad \frac{4 + \frac{2}{5} + \frac{3}{7}}{4 + \frac{2}{5} - \frac{3}{7}}$$

530) Να συγκρίνετε το άθροισμα $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ με το κλάσμα $\frac{1}{2}$.

Περίληψη

Κλασματικοί αριθμοί.

Κλασματικές μονάδες.

Κλάσματα.

Αντίστροφοι αριθμοί.

Ίσοδύναμα κλάσματα.

Απλοποίηση κλασμάτων

Ανάγωγα κλάσματα.

Τροπή έτερονύμων σε όμώνυμα

Κλασματική γραφή των άκεραίων.

Το κλάσμα ως πηλίκο διαιρέσεως.

Πρόσθεση, Αφαίρεση κλασμάτων. Ίδιότητες.

Πολλαπλασιασμός, Διάρθρωση κλασμάτων, Ίδιότητες.

Αντίστροφοι αριθμοί.

Δυνάμεις ρητών αριθμών.

Σύνθετα κλάσματα.

Μέθοδος αναγωγής στη μονάδα.

Επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις.

Γενικά προβλήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΑ'

ΔΕΚΑΔΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ

§ 172. Δεκαδικοί αριθμοί

172.1 Δεκαδικές κλασματικές μονάδες

Από τις κλασματικές μονάδες

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}, \frac{1}{45}, \frac{1}{100}, \frac{1}{521}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{5830}, \frac{1}{10\,000}$$

οι κλασματικές μονάδες $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000}$ έχουν ένα ιδιαίτερο

γνώρισμα : Έχουν παρονομαστές 10, 100, 1000, ... δηλαδή δυνάμεις του 10 και λέγονται **δεκαδικές κλασματικές μονάδες**.

Τα κλάσματα $\frac{3}{10}, \frac{17}{100}, \frac{102}{1000}, \frac{1156}{10\,000}$, που παράγονται από δεκαδικές κλασματικές μονάδες, λέγονται **δεκαδικά κλάσματα**.

Παρατήρηση :

Αν διατάξουμε τις δεκαδικές κλασματικές μονάδες κατά μέγεθος, απ' τη μεγαλύτερη στη μικρότερη, έχουμε :

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10\,000} \text{ κ.ο.κ.}$$

$$\begin{aligned} \text{Παρατηρούμε ότι : } \frac{1}{10} &= 10 \cdot \frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} &= 10 \cdot \frac{1}{1000} \\ \frac{1}{1000} &= 10 \cdot \frac{1}{10\,000} \end{aligned}$$

Δηλ. «Κάθε δεκαδική κλασματική μονάδα είναι 10/πλασία από την άμέσως επόμενη της»

Αρα: «Η δεκαδική σχέση που ισχύει στις άκέραιες δεκαδικές μονάδες διαφόρων τάξεων

$$\begin{aligned} 100 &= 10 \cdot 10 \\ 1000 &= 10 \cdot 100 \\ 10000 &= 10 \cdot 1000 \text{ κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

ισχύει και στις δεκαδικές κλασματικές μονάδες διαφόρων τάξεων».

Έτσι ολόκληρη ή κλίμακα μονάδων των δεκαδικών ἀκεραίων και δεκαδικών κλασμάτων είναι

$$10^0 \dots 10^3, 10^2, 10^1, 10^0, \frac{1}{10^1}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3} \dots \frac{1}{10^v}, \quad v \in \Phi$$

172.2 Γραφή δεκαδικού κλάσματος σε δεκαδική μορφή

I. Το δεκαδικό κλάσμα $\frac{475}{1000}$ μπορεί να γραφεί

$$\frac{475}{1000} = \frac{400}{1000} + \frac{70}{1000} + \frac{5}{1000} \quad \eta$$

$$\frac{475}{1000} = \frac{4}{10} + \frac{7}{100} + \frac{5}{1000} \quad \eta$$

$$\frac{475}{1000} = \frac{4}{10^1} + \frac{7}{10^2} + \frac{5}{10^3} = 4 \cdot \frac{1}{10^1} + 7 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3}$$

Ωστε: "Όπως κάθε ἀκέραιος γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του 10 πολλαπλασιασμένων με τους αριθμούς 0, 1, 2, 3, ..., 9, έτσι κάθε δεκαδικό κλάσμα γράφεται ως άθροισμα δυνάμεων του $\frac{1}{10}$ πολλαπλασιασμένων με τους ίδιους αριθμούς 0, 1, 2, ..., 9.

Έφαρμογή:
$$\frac{305}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{0}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{0}{100} + \frac{5}{1000} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{10^1} + 0 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3}$$

II. Αντί να γράφουμε $\frac{1}{10}$ συμφωνούμε να γράφουμε 0,1

$$\begin{array}{ccccccc} \text{»} & \text{»} & \text{»} & \frac{1}{100} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 0,01 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \text{»} & \text{»} & \text{»} & \frac{1}{1000} & \text{»} & \text{»} & \text{»} & 0,001 \end{array}$$

Κ.Ο.Κ.

οπότε τα δεκαδικά κλάσματα

$$\frac{3}{10}, \quad \frac{41}{100}, \quad \frac{536}{1000}, \quad \frac{385}{100}$$

γράφονται :

$$\frac{3}{10} = 0,3$$

$$\frac{41}{100} = 0,41$$

$$\frac{536}{1000} = 0,536$$

$$\frac{385}{100} = \frac{300}{100} + \frac{80}{100} + \frac{5}{100}$$

$$= 3 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100}$$

$$= 3,85$$

Ἡ γραφή αὐτὴ ἔχει **δεκαδικὴ μορφή**. Ἀπὸ τὸν τρόπο τῆς γραφῆς αὐτῆς συνάγουμε ὅτι :

«Γιὰ νὰ γράψουμε ἓνα δεκαδικὸ κλάσμα σὲ δεκαδικὴ μορφή, γράφουμε μόνο τὸν ἀριθμητὴ καὶ χωρίζουμε ἀπὸ τὰ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά μὲ μιὰ ὑποδιαστολὴ τόσα ψηφία, ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ παρονομαστής».

Παράδειγμα :

$$\frac{4526}{100} = \frac{4000}{100} + \frac{500}{100} + \frac{20}{100} + \frac{6}{100}$$

$$= 40 + 5 + \frac{2}{10} + \frac{6}{100}$$

$$= 45 + \frac{26}{100}$$

$$= 45 \frac{26}{100}$$

$$= 45,26$$

Τὸ 45 ἀποτελεῖ τὸ ἀκέραιο μέρος, ἐνῶ τὸ 26 τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὁ ἀριθμὸς 45,26 ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀκέραιο μέρος καὶ δεκαδικὸ κλάσμα, λέγεται **δεκαδικὸς ἀριθμὸς**.

172.3 Γραφὴ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ σὲ μορφή δεκαδικοῦ κλάσματος.

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα :

$$0,432 = \frac{432}{1000} \qquad 1,24 = \frac{124}{100}$$

συνάγουμε ὅτι :

«Για να γράψουμε δεκαδικό αριθμό σε μορφή δεκαδικού κλάσματος, γράφουμε τον αριθμό χωρίς υποδιαστολή ως αριθμητή και ως παρονομαστή την μονάδα, που ακολουθείται από τόσα μηδενικά, όσα είναι τα δεκαδικά ψηφία του αριθμού».

172.4 Ίσοι δεκαδικοί αριθμοί

$$\text{Από τις ισότητες } 0,4 = \frac{4}{10} = \frac{40}{100} = \frac{400}{1000} = \dots$$

συνάγουμε ότι :

$$0,4 = 0,40 = 0,400 = 0,4000 = \dots$$

«Αν προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε μηδενικά στο τέλος του δεκαδικού αριθμού, βρίσκουμε ίσους δεκαδικούς αριθμούς».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

531) Να γραφούν οι επόμενοι δεκαδικοί αριθμοί α) 35 άκέραιος, 8 δέκατα, 5 εκατοστά, 6 χιλιοστά. β) 158 άκέραιος, 4 εκατοστά, 7 χιλιοστά. γ) 8 εκατοστά, 5 χιλιοστά, 9 δεκάκις χιλιοστά, δ) 305 άκέραιος 9 χιλιοστά, 5 εκατοστά χιλιοστού.

532) Να γραφούν οι αριθμοί α) 85 δέκατα, β) 743 εκατοστά, γ) 975 χιλιοστά, δ) 705 εκατομμυριοστά.

533) Ο αριθμός 0,0245 να τεθῇ σε κλασματική μορφή.

534) Με ποιό δεκαδικό αριθμό είναι ίσο το κλάσμα $\frac{3}{10^5}$;

535) Να μεταφερθῇ ἡ υποδιαστολή τοῦ ἀριθμοῦ 78,6235 δύο θέσεις δεξιά και να ὁρισθῇ ἡ ἀξία ἐκάστου ψηφίου στὴ νέα θέση.

536) Να γράψετε με ψηφία τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ἀποτελοῦνται ἀπὸ:

α) 7 δεκάδες, 5 μονάδες, 6 δέκατα, 7 χιλιοστά.

β) Μηδὲν μονάδες, 8 εκατοστά, 5 δεκάκις χιλιοστά.

γ) 5 χιλιάδες, 7 δεκάδες, 1 εκατοστό, 8 χιλιοστά.

537) Να γράψετε σε μορφή δεκαδικῶν ἀριθμῶν τὰ κλάσματα :

$$\frac{65}{1000}, \quad \frac{738}{100}, \quad \frac{275}{10^3}, \quad \frac{7}{10^5}, \quad \frac{63,04}{10^3}$$

§ 173. Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς

Ἀφοῦ οἱ δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ τρέπονται σε κλάσματα, καὶ οἱ πράξεις με δεκαδικούς θὰ τρέπονται σε πράξεις με κλάσματα.

173.1 Πρόσθεση

$$0,24 + 0,3 = \frac{24}{100} + \frac{3}{10} = \frac{24}{100} + \frac{30}{100} = \frac{54}{100} = 0,54$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα φθάνουμε αν προσθέσουμε με τον γνωστό τρόπο :

$$\begin{array}{r} 0,24 \\ + 0,3 \\ \hline 0,54 \end{array}$$

Δηλαδή : « Γράφουμε τους προσθετέους τόν ένα κάτω από τόν άλλο, έτσι, ώστε οι υποδιαστολές και τὰ ψηφία τῆς αὐτῆς τάξεως νὰ εἶναι στήν ἴδια στήλη ».

173. 2 Ἀφαίρεση

Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καί στήν ἀφαίρεση.

$$\text{Π.χ. α) } 0,15 - 0,04 = \frac{15}{100} - \frac{4}{100} = \frac{11}{100} = 0,11$$

$$\begin{array}{r} \eta \quad 0,15 \\ - 0,04 \\ \hline 0,11 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad 0,4 - 0,213 &= \frac{4}{10} - \frac{213}{1000} \\ &= \frac{400}{1000} - \frac{213}{1000} \\ &= \frac{187}{1000} = 0,187 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} \eta \quad 0,400 \\ - 0,213 \\ \hline 0,187 \end{array}$$

Σημείωση : Σέ περιπτώσεις ὅπως τοῦ β' παραδείγματος, πρέπει νὰ προσέχουμε νὰ προσθέτουμε στό τέλος τοῦ μειωτέου τόσα μηδενικά, ὅσα χρειάζονται γιά νὰ γίνη ἡ ἀφαίρεση.

§ 174. Πολλαπλασιασμός

$$6,7 \times 4,83 = \frac{67}{10} \times \frac{483}{100} = \frac{67 \times 483}{1000} = \frac{32\,361}{1000} = 32,361.$$

Διάταξη πράξεως :

$$\begin{array}{r} 4,83 \times \\ 6,7 \\ \hline 3\,381 \\ 28\,98 \\ \hline 32,361 \end{array}$$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε, ἂν πολλαπλασιάσουμε τοὺς δεκαδικοὺς ὥς νὰ ᾖσαν ἀκέραιοι καὶ χωρίσουμε στὸ γινόμενο τόσα δεκαδικὰ ψηφία, ὅσα ἔχουν καὶ οἱ δύο παράγοντες».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 538) Χωρὶς χαρτί καὶ μολύβι νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα :
- α) $2,75 + 3,48 + 5,25 + 1,52$
 β) $1,95 + 3,67 + 4,33 + 1,05$
 γ) $6,75 + 4,25 - 1,75 - 1,25$.
- 539) Χρησιμοποιήσατε γνωστὴ ιδιότητα γιὰ νὰ ὑπολογίσετε σύντομα τὰ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα :
- α) $9,1 \times 72,65 + 0,9 \times 72,65$
 β) $81,2 \times 0,48 - 81,2 \times 13,52$.
- 540) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα
- α) $1,728 + 42 + 14,15 + 0,123$
 β) $3,415 + 25,1 + 8326 + 43,008$
 γ) $0,31 + 4,167 + 0,018 + 9,375$.
- 541) Καταστηματάρχης ἔχει τρία ταμεῖα καὶ εἰσπράττει ἀπὸ τὸ α' ταμεῖο 13.504,60 δρχ. τὴν ἡμέρα, ἀπὸ τὸ β' 12.000 δρχ. καὶ ἀπὸ τὸ τρίτο 10.509,80 δρχ. Πόσα εἰσπράττει συνολικὰ τὴν ἡμέρα;
- 542) Ἐμπορὸς πωλεῖ ἐμπόρευμα ἀντὶ 28426,45 δρχ. μὲ ζημιὰ 739,80 δρχ. Πόσες δραχμὲς τὸ ἀγόρασε ;
- 543) Οἱ τόποι Α, Β, Γ, Δ, εὐρίσκονται σὲ εὐθεῖα γραμμὴ καὶ κατὰ τὴν σειρὰ Α, Β, Γ, Δ. Ἡ ἀπόσταση ΑΒ εἶναι 12,145 km, ἡ ΒΓ εἶναι 45,008 km. ἡ ΓΔ εἶναι 9,286 k.m. Πόση εἶναι ἡ ἀπόσταση ΑΓ καὶ πόση ἡ ΑΔ ;
- 544) Ἐνας ἔμπορος εἰσπράττει σὲ ἓνα ἔτος 368540,20 δρχ., τὸ ἐπόμενο ἔτος 8372,60 δρχ. περισσότερες τοῦ α' ἔτους καὶ τὸ γ' ἔτος 2090,50 δρχ. περισσότερες καὶ ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα ἔτη. Πόσα εἰσέπραξε καὶ τὰ τρία ἔτη;
- 545) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ ἀκόλουθες ἀφαιρέσεις μὲ τὶς δοκιμὲς τους:
- α) $135,48 - 72,64$ β) $92,307 - 0,678$
 γ) $184,34 - 167,95$ δ) $1285,678 - 999,88$.
- 546) Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα $278,45 + 3,172$ νὰ ἀφαιρεθῇ ὁ ἀριθμὸς 27,9356 καὶ ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο ὁ ἀριθμὸς 3,009.
- 547) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀριθμητικὸ πολυώνυμο :
- $8,12 - (0,485 - 0,03)$ μὲ δύο τρόπους.
- 548) Ἐμπορὸς ἀγοράζει ἐμπορεύματα ἀντὶ 42587,45 δρχ. καὶ τὰ πωλεῖ ἀντὶ 50536,75 δρχ. Πόσα κερδίζει;

549) 'Από δύο τόπους, οί όποιοι απέχουν μεταξύ των 285,650 χιλμ, αναχωρούν αντίθετως δύο ταχυδρόμοι για να συναντήση ό ένας τόν άλλο. 'Ο ένας διανύει 25,385 χιλ. ό δέ άλλος 20,475 χιλ. τήν ήμέρα. Πόσο θα απέχουν μεταξύ των μετά μία ήμέρα;

§ 175. Διαίρεση

175.1 Διαίρεση δια άκεραίου

$$\begin{aligned} 6,18 : 3 &= \frac{618}{100} : 3 \\ &= \frac{618 : 3}{100} \\ &= \frac{206}{100} \\ &= 2,06 \end{aligned}$$

Στό ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε, αν εκτελέσουμε τη διαίρεση κατά τόν ακόλουθο τρόπο :

$$\begin{array}{r|l} 6,18 & 3 \\ \hline 01 & 2,06 \\ \hline 018 & \\ -18 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Δηλαδή : Διαιρούμε ως να ήσαν άκεραίοι αλλά προσέχουμε μόλις κατεβάσουμε τό α' δεκαδ. ψηφίο του διαιρετέου να σημειώσουμε στό πηλίκο τήν ύποδιαστολή, γιατί τότε θα διαιρέσουμε δέκατα δια άκεραίου καί φυσικά τό ψηφίο του πηλίκου παριστάνει δέκατα κ.ο.κ.

175.2 Τροπή κλασμάτων σε δεκαδική μορφή

α' τρόπος.

Παρατηρούμε ότι τό κλάσμα $\frac{3}{5}$ σημαίνει τό πηλίκο της διαιρέσεως

$3 : 5$. Τό ίδιο όμως πηλίκο μπορούμε να τό βρούμε αν εκτελέσουμε τη διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 3,0 & 5 \\ \hline = & 0,6 \end{array}$$

ήρα

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

“Ωστε : «Για νά γράψουμε ἓνα κλάσμα σὲ δεκαδικὴ μορφή, διαιροῦμε τὸν ἀριθμητὴ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ».

β' τρόπος.

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{2} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0,6$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{25}{25} = \frac{3 \times 25}{4 \times 25} = \frac{75}{100} = 0,75$$

“Ας προσέξουμε τὴ διαίρεση :

$$9 : 11$$

$$\begin{array}{r} 9,0 \quad | \quad 11 \\ 20 \quad | \quad 0,818181 \dots \\ 90 \\ 20 \\ 90 \\ 20 \\ 9 \end{array}$$

...

Παρατηροῦμε ὅτι : «Τὰ ὑπόλοιπα ἐπαναλαμβάνονται τὰ ἴδια καὶ μὲ τὴν ἴδια σειρά. Ἄρα ἡ διαίρεση δὲν τελειώνει.

Γι' αὐτὸ λέγομε ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{9}{11}$ δὲν μπορεῖ νά πάρῃ **τερματιζομένη μορφή**.

175.3 Πηλίκο μὲ προσέγγιση

“Ας ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση : $30 : 7$

$$\begin{array}{r} 30 \quad | \quad 7 \\ 20 \quad | \quad 4,28571428 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \end{array}$$

Ἀπὸ τὰ ὑπόλοιπα διακρίνουμε (πῶς;) ὅτι ἡ διαίρεση δὲν τερματίζεται.
“Ας σταθοῦμε στὸ 2^ο ψηφίο τοῦ πηλίκου

Ἔχουμε πηλίκο : 4,28

ὑπόλοιπο : 4

Τὸ ἀκριβὲς πηλίκο εἶναι 4,28 καὶ $\frac{4}{7}$ τοῦ ἑκατοστοῦ. Ἄν περιορι-
σοῦμε στὸ 4,28 θὰ ἔχουμε πάρει τὸ πηλίκο μὲ **προσέγγιση**. Ἄν χρησιμο-
ποιοῦμε τὸ 4,28 ἀντὶ γιὰ τὸ ἀκριβὲς πηλίκο, κάνουμε λάθος μικρότερο ἀπὸ
0,01 διότι εἶναι $4,28 < \frac{30}{7} < 4,29$

Γι' αὐτὸ λέγομε ὅτι τὸ 4,28 ἢ τὸ 4,29 εἶναι τὸ πηλίκο μὲ **προσέγγιση**
ἑκατοστοῦ. Ἀνάλογα : Τὸ 4,285 εἶναι τὸ πηλίκο μὲ προσέγγιση ἑνὸς χι-
λιοστοῦ κ.ο.κ.

**Τὸ κρασί ἔχει 6,50 δρχ. τὸ κιλό. Ἄν πάρωμε μισὸ κιλό θὰ δώσου-
με 3,30 δρχ. ἢ 3,20 δρχ.**

Καὶ στὶς δύο περιπτώσεις ἔχουμε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως 6,50 : 2
μὲ **προσέγγιση**.

Τὸ μὲν 3,20 δρχ., ποῦ εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς πηλίκο, λέγεται
«κατ' ἔλλειψιν», τὸ δὲ 3,30 δρχ., ποῦ εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἀκριβὲς,
λέγεται «καθ' ὑπεροχήν».

Ἀπὸ τὴ φύση τοῦ προβλήματος ποῦ ἔχουμε κάθε φορὰ ἐξαρτᾶται ὁ βα-
θμὸς προσεγγίσεως τοῦ πηλίκου ποῦ θὰ βροῦμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

550) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις α) $5 \cdot x = 0,0125$, β) $12 \cdot x = 0,0144$.

551) Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικοὺς τὰ κλάσματα $\frac{1}{8}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{3}{16}$.

552) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις :

$$\alpha) \frac{3}{8} - 0,07, \quad \beta) \frac{2}{3} \cdot 0,75 \quad \gamma) 0,125 : 5$$

553) Νὰ εὑρεθοῦν μὲ προσέγγιση ἑκατοστοῦ τὰ πηλίκα :

α) $40 : 28$ β) $6,4 : 5167$. Ποιὰ εἶναι τὰ ὑπόλοιπα;

§ 176. Πολλαπλασιασμὸς καὶ διαίρεση δεκαδικοῦ μὲ 10, 100, 1000, ...

$$\begin{aligned} 176.1 \quad \alpha) \quad 3,14 \times 10 &= \frac{314}{100} \times 10 \\ &= \frac{3140}{100} = \frac{314}{10} = 31,4 \end{aligned}$$

$$\beta) \quad 3,14 \times 100 = \frac{314}{100} \times 100 = 314$$

Ώστε : «Για να πολλαπλασιάσουμε ένα δεκαδικό με 10, 100, 1000, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του δεκαδικού προς τα δεξιά τόσες θέσεις, όσα μηδενικά ακολουθούν τη μονάδα στον παράγοντα 10, 100, 1000 ... ».

$$176.2 \quad \alpha) \quad 3,14 : 10 = \frac{314}{100} : 10$$

$$= \frac{314}{100} \cdot \frac{1}{10}$$

$$= \frac{314}{1000}$$

$$= 0,314$$

$$\beta) \quad 3,14 : 100 = \frac{314}{100} : 100$$

$$= \frac{314}{100} \cdot \frac{1}{100}$$

$$= \frac{314}{10000}$$

$$= 0,0314$$

Ώστε : «Για να διαιρέσουμε δεκαδικό διά 10, 100, 1000, ... μεταφέρουμε την υποδιαστολή του δεκαδικού προς τα αριστερά τόσες θέσεις, όσα μηδενικά έχει ο διαιρέτης».

§ 177. Διάρθρωση διὰ δεκαδικού.

Ἄς πάρουμε τὴν διάρθρωση :

$$37,5 : 1,25$$

Ἡ διάρθρωση διὰ δεκαδικού μπορεῖ νὰ τραπῇ σὲ διάρθρωση δι' ἀκεραίου, ἂν στηριχθούμε στὴ γνωστὴ ἰδιότητα :

«Ἄν πολλαπλασιάσουμε τὸ διαιρετέο καὶ διαιρέτη μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, τὸ πηλίκον δὲν ἀλλάζει, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

$$\text{Ἔτσι } 37,5 : 1,25 = 3750 : 125 = 30 \quad (\text{πολλαπλασιασμός - μὲ } 100)$$

Ἄς πάρουμε τὴν διάρθρωση :

$$48 : 0,7 = 480 : 7 \quad (\text{πολλαπλασιασμός μὲ } 10)$$

θα ἔχουμε

$$\begin{array}{r} 480 \overline{) 7} \\ 60 \quad 68 \\ 4 \end{array}$$

Παρατηρούμε ότι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως $48 : 0,7$ εἶναι τὸ 68, ἐνῶ τὸ ὑπόλοιπο δὲν εἶναι τὸ 4, ἀλλὰ τὸ $\frac{4}{10} = 0,4$ (γιατί;)

Σημείωση : Μποροῦμε νὰ τρέψουμε τοὺς δεκαδικοὺς σὲ κλάσματα κι' ἔτσι καταλήγουμε σὲ διαίρεση διὰ κλάσματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

554) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις :

α) $1,5 \cdot x = 6,3$

β) $0,04 \cdot x = 0,12$

555) Νὰ θέσετε στὴν ἀπλούστερη μορφή τὰ κλάσματα :

$$\begin{array}{r} 0,15 \cdot 42 \\ 2,75 \cdot 35 + 56 \cdot 1,35, \end{array} \quad \begin{array}{r} (3,15 - 0,85) \cdot 0,25 \\ 0,75 \cdot (22,5 - 16,25) \end{array}$$

556) Χρησιμοποιεῖστε γνωστὴ ἰδιότητα γιὰ νὰ ὑπολογίσετε σύντομα τὰ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα :

α) $89 \cdot 72,65 + 11 \cdot 72,65$

β) $87,2 \cdot 13,7 - 87,2 \cdot 3,7$

557) Ἕνας ἐπλήρωσε 237 δρχ. γιὰ 22,5 κιλά ζάχαρη. Πόσο κόστισε τὸ ἓνα κιλό;

558) Ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιάζεται μὲ 23,45, δίδει δὲ γινόμενο 192, 52425. Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμὸς;

559) Μιὰ οἰκογένεια ξοδεύει 2,88 κιλά λάδι τὴν ἐβδομάδα. Νὰ εὑρεθῇ πόσες ἐβδομάδες θὰ περάσῃ μὲ 34,56 κιλά λάδι.

560) Ἕνα κιβώτιο περιέχει 20,48 κιλά σαποῦνι σὲ πλάκες. Κάθε πλάκα ἔχει βάρος 0,256 κιλά. Νὰ εὑρετὲ πόσες πλάκες ἔχει τὸ κιβώτιο.

§ 178. Ποιὰ ἀνάγωγα κλάσματα τρέπονται σὲ τερματιζομένους δεκαδικούς.

Εἶδαμε σὲ προηγούμενη παράγραφο, ὅτι ὑπάρχουν κλάσματα ποὺ δὲν τρέπονται σὲ τερματιζομένους δεκαδικούς (ἢ διαίρεση τοῦ ἀριθμητοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ δὲν τερματίζεται).

Πῶς θὰ διακρίνουμε, ἂν ἓνα ἀνάγωγο κλάσμα τρέπεται ἢ ὄχι σὲ τερματιζόμενο δεκαδικό;

Θὰ ξεκινήσουμε ἀντίστροφα.

178.1 Τροπή δεκαδικού κλάσματος σὲ ἀνάγωγο

$$\begin{aligned}\text{Ἔχουμε : } \frac{6}{10} &= \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{3}{5} \\ \frac{15}{100} &= \frac{3 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{3}{2^2 \cdot 5} \\ \frac{625}{1000} &= \frac{5^4}{2^3 \cdot 5^3} = \frac{5}{2^3}\end{aligned}$$

Στις παραπάνω μετατροπὲς διακρίνουμε ὅτι :

Τὰ ἀνάγωγα κλάσματα, στὰ ὁποῖα τρέπονται οἱ δεκαδικοί, ἔχουν παρονομαστὰς μόνο δυνάμεις τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 5 ἢ μόνο τοῦ ἑνὸς ἀπὸ αὐτούς.

$$\begin{aligned}\text{Αὐτὸ ἐξηγεῖται ἐπειδὴ } 10 &= 2 \cdot 5, & 100 &= 2^2 \cdot 5^2 \\ \text{καὶ γενικὰ } 10^n &= 2^n \cdot 5^n & \text{ὅπου } n &\in \Phi\end{aligned}$$

178.2 Ἄς πάρουμε ἀνάγωγα κλάσματα μὲ παρονομαστὰς 2, 5 ἢ δυνάμεις αὐτῶν.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{5}{10} \\ \frac{3}{5} &= \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10} \\ \frac{7}{4} &= \frac{7}{2^2} = \frac{5^2 \cdot 7}{5^2 \cdot 2^2} = \frac{175}{100} \quad (\text{διότι } 5^2 \cdot 2^2 = 100) \\ \frac{9}{20} &= \frac{9}{2^2 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 9}{5 \cdot 2^2} = \frac{45}{100}\end{aligned}$$

Ὡστε : « Γιὰ νὰ διακρίνουμε ἂν ἓνα ἀνάγωγο κλάσμα τρέπεται σὲ τερματιζόμενο δεκαδικό, ἀναλύουμε τὸν παρονομαστή του σὲ πρῶτους παράγοντες. Ἄν ἔχη ὁ παρονομαστής πρῶτους παράγοντες μόνο τοὺς 2 καὶ 5 ἢ τὸν ἓνα ἀπὸ τοὺς δύο, τότε καὶ μόνον τρέπεται σὲ δεκαδικό».

Σημείωση : Ἄν τὸ κλάσμα δὲν εἶναι ἀνάγωγο, τὸ τρέπουμε πρῶτα σὲ ἀνάγωγο.

Παράδειγμα : Τὸ κλάσμα $\frac{7}{40}$ τρέπεται σὲ δεκαδικό, γιατί ὁ παρονομαστής 40 = $2^3 \cdot 5$ ἔχει μόνους πρῶτους παράγοντες τὸ 2 καὶ τὸ 5.

Ἀντίθετα : Τὸ κλάσμα $\frac{2}{35}$ δὲν τρέπεται, γιατί ὁ παρονομαστής 35 = $5 \cdot 7$ ἔχει πρῶτο παράγοντα καὶ τὸ 7.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

561) Δίδονται τὰ κλάσματα.

$$\frac{5}{8}, \frac{5}{9}, \frac{9}{24}, \frac{12}{18}, \frac{7}{26}, \frac{7}{25}, \frac{36}{70}, \frac{718}{325}$$

Μπορείτε νὰ διακρίνετε ποιά ἀπὸ αὐτὰ τρέπονται σὲ τερματιζομένους δεκαδικούς;

562) Νὰ τρέψετε σὲ δεκαδικούς τὰ κλάσματα :

$$\frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^2 \cdot 5^3}, \frac{6}{15}$$

563) Νὰ γράψετε τὸ σύνολο τῶν κλασματικῶν μονάδων μὲ παρονομαστή μικρότερο τοῦ 20, οἱ ὁποῖες τρέπονται σὲ τερματιζομένους δεκαδικούς.

564) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ πηλίκο :

$$\left(3,08 - \frac{15}{24} \right) : \left(\frac{21}{35} - 0,5 \right)$$

§ 179. Δεκαδικοὶ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ

179.1 Ἀπὸ τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἀναγῶγων κλασμάτων

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{9}{11}, \frac{8}{55}$$

διακρίνουμε ὅτι αὐτὰ δὲν τρέπονται σὲ **τερματιζομένους** δεκαδικούς ἀριθμούς.

Ἄς προσέξουμε τὰ πηλίκα τῶν διαιρέσεων $2 : 3$, $9 : 11$, καὶ $5 : 7$

$$\begin{array}{r} \alpha) \quad 2' \overline{) 3} \\ 20 \overline{) 0,6666 \dots} \\ 20 \\ 20 \\ 20 \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \beta) \quad 9' \overline{) 11} \\ 90 \overline{) 0,818181 \dots} \\ 90 \\ 20 \\ 90 \\ 20 \\ 90 \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \gamma) \quad 5' \overline{) 7} \\ 50 \overline{) 0,71428571 \dots} \\ 10 \\ 30 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \\ 3 \end{array}$$

Διακρίνουμε ότι : Τὰ ψηφία κάθε πηλίκου επαναλαμβάνονται $\dot{\alpha}$ -περιοριστώς, τὰ ἴδια καὶ μὲ τὴν ἴδια σειρά. Ἐπαναλαμβάνονται, ὅπως λέγομε, **περιοδικῶς**.

Γι' αὐτὸ οἱ ἀριθμοὶ

α) 0,666... β) 0,818181... γ) 0,714285 714285...

λέγονται **περιοδικοὶ ἀριθμοὶ**. Τὸ τμήμα τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ επαναλαμβάνεται διαρκῶς, λέγεται **περίοδος**.

Ἔτσι τοῦ ἀριθμοῦ 0,66666... περίοδος εἶναι τὸ **6**

» » **0,818181..** » » » **81**

» » **0,714285714285...** » » » **714285**

179.2 Μεικτοὶ περιοδικοὶ

Ἄν ἐκτελέσουμε τὴ διαίρεση $8 : 55$ εὐρίσκουμε πηλίκο **0,1454545...**. Σ' αὐτὸ τὸ πηλίκο παρατηροῦμε ὅτι ἡ περίοδος **δὲν** ἀρχίζει ἀμέσως, ὅπως στοὺς προηγούμενους περιοδικούς, ἀλλὰ μετὰ τὸ 1^ο ψηφίο. Ἀποτελεῖται δηλ. ὁ ἀριθμὸς ἀπὸ ἑνα **περιοδικὸ τμήμα** (τὸ 454545...) κι' ἀπὸ ἑνα **μὴ περιοδικὸ**, γι' αὐτὸ λέγεται **μεικτὸς περιοδικός**, ἀντίθετα μὲ τοὺς ἄλλους ποὺ γνωρίσαμε, τοὺς ὁποίους λέμε **ἀπλοὺς περιοδικούς**.

Παράδειγμα : Ἀπὸ τοὺς περιοδικούς ἀριθμούς

0,143 143 143...

0,56242424...

0,75121212

Ὁ 1^{ος} εἶναι ἀπλὸς περιοδικὸς ἐνῶ ὁ 2^{ος} κι' ὁ 3^{ος} μεικτοὶ περιοδικοί.

§ 180. Ἀπὸ ποιό κλάσμα προέρχεται ἕνας δεκαδικὸς περιοδικὸς ἀριθμὸς ;

Οἱ περιοδικοὶ ἀριθμοὶ, καθὼς εἶδαμε, προέκυψαν ἀπὸ τὴ διαίρεση τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἐνὸς κλάσματος.

180.1 Ὄταν ἔχουμε ἕνα περιοδικὸ δεκαδικό, πῶς θὰ μάθουμε ἀπὸ ποῖο κλάσμα προῆλθε ;

α'. Ἀπλὸς περιοδικός :

Μὲ διαιρέσεις εὐρίσκουμε ὅτι :

$$\frac{1}{9} = 0,1111... \quad \text{ἄρα} \quad \frac{5}{9} = 0,5555... \quad \text{ἢ} \quad \frac{7}{9} = 0,7777...$$

$$\frac{1}{99} = 0,0101... \quad \text{»} \quad \frac{57}{99} = 0,575757... \quad \text{ἢ} \quad \frac{24}{99} = 0,242424...$$

$$\frac{1}{999} = 0,001001... \quad \text{»} \quad \frac{147}{999} = 0,147147...$$

Από τις παραπάνω διαιρέσεις συνάγουμε ότι : «Κάθε άπλός περιοδικός, (μικρότερος της μονάδος), προέρχεται από κλάσμα που έχει άριθμητή την περίοδο και παρονομαστή τόσα 9, όσα ψηφία έχει ή περίοδος».

β) Μεικτός περιοδικός :

Από ποιο κλάσμα προέρχεται ο άριθμός 0,4121212... ;

$$\begin{aligned}\text{Έχουμε } 0,4121212 \dots &= \left(4,121212 \dots \right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \left(4 + \frac{12}{99} \right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \left(\frac{4 \cdot 99 + 12}{99} \right) \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{4 \cdot 99 + 12}{990} = \frac{408}{990}\end{aligned}$$

Δηλαδή : «Μεταφέρουμε την ύποδιαστολή του δεκαδικού προς τα δεξιά τόσες θέσεις, ώστε να γίνη τó δεκαδικό μέρος του άριθμού άπλός περιοδικός. Φυσικά για να μην αλλάξη ή άξία του άριθμού, διαιρούμε άντιστοίχως διά του 10, 100... και έπειτα συνεχίζουμε τις πράξεις».

Τó αποτέλεσμα αυτό, δηλ. τó $\frac{4 \cdot 99 + 12}{990}$, μπορούμε να τó μετασχηματίσουμε κατά τόν ακόλουθο τρόπο.

$$\begin{aligned}\frac{4 \cdot 99 + 12}{990} &= \frac{4 (100 - 1) + 12}{990} \\ &= \frac{4 \cdot 100 - 4 + 12}{990} \\ &= \boxed{\frac{412 - 4}{990}}\end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο εύρίσκουμε :

$$\begin{aligned}\alpha' \quad 0,81\,375\,755 \dots &= (81,375375 \dots) \cdot \frac{1}{100} \\ &= \left(81 + \frac{375}{999} \right) \cdot \frac{1}{100} \\ &= \left(\frac{81 \cdot 999 + 375}{999} \right) \cdot \frac{1}{100} \\ &= \frac{81 \cdot 999 + 375}{99900}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{81 \cdot (1000 - 1) + 375}{99900} \\
 &= \frac{81000 - 81 + 375}{99900} \\
 &= \boxed{\frac{81375 - 81}{99900}} \\
 \beta' \quad 5,42363636 \dots &= \left(542,3636 \dots \right) \cdot \frac{1}{100} \\
 &= \left(542 + \frac{36}{99} \right) \cdot \frac{1}{100} \\
 &= \left(\frac{542 \cdot 99 + 36}{99} \right) \cdot \frac{1}{100} \\
 &= \frac{542 \cdot 99 + 36}{9900} \\
 &= \frac{542(100 - 1) + 36}{9900} \\
 &= \frac{54200 - 542 + 36}{9900} \\
 &= \boxed{\frac{54236 - 542}{9900}}
 \end{aligned}$$

Όστε : «Κάθε μεικτός περιοδικός είναι ίσος με κοινό κλάσμα με αριθμητή τον αριθμό που αποτελείται από τα ψηφία του μη περιοδικού τμήματος και μιας περιόδου, ελαττωμένον δε κατά το μη περιοδικό τμήμα, και παρονομαστή τον αριθμό που έχει ψηφία τόσα 9, όσα ψηφία έχει η περίοδος, ακολουθούμενα από τόσα μηδενικά, όσα δεκαδικά ψηφία έχει το μη περιοδικό τμήμα».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

565) Να εύρετε από ποιὰ κοινὰ κλάσματα παράγονται τὰ περιοδικὰ :

- | | |
|------------------|---------------------|
| α) 0,454545 ... | δ) 7,555 ... |
| β) 0,3141414 ... | ε) 23,464646 ... |
| γ) 0,25777 ... | στ) 15,32858585 ... |

566) Νά τρέψετε σὲ περιοδικούς δεκαδικούς ἀριθμούς τὰ κλάσματα :

$$\alpha) \quad \frac{5}{11}, \quad \frac{1}{11}, \quad \frac{1}{7}, \quad \frac{2}{75}$$

$$\beta) \quad \frac{21}{28}, \quad \frac{60}{105}, \quad \frac{5}{21}$$

567) Ἀπὸ ποιά κλάσματα προέρχονται οἱ ἀριθμοί :

$$\alpha) \quad 0,979797 \dots$$

$$\beta) \quad 0,1535353 \dots$$

$$\gamma) \quad 1,242424 \dots$$

568) Στὸ σύνολο $A = \left\{ \frac{2}{5}, \frac{1}{7}, \frac{3}{12}, \frac{5}{8}, \frac{15}{45} \right\}$ ποιὸ εἶναι τὸ

ὑποσύνολο κλασμάτων, ποὺ τρέπονται σὲ δεκαδικούς περιοδικούς ;

569) Νά ἐκτελέσετε τὶς πράξεις :

$$\alpha) \quad \frac{5}{6} + 2,353535 \dots$$

$$\beta) \quad 0,835835 \dots - 0,444 \dots$$

$$\gamma) \quad \frac{5}{12} - 0,406060 \dots$$

Π ε ρ ί λ η ψ η

Δεκαδικοί ἀριθμοί.

Πράξεις μὲ δεκαδικούς ἀριθμούς.

Τροπὴ κλασμάτων σὲ δεκαδικὴ μορφή.

Πηλίκο μὲ προσέγγιση.

Ποιά ἀνάγωγα κλάσματα τρέπονται σὲ τερματιζομένους ἀριθμούς.

Δεκαδικοί περιοδικοί ἀριθμοί (ἀπλοί, μεικτοί).

Ἀπὸ κλάσμα προέρχεται ἕνας περιοδικὸς ἀπλὸς ἢ μεικτὸς δεκαδικὸς ἀριθμός.

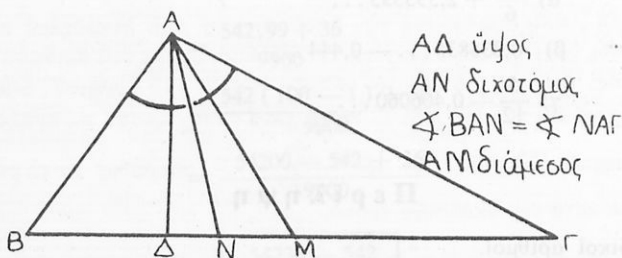
Ἀσκήσεις.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β'

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

§ 181. Γενικά περί τριγώνων

α) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ διακρίνουμε τρεις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ και τρεις γωνίες. Τις γωνίες Α, Β, Γ. Το άθροισμα των πλευρών του τριγώνου το ονομάζουμε **περίμετρο** του τριγώνου.



Σχ. 181

β) Από κάθε κορυφή του τριγώνου μπορούμε να χαράξουμε μία κάθετο προς την απέναντι πλευρά. Το τμήμα της καθέτου από της κορυφής μέχρι της απέναντι πλευράς λέγεται **ύψος** του τριγώνου.

Το ευθύγραμμο τμήμα, που ένώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσον της απέναντι πλευράς, λέγεται **διάμεσος** του τριγώνου.

Σε κάθε μία από τις γωνίες που όρίζει το τρίγωνο έχουμε και μία **διχοτόμο**.

Έτσι σε ένα τρίγωνο διακρίνουμε τα ακόλουθα στοιχεία :

Τρεις πλευρές

» γωνίες

» ύψη

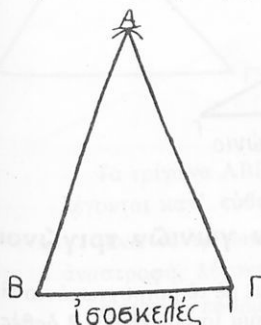
» διαμέσους

» διχοτόμους.

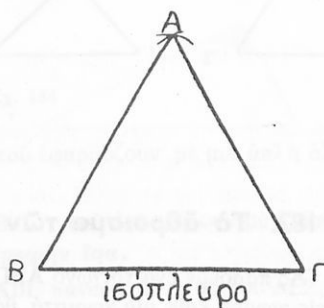
181.1 Είδη τριγώνων

I) 'Ανάλογα με τις πλευρές διακρίνουμε :

- 1) τὰ **ισοσκελή** τρίγωνα : με δύο πλευρές ίσες, σχ. 182 α
- 2) τὰ **ισόπλευρα** τρίγωνα : με τις τρεις πλευρές ίσες, σχ. 182 β



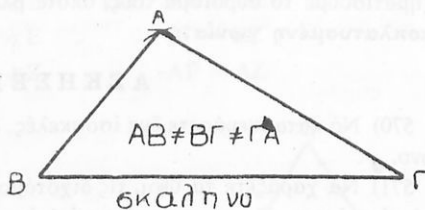
Σχ. 182 α



Σχ. 182 β

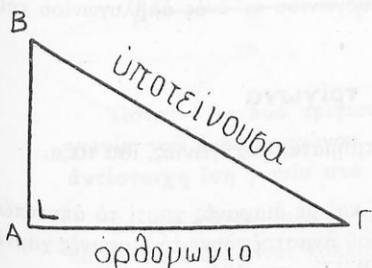
3) τὰ **σκαληνά** τρίγωνα :
με όλες τις πλευρές άνισες,
σχ. 182 γ

Άρα : τὰ **ισόπλευρα** τρί-
γωνα αποτελούν υποσύνολο
τῶν **ισοσκελῶν** καὶ τὰ **ισο-**
σκελή υποσύνολο τῶν **τρι-**
γῶνων.

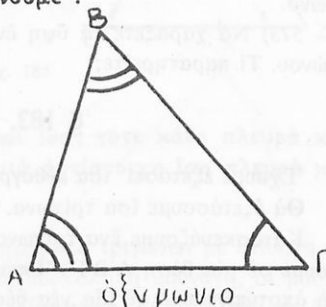


Σχ. 182 γ

II) 'Ανάλογα με τις γωνίες διακρίνουμε :



Σχ. 183 α

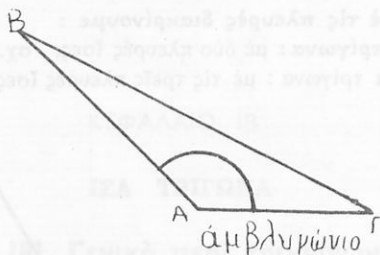


Σχ. 183 β

α) Τὰ **ὀρθογώνια** : ἔχουν μία ὀρθή γωνία

β) τὰ **ὀξυγώνια** : ἔχουν ὅλες τις γωνίες ὀξείες.

γ) τὰ ἀμβλυγώνια: ἔχουν μία γωνία ἀμβλεῖα.



Σχ. 183 γ

§ 182. Τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν γωνιῶν τριγώνου

Ἄς πάρουμε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ. Ἄν μετρήσουμε μὲ τὸ μοιρογνώμονιο τὶς τρεῖς γωνίες, κάθε μία χωριστὰ, θὰ εὑρωμε ἄθροισμα ἴσο μὲ 180° ἢ 2 ὀρθές. Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν ἀποκόψουμε τὶς τρεῖς γωνίες καὶ σχηματίσουμε τὸ ἄθροισμά τους, ὁπότε βλέπουμε ὅτι ἔχουν ἄθροισμα μία ἀποπλατυσμένη γωνία.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

570) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ἰσοσκελές, ἓνα ἰσόπλευρο, ἓνα σκαληνὸ τρίγωνο.

571) Νὰ χαράξετε τὰ ὕψη, τὶς διχοτόμους καὶ τὶς διαμέσους, σὲ καθένα ἀπὸ τὰ τρίγωνα τῆς προηγούμενης ἀσκῆσεως. Τί παρατηρεῖτε;

572) Νὰ κατασκευάσετε ἀπὸ ἓνα ὀρθογ. ὀξυγώνιο καὶ ἀμβλυγώνιο τρίγωνο.

573) Νὰ χαράξετε τὰ ὕψη ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἑνὸς ἀμβλυγωνίου τριγώνου. Τί παρατηρεῖτε;

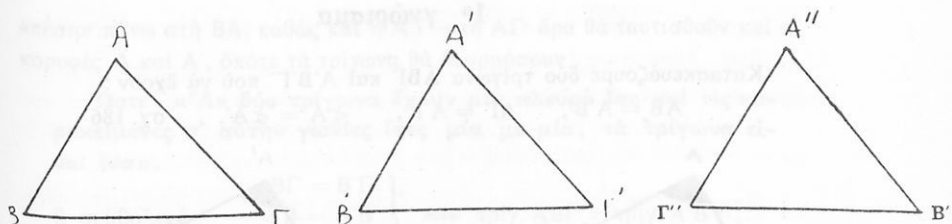
§ 183. Ἴσα τρίγωνα

Ἔχουμε ἐξετάσει ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ἴσες γωνίες, ἴσα τόξα.

Θὰ ἐξετάσουμε ἴσα τρίγωνα.

Κατασκευάζουμε ἓνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ μὲ διαφανὲς χαρτὶ τὸ ἀποτυπώνουμε σὲ μία θέση Α'Β'Γ'. Ἐπειτα, ἀφοῦ ἀναστρέψουμε τὸ διαφανὲς χαρτὶ, τὸ ἀποτυπώνουμε σὲ μία νέα θέση Α''Β''Γ''. σχ. 184

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ', Α''Β''Γ'', πού μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν τὸ ἓνα στὸ ἄλλο ἢ μὲ μιά ἀπλή ὁλίσθηση ἢ μὲ ὁλίσθηση καὶ ἀναστροφή, λέγονται ἴσα.



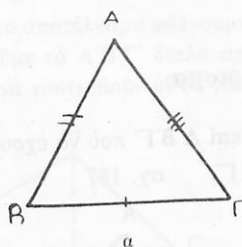
Σχ. 184

Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, ποὺ ἐφαρμόζουν μὲ μιὰ ἀπλὴ ὁλίσθηση, λέγονται **κατ' εὐθείαν ἴσα**.

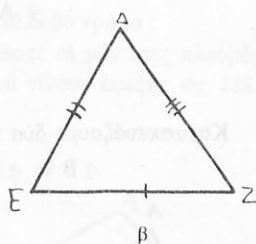
Ἐνῶ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A''B''\Gamma''$, ποὺ ἐφαρμόζουν μὲ ὁλίσθηση καὶ ἀναστροφή, λέγονται **κατ' ἀναστροφήν ἴσα**.

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴ τριγώνου $AB\Gamma$ πάνω σ' ἓνα ἴσο τοῦ ΔEZ , σχ. 185, θὰ ἔχουμε τὶς ἰσότητες :

$$\begin{array}{ll} \sphericalangle A = \sphericalangle \Delta & \text{καὶ } AB = \Delta E \\ \sphericalangle B = \sphericalangle E & B\Gamma = EZ \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle Z & A\Gamma = \Delta Z \end{array}$$



Σχ. 185



Ὡστε : Ἄν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε κάθε πλευρὰ καὶ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἔχει μιὰ ἀντίστοιχη ἴση πλευρὰ καὶ μιὰ ἀντίστοιχη ἴση γωνία στὸ ἄλλο.

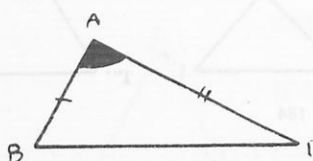
Ἐπειδὴ ἡ ἐξακρίβωση τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων μὲ ἐπίθεση τοῦ ἑνὸς πάνω στὸ ἄλλο εἶναι πολλὲς φορές δύσκολη ἢ ἀδύνατη, οἱ μαθηματικοὶ ἀνεκάλυψαν ἄλλους τρόπους, «**γνωρίσματα**», μὲ τοὺς ὁποίους ἐξακριβώνουν ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Οἱ τρόποι αὐτοὶ στηρίζονται στὴ σύγκριση πλευρῶν ἢ πλευρῶν καὶ γωνιῶν τῶν τριγώνων.

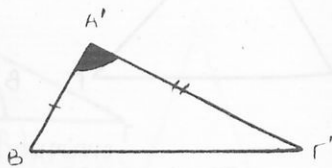
1^ο γνώρισμα

Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που νά έχουν :

$$AB = A'B', \quad A\Gamma = A'\Gamma', \quad \angle A = \angle A', \quad \text{σχ. 186}$$



α



β

Σχ. 186

Τοποθετούμε το $A'B'\Gamma'$ στο $AB\Gamma$ με τέτοιο τρόπο, ώστε νά ταυτισθούν οι ίσες γωνίες A και A' και οι ίσες πλευρές $AB, A'B'$ και $A\Gamma, A'\Gamma'$. Τότε οι κορυφές B, B' και Γ, Γ' θά συμπίψουν. Άρα όλόκληρο τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ θά ταυτισθῇ με τὸ τρίγωνο $A'B'\Gamma'$.

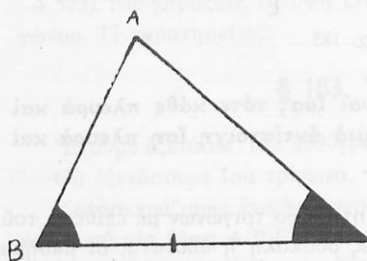
Ὡστε : « Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρές ἰσές μία με μία καὶ τὴν περιεχομένη γωνία ἴση, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

$$\left. \begin{array}{l} \text{συμβολικὰ} \quad \left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \angle A = \angle A' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τριγ. } AB\Gamma = \text{τριγ. } A'B'\Gamma' \end{array} \right.$$

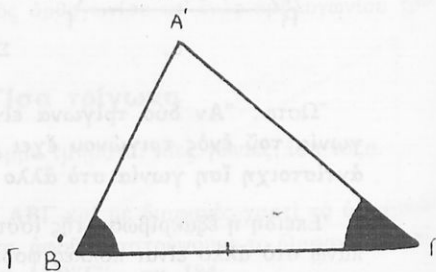
2^ο γνώρισμα

Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που νά έχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$,

$$\angle B = \angle B', \quad \angle \Gamma = \angle \Gamma', \quad \text{σχ. 187}$$



α



Σχ. 187

β

Τοποθετούμε τὸ $A'B'\Gamma'$ στὸ $AB\Gamma$ ἔτσι, ὥστε νά ταυτισθοῦν οἱ ἴσες πλευρές $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ καὶ οἱ ἴσες γωνίες B, B' καὶ Γ, Γ' . Τότε ἡ πλευρά $B'A'$ θά

«πέση» πάνω στη BA , καθώς και η $A'Γ'$ στη $AΓ$. Άρα θα ταυτισθούν και οι κορυφές A και A' , όποτε τα τρίγωνα θα εφαρμόσουν.

Όστε: «**Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις παρακείμενες σ' αυτήν γωνίες ίσες μία με μία, τα τρίγωνα είναι ίσα**».

$$\begin{array}{l} \text{ή συμβολικά:} \\ \left. \begin{array}{l} B\Gamma = B'\Gamma' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τρίγ. } AB\Gamma = \text{τρίγ. } A'B'\Gamma'. \end{array}$$

Σημείωση: Το 1ο και 2ο γνώρισμα των ίσων τριγώνων αποδεικνύονται με τη **συμμετρία**. (Τοποθετούμε τα τρίγωνα το ένα δίπλα στο άλλο έτσι, ώστε μία ίση πλευρά να γίνη ἄξων συμμετρίας, όποτε τα τρίγωνα θα είναι συμμετρικά ἄρα και ίσα). Προτιμήσαμε τούς κλασσικούς τρόπους, γιατί τούς εύρηκαμε πιο προσιτούς στους μαθητάς.

3ο γνώρισμα

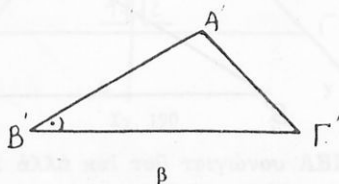
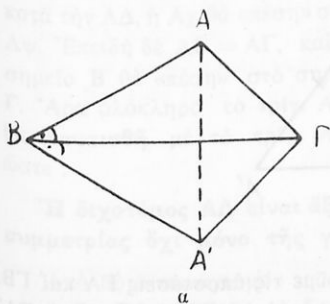
Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που νά έχουν

$$AB = A'B', \quad A\Gamma = A'\Gamma', \quad B\Gamma = B'\Gamma'.$$

α) Με επίθεση ή με διαφανές χαρτί διαπιστώνουμε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.

β) Στο ίδιο αποτέλεσμα φθάνουμε και με τόν ακόλουθο τρόπο:

Τοποθετούμε τὸ $A'B'\Gamma'$ δίπλα στὸ $AB\Gamma$ έτσι, ὥστε οἱ μὲν ἴσες πλευρὲς $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ νὰ ταυτισθοῦν οἱ δὲ γωνίες B καὶ B' νὰ γίνουν ἐφεξῆς, σχ. 188.



Σχ. 188

Παρατηρούμε ότι 1) $A'B = AB$, ἄρα τὸ B εἶναι πάνω στη μεσοκάθετο τῆς AA' (§ 128). 2) $A\Gamma = A'\Gamma'$ ἄρα καὶ τὸ Γ εἶναι ἐπάνω στη μεσοκάθετο τῆς AA' . Δηλαδή ἡ $B\Gamma$ εἶναι **μεσοκάθετος** τῆς AA' καὶ ὡς μεσοκάθετος θὰ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος $ABA'\Gamma$, όποτε καὶ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $BA'\Gamma$ ὡς συμμετρικά θὰ εἶναι ἴσα

Ὡστε : « Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρὲς ἀντιστοιχῶς ἴσες, τότε εἶναι ἴσα »

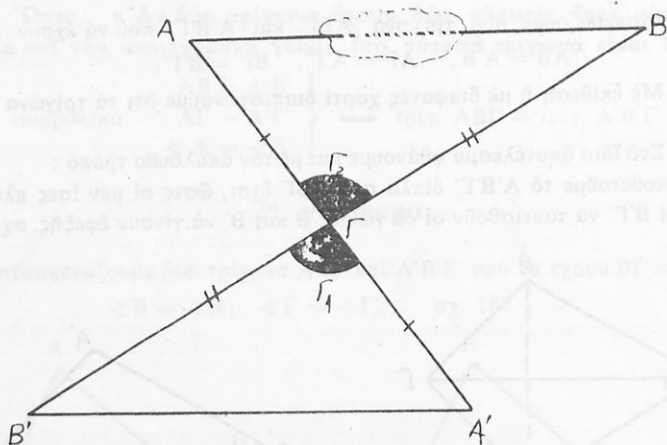
$$\text{ἢ συμβολικὰ : } \left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ BG = B'G' \\ AG = A'G' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τρίγ. } ABG = \text{τρίγ. } A'B'G'$$

Παρατήρηση : Εἶδαμε ὅτι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τρία κατάλληλα στοιχεία ἴσα, εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων συνάγουμε καὶ κάτι ἄλλο : ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα θὰ εἶναι ἴσα.

$$\text{Π.χ. } \left. \begin{array}{l} AB = A'B' \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \end{array} \right\} \Rightarrow \text{τρίγ. } ABG = \text{τρίγ. } A'B'G' \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AG = A'G' \\ BG = B'G' \\ \sphericalangle G = \sphericalangle G' \end{array} \right\}$$

Ἡ 2η συνεπαγωγή ἔχει πολλὰς πρακτικὰς ἐφαρμογὰς.

Παράδειγμα : Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόσταση δύο σημείων A καὶ B , ἂν τὸ τμήμα AB εἶναι ἀδιάβατο. σχ. 189



Σχ. 189

Στεκόμαστε σ' ἓνα σημεῖο G καὶ μετροῦμε τὶς ἀποστάσεις GA καὶ GB . Ἐπειτα προεκτείνουμε τὶς GA καὶ GB πέρα ἀπ' τὸ G ὥστε, $GA = GA'$ καὶ $GB = GB'$

Τὰ τρίγωνα ABG καὶ $GB'A'$ ἔχουν $GB = GB'$, $GA = GA'$ καὶ $\sphericalangle \Gamma_1 = \sphericalangle \Gamma_2$ (γιατί ;) ἄρα $\text{τρίγ. } ABG = \text{τρίγ. } A'B'G$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $A'B' = AB$. Ἄν μετρήσουμε τὴν $A'B'$, τὸ μήκος τῆς θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μήκος τῆς AB .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

574) Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$, νά χαράξετε τή διάμεσο AM καί νά τήν προεκτείνετε ὥς ένα σημεῖο Δ , ὥστε $AM = M\Delta$. Ἐπειτα νά χαράξετε τὸ εὐθ. τμήμα $B\Delta$ καί νά συγκρίνετε τὰ τρίγωνα $AM\Gamma$ καί $BM\Delta$.

575) Νά εὐρεθοῦν οἱ ἴσες πλευρὲς στὰ τρίγωνα $AM\Gamma$ καί $BM\Delta$ τοῦ προηγούμενου προβλήματος.

576) Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ κι' ἔπειτα γωνίες $\Gamma B\Delta$ καί $B\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως ἴσες μὲ τὶς γωνίες $A\Gamma B$ καί $AB\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Νά συγκριθοῦν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $B\Gamma\Delta$.

577) Νά κατασκευάσετε δύο ἴσα τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$ κι' ἔπειτα νά χαράξετε τὶς διαμέσους AM καί $A'M'$ καί νά συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ABM καί $A'B'M'$.

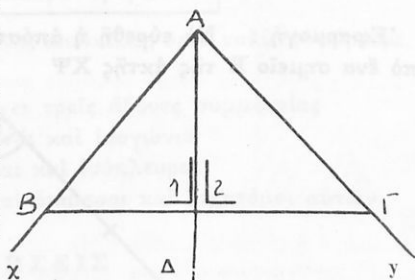
578) Νά κατασκευάσετε δύο ἴσα τρίγωνα $AB\Gamma$ καί $A'B'\Gamma'$ κι' ἔπειτα νά φέρετε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν A καί A' , τὶς AD καί $A'D'$. Νά συγκρίνετε τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ καί $A'B'\Delta'$.

§ 184. Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο

Ἄς κατασκευάσουμε ένα ἰσοσκελὲς τρίγ. $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) κι' ἄς φέ-
ρουμε τὴ διχοτόμο AD τῆς γωνίας A , σχ. 190.

Μάθαμε ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

1) Ἄν τσακίσουμε τὸ τρίγωνο κατὰ τὴν AD , ἡ $A\chi$ θὰ «πέση» στὴν $A\psi$. Ἐπειδὴ δὲ $AB = A\Gamma$, καὶ τὸ σημεῖο B θὰ «πέση» στὸ σημεῖο Γ . Ἄρα ὁλόκληρο τὸ τρίγ. $AB\Delta$ θὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ τρίγ. $A\Delta\Gamma$ ὥστε :



Ἡ διχοτόμος AD εἶναι ἄξων συμμετρίας ὄχι μόνο τῆς γωνίας A ἀλλὰ καὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἀπὸ αὐτὸ συνάγουμε :

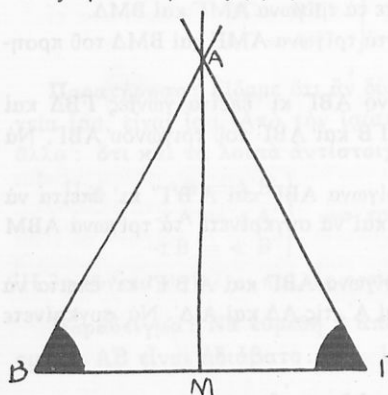
- α) ὅτι $B\Delta = \Delta\Gamma$ ἄρα ἡ διχοτόμος AD εἶναι καὶ διάμεσος
- β) $\angle B = \angle \Gamma$ ἐπειδὴ δὲ $(\angle B) + (\angle \Gamma) = 2L$, ἡ AD εἶναι καὶ ὕψος.
- γ) $\angle B = \angle \Gamma$

Δηλαδή στο ἰσοσκελὲς τρίγωνο : α) ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν ἴσων πλευρῶν εἶναι καὶ διάμεσος καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου.

β) Οἱ ἀπέναντι στὶς ἴσες πλευρὲς γωνίες εἶναι ἴσες.

§ 185. Τρίγωνο με δύο γωνίες ίσες

1) Χαράζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και στις άκρες Β και Γ κατασκευάζουμε δύο γωνίες (πρός το αυτό μέρος του ΒΓ) ίσες. Έπειτα υψώνουμε τη μεσοκάθετο στη ΒΓ σχ. 191



Σχ. 191

Εάν τσακίσουμε το επίπεδο περι τη μεσοκάθετο, έπειδή $BM = MG$, οί κορυφές Β και Γ θά συμπέσουν. Αλλά έπειδή $\angle B = \angle G$ και ή ΒΜ συμπίπτει με τη ΜΓ, θά πρέπει και οί άλλες πλευρές τών γωνιών Β και Γ νά συμπέσουν.

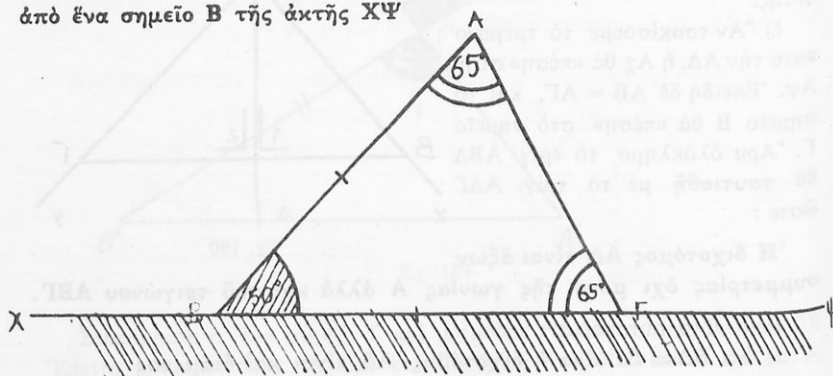
Άρα : Θά συναντήσουν και οί δύο τη μεσοκάθετο στο ίδιο σημείο Α και θά είναι $AB = AG$. Δηλαδή τό τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

«Αν ένα τρίγωνο έχη δύο γωνίες ίσες, είναι ισοσκελές».

ή συμβολικά

$$\angle B = \angle G \Rightarrow AB = AG$$

Έφαρμογή : Νά εύρεθῇ ή απόσταση ενός άραγμένου πλοίου Α από ένα σημείο Β τής άκτῆς ΧΨ



Σχ. 192

Μετρούμε τη νοητή γωνία ΑΒΨ· ὥς είναι 50° . Έπειτα προχωροῦμε κατά μήκος τῆς άκτῆς ΧΨ ὡς ένα σημείο Γ από τό ὅποιο νά ἔχουμε

$$(\angle BGA) = \frac{180^\circ - 50^\circ}{2} = \frac{130^\circ}{2} = 65^\circ$$

‘Αλλά τότε και η $\angle A$ του νοητού τριγ. ΒΑΓ θα έχη μέτρο $180^\circ - (50^\circ + 65^\circ) = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ (επειδή σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των μέτρων των γωνιών είναι 180°). Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ θα είναι ισοσκελές με ίσες πλευρές τις ΒΓ και ΒΑ. Μετρούμε στην ακτή την απόσταση ΒΓ κι’ έχουμε έτσι τον απόσταση ΒΑ.

§ 186. Ειδικά γνωρίσματα της ισότητας ισοσκελών τριγώνων

Τα γνωρίσματα ισότητας τριγώνων ισχύουν και για τα ισοσκελή τρίγωνα. Ειδικά, επειδή στα ισοσκελή τρίγωνα έχουμε 2 πλευρές και 2 γωνίες ίσες, θα έχουμε :

α) “Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουν τις βάσεις ΒΓ και Β’Γ’ ίσες και μία από τις παρα την βάση γωνίες ίσες, θα είναι ίσα (γιατί ;)

β) “Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και Α’Β’Γ’ έχουν τις γωνίες της κορυφής (των ίσων πλευρών) Α και Α’ ίσες και μία από τις ίσες πλευρές ίσες, τα τρίγωνα είναι ίσα (γιατί ;)

186.1 ‘Ισόπλευρο τρίγωνο

Επειδή το ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές, όπως και αν το πάρουμε, θα έχουμε :

1ον Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει τρεις άξονες συμμετρίας

2ον Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισογώνιο

3ον Το ισογώνιο τρίγωνο είναι και ισόπλευρο.

4ον Τα τρία ύψη του είναι και διάμεσοι και διχοτόμοι αυτών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

579) Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τις διαμέσους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του. Με τη βοήθεια δύο τριγώνων να συγκρίνετε τις δύο διαμέσους.

580) Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε το ύψος προς τη βάση και να επαληθεύσετε με τα όργανά σας ότι είναι διάμεσος και διχοτόμος.

581) Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τη διάμεσο προς την βάση. Να επαληθεύσετε ότι η διάμεσος αυτή είναι διχοτόμος και ύψος.

582) Να χαράξετε μία περιφέρεια (O, ρ) και μία χορδή $B\Gamma$ αὐτῆς. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $BO\Gamma$ νὰ ἐξηγήσετε γιατί ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον O πρὸς τὴν χορδὴ $B\Gamma$ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς καὶ τοῦ τόξου.

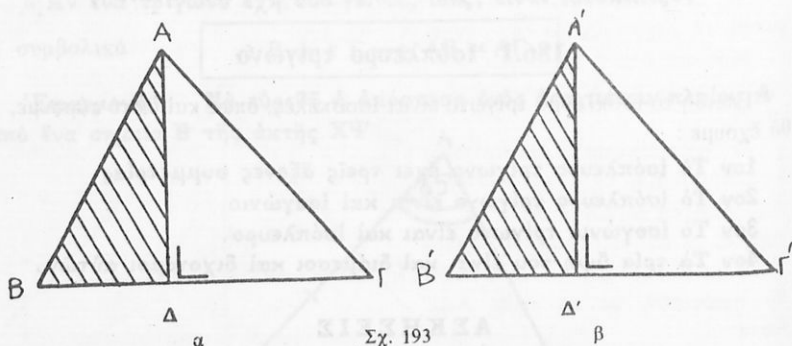
§ 187. Εἰδικὲς περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων

Οἱ τρεῖς περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων ἰσχύουν φυσικὰ καὶ στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Εἰδικὰ ὁμως στὰ ὀρθ. τρίγωνα ἔχουμε καὶ τὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις:

1η Περίπτωση :

Κατασκευάζουμε δύο ἴσα τρίγωνα τὰ $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ καὶ φέρουμε τὰ ὕψη AD καὶ $A'D'$, σχ. 193. Ἐπειτα ἀποκόπτουμε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ABD , $A'B'D'$. Παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν :

1) $AB = A'B'$, 2) $\angle B = \angle B'$, 3) $\angle A = \angle A' = 1 L$ (γιατί;). Μὲ ἐπίθεση διαπιστώνουμε ὅτι: τὰ ὀρθ. τρίγωνα ABD καὶ $A'B'D'$ εἶναι ἴσα.



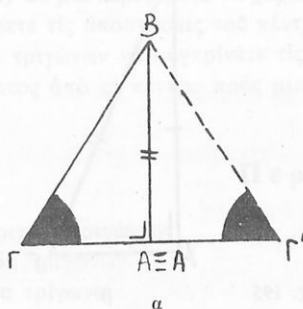
Στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο $A'B'D'$ στὸ τρίγωνο ABD ἔτσι, ὥστε ἡ $A'B'$ νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴση τῆς AB καὶ ἡ $\angle B'$ μὲ τὴν ἴση τῆς $\angle B$. Τότε τὸ σημεῖο D' θὰ πέσῃ ἀκριβῶς στὸ σημεῖο D , γιατί ἀπ' τὸ σημεῖο A μόνο μία κάθετος μποροῦμε νὰ φέρουμε πρὸς τὴ $B\Gamma$. Ἄρα ἡ AD' πρέπει νὰ ταυτισθῇ μὲ τὴν AD , ὁπότε καὶ τὸ τρίγωνο $A'B'D'$ θὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ τρίγωνο ABD .

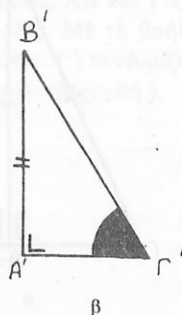
Ὡστε «Ἄν δύο ὀρθ. τρίγωνα ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ μία ὀξεία γωνία ἴση, εἶναι ἴσα».

2η Περίπτωση

Παίρνουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ ($\angle A = \angle A' = 1 L$) που νά ἔχουν : $AB = A'B'$ και $\angle \Gamma = \angle \Gamma'$, σχ. 194 α, β. Μὲ ἐπίθεση ἢ μὲ τὸ διαφανὲς χαρτί διαπιστώνουμε ὅτι : **τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**



Σχ. 194



Στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγ. $A'B'\Gamma'$ δίπλα στὸ τρίγ. $AB\Gamma$ ἔτσι, ὥστε ἡ $A'B'$ νά ταυτισθῇ μὲ τὴν ἴση τῆς AB , οἱ δὲ ὀρθές γωνίες νά γίνουν ἐφεξῆς, σχ. 194. Τότε οἱ πλευρὲς $A\Gamma$ καὶ $A'\Gamma'$ θὰ ἀποτελέσουν ἓνα εὐθύγρ. τμῆμα, τὸ $\Gamma\Gamma'$, (γιατί:). Παρατηροῦμε ὅτι : τὸ τρίγωνο $B\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἰσοσκελὲς ($\angle \Gamma = \angle \Gamma'$). Ἄρα τὸ ὕψος BA εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, ὁπότε τὸ τρίγ. $AB\Gamma$ θὰ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ τρίγ. $A'\Gamma'B$ ἄρα καὶ ἴσο.

Ὡστε « Ἄν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μία κάθετη πλευρὰ ἴση καὶ τὶς ἀπέναντι ὀξείες γωνίες ἴσες, εἶναι ἴσα.

3η Περίπτωση

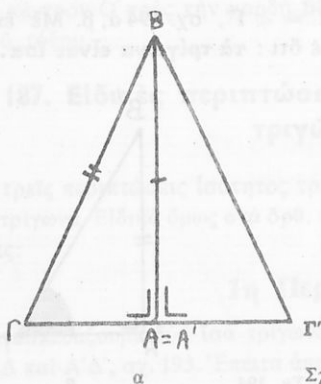
Παίρνουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ που νά ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ ἴσες καὶ τὶς κάθετες πλευρὲς AB καὶ $A'B'$ ἴσες, σχ. 195. Μὲ ἐπίθεση ἢ μὲ διαφανὲς χαρτί διαπιστώνουμε ὅτι : **τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

Μποροῦμε ὅμως νά ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγ. $A'B'\Gamma'$ δίπλα στὸ τρίγ. $AB\Gamma$ ἔτσι, ὥστε νά ταυτισθοῦν οἱ ἴσες πλευρὲς AB καὶ $A'B'$ καὶ οἱ ὀρθές γωνίες A καὶ A' νά γίνουν ἐφεξῆς, ὁπότε οἱ ἄλλες κάθετες πλευρὲς θὰ ἀποτελέσουν ἓνα εὐθύγρ. τμῆμα, τὸ $\Gamma\Gamma'$.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ τρίγ. $B\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἰσοσκελὲς ($B\Gamma = B'\Gamma'$), κι' ὅπως ξέρουμε, τὸ ὕψος BA θὰ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ θὰ εἶναι συμμετρικά ἄρα καὶ ἴσα.

“Ωστε «Αν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τις ὑποτείνουσές ἰσες κι' ἀπὸ μία κάθετη πλευρὰ ἴση, εἶναι ἴσα



α

Σχ. 195



β

Ἐκτός ἀπὸ τις τρεῖς προηγούμενες περιπτώσεις ἔχουμε καὶ τις ἀκόλουθες δύο, οἱ ὁποῖες συνάγονται ἀπὸ τὰ γνωρίσματα τῶν ἴσων τριγώνων.

4η Περίπτωση

“Αν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τις κάθετες πλευρές μία μὲ μία ἴσες, τότε εἶναι ἴσα (γιατί;)

5η Περίπτωση

“Αν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν ἀπὸ μία κάθετο πλευρὰ ἴση ($AB = A'B'$) καὶ τὴν προσκειμένη σ' αὐτὲς ὀξεία γωνία ἴση ($\angle B = \angle B'$), τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. (γιατί;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

583) Νὰ κατασκευάσετε ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ ὑποτείνουσα 6 cm καὶ μία γωνία 40° .

584) Νὰ χαράξετε μία ὀξεία γωνία XOY καὶ τὴ διχοτόμο OZ αὐτῆς. Ἐπειτα νὰ φέρετε τις ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου M τῆς διχοτόμου ἀπὸ τις πλευρὲς τῆς γωνίας καὶ νὰ τις συγκρίνετε. (Χρησιμοποιεῖστε τὰ δύο ὀρθογ. τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται).

585) Ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ M' τῶν δύο ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ φέρετε τις ἀποστάσεις ἀπὸ τὴ βάση $B\Gamma$ καὶ νὰ τις συγκρίνετε. (Χρησιμοποιεῖστε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται).

586) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ ὑποτείνουσα 5 cm.

587) Νά κατασκευάσετε ένα ὀρθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\angle A = 1L$) με μία γωνία $B = 30^\circ$. Ἐπειτα νά συγκρίνετε τὴν κάθετο πλευρὰ AG με τὴν ὑποτείνουσα $B\Gamma$. Τί παρατηρεῖτε;

588) Σὲ μιὰ περιφέρεια νά χαράξετε δύο ἴσες χορδὲς AB καὶ ΓA . Ἐπειτα νά φέρετε τὶς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὶς χορδὲς. Μὲ τὴ βοήθεια δύο ὀρθογ. τριγώνων νά συγκρίνετε τὶς ἀποστάσεις αὐτές. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρο πρὸς μία χορδὴ διχοτομεῖ τὴ χορδὴ).

Περίληψη

Στοιχεῖα τριγώνων.

Εἶδη τριγώνων.

Ἰσα τρίγωνα.

Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων.

Ἰσοσκελὲς τρίγωνο.

Ἰσόπλευρο τρίγωνο.

Περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθ. τριγώνων.

Ἀσκήσεις.

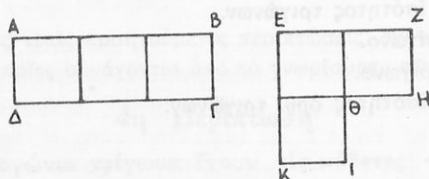
ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΓ'

ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

§ 188. Έμβαδόν επιφανείας. Ίσεμβαδικές επιφάνειες

Μία επιφάνεια μπορεί να είναι μικρή ή μεγάλη.

Από τη σύγκριση μιάς επιφανείας με μίαν άλλη, που τη χρησιμοποιούμε για μονάδα, προκύπτει ένας αριθμός που λέγεται **έμβαδόν** της επιφανείας.



Σχ. 196

Ίσεμβαδικές επιφάνειες

Οι επιφάνειες των σχημάτων ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘΙΚ δεν είναι ίσες (γιατί δεν μπορούν να εφαρμόσουν ή μία πάνω στην άλλη) αλλά έχουν κάτι άλλο κοινό : αποτελούνται από τρία ίσα τετράγωνα : άρα έχουν το ίδιο έμβαδόν.

«Δύο επιφάνειες λέγονται **ίσεμβαδικές**, όταν έχουν το ίδιο έμβαδόν».

Παρατήρηση : Δύο ίσα σχήματα είναι και ίσεμβαδικά ενώ δύο ίσεμβαδικά δεν είναι πάντα και ίσα.

§ 189. Έμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου

(Ύπενθυμίζουμε ότι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι το παραλληλόγραμμο που έχει όλες του τις γωνίες όρθές).

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαστάσεις (μήκος και πλάτος) 3 cm και 4 cm και εκλέγουμε για μονάδα μετρήσεως το 1 cm². Χωρίζουμε το ΑΒΓΔ σε οριζόντιες και κατακόρυφες ταινίες πλάτους 1 cm. Παρατηρούμε ότι έχουμε 3·4 τετράγωνα.

Ώστε : Έμβαδόν ΑΒΓΔ ή (ΑΒΓΔ) ή $E = 3 \cdot 4 \text{ cm}^2$

διότι κάθε τετράγωνο έχει έμβαδόν 1 cm^2

Γενικά: «Για να βρούμε το έμβαδόν E ορθογωνίου παραλληλογράμμου, πολλαπλασιάζουμε το μήκος της βάσεως β με το μήκος του ύψους του u ».

ή

$$E = \beta \cdot u$$

Το έμβαδόν θα εκφράζεται σε μονάδες επιφανείας που αντιστοιχούν στις μονάδες μήκους των πλευρών του.

Παρατηρήσεις

Αν τα μήκη των πλευρών είναι $3,5 \text{ cm}$ και $2,4 \text{ cm}$ τα τρέπουμε σε άλλες όμοιες μονάδες (35 mm και 24 mm), για να γίνουν άκεραιοι, όποτε για να βρούμε το έμβαδόν χρησιμοποιούμε ως μονάδα το 1 mm^2 . Πάλι δε καταλήγουμε στον ίδιο κανόνα.

Ανάλογα εργαζόμαστε κι' όταν τα μήκη των πλευρών εκφράζονται με κλασματικούς αριθμούς.

Εφαρμογές

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ αν } \alpha = 3,2 \text{ m} & \beta = 1,2 \text{ m} \\ \text{τότε } E = 3,2 \cdot 1,2 \text{ m}^2 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2) \text{ αν } \alpha = 0,5 \text{ m} & \beta = 32 \text{ cm} \\ \text{τότε } E = 0,5 \cdot 0,32 \text{ m}^2 & \\ & = 0,160 \text{ m}^2 \\ & = 16 \text{ dm}^2 \end{array}$$

Άλλες εφαρμογές

Με τον τύπο $E = \beta \cdot u$, που εκφράζει τον κανόνα του έμβαδού ορθογ. παραλληλογράμμου, μπορούμε να λύσουμε κι' άλλα προβλήματα :

1) Σ' ένα ορθογ. παρ/μο είναι $E = 32 \text{ m}^2$ και $\beta = 4 \text{ m}$. Να εύρεθῇ το ύψος.

Αν είναι χ το μήκος του ύψους, σύμφωνα με τον τύπο $E = \beta \cdot u$, έχουμε

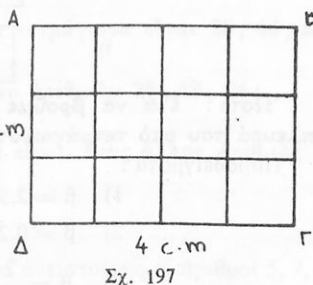
$$32 = 4 \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = \frac{32}{4} = 8$$

Ώστε $\chi = 8 \text{ m}$.

2) Σ' ένα ορθογ. παραλληλόγραμμο είναι $E = 48 \text{ m}^2$ και $u = 6 \text{ m}$. Να υπολογισθῇ το μήκος της βάσεως αυτού.

Αν καλέσουμε χ το μήκος της βάσεως, σύμφωνα με τον τύπο $E = \beta \cdot u$, έχουμε :

$$6 \cdot \chi = 48 \Leftrightarrow \chi = \frac{48}{6}$$



§ 190. Έμβαδόν τετραγώνου

(Υπενθυμίζουμε ότι τετράγωνο είναι το ὀρθογ. παραλληλόγραμμο που ἔχει ὅλες τὶς πλευρὲς του ἴσες)

Ἐπειδὴ στὸ τετράγωνο εἶναι $u = \beta$ θὰ ἔχουμε :

$$E = \beta \cdot u = \beta \cdot \beta$$

ἢ

$$E = \beta^2$$

Ὡστε : Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸν τετραγώνου ὑψώνουμε τὴν πλευρὰ του στὸ τετράγωνο.

Παραδείγματα :

$$1) \quad \beta = 2,5 \text{ m} \quad E = 6,25 \text{ m}^2$$

$$2) \quad \beta = 0,2 \text{ m} \quad E = 0,04 \text{ m}^2$$

$$3) \quad \beta = \frac{2}{3} \text{ m} \quad E = \frac{4}{9} \text{ m}^2.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

589) Ἐνὸς ὀρθογωνίου δωματίου τὸ πλάτος εἶναι 3,70 m καὶ τὸ μήκος 4,20 m. Πόσο εἶναι τὸ ἔμβαδόν του;

590) Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 20 m μία δὲ πλευρὰ του 6 m. Πόσο εἶναι τὸ ἔμβαδόν του ; (Υπενθυμίζουμε ὅτι περίμετρος εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν).

591) Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδὸν εἶναι 250,40 m² τὸ δὲ ὕψος 42,50 m.

592) Μία αἰθουσα γιὰ νὰ στρωθῇ χρειάζεται 18 σανίδες πλάτους 0,4 m καὶ μήκους 2 m. Πόσο εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τῆς αἰθούσης;

593) Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 6 cm τὸ δὲ ὕψος ἑνὸς ἰσεμβαδικοῦ μὲ αὐτὸ ὀρθογωνίου εἶναι 4 m. Πόση εἶναι ἡ βάσις αὐτοῦ;

594) Τί παθαίνει τὸ ἔμβαδὸν τετραγώνου ἂν διπλασιάσουμε τὴν πλευρὰ του;

§ 191. Τετραγωνικὴ ρίζα

α) Τί εἶναι τετραγωνικὴ ρίζα.

Ὅταν ἔχετε τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, 4 καὶ πολλαπλασιάσετε καθένα μὲ τὸν ἑαυτό του, θὰ βρῆτε τὰ τετράγωνά των 4, 9, 16. Οἱ πράξεις αὐτὲς ἀντιστοιχοῦν στὸ πρόβλημα : « Ἀπὸ τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου νὰ βρῆτε τὸ ἔμβαδόν του »

Ἀντίστροφα :

Ποιῶν ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι

$$25, \quad 49, \quad 64 ;$$

Ἡ ὅταν ξέρετε τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τετραγώνου, πῶς θὰ βρῆτε τὴν πλευρά του;

Στὴν ἰσότητα $3^2 = 9$

ὁ ἀριθμὸς 9 λέγεται **τετράγωνο τοῦ 3**, ἐνῶ ὁ ἀριθμὸς 3 λέγεται **τετραγωνική ρίζα** τοῦ 9 καὶ γράφεται :

$$\sqrt{9} = 3$$

Ἔτσι τὸ ἐρώτημα : Ποιῶν ἀριθμῶν τὰ τετράγωνα εἶναι 25, 49, 64 διατυπώνεται :

Ποιῆς εἶναι οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 25, 49, 64;

Γενικά :

Τετραγωνικὴ ρίζα ἐνὸς ἀριθμοῦ α εἶναι ἕνας ἄλλος ἀριθμὸς β τέτοιος, ὥστε

$$\beta^2 = \alpha$$

Παραδείγματα :

Τῶν ἀριθμῶν 25, 49, 64 τετραγ. ρίζες εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοὶ 5, 7, 8 διότι

$$5^2 = 25$$

$$7^2 = 49$$

$$8^2 = 64$$

Ἀπὸ τὸν ὅρισμό τῆς τετρ. ρίζης ἔχουμε :

$$\sqrt{9} = 3 \implies 3^2 = 9$$

ἀλλὰ καὶ

$$3^2 = 9 \implies \sqrt{9} = 3$$

ἄρα

$$\sqrt{9} = 3 \iff 3^2 = 9$$

Γενικά ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία

$$\boxed{\sqrt{a} = \beta \iff \beta^2 = a}$$



Σχ. 198

Τετρ. ρίζα κλασμ. ἀριθμῶν

Ποιά εἶναι ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{4}{9}$

Ἐπειδὴ $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

ἔχουμε :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$$

ἀλλὰ

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

ὁπότε

$$\frac{2}{3} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

ἄρα :

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$$

καὶ γενικά :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

«ή τετρ. ρίζα κλάσματός είναι ἴση με̐ την τετραγ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ διὰ τῆς τετρ. ρίζης τοῦ παρονομαστοῦ».

Παραδείγματα :

$$\alpha) \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}, \quad \beta) \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}$$

Τέλεια τετράγωνα

$$\begin{array}{l} \text{Οἱ ἀριθμοὶ} \quad 0, 1, 4, 9, 16 \dots \quad \frac{4}{9} \quad \frac{16}{25}, \\ \text{ποὺ εἶναι τετράγωνα τῶν} \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{4}{5}, \end{array}$$

λέγονται **τέλεια τετράγωνα**.

Γενικά : "Ἄν ἓνας ρητὸς εἶναι τετράγωνο ἑνὸς ἄλλου, λέγεται **τέλειο τετράγωνο**.

"Ἐστὶ ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς :

$$2, 4, 6, 9, \frac{4}{9}, \frac{25}{36}, \frac{5}{16},$$

τέλεια τετράγωνα εἶναι οἱ $4, 9, \frac{4}{9}, \frac{25}{36}$ ἐνῶ οἱ ἄλλοι δὲν εἶναι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

595) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν : 0, 1, 2, 3 ... 10.

596) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν : 1, 4, 36, 64, 81, 100.

597) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 81 m². Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

598) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}$$

599) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν :

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{16}, \quad \frac{25}{81}$$

600) Ἐνὸς τετραγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι $\frac{25}{81}$ m². Πόση εἶναι ἡ πλευρά του;

Εύρεση τετραγωνικής ρίζης

I. Τετραγωνική ρίζα με προσέγγιση άκεραίας μονάδος.

“Αν μᾶς ζητήσουν τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 24, εὐκόλα παρατηροῦμε ὅτι αὐτὴ εἶναι μεγαλύτερη τοῦ 4 (διότι $4^2 = 16$) ἀλλὰ μικρότερη ἀπὸ τὸ 5 (διότι $5^2 = 25$). Ἄρα τὸ 24 δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο ἀκεραίου. Στὴν περίπτωσιν αὐτὴ λαμβάνουμε ὡς τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 24 τὸν μικρότερον ἀπὸ τοὺς δύο ἀκεραίους, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται. Λέγεται δὲ τὸ 4 τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 24 με προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ὡστε: «Τετραγωνικὴ ρίζα ἀκεραίου ἀριθμοῦ α με προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος β , τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο χωρεῖ σ' αὐτὸν τὸν ἀριθμόν.

$$\begin{aligned}\text{Π.χ.} \quad \sqrt{56} &= 7 \quad (\text{με προσέγγισιν ἀκ. μονάδος}) \\ \sqrt{50} &= 7 \quad (\text{με προσέγγισιν ἀκ. μονάδος})\end{aligned}$$

II. Ἐξαγωγή τετραγ. ρίζης.

α) Τετρ. ρίζα ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100

Ἐπειδὴ $\sqrt{100} = 10$, ἡ τετρ. ρίζα κάθε ἀριθμοῦ μικροτέρου τοῦ 100 θὰ εἶναι μικρότερη τοῦ 10 καὶ τὴν εὐρίσκουμε ἀπὸ μνήμης.

β) Τετρ. ρίζα ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῶν 100

Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 139876

1) Χωρίζουμε τὸν ἀριθμὸ σὲ διψήφια τμήματα ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τὰ ἀριστερά (τὸ τελευταῖον πρὸς τὰ ἀριστερά τμήμα μπορεῖ νὰ εἶναι καὶ μονοψήφιο).

2) Ἐξάγουμε (με προσέγγισιν ἀκ. μονάδος) τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πρώτου (πρὸς τὰ ἀριστερά) τμήματος, ἔτσι:

ἢ $\sqrt{13}$, τὸ 3, εἶναι τὸ **1ο ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης** ποὺ ζητᾶμε.

3) Ἀφαιροῦμε τὸ τετράγωνο τοῦ 3, δηλ. τὸ 9, ἀπὸ τὸ 1ο τμήμα τοῦ ἀριθμοῦ δηλ. ἀπὸ τὸ 13. $13 - 9 = 4$. Τὸ 4 εἶναι τὸ **1ο μερικὸ ὑπόλοιπο**.

4) Δεξιὰ τοῦ 1ου μερικοῦ υπολοίπου (4) γράφουμε τὸ 2ο τμήμα (98) τοῦ 139876, καὶ τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ σχηματίσθηκε, (498), χωρίζουμε τὸ τελευταῖον ψηφίο (8) καὶ διαιροῦμε τὸ 49 διὰ τοῦ διπλασίου, (6), τοῦ α' ψηφίου τῆς ρίζης.

5) Τὸ πηλίκον 7 τὸ γράφουμε δεξιὰ τοῦ 6 καὶ τὸ 67 τὸ πολλαπλασιάζουμε με 7. Τὸ γινόμενο $67 \cdot 7 = 469$ τὸ ἀφαιροῦμε ἀπὸ τὸ 498. $498 - 469 = 29$ (ἂν παίρναμε ὡς πηλίκον τὸ 8, ἡ ἀφαίρεσις δὲν ἦταν δυνατὴ).

Ὁ ἀριθμὸς 7 εἶναι τὸ **2ο ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης**

6) Δεξιά του υπολοίπου, (του 29), θέτουμε το επόμενο τμήμα του αριθμού, 76, και συνεχίζουμε όπως εργαστήκαμε για την εύρεση του 2ου ψηφίου της ρίζης.

Διάταξη της πράξεως

$$\begin{array}{r|l}
 13'98'76 & 376 \\
 \hline
 9 & 67 \quad 744 \\
 \hline
 49'8 & 7 \quad 4 \\
 \hline
 469 & 469 \quad 2976 \\
 \hline
 297'6 & \\
 2976 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Έτσι έχουμε

$$\sqrt{139876} = 376$$

Δοκιμή : Βασίζεται στην ισοδυναμία $\sqrt{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = a$

Δηλ. αν η ρίζα είναι σωστή, πρέπει : $376^2 = 139876$.

Παράδειγμα 2ο :

Νά εύρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 93042.

Ἀκολουθοῦμε τὸν παραπάνω κανόνα κι' ἔχουμε :

$$\begin{array}{r|l}
 9'30'42 & 305 \\
 \hline
 9 & 60 \quad 605 \\
 \hline
 03'0 & 0 \quad 5 \\
 \hline
 00 & 00 \quad 3025 \\
 \hline
 3042 & \\
 3025 & \\
 \hline
 17 &
 \end{array}$$

Ὦστε $\sqrt{93042} = 305$ με προσέγγιση ἀκ. μονάδος.

Δοκιμή : $305^2 + 17 = 93042$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

601) Νά εύρεθοῦν οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν :

256, 441, 576, 900

602) Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ποῦ ἔχει ἐμβαδὸν 225 m^2

603) Νά εύρεθοῦν οἱ τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν :

$\begin{array}{r} 25 \\ 36 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 49 \\ 81 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 1 \\ 100 \end{array}$
 $\begin{array}{r} 144 \\ 10000 \end{array}$

604) Ἐνὸς ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνο, ἀν αὐξηθῇ κατὰ 9, γίνεται ἴσο με 450.

Ποιὸς εἶναι ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ;

605) Ποιός είναι ο μικρότερος αριθμός που πρέπει να αφαιρέσουμε από τον αριθμό 100 για να γίνει τέλειο τετράγωνο;

Τετραγωνική ρίζα με προσέγγιση $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ...

Στον πίνακα (α) βλέπετε τις τετραγωνικές ρίζες μερικών άκεραίων.

Στον πίνακα (β) βλέπετε τις τετραγωνικές ρίζες των προηγούμενων άκεραίων πολλαπλασιασμένων όμως με $10^2 = 100$ και στον πίνακα (γ) βλέπετε τις τετρ. ρίζες των ίδιων πολλαπλασιασμένων με $10^4 = 10.000$.

α		β		γ	
Αριθμοί	τετρ. ρίζες	Αριθμοί	τετρ. ρίζες	Αριθμοί	τετρ. ρίζες
1	1	100	10	10.000	100
4	2	400	20	40.000	200
9	3	900	30	90.000	300
16	4	1.600	40	160.000	400

Από τους τρεις πίνακες συνάγουμε ότι :

Αν ένας αριθμός πολλαπλασιαστεί με $10^2 = 100$ ή $10^4 = 10.000$... τότε η τετρ. ρίζα αυτού πολλαπλασιάζεται με 10 ή 100 ...

Από τον κανόνα αυτό συνάγουμε ότι για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού με προσέγγιση $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$...

α) πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με $10^2 = 100$ ή $10^4 = 10.000$...

β) εύρισκουμε την τετρ. ρίζα με προσέγγιση άκεραίας μονάδας.

γ) διαιρούμε τη ρίζα δια 10, 100 ...

Παραδείγματα :

1ο Για να βρούμε την τετραγωνική ρίζα του άκεραίου 2 με προσέγγιση 0,1, πολλαπλασιάζουμε τον αριθμό με $10^2 = 100$ και εύρισκουμε την τετρ. ρίζα του 200 με προσέγγιση άκερ. μονάδος.

$$\sqrt{200} = 14 \left(\text{με προσεγ. άκ. μονάδος} \right)$$

$$\text{ήρα } \sqrt{2} = \frac{14}{10} = 1,4 \left(\text{με προσέγγιση δεκάτου} \right)$$

2ο. Αν ζητάμε την τετραγωνική ρίζα του 2 με προσέγγιση 0,01, πολλαπλασιάζουμε το 2 με $100^2 = 10000$ και εύρισκουμε την τετραγωνική ρίζα του 20000 με προσέγγιση άκερ. μονάδος

$$\sqrt{20\,000} = 141 \left(\text{με προσέγγιση άκ. μονάδος} \right)$$

$$\text{όποτε } \sqrt[3]{2} = \frac{141}{100} = 1,41 \quad \left(\text{μὲ προσέγγιση } 0,01 \right)$$

Παρατηρήσεις :

1) Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος ποὺ δὲν εἶναι οἱ ὅροι τοῦ τετράγωνου, π.χ. τοῦ $\frac{3}{5}$, πολλαπλασιάζουμε ἀριθμητὴ καὶ παρονομαστὴ μὲ τὸν παρονομαστὴ τοῦ κλάσματος γιὰ νὰ γίνῃ ὁ παρονομαστὴς τέλειο τετράγωνο κι' ἔτσι θὰ ἔχουμε νὰ βροῦμε μόνον τὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμητοῦ, ὅπως φαίνεται στὸ ἀκόλουθο παράδειγμα :

$$\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

2) Τετρ. ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ

Ἄν θέλουμε νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 5,6169

α) Πολλαπλασιάζουμε τὸ 5,6169 μὲ 10^4

$$5,6169 \cdot 10^4 = 56169$$

β) Ὑπολογίζουμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 56169

$$\sqrt{56169} = 237$$

γ) Διαιροῦμε τὸ 237 διὰ 10^2

$$237 : 10^2 = \frac{237}{100} = 2,37$$

Γενικά : Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ, πολλαπλασιάζουμε μὲ 10^2 ἢ 10^4 ἢ 10^6 , κ.ο.κ. ἔτσι, ὥστε ὁ δεκαδικὸς νὰ γίνῃ ἀκέραιος καὶ συνεχίζουμε σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο παράδειγμα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

606) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν : 3, 5, 12. μὲ προσέγγιση 0,1.

607) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν : 11, 13, 45, μὲ προσέγγιση 0,01 καὶ νὰ κάνετε δοκιμὴ.

608) Νὰ πάρете ἓνα τέλειο τετράγωνο καὶ νὰ τὸ πολλαπλασιάσετε μὲ 4, 9, 16. Τί παθαίνει ἡ τετραγωνικὴ ρίζα;

609) Ἄν $3/\sqrt{}$ πλασιάσετε τὴν τετραγωνικὴ ρίζα ἐνὸς ἀριθμοῦ, τί θὰ πάθῃ ὁ ἀριθμὸς αὐτός ;

§ 192. Ἀσύμμετροι ἀριθμοὶ

Ἄν δοκιμάσουμε νὰ βροῦμε τὶς τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5, θὰ παρατηρήσουμε ὅτι εὐρίσκουμε ἀριθμοὺς μὲ ἀπείρα δεκαδικὰ ψηφία χωρὶς νὰ εἶναι περιοδικά.

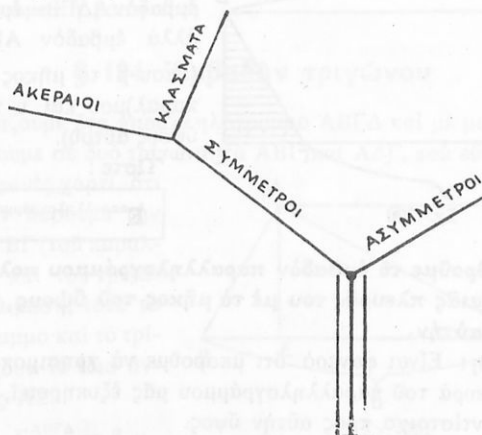
Π.χ.

$$\sqrt{5} = 2,23606 \dots$$

Γι' αυτό το λόγο δὲν μπορούν νὰ τεθοῦν σὲ κλασματική μορφή :

$$\frac{a}{\beta} \quad (\text{ὅπου } a \in \Phi_0, \beta \in \Phi)$$

ὅπως συμβαίνει μὲ τοὺς περιοδικούς δεκαδικούς ἀριθμούς.



Σχ. 199

Εἶναι δηλαδή ἓνα **νέο εἶδος ἀριθμῶν** μὴ ρητῶν ἢ συμμέτρων, ποὺ λέγονται **ἀσύμμετροι ἀριθμοί**.

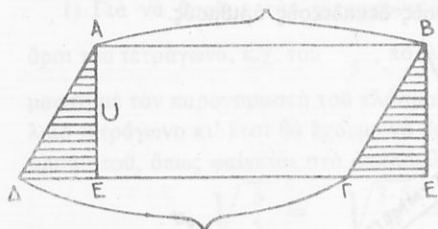
Στὴν ἡμιευθεῖα διατάξεως τῶν ρητῶν εἶχαμε δεῖ ὅτι ὑπάρχουν καὶ σημεῖα ποὺ δὲν ἀντιστοιχοῦν σὲ κανένα ρητὸ ἀριθμὸ. Τὰ σημεῖα αὐτὰ ἀντιστοιχοῦν στοὺς ἀσύμμετρος. Ἔτσι κάθε σημεῖο τῆς ἡμιευθεῖας διατάξεως ἀντιστοιχεῖ σ' ἓναν ἀριθμὸ σύμμετρο ἢ ἀσύμμετρο. Τὸ σύνολο **τῶν ρητῶν ἢ συμμέτρων τῆς ἀριθμητικῆς** καὶ τὸ σύνολο **τῶν ἀσύμμέτρων τῆς ἀριθμητικῆς** ἐνώνονται σ' ἓνα εὐρύτερο σύνολο : Στὸ σύνολο τῶν **πραγματικῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς**.

§ 193. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου

(Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι τετράπλευρο μὲ τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες.) Εἶναι φανερὸ διὰ γὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδόν του δὲν μπορούμε νὰ ἐργασθούμε ὅπως στὴν περιπτωση ὀρθογωνίου, γιατί δὲν ἔχει τὶς γωνίες ὀρθές. Ἄρα δὲν καλύπτεται (ἀκριβῶς) ἡ ἐπιφάνεια μὲ τετράγωνα.

Χρησιμοποιούμε ὅμως ἓναν ἄλλο ἀπλὸ τρόπο : **τὸ μετασχηματίζουμε σὲ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο.**

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τὸ ὕψος ΑΕ. Ἀποκόπτουμε τὸ τρίγωνο ΑΔΕ καὶ τὸ τοποθετοῦμε στὴ θέση ΒΓΕ'. Ἔτσι τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μετασχηματίσθηκε στὸ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο ΑΕΕΒ' καὶ



Σχ. 200

ἔχουμε :

ἐμβαδὸν ΑΔΓΒ = ἐμβαδὸν ΑΕΕ'Β
ἀλλὰ ἐμβαδὸν ΑΕΕ'Β = $\beta \cdot \upsilon$
(ὅπου β τὸ μῆκος τῆς βάσεως
παραλ)μου καὶ υ τὸ μῆκος τοῦ
ὕψους αὐτοῦ).

Ὡστε :

$E_{\text{παραλληλογράμμου}}$	$= \beta \cdot \upsilon$
-------------------------------	--------------------------

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου πολ/ζουμε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν.

Παρατήρηση: Εἶναι φανερό ὅτι μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ βάση ὅποια πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου μᾶς ἐξυπηρετεῖ, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε καὶ τὸ ἀντίστοιχο πρὸς αὐτήν ὕψος.

Ἐφαρμογές: 1η) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου $\beta = 20 \text{ cm}$, $\upsilon = 5 \text{ cm}$.

Ἐχουμε : $E = 20 \cdot 5 \text{ cm}^2$

ἢ $E = 100 \text{ cm}^2$

2η) Σ' ἓνα παραλληλόγραμμο εἶναι :

$$E = 96 \text{ cm}^2 \text{ καὶ } \beta = 8 \text{ cm}$$

νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $E = \beta \cdot \upsilon$

ἔχουμε : $96 = 8 \cdot \upsilon$

$$\text{ἢ } 96 = 8 \cdot \upsilon \iff \upsilon = \frac{96}{8} = 12$$

ὥστε : $\upsilon = 12 \text{ cm}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

610) Ἐνα παραλληλόγραμμο ἔχει μία πλευρὰ 6 cm καὶ ἀντίστοιχο ὕψος 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

611) Ἐνα παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδὸν 72 cm^2 καὶ ὕψος 6 cm. Πόση εἶναι ἡ βάση του;

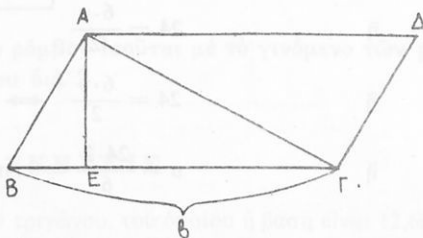
612) Ἐνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm καὶ ἔχει μία πλευρὰ ἴση μὲ 9 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴ τὴν πλευρὰ.

613) Σ' ένα παραλληλόγραμμο ή μία πλευρά είναι 4 cm το δε αντίστοιχο ύψος είναι ίσο με την πλευρά τετραγώνου, που έχει έμβαδόν 81 cm^2 Να εύρεθῇ τὸ έμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

614) Τί παθαίνει τὸ έμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἂν διπλασιάσουμε ἢ τριπλασιάσουμε τὴ βάση του;

§ 194. Έμβαδὸν τριγώνου

Κατασκευάζουμε ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ καὶ μὲ μίᾳ διαγώνιῳ, τὴν AG , τὸ χωρίζουμε σὲ δυὸ τρίγωνα, τὰ $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta\Gamma$, ποὺ εὐκόλᾳ διαπιστώνουμε, μὲ διαφανὲς χαρτί, ὅτι εἶναι **ἴσα**. Ἄν πάρουμε τὴν κοινὴ πλευρὰ $B\Gamma$ (τοῦ παραλληλογράμμου καὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$) γιὰ βάση, τότε τὸ παραλληλόγραμμο καὶ τὸ τρίγωνο $AB\Gamma$ ἔχουν τὸ ἴδιο ἀντίστοιχο ὕψος AE .



Εἶναι δέ: $E^{AB\Gamma\Delta} = \beta \cdot \upsilon$

Σχ. 201

Ἄρα :

$$E^{AB\Gamma} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

Ὡστε: Τὸ έμβαδὸν τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τοῦ μήκους τῆς βάσεως μὲ τὸ μήκος τοῦ ἀντίστοιχου ὕψους διὰ 2.

Παρατήρηση: Σὲ κάθε πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἓνα ὕψος. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ έμβαδὸν μπορούμε νὰ πάρουμε γιὰ βάση ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἀρκεῖ γιὰ ὕψος νὰ πάρουμε τὸ ἀντίστοιχο πρὸς τὴν πλευρὰ αὐτή.

Εἰδικὴ περίπτωση: Ἄν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο (ὀρθογώνιο λέγεται τὸ τρίγωνο ὅταν ἔχῃ μία γωνία του ὀρθή) καὶ πάρουμε γιὰ βάση τὴ μίᾳ κάθετῃ πλευρὰ του, τότε ὕψος εἶναι ἡ ἄλλῃ κάθετῃ πλευρὰ.

Ἐφαρμογές

1) Ἐνὸς τριγώνου ἡ μίᾳ πλευρὰ ἔχει μήκος 5 cm καὶ τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴν 3 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ έμβαδόν.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

ἔχουμε $E = \frac{5 \cdot 3}{2} = 7,5 \text{ cm}^2$

2) Ὅρθ. τριγώνου οἱ κάθετες πλευρὲς ἔχουν μήκη 3 cm καὶ 4 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν.

Εἶναι :

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} \text{ cm}^2$$

ἢ $E = 6 \text{ cm}^2$

3) Σ' ἓνα τρίγωνο εἶναι : $E = 24 \text{ cm}^2$ καὶ $\beta = 6 \text{ cm}$. Πόσο εἶναι τὸ μήκος τοῦ ὕψους, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ β ;

Εἶναι :

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$$

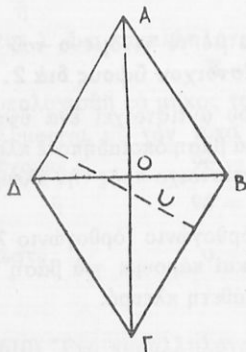
ἢ $24 = \frac{6 \cdot \upsilon}{2}$

ἢ $24 = \frac{6 \cdot \upsilon}{2} \iff 24 \cdot 2 = 6 \cdot \upsilon$

ἢ $\upsilon = \frac{24 \cdot 2}{6} = 8 \text{ cm}$

§ 195. Ἐμβαδὸν Ρόμβου

(Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ρόμβος εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως καὶ στὰ μέσα των)



Σχ. 202

1ος τρόπος : Ἀφοῦ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του μπορούμε νὰ ἐργασθοῦμε ὅπως καὶ στὰ παραλληλόγραμμα.

2ος τρόπος : Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου μὲ διαγώνιους 4 cm καὶ 6 cm.

Ἐπειδὴ οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως καὶ στὰ μέσα αὐτῶν, τὰ 4 ὀρθογώνια τρίγωνα AOB, AOD, DOG, OGB εἶναι ἴσα. (Ἔχουν καὶ τὶς τρεῖς πλευρὲς μία μὲ μία ἴσες).

Ἀρα : Ἐμβαδὸν $AB\Gamma\Delta = 4 \cdot \text{ἐμβ AOB}$

Ἀλλὰ :

$$\text{Ἐμβαδὸν AOB} = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

Ὡστε :

$$\text{Ἐμβαδὸν AB}\Gamma\Delta = 4 \cdot 3 \text{ cm}^2 = 12 \text{ cm}^2$$

“Αν οί διαγώνιοι είχαν μήκη α και β , θα είχαμε :

$$E_{AOB} = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{2}}{2} = \frac{\alpha \cdot \beta}{4} = \frac{\alpha \cdot \beta}{8}$$

Άρα : $E_{AB\Gamma\Delta} = 4 \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{8}$

ή $E_{AB\Gamma\Delta} = \frac{\alpha \cdot \beta}{2}$

“Ωστε : τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μη-
κῶν τῶν διαγωνίων του διὰ 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

614) Πόσο είναι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 12,60 m καὶ τὸ ὕψος 8,40 m ;

615) Ἐνα οἰκόπεδο τριγωνικὸ ἔχει βάση 14,40 m καὶ ὕψος 24,40 m. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδὸν του σὲ τετραγ. τεκτον. πῆχεις.

616) Ἐνα οἰκόπεδο τριγωνικὸ ἔχει βάση 60 m καὶ ὕψος 40 m, πρόκειται δὲ νὰ ἀνταλλαγῇ μ' ἄλλο, ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, πλάτους 30 m. Πόσο μῆκος πρέπει νὰ ἔχη τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο;

617) Νὰ μοιρασθῇ ἐξ ἴσου σὲ δύο κληρονόμους τριγωνικὸ οἰκόπεδο ABΓ, ὥστε νὰ ἔχουν κοινὸ τὸ πηγάδι ποῦ εἶναι στὴ κορυφὴ Α. (Δηλαδή νὰ χωρισθῇ σὲ 2 ἰσεμβαδικὰ τρίγωνα μὲ κοινὴ κορυφὴ τὸ Α).

618) Ἐνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

619) Τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ρόμβου εἶναι 48 m² καὶ ἡ μία διαγώνιος 8 m. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη διαγώνιος αὐτοῦ.

620) Τί παθαίνει τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου, ἂν τριπλασιάσουμε τὸ ὕψος του;

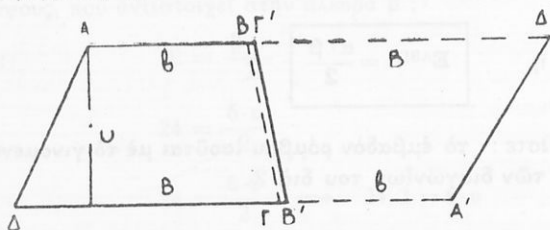
621) Σ' ἓνα τρίγωνο ABΓ νὰ χαράξετε τὴ διάμεσο AM κι' ἔπειτα νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα ABM καὶ AΓM εἶναι ἰσεμβαδικά. (Υπενθυμίζουμε ὅτι διάμεσος τριγώνου εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμήμα, ποῦ ἐνώνει μιὰ κορυφὴ μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς).

622) Ἐνα οἰκόπεδο μὲ σχῆμα ρόμβου, ποῦ ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm, πρόκειται νὰ ἀνταλλαγῇ μὲ ἰσεμβαδικὸ τετραγωνικὸ οἰκόπεδο. Πόση θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγ. οἰκόπεδου.

§ 196. Έμβαδόν τραπεζίου

(Υπενθυμίζουμε ότι τραπέζιο είναι το τετράπλευρο, που έχει παράλληλες μόνο το ένα ζεύγος των απέναντι πλευρών, που λέγονται βάσεις του τραpezίου).

Κατασκευάζουμε δύο ίσα τραπέζια και τα τοποθετούμε το ένα δίπλα στο άλλο, άντεστραμμένα, σχ. 203.



ΣΧ. 203

Εύκολα διακρίνουμε ότι σχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο $AA'D'A'$ με βάση $B + b$ και ύψος το ύψος u των τραpezίων.

$$\text{Είναι} \quad E_{AA'D'A'} = (B + b) \cdot u$$

$$\text{Άρα:} \quad E_{\text{τραpezίου}} = \frac{B + b}{2} \cdot u$$

Άρα: «Για να βρούμε το έμβαδόν τραpezίου πολλαπλασιάζουμε το μήκος του ημιάθροισματος των βάσεων με το μήκος του ύψους.

Έφαρμογές :

1) Ένός τραpezίου είναι $B = 6 \text{ cm}$, $b = 4 \text{ cm}$, $u = 5 \text{ cm}$. Να εύρεθῇ το έμβαδόν του

$$\text{Έχουμε:} \quad E = \frac{(6 + 4)}{2} \cdot 5 \text{ cm}^2$$

$$\eta \quad E = \frac{10}{2} \cdot 5 \text{ cm}^2$$

$$\eta \quad E = 25 \text{ cm}^2$$

2) Ένός τραpezίου είναι $E = 60 \text{ cm}^2$, $b = 4 \text{ cm}$, $B = 8 \text{ cm}$. Να εύρεθῇ το μήκος του ύψους αυτού.

Σύμφωνα με τον τύπο έχουμε :

$$60 = \left(\frac{4 + 8}{2} \right) \cdot \chi \Leftrightarrow \chi = 60 : \left(\frac{4 + 8}{2} \right)$$

$$\eta \quad \chi = 60 : \frac{12}{2} \text{ cm}$$

$$\eta \quad \chi = 60 : 6 \text{ cm}$$

$$\eta \quad \chi = 10 \text{ cm}$$

3) Σ' ένα τραπέζιο μᾶς εἶναι γνωστὰ

$$\left. \begin{array}{l} 1) E = 48 \text{ cm}^2 \\ 2) \beta = 6 \text{ cm} \\ 3) \nu = 4 \text{ cm} \end{array} \right\} \text{ καὶ ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς βάσεως } B.$$

$$\text{Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο} \quad E = \frac{B + \beta}{2} \cdot \nu$$

$$\text{Έχουμε} \quad 48 = \left(\frac{6 + \chi}{2} \right) \cdot 4 \Leftrightarrow \frac{6 + \chi}{2} = \frac{48}{4}$$

$$\eta \quad \frac{6 + \chi}{2} = 12 \Leftrightarrow 6 + \chi = 12 \cdot 2$$

$$\eta \quad 6 + \chi = 24 \Leftrightarrow \chi = 24 - 6$$

$$\eta \quad \chi = 18$$

$$\text{ὥστε :} \quad B = 18 \text{ cm}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

623) Νά εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπέζιου μὲ $B = 6 \text{ cm}$, $\beta = 2 \text{ cm}$ καὶ $\nu = 3 \text{ cm}$.

624) Ἐνὸς τραπέζιου δίδονται $E = 48 \text{ cm}^2$, $B = 9 \text{ cm}$, $\beta = 7 \text{ cm}$ καὶ ζητεῖται τὸ ὕψος του.

625) Ἐνὸς τραπέζιου δίδονται $E = 60 \text{ cm}^2$, $B = 12 \text{ cm}$, $\nu = 6 \text{ cm}$. Ζητεῖται ἡ ἄλλη βάση β .

626) Ἐνα τραπέζιο ἔχει $B = 4 \text{ cm}$, $\beta = 2 \text{ cm}$ κτ' εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm . Νά εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τραπέζιου.

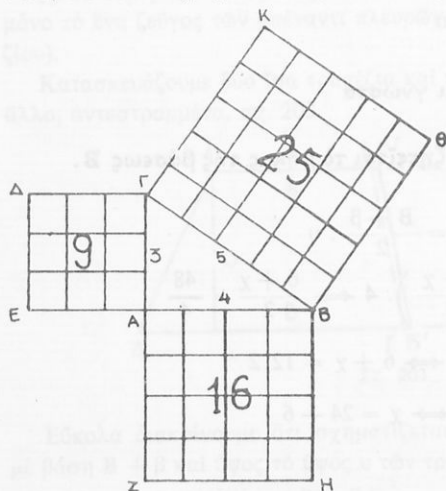
627) Ἐνα οἰκόπεδο μὲ σχῆμα τραπέζιου, ποῦ ἔχει $B = 60 \text{ m}$, $\beta = 20 \text{ m}$ καὶ $\nu = 30 \text{ m}$, πρόκειται νὰ ἀνταλλαγῇ μὲ ἄλλο οἰκόπεδο μὲ σχῆμα ὀρθογωνίου, ποῦ ἔχει βάση 60 m . Πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου οἰκοπέδου ;

§ 197. Πυθαγόρειο θεώρημα *

Κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 3 cm καὶ 4 cm . Μετροῦμε τὴν ὑποτείνουσα καὶ εὐρίσκουμε 5 cm .

* Πυθαγόρας : μεγάλος φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς ἀπὸ τῆ Σάμο (572 — 500 π.Χ.). Ἰδρυτὴς τῆς μεγάλης φιλοσοφικῆς-μαθηματικῆς σχολῆς στὸν Κρότωνά Ἰταλίας. Ἡ συμβολὴ του στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν εἶναι μεγάλη.

“Ας υπολογίσουμε τα έμβαδά των τετραγώνων, που έχουν πλευρές 3 cm, 4 cm, 5 cm. Θα έχουμε : 9 cm², 16 cm², 25 cm²”



Σχ. 204

Παρατηρούμε ότι :

$$25 = 9 + 16$$

Επαναλαμβάνουμε την ίδια εργασία με άλλα ορθογώνια τρίγωνα.

Π.χ. με κάθετες πλευρές 5 cm, 12 cm. Εύρισκουμε ύποτείνουσα 13 cm και έμβαδά των τετραγώνων, που έχουν πλευρές 5 cm, 12 cm, 13 cm, 25 cm², 144 cm², 169 cm².

Πάλι έχουμε :

$$169 = 25 + 144$$

“Ωστε :

Στο ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο της ύποτείνουσας είναι ίσο με το ά-

θροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών

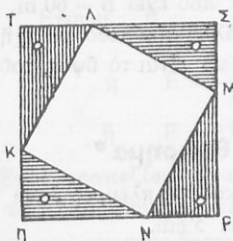
ή πιο σύγτομα

$$a^2 = b^2 + \gamma^2$$

όπου β, γ τα μήκη των καθέτων πλευρών και α το μήκος της ύποτείνουσας.

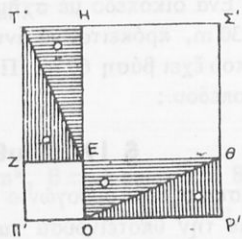
Μπορούμε να βεβαιωθούμε γεωμετρικά με τον ακόλουθο τρόπο :

1) Κατασκευάζουμε από χαρτόνι: α) 4 ίσα με το ΑΒΓ, σχ. 205, ορθογώνια τρίγωνα. β) Ένα τετράγωνο με πλευρά ίση με το άθροισμα ΑΒ + ΑΓ των καθέτων πλευρών του ενός ορθ. τριγώνου, το τετράγωνο ΠΡΣΤ.



α

Σχ. 205



β

2) Τοποθετούμε τα ορθογώνια τρίγωνα με 2 τρόπους : α) όπως δείχνει το σχήμα (α), β) όπως δείχνει το σχήμα (β). Στο σχήμα (α) βλέπουμε ότι από όλo-

κληρο το τετράγωνο μένει ελεύθερο το τετράγωνο ΚΑΜΝ. Στο σχήμα (β) μένουν ελεύθερα δύο τετράγωνα τα ΟΕΖΠ' και ΕΗΣ'Θ. 'Από αυτά συνάγουμε ότι : το τετράγωνο της ύποτείνουσας είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών.

Έφαρμογές

Η ισότητα $a^2 = b^2 + \gamma^2$ μάς επιτρέπει να υπολογίζουμε μία πλευρά ὀρθογ. τριγώνου, όταν ξέρουμε τις δυο άλλες πλευρές του.

1ο) Ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ οἱ δύο κάθετες πλευρές ἔχουν μήκη 6 cm και 8 cm. **Νά υπολογισθῇ τὸ μήκος χ τῆς ὑποτείνουσας.**

Σύμφωνα με τὸν τύπο $a^2 = b^2 + \gamma^2$

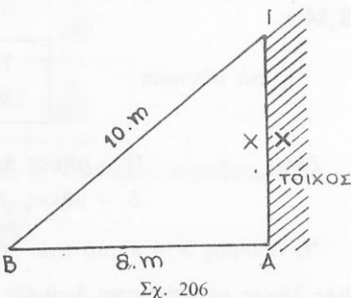
$$\text{εἶναι : } \chi^2 = 6^2 + 8^2$$

$$\text{ἢ } \chi^2 = 36 + 64$$

$$\text{ἢ } \chi^2 = 100$$

$$\text{ἢ } \chi = 10 \text{ cm.}$$

2ο Μία σκάλα μήκους 10 m στηρίζεται σ' ἓνα τοῖχο ἔτσι, πὺ ἡ βάση της ν' ἀπέχῃ ἀπ' τὴ βάση τοῦ τοίχου 8 m. Ὡς ποῖό ὕψος τοῦ τοίχου Β θά φθάνη ἡ σκάλα;



Σχ. 206

Σύμφωνα με τὸν τύπο $a^2 = b^2 + \gamma^2$, θά ἔχουμε :

$$\chi^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\text{ἢ } \chi^2 + 64 = 100 \iff \chi^2 = 100 - 64 = 36$$

$$\text{ἢ } \chi = 6 \text{ m.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

628) Ὀρθογωνίου τριγώνου οἱ κάθετες πλευρές ἔχουν μήκη 12 m και 16 m. Πόση εἶναι ἡ ὑποτείνουσα;

629) Σ' ἓνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μήκος 15 cm ἡ δὲ μία κάθετος πλευρά 12 cm. Πόσο εἶναι τὸ μήκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς;

630) Ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρά εἶναι 6 cm. Νά εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου κι' ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Υπενθυμίζουμε ὅτι τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ).

631) Νά εὑρεθῇ τὸ μήκος τῆς διαγωνίου ὀρθ. παραλληλογράμμου, πὺ ἔχει διαστάσεις 6 cm και 8 cm.

632) Οἱ διαγώνιοι ἐνὸς ρόμβου εἶναι 9 cm και 12 cm. Νά υπολογίσετε τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου.

§ 198. Μήκος περιφέρειας

Κατασκευάζουμε ξύλινους κυκλικούς δίσκους με διαμέτρους 1 dm, 2 dm, 3 dm και μετρούμε μ' ένα νήμα τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν. Εὐρίσκουμε κατὰ σειρά : 3,14 dm, 6,28 dm, 9,42 dm. Σχηματίζουμε τὸν λόγον τοῦ μήκους τῆς περιφέρειας πρὸς τὸ μήκος τῆς διαμέτρου τῆς σὲ κάθε περίπτωση.

$$\frac{3,14}{1}, \quad \frac{6,28}{2}, \quad \frac{9,42}{3}$$

Παρατηροῦμε ὅτι :

«Ὁ λόγος μιᾶς περιφέρειας πρὸς τὴ διάμετρό της εἶναι ἴσος μὲ 3,14».

ἢ πιὸ σύντομα

$$\frac{\Pi}{\delta} = 3,14 \quad (1)$$

ὅπου

Π = μῆκος περιφέρειας

δ = μῆκος διαμέτρου αὐτῆς.

Ὁ ἀριθμὸς 3,14 παριστάνει τὸν λόγον $\frac{\Pi}{\delta}$ μὲ προσέγγιση. Ὁ ἀκριβὴς λόγος παριστάνεται διεθνῶς μὲ τὸ Ἑλληνικὸ γράμμα π .

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε $\frac{\Pi}{\delta} = 3,14 \Leftrightarrow \Pi = 3,14 \cdot \delta$.

Ὡστε : Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος μιᾶς περιφέρειας πολ/ζουμε τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου μὲ 3,14.

Ἐφαρμογές

1) Πόσο εἶναι τὸ μῆκος περιφέρειας μὲ ἀκτῖνα 3 cm ;

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον $\Pi = 3,14 \cdot \delta$ ἔχουμε :

$$\Pi = 3,14 \cdot (2 \cdot 3) \text{ cm}$$

$$\text{ἢ} \quad \Pi = 18,84 \text{ cm.}$$

2ο) Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς διαμέτρου δ περιφέρειας μήκους 9,42 cm ;

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπον $\Pi = 3,14 \cdot \delta$ ἔχουμε :

$$9,42 = 3,14 \cdot \delta \Leftrightarrow \delta = 9,42 : 3,14$$

$$\text{ἢ} \quad \delta = 3 \text{ cm}$$

Υπολογισμός μήκους τόξου

Νά υπολογισθῇ τὸ μῆκος τόξου 30° περιφερείας ἀκτίνος 5 cm.

Ἄν σκεφθοῦμε ὅτι ὁλόκληρη ἡ περιφέρεια εἶναι τόξο 360° , ἔχουμε :

$$\text{Τὸ τόξ. } 360^\circ \text{ ἔχει μῆκος } 3,14 \cdot (2 \cdot 5) = \Pi$$

$$\begin{array}{ccccccc} \gg & \gg & 1^\circ & \gg & \gg & \frac{3,14 \cdot (2 \cdot 5)}{360} & = \frac{\Pi}{360} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \gg & \gg & 30^\circ & \gg & \gg & \frac{3,14 \cdot (2 \cdot 5) \cdot 30}{360} & = \frac{\Pi \cdot 30}{360} \end{array}$$

$$\text{Ὡστε :} \quad \text{Μῆκος τόξ. } 30^\circ = \Pi \cdot \frac{30}{360}$$

καὶ γενικά :

$$\text{Μῆκος τόξ. } \mu^\circ = \Pi \cdot \frac{\mu}{360}$$

«Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ μῆκος τόξου μ° πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος περιφερείας μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{360}$ »,

Ἐφαρμογές

1ο) Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τόξου 45° περιφερείας διαμέτρου 3cm ;

Ἄν καλέσουμε χ τὸν ἀριθμὸ, ποὺ παριστάνει τὸ μῆκος τοῦ τόξου, ἔχουμε:

$$\begin{aligned} \chi &= \Pi \cdot \frac{45}{360} \\ &= 3,14 \cdot 3 \cdot \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = \frac{9,42}{8}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = 1,175$$

Ὡστε τὸ μῆκος τοῦ τόξου εἶναι 1,175 cm.

2ο) Τὸ μῆκος τόξου 60° εἶναι 1,57 cm. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ;

$$\text{Ἔχουμε} \quad 1,57 = \Pi \cdot \frac{60}{360}$$

$$\text{ἢ} \quad 1,57 = \frac{\Pi \cdot 1}{6} = \frac{\Pi}{6}$$

$$\text{ὁπότε} \quad 1,57 = \frac{\Pi}{6} \Leftrightarrow \Pi = 6 \cdot 1,57$$

$$\text{ἢ} \quad \Pi = 9,42 \text{ cm}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 628) Να υπολογίσετε το μήκος περιφέρειας που έχει ακτίνα 2,40 cm.
 629) Να υπολογίσετε το μήκος ήμικυκλικής τροχού με ακτίνα 4 cm.
 630) Πόσο μεγαλώνει το μήκος της περιφέρειας, αν αυξήσουμε κατά 1 cm την ακτίνα αυτής ;
 631) Η περιφέρεια της βάσεως ενός ποτηριού είναι 12,56 cm. Πόση είναι η ακτίνα της βάσεως ;
 632) Όταν ο τροχός ενός ποδηλάτου κάνει 400 στροφές, το ποδήλατο προχωρεί 879,80 m. Πόση είναι η περιφέρεια και πόση η ακτίνα του τροχού ;
 633) Πόσο είναι το μήκος τόξου 25° σε περιφέρεια με ακτίνα 5 cm ;
 634) Πόση είναι η ακτίνα περιφέρειας, της οποίας ένα τόξον 45° έχει μήκος 1,57 cm ;

§ 199. Έμβασον κύκλου

1) Κανονικά πολύγωνα

Το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο, είναι πολύγωνα που έχουν :

- α) Όλες τις πλευρές τους ίσες.
 β) Όλες τις γωνίες τους ίσες.

Γενικά : "Όταν ένα πολύγωνο έχει όλες τις πλευρές κι' όλες τις γωνίες του ίσες, λέγεται κανονικό."

Κατασκευές κανον. πολυγώνων :

Γράφουμε μία περιφέρεια και τη χωρίζουμε σε ίσα τόξα. "Αν χαράξουμε τη χορδή καθενός από τα ίσα τόξα, θα έχουμε σχηματίσει κανονικό πολύγωνο (γιατί) :

Παραδείγματα

Στο σχήμα (α) έχουμε χωρίσει την περιφέρεια σε 4 ίσα τόξα με τη βοήθεια δύο καθέτων διαμέτρων, κι' έτσι έχουμε ένα κανονικό τετράπλευρο, το τετράγωνο.

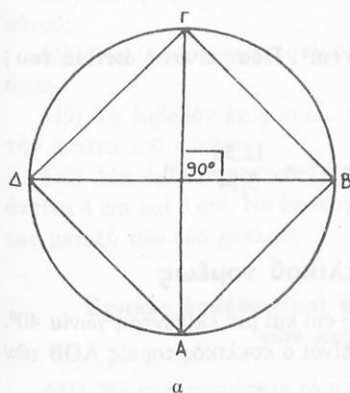
Στο σχήμα (β) έχουμε διχοτομήσει τα τόξα του σχήματος (α) κι' έτσι σχηματίσαμε ένα κανον. οκτάγωνο.

"Αν πάρουμε χορδές ίσες με την ακτίνα της περιφέρειας, θα προκύψει ένα κανονικό εξάγωνο.

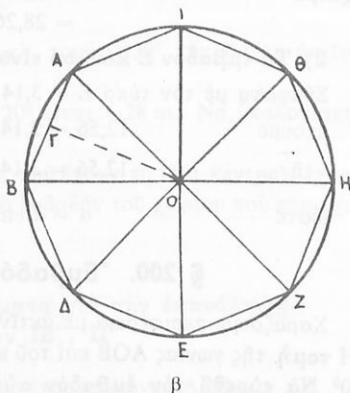
Τα πολύγωνα των σχημάτων α, β, επειδή έχουν τις κορυφές τους πάνω στην περιφέρεια, λέγονται **εγγεγραμμένα**.

2. Έμβαδόν κύκλου :

Χαράζουμε ένα κανονικό πολύγωνο ἐγγεγραμμένο στὸν κύκλο. Π.χ. ἓνα καν. ὀκτάγωνο, σχ. 207 β. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ὀκταγώνου αὐτοῦ,



Σχ. 207



βρίσκουμε πρώτα τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ καὶ τὸ πολλαπλασιάζουμε μὲ 8, γιατί τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρὲς μία μὲ μία ἴσες).

$$E_{OAB} = \frac{(AB) \cdot (OG)}{2}$$

$$E_{8/γώνου} = 8 \cdot \frac{(AB) \cdot (OG)}{2}$$

ἀλλὰ τὸ $8 \cdot (AB)$ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου

$$\text{Ἄρα : } E_{8/γώνου} = \text{μῆκ. περιμέτρου} \cdot \frac{(OG)}{2}$$

Ἄν οἱ πλευρὲς τοῦ πολυγώνου γίνουν 16, 32, 64 ..., τότε ἡ περίμετρος πλησιάζει νὰ γίνη ἴση μὲ τὴν περιφέρεια ἢ δὲ ΟΓ ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα. Ἀπ' αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι :

$$E_{\text{κύκλου}} = \text{μῆκ. περιφερείας} \cdot \frac{\text{μῆκ. ἀκτίνος}}{2}$$

$$\text{ἢ πιὸ σύντομα } E_{\text{κύκλου}} = 3,14 \cdot (2 \cdot \alpha) \cdot \frac{\alpha}{2} \quad (\alpha = \text{ἀκτίνα})$$

ἢ

$$E_{\text{κύκλου}} = 3,14 \cdot \alpha^2$$

«Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸν κύκλου πολ/ζουμε τὸ 3,14 μὲ τὸ τετράγωνο τῆς ἀκτίνος»

Εφαρμογές : 1) Νά υπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν κύκλου μὲ μῆκος ἀκτίνος $a = 3 \text{ cm}$.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο : $E = 3,14 \cdot a^2$

$$\begin{aligned} \text{ἔχουμε} \quad E &= 3,14 \cdot 9 \\ &= 28,26 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

2) Τὸ ἔμβαδὸν E κύκλου εἶναι $12,56 \text{ cm}^2$. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίνα του ;

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $E = 3,14 \cdot a^2$

$$\text{ἔχουμε} \quad 12,56 = 3,14 \cdot a^2$$

$$\text{ἢ} \quad 12,56 = 3,14 \cdot a^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{12,56}{3,14} = 4$$

$$\text{ὥστε} \quad a = 2 \text{ cm}$$

§ 200. Ἐμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως

Χαράζουμε περιφέρεια μὲ ἀκτίνα $a = 3 \text{ cm}$ καὶ μιὰ ἐπίκεντρη γωνία 40° . Ἡ τομὴ τῆς γωνίας AOB καὶ τοῦ κύκλου εἶναι ὁ κυκλικὸς τομεὺς AOB τῶν 40° . Νά εὐρεθῇ τὸν ἔμβαδὸν αὐτοῦ.

Ἄν σκεφθοῦμε ὅτι ὁ κύκλος εἶναι κυκλ. τομεὺς 360° , ἔχουμε :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Ὁ τομεὺς } 360^\circ & \text{ἔχει ἔμβαδὸν} & 3,14 \cdot 3^2 & & & & \\ & & & & 3,14 \cdot 3^2 & & \\ & \gg & \gg & 1^\circ & \gg & \gg & \frac{360}{360} \\ & & & & & & 3,14 \cdot 3^2 \cdot 40 \\ & \gg & \gg & 40^\circ & \gg & \gg & \frac{360}{360} \end{array}$$

Ὡστε : Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τομέως 40° εἶναι ἴσο μὲ

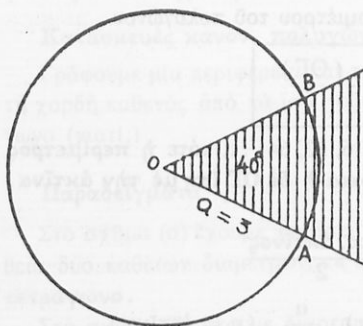
$$3,14 \cdot 3^2 \cdot \frac{40}{360}$$

Γενικά : Τὸ ἔμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως μ° σὲ περιφέρεια μὲ ἀκτίνα a εἶναι :

$$E_{\text{κυκλ. τομέως}} = 3,14 \cdot a^2 \cdot \frac{\mu^\circ}{360^\circ}$$

$$\text{ἢ ἐπειδὴ} \quad 3,14 \cdot a^2 = E_{\text{κύκλου}}$$

$E_{\text{κυκλ. τομέως}} = E_{\text{κύκλου}} \cdot \frac{\mu}{360}$



Σχ. 208

«Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἔμβαδὸν κυκλ. τομέως μ° πολ/ζουμε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου μὲ τὸ κλάσμα $\frac{\mu}{360}$ ».

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 635) Πόσο είναι το έμβαδόν κυκλ. δίσκου με ακτίνα 7 cm ;
 636) Πόσο είναι το έμβαδόν κύκλου με διάμετρο 0,04 m;
 637) Το έμβαδόν ενός κύκλου είναι 12,56 m². Πόση είναι ή διάμετρος αυτού;
 638) Να υπολογίσετε το έμβαδόν κυκλ. τομέως 30° κύκλου με ακτίνα 6 cm.
 639) Το έμβαδόν ενός κυκλ. τομέως 20° είναι 6,28 m. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.
 640) Δύο όμοκεντροι κύκλοι, (κύκλοι που έχουν το ίδιο κέντρο), έχουν ακτίνα 4 cm και 5 cm. Να υπολογίσετε το έμβαδόν του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των δύο κύκλων.

Γενικές ασκήσεις και προβλήματα για την επανάληψη των κεφαλαίων IB', II'

- 641) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ενός τριγώνου ABΓ :
 α) ως προς ένα σημείο O του επιπέδου του
 β) ως προς μίαν ευθεία χψ του επιπέδου του.
 642) Να κατασκευάσετε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (με βάση ΒΓ) και να προεκτείνετε τις πλευρές AB και ΑΓ κατά τμήματα BB' = ΓΓ'. Τι είδος τριγώνου είναι το AB'Γ';
 643) Να χαράξετε μιὰ γωνία xOψ και τη διχοτόμο της OZ. Έπειτα να φέρετε κάθετο προς τη διχοτόμο OZ. Τι είδος τριγώνου σχηματίζεται;
 644) Στις πλευρές AB και ΑΓ ισοπλεύρου τριγ. ABΓ πάρτε τμήματα AD = AE (προς το αυτό μέρος). Τι είδος τριγώνου είναι το ADE;
 645) Δύο ίσα τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' έχουν $\sphericalangle B \cong \sphericalangle B'$ και BΓ = A'B'. Να εύρετε τὰ ἄλλα ἴσα στοιχεῖα τῶν τριγώνων.
 646) Να χαράξετε μιὰ περιφέρεια O και δύο ἴσες χορδές AB και ΓΔ. Να συγκρίνετε τὰ τρίγωνα OAB και OΓΔ.
 647) Σε μιὰ περιφέρεια O χαράζουμε δύο ακτίνες OA, OB και τη διχοτόμο της $\sphericalangle AOB$, την OΓ. Να συγκρίνετε τὰ τρίγωνα OΑΓ και OΓB.
 648) Με κέντρο την κορυφή O γωνίας xOψ να γράψετε δύο όμοκεντρες περιφέρειες (O, ρ) και (O, ρ'). Αν $\widehat{BG}$ και $\widehat{DE}$ είναι τὰ μεταξύ τῶν Oχ και Oψ τόξα τῶν (O, ρ) και (O, ρ'), να συγκρίνετε τὰ τρίγωνα OBE και OΓΔ.
 649) Δύο ἴσες περιφέρειες O και O' τέμνονται στὰ σημεῖα A και B. Να συγκρίνετε τὰ τρίγωνα OAB και O'AB.
 650) Στὰ ἄκρα τοῦ εὐθ. τμήματος AB ὑψώστε δύο ἴσα τμήματα κάθετα πρὸς τὸ AB, τὸ ἓνα ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος τοῦ AB καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὸ ἄλλο

μέρος. Τὸ εὐθ. τμήμα ποὺ ἐνώνει τὰ ἄκρα τῶν καθέτων εὐθυγρ. τμημάτων τέμνει τὸ AB στὸ σημεῖο M . Νὰ ἐξετάσετε ἂν τοῦτο εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ σχήματος.

651) Σ' ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγ. $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) νὰ φέρετε τὰ ὕψη πρὸς τὶς AB καὶ $A\Gamma$ καὶ νὰ τὰ συγκρίνετε.

652) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ ἔχουν τετράγωνο μονοψήφιο ἀριθμὸ;

653) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ ἔχουν τετραγ. ρίζα μονοψήφιο ἀριθμὸ;

654) Ποιὸς εἶναι ὁ ἀκέραιος ποὺ ἔχει τετράγωνο τὸ 441;

655) Ποιὸς εἶναι ὁ ἀκέραιος ποὺ ἔχει τετράγωνο μεγαλύτερο τοῦ 250 κατὰ 6 ἀκ. μονάδες;

655) Τί θὰ πάθῃ τὸ τετράγωνο ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἂν διπλασιάσουμε τὸν ἀριθμὸ;

656) Τί θὰ πάθῃ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἂν διαιρέσουμε τὸν ἀριθμὸ διὰ 10.000;

657) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν ποὺ ἔχουν τετράγωνο τὸν ἴδιον ἐαυτὸ τους;

658) Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς ποὺ πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ 580 γιὰ νὰ μεῖνῃ τέλειο τετράγωνο;

659) Ποιό εἶναι τὸ πλάτος ὀρθογωνίου ποὺ ἔχει μῆκος 75 m καὶ εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τετράγωνο ποὺ ἔχει περίμετρο 180 m;

660) Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 10 στρέμματα;

661) Ἐνα τραπέζιο ἔχει βάση $AB = 6$ cm, ὕψος $DE = 8$ cm καὶ ἐμβαδὸν 64 cm². Πόση εἶναι ἡ ἄλλῃ βάση;

662) Τραπεζίου οἱ βάσεις εἶναι 5 cm, 9 cm καὶ τὸ ἐμβαδὸν 28 cm². Πόσο εἶναι τὸ ὕψος;

663) Τριγώνου ἡ βάση εἶναι 6 cm καὶ τὸ ἐμβαδὸν 15 cm². Πόσο εἶναι τὸ ὕψος;

664) Τριγώνου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 48 cm² καὶ ἡ βάση 0,4 cm. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος;

665) Ἐνα τρίγωνο ἔχει βάση 7 cm καὶ εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴ βάση τῶν 7 cm;

666) Ἐνα τετράγωνο μὲ περίμετρο 36 cm εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ὀρθογώνιο ποὺ ἔχει βάση 8 cm. Πόσο εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου;

667) Ἐνα τετράγωνο μὲ περίμετρο 36 cm εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ρόμβο, τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος εἶναι 8 cm. Πόση εἶναι ἡ ἄλλῃ διαγώνιος τοῦ ρόμβου;

668) Ἐνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ του.

669) Ένα τετράγωνο έχει διαγώνιο ίση με $\sqrt{2}$ cm. Πόση είναι η πλευρά του;

670) Ένα οικόπεδο 2 στρεμμάτων αξίζει 100.000 δρχ. Πόσο αξίζει ένα ορθογώνιο τμήμα του με διαστάσεις 8 m και 12 m;

671) Πόσο είναι το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά 4 cm;

672) Πόσο είναι το έμβαδόν ισοπλεύρου τριγώνου με πλευρά 6 cm;

673) Να υπολογίσετε την ακτίνα περιφέρειας στην οποία τόξο 36° έχει μήκος 1,256 m.

674) Να υπολογίσετε την ακτίνα περιφέρειας στην οποία κυκλ. τομέυς 45° έχει έμβαδόν 39,25 m².

675) Πόσο μεγαλώνει το μήκος μιās περιφέρειας αν μεγαλώση η ακτίνα της κατά 2 cm;

676) Πόσο μεγαλώνει το έμβαδόν κύκλου αν μεγαλώση η ακτίνα κατά 2 cm;

677) Ένα κυκλικό τραπέζι έχει διάμετρο 1,50 m. Πόσο ύφασμα χρειάζεται για να καλύψουμε την επιφάνειά του;

678) Ο τροχός ενός ποδηλάτου έχει ακτίνα 30 cm. Πόση απόσταση θα διανύση το ποδηλάτο, όταν ο τροχός κάνει 120 στροφές;

679) Σε μιὰ περιφέρεια με ακτίνα 4 cm χαράζουμε χορδή ίση με την ακτίνα. Να υπολογίσετε το έμβαδόν του μικροτέρου τμήματος στα όποια χωρίζεται ο κύκλος από τη χορδή.

680) Σε μιὰ περιφέρεια με κέντρο O και ακτίνα OA = 4 cm γράφουμε μιὰ άλλη περιφέρεια O' με διάμετρο την OA. Να εύρεθῇ το έμβαδόν της μεταξύ των δύο περιφερειών επιφανείας.

Π ε ρ ί λ η ψ η

Ίσοδύναμες επιφάνειες.

Έμβαδόν ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

» τετραγώνου.

Τετραγωνική ρίζα.

Έμβαδόν παραλληλογράμμου.

» τριγώνου.

» ρόμβου.

» τραπέζιου.

Πυθαγόρεια Θεώρημα.

Μήκος περιφέρειας (τόξου).

Έμβαδόν κύκλου (κυκλ. τομέως).

Άσκησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΔ'

§ 201. Λόγοι

201.1 Σύγκριση δύο αριθμών. Λόγος δύο αριθμών.

“Αν σᾶς ζητήσουν νὰ συγκρίνετε δύο ἀριθμούς, π.χ. τὸ 6 καὶ τὸ 2, θὰ ἀπαντήσετε ὅτι :

«τὸ 6 εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 2 κατὰ 4» ἢ ὅτι «τὸ 6 εἶναι 3 φορές μεγαλύτερο τοῦ 2». Στὴν α' περίπτωση γιὰ νὰ συγκρίνετε τοὺς δυὸ ἀριθμούς χρησιμοποιεῖτε τὴ **διαφορά τους** $6 - 2 = 4$. Στὴ β' περίπτωση χρησιμοποιεῖτε τὸ **πηλίκιο τους** (διαίρεση μετρήσεως) $6 : 2 = 3$.

Ἡ ἀπάντηση : τὸ 6 εἶναι 3 φορές μεγαλύτερο τοῦ 2, διατυπώνεται κι' ἔτσι : **Ὁ λόγος τοῦ 6 πρὸς τὸ 2 εἶναι 3.**

“Ὅστε : **λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ α πρὸς ἕναν ἀριθμὸ β, ($\beta \neq 0$), λέγεται τὸ ἀκριβὲς πηλίκιο τῆς διαιρέσεως $\alpha : \beta$.**

Στὸ παράδειγμά μας ὁ λόγος τοῦ 6 πρὸς τὸ 2 εἶναι ὁ ἀκέραιος 3. Συχνὰ ὅμως ὁ λόγος (τὸ πηλίκιο) δύο ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀκέραιος, π.χ. ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὸ 3 εἶναι $\frac{2}{3}$ καὶ γενικὰ ὁ λόγος α πρὸς β εἶναι $\frac{\alpha}{\beta}$.

Παρατήρηση. Ὁ λόγος τοῦ 2 πρὸς τὸ 3 εἶναι $\frac{2}{3}$ ἐνῶ ὁ λόγος τοῦ 3 πρὸς τὸ 2 εἶναι $\frac{3}{2}$. Μ' ἄλλα λόγια οἱ δυὸ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων ζητοῦμε τὸ λόγο, ἀποτελοῦν διατεταγμένο ζεῦγος καὶ γι' αὐτὸ πρέπει νὰ προσέχουμε τὴ σειρά τους.

201.2 Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν

“Αν θέλουμε νὰ συγκρίνουμε 2 ὁμοειδῇ μεγέθη π.χ. τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ ΓΔ

A ————— B

Γ ————— Δ

μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ 2 τρόπους.

α' τρόπος : Μὲ ἐπίθεση ἢ μὲ τὸ διαβήτη ἐξακριβώνουμε ὅτι τὸ AB χωρεῖ 2 φορές στὸ ΓΔ. Μ' ἄλλα λόγια τὸ ΓΔ εἶναι $2/\pi$ λάσιο τοῦ AB.

Τὸν ἀριθμὸ 2, πὺ μᾶς δείχνει πόσες φορές χωρεῖ τὸ AB στὸ ΓΔ, τὸν ὀνομάζουμε λόγο τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ AB

$$\frac{\Gamma\Delta}{AB} = 2$$

καὶ γενικά: λόγος ἑνὸς μεγέθους πρὸς ἓνα ἄλλο ὁμοειδὲς εἶναι ὁ ἀριθμὸς πὺ εὐρίσκουμε, ὅταν μετρήσουμε τὸ πρῶτο μὲ μονάδα τὸ δεῦτερο.

β' τρόπος: Εὐρίσκουμε τὰ μήκη τῶν AB καὶ ΓΔ:

π.χ. μήκος AB = 10 cm ἢ (AB) = 10 cm

μήκος ΓΔ = 20 cm ἢ (ΓΔ) = 20 cm

Ὁ λόγος τοῦ ἀριθμοῦ 20 πρὸς τὸν ἀριθμὸ 10 εἶναι $\frac{20}{10} = 2$

Παρατηροῦμε ὅτι καὶ μὲ τοὺς 2 τρόπους καταλήγουμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα.

«Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν πὺ μετροῦν, (μὲ τίς ἴδιες μονάδες), τὰ μεγέθη αὐτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

681) Ἐνας ἀριθμὸς α εἶναι 7 φορές μεγαλύτερος ἀπὸ ἓναν ἄλλο ἀριθμὸ β. Νὰ βρῆτε: 1) τὸ λόγο τοῦ α πρὸς τὸ β. 2) τὸ λόγο τοῦ β πρὸς τὸ α.

682) Σὲ μιὰ τάξη φοιτοῦν 30 ἀγόρια καὶ 20 κορίτσια. Ποιὸς εἶναι ὁ λόγος: α) τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀγοριῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν κοριτσιῶν, β) τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κοριτσιῶν πρὸς τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀγοριῶν;

683) Νὰ βρῆτε τὸ λόγο μιᾶς ὀρθῆς γωνίας πρὸς μίαν ἀποπλατυσμένη.

684) Ἐνα πλοῖο α τρέχει μὲ ταχύτητα 12 μιλ. τὴν ὥρα, ἓνα ἄλλο πλοῖο β τρέχει μὲ ταχύτητα 15 μιλ. τὴν ὥρα. Νὰ βρῆτε τὸ λόγο τῆς ταχύτητος τοῦ α' πλοίου πρὸς τὴν ταχύτητα τοῦ β' πλοίου.

685) Τὸ ταξίδι ἀπὸ τὴν Ἀθήνα ὡς τὸ Παρίσι διαρκεῖ 5 ὥρες μὲ τὸ ἀεροπλάνο καὶ 55 ὥρες μὲ τὸ τραῖνο. Νὰ συγκρίνετε τοὺς χρόνους τοῦ ταξιδιοῦ α) μὲ τὸ λόγο, β) μὲ τὴ διαφορά.

686) Ὁ λόγος δύο ἀριθμῶν εἶναι 6. Ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 42. Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος;

§ 202. Ἀναλογία

Ἀν προσέξουμε τοὺς λόγους $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{5}{10}$ διακρίνουμε ὅτι παριστάνουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ.

Ἔχουμε δηλαδὴ $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$

Ἡ **ισότης δύο λόγων ονομάζεται αναλογία.**

Ἔτσι οἱ ισότητες $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$, $\frac{3}{8} = \frac{15}{40}$

παριστάνουν αναλογίες.

Όνομασίες: Στὴν αναλογία $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ οἱ ἀριθμοὶ 1, 2, 5, 10, λέγονται **ὄροι τῆς αναλογίας**. Εἰδικὰ οἱ ὄροι 1, 10 λέγονται **ἄκροι ὄροι** ἐνῶ οἱ ὄροι 2, 5 λέγονται **μέσσοι ὄροι**.

Χαρακτηριστικὴ ιδιότης τῶν αναλογιῶν

Στὸν ἐπόμενο πίνακα ἔχουμε 4 αναλογίες καὶ ἔχουμε βρεῖ :

α) τὰ γινόμενα τῶν ἄκρων ὄρων

β) Τὰ γινόμενα τῶν μέσων ὄρων.

Ἀναλογίες	Γινόμενο ἄκρων ὄρων	Γινόμενο μέσων ὄρων
$\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$	$1 \cdot 10 = 10$	$2 \cdot 5 = 10$
$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$	$2 \cdot 9 = 18$	$3 \cdot 6 = 18$
$\frac{3}{5} = \frac{15}{25}$	$3 \cdot 25 = 75$	$5 \cdot 15 = 75$
$\frac{4}{7} = \frac{12}{21}$	$4 \cdot 21 = 84$	$7 \cdot 12 = 84$

Εὐκόλα παρατηροῦμε ὅτι :

Σὲ κάθε αναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὄρων εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων ὄρων.

$$\boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \implies \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \quad (\beta, \delta, \neq 0)} \quad (1)$$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν πολ/σουμε τὰ δύο μέλη τῆς ισότητος $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ μὲ τὸ γινόμενο $\beta \cdot \delta$.

Ἀντίστροφα : ἄς διαλέξουμε 4 ἀριθμούς 3, 4, 6, 8 τέτοιους, ὥστε τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄκρων 3·8 νὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων 4·6. Ἄν τοὺς πάρουμε μὲ τὴ σειρά, σχηματίζουμε τὴν ἀναλογία :

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Τὴν ἀναλογία αὐτὴ τὴν εὐρίσκουμε ἀπὸ τὴν ἰσότητα $3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$, ἂν διαιρέσουμε τὰ 2 μέλη τῆς μὲ τὸ γινόμενο 8·4

$$\frac{3 \cdot 8}{8 \cdot 4} = \frac{4 \cdot 6}{8 \cdot 4}$$

$$\eta \quad \frac{3}{4} = \frac{6}{8}$$

Γενικά : Ἄν γιὰ 4 ἀριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ἰσχύη ἡ σχέση :

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

τότε θὰ ἰσχύη καὶ ἡ ἀναλογία

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

ἢ συμβολικά :

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \implies \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad \beta, \delta, \neq 0 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὶς συνεπαγωγές (1) καὶ (2) ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \iff \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \quad (3)$$

Σημείωση : Ἡ ἰσοδυναμία αὐτὴ μᾶς εἶναι γνωστὴ ὡς ιδιότης τῶν ἴσων κλασμάτων.

Ἐφαρμογές : Μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἰσοδυναμίας (3) μποροῦμε νὰ βροῦμε ἓναν ὅρο τῆς ἀναλογίας ποὺ μᾶς εἶναι ἄγνωστος.

Παραδείγματα 1) Νὰ ὑπολογίσουμε τὸν ἄγνωστο ὅρο τῆς ἀναλογίας.

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{\chi}$$

$$\epsilonἶναι : \quad 1) \quad \frac{3}{5} = \frac{12}{\chi} \iff 3 \cdot \chi = 12 \cdot 5$$

$$2) \quad 3 \cdot \chi = 12 \cdot 5 \iff \chi = \frac{12 \cdot 5}{3}$$

$$\eta \quad \chi = 4 \cdot 5 = 20$$

Ἐπαλήθευση :

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{20} \quad 3 \cdot 20 = 60$$

$$5 \cdot 12 = 60$$

2) Να υπολογίσουμε τον άγνωστο όρο της αναλογίας

$$\frac{5}{\chi} = \frac{3}{15}$$

είναι : $\frac{5}{\chi} = \frac{3}{15} \Leftrightarrow 3 \cdot \chi = 5 \cdot 15$

ή $3 \cdot \chi = 5 \cdot 15 \Leftrightarrow \chi = \frac{5 \cdot 15}{3}$

ή $\chi = 5 \cdot 5 = 25$

Έπαλήθευση :

$$\frac{5}{25} = \frac{3}{15}$$

$$5 \cdot 15 = 75$$

$$2 \cdot 53 = 75$$

§ 203. Ειδική περίπτωση :

Ζητάμε έναν αριθμό χ που να έχη λόγο πρὸς τὸ 4 ἴσο μετὸν τὸν λόγο τοῦ 16 πρὸς τὸ χ .

Σύμφωνα με τὸ πρόβλημα ἔχουμε :

$$\frac{\chi}{4} = \frac{16}{\chi}$$

ή $\frac{\chi}{4} = \frac{16}{\chi} \Leftrightarrow \chi^2 = 4 \cdot 16$

ή $\chi^2 = 64 \Leftrightarrow \chi = 8$

Ὁ ἀριθμὸς χ λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 16.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

687) Να υπολογίσετε τὸν ἄγνωστο ὅρο τῶν ἀναλογιῶν :

α) $\frac{2}{7} = \frac{\chi}{35}$

β) $\frac{\chi}{6} = \frac{7}{42}$

γ) $\frac{4}{\chi} = \frac{36}{144}$

δ) $\frac{3 \frac{1}{2}}{5} = \frac{\chi}{2}$

ε) $\frac{803}{5} = \frac{\chi}{0,2}$

688) Να ἐξετάσετε ἂν τὰ τετράγωνα τῶν ὄρων μιᾶς ἀναλογίας ἀποτελοῦν ἀναλογία.

689) Να εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 9.

690) Ποιᾶς ἀναλογίης μπορεῖτε νὰ σχηματίσετε μετὰ ὁρὸν τοῦς ἀριθμοὺς :

5, 12, 10, 24.

§ 204. Ποσὰ συμμεταβλητὰ

Στὸν πίνακα α φαίνονται διάφορα βάρη (τιμὲς βάρους) κρέατος σὲ κιλά καὶ ἡ ἀξία κάθε βάρους σὲ δραχμὲς.

(α)	Βάρος (σὲ κιλά)	1	2	3	4	5	6
	Ἀξία (σὲ δραχμὲς)	40	80	120	160	200	240

Στὸν πίνακα (β) φαίνονται οἱ ἀριθμοὶ ἐργατῶν ποὺμποροῦν νὰ χρησιμοποιηθοῦν γιὰ τὴν ἐκτέλεση ἑνὸς ἔργου καὶ ὁ χρόνος σὲ ἡμέρες, ποὺ χρειάζονται οἱ ἐργάτες γιὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ ἔργο :

(β)	Ἐργάτες (ἀριθμὸς ἐργατῶν)	1	2	3	4	5	6
	Χρόνος (σὲ ἡμέρες)	60	30	20	15	12	10

Στὸν πίνακα (γ) φαίνονται διάφορες ἡλικίες ἑνὸς νέου καὶ τὸ ἀνάστημα σὲ κάθε ἡλικία :

(γ)	Ἡλικία (σὲ ἔτη)	1	2	3	...	12
	Ἀνάστημα (σὲ m)	0,60	0,70	0,78	...	1,40

Παρατηροῦμε ὅτι :

Καὶ στὰ τρία ζεύγη ποσῶν ὑπάρχει ἓνα κοινὸ χαρακτηριστικὸ :

Ὅτι : σὲ κάθε τιμὴ τοῦ καθενὸς ποσοῦ π.χ. τοῦ βάρους, ἀντιστοιχεῖ μία τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ καὶ μάλιστα ὅταν ἀλλάξῃ ἡ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἀλλάζει καὶ ἡ ἀξία του.

Γι' αὐτὸ λέγομε ὅτι τὰ ποσά : (Βάρος - Ἀξία, Ἀριθμὸς ἐργατῶν - χρόνος, ἡλικία - ἀνάστημα) εἶναι ποσὰ συμμεταβλητά.

§ 205. Κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ

Ἄς προσέξουμε καλῶτερα πῶς μεταβάλλονται τὰ ποσὰ Βάρος - Ἀξία.

Παρατηροῦμε ὅτι σὲ διπλάσιο, 3/πλάσιο, 4/πλάσιο βάρος ἀντιστοιχεῖ 2/πλασία, 3/πλασία, 4/πλασία ἀξία.

«Ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἔτσι, ὥστε ἂν 2/πλασιασθῇ, 3/πλασιασθῇ, 4/πλασιασθῇ... μιὰ τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ νὰ διπλασιάζεται, 3/πλασιάζεται, 4/πλασιάζεται... καὶ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ, τότε τὰ ποσὰ λέγονται κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Παραδείγματα : Τὰ ποσὰ

α) πλευρὰ τετραγώνου καὶ ἡ περίμετρος αὐτοῦ

β) ἡ ταχύτης καὶ τὸ διάστημα (στὸν ἴδιο χρόνο)

γ) ἡ ἀμοιβή καὶ ὁ χρόνος ἐργασίας εἶναι **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσά**.

§ 206. Ἰδιότητες τῶν κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν

Ἄς πάρουμε τὸ λόγο δύο τιμῶν τοῦ βάρους στὸν α' πίνακα, π.χ. $\frac{1}{3}$, κ' ὡς

τὸν συγκρίνουμε μὲ τὸν λόγο τῶν ἀξιῶν τῶν $\frac{40}{120}$

Παρατηροῦμε ὅτι :

$$\frac{1}{3} = \frac{40}{120}$$

Ὡστε : **Σὲ δύο κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.**

Παραδειγμα : στὸν πίνακα α'

διακρίνουμε ὅτι :

$$\frac{2}{5} = \frac{80}{200}$$

$$\frac{3}{5} = \frac{120}{200}$$

κ.λ.π.

§ 207. Ἀντίστροφα ποσὰ

Ἄς προσέξουμε τώρα στὸν πίνακα (β).

Παρατηροῦμε ὅτι :

Ὅταν ὁ ἀριθμὸς ἐργατῶν (π.χ. τὸ 2) διπλασιασθῇ ἢ 3/πλασιασθῇ ἢ 4/πλασιασθῇ... τότε ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ χρόνου, (τὸ 30), διαιρεῖται διὰ 2, 3, 4...

Γενικά : Ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἔτσι, ὥστε

ἂν πολ/σθῇ μιὰ τιμὴ τοῦ ἑνὸς μ' ἓνα ἀριθμὸ (≠ 0) νὰ διαιρεθῇ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ, τότε τὰ ποσὰ λέγονται ἀντίστροφα.

Παραδείγματα ἀντιστρόφων ποσῶν :

1) Ὁ χρόνος ποὺ χρειάζεται ἓνα κινητὸ γιὰ νὰ διατρέξῃ μιὰ ἀπόσταση καὶ ἡ ταχύτητα αὐτοῦ.

2) Τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος ἑνὸς ὑφάσματος ποὺ χρειάζεται γιὰ τὴ κατασκευὴ μιᾶς ἐνδυμασίας.

§ 208. Ἰδιότης ἀντιστρόφων ποσῶν

Ἄς πάρουμε τὸ λόγο δύο τιμῶν τοῦ πλῆθους τῶν ἐργατῶν στὸν πίνακα β'. π.χ. τὸ $\frac{2}{4}$, καὶ τὸ λόγο τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ χρόνου, $\frac{30}{15}$

Οἱ λόγοι δὲν εἶναι ἴσοι

$$\frac{2}{4} \neq \frac{30}{15}$$

Ἄν ὅμως ἀντιστρέψουμε τὸν ἓνα λόγο, θὰ ἔχουμε

$$\frac{2}{4} = \frac{15}{30}$$

Ὡστε : Σὲ δύο ἀντίστροφα ποσὰ ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἐνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἀντίστροφο τοῦ λόγου τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Παρατήρηση. Ἄν προσέξουμε στὸν πίνακα (γ) δύο τιμές τοῦ ἐνὸς ποσοῦ καὶ τὶς ἀντίστοιχες τιμές τοῦ ἄλλου ποσοῦ, παρατηροῦμε ὅτι οἱ μεταβολές δὲν ἀκολουθοῦν τοὺς κανόνες ποὺ ἀναφέραμε. Δηλαδή τὰ ποσὰ ἡλικία καὶ χρόνος εἶναι συμμεταβλητὰ χωρὶς νὰ εἶναι οὔτε κατ' εὐθείαν ἀνάλογα οὔτε ἀντίστροφα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

691) Νὰ ἀναφέρετε παραδείγματα ποσῶν :

α) Κατ' εὐθείαν ἀναλόγων

β) Ἀντιστρόφων

γ) Συμμεταβλητῶν, ποὺ δὲν εἶναι οὔτε κατ' εὐθείαν ἀνάλογα οὔτε ἀντίστροφα.

692) Νὰ δώσετε διάφορες τιμές σὲ δύο κατ' εὐθείαν ἀνάλογα ποσὰ καὶ ἔπειτα νὰ σχηματίσετε ἀναλογίες μὲ τὶς τιμές τῶν δύο ποσῶν.

693) Νὰ ἐπαναλάβετε τὴν προηγούμενη ἄσκηση καὶ στὴν περίπτωση δύο ἀντιστρόφων ποσῶν.

694) Τὸ ὕψος ἐνὸς δένδρου καὶ ἡ ἡλικία του τί ποσὰ εἶναι;

695) Ἀπὸ τὸν πίνακα :

A	2	4	6
B	5	10	15

Νὰ ἐξακριβώσετε ἂν τὰ ποσὰ A, B εἶναι :

1) συμμεταβλητὰ

2) κατ' εὐθείαν ἀνάλογα

3) ἀντίστροφα.

§ 209. 'Επίλυση προβλημάτων με κατ' εὐθείαν ανάλογα ἢ ἀντίστροφα ποσὰ

(Μέθοδος τῶν τριῶν)

Πρόβλημα 1ο: "Ένας υπάλληλος για 6 ὥρες ἐργασίας παίρνει 108 δρχ. Πόσες δρχ. θὰ πάρη για 11 ὥρες ἐργασίας ;

'Επίλυση : 'Εδῶ ἔχουμε δύο ποσὰ ἀνάλογα :

α) τις ὥρες ἐργασίας

β) τὴν ἀμοιβή. "Αρα θὰ ἔχουμε :

$$\frac{6}{11} = \frac{108}{\chi} \quad \text{ὅπου } \chi \text{ δρχ. ἡ ἀμοιβὴ τῶν 11 ὥρῶν}$$

$$\eta \quad \frac{6}{11} = \frac{108}{\chi} \quad \Leftrightarrow 6 \cdot \chi = 11 \cdot 108$$

$$\eta \quad \chi \Leftrightarrow \frac{11 \cdot 108}{6}$$

$$\eta \quad \chi = 198$$

"Ωστε θὰ πάρη 198 δρχ.

Πρόβλημα 2ο

"Ένα πλοῖο σὲ 3 ὥρες διέτρεξε 42 μίλια. Για νὰ διατρέξῃ μιὰ ἀπόσταση 154 μιλίων πόσες ὥρες θὰ χρειασθῇ ;

Τὰ ποσὰ : χρόνος καὶ ἀπόσταση εἶναι φανερό ὅτι εἶναι κατ' εὐθείαν ἀνάλογα, ἄρα :

$$\frac{42}{154} = \frac{3}{\chi} \quad \text{ὅπου } \chi \text{ εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ὥρῶν ποὺ χρειάζεται}$$

$$\text{εἶναι : } \frac{42}{154} = \frac{3}{\chi} \quad \Leftrightarrow \chi \cdot 42 = 3 \cdot 154$$

$$\Leftrightarrow \chi = \frac{3 \cdot 154}{42}$$

$$\Leftrightarrow \chi = 11.$$

"Ωστε τὸ πλοῖο θὰ χρειασθῇ 11 ὥρες.

Πρόβλημα 3ο. Τρεῖς ἐργάτες χρειάζονται 8 ἡμέρες για μιὰ κατασκευή. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν για νὰ ἐκτελέσουν τὴν ἴδια κατασκευὴ σὲ 6 ἡμέρες ;

Τὰ ποσὰ χρόνος καὶ ἐργάτες εἶναι ἀντίστροφα (γιατί;) :

“Αν καλέσουμε χ τὸ ζητούμενο ἀριθμὸ τῶν ἐργατῶν, θὰ ἔχουμε :

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{\chi} \Leftrightarrow 6 \cdot \chi = 8 \cdot 3$$

$$\text{ἢ} \quad 6 \cdot \chi = 8 \cdot 3 \Leftrightarrow \chi = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$$

“Ὡστε χρειάζονται 4 ἐργάτες.

4ο πρόβλημα

“Αν τὸ λεωφορεῖο τρέχει μὲ ταχύτητα 60 χιλ/ώρα, ἕνα ταξίδι διαρκεῖ 4 ὥρες. “Αν τὸ λεωφορεῖο τρέχει μὲ 80 χιλ/ώρα πόσες ὥρες θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὸ ἴδιο ταξίδι;

Τὰ ποσά : ταχύτης καὶ χρόνος ταξιδιοῦ εἶναι ἀντίστροφα (γιατί;)

“Αν παραστήσουμε μὲ χ τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ τῶν ὥρων, θὰ ἔχουμε :

$$\frac{60}{80} = \frac{\chi}{4} \Leftrightarrow 80 \cdot \chi = 4 \cdot 60$$

$$\text{ἢ} \quad 80 \cdot \chi = 4 \cdot 60 \Leftrightarrow \chi = \frac{4 \cdot 60}{80}$$

$$\text{ἢ} \quad \Leftrightarrow \chi = 3$$

“Ὡστε θὰ χρειασθοῦν 3 ὥρες.

Παρατήρηση :

Στὰ παραπάνω προβλήματα εἴχαμε δύο ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα. Τὸ πρόβλημα μᾶς ἔδινε **δύο τιμές ἀπὸ τὸ ἕνα ποσὸ καὶ μία ἀντίστοιχη τιμὴ ἀπ' τὸ ἄλλο ποσὸ** Μᾶς ζητοῦσε δὲ νὰ βροῦμε τὴν **ἄλλη ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ἄλλου ποσοῦ**.

Ἐπειδὴ αὐτὰ τὰ προβλήματα μᾶς δίδουν τρεῖς τιμές καὶ μᾶς ζητοῦν τὴν τετάρτη, λέγονται προβλήματα τῆς **ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν**.

Ὁ τρόπος αὐτὸς ἐπιλύσεως τῶν προβλημάτων, τῆς ἀπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν, μᾶς ὁδηγεῖ στὸ γνωστὸ σας κανόνα τῆς ἐπιλύσεως των καὶ μᾶς τὸν δικαιολογεῖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

696) Οἱ 100^ο Κελσίου ἀντιστοιχοῦν σὲ 80^ο Ρεωμύρου. α) Μὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν :

$$\alpha) 40^{\circ} \text{ K} \quad \beta) 160^{\circ} \text{ K}$$

β) Μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου ἀντιστοιχοῦν :

$$\alpha) 20^{\circ} \text{ P} \quad \beta) 150^{\circ} \text{ P}$$

697) Γιὰ τὴν καλλιέργεια ἑνὸς ἀγροῦ χρειάζονται 12 ἡμέρες ἐργασίας 30 ἐργατῶν.

“Αν θέλουμε νὰ καλλιεργηθῇ ὁ ἀγρὸς σὲ 8 ἡμέρες, πόσους ἐργάτες πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουμε;

698) "Αν ξοδεύουμε 150 δρχ. την ημέρα, τὰ χρήματά μας φθάνουν γιὰ 30 ἡμέρες. Πόσες δρχ. πρέπει νὰ ξοδεύουμε τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ φθάσουν τὰ χρήματά μας γιὰ 45 ἡμέρες;

699) "Ενα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο ἔχει μῆκος 30,5 m καὶ πλάτος 12 m. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος ἄλλου ἰσεμβαδικοῦ ὀρθογωνίου οἰκοπέδου ποὺ ἔχει μῆκος 15,25 m;

700) Φρουρά ἀπὸ 800 στρατιῶτες ἔχει τροφὲς γιὰ 3 μῆνες. Πόσους στρατιῶτες ἔπρεπε νὰ ἔχη ἡ φρουρά γιὰ νὰ περάσῃ 5 μῆνες;

701) "Ενας φιλόνηθρωπος μοίρασε σὲ 35 πρόσωπα ἀπὸ 360 δρχ. στὸ καθένα. Πόσα θὰ ἔδινε στὸ καθένα, ἂν μοίραζε τὰ ἴδια χρήματα σὲ 28 πρόσωπα;

702) Τὰ 100 κιλά ἀλεύρι ἀποδίδουν 130 κιλά ψωμί. Πόσα κιλά ἀλεύρι θὰ χρειασθῇ 3 ἡμέρες ἓνας ἄρτοποιός, ποὺ πουλάει 91 κιλά ψωμί τὴν ἡμέρα;

703) "Ενα πλοῖο ξοδεύει $\frac{2}{5}$ τοῦ τόννου πετρέλαιο κάθε 6 ὥρες ταξιδιοῦ.

Πόσους τόννους πετρελαίου θὰ χρειασθῇ γιὰ ταξίδι 80 ὥρων;

704) 6 ἐργάτες καλλιεργοῦν ἓνα κτῆμα σὲ 8 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ καλλιεργήσουν τὸ ἴδιο κτῆμα σὲ 3 ἡμέρες;

705) "Ενα ὕφασμα ποὺ ἔχει μῆκος 3 ὕαρδες καὶ 2 ποδ. στοιχίζει 900 δρχ. Πόσο στοιχίζουν οἱ 5 ὕαρδ. τοῦ αὐτοῦ ὕφασματος;

§ 210. Ποσοστά

210.1 Τὶ σημαίνει «τόσα στὰ ἑκατό».

Στοὺς 60 μαθητὰς μιᾶς τάξεως οἱ 9 εἶναι ἀριστοῦχοι. "Αν σὰς ρωτήσουν ποῖο μέρος τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως εἶναι ἀριστοῦχοι, μπορεῖτε νὰ δώσετε ἀπαντήσεις ὅπως :

Τὰ $\frac{9}{60}$ ἢ $\frac{3}{20}$ ἢ τὰ $\frac{15}{100}$ τῆς τάξεως εἶναι ἀριστοῦχοι.

Φυσικὰ ὅλες οἱ ἀπαντήσεις εἶναι ὀρθές.

$$\text{ἀφοῦ} \quad \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

Ἀλλὰ ἡ ἔκφραση $\frac{15}{100}$ χρησιμοποιεῖται πρὸ συχνά, γιὰτὶ ὁ παρονομαστής διευκολύνει στοὺς ὑπολογισμούς. Μάλιστα τὸ κλάσμα $\frac{15}{100}$ γράφεται πρὸ σύντομα **15 %** καὶ διαβάζεται « **15 στίς ἑκατό** ».

"Ετσι ὅταν διαβάζουμε ὅτι « **τὰ 48 % τῶν ἀνθρώπων εἶναι ἄρρενες** » ἐννοοῦμε ὅτι : « **σὲ 100 ἀνθρώπους οἱ 48 εἶναι ἄρρενες** ».

Ἡ ἔκφραση «τόσο στά ἑκατὸ» χρησιμοποιεῖται στὶς ἐκπτώσεις, στὸ κέρδος, στοὺς φόρους, στοὺς τόκους κλπ.

Ἀνάλογα χρησιμοποιοῦμε καὶ τὴν ἔκφραση

«τόσα στά χίλια»

Ἡ ἔκφραση «8 στὶς χίλιες» ἢ 8‰ εἶναι ἄλλη ἔκφραση τοῦ κλάσματος $\frac{8}{1000}$.

210.2 Προβλήματα ποσοστῶν

Ἔνας μεσίτης παίρνει 4% σὲ κάθε πώληση. Πόσα χρήματα θὰ πάρη στὴν πώληση κτήματος ἀξίας 180.000 δρ. ;

Εἶναι φανερό ὅτι ἡ ἀμοιβή τοῦ μεσίτη εἶναι ἀνάλογη μὲ τὴν ἀξία τοῦ κτήματος. Ἄν παραστήσουμε μὲ χ δρχ. τὴν ἀμοιβή του, θὰ ἔχουμε :

$$\frac{\chi}{4} = \frac{180.000}{100}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\chi}{4} = \frac{180.000}{100} \iff 100 \cdot \chi = 4 \cdot 180.000$$

$$\text{ἢ} \quad 100 \cdot \chi = 4 \cdot 180.000 \iff \chi = \frac{4 \cdot 180.000}{100}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = 4 \cdot 1.800 = 7.200$$

Ὡστε ὁ μεσίτης θὰ πάρη 7.200 δρχ. Οἱ 7.200 δρχ., που εἶναι τα 4 % τῶν 180.000 δρχ. λέγονται καὶ **ποσοστὸ** τῶν 180.000 δρχ.

2ο) Ἔνας ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος 12%. Ἀπὸ τὴν πώληση ἑνὸς ἐμπορεύματος ἐκέρδισε 300 δρ. Πόσο τοῦ ἐκόστισε τὸ ἐμπόρευμα ποὺ ἐπώλησε;

Τὰ ποσά : **Κόστος** τοῦ ἐμπορεύματος καὶ **κέρδος** εἶναι ἀνάλογα (γιατί);

$$\text{Ἄρα ἔχουμε} \quad \frac{100}{\chi} = \frac{12}{300} \quad (\chi \text{ δρχ τὸ κόστος τοῦ ἐμπορεύματος})$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{100}{\chi} = \frac{12}{300} \iff \chi \cdot 12 = 100 \cdot 300$$

$$\text{καὶ} \quad \chi \cdot 12 = 100 \cdot 300 \iff \chi = \frac{100 \cdot 300}{12}$$

$$\text{ἢ} \quad \chi = 2500$$

Ὡστε τὸ κόστος τοῦ ἐμπορεύματος ἦταν 2500 δρχ.

3ο) Σὲ ἐμπόρευμα ἀξίας 900 δρχ. μᾶς ἔκαναν ἔκπτωση 135 δρχ. Πόση στὶς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωση;

Τὰ ποσά : **ἀξία ἐμπορεύματος** καὶ **ἔκπτωση** εἶναι ἀνάλογα.

"Αν παραστήσουμε με χ % τὴν ἔκπτωση θά, ἔχουμε :

$$\frac{\chi}{135} = \frac{100}{900}$$

$$\eta \quad \frac{\chi}{135} = \frac{100}{900} \iff \chi \cdot 900 = 100 \cdot 135$$

$$\eta \quad \chi \cdot 900 = 100 \cdot 135 \iff \chi = \frac{100 \cdot 135}{900}$$

$$\eta \quad \chi = 15$$

4ο) Πόσα χρήματα θά πληρώση ἓνας ἔμπορος γιὰ ἀσφάλεια ἐμπορεύματος ἀξίας 300.000 δρ., ὅταν τὰ ἀσφάλιστρα εἶναι 6 ‰;

Τὰ ποσά : 1) ἀξία ἐμπορεύματος

2) Ἀσφάλιστρα

εἶναι ἀνάλογα

$$\text{"Αρα :} \quad \begin{array}{c} 6 \\ \chi \end{array} = \frac{1000}{300\,000} \quad (\text{ὅπου } \chi \text{ δρχ. εἶναι τὰ ἀσφάλιστρα})$$

$$\eta \quad \frac{6}{\chi} = \frac{1000}{300\,000} \iff 1000 \cdot \chi = 6 \cdot 300\,000$$

$$\eta \quad 1000 \cdot \chi = 6 \cdot 300\,000 \iff \chi = \frac{6 \cdot 300\,000}{1000}$$

$$\eta \quad \chi = 1800$$

"Ὡστε θά πληρώση 1800 δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

706) Τὸ σιτάρι κατὰ τὴν ἄλυσή του δίνει 78 % ἄλεύρι. Πόσα κιλά ἄλεύρι θά πάρουμε ἀπὸ 490 κιλά σιτάρι;

707) Τὸ σαποῦνι περιέχει 7 % ποτάσσα, 43 % λιπαρὲς οὐσίες καὶ 50% νερό. Πόσα κιλά ἀπ' τὸ κάθε εἶδος θά πάρουμε ἀπὸ 30.100 κιλά σαποῦνι :

708) Ἐνας ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25 % καὶ κερδίζει 3.600 δρχ. Πόσο κόστιζαν τὰ ἐμπορεύματα ποὺ πούλησε;

709) Κάποιος ἀγόρασε ἓνα οἰκόπεδο μὲ 17280 δρχ. καὶ τὸ πούλησε 20736 δρχ. Πόσα στὰ ἑκατὸ κέρδισε ;

710) Ἐνας ἔμπορος ἀγόρασε 84 κιλά βούτυρο μὲ 64 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ 45 κιλά καφὲ μὲ 72 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἐπλήρωσε 7.306,54 δρχ. Πόση στίς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωση;

711) Ἐνας παντοπώλης ἀγοράζει ἓνα δοχεῖο λάδι μὲ 480 δρχ. καὶ τὸ πούλει 600 δρχ. Πόσα στὰ ἑκατὸ εἶναι τὸ κέρδος του;

712) Ἐνας ἔμπορος πληρώνει 1,25 ‰ γιὰ προμήθεια ἐμπορεύματος Πόσα χρήματα θά πληρώση γιὰ προμήθεια ἐμπορεύματος ἀξίας 4.352.800 δραχμῶν;

713) 'Ο πληθυσμός μιᾶς πόλεως αὐξήθηκε κατὰ 4 %. Πόσος ἦταν ὁ πληθυσμός πρὶν ἀπὸ τὴν αὐξηση, ἂν μετὰ τὴν αὐξηση ἀνῆλθε σὲ 11.440 ἄτομα;

714) Κατὰ τὴ μεταφορά του ἓνα ἐμπόρευμα εἶχε φθορὰ ἴση μὲ τὰ 6 % αὐτοῦ. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος πρὸ τῆς μεταφορᾶς, ἂν μετὰ τὴ μεταφορά ἦταν 11.844 δρχ.;

Περίληψη

Λόγος δύο ἀριθμῶν.

Λόγος δύο ὁμοειδῶν ποσῶν.

Ἀναλογία.

Χαρακτηριστικὴ ιδιότης ἀναλογιῶν.

Ποσὰ συμμεταβλητά.

Ποσὰ κατ' εὐθεΐαν ἀνάλογα.

Ποσὰ ἀντίστροφα.

Προβλήματα μὲ ἀνάλογα ἢ ἀντίστροφα ποσὰ.

Ποσοστά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΕ'

§ 211. "Ομοια εὐθύγραμμα σχήματα

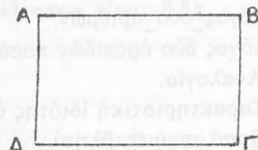
Ἄς σχηματίσουμε δύο ὀρθογώνια παραλληλόγραμμα, ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ', εἰς τὰ ὁποῖα νὰ εἶναι :

$$(AB) = 3 \text{ cm}$$

$$(B\Gamma) = 2 \text{ cm}$$

$$(A'B') = 1,5 \text{ cm}$$

$$(B'\Gamma') = 1 \text{ cm}$$



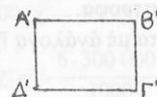
Παρατηροῦμε ὅτι :

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$$

$$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$$

$$\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$$

$$\sphericalangle \Delta = \sphericalangle \Delta'$$



ἐνῶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν διακρίνουμε ὅτι :

$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{3}{1,5} = 2, \quad \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{2}{1} = 2, \quad \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = \frac{3}{1,5} = 2$$

$$\text{Ἄρα} \quad \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta'\Gamma'} = 2$$

Ἄν ἀντιστοιχίσουμε τὶς γωνίες καὶ τὶς πλευρὲς τῶν ὀρθογωνίων, ποὺ ἔχουν τὰ ἴδια γράμματα, δηλ. ἂν ἀντιστοιχίσουμε :

$$\begin{aligned} &\text{Τὴν } \sphericalangle A \text{ μὲ τὴν } \sphericalangle A' \text{ καὶ τὴν πλευρὰ } AB \text{ μὲ τὴν } A'B' \\ &» \sphericalangle B \text{ » » } \sphericalangle B' \text{ » » » } B\Gamma \text{ » » } B'\Gamma' \\ &» \sphericalangle \Gamma \text{ » » } \sphericalangle \Gamma' \text{ » » » } \Gamma\Delta \text{ » » } \Gamma'\Delta' \\ &» \sphericalangle \Delta \text{ » » } \sphericalangle \Delta' \text{ » » » } \Delta A \text{ » » } \Delta'A' \end{aligned}$$

τότε παρατηροῦμε ὅτι τὰ σχήματα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἔχουν :

- 1) Τὶς ἀντίστοιχες γωνίες ἴσες καὶ
- 2) τὶς ἀντίστοιχες πλευρὲς ἀνάλογες

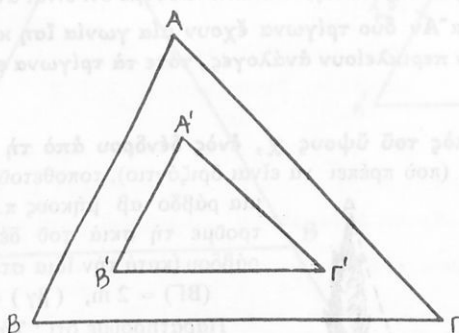
Ἄν δύο εὐθύγραμμα σχήματα ἔχουν τὶς γωνίες ἀντίστοιχα ἴσες καὶ τὶς ἀντίστοιχες πλευρὲς ἀνάλογες, λέγονται ὅμοια.

Πρακτικά σχηματίζουμε την έννοια της ομοιότητας με δύο φωτογραφίες, απ' τις οποίες ή μία είναι μεγέθυνση της άλλης.

§ 212. "Ομοια τρίγωνα

1) Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα με τις γωνίες αντίστοιχως ίσες.

"Αν μετρήσουμε τις αντίστοιχες πλευρές, (αντίστοιχες πλευρές παίρνου-



Σχ. 209

με έκεινες που εύρισκονται απέναντι σε ίσες γωνίες), θα διαπιστώσουμε ότι είναι **ανάλογες**.

"Οποτε : "Αν δύο τρίγωνα **ABΓ** και **A'B'Γ'** έχουν τις γωνίες αντίστοιχως ίσες, θα έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές **ανάλογες**. "Αρα θα είναι **όμοια**

ή συμβολικά :

$$\left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$$

2) Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα με πλευρές ανάλογες. Π.χ. 2, 3, 4 cm του ενός και 6, 9, 12 cm του άλλου. "Αν συγκρίνουμε τις αντίστοιχες γωνίες, (αυτές που εύρισκονται απέναντι σε ανάλογες πλευρές), θα διαπιστώσουμε ότι είναι ίσες.

"Οποτε : "Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές ανάλογες, θα έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array} \right\}$$

3) Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ που νά έχουν :

1) $\angle A = \angle A'$

2) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

(σχηματίζουμε δύο γωνίες ίσες και στις πλευρές της μιάς παίρνουμε τμήματα π.χ. 3 cm και 4 cm ενώ στις πλευρές της άλλης 6 cm και 8 cm). "Αν συγκρίνουμε τις λοιπές γωνίες, θά διαπιστώσουμε ότι είναι αντίστοιχως ίσες.

"Ωστε : «"Αν δύο τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση και τις πλευρές που την περικλείουν ανάλογες, τότε τὰ τρίγωνα είναι ὁμοία».

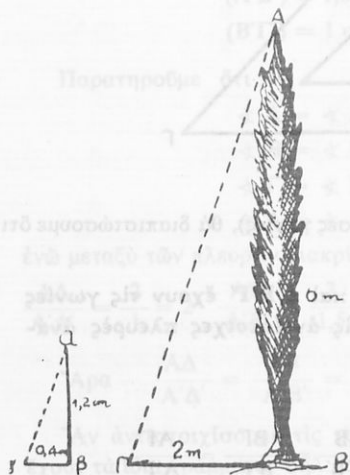
Εφαρμογές :

Υπολογισμός τοῦ ὕψους χ , ἑνὸς δένδρου ἀπὸ τὴ σκιά του.

Στὸ ἔδαφος, (πού πρέπει νά εἶναι ὀριζόντιο), τοποθετοῦμε κατακόρυφα

μία ράβδο ab μήκους π.χ. 1,20 m. Μετροῦμε τὴ σκιά τοῦ δένδρου καὶ τῆς ράβδου (κατὰ τὴν ἴδια στιγμή). "Ας εἶναι $(B\Gamma) = 2$ m, $(b\gamma) = 0,4$ m.

Παρατηροῦμε ὅτι : Τὰ νοητὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $ab\gamma$ εἶναι **ὁμοία**. (Εἶναι ὀρθογωνία κι' ἔχουν $\angle a = \angle A$ ἐπεὶδὴ οἱ ἡλιακὲς ἀκτίνες, μὲ μεγάλη προσέγγιση, εἶναι παράλληλες). "Αρα : οἱ ἀντίστοιχες πλευρὲς θά εἶναι **ἀνάλογες**, ὁπότε :



Σχ. 210

$$\frac{\chi}{1,20} = \frac{2}{0,4}$$

$$\eta \quad \chi \cdot 0,4 = 2 \cdot 1,20$$

$$\eta \quad \chi = \frac{2 \cdot 1,2}{0,4}$$

$$\eta \quad \chi = 6$$

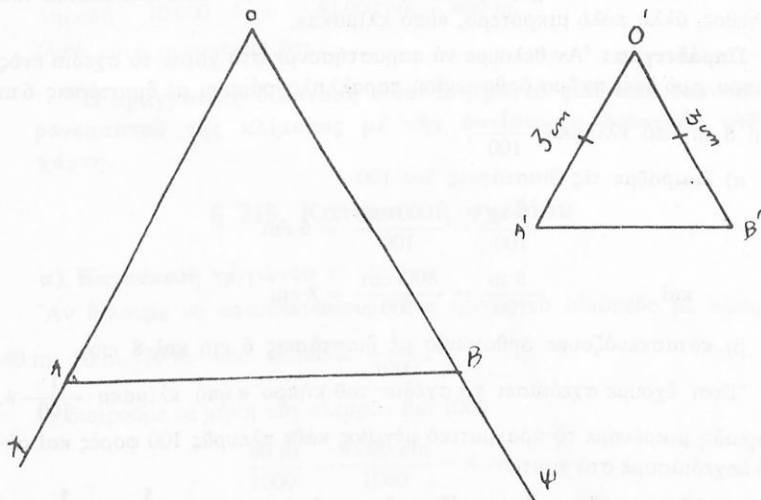
"Ωστε τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εἶναι 6 m.

§ 213. Μέτρηση γωνίας

"Ας εἶναι χ μιὰ γωνία σὲ ὀριζόντιο ἔδαφος. Γιὰ νὰ τὴ μετρήσουμε ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Στις πλευρὲς Ox , Oy τῆς γωνίας σημειώνουμε ἴσα τμήματα π.χ. $(OA) = (OB) = 3$ m κι' ἔπειτα μετροῦμε τὴν AB . Πάνω στὸ χαρτί-μιας σχηματίζουμε ἕνα τρίγωνο $A'O'B'$ ὁμοιο μὲ τὸ AOB (παίρνουμε πλευρὲς π.χ.

100 φορές μικρότερες από τις αντίστοιχες πλευρές του $\triangle AOB$. Έτσι τα τρίγωνα $\triangle AOB$ και $\triangle A'O'B'$ θα έχουν πλευρές ανάλογες, άρα θα είναι **ὅμοια**). Μετρούμε στο χαρτί μας τὴ $\triangle A'O'B'$ κι' έχουμε τὸ μέγεθος τῆς $\triangle AOB$.



Σχ. 211

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

715) Νά κατασκευάσετε ένα τρίγωνο με πλευρές 3 cm, 4 cm, 5 cm. Μὲ ποιὲς πλευρὲς μπορείτε νά κατασκευάσετε ἕνα ὅμοιο μὲ αὐτό; Πόσα τρίγωνα ὅμοια μὲ τὸ 1ο τρίγωνο ὑπάρχουν;

716) Ἐνα τρίγωνο ἔχει πλευρὲς $(AB) = 3$ cm, $(AG) = 4$ cm, $(BG) = 5$ cm. Ἐνα ἄλλο τρίγωνο $\triangle EZ$ ἔχει πλευρὲς $(\Delta E) = 6$ cm, $(\Delta Z) = 8$ cm, $(EZ) = 10$ cm. Εἶναι ὅμοια τὰ τρίγωνα; Ἄν ναι, ποιὲς εἶναι οἱ ἴσες γωνίες;

717) Νά κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ὅπου $(AB) = 4$ cm, $(AG) = 6$ cm, $(B\Gamma) = 7$ cm. Ἐπειτα ἕνα ἄλλο τρίγωνο $\triangle EZ$ ὅπου: $\angle \Delta = \angle A$, $(\Delta E) = 8$ cm, $(\Delta Z) = 12$ cm. Νά ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ καὶ $\triangle EZ$ εἶναι ὅμοια κι' ἔπειτα νά ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς EZ.

718) Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὅμοια;

719) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν ἴσες τὶς γωνίες τῆς κορυφῆς τῶν ἴσων πλευρῶν. Εἶναι ὅμοια;

§ 214. Σχεδίαση υπό κλίμακα

Όταν ο μηχανικός κάνει το σχέδιο ενός κήπου, οικόπεδου, χωραφίου ή σπιτιού πάνω σ' ένα χαρτί, δέν παριστάνει τόν κήπο κλπ. στο φυσικό του μέγεθος, αλλά πολύ μικρότερο, «υπό κλίμακα».

Παράδειγμα: "Αν θέλουμε να παραστήσουμε στο χαρτί το σχέδιο ενός κήπου, πού έχει σχήμα ὀρθογώνιου παραλληλογράμμου με διαστάσεις 6 m καί 8 m υπό κλίμακα $\frac{1}{100}$,

α) διαιρούμε τις διαστάσεις διά 100

$$\frac{6 \text{ m}}{100} = \frac{600 \text{ cm}}{100} = 6 \text{ cm}$$

καί
$$\frac{8 \text{ m}}{100} = \frac{800 \text{ cm}}{100} = 8 \text{ cm}$$

β) κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο με διαστάσεις 6 cm καί 8 cm.

Έτσι έχουμε σχεδιάσει το σχέδιο του κήπου «υπό κλίμακα $\frac{1}{100}$ ». Δηλαδή μικρύνανε το πραγματικό μέγεθος κάθε πλευράς 100 φορές καί αὐτό ἐσχεδιάσαμε στο χαρτί.

Ώστε: «ὅταν ἕνα σχέδιο εἶναι «υπό κλίμακα $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$,

$\frac{1}{10000}$, ... αὐτό σημαίνει ὅτι: Οἱ διαστάσεις του εἶναι ἴσες με

τὸ $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$... τῶν πραγματικῶν διαστάσεων.

Προβλήματα

1ο) Ἡ ἀπόσταση δύο πόλεων εἶναι 50 km. Μὲ πόσο μῆκος θὰ παριστάνεται ἡ ἀπόσταση αὐτὴ σ' ἕνα χάρτη με κλίμακα $\frac{1}{1000.000}$;

Ἡ κλίμακα μᾶς δείχνει ὅτι τὸ πραγματικὸ μῆκος παριστάνεται στο χάρτη μ' ἕνα μῆκος 1.000.000 φορές μικρότερο. Ἀρα: τὰ 50 km θὰ παριστάνωνται με μῆκος $\frac{50 \text{ km}}{1.000.000} = \frac{5.000.000 \text{ cm}}{1.000.000} = 5 \text{ cm}$.

2ο) Σ' ἕνα σχέδιο με κλίμακα $\frac{1}{10.000}$ ἡ μιὰ πλευρὰ ἑνὸς οἰκοπέδου παριστάνεται με μῆκος 4 cm. Πόσο εἶναι τὸ πραγματικὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς;

Άφου ή κλίμακα είναι $\frac{1}{10.000}$, τὸ πραγματικὸ μήκος θὰ εἶναι 10.000 φορές μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μήκος του στὸ χάρτη.

Δηλαδή $10.000 \cdot 4 \text{ cm} = 40.000 \text{ cm} = 400 \text{ m}$.

Άπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι :

Ἡ πραγματικὴ διάσταση εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος μὲ τὴν ἀντίστοιχη διάσταση στὸ χάρτη.

§ 215. Κατασκευὴ σχεδίου

α) Κατασκευὴ τριγώνου :

Ἄν θέλουμε νὰ κατασκευάσουμε ἓνα τριγωνικὸ οἰκόπεδο μὲ πλευρὲς 40 m, 50 m, 70 m ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{1000}$,

1) διαιροῦμε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν διὰ 1000

$$\frac{40 \text{ m}}{1000} = \frac{4.000 \text{ cm}}{1000} = 4 \text{ cm}$$

$$\frac{70 \text{ m}}{1000} = \frac{7000 \text{ cm}}{1000} = 7 \text{ cm}$$

$$\frac{50 \text{ m}}{1000} = \frac{5000 \text{ cm}}{1000} = 5 \text{ m}$$

2) κατασκευάζουμε στὸ χάρτη τρίγωνο μὲ πλευρὲς 4 cm, 5 cm, 7 cm.

β) Κατασκευὴ πολυγώνου

Ἄπὸ μιά κορυφὴ φέρουμε τὶς διαγωνίους κι' ἔτσι τὸ πολύγωνο χωρίζεται σὲ τρίγωνα, μὲ τὰ ὁποῖα ἐργαζόμαστε ὅπως στὸ προηγούμενο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

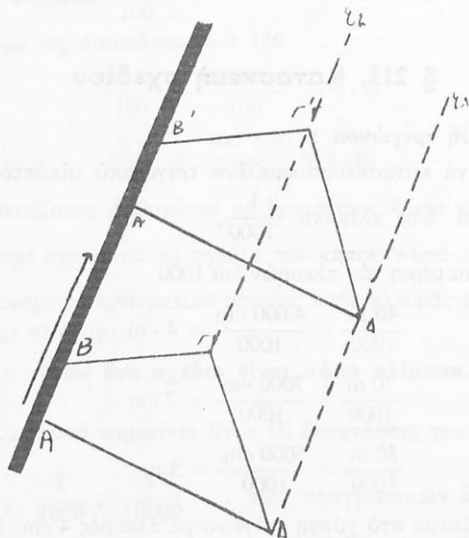
720) Σὲ χάρτη μὲ κλίμακα 1 : 80.000, μήκος 1 cm ἢ 1 dm πόσο πραγματικὸ μήκος παριστάνει;

721) Ἀπεικονίσατε μὲ κλίμακα 1 : 1000 τὸ σχέδιο τριγώνου ἰσοσκελοῦς ποῦ ἔχει βάση 30 m καὶ ὕψος 40 m.

722) Τριγωνικὸ γήπεδο ἔχει πλευρὲς 80 m, 70 m καὶ 50 m. Ἀπεικονίσατε τὸ σχέδιο μὲ κλίμακα 1 : 1000.

§ 216. Παράλληλη μετατόπιση στο επίπεδο

Κατασκευάζουμε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ από χαρτί και το τοποθετούμε πάνω στο τραπέζι. Έπειτα τοποθετούμε την άκμή του χάρακα έτσι, ώστε να εφαρμόζη σε μια πλευρά π.χ. την AB , σχ. 212. Μετακινούμε το τετράπλευρο πάνω στο τραπέζι με προσοχή, ώστε η AB να εφαρμόζη πάντα στην άκμή του χάρακα. Έτσι έχουμε μία μετατόπιση του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ στο επίπεδό του.



Σχ. 212

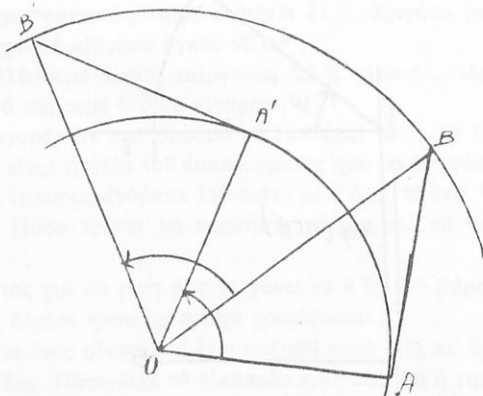
Καθώς μετακινείται το τετράπλευρο, οι κορυφές Δ και Γ αυτού διαγράφουν ευθείες ε_1 , ε_2 παράλληλες προς την άκμή του χάρακα. Γενικά κάθε σημείο του τετραπλεύρου διαγράφει μία ευθεία παράλληλο προς την άκμή. Γι' αυτό η μετατόπιση αυτή λέγεται **παράλληλη μετατόπιση επίπεδου σχήματος στο επίπεδό του**.

Η σταθερή άκμή του χάρακα λέγεται **οδηγός της όλισθήσεως**.

Αν προσέξουμε μία πλευρά του τετράπλευρου, παρατηρούμε ότι έχει μετατοπισθῇ σε παράλληλη θέση προς την αρχική της το δὲ μήκος της δὲν ἔχει ἀλλάξει. Παράδειγμα παραλλήλου μετατοπίσεως εἶναι ἡ μετατόπιση τοῦ T (ταῦ) ἢ τοῦ τριγώνου στοῦ ἐπίπεδο γιὰ τὴ χάραξη παραλλήλων εὐθειῶν.

§ 217. Στροφή σχήματος στο επίπεδό του

Κατασκευάζουμε ένα χάρτινο τρίγωνο OAB και στερεώνουμε την κορυφή του O (με μία πινέζα) σ' ένα σημείο πάνω στο τραπέζι. Έπειτα στρέφουμε το τρίγωνο OAB περί το σταθερό σημείο O με προσοχή, ώστε το



Σχ. 213

τρίγωνο να βρίσκεται πάντα ολόκληρο στο τραπέζι. Η μετατόπιση αυτή λέγεται **στροφή του επιπέδου σχήματος** περί το σημείο O . Κατά τη στροφή αυτή κάθε σημείο του τριγώνου διαγράφει τόξο περιφέρειας με κέντρο το O .

Παράδειγμα στροφής περί σημείο O είναι ή συμμετρία ως προς κέντρο το O .

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί

Η παράλληλη μετατόπιση και ή στροφή λέγονται **γεωμετρικοί μετασχηματισμοί** του επιπέδου.

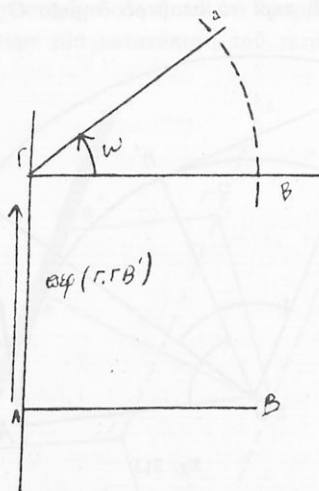
Γι' αυτό χρησιμοποιούμε τη φράση : «μία συμμετρία μετασχηματίζει ένα σχήμα στο συμμετρικό του».

§ 218. Ίσα σχήματα

Ας χαράξουμε 2 ίσα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$, σχ. 214. Μπορούμε να κάνουμε μία παράλληλη μετατόπιση του AB με όδηγό την $A\Gamma$, έτσι ώστε το AB να έλθη στη θέση $\Gamma B'$. Έπειτα κάνουμε μία στροφή του $\Gamma B'$ περί το Γ όπου να ταυτισθῇ με το $\Gamma\Delta$.

Ὡστε μὲ μία παράλληλη μετατόπιση καὶ μία στροφή τὸ τμήμα **AB** ταυτίστηκε μὲ τὸ ἴσο του **ΓΔ**.

Γενικά: Δύο ἴσα σχήματα τοῦ ἐπιπέδου μποροῦν νὰ ταυτισθοῦν μὲ μία παράλληλη μετατόπιση καὶ μία στροφή.



Σχ. 214

Παρατήρηση: "Αν τὰ σχήματα εἶναι «κατ' ἀναστροφήν» ἴσα, πρέπει ἐπὶ πλέον νὰ ἀναστραφῇ τὸ ἓνα ἀπὸ αὐτά.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

723) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα παραλληλόγραμμο **ABΓΔ** καὶ νὰ κάνετε μία παράλληλη μετατόπιση τῆς **AB** μὲ ὁδηγὸ ὀλισθήσεως τὴ **ΒΓ**, ὥσπου τὸ σημεῖο **B** νὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ σημεῖο **Γ**. Τί παρατηρεῖτε;

724) Νὰ κατασκευάσετε ἓνα ἰσόπλευρο τρίγωνο καὶ ἔπειτα νὰ κάνετε στροφή 180° περὶ μίαν κορυφή του. Τί παρατηρεῖτε;

725) Νὰ χαράξετε δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα **AB** καὶ **ΓΔ** καὶ μὲ καταλλήλους γεωμ. μετασχηματισμοὺς νὰ φέρετε τὸ **AB** σὲ σύμπτωση μὲ τὸ **ΓΔ**.

726) Νὰ ἐπαναληφθῇ τὸ ἴδιο στὴν περίπτωση δύο ἴσων τριγώνων ἢ τετραπλευρῶν.

Γενικὲς ἀσκήσεις τῶν Κεφ. **ΙΔ' . ΙΕ' .**

727) Γιὰ ἓνα ὕφασμα μήκους 30 m καὶ πλάτους 0,40 m χρειάζονται 60 kg μαλλί. Ἐάν αὐξήσουμε τὸ πλάτος τοῦ μαλλιῦ κατὰ 15 cm, πόσο περισσότερο μαλλί θὰ χρειασθῇ;

728) Να επιλύσετε τις εξισώσεις :

$$1) \frac{2}{x} = \frac{5}{12}$$

$$2) \frac{4}{x} = \frac{x}{9}$$

$$3) \frac{x+1}{3} = \frac{2}{5}$$

729) Το γάλα δίνει 5 % βούτυρο. Πόσα kg γάλα χρειάζονται για να γίνουν 41 kg βούτυρο;

730) Ο ατμοσφαιρικός αέρας περιέχει 21 % οξυγόνο (σε όγκο). Πόσο οξυγόνο υπάρχει σε αίθουσα όγκου 90 m^3 ;

731) "Αν αλέσουμε σιτάρι παίρνουμε 7,5 % πίτουρα. Πόσο σιτάρι θα αλέσουμε για να πάρουμε 480 kg πίτουρα;

732) "Αν αγοράσετε ένα ύφασμα με έκπτωση 18 %, θα έχετε οικονομία 90 δρχ. Πόση είναι η αξία του εμπορεύματος που θα αγοράσετε;

733) "Ενας έμπορος αγόρασε 150 πιάτα με 6 δρχ. το ένα, το έβαλε όμως 10 πιάτα. Πόσο πρέπει να πουλήσει το ένα για να κερδίσει απ' όλα 80 δρχ.

734) Ο σίτος για να γίνει αλεύρι χάνει τα 8 % του βάρους του. Για να έχουμε 256 kg αλεύρι πόσα kg σιτάρι χρειάζονται;

735) Η αξία ενός οικοπέδου έχει αυξηθεί κατά 6 % κι' έχει τώρα το οικόπεδο 53000 δρχ. Πόσο είχε το οικόπεδο πριν αυξηθεί η τιμή του;

736) Ο πληθυσμός μιās πόλεως έχει αυξηθεί κατά 4 % και είναι τώρα 12.480. Πόσους κατοίκους είχε η πόλις πριν αυξηθεί ο πληθυσμός της;

737) Για να μεταφέρουμε 30 τόννους εμπορεύματος σε απόσταση 85 km πληρώσαμε 12.000 δρχ. Πόσα θα πληρώσουμε για να μεταφέρουμε 17 τόννους σε απόσταση 97 km;

738) "Ενας έμπορος επώλησε εμπόρευμα αντί 20.000 δρχ. με ζημιά 20 % επί της τιμής αγοράς. Πόσο είχε αγοράσει το εμπόρευμα;

739) Το θαλασσινό νερό περιέχει 2,5 % άλατι. Από πόσα kg θαλ. νερό θα πάρουμε 60 kg άλατι;

740) Δύο ορθογώνια έχουν διαστάσεις 2 m, 5 m και 8 m, 20 m. Να εξετάσετε αν είναι όμοια.

741) Μπορεί ένα ορθογώνιο να είναι όμοιο με ένα τετράγωνο;

742) Μπορεί ένα ορθογώνιο τρίγωνο να είναι όμοιο μ' ένα ισόπλευρο τρίγωνο;

743) Δύο όμοια τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' έχουν (AB) = 4 cm, (AΓ) = 3 cm, (A'B') = 12 cm. Πόση είναι η A'Γ' που αντιστοιχεί στην AΓ; (A'B' αντίστοιχη της AB).

744) Δύο όμοια τρίγωνα ABΓ και A'B'Γ' έχουν $\angle A = \angle A'$, (AB) = 6 cm, (AΓ) = 9 cm και (A'B') = 7 cm. Πόση είναι η A'Γ' που αντιστοιχεί στην AΓ;

745) Δύο τετράγωνα είναι όμοια μεταξύ των; Να εξετάσετε αν δύο ίσοσκελή τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση, είναι όμοια μεταξύ τους.

747) Δύο όμοια τρίγωνα έχουν πλευρές 3 cm, 5 cm, 6 cm και 6 cm, 10 cm. Πόση είναι η τρίτη πλευρά του 2ου τριγώνου;

748) Ένα σχέδιο είναι υπό κλίμακα $\frac{1}{1000}$. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις, στο σχέδιο, 10 cm και 12 cm. Ποιές είναι οι πραγματικές διαστάσεις του ορθογωνίου;

749) Να κατασκευάσετε το σχέδιο ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 6 m, 7,5 m υπό κλίμακα $\frac{1}{100}$.

750) Μία περιφέρεια, σε σχέδιο υπό κλίμακα $\frac{1}{200}$, έχει διάμετρο 3m. Πόσο είναι το πραγματικό έμβαδόν του κύκλου;

751) Να χαράξετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ κι' έπειτα να το μετασχηματίσετε με παράλληλη μετατόπιση με οδηγό μία πλευρά του τριγώνου.

752) Να χαράξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και να το μετασχηματίσετε με παράλληλη μετατόπιση με οδηγό την υποτείνουσα.

753) Να χαράξετε ένα ορθογώνιο και να το στρέψετε κατά 90° περί μία κορυφή του.

754) Να χαράξετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και να το μετασχηματίσετε με στροφή 90° περί την κορυφή της ορθής γωνίας.

Π ε ρ ί λ η ψ η

Όμοια ευθύγραμμα σχήματα.

Όμοια τρίγωνα.

Περιπτώσεις ομοιότητας τριγώνων.

Έφαρμογές.

Σχεδίαση υπό κλίμακα.

Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί.

Παράλληλη μετατόπιση.

Στροφή περί κέντρο.

Ίσα σχήματα.

Γενικές ασκήσεις.

Πίνακας τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν
τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100 μὲ προσέγγιση χιλιοστοῦ

Ἀριθμοὶ	τετράγωνα	τετρ. ρίζα	Ἀριθμοὶ	τετράγωνα	τετρ. ρίζα
1	1	1,000	53	2809	7,280
2	4	1,414	54	2916	7,349
3	9	1,732	55	3025	7,416
4	16	2,000	56	3136	7,483
5	25	2,236	57	3249	7,550
6	36	2,450	58	3364	7,616
7	49	2,646	59	3481	7,681
8	64	2,828	60	3600	7,746
9	81	3,000	61	3721	7,810
10	100	3,162	62	3844	7,874
11	121	3,317	63	3969	7,937
12	144	3,464	64	4096	8,000
13	169	3,606	65	4225	8,062
14	196	3,742	66	4356	8,124
15	225	3,873	67	4489	8,185
16	256	4,000	68	4624	8,246
17	289	4,123	69	4761	8,307
18	324	4,243	70	4900	8,367
19	361	4,359	71	5041	8,426
20	400	4,472	72	5184	8,485
21	441	4,583	73	5329	8,544
22	484	4,690	74	5476	8,602
23	529	4,796	75	5625	8,660
24	576	4,899	76	5776	8,718
25	625	5,000	77	5929	8,775
26	676	5,099	78	6084	8,832
27	729	5,196	79	6241	8,888
28	784	5,292	80	6400	8,944
29	841	5,385	81	6561	9,000
30	900	5,477	82	6724	9,055
31	961	5,568	83	6889	9,110
32	1024	5,657	84	7056	9,165
33	1089	5,745	85	7225	9,220
34	1156	5,831	86	7396	9,274
35	1225	5,916	87	7569	9,327
36	1296	6,000	88	7744	9,381
37	1369	6,083	89	7921	9,434
38	1444	6,164	90	8100	9,487
39	1521	6,245	91	8281	9,539
40	1600	6,325	92	8464	9,592
41	1681	6,403	93	8649	9,644
42	1764	6,481	94	8836	9,695
43	1849	6,557	95	9025	9,747
44	1936	6,633	96	9216	9,798
45	2025	6,708	97	9409	9,849
46	2116	6,782	98	9604	9,900
47	2209	6,856	99	9801	9,950
48	2304	6,928	100	10000	10,000
49	2401	7,000	101	10201	10,050
50	2500	7,071	102	10404	10,100
51	2601	7,141	103	10609	10,149
52	2704	7,211			

Ποσοστά μεταβολών στην απασχόληση ανά ηλικιακή ομάδα και φύλο, 1997-2000

Ποσοστά μεταβολών στην απασχόληση ανά ηλικιακή ομάδα και φύλο, 1997-2000

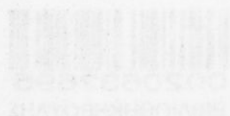
Ηλικιακή Ομάδα	Φύλο	1997	1998	1999	2000
15-24	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
25-34	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
35-44	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
45-54	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
55-64	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
65+	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
15-24	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
25-34	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
35-44	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
45-54	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
55-64	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
65+	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
15-24	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
25-34	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
35-44	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
45-54	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
55-64	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
65+	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
15-24	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
25-34	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
35-44	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
45-54	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
55-64	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
65+	Ανδρες	1000	1000	1000	1000
15-24	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
25-34	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
35-44	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
45-54	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
55-64	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
65+	Γυναίκες	1000	1000	1000	1000
15-24	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
25-34	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
35-44	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
45-54	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
55-64	Σύνολο	1000	1000	1000	1000
65+	Σύνολο	1000	1000	1000	1000

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

	Σελίς
ΚΕΦ. Α'. Σύνολα, υποσύνολα, Ισοδύναμα σύνολα, Ένωση, τομή συνόλων, ιδιότητες, συμπλήρωμα συνόλου	3- 24
ΚΕΦ. Β'. Φυσικοί αριθμοί, μηδέν, αρίθμηση Έλληνική, Ρωμαϊκή, γραφή των αριθμών, Ισοί άνιστοι αριθμοί, ιδιότητες	25- 34
ΚΕΦ. Γ'. Εισαγωγή στη Γεωμετρία, ιδιότητες ευθείας, επιπέδου. Γωνία, εύθυγρ. σχήματα. Γεωμ. στερεά. Ίσα, άνισα εύθ. τμήματα, ιδιότητες αυτών. Μέτρηση εύθ. τμημάτων, μονάδες μήκους. "Αθροισμα, διαφορά εύθ. τμημάτων, εύθειες παράλληλες	35- 58
ΚΕΦ. Δ'. Έπίπεδα χωρία, κυρτά και μη κυρτά. Γωνίες. Ίσες, άνισες γωνίες, ιδιότητες. Είδη γωνιών, πρόσθεση, άφαιρέση γωνιών. Μέτρηση γωνιών	59- 76
ΚΕΦ. Ε'. Συμμεγείς αριθμοί, μονάδες, πράξεις με συμμειγείς	77- 84
ΚΕΦ. ΣΤ'. Γωνίες παρ/λων τεμνομένων υπό πλάγιας. Έγ/νη, επίκεντρο γωνία. Σχέση τόξων και χορδών. Ήμικυκλικά διατάξεως τετραγ. χαρτί, Καρτεσιανό γινόμενο	85- 95
ΚΕΦ. Ζ'. Πράξεις με άκεραίους αριθμούς, ιδιότητες αυτών. Σχέση μεταξύ προσθέσεως και άφαιρέσεως. Σχέση μεταξύ πολ/σμού και τελείας διαίρεσεως. Ίσοδυναμίες. Έξισώσεις. Αριθμητικά πολυώνυμα. Προβλήματα. Δυνάμεις, ιδιότητες αυτών. Δυναμικό σύστημα αριθμήσεως	96-161
ΚΕΦ. Η'. Διακετεότης, πρώτοι, σύνθετοι αριθμοί. Ίδιότητες διακετετών, κριτήρια διακετετότητος. Ανάλυση αριθμού σε πρώτους παράγοντες. Μ.Κ.Δ., ιδιότητες. Ε.Κ.Π.	162-183
ΚΕΦ. Θ'. Συμμετρία ως πρὸς σημεία. Κέντρα συμμετρίας, είδη τετραπλεύρων. Γεωμετρικές κατασκευές. Συμμετρία ως πρὸς άξονα. "Αξων συμμετρίας, εφαρμογές	184-210
ΚΕΦ. Ι'. Κλασματικοί αριθμοί. Πράξεις, επαλήθευση ιδιοτήτων, επίλυση εξισώσεων. Προβλήματα που λύνονται με εξισώσεις. Μέθοδος άναγωγής στη μονάδα	212-262
ΚΕΦ. ΙΑ'. Δεκαδικοί αριθμοί. Πράξεις, πηλίκo με προσέγγιση, μη τερματιζόμενες διαίρεσεις. Περιοδικοί αριθμοί	263-279
ΚΕΦ. ΙΒ'. Ίσα τρίγωνα. Γενικά γνωρίσματα ίσων τριγώνων. Ίσοσκελές, ισόπλευρο τρίγωνο. Περιπτώσεις ισότητος ορθογωνίων τριγώνων	280-293

ΚΕΦ. ΙΓ'.	Μέτρηση επιπέδων επιφανειών. Έμβαδόν ὀρθ. παρ/μου, τετραγώνου, τετρ. ρίζα. Έμβαδόν παρ/μου, ρόμβου, τριγώνου, τραπέζιου. Μέτρηση περιφερείας. Έμβαδόν κύκλου	294-319
ΚΕΦ. ΙΔ'.	Λόγος δύο ἀριθμῶν, δύο ὁμοειδῶν ποσῶν. Ἀναλογία, ιδιότης. Ποσά συμ/τά, κατ' εὐθεΐαν ἀνάλογα, ἀντίστροφα, προβλήματα Ποσοστά. Προβλήματα	320-333
ΚΕΦ. ΙΕ'.	"Όμοια εὐθυγρ. σχήματα. "Όμοια τρίγωνα, περιπτώσεις ὁμοιότητος, ἐφαρμογές. Σχέδιο ὑπὸ κλίμακᾶ. Μετασχηματισμοί. Ἀσκήσεις	334-344

- K23-17. Μίσητος, Ιουλίανος. Εργασια. 2α. Τετάρτη 194, περιόχου, αὐτο-
νόμου, 194. 214. Τετάρτη 194, 194, 194, 194, 194, 194.
214-214
- K23-18. Αἴμας, 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214.
214-214
- K23-19. Τίμας, 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214. 214.
214-214





0020632695

Ψηφιοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Βιβλιοθήκης και Βιβλιογραφικής

Βιβλιοθήκης και Βιβλιογραφικής

