. ΓΕΡΜΑΝΟΥ
ΤΙΤ. ΓΕΝ. ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ
ΚΑΘ. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β' ΓΥΜΝ. ΑΡΡ. ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΚΔΟΣΕΙΣ
"Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ"
ΑΘΗΝΑΙ

Δ 2 ΜΜΣ

Γερμανός (Μ.) - Κατσαρλίνος (Σ.)

Μ. ΓΕΡΜΑΝΟΥ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΓΕΝ. ΕΠΙΘΕΩΡΗΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Σ. ΚΑΤΣΑΡΛΙΝΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
Β' ΓΥΜΝ. ΑΡΡ. ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Σύμφωνα μὲ τὸ νέο ἀναλυτικὸ πρόγραμμα)

ΕΚΔΟΣΕΙΣ "Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ" ΑΘΗΝΑΙ

Κάθε ἀντίτυπο φέρει τὴν ὑπογραφὴ τοῦ ἑνὸς συγγραφέως

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α'

ΣΥΝΟΛΑ

§ 1. Παράστασις συνόλων

Ἐπειδὴ ἡ ἔννοια τοῦ συνόλου εἶναι βασικὴ στὰ Μαθηματικά, εἶναι σκόπιμο, πρὶν προχωρήσουμε σὲ νέες ἔννοιες, νὰ κάνουμε μιὰ σύντομη ἐπανάληψι ὅσων μάθαμε γιὰ τὰ σύνολα. Μὲ τὴν εὐκαιρία αὐτὴ θὰ κάνουμε καὶ μερικὲς συμπληρώσεις.

Ἂς πάρουμε τὸ σύνολὸ Α τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου μας. Μάθαμε νὰ τὸ παριστάνουμε:

α) **μὲ ἀναγραφὴ** τῶν στοιχείων του

$$A = \{α, ε, υ, ι, ο, ω, η\}$$

β) **μὲ περιγραφὴ** (τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του)

$$A = \{x \mid x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου μας}\}$$

Γιὰ νὰ συμβολίσωμε 1) ὅτι ἕνα φωνῆεν, π. χ. τὸ α, εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α γράφουμε:

$α \in A$ καὶ διαβάζουμε: **τὸ στοιχεῖο α ἀνήκει στὸ σύνολο Α**,

2) ὅτι ἕνα σύμφωνο, π. χ. τὸ β, δὲν εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α γράφουμε:

$β \notin A$ καὶ διαβάζουμε: **τὸ στοιχεῖο β δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο Α.**

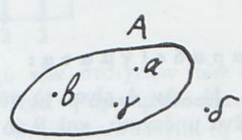
Ἂν θέλουμε νὰ συμβολίσουμε ἕνα σύνολο μὲ μεγάλο ἀριθμὸ στοιχείων, τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται σὲ διάταξι, ὅπως π. χ. τὸ σύνολο Α τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 μέχρι καὶ τοῦ 1000, γράφουμε:

$$A = \{1, 2, 3, \ldots 1000\}$$

Δηλαδὴ γράφουμε μὲ τὴ σειρὰ τὰ τρία πρῶτα στοιχεῖα τοῦ συνόλου ἔπειτα τρεῖς τελεῖες καὶ τέλος τὸ τελευταῖο στοιχεῖο.

Γιὰ νὰ παραστήσουμε γραφικῶς, μὲ ἕνα διάγραμμα, ἕνα σύνολο, π. χ. τὸ $A = \{α, β, γ\}$, γράφουμε μιὰ κλειστὴ γραμμὴ καὶ παριστάνουμε κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α μὲ μία τελεία στὸ ἐσωτερικὸ αὐτῆς. Ἔτσι γιὰ τὸ σύνολο Α ἔχουμε τὸ σχ. 1, ἀπὸ τὸ ὁποῖον συνάγουμε ὅτι:

$α \in A, \quad β \in A, \quad γ \in A \quad$ καὶ $δ \notin A$



Σχ. 1

Δεχθήκαμε ὅτι ὑπάρχουν σύνολα χωρὶς στοιχεῖα ὅπως π. χ. τὸ σύνολο $A = \{x \mid x$ μαθητὴς γυμνασίου μὲ ἡλικία 2 ἐτῶν$\}$, καὶ τὰ ὀνομάσαμε **κενὰ** σύνολα μὲ σύμβολο τὸ $\varnothing$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νὰ παραστήσετε μὲ διαφόρους τρόπους τὰ ἀκόλουθα σύνολα:

α) Τὸ σύνολο τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος

β) » » » μηνῶν τοῦ φθινοπώρου

γ) » » » ψηφίων τοῦ ἀριθμοῦ 1800

δ) » » » πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

2) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $B = \{3, 6, 9, 12 \ldots 99\}$ καὶ $\Gamma = \{5, 10, 15, \ldots\}$

α) Νὰ συμβολίσετε τὰ σύνολα Α, Β, Γ, μὲ τὴν βοήθεια τῆς χαρακτηριστικῆς των ἰδιότητος

β) Στὴ θέση κάθε παύλας νὰ σημειώσετε τὸ κατάλληλο σύμβολο ($\in$ ἢ $\notin$) π. χ. $2 \in A$, $10 \notin A$

$$3 - A, \quad 3 - B, \quad 3 - \Gamma$$
$$300 - A, \quad 300 - B, \quad 300 - \Gamma.$$

3) Νὰ συμβολίσετε τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

§ 2. Ἴσα σύνολα

Τὰ σύνολα $A = \{2, 5, 6\}$ καὶ $B = \{6, 2, 5\}$ παρατηροῦμε ὅτι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια ἀκριβῶς στοιχεῖα.

Ὅταν: **Κάθε στοιχεῖο x ἑνὸς συνόλου Α εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Β** $x \in A \Rightarrow x \in B$

ἀλλὰ καὶ ἀντιστρόφως: **κάθε στοιχεῖο x τοῦ συνόλου Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α** $x \in B \Rightarrow x \in A$,

τότε λέγομεν ὅτι τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα.

Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς γράφεται συμβολικά:

$$\boxed{A = B \Longleftrightarrow (x \in A \Longleftrightarrow x \in B)}$$

Παραδείγματα:

1) Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων, ποὺ λήγουν τοὐλάχιστον σ' ἕνα μηδενικό, καὶ Β τὸ σύνολο τῶν πολ/σίων τοῦ 10, ἔχουμε:

$$A = B$$

Σημ. Ὑπενθυμίζουμε ὅτι σ' ἕνα σύνολο κάθε στοιχεῖο τὸ λαμβάνουμε μόνο μία φορά.

2) Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «στρατὸς» καὶ Β τὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «ἀόρατος» ἔχουμε:

$$A = \{\sigma, \tau, \rho, \alpha\ o\} \quad B = \{\alpha, o, \rho\ \tau\ \sigma\}$$

δηλ. $\qquad A = B$

Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος τῶν συνόλων

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ σχέσις τῆς ἰσότητος συνόλων ἔχει τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1) $A = A$ Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης

2) $A = B \Rightarrow B = A$ Συμμετρικὴ ἰδιότης

3) $\left.\begin{array}{l} A = B \\ B = \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A = \Gamma$ Μεταβατικὴ ἰδιότης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4) Ποιά ἀπὸ τὰ σύνολα $A = \{5, 7, 8, 12\}$, $B = \{8, 9, 7, 12, 5\}$, $\Gamma = \{5, 7, 8, 12, 13\}$, $\Delta = \{8, 7, 5, 12\}$, $E = \{5, 12, 7, 8\}$ εἶναι ἴσα;

5) Ποιά ἀπὸ τὰ σύνολα
$A = \{x \mid x$ φωνῆεν τῆς λέξεως «πατέρας»$\}$ $B = \{\alpha, \varepsilon\}$ $\Gamma = \{x / x$ φωνῆεν τῆς λέξεως ἀέρας$\}$ $\Delta = \{\alpha, \varepsilon, \eta\}$ εἶναι ἴσα;

§ 3. Ἰσοδύναμα ἢ ἰσοδυναμικὰ σύνολα

Τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ δὲν εἶναι ἴσα. Σχετίζονται ὅμως μ' ἕναν ἄλλο τρόπο.

Σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ Α, ἀντιστοιχεῖ **ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ Β. ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ Β, ἀντιστοιχεῖ **ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ Α.

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow & \downarrow\uparrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad ἢ \quad \begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Ὁ τρόπος αὐτὸς τῆς ἀντιστοιχίας μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων Α καὶ Β λέγεται **ἀντιστοιχία ἕνα - μ' ἕνα ἢ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία** τὰ δὲ σύνολα Α καὶ Β λέγονται στὴν περίπτωσι αὐτὴ **ἰσοδύναμα ἢ ἰσοδυναμικά**. Ἡ σχέσις «τὸ σύνολο Α εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο Β» γράφεται συμβολικά:

$$A \sim B$$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1) Ἂν $A = \{x \mid x$ ἐποχὴ τοῦ ἔτους$\}$
καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,
τότε: $A \sim B$

2) Ἂν $A = \{x \mid x$ πλευρὰ τριγώνου$\}$
καὶ $B = \{x \mid x$ κορυφὴ τριγώνου$\}$,
τότε $A \sim B$

3) Ἂν $A = \{x \mid x$ σημεῖο μιᾶς περιφερείας Π$\}$
καὶ $B = \{x \mid x$ ἀκτίνα τῆς περιφερείας Π$\}$,
τότε $A \sim B$.

Πράγματι· σὲ κάθε σημεῖο Μ περιφερείας μὲ κέντρο Ο ἀντιστοιχεῖ ἡ ἀκτίνα ΟΜ καὶ ἀντιστρόφως: Σὲ κάθε ἀκτίνα ΟΜ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖο Μ τῆς περιφερείας.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς:

Ἡ ἀντιστοίχισις ἕνα - μ' ἕνα τῶν στοιχείων δύο ἰσοδυνάμων συνόλων μπορεῖ νὰ γίνῃ κατὰ διαφόρους τρόπους π. χ. γιὰ τὰ ἰσοδυναμικὰ σύνολα $A\ \{1, 2\}$ καὶ $B = \{\chi, \psi\}$ μποροῦμε νὰ ἔχουμε τὶς ἀντιστοιχίσεις

$$\begin{array}{c|c} 1 \Longleftrightarrow \chi & 1 \Longleftrightarrow \psi \\ 2 \Longleftrightarrow \psi & 2 \Longleftrightarrow \chi \end{array}$$

3.1 Ἰδιότητες τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων

Γνωρίζουμε ὅτι:

$A \sim A$ Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$ Συμμετρικὴ ἰδιότης

$$\left.\begin{array}{l} A \sim B \\ B \sim \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \sim \Gamma \quad \text{Μεταβατικὴ ἰδιότης}$$

3.2 Δύο εἴδη συνόλων

Ἀναλόγως τοῦ πλήθους τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου διακρίναμε δύο εἴδη συνόλων: τὰ **πεπερασμένα** σύνολα καὶ τὰ μὴ **πεπερασμένα**. Ἕνα σύνολο Α λέγεται πεπερασμένο ὅταν ὁ πληθικός ἀριθμός του εἶναι ἕνας φυσικὸς ἀριθμός. π. χ. τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν ἑνὸς γυμνασίου, τὸ σύνολο τῶν κατοίκων τῆς Γῆς εἶναι πεπερασμένα σύνολα.

Ποιὸς εἶναι ὁ πληθ. ἀριθμὸς (δηλ. πόσα εἶναι τὰ στοιχεῖα) τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν;

Γνωρίζουμε ὅτι στὸ σύνολο Φ δὲν ὑπάρχει τελευταῖος ἀριθμὸς καὶ γι' αὐτὸ τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων του δὲν ἐκφράζεται μ' ἕναν πληθ. ἀριθμό. Τὸ σύνολο Φ εἶναι ἕνα **μὴ πεπερασμένο** σύνολο.

Ἄλλα μὴ πεπερασμένα σύνολα εἶναι:

α) Τὸ σύνολο τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν

β) » » » περιττῶν ἀριθμῶν

γ) » » » σημείων ἑνὸς εὐθ. τμήματος Α Β

δ) » » » κλασμάτων ποὺ περιέχονται μεταξὺ 0 καὶ 1.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

6) Ποιὰ ἀπὸ τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $\Gamma = \{x \mid x$ κορυφὴ τετραγώνου$\}$, $\Delta = \{x \mid x$ πλευρὰ τετραγώνου$\}$ $E = \{x \mid x$ ψηφίο τοῦ ἀριθμοῦ 1224$\}$ εἶναι ἰσοδύναμα;

7) Μὲ πόσους τρόπους μπορεῖτε νὰ ἀντιστοιχίσετε ἕνα - μ' ἕνα τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων.

$\Delta = \{x \mid x$ κορυφὴ τριγώνου ΑΒΓ$\}$ $E = \{x \mid x$ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ$\}$;

8) Χαράξατε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔξω ἀπ' αὐτὸ σημεῖον Ο. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σύνολο τῶν σημείων τοῦ τμήματος ΑΒ καὶ τὸ σύνολον τῶν εὐθυγ. τμημάτων ποὺ ἑνώνουν τὸ σημεῖο Ο μὲ σημεῖα τοῦ ΑΒ εἶναι ἰσοδύναμα.

9) Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας καὶ τὸ σύνολον τῶν διαμέτρων τῆς περιφερείας εἶναι ἰσοδύναμα.

§ 4. Σχέσις ἐγκλεισμοῦ

Στὰ σύνολα $A = \{1, 3, 5, 7\}$ καὶ $B = \{1, 3\}$ παρατηροῦμε ὅτι: Κάθε στοιχεῖο τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ Α. Ἐπίσης στὰ σύνολα

$A = \{x \mid x$ ἄνθρωπος$\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ ἄνδρας$\}$

παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Β (δηλ. κάθε ἄνδρας) εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α.

«Ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖο συνόλου Β εἶναι καὶ στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α, τότε τὸ Β λέγεται ὑποσύνολο τοῦ Α».

Ἡ φράσις «τὸ Β εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Α», ποὺ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴ φράσι «τὸ Β ἐγκλείεται στὸ Α», γράφεται συμβολικὰ

$$B \subseteq A$$

Τὸ σύνολο A λέγεται στὴν περίπτωσι αὐτὴ σύνολο **ἀναφορᾶς** ἢ **ὑπερσύνολο** τοῦ B.

Ἡ ἴδια σχέσις μπορεῖ νὰ ἐκφρασθῆ συμβολικὰ καὶ διὰ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

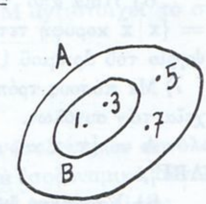
$$\boxed{x \in B \Rightarrow x \in A}$$

Δηλ.: Ἂν στοιχεῖο x ἀνήκῃ στὸ B, τότε θὰ ἀνήκῃ καὶ στὸ A.

Ὥστε ἔχουμε:

$$\boxed{B \subseteq A \Longleftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A)}$$

Γραφικῶς μὲ διάγραμμα τοῦ Venn, ἡ σχέσις ἐγκλεισμοῦ παριστάνεται μὲ τὸ σχῆμα (2).



Σχ. 2

Συμφωνοῦμε ὅτι: α) τὸ $\varnothing$ εἶναι ὑποσύνολο παντὸς συνόλου A. $\varnothing \subseteq A$

β) κάθε σύνολο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ ἑαυτοῦ του. $A \subseteq A$

Οἱ παραδοχὲς αὐτὲς εἶναι σύμφωνες μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ὑποσυνόλου.

Παραδείγματα:

1) Τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς B΄ Γυμνασίου εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου.

2) Τὸ σύνολο τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων.

3) Τὸ σύνολο τῶν κατοίκων τῆς Γαλλίας εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν κατοίκων τῆς Εὐρώπης.

4) Τὸ σύνολο τῶν φυσ. ἀριθμῶν εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων τῆς Ἀριθμητικῆς $\Phi \subseteq \Phi_o$.

5) Τὸ σύνολο τῶν σημείων ἑνὸς τόξου εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς περιφερείας τοῦ τόξου τούτου.

4.1 Ἰδιότητες τῆς σχέσεως «ἐγκλεισμοῦ»

1) Ἔχουμε δεχθῆ ὅτι:

$A \subseteq A$ **Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης**

2) Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, τότε θὰ εἶναι καὶ $A \subseteq \Gamma$

ἢ συμβολικά: $\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq \Gamma \end{array}\right\} \Rightarrow A \subseteq \Gamma$ **Μεταβατικὴ ἰδιότης**

4.2 Δυναμοσύνολα

Ἂς πάρουμε τὸ σύνολο $A = \{\alpha, \beta\}$ καὶ ὅλα τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ, δηλαδὴ τὰ σύνολα:

$$\varnothing, \ \{\alpha\}, \ \{\beta\}, \ \{\alpha, \beta\}$$

κι' ἄς σχηματίσουμε τὸ σύνολο:

$$\Big\{ \varnothing, \ \{\alpha,\}, \ \{\beta\}, \ \{\alpha, \beta\} \Big\},$$

ποὺ ἔχει ὡς στοιχεῖα ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ A καὶ μόνον αὐτά. Τοῦτο λέγεται **δυναμοσύνολο** τοῦ συνόλου A.

Γενικῶς: **Δυναμοσύνολο ἑνὸς συνόλου A λέγεται τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων αὐτοῦ**. Συμβολίζεται δέ: $p(A)$.

Παραδείγματα:

1) Ἂν $A = \{\alpha\}$, τότε $p(A) = \Big\{ \varnothing, \{\alpha\} \Big\}$

2) » $A = \{\alpha, \beta\}$, » $p(A) = \Big\{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\} \Big\}$

3) » $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, » $p(A) = \Big\{ \varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma\} \Big\}$

Ἂν προσέξουμε τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων κάθε δυναμοσυνόλου τῶν παραδειγμάτων μας διακρίνουμε ὅτι:

Τὸ μονομελὲς σύνολο ἔχει δυναμοσύνολο μὲ πληθ. ἀριθμὸ 2 ἢ 2^1.
» 2/μελὲς » » » » » 2^2.
» 3/μελὲς » » » » » 2^3.
» 4/μελὲς » » » » » 2^4.
. . . .
» ν/μελὲς » » » » » 2^ν.
(ὅπου $\nu \in \Phi$)

Ὥστε ἀπὸ κάθε σύνολο μὲ ν στοιχεῖα σχηματίζονται 2^ν ὑποσύνολα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

10) Νὰ σχηματίσετε ὅλα τὰ ὑποσύνολα τῶν συνόλων

$A = \{0,1\}$ $B = \{0, 1, 2\}$

11) Νὰ σχηματίσετε ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν πλευρῶν τριγώνου ΑΒΓ.

12) Ἂν $A = \{1, 2, 3 \ldots 99\}$ $B = \{1, 2, 3 \ldots 9\}$
$\Gamma = \{1, 2, 3 \ldots 999\}$

Νὰ σχηματίσετε τὶς σχέσεις ἐγκλεισμοῦ μεταξὺ τῶν συνόλων Α, Β, Γ.

13) Ἂν $A = \{1, 2, 3 \ldots 99\}$ $B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $60\}$.
Νὰ ἐξετάσετε ἂν $A \subseteq B$.

14) Ἂν $A = \{x \mid x$ Εὐρωπαῖος$\}$ $B = \{x \mid x$ Ἕλλην$\}$
$\Gamma = \{x \mid x$ Καναδὸς$\}$ $\Delta = \{x \mid x$ Βέλγος$\}$

Νὰ ἐξετάσετε ποιὰ ἀπὸ τὰ σύνολα Β, Γ, Δ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Α.

15) Νὰ γράψετε σύνολα ἰσοδυναμικὰ μὲ τὸ σύνολο
$A = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $12\}$

§ 5. Τομὴ συνόλων

Ἂν προσέξουμε τὰ σύνολα $A = \{3, 5, 6\}$ καὶ $B = \{3, 6, 7, 8\}$, διακρίνουμε ὅτι ἔχουν τὰ στοιχεῖα 3, 6 **κοινά**.

Τὸ σύνολο $\Gamma = \{3, 6\}$, ποὺ ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Α καὶ Β καὶ μόνον αὐτά, λέγεται **τομὴ** τῶν Α καὶ Β καὶ γράφεται:

$$\Gamma = A \cap B$$

Η τομὴ μπορεῖ νὰ παρασταθῇ συμβολικῶς καὶ διὰ τῶν κοινῶν στοιχείων μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

$$\boxed{(x \in A \text{ καὶ } x \in B) \Longleftrightarrow x \in (A \cap B)}$$

Δηλαδή: α) Ἂν ἕνα στοιχεῖο x ἀνήκῃ στὸ Α **καὶ** στὸ Β, θὰ ἀνήκῃ καὶ στὸ $A \cap B$ καὶ

β) Ἂν ἕνα στοιχεῖο x ἀνήκῃ στὴν τομὴ δύο συνόλων, θὰ ἀνήκῃ καὶ σὲ καθένα ἀπὸ τὰ σύνολα αὐτά.

Εἰδικὲς περιπτώσεις:

α) Τὰ σύνολα $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{5, 6\}$, καθὼς παρατηροῦμε, δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα καὶ γι' αὐτὸ λέγονται **ξένα** μεταξύ τους. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ τομή τους εἶναι τὸ κενὸ σύνολο.

$$A \cap B = \varnothing$$

β) Ἂν μᾶς δοθοῦν τὰ σύνολα

$$A = \{1, 2, 3\} \text{ καὶ } B = \{1, 2\},$$

παρατηροῦμε ὅτι $B \subseteq A$. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ εἶναι φανερὸ ὅτι : $A \cap B = B$

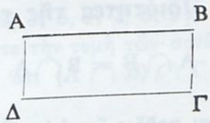
ἢ συμβολικά :
$$B \subseteq A \Rightarrow A \cap B = B$$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α : 1) Στὸ σχῆμα (3)

Σχ. 3

γιὰ τὰ σημειοσύνολα $x\,\psi$ καὶ $A\,B$ ἔχουμε : $x\,\psi \cap A\,B = A\,B$.

2) Στὸ σχῆμα (4) γιὰ τὰ σημειοσύνολα AB, $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA



Σχ. 4

ἔχουμε : $A\,B \cap B\,\Gamma = \{B\}$, $B\,\Gamma \cap \Gamma\Delta = \{\Gamma\}$, $\Gamma\Delta \cap \Delta A = \{\Delta\}$,
$\Delta A \cap A\,B = \{A\}$

5.1 Σύζευξις χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων

Γιὰ τὰ σύνολα $A = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $12\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
καὶ $B = \{x \mid x$ δ ιαιρέτης τοῦ $15\} = \{1, 3, 5, 15\}$
ἔχουμε : $A \cap B = \{1, 3\}$
ἢ $A \cap B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ 12 καὶ τοῦ $15\}$

Παρατηροῦμε δὲ ὅτι :

α) Τὰ στοιχεῖα τοῦ A ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα **«διαιρέτης τοῦ 12»**.

β) Τὰ στοιχεῖα τοῦ B ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα **«διαιρέτης τοῦ 15»**.

Τὰ στοιχεῖα τῆς τομῆς ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ A ***καὶ*** τῶν στοιχείων τοῦ B **«διαιρέτης τοῦ 12 *καὶ* τοῦ 15»**.

Ὥστε : Τὰ στοιχεῖα τῆς τομῆς ἔχουν τὴν **διπλῆ ἰδιότητα** ποὺ προέρχεται ἀπὸ τὴ **σύζευξι** τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων.

Γενικά : Ἂν $A = \{x \mid x$ ἔχει τὴν α ἰδιότητα$\}$
καὶ $B = \{x \mid x$ ἔχῃ τὴν β ἰδιότητα$\}$,

Τότε : $A \cap B = \{x \mid x$ ἔχει τὶς ἰδιότητες α καὶ β$\}$

Παραδείγματα:

1) $A = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ 5$\}$
$B = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ 3$\}$
$A \cap B = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ 5 **καὶ** τοῦ 3$\}$

2) $A = \{x \mid x$ ἀριστοῦχος στὰ Ἑλληνικὰ$\}$
$B = \{x \mid x$ ἀριστοῦχος στὰ Μαθηματικὰ$\}$
$A \cap B = \{x \mid x$ ἀριστοῦχος στὰ Ἑλληνικὰ **καὶ** στὰ Μαθηματικά$\}$. 3) Ἡ διπλῆ ἀνίσωσις: $2 < x < 5$, εἶναι σύζευξις τῶν ἀνισώσεων $x < 5$ καὶ $x > 2$ ἢ μὲ τὸ συμβολισμὸ τῶν συνόλων: εἶναι ἡ τομὴ τῶν συνόλων $\{x \mid x < 5\}$ **καὶ** $\{x \mid x > 2\}$.

5.2 Ἰδιότητες τῆς τομῆς

1) Εἶναι φανερὸ ὅτι: $A \cap B = B \cap A$. (**Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης**).

2) Ἐπειδὴ ἡ τομὴ εἶναι πρᾶξις διμελής, (δύο μόνο σύνολα συνδέουμε σὲ κάθε πρᾶξι) εὕρεσις τομῆς τριῶν συνόλων κατὰ τὴ σειρὰ Α, Β, Γ σημαίνει: α) Εὕρεσιν τῆν τομῆς τῶν Α καὶ Β, $A \cap B$ καὶ
β) Εὕρεσιν τῆς τομῆς τῶν συνόλων $A \cap B$ καὶ Γ, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

Ἔτσι ἂν εἶναι $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 4, 5\}$

τότε ἔχουμε: $A \cap B = \{2, 3\}$ $\quad (A \cap B) \cap \Gamma = \{2, 3\} \cap \{3, 4, 5\}$
$$\Longleftrightarrow (A \cap B) \cap \Gamma = \{3\}.$$

Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν βροῦμε τὴν τομὴ τοῦ συνόλου Α μὲ τὸ σύνολο $B \cap \Gamma$. Εἶναι δηλαδή:

$(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ **Προσεταιριστικὴ ἰδιότης**

Σημ. 1η. Μὲ συνδυασμὸ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητος εὑρίσκουμε ὅτι:

Ἡ τομὴ τριῶν συνόλων δὲν ἀλλάζει μὲ ὁποιανδήποτε σειρὰ κι' ἂν τὰ πάρουμε.

π. χ. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$ Προσεταιρ. ἰδιότης
$= A \cap (\Gamma \cap B)$ Ἀντιμ/κὴ »
$= (A \cap \Gamma) \cap B$ Προσεταιρ. »

Σημ. 2α. Ἂν ζητᾶμε τὴν τομὴ περισσοτέρων συνόλων, εὑρίσκουμε τὴν τομὴν τῶν τριῶν, ἔπειτα τὴν τομὴ τοῦ νέου συνόλου μὲ τὸ 4ο σύνολο **κ.ο.κ.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

16) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τομές:

α) $\{1, 2, 3\} \cap \{4, 5, 6, 7\}$ β) $\{1, 2, 5\} \cap \{5, 6\}$

γ) $\{1, 5, 6\} \cap \{1, 5\}$

17) Στὸ ὑπερσύνολο τῶν τριγώνων ἑνὸς ἐπιπέδου νὰ βρῆτε τὴν τομὴ τῶν ἰσοσκελῶν καὶ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων.

18) Στὸ ὑπερσύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου σας νὰ βρῆτε τὴν τομὴ τοῦ συνόλου τῶν ἀριστούχων τῆς Α′ τάξεως μὲ τὸ σύνολο τῶν ἀριστούχων τῆς Β′ τάξεως.

19) Νὰ βρῆτε τὴν τομὴ α) μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας αὐτῆς, β) ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας αὐτοῦ.

20) Σὲ μιὰ εὐθεῖα xy νὰ σημειώσετε δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἔπειτα νὰ βρῆτε τὴν τομὴ α) τῶν ἡμιευθειῶν Αx καὶ Βy β) τῶν ἡμιευθειῶν Αψ καὶ Βχ.

21) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ ἀκέραιος μικρότερος τοῦ $4\}$ νὰ βρῆτε τὴν τομὴ τῶν συνόλων Α καὶ Β.

22) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $(A \cap B) \cap \Gamma = (\Gamma \cap A) \cap B$ διὰ τὰ σύνολα

$$A = \{0, 1, 2\} \quad B = \{1, 2, 3, 4\} \quad \Gamma = \{2, 3, 5\}$$

§. 6. Ἕνωσις συνόλων

Ἂς εἶναι $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$. Τότε τὸ σύνολο $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων καὶ **μόνον** ἀπὸ αὐτά, λέγεται **Ἕνωσις** τῶν συνόλων Α καὶ Β καὶ γράφεται:

$$\boxed{A \cup B = \Gamma}$$

(Ἐννοεῖται κάθε στοιχεῖο τῆς ἑνώσεως λαμβάνεται μόνον μία φορά).

Παρατηροῦμε ὅτι: Ἂν στοιχεῖο x ἀνήκῃ στὸ σύνολο Α ἢ στὸ Β ἢ καὶ στὰ δύο, τότε θὰ ἀνήκῃ καὶ στὴν ἕνωσιν αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως: Ἂν στοιχεῖο x ἀνήκῃ στὴν ἕνωσι τῶν Α καὶ Β, τότε θὰ ἀνήκῃ ἢ στὸ Α ἢ στὸ Β ἢ καὶ στὰ δύο. Ἢ συμβολικά:

$$(x \in A \quad \text{ἢ} \quad x \in B) \Longleftrightarrow x \in (A \cup B)$$

Παραδείγματα:

α) Ἂν $A = \{x \mid x$ μαθητὴς γυμνασίου$\}$ καὶ
$B = \{x \mid x$ μαθήτρια γυμνασίου$\}$

τότε $A \cup B = \{x \mid x$ μαθητὴς ἢ μαθήτρια γυμνασίου$\}$

β) Ἂν $A = \{x \mid x$ ἀριστοῦχος μαθητὴς$\}$ καὶ

$B = \{x \mid x$ μαθητὴς τῆς Β΄ γυμνασίου$\}$,

τότε $A \cup B = \{x \mid x$ ἀριστοῦχος μαθητὴς ἢ μαθητὴς Β΄ γυμνασίου$\}$

Ι. Ἀποκλειστικὴ διάζευξις

Στὸ α΄ παράδειγμα παρατηροῦμε ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς ἑνώσεως εἶναι μαθηταὶ ἢ μαθήτριες· ἔχουν δηλαδὴ **μία μόνον** ἀπὸ τὶς δύο χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες (ἢ μαθητής ἢ μαθήτρια). Εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι **ἀποκλείεται** ἕνα στοιχεῖο τῆς ἑνώσεως νὰ ἔχη καὶ τὶς δύο ἰδιότητες (νὰ εἶναι μαθητὴς καὶ μαθήτρια). Ἔχουμε, ὅπως λέμε, μίαν **ἀποκλειστικὴν διάζευξιν** τῶν ἰδιοτήτων. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ ἀνταποκρίνεται στὴν ἕνωσι δύο συνόλων, ποὺ εἶναι **ξένα** μεταξύ των, ὁπότε κάθε στοιχεῖον τῆς ἑνώσεως ἀνήκει ἀποκλειστικὰ στὸ ἕνα μόνο ἀπὸ τὰ δύο σύνολα.

ΙΙ. Μὴ ἀποκλειστικὴ διάζευξις

Στὸ β΄ παράδειγμα παρατηροῦμε ὅτι: τὰ στοιχεῖα τῆς ἑνώσεως εἶναι ἢ ἀριστοῦχοι μαθηταὶ ἢ μαθηταὶ τῆς Β΄ γυμνασίου· ἔχουν δηλαδὴ τὴν μία ἀπὸ τὶς χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες. Εἶναι ὅμως φανερὸ ὅτι ἕνα στοιχεῖο τῆς ἑνώσεως αὐτῆς μπορεῖ νὰ ἔχη **καὶ τὶς δύο ἰδιότητες.** Μπορεῖ νὰ εἶναι μαθητὴς τῆς Β΄ Γυμνασίου καὶ ἀριστοῦχος μαθητής. Στὴν περίπτωσιν αὐτὴ λέμε ὅτι ἔχουμε **μὴ ἀποκλειστικὴ διάζευξιν** τῶν ἰδιοτήτων. Τοῦτο παρουσιάζεται στὴν ἕνωσι δύο συνόλων, ποὺ δὲν εἶναι ξένα μεταξύ των, ὁπότε τὰ κοινὰ στοιχεῖα ἔχουν καὶ τὶς δύο χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες.

Ἄλλα παραδείγματα

1) Ἂν $A = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ $3\} = \{0, 3, 6, 9 \ldots\}$

καὶ $B = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ $2\} = \{0, 2, 4, 6, 8 \ldots\}$.

τότε $A \cup B = \{x \mid x$ πολ/σιο τοῦ 3 ἢ τοῦ $2\}$

$= \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9 \ldots\}$

Διάζευξις μὴ ἀποκλειστική· (γιατί;)

2) Ἂν $A = \{x \mid x$ τρίγωνο ἰσοσκελὲς$\}$

καὶ $B = \{x \mid x$ τρίγωνο ὀρθογώνιο$\}$,

τότε $A \cup B = \{x \mid x$ τρίγωνο ὀρθογώνιο ἢ ἰσοσκελὲς$\}$

Διάζευξις μὴ ἀποκλειστική· (γιατί;)

3) Ἂν $A = \{x \mid x$ τρίγωνο ἰσόπλευρο$\}$

καὶ $B = \{x \mid x$ τρίγωνο ὀρθογώνιο$\}$,

τότε $A \cup B = \{x \mid x$ τρίγωνο ἰσόπλευρο ἢ ὀρθογώνιο$\}$.

Διάζευξις ἀποκλειστική· (γιατί;)

4) Ἂν $A = \{x \mid x$ ἄρτιος ἀριθμὸς$\}$
$B = \{x \mid x$ περιττὸς ἀριθμὸς$\}$,
τότε $A \cup B = \{x \mid x$ ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός$\}$.

Διάζευξις ἀποκλειστική.

5) ἀνισωεξίσωσις $x \leq 3$ εἶναι ἀποκλειστικὴ διάζευξις τῶν συνόλων $\{x \mid x < 3\}$ καὶ $\{x \mid x = 3\}$.

6.1 Ἰδιότητες τῆς ἑνώσεως

1) Εἶναι φανερὸν ὅτι: $A \cup B = B \cup A$ **Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης**

2) Ἂν $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ καὶ $\Gamma = \{3, 5, 8\}$ ἐργαζόμενοι ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῆς τομῆς τριῶν συνόλων A, B, Γ

εὑρίσκουμε: α) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$
$(A \cup B) \cup \Gamma = \{1, 2, 3, 5, 8\}$
β) $B \cup \Gamma = \{2, 3, 5, 8\}$
$A \cup (B \cup \Gamma) = \{1, 2\} \cup \{2, 3, 5, 8\}$
$= \{1, 2, 3, 5, 8\}$

ὥστε: $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$ **Προσεταιριστικὴ ἰδιότης**

Σημείωσις: Μὲ συνδυασμὸ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητος εὑρίσκουμε ὅτι: **Μὲ ὁποιαδήποτε σειρὰ κι' ἂν ἑνώσουμε τρία ἢ περισσότερα σύνολα τὸ ἀποτέλεσμα δὲν ἀλλάζει**

π. χ. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)$
$= A \cup (\Gamma \cup B)$ ἀντιμ/κὴ ἰδιότης
$= (A \cup \Gamma) \cup B$ προσεταιρ. »

3) Εἶναι φανερὸν ὅτι:

$$A \cup \varnothing = A$$

ὥστε: **Τὸ $\varnothing$ εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς ἑνώσεως.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

23) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἑνώσεις:

α) $\{2, 5, 7\} \cup \{3, 4, 6\}$ β) $\{2, 5, 7\} \cup \{2, 7\}$

24) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι:

$$(A \cup B) \cup \Gamma = (\Gamma \cup A) \cup B$$

ὅπου $A = \{2, 5, 6\}$, $B\{5, 6, 7\}$, $\Gamma = \{1, 2, 3\}$

25) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι :

$$A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$$ μὲ

τὰ σύνολα Α, Β, Γ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

26) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νὰ βρῆτε τὴν ἕνωσι

$$AB \cup B\Gamma \cup A\Gamma$$

27) Ἂν εἶναι $A \cup B = \varnothing$ τί συμπεραίνετε γιὰ τὰ σύνολα Α καὶ Β.

28) Σὲ ποιά ἀπὸ τὶς ἑνώσεις ;

$A \cup B$ ὅπου $A = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $2\}$

$A \cup B$ » $A = \{3, 5, 7\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $19\}$

ἡ διάζευξις εἶναι ἀποκλειστικὴ καὶ σὲ ποιά δὲν εἶναι ἀποκλειστική ;

29) Ἀναφέρατε ἕνα παράδειγμα ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως κι' ἕνα μὴ ἀποκλειστικῆς.

§ 7. Καρτεσιανὸ γινόμενο

α) **Διατεταγμένον ζεῦγος.** Γνωρίζουμε ὅτι σ' ἕνα διμελὲς σύνολο, π. χ. στὸ $\{\alpha, \beta\}$, τὰ στοιχεῖα δὲν εὑρίσκονται σὲ διάταξι. Γι' αὐτὸ καὶ εἶναι : $\{\alpha, \beta\} = \{\beta, \alpha\}$. Ἂν θέλουμε ὅμως νὰ ἀναφερθοῦμε σ' ἕνα ζεῦγος στοιχείων, καθένα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἔχει **ὁρισμένη σειρά,** ὅπως συμβαίνει μὲ τοὺς ὅρους ἑνὸς κλάσματος, π. χ. τοῦ $\frac{2}{5}$ (ὅπου τὸ 2 εἶναι ἀριθμητὴς καὶ τὸ 5 παρονομαστής), τότε θὰ τὸ ὀνομάσουμε **διατεταγμένο ζεῦγος** καὶ θὰ τὸ σημειώσουμε ἐντὸς παρενθέσεως. Π. χ. ἂν θέλουμε ν' ἀναφερθοῦμε στὸ σύνολο τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$, μποροῦμε νὰ γράψουμε **(2, 5) καὶ εἶναι φανερὸν ὅτι :**

$$(2, 5) \neq (5, 2)$$

Γενικά : **Ἕνα ζεῦγος στοιχείων, στὸ ὁποῖον γνωρίζουμε ποιὸ στοιχεῖο εἶναι τὸ πρῶτο λέγεται διατεταγμένο ζεῦγος.**

Ἄλλο παράδειγμα διατεταγμένου ζεύγους εἶναι οἱ ὅροι τῆς διαιρέσεως.

β) **Καρτεσιανὸ γινόμενο.** Θὰ ἐξετάσουμε τώρα ἕναν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον ἀπὸ δύο σύνολα Α καὶ Β σχηματίζουμε ἕνα νέο σύνολο μὲ στοιχεῖα διατεταγμένα ζεύγη.

Ἂς πάρουμε τὰ σύνολα $A = \{2, 5\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ κι' ἄς σχηματίσουμε ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ποὺ ἔχουν ὡς α΄ στοιχεῖο τὸ στοιχεῖο 2 τοῦ Α καὶ ὡς β΄ στοιχεῖο ἕνα στοιχεῖο τοῦ Β

$$(2, \alpha) \quad (2, \beta) \quad (2, \gamma)$$

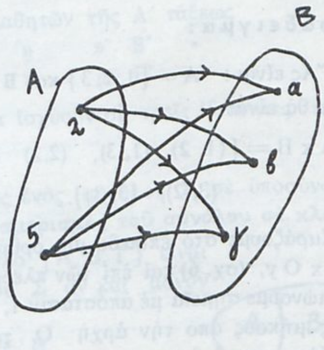
Τὸ ἴδιο ἐπαναλαμβάνουμε καὶ μὲ τὸ ἄλλο στοιχεῖο τοῦ Α, τὸ 5

$$(5, \alpha) \quad (5, \beta) \quad (5, \gamma).$$

Ἂν εἶχε κι' ἄλλα στοιχεῖα τὸ Α θὰ συνεχίζαμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

Τὸ σύνολο $\Gamma = \{(2, \alpha), (2, \beta), (2, \gamma), (5, \alpha), (5, \beta), (5, \gamma)\}$ λέγεται **καρτεσιανὸ γινόμενο** τῶν συνόλων Α καὶ Β καὶ σημειώνεται

$$\boxed{\Gamma = A \times B}$$



Γενικά: **Καρτεσιανὸ γινόμενο δύο μὴ κενῶν συνόλων Α καὶ Β λέγεται τὸ σύνολο ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν** (x, y) **ὅπου** $x \in A$ **καὶ** $y \in B$

ἢ συμβολικὰ $\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ καὶ } y \in B\}}$

Παρατηρήσεις: 1) Ἂν $A = \{\alpha, \beta\}$ καὶ $B = \{\gamma, \delta\}$,

τότε ἔχουμε: $A \times B = \{(\alpha, \gamma), (\alpha, \delta), (\beta, \gamma), (\beta, \delta)\}$

καὶ $B \times A = \{(\gamma, \alpha), (\gamma, \beta), (\delta, \alpha), (\delta, \beta)\}$

εἶναι φανερὸν δὲ ὅτι $A \times B \neq B \times A$

2) Ἂν συμβῇ ἕνα ἀπὸ τὰ σύνολα (ἢ καὶ τὰ δύο) νὰ εἶναι κενὸ σύνολο, τότε συμφωνοῦμε ὅτι: $A \times \varnothing = \varnothing$.

7.1 Γραφικὴ παράστασις

α) Ἄς εἶναι $A = \{2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$

Τότε τὸ $A \times B$ παριστάνεται μὲ τὸν ἀκόλουθο πίνακα διπλῆς εἰσόδου (σχ. 5).

A \ B	α	β	γ
2	(2,α)	(2,β)	(2,γ)
3	(3,α)	(3,β)	(3,γ)

Σχ. 5

β) Ἄν τὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, τότε τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο παριστάνει ἕνα σύνολο ἀπὸ σημεῖα στὸ ἐπίπεδο.

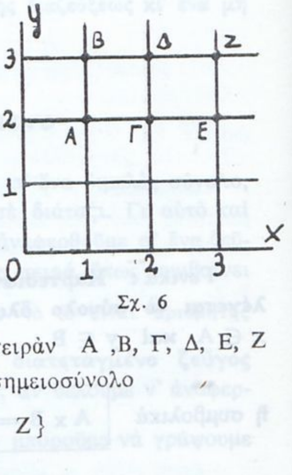
Παράδειγμα:

Ἄς εἶναι : $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{2, 3\}$ ὁπότε θὰ εἶναι

$A \times B = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (2,2)\ \ (2, 3)$

$(3, 2),\ (3, 3)\}$.

Χαράζουμε στὸ ἐπίπεδο μία ὀρθὴ γωνία, τὴν $x O y$, (σχ. 6) καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν της σημειώνουμε σημεῖα μὲ ἀπόστασιν 1, 2, 3 μονάδες μήκους ἀπὸ τὴν ἀρχὴ O. τότε, καθὼς ξέρουμε, τὰ διατεταγμένα ζεύγη



Σχ. 6

(1,2), (1,3), (2,2), (2,3), (3,2), (3,3), παριστάνονται μὲ τὰ σημεῖα—κόμβους κατὰ σειρὰν Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ

Ἔτσι τὸ σύνολο $A \times B$ παριστάνεται μὲ τὸ σημειοσύνολο

$\{A,\ B,\ \Gamma,\ \Delta,\ E,\ Z\}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

30) Ἄν $A = \{2, 3, 5\}$ καὶ $B = \{\chi, \psi, \omega\}$ νὰ ἐκφράσετε τὰ σύνολα $A \times B$ καὶ $B \times A$

31) Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ καρτεσιανὸ γινόμενο τοῦ συνόλου $A = \{\alpha, \beta\}$ α) μ' ἕνα μονομελὲς β) μ' ἕνα διμελὲς γ) μ' ἕνα τριμελὲς σύνολο ; Στηριζόμενοι στὶς ἀπαντήσεις τῶν ἐρωτημάτων αὐτῶν μπορεῖτε νὰ βρῆτε τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ καρτεσιανοῦ γινομένου ἑνὸς συνόλου A μὲ μ στοιχεῖα μ' ἕνα σύνολο B ποὺ ἔχει ν στοιχεῖα;

32) Ἄν $A = \{1, 2, 3\}$ νὰ παραστήσετε γραφικῶς, (μὲ σημεῖα) τὸ σύνολο $A \times A$.

§ 8. Διαμερισμὸς συνόλου

1) Στὸ σύνολο Γ τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου μας ξεχωρίζουμε δύο ὑποσύνολα:

α) Τὸ ὑποσύνολο Φ τῶν φωνηέντων

β) » » Σ » συμφώνων.

Τὰ ὑποσύνολα αὐτὰ

α) Εἶναι ξένα μεταξύ των

β) Ἔχουν ὡς ἕνωσιν τὸ σύνολο Γ

γ) Κανένα ἀπὸ αὐτὰ δὲν εἶναι κενό.

2) Στὸ σύνολο Σ τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου ξεχωρίζουμε τρία ὑποσύνολα;

α) Τὸ ὑποσύνολο τῶν μαθητῶν τῆς Α΄ τάξεως

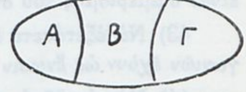
β) » » » » » Β΄ »

γ) » » » » » Γ΄ »

Καὶ σ' αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα ἰσχύουν οἱ τρεῖς ἰδιότητες τοῦ 1ου παραδείγματος.

Γενικά: Ὁ διαχωρισμὸς ἑνὸς συνόλου Σ σὲ ὑποσύνολα μὲ τὶς παραπάνω ἰδιότητες λέγεται **διαμερισμὸς τοῦ συνόλου σὲ κλάσεις.**

Ἢ συμβολικά: Τὸ σύνολο $\{A, B, \Gamma\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Σ ἂν καὶ μόνον ἐάν:



1) $A \neq \varnothing, \quad B \neq \varnothing, \quad \Gamma \neq \varnothing$

2) $A \cup B \cup \Gamma = \Sigma$

3) $A \cap B = \varnothing, \quad B \cap \Gamma = \varnothing, \quad \Gamma \cap A = \varnothing$

Σχ. 7

Παραδείγματα:

1) Τὸ σύνολο τῶν ὑλικῶν σωμάτων διαμερίζεται σὲ 3 κλάσεις: Στὰ στερεά, στὰ ὑγρὰ καὶ στὰ ἀέρια.

2) Τὸ σύνολο τῶν τριγώνων διαμερίζεται σὲ 3 κλάσεις: Στὰ ὀρθογώνια, στὰ ὀξυγώνια καὶ στὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.

('Ενῶ ἡ διάκρισις σὲ ἰσοσκελῆ, ἰσόπλευρα καὶ σκαληνὰ δὲν εἶναι διαμερισμός· γιατί;)

3) Τὸ σύνολο $\Phi = \{1, 2, 3, \ldots\}$ διαμερίζεται σὲ 2 κλάσεις: Στοὺς περιττοὺς καὶ στοὺς ἀρτίους ἀριθμούς.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

32) Στὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου νὰ ὁρίσετε διαφόρους τρόπους διαμερισμοῦ.

33) Νὰ ὁρίσετε ἕναν τρόπον διαμερισμοῦ τοῦ συνόλου τῶν ἀνθρώπων.

34) Στὸ σύνολο τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «μαθητής» νὰ ὁρίσετε ἕναν τρόπον διαμερισμοῦ.

35) Στὸ σύνολο τῶν καθηγητῶν τοῦ γυμνασίου σας νὰ ὁρίσετε ἕναν τρόπον διαμερισμοῦ.

36) Νὰ ὁρίσετε ἕναν τρόπον διαμερισμοῦ τοῦ συνόλου

$$A = \{1, 2, 3 \ldots 10\}$$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πληθ. ἀριθμὸς τοῦ δυναμοσυνόλου ἑνὸς συνόλου ποὺ ἔχει 4 στοιχεῖα.

38) Τὸ δυναμοσύνολο ἑνὸς συνόλου A ἔχει πληθ. ἀριθμὸ 16. Ποιός εἶναι ὁ πληθ. ἀριθμὸς τοῦ συνόλου A;

39) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ 60.

40) Ποιό εἶναι τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι μικρότερα τοῦ 100.

41) Νὰ συμβολίσετε, μὲ περιγραφή, τὸ σύνολο τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας ποὺ ἔχει ὡρισμένο κέντρο, τὸ σημεῖο K καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ 3 cm.

42) Ἡ διάκρισις τῶν τριγώνων σὲ ἰσοσκελῆ, ἰσόπλευρα καὶ σκαληνὰ εἶναι διαμερισμὸς τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων ἢ ὄχι.

43) Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σύνολο τῶν ὀξειῶν καὶ τὸ σύνολο τῶν ἀμβλειῶν γωνιῶν ἔχουν ὡς ἕνωσιν τὸ σύνολον τῶν κυρτῶν γωνιῶν.

44) Νὰ εὑρεθῇ ὁ πληθ. ἀριθμὸς τοῦ δυναμοσυνόλου τοῦ συνόλου

$$A = \{x \mid x \text{ φυσικὸς ἀριθμὸς} < 5\}$$

45) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως «ὅλοι».

46) Νὰ θέσετε σὲ ἀντιστοιχία μ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων $A = \{x \mid x \text{ γράμμα τῆς λέξεως «διά»}\}$

καὶ $B = \{1, 2, 3\}$

47) Νὰ γράψετε μὲ ἀναγραφὴ τὴν τομὴ τῶν συνόλων

$$A = \{x \mid x \text{ πολ/σιο τοῦ } 5\}$$

καὶ $B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 60\}$

48) Δύο σύνολα A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα συνόλου Γ. Τὸ A ἔχει 5 στοιχεῖα, τὸ B 6 καὶ ἡ τομή των 2 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολο $A \cup B$.

49) Νὰ γράψετε μὲ ἀναγραφὴ τὸ σύνολο τῶν πρώτων ἀριθμῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ 50.

50) Ἂν $A \subseteq B$ δείξατε τότε ὅτι $A \cup B = B$.

51) Γιὰ δύο σύνολα A καὶ B νὰ ἐξετάσετε ἂν ἀληθεύει ἡ σχέσις

$$(A \cap B) \cup B = B$$

52) Γιὰ δύο σύνολα A καὶ B νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$$

53) Γιὰ τρία σύνολα A, B, Γ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(A \cup \Gamma) \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup \Gamma$$

54) Ἂν A, B εἶναι σύνολα νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ

$$\left.\begin{array}{l} A \subseteq B \\ B \subseteq A \end{array}\right\} \Rightarrow A = B$$

55) Νὰ ἐξετάσετε ἂν γιὰ τρία σύνολα ἰσχύει ἡ σχέσις

$$(A \cup B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \cup (A \cap \Gamma)$$

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
Α΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Β΄

ΣΧΕΣΕΙΣ — ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

§ 9. Διμελεῖς σχέσεις

Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3\}$ καὶ μία σχέσις — κανὼν — μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων αὐτῶν· ἡ σχέσις;

«Τὸ $x \in A$ **εἶναι διπλάσιο τοῦ** $y \in B$») (1)

Εἶναι φανερὸν ὅτι μερικὰ διατεταγμένα ζεύγη $(x\,y)$ ὅπου $x \in A$, καὶ $y \in B$, ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν (1). Τὰ διατεταγμένα ζεύγη: (2, 1), (4, 2), (6, 3) ἐνῷ ὅλα τὰ ἄλλα, ὅπως π. χ. τὰ (2, 2) (2, 3) ... δὲν τὴν ἐπαληθεύουν.

Μὲ τὴν σχέσιν λοιπὸν (1) τὸ σύνολο $A \times B$ διαμερίζεται σὲ δύο ὑποσύνολα: α) Στὸ ὑποσύνολο Γ τῶν δ/νων ζευγῶν ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν (1)

$$\Gamma = \{(2, 1)\quad (4, 2)\quad (6, 3)\} \text{ καὶ}$$

β) Στὸ ὑποσύνολο τῶν δ/νων ζευγῶν ποὺ δὲν ἐπαληθεύουν τὴν (1).

Λέγομε τότε ὅτι: Τὸ σύνολο Γ ὁρίζει μίαν **διμελῆ σχέσι** (συνδέει κάθε φορὰ δύο στοιχεῖα).

Γενικά: **Ἄς εἶναι Α, Β δύο, μὴ κενά, σύνολα καὶ R* μία σχέσις — κανὼν — μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ Α καὶ τοῦ Β· τότε τὸ σύνολο τῶν δ/νων ζευγῶν** $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in A,\ y \in B$ καὶ x **συνδέεται μὲ τὸ** y **μὲ τὴν σχέσιν** $R\}$ ὁρίζει μίαν **διμελῆ σχέσιν.**

Ἐννοεῖται ὅτι μία σχέσις μπορεῖ νὰ συνδέῃ τὰ στοιχεῖα ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ συνόλου Α ὁπότε ἡ σχέσις θὰ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $A \times A$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

Ἄς εἶναι: Α = { Ἀθῆναι, Ρώμη, Παρίσι, Βρυξέλλες }
Β = { Γαλλία, Ἑλλάς, Βέλγιο, Ἰταλία }.

καὶ ἡ σχέσις:

«Ἡ $x \in A$ **εἶναι πρωτεύουσα τῆς** $\psi \in B$» (1)

Μὲ τὴν (1) ὁρίζονται τὰ διατεταγμένα ζεύγη: (Ἀθῆναι, Ἑλλάς),

---

* Μὲ τὸ R, ἀρχικὸ τῆς λέξεως Relation συμβολίζουμε τὴν σχέσιν.

(Παρίσι, Γαλλία), (Ρώμη, Ἰταλία), (Βρυξέλλες, Βέλγιον), ποὺ τὴν ἐπαληθεύουν· τὸ δὲ σύνολο

Γ = {(Ἀθῆναι, Ἑλλάς), (Παρίσι, Γαλλία), (Ρώμη, Ἰταλία), (Βρυξέλλες, Βέλγιον)} εἶναι μία διμελὴς σχέσις».

Τὸ σύνολο Α λέγεται **πεδίον ὁρισμοῦ** τῆς διμελοῦς σχέσεως ἐνῶ τὸ Β **πεδίον τιμῶν.**

2) Ἄς εἶναι: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

καὶ ἡ σχέσις (κανών) «τὸ $x \in A$ εἶναι τετράγωνο τοῦ $\psi \in B$».

Τότε ἔχουμε τὴν διμελῆ σχέσιν:

$$\Gamma = \{(1, 1) \quad (4, 2) \quad (9, 3)\},$$

ποὺ ἔχει ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τὸ Α καὶ ὡς πεδίον τιμῶν τὸ Β.

3) Ἄς εἶναι: $A = \{2, 3, 4, 5\}$

καὶ ἡ σχέσις «κανὼν» «τὸ $x \in A$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\psi \in A$».

Τότε ἔχουμε τὴν διμελῆ σχέσιν:

$$\Gamma = \{(2, 2) \quad (3, 3) \quad (4, 4) \quad (5, 5) \quad (2, 4\},$$

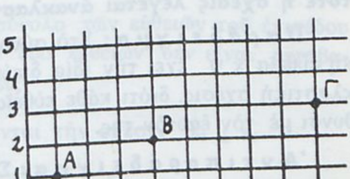
ποὺ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Α x Α καὶ ἔχει πεδίον ὁρισμοῦ καὶ τιμῶν τὸ σύνολον Α.

9.1 Γραφικὴ παράστασις διμελοῦς σχέσεως

α) Ἡ διμελὴς σχέσις τοῦ 2ου παραδείγματος παριστάνεται μὲ τὸν παραπλεύρως πίνακα «διπλῆς εἰσόδου».

B \ A	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	+								
2				+					
3									+
4									
5									

β) Ἡ ἴδια σχέσις παριστάνεται μὲ τὸ σύνολο {Α, Β, Γ} τῶν σημείων — κόμβων τοῦ ἀκολούθου σχήματος.



Παρατήρησις:

Γενικῶς ἄν δοθοῦν δύο, μὴ κενὰ σύνολα, Α, Β κι' ἕνα σύνολο Γ διατεταγμένων ζευγῶν τῶν ὁποίων τὰ α' στοιχεῖα εἶναι στοιχεῖα τοῦ Α καὶ τὰ β' στοιχεῖα εἶναι στοιχεῖα τοῦ Β, τότε ἔχουμε μία διμελῆ σχέσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

56) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ποιὰ εἶναι ἡ διμελὴς σχέσις ποὺ ὁρίζει τὸ σύνολο

$$\Gamma = \{(1, 1)\ (4, 2)\ (9, 3)\}.$$

57) Στὰ σύνολα $A = \{2, 3, 4 \ldots 10\}$ καὶ $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ὁρίζουμε τὴν διμελῆ σχέσι $\Gamma = \{(x\,\psi) \mid x \in A$ καὶ $\psi \in B$ καὶ x εἶναι διαιρέτης τοῦ $\psi\}$ Νὰ ὁρίσετε τὸ σύνολο Γ μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του.

58) Στὸ σύνολο $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9\}$. νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ τὴν σχέσιν

$$\Gamma = \{(x, \psi) \mid x \in A \text{ καὶ } \psi \in A \text{ καὶ } x = \psi^2\}$$

59) Νὰ παραστήσετε γεωμετρικῶς τὴν σχέσιν $y = x + 1$ ὅταν x, ψ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

60) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3\}$ νὰ παραστήσετε γεωμετρικῶς τὴν σχέσιν

$$\Gamma = \{(x, \psi) \mid x \in A,\quad \psi \in B \text{ καὶ } x = 2\psi\}$$

(Παραστήσατε πρῶτα μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του τὸ σύνολο Γ)

61) Νὰ ἐξετάσετε ἂν στὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἡ σχέσις «ἡ εὐθεῖα ε_1 εἶναι κάθετος στὴν εὐθεῖα ε_2» εἶναι διμελής.

9.2 Ἀνακλαστικὲς διμελεῖς σχέσεις

Ἡ σχέσις «**Ὁ $x \in A$ εἶναι διαιρέτης τοῦ $\psi \in A$**» (1) ὅπου $A = \{2, 3, 4\}$ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σύνολο $\Gamma = \{(2, 2), (3, 3), (4, 4), (2, 4)\}$. Παρατηροῦμε ὅτι μὲ τὴν σχέσι (1) κάθε στοιχεῖο τοῦ A σχετίζεται μὲ τὸν ἑαυτό του.

Ὅταν καὶ μόνον ὅταν, μία διμελὴς σχέσις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου συσχετίζῃ κάθε στοιχεῖο μὲ τὸν ἑαυτόν του, τότε ἡ σχέσις λέγεται ἀνακλαστική.

Παράδειγμα: Στὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἡ σχέσις: «ἡ εὐθεῖα $x\psi$ ἔχει τὴν ἰδία διεύθυνσι μὲ τὴν εὐθεῖαν $x'\psi'$» εἶναι ἀνακλαστικὴ σχέσις, διότι κάθε εὐθεῖα $x\psi$ τοῦ ἐπιπέδου ἔχει τὴν ἴδια διεύθυνσι μὲ τὸν ἑαυτόν της.

Ἀντιπαράδειγμα: Στὸ ἴδιο σύνολο ἡ σχέσις: «ἡ εὐθεῖα $x\psi$ εἶναι κάθετη πρὸς τὴν $x'\psi'$» δὲν εἶναι **ἀνακλαστική, διότι κάθε εὐθεῖα $x\psi$ δὲν εἶναι κάθετη μὲ τὸν ἑαυτό της.**

9. 3 Συμμετρικὲς διμελεῖς σχέσεις

Στὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἡ διμελὴς σχέσις **«ἡ εὐθεῖα χψ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν χ΄ψ΄»**, ἰσχύει κι᾽ ὅταν ἀντιστρέψουμε τὴ σειρὰ τῶν στοιχείων κάθε διατεταγμένου ζεύγους.

Πράγματι: Εἶναι φανερὸν ὅτι: Ἂν γιὰ δύο εὐθεῖες ε, ε΄ τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύῃ ἡ σχέσις **«ἡ ε εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε΄»**, θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις **«ἡ ε΄ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε»**.

Ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἡ ἰσχὺς μιᾶς σχέσεως σ᾽ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος ἑνὸς συνόλου στοιχείων συνεπάγεται τὴν ἰσχὺν τῆς σχέσεως ποὺ προκύπτει ὅταν ἐναλλάξουμε τὰ στοιχεῖα τοῦ ζεύγους, τότε ἡ διμελὴς σχέσις λέγεται συμμετρική.

Παράδειγμα: Ἡ σχέσις ἰσότητος στὸ σύνολο π. χ. τῶν εὐθυγρ. τμημάτων ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι συμμετρικὴ σχέσις

$$(AB = \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta = AB)$$

Ἀντιπαράδειγμα: Ἡ σχέσις ἀνισότητος εὐθ. τμημάτων στὸ ἴδιο σύνολο δὲν εἶναι συμμετρικὴ

$$(AB > \Gamma\Delta \Rightarrow \Gamma\Delta > AB)$$

9. 4 Μεταβατικὲς διμελεῖς σχέσεις

Γνωρίζουμε ὅτι ἡ σχέσις ἀνισότητος εὐθυγρ. τμημάτων στὸ σύνολο τῶν εὐθ. τμημάτων τοῦ ἐπιπέδου ἔχει τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα:

$$\left.\begin{array}{l} AB > \Gamma\Delta \\ \Gamma\Delta > EZ \end{array}\right] \Rightarrow AB > EZ$$

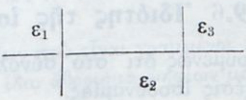
«Ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν σ᾽ ἕνα σύνολο μιὰ διμελὴς σχέσις R ἔχῃ τὴν ἰδιότητα: Ἡ ἰσχὺς τῶν σχέσεων αRβ καὶ βRγ νὰ συνεπάγεται τὴν ἰσχὺν τῆς σχέσεως αRγ (ὅπου α, β, γ στοιχεῖα τοῦ συνόλου) **τότε ἡ διμελὴς σχέσις R λέγεται μεταβατική.**

Παράδειγμα: Στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἡ διμελὴς σχέσις ἰσότητος εἶναι μεταβατική, διότι ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ

$$\left.\begin{array}{r} 6\ 2 = 12 \\ 12 = 4 \cdot 3 \end{array}\right] \Rightarrow 6.2 = 4 \cdot 3$$

Ἀντιπαράδειγμα: Στὸ σύνολο τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἡ διμελὴς σχέσις καθετότητος μεταξὺ δύο εὐθειῶν δὲν εἶναι μεταβατική, διότι εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ σχέσεις

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \perp \varepsilon_3 \end{array}\right] \text{δὲν συνεπάγονται τὴν σχέσιν } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_3$$

ἀλλὰ τὴν σχέσιν $\varepsilon_1 \| \varepsilon_3$ 

.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

62) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «ὁ α εἶναι πατέρας τοῦ β» στὸ σύνολο τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως εἶναι σχέσις α) ἀνακλαστικὴ β) συμμετρικὴ γ) μεταβατική.

63) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «ὁ α εἶναι ἀδελφὸς τοῦ β» στὸ σύνολο τῶν ἀνθρώπων εἶναι σχέσις α) ἀνακλαστικὴ β) συμμετρικὴ γ) μεταβατική.

64) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «ὁ α εἶναι συμμαθητὴς τοῦ β» στὸ σύνολο τῶν μαθητῶν εἶναι σχέσις α) συμμετρικὴ β) μεταβατική.

65) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «ἡ γωνία α εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς γωνίας β» στὸ σύνολο τῶν γωνιῶν τοῦ ἐπιπέδου εἶναι σχέσις α) συμμετρικὴ β) μεταβατική.

66) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «τὸ α εἶναι 2/πλάσιο τοῦ β» στὸ σύνολο τῶν ῥητῶν εἶναι σχέσις α) συμμετρικὴ β) μεταβατική.

9.5 Σχέσεις ἰσοδυναμίας

Παρατηροῦμε ὅτι ἡ σχέσις ἰσότητος τῶν ῥητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{Ἀνακλαστική}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{Συμμετρική}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\gamma}{\delta} \\[2ex] \dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{\varepsilon}{\zeta} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad \text{Μεταβατική}$$

ὅπου: $\beta, \delta, \zeta \in \Phi$

«Κάθε διμελὴς σχέσις, ποὺ εἶναι ἀνακλαστική, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, λέγεται ἰσοδυναμία.

Οἱ σχέσεις: ἰσότης τριγώνων, ἰσότης συνόλων, ἰσοδυναμία συνόλων, εἶναι **σχέσεις ἰσοδυναμίας.**

9.6 Ἰδιότης τῆς ἰσοδυναμίας

Εἴδαμε προηγουμένως ὅτι στὸ σύνολο Ρ τῶν ῥητῶν ἡ σχέσις ἰσότητος εἶναι μία σχέσις ἰσοδυναμίας.

Τὸ ὑποσύνολο τοῦ Ρ, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ ἕνα κλάσμα, π. χ. τὸ ὑποσύνολο $A = \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12} \ldots\right]$, ὀνομάζεται **κλάσις ἰσοδυναμίας.**

Εἶναι φανερὸν ὅτι: α) Κάθε ρητὸς ἀνήκει σὲ μία καὶ μόνο μία κλάσι ἰσοδυναμίας. Ἄρα: οἱ διάφορες κλάσεις εἶναι ὑποσύνολα τοῦ Ρ ξένα μεταξύ των.

β) Ἡ ἕνωσις ὅλων τῶν κλάσεων-ὑποσυνόλων μᾶς δίδει τὸ σύνολο Ρ. Ὥστε: ἡ σχέσις ἰσοδυναμίας **διαμερίζει** τὸ σύνολο σὲ κλάσεις ἰσοδυνάμων στοιχείων.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α:

Στὸ σύνολο Ε τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου ἡ σχέσις «ἡ εὐθεῖα α εἶναι παράλληλος μὲ τὴν εὐθεῖα β» δὲν εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Διότι: εἶναι μὲν 1) $\alpha \parallel \beta \Rightarrow \beta \parallel \alpha$ (Συμ/κὴ ἰδιότης)

καὶ 2) $\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta \\ \beta \parallel \gamma\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \parallel \gamma$ (Μεταβατικὴ ἰδιότης)

δὲν εἶναι ὅμως: $\alpha \parallel \alpha$ (σύμφωνα μὲ τὸν γνωστό μας ὁρισμὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν). Ἂν συμφωνήσουμε ὅτι: **«Δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλοι»** 1) **ὅταν εὑρίσκωνται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν τέμνωνται ὅσο κι᾽ ἂν προεκταθοῦν.** ἢ 2) **ὅταν συμπίπτουν (ταυτίζωνται)**, τότε θὰ ἰσχύῃ καὶ ἡ σχέσις $\alpha \parallel \alpha$ (Ἀνακλαστική) ὥστε: ἡ **παραλληλία**, σύμφωνα μὲ τὸν νέο ὁρισμό, **εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.**

Σημ. Ὁ νέος ὁρισμὸς τῆς παραλληλίας, ἡ παραλληλία μὲ τὴν εὐρεῖαν ἔννοιαν, ὅπως λέγομε, ἔχει τὴν ἔννοια ὅτι: Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι εἶναι ἰσοδύναμοι ἀπὸ ἀπόψεως διευθύνσεως.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

67) Στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γραμμένων μὲ τὸ δεκαδικὸ σύστημα νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «ὁ ἀριθμὸς x ἔχει τὸ ἴδιο ψηφίο μονάδων μὲ τὸν ἀριθμὸ ψ» εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

68) Στὸ σύνολο Φ ἡ σχέσις «ὁ x εἶναι διαιρέτης τοῦ ψ» εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας;

69) Στὸ σύνολο τῶν τριγώνων τοῦ ἐπιπέδου νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «τὸ τρίγωνο x ἔχει μία πλευρὰ ἴση μὲ μιὰ πλευρὰ τοῦ τριγώνου ψ» εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

70) Στὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ εἶναι γραμμένοι κατὰ τὸ δεκαδικὸ σύστημα ἡ σχέσις «ὁ x ἔχει τὸ ἴδιο ἄθροισμα ψηφίων μὲ τὸ ψ» εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας;

§ 10. Ἀπεικονίσεις

1) Ἂς εἶναι τὰ σύνολα

$$Λ = \{\text{Νῖκος, Μίμης, Ἠλίας, Κώστας}\}$$
$$\text{καὶ } B = \{α', β', γ', δ', ε', στ'\}$$

ὅπου α', β', γ', δ, ε', στ παριστοῦν τάξεις τοῦ δημ. σχολείου στὸ ὁποῖον φοιτοῦν οἱ μαθηταί: Νῖκος, Μίμης, Ἠλίας, Κώστας. Μὲ τὴ σχέσι **«ὁ μαθητής . . φοιτᾶ στὴ τάξι . . .»** σχηματίζουμε τὶς ἀκόλουθες ἀντιστοιχίσεις, ποὺ βασίζονται στὶς πληροφορίες μας

Ὁ Νῖκος φοιτᾶ στὴ β' τάξι
Ὁ Μίμης » » γ' »
Ὁ Ἠλίας » » στ' »
Ὁ Κώστας » » στ' »

2) Ἂς εἶναι τὰ σύνολα

$$A = \{10, 20, 30, 40, 50, 60\}$$
$$\text{καὶ } B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

καὶ ἡ σχέσις **«ὁ $x \in A$ εἶναι 10/πλάσιος τοῦ $\psi \in B$»** (1)

Μὲ τὴ σχέσι (1) ἀντιστοιχίζεται **κάθε** στοιχεῖο τοῦ συνόλου Α **μὲ ἕνα μόνο** στοιχεῖο τοῦ Β

$10 \to 1 \qquad 40 \to 4$
$20 \to 2 \qquad 50 \to 5$
$30 \to 3 \qquad 60 \to 6$

Εἰς τὰ δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι: Δίδονται δύο, μὴ κενὰ σύνολα, Α, Β καὶ μία σχέσις (κανὼν) μὲ τὴν ὁποίαν: Σὲ **κάθε** στοιχεῖο τοῦ Α ἀντιστοιχίζεται **ἕνα καὶ μόνο ἕνα** στοιχεῖο τοῦ Β. Κάθε τέτοια συσχέτισις τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Α μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Β λέγεται **ἀπεικόνισις.**

Παρατηροῦμε ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ Α χρησιμοποιεῖται ὁπωσδήποτε **μία μόνο φορὰ** ἐνῶ ὑπάρχουν στοιχεῖα τοῦ Β τὰ ὁποῖα ἢ δὲν χρησιμοποιοῦνται καθόλου ἢ χρησιμοποιοῦνται περισσότερες φορὲς (1ο παράδειγμα). Τὸ σύνολο Α λέγεται **πεδίον ὁρισμοῦ** τῆς ἀπεικονίσεως ἐνῶ τὸ σύνολο Β **πεδίον τιμῶν.**

Μία ἀπεικόνισις μεταξὺ τῶν συνόλων Α καὶ Β μπορεῖ νὰ ὁρισθῇ ἂν δοθῇ ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν μὲ πρῶτο στοιχεῖο ἐκ τοῦ Α καὶ δεύτερο ἐκ τοῦ Β ὅπου χρησιμοποιοῦνται ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Α ἀπὸ μίαν μόνο φορὰν τὸ καθένα.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

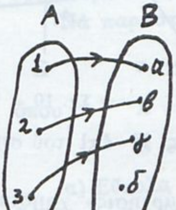
Ἂν $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, τότε τὸ σύνολο $\Gamma = \{(1,\alpha)\ (2,\beta)\ (3,\gamma)\}$ ὁρίζει μία ἀπεικόνισι. Ἀντίθετα· τὸ σύνολο $\Delta = \{(1,\alpha)\ (1,\beta)\ (2,\gamma)\ (3,\delta)\}$ δὲν ὁρίζει ἀπεικόνισι, διότι τὸ στοιχεῖο 1 τοῦ A χρησιμοποιεῖται δύο φορές.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω ἐννοοῦμε ὅτι : **«Ἡ ἀπεικόνισις εἶναι μία εἰδικὴ περίπτωσις διμελοῦς σχέσεως».**

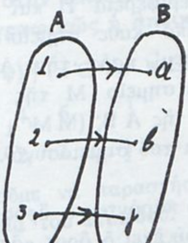
Σημείωσις : Μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε τὴν ἀπεικόνισι ὡς ἕνα μηχανισμόν, ὁ ὁποῖος «παίρνει» κάθε στοιχεῖο α τοῦ A καὶ τὸ «στέλνει» σ' ἕνα στοιχεῖο β τοῦ B. Τὸ στοιχεῖο α λέγεται **ἀρχέτυπο** καὶ τὸ β **εἰκὼν** τοῦ α.

10.1 Εἴδη ἀπεικονίσεων

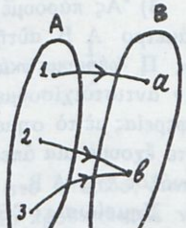
I) Στὸ σχ. (9α) ἔχουμε ἀντιστριχίσει σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἕνα στοιχεῖο τοῦ B. Παρατηροῦμε ὅτι δὲν ἔχουν χρησιμοποιηθῆ ἢ συσχετισθῆ **ὅλα** τὰ στοιχεῖα τοῦ B (ἐδῶ τὸ δ). Τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀπεικονίσεως λέγεται ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου A **ἐντὸς** τοῦ συνόλου B



(9α)



(9β)



(9γ)

II) Στὸ σχ. (9β) παρατηροῦμε ὅτι :

1) Σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ A ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο τοῦ B.

2) Σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ B ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο ἕνα στοιχεῖο τοῦ A. Τὸ εἶδος αὐτὸ τῆς ἀπεικονίσεως λέγεται **ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνισις τοῦ A ἐπὶ τοῦ B.**

III) Στὸ σχ. (9γ) παρατηροῦμε ὅτι : Σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ B ἀντιστοιχεῖ **τοὐλάχιστον** ἕνα στοιχεῖο τοῦ A.

Ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ λέγεται : Ἀπεικόνισις τοῦ A **ἐπὶ** τοῦ B. Δηλαδὴ στὴν ἀπεικόνισι τοῦ Α ἐπὶ τοῦ Β χρησιμοποιοῦνται ὄχι μόνον ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Α ἀλλὰ καὶ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ Β καὶ μάλιστα τοὐλάχιστον ἀπὸ μία φορὰ τὸ καθένα.

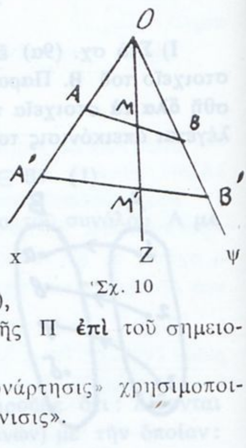
Παραδείγματα:

1) Ἂν ἀντιστοιχίσουμε κάθε φυσικὸ ἀριθμὸ στὸ τετράγωνό του, θὰ ἔχουμε μία ἀπεικόνισι τοῦ συνόλου Φ **ἐντὸς** τοῦ ἑαυτοῦ του

$$\begin{array}{l} \Phi = \{\, 1, \quad 2, \quad 3 \ldots \} \\ \quad\;\;\; \downarrow \quad\;\; \downarrow \quad\;\;\;\; \downarrow \\ \Phi = \{\, 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9 \ldots \} \end{array}$$

Ἂς πάρουμε μία ὀξεῖα γωνία x O ψ, (σχ. 10), δύο σημεῖα Α, Α′ ἐπὶ τῆς O x καὶ δύο σημεῖα Β, Β′ ἐπὶ τῆς O ψ.

Μία ἡμιευθεῖα O Z στρεφομένη περὶ τὸ O τέμνει τὰς Α Β καὶ Α′ Β′. Ἡ ἀπεικόνισις στὴν ὁποία «**κάθε σημεῖο τομῆς Μ τῆς O Z μὲ τὴν Α Β ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο τομῆς Μ′ τῆς O Z μὲ τὴν Α Z′**» εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνισις τοῦ σημειοσυνόλου τῆς Α Β στὸ σημειοσύνολο Α′Β′.



Σχ. 10

3) Ἂς πάρουμε μία περιφέρεια Π καὶ μία διάμετρο Α Β αὐτῆς. Ἀπὸ κάθε σημεῖο Μ τῆς Π φέρουμε κάθετο μ μ′ πρὸς τὴν Α Β. Ἂν ἀντιστοιχίσουμε κάθε σημεῖο Μ τῆς περιφερείας μὲ τὸ σημεῖο Μ′ τῆς Α Β, ($MM' \perp AB$), τότε ἔχουμε μία ἀπεικόνισι τοῦ σημειοσυνόλου τῆς Π **ἐπὶ** τοῦ σημειοσυνόλου τῆς Α Β.

Σημείωσις: Ἐπὶ τοῦ παρόντος ὁ ὅρος «συνάρτησις» χρησιμοποιεῖται μὲ τὴν ἴδια ἔννοια ποὺ ἔχει ὁ ὅρος «ἀπεικόνισις».

10.2 Συμβολισμὸς τῆς ἀπεικονίσεως

Μία ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπὶ ἢ ἐντὸς τοῦ Β συμβολίζεται μὲ τὸ γράμμα σ (ἀρχικὸ τῆς λέξεως συνάρτησις) ἢ μὲ τὸ f (ἀρχικὸ τῆς λέξεως function = συνάρτησις) καὶ μὲ ἕνα βέλος ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β.

$$A \xrightarrow{\sigma} B$$

καὶ διαβάζεται: Τὸ Α ἀπεικονίζεται μὲ τὴν ἀπεικόνισι σ ἐντὸς (ἢ ἐπὶ) τοῦ Β.

Συχνὰ μία ἀπεικόνισις ἐκφράζεται διὰ τῶν στοιχείων τῶν συνόλων **μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:**

Ἄς πάρουμε τὰ σύνολα : $A = \{2, 4, 6 \ldots\}$
$B = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

Τότε ἡ ἀπεικόνισις, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν

«Τὸ $x \in A$ εἶναι 2/πλάσιο τοῦ $\psi \in B$»,

εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι τὸ σύνολο :

$$\sigma = \{(2, 1), \ (4, 2), \ (6, 3) \ldots\}$$

Τὸ ἴδιο σύνολο μὲ τὴν μέθοδο τῆς περιγραφῆς τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του γράφεται

$$\sigma = \{(x, \psi) \mid x \in A, \ \ \psi \in B \ \text{ καὶ } \ x = 2\,\psi\} \Longleftrightarrow$$

$$\sigma = \{(x, \psi) \mid (x \in A, \ \ \psi \in B \ \text{ καὶ } \ \psi = \frac{1}{2}\,x\}$$

10.3 Γραφικὴ παράστασις τῆς ἀπεικονίσεως

Ἡ ἀπεικόνισις ὡς ειδικὴ περίπτωσις διμελοῦς σχέσεως μπορεῖ νὰ παρασταθῆ μὲ διαγράμματα Venn (ἐχρησιμοποιήθησαν στὶς προηγούμενες παραγράφους), μὲ πίνακα διπλῆς εἰσόδου καὶ τέλος, ἂν πρόκειται περὶ συνόλων ρητῶν ἀριθμῶν, μὲ ἕνα σύνολο σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Θὰ περιορισθοῦμε ἐδῶ μόνον στὴν τελευταία περίπτωσι.

Νὰ παρασταθῆ γραφικῶς ἡ ἀπεικόνισις

$$\sigma = \{(x\ \psi) \mid (x \in A, \ \ \psi \in B \ \text{ καὶ } \ \psi = \frac{1}{2}\,x\}$$

ὅπου $A = \{2, \ 4, \ 6 \ldots\}$
$B = \{1, \ 2, \ 3 \ldots\}$

α) Εὔκολα μποροῦμε νὰ παραστήσουμε, στὸ ἐπίπεδο, διατεταγμένα ζεύγη ρητῶν μὲ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου. Γι' αὐτὸ προσπαθοῦμε νὰ ἐκφράσουμε τὴν ἀπεικόνισι σὲ μορφὴν συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν.

Πρὸς τοῦτο ἐργαζόμεθα μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Στὴ σχέσι $\psi = \frac{1}{2} \cdot x$ δίδουμε στὸ x διάφορες τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο A καὶ εὑρίσκουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ ψ.

Π. χ. Διὰ $x = 2$ ἔχουμε $\psi = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

» $x = 4$ » $\psi = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$

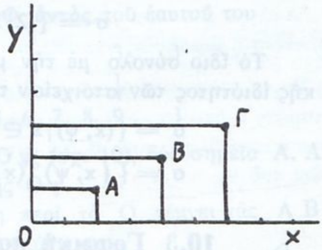
» $x = 6$ » $\psi = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$

κ. ο. κ.

Ἔτσι ἔχουμε τὴν ἀπεικόνισιν σ σὲ μορφὴ συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν

$$\sigma = \{(2, 1) \quad (4, 2) \quad (6, 3) \ldots\}$$

β) Χαράζουμε ὀρθογ. ἄξονες Ο x, Ο y καὶ ἐπὶ μὲν τοῦ Ο x ὁρίζουμε σημεῖα ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὴν ἀρχὴν Ο ἀποστάσεις 2, 4, 6 . . . μονάδες μήκους, ἐπὶ δὲ τοῦ Ο y ὁρίζουμε σημεῖα ποὺ ἀπέχουν ἀπὸ τὸ Ο ἀποστάσεις 1, 2, 3 . . . μονάδες μήκους.



Σχ. 11

Ἔπειτα εὑρίσκουμε, μὲ τὸν γνωστὸ τρόπο, τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ... ποὺ παριστάνουν τὰ ζεύγη (2, 1), (4, 2), (6, 3) . . . στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθ. ἀξόνων.

Τελικῶς εὑρίσκουμε ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἀπεικονίσεως σ = {(2,1), (4, 2), (6,3) . . .} στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθ. ἀξόνων εἶναι τὸ σημειοσύνολο { Α, Β, Γ, . . . } (σχ. 11).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

71) Νὰ ὁρίσετε μίαν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου

$$A = \{1, 2\} \quad \text{στὸ σύνολο} \quad B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$$

72) Νὰ εὕρετε ὅλες τὶς ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ συνόλου $A = \{1, 2\}$ στὸ σύνολο $B = \{\alpha, \beta\}$

73) Νὰ εὕρετε ὅλες τὶς δυνατὲς ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις τοῦ συνόλου $A = \{1, 2, 3\}$ στὸ σύνολο $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

74) Ἂν $A = \{1, 2, 3, 4\}$
καὶ $B = \{1, 2, 3 \ldots\}$

νὰ ὁρίσετε, μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων, τὴν ἀπεικόνισι

$$\sigma = \left\{ (x, \psi) \mid x \in A \ \text{ καὶ } \ \psi \in B \ \text{ καὶ } \ x = \frac{1}{2}\psi \right\}$$

75) Τὴν ἀπεικόνισι τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ τὴν παραστήσετε γραφικῶς.

76) Ἂν Α εἶναι τὸ σύνολο τῶν μαθητῶν τῆς τάξεώς σας καὶ τὸ Β τὸ σύνολο τῶν θρανίων τῆς αἰθούσης διδασκαλίας νὰ εὕρετε τὸ εἶδος τῆς ἀπεικονίσεως

«ὁ μαθητὴς x κάθεται στὸ θρανίο ψ»

77) Στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν δίδεται ἡ ἀπεικόνισις

$$y = 2x + 1$$

Νὰ ὁρίσετε τὴν εἰκόνα τοῦ x στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις

α) ἂν $x = 2$ β) ἂν $x = 5$ γ) $x = 10$

78) Νὰ εὕρετε τὸ εἶδος τῆς ἀπεικονίσεως $y = x^3$ στὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

79) Ἂν $A = \{2, 4, 6, 8\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ νὰ ὁρίσετε μὲ ἀναγραφὴ καὶ νὰ παραστήσετε γεωμετρικῶς τὴν ἀπεικόνισι

$$\Gamma = \{(x\psi) \mid x \in A, \quad \psi \in B \quad \text{καὶ } x = 2\psi\}$$

80) Νὰ ἐξετάσετε τὸ εἶδος τῆς ἀπεικονίσεως τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Β' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄

§ 11. Διανύσματα

Τὸν προηγούμενο χρόνο ἀσχοληθήκαμε μὲ εὐθυγρ. τμήματα. Μάθαμε νὰ τὰ συγκρίνουμε, νὰ τὰ μετρᾶμε καὶ νὰ κάνουμε πράξεις μὲ αὐτά. Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε τὸ εὐθυγρ. τμῆμα καὶ ἀπὸ μιὰν ἄλλη σκοπιά.

α) Γιὰ νὰ χαράξουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα Α Β, σχ. 12, μετακινοῦμε τὴ μύτη τοῦ μολυβιοῦ μας :

Σχ. 12

ἢ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β
ἢ » » Β » » Α

Εἶναι δηλαδή, τὸ τμῆμα Α Β, ἀποτέλεσμα μιᾶς «δ ι α δ ρ ο μ ῆ ς» κατὰ μῆκος τῆς ἀκμῆς τοῦ χάρακα ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β ἢ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α.

Γενικά : Μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε ὅτι κάθε εὐθύγρ. τμῆμα Α Β «δ ι α ν ύ θ η κ ε» ἀπὸ ἕνα κινητὸ κατὰ τὴ φ ο ρ ὰ ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β ἢ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α.

Κατὰ τὴν ὡς τώρα σπουδὴ τοῦ εὐθυγ. τμήματος δὲν ἐλάβαμε ὑπ' ὄψιν μας καὶ τὴ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν δ ι α ν ύ θ η κ ε τοῦτο. **Ἂν σ' ἕνα εὐθυγρ. τμῆμα λάβουμε ὑπ' ὄψιν καὶ τὴ φορὰ κατὰ τὴν ὁποίαν διανύθηκε τότε αὐτὸ λέγεται διάνυσμα.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν ἐννοοῦμε ὅτι :

Ἐνῶ ἕνα εὐθ. τμῆμα ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα ζεῦγος σημείων π. χ. Α, Β χωρὶς νὰ ἔχῃ σημασίαν ποιὸ ἀπ' αὐτὰ εἶναι πρῶτο (γι' αὐτὸ καὶ $AB = BA$) ἕνα **διάνυσμα ὁρίζεται ἀπὸ ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος σημείων.**

β) Σ υ μ β ο λ ι σ μ ό ς : Τὴν ἔκφρασι «δ ι ά ν υ σ μ α Α Β» τὴν συμβολίζουμε : $\overrightarrow{AB}$

Συγκεκριμένα : α) Τὸ **βέλος** ἀντικαθιστᾶ τὴ λέξι «διάνυσμα»
β) Ἡ διάταξις τῶν ἄκρων τοῦ διανύσματος καθορίζεται ἀπὸ τὴν σειρὰν ἀναγραφῆς αὐτῶν.

π. χ. Τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὸ σημεῖο Γ καὶ τέλος τὸ Δ γράφεται $\vec{\Gamma\Delta}$ ἐνῶ τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὸ σημεῖο Δ καὶ τέλος τὸ Γ γράφεται : $\vec{\Delta\Gamma}$

γ) **Προσανατολισμένη εὐθεῖα :** Μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε ὅτι μία εὐθεῖα x ψ διαγράφεται ἀπὸ ἕνα κινητὸ ἢ κατὰ τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ x πρὸς τὸ ψ ἢ ἀντίθετα. Ὅταν ἐκλέξουμε τὴν μίαν ἀπὸ τὶς φορὲς αὐτὲς ὡς φορὰν διαγραφῆς τῆς x ψ ἢ ὅπως συνηθίζουμε ὡς **θετικὴν φορὰν** τότε ἡ εὐθεῖα λέγεται **προσανατολισμένη.**

δ) **Στοιχεῖα διανύσματος.** Σ' ἕνα διάνυσμα διακρίνουμε:

1) **Τὴν διεύθυνσι** : Μία εὐθεῖα καὶ κάθε παράλληλος μὲ αὐτὴν ὁρίζουν μίαν διεύθυνσι· π. χ. οἱ γραμμὲς τοῦ συνήθους τετραδίου μας ὁρίζουν μία διεύθυνσι.

Ὡς διεύθυνσι διανύσματος θεωροῦμε τὴ διεύθυνσι τῆς εὐθείας (φορέως) ἐπὶ τῆς ὁποίας εὑρίσκεται τοῦτο.

2) **Τὴν φορὰν** (ἢ κατεύθυνσι) : Φορὰ (ἢ κατεύθυνσις) τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι ἡ φορὰ (ἢ κατεύθυνσις) ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β ἐνῶ τοῦ $\vec{BA}$ ἡ ἀπὸ τὸ Β πρὸς τὸ Α.

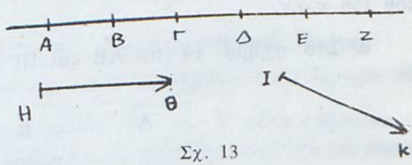
3) Τὸ **μῆκος ἢ μέτρο.** Μῆκος ἢ μέτρο τοῦ $\vec{AB}$ εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγρ. τμήματος ΑΒ.

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ τρία αὐτὰ στοιχεῖα ὁρίζουν ἕνα διάνυσμα. Ὅταν λοιπὸν ἀναφερόμαστε σ' ἕνα διάνυσμα, ἐννοοῦμε ἕνα τριμελὲς σύνολο μὲ στοιχεῖα: τὴ διεύθυνσι, τὴ φορὰ καὶ τὸ μῆκος.

11.1 Εἰδικὲς περιπτώσεις

α) **Συγγραμικὰ διανύσματα**

Διανύσματα ὅπως τὰ $\vec{AB}$, $\vec{ZE}$, $\vec{\Gamma\Delta}$, $\vec{\Theta H}$ (σχ. 13) ποὺ ἔχουν: Τὴν ἴδια διεύθυνσι (τὴν διεύθυνσι τῶν εὐθειῶν φορέων των) λέγονται: **συγγραμμικὰ διανύσματα.** Γι' αὐτὸ καὶ τὰ διανύσματα $\vec{H\Theta}$ καὶ $\vec{IK}$ δὲν εἶναι συγγραμμικὰ (διότι δὲν εὑρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεῖα ἢ σὲ παράλληλες εὐθεῖες).



Σχ. 13

β) **Ὁμόρροπα διανύσματα.** Τὰ διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma E}$, $\vec{B\Delta}$, σχ. 13, εἶναι συγγραμμικά. Ἐπὶ πλέον ἔχουν καὶ τὴν ἴδια φορὰ (ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά) καὶ λέγονται **ὁμόρροπα.**

γ) **Ἀντίρροπα διανύσματα.** Τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{E\Gamma}$ (σχ. 13) εἶναι μὲν συγγραμικὰ ἀλλά ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς καὶ λέγονται **ἀντίρροπα.**

δ) **Ἴσα διανύσματα.** Τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 13) ἔχουν α) ἴδια διεύθυνσι β) ἴδια φορὰ γ) ἴδιο μῆκος $(AB) = (\Gamma\Delta)$ καὶ λέγονται **ἴσα ἢ ἰσοδύναμα.**

ε) **Ἀντίθετα διανύσματα.** Στὸ σχ. 13 τὰ $\overrightarrow{A\Gamma}$ καὶ $\overrightarrow{\Delta B}$ ἔχουν : α) ἴδια διεύθυνσι β) ἴδιο μῆκος γ) ἀ ν τ ι θ έ τ ο υ ς φορὰς καὶ λέγονται **ἀντίθετα.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

81) Σὲ μιὰ εὐθεῖα x ψ σημειώσατε ἴσα εὐθύγρ. τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ. Νὰ βρῆτε διανύσματα α) ἴσα, β) ἀντίθετα, γ) ὁμόρροπα, δ) ἀντίρροπα.

82) Νά σχηματίσετε δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μὴ συγγραμμικά.

83) Νὰ σχηματίσετε δύο διανύσματα ποὺ νὰ ἔχουν τὴν ἴδια διεύθυνσι καὶ ἴσα μήκη ἀλλὰ νὰ μὴν εἶναι ἴσα.

84) Ἀναφέρατε παραδείγματα μεγεθῶν ποὺ μποροῦμε νὰ παραστήσουμε μὲ διανύσματα.

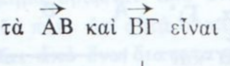
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΣΥΓ/ΚΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Στὰ ἀμέσως ἑπόμενα θὰ ἐξετάσουμε μόνο τὶς πράξεις μὲ συγ/κὰ διανύσματα γι' αὐτὸ ὅταν ἀναφερόμαστε σὲ διανύσματα, θὰ ἐννοοῦμε μόνο τὰ συγ/κὰ διανύσματα ἐκτός, φυσικά, ἂν γίνεται λόγος περὶ τοῦ ἀντιθέτου.

§ 12. Πρόσθεσις

Δύο ἢ περισσότερα διανύσματα, ποὺ εὑρίσκονται σὲ διάταξι (σειρὰ) λέγονται **διαδοχικὰ** ὅταν τὸ τέλος τοῦ 1ου διανύσματος εἶναι καὶ ἀρχὴ τοῦ 2ου κ.ο.κ.

α) Στὸ σχῆμα 14 τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι διαδοχικά.



Σχ. 14

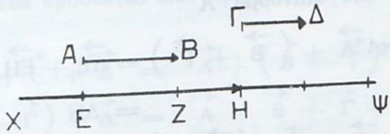
Τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ποὺ ἔχει ὡς ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τοῦ 1ου (δηλ. τοῦ $\overrightarrow{AB}$) καὶ ὡς τέλος, τὸ τέλος τοῦ 2ου λέγεται **ἄθροισμα** τῶν διαδ. διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ γράφουμε δέ :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}.$$

Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν στὸ σχ. 14 ἔχουμε :

$$\vec{AB} + \vec{B\Gamma} = \vec{A\Gamma}, \quad \vec{A\Gamma} + \vec{\Gamma B} = \vec{AB}, \quad \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma A} = \vec{BA}$$

$$\vec{BA} + \vec{A\Gamma} = \vec{B\Gamma} \quad \text{κ.λ.π.}$$

β) Ἂν τὰ διανύσματα δὲν εἶναι διαδοχικά, τὰ καθιστοῦμε διαδοχικὰ κι' ἔπειτα τὰ προσθέτουμε· π.χ. προκειμένου νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ (Σχ. 15) σημειώνουμε ἐπὶ εὐθείας ΧΨ $\vec{EZ} = \vec{AB}$ καὶ $\vec{ZH} = \vec{\Gamma\Delta}$ ὁπότε ἔχουμε : $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{EZ} + \vec{ZH} = \vec{EH}$

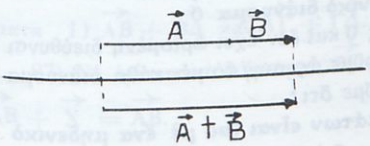


Σχ. 15

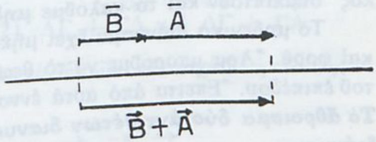
12.1 Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

I. Στὸ σχ. 16 φαίνεται τὸ ἄθροισμα $\vec{A} + \vec{B}$ (Χάριν εὐκολίας ἕνα διάνυσμα τὸ σημειώνουμε μ' ἕνα κεφαλαῖο γράμμα κι' ἕνα τόξο ἐπ' αὐτοῦ).

Στὸ σχ. 17 φαίνεται τὸ ἄθροισμα $\vec{B} + \vec{A}$



Σχ. 16



Σχ. 17

εὔκολα ἐξακριβώνουμε ὅτι :

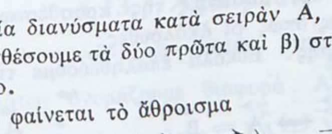
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$ **Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης**

II. Ὅπως καὶ στὴ περίπτωσι τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὅταν ἔχουμε νὰ προσθέσουμε τρία διανύσματα κατὰ σειρὰν $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$ αὐτὸ σημαίνει :

α) Νὰ προσθέσουμε τὰ δύο πρῶτα καὶ β) στὸ ἄθροισμά των νὰ προσθέσουμε τὸ τρίτο.

Στὸ σχ. 18 φαίνεται τὸ ἄθροισμα

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{\Gamma}$$



Σχ. 18

Πήραμε δηλαδή: $\overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{A}$ $\quad \overrightarrow{EZ} = \overrightarrow{B}$ $\quad \overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{\Gamma}$

ὁπότε εἶναι: $\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{\Gamma} = \left(\overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{EZ}\right) + \overrightarrow{ZH}$

$$= \overrightarrow{\Delta Z} + \overrightarrow{ZH}$$

$$= \overrightarrow{\Delta H}$$

Στὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν προσθέσουμε τὸ ἄθροισμα $\left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\Gamma}\right)$ στὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A}$

Πράγματι εἶναι $\overrightarrow{A} + \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\Gamma}\right) = \overrightarrow{\Delta E} + \overrightarrow{EH}$

$$= \overrightarrow{\Delta H}$$

ὥστε $\left(\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}\right) + \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{A} + \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\Gamma}\right)$ **προσεταιριστικὴ ἰδιότης.**

III) **Ἄθροισμα ἀντιθέτων διανυσμάτων.** Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τοῦ ἀθροίσματος διανυσμάτων, τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ τῶν ἀντιθέτων διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ πρέπει νὰ εἶναι ἕνα διάνυσμα μὲ ἀρχὴ τὸ σημεῖον Α καὶ τέλος πάλι τὸ Α. Ἀλλὰ ὑπάρχει τέτοιο διάνυσμα; Δεχόμαστε χάριν σκοπιμότητος τὴν ὕπαρξι διανύσματος τοῦ ὁποίου ἡ ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος συμπίπτουν καὶ τὸ καλοῦμε **μηδενικὸ διάνυσμα** $\overrightarrow{0}$

Τὸ μηδενικὸ διάνυσμα ἔχει μῆκος 0 καὶ δὲν ἔχει ὡρισμένη διεύθυνσι καὶ φορά. Ἄρα μποροῦμε νὰ τὸ θεωροῦμε ὡς συγ/κὸ μὲ κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου. Ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ ἐννοοῦμε ὅτι:

Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων διανυσμάτων εἶναι ἴσο μὲ ἕνα μηδενικὸ διάνυσμα.

IV) Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ἔχουμε:

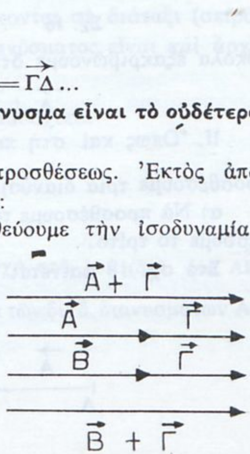
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \ldots$$

Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι: **Τὸ μηδενικὸ διάνυσμα εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως διανυσμάτων.**

Αὐτὲς εἶναι οἱ βασικὲς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως. Ἐκτὸς ἀπὸ αὐτὲς ὑπάρχουν καὶ ἄλλες ὅπως οἱ ἀκόλουθες:

α) **Ἰδιότης διαγραφῆς:** Εὔκολα ἐπαληθεύουμε τὴν ἰσοδυναμία:

$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{\Gamma} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{\Gamma} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$$



β) Τὸ ἄθροισμα τριῶν ἢ περισσοτέρων διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρὰ προσθέσεως αὐτῶν. Π.χ. εἶναι :

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{\Gamma}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{\Gamma}\right) \quad \text{(προσετ. ἰδιότης)}$$

$$=\vec{A}+\left(\vec{\Gamma}+\vec{B}\right) \quad \text{(ἀντιμετ. »)}$$

$$=\left(\vec{A}+\vec{\Gamma}\right)+\vec{B} \quad \text{(προσετ. »)}$$

γ) Σ' ἕνα ἄθροισμα διανυσμάτων μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως· μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε ἕνα προσθετέο διάνυσμα μὲ ἄλλα, ποὺ ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ αὐτό.

$$\vec{A}+\vec{B}+\vec{\Gamma}+\vec{\Delta}=\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{\Gamma}\right)+\vec{\Delta}$$

$$\vec{A}+\left(\vec{B}+\vec{\Gamma}\right)+\vec{\Delta}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{\Gamma}+\vec{\Delta}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

85) Σὲ μιὰ εὐθεῖα x ψ σημειῶστε τρία ἴσα διαδοχικὰ τμήματα Α Β = Β Γ = Γ Δ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀθροίσματα $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}$, $\vec{AB}+\vec{B\Delta}$, $\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma B}$, $\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta\Gamma}$, $\vec{AB}+\vec{\Delta\Gamma}$.

86) Στὸ σχῆμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ συγκρίνετε τὰ ἀθροίσματα 1) $\vec{AB}+\vec{B\Delta}$ καὶ $\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}$. 2) $\vec{A\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta}$ καὶ $\vec{\Delta\Gamma}+\vec{\Gamma A}$.

87) Νὰ ὁρίσετε τὸ διάνυσμα $\vec{X}$ γιὰ τὸ ὁποῖο νὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\vec{AB}+\vec{X}=\vec{AB}$.

88) Νὰ γράψετε τρία συγ/κὰ διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$ καὶ μὲ αὐτὰ νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς ἰσότητες α) $\left(\vec{A}+\vec{\Gamma}\right)+\vec{B}=\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{\Gamma}$

β) $\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\vec{\Gamma}=\left(\vec{\Gamma}+\vec{A}\right)+\vec{B}$

§ 13. Ἀφαίρεσις

Ὅπως καὶ στὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἔτσι καὶ στὸ σύνολο τῶν συγ/κῶν διανυσμάτων ὀνομάζουμε διαφορὰ $\vec{AB}-\vec{\Gamma\Delta}$ τοῦ $\vec{AB}$ ἀπὸ τὸ $\vec{\Gamma\Delta}$, ἕνα διάνυσμα $\vec{X}$ τέτοιο ὥστε : $\vec{\Gamma\Delta}+\vec{X}=\vec{AB}$

Δηλαδὴ ἔχουμε τὴν ἰσοδυναμία :

$$\vec{AB}-\vec{\Gamma\Delta}=\vec{X} \Longleftrightarrow \vec{\Gamma\Delta}+\vec{X}=\vec{AB}$$

Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB}$ ἔχουμε:

$$\left(\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{X}\right) + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} \quad \text{(ἰδιότης διαγραφῆς)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{X} + \left(\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

$$\Longleftrightarrow \overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$$

ὥστε: **Γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ προσθέτουμε στὸ μειωτέο (διάνυσμα) τὸ ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου διανύσματος.**

Παραδείγματα: 1) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$

2) Στὸ Σχ. 19

Σχ. 19

ὅπου $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$ εἶναι:

$$\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{\Delta E} = \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{E\Delta}$$

$$= \overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} \quad \left(\overrightarrow{E\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}$$

Παρατήρησις: Ἀντίθετα μὲ τὴν ἀφαίρεσι τῶν ρητῶν ὅπου ἡ πρᾶξις εἶναι δυνατὴ μόνον ὅταν ὁ μειωτέος εἶναι μεγαλύτερος ἢ ἴσος μὲ τὸν ἀφαιρετέο, ἡ ἀφαίρεσις διανυσμάτων εἶναι **πάντοτε** δυνατὴ ἀφοῦ καὶ ἀντίθετο δοθ. διανύσματος ὑπάρχει πάντοτε καὶ ἡ πρόσθεσις διανυσμάτων εἶναι πάντοτε δυνατή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

89) Μὲ κατασκευὲς νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς γνωστὲς ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως ρητῶν καὶ στὴν ἀφαίρεσι διανυσμάτων.

90) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις α) $\overrightarrow{X} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

β) $\overrightarrow{X} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

91) Ποιὸ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{X}$ σὲ καθεμία ἀπὸ τὶς ἰσότητες

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{X} = \overrightarrow{AB}$ β) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{X} = 0$ γ) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{X}$

92) Νὰ σημειώσετε τρία συγ/κὰ διανύσματα $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{\Gamma}$ κι' ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ νὰ σχηματίσετε τὰ διανύσματα

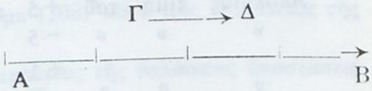
α) $\overrightarrow{A} + \left(\overrightarrow{B} - \overrightarrow{\Gamma}\right)$ β) $\overrightarrow{A} - \left(\overrightarrow{B} + \overrightarrow{\Gamma}\right)$

ΣΧΕΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 14. Μέτρησις διανύσματος

Μάθαμε νὰ μετρᾶμε εὐθ. τμήματα. Ἀπὸ τὴ μέτρησι ἑνὸς εὐθ. τμήματος α, δηλαδὴ ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτοῦ μὲ ἕνα ἄλλο εὐθ. τμῆμα μ ποὺ τὸ λαμβάνουμε ὡς μονάδα προκύπτει ἕνας ἀριθμὸς ποὺ μᾶς δηλώνει τὸ μέγεθος τοῦ α σχετικὰ μὲ τὸ μ. Ἀνάλογα:

Γιὰ νὰ μετρήσουμε ἕνα διάνυσμα π. χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$ (σχ. 20) μὲ μονάδα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ συγκρίνουμε πάλι τὸ τμῆμα ΑΒ μὲ τὸ τμῆμα ΓΔ.



Σχ. 20

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν αὐτὴ προκύπτει ἕνας ἀριθμὸς (ἐδῶ τὸ 4) ὁ ὁποῖος μᾶς δηλώνει μὲν τὸ μῆκος τοῦ ΑΒ σχετικὰ μὲ τὸ ΓΔ (στὴ προκειμένη περίπτωσι το 4 μᾶς λέγει ὅτι τὸ μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι 4πλάσιο τοῦ μήκους τοῦ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$) δὲν μᾶς δηλώνει ὅμως ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπο ἢ ἀντίρροπο μὲ τὸ ΓΔ. Γι' αὐτὸ ἐφοδιάζουμε τὸ 4 μ' ἕνα σύμβολο ποὺ νὰ μᾶς δηλώνῃ ἂν τὸ $\overrightarrow{AB}$ εἶναι ὁμόρροπο ἢ ἀντίρροπο μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Συμφωνοῦμε: 1) Τὸ μέτρο 4 τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ποὺ εἶναι ὁμόρροπο μὲ τὴ μονάδα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ νὰ τὸ γράφουμε: +4 (θετικὸ τέσσερα).

2) Τὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{BA}$ ποὺ εἶναι ἀντίρροπο μὲ τὴ μονάδα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ νὰ τὸ γράφουμε: 4 (ἀρνητικὸ τέσσερα).

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ἀπὸ τὸ σύμβολο +4 διακρίνουμε:

α) τὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$ καὶ

β) τὴ φορὰ τοῦ $\overrightarrow{AB}$ σχετικὰ μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ποὺ τὸ λαμβάνουμε ὡς μονάδα. Τὰ σύμβολα +4 καὶ 4 λέγονται **σχετικὰ μέτρα** τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$ μὲ μονάδα τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Ὡς σχετικὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{O}$ λαμβάνουμε τὸ Ο.

14.1 Σχετικοὶ ἀριθμοὶ

Ὅπως ἀπὸ ἕνα εὐθυγρ. τμῆμα, π. χ. τὸ ΑΒ (σχ. 20) ὁρίζονται δύο ἀντίθετα διανύσματα, τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$, ἔτσι ἀπὸ κάθε ἀριθμὸ τῆς ἀριθμητικῆς, π.χ. τὸ **4**, ποὺ εἶναι τὸ μέτρο τοῦ ΑΒ, ὁρίζονται δύο **νέοι** ἀριθμοί, ὁ +**4** καὶ ὁ −**4** ποὺ εἶναι τὰ σχετικὰ μέτρα τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ **καὶ** $\overrightarrow{BA}$ ἀντιστοίχως, μὲ μονάδα τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς νέους αὐτοὺς ἀριθμοὺς εἶναι ἕνα **διμελὲς** σύνολο μὲ στοιχεῖα: Τὸ σύμβολο $^+$ ἢ $^-$ κι' ἕναν ἀριθμὸ τῆς ἀριθμητικῆς καὶ λέγεται **σχετικὸς ἀριθμός.**

Τὸ σύμβολο $^+$ ἢ $^-$ ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ λέγεται **πρόσημο** ὁ δὲ ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς, π.χ. ὁ 4, ἀπὸ τὸν ὁποῖον προῆλθε το $+4$ ἢ -4, λέγεται **ἀπόλυτος τιμὴ** τοῦ ἀριθμοῦ.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

Ἀπόλυτος	τιμὴ	τοῦ	$+5$	εἶναι	τὸ	5	ἢ	$\|+5\| = 5$
»	»	»	-5	»	»	5	»	$\|-5\| = 5$
»	»	»	$+\frac{3}{4}$	»	»	$\frac{3}{4}$	»	$\|+\frac{3}{4}\| = \frac{3}{4}$
»	»	»	$-\frac{3}{4}$	»	»	$\frac{3}{4}$	»	$\|-\frac{3}{4}\| = \frac{3}{4}$
»	»	»	0	»	»	0	»	$\|0\| = 0$

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, ὅταν ἔχουν τὸ ἴδιο πρόσημο, λέγονται **ὁμόσημοι,** κι' ὅταν ἔχουν διαφορετικὰ πρόσημα λέγονται **ἑτερόσημοι**

π.χ. οἱ σχετ. ἀριθμοὶ $^+7$, $^+4$ εἶναι ὁμόσημοι
ἐνῷ » » » $^+7$, $^-4$ » ἑτερόσημοι.

Δύο σχετικοὶ ἀριθμοὶ λέγονται **ἴσοι** ὅταν ἔχουν ἴδιο πρόσημο καὶ ἴσες ἀπόλυτες τιμὲς (ἴσα σύνολα).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

93) Νὰ γράψετε ἕνα σχετικὸ ἀριθμὸ κι' ἔπειτα δύο ἄλλους ὁμοσήμους μὲ αὐτόν.

94) Νὰ διαβάσετε τοὺς σχετ. ἀριθμοὺς $^-4$, $^+9$, $^-0{,}6$ κι' ἔπειτα νὰ γράψετε τὶς ἀπόλυτες τιμὲς αὐτῶν.

95) Νὰ γράψετε τοὺς σχετ. ἀριθμούς, ποὺ ἔχουν ὡς ἀπόλυτη τιμὴ τὸ 0,9.

96) Ἡ ἰσότης $|x| = 7{,}5$ γιὰ ποιοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς ἀληθεύει;

97) Ἡ ἰσότης $|\alpha| = |\beta|$ μᾶς λέγει ὅτι οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β εἶναι ἴσοι ἢ μήπως ἐνδέχεται νὰ εἶναι καὶ ἀντίθετοι;

14.2 Ἄλλα ποσὰ ποὺ μετροῦνται μὲ σχ. ἀριθμοὺς

Χρησιμοποιήσαμε σχ. ἀριθμοὺς γιὰ νὰ μετρήσουμε διανύσματα. Ἀλλὰ καὶ ἄλλα ποσὰ τῶν ὁποίων οἱ μεταβολὲς γίνονται πρὸς δύο ἀντίθετες κατευθύνσεις μετροῦνται μὲ σχ. ἀριθμούς.

Παραδείγματα:

1) Οἱ μεταβολὲς τῆς θερμοκρασίας γίνονται εἴτε πρὸς τὰ ἄνω τοῦ μηδενὸς εἴτε πρὸς τὰ κάτω. Ἔτσι ἀντὶ νὰ γράφουμε:

α) 5^0C ἄνω τοῦ μηδενὸς γράφουμε: $+5^0C$

β) 5^0C κάτω » » » : -5^0C

Δηλαδή: τὶς ἄνω τοῦ μηδενὸς θερ/σίες τὶς θεωροῦμε θετικὲς καὶ τὶς κάτω τοῦ μηδενὸς ἀρνητικές.

2) Ἀντὶ νὰ γράφουμε π.χ. 120m ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης γράφουμε: +120m καὶ ἀντὶ νὰ γράφουμε 120m κάτω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης γράφουμε: −120m.

Θεωροῦμε δηλαδὴ τὶς ἄνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης ἀποστάσεις θετικὲς καὶ τὶς κάτω ἀρνητικές.

3) Ἀνάλογα· ἀντὶ νὰ γράφουμε: μετὰ 2 ἔτη, γράφουμε: + 2 ἔτη
καὶ » » » πρὸ 2 ἐτῶν » − 2 ἔτη
κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΙΣ

98. Οἱ ἑπόμενες φράσεις ἀναφέρονται σὲ ποσὰ ποὺ μετροῦνται πρὸς δύο ἀντίθετες φορές. Π.χ. κέρδος — ζημία. πρὸ Χριστοῦ — μ. Χριστόν. Ἐκλέξατε τὴν μίαν ἀπ' αὐτὲς ὡς θετικὴν κι' ἔπειτα νὰ ἐκφράσετε τὴν καθεμία μὲ τὴ βοήθεια σχ. ἀριθμῶν

α) Πρὸ 7 ἡμερῶν
Σὲ 3 ἡμέρες

β) Αὔξησις ταχύτ. κατὰ 5 km/h.
Ἐλάττωσις » » » »

γ) Κέρδος 600 δρ.
Ζημία 500 δρ.

δ) Ἄνοδος 10 m
Κάθοδος 10 m

§ 15. Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ ὡς ἐκτελεσταί

α) Μάθαμε ὅτι ἂν μᾶς δοθῇ ἕνα εὐθύγρ. τμῆμα Α Β μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε τὸ 2πλάσιο, 3πλάσιο . . . . . ἢ τὸ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ἢ τὰ $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, ... καὶ γενικὰ τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ αὐτοῦ. ($\mu \in \Phi_0$, $\nu \in \Phi$).

Τὴν πρᾶξι μὲ τὴν ὁποίαν ἀπὸ ἕνα εὐθ. τμῆμα Α Β εὑρίσκουμε ἕνα ἄλλο εὐθύγρ. τμῆμα ΓΔ 2πλάσιο, 3πλάσιο . . . . . καὶ γενικὰ ἴσο μὲ τὰ $\frac{\mu}{\nu}$ ($\mu \in \Phi_0$, $\nu \in \Phi$) αὐτοῦ τὴν ὀνομάσαμε πολλαπλασιασμὸ τοῦ Α Β μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2, 3, ... $\frac{\mu}{\nu}$ ἀντιστοίχως.

Οἱ ἀριθμοὶ 2, 3, ... $\frac{\mu}{\nu}$, ποὺ πολλαπλασιάζονται μὲ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα Α Β, λέγονται καὶ **ἐκτελεσταί**. Δηλαδὴ ἡ λέξις « ἐκτελεστὴς » εἶναι ἐδῶ συνώνυμη μὲ τὴ λέξι « πολλαπλασιαστής ».

Ὅταν δὲ γράφουμε :

«Ἐφαρμόζουμε ὡς ἐκτελεστὴ τὸ 3 σ' ἕνα τμῆμα ΑΒ» ἐννοοῦμε ὅτι **«πολλαπλασιάζουμε τὸ τμῆμα ΑΒ μὲ τὸ 3»**.

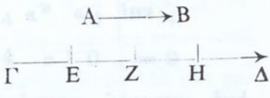
β) Θὰ χρησιμοποιήσουμε τώρα ρητοὺς σχετικοὺς ἀριθμοὺς ὡς ἐκτελεστὰς σὲ διανύσματα.

Ἄς πάρουμε τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κι' ἄς σχηματίσουμε ἕνα ἄλλο διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ **ὁμόρροπο μὲ τὸ** $\overrightarrow{AB}$ καὶ μὲ μῆκος **4/πλάσιο** τοῦ $\overrightarrow{AB}$

Τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγεται : **γινόμενο τοῦ** $^{+}4$ **μὲ τὸ** $\overrightarrow{AB}$.

Τὸ ἴδιο ἐννοοῦμε ὅταν λέγωμε ὅτι :

Γιὰ τὴν εὕρεση τοῦ ΓΔ ἐφαρμόσαμε στὸ $\overrightarrow{AB}$ **τὸ** $^{+}4$ **ὡς ἐκτελεστή.**



Σχ. 21

Γενικά : Γινόμενο ἑνὸς ρητοῦ **θετικοῦ** ἀριθμοῦ λ μ' ἕνα διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{AB}$ λέγεται ἕνα ἄλλο διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ποὺ εἶναι : **Ὁμόρροπο μὲ τὸ** $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἔχει μέτρο ἴσο μὲ τὸ **γινόμενο τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ λ μὲ τὸ μέτρο τοῦ ΑΒ** $(\Gamma\Delta = |\lambda| AB)$

β) Γινόμενο ἑνὸς ρητοῦ **ἀρνητικοῦ** ἀριθμοῦ λ μ' ἕνα διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{AB}$, λέγεται ἕνα ἄλλο διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ποὺ εἶναι : **ἀντίρροπο μὲ τὸ** $\overrightarrow{AB}$ καὶ ἔχει μέτρο ἴσο μὲ τὸ **γινόμενο τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ λ μὲ τὸ μέτρο τοῦ** $\overrightarrow{AB}$ $(\Gamma\Delta = |\lambda| AB)$

γ) Συμφωνοῦμε ὅτι :

1) Γινόμενο διανύσματος $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{O}$ μὲ τὸ Ο εἶναι τὸ μηδενικὸ διάνυσμα $O . \overrightarrow{A} = \overrightarrow{O}$

2) Γινόμενο ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ $\lambda \neq O$ μὲ τὸ $\overrightarrow{O}$ εἶναι τὸ μηδενικὸ διάνυσμα $\lambda . \overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$.

Σύμφωνα μὲ αὐτὰ ἀπὸ τὸ σχ. (21) ἔχουμε :

$\overrightarrow{\Gamma Z} = {}^{+}2\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{Z\Gamma} = {}^{-}2\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{\Gamma H} = {}^{+}3\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{H\Gamma} = {}^{-}3\overrightarrow{AB}$

Ἄν ὁρίσουμε ὡς μονάδα μετρήσεως διανυσμάτων τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ τότε οἱ σχετικοὶ ἀριθμοί : +2, −2, +3, −3 λέγονται **σχετικὰ μέτρα** τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{\Gamma Z}$, $\overrightarrow{Z\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma H}$, $\overrightarrow{H\Gamma}$ ἀντιστοίχως

15.1 Λόγος συγγραμικῶν διανυσμάτων

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν εὐθ. τμημάτων ὀνομάζουμε **λόγο ἑνὸς διανύσματος** $\vec{AB}$ **ὡς πρὸς ἕνα ἄλλο συγ/κὸ διάνυσμα** $\vec{\Gamma\Delta}$ $(\vec{\Gamma\Delta} \neq \vec{O})$ τὸν σχετικὸ ἀριθμὸ λ γιὰ τὸν ὁποῖον εἶναι :

$$\vec{AB} = \lambda \cdot \vec{\Gamma\Delta} \quad \text{καὶ γράφουμε :} \quad \frac{\vec{AB}}{\vec{\Gamma\Delta}} = \lambda$$

Ἔχουμε δηλαδὴ τὴν ἰσοδυναμία : $\dfrac{\vec{AB}}{\vec{\Gamma\Delta}} = \lambda \Longleftrightarrow \vec{AB} = \lambda \, . \, \vec{\Gamma\Delta}$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α : Ἀπὸ τὸ σχ. 21 ἔχουμε :

$$\frac{\vec{\Gamma Z}}{\vec{AB}} = {}^{+}2 \Longleftrightarrow \vec{\Gamma Z} = {}^{+}2\,\vec{AB}, \qquad \frac{\vec{Z\Gamma}}{\vec{AB}} = {}^{-}2 \Longleftrightarrow \vec{Z\Gamma} = {}^{-}2\,\vec{AB}$$

$$\frac{\vec{\Gamma H}}{\vec{\Gamma\Delta}} = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow \vec{\Gamma H} = {}^{+}\left(\frac{3}{4}\right)\vec{\Gamma\Delta}, \qquad \frac{\vec{H\Gamma}}{\vec{\Gamma\Delta}} = {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\vec{H\Gamma} = {}^{-}\left(\frac{3}{4}\right)\vec{\Gamma\Delta}$$

Ἂν μάλιστα τὸ διάνυσμα $\vec{\Gamma\Delta}$ ληφθῆ ὡς μονὰς τότε ὁ λόγος $\dfrac{\vec{AB}}{\vec{\Gamma\Delta}} = {}^{+}\left(\dfrac{1}{4}\right)$

εἶναι τὸ **σχετικὸ μέτρο** τοῦ $\vec{AB}$ μὲ μονάδα τὸ $\vec{\Gamma\Delta}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

99) Χαράξατε ἕνα διάνυσμα καὶ ἔπειτα ἐφαρμόστε σ' αὐτὸ ὡς ἐκτελεστὰς τοὺς σχ. ἀριθμοὺς $^{+}2$, $^{-}2$, $\dfrac{^{+}1}{2}$, $\dfrac{^{-}1}{2}$, $\dfrac{^{+}2}{3}$, $\dfrac{^{-}3}{4}$.

100) Σὲ μιὰ εὐθεῖα $x\psi$ νὰ σημειώσετε τμήματα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$

α) Ποιοὺς ἐκτελεστὰς πρέπει νὰ ἐφαρμόσουμε στὸ $\vec{AB}$ γιὰ νὰ βροῦμε τὰ $\vec{A\Gamma}$, $\vec{A\Delta}$, $\vec{AE}$, $\vec{\Gamma A}$, $\vec{EB}$; Νὰ γράψετε τὶς σχετικὲς ἰσότητες.

β) Ποιοὺς ἐκτελεστὰς πρέπει νὰ ἐφαρμόσουμε στὸ $\vec{A\Gamma}$ γιὰ νὰ βροῦμε τὰ $\vec{AB}$, $\vec{AE}$, $\vec{A\Delta}$ $\vec{BA}$, $\vec{\Delta A}$; Νὰ γράψετε τὶς σχετικὲς ἰσότητες.

γ) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι $\frac{\overrightarrow{A\Gamma}}{\overrightarrow{AB}}$, $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}}$, $\frac{\overrightarrow{\Gamma A}}{\overrightarrow{AB}}$, $\frac{\overrightarrow{\Gamma A}}{\overrightarrow{BA}}$, $\frac{\overrightarrow{A\Delta}}{\overrightarrow{A\Gamma}}$, $\frac{\overrightarrow{\Delta A}}{\overrightarrow{A\Gamma}}$.

101) Σὲ μιὰ εὐθεῖα x ψ σημειῶστε ἴσα διαδ. τμήματα AB=ΒΓ=ΓΔ. Νὰ σχηματίσετε τὰ διανύσματα

α) $+2\,\overrightarrow{AB}$, β) $^-2\,\overrightarrow{AB}$, γ) $^+3\,\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma B}$ δ) $^-2\,\overrightarrow{B\Gamma} + {}^+3\,\overrightarrow{AB}$,

ε) $\overrightarrow{AB} - {}^+2\,\overrightarrow{B\Gamma}$.

§ 16. Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ

α) Κατὰ τὴν σπουδὴ τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς εἴχαμε διακρίνει μερικὰ σπουδαῖα σύνολα ἀριθμῶν.

1) Τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\Phi = \{1, 2, 3 \ldots\}$.

.) Τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων $\Phi_o = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ τῆς Ἀριθμητικῆς.

3) Τὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς Ἀριθμητικῆς

$$P = \left\{ x \mid x = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{ὅπου} \quad \alpha \in \Phi_o \quad \text{καὶ} \quad \beta \in \Phi \right\}$$

4) Τὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς A, εἰς τὸ ὁποῖον περιέχονται ἐκτὸς ἀπὸ τοὺς ρητοὺς καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, ποὺ δὲν μποροῦν νὰ τεθοῦν ὑπὸ τὴν μορφὴν ρητοῦ π.χ. οἱ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ . . .

Μεταξὺ τῶν συνόλων Φ, Φ_o, P, A ἔχουμε τὶς σχέσεις:

$$\Phi \subseteq \Phi_o \subseteq P \subseteq A$$

β) Μετὰ τὴν εἰσαγωγὴ τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν διακρίνουμε τὰ ἀκόλουθα σπουδαῖα σύνολα:

1) Τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀκεραίων A^+

$$A^+ = \{^+1, {}^+2, {}^+3 \ldots\}$$

2) Τὸ σύνολο τῶν ἀρνητ. ἀκεραίων A^-

$$A^- = \{^-1, {}^-2, {}^-3, \ldots\}$$

3) Τὸ σύνολο τῶν σχετικῶν ἀκεραίων A ἢ ἁπλῶς τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ποὺ εἶναι ἕνωσις τῶν συνόλων A^+, A^- καὶ τοῦ O.

4) Τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν P^+

5) » » » ἀρνητ. » P^-

6) » » » σχετικῶν ρητῶν, ποὺ εἶναι ἕνωσις τῶν P^+, P^- καὶ τοῦ μηδενός.

7) Τὸ σύνολο Π τῶν **πραγματικῶν** ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι ἕνωσις τοῦ συνόλου A^+ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, τοῦ συνόλου A^- τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καὶ τοῦ μηδενός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

102) Εἶναι ὁ -5 ἀκέραιος; ρητός; πραγματικός;

103) εἶναι ὁ $-\dfrac{3}{5}$ ἀκέραιος; ρητός; θετικὸς ρητός; πραγματικός;

104) Εἶναι τὸ $-\sqrt{3}$ ἀκέραιος, ρητός, πραγματικός ἀριθμός;

105) Εἶναι τὸ 0 ἀκέραιος, ρητός, πραγματικός, θετικός;

106) Εἶναι τὸ σύνολο Π ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Α;

107) Εἶναι τὸ σύνολο Α ὑποσύνολο τοῦ συνόλου Π;

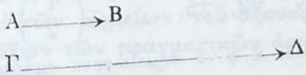
108) Εἶναι τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν ὑποσύνολο τοῦ Π;

§ 17. Διανυσματικὴ παράστασις ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ

Μάθαμε νὰ παριστάνουμε ἕναν ἀριθμὸ τῆς ἀριθμητικῆς μ' ἕνα εὐθύγ. τμῆμα. Θὰ ἐξετάσουμε τώρα πῶς παριστάνουμε ἕναν σχ. ἀριθμὸ μ' ἕνα διάνυσμα.

Ἂς πάρουμε ἕνα διάνυσμα, π. χ. τὸ $\overrightarrow{AB}$, κι' ἕναν ρητὸ σχ. ἀριθμό, π.χ. τὸν $+3$. Μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ $+3$ ὡς ἐκτελεστὴ στὸ $\overrightarrow{AB}$ καὶ νὰ σχηματίσουμε ἕνα ἄλλο διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, ὅπου:

$\overrightarrow{\Gamma\Delta} = +3 \,.\, \overrightarrow{AB}$



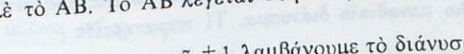
Σχ. 22

Γενικὰ ἂν δοθῇ ἕνας ρητὸς σχετ. ἀριθμὸς λ κι' ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$, τότε σχηματίζουμε ἕνα ἄλλο διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$, ὅπου: $\overrightarrow{EZ} = \lambda \,.\, \overrightarrow{AB}$.

Τὸ $\overrightarrow{EZ}$ ὀνομάζεται **διανυσματικὴ παράστασι ἢ εἰκόνα** τοῦ ἀριθμοῦ λ ἀναφορικὰ μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$. Τὸ $\overrightarrow{AB}$ λέγεται στὴν περίπτωσι αὐτή, **διάνυσμα ἀναφορᾶς**.

Ὡς διανυσματικὴ εἰκόνα τοῦ $+1$ λαμβάνουμε τὸ διάνυσμα ἀναφορᾶς. Εἶναι δηλαδή: $\overrightarrow{AB} = +1 \,.\, \overrightarrow{AB}$. Γι' αὐτὸ τὸ διάνυσμα ἀναφορᾶς λέγεται καὶ **μοναδιαῖο διάνυσμα.**

Παράδειγμα: Στὸ σχ. 23, ἂν πάρουμε ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς τὸ $\overrightarrow{OA}$ ἔχουμε:



Σχ. 23

Τὸ $\overrightarrow{OB}$ εἶναι διανυσματικὴ εἰκόνα τοῦ $+2$

» $\overrightarrow{O\Gamma}$ » » » » $+3$

» $\overrightarrow{O\Delta}$ » » » » $+4$

» $\overrightarrow{OA'}$ » » » » -1 κ.λ.π.

Ἀπὸ αὐτὰ γίνεται φανερὸν ὅτι:

α) **Ἂν δύο ρητοὶ σχ. ἀριθμοὶ εἶναι ἴσοι τότε καὶ οἱ διανυσματικὲς εἰκόνες των, μὲ τὸ ἴδιο διάνυσμα ἀναφορᾶς $\overrightarrow{M}$, εἶναι ἴσα διανύσματα.**

β) **Ἂν δύο διανύσματα εἶναι ἴσα καὶ πάρουμε τὸ ἴδιο διάνυσμα ἀναφορᾶς, $\overrightarrow{M}$ τότε αὐτὰ εἶναι διανυσματικὲς εἰκόνες ἴσων σχετικῶν ἀριθμῶν.**

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow \alpha\overrightarrow{M} = \beta\overrightarrow{M}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

109) Νὰ γράψετε ἕνα διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{M}$, καὶ νὰ τὸ χρησιμοποιήσετε ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς (μοναδιαῖο διάνυσμα) γιὰ νὰ βρῆτε τὶς διανυσματικὲς εἰκόνες τῶν ἀριθμῶν -2, $+5$, $-\left(\frac{1}{2}\right)$ $+\left(\frac{3}{4}\right)$

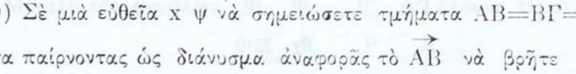
110) Σὲ μιὰ εὐθεῖα x ψ νὰ σημειώσετε τμήματα $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta E$ κι' ἔπειτα παίρνοντας ὡς διάνυσμα ἀναφορᾶς τὸ $\overrightarrow{AB}$ νὰ βρῆτε ποιοὶ σχ. ἀριθμοὶ ἔχουν ὡς εἰκόνες τὰ διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{EB}$.

111) Νὰ ἐπαναλάβετε τὴν ἄσκησι παίρνοντας ὡς μοναδιαῖο διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{A\Delta}$.

112) Νὰ σχηματίσετε τὶς διανυσματικὲς εἰκόνες δύο ἀντιθέτων σχ. ἀριθμῶν, μὲ τὸ ἴδιο μοναδιαῖο διάνυσμα. Τί παρατηρεῖτε ,

§ 18. Γεωμετρικὴ παράστασις τῶν πραγμ. ἀριθμῶν

α) **Ἄξων.** Σὲ μιὰ εὐθεῖα x ψ ὁρίζουμε ἕνα σημεῖον O ὡς ἀρχὴ κι' ἕνα μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{M}$ (σχ. 24).



Σχ. 24

Τὸ σύνολο ποὺ ἔχει στοιχεῖα : τὴν εὐθεῖα x ψ, τὴν ἀρχὴ Ο, καὶ τὸ μοναδιαῖο διάνυσμα $\overrightarrow{M}$ λέγεται **ἄξων.**

Ἡ ἀρχὴ Ο χωρίζει τὴν x ψ στὶς ἡμιευθεῖες οψ καὶ οx καὶ ἡ φορὰ τοῦ μοναδιαίου διανύσματος ὁρίζει τὴν θετικὴν φορὰν τῆς x ψ.

β) Ἄς πάρουμε ἕνα πραγμ. ἀριθμὸ π.χ. τὸ $+4$. Στὸν ἄξονα x΄ψ ὁρίζουμε ἕνα διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{O\Delta}$ τέτοιο ὥστε :

$$\overrightarrow{O\Delta} = +4.\overrightarrow{M}$$

(δηλ. τὸ $\overrightarrow{O\Delta}$ εἶναι διανυσματικὴ εἰκόνα τοῦ $+4$ μὲ μοναδιαῖο διάνυσμα τὸ $\overrightarrow{M}$)

Τὸν ἀριθμὸ $+4$ τὸν καλοῦμε **τετμημένη** τοῦ σημείου Δ τοῦ ἄξονος x΄ψ.

Δεχόμαστε ὅτι :

1) Σὲ κάθε πραγμ. ἀριθμὸ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον σημεῖον τοῦ ἄξονος x΄x (σχ. 25) ποὺ ἔχει τὸν ἀριθμὸν αὐτὸν ὡς τετμημένην.

2) Σὲ κάθε σημεῖο τοῦ ἄξονος x΄x ἀντιστοιχεῖ ἕνας μόνον πραγμ. ἀριθμὸς ποὺ εἶναι τετμημένη τοῦ σημείου τούτου.

Δεχόμαστε δηλαδὴ ὅτι ὑπάρχει : **Μία ἀντιστοιχία ἕνα-μ' ἕνα (ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία) μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Π τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καὶ τῶν σημείων τοῦ ἄξονος x΄x.** Γι' αὐτὸ καὶ ὁ ἄξων x΄x λέγεται **ἄξων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.**

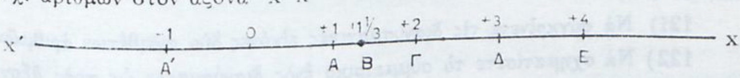
Παρατηροῦμε ὅτι :

1) Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο ὁ ἀριθμὸς 0 ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀρχὴ 0 τοῦ ἄξονος.

2) Οἱ θετικοὶ ἀριθμοὶ ἀντιστοιχοῦν* σὲ σημεῖα «δεξιὰ» τῆς ἀρχῆς 0.

3) Οἱ ἀρνητικοὶ ἀριθμοὶ ἀντιστοιχοῦν σὲ σημεῖα «ἀριστερὰ» τῆς ἀρχῆς.

Παράδειγμα: Στὸ σχ. 25 ἔχουμε σημειώσει τὶς εἰκόνες μερικῶν σχ. ἀριθμῶν στὸν ἄξονα x΄x



Σχ. 25

κι' ἔχουμε ὅτι : τετμημένη τοῦ σημείου Α εἶναι ὁ ἀριθμὸς $+1$

» » » Β » » » $+1\frac{1}{3}$

» » » Γ » » » $+2$

---

* **Σημείωσις.** Στὴν περίπτωσι τῶν μὴ ρητῶν ἀριθμῶν ἐργαζόμαστε, πρὸς τὸ παρόν, μ' ὅση προσέγγιση μποροῦμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

113) Νὰ χαράξετε ἄξονα $x'0x$ καὶ νὰ βρῆτε τὰ σημεῖα αὐτοῦ ποὺ ἔχουν τετμημένες -2, $+5$, $-\left(\frac{1}{2}\right)$.

114) Σ' ἕναν ἄξονα νὰ βρῆτε σημεῖα ποὺ εἶναι εἰκόνες δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν. Τί παρατηρεῖτε σχετικὰ μὲ τὶς θέσεις τῶν σημείων αὐτῶν ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν 0;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

115) Νὰ γράψετε 4 συγ/κὰ διανύσματα $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$, $\vec{\Delta}$, κι' ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε, μὲ αὐτὰ τὴν ἰσότητα

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)+\left(\vec{\Gamma}+\vec{\Delta}\right)=\vec{A}+\vec{B}+\vec{\Gamma}+\vec{\Delta}$$

116) Νὰ γράψετε δύο συγ/κὰ διανύσματα $\vec{A}$ καὶ $\vec{B}$ καὶ ἔπειτα νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰσότητα $-2\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=-2\vec{A}+-2\vec{B}$

117) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰσότητα

$$-2\left(\vec{A}-\vec{B}\right)=-2\vec{A}-\,-2\vec{B}$$

118) Νὰ ἐκφράσετε μὲ σχετικοὺς ἀριθμοὺς τὶς ἀκόλουθες χρονολογίες

α) 480 π. Χ. β) 1821 μ. Χ. γ) 1940 μ. Χ.

119) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ σχέσις «τὸ $\vec{X}$ εἶναι ἀντίθετο τοῦ $\vec{\Psi}$» εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Νὰ γράψετε ἕνα διάνυσμα $\vec{AB}$ καὶ νὰ βρῆτε τὸ συμμετρικὸ $\vec{A'B'}$ αὐτοῦ ὡς πρὸς ἕνα σημεῖο Ο ἐκτὸς αὐτοῦ. Εἶναι ἴσα τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{A'B'}$;

121) Νὰ συγκρίνετε τὶς διανυσματικὲς εἰκόνες δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν.

122) Νὰ σχηματίσετε τὸ συμμετρικὸ ἑνὸς διανύσματος ὡς πρὸς ἄξονα παράλληλον πρὸς αὐτό. Τί παρατηρεῖτε;

123) Νὰ χαράξετε ἕνα διάνυσμα $\vec{A}$ κι' ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὰ διανύσματα

α) $-5\vec{A}$, β) $-2\vec{A}+3\vec{A}$ γ) $+2\vec{A}-+5\vec{A}$

124) Σὲ ἕναν ἄξονα $x'\psi$ νὰ σημειώσετε δύο ἴσα διανύσματα $\vec{AB}=\vec{\Gamma\Delta}$ κι' ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὰ διανύσματα $\vec{A\Gamma}$ καὶ $\vec{B\Delta}$.

Ἐρωτήσεις

1) Πόσα καὶ ποιὰ διανύσματα ὁρίζουν δύο διαφορετικὰ σημεῖα A καὶ B ;

2) Τί διαφέρει μιὰ εὐθεῖα ἀπὸ μιὰ προσανατολισμένη εὐθεῖα ;

3) Γνωρίζετε διανύσματα ποὺ δὲν ἔχουν ὁρισμένη διεύθυνσι ;

4) Τί εἶναι μοναδιαῖο διάνυσμα ;

5) Πῶς παριστάνουμε ἕναν ρητὸ σχετ. ἀριθμὸ μ' ἕνα διάνυσμα ;

6) » » » » » » στὸν ἄξονα τῶν πραγμ. ἀριθμῶν ;

7) Τί γνωρίζετε γιὰ τοὺς σχετ. ἀριθμοὺς ποὺ ἔχουν τὴν ἴδια ἀπόλυτο τιμή ;

8) Τί γνωρίζετε γιὰ τὰ σχετικὰ μέτρα δύο ἀντιθέτων διανυσμάτων

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ

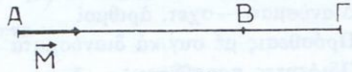
ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟΥΣ ΣΧ. ΑΡΙΘΜΟΥΣ

Ἡ χρησιμοποίησις τῶν σχετ. ἀριθμῶν μᾶς ὡδήγησε στὴν ἐκτέλεση πράξεων μὲ αὐτούς.

Γιὰ νὰ κατανοήσουμε τὶς πράξεις αὐτὲς θὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς διανυσματικὲς εἰκόνες τῶν σχετ. ἀριθμῶν.

§ 19. Ἄθροισμα σχετ. ἀριθμῶν

Ὁρισμός. Ἂς εἶναι $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{B\Gamma}$ δύο διαδ. διανύσματα (σχ. 26), ποὺ παριστάνουν τοὺς σχετ. ἀριθμοὺς λ καὶ μ μὲ διανυσματικὴ μονάδα τὸ $\overrightarrow{M}$ κι' ἂς εἶναι ἀκόμη ν ὁ σχετικὸς ἀριθμὸς ποὺ ἔχει ὡς διανυσματικὴ εἰκόνα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ (μὲ τὴν ἴδια μονάδα $\overrightarrow{M}$). Εἶναι δηλαδή :



Σχ. 26

$$\overrightarrow{AB} = \lambda.\overrightarrow{M} \qquad \overrightarrow{B\Gamma} = \mu\,\overrightarrow{M} \qquad \overrightarrow{A\Gamma} = \nu\,\overrightarrow{M}$$

Ἀπὸ τὸ σχ. 26 ἔχουμε :
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma} \iff$$
$$\lambda\,\overrightarrow{M} + \mu.\overrightarrow{M} = \nu\,\overrightarrow{M}$$

ὁ σχετ. ἀριθμὸς ν λέγεται **ἄθροισμα** τῶν σχετ. ἀριθμῶν λ καὶ ν καὶ γράφουμε : $\lambda + \mu = \nu$. Ἔχουμε δηλαδὴ τὴν ἰσοδυναμία

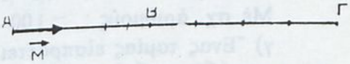
$$\lambda\,\overrightarrow{M} + \mu.\overrightarrow{M} = \nu\,\overrightarrow{M} \iff \lambda + \mu = \nu \qquad (1)$$

Ὥστε : **Ἄθροισμα δύο σχετικῶν ἀριθμῶν λ καὶ μ λέγεται ὁ σχετ. ἀριθμὸς ν ποὺ ἔχει ὡς διανυσματικὴ εἰκόνα τὸ ἄθροισμα τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων τῶν λ καὶ μ** (μὲ τὴν ἴδια διανυσματικὴ μονάδα $\overrightarrow{M}$)

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς : Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τοῦ ἀθροίσματος ἰσχύει γιὰ ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμούς. Ἐμεῖς, στὰ ἑπόμενα θὰ περιορισθοῦμε σὲ πράξεις μόνο μὲ ρητοὺς σχετ. ἀριθμούς.

19.1 Κανόνες προσθέσεως

α) Ἀπὸ τὸ σχ. 27 ἔχουμε:



Σχ. 27

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\Longleftrightarrow \quad +3\overrightarrow{M} + +4\overrightarrow{M} = +7\overrightarrow{M} \qquad \text{(καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad +3 + +4 = +7 \qquad \text{(I)}$$

β) Ἀπὸ τὸ σχ. 27 ἔχουμε:

$$\overrightarrow{\Gamma B} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Gamma A} \Longleftrightarrow$$

$$-4\overrightarrow{M} + -3\overrightarrow{M} = -7\overrightarrow{M} \Longleftrightarrow$$

$$-4 + -3 = -7 \qquad \text{(II)}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους I καὶ II συνάγουμε ὅτι: **Τὸ ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ὁμόσημος μὲ αὐτοὺς καὶ μὲ ἀπόλυτη τιμὴ ἴσην μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.**

Ἀπὸ τὸ σχ. 27 ἔχουμε:

$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B} = \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow$$

$$+7\overrightarrow{M} + -4\overrightarrow{M} = +3\overrightarrow{M} \Longleftrightarrow$$

$$+7 + -4 = +3 \qquad \text{(III)}$$

Ἀπὸ τὸ ἴδιο σχῆμα ἔχουμε:

$$\overrightarrow{\Gamma A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma B} \Longleftrightarrow$$

$$-7\overrightarrow{M} + +3\overrightarrow{M} = -4\overrightarrow{M} \Longleftrightarrow$$

$$-7 + +3 = -4 \qquad \text{(IV)}$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους III καὶ IV συνάγουμε ὅτι: **Τὸ ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμὸς ὁμόσημος μὲ τὸν προσθετέο ποὺ ἔχει μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμὴ καὶ ἔχει ὡς ἀπόλυτη τιμὴ τὴ διαφορὰ τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.**

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὲ ς

α) Ἕνας ταμίας εἰσπράττει 100 δραχ. καὶ 300 δραχ. ἄρα εἰσπράττει συνολικὰ 400 δρχ.

Μὲ σχ. ἀριθμούς: $+100 + +300 = +400.$

Ἕνας ταμίας πληρώνει 100 δρχ. καὶ 300 δρχ. ἄρα πληρώνει συνολικὰ 400. δρ.

Μὲ σχ. ἀριθμούς: $^{-}100 + {}^{-}300 = {}^{-}400.$

γ) Ἕνας ταμίας εἰσπράττει 100 δρχ. καὶ πληρώνει 300 δρχ. ἄρα τελικὰ πληρώνει 200 δρχ.

Μὲ σχ. ἀριθμούς: $^{+}100 + {}^{-}300 = {}^{-}200.$

δ) Ἕνας ταμίας πληρώνει 100 δρχ. καὶ εἰσπράττει 300 δρχ. ἄρα τελικὰ εἰσπράττει 200 δρχ.

Μὲ σχετ. ἀριθμούς: $^{-}100 + {}^{+}300 = {}^{+}200.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

125) Μὲ τὴν βοήθεια τῶν κανόνων νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀθροίσματα

α) $^{-}7 + {}^{-}11$, β) $^{+}5 + {}^{+}9{,}2$ γ) $^{-}4 + {}^{+}7{,}5$

δ) $^{-}0{,}03 + {}^{-}0{,}4$ ε) $^{-}0{,}06 + {}^{+}0{,}015$

126) Μὲ τὴ βοήθεια τῶν διανυσματικῶν εἰκόνων νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀθροίσματα

α) $^{-}3 + {}^{-}2$ β) $^{+}3 + {}^{-}2$ γ) $^{-}3 + {}^{-}2$

127) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰσότητα

$$(\alpha + \beta)\,\vec{M} = \alpha\vec{M} + \beta\vec{M} \quad \text{ἂν } \alpha = -2 \text{ καὶ } \beta = {}^{+}3$$

§ 20. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

I) Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης

Ἂς εἶναι $\vec{A}$ καὶ $\vec{B}$ οἱ διανυσματικὲς εἰκόνες τῶν ρητῶν σχετικῶν α καὶ β μὲ μονάδα τὸ $\vec{M}$ ἄς εἶναι δηλαδή: $\vec{A} = \alpha.\vec{M}$ καὶ $\vec{B} = \beta.\vec{M}$

τότε ἔχουμε: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (Ἀντ/κὴ ἰδιότης διαν/των)

$\Longleftrightarrow$ $\alpha\,\vec{M} + \beta\,\vec{M} = \beta\,\vec{M} + \alpha\vec{M}$

$\Longleftrightarrow$ $(\alpha + \beta)\,.\,\vec{M} = (\beta + \alpha)\,\vec{M}$ (ὁρισμὸς ἀθροίσματος)

$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha + \beta = \beta + \alpha}$

Ἐπαλήθευσις: $^{+}3 + {}^{-}4 = {}^{-}1$

$^{-}4 + {}^{+}3 = {}^{-}1$

ἄρα: $^{+}3 + {}^{-}4 = {}^{-}4 + {}^{+}3$

II) Προσεταιριστικὴ ἰδιότης

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν διανυσμάτων ἄθροισμα τριῶν κατὰ σειρὰν προσθετέων εἶναι ὁ ἀριθμὸς ποὺ εὑρίσκομε ἂν στὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθέσουμε τὸν τρίτο προσθετέο. Ἄς εἶναι α, β, γ, κατὰ σειρὰν τρεῖς ρητοὶ σχετ. ἀριθμοὶ καὶ $\vec{A}, \vec{B}, \vec{\Gamma}$, οἱ διανυσματικὲς εἰκόνες αὐτῶν μὲ μονάδα ἕνα διάνυσμα $\vec{M}$

Γνωρίζουμε ὅτι : $\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{\Gamma} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{\Gamma}\right) \iff$

$$\left(\alpha\vec{M} + \beta\vec{M}\right) + \gamma\vec{M} = \alpha\vec{M} + \left(\beta\vec{M} + \gamma\vec{M}\right) \iff$$

$$\left(\alpha + \beta\right).\vec{M} + \gamma\vec{M} = \alpha\vec{M} + \left(\beta + \gamma\right).\vec{M} \iff$$

$$\left[(\alpha + \beta) + \gamma\right].\vec{M} = \left[\alpha + (\beta + \gamma)\right]\vec{M} \iff$$

$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$$ **προσεταιριστικὴ ἰδιότης**

Ἐ π α λ ή θ ε υ σ ι ς : Εἶναι : $(^{-}2 + {}^{+}5) + {}^{-}7 = {}^{+}3 + {}^{-}7$
$= {}^{-}4$

Ἀλλὰ καί : $^{-}2 + ({}^{+}5 + {}^{-}7) = {}^{-}2 + {}^{-}2$
$= {}^{-}4$

ἄρα : $(^{-}2 + {}^{+}5) + {}^{-}7 = {}^{-}2 + ({}^{+}5 + {}^{-}7)$

Παρατήρησις : Μὲ συνδιασμὸ τῆς προσεταιριστικῆς καὶ τῆς ἀντιμεταθετικῆς ἰδιότητος καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι :

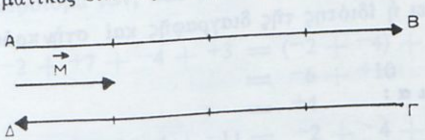
Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν προσθετέων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴν σειράν των.

π.χ. $(^{-}2 + {}^{+}12) + {}^{+}2 = {}^{-}2 + ({}^{+}12 + {}^{+}2)$ (προσετ/κὴ ἰδιότης)
$= {}^{-}2 + ({}^{+}2 + {}^{+}12)$ (ἀντιμ/κὴ ἰδιότης)
$= (^{-}2 + {}^{+}2) + {}^{+}12)$ (προσ/κὴ ἰδιότης)

Γι' αὐτὸ καὶ γράφουμε : $(^{-}2 + {}^{+}12) + {}^{+}2 = {}^{-}2 + {}^{+}12 + {}^{+}2$ μὲ τὴν ἔννοια ὅτι τὸ ἄθροισμα εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρὰ τῶν προσθετέων.

III) Ἄθροισμα ἀντιθέτων ἀριθμῶν

Ἄς πάρουμε δύο ἀντιθέτους ἀριθμοὺς π.χ. +4, −4 κι' ἄς σχηματίσουμε τὶς διανυσματικὲς εἰκόνες των μὲ μοναδιαῖο διάνυσμα $\vec{M}$.



Σχ. 28

$$\vec{AB} = {}^{+}4\vec{M} \qquad \vec{\Gamma\Delta} = {}^{-}4\vec{M}$$

Γνωρίζουμε ὅτι : γιὰ τὰ ἀντίθετα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ εἶναι :

$$\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} = \vec{O} \iff$$

$$^{+}4\vec{M} + {}^{-}4\vec{M} = \vec{O} \iff$$

$$\left({}^{+}4 + {}^{-}4\right)\vec{M} = \vec{O} \iff$$

$$^{+}4 + {}^{-}4 = 0$$

Γενικά : **Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ 0.**

IV) Οὐδέτερο στοιχεῖο

Ἐπειδὴ $\vec{AB} + \vec{O} = \vec{AB}$

θὰ εἶναι καί : $\alpha\vec{M} + \vec{O} = \alpha\vec{M}$ (ὅπου $\vec{AB}$ ἡ διαν. εἰκόνα τοῦ ρητοῦ σχετικοῦ α)

$$\iff \alpha + O = \alpha$$

ὥστε : **τὸ μηδὲν εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο τῆς προσθέσεως.**

Αὐτὲς εἶναι οἱ βασικὲς ἰδιότητες τῆς προσθέσεως ρητῶν σχ. ἀριθμῶν. Ἀπὸ αὐτὲς συνάγονται κι' ἄλλες ἰδιότητες ἀπ' τὶς ὁποῖες οἱ πιὸ χρήσιμες εἶναι οἱ ἀκόλουθες :

1) **Ἰδιότης διαγραφῆς**

Εἶναι : $\vec{A} + \vec{\Gamma} = \vec{B} + \vec{\Gamma} \iff \vec{A} = \vec{B}$ (ἰδιότης διαγραφῆς § 12.1)

κι' ἄν α, β, γ εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σχετικὰ μέτρα τῶν $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{\Gamma}$ μὲ τὴν ἴδια διανυσμ. μονάδα $\vec{M}$

τότε $\alpha\vec{M} + \gamma\vec{M} = \beta\vec{M} + \gamma\vec{M} \iff \alpha\vec{M} = \beta\vec{M}$

ἢ $\left(\alpha + \gamma\right)\vec{M} = \left(\beta + \gamma\right)\vec{M} \iff \alpha\vec{M} = \beta\vec{M}$ (§ 19)

ἢ $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \iff \alpha = \beta$

Ὥστε ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς διαγραφῆς καὶ στὴν πρόσθεσι τῶν σχετ. ἀριθμῶν,

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

$$\alpha + {}^{-}2 = {}^{+}5 + {}^{-}2 \iff \alpha = {}^{+}5$$

2) **Τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν ποὺ εὑρί-**

σκεται ἂν στὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων προσθέσουμε τὸν τέταρτο κ.ο.κ. δὲν μεταβάλλεται ἂν ἀλλάξουμε τὴ σειρά των.

$$\text{Π. χ. } {}^{+}2 + {}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}1 = [({}^{+}2 + {}^{-}3) + {}^{-}4] + {}^{+}1$$
$$= ({}^{-}1 + {}^{-}4) + {}^{+}1$$
$$= {}^{-}5 + {}^{+}1$$
$$= {}^{-}4$$

$$\text{Ἀλλὰ καὶ } {}^{+}2 + {}^{+}1 + {}^{-}3 + {}^{-}4 = [({}^{+}2 + {}^{+}1) + {}^{-}3] + {}^{-}4$$
$$= ({}^{+}3 + {}^{-}3) + {}^{-}4$$
$$= 0 + {}^{-}4$$
$$= {}^{-}4$$

$$\text{Ὥστε: } {}^{-}2 + {}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}1 = {}^{+}2 + {}^{+}1 + {}^{-}3 + {}^{-}4$$

3) Σ' ἕνα ἄθροισμα σχετ. ἀριθμῶν μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε μερικοὺς προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά των καὶ ἀντιστρόφως:

Μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε ἕναν προσθετέο μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἄλλους, οἱ ὁποῖοι τὸν ἔχουν ἄθροισμα.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

$$1)\quad {}^{-}5 + {}^{+}15 + {}^{+}4 + {}^{-}7 = {}^{+}10 + {}^{+}4 + {}^{-}7 = {}^{+}7$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ } {}^{-}5 + {}^{+}15 + {}^{+}4 + {}^{-}7 = {}^{-}5 + {}^{+}5 + {}^{+}10 + {}^{+}4 + {}^{-}7$$
$$= 0 + {}^{+}10 + {}^{+}4 + {}^{-}7$$
$$= {}^{+}7$$

$$2)\quad {}^{+}7 + {}^{-}3 + {}^{+}3 + {}^{-}5 = {}^{+}4 + {}^{+}3 + {}^{-}5$$
$$= {}^{+}2$$

$$\text{ἀλλὰ καὶ } {}^{+}7 + ({}^{-}3 + {}^{+}3) + {}^{-}5 = {}^{+}7 + 0 + {}^{-}5$$
$$= {}^{+}2$$

Οἱ ἰδιότητες αὐτὲς συχνὰ μᾶς βοηθοῦν στὴ συντόμευσι τῶν ὑπολογισμῶν. Π. χ. ἂν ἔχουμε νὰ ὑπολογίσουμε ἕνα ἄθροισμα μὲ πολλοὺς προσθετέους, θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς, προσθέτουμε χωριστὰ τοὺς θετικοὺς καὶ χωριστὰ τοὺς ἀρνητικούς.

Ἂν στὸ ἴδιο ἄθροισμα ὑπάρχουν ἀντίθετοι προσθετέοι, τοὺς ἀντικαθιστοῦμε μὲ τὸ ἄθροισμά των, ποὺ εἶναι μηδὲν ἢ πιὸ σύντομα, τοὺς ἐξαλείφουμε.

$$\text{Π. χ. }\quad 1)\quad {}^{-}2 + {}^{+}7 + {}^{-}4 + {}^{+}3 = ({}^{-}2 + {}^{-}4) + ({}^{+}7 + {}^{+}3)$$
$$= {}^{-}6 + {}^{+}10$$
$$= {}^{+}4$$

$$2)\quad {}^{-}2 + {}^{+}11 + {}^{-}4 + {}^{-}11 = {}^{-}2 + {}^{-}4 + ({}^{+}11 + {}^{-}11)$$
$$= {}^{-}6 + 0$$
$$= {}^{-}6$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

128) Ποιὸν ἀριθμὸ ἀντιπροσωπεύει τὸ x σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἰσότητες :

α) $^-7 + x = {}^-7$ β) $^-7 + x = 0$

γ) $(^-4 + {}^+3) + x = {}^-4 + (^+3 + {}^-2)$.

129) Χρησιμοποιεῖστε γνωστὲς ἰδιότητες γιὰ νὰ ὑπολογίσετε πιὸ σύντομα τὰ ἀθροίσματα :

α) $^-27 + {}^+1 + {}^+99$ β) $^-5{,}2 + {}^+6 + {}^-4{,}8$

130) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα $x = α + β$ στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις :

α) ἂν $α = {}^+9$ καὶ $β = {}^+2{,}5$

β) ἂν $α = {}^+12{,}3$ καὶ $β = {}^-12{,}3$

γ) ἂν $α = -\left(\frac{4}{11}\right)$ καὶ $β = 0$

§ 21. Ἀφαίρεσις

Ἡ ἀφαίρεσις στὸ σύνολο τῶν ρητῶν σχετικῶν ὁρίζεται ὅπως καὶ στὸ σύνολο τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Π. χ. Ὅταν ζητᾶμε τὴ διαφορὰ $^-5 - {}^+2$ εἶναι σὰν νὰ ζητᾶμε ἕναν ἀριθμὸ x ὁ ὁποῖος ἂν προστεθῆ στὸν ἀφαιρετέο θὰ μᾶς δώση τὸν μειωτέο. Ἔχουμε δηλαδὴ τὴν ἰσοδυναμία :

$$^-5 - {}^+2 = x \iff x + {}^+2 = {}^-5$$

καὶ γενικά : $$α - β = x \iff x + β = α$$

Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς : Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $x + {}^+2 = {}^-5$ εὑρίσκουμε τὴν διαφορὰ x μὲ τὴν βοήθεια τῶν ἰδιοτήτων τῆς προσθέσεως κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο : $x + {}^+2 = {}^-5$

$$\iff (x + {}^+2) + {}^-2 = {}^-5 + {}^-2 \quad \text{(ἰδ. διαγραφῆς)}$$

$$\iff x + (^+2 + {}^-2) = {}^-5 + {}^-2$$

$$\iff x = {}^-5 + {}^-2$$

Ἀπὸ τὸ ἀποτέλεσμα συμπεραίνουμε ὅτι :

Ἡ διαφορὰ δύο ρητῶν σχ. ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἂν στὸν μειωτέο προσθέσουμε τὸν ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου,

ἢ συμβολικά : $α - β = α +$ ἀντίθετος τοῦ β

Παραδείγματα:

	Ἀφαίρεσις	Πρόσθεσις	Δοκιμή
1)	$^+6 - {}^+2 =$	$^+6 + {}^-2 = {}^+4$	$^+4 + {}^+2 = {}^+6$
2)	$^+6 - {}^-2 =$	$^+6 + {}^+2 = {}^+8$	$^+8 + {}^-2 = {}^+6$
3)	$^-6 - {}^+2 =$	$^-6 + {}^-2 = {}^-8$	$^-8 + {}^+2 = {}^-6$
4)	$^-6 - {}^-2 =$	$^-6 + {}^+2 = {}^-4$	$^-4 + {}^-2 = {}^-6$

Παρατήρησις

Καθὼς εἴδαμε ἡ ἀφαίρεσις ἰσοδυναμεῖ μὲ πρόσθεσι στὸ μειωτέο τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου. Ἀλλὰ καὶ τὸν ἀντίθετο ὁποιουδήποτε ρητοῦ σχετικοῦ μποροῦμε νὰ βροῦμε πάντοτε καὶ νὰ προσθέσουμε δύο ρητοὺς σχετικοὺς πάντοτε μποροῦμε ἄρα :

Ἡ ἀφαίρεσις στὸ σύνολο τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε δυνατή.

Μ' ἄλλα λόγια : Ἡ ἐξίσωσις $\alpha - \beta = x$ (α, β ρητοὶ σχετικοὶ) ἔχει πάντοτε λύσιν στὸ σύνολο τῶν ρητῶν.

(Στὸ σύνολο τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἡ ἐξίσωσις $\alpha - \beta = x$ εἶχε λύσιν μόνον ὅταν $\alpha \geq \beta$)

Ἐφαρμογή:

Στὸ παρακάτω πλαίσιο ἔχουμε σημειώσει τρεῖς μεταβολὲς θερμοκρασίας :

Ἀρχικὴ Θερ/σία	Τελικὴ Θερ/σία	Μεταβολὴ Θερ/σίας
10^0	$^+2^0$	$^+2^0 - ({}^-10^0) = {}^+12^0$
$^+7^0$	$^-2^0$	$^-2^0 - ({}^+7^0) = {}^-9^0$
$^-6^0$	$^-9^0$	$^-9^0 - ({}^-6^0) = {}^-3^0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

131) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς διαφορὲς $^-7 - {}^-2, \quad {}^+7 - {}^+2, \quad {}^-7 - {}^+2, \quad {}^+7 - {}^+2$

132) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν διαφορὰν

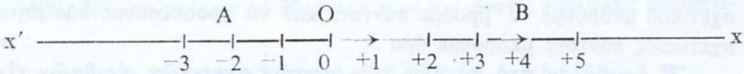
$$\alpha - \beta = x \quad \text{ὅταν} \quad \alpha = {}^-0{,}005, \quad \beta = {}^+\left(\frac{1}{2}\right)$$

133) Ὁ Ἀρχιμήδης ἐγεννήθη τὸ 287 π. Χ. καὶ ἀπέθανε τὸ 217 π. Χ. Χρησιμοποιήσατε σχετ. ἀριθμοὺς γιὰ νὰ βρῆτε πόσα χρόνια ἔζησε.

134) Ἀεροπλάνο ἱπτάμενο σὲ ὕψος 120 m. ὑπεράνω τῆς ἐπιφανείας τῆς θαλάσσης καταπίπτει ἐντὸς αὐτῆς σὲ βάθος 25 m. Πόση ἦτο ἡ κατακόρυφη πτῶσις αὐτοῦ.

§ 22. Τετμημένη διανύσματος σὲ ἄξονα

Στὸ σχ. 29 ἔχουμε τὸν ἄξονα $x'x$ τῶν πραγμ. ἀριθμῶν καὶ ἐπ' αὐτοῦ ἕνα διάνυσμα, τὸ $\overrightarrow{AB}$. Πῶς θὰ ὑπολογίσουμε τὸ σχετικὸ μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἂν γνωρίζουμε τὶς τετμημένες τῶν ἄκρων A καὶ B αὐτοῦ;



Σχ. 29

Θὰ θεωρήσουμε τὸ $\overrightarrow{AB}$ ὡς ἄθροισμα διανυσμάτων, ποὺ ἔχουν ἀρχὴ τὸ σημεῖον O. Ἔχουμε:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = {}^{-}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \qquad \left(\text{διότι } \overrightarrow{AO} = -\,\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \qquad (1)$$

Ἂν εἶναι x τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{AB}$, τότε ἡ (1) γράφεται

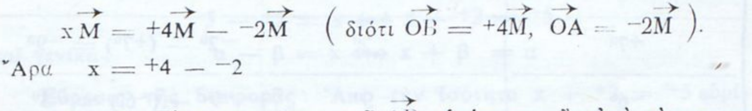
$$x\overrightarrow{M} = {}^{+}4\overrightarrow{M} - {}^{-}2\overrightarrow{M} \qquad \left(\text{διότι } \overrightarrow{OB} = {}^{+}4\overrightarrow{M},\ \overrightarrow{OA} = {}^{-}2\overrightarrow{M}\right).$$

Ἄρα $\quad x = {}^{+}4 - {}^{-}2$

Δηλαδή: **Τὸ σχετ. μῆκος τοῦ $\overrightarrow{AB}$ εὑρίσκεται ἂν ἀπὸ τὴν τετμημένη τοῦ τέλους B ἀφαιρέσουμε τὴν τετμημένη τῆς ἀρχῆς αὐτοῦ.**

Τὸ σχετ. μέτρο διανύσματος στὸν ἄξονα λέγεται καὶ **τετμημένη** τοῦ διανύσματος στὸν ἄξονα αὐτόν.

Παραδείγματα: Στὸν ἄξονα $x'x$ (σχ. 30) εἶναι:



Σχ. 30

Τετμημένη τοῦ $\overrightarrow{A\Delta} = {}^{+}4 - {}^{+}1 = {}^{+}4 + {}^{-}1 = {}^{+}3$

» » $\overrightarrow{B\Delta} = {}^{+}4 - {}^{+}2 = {}^{+}4 + {}^{-}2 = {}^{+}2$

» » $\overrightarrow{A\Gamma'} = {}^{-}3 - {}^{+}1 = {}^{-}3 + {}^{-}1 = {}^{-}4$

» » $\overrightarrow{\Gamma'\Delta} = {}^{+}4 - {}^{-}3 = {}^{+}4 + {}^{+}3 = {}^{+}7$

Παρατήρησις: Ἂν ἕνα διάνυσμα δλισθαίνη πάνω στὸν ἄξονα, τότε ἡ τετμημένη του δὲν ἀλλάζει, διότι οἱ τετμημένες τῶν ἄκρων του μεταβάλλονται κατὰ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν ὁπότε ἡ διαφορά τους δὲν μεταβάλλεται (ἰδιότης τῆς ἀφαιρέσεως).

ΑΣΚΗΣΙΣ

135) Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ, εὑρίσκονται ἐπάνω σ' ἕναν ἄξονα $x'x$ κι' ἔχουν τετμημένες $^{-}2$, $^{+}4$, $^{-}1$ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τετμημένες τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma A}$

§ 23. Ἀριθμητικὸ πολυώνυμο

Ἡ παράστασις $A = {}^{+}12 + {}^{-}5 - {}^{+}2 + {}^{-}7 - {}^{-}3$ (1) ἀποτελεῖται ἀπὸ διαδοχικὲς προσθέσεις ἢ καὶ ἀφαιρέσεις, σχετ. ἀριθμῶν καὶ λέγεται **ἀριθμητικὸ πολυώνυμο**. Οἱ ὅροι $^{+}12$, $^{-}5$, $^{+}2$, $^{-}7$, $^{-}3$ λέγονται **ὅροι** τοῦ πολυωνύμου τούτου. Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε ἕνα ἀριθμητικὸ πολυώνυμο τρέπουμε πρῶτα τὶς ἀφαιρέσεις σὲ προσθέσεις κι' ἔπειτα ὑπολογίζουμε τὸ ἄθροισμα ποὺ προκύπτει.

π.χ. $A = {}^{+}12 + {}^{-}5 - {}^{+}2 + {}^{-}7 - {}^{-}3$

$\Longleftrightarrow A = {}^{+}12 + {}^{-}5 + {}^{-}2 + {}^{-}7 + {}^{+}3$ (τροπὴ τῶν ἀφαιρέσεων σὲ προσθέσεις).

$\Longleftrightarrow A = {}^{+}15 + {}^{-}14$

$\Longleftrightarrow A = {}^{+}1$

Ἄλλα παραδείγματα

$B = {}^{-}5 - {}^{+}4 + {}^{-}121 + {}^{+}5$

$B = {}^{-}5 + {}^{-}4 + {}^{-}121 + {}^{+}5$

$B = {}^{-}4 + {}^{-}121$

$B = {}^{-}125$

$\Gamma = {}^{+}7 - {}^{-}3 - {}^{+}9 + {}^{-}91$

$\Gamma = {}^{+}7 + {}^{+}3 + {}^{-}9 + {}^{-}91$

$\Gamma = {}^{+}10 + {}^{-}100$

$\Gamma = {}^{-}90$

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι οἱ γνωστὲς ἰδιότητες προσθέσεως σχετικῶν ἀριθμῶν συχνὰ μᾶς διευκολύνουν στὸν ταχύτερο ὑπολογισμὸ τοῦ ἀθροίσματος.

23.1 Πρόσθεσις ἀριθμητικῶν πολυωνύμων

Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμητ. πολυωνύμων τρέπουμε πρῶτα τὶς ὑπάρχουσες σ' αὐτὰ ἀφαιρέσεις σὲ προσθέσεις κι' ἔπειτα εὑρίσκουμε τὸ ἄθροισμά των.

Παράδειγμα:

Ἂν $A = {}^-3 + {}^-2 - {}^+4$ καὶ $B = {}^+1 - {}^+5 + {}^-3 + {}^-7$

ἔχουμε $A = {}^-3 + {}^-2 + {}^-4$ καὶ $B = {}^+1 + {}^-5 + {}^-3 + {}^-7$

καὶ $A + B = ({}^-3 + {}^-2 + {}^-4) + ({}^+1 + {}^-5 + {}^-3 + {}^-7)$

$\Longleftrightarrow A + B = {}^-9 + {}^-14$

$\Longleftrightarrow A + B = {}^-\mathbf{23}$

Ἡ προσεταιριστικὴ κι' ἡ ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης τῆς προσθέσεως, μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ φθάσουμε στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα μὲ ὁποιαδήποτε σειρὰ κι' ἂν πάρουμε τοὺς προσθετέους.

Εἶναι δηλαδὴ

$$\begin{aligned} A + B &= ({}^-3 + {}^-2 + {}^-4) + ({}^+1 + {}^-5 + {}^-3) + {}^-7) \quad (1) \\ &= {}^-3 + {}^-2 + {}^-4 + {}^+1 + {}^-5 + {}^-3 + {}^-7 \quad (2) \\ &= {}^-24 + {}^+1 \\ &= {}^-\mathbf{23} \end{aligned}$$

23.2. Ἀντίθετα ἀριθμ. πολυώνυμα

Ἂν προσέξουμε τὰ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα

$A = {}^-2 + {}^+5 - {}^-1 = {}^-2 + {}^+5 + {}^+1$

καὶ $B = {}^+2 + {}^-5 - {}^+1 = {}^+2 + {}^-5 + {}^-1$

παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν ὅλους τοὺς ὅρους των ἕναν πρὸς ἕναν **ἀντιθέτους** καὶ γι' αὐτὸ λέγονται **ἀντίθετα ἀριθμ. πολυώνυμα.**

Ἂν ὑπολογίσουμε τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμ. πολυωνύμων εὑρίσκουμε μηδέν.

πράγματι εἶναι $A + B = ({}^-2 + {}^+5 + {}^+1) + ({}^+2 + {}^-5 + {}^-1)$

$\Longleftrightarrow A + B = {}^-2 + {}^+5 + {}^+1 + {}^+2 + {}^-5 + {}^-1$

$\Longleftrightarrow A + B = ({}^-2 + {}^+2) + ({}^+5 + {}^-5) + ({}^+1 + {}^-1)$

$\Longleftrightarrow A + B = 0$

23.3 Ἀφαίρεσις ἀριθμ. πολυωνύμων

Ἐπειδὴ κάθε ἀριθμ. πολυώνυμο εἶναι ἴσο μ' ἕναν σχετ. ἀριθμὸ ὁ ὁρισμὸς τῆς διαφορᾶς σχετ. ἀριθμῶν ἰσχύει καὶ γιὰ τὴ διαφορὰ τῶν ἀριθ.

πολυωνύμων. Ἄρα γιὰ νὰ βροῦμε τὴ διαφορὰ ἑνὸς ἀριθ. πολυωνύμου ἀπὸ ἕνα ἄλλο, ἀρκεῖ στὸ μειωτέο ἀριθ. πολυώνυμο νὰ προσθέσουμε τὸ ἀντίθετο τοῦ ἀφαιρετέου ἀριθ. πολυωνύμου.

Παράδειγμα: Ἂν $A = {}^{-}3 + {}^{-}5 + {}^{-}1 - {}^{+}4$

καὶ $B = {}^{-}2 + {}^{-}1 - {}^{-}3 + {}^{-}2$

τότε:
$$\begin{aligned} A - B &= ({}^{-}3 + {}^{-}5 + {}^{-}1 - {}^{+}4) - ({}^{-}2 + {}^{-}1 - {}^{-}3 + {}^{-}2) \\ &= ({}^{-}3 + {}^{-}5 + {}^{-}1 - {}^{+}4) + ({}^{+}2 + {}^{+}1 - {}^{+}3 + {}^{+}2) \\ &= {}^{-}3 + {}^{-}5 + {}^{-}1 - {}^{+}4 + {}^{+}2 + {}^{+}1 - {}^{+}3 + {}^{-}2 \\ &= {}^{-}3 + {}^{-}5 + {}^{-}1 + {}^{-}4 + {}^{+}2 + {}^{+}1 + {}^{-}3 + {}^{-}2 \\ &= {}^{-}18 + {}^{+}3 = \mathbf{{}^{-}15} \end{aligned}$$

23.4 Χρῆσις παρενθέσεων

α) Εἴδαμε ὅτι μὲ τὴ χρησιμοποίησι τῆς προσεταιριστικῆς καὶ τῆς ἀντιμεταθετικῆς ἰδιότητος τῆς προσθέσεως (§ 20) εὑρίσκουμε ὅτι

$${}^{+}4 + ({}^{-}2 + {}^{+}5) = {}^{+}4 + {}^{-}2 + {}^{+}5$$

ἢ πιὸ γενικά:

$${}^{+}4 + ({}^{-}2 + {}^{+}5 + {}^{-}7 + {}^{-}1) = {}^{+}4 + {}^{-}2 + {}^{+}5 + {}^{-}7 + {}^{-}1 \quad (1)$$

Ἡ ἰσότης (1) μᾶς λέγει ὅτι:

Ἂν ἐμπρὸς ἀπὸ μιὰ παρένθεσι ὑπάρχῃ τὸ + μποροῦμε νὰ τὴν ἀπαλείψουμε χωρὶς ν' ἀλλάξουμε τοὺς ὅρους ποὺ περιέχονται στὴ παρένθεσι.

β) Ἡ ἰσότης (1) λόγῳ τῆς συμμετρικῆς ἰδιότητος γράφεται:

$${}^{+}4 + {}^{-}2 + {}^{+}5 + {}^{-}7 + {}^{-}1 = {}^{+}4 + ({}^{-}2 + {}^{+}5 + {}^{-}7 + {}^{-}1) \quad (2)$$

Ἡ ἰσότης (2) μᾶς λέγει ὅτι:

Μποροῦμε μερικοὺς προσθετέους νὰ τοὺς κλείσουμε ὅπως εἶναι μέσα σὲ παρένθεσι ποὺ ἔχει ἐμπρός της τὸ +.

γ) Εἴδαμε (§ 23,3) ὅτι $\quad {}^{+}3 - ({}^{+}2 + {}^{-}4) = {}^{+}3 + {}^{-}2 + {}^{+}4 \quad (3)$

Ἡ ἰσότης (3) μᾶς λέγει ὅτι:

Ἂν ἐμπρὸς ἀπὸ μίαν παρένθεσιν ὑπάρχει τό — μποροῦμε νά τὴν ἀπαλείψουμε μὲ τὴν προϋπόθεσιν ὅτι θ' ἀλλάξουμε τὰ πρόσημα τῶν ὅρων ποὺ περιέχονται σ' αὐτήν.

δ) Ἡ ἰσότης (3) λόγῳ τῆς συμμετρικῆς ἰδιότητος γράφεται:

$${}^{+}3 + {}^{-}2 + {}^{+}4 = {}^{+}3 - ({}^{+}2 + {}^{-}4) \quad (4)$$

Ἡ ἰσότης (4) μᾶς λέγει ὅτι:

Μποροῦμε μερικοὺς ὅρους ἀριθ. πολυωνύμου νὰ τοὺς κλείσουμε

μέσα σὲ παρένθεσι ποὺ ἔχει ἐμπρός της τὸ — μὲ τὴν προϋπόθεσι ὅτι θὰ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο τῶν ὅρων αὐτῶν.

Παράδειγμα:

$$^{-}5 + {}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2 = {}^{-}5 + ({}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2)$$
$$^{-}5 + {}^{-}3 + {}^{-}4 + {}^{+}2 = {}^{-}5 - ({}^{+}3 + {}^{+}4 + {}^{-}2)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

136) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀριθμ. πολυώνυμα

$A = {}^{-}2 + {}^{-}5 - {}^{+}3 - {}^{+}1,\qquad B = {}^{+}4 - {}^{-}7 + {}^{-}1 - {}^{-}3$

$\Gamma = {}^{+}5 - {}^{-}3 + {}^{+}4 - {}^{-}1,\qquad \Delta = {}^{+}3 - {}^{-}2 + {}^{-}1 - {}^{-}7$

137) Ἂν $A = {}^{-}2 + {}^{+}3 - {}^{-}1,\qquad B = {}^{+}4 - {}^{-}3 + {}^{-}2 - {}^{+}1$

νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ παραστάσεις $A + B$, $A - B$ καὶ $B - A$

138) Ἂν $A = {}^{-}2 + {}^{+}5 - {}^{-}3 + {}^{-}7$

$B = {}^{+}3 - {}^{-}4 + {}^{-}2 - {}^{+}3$

$\Gamma = {}^{-}4 + {}^{-}5 - {}^{-}7$

νὰ ὑπολογίσετε τὶς παραστάσεις

$A + B + \Gamma,\quad A + (B - \Gamma),\quad A - (B + \Gamma),\quad A - (B - \Gamma)$

139) Στὰ ἀριθμ. πολυώνυμα

$A = {}^{-}4 + {}^{-}\mathbf{2} + {}^{-}\mathbf{7} - {}^{-}3$

$B = {}^{+}2 + {}^{-}1 + {}^{-}5 \mathbf{-} {}^{-}4$

νὰ τεθοῦν μέσα σὲ παρένθεσι οἱ ὑπογραμμισμένοι ὅροι

140) Νὰ ἐξαλειφθοῦν οἱ παρενθέσεις ἀπὸ τὰ πολυώνυμα

$A = {}^{-}2 + ({}^{-}5 + {}^{-}3 - {}^{+}2)$

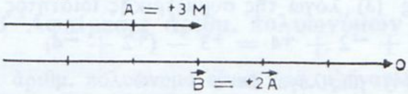
$B = {}^{+}7 - ({}^{-}3 + {}^{-}4 - {}^{-}3)$

§ 24. Πολλαπλασιασμὸς ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν

I. Γιὰ νὰ ὁρίσουμε τὸ γινόμενο ${}^{+}2 \cdot {}^{+}3$ ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

α) Λαμβάνομε ἕνα διάνυσμα $\vec{M}$ κι' ἔπειτα σχηματίζουμε τὸ

διάνυσμα $\vec{A} = {}^{+}3\vec{M}$, σχ. 31



Σχ. 31

β) Σχηματίζουμε τὸ διάνυσμα $\vec{B} = {}^{+}2\,\vec{A}$, ὁπότε ἔχουμε :

$$\vec{B} = {}^{+}2\,\vec{A} = {}^{+}2({}^{+}3\,\vec{M})$$

Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὸ σχῆμα διακρίνουμε ὅτι : $\vec{B} = {}^{+}6\,\vec{M}$

Ἄρα εἶναι : ${}^{+}2({}^{+}3\,\vec{M}) = {}^{+}6\,\vec{M}$ (1)

Ἔπειτα ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) εἶναι φυσικὸ νὰ ὁρίσουμε τὸ ${}^{+}6$ ὡς γινόμενο τοῦ ${}^{+}3$ μὲ τὸ ${}^{+}2$.

$$\mathbf{{}^{+}2.\ {}^{+}3 = {}^{+}6} \qquad (\alpha)$$

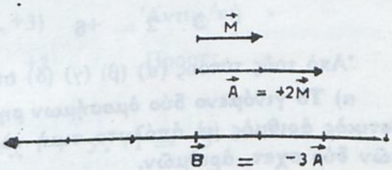
ΙΙ. Εὕρεσις τοῦ γινομένου ${}^{-}3.\ {}^{+}2$.

Ἐργαζόμεθα ὅπως στὴν προηγουμένη περίπτωσι κι᾽ ἔχουμε :

$\vec{A} = {}^{+}2\,\vec{M}$ καὶ

$\vec{B} = {}^{-}3\,\vec{A} \iff$

$\vec{B} = {}^{-}3({}^{+}2\,\vec{M})$



Σχ. 29

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχῆμα 29 ἔχουμε ὅτι $\vec{B} = {}^{-}6\,\vec{M}$

Ἄρα ${}^{-}3({}^{+}2\,\vec{M}) = {}^{-}6\,\vec{M}$ καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό :

$$\mathbf{{}^{-}3.\ {}^{+}2 = {}^{-}6} \qquad (\beta)$$

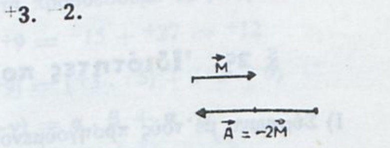
ΙΙΙ. Εὕρεσις τοῦ γινομένου ${}^{+}3.\ {}^{-}2$.

Λαμβάνουμε :

$\vec{A} = {}^{-}2\,\vec{M}$ καὶ

$\vec{B} = {}^{+}3\,\vec{A} \iff$

$\vec{B} = {}^{+}3({}^{-}2\,\vec{M})$



Σχ. 30

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχουμε ὅτι : $\vec{B} = {}^{-}6\,\vec{M}$

Ἄρα ${}^{+}3.({}^{-}2\,\vec{M}) = {}^{-}6\,\vec{M}$ καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό :

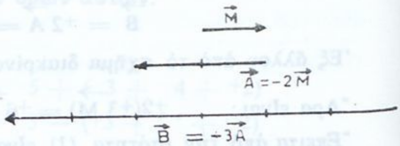
$$\mathbf{{}^{+}3\ {}^{-}2 = {}^{-}6} \qquad (\gamma)$$

IV. **Εὕρεσις τοῦ γινομένου $^{-}3 \,.\, ^{-}2$**

Λαμβάνουμε : $\vec{A} = {}^{-}2\vec{M}$

καὶ $\vec{B} = {}^{-}3\vec{A}$

$\Longleftrightarrow \quad \vec{B} = {}^{-}3\,({}^{-}2\vec{M})$



Σχ. 31

ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχ. 31 ἔχουμε ὅτι : $\vec{B} = {}^{+}6\vec{M}$

ἄρα : $^{-}3 \,.\, ({}^{-}2\vec{M}) = {}^{+}6\vec{M}$ καὶ σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμό :

$$^{-}3 \,.\, ^{-}2 = {}^{+}6 \qquad (\delta)$$

Ἀπὸ τοὺς τύπους (α) (β) (γ) (δ) συνάγουμε ὅτι :

α) **Τὸ γινόμενο δύο ὁμοσήμων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν εἶναι ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς μὲ ἀπόλυτο τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο σχετ. ἀριθμῶν.**

π.χ. $^{+}3 \,.\, ^{+}4 = {}^{+}12, \qquad ^{-}3 \,.\, ^{-}4 = {}^{+}12$

β) **Τὸ γινόμενο δύο ἑτεροσήμων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν εἶναι ἕνας ἀρνητικὸς ἀριθμὸς μὲ ἀπόλυτο τιμὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο παραγόντων.**

π.χ. $^{-}3 \,.\, ^{+}4 = {}^{-}12, \qquad ^{+}5 \,.\, ^{-}2 = {}^{-}10$

§ 25. Ἰδιότητες πολλαπλασιασμοῦ

I) Σύμφωνα μὲ τοὺς προηγούμενους κανόνες εἶναι

$$^{+}3 \,.\, ^{-}5 = {}^{-}15, \qquad ^{-}5 \,.\, ^{+}3 = {}^{-}15$$

ἄρα $\quad ^{+}3 \,.\, ^{-}5 = {}^{-}5 \,.\, ^{+}3$

καὶ γενικὰ $\quad \boldsymbol{\alpha \,.\, \beta = \beta \,.\, \alpha} \quad$ **Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης**

II. Ὀνομάζουμε γινόμενο τριῶν παραγόντων, ποὺ ἔχουν δοθῆ μὲ ὡρισμένη σειρά, τὸν ρητὸ σχετ. ἀριθμό, ποὺ εὑρίσκουμε ἂν πολ/σουμε τὸ γινόμενο τῶν δύο πρώτων μὲ τὸν τρίτο παράγοντα.

Π. χ. τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμῶν $^{-}2, \quad ^{+}3, \quad ^{-}4$

Εἶναι : $\quad ({}^{-}2 \,.\, ^{+}3) \,.\, ^{-}4 = {}^{-}6 \,.\, ^{-}4 = {}^{+}24$

Στὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα καταλήγουμε ἂν πολ/σουμε τὸν α΄ παράγοντα μὲ τὸ γινόμενο τῶν δύο ἄλλων κατὰ σειρὰ

$$^-2 . (^+3 . ^-4) = ^-2 . ^-12$$

$$^-2 . ^-12 = ^+24$$

ὥστε $(^-2 . ^+3) . ^-4 = ^-2 . (^+3 . ^-4)$

καὶ γενικά : $(\alpha . \beta) . \gamma = \alpha . (\beta . \gamma)$ **Προσεταιριστικὴ ἰδιότης**

Παρατήρησις: 1) Μὲ συνδυασμὸ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητος εὑρίσκουμε ὅτι τὸ γινόμενο τριῶν παραγόντων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρὰ μὲ τὴν ὁποία τὰ πολ/ζουμε

π. χ. $(^-2 . ^+3) . ^-5 = ^-2 . (^+3 . ^-5)$ Προσετ. ἰδιότης

ἢ $(^-2 \; ^+3) . ^-5 = ^-2 . (^-5 . ^+3)$ Ἀντιμ/κὴ »

ἢ $(^-2 . ^+3) . ^-5 = (^-2 . ^-5) . ^+3$ Προσετ. »

ΙΙΙ) Ἀπὸ τὶς ἰσότητες

$$^+5 . ^+1 = ^+5, \qquad ^-5 . ^+1 = ^-5$$

$$^+7 . ^+1 = ^+7, \qquad ^-7 . ^+1 = ^-7$$

ἐννοοῦμε ὅτι : **Ἡ θετικὴ μονάδα εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο στὸν πολ/σμὸ τῶν σχετ. ἀριθμῶν.**

IV) Ἔχουμε $^+3 . (^-5 + ^+9) = ^+3 . ^+4 = ^+12$

Στὸ ἴδιο ὅμως ἀποτέλεσμα καταλήγουμε, ἂν πολ/σουμε τὸ $^+3$ μὲ κάθε προσθετέο χωριστὰ κι' ἔπειτα προσθέσουμε τὰ γινόμενα.

Πράγματι : $^+3 . ^-5 + ^+3 . ^+9 = ^-15 + ^+27 = ^+12$

ὥστε : $^+3 \; (^-5 + ^+9) = (^+3 . ^-5) + (^+3 . ^+9)$

καὶ γενικὰ : $\alpha . (\beta + \gamma) = \alpha . \beta + \alpha . \gamma$

Ἐπιμεριστικὴ ἰδιότης τοῦ πολ/σμοῦ (ὡς πρὸς τὴν πρόθεσι)

25.1 Ἀντίστροφοι σχετ. ἀριθμοὶ

Οἱ σχετ. ἀριθμοὶ $^-2$, $^-\left(\frac{1}{2}\right)$ παρατηροῦμε ὅτι : α) εἶναι ὁμόσημοι, β) ἔχουν ὡς ἀπόλυτες τιμὲς ἀντιστρόφους ἀριθμούς. **«Ὅταν δύο σχετ. ἀριθμοὶ εἶναι ὁμόσημοι κι' ἔχουν ὡς ἀπόλυτες τιμὲς ἀντιστρόφους ἀριθμοὺς λέγονται ἀντίστροφοι.**

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι :

1) **Κάθε σχετ. ἀριθμὸς ἔχει ἕναν μόνον ἀντίστροφο**

π. χ. ἀντίστροφος τοῦ $^-5$ εἶναι ὁ $^-\left(\frac{1}{5}\right)$

» » $^+\left(\frac{3}{8}\right)$ » » $^+\left(\frac{8}{3}\right)$

» » $^-0{,}2$ » » $^-5$

2) Τὸ μηδὲν δὲν ἔχει ἀντίστροφο.

Τὸν ἀντίστροφο τοῦ α (α ≠ 0) τὸν γράφουμε $\frac{+1}{\alpha}$.

Ἂν χρησιμοποιήσουμε τοὺς κανόνες πολ/σμοῦ ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν ἔχουμε : $^-3 \cdot {}^-\left(\frac{1}{3}\right) = {}^+\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = {}^+1$

$$^-\left(\frac{2}{5}\right) \cdot {}^-\left(\frac{5}{2}\right) = {}^+\left(\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) = {}^+1$$

$$^+\left(\frac{4}{9}\right) \cdot {}^+\left(\frac{9}{4}\right) = {}^+\left(\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{4}\right) = {}^+1$$

καὶ γενικά : $\alpha \cdot {}^+\frac{1}{\alpha} = {}^+\left(\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}\right) = {}^+1 \qquad (\alpha \neq 0)$

Ὥστε : **Τὸ γινόμενο δύο ἀντιστρόφων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν εἶναι ἴσο μὲ $^+1$**

καὶ ἀντίστροφα : ἂν εἶναι $\alpha \cdot \beta = {}^+1$ τότε εἶναι $\beta = {}^+\frac{1}{\alpha}$

π.χ. 1) $\alpha \cdot {}^-5 = {}^+1$

τότε $\alpha = \frac{-1}{5}$

2) Ἂν $^+2 \cdot \beta = {}^+1$ τότε $\beta = \frac{+1}{2}$.

25.2 Ἰδιότης διαγραφῆς στὸ πολ/σμὸ

I. Ἂν ἀληθεύη ὅτι $^+2\ (^-3 \cdot {}^+4) = {}^+2 \cdot {}^-12$

τότε ἀληθεύει καὶ ὅτι $^-3 \cdot {}^+4 = {}^-12$

καὶ γενικά : $\boldsymbol{\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Longrightarrow \alpha = \beta, \quad \gamma \neq 0} \qquad (1)$

II. Ἂν ἀληθεύη ὅτι $^-3 \cdot {}^+4 = {}^-12$

τότε » καὶ ὅτι $^+2\ (^-3 \cdot {}^+4) = {}^+2 \cdot {}^-12$

καὶ γενικά : $\boldsymbol{\alpha = \beta \Rightarrow \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma} \quad \gamma \neq 0 \qquad (2)$

οἱ συνεπαγωγὲς (1) καὶ (2) γράφονται :

$$\boldsymbol{\alpha\gamma = \beta\gamma \Longleftrightarrow \alpha = \beta, \quad \gamma \neq 0}$$

Ὥστε στὸν πολ/σμὸ ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς διαγραφῆς ὅταν καὶ μόνον ὅταν $\gamma \neq 0$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα $^{+}3 \cdot x = {}^{+}3 \cdot {}^{+}7$ συνάγουμε ὅτι $x = {}^{+}7$
Ἐνῶ ἀπὸ τὴν ἰσότητα $^{+}5 \cdot 0 = {}^{+}2 \cdot 0$ **δὲν** συνάγουμε ὅτι $^{+}5 = {}^{+}2$.

25. 3 Γινόμενο ἴσο μὲ τὸ 0

1) $\alpha \cdot 0 = ;$
Σύμφωνα μὲ τὴν ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα ἔχουμε :

$$\alpha \cdot (\beta + 0) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0 \iff$$
$$\alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 0$$

Ἄρα πρέπει : $\quad \alpha \cdot 0 = 0.$

Ὅταν ἕνας τουλάχιστον παράγων εἶναι 0 τότε τὸ γινόμενο εἶναι ἴσο μὲ 0.

Π. χ. $^{-}3 \cdot 0 = 0, \quad {}^{+}4 \cdot 0 = 0 \quad {}^{-}\left(\dfrac{2}{5}\right) \cdot 0 = 0$

2) Ἂν εἶναι $\alpha \cdot \beta = 0$ (ὅπου α, β ρητοὶ σχετ. ἀριθμοί) **τότε θὰ πρέπει ἕνας τουλάχιστον παράγων νὰ εἶναι μηδέν.**

Πράγματι : Ἂν εἶναι $\alpha \neq 0$ ἔχουμε :

$$\alpha \cdot \beta = 0 \iff \frac{{}^{+}1}{\alpha} \cdot \alpha \cdot \beta = \frac{{}^{+}1}{\alpha} \cdot 0$$
$$\iff \beta = \frac{{}^{+}1}{\alpha} \cdot 0$$
$$\iff \beta = 0$$

25.4 Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ γινόμενο: $^{-}3 \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right)$

ὅπου $\qquad \vec{A} = {}^{+}2\vec{M}, \quad \vec{B} = {}^{-}4\vec{M}$

I) Εἶναι : $\qquad \vec{A} + \vec{B} = {}^{+}2\vec{M} + {}^{-}4\vec{M}$

$$= ({}^{+}2 + {}^{-}4)\,\vec{M} \quad \text{(ὁρισμὸς τοῦ ἀθροίσματος)}$$
$$= {}^{-}2\vec{M}$$

ὁπότε : $\qquad {}^{-}3\,(\vec{A} + \vec{B}) = {}^{-}3 \cdot ({}^{-}2\vec{M})$

$${}^{-}3\,(\vec{A} + \vec{B}) = ({}^{-}3 \cdot {}^{-}2)\vec{M} \quad \text{(ὁρισμὸς τοῦ γινομένου)}$$
$${}^{-}3\,(\vec{A} + \vec{B}) = {}^{+}6\vec{M} \qquad (1)$$

II) Ἐξ ἄλλου εἶναι καὶ $\quad {}^{-}3\vec{A} = {}^{-}3 \cdot ({}^{+}2\vec{M}) = {}^{-}6\vec{M}$

$${}^{-}3\vec{B} = {}^{-}3 \cdot ({}^{-}4\vec{M}) = {}^{+}12\vec{M}$$

ἄρα : $\quad {}^{-}3\vec{A} + {}^{-}3\vec{B} = {}^{-}6\vec{M} + {}^{+}12\vec{M}$

ἢ $\quad {}^{-}3\vec{A} + {}^{-}3\vec{B} = {}^{+}6\vec{M} \qquad (2)$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$${}^{-}3\,(\vec{A} + \vec{B}) = {}^{-}3\vec{A} + {}^{-}3\vec{B}$$

καὶ γενικά : $\boldsymbol{\lambda}\,(\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}) = \boldsymbol{\lambda}\,\vec{\mathbf{A}} + \boldsymbol{\lambda}\,\vec{\mathbf{B}}$ (λ = ρητὸς σχ. ἀριθμὸς)

ὥστε : **ὁ πολ/σμὸς τῶν διανυσμάτων μὲ ρητὸ σχ. ἀριθμὸ εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσι.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

141) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα

α) $({}^{+}2) \cdot ({}^{-}7)$ β) ${}^{-}0{,}3 \cdot {}^{+}0{,}2$ γ) ${}^{-}6{,}2 \cdot {}^{-}\left(\frac{3}{5}\right)$

142) Νὰ ὑπολογίσετε μὲ δύο τρόπους τὸ γινόμενο

$$({}^{+}8 + {}^{-}3) \cdot {}^{-}4$$

143) Νὰ χρησιμοποιήσετε γνωστὴν ἰδιότητα γιὰ τὸν εὐκολώτερο ὑπολογισμὸ τοῦ γινομένου

$${}^{-}2 \cdot {}^{+}113 \cdot {}^{-}5$$

144) Νὰ ὑπολογίσετε μὲ τὸν συντομώτερο τρόπο τὸ γινόμενο

$$({}^{-}3 + {}^{+}13) \cdot {}^{-}9$$

145) Νὰ ὑπολογίσετε, μὲ διαφόρους τρόπους τὸ γινόμενο

$$({}^{+}1 + {}^{+}2) \cdot ({}^{-}3 + {}^{-}5)$$

146) Νὰ τρέψετε σὲ γινόμενο τὸ ἄθροισμα

$$({}^{+}7) \cdot ({}^{-}3) + ({}^{+}7) \cdot ({}^{+}4)$$

147) Νὰ εὕρετε ποιὸν ἀριθμὸ παριστάνει τὸ x στὶς ἰσότητες

α) ${}^{-}5 \cdot x = {}^{-}5$ β) ${}^{-}5 \cdot x = 0$ γ) ${}^{-}5 \cdot x = {}^{+}5$

148) Νὰ εὕρετε ποιὸν ἀριθμὸν παριστάνει τὸ x στὶς ἰσότητες

$${}^{-}3 \cdot x = {}^{+}1, \qquad {}^{+}4 \cdot x = {}^{+}1$$

§ 26. Γινόμενο πολλῶν παραγόντων

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ὀνομάζουμε γινόμενο πολλῶν παραγόντων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν τὸν ρητὸ σχετ. ἀριθμὸ ποὺ εὑρίσκουμε, ἄν τὸ γινόμενο τῶν τριῶν πρώτων παραγόντων πολ/σουμε μὲ τὸν 4ο παράγοντα, τὸ νέο γινόμενο μὲ τὸν 5ο παράγοντα κ.ο.κ.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α :

$$\begin{aligned}(^-2)\cdot(^+3)\cdot(^-1)\cdot(^+4) &= (^-6)\cdot(^-1)\cdot(^+4)\\ &= (^+6)\cdot(^+4)\\ &= {}^+24\end{aligned}$$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι :

α) **Τὸ γινόμενο πολλῶν παραγόντων δὲν ἀλλάζει ἄν ἀλλάξουμε τὴν σειρὰ τῶν παραγόντων του**

π. χ. $$(^-2)\cdot(^+3)\cdot(^-7)\cdot(^+1) = (^+3)\cdot(^-2)\cdot(^-7)\cdot(^+1) = {}^+42$$

β) **Σ' ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε δύο ἢ περισσότερους παράγοντες μὲ τὸ γινόμενό τους καὶ ἀντίστροφα : μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε ἕναν παράγοντα μὲ ἄλλους πού νὰ ἔχουν γινόμενο ἴσο μὲ αὐτὸν**

π. χ. $$(^-2)\cdot(^-5)\cdot(^-3)\cdot(^+4) = (^+10)\cdot(^-3)\cdot(^+4)$$

$$(^-6)\cdot(^+4)\cdot(^-2)\cdot(^+5) = (^-2)\cdot(^+3)\cdot(^+4)\cdot(^-2)\cdot(^+5)$$

γ) **Τὸ γινόμενο ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν πολ/ζεται μ' ἕναν ρητὸ σχετικὸν ἀριθμό, ἄν πολ/σουμε ἕναν μόνον παράγοντά του μὲ τὸν ρητὸν σχετ. ἀριθμὸ**

$$\left[(^-3)\cdot(^+4)\cdot(^-7)\right]\cdot(^-2) = (^-3)\cdot(^-8)\cdot(^-7)$$

γ) **Γιὰ νὰ πολ/σουμε γινόμενα, σχηματίζουμε ἕνα γινόμενο ἀπὸ ὅλους τοὺς παράγοντες τῶν γινομένων καὶ μόνον ἀπὸ αὐτοὺς**

$$\left[(^-2)\cdot(^+3)\cdot(^+0,5)\right]\cdot\left[\frac{^-1}{3}\cdot(^+7)\right] =$$

$$= (^-2)\cdot(^+3)\cdot(^+0,5)\cdot\left(\frac{^-1}{3}\right)\cdot(^+7)$$

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)\cdot(\delta\cdot\epsilon) = \alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\epsilon$$

26.1 Πρακτικὸς κανὼν γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου πολλῶν παραγόντων.

Σ' ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων, σύμφωνα μὲ τὶς ἰδιότητες, μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε δύο-δύο ἀρνητικούς παράγοντές του μὲ τὸ θετικὸ γινόμενό τους.

Ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνομε ὅτι:

Ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι **ἄρτιο**, τὸ ἐξαγόμενο θὰ εἶναι **θετικό.**

Ἐνῶ: Ἂν τὸ πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν παραγόντων εἶναι **περιττό**, τὸ ἐξαγόμενο θὰ εἶναι **ἀρνητικό**.

Ὥστε: Γιὰ νὰ βροῦμε ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων:

1. Μετρᾶμε πόσοι εἶναι οἱ ἀρνητικοὶ παράγοντες **καὶ ἂν βροῦμε ἄρτιο ἀριθμό, σημειώνομε + στὸ ἐξαγόμενο· ἐνῶ ἂν βροῦμε περιττό, σημειώνομε —.**

2. **Εὑρίσκουμε τὸ γινόμενο τῶν ἀπολύτων τιμῶν·**

Ἐφαρμογή.

$$(^{-}\mathbf{2}) \cdot (^{+}3) \cdot (^{-}\mathbf{4}) \cdot (^{-}\mathbf{1}) \cdot (^{+}5) \cdot (^{-}\mathbf{3}) \cdot (^{+}6) = :$$

1) 4 ἀρνητικοὶ παράγοντες· ἄρα θετικὸ ἐξαγόμενο

2) $2 \cdot 3 \cdot 4 \quad 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 = 2160.$

ὥστε τὸ γινόμενο εἶναι ἴσο μὲ $^{+}2160$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

149) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ γινόμενο

$$(^{-}1) . (^{+}5) . (^{-}7) . (^{-}6)$$

150) Νὰ χρησιμοποιήσετε γνωστὲς ἰδιότητες γιὰ νὰ ὑπολογίσετε συντομώτερα τὸ γινόμενο

$$\left(\frac{^{+}4}{5}\right) . (^{+}7) . \left(\frac{^{-}5}{4}\right) . (^{-}1) . \left(\frac{^{-}1}{7}\right)$$

151) Τὸ γινόμενο $(^{-}5)\ (^{+}3) \cdot (^{-}2)\ (^{-}1)$ νὰ τραπῆ σὲ γινόμενο δύο ἑτεροσήμων παραγόντων.

152) Νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν ἰσότητα

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha \cdot \gamma) \cdot (\beta \cdot \delta)$$

ὅπου α, β, γ, δ ρητοὶ σχ. ἀριθμοὶ

153) Τὸ αὐτὸ καὶ γιὰ τὴν ἰσότητα

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta = (\alpha \cdot \gamma) \cdot \delta \cdot \beta$$

154) Νὰ ὑπολογίσετε ἀπὸ μνήμης τὸ γινόμενο

α) 15 παραγόντων ἴσων μὲ $^{-}1$

β) 6 παραγόντων ἴσων μὲ $^{-}10$

§ 27. Διαίρεσις

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς διαίρεσι ἑνὸς ρητοῦ σχετικοῦ μὲ ἕναν ἄλλον (μὴ μηδενικὸ) σημαίνει νὰ βροῦμε ἕναν τρίτο ἀριθμὸ x τέτοιον ὥστε ἂν τὸν πολ/σουμε μὲ τὸν διαιρέτη νὰ μᾶς δώση τὸν διαιρετέο. Ἔχουμε δηλαδὴ τὴν ἰσοδυναμία

$$(^{+}12) : (^{-}3) = x \iff x \cdot (^{-}3) = {}^{+}12$$

Εὕρεσις τοῦ πηλίκου : $\quad (^{+}12) : (^{-}3) = x$

Εἶναι : $\quad x \cdot (^{-}3) = {}^{+}12$ $\qquad$ (ὁρισμὸς διαιρέσεως)

$$\iff \quad x \cdot (^{-}3) \cdot \left(^{-}\frac{1}{3}\right) = (^{+}12) \cdot \left(^{-}\frac{1}{3}\right) \qquad \text{(ἰδ. διαγραφῆς)}$$

$$\iff \quad x = (^{+}12) \cdot \left(^{-}\frac{1}{3}\right)$$

ὥστε : **Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεως πολ/ζουμε τὸν διαιρετέο μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη**

Παραδείγματα

Διαίρεσις	Πολλαπλασιασμὸς	Δοκιμὴ
1. $(^{-}24) : (^{+}6) =$	$(^{-}24) \cdot \left(^{+}\frac{1}{6}\right) = {}^{-}4$	$^{+}6 \cdot {}^{-}4 = {}^{-}24$
2. $(^{-}24) : (^{-}6) =$	$(^{-}24) \cdot \left(^{-}\frac{1}{6}\right) = {}^{+}4$	$^{-}6 \cdot {}^{+}4 = {}^{-}24$
3. $(^{+}24) : (^{-}6) =$	$(^{+}24) \cdot \left(^{-}\frac{1}{6}\right) = {}^{-}4$	$^{-}6 \cdot {}^{-}4 = {}^{+}24$

Γενικά : Ἡ διαίρεσις ἀνάγεται σὲ πολ/σμὸ τοῦ διαιρετέου μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη. Ἐπειδὴ ὅλοι οἱ ρητοὶ σχετικοὶ ἔχουν ἀντίστροφο (ἐκτὸς τοῦ μηδενὸς) ἕπεται ὅτι :

Ἡ διαίρεσις τῶν ρητῶν σχετικῶν εἶναι δυνατή, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως ποὺ ὁ διαιρέτης εἶναι μηδέν.

Καὶ εἶναι : $\quad \boldsymbol{\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{+1}{\beta}}$ $\qquad$ (α, β ρητοὶ σχετικοὶ $\beta \neq 0$)

27.1 Ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως

Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι, ὅλες οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἰσχύουν καὶ στὴ διαίρεσι τῶν ρητῶν σχετικῶν.

(Νὰ κάμετε τὶς ἐπαληθεύσεις).

Ἰδιότητες διαιρέσεως

1. $\alpha = \beta \iff \alpha : \mu = \beta : \mu$
2. $(\alpha + \beta + \gamma) : \mu = (\alpha : \mu) + (\beta : \mu) + (\gamma : \mu)$
3. $(\alpha - \beta) : \mu = (\alpha : \mu) - (\beta : \mu)$
4. $(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma) : \mu = (\alpha : \mu) \cdot \beta \cdot \gamma$
5) $\alpha : (\mu \cdot \nu) = (\alpha : \mu) : \nu$

(ὅπου $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ ρητοὶ σχετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\mu, \nu \neq 0$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

155) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς διαιρέσεις

α) $^{+}4 : {^{-}1}$ β) $^{-}18 : {^{-}6}$ γ) $^{-}24 : {^{+}2}$

156) Νὰ ἐκτελέσετε μὲ δύο τρόπους τὶς διαιρέσεις

α) $(^{-}20 - {^{-}2}) : (^{-}2)$ β) $(^{+}8 + {^{-}6}) : (^{-}2)$

157) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς διαιρέσεις

α) $(^{+}8 \cdot {^{-}5}) : {^{-}4}$ β) $(^{-}15 \cdot {^{+}3}) : {^{-}5}$

158) Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις

$(^{+}18 \cdot {^{-}12}) : (^{-}3 \cdot {^{-}4})$

159) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $^{-}50 \cdot x = {^{+}150}$

§ 28. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα

Ἕνας τρόπος γιὰ νὰ συμβολίσουμε τὸ πηλίκον ἑνὸς ρητοῦ σχετικοῦ δι' ἑνὸς ἄλλου, ἐκτὸς τοῦ μηδενός, εἶναι νὰ δώσουμε σ' αὐτὸ κλασματικὴ μορφή.

Γράφουμε δηλαδή: $\alpha : \beta = \alpha \cdot \dfrac{^{+}1}{\beta}$ (ὅπου $\beta \neq 0$)

Τὸ γινόμενο $\alpha \cdot \dfrac{^{+}1}{\beta}$ λέγεται **ἀλγεβρικὸ κλάσμα** καὶ γράφεται $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

Παραδείγματα: $(^{-}2) : (^{+}3) = (^{-}2) \cdot \left(\dfrac{^{+}1}{^{+}3}\right) = \dfrac{^{-}2}{^{+}3}$

$(^{+}5) : (^{-}7) = (^{+}5) \cdot \left(\dfrac{^{+}1}{^{-}7}\right) = \dfrac{^{+}5}{^{-}7}$

Εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῶν κλασμάτων τῆς ἀριθμητικῆς ἰσχύουν καὶ διὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

Ἂν χρησιμοποιήσουμε τοὺς κανόνες τῶν προσήμων τῆς διαιρέσεως, ποὺ εἶναι οἱ κανόνες προσήμων τοῦ πολ/σμοῦ, μποροῦμε ἕνα ἀλγεβρικὸ κλάσμα νὰ τὸ τρέψουμε σὲ ρητὸ σχετ. ἀριθμό.

Π. χ. $\frac{{}^{-}2}{{}^{+}3} = {}^{-}\left(\frac{2}{3}\right)$, $\quad \frac{{}^{-}5}{{}^{-}7} = {}^{+}\left(\frac{5}{7}\right)$, $\quad \frac{{}^{-}2}{{}^{-}9} = {}^{+}\left(\frac{2}{9}\right)$

Ἔτσι καὶ οἱ πράξεις μὲ ἀλγεβρικὰ κλάσματα τρέπονται σὲ πράξεις μὲ ρητοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς.

28.1 Σύνθετα ἀλγεβρικὰ κλάσματα

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς, ἂν ἕνας τουλάχιστον ὅρος ἀλγεβρικοῦ κλάσματος εἶναι ἀλγεβρικὸ κλάσμα. τότε λέμε ὅτι ἔχουμε ἕνα **σύνθετο ἀλγεβρικὸ κλάσμα.**

Παράδειγμα: Κατὰ τὴν εὕρεσι τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως:

$${}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{5}\right) \quad \text{ἔχουμε} \quad \left(\frac{2}{3}\right) : \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{{}^{-}\left(\frac{4}{5}\right)}$$

Ἕνα σύνθετο ἀλγεβρικὸ κλάσμα τρέπεται σὲ ἁπλό, δηλαδὴ σὲ ἀλγ. κλάσμα μ' ὅρους ἀκεραίους, ἂν πολ/σουμε τοὺς ὅρους των μὲ τὸν σχετικὸ ἀριθμό, ποὺ ἔχει ὡς ἀπόλυτη τιμὴ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν τοῦ κλάσματος.

$$\frac{{}^{-}\left(\frac{2}{3}\right)}{{}^{-}\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{{}^{-}\left(\frac{2}{3}\right) \cdot {}^{+}15}{{}^{-}\left(\frac{4}{5}\right) \cdot {}^{+}15} = \frac{\left(\frac{{}^{-}2}{{}^{+}3} \cdot {}^{+}15\right)}{\left(\frac{{}^{-}4}{{}^{+}5} \cdot {}^{+}15\right)} = \frac{{}^{-}10}{{}^{-}12} = {}^{+}\left(\frac{10}{12}\right) =$$

$${}^{+}\left(\frac{5}{6}\right)$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

160) Μὲ ποιοὺς ρητοὺς σχετ. ἀριθμοὺς εἶναι ἴσα τὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα

$$\frac{{}^{+}7}{{}^{-}7}, \quad \frac{{}^{+}18}{{}^{-}3}, \quad \frac{{}^{-}6}{{}^{+}3}, \quad \frac{{}^{-}3}{{}^{+}5}$$

161) Μὲ ποιούς ρητοὺς σχ. ἀριθμοὺς εἶναι ἴσα τὰ κλάσματα:

$$\frac{+3 + {}^{-}5}{{}^{-}5}, \quad \frac{{}^{-}8 + {}^{-}6}{+2}, \quad \frac{0}{{}^{-}2}, \quad \frac{+36 + ({}^{-}2 \cdot {}^{-}7)}{{}^{-}2}$$

162) Νὰ τρέψετε σὲ ρητοὺς σχετικοὺς τὰ κλάσματα:

$$\frac{\dfrac{+5}{{}^{-}9}}{\dfrac{+2}{{}^{-}7}}, \quad \frac{\dfrac{{}^{-}3}{{}^{-}5}}{\dfrac{+4}{{}^{-}9}}, \quad \frac{\dfrac{+3}{{}^{-}5} + \dfrac{+2}{{}^{-}4}}{\dfrac{+7}{{}^{-}10} + \dfrac{+3}{+8}}$$

§ 29. Δυνάμεις τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν

Μάθαμε ὅτι τὸ γινόμενο $2 \cdot 2 \cdot 2$ γράφεται πιὸ σύντομα 2^3 καὶ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ 2. Ἀνάλογα:

Τὸ γινόμενο $({}^{-}2) \cdot ({}^{-}2) \cdot ({}^{-}2)$ γράφεται $({}^{-}2)^3$ καὶ λέγεται τρίτη δύναμις τοῦ $^{-}2$.

Γενικά: **ν$^{\text{στή}}$ δύναμις ἑνὸς ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ α λέγεται τὸ γινόμενο ν παραγόντων ἴσων μὲ τὸ α·**

γράφουμε δὲ $\alpha^\nu = \alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots$ ν φορές·

(ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ καταλαβαίνουμε ὅτι τὸ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ 1)·

Εἰδικὰ δεχόμαστε ὅτι $\alpha^1 = \alpha$.

Παραδείγματα:

$$({}^{-}3) \cdot ({}^{-}3) = ({}^{-}3)^2$$

$$({}^{-}3) \cdot ({}^{-}3) \cdot ({}^{-}3) = ({}^{-}3)^3 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Καὶ ἀντίστροφα:

$$({}^{-}5)^4 = ({}^{-}5) \cdot ({}^{-}5) \cdot ({}^{-}5) \cdot ({}^{-}5) = +625$$

$$({}^{-}4)^3 = ({}^{-}4) \cdot ({}^{-}4) \cdot ({}^{-}4) = {}^{-}64$$

Παρατήρησις: Δὲν πρέπει νὰ συγχέωμε τὶς γραφὲς

$$({}^{-}2)^\mu \quad \text{καὶ} \quad -2^\mu, \quad \text{καὶ γενικὰ} \quad ({}^{-}\alpha)^\mu \quad \text{καὶ} \quad -\alpha^\mu.$$

π. χ. $({}^{-}2)^4 = ({}^{-}2) \cdot ({}^{-}2) \cdot ({}^{-}2) \cdot ({}^{-}2) = +16$

ἐνῶ $-2^4 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = -16$.

29.1 α) Χρησιμοποιοῦντες τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι: **Ὅλες οἱ γνωστὲς ἰδιότητες τῶν δυνάμεων τῶν ρητων τῆς ἀριθ/κῆς ἰσχύουν καὶ στὴ περίπτωσι τῶν δυνάμεων τῶν ρητῶν σχ. ἀριθμῶν.**

Εἶναι δηλαδή: $(^-2)^3 \cdot (^-2)^2 = (^-2)^{3+2}$ καὶ γενικὰ $\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$

$(^-2 \cdot {}^+3 \cdot {}^-5)^3 = (^-2)^3 \cdot (^+3)^3 \cdot (^-5)^3$ » »

$(\alpha \cdot \beta \cdot \gamma)^\mu = \alpha^\mu \cdot \beta^\mu \cdot \gamma^\mu$

$(^-3)^5 : (^-3)^2 = (^-3)^{5-2}$ καὶ γενικὰ $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$

$[(^-3)^2]^3 = (^-3)^{2\cdot3}$ » » $(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\cdot\nu}$

$\left(\frac{^-2}{^+3}\right)^3 = \frac{(^-2)^3}{(^+3)^3}$ » » $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\mu = \frac{\alpha^\mu}{\beta^\mu}$

(ὅπου α, β, γ ρητοὶ σχετικοί, $\beta \neq 0$ μ, ν φυσικοὶ μεγαλύτεροι τοῦ 1 καὶ $\mu > \nu$)

β) Στηριζόμενοι στὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως εὑρίσκουμε ὅτι:

1) Οἱ δυνάμεις τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι πάντοτε θετικοὶ ἀριθμοί.

π.χ. $(^+2)^2 = {}^+4$, $(^+2)^3 = {}^+8$, $(^+2)^4 = {}^+16$

2) Οἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι:

i) θετικὲς ἂν ὁ ἐκθέτης εἶναι ἄρτιος

$(^-2)^2 = {}^+4$, $(^-2)^4 = {}^+16$, $(^-2)^6 = {}^+64$

ii) ἀρνητικὲς ἂν ὁ ἐκθέτης εἶναι περιττός

$(^-2)^3 = {}^-8$, $(^-2)^5 = {}^-32$, $(^-2)^7 = {}^-128$

29.2 Τὸ σύμβολο α^0 $(\alpha \neq 0)$

Ἂν δεχθοῦμε, γιὰ λόγους σκοπιμότητος, τὸ σύμβολο α^0 $(\alpha \neq 0)$ ὡς δύναμιν θὰ πρέπει νὰ ὑπακούῃ στοὺς κανόνες τῶν δυνάμεων.

ἄρα θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^0 = \alpha^{\mu+0} \iff$$

$$\alpha^\mu \cdot \alpha^0 = \alpha^\mu \iff$$

$$\boldsymbol{\alpha^0 = 1} \quad \text{ὅπου } \alpha \neq 0$$

29.3 Δυνάμεις μὲ ἐκθέτη ἀκέραιο ἀρνητικὸ

Ἂν ζητᾶμε τὸ πηλίκο $\alpha^2 : \alpha^5$ (ὅπου α ρητὸς σχετικὸς $\neq 0$), ἔχουμε: $\alpha^2 : \alpha^5 = (\alpha . \alpha) : (\alpha . \alpha . \alpha . \alpha . \alpha) \iff$

$$\alpha^2 : \alpha^5 = 1 : \alpha^3 = \frac{1}{\alpha^3} \qquad (1)$$

Ἂν ὅμως χρησιμοποιούσαμε τὸν τύπο: $\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$ (2)

θὰ εἴχαμε: $\alpha^2 : \alpha^5 = \alpha^{2-5} = \alpha^{-3}$ (3)

Τὸ σύμβολο α^{-3}, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ τῆς δυνάμεως, δὲν ἔχει νόημα. Ἀλλὰ γιὰ νὰ ἰσχύῃ ὁ τύπος $\alpha^\nu : \alpha^\mu = \alpha^{\mu-\nu}$, κι' ὅταν ἀκόμη εἶναι μ < ν, θὰ πρέπει νὰ δεχθοῦμε τὸ σύμβολο α^{-3} ὡς δύναμιν καὶ μάλιστα θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3}$$

διότι $\alpha^2 : \alpha^5 = (\alpha.\alpha) : (\alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha.\ \alpha) = \frac{1}{\alpha^3}$

Γενικῶς: δεχόμαστε ὅτι τὸ $\alpha^{-\mu}$ (α σχετικὸς $\neq 0$, μ ἀκέραιος θετικὸς) εἶναι δύναμις καὶ ὅτι

$$\alpha^{-\mu} = \frac{1}{\alpha^{\mu}}$$

Παρατήρησις: Μετὰ τὴν παραδοχὴ τοῦ α^0 μὲ $\alpha \neq 0$ ὡς δυνάμεως, (29.2), ὁ τύπος (2) ἰσχύει κι' ὅταν εἶναι $\mu = \nu$, καὶ $\alpha \neq 0$.

29.4 Ἐφαρμογὲς

Στὸν προηγούμενο χρόνο χρησιμοποιήσαμε δυνάμεις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτες φυσικοὺς ἀριθμοὺς γιὰ νὰ παραστήσουμε μεγάλους ἀριθμοὺς

π. χ. $30.000.000.000 = 3.10^{10}$

$780.000 = 78.10^4 = 7{,}8.10^5$

Θὰ χρησιμοποιήσουμε τώρα δυνάμεις τοῦ 10 μὲ ἐκθέτες ἀκερ. ἀρνητικοὺς γιὰ νὰ παραστήσουμε πολὺ μικροὺς ἀριθμοὺς

Εἶναι : $0{,}1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}$$

$$0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$$

. . . .

Αὐτὴ ἡ γραφὴ τῶν δεκαδικῶν μονάδων μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γράφουμε τοὺς δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς σὲ μορφὴ γινομένου ἑνὸς ἀκεραίου μὲ μία δύναμι τοῦ 10 ἢ καλύτερα σὲ μορφὴ γινομένου ἑνὸς ἀριθμοῦ μεταξὺ 1 καὶ 10 μὲ μιὰ δύναμι τοῦ 10

$$0{,}005 = 5 \cdot 0{,}001 = 5 \cdot 10^{-3},$$

$$0{,}00035 = 35 \cdot 0{,}00001 = 35 \cdot 10^{-5} = 3{,}5 \cdot 10^{-4}$$

$$0{,}0000104 = 104 \cdot 0{,}0000001 = 104 \cdot 10^{-7} = 1{,}04 \cdot 10^{-5}.$$

Ἔτσι ἡ παράστασις τῶν πολὺ μικρῶν ἀριθμῶν γίνεται πιὸ σύντομη καὶ πιὸ εὐκρινὴς καὶ οἱ πράξεις πιὸ εὔκολες. Ὁ ἴδιος τρόπος γραφῆς χρησιμοποιεῖται καὶ στοὺς ἠλεκτρονικοὺς ὑπολογιστὰς (ἐγκεφάλους).

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α:

1) $0{,}0000015 \cdot 0{,}000016 = 15 \cdot 10^{-8} \cdot 16 \cdot 10^{-6}$
$= 15 \cdot 16 \cdot 10^{-8} \cdot 10^{-6} = 240 \cdot 10^{-14}$
$= 24 \cdot 10^{-13} = 2{,}4 \cdot 10^{-12}$

2) $\dfrac{0{,}0000015}{0{,}000000025} = \dfrac{15.10^{-7}}{25.10^{-9}} = \dfrac{15}{25} \cdot 10^{2} = \dfrac{3}{5} \cdot 10^{2} = 60 = 6.10^{1}$

3) $(300.000.000)^{2} \cdot (0{,}000002)^{3} = (3 \cdot 10^{8})^{2} \cdot (2 \cdot 10^{-6})^{3}$
$= 9 \cdot 10^{16} \cdot 8 \cdot 10^{-18}$
$= 72 \cdot 10^{-2} = 7{,}2 \cdot 10^{-1}$

Ἡ παράστασις αὐτὴ τῶν πολὺ μικρῶν ἀριθμῶν εἶναι χρήσιμη κυρίως στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες καὶ στὴ τεχνικὴ ὅπου συχνὰ χρησιμοποιοῦνται πολὺ μικροὶ ἀριθμοὶ ὅπως εἶναι οἱ διαστάσεις τῶν μορίων, τῶν σωματιδίων κ.λ.π.

Π.χ. 1) Ἡ ταχύτης τοῦ φωτὸς εἶναι 29900000000 cm ἀνὰ sec
ἢ $2{,}99 \cdot 10^{10}$ cm ἀνὰ sec.

2) Ἡ μᾶζα τοῦ πρωτονίου εἶναι 0,000.000.000.000.000.000.000.00165 gr ἢ $1{,}65 \cdot 10^{-24}$ gr.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

163) Νὰ ὑπολογίσετε τὶς ἀκόλουθες δυνάμεις
$(^{+}1)^{12}$, $(^{-}1)^{12}$, $(^{+}1)^{13}$, $(^{-}1)^{13}$, $(-2)^{5}$, $(-2)^{6}$, $\left(\dfrac{-2}{3}\right)^{2}$, $\left(-\dfrac{2}{4}\right)^{3}$

164) Νὰ ἐκτελέσετε τὶς πράξεις
α) $(^{-}3)^{2} \cdot (^{-}3)^{3} \cdot (^{-}3)^{5}$ β) $(^{-}5)^{7} : (^{-}5)^{2}$
γ) $\left[(^{-}2)^{3}\right]^{2}$ γ) $(^{-}2 \cdot {}^{+}3)^{3}$

165) Νὰ χρησιμοποιήσετε γνωστὴ ἰδιότητα γιὰ νὰ ὑπολογίσετε συντομώτερα τὰ ἐξαγόμενα
α) $(^{-}2)^{3} \cdot (^{-}5)^{3}$, β) $(^{+}4)^{4} \cdot (^{+}25)^{4}$, $(^{+}8)^{2} \cdot (^{-}125)^{2}$

166) Ποιὸν ἀριθμὸ ἀντιπροσωπεύει τὸ x στὴν καθεμία ἀπὸ τὶς ἰσότητες
$(^{+}2)^{3} . (^{+}2)^{x} = (^{+}2)^{7}$, $(^{+}3)^{8} : (^{+}3)^{x} = (^{+}3)^{2}$, $\left[(^{-}2)^{3}\right]^{x} = (^{-}2)^{12}$

167) Νὰ γράψετε σὲ μορφὴ γινομένου ἀκεραίου μὲ δύναμι τοῦ 10 τοὺς ἀριθμοὺς
0,00003, 0,000000075, 0,1200

168) Νὰ γράψετε σὲ μορφὴ δεκαδικῶν ἀριθμῶν τὰ γινόμενα

$$5 \cdot 10^{-2}, \quad 24 \cdot 10^{-3}, \quad 132 \cdot 100^{-7}$$

169) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις

$$2 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^{-3}$$

170) Μὲ ποιὰ δύναμι τοῦ 10 εἶναι ἴσο τὸ γινόμενο

$$10^{-5} \cdot 2^{3} \cdot 10^{1} \cdot 5^{3};$$

171) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ κλάσμα $\dfrac{10^{5} \cdot 10^{-2}}{10^{-8}}$

172) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ κλάσμα $\dfrac{8 \cdot 10^{-3} \cdot 14 \cdot 10^{-5}}{15 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{8}}$

172α) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν παράστασι

$$\frac{0{,}000008 \cdot (0{,}0002)^{3}}{10^{-5} \cdot 0{,}000016}$$

§ 30. Ἁπλοποίησις τῆς γραφῆς ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν

I. α)

$$^{+}2 + {}^{+}3 = {}^{+}5$$
$$^{+}7 - {}^{+}4 = {}^{+}7 + {}^{-}4 = {}^{+}3$$
$$^{+}3 \cdot {}^{+}4 = {}^{+}12$$
$$^{+}18 : {}^{+}3 = {}^{+}6$$

β)

$$2 + 3 = 5$$
$$7 - 4 = 3$$
$$3 \cdot 4 = 12$$
$$18 : 3 = 6$$

Στὰ παραπάνω παραδείγματα παρατηροῦμε ὅτι :

Ἂν ἐκτελέσουμε τὶς 4 βασικὲς πράξεις α) μὲ θετικοὺς ρητούς, β) μὲ τὶς ἀπόλυτες τιμές των, ὅταν εἶναι δυνατόν, τὰ ἀποτελέσματα διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ θετικὸ πρόσημο.

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὡδήγησε εἰς τὸ νὰ γράφουμε χάριν ἁπλότητος κάθε θετικὸ χωρὶς τὸ πρόσημό του. Ἔτσι στὰ ἑπόμενα ἀντὶ νὰ

γράφουμε : Π. χ. $\quad {}^{+}5, \quad {}^{+}\!\left(\dfrac{2}{5}\right), \quad {}^{+}0{,}2$

Θὰ γράφουμε $\quad 5, \quad \dfrac{2}{5}, \quad 0{,}2$ ἀντιστοίχως.

II. *Εἶναι :*

$$-\,{}^{+}5 = 0 - {}^{+}5$$
$$-\,{}^{+}5 = 0 + {}^{-}5 = {}^{-}5$$

ἢ :

$$-\,5 = {}^{-}5$$

Δηλαδή : Μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε τὸ ἀρνητικὸ πρόσημο μὲ τὸ σύμβολο τῆς ἀφαιρέσεως χωρὶς νὰ ἀλλάξῃ τὸ ἀποτέλεσμα. Ἔτσι ὅταν γράφουμε π. χ. -3, -7 θὰ ἐννοοῦμε τοὺς ${}^{-}3$, ${}^{-}7$ ἀντιστοίχως. Ὅταν ὅμως οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ἔχουν ἐμπρός των τὸ σύμβολο τῆς προσθέσεως ἢ τῆς ἀφαιρέσεως τότε, γιὰ νὰ μὴ γίνῃ σύγχυσις τοὺς θέτουμε μέσα σὲ παρένθεσι.

π. χ. γράφουμε: $${}^{+}3 + {}^{-}5 = 3 + (-5) = -2$$
$${}^{+}3 - {}^{-}5 = 3 - (-5) = 3 + (+5) = 3 + 5 = 8$$

Δὲν εἶναι ἀπαραίτητο νὰ τοὺς θέσουμε σὲ παρένθεσι ὅταν εὑρίσκωνται στὴν ἀρχή, ὁπότε δὲν ὑπάρχει φόβος συγχύσεως

π. χ. $${}^{-}3 + {}^{-}5 = -3 + (-5) = -8$$

Ἀκόμη ὑπενθυμίζουμε ὅτι:

Ἐὰν ἐμπρὸς σὲ μιὰ παρένθεσι ὑπάρχῃ τὸ σύμβολο $+$ τῆς προσθέσεως, μποροῦμε νὰ ἐξαλείψουμε τὴν παρένθεσι

Ἔτσι ἔχουμε:
$${}^{-}3 + {}^{-}5 = -3 + (-5) = -3 - 5 = -8$$

Ἔπειτα ἀπὸ αὐτὰ ἡ γραφὴ τῶν ἀριθμητικῶν πολυωνύμων γίνεται ἁπλούστερη

$$A = {}^{-}3 + {}^{-}2 - {}^{+}1 = -3 + (-2) + (-1)$$
$$= -3 - 2 + (-1)$$
$$= -3 - 2 - 1 = -6$$
$$B = ({}^{-}4 + {}^{-}1) - ({}^{-}5 + {}^{+}3) = -4 + (-1) - (-5 + 3)$$
$$= -4 - 1 + (+5) - 3$$
$$= -4 \quad 1 + 5 - 3 = -3$$

§ 31. Ἄλλα ἀριθμητικὰ πολυώνυμα

Ἐξετάσαμε τὸ ἀριθμητικὸ πολυώνυμο ὡς μία διαδοχικὴ σειρὰ προσθέσεων ἢ ἀφαιρέσεων ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν. Θὰ ἀσχοληθοῦμε τώρα μὲ ἀριθμητικὰ πολυώνυμα, ποὺ ἔχουν κι' ἄλλες πράξεις

π.χ. τὸ ἀριθ. πολυώνυμο: $A = -3 + 4 \cdot 5$ περιέχει πρόσθεσι καὶ πολ/σμό.

Τὸ ἀριθμ. πολυώνυμο: $B = -5 + 7 \cdot 3 + 4 : 2$ περιέχει ἐπὶ πλέον καὶ διαίρεσι.

Πῶς θὰ ὑπολογίσουμε τέτοια πολυώνυμα;

Μὲ ποιά σειρὰ θὰ ἐκτελέσουμε τὶς σημειωμένες πράξεις;

1) Ἐκτελοῦμε πρῶτα τοὺς πολ/σμοὺς ἢ διαιρέσεις ποὺ τυχὸν ὑπάρχουν.

2) Ἔπειτα ἐκτελοῦμε τὶς προσθέσεις ἢ ἀφαιρέσεις ἀρχίζοντας ἀπὸ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Παραδείγματα:

1) $A = -3 + 4 \cdot 5 = -3 + 20$
$= +17 = 17$

2) $B = -5 + 7 \cdot 3 + 4 : 2 = -5 + 21 + 2$
$= 18$

Ἂν στὸ ἀριθ. πολυώνυμο ὑπάρχουν καὶ παρενθέσεις, συμφέρει νὰ προηγῆται ὁ ὑπολογισμὸς τῶν παρενθέσεων κατὰ τὸ ἀκόλουθο παράδειγμα.

$$-4 \cdot (2+5) + [3 \cdot (2-6) - 8 : 2] \cdot (-4) =$$
$$-4 \cdot 7 + [3 \cdot (-4) - 4] \cdot (-4) =$$
$$-28 + (-16) \cdot (-4) =$$
$$= -28 + 64 = 36$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

173) Νὰ ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις
α) $5 - (6 - 9)$ β) $-4 + (8 - 5)$ γ) $3 - (-2 + 5)$

174) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ ἀριθμ. πολυώνυμα
α) $-3 \cdot (5 - 7)$ β) $-3 \ (-3 + 2 \cdot 6)$
γ) $-2 - (-4 + 3 \cdot 6) \cdot (-2)$

175) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ γινόμενα
α) $(-2 + 3) \cdot (-5 + 7 - 3)$ β) $(0{,}2 - 1{,}5) \cdot (-4 + 0{,}5)$

176) Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἀριθ. πολυώνυμο
$$11 - [6 - 2 \ (7 - 3)] + 5$$

177) Ἐπίσης τὸ $-3^2 + (-5)^2 - 2^2$

178) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἀριθ. πολυώνυμο
$$\frac{2-13}{5} - \frac{2-13}{3} + 3$$

179) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ πολυώνυμο
$$\frac{3}{5}\left(10 \cdot 2^2 - 5 \cdot 3\right) - \frac{2}{3}\left(15 - 2^2\right)$$

180) Νὰ ὑπολογίσετε τὴ δύναμι $(2^2 \cdot 25 \cdot 10^{-4})^2$

§ 32. Διάταξις τῶν ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν

I. Ὅπως καὶ στὴ περίπτωσι τῶν ρητῶν τῆς ἀριθμητικῆς ἂν μᾶς δοθοῦν δύο ρητοὶ σχετικοὶ ἀριθμοὶ α καὶ β τότε ὑπάρχουν τρεῖς καὶ μόνον τρεῖς σχέσεις μεταξύ των.

1) Μπορεῖ ὁ α νὰ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β $\quad \alpha > \beta$
2) » » α » » ἴσος μὲ τὸν β $\quad \alpha = \beta$
3) » » α » » μικρότερος τοῦ β $\quad \alpha < \beta$

γιὰ κάθε ζεῦγος δὲ α, β μία καὶ μόνον μία ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς σχέσεις ἀληθεύει ἐνῶ οἱ ἄλλες δύο δὲν ἀληθεύουν. Χάρις στὴν ἰδιότητα αὐτὴ μποροῦμε νὰ διατάξουμε τοὺς ρητοὺς σχετικοὺς κατὰ μέγεθος **(Σχέσις διατάξεως).**

ΙΙ. Ἀπὸ πεῖρα μας γνωρίζουμε ὅτι:

α) Ἡ θερμοκρασία $^{+}12^{0}$ εἶναι μεγαλύτερη τῶν $^{+}5^{0}$.

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν θερμοκρασιῶν εἶναι:

$$(^{+}12^{0}) - (^{+}5^{0}) = {}^{+}7^{0} \quad (\text{θετική})$$

β) Ἡ θερμοκρασία τῶν $^{+}12^{0}$ εἶναι μεγαλύτερη τῶν $^{-}2^{0}$

Ἡ διαφορὰ τῶν δύο αὐτῶν θερμοκρασιῶν εἶναι

$$(^{+}12^{0}) - (^{-}2^{0}) = (^{+}12^{0}) + (^{+}2^{0}) = {}^{+}14^{0} \quad (\text{θετική})$$

γ) Ἡ θερμοκρασία τῶν $^{-}2^{0}$ εἶναι μεγαλύτερη τῶν $^{-}5^{0}$

Ἡ διαφορά των εἶναι

$$(^{-}2^{0}) - (^{-}5^{0}) = (^{-}2^{0}) + (^{+}5^{0}) = {}^{+}3^{0} \quad (\text{θετική})$$

Καὶ στὶς τρεῖς παραπάνω περιπτώσεις παρατηροῦμε ὅτι οἱ διαφορὲς αὐτὲς εἶναι θετικές. Οἱ παρατηρήσεις αὐτὲς μᾶς ὁδηγοῦν στοὺς ἀκόλουθους ὁρισμούς:

1. **Ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ ἕναν ἄλλον β, ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ διαφορὰ α — β εἶναι θετική**

$$\alpha > \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta > 0$$

2. **Ἕνας σχετικὸς ἀριθμὸς α εἶναι μικρότερος ἀπὸ ἕναν ἄλλον β, ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ διαφορὰ α — β εἶναι ἀρνητική**

$$\alpha < \beta \Longleftrightarrow \alpha - \beta < 0$$

3. **Ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ διαφορὰ α — β εἶναι ἴση μὲ τὸ 0 τότε α = β**

$$\alpha - \beta = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta$$

Ὥστε: **Γιὰ νὰ συγκρίνουμε δύο ἀριθμοὺς ἀρκεῖ νὰ ἐξετάσουμε τὴ διαφορά τους.**

Παραδείγματα:

Ἀριθμοὶ πρὸς σύγκρισιν	Διαφορὰ	Ἀποτέλεσμα συγκρίσεως
$^{+}3$ καὶ $^{-}1$	$(^{+}3) - (^{-}1) = (^{+}3) + (^{+}1) = {}^{+}4$	$^{+}3 > {}^{-}1$
$^{-}4$ » $^{-}2$	$(^{-}4) - (^{-}2) = (^{-}4) + (^{+}2) = {}^{-}2$	$^{-}4 < {}^{-}2$
$^{-}5$ » $^{+}2$	$(^{-}5) - (^{+}2) = (^{-}5) + (^{-}2) = {}^{-}7$	$^{-}5 < {}^{+}2$
$^{+}12$ » $^{-}8$	$(^{+}12) - (^{-}8) = (^{+}12) + (^{+}8) = {}^{+}20$	$^{+}12 > {}^{-}8$

Ἐφαρμογές

1. Ἂν συγκρίνουμε ἕναν θετικὸ ἀριθμό, π. χ. τὸ $^{+}5$, μὲ τὸ 0 εὑρίσκουμε: $^{+}5 - 0 = {^{+}5} + 0 = {^{+}5}$
δηλαδή: θετικὴ διαφορά.

Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 0.

2. Ἂν συγκρίνουμε ἕναν ἀρνητικὸν ἀριθμό, π. χ. τὸ $^{-}7$, μὲ τὸ 0 εὑρίσκουμε $^{-}7 - 0 = {^{-}7} + 0 = {^{-}7}$, δηλαδὴ ἀρνητικὴ διαφορά.

Κάθε ἀρνητικὸς ἀριθμὸς εἶναι μικρότερος τοῦ 0.

Σύμφωνα μὲ τὶς δύο προηγούμενες προτάσεις, ἀντὶ νὰ γράφουμε:

α) Ὁ ἀριθμὸς α εἶναι θετικός, γράφουμε: $\alpha > 0$

β) » » α » ἀρνητικός, » $\alpha < 0$

3. Ἂν συγκρίνωμε ἕναν ὁποιονδήποτε θετικὸ μ' ἕναν ὁποιονδήποτε ἀρνητικό, π.χ. τὸν $^{+}4$ μὲ τὸν $^{-}5$, εὑρίσκουμε:
$^{+}4 - {^{-}5} = {^{+}4} + {^{+}5} = {^{+}9}$ δηλαδὴ διαφορὰ θετική.

Κάθε θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε ἀρνητικό.

4. Ἂν συγκρίνουμε δύο θετικοὺς ἀριθμούς, π.χ. τὸ $^{+}7$ μὲ τὸν $^{+}3$, εὑρίσκουμε $^{+}7 - {^{+}3} = {^{+}7} + {^{-}3} = {^{+}4}$ δηλαδὴ θετικὴ διαφορά.
Ἀλλὰ εἶναι $|^{+}7| > |^{+}3|$.

Μεταξὺ δύο θετικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν μεγαλύτερη ἀπόλυτη τιμή.

5. Ἂν συγκρίνουμε δύο ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, π.χ. $^{-}4$ $^{-}3$, εὑρίσκουμε $^{-}4 - {^{-}3} = {^{-}4} + {^{+}3} = {^{-}1}$ δηλαδὴ ἀρνητικὴ διαφορά. Ἀλλὰ εἶναι: $|^{-}4| > |^{-}3|$

Μεταξὺ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ἔχει τὴν μικρότερη ἀπόλυτη τιμή.

6. Ἂν ἔχουμε:

$\alpha > \beta$, ὁπότε θὰ εἶναι $\alpha - \beta > 0$,

καὶ $\beta > \gamma$, » » » $\beta - \gamma > 0$, τότε.

ἀπὸ τὴν πρόσθεσι τῶν θετικῶν διαφορῶν $\alpha - \beta$ καὶ $\beta - \gamma$ ἔχουμε:

$$(\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) > 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha - \beta + \beta - \gamma > 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha - \gamma > 0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha > \gamma$$

Ὥστε ἔχουμε τὴν συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \beta > \gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha > \gamma$$ **μεταβατικὴ ἰδιότης**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

181) Νὰ διατάξετε κατὰ μέγεθος, ἀπὸ τὸν μικρότερο πρὸς τὸν μεγαλύτερο, τοὺς σχετικοὺς ἀριθμούς: 4, $^{-}3$, $^{+}3$, $+\frac{1}{2}$.

182) Ἂν εἶναι $α - {}^{+}5 < 0$, νὰ συγκρίνετε τοὺς ἀριθμοὺς α καὶ $^{+}5$.

183) Νὰ συμπληρώσετε τὴν ἰσοδυναμία $α - {}^{+}6 = 0 \Longleftrightarrow$

184) Νὰ συμπληρώσετε τὴν συνεπαγωγὴ

$$\left.\begin{array}{r} α > {}^{+}4 \\ {}^{+}4 > 7 \end{array}\right\} \Rightarrow ;$$

§ 33. Ἰδιότητες ἀνισοτήτων

I. Ἂς πάρουμε τὴν ἀνισότητα $3 > {}^{-}2$ κι' ἂς προσθέσουμε καὶ στὰ δύο μέλη της τὸν ἴδιο σχ. ἀριθμό, π.χ. τὸν $^{-}7$. Θὰ ἔχουμε:

α′ μέλος: $3 + (^{-}7) = {}^{-}4$ β′ μέλος $^{-}2 + (^{-}7) = {}^{-}9$

εἶναι ὅμως $^{-}4 > {}^{-}9$

ἄρα: $3 > {}^{-}2 \Rightarrow 3 + (^{-}7) > {}^{-}2 + (^{-}7)$

καὶ γενικά. $α > β \Rightarrow α + γ > β + γ$

Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος προσθέσουμε τὸν ἴδιο σχ. ἀριθμό, προκύπτει ὁμοιόστροφη ἀνισότης.

II. Ἂς πολ/σουμε τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $3 > {}^{-}2$ μὲ τὸν ἴδιο **θετικὸ** ἀριθμό, π.χ. τὸ 4.

Ἔχουμε:

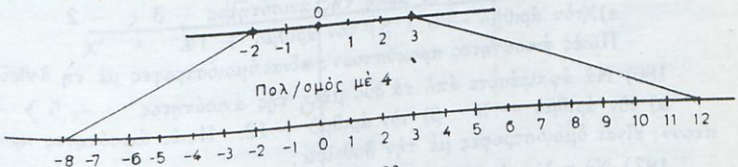
α′ μέλος. $3 \cdot 4 = 12$ β′ μέλος $^{-}2 \cdot 4 = {}^{-}8$

καὶ πάλι ἔχουμε $12 > {}^{-}8$ (σχ. 33)

ἄρα εἶναι $3 > {}^{-}2 \Rightarrow 3 \cdot 4 > {}^{-}2 \cdot 4$

καὶ γενικά: $α > β$ καὶ $γ > 0 \Rightarrow α \cdot γ > β \cdot γ$

Ἂν πολ/σουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος μὲ τὸν ἴδιο θετικὸ ἀριθμὸ προκύπτει ὁμοιόστροφη ἀνισότης.



Σχ. 33

III. Ἂν πολ/σουμε πάλι τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $3 > -2$ μὲ τὸν ἴδιο **ἀρνητικὸ** ἀριθμό, π. χ. τὸ $^{-}4$ ἔχουμε:

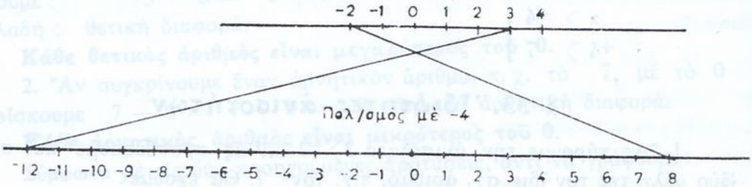
α′. μέλος $3 \cdot (^{-}4) = {}^{-}12$ β′. μέλος $(-2) \cdot (-4) = {}^{+}8$

εἶναι ὅμως: $^{-}12 < {}^{+}8$ (σχ. 34)

ἄρα ἔχουμε: $3 > -2 \Rightarrow 3 \cdot (-4) < (-2) \cdot (-4)$

καὶ γενικά $α > β$ καὶ $γ < 0 \Rightarrow α \cdot γ < β \cdot γ$

Ἂν πολ σουμε τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος μὲ τὸν ἴδιο ἀρνητικὸ ἀριθμό, προκύπτει ἑτερόστροφη ἀνισότης.



Σχ 34

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς : Ἐπειδή, καθὼς μάθαμε, ἀφαίρεσις σημαίνει πρόσθεσι τοῦ ἀντιθέτου τοῦ ἀφαιρετέου καὶ διαίρεσις πολ/σμὸν μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ διαιρέτη, συνάγουμε ὅτι οἱ ἰδιότητες I, II, III ἰσχύουν καὶ στὶς περιπτώσεις ἀφαιρέσεως καὶ διαιρέσεως τῶν δύο μελῶν τῆς ἀνισότητος μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸ ($\neq 0$).

Εὔκολα ἀκόμη μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε καὶ τὴν ἀκόλουθη ἰδιότητα :

Ἂν προσθέσουμε τὰ ἀντίστοιχα μέλη δύο ὁμοιοστρόφων ἀνισοτήτων, θὰ προκύψη ὁμοιόστροφη ἀνισότης.

$$\left.\begin{matrix}\alpha > \beta\\ \gamma > \delta\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \delta$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

185) προσθέσετε στὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $-3 < -2$
α) τὸν ἀριθμὸ -5 β) τὸν ἀριθμὸ $+14$.

Ποιὲς ἀνισότητες προκύπτουν; εἶναι ὁμοιόστροφες μὲ τὴ δοθεῖσα;

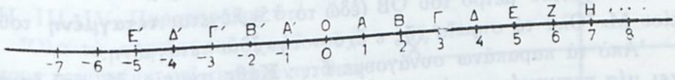
186) Νὰ ἀφαιρέσετε ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $-5 > -7$
α) τὸν ἀριθμὸ -9 β) τὸν ἀριθμὸ $+12$. Ποιὲς ἀνισότητες προκύπτουν; εἶναι ὁμοιόστροφες μὲ τὴν δοθεῖσα;

187) Νὰ πολλαπλασιάσετε τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος $-3 < -1$ κατὰ σειρὰν μὲ τοὺς ἀριθμούς : $2, -5, -4$. Ποιὲς ἀνισότητες προκύπτουν; Ποιὲς εἶναι ἑτερόστροφες μὲ τὴν δοθεῖσα;

188) Ἂν $\alpha > \beta$ (ὅπου α, β ῥητοὶ σχετικοί, ἐκτὸς τοῦ μηδενός), νὰ ἐξετάσετε μὲ παραδείγματα καὶ γενικῶς ποιὰ σχέσις ἰσχύει μεταξὺ τῶν $\frac{1}{\alpha}$ καὶ $\frac{1}{\beta}$ α) ἂν α, β ὁμόσημοι καὶ β) ἂν α, β ἑτερόσημοι.

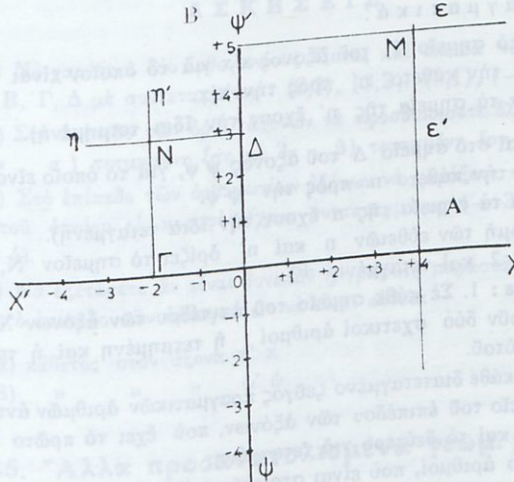
§ 34. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως ἑνὸς σημείου στὸ ἐπίπεδο

Μάθαμε πῶς προσδιορίζουμε τὴν θέσι ἑνὸς σημείου πάνω στὸν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Στὸ σχ. 35 βλέπουμε ὅτι ἕνα σημεῖο αὐτοῦ, π.χ. τὸ Δ, προσδιορίζεται μ' ἕναν σχετικὸ ἀριθμό, ἐδῶ τὸ +4, ποὺ εἶναι τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ $\vec{O\Delta}$, καὶ λέγεται τετμημένη τοῦ σημείου Δ. Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε πῶς μ' ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος σχετικῶν ἀριθμῶν προσδιορίζεται ἡ θέσις ἑνὸς σημείου εἰς τὸ ἐπίπεδο.



Σχ. 35

Σ' ἕνα τετραγωνισμένο χαρτὶ χαράζουμε δύο ἄξονες, ἕναν ὁριζόντιο Χ'Χ κι' ἕναν κατακόρυφο Ψ'Ψ μὲ κοινὴ ἀρχὴ τὸ σημεῖο τομῆς Ο (σχ. 36).



Σχ. 36

Παρατηροῦμε ὅτι:

1. Ἀπὸ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου μποροῦμε νὰ χαράξουμε μία καὶ μόνο εὐθεῖα ε' παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα Ψ'Ψ. Αὐτὴ τέμνει καθέτως

τὸν ἄξονα Χ΄Χ σ' ἕνα σημεῖο (ἐδῶ τὸ Α). Τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{OA}$ (ἐδῶ τὸ +4) λέγεται **τετμημένη** τοῦ σημείου Μ.

Εἶναι φανερὸ ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας ε΄ ἔχουν τὴν ἴδια τετμημένη.

2. Ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου μποροῦμε νὰ χαράξωμε μία καὶ μόνο μία εὐθεῖα ε παράλληλη πρὸς τὸν ἄξονα Χ΄ΟΧ. Αὐτὴ τέμνει τὸν ἄξονα Ψ΄Ψ σ' ἕνα σημεῖο (ἐδῶ τὸ Β).

Τὸ σχετικὸ μέτρο τοῦ $\overrightarrow{OB}$ (ἐδῶ τὸ +5) λέγεται **τεταγμένη** τοῦ σημείου Μ. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ε ἔχουν τὴν ἴδια τεταγμένη.

Ἀπὸ τὰ παραπάνω συνάγουμε ὅτι : **Κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἔχει μία τετμημένη καὶ μία τεταγμένη.**

Ἀντίστροφα:

Ἂν μᾶς δώσουν ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν, π. χ. (−2, +3), μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε τὴν θέσιν ἑνὸς σημείου Ν στὸ ἐπίπεδο τῶν ἀξόνων.

Πραγματικά:

α) Στὸ σημεῖο Γ τοῦ ἄξονος x΄x γιὰ τὸ ὁποῖον εἶναι $(\overrightarrow{O\Gamma}) = -2$, ὑψώνουμε τὴν κάθετο π΄ πρὸς τὴν x΄x.

(Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς π΄ ἔχουν τὴν ἴδια τετμημένη).

β) Καὶ στὸ σημεῖο Δ τοῦ ἄξονος ψ΄ψ, γιὰ τὸ ὁποῖο εἶναι $(\overrightarrow{O\Delta}) = +3$, ὑψώνουμε τὴν κάθετο π πρὸς τὴν ψ΄ψ.

(Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς π ἔχουν τὴν ἴδια τεταγμένη).

Ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν π καὶ π΄ ὁρίζει τὸ σημεῖον Ν, ποὺ ἔχει τετμημένη −2 καὶ τεταγμένη +3.

Ὥστε : 1. Σὲ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων Χ΄Χ καὶ Ψ΄Ψ ἀντιστοιχοῦν δύο σχετικοὶ ἀριθμοί : ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου αὐτοῦ.

2. Σὲ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, ποὺ ἔχει τὸ πρῶτο στοιχεῖο για τετμημένη καὶ τὸ δεύτερο γιὰ τεταγμένη.

Οἱ δύο ἀριθμοί, ποὺ εἶναι στοιχεῖα τοῦ διατεταγμένου αὐτοῦ ζεύγους, δηλαδὴ ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη, λέγονται **καρτεσιανὲς συντεταγμένες** ἢ ἁπλῶς **συντεταγμένες** τοῦ σημείου.

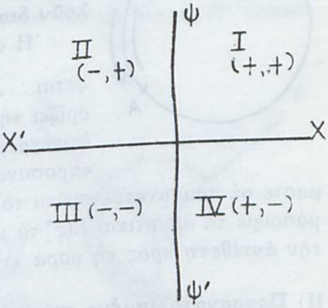
Ἔτσι ἔχουμε μία ἀντιστοιχία ἕνα μ' ἕνα (ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία) μεταξὺ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Παρατήρησις

Ι. Είναι δυνατόν μία ή και οί δύο συντεταγμένες ένός σημείου τοῦ ἐπιπέδου νὰ μὴν είναι ρητοὶ ἀριθμοί. Τότε θὰ ἐργασθοῦμε μὲ ὅση προσέγγισι μποροῦμε.

II. Ὅπως φαίνεται στὸ σχῆμα 37 οἱ δύο ὀρθογώνιοι ἄξονες χωρίζουν τὸ ἐπίπεδο σὲ 4 χωρία. Τὰ 4 χωρία I, II, III, IV. Παρατηροῦμε ὅτι:

Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χωρίου I ἔχουν τετμημένη καὶ τεταγμένη θετικές, τοῦ II ἔχουν τετμημένη ἀρνητικὴ καὶ τεταγμένη θετική, τοῦ III τετμημένη καὶ τεταγμένη ἀρνητικὲς καὶ τοῦ IV τετμημένη θετικὴ καὶ τεταγμένη ἀρνητική.



Σχ. 37

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

189) Νὰ χαράξετε δύο ὀρθογωνίους ἄξονες καὶ ἔπειτα νὰ ὁρίσετε σημεῖα A, B, Γ, Δ μὲ συντεταγμένες: (2,3), (3,2), (5,1), (−2, −3).

190) Στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθ. ἀξόνων νὰ προσδιορίσετε ὅλα τὰ σημεῖα, ποὺ ἔχουν α) τετμημένη ἴση μὲ 2 β) τεταγμένη ἴση μὲ 2.

191) Στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων νὰ χαράξετε τὸ εὐθύγραμμο σχῆμα, τοῦ ὁποίου οἱ κορυφὲς ἔχουν συντεταγμένες (−3, 2), (4, −3), (−2, +4).

192) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι δυνατὸν ἡ γραφικὴ παράστασις μιᾶς συναρτήσεως στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων νὰ εἶναι εὐθεῖα

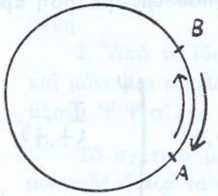
α) κάθετος στὸν ἄξονα x′x
β) » » » ψ′ψ

§ 35. Ἄλλα προσανατολισμένα γεωμ. μεγέθη

I. Προσανατολισμένα τόξα

Ὅπως ἕνα εὐθ. τμῆμα, ἔτσι καὶ ἕνα τόξο, π.χ. τὸ $\widehat{AB}$ (σχ. 38) μπορεῖ νὰ διαγραφῇ ἀπὸ ἕνα κινητὸ σημεῖο M, εἴτε ἀπὸ τὸ A πρὸς τὸ B εἴτε ἀπὸ τὸ B πρὸς τὸ A.

Ἂν λάβουμε ὑπ' ὄψιν τὴν φορὰ κατὰ τὴν ὁποία διαγράφεται ἕνα τόξο, θὰ τὸ ὀνομάζουμε **προσανατολισμένο τόξο.** Ἡ μία ἀπὸ τὶς δύο φορὲς διαγραφῆς ὁρίζεται ὡς **θετική.** Ἂν ἡ διαγραφὴ γίνη ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β, τὸ σημεῖο Α λέγεται **ἀρχὴ ἢ ἀρχικὸ** σημεῖο καὶ τὸ Β **τελικό.** Ἀπὸ αὐτὰ ἐννοοῦμε ὅτι : **Τὰ ἄκρα τοῦ προσανατολισμένου τόξου ἀποτελοῦν διατεταγμένο ζεῦγος σημείων.**



Σχ. 38

Ἡ φράσις «προσανατολισμένο τόξο ΑΒ» γράφεται : $\overset{\frown}{AB}$ ὅπου ἡ μὲν σειρὰ γραφῆς τῶν ἄκρων ὁρίζει τὴν ἀρχὴ καὶ τὸ τέλος τοῦ τόξου ἐνῶ τὸ ἐπιγεγραμμένο μικρὸ τόξο ἀντικαθιστᾶ τὴ λέξι «προσανατολισμένο». Στὰ ἑπόμενα, ὅταν ἀναφερόμαστε σὲ προσανατολισμένα τόξα, θὰ ἐννοοῦμε τὰ θετικὰ ἐκτὸς ἂν ὀνομάσουμε τὰ ἀρνητικά. Εἰς τὰ μαθηματικὰ ὡς θετικὴ φορὰ λαμβάνουμε τὴν **ἀντίθετη** πρὸς τὴ φορὰ κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου.

II) Προσανατολισμένη περιφέρεια

Ὅταν, κατὰ τὴ σπουδὴ μιᾶς περιφερείας, λαμβάνουμε ὑπ᾽ ὄψιν καὶ τὴν φορὰ κατὰ τὴν ὁποία διαγράφεται, τότε ἡ περιφέρεια λέγεται προσανατολισμένη· π.χ. ἡ περιφέρεια ποὺ γράφει ἡ ἄκρη ἑνὸς δείκτου σ᾽ ἕνα ρολόι εἶναι προσανατολισμένη.

III) Προσανατολισμένη γωνία

Ἂν σ᾽ ἕνα ἐπίπεδο Π, μία ἡμιευθεῖα Ο x περιστραφῆ στὸ ἐπίπεδο περὶ τὸ ἄκρο της Ο, τότε σὲ μία πλήρη περιστροφὴ θὰ διαγράψη ὁλόκληρο τὸ Π. Ἡ περιστροφὴ αὐτὴ μπορεῖ νὰ γίνη κατὰ δύο διαφορετικὲς φορές. Ἂν πάνω στὸ ἐπίπεδο τοποθετήσουμε ἕνα ρολόϊ μὲ τὴν ὄψι του πρὸς τὸ θεατή, τότε ἡ ἀντίθετη φορὰ τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν του λέγεται **θετικὴ φορά.**

Τὸ ἐπίπεδο στὸ ὁποῖο ἔχουμε ὁρίσει τὴ θετικὴ φορὰ περιστροφῆς λέγεται : **προσανατολισμένο ἐπίπεδο.**

Σ᾽ ἕνα προσανατολισμένο ἐπίπεδο Π χαράζουμε δύο ἡμιευθεῖες (ἀκτῖνες) Ο x, Ο ψ καὶ θεωροῦμε τὴ μία ἀπ᾽ αὐτές, π.χ. τὴν Ο x, ὡς **ἀρχικὴ ἢ 1η**· Ἡ ἐπιφάνεια ποὺ θὰ διαγράψη ἡ Ο x στρεφομένη στὸ ἐπίπεδο, ὥσπου νὰ συμπέση μὲ τὴν Ο ψ, λέγεται γωνία τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (Ο x, Ο ψ). Ἂν ἡ Ο x στραφῆ κατὰ τὴ θετικὴ φορά, τότε ἡ γωνία λέγεται **θετική,** ἀλλοιῶς **ἀρνητική.**

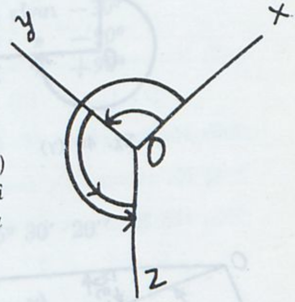
Γιὰ νὰ συμβολίσουμε τὴ θετικὴ γωνία τῶν Ο x, Ο ψ γράφουμε : $\measuredangle$ (Ο x, Ο ψ) ἐνῶ γιὰ τὴν ἀρνητικὴ γράφουμε : $\measuredangle$ (Ο x, Ο ψ).

Δηλαδή : Ἡ φορὰ τοῦ τόξου μᾶς δείχνει τὴ φορὰ τῆς γωνίας (θετική ἢ ἀρνητική) ἐνῶ ἡ 1η ἀναγραφομένη πλευρὰ τὴν 1η πλευρὰ τῆς γωνίας.

Παρατήρησις: Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ Ox μπορεῖ νὰ διέλθη ἀπὸ τὴν ἀρχική της θέσι περισσότερες ἀπὸ μιὰ φορὲς κι' ἔπειτα νὰ σταθῆ στὴν Oy. Στὰ ἑπόμενα θὰ θεωροῦμε ὅτι ἡ γωνία διαγράφεται μὲ τὴν πρώτη συνάντησι τῆς ἀρχικῆς πλευρᾶς μὲ τὴν τελική. Ἐκτὸς ἂν γίνεται εἰδικὰ λόγος.

Παράδειγμα:

Στὸ σχ. 39 οἱ θετικὲς γωνίες ∢ (Ox, Oy) καὶ ∢ (Oy, Oz) εἶναι ἐφεξῆς κυρτὲς καὶ ἔχουν ἄθροισμα τὴν μὴ κυρτὴ θετικὴ γωνία ∢ (Ox, Oz).



Σχ. 39

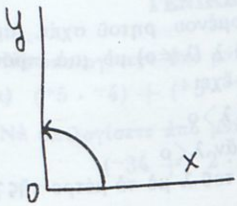
35.1 Μέτρησις προσανατολισμένων γωνιῶν καὶ τόξων

Οἱ σχετικοὶ ἀριθμοὶ χρησιμοποιοῦνται καὶ γιὰ τὴ μέτρηση τῶν προσανατολισμένων γωνιῶν, τόξων.

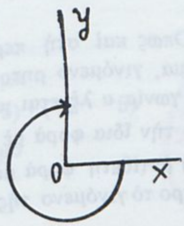
Παράδειγμα: Στὸ σχ. 40 εἶναι:

1) Μέτρο τῆς ∢ (Ox, Oy) $= +90^0$ (σχ. α)

2) » » ∢ (Ox, Oy) $= -270^0$ (» β)



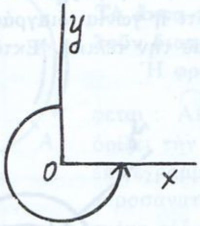
Σχ. 40 (α)



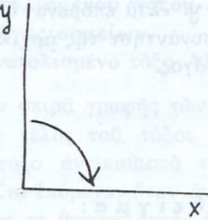
Σχ. 40 (β)

3) Μέτρο τῆς $\sphericalangle (O y, O x)$ $+270^{0}$ (σχ. 40 γ)

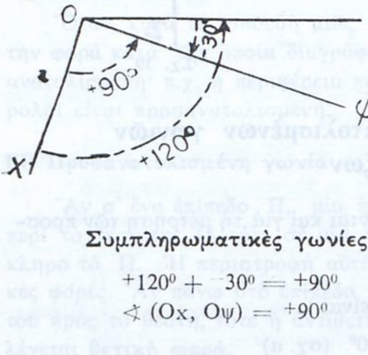
4) » » $\sphericalangle (O y, O x)$ -90^{0} » » δ)

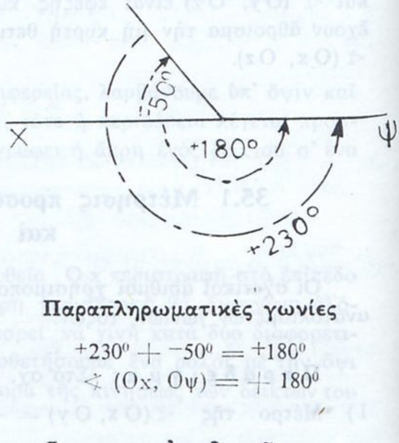


Σχ. 40 (γ)



Σχ. 40 (δ)





Συμπληρωματικὲς γωνίες

$+120^{0} + -30^{0} = +90^{0}$

$\sphericalangle (Ox, O\psi) = +90^{0}$

Παραπληρωματικὲς γωνίες

$+230^{0} + -50^{0} = +180^{0}$

$\sphericalangle (Ox, O\psi) = +180^{0}$

§ 36. Γινόμενο ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ μὲ προσανατ. γωνία

Ὅπως καὶ στὴ περίπτωσι τοῦ γινομένου ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ μὲ διάνυσμα, γινόμενο ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ λ ($\lambda \neq o$) μὲ μιὰ προσανατολισμένη γωνία α λέγεται μιὰ γωνία β ποὺ ἔχει :

α) τὴν ἴδια φορὰ μὲ τὴν γωνία α ἂν $\lambda > o$

β) ἀντίθετη φορὰ μὲ τὴν γωνία α ἂν $\lambda < o$

καὶ μέτρο τὸ γινόμενο τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ λ μὲ τὸ μέτρο τῆς γωνίας α.

Ἂν $\lambda = o$ τότε τὸ γινόμενο τοῦ λ μὲ τὴ γωνία α εἶναι ἴσο μὲ μηδενικὴ γωνία.

Ἂν $\lambda \neq o$ καὶ $\alpha =$ μηδενικὴ γωνία τότε τὸ γινόμενο τοῦ λ μὲ τὴ μηδενικὴ γωνία εἶναι μηδενικὴ γωνία.

Παραδείγματα:

1) Ἂν τὸ μέτρο προσαν. γωνίας α εἶναι 30^0
τότε » » » » 3α » 90^0
καὶ » » » » -3α » -90^0

2) Ἂν τὸ μέτρο προσαν. γωνίας α εἶναι -30^0
τότε » » » » 3α » -90^0
καὶ » » » » -3α » $+90^0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

193) Ἂν τὰ σχετ. μέτρα τῶν τόξων εἶναι
$\alpha = +22^0\,35'$, β) $-15^0\,10'$, $\gamma = -35^0\,30'\,20''$
Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ πολυώνυμα
$\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha - (\beta - \gamma)$, $\alpha + (\beta - \gamma)$

194) Ἕνα ὡρολόγιον δείχνει 5 h 20′ 12′′. Ποία ἦτο ἡ ἔνδειξίς του πρὸ 3 h 35′ 20′′

195) Νὰ σχηματίσετε τρεῖς διαδοχικὲς γωνίες:
$\sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΒ), $\sphericalangle$ (ΟΒ, ΟΓ), $\sphericalangle$ (ΟΓ, ΟΔ)
μὲ σχετ. μέτρα ἀντιστοίχως $+45^0$, $+50^0$, $+120^0$ καὶ
νὰ εὕρετε τὰ σχετικὰ μέτρα τῶν γωνιῶν:
$\sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΓ), $\sphericalangle$ (ΟΒ, ΟΔ), $\sphericalangle$ (ΟΓ, ΟΑ), $\sphericalangle$ (ΟΔ, ΟΑ)

195) Ἂν τὸ μέτρο μιᾶς γωνίας $\sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΒ) εἶναι $+170^0$ νὰ εὕρετε τὸ μέτρο τῆς γωνίας $3 \cdot \sphericalangle$ (ΟΑ, ΟΒ)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

197) Νὰ ὑπολογίσετε ἀπὸ μνήμης τὰ πολυώνυμα
α) $(^+5 \cdot {}^-4) + (^+5 \cdot {}^+4)$ β) $(^-2 \cdot {}^+5) \cdot (^-2 \cdot {}^-5)$

198) Νὰ ὑπολογίσετε ἀπὸ μνήμης τὸ πολυώνυμο
$(^-34 + {}^-2 \cdot {}^-34) + {}^-34$

199) Νὰ ὑπολογίσετε ἀπὸ μνήμης τὸ πολυώνυμο

$$(^-24 \cdot {}^+99) + {}^-24$$

200) Ποιὸν ἀριθμὸν ἀντιπροσωπεύει ὁ x σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἰσότητες

$$^-4 \cdot x = {}^-4, \quad {}^-4 \cdot x = {}^+4, \quad {}^-4 \cdot x = 1, \quad {}^-4 \cdot x = 0$$

201) Ποιὸν ἀριθμὸν ἀντιπροσωπεύει ὁ x σὲ κάθε μίαν ἀπὸ τὶς ἰσότητες

$$^-5 \cdot x + {}^-5 \quad {}^+7 = 0$$
$$(^-3 + x) \cdot {}^-5 = 0$$

202) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ πολυώνυμα

$$^+9 \cdot {}^+5 + {}^-10) : {}^+5, \qquad (^-11 \cdot {}^-2 + {}^+18) : {}^-2$$

203) Ποιὸς ἀριθμὸς δὲν ἔχει ἀντίστροφον;

204) Νὰ εὕρετε τοὺς ἀντιστρόφους τῶν ἀριθμῶν -95, $0{,}01$, $-\dfrac{2}{5}$

205) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἀληθεῖς ἢ ὄχι οἱ σχέσεις

$$|8-2| < 7, \quad |9-2| < 7, \quad |{}^-5-2| < 7$$
$$|{}^-6-8| < 14, \quad |{}^-9-8| < 14, \quad |23-8| < 14$$

206) Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ἀληθεῖς ἢ ὄχι οἱ σχέσεις

$$-500 > -2, \qquad -5 > 2, \qquad {}^-0{,}016 < {}^-0{,}0016$$
$$-|-5| \leq 5, \qquad |-5| > 2$$

207) Νὰ συγκρίνετε τοὺς ἀριθμοὺς

$$\frac{10^5 \cdot 10^{-2}}{10^{-8}} \quad \text{καὶ } 10^{1}$$

208) Νὰ συγκρίνετε τοὺς ἀριθμοὺς

$$^-9800000000 \cdot 0{,}00025 \quad \text{καὶ} \quad {}^-2{,}45 \cdot 10^{6}$$

209) Ἐπάνω στὸν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν νὰ σημειώσετε τοὺς ἀκεραίους ποὺ εἶναι μικρότεροι τοῦ 5 καὶ συγχρόνως μεγαλύτεροι τοῦ -2.

210) Οἱ παραστάσεις $4 \cdot 64$, $\quad 16^{3} \cdot 8^{1}$ νὰ γραφοῦν ὡς δυνάμεις τοῦ 2.

211) Πότε οἱ ἀριθμοὶ $(-\alpha)^{\nu}$ καὶ α^{ν} εἶναι ἴσον ἂν $\alpha \neq 0$, $\nu \in \Phi$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
Δ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

§ 37. Ἐξισώσεις

Οἱ ἐξισώσεις εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ χρήσιμα κεφάλαια τῶν μαθηματικῶν. Χάρι σ' αὐτὲς μποροῦμε νὰ λύνουμε ἁπλὰ καὶ πολύπλοκα προβλήματα.

Στὸ προηγούμενο χρόνο μάθαμε νὰ λύνουμε ἁπλὲς ἐξισώσεις βασιζόμενοι στὶς σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν τεσσάρων πράξεων.

Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ κάνουμε μιὰ πιὸ συστηματικὴ ἐξέτασι τῶν ἐξισώσεων.

37. 1 Μεταβλητή

Ἀπὸ τὴν ὡς τώρα πεῖρα μας γνωρίζουμε ποσὰ ἢ μεγέθη σταθερὰ καὶ μεγέθη μεταβλητά.

Π.χ. ἡ ἀκτῖνα ἑνὸς κύκλου, τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου μποροῦν νὰ πάρουν διάφορες τιμὲς καὶ λέγονται **μεταβλητὰ** ποσὰ ἢ μεγέθη. Ἀντίθετα ὑπάρχουν ποσὰ τὰ ὁποῖα ἔχουν μία μόνον τιμὴ καὶ λέγονται **σταθερά**. Π.χ. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι καθὼς ξέρουμε πάντοτε ἴσο μὲ μιὰ ἀποπλατυσμένη, εἶναι δηλαδὴ μιὰ ποσότης σταθερά. Ὁ χρόνος τῆς περιφορᾶς τῆς γῆς περὶ τὸν ἥλιο εἶναι σταθερός· ἐνῶ ἡ ἀπόστασις τῆς γῆς ἀπὸ τὸν ἥλιο δὲν εἶναι σταθερὴ πάντοτε ἀλλὰ μεταβάλλεται.

Μὲ μερικὰ παραδείγματα θὰ ἀποσαφηνίσουμε τὸν ρόλο τῆς μεταβλητῆς στὶς ἐξισώσεις.

Ἀπὸ τὶς προτάσεις :

«Ἡ Κρήτη εἶναι νησί»

«Τὸ Λονδῖνο εἶναι ὄρος»

«Τὸ 4 εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 5»

«Τὸ 2 εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 3»

εὔκολα μποροῦμε νὰ διακρίνουμε ποιὲς εἶναι ἀληθινὲς καὶ ποιὲς δὲν εἶναι.

Μποροῦμε ὅμως νὰ κάνουμε τὸ ἴδιο καὶ μὲ τὴν πρότασι ;

«Ἡ πόλις .... εἶναι ἑλληνική»

ἢ «Ἡ πόλις x εἶναι ἑλληνική»

Φυσικὰ δὲν μποροῦμε ἀφοῦ δὲν ξέρουμε ποιὰ πόλι παριστάνει τὸ x.

Ἂν τὸ x ἀντικατασταθῇ μὲ ὀνόματα πόλεων π.χ. Βόλος, Κόρινθος Παρίσι, Ρώμη θά ἔχουμε τίς προτάσεις

Ἡ πόλις Βόλος εἶναι ἑλληνικὴ
» » Κόρινθος εἶναι ἑλληνικὴ
» » Παρίσι » »
» » Ρώμη » »

ἀπ' τὶς ὁποῖες οἱ δύο πρῶτες εἶναι ἀληθινὲς κι' οἱ δύο τελευταῖες ὄχι.

Ἀνάλογα μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε καὶ μὲ τὴν πρότασι : $x > 5$ (1)

Ἂν τὸ x ἀντικατασταθῇ μὲ ἀριθμούς, ποὺ ἀνήκουν σ' ἕνα σύνολο, π.χ. στὸ σύνολο $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, ἀπὸ τὴν (1) θὰ σχηματίσουμε τὶς προτάσεις

$$2 > 5, \quad 4 > 5, \quad 6 > 5, \quad 8 > 5, \quad 10 > 5$$

ἀπ' τὶς ὁποῖες μόνο οἱ τρεῖς τελευταῖες εἶναι ἀληθινές.

Τὸ x, ποὺ δὲν παριστάνει εἰδικὰ ἕναν ἀριθμὸ ἀλλὰ μπορεῖ νὰ λάβη διάφορες τιμές, ἀπὸ ἕνα σύνολο, λέγεται **μεταβλητή**.

Ἡ μεταβλητὴ στὰ μαθηματικὰ παίζει τὸν ρόλο ποὺ παίζει ἡ παῦλα στὴν πρότασι :

«Ἡ πόλις ..— εἶναι ἑλληνική»

37. Ἐξίσωσις, ταυτότης

Ἡ πρότασις : $x + 3 = 7$ (1) ὅπου $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Διὰ $x = 1$	γίνεται	$1 + 3 = 4 \neq 7$
» $x = 2$	»	$2 + 3 = 5 \neq 7$
» $x = 3$	»	$3 + 3 = 6 \neq 7$
» $x = 4$	»	$4 + 3 = 7 = 7$
» $x = 5$	»	$5 + 3 = 8 \neq 7$

Δηλαδή : Ἡ πρότασις $x + 3 = 7$ μόνο γιὰ $x=4$ εἶναι ἀληθὴς ἐνῶ γιὰ τὶς ἄλλες τιμὲς τοῦ x εἶναι ψευδής.

Μία ἰσότης ποὺ ἀληθεύει γιὰ ὡρισμένη (ἢ ὡρισμένες) τιμὲς τῆς μεταβλητῆς x λέγεται ἐξίσωσις.

Κατὰ τὴν ἐξέτασι τῶν ἐξισώσεων θὰ θεωροῦμε ὅτι ἡ μεταβλητὴ x διατρέχει τὸ σύνολο τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἐκτὸς ἂν γίνεται εἰδικὰ λόγος περὶ τοῦ ἀντιθέτου.

Ἀπὸ τὶς προτάσεις

$$x + 1 = 3 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad x \cdot 0 = x \quad (2)$$

ἡ (1) ἀληθεύει μόνο γιὰ τὴν τιμὴ τοῦ $x = 2$ $(2 + 1 = 3)$ ἄρα εἶναι ἐξίσωσις. Ἡ (2) ἀληθεύει γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ x' λέγεται δὲ **ταυτότης.**

π.χ. οἱ ἰσότητες:

$$3(x+1) = 3x+3, \quad 2x+5 = 5+2x$$

εἶναι ταυτότητες.

Ἄλλα παραδείγματα

Ταυτότητες	Ἐξισώσεις
$3x + 2 = 2x + x + 2$	$3x + 2 = 11$
$x + 0 = x$	$x - 8 = 0$
$2x + 3 + x = 3 + 3x$	$2x = 12$
$0 \cdot x = 0$	
$1 x = x$	

Παρατήρησις. Δὲν πρέπει νὰ συγχέουμε τοὺς ὅρους «ἰσότης» καὶ «ἐξίσωσις». Ἡ ἰσότης ἀναφέρεται σὲ δύο διαφορετικὲς γραφὲς ἢ ἐκφράσεις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ ἐνῷ ἡ ἐξίσωσις εἶναι μόνον ὑπὸ ὅροις ἰσότης π.χ. ἡ ἐξίσωσις $3x = 12$ εἶναι ἰσότης μόνον ἂν $x = 4$.

37.3 Ἐπίλυσις ἐξισώσεως, Ρίζα.

Ἡ τιμὴ τοῦ x ἴση μὲ 3 μὲ τὴν ὁποία ἡ ἐξίσωσις $x + 4 = 7$ ἀληθεύει λέγεται **ρίζα** ἢ **λύσις** τῆς ἐξισώσεως αὐτῆς. Ἡ διαδικασία ποὺ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν εὕρεσι τῆς ρίζης λέγεται **ἐπίλυσις** τῆς ἐξισώσεως. Τὸ σύμβολο τῆς ἰσότητος (=) χωρίζει τὴν ἐξίσωσι σὲ δύο **μέλη**. Στὸ **α' μέλος** τῆς ἐξισώσεως καὶ στὸ **β μέλος** τῆς ἐξισώσεως. Π.χ. στὴν ἐξίσωσι $x + 4 = 7$

α' μέλος εἶναι τὸ $x + 4$

β' » » » 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

212) Ποιὲς ἀπὸ τὶς προτάσεις $x + 3 = 5$, $2 + x = x + 2$, $3x = 12$, $5 \cdot x = 0$ παριστάνουν ἐξισώσεις;

213) Ποιὸ ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A = \{9,5,8\}$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3x + 1 = 16$.

214) Ἡ ρίζα κάθε μιᾶς ἀπὸ τὶς ἐξισώσεις

$$2x + 4 = 22, \quad 4x = x + 12, \quad 2x + 7 = 19$$

εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου $\{9, 6, 4\}$.

Νὰ βρῆτε τὶς ρίζες τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.

§ 38. Ἰσοδύναμες ἐξισώσεις

Δύο ἐξισώσεις λέγονται ἰσοδύναμες ὅταν καὶ μόνον ὅταν κάθε ρίζα τῆς μιᾶς εἶναι καὶ ρίζα τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως. Ἡ ἀλλοιῶς: Ὅταν ἔχουν τὸ ἴδιο σύνολο λύσεων.

Παραδείγματα:

1) Οἱ $x = 3$ καὶ $2x = 6$ ἔχουν ὡς μόνην ρίζα ἡ κάθε μία τὸ 3 ἄρα εἶναι ἰσοδύναμες.

2) Οἱ ἐξισώσεις $x = 3$ καὶ $x(x-3) = 0$ ἔχουν ἡ μὲν 1η ὡς μόνην ρίζα τὸ 3 ἡ δὲ 2α ἔχει δύο ρίζες τὶς 0 καὶ 3.

(Πράγματι $0.(0-3) = 0. -3.0 = 0$ $\quad 3.(3-3) = 3.0 = 0$)

ἄρα **δὲν** εἶναι ἰσοδύναμες.

§ 39. Ἰδιότητες ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων

I) Ἂς πάρουμε τὴν ἐξίσωσι $3 \cdot (x+1) = 9$ (1) κι᾽ ἂς ἐκτελέσουμε τὸν σημειωμένο πολλαπλασιασμό. Τότε θὰ ἔχουμε:

$$3 \cdot x + 3 = 9 \quad (2)$$

Οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμες. Πράγματι. Ἂν ρ εἶναι ρίζα τῆς (1) θὰ εἶναι

$3 \cdot (\rho + 1) = 9$ (3) καὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἐπιμερισ. ἰδιότητα,

$\Longleftrightarrow$ $3 \cdot \rho + 3 = 9$ (4)

δηλαδὴ τὸ ρ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (2)

Ἀντίστροφα: Ἂν ὁ ἀριθμὸς ρ εἶναι ρίζα τῆς $3x + 3 = 9$, θὰ εἶναι $3\rho + 3 = 9$ κι᾽ ἂν ἐφαρμόσουμε τὴν ἐπιμεριστικὴ ἰδιότητα θὰ ἔχουμε $3(\rho + 1) = 9$ δηλαδὴ τὸ ρ θὰ εἶναι **καὶ** ρίζα τῆς (1).

Ὥστε: ***Οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμες***

Ἂν σὲ μία ἐξίσωσι ἐκτελέσουμε πράξεις (ἐφαρμόζοντες γνωστὲς ἰδιότητες), θὰ εὕρουμε μιὰ νέα ἐξίσωσι ἰσοδύναμη μὲ τὴν ἀρχική.

Ἐφαρμογή. Ἡ ἐξίσωσις $3x + 4x - x = 24$ εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν $(3 + 4 - 1)x = 24$ ἢ τὴν $6x = 24$

καὶ συμβολικά: $3x + 4x - x \Longleftrightarrow (3 + 4 - 1)x = 24 \Longleftrightarrow 6x = 24$

Οἱ ὅροι $3x$, $4x$, $-x$, ποὺ διαφέρουν μόνο κατὰ τὸ ἀριθμητικὸ μέρος, λέγονται **ὅμοιοι** ἡ δὲ μετατροπή τους στὸν ὅρο $6x$ λέγεται **ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων.**

II) Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $2 \cdot x + 3 = 11$ (1) προσθέσουμε τὸν ἴδιο ρητὸ σχετ. ἀριθμό, π.χ. τὸ -5, ἔχουμε τὴν ἐξίσωσι $(2x + 3) - 5 = 11 - 5$ (2)

Εἶναι ἡ (1) καὶ ἡ (2) ἰσοδύναμες;

Ἂν ρ εἶναι ρίζα τῆς (1), τότε θὰ εἶναι

$$2\rho + 3 = 11 \Longleftrightarrow$$
$$2\rho + 3 - 5 = 11 - 5 \quad \text{(ἰδιότης διαγραφῆς)}$$

Ἄρα τὸ ρ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (2)

Ἀντίστροφα : Ἂν τὸ ρ εἶναι ρίζα τῆς (2),

θὰ εἶναι $\quad (2\rho + 3) - 5 = 11 - 5$

$$\Longleftrightarrow \quad (2\rho + 3) - 5 + 5 = 11 - 5 + 5 \quad \text{(ἰδ. διαγραφῆς)}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2\rho + 3 = 11$$

ἄρα τὸ ρ θὰ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (1). Δηλαδὴ οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) εἶναι ἰσοδύναμες.

Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἐξισώσεως προσθέσουμε τὸν ἴδιο ρητὸ σχετ. ἀριθμό, θὰ προκύψη μιὰ ἰσοδύναμη ἐξίσωσις.

Παρατήρησις. Εἶναι φανερὸ ὅτι ἡ ἰδιότης ἰσχύει κι᾽ ὅταν προσθέσουμε στὰ δύο μέλη παράστασι ποὺ περιέχει τὴ μεταβλητή.

Πόρισμα. Σύμφωνα μὲ τὴν προηγούμενη ἰδιότητα ἔχουμε :

$$2x + \alpha = 5 \Longleftrightarrow 2x + \alpha - \alpha = 5 - \alpha$$
$$\Longleftrightarrow 2x = 5 - \alpha$$

Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι :

Μποροῦμε νὰ μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος τῆς ἐξισώσεως στὸ ἄλλο μὲ τὴν προϋπόθεση ὅτι θὰ τοῦ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο.

III) Ἂν τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως $\frac{x}{3} + 1 = 5$ (1) πολ/σουμε μὲ τὸν ἴδιο ρητὸ σχετ. ἀριθμό, π. χ. 3, ἔχουμε :

$$\left(\frac{x}{3} + 1\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3 \quad (2)$$

Εἶναι οἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2) ἰσοδύναμες ;

Ἂν ρ εἶναι ρίζα τῆς (1), τότε

$$\frac{\rho}{3} + 1 = 5 \Longleftrightarrow \left(\frac{\rho}{3} + 1\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3 \quad \text{(ἰδιότης δ/φῆς)}$$

Ἄρα τὸ ρ εἶναι ρίζα καὶ τῆς (2).

Ἀντίστροφα: Ἂν τὸ ρ εἶναι ρίζα τῆς (2) θὰ εἶναι

$$\left(\frac{\rho}{3} + 1\right) \cdot 3 = 5 \cdot 3 \Longleftrightarrow$$
$$\left(\frac{\rho}{3} + 1\right) = 5 \quad \text{(ἰδιότης δ/φῆς στὸ πολ/σμό)}$$

Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ρίζα τῆς (1).

Ὥστε: **Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν ἴδιο σχετικὸ ἀριθμὸ $\neq 0$ θὰ βροῦμε μιὰ ἰσοδύναμη ἐξίσωσι.**

Ἐφαρμογή.

Εἶναι $\frac{x}{5} + 1 = 6 \iff \left(\frac{x}{5} + 1\right) \cdot 5 = 6 \cdot 5$

$\iff x + 5 = 30.$

Παρατήρησις: Ἡ ἰδιότης αὐτὴ δὲν ἰσχύει ἂν πολ/σουμε τὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ παράστασι ποὺ περιέχει μεταβλητή. Καὶ τοῦτο διότι εἶναι δυνατὸν γιὰ ὡρισμένες τιμὲς τῆς μεταβλητῆς ἡ παράστασις αὐτὴ νὰ γίνῃ ἴση μὲ 0. Ἡ περίπτωσις αὐτὴ θὰ ἐξετασθῇ σὲ ἄλλη τάξι ἐκτενέστερα.

§ 39. Ἐπίλυσις ἐξισώσεων

Οἱ ἰδιότητες τῶν ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων χρησιμοποιοῦνται στὴν ἐπίλυσι ἐξισώσεων.

Χάρι σ' αὐτὲς μποροῦμε νὰ μετασχηματίσουμε μίαν ἐξίσωσι σὲ ἄλλες ἁπλούστερες ἰσοδύναμες.

Παράδειγμα:

1) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x - 5 = 12$

Ἔχουμε $x - 5 = 12 \iff x - 5 + 5 = 12 + 5$ (IIη ἰδιότης)

$\iff x = 17$

Παρατήρησις: Θὰ μπορούσαμε, γιὰ συντομία, ἀντὶ νὰ προσθέσουμε τὸ 5 στὰ μέλη τῆς ἐξισώσεως νὰ μεταφέρουμε τὸ -5 ἀπὸ τὸ α΄ μέλος στὸ β΄ μὲ ἀλλαγμένο πρόσημο.

$$x - 5 = 12 \iff x = 12 + 5 \iff x = 17$$

2) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3x = 21$

Ἔχουμε $3x = 21 \iff 3x \cdot \frac{1}{3} = 21 \cdot \frac{1}{3}$ (IIIη ἰδιότης)

$\iff x = \frac{21}{3} = 7.$

3) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{x}{7} = 12$$

Ἔχουμε : $\frac{x}{7} = 12 \iff \frac{x}{7} \cdot 7 = 12 \cdot 7$ (ΙΙΙη ἰδιότης)

$\iff x = 84$

4) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $5x + 6x = 12$

Ἔχουμε $5x + 6x = 12 \iff (5 + 6)\, x = 12$ (Ιη ἰδιότης)

$\iff 11x = 12$

$\iff 11 \cdot x \cdot \frac{1}{11} = 12 \cdot \frac{1}{11}$ (ΙΙΙη ἰδιότης)

$\iff x = \frac{12}{11}$

5) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $2\,x = x + 5$

Ἔχουμε $2\,x - x = 5$ (πόρισμα ΙΙας ἰδιότ.)

$\iff (2 - 1)\, x = 5$

$\iff x = 5$

6) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{5} + x = 2$

Ἔχουμε : $\frac{x}{5} + x = 2 \iff$ (ΙΙΙη ἰδιότης)

$\frac{x}{5} \cdot 5 + x \cdot 5 = 2 \cdot 5 \iff$

$x + 5x = 10 \iff$

$6\,x = 10 \iff$

$\iff 6x \cdot \frac{1}{6} = \frac{10}{6}$ (ΙΙΙη ἰδιότης)

$\iff x = \frac{10}{6}$

7) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $3\,(x - 1) = \frac{5x}{4} + 4$

εἶναι $3\,(x - 1) = \frac{5x}{4} + 4 \iff$

$3 \cdot (x - 1) \cdot 4 = \frac{5x}{4} \cdot 4 + 4 \cdot 4$ (ἀπαλοιφὴ παρανομαστοῦ μὲ τὴν ΙΙη ἰδιότητα)

ἢ $12x - 12 = 5x + 16 \iff$

$12x - 5x = 16 + 12 \iff$

$7x = 28 \iff x = 4$

8) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x}{2} - \frac{2x}{9} = 3$

εἶναι $\frac{x}{2} - \frac{2x}{9} = 3 \iff \frac{x}{2} \cdot 18 - \frac{2x}{9} \cdot 18 = 3 \cdot 18$

(ἀπαλοιφὴ παρανομαστῶν μὲ τὸ Ε.Κ.Π. αὐτῶν)

$$\iff 9x - 4x = 54$$
$$\iff 5x = 54$$
$$\iff x = \frac{54}{5} = 10\frac{4}{5}$$

Ἀπὸ τὰ παραδείγματα αὐτὰ συνάγουμε ὅτι:

Γιὰ νὰ ἐπιλύσουμε μιὰ ἐξίσωσι ἐπιδιώκουμε νὰ τὴν μετασχηματίσουμε σὲ ἰσοδύναμες ἁπλούστερες ἐξισώσεις ὥσπου νὰ καταλήξουμε στὴν ἁπλουστάτη μορφή.

$x = \alpha$ (ὅπου α=σταθ. ἀριθμός)

Ἡ σειρὰ ποὺ ἀκολουθοῦμε εἶναι:

1) Ἀπαλείφουμε τοὺς παρονομαστὰς (πολ/ζοντες καὶ τὰ δύο μέλη μὲ τὸ Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν)

2) Ἐκτελοῦμε τὶς σημειωμένες πράξεις (Ἰδιότης Ιη)

3) Χωρίζουμε τοὺς ἀγνώστους ὅρους στὸ α′ μέλος καὶ τοὺς γνωστοὺς στὸ β′ μέλος.

4) Ἐκτελοῦμε ἀναγωγὴ ὁμοίων ὅρων (ἂν ὑπάρχουν)

5) Πολ/ζουμε καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἐξισώσεως μὲ τὸν ἀντίστροφο τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου.

Ἐπαλήθευσις

Ἕνας τρόπος γιὰ νὰ ἐλέγξη κανεὶς τὴν ὀρθότητα τῆς λύσεως εἶναι: Νὰ ἀντικαταστήση στὴν ἀρχικὴ ἐξίσωσι τὴ μεταβλητὴ **x** μὲ τὴν τιμὴ ποὺ βρῆκε (τὴ ρίζα). Τότε θὰ πρέπει νὰ προκύψη ἰσότης (τοῦ ἑνὸς μέλους μὲ τὸ ἄλλο). Ἡ ἐργασία αὐτὴ λέγεται **ἐπαλήθευσις**.

Παράδειγμα

Κατὰ τὴν ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως $3(x-1) = \frac{5x}{4} + 4$ (παράδειγμα 7) εὑρήκαμε ὡς ρίζα τὸ 4. Γιὰ νὰ κάνουμε τὴν ἐπαλήθευσι ἀντικαθιστοῦμε τὸ x τῆς ἐξισώσεως μὲ 4 κι' ἔχουμε :

$$3 \cdot (4-1) = \frac{5 \cdot 4}{4} + 4 \iff 3 \cdot 3 = 5 + 4$$

$$9 = 9$$

Ἄρα ἡ ἐπίλυσις εἶναι ὀρθή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

215) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἀκόλουθες ἐξισώσεις καὶ νὰ τὶς ἐπαληθεύσετε

α) $3x = x + 8$, β) $2x - 3 = x + 1$, γ) $\frac{x}{7} - 1 = 1$

216) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις

$$\frac{2x}{3} = \frac{x}{4} + 1, \quad \frac{3x-1}{2} + x = 12$$

217) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις

$$\frac{2x-5}{9} = \frac{2x-7}{12} = 1, \quad \frac{1-x}{2} = \frac{x+15}{7} - 4 = 0$$

218) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις

$$\frac{5x-1}{14} - \frac{3x+2}{21} = \frac{3x-4}{28}, \quad \frac{2(x-1)}{3} + \frac{x+1}{4} = 5$$

219) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις

α) $14(2x-1) - 17(2x-9) = 1 - 5x$

β) $8 - [4x - (5x + 15)] = x - (7 - x)$

γ) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = x - 2$

§ 40. Εἰδικὲς περιπτώσεις

α) **Ἐξισώσεις ἀδύνατες:** Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις

$$2x - 5 = 2x + 1$$

ἔχουμε
$$2x - 5 = 2x + 1 \iff 2x - 2x = 1 + 5$$
$$\iff 0 \cdot x = 6$$

Ἀλλὰ μ' ὅποιον ἀριθμὸ κι' ἂν πολ/σουμε τὸ 0 θὰ βροῦμε γινόμενο 0˙ ἄρα **δὲν ὑπάρχει** ἀριθμὸς ποὺ νὰ ἐπαληθεύη τὴν ἐξίσωσι˙ δηλαδὴ ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει ρίζα καὶ γι' αὐτὸ λέγεται **ἀδύνατη**.

β) **Ἐξισώσεις ἀόριστες :**

Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις :

$$12x - 5x + 6 = 7x + 6$$

ἔχουμε : $12x - 5x + 6 = 7x + 6 \iff 12x - 5x - 7x = 6 - 6$

$$\iff 0 \cdot x = 0$$

ἀλλὰ μ' ὅποιον ἀριθμὸ κι' ἂν πολ/σουμε τὸ 0 εὑρίσκουμε γινόμενο 0· ἄρα ἡ ἐξίσωσις ἔχει ὡς ρίζα **κάθε σχετ. ἀριθμὸ** καὶ λέγεται **ἀόριστος** ἢ **ταυτότης**.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

220) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $\dfrac{8x}{3} + 4 = \dfrac{5x + 12}{3} + x$

221) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $\dfrac{x - 4}{2} = \dfrac{7x}{2} - 3x - 5$

222) » » » » : $\dfrac{5x}{7} = 10 \cdot \left(\dfrac{x}{14} + 1\right)$

223) » » » » : $\dfrac{6(9 + 8x)}{2} - 27 = 24x$

§ 41. Γενικὴ μορφὴ ἐξισ. α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο

Ὅλες οἱ ἐξισώσεις ποὺ ἐξετάσαμε ὡς ἐδῶ μποροῦν νὰ τεθοῦν στὴ γενικὴ μορφὴ

$$\alpha \cdot x + \beta = 0 \quad (\text{ὅπου } \alpha, \beta \text{ ρητοὶ σχετ. ἀριθμοί})$$

Ἡ ἐξίσωσις αὐτὴ λέγεται ἐξίσωσις α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο.

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x + \beta = 0$

εἶναι $\alpha x + \beta = 0 \iff \alpha x = -\beta$

καὶ I) ἂν $\alpha \neq 0$ ἔχουμε :

$$\alpha x = -\beta \iff \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x = -\frac{1}{\alpha} \cdot \beta$$

$$\iff x = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Ἡ τιμὴ $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ πρέπει νὰ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ x. εἶναι δὲ φανερὸν ὅτι εἶναι ἡ μόνη ρίζα τῆς ἐξισ. $\alpha x + \beta = 0$ ὅπου $\alpha \neq 0$.

Μὲ τὸ συμβολισμὸ τῶν συνόλων γράφεται :

$$\{x \mid \alpha x + \beta = 0 \text{ καὶ } \alpha \neq 0\} = \left\{-\frac{\beta}{\alpha}\right\}$$

Παράδειγμα: Ἡ ἐξίσ. $2x + 7 = 0$ καὶ $x \in P$ ἔχει ὡς μόνη ρίζα τὴν $x = -\frac{7}{2}$ ἢ συμβολικά :

$$\{x \mid 2x + 7 = 0\} = \left\{-\frac{7}{2}\right\}$$

II) Ἂν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta \neq 0$, τότε ἔχουμε $0 \cdot x = \beta$, ἡ ὁποία εἶναι φανερὸ ὅτι δὲν ἀληθεύει γιὰ καμιὰ τιμὴ τοῦ x, εἶναι δηλαδὴ **ἀδύνατη**.

III) Ἂν εἶναι $\alpha = 0$ καὶ $\beta = 0$, τότε ἔχουμε $0 \cdot x = 0$, ἡ ὁποία, καθὼς εἴδαμε, εἶναι **ἀόριστος**.

Σύνοψις :

<table>
<tr><td colspan="3">$\alpha x + \beta = 0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha \neq 0$</td><td>Μόνη ρίζα ἡ $x = -\frac{\beta}{\alpha}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha = 0$</td><td>$\beta \neq 0$</td><td>ἀδύνατος</td></tr>
<tr><td>$\beta = 0$</td><td>ἀόριστος</td></tr>
</table>

Ἡ παραπάνω ἐξέτασις τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως στὶς διάφορες δυνατὲς περιπτώσεις λέγεται **διερεύνησις** τῆς ἐξισώσεως.

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ὡς τώρα ἐξέτασι τῆς ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων, γιὰ λόγους γενικότητος, ἐθεωρήσαμε ὅτι ἡ μεταβλητὴ x εἶναι δυνατὸν νὰ λάβη ὁποιαδήποτε τιμὴ ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Εἶναι ὅμως δυνατὸν σ' ἕνα πρόβλημα τὸ x νὰ παίρνη τιμὲς μόνο ἀπὸ ἕνα ὑποσύνολο A, τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν σχετικῶν. Στὴν περίπτωσι αὐτή, ἂν ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως δὲν ἀνήκη στὸ A, τότε θεωροῦμε ὅτι ἡ ἐξίσωσις δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολο A.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

224) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ α οἱ ἐξισώσεις

$$(\alpha + 1)\,x = 4, \qquad (2\alpha - 1)\,x = 6$$

εἶναι ἀδύνατες;

225) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τοῦ α οἱ ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha \cdot x - 1}{3} = 5x, \qquad \alpha x + 3x = 2$$

εἶναι ἀδύνατες;

226) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν α καὶ β οἱ ἐξισώσεις

$$x - \alpha x = \beta, \qquad x - \alpha x = 2\beta - 1$$

εἶναι ἀόριστες;

227) Γιὰ ποιὲς τιμὲς τῶν α καὶ β ἡ ἐξίσωσις

$$\frac{\alpha \cdot x - \beta}{3} + \frac{x}{2} = 3x - \alpha$$

1) ἔχει μία λύσι; 2) εἶναι ἀδύνατος; 3) εἶναι ἀόριστος;

41.1 Ἐπίλυσις προβλημάτων μὲ ἐξισώσεις

Πολλὰ προβλήματα μποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ τὴ βοήθεια ἐξισώσεων, ὁπότε μὲ τὴν ἐπίλυσι τῆς ἐξισώσεως, θὰ ἔχουμε καὶ τὴν ἐπίλυσι τοῦ προβλήματος.

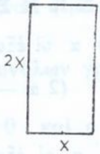
Γιὰ τὴ διευκόλυνσι τῆς μετατροπῆς προβλημάτων ἀπὸ τὴ λεκτικὴ διατύπωσι σὲ μαθηματική, παραθέτουμε μερικὰ παραδείγματα μετατροπῆς λεκτικῶν ἐκφράσεων σὲ μαθηματικὲς μὲ τὴν χρησιμοποίησι μιᾶς μεταβλητῆς x.

1) Νὰ ἐκφρασθοῦν μαθηματικῶς τὸ 2/πλάσιο, τὸ 3/πλάσιο, τὰ $\frac{2}{3}$ ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ.	1) Ἂς εἶναι x ἕνας ρητὸς ἀριθμός τότε τὸ 2/πλάσιο θὰ εἶναι $2 \cdot x$ » 3/πλάσιο » » $3 \cdot x$ τὰ $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ » » $\frac{2}{3} \cdot x$
2) Νὰ ἐκφρασθῇ μαθηματικῶς τὸ ἕνα τρίτο ἑνὸς ρητοῦ ἀριθμοῦ ἐλαττωμένο κατὰ 5.	2) Ἂς εἶναι x ἕνας ρητὸς ἀριθμός τότε τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ θὰ εἶναι $\frac{x}{3}$ καὶ τὸ $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ ἐλαττωμένο κατὰ 5 θὰ εἶναι: $\frac{x}{3} - 5$

3) Τὸ ὕψος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι διπλάσιο ἀπὸ τὴ βάσι του. Νὰ ἐκφρασθοῦν διὰ τῆς βάσεως αὐτοῦ,

α) τὸ ὕψος

β) ἡ περίμετρος



3) Ἂς καλέσουμε x τὴ βάσι· τότε: τὸ ὕψος θὰ εἶναι 2x. καὶ ἡ περίμετρος
$(x+x)+(2x+2x)=6x$

Πρόβλημα: Ἡ ἡλικία τοῦ Ἀνδρέα εἶναι 3/πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ Νίκου. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἡλικιῶν εἶναι 28 ἔτη. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ καθενός;

Ἐπίλυσις: Στὸ πρόβλημα αὐτὸ φαίνεται κατ' ἀρχὴν ὅτι ζητοῦνται δύο πράγματα: οἱ ἡλικίες τῶν δύο παιδιῶν. Μετὰ ἀπὸ προσεκτικὸ διάβασμα τοῦ προβλήματος διακρίνουμε ὅτι οὐσιαστικὰ ὑπάρχει μόνον ἕνας ἄγνωστος: Ἡ ἡλικία τοῦ **ἑνός**, π.χ. τοῦ Νίκου. Διότι ἂν ξέραμε τὴν ἡλικία τοῦ Νίκου τὸ πρόβλημα μᾶς δίνει στοιχεῖα γιὰ τὴν εὕρεσι τῆς ἡλικίας τοῦ Ἀνδρέα:

«Ἡ ἡλικία τοῦ Ἀνδρέα εἶναι 3/πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ Νίκου».

Ἂς καλέσουμε x τὴν ἡλικία (τὸν ἀριθμὸν ἐτῶν) τοῦ Νίκου· τότε ἔχουμε:

Ἡλικία Νίκου : x
» Ἀνδρέα : $3 \cdot x$ (σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα)

Ἡ φράσις «τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἡλικιῶν εἶναι 28 ἔτη» μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἐξίσωσι

$$x+3x=28$$

Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως:

εἶναι $x+3x=28 \Longleftrightarrow 4 \cdot x=28$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{28}{4}=7$$

Μὲ τὴν ἐπίλυσι ὅμως τῆς ἐξισώσεως δὲν τελείωσε κι' ἡ ἐπίλυσι τοῦ προβλήματος. Πρέπει νὰ ἐπιστρέψουμε στὸ πρόβλημα καὶ μὲ τὴ βοήθεια τῆς τιμῆς τοῦ x ποὺ βρήκαμε ν' ἀπαντήσουμε στὰ ζητούμενα τοῦ προβλήματος.

Ἔτσι στὸ πρόβλημά μας ἔχουμε:

ἡλικία Νίκου: 7 ἔτη
ἡλικία Ἀνδρέα: $3 \cdot 7$ ἔτη $=21$ ἔτη

Ἐδῶ μποροῦμε νὰ κάνουμε ἐπαλήθευσι

7 ἔτη + 21 ἔτη = 28 ἔτη

Ἀπὸ τὴν ἐπίλυσι τοῦ παραπάνω προβλήματος ἐννοοῦμε ὅτι γιὰ τὴν ἐπίλυσι ἑνὸς προβλήματος εἶναι οὐσιῶδες νὰ κατανοήσουμε πρῶτα - πρῶτα τὸ πρόβλημα· νὰ διακρίνουμε ποιὰ εἶναι τὰ δεδομένα καὶ ποιὰ εἶναι τὰ ζητούμενα. Ἔπειτα ἀπὸ τὴν κατανόησι τοῦ προβλήματος ἡ ἐπίλυσις μπορεῖ νὰ διαιρεθῇ στὶς ἀκόλουθες φάσεις :

1η φάσις : Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου :

Παριστάνουμε συνήθως μὲ x τὸν ζητούμενο ἀριθμὸ ἢ ἕναν ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς ποὺ ζητοῦνται. Πρέπει ὅμως νὰ ἐννοήσουμε καλὰ **τί παριστάνουμε** μὲ x. Νὰ μὴ λέμε «ἄς καλέσουμε x τὸν ἄγνωστο», ἀλλὰ «ἄς καλέσουμε x τὸν ἀριθμὸ τῶν ἐτῶν τοῦ Νίκου» (ἀναφερόμαστε στὸ προηγούμενο πρόβλημα)

2η φάσις : Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως

Στὴ φάσι αὐτὴ προσπαθοῦμε ἀπὸ τὴ λεκτικὴ διατύπωσι τοῦ προβλήματος νὰ σχηματίσουμε τὴ μαθηματικὴ διατύπωσι δηλαδὴ τὴν ἐξίσωσι τοῦ προβλήματος. Ἡ ἐργασία αὐτὴ μοιάζει μὲ τὴ μετάφρασι ἑνὸς κειμένου ἀπὸ μία γλῶσσα σὲ ἄλλη.

3η φάσις : Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως

Στὴ φάσι αὐτὴ ἐργαζόμαστε μὲ τὴ γνωστὴ διαδικασία τῆς ἐπιλύσεως μιᾶς ἐξισώσεως.

4η φάσις : Ἐπιστροφὴ στὸ πρόβλημα. Ἡ ρίζα $x = 7$ δὲν εἶναι ἡ ζητουμένη ἀπάντησις στὸ προηγούμενο πρόβλημα. Ἡ ζητουμένη ἀπάντησις εἶναι : «Ἡ ἡλικία τοῦ Νίκου εἶναι 7 ἔτη καὶ τοῦ Ἀνδρέα 21 ἔτη».

Συμβαίνει, καμιὰ φορά, ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως νὰ ὁδηγῇ σὲ ἀπαντήσεις τοῦ προβλήματος ἀπραγματοποίητες, π. χ. ἄν σ' ἕνα πρόβλημα ἔχουμε παραστήσει μὲ x τὸν ἀριθμὸ τῶν ἀνθρώπων καὶ βροῦμε ρίζα $x = \frac{1}{2}$ ἢ $x = -3$ θὰ ἀπαντήσουμε ὅτι ἡ λύσις εἶναι **ἀπαράδεκτη.**

Γενικὰ προσέχουμε ὥστε ἡ λύσις νὰ ἀνταποκρίνεται στὶς συνθῆκες τοῦ προβλήματος.

Ὡστόσο ὑπογραμμίζουμε ὅτι τὰ ἐκτεθέντα δὲν ἀποτελοῦν «συνταγὴ» γιὰ τὴν ἐπίλυσι ἑνὸς προβλήματος, ἀλλὰ μόνον γενικὲς κατευθύνσεις. Γιὰ τὴν καλύτερη κατανόησι τοῦ θέματος παραθέτουμε κι' ἄλλα παραδείγματα ἐπιλύσεως διαφόρων προβλημάτων, μὲ ἐξισώσεις.

Π ρ ό β λ η μ α : **Τὸ 2/πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἄν αὐξηθῇ κατὰ 10, γίνεται ἴσο μὲ 49. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.**

1) **Ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου** : Ἄς εἶναι x ὁ ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ 2/πλάσιο κ.τ.λ.

2) **Σχηματισμὸς ἐξισώσεως**

Τό 2/πλάσιο ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἂν αὐξηθῇ κατὰ 10, γίνεται ἴσο μὲ 49

$$2x \quad + \quad 10 \quad = \quad 49$$

3) **Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως:** $2x + 10 = 49 \iff 2x = 49 - 10 = 39$

$$\iff x = \frac{39}{2} = 19{,}5$$

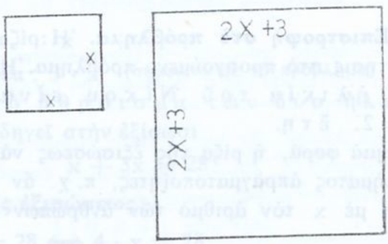
4) **Ἐπιστροφὴ στὸ πρόβλημα**

τὸ 2/πλάσιο τοῦ 19,5, ἂν αὐξηθῇ κατὰ 10, γίνεται ἴσο μὲ 49

$$2 \cdot 19{,}5 \quad + \quad 10 \quad = \quad 49$$

Πρόβλημα: Ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 3cm μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ 2/πλάσιο τῆς πλευρᾶς ἄλλου τετραγώνου. Ἡ περίμετρος τοῦ μεγαλυτέρου τετραγώνου εἶναι 48cm μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν περίμετρο τοῦ μικροτέρου τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ πλευρὲς τῶν τετραγώνων.

1) **Ἐκλογὴ ἀγνώστου:** Ἂς εἶναι x cm τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ μικροτέρου τετραγώνου



2) **Σχηματισμὸς τῆς ἐξισώσεως**

πλευρὰ μικροτέρου τετραγώνου : x

» μεγαλυτέρου » : $2x + 3$

περίμετρος μικροτέρου τετραγώνου : $4x$

» μεγαλυτέρου » : $4(2x + 3)$

περίμ. μεγαλ. τετρ. — περίμ. μικρ. τετρ. εἶναι ἴση μὲ 48 cm

$$4 \cdot (2x + 3) - 4x = 48$$

3) **Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως:**

$$4(2x + 3) - 4x = 48 \iff 8x + 12 - 4x = 48$$

$$\iff 4x = 36 \iff x = 9$$

4) **Ἐπιστροφὴ στὸ πρόβλημα :**

Μικρότερη πλευρά: 9 cm

Μεγαλύτερη » : 21 cm

Περίμετρος μικροτέρου τετραγώνου : 36 cm

» μεγαλυτέρου » : 84 cm

Διαφορὰ περιμέτρων : 84 cm — 36 cm = 48 cm.

Πρόβλημα : Μία βρύση Α γεμίζει μόνη της μία δεξαμενὴ σὲ 4 h καὶ μία ἄλλη βρύση Β γεμίζει μόνη της τὴν ἴδια δεξαμενὴ σὲ 3 h. Ἂν χρησιμοποιήσουμε καὶ τὶς δύο βρῦσες συγχρόνως σὲ πόσο χρόνο θὰ γεμίση ἡ δεξαμενή ;

1) **Ἐκλογὴ ἀγνώστου** : Ἂς εἶναι x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν ποὺ θὰ χρειασθοῦν οἱ δύο βρῦσες μαζὶ γιὰ νὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενή.

2) **Σχηματισμὸς ἐξισώσεως :**

Ἡ βρύση Α γεμίζει : Σὲ 4 h ὁλόκληρη τὴ δεξαμενὴ

» 1 h τὸ $\frac{1}{4}$ τῆς δεξαμενῆς

» x h τὰ $\frac{x}{4}$ » »

ἀνάλογα ἔχουμε ὅτι ἡ βρύση Β σὲ x h γεμίζει τὰ $\frac{x}{3}$ τῆς δεξαμενῆς

Ἄρα θὰ εἶναι : $\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1$

3) **Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως :** Εἶναι

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1 \iff \frac{x}{4} \cdot 12 + \frac{x}{3} \cdot 12 = 12$$

$$\iff 3x + 4x = 12 \iff 7x = 12 \iff x = \frac{12}{7}$$

4) **Ἐπιστροφὴ στὸ πρόβλημα :**

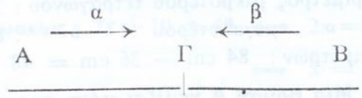
Καὶ οἱ δύο βρῦσες μαζὶ θὰ γεμίσουν τὴ δεξαμενὴ σὲ $1\frac{5}{7}$ h

Σημείωσις. Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ στὰ προβλήματα «ἔργου»

Πρόβλημα : Δύο αὐτοκίνητα α΄ καὶ β΄ ξεκινοῦν συγχρόνως· τὸ α΄ ἀπὸ τὴν πόλι Α μὲ ταχύτητα 30 χλμ / h καὶ τὸ β΄ ἀπὸ τὴν πόλι Β μὲ ταχύτητα 45 χλμ / h καὶ κινοῦνται ἀντιθέτως πρὸς συνάντησίν των. Μετὰ πόσες ὧρες θὰ συναντηθοῦν, ἂν ἡ ἀπόστασις Α Β ἔχη μῆκος 375 χιλμ ;

1) **Ἐκλογὴ ἀγνώστου**: Ἂς εἶναι x ὁ ἀριθμὸς τῶν ὡρῶν μετὰ τὶς ὁποῖες θὰ συναντηθοῦν τὰ δύο αὐτοκίνητα.

2) **Σχηματισμὸς ἐξισώσεως**:



Μετὰ x ὧρες, ὁπότε θὰ συναντηθοῦν σ' ἕνα σημεῖο, τὸ Γ, τὸ α' θὰ ἔχη διατρέξει ἀπόστασι $30 \cdot x$ χλμ καὶ τὸ β' ἀπόστασι $45 \cdot x$ χλμ.

Ἀλλά: **διαδρομὴ α' καὶ διαδρομὴ β' εἶναι 375 χλμ.**

Δηλαδὴ $30 \cdot x + 45 \cdot x = 375$

3) **Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως**

$$30x + 45x = 375 \iff 75x = 375$$

$$\iff x = \frac{375}{75} = 5$$

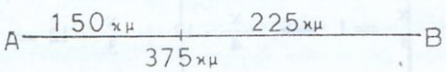
4) **Ἐπιστροφὴ στὸ πρόβλημα**

Θὰ συναντηθοῦν μετὰ 5^h

τὸ α' θὰ ἔχη διατρέξει : $5 \cdot 30$ χλμ. $= 150$ χλμ.

» β' » » » $5 \cdot 45$ » $= 225$ »

ἄρα καὶ τὰ δύο θὰ ἔχουν διατρέξει 150 χλμ. + 225 χλμ. = 375 χλμ.



ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

227) Ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ $\frac{1}{3}$ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ $\frac{1}{6}$ τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ κατὰ 6. Νὰ εὑρεθῆ ὁ ἀριθμός.

228) Νὰ εὑρεθῆ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ἂν προστεθῆ στοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{10}$, τὸ καθιστᾶ ἴσο μὲ $\frac{1}{2}$.

229) Νὰ εὑρεθῆ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, ἂν προστεθῆ στοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$, τὸ καθιστᾶ ἴσο μὲ $\frac{1}{2}$.

230) Νὰ εὑρεθοῦν 3 περιττοὶ διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσο μὲ 159.

231) Ποιός ἀριθμὸς εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ αὐτοῦ κατὰ 24;

232) Ἕνας ἀγόρασε 10 m ὑφάσματος. Ἂν ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἦταν κατὰ 30 δραχ. μικρότερη, μὲ τὰ ἴδια χρήματα θὰ ἀγόραζε 2 m περισσότερο. Πόση ἦταν ἡ τιμὴ τοῦ m τοῦ ὑφάσματος;

233) Μία βρύση γεμίζει μόνη μία δεξαμενὴ σὲ 7^h μία ἄλλη βρύση τὴν γεμίζει μόνη σὲ 5^h. Ἂν λειτουργήσουν συγχρόνως καὶ οἱ 2 βρῦσες σὲ πόσες ὧρες θὰ γεμίσουν τὴν δεξαμενή;

234) 8 ἐργάτες ἐργάσθηκαν 9 ἡμέρες ἐπὶ 4^h τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ ἐκτελέσουν τὸ $\frac{1}{5}$ ἑνὸς ἔργου. Πόσες ὧρες τὴν ἡμέρα πρέπει νὰ ἐργάζωνται 15 ἐργάτες γιὰ νὰ ἐκτελέσουν τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου σὲ 3 ἡμέρες;

235) Ἕνας πατέρας ἡλικίας 25 ἐτῶν ἔχει γιὸ ἡλικίας 4 ἐτῶν. Σὲ πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα θὰ εἶναι 2/πλασία τῆς ἡλικίας τοῦ γιοῦ;

236) Δύο ἀδέλφια ἔχουν ἄθροισμα ἡλικιῶν 30 ἔτη· ὁ ἕνας εἶναι 6 ἔτη μεγαλύτερος ἀπ' τὸν ἄλλον. Πόση εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ καθενός;

237) Μία κυρία ρωτήθηκε γιὰ τὴν ἡλικία της καὶ ἀπάντησε: Ἂν στὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἡλικίας μου προσθέσετε 6 ἔτη, θὰ βρῆτε τὸ ἥμισυ τῆς ἡλικίας μου. Πόση ἦταν ἡ ἡλικία της;

238) Τὰ $\frac{3}{8}$ ἑνὸς δοχείου χωροῦν 450 γρ. νερό. Πόσο νερὸ χωρεῖ ὁλόκληρο τὸ δοχεῖο;

239) Τὸ μικτὸ βάρος ἑνὸς δοχείου εἶναι 36 kg· τὸ ἀπόβαρο εἶναι τὸ $\frac{1}{18}$ τοῦ καθαροῦ βάρους. Πόσο εἶναι τὸ καθαρὸ βάρος;

240) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο ἡ βάσις ἔχει μῆκος 36 cm περισσότερο ἀπὸ τὸ ὕψος. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου, ἂν εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ περίμετρος ἔχει μῆκος 6 m.

241) Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο κάθε μία ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴ βάσι κατὰ 4 cm. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν, ἂν τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου εἶναι 22 cm.

242) Ἕνα τραῖνο διανύει μία ἀπόστασι σὲ 8^h. Ἂν ἡ ταχύτης του ἦταν 5 χλμ/h μεγαλύτερη θὰ διέτρεχε τὴν ἴδια ἀπόστασι σὲ $6\frac{2}{3}^h$ ποιὰ ἦταν ἡ ταχύτης τοῦ τραίνου;

243) Ἕνας πεζοπόρος ἀναχωρεῖ στὶς 2 μ. μ. γιὰ νὰ βαδίσῃ ἀπόστασι 13 χλμ. Μέχρι δὲ τῆς 4ης ὥρας μ. μ. βαδίζει μὲ ὁμαλὴ ταχύτητα. Ἔπειτα ὅμως αὐξάνει τὴν ταχύτητά του κατὰ 1 χιλιόμετρο τὴν ὥρα καὶ φθάνει στὸ τέρμα τῆς πορείας του στὶς 5.30′ μ.μ. Μὲ ποιὰ ταχύτητα ἐβάδιζε τὶς δύο πρῶτες ὧρες;

244) Ὁ Α βαδίζει μιὰ ἀπόστασι καὶ ἐπιστρέφει στὸ σημεῖο ἀπ' ὅπου ξεκίνησε. Ὁ Β ἀναχωρεῖ συγχρόνως μὲ τὸν Α, μὲ τὴν μισὴ ταχύτητα τοῦ Α καὶ βαδίζει τὰ $\frac{5}{8}$ τῆς ἀποστάσεως καὶ ἐπιστρέφει πάλι. Ὁ Α συναντᾶ τὸν Β μισὸ χιλιόμετρο πρὶν ἀπὸ τὸ τέρμα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις.

245) Ἀπὸ μιὰ πόλι ἀναχωρεῖ ὁ Α, ὁ ὁποῖος βαδίζει 28 χιλιόμετρα σὲ 5 ὧρες· ἀπὸ ἄλλη δὲ πόλι, ἡ ὁποία βρίσκεται ὄπισθεν τῆς πρώτης 2, 3 χιλιόμετρα, ἀναχωρεῖ ὁ Β 2 ὧρες μετὰ τὸν Α, ἀκολουθῶν τὴν ἴδιαν διεύθυνσι καὶ βαδίζων 20 χιλιόμετρα σὲ 3 ὧρες. Πότε καὶ ποῦ οἱ δυὸ αὐτοὶ πεζοπόροι θὰ συναντηθοῦν

246) Ἕνας πεζός, ποὺ διανύει 5 χιλιόμετρα τὴν ὥρα, διώκεται ἀπὸ ἱππέα, ὁ ὁποῖος ἐξεκίνησε 10 ὧρες μετὰ τὸν πεζὸν καὶ διανύει 9 χιλιόμετρα τὴν ὥρα στὸν ἴδιο δρόμο. Μετὰ πόσες ὧρες θὰ φθάσῃ ὁ ἱππεὺς τὸν πεζόν;

§ 42. Ἀνισώσεις

Ὅπως καὶ στὴν περίπτωσι τῶν ἐξισώσεων, σὲ σχέσεις ὅπως οἱ ἀκόλουθες:

$$x < 3 \qquad 2x > 5 \qquad 3x - 1 < 2$$

ἂν ἀντικαταστήσουμε τὴ μεταβλητὴ x μὲ διάφορες τιμές της, τότε θὰ προκύψουν προτάσεις ἀληθεῖς ἢ ὄχι.

Π. χ. ἡ σχέσις $2x < 5$

διὰ	$x = 1$	γίνεται	$2.1 < 5$	ἀληθὴς πρότασις
»	$x = 2$	»	$2.2 < 5$	» »
»	$x = 3$	»	$2 \cdot 3 < 5$	ψευδὴς »
»	$x = 4$	»	$2 \cdot 4 < 5$	» »

Κάθε σχέσις ἀνισότητος ποὺ περιέχει μεταβλητὴν λέγεται ἀνίσωσις.

Οἱ τιμὲς τῆς μεταβλητῆς ποὺ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσι λέγονται **λύσεις** τῆς ἀνισώσεως. Δύο ἀνισώσεις ποὺ ἔχουν τὸ ἴδιο σύνολο λύσεων λέγονται **ἰσοδύναμες**.

Π. χ. οἱ ἀνισώσεις $x < 5$ καὶ $2x < 10$ εἶναι ἰσοδύναμες στὸ σύνολο τῶν ῥητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν.

Ἰδιότητες ἀνισώσεων

Ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν εὑρίσκουμε τὶς ἀκόλουθες ἀντίστοιχες ἰδιότητες τῶν ἀνισώσεων.

I) **Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισώσεως προσθέσουμε τὸν ἴδιο σχετικὸ ἀριθμὸ εὑρίσκουμε ἰσοδύναμη ἀνίσωσι.**

π.χ. εἶναι : $x + 3 > 0 \iff (x + 3) - 3 > 0 - 3$
$\iff x > -3$

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μεταφέρουμε ἕναν ὅρον μιᾶς ἀνισώσεως ἀπὸ τὸ ἕνα μέλος στὸ ἄλλο, μὲ τὴν προϋπόθεσι ὅτι θὰ τοῦ ἀλλάξουμε τὸ πρόσημο.

II) **Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισώσεως μὲ τὸν ἴδιο θετικὸ ἀριθμό, θὰ προκύψῃ ἰσοδύναμη ἀνίσωσις.**

π.χ. $3x < 8 \iff (3x) \cdot \frac{1}{3} < 8 \frac{1}{3}$
$\iff x < \frac{8}{3}$

III) **Ἂν πολλαπλασιάσουμε καὶ τὰ δύο μέλη μιᾶς ἀνισώσεως μὲ τὸν ἴδιο ἀρνητικὸ ἀριθμό, προκύπτει ἑτερόστροφη ἀνίσωσις.**

π. χ. $-3x < 8 \iff -3x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) > 8 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$
$\iff x > -\frac{8}{3}$

42. 1 Ἐπίλυσις ἀνισώσεων

Οἱ προηγούμενες ἰδιότητες τῶν ἀνισώσεων μᾶς βοηθοῦν στὴν ἐπίλυσι ἀνισώσεων, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα.

1) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις $-2x + 12 > 0$

Ἔχουμε

$-2x + 12 > 0 \iff -2x > -12$ (Iη ἰδιότης)

$\iff -2x\left(-\frac{1}{2}\right) < (-12)\left(-\frac{1}{2}\right)$ (IIIη ἰδιότης)

$\iff x < 6$

ὥστε εἶναι : $\{x \mid -2x + 12 > 0\} = \{x < 6\}$

2) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἀνίσωσις

$$\frac{3x}{2} + x < 5$$

Εἶναι : $\frac{3x}{2} + x < 5 \Longleftrightarrow \frac{3x}{2} \cdot 2 + x \cdot 2 < 5 \cdot 2$ (ΙΙη ἰδιότης)

$\Longleftrightarrow 3x + 2x < 10$

$\Longleftrightarrow 5x < 10 \quad \Longleftrightarrow \quad x < 2$

ὥστε ἔχουμε :

$$\left\{ x \;\middle|\; \frac{3x}{2} + x < 5 \right\} = \{ x < 2 \}$$

Ἀπὸ τὶς ἐπιλύσεις αὐτὲς ἐννοοῦμε ὅτι ἡ διαδικασία ἐπιλύσεως μιᾶς ἀνισώσεως εἶναι ὅμοια μὲ τὴ διαδικασία ἐπιλύσεως μιᾶς ἐξισώσεως. Προσέχουμε μόνον, ὅταν χρειασθῆ νὰ πολ/σουμε τὰ μέλη μὲ ἀρνητικὸ ἀριθμό, νὰ ἀλλάξουμε τὴ φορὰ τῆς ἀνισώσεως.

Κατὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν παραπάνω δύο ἀνισώσεων ἐθεωρήσαμεν ὅτι ἡ μεταβλητὴ x μπορεῖ νὰ πάρη ὅλες τὶς τιμὲς τοῦ συνόλου τῶν ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν. Ὑπογραμμίζουμε ὅμως ὅτι ἡ μεταβλητὴ μπορεῖ νὰ παίρνη τιμὲς μόνον ἑνὸς ὡρισμένου συνόλου ρητῶν σχετικῶν ἀριθμῶν. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ὡς λύσεις τῆς ἀνισώσεως θεωροῦμε μόνον ἐκεῖνες ποὺ τυχὸν ἀνήκουν σ᾽ αὐτὸ τὸ σύνολο.

42.2 Γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων ἀνισώσεων

Μάθαμε νὰ παριστάνουμε ἕναν ἀριθμὸ μ᾽ ἕνα σημεῖο πάνω στὸν ἄξονα τῶν πραγμ. ἀριθμῶν. Ὕστερα ἀπ᾽ αὐτὸ θεωροῦμε ὡς γραφικὴ παράστασι ἑνὸς ὑποσυνόλου τῶν πραγμ. ἀριθμῶν τὸ ὑποσύνολο τῶν σημείων τοῦ ἄξονος, ποὺ παριστοῦν τοὺς ἀριθμοὺς αὐτούς.

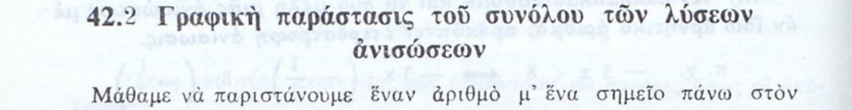
Παραδείγματα: 1) Νὰ γίνη γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως $3x + 1 < 25$ ὅπου ἡ μεταβλητὴ x παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

Εἶναι : $3x + 1 < 25 \Longleftrightarrow 3x < 24$

$\Longleftrightarrow x < 8.$

Ἄρα τὸ σύνολο τῶν λύσεων εἶναι τὸ $\{5, 6, 7\}$.

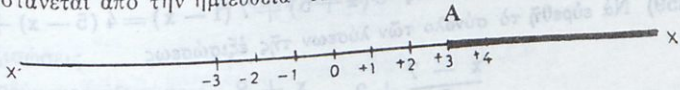
Στὸν ἄξονα x΄0x τῶν πραγμ. ἀριθμῶν τὸ σύνολο τῶν λύσεων παριστάνεται ἀπὸ τὸ σημειοσύνολο {Α, Β, Γ,}.



2) Νὰ γίνη γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων τῆς ἀνισώσεως $1 + x > 4$ (1), ὅπου, ἡ μεταβλητὴ x παίρνει ὅλες τὶς πραγματικὲς τιμές

Εἶναι : $1 + x > 4 \Longleftrightarrow x > 3$

Στὸν ἄξονα τῶν πραγμ. ἀριθμῶν x΄0x τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς (1) παριστάνεται ἀπὸ τὴν ἡμιευθεῖα A X. (Χωρὶς τὸ σημεῖον A)



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

247) Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $3x + 12 < 0$, β) $5x < x + 1$, γ) $-2x + 1 < x$.

248) Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $\frac{x}{2} < x + 1$, β) $\frac{2x - 1}{3} > \frac{x}{2}$

249) Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀνισώσεις

α) $\frac{3x + 1}{2} - \frac{x - 1}{3} > 0$ β) $\frac{2x + 1}{3} > \frac{x - 1}{2} + 3$

250) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἀνίσωσις

$$2x - 5 > 0$$

ὅπου τὸ x παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων. Νὰ γίνῃ καὶ γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου τῶν λύσεων.

251) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἀνίσωσις $\frac{3x}{2} > \frac{x + 1}{3}$, ὅπου τὸ x παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν θετικῶν ἀριθμῶν. Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς λύσεως.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

252) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $x = -6$ εἶναι ρίζα τῆς ἐξισώσεως $2x - 5x - 18 = 0$.

253) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{x + 4}{5} - x = \frac{3x - 5}{2}$

254) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $\frac{5x}{6} - \frac{x - 1}{2} = x + \frac{1}{3} + \frac{1}{8}(x + 1)$

255) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἀνίσωσις $8x - 5 > \frac{15x - 8}{2}$

256) Νὰ ἐπιλυθῆ ἡ ἀνίσωσις $2(2x - 3) > 5x - \frac{3}{4}$

257) Νὰ ὁρισθῇ, μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του, τὸ σύνολον

$$\{x \mid 3(x-4)-5(3-2x)=38\}$$

258) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $3(x+5)+7(1-x)=4(5-x)+2$

259) Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολο τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$\frac{x-7}{5}+2=\frac{x+8}{10}$$

260) Τὸ ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν ἀκεραίων εἶναι ἴσο μὲ 81. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ αὐτοί.

261) Μία βρύση γεμίζει μόνη της μιὰ δεξαμενὴ σὲ 2h καὶ μία ἄλλη βρύση σὲ 3h. Ἂν λειτουργήσουν κι' οἱ δύο βρύσες μαζὶ σὲ πόσες h θὰ γεμίση ἡ δεξαμενή;

262) Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι διπλάσιο τοῦ πλάτους καὶ ἡ περίμετρος εἶναι 42 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου.

263) Τρία σημεῖα Α, Β, Γ, εὑρίσκωνται ἐπάνω στὸν ἄξονα τῶν πραγ. ἀριθμῶν κι' ἔχουν τετμημένες ἀντιστοίχως —3 cm, 5 cm, 7 cm. Νὰ προσδιορίσετε ἕνα σημεῖο Μ τοῦ ἄξονος τέτοιο, ὥστε: $\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{M\Gamma}=0$.

264) Ποιὸν ἀριθμὸ πρέπει νὰ προσθέσουμε στοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{2}{5}$ ὥστε νὰ προκύψῃ τὸ κλάσμα $\frac{4}{7}$.

265) Δύο τραῖνα διανύουν τὴν ἀπόστασιν ΑΒ σὲ 8h τὸ πρῶτο καὶ σὲ 12h τὸ δεύτερο. Ἂν ἡ ταχύτης τοῦ πρώτου τραίνου εἶναι κατὰ 29 km/h μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ταχύτητα τοῦ 2ου τραίνου νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀπόσταση ΑΒ.

266) Νὰ εὑρεθοῦν δύο διαδοχικοὶ ἀριθμοὶ τέτοιοι ὥστε τὸ πέμπτο τοῦ μεγαλυτέρου νὰ εἶναι μεγαλύτερο κατὰ 3 ἀπὸ τὸ ἕβδομο τοῦ ἄλλου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί γνωρίζετε γιὰ τὸν ρόλο τῆς μεταβλητῆς σὲ μία ἐξίσωσι
2) Τί διαφέρει ἡ ἐξίσωσις ἀπὸ τὴν ἰσότητα
3) » » » » » » ταυτότητα
4) Ποιές λέγονται ἰσοδύναμες ἐξισώσεις
5) Ποιές εἶναι οἱ ἰδιότητες τῶν ἰσοδυνάμων ἐξισώσεων
6) Ποιές εἰδικὲς μορφὲς ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ γνωρίζετε
7) Ποιὰ εἶναι ἡ γενικὴ μορφὴ ἐξισώσεως α΄ βαθμοῦ μ' ἕναν ἄγνωστο.
8) Τί εἶναι διερεύνησις μιᾶς ἐξισώσεως

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ε' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΣΤ'

§ 43. Κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσά

Βάρος μήλων (σὲ kg)	1	2	3	4	5 ...
Ἀξία (σὲ δρχ.)	3	6	9	12	15

Στὸν παραπάνω πίνακα φαίνονται διάφορα βάρη μήλων (σὲ kg) καὶ οἱ ἀντίστοιχες ἀξίες των (σὲ δρχ.)

Ἄς σχηματίσουμε τὸ σύνολο Γ μὲ διατεταγμένα ζεύγη ποὺ ἔχουν:

α΄ στοιχεῖο μιὰ τιμὴ τοῦ βάρους

καὶ β΄ » τὴν ἀντίστοιχη ἀξία του

$$\Gamma = \{ (1, 3)\ (2, 6)\ (3, 9) \dots \}$$

Ἄν προσέξουμε τὰ δύο στοιχεῖα τοῦ κάθε δ/νου ζεύγους τοῦ συνόλου Γ διακρίνουμε ὅτι:

Σὲ κάθε ζεῦγος τὸ β΄ στοιχεῖο εἶναι 3/πλάσιο τοῦ α΄. Ἄν δὲ παραστήσουμε μὲ x μία μεταβλητὴ ποὺ παίρνει τιμὲς ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν τιμῶν τοῦ βάρους καὶ μὲ ψ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τῆς ἀξίας των ἡ παρατήρησίς μας γράφεται πιὸ σύντομα:

$$\psi = 3x \quad (1)$$

Ἡ σχέσις (1) εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου τῶν τιμῶν τοῦ βάρους στὸ σύνολο τῶν τιμῶν τῆς ἀξίας του.

(Ἄν δώσουμε στὸ x διάφορες τιμὲς 1, 2, 3... τότε ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς ψ: 3, 6, 9 ...)

Ἀπὸ τὴν σχέσι (1) καταλαβαίνουμε πῶς μεταβάλλονται τὰ συμμεταβλητὰ ποσὰ **βάρος** καὶ **ἀξία.**

Συγκεκριμμένα ἡ (1) μᾶς δείχνει ὅτι: Σὲ 2/πλάσιο, 3/πλάσιο ... βάρος ἀντιστοιχεῖ 2/πλάσια, 3/πλάσια ... ἀξία· γενικά: Ἄν πολ/σουμε μιὰ τιμὴ τοῦ βάρους μ' ἕναν ἀριθμὸ πολ/ζεται καὶ ἡ ἀξία του μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμό.

Ὅταν τὰ δύο ποσὰ Α, Β μεταβάλλωνται ἔτσι ὥστε:

α) **Σὲ κάθε τιμὴ τοῦ Α ν' ἀντιστοιχῆ μία τιμὴ τοῦ Β**

β) **Ἄν πολ/σθῆ μιὰ τιμὴ τοῦ Α μ' ἕναν ἀριθμὸ τότε νὰ πολ/ζεται κι' ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ Β μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμὸ** τότε τὰ ποσὰ Α, Β λέγονται **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ** καί συνδέονται μὲ συνάρτησι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x$

(ὅπου x παίρνει διάφορες τιμὲς τοῦ Α
ψ » ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ Β
καὶ α εἶναι σταθερὸς ἀριθμὸς $\neq 0$)

Παραδείγματα:

1. **Ἕνας τεχνίτης πληρώνεται μὲ 25 δρ. τὴν ὥρα. Πόσα χρήματα θὰ πληρωθῆ γιὰ ἐργασία 1h, 2h, 3h ...**

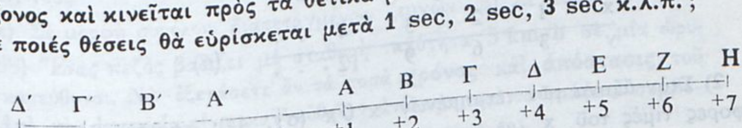
Γιὰ	ἐργασία	1^h	θὰ πάρη	1 . 25 δρ. = 25 δρ
»	»	2^h	» »	2 . 25 δρ. = 50 δρ
»	»	3^h	» »	3 . 25 δρ. = 75 δρ
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	»	x^h	» »	x . 25δρ = ψδρ

Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι : Τὰ ποσὰ **Χρόνος** ἐργασίας καὶ **Ἀμοιβὴ** μεταβάλλονται σύμφωνα μὲ τὴ σχέσι «Ἡ ἀμοιβὴ (σὲ δρ.) εἶναι 25 φορὲς μεγαλύτερη ἀπὸ τὸ χρόνο ἐργασίας (σὲ h)» ἢ συμβολικὰ

$$\psi = 25 \cdot x \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν (2) εἶναι φανερὸν ὅτι, ἂν οἱ ὧρες ἐργασίας πολλαπλασιασθοῦν μ' ἕναν ρητὸ ἀριθμό, τότε καὶ ἡ ἀμοιβὴ πολλαπλασιάζεται μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό, δηλ. τὰ ποσὰ **χρόνος** ἐργασίας καὶ **ἀμοιβὴ** εἶναι **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα** ποσά.

2. **Ἕνα κινητὸ σημεῖο εὑρίσκεται σὲ χρόνο t = 0 στὴν ἀρχὴ τοῦ ἄξονος καὶ κινεῖται πρὸς τὰ θετικὰ μὲ σταθερὴ ταχύτητα 2cm/sec. Σὲ ποιές θέσεις θὰ εὑρίσκεται μετὰ 1 sec, 2 sec, 3 sec κ.λ.π. ;**



Σχ. 43

Μετὰ	1 sec	θὰ εὑρίσκεται	στὴ θέσι	Β	μὲ τετμημένη :	+2
»	2 »	»	»	Δ	»	+4
»	3 »	»	»	Ζ	»	+6
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
»	t »	»	»	Χ	»	+2 · t

Ὥστε τὰ ποσὰ **χρόνος t** καὶ **ἀπόστασις x** τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ 0 μεταβάλλονται σύμφωνα μὲ τὴ σχέσι $x = +2 \cdot t$ (3)

Εἶναι δηλ. τὰ ποσὰ αὐτὰ **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα**.

Ἂν τὸ κινητὸ τρέξῃ μὲ τὴν ἴδια ταχύτητα πρὸς τ' ἀριστερὰ (ἀρνητικά), θὰ εἶναι τότε: $x = -2 \cdot t$ (4)

Ἂν στοὺς τύπους (1) καὶ (2) δώσουμε διάφορες τιμὲς τοῦ χρόνου t, εὑρίσκουμε τὴν ἀπόστασι τοῦ κινητοῦ ἀπὸ τὴν ἀρχὴ κατὰ τοὺς χρόνους τούτους.

π. χ. στὸν τύπο (3) ἂν $t = 7$ ἔχουμε: $x = 2 \cdot 7 = 14$

(δηλαδή: Μετὰ 7sec τὸ κινητὸ θ' ἀπέχει 14cm ἀπὸ τὴν ἀρχὴ 0)

§ 44. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y = \alpha \cdot x \quad \alpha \neq 0$

Τὴν συνάρτησι $y = 3x$ τοῦ α΄ παραδείγματος μποροῦμε νὰ τὴν παραστήσουμε γραφικῶς μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

1) Σχηματίζουμε ἕνα πίνακα μὲ μερικὲς τιμὲς τοῦ x καὶ τὶς ἀντίστοιχες τιμὲς τοῦ y. Δίνουμε δηλαδὴ στὸ x τιμὲς

π. χ. $x = 1$ ὁπότε ἔχουμε $y = 3 \cdot 1 = 3$

$x = 2$ » » $y = 3 \cdot 2 = 6$

$x = 3$ » » $y = 3 \cdot 3 = 9$

. . . .

. . . .

Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο σχηματίζουμε τὸν πίνακα

x	1	2	3	4 . . .
y	3	6	9	12 . . .

(α)

2) Στὸν ἄξονα τῶν τετμημένων x΄0x (σχ. 44) παριστάνουμε τὶς διάφορες τιμὲς τοῦ x (μὲ ἀντιστοιχία 1 cm μὲ μία μονάδα) καὶ τὸν ἄξονα y΄0y τὶς τιμὲς τοῦ y (μὲ τὴν ἴδια ἀντιστοιχία).

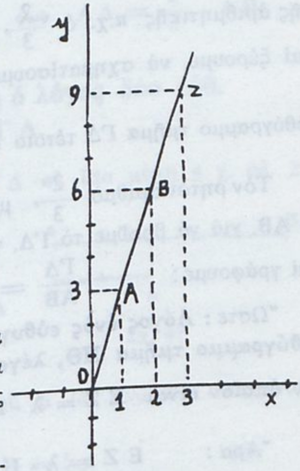
3) Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ πίνακος (α) εὑρίσκουμε τὰ σημεῖα

A (1,3) B (2,6) Γ (3,9) . . .

Ἂν συνδέσουμε μὲ μία γραμμὴ τὰ σημεῖα αὐτὰ διαπιστώνουμε ὅτι:

Ὅλα τὰ σημεῖα A, B, Γ. . . εὑρίσκονται πάνω σὲ μία ἡμιευθεῖα ΟΖ ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν 0 τῶν ἀξόνων.

Ἂν δὲ πάρουμε τὶς συντεταγμένες ἑνὸς τυχαίου σημείου τῆς ΟΖ (μ' ὅση προσέγγισι μποροῦμε) εὑρίσκουμε ὅτι : Ἐ π α λ η θ ε ύ ο υ ν τ ὴ ν σ χ έ σ ι : $y = 3\,x$.



Σχ. 44

Γι' αὐτὸ τὴν ἡμιευθεῖα ΟΖ τὴν λαμβάνουμε ὡς γραφικὴ παράστασι τῆς $y = 3\,x$ στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων $x'0\,x$ καὶ $y'0\,y$.

Γενικά : **Κάθε συνάρτησις τῆς μορφῆς $y = \alpha \cdot x$ $(\alpha \neq o)$ παριστάνει στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων, εὐθεῖαν, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴν τῶν ἀξόνων.**

Μὲ τὴν ἡμιευθεῖαν ΟΖ μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀμέσως, ἀλλὰ μὲ προσέγγισι, μία τιμὴ τοῦ y ὅταν μᾶς δοθῇ ἡ ἀντίστοιχή της τιμὴ τοῦ x.

Π. χ. γιὰ $x = 2$ εὑρίσκουμε τὸ σημεῖο τῆς ἡμιευθείας ποὺ ἔχει τετμημένην 2. Ἔπειτα ἀπὸ τὸ σχῆμα εὑρίσκουμε τὴν τεταγμένην $y = 6$ τοῦ σημείου τούτου. Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε κι' ὅταν ξέρουμε μιὰ τιμὴ τοῦ y καὶ ζητᾶμε νὰ βροῦμε τὴν ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ x.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

267) Νὰ βρῆτε ζεύγη κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν καὶ νὰ σημειώσετε τὴ σχέσι τους

α) Σὲ μορφὴ συνόλων διατεταγμένων ζευγῶν β) Σὲ μορφὴ $\psi = \alpha x$

268) Ἕνας πεζὸς βαδίζει μὲ σταθερὴ ταχύτητα 5 km/h σὲ μία ὡρισμένη κατεύθυνσι. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **ἀπόστασις** τοῦ πεζοῦ ἀπὸ τὴν ἀφετηρία εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα καὶ νὰ γράψετε συμβολικὰ τὴ σχέσι τους.

269) Νὰ παραστήσετε γραφικῶς στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων τὴ συνάρτησι $y = 2x$.

270) Τὸ αὐτὸ γιὰ τὴ συνάρτησι $y = -2x$

271) Ποιὰ ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα ζεύγη ποσῶν εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

α) Ἡλικία καὶ ἀνάστημα ἑνὸς ἀνθρώπου.

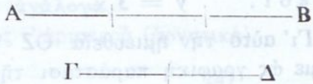
β) Ἡ περίμετρος τετραγώνου καὶ ἡ πλευρά του.

γ) Ὁ ἀριθμὸς στρατιωτῶν καὶ ἡ ποσότης τῆς τροφῆς των.

δ) Τὸ τόξο μιᾶς περιφερείας καὶ ἡ χορδή του.

§ 45. Λόγος εὐθυγράμμων τμημάτων

Ἄν μᾶς δοθῆ ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, π.χ. τὸ Α Β, καὶ ἕνας ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς π.χ. ὁ $\frac{2}{3}$, μποροῦμε καὶ ξέρουμε, νὰ σχηματίσουμε ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΓΔ τέτοιο ὥστε : $\Gamma\Delta = \frac{2}{3} \cdot AB$.



Σχ. 45

Τὸν ρητὸν ἀριθμὸ $\frac{2}{3}$, μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πολλαπλασιάσουμε τὸ ΑΒ, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ΓΔ, τὸν ὀνομάζουμε **λόγο** τοῦ ΓΔ πρὸς τὸ ΑΒ καὶ γράφουμε : $\frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{2}{3}$

Ὥστε : Λόγος ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΕΖ πρὸς ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα ΗΘ, λέγεται ὁ ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς λ, γιὰ τὸν ὁποῖον εἶναι *ΕΖ = λ · ΗΘ καὶ γράφουμε:* $\frac{EZ}{H\Theta} = \lambda$.

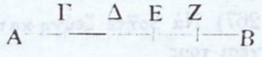
Ἄρα : $EZ = \lambda \cdot H\Theta \iff \frac{EZ}{H\Theta} = \lambda$

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α :

α) Στὸ σχ. 46 ὁ λόγος ΑΓ πρὸς τὸ ΑΒ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{5}$, δηλ.

$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{5}$ διότι $A\Gamma = \frac{1}{5} AB$:

$\frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{5} \iff A\Gamma = \frac{1}{5} \cdot AB$



Σχ. 46

β) Ὁμοίως : ὁ λόγος τοῦ Α Β πρὸς τὸ Α Γ εἶναι ἴσος μὲ 5, δηλ.

$\frac{AB}{A\Gamma} = 5$, διότι $AB = 5 \cdot A\Gamma$: $\frac{AB}{A\Gamma} = 5 \iff AB = 5 \cdot A\Gamma$

γ) Ὁ λόγος τοῦ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΖ εἶναι $\frac{1}{2}$, δηλ. $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{1}{2}$,

διότι $A\Delta = \frac{1}{2} \cdot AZ$: $\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{1}{2} \iff A\Delta = \frac{1}{2} AZ$

δ) Ὁ λόγος τοῦ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΔ εἶναι 2, δηλ. $\frac{AZ}{A\Delta} = 2$ διότι :

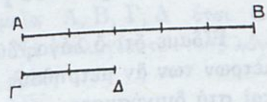
$AZ = 2 \cdot A\Delta$: $\frac{AZ}{A\Delta} = 2 \iff AZ = 2 \cdot A\Delta$

ε) Ὁ λόγος τοῦ ΑΔ πρὸς ΑΒ εἶναι $\frac{2}{5}$, δηλ. $\frac{Α Δ}{Α Β} = \frac{2}{5}$,

διότι $Α Δ = \frac{2}{5} \cdot Α Β$: $\frac{Α Δ}{Α Β} = \frac{2}{5} \Longleftrightarrow Α Δ = \frac{2}{5} \cdot Α Β.$

45. 1 Π ρ ό β λ η μ α. **Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος δύο εὐθ. τμημάτων ΑΒ, ΓΔ.**

Διαιροῦμε τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ π. χ. τὸ ΓΔ σὲ ἴσα μέρη π. χ. σὲ 2 ἴσα μέρη. Ἂς πάρουμε τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τμήματα ὡς μονάδα μ γιὰ νὰ μετρήσουμε τὰ τμήματα ΓΔ καὶ ΑΒ.



Σχ. 47

Εἶναι φανερὸν ὅτι τότε τὸ μέτρο τοῦ ΓΔ θὰ εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς (στὸ σχῆμα μας εἶναι τὸ 2) ὁπότε $Γ Δ = 2 \cdot μ$.

Ἂν εἶναι δὲ καὶ τὸ ΑΒ πολ/σιο τοῦ μ (ἂν εἶναι δηλ. ὅπως στὸ σχῆμα μας ὅπου $Α Β = 5\, μ$) τότε ἔχουμε:

$Γ Δ = 2\, μ$ (1) καὶ $Α Β = 5\, μ$ (2)

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ τὴν (2) εἶναι $μ = \frac{1}{5} Α Β$ ἢ (1) γράφεται

$$Γ Δ = 2 \cdot \left(\frac{1}{5} Α Β\right) = \frac{2}{5} \cdot Α Β$$

ἢ
$$Γ Δ = \frac{2}{5} Α Β \Longleftrightarrow \frac{Γ Δ}{Α Β} = \frac{2}{5}$$

Δηλαδή: **Ὁ λόγος δύο εὐθ. τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των, ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα.**

Στὴ παραπάνω πρότασι καταλήξαμε ἀφοῦ θεωρήσαμε ὅτι τὸ ΑΒ θὰ εἶναι πολλαπλάσιο τῆς μονάδος μ ποὺ ἐλάβαμε. Εἶναι ἐνδεχόμενο ὅμως νὰ μὴ συμβαίνη αὐτό.

Μπορεῖ νὰ εἶναι δηλαδή: $5μ < ΑΒ < 6μ$ ὁπότε ὁ λόγος $\frac{ΓΒ}{ΑΒ}$ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{2}{5}$ μόνο μὲ προσέγγισι. Τὴν προσέγγισι αὐτὴν μποροῦμε νὰ τὴν κάνουμε ἀρκετὰ μεγάλη ἂν διαιρέσουμε τὸ ΓΔ σὲ περισσότερα ἴσα μέρη καὶ λάβουμε ἔτσι μικρότερη μονάδα μετρήσεως τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Σὲ ἄλλη τάξι θὰ μάθουμε πὼς ὑπάρχουν περιπτώσεις κατὰ τὶς ὁποῖες, ὁσονδήποτε μικρὴ μονάδα μετρήσεως κι ἂν λάβουμε δὲν εὑρίσκουμε λόγο ρητὸ ἀριθμό. Πρόκειται γιὰ περιπτώσεις τῶν ἀ σ υ μ μ έ τ ρ ω ν τμημάτων τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ς ἀριθμὸς (π. χ. ὁ λόγος τῆς πλευρᾶς τετραγώνου πρὸς τὴν διαγώνιον αὐτοῦ).

Παρατήρησις. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ λόγος δύο εὐθυγρ. τμημάτων εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴ μονάδα μετρήσεως ποὺ θὰ χρησιμοποιήσουμε ἀρκεῖ μόνον νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἴδια μονάδα καὶ γιὰ τὰ δύο τμήματα π. χ. ἂν $(AB) = 3\,cm$ καὶ $(\Gamma\Delta) = 4\,cm$ τότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{4}$. Ἂν τὰ ἴδια τμήματα τὰ μετρήσουμε μὲ mm θὰ ἔχουμε: $(AB) = 30\,mm$ καὶ $(\Gamma\Delta) = 40\,mm$, ὁπότε $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$

§ 46. Λόγος συγ/κῶν διανυσμάτων

Εἴδαμε ὅτι ὁ λόγος δύο εὐθυγ. τμημάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν μέτρων των ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια μονάδα. Μήπως συμβαίνει τὸ ἴδιο καὶ στὰ διανύσματα;

Ἂς εἶναι τὰ συγ/κὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ τὰ σχετικὰ μέτρα αὐτῶν μὲ μονάδα τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{M}$

Εἶναι: $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\,.\,\overrightarrow{M}$, $\quad \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overline{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{M}$

Ὁ λόγος $\frac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}$ ἔχει ἀπόλυτο τιμὴ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$

καὶ πρόσημο $+$ ἂν τὰ $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι ὁμόσημα

δηλαδὴ ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ὁμόρροπα

$-$ ἂν τὰ $\overline{AB}$, $\overline{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἑτερόσημα

δηλαδὴ ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἀντίρροπα

Ὥστε: ὁ λόγος $\frac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}$ ἔχει ἀπόλυτο τιμὴ καὶ τὸ ἴδιο πρόσημο μὲ τὸν λόγον $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}}$ (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ λόγος δύο συγ/κῶν διανυσμάτων εἶναι θετικὸς ἂν αὐτὰ εἶναι ὁμόρροπα καὶ ἀρνητικὸς ἂν εἶναι ἀντίρροπα).

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{\Gamma\Delta}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{\Gamma\Delta}}$$

Ὁ λόγος δύο συγ/κῶν διανυσμάτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν σχετικῶν μέτρων των ἂν μετρηθοῦν μὲ τὴν ἴδια διανυσματικὴ μονάδα.

Φυσικὰ καὶ ἐδῶ ὁ λόγος αὐτὸς εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν διανυσμ. μονάδα ἀρκεῖ νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἴδια μονάδα καὶ στὶς δύο μετρήσεις.

46.1 Τὰ ἴδια ἰσχύουν καὶ γιὰ τὸ λόγο δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν, π.χ. ἂν ὁ πατέρας ἔχῃ ἡλικία 36 ἔτη καὶ τὸ παιδί του 12 ἔτη τότε εἶναι

$$\frac{\text{Ἡλικία πατέρα}}{\text{Ἡλικία παιδιοῦ}} = \frac{36}{12} = \frac{3}{1} = 3$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

272) Σὲ μιὰ εὐθεῖα xψ σημειῶστε σημεῖα Α, Β, Γ, Δ ἔτσι ὥστε (ΑΒ) = 3 cm, (ΒΓ) = 4 cm, (ΓΔ) = 2 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λόγους

$$\frac{AB}{B\Gamma}, \quad \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}, \quad \frac{A\Delta}{\Delta B}$$

273) Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λόγους:

α) τῆς ὀρθῆς γωνίας πρὸς τὴν ἀποπλατυσμένη

β) τοῦ m πρὸς τὸ km

γ) τοῦ m πρὸς τὴν in (ἴντσα)

δ) τῆς ταχύτητος ἑνὸς αὐτοκινήτου ποὺ εἶναι 120km/h πρὸς τὴν ταχύτητα ἑνὸς ἀεροπλάνου ποὺ εἶναι 1800km/h.

ε) τῆς διάρκειας μιᾶς περιστροφῆς τῆς γῆς περὶ τὸν ἄξονά της πρὸς τὴν διάρκειαν μιᾶς περιφορᾶς περὶ τὸν ἥλιο. (Θὰ λάβετε 1 ἔτος = =365,25 ἡμέρες).

§ 47. Ἀναλογίες

Ὅπως καὶ στὶς περιπτώσεις δύο εὐθ. τμημάτων ἢ δύο συγ/κῶν διανυσμάτων κ.λ.π. ὀνομάζουμε λόγο ἑνὸς ρητοῦ σχετ. ἀριθμοῦ α πρὸς ἕναν ἄλλο ἕναν β ($\beta \neq 0$) ἕναν ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος πολ/ζόμενος μὲ τὸν β μᾶς δίδει τὸν α. Μ' ἄλλα λόγια: **Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ, τοῦ α πρὸς τὸν ἀριθμὸ β ($\beta \neq 0$) εἶναι τὸ πηλίκον** $\frac{\alpha}{\beta}$.

Ὅπως λοιπὸν ἔχουμε λόγο δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν ἔχουμε καὶ λόγον δύο ἀριθμῶν.

Ἡ ἰσότης δύο λόγων λέγεται **ἀναλογία**

π. χ. οἱ ἰσότητες $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ $\beta, \delta \neq 0$

εἶναι ἀναλογίες. Οἱ ὅροι τῶν δύο λόγων μιᾶς ἀναλογίας λέγονται **ὅροι τῆς ἀναλογίας**

Ἔτσι τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ $(\gamma, \delta \neq 0)$ οἱ ὅροι εἶναι α, β, γ, δ. Εἰδικὰ οἱ **ὅροι** α, δ λέγονται **ἄκροι** ὅροι, ἐνῶ οἱ ὅροι β, γ **μέσοι** ὅροι. Ἂν συμβῇ σὲ μία ἀναλογία οἱ μέσοι νὰ εἶναι ἴσοι, τότε ἡ ἀναλογία λέγεται **συνεχής.** Π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ εἶναι συνεχής.

Ὁ κοινὸς μέσος ὅρος τῆς συνεχοῦς ἀναλογίας λέγεται **μέσος ἀνάλογος** τῶν δύο ἄλλων ὅρων.

§ **47**.1 Εἴδαμε ὅτι γιὰ κάθε ζεῦγος x, ψ ἀντιστοίχων τιμῶν δύο κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν ἰσχύει ἡ σχέσις $\psi = \alpha x$

(ὅπου α=σταθερὸς ἀριθμὸς $\neq 0$)

Σύμφωνα ὅμως μὲ τὴν γνωστὴ ἰσοδυναμία μεταξὺ διαιρέσεως καὶ πολ/σμοῦ ἔχουμε :

$$\psi = \alpha \cdot x \iff \frac{\psi}{x} = \alpha \quad (x \neq 0) \qquad (1)$$

Ἡ ἰσοδυναμία (1) μᾶς λέει ὅτι :

α) Ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν σὲ δύο κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ εἶναι σταθερός..

β) Ἂν ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν σὲ δύο συμμεταβλητὰ ποσὰ εἶναι σταθερός, τότε τὰ ποσὰ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἡ χαρακτηριστικὴ αὐτὴ ἰδιότης μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διακρίνουμε ἂν δύο ποσὰ εἶναι ἀνάλογα μὲ σύγκρισι τῶν λόγων τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν των. Παράδειγμα τὰ ποσὰ x, ψ τοῦ πίνακος

x	1	4	7	10	12	13
ψ	5	20	35	50	60	65

εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα διότι εἶναι

$$\frac{1}{5} = \frac{4}{20} = \frac{7}{35} = \frac{10}{50} = \frac{12}{60} = \frac{13}{65}$$

47.2 Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν

1) Ἂν πολλαπλασιάσουμε τὰ μέλη τῆς ἰσότητος $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$

(ὅπου β, δ, $\neq 0$) μὲ τὸ γινόμενο $\beta \cdot \delta$ τῶν παρονομαστῶν, ἔχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta}(\beta \cdot \delta) = \frac{\gamma}{\delta} \cdot (\beta \cdot \delta)$$

ἢ $$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$$

Ὥστε: **Σὲ κάθε ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων ὅρων εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων.**

Παράδειγμα $$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \Rightarrow 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

2) Ἂν πολλαπλασιάσουμε τὰ μέλη τῆς ἰσότητος

$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$ (ὅπου $\beta, \delta \neq 0$) μὲ $\frac{1}{\beta \cdot \delta}$, ἔχουμε:

$$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \alpha \cdot \delta \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot \delta}\right) = \beta \cdot \gamma \cdot \left(\frac{1}{\beta \cdot \delta}\right)$$

ἢ $$\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$$

Ὥστε: **Ἂν 4 ρητοὶ ἀριθμοὶ κατὰ σειρὰν α, β, γ, δ ($\beta, \delta \neq 0$) εἶναι τέτοιοι, ὥστε $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$, τότε θὰ ἰσχύη ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$**

Παράδειγμα: $$2 \cdot 10 = 4 \cdot 5 \Rightarrow \frac{2}{4} = \frac{5}{10}$$

Οἱ ἰδιότητες (1) καὶ (2) ὁρίζουν τὴν ἰσοδυναμίαν

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma, \quad \beta, \delta \neq 0 \qquad (3)$$

Ἐφαρμογή: Μὲ τὴν ἰσοδυναμία (3) μπορoῦμε νὰ ὑπολογίσουμε ἕναν ὅρο μιᾶς ἀναλογίας, ὅταν γνωρίζουμε τοὺς τρεῖς ἄλλους.

π. χ. ἔχουμε: $$\frac{2}{5} = \frac{16}{x} \Longleftrightarrow 2 \cdot x = 16 \cdot 5$$

$$\Longleftrightarrow x = 16 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 40$$

Ἐπαλήθευσις: $$\frac{2}{5} = \frac{16}{40}$$

3. Είναι : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

και $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma \Longleftrightarrow (\alpha \cdot \delta) \cdot \frac{1}{\gamma \cdot \delta} = (\beta \cdot \gamma) \frac{1}{\gamma . \delta}$

(ἰδιότης διαγραφῆς)

$\Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$

ὥστε : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \Longleftrightarrow \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta} \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta \neq 0)$

Δηλαδή : **Ἂν ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας θὰ προκύψη ἀναλογία.**

Παράδειγμα : Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ συμπεραίνουμε

τὶς ἀκόλουθες ἀναλογίες : $\frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ (ἐναλλαγὴ τῶν μέσων ὅρων)

$\frac{6}{3} = \frac{4}{2}$ » » ἄκρων »

$\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ » » μέσων καὶ ἄκρων ὅρων

Παρατήρησις : Σύμφωνα μὲ τὴν ἰδιότητα αὐτὴν ἡ γνωστὴ ἰδιότης τῶν κατ' εὐθεῖαν ἀναλόγων ποσῶν διατυπώνεται καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Σὲ δύο κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Π.χ. Στὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα ποσὰ **βάρος** κρασιοῦ καὶ **ἀξία** αὐτοῦ τῶν ὁποίων μερικὰ ζεύγη ἀντιστοίχων τιμῶν φαίνονται στὸν πίνακα

Βάρος σὲ kg	1	2	3	4	5	6	7
Ἀξία σὲ δρχ.	6	12	18	24	30	36	42

ἔχουμε : $\frac{1}{6} = \frac{2}{12} = \frac{3}{18} = \frac{4}{24} = \frac{5}{30} = \frac{6}{36} = \frac{7}{42}$

ἢ $\frac{1}{2} = \frac{6}{12}$, $\frac{2}{6} = \frac{12}{36}$, $\frac{3}{6} = \frac{18}{36}$...

4. Εἶναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \alpha_1 \cdot \beta_2 = \alpha_2 \cdot \beta_1$

ἢ $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 \Longleftrightarrow \alpha_1\beta_2 + \alpha_1\beta_1 = \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_1$ (ἰδιότης διαγραφῆς)

$\Longleftrightarrow \alpha_1(\beta_1 + \beta_2) = \beta_1(\alpha_1 + \alpha_2)$ (ἐπιμερ. ἰδιότης)

$\Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}$

ὥστε : $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2}$

Ἐφαρμογή : Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x καὶ ψ ἂν

εἶναι : 1) $\frac{x}{3} = \frac{\psi}{5}$ καὶ 2) $x + \psi = 24$

ἔχουμε $\frac{x}{3} = \frac{\psi}{5} = \frac{x + \psi}{3 + 5} = \frac{24}{8} = 3$

ὥστε : $\frac{x}{3} = 3 \Longleftrightarrow x = 9$

$\frac{\psi}{5} = 3 \Longleftrightarrow \psi = 15$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς : Ἡ ἰδιότης αὐτὴ ἰσχύει καὶ γιὰ περισσοτέρους ἴσους λόγους.

π. χ. εἶναι $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{12}{18} = \frac{2 + 4 + 12}{3 + 6 + 18} = \frac{18}{27}$

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3} = \dots = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \cdots}$$

5) Εἶναι $\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} + 1 = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + 1$

(ἰδιότης διαγραφῆς)

$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\beta_2}{\beta_2}$

$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \Longleftrightarrow \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2}{\beta_2}$

Ὥστε : **Ἂν στοὺς ἀριθμητὰς μιᾶς ἀναλογίας προσθέσουμε τοὺς παρονομαστὰς θὰ βροῦμε πάλι ἀναλογία.**

Παράδειγμα : $\frac{2}{5}=\frac{4}{10} \Longleftrightarrow \frac{2+5}{5}=\frac{4+10}{10}$

ἢ $\frac{2}{5}=\frac{4}{10} \Longleftrightarrow \frac{7}{5}=\frac{14}{10}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

274) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ m^2 πρὸς τὸν τ. τ. π.

275) Νὰ προσδιορίσετε τὸ x σὲ κάθε μία ἀπὸ τὶς ἀκόλουθες ἀναλογίες

$$\frac{3}{4}=\frac{12}{x},\quad \frac{4}{x}=\frac{12}{40},\quad \frac{2}{-5}=\frac{x}{70}$$

276) Νὰ χρησιμοποιήσετε ἰδιότητες γιὰ νὰ βρῆτε νέες ἀναλογίες ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{\alpha}{5}=\frac{6}{7}$.

277) Σ' ἕνα οἰκόπεδο ἡ οἰκοδομὴ καλύπτει $180m^2$ ἐνῶ ἡ ὑπόλοιπη ἐπιφάνεια τοῦ οἰκοπέδου εἶναι $420m^2$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς οἰκοδομημένης ἐπιφανείας τοῦ οἰκοπέδου πρὸς ὁλόκληρη τὴν ἐπιφάνεια αὐτοῦ.

278) Ποιὲς ἀναλογίες μπορεῖτε νὰ σχηματίσετε ἀπὸ τὴν ἰσότητα

$$4 . 7 = 2 \cdot 14\ ;$$

279) α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 9.

β. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν κατὰ σειρὰν 3, 5, 9.

§ 48. Ποσὰ μὲ μεταβολὲς κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες

Ἕνας ὑπάλληλος (πλασιὲ) ἑνὸς ἐκδοτικοῦ οἴκου πληρώνεται κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Παίρνει παγίως 30 δρ. τὴν ἡμέρα καὶ ἐπὶ πλέον 10 δρ. γιὰ κάθε βιβλίο ποὺ πωλεῖ.

Στὸν πίνακα ποὺ ἀκολουθεῖ φαίνονται ἡ ἀμοιβὴ τοῦ ὑπαλλήλου σὲ διάφορες ἡμέρες.

Ἡμέρες	Ἀριθμὸς x πωλουμένων βιβλίων	Ἀμοιβὴ ἀπὸ βιβλία (σὲ δρχ)	Παγία ἀμοιβὴ (δρχ)	Σύνολον ἡμερησίων εἰσπράξεων ψ (δρχ)
1η	$x_1 = 4$	$4 \cdot 10$	30	$4 \cdot 10 + 30 = \psi_1$
2η	$x_2 = 5$	$5 \cdot 10$	30	$5 \cdot 10 + 30 = \psi_2$
3η	$x_3 = 8$	$8 \cdot 10$	30	$8 \cdot 10 + 30 = \psi_3$
4η	$x_4 = 12$	$12 \cdot 10$	30	$12 \cdot 10 + 30 = \psi_4$
. . .	x	$x \cdot 10$	30	$x \cdot 10 + 30 = \psi$

Ἀπὸ τὸν πίνακα αὐτὸν συνάγουμε ὅτι : Ἡ σχέσις μεταξὺ τῆς ἡμερησίας ἀμοιβῆς ψ καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πωλουμένων βιβλίων x εἶναι :

$$\psi = 10 \cdot x + 30$$

καὶ γενικῶς : $\psi = \alpha \cdot x + \beta$, α, β σταθεροὶ $\alpha \neq 0$ (1)

Ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλωνται ἔτσι ὥστε:

α) **Σὲ κάθε τιμὴ x τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῆ μία τιμὴ ψ τοῦ ἄλλου καὶ**

β) **τὰ ζεύγη x, ψ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν νὰ συνδέωνται μὲ σχέσεις τῆς μορφῆς (1).**

Τότε τὰ ποσὰ ἔχουν κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες μεταβολές.

Ἂς ἐξετάσουμε τώρα τὶς **μεταβολὲς** τοῦ ψ ὅταν μεταβάλλεται τὸ x.

Ἂς εἶναι μιὰ τιμὴ τοῦ x, $x_1 = 4$ τότε ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ψ εἶναι :

$$\psi_1 = 4 \cdot 10 + 30 = 70$$

Ἐπίσης διὰ $x_2 = 8$ ἔχουμε : $\psi_2 = 8 \cdot 10 + 30 = 110.$

Ἡ μεταβολὴ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πωλουμένων βιβλίων $x_2 - x_1$ καὶ ἡ μεταβολὴ τῶν ἀμοιβῶν $\psi_2 - \psi_1$ ἔχουν λόγον :

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1} = \frac{110 - 70}{8 - 4} = \frac{40}{4} = 10 \qquad (1)$$

Ἂν πάρουμε τὸν ἴδιο λόγο καὶ μιὰ ἄλλη μεταβολὴ τοῦ x

Π. χ. $x_3 = 5$ ὁπότε $\psi_3 = 5 \cdot 10 + 30 = 80$

$x_4 = 12$ » $\psi_4 = 12 \cdot 10 + 30 = 150$

Ἔχουμε :

$$\frac{\psi_4 - \psi_3}{x_4 - x_3} = \frac{150 - 80}{12 - 5} = \frac{70}{7} = 10 \qquad (2)$$

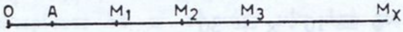
Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) ἔχουμε

$$\frac{\psi_2 - \psi_1}{x_2 - x_1} = \frac{\psi_4 - \psi_3}{x_4 - x_3}$$

Δηλαδή : **Ἡ διαφορὰ δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ ἔχει σταθερὸν λόγον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.**

Μ' ἄλλα λόγια : Οἱ **μεταβολὲς** τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες μὲ τὶς **μεταβολὲς** τοῦ ἄλλου ποσοῦ. Στὴν περίπτωσι αὐτὴ λέγομεν ὅτι : τὰ ποσὰ ἔχουν **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες μεταβολές**.

Παράδειγμα : Ἕνας ποδηλάτης σὲ μιὰ χρονικὴ στιγμὴ $t = 0$ εὑρίσκεται στὸ σημεῖο Α ποὺ ἀπέχει 20 km ἀπὸ τὸ σημεῖο Ο, καὶ κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox, πρὸς τὰ δεξιά, μὲ σταθερὴ ταχύτητα 30 km/h. Πόσα km θὰ ἀπέχῃ ὁ ποδηλάτης ἀπὸ τὴν ἀρχὴ Ο σὲ 1^h, 2^h, 3^h . . .



Σχ. 49

Ὁ ποδηλάτης σὲ χρόνο

$t=0$ θὰ εἶναι στὴ θέσι Α ὅπου $(OA) = 20$ km
$t=1^h$ » » » » M_1 » $(OM_1) = 20\text{km} + 30\text{ km} = 50\text{ km}$
$t=2^h$ » » » » M_2 » $(OM_2) = 20\text{km} + 2.30\text{km} = 80\text{km}$
$t=3^h$ » » » » M_3 » $(OM_3) = 20\text{km} + 3.30\text{km} = 110\text{km}$
. . . .
. . . .
$t=x^h$ » » » » M_x » $(OM_x) = 20\text{ km} + x \cdot 30\text{ km}$

Ἂν ὀνομάσουμε ψ τὴν ἀπόστασι σὲ km τοῦ ποδηλάτη ἀπὸ τὸ Ο, καὶ x τὸν χρόνον σὲ h θὰ ἔχουμε :

$$\psi = 30 \cdot x + 20$$

Δηλαδή : Ἡ ἀπόστασις ψ καὶ ὁ χρόνος x εἶναι στὴν περίπτωσι αὐτή, ποσὰ μὲ μεταβολὲς κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες.

§ 49. Γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $\psi = \alpha x + \beta$

(α, β ρητοὶ σχετ. $\neq 0$)

Ἂς πάρουμε τὴ συνάρτησι $\psi = 20x + 30$ (1)

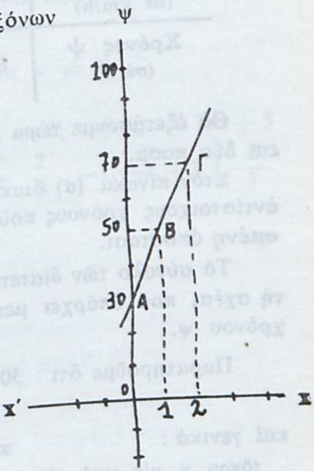
α) Ἀπὸ τὴν (1) εὑρίσκουμε μερικὰ διατεταγμένα ζεύγη

π.χ. διὰ $x = 0$ ἔχουμε $\psi = 20 \cdot 0 + 30 = 30$
» $x = 1$ » $\psi = 20 \cdot 1 + 30 = 50$
» $x = 2$ » $\psi = 20 \cdot 2 + 30 = 70$ κ.ο.κ

Μ' αὐτὸ τὸν τρόπο καταρτίζουμε τὸν πίνακα

x	0	1	2	3	4	5	...
ψ	30	50	70	90	110	130	...

β) Χαράζουμε ἕνα σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων καὶ τὶς μὲν τιμὲς τοῦ x τὶς τοποθετοῦμε (ἀπεικονίζουμε) πάνω στὸν ἄξονα x'Ox μὲ ἀντιστοιχία μία μονάδα σὲ 1 cm, τὶς δὲ τιμὲς τοῦ ψ στὸν ἄξονα ψ'Oψ μὲ ἀντιστοιχία 10 μονάδες σὲ 1 cm.



Σχ. 49

γ) Εὑρίσκουμε τὰ σημεῖα ποὺ παριστάνουν τὰ ζεύγη (0, 30), (1, 50), (2, 70), δηλαδὴ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, ἀντιστοίχως.

δ) Ἂν συνδέσουμε τὰ σημεῖα αὐτά, εὑρίσκουμε τὴν γραφικὴ παράστασι τῆς $\psi = 20x + 30$ ποὺ εἶναι μία **εὐθεῖα** ἡ ὁποία **δὲν** διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.

Γενικά: **Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς $\psi = \alpha x + \beta$ (α, β σχετ. ἀριθμοὶ $\neq 0$) εἶναι εὐθεῖα, ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

280) Νὰ εὑρεθοῦν ποσὰ μὲ μεταβολὲς κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες καὶ νὰ ἐκφρασθῇ ἡ σχέσις των α) μὲ ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν β) μὲ μιὰ συνάρτησι τῆς μορφῆς $\psi = \alpha x + \beta$.

281) Ἐπαληθεύσατε ὅτι: Ἂν γιὰ κάθε ζεῦγος (x, ψ) ἰσχύῃ ἡ σχέσις $\psi = 2x + 5$, τότε οἱ ἀντίστοιχες μεταβολὲς τῶν x καὶ ψ εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογες.

282) Γιὰ τὸ τηλέφωνό μας, κάθε μῆνα πληρώνουμε α) παγίως 50 δρ. β) 0,60 δρχ. γιὰ κάθε τηλεφώνημα ποὺ θὰ κάνουμε.

Ἂν καλέσουμε ψ τὸν μηνιαῖο λογοριασμὸ τοῦ τηλεφώνου καὶ x τὸν ἀριθμὸ τῶν τηλεφωνημάτων ποὺ κάνουμε κάθε μῆνα, νὰ ἐξετάσετε πῶς μεταβάλλονται τὰ ποσὰ x καὶ ψ.

§ 50. Ἀντιστρόφως ἀνάλογα ποσὰ

Ταχύτης x (σὲ km/h)	30	60	120	15	. . x
Χρόνος ψ (σὲ h)	6	3	1,5	12	. . ψ

(α)

Θὰ ἐξετάσουμε τώρα ἕναν ἄλλον τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον μεταβάλλονται δύο ποσά.

Στὸν πίνακα (α) διακρίνουμε διάφορες τιμὲς τῆς ταχύτητος καὶ τοὺς ἀντίστοιχους χρόνους ποὺ χρειάζεται ἕνα κινητὸ γιὰ νὰ διατρέξῃ **ὡρισμένη** ἀπόστασι.

Τὸ σύνολο τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (30,6), (60,3), (120,1,5)... ὁρίζει τὴ σχέσι ποὺ ὑπάρχει μεταξὺ τῆς ταχύτητος x καὶ τοῦ ἀντιστοίχου χρόνου ψ.

Παρατηροῦμε ὅτι : $30 \cdot 6 = 180$, $60 \cdot 3 = 180$, $120 \cdot 1{,}5 = 180$
$15 \cdot 12 = 180 \cdot \cdot \cdot$

καὶ γενικά : $\mathbf{x \cdot \psi = 180}$

(ὅπου x μία τιμὴ τῆς ταχύτητος x καὶ ψ ἡ ἀντίστοιχη τιμὴ τοῦ ψ)

Δηλαδή : **Τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι ἴσα.**

Ὅταν δύο ποσὰ μεταβάλλονται ἔτσι, ὥστε :

α) Σὲ κάθε τιμὴ τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῇ μία μόνον τιμὴ τοῦ ἄλλου

β) τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν νὰ εἶναι ἴσα

τότε τὰ ποσὰ αὐτὰ λέγονται : **ἀντιστρόφως ἀνάλογα.**

Ἡ χαρακτηριστικὴ σχέσις τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν εἶναι ἡ σχέσις $\mathbf{x \cdot \psi = \alpha}$ ($\alpha =$ σταθερὸς $\neq 0$)

50.1 Γραφικὴ παράστασις τῆς $x \cdot \psi = \alpha$ $(\alpha \neq 0)$

Ἂς εἶναι $A = \{x_1\ x_2\ x_3\ \cdot\ \cdot\}$ καὶ $B = \{\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$ τὰ δύο σύνολα τῶν τιμῶν τῶν ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν Α καὶ Β.

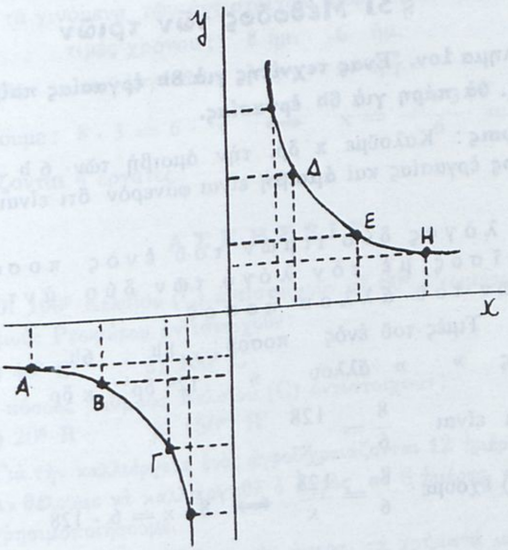
Καθὼς μάθαμε μία σχέσις ὅπως εἶναι ἡ σχέσις $x \cdot \psi = \alpha$ (1) ($x \in A$ καὶ $\psi \in B$) ὁρίζει ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν ποὺ εἶναι ὑποσύνολο τοῦ Α Χ Β. Ἐπειδὴ δὲ σὲ κάθε τιμὴ τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μία μόνο τιμὴ τοῦ ψ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴ σχέσι (1) ἡ σχέσις αὐτὴ εἶναι μία συνάρτησις.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως αὐτῆς στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων εἶναι καθὼς θὰ μάθουμε σὲ ἄλλη τάξι, μία εἰδικὴ καμπύλη ποὺ λέγεται **ὑπερβολή**.

Γιὰ μιὰ στοιχειώδη γνῶσι τῆς καμπύλης αὐτῆς, ἄς λάβουμε τὴ συνάρτησι $x \cdot \psi = 2$ (1) μὲ πεδίον ὁρισμοῦ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολο τῶν ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν.

Ἡ (1) γράφεται καὶ $\psi = \frac{2}{x}$ (διὰ $x \neq 0$)

α) Δίνουμε στὸ x τιμές: $-3, \ -2, \ -1, \ +1, \ +2, \ +3$ ὁπότε θὰ ἔχουμε γιὰ τὸ ψ ἀντίστοιχες τιμὲς $-\frac{2}{3}, -1, -2, +2, 1, \frac{2}{3}$



Σχ. 50

β) Στὸ ἐπίπεδο τῶν ὀρθ. ἀξόνων σημειώνουμε τὰ σημεῖα

$A\left(-3, -\frac{2}{3}\right)$, $B(-2, -1)$, $\Gamma(-1, -2)$

$\Delta(1,2)$, $E(2,1)$, $H\left(3, \frac{2}{3}\right)$

κι' ἔπειτα τὰ ἑνώνουμε μέ, ὅσο γίνεται, πιὸ ὁμαλὴ καμπύλη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

283) Νὰ εὕρετε παραδείγματα ἀντιστρόφως ἀναλόγων ποσῶν.

284) Ἕνας ὁδηγὸς αὐτοκινήτου ὅταν τρέχῃ μὲ ταχύτητα 60km/h χρειάζεται 6^h γιὰ νὰ διατρέξῃ μίαν ἀπόστασι ΑΒ. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ ποσὰ ταχύτης καὶ χρόνος ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ διατρέξῃ ὁ ὁδηγὸς τὴν ἀπόστασι ΑΒ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα καὶ νὰ γράψετε τὴ χαρακτηριστικὴ των σχέσι.

285) Νὰ γράψετε ἕνα ὑποσύνολο διατεταγμένων ζευγῶν τῆς σχέσεως

$$x \cdot \psi = 36 \qquad (x \in \Phi, \ \psi \in \Phi)$$

§ 51 Μέθοδος τῶν τριῶν

Πρόβλημα 1ον. Ἕνας τεχνίτης γιὰ 8^h ἐργασίας παίρνει 128 δρχ. Πόσες δρχ. θὰ πάρῃ γιὰ 6^h ἐργασίας.

Ἐπίλυσις: Καλοῦμε x δρ. τὴν ἀμοιβὴ τῶν 6 h ἐργασίας. Τὰ ποσὰ **χρόνος** ἐργασίας καὶ **ἀμοιβὴ** εἶναι φανερὸν ὅτι εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἄρα: Ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν δύο ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

Τιμὲς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ :	8^h	6^h
Ἀντίστοιχες » » ἄλλου »	128 δρ	x δρ

ἄρα θὰ εἶναι $\dfrac{8}{6} = \dfrac{128}{x}$ (1)

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχουμε: $\dfrac{8}{6} = \dfrac{128}{x} \iff 8 \cdot x = 6 \cdot 128$

$$\iff \quad x = \frac{6 \cdot 128}{8} = 96$$

Δηλαδὴ 96 δρ. θὰ πάρῃ ὁ τεχνίτης γιὰ 6 h ἐργασίας.

Πρόβλημα 2ον. Ἕνα πλοῖο σὲ 3 h διέτρεξε 42 μίλλια. Διὰ νὰ διατρέξῃ ἀπόστασι 154 μιλ. πόσες ὧρες θὰ χρειασθῇ; (Ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου θεωρεῖται σταθερή).

Ἐπίλυσις: Τὰ ποσά: **χρόνος** καὶ **ἀπόστασις**, καθὼς εὔκολα καταλαβαίνουμε, εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἄρα: ὁ λόγος δύο τιμῶν τοῦ ἑνὸς ποσοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τοῦ ἄλλου ποσοῦ.

τιμὲς	χρόνου	3 h	x h
ἀντίστοιχες	» ἀποστάσεως	42 μίλ.	154 μίλ.

ὁπότε ἔχουμε : $\frac{3}{x} = \frac{42}{154} \Longleftrightarrow 42 \cdot x = 3 \cdot 154$

$\Longleftrightarrow x = \frac{3 \cdot 154}{42} = 11$

ὥστε θὰ χρειασθῇ 11 h.

Πρόβλημα 3ο. Τρεῖς ἐργάτες χρειάζονται 8 ἡμέρες ἐργασίας γιὰ ἕνα ἔργο. Πόσοι ἐργάτες θὰ χρειασθοῦν, ὥστε τὸ ἴδιο ἔργο νὰ γίνῃ σὲ 6 ἡμέρες.

Ἐπίλυσις : Τὰ ποσὰ **χρόνος** καὶ **ἐργάτες**, καθὼς εὔκολα καταλαβαίνουμε, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ἄρα : τὰ γινόμενα τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν εἶναι ἴσα.

τιμὲς	χρόνου :	8 ἡμ.	6 ἡμ.
ἀντίστοιχες	» ἐργατῶν :	3 ἐργ.	x ἐργ.

ὁπότε ἔχουμε : $8 \cdot 3 = 6 \cdot x \Longleftrightarrow x = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4$

ὥστε χρειάζονται 4 ἐργάτες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

286) Οἱ 100° Κελσίου (C) ἀντιστοιχοῦν σὲ 80° Ρεωμύρου (R). α) Μὲ πόσους βαθμοὺς Ρεωμύρου ἀντιστοιχοῦν:

α) 40° C β) 160° C

β) Μὲ πόσους βαθμοὺς Κελσίου (C) ἀντιστοιχοῦν:

α) 20° R β) 150° R

287) Γιὰ τὴν καλλιέργεια ἑνὸς ἀγροῦ χρειάζονται 12 ἡμέρες ἐργασίας 30 ἐργατῶν. Ἂν θέλουμε νὰ καλλιεργηθῇ ὁ ἀγρὸς σὲ 8 ἡμέρες, πόσους ἐργάτες πρέπει νὰ χρησιμοποιήσουμε.

288) Ἂν ξοδεύουμε 150 δρχ. τὴν ἡμέρα, τὰ χρήματά μας φθάνουν γιὰ 30 ἡμέρες. Πόσες δρχ. πρέπει νὰ ξοδεύουμε τὴν ἡμέρα γιὰ νὰ φθάσουν τὰ χρήματά μας γιὰ 45 ἡμέρες.

289) Ἕνα ὀρθογώνιο οἰκόπεδο ἔχει μῆκος 30,5 m καὶ πλάτος 12 m. Πόσο εἶναι τὸ πλάτος ἄλλου ἰσεμβαδικοῦ ὀρθογωνίου οἰκοπέδου πού ἔχει μῆκος 15,25 m.

290) Φρουρὰ ἀπὸ 800 στρατιῶτες ἔχει τροφὲς γιὰ 3 μῆνες. Πόσους στρατιῶτες ἔπρεπε νὰ ἔχῃ ἡ φρουρὰ γιὰ νὰ περάσῃ 5 μῆνες.

291) Ἕνας φιλάνθρωπος μοίρασε σὲ 35 πρόσωπα ἀπὸ 360 δραχ. στὸ καθένα. Πόσα θὰ ἔδινε στὸ καθένα, ἂν μοίραζε τὰ ἴδια χρήματα σὲ 28 πρόσωπα.

292) Τὰ 100 κιλὰ ἀλεύρι ἀποδίδουν 130 κιλὰ ψωμί. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι θὰ χρειασθῆ 3 ἡμέρες ἕνας ἀρτοποιός, ποὺ πουλάει 91 κιλὰ ψωμὶ τὴν ἡμέρα.

293) Ἕνα πλοῖο ξοδεύει $\frac{2}{5}$ τοῦ τόννου πετρέλαιο κάθε 6 ὧρες ταξιδιοῦ. Πόσους τόννους πετρελαίου θὰ χρειασθῆ γιὰ ταξίδι 80 ὡρῶν.

294) 6 ἐργάτες καλλιεργοῦν ἕνα κτῆμα σὲ 8 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάτες θὰ καλλιεργήσουν τὸ ἴδιο κτῆμα σὲ 3 ἡμέρες.

295) Ἕνα ὕφασμα ποὺ ἔχει μῆκος 3 ὑάρδες καὶ 2 ποδ. στοιχίζει 900 δρχ. Πόσο στοιχίζουν οἱ 5 ὑάρδες τοῦ αὐτοῦ ὑφάσματος

§ 52. Ποσοστὰ

α) Τί σημαίνει «τόσα στὰ ἑκατό;».

Γιὰ νὰ ἐκφράσουμε μ' ἕναν ἀριθμὸ ἕνα «μέρος» ἑνὸς ποσοῦ χρησιμοποιοῦμε κλασματικὲς ἐκφράσεις π.χ. γιὰ νὰ ἐκφράσουμε ὅτι «στοὺς 60 μαθητὲς τῆς τάξεώς οἱ 9 εἶναι ἀριστοῦχοι» γράφουμε

Τὰ $\frac{9}{60}$ τῆς τάξεως εἶναι ἀριστοῦχοι

ἢ » $\frac{3}{20}$ » » » »

ἢ » $\frac{15}{100}$ » » » »

Ὅλες αὐτὲς οἱ ἐκφράσεις εἶναι ἰσοδύναμες ἀφοῦ

$$\frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100}$$

Ἀλλὰ ἡ ἔκφρασι $\frac{15}{100}$ χρησιμοποιεῖται συχνὰ ἐπειδὴ ὁ παρονομαστὴς διευκολύνει στοὺς ὑπολογισμούς. Μάλιστα δὲ ἀντὶ νὰ γράφουμε $\frac{5}{100}$ γράφουμε **15** % καὶ διαβάζουμε «15 στὶς 100» Ὥστε οἱ γραφὲς 2% 5% 30 % δὲν εἶναι παρὰ διαφορετικὲς γραφὲς τῶν κλασμάτων

$\frac{2}{100}$, $\frac{5}{100}$, $\frac{30}{100}$ ἀντιστοίχως.

Ἀνάλογα ἔχουμε: $4‰ = \frac{4}{1000}$, $12‰ = \frac{12}{1000}$ καὶ διαβάζουμε «4 στὰ 1000» κ.λ.π.

β) **Προβλήματα**

1ο) Ἕνας μεσίτης παίρνει 4% σὲ κάθε πώλησι ποὺ κάνει. Πόσα χρήματα θὰ πάρη σὲ πώλησι ἀξίας 180000 δρχ.

Τὰ ποσά: **Ἀμοιβὴ** τοῦ μεσίτη καὶ **Ἀξία** τοῦ κτήματος εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα.

Ἂν εἶναι δὲ x δρ ἡ ἀμοιβή του θὰ ἔχουμε:

Τιμὲς τοῦ ἑνὸς	ποσοῦ (Ἀμοιβῆς):	4	x
Ἀντίστοιχες »	» ἄλλου » (Ἀξίας):	100	180.000

Ἄρα θὰ εἶναι:

$$\frac{4}{x} = \frac{100}{180.000} \iff 100 \cdot x = 4 \cdot 180.000$$

$$\iff x = \frac{4 \cdot 180000}{100} = 7200$$

ὥστε ἡ ἀμοιβὴ τοῦ μεσίτη εἶναι 7200 δρ

Οἱ 7200 δρχ ποὺ εἶναι τὰ 4% τῶν 180.000 δρχ. λέγονται καὶ **ποσοστὸ** αὐτῶν.

2ο) Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ μὲ κέρδος 12% Ἀπὸ τὴν πώλησι ἑνὸς ἐμπορεύματος ἐκέρδισε 300 δρ. Πόσα τοῦ ἐκόστισε τὸ ἐμπόρευμα αὐτό;

Τὰ ποσά: **Κόστος** τοῦ ἐμπορεύματος καὶ **Κέρδος** εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα. Ἂν εἶναι x δρχ τὸ ζητούμενο κόστος ἔχουμε:

Τιμές ἑνὸς	ποσοῦ (κόστος):	100	x
Ἀντίστοιχες »	τοῦ ἄλλου » (κέρδος):	12	300

Ἄρα $\frac{100}{x} = \frac{12}{300} \iff 12 \cdot x = 300 \cdot 100 \iff$

$$x = \frac{300 \cdot 100}{12} \iff x = 2500$$

ὥστε τὸ κόστος τοῦ ἐμπορεύματος ἦταν 2500 δραχ.

3) Σὲ ἐμπόρευμα ἀξίας 900 δρχ. μᾶς ἔκαναν ἔκπτωσι 135 δρχ. Πόση στὶς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωσι;

Τὰ ποσά: **Ἀξία** ἐμπορεύματος καὶ **ἔκπτωσις** εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα κι' ἂν εἶναι x% ἡ ζητουμένη ἔκπτωσι θὰ ἔχουμε:

Τιμὲς τοῦ ἑνὸς ποσοῦ (Ἀξία):		100	900
Ἀντίστοιχες »	ἄλλου » (ἔκπτωσι):	x	135

ἄρα $\frac{100}{900} = \frac{x}{135} \iff 900 \cdot x = 135 \cdot 100$

$$\iff x = \frac{135 \cdot 100}{900}$$

$$\iff x = 15$$

ὥστε ἡ ἔκπτωσις ἦταν 15%.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

296) Τὸ σιτάρι κατὰ τὴν ἄλεσί του δίνει 78% ἀλεύρι. Πόσα κιλὰ ἀλεύρι θὰ πάρουμε ἀπὸ 490 κιλὰ σιτάρι.

297) Τὸ σαπούνι περιέχει 7% ποτάσσα, 43% λιπαρὲς οὐσίες καὶ 50% νερό. Πόσα κιλὰ ἀπ' τὸ κάθε εἶδος θὰ πάρουμε ἀπὸ 30.100 κιλὰ σαπούνι;

298) Ἕνας ἔμπορος πωλεῖ τὰ ἐμπορεύματά του μὲ κέρδος 25% καὶ κερδίζει 3.600 δρχ. Πόσο κόστιζαν τὰ ἐμπορεύματα ποὺ πούλησε.

299) Κάποιος ἀγόρασε ἕνα οἰκόπεδο μὲ 17.280 δρχ. καὶ τὸ πούλησε 20.736 δρχ. Πόσα στὰ ἑκατὸ κέρδισε.

300) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 84 κιλὰ βούτυρο μὲ 64 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ 45 κιλὰ καφφὲ μὲ 72 δρχ. τὸ κιλὸ καὶ ἐπλήρωσε 7306,54 δρχ. Πόση στὶς ἑκατὸ ἦταν ἡ ἔκπτωση.

301) Ἕνας παντοπώλης ἀγοράζει ἕνα δοχεῖο λάδι μὲ 480 δρχ. καὶ τὸ πουλάει 600 δρχ. Πόσα στὰ ἑκατὸ εἶναι τὸ κέρδος του.

302) Ἕνας ἔμπορος πληρώνει 1,25 ‰ γιὰ προμήθεια ἐμπορεύματος. Πόσα χρήματα θὰ πληρώση γιὰ προμήθεια ἐμπορεύματος ἀξίας 4.352.800 δραχμῶν.

303) Ὁ πληθυσμὸς μιᾶς πόλεως αὐξήθηκε κατὰ 4%. Πόσος ἦταν ὁ πληθυσμὸς πρὶν ἀπὸ τὴν αὔξηση, ἂν μετὰ τὴν αὔξηση ἀνῆλθε σὲ 11.400 ἄτομα.

304) Κατὰ τὴ μεταφορά του ἕνα ἐμπόρευμα εἶχε φθορὰ ἴση μὲ τὰ 6% αὐτοῦ. Πόση ἦταν ἡ ἀξία τοῦ ἐμπορεύματος πρὸ τῆς μεταφορᾶς, ἂν μετὰ τὴ μεταφορὰ ἦταν 11.844 δρχ.

§ 53. Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν

Πρόβλημα 1ο. Μία μηχανὴ γιὰ νὰ ὑφάνῃ 18 m ὑφάσματος πλάτους 1,20 m χρειάζεται 6 kg νήματος. Πόσα kg νῆμα θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ ὑφάνῃ 15 m τοῦ ἰδίου ὑφάσματος πλάτους 1,5 m.

Παρατηροῦμε ὅτι στὸ πρόβλημα αὐτὸ ὑπάρχουν 3 ποσά: τὸ **μῆκος**, τὸ **πλάτος** καὶ τὸ **βάρος** καὶ ὄχι δύο ὅπως συνέβαινε στὴν ἁπλῆ μέθοδο τῶν τριῶν. Μποροῦμε ὡστόσο νὰ τὸ ἀναλύσουμε σὲ δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν.

α) Μία μηχανὴ γιὰ νὰ ὑφάνῃ 18 m ὑφάσματος πλάτους 1,20 m χρειάζεται 6 kg νήματος. Πόσα kg ἀπὸ τὸ ἴδιο νῆμα θὰ χρειασθῇ γιὰ νὰ ὑφάνῃ 15 m ὑφάσματος τοῦ ἰδίου πλάτους.

Ἐπίλυσι: Τὰ ποσὰ **Μῆκος καὶ Βάρος** εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα· ἄρα: ἂν καλέσουμε x kg τὸ ζητούμενο βάρος ἔχουμε:

$$\frac{6}{x} = \frac{18}{15} \Longleftrightarrow 18 \cdot x = 6.15$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{6 \, . \, 15}{18}$$

ὥστε χρειάζονται $\frac{6 \cdot 15}{18}$ kg = 5 kg νήματος γιὰ τὴν ὕφανσι 15 m ὑφάσματος πλάτους 1,20 m.

β) Μία μηχανὴ γιὰ νὰ ὑφάνῃ 15 m ὕφασμα πλάτους 1,20 m χρειάζεται $\frac{6 \cdot 15}{18}$ kg νῆμα. Πόσα κιλὰ νῆμα χρειάζεται γιὰ νὰ ὑφάνῃ 15 m ὕφασμα πλάτους 1,5 m.

Καὶ ἐδῶ τὰ ποσά: πλάτος καὶ βάρος εἶναι κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα κι' ἂν καλέσουμε x kg τὸ ζητούμενο βάρος, ἔχουμε:

$$\frac{x}{\frac{6 \, . \, 15}{18}} = \frac{1{,}5}{1{,}2} \Longleftrightarrow$$

$$1{,}2 \cdot x = \frac{6 \cdot 15}{18} \, . \, 1{,}5 \Longleftrightarrow$$

$$x = \frac{6 \cdot 15}{18} \cdot \frac{1{,}5}{1{,}2} = 6{,}25$$

ὥστε χρειάζεται 6,25 kg νήματος.

Συμπέρασμα: Γιὰ νὰ λύσουμε τὸ προηγούμενο πρόβλημα τὸ ἀναλύσαμε σὲ δύο προβλήματα τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν (δηλαδὴ σὲ τόσα προβλήματα ὅσα εἶναι τὰ δοθέντα ποσὰ πλὴν ἑνός). Στὸ καθένα ἀπὸ τὰ προβλήματα αὐτὰ θεωροῦμε τὴν τιμὴ τοῦ ἑνὸς ποσοῦ σταθερή.

Π. χ.: στὸ α΄ πρόβλημα θεωρήσαμε τὸ πλάτος σταθερὸ ἐνῶ στὸ β΄ τὸ μῆκος.

Προβλήματα τῆς μορφῆς αὐτῆς λέγονται προβλήματα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

Πρόβλημα 2ο. Γιὰ 8m ὑφάσματος πλάτους 1,20 m πληρώσαμε 960 δρχ. Πόσα m ὑφάσματος τῆς ἰδίας ποιότητος, πλάτους 1,50 m θὰ πάρουμε μὲ 1200 δρχ.;

α) Γιά 8m ὑφάσματος πληρώνουμε 960 δρχ.
» xm » » 1200 δρχ. πλάτος (σταθερὸ=1,20m)

Ποσά: **Μῆκος** καὶ **Ἀξία** κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα

	Τιμὲς μήκους	: 8m	xm
ἀντίστοιχες	» ἀξίας	: 960 δρχ	1200 δρχ.

Ἄρα ἔχουμε $\dfrac{8}{x} = \dfrac{960}{1200} \Longleftrightarrow 960 \cdot x = 8 \cdot 1200$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{8 \cdot 1200}{960}$$

$$\Longleftrightarrow x = 10$$

ὥστε μὲ 1200 δρ παίρνουμε 10m ὑφάσματος πλάτους 1,20 m.

β) Ἀπὸ τὸ ὕφασμα πλάτους 1,20m παίρνουμε 10m
» » » 1,50m » xm (ἀξία σταθερή)

Ποσά: **Πλάτος** καὶ **μῆκος** ἀντιστρόφως ἀνάλογα

Ἄρα ἔχουμε $1{,}20 \cdot 10 = 1{,}50 \cdot x \Longleftrightarrow x = \dfrac{1{,}20 \cdot 10}{1{,}5} = 8$

ὥστε θὰ πάρουμε μὲ 1200 δρ 8m ὑφάσματος πλάτους 1,50m

Ἀπὸ προσεκτικὴ παρατήρησι τῆς σειρᾶς τῶν πράξεων, ἀπ' τὶς ὁποῖες προέκυψε τὸ ἐξαγόμενο, συνάγουμε τὸν γνωστό μας ἀπὸ τὸ δημοτικὸ σχολεῖο κανόνα τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

305) Γιὰ τὸ κτίσιμο τοίχου μήκους 6m, πλάτους 0,40m καὶ ὕψους 4m ἐπληρώσαμε 12000. Πόσα θὰ πληρώσουμε γιὰ τὸ κτίσιμο τοίχου μήκους 8m, πλάτους 0,30m καὶ ὕψους 3m;

306) Μία πλάκα—μπετὸν—ἔχει πάχος 0,20m πλάτος 3,60m καὶ μῆκος 4m καὶ στοιχίζει 9000 δρχ. Πόσο στοιχίζει πλάκα πάχους 0,30m πλάτους 5m καὶ μήκους 6m;

307) Δύο ἐργάται ἐργαζόμενοι 5^h τὴν ἡμέρα καλλιεργοῦν ἀγρὸν 7,5 στρεμ. σὲ 3 ἡμέρες. Πόσοι ἐργάται τῆς ἰδίας ἀποδόσεως, ἐργαζόμενοι 8^h τὴν ἡμέρα θὰ καλλιεργήσουν ἀγρὸν 12 στρεμ. σὲ 2 ἡμέρες.

308) Ἕνας πεζὸς ἂν βαδίζῃ 8^h τὴν ἡμέρα χρειάζεται 3 ἡμέρες γιὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 120 km. Σὲ πόσες ἡμέρες θὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 180 km ἂν βαδίζῃ 6^h τὴν ἡμέρα;

309) Μία βρύση σὲ 6^h γεμίζει δεξαμενὴ μήκους 4m πλάτους 3m καὶ βάθους 3,50m. Πόσον χρόνον χρειάζεται ἡ ἴδια βρύση γιὰ νὰ γεμίσῃ ἄλλην δεξαμενὴν μήκους 5,60m, πλάτους 2,50m καὶ βάθους 2m.

310) Τὰ 3/4 τῆς ἀποστάσεως δύο πόλεων διήνυσε ἕνας μὲ ποδήλατο ποὺ ἔτρεχε μὲ ταχύτητα 30km/h καὶ τὴν ὑπόλοιπη ἀπόστασι πεζῆ μὲ τα-

χύτητα 5km/h. Ἂν γιὰ τὸ πρῶτον διάστημα ἐχρειάσθη 25΄, πόσον χρόνον θὰ χρειασθῇ γιὰ τὸ β΄ διάστημα ;

312) Γιὰ τὴν μεταφορὰν 30 τόννων ἐμπορεύματος σὲ ἀπόστασιν 85km πληρώσαμε 12000 δρ. Πόσα θὰ πληρώσουμε γιὰ νὰ μεταφέρουμε ἐμπόρευμα 17 τόννων σὲ ἀπόστασιν 97km

313) Μία σιδηρᾶ πλὰξ μήκους 1,80m, πλάτους 0,90m καὶ πάχους 0,03m ζυγίζει 60kg. Πόσο ζυγίζει τῆς ἰδίας φύσεως πλὰξ μήκους 2,40m πλάτους 0,75m καὶ πάχους 0,02m.

§ 54. Περὶ τόκου

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ κέρδος ποὺ παίρνουμε ὡς ἐνοίκιον τῶν χρημάτων ποὺ δανείζουμε λέγεται **τόκος** (Τ). Τὸ ποσὸν τῶν χρημάτων ποὺ δανείζει κανεὶς λέγεται **κεφάλαιο** (Κ). Ἡ διάρκεια τοῦ δανεισμοῦ λέγεται **χρόνος** (Χρ.).

Ὁ τόκος τῶν 100 δρχ. σὲ ἕνα ἔτος λέγεται **ἐπιτόκιο** (Ε) καὶ σημειώνεται συνήθως μὲ τὸ σύμβολο τῶν ποσοστῶν (%), π. χ. ὅταν λέμε ὅτι ἡ τράπεζα τοκίζει χρήματα μὲ ἐπιτόκιο 8%, ἐννοοῦμε ὅτι: Γιὰ κάθε 100 δρ κεφάλαιο ἔχουμε τόκο, ἔπειτα ἀπὸ ἕνα ἔτος, 8 δρ.

Στὰ προβλήματα τόκου χρησιμοποιοῦνται τὰ τέσσερα αὐτὰ ποσὰ

α) τὸ κεφάλαιο ἢ συμβολικὰ Κ
β) ὁ τόκος » » Τ
γ) τὸ ἐπιτόκιο » » Ε
δ) ὁ χρόνος » » Χρ.

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι:

Τὸ κεφάλαιο Κ καὶ ὁ τόκος Τ εἶναι ποσὰ **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα** γιὰ τὴν ἴδια χρονικὴ διάρκεια τοκισμοῦ. Ἐπίσης ὁ τόκος Τ καὶ ὁ χρόνος Χρ., εἶναι ποσὰ κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογα γιὰ τὸ ἴδιο κεφάλαιο.

54.1 Προβλήματα τόκου

I) **Ὑπολογισμὸς τοῦ Τόκου:**

Πόσο τόκο δίνει ἕνα κεφάλαιο 12.000 δρχ., ποὺ τοκίζεται ἐπὶ 4 ἔτη μὲ ἐπιτόκιο 8%;

Ἐπίλυσις: Σὲ 1 ἔτος 100 δρχ. δίνουν τόκο 8 δρχ.

» » » 1 » δίνει » $\frac{8}{100}$ δρχ.

» » » 12.000 » δίνουν » $12.000 \cdot \frac{8}{100}$ δρχ.

» 4 ἔτη 12.000 » » » $12.000 \cdot \frac{8}{100} \cdot 4$ δρχ.

ὥστε : Σὲ 4 ἔτη οἱ 12.000 δρχ. τοκιζόμενες μὲ 8 % δίνουν τόκο

$$T = \frac{12.000 \cdot 8 \cdot 4}{100} = 3.840 \text{ δρχ.}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ λύσουμε τὸ πρόβλημα αὐτὸ στὴ γενική του περίπτωσι.

Πόσο τόκο Τ, δίνει κεφάλαιο Κ δρχ. τοκιζόμενο ἐπὶ Χρ. ἔτη μὲ ἐπιτόκιο Ε%.

Σὲ 1 ἔτος οἱ 100 δρχ. δίνουν τόκο E δρχ.

» » » ἡ 1 δρχ. δίνει » $\frac{E}{100}$ δρχ.

» » » οἱ Κδρ δίνουν » $\frac{K \cdot E}{100}$ δρχ.

» Χρ ἔτη οἱ Κδρ » » $\frac{K \cdot E \cdot X\rho}{100}$ δρχ.

ὥστε : **Ὁ τόκος Τ ἑνὸς κεφαλαίου Κδρ., ποὺ τοκίζεται ἐπὶ Χρ. ἔτη μὲ ἐπιτόκιο Ε%, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενο τοῦ κεφαλαίου, μὲ τὸ ἐπιτόκιο καὶ μὲ τὸ χρόνο (σὲ ἔτη) διὰ τοῦ 100.**

Ὁ κανόνας αὐτὸς ἀποδίδεται συμβολικὰ μὲ τὸν γνωστὸ τύπο

$$T = \frac{K \cdot E \cdot X\rho}{100} \quad (1)$$

ὁ τύπος αὐτὸς ἰσχύει ὅταν ὁ χρόνος ἐκφράζεται σὲ ἔτη.

Ἂν ὁ χρόνος Χρ ἔχῃ δοθῆ σὲ μῆνες μ, τότε πρέπει πρῶτα νὰ τὸν ἐκφράσουμε σὲ ἔτη κι᾽ ἔπειτα νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸν τύπο. Μποροῦμε ὅμως νὰ μετατρέψουμε τὸν τύπο ὥστε νὰ γίνῃ κατάλληλος γιὰ τὴν περίπτωσι αὐτή.

Ἔτσι ἂν ὁ χρόνος δανεισμοῦ εἶναι μ μῆνες, ἐπειδὴ οἱ μ μῆνες εἶναι $\frac{\mu}{12}$ ἔτη, ὁ τύπος (1) γράφεται :

$$T = \frac{K \cdot E \cdot \frac{\mu}{12}}{100} \Longleftrightarrow T = \frac{K \cdot E \cdot \mu}{1200} \quad (2)$$

Ἐπίσης ἂν ὁ χρόνος ἔχει δοθῆ σὲ ἡμέρες ἐπειδὴ η ἡμέρες εἶναι $\frac{\eta}{360}$ ἔτη, ὁ τύπος (1)

$$\text{γίνεται} \quad T = \frac{K \cdot E \cdot \frac{\eta}{360}}{100} \Longleftrightarrow T = \frac{K \cdot E \cdot \eta}{36000} \quad (3)$$

Σημ. Στὸ ἐμπόριο τὸ ἔτος λαμβάνεται ἴσο μὲ 360 ἡμέρες (ἐμπορικὸν ἔτος).

Ἐφαρμογὲς α) Πόσο τόκο δίνουν 1800 δρχ. τοκιζόμενες ἐπὶ 6 ἔτη πρὸς 9 %;

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχουμε:

Κ = 1800 δρχ., Ε = 9%, Χρ = 6 ἔτη. Ἀντικαθιστοῦμε τὶς τιμὲς αὐτὲς στὸ τύπο (1) καὶ λαμβάνουμε

$$T = \frac{1800 \cdot 9 \cdot 6}{100} = 18 \cdot 9 \cdot 6 \longleftrightarrow T = 972$$

ὥστε ὁ τόκος εἶναι 972 δρχ.

β) **Πόσο τόκο δίνουν 3000 τοκιζόμενες πρὸς 6 % σὲ 4 μῆνες;**

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχουμε:

Κ = 3000 δρχ., Ε = 6% Χρ. = 4 μῆνες

Ἀντικαθιστοῦμε τὶς τιμὲς αὐτὲς στὸν τύπο (2) καὶ ἔχουμε:

$$T = \frac{3000 \cdot 6 \cdot 4}{1200} \longleftrightarrow T = 60$$

ὥστε ὁ τόκος εἶναι 60 δρχ.

γ) **Πόσο τόκο δίνουν 1800 δρχ. τοκιζόμενες πρὸς 5 % σὲ 2 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες;**

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχουμε:

Κ = 1800 δρχ., Ε = 5% Χρ = 80 ἡμέρες

τὶς τιμὲς αὐτὲς τὶς ἀντικαθιστοῦμε στὸν τύπο (3) κι' ἔχουμε

$$T = \frac{1800 \cdot 5 \cdot 80}{36000} \longleftrightarrow T = 20$$

ὥστε ὁ τόκος εἶναι 20 δρχ.

II) **Ὑπολογισμὸς κεφαλαίου Κ**

Ποιὸ κεφάλαιο τοκιζόμενο ἐπὶ 3 ἔτη πρὸς 9 % δίνει τόκους 1080 δρχ.

Κατὰ τὸ πρόβλημα ἔχουμε:

Ε = 9 %, Χρ = 3 ἔτη, Τ = 1080 δρχ. Τὶς τιμὲς αὐτὲς τὶς ἀντικαθιστοῦμε στὸν τύπο (1) κι' ἔχουμε:

$$1080 = \frac{K \cdot 9 \cdot 3}{100} \longleftrightarrow K \cdot 9 \cdot 3 = 1080 \cdot 100$$

$$\longleftrightarrow K = \frac{1080 \cdot 100}{9 \cdot 3} = 4000$$

ὥστε τὸ κεφάλαιο εἶναι 4000 δρχ.

III) **Ὑπολογισμὸς ἐπιτοκίου Ε**

Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε κεφ. 6000 δρχ., ὥστε σὲ τρία ἔτη νὰ πάρουμε τόκο 1440 δρχ. ;

Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι :

$K = 6000$ δρχ., $X\rho = 3$ ἔτη, $T = 1440$ δρχ.

Ἀντικαθιστοῦμε στὸν τύπο (1) τὶς τιμὲς αὐτὲς κι' ἔχουμε :

$$1440 = \frac{6000 \cdot 3 \cdot E}{100} \iff 6000 \cdot 3 \cdot E = 1440 \cdot 100$$

$$\iff E = \frac{1440 \cdot 100}{6000 \cdot 3} \iff E = 8$$

ὥστε τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 8 %.

IV) **Ὑπολογισμὸς Χρόνου : Σὲ πόσο χρόνο ἕνα κεφάλαιο 24.000 δρχ. τοκιζόμενο πρὸς 6 % δίνει τόκο ἴσο μὲ 720 δρχ. ;**

Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι :

$K = 24.000$ δρχ. $E = 6\,\%$ $T = 720$ δρχ.

Τὶς τιμὲς αὐτὲς τὶς ἀντικαθιστοῦμε στὸν τύπο (1) κι' ἔχουμε :

$$720 = \frac{24.000 \cdot 6 \cdot X\rho}{100} \iff 24.000 \cdot 6 \cdot X\rho = 720 \cdot 100$$

$$\iff X\rho = \frac{720 \cdot 100}{24.000 \cdot 6} \iff X\rho = \frac{1}{2}$$

ὥστε ὁ χρόνος εἶναι $\frac{1}{2}$ ἔτη ἢ 6 μῆνες.

Σημ. Στὰ προβλήματα ποὺ ζητεῖται ὁ χρόνος εἶναι σκόπιμο νὰ χρησιμοποιοῦμε τοὺς τύπους (2) ἢ (3) γιὰ νὰ ἀποφεύγουμε τὶς κλασματικὲς ἐκφράσεις τοῦ Χρόνου.

§ 55. Ἄλλα προβλήματα Τόκου

Στὴν προηγούμενη παράγραφο, ὅλα τὰ προβλήματα τόκου τὰ λύσαμε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ τόκου. Ἂν ζητούσαμε τὸ Κ π.χ., ἀντικαθιστούσαμε στὸν τύπο τὶς ἄλλες τρεῖς τιμὲς κι' ἔτσι καταλήγαμε μὲ μιὰ ἐξίσωσι, τῆς ὁποίας ὁ ἄγνωστος ἦταν τὸ Κ. Ἀνάλογα ἐργαζόμαστε καὶ στὶς ἄλλες περιπτώσεις.

Ἡ χρησιμοποίησις ἐξισώσεως στὴ λύσι διαφόρων προβλημάτων τόκου μᾶς διευκολύνει καὶ στὴν ἐπίλυσι δυσκολωτέρων προβλημάτων τόκου, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα παραδείγματα :

Πρόβλημα 1ον : **Ποιὸ κεφάλαιο ἐτοκίσθη πρὸς 6 % ἐπὶ 3 ἔτη κι' ἔγινε μαζὶ μὲ τοὺς τόκους του 4248 δρχ. ;**

Ἐπίλυσις : Ἄς ὀνομάσουμε x τὸ ζητούμενο κεφάλαιο· τότε ὁ τόκος του θὰ εἶναι

$$T = \frac{x \cdot 6 \cdot 3}{100}$$

κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει

$$x + \frac{x \cdot 6 \cdot 3}{100} = 4248$$

ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωσι κι᾽ ἔχουμε :

$$x + \frac{18\,x}{100} = 4248 \iff x \cdot 100 + \frac{18\,x}{100} \cdot 100 = 4248 \cdot 100$$

$$\iff 100\,x + 18\,x = 424800 \iff$$

$$118\,x = 424800 \iff$$

$$x = \frac{424800}{118} \iff x = 3600$$

ὥστε τὸ ζητούμενο κεφάλαιο εἶναι 3600 δρχ.

Πρόβλημα 2ον : **Ἐτόκισε ἕνας τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 5% καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς 4% ἔλαβε δὲ κι᾽ ἀπ᾽ τὰ δύο μαζὶ ἐτήσιο τόκο 380 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ κεφάλαιο;**

Ἐπίλυσις : Ἄς καλέσουμε x τὸ κεφάλαιο· τότε κατὰ τὸ πρόβλημα τὰ $\frac{3}{4} \cdot x$ τοκίζονται μὲ 5% καὶ τὰ $\frac{x}{4}$ μὲ 4%

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο τοῦ τόκου ἔχουμε

Τόκος τοῦ κεφ. $\frac{3}{4}$ x γιὰ 1 ἔτος $\quad T = \dfrac{\frac{3}{4} \cdot x \cdot 5 \cdot 1}{100} = \dfrac{15\,x}{400}$

Τόκος τοῦ κεφ. $\frac{x}{4}$ » » » $\quad T = \dfrac{\frac{x}{4} \cdot 4 \cdot 1}{100} = \dfrac{x}{100}$

ὁπότε, σύμφωνα μὲ τὸ πρόβλημα, πρέπει

$$\frac{15\,x}{400} + \frac{x}{100} = 380$$

Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωσι κι᾽ ἔχουμε :

$$\frac{15 \cdot x}{400} + \frac{x}{100} = 380 \iff \frac{15 \cdot x}{400} \cdot 400 + \frac{x}{100} \cdot 400 = 380 \cdot 400$$

$$\Longleftrightarrow \quad 15 \cdot x + 4 \cdot x = 380 \cdot 400 \quad \Longleftrightarrow \quad 19\,x = 380 \cdot 400$$

$$\Longleftrightarrow \quad x = \frac{380 \cdot 400}{19} \quad \Longleftrightarrow \quad x = 8.000$$

ὥστε τὸ κεφάλαιο ἦταν 8000 δρχ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

314) Πόσο τόκο φέρουν

α) 16.000 δρχ. σὲ 5 ἔτη πρὸς 6,5 %
β) 3.600 δρχ. σὲ 2 ἔτη καὶ 3 μῆνες πρὸς 6 %
γ) 24.000 δρχ. σὲ 6 μῆνες καὶ 20 ἡμέρες πρὸς 8 %

315) Τὸ 1/3 κεφαλαίου 24000 δρχ. ἐτοκίσθη πρὸς 6% ἐπὶ 3 ἔτη καὶ 4 μῆνες καὶ τὸ ὑπόλοιπο πρὸς 8% ἐπὶ τὸν ἴδιο χρόνο. Πόσους τόκους θὰ ἀποδώση συνολικῶς τὸ κεφάλαιο αὐτό ;

316) Ποιὸ κεφάλαιο τοκιζόμενο πρὸς 9% φέρει σὲ 4 ἔτη, 9 μῆν, 10 ἡμ. τόκον 489000 δρχ. ;

317) Ἕνας ἐτόκισε τὰ 4/5 τῶν χρημάτων του πρὸς 4,5% καὶ παίρνει ὡς τόκο 1200 δρχ. τὸ χρόνο. Πόσα χρήματα εἶχε συνολικά ;

318) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκίσουμε 40000 δρχ. πρὸς 4% γιὰ νὰ πάρουμε τόκο 3200 δρχ ;

319) Ἐπὶ πόσον χρόνο πρέπει νὰ τοκισθῆ ἕνα κεφάλαιο πρὸς 8% γιὰ νὰ διπλασιασθῆ ;

320) Ἐπὶ πόσον χρόνον πρέπει νὰ τοκισθῆ ἕνα κεφάλαιο πρὸς 12% γιὰ νὰ δώση τόκο ἴσο μὲ τὰ 3/4 τοῦ κεφαλαίου ;

321) Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε 537000 δρχ. γιὰ νὰ πάρουμε σὲ 2 ἔτη τόκο 42960 δρχ. ;

322) Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε 184000 δρχ. γιὰ νὰ πάρουμε σὲ 4 ἔτη καὶ 6 μῆνες τόκο καὶ κεφάλαιο 208840 δρχ. ;

323) Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιο πρέπει νὰ τοκίσουμε ἕνα κεφάλαιο γιὰ νὰ διπλασιασθῆ σὲ 10 ἔτη ;

324) Τὰ 3/8 ἑνὸς κεφαλαίου ἐτοκίσθησαν πρὸς 12% καὶ ἔδωσαν σὲ 1 ἔτος καὶ 5μ. τόκον 510 δρχ. Μὲ ποιὸ ἐπιτόκιον πρέπει νὰ τοκισθῆ τὸ ὑπόλοιπον κεφάλαιον ὥστε ὁ συνολικὸς ἐτήσιος τόκος νὰ εἶναι 580 δρχ. ;

325) Ποιὸ κεφάλαιο τοκιζόμενον πρὸς 8% ἐπὶ 1 ἔτος καὶ 3 μῆνες γίνεται μαζὶ μὲ τοὺς τόκους 3850 δρχ. ;

326) Τὰ 3/5 ἑνὸς κεφαλαίου τοκισθέντα πρὸς 8% ἐπὶ 7 μῆνες ἔγιναν μαζὶ μὲ τοὺς τόκους 49926 δρχ. Πόσον ἦτο τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον ;

§ 56. Ὑφαίρεσις

Γνωρίζουμε ὅτι πολλὲς φορὲς οἱ ἔμποροι ἀντὶ νὰ ἀγοράσουν ἕνα ἐμπόρευμα σὲ μετρητά, τὸ ἀγοράζουν μὲ πίστωσι. Ὑπογράφει δηλαδὴ ὁ ἀγοραστὴς ἕνα γραμμάτιο ἢ μιὰ συναλλαγματική, μὲ τὸ ὁποῖον ἀναλαμβάνει τὴν ὑποχρέωσι νὰ πληρώσῃ στὸν πωλητὴ τὸ χρέος του σὲ μιὰ συμφωνημένη ἡμερομηνία.

α) Τὸ ποσὸν ποὺ ἀναγράφεται στὸ γραμμάτιο, δηλαδὴ τὸ χρέος, λέγεται **ὀνομαστικὴ ἀξία** τοῦ γραμματίου.

β) Ἡ ὁριζομένη εἰς τὸ γραμμάτιο ἡμερομηνία ἐξοφλήσεως λέγεται **λῆξις** τοῦ γραμματίου.

Συχνὰ ὅμως ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου, δηλαδὴ ὁ πιστωτής, γιὰ λόγους ἀνάγκης, ἀντὶ νὰ περιμένῃ νὰ εἰσπράξῃ τὰ χρήματα τὴν ἡμερομηνία λήξεως τοῦ γραμματίου, καταφεύγει στὴν τράπεζα ἢ σὲ ἰδιώτη καὶ προβαίνει στὴν **προεξόφλησι** τοῦ γραμματίου. Εἰσπράττει δηλαδὴ τὰ χρήματα πρὸ τῆς λήξεως τοῦ γραμματίου. Φυσικὰ ἡ τράπεζα δὲν δίνει ὁλόκληρο τὸ ποσὸν στὸν κάτοχο τοῦ γραμματίου, ἀλλὰ κρατάει ἕνα μέρος ὡς τόκον τοῦ κεφαλαίου (ὀνομαστικὴ ἀξία) γιὰ τὸν χρόνο ποὺ μεσολαβεῖ ἀπὸ τὴν ἡμέρα τῆς προεξοφλήσεως ὡς τὴν ἡμέρα τῆς λήξεως. Ὁ χρόνος αὐτὸς λέγεται χρόνος **προεξοφλήσεως**.

Τὰ χρήματα ποὺ κρατάει ἡ τράπεζα ὡς τόκον λέγονται **ἐξωτερικὴ ὑφαίρεσις** ἢ πιὸ σύντομα: **ὑφαίρεσις**. Τὰ χρήματα ποὺ είπράττει ὁ κάτοχος τοῦ γραμματίου ἀποτελοῦν τὴν **παροῦσαν (ἢ πραγματικὴν) ἀξίαν** τοῦ γραμματίου.

Ἀπὸ αὐτὰ ἐννοοῦμε ὅτι:

Ἡ ὀνομαστικὴ ἀξία Ο.Α τοῦ γραμματίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς παρούσης ἀξίας Π.Α. καὶ τῆς ὑφαιρέσεως Υ.

$$\text{O.A} = \Pi.\text{A} + \Upsilon$$

Ὅλα τὰ προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὴν ὀνομ. ἀξίαν, τὴν παροῦσαν ἀξίαν, καὶ τὴν ὑφαίρεσιν λέγονται προβλήματα ὑφαιρέσεως. Καθὼς δὲ ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν καταλαβαίνουμε πρόκειται περὶ προβλημάτων τόκου.

Προβλήματα ὑφαιρέσεως

1ο) Γραμμάτιον Ὀν. Ἀξίας 4800 δρχ. προεξοφλεῖται 24 ἡμέρες πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιο 8%. Νὰ εὑρεθῇ ἡ παροῦσα ἀξία αὐτοῦ.

Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι:

Ον.Α. = 4800 δρχ. Χρ. = 24 ἡμ. Ε = 8%

Μὲ τὰ δεδομένα αὐτὰ καὶ μὲ τὴ βοήθεια τοῦ τύπου τοῦ τόκου ἔχουμε:

$$Y = \frac{4800 \cdot 24 \cdot 8}{36000}$$

$$\Longleftrightarrow \quad Y = \frac{16 \cdot 2 \cdot 8}{10} = 25{,}6$$

Σύμφωνα δὲ μὲ τὸν τύπο $\quad О.А = П.А + Y$ ἔχουμε:

$$4.800 = П.А + 25{,}60$$

$$\Longleftrightarrow \quad П.А = 4.800 - 25{,}60 = 4774{,}40$$

Ὥστε ἡ παροῦσα ἀξία εἶναι 4774,40 δρχ.

2ον) Γραμμάτιον Ὀν. Ἀξίας 12.000 δρχ. προεξοφλεῖται 3 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 11.730 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ὑφαίρεσις καὶ τὸ ἐπιτόκιο.

α) Κατὰ τὸ πρόβλημα εἶναι:

Ον.Α = 12.000 δρχ., $\quad$ Π.Α = 11.730 δρχ., $\quad$ Χρ = 3 μῆνες

ὁπότε σύμφωνα μὲ τὸν τύπο

$$Ον.Α = Π.Α + Υφ., \quad \text{ἔχουμε:}$$

$$12.000 = 11.730 + Υφ. \Longleftrightarrow$$

$$Υφ. = 12.000 - 11.730 = 270$$

Δηλαδὴ ἡ ὑφαίρεσις εἶναι 270 δρχ.

β) Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο τοῦ τόκου ἔχουμε:

$$270 = \frac{12000 \cdot E \cdot 3}{1200} \Longleftrightarrow$$

$$12000 \cdot 3 \cdot E = 270 \cdot 1200 \Longleftrightarrow$$

$$E = \frac{270 \cdot 1200}{12000 \cdot 3} = 9$$

ὥστε τὸ ἐπιτόκιο εἶναι 9%.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

327) Ποιά εἶναι ἡ παροῦσα ἀξία ἑνὸς γραμματίου Ὀν. ἀξίας 3750 δρ. τὸ ὁποῖον προεξοφλεῖται 45 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του μὲ ἐπιτόκιον 8%;

328) Γραμμάτιον ἐξωφλήθη 3 μῆν. καὶ 6 ἡμ. πρὸ τῆς λήξεώς του πρὸς 9% ἀντὶ 2256 δρχ. Πόση ἦταν ἡ ὑφαίρεσις;

329) Γραμμάτιον 120000 δρχ. προεξωφλήθη πρὸς 5% ἀντὶ 118650 δρχ. Πόσος ἦτο ὁ χρόνος προεξοφλήσεως;

330) Γραμμάτιον 240000 δρχ. προεξωφλήθη 5 μῆνες πρὸ τῆς λήξεώς του ἀντὶ 230000 δρχ. Μὲ ποῖον ἐπιτόκιον ἔγινε ἡ προεξόφλησις;

331) Ποιά εἶναι ἡ Ὀνομ. ἀξία ἑνὸς γραμματίου πληρωτέου μετὰ 45 ἡμέρες, ἂν τοῦτο προεξωφλήθη σήμερον μὲ ὑφαίρεσιν 64 δρ. καὶ ἐπιτόκιον 6%.

§ 57. Ἀριθμητικὸς μέσος ὅρος

Στὸ ἐνδεικτικὸ τῆς Α΄ Γυμνασίου ἐκτὸς ἀπὸ τὴν κατὰ μάθημα ἐπίδοσι, ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὸ βαθμὸ τοῦ μαθήματος, ἀναγράφεται καὶ ἡ γενικὴ ἐπίδοσις, ποὺ ἐκφράζεται μὲ τὸν **μέσον ὅρον** τῶν κατὰ μάθημα βαθμῶν. Εὑρίσκεται δὲ ὁ μέσος ὅρος ἂν διαιρέσουμε τὸ ἄθροισμα τῶν κατὰ μάθημα βαθμῶν μὲ τὸ πλῆθος τῶν μαθημάτων.

Θρησκευτικὰ	18
Ἑλληνικὴ Γραμ.	16
Νέα Ἑλληνικὰ	16
Μαθηματικὰ	20
Φυσικὰ	20
Γεωγραφία	18
Ἱστορία	19
Γαλλικὰ	20
Γυμναστικὴ	19
Ἄθροισμα	166
Ἀριθ. μέσος ὅρος $166:9=18\frac{4}{9}$	

Π. χ. Γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ ἀριθμ. μέσου ὅρου τῆς παραπλεύρως βαθμολογίας ἑνὸς μαθητοῦ εὑρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν 9 μαθημάτων καὶ τὸ διαιροῦμε ἔπειτα μὲ 9.

Ἔτσι ἔχουμε:

Ἀριθμ. μέσος $= 166:9 = 18\frac{4}{9}$

Ὁ Ἀριθμ. μέσος ὅρος χρησιμοποιεῖται συχνὰ στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες, στὴ στατιστικὴ κλπ.

Πρόβλημα Ι. Τὰ ἐτήσια κέρδη μιᾶς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν τελευταία πενταετία ἦσαν τὰ ἀκόλουθα:

Ἔτος	1960	1961	1962	1963	1964
Κέρδη (σὲ δρχ.)	360.000	420.000	390.000	450.000	480.000

Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέσον ἐτήσιον κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν πενταετίαν αὐτήν.

Ἐπίλυσις : Προσθέτουμε τὰ κέρδη καὶ τὸ ἄθροισμα τὸ διαιροῦμε μὲ τὸ 5

$$360.000 + 420.000 + 390.000 + 450.000 + 480.000 = 2.100.000$$

$$2.100.000 : 5 = 420.000$$

ὥστε : τὸ μέσον ἐτήσιον κέρδος εἶναι 420.000 δρχ.

Γενικῶς : ἂν δοθοῦν ν ἀριθμητικὲς τιμὲς

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \cdot \cdot \cdot \quad x_\nu \qquad \nu \in \Phi$$

μιᾶς μεταβλητῆς x ὁ ἀριθ. μέσος $x\mu$

$$\text{εἶναι} \qquad x\mu = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \cdot \cdot \cdot x_\nu}{\nu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

332) Τὰ ἐτήσια κέρδη μιᾶς ἐπιχειρήσεως κατὰ τὴν τελευταίαν πενταετίαν εἶναι

180.000, 125.000, 200.000, 225.000, 240.000

Ποῖος ἦτο ὁ μέσος ὅρος τοῦ ἐτησίου κέρδους κατὰ τὴν πενταετίαν αὐτήν ;

333) Διὰ τὴν ἐκτίμησιν μιᾶς ἀποστάσεως ΑΒ ἔγιναν τρεῖς μετρήσεις μὲ τὰ ἀκόλουθα ἀποτελέσματα 12,24cm, 12,20cm, 12,21cm. Ποιὸς εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς ἀποστάσεως αὐτῆς ;

334) Ὁ μέσος ὅρος τεσσάρων μετρήσεων ἑνὸς μήκους εἶναι 1,24m οἱ τρεῖς μετρήσεις εἶναι 1,20m, 1,22m, 1,30m. Ποία ἦτο ἡ ἄλλη μέτρησις ;

335) Ἕνας μαθητὴς ἔλαβε στὰ διάφορα μαθήματα τοὺς βαθμοὺς 20, 18, 16, 19, 17, 18, 20, 19. Ποῖος εἶναι ὁ μέσος ὅρος τῆς βαθμολογίας του ;

§ 58. Μερισμὸς σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθ. ἀριθμοὺς

Ἂν ἔχοιμε μιὰ ἀναλογία, π. χ. τὴν ἀναλογία $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$, οἱ ἀριθμοὶ 3 καὶ 6 λέγονται **κατ' εὐθεῖαν ἀνάλογοι** ἢ **ἀνάλογοι** πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 10 ἀντιστοίχως.

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{10}{15}$ ἔχουμε ὅτι οἱ ἀριθμοὶ 2, 4, 6, 10 εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τοὺς ἀριθμοὺς 3, 6, 9, 15 ἀντιστοίχως.

Πρόβλημα : Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν ἀντιστοίχως 3, 4 καὶ

5 ἡμέρες γιὰ τὴν ἐκτέλεσι ἑνὸς ἔργου, εἰσέπραξαν δὲ συνολικὰ 1080 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας;

Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ 1080 δρχ. θὰ μοιρασθοῦν ἀνάλογα μὲ τὰ ἡμερομίσθια ποὺ ἔκανε ὁ κάθε ἐργάτης.

Ἂν καλέσουμε x δρχ. ψ δρχ. ω δρχ. τὸ μερίδιο τοῦ καθενός, θὰ πρέπει νὰ εἶναι:

$$\frac{x}{3} = \frac{\psi}{4} = \frac{\omega}{5} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1), σύμφωνα μὲ τὴν 4η ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν (§ 47) ἔχουμε:

$$\frac{x}{3} = \frac{\psi}{4} = \frac{\omega}{5} = \frac{x+\psi+\omega}{3+4+5} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{x}{3} = \frac{\psi}{4} = \frac{\omega}{5} = \frac{1080}{12} = 90$$

ἄρα εἶναι $\frac{x}{3} = 90, \quad \frac{\psi}{4} = 90, \quad \frac{\omega}{5} = 90$

ὁπότε ἔχουμε $x = 90 \cdot 3 = 270$

$\psi = 90 \cdot 4 = 360$

$\omega = 90 . 5 = 450$

ὥστε τὰ μερίδια τῶν ἐργατῶν εἶναι ἀντιστοίχως 270 δρχ., 360 δρχ., 450 δρχ.

Ἄθροισμα μεριδίων: 270 δρχ. + 360 δρχ. + 450 δρχ. = 1080 δρχ.

Τὰ προβλήματα αὐτοῦ τοῦ εἴδους λέγονται: **Προβλήματα μερισμοῦ** ἑνὸς ἀριθμοῦ, (ἐδῶ τοῦ 1080), σὲ μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντας ἀριθμούς, (ἐδῶ τοὺς 3, 4, 5).

Πρόβλημα: Τρεῖς ἐργάτες ἐργάστηκαν γιὰ τὴν καλλιέργεια ἑνὸς ἀγροῦ ὡς ἑξῆς:

ὁ α′ ἐργάστηκε 3 ἡμέρες ἐπὶ 8h τὴν ἡμέρα

ὁ β′ » 4 » » 6h » »

καὶ ὁ γ′ » 2 » » 9h » » Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας;

καί εἰσέπραξαν συνολικὰ 726 δρχ.

Ἐπίλυσις: Ἂν ὅλοι οἱ ἐργάτες εἰργάζοντο τὶς ἴδιες ὧρες κάθε ἡμέρα, ἡ διανομὴ τῶν 726 δρχ. ἔπρεπε νὰ γίνη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς τῶν ἡμερῶν ἐργασίας αὐτῶν. Ἂν πάλι οἱ ἐργάτες εἰργάζοντο τὸν ἴδιο ἀριθμὸν ἡμερῶν, ἡ διανομὴ τῶν 726 δρ. ἔπρεπε νά γίνη ἀνάλογα μὲ τὶς ὧρες ἐργασίας τοῦ καθενός.

Γι' αὐτὸ ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

1) Εὑρίσκουμε τὸν συνολικὸ ἀριθμὸν ὡρῶν ἐργασίας τοῦ καθενὸς

	Ἡμέρες ἐργασίας	Ὧρες ἐργασίας τὴν ἡμέρα	Συνολικὸς ἀριθμὸς ὡρῶν ἐργασίας
α' ἐργάτης	3	8	24
β' »	4	6	24
γ' »	2	9	18

2) Μερίζουμε τὶς 726 δρχ. ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 24, 24, 18

Ἂς εἶναι x, ψ, ω, τὰ μερίδια τῶν α', β', γ', ἀντιστοίχως τότε ἔχουμε

$$\frac{x}{24} = \frac{\psi}{24} = \frac{\omega}{18} = \frac{x+\psi+\omega}{24+24+18} = \frac{726}{66} = 11$$

ἄρα

$$\frac{x}{24} = 11 \iff x = 24 \cdot 11 = 264$$

$$\frac{\psi}{24} = 11 \iff \psi = 24 \cdot 11 = 264$$

$$\frac{\omega}{18} = 11 \iff \omega = 11 \,.\, 18 = 198$$

Ἄθροισμα μεριδίων: 264δρ + 264δρ + 198δρ = 726 δρ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

336) Νὰ μερισθῆ ὁ ἀριθμὸς 180 εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς τοὺς 4, 15, 5.

337) Τρεῖς γεωργοὶ ἐνοίκιασαν ἕνα λειβάδι ἀντὶ 6.000 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ καταβάλη ὁ καθένας δεδομένου ὅτι ὁ α' ἔχει 120 πρόβατα, ὁ β' 50 καὶ ὁ γ' 70;

338) Ἕνας ἔμπορος διέθεσε σὲ μιὰ ἐπιχείρησι 120000 δρχ. ἐπὶ 2 ἔτη καὶ ἕνας ἄλλος 90000 ἐπὶ 3 ἔτη. Ἐκέρδισαν δὲ συνολικῶς 51000 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας;

339) Σὲ μία μεταφορὰ ἕνα αὐτοκίνητο μετέφερε 4 τόν. ἐμπορεύματος σὲ ἀπόστασι 9km· ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητο μετέφερε 3 τόν. σὲ ἀπόστασι 8km. Συνολικῶς ἡ μεταφορὰ ἐπληρώθη 1200 δρχ. Πόσο εἶναι τὸ μερίδιο τοῦ καθενὸς αὐτοκινήτου;

340) Ἔμπορος ἀρχίζει μίαν ἐπιχείρησι μὲ 120.000 δρχ. 6 μῆνες ἀργότερα προσλαμβάνει συνεταῖρον, ὁ ὁποῖος καταθέτει κεφάλαιο 180.000 δρχ. Ἔπειτα καὶ 3 μῆνες μετὰ προσλαμβάνει νέο συνεταῖρο μὲ κεφάλαιο 200.000.

3 ἔτη μετὰ τὴν ἔναρξί της ἡ ἐπιχείρησις ἀπέδωσε κέρδη 150.000. Πόσα θὰ λάβη ὁ καθένας συνεταῖρος;

341) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 76 σὲ μέρη ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 3 καὶ 4/5.

342) Νὰ μερισθῇ ὁ ἀριθμὸς 80 σὲ μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ 3.

343) Νὰ μερισθοῦν σὲ 5 παιδιὰ 90.000 δρχ. ἔτσι ὥστε ὁ α′ καὶ ὁ β′ νὰ πάρουν τὰ ἴδια χρήματα ὁ δὲ γ′ 3/πλάσια τῶν ὅσων θὰ πάρη ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο πρώτους.

344) Νὰ μερισθοῦν 180.000 σὲ δύο παιδιὰ ἡλικίας 6 ἐτῶν καὶ 9 ἐτῶν σὲ μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα μὲ τὴν ἡλικία των.

345) Τρεῖς ἐργάτες ἐργάσθηκαν σὲ μιὰ οἰκοδομή.

Ὁ α′ ἐργάσθηκε 6ημ. ἐπὶ 8h τὴν ἡμέρα
ὁ β′ » 8 » » 7h » »
καὶ ὁ γ′ » 4 » » 9h » »

Ὁ α′ ἐπῆρε ὡς ἀμοιβὴν 576 δρχ. Πόσα χρήματα θὰ πάρη ὁ καθένας ἀπὸ τοὺς δύο ἄλλους;

346) Τρεῖς ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι ἀνάλογοι ἀντιστοίχως μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 4, 5, 8. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ β καὶ γ ἂν ὁ α εἶναι ἴσος μὲ 36.

§ 59. Μείγματα καὶ κράματα

I. Μείγματα

Καθὼς ξέρουμε στὸ ἐμπόριο συχνὰ γίνεται ἀνάμειξις δύο ποιοτήτων ἑνὸς εἴδους, π.χ. λίπους, γιὰ τὸ σχηματισμὸ μιᾶς νέας ποιότητος ἡ ὁποία ν' ἀνταποκρίνεται σὲ ὡρισμένες ἀπαιτήσεις π.χ. σὲ ἀπαιτήσεις τοῦ ἀγοραστικοῦ κοινοῦ.

Πρόβλημα 1ο. Ἕνας ἔμπορος ἀνέμειξε 18 κιλὰ λίπους τῶν 24 δρχ. τὸ κιλὸ μὲ 36 κιλὰ λίπους τῶν 30 δρχ. τὸ κιλό. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κιλοῦ τοῦ μείγματος.

Ἂς καλέσουμε x δρχ. τὴν τιμὴ τοῦ κιλου τοῦ μείγματος, τότε, κατὰ τὸ πρόβλημα, ἔχουμε :

Ἀξία α′ εἴδους : $18 \cdot 24$ δρχ. $= 432$ δρχ.
» β′ » $36 \cdot 30$ » $= 1080$ »
Ἀξία μείγματος $(18 + 36) \cdot x$ δρχ. $= 1512$ »

Εἶναι φανερὸν ὅτι :

Ἀξία α' εἴδους + ἀξία β' εἴδους = ἀξία μείγματος.

$$432 + 1080 = (18 + 36) \cdot x \iff$$

$$54x = 1512 \iff x = \frac{1512}{54} \iff x = 28$$

ὥστε τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος ἀξίζει 28 δρχ.

Πρόβλημα 2ο. Ἕνας ἔμπορος θέλει ν' ἀναμείξη 15 κιλὰ λάδι τῶν 18 δρχ. τὸ κιλό, μὲ λάδι τῶν 25 δρχ. τὸ κιλό, γιὰ νὰ σχηματίση μεῖγμα, τοῦ ὁποίου τὸ κιλὸ νὰ ἀξίζη 22 δρχ. Πόσα κιλὰ πρέπει ν' ἀναμείξη ἀπὸ τὸ λάδι τῶν 25 δρχ.

Ἐπίλυσις. Ἄς καλέσουμε x τὸν ἀριθμὸ τῶν κιλῶν τοῦ λαδιοῦ τῶν 25 δρχ., τότε πρέπει :

Ἀξία α' εἴδους + ἀξία β' εἴδους = ἀξία μείγματος.

Ἀλλὰ ἀξία α' εἴδους : $15 \cdot 18$ δρχ. $= 270$ δρχ.

» β' » $x \cdot 25$ » $= 25\,x$ δρχ.

» μείγματος $(15 + x) \cdot 22$ δρχ.

ἄρα $270 + 25 \cdot x = (15 + x) \cdot 22$

Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωσι καὶ ἔχουμε :

$$270 + 25 \cdot x = (15 + x) \cdot 22 \iff 270 + 25x = 330 + 22x \iff$$

$$25x - 22x = 330 - 270 \iff 3x = 60 \iff x = 20$$

ὥστε πρέπει νὰ πάρη 20 κιλὰ ἀπὸ τὸ λάδι τῶν 22 δρχ.

Πρόβλημα 3ο. Κατὰ ποῖον λόγον ποσοτήτων πρέπει ν' ἀναμείξουμε λίπος τῶν 20 δρχ. κατὰ κιλὸ μὲ λίπος τῶν 28 δρχ. κατὰ κιλὸ ὥστε νὰ σχηματίσουμε μεῖγμα τῶν 26 δρχ. κατὰ κιλό ;

Ἄς καλέσουμε **x** τὸν ἀριθμὸ τῶν κιλῶν τοῦ α' εἴδους ποὺ χρειάζεται γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε μιὰ ποσότητα τοῦ ζητουμένου μείγματος καὶ ψ τὸν ἀριθμὸν τῶν κιλῶν τοῦ β' εἴδους, τότε θὰ ἔχουμε :

Ἀξία α' εἴδους : $x \cdot 20$ δρχ.

» β' » $\psi \cdot 28$ »

» μείγματος $(x + \psi) \cdot 26$ δρχ.

Σύμφωνα δὲ μὲ τὴν ἰσότητα :

Ἀξία α' εἴδους + ἀξία β' εἴδους = ἀξία μείγματος

ἔχουμε : $$20x + 28\psi = (x + \psi)\,26 \qquad (1)$$

Ἀλλὰ αὐτὴ ἡ ἐξίσωσις περιέχει δύο ἀγνώστους. Δὲν ζητᾶμε ὅμως καὶ τοὺς δύο. Ζητᾶμε τὸν λόγο $\frac{x}{\psi}$, τὸν ὁποῖον εὑρίσκουμε ἀπὸ τὴν (1) ὡς ἑξῆς :

$$20x + 28\psi = (x + \psi) \cdot 26 \iff 20x + 28\psi = 26x + 26\psi \iff$$

$$20x - 26x = 26\psi - 28\psi \iff$$

$$-6x = -2\psi \iff 6x = 2\psi \iff$$

$$\frac{x}{\psi} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος ποσοτήτων, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ γίνη ἡ ἀνάμιξις, εἶναι $\frac{1}{3}$.

Πρέπει δηλαδὴ νὰ ἀναμειγνύουμε
1 μέρος βάρους ἀπὸ τὸ λίπος τῶν 20 δρ.
μὲ 3 μέρη » » » » 28 δρ.
γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε μεῖγμα τῶν 26 δρ.

II. **Κράματα.** Ὅπως εἶναι γνωστόν, τὰ διάφορα μέταλλα ἔχουν διάφορες ἰδιότητες καὶ τιμὲς μεταξύ των. Συχνά, γιὰ νὰ ἀνταποκριθοῦμε σὲ ἀπαιτήσεις τεχνικὲς ἢ τῶν ἀγοραστῶν, ἀναμειγνύουμε διάφορα εἴδη μετάλλων γιὰ νὰ σχηματίσουμε ἕνα μεῖγμα μὲ τὶς ἰδιότητες ἢ τὴν ἀξία ποὺ ἐπιθυμοῦμε. Τὸ μεῖγμα, ποὺ προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνάμειξι δύο ἢ περισσοτέρων μετάλλων, λέγεται **κρᾶμα.** Τὰ προβλήματα τὰ σχετικὰ μὲ τὰ κράματα ἐπιλύονται ὅπως καὶ τὰ προβλήματα ἀναμείξεως.

Στὸ ἐμπόριο γίνεται συχνὰ ἀνάμειξις πολυτίμων μετάλλων, π. χ. χρυσοῦ μὲ ἄλλα φθηνὰ μέταλλα π. χ. χαλκοῦ γιὰ νὰ σχηματισθῇ κρᾶμα ἐπιθυμητῆς ἀξίας ἢ μὲ ἐπιθυμητὲς ἰδιότητες.

Ἡ ἀξία ἑνὸς κράματος καθορίζεται ἀπὸ τὸ ποσοστὸ τοῦ χρυσοῦ ἢ τοῦ πολυτίμου μετάλλου ποὺ περιέχει.

Ὁ λόγος τοῦ βάρους τοῦ χρυσοῦ ἢ τοῦ πολυτίμου μετάλλου πρὸς τὸ ὁλικὸ βάρος τοῦ κράματος λέγεται **τίτλος** τοῦ κράματος καὶ ἐκφράζεται συνήθως σὲ ποσοστὸ «τοῖς χιλίοις».

Π. χ. ὅταν λέμε ὅτι ἕνα κόσμημα ἔχει τίτλο 0,600 ἐννοοῦμε ὅτι σὲ 1000 gr. βάρους τοῦ κοσμήματος αὐτοῦ τὰ 600 gr. εἶναι πολύτιμο μέταλλο.

Στὸ ἐμπόριο χρησιμοποιοῦνται καὶ τὰ **καράτια.** Ὅταν λέμε ὅτι ἕνα δακτυλίδι εἶναι 18 καρατίων ἐννοοῦμε ὅτι: σὲ 24 gr. βάρους τοῦ κράματος αὐτοῦ τὰ 18 gr. εἶναι καθ. χρυσός.

Σημείωσις: Τὸ καράτιο χρησιμοποιεῖται καὶ ὡς μονὰς βάρους πολυτίμων μετάλλων. Βάρος 1 καρατίου = 0,2 gr.

Παραδείγματα:

1) Συγχωνεύουμε 2 gr. χρυσοῦ μὲ 3 gr. χαλκοῦ. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Εἶναι: $\dfrac{\text{Βάρος καθ. χρυσοῦ}}{\text{Βάρος κράματος}} = \dfrac{2}{5} = \dfrac{400}{1000}$

ὥστε ὁ τίτλος εἶναι 0,400

2) Συγχωνεύουμε 3 gr καθ. χρυσοῦ μὲ 1 gr χαλκοῦ. Πόσων καρατίων εἶναι τὸ κράμα;

Ἔχουμε $\dfrac{\text{Βάρος καθ. χρυσοῦ}}{\text{Βάρος κράματος}} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{18}{24}$

ὥστε τὸ κράμα εἶναι 18 καρατίων.

Προβλήματα κραμάτων

1ο.) Συγχωνεύουμε 3gr κράματος τίτλου 0,800 μὲ 5gr κράματος τίτλου 0,600. Ποιὸς εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

Εἶναι: **Βάρος καθ. χρυσοῦ α΄ κράματος + βάρος καθ. χρυσοῦ β΄ κράματος = βάρος καθ. χρυσοῦ νέου κράματος.**

Βάρος σὲ gr, καθ. χρυσοῦ α΄ κράματος: $3 \cdot 0{,}800 = 2{,}400$
» » » » » β΄ » : $5 \cdot 0{,}600 = 3{,}000$
» » » » » νέου » : $(3 + 5) \,.\, x$

ἔτσι ἔχουμε τὴν ἐξίσωσι

$$2{,}400 + 3 = (3 + 5) \cdot x \iff 8x = 5{,}40$$
$$\iff x = \frac{5{,}400}{8} = 0{,}675$$

ὥστε ὁ τίτλος τοῦ νέου κράματος εἶναι 0,675

2ο) Κατὰ ποιὸν λόγο ποσοτήτων πρέπει νὰ συγχωνεύσουμε κράμα τίτλου 0,800 μὲ κράμα τίτλου 0,600 γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε κράμα τίτλου 0,750;

Εἶναι: **Βάρος καθ. χρυσοῦ α΄ κράματος + βάρος καθ. χρυσοῦ β΄ κράματος = βάρος καθ. χρυσοῦ νέου κράματος.**

Ἂς καλέσουμε x καὶ ψ ἀντιστοίχως τὰ βάρη (σὲ gr) τοῦ α΄ καὶ β΄ κράματος ποὺ θὰ χρειασθῇ νὰ συγχωνεύσουμε γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε τὸ ζητούμενο κράμα.

Ἔχουμε: Βάρος καθ. χρυσοῦ α΄ κράματος (σὲ gr): $0{,}800 \cdot x$
» » » β΄ » » : $0{,}600 \cdot \psi$
» » » νέου » » : $0{,}750 \cdot (x + \psi)$

Σχηματίζουμε τὴν ἐξίσωσι:

$$0{,}800 \cdot x + 0{,}600 \cdot \psi = 0{,}750 \cdot (x + \psi) \qquad (1)$$

Ἐπιλύουμε τὴν ἐξίσωσι (1)

$$0{,}800x + 0{,}600\psi = 0{,}750(x + \psi) \iff$$
$$0{,}800x - 0{,}750x = 0{,}750\psi - 0{,}600\psi \iff$$

$$0{,}050x = 0{,}150\psi \iff \frac{x}{\psi} = \frac{0{,}150}{0{,}050} = \frac{3}{1}$$

ὥστε ὁ ζητούμενος λόγος εἶναι $\frac{3}{1}$

Πρέπει δηλαδὴ νὰ συγχωνεύσουμε 3 μέρη βάρους ἀπὸ τὸ α΄ κράμα μὲ 1 μέρος βάρους ἀπὸ τὸ β΄ κράμα γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε κράμα τίτλου 0,750.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

347) Θέλει ἕνας νὰ ἀναμείξῃ 30 kg λίπους τῶν 23 δρ/kg μὲ 45 kg λίπους τῶν 32 δρ/kg. Πόσο θὰ στοιχίσῃ τὸ kg τοῦ μείγματος.

348) Ἀναμειγνύει ἕνας 30 kg ἐλαίου τῶν 18 δρ/kg μὲ 60 kg ἄλλου ἐλαίου τῶν 26 δρ/kg. Πόσο πρέπει νὰ πωλήσῃ τὸ κιλὸ τοῦ μείγματος ὥστε νὰ κερδίζῃ 10 % ἐπὶ τῆς τιμῆς κόστους.

349) Πόσα κιλὰ βουτύρου τῶν 60 δρ/kg πρέπει νὰ ἀναμείξουμε μὲ 120 kg βουτύρου τῶν 48 δρ/kg ὥστε τὸ kg τοῦ μείγματος νὰ ἀξίζῃ 56 δρ.

350) Μὲ ποῖον λόγον ποσοτήτων πρέπει νὰ ἀναμείξουμε βούτυρο τῶν 52 δρ/kg μὲ βούτυρο τῶν 64 δρ/kg ὥστε τὸ μεῖγμα νὰ ἀξίζῃ 56 δρ. τὸ κιλό.

351) Πῶς πρέπει νὰ ἀναμείξουμε λῖπος τῶν 20 δρ/kg μὲ λῖπος τῶν 36 δρ/kg ὥστε νὰ σχηματίσουμε μεῖγμα τὸ ὁποῖον νὰ πωλοῦμε 26,40 δρ/kg γιὰ νὰ κερδίζουμε 10 % ἐπὶ τῆς ἀξίας του.

352) Ἂν συντήξουμε 4 gr ἀργύρου κράματος τίτλου 0,800 μὲ 6 gr ἄλλου ἀργυροῦ κράματος τίτλου 0,900 ποιὸς θὰ εἶναι ὁ τίτλος τοῦ κράματος ποὺ θὰ πάρουμε.

352) Ἕνας χρυσοχόος ἔχει δυὸ κράματα ἀργύρου. Τὸ α΄ ἔχει τίτλο 0,900 καὶ τὸ β΄ 0,750. Κατὰ ποῖον λόγον ποσοτήτων πρέπει νὰ συντήξῃ τὰ δύο κράματα ὥστε νὰ λάβῃ κράμα τίτλου 0,800;

353) Ἕνας χρυσοχόος συνεχώνευσε 8 gr. χρυσοῦ κράματος τίτλου 0,900 μὲ ἄλλο χρυσὸ κράμα τίτλου 0,600 κι' ἔλαβε κράμα τίτλου 0,720. Μὲ ποιὸ λόγο ποσοτήτων συνεχώνευσε τὰ δύο κράματα;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

354) Ποιὲς ἀναλογίες μπορεῖτε νὰ σχηματίσετε μὲ τὶς διατεταγμένες τετράδες τῶν ἀριθμῶν:

α) 2, 5, 4, 10 β) 12, 18, 28, 42 γ) 3, 4, 12, 16

355) Νὰ ἐπιλύσετε τὶς ἐξισώσεις

$$\frac{x-1}{3} = \frac{2x}{5}, \qquad \frac{3x+1}{4} = \frac{x}{2}$$

356) Νὰ ἐπιλύσετε τὴν ἐξίσωσι

$$\frac{\frac{x}{2}}{5} = \frac{\frac{3x-1}{2}}{\frac{5}{8}}$$

357) Ἂν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{3}$ νὰ ὑπολογίσετε τὸ κλάσμα $\frac{\alpha+2}{\beta+3}$

358) Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν σχέσιν $\psi = -2x$

359) Νὰ παραστήσετε γραφικῶς τὴν σχέσιν $\psi = 2x - 3$

360) Νὰ γράψετε, μὲ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων του, τὸ σύνολο:

$x\psi = 12$ ὅπου $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ $\psi \in \{6, 3, 12\}$

361) Ἡ ἀξία ἑνὸς οἰκοπέδου ηὐξήθη κατὰ 12% καὶ ἡ τιμή του ἀνῆλθε σὲ 336000 δρχ. Πόση ἦτο ἡ τιμὴ τοῦ οἰκοπέδου πρὸ τῆς αὐξήσεως

362) Ἕνας ἔμπορος ἀγόρασε 120m ὑφάσματος κι' ἔδωσε 3360 δρχ καὶ το ἐπώλησε πρὸς 35 δρ/m. Πόσο % κερδίζει

363) Νὰ μοιρασθοῦν 60.000 δρχ. σὲ μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 1/2 καὶ 1/4.

364) Τὸ γάλα δίδει 23% κρέμα καὶ 20% βούτυρο. Πόσο γάλα χρειάζεται γιὰ τὴν παραγωγὴν 28kg βουτύρου

365) Ἕνας παντοπώλης ἀγόρασε σαπούνι πρὸς 9,60δρ/kg. Μέχρι τῆς πωλήσεώς του τὸ σαποῦνι εἶχε φύραν 4%. Πόσο ἔπρεπε νὰ πωλῆ τὸ σαποῦνι γιὰ νὰ κερδίζῃ 10%.

366) Ἐτόκισε ἕνας τὰ 3/4 τοῦ κεφαλαίου του πρὸς 6%, τὸ δὲ ὑπόλοιπον πρὸς 5% κι' ἔλαβε συνολικὸν ἐτήσιον τόκον 920 δρχ. Ποῖον ἦτο τὸ ὁλικὸν κεφάλαιον.

367) Ἕνα ποσὸν ἐμοιράσθη μεταξὺ τριῶν προσώπων ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 20, 15, 12. Τὸ μερίδιο τοῦ α' ἦτο 4.000 δρχ. Ποῖον ἦτο ὁλόκληρον τὸ ποσόν.

368) Ἀπὸ δύο ἐμπόρους ὁ α' κατέθεσε στὴν κοινὴν ἐπιχείρησιν 12600 δρχ. περισσότερα ἀπὸ τὸν β'. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ κεφάλαια τοῦ καθενὸς ἂν γνωρίζετε ὅτι εἶναι ἀνάλογα μὲ τοὺς ἀριθμοὺς 5 καὶ 9.

369) Χρυσοχόος ἔχει 5 gr χρυσὸν τίτλου 0,800. Πόσον καθαρὸν χρυσὸν πρέπει νὰ προσθέσῃ γιὰ νὰ κατασκευάσῃ κόσμημα τίτλου 0.900.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΣΤ΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ζ΄

§ 60. Θέσεις εὐθείας καὶ περιφερείας

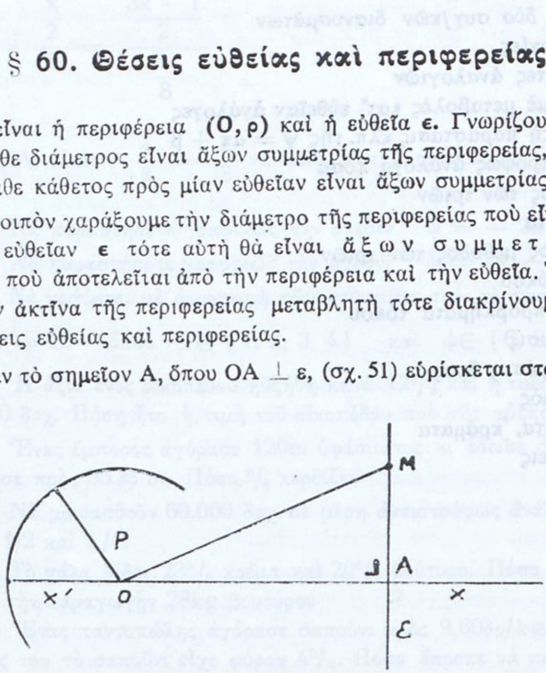
Ἄς εἶναι ἡ περιφέρεια **(Ο, ρ)** καὶ ἡ εὐθεῖα **ε.** Γνωρίζουμε ὅτι

α) κάθε διάμετρος εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς περιφερείας,

β) κάθε κάθετος πρὸς μίαν εὐθεῖαν εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς.

Ἄν λοιπὸν χαράξουμε τὴν διάμετρο τῆς περιφερείας ποὺ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε τότε αὐτὴ θὰ εἶναι ἄ ξ ω ν σ υ μ μ ε τ ρ ί α ς τοῦ σχήματος ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν περιφέρεια καὶ τὴν εὐθεῖα. Ἄν θεωρήσουμε τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας μεταβλητὴ τότε διακρίνουμε τρεῖς δυνατὲς θέσεις εὐθείας καὶ περιφερείας.

Ι. Ἄν τὸ σημεῖον Α, ὅπου ΟΑ $\perp$ ε, (σχ. 51) εὑρίσκεται στὸ ἐξωτερικὸ



Σχ. 51

τῆς περιφερείας **(Ο, ρ)** ὁπότε εἶναι : **ΟΑ > ρ.** Ἄς εἶναι Μ ἕνα τυχαῖο σημεῖο τῆς εὐθείας **ε.** Ἐπειδὴ ΟΜ > ΟΑ (πλαγία καὶ κάθετος) θὰ εἶναι καὶ ΟΜ > ρ. Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε ἄλλο σημεῖο τῆς εὐθείας **ε.**

Δηλαδή : Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας **ε** εὑρίσκονται στὸ ἐξωτερικὸ τῆς περιφερείας καὶ ἡ εὐθεῖα **ε** εἶναι **ἐξωτερικὴ** τῆς περιφερείας.

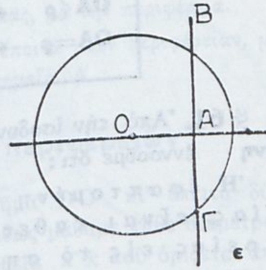
$$\mathbf{OA > \rho \Rightarrow \varepsilon}\ \textbf{ἐξωτερικὴ τῆς περιφερείας}$$

ἢ

$$\mathbf{OA > \rho \Rightarrow (O,\rho) \cap \varepsilon = \varnothing}$$

ΙΙ. Ἄν τὸ σημεῖον Α εὑρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς περιφερείας.

Ἂν εἶναι δηλαδὴ **ΟΑ** $<$ **ρ.** Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἡ εὐθεῖα καὶ ἡ περιφέρεια ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Β, Γ τὰ ὁποῖα εἶναι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὰ ὡς πρὸς τὴν διάμετρο ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἡ εὐθεῖα λέγεται **τέμνουσα** τῆς περιφερείας (σχ. 52).



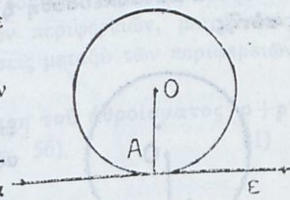
Σχ. 52

$$\mathbf{OA < \rho \Rightarrow (O,\rho) \cap \epsilon = \{B, \Gamma\}}$$

III. Ἂν εἶναι **ΟΑ = ρ** τὸ σημεῖον Α ἀνήκει στὴν περιφέρεια καὶ εἶναι τὸ **μόνο** κοινὸ σημεῖο τῆς εὐθείας **ε** καὶ τῆς περιφερείας **(Ο,ρ)** (σχ. 53)

$$\mathbf{OA = \rho \Rightarrow (O,\rho) \cap \epsilon = \{A\}}$$

Στὴν περίπτωσιν αὐτήν, ἡ εὐθεῖα ε λέγεται **ἐφαπτομένη** τῆς περιφερείας· τὸ δὲ σημεῖον Α **σημεῖον ἐπαφῆς**.



Σχ. 53

Οἱ τρεῖς προηγούμενες προτάσεις ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως:

Δ η λ α δ ή : **Ἂν ἡ εὐθεῖα ε εἶναι τέμνουσα τῆς περιφερείας (Ο,ρ) τότε θὰ εἶναι ΟΑ** $<$ **ρ.**

Διότι ἀλλοιῶς θὰ εἶναι: ΟΑ $>$ ρ ἢ ΟΑ $=$ ρ Ἄλλη περίπτωσις δὲν ὑπάρχει.

Ἀλλὰ στὶς δύο αὐτὲς περιπτώσεις σύμφωνα μὲ τὶς συνεπαγωγὲς Ι καὶ ΙΙ ἔπρεπε ἡ εὐθεῖα **ε** νὰ ἦταν ἐξωτερικὴ ἢ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας, περιπτώσεις ποὺ ἀποκλείονται ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι, Ἄρα εἶναι ΟΑ $<$ ρ

ὥστε: $\mathbf{\epsilon}$ **τέμνουσα τῆς (Ο, ρ)** $\Rightarrow$ **ΟΑ** $<$ **ρ**

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{\epsilon \cap (O, \rho) = \{B, \Gamma\} \Rightarrow OA < \rho} \qquad (\mathrm{I}')$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε ὅτι:

ε ἐφαπτομένη τῆς (Ο, ρ) $\Rightarrow$ **ΟΑ = ρ**

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{\epsilon \cap (O, \rho) = \{A\} \Rightarrow OA = \rho} \qquad (\mathrm{II}')$$

καὶ **ε ἐξωτερικὴ τῆς (Ο, ρ)** $\Rightarrow$ **ΟΑ** $>$ **ρ**

$$\text{ἢ} \quad \mathbf{\epsilon \cap (O, \rho) = \varnothing \Rightarrow OA > \rho} \qquad (\mathrm{III}')$$

Οἱ συνεπαγωγὲς Ι, ΙΙ, ΙΙΙ, καὶ Ι΄, ΙΙ΄, ΙΙΙ΄ συμπτύσσονται στὶς ἀκόλουθες ἰσοδυναμίες:

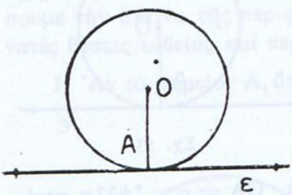
OA $>$ ρ	$\Longleftrightarrow$	εὐθεῖα ε ἐξωτερική
OA $<$ ρ	$\Longleftrightarrow$	» ε τέμνουσα
OA $=$ ρ	$\Longleftrightarrow$	» ε ἐφαπτομένη

§ **61.** Ἀπὸ τὴν ἰσοδυναμία **OA = ρ $\Longleftrightarrow$ εὐθεῖα ε ἐφαπτομένη** ἐννοοῦμε ὅτι:

Ἡ ἐφαπτομένη σ' ἕνα σημεῖον Α μιᾶς περιφερείας, εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἀκτῖνα τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α.

Ἡ πρότασις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὶς ἀκόλουθες δύο κατασκευές.

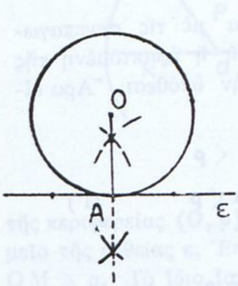
1) **Νὰ κατασκευασθῆ ἡ ἐφαπτομένη περιφερείας σ' ἕνα σημεῖον Α αὐτῆς.**



Σχ. 54

Χαράζουμε τὴν ἀκτῖνα ΟΑ (σχ. 54) κι' ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ε ποὺ εἶναι κάθετος πρὸς αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον Α.

2) **Νὰ κατασκευασθῆ περιφέρεια μὲ ἀκτῖνα ρ, ἐφαπτομένη μιᾶς ὁρισμένης εὐθείας ε σ' ἕνα σημεῖον Α αὐτῆς.**



Σχ. 55

Ἂς εἶναι ε ἡ εὐθεῖα καὶ Α τὸ σημεῖον αὐτῆς εἰς τὸ ὁποῖον θέλουμε ἡ περιφέρεια νὰ ἐφάπτεται μὲ αὐτὴν (σχ. 55).

1) Στὸ σημεῖο Α ὑψώνουμε κάθετο πρὸς τὴν ε.

2) Ἐπὶ τῆς καθέτου λαμβάνουμε τμῆμα ΑΟ ἴσο μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ τῆς περιφερείας.

3) Μὲ κέντρο τὸ σημεῖο Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ = ρ γράφουμε περιφέρεια ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη (γιατί;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

370) Νὰ χαράξετε μία περιφέρεια καὶ μία διάμετρο ΑΒ αὐτῆς. Ἔπειτα νὰ χαράξετε τὶς ἐφαπτόμενες τῆς περιφερείας στὰ σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς. Τί παρατηρεῖτε;

371) Νὰ χαράξετε μίαν περιφέρειαν καὶ δύο ἐφαπτόμενες αὐτῆς. Νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα τῶν ἐφαπτομένων ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς αὐτῶν καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, τῆς κάθε μιᾶς, μὲ τὴν περιφέρεια.

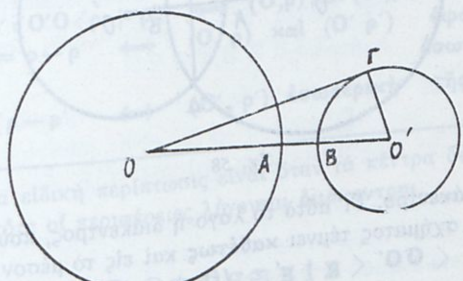
372) Νὰ γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ κι' ἔπειτα μίαν περιφέρειαν, μὲ ἀκτῖνα 3 cm, ποὺ θὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ στὸ σημεῖο Α.

§ 62. Σχετικὲς θέσεις δύο περιφερειῶν

Σ' ἕνα ἐπίπεδο χαράζουμε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΟΟ' κι' ἔπειτα δύο περιφέρειες (Ο, ρ) καὶ (Ο', ρ'). Ἐπειδή, καθὼς μάθαμε κάθε διάμετρος εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῆς περιφερείας ἡ εὐθεῖα $x'x$ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ τμῆμα ΟΟ' θὰ εἶναι **ἄξονας συμμετρίας** τοῦ σχήματος τῶν δύο περιφερειῶν. Τὸ τμῆμα ΟΟ' λέγεται **διάκεντρος** τῶν περιφερειῶν.

Ἂν θεωρήσουμε τὶς ἀκτῖνες ρ, ρ' τῶν περιφερειῶν, μεταβλητές τότε διακρίνουμε τὶς ἀκόλουθες 5 δυνατὲς θέσεις μεταξὺ τῶν περιφερειῶν τούτων.

Ι. **Ἡ διάκεντρος ΟΟ' εἶναι μεγαλύτερη τοῦ ἀθροίσματος ρ+ρ' τῶν ἀκτίνων** $\mathbf{OO' > \rho + \rho'}$ (σχ. 56). (1)



Σχ. 56

Ἂν ὑπῆρχε ἔστω ἕνα κοινὸ σημεῖο Γ τῶν δύο περιφερειῶν θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι $\quad O\Gamma + O'\Gamma = \rho + \rho'$ (2)

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ σχῆμα διακρίνουμε ὅτι: $\quad O\Gamma + O'\Gamma > OO'$ (3)

(εὐθεῖα καὶ τεθλασμένη μὲ τὰ ἴδια ἄκρα)

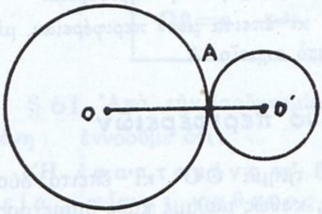
Ἐπειδὴ ἐδόθη ὅτι $OO' > \rho + \rho'$ θὰ εἶναι καὶ $O\Gamma + O'\Gamma > \rho + \rho$.

Ὥστε δὲν μπορεῖ νὰ ἰσχύει ἡ (2), δηλαδὴ δὲν ὑπάρχει κανένα κοινὸ σημεῖο.

$$\mathbf{OO' > \rho + \rho \Rightarrow (O,\rho) \cap (O',\rho') = \varnothing}$$

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἡ μία περιφέρεια εἶναι **ἐξωτερικὴ** τῆς ἄλλης.

II) **Ἡ διάκεντρος $ΟΟ'$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων $ΟΟ' = ρ + ρ'$** (σχ. 57).



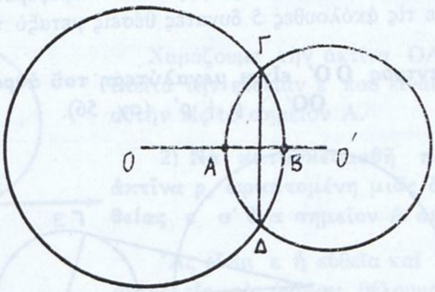
Σχ. 57

Οἱ περιφέρειες τότε ἔχουν ἕνα **μόνον** κοινὸ σημεῖο Α ποὺ εὑρίσκεται ἐπάνω στὴ διάκεντρο (σχ. 57).

$$ΟΟ' = ρ + ρ' \Rightarrow (Ο, ρ) \cap (Ο', ρ') = \{Α\}$$

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ λέγομε ὅτι οἱ περιφέρειες **ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.**

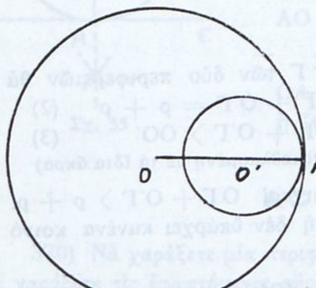
III) Ἂν εἶναι : $ρ - ρ' < ΟΟ' < ρ + ρ'$ (σχ. 58), τότε οἱ περιφέρειες τέμνονται σὲ δύο σημεῖα Γ, Δ ποὺ εἶναι σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ὰ



Σχ. 58

ὡς πρὸς τὴν διάκεντρο. Γι' αὐτὸ τὸ λόγο ἡ διάκεντρος, ποὺ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος τέμνει **καθέτως** καὶ εἰς τὸ μέσον τὴν ΓΔ

$$ρ - ρ' < ΟΟ' < ρ + ρ' \Rightarrow (Ο,ρ) \cap (Ο',ρ') = \{Γ,Δ\}.$$



Σχ. 59

IV) Ἂν εἶναι :

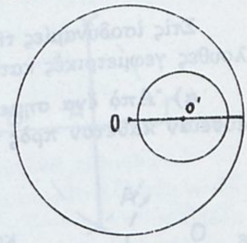
$$ΟΟ' = ρ - ρ' \quad (ρ > ρ')$$

τότε οἱ περιφέρειες ἔχουν ἕνα **μόνον** κοινὸ σημεῖο, τὸ Α, ποὺ εὑρίσκεται στὴ προέκτασι τῆς διακέντρου (σχ. 59).

Δηλαδὴ ὅπως λέμε, οἱ περιφέρειες **ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς**

$$ΟΟ' = ρ - ρ' \Rightarrow (Ο,ρ) \cap (Ο',ρ') = \{Α\}$$

V) Ἂν εἶναι : $\mathbf{OO' < \rho - \rho'}$ $(\rho > \rho')$ τότε ἡ (O',ρ') εὑρίσκεται ὁλόκληρη στὸ ἐσωτερικὸ τῆς (O,ρ) (σχ. 60)



Σχ. 60

$$\mathbf{OO' < \rho - \rho' \Rightarrow (O,\rho) \cap (O,\rho') = \varnothing}$$

Ἄλλη σχέσις μεγέθους μεταξὺ τῆς διακέντρου ΟΟ' καὶ τῶν $\rho + \rho'$ καὶ $\rho - \rho'$ δὲν ὑπάρχει. Σὲ κάθε περίπτωσι δέ, ἰσχύει ἡ μία καὶ μόνον ἡ μία ἀπὸ αὐτὲς τὶς σχέσεις ἐνῶ οἱ ἄλλες δὲν ἰσχύουν. Οἱ σκέψεις αὐτὲς μᾶς ὁδηγοῦν στὸ συμπέρασμα ὅτι :

Οἱ παραπάνω συνεπαγωγὲς ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως. Ἔχουμε λοιπὸν τὶς ἀκόλουθες ἰσοδυναμίες σχετικὰ μὲ τὶς δυνατὲς θέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ δύο περιφερειῶν.

1)	$\mathbf{OO' > \rho + \rho}$	$\Longleftrightarrow$	**$(O\ \rho,)$ καὶ $(O',\ \rho')$ ἐξωτερικές.**
2)	$\mathbf{OO' = \rho + \rho'}$	$\Longleftrightarrow$	**$(O,\ \rho)$ καὶ $(O'\ \rho)$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς.**
3)	$\mathbf{\rho - \rho' < O'O < \rho + \rho'}$	$\Longleftrightarrow$	**(O,ρ) καὶ (O',ρ') τέμνονται.**
4)	$\mathbf{OO' = \rho - \rho'}$	$\Longleftrightarrow$	**$(O,\ \rho)$ καὶ $(O'\ \rho')$ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.**
5)	$\mathbf{OO' < \rho - \rho'}$	$\Longleftrightarrow$	**$(O',\ \rho')$ ἐσωτερικὴ τῆς $(O,\ \rho)$**

Σημ. Μία εἰδικὴ περίπτωσις εἶναι ὅταν τὰ κέντρα δύο περιφερειῶν ταυτίζονται, τότε οἱ περιφέρειες λέγονται **ὁμόκεντροι.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

373) Χωρὶς νὰ χαράξετε περιφέρεις νὰ ἐξετάσετε τὶς σχετικὲς θέσεις δύο περιφερειῶν $(O,\ \rho)$ $(O',\ \rho')$ στὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις.

α) $(OO') = 6cm$ $\quad \rho = 3cm,\quad \rho' = 2cm$
β) $(OO') = 5cm$ $\quad \rho = 3cm,\quad \rho' = 2cm$
γ) $(OO') = 4cm$ $\quad \rho = 4{,}5cm\quad \rho' = 3cm$
δ) $(OO') = 2cm$ $\quad \rho = 6cm,\quad \rho' = 4cm$
ε) $(OO') = 1cm$ $\quad \rho = 4cm,\quad \rho' = 2cm$

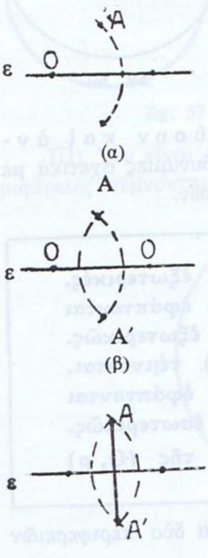
374) Γράψατε μίαν περιφέρειαν κι' ἔπειτα μίαν ἄλλην ποὺ νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς ἐξωτερικῶς.

375) Γράψατε μίαν περιφέρειαν κι' ἔπειτα μίαν ἄλλην ποὺ νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς ἐσωτερικῶς.

§ 63. Γεωμετρικὲς κατασκευὲς

Στὶς ἰσοδυναμίες τῆς προηγουμένης παραγράφου στηρίζονται οἱ ἀκόλουθες γεωμετρικὲς κατασκευές.

α) Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, ἐξωτερικὸ μιᾶς εὐθείας ε, νὰ χαράξετε εὐθεῖαν κάθετον πρὸς τὴν ε.



Σχ. 61

1) Μὲ κέντρον ἕνα σημεῖον Ο, τῆς εὐθείας ε, καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφουμε περιφέρεια (σχ. 61α).

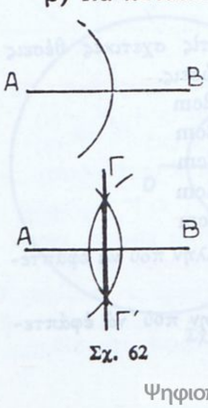
2) Μὲ κέντρο ἕνα ἄλλο σημεῖο Ο′ τῆς ε, καὶ ἀκτῖνα Ο′Α γράφουμε περιφέρεια (σχ. 61β).

3) Χαράζουμε τὴν κοινὴ χορδὴ ΑΑ′ τῶν περιφερειῶν (σχ. 61γ).

Τὰ σημεῖα Α, Α′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖα ε ποὺ εἶναι ἄξονας συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Γι' αὐτὸ ἡ ΑΑ′ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ε καὶ μάλιστα διχοτομεῖται ἀπὸ αὐτήν.

β) Νὰ κατασκευασθῆ ἡ μεσοκάθετος εὐθυγρ. τμήματος ΑΒ.



Σχ. 62

1) Μὲ κέντρο τὸ ἄκρον Α καὶ ἀκτῖνα μεγαλύτερη ἀπὸ $\frac{AB}{2}$ γράφουμε περιφέρεια (σχ. 62).

2) Μὲ κέντρο τὸ ἄλλο ἄκρον Β καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ τὴ προηγούμενη γράφουμε περιφέρεια (σχ. 62).

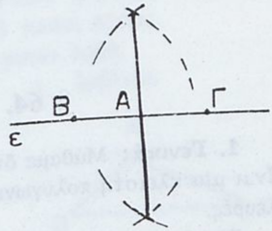
3) Χαράζουμε τὸ τμῆμα ΓΓ′ ποὺ ἑνώνει τὰ σημεῖα τομῆς Γ, Γ′ τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

Η ΓΓ′ εἶναι μ ε σ ο κ ά θ ε τ ο ς τῆς ΑΒ.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο χωρίζουμε ἕνα εὐθυγρ. τμῆμα σὲ 2 ἴσα μέρη.

γ) Ἀπὸ ἕνα ὁρισμένο σημεῖο Α εὐθείας ε νὰ χαράξουμε εὐθεῖα κάθετο πρὸς αὐτήν.

Ἂν ἐπὶ τῆς εὐθείας ε σημειώνουμε δύο σημεῖα Β, Γ συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ Α (δηλαδὴ ΑΒ = ΑΓ) τότε τὸ πρόβλημά μας ἀνάγεται στὴ χάραξι τῆς μεσοκαθέτου τοῦ τμήματος ΒΓ (σχ. 63).



Σχ. 63

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

376) Νὰ χαράξετε μίαν εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὸ ἄκρον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

377) Μὲ τὸ χάρακα καὶ τὸ διαβήτη νὰ χωρίσετε σὲ 2, 4, 8 ἴσα μέρη ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ.

378) Νὰ γράψετε ἕνα εὐθύγρ. τμῆμα ΑΒ κι' ἔπειτα μίαν περιφέρειαν μὲ διάμετρον αὐτό.

379) Νὰ χαράξετε μίαν περιφέρειαν κι' ἔπειτα μιὰν εὐθεῖαν ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας σ' ἕνα ὁρισμένο σημεῖον Α αὐτῆς.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Πῶς θὰ διακρίνουμε ἂν μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας;

2) Πῶς τέμνεται ἡ ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας μὲ τὴν ἀκτῖνα στὸ σημεῖο ἐπαφῆς;

3) Τί γνωρίζετε γιὰ τὴ κοινὴ χορδὴ δύο τεμνομένων περιφερειῶν;

4) Πότε ἡ κοινὴ χορδὴ εἶναι κάθετος στὸ μέσον τῆς διακέντρου.

5) Πῶς θὰ κατασκευάσετε δύο περιφέρειες
 α) ποὺ νὰ ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς;
 β) » » » ἐσωτερικῶς;

5) Πῶς θὰ χωρίσετε ἕνα εὐθ. τμῆμα σὲ 2, 4, 8, 16, 32 ..... ἴσα μέρη;

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Ζ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄

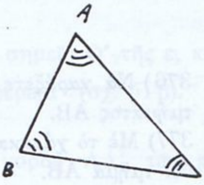
§ 64. Περὶ τοῦ τριγώνου

1. Γενικά: Μάθαμε ὅτι τὸ τρίγωνο εἶναι τὸ ἁπλούστερο πολύγωνο. Εἶναι μία κλειστὴ πολυγωνικὴ γραμμή, κυρτὴ καὶ ἐπίπεδη πάντοτε, μὲ 3 πλευρές.

Σὲ κάθε τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 67) διακρίνουμε:

α) 3 πλευρές: τὶς πλευρὲς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ.

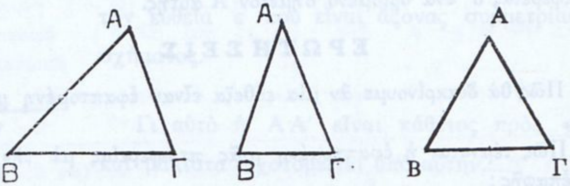
β) 3 γωνίες: τὶς κυρτὲς γωνίες, ΒΑΓ, ΑΒΓ, ΒΓΑ. Οἱ πλευρὲς κι᾿ οἱ γωνίες ἀποτελοῦν τὰ κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.



Σχ. 67

Ἀνάλογα μὲ τὶς πλευρὲς διακρίνουμε 3 εἴδη τριγώνων (σχ. 68).

Σχ. 68



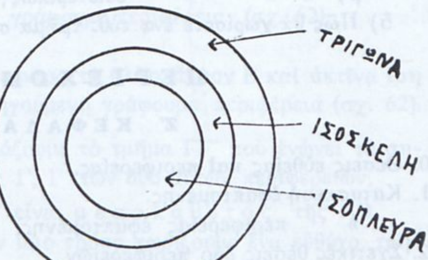
σκαληνό ἰσοσκελὲς ἰσόπλευρο

α) **Τὰ σκαληνὰ τρίγωνα ποὺ ἔχουν ἄνισες τὶς πλευρές.**

β) **» ἰσοσκελῆ » » » 2 πλευρὲς ἴσες.**

γ) **» ἰσόπλευρα » » » καὶ τὶς 3 πλευρὲς ἴσες.**

Στὸ διάγραμμα Venn σχ. 69, βλέπουμε ὅτι: Τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα εἶναι ὑποσύνολο τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων ἐνῷ τὰ ἰσόπλευρα ὑποσύνολο τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων.



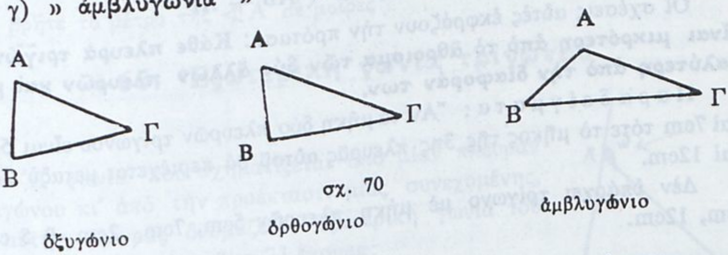
σχ. 69

Ἀνάλογα μὲ τὶς γωνίες διακρίνουμε πάλι 3 εἴδη τριγώνων (σχ. 70).

α) **Τὰ ὀξυγώνια τρίγωνα** ποὺ ἔχουν τὶς 3 γωνίες ὀξεῖες.

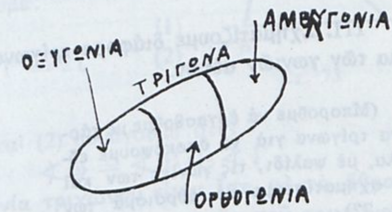
β) » **ὀρθογώνια** » » » μία γωνία ὀρθή.

γ) » **ἀμβλυγώνια** » » » » ἀμβλεῖα.



σχ. 70

Ἡ διάκρισις αὐτὴ τῶν τριγώνων εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων (σχ.71).



Σχ. 71

64 1. Γενικὲς ἰδιότητες τῶν τριγώνων

I. Μᾶς εἶναι γνωστὸν ὅτι ἡ μικρότερη γραμμὴ μεταξὺ δύο σημείων εἶναι τὸ εὐθυγρ. τμῆμα ποὺ ἑνώνει αὐτά.

Σύμφωνα μὲ αὐτό:

Κάθε πλευρὰ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

$$ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ \qquad (α)$$

$$ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ, \qquad ΑΒ < ΑΓ + ΓΒ,$$

II. Ἂν συγκρίνουμε μία πλευρὰ τριγώνου μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ εὑρίσκουμε ὅτι:

Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν αὐτοῦ.

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἂς εἶναι: $ΒΓ < ΑΓ < ΑΒ$

$ΑΒ < ΑΓ + ΒΓ$

Ἀπὸ τὰ 2 μέλη τῆς ἀνισότητος ἀφαιροῦμε τὸ τμῆμα ΒΓ: $ΑΒ - ΒΓ < ΑΓ + ΒΓ - ΒΓ$

ὁπότε ἔχουμε: $ΑΓ > ΑΒ - ΒΓ \quad (1)$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε: $ΑΒ > ΑΓ - ΒΓ \quad (2) \quad (β)$

καί· $ΒΓ > ΑΒ - ΑΓ \quad (3)$

Οἱ ἀνισότητες (α) καὶ (β) συμπτύσσονται στὶς ἀκόλουθες:

$$ΑΓ - ΒΓ < ΑΒ < ΒΓ + ΑΓ$$
$$ΑΒ - ΒΓ < ΑΓ < ΑΒ + ΒΓ$$
$$ΑΒ - ΑΓ < ΒΓ < ΑΒ + ΑΓ$$

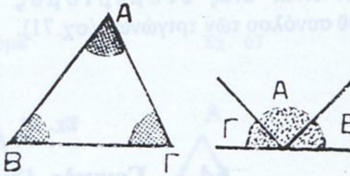
Οἱ σχέσεις αὐτὲς ἐκφράζουν τὴν πρότασι: **Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερη ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ μεγαλύτερη ἀπὸ τὴν διαφοράν των.**

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α: Ἂν τὰ μήκη δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι 5cm καὶ 7cm τότε τὸ μῆκος τῆς 3ης πλευρᾶς αὐτοῦ θὰ περιέχεται μεταξὺ 2cm καὶ 12cm.

Δὲν ὑπάρχει τρίγωνο μὲ μήκη πλευρῶν 5cm, 7cm, 2cm, ἢ 5 cm, 7cm, 12cm.

ΙΙΙ. Σχηματίζουμε διάφορα τρίγωνα κι' ἔπειτα εὑρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν αὐτῶν.

(Μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε μὲ χάρτινα τρίγωνα γιὰ νὰ ἀποκόψουμε εὔκολα, μὲ ψαλίδι, τὶς γωνίες των καὶ νά σχηματίσουμε τὸ ἄθροισμά των (σχ. 72).



Σχ. 72

Σ' ὅλες τὶς περιπτώσεις εὑρίσκουμε ὅτι: **τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τριγώνου εἶναι ἴσο μὲ μία ἀποπλατυσμένη γωνία.** (2 ὀρθὲς)

Σημείωσις. Ἡ πρότασις αὐτὴ ἀποδεικνύεται εὔκολα μὲ τὶς ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ποὺ θὰ ἐξετάσουμε σὲ ἄλλο κεφάλαιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

380) Νὰ βρῆτε στερεὰ ποὺ καταλήγουν σὲ τριγωνικὲς ἐπιφάνειες.

381) Νὰ χαράξετε διάφορα τρίγωνα καὶ νὰ ἐπαληθεύσετε τὶς γενικὲς ἰδιότητες τῶν τριγώνων.

382) Νὰ ἐξετάσετε γιατὶ ἡ διάκρισις τῶν τριγώνων σὲ ὀξυγώνια, ὀρθογώνια, ἀμβλυγώνια, εἶναι διαμερισμὸς τοῦ συνόλου τῶν τριγώνων.

383) Νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ ἕνα τρίγωνο δὲν μπορεῖ νὰ ἔχῃ δύο ὀρθὲς ἢ δύο ἀμβλεῖες γωνίες.

384) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ὑπάρχῃ τρίγωνο μὲ μήκη πλευρῶν 3 cm., 5 cm., 8 cm.

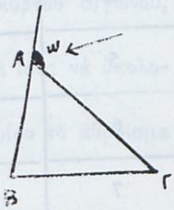
385) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $(\sphericalangle Α) = 50^{0}$, $(\sphericalangle Β) = 75^{0}$. Νὰ βρῆτε τὸ μέτρο τῆς γωνίας Γ.

386) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle \Gamma$ Νὰ βρῆτε τὸ μέτρο τῆς κάθε γωνίας αὐτοῦ σὲ μοῖρες.

387) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $\sphericalangle A = \sphericalangle B$ καὶ $\sphericalangle \Gamma = \frac{5}{9} L$ Νὰ βρῆτε τὸ μέτρο τῆς $\sphericalangle A$ σὲ μοῖρες

§ 65. Ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου

Ἡ γωνία ποὺ σχηματίζεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν τριγώνου κι' ἀπὸ τὴν προέκτασιν μιᾶς συνεχομένης, μὲ αὐτήν, πλευρᾶς ὀνομάζεται ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου. Ἀπὸ τὸ σχῆμα 73 ἔχουμε:



Σχ. 73

$$\sphericalangle A + \sphericalangle \omega = 2L \qquad (1)$$

καὶ

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma = 2L \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὴν σύγκρισιν τῶν (1) καὶ (2) συνάγουμε ὅτι:

$$\sphericalangle \omega = \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma$$

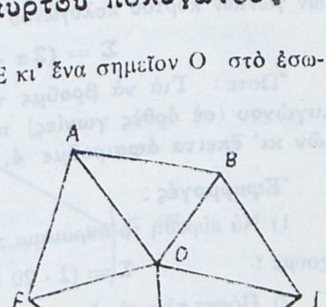
Ὥστε κάθε ἐξωτερικὴ γωνία τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μὴ ἐφεξῆς μὲ αὐτήν, ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

Παράδειγμα. Ἂν $(\sphericalangle B) = 65^0$, $(\sphericalangle \Gamma) = 55^0$, τότε $(\sphericalangle \omega) = 120^0$ (σχ. 73).

§ 66. Ἄθροισμα γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου.

Ἂς εἶναι τὸ κυρτὸ πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ κι' ἕνα σημεῖον Ο στὸ ἐσωτερικό.

Χαράζουμε τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Ἔτσι σχηματίζονται 5 τρίγωνα δηλαδὴ τόσα τρίγωνα ὅσος εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν 5 τριγώνων εἶναι $5 \cdot 2$ ὀρθὲς $= 10$ ὀρθές. Μέσα στὸ ἄθροισμα αὐτὸ ἔχουν μετρηθῆ κι' οἱ γωνίες ποὺ ἔχουν κορυφὴν τὸ Ο οἱ ὁποῖες ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθές.



Σχ. 74

Ἄρα τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι 6 ὀρθές.

Ἂν ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο σὲ διάφορα κυρτὰ πολύγωνα σχηματίζουμε τὸν πίνακα :

Ἀριθμὸς πλευρῶν	Ἀριθμὸς τριγώνων	Ἄθροισμα γωνιῶν τῶν τριγώνων (σὲ ὀρθὲς)	Ἄθροισμα γωνιῶν πολυγώνου (σὲ ὀρθὲς)
4	4	$4 \cdot 2 = 8$	$8 - 4 = 4$
5	5	$5 \cdot 2 = 10$	$10 - 4 = 6$
6	6	$6 \cdot 2 = 12$	$12 - 4 = 8$
7	7	$7 \cdot 2 = 14$	$14 - 4 = 10$
8	8	$8 \cdot 2 = 16$	$16 - 4 = 12$
. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .
. . . . . .	. . . . . .	. . . .	. . . .
α	α	$2 \cdot \alpha$	$2\alpha - 4$

Ἀπὸ τὸν πίνακα συνάγουμε ὅτι : Ἂν καλέσουμε Σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου μὲ α πλευρὲς ἔχουμε :

$$\Sigma = (2\alpha - 4) \text{ ὀρθὲς γωνίες}$$

Ὥστε : **Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ πολυγώνου (σὲ ὀρθὲς γωνίες) πολ/ζουμε μὲ 2 τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν κι' ἔπειτα ἀφαιροῦμε 4.**

Ἐφαρμογές :

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κυρτοῦ 20 γώνου

ἔχουμε : $\Sigma = (2 \cdot 20 - 4)$ ὀρθὲς $= 36$ ὀρθές.

2) Πόσες πλευρὲς ἔχει ἕνα κυρτὸ πολύγωνο τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι ἴσο μὲ 34 ∟ ;

ἔχουμε : $34 = 2\alpha - 4 \iff 2\alpha = 38$

$\iff \alpha = 19$

ὥστε τὸ πολύγωνο αὐτὸ ἔχει 19 πλευρές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

388) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι (∢Α) = 80°, (∢Β) = 50°. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μέτρα τῶν τριῶν ἐξωτ. γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

389) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ∢Α = ∢Β = ∢Γ Νὰ συγκρίνετε τὶς ἐξωτερικὲς γωνίες τοῦ τριγώνου τούτου.

390) Οἱ ἐξωτερικὲς γωνίες ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσες. Νὰ συγκρίνετε τὶς ἐσωτερικὲς γωνίες αὐτοῦ.

391) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ κυρτοῦ 8/γωνου, 11/γωνου, 25/γωνου.

392) Ἐὰν σ' ἕνα κυρτὸ 10/γωνο ὅλες οἱ γωνίες εἶναι ἴσες νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα των.

393) Πόσες πλευρὲς ἔχει ἕνα κυρτὸ πολύγωνο τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι 40 L.

§ 67. Κατασκευὲς τριγώνου

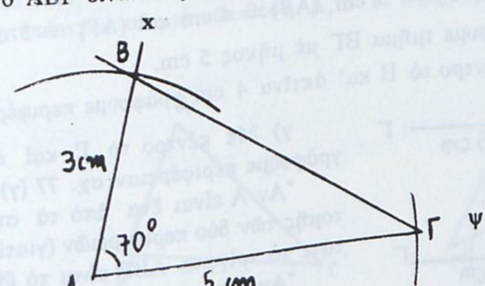
I. Νὰ κατασκευασθῇ, τρίγωνο ΑΒΓ ἂν γνωρίζουμε δύο πλευρὲς καὶ τὴν γωνίαν ποὺ σχηματίζουν αὐτές.

Ἂς εἶναι (ΑΒ) = 3 cm, (ΑΓ) = 5 cm καὶ (∢ΒΑΓ) = 70°.

α) Σχηματίζουμε γωνίαν xAψ ποὺ νὰ ἔχῃ μέτρο 70° (σχ. 75).

β) Ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν A x, A ψ παίρνουμε τμήματα μὲ μήκη: (ΑΒ) = 3 cm καὶ (ΑΓ) = 5 cm.

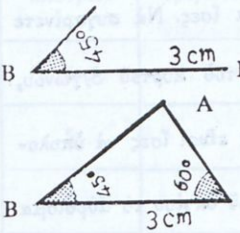
Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενο.



Σχ. 75

Εἶναι φανερὸ ὅτι μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε κι' ἄλλα τρίγωνα μὲ τὰ ἴδια στοιχεῖα. Ἀλλὰ μ' ἕνα διαφανὲς χαρτὶ εὔκολα ἐξακριβώνουμε ὅτι ὅλα εἶναι ἴσα μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι: ἕνα τρίγωνο ὁρίζεται πλήρως ὅταν δοθοῦν δύο πλευρὲς καὶ ἡ περιεχομένη ἀπὸ αὐτὲς γωνία ω, ἀρκεῖ ἡ γωνία ω νὰ εἶναι μικρότερη τῆς ἀποπλατυσμένης.

II. **Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ ὁποίου γνωρίζουμε μία πλευρὰ καὶ τὶς γωνίες ποὺ εὑρίσκονται στὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς** π. χ. ἂν εἶναι (ΒΓ) = 3 cm ($\sphericalangle$ ΑΒΓ) = 45^0, ($\sphericalangle$ ΒΓΑ) = 60^0



Σχ. 76

α) Χαράζουμε εὐθύγραμμο τμῆμα Β Γ μήκους 3 cm.

β) Μὲ πλευρὰ τὴν Β Γ καὶ κορυφὴ τὸ Β σχηματίζουμε γωνία 45^0 (σχ. 76).

γ) Μὲ πλευρὰν τὴν ΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Γ σχηματίζουμε στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὸ ΒΓ γωνίαν 60^0.

Ἔτσι σχηματίζεται τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ποὺ ἔχει τὴν πλευρὰ ΒΓ μὲ μῆκος 3 cm καὶ τὶς γωνίες ΑΒΓ καὶ ΑΓΒ μὲ μέτρα 45^0 καὶ 60^0 ἀντιστοίχως.

Ἂν σχηματίσουμε, μὲ τὰ ἴδια στοιχεῖα, ἄλλο τρίγωνο μὲ τὸ διαφανὲς χαρτὶ ἐξακριβώνουμε ὅτι εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἄρα τὸ τρίγωνο εἶναι τ ε λ ε ί ω ς ὁ ρ ι σ μ έ ν ο.

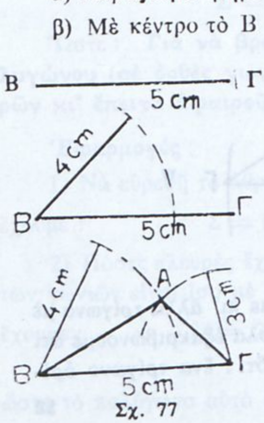
Περιορισμός: Εἶναι φανερὸ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν ποὺ δίδονται πρέπει νὰ εἶναι μικρότερο ἀπὸ μία ἀποπλατυσμένη.

III. **Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνο ΑΒΓ ἂν γνωρίζουμε τὶς τρεῖς πλευρὲς αὐτοῦ.**

Ἂς εἶναι (ΒΓ) = 5 cm, (ΑΒ) = 4 cm καὶ (ΑΓ) = 3 cm.

α) Χαράζουμε τμῆμα ΒΓ μὲ μῆκος 5 cm.

β) Μὲ κέντρο τὸ Β καὶ ἀκτῖνα 4 cm γράφουμε περιφέρεια (σχ. 77).



Σχ. 77

γ) Μὲ κέντρο τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα 3 cm γράφουμε περιφέρειαν σχ. 77 (γ).

Ἂν Α εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν (γιατί τέμνονται;) τότε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενο.

Ἂν κατασκευάσουμε μὲ τὰ ἴδια στοιχεῖα κι' ἄλλο τρίγωνο μὲ τὸ διαφανὲς χαρτὶ ἐξακριβώνουμε ὅτι εἶναι ἴσο μὲ τὸ ΑΒΓ.

Περιορισμός. Γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ πρέπει οἱ τρεῖς πλευρὲς ποὺ δίνονται νὰ ἐπαληθεύουν τὶς συνθῆκες τῆς § 64.1.

Π. χ.: Ἂν ζητᾶμε νὰ κατασκευάσουμε τρίγωνο μὲ πλευρὲς 3 cm, 4 cm καὶ 8 cm εἶναι ἀδύνατο νὰ τὸ ἐπιτύχουμε διότι 3 cm + 4 cm < 8 cm.

Γενικὰ γιὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τριγώνου μὲ πλευρὲς $\alpha > \beta > \gamma$ πρέπει νὰ εἶναι $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ (1)

Ἂν δὲ ἰσχύῃ ὁ περιορισμὸς (1) τότε τὸ τρίγωνο εἶναι τ ε λ ε ί ω ς ὁ ρ ι σ μ έ ν ο ὅταν δοθοῦν τὰ τμήματα α, β, γ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

394) Νὰ κατασκευάσετε τρίγωνο τοῦ ὁποίου οἱ δύο πλευρὲς νὰ ἔχουν μήκη 4 cm. καὶ 6 cm. ἡ δὲ περιεχομένη γωνία των νὰ ἔχῃ μέτρο 60°.

395) Νὰ κατασκευάσετε τρίγωνο τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ νὰ ἔχῃ μέτρο 4 cm οἱ δὲ προσκείμενες σ' αὐτὴν γωνίες νὰ εἶναι 60° καὶ 90°.

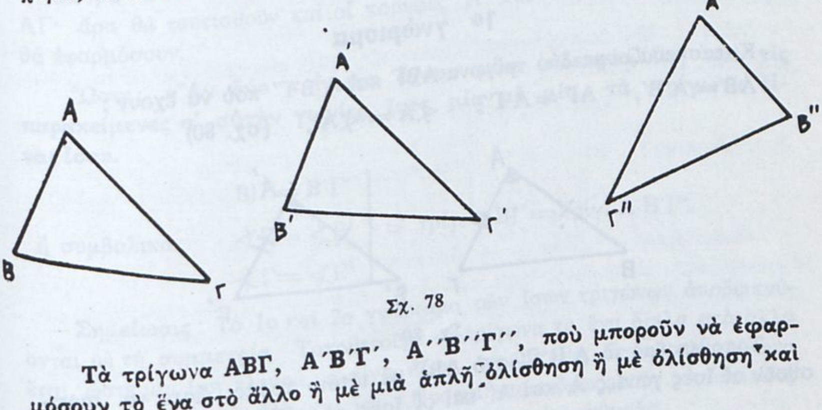
396) Νὰ κατασκευάσετε τρίγωνο τοῦ ὁποίου οἱ πλευρὲς νὰ ἔχουν μέτρα 3 cm., 4 cm., 5 cm.

397) Πόσα τρίγωνα ποὺ νὰ ἔχουν 2 πλευρὲς μὲ μήκη 4 cm καὶ 3 cm μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε; Μεταξὺ ποίων ὁρίων εὑρίσκεται τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς αὐτῶν;

§ 68. Ἰσότης τριγώνων

Ἔχουμε ἐξετάσει ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ἴσες γωνίες, ἴσα τόξα. Θὰ ἐξετάσουμε ἴσα τρίγωνα.

Κατασκευάζουμε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ καὶ μὲ διαφανὲς χαρτὶ τὸ ἀποτυπώνουμε σὲ μία θέση Α΄Β΄Γ΄. Ἔπειτα ἀφοῦ ἀναστρέψουμε τὸ διαφανὲς χαρτί, τὸ ἀποτυπώνουμε σὲ μιὰ νέα θέση Α΄΄Β΄΄Γ΄΄. (σχ. 78).



Σχ. 78

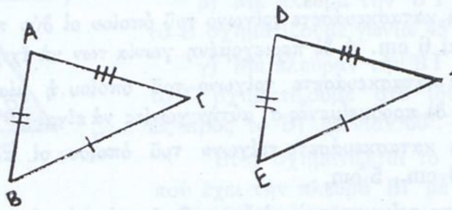
Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄, Α΄΄Β΄΄Γ΄΄, ποὺ μποροῦν νὰ ἐφαρμόσουν τὸ ἕνα στὸ ἄλλο ἢ μὲ μιὰ ἁπλῆ ὀλίσθηση ἢ μὲ ὀλίσθηση καὶ ἀναστροφή, λέγονται ἴσα.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, ποὺ ἐφαρμόζουν μὲ μιὰ ἁπλῆ ὀλίσθηση λέγονται **κατ' εὐθεῖαν ἴσα.**

Ἐνῶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄΄Β΄΄Γ΄΄, ποὺ ἐφαρμόζουν μὲ ὀλίσθηση καὶ ἀναστροφή, λέγονται **κατ' ἀναστροφὴν ἴσα.**

Κατὰ τὴν ἐφαρμογὴ τριγώνου ΑΒΓ πάνω σ' ἕνα ἴσο του ΔΕΖ, σχ. 79, θὰ ἔχουμε τὶς ἰσότητες:

$\sphericalangle A = \sphericalangle \Delta$	καὶ	$AB = \Delta E$
$\sphericalangle B = \sphericalangle E$		$B\Gamma = EZ$
$\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle Z$		$A\Gamma = \Delta Z$



Σχ. 79

Ὥστε: **Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, τότε κάθε πλευρὰ καὶ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς τριγώνου ἔχει μιὰ ἀντίστοιχη ἴση πλευρὰ καὶ μιὰ ἀντίστοιχη ἴση γωνία στὸ ἄλλο.**

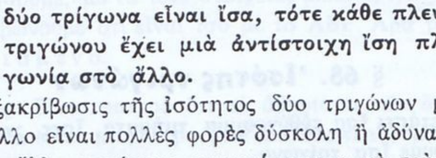
Ἐπειδὴ ἡ ἐξακρίβωσις τῆς ἰσότητος δύο τριγώνων μὲ ἐπίθεσι τοῦ ἑνὸς πάνω στὸ ἄλλο εἶναι πολλὲς φορὲς δύσκολη ἢ ἀδύνατη, οἱ μαθηματικοὶ ἀνεκάλυψαν ἄλλους τρόπους, **«γνωρίσματα»**, μὲ τοὺς ὁποίους ἐξακριβώνουν ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα.

Οἱ τρόποι αὐτοὶ στηρίζονται στὴ σύγκρισι πλευρῶν ἢ πλευρῶν καὶ γωνιῶν τῶν τριγώνων.

1ο γνώρισμα

Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ποὺ νὰ ἔχουν:

$AB = A'B'$, $\quad A\Gamma = A'\Gamma'$, $\quad \sphericalangle A = \sphericalangle A'$, (σχ. 80)



Σχ. 80

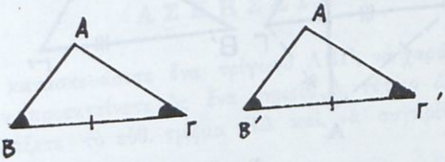
Τοποθετοῦμε τὸ Α΄Β΄Γ΄ στὸ ΑΒΓ μὲ τέτοιο τρόπο, ὥστε νὰ ταυτισθοῦν οἱ ἴσες γωνίες Α καὶ Α΄ καὶ οἱ ἴσες πλευρὲς ΑΒ, Α΄Β΄ καὶ ΑΓ, Α΄Γ΄. Τότε οἱ κορυφὲς Β, Β΄ καὶ Γ, Γ΄ θὰ συμπέσουν. Ἄρα ὁλόκληρο τὸ τρίγωνο ΑΒΓ θὰ ταυτισθῆ μὲ τὸ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄.

Ὥστε: «**Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὲς ἴσες, μία μὲ μίαν καὶ τὴν περιεχομένην γωνίαν ἴσην, τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

$$\text{συμβολικὰ}\quad \left.\begin{array}{l} AB = A'B' \\ A\Gamma = A'\Gamma' \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{τριγ. } AB\Gamma = \text{τρίγ. } A'B'\Gamma'$$

2ο γνώρισμα

Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ποὺ νὰ ἔχουν $B\Gamma = B'\Gamma'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$ (σχ. 81)



Σχ. 81

Τοποθετοῦμε τὸ Α΄Β΄Γ΄ στὸ ΑΒΓ ἔτσι, ὥστε νὰ ταυτισθοῦν οἱ ἴσες πλευρὲς ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ καὶ οἱ ἴσες γωνίες Β, Β΄ καὶ Γ, Γ΄. Τότε ἡ πλευρὰ Β΄Α΄ θὰ «πέση» πάνω στὴ ΒΑ, καθὼς καὶ ἡ Α΄Γ΄ στὴν ΑΓ· ἄρα θὰ ταυτισθοῦν καὶ οἱ κορυφὲς Α καὶ Α΄, ὁπότε τὰ τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσουν.

Ὥστε: «**Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴση καὶ τὶς παρακείμενες σ᾽ αὐτὴν γωνίες ἴσες μία μὲ μία, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα».**

$$\text{ἢ συμβολικά:}\quad \left.\begin{array}{l} B\Gamma = B'\Gamma' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \text{τρίγ. } AB\Gamma = \text{τρίγ. } A'B'\Gamma'.$$

Σημείωσις: Τὸ 1ο καὶ 2ο γνώρισμα τῶν ἴσων τριγώνων ἀποδεικνύονται μὲ τὴ **συμμετρία**. Τοποθετοῦμε τὰ τρίγωνα τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο ἔτσι, ὥστε μία ἴση πλευρὰ νὰ γίνη ἄξων συμμετρίας, ὁπότε τὰ τρίγωνα θὰ εἶναι συμμετρικὰ ἄρα καὶ ἴσα. Προτιμήσαμε ὅμως τοὺς κλασσικοὺς τρόπους, γιατὶ τοὺς εὑρήκαμε πιὸ προσιτοὺς στοὺς μαθητάς.

3ο γνώρισμα

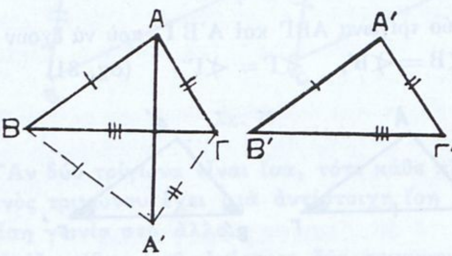
Κατασκευάζουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ πού νά ἔχουν

$$ΑΒ = Α'Β', \quad ΑΓ = Α'Γ', \quad ΒΓ = Β'Γ'$$

α) Μὲ ἐπίθεση ἢ μὲ διαφανὲς χαρτὶ διαπιστώνουμε ὅτι τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.

β) Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα φθάνουμε καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Τοποθετοῦμε τὸ Α′Β′Γ′ δίπλα στὸ ΑΒΓ ἔτσι, ὥστε οἱ μὲν ἴσες πλευρὲς ΒΓ καὶ Β′Γ′ νὰ ταυτισθοῦν, οἱ δὲ γωνίες Β καὶ Β′ νὰ γίνουν ἐφεξῆς, (σχ. 82).



Σχ. 82

Παρατηροῦμε ὅτι 1) Α′Β = ΑΒ, ἄρα τὸ Β εἶναι πάνω στὴ μεσοκάθετο τῆς ΑΑ′. 2) ΑΓ = Α′Γ ἄρα καὶ τὸ Γ εἶναι ἐπάνω στὴ μεσοκάθετο τῆς ΑΑ′. Δηλαδὴ ἡ ΒΓ εἶναι **μεσοκάθετος** τῆς ΑΑ′ καὶ ὡς μεσοκάθετος θὰ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος ΑΒΑ′Γ, ὁπότε καὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΑ′Γ ὡς συμμετρικὰ θὰ εἶναι ἴσα.

Ὥστε: **«Ἂν δυὸ τρίγωνα ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρές των ἀντιστοίχως ἴσες, τότε εἶναι ἴσα».**

ἢ συμβολικά: $\left.\begin{array}{l} ΑΒ = Α'Β' \\ ΒΓ = Β'Γ' \\ ΑΓ = Α'Γ' \end{array}\right\} \Rightarrow$ τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. Α′Β′Γ′

Παρατήρησις: Εἴδαμε ὅτι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τρία κατάλληλα στοιχεῖα ἴσα, εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων συνάγουμε καὶ κάτι ἄλλο: **ὅτι καὶ τὰ λοιπὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα των θὰ εἶναι ἴσα.**

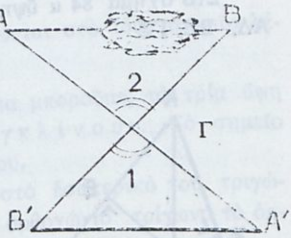
Π.χ. $\left.\begin{array}{l} ΑΒ = Α'Β' \\ \sphericalangle Α = \sphericalangle Α' \\ \sphericalangle Β = \sphericalangle Β' \end{array}\right\} \Rightarrow$ τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. Α′Β′Γ′ $\Rightarrow \begin{array}{l} ΑΓ = Α'Γ' \\ ΒΓ = Β'Γ' \\ \sphericalangle Γ = \sphericalangle Γ' \end{array}$

Ἡ 2η συνεπαγωγὴ ἔχει πολλὲς πρακτικὲς ἐφαρμογές.

Παράδειγμα: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις δύο σημείων Α καὶ Β, ἂν τὸ τμῆμα ΑΒ εἶναι ἀδιάβατο. σχ. 83.

Στεκόμαστε σ' ἕνα σημεῖο Γ καὶ μετροῦμε τὶς ἀποστάσεις ΓΑ καὶ ΓΒ. Ἔπειτα προεκτείνουμε τὶς ΓΑ καὶ ΓΒ πέρα ἀπ' τὸ Γ ὥστε, ΓΑ = ΓΑ΄ καὶ ΓΒ΄ = ΓΒ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΓΒ΄Α΄ ἔχουν ΓΒ = ΓΒ΄, ΓΑ = ΓΑ΄ καὶ $\sphericalangle \Gamma_1 = \sphericalangle \Gamma_2$ (γιατί;) ἄρα τρίγ. ΑΒΓ = τρίγ. Α΄Β΄Γ΄, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ Α΄Β΄ = ΑΒ. Ἂν μετρήσουμε τὴν Α΄Β΄, τὸ μῆκος της θὰ εἶναι ἴσο μὲ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.



Σχ. 83

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

398) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ, νὰ χαράξετε τὴ διάμεσο ΑΜ καὶ νὰ τὴν προεκτείνετε ὡς ἕνα σημεῖο Δ, τέτοιο ὥστε ΑΜ = ΜΔ. Ἔπειτα νὰ χαράξετε τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΔ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΒΜΔ.

399) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἴσες πλευρὲς στὰ τρίγωνα ΑΜΓ καὶ ΒΜΔ τοῦ προηγουμένου προβλήματος.

400) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ κι' ἔπειτα γωνίες ΓΒΔ καὶ ΒΓΔ ἀντιστοίχως ἴσες μὲ τὶς γωνίες ΑΓΒ καὶ ΑΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ.

401) Νὰ κατασκευάσετε δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ κι' ἔπειτα νὰ χαράξετε τὶς διαμέσους ΑΜ καὶ Α΄Μ΄ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ Α΄Β΄Μ΄.

402) Νὰ κατασκευάσετε δύο ἴσα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ κι' ἔκειτα νὰ φέρετε τὶς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Α καὶ Α΄, τὶς ΑΔ καὶ Α΄Δ΄. Νὰ συγκρίνετε τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α΄Β΄Δ΄.

§ 69. Δευτερεύοντα στοιχεῖα τριγώνου

1) **Ὕψη.** Ἀπὸ κάθε κορυφὴ τριγώνου μποροῦμε νὰ χαράξουμε μία κάθετο πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευρά. Τὸ τμῆμα τῆς καθέτου αὐτῆς ἀπὸ τῆς κορυφῆς μέχρι τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς λέγεται **ὕψος** τοῦ τριγώνου.

Συχνὰ στὸν ὅρο «ὕψος τοῦ τριγώνου» δίδονται οἱ ἀκόλουθες τρεῖς ἑρμηνεῖες.

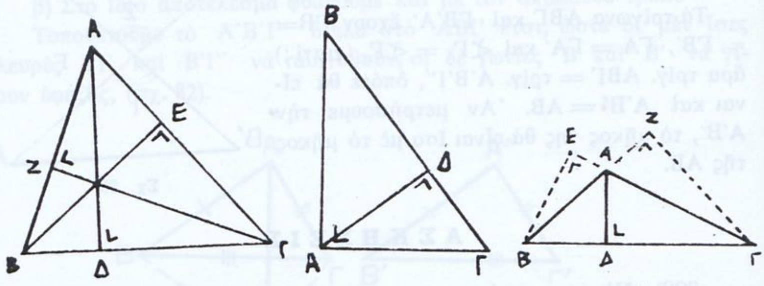
1) Τὸ τμῆμα τῆς καθέτου ποὺ φέρουμε ἀπὸ μία κορυφὴ πρὸς τὴν ἀπέναντι πλευράν·

2) Τὸ μῆκος τοῦ τμήματος τῆς καθέτου αὐτῆς

3) Ὁλόκληρη ἡ κάθετος εὐθεῖα

Ὅταν ἀναφερόμαστε στὸ ὕψος θὰ ἐννοοῦμε τὴν 1η ἑρμηνεία).

Στὸ σχῆμα 84 α ὕψη τοῦ ὀξυγωνίου τριγ. ΑΒΓ εἶναι τὰ τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ

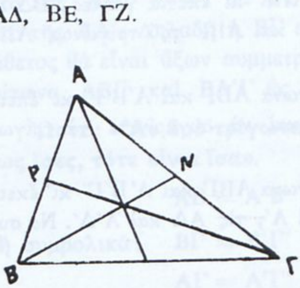


(α) (β) (γ)

Σχ. 84

Στὸ σχ. 84 β ὕψη τοῦ ὀρθογ. τριγ. ΑΒΓ εἶναι τὰ τμήματα ΑΔ, ΒΑ, ΓΑ.

Στὸ σχ. 84 γ ὕψη τοῦ ἀμβλυγωνίου τρίγ. ΑΒΓ εἶναι τὰ τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ.



Σχ. 85

2. **Διάμεσοι.** Τὸ εὐθυγρ. τμῆμα ποὺ συνδέει μιὰ κορυφὴ τοῦ τριγώνου μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς αὐτοῦ λέγεται **διάμεσος** τοῦ τριγώνου.

Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 85) διάμεσοι εἶναι τὰ τμήματα ΑΜ, ΒΝ, ΓΡ.

3. **Διχοτόμοι.** Γνωρίζουμε ὅτι κάθε γωνία ἔχει καὶ μία διχοτόμο. Διχοτομοῦμε τὶς τρεῖς γωνίες ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Ἂν Δ, Ε, Ζ, εἶναι τὰ σημεῖα ποὺ συναντοῦν οἱ διχοτόμοι τὶς πλευρὲς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως. Τὰ τμήματα ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ λέγονται **διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**

Σὲ ἑπόμενο κεφάλαιο θὰ ἐξετάσουμε πῶς χαράζουμε διχοτόμους γωνιῶν καὶ ποιὲς ἰδιότητες ἔχουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

69.1 Συγκλίνουσες εὐθεῖες στὸ τρίγωνο

Ὅταν τρεῖς ἢ περισσότερες εὐθεῖες τέμνωνται στὸ ἴδιο σημεῖο λέγονται **συγκλίνουσες.**

1. **Ὕψη.** Ἂν χαράξουμε, μ' ὅση ἀκρίβεια μποροῦμε, τὰ τρία ὕψη σ' ἕνα τρίγωνο θὰ παρατηρήσουμε ὅτι σ υ γ κ λ ί ν ο υ ν. Τὸ σημεῖο τομῆς αὐτῶν λέγεται **ὀρθόκεντρον** τοῦ τριγώνου.

Στὸ ὀξυγώνιο τὸ ὀρθόκεντρο εὑρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ τριγώνου, ἐνῶ στὸ ἀμβλυγώνιο στὸ ἐξωτερικό. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο τὸ ὀρθόκεντρο συμπίπτει μὲ τὴν κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας (βλέπε σχ. 84).

2. **Διάμεσοι.** Μὲ κατασκευὴ ἐξακριβώνουμε ὅτι: Α ἱ τ ρ ε ῖ ς δ ι ά μ ε σ ο ι τ ο ῦ τ ρ ι γ ώ ν ο υ σ υ γ κ λ ί ν ο υ ν. Τὸ σημεῖον τομῆς των λέγεται **κέντρον βάρους** ἢ **βαρύκεντρο** τοῦ τριγώνου (βλέπε σχ. 85).

Σημ. Ἂν κατασκευάσουμε ἕνα ἀρθρωτὸ ξύλινο τρίγωνο (μοντέλο) μὲ διαμέσους ἀπὸ λάστιχο μποροῦμε εὔκολα νὰ ἐπαληθεύσουμε τὴ σύγκλισι τῶν 3 διαμέσων.

3. **Μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν τριγώνου.** Μὲ κατασκευὴ πάλι ἐξακριβώνουμε ὅτι: Α ἱ μ ε σ ο κ ά θ ε τ ο ι τ ῶ ν π λ ε υ ρ ῶ ν τ ρ ι γ ώ ν ο υ σ υ γ κ λ ί ν ο υ ν. Τὴν πρότασι αὐτὴ μποροῦμε νὰ τὴν ἀποδείξουμε.

α) Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὰ σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθ. τμήματος ἔχουν τὴν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.

β) Χαράζουμε τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ σχ. 87.

Ἂν Ο εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς αὐτῶν ἔχουμε:

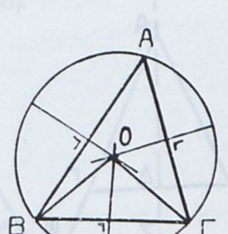
Τὸ Ο ἀνήκει στὴν μεσοκάθετο τῆς ΒΓ ἄρα ΟΒ = ΟΓ (1)

Τὸ Ο ἀνήκει στὴν μεσοκάθετο τῆς ΑΓ ἄρα ΟΓ = ΟΑ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) σύμφωνα μὲ τὴν μεταβατικὴ ἰδιότητα ἔχουμε:

ΟΒ = ΟΑ (3).

Ἡ (3) μᾶς λέγει ὅτι: τὸ σημεῖον



Σχ. 87

Ο ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ τμήματος ΑΒ. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ Ο θὰ ἀνήκη στὴ μεσοκάθετο τῆς Α Β.

Ὥστε καὶ οἱ τρεῖς μεσοκάθετοι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ εἶναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ (4)

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (4) ἐννοοῦμε ὅτι : ἂν γράψουμε περιφέρεια μὲ κέντρο τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀκτίνα ΟΑ αὐτὴ θὰ περάσῃ κι' ἀπ' τὶς κορυφὲς Β καὶ Γ ἢ ὅπως λέγομε θὰ εἶναι **περιγεγραμμένη** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Σημείωσις : Ἐκτὸς ἀπὸ τὰ ὕψη, διαμέσους, μεσοκαθέτους, συγκλίνουσες εὐθεῖες τοῦ τριγώνου εἶναι καὶ αἱ διχοτόμοι, ἀλλὰ τὴν περίπτωσίν των θὰ τὴν ἐξετάσουμε ἀργότερα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

403) Νὰ γράψετε περιφέρειαν ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ τρία σημεῖα Α,Β, Γ ποὺ δὲν εὑρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεῖα.

404) Μ' ἕνα κέρμα νὰ γράψετε μία περιφέρεια κι' ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸ κέντρο της.

405) Νὰ γράψετε ἕνα ἰσόπλευρο τρίγωνο κι' ἔπειτα τὰ ὕψη καὶ τὰς μεσοκαθέτους τῶν πλευρῶν του. Τί παρατηρεῖτε ;

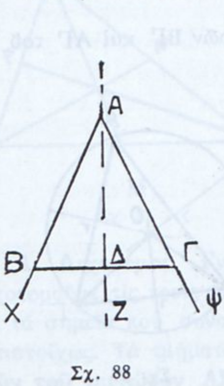
§ 70. Τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο

1. Ἄξονας συμμετρίας

Ἂς κατασκευάσουμε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) κι' ἂς φέρουμε τὴ διχοτόμο ΑΖ τῆς γωνίας Α. (σχ. 88).

Μάθαμε ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας εἶναι ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς.

Ἄρα, ἂν «τσακίσουμε» τὸ ἐπίπεδο τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν διχοτόμο ΑΖ, τότε ἡ πλευρὰ Αx θὰ «πέσῃ» στὴ συμμετρική της Αψ. Ἐπειδὴ δὲ ΑΒ = ΑΓ καὶ τὸ σημεῖο Β θὰ «πέσῃ» στὸ σημεῖο Γ. Ὁπότε ὁλόκληρο τὸ τρίγωνο ΑΒΔ θὰ ταυτισθῇ μὲ τὸ τρίγωνο ΑΔΓ. Ὥστε : «**Ἡ διχοτόμος ΑΖ εἶναι ἄξονας συμμετρίας ὄχι μόνο τῆς γωνίας Α ἀλλὰ καὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.**



Σχ. 88

Ἀ ν τ ι σ τ ρ ό φ ω ς : Ἂν τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἔχῃ τὴν εὐθεῖαν τῆς ΑΖ ἄξονα συμμετρίας, τότε οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ θὰ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὴν ΑΖ ἄρα καὶ ἴσες.

Ὥστε: **Ἂν τρίγωνο ΑΒΓ, ἔχει ἄξονα, συμμετρίας ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α, τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ἴσες πλευρὲς τὶς ΑΒ καὶ ΑΓ.**

2. Ἴσες γωνίες

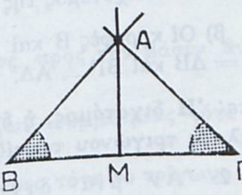
I) Ἐπειδὴ οἱ γωνίες Β καὶ Γ τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 88) εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα συμμετρίας ΑΖ θὰ εἶναι καὶ ἴσες.

Ὥστε: **Οἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίες ἰσοσκελοῦς τριγ. ΑΒΓ εἶναι ἴσες** ἢ συμβολικά:

$$\mathbf{AB = A\Gamma \Rightarrow \measuredangle B = \measuredangle \Gamma.}$$

II) **Τρίγωνο μὲ δύο ἴσες γωνίες**

Χαράζουμε ἕνα εὐθύγρ. τμῆμα ΒΓ καὶ στὶς ἄκρες Β καὶ Γ κατασκευάζουμε δύο γωνίες (πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ΒΓ) ἴσες. Ἔπειτα ὑψώνουμε τὴ μεσοκάθετο στὴ ΒΓ (σχ. 89).



Σχ. 89

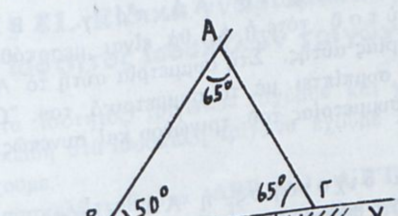
Ἐὰν τσακίσουμε τὸ ἐπίπεδο περὶ τὴν μεσοκάθετο, ἐπειδὴ ΒΜ = ΜΓ, οἱ κορυφὲς Β καὶ Γ θὰ συμπέσουν. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ∢Β = ∢Γ καὶ ἡ ΒΜ συμπίπτει μὲ τὴ ΜΓ, θὰ πρέπει καὶ οἱ ἄλλες πλευρὲς τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ νὰ συμπέσουν.

Ἄρα: Θὰ συναντήσουν καὶ οἱ δύο τὴ μεσοκάθετο στὸ ἴδιο σημεῖο Α καὶ θὰ εἶναι ΑΒ = ΑΓ. Δηλαδὴ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

«Ἂν ἕνα τρίγωνο ἔχῃ δύο γωνίες ἴσες, εἶναι ἰσοσκελές».

ἢ συμβολικὰ $\measuredangle B = \measuredangle \Gamma \Rightarrow AB = A\Gamma$

Ἐφαρμογή: Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ἑνὸς ἀραγμένου πλοίου Α ἀπὸ ἕνα σημεῖο Β τῆς ἀκτῆς xy (σχ. 90).



Σχ. 90

Μετροῦμε τὴ νοητὴ γωνία ΑΒy· ἄς εἶναι 50^0. Ἔπειτα προχωροῦμε κατὰ μῆκος τῆς ἀκτῆς x y ὡς ἕνα σημεῖο Γ ἀπὸ τὸ ὁποῖο νὰ ἔχουμε:

$$(\sphericalangle \text{ΒΓΑ}) = \frac{180^0 - 50^0}{2} = \frac{130^0}{2} = 65^0$$

Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ $\sphericalangle$Α τοῦ νοητοῦ τριγώνου ΒΑΓ θὰ ἔχη μέτρο $180^0 - (50^0 + 65^0) = 180^0 - 115^0 = 65^0$ (ἐπειδὴ σὲ κάθε τρίγωνο τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων γωνιῶν εἶναι 180^0). Ἄρα τὸ τρίγωνο ΑΒΓ θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ἴσες πλευρὲς τὶς ΒΓ καὶ ΒΑ. Μετροῦμε στὴν ἀκτὴ τὴν ἀπόσταση ΒΓ κι' ἔχουμε ἔτσι τὴν ἀπόσταση ΒΑ.

Ἄλλες ἰδιότητες

1. Στὸ ἰσοσκελὲς τρίγ. ΑΒΓ (σχ. 88) ἐπειδὴ

α) Ἡ ΑΖ εἶναι ἄξονας συμμετρίας εἶναι $\sphericalangle$ΒΑΔ = $\sphericalangle$ΓΑΔ δηλαδὴ ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς $\sphericalangle$Α.

β) Οἱ κορυφὲς Β καὶ Γ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὴν ΑΖ θὰ εἶναι ΓΔ = ΔΒ καὶ ΒΓ ⊥ ΑΔ.

ὥστε: **Ἡ διχοτόμος, ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ταυτίζονται.**

2. Ἂν μία διχοτόμος, ἡ ΑΔ, τρίγ. ΑΒΓ, εἶναι καὶ ὕψος τότε ἐπειδὴ

α) Ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας καὶ

β) Εἶναι ΒΓ ⊥ ΑΔ

Οἱ κορυφὲς Β καὶ Γ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὴν ΑΔ ἄρα ἡ διχοτόμος ΑΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου καὶ τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

3. Ἂν ἕνα ὕψος, τὸ ΑΔ, τριγ. ΑΒΓ εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ τότε ἡ ΑΔ θὰ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΒΓ ἄρα καὶ ἄξων συμμετρίας αὐτῆς. Στὴ συμμετρία αὐτὴ τὸ Α ἐπειδὴ εὑρίσκεται στὸν ἄξονα συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικό του. Ὥστε ἡ εὐθεῖα τῆς ΑΔ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου καὶ συνεπῶς τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

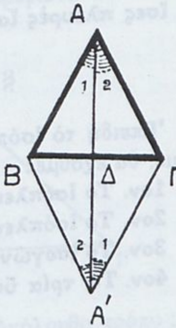
4. Ἂν μία διχοτόμος, ἡ ΑΔ, εἶναι καὶ διάμεσος τριγ. ΑΒΓ τότε θεωροῦμε τὸ συμμετρικὸ Α' τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ ση-

μεῖον Δ. Στὴ συμμετρία αὐτὴν παρατηροῦμε ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ εἶναι συμμετρικὰ (διότι $ΒΔ = ΔΓ$)

καὶ $\sphericalangle Α_1$ συμμετρικὴ τῆς $\sphericalangle Α'_1$ (γιατί;)

$\sphericalangle Α_2$ » $\sphericalangle Α'_2$

ἐπειδὴ δὲ $\sphericalangle Α_1 = \sphericalangle Α_2$ θὰ εἶναι καὶ $\sphericalangle Α'_1 = Α'_2$ ὥστε ἡ ΑΑ′ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν ΒΑΓ καὶ ΒΑ′Γ ὁπότε θὰ εἶναι καὶ ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος αὐτῶν.



Σχ. 91

Τὸ τρίγωνο λοιπὸν ΑΒΓ ἔχει τὴν ΑΔ ἄξονα συμμετρίας ἄρα εἶναι **ἰ σ ο σ κ ε λ έ ς.**

Ἀ ν α κ ε φ α λ α ί ω σ ι ς

Ι. Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο

1. Ὑπάρχει ἕνας ἄξων συμμετρίας.

2. Οἱ παρὰ τὴν βάσιν γωνίες εἶναι ἴσες.

3. Ἡ διχοτόμος, ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν βάσιν ἀνήκουν στὴν ἴδια εὐθεῖα.

ΙΙ. **1. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο ὑπάρχῃ ἄξων συμμετρίας τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.**

2. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο δύο γωνίες εἶναι ἴσες τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

3. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο μία διχοτόμος εἶναι καὶ ὕψος τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

4, Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο μία διάμεσος εἶναι καὶ ὕψος τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

5. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο μία διχοτόμος εἶναι καὶ διάμεσος τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

§ 71. Εἰδικὰ γνωρίσματα τῆς ἰσότητος ἰσοσκελῶν τριγώνων

Τὰ γνωρίσματα ἰσότητος τριγώνων ἰσχύουν καὶ γιὰ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Εἰδικά, ἐπειδὴ στὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουμε 2 πλευρὲς καὶ 2 γωνίες ἴσες, θὰ ἔχουμε:

α) Ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ἔχουν τὶς βάσεις ΒΓ καὶ Β′Γ′ ἴσες καὶ μία ἀπὸ τὶς παρὰ τὴν βάσιν γωνίες ἴσες, θὰ εἶναι ἴσα. (Γιατί ;)

β) Ἂν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν τὶς γωνίες τῆς κορυφῆς (τῶν ἴσων πλευρῶν) Α καὶ Α΄ ἴσες καὶ μιὰ ἀπὸ τὶς ἴσες πλευρὲς ἴσες, τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. (Γιατί ;)

§ 72. Ἰσόπλευρο τρίγωνο

Ἐπειδὴ τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές, ὅπως καὶ ἂν τὸ πάρουμε, θὰ ἔχουμε:

1ον. Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο ἔχει τρεῖς ἄξονες συμμετρίας
2ον. Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο εἶναι καὶ ἰσογώνιο
3ον. Τὸ ἰσογώνιο τρίγωνο εἶναι καὶ ἰσόπλευρο
4ον. Τὰ τρία ὕψη του εἶναι καὶ διάμεσοι καὶ διχοτόμοι.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

406) Νὰ κατασκευάσετε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ φέρετε τὶς διαμέσους ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς ἴσες πλευρές του. Μὲ τὴ βοήθεια δύο τριγώνων νὰ συγκρίνετε τὶς δύο διαμέσους.

407) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ. Νὰ φέρετε τὸ ὕψος πρὸς τὴ βάση καὶ νὰ ἐπαληθεύσετε μὲ τὰ ὄργανά σας ὅτι εἶναι διάμεσος καὶ διχοτόμος.

408) Νὰ κατασκευάσετε ἰσοσκελὲς τρίγωνο ΑΒΓ καὶ νὰ φέρετε τὴ διάμεσο πρὸς τὴν βάσιν. Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι ἡ διάμεσος αὐτὴ εἶναι διχοτόμος καὶ ὕψος.

409) Νὰ χαράξετε μιὰ περιφέρεια (Ο, ρ) καὶ μιὰ χορδὴ ΒΓ αὐτῆς. Μὲ τὴ βοήθεια τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΒΟΓ νὰ ἐξηγήσετε γιατὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρον Ο πρὸς τὴν χορδὴ ΒΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς καὶ τοῦ τόξου.

§ 73. Εἰδικὲς περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων

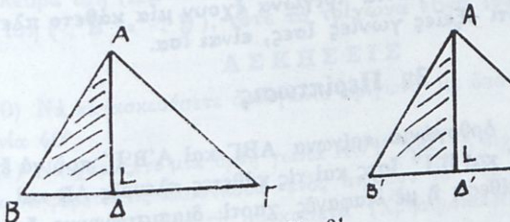
Οἱ τρεῖς περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων ἰσχύουν φυσικὰ καὶ καὶ στὰ ὀρθογώνια τρίγωνα. Εἰδικὰ ὅμως στὰ ὀρθ. τρίγωνα ἔχουμε καὶ τὶς ἀκόλουθες περιπτώσεις :

1η Περίπτωσις

Κατασκευάζουμε δύο ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ καὶ φέρουμε τὰ ὕψη ΑΔ καὶ Α΄Δ΄ (σχ. 91). Ἔπειτα ἀποκόπτουμε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ, Α΄Β΄Δ΄. Παρατηροῦμε ὅτι ἔχουν :

1) $AB = A'B'$ 2) $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ 3) $\sphericalangle \Delta = \sphericalangle \Delta' = 1 L$

(Γιατί ;) Μὲ ἐπίθεσι διαπιστώνουμε ὅτι : **τὰ ὀρθ. τρίγωνα ΑΒΔ καὶ Α′Β′Δ′ εἶναι ἴσα.**



Σχ. 91

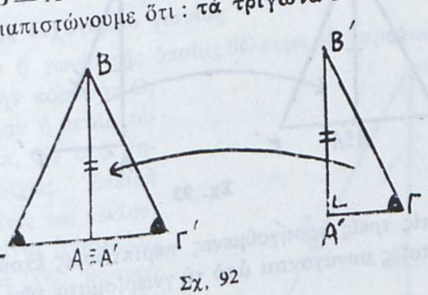
Στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγωνο Α′Β′Δ′ στὸ τρίγωνο ΑΒΔ ἔτσι, ὥστε ἡ Α′Β′ νὰ ταυτισθῆ μὲ τὴν ἴσην της ΑΒ καὶ ἡ $\sphericalangle B'$ μὲ τὴν ἴσην της $\sphericalangle B$. Τότε τὸ σημεῖο Δ′ θὰ πέσῃ ἀκριβῶς στὸ σημεῖο Δ, γιατὶ ἀπ' τὸ σημεῖο Α μόνο μία κάθετο μποροῦμε νὰ φέρουμε πρὸς τὴ ΒΓ. Ἄρα ἡ ΑΔ′ πρέπει νὰ ταυτισθῆ μὲ τὴν ΑΔ, ὁπότε καὶ τὸ τρίγωνο Α′Β′Δ′ θὰ ταυτισθῆ μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΔ.

Ὥστε : « **Ἂν δύο ὀρθ. τρίγωνα ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες καὶ μία ὀξεῖα γωνία ἴση, εἶναι ἴσα** ».

2η Περίπτωσις

Παίρνουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ ($\sphericalangle A = \sphericalangle A' = 1 L$) ποὺ νὰ ἔχουν : $AB = A'B'$ καὶ $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$ (σχ. 92). Μὲ ἐπίθεσι ἢ μὲ τὸ διαφανὲς χαρτί, διαπιστώνουμε ὅτι : **τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**



Σχ. 92

Στὸ ἴδιο συμπέρασμα καταλήγουμε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγ. Α′Β′Γ′ δίπλα στὸ τρίγ. ΑΒΓ ἔτσι, ὥστε ἡ Α′Β′ νὰ ταυτισθῆ μὲ τὴν ἴση της ΑΒ. οἱ δὲ ὀρθὲς γωνίες νὰ γίνουν ἐφεξῆς. σχ. 92. Τότε οἱ πλευρὲς ΑΓ καὶ Α′Γ′ θὰ ἀποτελέσουν ἕνα **εὐθύγρ. τμῆμα,** τὸ ΓΓ΄, (γιατί;). Παρατηροῦμε ὅτι: τὸ τρίγωνο ΒΓΓ΄ εἶναι ἰσοσκελὲς ($\sphericalangle$Γ $=$ $\sphericalangle$Γ΄). Ἄρα τὸ ὕψος ΒΑ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ, ὁπότε τὸ τρίγ. ΑΒΓ θὰ εἶναι συμμετρικὸ τοῦ τριγ. ΑΓ΄Β ἄρα καὶ ἴσο.

Ὥστε «Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μία κάθετο πλευρὰν ἴση καὶ τὶς ἀπέναντι ὀξεῖες γωνίες ἴσες, εἶναι ἴσα.

3η Περίπτωσις

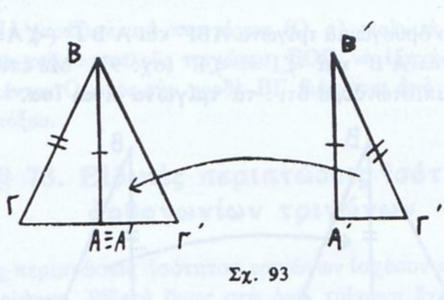
Παίρνουμε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ποὺ νὰ ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ΒΓ καὶ Β΄Γ΄ ἴσες καὶ τὶς κάθετες πλευρὲς ΑΒ καὶ Α΄Β΄ ἴσες, σχ. 93. Μὲ ἐπίθεση ἢ μὲ διαφανὲς χαρτὶ διαπιστώνουμε ὅτι: **τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.**

Μποροῦμε ὅμως νὰ ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

Τοποθετοῦμε τὸ τρίγ. Α΄Β΄Γ΄ δίπλα στὸ τρίγ. ΑΒΓ ἔτσι, ὥστε νὰ ταυτισθοῦν οἱ ἴσες πλευρὲς ΑΒ καὶ Α΄Β΄ καὶ οἱ ὀρθὲς γωνίες Α καὶ Α΄ νὰ γίνουν ἐφεξῆς, ὁπότε οἱ ἄλλες κάθετες πλευρὲς θὰ ἀποτελέσουν ἕνα εὐθύγρ. τμῆμα, τὸ ΓΓ΄.

Παρατηροῦμε ὅτι τὸ τρίγ. ΓΒΓ΄ εἶναι **ἰσοσκελὲς** (ΒΓ $=$ Β΄Γ΄), κι' ὅπως ξέρουμε, τὸ ὕψος ΒΑ θὰ εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ θὰ εἶναι συμμετρικὰ ἄρα καὶ ἴσα.

Ὥστε «**Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὶς ὑποτείνουσες ἴσες κι' ἀπὸ μία κάθετο πλευρὰ ἴση, εἶναι ἴσα.**



Σχ. 93

Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς τρεῖς προηγούμενες περιπτώσεις ἔχουμε καὶ τὶς ἀκόλουθες δύο, οἱ ὁποῖες συνάγονται ἀπὸ τὰ γνωρίσματα τῶν ἴσων τριγώνων.

4η Περίπτωσις

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὶς κάθετες πλευρὲς μία μὲ μία ἴσες, τότε εἶναι ἴσα (γιατί;)

5η Περίπτωσις

Ἂν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν ἀπὸ μία κάθετο πλευρὰ ἴση (ΑΒ = Α΄Β΄) καὶ τὴν προσκειμένη σ' αὐτὴν ὀξεῖα γωνία ἴση (∢ Β = ∢ Β΄), τότε τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. (γιατί;)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

410) Νὰ κατασκευάσετε ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ ὑποτείνουσα 6 cm καὶ μία γωνία 40^0.

411) Νὰ χαράξετε μία ὀρθὴ γωνία ΧΟΨ καὶ τὴ διχοτόμο ΟΖ αὐτῆς. Ἔπειτα νὰ φέρετε τὶς ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου Μ τῆς διχοτόμου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας καὶ νὰ τὶς συγκρίνετε. (Χρησιμοποιεῖστε τὰ δύο ὀρθογ. τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται).

412) Ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Μ΄ τῶν δύο ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ νὰ φέρετε τὶς ἀποστάσεις ἀπὸ τὴ βάση ΒΓ καὶ νὰ τὶς συγκρίνετε. (Χρησιμοποιεῖστε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ποὺ σχηματίζονται).

413) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο μὲ ὑποτείνουσα 5 cm.

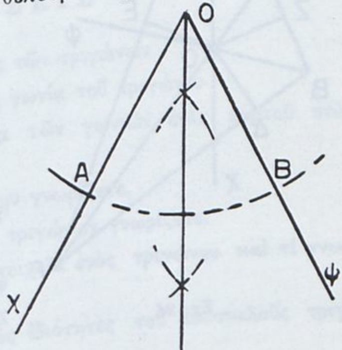
414) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (∢ Α = 1 ∟) μὲ μία γωνία Β = 30^0. Ἔπειτα νὰ συγκρίνετε τὴν κάθετο πλευρὰ ΑΓ μὲ τὴν ὑποτείνουσα ΒΓ. Τί παρατηρεῖτε;

415) Σὲ μιὰ περιφέρεια νὰ χαράξετε δύο ἴσες χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἔπειτα νὰ φέρετε τὶς ἀποστάσεις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὶς χορδές. Μὲ τὴ βοήθεια δύο ὀρθογ. τριγώνων νὰ συγκρίνετε τὶς ἀποστάσεις αὐτές. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ κέντρο πρὸς μία χορδὴ διχοτομεῖ τὴ χορδή).

§ 74. Διχοτόμοι

α) Χάραξις τῆς διχοτόμου γωνίας

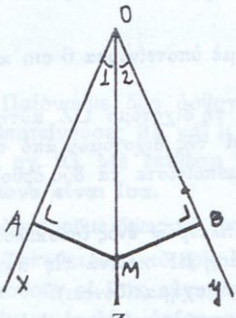
Ἂς εἶναι xOψ ἡ γωνία τῆς ὁποίας θέλουμε νὰ χαράξουμε τὴν διχοτόμο. Μὲ κέντρο τὴν κορυφὴν Ο, γράφουμε περιφέρειαν ἡ ὁποία τέμνει τὶς πλευρὲς Ox, Oψ στὰ σημεῖα Α, Β ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ ΟΑ = ΟΒ (ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου) τὸ τρίγωνο ΟΑΒ εἶναι ἰσοσκελὲς ἄρα ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ΑΒ θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Ο (§ 70). Ὥστε γιὰ νὰ χαράξουμε τὴν διχοτόμο τῆς γωνίας xOψ ἀρκεῖ νὰ χαράξουμε τὴν μεσοκάθετο τῆς χορδῆς ΑΒ.



σχ. 94

β) **Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς διχοτόμου.**

1) Ἄς εἶναι 0Z ἡ διχοτόμος τῆς κυρτῆς γωνίας xOy (σχ. 95) καὶ M ἕνα σημεῖον αὐτῆς ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρουμε MA καὶ MB καθέτους πρὸς τὶς πλευρὲς Ox, Oy ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρίγωνα OAM καὶ OBM εἶναι ὀρθογώνια ($\sphericalangle A = \sphericalangle B = 1L$) καὶ ἐπὶ πλέον ἔχουν



Σχ. 95

α) $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$ (OM διχοτόμος τῆς xOy)

καὶ β) τὴν OM κοινὴν ἄρα εἶναι **ἴσα.**

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγουμε ὅτι:

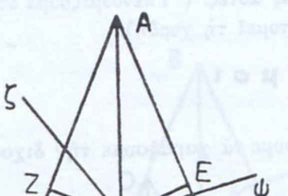
$$AM = MB.$$

Ὥστε: **Τὰ σημεῖα τῆς διχοτόμου ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας.**

2) Ἀντίστροφα: Ἄν M εἶναι ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖο τῆς κυρτῆς γωνίας xOy τέτοιο, ὥστε οἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὶς πλευρὲς τῆς γωνίας νὰ εἶναι ἴσες MA = MB.

Παρατηροῦμε ὅτι τὰ τρίγωνα AOM καὶ BOM εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἔχουν MA = MB καὶ τὴν ὑποτείνουσαν OM κοινήν, ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν προκύπτει ὅτι $\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2$ εἶναι δηλαδὴ ἡ OM διχοτόμος τῆς $\sphericalangle xOy$.

Ὥστε: **Ἄν ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖον M μιᾶς κυρτῆς γωνίας ἀπέχη ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς αὐτῆς τότε τὸ σημεῖο εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας αὐτῆς.**



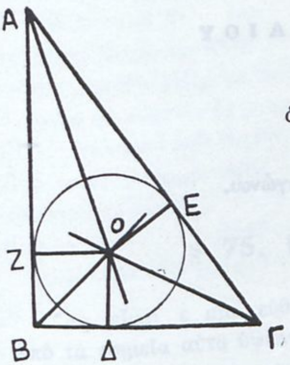
Σχ. 96

γ) Ἄν εἶναι O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν B καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 96).

Ἐπειδή: Τὸ σημεῖο O ἀνήκει στὴ διχοτόμο τῆς $\sphericalangle B$ εἶναι OZ=OΔ (1)

Τὸ σημεῖο O ἀνήκει στὴ διχοτόμο τῆς $\sphericalangle \Gamma$ εἶναι OΔ=OE (2)

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (2) σύμφωνα μὲ τὴ μεταβατικὴ ἰδιότητα ἔχουμε: OZ = OE (3)



Σχ. 97

Ἀπὸ τὴν (3) συνάγουμε ὅτι τὸ σημεῖο Ο ἀνήκει καὶ στὴ διχοτόμο τῆς ∢ Α.

ὥστε: **Οἱ τρεῖς διχοτόμοι κάθε τριγώνου συγκλίνουν.**

δ) Ἂν μὲ κέντρο τὸ σημεῖον τομῆς τῶν διχοτόμων Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΔ γράψουμε περιφέρεια, αὐτὴ θὰ ἐφάπτεται καὶ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου (§ 60). Ἡ περιφέρεια αὐτὴ λέγεται **ἐγγεγραμμένη** στὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

416) Νὰ χαράξετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ κι᾿ ἔπειτα ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ αὐτοῦ νὰ βρῆτε ἕνα σημεῖο Μ ποὺ νὰ ἀπέχῃ ἐξ ἴσου ἀπὸ τὶς πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ.

417) Νὰ χαράξετε τρίγωνο ΑΒΓ κι᾿ ἔπειτα κύκλον ἐγγεγραμμένον εἰς αὐτό.

418) Νὰ χαράξετε τρίγωνο ΑΒΓ κι᾿ ἔπειτα τὴν διχοτόμο τῆς γωνίας Α καὶ τὶς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. ¡Τί παρατηρεῖτε.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ποιὲς εἶναι οἱ γενικὲς ἰδιότητες τῶν τριγώνων

2) Τί γνωρίζετε γιὰ τὴν ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου

3) Πῶς εὑρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου.

4) Ποιὰ κριτήρια ἰσότητος τριγώνων γνωρίζετε.

5) Ποιὰ κριτήρια ἰσότητος ὀρθογ. τριγώνων γνωρίζετε.

6) Ποιά εἶναι τὰ δευτερεύοντα στοιχεῖα ἑνὸς τριγώνου καὶ τί γνωρίζετε γι᾿ αὐτά.

7) Ποιὲς εἶναι οἱ χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

8) Ποιάν χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῆς διχοτόμου γνωρίζετε.

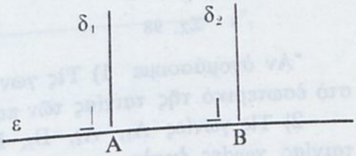
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Η΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Θ΄

§ 75. Παράλληλες εὐθεῖες

Ἂς εἶναι ε μία εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου καὶ Α, Β δύο σημεῖα αὐτῆς. Ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ ὑψώνουμε εὐθεῖες δ_1 δ_2 καθέτους πρὸς τὴν ε.



Οἱ εὐθεῖες δ_1, δ_2 δὲν τέμνονται ὅσο κι' ἂν προεκταθοῦν.

Πράγματι· Ἂν συναντηθοῦν σ' ἕνα σημεῖο Μ τότε θὰ ἔχουμε ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖο Μ δύο καθέτους τὶς ΜΑ, ΜΒ, πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε. Ἀλλὰ αὐτὸ δὲν εἶναι δυνατόν.

(Μάθαμε ὅτι ἀπὸ ἕνα σημεῖο πρὸς μίαν εὐθεῖαν μόνον μία κάθετος ὑπάρχει).

Ἄρα οἱ εὐθεῖες δ_1, δ_2 δὲν τέμνονται ὅσο κι' ἂν προεκταθοῦν.

Δύο εὐθεῖες δ_1, δ_2 ποὺ εὑρίσκονται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν τέμνονται, ὅσο κι, ἂν προεκταθοῦν, λέγονται παράλληλοι.

Ἐπειδὴ μὲ μία παράλληλο μετατόπισι ἡ δ_1 μπορεῖ νὰ συμπέση (ταυτισθῆ) μὲ τὴν δ_2 ἐπεκτείνουμε τὸν ὁρισμὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

Δύο εὐθεῖες δ_1, δ_2 λέγονται παράλληλοι ὅταν εὑρίσκωνται στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ δὲν τέμνονται, ὅσο κι' ἂν προεκταθοῦν ἢ ὅταν συμπίπτουν.

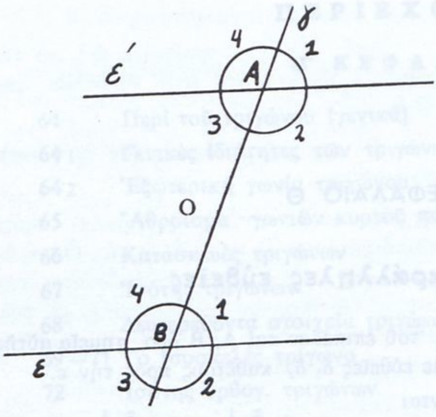
Ἡ παραλληλία ποὺ ὁρίζεται μὲ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν λέγεται παραλληλία μὲ **εὐρεῖαν σημασίαν.**

75. 1 Γωνίες παραλλήλων τεμνομένων ἀπὸ τρίτη εὐθεῖα

I) Ἂς εἶναι **ε, ε΄** δύο παράλληλες εὐθεῖες (σχ. 98) καὶ **γ** μία εὐθεῖα ποὺ τὶς τέμνει στὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως. Ἂν θεωρήσουμε τὸ μέσον Ο τοῦ τμήματος ΑΒ ὡς κέντρον συμμετρίας, τότε :

1) Οἱ γωνίες A_3, B_1 εἶναι συμμετρικὲς ἄρα ἴσες.

2) » » B_4, A_2 » » » »



Σχ. 98

Ὥστε : $\sphericalangle \mathbf{A}_3 = \sphericalangle \mathbf{B}_1$

καὶ $\sphericalangle \mathbf{A}_2 = \sphericalangle \mathbf{B}_4$ (I)

3) Οἱ γωνίες A_1 καὶ B_3 εἶναι κι' αὐτὲς συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸ κέντρον τὸ μέσον O τοῦ AB, ἄρα ἴσες $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_3$.

Εἶναι ὅμως $\sphericalangle B_3 = \sphericalangle B_1$ (ὡς κατὰ κορυφὴν)

Ἄρα $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1$

Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο εἶναι :

$\sphericalangle A_4 = \sphericalangle B_4$

Ὥστε :

$\sphericalangle \mathbf{A}_1 = \sphericalangle \mathbf{B}_1$

$\sphericalangle \mathbf{A}_4 = \sphericalangle \mathbf{B}_4$ (II)

Ἂν ὀνομάσουμε 1) Τὶς γωνίες A_2, A_3, B_1, B_4 ποὺ εὑρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ταινίας τῶν παραλλήλων γωνίες **ἐντός.**

2) Τὶς γωνίες A_1, A_4, B_2, B_3, ποὺ εὑρίσκονται στὸ ἐξωτερικὸ τῆς ταινίας, γωνίες **ἐκτός.**

3) Τὰ ζεύγη τῶν γωνιῶν A_2, B_4 καὶ B_1, A_3 γωνίες **ἐντὸς ἐναλλάξ.**

4) Τὰ ζεύγη τῶν γωνιῶν B_1, A_1 καὶ B_4, A_4 **ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτά.**

Τότε τὰ συμπεράσματα (I) καὶ (II) διατυπώνονται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Δύο εὐθεῖες παράλληλες ὅταν τέμνωνται ἀπὸ μία τρίτη εὐθεῖα σχηματίζουν.

α) **Τὶς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες** $\sphericalangle A_3 = \sphericalangle B_1$ $\sphericalangle A_2 = \sphericalangle B_4$ (I)

β) **Τὶς ἐντός, ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες ἴσες**

$\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1$ $\quad \sphericalangle A_4 = \sphericalangle B_4$ (II)

Ἐφαρμογή. Οἱ προηγούμενες προτάσεις μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσουμε τὶς γωνίες δύο παραλλήλων ποὺ τέμνονται ἀπὸ τρίτη εὐθεῖαν ἂν γνωρίζουμε μόνον τὴν μίαν ἀπὸ αὐτές. Π. χ. Ἂν στὸ σχ. 98 εἶναι : $(\sphericalangle A_2) = 110^0$ τότε θὰ εἶναι καὶ $(\sphericalangle A_4) = (\sphericalangle B_2) = (\sphericalangle B_4) = 110^0$ καὶ $(\sphericalangle A_1) = (\sphericalangle A_3) = (\sphericalangle B_1) = (\sphericalangle B_3) = 180^0 - 110^0 = 70^0$.

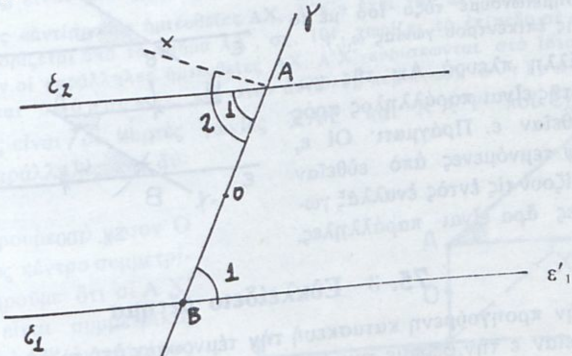
II. Ἂς ἐξετάσουμε μήπως ἰσχύει καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις.

Ἂς εἶναι ϵ_1, ϵ_2 δύο εὐθεῖες ποὺ τέμνονται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν γ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες. Π.χ. ἄς εἶναι $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle B_1$

(σχ. 99). Ἂν θεωρήσουμε τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ ὡς κέντρον συμμετρίας τότε:

α) Τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἶναι συμμετρικὰ μεταξύ των (ΟΑ = ΟΒ).

β) Ἡ συμμετρικὴ τῆς $\sphericalangle B_1$ θὰ εἶναι μία γωνία ἴ σ η μὲ αὐτὴν μὲ



Σχ. 99

κορυφὴν τὸ συμμετρικὸ τῆς κορυφῆς τῆς $\sphericalangle B_1$ δηλ. τὸ Α, μὲ μίαν πλευρὰν τὴν ΑΟ (γιατί;) καὶ ἄλλην πλευρὰν Αx (π α ρ ά λ λ η λ ο καὶ ἀντίρροπο πρὸς τὴν $B\varepsilon_1$ (διότι τὸ συμμετρικὸ μιᾶς ἡμιευθείας, ὅπως εἶναι ἡ $B\varepsilon'_1$ ὡς πρὸς κέντρον Ο, ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἡμιευθεῖα παράλληλος καὶ ἀντίρροπος πρὸς τὴν $B\varepsilon'_1$).

Ἄρα εἶναι: $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle OAx$ (ὅπου $Ax \parallel B\varepsilon_1$)

Ἀλλὰ εἶναι καὶ $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle A_1$ (Ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι)

ὥστε: $\sphericalangle OAx = \sphericalangle A_1$ (1)

Ἀπὸ τὴν (1) καὶ ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι, ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ε_2 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ε_1.

Ἂν δύο εὐθεῖες ε_1, ε_2 τέμνωνται ἀπὸ μιὰ τρίτη εὐθεῖα γ καὶ σχηματίζουν δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες τότε οἱ εὐθεῖες ε_1, ε_2 εἶναι παράλληλες.

Εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ἴδια πρότασις ἰσχύει κι' ὅταν ἀντὶ γιὰ τὶς δύο ἐναλλὰξ γωνίες εἶναι ἴσες δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίες.

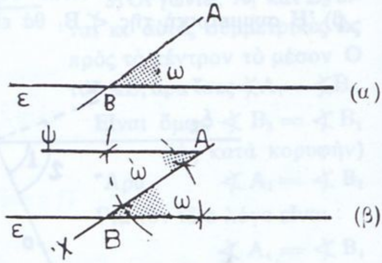
§ 75 2. Κ α τ α σ κ ε υ ή: **Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, ἐξωτερικὸ εὐθείας ε, νὰ χαραχθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ε.**

1. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρουμε μίαν ἡμιευθεῖαν τέμνουσαν τὴν εὐθεῖαν ε. Ἂς εἶναι ω μία ἀπὸ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζει αὐτὴ μὲ τὴν ε (σχ. 100α).

2. Μὲ κορυφὴν τὸ σημεῖον Α καὶ μὲ μίαν πλευρὰν τὴν τέμνουσαν αὐτὴν σχηματίζουμε γωνίαν ἴση μὲ τὴν ω, ὅπως φαίνεται στὸ σχ. 100β.

(Πρὸς τοῦτο καθιστοῦμε τὴν γωνίαν ω ἐπίκεντρο καὶ ἔπειτα μὲ κέντρον τὸ Α γράφουμε ἴσην περιφέρειαν καὶ ἐπ' αὐτῆς σημειώνουμε τόξο ἴσο μὲ τὸ τόξο τῆς ἐπικέντρου γωνίας ω...).

Ἡ ἄλλη πλευρὰ Αψ τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε. Πράγματι· Οἱ ε, καὶ Αψ τεμνόμενες ἀπὸ εὐθεῖαν σχηματίζουν τὶς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες ἴσες ἄρα εἶναι παράλληλες.



Σχ. 100

75. 3 Εὐκλείδειο αἴτημα

Στὴν προηγούμενη κατασκευὴ τὴν τέμνουσαν ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε τὴν φέραμε τυχαίως. Ἄραγε ἂν ἀπὸ τὸ Α φέρουμε ἄλλην τέμνουσα πρὸς τὴν ε καὶ συνεχίσουμε μὲ τὸν ἴδιον τρόπο τὴν κατασκευὴ θὰ βροῦμε κι' ἄλλη παράλληλο ἀπὸ τὸ σημεῖον Α πρὸς τὴν εὐθεῖαν ε; Ὁ Εὐκλείδης * π α ρ ε δ έ χ θ η ὅτι:

Σ' ἕνα ἐπίπεδο ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α, ἐξωτερικὸν μιᾶς εὐθείας ε, μία καὶ μόνον μία παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν διέρχεται.

Ἡ πρότασις αὐτὴ ἀποτελεῖ τὸ περίφημο **Εὐκλείδειο αἴτημα** καὶ εἶναι θεμελιώδης στὴν γεωμετρία ποὺ σπουδάζουμε.

§ 76. Ἰδιότητες τῶν παραλλήλων εὐθειῶν

1) Κατὰ τὸν ὁρισμὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, μὲ εὐρεῖαν σημασίαν, κάθε εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλη μὲ τὸν ἑαυτό της.

$\varepsilon \parallel \varepsilon$ **Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.**

2) Εἶναι φανερὴ ἡ συνεπαγωγὴ

$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Rightarrow \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_1$ **Συμμετρικὴ ἰδιότης**

3) $\left.\begin{matrix}\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3\end{matrix}\right\} \Rightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_3$ **Μεταβατικὴ ἰδιότης.**

Ἡ ἰδιότης αὐτὴ εἶναι συνέπεια τοῦ ε ὐ κ λ ε ι δ ε ί ο υ αἰτήματος· Διότι ἂν οἱ ε_1 καὶ ε_3 ἐτέμνωντο σ' ἕνα σημεῖο Μ τότε θὰ εἴχαμε ἀπὸ τὸ σημεῖο αὐτὸ δύο εὐθεῖες παράλληλες πρὸς τὴν εὐθεῖα ε_2. Ἀλλὰ αὐτὸ εἶναι ἀσυμβίβαστο μὲ τὸ εὐκλείδειο αἴτημα.

* Ε ὐ κ λ ε ί δ η ς : Μεγάλος ἕλλην γεωμέτρης, ἤκμασε περὶ τὸ 300 π. Χ. Εἶναι ὁ θεμελιωτὴς τῆς θεωρητικῆς γεωμετρίας.

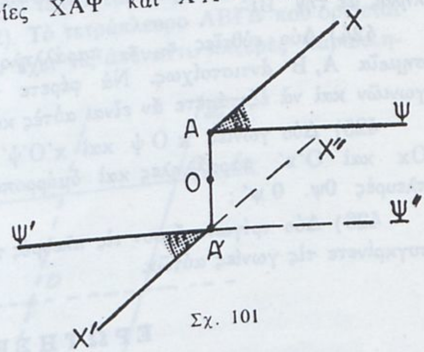
§ 77. Κυρτὲς γωνίες μὲ παράλληλες πλευρὲς

Μάθαμε ὅτι, τὸ συμμετρικὸ μιᾶς ἡμιευθείας ΑΧ ὡς πρὸς σημεῖον Ο, ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι μιὰ ἡμιευθεῖα Α΄Χ΄ παράλληλη μὲ αὐτὴ καὶ ἀντίρροπη.

Ὁ ὅρος «ἀντίρροπες ἡμιευθεῖες ΑΧ, Α΄Χ΄» ἔχει τὴν ἀκόλουθη ἔννοια: Ἡ εὐθεῖα ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ τμῆμα ΑΑ΄, σχ. 101, χωρίζει τὸ ἐπίπεδο σὲ δύο ἡμιεπίπεδα. Ἂν οἱ παράλληλες ἡμιευθεῖες ΑΧ, Α΄Χ΄ εὑρίσκωνται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο λέγονται ὁ μ ό ρ ρ ο π ε ς καὶ στὴν ἀντίθετη περίπτωσι ἀ ν τ ί ρ ρ ο π ε ς.

α) Ἂς εἶναι οἱ κυρτὲς γωνίες ΧΑΨ καὶ Χ΄Α΄Ψ΄ ποὺ ἔχουν τὶς πλευρὲς παράλληλες καὶ ἀντίρροπες.

Ἂν πάρουμε τὸ μέσον Ο τοῦ ΑΑ΄ ὡς κέντρο συμμετρίας παρατηροῦμε ὅτι οἱ Α΄Χ΄ καὶ Α΄Ψ΄ εἶναι συμμετρικὲς τῶν ΑΧ καὶ ΑΨ ἀντιστοίχως ὁπότε καὶ οἱ κυρτὲς γωνίες ΧΑΨ καὶ Χ΄Α΄Ψ΄ εἶναι συμμετρικὲς ἄρα καὶ ἴσες.



Σχ. 101

Ἂν δύο κυρτὲς γωνίες ἔχουν τὶς πλευρὲς παράλληλες καὶ ἀντίρροπες εἶναι ἴσες.

β) Ἂν προεκτείνουμε τὶς πλευρὲς Α΄Χ΄ καὶ Α΄Ψ΄ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α΄ τότε σχηματίζεται ἡ $\sphericalangle X''A'\Psi''$ ποὺ εἶναι κατὰ κορυφὴν τῆς Χ΄Α΄Ψ΄ ἄρα καὶ ἴση μὲ αὐτὴν $\sphericalangle X''A'\Psi'' = \sphericalangle X'A'\Psi'$ (1)

εὑρήκαμε ὅμως ὅτι $\sphericalangle X'A'\Psi' = \sphericalangle XA\Psi$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε ὅτι: $\sphericalangle X''A'\Psi'' = \sphericalangle XA\Psi$. Ἀλλὰ οἱ πλευρὲς τῆς $\sphericalangle X''A'\Psi''$ εἶναι παράλληλοι καὶ ὁμόρροποι μὲ τὶς πλευρὲς τῆς $\sphericalangle XA\Psi$.

Ὥστε: **Ἂν δύο κυρτὲς γωνίες ἔχουν τὶς πλευρὲς παράλληλες καὶ ὁμόρροπες τότε οἱ γωνίες εἶναι ἴσες.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

419) Δύο εὐθεῖες παράλληλες τέμνονται ἀπὸ ἄλλην εὐθεῖαν καὶ σχηματίζουν μίαν γωνίαν ἴσην μὲ 50^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν σὲ μοῖρες καὶ σὲ μέρη ὀρθῆς.

420) Δύο παράλληλες τέμνονται ἀπὸ ἄλλην εὐθεῖαν καὶ σχηματίζουν μίαν γωνίαν 3/πλασίαν τῆς παραπληρωματικῆς της. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν (χρησιμοποιεῖστε ἐξίσωσι).

421) Δύο παράλληλες τέμνονται ἀπὸ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν. Νὰ διχοτομήσετε δύο ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίες καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν οἱ διχοτόμοι εἶναι παράλληλοι.

422) Ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) νὰ φέρετε ἡμιευθεῖαν ΑΧ || ΒΓ. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ ΑΧ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τῆς Α.

423) Νὰ διχοτομήσετε τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Α ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ διχοτόμος αὐτὴ εἶναι παράλληλος μὲ τὴν ΒΓ.

424) Δύο εὐθεῖες ε_1, ε_2 παράλληλοι τέμνονται ἀπὸ εὐθεῖαν γ στὰ σημεῖα Α, Β ἀντιστοίχως. Νὰ φέρετε τὰς διχοτόμους δύο ἐντὸς ἐφεξῆς γωνιῶν καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι αὐτὲς κάθετοι.

425) Δύο γωνίες x O ψ καὶ x΄O΄ψ΄ εἶναι ἴσες καὶ ἔχουν τὶς πλευρὲς Ox καὶ O΄x΄ παράλληλες καὶ ὁμόρροπες. Θὰ εἶναι παράλληλες καὶ οἱ πλευρὲς Oψ. O΄ψ΄;

426) Δύο τρίγωνα ἔχουν τὶς πλευρές των μία μὲ μία παράλληλες. Νὰ συγκρίνετε τὶς γωνίες αὐτῶν.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Μὲ πόσους τρόπους μπορεῖτε νὰ χαράξετε παράλληλες εὐθεῖες.

2) Πῶς μπορεῖτε νὰ ἐλέγξετε ἂν δύο εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

3) Τί γνωρίζετε γιὰ τὶς γωνίες ποὺ σχηματίζουν δύο παράλληλες ποὺ τέμνονται ἀπὸ μία ἄλλη εὐθεῖα.

4) Νὰ βρῆτε ἀντικείμενα ποὺ ἔχουν γωνίες μὲ παράλληλες πλευρές.

5) Τί διαφέρει ὁ ὁρισμὸς τῶν παραλλήλων εὐθειῶν μὲ τὸν ὁρισμὸ τῶν παραλλήλων μὲ «εὐρεῖαν» σημασίαν.

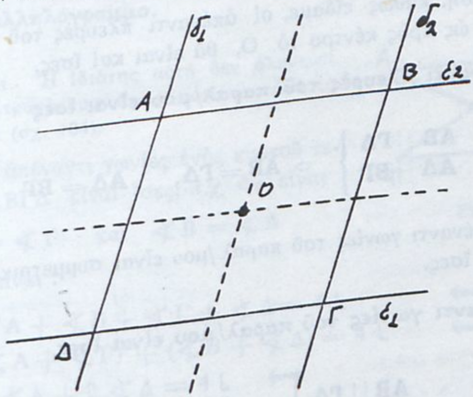
ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Θ΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι΄

§ 78. Παραλληλόγραμμα

1. Ἂς πάρουμε δύο ταινίες ποὺ τέμνονται. Π.χ. τὶς ταινίες τῶν παραλλήλων ε_1, ε_2 καὶ δ_1, δ_2 (σχ. 102). Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν ταινιῶν αὐτῶν ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες καὶ λέγεται **παραλληλόγραμμο**. Τὸ παραλληλόγραμμο περιορίζει ἕνα κυρτὸ χωρίο τοῦ ἐπιπέδου. (Ἐπειδὴ ΑΒ || ΓΔ, οἱ κορυφὲς Γ, Δ εὑρίσκονται στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴν ΑΒ γιατὶ ἀλλοιῶς ἡ ΓΔ θὰ ἔτεμνε τὴν ΑΒ).



Σχ. 102

2. Κέντρο συμμετρίας παραλληλογράμμου. Μάθαμε στὸν προηγούμενο χρόνο, ὅτι κάθε ταινία ἔχει ἄπειρα κέντρα συμμετρίας στὴ μεσοπαράλληλό της. Κάθε σημεῖο τῆς μεσοπαραλλήλου εἶναι κέντρο συμμετρίας τῆς ταινίας. Ἂν λοιπὸν Ο εἶναι ἡ τομὴ τῶν δύο μεσοπαραλλήλων τῶν ταινιῶν τότε τὸ σημεῖον αὐτὸ ὡς κέντρο συμμετρίας τῆς κάθε μιᾶς ταινίας θὰ εἶναι κέντρο συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμμου.

§ 79. Ἰδιότητες παραλληλογράμμων

α) Στὴ συμμετρία ποὺ ἔχει κέντρο τὸ Ο εἶναι ἡ ΑΒ συμμετρικὴ τῆς ΓΔ καὶ ἡ ΑΔ συμμετρικὴ τῆς ΒΓ. (γιατί;)

Ἄρα καὶ ἡ τομὴ τῶν ΑΒ καὶ ΑΔ, δηλ. τὸ Α εἶναι συμμετρικὴ τῆς τομῆς τῶν ΓΔ καὶ ΓΒ δηλ. τοῦ Γ. Ἐπειδὴ δὲ οἱ κορυφὲς Α καὶ Γ εἶναι συμμετρικές, ὡς πρὸς τὸ Ο, θὰ εἶναι ΑΟ = ΟΓ. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε ὅτι ΒΟ = ΟΔ.

Ὥστε: **Αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται καὶ ἡ τομή των εἶναι τὸ κέντρο συμμετρίας τοῦ παρ/μου**

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{AB} \parallel \mathbf{\Gamma\Delta} \\ \mathbf{A\Delta} \parallel \mathbf{B\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \mathbf{AO} = \mathbf{O\Gamma} \\ \mathbf{BO} = \mathbf{O\Delta} \end{array}\right\}$$

β) Ἐπειδή, καθὼς εἴδαμε, οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ παρ/μου εἶναι συμμετρικές, ὡς πρὸς κέντρο τὸ Ο, θὰ εἶναι καὶ ἴσες.

Οἱ ἀπέναντι πλευρὲς τοῦ παραλ/μου εἶναι ἴσες

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{AB} \parallel \mathbf{\Gamma\Delta} \\ \mathbf{A\Delta} \parallel \mathbf{B\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{AB} = \mathbf{\Gamma\Delta}, \quad \mathbf{A\Delta} = \mathbf{B\Gamma}$$

γ) Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ παραλ./μου εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὸ Ο· ἄρα εἶναι ἴσες.

Οἱ ἀπέναντι γωνίες τοῦ παραλ/μου εἶναι ἴσες.

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{AB} \parallel \mathbf{\Gamma\Delta} \\ \mathbf{A\Delta} \parallel \mathbf{B\Gamma} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \sphericalangle \mathbf{A} = \sphericalangle \mathbf{\Gamma} \\ \sphericalangle \mathbf{B} = \sphericalangle \mathbf{\Delta} \end{array}\right\}$$

Ἀντίστροφα:

α) Ἂν στὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ διχοτομοῦνται, ἂν εἶναι δηλαδὴ ΑΟ = ΟΓ καὶ ΒΟ = ΟΔ

τότε: οἱ ἀπέναντι κορυφὲς Α, Γ καὶ Β, Δ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὴν τομὴν Ο τῶν διαγωνίων, ὁπότε κι' οἱ ἀπέναντι πλευρὲς ΑΒ, ΓΔ καὶ ΑΔ, ΒΓ θὰ εἶναι συμμετρικές, ἄρα καὶ παράλληλες.

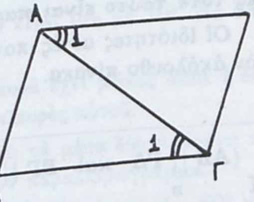
Ὥστε: **Ἂν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου διχοτομοῦνται τὸ τετράπλευρο θὰ εἶναι παραλληλόγραμμο**

ἢ συμβολικά: $\left.\begin{array}{l} \mathbf{AO} = \mathbf{O\Gamma} \\ \mathbf{OB} = \mathbf{O\Delta} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathbf{AB} \parallel \mathbf{\Gamma\Delta} \\ \mathbf{A\Delta} \parallel \mathbf{B\Gamma} \end{array}$

β) Ἂν ΑΒΓΔ εἶναι ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες τότε μία διαγώνιος π.χ, ἡ ΑΓ χωρίζει τὸ τετράπλευρο σὲ δύο ἴσα τρίγωνα

(ΑΔ = ΒΓ, ΑΒ = ΓΔ, ΑΓ = ΑΓ)

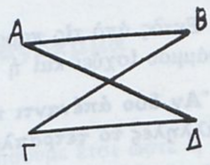
ἄρα θὰ εἶναι $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle \Gamma_1$ (σχ. 103) δηλαδὴ οἱ ΑΒ καὶ ΔΓ θὰ εἶναι παράλληλοι (§ 75). Γιὰ τὸν ἴδιο λόγο θὰ εἶναι καὶ ΑΔ | ΒΓ.



Σχ. 103

ὥστε: **Ἂν ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο ἔχει τὶς ἀπέναντι πλευρὲς ἴσες θὰ εἶναι παραλληλόγραμμο.**

Παρατήρησι. Ἡ ἰδιότης αὐτὴ δὲν ἀληθεύει σὲ μὴ κυρτὰ τετράπλευρα ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ κατωτέρω σχῆμα (σχ. 104).



Σχ. 104

γ) Ἂν οἱ ἀπέναντι γωνίες ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσες, π.χ. ἂν εἶναι

$\sphericalangle A = \sphericalangle \Gamma$ καὶ $\sphericalangle B = \sphericalangle \Delta$

Τότε θὰ εἶναι:

$$\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle \Gamma + \sphericalangle \Delta = 4\,\text{L} \quad \longleftrightarrow$$
$$(\sphericalangle A + \sphericalangle \Gamma) + (\sphericalangle B + \sphericalangle \Delta) = 4\,\text{L} \quad \longleftrightarrow$$
$$2\sphericalangle A + 2\sphericalangle \Delta = 4\,\text{L} \quad \longleftrightarrow$$
$$\sphericalangle A + \sphericalangle \Delta = 2\,\text{L} \qquad (1)$$

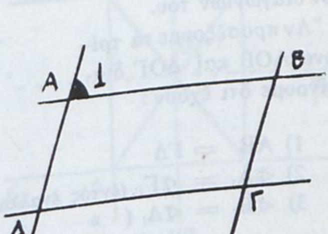
Ἀπὸ τὸ σχῆμα 105 ἔχουμε

$$\sphericalangle A + \sphericalangle A_1 = 2\,\text{L} \qquad (2)$$

Ἄρα $\sphericalangle A + \sphericalangle \Delta = \sphericalangle A + \sphericalangle A_1$

$$\longleftrightarrow \quad \sphericalangle \Delta = \sphericalangle A_1 \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν $\sphericalangle \Delta$ καὶ $\sphericalangle A_1$ συνάγουμε ὅτι ΑΒ || ΓΔ



Σχ. 105

Στὸ ἴδιο συμπέρασμα φθάνουμε καὶ γιὰ τὶς ἄλλες πλευρὲς ΑΔ καὶ ΒΓ μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

ὥστε: **Ἂν σ' ἕνα κυρτὸ τετράπλευρο οἱ ἀπέναντι γωνίες εἶναι ἴσες τότε τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμο.**

Οἱ ἰδιότητες αὐτὲς παντὸς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ συνοψίζονται στὸν ἀκόλουθο πίνακα.

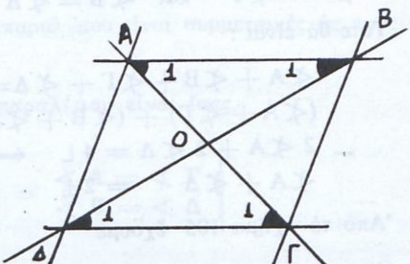
I	**(ΑΒ ∥ ΓΔ καὶ ΒΓ ∥ ΔΑ)**	**⟷**	**ΑΟ = ΟΓ καὶ ΒΟ = ΟΔ**
II	**» »**	**⟷**	**ΑΒ = ΓΔ καὶ ΑΔ = ΒΓ καὶ κυρτὸ τετράπλευρο.**
III	**» »**	**⟷**	**∢Α = ∢Γ καὶ ∢Β = ∢Δ καὶ κυρτὸ τετράπλευρο.**

Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς παραπάνω χαρακτηριστικὲς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου ἰσχύει καὶ ἡ ἀκόλουθη:

Ἂν δύο ἀπέναντι πλευρὲς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴσες καὶ παράλληλες τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.

Γιὰ νὰ ἐξακριβώσουμε τὴν ἀλήθεια τῆς προτάσεως αὐτῆς ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

Ἂς εἶναι ΑΒΓΔ τὸ κυρτὸ τετράπλευρο στὸ ὁποῖον εἶναι ΑΒ∥=ΓΔ κι' ἂς εἶναι Ο τὸ σημεῖο τομῆς τῶν διαγωνίων του.



σχ. 206

Ἂν προσέξουμε τὰ τρίγωνα ΑΟΒ καὶ ΔΟΓ διακρίνουμε ὅτι ἔχουν:

1) ΑΒ = ΓΔ
2) $\sphericalangle A_1 = \sphericalangle \Gamma_1$ (ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ)
3) $\sphericalangle B_1 = \sphericalangle \Delta_1$ (» » » » » » »)

Ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴ συνάγουμε ὅτι:

$$AO = O\Gamma \quad \text{καὶ} \quad BO = O\Delta$$

δηλαδὴ ὅτι αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται ὁπότε τὸ τετράπλευρο εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ὥστε: **(ΑΒ ∥ ΓΔ καὶ ΑΔ ∥ ΒΓ) ⟷ ΑΒ ∥= ΓΔ.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

427) Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο μία γωνία εἶναι ἴση μὲ 70^0. Νά ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν αὐτοῦ.

428) Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ μία πλευρὰ ἔχει μῆκος 4cm ἡ δὲ περίμετρος 14cm. Πόσο μῆκος ἔχουν οἱ ἄλλες πλευρὲς αὐτοῦ.

429) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου τὸ χωρίζει σὲ δύο παραλληλόγραμμα.

430) Νὰ κατασκευάσετε παραλληλόγραμμο μὲ μία γωνία 60^0 καὶ μὲ προσκείμενες σ' αὐτὴν πλευρὲς μὲ μῆκος 3cm καὶ 4cm.

431) Νὰ διχοτομήσετε δύο ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι παράλληλοι

§ 79. Εἰδικὰ παραλληλόγραμμα

1. Ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο

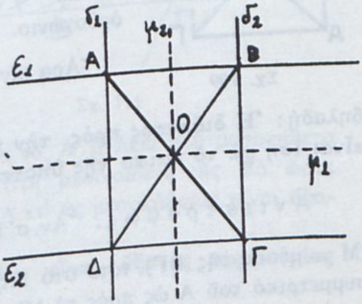
Ἂν πάρουμε δύο ταινίες καὶ τὶς μετακινήσουμε ἔτσι ὥστε ἡ μία νὰ ἔλθη σὲ θέσι κ ά θ ε τ η πρὸς τὴν ἄλλη, σχ. 118, τότε ἡ τομή των ὁρίζει ἕνα εἰδικὸ παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς γωνίες ὀρθὲς καὶ λέγεται **ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.**

Φυσικὰ τὸ ὀρθογ. παραλληλόγραμμο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες τῶν παραλληλογράμμων. Ἐπὶ πλέον

1) Μία μεσοπαράλληλος π.χ. ἡ μ_1

α) Εἶναι ἄξονας συμμετρίας τῶν παραλλήλων ε_1 καὶ ε_2 (§ 78.2)

β) Εἶναι κάθετος πρὸς τὶς δ_1, δ_2 ἄρα καὶ ἄξονας συμμετρίας αὐτῶν. (κάθε κάθετος πρὸς μίαν εὐθεῖαν εἶναι ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς).



σχ. 108

Εἶναι δηλ. ἡ μεσαπαράλληλος μ_1 ἄξονας συμμετρίας τοῦ ὀρθογ. παραλ/μου. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ τὴ μεσοπαράλληλο μ_2.

Ὥστε : **Αἱ δύο μεσοπαράλληλοι τοῦ ὀρθογ. παραλληλογράμμου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογ. παραλληλογράμμου.**

2. Ἂν ζητήσουμε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς διαγωνίου τοῦ ὀρθογ. παρ/μου ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας μίαν μεσοπαράλληλο αὐτοῦ εὔκολα εὑρίσκουμε ὅτι εἶναι ἡ ἄλλη διαγώνιος.

Ἄρα : **Αἱ διαγώνιοι ὀρθογ. παραλ/μου εἶναι ἴσες.**

3. Ἂν σ' ἕνα παραλ/μο ΑΒΓΔ αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι τότε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΑΔ ἔχουν

α) $ΑΓ = ΒΔ$ β) $ΒΓ = ΑΔ$ γ) $ΑΒ = ΑΒ$

ἄρα εἶναι ἴσα ὁπότε καὶ $\sphericalangle ΑΒΓ = \sphericalangle ΔΑΒ$. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ προσκείμενες γωνίες τοῦ παραλ/μου εἶναι παραπληρωματικὲς θὰ πρέπει

$$\sphericalangle ΑΒΓ = \sphericalangle ΔΑΒ = 1 \llcorner$$

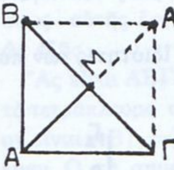
ὥστε τὸ παραλ/μο εἶναι ὀρθογώνιο

Κάθε παραλληλόγραμμο ποὺ ἔχει ἴσας διαγωνίους εἶναι ὀρθογώνιο.

Σημείωσις. Μπορεῖτε νὰ κατασκευάσετε ἕνα ἀρθρωτὸ παραλ/μο (μοντέλο) μὲ διαγωνίους ἀπὸ λαστιχάκι ὁπότε μὲ τὴν μετακίνησι τῶν πλευρῶν θὰ παρατηρήσετε ὅτι οἱ διαγώνιοι γίνονται ἴσες ὅταν τὸ παραλ/μο γίνη ὀρθογώνιο.

Ἐφαρμογή

Κατασκευάζουμε ὀρθογ. τρίγωνο ΑΒΓ ($\sphericalangle Α = 1 \llcorner$) καὶ τὴν διάμεσο ΑΜ αὐτοῦ (σχ. 109). Ἂν εἶναι Α΄ τὸ συμμετρικὸ τῆς κορυφῆς Α ὡς πρὸς τὸ μέσον Μ τῆς ΒΓ τότε τὸ τετράπλευρο ΑΒΑ΄Γ ἔχει: $ΑΜ = ΜΑ'$, $ΒΜ = ΜΓ$, ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $\sphericalangle Α = 1 \llcorner$ τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι ὀρθογώνιο.



Σχ. 109

Ἄρα εἶναι: $ΑΑ' = ΒΓ \longleftrightarrow ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$

δηλαδή: **Ἡ διάμεσος πρὸς τὴν ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.**

Ἀντιστρόφως. Ἂν σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ (Μ = μέσον τῆς ΒΓ) τότε στὸ τετράπλευρο ΑΒΑ΄Γ (ὅπου Α΄ εἶναι τὸ συμμετρικὸ τοῦ Α ὡς πρὸς τὸ Μ) εἶναι

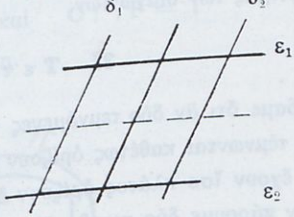
$$ΑΜ = ΜΑ' \quad \text{καὶ} \quad ΒΜ = ΜΓ$$

δηλαδὴ αἱ διαγώνιοι ΑΑ΄ καὶ ΒΓ διχοτομοῦνται ἄρα τοῦτο εἶναι παραλληλόγραμμο. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $ΑΑ' = ΒΓ$ (διότι $ΑΜ = ΜΑ' = \frac{ΒΓ}{2}$) τὸ παραλληλόγραμμο αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιο ὁπότε $\sphericalangle Α = 1 \llcorner$

ὥστε : Ἂν μία διάμεσος τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τότε τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο μὲ ὑποτείνουσαν τὴν πλευράν αὐτήν.

2. Ρόμβος

Ἂς εἶναι ε_1, ε_2 καὶ δ_1, δ_2 δύο ταινίες ἴσου πλάτους. Τὸ παραλληλόγραμμο ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομήν των ἔχει ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες καὶ λέγεται **ρόμβος** (σχ. 110).



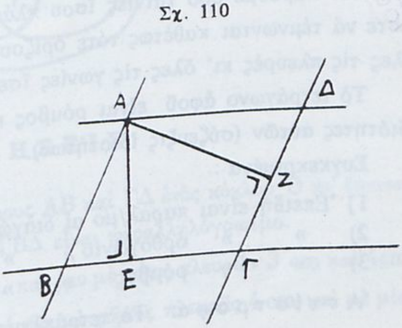
Σχ. 110

Τὴν ἰσότητα τῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ δύο ἴσου πλάτους ταινίες μποροῦμε νὰ τὴν ἀποδείξουμε.

Ἀπὸ μίαν κορυφήν, τὴν Α, φέρουμε ΑΕ ⊥ ΒΓ καὶ ΑΖ ⊥ ΓΔ (σχ. 111). Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ ἔχουν:

1) $\sphericalangle$ Β = $\sphericalangle$ Δ ὡς ἀπέναντι γωνίες παραλληλογράμμου.

2) ΑΕ = ΑΖ ἐπειδὴ οἱ ταινίες ἔχουν ἴσο πλάτος· ἄρα εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτῶν συνάγουμε ὅτι ΑΒ = ΑΔ.



Σχ. 111

Ἰδιότητες ρόμβου

Ὁ ρόμβος ὡς παραλληλόγραμμο ἔχει ὅλες τὶς ἰδιότητες αὐτοῦ. Ἐπὶ πλέον

α) Εἶναι ΑΒ = ΑΔ (σχ. 111) ἄρα τὸ Α ἀνήκει στὴ μεσοκάθετο τῆς ΒΔ καὶ ΒΓ = ΓΔ, ἄρα τὸ Γ ἀνήκει στὴ μεσοκάθετο τῆς ΒΔ· ὥστε ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι μεσοκάθετος τῆς ΒΔ κι' ὡς μεσοκάθετος εἶναι ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς.

Οἱ εὐθεῖες τῶν διαγωνίων ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας αὐτοῦ.

Ἀπὸ τὴν πρότασιν αὐτὴν συνάγουμε ὅτι:

Αἱ διαγώνιοι ρόμβου διχοτομοῦν τὶς γωνίες αὐτοῦ.

β) Ἂν σ' ἕνα παραλ/μο ἡ μία διαγώνιος εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἄλλην θὰ εἶναι καὶ μεσοκάθετος αὐτῆς, (διότι αἱ διαγώνιοι παραλ/μου διχοτομοῦνται) ἄρα καὶ ἄξονας συμμετρίας αὐτῆς.

Ἀπὸ αὐτὸ συνάγουμε ὅτι οἱ πλευρὲς τοῦ παραλ/μου θὰ εἶναι συμμετρικὲς ὡς πρὸς τὰς διαγωνίους, ἄρα καὶ ἴσες.

Ὥστε: **Ἂν ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει καθέτους διαγωνίους θὰ εἶναι ρόμβος.**

Σημείωσις. Ἂν κατασκευάσουμε ἕνα ἀρθρωτὸ ξύλινο μοντέλο ρόμβου, μὲ διαγωνίους ἀπὸ λαστιχάκια εὔκολα μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε τὶς ἰδιότητες τῶν διαγωνίων.

3. Τετράγωνο

Εἴδαμε ὅτι ἂν δύο τεμνόμενες ταινίες

α) τέμνωνται καθέτως ὁρίζουν ἕνα ὀρθογώνιο

β) ἔχουν ἴσο πλάτος ὁρίζουν ἕναν ρόμβο.

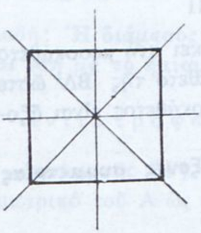
Ἂν πάρουμε δύο ταινίες ἴσου πλάτους καὶ τὶς τοποθετήσουμε ἔτσι ὥστε νὰ τέμνωνται καθέτως τότε ὁρίζουν ἕνα παραλ/μο ποὺ ἔχει: ὅλες τὶς πλευρὲς κι' ὅλες τὶς γωνίες ἴσες (ὀρθές) καὶ λέγεται **τετράγωνο.**

Τὸ τετράγωνο ἀφοῦ εἶναι ρόμβος καὶ ὀρθογώνιο θὰ ἔχῃ ὅλες τὶς ἰδιότητες αὐτῶν (σύζευξις ἰδιοτήτων).

Συγκεκριμένα:

1) Ἐπειδὴ εἶναι παραλ/μο αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται (I)
2) » » ὀρθογώνιο » » » εἶναι ἴσες (II)
3) » » ρόμβος » » » τέμνονται καθέτως (III)

Ἀντίστροφα. Τὸ τετράπλευρο τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι



Σχ. 112

1) διχοτομοῦνται
2) εἶναι ἴσαι
3) τέμνονται καθέτως, εἶναι τετράγωνο, διότι εἶναι παρ/μο (I), ὀρθογώνιο (II) καὶ ρόμβος (III).

Τὸ τετράγωνο ἔχει 4 ἄξονες συμμετρίας, τὶς δύο μεσοπαραλλήλους (ὡς ὀρθογώνιο) καὶ » » διαγωνίους (ὡς ρόμβος)

Οἱ ἄξονες αὐτοὶ τέμνονται στὸ κέντρο συμμετρίας τοῦ τετραγώνου.

Τὶς σχέσεις μεταξὺ τῶν παραλ/μων τῶν ὀρθογωνίων, τῶν ρόμβων καὶ τῶν τετραγώνων μποροῦμε νὰ τὶς ἐκφράσουμε στὴ γλῶσσα τῶν συνόλων μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἂν ὀνομάσουμε :

Π τὸ σύνολο τῶν παραλληλογράμμων

Ο » » » ὀρθογωνίων

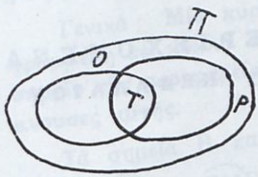
Ρ » » » ρόμβων

Τ » » » τετραγώνων

τότε εἶναι φανερὲς οἱ σχέσεις $O \cap P = T$

$$O \subseteq \Pi, \quad P \subseteq \Pi, \quad T \subseteq \Pi \quad \text{καὶ}$$

ἢ μὲ τὸ ἀκόλουθο διάγραμμα τοῦ Venn.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

432) Νὰ χαράξετε δύο διαμέτρους ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς κύκλου Ο κι' ἔπειτα νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ τετράπλευρο ΑΓΒΔ εἶναι παραλληλόγραμμο.

433) Νὰ κατασκευάσετε ὀρθογ. παρ/μο μὲ μήκη πλευρῶν 3 cm καὶ 4cm

434) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα ρόμβο μὲ μῆκος πλευρᾶς 4 cm καὶ μὲ μία γωνία 60^0.

435) Νὰ κατασκευάσετε τετράγωνο μὲ πλευρὰ 3 cm.

436) Νὰ κατασκευάσετε ὀρθογώνιο τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν γωνίαν 45^0 τὸ δὲ μῆκος τῆς μίας ἐξ αὐτῶν νὰ εἶναι 5 cm.

437) Νὰ κατασκευάσετε ρόμβο μὲ διαγωνίους 4 cm καὶ 5 cm ἀντιστοίχως.

438) Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα δ κι' ἔπειτα ἕνα τετράγωνο μὲ διαγώνιο ἴση μὲ τὸ δ.

439) Ἡ διαγώνιος ἑνὸς ὀρθογωνίου σχηματίζει μὲ μίαν πλευρὰν αὐτοῦ γωνίαν 30^0. Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζει ἡ κάθε διαγώνιος μὲ τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου.

440) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μέτρο τῆς γωνίας τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Σὲ τί διαφέρουν τὸ τετράγωνο κι' ὁ ρόμβος

2) » » » » ὀρθογώνιο » » »

3) » » » » » καὶ τὸ τετράγωνο

4) Ποιές ὁμοιότητες ὑπάρχουν μεταξὺ

α) τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ρόμβου

β) » » » » τετραγώνου

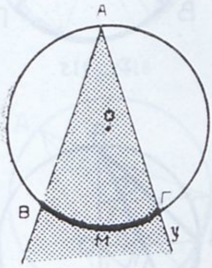
γ) ρόμβου » » »

5) Νὰ ὁρίσετε τὴν τομὴ τῶν συνόλων $A = \{x \mid x$ ρόμβος$\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ ὀρθογώνιο$\}$ στό ὑπερσύνολο τῶν σχημάτων τοῦ ἐπιπέδου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ
Ι΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΑ΄

§ 80. Γωνίες ἐγγεγραμμένες σὲ κύκλο



Σχ. 113

Στὸ σχ. 113 ἡ κυρτὴ γωνία xAy

1) Ἔχει τὴν κορυφήν της Α στὴν περιφέρεια.

2) Οἱ πλευρές της τέμνουν τὴν περιφέρεια κατὰ τὶς χορδὲς ΑΒ, ΑΓ καὶ λέγεται γωνία ἐ γ γ ε γ ρ α μ μ έ ν η σὲ κύκλο.

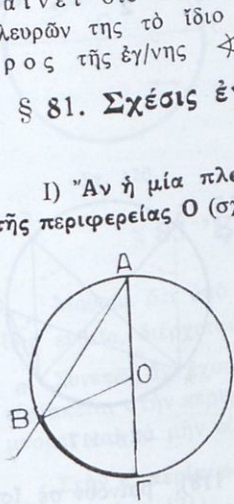
Γενικά: **Μία κυρτὴ γωνία λέγεται ἐγγεγραμμένη σὲ κύκλο ὅταν ἡ κορυφή της εἶναι σημεῖο τῆς περιφερείας καὶ οἱ πλευρές της τέμνουσες αὐτῆς.**

Τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ὁρίζουν στὴ περιφέρεια δύο τόξα· τὰ $\widehat{ΒΑΓ}$ καὶ $\widehat{ΒΜΓ}$· τὸ $\widehat{ΒΜΓ}$, ποὺ δὲν περιέχει τὴν κορυφὴ τῆς γωνίας, λέγεται **ἀντίστοιχο τόξο αὐτῆς.**

Τὸ ἴδιο ἐννοοῦμε καὶ μὲ τὴν ἔκφρασι: «Ἡ ἐγ/νη γωνία xAy β α ί ν ε ι στὸ $\widehat{ΒΜΓ}$». Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ποὺ περιέχει μεταξὺ τῶν πλευρῶν της τὸ ἴδιο τόξο λέγεται ἀ ν τ ί σ τ ο ι χ ο ς ἐ π ί κ ε ν τ ρ ο ς τῆς ἐγ/νης ∢ xAy.

§ 81. Σχέσις ἐγ/νης γωνίας καὶ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου

I) **Ἂν ἡ μία πλευρὰ τῆς ἐγ/νης γωνίας διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο τῆς περιφερείας Ο** (σχ. 114), παρατηροῦμε ὅτι:



Σχ. 114

1) Τὸ τρίγ. ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΟΑ=ΟΒ)

ἄρα $\sphericalangle Α = \sphericalangle Β$ (1)

2) Ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία εἶναι ἐξωτερικὴ τοῦ τριγ. ΑΟΒ

ἄρα $\sphericalangle Α + \sphericalangle Β = \sphericalangle ΒΟΓ$ (2)

Ἀπὸ τὶς σχέσεις (1) καὶ (2) ἔχουμε:

$$\sphericalangle Α = \sphericalangle \frac{ΒΟΓ}{2}$$

II. Στὸ σχ. 115 ἀπὸ τὸ τρίγ. ΒΑΟ ἔχουμε :

$$\measuredangle O_1 = 2 \measuredangle A_1 \qquad (1)$$

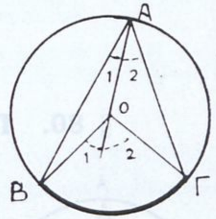
κι' ἀπ' τὸ τρίγ. ΓΑΟ ἔχουμε:

$$\measuredangle O_2 = 2 \measuredangle A_2 \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$$\measuredangle O_1 + O_2 = 2(\measuredangle A_1 + \measuredangle A_2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \measuredangle O = 2 \measuredangle A \quad \Longleftrightarrow \quad \measuredangle A = \frac{1}{2} \measuredangle O$$



Σχ. 115

III. Στὸ σχ. 116 εἶναι :

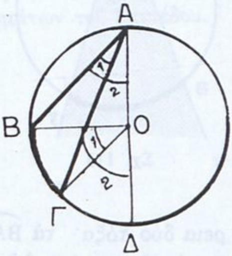
$$\measuredangle ΒΑΔ = \frac{1}{2} \measuredangle ΒΟΔ \quad (1) \quad \text{(1η περίπτωσις)}$$

$$\measuredangle ΓΑΔ = \frac{1}{2} \measuredangle ΓΟΔ \quad (2) \quad (\text{»} \quad \text{»} \quad)$$

Ἂν ἀφαιρέσουμε κατὰ μέλη τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε:

$$\measuredangle ΒΑΔ - \measuredangle ΓΑΔ = \frac{1}{2} \measuredangle ΒΟΔ - \frac{1}{2} \measuredangle ΓΟΔ$$

$$\Longleftrightarrow \quad \measuredangle ΒΑΓ = \frac{1}{2} \measuredangle ΒΟΓ$$



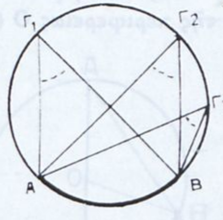
Σχ. 116

ὥστε : **Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου.**

§ 82. Ἐφαρμογὲς

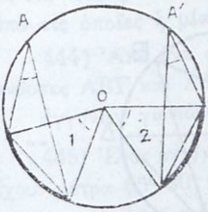
1) Δύο ἢ περισσότερες γωνίες ἐγ/νες στὸ ἴδιο τόξο ἢ σὲ ἴσα τόξα εἶναι ἴσες.

Οἱ ἐγ/νες στὸ $\overset{\frown}{AB}$, (σχ.117), γωνίες $\measuredangle Γ_1$, $\measuredangle Γ_2$, $\measuredangle Γ_3$ εἶναι ἴσες ὡς ἴσες μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἐπικέντρου γωνίας ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ἴδιο τόξο.



Σχ. 117

Ἂν οἱ ἐγ/νες γωνίες $\measuredangle A$, $\measuredangle A'$ (σχ. 118), βαίνουν σὲ ἴσα



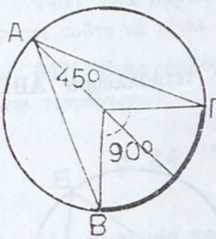
Σχ. 118

τόξα τότε καὶ οἱ ἀντίστοιχές των ἐπίκεντρες $\sphericalangle O_1$, $\sphericalangle O_2$ θὰ βαίνουν σὲ ἴσα τόξα ὁπότε:

$$\sphericalangle O_1 = \sphericalangle O_2 \Rightarrow \frac{1}{2} \sphericalangle O_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle O_2$$

$$\Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle A'$$

2) Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ τέταρτο τῆς περιφερίας ἔχει μέτρο 45^0.

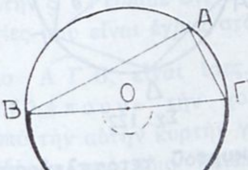


Σχ. 119

Ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρος (σχ. 119), θὰ βαίνει σὲ τέταρτο τῆς περιφερείας· ἄρα θὰ εἶναι ὀρθὴ ὁπότε:

$$(\sphericalangle B A \Gamma) = \frac{90^0}{2} = 45^0$$

3) Ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία σὲ ἡμιπεριφέρεια εἶναι ὀρθή.



Σχ. 120

Ἡ ἀντίστοιχή της ἐπίκεντρος $\sphericalangle B O \Gamma$. (σχ. 120) βαίνει σὲ ἡμιπεριφέρεια· ἄρα θὰ εἶναι ἀποπλατυσμένη γωνία, ὁπότε:

$$\sphericalangle B A \Gamma = \frac{1}{2} \sphericalangle B O \Gamma = 1 \text{ ὀρθὴ γωνία}$$

§ 83 Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα

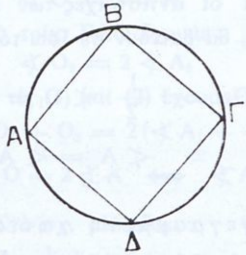
Μάθαμε ὅτι ἀπὸ τρία σημεῖα Α, Β, Γ, ποὺ δὲν εὑρίσκονται στὴν ἴδια εὐθεῖα, διέρχεται μία καὶ μόνον μία περιφέρεια.

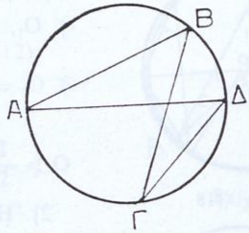
Συνεπῶς ἂν ἔχουμε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ μπορεῖ ἡ κορυφὴ Δ νὰ εὑρίσκεται στὴν περιφέρεια ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὶς κορυφὲς Α, Β, Γ, ἀλλὰ μπορεῖ καὶ νὰ μὴν εὑρίσκεται.

Στὴν α′ περίπτωσι τὸ τετράπλευρο λέγεται **ἐγγεγραμμένο** σὲ κύκλο.

Π.χ. στὸ (σχ. 121).

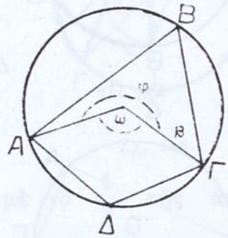
Τὰ τετράπλευρα ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένα σὲ κύκλο.





Σχ. 121

Ἰδιότης. Ἂς εἶναι τὸ κυρτὸ ἐγγεγραμμένο τετράπλευρο ΑΒΓΔ σχ. 122. Παρατηροῦμε ὅτι:



Σχ. 122

$$1) \sphericalangle B = \frac{1}{2} \sphericalangle \omega$$

$$\sphericalangle \Delta = \frac{1}{2} \sphericalangle \varphi$$

ἄρα: $\sphericalangle B + \sphericalangle \Delta = \frac{1}{2} (\sphericalangle \omega + \sphericalangle \varphi)$

Εἶναι ὅμως $\sphericalangle \omega + \sphericalangle \varphi = 4$ ὀρθές

ἄρα: $\sphericalangle B + \sphericalangle \Delta = 2$ ὀρθές

Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι γωνιῶν κυρτοῦ τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο εἶναι ἴσο μὲ 2 ὀρθές.

Σημ. Σὲ ἄλλη τάξι θὰ ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καὶ ἡ ἀντίστροφος πρότασις.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

441) Σ' ἕνα κύκλο νὰ χαράξετε δύο παράλληλες χορδὲς καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ μεταξὺ αὐτῶν τόξα (χρησιμοποιεῖστε ἐγγ/νες γωνίες).

441) Σ' ἕνα κύκλο νὰ ἐγ/ψετε ἕνα τραπέζιο καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν πρέπει τοῦτο νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς (ἰσοσκελὲς εἶναι τὸ τραπέζιο ποὺ ἔχει τὶς δύο μὴ παράλληλες πλευρὲς ἴσες).

442) Δύο χορδὲς ΑΒ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐντὸς τοῦ κύκλου στὸ σημεῖον

Ο. Νὰ συγκρίνετε τὴν $\sphericalangle$ ΑΟΓ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐγγ/νων γωνιῶν ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἡ μία βαίνει στὸ τόξο ΔΒ κι' ἄλλη στὸ τόξο ΑΓ.

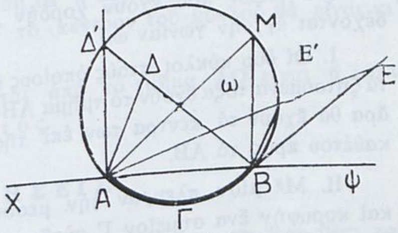
444) Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Α, στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου φέρουμε τὶς τέμνουσες ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ. Νὰ συγκρίνετε τὴν $\sphericalangle$ Α μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο ἐγγ/νων γωνιῶν ποὺ βαίνουν στὰ τόξα ΓΕ καὶ ΔΒ.

445) Ἑνὸς ἐγγ/νου σὲ κύκλο κυρτοῦ τετραπλεύρου δύο διαδοχ. γωνίες ἔχουν μέτρα $65^0\ 30'$ καὶ 110^0 νὰ ὑπολογίσετε τὰ μέτρα τῶν ἄλλων γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου τούτου.

446) Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἐγγ/νο σὲ κύκλο. Νὰ ἐξετάσετε ἂν πρέπει τοῦτο νὰ εἶναι ὀρθογώνιο.

447) Ἕνας ρόμβος εἶναι ἐγγ/νος σὲ κύκλο. Νὰ ἐξετάσετε ἂν πρέπει νὰ εἶναι τετράγωνο.

§ 84. Ἀξιοσημείωτος γεωμ. τόπος



Σχ. 123

Ἂς εἶναι μία περιφέρεια καὶ μία τέμνουσα x ψ αὐτῆς σχ. 123. Στὴν § 82 εἴδαμε ὅτι ὅλες οἱ γωνίες ποὺ εἶναι ἐγ/νες στὸ ἴδιο τόξο $\widehat{\text{ΑΓΒ}}$, εἶναι ἴσες. Δηλαδὴ «β λ έ π ο υ ν» τὴν χορδὴν ΑΒ ὑπὸ τὴν αὐτὴν κυρτὴν γωνίαν ω. Μήπως στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴν xψ, ὑπάρχουν κι' ἄλλα σημεῖα ποὺ βλέπουν τὴν χορδὴν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν ω;

α) Ἂν Δ εἶναι ἕνα σημεῖο στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου, γιὰ τὸ ὁποῖον $\sphericalangle$ Α Δ Β $=$ $\sphericalangle$ ω τότε θὰ πρέπει νὰ εἶναι: $\sphericalangle$ ΑΔΒ $=$ $\sphericalangle$ΑΔ′Β $=$ $\sphericalangle$ω. Αὐτὸ ὅμως ἀποκλείεται διότι ἡ ΑΔΒ ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγ. ΑΔΔ′ εἶναι μεγαλύτερη τῆς $\sphericalangle$ ΑΔ′Β. Ἄρα δὲν ὑπάρχει, στὸ ἐσωτερικὸ τοῦ κύκλου, σημεῖον Δ τέτοιο ὥστε $\sphericalangle$ ΑΔΒ $=$ $\sphericalangle$ ω.

β) Ἂς εἶναι, στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου, στὸ ἴδιο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴν x ψ, σημεῖον Ε τέτοιο ὥστε $\sphericalangle$ Α Ε Β $=$ $\sphericalangle$ ω $=$ Α Ε′ Β (ὅπου Ε′ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς περιφερείας μὲ τὴν ΑΕ). Ἀλλὰ ἡ $\sphericalangle$ Α Ε′ Β ὡς ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου Ε′ΕΒ εἶναι μεγαλύτερη τῆς $\sphericalangle$ ΑΕΒ. Ἄρα καὶ στὸ ἐξωτερικὸ τοῦ κύκλου δὲν ὑπάρχει τέτοιο σημεῖο.

Ὥστε: τὰ σημεῖα τοῦ $\widehat{\text{ΑΜΒ}}$ **καὶ *μόνον*** αὐτὰ ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ «β λ έ π ο υ ν» τὴν χορδὴν ΑΒ ὑπὸ γωνίαν ω.

Ἡ πρότασις αὐτὴ διατυπώνεται καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Τὸ τόξο $\overset{\frown}{AMB}$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὸ σταθερὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ φαίνεται ὑπὸ τὴν κυρτὴν γωνίαν ω.

Παρατηρήσεις. 1. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὰ ἄκρα Α καὶ Β τοῦ τόξου ΑΜΒ δὲν ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν.

2. Εὔκολα ἐννοοῦμεν ὅτι καὶ τὰσυμμετρικὰ τῶν σημείων τοῦ $\overset{\frown}{AMB}$, ποὺ εὑρίσκονται στὸ ἄλλο ἡμιεπίπεδο ὡς πρὸς τὴν x ψ ἔχουν τὴν ἴδια ἰδιότητα.

85. 1 Γραφικὴ ἐφαρμογή: **Δίδεται ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ, σταθερὸ κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος, καὶ μία γωνία ω. Νὰ κατασκευασθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου τὰ ὁποῖα βλέπουν τὸ τμῆμα ΑΒ ὑπὸ κυρτὴν γωνίαν ω.**

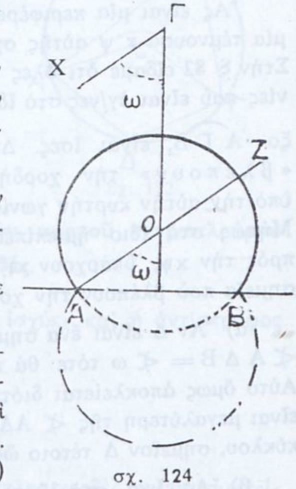
Σύμφωνα μὲ τὴν § 85 ὁ ζητούμενος γεωμ. τόπος θὰ εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο τόξων ποὺ ἔχουν χορδὴν ΑΒ καὶ δέχονται ἐγ/νην γωνίαν ω.

I. Οἱ δύο κύκλοι στοὺς ὁποίους ἀνήκουν τὰ ζητούμενα τόξα ἔχουν τὸ τμῆμα ΑΒ χορδὴν ἄρα θὰ ἔχουν τὰ κέντρα των ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου πρὸς τὸ ΑΒ.

II. Μὲ μίαν πλευρὰν τὴν μεσοκάθετον καὶ κορυφὴν ἕνα σημεῖον Γ αὐτῆς σχηματίζουμε γωνίαν ἴσην μὲ τὴν ω σχ. 124.

III. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Α τοῦ ΑΒ φέρουμε τὴν εὐθεῖαν ΑΖ || ΓΧ.

IV. Μὲ κέντρον τὴν τομὴν Ο τῆς μεσοκαθέτου καὶ τῆς ΑΖ καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφουμε περιφέρειαν. Τὸ τόξον αὐτῆς ΑΖΒ καὶ τὸ συμμετρικό του ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν τοῦ τμ. ΑΒ ἀποτελοῦν τὸν ζητούμ. γεωμ. τόπον (γιατί;)



σχ. 124

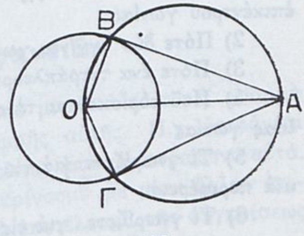
85. 2. Γραφικὴ ἐφαρμογή: **Νὰ χαραχθῆ ἐφαπτομένη, εἰς δεδομένον κύκλον, ἀπὸ ἕνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ.**

Ἄς εἶναι ΑΒ ἡ ζητουμένη ἐφαπτομένη. Τότε ἡ γωνία ΟΒΑ θὰ εἶναι ὀρθὴ (§ 61).

Ἄρα τὸ σημεῖον Β «βλέπει» τὸ σταθερὸ τμῆμα ΟΑ ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν ἴσην μὲ 1L, καὶ γι' αὐτὸ πρέπει τὸ Β, νὰ εὑρίσκεται ἐπάνω στὴ περιφέρεια ποὺ ἔχει διάμετρο τὸ τμῆμα ΟΑ.

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη κατασκευή.

Μὲ διάμετρο τὸ τμῆμα ΟΑ γράφουμε περιφέρεια ἡ ὁποία εἶναι φανερόν, ὅτι τέμνει τὴν δεδομένη περιφέρεια Ο, σὲ δύο σημεῖα Β, Γ. Τὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΑΓ ὁρίζουν τὶς ἐφαπτόμενες τῆς περιφερείας ποὺ διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.



Σχ. 125

Παρατήρησις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑΓ ($\sphericalangle B = \sphericalangle \Gamma = 1L$) ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΑ κοινὴν καὶ τὶς πλευρὲς ΟΒ καὶ ΟΓ ἴσες, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἄρα εἶναι ἴσα (§ 73_3). Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων εὑρίσκουμε ὅτι καὶ $\sphericalangle$ ΒΑΟ = $\sphericalangle$ ΟΑΓ. Δηλαδὴ ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς $\sphericalangle$ ΒΑΓ, ἄρα καὶ ἄξων συμμετρίας αὐτῆς. Ἐπειδὴ δὲ ἡ εὐθεῖα εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τμῆμα ΑΟ διέρχεται κι' ἀπ' τὸ κέντρον τοῦ κύκλου θὰ εἶναι κι' ἄξονας συμμετρίας αὐτοῦ.

Ὥστε: Ἡ εὐθεῖα ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ τμῆμα ΑΟ εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

448. Ἑνὸς ὀρθ. τριγ. ΑΒΓ ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἔχει σταθερὴ θέσι καὶ μέγεθος ἐνῶ ἡ κορυφὴ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α ἀλλάζει θέσεις στὸ ἐπίπεδο. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῆς κορυφῆς Α.

449. Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΒΓ μήκους 5 cm κι' ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸν γεωμ. τόπον τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ «βλέπουν» τὸ ΒΓ ὑπὸ γωνίαν 45^0.

450. Θεωροῦμε τὸ σύνολο τῶν τριγώνων ΑΒΓ τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἔχουν στὴν πλευράν, ΒΓ σταθερὴ σὲ θέσι καὶ μέγεθος καὶ τὴν κορυφὴ Α μεταβλητή. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν ποὺ ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β.

451. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν διαγωνίων ρόμβου τοῦ ὁποίου ἡ μία πλευρὰ ἔχει σταθερὴ θέσι καὶ μέγεθος.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Ποιά σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ μιᾶς ἐγγ/νης καὶ τῆς ἀντιστοίχου της ἐπικέντρου γωνίας

2) Πότε δύο ἐγγ/νες γωνίες εἶναι ἴσες

3) Πότε ἕνα τετράπλευρο εἶναι ἐγγ/νο σὲ κύκλο

4) Ποῦ εὑρίσκονται τὰ σημεῖα ποὺ «βλέπουν» ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ ὑπὸ ἴσας γωνίας

5) Τί γνωρίζετε γιὰ τὶς ἐφαπτομένες ποὺ ἄγονται ἀπὸ ἕνα σημεῖο σὲ μιὰ περιφέρεια

6) Τί γνωρίζετε γιὰ τὶς γωνίες ποὺ εἶναι ἐγγ/νες σὲ ἡμιπεριφέρεια

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

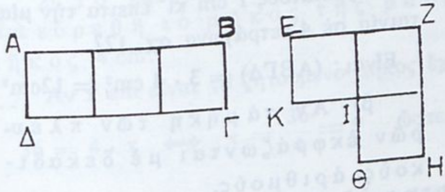
ΙΑ΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΒ΄

§ 86 Μέτρησις ἐπιφανειῶν

Τὸ ἐπίπεδο χωρίο ποὺ περιβάλλεται ἀπὸ μία κ λ ε ι σ τ ὴ γραμμὴ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται **ἐπιφάνεια** τῆς γραμμῆς αὐτῆς. Π.χ. ἐπιφάνεια ἑνὸς τετραγώνου εἶναι τὸ χωρίο ποὺ περικλείεται ἀπὸ τὸ τετράγωνο αὐτό. Γιὰ νὰ μετρήσουμε μίαν ἐπιφάνεια τὴν συγκρίνουμε μὲ μίαν ἄλλην ἐπιφάνεια ποὺ τὴν λαμβάνουμε ὡς μονάδα. Τὸ ἀποτέλεσμα τῆς συγκρίσεως εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ λέγεται **ἐμβαδὸν** τῆς ἐπιφανείας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι δύο ἴσα σχήματα ἔχουν καὶ ἴσα ἐμβαδά. Εἶναι ὅμως δυνατὸν δύο σχήματα νὰ ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ χωρὶς αὐτὰ νὰ εἶναι ἴσα. π.χ. τὰ ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘΙΚ σχ. 126, ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ χωρὶς αὐτὰ νὰ εἶναι ἴσα.



Σχ. 126

Στὰ ἑπόμενα, δύο ἐπιφάνειες ποὺ ἔχουν ἴσα ἐμβαδὰ θὰ τὶς καλοῦμε **ἰσεμβαδικές**.

86. 1 Μονάδες μετρήσεως ἐπιφανειῶν

Στὸ μετρικὸ σύστημα χρησιμοποιοῦνται οἱ ἀκόλουθες μονάδες γιὰ τὴν μέτρησι τῶν ἐπιφανειῶν.

Τὸ τετ. μέτρο (m^2): Τὸ ἐμβαδ. ἐπιφαν. τετραγ. πλευρᾶς 1 m

Π ο λ λ α π λ ά σ ι α:

1. Τὸ τετρ. δεκάμετρο (dam^2): » » » » 1 dam
2. » » χιλιόμετρο (km^2): » » » » 1 km

Ὑ π ο π ο λ λ α π λ ά σ ι α

1. τετρ. παλάμη (dm^2): » » » » 1 dm
2. » ἑκατοστὸ (cm^2): » » » » 1 cm
3. » χιλιοστὸ (mm^2): » » » » 1 mm

Εἶναι δέ: $1\ m^2 = 100\ dm^2 = 10000\ cm^2 = 1000000\ mm^2$

$1\ dm^2 = 100\ cm^2 = 10000\ mm^2$

$1\ cm^2 = 100\ mm^2$

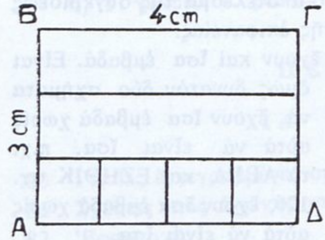
Ἐκτὸς ἀπὸ τὶς μονάδες αὐτὲς τοῦ μετρικοῦ συστήματος στὴ χώρα μας χρησιμοποιοῦνται ἀκόμη.

1) Τὸ στρέμμα : 1 στρέμμα $= 1000\ m^2$

2) Ὁ τετρ. τεκτ. πῆχυς : 1 τ. τ. π. $= \frac{9}{16}\ m^2$

§ 87. Ἐμβαδὸν ὀρθογ. παραλληλογράμμου

α) Ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐκφράζωνται μὲ ἀκεραίους ἀριθμούς.



Σχ. 127

Ἂς εἶναι τὸ ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ τοῦ ὁποίου (ΑΔ) = 4 cm καὶ (ΑΒ) = 3 cm. Χωρίζουμε τὸ ὀρθογώνιο σὲ ὁριζόντιες ταινίες πλάτους 1 cm κι' ἔπειτα τὴν μία ταινία σὲ 4 τετράγωνα σχ. 127.

Εἶναι : (ΑΒΓΔ) $= 3 \cdot 4\ cm^2 = 12 cm^2$

β) Ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐκφράζωνται μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς.

Ἂς εἶναι 2,4 cm καὶ 0,002 m τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθγωνίου. Εἶναι 2,4 cm = 24mm καὶ 0,002 m = 2 mm ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν θὰ εἶναι : $24 \cdot 2\ mm^2 = 48\ mm^2$

γ) Ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐκφράζωνται μὲ κλασμ. ἀριθμούς.

Ἂς εἶναι $\frac{2}{7}$ cm καὶ $\frac{3}{4}$ cm τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου :

Εἶναι $\frac{2}{7}\ cm = \frac{2 \cdot 4}{7 \cdot 4}\ cm = \frac{8}{28}\ cm$ καὶ $\frac{3}{4}\ cm = \frac{21}{28}\ cm$

Ἂν πάρουμε ὡς μονάδα μήκους $\mu = \frac{1}{28} cm$ ὁπότε $1\ cm = 28\ \mu$

καὶ $1\ cm^2 = 28^2\ \mu^2$ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου θὰ εἶναι

$$8 \cdot 21\ \mu^2 = 8 \cdot 21 \cdot \frac{1}{28^2}\ cm^2 = \frac{8}{28} \cdot \frac{21}{28}\ cm^2$$

$$= \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{4}\ cm^2$$

Ἀπὸ τὶς περιπτώσεις (α) (β) καὶ (γ) συνάγουμε ὅτι :

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου πολλ/ζουμε τὸ μῆκος τῆς βάσεως μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Ἐννοεῖται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται σὲ τετραγωνικὲς μονάδες τῆς κοινῆς μονάδος μήκους τῶν διαστάσεων αὐτοῦ.

Π.χ. ἂν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν ἐκφράζωνται σὲ cm τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται σὲ cm^2.

Συμβολικὰ γράφουμε: $E = \beta \cdot \upsilon$ (1)

Παρατήρησις: Ἂν τὰ μήκη τῶν δύο διαστάσεων δὲν ἐκφράζονται στὴν ἴδια μονάδα τὰ τρέπουμε πρῶτα σὲ κοινὴ μονάδα κι' ἔπειτα πολλαπλασιάζουμε.

Ἐφαρμογές:

1) Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου μὲ διαστάσεις 2m, 8dm

Ἔχουμε: $E = 2 \cdot 0{,}8\ m = 1{,}6\ m^2$

2) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 36 cm^2. Νὰ εὑρεθῆ τὸ μῆκος τῆς βάσεως ἂν τὸ ὕψος ἔχει μῆκος 4 cm.

Ἂν x cm εἶναι τὸ ζητούμενο μῆκος ἔχουμε:

$36 = 4 \cdot x \iff x = \frac{36}{4} = 9$ ὥστε ἡ βάσις ἔχει μῆκος 9 cm.

§ 88. Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Μάθαμε ὅτι τὸ τετράγωνο εἶναι ἕνα εἰδικὸ ὀρθογ. παραλ/μο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἴσες. Ἀπὸ αὐτὸ ἐννοοῦμε ὅτι: **τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῆς μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸν ἑαυτόν της** ἢ συμβολικὰ $\mathbf{E = \alpha^2}$.

Φυσικὰ τὸ E ἐκφράζεται σὲ μονάδες τετραγωνικὲς τῆς μονάδος μήκους τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ,

Π. χ. ἂν $\alpha = 4$ cm τότε $E = 16\ cm^2$

» $\alpha = 4$ m » $E = 16\ m^2$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

452. Ὀρθογ. παραλ/μου οἱ διαστάσεις εἶναι 20 cm καὶ 0,4 m νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

453. Ἕνα ὀρθογώνιο ἔχει ἐμβαδὸν 360 m^2 καὶ μῆκος πλευρᾶς 40 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης πλευρᾶς αὐτοῦ.

454. Ἕνα δωμάτιο ἔχει σχήματος ὀρθογ. παραλ/μου μὲ διαστάσεις 4m, 3m. Πόσες τετρ. πλάκες πλευρᾶς 20 cm θὰ χρειασθοῦν γιὰ τὴν ἐπίστρωσι τοῦ δωματίου.

§ 89. Τετραγωνικὴ ρίζα

Ι. Εἰσαγωγὴ

Ἂν πολλαπλασιάσουμε ἕναν ρητὸ μὲ τὸν ἑαυτόν του εὑρίσκουμε τὸ τετράγωνό του.

π.χ. $5 \cdot 5 = 5^2 = 25$

Ἡ πρᾶξις αὐτὴ ἀντιστοιχεῖ στὴν εὕρεσι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου ὅταν μᾶς δίδεται ἡ πλευρά του.

Πῶς θὰ λύσουμε τὸ ἀντίστροφο πρόβλημα;

Δηλαδή : Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν $25 m^2$.

ἢ Ποιὸς ἀριθμὸς ἔχει τὸ τετράγωνό του ἴσο μὲ 25.

ἢ Πῶς θὰ λύσουμε τὴν ἐξίσωσι $x^2 = 25$.

Ὁ ρητὸς ἀριθμὸς 5 τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο εἶναι 25 λέγεται τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 25 καὶ γράφουμε : $5 = \sqrt{25}$

Ὡς τόσο παρατηροῦμε ὅτι καὶ $(-5)^2 = 25$. Πρὸς τὸ παρὸν ὅμως θὰ περιορισθοῦμε στὴ θετικὴ τετρ. ρίζα. Ὅταν δὲ γράφουμε $\sqrt{25}$ ἐννοοῦμε μόνον τὸ 5.

Δηλαδή : Ἡ ἔκφρασις «τετρ. ρίζα τοῦ 25 εἶναι τὸ 5»

$$\sqrt{25} = 5$$

καὶ ἡ ἔκφρασις «τὸ τετράγωνο τοῦ 5 εἶναι τὸ 25»

$$5^2 = 25$$

εἶναι ἰσοδύναμες $\quad 5^2 = 25 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{25} = 5$

Παραδείγματα

$$16 = 4^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4 = \sqrt{16}$$

$$\sqrt{9} = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 3^2 = 9$$

$$100 = 10^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{100} = 10$$

ΙΙ) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^2 = \alpha$ (ὅπου $\alpha > 0$) στὸ σύνολο τῶν θετ. ρητῶν ἀριθμῶν

α) Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι τὸ α εἶναι τετράγωνο φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἄς εἶναι π.χ. $\alpha = 1, 4, 9, 16, 25, 36 \ldots$

τότε θὰ εἶναι : $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots$ ἀντιστοίχως

γράφουμε δέ : $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$,

$\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$

καὶ διαβάζουμε :

ἡ θετικὴ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 1 εἶναι τὸ 1

» » » » 4 » » 2

» » » » 9 » » 3 κ.ο.κ.

» » » » » » κ.ο.κ.

Πράγματι: $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$,

β) Ἂν εἶναι τὸ α ἀνάγωγο κλάσμα μὲ τοὺς ὅρους του τετράγωνα φυσικῶν ἀριθμῶν.

π.χ. $\alpha = \frac{1^2}{2^2},\ \frac{3^2}{2^2},\ \frac{5^2}{2^2},\ \frac{7^2}{2^2},\ \frac{9^2}{2^2} \ldots$

ὁπότε ἔχουμε: $x = \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ \frac{9}{2} \ldots$ ἀντιστοίχως.

καὶ γράφουμε: $\sqrt{\frac{1^2}{2^2}} = \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{3^2}{2^2}} = \frac{3}{2},\ \sqrt{\frac{5^2}{2^2}} = \frac{5}{2}$ κ.ο.κ.

πράγματι: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1^2}{2^2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2}{2^2},\ \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5^2}{2^2}$ κ.ο.κ.

γενικῶς ἂν εἶναι: $\alpha = \frac{\beta^2}{\gamma^2}$ (ὅπου β, γ φυσικοὶ ἀριθμοὶ πρῶτοι μεταξύ των)

τότε ἔχουμε: $\sqrt{\frac{\beta^2}{\gamma^2}} = \frac{\beta}{\gamma}$ διότι $\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\gamma^2}$

γ) Ἂν τὸ α εἶναι ἀνάγωγο κλάσμα μέ ὅρους φυσικοὺς ἀριθμοὺς ποὺ **δὲν** εἶναι τετράγωνα ἄλλων φυσ. ἀριθμῶν

π.χ. ἂν εἶναι: $\alpha = \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{5}{1},\ \frac{6}{1} \ldots$

$\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ \frac{9}{2} \ldots$

$\frac{1}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3} \ldots$

Στὴν περίπτωσι αὐτή, ὅπως θὰ ἀποδείξουμε σὲ ἄλλη τάξι, **δὲν ὑπάρχει ρητὸς** ἀριθμὸς ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^2=\alpha$.

III. Στὶς προηγούμενες περιπτώσεις ἐξετάσαμε τὴν ἐξίσωσι $x^2=\alpha$ $(\alpha>0)$ στὸ σύνολο τῶν θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

Ἂν θεωρήσουμε ὅμως ὅτι τὸ x μπορεῖ νὰ πάρῃ τιμὲς κι' ἀπὸ τὸ σύνολο των ἀρνητικῶν ρητῶν

Ἔχουμε: $x^2=9 \iff (x=3$ καὶ $x=-3)$ διότι $3^2=9,\ (-3^2)=9$

$x^2=\frac{4}{9} \iff \left(x=\frac{2}{3}\right.$ καὶ $\left.x=-\frac{2}{3}\right)$ » $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

Δηλαδή: ἂν ἡ ἐξίσωσις $x^2=\alpha$ $(\alpha>0)$

ἔχει μία θετικὴ λύση $x = \sqrt{\alpha}$

θὰ ἔχῃ καὶ τὴν ἀντίθετή της $x = -\sqrt{\alpha}$.

IV. Ἂν $\alpha = 0$ τότε ἔχουμε $x^2 = 0 \iff x = 0$

εἶναι δηλαδὴ $\sqrt{0} = 0$ διότι $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

V. Ἂν $\alpha < 0$ τότε εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $x^2 = \alpha$ δὲν ἔχει λύσιν στὸ σύνολο τῶν σχετ. ἀριθμῶν.

Πράγματι· ἂν ὑπῆρχε μία λύσις π.χ. $x = \rho$ τότε ἔπρεπε νὰ εἶναι $\rho^2 = \alpha$ = ἀρνητικὸς ἀριθμὸς ἀλλά, καθὼς γνωρίζουμε, τὸ τετράγωνο κάθε σχετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Δὲν ὑπάρχει λοιπὸν τετραγωνικὴ ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ στὸ σύνολο τῶν σχετ. ἀριθμῶν.

(Ἀργότερα θὰ μάθουμε ἕνα πυκνότερο σύνολο ἐντὸς τοῦ ὁποίου ἔχει λύσιν καὶ ἡ ἐξίσωσις $x^2 = \alpha$, $\alpha < 0$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

455) Νὰ ὑπολογισθοῦν ἀπὸ μνήμης οἱ τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν

$$81, \quad 100, \quad 400, \quad 900$$

456) Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τετρ. ρίζεις τῶν ἀριθμῶν

$$\frac{4}{25}, \quad \frac{1}{9}, \quad \frac{16}{36}$$

457) Ποιοὶ ἀριθμοὶ ἔχουν τετρ. ρίζες τοὺς ἀριθμοὺς $-2, +5, -7, +6$

458) Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\dfrac{x}{4} = \dfrac{9}{x}$

§ 90. Ὑπολογισμὸς τῆς θετικῆς τετρ. ρίζης

I) Ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι τέλειο τετράγωνο

Στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἀναλύουμε τὸν ἀριθμὸ σὲ γινόμενο δύο ἴσων παραγόντων

α) $144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = (2 \cdot 2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 3) =$

$$12 \cdot 12 = 12^2$$

ἄρα : $\sqrt{144} = 12$

β) $\dfrac{16}{25} = \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{4}{5} = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2$

ἄρα : $\sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$

II) Θετικὴ ρίζα ἀριθμοῦ ποὺ δὲν εἶναι τέλειο τετράγωνο

Στὴν περίπτωσι αὐτή, ὅπως θὰ ἀποδείξουμε σὲ ἄλλη τάξι, ἡ τετρ. ρίζα εἶναι ἕνας ἀριθμὸς ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ σύνολο τῶν ρητῶν, εἶναι δὲ μόνο μὲ προσέγγισι ἴσος μὲ ρητό.

π.χ. ἀπὸ τὶς ἰσότητες $1^2 = 1$ καὶ $2^2 = 4$ ἐννοοῦμε ὅτι $1 < \sqrt{3} < 2$

Γιὰ νὰ ἐπιτύχουμε μεγαλύτερη προσέγγισι εὑρίσκουμε τὰ τετράγωνα τῶν μεταξὺ 1 καὶ 2 ἀριθμῶν

π.χ. $(1,5)^2 = 2,25, \quad (1,6)^2 = 2,56, \quad (1,7)^2 = 2,89, \quad (1,8)^2 = 3,24$

ἄρα εἶναι $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$

Γιὰ μεγαλύτερη προσέγγισι εὑρίσκουμε τὰ τετράγωνα τῶν ἀριθμῶν μεταξὺ 1,7 καὶ 1,8

$(1,71)^2 = 2,9241, \quad (1,72)^2 = 2,9584, \quad (1,73)^2 = 2,9929, \quad (1,74)^2 = 3,0276$

ἄρα εἶναι: $1,73 < \sqrt{3} < 1,74$

Ἂν συνεχίσουμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο, μποροῦμε νὰ βροῦμε τὴν $\sqrt{3}$ μὲ ἀκόμη μεγαλύτερη προσέγγισι.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε :

$$1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4$$
$$(1,4)^2 = 1,96 < 2 < (1,5)^2 = 2,25$$
$$(1,41)^2 = 1,9881 < 2 < (1,42)^2 = 2,0264$$
$$(1,414)^2 = 1,999396 < 2 < (1,415)^2 = 2,002225$$
$$(1,4142)^2 = 1,99996164 < 2 < (1,4143)^2 = 2,00024449$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

§ 91. Εὕρεσις τετρ. ρίζης ἀκεραίου μὲ τὸν ἀλγόριθμο

Ἡ εὕρεσις τῆς τετρ. ρίζης, ἢ ὅπως συνηθίζουμε, ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης ἀκεραίου, π.χ. τοῦ 139876, γίνεται πρακτικῶς μὲ τὴν ἀκόλουθη διαδικασία :

1. Χωρίζουμε τὸν ἀριθμὸ σὲ διψήφια τμήματα ἀπὸ δεξιὰ πρὸς τ' ἀριστερὰ

$$13'\ 98'\ 76$$

2. Εὑρίσκουμε τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιο τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνο εἶναι μικρότερο ἢ ἴσο μὲ τὸ α' τμῆμα

$$3^2 = 9 < 13 \quad \text{ἢ} \quad \sqrt{13} \simeq 3$$

Τὸ 3 εἶναι τὸ 1ο ψηφίο τῆς ζητουμένης τετρ. ρίζης.

3. Ἀφαιροῦμε τὸ τετράγωνο τοῦ 3 ἀπὸ τὸ α΄ τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ

$$13 - 9 = 4$$

4. Ἡ διαφορὰ 4 εἶναι τὸ α΄ μερικὸ ὑπόλοιπο. Δεξιὰ τοῦ α΄ μερικοῦ ὑπολοίπου γράφουμε τὸ 2ο διψήφιο τμῆμα καὶ χωρίζουμε τὶς δεκάδες τοῦ ἀριθμοῦ ποὺ προκύπτει

$$49'\,8$$

5. Διπλασιάζουμε τὸ α΄ ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης καὶ τὸ διπλάσιο, δηλ. ἐδῶ τὸ 6, τὸ γράφουμε κάτω ἀπὸ τὴν ὁριζόντια γραμμὴ τῆς τετρ. ρίζης (βλέπε στὴ διάταξι).

6. Διαιροῦμε τὶς δεκάδες τοῦ 498 δηλ. τὸ 49 διὰ τοῦ 6. Τὸ ἀκέραιο μέρος τῆς διαιρέσεως αὐτῆς εἶναι, πιθανόν, τὸ 2ο ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης.

7. Ἐλέγχουμε ἂν τὸ πηλίκο 8 εἶναι τὸ 2ο ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης. Πρὸς τοῦτο ἀφαιροῦμε τὸ γινόμενο

$$68 \cdot 8 = 544 \quad \text{ἀπὸ τὸ} \quad 498$$

Ἡ ἀφαίρεσις 498 — 544 δὲν εἶναι δυνατή. Γι' αὐτὸ παίρνουμε ὡς 2ο ψηφίο τῆς τετρ. ρίζης τὸν ἀμέσως μικρότερο ἀκέραιο τοῦ 8 δηλ. τὸ 7 καὶ ἐλέγχουμε πάλι μὲ τὸν ἴδιο τρόπο

$$67 \cdot 7 = 469$$

$$498 - 469 = 29$$

Ετσι βρήκαμε καὶ τὸ 2ο ψηφίο.

8. Δεξιὰ τοῦ β΄ μερικοῦ ὑπολοίπου δηλ. τοῦ 29 γράφουμε τὸ 3ο διψήφιο τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ καὶ συνεχίζουμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο.

Ἡ πρᾶξις διατάσσεται μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

13΄98΄76	374	
9	67	744
49΄8 —	7 ×	4 ×
469	469	2976
= 297΄6		
2976		
00		

ὥστε $\sqrt{139876} = 374$

Δοκιμή : Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ πρέπει $374^2 = 139876$

Παράδειγμα 2ον: Νὰ εὑρεθῇ ἡ θετ. τετρ. ρίζα τοῦ 93042.

$$
\begin{array}{r|l|l}
9'30'42 & 305 & \\
\hline
-9 & 60 & 605 \\
\overline{030} & 0 \times & 5 \times \\
-0 & 0 & \overline{3025} \\
\overline{3042} & & \\
-3025 & & \\
\overline{17} & &
\end{array}
$$

ὥστε $\sqrt{93042} = 305$ μὲ προσέγ. (κατ' ἔλλειψιν) ἀκ. μονάδος

Δοκιμὴ $305^2 + 17 = 93042$

Παρατήρησις. Ὅπως θὰ ἀποδείξουμε σὲ ἄλλη τάξι κανένα ἀπὸ τὰ μερικὰ ὑπόλοιπα τῶν ἀφαιρέσεων δὲν πρέπει νὰ εἶναι μεγαλύτερο τοῦ 2/πλασίου τῆς ρίζης ποὺ ἔχει εὑρεθῆ.

π.χ. $3 < 3 \cdot 2$
$30 < 2 \cdot 30$
$17 < 2 \cdot 305$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

459) Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ θετ. τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν

441, 576, 625, 900, 585, 720, 692

καὶ νὰ γίνουν οἱ δοκιμές.

460) Ποίου ἀριθμοῦ τὸ τετράγωνο αὐξανόμενο κατὰ 7 γίνεται ἴσο μὲ 176.

461) Ποιὸς εἶναι ὁ μικρότερος ἀκέραιος ποὺ πρέπει νὰ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ 250 γιὰ νὰ γίνῃ τέλειο τετράγωνο.

462) Ποίου ἀριθμοῦ τὸ 2/πλάσιο πολλαπλασιαζόμενο μὲ τὸ 4/πλάσιο αὐτοῦ γίνεται ἴσο μὲ 4608.

§ 92. Τετρ. ρίζα μὲ δεκαδικὴ προσέγγισι

I. Στὶς ἰσότητες $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{400} = 20$

$\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{90000} = 300$

παρατηροῦμε ὅτι: Ἂν πολλαπλασιασθῇ τὸ 4 μὲ 100 (4.100=400) τότε ἡ τετρ. ρίζα του ἀπὸ 2, γίνεται 20. Δηλαδὴ πολλαπλασιάζεται μὲ 10.

Ἂν πολ/σθῇ τὸ 9 μὲ 100^2 $(9.100^2 = 90000)$ τότε ἡ τετρ. ρίζα του ἀπὸ 3 γίνεται 300 δηλ. πολ/ζεται μὲ 100.

Γενικά· Ἂν $\sqrt{\alpha} = \beta$ $(\alpha > o)$ ὁπότε $\beta^2 = \alpha$

τότε $\sqrt{100\alpha} = 10 \cdot \beta$ διότι $(10\beta)^2 = 10^2 \cdot \beta^2 = 100 \cdot \alpha$

ὥστε· **Ἂν ἕνας ἀριθμὸς πολλαπλασιασθῇ μὲ 10^2, 100^2, 1000^2... τότε ἡ τετρ. ρίζα του πολλαπλασιάζεται μὲ 10, 100, 1000... ἀντιστοίχως.**

Στὴν ἰδιότητα αὐτὴ στηρίζεται ἡ διαδικασία ὑπολογισμοῦ τετρ. ρίζης μὲ δεκαδικὴ προσέγγισι.

Παραδείγματα

1) Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 2 μὲ προσέγγισι $\frac{1}{10}$ (κατ' ἔλλειψιν)

α) Πολ/ζουμε τὸ 2 μὲ 10^2 $\quad 2 \cdot 10^2 = 200$

β) Εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 200 μὲ προσέγγισι (κατ' ἔλλειψιν) μονάδος $\quad \sqrt{200} \simeq 14$

γ) Διαιροῦμε τὴν εὑρεθεῖσα ρίζα διὰ 10 $\quad \frac{14}{10} = 1,4$

$\sqrt{2} \simeq 1,4$ $\quad$ (μὲ προσέγ. $\frac{1}{10}$)

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{3}$ μὲ προσέγγισι (κατ' ἔλλειψιν) $\frac{1}{100}$

Ἔχουμε κατὰ σειρὰν $3 \cdot 100^2 = 30000$

$\sqrt{30000} \simeq 173$ $\quad$ (προσέγ. ἀκ. μονάδος)

$\sqrt{3} \simeq \frac{173}{100} = 1,73$ $\left(\text{προσέγ. } \frac{1}{100}\right)$

§ 93. Τετραγ. ρίζα δεκαδικοῦ ἢ κοινοῦ κλάσματος

α) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ 5,6169.

1) Πολ/ζουμε μὲ 10^4 $\quad 5,6169 \cdot 10^4 = 56169$

2) Εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 56169

$\sqrt{56169} = 237$

3) Διαιροῦμε τό ἀποτέλεσμα διὰ 10^2

$\frac{237}{10^2} = 2,37$

Ἄρα $\sqrt{5,6169} = 2,37$ $\quad$ ἐπαλήθευσις: $2,37^2 = 5,6169$

Γενικά. Γιὰ νὰ βροῦμε τὴν τετρ. ρίζα δεκ. ἀριθμοῦ πολ/ζουμε μὲ 10^2 ἢ 10^4 ἢ 10^6... Ἔτσι ὥστε ὁ δεκαδικὸς νὰ γίνῃ ἀκέραιος κι' ἔπειτα συνεχίζουμε κατὰ τὰ γνωστά.

β) Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετρ. ρίζα τοῦ $\frac{2}{7}$ μὲ προσέγγισι $\frac{1}{10}$ (κατ' ἔλλειψιν)

1) Τρέπουμε τὸ κλάσμα σὲ δεκαδικό, μὲ προσέγγισι $\frac{1}{100}$, $\frac{2}{7} = 0{,}28$.

2) Πολ/ζουμε μὲ 10^2 $\quad 0{,}28 \cdot 10^2 = 28$

3) Εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 28 μὲ προσέγ. μονάδος (κατ' ἔλλειψιν) καὶ διαιροῦμε διὰ 10 τὸ ἀποτέλεσμα.

$$\sqrt{28} \sim 5 \qquad 5 : 10 = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

ὥστε $\quad \sqrt{\frac{2}{7}} \sim 0{,}5 \quad$ (μὲ προσέγ. $\frac{1}{10}$, κατ' ἔλλειψιν)

§ 94. Χρῆσις πινάκων γιὰ τὴν εὕρεσι τῆς τετρ. ρίζης

Συνήθως εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα ἑνὸς θετ. ἀριθμοῦ μὲ τὴν βοήθειαν πινάκων. Στὸ τέλος τοῦ βιβλίου ὑπάρχει πίνακας τετρ. ριζῶν τῶν ἀριθμῶν 1—100 μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ.

Ἔτσι 1) Ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι ἀκέραιος καὶ εὑρίσκεται μεταξὺ 1-100 εὑρίσκουμε κατ' εὐθεῖαν τὴν τετρ. ρίζαν του ἀπὸ τὸν πίνακα.

π.χ. $\quad \sqrt{18} \simeq 4{,}243 \quad , \quad \sqrt{80} \simeq 8{,}944$

2) Ἂν ὁ ἀριθμὸς περιέχεται μεταξὺ 100 καὶ 10000,

α) Διαιροῦμε τὸν ἀριθμὸ διὰ 100 (ὁπότε εὑρίσκουμε πηλίκο μικρότερο τοῦ 100).

β) Εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ πηλίκου

γ) Πολλαπλασιάζουμε τὴν ρίζα μὲ 10

π.χ. γιὰ τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 5600 ἔχουμε

α) $5600 : 100 = 56$, $\quad$ β) $\sqrt{56} \simeq 7{,}483$, $\quad$ γ) $\sqrt{5600} \simeq 74{,}83$

3) Ἐπίσης γιὰ τὴν τετρ. ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 820,5 ἔχουμε:

α) $820{,}5 : 100 = 8{,}205$ $\qquad$ β) $\sqrt{8} \simeq 2{,}828$

γ) $\sqrt{820{,}5} \simeq 2{,}828 \cdot 10 \simeq 28{,}28$

4) Ἂν ὁ ἀριθμὸς εἶναι δεκαδικὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδος.

α) τὸν πολλαπλασιάζουμε μὲ 100, 10.000... ἔτσι ὥστε νὰ γίνῃ ἀκέραιος.

β) εὑρίσκουμε τὴν τετρ. ρίζα τοῦ γινομένου

γ) διαιροῦμε τέλος μὲ 10, 100...

π.χ. γιὰ τὴν τετρ. ρίζα τοῦ 0,0056 ἔχουμε :

α) $0{,}0056 \cdot 10.000 = 56$ β) $\sqrt{56} \simeq 7{,}483$

γ) $\sqrt{0{,}0056} \simeq \frac{7{,}483}{100} \simeq 0{,}07483$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

463) Μὲ προσέγγισι 0,01 νὰ ὑπολογίσετε τὶς τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν $12, \quad 0{,}0276, \quad \frac{3}{125}$

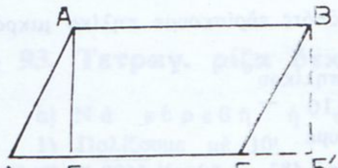
464) Μὲ προσέγγισι 0,001 νὰ ὑπολογίσετε τὶς τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν $18, \quad 0{,}002, \quad \frac{7}{8}$

465) Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ πίνακος νὰ εὑρεθοῦν οἱ τετρ. ρίζες τῶν ἀριθμῶν 5863, 0,0245

§ 95. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ παραλληλόγραμμο εἶναι τετράπλευρο μὲ τὶς ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες. Εἶναι φανερὸν ὅτι γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του δὲν μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε ὅπως στὴν περίπτωσι ὀρθογωνίου, γιατὶ δὲν ἔχει τὶς γωνίες ὀρθές. Ἄρα δὲν καλύπτεται (ἀκριβῶς) ἡ ἐπιφάνεια μὲ τετράγωνα.

Χρησιμοποιοῦμε ὅμως ἕναν ἄλλον ἁπλὸ τρόπο : **τὸ μετασχηματίζουμε σὲ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο.**



Σχ. 128

Στὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε τὸ ὕψος ΑΕ. Ἀποκόπτουμε τὸ τρίγωνο ΑΔΕ καὶ τὸ τοποθετοῦμε στὴ θέση ΒΓΕ′. Ἔτσι τὸ παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ μετασχηματίσθηκε στὸ ἰσεμβαδικὸ ὀρθογώνιο ΑΕΕ′Β καὶ ἔχουμε :

(ΑΔΓΒ) = (ΑΕΕ′Β)

ἀλλὰ (ΑΕΕ′Β) = β · υ (ὅπου β τὸ μῆκος τῆς βάσεως παρ/λ/μου καὶ υ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους αὐτοῦ).

Ὥστε : $\boxed{\mathbf{E}_{\text{παραλληλογράμμου}} = \mathbf{\beta} \cdot \mathbf{\upsilon}}$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου πολ/ζουμε τὸ μῆκος τῆς μιᾶς πλευρᾶς του μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους, ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτήν.

Ἐννοεῖται ὅτι τὰ μήκη β, υ ἐκφράζονται σὲ ὁμοειδεῖς μονάδες ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται σὲ μονάδες ἐπιφανείας ποὺ ἀντιστοιχοῦν σ' αὐτὲς τὶς μονάδες μήκους.

Παρατήρησις: Εἶναι φανερὸν ὅτι μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε γιὰ βάσι ὁποια πλευρὰ τοῦ παραλληλογράμμου μᾶς ἐξυπηρετεῖ, ἀρκεῖ νὰ πάρουμε καὶ τὸ ἀντίστοιχο πρὸς αὐτὴν ὕψος.

Ἐφαρμογές: 1) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου τοῦ ὁποίου $\beta = 20$ cm, $\upsilon = 5$ cm.

Ἔχουμε: $E = 20 \cdot 5 \text{ cm}^2 \Longleftrightarrow E = 100 \text{ cm}^2$

2) Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι: $E = 96 \text{ cm}^2$ καὶ $\beta = 8$ cm νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $E = \beta \cdot \upsilon$

ἔχουμε: $96 = 8 \cdot \upsilon$

ἢ $96 = 8 \cdot \upsilon \Longleftrightarrow \upsilon = \frac{96}{8} = 12$

ὥστε: $\upsilon = 12$ cm.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

466) Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει μία πλευρὰ 6 cm καὶ ἀντίστοιχο ὕψος 4 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

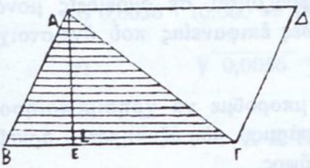
467) Ἕνα παραλληλόγραμμο ἔχει ἐμβαδὸν 72 cm² καὶ ὕψος 6 cm. Πόση εἶναι ἡ βάσις του.

468) Ἕνα παραλληλόγραμμο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm καὶ ἔχει μία πλευρὰ ἴση μὲ 9 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτὴ τὴν πλευρά.

469) Σ' ἕνα παραλληλόγραμμο ἡ μία πλευρὰ εἶναι 4 cm τὸ δὲ ἀντίστοιχο ὕψος εἶναι ἴσο μὲ τὴν πλευρὰ τετραγώνου, ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 81 cm². Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου.

470) Τί παθαίνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ἂν διπλασιάσουμε ἢ τριπλασιάσουμε τὴ βάσι του.

95.1. Ἐμβαδὸν τριγώνου



Σχ. 129

Κατασκευάζουμε ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ. 129) κι᾽ ἔπειτα χαράζουμε μία διαγώνιο· π.χ. τὴν ΑΓ. Καθὼς μάθαμε τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν τομὴν τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ἄρα εἶναι ἴσα.

Θὰ εἶναι δὲ $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\ (ΑΒΓΔ)$

ἢ $(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\ (ΒΓ)\ \ (ΑΕ)$

ἢ $$\boxed{E_{\text{τριγώνου}} = \frac{1}{2}\ \beta \cdot \upsilon}$$

ὅπου τὰ β, υ ἐκφράζουν τὰ μήκη τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀντιστοίχου σ᾽ αὐτὴν ὕψους σὲ ὁμοειδεῖς μονάδες ὁπότε τὸ ἐμβαδὸν ἐκφράζεται στὶς ἀντίστοιχες μονάδες ἐπιφανείας.

Παρατήρησις : Σὲ κάθε πλευρὰ τοῦ τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὕψος. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν μποροῦμε νὰ πάρουμε γιὰ βάση ὁποιαδήποτε πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἀρκεῖ γιὰ ὕψος νὰ πάρουμε τὸ ἀντίστοιχο πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν.

Εἰδικὴ περίπτωσι : Ἂν τὸ τρίγωνο εἶναι ὀρθογώνιο (ὀρθογώνιο λέγεται τὸ τρίγωνο ὅταν ἔχῃ μία γωνία του ὀρθὴ) καὶ πάρουμε γιὰ βάση τὴ μιὰ κάθετη πλευρά του, τότε βέβαια ὕψος εἶναι ἡ ἄλλη κάθετη πλευρά.

Ἐφαρμογές : 1) Ἑνὸς τριγώνου ἡ μιὰ πλευρὰ ἔχει μῆκος 5 cm καὶ τὸ ὕψος ποὺ ἀντιστοιχεῖ σ᾽ αὐτὴν 3 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $E = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2}$

ἔχουμε $E = \dfrac{5 \cdot 3}{2} = 7{,}5\ cm^2$

2) Ὀρθ. τριγώνου οἱ κάθετες πλευρὲς ἔχουν μήκη 3 cm καὶ 4 cm. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν.

Εἶναι : $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2}\ cm^2 = 6\ cm^2$

3) Σ' ἕνα τρίγωνο εἶναι : $E = 24\ cm^2$ καὶ $\beta = 6$ cm. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ὕψους, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ β;

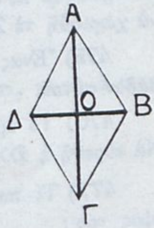
Εἶναι : $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ ἢ $24 = \frac{6 \cdot \upsilon}{2}$

ἢ $24 = \frac{6 \cdot \upsilon}{2} \longleftrightarrow 24 \cdot 2 = 6 \cdot \upsilon$

ἢ $\upsilon = \frac{24 \cdot 2}{6} = 8$ ἢ $\upsilon = 8$ cm.

§ 96. Ἐμβαδὸν Ῥόμβου

Υπενθυμίζουμε ὅτι ρόμβος εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο, ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες. Οἱ διαγώνιοι τοῦ ρόμβου τέμνονται καθέτως καὶ στὰ μέσα των.



Σχ. 130

1ος τρόπος : Ἀφοῦ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμο, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδόν του μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε ὅπως καὶ στὰ παραλληλόγραμμα.

2ος τρόπος : Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου μὲ διαγωνίους 4 cm καὶ 6 cm.

Ἐπειδὴ οἱ διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται καθέτως καὶ στὰ μέσα αὐτῶν, τὰ 4 ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΔΟΓ, ΟΓΒ εἶναι **ἴσα**. (Ἔχουν καὶ τὶς τρεῖς πλευρὲς μία μὲ μία ἴσες).

Ἄρα : $(AB\Gamma\Delta) = 4 \cdot (AOB)$

Ἀλλά : $(AOB) = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3\ cm^2$

Ὥστε : $(AB\Gamma\Delta) = 4 \cdot 3\ cm^2 = 12\ cm^2$

Ἂν οἱ διαγώνιοι εἶχαν μήκη α καὶ β, θὰ εἴχαμε :

$$E^{AOB} = \frac{\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\beta}{2}}{2} = \frac{\frac{\alpha \cdot \beta}{4}}{2} = \frac{\alpha \cdot \beta}{8}$$

Ἄρα : $E^{AB\Gamma\Delta} = 4 \cdot \frac{\alpha \cdot \beta}{8}$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{E^{ΑΒΓΔ} = \frac{α \cdot β}{2}}$$

Ὥστε: **τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῶν μηκῶν τῶν διαγωνίων του διὰ 2.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

471) Πόσο εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 12,60 m καὶ τὸ ὕψος 8,40 m.

472) Ἕνα οἰκόπεδο τριγωνικὸ ἔχει βάση 14,40 m καὶ ὕψος 24,40 m. Νὰ βρῆτε τὸ ἐμβαδόν του σὲ τετραγ. τεκτον. πήχεις.

473) Ἕνα οἰκόπεδο τριγωνικὸ ἔχει βάση 60 m καὶ ὕψος 40 m, πρόκειται δὲ νὰ ἀνταλλαγῆ μ' ἄλλο ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, πλάτους 30 m. Πόσο μῆκος πρέπει νὰ ἔχη τὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

474) Νὰ μοιρασθῆ ἐξ ἴσου σὲ δύο κληρονόμους τριγωνικὸ οἰκόπεδο ΑΒΓ, ὥστε νὰ ἔχουν κοινὸ τὸ πηγάδι ποὺ εἶναι στὴν κορυφὴ Α. (Δηλαδὴ νὰ χωρισθῆ σὲ 2 ἰσεμβαδικὰ τρίγωνα μὲ κοινὴ κορυφὴ τὸ Α).

475) Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

476) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι 48 m^2 καὶ ἡ μία διαγώνιος 8 m. Νὰ εὑρεθῆ ἡ ἄλλη διαγώνιος αὐτοῦ

477) Τί παθαίνει τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, ἂν τριπλασιάσουμε τὸ ὕψος του;

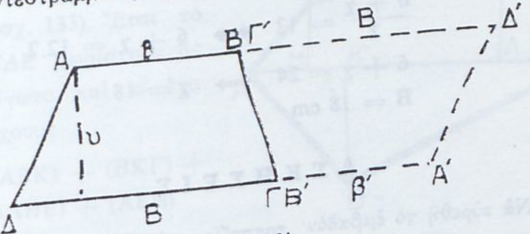
478) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ νὰ χαράξετε τὴ διάμεσο ΑΜ κι' ἔπειτα νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΜ καὶ ΑΓΜ εἶναι ἰσεμβαδικά. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι διάμεσος τριγώνου εἶναι τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα, ποὺ ἑνώνει μιὰ κορυφὴ μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς).

479) Ἕνα οἰκόπεδο μὲ σχῆμα ρόμβου, ποὺ ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm, πρόκειται νὰ ἀνταλλαγῆ μὲ ἰσεμβαδικὸ τετραγωνικὸ οἰκόπεδο. Πόση θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ νέου τετραγ. οἰκοπέδου.

§ 97. Ἐμβαδὸν τραπεζίου

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τραπέζιο εἶναι τὸ τετράπλευρο, ποὺ ἔχει παράλληλες μόνο τὶς δύο ἀπέναντι πλευρές, ποὺ λέγονται βάσεις τοῦ τραπεζίου.

Κατασκευάζουμε δύο ἴσα τραπέζια καὶ τὰ τοποθετοῦμε τὸ ἕνα δίπλα στὸ ἄλλο, ἀντεστραμμένα, σχ. 131.



Σχ. 131

Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι σχηματίζεται ἕνα παραλληλόγραμμο ΑΔΑ′Δ′ μὲ βάση Β + β καὶ ὕψος υ. τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

Εἶναι $(ΑΔΑ'Δ') = (Β + β) \cdot υ$

Ἄρα : $$\boxed{Ε_{τραπεζίου} = \frac{Β + β}{2} \cdot υ}$$

Ἄρα : **«Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου πολλαπλασιάζουμε τὸ μῆκος τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν βάσεων μὲ τὸ μῆκος τοῦ ὕψους.**

Ἐφαρμογές :

1) Ἑνὸς τραπεζίου εἶναι $Β = 6$ cm, $β = 4$ cm, $υ = 5$ cm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἐμβαδόν του.

Ἔχουμε : $Ε = \frac{(6 + 4)}{2} \cdot 5 \text{ cm}^2$

ἢ $Ε = \frac{10}{2} \cdot 5 \text{ cm}^2 = 25 \text{ cm}^2$

2) Ἑνὸς τραπεζίου εἶναι $Ε = 60 \text{ cm}^2$, $β = 4$ cm, $Β = 8$ cm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ μῆκος χ τοῦ ὕψους αὐτοῦ.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο ἔχουμε :

$$60 = \left(\frac{4 + 8}{2}\right) \cdot χ \Longleftrightarrow χ = 60 : \left(\frac{4 + 8}{2}\right)$$

ἢ $$χ = 60 : \frac{12}{2} \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

3) Σ' ἕνα τραπέζιο μᾶς εἶναι γνωστὰ

1) **$Ε = 48 \text{ cm}^2$**
2) **$β = 6$ cm**
3) **$υ = 4$ cm**

καὶ ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς βάσεως Β

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $Ε = \frac{Β + β}{2} \cdot υ$

$$\text{Ἔχουμε} \qquad 48 = \left(\frac{6+\chi}{2}\right) \cdot 4 \iff \frac{6+\chi}{2} = \frac{48}{4}$$

$$\text{ἤ} \qquad \frac{6+\chi}{2} = 12 \iff 6+\chi = 12.2$$

$$\text{ἤ} \qquad 6+\chi = 24 \iff \chi = 18$$

$$\text{ὥστε} \qquad B = 18 \text{ cm}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

480) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου μὲ $B = 6$cm, $\beta = 2$cm καὶ $\upsilon = 3$ cm.

481) Ἑνὸς τραπεζίου δίδονται $E = 48$ cm², $B = 9$ cm², $\beta = 7$ cm καὶ ζητεῖται τὸ ὕψος του.

482) Ἑνὸς τραπεζίου δίδονται $E = 60$ cm², $B = 12$ cm, $\upsilon = 6$ cm. Ζητεῖται ἡ ἄλλη βάση β.

483) Ἕνα τραπέζιο ἔχει $B = 4$ cm, $\beta = 2$ cm κι' εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

484) Ἕνα οἰκόπεδο μὲ σχῆμα τραπεζίου, ποὺ ἔχει $B = 60$ m, $\beta = 20$m καὶ $\upsilon = 30$ m, πρόκειται νὰ ἀνταλλαγῇ μὲ ἄλλο οἰκόπεδο μὲ σχῆμα ὀρθογωνίου, ποὺ ἔχει βάση 60 m. Πόσο πρέπει νὰ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου οἰκοπέδου.

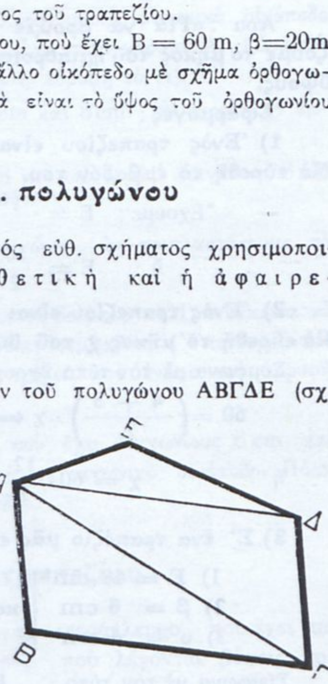
§ 98. Ἐμβαδὸν τυχ. πολυγώνου

Γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς εὐθ. σχήματος χρησιμοποιοῦνται κυρίως δύο μέθοδοι. Ἡ **προσθετικὴ** καὶ ἡ **ἀφαιρετική**.

Προσθετικὴ μέθοδος

α) Γιὰ νὰ ὑπολογίσουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ (σχ. 132), μὲ τὶς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ τὸ χωρίζουμε στὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ καὶ ἔχουμε :

(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) + (ΑΔΕ)

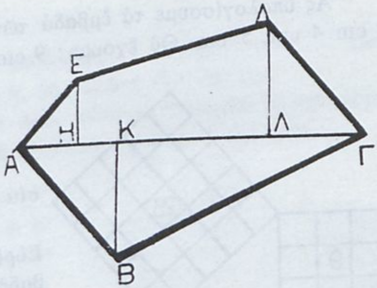


Σχ. 132

β) Τοῦ ἰδίου πολυγώνου μποροῦμε νὰ βροῦμε τὸ ἐμβαδὸν ἂν χαράξουμε μόνο μία διαγώνιο τὴν

ΑΓ καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὶς κορυφὲς Β, Ε, Δ νὰ φέρουμε καθέτους πρὸς αὐτὴν (σχ. 133). Ἔτσι τὸ πολύγωνο ΑΒΓΔΕ χωρίστηκε σὲ ὀρθογώνια τρίγωνα καὶ σ' ἕνα τραπέζιο κι' ἔχουμε

(ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΚ) + (ΒΚΓ) + (ΓΛΔ) + (ΔΛΗΕ) + (ΑΕΗ)



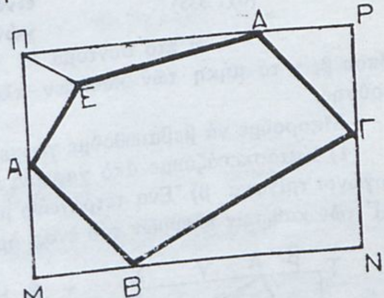
Σχ. 133

Ἀφαιρετικὴ μέθοδος

Μὲ τὴν προσθετικὴ μέθοδο εὑρήκαμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ ὡς ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαφόρων εὐθυγράμμων σχημάτων εἰς τὰ ὁποῖα τὸ χωρίσαμε. Μὲ τὴν ἀφαιρετικὴ μέθοδο εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰδίου πολυγώνου ὡς διαφορὰν εὐθυγράμμων σχημάτων κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

Χαράζουμε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ποὺ νὰ διέρχεται ἀπὸ ὅσο γίνεται περισσότερες κορυφὲς τοῦ πολυγώνου (σχ. 134). Ἔτσι ἔχουμε:

(ΑΒΓΔΕ) = (ΠΡΝΜ) — (ΑΜΒ)— (ΒΝΓ) — (ΓΡΔ)—(ΠΕΔ)—(ΠΕΑ)



Σχ. 134

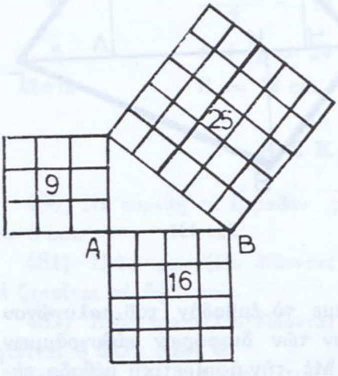
Ἀπὸ τὴν μορφὴν τοῦ σχήματος, κι' ἀπὸ τὶς δυνατότητές μας γιὰ τὴν μέτρησιν τῶν στοιχείων τῶν ἐπὶ μέρους σχημάτων, ἐξαρτᾶται ἡ χρησιμοποίησις τῆς μιᾶς ἢ τῆς ἄλλης μεθόδου.

§ 99. Πυθαγόρειο θεώρημα*

Κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο τρίγωνο μὲ κάθετες πλευρὲς 3 cm καὶ 4 cm. Μετροῦμε τὴν ὑποτείνουσα καὶ εὑρίσκουμε 5 cm.

* Πυθαγόρας: μεγάλος φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς ἀπὸ τὴ Σάμο (572—500 π. Χ.). Ἱδρυτὴς τῆς μεγάλης φιλοσοφικῆς - μαθηματικῆς σχολῆς στὸν Κρότωνα Ἰταλίας. Ἡ συμβολή του στὴν ἀνάπτυξη τῶν μαθηματικῶν εἶναι μεγάλη.

Ἂς ὑπολογίσουμε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων, ποὺ ἔχουν πλευρὲς 3 cm 4 cm, 5 cm. Θὰ ἔχουμε : 9 cm^2, 16 cm^2, 25 cm^2.



(σχ. 335)

Παρατηροῦμε ὅτι :

$$\mathbf{25 = 9 + 16}$$

Ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἴδια ἐργασία μὲ ἄλλα ὀρθογώνια τρίγωνα.

Π. χ. κάθετες πλευρὲς 5 cm, 12 cm. Εὑρίσκουμε ὑποτείνουσα 13 cm καὶ ἐμβαδὰ τῶν τετραγώνων, ποὺ ἔχουν πλευρὲς 5 cm, 12 cm, 13 cm, **25** cm^2, **144** cm^2, **169** cm^2.

Πάλι ἔχουμε : $\mathbf{169 = 25 + 144}$

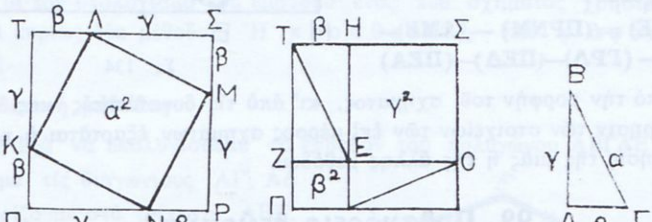
Ὥστε : **Στὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.**

ἢ πιὸ σύντομα $\boldsymbol{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}$

ὅπου β, γ τὰ μήκη τῶν καθέτων πλευρῶν καὶ α τὸ μῆκος τῆς ὑποτεινούσης.

Μποροῦμε νὰ βεβαιωθοῦμε γεωμετρικὰ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

1) Κατασκευάζουμε ἀπὸ χαρτόνι : α) 4 ἴσα μὲ τὸ ΑΒΓ, σχ. 136, ὀρθογώνια τρίγωνα. β) Ἕνα τετράγωνο μὲ πλευρὰ ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ΑΒ+ΑΓ τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ἑνὸς ὀρθ. τριγώνου, τὸ τετράγωνο ΠΡΣΤ.



Σχ. 136

2) Τοποθετοῦμε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα μὲ 2 τρόπους : α) ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα (α), β) ὅπως δείχνει τὸ σχῆμα (β). Στὸ σχῆμα (α) βλέπουμε ὅτι ἀπὸ ὁλόκληρο τὸ τετράγωνο μένει ἐλεύθερο τὸ τετράγωνο ΚΛΜΝ. Στὸ σχῆμα (β) μένουν ἐλεύθερα δύο τετράγωνα τὰ ΡΕΖΠ καὶ ΕΗΣΟ. Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι : **τὸ τετράγωνο τῆς ὑποτεινούσης εἶναι ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν.**

Ἐφαρμογές

Ἡ ἰσότης $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίζουμε μιὰ πλευρὰ ὀρθογ. τριγώνου, ὅταν ξέρουμε τὶς δύο ἄλλες πλευρές του.

1. Ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ οἱ δύο κάθετες πλευρὲς ἔχουν μήκη 6 cm. καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μῆκος χ τῆς ὑποτεινούσης.

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

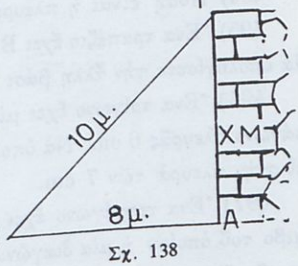
εἶναι : $\chi^2 = 6^2 + 8^2$

ἢ $\chi^2 = 36 + 64$

ἢ $\chi^2 = 100$

ἢ $\chi = 10$ cm

2. Μιὰ σκάλα μήκους 10 m στηρίζεται σ' ἕνα τοῖχο ἔτσι, ποὺ ἡ βάση της ν' ἀπέχη ἀπ' τὴ βάση τοῦ τοίχου 8 m. Ὡς ποιὸ ὕψος τοῦ τοίχου θὰ φθάνῃ ἡ σκάλα; (Σχ. 138).



Σχ. 138

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$, θὰ ἔχουμε :

$\chi^2 + 8^2 = 10^2$

ἢ $\chi^2 + 64 = 100 \Longleftrightarrow \chi^2 = 100 - 64 = 36$

ἢ $\chi = 6$ m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

485) Ὀρθογωνίου τριγώνου οἱ κάθετες πλευρὲς ἔχουν μήκη 12 m καὶ 16 m. Πόση εἶναι ἡ ὑποτείνουσα;

486) Σ' ἕνα ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ ὑποτείνουσα ἔχει μῆκος 15 cm ἡ δὲ μία κάθετος πλευρὰ 12 cm. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς;

487) Ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἡ πλευρὰ εἶναι 6 cm. Νὰ εὑρεθῆ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου κι' ἔπειτα τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ. (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τὸ ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι καὶ διάμεσος αὐτοῦ).

488) Νὰ εὑρεθῆ τὸ μῆκος τῆς διαγωνίου ὀρθ. παραλληλογράμμου, ποὺ ἔχει διαστάσεις 6 cm καὶ 8 cm.

489) Οἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 9 cm καὶ 12 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

490) Ἕνα οἰκόπεδο 600 m² πουλήθηκε πρὸς 200 δρχ. τὸν τ.τ.π. Πόσες δρχ. πουλήθηκε τὸ οἰκόπεδο.

491) Ἕνα τετραγωνικὸ οἰκόπεδο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ὀρθογώνιο τοῦ ὁποίου οἱ διαστάσεις εἶναι : 16 m., 24 m. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

492) Ποιὸ εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ποὺ ἔχουν τετραγωνικὴ ρίζα μονοψήφιο ἀριθμό.

493) Τί θὰ πάθη ἡ τετρ. ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ α, ἂν πολ/σουμε τὸ α μὲ 16

494) Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 10 στρέμμ.

495) Ἕνα τραπέζιο ἔχει Β = 6 cm, υ = 8 cm καὶ ἐμβαδὸν Ε=64 cm². Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἄλλη βάσι β.

496) Ἕνα τρίγωνο ἔχει μία πλευρὰ 7 cm καὶ εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ τετράγωνο πλευρᾶς 6 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πλευρὰ τῶν 7 cm.

497) Ἕνα τετράγωνο ἔχει περίμετρο 36 cm καὶ εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ρόμβο τοῦ ὁποίου ἡ μία διαγώνιος ἔχει μῆκος 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς ἄλλης διαγωνίου τοῦ ρόμβου.

498) Ἕνας ρόμβος ἔχει διαγωνίους 6 cm καὶ 8 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ ρόμβου.

499) Ἡ μία πλευρὰ ὀρθογωνίου παρ/μου ἔχει μῆκος 6 cm καὶ ἡ διαγώνιος 10 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου.

500) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ τοῦ ὁποίου (ΑΒ) = (ΑΓ) = 5 cm καὶ (ΒΓ) = 6 cm.

501) Τραπεζίου εἶναι Β = 9 cm, β = 5 cm καὶ Ε = 28 cm². Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Τί διαφέρει ὁ ὅρος «ἰσεμβαδικὰ σχήματα» ἀπὸ τὸν ὅρον «ἴσα σχήματα». 2) Ποιὰ σχέσις συνδέει τὴν πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου μὲ τὶς πλευρὲς ὀρθογωνίου ἰσεμβαδικοῦ μὲ τὸ τετράγωνο αὐτό. 3) Πότε ἡ τετρ. ρίζα κλάσματος εἶναι ρητὸς ἀριθμός. 4) Πότε ἕνα παραλ/μο εἶναι ἰσεμβαδικὸ μὲ ἕνα ἰσοϋψὲς μὲ αὐτὸ τρίγωνο. 5) Πῶς εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν ρόμβου ὅταν γνωρίζουμε τὰς διαγωνίους του. 6) Πῶς μὲ τὴ βοήθεια τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος εὑρίσκουμε τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου. 7) Ποιὸς ὁ λόγος τοῦ διαγωνίου τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτοῦ. Εἶναι σύμμετρος ἀριθμὸς ἢ ὄχι ;

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΙΒ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΓ΄

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

§ 100. Ἐφαρμοστὰ διανύσματα

Στὸ Γ΄ κεφάλαιο ἐξετάσαμε τὰ συγ/κὰ διανύσματα. Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε τὸ σύνολο τῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου. Εἴδαμε ὅτι ἐνῶ ἕνα ζεῦγος σημείων τοῦ ἐπιπέδου π.χ. τὸ ζεῦγος {Α, Β} ὁρίζει ἕνα εὐθύγρ. τμῆμα, τὸ ΑΒ ἢ ΒΑ, ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος σημείων τοῦ ἐπιπέδου π.χ. τὸ (Α, Β) ὁρίζει ἕνα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ποὺ ἔχει:

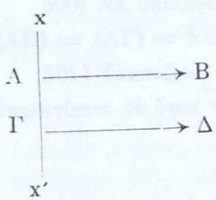
α) Μῆκος: τὸ μῆκος τοῦ τμήματος ΑΒ.
(Δηλαδὴ ἕναν ἀριθμὸ τῆς ἀριθμητικῆς ποὺ εἶναι ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς ἕνα ἄλλο τμῆμα ποὺ τὸ λαμβάνουμε ὡς μονάδα).

β) Διεύθυνσι: Τὴν διεύθυνσι τῆς εὐθείας ποὺ φέρει τὸ ΑΒ.

γ) Φοράν: Τὴν φορὰν ἀπὸ τὸ Α πρὸς τὸ Β.

Ἔτσι τὸ ζεῦγος {Α, Β} «γεννᾶ» δύο διανύσματα, τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{BA}$

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, (σχ. 139) ἔχουν:



Σχ. 139

α) ἴσα μήκη $AB = \Gamma\Delta$

β) ἴδια διεύθυνσι· τὴν διεύθυνσι τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ποὺ φέρουν τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

γ) ἴδια φορά· Διότι εὑρίσκονται καὶ τὰ δύο στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζει ἡ xx΄ δηλ. ἡ εὐθεῖα τῆς ἀρχῆς Α τοῦ ἑνὸς καὶ Γ τοῦ ἄλλου, καὶ λέγονται **ἴσα.**

Καθὼς παρατηροῦμε τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ διαφέρουν μόνο κατὰ τὴν θέσιν των.

Ὅταν σ' ἕνα διάνυσμα, ἐκτὸς ἀπὸ τὰ τρία χαρακτηριστικά του, μῆκος, διεύθυνσι, φορά, λάβουμε ὑπ' ὄψιν καὶ τὴν θέσιν τῆς ἀρχῆς του, ὁπότε ὁρίζουμε ἀκριβῶς τὴν θέσιν του, τότε αὐτὸ λέγεται **ἐφαρμοστὸ** ἢ **ἐντοπισμένο** διάνυσμα. Ἡ ἀρχὴ τοῦ ἐφαρμοστοῦ διανύσματος λέγεται **σημεῖον ἐφαρμογῆς** αὐτοῦ.

Σ' ἕνα μηδενικὸ διάνυσμα ἡ ἀρχὴ ταυτίζεται μὲ τὸ τέλος του.

Δύο ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ποὺ δὲν εἶναι

μηδενικά, λέγονται **ἴσα** ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἔχουν: ἴδια διεύθυνσι, ἴδια φορὰ καὶ ἴσα μήκη.

Ἂν δύο ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εὑρίσκωνται ἐπάνω σὲ παράλληλες (μὲ στενὴ σημασία) εὐθεῖες τότε τὸ τετράπλευρο ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμο (γιατί;) Ἄρα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$

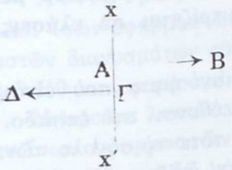
Τὰ μηδενικὰ διανύσματα τὰ θεωροῦμε ἴσα κι' ἔχουν:

α) μῆκος ἴσο μὲ 0.

β) Ὄχι ὁρισμένη διεύθυνσι καὶ φορά.

Γι' αὐτὸ ἕνα μηδενικὸ διάνυσμα μποροῦμε νὰ τὸ θεωροῦμε σ υ γ / κ ὸ μὲ κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου.

Δ ύ ο ἐ φ α ρ μ ο σ τ ὰ δ ι α ν ύ σ μ α τ α, λ έ γ ο ν τ α ι ἀ ν τ ί θ ε τ α ὅταν ἔχουν ἴδια διεύθυνσι, ἴσα μήκη καὶ ἀντιθέτους φοράς.



Σχ. 140

Π.χ. τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 140), εἶναι ἀντίθετα. (Ἔχουν ἀντιθέτους φορὰς διότι: τὸ μὲν $\overrightarrow{AB}$ εὑρίσκεται στὸ ἕνα ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα ποὺ ὁρίζει ἡ εὐθεῖα xx΄ τῶν σημείων ἐφαρμογῆς Α, Γ, ἐνῶ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ στὸ ἄλλο).

Εἶναι φανερὸν ὅτι μεταξὺ τῶν ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἰσχύουν οἱ ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1) Ἀνακλαστικὴ $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$

2) Συμμετρικὴ $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Rightarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB}$

3) Μεταβατικὴ $\quad \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \\ \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$

Ἄρα: Ἡ σ χ έ σ ι ς ἰ σ ό τ η τ ο ς τ ῶ ν ἐ φ α ρ μ ο σ τ ῶ ν δ ι α ν υ σ μ ά τ ω ν τ ο ῦ ἐ π ι π έ δ ο υ ε ἶ ν α ι σ χ έ σ ι ς ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς.

Ὡς σχέσις ἰσοδυναμίας ἡ ἰσότης διαμερίζει τὸ σύνολο τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου σὲ **κλάσεις ἰσοδυναμίας**. Σὲ κάθε κλάσι ἀνήκουν ὅλα τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ποὺ εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μόνον αὐτά.

Κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ἀνήκει σὲ μία μόνο κλάσι, στὴν κλάσι ποὺ ἀνήκουν ὅλα τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ποὺ εἶναι ἴσα μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$. Ἐνῶ δύο ἄνισα ἐφαρμοστὰ διανύσματα ἀνήκουν σὲ δύο διαφορετικὲς κλάσεις. Τὰ μηδενικὰ διανύσματα, ἀποτελοῦν μία κλάσι.

Ἐπίσης ἡ σχέσις «τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα AB εἶναι συγγραμικὸ μὲ τὸ ἐφαρμοστὸ $\vec{\Gamma\Delta}$» εἶναι μία διμελὴς σχέσις ἰσοδυναμίας.

Πράγματι εἶναι:

1) $\vec{AB}$ = συγ/κὸ μὲ τὸ $\vec{AB}$ (Ἀνακλαστική)

2) $\vec{AB}$ = » » » $\vec{\Gamma\Delta}$ ⇒ $\vec{\Gamma\Delta}$ = συγ/κὸ μὲ τὸ $\vec{AB}$ (Συμ/κή)

3) $\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = \text{» » »}\ \vec{\Gamma\Delta} \\ \vec{\Gamma\Delta} = \text{» » »}\ \vec{EZ}\end{array}\right| \Rightarrow \vec{AB} = \text{» » »}\ \vec{EZ}$ (Μεταβατική)

Ἄρα: Τὸ σύνολο τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴ σχέσι τῆς «συγγραμμικότητος» διαμερίζεται σὲ κλάσεις συγ/κῶν διανυσμάτων.

Σὲ κάθε κλάσι ἀνήκουν ὅλα τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα ποὺ εἶναι συγ/κὰ μεταξύ των, ποὺ ἔχουν δηλαδή, τὴν ἴδια διεύθυνσι στὸ ἐπίπεδο.

Ἂν δὲ δοθῇ μία διεύθυνσι xx′ τοῦ ἐπιπέδου τότε τὸ σύνολο τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων ποὺ ἔχουν διεύθυνσι τὴν xx′ ὁρίζουν μία κλάσι. Δηλαδὴ οἱ κλάσεις τῶν συγ/κῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν ἀμφιμονοσήμαντα στὶς διευθύνσεις τοῦ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

502) Νὰ χαράξετε δύο ἴσα ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ καὶ νὰ συγκρίνετε τὰ διανύσματα $\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Delta}$ ὅταν τὰ $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ εὑρίσκωνται στὸν ἴδιο φορέα.

503) Ἂν τὰ σημεῖα A, A′ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς κέντρον O νὰ εὕρετε τοὺς λόγους $\dfrac{\vec{OA}}{\vec{AO'}}$, $\dfrac{\vec{OA'}}{\vec{OA}}$, $\dfrac{\vec{OA}}{\vec{OA'}}$, $\dfrac{\vec{AA'}}{\vec{OA}}$, $\dfrac{\vec{OA'}}{\vec{A'A}}$

504) Νὰ χαράξετε σὲ διαφορετικοὺς φορεῖς δύο ἀντίθετα διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{\Gamma\Delta}$ καὶ νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ σημεῖο A εἶναι συμμετρικὸ τοῦ Γ καὶ τὸ B συμμετρικὸ τοῦ Δ ὡς πρὸ κέντρο συμμετρίας τὴν τομὴ τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ.

§ 101. Ἐλεύθερα διανύσματα

Καθὼς εἴδαμε στὴν προηγούμενη παράγραφο, ὅλα τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου ποὺ εἶναι ἴσα μ' ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα αὐτοῦ, π.χ. τὸ $\vec{AB}$, ἀνήκουν σὲ μία κλάσι ἰσοδυναμίας.

Ὅλα τὰ διανύσματα τῆς κλάσεως αὐτῆς ἔχουν κοινὰ τὰ τρία στοιχεῖα: διεύθυνσι, μῆκος, φορὰ καὶ διαφέρουν μεταξύ τους μόνο κατὰ τὸ σημεῖον ἐφαρμογῆς. Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἰδέα τοῦ **ἐλευθέρου** (τοῦ ὄχι ἐφαρμοστοῦ) **διανύσματος.**

Μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα ὡς ἕνα διάνυσμα μὲ ὁρισμένη διεύθυνσι, φορὰ καὶ μῆκος, χωρὶς ὅμως ὁρισμένη θέσι στὸ ἐπίπεδο. Μ' ἄλλα λόγια τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα ὁρίζεται ὡς ἕνα τριμελὲς σύνολο μὲ στοιχεῖα: μία διεύθυνσι, μία φορὰ κ' ἕνα μῆκος. Ὕστερα ἀπ' αὐτὰ ἐννοοῦμε ὅτι:

Ὅλα τὰ ἐφαρμοστὰ διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου τὰ ἴσα μ' ἕνα δεδομένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ ὁρίζουν ἕνα καὶ μόνον ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα.

Ἀντίστροφα: Ἂν ἔχουμε ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα ὁρίζουμε μία κλάσι ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων δηλαδὴ τὸ σύνολο τῶν ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἔχουν διεύθυνσι, φορὰν καὶ μῆκος τὴ διεύθυνσι, φορὰ καὶ μῆκος τοῦ ἐλευθέρου τούτου διανύσματος.

Μποροῦμε λοιπὸν νὰ ὁρίσουμε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα ὡς **μίαν κλάσιν ἴσων ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.**

Συνηθίζουμε δέ, νὰ ὀνομάζουμε τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα **ἀντιπρόσωπο** τῆς κλάσεως αὐτῆς τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων.

Τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα ὁρίζεται ἀπὸ τὴν κλάσι τῶν μηδενικῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.

Τὰ ἐλεύθερα διανύσματα τὰ συμβολίζουμε μὲ μικρὰ ἑλληνικὰ γράμματα ἐπιγραμμισμένα μ' ἕνα βέλος. Π. χ. $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$.

Στὸ σχέδιο, ἐπειδὴ τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα δὲν ἔχει ὁρισμένο σημεῖον ἐφαρμογῆς τὸ «ἀντιπροσωπεύουμε» μ' ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει τὰ τρία γνωρίσματα (δ/σι, φορά, μῆκος) τοῦ ἐλευθέρου διανύσματος.

Ὅταν γράφουμε: $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ ἢ $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$

ἐννοοῦμε ὅτι: τὸ $\vec{\alpha}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ $\overrightarrow{AB}$ ἢ τὸ $\vec{\alpha}$ ὁρίζεται ἀπὸ τὸ σύνολο τῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τῶν ἴσων μὲ τὸ $\overrightarrow{AB}$

$$\vec{\alpha} = \left\{ \chi \mid \chi \text{ ἐφαρμ. διάνυσμα ἴσο μὲ τὸ } \overrightarrow{AB} \right\}$$

§ 102. Εἰδικὲς περιπτώσεις

I. Ἴσα ἐλεύθερα διανύσματα

Θὰ λέγωμε ὅτι δύο ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ εἶναι ἴσα, $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$, ὅταν καὶ μόνον ὅταν ἀνήκουν στὴν ἴδια κλάσι ἰσοδ υ ν α μ ί α ς. Μ' ἄλλα λόγια δύο ἐλεύθερα διανύσματα εἶναι ἴσα ὅταν ταυτίζωνται. Εἶναι δὲ φανερὴ ἡ ἰσοδυναμία:

$$\left(\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB},\ \vec{\beta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ καὶ } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) \Longleftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

ΙΙ. Ἀντίθετα ἐλεύθερα διανύσματα.

Ἂν εἶναι: $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ λέγονται ἀντίθετα γράφουμε δὲ $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

$$A \xrightarrow{\quad\vec{\alpha}\quad} B$$

$$\Delta \xleftarrow{\quad\vec{\beta}\quad} \Gamma$$

ὥστε εἶναι: $\left(\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB},\ \vec{\beta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ καὶ } \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) \Longleftrightarrow \vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

ΙΙΙ. Συγγραμμικὰ ἐλεύθερα διανύσματα

Ἂν εἶναι $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{\beta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ συγ/κὸ μὲ τὸ $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $(\overrightarrow{\Gamma\Delta} \neq \vec{O})$ τότε τὰ ἐλεύθερα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ λέγονται συγγραμμικά.

$$A \xrightarrow{\quad\vec{\alpha}\quad} B$$

$$\Delta \xleftarrow{\quad\vec{\beta}\quad} \Gamma$$

$$\left(\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB},\ \vec{\beta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ καὶ } \overrightarrow{AB} \text{ συγ/κὸ } \overrightarrow{\Gamma\Delta}\right) \Longleftrightarrow \vec{\alpha} \text{ συγ/κὸ } \vec{\beta}$$

IV. **Λόγος** ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος α πρὸς ἕνα συγ/κό του $\vec{\beta}$ $\left(\vec{\beta} \neq \vec{0}\right)$ λέγεται ὁ λόγος τῶν ἀντιστοίχων ἀντιπροσωπευτικῶν διανυσμάτων.

Ἄρα θὰ εἶναι: 1) $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \vec{O}$ ἂν $\vec{\alpha} = \vec{O}$

2) $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} =$ θετ. ἀριθμὸς ἂν τὰ $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$ εἶναι ὁμόρροπα

3) $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} =$ ἀρνητ. » » » » » » ἀντίρροπα

Παραδείγματα

1) ἄν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = 1$

2) » $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ » $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = -1$

3) » $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ καὶ $\vec{\gamma} = \vec{\delta}$ τότε $\dfrac{\vec{\alpha}}{\vec{\gamma}} = \dfrac{\vec{\beta}}{\vec{\delta}}$

ὅπου $\vec{\alpha}, \vec{\gamma}$ συγ/κὰ

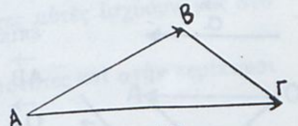
§ 103. Ἄθροισμα διανυσμάτων

I. Ἄθροισμα ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων

Δύο ἢ περισσότερα ἐφαρμοστὰ διανύσματα, ποὺ ἔχουν δοθῆ μὲ μιὰ ὁρισμένη σειρά, λέγονται **διαδοχικά**, ὅταν τὸ τέλος τοῦ 1ου συμπίπτει μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ 2ου, τὸ τέλος τοῦ 2ου μὲ τὴν ἀρχὴν τοῦ 3ου κ.ο.κ.

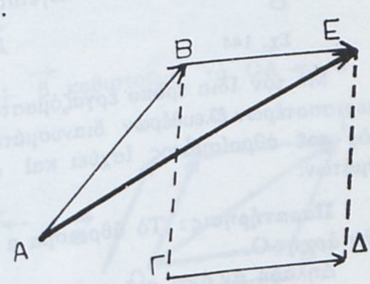
α) Ἄς εἶναι τὰ διαδ. ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\vec{AB}$, $\vec{B\Gamma}$ (σχ. 141).

Τὸ διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ ποὺ ἔχει ὡς ἀρχὴν τὴν ἀρχὴν τοῦ 1ου διανύσματος $\vec{AB}$ καὶ ὡς τέλος τὸ τέλος τοῦ 2ου διανύσματος $\vec{B\Gamma}$ λέγεται ἄθροισμα τῶν διαδ. ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων $\vec{AB}$ καὶ $\vec{B\Gamma}$.



Σχ. 141

β) Στὸ σχ. 142 τὰ διανύσματα $\vec{AB}$ καὶ $\vec{\Gamma\Delta}$ δὲν εἶναι διαδοχικά. Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμά των $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta}$ τὰ καθιστοῦμε πρῶτα διαδοχικὰ (πῶς ;) κι' ἔπειτα τὰ προσθέτουμε.

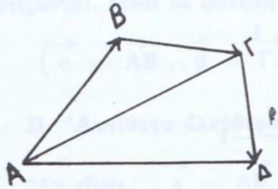


Σχ. 142

Ἔτσι ἔχουμε : $\vec{AB} + \vec{\Gamma\Delta} =$

$\vec{AB} + \vec{BE} = \vec{AE}$

Ἄν ἔχουμε νὰ προσθέσουμε κατὰ σειρὰν τρία ἢ περισσότερα διανύσματα εὑρίσκουμε τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων καὶ σ' αὐτὸ προσθέτουμε τὸ 3ο διάνυσμα. Στὸ νέο ἄθροισμα προσθέτουμε τὸ 4ο διάνυσμα κ.ο.κ.



Σχ. 143

Ἔτσι γιὰ τὸ ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ (σχ. 143) ἔχουμε :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{A\Gamma}$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$$

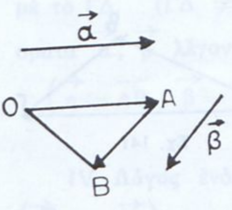
$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}) + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{A\Delta}$$

Ἀλλά, καθὼς παρατηροῦμε τὸ $\overrightarrow{A\Delta}$ ἔχει τὴν ἀρχὴν Α, τοῦ 1ου διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ καὶ τέλος, τὸ τέλος Δ τοῦ τελευταίου διανύσματος $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Ὥστε : **Ἄθροισμα διαδ. ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων εἶναι τὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ἀρχὴ τὴν ἀρχὴ τοῦ 1ου διανύσματος καὶ τέλος τὸ τέλος τοῦ τελευταίου διανύσματος.**

II. **Ἄθροισμα ἐλευθέρων διανυσμάτων**

Ἄς εἶναι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δύο ἐλεύθερα διανύσματα καὶ Ο ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου (σχ. 144). Κατασκευάζουμε $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$. Τὸ ἄθροισμα $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, τῶν $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{AB}$ ὁρίζει ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\gamma}$, ποὺ λέγεται ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$



Σχ. 144

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε κι᾿ ὅταν πρόκειται γιὰ τὸ ἄθροισμα περισσοτέρων ἐλευθέρων διανυσμάτων. Εἶναι φανερὸν ὅτι ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς τοῦ ἀθροίσματος ἰσχύει καὶ στὴν περιπτωσι τῶν συγ/κῶν διανυσμάτων.

Παρατήρησις : Τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$ εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴν ἀρχὴ Ο.

Δηλαδὴ ἄν ἀντὶ τοῦ σημείου Ο ἐκλέξουμε ἄλλο σημεῖον Ο′ τοῦ ἐπιπέδου, (σχ. 145), θὰ εἶναι : $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$.

Τοῦτο μποροῦμε νὰ τὸ ἐξακριβώσουμε μὲ μία παράλληλο μετατόπισι τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ κατὰ τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{OO'}$

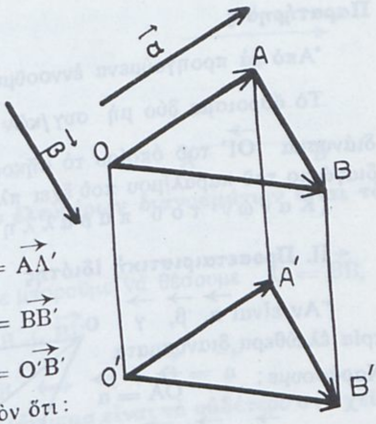
Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα καταλήγουμε κι' ὡς ἑξῆς :

$\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AA'}$

$\vec{\beta} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O'B'}$

ἄρα $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{BB'}$



Σχ. 145

Σημ. Ἀπὸ τὰ παραπάνω εἶναι φανερὸν ὅτι :

$$|\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$$

§ 104. Ἰδιότητες τῆς προσθέσεως

Στὸ σύνολο τῶν συγ/κῶν ἐφαρμοστῶν διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου εἴδαμε ὅτι ἡ πρόσθεσις εἶναι 1) ἀντιμεταθετική, 2) προσεταιριστική, 3) ἔχει οὐδέτερο στοιχεῖο τὸ μηδενικὸ διάνυσμα. Εὔκολα ἐννοοῦμε ὅτι οἱ ἰδιότητες αὐτὲς ἰσχύουν καὶ στὸ σύνολο τῶν ἐλευθέρων συγ/κῶν διανυσμάτων.

Θὰ ἐξετάσουμε τώρα ἂν ἰσχύουν οἱ ἴδιες ἰδιότητες καὶ στὴν περίπτωσι τῶν μὴ συγ/κῶν διανυσμάτων.

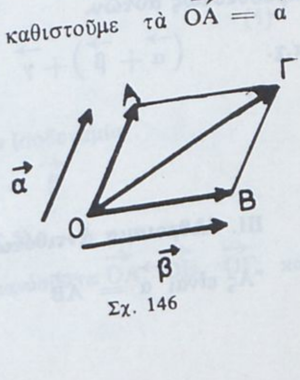
I. Ἀντιμεταθετικὴ ἰδιότης.

Ἄς εἶναι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$

Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ καθιστοῦμε τὰ $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$ διαδοχικά, σχ. 146,

κι' ἔχουμε: $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$



Σχ. 146

Εὔκολα ὅμως εὑρίσκουμε ὅτι καὶ

$\vec{\beta} + \vec{\alpha} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA}$

$= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$

ὥστε $\qquad \boldsymbol{\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha}}$

Παρατήρησις

Ἀπὸ τὰ προηγούμενα ἐννοοῦμε ὅτι :

Τὸ ἄθροισμα δύο μὴ συγ/κῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$ καὶ $\overrightarrow{OB}$ εἶναι τὸ διάνυσμα $\overrightarrow{O\Gamma}$ τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος καὶ ἡ διεύθυνσις ὁρίζεται ἀπὸ τὴν διαγώνιο τοῦ παραλ/μου ποὺ ἔχει πλευρὲς τὶς OA καὶ OB.

(Κανὼν τοῦ παραλληλογράμμου)

ΙΙ. Προσεταιριστικὴ ἰδιότης

Ἂν εἶναι $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία ἐλεύθερα διανύσματα

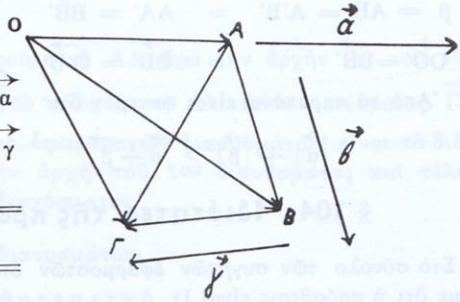
Χαράσουμε : $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{\beta}$ $\overrightarrow{B\Gamma} = \vec{\gamma}$

ὁπότε : $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma} =$

$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) + \overrightarrow{B\Gamma} =$

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$



Σχ. 147

καὶ $\vec{\alpha} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) = \overrightarrow{OA} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}\right) = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{O\Gamma}$

ὥστε : $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)$

Παρατήρησις : Μὲ συνδυασμὸ τῆς ἀντιμεταθετικῆς καὶ τῆς προσεταιριστικῆς ἰδιότητος εὑρίσκουμε ὅτι : **Τὸ ἄθροισμα τριῶν (ἢ περισσοτέρων) ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπὸ τὴ σειρὰ τῆς προσθέσεως αὐτῶν.**

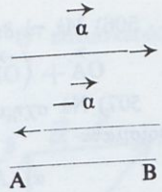
π.χ. $\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)$ προσετ. ἰδιότης

$= \vec{\alpha} + \left(\vec{\gamma} + \vec{\beta}\right)$ ἀντιμετ. »

$= \left(\vec{\alpha} + \vec{\gamma}\right) + \vec{\beta}$ προσετ. »

ΙΙΙ. Ἄθροισμα ἀντιθέτων ἐλευθέρων διανυσμάτων

Ἂς εἶναι $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ ὁπότε $-\vec{\alpha} = -\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$



εἶναι $\quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{O}$

$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{AB} + (-\overrightarrow{AB}) = \vec{O}$

$\Longleftrightarrow \quad \vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{O}$

ὥστε: **Τὸ ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἐλευθέρων διανυσμάτων εἶναι τὸ μηδενικὸ διάνυσμα.**

IV. Ἄς εἶναι $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$ τότε μποροῦμε νὰ θέσουμε $\vec{O} = \overrightarrow{BB}$,

ὁπότε ἔχουμε: $\quad \vec{\alpha} + \vec{O} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB}$

$\vec{\alpha} + \vec{O} = \overrightarrow{AB} \Longleftrightarrow \vec{\alpha} + \vec{O} = \vec{\alpha}$

ὥστε: **Τὸ μηδενικὸ ἐλεύθερο διάνυσμα εἶναι τὸ οὐδέτερο στοιχεῖο στὴν πρόσθεσι ἐλευθ. διανυσμάτων.**

V. **Ἰδιότης διαγραφῆς**

Ἄς εἶναι: $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

Μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι ἂν στὰ ἴσα διανύσματα $\left(\vec{\alpha} + \vec{\gamma}\right)$ καὶ $\left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right)$ προσθέσουμε τὸ $-\vec{\gamma}$ δηλαδὴ τὸ ἀντίθετο διάνυσμα τοῦ $\vec{\gamma}$ εὑρίσκουμε ἴσα διανύσματα.

ὥστε: $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow \left(\vec{\alpha} + \vec{\gamma}\right) + \left(-\vec{\gamma}\right) = \left(\vec{\beta} + \vec{\gamma}\right) + \left(-\vec{\gamma}\right)$

ὁπότε: $\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} + \left[\vec{\gamma} + \left(-\vec{\gamma}\right)\right] = \vec{\beta} + \left[\vec{\gamma} + \left(-\vec{\gamma}\right)\right]$

ἢ $\quad \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{O} = \vec{\beta} + \vec{O}$

ἢ $\quad \boldsymbol{\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Rightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}}$ (1)

Ἐπίσης εὔκολα εὑρίσκουμε ὅτι

$\boldsymbol{\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma}}$ (2)

Οἱ συνεπαγωγὲς (1) καὶ (2) ὁρίζουν τὴν ἰσοδυναμία

$\boldsymbol{\vec{\alpha} + \vec{\gamma} = \vec{\beta} + \vec{\gamma} \Longleftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta}}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

505) Νὰ χαράξετε τρία ἐφαρμοστὰ διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{O\Gamma}$ καὶ ἔπειτα τὸ ἄθροισμά των.

506) Μὲ τὰ διανύσματα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $\vec{OA} + \left(\vec{O\Gamma} + \vec{OB}\right) = \left(\vec{OA} + \vec{OB}\right) + \vec{O\Gamma}$

507) Νὰ σχηματίσετε ἕνα τετράπλευρο ΑΒΓΔ κι' ἔπειτα νὰ βρῆτε τὰ ἀθροίσματα

α) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta}$

β) $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A}$

508) Δίδονται τρία σημεῖα Ο, Α, Β. Νὰ εὑρεθῆ σημεῖον Γ τέτοιο ὥστε νὰ εἶναι: $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{O\Gamma} = \vec{O}$

506) Νὰ χαράξετε ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\vec{A\Gamma}$ κι' ἔπειτα νὰ βρῆτε 2 ἢ 3 ἢ περισσότερα διανύσματα τοῦ ἐπιπέδου ποὺ νὰ ἔχουν ἄθροισμα τὸ διάνυσμα $\vec{AB}$.

§ 105. 'Αφαίρεσις διανυσμάτων

Ὅπως καὶ στὴν ἀφαίρεσι τῶν σχ. ἀριθμῶν. **διαφορὰ** ἑνὸς ἐλευθέρου διανύσματος $\vec{\alpha}$ (μειωτέος) ἀπὸ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\beta}$ (ἀφαιρετέος) λέγεται ἕνα διάνυσμα $\vec{x}$ τὸ ὁποῖον ἂν προστεθῆ στὸ β μᾶς δίδει τὸ $\vec{\alpha}$.

Εἶναι δηλαδή: $\quad \vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{x} \iff \vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha}$

Εὕρεσις τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{x}$

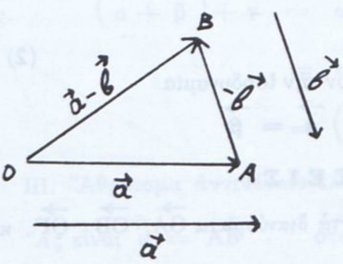
Εἶναι: $\vec{\beta} + \vec{x} = \vec{\alpha} \iff \left(-\vec{\beta}\right) + \vec{\beta} + \vec{x} = \left(-\vec{\beta}\right) + \vec{\alpha}$ (ἰδ. διαγρ.)

$$\iff \vec{x} = \vec{\alpha} + \left(-\vec{\beta}\right)$$

Ὥστε: **ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ μειωτέου $\vec{\alpha}$ μὲ τὸ ἀντίθετο, $-\vec{\beta}$, τοῦ ἀφαιρετέου β.**

Κατασκευὴ

1ος τρόπος: Γιὰ τὴν κατασκευὴ τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ χρειάζονται δύο πράξεις: α) Ἡ κατασκευὴ τοῦ ἀντιθέτου, $-\vec{\beta}$, τοῦ $\vec{\beta}$ καὶ β) ἡ πρόσθεσις τοῦ $-\vec{\beta}$ στὸ $\vec{\alpha}$. Μὲ ἀρχὴν ἕνα σημεῖον Ο, τοῦ ἐπιπέδου, κατασκευάζουμε $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ κι' ἔπειτα $\vec{AB} = -\vec{\beta}$. Τὸ διάνυσμα $\vec{OB} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$ εἶναι ἀντιπροσωπευτικὸ τῆς διαφορᾶς $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (σχ. 148).



Σχ. 148

2ος τρόπος. Μὲ ἀρχὴν ἕνα σημεῖον Ο κατασκευάζουμε $\vec{OA} = \vec{\alpha}$ καὶ $\vec{OB} = \vec{\beta}$ (σχ. 149).

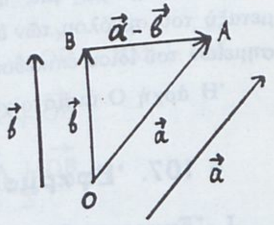
ὁπότε ἔχουμε:

$\vec{BA} = \vec{BO} + \vec{OA}$ (ὁρισμὸς ἀθροίσματος)

$\iff \vec{BA} = \vec{OA} - \vec{OB}$ (διότι $\vec{BO} = -\vec{OB}$)

$\iff \vec{BA} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

ὥστε: τὸ $\vec{BA}$ ἀντιπροσωπεύει τὴν διαφορὰν $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$



Σχ. 149

Ειδικὴ περίπτωσις: Ἂν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ τότε εἶναι

$$\vec{\alpha} - \vec{\alpha} = \vec{x} \iff \vec{\alpha} = \vec{\alpha} + \vec{x} \iff \vec{x} = 0$$

Παρατήρησις. Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι ἡ διαφορὰ δύο συγ/κῶν διανυσμάτων εἶναι μερικὴ περίπτωσις τοῦ κανόνος τῆς διαφορᾶς διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου

§ 106. Διανυσματικὴ ἀκτὶς

Ἂν Ο εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τότε σὲ κάθε σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου τούτου τὸ διατεταγμένο ζεῦγος σημείων (Ο, Μ) ὁρίζει ἕνα ἐφαρμοστὸ διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου, τὸ $\vec{OM}$. Τὸ $\vec{OM}$ λέγεται **διανυσματικὴ ἀκτὶς** τοῦ σημείου Μ μὲ ἀρχὴν τὸ Ο. Ἀλλὰ κάθε διανυσματικὴ ἀκτίς, $\vec{OM}$, ἀντιπροσωπεύει ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τὸ $\vec{\mu}$. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο, ἀντιστοιχίζουμε σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{\mu}$ αὐτοῦ.

$$M \rightarrow \vec{OM} \rightarrow \vec{\mu} \qquad (1)$$

Ἀντιστρόφως: Σὲ κάθε ἐλεύθερο διάνυσμα $\vec{V}$ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζουμε τὸ ἀντιπροσωπευτικό του ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ποὺ ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον Ο

$$\vec{V} = \vec{ON}$$

καὶ σὲ κάθε ἐφαρμοστὸ διάνυσμα ΟΝ τοῦ ἐπιπέδου, μὲ ἀρχὴν τὸ Ο, ἀντιστοιχίζουμε τό τέλος αὐτοῦ Ν.

$$\vec{V} \rightarrow \vec{ON} \rightarrow \mathbf{N} \qquad (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἐννοοῦμε ὅτι:

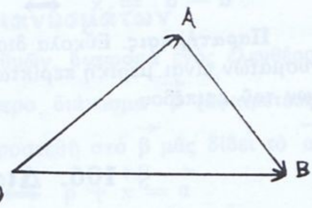
Διὰ μέσου τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων, ὡς πρὸς ἕνα ὁρισμένο σημεῖον Ο, ἔχουμε μία ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν ἐλευθέρων διανυσμάτων καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου.

Ἡ ἀρχὴ Ο ἀντιστοιχεῖ στὸ $\vec{O}$.

§ 107. Ἐφαρμογὲς σὲ γεωμετρικὲς προτάσεις

I. Ἔκφρασις διανύσματος διὰ τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν ἄκρων αὐτοῦ

Ἄς εἶναι τὸ ἐφαρμοστὸ διάνυσμα $\vec{AB}$ κι' ἕνα σημεῖον Ο, ἐξωτερικὸ τῆς εὐθείας εἰς τὴν ὁποίαν εὑρίσκεται τὸ $\vec{AB}$ (Σχ. 150). Ἀπὸ τὸ τὸ τρίγωνο ΑΟΒ ἔχουμε:



Σχ. 150

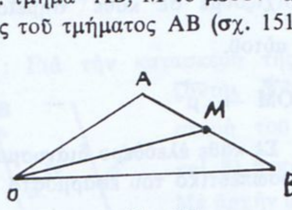
$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} + \vec{AO}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} \qquad (\text{Ἐπειδὴ } \vec{AO} = -\vec{OA})$$

II. Διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ μέσου εὐθ. τμήματος

Ἄς εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ, Μ τὸ μέσον αὐτοῦ κι' ἕνα σημεῖον Ο, ἐξωτερικὸ τῆς εὐθείας τοῦ τμήματος ΑΒ (σχ. 151).



Σχ. 151

Ἀπὸ τὸ τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε : $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$ (1)

» » » ΟΜΒ » $\vec{OM} = \vec{OB} + \vec{BM}$ (2)

$$2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} + \vec{OB} + \vec{BM} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε

κι' ἐπειδὴ

$$\vec{AM} = \vec{MB} = -\vec{BM}$$

ἡ (3) γράφεται

$$2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{BM} + \vec{BM}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 2\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$$

Ἡ διανυσματικὴ ἀκτὶς τοῦ μέσου ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

§ 108. Γινόμενο ἐλευθ. διανύσματος μὲ ρητὸ σχ. ἀριθμό.

Ἄς εἶναι $\vec{\alpha}$, $\left(\vec{\alpha} \neq \vec{0}\right)$ ἕνα ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου καὶ λ ἕνας ρητὸς σχετ. ἀριθμὸς ($\lambda \neq 0$).

Ὀνομάζουμε **γινόμενο $\lambda \cdot \vec{\alpha}$** τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου ποὺ ἔχει : α) **Μῆκος** ἴσο μὲ $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$ δηλαδὴ τὸ γινόμενο τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ λ μὲ τὸ μῆκος τοῦ $\vec{\alpha}$.

β) **Διεύθυνσι** τὴν διεύθυνσι τοῦ $\vec{\alpha}$.

γ) **Φορά** 1) Τὴν ἴδια μὲ τὴ φορὰ τοῦ $\vec{\alpha}$ ἂν $\lambda > 0$.

2) Τὴν ἀντίθετη τῆς φορᾶς τοῦ $\vec{\alpha}$ ἂν $\lambda < 0$.

Εἰδικά : ἂν εἶναι $\vec{\alpha} = \vec{0}$ καὶ $\lambda \neq 0$ ἢ $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ καὶ $\lambda = 0$ τότε εἶναι $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$

Σύμφωνα μὲ τὸν δρισμὸν αὐτὸν εἶναι :

$$\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \Longleftrightarrow \frac{\vec{\alpha}}{\vec{\beta}} = \lambda \, , \quad \vec{\beta} \neq \vec{0}$$

'Ιδιότητες

Στὸ γινόμενο ρητοῦ σχ. ἀριθμοῦ μὲ διάνυσμα διακρίνουμε τὶς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

1. Μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι:

$$-2\cdot(3\cdot\vec{\alpha}) = -6\,\vec{\alpha}$$

κι' ἐπειδὴ $6 = 2\cdot 3$ εἶναι: $-2\cdot(3\cdot\vec{\alpha}) = (-2\cdot 3)\cdot\vec{\alpha}$

καὶ γενικά: $\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\vec{\alpha}) = (\lambda_1\cdot\lambda_2)\,\vec{\alpha}$

λ_1, λ_2 ρητοὶ σχετ. ἀριθμοί·

ὥστε: **ἰσχύει ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης ὡς πρὸς τοὺς ἀριθμητικοὺς συντελεστάς.**

2. Μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε ὅτι:

$$3\,\vec{\alpha} = -2\,\vec{\alpha} + 5\,\vec{\alpha}$$

κι' ἐπειδὴ $3 = -2+5$ εἶναι $(-2+5)\,\vec{\alpha} = -2\,\vec{\alpha} + 5\vec{\alpha}$

καὶ γενικὰ $(\lambda_1+\lambda_2)\,\vec{\alpha} = \lambda_1\vec{\alpha} + \lambda_2\vec{\alpha}$

λ_1, λ_2 ρητοὶ σχετ. ἀριθμοί.

ὥστε: **Ὁ πολ/σμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσι τῶν ρητῶν σχετ. ἀριθμῶν.**

3. **Γιὰ νὰ βροῦμε τὸ γινόμενο $2\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ εὑρίσκουμε:**

τὸ ἄθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ τῶν $\vec{\alpha}$ καὶ $\vec{\beta}$

κι' ἔπειτα τὸ γινόμενο $2\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)$ τοῦ 2, μὲ τὸ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$

Ἔτσι ἔχουμε: $\vec{\alpha} = \vec{OA}$ $\quad\vec{\beta} = \vec{AB}$ (σχ. 151).

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta} = \vec{OA}+\vec{AB} = \vec{OB}$$

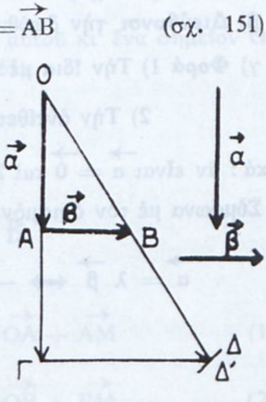
καὶ $2\cdot\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right) = 2\cdot\vec{OB} = \vec{O\Delta}$

Ἂν ὅμως σχηματίσουμε πρῶτα τὰ γινόμενα $2\,\vec{\alpha}$ καὶ $2\,\vec{\beta}$ κι' ἔπειτα τὸ ἄθροισμά των ἔχουμε:

$$2\,\vec{\alpha} = \vec{O\Gamma} \qquad 2\,\vec{\beta} = \vec{\Gamma\Delta'}$$

$$2\,\vec{\alpha}+2\,\vec{\beta} = \vec{O\Gamma}+\vec{\Gamma\Delta'}$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2\,\vec{\alpha}+2\,\vec{\beta} = \vec{O\Delta}$$



Σχ. 151

Ἀπὸ τὴν κατασκευή μας ὅμως εὑρίσκουμε ὅτι $\overrightarrow{O\Delta} = \overrightarrow{O\Delta'}$

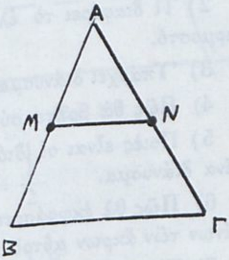
ἄρα ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) εἶναι: $2 \cdot \left(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right) = 2\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}$

καὶ γενικά: $\lambda \cdot \left(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right) = \lambda\overrightarrow{\alpha} + \lambda\overrightarrow{\beta}$, $\lambda \in P$

ὥστε: **Ὁ πολ/σμὸς εἶναι ἐπιμεριστικὸς ὡς πρὸς τὴν πρόσθεσι τῶν διανυσμάτων.**

Ἐφαρμογή.

Ἄς εἶναι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 152) καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοίχως.



Σχ. 152

Εἶναι: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$ (§ 107)

καὶ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\quad \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$

ἄρα $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AB}\right)$

(ἐπιμεριστική ἰδιότης)

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}B\Gamma$

Ὥστε: **Τὸ εὐθυγρ. τμῆμα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλο μὲ τὴν τρίτη πλευρὰ καὶ ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ αὐτῆς.**

Μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε ἕνα μοντέλο γιὰ τὴν ἐπαλήθευσι τῆς προτάσεως αὐτῆς μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Κατασκευάζουμε ἕνα ἀρθρωτὸ τρίγωνο ΑΒΓ καὶ μ' ἕνα λαστιχάκι ἑνώνουμε τὰ μέσα Μ, Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ. Ὅταν οἱ πλευρὲς ΑΒ καὶ ΑΓ περιστρέφωνται περὶ τὶς κορυφὲς Β καὶ Γ τότε παρατηροῦμε ὅτι ἡ ΜΝ σ' ὅλες τὶς θέσεις μένει παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἔχει μῆκος ἴσο μὲ $\frac{B\Gamma}{2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

510) Νὰ γράψετε τρία διανύσματα στὸ ἐπίπεδο, τὰ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$ κι' ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὰ διανύσματα

α) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ β) $\overrightarrow{AB} - \left(\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ}\right)$

511) Γράψατε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ κι' ἔπειτα νὰ σχηματίσετε τὰ διανύσματα α) $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}$ β) $\overrightarrow{A\Gamma} - 2 \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$

512) Ἂν $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ εἶναι ἐλεύθερα διανύσματα στὸ ἐπίπεδο νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $3\left(\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right) = 3\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}$

513) Νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι $-3 \cdot 4\overrightarrow{\alpha} = -12\overrightarrow{\alpha}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Δύο σημεῖα Α καὶ Β πόσα καὶ ποιὰ διανύσματα ὁρίζουν

2) Τί διαφέρει τὸ ἐλεύθερο διάνυσμα ἀπὸ τὸ ἀντιπροσωπευτικό του ἐφαρμοστό.

3) Ὑπάρχει διάνυσμα μὲ ὄχι ὁρισμένη διεύθυνσι καὶ φορά.

4) Πῶς θὰ βρῆτε σύντομα τὸ ἄθροισμα πολλῶν διαδ. διανυσμάτων.

5) Ποιὲς εἶναι οἱ ἰδιότητες τοῦ γινομένου ἑνὸς ρητοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ μ' ἕνα διάνυσμα.

6) Πῶς θὰ ἐκφράσετε ἕνα διάνυσμα μὲ τὴ βοήθεια τῶν διανυσματικῶν ἀκτίνων τῶν ἄκρων αὐτοῦ.

7) Τί γνωρίζετε γιὰ τὸ εὐθ. τμῆμα ποὺ ἑνώνει νὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

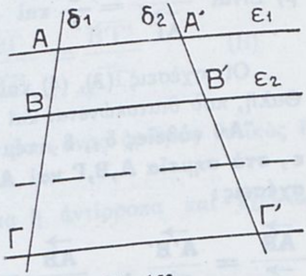
ΙΓ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΔ΄

§ 109. Θεώρημα Θαλῆ*

I. Ἄς εἶναι δ_1, δ_2, δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ποὺ τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες ε_1, ε_2, στὰ σημεῖα Α, Β καὶ Α΄, Β΄ ἀντιστοίχως (σχ. 153). α) Ἐπὶ τῆς δ_1 σημειώνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{ΒΓ}$ τέτοιο ὥστε $\overrightarrow{ΒΓ} = 2\overrightarrow{ΑΒ} \Longleftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}} = \dfrac{1}{2}$ (1)

(Δηλαδή: τὸ $\overrightarrow{ΒΓ}$ εἶναι ὁμόρροπο μὲ τὸ $\overrightarrow{ΑΒ}$ καὶ ἔχει διπλάσιο μῆκος ἀπὸ αὐτό).



Σχ. 153

Ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ φέρουμε ΓΓ΄ $\parallel \varepsilon_2$ ὁπότε ἀπὸ τὸ σχῆμα ἐξακριβώνουμε ὅτι:

καὶ $\overrightarrow{Β'Γ'} = 2\overrightarrow{Α'Β'} \Longleftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{Α'Β'}}{\overrightarrow{Β'Γ'}} = \dfrac{1}{2}$ (2)

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε: $\dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}} = \dfrac{\overrightarrow{Α'Β'}}{\overrightarrow{Β'Γ'}}$ (3)

β) Ἂν ἀντὶ νὰ πάρουμε $\dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}} = \dfrac{1}{2}$ παίρναμε $\dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}} = -\dfrac{1}{2}$

(ὁπότε τὰ $\overrightarrow{ΑΒ}$ καὶ $\overrightarrow{ΒΓ}$ θὰ ἦσαν ἀντίρροπα)

πάλι θὰ εἴχαμε καὶ $\dfrac{\overrightarrow{Α'Β'}}{\overrightarrow{Β'Γ'}} = -\dfrac{1}{2}$ ἄρα: $\dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}} = \dfrac{\overrightarrow{Α'Β'}}{\overrightarrow{Β'Γ'}}$

γ) Σὲ ἄλλη τάξι θὰ μάθουμε ὅτι ἡ σχέσις (3) ἀληθεύει καὶ στὴν περίπτωσι ποὺ ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{ΑΒ}}{\overrightarrow{ΒΓ}}$ εἶναι ὁ π ο ι ο σ δ ή π ο τ ε ἀριθμός (σύμμετρος ἢ ἀσύμμετρος).

---

* **Θαλῆς ὁ Μιλήσιος**: Μεγάλος Ἕλλην μαθηματικὸς (640 – 546 π.Χ.). Ἕνας ἀπὸ τοὺς 7 σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος. Ἦταν ὁ ἱδρυτὴς τῆς Ἰωνικῆς σχολῆς τῆς Μιλήτου. Προσέφερε πολλὰ θεωρήματα στὴ Γεωμετρία. Μεγάλη ὑπῆρξε καὶ ἡ συμβολή του στὴν ἀνάπτυξι τῆς ἀστρονομίας καὶ τῆς φυσικῆς).

II. Ἀπὸ τὸ ἴδιο σχῆμα (153) εὔκολα εὑρίσκουμε κι' ἄλλους ἴσους λόγους.

α) Εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{1}{3}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}} = \dfrac{1}{3}$ ἄρα: $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$ (4)

β) Εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{2}{3}$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}} = \dfrac{2}{3}$ ἄρα: $\dfrac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$ (5)

Οἱ σχέσεις (3), (4) καὶ (5) ἐκφράζουν τὸ περίφημο θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ποὺ διατυπώνεται καὶ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο:

Ἂν εὐθεῖες δ_1, δ_2 τέμνωνται ἀπὸ παράλληλες εὐθεῖες ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 στὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Α΄,Β΄,Γ΄ ἀντιστοίχως, τότε ἀληθεύουν οἱ σχέσεις:

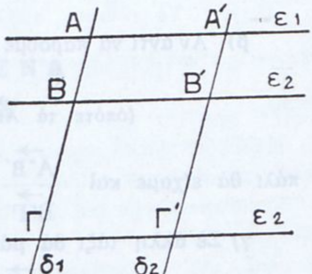
$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}, \quad \frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}} \qquad (A)$$

Ἤ: Δύο ὁποιαδήποτε διανύσματα ποὺ οἱ παράλληλες ἀποκόπτουν ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθείας δ_1 ἔχουν τὸν ἴδιον λόγον μὲ τὰ ἀντίστοιχα διανύσματα, ποὺ οἱ ἴδιες παράλληλες ἀποκόπτουν ἐπὶ τῆς δ_2.

Εἰδικὴ περίπτωσις. Ἂν εἶναι $\delta_1 \| \delta_2$ (σχ. 154) τότε τὰ τετράπλευρα ποὺ σχηματίζονται εἶναι παραλληλόγραμμα. Ἄρα $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{A'\Gamma'}$ ὁπότε πάλι εἶναι

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}, \quad \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}},$$

$$\frac{\overrightarrow{B\Gamma}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{A'\Gamma'}}$$



Σχ. 154

Παρατηρήσεις: 1) Ἐνῶ σὲ μία ἀναλογία μεταξὺ εὐθυγράμμων τμημάτων ἢ ἀριθμῶν, μποροῦμε νὰ ἀντιμεταθέσουμε τοὺς μέσους ἢ ἄκρους ὅρους, στὶς ἀναλογίες (Α) δὲν μποροῦμε νὰ τοὺς ἀντιμεταθέσουμε, διότι δὲν εἶναι συγ/κὰ διανύσματα.* Γι' αὐτὸν τὸν λόγο οἱ ἀναλογίες αὐτὲς εἶναι δύσχρηστες.

* Ἔχουμε ὁρίσει λόγους μόνον συγ/κῶν διανυσμάτων καὶ ὄχι ὁποιωνδήποτε διανυσμάτων τοῦ ἐπιπέδου.

Ἂν ὅμως καταστήσουμε τὶς εὐθεῖες δ_1, δ_2 ἄξονες, τότε σύμφωνα μὲ τὴν § 46 θὰ εἶναι:

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}}, \quad \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}} \quad \text{κ.λ.π.}$$

ὁπότε ἀπὸ τὶς ἀναλογίες (Α) ἔχουμε:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{B\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'\Gamma'}}, \quad \frac{\overline{AB}}{\overline{A\Gamma}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'\Gamma'}}, \quad \frac{\overline{B\Gamma}}{\overline{A\Gamma}} = \frac{\overline{B'\Gamma'}}{\overline{A'\Gamma'}} \qquad (B)$$

2. Καθὼς γνωρίζουμε ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{A\Gamma}}$ εἶναι ἕνας ἀριθμὸς θετικὸς ἢ ἀρνητικὸς ἂν τὰ $\overrightarrow{AB}$ καὶ $\overrightarrow{A\Gamma}$ εἶναι ὁμόρροπα ἢ ἀντίρροπα καὶ ἔχει ὡς ἀπόλυτο τιμὴ τὸν λόγο $\dfrac{AB}{A\Gamma}$

Ἄρα ἀπὸ τὶς ἰσότητες (Α) ἔχουμε:

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}, \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}, \quad \frac{B\Gamma}{A\Gamma} = \frac{B'\Gamma'}{A'\Gamma'}$$

3. Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ στὴν περίπτωσι περισσοτέρων παραλλήλων εὐθειῶν.

§ 110. Ἀντίστροφο θεώρημα τοῦ Θαλῆ

Ἂς εἶναι δ_1, δ_2 δύο εὐθεῖες τοῦ ἐπιπέδου ποὺ τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες ε_1, ε_2 στὰ σημεῖα Α, Β καὶ Α′, Β′ ἀντιστοίχως (σχ.153).

Ἐπὶ τῆς δ_1 σημειώνουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$ καὶ ἐπὶ τῆς δ_2 $\overrightarrow{B'\Gamma'} = 2\overrightarrow{A'B'}$ ὁπότε ἔχουμε: $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}$

Μὲ τὰ ὄργανά μας ἐξακριβώνουμε ὅτι ἡ εὐθεῖα ε_3, ποὺ ὁρίζουν τὰ σημεῖα Γ, Γ′ εἶναι π α ρ ά λ λ η λ η μ ὲ τ ὶ ς ε_1, ε_2.

Τὸ ἴδιο συμβαίνει κι' ἂν ἀντὶ νὰ πάρουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{AB}$ πάρουμε $\overrightarrow{B\Gamma} = -2\overrightarrow{AB}$.

Γενικά: **Ἂν δύο εὐθεῖες δ_1, δ_2 τοῦ ἐπιπέδου, τέμνωνται ἀπὸ τρεῖς εὐθεῖες ε_1, ε_2, ε_3 στὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως καὶ εἶναι $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}$ τότε ἡ ε_3 εἶναι παράλληλος μὲ τὶς ε_1, ε_2**

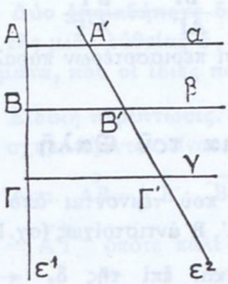
ἢ συμβολικά : $\epsilon_1 || \epsilon_2$ καὶ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} \Rightarrow \epsilon_3 || \epsilon_2 || \epsilon_1$

Παρατήρησις : Ἡ πρότασις αὐτὴ τὴν ὁποίαν θὰ ἀποδείξουμε σὲ ἀνώτερη τάξι, μᾶς δίνει ἕναν ἄλλον τρόπο γιὰ νὰ ἐξακριβώνουμε ἂν οἱ εὐθεῖες εἶναι παράλληλες.

§ 111. Ἐφαρμογὲς

1. Δύο παράλληλες καὶ ἴσου πλάτους ταινίες τοῦ ἐπιπέδου ἀποκόπτουν ἴσα εὐθ. τμήματα ἀπὸ κάθε εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου ποὺ τὶς τέμνει.

α) Ἂν οἱ ταινίες ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ τὰ ζεύγη τῶν παραλλήλων εὐθειῶν (α, β) (β, γ) ἔχουν ἴσα πλάτη, τότε ἂν φέρουμε μίαν εὐθεῖαν ε^1 κάθετο πρὸς αὐτὲς θὰ εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1$ (σχ. 155).



Σχ. 155

β) Ἂς εἶναι ε^2 μία τέμνουσα τῶν παραλλήλων εὐθειῶν. Κατὰ τὸ Θ. τοῦ Θαλῆ θὰ εἶναι

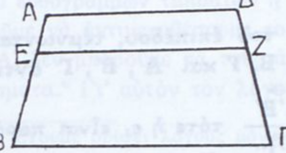
$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}}$$

Ἀλλὰ $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = 1$ ἄρα καὶ $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{B'\Gamma'}} = 1$

$\Longleftrightarrow \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{B'\Gamma'}$ ὁπότε καὶ $A'B' = B'\Gamma'$.

(Νὰ χρησιμοποιήσετε τὶς γραμμὲς τοῦ τετραδίου ὡς παράλληλες καὶ τὴν γραμμὴ τοῦ περιθωρίου ὡς κάθετο πρὸς αὐτὲς γιὰ νὰ ἐπαληθεύσετε τὴν πρότασι).

2. Ἐφαρμογὴ στὸ τραπέζιο



Σχ. 156

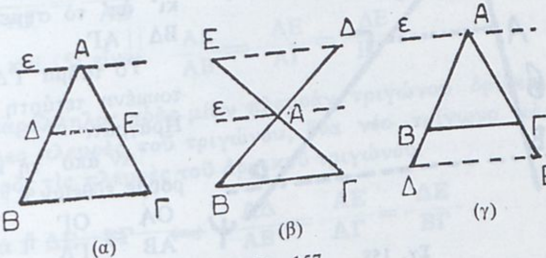
Στὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ, σχ. 156, φέρουμε ΕΖ παράλληλο πρὸς τὶς βάσεις. Σύμφωνα μὲ τὸ Θ. τοῦ Θαλῆ ἔχουμε :

$$\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EB}} = \frac{\overrightarrow{\Delta Z}}{\overrightarrow{Z\Gamma}} \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{\Delta Z}{Z\Gamma}$$

Κάθε παράλληλος πρὸς τὶς βάσεις τραπεζίου χωρίζει τὶς δύο ἄλλες πλευρὲς σὲ τμήματα ποὺ ἔχουν ἴσους ἀντιστοίχους λόγους.

Ἡ πρότασις αὐτὴ ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως.

3. Ἂς εἶναι ΔΕ || ΒΓ στὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 157 α, β, γ).



Σχ. 157

Σύμφωνα μὲ τὸ Θ. τοῦ Θαλῆ (οἱ πλευρὲς ΑΒ, ΑΓ τέμνονται ἀπὸ τὶς τρεῖς παράλληλες ΒΓ, ΔΕ καὶ ε) ἔχουμε:

$$\frac{\overrightarrow{ΑΔ}}{\overrightarrow{ΑΒ}} = \frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{ΑΓ}} \quad (1) \qquad \frac{\overrightarrow{ΑΔ}}{\overrightarrow{ΔΒ}} = \frac{\overrightarrow{ΑΕ}}{\overrightarrow{ΕΓ}} \quad (2)$$

Ἂν δὲ στὶς (1) καὶ (2) ἀντικαταστήσουμε τὰ διανύσματα μὲ τὰ μήκη τους (καὶ λάβουμε τὴν ἴδια μονάδα)

ἔχουμε: $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}, \quad \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ}$

Ὥστε: **Κάθε παράλληλος μὲ μία πλευρὰ τριγώνου ὁρίζει στὶς ἄλλες πλευρὲς ἢ στὶς προεκτάσεις αὐτῶν, τμήματα ἀνάλογα**

$$ΔΕ \parallel ΒΓ \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}, \quad \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \right)$$

4. Τῆς προηγουμένης παραγράφου ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο.

Δηλαδή: $\left(\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ}, \quad \frac{ΑΔ}{ΔΒ} = \frac{ΑΕ}{ΕΓ} \right) \Rightarrow ΔΕ \parallel ΒΓ$

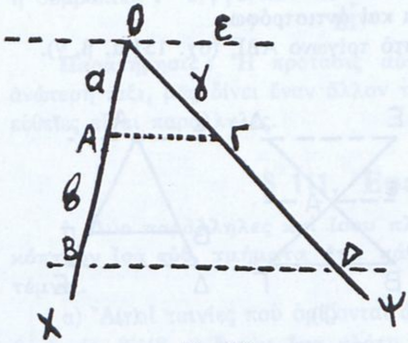
Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι συνέπεια τοῦ ἀντιστρόφου Θ. τοῦ Θαλῆ.

5. **Κατασκευὴ τῆς 4ης ἀναλόγου**

Ἂν τέσσερα τμήματα α, β, γ, δ ἐπαληθεύουν τὴν ἀναλογία $\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ (1) τότε τὸ δ λέγεται τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ.

Ἂν γνωρίζουμε τὰ τμήματα α, β, γ μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε τὸ δ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο.

α) Σχηματίζουμε $\sphericalangle$ xOψ καὶ ἐπὶ μὲν τῆς πλευρᾶς Ox σημειώνουμε τμήματα $OA = \alpha$ καὶ $AB = \beta$, ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς Oψ, $O\Gamma = \gamma$.



Σχ. 158

β) Χαράζουμε τὸ τμῆμα ΑΓ κι' ἀπ' τὸ σημεῖο Β φέρουμε $B\Delta \parallel A\Gamma$.

Τὸ τμῆμα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος δ. Πράγματι·

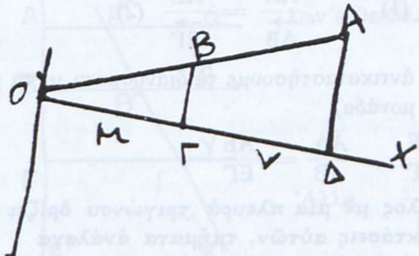
Ἂν ἀπὸ τὴ κορυφὴ Ο φέρουμε εὐθεῖαν $\varepsilon \parallel A\Gamma$ ἔχουμε :

$$\frac{OA}{AB} = \frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta} \text{ ἢ } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\Gamma\Delta} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν σύγκρισι τῶν (1) καὶ (2) προκύπτει ὅτι $\Gamma\Delta = \delta$.

6. Μερισμὸς εὐθ. τμήματος ΟΑ σὲ δύο μέρη ΟΒ καὶ ΒΑ ποὺ νὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο εὐθυγρ. τμημάτων μ, ν

α) Χαράζουμε ἡμιευθεῖαν ΟΧ (σχ. 159) καὶ ἐπ' αὐτῆς σημειώνουμε τμήματα $O\Gamma = \mu$ καὶ $\Gamma\Delta = \nu$.



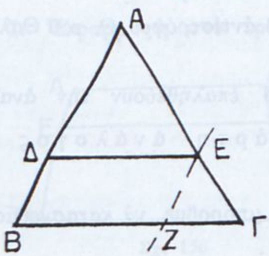
Σχ. 159

β) Χαράζουμε τὸ εὐθ. τμῆμα ΔΑ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖο Γ φέρουμε παράλληλο πρὸς τὴν ΔΑ ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ στὸ σημεῖο Β.

γ) Ἂν ἀπὸ τὸ Ο φέρουμε παράλληλο πρὸς τὴν ΑΔ,

θὰ ἔχουμε $\frac{OB}{BA} = \frac{O\Gamma}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}$ ἄρα $\frac{\mathbf{OB}}{\mathbf{BA}} = \frac{\mu}{\nu}$

7. Διπλὴ ἐφαρμογὴ τοῦ Θ. Θαλῆ στὸ τρίγωνο



Σχ. 160

Ἂς εἶναι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 160) καὶ $\Delta E \parallel B\Gamma$.

α) Εἴδαμε ὅτι $\Delta E \parallel B\Gamma \longleftrightarrow \frac{A\Delta}{AB} = \frac{AE}{A\Gamma}$ (1)

β) Ἂν ἀπὸ τὸ σημεῖο Ε φέρουμε $EZ \parallel AB$ ἔχουμε $\frac{AE}{A\Gamma} = \frac{BZ}{B\Gamma}$ (2)

γ) Ἐπειδὴ $\Delta E \parallel B\Gamma$ καὶ $EZ \parallel B\Delta$ τὸ τετράπλευρο ΒΔΕΖ εἶναι παραλληλόγραμμο.

Ἄρα εἶναι $BZ = \Delta E$ (3)

δ) Ἂν ἀντικαταστήσουμε στὴν (2) τὸ ΒΖ μὲ τὸ ἴσο του ΔΕ ἔχουμε $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$ (4)

ἀλλὰ εἶναι $\frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ (ἰσότης [1]) (5)

Ἀπὸ τὶς (4) καὶ (5) εἶναι $\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$

Κάθε παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου ὁρίζει, μαζὶ μὲ τὶς δύο ἄλλες πλευρὲς τοῦ τριγώνου, ἕνα νέο τρίγωνο μὲ πλευρὲς ἀνάλογες πρὸς τὶς πλευρὲς τοῦ ἀρχικοῦ τριγώνου.

ἢ συμβολικά : $ΔΕ \parallel ΒΓ \Longleftrightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

514) Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ νὰ τὸ χωρίσετε μὲ τὸν γνωστό σας τρόπο, σὲ τρία ἴσα τμήματα. Ἔπειτα νὰ δικαιολογήσετε τὴν ἐργασίαν αὐτήν.

515) Οἱ παράλληλες εὐθεῖες $α \parallel β \parallel γ$ τέμνουν δύο εὐθεῖες $ε_1$, $ε_2$ στὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Α′,Β′,Γ′ ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{2}{5}$ θὰ βρῆτε τοὺς λόγους $\frac{Α'Β'}{Α'Γ'}$ καὶ $\frac{Α'Β'}{Β'Γ'}$

516) Οἱ παράλληλες εὐθεῖες $α \parallel β \parallel γ$ τέμνουν τὶς εὐθεῖες $ε_1$, $ε_2$ στὰ σημεῖα Α,Β,Γ καὶ Α′Β′Γ′ ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι (ΑΒ) = 2 cm, (ΒΓ) = 5 cm, (Α′Β′) = 3 cm νὰ ὑπολογίσετε τὸ (Β′Γ′).

517) Σ' ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι (ΑΒ)=6cm, (ΒΓ)=9cm, (ΑΓ)=12cm. Ἀπὸ ἕνα σημεῖο Δ, (ΑΔ) = 2 cm) τῆς ΑΒ φέρουμε $ΔΕ \parallel ΒΓ$. Νὰ ὑπολογίσετε τοὺς λόγους $\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ καὶ $\frac{ΑΕ}{ΕΓ}$

518) Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε $ΜΝ \parallel ΑΒ$. Νὰ συγκρίνετε τὰ τμήματα ΑΝ καὶ ΝΓ.

519) Νὰ χαράξετε ἕνα εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ ἔπειτα νὰ χωρίσετε σὲ 2 μέρη ποὺ νὰ ἔχουν λόγον $\frac{2}{3}$.

§ 112. Ὁμοθεσία στὸ ἐπίπεδο.

Στὴν α΄ τάξι μάθαμε μερικοὺς τρόπους νὰ ἀπεικονίζουμε τὸ σημειοσύνολο τοῦ ἐπιπέδου στὸν ἑαυτό του. Τέτοιοι τρόποι εἶναι :

α) Ἡ παράλληλη μετατόπισι

β) Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὸ σημεῖο (κέντρο)

γ) Ἡ συμμετρία ὡς πρὸς τὴν εὐθεῖαν (ἄξονα)

δ) Ἡ στροφὴ τοῦ ἐπιπέδου περὶ ἕνα σημεῖον Ο αὐτοῦ. Π.χ. μία συμμετρία, κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ «στέλνει», δηλαδὴ τὸ ἀντιστοιχίζει, στὸ συμμετρικό του Μ΄.

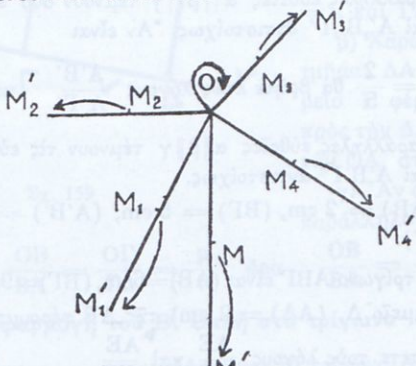
Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε μίαν ἐνδιαφέρουσαν ἀπεικόνισι τοῦ ἐπιπέδου στὸν ἑαυτό του.

Ἂς εἶναι ἕνα σημεῖο Ο τοῦ ἐπιπέδου κι᾽ ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς π.χ. 2. Σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχίζουμε ἕνα σημεῖο Μ΄ τέτοιο, ὥστε νὰ εἶναι

$$\overrightarrow{OM'} = 2\overrightarrow{OM} \qquad (1)$$

(Εἶναι εὔκολο νὰ ὁρίσουμε τὸ Μ΄ ὅταν γνωρίζουμε τὸ Μ καὶ τὴ σχέσι (1). Ἀπὸ τὴν (1) ἐννοοῦμε ὅτι τὸ Μ΄ εὑρίσκεται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας ΟΜ καὶ σὲ ἀπόστασι ΟΜ΄ ἀπὸ τὸ Ο, ἴση μὲ 2 ΟΜ).

Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο ἔχουμε μίαν ἀπεικόνισι τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου στὸν ἑαυτό του.



Σχ. 161

Ἡ ἀπεικόνισις αὐτὴ ὀνομάζεται **ὁμοθεσία.** Τὸ σημεῖον Ο λέγεται **κέντρον τῆς ὁμοθεσίας**, ὁ δὲ ἀριθμὸς 2 **λόγος** τῆς ὁμοθεσίας. Τὸ σημεῖον Μ΄ ποὺ εἶναι εἰκόνα τοῦ σημείου Μ λέγεται **ὁμόλογο** ἢ **ὁμόθετο** τοῦ σημείου Μ.

Τὸ ὁμόθετο τοῦ κέντρου Ο ταυτίζεται μὲ τὸν ἑαυτόν του Ο ≡ Ο΄. Παραμένει δηλαδὴ ἀκίνητο. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) εἶναι φανερὸν ὅτι σὲ κάθε σημεῖο Μ τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ μόνον ἕνα σημεῖο Μ΄.

Ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ α · κάθε σημεῖο Μ΄ εἶναι εἰκόνα ἑνὸς μόνον σημείου Μ ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OM'}$

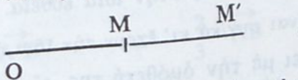
Δηλαδὴ ἡ ὁμοθεσία εἶναι ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνισι.

Γενικά: **Ἂν Ο εἶναι ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ λ ἕνας ρητὸς σχετ. ἀριθμός, τότε ἡ σχέσις $\overrightarrow{OM'} = \lambda\, \overrightarrow{OM}$ ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντη ἀπεικόνισι τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του.**

Ἡ ἀπεικόνισι αὐτὴ λέγεται **ὁμοθεσία** στὸ ἐπίπεδο μὲ κέντρο τὸ Ο καὶ λόγον τὸ **λ**.

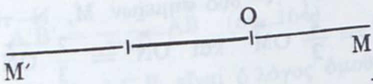
1. Ἂν $\lambda = 1$ εἶναι $\overrightarrow{OM'} = 1\, \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$ ἄρα $M \equiv M'$. Δηλαδή, στὴν περίπτωσι αὐτὴ κάθε ἀρχέτυπο Μ ταυτίζεται μὲ τὴν εἰκόνα του Μ΄ καὶ ἡ ὁμοθεσία λέγεται **ταυτότης**.

2. α) Ἐὰν ὁ λόγος λ εἶναι θετικός, τότε τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ΄ εὑρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου Ο



$$\overrightarrow{OM'} = 2\, \overrightarrow{OM}$$

β) Ἐὰν ὁ λόγος λ εἶναι ἀρνητικός, τότε τὰ Μ, Μ΄ εὑρίσκονται, τὸ Μ ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος καὶ Μ΄ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τοῦ κέντρου Ο



$$\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}$$

3. Ἂν $\lambda = -1$ εἶναι $\overrightarrow{OM'} = -1\, \overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OM}$ ἄρα τὰ Μ καὶ Μ΄ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ Ο. Δηλαδὴ στὴν περίπτωσι αὐτὴ ἡ ὁμοθεσία εἶναι **συμμετρία** ὡς πρὸς κέντρον, τὸ κέντρον ὁμοθεσίας Ο.

4. Ὁ ὁμοθεσία ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\overrightarrow{OM'} = 2\, \overrightarrow{OM}$ «στέλνει» κάθε σημεῖο Μ΄ τοῦ ἐπιπέδου στὴν εἰκόνα τοῦ Μ΄.

Ὁ ὁμοθεσία ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν σχέσιν $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{OM'}$ «σ τ έ λ ν ε ι» κάθε σημεῖο Μ΄ στὸ ἀρχικό του Μ.

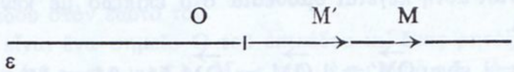
Δηλαδὴ ἡ κάθε μία ἀπὸ αὐτὲς ἐξουδετερώνει τὴν ἄλλη.

Γι' αὐτὸ οἱ **ὁμοθεσίες** μὲ κέντρο Ο καὶ λόγους 2 καὶ $\frac{1}{2}$ καὶ **γενικῶς λ καὶ $\frac{1}{\lambda}$**, $(\lambda \neq 0)$, λέγονται **ἀντίστροφες**.

§ 113. Ὁμόθετον εὐθείας

Τὸν προηγούμενο χρόνο εὑρίσκαμε τὸ συμμετρικὸ μιᾶς εὐθείας ἢ ἑνὸς σχήματος, μὲ τὴν βοήθεια τῶν συμμετρικῶν τῶν διαφόρων σημείων των. Ἔτσι ἀκριβῶς, γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ὁμόθετο μιᾶς εὐθείας, ἑνὸς ἐπιπέδου σχήματος, θὰ βροῦμε τὰ ὁμόθετα διαφόρων σημείων του. Ἂς εἶναι O τὸ κέντρον ὁμοθεσίας, $\lambda = \frac{2}{3}$ ὁ λόγος αὐτῆς :

1. Ὁμόθετον εὐθείας ε, ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρο ὁμοθεσίας O.



Σχ. 161

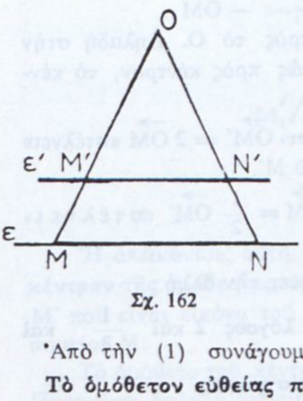
Σύμφωνα μὲ τὴ σχέσι $\overrightarrow{OM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$, κάθε σημεῖον M τῆς εὐθείας **ε** ἔχει τὸ ὁμόθετό του M′ πάνω στὴν ἴδια εὐθεῖα.

(Τὰ $\overrightarrow{OM'}$ καὶ $\overrightarrow{OM}$ εἶναι συγ/κὰ κι᾿ ἔχουν τὴν ἴδια ἀρχή)

Ἄρα ἡ εὐθεῖα ε συμπίπτει μὲ τὴν ὁμόθετή της ε′.

2. Ὁμόθετον εὐθείας O, ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O.

Ἀρκεῖ νὰ βροῦμε τὰ ὁμόθετα M′, N′ δύο σημείων M, N τῆς εὐθείας αὐτῆς. Θὰ εἶναι : $\overrightarrow{OM'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ καὶ $\overrightarrow{ON'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ON}$



Σχ. 162

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ τρίγωνο OM′N′, (σχ. 162) ἔχουμε $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{ON'} - \overrightarrow{OM'}$ (§ 108)

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{M'N'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ON} - \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{M'N'} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}\right)$$

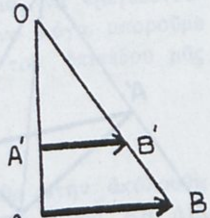
$$\Longleftrightarrow \quad \overrightarrow{M'N'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MN} \qquad (1)$$

Ἀπὸ τὴν (1) συνάγουμε ὅτι :

Τὸ ὁμόθετον εὐθείας ποὺ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ὁμοθεσίας εἶναι εὐθεῖα παράλληλος.

Μὲ ὅμοιο τρόπο εὑρίσκουμε ὅτι: Τὸ ὁμόθετον ἡμιευθείας εἶναι ἡμιευθεῖα τῆς αὐτῆς διευθύνσεως καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἂν ὁ λόγος ὁμοθεσίας λ εἶναι θετικὸς ἢ ἀντιθέτου φορᾶς ἂν ὁ λόγος ὁμοθεσίας λ εἶναι ἀρνητικός.

3. Ὁμόθετον ἐφαρμοστοῦ διανύσματος



Σχ. 163

Ἄς εἶναι Α΄, Β΄ τὰ ὁμόθετα τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως (σχ. 163), στὴν ὁμοθεσία ποὺ ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Ο καὶ λόγον $\lambda = \frac{2}{3}$.

εἶναι $\quad \vec{OA'} = \frac{2}{3}\vec{OA} \quad$ καὶ $\quad \vec{OB'} = \frac{2}{3}\vec{OB}$

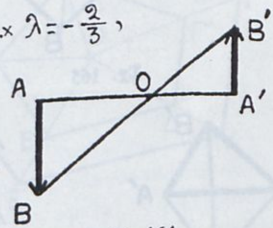
ὁπότε: $\quad \vec{OB'} - \vec{OA'} = \frac{2}{3}\vec{OB} - \frac{2}{3}\vec{OA}$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{OB'} - \vec{OA'} = \frac{2}{3}(\vec{OB} - \vec{OA}) \qquad \text{(ἐπιμερ. ἰδιότης)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \vec{A'B'} = \frac{2}{3}\vec{AB}$$

Ἂν ὁ λόγος ὁμοθεσίας ἦτο ἀρνητικός, π.χ $\lambda = -\frac{2}{3}$, μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε

ὅτι $\quad \vec{A'B'} = -\frac{2}{3}\vec{AB} \quad$ (σχ. 164)



Σχ. 164

Γενικά: Ἂν λ, $\lambda \in P$, εἶναι ὁ λόγος ὁμοθεσίας τότε $\quad \vec{A'B'} = \lambda\,\vec{AB} \qquad (1)$

Τὸ ὁμόθετο ἐφαρμοστοῦ διανύσματος εἶναι ἕνα διάνυσμα συγ/κὸ μὲ λόγον πρὸς αὐτὸ ἴσον μὲ τὸν λόγον ὁμοθεσίας.

Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ πρότασις αὐτὴ ἰσχύει κι' ὅταν ὁ φορεὺς τοῦ διανύσματος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τῆς ὁμοθεσίας.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) ἔχουμε

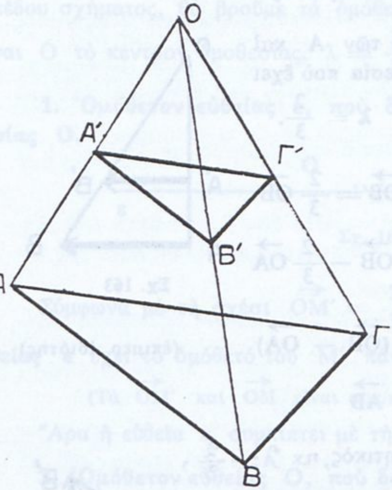
$$\vec{A'B'} = \lambda\,\vec{AB} \Rightarrow A'B' = |\lambda|\,AB \Longleftrightarrow \frac{A'B'}{AB} = |\lambda|$$

Τὸ ὁμόθετο εὐθ. τμήματος ΑΒ εἶναι τμῆμα Α΄Β΄ παράλληλο μὲ λόγον πρὸς αὐτὸ ἴσον μὲ τὴν ἀπόλυτο τιμὴ τοῦ λόγου ὁμοθεσίας.

§ 114. Ὁμόθετα γνωστῶν σχημάτων

1. Ὁμόθετο τριγώνου

Ἄς εἶναι τὸ τρίγ. ΑΒΓ (σχ. 165), Ο τὸ κέντρο ὁμοθεσίας καὶ $\lambda = \frac{1}{2}$ ὁ λόγος αὐτῆς. Τὸ ὁμόθετο μιᾶς κορυφῆς, τῆς Α εἶναι ἕνα σημεῖο Α′ τῆς ἡμιευθείας τῆς ΟΑ τέτοιο, ὥστε



Σχ. 165

$$\frac{OA'}{OA} = |\lambda| = \frac{1}{2}$$

Ἡ παρατήρησις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη κατασκευή.

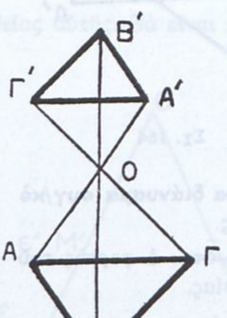
1) Εὑρίσκουμε τὸ μέσον Α′ τοῦ τμήματος ΟΑ.

2) Φέρουμε $A'B' \parallel AB$ καὶ $B'\Gamma' \parallel B\Gamma$.

Σύμφωνα μὲ τὸ Θ. τοῦ Θαλῆ ἔχουμε:

$$A'B' \parallel AB \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{1}{2}$$

$$A'\Gamma' \parallel A\Gamma \Rightarrow \frac{OA'}{OA} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \frac{1}{2}$$



Σχ. 166

Ὥστε οἱ κορυφὲς Α′,Β′,Γ′ εἶναι ὁμόθετες τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἀντιστοίχως.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε κι' ὅταν ὁ λόγος ὁμοθεσίας εἶναι ἀρνητικός. Π.χ. ἂν $\lambda = -\frac{1}{2}$ ἔχουμε τὸ σχ. 166, ὅπου παρατηροῦμε ὅτι τὸ κέντρον τῆς ὁμοθεσίας Ο εὑρίσκεται «μεταξὺ» τῶν ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′.

Παρατηρήσεις

1. Τὸ τρίγωνο ΑΒΓ ἔχει μὲ τὸ ὁμόθετό του Α′Β′Γ′ α) τὶς γωνίες

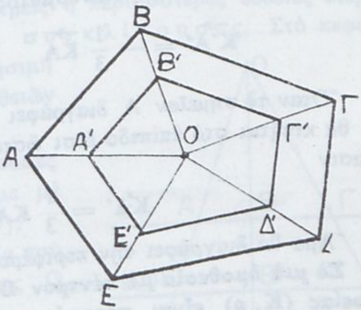
τῶν ὁμολόγων κορυφῶν ἴσες (γιατί;) β) τὶς ὁμόλογες πλευρὲς ἀνάλογες (§ 113). Δηλαδή, μὲ τὴν ὁμοθεσία οἱ μὲν γωνίες τοῦ τριγώνου διατηροῦν τὸ μέγεθός των, οἱ δὲ πλευρὲς «μ ι κ ρ α ί ν ο υ ν» ἂν $|\lambda| < 1$ ἢ «μ ε γ ε θ ύ ν ο ν τ α ι», ἂν $|\lambda| > 1$.

2. Οἱ σχέσεις ποὺ ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν καὶ γωνιῶν δύο ὁμοθέτων τριγώνων εἶναι ἀνεξάρτητες ἀπὸ τὴ θέσι τοῦ κέντρου ὁμοθεσίας. Ἄρα ἂν θέλουμε, μὲ μιὰ ὁμοθεσία, νὰ «μεγεθύνουμε» ἢ νὰ «σμικρύνουμε» ἕνα τρίγωνο, κατὰ δεδομένο λόγο, μποροῦμε νὰ ἐκλέξουμε ὡς κέντρο ὁμοθεσίας ὁποιο σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου μᾶς ἐξυπηρετεῖ.

2. Ὁμόθετο πολυγώνου

Ἀπ' ὅσα ἀναφέραμε προηγουμένως ὁδηγούμεθα στὴν ἀκόλουθη κατασκευὴ τοῦ ὁμοθέτου ἑνὸς πολυγώνου π.χ. τοῦ πενταγώνου ΑΒΓΔΕ, μὲ κέντρον ὁμοθεσίας Ο καὶ λόγον $\lambda = \frac{1}{2}$.

Χαράζουμε τὶς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ καὶ ἐπὶ τῆς ΟΑ ὁρίζουμε τὸ ὁμόθετο τῆς κορυφῆς Α τὸ Α΄ (σχ. 167). Ἔπειτα φέρουμε: Α΄Β΄ ∥ ΑΒ, Β΄Γ΄ ∥ ΒΓ, Γ΄Δ΄ ∥ ΓΔ, Δ΄Ε΄ ∥ ΔΕ,(1) Τὸ πολύγωνο Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ εἶναι τὸ ζητούμενο. Ἂν ἀντὶ $\lambda = \frac{1}{2}$ εἴχαμε π.χ. $\lambda = \frac{3}{5}$ τότε γιὰ νὰ βροῦμε τὸ ὁμόθετο Α΄ τοῦ Α θὰ χωρίζαμε τὸ ΑΟ ἔτσι, ὥστε $\frac{OA'}{OA} = \frac{3}{5}$ (§ 112. 7). Ἂν ἦτο $\lambda < O$ τότε ἐργαζόμαστε ὅπως καὶ στὸ σχ. 166.



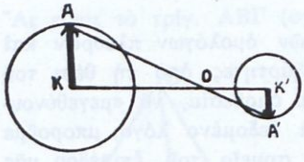
Σχ. 167

Παρατήρησις. Γιὰ νὰ γίνεται πιὸ εὔκολα ἡ κατασκευὴ τοῦ ὁμοθέτου ἐκλέγουμε ὡς κέντρο ὁμοθεσίας μία κορυφὴ τοῦ πολυγώνου ἢ ἕνα ἐσωτερικὸ σημεῖο αὐτοῦ.

(1) καὶ Ε΄Α΄ ∥ ΕΑ

§ 115. Ὁμόθετο περιφερείας

Ἄς εἶναι μία περιφέρεια (K, KA) καὶ ἡ ὁμοθεσία μὲ κέντρο O καὶ



Σχ. 168

λόγο $-\frac{1}{3}$

1) Τὸ ὁμόθετο K′, τοῦ κέντρου K, θὰ εἶναι ἕνα σημεῖο τῆς εὐθείας τοῦ τμ. OK τέτοιο ὥστε: $\overrightarrow{OK'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OK}$

$$\Rightarrow \quad OK' = \frac{1}{3}OK.$$

2) Τὸ ὁμόθετο ἑνὸς σημείου A τῆς περιφερείας θὰ εἶναι ἕνα σημεῖο A τῆς εὐθείας τοῦ τμ. OA τέτοιο ὥστε

$$\overrightarrow{OA'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \quad \Rightarrow \quad OA' = \frac{1}{3}OA$$

3) Τὸ ὁμόθετο τοῦ διανύσματος KA θὰ εἶναι τὸ διάνυσμα

$$\overrightarrow{K'A'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{KA} \quad \Rightarrow \quad K'A' = \frac{1}{3}KA$$

Ὅταν τὸ σημεῖον A διαγράφει τὴν περιφέρεια τότε τὸ ὁμόθετό του A′ θὰ κινῆται στὸ ἐπίπεδο ἔτσι ὥστε διαρκῶς νὰ ἀπέχη ἀπὸ τὸ K′ ἀπόστασιν

$$K'A' = \frac{1}{3}KA \quad (\text{σταθεράν}).$$

Ἄρα θὰ διαγράφει τὴν περιφέρεια (K′, K′A′).

Σὲ μιὰ ὁμοθεσία μὲ κέντρον O καὶ λόγον λ τὸ ὁμόθετο περιφερείας (K, ρ) εἶναι περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ ὁμόθετο K′ τοῦ κέντρου K, καὶ ἀκτῖνα ρ′ ἴση μὲ τὸ γινόμενο τῆς ἀπολύτου τιμῆς τοῦ λ μὲ τὴν ἀκτῖνα ρ. $\rho' = |\lambda| \cdot \rho$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

520) Νὰ γράψετε ἕνα εὐθ. τμῆμα AB μὲ μῆκος 2 cm κι' ἔπειτα νὰ βρῆτε τὸ ὁμόθετό του, μὲ κέντρο ἕνα σημεῖο O (ἐκτὸς τῆς AB) καὶ λόγον −2. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ ὁμοθέτου τοῦ AB.

521) Νὰ σχηματίσετε τὸ ὁμόθετο ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ α) μὲ κέντρο ὁμοθεσίας τὴν κορυφὴ A καὶ λόγον $\frac{1}{2}$

β) Μὲ κέντρο ὁμοθεσίας τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ λόγο $-\dfrac{1}{3}$.

522) Νὰ κατασκευάσετε τὸ ὁμόθετο ἑνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ μὲ κέντρο τὴν τομὴ τῶν διαγωνίων του καὶ λόγο $-\dfrac{1}{2}$.

523) Νὰ κατασκευάσετε τὸ ὁμόθετο μιᾶς περιφερείας μὲ κέντρο ὁμοθεσίας ἕνα σημεῖον Α αὐτῆς καὶ λόγον ἴσον μὲ $\dfrac{1}{2}$.

524) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο ΑΒΓ μὲ μήκη πλευρῶν (ΑΒ) = 3 cm, (ΑΓ) = 4 cm καὶ (ΒΓ) = 5 cm. Νὰ σχηματίσετε τὸ ὁμόθετον Α΄Β΄Γ΄ αὐτοῦ μὲ κέντρον τὸ μέσον τῆς ΒΓ καὶ λόγο $-\dfrac{1}{2}$.

Νὰ ὑπολογίσετε καὶ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄.

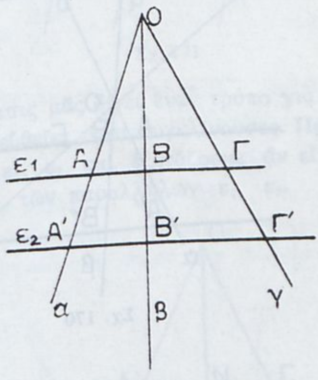
§ 116. Συγκλίνουσες εὐθεῖες

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι: Ὅταν τρεῖς ἢ περισσότερες εὐθεῖες διέρχωνται ἀπὸ τὸ ἴδιο σημεῖον λέγονται σ υ γ κ λ ί ν ο υ σ ε ς. Στὸ κεφάλαιο αὐτὸ θὰ ἐξετάσουμε μία, πολὺ χρήσιμη χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

1. Χαράζουμε τρεῖς συγκλίνουσες εὐθεῖες α, β, γ καὶ τὶς τέμνουμε μὲ δύο παράλληλες ε_1, ε_2 (σχ. 169).

Ἂς θεωρήσουμε τὴν ὁμοθεσία ποὺ ἔχει κέντρο τὸ σημεῖο συγκλίσεως Ο

καὶ λόγον $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OA'}}{\overrightarrow{OA}}$



Σχ. 169

Στὴν ὁμοθεσίαν αὐτήν:

Τὸ σημεῖον Α΄ εἶναι ὁμόθετο τοῦ Α (γιατί;)

Ὁμόθετος τῆς εὐθείας ε_1 εἶναι μ ί α παράλληλος μὲ αὐτὴν ποὺ διέρχεται ἀπὸ τὸ ὁμόθετο Α΄ ἑνὸς σημείου Α αὐτῆς· δηλαδὴ ἡ ε_2.

Ἡ ε_2 ὡς ὁμόθετος τῆς ε_1 θὰ περιέχῃ τὰ ὁμόθετα ὅλων τῶν σημείων, διανυσμάτων, ποὺ εὑρίσκονται στὴν ε_1.

Ἄρα	ὁμόθετο	τοῦ	σημείου	Β	εἶναι	τὸ	Β΄
»	»	»	»	Γ	»	»	Γ΄
»	»	»	διαν/τος	$\overrightarrow{AB}$	»	»	$\overrightarrow{A'B'}$

Ἄρα όμόθετο τοῦ διαν/τος $\overrightarrow{B\Gamma}$ εἶναι τὸ $\overrightarrow{B'\Gamma'}$

καὶ » » » $\overrightarrow{A\Gamma}$ » » $\overrightarrow{A'\Gamma'}$

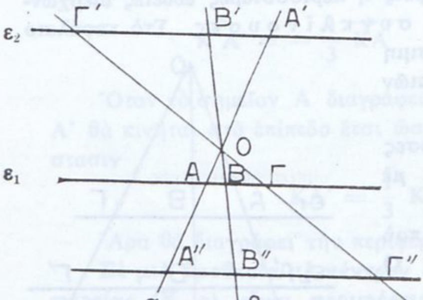
Ὅπως ξέρουμε δέ, γιὰ τὰ ὁμόθετα διανύσματα

$$\overrightarrow{A'B'} \quad \overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{B'\Gamma'}, \quad \overrightarrow{B\Gamma}, \qquad \overrightarrow{A'\Gamma'}, \quad \overrightarrow{A\Gamma}$$

εἶναι $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \lambda, \qquad \dfrac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \lambda, \qquad \dfrac{\overrightarrow{A'\Gamma'}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \lambda$

ἄρα $\dfrac{\overrightarrow{A'B'}}{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{\overrightarrow{B'\Gamma'}}{\overrightarrow{B\Gamma}} = \dfrac{\overrightarrow{A'\Gamma'}}{\overrightarrow{A\Gamma}} = \lambda$

$$\Rightarrow \qquad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = |\lambda|$$



Σχ. 170

2. Ἂν τὸ κέντρον ὁμοθεσίας O εὑρίσκεται στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ταινίας τῶν ε_1, ε_2 (σχ. 170) τότε ἀντὶ τῶν A', B', Γ' θεωροῦμε τὰ συμμετρικά των A'', B'', Γ'', ὡς πρὸς κέντρο συμμετρίας τὸ O. Ἀπὸ τὴν συμμετρίαν αὐτὴν ἔχουμε :

$A'B' = A''B''$, $\qquad B'\Gamma' = B''\Gamma''$,

$A'\Gamma' = A''\Gamma''$ $\qquad$ (1)

Ἀπὸ τὴν ὁμοθεσία ποὺ ἔχει κέντρο τὸ O καὶ λόγον $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{OA''}}{\overrightarrow{OA}}$

ἔχουμε $\dfrac{A''B''}{AB} = \dfrac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \dfrac{A''\Gamma''}{A\Gamma} = |\lambda|$ $\qquad$ (2)

Ἂν ἀντικαταστήσουμε στὶς ἰσότητες (2) τὰ $A''B''$, $B''\Gamma''$, $A''\Gamma''$ μὲ τὰ ἴσα των $A'B'$, $B'\Gamma'$, $A'\Gamma'$ $\quad$ [ἰσότητες (1)]

θὰ ἔχουμε πάλι $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dfrac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = |\lambda|$ $\qquad$ (3)

Ὥστε: **Τρεῖς συγκλίνουσες εὐθεῖες ποὺ τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες ἀποκόπτουν σ' αὐτὲς τμήματα ἀντιστοίχως ἀνάλογα.**

Σημείωσις: Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο εὑρίσκουμε ὅτι ἡ πρότασις ἀληθεύει καὶ γιὰ περισσότερες εὐθεῖες.

Ἀντίστροφα: Μποροῦμε νὰ ἐπαληθεύσουμε* ὅτι: **Ἂν τρεῖς (ἢ περισσότερες) εὐθεῖες ἀποκόπτουν σὲ δύο παράλληλες τμήματα ἀντιστοίχως ἀνάλογα, τότε οἱ εὐθεῖες εἶναι συγκλίνουσες.**

Ἡ πρότασις αὐτὴ δὲν ἰσχύει ὅταν οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων εἶναι ἴσοι μὲ τὴν μονάδα

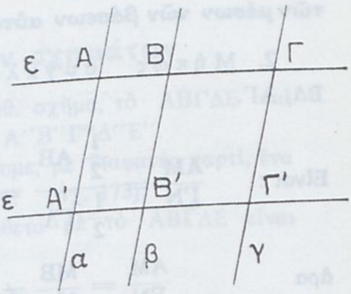
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 1,$$

διότι εἶναι:

$$\frac{A'B'}{AB} = 1 \iff A'B' = AB,$$

$$\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = 1 \iff B'\Gamma' = B\Gamma$$

ὁπότε τὰ τετράπλευρα ΑΑ'Β'Β, ΑΑ'Γ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ οἱ εὐθεῖες α, β, γ εἶναι παράλληλες. (Σχ. 171).



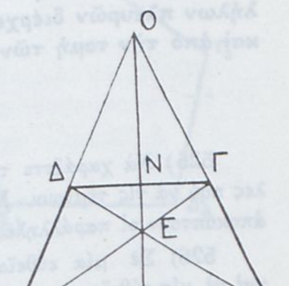
Σχ. 171

Παρατήρησις: Ἡ τελευταία πρότασις μᾶς δίνει ἕναν τρόπο γιὰ νὰ ἐξακριβώσουμε ἂν τρεῖς ἢ περισσότερες εὐθεῖες εἶναι συγκλίνουσες. Πρὸς τοῦτο τὶς τέμνουμε μὲ δύο παράλληλες ε_1, ε_2 καὶ ἐξετάζουμε ἂν εἶναι ἴσοι οἱ λόγοι τῶν ἀντιστοίχων τμημάτων τῶν παραλλήλων ε_1, ε_2.

Ἐφαρμογή

Ἂς εἶναι τὸ τραπέζιο ΑΒΓΔ (σχ. 172). (Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τραπέζιο εἶναι τὸ τετράπλευρο ποὺ ἔχει μόνον δύο ἀπέναντι πλευρὲς παράλληλες).

Ἂς εἶναι δὲ Ο ἡ τομὴ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, αὐτοῦ, καὶ Μ, Ν τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ, ΓΔ.



Σχ. 172

1. Μήπως οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΒΓ, ΜΝ συγκλίνουν;

* Ἡ πρότασις θὰ ἀποδειχθῇ σὲ ἀνώτερη τάξι.

Εἶναι : $\frac{AM}{\Delta N} = \frac{\frac{1}{2} AB}{\frac{1}{2} \Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta\Gamma}$ καὶ $\frac{MB}{N\Gamma} = \frac{\frac{1}{2} AB}{\frac{1}{2} \Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Delta\Gamma}$

ἄρα $\frac{AM}{\Delta N} = \frac{MB}{N\Gamma} \neq 1$ (Ἂν ἦταν $\frac{AB}{\Delta\Gamma} = 1$ τότε $AB = || \Delta\Gamma$ δηλ. τὸ τραπέζιο θὰ ἦταν παραλληλόγραμμο).

δηλ. οἱ εὐθεῖες ΑΔ, ΜΝ, ΒΓ συγκλίνουν.

ὥστε : **Οἱ δύο μὴ παράλληλες πλευρὲς τοῦ τραπεζίου καὶ ἡ εὐθεῖα τῶν μέσων τῶν βάσεων αὐτοῦ συγκλίνουν.**

2. Μήπως συγκλίνουν καὶ οἱ εὐθεῖες ΜΝ, ΒΔ, ΑΓ.

Εἶναι : $\frac{AM}{\Gamma N} = \frac{\frac{1}{2} AB}{\frac{1}{2} \Gamma\Delta} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$, $\frac{MB}{N\Delta} = \frac{\frac{1}{2} AB}{\frac{1}{2} \Delta\Gamma} = \frac{AB}{\Gamma\Delta}$

ἄρα $\frac{AM}{\Gamma N} = \frac{MB}{N\Delta} \neq 1 \quad \left(\frac{AB}{\Gamma\Delta} \neq 1 \right)$

ὥστε : **Ἡ εὐθεῖα τῶν μέσων τῶν βάσεων τραπεζίου καὶ οἱ διαγώνιοι αὐτοῦ συγκλίνουν.**

Τὰ δύο προηγούμενα συμπεράσματα συνοψίζονται στὸν ἀκόλουθο κανόνα : **Σὲ κάθε τραπέζιο ἡ εὐθεῖα ποὺ ἑνώνει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν καὶ ἀπὸ τὴν τομὴ τῶν διαγωνίων του.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

525) Νὰ χαράξετε τρεῖς συγκλίνουσες εὐθεῖες κι' ἔπειτα δύο παράλληλες ποὺ νὰ τὶς τέμνουν. Μὲ μετρήσεις νὰ ἐπαληθεύσετε ὅτι τὰ τμήματα ποὺ ἀποκόπτουν οἱ παράλληλες εἶναι ἀνάλογα.

526) Σὲ μία εὐθεῖα ε_1 νὰ πάρετε $(AB) = 2$ cm, $(B\Gamma) = 3$ cm καὶ σὲ μία εὐθεῖα ε_2 παράλληλο μὲ τὴν ε_1 νὰ πάρετε $(A'B') = 1$ cm καὶ $(B'\Gamma') = 1{,}5$ cm. Νὰ ἐξετάσετε ἂν οἱ εὐθεῖες ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ συγκλίνουν.

527) Ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς Ε τῶν διαγωνίων κυρτοῦ τραπεζίου νὰ φέρετε εὐθ. τμῆμα παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις αὐτοῦ. Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὸ

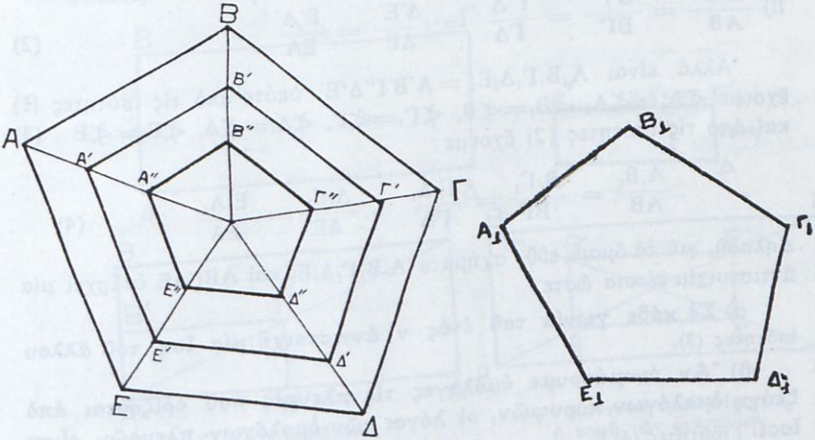
σημεῖον Ε εἶναι μέσον τοῦ τμήματος αὐτοῦ πού περιέχεται μεταξὺ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου.

528) Σ' ἕνα ἰσοσκελὲς τραπέζιο ΑΒΓΔ, (ΑΒ || ΓΔ) εἶναι : (ΑΒ) = 5 cm, (ΔΓ) = 3 cm, (ΒΓ) = (ΑΔ) = 4 cm. Ἂν Μ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἴσων πλευρῶν αὐτοῦ νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν τμημάτων ΜΓ, ΜΔ.

529) Τρεῖς συγκλίνουσες ἡμιευθεῖες Οx, Οψ, Οz τέμνονται ἀπὸ δύο παράλληλες εὐθεῖες $\varepsilon_1 || \varepsilon_2$. Τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως. Ἂν εἶναι (ΑΒ) = 2 cm (ΒΓ) = 3 cm καὶ (Α'Β') = 3 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τοῦ τμήματος Β'Γ'.

§ 117. Ὁμοιότης ἐπιπέδων σχημάτων

1. Κατασκευάζουμε στὸ ἐπίπεδο ἕνα εὐθ. σχῆμα, τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ ἄλλα ὁμόθετα μὲ αὐτό, τὰ Α'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ Α''Β''Γ''Δ''Ε''. Ἔπειτα, στὸ ἴδιο ἐπίπεδο κατασκευάζουμε, μὲ διαφανὲς χαρτί, ἕνα πολύγωνο $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ ἴσο μὲ τὸ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (σχ. 173). Δὲν εἶναι δηλαδὴ τό $Α_1Β_1Γ_1Δ_1Ε_1$ ὁμόθετο μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ εἶναι ὅμως ἴσο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ ὁμόθετα αὐτοῦ καὶ συνεπῶς μὲ κατάλληλη μετακίνησι (παράλληλο μετατόπισι καὶ στροφή) μπορεῖ νὰ γίνῃ ὁμόθετο.



Σχ. 173

Ὅλα τὰ σχήματα τοῦ σχεδ. 173 μᾶς δίνουν τὴν ἐντύπωσι ὅτι εἶναι «ὁ μ ο ι ό μ ο ρ φ α» ἢ ὅτι «μ ο ι ά ζ ο υ ν» μεταξύ των.

Ἡ ἐντύπωσις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὸν ἀκόλουθο ὁρισμό :

«Δύο ἐπίπεδα σχήματα Σ, Σ′ λέγονται ὅμοια ὅταν εἶναι ὁμόθετα, ἢ ὅταν μποροῦν, μὲ κατάλληλη μετακίνησι, νὰ γίνουν ὁμόθετα.

Ὁ λόγος ὁμοθεσίας λέγεται καὶ λόγος ὁμοιότητος ἡ δὲ σχέσις «Τ ὸ σ χ ῆ μ α Σ εἶ ν α ι ὅ μ ο ι ο μ ὲ τ ὸ σ χ ῆ μ α Σ′» γράφεται συμβολικά : $\Sigma \sim \Sigma'$

2. Μάθαμε ὅτι σὲ δύο ὁμόθετα εὐθ. σχήματα

α) οἱ ὁμόλογες γωνίες εἶναι ἴσες καὶ β) οἱ ὁμόλογες πλευρὲς εἶναι ἀνάλογες.

Δηλαδὴ γιὰ τὰ ὁμόθετα εὐθ. σχήματα ΑΒΓΔΕ καὶ Α′Β′Γ′Δ′Ε′ ἰσχύουν οἱ σχέσεις

$$\text{I)}\ \sphericalangle A=\sphericalangle A',\ \sphericalangle B=\sphericalangle B',\ \sphericalangle \Gamma=\sphericalangle \Gamma',\ \sphericalangle \Delta=\sphericalangle \Delta',\ \sphericalangle E=\sphericalangle E' \qquad (1)$$

Οἱ κορυφὲς τῶν ὁμολόγων γωνιῶν λέγονται ὁ μ ό λ ο γ ε ς.

$$\text{II)}\ \frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'E'}{\Delta E}=\frac{E'A'}{EA} \qquad (2)$$

Ἀλλὰ εἶναι $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1 = A'B'\Gamma'\Delta'E'$ ὁπότε ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) ἔχουμε $\sphericalangle A_1=\sphericalangle A,\ \sphericalangle B_1=\sphericalangle B,\ \sphericalangle \Gamma_1=\sphericalangle \Gamma,\ \sphericalangle \Delta_1=\sphericalangle \Delta,\ \sphericalangle E_1=\sphericalangle E$ (3)
καὶ ἀπὸ τὶς ἰσότητες (2) ἔχουμε :

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1\Gamma_1}{B\Gamma}=\frac{\Gamma_1\Delta_1}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta_1E_1}{\Delta E}=\frac{E_1A_1}{EA} \qquad (4)$$

Δηλαδή, γιὰ τὰ ὅμοια εὐθ. σχήματα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1E_1$ καὶ ΑΒΓΔΕ ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία τέτοια ὥστε :

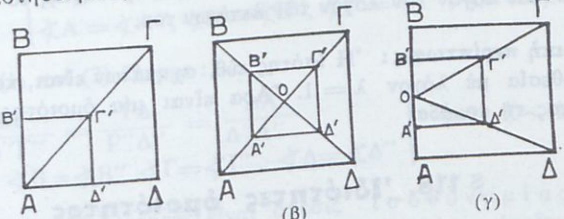
α) **Σὲ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῇ μία ἴση τοῦ ἄλλου** ἰσότητες (3).

β) **Ἂν ὀνομάσουμε ὁμόλογες τὶς πλευρὲς ποὺ ὁρίζονται ἀπὸ ζεύγη ὁμολόγων κορυφῶν, οἱ λόγοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν εἶναι ἴσοι.** [ἰσότητες (4)].

Ἡ ἰδιότης αὐτή, ὅπως θὰ μάθουμε ἀργότερα, εἶναι χ α ρ α κ τ η ρ ι σ τ ι κ ὴ γιὰ τὰ ὅμοια πολύγωνα

Σημείωσις. Στὰ ἑπόμενα, στὶς ἀντίστοιχες κορυφὲς τῶν ὁμοίων εὐθ. σχημάτων θὰ δίνουμε ὀνόματα Α, Α′ Β, Β′ Γ, Γ′ κλπ.

Παραδείγματα : 1) Δύο ὁποιαδήποτε τετράγωνα εὔκολα μποροῦμε νὰ τὰ καταστήσουμε ὁμόθετα· ἄρα εἶναι ὅμοια.



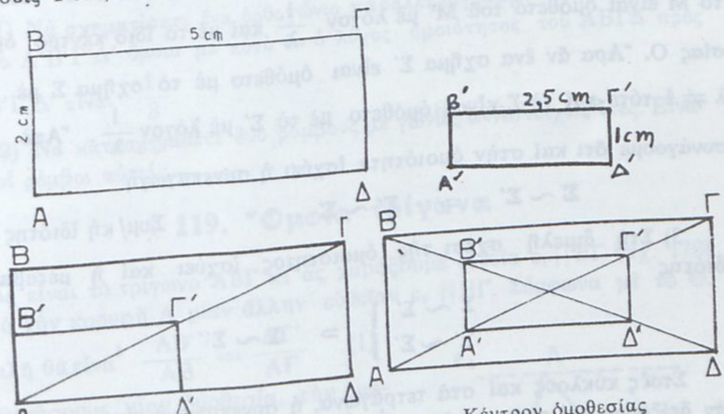
(α) (β) (γ)

Σχ. 174

Στὸ σχ. (α) κέντρο ὁμοθεσίας εἶναι ἡ κορυφὴ Α
» » (β) » » » τομὴ τῶν διαγωνίων
» » (γ) » » » τὸ μέσον Ο τῆς ΑΒ

Λόγος ὁμοιότητος εἶναι ὁ λόγος ὁμοθεσίας ποὺ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν πλευρῶν τῶν δύο τετραγώνων. Εὔκολα διακρίνουμε ὅτι μεταξὺ τῶν ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἰσχύουν οἱ σχέσεις (1) καὶ (2).

2) Ἂς εἶναι δύο ὀρθογώνια παραλ/μα ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ μὲ διαστάσεις 2 cm, 5 cm καὶ 1 cm, 2,5 cm (σχ. 175).



Κέντρον ομοθεσίας ἡ κορυφὴ Α.

Κέντρον ὁμοθεσίας ἡ τομὴ τῶν διαγωνίων.

Σχ. 175

Μεταξὺ τῶν ΑΒΓΔ καὶ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ἰσχύουν οἱ ἰσότητες (1) καὶ (2) ἀφοῦ

1) $\sphericalangle A = \sphericalangle A' = \sphericalangle B = \sphericalangle B' = \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' = \sphericalangle \Delta = \sphericalangle \Delta' = 1$ ὀρθή

2) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma A}{\Gamma' A'} = \dfrac{A\Delta}{A'\Delta'} = \dfrac{5}{2{,}5} = 2$ καὶ εἶναι ὅμοια.

3) Δύο περιφέρειες μὲ κατάλληλη μετακίνησι μποροῦν νὰ γίνουν ὁμόκεντρες ὁπότε θὰ εἶναι ὁμόθετες μὲ κέντρο ὁμοθεσίας τὸ κοινὸν κέντρον των καὶ λόγον τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων του.

Εἰδικὴ περίπτωσις: Ἡ ἰσότης εὐθ. σχημάτων εἶναι, καθὼς εἴδαμε, μία ὁμοθεσία μὲ λόγον $\lambda = 1$. Ἄρα εἶναι μία ὁμοιότης μὲ λόγον ὁμοιότητος τὴ μονάδα.

§ 118. Ἰδιότητες ὁμοιότητος

1) Εἴδαμε ὅτι τὸ ὁμόθετο ἑνὸς σχήματος Σ, μὲ λόγον ὁμοθεσίας $\lambda=1$ ταυτίζεται μὲ τὸν ἑαυτό του. Αὐτὸ σημαίνει ὅτι κάθε σχῆμα Σ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸν ἑαυτό του.

$$\Sigma \sim \Sigma \qquad \text{Ἀνακλαστικὴ ἰδιότης}$$

2) Ἡ γνωστὴ συνεπαγωγὴ

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{\lambda}\overrightarrow{OM'} \qquad (\lambda \neq 0)$$

λέγει ὅτι: Ἂν τὸ M′ εἶναι ὁμόθετο τοῦ M μὲ λόγον $\lambda \neq 0$ τότε καὶ τὸ M εἶναι ὁμόθετο τοῦ M′ μὲ λόγον $\frac{1}{\lambda}$ καὶ μὲ τὸ ἴδιο κέντρο ὁμοθεσίας O. Ἄρα ἂν ἕνα σχῆμα Σ′ εἶναι ὁμόθετο μὲ τὸ σχῆμα Σ μὲ λόγο $\lambda \neq 1$ τότε καὶ τὸ Σ εἶναι ὁμόθετο μὲ τὸ Σ′ μὲ λόγον $\frac{1}{\lambda}$. Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι καὶ στὴν ὁμοιότητα ἰσχύει ἡ συνεπαγωγὴ

$$\Sigma \sim \Sigma' \Rightarrow \Sigma' \sim \Sigma \qquad \text{Συμ/κὴ ἰδιότης}$$

3) Στὴ διμελῆ σχέσι τῆς ὁμοιότητος ἰσχύει καὶ ἡ μεταβατικὴ ἰδιότης

$$\left.\begin{array}{l}\Sigma \sim \Sigma' \\ \Sigma' \sim \Sigma''\end{array}\right\} \Rightarrow \Sigma \sim \Sigma''$$

Στοὺς κύκλους καὶ στὰ τετράγωνα, ἡ συνεπαγωγὴ εἶναι φανερή. Θὰ τὴν δείξουμε καὶ στὴν περίπτωσι τυχόντων ὁμοίων εὐθ. σχημάτων.

Ἂν εἶναι $\Sigma = AB\Gamma\Delta$, $\Sigma' = A'B'\Gamma'\Delta'$, $\Sigma'' = A''B''\Gamma''\Delta''$ τότε ἔχουμε:

$$\Sigma \sim \Sigma' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \dfrac{\Delta A}{\Delta' A'} \\ \sphericalangle A = \sphericalangle A',\ \sphericalangle B = \sphericalangle B',\ \sphericalangle\Gamma = \sphericalangle\Gamma',\ \sphericalangle\Delta = \sphericalangle\Delta'\end{array}\right. \qquad (1)$$

$$\Sigma' \sim \Sigma'' \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \dfrac{A'B'}{A''B''}=\dfrac{B'\Gamma'}{B''\Gamma''}=\dfrac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma''\Delta''}=\dfrac{\Delta'A'}{\Delta''A''} \\ \sphericalangle A'=\sphericalangle A'', \sphericalangle B'=\sphericalangle B'', \sphericalangle\Gamma'=\sphericalangle\Gamma'', \sphericalangle\Delta'=\sphericalangle\Delta'' \end{array}\right. (2)$$

Ἀπὸ τὶς (1) καὶ (2) ἔχουμε :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A''B''}=\dfrac{B\Gamma}{B''\Gamma''}=\dfrac{\Gamma\Delta}{\Gamma''\Delta''}=\dfrac{\Delta A}{\Delta''A''} \\ \sphericalangle A=\sphericalangle A'', \sphericalangle B=\sphericalangle B'' \sphericalangle\Gamma=\sphericalangle\Gamma'', \sphericalangle\Delta=\sphericalangle\Delta'' \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \Sigma \sim \Sigma'' \ (3)$$

Ὥστε ἡ σχέσις ὁμοιότητος εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας καὶ διαμερίζει τὸ σύνολο τῶν ἐπιπέδων σχημάτων σὲ κλάσεις ἰσοδυναμίας. Κάθε κλάσις περιέχει ὅλα τὰ ὅμοια μεταξύ των σχήματα καὶ μόνον αὐτά. Π.χ. ὅλα τὰ τετράγωνα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπειδὴ εἶναι ὅμοια μεταξύ των ἀνήκουν σὲ μιὰ κλάσι ἰσοδυναμίας. Ἐπίσης ὅλες οἱ περιφέρειες, ἐπειδὴ εἶναι σχήματα ὅμοια μεταξύ των ἀνήκουν σὲ μιὰ κλάσι ἰσοδυναμίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

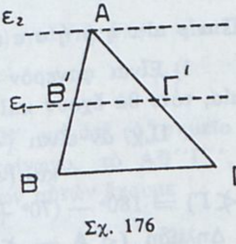
530) Ποιός εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος δύο περιφερειῶν μὲ ἀκτῖνες ρ καὶ ρ΄.

531) Νὰ σχηματίσετε ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ κι' ἔπειτα ἕνα ἄλλο Α΄Β΄Γ΄Δ΄ ὅμοιο μὲ αὐτὸ ἂν ὁ λόγος ὁμοιότητος τοῦ ΑΒΓΔ πρὸς τὸ Α΄Β΄Γ΄Δ΄ εἶναι $\dfrac{1}{3}$

532) Νὰ κατασκευάσετε δύο ρόμβους μὲ γωνίες ἀντιστοίχως ἴσες. Εἶναι ὅμοιοι οἱ ρόμβοι αὐτοί ;

§ 119. Ὅμοια τρίγωνα

Ἂς εἶναι τὸ τρίγωνο ΑΒΓ κι' ἂς χαράξουμε εὐθεῖα $\varepsilon_1 \parallel B\Gamma$ (σχ. 176) καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴ Α μίαν ἄλλην εὐθεῖαν $\varepsilon_2 \parallel B\Gamma$. Σύμφωνα μὲ τὸ Θ. τοῦ Θαλῆ θὰ εἶναι $\dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{A\Gamma'}{A\Gamma}$ (1)



Σχ. 176

Ἂν θεωρήσουμε μίαν ὁμοθεσία, τὴν ὁμοθεσία ποὺ ἔχει κέντρο τὴν κορυφὴ Α καὶ λόγο $\lambda = \dfrac{\overrightarrow{AB'}}{\overrightarrow{AB}}$ Εἶναι φανερὸν ὅτι οἱ κορυφὲς Α,Β΄,Γ΄ εἶναι ὁμόθετα σημεῖα τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ ἀντιστοίχως (Α΄ ⟷ Α, Β΄ ⟷ Β, Γ΄ ⟷ Γ) ὁπότε καὶ τὸ τρίγωνο ΑΒ΄Γ΄ εἶναι ὁμόθετο τοῦ ΑΒΓ ἄρα καὶ ὅμοιο.

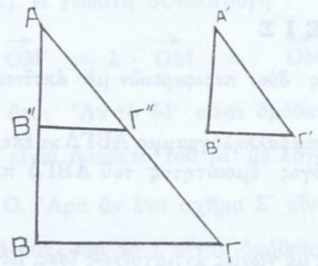
ὥστε: **Μία εὐθεῖα παράλληλη πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου προσδιορίζει μαζὶ μὲ τὶς ἄλλες πλευρὲς τοῦ τριγώνου ἕνα ἄλλο τρίγωνο ὅμοιο μὲ τὸ ἀρχικό.**

§ 120. Γνωρίσματα ὁμοιότητος τριγώνων

Ὅπως στὴν ἰσότητα τριγώνων, ἔτσι καὶ στὴν ὁμοιότητα αὐτῶν ὑπάρχουν προτάσεις-γ ν ω ρ ί σ μ α τ α ποὺ μᾶς διευκολύνουν νὰ διακρίνουμε ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

1ο γνώρισμα: Ἂν δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν τὶς γωνίες των μία μὲ μία ἴσες, τότε εἶναι ὅμοια.

Ἂς εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 177) γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$, $\sphericalangle B = \sphericalangle B'$, $\sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma'$. Ἐπὶ τῆς ΑΒ σημειώνουμε ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄ καὶ ἀπὸ τὸ Β΄΄ φέρουμε Β΄΄Γ΄΄ ∥ ΒΓ



Σχ. 177

α) Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒ΄΄Γ΄΄, ἐπειδὴ Β΄΄Γ΄΄ ∥ ΒΓ, εἶναι ὅμοια.

β) Τὰ τρίγωνα ΑΒ΄΄Γ΄΄ καὶ Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν

1) ΑΒ΄΄ = Α΄Β΄ (ἀπὸ κατασκευή)

2) $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι)

καὶ 3) $\sphericalangle B'' = \sphericalangle B$ διότι:

$\sphericalangle B'' = \sphericalangle B$ (Β΄΄Γ΄΄ ∥ ΒΓ)

$\sphericalangle B = \sphericalangle B'$ (ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι)

ἄρα εἶναι ἴσα, ὁπότε καὶ τὸ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle A = \sphericalangle A' \\ \sphericalangle B = \sphericalangle B' \\ \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma' \end{array}\right\} \Rightarrow \textbf{τρίγ. } \mathbf{AB\Gamma} \sim \textbf{τρίγ. } \mathbf{A'B'\Gamma'}$$

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς

1) Εἶναι φανερὸν ὅτι ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίες ἴσες, μία μὲ μία, τότε θὰ ἔχουν καὶ τὴν τρίτη γωνία ἴση, ἄρα θὰ εἶναι ὅμοια

Π.χ. ἂν εἶναι $(\sphericalangle A) = (\sphericalangle A') = 70^0$

καὶ $(\sphericalangle B) = (\sphericalangle B') = 50^0$ τότε θὰ εἶναι

$(\sphericalangle \Gamma) = 180^o - (70^o + 50^0)$ καὶ $(\sphericalangle \Gamma') = 180^o - (70^o + 50^0)$

Δηλαδὴ $(\sphericalangle \mathbf{A} = \sphericalangle \mathbf{A'}, \ \sphericalangle \mathbf{B} = \sphericalangle \mathbf{B'}) \Rightarrow \sphericalangle \mathbf{\Gamma} = \sphericalangle \mathbf{\Gamma'}$

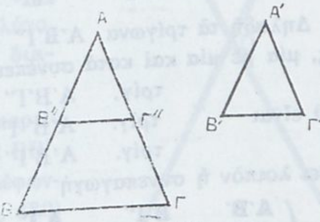
2) Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνια ἢ ἰσοσκελῆ κι' ἔχουν μία ὀξεῖα γωνία ἴση θὰ εἶναι ὅμοια (γιατί ;)

3) Ὅλα τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα εἶναι ὅμοια μεταξύ των (γιατί ;) Μάλιστα στὴν περίπτωσι αὐτὴ μποροῦμε ν' ἀντιστοιχίσουμε μ' ὁποιοδήποτε τρόπο τὶς κορυφὲς τῶν ὁμοίων τριγώνων.

2ο γνώρισμα. Δύο τρίγωνα ποὺ ἔχουν δύο πλευρὲς ἀνάλογες καὶ τὴν γωνίαν αὐτῶν ἴση εἶναι ὅμοια.

Ἂς εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ στὰ ὁποῖα εἶναι

$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ καὶ $\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ (σχ. 178).



Σχ. 178

Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ σημειώνουμε ἀντιστοίχως $AB'' = A'B'$ καὶ $A\Gamma'' = A'\Gamma'$.

1) Ἐπειδὴ $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}$ καὶ $AB'' = A'B'$ καὶ $A\Gamma'' = A'\Gamma'$ θὰ εἶναι καὶ $\frac{AB''}{AB} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma}$ (1)

ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴ καὶ τὸ ἀντίστροφο θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ἐννοοῦμε ὅτι $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$. Ἄρα τὸ τρίγωνο ΑΒ΄΄Γ΄΄ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγωνο ΑΒΓ.

2) Τὰ τρίγωνα Α΄Β΄Γ΄ καὶ ΑΒ΄΄Γ΄΄ ἔχουν

α) $\sphericalangle A' = \sphericalangle A$ ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι

β) $\sphericalangle A'B' = AB''$ » » κατασκευὴ

γ) $\sphericalangle A'\Gamma' = A\Gamma''$ » » »

ἄρα εἶναι ἴσα. Ὁπότε τὸ τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ εἶναι ὅμοιο μὲ τὸ τρίγ. ΑΒΓ

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle \mathbf{A} = \sphericalangle \mathbf{A'} \\ \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{A'B'}} = \frac{\mathbf{A\Gamma}}{\mathbf{A'\Gamma'}} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{τρίγ. } \mathbf{AB\Gamma} \sim \text{τρίγ. } \mathbf{A'B'\Gamma'}$$

3ο γνώρισμα. Ἂν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς πλευρὰς ἀναλόγους εἶναι ὅμοια.

Ἂς εἶναι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 178) γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} \quad (1)$$

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ σημειώνουμε $AB'' = A'B'$ κι' ἀπ' τὸ σημεῖο Β΄΄ φέρουμε $B''\Gamma'' \parallel B\Gamma$. Σχηματίστηκε ἔτσι ἕνα τρίγωνο, τὸ ΑΒ΄΄Γ΄΄, ὅμοιο μὲ τὸ ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχουμε

$$\frac{AB''}{AB} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \quad (2)$$

Ἂν δὲ στὶς σχέσεις αὐτὲς ἀντικαταστήσουμε τὸ AB'' μὲ τὸ ἴσο του $A'B'$ ἔχουμε :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma''}{A\Gamma} \qquad (3)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) καὶ (3) ἔχουμε

$$\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{B''\Gamma''}{B\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{A''\Gamma''}{A\Gamma}$$

ἄρα $\quad B'\Gamma' = B''\Gamma'' \quad$ καὶ $\quad A'\Gamma' = A''\Gamma''$

Δηλαδὴ τὰ τρίγωνα $A'B'\Gamma'$ καὶ $AB''\Gamma''$ ἔχουν τὶς τρεῖς πλευρὲς ἴσες, μία μὲ μία καὶ κατὰ συνέπειαν εἶναι ἴσα.

τρίγ. $A'B'\Gamma' =$ τρίγ. $A'B''\Gamma''$

ἀλλὰ εἶναι τρίγ. $A'B''\Gamma'' \sim AB\Gamma$

ἄρα τρίγ. $A'B'\Gamma' \sim AB\Gamma$

ἰσχύει λοιπὸν ἡ συνεπαγωγὴ

$$\left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A'\Gamma'}{A\Gamma}\right) \Rightarrow \text{τρίγ. } AB\Gamma \sim A'B'\Gamma'$$

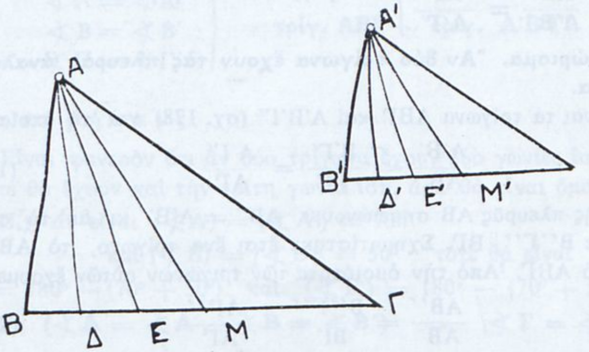
Παρατήρησις

Μὲ τὴν βοήθεια τῶν τριῶν προηγουμένων γνωρισμάτων εὔκολα ἀποδεικνύουμε ὅτι :

Ἂν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια ὁ λόγος δύο ὁμολόγων ὑψῶν, δύο ὁμολόγων διαμέσων, δύο ὁμολόγων διχοτόμων, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον ὁμοιότητος

π. χ. στὰ ὅμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ τοῦ σχ. 179 εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{AM}{A'M'}$$



Σχ. 179

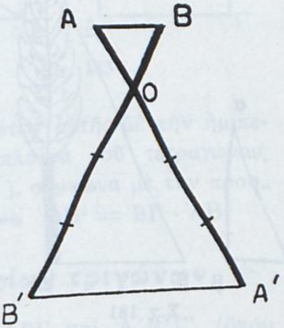
ὅπου ΑΔ, Α΄Δ΄ ὁμόλογα ὕψη
ΑΕ, Α΄Ε΄ ὁμόλογοι διχοτόμοι
ΑΜ, Α΄Μ΄ » διάμεσοι

Ἐ φ α ρ μ ο γ ὲ ς

1. Μεγέθυνσι ἢ σμίκρυνσι σχεδίου

Γιὰ νὰ μεγεθύνουμε ὅλες τὶς διαστάσεις ἑνὸς σχεδίου, μὲ τὸν ἴδιο λόγο, χρησιμοποιοῦμε τὸν **ἀναλογικὸ διαβήτη**.

Τοῦτο εἶναι ἕνα ὄργανο ποὺ ἀπαρτίζεται ἀπὸ δύο ἴσα στελέχη ΑΑ΄ **καὶ** ΒΒ΄. Τὰ στελέχη αὐτὰ μποροῦν νὰ στρέφωνται γύρω ἀπὸ ἕναν ἄξονα Ο (σχ. 180) μεταθετό, μέσα σὲ ἐγκοπές, ἔτσι ὥστε τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΒ νὰ παραμένουν ἴσα.



Σχ. 180 .

Γιὰ τὴ μεγένθυσι ἑνὸς σχεδίου κατὰ λόγον π.χ. $\lambda = \frac{3}{1}$ ἐργαζόμαστε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο :

Ρυθμίζουμε τὸ διαβήτη ἔτσι ὥστε νὰ εἶναι $\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{1}{3}$

τότε ὁποιαδήποτε γωνία κι' ἂν σχηματίζουν τὰ στελέχη, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΑ΄Β΄ θὰ εἶναι ὅμοια (γιατί;) μὲ λόγο $\frac{OA'}{OA} = \frac{3}{1}$

ἄρα θὰ εἶναι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{3}{1}$

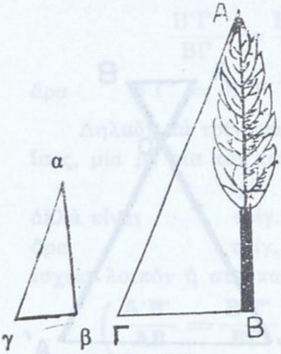
Ἂν ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ σχέδιο ξεσηκώσουμε μὲ τὸ ἄνοιγμα ΑΒ τοῦ διαβήτη ἕνα τμῆμα τότε τὸ Α΄Β΄ θὰ εἶναι τὸ τριπλάσιό του.

Ἂν θέλουμε νὰ σμικρύνουμε ἕνα σχέδιο κατὰ λόγο $\frac{1}{3}$ τότε θὰ ξεσηκώσουμε τὶς διαστάσεις ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ σχέδιο μὲ τὸ ἄνοιγμα Α΄Β΄ ὁπότε τὸ ΑΒ θὰ μᾶς δείχνει τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ Α΄Β΄

Ἄλλο ὄργανο ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μεγεθύνουμε ἕνα σχέδιο εἶναι ὁ **παντογράφος**.

2. Ὑπολογισμὸς τοῦ ὕψους χ ἑνὸς δένδρου ἀπὸ τὴ σκιά του

Στὸ ἔδαφος, (ποὺ πρέπει νὰ εἶναι ὁριζόντιο) τοποθετοῦμε κατακόρυφα μία ράβδο αβ μήκους π.χ. 1,20 m. Μετροῦμε τὴ σκιὰ τοῦ δένδρου καὶ τῆς ράβδου (κατὰ τὴν ἴδια στιγμή). Ἂς εἶναι (ΒΓ)=2 m, (βγ) =0,4 m.



Σ.χ 181

Παρατηροῦμε ὅτι: Τὰ νοητὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ αβγ εἶναι **ὅμοια.** (Εἶναι ὀρθογώνια κι' ἔχουν ∢α = ∢Α ἐπειδὴ οἱ ἡλιακὲς ἀκτῖνες, μὲ μεγάλη προσέγγισι, εἶναι παράλληλες). Ἄρα: οἱ ἀντίστοιχες πλευρὲς θὰ εἶναι **ἀνάλογες**, ὁπότε: $\frac{AB}{\alpha\beta} = \frac{B\Gamma}{\beta\gamma}$

ἢ $\frac{\chi}{1,20} = \frac{2}{0,4}$

$\chi \cdot 0,4 = 2 \cdot 1,20 \iff \chi = \frac{2 \cdot 1,2}{0,4}$

$\iff \chi = 6$

Ὥστε τὸ ὕψος τοῦ δένδρου εἶναι 6 m. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ἐργαζόμαστε γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ ὕψους ἑνὸς στύλου κλπ.

3. Ἐφαρμογὴ στὸ ὀρθογ. τρίγωνο. Στὸ ὀρθογώνιο τρίγ. ΑΒΓ (σχ. 182) φέρουμε τὸ ὕψος ΑΔ πρὸς τὴν ὑποτείνουσα ΒΓ. Τὰ ὀρθογ. τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΓ ἔχουν ∢Β = ∢A_2

(Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγ. ΑΒΓ ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ∢Β εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ∢Γ.)

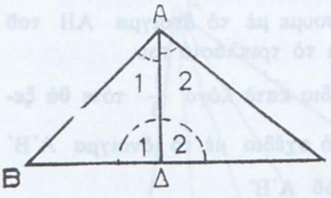
Ἀπὸ τὸ ὀρθογ. τρίγ. ΑΔΓ ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ∢A_2 εἶναι συμπληρωματικὴ τῆς ∢Γ

Οἱ γωνίες Β, καὶ A_2 εἶναι ἴσες ὡς συμπληρώματα τῆς αὐτῆς γωνίας Γ).

Ἄρα τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα ἔχουμε:

$$\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{B\Delta}{A\Delta} \iff \mathbf{A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma}$$



Σχ. 182

Δηλαδή: **Τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσα ὀρθογ. τριγώνου εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζει τοῦτο τὴν ὑποτείνουσα.**

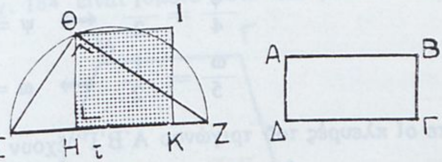
4. Νὰ κατασκευασθῇ τετράγωνο ἰσεμβαδικὸ μ' ἕνα δεδομένο ὀρθογώνιο ΑΒΓΔ.

Ἡ προηγουμένη ἰδιότης τοῦ ὕψους ὀρθ. τριγώνου μᾶς ὁδηγεῖ στὴν ἀκόλουθη κατασκευή.

Ἄς εἶναι ΑΒΓΔ τὸ γνωστὸ ὀρθογώνιο.

1) Χαράζουμε εὐθ. τμῆμα τ ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διαδ. πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου (σχ. 183).

2) Μὲ διάμετρο $ΕΖ = τ$ γράφουμε ἡμιπεριφέρεια.



$ΕΗ = ΒΓ$
$ΗΖ = ΑΒ$

Σχ. 183

3) Στὸ σημεῖο Η, ὅπου $ΕΗ = ΓΒ$, ὑψώνουμε κάθετο πρὸς τὴν ΕΖ. Ἄς εἶναι Θ ἡ τομὴ τῆς καθέτου αὐτῆς μὲ τὴν ἡμιπεριφέρεια. Τὸ τμῆμα ΗΘ εἶναι ἡ ζητουμένη πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

Πράγματι· στὸ ὀρθογ. τρίγ. ΕΘΖ ($\sphericalangle Θ =$ ὀρθή), σύμφωνα μὲ τὴν προηγουμένη ἰδιότητα, εἶναι : $ΘΗ^2 = ΕΗ \cdot ΗΖ \iff ΘΗ^2 = ΒΓ \cdot ΑΒ$

§ 121. Λόγος περιμέτρων ὁμοίων τριγώνων

Καθὼς εἴδαμε, σὲ δύο ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ (ὅπου $Α' \longleftrightarrow Α,\quad Β' \longleftrightarrow Β,\quad Γ' \longleftrightarrow Γ$) εἶναι :

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Α'Γ'}{ΑΓ} = λ \quad (1) \qquad (λ = \text{ὁ λόγος ὁμοιότητος})$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (1) σύμφωνα μὲ τὴν γνωστὴ ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων (§ 47. 2) ἔχουμε:

$$\frac{Α'Β'}{ΑΒ} = \frac{Β'Γ'}{ΒΓ} = \frac{Α'Γ'}{ΑΓ} = \frac{Α'Β' + Β'Γ' + Α'Γ'}{ΑΒ + ΒΓ + ΑΓ} = λ$$

Δηλαδή : **Ὁ λόγος τῶν περιμέτρων δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγο τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν.**

Ἐφαρμογή. Ὁ λόγος τῆς περιμέτρου ἑνὸς δεδομένου τριγώνου ΑΒΓ πρὸς τὴν περίμετρο ἑνὸς ἄλλου Α΄Β΄Γ΄ ὁμοίου μὲ αὐτό, εἶναι 2. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη x, ψ, ω τῶν πλευρῶν τοῦ τριγ. Α΄Β΄Γ΄ ἂν τὰ ἀντίστοιχα μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒΓ εἶναι 3 cm, 4 cm, 5 cm.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια θὰ ἔχουμε :

$$\frac{x}{3} = \frac{ψ}{4} = \frac{ω}{5}$$

Σύμφωνα μὲ γνωστὴ ἰδιότητατῶν ἀναλογιῶν (ἰδιότης τῶν ἴσων λόγων § 47. 2) θὰ εἶναι :

$$\frac{x}{3} = \frac{ψ}{4} = \frac{ω}{5} = \frac{x + ψ + ω}{3 + 4 + 5} = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὶς ἰσότητες (2) ἔχουμε

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

$$\frac{\psi}{4} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \psi = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{\omega}{5} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \omega = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

ὥστε οἱ πλευρὲς τοῦ τριγώνου Α΄Β΄Γ΄ ἔχουν μήκη 1,5 cm, 2 cm, 2,5 cm.

§ 122. Λόγος ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων

Στὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = \frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{A\Delta}) \qquad (\mathrm{A\Delta}=\text{ὕψος πρὸς τὴν πλευρὰν } \mathrm{B\Gamma})$$

$$(\mathrm{A'B'\Gamma'}) = \frac{1}{2}(\mathrm{B'\Gamma'})\cdot(\mathrm{A'\Delta'}) \qquad (\mathrm{A'\Delta'}=\text{ὕψος πρὸς τὴν πλευρὰν } \mathrm{B'\Gamma'})$$

$$\text{Ἄρα} \quad \frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{B\Gamma})\cdot(\mathrm{A\Delta})}{\frac{1}{2}(\mathrm{B'\Gamma'})\cdot(\mathrm{A'\Delta'})} = \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{B'\Gamma'})}\cdot\frac{(\mathrm{A\Delta})}{(\mathrm{A'\Delta'})}$$

$$\text{Εἶναι ὅμως} \quad \frac{(\mathrm{B\Gamma})}{(\mathrm{B'\Gamma'})} = \frac{(\mathrm{A\Delta})}{(\mathrm{A'\Delta'})} = \lambda \qquad (\lambda = \text{λόγος ὁμοιότητος})$$

$$\text{ἄρα} \quad \frac{(\mathrm{AB\Gamma})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'})} = \lambda\cdot\lambda = \lambda^2$$

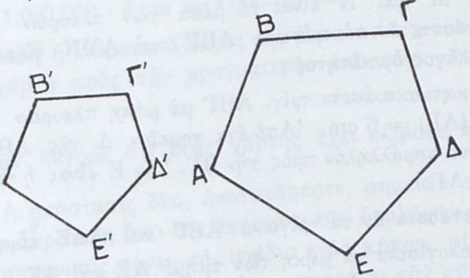
ὥστε: **Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ λόγου τῶν ὁμολόγων πλευρῶν δηλαδὴ μὲ τὸ τετράγωνο τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητος.**

§ 123. Γνώρισμα ὁμοιότητος πολυγώνων

Εἴδαμε ὅτι δύο ὀρθογώνια, μολονότι ἔχουν ὅλες τὶς γωνίες ἀντιστοίχως ἴσες (ὡς ὀρθές), δὲν εἶναι πάντοτε ὅμοια. Ἐπίσης δύο ρόμβοι, μολονότι ἔχουν τὶς πλευρὲς ἀνάλογες (ὡς ἴσες), δὲν εἶναι πάντοτε ὅμοιοι. Γιὰ νὰ εἶναι ὅμοιοι, πρέπει ἐπὶ πλέον κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς νὰ ἀντιστοιχίζεται μὲ μίαν ἴσην μὲ αὐτὴν στὸν ἄλλο ρόμβο. Γενικά· τὰ γνωρίσματα ὁμοιότητος τῶν τριγώνων δὲν ἰσχύουν καὶ στὴν περίπτωσι τῶν πολυγώνων, μὲ περισσότερες ἀπὸ τρεῖς πλευρές.

Δύο πολύγωνα θὰ εἶναι ὅμοια τότε καὶ μόνον τότε, ὅταν ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία τέτοια, ὥστε σὲ κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ν' ἀντιστοιχῇ μία ἴση τοῦ ἄλλου καὶ οἱ λόγοι τῶν ὁμολόγων πλευρῶν νὰ εἶναι ἴσοι.

Π.χ. τὰ πολύγωνα τοῦ σχ. 184 εἶναι ὅμοια τότε καὶ μόνον τότε,



Σχ. 184

ὅταν ὑπάρχη μία ἀντιστοιχία, π.χ. ἡ ἀντιστοιχία:

$$A \longleftrightarrow A', \quad B \longleftrightarrow B', \quad \Gamma \longleftrightarrow \Gamma', \quad \Delta \longleftrightarrow \Delta', \quad E \longleftrightarrow E'$$

τέτοια, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\sphericalangle A = \sphericalangle A', \quad \sphericalangle B = \sphericalangle B', \quad \sphericalangle \Gamma = \sphericalangle \Gamma', \quad \sphericalangle \Delta = \sphericalangle \Delta', \quad \sphericalangle E = \sphericalangle E'$$

$$\text{καὶ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$$

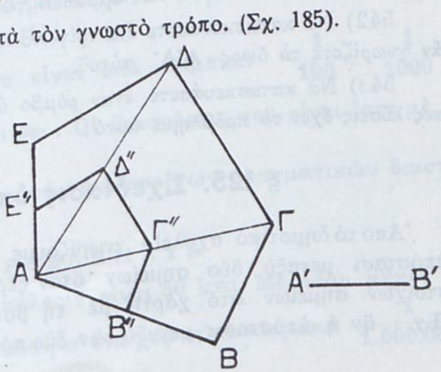
Χωρὶς δυσκολία εὑρίσκουμε ὅτι οἱ κανόνες τῶν § 121 καὶ § 122 ἰσχύουν καὶ στὴν περίπτωσι τῶν ὁμοίων πολυγώνων.

§ **124. Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα πολύγωνο ὅμοιο μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ ποὺ νὰ ἔχῃ ὡς ὁμόλογο, πρὸς τὴν πλευρὰ ΑΒ, ἕνα δεδομένο κατὰ θέσιν καὶ μέγεθος, εὐθ. τμῆμα Α′Β′** (σχ. 185).

Χρησιμοποιοῦμε τὴν κορυφὴ Α τοῦ ΑΒΓΔΕ ὡς κέντρον ὁμοθεσίας μὲ λόγον $\frac{A'B'}{AB} = \lambda$ καὶ κατασκευάζουμε τὸ ὁμόθετο τοῦ ΑΒΓΔΕ τὸ ΑΒ′′Γ′′Δ′′Ε′′, κατὰ τὸν γνωστὸ τρόπο. (Σχ. 185).

Ἀποτυπώνουμε στὸ διαφανὲς χαρτὶ τὸ ΑΒ′′Γ′′Δ′′Ε′′ καὶ τὸ μετακινοῦμε στὸ ἐπίπεδο ὥσπου ἡ πλευρὰ ΑΒ′′ νὰ ἐφαρμόσῃ στὴν ὁμόλογό της Α′Β′.

Ἔτσι θὰ ἔχουμε σχηματίσει ἕνα πολύγωνο ὅμοιο μὲ τὸ ΑΒΓΔΕ καὶ μὲ ὁμόλογό πλευρὰ τῆς ΑΒ τὴν σταθερὴ καὶ στὴ θέση καὶ στὸ μέγεθος πλευρὰ Α′Β′.



Σχ. 185

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

533) Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν καθέτους πλευρὰς μὲ μήκη 3 cm, 4 cm καὶ 12 cm, 16 cm ἀντιστοίχως. Εἶναι ὅμοια ;

534) Ἂν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τρίγ. ΑΒΓ νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΜΝ εἶναι ὅμοια. Ἂν ναὶ ποῖος εἶναι ὁ λόγος ὁμοιότητος ;

535) Νὰ κατασκευάσετε τρίγ. ΑΒΓ μὲ μήκη πλευρῶν (ΑΒ) = 4 cm (ΒΓ) = 5 cm (ΑΓ) = 6 cm. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Δ τῆς ΑΒ ὅπου (ΑΔ) = 3 cm, νὰ φέρετε παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἂν Ε εἶναι ἡ τομὴ τῆς παραλλήλου μὲ τὴν ΑΓ.

α) Νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια.

β) Νὰ ὑπολογίσετε τὰ μήκη τῶν τμημ. ΑΕ καὶ ΔΕ.

γ) » » τὸν λόγο τῶν ἐμβαδῶν τῶν ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ.

536) Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν ἐγ/νων κύκλων σὲ δύο ὅμοια τρίγωνα μὲ λόγον ὁμοιότητος λ.

537) Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην. Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ὅμοια.

538) Δύο ὀρθογ. τρίγωνα ἔχουν μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην. Νὰ ἐξετάσετε ἂν εἶναι ὅμοια.

539) Ἂν Μ, Ν, Ρ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγ. ΑΒΓ νὰ ἐξετάσετε ἂν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΜΝΡ εἶναι ὅμοια. Ποῖος ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

540) Ἂν ΑΔ εἶναι τὸ πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἐξετάσετε αὐτὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ ἂν εἶναι ὅμοια. Τὸ αὐτὸ γιὰ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ.

541) Ἂν Μ, Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ νὰ βρῆτε τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΜΝ.

542) Νὰ κατασκευάσετε ἕνα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ ὅμοιο μὲ δεδομένο ΑΒΓ ἂν γνωρίζετε τὸ ὕψος Α΄Δ΄ αὐτοῦ.

543) Νὰ κατασκευάσετε ἕναν ρόμβο ὅμοιον μὲ δεδομένον ρόμβο. Πόσες λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα αὐτό ;

§ 125. Σχεδίασις ὑπὸ κλίμακα

Ἀπὸ τὸ δημοτικὸ σχολεῖο γνωρίζουμε νὰ εὑρίσκουμε τὴν πραγματικὴ ἀπόστασι μεταξὺ δύο σημείων ὅταν ξέρουμε τὴν ἀπόστασι τῶν ἀντιστοίχων σημείων στὸ χάρτη μὲ τὴ βοήθεια τῆς «κλίμακος» αὐτοῦ. Π.χ. : ἂν ἡ ἀπόστασις μεταξὺ τῶν δύο πόλεων, ἐπάνω στὸ χάρτη, εἶναι

4 cm καὶ ἡ κλίμακα εἶναι $\frac{1}{1.000.000}$ πολλαπλασιάζουμε τὰ 4 cm μὲ τὸν παρονομαστὴ τῆς κλίμακος

$$1.000.000 \cdot 4 \text{ cm} = 4.000.000 \text{ cm} = 40 \text{ km}.$$

Εἶναι δηλαδὴ ἡ κλίμακα ὁ λόγος τῆς ἀποστάσεως, δύο ὁποιωνδήποτε, σημείων τοῦ χάρτη πρὸς τὴν πραγματικὴν ἀπόστασι τῶν ὁμολόγων σημείων αὐτῶν.

Ἔτσι ὅταν λέγομε ὅτι ἕνας χάρτης ἔχει κλίμακα π. χ. $\frac{1}{100.000}$ ἐννοοῦμε ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο, ὁποιωνδήποτε, σημείων τοῦ χάρτη εἶναι 100.000 φορὲς μικρότερη ἀπὸ τὴν ἀπόστασι τῶν ὁμολόγων σημείων αὐτῶν.

Ὅταν ὁ μηχανικὸς κάνει τὸ σχέδιο ἑνὸς κήπου, οἰκοπέδου, χωραφιοῦ ἢ σπιτιοῦ πάνω σ' ἕνα χαρτί, δὲν παριστάνει τὸν κῆπο κλπ. στὸ φυσικό του μέγεθος, ἀλλὰ πολὺ μικρότερο, «ὑπὸ κλίμακα».

Παράδειγμα : Ἂν θέλουμε νὰ παραστήσουμε στὸ χαρτὶ τὸ σχέδιο ἑνὸς κήπου, ποὺ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου μὲ διαστάσεις 6 m καὶ 8 m ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$

α) διαιροῦμε τὶς διαστάσεις διὰ 100

$$\frac{6 \text{ m}}{100} = \frac{600 \text{ cm}}{100} = 6 \text{ cm}$$

καὶ

$$\frac{8 \text{ m}}{100} = \frac{800 \text{ cm}}{100} = 8 \text{ cm}$$

β) κατασκευάζουμε ὀρθογώνιο μὲ διαστάσεις 6 cm καὶ 8 cm.

Ἔτσι ἔχουμε σχεδιάσει τὸ σχέδιο τοῦ κήπου ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$.

Δηλαδὴ μικρύναμε τὸ πραγματικὸ μέγεθος κάθε πλευρᾶς 100 φορὲς καὶ αὐτὸ ἐσχεδιάσαμε στὸ χαρτί.

Ὥστε : **ὅταν ἕνα σχέδιο εἶναι ὑπὸ κλίμακα $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, . . . αὐτὸ σημαίνει ὅτι : Οἱ διαστάσεις του εἶναι ἴσες μὲ τὸ $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ ... τῶν ἀντιστοίχων πραγματικῶν διαστάσεων.**

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων εἶναι 50 km. Μὲ πόσο μῆκος θὰ παριστάνεται ἡ ἀπόστασις αὐτὴ σ' ἕνα χάρτη μὲ κλίμακα $\frac{1}{1.000.000}$;

Ἡ κλίμακα μᾶς δείχνει ὅτι τὸ πραγματικὸ μῆκος παριστάνεται στὸ χάρτη μ' ἕνα μῆκος 1000.000 φορὲς μικρότερο. Ἄρα: τὰ 50 km θὰ παριστάνωνται μὲ μῆκος $\frac{50 \text{ km}}{1.000.000} = \frac{5.000.000 \text{ cm}}{1.000.000} = 5$ cm.

2. Σ' ἕνα σχέδιο μὲ κλίμακα $\frac{1}{10.000}$ ἡ μιὰ πλευρὰ ἑνὸς οἰκοπέδου παριστάνεται μὲ μῆκος 4 cm. Πόσο εἶναι τὸ πραγματικὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς;

Ἀφοῦ ἡ κλίμακα εἶναι $\frac{1}{10.000}$, τὸ πραγματικὸ μῆκος θὰ εἶναι 10.000 φορὲς μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ μῆκος του στὸ χάρτη.

Δηλαδὴ $10.000 \cdot 4 \text{ cm} = 40.000 \text{ cm} = 400$ m.

Ἀπὸ αὐτὰ συνάγουμε ὅτι:

Ἡ πραγματικὴ διάστασις εἶναι ἴση μὲ τὸ γινόμενο τοῦ παρονομαστοῦ τῆς κλίμακος μὲ τὴν ἀντίστοιχη διάστασι στὸ σχέδιο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

544) Σὲ χάρτη μὲ κλίμακα 1 : 80.000, μῆκος 1 cm ἢ 1 dm πόσο πραγματικὸ μῆκος παριστάνει;

545) Ἀπεικονίσατε μὲ κλίμακα 1 : 1000 τὸ σχέδιο τριγώνου ἰσοσκελοῦς ποὺ ἔχει βάση 30 m καὶ ὕψος 40 m.

546) Τριγωνικὸ γήπεδο ἔχει πλευρὲς 80 m, 70 m καὶ 50 m. Ἀπεικονίσατε τὸ σχέδιο μὲ κλίμακα 1 : 1000.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΙΔ' ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΕ΄

§ 126. Κανονικὰ πολύγωνα

Τὸ ἰσόπλευρο τρίγωνο, τὸ τετράγωνο, εἶναι πολύγωνα ποὺ ἔχουν

α) ὅλες τὶς γωνίες των ἴσες

καὶ β) » » πλευρές των ἴσες

λέγονται δὲ **κανονικὰ πολύγωνα.**

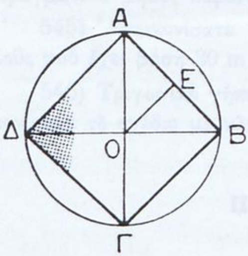
Γενικά: **Ὅταν ἕνα πολύγωνο ἔχῃ ὅλες τὶς πλευρὲς κι᾽ ὅλες τὶς γωνίες ἴσες λέγεται κανονικό.**

Τὸ ὀρθογώνιο μολονότι ἔχει ὅλες τὶς γωνίες ἴσες δὲν εἶναι κανονικὸ διότι δὲν ἔχει **καὶ** ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες.

Στὰ ἑπόμενα θὰ περιορισθοῦμε στὰ κυρτὰ πολύγωνα κι᾽ ὅταν ἀναφερόμαστε σ᾽ ἕνα πολύγωνο θὰ ἐννοοῦμε κυρτὸ πολύγωνο.

1. Κανονικὸ τετράπλευρο (τετράγωνο)

Χαράζουμε μία περιφέρεια καὶ δύο διαμέτρους ΑΓ, ΒΔ (σχ. 186) καθέτους. Ἔτσι ἔχουμε ἐπιτύχει νὰ χωρίσουμε τὴν περιφέρεια σὲ 4 ἴσα



Σχ. 186

τόξα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ καὶ

4 ἴσες χορδὲς $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta A$

Τὸ τετράπλευρο ΑΒΓΔ ἔχει

α) ὅλες τὶς πλευρὲς ἴσες καὶ

β) ὅλες τὶς γωνίες ἴσες ὡς ὀρθές. (π.χ. ἡ $\sphericalangle$ Δ βαίνει σὲ ἡμιπεριφέρεια ἄρα εἶναι ὀρθὴ κ.λ.π.) ἄρα εἶναι ἕνα κανονικὸ τετράπλευρο δηλαδὴ ἕνα τετράγωνο. Εἶναι δὲ ἐγ/νο στὴν περιφέρεια ἡ ὁποία ἔχει κέντρο τὸ κέντρο συμμετρίας Ο τοῦ τετραγώνου καὶ ἀκτῖνα ἴση μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς διαγωνίου του.

Ἡ ἀπόστασις ΟΕ τοῦ κέντρου ἀπὸ μία πλευρὰ λέγεται **ἀπόθημα** τοῦ τετραγώνου.

Ἀπὸ τὸ ὀρθ. γρίγωνο ΑΒΓ ἔχουμε:

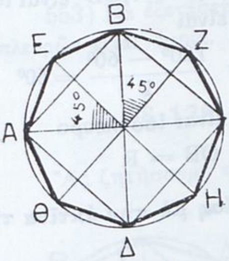
$$(AB)^2 + (B\Gamma)^2 = (A\Gamma)^2 \qquad (1)$$

ἂν δὲ καλέσουμε : α τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου
καὶ R » » ἀκτῖνος τῆς περιφερείας, ἡ (1) γράφεται :

$$\alpha^2 + \alpha^2 = (2R)^2$$
$$2\alpha^2 = 4R^2 \quad \Longleftrightarrow$$
$$\alpha^2 = 2R^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{\alpha = R\sqrt{2}}$$

2. Κανονικὸν ὀκτάγωνο

῎Αν διχοτομήσουμε τὰ 4 ἴσα τόξα τῆς περιφερείας (σχ. 187) θὰ ἔχουμε ἐπιτύχει νὰ χωρίσουμε τὴν περιφέρεια σὲ 8 ἴσα τόξα :



Σχ. 187

$$\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB} = \overset{\frown}{BZ} = \overset{\frown}{Z\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma H}$$
$$= \overset{\frown}{H\Delta} = \overset{\frown}{\Delta\Theta} = \overset{\frown}{\Theta A}$$

Φυσικὰ θὰ ἔχουμε καὶ 8 ἴσες χορδὲς τὶς

$$AE = EB = BZ = Z\Gamma = \Gamma H = H\Delta = \Delta\Theta = \Theta A$$

Τὸ 8/γωνο * ΑΕΒΖΓΗΔΘ ἔχει

α) τὶς 8 πλευρὲς ἴσες

καὶ β) τὶς 8 γωνίες ἴσες

(κάθε μία ἀπὸ τὶς γωνίες τοῦ 8/γώνου εἶναι ἴση μὲ 135°)

῎Αρα εἶναι κανονικό.

3. Κανονικὸ 16-γωνο, 32-γωνο...

῎Αν διχοτομήσουμε τὸ τόξο κάθε πλευρᾶς τοῦ καν. ὀκταγώνου καὶ πάρουμε στὴν περιφέρεια 16 διαδοχικὰ ἴσα τόξα, θὰ σχηματίσουμε ἕνα καν. 16-γωνο.

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ ἐργασθοῦμε γιὰ νὰ σχηματίσουμε καν. 32-γωνο κ.ο.κ.

4. Κανονικὸ πολύγωνο

᾿Απὸ τὶς περιπτώσεις 1, 2, 3, ἐννοοῦμε ὅτι, ἂν μ' ἕναν τρόπο ἐπιτύχουμε νὰ χωρίσουμε τὴν περιφέρεια σὲ ἴσα τόξα, τότε τὸ κυρτὸ πολύγωνο ποὺ ἔχει κορυφὲς τὰ διαδοχικὰ σημεῖα διαιρέσεως, θὰ εἶναι ἕνα κανονικὸ πολύγωνο μὲ ν πλευρές.

᾿Απὸ τὸν τρόπο κατασκευῆς συνάγουμε ὅτι· κάθε κανονικὸ πολύγωνο εἶναι ἐγ/νο σὲ μία περιφέρεια καὶ ἔχει κέντρο συμμετρίας τὸ κέντρο τῆς περιφερείας αὐτῆς.

῾Η κυρτὴ ἐπίκεντρος γωνία, τῆς ὁποίας οἱ πλευρὲς διέρχονται ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς πλευρᾶς τοῦ καν. πολυγώνου λέγεται **κεντρικὴ γωνία** τοῦ πολυγώνου τούτου.

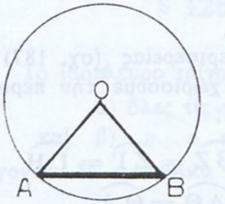
῾Η ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ μιὰ πλευρὰ λέγεται **ἀπόθημα.**

---

* Σημείωσις : ῎Αν ἑνώσουμε ἀνὰ τρία τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῆς περιφερείας προκύπτει ἕνα ἀστεροειδὲς οκτάγωνο.

§ 127. Κανονικὸ ἑξάγωνο, 12-γωνο, 24-γωνο...

Ἄς εἶναι μία περιφέρεια κέντρου Ο καὶ μία χορδὴ ΑΒ (σχ. 188) ἴση μὲ τὴν πλευρὰ κανον. ἑξαγώνου ἐγ/νου εἰς αὐτήν. Εἶναι φανερὸν ὅτι ἡ κεντρικὴ γωνία τοῦ καν. ἑξαγώνου, δηλ. ἡ κυρτὴ γωνία ΑΟΒ θὰ ἔχῃ μέτρο ἴσο μὲ $\frac{360^0}{6} = 60^0$



Σχ. 188

Ἐξ ἄλλου ἐπειδὴ τὸ τρίγωνο ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελὲς (ΑΟ = ΟΒ) θὰ εἶναι

$$(\sphericalangle A) = (\sphericalangle B) = \frac{180^0 - 60^0}{2} = 60^0$$

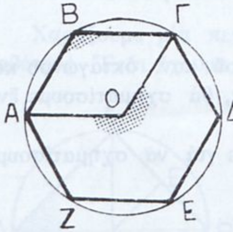
Ἄρα τὸ τρίγ. ΑΟΒ εἶναι ἰσόπλευρο

ὁπότε ΑΒ = ΟΑ = ΟΒ = R

Ὥστε: ἡ πλευρὰ κανον. ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα τῆς περ/νης περιφερείας.

Ἡ πρότασις αὐτὴ μᾶς ὁδηγεῖ στὸν ἀκόλουθο τρόπο γιὰ τὴν κατασκευὴ καν. ἑξαγώνου.

Γράφουμε περιφέρεια καὶ παίρνουμε διαδοχικὲς χορδὲς ἴσες μὲ τὴν ἀκτῖνα της (σχ. 189).



Σχ. 189

Τὸ ἑξάγωνο ΑΒΓΔΕΖΑ ἔχει:

1) ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΔΕ = ΕΖ = ΖΑ = R

2) Κάθε γωνία π.χ. τὴν $\sphericalangle$ Β ἴσην μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς μὴ κυρτῆς ἐπικέντρου $\sphericalangle$ ΑΟΓ, ὁπότε ($\sphericalangle$ Β) = 120^0 ἄρα εἶναι κανονικό.

Ἄν διχοτομήσουμε τὰ τόξα ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς πλευρὲς τοῦ καν. ἑξαγώνου μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε καν. 12-γωνο κ.ο.κ. Ἐπίσης ἂν ἑνώσουμε ἀνὰ δύο τὶς κορυφὲς τοῦ καν. ἑξαγώνου σχηματίζουμε ἰσόπλευρο τρίγωνο ἐγ/νο στὴν περιφέρεια.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

547) Νὰ ὑπολογίσετε τὴν κεντρικὴ γωνία

α) Καν. 5-γώνου

β) » 8-γώνου

γ) » 12-γώνου

548) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἀπόθημα τετραγώνου ἐγ/νου σὲ κύκλο ἀκτῖνος 4 cm.

549) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἀπόθημα κανον. ἑξαγώνου ἐγ/νου σὲ κύκλο ἀκτῖνος 4 cm.

550) Γιατί ὁ ρόμβος δὲν εἶναι κανονικὸ πολύγωνο;

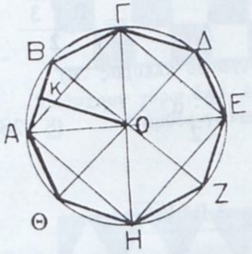
551) Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἡ γωνία κάθε κυρτοῦ καν. πολυγώνου καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία αὐτοῦ εἶναι παραπληρωματικές

552) Νὰ εὕρετε τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν ἑνὸς κανον. πολυγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κεντρικὴ γωνία 36^0.

553) Νὰ ἐξετάσετε ἂν δύο κυρτὰ καν. πολύγωνα μὲ τὸν ἴδιον ἀριθμὸν πλευρῶν εἶναι ὅμοια.

§ 128. Ἐμβαδὸν καν. πολυγώνου

Ἂς ζητήσουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καν. ὀκταγώνου ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 190). Μὲ τὶς ἀκτῖνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ τὸ 8/γωνο χωρίζεται σὲ 8 ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα.



Σχ. 190

Γιὰ τὴν εὕρεσι τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἑνὸς ἀπὸ τὰ τρίγωνα αὐτὰ π.χ. τοῦ ΑΟΒ ἔχουμε:

$$(\text{AOB}) = \frac{(\text{AB}) \cdot (\text{OK})}{2} \qquad (1)$$

Ἂν ὀνομάσουμε β τὸ μῆκος τῆς πλευρᾶς ΑΒ τοῦ 8/γώνου
α » » τοῦ ἀποθήματος ΟΚ

ὁ τύπος (1) γίνεται $(\text{AOB}) = \frac{\beta \cdot \alpha}{2}$.

Ἄρα $(\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘΑ}) = \frac{8 \cdot \alpha\beta}{2}$

Ἐπειδὴ δὲ τὸ γινόμενο $8 \cdot \beta$ παριστάνει τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου P τοῦ 8/γώνου ἔχουμε:

$$(\text{ΑΒΓΔΕΖΗΘΑ}) = \frac{\text{P} \cdot \alpha}{2} \qquad (2)$$

Εἶναι φανερὸν ὅτι μὲ τὸν ἴδιο τρόπο μποροῦμε νὰ βροῦμε καὶ τὸ ἐμβαδὸν Ε καν. πολυγώνου μὲ ν πλευρές

$$\mathbf{E}^{\text{καν. πολυγώνου}} = \frac{\mathbf{P}_\nu \cdot \boldsymbol{\alpha}_\nu}{\mathbf{2}}$$

$P_\nu =$ μῆκος περιμέτρου
$\alpha_\nu =$ » ἀποθήματος
$\nu \in \Phi$

Ὥστε: Τὸ ἐμβαδὸν καν. πολυγώνου εἶναι ἴσο μὲ τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του μὲ τὸ ἀπόθημα.

§ 129. Εἰδικὲς περιπτώσεις

1. Ἐμβαδὸν τετραγώνου

Εἴδαμε ὅτι ἡ πλευρὰ τετραγώνου ἔχει μῆκος $\beta = R\sqrt{2}$

ἄρα $E^{\text{τετραγώνου}} = (R\sqrt{2})^2 = 2R^2$

2. Ἐμβαδὸν καν. ἑξαγώνου

Εἶναι: Μῆκος β πλευρᾶς καν. ἑξαγώνου $\beta = R$

Ἀπόθημα α » » $\alpha = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

(τοῦτο εὑρίσκεται ὡς ὕψος ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς R)

Σύμφωνα δὲ μὲ τὸν τύπο $E^{\text{καν. πολυγώνου}} = \frac{P \cdot \alpha}{2}$ (§ 128)

ἔχουμε: $E^{\text{καν. ἑξαγώνου}} = \frac{6R \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

3. Ἐμβαδὸν καν. ὀκταγώνου

Ὁ τύπος $E = \frac{P \cdot \alpha}{2}$ ποὺ μᾶς ἐκφράζει τὸ ἐμβαδὸν καν. πολυγώνου διὰ τῆς περιμέτρου P (§ 128) καὶ τοῦ ἀποθήματος α αὐτοῦ μπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῆ καὶ στὴν περίπτωσι τοῦ καν. ὀκταγώνου. Εἰδικὰ ὅμως, στὴν περίπτωσι αὐτὴ ὑπάρχει κι' ἕνας πιὸ σύντομος τρόπος.

Ἂν θεωρήσουμε τὴν ΑΟ ὡς βάσιν στὸ τρίγ. ΑΒΓ, σχ. 190, τότε τὸ ἀντίστοιχο ὕψος θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ΒΘ (γιατί;) Εἶναι δέ: $(AO) = R$,

$(B\Theta) = R\sqrt{2}$ (πλευρὰ τετραγώνου)

Ἄρα $(AOB) = \frac{R \cdot \frac{1}{2} R\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{4}$

ὁπότε $E^{\text{καν. ὀκταγώνου}}\ 8\,(AOB) = \frac{8R^2\sqrt{2}}{4}$

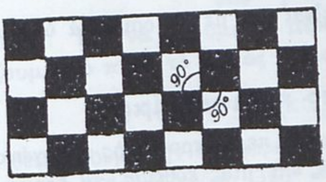
ἢ $\mathbf{E}^{\text{καν. ὀκταγώνου}} = \mathbf{2R^2\sqrt{2}}$

§ 130. Ἐφαρμογὲς στὴν πρακτικὴ ζωὴ

Κανονικὰ ἐπίπεδα σχήματα καὶ στὴ φύσι ὑπάρχουν (κρύσταλλοι, κηρῆθρες κλπ.) καὶ οἱ ἄνθρωποι κατασκευάζουν γιὰ λόγους πρακτικοὺς καὶ αἰσθητικοὺς (διακοσμήσεις σὲ ὑφάσματα, ἔπιπλα, κτίρια κλπ.). Οἱ πλάκες μὲ τὶς ὁποῖες στρώνονται τὰ δάπεδα, οἱ αὐλὲς κλπ. ἔχουν σχήματα κανονικῶν πολυγώνων. Πρέπει ὅμως τὰ κανον. πολύγωνα νὰ εἶναι τέτοια ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἐκεῖ ποὺ συναντῶνται οἱ κορυφὲς τῶν πολυγώνων νὰ εἶναι ἴσο μὲ μία πλήρη γωνία (γιατί;).

Ἔτσι οἱ πλάκες ποὺ ἔχουν σχήματα ἰσοπλεύρων τριγώνων, τετραγώνων, καν. ἑξαγώνων εἶναι κατάλληλες γιὰ τὴν ἐπίστρωσι δαπέδων κλπ.

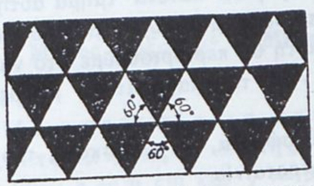
Τὰ σχήματα ποὺ ἀκολουθοῦν μᾶς δίνουν διάφορα παραδείγματα.



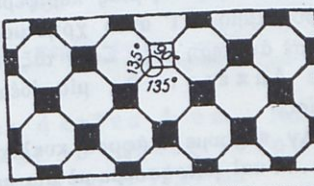
Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο 4 ὀρθὲς γωνίες

Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο τρεῖς γωνίες τῶν 120°

Σχ. 191



Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο 6 γωνίες τῶν 60°



Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο 2 γωνίες τῶν 135° καὶ μία τῶν 90°

Σχ. 192

Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο γωνίες 120°+90°+60°+90°=360°

Ὑπάρχουν γύρω ἀπὸ ἕνα σημεῖο γωνίες 150°+120°+90°=360°

Σχ. 193

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

560) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος περιφερείας ἀκτῖνος 4 cm.

561) Μία περίφέρεια ἔχει μῆκος 12,56 cm. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος αὐτῆς.

562) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ μῆκος τόξου 80^0 περιφερείας μὲ ἀκτῖνα 6 cm.

563) Τὸ μῆκος τόξου 45^0 εἶναι 6,28 cm. Πόση εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιφερείας.

564) Τὸ μῆκος τόξου 150^0 εἶναι ἴσο μὲ 18,84 cm. Πόσο εἶναι τὸ μῆκος ὁλοκλήρου τῆς περιφερείας.

565) Γύρω ἀπὸ ἕνα κυκλικὸ τραπέζι διαμέτρου 1,80 m κάθονται 8 ἄνθρωποι. Πόσον μῆκος τόξου ἀνήκει στὸν καθένα.

§ 133. Ἐμβαδὸν κύκλου

Ὅπως τὸ μῆκος περιφερείας ἔτσι καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, χρειάζεται ἄλλη μέθοδο γιὰ τὸν ἀκριβῆ, μαθηματικῶς, ὑπολογισμόν του. Στὴν τάξι αὐτὴ θὰ ἀρκεσθοῦμε στὰ ἀκόλουθα :

Εἴδαμε ὅτι ἂν σὲ μιὰ περιφέρεια ἐγγράψουμε κανον. πολύγωνο π. χ. καν. ἑξάγωνο, μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε ἀπὸ αὐτὸ ἕνα καν. 12-γωνο, 24-γωνο... μὲ ἀλλεπάλληλες διχοτομήσεις τῶν τόξων.

Ἡ ἐργασία αὐτή, θεωρητικά, μπορεῖ νὰ συνεχισθῆ ἀπεριόριστα. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο μποροῦμε νὰ φαντασθοῦμε ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ καν. πολυγώνου τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν διπλασιάζεται συνεχῶς, γίνεται, μὲ προσέγγισι, ἴση μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου τούτου γίνεται, μὲ προσέγγισι, ἴσο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Δεχόμαστε λοιπὸν ὅτι :

$$E^{\text{μβαδὸν κύκλου}} = \frac{1}{2}\,\Pi_\nu \cdot \alpha_\nu \qquad \left(\begin{array}{l} \Pi_\nu = \text{περίμ. καν. πολυγώνου } \nu \text{ πλευρῶν} \\ \alpha_\nu = \text{ἀπόθημα » \quad » \quad » \quad »} \\ \nu = \text{ἀρκετὰ μεγάλος ἀκέραιος θετικός} \end{array}\right)$$

κι' ἐπειδή, γιὰ ἀρκετὰ μεγάλο ν

εἶναι $\quad \Pi_\nu = 2\pi\, R$ καὶ $\alpha_\nu = R$ εἶναι :

$$E^{\text{μβαδὸν κύκλου}} = \frac{1}{2}\,(2\pi R)\cdot R \iff$$

$$E^{\text{μβαδὸν κύκλου}} = \pi \cdot R^2 \quad (\pi = 3{,}14...)$$

'Εφαρμογές :

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 3 cm.

Εἶναι $E = 3{,}14 \cdot 3^2$

2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς κύκλου ποὺ ἔχει ἐμβαδὸν 12,56 cm^2

Σύμφωνα μὲ τὸν τύπο (1) ἔχουμε

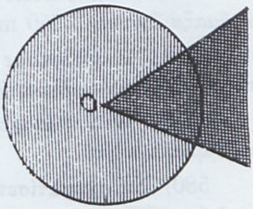
$$12{,}56 = 3{,}14 \cdot R^2 \iff R^2 = \frac{12{,}56}{3{,}14}$$

$$\iff R^2 = 4 \quad \text{ὁπότε } R = 2$$

ὥστε ἡ ἀκτὶς ἔχει μῆκος 2 cm

§ 134. 'Εμβαδὸν κυκλικοῦ τομέως

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι κυκλικὸς τομεὺς εἶναι ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὴν τομὴ ἑνὸς κύκλου καὶ μιᾶς ἐπικέντρου γωνίας αὐτοῦ (σχ. 194).



Σχ. 194

Ἂ θεωρήσουμε τὸν κύκλο ὡς ἕνα κυκλ. τομέα 360^0 ἔχουμε : $E_{\text{μβαδὸν κυκλ. τομέως } 360^0} = \pi \cdot R^2$

$$E_{\text{μβαδὸν κυκλ. τομέως } 1^0} = \frac{\pi R^2}{360}$$

$$E_{\text{μβαδὸν κυκλ. τομέως } \mu^0} = \pi \cdot R^2 \frac{\mu}{360} \qquad \mu < 360$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

566) Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτῖνος 3 cm

567) » » » κυκλ. τομέως 80^0 κύκλου ἀκτῖνος 6 cm.

568) Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴσο μὲ 28,26 cm^2 νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα αὐτοῦ.

569) Τὸ ἐμβαδὸν κύκλου τομέως 30^0 εἶναι 25,12 cm^2 νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου.

570) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν μικροτέρου κυκλικοῦ τμήματος ποὺ ἔχει χορδὴ ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα 4 cm τοῦ κύκλου.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

571) Δύο ὁμοιόκεντρες περιφέρειες ἔχουν ἀκτῖνες 3 cm καὶ 5 cm. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς μεταξὺ αὐτῶν ἐπιφανείας.

572) Ποιό καν. πολύγωνο ἔχει γωνίες ἴσες μὲ $\frac{10}{7}$ L

573) Σ' ἕνα κύκλο νὰ γράψετε χορδὴν ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα R αὐτοῦ κι' ἔπειτα νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν καθενὸς ἀπὸ τὰ δύο κυκλικὰ τμήματα στὰ ὁποῖα χωρίζεται ὁ κύκλος ἀπὸ τὴ χορδή.

574) Οἱ ἀκτῖνες δύο κύκλων διαφέρουν κατὰ 3 cm. Νὰ ὑπολογίσετε

α) τὴν διαφορὰν τῶν 2 περιφερειῶν

β) » » » ἐμβαδῶν τῶν 2 κύκλων

575) Ἕνα τόξον 20^0 ἔχει ἀκτῖνα 2 cm. Νὰ ὑπολαγίσετε τὸ μῆκος τοῦ τόξου τούτου.

576) Μὲ κέντρα τὶς κορυφὲς τετραγώνου καὶ ἀκτῖνες τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς πλευρᾶς αὐτοῦ νὰ γράψετε τόξα περιεχόμενα μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Ἔπειτα νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῶν τόξων τούτων ἂν ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι 4 cm.

577) Οἱ ἐμπρόσθιοι τροχοὶ μιᾶς ἁμάξης κάνουν ἀπὸ 1000 στροφὲς ὅταν ἡ ἅμαξα διανύει 3.140 m. Νὰ ὑπολογίσετε τὴν ἀκτῖνα τῶν τροχῶν.

578) Ἂν αὐξήσουμε κατὰ 1 μονάδα μήκους τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου πόσο αὐξάνει τὸ μῆκος τῆς περιφερίας αὐτοῦ;

579) Ἂν 2/πλασιάσουμε τὸ μῆκος τῆς ἀκτῖνος ἑνὸς κύκλου τί παθαίνει τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

580) Νὰ σχηματίσετε ἕνα ὀρθογώνιο καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνο κι' ἔπειτα μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν νὰ γράψετε περιφέρειαν. Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ περιέχεται μεταξὺ τῆς περιφερείας καὶ τοῦ τριγώνου (θὰ λάβετε τὴν ὑποτείνουσα ἴσην μὲ 4 cm).

581) Τὸ ἔδαφος δωματίου ἐστρώθη μὲ πλάκες ποὺ ἔχουν σχήματα κανον. πολυγώνου μὲ ἀριθμοὺς πλευρῶν κ, λ, ρ. Νὰ ἐξετάσετε ἂν ἰσχύη ἡ ἰσότης $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\rho}=\frac{1}{2}$

582) Τὸ ἀπόθημα τετραγώνου εἶναι ἴσο μὲ $5\sqrt{2}$ cm νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου στὸν ὁποῖον εἶναι ἐγ/νο τὸ τετράγωνο.

583) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ εὑρίσκεται μεταξὺ μιᾶς περιφερείας ἀκτῖνος 6 cm καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγ/νου καν. ἑξαγώνου.

584) Νὰ ὑπολογίσετε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ποὺ εὑρίσκεται μεταξὺ περιφερείας ἀκτῖνος 4 cm καὶ τοῦ εἰς αὐτὴν ἐγ/νου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

585) Πόσες στροφὲς πρέπει νὰ κάνῃ ὁ τροχὸς ποδηλάτου γιὰ νὰ διανύσῃ ἀπόστασιν 1570 m. Ἡ ἀκτὶς τοῦ τροχοῦ ἔχει μῆκος 0,4 cm (π=3,14).

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1) Διατί ὁ ρόμβος δὲν εἶναι κανονικὸ πολύγωνο

2) Πῶς θὰ χωρίσετε τὴ περιφέρεια

α) σὲ 4, 8, 16, 32...

β) σὲ 6, 3, 12, 24...

ἴσα μέρη

3) Ποιές γενικὲς ἰδιότητες ἔχει κάθε καν. πολύγωνο

4) Πῶς ἀπὸ τὸν ἀριθμὸ τῶν πλευρῶν κανον. πολυγώνου εὑρίσκουμε τὸ μέτρο τῆς κεντρικῆς γωνίας αὐτοῦ.

5) Πῶς εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κανον. ἑξαγώνου, ἰσοπλεύρου τριγώνου

6) Ποιά σχέσις ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας καὶ τοῦ μήκους μιᾶς διαμέτρου αὐτῆς.

7) Πῶς εὑρίσκουμε τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κυκλ. τομέως

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΙΕ΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

Πίνακας τῶν τετραγώνων καὶ τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῶν ἀριθμῶν ἀπὸ 1 ἕως 100 μὲ προσέγγισι χιλιοστοῦ

Ἀριθμός	τετράγωνο	τετρ. ρίζα	Ἀριθμός	τετράγωνο	τετρ. ρίζα
1	1	1,000	53	2809	7,280
2	4	1,414	54	2916	7,349
3	9	1,732	55	3025	7,416
4	16	2,000	56	3136	7,483
5	25	2,236	57	3249	7,550
6	36	2,450	58	3364	7,616
7	49	2,646	59	3481	7,681
8	64	2,828	60	3600	7,746
9	81	3,000	61	3721	7,810
10	100	3,162	62	3844	7,874
11	121	3,317	63	3969	7,937
12	144	3,464	64	4096	8,000
13	169	3,606	65	4225	8,062
14	196	3,742	66	4356	8,124
15	225	3,873	67	4489	8,185
16	256	4,000	68	4624	8,246
17	289	4,123	69	4761	8,307
18	324	4,243	70	4900	8,367
19	361	4,359	71	5041	8,426
20	400	4,472	72	5184	8,485
21	441	4,583	73	5329	8,544
22	484	4,690	74	5476	8,602
23	529	4,796	75	5625	8,660
24	576	4,899	76	5776	8,718
25	625	5,000	77	5929	8,775
26	676	5,099	78	6084	8,832
27	729	5,196	79	6241	8,888
28	784	5,292	80	6400	8,944
29	841	5,385	81	6561	9,000
30	900	5,477	82	6724	9,055
31	961	5,568	83	6889	9,110
32	1024	5,657	84	7056	9,165
33	1089	5,745	85	7225	9,220
34	1156	5,831	86	7396	9,274
35	1225	5,916	87	7569	9,327
36	1296	6,000	88	7744	9,381
37	1369	6,083	89	7921	9,434
38	1444	6,164	90	8100	9,487
39	1521	6,245	91	8281	9,539
40	1600	6,325	92	8464	9,592
41	1681	6,403	93	8649	9,644
42	1764	6,481	94	8836	9,695
43	1849	6,557	95	9025	9,747
44	1936	6,633	96	9216	9,798
45	2025	6,708	97	9409	9,849
46	2116	6,782	98	9604	9,900
47	2209	6,856	99	9801	9,950
48	2304	6,928	100	10000	10,000
49	2401	7,000	101	10201	10,050
50	2500	7,071	102	10404	10,100
51	2601	7,141	103	10609	10,149
52	2704	7,211			

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΤΕΛΟΣ

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ: **Καθηγ. κ. Γεώργιος Σκιαδᾶς**

ΤΕΛΟΣ

ΔΙΟΡΘΩΣΕΙΣ : Καθηγ. κ. Γεώργιος Σκιαδᾶς