ΙΩΑΝ. Φ. ΠΑΝΑΚΗ
ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

ΔΙΑ ΤΗΝ Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΑΙ ΔΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

# ΑΛΓΕΒΡΑ

καὶ στοιχεῖα ἐκ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων

$aRb \Leftrightarrow (a,b) \in R$

ΤΟΜΟΣ Β

$A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

$a > b \Leftrightarrow b < a$

ΕΚΔΟΤΗΣ Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ

# ΑΛΓΕΒΡΑ

ΚΑΙ

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

## ΔΙΑ ΤΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

ΠΡΩΤΗ ΕΚΔΟΣΙΣ

ΤΟΜΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΣ



ΑΘΗΝΑΙ
ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ "Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ„
ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 44
1966

*Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον δέον νὰ φέρῃ τὴν ἰδιόχειρον ὑπογραφὴν τοῦ Συγγραφέως.*

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ

1. ***Θεωρητικὴ Γεωμετρία.***
   (Τόμος Ι. Ἔκδοσις 1948)—300 σελίδες — Δραχ. 35

2. ***Τὸ Ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ αἱ ἰδιότητες αὐτοῦ.***
   (Ἔκδοσις 1953)—100 σελίδες — Δραχ. 20

3. ***2500 Προβλήματα Γεωμετρικῶν τόπων μετὰ τῶν λύσεων αὐτῶν.***
   (Ἔκδοσις 1964)—1000 σελίδες — Δραχ. 400

4. ***Ἄλγεβρα διὰ τὴν Α΄ Λυκείου.***
   (Α τόμος)—248 σελίδες — Δραχ. 45

ΤΥΠΟΓΡΑΦΕΙΟΝ : Σ. ΜΑΣΟΥΡΗ, ΟΙΧΑΛΙΑΣ 1 (ΤΕΡΜΑ ΓΚΥΖΗ) - ΑΘΗΝΑΙ ΤΗΛ. 647.956

# ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ὁ ἀνὰ χεῖρας δεύτερος τόμος «ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑ ΤΑ ΛΥΚΕΙΑ καὶ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ» ἀποτελεῖ συνέχειαν τοῦ πρώτου τόμου καὶ προορίζεται διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς πρώτης τάξεως τοῦ Λυκείου. Περιέχει ὁλόκληρον τὴν ὑπὸ τοῦ ἀναλυτικοῦ προγράμματος διδακτέαν ὕλην διὰ τὴν ἐν λόγῳ τάξιν, ἀλλὰ καὶ πλεῖστα ἄλλα θέματα μεθοδικῶς διατεταγμένα καὶ κατάλληλα διὰ τὴν χρῆσιν αὐτῶν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῶν ἀνωτέρων τάξεων τοῦ Λυκείου, οἱ ὁποῖοι ἐπιθυμοῦν νὰ ἀποκτήσουν τὸ Ἀκαδημαϊκὸν Ἀπολυτήριον.

Ἐκ τῆς μακρᾶς σχολικῆς πείρας καὶ τῆς φροντιστηριακῆς τοιαύτης εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ γνωρίζωμεν τὰς ἀδυναμίας τῶν μαθητῶν εἰς τὸ μάθημα τῆς Ἀλβέβρας καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον ἐπλουτίσαμεν τὸ βιβλίον μας μὲ ποικιλίαν λελυμένων καὶ μεθοδικῶς διατεταγμένων ἀσκήσεων μεθ' ἑκάστην παράγραφον, καθὼς καὶ μὲ ἀφθονίαν καταλλήλων ἀλύτων ἀσκήσεων καὶ προβλημάτων πρὸς ἐξάσκησιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν.

Ἐδόθη μεγαλυτέρα προσοχὴ κατὰ τὴν διερεύνησιν τῶν παραμετρικῶν ἐξισώσεων, ἀνισώσεων καὶ συστημάτων, ὡς καὶ εἰς τὸν πρῶτον τόμον ἀνεφέραμεν.

Εἰς τὸ κεφάλαιον περὶ ἀρρήτων ἀριθμῶν ἐδόθη μεγαλυτέρα ἔμφασις καὶ προσοχή, διότι τοῦτο παρουσιάζει ἀρκετὰς δυσκολίας πρὸς πρόσληψιν καὶ ἀφομοίωσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν. Ἐπλουτίσθη τὸ κεφάλαιον τοῦτο μὲ ἀρκετὰ καὶ κατάλληλα παραδείγματα λελυμένα, ὥστε νὰ προκληθῇ τὸ ἐνδιαφέρον τῶν μαθητῶν, ἵνα οὗτοι εἶναι εἰς θέσιν νὰ προβοῦν εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῶν ἀλύτων ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι ἐπακολουθοῦν μεθ' ἑκάστην παράγραφον ἢ παραγράφους.

Εἴμεθα τῆς γνώμης, ὅτι ἕνα Μαθηματικὸν βιβλίον πρέπει νὰ εἶναι ἐμπλουτισμένον μὲ ποικιλίαν καὶ ἀφθονίαν ἀσκήσεων, ὥστε ὁ ἀσχολούμενος μὲ αὐτὸ νὰ εὑρίσκῃ εὐχάριστον ἐργασίαν καὶ ὄχι νὰ τοῦ προκαλῇ ἀνίαν καὶ φόβον, ὡς ἄλλοι τινὲς νομίζουν.

Ὁ διδάσκων εἶναι εἰς θέσιν νὰ κάμῃ ἐκλογὴν τῶν ἀσκήσεων καὶ νὰ ὑποδείξῃ εἰς τοὺς τροφίμους του ποίας ἀσκήσεις δύνανται οἱ μαθηταὶ μόνοι των νὰ ἐπιλύσουν καὶ εἰς ποίας πρέπει νὰ δώσουν μεγαλυτέραν προσοχήν, ὥστε νὰ ἀποκτήσουν ἀρκετὴν πεῖραν πρὸς περαιτέρω ἔρευναν καὶ νὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ παρακολουθοῦν εὐχερῶς τὰ σχετικὰ μαθήματα εἰς 'Ανωτέρας σχολὰς τοῦ Κράτους, εἰς τὰς ὁποίας θὰ εἰσαχθοῦν.

Εἰς τὸ ἰδιαίτερον μέρος τοῦ παρόντος βιβλίου, ὅπου ἐκτίθενται τὰ εἰδικὰ κεφάλαια ἐπὶ τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων, προσεπαθήσαμεν διὰ καταλλήλων παραδειγμάτων νὰ δώσωμεν τοὺς καταλλήλους ὁρισμοὺς καὶ κανόνας, ὥστε οἱ μαθηταὶ νὰ δεχθοῦν αὐτοὺς εὐκόλως.

Τὸ μέρος τοῦτο περιέχει ὁλόκληρον τὴν ὑπὸ τοῦ 'Αναλυτικοῦ Προγράμματος διδακτέαν ὕλην, ἀλλὰ καὶ ἔτι περισσοτέραν, μὲ ποικιλίαν ἀσκήσεων, ἡ ὁποία προορίζεται καὶ διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν ἀνωτέρων τάξεων τοῦ Λυκείου καὶ πρὸς χρῆσιν τῶν κ.κ. Συναδέλφων.

Οὕτω πως συντεταγμένον τὸ παρὸν βιβλίον κολακευόμεθα νὰ πιστεύωμεν ὅτι θὰ ἀποβῇ χρησιμώτατον βοήθημα εἰς τοὺς κ.κ. Συναδέλφους καὶ εἰς τοὺς ἀγαπητοὺς μαθητὰς τῶν Λυκείων, οἱ ὁποῖοι θὰ εὕρουν εἰς αὐτὸ ὅ,τι τοὺς εἶναι ἀπαραίτητον ἐκ τῆς 'Αλγέβρας, διὰ νὰ ἀποκτήσουν τὸ περιπόθητον 'Ακαδημαϊκὸν 'Απολυτήριον.

Ὁ Συγγραφεὺς

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV — ΟΙ ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI — ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XII

# ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

### ΟΡΙΣΜΟΙ—ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**188. Ἐξίσωσις μὲ δύο ἀγνώστους.** Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$y-2x=5. \tag{1}$$

Ἡ (1) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τήν: $y=2x+5.$ (2)

Παρατηροῦμεν ὅτι, διά:

$x=-2$, ἡ (2) δίδει: $y=2(-2)+5=1$
$x=-1$, » : $y=2(-1)+5=3$
$x=\ \ 0$, » : $y=2\cdot 0+5=\ 5$
$x=\ \ 2$, » : $y=2\cdot 2+5=\ 9$
$x=\ \ 3$, » : $y=2\cdot 3+5=11$
. . . . . . . . . . . . . . .

Δηλαδή, δι' ἀπείρους πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x (αὐθαιρέτους) ὑπάρχουν ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y πραγματικαὶ ὡρισμέναι. Ὑπάρχουν δηλαδὴ ἄπειρα διατεταγμένα ζεύγη (x, y), τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τῆς ἐξισώσεως (1). Οὕτω, τὸ ζεῦγος (3, 11) εἶναι λύσις τῆς (1), διότι:

$$11-2\cdot 3=11-6=5.$$

Δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x καὶ ἄλλας τιμάς. Ὁ ἀκόλουθος πίναξ μᾶς δίδει λύσεις τῆς (2), ἄρα καὶ τῆς (1).

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | … |
| 2x | −8 | −6 | −4 | −2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | … |
| y=2x+5 | −3 | −1 | 1 | 3 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | … |

Μία ἐξίσωσις τοῦ α΄ βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους x καὶ y εἶναι πρόβλημα τοῦ τύπου:

$$x \in P, \quad y \in P, \quad \exists x; \quad \exists y; \qquad \alpha x+\beta y+\gamma=O, \tag{3}$$

ἔνθα α, β καὶ γ εἶναι γνωστοὶ ἀριθμοί, ἢ παραστάσεις γνωσταί, ἀνεξάρτητοι τῶν x καὶ y, καὶ αἱ ὁποῖαι καλοῦνται ***παράμετροι.***

Ὑποθέτομεν ὅτι οἱ $\alpha$ καὶ $\beta$ εἶναι ***διάφοροι τοῦ μηδενός.***

α΄). Ἐὰν $\alpha \neq O$ καὶ $\beta=O$, ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται: $\alpha x+\gamma=O$ καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς λύσιν τῆς (3) τὸ ζεῦγος:

$$(x, y)=\left(-\frac{\gamma}{\alpha}, k\right), \quad \text{ἔνθα } k \in \Pi_{\alpha} \text{ καὶ } \textit{αὐθαίρετος}$$

β'). Ἐὰν $\alpha = O$ καὶ $\beta \neq O$, ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται: $\beta y + \gamma = O$ καὶ θὰ ἔχωμεν ὡς λύσιν τῆς (3) τὸ ζεῦγος:

$$(x, y) = \left(\mu, -\frac{\gamma}{\beta}\right), \quad \text{ἔνθα } \mu \in \Pi_\alpha \text{ καὶ } \textbf{αὐθαίρετος}.$$

γ'). Ἐὰν $\alpha = O$ καὶ $\beta = O$, ἡ ἐξίσωσις (3) γίνεται: $\gamma = O$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, ἐὰν $\gamma \neq 0$, ἡ (3) εἶναι ***ἀδύνατος.***

Ἐὰν ὅμως εἶναι καὶ $\gamma = 0$, τότε ἡ (3) λαμβάνει τὴν μορφήν:

$$O \cdot x + O \cdot y + O = O,$$

ἐκ τῆς ὁποίας φαίνεται ὅτι, κάθε ζεῦγος $(x, y)$ ἐπαληθεύει αὐτήν. Ὑπάρχει δηλαδὴ ***ἀοριστία καὶ ὡς πρὸς τὸ x καὶ ὡς πρὸς τὸ y.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Διὰ τὴν γενικὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $\alpha \neq 0$ καὶ $\beta \neq 0$, ἔστω τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα:

$$(x,y) \in \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha \quad \exists (x,y); \quad 2x + 5y - 16 = 0. \qquad (1)$$

Δηλαδὴ θὰ ἀναζητήσωμεν, ἐὰν ὑπάρχουν ζεύγη $(x,y)$ πραγματικῶν ἀριθμῶν, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσεις τῆς (1). Ἔστω ὅτι $x = x_0$ καὶ $y = y_0$ εἶναι δύο τιμαὶ τῶν x καὶ y, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν τὴν (1). Θὰ ἔχωμεν:

$$2x_0 + 5y_0 - 16 = 0.$$

Ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς ταύτης ἰσότητος, λαμβάνομεν:

$$y_0 = \frac{16 - 2x_0}{5}. \qquad (2)$$

Κατ' ἀκολουθίαν, ἐὰν τὸ ζεῦγος $(x_0, y_0)$ ἐπαληθεύῃ τὴν (1), οἱ ἀριθμοὶ $x_0$ καὶ $y_0$ τοῦ ζεύγους τούτου, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως (2).

Μένει νὰ ἴδωμεν, ἐὰν κάθε ζεῦγος $(\lambda, \mu)$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\lambda \in \Pi_\alpha, \quad \mu = \frac{16 - 2\lambda}{5}, \qquad (3)$$

ἐπαληθεύει τὴν (1). Διὰ $x = \lambda$ καὶ $y = \mu$, εὑρίσκομεν:

$$2\lambda + 5 \cdot \frac{16 - 2\lambda}{5} - 16 = 2\lambda + 16 - 2\lambda - 16 = 0.$$

Ἄρα τὸ ζεῦγος $(\lambda, \mu)$ εἶναι λύσις τῆς (1).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἐξίσωσις $2x + 5y - 16 = 0$, ἔχει ἀπείρους λύσεις.

**189. Γραμμικὴ ἐξίσωσις τῆς μορφῆς: $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$.** Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0, \qquad (1)$$

καλεῖται ***γραμμική,*** ἔνθα $\alpha, \beta, \gamma, x, y \in \Pi_\alpha$.

Οἱ $\alpha, \beta, \gamma$ ὀνομάζονται ***συντελεσταὶ*** καὶ οἱ $x, y$ ***ἄγνωστοι.***

Ἡ ἐπίλυσις τῆς (1) ἐπιτυγχάνεται ὡς ἀκολούθως.

α'). Ἐὰν $|\alpha| + |\beta| \neq 0$, τὸ ὁποῖον σημαίνει ὅτι ἕνας ἐκ τῶν α καὶ β εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, θὰ ἔχωμεν:

Διὰ $\alpha \neq 0$, καὶ $y = k$ (αὐθαίρετος) ὅτι:

$$x = \frac{\gamma - \beta k}{\alpha}.$$

Ἄρα τὸ ζεῦγος $(x, y)=\left(\frac{\gamma-\beta k}{\alpha}, k\right)$ δίδει τὰς λύσεις τῆς (1), ὅταν $k \in \Pi_\alpha$.

Ἐὰν ὅμως $\beta \neq 0$, τότε, ἐὰν ὁ x λάβῃ τὴν τυχοῦσαν τιμὴν $\lambda \in \Pi_\alpha$, θὰ προκύψῃ τὸ ζεῦγος:

$$(x, y)=\left(\lambda, \frac{\gamma-\alpha\lambda}{\beta}\right),$$

τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι λύσις τῆς (1).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις.

β'). Ἐὰν $\alpha=\beta=0$ καὶ $\gamma \neq 0$, ἡ (1) εἶναι ***ἀδύνατος.***

γ'). Ἐὰν $\alpha=\beta=\gamma=0$, ἡ (1) γίνεται ***ταυτότης.*** Δηλαδή, κάθε ζεῦγος $(\lambda, k)=(x, y)$ εἶναι λύσις τῆς (1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x-3y=7$.** (1)

***Λύσις:*** Ἐὰν δώσωμεν εἰς τὸν y τὴν τιμὴν k, τότε λαμβάνομεν τὴν τιμὴν τοῦ x ἐκ τοῦ τύπου: $x=3k+7$.

Ὁ κατωτέρω πίναξ δίδει μερικὰς ἐκ τῶν ἀπείρων λύσεων τῆς (1).

| y=k | −5 | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | −8 | −5 | −2 | 1 | 4 | 7 | 10 | 13 | 37 |

**190. Ἡ ὁμογενὴς ἐξίσωσις $\alpha x+\beta y=0$.** Πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς:

$$\alpha x+\beta y=0, \quad (1)$$

καλεῖται ***ὁμογενὴς*** ἐξίσωσις τοῦ πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ y.

α'). Ἐὰν $\alpha\beta \neq 0$, τότε ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν τὴν ἰσοδύναμον:

$$\alpha x=-\beta y \quad \text{ἢ} \quad \frac{x}{-\beta}=\frac{y}{\alpha}.$$

Ἐὰν κληθῇ k ὁ κοινὸς λόγος, θὰ ἔχωμεν:

$$x=-\beta k, \quad y=\alpha k. \quad (2)$$

Ὥστε, ἡ (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις, διδομένας ἀπὸ τοὺς τύπους (2), διὰ κάθε πραγματικὴν τιμὴν τοῦ k.

β'). Ἐὰν $\alpha=0$, $\beta \neq 0$, ἡ (1) γίνεται: $\beta y=0$, ἐξ οὗ $y=0$ καὶ $x=k$ αὐθαίρετος πραγματικός.

γ'). Ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\beta=0$, ἡ (1) γίνεται: $\alpha x=0$, ἐξ οὗ $x=0$ καὶ $y=\lambda$ αὐθαίρετος πραγματικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2x-7y=0$.**

***Λύσις:*** Αὕτη γράφεται: $2x=7y$, ἐξ οὗ: $\frac{x}{7}=\frac{y}{2}=k$.

Ὅθεν: $x=7k$ καὶ $y=2k$, ἔνθα $k \in \Pi_\alpha$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $4x-5y=2$. Εὕρετε τὸν τύπον, διὰ τοῦ ὁποίου προκύπτει ὁ y, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν τιμὴν τοῦ x.

Νὰ γίνῃ ἐφαρμογὴ διά: $x=1, 2, -1, -2, 5$.

**2.** Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων εἶναι ὁμογενεῖς;

$$2x+3y-1=0, \quad 4x-9y=0, \quad 2x=5y, \quad 3x=7y+1,$$

$$\frac{1}{2}x=\frac{4}{5}y, \quad x+2y=0, \quad \frac{x}{3}=\frac{y}{2}+8.$$

**3.** Ἑκάστη ἐκ τῶν ἀκολούθων ἀναλογιῶν νὰ γραφῇ ὑπὸ μορφὴν ὁμογενοῦς ἐξισώσεως:

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{3}, \quad \frac{5}{x}=\frac{-7}{y}, \quad \frac{x}{y}=1{,}5, \quad \frac{3}{x}=\frac{5}{y}, \quad x=\frac{y}{8}.$$

**4.** Νὰ εὕρητε 10 λύσεις τῆς ἐξισώσεις: $x-2y=3$.

**191. Σύστημα δύο ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰς δύο ἐξισώσεις:

$$(A)\begin{cases} x+3y=11 & (1)\\ 2x-y=8. & (2)\end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $x=2$ καὶ $y=3$, ἡ (1) ἐπαληθεύεται, ὄχι ὅμως καὶ ἡ (2).

Διὰ $x=4$ καὶ $y=0$, ἐπαληθεύεται ἡ (2), ὄχι ὅμως καὶ ἡ (1).

Γνωρίζομεν ὅμως ὅτι ἑκάστη ἐκ τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2) ἔχει ἀπείρους λύσεις. Θέλομεν δὲ νὰ μάθωμεν, ἐὰν μεταξὺ τῶν ἀπείρων τούτων λύσεων ὑπάρχῃ κοινὸν ζεῦγος $(x_0,y_0)$, τὸ ὁποῖον νὰ ἐπαληθεύῃ ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2)

Διὰ $x=k\in \Pi_\alpha$, ἐκ τῆς (2) λαμβάνομεν $y=2k-8$. (3)

Ἐὰν τὸ ζεῦγος $(x,y)=(k,\ 2k-8)$ εἶναι λύσις καὶ τῆς ἐξισώσεως (1), θὰ πρέπῃ νὰ τὴν ἐπαληθεύῃ. Δηλαδή:

$$k+3(2k-8)=11$$

ἢ $$k+6k-24=11, \text{ ἐξ οὗ } k=5,$$

ὁπότε καὶ $$y=2\cdot 5-8=10-8=2.$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον ζεῦγος εἶναι τό: $(x,y)=(5,2)$.

Πράγματι, διὰ $x=5$ καὶ $y=2$, ἐπαληθεύονται ἀμφότεραι αἱ ἐξισώσεις (1) καὶ (2).

***Γενικῶς:*** Ἔστωσαν δύο ἐξισώσεις $f(x,y)=0$ καὶ $\sigma(x,y)=0$. Μία τυχοῦσα λύσις τῆς $f(x,y)=0$, δὲν εἶναι λύσις καὶ $\sigma(x,y)=0$ καὶ ἀντιστρόφως. Ζητοῦμεν ὅμως ποία ἢ ποῖαι λύσεις τῆς πρώτης εἶναι λύσις καὶ τῆς δευτέρας. Ὅθεν:

***Ὅταν ζητοῦνται ἐκεῖνα τὰ ζεύγη $(x,y)$, τὰ ὁποῖα ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις:***

$$f(x,y)=0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma(x,y)=0,$$

***τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:***

$$(B)\begin{cases} f(x,y)=0 & (4)\\ \sigma(x,y)=0 & (5)\end{cases}$$

Κάθε ζεῦγος $(x_0,y_0)$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις (4) καὶ (5), λέγεται ***λύσις τοῦ συστήματος (B).***

Ἡ εὕρεσις ὅλων τῶν λύσεων τοῦ συστήματος (B) λέγεται ***ἐπίλυσις τοῦ συστήματος.***

Ὅταν καὶ αἱ δύο ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (B) εἶναι πρωτοβάθμιοι ὡς πρὸς x καὶ y, τὸ σύστημα λέγεται ***πρώτου βαθμοῦ*** ἢ ***γραμμικὸν σύστημα*** μὲ δύο ἀγνώστους.

**192. Ἰσοδύναμα συστήματα.** ***Δύο συστήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ σύνολον λύσεων.*** Δηλαδή, ὅταν πᾶσα λύσις τοῦ πρώτου εἶναι λύσις καὶ τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν δὲ δύο συστήματα εἶναι ἰσοδύναμα, δυνάμεθα νὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἕνα διὰ τοῦ ἄλλου.

**193. Θεώρημα.** Ἄς θεωρήσωμεν τὰ δύο συστήματα :

$$(A)\left|\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ \sigma(x,y)=0 \end{array}\right. \quad \text{καὶ} \quad (B)\left|\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ \lambda\cdot f(x,y)+\mu\cdot\sigma(x,y)=0, \end{array}\right.$$

ἔνθα $\lambda, \mu \in \Pi_\alpha$ καὶ $\mu\neq 0$.

Ἐὰν $(x_0, y_0)$ εἶναι μία λύσις τοῦ συστήματος (A), θὰ ἔχωμεν :

$$f(x_0, y_0)=0 \quad \text{καὶ} \quad \sigma(x_0, y_0)=0,$$

ὁπότε θὰ εἶναι καί :

$$\lambda\cdot f(x_0, y_0)+\mu\cdot\sigma(x_0, y_0)=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 0=0+0=0.$$

Δηλαδή, πᾶσα λύσις $(x_0, y_0)$ τοῦ (A) εἶναι λύσις καὶ τοῦ (B),

Ἀντιστρόφως, πᾶσα λύσις $(x_1, y_1)$ τοῦ (B) θὰ δίδῃ :

$$f(x_1, y_1)=0 \quad \text{καὶ} \quad \lambda\cdot f(x_1, y_1)+\mu\cdot\sigma(x_1, y_1)=0$$

ἢ $\quad \lambda\cdot 0+\mu\cdot\sigma(x_1, y_1)=0 \quad$ ἢ $\quad \mu\cdot\sigma(x_1, y_1)=0$, ἐξ οὗ: $\sigma(x_1, y_1)=0$, καθόσον $\mu\neq 0$.

Ὅθεν, πᾶσα λύσις τοῦ συστήματος (B) εἶναι λύσις καὶ τοῦ (A).

Δηλαδὴ τὰ συστήματα (A) καὶ (B) εἶναι ἰσοδύναμα.

Ὥστε:
$$\boxed{\left|\begin{array}{l} f(x,y)=0 \\ \sigma(x,y)=0 \end{array}\right. \iff \left|\begin{array}{l} f(x, y)=0 \\ \lambda\cdot f(x, y)+\mu\cdot\sigma(x, y)=0 \end{array}\right.}$$

ἂν $\lambda, \mu \in \Pi_\alpha$ καὶ $\mu\neq 0$.

Ἡ ἐξίσωσις $\lambda\cdot f(x, y)+\mu\cdot\sigma(x,y)=0$ ὀνομάζεται ***γραμμικὸς συνδυασμὸς τῶν ἐξισώσεων*** $f(x, y)=0$ καὶ $\sigma(x, y)=0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκτεθέντων παρατηροῦμεν ὅτι : δυνάμεθα νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος (A) ἐπὶ τοὺς ἀριθμοὺς λ, $\mu\neq 0$, καὶ νὰ ἀντικαταστήσωμεν μίαν ἐκ τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τούτων, ὁπότε προκύπτει τὸ σύστημα (B), ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (A).

**194. Μέθοδοι ἐπιλύσεως πρωτοβαθμίων συστημάτων μὲ δύο ἀγνώστους.**

1ον : ***Μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.*** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα :

$$(A)\quad \left| \begin{array}{ll} 5x+2y=25 & (1) \\ 3x+4y=29. & (2) \end{array} \right.$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 2 καὶ ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (2) ἐπὶ —1 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$(B)\quad \left| \begin{array}{ll} 10x+4y=50 & (3) \\ -3x-4y=-29\cdot & (4) \end{array} \right.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$7x=21, \text{ ἐξ οὗ: } x=3.$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 3 καὶ τὰ τῆς (2) ἐπὶ —5 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left| \begin{array}{ll} 15x+6y=75 & (5) \\ -15x-20y=-145. & (6) \end{array} \right.$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (5) καὶ (6) λαμβάνομεν:

$$-14y=-70, \text{ ἐξ οὗ: } y=5.$$

***Διάταξις τῶν πράξεων:*** Αἱ ἀνωτέρω πράξεις διατάσσονται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{l|r|r} 5x+2y=25 & 2 & 3 \\ 3x+4y=29 & -1 & -5 \end{array} \iff \begin{array}{c} 10x+4y=50 \\ -3x-4y=-29 \\ \hline 7x=21 \\ x=3. \end{array} \Bigg\| \begin{array}{c} 15x+6y=75 \\ -15x-20y=-145 \\ \hline -14y=-70 \\ y=5. \end{array}$$

Ὥστε, ἡ λύσις τοῦ συστήματος εἶναι τὸ ζεῦγος $(x, y)=(3, 5)$.

Ἡ μέθοδος, ἡ ὁποία ἐφηρμόσθη πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ δοθέντος συστήματος (A), ὀνομάζεται ***μέθοδος τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν*** ἢ ***μέθοδος τοῦ γραμμικοῦ συνδυασμοῦ*** ἢ ***μέθοδος ἀπαλοιφῆς δὲ προσθέσεως.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left\{ \begin{array}{l|r|r} \mathbf{11x+12y=11} & 2 & 7 \\ \mathbf{7x+8y=3} & -3 & -11 \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array}$$

***Λύσις:*** Τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν 12 καὶ 8 τοῦ y εἶναι τὸ 24.

Θὰ εἶναι δὲ $24:12=2$ καὶ $24:8=3$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 2 καὶ τὰ τῆς (2) ἐπὶ —3 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 22x+24y=22 \\ -21x-24y=-9. \end{array} \right.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη προκύπτει: $x=13$.

Τὸ ἐ.κ.π. τῶν συντελεστῶν 11 καὶ 7 τοῦ x εἶναι 77. Θὰ εἶναι δέ: $77:11=7$ καὶ $77:7=11$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ 7 καὶ τῆς (2) ἐπὶ —11 καὶ λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left\{ \begin{array}{l} 77x+84y=77 \\ -77x-88y=-33. \end{array} \right.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$-4y=44, \qquad \text{ἐξ οὗ:} \qquad y=-11.$$

Ἄρα ἡ ζητουμένη λύσις τοῦ συστήματος εἶναι τὸ ζεῦγος: $(x, y)=(13, -11)$.

***Ἐπαλήθευσις.*** Πράγματι, διὰ $x=13$ καὶ $y=-11$, τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left. \begin{array}{r} 11\cdot 13+12\cdot(-11)=11 \\ 7\cdot 13+8\cdot(-11)=3 \end{array} \right\} \text{ ἢ } \left. \begin{array}{r} 143-132=11 \\ 91-88=3 \end{array} \right\} \text{ ἢ } \begin{array}{r} 11=11 \\ 3=3 \end{array}.$$

2ον: ***Μέθοδος διὰ τῆς ἀντικαταστάσεως.***

Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$(\Gamma)\quad \left|\begin{array}{l} 2x+3y=7 \qquad (1)\\ 3x+5y=10 \qquad (2)\end{array}\right.$$

Ἐὰν $x=x_0$ καὶ $y=y_0$ εἶναι μία λύσις τοῦ (Γ), θὰ ἔχωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας:

$$\left|\begin{array}{l} 2x_0+3y_0=7 \qquad (3)\\ 3x_0+5y_0=10. \qquad (4)\end{array}\right.$$

Ἐκ τῆς ἰσότητος (3) λαμβάνομεν:

$$2x_0=7-3y_0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x_0=\frac{7-3y_0}{2}. \qquad (5)$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ὑπὸ τὴν μορφὴν αὐτὴν ὁ $x_0$ ἱκανοποιεῖ τὴν (4). Τότε θὰ ἔχωμεν:

$$3\cdot\frac{7-3y_0}{2}+5y_0=10, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad y_0=-1.$$

Ἄρα ἡ σχέσις (5) δίδει: $x_0=\dfrac{7-3(-1)}{2}=\dfrac{7+3}{2}=\dfrac{10}{2}=5.$

Οἱ ἀριθμοὶ $x=x_0=5$ καὶ $y=y_0=-1$, εἶναι λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος (Γ).

***Ἐπαλήθευσις.*** Πράγματι, διὰ $x=5$ καὶ $y=-1$, ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot5+3(-1)=7\\ 3\cdot5+5(-1)=10\end{array}\right| \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} 10-3=7\\ 15-5=10\end{array}\right| \text{ ἢ } \left.\begin{array}{l} 7=7\\ 10=10.\end{array}\right|$$

Ἡ ἀνωτέρω μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ δοθέντος συστήματος ὀνομάζεται ***μέθοδος τῆς ἀντικαταστάσεως.*** Κατὰ ταύτην:

α΄). Λύομεν τὴν μίαν τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος ὡς πρὸς τὸν ἕνα ἄγνωστον x, θεωροῦντες τὸν ἄλλον ἄγνωστον ὡς γνωστόν.

β΄). Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ x ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἄλλην ἐξίσωσιν τοῦ συστήματος, ἡ ὁποία γίνεται τώρα ἐξίσωσις μὲ ἕνα ἄγνωστον, τὸν y. Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν ταύτην καὶ εὑρίσκομεν τὸν y.

γ΄). Τὴν τιμὴν ταύτην τοῦ y ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸν τύπον, ὅστις δίδει τὸν x, συναρτήσει τοῦ y, καὶ εὑρίσκομεν καὶ τὸν ἄγνωστον x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον. **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbf{5x-y=-2} \qquad (1)\\ \mathbf{x-2y=-22} \qquad (2)\end{array}\right.$$

***Λύσις.*** Θὰ ἔχωμεν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσοδυναμίας:

$$\left.\begin{array}{l} 5x-y=-2\\ x-2y=-22\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=5x+2\\ x-2y=-22\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=5x+2\\ x-2(5x+2)=-22\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=5x+2\\ x=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} y=5\cdot2+2\\ x=2\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=12\\ x=2\end{array}\right\}.$$

Ὥστε, αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $x=2$, $y=12$.

2ον. **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{cases} 4(x-2y)+5(x+y)-3(y+2)=-6 & (1) \\ 5(3x-y)-2(y+x)-3(y-4)=8. & (2) \end{cases}$$

***Λύσις:*** Ἐκτελοῦμεν τὰς σημειουμένας πράξεις καὶ τὰς ἀναγωγάς:

$$\begin{cases} 4x-8y+5x+5y-3y-6=-6 \\ 15x-5y-2y-2x-3y+12=8 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9x-6y=0 \\ 13x-10y=-4 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=\frac{3}{2}x \\ 13x-10y=-4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{3}{2}x \\ 13\cdot x-10\cdot\frac{3}{2}x=-4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{3}{2}x \\ x=2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{3}{2}\cdot 2=3 \\ x=2 \end{matrix}\right\}$$

Ὥστε, αἱ ρίζαι τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι: $x=2$, $y=3$.

***ΣΗΜ.*** Ὅταν ὁ συντελεστὴς τοῦ ἑνὸς ἀγνώστου εἶναι ἡ μονάς, μᾶς συμφέρει νὰ λύσωμεν ὡς πρὸς τὸν ἄγνωστον τοῦτον, διότι δὲν θὰ ἔχωμεν νὰ κάμωμεν διαίρεσιν διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου.

Ἐπὶ παραδείγματι, διὰ νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 3x-\ y=2 & (3) \\ x-2y=4, & (4) \end{cases}$$

εἶναι συμφέρον νὰ λύσωμεν τὴν (3) ὡς πρὸς y, καὶ ὄχι ὡς πρὸς x.

Ὁμοίως, συμφέρον εἶναι νὰ λύσωμεν τὴν (4) ὡς πρὸς x, καὶ ὄχι ὡς πρὸς y.

Θὰ ἔχωμεν λοιπὸν κατὰ σειρὰν τὰς ἰσοδυναμίας.

$$\left.\begin{matrix} 3x-y=2 \\ x-2y=4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} 3x-y=2 \\ x=2y+4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} 3(2y+4)-y=2 \\ x=2y+4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=2y+4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=2(-2)+4 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} y=-2 \\ x=0 \end{matrix}\right\}.$$

Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος μας εἶναι: $x=0$, $y=-2$

3ον: ***Μέθοδος τῆς συγκρίσεως:*** Κατὰ ταύτην, λύομεν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ὡς πρὸς τὸν αὐτὸν ἄγνωστον, ἔστω τὸν x. Κατόπιν ἐξισοῦμεν τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἐξισώσεων τούτων, ὁπότε προκύπτει μία ἐξίσωσις μὲ ἕνα μόνον ἄγνωστον, τὸν y. Λύομεν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν τὴν τιμὴν τοῦ y. Ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς ἕνα ἐκ τῶν τύπων, ὅστις δίδει τὸν x, συναρτήσει τοῦ y, καὶ προκύπτει ὁ ἄγνωστος x.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{cases} 5x+2y=12 & (1) \\ 2x-3y=1 & (2) \end{cases}$$

***Λύσις:*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ ἔχωμεν τὰς ἰσοδυναμίας:

$$\left.\begin{matrix} 5x+2y=12 \\ 2x-3y=1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{12-2y}{5} \\ x=\frac{3y+1}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{12}{5}-\frac{2}{5}y \\ \frac{12-2y}{5}=\frac{3y+1}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x=\frac{12}{5}-\frac{2}{5}y \\ y=1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x=\frac{12}{5}-\frac{2}{5}\cdot 1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}\right\}.$$

Ἄρα αἱ ρίζαι τοῦ συστήματός μας εἶναι: $x=2$, $y=1$

Ἡ ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσα μέθοδος καλεῖται ***μέθοδος τῆς συγκρίσεως.***

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Τὰ ἀκόλουθα συστήματα, νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῶν ἀντιθέτων συντελεστῶν.

**1.** $\begin{cases} x+y=16 \\ 2x-y=17 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 8x+3y=11 \\ 3x+5y=8 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 4x-3=3 \\ 7x+6y=21 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 2(x-3)+5y=26 \\ 3(y+1)-3x=-3 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} (x+1)(y+1)-x(y+3)+5(x-4)=6 \\ 6(x+y+2)+3(y-8)+2(5-x)+7=0 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=7 \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=8 \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{5}=5 \\ \dfrac{2x}{3}-\dfrac{y}{2}=7 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} \dfrac{x}{6}=\dfrac{y}{9}+\dfrac{1}{9} \\ \dfrac{x}{12}=\dfrac{y}{8}-\dfrac{1}{12}. \end{cases}$

**Β.** Διὰ τῆς μεθόδου τῆς ἀντικαταστάσεως, νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\begin{cases} 10x+9y=30 \\ 11x+10y=-15 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 14x-35y+28=0 \\ 10x-25y+20=0 \end{cases}$

**3.** $\begin{cases} y+x-1=0 \\ y+2x-4=0. \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 2x+3y-13=0 \\ 5x-4y+2=0 \end{cases}$

**5.** $\begin{cases} y(x-4)+x(y+2)-2(x-1)(y+2)=0 \\ 12(x-1)-2(y+4)+5(x+y)+6=0. \end{cases}$

**Γ.** Τὰ ἀκόλουθα συστήματα, νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ τῆς μεθόδου τῆς συγκρίσεως.

**1.** $\begin{cases} x-2y+1=0 \\ 2x-5y-3=0 \end{cases}$ **2** $\begin{cases} 4x-3y=32 \\ 3y-x=19 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 3x-5y=11 \\ x+2y=11. \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 8(x-1)+3(x+2)-5(x+y)=-27 \\ 7(x+y)-5(y-3)+3(x+5)=40. \end{cases}$

**Δ.** 1. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ μ καὶ ν, ὥστε τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} (\mu-1)x+(\nu+1)y=\mu+\nu \\ \mu x-\nu y=4, \end{cases}$$

νὰ δέχεται τὴν λύσιν: $x=2$ καὶ $y=5$.

2. Νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ, εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} (3\lambda+2\mu)x-(\lambda-1)y=4\lambda-3\mu+1 \\ (2\lambda+\mu-1)x+(\lambda+\mu-1)y=4\lambda-\mu+3, \end{cases}$$

νὰ δέχεται ὡς λύσιν τὸ ζεῦγος: $x=3$, $y=-3$. Ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐξετάσετε, ἂν δέχεται καὶ ἄλλας λύσεις.

3. Εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{x^3-2x-3}{x^2-1}=x+\frac{\alpha}{x-1}+\frac{\beta}{x+1},$$

νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα αὕτη ἐπαληθεύεται διὰ $x=0$ καὶ $x=2$.

Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν:

**Ε.** Τὰ ἀκόλουθα συστήματα νὰ ἐπιλυθοῦν διὰ μεθόδου τῆς ἀπολύτου ἐκλογῆς σας.

**1.** $\begin{cases} 5x-y-(x-y-4)=4x+5y-21 \\ 6(x+y)-5(x-y-3)=4x-2y+71 \end{cases}$

**2.** $\begin{cases} 5(2x-y+1)=3(x-2y+3)+32 \\ 4(x-1)-2(y-1)=3(x+2y+1) \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{3x-5y}{2}+3=\dfrac{2x+y}{5}+6 \\ 8-\dfrac{x-2y}{5}=\dfrac{x}{3}+\dfrac{y-1}{2} \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{4}-\dfrac{14x-15y}{11}=3 \\ \dfrac{2x}{5}-\dfrac{6y}{7}+1=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x-1)(y+2)-(x+1)(y-3)=4 \\ (x+3)(y+1)-(x-3)(y-5)=18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} (x-1)(y-2)=(x+1)(y-3) \\ (x-5)(y+4)=(x-4)(y-1) \end{cases}$ 7. $\begin{cases} (x-1)^2=(y-1)^2 \\ x+3y-5=0. \end{cases}$

**195. Συστήματα ἀδύνατα.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & (1) \\ 4x+6y=10. & (2) \end{cases}$$

***Λύσις:*** Ἐὰν μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2) ἀπαλείψωμεν τὸν x, προκύπτει τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & (3) \\ 0\cdot y=-4. \end{cases}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (4) εἶναι ***ἀδύνατος, διὰ*** $\forall y \in \Pi_\alpha$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύστημά μας δὲν ἔχει ***οὐδεμίαν λύσιν***. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον.***

Τοῦτο φαίνεται καὶ ἀπὸ τὸ ἑξῆς. Γράφομεν τὴν (2) ὡς ἑξῆς:

$$2x+3y=\frac{10}{2}=5. \qquad (5)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (5) ἕπεται ὅτι 7=5, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον.

**196. Συστήματα ἀόριστα.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & (1) \\ 4x+6y=14. & (2) \end{cases}$$

***Λύσις:*** Δι' ἀπαλοιφῆς τοῦ x, προκύπτει τὸ ἰσοδύμαμον σύστημα:

$$\begin{cases} 2x+3y=7 & (3) \\ 0\cdot y=0 & (4) \end{cases}$$

Κάθε ἀριθμὸς $y \in \Pi_\alpha$ εἶναι λύσις τῆς (4). Εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ y αὐθαίρετον, ἀντιστοιχεῖ μία ὡρισμένη τιμὴ διὰ τὸ x ἐκ τῆς (3).

Οὕτω, διὰ y=1, ἡ (3) δίδει: x=2.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύστημά μας εἶναι ***μερικῶς ἀόριστον*** ἢ ὅτι αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ***δὲν εἶναι διάφοροι.***

**197. Συστήματα μὲ ἀπόλυτα.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} |x-y|+2|x+y-1|=3 & (1) \\ 2x+y=1. & (2) \end{cases}$$

***Λύσις***: Διακρίνομεν τέσσαρας περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $x-y \geqslant 0$, $x+y-1 \geqslant 0$. Τότε τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} x-y+2(x+y-1)=3 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left|\begin{array}{l} 3x+2y=5 \\ 2x+y=1 \end{array}\right., \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left|\begin{array}{l} x=4 \\ y=-7. \end{array}\right.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἐπαληθεύουν τὴν συνθήκην $x+y-1 \geqslant 0$. Ἄρα αἱ τιμαὶ $x=4$, $y=-7$, δὲν εἶναι λύσις τοῦ συστήματος.

β'). Ἐὰν $x-y \geqslant 0$, $x+y-1 \leqslant 0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} x-y-2(x+y-1)=3 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left|\begin{array}{r} -x-3y=1 \\ 2x+y=1, \end{array}\right. \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left|\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{5} \\ y=-\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x-y \geqslant 0$ καὶ $x+y-1 \leqslant 0$, ἕπεται ὅτι εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος.

γ'). Ἐὰν $x-y \leqslant 0$, $x+y-1 \geqslant 0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} -x+y+2(x+y-1)=3 \\ 2x+y=1 \end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left|\begin{array}{l} x+3y=5 \\ 2x+y=1, \end{array}\right. \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left|\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{9}{5} \end{array}\right.$$

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται ἱκανοποιοῦν τὰς συνθήκας $x-y \leqslant 0$ καὶ $x+y-1 \geqslant 0$, εἶναι λύσις τοῦ συστήματος.

δ'). Ἐὰν $x-y \leqslant 0$, $x+y-1 \leqslant 0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{r} -x+y-2(x+y-1)=3 \\ 2x+y=1, \end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left|\begin{array}{r} -3x-y=1 \\ 2x+y=1, \end{array}\right. \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left|\begin{array}{l} x=-2 \\ y=5. \end{array}\right.$$

Αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἱκανοποιοῦν τὴν συνθήκην $x+y-1 \leqslant 0$, καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι λύσις τοῦ συστήματος.

Ἑπομένως, κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι τὰ ζεύγη:

$$\left|\begin{array}{l} x=\dfrac{4}{5} \\ y=-\dfrac{3}{5} \end{array}\right. \quad \text{καὶ} \quad \left|\begin{array}{l} x=-\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{9}{5}. \end{array}\right.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\left|\begin{array}{l} 2x+5y=8 \\ 4x+10y=9 \end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l} 6x-5y=13 \\ 12x-10y=26 \end{array}\right.$ **3.** $\left|\begin{array}{l} x+7y=19 \\ 3x+21x=57 \end{array}\right.$

**4.** $\left|\begin{array}{l} 4|x|-2|y|=8 \\ 6|x|-5|y|=5 \end{array}\right.$ **5.** $\left|\begin{array}{l} 5|x|+3|y|=2 \\ 3|x|-2|y|=24 \end{array}\right.$ **6.** $\left|\begin{array}{l} 2|x|+3|y|=11 \\ 3|x|-5|y|=7. \end{array}\right.$

**198. Γενικὴ μορφὴ τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους.** Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς συστήματος τοῦ πρώτου βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1, \end{array} \right.$$

ἔνθα οἱ συντελεσταὶ $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί, ἀνεξάρτητοι τῶν ἀγνώστων x καὶ y.

**199. Ἐπίλυσις τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους.** Διὰ νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$(A) \quad \left| \begin{array}{ll} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1, & (2) \end{array} \right.$$

ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ὑποθέτομεν ὅτι $x=x_0$, $y=y_0$ εἶναι μία λύσις αὐτοῦ. Τότε θὰ ἔχωμεν τὰς ἀριθμητικὰς ἰσότητας:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha x_0+\beta y_0=\gamma \\ \alpha_1 x_0+\beta_1 y_0=\gamma_1 \end{array} \right| \begin{array}{r} \beta_1 \\ -\beta \end{array} \left| \begin{array}{c} -\alpha_1 \\ \alpha \end{array} \right| \quad \begin{array}{r} (3) \\ (4) \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (3) καὶ (4) πρῶτον ἐπὶ $\beta_1$ καὶ $-\beta$ ἀντιστοίχως καὶ κατόπιν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (3) καὶ (4) ἐπὶ $-\alpha_1$ καὶ $\alpha$ ἀντιστοίχως καὶ ἔχομεν

$$\begin{array}{r} \alpha\beta_1 x_0+\beta\beta_1 y_0=\gamma\beta_1 \\ -\alpha_1\beta x_0-\beta\beta_1 y_0=-\gamma_1\beta \end{array} \left| \begin{array}{c} -\alpha\alpha_1 x_0-\alpha_1\beta y_0=-\alpha_1\gamma \\ \alpha\alpha_1 x_0+\alpha\beta_1 y_0=\alpha\gamma_1 \end{array} \right|.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)x_0=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta \quad \text{καὶ} \quad (\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)y_0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma. \qquad (5)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι: $\boldsymbol{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq O}$, τότε ἐκ τῶν (5) λαμβάνομεν:

$$x_0=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta} \quad \text{καὶ} \quad y_0=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}. \qquad (6)$$

Ἑπομένως, ἂν ὑπάρχῃ μία λύσις $(x_0,y_0)$ τοῦ συστήματος (A), αὕτη θὰ εἶναι ἀναγκαίως ἡ ὑπὸ τῶν τύπων (6) παρεχομένη.

Ἐὰν αἱ τιμαὶ (6) ἀντικατασταθοῦν εἰς τὸ σύστημα (A), τοῦτο ἐπαληθεύεται. Πράγματι, ἔχομεν.

$$\alpha\cdot\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}+\beta\cdot\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\frac{\alpha\gamma\beta_1-\alpha\gamma_1\beta+\alpha\beta\gamma_1-\alpha_1\beta\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=$$

$$=\frac{\gamma(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\gamma.$$

$$\alpha_1\cdot\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}+\beta_1\cdot\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\frac{\alpha_1\beta_1\gamma-\alpha_1\beta\gamma_1+\alpha\beta_1\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=$$

$$=\frac{\gamma_1(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\gamma_1.$$

**200. Διερεύνησις:** Κατὰ τὴν διερεύνησιν τοῦ πρωτοβαθμίου συστήματος (Α) διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $\boldsymbol{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq O}$, τότε τὸ σύστημα (Α) ἔχει τὴν λύσιν:

$$\boxed{x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}\quad, y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}} \tag{7}$$

β'). Ἐὰν $\boldsymbol{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=O}$, τότε αἱ σχέσεις (5) γίνονται:

$$0\cdot x_0=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta \quad \text{καὶ} \quad 0\cdot y_0=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma. \tag{8}$$

Ἐὰν τώρα $\gamma\beta_1-\gamma_1\beta\neq0$ ἢ $\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq0$, τὸ σύστημα (Α) εἶναι ***ἀδύνατον***, διότι οὐδεμία τῶν (5) ἱκανοποιεῖται, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x_0$.

Ὥστε: Ἐὰν $\boldsymbol{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=O}$ καὶ ἐὰν $\boldsymbol{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta\neq O}$ ἢ $\boldsymbol{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq O}$, τὸ σύστημα (Α) ***δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν.***

γ'). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι:

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0, \quad \gamma\beta_1-\gamma_1\beta=0, \quad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma=0, \tag{9}$$

τότε παρατηροῦμεν ὅτι αὗται ἐπαληθεύονται, ὅταν

$$\alpha=\alpha_1=\beta=\beta_1=0.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύστημα (Α) λαμβάνει τὴν μορφήν.

$$\left|\begin{array}{l} 0\cdot x+0\cdot y=\gamma \\ 0\cdot x+0\cdot y=\gamma_1, \end{array}\right. \tag{10}$$

καὶ ἐὰν $\gamma\neq0$, $\gamma_1\neq0$, τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ***ἀδύνατον***. Ἄρα καὶ τὸ δοθὲν (Α) θὰ εἶναι ἀδύνατον.

Ἐὰν $\gamma=0$ καὶ $\gamma_1=0$, τὸ σύστημα (10) εἶναι ***ἀόριστον***. Δηλαδὴ κάθε $x=\lambda\in\Pi_\alpha$ καὶ κάθε $y=\mu\in\Pi_\alpha$ εἶναι λύσις τοῦ συστήματος. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$, $\gamma\neq0$, αἱ σχέσεις (9) δίδουν:

$$\frac{\beta_1}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\alpha}, \quad \frac{\beta_1}{\beta}=\frac{\gamma_1}{\gamma} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha_1}{\alpha}=\frac{\beta_1}{\beta}=\frac{\gamma_1}{\gamma}=k.$$

Ἄρα $\alpha_1=\alpha k$, $\beta_1=\beta k$, $\gamma_1=\gamma k$, ὁπότε ἡ ἐξίσωσις:

$\alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1$ λαμβάνει τὴν μορφήν: $k\alpha x+k\beta y=k\gamma$

ἢ

$$k(\alpha x+\beta y)=k\gamma, \tag{11}$$

ὁπότε πᾶσα λύσις τῆς $\alpha x+\beta y=\gamma$, εἶναι λύσις καὶ τῆς (11), δηλαδὴ τῆς:

$$\alpha_1x+\beta_1y=\gamma_1.$$

Ἄρα τὸ σύστημα (Α) ἔχει ἀπείρους λύσεις, τὰς ἀπείρους λύσεις τῆς

$$\alpha x+\beta y=\gamma.$$

Ἐὰν $\alpha\neq0$, $\beta\neq0$ καὶ $\gamma=0$, τότε ἐκ τῶν (9) λαμβάνομεν:

$$\frac{\beta_1}{\beta}=\frac{\alpha_1}{\alpha}=k \quad \text{καὶ} \quad \gamma_1=0,$$

τὸ δὲ σύστημα (Α) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y=0 \\ k\alpha x+k\beta y=0, \end{array}\right.$$

τὸ ὁποῖον προφανῶς ἔχει ἀπείρους λύσεις τάς: $x=-\beta\vartheta$, $y=\alpha\vartheta$, $\vartheta$ αὐθαίρετος.

Ἐὰν $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ καὶ $\gamma \neq 0$, ἐκ τῶν (9) λαμβάνομεν:

$$\frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{\alpha_1}{\alpha} = \mathrm{k} \quad \text{καὶ} \quad \beta_1 = 0,$$

τὸ δὲ σύστημα (A) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha x = \gamma \\ \mathrm{k}\alpha x = \mathrm{k}\gamma, \end{array} \right.$$

τὸ ὁποῖον ἔχει ἀπείρους λύσεις, τάς: $x = \dfrac{\gamma}{\alpha}$, $y = \lambda$ αὐθαίρετος.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὰς λοιπὰς περιπτώσεις καὶ ὅτι πληρουμένων τῶν (9), τὸ σύστημα (A) ἔχει ἀπείρους λύσεις, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως:

$$\alpha = \alpha_1 = \beta = \beta_1 = 0 \quad \text{καὶ} \quad \gamma \neq 0 \quad \text{ἢ} \quad \gamma_1 \neq 0.$$

Τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

<table>
<tr><td colspan="4">Διερεύνησις τοῦ συστήματος: $\left. \begin{array}{l} \alpha x + \beta y = \gamma \\ \alpha_1 x + \beta_1 y = \gamma_1 \end{array} \right\}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0 \iff$</td><td>$x = \dfrac{\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$<br>$y = \dfrac{\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta}$</td><td>Μία λύσις</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\alpha_1\beta - \alpha_1\beta = 0$</td><td>$\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta \neq 0$<br>$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \neq 0$</td><td colspan="2">$\Longrightarrow$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\gamma\beta_1 - \gamma_1\beta = 0$<br>$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma = 0$</td><td>$\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$<br>ὄχι ὅλα μηδὲν</td><td>$\Longrightarrow$ ἄπειροι λύσεις, ἕνας ἄγνωστος αὐθαίρετος</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\alpha = \alpha_1 = 0$<br>$\beta = \beta_1 = 0$</td><td>$\left. \begin{array}{l} \gamma \neq 0 \text{ καὶ } \gamma_1 = 0 \\ \gamma = 0 \text{ καὶ } \gamma_1 \neq 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow$ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον</td></tr>
<tr><td>$\gamma = \gamma_1 = 0 \Longrightarrow$ Ἄπειροι λύσεις (x καὶ y αὐθαίρετοι)</td></tr>
</table>

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left| \begin{array}{ll} (\lambda-1)x + 2\lambda y = -2 & (1) \\ 2\lambda x + (\lambda-1)y = \lambda - 1. & (2) \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = (\lambda-1)^2 - 4\lambda^2 = (\lambda - 1 + 2\lambda)(\lambda - 1 - 2\lambda) = -(\lambda+1)(3\lambda-1).$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α΄). Ἐὰν $(\lambda+1)(3\lambda-1) \neq 0$, δηλαδή: $\lambda \neq -1$ καὶ $\lambda \neq \dfrac{1}{3}$, τότε:

$$x = \frac{-2(\lambda-1) - 2\lambda(\lambda-1)}{-(\lambda+1)(3\lambda-1)} = \frac{2(\lambda-1)(\lambda+1)}{(3\lambda-1)(\lambda+1)} = \frac{2(\lambda-1)}{3\lambda-1},$$

$$y=\frac{(\lambda-1)^2+4\lambda}{-(\lambda+1)(3\lambda-1)}=\frac{(\lambda+1)^2}{-(\lambda+1)(3\lambda-1)}=-\frac{\lambda+1}{3\lambda-1}.$$

β΄). Ἐὰν $(\lambda+1)(3\lambda-1)=0$, δηλαδὴ ἢ $\lambda=-1$ ἢ $\lambda=\frac{1}{3}$, τότε:

Διὰ $\lambda=-1$, τὸ σύστημα γίνεται: $\left|\begin{array}{l}x+y=1\\x+y=1\end{array}\right.$ ἢ $x+y=1$ καὶ ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις, τάς:

$$\left|\begin{array}{l}x=\mu\\y=1-\mu\end{array}\right. \quad (\mu \text{ αὐθαίρετος}).$$

Διὰ $\lambda=\frac{1}{3}$, τὸ σύστημα ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left|\begin{array}{l}-\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}y=-2\\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3}y=-\frac{2}{3}\end{array}\right. \quad \text{ἢ} \quad \left|\begin{array}{l}x-y=3\\x-y=-1,\end{array}\right.$$

τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει οὐδεμίαν λύσιν, καθόσον αἱ ἐξισώσεις του εἶναι **ἀσυμβίβαστοι.**

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll}\boldsymbol{\lambda x+y=2\lambda} & (1)\\ \boldsymbol{x+\lambda y=\lambda+1.} & (2)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν $y=2\lambda-\lambda x$, ὁπότε ἡ (2) γίνεται:

$$x+\lambda(2\lambda-\lambda x)=\lambda+1 \quad \text{ἢ} \quad x(1-\lambda^2)=-2\lambda^2+\lambda+1$$

ἢ τέλος:
$$(1-\lambda^2)x=(1-\lambda)(2\lambda+1)$$

καὶ τὸ σύστημα ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left|\begin{array}{ll}y=2\lambda-2\lambda x & (3)\\ (1-\lambda^2)x=(1-\lambda)(2\lambda+1). & (4)\end{array}\right.$$

Διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις:

α΄). Ἐὰν $1-\lambda^2\neq 0$, δηλαδή, ἐὰν $\lambda\neq\pm 1$, τότε θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$x=\frac{(1-\lambda)(2\lambda+1)}{1-\lambda^2}=\frac{2\lambda+1}{1+\lambda}$$

καὶ
$$y=2\lambda-\frac{\lambda(2\lambda+1)}{1+\lambda}=\frac{2\lambda(\lambda+1)-\lambda(2\lambda+1)}{1+\lambda}=\frac{\lambda}{1+\lambda},$$

αἱ ὁποῖαι τιμαὶ εἶναι λύσις μοναδικὴ τοῦ συστήματος.

β΄). Ἐὰν $1-\lambda^2=0$, δηλαδὴ $\lambda=1$ ἢ $\lambda=-1$, τότε θὰ ἔχωμεν:

Διὰ μὲν $\lambda=-1$, ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x γίνεται $0\cdot x=-2$, ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος, διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x, ὁπότε καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Διὰ δὲ $\lambda=1$, ἡ ἐξίσωσις γίνεται $0\cdot x=0$ καὶ ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x=\nu$. Ἄρα $y=2-x=2-\nu$ καὶ τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, τάς:

$$\left|\begin{array}{l}x=\nu\\y=2-\nu\end{array}\right. \quad (\nu \text{ αὐθαίρετος}).$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\left|\begin{array}{l}\lambda x+y=3\\x+3y=\nu\end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l}\lambda x+3y=8\\2x+y=5\end{array}\right.$ **3.** $\left|\begin{array}{l}2x-3y=5\\(\lambda-3)x+\lambda y=\lambda-1\end{array}\right.$

**4.** $\begin{cases} (\lambda-4)x-2y=3 \\ x-(\lambda-3)y=\lambda-2 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x+\lambda y=\lambda-1 \\ x-\lambda y=\lambda^2-1 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} (\lambda-1)x+2y=5 \\ 2x+(\lambda-1)y=1 \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} (\lambda-1)x+2y=1 \\ (\lambda-1)x+\lambda y=1 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} \lambda x+\lambda^2 y=\lambda-1 \\ 2x+4y=4\lambda-7 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} (\lambda-1)x+3y=0 \\ 3x+(\lambda-1)y=\lambda+2 \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} \lambda^2 x+y=\lambda+1 \\ x+\lambda^2 y=2 \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} (\lambda-2)x+3y=0 \\ (\lambda-2)x+(\lambda-1)y=5 \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda-2)y=3\lambda-1 \\ (\lambda^2-1)x+(\lambda^2-4)y=5\lambda+1 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} (\lambda-1)x+(\lambda^2-1)y=\lambda^3-1 \\ 2x+3y=5 \end{cases}$

**14.** $\begin{cases} (\lambda^2-1)x+(2\lambda-1)y=\lambda^2 \\ (\lambda+1)x+(\lambda+1)y=3\lambda-2 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} (\lambda-4)x+8y=\lambda+4 \\ (\lambda-2)x+(3\lambda+4)y=2 \end{cases}$

**16.** $\begin{cases} (2\lambda^2-\lambda-1)x+(4\lambda+2)y=2\lambda^2+5\lambda+2 \\ (4\lambda^2-1)x+(2\lambda+1)y=2\lambda^3+\lambda^2-2\lambda+1. \end{cases}$

**Β.** Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\begin{cases} x+\alpha y=9 \\ \alpha x+y=\beta \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \alpha x+\beta y=\gamma \\ \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\dfrac{1}{\gamma} \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=1 \\ \dfrac{x}{\beta}-\dfrac{y}{\alpha}=1 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}=\alpha^2\beta \\ \dfrac{x}{\alpha^2}+\dfrac{y}{\beta^2}=-\beta^2 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha-\beta} \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{1}{\alpha+\beta}=0 \end{cases}$

**6.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{\alpha+\beta}-\dfrac{x-y}{\alpha-\beta}=\dfrac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} \\ \dfrac{x}{\alpha+\beta}-\dfrac{y}{\alpha-\beta}=\dfrac{4\alpha\beta}{\beta^2-\alpha^2} \end{cases}$ **7.** $\begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{\beta}+\dfrac{y-\beta}{\alpha}=0 \\ \dfrac{x+y-\beta}{\alpha}+\dfrac{x-y-\alpha}{\beta}=0 \end{cases}$

**8.** $\begin{cases} \dfrac{x}{\alpha+\beta}+\dfrac{y}{\beta-\beta}=2 \\ \alpha x-\beta y=\alpha^2+\beta^2 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \dfrac{x-y}{\alpha-\beta}+\dfrac{x}{2\alpha}=3 \\ \dfrac{x-\alpha}{2}-y=\dfrac{\alpha}{2}-2\beta \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2\alpha+\beta}+\dfrac{x-y}{2\alpha-\beta}=4 \\ x-2y=4(\alpha-\beta) \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{x}{\beta}-\dfrac{x-y}{\alpha+\beta}=\alpha \\ \dfrac{y}{\alpha}-\dfrac{x-y}{\beta-\alpha}=-\beta. \end{cases}$

**12.** Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} 2(2x-3y+1)^2+(x+y-2)^2=275 \\ (2x-3y+1)^2-(x+y-2)^2=-200 \end{cases}$$

**13.** Δίδεται τὸ σύστημα: $\begin{cases} \lambda x+2y=3 \\ (\lambda-1)x+3y=2 \end{cases}$

καὶ ζητεῖται διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ εἶναι: $x>0$ καὶ $y>0$.

**14.** Ὁμοίως διὰ τὰ συστήματα:

1. $\left|\begin{array}{l} \lambda x-y=2-\lambda \\ \lambda x+5y=8-\lambda \end{array}\right.$ 2. $\left|\begin{array}{l} x+2y=3\lambda \\ 2x-y=\lambda-1 \end{array}\right.$ 3. $\left|\begin{array}{l} x-\lambda y=7 \\ 2x+(\lambda-6)y=1 \end{array}\right.$

4. $\left|\begin{array}{l} (1-\lambda)x+y=1+2\lambda \\ (1+\lambda)x-2y=1-2\lambda \end{array}\right.$ 5. $\left|\begin{array}{l} \lambda^2(x+y)+\lambda(x-2y)=1 \\ \lambda^2(x+y)+\lambda(2x-y)=2. \end{array}\right.$

**15.** Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ συστήματα:

1. $\left|\begin{array}{l} (\alpha^2-\beta^2)x+(\alpha^2+\beta^2)y=\alpha^2 \\ (\alpha^3-\beta^3)x+(\alpha^3+\beta^3)y=\alpha^3 \end{array}\right.$ 2. $\left|\begin{array}{l} (\lambda^2+1)x+(\lambda+1)y=\lambda-1 \\ (\lambda^2-1)x+(\lambda-1)y=\lambda+1 \end{array}\right.$

3. $\left|\begin{array}{l} \lambda(x+y)+\lambda^2(2x-3y-2)=\lambda+3 \\ (\lambda-\lambda^2)x+\lambda(y-1)=2\lambda^2(x-y)-3\lambda^2-2. \end{array}\right.$

**201. Ἕτερος τρόπος διερευνήσεως τοῦ συστήματος.** Ἔστω πρὸς ἐπίλυσιν τὸ πρωτοβάθμιον σύστημα.

$$\left|\begin{array}{ll} \alpha x+\beta y=\gamma & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1. & (2) \end{array}\right.$$

Εἰς τὴν § 200 εὕρομεν τὰς διαφοράς:

$$\alpha\beta_1-\alpha_1\beta, \quad \gamma\beta_1-\gamma_1\beta \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma, \qquad (A)$$

τὰς ὁποίας, κατὰ συνθήκην, γράφομεν ἀντιστοίχως ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

καὶ τὰς καλοῦμεν ***ὁριζούσας τῶν συντελεστῶν.***

Ἑκάστη τῶν διαφορῶν (A) καλεῖται ***ἀνάπτυγμα*** τῆς ἀντιστοίχου ὁριζούσης ἐκ τῶν (3).

Οἱ συντελεσταὶ $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ καλοῦνται ***στοιχεῖα τῆς ὁριζούσης.*** Ἐπειδὴ δὲ τὰ στοιχεῖα ἑκάστης τῶν ὁριζουσῶν (3) εἶναι διατεταγμένα εἰς δύο ὁριζοντίας γραμμὰς καὶ δύο κατακορύφους στήλας, αἱ ἐν λόγῳ ὁρίζουσαι καλοῦνται ***ὁρίζουσαι δευτέρας τάξεως*** ἢ ***δευτέρου βαθμοῦ.***

Ὥστε, θὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta, \quad \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}=\gamma\beta_1-\gamma_1\beta, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}=\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=14-15=-1, \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -5 \end{vmatrix}=(-4)(-5)-2\cdot 6=20-12=8.$$

Ἑπομένως θὰ ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα:

α΄). Ἐὰν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}\neq 0$, ἔχομεν: $x=\dfrac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}, \quad y=\dfrac{\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}.$ (4)

Δηλαδή, παρονομαστὴς εἶναι ἡ ὁρίζουσα τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων καὶ ἕκαστος ἀριθμητὴς προκύπτει, ἂν εἰς τὸν παρονομαστὴν ἀντικατασταθοῦν οἱ συντελεσταὶ τοῦ ἀγνώστου ὑπὸ τῶν γνωστῶν ὅρων, εὑρισκομένων εἰς τὸ δεύτερον μέλος.

β'). Ἐὰν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} = 0$ καὶ μία ἐκ τῶν (3) εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

γ'). Ἐὰν καὶ αἱ τρεῖς ἐκ τῶν (3) εἶναι μηδέν, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ἀπείρους λύσεις, ἐκτὸς τῆς περιπτώσεως:

$\alpha=\beta=\alpha_1=\beta_1=0$ καὶ $\gamma$ ἢ $\gamma_1 \neq 0$, ὁπότε εἶναι ἀδύνατον.

Ἡ κατὰ τὸν τοιοῦτον τρόπον ἐπίλυσις συστημάτων τοῦ α' βαθμοῦ μὲ δύο ἀγνώστους καλεῖται ***Κανὼν τοῦ Cramer.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left| \begin{array}{l} 2x+7y=10 \\ 4x+14y=9. \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 9 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}=\frac{140-63}{28-28}=\frac{77}{0} \quad \text{ἀδύνατον.}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 14 \end{vmatrix}}=\frac{18-40}{28-28}=\frac{-22}{0} \quad \text{ἀδύνατον.}$$

Ἄρα τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left\{ \begin{array}{l} 9x+2y=17 \\ 6x+5y=-7. \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 17 & 2 \\ -7 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{85+14}{45-12}=\frac{99}{33}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 9 & 17 \\ 6 & -7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{-63-102}{45-12}=\frac{-165}{33}=-5.$$

Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει μίαν μοναδικὴν λύσιν, τήν: $(x, y)=(3, -5)$.

3ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left\{ \begin{array}{l} 3y+4y=8 \\ 6x+8y=16 \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 16 & 8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{64-64}{24-24}=\frac{0}{0} \quad \text{ἀόριστον}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 16 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}}=\frac{48-48}{24-24}=\frac{0}{0} \quad \text{ἀόριστον}$$

Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις.

**202. Σύστημα δύο ὁμογενῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους.**

Ἔστω τὸ σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=0 & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=0. & (2) \end{cases}$$

Διὰ νὰ διερευνήσωμεν τὸ σύστημα τοῦτο, ἀρκεῖ νὰ ἐνθυμηθῶμεν τὰ ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὴν § 200. Ἐνταῦθα ὅμως παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\gamma\beta_1-\gamma_1\beta=0 \quad \text{καὶ} \quad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma=0,$$

καθόσον εἶναι $\gamma=0$ καὶ $\gamma_1=0$.

α'). Ὑποθέτομεν ὅτι $\alpha\beta\alpha_1\beta_1\neq 0$. Ἐὰν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$, τὸ σύστημα ἐπιδέχεται ***μίαν μόνον λύσιν***, τήν:

$$x=\frac{0}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=0 \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{0}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=0.$$

β'). Ἐὰν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=0$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$x=\frac{0}{0} \text{ ἀόριστον} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{0}{0}=0 \text{ ἀόριστον}.$$

Οὕτω, ἐὰν $\alpha\neq 0$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις δίδει:

$$x=-\frac{\beta y}{\alpha},$$

καὶ ἡ δευτέρα γράφεται:

$$\alpha_1\left(-\frac{\beta y}{\alpha}\right)+\beta_1 y=0 \quad \text{ἢ} \quad y(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0 \quad \text{ἢ} \quad y\cdot 0=0,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ ***κάθε y αὐθαίρετον***.

Ὥστε, τὸ σύστημα ἔχει ἀπείρους λύσεις, τάς:

$$\left| \begin{array}{l} x=-\dfrac{\beta y}{\alpha} \\ y=k \text{ αὐθαίρετον} \end{array} \right. \quad \text{ἢ} \quad \left| \begin{array}{l} x=-\dfrac{\beta k}{\alpha} \\ y=k \text{ αὐθαίρετος}. \end{array} \right.$$

Δηλαδὴ τὸ σύστημα εἶναι ***μερικῶς ἀόριστον***.

γ'). Ἐὰν $\alpha=\beta=\alpha_1=\beta_1=0$, τὸ σύστημα γίνεται:

$$\left| \begin{array}{l} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ 0\cdot x+0\cdot y=0, \end{array} \right.$$

καὶ τὸ σύστημα εἶναι ***ὁλικῶς ἀόριστον***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left| \begin{array}{ll} \mathbf{2x-3y=0} & (1) \\ \mathbf{4x+5y=0.} & (2) \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Τοῦτο, προφανῶς, εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό:

$$\left| \begin{array}{l} -4x+6y=0 \\ 4x+5y=0, \end{array} \right. \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad 11y=0 \quad \text{ἢ} \quad y=0.$$

Διὰ $y=0$, ἡ (1) δίδει $x=0$. Ἄρα τὸ σύστημα ἔχει τὴν μοναδικὴν λύσιν $x=0$, $y=0$, διότι: $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta=(-4)5-4\cdot 6=-20-24=-44\neq 0$.

**203. Συστήματα μ+ν ἐξισώσεων μὲ μ ἀγνώστους.** Ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν ἐξισώσεων εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀγνώστων, τότε, πρὸς ἐπίλυσιν τοῦ συστήματος τούτου, ἐκλέγομεν δύο ἐξισώσεις, τὰς ἁπλουστέρας, καὶ λύομεν τὸ ὑπὸ τούτων ἀποτελούμενον σύστημα ὡς πρὸς x καὶ y. Αἱ τιμαὶ αὗται πρέπει νὰ ἐπαληθεύουν καὶ τὰς ὑπολοίπους ἐξισώσεις τοῦ προβλήματος, ἄλλως τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύστημα εἶναι ***συμβιβαστόν***, ἄλλως ***ἀδύνατον***.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} 3x+7y=41 & (1)\\ 6x-2y=2 & (2)\\ x+4y=22. & (3)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Διὰ μιᾶς τῶν γνωστῶν μεθόδων, λύομεν τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3) καὶ εὑρίσκομεν: $x=2$, $y=5$.

Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν ἐξίσωσιν (1), ἕπεται ὅτι αἱ τρεῖς ἐξισώσεις ἀποτελοῦν σύστημα συμβιβαστόν.

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} x+3y=7 & (1)\\ 2x-5y=-8 & (2)\\ 4x+9y=15. & (3)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) εὑρίσκομεν: $x=1$, $y=2$. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἐπαληθεύουν καὶ τὴν (3), τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον ἢ θὰ λέγωμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις του εἶναι *ἀσυμβίβαστοι*.

3ον: **Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} \lambda x-6y=2\lambda+4 & (1)\\ 6x-(\lambda-1)y=4 & (2)\\ y=2x & (3)\end{array}\right.$$

**εἶναι συμβιβαστόν.**

***Λύσις:*** Διὰ $y=2x$ αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$$\left|\begin{array}{l}\lambda x-12x=2\lambda+4\\ 6x-2(\lambda-1)x=4\end{array}\right. \quad ἢ \quad \left|\begin{array}{l}(\lambda-12)x=2\lambda+4\\ (8-2\lambda)x=4\end{array}\right. \quad ἢ \quad \left|\begin{array}{l}(\lambda-12)x=2\lambda+4\\ (4-\lambda)x=2.\end{array}\right.$$

Ἐὰν $x\neq 0$, καὶ $\lambda\neq 4$, διὰ διαιρέσεως τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$\frac{\lambda-12}{4-\lambda}=\frac{2\lambda+4}{2}, \quad ἢ \quad \lambda^2-\lambda-20=0 \quad ἢ \quad (\lambda-5)(\lambda+4)=0.$$

ἐξ οὗ: $\lambda=5$ καὶ $\lambda=-4$.

α΄). Διὰ $\lambda=5$, τὸ σύστημα καταντᾷ:

$$5x-6y=14, \quad 6x-4y=4, \quad y=2x. \qquad (4)$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις δίδουν: $x=-2$ καὶ $y=-4$. Ἐπειδὴ δὲ αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν καὶ τὴν πρώτην, τὸ σύστημα (4) εἶναι συμβιβαστόν.

β΄). Διὰ $\lambda=-4$, τὸ σύστημα καταντᾷ:

$$-4x-6y=-4, \quad 6x+5y=4, \quad y=2x. \qquad (5)$$

Τὸ σύστημα τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων δίδει: $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$. Ἐπειδὴ αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν καὶ τὴν πρώτην τῶν (5), τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστόν.

4ον: **Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α καὶ β, ἵνα τὸ σύστημα $x-2y=\beta$, $2x-y=\alpha$, $(2\alpha+\beta)x+(\alpha+2\beta)y=\alpha-\beta$, εἶναι συμβιβαστόν:**

*Λύσις:* Αἱ δύο πρῶται ἐξισώσεις δίδουν:

$$x=\frac{2\alpha-\beta}{3} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha-2\beta}{3},$$

αἵτινες, τιθέμεναι εἰς τὴν τρίτην ἐξίσωσιν, δίδουν:

$$(2\alpha+\beta)\cdot\frac{2\alpha-\beta}{3}+(\alpha+2\beta)\cdot\frac{\alpha-2\beta}{3}=\alpha-\beta \qquad (1)$$

ἢ $$4\alpha^2-\beta^2+\alpha^2-4\beta^2=3(\alpha-\beta) \quad \text{ἢ} \quad 5(\alpha^2-\beta^2)=3(\alpha-\beta),$$

καὶ ἐὰν $\alpha\neq\beta$, ἕπεται ὅτι: $5(\alpha+\beta)=3$.

Ἐὰν δὲ $\alpha=\beta$, τὸ σύστημα καταντᾷ:

$$\left|\begin{array}{l} x-2y=\beta \\ 2x-y=\beta \\ \beta x+\beta y=0 \end{array}\right., \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x=\frac{\beta}{3} \quad \text{καὶ} \quad y=-\frac{\beta}{3},$$

αἵτινες ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν. Ἄρα τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστόν.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Ποῖον ἐκ τῶν ἀκολούθων συστημάτων εἶναι ἀδύνατον καὶ ποῖον ἀόριστον;

**1.** $\left|\begin{array}{l} x-2y=3 \\ 3x-6y=9 \end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l} y-x=0 \\ 3x=3y+7 \end{array}\right.$ **3.** $\left|\begin{array}{l} 7x-5=6y+3 \\ y+7x=7y+12 \end{array}\right.$

**4.** $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{y+2}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x+3}{y-2}=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right.$ **5.** $\left|\begin{array}{l} 3x-2y=5 \\ x-3y=4 \\ 7x+5y=2 \end{array}\right.$ **6.** $\left|\begin{array}{l} 4x-3y=11 \\ 4x+7y=1 \\ 4x+2y=6 \end{array}\right.$

**7.** $\left|\begin{array}{l} 5x-2y=7 \\ 10x+3y=7 \\ x-5y=7 \end{array}\right.$ **8.** $\left|\begin{array}{l} 2(x+y)=5 \\ 3(x+y)=1 \end{array}\right.$ **9.** $\left|\begin{array}{l} 3x+2y=4 \\ \dfrac{x+3}{x-2}=\dfrac{y+2}{y+1} \end{array}\right.$

**10.** Ἐὰν τὸ σύστημα:

$$\alpha x+\beta y=1, \quad \beta x+\alpha y=\alpha\beta, \quad x+y=\alpha+\beta,$$

εἶναι συμβιβαστόν, ποία σχέσις συνδέει τὰ α, β, γ:

**11.** Τὸ αὐτὸ διὰ τὸ σύστημα:

$$\lambda x+\beta y=\gamma+\beta\mu, \quad \alpha y-\beta x=\alpha\beta, \quad 3\beta x+\alpha y=5\alpha\beta.$$

**Β.** Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα τὰ ἀκόλουθα συστήματα εἶναι ἀδύνατα ἢ ἀόριστα.

**1.** $\left|\begin{array}{l} \lambda x+y=5 \\ x-3=3 \end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l} \lambda x-y=1 \\ 10x-2y=\lambda-3 \end{array}\right.$ **3.** $\left|\begin{array}{r} (\lambda-1)x-3y=1 \\ \lambda x+y=0 \end{array}\right.$

**4.** $\left|\begin{array}{l} 2x+(\lambda-5)y=5 \\ 4x-3\lambda y=5\lambda \end{array}\right.$ **5.** $\left|\begin{array}{l} \lambda x-3y=5\lambda-3 \\ 2x+(\lambda-7)y=29-7\lambda \end{array}\right.$

**6.** $\left|\begin{array}{l} x+(5\lambda-4)y=\lambda \\ (2\lambda+1)x+(\lambda-4)y=2\lambda \end{array}\right.$ **7.** $\left|\begin{array}{l} x-\lambda y=\dfrac{3}{\lambda^2-4\lambda+3} \\ 4(\lambda-3)x-8\lambda y=3. \end{array}\right.$

**Γ.** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ ἀκόλουθα συστήματα ἐπιδέχονται μίαν μόνον λύσιν καὶ νὰ εὑρεθῇ αὕτη.

1. $\left| \begin{array}{l} x+12=0 \\ \lambda x+6=0 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} \lambda x+2=0 \\ (\lambda-1)x+4=0 \end{array} \right.$ 3. $\left| \begin{array}{l} (\lambda+2)x=-3 \\ \lambda x=\lambda-2 \end{array} \right.$

**Δ.** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ τὰ ἀκόλουθα συστήματα ἐπιδέχονται μίαν μόνον λύσιν καὶ νὰ εὑρεθῇ αὕτη :

1. $\left| \begin{array}{l} x+2y=1 \\ \lambda x-y=4 \\ x-3y=6 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} x-3y=8 \\ 2x+y=2 \\ x-\lambda y=2 \end{array} \right.$ 3. $\left| \begin{array}{r} x+(\lambda+1)y=10 \\ 2x-(4\lambda+1)y=5 \\ x-y=6. \end{array} \right.$

**Ε.** 5. Ποίας τιμὰς πρέπει νὰ λάβουν οἱ α καὶ β, ἵνα τὰ ἀκόλουθα συστήματα ἔχουν μίαν μόνον λύσιν, καὶ νὰ εὑρεθῇ αὕτη.

1. $\left| \begin{array}{l} 2x=6 \\ \alpha x=\beta x+8 \\ \beta x=\alpha \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} \alpha x=\beta-1 \\ \beta x=2\alpha+1 \\ x+1=0 \end{array} \right.$ 3. $\left| \begin{array}{l} 4x+y=21 \\ \alpha x+\beta y=13 \\ -2x+2y=-3 \\ 3\alpha x-2\beta y=24 \end{array} \right.$

**ΣΤ.** Πῶς πρέπει νὰ συνδέωνται οἱ α καὶ β, ἵνα τὸ σύστημα :

$$x-\alpha y-\beta=0, \quad y+\alpha x-\gamma=0, \quad \beta x+\gamma y=1,$$

εἶναι συμβιβαστόν ;

**Ζ.** Ὁμοίως διὰ τὸ σύστημα :

$$x-y=5, \quad x+y=\alpha, \quad (\alpha+5)x+(\alpha-5)y=\beta.$$

**Η.** Ὁμοίως διὰ τὸ σύστημα :

$$x-\alpha y=2, \quad x+\beta y=3, \quad (\alpha+\beta)(x-y)=\alpha+2\gamma-1.$$

**Θ.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, διὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα :

$$x+2y=0, \quad \alpha x+\beta y=0,$$

ἔχει λύσιν διάφορον τῆς μηδενικῆς.

### 204. Γραμμικαὶ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς : $\alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta$.

Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν :

$$3x+y+\omega=12. \qquad (1)$$

Ἄν $x=\lambda$, $y=\mu$ εἶναι δύο αὐθαίρετοι τιμαί, τότε, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1), θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι $\omega=12-3\lambda-\mu$.

Κατ' ἀκολουθίαν, ἡ τριάς :

(2) $\left| \begin{array}{l} x=\lambda \\ y=\mu \\ \omega=12-3\lambda-\mu \end{array} \right|$ εἶναι μία λύσις τῆς ἐξισώσεως (1). Οὕτω, διὰ $\lambda=1$, $\mu=-2$, θὰ εἶναι : $x=1$, $y=-2$, $\omega=12-3+2=11$.

Ἄρα ἡ τριὰς $(1, -2, 11)$ εἶναι μία λύσις τῆς (1).

Ὁμοίως, διὰ $\lambda=0$, $\mu=-1$, θὰ εἶναι $\omega=12+1=13$ καὶ ἡ τριὰς $(0, -1, 13)$ εἶναι ἄλλη λύσις τῆς (1).

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχει ἀπείρους λύσεις, αἱ ὁποῖαι δίδονται ἀπὸ τοὺς **τύπους** (2), δι' αὐθαιρέτους πραγματικὰς τιμὰς **τῶν** λ καὶ μ.

### 205. Γραμμικὰ συστήματα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους.

Θεωροῦμεν τὰς γραμμικὰς ἐξισώσεις :

$$A=0, \quad B=0, \quad \Gamma=0, \qquad (1)$$

καὶ τὴν ἐξίσωσιν $\lambda A+\mu B+\nu\Gamma=0$, ἡ ὁποία προκύπτει ἐκ τῶν (1), διὰ πολλαπλασιασμοῦ ἑκάστης τούτων ἐπὶ $\lambda, \mu, \nu$ ἀντιστοίχως $(\lambda\mu\nu\neq0)$, καὶ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν γινομένων τούτων. Ἡ ἐξίσωσις:

$$\lambda A+\mu B+\nu\Gamma=0, \tag{2}$$

ὀνομάζεται ***γραμμικὸς συνδυασμὸς*** τῶν ἐξισώσεων (1).

Οἱ $\lambda, \mu, \nu$ λέγονται ***συντελεσταί.***

Ἐὰν μίαν τῶν ἐξισώσεων (1), ἔστω τὴν τρίτην, ἀντικαταστήσωμεν διὰ τῆς (2), λαμβάνομεν σύστημα ἰσοδύναμον, τό:

$$(3)\quad \left|\begin{array}{r} A=0 \\ B=0 \\ \lambda A+\mu B+\nu\Gamma=0 \end{array}\right|$$

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὸ σύστημα (3) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ (1), ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν § 193.

**206. Σύστημα ν ἐξισώσεων μὲ ν ἀγνώστους τοῦ πρώτου βαθμοῦ.** Πρὸς ἐπίλυσιν τῶν τοιούτων συστημάτων ἀπαλείφομεν ἕνα ἄγνωστον μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος καὶ ἀντικαθιστῶμεν τὸ σύστημα μὲ ἄλλο ἰσοδύναμον ἐκ ν ἐξισώσεων, καὶ τοῦ ὁποίου ν—1 ἐξισώσεις δὲν περιέχουν τὸν ἄγνωστον τοῦτον.

Πρὸς τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν τὰς γνωστὰς μεθόδους ἐπιλύσεως ἑνὸς γραμμικοῦ συστήματος μὲ δύο ἀγνώστους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{array}{r|r|l} & 1 & \mathbf{2x-y+3\omega=7} \quad (1) \\ 3 & -2 & \mathbf{x-2y+4\omega=3} \quad (2) \\ -1 & & \mathbf{3x-7y+8\omega=3.} \quad (3) \end{array}$$

***Λύσις:*** Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν (1) καὶ (2), πολλαπλασιάζοντες τὴν (1) ἐπὶ 1 καὶ τὴν (2) ἐπὶ —2 καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+3\omega=7 \\ -2x+4y-8\omega=-6 \end{array}\right\}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη εὑρίσκομεν:

$$3y-5\omega=1. \tag{4}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν x μεταξὺ τῶν (2) καὶ (3), πολλαπλασιάζοντες τὴν (2) ἐπὶ 3 καὶ τὴν (3) ἐπὶ —1 καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-6y+12\omega=9 \\ -3x+7y-8\omega=-3 \end{array}\right\}.$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$y+4\omega=6. \tag{5}$$

Ἔχομεν οὕτω νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left|\begin{array}{rl} x-2y+4\omega=3 & \quad (2) \\ 3y-5\omega=1 & \quad (4) \\ y+4\omega=6 & \quad (5) \end{array}\right.$$

Μεταξὺ τῶν (4) καὶ (5) ἀπαλείφομεν τὸν y, πολλαπλασιάζοντες τὴν (4) ἐπὶ 1 καὶ τὴν (5) ἐπὶ $-3$ καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{r} 3y-5\omega=1 \\ -3y-12\omega=-18 \end{array}\right|.$$

Διὰ προσθέσεως δὲ τούτων κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$-17\omega=-17, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \omega=1. \qquad (6)$$

Ἔχομεν οὕτω τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left|\begin{array}{rr} x-2y+4\omega=3 & (2) \\ y+4\omega=6 & (5) \\ \omega=1. & (6) \end{array}\right.$$

Ἕνεκα τῆς (6), ἡ (5) γίνεται: $y+4=6$, ἐξ οὗ: $y=2$.
Κατ' ἀκολουθίαν ἡ (2) γίνεται: $x-4+4=3$, ἐξ οὗ: $x=3$.
Ἄρα ἡ λύσις τοῦ δοθέντος συστήματος εἶναι:

$$\mathbf{x=3, \quad y=2, \quad \omega=1.}$$

Τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐλύθη διὰ τῆς μεθόδου τῆς ***ἀπαλοιφῆς*** διὰ προσθέσεως.

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{lr} \mathbf{x-y-\omega=6} & (1) \\ \mathbf{x-2y-3\omega=10} & (2) \\ \mathbf{5x+6y+\omega=2}. & (3) \end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Λύομεν τὴν ἐξίσωσιν (1) ὡς πρὸς x καὶ ἔχομεν:

$$x=y+\omega+6. \qquad (4)$$

Τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὰς (2) καὶ (3) καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{r} y+\omega+6-2y-3\omega=10 \\ 5(y+\omega+6)+6y+\omega=2 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y-2\omega=4 \\ 11y+6\omega=-28. \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} (5) \\ (6) \end{array}$$

Λύομεν τὴν (5) ὡς πρὸς y καὶ ἔχομεν:

$$y=-2\omega-4, \qquad (7)$$

καὶ τὴν τιμὴν ταύτην ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (6) καὶ ἔχομεν:

$$11(-2\omega-4)+6\omega=-28 \quad \text{ἢ} \quad -16\omega=16, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \omega=-1.$$

Διὰ $\omega=-1$, ἡ (7) δίδει: $y=-2(-1)-4=2-4=-2$.

Διὰ $y=-2$ καὶ $\omega=-1$, ἡ (1) γίνεται:

$$x-(-2)-(-1)=6 \quad \text{ἢ} \quad x=3.$$

Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=3, \quad y=-2, \quad \omega=-1.}$
Τὸ ἀνωτέρω σύστημα ἐλύθη διὰ τῆς μεθόδου τῆς **ἀντικαταστάσεως.**

3ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{lr} \mathbf{x+y+\omega=25} & (1) \\ \mathbf{x-y+\omega=\ 5} & (2) \\ \mathbf{x-2y+2\omega=-10}. & (3) \end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Ὑποθέτομεν ὡς ἀγνώστους τοὺς x καὶ y, ὁπότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\left|\begin{array}{lr} x+y=25-\omega & (4) \\ x-y=\ 5-\omega & (5) \end{array}\right.$$

Διὰ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (5) λαμβάνομεν:

$$\left|\begin{array}{l} 2x=30-2\omega \\ 2x=20 \end{array}\right., \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \left|\begin{array}{lr} x=15-\omega & (6) \\ y=10 & (7) \end{array}\right.$$

Τὰς τιμὰς ταύτας ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (3) καὶ ἔχομεν:

$$15-\omega-2(-10)+2\omega=-10, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \omega=-45.$$

Διὰ $\omega=-45$, ἡ (6) γίνεται: $x=15-(-45)=15+45=60$.

Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=60, \quad y=10, \quad \omega=-45.}$

4ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{l} x+4y-\omega=1 \\ 2x-3y+2\omega=21 \\ x-2y-\omega=-17. \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} (8) \\ (9) \\ (10) \end{array}$$

***Λύσις***: Λύομεν καὶ τὰς τρεῖς ἐξισώσεις τοῦ συστήματος ὡς πρὸς x.

$$\begin{array}{l} x=1-4y+\omega \\ x=\dfrac{21+3y-2\omega}{2} \\ x=-17+2y+\omega \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{Ἄρα θὰ εἶναι καί:} \\ 1-4y+\omega=\dfrac{21+3y-2\omega}{2} \\ 1-4y+\omega=-17+2y+\omega \end{array} \right\} \text{ ἢ } \begin{array}{l} 11y-4\omega=-19 \\ y=3 \end{array} \quad (11)$$

Διὰ $y=3$, ἡ πρώτη τῶν (11) γίνεται: $11\cdot3-4\omega=-19$, ἐξ οὗ: $\omega=13$.

Διὰ $y=3$ καὶ $\omega=13$, ἡ (10) γίνεται:

$$x-2\cdot3-13=-17, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x=2.$$

Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=2, \quad y=3, \quad \omega=13.}$

Ἡ μέθοδος, μὲ τὴν ὁποίαν ἐλήφθη τὸ σύστημα τοῦτο, ὀνομάζεται μέθοδος τῆς *συγκρίσεως*, ἐφαρμόζεται δὲ καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ σύστημα ἔχει ν ἐξισώσεις μὲ ν ἀγνώστους.

5ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left\{\begin{array}{l} x+2y+\omega-2\varphi=2 \\ 3x-3y-2\omega+2\varphi=1 \\ 2x+y+3\omega-\varphi=10 \\ 4x-y-\omega+3\varphi=0 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c|c|c} 3 & 2 & 4 \\ -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array}$$

***Λύσις***: Ἀπαλείφομεν τὸν x, τῇ βοηθείᾳ τῶν συντελεστῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀναγεγραμμένοι δεξιὰ ἐντὸς τῶν κατακορύφων στηλῶν καὶ λαμβάνομεν σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους, τό:

$$\left|\begin{array}{l} 9y+5\omega-8\varphi=5 \\ 3y-\omega-3\varphi=-6 \\ 9y+5\omega-11\varphi=8 \end{array}\right. \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ -3 & -3 \\ & 1 \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} (5) \\ (6) \\ (7) \end{array}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὰς ἐξισώσεις (2), (3) καὶ (4).

Ἤδη, εἰς τὸ σύστημα τοῦτο ἀπαλείφομεν τὸν y, τῇ βοηθείᾳ τῶν δεξιὰ ἀναγεγραμμένων συντελεστῶν καὶ λαμβάνομεν τὸ σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} 8\omega+\varphi=23 \\ 4\omega-\varphi=13, \end{array}\right. \quad \begin{array}{r} (8) \\ (9) \end{array}$$

τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ἀντικαταστήσῃ τὰς ἐξισώσεις (5) καὶ (7).

Μένει λοιπὸν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} x+2y+\omega-2\varphi=2 \\ \quad 3y-\omega-3\varphi=-6 \\ \qquad 8\omega+\varphi=23 \\ \qquad 4\omega-\varphi=13 \end{array}\right.$$

Αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τούτου δίδουν: $\omega=3$, $\varphi=-1$.
Διὰ $\omega=3$ καὶ $\varphi=-1$, ἡ (6) δίδει $y=-2$.
Διὰ $y=-2$, $\omega=3$, $\varphi=-1$, ἡ (1) δίδει: $x=1$.
Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=1,\ y=-2,\ \omega=3,\ \varphi=-1.}$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα.

**1.** $\begin{cases} 4x+3y+6\omega=41 \\ 8x+5y=31 \\ 7y=21 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 2x-3y+2\omega=41 \\ 5x+3y=10-\omega \\ 9x=27 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} 7x-4y-5\omega=56 \\ 3y-2\omega=13 \\ 5x-3y=22 \end{cases}$

**4.** $\begin{cases} 6x-y-3\omega=38 \\ 5x-2y+\omega=24 \\ 3x+5\omega=28 \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} x-y-\omega=6 \\ x-2y-3\omega=10 \\ 5x+6y+\omega=2 \end{cases}$ **6.** $\begin{cases} 3\omega-2y-x=18 \\ 2y+3\omega-2x=36 \\ 5x+2y-\omega=10 \end{cases}$

**7.** $\begin{cases} 3x-y+\omega=29 \\ x+3y+30\omega=6 \\ x-y+\omega=17 \end{cases}$ **8.** $\begin{cases} 3x+y+\omega=0 \\ x-y+9\omega=2 \\ x+4y-\omega=17 \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} 5x+y-2\omega=3 \\ y-15x+6\omega=3 \\ 2\omega+10x-y=0 \end{cases}$

**10.** $\begin{cases} x-\dfrac{4y-3}{3}+\dfrac{\omega-2}{2}=2 \\ \dfrac{x}{5}-\dfrac{3y}{2}+3\omega=22 \\ \dfrac{x-1}{4}-\dfrac{y-1}{5}=\dfrac{\omega-10}{10} \end{cases}$ **11.** $\begin{cases} \dfrac{4x-7}{3}-\dfrac{2(y-2)}{2}=\omega \\ \dfrac{3x}{7}+\dfrac{2y-1}{7}-5\omega=1 \\ \dfrac{2x+y}{5}+\dfrac{\omega}{4}=5\dfrac{1}{4}. \end{cases}$

**12.** $\begin{cases} x+y+\omega+\varphi=10 \\ 2x-y+\omega=3 \\ 4y+3\omega=17 \\ 7y-3\omega=5 \end{cases}$ **13.** $\begin{cases} 2x-y+2\omega-\varphi=20 \\ 5x-2y+\varphi=11 \\ 4x+y-3\varphi=20 \\ 2x-3y+2\varphi=3 \end{cases}$

**14.** $\begin{cases} 5x+y+2\omega+3\varphi=51 \\ 3x-4y+2\omega+\varphi=12 \\ x+4y-\varphi=10 \\ x-2y+4y=27 \end{cases}$ **15.** $\begin{cases} x-y-\omega-\varphi=8 \\ 2x+y+\omega-t=8 \\ y+\omega-t-\varphi=0 \\ \omega+2x-t-y=10 \\ x-3\varphi+2t-3\omega=4 \end{cases}$

**16.** $\begin{cases} x+y-\omega=2 \\ x+\omega-\varphi=2 \\ \omega+\varphi-x=7 \\ \varphi+x-y=8 \end{cases}$ **17.** $\begin{cases} x+y-2\omega+\varphi=0 \\ x+2y+4\omega-5\varphi=43 \\ y+4\omega+3\varphi=17 \\ 5\omega-3\varphi=26 \end{cases}$ **18.** $\begin{cases} x+y+\omega+\varphi=7 \\ 2y-3\omega+\varphi=-12 \\ 3y+4\varphi=22 \\ 4x+3\omega=3. \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} \dfrac{2x-y+\omega}{3x-y+\omega}=\dfrac{5}{7} \\ \dfrac{x-3y+\omega}{y-2\omega-1}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x+y+\omega}{2x-y+\omega+1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ **20.** $\begin{cases} \dfrac{x+2y-3\omega}{13}-4\omega=3(x+2) \\ \dfrac{5x-1}{7}+2y-\omega=33 \\ x+\dfrac{2y+7}{5}-\omega=3x-7 \end{cases}$

**207. Συστήματα ἀδύνατα ἢ ἀόριστα.** 1ον: Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ λύσωμεν τὸ σύστημα:

$$(\mathrm{A})\quad \left|\begin{array}{l|c|c|} x+y+\omega=9 & -1 & 3 \\ x+2y+3\omega=14 & 1 & \\ 3x+2y+\omega=22 & & -1 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Μεταξὺ τῶν (1), (2) καὶ (1), (3) ἀπαλείφομεν τὸν x καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$(\mathrm{B})\quad \left|\begin{array}{r} x+y+\omega=9 \\ y+2\omega=5 \\ y+2\omega=5 \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(4)\\(5)\\(6)\end{array}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ ἐξισώσεις (5) καὶ (6) τοῦ συστήματος (B) εἶναι αἱ αὐταί, καὶ συνεπῶς τὸ σύστημα (B) ἔχει ἀπείρους λύσεις.

2ον: Ἔστω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$(\Gamma)\quad \left|\begin{array}{l} 2x-y+\omega=16 \\ 3x+2y-\omega=5 \\ 9x-y+2\omega=40. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

Ἀπαλείφομεν τὸν ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος τούτου καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$(\Delta)\quad \left|\begin{array}{r} 2x-y+\omega=16 \\ 5x+y=21 \\ 5x+y=\dfrac{50}{3}. \end{array}\right.$$

Ἐπειδὴ αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις τούτου εἶναι ἀσυμβίβαστοι, ἕπεται ὅτι τὸ σύστημα (Δ) εἶναι ἀδύνατον. Ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶναι ἀδύνατον.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\begin{array}{l} x+3y+2\omega=16 \\ 3x-y+7\omega=11 \\ 2x-4y+5\omega=-5 \end{array}$ **2.** $\begin{array}{l} x-5y-2\omega=-10 \\ 4x+y-5\omega=6 \\ 3x+6y-3\omega=8 \end{array}$ **3.** $\begin{array}{l} x+y-\omega=5 \\ 3x-2y+\omega=4. \end{array}$

**208. Ἐπίλυσις συστημάτων δι' εἰδικῶν μεθόδων.** Ἐπειδὴ ἡ ποικιλία τῶν συστημάτων εἶναι πολὺ μεγάλη, δὲν ὑπάρχουν ὡρισμένοι κανόνες ἐπιλύσεως αὐτῶν, ἀλλ' ἀπαιτεῖται εἰδικὸς τρόπος ἐπιλύσεως ἑκάστου. Ἡ κατανόησις τοῦ τρόπου ἐπιλύσεως ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τοῦ συστήματος καὶ ἀπὸ τὴν δεξιοτεχνίαν καὶ τὴν εὐχέρειαν, τὴν ὁποίαν ἔχει ὁ ἀσχολούμενος μὲ τὴν Ἄλγεβραν. Πρὸς πλήρη κατανόησιν ἀναγράφομεν ἐν τοῖς ἀκολούθοις μίαν σειρὰν παραδειγμάτων, ἐκ τῶν συνήθως παρουσιαζομένων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{l} x+y=8 \\ y+\omega=12 \\ \omega+x=10. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{c}(1)\\(2)\\(3)\end{array}$$

***Λύσις:*** Ἐκ τοῦ ἀθροίσματος τῶν (1) καὶ (3) ἀφαιροῦμεν τὴν (2):

$$(x+y)+(\omega+x)-(y+\omega)=10+8-12$$

ἢ $$2x+y+\omega-y-\omega=6, \quad \text{ἐξ οὗ} \quad x=3.$$

Διὰ $x=3$, ἡ (1) γίνεται: $3+y=8$, ἐξ οὗ $y=5$.

Διὰ $x=3$, ἡ (3) γίνεται: $\omega+3=10$, ἐξ οὗ $\omega=7$.

Ὥστε, αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=3, \quad y=5, \quad \omega=7.}$

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} x+y+\omega=9 & (1)\\ y+\omega+\varphi=11 & (2)\\ \omega+\varphi+x=12 & (3)\\ \varphi+x+y=10. & (4)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Θέτομεν $x+y+\omega+\varphi=\lambda$ (5). Ἡ (5), βάσει τῶν (1), (2), (3), (4) γράφεται ἀντιστοίχως:

$$\left|\begin{array}{l} 9+\varphi=\lambda\\ 11+x=\lambda\\ 12+y=\lambda\\ 10+\omega+\lambda\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{array}{l}\varphi=\lambda-9\\ x=\lambda-11\\ y=\lambda-12\\ \omega=\lambda-10\end{array}\left|\begin{array}{ll} & \text{, ὁπότε ἡ (5) γίνεται:}\\ & (\lambda-11)+(\lambda-12)+(\lambda-10)+(\lambda-9)=\lambda\\ \text{ἢ} & 3\lambda=42\\ \text{ἢ} & \lambda=14,\end{array}\right.$$

ὁπότε: $$x=\lambda-11=14-11=3, \qquad y=\lambda-12=14-12=2,$$
$$\omega=\lambda-10=14-10=4, \qquad \varphi=\lambda-9=14-9=5.$$

Ὥστε, αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=3, \ y=2, \ \omega=4, \ \varphi=5.}$

3ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{array}{ll} x+3(y+\omega+\varphi)=28 & (1)\\ y+3(\omega+\varphi+x)=26 & (2)\\ \omega+3(\varphi+x+y)=24 & (3)\\ \varphi+3(x+y+\omega)=22. & (4)\end{array}$$

***Λύσις:*** Θέτομεν $x+y+\omega+\varphi=\lambda$ (5), ὁπότε αἱ ἐξισώσεις τοῦ συστήματος γίνονται ἀντιστοίχως:

$$\begin{array}{l} x+3(\lambda-x)=28\\ y+3(\lambda-y)=26\\ \omega+3(\lambda-\omega)=24\\ \varphi+3(\lambda-\varphi)=22\end{array}\left|\Longrightarrow\right. \begin{array}{ll} x=\dfrac{3\lambda-28}{2} & (1')\\ y=\dfrac{3\lambda-26}{2} & (2')\\ \omega=\dfrac{3\lambda-24}{2} & (3')\\ \varphi=\dfrac{3\lambda-22}{2} & (4')\end{array}$$

ὁπότε ἡ (5) καταντᾷ:

$$\frac{3\lambda-28}{2}+\frac{3\lambda-26}{2}+\frac{3\lambda-24}{2}+\frac{3\lambda-22}{2}=\lambda,$$

ἐξ οὗ: $\lambda=10$.

Διὰ $\lambda=10$, αἱ $(1'),\ldots,(4')$ δίδουν: $\mathbf{x=1, \ y=2, \ \omega=3, \ \varphi=4.}$

4ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{4}=\dfrac{\omega-2}{5} & (1)\\ 2x+3y-4\omega=-7 & (2)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Ἐὰν ἕκαστος τῶν ἴσων λόγων εἶναι λ, θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} x-1=3\lambda \\ y+1=4\lambda \\ \omega-2=5\lambda \end{array}\right| \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+3\lambda \\ y=-1+4\lambda \\ \omega=2+5\lambda \end{array}\right| \quad (3).$$

Ἄρα ἡ (2) γίνεται:

$$2(1+3\lambda)+3(-1+4\lambda)-4(2+5\lambda)=-7,$$

ἐξ οὗ: $\lambda=-1$.

Διὰ $\lambda=-1$, αἱ (3) δίδουν: $x=1+3(-1)=1-3=-2$

$y=-1+4(-1)=-1-4=-5$

$\omega=2+5(-1)=2-5=-3$.

Ὥστε, αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=-2}$, $\mathbf{y=-5}$, $\mathbf{\omega=-3}$.

5ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{7}{12} \quad (1), \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \quad (2), \qquad \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}=\frac{3}{4} \quad (3)$$

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ σύστημα πρέπει $xy\omega\neq0$. Ἡ (1) γράφεται:

$$-\frac{1}{y}-\frac{1}{\omega}=-\frac{7}{12}. \qquad (4)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (2), (3) καὶ (4) λαμβάνομεν:

$$\frac{2}{x}=\frac{5}{6}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{10+9-7}{12}=\frac{12}{12}=1, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x=2.$$

Διὰ $x=2$, αἱ (2) καὶ (3) δίδουν ἀντιστοίχως: $y=3$ καὶ $\omega=4$.

Ἄρα αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος εἶναι: $\mathbf{x=2}$, $\mathbf{y=3}$, $\mathbf{\omega=4}$.

6ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\frac{y+\omega}{y\omega}=\frac{5}{18} \quad (1), \qquad \frac{\omega+x}{\omega x}=\frac{13}{36} \quad (2), \qquad \frac{x+y}{xy}=\frac{5}{12} \quad (3)$$

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ σύστημα τοῦτο, πρέπει $xy\omega\neq0$.
Τὸ δοθὲν σύστημα γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{y}=\frac{5}{18} \quad (1'), \qquad \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{13}{36} \quad (2'), \qquad \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{5}{12} \quad (3')$$

Τοῦτο ὅμως λύεται ὅπως καὶ τὸ σύστημα τοῦ παραδείγματος 5.
Εὑρίσκομεν δέ: $\mathbf{x=4}$, $\mathbf{y=6}$, $\mathbf{\omega=9}$.

6ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\frac{y\omega}{\beta\omega+\gamma y}=\alpha \quad (1), \qquad \frac{\omega x}{\gamma x+\alpha\omega}=\beta \quad (2), \qquad \frac{xy}{\alpha y+\beta x}=\gamma \quad (3)$$

***Λύσις:*** Ἐὰν ὑποθέσωμεν $\alpha\beta\gamma\neq0$ καὶ $xy\omega\neq0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\frac{\beta\omega+\gamma y}{y\omega}=\frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{\gamma x+\alpha\omega}{\omega x}=\frac{1}{\beta}, \qquad \frac{\alpha y+\beta x}{xy}=\frac{1}{\gamma},$$

ἢ

$$\frac{\beta}{y}+\frac{\gamma}{\omega}=\frac{1}{\alpha} \quad (1'), \qquad \frac{\gamma}{\omega}+\frac{\alpha}{x}=\frac{1}{\beta} \quad (2'), \qquad \frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{y}=\frac{1}{\gamma} \quad (3')$$

Ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν (2′) καὶ (3′) ἀφαιροῦμεν τὴν (1′) καὶ ἔχομεν:

Ὁμοίως:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{2\alpha}{x}=\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}-\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma}{\alpha\beta\gamma} \\[2ex] \dfrac{2\beta}{y}=\dfrac{1}{\gamma}+\dfrac{1}{\alpha}-\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\beta(\gamma+\alpha)-\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} \\[2ex] \dfrac{2\gamma}{\omega}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}-\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\gamma(\alpha+\beta)-\alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} \end{array}\right| \quad (K)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\neq 0$, $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\neq 0$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\neq 0$ (4)

τότε ἐκ τῶν (K) λαμβάνομεν:

$$x=\frac{2\alpha^2\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma},\quad y=\frac{2\alpha\beta^2\gamma}{\beta(\gamma+\alpha)-\gamma\alpha},\quad \omega=\frac{2\alpha\beta\gamma^2}{\gamma(\alpha+\beta)-\alpha\beta}.$$

β'). Ἐὰν ἕνας τοὐλάχιστον τῶν ἀριθμῶν (4) εἶναι μηδέν, τότε μία τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος εἶναι ἀδύνατος, ἄρα καὶ τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

γ'). Ἐὰν ἕνας τῶν α, β, γ εἶναι μηδέν, τότε τὸ δοθὲν σύστημα, δὲν θὰ ἦτο δυνατόν, ἐκτὸς ἐὰν ἦτο καὶ ἄλλος μηδέν, ὁ β ἢ ὁ γ. Ἀλλὰ τότε μία τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος θὰ ἦτο ἀδύνατος.

7ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} \frac{x(y+\omega)}{\alpha}=\frac{y(\omega+x)}{\beta}=\frac{\omega(x+y)}{\gamma} & (1)\\ y\omega+\omega x+xy=(\alpha+\beta+\gamma)xy\omega. & (2)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ σύστημα τοῦτο, πρέπει $\alpha\beta\gamma\neq 0$.

Ἐπὶ πλέον δὲ παρατηροῦμεν ὅτι:

α'). Διὰ $x=0$, $y=0$, $\omega=0$, τὸ σύστημα ἐπαληθεύεται.

β'). Διὰ $x=0$, $y=0$, $\omega=k$, » »

γ'). Διὰ $x=0$, $y=\lambda$, $\omega=0$, » »

δ'). Διὰ $x=\mu$, $y=0$, $\omega=0$, » »

ε'). Ἐὰν $x=0$ καὶ $y\omega\neq 0$, ἡ (2) δὲν ἐπαληθεύεται.

στ'). Ἐὰν $y=0$ καὶ $\omega x\neq 0$, » »

ζ'). Ἐὰν $\omega=0$ καὶ $xy\neq 0$, » »

Ἤδη, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $xy\omega\neq 0$. Ἐκ τῶν (1) ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\frac{xy+x\omega}{\alpha}=\frac{y\omega+yx}{\beta}=\frac{\omega x+\omega y}{\gamma}=\frac{2(xy+y\omega+\omega x)}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(\alpha+\beta+\gamma)xy\omega}{\alpha+\beta+\gamma}=2xy\omega,$$

ἂν $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$. Ὅθεν προκύπτει:

$$\begin{array}{l} xy+x\omega=2\alpha xy\omega\\ y\omega+xy=2\beta xy\omega\\ \omega x+\omega y=2\gamma xy\omega\end{array} \Longrightarrow \left|\begin{array}{l}\frac{1}{\omega}+\frac{1}{y}=2\alpha\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=2\beta\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2\gamma\end{array}\right| \Longrightarrow \begin{array}{l}-\frac{1}{\omega}-\frac{1}{y}=-2\alpha\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=2\beta\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x}=2\gamma\end{array} \quad (3)$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (3), εὑρίσκομεν:

$$\frac{2}{x}=2\beta+2\gamma-2\alpha \quad ἢ \quad \frac{1}{x}=\beta+\gamma-\alpha. \qquad (4)$$

Ὁμοίως προκύπτει ὅτι: $\frac{1}{y}=\gamma+\alpha-\beta$ (5) καὶ $\frac{1}{\omega}=\alpha+\beta-\gamma$. (6)

Ἐὰν δὲ $\beta+\gamma-\alpha\neq 0$, $\gamma+\alpha-\beta\neq 0$, $\alpha+\beta-\gamma\neq 0$, ἐκ τῶν (4), (5) καὶ (6) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$x=\frac{1}{\beta+\gamma-\alpha},\quad y=\frac{1}{\gamma+\alpha-\beta},\quad \omega=\frac{1}{\alpha+\beta-\gamma}$$

8ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \quad (1), \quad x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3=0 \quad (2), \quad x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3=0. \quad (3)$$

***Λύσις:*** Ἀφαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς (1), (2) καὶ (2), (3) καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha-\beta)y+(\alpha^2-\beta^2)\omega+\alpha^3-\beta^3=0\\(\beta-\gamma)y+(\beta^2-\gamma^2)\omega+\beta^3-\gamma^3=0\end{array}\right\}\Longrightarrow \begin{array}{ll}y+(\alpha+\beta)\omega+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0 & (4)\\ y+(\beta+\gamma)\omega+\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2=0, & (5)\end{array}$$

ἂν εἶναι $\alpha\neq\beta$ καὶ $\beta\neq\gamma$.

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (4) καὶ (5), λαμβάνομεν:

$$(\alpha-\gamma)\omega+\alpha^2-\gamma^2+\alpha\beta-\beta\gamma=0$$

ἢ

$$(\alpha-\gamma)\omega+(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)=0,$$

καὶ ἐὰν $\alpha\neq\gamma$, θὰ ἔχωμεν:

$$\omega+\alpha+\gamma+\beta=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \omega=-(\alpha+\beta+\gamma). \qquad (6)$$

Ἄρα ἡ (4) γίνεται: $y-(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0,$

ἐξ οὗ:

$$y=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \qquad (7)$$

ὁπότε ἡ (1) γίνεται: $x+\alpha(\sigma\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)-\alpha^2(\sigma+\beta+\gamma)+\alpha^3=0$

ἐξ οὗ:

$$x=-\alpha\beta\gamma. \qquad (8)$$

Ὥστε, αἱ ρίζαι τοῦ συστήματος εἶναι:

$$\mathbf{x=-\alpha\beta\gamma, \quad y=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha, \quad \omega=-(\alpha+\beta+\gamma).}$$

9ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{array}{|ll}(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega-(\beta+\gamma)x=2\alpha^3 & (1)\\(\alpha+\beta)\omega+(\beta+\gamma)x-(\gamma+\alpha)y=2\beta^3 & (2)\\(\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y-(\alpha+\beta)\omega=2\gamma^3. & (3)\end{array}$$

***Λύσις:*** Διὰ προσθέσεως ὅλων τῶν ἐξισώσεων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$(\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3). \qquad (4)$$

Ἐκ τῆς (4) ἀφαιροῦμεν τὰς (1), (2) καὶ (3) καὶ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως:

$$(5)\quad \begin{array}{l|l}2(\beta+\gamma)x=2(\beta^3+\gamma^3) & \text{καὶ ἐάν:}\\ 2(\gamma+\alpha)y=2(\gamma^3+\alpha^3) & \beta+\gamma\neq0, \quad \gamma+\alpha\neq0, \quad \alpha+\beta\neq0,\\ 2(\alpha+\beta)\omega=2(\alpha^3+\beta^3) & \end{array}$$

ἐκ τῶν (5) προκύπτει ὅτι: $\mathbf{x=\beta^2-\beta\gamma+\gamma^2, \quad y=\gamma^2-\gamma\alpha+\alpha^2, \quad \omega=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}$

10ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\begin{array}{|ll}\lambda x+y+\omega=1 & (1)\\ x+\lambda y+\omega=\lambda & (2)\\ x+y+\lambda\omega=\lambda^2. & (3)\end{array}$$

***Λύσις.*** Προσθέτομεν τὰς ἐξισώσεις κατὰ μέλη καὶ λαμβάνομεν:

$$(\lambda+2)(x+y+\omega)=\lambda^2+\lambda+1 \qquad (4)$$

α΄). Ἐὰν $\lambda\neq-2$, ἡ ἐξίσωσις (4) δίδει:

$$x+y+\omega=\frac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}. \qquad (5)$$

Ἐκ τῆς (5) ἀφαιροῦμεν τὰς (1), (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{l|l}x(1-\lambda)=\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}-1=\dfrac{\lambda^2-1}{\lambda+2} & \\ y(1-\lambda)=\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}-\lambda=\dfrac{-(\lambda-1)}{\lambda+2} & \quad (6)\\ \omega(1-\lambda)=\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}-\lambda^2=\dfrac{(\lambda+1)(1-\lambda^2)}{(\lambda+2)} & \end{array}$$

Ἐὰν τώρα $\lambda \neq 1$, αἱ (6) δίδουν:

$$x=-\frac{\lambda+1}{\lambda+2},\quad y=\frac{1}{\lambda+2},\quad \omega=\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda+2}.$$

Ἐὰν δὲ $\lambda=1$, τὸ σύστημα (6) εἶναι *ἀόριστον*, ἄρα καὶ τὸ δοθέν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ δοθὲν σύστημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$x+y+\omega=1, \tag{7}$$

ἡ ὁποία εἶναι *διτῶς ἀόριστος:*

$$x=k,\quad y=\mu,\quad \omega=1-k-\mu \qquad (k,\ \mu \text{ αὐθαίρετοι}).$$

β'). Ἐὰν $\lambda=-2$, ἡ ἐξίσωσις (4) γράφεται:

$$0\cdot(x+y+\omega)=3,$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀδύνατος διὰ πᾶσαν τιμὴν τῶν x, y, ω. Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην εἶναι *ἀδύνατον.*

11ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{ll} xy\omega=\alpha(xy-y\omega+\omega x) & (1)\\ xy\omega=\beta(xy+y\omega-\omega x) & (2)\\ xy\omega=\gamma(-xy+y\omega+\omega x). & (3)\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Μία προφανὴς λύσις εἶναι ἡ: **$x=0$, $y=0$, $\omega=0$.**

Τὸ δοθὲν σύστημα ἐπιδέχεται καὶ τὰς ἑξῆς λύσεις:

1. $x=0$, $y=0$, $\omega=k$, αὐθαίρετος.
2. $x=0$, $y=k_1$ αὐθαίρετος, $\omega=0$.
3. $x=k_2$ αὐθαίρετος, $y=0$, $\omega=0$.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι: $xy\omega\neq 0$ καὶ $\alpha\beta\gamma\neq 0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left.\begin{array}{l} 1=\alpha\left(\frac{1}{\omega}-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ 1=\beta\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\\ 1=\gamma\left(-\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\beta}\\ -\frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{\gamma}\end{array}\right| \tag{4}$$

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν ἐξισώσεων (4), λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}. \tag{5}$$

Ἐκ ταύτης καὶ ἑκάστης τῶν (4), δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη, ἔχομεν:

$$\begin{array}{l|} \frac{2}{x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}\\ \frac{2}{y}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha}\\ \frac{2}{\omega}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\end{array}$$

καὶ ἐὰν $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)\neq 0$, ἔχομεν

$$y=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma},\quad y=\frac{2\gamma\alpha}{\gamma+\alpha},\quad \omega=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ἐὰν δὲ $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=0$, τὸ σύστημα εἶναι **ἀδύνατον.**

12ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα:**

$$\frac{y\omega}{y+\omega}=\alpha \quad (1),\qquad \frac{\omega x}{\omega+x}=\beta \quad (2),\qquad \frac{xy}{x+y}=\gamma. \qquad (3)$$

***Λύσις :*** Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι $\alpha\beta\gamma\neq 0$, τὸ σύστημα γράφεται :

$$\left.\begin{aligned}\frac{y+\omega}{y\omega}&=\frac{1}{\alpha}\\ \frac{\omega+x}{\omega x}&=\frac{1}{\beta}\\ \frac{x+y}{xy}&=\frac{1}{\gamma}\end{aligned}\right| \iff \left.\begin{aligned}\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}&=\frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}&=\frac{1}{\beta}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{\gamma}\end{aligned}\right| \iff \left.\begin{aligned}-\frac{1}{y}-\frac{1}{\omega}&=-\frac{1}{\alpha}\\ \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x}&=\frac{1}{\beta}\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}&=\frac{1}{\gamma}\end{aligned}\right| \quad (4)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν (4) κατὰ μέλη, λαμβάνομεν :

$$\frac{2}{x}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha} \quad ἢ \quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\right) \quad (5)$$

Ὁμοίως : $\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)$ (6) καὶ $\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$ (7)

α'). Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι :

$$\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}\neq 0, \quad \frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\neq 0, \quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\neq 0,$$

θὰ εἶναι τότε :

$$x=\frac{2\alpha\beta\gamma}{\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma}, \quad y=\frac{2\alpha\beta\gamma}{\beta(\gamma+\alpha)-\gamma\alpha}, \quad \omega=\frac{2\alpha\beta\gamma}{\gamma(\alpha+\beta)-\alpha\beta}.$$

β'). Ἐὰν $\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{\alpha}=0$ ἢ $\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=0$ ἢ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}=0$, μία τῶν ἐξισώσεων (5), (6), (7) θὰ εἶναι ἀδύνατος καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύστημα εἶναι ἀδύνατον.

γ'). Ἐὰν $\alpha\beta\gamma=0$, τότε ἕνας τοὐλάχιστον τῶν $\alpha,\beta,\gamma$ θὰ εἶναι μηδέν.

Ἔστω $\alpha=0$. Τότε ἡ (1) γίνεται $\frac{y\omega}{y+\omega}=0$, ἐξ οὗ : $y\omega=0$.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι ἢ $y=0$ ἢ $\omega=0$. Ἔστω $y=0$. Τότε ἡ (3) καταντᾷ : $\frac{x\cdot 0}{x+0}=\gamma$ ἢ $\frac{0}{x}=\gamma$, ἐξ οὗ $\gamma=0$. Ἑπομένως δύο ἐκ τῶν $\alpha,\beta,\gamma$ ὀφείλουν νὰ εἶναι μηδέν. Ἐὰν λοιπὸν εἶναι $\beta=0$, $\gamma=0$, τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τό :

$$\frac{y\omega}{y+\omega}=\alpha \quad (\alpha\neq 0), \quad \omega x=0, \quad xy=0$$

καὶ ἐπιδέχεται τὰς λύσεις :

$$x=0, \quad y=k \text{ (αὐθαίρετος) καὶ } \frac{1}{\omega}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{y}=\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{k}.$$

13ον : **Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ τὸ σύστημα :**

$$\begin{aligned}(x-y)(x+y-\omega-\alpha)&=0 &(1)\\ \alpha x+\beta y+\omega&=\alpha &(2)\\ \beta x+\alpha y+\omega&=\beta. &(3)\end{aligned}$$

***Λύσις :*** Τὸ σύστημα τοῦτο χωρίζεται εἰς τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

$$(A)\quad \left|\begin{aligned}x-y&=0 &(1')\\ \alpha x+\beta y+\omega&=\alpha &(2')\\ \beta x+\alpha y+\omega&=\beta &(3')\end{aligned}\right. \quad \text{καὶ} \quad (B)\quad \left|\begin{aligned}x+y-\omega&=\alpha &(1'')\\ \alpha x+\beta y+\omega&=\alpha &(2'')\\ \beta x+\alpha y+\omega&=\beta. &(3'')\end{aligned}\right.$$

1ον. Θὰ ἐπιλύσωμεν πρῶτον τὸ σύστημα (Α).

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὰς (2′) καὶ (3′), λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{array}{c} x=y \\ \alpha x+\beta y+\omega=\alpha \\ (\alpha-\beta)x-(\alpha-\beta)y=\alpha-\beta \end{array}$$

***Διερεύνησις:*** α′) Ἐὰν $\alpha\neq\beta$, ἐκ τῆς τρίτης ἐξισώσεως τούτου λαμβάνομεν:

$$x-y=1.$$

Ἡ ἐξίσωσις ὅμως αὕτη δὲν συμβιβάζεται μὲ τὴν $x=y$ ἢ $x-y=0$, καὶ ἄρα τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ***ἀδύνατον***, ἄρα καὶ τὸ δοθέν.

β′) Ἐὰν $\alpha=\beta$, τότε ἡ τρίτη τῶν ἐξ σώσεων γίνεται: $0\cdot x-0\cdot y=0$, καὶ ἀληθεύει διὰ κάθε τιμὴν $x=y=\lambda$ (αὐθαίρετον), $\lambda\in\Pi_\alpha$.

Δηλαδὴ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον μὲ ῥίζας $x=y=\lambda$ αὐθαίρετος, καὶ $\omega=\alpha-2\alpha x=\alpha-2\alpha\lambda$. Ἄρα καὶ τὸ δοθὲν εἶναι ***ἀόριστον***.

2ον. Θὰ ἐπιλύσωμεν τώρα τὸ σύστημα (Β). Τοῦτο γράφεται:

$$\begin{array}{c} (\alpha+1)x+(\beta+1)y=2\alpha \\ (\beta+1)x+(\alpha+1)y=\alpha+\beta \\ x+y-\omega=\alpha \end{array} \Longrightarrow \left.\begin{array}{c} (\alpha+1)x+(\beta+1)y=2\alpha \\ (\alpha-\beta)x-(\alpha-\beta)y=\alpha-\beta \\ x+y-\omega=\alpha \end{array}\right| (B'). \quad \begin{array}{c}(1_1)\\(2_1)\\(3_1)\end{array}$$

***Διερεύνησις:*** α′′). Ἐὰν $\alpha\neq\beta$, ἡ $(2_1)$ δίδει: $x-y=1$, ἐξ οὗ: $y=x-1$.

Ἕνεκα ταύτης τὸ σύστημα (Β′) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left.\begin{array}{c} (\alpha+\beta+2)x=2\alpha+\beta+1 \\ y=x-1 \\ \omega=2x-1-\alpha \end{array}\right| (B'')$$

Ἐνταῦθα, ἐὰν $\alpha+\beta+2\neq0$, λαμβάνομεν:

$$x=\frac{2\alpha+\beta+1}{\alpha+\beta+2},\ y=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta+2},\ \omega=\frac{\alpha^2+\alpha-\alpha\beta+\beta}{\alpha+\beta+2}.$$

Ἐὰν ὅμως $\alpha+\beta+2=0$, τότε τὸ σύστημα (Β′′) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$0\cdot x=2\alpha+\beta+1=\alpha-1,\quad y=x-1,\quad \omega=2x-1-\alpha,$$

καὶ ἐὰν $\alpha\neq1$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ (Β′′) εἶναι ***ἀδύνατος***. Ἄρα καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον***.

Ἐὰν ὅμως $\alpha=1$, ὁπότε $\beta=-3$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ (Β′′) εἶναι ***ἀόριστος***. Ἄρα αἱ ῥίζαι τούτου θὰ εἶναι αἱ:

$$y=\vartheta\ (\text{αὐθαίρετος}),\quad y=\vartheta-1,\quad \omega=2\vartheta-2.$$

Ἐπομένως καὶ τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ***ἀόριστον***.

β′′). Ἐὰν $\alpha=\beta$, ἡ πρώτη ἐξίσωσις τοῦ (Β′) γίνεται: $(\alpha+1)(x+y)=2\alpha$, καὶ ἐὰν $\alpha\neq-1$, ἔχομεν: $x+y=\frac{2\alpha}{\alpha+1}$, ὁπότε ἡ τρίτη τοῦ (Β′) δίδει:

$$\omega=x+y-\alpha=\frac{2\alpha}{\alpha+1}-\alpha=\frac{\alpha-\alpha^2}{\alpha+1}=-\alpha.$$

Δηλαδὴ τὸ σύστημα εἶναι ἀόριστον, μὲ ῥίζας:

$$y=k\ (\text{αὐθαίρετος}),\quad x=\frac{2\alpha}{\alpha+1}-k,\quad \omega=-\alpha.$$

Ἐὰν δὲ $\alpha=-1$, τότε: $0\cdot(x+y)=2\alpha=-2$ καὶ $\omega=2x$, τὸ δὲ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον***.

14ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\frac{1}{x}+y+\omega=3\ (1),\quad x+\frac{1}{y}+\omega=3\ (2),\quad x+y+\frac{1}{\omega}=3. \quad (3)$$

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν τὸ σύστημα τοῦτο πρέπει $xy\omega \neq 0$. Τούτου τεθέντος, τὸ σύστημα γράφεται:

$$\left|\begin{array}{ll} 1+x(y+\omega)=3x & (1) \\ 1+y(\omega+x)=3y & (2) \\ 1+\omega(x+y)=3\omega. & (3) \end{array}\right.$$

Δι' ἀφαιρέσεως κατὰ μέλη τῶν (1), (2) ἀφ' ἑνός, καὶ (2), (3) ἀφ' ἑτέρου, λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left.\begin{array}{r} \omega(x-y)=3(x-y) \\ x(y-\omega)=3(y-\omega) \\ 1+\omega(x+y)=3\omega \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} (x-y)(\omega-3)=0 & (4) \\ (y-\omega)(x-3)=0 & (5) \\ 1+\omega(x+y)=3\omega & (6) \end{array}$$

Τὸ σύστημα ὅμως τοῦτο ἀναλύεται εἰς τὰ συστήματα:

$$(A)\ \begin{array}{c} x-y=0 \\ x-3=0 \\ 1+\omega(x+y)=3\omega \end{array}\Bigg| \quad (B)\ \begin{array}{c} \omega-3=0 \\ y-\omega=0 \\ 1+\omega(x+y)=3\omega \end{array}\Bigg| \quad (\Gamma)\ \begin{array}{c} \omega-3=0 \\ x-3=0 \\ 1+\omega(x+y)=3\omega \end{array}\Bigg| \quad (\Delta)\ \begin{array}{c} x-y=0 \\ y-\omega=0 \\ 1+\omega(x+y)=3\omega \end{array}$$

Αἱ ῥίζαι τοῦ (A) εἶναι: $\mathbf{x=y=3,\quad \omega=-\frac{1}{3}}$

» (B) » : $\mathbf{x=-\frac{1}{3},\quad y=\omega=3}$

» (Γ) » : $\mathbf{x=\omega=3,\quad y=-\frac{1}{3}}$.

Τὸ σύστημα (Δ) ἰσοδυναμεῖ μὲ τό:

$$\left.\begin{array}{c} x=y=\omega \\ 1+2x^2=3x \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} x=y=\omega \\ 2x^2-3x+1=0 \end{array}\Bigg| \begin{array}{ll} \text{ἐξ οὗ:} & \mathbf{x=y=\omega=1} \\ \text{καὶ} & \mathbf{x=y=\omega=\frac{1}{2}} \end{array}$$

Ὥστε, τὸ δοθὲν σύστημα ἔχει *πέντε λύσεις*.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\left|\begin{array}{l} x+y=37 \\ y+\omega=22 \\ \omega+x=25 \end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{c} x+y+\omega=99 \\ \frac{x}{5}=\frac{y}{3}=\frac{\omega}{1} \end{array}\right.$ **3.** $\begin{array}{c} \frac{x-1}{5}=\frac{y-2}{4}=\frac{\omega-3}{3} \\ 2x+3y+4\omega=37 \end{array}$

**4.** $\left|\begin{array}{l} x:y:\omega:\varphi=1:2:3:4 \\ 9x+7y+3\omega+2\varphi=200 \end{array}\right.$ **5.** $\begin{array}{c} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{9}{20} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{\omega}=\frac{5}{12} \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{11}{30} \end{array}$ **6.** $\begin{array}{c} \frac{x}{5}+\frac{y}{3}=6 \\ \frac{x}{2}-\frac{\omega}{5}=2 \\ \frac{y}{4}+\frac{\omega}{3}=8 \end{array}$

**7.** $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+3y}{xy}=\frac{3}{2} \\ \frac{5x-\omega}{x\omega}=\frac{1}{12} \\ \frac{4y+3\omega}{y\omega}=\frac{13}{12} \end{array}\right.$ **8.** $\left|\begin{array}{l} \frac{8}{3x-4y}-\frac{3}{7\omega-4x}+\frac{7}{4y-5\omega}=12 \\ \frac{4}{3x-4y}+\frac{9}{7\omega-4x}+\frac{1}{4y-5\omega}=0 \\ \frac{12}{3x-4y}-\frac{21}{7\omega-4x}+\frac{4}{4y-5\omega}=17 \end{array}\right.$

9. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{5}+\frac{\omega}{9}+\frac{\varphi}{2}=53 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{\omega}{2}+\frac{\varphi}{3}=54 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{\omega}{6}+\frac{\varphi}{7}=56 \\ \frac{x}{6}+\frac{y}{2}+\frac{\omega}{3}+\frac{\varphi}{6}=57 \end{array}\right.$

10. $\left|\begin{array}{l} \frac{15}{4x-5y}-\frac{7}{3y-10\omega}=10 \\ \frac{40}{3x+5\omega}-\frac{11}{3y-10\omega}=13 \\ \frac{60}{3x+5\omega}-\frac{5}{4x-5y}=2 \end{array}\right.$

11. $\left|\begin{array}{l} x+y=8 \\ y+\upsilon=7 \\ \upsilon-2t=2 \\ t+z=3 \\ z+\varphi=9 \\ \varphi-x=2 \end{array}\right.$

12. $\left|\begin{array}{l} x+y=8 \\ x+\upsilon=11 \\ x+t=6 \\ x+\varphi=12 \\ \varphi+\omega=9 \\ \upsilon-2t=4 \end{array}\right.$

13. $\left|\begin{array}{l} x+3(y+\omega+\varphi)=26 \\ 2y+3(x+\omega+\varphi)=29 \\ \omega+3(x+y+\varphi)=24 \\ \varphi+3(x+y+\omega)=22 \end{array}\right.$

14. $\left|\begin{array}{l} 5x+(y+\omega+\varphi)=11 \\ 5y+2(x+\omega+\varphi)=17 \\ 5\omega+2(x+y+\varphi)=20 \\ 5\varphi+3(x+y+\omega)=27 \end{array}\right.$

15. $\left|\begin{array}{l} 5x+2(y+\omega+\varphi)=17 \\ 3y+(x+\omega+\varphi)=11 \\ 6\omega+5(x+y+\varphi)=36 \\ \varphi+3(x+y+\omega)=15 \end{array}\right.$

16. $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta\,(y+\omega+\varphi)=\gamma \\ \alpha y+\beta_1(\omega+\varphi+x)=\gamma_1 \\ \alpha\omega+\beta_2(\varphi+x+y)=\gamma_2 \\ \alpha\varphi+\beta_3(x+y+\omega)=\gamma_3 \end{array}\right.$

17. $\left|\begin{array}{l} (\alpha+\beta)x^{-1}+(\beta+\gamma)y^{-1}+(\gamma+\alpha)\omega^{-1}=1 \\ (\beta+\gamma)x^{-1}+(\gamma+\alpha)y^{-1}+(\alpha+\beta)\omega^{-1}=2 \\ (\gamma+\alpha)x^{-1}+(\alpha+\beta)y^{-1}+(\beta+\gamma)\omega^{-1}=3 \end{array}\right.$

18. $\left|\ \frac{y+\omega-x}{7}=\frac{\omega+x-y}{11}=\frac{x+y-\omega}{5}=\frac{xy\omega}{3}\right.$

19. $\left|\ \frac{y+\omega}{\alpha}=\frac{\omega+x}{\beta}=\frac{x+y}{\gamma}=xy\omega\right.$

20. $\left|\begin{array}{l} y\omega+\omega x+xy=12xy\omega \\ 3y\omega-4x\omega+5xy=18xy\omega \\ 5y\omega-3x\omega+2xy=13xy\omega \end{array}\right.$

21. $\left|\begin{array}{l} y\omega+\alpha x\omega+\alpha^2xy=\alpha^3xy\omega \\ y\omega+\beta x\omega+\beta^2xy=\beta^3xy\omega \\ y\omega+\gamma x\omega+\gamma^2xy=\gamma^3xy\omega. \end{array}\right.$

**Β.** Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\left|\begin{array}{l} y+\omega=\alpha \\ \omega+x=\beta \\ x+y=\gamma \end{array}\right.$

2. $\left|\begin{array}{l} y+\omega=2\alpha \\ \omega+x=2\beta \\ x+y=2\gamma \end{array}\right.$

3. $\left|\begin{array}{l} y+\omega-x=2\alpha \\ \omega+x-y=2\beta \\ x+y-\omega=2\gamma \end{array}\right.$

4. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{\omega}{\gamma} \\ x+y+\omega=\delta \end{array}\right.$

5. $\left|\begin{array}{l} \frac{x-\alpha}{\lambda}=\frac{y-\beta}{\mu}=\frac{\omega-\gamma}{\nu} \\ Ax+By+\Gamma\omega=\Delta \end{array}\right.$

6. $\left|\begin{array}{l} \alpha x=\beta y=\gamma\omega \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\delta} \end{array}\right.$

7. $\left|\begin{array}{l} y+\omega+t=\alpha \\ \omega+t+x=\beta \\ t+x+y=\gamma \\ x+y+\omega=\delta \end{array}\right.$

8. $\left|\begin{array}{l} y+\omega+t-x=\alpha \\ \omega+t+x-y=\beta \\ t+x+y-\omega=\gamma \\ x+y+\omega-t=\delta \end{array}\right.$

9. $\left|\begin{array}{l} y+\omega-3x=2\alpha \\ \omega+x-3y=2\beta \\ x+y-3\omega=2\gamma \end{array}\right.$

10. $\left|\begin{array}{l} y+\omega-x=\beta+\gamma \\ \omega+x-y=\gamma+\alpha \\ x+y-\omega=\alpha+\beta \end{array}\right.$

11. $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=1 \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=1 \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=1 \end{array}\right.$

12. $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\alpha \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\beta \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\gamma \end{array}\right.$

**13.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\gamma y+\beta\omega=\alpha^2+2\beta\gamma \\ \gamma x+\beta y+\alpha\omega=\beta^2+2\gamma\alpha \\ \beta x+\alpha y+\gamma\omega=\gamma^2+2\alpha\beta \end{array}\right.$ **14.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y\ +\omega=1 \\ x+\alpha\beta y+\omega=\beta \\ x+\beta y\ +\alpha\omega=1 \end{array}\right.$ **15.** $\left|\begin{array}{l} \gamma y-\beta\omega=\lambda \\ \alpha\omega-\gamma x=\mu \\ \beta x-\alpha y=\nu \end{array}\right.$

**16.** $\left|\begin{array}{l} (\alpha+\beta)x+(\alpha-\beta)\omega=2\beta\gamma \\ (\beta+\gamma)y+(\beta-\gamma)x=2\gamma\alpha \\ (\gamma+\alpha)\omega+(\gamma-\alpha)y-2\alpha\beta \end{array}\right.$ **17.** $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x}{\beta+\gamma}+\dfrac{y}{\gamma-\alpha}-\dfrac{\omega}{\alpha-\beta}=0 \\ \dfrac{x}{\beta-\gamma}-\dfrac{y}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\omega}{\alpha+\beta}=0 \\ \dfrac{x}{\beta+\gamma}+\dfrac{y}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\omega}{\alpha+\beta}=2\alpha \end{array}\right.$

**18.** $\left|\begin{array}{l} x+\ y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$ **19.** $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\ (\beta-\gamma)x+(\gamma-\alpha)y+(\alpha-\beta)\omega=0 \end{array}\right.$

**20.** $\left|\begin{array}{l} (\alpha+\beta)x+(\beta+\gamma)y+(\alpha+\gamma)\omega=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma \\ (\alpha+\gamma)x+(\alpha+\beta)y+(\beta+\gamma)\omega=\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma) \\ (\beta+\gamma)x+(\alpha+\gamma)y+(\alpha+\beta)\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \end{array}\right.$

**21.** $\left|\begin{array}{l} (\gamma+\alpha)x-(\gamma-\alpha)y=2\beta\gamma \\ (\alpha+\beta)y-(\alpha-\beta)\omega=2\alpha\gamma \\ (\beta+\gamma)\omega-(\beta-\gamma)x=2\alpha\beta. \end{array}\right.$ **22.** $\left|\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha\omega=\beta \\ \alpha x+y\ +\alpha\omega=\gamma \\ \alpha x+\alpha y+\omega\ =\gamma \end{array}\right.$ **23.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y-\beta\omega=\gamma \\ \beta x+\alpha y-\beta\omega=\gamma \\ -\beta x+\beta y+\alpha\omega=\gamma \end{array}\right.$

**24.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\ y+\omega=\alpha \\ \alpha x+\alpha y+\omega=1 \\ x+\alpha y+\alpha\omega=1 \\ x+\ y+\alpha\omega=\alpha \end{array}\right.$ **25.** $\left|\begin{array}{l} \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=1 \\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ \alpha^4x+\beta^4y+\gamma^4\omega=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha. \end{array}\right.$

**26.** $\left|\begin{array}{l} \alpha(xy+x\omega-y\omega)=xy\omega \\ \beta(y\omega+yx-\omega x)=xy\omega \\ \gamma(\omega x+\omega y-xy)=xy\omega \end{array}\right.$ **27.** $\left|\begin{array}{l} \dfrac{x(y+\omega)}{\alpha}=\dfrac{y(\omega+x)}{\beta}=\dfrac{\omega(x+y)}{\gamma} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{\omega}=\alpha+\beta+\gamma. \end{array}\right.$

**Γ.** Νὰ ἐπιλυθοῦν καὶ νὰ διερευνηθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

**1.** $\left|\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3=0 \end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^4=0 \end{array}\right.$

**3.** $\left|\begin{array}{l} \alpha^3x+\alpha^2y+\alpha\omega+1=0 \\ \beta^3x+\beta^2y+\beta\omega+1=0 \\ \gamma^3x+\gamma^2y+\gamma\omega+1=0 \end{array}\right.$ **4.** $\left|\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2\omega+\alpha^3\varphi+\alpha^4=0 \\ x+\beta y+\beta^2\omega+\beta^3\varphi+\beta^4=0 \\ x+\gamma y+\gamma^2\omega+\gamma^3\varphi+\gamma^4=0 \\ x+\delta y+\delta^2\omega+\delta^3\varphi+\delta^4=0 \end{array}\right.$

**5.** $\left|\begin{array}{l} x-\alpha y+\alpha^2\omega=\alpha^3 \\ x-\beta y+\beta^2\omega=\beta^3 \\ x-\gamma y+\gamma^2\omega=\gamma^3 \end{array}\right.$ **6.** $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega+\alpha(y+\omega)+\alpha^2\omega+\alpha^3=0 \\ x+y+\omega+\beta(y+\omega)+\beta^2\omega+\beta^3=0 \\ x+y+\omega+\gamma(y+\omega)+\gamma^2\omega+\gamma^3=0. \end{array}\right.$

**Δ.** Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα :

**1.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=1 \\ (1+\alpha)x+(1+\beta)y+(1+\gamma)\omega=1 \\ \alpha(1+\alpha)x+\beta(1+\beta)y+\gamma(1+\gamma)\omega=1 \end{array}\right.$

**2.** $\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma\omega}=\frac{\gamma\omega+\alpha x}{\beta y}=\frac{\beta y+\gamma\omega}{\alpha x}=x+y+\omega.$

**3.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y+\omega}=\frac{1}{\alpha},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega+x}=\frac{1}{\beta},\quad \frac{1}{\omega}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{\gamma}.$

**4.** $\frac{\alpha x}{\lambda}=\frac{\beta y}{\mu}=\frac{\gamma\omega}{\nu}=\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2}{\varrho}.$

**5.** $x(x-\alpha)=y\omega,\quad y(y-\beta)=\omega x,\quad \omega(\omega-\gamma)=xy.$

**6.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἕνα τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, ὅταν αἱ πλευραί του εἶναι λύσεις τοῦ συστήματος:

$$\frac{x+y}{17}=\frac{y+\omega}{18}=\frac{\omega+x}{25}.$$

## ΟΡΙΖΟΥΣΑΙ ΤΡΙΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ — ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

**209. Ὁρίζουσαι τρίτης τάξεως.** Εἰς τὴν παράγραφον 200 εἴδομεν τὸ σύμβολον:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}=\alpha\beta_1-\alpha_1\beta,$$

τὸ ὁποῖον ἐκαλέσαμεν ***ὁρίζουσαν δευτέρας τάξεως.***

Ἤδη ὁρίζομεν τὸ σύμβολον:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \equiv \alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

τὸ ὁποῖον ὀνομάζομεν ***ὁρίζουσαν τρίτης τάξεως.*** Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (1) περιέχει μεταξὺ δύο κατακορύφων τμημάτων 9 ***στοιχεῖα***, τά:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$$

εἰς τρεῖς ὁριζοντίας γραμμάς:

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,)\quad (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,)\quad (\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3)$$

καὶ εἰς τρεῖς κατακορύφους στήλας:

$$(\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1)\quad (\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2),\quad (\alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3).$$

Τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) ὀνομάζεται ***ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης***, κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης ὁριζοντίας γραμμῆς, ἢ ***τιμὴ*** τῆς ὁριζούσης καὶ θὰ εἶναι:

$$\alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}-\alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}+\alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)-\alpha_2(\beta_1\gamma_3-(\beta_3\gamma_1)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1).$$

Αἱ ὁρίζουσαι τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (1) ὀνομάζονται ***ἐλλάσσονες*** ὁρίζουσαι τῆς ὁριζούσης τοῦ πρώτου μέλους ἢ καὶ ***ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα αὐτῆς.***

Θεωροῦμεν τοὺς δύο πίνακας:

$$\text{I}\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \quad \text{καὶ}\quad \text{II}\ \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς (1) προκύπτει ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὸ στοιχεῖον $\alpha_1$ τῆς ὁριζούσης (I) καὶ πολλαπλασιάζομεν τοῦτο ἐπὶ τὴν ἐλλάσσονα ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀποκοπῆς τῆς πρώτης ὁριζοντίας γραμμῆς καὶ τῆς πρώτης στήλης.

Κατόπιν λαμβάνομεν τὸ στοιχεῖον $\alpha_2$ τῆς (I) μὲ πρόσημον (—) καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸ $\alpha_2$ ἐπὶ τὴν ἐλλάσσονα ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix}$, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀποκοπῆς τῆς πρώτης ὁριζοντίας γραμμῆς καὶ τῆς δευτέρας στήλης.

Τέλος τὸ στοιχεῖον $\alpha_3$ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὴν ἐλλάσσουσαν ὁρίζουσαν $\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}$, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀποκοπῆς τῆς πρώτης ὁριζοντίας γραμμῆς καὶ τῆς τρίτης στήλης τῆς (I). Τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀνωτέρων γινομένων εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης (I).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = $$
$$= 1(20+18) - 2(10+6) + 3(-6+4) = 38 - 32 - 6 = 0.$$

Θὰ καλοῦμεν ***ἀλγεβρικὸν συμπλήρωμα*** ἑνὸς στοιχείου τῆς ὁριζούσης (I) τὴν ὁρίζουσαν τῆς δευτέρας τάξεως, ἡ ὁποία προκύπτει δι' ἀποκοπῆς τῆς γραμμῆς καὶ τῆς στήλης, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ στοιχεῖον τοῦτο, μὲ πρὸ αὐτῆς τὸ σημεῖον, τὸ ἀντιστοιχοῦν ἐκ τοῦ πίνακος (II).

Οὕτω, τὸ συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου $\beta_3$ εἶναι: $-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} = B.$

Τὸ συμπλήρωμα τοῦ στοιχείου $\gamma_2$ εἶναι τό: $-\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}$, κ.ο.κ.

Ἂν θέλωμεν τὸ ἀνάπτυγμα τῆς (I) κατὰ τὰ στοιχεῖα τῆς πρώτης στήλης, θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \equiv \alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \beta_1\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \equiv$$
$$\equiv \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \beta_1(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2).$$

## Ἰδιότητες τῶν ὁριζουσῶν

**210. Θεώρημα.** ***Ἡ τιμὴ τριτοταξίου ὁριζούσης δὲν βλάπτεται, ἐὰν αἱ γραμμαὶ γίνουν στῆλαι καὶ αἱ στῆλαι γίνουν γραμμαί.***

Πράγματι, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, θὰ εἶναι:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_2\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3\begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} =$$
$$= \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \alpha_2(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) + \alpha_3(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)$$
$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \beta_1(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_1. \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα, ἕπεται ὅτι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

**211. Θεώρημα.** ***Ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης ἀλλάσσει σημεῖον, ἂν ἀντιμεταθέσωμεν δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας.***

Πράγματι, εἶναι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1(\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2) - \beta_1(\alpha_2\gamma_3 - \alpha_3\gamma_2) + \gamma_1(\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)$$

$$= \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 - \alpha_3\beta_2\gamma_1 \qquad (1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_3 & \beta_2 \\ \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_3 & \beta_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1(\beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_3) - \beta_1(\alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3) + \gamma_1(\alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3)$$

$$= \alpha_1\beta_3\gamma_2 - \alpha_1\beta_2\gamma_3 - \alpha_3\beta_1\gamma_2 + \alpha_2\beta_1\gamma_3 + \alpha_3\beta_2\gamma_1 - \alpha_2\beta_3\gamma_1 \qquad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν (1) καὶ (2) εἶναι ἀντίθετα, ἕπεται ὅτι :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_3 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_3 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

**212. Θεώρημα :** ***Ἐὰν μία ὁρίζουσα ἔχῃ δύο γραμμὰς ἢ δύο στήλας τὰς αὐτάς, ἰσοῦται μὲ μηδέν.***

Πράγματι, ἔχομεν διαδοχικῶς :

$$\begin{vmatrix} \alpha & x & x \\ \beta & y & y \\ \gamma & \omega & \omega \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} y & y \\ \omega & \omega \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} x & x \\ \omega & \omega \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} x & x \\ y & y \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha(y\omega - y\omega) - \beta(x\omega - x\omega) + \gamma(xy - xy)$$

$$= \alpha \cdot 0 - \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0.$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha & \alpha \\ x & y & \omega \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ y & \omega \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ y & \omega \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha(\alpha\omega - \alpha y) - \alpha(\alpha\omega - \alpha y) + x(\alpha^2 - \alpha^2)$$

$$= \alpha^2\omega - \alpha^2 y - \alpha^2\omega + \alpha^2 y + \alpha^2 x - \alpha^2 x = 0.$$

**213. Θεώρημα :** ***Ἐὰν ὅλα τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης ἢ γραμμῆς μιᾶς ὁριζούσης πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ $k$, τότε καὶ ἡ τιμὴ τῆς ὁριζούσης πολλαπλασιάζεται ἐπὶ $k$.***

Πράγματι, ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{vmatrix} k\alpha & x & \lambda \\ k\beta & y & \mu \\ k\gamma & \omega & \nu \end{vmatrix} = k\alpha \begin{vmatrix} y & \mu \\ \omega & \nu \end{vmatrix} - k\beta \begin{vmatrix} x & \lambda \\ \omega & \nu \end{vmatrix} + k\gamma \begin{vmatrix} x & \lambda \\ y & \mu \end{vmatrix} = k\left\{ \alpha \begin{vmatrix} y & \mu \\ \omega & \nu \end{vmatrix} - \beta \begin{vmatrix} x & \lambda \\ \omega & \nu \end{vmatrix} + \gamma \begin{vmatrix} x & \lambda \\ y & \mu \end{vmatrix} \right\} \equiv k \begin{vmatrix} \alpha & x & \lambda \\ \beta & y & \mu \\ \gamma & \omega & \nu \end{vmatrix}$$

**214. Θεώρημα:** ***Ὁρίζουσα, εἰς τὴν ὁποίαν δύο γραμμαὶ ἢ στῆλαι ἔχουν στοιχεῖα ἀνάλογα, ἰσοῦται μὲ μηδέν:***

Πράγματι, ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{vmatrix} \lambda\alpha & \alpha & x \\ \lambda\beta & \beta & y \\ \lambda\gamma & \gamma & \omega \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & x \\ \beta & \beta & y \\ \gamma & \gamma & \omega \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0,$$

καθόσον ἡ δευτέρα ὁρίζουσα ἔχει δύο στήλας τὰς αὐτάς.

**215. Θεώρημα:** ***Ἡ τιμὴ μιᾶς ὁριζούσης δὲν βλάπτεται, ἐὰν εἰς τὰ στοιχεῖα μιᾶς στήλης προσθέσωμεν τὰ στοιχεῖα μιᾶς ἄλλης στήλης πολλαπλασιασμένα ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν $\lambda \neq 0$.***

Πράγματι, ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1+\lambda\alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1+\lambda\beta_2 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1+\lambda\gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\alpha_1+\lambda\alpha_2) \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - (\beta_1+\lambda\beta_2) \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + (\gamma_1+\lambda\gamma_2) \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} +$$

$$+ \lambda \left\{ \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \beta_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \gamma_2 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \lambda \cdot 0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

Τὸ θεώρημα τοῦτο ἰσχύει καὶ διὰ τὰς γραμμὰς τῆς ὁριζούσης.

***Σημ.*** Μία ὁρίζουσα δύναται νὰ ἀναπτυχθῇ κατὰ τὰ στοιχεῖα μιᾶς οἱασδήποτε στήλης ἢ γραμμῆς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ὁριζουσῶν:

**1.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ **2.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix}$ **3.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**4.** $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **5.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ **6.** $\begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$

**7.** $\begin{vmatrix} 17 & 7 & 5 \\ 47 & 21 & 16 \\ 29 & 14 & 11 \end{vmatrix}$ **8.** $\begin{vmatrix} 4 & 12 & 16 \\ 1 & 15 & 4 \\ 55 & 33 & 44 \end{vmatrix}$ **9.** $\begin{vmatrix} 33 & 31 & 29 \\ 12 & 11 & 22 \\ 19 & 17 & 12 \end{vmatrix}$

**Β.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

**1.** $\begin{vmatrix} x & 2 & -2 \\ 2 & x & -2 \\ -2 & 2 & x \end{vmatrix}=0,$ **2.** $\begin{vmatrix} x+3 & 3x+3 & x+1 \\ x-5 & x-7 & x-2 \\ x & x+3 & x+6 \end{vmatrix}=0$

**3.** $\begin{vmatrix} x+3 & 2x & 3x-1 \\ x+1 & 4x-1 & 2x-1 \\ x+4 & 2x+5 & 3x \end{vmatrix}=0,$ **4.** $\begin{vmatrix} x+3 & 2x & x+1 \\ x-5 & -2 & x-2 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix}=0$

**5.** $\begin{vmatrix} x & 2x & 3x \\ 5 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix}=0,$ **6.** $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

**Γ.** Νὰ ἀποδειχθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ταυτότητες :

**1.** $\begin{vmatrix} \alpha-\beta-\gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta-\gamma-\alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma-\alpha-\beta \end{vmatrix}=(\alpha+\beta+\gamma)^3,$ **2.** $\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \alpha & \alpha \\ \beta & \gamma+\alpha & \beta \\ \gamma & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix}=4\alpha\beta\gamma.$

**2.** $\begin{vmatrix} \alpha-\beta & \beta-\gamma & \gamma-\alpha \\ \beta-\gamma & \gamma-\alpha & \alpha-\beta \\ \gamma-\alpha & \alpha-\beta & \beta-\gamma \end{vmatrix}=0,$ **4.** $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$

**5.** $\begin{vmatrix} (\beta+\gamma)^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \\ \beta^2 & (\gamma+\alpha)^2 & \beta^2 \\ \gamma^2 & \gamma^2 & (\alpha+\beta)^2 \end{vmatrix}=2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3.$

**6.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 \end{vmatrix}=(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma).$

**7.** Ἄνευ ἀναπτύξεως τῶν ὁριζουσῶν, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ x & y & \omega \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & \beta & \lambda \\ x & \alpha & \mu \\ \omega & \gamma & \nu \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & y & \omega \\ \lambda & \mu & \nu \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}.$$

**8.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\begin{vmatrix} 1+x & y & \omega \\ x & 1+y & \omega \\ x & y & 1+\omega \end{vmatrix}=x+y+\omega+1.$$

**9.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\begin{vmatrix} -2\alpha & \alpha+\beta & \alpha+\gamma \\ \beta+\alpha & -2\beta & \beta+\gamma \\ \gamma+\alpha & \gamma+\beta & -2\gamma \end{vmatrix} = 4(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta).$$

**216. Κανὼν τοῦ Cramer.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ σύστημα:

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1 \omega+\delta_1=0 & (1) \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2 \omega+\delta_2=0 & (2) \\ \alpha_3 x+\beta_3 y+\gamma_3 \omega+\delta_3=0 & (3) \end{array} \right.$$

***Λύσις:*** Θεωροῦμεν τὴν ὁρίζουσαν τῶν συντελεστῶν τῶν ἀγνώστων:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{καὶ τὸν πίνακα:} \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Ἔστωσαν δέ:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad -A_2 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν ἀντιστοίχων στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ τῆς $(\Delta)$.

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $A_1$, τὰ τῆς (2) ἐπὶ $-A_2$ καὶ τὰ τῆς (3) ἐπὶ $A_3$, ὁπότε, διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν προκυπτουσῶν ἐξισώσεων καὶ τῆς ἐκτελέσεως τῶν πράξεων καὶ τῶν ἀναγωγῶν, φθάνομεν εἰς τὴν ἐξίσωσιν:

$$(\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3)x + (\delta_1 A_1 - \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3) = 0 \qquad (4)$$

ἐξ οὗ:

$$x = -\frac{\delta_1 A_1 - \delta_2 A_2 + \delta_3 A_3}{\alpha_1 A_1 - \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3} = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}} \qquad (5)$$

Ἔστωσαν ἐπίσης:

$$B_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad -B_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}$$

τὰ ἀλγεβρικὰ συμπληρώματα τῶν στοιχείων $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ τῆς $(\Delta)$. Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (1), (2), (3) ἀντιστοίχως ἐπὶ $B_1$, $-B_2$, $B_3$ καὶ κατόπιν προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς προκυπτούσας ἐξισώσεις, μετὰ δὲ τὰς ἀναγωγὰς εὑρίσκομεν:

$$(\beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3)y + (\delta_1 B_1 - \delta_2 B_2 + \delta_3 B_3) = 0 \qquad (6)$$

ἐξ οὗ:

$$y = -\frac{\delta_1 B_1 - \delta_2 B_2 + \delta_3 B_3}{\beta_1 B_1 - \beta_2 B_2 + \beta_3 B_3} = -\frac{\begin{vmatrix} \delta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \delta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \delta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \beta_3 & \alpha_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \delta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \delta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \delta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}} \qquad (7)$$

Τέλος, ἐάν:

$$\Gamma_1 = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad -\Gamma = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}, \quad \Gamma_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

εἶναι τὰ συμπληρώματα τῶν $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$ ἀντιστοίχως τῆς $(\Delta)$ καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῶν (1), (2), (3) ἀντιστοίχως ἐπὶ $\Gamma_1$, $-\Gamma_2$, $\Gamma_3$, εὑρίσκομεν ὁμοίως ὅτι:

$$(\gamma_1\Gamma_1-\gamma_2\Gamma_2+\gamma_3\Gamma_3)\omega+(\delta_1\Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3)=0 \qquad (8)$$

ἐξ οὗ:

$$\omega=-\frac{\delta_1\Gamma_1-\delta_2\Gamma_2+\delta_3\Gamma_3}{\gamma_1\Gamma_1-\gamma_2\Gamma_2+\gamma_3\Gamma_3}=-\frac{\begin{vmatrix}\delta_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \delta_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \delta_3 & \alpha_3 & \beta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1 & \beta_1\\ \gamma_2 & \alpha_2 & \beta_2\\ \gamma_3 & \sigma_3 & \beta_3\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}} \qquad (9)$$

Ἐπειδὴ δέ:

$$\alpha_1A_1-\alpha_2A_2+\alpha_3A_3=-(\beta_1B_1-\beta_2B_2+\beta_3B_3)=(\gamma_1\Gamma_1-\gamma_2\Gamma_2+\gamma_3\Gamma_3)=\Delta,$$

ἐκ τῶν (5), (7) καὶ (9) συνάγομεν ὅτι:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\\ \beta_3 & \gamma_3 & \delta_2\end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \gamma_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \gamma_3 & \delta_3\end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \delta_3\end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3\end{vmatrix}} \qquad (10)$$

Διὰ νὰ ἔχουν δὲ ἔννοιαν αἱ (10), πρέπει αἱ ὁρίζουσαι τῶν παρονομαστῶν νὰ εἶναι ***διάφοροι τοῦ μηδενός.***

Οἱ τύποι (10) δίδουν τὰς λύσεις τοῦ δοθέντος συστήματος.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: : **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{array}{r} \mathbf{2x+y+\omega-13=0}\\ \mathbf{x+2y+3\omega-16=0}\\ \mathbf{3x-3y+4\omega-14=0.}\end{array}\right.$$

***Λύσις:*** Κατὰ τοὺς τύπους (10) θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -13\\ 2 & 3 & -16\\ -2 & 4 & -14\end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -13\\ 1 & 3 & -16\\ 3 & 4 & -14\end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -13\\ 1 & 2 & -16\\ 3 & -2 & -14\end{vmatrix}}=\frac{-1}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}}$$

ἢ $\quad \dfrac{x}{-100}=\dfrac{-y}{75}=\dfrac{\omega}{-50}=\dfrac{-1}{25}$, ἐξ οὗ: $x=4$, $y=3$, $\omega=2$,

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Διὰ τῆς μεθόδου τοῦ Cramer νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

**1.** $\left|\begin{array}{l} 2x-3y+2\omega=5\\ x+2y-3\omega=4\\ 3x+y-4\omega=7\end{array}\right.$ **2.** $\left|\begin{array}{l} 2x-3y+4\omega=4\\ 3x+5y-7\omega=12\\ 5x-y-7\omega=5\end{array}\right.$ **3.** $\left|\begin{array}{l} x-2y+3\omega=2\\ 2x-3y+\omega=1\\ 3x-y+2\omega=9\end{array}\right.$

**4.** $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=1\\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\delta\\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=\delta^2\end{array}\right.$ **5.** $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma\\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=3\alpha\beta\gamma\end{array}\right.$

**6.** $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=\alpha+\beta+\gamma\\ \beta x+\gamma y+\alpha\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\\ \gamma x+\alpha y+\beta\omega=\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta\end{array}\right.$ **7.** $\left|\begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\lambda\\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2\omega=\lambda^2\\ \alpha^3x+\beta^3y+\gamma^3\omega=\lambda^3\end{array}\right.$

8. $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=2\alpha+2\beta+2\gamma \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=2\beta\gamma+2\gamma\alpha+2\alpha\beta \\ (\beta-\gamma)x+(\gamma-\alpha)y+(\alpha-\beta)\omega=0 \end{array}\right.$ 9. $\left|\begin{array}{l} x+y+\omega=\lambda+\mu+\nu \\ \lambda x+\mu y+\nu\omega=\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu \\ (\mu-\nu)x+(\nu-\lambda)y+(\lambda-\mu)\omega=0 \end{array}\right.$

10. Νὰ διερευνηθῇ κατὰ τὰς διαφόρους τιμὰς τοῦ λ τὸ σύστημα:

$$\lambda x+y-\omega=1, \quad x+\lambda y-\omega=1, \quad -x+y+\lambda\omega=1$$

11. Ὁμοίως τὸ σύστημα:

$$\lambda x+y+\omega=1, \quad x+\lambda y+\omega=\lambda, \quad x+y+\lambda\omega=\lambda^2.$$

12. Ὁμοίως τὸ σύστημα:

$$x+2y+(\lambda-3)\omega=8, \quad 2x+3y+(\lambda+4)\omega=12, \quad 3x+(6\lambda+5)y+7\omega=20.$$

**217. Ὁμογενῆ γραμμικὰ συστήματα δύο ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ἐπιλύσωμεν τὸ ὁμογενὲς καὶ γραμμικὸν σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1\omega=0. & (2) \end{cases}$$

Μία προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ἡ μηδενική. Δηλαδή:

$$x=y=\omega=0.$$

Ἔστω ὅτι $xy\omega\neq0$. Τότε ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\begin{cases} \alpha x+\beta y=-\gamma\omega \\ \alpha_1 x+\beta_1 y=-\gamma_1\omega\,. \end{cases}$$

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο ὡς πρὸς x καὶ y, λαμβάνομεν:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -\gamma\omega & \beta \\ -\gamma_1\omega & \beta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}=-\omega\cdot\frac{\begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}=\omega\cdot\frac{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}},$$

ἐξ οὗ:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}} \qquad (3)$$

καὶ

$$y=\frac{\begin{vmatrix} \alpha & -\gamma\omega \\ \alpha_1 & -\gamma_1\omega \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix} -\gamma\,\omega & \alpha \\ -\gamma_1\omega & \alpha \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}}=\omega\cdot\frac{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}},$$

ἐξ οὗ:

$$\frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix}} \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (3) καὶ (4) συνάγομεν τοὺς τύπους:

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} \beta & \gamma \\ \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}}=\frac{y}{\begin{vmatrix} \gamma & \alpha \\ \gamma_1 & \alpha_1 \end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha, & \beta_1 \end{vmatrix}}$$

ἢ

$$\frac{x}{\begin{vmatrix}\beta & \gamma\\ \beta_1 & \gamma_1\end{vmatrix}}=\frac{-y}{\begin{vmatrix}\alpha & \gamma\\ \alpha_1 & \gamma_1\end{vmatrix}}=\frac{\omega}{\begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha_1 & \beta_1\end{vmatrix}}. \qquad (5)$$

Διὰ νὰ ὑφίστανται αἱ (5), δέον νὰ εἶναι:

$$\beta\gamma_1-\beta_1\gamma\neq 0,\quad \alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma\neq 0\quad \alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0.$$

Ἐὰν κληθῇ $\lambda$ ἕκαστος τῶν ἴσων λόγων (5), τότε θὰ ἔχωμεν:

$$(6)\quad \left.\begin{aligned} x&=\lambda(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)\\ y&=-\lambda(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)\\ \omega&=\lambda(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)\end{aligned}\right|,\ \text{ἔνθα}\ \ \lambda\in\Pi_\alpha,\ \ \lambda\ \text{αὐθαίρετος}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{aligned} &x-2y+3\omega=23 && (1)\\ &6x-y-\omega=0 && (2)\\ &3x+4y-2\omega=0. && (3)\end{aligned}\right.$$

***Λύσις:*** Ἐκ τοῦ γραμμικοῦ καὶ ὁμογενοῦς συστήματος τῶν δύο ἐξισώσεων (2) καὶ (3) λαμβάνομεν, βάσει τῶν τύπων (6):

$$\left.\begin{aligned} x&=\lambda[-1(-2)-(-1)\cdot 4]=\lambda(2+4)=6\lambda\\ y&=-\lambda[6(-2)-3(-1)]=-\lambda(-12+3)=9\lambda\\ \omega&=\lambda[6\cdot 4-3\cdot(-1)]=\lambda(24+3)=27\lambda\end{aligned}\right|\quad (K)$$

Τὰς τιμὰς ταύτας θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν:

$$6\lambda-2\cdot 9\lambda+3\cdot 27\lambda=23,$$

ἐξ οὗ:

$$\lambda=\frac{1}{3}.$$

Διὰ $\lambda=\frac{1}{3}$, αἱ ἀνωτέρω σχέσεις (K) δίδουν:

$$x=2,\quad y=3,\quad \omega=9.$$

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ τὸ σύστημα:**

$$\left|\begin{aligned} &x+y+\omega=0 && (1)\\ &\alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 && (2)\\ &\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1. && (3)\end{aligned}\right.$$

***Λύσις:*** Ἐκ τοῦ ὁμογενοῦς συστήματος τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν:

$$(4)\quad \left.\begin{aligned} x&=\lambda(\gamma-\beta)\\ y&=-\lambda(\gamma-\alpha)\\ \omega&=\lambda(\beta-\alpha)\end{aligned}\right|\quad \begin{aligned}&,\ \text{ὁπότε ἡ (3) γίνεται:}\\ &\lambda[\beta\gamma(\gamma-\beta)-\gamma\alpha((\gamma-\alpha)+\alpha\beta(\beta-\alpha)]=1\\ \text{ἢ}\quad &(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\lambda=1 \qquad (5)\end{aligned}$$

Ἐὰν δὲ εἶναι $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\neq 0$, ἡ (5) δίδει:

$$\lambda=\frac{1}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}, \qquad (6)$$

ὁπότε ἐκ τῶν (4) λαμβάνομεν:

$$x=\frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)},\quad y=\frac{1}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)},\quad \omega=\frac{1}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ ἐπιλυθοῦν τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\left| \begin{array}{l} x+3y+2\omega=19 \\ 4x-y-\omega=0 \\ 5x+4y-2\omega=0 \end{array} \right.$ 2. $\left| \begin{array}{l} x+y+\omega=0 \\ (\beta+\gamma)x+(\gamma+\alpha)y+(\alpha+\beta)\omega=0 \\ \beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta\omega=1 \end{array} \right.$

3. $\left| \begin{array}{l} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 \\ \alpha^2 x+\beta^2 y+\gamma^2\omega=0 \\ \alpha^3 x+\beta^3 y+\gamma^3\omega=\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta). \end{array} \right.$

4. $\left| \begin{array}{l} x+y+\omega=3 \\ \alpha x+\beta y+\gamma\omega=\alpha+\beta+\gamma \\ xy\omega=1 \end{array} \right.$ 5. $\left| \begin{array}{l} x+y+\omega=0 \\ \dfrac{\alpha^2 x}{\alpha-\delta}+\dfrac{\beta^2 y}{\beta-\delta}+\dfrac{\gamma^2\omega}{\gamma-\delta}=0 \\ \dfrac{\alpha x}{\alpha-\delta}+\dfrac{\beta y}{\beta-\delta}+\dfrac{\gamma\omega}{\gamma-\delta}=\delta(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta). \end{array} \right.$

**218. Ὁμογενῆ γραμμικὰ συστήματα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους.** Ἕνα γραμμικὸν καὶ ὁμογενὲς σύστημα τριῶν ἐξισώσεων μὲ τρεῖς ἀγνώστους ἔχει τὴν μορφήν:

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha x+\beta y+\gamma\omega=0 & (1) \\ \alpha_1 x+\beta_1 y+\gamma_1\omega=0 & (2) \\ \alpha_2 x+\beta_2 y+\gamma_2\omega=0. & (3) \end{array} \right.$$

Προφανὴς λύσις τοῦ συστήματος τούτου εἶναι ἡ:

$$x=0,\quad y=0,\quad \omega=0.$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) λαμβάνομεν:

$$\left. \begin{array}{l} x=\lambda(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma) \\ y=-\lambda(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma) \\ \omega=\lambda(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta) \end{array} \right| \quad (4)$$

, ὁπότε ἡ (3) γίνεται:
$\lambda[\alpha_2(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)-\beta_2(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)+\gamma_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)]=0$,
ἡ ὁποία γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\lambda\cdot\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda\cdot\Delta=0. \qquad (5)$$

Ἐὰν $\Delta\neq0$, τότε $\lambda=0$ καὶ αἱ (4) δίδουν: $x=y=\omega=0$.

Ἐὰν $\Delta=0$, τότε ἡ (5) ἰσχύει διὰ $\lambda=k$ (αὐθαίρετος), ἔνθα $k\in\Pi_\alpha$ καὶ συνεπῶς ἐκ τῶν (4) θὰ ἔχωμεν ἀπείρους λύσεις.

Ἡ ὁρίζουσα $\Delta=0$ τοῦ συστήματός μας καλεῖται ***ἀπαλείφουσα.***

**219. Ἐξισώσεις συμβιβασταί.** Εἰς τὴν παράγραφον 203 εἴδομεν πότε ἕνα σύστημα γραμμικὸν τριῶν ἐξισώσεων μὲ δύο ἀγνώστους εἶναι συμβιβαστόν. Εἰς τὴν παροῦσαν παράγραφον θὰ ἐξετάσωμεν τὸ αὐτὸ θέμα κατ᾽ ἄλλον τρόπον, καὶ πρὸς τοῦτο ἔστω τὸ ἀκόλουθον παράδειγμα:

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Δίδεται τὸ σύστημα:**

$$\alpha x+\beta y=\gamma,\quad \alpha_1 x+\beta_1 y=\gamma_1,\quad \alpha_2 x+\beta_2 y=\gamma_2,$$

**καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ σχέσις, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς συντελεστὰς τῶν τριῶν ἐξισώσεων, ἵνα τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι συμβιβαστόν.**

*Λύσις:* Ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$x=\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta},$$

ἂν $\alpha\beta_1-\alpha_1\beta\neq 0$. Ἂν δὲ αἱ τιμαὶ αὗται εἶναι ρίζαι τοῦ συστήματος, θὰ πρέπῃ νὰ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν τρίτην ἐξίσωσιν. Δηλαδή:

$$\alpha_2\cdot\frac{\gamma\beta_1-\gamma_1\beta}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}+\beta_2\cdot\frac{\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma}{\alpha\beta_1-\alpha_1\beta}=\gamma_2$$

ἢ $$\alpha_2(\gamma\beta_1-\gamma_1\beta)+\beta_2(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)-\gamma_2(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)=0,$$

ἡ ὁποία σχέσις γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=0$$

καὶ καλεῖται ***ἀπαλείφουσα τοῦ συστήματος*** ἢ καὶ ***ἐξαγόμενον τῆς ἀπαλοιφῆς τῶν ἀγνώστων*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων τοῦ συστήματος.

2ον: **Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα τὸ σύστημα:**

$$\mathbf{x+y+\lambda=0,\quad \alpha x+\beta y+\lambda^2=0,\quad \alpha^2x+\beta^2y+\lambda^3=0,}$$

**εἶναι συμβιβαστόν.**

*Λύσις:* 1ον: Ἐὰν $\beta-\alpha\neq 0$, ἐκ τῶν δύο πρώτων ἐξισώσεων λαμβάνομεν:

$$x=\frac{\lambda(\lambda-\beta)}{\beta-\alpha},\qquad y=\frac{\lambda(\alpha-\lambda)}{\beta-\alpha} \tag{1}$$

ὁπότε ἡ τρίτη ἐξίσωσις γίνεται:

$$\alpha^2\cdot\frac{\lambda(\lambda-\beta)}{\beta-\alpha}+\beta^2\cdot\frac{\lambda(\alpha-\lambda)}{\beta-\alpha}+\lambda^3=0$$

ἢ $$(\beta-\alpha)\lambda^3-(\beta^2-\alpha^2)\lambda^2+\alpha\beta(\beta-\alpha)\lambda=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\beta-\alpha\neq 0$, ἕπεται ὅτι:

$$\lambda^3-(\alpha+\beta)\lambda^2+\alpha\beta\lambda=0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda[\lambda^2-(\alpha+\beta)\lambda+\alpha\beta]=0$$

ἢ $$\lambda(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)=0. \tag{2}$$

Αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως ταύτης εἶναι: $\lambda=0$, $\lambda=\alpha$, $\lambda=\beta$.

α'). Ἐὰν $\lambda=0$, αἱ (1) δίδουν: $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{y=0}$.

β'). Ἐὰν $\lambda=\alpha$, αἱ (1) δίδουν: $\mathbf{x=-\alpha}$, $\mathbf{y=0}$.

γ'). Ἐὰν $\lambda=\beta$, αἱ (1) δίδουν: $\mathbf{x=0}$, $\mathbf{y=-\beta}$.

2ον: Ἐὰν $\alpha=\beta\neq 0$, τὸ σύστημα γράφεται:

$$x+y=-\lambda,\quad x+y=-\frac{\lambda^2}{\alpha},\quad x+y=-\frac{\lambda^3}{\alpha^2}.$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ***ἀδύνατον***, ἂν $\alpha\neq\lambda$ καὶ $\lambda\neq 0$.

Εἶναι ***ἀόριστον***, ἂν $\alpha=\lambda\neq 0$, καὶ ἀνάγεται τότε εἰς μόνην τὴν ἐξίσωσιν:

$$x+y=-\lambda.$$

Εἶναι ἐπίσης ***ἀόριστον***, ὅταν $\lambda=0$.

3ον: Ἐὰν $\alpha=\beta=0$, τὸ σύστημα εἶναι ***ἀδύνατον***, διὰ $\lambda\neq 0$.

Ἐὰν $\alpha=\beta=\lambda=0$, τὸ σύστημα ἀνάγεται εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $x+y=0$, ἡ ὁποία ἔχει ***ἀπείρους*** λύσεις. Ἄρα τὸ δοθὲν σύστημα εἶναι ἀόριστον.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$x-\alpha y=\beta, \quad \alpha x+y=\gamma, \quad \beta x+\gamma y=1.$$

**2.** Ὁμοίως οἱ x καὶ y μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$x+\alpha y=-\alpha^3, \quad x+\beta y=-\beta^3, \quad x+\gamma y=-\gamma^3.$$

**3.** Νὰ ἀπαλειφθοῦν οἱ x, y, ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha x+\gamma y+\beta\omega=0, \quad \gamma x+\beta y+\alpha\omega=0, \quad \beta x+\alpha y+\gamma\omega=0.$$

**4.** Ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha(y+\omega)=x, \quad \beta(\omega+x)=y, \quad \gamma(x+y)=\omega,$$

ἂν $xy\omega\neq0$.

**5.** Ἐὰν $\alpha\neq\pm1$, $\beta\neq\pm1$, $\gamma\neq\pm1$, ἐκ τῶν σχέσεων:

$$x=\gamma y+\beta\omega, \quad y=\alpha\omega+\gamma x, \quad \omega=\beta x+\alpha y,$$

νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x^2}{1-\alpha^2}=\frac{y^2}{1-\beta^2}=\frac{\omega^2}{1-\gamma^2}.$$

**6.** Ἐὰν $xyz\omega\neq0$ καὶ $(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)\neq0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τοῦ συστήματος:

$$\left.\begin{cases} x=\beta y+\gamma z+\delta\omega, & z=\alpha x+\beta y+\delta\omega \\ y=\alpha x+\gamma z+\delta\omega & \omega=\alpha x+\beta y+\gamma z \end{cases}\right\},$$

ἕπεται ἡ ἰσότης:

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{\beta}{1+\beta}+\frac{\gamma}{1+\gamma}+\frac{\delta}{1+\delta}=1.$$

**7.** Ἐὰν $\alpha(y+\omega)=x$, $\beta(\omega+x)=y$, $\gamma(x+y)=\omega$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x^2}{\alpha(1-\beta\gamma)}=\frac{y^2}{\beta(1-\gamma\alpha)}=\frac{\omega^2}{\gamma(1-\alpha\beta)},$$

ἂν $xy\omega\neq0$ καὶ οἱ παρονομασταὶ εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός.

**8.** Νὰ γίνῃ ἀπαλοιφὴ τῶν x, y, ω μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\frac{y}{\omega}-\frac{\omega}{y}=\alpha, \quad \frac{\omega}{x}-\frac{x}{\omega}=\beta, \quad \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\gamma.$$

**9.** Ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha x+y\omega=\beta\gamma, \quad \beta y+\omega x=\gamma\alpha, \quad \gamma\omega+xy=\alpha\beta, \quad xy\omega=\alpha\beta\gamma.$$

**10.** Ὁμοίως μεταξὺ τῶν ἐξισώσεων:

$$\alpha x^2+\beta y^2+\gamma\omega^2=\alpha x+\beta y+\gamma\omega=y\omega+\omega x+xy=0.$$

**11.** Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ὥστε τὸ σύστημα:

$$\lambda x+y+\omega=\lambda, \quad \lambda x+\lambda y+\omega=1, \quad x+\lambda y+\lambda\omega=1, \quad x+y+\lambda\omega=\lambda,$$

νὰ εἶναι συμβιβαστόν.

**12.** Ἐὰν $\alpha(x+y+\omega)=\beta(y+\omega-x)=\gamma(\omega+x-y)=\delta(x+y-\omega)\neq0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}.$$

**13.** Ἐὰν $x^2-y\omega=\alpha$, $y^2-\omega x=\beta$, $\omega^2-xy=\gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x}{\alpha^2-\beta\gamma}=\frac{y}{\beta^2-\gamma\alpha}=\frac{\omega}{\gamma^2-\alpha\beta}.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIII

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΑΘΜΟΥ ΜΕ ΔΥΟ Ἢ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΟΥΣ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

**220. Προβλήματα πρωτοβάθμια μὲ δύο ἢ περισσοτέρους ἀγνώστους.** Ἕκαστον πρόβλημα περιέχει τὰ ***γνωστὰ*** μεγέθη ἢ ποσὰ καὶ τὰ ***ἄγνωστα*** μεγέθη ἢ ποσά. Ἐπίσης τὸ πρόβλημα ἐκφράζει ***τὰς σχέσεις***, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γνωστῶν στοιχείων του, καὶ τῶν ἀγνώστων στοιχείων αὐτοῦ. Ἑπομένως ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος θὰ περιέχῃ:

α'). Τὴν ἐκλογὴν τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων.

β'). Τὴν κατάστρωσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τῶν ἐξισώσεων.

γ'). Τὴν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ἢ τοῦ συστήματος, τὸ ὁποῖον προκύπτει.

δ'). Τὴν διερεύνησιν τῆς λύσεως.

Διὰ τοῦτο, ἵνα ἕνα πρόβλημα τεθῇ ὑπὸ μορφὴν ἐξισώσεων, εἶναι ἀνάγκη νὰ γίνῃ ἡ κατάλληλος ἐκλογὴ τοῦ ἀγνώστου ἢ τῶν ἀγνώστων, τοὺς ὁποίους παριστῶμεν μὲ τὰ τελευταῖα γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου x, y, ω, φ... Ἔπειτα νὰ ἐκφράσωμεν δι' ἀλγεβρικῶν σχέσεων τὰ ἄγνωστα στοιχεῖα μὲ τὰ γνωστά, βάσει τῶν ὅρων τοῦ προβλήματος.

Πρὸς πλήρη κατανόησιν λύομεν τὰ ἀκόλουθα προβλήματα:

**221. Πρόβλημα 1ον.** *Πατήρ τις ἔχει τριπλασίαν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ του. Ἐὰν ὁ πατὴρ ἦτο κατὰ 30 ἔτη μικρότερος καὶ ὁ υἱὸς κατὰ 8 ἔτη μεγαλύτερος, θὰ εἶχον τὴν αὐτὴν ἡλικίαν. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἡλικία ἑκάστου.*

***Λύσις:*** Ἐὰν x εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς καὶ y ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ, κατὰ τὴν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$\left|\begin{array}{l} x=3y \qquad (1) \\ x-30=y+8. \qquad (2) \end{array}\right.$$

Περιορισμός: Οἱ x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι ***θετικοί.***

Λύομεν τὸ σύστημα τοῦτο. Ἡ (2), βάσει τῆς (1), γίνεται:

$$3y-30=y+8, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad y=19,$$

ὁπότε ἡ (1) δίδει: $\quad x=3\cdot 19=57$

Ὥστε, ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς εἶναι 57 ἔτη καὶ ἡ τοῦ υἱοῦ 19 ἔτη.

**222. Πρόβλημα 2ον.** *Νὰ εὑρεθῇ διψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων εἶναι 9 καὶ τοιοῦτος, ὥστε, ἐὰν ἐναλλαχθοῦν τὰ ψηφία του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὰ* $\frac{4}{7}$ *τοῦ ζητουμένου.*

***Λύσις:*** Ἔστω x τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων καὶ y τὸ ψηφίον τῶν μονάδων. Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς γράφεται ὡς ἑξῆς: $\overline{xy}$.

Ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του θὰ γραφῇ: $\overline{yx}$.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει x δεκάδας καὶ y μονάδας, γράφεται:

$$\overline{xy}=10x+y,$$

καὶ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει y δεκάδας καὶ x μονάδας, γράφεται:

$$\overline{yx}=10y+x.$$

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=9 \\ \overline{xy}\cdot\dfrac{4}{7}=\overline{yx} \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{ll} x+y=9 & (1) \\ (10x+y)\,\dfrac{4}{7}=10y+x & (2) \end{array}$$

Περιορισμός: Πρέπει νὰ εἶναι: $0<x\leqslant 9$ καὶ $0\leqslant y\leqslant 9$.

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$x=6, \quad y=3.$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι: $\overline{xy}=\mathbf{63}$.

**223. Πρόβλημα 3ον.** *Δύο παῖκται συμφωνοῦν νὰ παίξουν ἐπὶ τῆς τραπέζης 8 δραχμάς. Κατὰ τὴν πρώτην παρτίδα τοῦ παιγνιδίου κερδίζει ὁ πρῶτος καὶ ἔχει τότε τόσα χρήματα, ὅσα ἔχει ὁ ἄλλος. Ἐὰν ἔχανε ὁ πρῶτος, ὁ δεύτερος θὰ εἶχε πενταπλάσια τῶν ὅσων ἔμειναν εἰς τὸν δεύτερον. Πόσα χρήματα ἔχει ἕκαστος;*

***Λύσις:*** Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος ἔχει x χρήματα καὶ ὁ δεύτερος y χρήματα. Ὅταν κερδίζῃ ὁ πρῶτος, θὰ ἔχῃ x+8 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος θὰ ἔχῃ y—8 δραχ. Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$x+8=y-8. \qquad (1)$$

Κατὰ τὴν δευτέραν ὑπόθεσιν χάνει ὁ πρῶτος. Ἄρα ἔχει x—8 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος θὰ ἔχῃ y+8 δραχ. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν:

$$(x-8)5=y+8. \qquad (2)$$

Περιορισμός. Ὁ x πρέπει νὰ εἶναι ***θετικός.***

Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (1) καὶ (2), εὑρίσκομεν:

$$x=16 \text{ καὶ } y=32.$$

Ὥστε, ὁ πρῶτος ἔχει 16 δραχ. καὶ ὁ δεύτερος ἔχει 32 δραχ.

**224. Πρόβλημα 4ον:** *Δύο κεφάλαια εἶναι τοκισμένα τὸ ἕνα πρὸς 6% διὰ 9 μῆνας καὶ τὸ ἄλλο πρὸς 5% διὰ 7 μῆνας καὶ δίδουν τὸν αὐτὸν τόκον. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ταῦτα προστιθέμενα εἰς τοὺς τόκους των, δίδουν ἄθροισμα 92150 δρχ.*

***Λύσις:*** Ἔστω x τὸ πρῶτον κεφάλαιον καὶ y τὸ δεύτερον.
Οἱ τόκοι αὐτῶν εἶναι ἀντιστοίχως:

$$T_1 = \frac{x \cdot 6 \cdot 9}{100 \cdot 12} = \frac{9x}{200} \quad \text{καὶ} \quad T_2 = \frac{y \cdot 5 \cdot 7}{100 \cdot 12} = \frac{7y}{240}.$$

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{9x}{200} = \dfrac{7y}{240} \\ \left(x + \dfrac{9x}{200}\right) + \left(y + \dfrac{7y}{240}\right) = 92150 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} 54x = 35y \\ x + y + \dfrac{9x}{200} + \dfrac{7y}{240} = 92150. \end{array}$$

Περιορισμός: Οἱ x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι ***θετικοί.***
Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν.

$$x = 35000 \text{ δρχ.} \quad \text{καὶ} \quad y = 54000 \text{ δραχ.}$$

**225. Πρόβλημα 5ον**: *Ἕνα κεφάλαιον, τοκιζόμενον πρὸς 5%, γίνεται μετά τινα χρόνον μὲ τοὺς τόκους του 55950 δρχ. Τὸ αὐτὸ κεφάλαιον, εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, τοκιζόμενον πρὸς 6%, γίνεται μετὰ τῶν τόκων του μεγαλύτερον κατὰ 390 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος.*

***Λύσις:*** Ἔστω x τὸ κεφάλαιον καὶ y ὁ χρόνος. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις:

$$x + \frac{x \cdot 5 \cdot y}{100} = 55950 \qquad (1)$$

$$x + \frac{x \cdot 6 \cdot y}{100} = 55950 + 390 = 56340 \qquad (2)$$

ἢ
$$\left.\begin{array}{r} 100x + 5xy = 5595000 \\ 100x + 6xy = 5634000 \end{array}\right| \begin{array}{r} 6 \\ -5 \end{array}$$

ἢ
$$\left.\begin{array}{r} 600x + 30xy = 33570000 \\ -500x - 30xy = -28170000 \end{array}\right|$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη, εὑρίσκομεν:

$$100x = 5400000, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x = 54000.$$

Διὰ $x = 54000$, ἡ (1) δίδει: $y = \dfrac{1950}{2700} = \mathbf{260}$ ἡμέρας.

Ὥστε, τὸ κεφάλαιον εἶναι 54000 δρχ. καὶ ὁ χρόνος 260 ἡμέραι.

**226. Πρόβλημα 6ον.** *Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἐμβαδόν του δὲν μεταβάλλεται, ὅταν τὸ πλάτος του αὐξηθῇ κατὰ 5 μ., καὶ τὸ μῆκος του ἐλαττωθῇ κατὰ 5 μ. Ἐὰν ὅμως τὸ πλάτος του αὐξηθῇ κατὰ 5 μ. καὶ ἐλαττωθῇ τὸ μῆκος του κατὰ 4 μ., τὸ ἐμβαδόν του αὐξάνει κατὰ 24 μ².*

***Λύσις:*** Ἐὰν x εἶναι τὸ μῆκος καὶ y τὸ πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου, τότε τὸ ἐμβαδόν του εἶναι xy.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἐξισώσεις :

$$\left.\begin{aligned}(x-5)(y+5)&=xy\\(x-4)(y+5)&=xy+24\end{aligned}\right\}\qquad\begin{aligned}(1)\\(2)\end{aligned}$$

Τὸ σύστημα τοῦτο εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τό :

$$5x-5y=25$$
$$5x-4y=44.$$

Περιορισμός: Οἱ x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι **θετικοί**.

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν :

$$x=24 \quad \text{καὶ} \quad y=19.$$

Ἄρα τὸ μῆκος τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 24 μ. καὶ τὸ πλάτος 19 μ.

**227. Πρόβλημα 7ον.** *Ἡ ἀπόστασις μεταξὺ δύο πόλεων Α καὶ Β εἶναι 90 χιλιόμετρα. Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ τῶν Α καὶ Β καὶ βαίνουν πρὸς συνάντησίν των. Συναντῶνται εἰς ἀπόστασιν 50 χιλιομέτρων ἀπὸ τὸ Α. Ἐὰν ὁ ταχύτερος ποδηλάτης ἀνεχώρει μίαν ὥραν ἀργότερον, ἡ συνάντησις θὰ ἐλάμβανε χώραν εἰς ἀπόστασιν* $38\ \frac{8}{9}$ *χιλιόμετρα ἀπὸ τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου ποδηλάτου.*

***Λύσις:*** Ἔστω x ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ ἑνὸς καὶ y ἡ τοῦ ἄλλου.

Ὁ ἐκ τῆς Α ἀναχωρήσας, διήνυσε τὰ 50 χιλιόμετρα εἰς χρόνον $\frac{50}{x}$ καὶ ὁ ἐκ τῆς Β ἀναχωρήσας, διήνυσε ἀπόστασιν $90-50=40$ χιλιόμετρα εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον $\frac{40}{y}$.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν: $\frac{50}{x}=\frac{40}{y}$ ἢ $4x=5y$. (1)

Κατὰ τὴν δευτέραν περίπτωσιν αἱ διανυθησόμεναι ἀποστάσεις θὰ εἶναι: $38\ \frac{8}{9}=\frac{350}{9}$ χιλιόμετρα καὶ $90-\frac{350}{9}=\frac{460}{9}$ χιλιόμετρα.

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν καὶ τὴν ἐξίσωσιν :

$$\frac{460}{9y}-\frac{350}{9x}=1 \quad \text{ἢ} \quad 460x-350y=9xy. \qquad (2)$$

Περιορισμός: Οἱ x καὶ y πρέπει νὰ εἶναι **θετικοί**.

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν: $x=\frac{5}{4}y$ (3), ὁπότε ἡ (2) γίνεται :

$$y(20-y)=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad y=20, \quad (\text{διότι } y\neq 0).$$

Διὰ $y=20$, ἡ (3) δίδει : $x=\frac{5}{4}\cdot 20=25$.

Ὥστε, ἡ ταχύτης τοῦ ἑνὸς ποδηλάτου εἶναι ***25*** χλμ. τὴν ὥραν καὶ ἡ τοῦ ἄλλου εἶναι ***20*** χλμ. τὴν ὥραν.

**228. Πρόβλημα 7ον.** *Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ἔχων τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων των εἶναι 20. Ἐὰν ἐναλλαχθοῦν τὰ δύο πρῶτα ψηφία του, προκύπτει ἀριθμὸς κατὰ 270 μεγαλύτερος. Ἐὰν δὲ ἐναλλαχθοῦν τὰ ἄκρα ψηφία του, προκύπτει ἀριθμὸς μικρότερος κατὰ 99.*

***Λύσις.*** Ἔστω $\overline{xy\omega}$ ὁ ζητούμενος ἀριθμός. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν τὰς ἀκολούθους ἐξισώσεις:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{xy\omega}=\overline{yx\omega}-270 \\ \overline{xy\omega}=\overline{\omega yx}+99 \\ x+y+\omega=20 \end{array}\right| \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 100x+10y+\omega=100y+10x+\omega-270 \\ 100x+10y+\omega=100\omega+10y+x+99 \\ x+y+\omega=0 \end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} y-x=3 \\ x-\omega=1 \\ x+y+\omega=20. \end{array}\right.$$

Περιορισμός: Πρέπει: $0<x\leqslant 9$, $0<\omega\leqslant 9$, $0<y\leqslant 9$.

Λύοντες τὸ σύστημα τοῦτο, εὑρίσκομεν:

$$\boldsymbol{x=6,\quad y=9,\quad \omega=5.}$$

Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι ὁ: $\overline{xy\omega}=\boldsymbol{695}$.

**229. Πρόβλημα 8ον.** *Ἕνα κεφάλαιον ἐχωρίσθη εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου καὶ τὰ ὁποῖα φέρουν ἕκαστον ἐτήσιον τόκον 375 δρχ. Ἐὰν ἕκαστον μέρος ηὐξάνετο κατὰ 2000 δρχ. θὰ ἔφερον ὁμοῦ ἐτήσιον 950 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὰ ἐπιτόκια.*

***Λύσις:*** Ἔστωσαν x καὶ 3x τὰ δύο μέρη τοῦ κεφαλαίου, y δὲ καὶ z τὰ ἐπιτόκια ἀντιστοίχως. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν, ἀφ' ἑνὸς μὲν τὰς

ἐξισώσεις: $\dfrac{xy}{100}=375$, ἐξ οὗ: $xy=37500$, καὶ

$$\frac{3xz}{100}=375, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad 3xz=37500.$$

Ἀφ' ἑτέρου δὲ καὶ τὴν ἐξίσωσιν:

$$\frac{y(x+2000)}{100}+\frac{z(3x+2000)}{100}=950$$

ἢ $$xy+2000y+3xz+2000z=95000.$$

Ἔχομεν οὕτω πρὸς λύσιν τὸ σύστημα:

$$\left.\begin{array}{c} xy=37500 \\ 3xz=37500 \\ xy+2000xy+3xz+2000z=95000. \end{array}\right| \quad \begin{array}{r} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Ἡ (3), βάσει τῶν (1) καὶ (2), γίνεται:

$$37500+2000y+37500+2000z=95000$$

ἢ $$y+z=10 \qquad (4)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2), λαμβάνομεν:

$$xy=3xz, \text{ ἐξ οὗ: } y=3z \quad (5), \quad (\text{διότι } x\neq 0)$$

Ἄρα ἡ (4) γίνεται: $3z+z=10$, ἐξ οὗ: $z=2,5$.

Ἄρα: $y=3\cdot z=3\cdot 2,5=7,5$, ὁπότε ἐκ τῆς (1) προκύπτει: $x=20000$.

Ὥστε, τὸ ζητούμενον κεφάλαιον εἶναι: $x=20000$ δρχ.

καὶ τὰ ἐπιτόκια: $y=7,5\%$ καὶ $z=2,5\%$.

**230. Πρόβλημα 9ον.** *Μία δεξαμενὴ γεμίζεται μὲ ὕδωρ ὑπὸ τριῶν κρουνῶν εἰς 4 ὥρας. Οἱ δύο πρῶτοι ὁμοῦ κρουνοὶ γεμίζουν αὐτὴν εἰς 6 ὥρας καὶ οἱ δύο τελευταῖοι ὁμοῦ γεμίζουν αὐτὴν εἰς 8 ὥρας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσας ὥρας ἕκαστος κρουνὸς γεμίζει τὴν δεξαμενήν.*

***Λύσις***: Ἔστω ὅτι ὁ πρῶτος κρουνὸς γεμίζει μόνος του τὴν δεξαμενὴν εἰς x ὥρας, ὁ δεύτερος ὅτι τὴν γεμίζει εἰς y ὥρας καὶ ὁ τρίτος εἰς ω ὥρας. Εἰς μίαν ὥραν ἕκαστος κρουνὸς γεμίζει τὸ $\frac{1}{x}$, τὸ $\frac{1}{y}$ καὶ τὸ $\frac{1}{\omega}$ τῆς δεξαμενῆς.

Κατὰ τὸ πρόβλημα, θὰ ἔχωμεν τὸ σύστημα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{y}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{8}$$

Λύοντες τοῦτο, κατὰ τὰ γνωστά, εὑρίσκομεν:

$$x=8, \quad y=24, \quad \omega=12.$$

Ἄρα, ὁ πρῶτος κρουνὸς γεμίζει τὴν δεξαμενὴν εἰς 8 ὥρας, ὁ δεύτερος τὴν γεμίζει εἰς 24 ὥρας καὶ ὁ τρίτας εἰς 12 ὥρας.

**231. Πρόβλημα 10ον.** *Τέσσαρες παῖκται Α, Β, Γ, Δ συνεφώνησαν τὰ ἑξῆς: Ἐκεῖνος ποὺ θὰ χάνῃ, θὰ διπλασιάζῃ τὰ χρήματα τῶν τριῶν ἄλλων. Ἕκαστος ἔχασε ἀπὸ* ***μίαν*** *φορὰν κατὰ τὴν δοθεῖσαν σειρὰν Α, Β, Γ, Δ, εὑρέθη δὲ εἰς τὸ τέλος νὰ ἔχῃ ἕκαστος 64 δραχ. Πόσας δραχμὰς εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;*

***Λύσις***: Ἔστω ὅτι ὁ Α εἶχε x, ὁ Β εἶχε y, ὁ Γ εἶχε ω καὶ ὁ Δ εἶχε φ δραχ. ἐξ ἀρχῆς.

Ἀφοῦ τὴν πρώτην φορὰν ἔχασεν ὁ Α, κατὰ τὸ πρόβλημα:

ὁ Α θὰ ἔχῃ τώρα: $x-y-\omega-\varphi$
ὁ Β » » : $2y$
ὁ Γ » » : $2\omega$
ὁ Δ » » : $2\varphi$

Ἀφοῦ τὴν δευτέραν φορὰν ἔχασεν ὁ Β, κατὰ τὸ πρόβλημα:

ὁ Α θὰ ἔχῃ τώρα: $2x-2y-2\omega-2\varphi$
ὁ Β » » : $2y-(x-y-\omega-\varphi)-2\omega-2\varphi=3y-x-\omega-\varphi$
ὁ Γ » » : $4\omega$
ὁ Δ » » : $4\varphi$.

Ἀφοῦ τὴν τρίτην φορὰν ἔχασεν ὁ Γ, κατὰ τὸ πρόβλημα:

ὁ Α θὰ ἔχῃ τώρα: $4x-4y-4\omega-4\varphi$

ὁ Β » » : $2(3y-x-\omega-\varphi)=6y-2x-2\omega-2\varphi$

ὁ Γ » » : $4\omega-(2x-2y-2\omega-2\varphi)-(3y-x-\omega-\varphi)-4\varphi=7\omega-x-y-\varphi$

ὁ Δ » » : $8\varphi$.

Ἀφοῦ τὴν τετάρτην φορὰν ἔχασεν ὁ Δ, κατὰ τὸ πρόβλημα:

ὁ Α θὰ ἔχῃ τώρα: $8x-8y-8\omega-8\varphi=64$. (1)

ὁ Β » » : $2(6y-2x-2\omega-2\varphi)=12y-4x-4\omega-4\varphi=64$ (2)

ὁ Γ » » : $2(7\omega-x-y-\varphi)=14\omega-2x-2y-2\varphi=64$ (3)

ὁ Δ » » : $8\varphi-(4x-4y-4\omega-4\varphi)-(6y-2x-2\omega-2\varphi)-$
$-(7\omega-x-y-\varphi)=15\varphi-x-y-\omega=64$. (4)

Ἐκ τῶν (1), (2), (3) καὶ (4), λαμβάνομεν τὸ ἰσοδύναμον σύστημα:

$$\left|\begin{array}{l} x-y-\omega-\varphi=8 \\ -x+3y-\omega-\varphi=16 \\ x-y+7\omega-\varphi=32 \\ -x-y-\omega+15\varphi=64. \end{array}\right|$$

Λύοντες τοῦτο, εὑρίσκομεν: $x=132,\ y=68,\ \omega=36,\ \varphi=20.$

Ὥστε, ὁ Α εἶχεν ἐξ ἀρχῆς 132 δραχ., ὁ Β εἶχεν 68 δραχ., ὁ Γ εἶχε 36 δραχ. καὶ ὁ Δ εἶχεν 20 δραχ.

## ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ.

**1.** Διὰ 5 μ. μεταξωτοῦ ὑφάσματος καὶ διὰ 4 μ. βαμβακεροῦ ὑφάσματος ἐπλήρωσέ τις 292 δρχ., ἐνῷ διὰ 4 μ. ἐκ τοῦ πρώτου καὶ διὰ 5 μ. ἐκ τοῦ δευτέρου θὰ ἐπλήρωνε 284 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἑκάστου ὑφάσματος.

**2.** Ὁ Πέτρος λέγει εἰς τὸν Γεώργιον. Δός μου 5 ἐκ τῶν βόλων σου διὰ νὰ ἔχωμεν ἴσους βώλους. Ὁ Γεώργιος ἀπαντᾷ, δός μου σὺ 10 ἐκ τῶν βόλων σου, διὰ νὰ ἔχω διπλασίους τῶν ἰδικῶν σου. Πόσους βώλους ἔχει ἕκαστος;

**3.** Ἔμπορος ἠγόρασεν ὄρνιθας καὶ κοτόπουλα ἀντὶ 261 δραχ. Τὰς ὄρνιθας πρὸς 15 δρχ. τὴν μίαν καὶ τὰ κοτόπουλα πρὸς 12 δρχ. τὸ ἕνα. Κατὰ την μεταφορὰν ἔχασε 2 ὄρνιθας καὶ 5 κοτόπουλα. Κατόπιν ἐπώλησε ἑκάστην ὄρνιθα 3 δρχ. περισσότερον καὶ ἕκαστον κοτόπουλον 4 δρχ. περισσότερον καὶ ἐζημιώθη 46 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἠγόρασε ἐξ ἑκάστου εἴδους.

**4.** Ἠρωτήθη τις τί ζῷα ἔχει καὶ ἀπεκρίθη. Ἔχω ὄρνιθας καὶ αἶγας ἐν ὅλῳ 80 κεφαλὰς καὶ 220 πόδας. Πόσας ὄρνιθας καὶ πόσας αἶγας εἶχεν οὗτος.

**5.** Νὰ εὑρεθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των 98 καὶ τοῦ πηλίκου των 10 : 11.

**6.** Νὰ εὑρεθῇ κλάσμα, τὸ ὁποῖον γίνεται ἴσον μὲ τὸ $\frac{2}{3}$, ὅταν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τοὺς ὅρους του τὴν μονάδα καὶ ἴσον πρὸς τὸ $\frac{3}{4}$, ὅταν προσθέσωμεν εἰς τοὺς ὅρους του τὴν μονάδα.

**7** Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 42 καὶ ἡ διαφορά των 8. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι.

**8.** Δύο πρόσωπα Α καὶ Β εἶχον ὁμοῦ 18300 δρχ. Ὁ Α ἐξώδευσε τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ ποσοῦ του καὶ ὁ Β τὰ $\frac{3}{7}$ τοῦ ἰδικοῦ του καὶ παρετήρησαν ὅτι ὁ Α ἔχει τώρα διπλάσια τοῦ Β. Πόσας δρχ. εἶχεν ἕκαστος;

**9.** Ποσὸν ἐκ 1416 δρχ. μοιράζεται εἰς δύο πρόσωπα Α καὶ Β. Ὁ Α ἐξοδεύει τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ μεριδίου του καὶ ὁ Β τὰ $\frac{3}{8}$ τοῦ μεριδίου του Παρατηροῦν δὲ ὅτι καὶ οἱ δύο ἔχουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μερίδιον ἑκάστου.

**10.** Ἔχομεν δύο τεμάχια σιδήρου. Τὰ $\frac{2}{5}$ τοῦ βάρους τοῦ πρώτου τεμαχίου ζυγίζουν 96 χιλιόγραμμα ὀλιγώτερον ἀπὸ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ βάρους τοῦ δευτέρου τεμαχίου. Ἀλλὰ τὰ $\frac{5}{8}$ τοῦ βάρους τοῦ δευτέρου ἰσοῦνται μὲ τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ βάρους τοῦ πρώτου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τεμαχίου.

**11.** Ἀντικείμενον ἐκ χρυσοῦ καὶ ἀργύρου ζυγίζει 592 γραμ. Ὁ ὄγκος του εἶναι 41 $cm^3$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος τοῦ χρυσοῦ καὶ τοῦ ἀργύρου, γνωστοῦ ὄντος ὅτι ἕνα $cm^3$ ἐκ τοῦ χρυσοῦ ζυγίζει 19 γραμ. καὶ ἕνα $cm^3$ ἐκ τοῦ ἀργύρου ζυγίζει 10,5 γραμμάρια.

**12.** Ἐπλήρωσέ τις 227 δρχ. δι' ἕνα χρέος του μὲ 58 πεντάδραχμα καὶ δίδραχμα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς τῶν πενταδράχμων καὶ ὁ ἀριθμὸς τῶν διδράχμων.

**13.** Ἀγοράζει τις δύο εἴδη ὑφάσματος, ἐκ μὲν τοῦ α' 5 μέτρα ἐκ δὲ τοῦ β' 6 μέτρα ἀντὶ 390 δρχ. Ἐπειδὴ ὁ ἔμπορος ἐνήλλαξε τὰ δύο εἴδη, ἐζημιώθη ὁ ἔμπορος 10 δρχ. Πόσον ἐτιμᾶτο τὸ μέτρον ἑκάστου εἴδους;

**14.** Τὸ πηλίκον δύο ἀριθμῶν εἶναι 3 καὶ τὸ ὑπόλοιπον 52. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 272, νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί.

**15.** Ἕνας ἔμπορος ἐπώλησε 8 ἀγελάδας καὶ 6 ὄνους καὶ ἐκέρδισε 14000 δρχ. Ἐὰν ὅμως μὲ τὰς ἰδίας τιμὰς ἐπώλει 12 ἀγελάδας καὶ 7 ὄνους, θὰ ἔχανε 8600 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου ζώου.

**16.** Μήτηρ καὶ κόρη ἐργάζονται εἰς ἐργοστάσιον. Ἡ μήτηρ ἐπὶ 100 ἡμέρας καὶ ἡ κόρη ἐπὶ 85 ἡμέρας. Ἡ μήτηρ κερδίζει ἡμερησίως 6 δρχ. περισσοτέρας ἀπὸ τὴν κόρην, ἡ ὁποία ἐπληρώθη 870 δρχ. ὀλιγώτερον ἀπὸ τὴν μητέρα της. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἡμερομίσθιον ἑκάστης.

**17.** Ὑπάλληλος ἔλαβε τὸν μισθόν του ἐκ 2550 δρχ. εἰς 39 ἐν ὅλῳ χαρτονομίσματα τῶν 50 δρχ. καὶ τῶν 100 δρχ. Νὰ ὑπολογισθῇ πόσα χαρτονομίσματα τῶν 50 καὶ πόσα τῶν 100 ἔλαβεν οὗτος.

**18.** Οἰκοκυρὰ ὑπελόγισε νὰ πληρώσῃ δι' 6 μέτρα βαμβακεροῦ καὶ 5 μέτρα μαλλίνου ὑφάσματος 480 δρχ. Ὁ ἔμπορος ὅμως τῆς ἔκοψε, κατὰ λάθος, 6 μέτρα βαμβακεροῦ καὶ 9 μέτρα μαλλίνου καὶ ἐζήτει 792 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τοῦ μέτρου ἑκάστου ὑφάσματος.

**19.** Νὰ μοιρασθοῦν 170229 δρχ. εἰς δύο πρόσωπα, ὥστε τὸ Β πρόσωπον νὰ λάβῃ 28597 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Α.

**20.** Ἐρωτηθείς τις πόσα χρήματα ἔχει, ἀπήντησεν ὡς ἑξῆς: Ἐὰν τριπλασιασθοῦν τὰ χρήματά μου θὰ ἔχω 622 δρχ. περισσοτέρας τοῦ ἀδελφοῦ μου. Ἂν ὅμως ἑπταπλασιασθοῦν, θὰ ἔχω 4118 δρχ. περισσοτέρας τούτου. Νὰ εὑρεθῇ πόσα χρήματα εἶχεν ἕκαστος.

**21.** Κατὰ τὰς ἑορτὰς τοῦ Πάσχα φιλόπτωχος προσέφερεν ἕνα ποσὸν χρημάτων. Κατὰ τὴν διανομὴν ὅμως παρατηροῦν ὅτι, ἂν ἕκαστος πτωχὸς λάβῃ 83 δρχ. θὰ περισσεύσουν 29 δρχ. Ἂν ὅμως ἕκαστος λάβῃ 90 δρχ., θὰ ὑπάρχῃ ἔλλειμα 930 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα ἦσαν τὰ ἄτομα καὶ πόσον τὸ διανεμηθὲν ποσόν.

**22.** Δύο δοχεῖα εἶναι πλήρη ἐλαίου. Ἡ χωρητικότης τοῦ Α εἶναι τὰ $\frac{17}{27}$ τῆς τοῦ Β, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 70 κιλὰ ἐλαίου περισσότερον τοῦ Α. Ποῖον εἶναι τὸ περιεχόμενον ἑκάστου δοχείου;

**23.** Προκειμένου ἕνας νὰ ἀγοράσῃ παλτόν, πρέπει νὰ ἐξοδεύσῃ τὰ $\frac{5}{8}$ ἐκ τοῦ μισθοῦ του. Ἀγοράζει λοιπὸν μίαν καμπαρδίναν καὶ πληρώνει τὰ $\frac{2}{5}$ αὐτοῦ καὶ εἶχεν οὕτω οἰκονομίαν 450 δρχ. Ποία ἡ ἀξία τοῦ παλτοῦ καὶ ποία ἡ ἀξία τῆς καμπαρδίνας;

**24.** Δύο ὑπάλληλοι ἔχουν τὸν αὐτὸν μισθόν. Ὁ Α τούτων ἐξοδεύει κατὰ μῆνα τὰ $\frac{57}{75}$ τοῦ μισθοῦ του, ἐνῷ ὁ Β ἐξοδεύει 486 δρχ. περισσοτέρας. Εἰς διάστημα 6 μηνῶν ὁ Β εἶχε χρεωθῇ μὲ 612 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μισθός των.

**25.** Ἡ διαφορὰ τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 3. Ἐὰν ἐναλλαχθῇ ἡ τάξις τῶν ψηφίων του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὰ $\frac{4}{7}$ τοῦ ζητουμένου. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

**26.** Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 8. Ἐὰν ἐναλλαχθοῦν τὰ ψηφία του, προκύπτει ἀριθμὸς ἴσος πρὸς τὰ $\frac{5}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του, ηὐξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

**27.** Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 9. Ἐὰν ἕκαστον ψηφίον ἐλαττωθῇ κατὰ 3, προκύπτει τὸ ἥμισυ τοῦ ζητουμένου ἠλαττωμένου κατὰ 6. Νὰ εὑρεθῇ ἀριθμὸς οὗτος.

**28.** Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων διψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι ἑξαπλάσιον τῆς διαφορᾶς αὐτῶν, ἐνῷ ὁ ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι κατὰ 3 μεγαλύτερος τοῦ ἑξαπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

**29.** Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν διὰ τῆς διαφορᾶς των, εὑρίσκομεν πηλίκον 3 καὶ ὑπόλοιπον 6. Ἐὰν δὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ πρώτου διαιρεθῇ διὰ τοῦ δευτέρου, προκύπτει πηλίκον 2 καὶ ὑπόλοιπον 31. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

**30.** Ἐὰν εἰς διψήφιον ἀριθμὸν προστεθῇ ὁ 36, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων, αὐξανόμενον κατὰ 2, δίδει τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων, νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

**31.** Ἐὰν διψήφιος ἀριθμὸς αὐξηθῇ κατὰ 9, προκύπτει ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων τοῦ ζητουμένου, ἐὰν δὲ ἐλαττωθῇ κατὰ 9, τὸ ὑπόλοιπον εἶναι τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος.

**32.** Ἕνας ἔμπορος ἠγόρασεν ὕφασμα καὶ βελοῦδο ἐν ὅλῳ 255 μέτρα ἀντὶ 4675 δρχ. Γνωστοῦ ὄντος ὅτι 3 μέτρα βελοῦδο κοστίζουν ὅσον 5 μέτρα ὑφάσματος καὶ ὅτι ὁ ἔμπορος ἠγόρασε διπλάσια μέτρα ἀπὸ τὸ ὕφασμα ἢ ἀπὸ τὸ βελοῦδο, νὰ εὑρεθῇ πόσον ἠγόρασε τὸ μέτρον ἑκάστου ὑφάσματος.

**33.** Πρὸ 7 ἐτῶν τὸ ἥμισυ τῆς ἡλικίας τοῦ θείου μου ἦτο κατὰ 2 ἔτη μεγαλυτέρα τῆς ἡλικίας μου. Σήμερον ἡ ἡλικία μου ὑπερβαίνει κατὰ 5 ἔτη τὰ $\frac{2}{5}$ τῆς ἡλικίας τοῦ θείου μου. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι.

**34.** Πρὸ 4 ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς ἦτο τετραπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του, ἐνῷ μετὰ 10 ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ πατρὸς θὰ εἶναι διπλασία τῆς τοῦ υἱοῦ του. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι.

**35.** Ἐκ δύο κεφαλαίων Α καὶ Β, τὸ μὲν Α τοκίζεται πρὸς $4\%$, τὸ δὲ Β πρὸς $5\%$ καὶ φέρουν ὁμοῦ ἐτήσιον τόκον 400 δρχ. Ἐὰν τοκισθοῦν μὲ ἐνηλλαγμένα ἐπιτόκια, ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτῶν εἶναι 410 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια.

**36.** Δύο κεφάλαια τοκιζόμενα πρὸς $5\%$ δίδουν ἐτήσιον τόκον 550 δρχ. Ἐὰν τὸ ἐπιτόκιον τοῦ πρώτου ἐλαττωθῇ κατὰ 0,25 δρχ., καὶ τὸ τοῦ δευτέρου αὐξηθῇ κατὰ 0,25 δρχ. ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτῶν αὐξάνει κατὰ 2,50 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

**37.** Κεφάλαιον 5000 δρχ., καὶ ἕτερον 6000 δρχ. φέρουν ὁμοῦ ἐτήσιον τόκον 525 δρχ. Ἐὰν ἐναλλαχθοῦν τὰ ἐπιτόκια αὐτῶν, ὁ ἐτήσιος τόκος ἐλαττοῦται κατὰ 5 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια.

**38.** Δύο κεφάλαια Α καὶ Β τοκίζονται ὡς ἑξῆς: τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ Α καὶ τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ Β πρὸς $4\%$ καὶ τὰ ὑπόλοιπα πρὸς $5\%$. Ἡ πρώτη κατάθεσις μετὰ 3 ἔτη δίδει τόκον 2160 δρχ. καὶ ἡ δευτέρα μετὰ 4 ἔτη δίδει τόκον 5200 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια.

**39.** Τοκίζει τις 16800 δρχ. ἐπὶ 75 ἡμέρας καὶ ἑτέρας 21000 δρχ. διὰ 80 ἡμέρας καὶ λαμβάνει ἴσους τόκους. Ἐὰν τὰ ἐπιτόκια ἔχουν ἄθροισμα 21, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐπιτόκια.

**40.** Κεφάλαιον μετὰ τῶν τόκων του γίνεται εἰς 9 μῆνας 12400 δρχ., ἐνῷ εἰς 15 μῆνας γίνεται 13200 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ τὸ ἐπιτόκιον.

**41.** Τοκίζει τις δύο κεφάλαια μὲ ἁπλοῦν τόκον. Τὸ α΄ πρὸς $4\%$ ἐτησίως καὶ τὸ δεύτερον πρὸς $3\%$. Μετὰ 4 ἔτη καὶ 2 μῆνας λαμβάνει τόκους καὶ κεφάλαιον 11895 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια, ἂν τὸ δεύτερον εἶναι τὰ $\frac{4}{9}$ τοῦ πρώτου.

**42.** Ὁ τόκος κεφαλαίου, τοκισθέντος πρὸς $4\%$, ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{41}$ τοῦ ἀθροίσματος τοῦ τόκου καὶ τοῦ κεφαλαίου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος.

**43.** Κεφάλαιον 9102 δρχ. νὰ χωρισθῇ εἰς δύο μέρη, ὥστε τὸ πρῶτον μέρος τοκιζόμενον πρὸς $3\%$ ἐπὶ 7 μῆνας καὶ τὸ δεύτερον πρὸς $4\%$ ἐπὶ 5 μῆνας, νὰ δίδουν τὸν αὐτὸν τόκον.

**44.** Ἐδάνεισέ τις κεφάλαιον πρὸς $6\%$ καὶ ἔλαβε τόκον 775 δρχ. Ἕτερον κεφάλαιον μεγαλύτερον τῶν $\frac{4}{5}$ τοῦ πρώτου κατὰ 4800 δρχ, φέρει εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον καὶ μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον τόκον 700 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος.

**45.** Κεφάλαιον τοκιζόμενον πρὸς 7 %, φέρει τόκον 3360 δρχ. Τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ κεφαλαίου τούτου τοκιζόμενα πρὸς 8 % εἰς τὸν αὐτὸν χρόνον, φέρουν ὅσον τόκον φέρει μὲ τὸ αὐτὸ ἐπιτόκιον καὶ ὁλόκληρον τὸ κεφάλαιον εἰς 2 ἔτη 3 μῆνας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ κεφάλαιον καὶ ὁ χρόνος.

**46.** Τοκίζει τις δύο κεφάλαια, τὸ μὲν ἕνα πρὸς 8,25 % ἐπὶ 3 ἔτη, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς 7,5 % ἐπὶ 5 ἔτη. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια ταῦτα, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄλλο εἶναι κατὰ 4000 δρχ. μεγαλύτερον ἀπὸ τὰ 0,7 τοῦ πρώτου καὶ ἔφερεν 2700 δρχ. περισσότερον τόκον.

**47.** Ὁ Ἰωάννης ἐτόκισε 12600 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Γεωργίου καὶ πρὸς 1 % περισσότερον, ἔλαβε δὲ ἐτήσιον τόκον 730 δρχ. περισσότερον. Ὁ Πέτρος ἐτόκισε 3000 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Γεωργίου καὶ πρὸς 2 % περισσότερον καὶ ἔλαβεν ἐτήσιον τόκον 380 δρχ. περισσοτέρας τοῦ Γεωργίου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ κεφάλαια καὶ ὁ τόκος.

**48.** Δύο κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 6000 δρχ. Τὸ α΄ ἐτοκίσθη πρὸς 1 % ἐπὶ πλέον τοῦ β΄ καὶ ὁ ἐτήσιος τόκος αὐτῶν εἶναι ὁμοῦ 264 δρχ. Ἐὰν τὸ α΄ ἐτοκίζετο μὲ τὸ ἐπιτόκιον τοῦ δευτέρου καὶ ἀντιστρόφως, οἱ ἐτήσιοι τόκοι θὰ εἶχον ἄθροισμα 276 δρχ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο κεφάλαια καὶ τὰ ἐπιτόκια.

**49.** Δύο παῖκται Α καὶ Β παίζουν ἕνα παιγνίδι δύο φοράς. Τὴν πρώτην φορὰν κερδίζει ὁ Α τόσα χρήματα, ὅσα εἶχε μεῖον 8 δρχ. καὶ ἔχει οὕτω διπλάσια τῶν χρημάτων τοῦ Β. Τὴν δευτέραν φορὰν κερδίζει ὁ Β ὅσα τοῦ ἔμειναν, μεῖον 4 δρχ, καὶ ἔχουν οὕτω ἴσα χρήματα. Πόσα χρήματα εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς;

**50.** Ἔχει τις δύο εἴδη ἀργύρου. Ὁ πρῶτος ἔχει τίτλον 0,900 καὶ ὁ δεύτερος 0,750. Πόσον ἄργυρον πρέπει νὰ λάβῃ ἐξ ἑκάστου εἴδους, διὰ νὰ σχηματίσῃ κρᾶμα 4 κιλῶν καὶ τίτλου 0,840;

**51.** Ἀνέμιξέ τις 7 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος μὲ 6 χιλιόγραμμα ἄλλου οἰνοπνεύματος καὶ ἔλαβε μῖγμα 18°. Ἐὰν ἀνεμίγνυεν 9 χιλιόγραμμα ἐκ τοῦ πρώτου μὲ 4 χιλιόγραμμα ἐκ τοῦ δευτέρου, θὰ ἐσχημάτιζε μῖγμα 16°. Ποῖος ὁ βαθμὸς ἑκάστου οἰνοπνεύματος.

**52.** Ἔχομεν δύο κράματα χρυσοῦ, διαφόρων τίτλων. Συντήκομεν 12 γραμ. χρυσοῦ μὲ 3 γραμ. ἄλλης ποιότητος καὶ λαμβάνομεν κρᾶμα τίτλου 0,932. Ἐὰν ὅμως συντήξωμεν 14 γραμ. ἐκ τοῦ α΄ καὶ 6 γραμ. ἐκ τοῦ β΄, λαμβάνομεν κρᾶμα τίτλου 0,918. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τίτλος ἑκάστου κράματος.

**53.** Ἕνας συνέτηξε δύο κράματα χρυσοῦ καὶ χαλκοῦ τίτλων 0,950 καὶ 0,800, μὲ 3 γραμ. καθαροῦ χρυσοῦ καὶ ἐσχημάτισε κρᾶμα 25 γραμ. καὶ τίτλου 0,896. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου τῶν δύο πρώτων κραμάτων.

**54.** Οἰνοπώλης θέλει νὰ κάμῃ μῖγμα 250 χιλιογράμμων οἴνου ἀξίας 14 δρχ. κατὰ χιλιόγραμμον, ἀναμιγνύων δύο ποιότητας οἴνου. Ἡ πρώτη ποιότης ἀξίζει 15 δρχ. κατὰ κιλὸν καὶ ἡ δευτέρα ἀξίζει 10 δρχ. κατὰ κιλόν. Νὰ εὑρεθῇ πόσα χιλιόγραμμα ἐξ ἑκάστης ποιότητος θὰ λάβῃ.

**55.** Ὁ ἀριθμὸς 5356 νὰ μερισθῇ εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 20, 30 καὶ 40.

**56.** Ποσὸν ἐκ 2610 δρχ. νὰ μερισθῇ μεταξὺ τριῶν προσώπων κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον. Ὁ λόγος τῶν μεριδίων τῶν Α καὶ Β νὰ εἶναι $\frac{4}{9}$ καὶ τὸ μερίδιον τοῦ τρίτου, ἐλαττούμενον κατὰ 250 δρχ., νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν μεριδίων τῶν δύο ἄλλων.

**57.** Πατήρ τις κατέλειπε διὰ διαθήκης εἰς τοὺς τρεῖς υἱούς του 960000 δρχ., μὲ τὴν ἐντολὴν νὰ τὰς μοιράσουν εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα πρός τὰς ἡλικίας των. Ὁ Α εἶναι 48 ἐτῶν, ὁ Β εἶναι 30 ἐτῶν καὶ ὁ Γ εἶναι 20 ἐτῶν. Ποῖον τὸ μερίδιον ἑκάστου;

**58.** Ἕνα σχολεῖον ἔχει τρεῖς τάξεις. Τὸ πενταπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μαθητῶν τῆς α΄ καὶ β΄ τάξεως ἰσοῦται πρὸς τὸ ἑπταπλάσιον τῶν μαθητῶν τῆς γ΄ τάξεως. Οἱ μαθηταὶ τῆς β΄ τάξεως εἶναι κατὰ 18 περισσότεροι τῶν μαθητῶν τῆς α΄ τάξεως καὶ οἱ μαθηταὶ τῆς γ΄ τάξεως εἶναι τετραπλάσιοι τῶν τῆς α΄ τάξεως. Πόσους μαθητὰς ἔχει ἑκάστη τάξις καὶ πόσους ὁλόκληρον τὸ σχολεῖον;

**59.** Τέσσαρα οἰκόπεδα ἀξίζουν ἐν ὅλῳ 370300 δρχ. Ἡ ἀξία τοῦ δευτέρου εἶναι τὰ $\frac{3}{4}$ τῆς ἀξίας τοῦ α΄ καὶ τὰ $\frac{8}{5}$ τῆς ἀξίας τοῦ γ΄, τοῦ δὲ δ΄ ἡ ἀξία εἶναι τὰ $\frac{9}{13}$ τῆς τοῦ γ΄. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀξία ἑκάστου οἰκοπέδου.

**60** Τρεῖς καθηγηταὶ λαμβάνουν διὰ μισθοὺς ἑνὸς μηνὸς 14240 δρχ. Ὁ μισθὸς τοῦ β΄ εἶναι τὰ $\frac{8}{15}$ τοῦ μισθοῦ τοῦ α΄, καὶ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μισθοῦ τοῦ β΄ ἰσοῦνται μὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ μισθοῦ τοῦ γ΄. Νὰ εὑρεθῇ ὁ μισθὸς ἑκάστου καθηγητοῦ.

**61.** Εἰσπράκτωρ λεωφορείου ἔκοψε 81 εἰσιτήρια τῶν 4 δρχ., τῶν 6 δρχ. καὶ τῶν 10 δρχ., καὶ εἰσέπραξεν ἐν ὅλῳ 600 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσα εἰσιτήρια ἐξ ἑκάστης κατηγορίας ἔκοψεν, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν εἰσιτηρίων τῶν 4 δρχ. ἦτο τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν εἰσιτηρίων τῶν 6 δρχ.

**62.** Ἔμπορος πωλεῖ τρία τεμάχια ὑφάσματος ἀντὶ 58500 δρχ. Ἡ ἀξία πωλήσεως τοῦ α΄ τεμαχίου εἶναι κατὰ 500 δρχ. μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ἀξίας τοῦ β΄ καὶ ἡ ἀξία τοῦ γ΄ εἶναι κατὰ 5000 δρχ. μεγαλυτέρα τῆς ἀξίας τοῦ β΄. Νὰ εὑρεθῇ πόσον ἐπώλησεν ἕκαστον τεμάχιον.

**63.** Θέλομεν νὰ μοιράσωμεν 9246 δρχ., μεταξὺ τεσσάρων προσώπων οὕτως, ὥστε τὰ μερίδια τῶν α΄ καὶ β΄ νὰ ἔχουν λόγον 2 : 3, τὰ τῶν β΄ καὶ γ΄ νὰ ἔχουν λόγον 5 : 6 καὶ τὰ τῶν δ΄ καὶ γ΄ νὰ ἔχουν λόγον 4 : 3 Πόσα χρήματα θὰ λάβῃ ἕκαστος:

**64.** Τρεῖς παῖκται συμφωνοῦν τὰ ἑξῆς: Ἐκεῖνος ποὺ θὰ χάνῃ θὰ διπλασιάζῃ τὰ χρήματα τῶν δύο ἄλλων. Ἕκαστος ἔχασε ἀπὸ μίαν φορὰν καὶ εἰς τὸ τέλος εὑρέθη νὰ ἔχῃ ἕκαστος ἀπὸ 120 δρχ. Νὰ εὑρεθῇ πόσας δρχ. εἶχεν ἕκαστος ἐξ ἀρχῆς.

**65.** Ἔχει τις 3 κράματα χρυσοῦ, βάρους 5 χιλιογράμμων καὶ τίτλων 0,920, 0,850 καὶ 0,800 ἀντιστοίχως. Συντήκων τὰ δύο πρῶτα, λαμβάνει κρᾶμα τίτλου 0,900. Συντήκων τὰ δύο τελευταῖα, λαμβάνει κρᾶμα τίτλου 0,820. Νὰ εὑρεθῇ τὸ βάρος ἑκάστου ἐκ τῶν κραμάτων τούτων.

**66.** Νὰ μοιρασθοῦν 9200 δρχ. μεταξὺ 4 ἀδελφῶν, ὥστε ὁ β΄ νὰ λάβῃ τριπλασία τοῦ α΄, ὁ γ΄ τὰ $\frac{3}{5}$ τῶν ὅσων θὰ λάβουν οἱ δύο πρῶτοι καὶ ὁ δ΄ τὰ $\frac{14}{17}$ τῶν ὅσων θὰ λάβουν ὁ πρῶτος καὶ ὁ τρίτος.

**67.** Πατὴρ μετὰ τῶν τριῶν υἱῶν του ἔχουν ὁμοῦ ἡλικίαν 80 ἐτῶν. Ἡ ἡλικία τοῦ α΄ υἱοῦ εἶναι ἑξαπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ γ΄, καὶ ἡ ἡλικία τοῦ β΄ εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς ἡλικίας τοῦ α΄ Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἡλικίαι καὶ τῶν τεσσάρων χωριστά.

**68.** Ἐκ τριῶν κρουνῶν Α, Β, Γ, ὁ Α καὶ ὁ Β γεμίζουν μίαν δεξαμενὴν εἰς 1 ὥρ. 10λ, ὁ Β καὶ ὁ Γ τὴν γεμίζουν εἰς 2 ὥρ. 20λ καὶ ὁ Α καὶ ὁ Γ τὴν γεμίζουν εἰς 84λ. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσον χρόνον ἕκαστος κρουνὸς μόνος του δύναται νὰ γεμίσῃ τὴν δεξαμενήν.

**69.** Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι 16. Ἐὰν εἰς τὸν ζητούμενον ἀριθμὸν προστεθῇ ὁ δι' ἐλαλλαγῆς τῶν ψηφίων του προκύπτων ἀριθμός, προκύπτει ἄθροισμα 1211. Ἐὰν δὲ ἀπὸ τὸν δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων τοῦ ζητουμένου ἀριθμοῦ ἀφαιρεθῇ ὁ ζητούμενος, προκύπτει ὁ ἀριθμὸς 297. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

**70.** Τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων τριψηφίου ἀριθμοῦ εἶναι τὰ $\frac{3}{5}$ τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καὶ τὸ ψηφίον τῶν δεκάδων εἶναι τὸ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ψηφίων. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἀριθμὸς οὗτος, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αὐξανόμενος κατὰ 198, προκύπτει ὡς ἄθροισμα ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων τοῦ ζητουμένου ἀριθμός.

**71.** Νὰ εὑρεθῇ ἕνας ἀριθμός, περιλαμβανόμενος μεταξὺ 400 καὶ 500, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 9 καὶ ὅτι ὁ δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του ζητούμενος ἀριθμὸς εἶναι τὰ $\frac{36}{47}$ τοῦ ζητουμένου.

**72.** Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμός, ἔχων τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας. Τὸ ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 24. Ὁ ἀριθμὸς τῶν δύο πρώτων ψηφίων του, ὡς εἶναι ἀναγεγραμμένα, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν δύο τελευταίων ψηφίων. ὡς εἶναι ἀναγεγραμμένα. Ἐὰν ἐναλλαχθοῦν τὰ δύο μεσαῖα ψηφία του, ὁ προκύπτων ἀριθμὸς εἶναι κατὰ 360 μεγαλύτερος τοῦ ζητουμένου καὶ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων εἶναι διπλάσιον τοῦ ψηφίου τῶν ἑκατοντάδων.

**73.** Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις αὐξάνει κατὰ 270, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο πρῶτα ψηφία, ἐλαττοῦται κατὰ 45, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ δύο τελευταῖα ψηφία του καὶ ὅτι ἐλαττοῦται κατὰ 198, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὰ ἄκρα ψηφία του.

**74.** Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὰ δύο τελευταῖα ψηφία εἶναι ἴσα. Προσθέτοντες εἰς τὸν ζητούμενον τὸν ἀριθμὸν 180, εὑρίσκομεν τὸν δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του. Ἀναγράφοντες δὲ τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων μετὰ τὸ ψηφίον τῶν μονάδων, εὑρίσκομεν τριψήφιον ἀριθμὸν μεγαλύτερον τοῦ ζητουμένου κατὰ 198.

**75.** Νὰ εὑρεθῇ τετραψήφιος ἀριθμός, ἔχων τὰ δύο πρῶτα ψηφία του ἴσα, τὰ δύο τελευταῖα ἴσα καὶ νὰ εἶναι συγχρόνως τέλειον τετράγωνον.

**76.** Τριψήφιος ἀριθμὸς τελειώνει εἰς 8, ἔχει ἄθροισμα ψηφίων 18 καί, ἂν ἐναλλαχθοῦν τὸ ψηφίον τῶν ἑκατοντάδων μὲ τὸ τῶν δεκάδων, προκύπτει νέος ἀριθμὸς κατὰ 360 μεγαλύτερος τοῦ ζητουμένου.

**77.** Νὰ εὑρεθῇ τριψήφιος ἀριθμός, ὅστις αὐξάνει κατὰ 270, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο πρώτων ψηφίων του, ἐλαττοῦται κατὰ 396, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν ἄκρων ψηφίων του, καὶ ἐλαττοῦται κατὰ 63, ὅταν ἐναλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν δύο τελευταίων ψηφίων του.

**78.** Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως ὁ ἀριθμὸς 25 διπλασιάζεται δι' ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του;

**79.** Νὰ εὑρεθῇ ἕνας διψήφιος ἀριθμός, τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος τοιοῦτος, ὥστε, ἂν ἐναλλαχθοῦν τὰ ψηφία του, προκύπτει ὁ ἴδιος ἀριθμὸς κατὰ τὸ ἑπταδικὸν σύστημα.

**80.** Νὰ εὑρεθοῦν οἱ κατὰ τὴν ἀκόλουθον σειρὰν ἀναγεγραμμένοι ἀριθμοὶ x, y, z, ω, φ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ τρεῖς πρῶτοι εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, οἱ τρεῖς τελευταῖοι εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν 2, 3, 4 καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι 123.

**81.** Νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4, 6 καὶ τοιοῦτοι, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν πηλίκων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν διαιροῦντες δι' ἑκάστου τὸ γινόμενον τῶν τριῶν ἄλλων, εἶναι 14625.

**82.** Αἱ γωνίαι Α, Β, Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 15, 3 καὶ x. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν δύο τιμαὶ τοῦ x, διὰ τὰς ὁποίας τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου εἰς ἑκάστην τιμὴν τοῦ **x**.

**83.** Ἔστωσαν Α, Β, Γ τὰ μέτρα εἰς μοίρας τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

1ον: Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ Β καὶ Γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν 2 καὶ 5.

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Α, Β καὶ Γ εἰς τὰς ἀκολούθως περιπτώσεις:

α'). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἰσοσκελές.

β'). Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον: Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν μ καὶ 5, ἔνθα $μ>0$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Α, Β, Γ, ἵνα τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον (ὑπάρχουν δύο λύσεις).

**84.** Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 30 μ. καὶ 20 μ. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαστάσεις ἄλλου ὀρθογωνίου, ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι 360 μ.

**85.** Τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ πλευραὶ α, β καὶ τὸ ἄθροισμα $υ_α + υ_β = υ_γ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ γ τοῦ τριγώνου τούτου.

**86.** Τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες των, ἂν αἱ διάκεντροι αὐτῶν ἀνὰ δύο εἶναι α, β, γ.

**87.** Δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ προτιθέμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν του τρία ὀρθογώνια ὅμοια τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἐπὶ τῆς α ὀρθογώνιον νὰ εἶναι κατὰ $μ^2$ μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη τῶν ὀρθογωνίων τούτων.

**88.** Δύο πεζοπόροι, βαδίζοντες ὁμαλῶς, ἀπέχουν 16 χιλιόμετρα καὶ συναντῶνται μετὰ 3,5 ὥρας, ὅταν βαδίζουν πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν καὶ μετὰ 2,75 ὥρας, ὅταν βαδίζουν ἀντιθέτως. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου.

**89.** Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β, ἀπεχουσῶν κατὰ 60 χιλιόμετρα, καὶ βαίνουν πρὸς συνάντησίν των. Συναντῶνται δὲ μετὰ

8) λεπτὰ τῆς ὥρας. Ἐὰν ὁ ποδηλάτης, ὁ ἐκ τῆς Α ἀναχωρήσας, ἀνεχώρει 24 λεπτὰ ἐνωρίτερον τοῦ ἄλλου, ἡ συνάντησις θὰ ἐλάμβανεν χώραν $\frac{10}{9}$ τῆς ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ ἄλλου τούτου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ταχύτης ἑκάστου.

**90.** Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν ἐκ δύο σημείων Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 12 χιλιόμετρα καὶ βαίνουν πρὸς συνάντησίν των. Ὁ ἀναχωρήσας ἐκ τοῦ Α ἐκινήθη ἐπὶ 3 λεπτά, προτοῦ νὰ ἀναχωρήσῃ ὁ Β καὶ διήνυσε 4 χιλιόμετρα περισσότερον τοῦ ἀναχωρήσαντος ἐκ τοῦ Β. Ποία ἡ ὡριαία ταχύτης ἑκάστου, γνωστοῦ ὅτι συνηντήθησαν εἰς τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ;

**91.** Δύο πεζοπόροι ἀπέχουν κατὰ 21,6 χιλιόμετρα. Ἐὰν βαδίζουν κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν, συναντῶνται μετὰ 36 ὥρας, Ἐὰν ὅμως βαδίζουν κατ' ἀντιθέτους διευθύνσεις, συναντῶνται μετὰ 2 ὥρας Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητες αὐτῶν καθ' ὥραν.

**92.** Ποδηλάτης καὶ πεζοπόρος ἀπέχουν κατὰ 36 χιλιόμετρα. Ἡ ταχύτης τοῦ ποδηλάτου εἶναι τετραπλασία τῆς τοῦ πεζοπόρου. Ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως, κινούμενοι κατὰ τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν. Ποῦ θὰ συναντήσῃ ὁ ποδηλάτης τὸν πεζοπόρον;

**93.** Ἕνας ποδηλάτης ἔχει ταχύτητα 25 χιλιόμετρα τὴν ὥραν ἐπὶ ὁριζοντίας ὁδοῦ, 15 χιλιόμετρα ἐπὶ ἀνηφορικοῦ δρόμου καὶ 30 χιλμ. ἐπὶ κατηφορικοῦ. Οὗτος χρειάζεται 4 ὥρ. 36 λεπτὰ διὰ νὰ διανύσῃ τὸν δρόμον ΒΑ καὶ 4 ὥρας 24 λεπτὰ διὰ νὰ διανύσῃ τὸν δρόμον ΑΒ Ἐὰν ὁ δρόμος ΑΒ ἔχῃ μῆκος 100 χιλιομέτρων, ζητεῖται τὸ μῆκος τῆς ὁριζοντίας ὁδοῦ, τὸ μῆκος τοῦ ἀνηφορικοῦ δρόμου καὶ τὸ μῆκος τοῦ κατηφορικοῦ.

**94.** Δύο τραῖνα ἀναχωροῦν ταυτοχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ βαίνουν πρὸς συνάντησίν των. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ καὶ αἱ ταχύτητες τῶν τραίνων, γνωστοῦ ὄντος ὅτι: α'). Τὰ δύο τραῖνα συναντῶνται μετα 2 ὥρας ἀπὸ τῆς ἀναχωρήσεώς των καὶ ὅτι τὸ σημεῖον συναντήσεως ἀπέχει κατὰ 15 χιλιόμετρα ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως ΑΒ. β'). Ἐὰν τὸ ταχύτερον εἶχε διπλασίαν ταχύτητα τοῦ ἄλλου, ἡ συνάντησις θὰ ἐλάμβανε χώραν μετὰ 2 ὥρ. 48 λεπτά.

**95.** Ὁ δρόμος ἀπὸ μίαν πόλιν εἰς ἄλλην Β εἶναι ἀνωφερής, ὁριζόντιος, κατωφερής. Τὸ ὁριζόντιον τμῆμα εἶναι τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ κατωφεροῦς. Ἕνας ποδηλάτης μεταβαίνει ἐκ τῆς πόλεως Α εἰς τὴν Β καὶ διανύει τὴν ἀνωφέρειαν μὲ ταχύτητα 8 χιλιομ. τὴν ὥραν, τὴν ὁριζόντιον μὲ 10 χιλιόμετρα καὶ τὴν κατωφέρειαν μὲ 12 χιλμ. τὴν ὥραν καὶ χρειάζεται 13 ὥρας διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β. Ἐπιστρέφων ἐκ τῆς Β μὲ τὰς αὐτὰς ταχύτητας ἀντιστοίχως, χρειάζεται ἀκόμη ἡμίσειαν ὥραν διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ μῆκος ἑκάστου τμήματος τῆς ὁδοῦ ΑΒ.

**96.** Δύο ποδηλάται ἀναχωροῦν συγχρόνως ἐκ δύο πόλεων Α καὶ Β καὶ συναντῶνται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Μετὰ τὴν συνάντησίν των, ὁ δεύτερος διανύει τὴν ἀπόστασιν ΓΑ εἰς 20 ὥρας καὶ ὁ πρῶτος διανύει τὴν ἀπόστασιν ΓΒ εἰς 5 ὥρας. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις ΓΑ εἶναι κατὰ 100 χιλιόμετρα μεγαλυτέρα τῆς ΓΒ, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις ΑΒ καὶ αἱ ταχύτητες τῶν ποδηλατῶν.

**97.** Δύο ποδηλάται Α καὶ Β ἀναχωροῦν ἐκ δύο πόλεων Γ καὶ Δ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν 78 χιλιόμετρα καὶ διευθύνονται πρὸς συνάντησίν των. Ἡ ταχύτης τοῦ Β εἶναι κατὰ 1,2 χιλιόμετρα μικροτέρα ἀπὸ τὰ 0,9 τῆς ταχύτητος τοῦ Α. Οἱ ποδηλάται συνηντήθησαν μετὰ 6 ὥρας. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ταχύτητές των, γνωστοῦ ὄντος ὅτι, ὁ μὲν Α ἐστάθμευσεν ἐπὶ ἡμίσειαν ὥραν, ὁ δὲ Β ἐπὶ μίαν ὥραν.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XIV

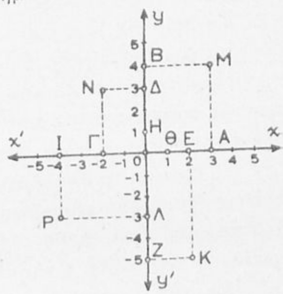
## ΓΡΑΦΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑΙ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΑΙ

### ΟΡΙΣΜΟΙ — ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**232. Σύστημα ὀρθογωνίων ἀξόνων.** Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου χαράσσομεν δύο ἄξονας x′x καὶ y′y καθέτους εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx λαμβάνομεν τὸ διευθῦνον διάνυσμα $\overline{O\Theta} = 1$ καὶ ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οy λαμβάνομεν τὸ διευθῦνον διάνυσμα $\overline{OH} = 1$, ἴσον πρὸς τὸ $\overline{O\Theta}$ ἢ μή. Τὸ σημεῖον Ο θεωρεῖται ὡς ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. Οἱ ἄξονες χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, τάς:

$xOy$, $yOx'$, $x'Oy'$, $y'Ox$,

αἱ ὁποῖαι καλοῦνται κατὰ σειρὰν ἀντιστοίχως ***πρώτη, δευτέρα, τρίτη, τετάρτη γωνία*** τῶν ἀξόνων.



Σχ. 35.

Ἔστω Μ σημεῖον τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων. Προβάλλομεν τὸ Μ ὀρθῶς ἐπὶ τοὺς ἄξονας x′x καὶ y′y, κατὰ τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως.

Ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{O\Theta}} = \overline{OA} = 3$, καλεῖται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου Μ.

Ὁ λόγος $\dfrac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OH}} = \overline{OB} = 4$ » ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου Μ.

Γενικῶς: ***Τετμημένη ἑνὸς σημείου Μ καλεῖται τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον $\overline{OA}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ τοῦ ἄξονος $x'x$.***

Γράφομεν δέ: $x = \overline{OA}$.

***Τεταγμένη ἑνὸς σημείου Μ καλεῖται τὸ ἀλγεβρικὸν μέτρον $\overline{OB}$ τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ τοῦ ἄξονος $y'y$.***

Γράφομεν δέ: $y = \overline{OB}$.

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x, y), δηλαδὴ ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου Μ ὀνομάζονται ***συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ.***

Ὁ ἄξων x′x ὀνομάζεται ***ἄξων τῶν τετμημένων*** (ἢ ἄξων τῶν x).

Ὁ ἄξων y′y ὀνομάζεται ***ἄξων τῶν τεταγμένων*** (ἢ ἄξων τῶν y).

Οἱ δύο ἄξονες x΄x καὶ y΄y ὀνομάζονται ***ἄξονες τῶν συντεταγμένων.***

Τὸ σημεῖον O ὀνομάζεται ***ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.***

Ἐὰν ἕνα σημεῖον M ἔχῃ συντεταγμένας x καὶ y, θὰ τὸ παριστῶμεν ὡς ἑξῆς: M(x, y).

Δηλαδή, εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (x, y), τὸ x θὰ παριστᾷ τὴν τετμημένην τοῦ σημείου M καὶ τὸ y θὰ παριστᾷ τὴν τεταγμένην τοῦ σημείου M.

Εἰς τὸ σχῆμα μας τὸ σημεῖον M κεῖται εἰς τὴν πρώτην γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἔχει συντεταγμένας (3, 4). Γράφομεν δέ: M(3, 4).

Τὸ σημεῖον N κεῖται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἔχει συντεταγμένας (—2, 3). Γράφομεν δέ: N(—2, 3).

Τὸ σημεῖον P κεῖται εἰς τὴν τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἔχει συντεταγμένας (—4, —3). Γράφομεν δέ: P(—4, —3).

Τὸ σημεῖον K κεῖται εἰς τὴν τετάρτην γωνίαν τῶν ἀξόνων καὶ ἔχει συντεταγμένας (2, —5). Γράφομεν δέ: K(2, —5).

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς τὴν πρώτην καὶ τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων ἔχουν συντεταγμένας ***ὁμοσήμους*** Εἰς μὲν τὴν πρώτην γωνίαν ***θετικάς,*** εἰς δὲ τὴν δευτέραν ***ἀρνητικάς.***

Τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα κεῖνται εἰς δὲ τὴν δευτέραν καὶ τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων ἔχουν συντεταγμένας ***ἑτεροσήμους.*** Εἰς μὲν τὴν δευτέραν γωνίαν ἡ τετμημένη εἶναι ***ἀρνητικὴ*** καὶ ἡ τεταγμένη ***θετική,*** εἰς δὲ τὴν τετάρτην γωνίαν ἡ τετμημένη εἶναι ***θετικὴ*** καὶ ἡ τεταγμένη ***ἀρνητική.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι: ***Δοθέντος ἑνὸς σημείου M, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὰς συντεταγμένας αὐτοῦ.*** Ἀρκεῖ ἐκ τοῦ M νὰ φέρωμεν τὰς καθέτους MA καὶ MB ἐπὶ τοὺς ἄξονας x΄x καὶ y΄y ἀντιστοίχως. Τότε, τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OA}$ θὰ εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ M καὶ τὸ μέτρον τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ θὰ εἶναι ἡ τεταγμένη τοῦ σημείου M.

Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄x ἔχουν ***τεταγμένην y=O.***

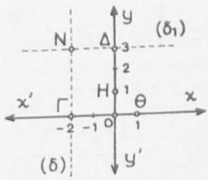
Ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἄξονος y΄y ἔχουν ***τετμημένην x=O.***

Τὸ σημεῖον O ἔχει ***συντεταγμενας x=O καὶ y=O.***

**233. Κατασκευὴ σημείου ἐκ τῶν συντεταγμένων του.** Θὰ ἐξετάσωμεν τὸ ἀντίστροφον πρόβλημα τοῦ προηγουμένου. Δηλαδή, δοθεισῶν τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου, νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τοῦ σημείου ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων.

1ον. Ἔστω τὸ διατεγμένον ζεῦγος (—2, 3) τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν —2 καὶ 3. Ἐὰν ὑπάρχῃ ἕνα σημεῖον N, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι —2, ἡ προβολή του ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄x θὰ εἶναι ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{OΓ} = -2$. Τὸ σημεῖον ὅμως Γ εὑρίσκεται, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ διευθῦνον διάνυσμα $\overline{OΘ} = 1$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Ox. Ἄρα τὸ ζητούμενον σημεῖον N θὰ κεῖται ἐπὶ εὐθείας (δ), παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα y΄y καὶ διερχομένης διὰ τοῦ Γ.

Ὁμοίως, τὸ σημεῖον Ν θὰ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ εὐθείας ($\delta_1$), παραλλήλου πρὸς τὸν ἄξονα x΄x, διερχομένης διὰ τοῦ σημείου Δ τοῦ ἄξονος y΄y, ὁριζομένου ὑπὸ τοῦ $\overline{O\Delta}=3$. Αἱ (δ) καὶ ($\delta_1$), ὡς κάθετοι ἐπὶ τοὺς ἄξονας x΄x καὶ y΄y, θὰ τέμνωνται εἰς ἕνα σημεῖον Ν, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον. Εἶναι δὲ τὸ σημεῖον τοῦτο ***ἕνα καὶ μόνον***.



Σχ. 36.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ σημεῖον Ε (2, 0) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx οὕτως, ὥστε: $\overline{OE}=2$ (σχ. 35).

Τὸ σημεῖον Ι (—4, 0) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx΄ οὕτως, ὥστε: $\overline{OI}=-4$ (σχ. 35).

Τὸ σημεῖον Δ(0, 3) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οy οὕτως, ὥστε: $\overline{O\Delta}=3$ (σχ. 35).

Τὸ σημεῖον Ζ(0, —5) κεῖται ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οy΄ οὕτως, ὥστε: $\overline{OZ}=-5$ (σχ. 35).

Τὸ σημεῖον Ο(0, 0) εἶναι ἡ τομὴ τῶν ἀξόνων x΄x καὶ y΄y.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

***α΄). Εἰς πᾶν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχοῦν δύο σχετικοὶ ἀριθμοί, καλούμενοι συντεταγμέναι τοῦ σημείου (τετμημένη καὶ τεταγμένη).***

***β΄). Εἰς πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σχετικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς τετμημένην τὸ πρῶτον στοιχεῖον τοῦ ζεύγους καὶ ὡς τεταγμένην τὸ δεύτερον στοιχεῖον τοῦ ζεύγους τούτου.***

**Ἀνακεφαλαίωσις:** Α). Τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος.

α΄). Ἡ ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων Ο ἔχει συντεταγμένας **x=0, y=0**, καὶ εἶναι *τὸ μόνον σημεῖον*, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι εἶναι μηδέν.

β΄). Ἐὰν τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄y, θὰ προβάλλεται εἰς τὸ Ο ἐπὶ τοῦ ἄξονος **x΄x**. Ἄρα ἡ τετμημένη του θὰ εἶναι μηδέν. Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἡ τετμημένη x ἑνὸς σημείου εἶναι μηδέν, θὰ προβάλλεται εἰς τὸ Ο ἐπὶ τὸν ἄξονα **x΄x**. Συνεπῶς θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄y.

γ΄). Ὁμοίως, ἐὰν ἕνα σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος **x΄x**, ἡ τεταγμένη του θὰ εἶναι μηδὲν καὶ ἀντιστρόφως.

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| Σημεῖον | ἐπὶ τῆς ἀρχῆς | ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄x | ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄y |
|---|---|---|---|
| Τετμημένη | $x=0$ | $x>0$ ἐπὶ τοῦ Οx<br>$x<0$ ἐπὶ τοῦ Οx΄ | $x=0$ |
| Τεταγμένη | $y=0$ | $y=0$ | $y>0$ ἐπὶ τοῦ Οy<br>$y<0$ ἐπὶ τοῦ Οy΄ |

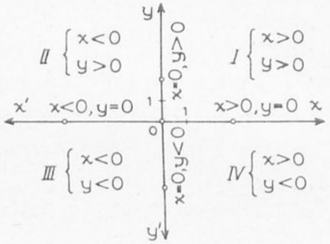
Β). Τὸ σημεῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῶν ἀξόνων.

Οἱ ἄξονες χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ (σχ. 38).

Μὲ τὰ ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, δυνάμεθα νὰ γνωρίζωμεν τὸ σημεῖον τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου καὶ τὴν θέσιν αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐκ τοῦ ἀκολούθου πίνακος (σχ. 37).

| Χῶρος | | Συντεταγμέναι |
|---|---|---|
| I | $\Longleftrightarrow$ | $x>0$, $y>0$ |
| II | $\Longleftrightarrow$ | $x<0$, $y>0$ |
| III | $\Longleftrightarrow$ | $x<0$, $y<0$ |
| IV | $\Longleftrightarrow$ | $x>0$, $y<0$ |

Σχ. 37.



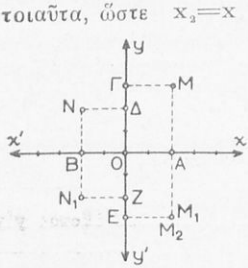

Σχ. 38.

**234. Σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας.** α′). Ἔστωσαν $M(x, y)$ καὶ $M_1(x_1, y_1)$ δύο σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἄξονα τῶν τετμημένων. Ἡ εὐθεῖα $x'x$ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος $MM_1$ καὶ τέμνει αὐτὸ εἰς τὸ μέσον Α αὐτοῦ. Τὰ δύο σημεῖα Μ καὶ $M_1$ προβάλλονται λοιπὸν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Α τοῦ ἄξονος $x'x$. Ἄρα ἔχουν τὴν ***αὐτὴν*** τετμημένην:

$$x_1 = x = \overline{OA}.$$

Τὰ διανύσματα $\overrightarrow{AM}$ καὶ $\overrightarrow{AM_1}$ εἶναι ἀντίρροπα. Τὰ σημεῖα Μ καὶ $M_1$ προβάλλονται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $y'y$, κατὰ τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε τοιαῦτα, ὥστε: $\overline{O\Gamma} = -\overline{OE}$. Ἄρα, αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων Μ καὶ $M_1$ εἶναι ***ἀντίθετοι***. Δηλαδή: $y_1 = -y$.

***Ἀντιστρόφως:*** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σημεῖα $M(x, y)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$ τοιαῦτα, ὥστε $x_2 = x$ καὶ $y_2 = -y$.




Σχ. 39.

Κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, τὸ συμμετρικὸν $M_1$ τοῦ Μ, ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $x'x$, ἔχει συντεταγμένας:

$$M_1: \ x_1 = x \quad \text{καὶ} \quad y_1 = -y.$$

Θὰ ἔχωμεν λοιπόν: $x_1 = x_2$ καὶ $y_1 = y_2$. Ἄρα τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ συμπίπτουν. Δηλαδὴ τὸ σημεῖον $M_2$ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ Μ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $x'x$.

Τὰ αὐτὰ δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν καὶ διὰ τὰ σημεῖα Ν καὶ $N_1$, συμμετρικὰ ἀλλήλων ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν $x'x$.

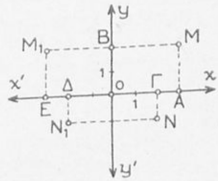
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

***Δύο σημεῖα Μ καὶ $M_1$ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων, ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην καὶ ἀντιθέτους τεταγμένας***

*καὶ ἀντιστρόφως: Ἐὰν δύο σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην καὶ ἀντιθέτους τεταγμένας, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τετμημένων.*

β'). Δι' ὁμοίων συλλογισμῶν ἀποδεικνύεται ὅτι:

***Ἐὰν δύο σημεῖα M καὶ $M_1$ εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων, ἔχουν τὴν αὐτὴν τεταγμένην καὶ ἀντιθέτους τετμημένας καὶ ἀντιστρόφως: Ἐὰν δύο σημεῖα ἔχουν ἀντιθέτους τετμημένας καὶ τὴν αὐτὴν τεταγμένην, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τῶν τεταγμένων*** (σχ. 40).

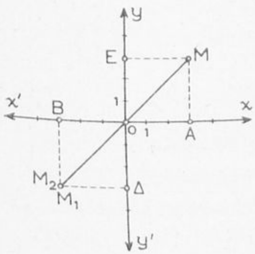



Σχ. 40.

**235. Σημεῖα συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O.** Ἔστωσαν $M(x,y)$ καὶ $M_1(x_1,y_1)$ δύο σημεῖα, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν O τῶν συντεταγμένων. Τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος $MM_1$.

Προβάλλομεν τὰ σημεῖα M καὶ $M_1$ ἐπὶ τοὺς ἄξονας. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OAM καὶ $OBM_1$ εἶναι ἴσα. Ἄρα $OA=OB$ ἢ $\overline{OB}=-\overline{OA}$.

ἢ $$x_1=-x.$$




Σχ. 41.

Ὁμοίως, ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων $O\Delta M_1$ καὶ OEM συνάγομεν ὅτι:

$$\overline{O\Delta}=-\overline{OE} \quad \text{ἢ} \quad y_1=-y.$$

***Ἀντιστρόφως:*** Ἂν $M(x,y)$ καὶ $M_2(x_2,y_2)$ εἶναι δύο σημεῖα τοιαῦτα, ὥστε:

$$x_2=-x \quad \text{καὶ} \quad y_2=-y \qquad (1)$$

καὶ θεωρήσωμεν τὸ συμμετρικὸν $M_1$ τοῦ M ὡς πρὸς τὸ O, θὰ ἔχωμεν:

$$x_1=-x \quad \text{καὶ} \quad y_1=-y. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν: $x_1=x_2$ καὶ $y_1=y_2$.

Ἄρα τὰ σημεῖα $M_1$ καὶ $M_2$ συμπίπτουν. Δηλαδὴ τὸ $M_2$ εἶναι συμμετρικὸν τοῦ M ὡς πρὸς τὸ O.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

***Ἐὰν δύο σημεῖα M καὶ $M_1$ ἔχουν ἀντιθέτους τετμημένας καὶ ἀντιθέτους τεταγμένας, εἶναι συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν ἀρχὴν τῶν συντεταγμένων καὶ ἀντιστρόφως.***

**236. Σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τῆς ἀρχῆς O.** Ἔστωσαν $M(x,y)$ καὶ $N(x_1,y_1)$ δύο σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας μετὰ τοῦ σημείου O. Ὑποθέτομεν τὰ σημεῖα ταῦτα διάφορα μεταξύ των καὶ τῆς ἀρχῆς O. Ἔστωσαν A καὶ B αἱ προβολαὶ τῶν M καὶ N ἐπὶ τῶν ἄξονα x'x.

Θὰ εἶναι: $\overline{OA}=x,\ \overline{AM}=y,\ \overline{OB}=x_1,\ \overline{BN}=y_1.$

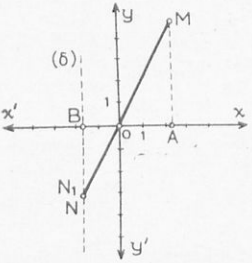
Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων OAM καὶ OBN ἔχομεν:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{BN}}{\overline{AM}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boxed{xy_1-yx_1=O} \qquad (1)$$

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὰ M καὶ N κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x, θὰ εἶναι:

$$y=y_1=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad xy_1-yx_1=0.$$

Ἐὰν τὰ M καὶ N κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y, θὰ ἔχωμεν:




Σχ. 42.

$$x=x_1=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad xy_1-yx_1=0.$$

Ἄρα ἡ σχέσις (1) εἶναι γενική.

***Ἀντιστρόφως:*** Ἔστω ὅτι αἱ συντεταγμέναι (x, y) ἑνὸς σημείου M καὶ αἱ συντεταγμέναι $(x_1, y_1)$ ἑνὸς ἄλλου σημείου N συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως:

$$xy_1-yx_1=0. \qquad (2)$$

Ἄγομεν τὴν OM καὶ ἔστω ὅτι αὕτη τέμνει τὴν παράλληλον εὐθεῖαν (δ) πρὸς τὸν ἄξονα y′y, ἀγομένην ἐκ τοῦ B, εἰς τὸ σημεῖον $N_1$. Ἔστωσαν δὲ $(x_2, y_2)$ αἱ συνταγμέναι τοῦ σημείου $N_1$. Προφανῶς θὰ εἶναι: $x_2=x_1=\overline{OB}$, (3)

καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν θὰ εἶναι:

$$xy_2-yx_2=0 \qquad (4)$$

ἤ, λόγῳ τῆς (3), $\qquad xy_2-yx_1=0. \qquad (5)$

Ἀφαιροῦντες κατὰ μέλη τὰς (2) καὶ (5), λαμβάνομεν:

$$xy_1-xy_2=0 \quad \text{ἢ} \quad x(y_1-y_2)=0. \qquad (6)$$

Ἐπειδὴ δὲ $x\neq0$, καθόσον τὸ M δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y, ἔπεται ὅτι: $\quad y_1-y_2=0, \quad$ ἐξ οὗ: $\quad y_2=y_1$

Οὕτω, τὰ σημεῖα N καὶ $N_1$ ἔχουν τὰς αὐτὰς συντεταγμένας Ἄρα θὰ συμπίπτουν, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ N κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας MO.

Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x, τότε: y=0, καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται: $xy_1=0$. Ἐπειδὴ $x\neq0$, ἔπεται $y_1=0$. Ἄρα καὶ τὸ σημεῖον N θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x.

Ὁμοίως, ἐὰν τὸ M κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y (ἐκτὸς τοῦ 0), τότε: x=0 καὶ ἡ (1) γίνεται: $yx_1=0$. Ἐπειδὴ δὲ $y\neq0$, ἔπεται ὅτι: $x_1=0$.

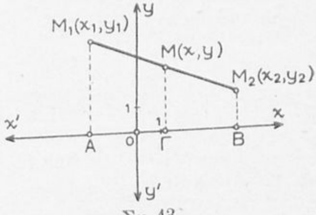
Ἄρα καὶ τὸ σημεῖον N θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

***Ἐὰν δύο σημεῖα M(x, y) καὶ N($x_1$, $y_1$), διάφορα μεταξύ των καὶ τῆς ἀρχῆς, ἔχουν συντεταγμένας ἐπαληθευούσας τὴν σχέσιν: $xy_1-yx_1=O$, τὰ σημεῖα ταῦτα θὰ κεῖνται ἐπ᾽ εὐθείας μετὰ τῆς ἀρχῆς τῶν συντεταγμένων.***

**237. Συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἑνὸς διανύσματος.** Ἔστωσαν $M_1(x_1, y_1)$ καὶ $M_2(x_2, y_2)$ αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων τοῦ τμήματος $M_1M_2$ καὶ $M(x,y)$ αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου **M** τοῦ τμήματος τούτου·

Αἱ παράλληλοι ἐκ τῶν $M_1$, A, $M_2$ πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$, τέμνουν τὸν ἄξονα $x'x$ εἰς τὰ σημεῖα Α, Γ, Β ἀντιστοίχως. Ἐπειδὴ τὸ Μ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος $M_1M_2$, τὸ Γ θὰ εἶναι μέσον τοῦ τμήματος ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν δέ:



Σχ. 43.

$$\overline{O\Gamma}=\overline{OB}-\overline{\Gamma B} \quad \text{καὶ} \quad \overline{O\Gamma}=\overline{OA}+\overline{A\Gamma},$$

ὅθεν καί: $2\cdot\overline{O\Gamma}=\overline{OA}+\overline{OB}$ ἢ $2x=x_1+x_2$, ἐξ οὗ: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΜ εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου $AM_1M_2B$, θὰ ἔχωμεν:

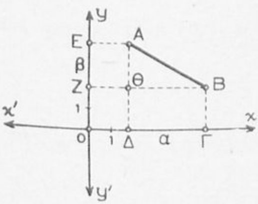
$$\overline{\Gamma M}=\frac{\overline{AM_1}+\overline{BM_2}}{2} \quad \text{ἢ} \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

***Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου ἑνὸς διανύσματος $M_1M_2$ ἰσοῦνται μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του.***

| | |
|---|---|
| $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$ | $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$ |

**238. Συντεταγμέναι προβολαὶ ἑνὸς διανύσματος.** Ἔστω ΑΒ ἕνα διάνυσμα μὲ συντεταγμένας τῶν ἄκρων του $(x_1, y_1)$ καὶ $(x_2, y_2)$ ἀντιστοίχως. Προβάλλομεν τοῦτο ἐπὶ τοὺς ἄξονας $x'x$ καὶ $y'y$. Ἔστωσαν δὲ ΔΓ καὶ ΕΖ αἱ ἀντίστοιχοι προβολαί. Τὸ $\overline{\Delta\Gamma}$ καλεῖται ***τετμημένη προβολὴ τοῦ*** $\overrightarrow{AB}$ καὶ τὸ $\overline{EZ}$ καλεῖται ***τεταγμένη προβολὴ τοῦ*** διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.



Σχ. 44.

Ἐκ τοῦ σχήματος ἔχομεν:

$\overline{\Delta\Gamma}=\overline{O\Gamma}-\overline{O\Delta}$, ἢ $\alpha=|x_2-x_1|$

καὶ $\overline{EZ}=\overline{OZ}-\overline{OE}$, ἢ $\beta=|y_2-y_1|$

Ἐκ τούτων συνάγομεν ὅτι:

***Τὸ μῆκος τῆς τετμημένης προβολῆς ἑνὸς διανύσματος ἰσοῦται μὲ τὴν τετμημένην τοῦ πέρατος μεῖον τὴν τετμημένην τῆς ἀρχῆς*** καί, ***τὸ μῆκος τῆς τεταγμένης προβολῆς ἰσοῦται μὲ τὴν τεταγμένην τοῦ πέρατος μεῖον τὴν τεταγμένην τῆς ἀρχῆς.***

Τὰ α, β καλοῦνται ***συντεταγμέναι προβολαὶ*** τοῦ $\overrightarrow{AB}$.

**239. Ἀπόστασις δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ καὶ $B(x_2, y_2)$.** Ἐκ τοῦ σχήματος τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν:

$$\overline{\Theta B} = \overline{\Delta\Gamma} = \alpha = |x_2 - x_1| \text{ καὶ } \overline{A\Theta} = \overline{EZ} = \beta = |y_2 - y_1|,$$

καὶ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΘΓ, ἔχομεν ἐπίσης τὴν σχέσιν:

$$\overline{AB}^2 = \overline{\Theta B}^2 + \overline{\Theta A}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ἐξ οὗ:

$$\boxed{|\overline{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \qquad (1)$$

Ἂν τὸ σημεῖον Β συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχὴν Ο, τότε θὰ εἶναι: $x_2=0$ καὶ $y_2=0$ καὶ τότε ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται:

$$|\overline{OA}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \overline{OA}^2 = x_1^2 + y_1^2. \qquad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Δίδονται τὰ σημεῖα A(4, 0) καὶ B(6, 0). Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις αὐτῶν καὶ ἡ τετμημένη προβολή.**

***Λύσις:*** Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x καὶ θὰ εἶναι:

$$\alpha = 6 - 4 = 2$$

καὶ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ Ox.

2ον: **Ὁμοίως διὰ τὰ σημεῖα A(5, 0) καὶ B(−2, 0).**

***Λύσις:*** Τὰ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′x καὶ εἶναι:

$$\alpha = -2 - 5 = -7$$

καὶ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ Ox′.

3ον: **Ὁμοίως διὰ τὰ σημεῖα: $A_2$ (0, −4) καὶ $B_2$ (0, −9).**

***Λύσις:*** Τὰ σημεῖα ταῦτα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἄξονος y′y καὶ θὰ εἶναι:

$$\beta = -9 - (-4) = -9 + 4 = -5$$

καὶ ἔχει τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἄξονος Oy′.

4ον: **Δίδονται τὰ σημεῖα A(3,7) καὶ B(5,9). Νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα AB καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου του.**

***Λύσις:*** Εὑρίσκομεν τὴν θέσιν τῶν σημείων Α καὶ Β, κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον, καὶ συνδέομεν κατόπιν ταῦτα διὰ μιᾶς εὐθείας.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου του Γ θὰ εἶναι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{καὶ} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{7+9}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

5ον: **Ἐὰν εἶναι A(3,5) καὶ B(−1, 8), νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις AB.**

***Λύσις:*** Ἐπειδὴ εἶναι:

$$x_2 - x_1 = -1 - 3 = -4 \quad \text{καὶ} \quad y_2 - y_1 = 8 - 5 = 3,$$

θὰ ἔχωμεν: $|AB| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$

6ον: **Ἐὰν $A_1(-3, -14)$ καὶ $B_1(2, -26)$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις $A_1B_1$.**

***Λύσις:*** Ἐπειδὴ εἶναι:

$$x_2 - x_1 = 2 - (-3) = 2 + 3 = 5 \quad \text{καὶ} \quad y_2 - y_1 = -26 - (-14) = -26 + 14 = -12,$$

θὰ ἔχωμεν: $\quad |A_1B_1| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13.$

**240. Διαίρεσις εὐθυγράμμου τμήματος εἰς δοθέντα λόγον.**

Ἔστω $A_1A_2$ ἕνα εὐθύγραμμον τμῆμα, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων του εἶναι $(x_1, y_1)$ καὶ $(x_2, y_2)$ ἀντιστοίχως. Ἔστω δὲ Γ ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Ἐκ τῶν σημείων

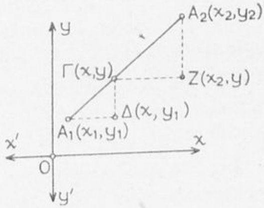
$A_1$, Γ καὶ $A_2$ ἄγομεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ ἔχομεν τὸ (σχ. 45).

Ἐκ τῶν ὁμοίων ὀρθογωνίων τριγώνων $A_1\Delta\Gamma$ καὶ $\Gamma Z A_2$, ἔχομεν:

$$\frac{\overline{A_1\Delta}}{\overline{\Gamma Z}}=\frac{\overline{A_1\Gamma}}{\overline{\Gamma A_2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x}=\frac{\mu}{\nu}, \text{ ἐξ οὗ: } \quad x=\frac{\nu x_1+\mu x_2}{\mu+\nu}$$

καὶ

$$\frac{\overline{\Delta\Gamma}}{\overline{Z A_2}}=\frac{\overline{A_1\Gamma}}{\overline{\Gamma A_2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\frac{\mu}{\nu}, \text{ ἐξ οὗ: } \quad y=\frac{\nu y_1+\mu y_2}{\mu+\nu}.$$



Σχ. 45.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον. **Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου Γ, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ἀπόστασιν τῶν σημείων Α(3,4) καὶ Β(—4,2) εἰς δοθέντα λόγον $\frac{2}{3}$.**

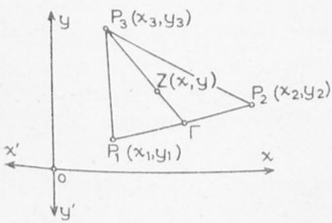
***Λύσις:*** Ἐνταῦθα εἶναι: $\mu=2$ καὶ $\nu=3$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$$x=\frac{\nu x_1+\mu x_2}{\mu+\nu}=\frac{3\cdot 3+2\cdot(-4)}{2+3}=\frac{1}{6}$$

καὶ

$$y=\frac{\nu y_1+\mu y_2}{\mu+\nu}=\frac{3\cdot 4+2\cdot 2}{2+3}=\frac{16}{5}.$$

2ον: **Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ καὶ $P_3(x_3,y_3)$.**



Σχ. 46.

***Λύσις:*** Ἔστω $P_1P_2P_3$ τὸ δοθὲν τρίγωνον, $P_3\Gamma$ μία τῶν διαμέσων του καὶ Ζ τὸ κέντρον βάρους του. Ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι:

$$\overline{\Gamma Z}:\overline{ZP_3}=1:2.$$

Δηλαδή: $\mu=1$ καὶ $\nu=2$.

Αἱ συντεταγμέναι τοῦ Γ θὰ εἶναι:

$$x_4=\frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{καὶ} \quad y_4=\frac{y_1+y_2}{2}. \qquad (1)$$

Αἱ συντεταγμέναι x καὶ y τοῦ κέντρου βάρους Ζ θὰ εἶναι:

$$x=\frac{2\cdot\frac{x_1+x_2}{2}\,1+\cdot x_3}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{2\cdot\frac{y_1+y_2}{2}+1\cdot y_3}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

Ὥστε, θὰ ἔχωμεν: $\quad Z\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \quad \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου τὰ σημεῖα:
Α(1, 0), Β(7, 6), Γ(—4, 7), Δ(—4, 8), Ε(—2, 9), Ζ(—10, 5).

**2.** Ὁμοίως, νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα:
Α(—2, 9), Β(—2, 1), Γ(6, 1). Δ(6, 9)
καὶ νὰ ἀποδείξητε ὅτι εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

**3.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (—3, 4), (—3, —2), (5, —2) καὶ (5,4) εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν του, τῶν διαγωνίων του καὶ αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

**4.** Νὰ κατασκευασθῇ τὸ τρίγωνον (7, 6), (—5, —6), (7, —5) καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του, τοῦ κέντρου βάρους καὶ τὰ μήκη τῶν διαμέσων του.

**5.** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (12, —2), (6, 6) καὶ (—9, —2).

**6.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα (7, 4) (—2, 1) καὶ (10, —5), εἶναι ἰσοσκελές.

**7.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα (0, 6), (—3, 0) καὶ (9,—6) εἶναι ὀρθογώνιον.

**8.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα (6, 3), (—3, 0), (—5, —4) καὶ (4, —1) εἶναι παραλληλόγραμμον.

**9.** Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ἔχουν συντεταγμένας ἀντιστοίχως (3, 2) (—1, —2) καὶ (5, —4). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του καὶ αἱ συντεταγμέναι τοῦ κέντρου βάρους.

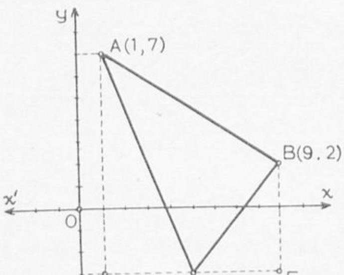
**10.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (6, —4), (5, 3), (—2, 2) καὶ (—1, —5) εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν διαγωνίων του, αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν καὶ τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

**11.** Τετραπλεύρου, κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα (6, 8), (—4, 0), (—2, —6) καὶ (4, —4). Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὰ τμήματα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του διχοτομοῦνται.

**12.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (6, 4), (4, —3), (0, —1), (—5, —4) καὶ (—2, 1).

**13.** Νὰ κατασκευάσητε τὸ τρίγωνον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (2,—1), (—2, 5), (—8, —4) καὶ νὰ εὕρητε τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του.

**241. Ἐμβαδὸν τριγώνου καὶ πολυγώνου.** Ἔστωσαν Α(1,7), Β(9, 2) καὶ Γ(5, —3) αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Ἐκ τῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας καὶ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΔΕΒ. Αἱ συντεταγμέναι τῶν Δ καὶ Ε εἶναι ἀντιστοίχως (1, —3) καὶ (9, —3).




Σχ. 47.

Ἐκ δὲ τοῦ σχήματος θὰ ἔχωμεν:

$$(\mathrm{A\Gamma B})=(\mathrm{A\Delta EB})-(\mathrm{A\Delta\Gamma})-(\mathrm{\Gamma EB})$$

$$=\frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{A\Delta}}+\overline{\mathrm{BE}})\,(\overline{\mathrm{\Delta E}})-$$

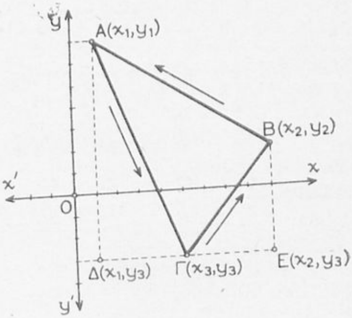
$$-\frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{\Delta\Gamma}})\,(\overline{\mathrm{\Delta A}})-\frac{1}{2}\,(\overline{\mathrm{\Gamma E}})\,(\overline{\mathrm{EB}})$$

$$=\frac{1}{2}\,(10+5).8-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 10-\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5=15\cdot 4-2\cdot 10-2\cdot 5=30.$$

Γενικῶς, ἐὰν $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ καὶ $(x_3, y_3)$ εἶναι αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀντιστοίχως τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν, ἐκ τοῦ ἔναντι σχήματος, ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ Δ θὰ εἶναι $(x_1, y_3)$ καὶ τοῦ Ε θὰ εἶναι: $(x_2, y_3)$. Ἄρα $\overline{\Delta\Gamma} = x_3 - x_1$

$\overline{\Gamma E} = x_2 - x_3$, $\overline{\Delta E} = x_2 - x_1$,

$\overline{A\Delta} = y_3 - y_1$, $\overline{EB} = y_2 - y_3$.




Σχ. 48.

Κατ' ἀκολουθίαν, ἂν ἡ φορὰ εἶναι ἡ ΑΓΒ:

$$(A\Gamma B) = (\Delta EBA) - (\Delta\Gamma A) - (\Gamma EB)$$

$$= \frac{1}{2}(A\Delta + EB)(\Delta E) -$$

$$-\frac{1}{2}(\Delta\Gamma)(A\Delta) - \frac{1}{2}(\Gamma E)(EB) = \frac{1}{2}(y_3 - y_1 + y_2 - y_3)(x_2 - x_1) -$$

$$-\frac{1}{2}(x_3 - x_1)(y_3 - y_1) - \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 - y_3) =$$

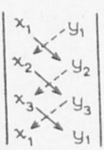
$$= \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

Ὁ τύπος οὗτος γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$(A\Gamma B) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Διὰ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς ὁριζούσης ταύτης ἀκολουθοῦμεν τὸν ἑξῆς πρακτικὸν κανόνα:

*α'). Γράφομεν εἰς δύο κατακορύφους στήλας τὰς συντεταγμένας τῶν κορυφῶν, ὡς φαίνεται εἰς τὸ ἔναντι (σχ. 49).*




Σχ. 49.

*β'). Πολλαπλασιάζομεν ἑκάστην τετμημένην ἐπὶ τὴν τεταγμένην τῆς ἑπομένης γραμμῆς καὶ προσθέτομεν τὰ προκύπτοντα γινόμενα καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ ἄθροισμα:*

$$\mathbf{x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1}. \qquad (2)$$

*γ'). Πολλαπλασιάζομεν ἑκάστην τεταγμένην ἐπὶ τὴν τετμημένην τῆς ἑπομένης γραμμῆς καὶ λαμβάνομεν τὸ ἄθροισμα:*

$$\mathbf{y_1x_2 + y_2x_3 + y_3x_1}. \qquad (3)$$

*δ'). Ἀφαιροῦμεν τὰ ἀθροίσματα (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν τὸ ἥμισυ τῆς διαφορᾶς ταύτης. Δηλαδή:*

$$\mathbf{(A\Gamma B) = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1).}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α(2, 3), Β(4, —5) καὶ Γ(—3, —6).**

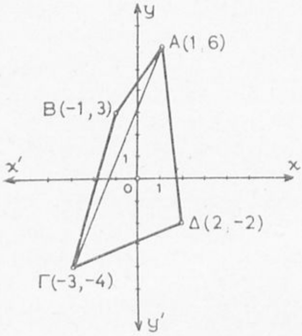
***Λύσις:*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν:

$$(\text{ΑΓΒ})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -6 \\ 4 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,[2(-6)+(-3)(-5)+4\cdot 3-3(-3)-(-6)\cdot 4-(-5)\cdot 2]=\frac{1}{2}\,(-12+15+12+9+24+10)=29.$$

2ον : **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : Α(8, 3), Β(—2, 3) καὶ Γ(4, —5).**

***Λύσις :*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω, θὰ εἶναι :

$$(\text{ΑΒΓ})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & 3 \\ 4 & -5 \\ 8 & 3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\,[8\cdot 3+(-2)(-5)+4\cdot 3-3)(-2)-3\cdot 4-(-5)\cdot 8]=\frac{1}{2}\,(24+10+12+6-12+40)=40.$$



Σχ. 50.

3ον : **Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα Α(1,6), Β(—1,3), Γ(—3,—4), Δ(2,—2).**

***Λύσις :*** Ἤ φέρομεν τὴν διαγώνιον ΓΑ καὶ εὑρίσκομεν τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστου τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΓΔ ἢ συντομώτερον, γράφομεν :

$$(\text{ΑΒΓΔ})=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -1 & 3 \\ -3 & -4 \\ 2 & -2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\,[1\cdot 3+(-1)(-4)+(-3)(-2)+2\cdot 6-6(-1)-3(-3)-(-4)\cdot 2-(-2)\cdot 1]=25.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου Α(1,2), Β(5,1), Γ(3,6).

**2.** Ὁμοίως τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : (2, 5), (—4, 1), (7, 2).

**3.** Ὁμοίως τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : (6, 5), (4, 2) καὶ (—8, 7).

**4.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : (0, 0), (8, —2), (10, 5) καὶ (2, 3).

**5.** Ὁμοίως τοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : (5, 0), (7, 3), (3, 8), (—2, 2) καὶ (1,—2).

**6.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα : (10, 5), (—2, 5), (—5, —3) καὶ (7 —3).

**7.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ σημεῖα (0,7), (3,—1) καὶ (6,—9) κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὁμοίως ὅτι τὰ σημεῖα (—6,3), (3,6) καὶ (9,8) κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

**8.** Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x, ὥστε τὰ σημεῖα (—3,5), (3,1) καὶ (x,—3) νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

**9.** Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 20 τετραγωνικαὶ μονάδες, αἱ δὲ κορυφαί του ἔχουν συντεταγμένας (1, 6), (5, —2) καὶ (x, 4).

Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ x (δύο λύσεις).

**10.** Δίδονται τὰ σημεῖα Α(—1,2, 3,5), Β(—1,7, —2,4), Γ(2,4, 5,1), Δ(2,9, 4). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ συντεταγμέναι τοῦ μέσου τῶν ΑΓ καὶ ΒΔ. Τί συμπέρασμα ἐξάγεται διὰ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ;

**242. Ὁρισμὸς τῆς συναρτήσεως δύο διατεταγμένων ζευγῶν.** Εἰς τὴν παράγραφον 88, τοῦ δευτέρου μέρους τοῦ παρόντος βιβλίου, εἴδομεν ὅτι: ***Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου Α, εἰς τὸ μὴ κενὸν σύνολον Β, καλεῖται συνάρτησις.***

Τὴν ἀπεικόνισιν ταύτην παρεστήσαμεν διὰ τοῦ συμβόλου:

$$f: x \in A \longrightarrow f(x)=y \in B.$$

Ἂς θεωρήσωμεν τὴν σχέσιν $y=3x$. Διὰ κάθε x πραγματικόν, ἀντιστοιχεῖ καὶ ἕνα ὡρισμένον y πραγματικόν. Οὕτω, διὰ $x = 1,2,3,4,5,6,\ldots$, λαμβάνομεν ἕνα ὡρισμένον $y=3,6,9,12,15,18,\ldots$, ἀντιστοίχως.

Δημιουργοῦνται, οὕτω, τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$(1,3),\ (2,6),\ (3,9),\ (4,12),\ (5,15),\ (6,18),\ldots$$

Τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων τούτων ζευγῶν:

$$R=\{(1,3),\ (2,6),\ (3,9),\ (4,12),\ (5,15),\ (6,18),\ldots\} \qquad (1)$$

ὀνομάζεται ***συνάρτησις.***

Εἰς τοῦτο παρατηροῦμεν ὅτι αἱ τετμημέναι τῶν ζευγῶν του εἶναι ***διάφοροι,*** καθὼς καὶ αἱ τεταγμέναι τῶν ζευγῶν του.

Εἶναι ὅμως δυνατὸν αἱ τεταγμέναι μερικῶν ζευγῶν νὰ εἶναι ἴσαι.

Οὕτω, εἰς τὸ σύνολον:

$$R_1=\{(1,3),\ (2,5),\ (3,3),\ (4,5),\ (5,7),\ (6,10)\},$$

ὑπάρχουν διατεταγμένα ζεύγη μὲ τὴν αὐτὴν τεταγμένην.

Ἐὰν ὑπάρχουν ζεύγη μὲ τὴν αὐτὴν τετμημένην εἰς ἕνα σύνολον:

$$R_2=\{(2,3),\ (5,6),\ (2,7),\ (2,10),\ (8,11)\},$$

τότε ἡ σχέσις αὕτη ***δὲν εἶναι*** συνάρτησις.

Ὥστε: ***Συνάρτησις εἶναι ἡ σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν δὲν ὑπάρχουν δύο ἢ περισσότερα διατεταγμένα ζεύγη μὲ τὴν αὐτὴν τετμημένην.***

Εἰς τὴν σχέσιν $y=3x$, ὁ μὲν x καλεῖται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή,*** ὁ δὲ y καλεῖται ***ἐξηρτημένη μεταβλητή.***

Ἀντιστρόφως, διὰ κάθε πραγματικὸν ἀριθμὸν y, ὑπάρχει ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς $x=\frac{y}{3}$, ὁ ὁποῖος εἶναι ἀντίστοιχος τοῦ θεωρουμένου y. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις $y=3x$ ἀπεικονίζει τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἰς τὸν ἑαυτόν του. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν ὁ y εἶναι ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητὴ καὶ ὁ x ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή. Εἶναι δὲ εὐνόητον ὅτι, κάθε ζεῦγος (x,y) τιμῶν τῆς συναρτήσεως $y=3x$, δύναται νὰ παρασταθῇ μὲ ἕνα σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἔχει Καρτεσιανὰς συντεταγμένας $x$ καὶ $\mathbf{y}$ εἰς ὀρθογωνίους ἄξονας.

**243. Συναρτήσεις τῆς μορφῆς $y=ax$.** Ἔστω ἡ συνάρτησις $y=3x$. Τὸ μονώνυμον $3x$ ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμήν, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ $x$. Τοῦτο ἐκφράζομεν λέγοντες ὅτι ἡ συνάρτησις $y=3x$ εἶναι ***ὡρισμένη,*** διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ $x$.

Ἐὰν εἰς τὸν $x$ δώσωμεν τὰς ἀκεραίας τιμάς:

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

εὑρίσκομεν τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τοῦ $y$, αἱ ὁποῖαι φαίνονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| x | ··· | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ··· | −12 | −9 | −6 | −3 | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | ··· |

Ἐκ τοῦ πίνακος τούτου παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν δίδωμεν εἰς τὸν $x$ τιμὰς ὁλοὲν αὐξανομένας, ὁ $y$ λαμβάνει τιμὰς ὁλοὲν αὐξανομένας. Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἔστωσαν $x_1$ καὶ $x_2$ δύο αὐθαίρετοι καὶ διάφοροι τιμαὶ τοῦ $x$ τοιαῦται, ὥστε $x_1>x_2$. Τότε ὁ $y$ λαμβάνει, ἀντιστοίχως, τὰς τιμάς:

$$y_1=3x_1 \quad \text{καὶ} \quad y_2=3x_2.$$

Ἐπειδὴ δέ: $\quad x_1>x_2 \Rightarrow 3x_1>3x_2 \Rightarrow y_1>y_2$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνάρτησις $y=3x$ καλεῖται ***αὔξουσα.***

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ $x$ ἐλαττοῦνται, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ $y$ ἐλαττοῦνται. Καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι ***αὔξουσα.***

Ὥστε: ***Μία συνάρτησις εἶναι αὔξουσα, ὅταν μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μετὰ τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.***

Ἤδη, θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $y=-4x$. Αὕτη εἶναι ὡρισμένη, δι' ὅλας τὰς πραγματικὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς $x$ καὶ ἀντιστρόφως. Δίδομεν εἰς τὸν $x$ διαφόρους τιμάς, αἱ ὁποῖαι βαίνουν αὐξανόμεναι καὶ καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα.

| x | ··· | −4 | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | ··· | 16 | 12 | 8 | 4 | 0 | −4 | −8 | −12 | −16 | −20 | ··· |

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ $x$ βαίνουν αὐξανόμεναι (ἢ ἐλαττούμεναι), τότε αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ $y$ βαίνουν ἐλαττούμεναι (ἢ αὐξανόμεναι). Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνάρτησις $y=-4x$ καλεῖται ***φθίνουσα.***

Τοῦτο ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς: Ἔστωσαν $x_1$, $x_2$ δύο αὐθαίρετοι καὶ διάφοροι τιμαὶ τοῦ $x$ τοιαῦται, ὥστε $x_1>x_2$.

Τότε ἡ συνάρτησις λαμβάνει τὰς τιμάς:

$$y_1=-4x_1 \quad \text{καὶ} \quad y_2=-4x_2.$$

Ἐπειδὴ: $x_1>x_2 \Rightarrow -4x_1<-4x_2 \Rightarrow y_1<y_2$.

Γενικῶς, ***ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλας τὰς τιμὰς τῆς μεταβλητῆς $x$. Εἶναι αὔξουσα, ὅταν $\alpha>O$ καὶ φθίνουσα, ὅταν ὁ συντελεστὴς $\alpha<O$.***

Διότι, ἐὰν $x_1>x_2$ καὶ $\alpha>0$, ἕπεται: $\alpha x_1>\alpha x_2$ ἢ $y_1>y_2$

καὶ ἐὰν $x_1>x_2$ καὶ $\alpha<0$, ἕπεται: $\alpha x_1<\alpha x_2$ ἢ $y_1<y_2$.

Διὰ $x=0$, εἶναι $y=0$.

Ἐὰν $-\infty<x<\infty$ καὶ ὁ x αὐξάνῃ, τότε ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$,

α΄). αὐξάνει ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, ὅταν $\alpha>0$.

β΄). ἐλαττοῦται ἀπὸ $+\infty$ ἕως $-\infty$, ὅταν $\alpha<0$.

Ἐκ τῆς συναρτήσεως $y=3x$, διὰ νὰ λάβωμεν $y>3000000$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν: $3x>3000000$, ἐξ οὗ: $x>1000000$.

Ἐκ δὲ τῆς συναρτήσεως $y=-4x$, διὰ νὰ λάβωμεν $y>-12000000$, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν:

$$-4x>-12000000, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x<3000000.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως: $y=\alpha x$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha>0$ | x | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| | $y=\alpha x$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| $\alpha<0$ | x | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |
| | $y=\alpha y$ | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

ἐκ τοῦ ὁποίου φαίνεται ὅτι ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ μεταβάλλεται κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, ὅταν ὁ συντελεστὴς α εἶναι θετικός, καὶ κατὰ τὴν ἀντίθετον φοράν, ὅταν ὁ α εἶναι ἀρνητικός.

**244. Γραφικὴ παράστασις τῆς $y=\alpha x$.** 1ον. Ἂς θεωρήσωμεν τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας $x'Ox$ καὶ $y'Oy$ μὲ τὸ αὐτὸ διευθῦνον διάνυσμα $\overline{O\Theta}=\overline{OH}=1$. Θὰ ἀναζητήσωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων Μ τοῦ Καρτεσιανοῦ τούτου ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι x καὶ y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως

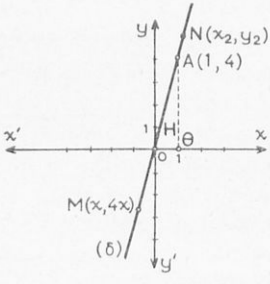
$$y=4x. \tag{1}$$

Ἔστω Α ἕνα σημεῖον μὲ συντεταγμένας $x_1=1$ καὶ $y_1=4$. Τότε, κατὰ τὴν παράγραφον 236, θὰ εἶναι:

$$xy_1-yx_1=x\cdot4-4x\cdot1=4x-4x=0.$$

Κατ' ἀκολουθίαν, τὰ σημεῖα Ο,Α,Μ θὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

***Ἀντιστρόφως*** : Ἔστω N $(x_2, y_2)$ ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας (δ), τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων O καὶ A.




Σχ. 51.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα O, A καὶ N κεῖνται ἐπ' εὐθείας, κατὰ τὴν παράγραφον 236, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν :

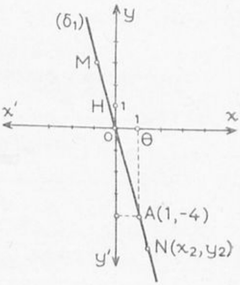
$$1 \cdot y_2 - 4x_2 = 0, \quad \text{ἢ} \quad y_2 = 4x_2.$$

Οὕτω : πᾶν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι x καὶ y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $y=4x$, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) καὶ ***ἀντιστρόφως*** : πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας (δ) ἔχει συντεταγμένας x καὶ y, ἐπαληθευούσας τὴν σχέσιν : $y=4x$.

Ἐκ τοῦ διπλοῦ τούτου ἀποτελέσματος συνάγομεν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=4x$ εἶναι ἡ εὐθεῖα (δ), ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O καὶ τοῦ σημείου A(1,4).

2ον : Ἄς θεωρήσωμεν τοὺς ὀρθογωνίους ἄξονας x′Ox καὶ y′Oy, μὲ τὸ αὐτὸ διευθύνον διάνυσμα $\overline{O\Theta}=\overline{OH}=1$, καὶ ἂς ἀναζητήσωμεν τὴν θέσιν τῶν σημείων M, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι x καὶ y, ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τούτους, συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως :

$$y = -4x. \qquad (2)$$




Σχ. 52.

Ἔστω A ἕνα σημεῖον μὲ συντεταγμένας (1,—4) τότε κατὰ τὴν παράγραφον 236, θὰ εἶναι :
$xy_1 - yx_1 = x(-4) - (-4x)\cdot 1 = -4x + 4x = 0.$

Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ σημεῖα O,A καὶ M κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

***Ἀντιστρόφως***: Ἐὰν N $x_2, y_2$) εἶναι ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας $(\delta_1)$, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων O καὶ A, θὰ ἔχωμεν :

$$xy_1 - yx_1 = 1\cdot y_2 - (-4)x_2 = y_2 + 4x_2 = 0, \quad \text{ἐξ οὗ :} \quad y_2 = -4x_2.$$

Οὕτω, ἀπεδείξαμεν ὅτι : πᾶν σημεῖον, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι x καὶ y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $y=-4x$, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $(\delta_1)$, καὶ ***ἀντιστρόφως*** : πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας $(\delta_1)$ ἔχει συντεταγμένας x καὶ y, ἐπαληθευούσας τὴν σχέσιν $y=-4x$.

Ἐκ τοῦ διπλοῦ τούτου ἀποτελέσματος συνάγομεν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=-4x$ εἶναι ἡ εὐθεῖα $(\delta_1)$, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῆς ἀρχῆς O καὶ τοῦ σημείου A(1, —4).

***Μερικὴ περίπτωσις*** : Ἐὰν $\alpha=0$, ἡ συνάρτησις $y=\alpha x$ λαμβάνει τὴν τιμὴν μηδέν, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x.

Λέγομεν τότε ὅτι ἡ συνάρτησις y εἶναι ***σταθερά***. Ἡ δὲ γραφικὴ παράστασις αὐτῆς εἶναι ὁ ἄξων x′Ox.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $y=ax$ παριστᾷ εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς Ο τῶν συντεταγμένων.

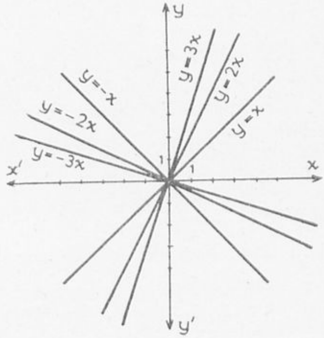
**245. Γωνιακὸς συντελεστὴς ἢ κλίσις τῆς εὐθείας $y=ax$.** Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον εἴδομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα $y=ax$ ὁρίζεται ἀκριβῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $(1, a)$.

Δίδομεν λοιπὸν εἰς τὸν συντελεστὴν α διαφόρους τιμὰς καὶ κατασκευάζομεν τὰς ἀντιστοίχους εὐθείας.

Ἐὰν εἶναι $a>0$, ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα (δ) εὑρίσκεται εἰς τὴν πρώτην καὶ τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, ὅπως εἰς τὴν ἐξίσωσιν $y=3x$ τοῦ (σχ. 53).

Ἐὰν εἶναι $a<0$, ἡ ἀντίστοιχος εὐθεῖα $(\delta_1)$ εὑρίσκεται εἰς τὴν δευτέραν καὶ τετάρτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, ὅπως εἰς τὸ (σχ. 53) φαίνεται διὰ τὴν ἐξίσωσιν

$$y=-3x.$$




Σχ. 53.

Οὕτω, διὰ $a=\pm 1$, $\pm 2$ καὶ $\pm 3$, ἔχομεν τὰς ἀντιστοίχους εὐθείας τοῦ ἀνωτέρω σχήματος.

Αἱ εὐθεῖαι $y=ax$ καὶ $y=-ax$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων.

Οὕτω, αἱ εὐθεῖαι $y=2x$ καὶ $y=-2x$ εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας. Ὁμοίως αἱ εὐθεῖαι $y=3x$ καὶ $y=-3x$, εἶναι συμμετρικαὶ ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας.

Ἡ εὐθεῖα $y=x$ ***διχοτομεῖ*** τὴν ***πρώτην*** καὶ ***τρίτην*** γωνίαν τῶν ἀξόνων.

Ἡ εὐθεῖα $y=-x$ ***διχοτομεῖ*** τὴν ***δευτέραν*** καὶ ***τετάρτην*** γωνίαν τῶν ἀξόνων.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ὁ συντελεστὴς α τοῦ μονωνύμου $ax$ καθορίζει, ***διὰ μὲν τοῦ προσήμου του*** τὴν φορὰν μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως $y=ax$, διὰ δὲ τῆς τιμῆς του καθορίζει τὴν θέσιν τῆς εὐθείας, τὴν ὁποίαν παριστᾷ. Διὰ τοῦτο ὁ α καλεῖται ***συντελεστὴς διευθύνσεως*** τῆς εὐθείας $y=ax$ ἢ καὶ ***γωνιακὸς συντελεστής.***

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι εἶναι $a=\dfrac{y}{x}$. Δηλαδὴ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς εὐθείας $y=ax$, εἶναι ***ὁ λόγος τῆς τεταγμένης προβολῆς πρὸς τὴν τετμημένην προβολὴν*** τοῦ διανύσματος ΟΑ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τῶν ἄκρων του εἶναι ἀντιστοίχως $(0, 0)$ καὶ $(1, a)$.

---

Εἰς τὸ σχ. 53 αἱ εὐθεῖαι $y=-x$, $y=-2x$, $y=-3x$ νὰ κατασκευασθοῦν συμμετρικαὶ τῶν $y=x$, $y=2x$, $y=3x$ ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τοὺς ἄξονας $y'y$ καὶ $x'x$.

Ἐὰν ὁ α τείνῃ νὰ γίνῃ μέγας κατ' ἀπόλυτον τιμήν, ἡ εὐθεῖα $y=\alpha x$ πλησιάζει πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$.

Δηλαδὴ ἡ θέσις τῆς εὐθείας $y=\alpha x$ ***ἐξαρτᾶται ἐκ τοῦ γωνιακοῦ συντελεστοῦ αὐτῆς α.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ποῖος εἶναι ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς ἑκάστης τῶν ἀκολούθων εὐθειῶν:

$$y=x,\quad y=-5x,\quad y=\frac{3}{4}x,\quad y=-\frac{3}{4}x,\quad y=7{,}25x,\quad y=-\frac{1}{2}x\,;$$

**2.** Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

$$y=8x,\quad y=-5x,\quad y=-\frac{x}{5},\quad y=\frac{x}{5},\quad y=-8\frac{1}{2}x.$$

**246. Σπουδὴ τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$.** 1ον: Ἄς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $y=3x+5$.

Τὸ πολυώνυμον $3x+5$ ἔχει μίαν ἀριθμητικὴν τιμήν, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x. Ἄρα ἡ συνάρτησις $y=3x+5$ εἶναι ***ὡρισμένη,*** διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ x. Ὡς παράδειγμα ἔχομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| x | $-\infty$ | ... | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=3x+5$ | $-\infty$ | ... | $-4$ | $-1$ | 2 | 5 | 8 | 11 | ... |

ὅστις δεικνύει ὅτι, αὐξανομένου τοῦ x ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$, αὐξάνεται καὶ ἡ τιμὴ τοῦ y ἀπὸ $-\infty$ ἕως $+\infty$.

Ἔστωσαν δύο διάφοροι τιμαὶ τῆς μεταβλητῆς x τοιαῦται, ὥστε: $x_1>x_2$. Ἄρα $3x_1>3x_2$ καὶ $3x_1+5>3x_2+5$, ἢ $y_1>y_2$, καθόσον διὰ τὰς τιμὰς $x=x_1$ καὶ $x=x_2$, ἡ συνάρτησις y λαμβάνει τὰς τιμὰς $y_1=3x_1+5$ καὶ $y_2=3x_2+5$ ἀντιστοίχως.

Ἄρα ἡ συνάρτησις $y=3x+5$ εἶναι ***αὔξουσα.***

Οὕτω, θὰ ἔχωμεν: $y=3000005$ ἢ $3x+5=3000005$,

ἐξ οὗ: $x=1000000$

καὶ θὰ εἶναι $y>3000005$, διὰ $x>1000000$.

Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ y τείνει εἰς τὸ $\infty$ ἐκ θετικῶν τιμῶν, ὅταν ὁ x τείνῃ πρὸς τὸ ἄπειρον ἐκ θετικῶν τιμῶν.

Ὁμοίως, θὰ ἔχωμεν: $y=-3000001$ ἢ $3x+5=-3000001$

ἐὰν $3x=-3000006$, ἐξ οὗ: $x=-1000002$.

Θὰ εἶναι δέ: $y<-3000001$, διὰ $x<-1000002$.

Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι τὸ y τείνει εἰς τὸ $\infty$ ἐξ ἀρνητικῶν τιμῶν, ὅταν τὸ x τείνῃ εἰς τὸ $\infty$ ἐκ τιμῶν ἀρνητικῶν.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος παρατηροῦμεν ἐπίσης ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουσιν ἐλαττούμεναι, τότε καὶ αἱ ἀντίστοιχοι τιμαὶ τοῦ y βαίνουσιν ἐλαττούμεναι. Ἄρα ἡ συνάρτησις $y=3x+5$ εἶναι ***αὔξουσα.***

2ον. Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $y=-3x+5$ καὶ καταρτίζομεν ὁμοίως τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | $\dots$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $\dots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y=-3x+5$ | $\infty$ | $\dots$ | $17$ | $14$ | $11$ | $8$ | $5$ | $2$ | $-1$ | $\dots$ |

εἰς τὸν ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι, ὅταν αἱ τιμαὶ τοῦ x βαίνουσιν αὐξανόμεναι, αἱ τιμαὶ τοῦ y βαίνουσιν ἐλαττούμεναι καὶ ἀντιστρόφως. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνάρτησις $y=-3x+5$ καλεῖται ***φθίνουσα.***

Γενικῶς: ***Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ εἶναι αὔξουσα, ὅταν $\alpha>0$ καὶ φθίνουσα, ὅταν $\alpha<0$.***

Ἐὰν θεωρήσωμεν δύο τυχούσας διαφόρους τιμὰς τοῦ x, τὰς $x_1$ καὶ $x_2$ τοιαύτας, ὥστε $x_1>x_2$, τότε:

Διὰ $\alpha>0$, θὰ εἶναι $\alpha x_1>\alpha x_2 \Longleftrightarrow \alpha x_1+\beta>\alpha x_2+\beta$ ἢ $y_1>y_2$

καὶ διὰ $\alpha<0$, θὰ εἶναι $\alpha x_1<\alpha x_2 \Longleftrightarrow \alpha x_1+\beta<\alpha x_2+\beta$ ἢ $y_1<y_2$.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ εἶναι ***αὔξουσα,*** καὶ εἰς τὴν δευτέραν ***φθίνουσα.***

Ἐὰν τὸ $x \longrightarrow \infty$, τότε καὶ $\alpha x \longrightarrow \infty$ καὶ συνεπῶς τὸ ἄθροισμα:

$$\alpha x+\beta \longrightarrow \infty \quad \text{ἢ} \quad y \longrightarrow \infty.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

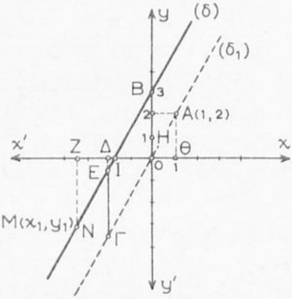
| **Μεταβολὴ τῆς συναρτήσεως $y=\alpha x+\beta$** | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha>0$ | $x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | $y=\alpha x+\beta$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $\alpha<0$ | $x$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| | $y=\alpha x+\beta$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\infty$ |

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις $y=\alpha x$ καὶ $y=\alpha x+\beta$ μεταβάλλονται ὁμοιομόρφως.

**247. Γραφικὴ παράστασις τῆς $y=\alpha x+\beta$.** 1ον. Ἂς θεωρήσωμεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας $x'Ox$ καὶ $y'Oy$ καὶ ἕνα σημεῖον Ε, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι x καὶ y συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $y=2x+3$. (1)

Ἔστω Β ἕνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει συντεταγμένας $x=0$ καὶ $y=3$. Τοῦτο θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος Oy. Ἔστω δὲ Γ ἕτερον σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τετμημένην x, τὴν ὁποίαν ἔχει καὶ τὸ Ε, τεταγμένην δὲ 2x. Γνωρίζομεν ὅτι, ὅταν τὸ x μεταβάλλεται, τὸ σημεῖον Γ γράφει εὐθείαν $(\delta_1)$, διερχομένην ἀπὸ τὸ O καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον $A(1,2)$. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Ε καὶ Γ ἔχουν τὴν αὐτὴν τετμημένην, προβάλλονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ τοῦ ἄξονος x'x, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ εὐθεῖα ΓΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα y'y. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$\overline{\Delta E} = \overline{\Delta\Gamma} + \overline{\Gamma E} \quad \text{ἢ} \quad 2x+3=2x+\overline{\Gamma E} \Rightarrow \overline{\Gamma E}=3=\overline{OB}.$$



Σχ. 54.

Ἄρα τὸ τετράπλευρον ΟΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον. Κατ' ἀκολουθίαν, οἱονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ x, τὸ σημεῖον Ε εὑρίσκεται ἐπὶ εὐθείας (δ), διερχομένης διὰ τοῦ Β καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν $(\delta_1)$, ἡ ὁποία ἔχει ἐξίσωσιν $y=2x$.

***Ἀντιστρόφως.*** Ἔστω $M(x_1, y_1)$ ἕνα σημεῖον τῆς εὐθείας (δ) καὶ Ζ ἡ προβολή του ἐπὶ τὸν ἄξονα x'x. Τὸ Ζ ἔχει τετμημένην $x_1$. Κατασκευάζομεν τὸ σημεῖον Ν, τὸ ἔχον τετμημένην $x_2=x_1$ καὶ τεταγμένην:

$$y_2=2x_1+3. \qquad (2)$$

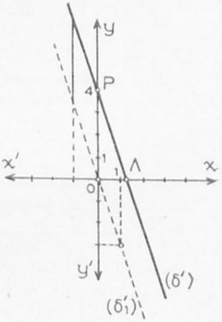
Προφανῶς, τὸ Ν προβάλλεται εἰς τὸ Ζ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x'x Ἄρα τὸ Ν συμπίπτει μὲ τὸ Μ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$y_1=y_2 \quad \text{ἢ} \quad y_1=2x_1+3, \text{ λόγῳ τῆς } (2).$$

Οὕτω, πᾶν σημεῖον μὲ συντεταγμένας x καὶ y, συνδεομένας διὰ τῆς σχέσεως $y=2x+3$, κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (δ) καὶ ***ἀντιστρόφως,*** πᾶν σημεῖον τῆς εὐθείας (δ) ἔχει συντεταγμένας x καὶ y ἐπαληθευούσας τὴν σχέσιν $y=2x+3$.

Ἐκ τοῦ διπλοῦ τούτου ἀποτελέσματος συνάγομεν ὅτι ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως $y=2x+3$ εἶναι ἡ εὐθεῖα (δ).

2ον: Ἂν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $y=-3x+4$ καὶ ἐργασθῶμεν ὅπως προηγουμένως, εὑρίσκομεν ὅτι αὕτη παρίσταται ὑπὸ μιᾶς εὐθείας (δ') τοῦ ἔναντι σχήματος 55.



Σχ. 55.

Διὰ τὴν ταχυτέραν κατασκευὴν τῆς εὐθείας $y=2x+3$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς. Θέτομεν $x=0$ καὶ εὑρίσκομεν $y=3$, δηλαδὴ τὸ σημεῖον Β, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα y'y (σχ. 55).

Θέτομεν κατόπιν $y=0$ καὶ εὑρίσκομεν $x=-\dfrac{3}{2}$. Δηλαδὴ τὸ σημεῖον Ι, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα x'x. Συνδέοντες τὰ δύο σημεῖα Β καὶ Ι, εὑρίσκομεν τὴν εὐθεῖαν (δ) (σχ. 54).

Ὁμοίως, διὰ τὴν κατασκευὴν τῆς εὐθείας $y=-3x+4$, θέτομεν $x=0$ καὶ λαμβάνομεν $y=4$. Δηλαδὴ τὸ σημεῖον Ρ, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα y'y. Κατόπιν θέτομεν $y=0$ καὶ εὑρίσκομεν $x=\dfrac{4}{3}$, δηλαδὴ τὸ σημεῖον

Λ, καθ' ὃ αὕτη τέμνει τὸν ἄξονα x'x. Συνδέοντος δι' εὐθείας τὰ σημεῖα Ρ καὶ Λ, κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν $y=-3x+4$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι, ἡ μὲν εὐθεῖα $y=2x+3$ εἶναι ***παράλληλος*** πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=2x$, ἡ δέ εὐθεῖα $y=-3x+4$ εἶναι ***παράλληλος*** πρὸς τὴν εὐθεῖαν $y=-3x$.

Γενικῶς, αἱ εὐθεῖαι $y=\alpha x+\beta$ καὶ $y=\alpha x$ εἶναι παράλληλοι.

Ἡ συνάρτησις $y=\alpha x+\beta$ ὀνομάζεται οὕτω ***γραμμικὴ συνάρτησις.***

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι $y=\alpha x+\beta$ καὶ $y=\alpha x$ εἶναι παράλληλοι, ὁ δὲ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς $y=\alpha x$ εἶναι ὁ $\alpha$, ἕπεται ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα $y=\alpha x+\beta$ ἔχει γωνιακὸν συντελεστὴν $\alpha$.

Διὰ $x=0$, ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$ δίδει: $y=\beta$.

Ὁ $\beta$ ὀνομάζεται ***τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*** τῆς εὐθείας ταύτης.

Διὰ $y=0$, ἡ $y=\alpha x+\beta$ δίδει: $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

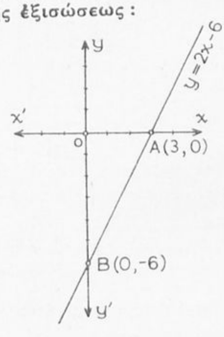
Ὁ ἀριθμὸς $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ ὀνομάζεται ***τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*** τῆς εὐθείας ταύτης. Ἡ τετμημένη καὶ ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν μιᾶς εὐθείας καλοῦνται ***συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν*** τῆς εὐθείας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:**

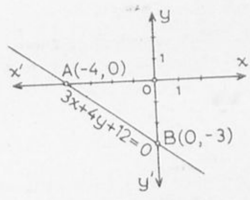
$$\mathbf{y=2x-6.} \qquad (1)$$

***Λύσις:*** Εὑρίσκομεν τὰς συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς ζητουμένης εὐθείας.

Διὰ $x=0$, ἡ (1) δίδει $y=-6$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τεταγμένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας καὶ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Β αὐτῆς (σχ. 56).




Σχ. 56.




Σχ. 57.

Διὰ $y=0$, ἡ (1) δίδει $x=3$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ τετμημένη ἐπὶ τὴν ἀρχὴν τῆς εὐθείας καὶ εἰς ταύτην ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Α.

Ἡ εὐθεῖα ΑΒ εἶναι ἡ παριστανομένη ὑπὸ τῆς $y=2x-6$.

2ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία παρίσταται ὑπὸ τῆς ἐξισώσεως:**

$$\mathbf{3x+4y+12=0.}$$

***Λύσις:*** Διὰ $x=0$, ἔχομεν $y=-3$ καὶ διὰ $y=0$, ἔχομεν $x=-4$. Ἡ ζητουμένη εὐθεῖα εἶναι ἡ ΑΒ, ἡ παριστανομένη ὑπὸ τοῦ (σχ. 57).

Τὰ ἀνωτέρω, μὲ τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων, ἐκφράζονται ὡς ἑξῆς:

**Νὰ εὑρεθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον:**

$$\mathbf{R=\{(x,y) \mid 3x+4y+12=0,\ x\in \Pi_\alpha\}.}$$

3ον : **Νὰ εὑρεθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον :**

$$\mathbf{R=\{(x,y) \mid 3x+2y=6,\ x\in\Pi_\alpha\}}. \tag{1}$$

***Λύσις :*** Τοῦ συνόλου (1) δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν ὅσα στοιχεῖα (διατεταγμένα ζεύγη) θέλομεν. Διότι ἐκ τῆς σχέσεως : $3x+2y=6$,

Διὰ $x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\dots$ εὑρίσκομεν ἀντιστοίχους τιμὰς διὰ τὸ y, τάς :

$$y=3,\ \frac{3}{2},\ 0,\ -\frac{3}{2},\ -3,\cdots$$

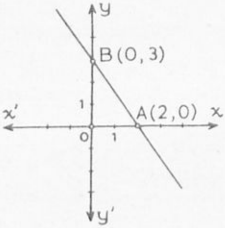
Λαμβάνομεν οὕτω τὰ ζεύγη :

$$(0,3),\ \left(1,\ \frac{3}{2}\right),\ (2,\ 0),\ \left(3,\ -\frac{3}{2}\right),\ (4,-3),\dots,$$

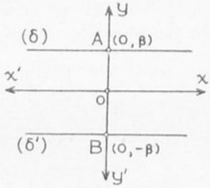
Ἑπομένως μία ἐλλιπὴς ἀναγραφὴ τοῦ $\{(x,y) \mid 3x+2y=6\}$ εἰς τὸ $\Pi_\alpha \times \Pi_\alpha$ εἶναι τὸ σύνολον :

$$R=\left\{(0,3),\ \left(1,\ \frac{3}{2}\right),\ (2.\ 0),\left(3,-\ \frac{3}{2}\right),\ (4,\ -3),\dots\right\}.$$

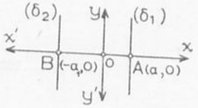
Διὰ $x=0$, λαμβάνομεν $y=3$, καὶ διὰ $y=0$, λαμβάνομεν $x=2$. Δηλαδὴ τὰ σημεῖα Β καὶ Α ἀντιστοίχως. Ἄρα καὶ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ (σχ. 58).




Σχ. 58.




Σχ. 59.




Σχ. 60.

*ΣΗΜ.* Ἐὰν $\alpha=0$, ἡ ἐξίσωσις $y=\alpha x+\beta$ γίνεται $y=\beta$ καὶ παριστᾷ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x′x, καὶ συγκεκριμένως τὴν εὐθεῖαν (δ), ἂν $\beta>0$ καὶ τὴν (δ′) ἂν $\beta<0$ (σχ. 59).

Ἐὰν ἔχωμεν τὴν ἐξίσωσιν $x=\alpha$, αὕτη θὰ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y′y καὶ θὰ εἶναι ἡ εὐθεῖα $(\delta_1)$, ἂν $\alpha>0$, ἡ εὐθεῖα $(\delta_2)$ δέ, ἂν $\alpha<0$.

4ον : **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α(2,5) καὶ Β(6, —3).**

***Λύσις :*** Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς :

$$y=\alpha x+\beta \tag{1}$$

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Α κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας (1), αἱ συντεταγμέναι του θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (1), δηλαδή :

$$5=\alpha\cdot2+\beta \quad \text{ἢ} \quad 2\alpha+\beta=5 \tag{2}$$

Ἐπειδὴ καὶ τὸ σημεῖον Β κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ταύτης, αἱ συντεταγμέναι του θὰ ἐπαληθεύουν, τὴν ἐξίσωσιν (1). Δηλαδή :

$$-3=\alpha\cdot6+\beta \quad \text{ἢ} \quad 6\alpha+\beta=-3 \tag{3}$$

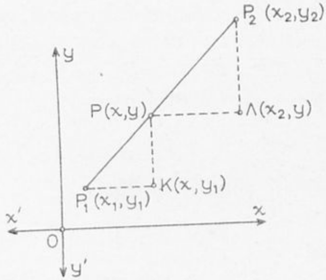
Λύοντες τὸ σύστημα τῶν ἐξισώσεων (2) καὶ (3), εὑρίσκομεν :

$$\alpha=-2 \quad \text{καὶ} \quad \beta=9.$$

Ἄρα, ἡ (1) γίνεται $y=-2x+9$, ἥτις εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι: πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $y=\alpha x+\beta$ παριστᾷ εὐθεῖαν.

**Ἄλλος τρόπος εὑρέσεως τῆς ἐξισώσεως εὐθείας, διερχομένης διὰ δύο σημείων.** Ἔστωσαν $P_1(x_1, y_1)$ καὶ $P_2(x_2, y_2)$, τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ $P(x, y)$ ἕνα τυχὸν σημεῖον τοῦ τμήματος $P_1P_2$. Ἐκ τῶν $P$, $P_1$, $P_2$ ἄγομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τοὺς ἄξονας τῶν συντεταγμένων καὶ σχηματίζονται τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $P_1KP$ καὶ $P\Lambda P_2$, τὰ ὁποῖα, προφανῶς, εἶναι ὅμοια. Ἄρα θὰ ἔχωμεν:




Σχ. 61.

$$\frac{\overline{P_1K}}{\overline{P\Lambda}} = \frac{\overline{KP}}{\overline{\Lambda P_2}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$$

ἢ
$$\frac{x-x_1}{y-x_1} = \frac{x-x_2}{y-y_2} \qquad (1)$$

Ἡ (1) εἶναι ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, τῆς διερχομένης διὰ τῶν δοθέντων σημείων $P_1$ καὶ $P_2$.

Ἡ (1), μετὰ τὴν ἀπαλοιφὴν τῶν παρονομαστῶν καὶ τὴν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(y_1-y_2)x-(x_1-x_2)y+x_1y_2-y_1x_2=0} \qquad (2)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A(5,2) καὶ B(7, —8).**

***Λύσις:*** Βάσει τῆς ἐξισώσεως (2), θὰ ἔχωμεν:

$$[2-(-8)]x-(5-7)y+5(-8)-2\cdot 7=0$$

ἢ
$$10x+2y-40-14=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad 5x+y-27=0.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (2—,7), (5, 0) καὶ (3, —3).

**2.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (5, 3), (1, 11) καὶ (—3, —5).

**3.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν καὶ τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (0, 0), (8, 0), (10, 4) καὶ (2, 4).

**4.** Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου εἶναι τὰ σημεῖα (6, 0), (—2, 2) καὶ (2, —4). Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του.

**5.** Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τὰ σημεῖα (—1, —3), (8, 3), (3, 4) καὶ (0, 2). Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου, αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του κα τῶν διαγωνίων του, καθὼς καὶ αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

**6.** Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τὰ σημεῖα (8, 0), (6, 6), (—3, 3) καὶ (—1, —3) Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τετραπλεύρου καὶ αἱ ἐξισώσεις τῶν πλευρῶν του.

**7.** Αἱ κορυφαὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τὰ σημεῖα (10, 8), (—3, 9), (—4, —4) καὶ (9, —5). Νὰ εὑρεθῇ τὸ εἶδος τοῦ τετροπλεύρου καὶ αἱ ἐξισώσεις τῶν διαγωνίων του καὶ τῶν πλευρῶν του.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΣ $\alpha x+\beta y=\gamma$.

**248. Θεώρημα.** ***Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι πᾶσα ἐξίσωσις τῆς μορφῆς*** $\alpha x+\beta y=\gamma$ (1), ***παριστᾷ εὐθεῖαν.***

***Ἀπόδειξις:*** Διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

1ον: Ἐὰν $\beta=0$, $\gamma=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\alpha x=0$, ἐξ οὗ: $x=0$. Ἡ ἐξίσωσις αὕτη παριστᾷ τὸν ἄξονα $y'y$.

2ον: Ἐὰν $\alpha=0$, $\gamma=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\beta y=0$, ἐξ οὗ: $y=0$. Αὕτη παριστᾷ τὸν ἄξονα $x'x$.

3ον: Ἐὰν $\beta=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\alpha x=\gamma$, ἐξ οὗ: $x=\dfrac{\gamma}{\alpha}$. Αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$.

4ον: Ἐὰν $\alpha=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\beta y=\gamma$, ἐξ οὗ: $y=\dfrac{\gamma}{\beta}$. Αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$.

5ον: Ἐὰν $\gamma=0$, τότε ἡ (1) γίνεται $\alpha x+\beta y=0$, ἐξ οὗ: $y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x$. Αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν, διερχομένην διὰ τῆς ἀρχῆς O τῶν συντεταγμένων καὶ ἔχει γωνιακὸν συντελεστὴν $-\dfrac{\alpha}{\beta}$.

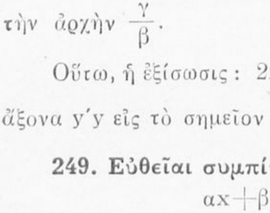
6ον: Ἐὰν $\alpha\beta\gamma\neq 0$, τότε ἡ (1) γράφεται: $y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x+\dfrac{\gamma}{\beta}$. Αὕτη παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν $y=-\dfrac{\alpha}{\beta}x$ καὶ μὲ τεταγμένην ἐπὶ τὴν ἀρχὴν $\dfrac{\gamma}{\beta}$.

Οὕτω, ἡ ἐξίσωσις: $2x+3y=1$, παριστᾷ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα $y'y$ εἰς τὸ σημεῖον $\dfrac{1}{3}$ καὶ ἔχει γωνιακὸν συντελεστὴν $-\dfrac{2}{3}$.

**249. Εὐθεῖαι συμπίπτουσαι.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰς δύο εὐθείας:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad Ax+By=\Gamma, \qquad (2)$$

καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι συμπίπτουν. Ἄρα θὰ ἔχουν τὰς αὐτὰς ὁμωνύμους συντεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχήν. Δηλαδή:



Σχ. 62.

$$\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\Gamma}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\beta}=\frac{\Gamma}{B}$$

ἢ

$$\frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\alpha}{A} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\gamma}{\Gamma}=\frac{\beta}{B},$$

ἐξ ὧν συνάγομεν ὅτι: $\dfrac{\alpha}{A}=\dfrac{\beta}{B}=\dfrac{\gamma}{\Gamma}$. (3)

Ἀντιστρόφως: Ἂν ἰσχύουν αἱ (3) καὶ κληθῇ $\lambda$ ἕκαστος τῶν ἴσων τούτως λόγων, θὰ ἔχωμεν: $\alpha=A\lambda$, $\beta=B\lambda$, $\gamma=\Gamma\lambda$, ὁπότε ἡ (1) γίνεται:

$$A\lambda x + B\lambda y = \Gamma\lambda \quad \text{ἢ} \quad Ax + By = \Gamma.$$

Δηλαδὴ ἡ (1) εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν (2). Ἄρα αἱ (1) καὶ (2) παριστάνουν τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων συνάγεται ὅτι :

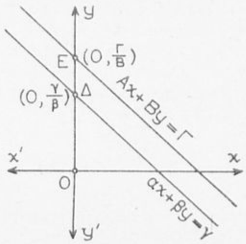
***Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $\alpha x + \beta y = \gamma$ καὶ $Ax + By = \Gamma$ συμπίπτουν, εἶναι :***

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} = \frac{\gamma}{\Gamma}.$$

**250. Εὐθεῖαι παράλληλοι.** Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι :

$$\alpha x + \beta y = \gamma \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad Ax + By = \Gamma. \qquad (2)$$

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι αὗται εἶναι παράλληλοι. Ἄρα θὰ τέμνουν τὸν ἄξονα y′y εἰς δύο διαφορετικὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, μὲ τεταγμένας ἐπὶ τὴν ἀρχὴν διαφόρους.



Σχ. 63.

Δηλαδή : $\dfrac{\gamma}{\beta} \neq \dfrac{\Gamma}{B}$ ἢ $\dfrac{\gamma}{\Gamma} \neq \dfrac{\beta}{B}$. (3)

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἕπεται ὅτι θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστήν. Δηλαδή :

$$-\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B}. \quad \text{Ὅθεν καὶ} \quad \frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} \neq \frac{\gamma}{\Gamma}. \qquad (4)$$

***Ἀντιστρόφως :*** Ἂν $\dfrac{\alpha}{A} = \dfrac{\beta}{B} \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{A}{B} \Rightarrow -\dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{A}{B}$.

Δηλαδὴ αἱ εὐθεῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστήν.

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\beta}{B} \neq \dfrac{\gamma}{\Gamma}$ ἢ $\dfrac{\Gamma}{B} \neq \dfrac{\gamma}{\beta}$, ἕπεται ὅτι τέμνουν τὸν ἄξονα y′y εἰς διαφορετικὰ σημεῖα. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

Θὰ εἶναι δὲ $\beta \neq 0$, διότι, ἐὰν εἶναι $\beta = 0$, τότε ἡ (1) θὰ παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y′y. Θὰ εἶναι δὲ καὶ $B = 0$, διότι, ἐὰν ἦτο $B \neq 0$, αἱ (1) καὶ (2) δὲν θὰ ἦσαν παράλληλοι.

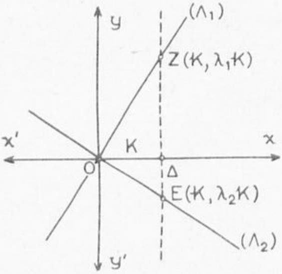
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ἡ πρότασις :

***Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $\alpha x + \beta y = \gamma$ καὶ $Ax + By = \Gamma$ εἶναι παράλληλοι, εἶναι :***

$$\frac{\alpha}{A} = \frac{\beta}{B} \neq \frac{\gamma}{\Gamma}.$$

**251. Εὐθεῖαι κάθετοι.** Ἂς θεωρήσωμεν δύο εὐθείας $(\Lambda_1)$ καὶ $(\Lambda_2)$ καθέτους εἰς τὸ σημεῖον Ο. Διὰ τοῦ Ο ἄγομεν δύο ἄξονας x′Ox καὶ y′Oy καθέτους καὶ μὴ συμπίπτοντας μὲ τὰς εὐθείας $(\Lambda_1)$ καὶ $(\Lambda_2)$.

Ἐὰν Δ εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἄξονος x′Ox, ὥστε $\overline{O\Delta} = k$, καὶ ἀχθῇ εὐθεῖα κάθετος, ἐπὶ τὸν ἄξονα $x'x$, τέμνουσα τὰς $(\Lambda_1)$ καὶ $(\Lambda_2)$ εἰς τὰ Z καὶ E ἀντιστοίχως, κληθῇ δὲ $\lambda_1$ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῆς $(\Lambda_1)$ καὶ $\lambda_2$ ὁ τῆς $(\Lambda_2)$, θὰ εἶναι ἀντιστοίχως:




Σχ. 64.

$$\lambda_1 = \frac{\overline{\Delta Z}}{\overline{O\Delta}} = \frac{\overline{\Delta Z}}{k},$$

ἐξ οὗ:
$$\overline{\Delta Z} = \lambda_1 k. \qquad (1)$$

καὶ
$$\lambda_2 = \frac{\overline{\Delta E}}{\overline{O\Delta}} = \frac{\overline{\Delta E}}{k},$$

ἐξ οὗ:
$$\overline{\Delta E} = \lambda_2 k. \qquad (2)$$

καὶ
$$\overline{EZ} = |\lambda_1 k - \lambda_2 k| = |\lambda_1 - \lambda_2|\,|k|. \qquad (3)$$

Ὥστε, αἱ συντεταγμέναι τῶν Z καὶ E εἶναι ἀντιστοίχως $(k, \lambda_1 k)$ καὶ $(k, \lambda_2 k)$. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\overline{OZ}^2 = k^2 + \lambda_1^2 k^2,\quad \overline{OE}^2 = k^2 + \lambda_2^2 k^2 \quad \text{καὶ} \quad \overline{EZ}^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 . k^2,$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον OEZ εἶναι ὀρθογώνιον, θὰ εἶναι:

$$\overline{OZ}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{EZ}^2 \quad \text{ἢ} \quad k^2 + \lambda_1^2 k^2 + k^2 + \lambda_2^2 k^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 k^2$$

ἐξ οὗ:
$$\lambda_1 \lambda_2 = -1. \qquad (4)$$

Ἀντιστρόφως, ἐὰν ἰσχύῃ ἡ (4), θὰ ἰσχύουν κατὰ σειρὰν αἱ:

$$-2\lambda_1\lambda_2 = 2 \quad \text{καὶ} \quad -2\lambda_1\lambda_2 k^2 = 2k^2 = k^2 + k^2.$$

Ἄρα καὶ αἱ: $(k^2 + \lambda_1^2 k^2) + (k_2^2 + \lambda_2^2 k^2) = \lambda_1^2 k^2 + \lambda_2^2 k^2 - 2\lambda_1\lambda_2 k^2 = (\lambda_1 - \lambda_2)^2 k^2$

ἢ
$$\overline{OZ}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{EZ}^2,$$

ἡ ὁποία σχέσις ἐκφράζει ὅτι αἱ εὐθεῖαι $O\Lambda_1$ καὶ $O\Lambda_2$ εἶναι κάθετοι.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγεται ἡ πρότασις:

***Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $(\Lambda_1)$ καὶ $(\Lambda_2)$ εἶναι κάθετοι, εἶναι τὸ γινόμενον τῶν γωνιακῶν συντελεστῶν αὐτῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ —1.***

Ἐὰν λοιπὸν $\lambda_1 = -\dfrac{\alpha}{\beta}$ καὶ $\lambda_2 = -\dfrac{A}{B}$ εἶναι ἀντιστοίχως ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς τῶν εὐθειῶν $\alpha x + \beta y = \gamma$ καὶ $Ax + By = \Gamma$, θὰ ἔχωμεν, ἂν αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι, ὅτι:

$$\lambda_1\lambda_2 = -1 \quad \text{ἢ} \quad -\frac{\alpha}{\beta}\cdot\left(-\frac{A}{B}\right) = -1, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boxed{\alpha A + \beta B = O}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **1ον: Ποία εἶναι ἡ θέσις τῶν εὐθειῶν:**

$$\mathbf{2x - 3y = 8 \quad \text{καὶ} \quad 10x - 15y = 40\,;}$$

***Λύσις:*** Ἐπειδή: $\dfrac{2}{10} = \dfrac{-3}{-15} = \dfrac{8}{40}$, αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν.

2ον: **Ποία εἶναι ἡ θέσις τῶν εὐθειῶν:**

$$\mathbf{5x + 8y = 7 \quad \text{καὶ} \quad 20x + 32y = 9\,;}$$

***Λύσις:*** Ἐπειδή: $\dfrac{5}{20} = \dfrac{8}{32} \neq \dfrac{7}{9}$, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

3ον: **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι:**

$$2x-3y+6=0 \quad \text{καὶ} \quad 3x+2y+24=0,$$

**εἶναι κάθετοι.**

*Ἀπόδειξις:* Ἐπειδή: $\alpha A+\beta B=2\cdot3+(-3)\cdot2=6-6=0$, αἱ εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ ὁ γωνιακὸς συντελεστὴς καὶ αἱ συντεταγμέναι ἐπὶ τὴν ἀρχὴν ἑκάστης τῶν εὐθειῶν.

| | | |
|---|---|---|
| $2x+y-6=0$ | $\frac{x}{5}-\frac{y}{6}-1=0$ | $5x-2y=7$ |
| $x-3y+8=0$ | $\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}y-\frac{7}{8}=0$ | $x+3y=0$ |
| $x+2y=0$ | | $-3x+9y=12$ |
| $5x-6y-5=0$ | | $2x-y-10=0$. |

**2.** Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀκόλουθοι εὐθεῖαι:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x-y+1=0$ | $x=3$ | $x-y=0$ | $x+y=0$ |
| $3x+4y+12=0$ | $x+5=0$ | $y-4=0$ | $3x-4y=12$ |
| $2x+5y-10=0$ | $y+2=0$ | $x-6=0$ | $5x-6y=30$. |

**3.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι: $2x-3y+4=0$, $3x-y-2=0$, $4x-6y-9=0$, $6x-2y+4=0$, εἶναι παραλληλόγραμμον.

**4.** Νὰ ὁρισθοῦν οἱ $\alpha$ καὶ $\beta$, ἵνα αἱ εὐθεῖαι $2\alpha+2y-5=0$, καὶ $4x-3y+7\beta=0$, συμπίπτουν.

**5.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (10,5), (−2,5), (−5, −3) καὶ (7, −3) εἶναι παραλληλόγραμμον.

**6.** Νὰ ἀποδείξητε ὅτι τὸ τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου κορυφαὶ εἶναι τὰ σημεῖα (8,0, (6,6), (−3,3) καὶ (−1, −3) εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐν συνεχείᾳ νὰ ἀποδείξητε λογιστικῶς ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

**7.** Νὰ ἀποδείξητε ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου, ὅπερ ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα (−3,9), (9, −5), (−4, −4) καὶ (10,8) εἶναι ἴσαι, καὶ τέμνονται δίχα καὶ καθέτως.

**8.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ διερχομένη διὰ τῶν σημείων (−3, −2) καὶ (9, y) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν διερχομένην διὰ τῶν σημείων (5, −3) καὶ (4, y).

**9.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (4,3) καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν σημείων (0,3) καὶ (6,1).

**10.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ σημείου (3, −2) καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν σημείων (−1, −3) καὶ (3,7).

**252. Ἕτερα παραδείγματα μὲ ἀπόλυτα εἰς τὸν ἄγνωστον:**

1ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $|x|=2$.**

*Λύσις:* Ἐκ τῆς $|x|=2$, ἕπεται $x^2=4$ ἢ $(x+2)(x-2)=0$.

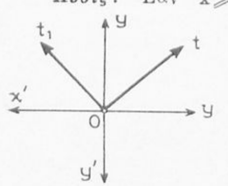
Ἄρα θὰ εἶναι $x=-2$ καὶ $x=2$, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$ καὶ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον. Ἡ κατασκευὴ τῶν εὐθειῶν $x=-2$ καὶ $x=2$ γίνεται κατὰ τὰ γνωστά.

2ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα: $|y|=3$.**

*Λύσις:* Ἐκ τῆς $|y|=3$, ἕπεται $y^2=9$, ἢ $(y+3)(y-3)=0$. Ἄρα θὰ εἶναι $y=-3$ καὶ $y=3$, αἱ ὁποῖαι παριστάνουν δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$ καὶ συμμετρικὰς ὡς πρὸς τὸν ἄξονα τοῦτον.
Ἡ κατασκευὴ τῶν εὐθειῶν $y=-3$ καὶ $y=3$ γίνεται κατὰ τὰ γνωστά.

3ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $y=|x|$.** (1)

*Λύσις:* Ἐὰν $x\geqslant 0$, τότε $|x|=x$ καὶ (1) γίνεται $y=x$, ἡ ὁποία παριστᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν Ot, διχοτόμον τῆς γωνίας xOy.




Σχ. 65.

Ἐὰν $x\leqslant 0$, τότε $|x|=-x$ καὶ (1) γίνεται: $y=-x$ καὶ παριστᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν $Ot_1$, διχοτόμον τῆς γωνίας x′Oy, καθόσον εἰς ἀμφοτέρας τὰς περιπτώσεις εἶναι $y\geqslant 0$. Εὐκόλως δὲ γίνεται ἡ κατασκευὴ αὐτῶν.

4ον: **Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $|x-2|=3$.**

*Λύσις:* Ἐκ τῆς $|x-2|=3$, ἕπεται $(x-2)^2=3^2=9$ ἢ $(x-2+3)(x-2-3)=0$ ἢ $(x+1)(x-5)=0$, ὁπότε θὰ εἶναι $x=-1$ καὶ $x=5$. Αἱ εὐθεῖαι αὗται κατασκευάζονται εὐκόλως.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ἀκόλουθοι εὐθεῖαι:

| | | |
|---|---|---|
| $\|x\|=3$ | $\|x-1\|=2$ | $\|x+4\|=2$ |
| $\|y\|=5$ | $\|x+2\|=5$ | $\|y+1\|=5$ |
| $\|x\|=0$ | $\|y-3\|=1$ | $\left\|x-\frac{1}{2}\right\|=2.$ |

**2.** Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι (ἢ τμήματα αὐτῶν):

| | | |
|---|---|---|
| $\|y\|=x$ | $y=\|x\|-3$ | $y=\|x-1\|-2$ |
| $y=2\|x\|$ | $y=\|x-1\|$ | $y=\|x+1\|+3$ |
| $y=\|x\|+2$ | $y=\|x+3\|$ | $y=\|x-1\|+\|x-2\|.$ |

**3.** Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι (ἢ τμήματα αὐτῶν):

$$y=|x-2|+|x-4|+|x-6|$$
$$y=x+|x-1|-2|x-3|+5|x-7|.$$

## 253. Γραφικὴ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος:

$$\alpha x+\beta y=\gamma \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad Ax+By=\Gamma. \qquad (2)$$

α′). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι (1) καὶ (2) τέμνωνται, αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς των $(x_0, y_0)$ θὰ ἐπαληθεύουν ἀμφοτέρας τὰς ἐξισώσεις (1) καὶ (2). Δηλαδή:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x_0+\beta y_0=\gamma\\ Ax_0+By_0=\Gamma\end{array}\right\}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x_0=\frac{\gamma B-\Gamma\beta}{\alpha B-A\beta} \quad \text{καὶ} \quad y_0=\frac{\alpha\Gamma-A\gamma}{\alpha B-A\beta}. \qquad (3)$$

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι τέμνονται, θὰ ἔχουν γωνιακοὺς συντελεστὰς διαφόρους. Δηλαδή, ἂν $\beta\neq 0$ καὶ $B\neq 0$, θὰ ἔχωμεν:

$$-\frac{\alpha}{\beta}\neq -\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}\neq \frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{A}\neq \frac{\beta}{B}.$$

β'). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, θὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν γωνιακὸν συντελεστήν. Δηλαδή:

$$-\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\alpha}{\beta}=\frac{A}{B} \quad \text{ἢ} \quad \alpha B=A\beta \quad \text{ἢ} \quad \alpha B-A\beta=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $\dfrac{\gamma}{\beta}\neq\dfrac{\Gamma}{B}$ ἢ $\gamma B\neq\Gamma\beta$ ἢ $\gamma B-\Gamma\beta\neq 0$, αἱ (3) εἶναι ἀδύνατοι.

Ἄρα δὲν ὑπάρχει σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν τούτων.

γ'). Ἐὰν αἱ (1) καὶ (2) ταυτίζωνται, τότε:

$\dfrac{\alpha}{A}=\dfrac{\beta}{B}=\dfrac{\gamma}{\Gamma}$, ἐξ ὧν: $\alpha B-A\beta=0$ καὶ $\gamma B-\Gamma\beta=0$, $\alpha\Gamma-A\gamma=0$

καὶ αἱ (3) γίνονται:

$$x_0=\frac{0}{0} \text{ ἀόριστον}, \qquad y_0=\frac{0}{0} \text{ ἀόριστον}.$$

Ἄρα αἱ συντεταγμέναι παντὸς σημείου τῆς (1) θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἐξίσωσιν (2) καὶ ἀντιστρόφως.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν εὐθειῶν:**

$$\mathbf{2x+y=1} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{3x-2y=12.} \qquad (2)$$

***Λύσις:*** Ἐπειδή: $\alpha B-A\beta=2(-2)-3\cdot 1=-4-3=-7\neq 0$, αἱ εὐθεῖαι τέμνονται: Αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου τῆς τομῆς αὐτῶν εἶναι αἱ ῥίζαι τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2). Δηλαδή:

$$x=2 \quad \text{καὶ} \quad y=-3.$$

2ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν εὐθειῶν:**

$$\mathbf{3x-4y=10} \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{6x-8y=20.} \qquad (2)$$

***Λύσις:*** Ἐπειδή: $\dfrac{3}{6}=\dfrac{-4}{-8}=\dfrac{10}{20}$, αἱ εὐθεῖαι συμπίπτουν.

3ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ θέσις τῶν εὐθειῶν:**

$$\mathbf{3x+4y=8} \quad \text{καὶ} \quad \mathbf{6x+8y=15.}$$

***Λύσις:*** Ἐπειδή: $\dfrac{3}{6}=\dfrac{4}{8}\neq\dfrac{8}{15}$, αἱ εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ζεύγη τῶν εὐθειῶν:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x+y=5$ | $x+y=1$ | $3x+6y=15$ | $7x-5y=8$ |
| $x-y=1$ | $2x-y=-4$ | $2x+5y=10$ | $x-y=10.$ |

**2.** Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι (ζεύγη) καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῆς τομῆς αὐτῶν:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $2x+3y-6=0$ | $x-y=1$ | $3x+y=2$ | $4x-5y+20=0$ |
| $4x+6y+9=0$ | $x+y=1$ | $6x+2y=4$ | $12x-15y+6=0.$ |

**3.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι: $2x-y+3=0$, $x+7y+9=0$ καὶ $11x+2y-51=0$, συνιστοῦν ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

**4.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι: $x-y+2=0$, $x+y-6=0$ καὶ $x-3y-6=0$, συνιστοῦν ὀρθογώνιον τρίγωνον.

**5.** Νὰ ὁρισθῇ ὁ γ, ἵνα αἱ εὐθεῖαι: $x-y+7=0$, $2x+y-1=0$ καὶ $3x+2y+\gamma=0$, διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

**6.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον, ὅπερ ἔχει πλευράς: $x-3y+13=0$, $7x-y+31=0$, $x-3y-7=0$ καὶ $x+y=11$ εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συντεταγμέναι τῶν κορυφῶν του, τῶν μέσων τῶν πλευρῶν του, αἱ ἐξισώσεις τῶν διαγωνίων του καὶ ἡ περίμετρός του.

**254. Γραφικὴ ἐπίλυσις γραμμικῶν ἀνισώσεων.** *Πρόβλημα 1ον. Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν* $y>x$. (1)


Σχ. 66.

*Λύσις:* Κατασκευάζομεν τὴν εὐθεῖαν $y=x$, ἡ ὁποία εἶναι ἡ διχοτόμος $tt_1$ τῆς γωνίας $xOy$. Ἡ $tt_1$ χωρίζει τὸ ἐπίπεδον τῶν ἀξόνων εἰς δύο μέρη, τὸ I καὶ τὸ II. Κάθε σημεῖον τοῦ ἡμιεπιπέδου I ἔχει συντεταγμένας, ἐπαληθευούσας τὴν (1).

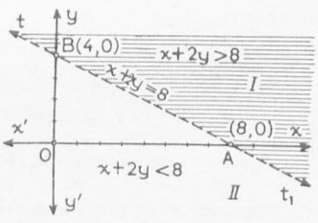
Δηλαδὴ ἔχει τεταγμένην μεγαλυτέραν τῆς τετμημένης, πλὴν τῶν σημείων τῆς $tt_1$, διὰ τὴν ὁποίαν $y=x$.

Ἄρα, κάθε σημεῖον τοῦ ἄλλου ἡμιεπιπέδου II ἔχει συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι θὰ ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν $y<x$, πλὴν τῶν σημείων τῆς $tt_1$. Διὰ τοῦτο ἡ $tt_1$ παρίσταται ὡς ἐστιγμένη εὐθεῖα.

2ον: **Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν τὴν ἀνίσωσιν:**

$$x+2y>8. \qquad (1)$$

*Λύσις:* Κατασκευάζομεν, κατὰ τὰ γνωστά, τὴν εὐθείαν $x+2y=8$ *. Τὸ γραμμωτὸν μέρος τοῦ ἡμιεπιπέδου I ἔχει σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνίσωσιν $x+2y>8$, ἐνῷ αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τοῦ ἡμιεπιπέδου II ἱκανοποιοῦν τὴν ἀνίσωσιν $x+2y<8$.




Σχ. 67.

Μόνον αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων τῆς $tt_1$ ἱκανοποιοῦν τὴν ἐξίσωσιν:

$$x+2y=8.$$

3ον: **Νὰ εὑρεθῇ τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι τῶν σημείων του ἱκανοποιοῦν συγχρόνως τὰς ἀνισώσεις:**

$$x+2y>8 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad x-y>2 \qquad (2)$$

*Λύσις:* Κατασκευάζομεν, κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον, τὰς εὐθείας:

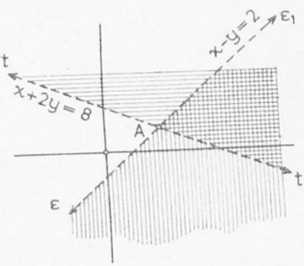
$$x+2y=8 \quad \text{καὶ} \quad x-y=2.$$

---

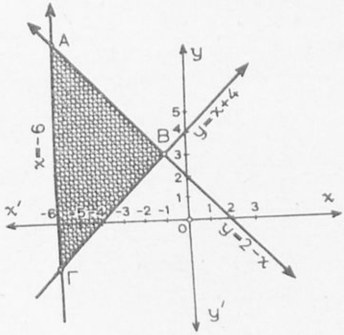
* Εἰς τὸ σχῆμα ἀντὶ B(4,0) νὰ γράψητε B(0,4).

Τὰ σημεῖα τῆς γωνίας $\varepsilon_1 A t_1$, πλὴν τῶν σημείων τῶν πλευρῶν της $A\varepsilon_1$ καὶ $At_1$, ἔχουν συντεταγμένας, αἱ ὁποῖαι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς ἀνισώσεις (1) καὶ (2).

4ον: **Νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἱκανοποιοῦν συγχρόνως τὰς σχέσεις: $y \geqslant x+4$ (1), $y \leqslant 2-x$ καὶ $x \geqslant -6$.**




Σχ. 68.




Σχ. 69.

*Λύσις:* Κατασκευάζομεν, κατὰ τὸν γνωστὸν τρόπον, τὰς εὐθείας $y=x+4$, $x=-6$ καὶ $y=2-x$ καὶ εὑρίσκομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ συντεταγμέναι ὅλων τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου του, μετὰ τῶν σημείων τῆς περιμέτρου του, ἱκανοποιοῦν τὰς τρεῖς δοθείας σχέσεις.

5ον: **Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπίλυσις τοῦ συστήματος: $|x|+|y| \leqslant 4$ (1) καὶ $|y| \geqslant 2$. (2)**

*Λύσις:* Διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις:

α'). Διὰ $x>0$, $y>0$, αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$x+y \leqslant 4$ καὶ $y \geqslant 2$.

Τοῦτο λύεται κατὰ τὰ γνωστά.

β'). Ἐὰν $x<0$, $y<0$, αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$-x-y \leqslant 4$ καὶ $-y \geqslant 2$

ἢ $x+y \geqslant -4$ καὶ $y \leqslant -2$

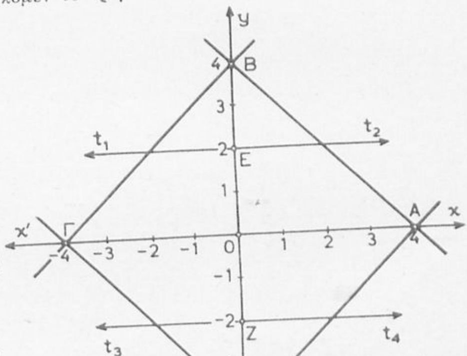
γ'). Ἐὰν $x>0$, $y<0$, αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$x-y \leqslant 4$ καὶ $-y \geqslant 2$ ἢ $x-y \leqslant 4$ καὶ $y \leqslant -2$.

δ'). Ἐὰν $x<0$ καὶ $y>0$, αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$-x+y \leqslant 4$ καὶ $y \geqslant 2$ ἢ $x-y \geqslant -4$ καὶ $y \geqslant 2$.

ε'). Διὰ $x=0$ καὶ $y=0$ ἡ (2) εἶναι ἀδύνατος.




Σχ. 70.

Εἰς ἑκάστην περίπτωσιν χρωματίσατε τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι λύσις τοῦ συστήματος τῶν (1) καὶ (2) καὶ συμπληρώσατε τὸ σχῆμα 70.

στ΄) Διὰ $x=0$, αἱ (1) καὶ (2) γίνονται:

$$|y|\leqslant 4 \quad \text{καὶ} \quad |y|\geqslant 2,$$

ἐξ ὧν λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$-4\leqslant y\leqslant 4 \quad \text{καὶ} \quad y\leqslant -2, \quad y\geqslant 2,$$

αἱ ὁποῖαι συναληθεύουν διά: $-4\leqslant y\leqslant -2$ καὶ $2\leqslant y\leqslant 4$

Συμπληρώσατε ἐνταῦθα τὸ σχῆμα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπίλυσις ἑκάστης τῶν ἀνισώσεων:

1. $x+2y>3$, $\quad 3x+4y<3$, $\quad 2x-y>2$, $\quad y-1<1$.
2. $|x|\geqslant 2$. $\quad |x|\geqslant 1$, $\quad |x|<7$, $\quad |x|\leqslant 10$.

**2.** Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπίλυσις ἑκάστου τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

1. $\begin{cases} x+y>5 \\ x-y>3 \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} 2x-y=7 \\ x+3\geqslant 7 \end{cases}$ $\quad$ 3. $\begin{cases} x+3y>4 \\ x-2y<7 \end{cases}$

**3.** Νὰ γίνῃ γραφικὴ ἐπίλυσις τῶν ἀκολούθων συστημάτων:

1. $\begin{cases} y\leqslant x-2 \\ y\leqslant 8-x \\ y\geqslant -2 \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} |x|+|y|\leqslant 6 \\ |x|\geqslant 2 \end{cases}$ $\quad$ 3. $\begin{cases} |x|>|y| \\ |y|>1 \end{cases}$

4. $\begin{cases} |x|+|y|\geqslant 1 \\ |x|+|y|=1 \end{cases}$ $\quad$ 5. $\begin{cases} y>|x| \\ y>x+2 \end{cases}$ $\quad$ 6. $\begin{cases} y=|x| \\ |x+1|<y \end{cases}$

7. $\begin{cases} |x+1|>|y+1| \\ |x|>3 \end{cases}$ $\quad$ 8. $\begin{cases} |x+3|>y \\ |y+1|<x \end{cases}$ $\quad$ 9. $\begin{cases} |x|=|y| \\ |x|<2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} |x|=|y| \\ |x|<2 \end{cases}$ $\quad$ 11. $\begin{cases} |y|\geqslant 4 \\ |x|\geqslant 4 \end{cases}$ $\quad$ 12. $\begin{cases} |x+y|=0 \\ |y|\leqslant 2 \end{cases}$

**4.** Νὰ ἐπιλυθοῦν γραφικῶς τὰ ἀκόλουθα συστήματα:

1. $\begin{cases} -1\leqslant x \\ 0\leqslant y \\ 5x+4y\leqslant 20 \end{cases}$ $\quad$ 2. $\begin{cases} x+2y\leqslant 12 \\ -6\leqslant 2x-3y \\ -2\leqslant x+y \\ 2x-y\leqslant 10 \end{cases}$ $\quad$ 3. $\begin{cases} 3x+y\leqslant 12 \\ -6\leqslant 3x-2y \\ 2\leqslant x+y \\ x-2y\leqslant 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} -3\leqslant x\leqslant 3 \\ -3\leqslant y\leqslant 3 \end{cases}$ $\quad$ 5. $\begin{cases} 2\leqslant y\leqslant 8 \\ 2\leqslant x\leqslant 8 \end{cases}$ $\quad$ 6. $\begin{cases} 0\leqslant x\ , \quad y\leqslant 25 \\ x\leqslant 30, \quad x+y\leqslant 30 \\ 0\leqslant y\ , \quad 10\leqslant x+y \end{cases}$

**5.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων $M(x,y)$ τοῦ ἐπιπέδου, τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουν συγχρόνως τὰς ἀνισώσεις:

$$(x^2+y^2+2xy-1)(x^2+y^2+2xy-4)\leqslant 0 \qquad (1)$$
$$(x^2+y^2-2xy-1)(x^2+y^2-2xy-4)\leqslant 0 \qquad (2)$$

**6.** Νὰ γίνῃ γραφικὴ παράστασις τῆς συναρτήσεως:

$$y=(x-2)+\frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$$

**7.** Ὁμοίως τῶν συναρτήσεων:

$$y_1=\big|\,|\alpha|-|\alpha x|\,\big| \quad \text{καὶ} \quad y_2=|\alpha-\alpha x|$$

**8.** Νὰ ἐπιλυθῇ καὶ νὰ διερευνηθῇ γραφικῶς ἡ ἀνίσωσις:

$$\big|\,|x|-1\big|<|x-\lambda|.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

# ΟΙ ΑΡΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

### ΟΡΙΣΜΟΙ – ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**255. Τετράγωνον ἀκεραίου.** Ἔστω ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς 5. Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι τὸ γινόμενον τούτου ἐπὶ τὸν ἑαυτόν του.

Δηλαδή: $5^2=5\cdot5=25.$

Ὁμοίως: $7^2=7\cdot7=49$ καὶ $15^2=15\cdot15=225.$

Ἔστω ὁ ῥητὸς θετικὸς ἀριθμὸς $\frac{3}{4}$. Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{16}.$$

Γενικῶς: Ἐὰν $\nu\in P^+$, θὰ εἶναι: $\nu^2=\nu\cdot\nu.$

**256. Ὁρισμός.** ***Ὀνομάζομεν τετράγωνον ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸ γινό- δύο παραγόντων ἴσων πρὸς τὸν ἀριθμὸν αὐτόν.***

Δηλαδή: $4^2=4\cdot4=16,\quad (2{,}5)^2=2{,}5\cdot2{,}5=6{,}25.$

$$\left(\frac{3}{7}\right)^2=\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{7}=\frac{9}{49},\qquad (6{,}18)^2=6{,}18\cdot6{,}18=38{,}1924.$$

**257. Τετράγωνον γινομένου.** Γνωρίζομεν ὅτι:

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)^2=(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)\cdot(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta)=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\delta$$
$$=(\alpha\cdot\alpha)\cdot(\beta\cdot\beta)\cdot(\gamma\cdot\gamma)\cdot(\delta\cdot\delta)=\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2\cdot\delta^2$$

ἢ
$$(\alpha\beta\gamma\delta)^2=\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2.$$

Ὥστε: ***Τὸ τετράγωνον γινομένου ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῶν τετραγώνων τῶν παραγόντων.***

**258. Διαφορὰ τετραγώνων δύο διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.** Γνωρίζομεν ὅτι:

$$(\nu+1)^2=\nu^2+2\nu+1,$$

ἐξ οὗ:
$$(\nu+1)^2-\nu^2=2\nu+1=\nu+(\nu+1),$$

ἤτοι:
$$(\nu+1)^2-\nu^2=\nu+(\nu+1)$$

Ὥστε: ***Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τούτων.***

Οὕτω: $26^2-25^2=25+26=51.$

**259. Τέλειον τετράγωνον.** ***Θὰ λέγωμεν ὅτι ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, ὅταν εἶναι τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἄλλου φυσικοῦ ἀριθμοῦ.***

Οὕτω, οἱ ἀριθμοὶ 16, 25, 64, 100 εἶναι τέλεια τετράγωνα. Διότι ἔχομεν ἀντιστοίχως: $16=4^2=4\cdot4$, $25=5^2=5\cdot5$, $64=8^2=8\cdot8$, $100=10^2=10\cdot10$.

Εἶναι δὲ εὔκολον νὰ ἀναγνωρίσωμεν, ἂν ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον ἢ ὄχι:

Ἔστω ὁ ἀριθμός: $\alpha=2^3\cdot3^2\cdot7$.

Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ εἶναι: $\alpha^2=(2^3\cdot3^2\cdot7)^2=2^6\cdot3^4\cdot7^2$.

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ πρῶτοι παράγοντες τοῦ $\alpha^2$ εἶναι οἱ αὐτοὶ μὲ τοὺς τοῦ α, ἀλλὰ μὲ διπλάσιον ἐκθέτην. Ἄρα, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται οὗτος, εἶναι ὅλοι ἄρτιοι ἀριθμοί. Ἀντιστρόφως:

Ἔστω ὁ ἀριθμός: $\beta=2^6\cdot5^4\cdot7^2\cdot11^8$.

Εἶναι τέλειον τετράγωνον; Ἐὰν κληθῇ γ ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τοῦ γινομένου $2^6\cdot5^4\cdot7^2\cdot11^8$, ὅταν αἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων διαιρεθοῦν διὰ τοῦ 2, δηλαδή:

$$\gamma=2^3\cdot5^2\cdot7\cdot11^4,$$

τότε θὰ ἔχωμεν: $\gamma^2=\beta$.

Ὥστε: ***Ἕνας ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἂν καὶ μόνον ἄν, οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων, εἰς τοὺς ὁποίους ἀναλύεται εἶναι διαιρετοὶ διὰ 2.***

Ἕνας δὲ ρητὸς ἀριθμὸς εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἐὰν οἱ ὅροι του εἶναι τέλεια τετράγωνα.

Οὕτω, ὁ ρητὸς $\frac{25}{64}=\frac{5^2}{8^2}=\left(\frac{5}{8}\right)^2$, εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἀλλὰ καὶ ὁ $\frac{18}{32}=\frac{9}{16}=\frac{3^2}{4^2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ὁ ρητὸς $\frac{36}{15}=\frac{6^2}{15}$, δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

**260. Τετράγωνον ἀριθμοῦ λήγοντος εἰς μηδενικά.** 1ον: Ἔστω ὁ ἀριθμός: $A=\alpha\cdot10^\nu$ : Τὸ τετράγωνον αὐτοῦ θὰ εἶναι:

$$A^2=(\alpha\cdot10^\nu)^2=\alpha^2\cdot10^{2\nu}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν ἕνας ἀριθμὸς Α λήγῃ εἰς ν μηδενικά, τότε τὸ τετράγωνόν του λήγῃ εἰς 2ν μηδενικά.

Οὕτω: Ἐὰν $A=80=8\cdot10$, τότε $A^2=8^2\cdot10^2=64\cdot100=6400$.

Ἐὰν $A=700=7\cdot100$, τότε $A^2=7^2\cdot100^2=490000$.

2ον: Οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοὶ Α εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε:

$$1\leqslant A<10 \Rightarrow 1^2\leqslant A^2\leqslant 10^2 \Rightarrow 1\leqslant A^2<100$$

Δηλαδή, τὸ τετράγωνον ἑνὸς μονοψηφίου ἀριθμοῦ θὰ ἔχῃ ἕνα ἢ δύο ψηφία.

Οἱ διψήφιοι ἀριθμοὶ Α εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε:

$$10\leqslant A<100 \Rightarrow 100\leqslant A^2<10000,$$

δηλαδή, τὸ τετράγωνον διψηφίου ἀριθμοῦ θὰ ἔχῃ τρία ἢ τέσσαρα ψηφία.

Γενικῶς, ἐὰν $10^{\nu-1} \leqslant A < 10^{\nu} \Rightarrow 10^{2\nu-2} \leqslant A^2 < 10^{2\nu}$,

δηλαδή, τὸ τετράγωνον ἑνὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ μὲ ν ψηφία, θὰ ἔχῃ $(2\nu-1)$ ψηφία ἢ $2\nu$ ψηφία.

**261. Τετράγωνον ἀναγώγου κλάσματος.**

Ἔστω τὸ ἀνάγωγον κλάσμα:

$$k = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow k^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}.$$

Εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι καὶ τὸ $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ εἶναι **ἀνάγωγον.**

Οὕτω, ἐὰν $k = \frac{3}{5}$, τότε $k^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ = ἀνάγωγον,

ἐὰν $k = \frac{17}{10}$, τότε $k^2 = \left(\frac{17}{10}\right)^2 = \frac{289}{100}$ = ἀνάγωγον.

**262. Τετράγωνον δεκαδικοῦ.** Ἔστω τὸ δεκαδικὸν κλάσμα: $A = \frac{\alpha}{10^{\nu}}$, ἔνθα α εἶναι ἀκέραιος μὴ λήγων εἰς μηδέν. Τότε θὰ εἶναι:

$$A^2 = \left(\frac{\alpha}{10^{\nu}}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{10^{2\nu}}.$$

Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι τὸ τετράγωνον τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ Α ἔχει $2\nu$ δεκαδικὰ ψηφία.

Οὕτω, ἐὰν $A = 3,14 = \frac{314}{10^2}$, τότε: $A^2 = (3,14)^2 = \frac{314^2}{10^4} = \frac{98596}{10000} = 9,8596$.

**263. Ἀκεραία νυοστὴ δύναμις.** Ἔστω $\nu \geqslant 2$ ἕνας φυσικὸς ἀριθμὸς καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τὴν ν δύναμιν νὰ δίδῃ τὸν φυσικὸν ἀριθμὸν α.

Ἂς ὑποθέσωμεν δὲ ὅτι ὑπάρχει τὸ ***ἀνάγωγον κλάσμα*** $\frac{\mu}{\varrho}$, ἔνθα $\varrho > 1$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)^{\nu} = \alpha \qquad (\text{ἔνθα } \varrho > 1). \qquad (1)$$

Ἐκ τῆς (1) ἔπεται ὅτι: $\mu^{\nu} = \alpha\varrho^{\nu}$ (2). Ἡ (2) δεικνύει ὅτι ὁ ϱ διαιρεῖ τὸν ἀριθμὸν $\mu^{\nu}$. Δηλαδὴ ὁ μ.κ.δ. τῶν ϱ καὶ $\mu^{\nu}$ εἶναι ὁ ϱ. Ἐπειδὴ ὅμως οἱ ϱ καὶ $\varrho^{\nu}$ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους, ἔπεται ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν ϱ καὶ $\varrho^{\nu}$ εἶναι ἡ μονὰς 1 καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\varrho = 1$, ὅπερ ἄτοπον, καθόσον ὑπετέθη $\varrho > 1$. Ἄρα ἡ ἰσότης (1) δὲν εἶναι ἀληθής.

**264. Τετραγωνικὴ ῥίζα φυσικοῦ ἀριθμοῦ.** Δοθέντος ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ β, γνωρίζομεν νὰ εὑρίσκωμεν τὸ τετράγωνόν του. Ἀντιστρόφως:

***Δοθέντος ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ α, ὑπάρχει φυσικὸς ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε:*** $x^2 = \alpha$;

Ἐὰν ὑπάρχῃ ὁ ἀριθμὸς x, θὰ εἶναι ὁ μοναδικὸς καί, ἐξ ὁρισμοῦ, θὰ ὀνομάζεται ***τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ α*** καὶ θὰ σημειώνεται $\sqrt{\alpha}$.

Ἡ ἰσότης $3^2=9$, δεικνύει ὅτι ὁ 3 εἶναι ἕνας ἀριθμός, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι ὁ 9. Ὁ 3 λέγεται τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 9 καὶ θὰ γράφωμεν:

$$3=\sqrt{9}.$$

Ὁμοίως:

$$2^2=4 \Longrightarrow 2=\sqrt{4}$$
$$7^2=49 \Longrightarrow 7=\sqrt{49}$$
$$(2,4)^2=5,76 \Longrightarrow 2,4=\sqrt{5,76}$$

$$(0,36)^2=0,1296 \Longrightarrow 0,36=\sqrt{0,1296}$$
$$\left(\frac{4}{9}\right)^2=\frac{16}{81} \Longrightarrow \frac{4}{9}=\sqrt{\frac{16}{81}}.$$

καὶ γενικῶς, ἂν $x^2=\alpha \Longrightarrow x=\sqrt{\alpha}$, $x, \alpha \in \Phi$.

Ὥστε: ***Τετραγωνικὴ ῥίζα (ἀκριβὴς) ἑνὸς φυσικοῦ ἀριθμοῦ α καλεῖται ὁ ἀριθμὸς x, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον ἰσοῦται πρὸς τὸν α.***

Τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ ὀνομάζεται ***ῥιζικόν.*** Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι γραμμένος ὑπὸ τὸ ῥιζικὸν ὀνομάζεται ***ὑπόρριζον.***

## ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΚΑΤΑ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΙΝ ΜΟΝΑΔΟΣ

**265. Ἀκέραιοι ἀριθμοὶ μὴ τέλεια τετράγωνα.** Ἐὰν γράψωμεν κατὰ σειρὰν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12,... \quad (1)$$

καὶ τὰ τετράγωνα αὐτῶν, ἀντιστοίχως, εἰς μίαν σειράν:

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144,... \quad (2)$$

παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀκολουθία τῶν τετραγώνων δὲν συμπίπτει μὲ τὴν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω, ὁ ἀριθμὸς 23 δὲν ὑπάρχει εἰς τὴν ἀκολουθίαν (2), ἀλλὰ εὑρίσκεται μεταξὺ τῶν 16 καὶ 25.

Δηλαδή: $16<23<25$ ἢ $4^2<23<5^2$.

Θὰ λέγωμεν λοιπὸν ὅτι: ***ὁ 4 εἶναι τετραγωνικὴ ῥίζα κατὰ προσέγγισιν μονάδος*** τοῦ ἀριθμοῦ 23, ἢ ἀκόμη ὅτι, ***ὁ 4 εἶναι ἡ ἀκεραία ῥίζα τοῦ 23.***

Ἐὰν λοιπὸν ἕνας ἀριθμὸς Ν δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, θὰ περιέχεται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν τελείων τετραγώνων. Ὁ πρῶτος θὰ εἶναι ὁ $\nu^2$, τέλειον τετράγωνον τοῦ ν, καὶ ὁ ἄλλος θὰ εἶναι ὁ $(\nu+1)^2$, τέλειον τετράγωνον τοῦ $\nu+1$. Θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

$$\nu^2<N<(\nu+1)^2 \quad \text{ἢ} \quad \nu^2\leqslant N<(\nu+1)^2.$$

Τὸ = ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ Ν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἐὰν ὑπάρχῃ ἀκέραιος φυσικὸς x τοιοῦτος, ὥστε:

$$x^2\leqslant\alpha<(x+1)^2,$$

ἔνθα $\alpha \in \Phi$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι: ***ὁ x εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α.***

Δηλαδή, ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον δὲν ὑπερβαίνει τὸν α.

Οὕτω: $\sqrt{84}=9$, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, διότι: $9^2<84<10^2$.

Ὁμοίως: $\sqrt{9409}=97$, διότι: $97^2=9409$

καί: $\sqrt{4500}=67$, κατὰ προσέγγισιν μονάδος, διότι: $67^2<4500<68^2$.

Ὥστε: ***Θὰ καλοῦμεν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ ἀκεραίαν ρίζαν ἑνὸς ἀκεραίου φυσικοῦ $N$, τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον $\nu$, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι ἴσον ἢ μικρότερον τοῦ ἀριθμοῦ $N$.***

Ἐπειδή: $375^2=140625 \Longrightarrow \sqrt{140625}=375$

Ἄρα: $\sqrt{1406,25}=37,5$ καὶ $\sqrt{14,0625}=3,75$

Ἀλλά: $43^2<1853,27<44^2$

Ἄρα, ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ 1853,27 εἶναι ὁ ἀριθμὸς 43. Δηλαδή, ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους 1853 τοῦ δεκαδικοῦ 1853,27.

Γενικῶς: Ἔστω $N$ τυχὼν φυσικὸς ἀριθμός, μὴ ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ ἀκέραιον μέρος ἂς εἶναι $E$ ($E$ δύναται νὰ εἶναι καὶ 0). Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$N=E+\alpha. \quad \text{ὅπου} \quad \alpha<1.$$

Ἐὰν $\varepsilon$ εἶναι ἡ ἀκεραία ρίζα τοῦ $E$, θὰ ἔχωμεν:

$$\varepsilon^2\leqslant E<(\varepsilon+1)^2 \qquad (1)$$

Οἱ ἀριθμοὶ $E$ καὶ $(\varepsilon+1)^2$ διαφέρουν τοὐλάχιστον κατὰ μίαν μονάδα. Ἐὰν λοιπὸν προσθέσωμεν εἰς τὸν $E$ τὸν ἀριθμὸν $\alpha<1$, ὁ ὁριθμὸς $E+\alpha$ θὰ εἶναι μικρότερος τοῦ $(\varepsilon+1)^2$. Δηλαδή:

$$\varepsilon^2<E+\alpha<(\varepsilon+1)^2 \quad \text{ἢ} \quad \varepsilon^2<N<(\varepsilon+1)^2.$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ὁ ἀκέραιος $\varepsilon$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον τοῦ $N$.

Κατ᾽ ἀκολουθίαν: ***Θὰ καλοῦμεν τετραγωνικὴν ρίζαν κατὰ προσέγγισιν μονάδος ἢ ἀκεραίαν τετραγωνικὴν ρίζαν ἑνὸς θετικοῦ ἀριθμοῦ $N$ (ἀκεραίου ἢ δεκαδικοῦ), τὸν μεγαλύτερον ἀκέραιον φυσικὸν ἀριθμὸν $\nu$, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον τοῦ $N$.***

***Ἡ δὲ ἀκεραία τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἡ ἀκεραία ρίζα τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ.***

**266. Ὑπόλοιπον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.** Εἴδομεν ὅτι ἡ διπλῆ ἀνισότης:

$$\nu^2\leqslant N<(\nu+1)^2, \qquad (1)$$

ὁρίζει τὴν ἀκεραίαν ρίζαν $\nu$ τοῦ ἀκεραίου $N$.

Δυνάμεθα νὰ θέσωμεν: $N=\nu^2+\upsilon$. Ὁ ἀριθμὸς $\upsilon$ θὰ καλῆται ***ὑπόλοιπον*** τῆς τετραγωνικῆς ρίζης.

Θὰ εἶναι δὲ $\upsilon=0$, ἐὰν $N=\nu^2$. Εἶναι, δηλαδή, τότε ὁ $N$ τέλειον τετράγωνον:

Οὕτω, ἡ ἀκεραία ρίζα τοῦ 85 εἶναι ὁ 9. Τὸ ὑπόλοιπον $\upsilon$ εἶναι:

$$\upsilon=85-9^2=85-81=4.$$

Ἡ ἀκεραία ρίζα τοῦ 64 εἶναι ὁ 8. Ἄρα τὸ ὑπόλοιπον:

$$υ=64-8^2=64-64=0.$$

Ἐπειδὴ ἐθέσαμεν $N=ν^2+υ$, ἡ διπλῆ ἀνισότης (1) δίδει:

$$ν^2+υ<(ν+1)^2=ν^2+2ν+1, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boldsymbol{υ<2ν+1,} \qquad (2)$$

δηλαδή, τὸ ὑπόλοιπον ***δὲν ὑπερβαίνει τὸ διπλάσιον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης***.

Ἀντιστρόφως, ἐὰν $N=ν^2+υ$, μὲ $υ<2ν+1$, ἕπεται ὅτι:

$$ν^2\leqslant N<ν^2+2ν+1, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad ν^2\leqslant N<(ν+1)^2.$$

Ἄρα, ὁ $ν$ εἶναι ἡ ἀκεραία ρίζα τοῦ $N$.

Ὥστε: ***Τὸ ὑπόλοιπον τῆς ἀκεραίας ρίζης ν ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀκεραίου N εἶναι μικρότερον τοῦ 2ν+1.***

Ἡ ἀνισότης (2) δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ ὑπὸ τῆς: $\boldsymbol{υ\leqslant 2ν}$. (3)

Οὕτω: $$97=81+16=9^2+16.$$

Ἐπειδὴ $16<2\cdot 9+1$ $(16<2ν)$, ἕπεται ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 97 εἶναι ὁ 9 καὶ τὸ ὑπόλοιπον $υ=16$.

Ἐπειδὴ δὲ $146=121+25=11^2+25$ καὶ $25>2\cdot 11$ $(25>2ν)$, ἕπεται ὅτι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 146 δὲν εἶναι ὁ 11, ἀλλὰ ὁ 12. Διότι:

$$146=144+2=12^2+2 \quad \text{καὶ} \quad 2<2\cdot 12+1.$$

Ἡ πρακτικὴ εὕρεσις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ εἶναι γνωστὴ ἐκ τῶν τάξεων τοῦ Γυμνασίου καὶ διὰ τοῦτο τὴν παραλείπομεν.

***Σημ:*** Ἐὰν $x^2<α$, τότε ὁ $x$ εἶναι μία ***κατ' ἔλλειψιν*** προσέγγισις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ $α$. Ἐὰν ὅμως $ω^2>α$, τότε ὁ $ω$ εἶναι μία ***καθ' ὑπεροχὴν*** προσέγγισις τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ $α$.

Ἐκ δὲ τῶν ἀνισοτήτων:

$$x^2\leqslant α<(x+1)^2$$

φαίνεται ὅτι ὁ $x$ εἶναι ἡ ἀκριβὴς ἢ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ***κατ' ἔλλειψιν*** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $α$, ὁ δὲ $x+1$ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος καὶ ***καθ' ὑπεροχὴν*** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $α$.

Ὅταν λέγωμεν κατὰ προσέγγισιν, θὰ ἐννοοῦμεν καὶ τὴν ***κατ' ἔλλειψιν*** καὶ τὴν ***καθ' ὑπεροχήν.***

**267. Τετραγωνικὴ ρίζα κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ,..**

α΄). Ἂς λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{α}{10}$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι:

$$\left(\frac{α}{10}\right)^2\leqslant N<\left(\frac{α+1}{10}\right)^2, \qquad (1)$$

τότε θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{α}{10}$ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ $N$.

Ἡ (1) γράφεται: $\alpha^2 \leqslant 100N < (\alpha+1)^2$ (2)

καὶ δεικνύει ὅτι ὁ α εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 100 N.

Ἐὰν εὑρεθῇ ὁ α, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ὁ $\frac{\alpha}{10}$.

β'). Ἄς λάβωμεν τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{100}$ καὶ ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι:

$$\left(\frac{\alpha}{100}\right)^2 \leqslant N < \left(\frac{\alpha+1}{100}\right)^2 \quad (3)$$

θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ $\frac{\alpha}{100}$ εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ ἀριθμοῦ N.

Ἐπειδὴ ἡ (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\alpha^2 \leqslant 10000N < (\alpha+1)^2, \quad (4)$$

θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ α εἶναι ἡ ἀκεραία ῥίζα τοῦ 10000 N.

Ἐὰν εὑρεθῇ ὁ α, εὑρίσκεται ἀμέσως καὶ ὁ $\frac{\alpha}{100}$.

Οὕτω, ἐὰν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν τετραγωνικὴν ῥίζαν τοῦ ἀριθμοῦ N=3,1415926 κατὰ προσέγγισιν 0,1, γράφομεν:

$$100N = 314{,}15926,$$

ὁπότε: $\sqrt{100N} = \sqrt{314{,}15926} = 17$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος.

Ἄρα: $\sqrt{N} = \sqrt{3{,}1415926} = 17 : 10 = 1{,}7$ κατὰ προσέγγισιν 0,1.

Ὁμοίως, ἡ τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ 35 κατὰ προσέγγισιν 0,01, εὑρίσκεται, ἐὰν γράψωμεν:

$$35 \cdot 100^2 = 35 \cdot 10000 = 350000$$

καὶ $\sqrt{350000} = 591$ κατὰ προσέγγισιν μονάδος. Ἄρα:

$\sqrt{35} = 591 : 100 = 5{,}91$ κατὰ προσέγγισιν 0,01.

Γενικῶς, κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10^\nu}$ τετραγωνικὴ ῥίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ N εἶναι ἕνα ἀριθμητικὸν κλάσμα $\frac{\alpha}{10^\nu}$ τοιοῦτον, ὥστε:

$$\left(\frac{\alpha}{10^\nu}\right)^2 \leqslant N < \left(\frac{\alpha+1}{10^\nu}\right)^2, \text{ ἐξ οὗ: } \alpha^2 \leqslant N\cdot 10^{2\nu} < (\alpha+1)^2$$

ἔνθα α εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος τετραγωνικὴ ῥίζα τοῦ $N\cdot 10^{2\nu}$.

Ἐὰν ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, εὑρίσκομεν ὅτι αἱ τετραγωνικαὶ ῥίζαι τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 | |
| εἶναι: | 1 | 1,4 | 1,41 | 1,414 | 1,4142 | 1,41421 | (5) |

καὶ αἱ τετραγωνικαὶ ρίζαι τοῦ 2 κατὰ προσέγγισιν :

1 0,1 0,01 0,001 0,0001 0,00001

καὶ ***καθ' ὑπεροχὴν*** εἶναι ἀντιστοίχως :

1 1,5 1,42 1,415 1,4143 1,41422 (6)

Αἱ ἀκολουθίαι (5) καὶ (6) δύνανται νὰ συνεχισθοῦν ἐπ' ἄπειρον.

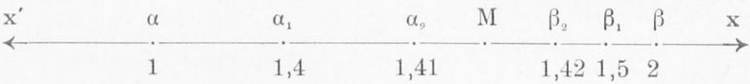
Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι αἱ διαφοραὶ τῶν ἀντιστοίχων ὅρων των εἶναι :

0 0,1 0,01 0,001 0,0001 0,00001

καὶ βαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμεναι, καθιστάμεναι τόσον μικραί, ὥστε, ἂν προχωρήσωμεν ὑπὲρ ἀρκετὰ νὰ καταστοῦν ἴσαι πρακτικῶς οἱ ἀντίστοιχοι ὅροι τῶν (5) καὶ (6).

Τὰ τετράγωνα ἑκάστου τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (5) εἶναι μικρότερα τοῦ 2, τὰ δὲ τῶν τῆς (6) εἶναι μεγαλύτερα τοῦ 2.

Ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος x΄x τοποθετοῦμεν τὰ σημεῖα $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$,...




τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί :

1, 1,4 1,41 ...

καὶ τὰ σημεῖα $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$,...,τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί : 2, 1,5 1,42 ...

καὶ ἀναζητοῦμεν ἕνα σημεῖον Μ τοῦ ἄξονος x΄x τοιοῦτον, ὥστε νὰ ἔχῃ ἀριστερά του τὰ σημεῖα $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$,..., καὶ δεξιά του τὰ σημεῖα $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$,...

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τετμημένη τοῦ Μ δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός. Θὰ λέγωμεν ἐν τούτοις ὅτι ***εἰς τὸ σημεῖον Μ ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμός,*** ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι τοῦ αὐτοῦ εἴδους μὲ τοὺς ρητοὺς ἀριθμούς. Ἂς παραστήσωμεν τοῦτον, πρὸς τὸ παρόν, διὰ τοῦ Χ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νὰ εἰσαγάγωμεν ἀριθμοὺς διαφορετικῆς φύσεως ἀπὸ ἐκείνους, τοὺς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν μέχρι σήμερον. Οἱ μέχρι τοῦδε γνωστοὶ ἀριθμοί : ***ἀκέραιοι καὶ κλασματικοί, ἔχουν κληθῆ ρητοὶ ἀριθμοί.***

Τοὺς ἀριθμούς, τοὺς ὁποίους θὰ δημιουργήσωμεν ἤδη, θὰ τοὺς καλέσωμεν ***ἀρρήτους***, κατ' ἀντίθεσιν πρὸς τοὺς ρητούς.

Δὲν εἶναι δυνατὸν εἰς τὴν τάξιν ταύτην νὰ δοθῇ πλήρης ὁρισμὸς τῶν ἀριθμῶν τούτων, ἀλλὰ τὰ προηγούμενα παραδείγματα μᾶς δίδουν μίαν ἰδέαν τοῦ τρόπου σχηματισμοῦ αὐτῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχομεν μίαν μέθοδον διὰ νὰ εὑρίσκωμεν τὴν $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν, μὲ ὅσα δεκαδικὰ ψηφία θέλομεν.

Ἡ $\sqrt{2}$ προσεγγίζεται διαδοχικῶς ἀπὸ τοὺς ἀριθμούς :

1 1,4 1,41 1,414 1,4142 1,41421 ...,

τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί :

1 1,96 1,9881 1,999396 1,99996164 1,9999899841, ..,

καὶ οἱ ὁποῖοι ἀριθμοὶ ὁλοὲν καὶ ὀλιγώτερον διαφέρουν τοῦ 2.

Ἐὰν τὴν ἐργασίαν αὐτὴν ἐξακολουθήσωμεν ἄνευ τέλους, θὰ προκύψῃ ἕνας ἀτέρμων ἀριθμὸς

$$1,414213564... \qquad (7)$$

ὁ ὁποῖος θὰ ἔχῃ *ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικὰ* καὶ θὰ ἐκφράζῃ τὴν ἀκριβῆ $\sqrt{2}$. Δὲν θὰ εἶναι περιοδικός, διότι τότε ἡ $\sqrt{2}$ θὰ ἦτο ῥητὸς ἀριθμός.

Ὥστε: ***Ἄρρητος ἀριθμὸς λέγεται κάθε δεκαδικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὲ περιοδικά.***

Ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ εἶναι τελείως καθωρισμένος, διότι ἡ ἀπέραντος ἀκολουθία (7) τῶν ψηφίων του εἶναι καθωρισμένη, ἂν καὶ δὲν εἶναι γνωστή, ἢ μὴ μόνον κατὰ ὀλίγα ἀρχικὰ ψηφία αὐτῆς.

Γενικῶς, ***ἕνας ἀκέραιος ἀριθμὸς $\alpha_0$ ἀκολουθούμενος ἀπὸ ἄπειρα δεκαδικὰ ψηφία μὴ περιοδικά, παριστάνει ἕνα ἄρρητον ἀριθμόν.***

Οὕτω, ὁ ἄρρητος ἀριθμὸς $N = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$ δὲν εἶναι ἴσος μὲ οὐδένα ῥητόν. Διότι, ἂν συνέβαινε τοῦτο, τὰ ψηφία του θὰ ἦσαν ἀπό τινος τάξεως καὶ ἐφεξῆς περιοδικά.

**268. Ἴσοι ἄρρητοι ἀριθμοί.** Ἄς θεωρήσωμεν δύο ἀρρήτους ἀριθμούς:

$$N = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots \quad \text{καὶ} \quad N_1 = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \ldots \beta_\nu \ldots$$

Ἐὰν συμβαίνῃ νὰ εἶναι:

$$\alpha_0 = \beta_0, \quad \alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \alpha_3 = \beta_3, \ \ldots, \ \alpha_\nu = \beta_\nu, \ \ldots,$$

τότε οἱ $N$ καὶ $N_1$ θὰ λέγωνται *ἴσοι*.

Ὥστε: ***Δύο ἄρρητοι θὰ λέγωνται ἴσοι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, ἔχουν τὰς ἰδίας κατ' ἔλλειψιν καὶ τὰς ἰδίας καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίσεις (ῥητάς).***

**269. Πράξεις ἐπὶ τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.** α'). Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἡ πρόσθεσις δύο ἀρρήτων, καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ ὁμιλοῦμεν διὰ ***τὸ ἄθροισμα*** δύο ἀρρήτων $N$ καὶ $N_1$;

Γνωρίζομεν ὅτι διὰ τὰς κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν 2 καὶ 3 ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 1 < 1,4 < 1,41 < 1,414 < \ldots < \sqrt{2} \\ 1 < 1,7 < 1,73 < 1,732 < \ldots < \sqrt{3}. \end{array}\right| \qquad (1)$$

Ἐκ τούτων, διὰ προσθέσεως τῶν ὁμοταξίων ὅρων, εὑρίσκομεν:

$$2 < 3,1 < 3,14 < 3,146 < \ldots < \sqrt{2} + \sqrt{3}. \qquad (2)$$

Ὁμοίως, διὰ τὰς καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικὰς ῥίζας τῶν 2 καὶ 3, ἔχομεν:

$$\left.\begin{array}{l} 2 > 1,5 > 1,42 > 1,415 > \ldots > \sqrt{2} \\ 2 > 1,8 > 1,74 > 1,733 > \ldots > \sqrt{3} \end{array}\right| \qquad (3)$$

Διὰ προσθέσεως τῶν ὁμοταξίων ὅρων τῶν (3), εὑρίσκομεν:

$$4 > 3,3 > 3,16 > 3,148 > \ldots > \sqrt{2} + \sqrt{3}. \qquad (4)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (2) διαρκῶς αὐξάνουν, παραμένουν δὲ μικρότεροι τοῦ ἀθροίσματος $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Ὁμοίως, οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας (4) διαρκῶς ἐλαττοῦνται, παραμένουν ὅμως μεγαλύτεροι τοῦ ἀθροίσματος $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Αἱ διαφοραὶ τῶν ὅρων τῆς αὐτῆς τάξεως τῶν (2) καὶ (4) σχηματίζουν τὴν ἀκολουθίαν:

$$2 \qquad 0{,}2 \qquad 0{,}02 \qquad 0{,}002 \qquad 0{,}0002 \qquad (5)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι διαρκῶς ἐλαττοῦνται.

Πᾶς ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (2) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 καὶ τῆς κατ' ἔλλειψιν τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3.

Ὁμοίως, πᾶς ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (4) εἶναι τὸ ἄθροισμα τῆς καθ' ὑπεροχὴν τῆς $\sqrt{2}$ καὶ τῆς καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3. Οὕτω πως προχωροῦντες, ἄνευ τέλους, δημιουργοῦμεν ἕνα νέον ἀριθμόν, τὸν ὁποῖον καλοῦμεν ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$. Τὸν παριστῶμεν δὲ διὰ τοῦ συμβόλου: $\Sigma=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

β'). Κατ' ἀνάλογον τρόπον ἐννοοῦμεν καὶ τὴν διαφορὰν $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ὡς ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος προσεγγίζει διαρκῶς καὶ περισσότερον πρὸς τὴν διαφορὰν ὁλοὲν καὶ καλλιτέρων προσεγγίσεων τῶν $\sqrt{3}$ καὶ $\sqrt{2}$. Θὰ τὴν παριστῶμεν δὲ διὰ τοῦ συμβόλου: $\Delta=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

γ'). Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν τὸν πολλαπλασιασμὸν δύο ἀρρήτων καὶ κατ' ἀκολουθίαν νὰ ὁμιλῶμεν διὰ τὸ ***γινόμενον δύο ἀρρήτων;***

Ἄς λάβωμεν πάλιν τὰς προηγουμένας ἀκολουθίας:

$$\left.\begin{array}{l} 1<1{,}4<1{,}41<1{,}414<\ldots<\sqrt{2} \\ 1<1{,}7<1{,}73<1{,}732<\ldots<\sqrt{3}. \end{array}\right| \qquad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς ὁμοταγεῖς ὅρους τῶν ἀκολουθιῶν τούτων, λαμβάνομεν μίαν νέαν αὔξουσαν ἀκολουθίαν, τήν:

$$1<2{,}38<2{,}4393<2{,}449048<\ldots<\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}. \qquad (7)$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως μὲ τὰς ἀκολουθίας:

$$\left.\begin{array}{l} 2>1{,}5>1{,}42>1{,}415>\ldots>\sqrt{2} \\ 2>1{,}8>1{,}74>1{,}733>\ldots>\sqrt{3}, \end{array}\right| \qquad (8)$$

εὑρίσκομεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$4>2{,}70>2{,}4708>2{,}452195>\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}. \qquad (9)$$

Αἱ διαφοραὶ τῶν ὁμοταγῶν ὅρων τῶν ἀκολουθιῶν (9) καὶ (7) ἀποτελοῦν τὴν ἀκολουθίαν: $3>0{,}32>0{,}0305>0{,}003147>\ldots>\ldots$, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι διαρκῶς ἐλαττοῦνται.

Ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (7) εἶναι τὸ γινόμενον μιᾶς κατ' ἔλλειψιν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 καὶ μιᾶς κατ' ἔλλειψιν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3.

Ὁμοίως, ἕκαστος ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (9) εἶναι τὸ γινόμενον τῆς καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 καὶ τῆς ἀντιστοίχου καθ' ὑπεροχὴν τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 3.

Ἑπομένως δημιουργεῖται, οὕτω, ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος καλεῖται γινόμενον τῶν $\sqrt{2}$ καὶ $\sqrt{3}$ καὶ σημειοῦται ὡς ἑξῆς: $\Gamma=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$.

δ'). Ἐὰν ἕκαστος ὅρος τῶν ἀκολουθιῶν:

$$\begin{array}{l|} 1<1{,}4<1{,}41<1{,}414<\ldots \\ 2>1{,}5>1{,}42>1{,}415>\ldots \end{array}$$

ὑψωθῇ εἰς τὸ τετράγωνον, προκύπτουν ἀντιστοίχως αἱ ἀκολουθίαι:

$$\begin{array}{l|} 1<1{,}96<1{,}9881<1{,}999396<\ldots \\ 4>2{,}25>2{,}0164>2{,}002225>\ldots \end{array}$$

Οἱ ὅροι τῆς πρώτης τούτων βαίνουν ἐλαττούμενοι καὶ παραμένουν πάντοτε μικρότεροι τοῦ 2, ἐνῷ οἱ ὅροι τῆς δευτέρας διαρκῶς αὐξάνουν, παραμένοντες μεγαλύτεροι τοῦ 2.

Θὰ λέγωμεν δὲ ὅτι ὁ προκύπτων ἀριθμὸς $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ εἶναι ἀκριβῶς ὁ ἀριθμὸς 2. Ἤτοι $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$ ἢ $(\sqrt{2})^2=2$. Ὁμοίως ὅτι: $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ ἢ $(\sqrt{3})^2=3$.

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὸ πηλίκον: $\Pi=\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

Τὰ ἀνωτέρω γενικεύονται διὰ δύο τυχόντας ἀρρήτους ἀριθμοὺς $N$ καὶ $N_1$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον ὁρίζεται καὶ τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ ἑνὸς ρητοῦ καὶ ἑνὸς ἀρρήτου. Π.χ.

$$2+\sqrt{3},\quad 5-\sqrt{2},\quad \frac{2}{3}+\sqrt{2},\ 4-\sqrt{7},\ 4+\sqrt{7},\ 7-3\sqrt{2}\ \text{κ.ο.κ.}$$

Ὁμοίως ὁρίζεται τὸ γινόμενον καὶ τὸ πηλίκον ἑνὸς ρητοῦ καὶ ἑνὸς ἀρρήτου. Π.χ.

$$2\cdot\sqrt{3},\ 5\sqrt{2},\ \frac{5}{8}\sqrt{7},\ \frac{3}{4}\sqrt{11},\ 8+3\sqrt{2},\ 7-3\sqrt{2},\ \text{κ.ο.κ.}$$

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι τὸ γινόμενον ἑνὸς ἀρρήτου ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν μηδὲν ἰσοῦται μὲ μηδέν.

Αἱ ἀριθμητικαὶ παραστάσεις, αἱ περιέχουσαι ἀρρήτους ἀριθμούς, ὑπολογίζονται μὲ πᾶσαν ἐπιθυμητὴν προσέγγισιν, ὅταν οἱ ἄρρητοι ἀντικατασταθοῦν δι' ἐπαρκῶν προσεγγίσεων αὐτῶν.

Ὅλοι οἱ θεμελιώδεις νόμοι τῶν πράξεων, ***ἀντιμεταθετικός, προσεταιριστικὸς καὶ ἐπιμεριστικός***, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰς πράξεις μεταξὺ τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.

Οὕτω, ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, ἔχομεν:

$$(\sqrt{\alpha})^2=\alpha.$$

Ἐκ τούτου δὲ ἕπεται ὅτι:

$$(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta})^2=(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta})\,(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta})=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\cdot\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=$$
$$=(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\alpha})\,(\sqrt{\beta})\,(\sqrt{\beta})=(\sqrt{\alpha})^2\cdot(\sqrt{\beta})^2=\alpha\cdot\beta.$$

Δηλαδή: $$(\sqrt{\alpha}\cdot(\sqrt{\beta})^2=\alpha\beta.$$

Ὁμοίως: $$\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2=\frac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2}=\frac{\alpha}{\beta}=\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^2.$$

$$(8-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})=8-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=8+2-\sqrt{3}+\sqrt{3}=10$$

$$(2+3\sqrt{3})4\sqrt{3}=8\sqrt{3}+12(\sqrt{3})^2=8\sqrt{3}+12\cdot3=8\sqrt{3}+36.$$

$$\frac{6}{\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{12}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}}=\frac{6\sqrt{12}}{(\sqrt{12})^2}=\frac{6\sqrt{12}}{12}=\frac{\sqrt{12}}{2}$$

Ἐκ τῶν παραδειγμάτων τούτων φαίνεται ὅτι τὸ τελικὸν ἀποτέλεσμα τῶν πράξεων μεταξὺ ἀρρήτων, δυνατὸν νὰ εἶναι ρητὸς ἀριθμός.

Χαρακτηριστικὸν παράδειγμα ἀριθμητικῶν πράξεων εἶναι καὶ τὸ ἑξῆς:

**Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:**

$$\mathbf{A=4\cdot\frac{x^2}{y}-\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1)$$

ἂν $\quad \mathbf{3{,}17<x<3{,}18}$ (2) καὶ $\mathbf{1{,}31<y<1{,}32}$ (3)

***Λύσις:*** Ἐκ τῶν (2) καὶ (3) λαμβάνομεν ἀντιστοίχως:

$$\left.\begin{matrix}(3{,}17)^2<x^2<(3{,}18)^2\\(1{,}31)^2<y^2<(1{,}32)^2\end{matrix}\right\}\Longleftrightarrow\begin{matrix}10{,}0489<x^2<10{,}1124\\1{,}7161<y^2<1{,}7424\end{matrix}\Bigg\}$$

Ἄρα: $\quad 11{,}7650<x^2+y^2<11{,}8548$

ἐξ οὗ: $\quad 3{,}430<\sqrt{x^2+y^2}<3{,}444.$ (4)

Ἐκ τῆς $10{,}0489<x^2<10{,}1124$, λαμβάνομεν:

$$40{,}1956<4x^2<40{,}4496$$

ἢ $\quad 40{,}195<4x^2<40{,}450.$ (5)

Ἐκ τῆς $1{,}31<y<1{,}32$, λαμβάνομεν:

$$\frac{1}{1{,}32}<\frac{1}{y}<\frac{1}{1{,}31} \quad ἢ \quad 0{,}757<\frac{1}{y}<0{,}764 \qquad (6)$$

Ἐκ τῶν (5) καὶ (6), διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$30{,}427<\frac{4x^2}{y}30{,}904. \qquad (7)$$

Ἡ (4) γράφεται: $\quad -3{,}444<-\sqrt{x^2+y^2}<-3{,}430.$ (8)

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη τῶν (7) καὶ (8), λαμβάνομεν:

$$30{,}427-3{,}444<\frac{4x^2}{y}-\sqrt{x^2+y^2}<30{,}904-3{,}430$$

ἢ $\quad 26{,}983<A<27{,}474.$ (9)

**270. Κυβικὴ ρίζα,...,νυοστὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ.** ***Κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ α καλεῖται ὁ ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε:***

$$x^3=\alpha.$$

Ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α σημειώνεται ὡς ἑξῆς:

$$x=\sqrt[3]{\alpha}$$

Οὕτω, θὰ εἶναι: $\sqrt[3]{125}=5$. Ὁμοίως $\sqrt[3]{0{,}001}=0{,}1$ καὶ $\sqrt[3]{729}=9$.

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ρίζαν ἑνὸς ἀριθμοῦ, ἀναλύομεν αὐτὸν εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων καί, ἐὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων τούτων παραγόντων εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 3, τότε οὗτος εἶναι τέλειος κύβος καὶ διαιροῦμεν πάντας τοὺς ἐκθέτας τῶν πρώτων παραγόντων διὰ 3.

῾Ο προκύπτων ἀριθμὸς θὰ εἶναι ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ. Οὕτω, ἐάν:

$$A=2^3\cdot5^6\cdot7^{12},\quad \text{τότε}:\quad \sqrt[3]{A}=2\cdot5^2\cdot7^4.$$

᾽Εὰν ὁ α εἶναι ἀκέραιος, μὴ τέλειος κύβος, τότε ἡ κυβική του ρίζα δὲν εἶναι ρητὸς ἀριθμός. Οὕτω, οἱ ἀριθμοί:

$$\sqrt[3]{7},\quad \sqrt[3]{4},\quad \sqrt[3]{12},\quad \sqrt[3]{19},\quad \sqrt[3]{500},$$

δὲν ἔχουν νόημα ρητοῦ ἀριθμοῦ. Εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί, δυνάμενοι νὰ ὑπολογισθοῦν μὲ οἱανδήποτε προσέγγισιν θέλομεν.

᾽Εὰν εἶναι $x^\nu=\alpha$ $(\nu\in\Phi)$, καὶ $\nu>1$, τότε: ***ὁ x θὰ καλῆται νυοστὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α καὶ θὰ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:***

$$x=\sqrt[\nu]{\alpha}.$$

῾Ο ν καλεῖται ***δείκτης*** τῆς ρίζης.

᾽Εὰν οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ α δὲν διαιροῦνται διὰ τοῦ ν $(\nu\in\Phi)$, τότε ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ἄρρητος.

Πράγματι, ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\sqrt[\nu]{\alpha}=k$ $(k\in A^+_\kappa)$ καὶ ἔστω ὅτι:

$$k=k_1^{\lambda_1}\cdot k_2^{\lambda_2}\ldots k_\sigma^{\lambda_\sigma},$$

τότε θὰ εἶναι: $\quad \alpha=k^\nu=k_1^{\lambda_1\nu}\cdot k_2^{\lambda_2\nu}\ldots k_\sigma^{\lambda_\sigma\nu}$, ὅπερ ἄτοπον.

᾽Εὰν δὲ ὑποθέσωμεν ὅτι: $\sqrt[\nu]{\alpha}=\dfrac{k}{t}$, ὅπου $(k,t)=1$ καὶ $t\neq1$,

θὰ εἶναι: $\quad \alpha=\left(\dfrac{k}{t}\right)^\nu=\dfrac{k^\nu}{t^\nu}$. ᾽Επειδὴ $(k,t)=1$, ἔπεται ὅτι θὰ εἶναι καὶ $(k^\nu,t^\nu)=1$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ ἀνάγωγον κλάσμα $\dfrac{k^\nu}{t^\nu}=\alpha$ ἀκέραιος ὅπερ ἄτοπον. ῞Ωστε ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha}$ θὰ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

Τὰ ἀνωτέρω διατυποῦνται ὡς ἑξῆς:

***᾽Εὰν $\alpha\in\Phi$ καὶ δὲν εἶναι νυοστὴ δύναμις ἀκεραίου, τότε ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ἄρρητος.***

***Κατὰ προσέγγισιν μονάδος*** κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ α καλεῖται ὁ ἀριθμὸς x, ὁ ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τὴν διπλῆν ἀνισότητα:

$$x^3\leqslant\alpha<(x+1)^3$$

δηλαδὴ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος x, τοῦ ὁποίου ὁ κύβος εἶναι ἴσος ἢ μικρότερος τοῦ α.

***Κατὰ προσέγγισιν δεκάτου*** κυβικὴ ρίζα ἑνὸς ἀριθμοῦ ρ καλεῖται τὸ ἀριθμητικὸν κλάσμα $\dfrac{x}{10}$, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὴν διπλῆν ἀνισότητα.

$$\left(\frac{x}{10}\right)^3\leqslant\alpha<\left(\frac{x+1}{10}\right)^3\quad \text{ἢ}\quad x^3\leqslant\alpha\cdot1000<(x+1)^3,$$

δηλαδή, ὁ x εἶναι ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος κυβικὴ ρίζα τοῦ $1000 \cdot \alpha$

Ἀναλόγως ὁρίζεται ἡ κατὰ προσέγγισιν 0,01, 0,001, 0,0001, κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ α.

Γενικῶς, ***ἡ κατὰ προσέγγισιν μονάδος νυοστὴ ρίζα*** ἑνὸς ἀριθμοῦ α καλεῖται ὁ ἀριθμὸς x, ὁ ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τὴν διπλῆν ἀνισότητα:

$$x^\nu \leqslant \alpha < (x+1)^\nu .$$

Ἀναλόγως ὁρίζονται αἱ κατὰ προσέγγισιν δεκάτου, ἑκατοστοῦ, χιλιοστοῦ..., νυοσταὶ ρίζαι τοῦ ἀριθμοῦ α.

**271. Ἀνισότης μεταξὺ δύο ἀρρήτων ἀριθμῶν.** Ἔστω ἕνας ἄρρητος ἀριθμός: $N = \alpha_0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_\nu \ldots$

γεγραμμένος ὑπὸ τὴν δεκαδικὴν μορφήν. Οὗτος εἶναι μεγαλύτερος κάθε προσεγγίσεως κατ' ἔλλειψιν καὶ μικρότερος κάθε καθ' ὑπεροχὴν προσεγγίσεώς του. Δηλαδὴ ὑφίστανται αἱ διπλαῖ ἀνισότητες.

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} < N < \alpha_0 + 1,$$

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} < N < \alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}$$

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{100} + \frac{\alpha_3}{1000} < N < \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2 + 1}{100},$$

. . . . . . . . . .

Ἐὰν N εἶναι τυχὼν ἄρρητος ἀριθμὸς καὶ ρ ρητὸς ἀριθμός, θὰ λέγωμεν ὅτι: $\rho < N$, ὅταν $\rho < \rho_1$, ὅπου $\rho_1$ προσέγγισις τοῦ N κατ' ἔλλειψιν.

Θὰ λέγωμεν δέ: $\rho > N$, ὅταν $\rho < \rho_2$, ὅπου $\rho_2$ προσέγγισις τοῦ N καθ' ὑπεροχήν.

Οὕτω, εἶναι: $0{,}97 < \sqrt{2}$, καθόσον $\sqrt{2} = 1{,}41$ καὶ ἄρα $0{,}97 < 1{,}41 < \sqrt{2}$.

Ὁμοίως: $1{,}5 > \sqrt{2}$, διότι $1{,}5 > 1{,}42 > \sqrt{2}$.

Ἐὰν N καὶ $N_1$ εἶναι δύο ἄρρητοι ἀριθμοί, θὰ λέγωμεν ὅτι: $N < N_1$, ἂν ὑπάρχῃ ρητὸς ἀριθμὸς ρ τοιοῦτος, ὥστε: $N < \rho < N_1$.

Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων μεταξὺ δύο ρητῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς ἀρρήτους ἀριθμούς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐὰν $\rho \neq 0$ εἶναι ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς καὶ α ἄρρητος ἀριθμός, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί: $\rho + \alpha$, $\rho - \alpha$, $\rho \cdot \alpha$, $\alpha : \rho$ εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί.

**2.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί:

$$5+\sqrt{2},\quad 3-\sqrt{7},\quad 4+\sqrt{3},\quad 5\sqrt{2},\quad 7\sqrt{3},\quad 4\sqrt[3]{2},\quad 2\sqrt[3]{3},$$

εἶναι ἄρρητοι ἀριθμοί.

**3.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα :

$$(\sqrt{2}+7)+(5-\sqrt{2})+(6-2\sqrt{3})+(5+2\sqrt{3}).$$

Τί συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν ;

**4.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων :

$$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})+(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})+(6-\sqrt{11})+(-6+\sqrt{11}).$$

Τί συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν ;

**5.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον : $\left(\sqrt{5} : \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)\left(\sqrt{3} : \dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)-8.$

Ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν ;

**6.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{7}$, εἶναι ἄρρητοι.

**7.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{3}:\sqrt{2}$ εἶναι ἄρρητος.

**8.** Ἐὰν οἱ $(x, y) \in P$ καὶ ὑφίσταται ἡ σχέσις $x\sqrt{3}=y\sqrt{7}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $x=y=0$.

**9.** Ἐὰν $(x, y, z, \omega) \in P$ καὶ ὑφίσταται ἡ σχέσις : $\dfrac{x}{y}=\dfrac{z}{\omega}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς

$$A=\frac{x\sqrt[3]{2}+z}{y\sqrt[3]{2}+\omega}$$ εἶναι ρητός.

**10.** Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσοδυναμία : $A=B \iff \sqrt{A}=\sqrt{B}$.

**11.** Ὁμοίως ἡ ἰσοδυναμία : $A<B \iff \sqrt{A}<\sqrt{B}$.

**12.** Ὁμοίως ἡ ἰσοδυναμία : $A>1 \iff 1<\sqrt{A}<A$.

**13.** Ὁμοίως ἡ ἰσοδυναμία : $0<A<1 \iff A<\sqrt{A}<1$.

**272. Τετράγωνον σχετικοῦ ἀριθμοῦ.** Γνωρίζομεν ὅτι τὸ γινόμενον δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός, καὶ τὸ γινόμενον δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικὸς ἀριθμός. Οὕτω :

$$\left.\begin{array}{l}(+3)^2=(+3)(+3)=+9\\(+5)^2=(+5)(+5)=+25\end{array}\right\} \quad \text{καὶ} \quad \left.\begin{array}{l}(-3)^2=(-3)(-3)=+9\\(-5)^2=(-5)(-5)=+25\end{array}\right\}.$$

καὶ γενικῶς :

$$(x)^2=x^2 \quad \text{καὶ} \quad (-x)^2=x^2.$$

Τίθεται ὅμως τὸ ἐρώτημα: ***Δοθέντος ἑνὸς σχετικοῦ ἀριθμοῦ α, ὑπάρχει ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε: $x^2=\alpha$;*** Δηλαδή:

$$\alpha \in P, \quad x \in P \quad \exists x ; \quad x^2=\alpha$$

Γνωρίζομεν ὅτι : $x \in P \quad \forall x \quad x^2 \geqslant 0.$

Ἄρα, τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον διὰ $\alpha<0$.

Ἐὰν $\alpha=0$, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται τὴν λύσιν $x=0$.

Ἐὰν $\alpha>0$, τὸ πρόβλημα ἐπιδέχεται δύο λύσεις, τάς ;

$$x=\sqrt{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x=-\sqrt{\alpha}.$$

Οὕτω, διά: $\alpha=25$ εἶναι: $x=5$ καὶ $x=-5$, διότι $(\pm 5)^2=25$

» » $\alpha=7$ » $x=\sqrt{7}$ καὶ $x=-\sqrt{7}$, διότι $(\pm\sqrt{7})^2=7$.

Ὁ ἀριθμός: $\sqrt{7}$ εἶναι θετικός, ἐνῷ ὁ $-\sqrt{7}$ εἶναι ἀρνητικός.

Ὅταν γράφωμεν:

$$x=\sqrt{A}, \qquad (1)$$

ὑποθέτομεν ὅτι ὁ A εἶναι ***θετικὸς*** ἢ ***μηδὲν*** καὶ τὸ σύμβολον $\sqrt{A}$ παριστᾷ ἕνα ἀριθμὸν ***θετικὸν*** ἢ ***μηδέν***.

Ἐκ τῆς (1) προκύπτει ὅτι:

$$x^2=A \text{ καὶ κατ' ἀκολουθίαν } x=\sqrt{x^2}. \qquad (2)$$

Ἡ ἰσότης (2) εἶναι ἀληθής, ***μόνον ἐὰν ὁ x εἶναι ἀριθμὸς τῆς ἀριθμητικῆς***. Δηλαδὴ ***ἀπόλυτος ἀριθμός***.

Κατ' ἀκολουθίαν, ἐὰν ὁ x εἶναι ***σχετικὸς ἀριθμός***, δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μίαν σχέσιν ἀνάλογον πρὸς τὴν (1), διότι $\sqrt{x^2}$ εἶναι ἀπόλυτος ἀριθμός, ἐνῷ ὁ x δύναται νὰ εἶναι καὶ ἀρνητικὸς ἀριθμός. Θὰ γράφωμεν δέ:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \sqrt{x^2}=x, & \textit{ἐὰν} & x\geqslant 0 \\ \sqrt{x^2}=-x, & \textit{ἐὰν} & x\leqslant 0 \end{array}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\sqrt{x^2}=|x|}$$

***Οὐδέποτε*** θὰ γράφωμεν: $\sqrt{x^2}=\pm x$, διότι $\sqrt{x^2}$ δὲν ἔχει δύο τιμάς, ἀλλὰ μίαν μόνον, ἡ ὁποία εἶναι θετικὴ (ἢ μηδέν, ἐὰν $x=0$).

Οὕτω, θὰ εἶναι:

α'). $\sqrt{(+2)^2}=+2$ καὶ $\sqrt{(-2)^2}=+2$.

β'). $\sqrt{(3-x)^2}=|3-x|$. Διότι:

Ἐὰν $3-x\geqslant 0$, δηλαδὴ $x\leqslant 3$, θὰ εἶναι: $\sqrt{(3-x)^2}=3-x$.

Ἐὰν $3-x\leqslant 0$, » $x\geqslant 3$, θὰ εἶναι: $\sqrt{(3-x)^2}=x-3$.

γ'). Ἔστω $A=x+\sqrt{(2-x)^2}$. (1)

Ἐὰν $x\leqslant 2$, θὰ εἶναι $2-x\geqslant 0$. Ἄρα $|2-x|=2-x$ καὶ

$$A=x+\sqrt{(2-x)^2}=x+|2-x|=x+2-x=2.$$

Ἐὰν $x\geqslant 2$, θὰ εἶναι $2-x\leqslant 0$. Ἄρα $|2-x|=x-2$ καὶ

$$A=x+\sqrt{(2-x)^2}=x+|2-x|=x+x-2=2x-2.$$

δ'). Ἔστω: $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(x-1)^2}$, $(x\in \Pi_\alpha)$ (1)

Ἡ παράστασις αὕτη γράφεται:

$$f(x)=|x+1|-|x-1|. \qquad (2)$$

Οἱ ὅροι τοῦ δευτέρου μέλους τῆς (2) μηδενίζονται διὰ $x=-1$ καὶ $x=1$, ἀντιστοίχως. Τὰς τιμὰς ταύτας τοποθετοῦμεν ἐπὶ ἄξονος κατὰ τάξιν αὔξοντος μεγέθους:

$$-\infty \qquad -1 \qquad 1 \qquad +\infty$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1). Ἐὰν $x\leqslant -1$, τότε $x+1\leqslant 0$ καὶ $x-1<0$. Κατ' ἀκολουθίαν

$|x+1|=-(x+1)$ καὶ $|x-1|=-(x-1)$, ὁπότε:

$$f(x)=-(x+1)+(x-1)=-x-1+x-1=-2.$$

2). Ἐὰν $-1 \leqslant x \leqslant 1$, τότε $x+1 \geqslant 0$ καὶ $x-1 \leqslant 0$. Ἄρα:

$$|x+1| = x+1 \text{ καὶ } |x-1| = -(x-1), \text{ ὁπότε:}$$
$$f(x) = (x+1)+(x-1) = x+1+x-1 = 2x.$$

3). Ἐὰν $1 \leqslant x$, τότε $x+1 \geqslant 0$ καὶ $x-1 \geqslant 0$. Ἄρα

$$|x+1| = x+1 \text{ καὶ } |x-1| = x-1, \text{ ὁπότε:}$$
$$f(x) = (x+1)-(x-1) = x+1-x+1 = 2.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x+1\|$ | $-(x+1)$ | | $x+1$ | | $x+1$ | |
| $\|x-1\|$ | $-(x-1)$ | | $-(x-1)$ | | $x-1$ | |
| $f(x)$ | $-(x+1)+(x-1)=-2$ | $\downarrow$ $-2$ | $(x+1)+(x-1)=2x$ | $\downarrow$ $2$ | $(x+1)-(x-1)=2$ | |

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
$$f(x) = 2x - \sqrt{x^2}, \quad \text{διὰ } x=1, \quad x=-2, \quad x=0{,}5, \quad x=-\sqrt{2}.$$

**2.** Ὁμοίως τῆς παραστάσεως: $f(x) = \sqrt{3x^2} + 5x\sqrt{3}$,

διὰ $x=1$, $x=-1$, $x=\frac{2}{3}$, $x=-\sqrt{3}$.

**3.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:
$$A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2}.$$

**4.** Ἐὰν $(x \neq y) \in \Pi_\alpha$ καὶ $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$, ποῖον συμπέρασμα ἐξάγεται ἐντεῦθεν;

**5.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha^+$, νὰ εὑρεθῇ οὗτος ἐκ τῶν σχέσεων:
$$x^2 = 49, \quad (\sqrt{x})^2 = 25, \quad \sqrt{x} = 16.$$

**6.** Ὁμοίως ἐκ τῶν σχέσεων:
$$x^2 = \frac{9}{16}, \quad x^2 = 2, \quad \sqrt{x^2} = 8, \quad (\sqrt{x})^2 = 3.$$

**7.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$, νὰ εὑρεθῇ ὁ $x$, ἐὰν τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἐκ τῶν σχέσεων:
$$x^2 = 4, \quad x^2 = -9, \quad x^2 = 1, \quad x = \sqrt{3^2}, \quad x = \sqrt{(-2)^2}, \quad x = -\sqrt{3^2}.$$

**8.** Ὁμοίως ἐκ τῶν σχέσεων:
$$x^2 = \frac{4}{25}, \quad x = \left(-\frac{2}{3}\right)^2, \quad (-x)^2 = 25, \quad x = \sqrt{25}, \quad x = -\sqrt{25^2}, \quad x = \sqrt{(-3)^2}.$$

**9.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:
$$f(x) = \sqrt{(7x-3)^2} - 8x.$$

**10.** Ὁμοίως ἡ παράστασις: $f(x) = \sqrt{(x+4)^2} + \sqrt{(x-4)^2}$.

**11.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:
$$\sqrt{\alpha^2+6\alpha+9}, \quad \sqrt{4x^2-4x+1}, \quad \sqrt{x^2+4xy+4y^2}.$$

**12.** Νὰ ἐπιλυθοῦν οἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις: $x \in P$, $\exists x$;
$x^2=16$, $x^2=4$, $x^3=8$, $x^3=-8$, $\sqrt{x^2}=3$, $\sqrt{x^2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2}=-2$.

**13.** Ἐὰν $(x \neq y) \in \Pi_\alpha$ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x^2y^2}}{xy}+\frac{\sqrt{(x-y)^2}}{x-y}\left(\frac{\sqrt{x^2}}{x}-\frac{\sqrt{y^2}}{y}\right)=1.$$

**273. Ρίζαι πραγματικῶν ἀριθμῶν.** Ἐὰν $\nu \in \Phi$ καὶ $\nu<1$ καὶ οἱ $(x, \alpha) \in \Pi_\alpha$ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα: $x^\nu=\alpha$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι ὁ x εἶναι ***μία*** νυοστὴ ρίζα τοῦ α.

Οὕτω, ἐὰν $\nu=2$, τότε ὁ x εἶναι ***μία*** τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ α.
Ἐὰν $\nu=3$, τότε ὁ x εἶναι ***μία*** κυβικὴ ρίζα τοῦ α.
Ἐὰν $\nu=4$, τότε ὁ x εἶναι ***μία*** τετάρτη ρίζα τοῦ α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Ὁ 2 εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4, διότι: $(2)^2=4$.
2ον: Ὁ $-2$ εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 4, διότι: $(-2)^2=4$.
3ον: Ὁ $+5$ εἶναι μία κυβικὴ ρίζα τοῦ 125, διότι: $(+5)^3=125$.
4ον: Ὁ $-5$ εἶναι μία κυβικὴ ρίζα τοῦ $-125$, διότι: $(-5)^3=-125$.
5ον: Ὁ $-2$ εἶναι μία ἑβδόμη ρίζα τοῦ $-128$, διότι: $(-2)^7=-128$.
6ον: Ὁ $+2$ εἶναι μία ἕκτη ρίζα τοῦ 64, διότι: $(+2)^6=64$.
7ον: Ὁ $-2$ εἶναι μία ἕκτη ρίζα τοῦ 64, διότι: $(-2)^6=64$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ περισσοτέρας τῆς μιᾶς νυοστὰς ρίζας πραγματικάς.

***ΣΗΜ.*** Ὁ ἀριθμὸς $-25$ οὐδεμίαν τετραγωνικὴν ρίζαν ἔχει. Διότι, οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς τὴν δευτέραν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον $-25$.

Ἐπειδὴ δὲ καὶ πᾶς πραγματικὸς ἀριθμὸς ὑψούμενος εἰς ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικὸν ἢ μηδέν, ἕπεται ὅτι:

**Οὐδεὶς πραγματικὸς ἀριθμὸς x ὑπάρχει, ἱκανοποιῶν τὴν ἰσότητα:**

$$(x)^{2\nu}=\alpha<0, \qquad (1)$$

ἂν $\nu \in \Phi$.

Ἄρα, θὰ πρέπῃ $\alpha>0$, διὰ νὰ ἰσχύῃ ἡ (1).

Ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\nu \in \Phi$, ὑπάρχει ἕνας μόνον θετικὸς ἀριθμὸς x τοιοῦτος, ὥστε:

$$x^\nu=\alpha. \qquad (2)$$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης θὰ γίνῃ βραδύτερον διὰ τοῦ τύπου τοῦ de Moivre.

Ἐὰν πληροῦται ἡ (2), εἴδομεν ὅτι ὁ x καλεῖται νυοστὴ ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α καὶ συμβολίζεται οὕτω:

$$x=\sqrt[\nu]{\alpha} \qquad (\text{μὲ } \nu \in \Phi \text{ καὶ } \alpha>0,\ x>0) \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν:

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=x^\nu=\alpha.$$

Δηλαδή, ὁ κανών: $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\alpha$ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ.

Ὥστε, ἐκ τῆς (2) φαίνεται ὅτι ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς x εἶναι ἡ ρίζα τῆς ἐξισώσεως $x^\nu=\alpha$, ἔνθα $\nu \in \Phi$.

Ἐνταῦθα διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $\nu=2\mu$ καὶ $\alpha<0$, τότε ἡ ἐξίσωσις $x^\nu=\alpha$ εἶναι ἀδύνατος εἰς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς x. Κατ' ἀνάγκην πρέπει $\alpha>0$.

Ἐὰν $x_0>0$ εἶναι ἡ θετικὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως, δηλαδή:

$$x_0^\nu=\alpha,$$

τότε, ἐπειδὴ εἶναι καὶ $(-x_0)^\nu=\alpha$, ἕπεται ὅτι καὶ ὁ $-x_0$ εἶναι ρίζα τῆς ἰδίας ἐξισώσεως. Δηλαδή, βάσει τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ, τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$, διὰ $\nu=2\mu$, εἶναι ***δισήμαντον***.

Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν α ἔχει δύο νυοστὰς ρίζας ($\nu=2\mu$), τάς: $\pm x_0$. Κατὰ συνθήκην, διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$ (ὅπου $\alpha>0$ καὶ $\nu=2\mu$), ἐκ τῶν δύο μοναδικῶν πραγματικῶν ριζῶν τῆς $x^\nu=\alpha$, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν θετικήν.

Δηλαδὴ διὰ τοῦ συμβόλου $\sqrt[\nu]{\alpha}$, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν $x_0$ καὶ διὰ τοῦ συμβόλου $-\sqrt[\nu]{\alpha}$, θὰ ἐννοῦμεν τὴν $-x_0$. Ἤτοι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=x_0 \quad \text{καὶ} \quad -\sqrt[\nu]{\alpha}=-x_0, \quad (\text{ὅπου } \nu=2\mu).$$

Τὴν θετικὴν ἢ μηδενικὴν νυοστὴν ρίζαν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α θὰ τὴν καλοῦμεν ***πρωτεύουσαν ρίζαν*** τοῦ α ($\nu=2\mu$).

β'). Ἐὰν $\nu=2\mu+1$ (περιττὸς ἀριθμός), τότε ἡ ἐξίσωσις $x^\nu=\alpha$ ἔχει μίαν μόνον πραγματικὴν λύσιν, εἴτε $\alpha>0$, εἴτε $\alpha<0$.

Ἐὰν $\alpha>0$, ἐπειδὴ $\nu=2\mu+1$ περιττός, θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι καὶ $x=x_0>0$, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ $x^\nu=\alpha$.

Δηλαδή: $\sqrt[\nu]{\alpha}=x_0>0$, ἂν $\nu=2\mu+1$ καὶ $\alpha>0$.

Ἑπομένως, εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ***μονοσήμαντον***.

Ἐὰν $\alpha<0$, ἐπειδὴ $\nu=2\mu+1$, θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι $x=x'_0<0$, διὰ νὰ ἀληθεύῃ ἡ $x^\nu=\alpha$.

Δηλαδή: $\sqrt[\nu]{\alpha}=x'_0<0$, ἂν $\nu=2\mu+1$ καὶ $\alpha<0$.

Ὥστε, καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ εἶναι ***μονοσήμαντον***.

Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι, ἐὰν ὁ α δὲν ἔχῃ θετικὴν νυοστὴν ρίζαν, ἀλλὰ ἔχει μίαν ἀρνητικὴν νυοστὴν ρίζαν, τότε ἡ ἀρνητικὴ νυοστὴ ρίζα καλεῖται ***πρωτεύουσα*** νυοστὴ ρίζα τοῦ α.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: Θὰ εἶναι $\sqrt{36}=6$ καὶ $-\sqrt{36}=-6$. **Οὐδέποτε** θὰ γράφωμεν $\sqrt{36}=-6$, ἂν καὶ ὁ $-6$ εἶναι μία τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ 36.

2ον: Θὰ εἶναι: $\sqrt[3]{-64}=-4$ καὶ $\sqrt[5]{-32}=-2$.

Ὁμοίως: $\sqrt[3]{64}=4$ καὶ $\sqrt[5]{32}=2$.

3ον: Θὰ εἶναι: $\sqrt[4]{81}=3$ καὶ $-\sqrt[4]{81}=-3$.

Εἰς τὴν παράστασιν $\sqrt[\nu]{\alpha}$ τὸ σύμβολον $\sqrt{\ }$ λέγεται ***ριζικόν***, ὁ ν λέγεται ***δείκτης*** καὶ ὁ α λέγεται ***ὑπόρριζον***.

Ἐὰν ὁ ν εἶναι ἄρτιος, ἡ ρίζα καλεῖται ***ἀρτίας τάξεως***, ἐὰν δὲ ὁ ν εἶναι περιττός, ἡ ρίζα καλεῖται ***περιττῆς τάξεως***.

Εἰς πᾶσαν περίπτωσιν: $\sqrt[\nu]{O}=O$.

Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι, δοθέντος θετικοῦ ἀριθμοῦ α, ὑπάρχει ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, θετικὸς x τοιοῦτος, ὥστε $x^{\nu}=\alpha$.

Ὁ x δύναται νὰ εἶναι ρητὸς ἢ ἄρρητος. Ἐὰν ὁ x εἶναι ρητός, θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ νυοστὴ ρίζα τοῦ α ἐξάγεται ἀκριβῶς, ἢ ὅτι ὁ α εἶναι τελεία νυοστὴ δύναμις. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν, καθ' ἣν ὁ x εἶναι ἄρρητος, ἡ τιμὴ τῆς $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δίδεται μόνον κατὰ προσέγγισιν.

Ὥστε: ***Ἐὰν $\alpha>O$ καὶ $\nu\in\Phi$, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}>O$, ρητὸς ἢ ἄρρητος.***

Ὁμοίως: ***Ἐὰν $\alpha<O$ καὶ $\nu=2\mu+1$ περιττός, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}<O$ ρητὸς ἢ ἄρρητος:***

Τέλος, ***ἐὰν $\alpha<O$ καὶ $\nu=2\mu$ ἄρτιος, τότε τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$ δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: Ἡ $\sqrt[7]{9}$ ὑπάρχει, εἶναι θετικὴ καὶ ἄρρητος.

Ἡ $\sqrt[3]{12}$ ὑπάρχει, εἶναι θετικὴ καὶ ἄρρητος.

Ἡ $\sqrt[3]{-7}$ ὑπάρχει, εἶναι ἀρνητικὴ καὶ ἄρρητος.

Ἡ $\sqrt[6]{-11}$ **δὲν ὑπάρχει ἐντὸς τοῦ συνόλου τῶν** $\Pi_\alpha$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὕρητε τὰς πρωτευούσας ἀντιστοίχους ρίζας τῶν ἀριθμῶν:

$\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{-16}$, $\sqrt{0{,}04}$, $\sqrt[5]{-\frac{1}{243}}$, $\sqrt[5]{\frac{1}{243}}$.

**2.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πρωτεύουσαι ρίζαι τῶν ἀριθμῶν:

$\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{-64}$, $\sqrt[5]{32}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt[5]{-1}$.

**3.** Ὁμοίως τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν:

$\sqrt[4]{625}$, $\sqrt[5]{-3125}$, $\sqrt[3]{64/343}$, $\sqrt[\nu]{(-\alpha)^{\nu}}$, ἔνθα ν ἄρτιος καὶ $\alpha>0$.

**4.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαὶ τετραγωνικαὶ ρίζαι τῶν ἀριθμῶν:

64, 81, 625, 900, 256, 0,0256.

**5.** Νὰ εὑρεθοῦν ὅλαι αἱ πραγματικαὶ τέταρται ρίζαι τῶν ἀκολούθων ἀριθμῶν:

16, 625, 10000, (625 : 16), 0,0256, (256 : 81).

**6.** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$A=\sqrt{49}-\sqrt[3]{-125}+\sqrt[4]{81}-\sqrt[3]{1000}.$$

**7.** Ἐὰν $\alpha>0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$B=\sqrt[3]{-\alpha^3}+\sqrt[4]{\alpha^4}+\sqrt{\alpha^2}.$$

**8.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκόλουθοι δυνάμεις:

$$(\sqrt{7})^2,\quad (\sqrt[3]{-2})^3,\quad (\sqrt[4]{10})^4,\quad (\sqrt[5]{-3})^5,\quad (-\sqrt[3]{-2})^3,\quad (-\sqrt[4]{5})^4.$$

**9.** Ἐὰν $\nu=2k$ ἄρτιος καὶ $\alpha\in\Pi_\alpha$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}=|\alpha|.$$

**274. Ἡ φανταστικὴ μονάς.** Θεωροῦμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$x^2=\alpha. \qquad (1)$$

Ἐὰν $\alpha\geqslant 0$, ὑπάρχουν πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x, τῶν ὁποίων τὸ τετράγωνον ἰσοῦται μὲ α. Οὗτοι εἶναι οἱ:

$$x=\sqrt{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x=-\sqrt{\alpha}, \quad \text{ὅταν} \quad \alpha>0$$

καὶ ὁ $x=0$, ὅταν $\alpha=0$.

Ἐὰν ὅμως $\alpha<0$, ἡ ἐξίσωσις (1) δὲν ἔχει λύσιν εἰς πραγματικοὺς ἀριθμούς, καθόσον τὸ τετράγωνον κάθε πραγματικοῦ (θετικοῦ, ἀρνητικοῦ ἢ μηδὲν) εἶναι μὴ ἀρνητικὸς ἀριθμός.

Ἐπειδὴ ὅμως γνωρίζομεν ὅτι:

$$\sqrt{(-\alpha)^2}=-\alpha, \quad \text{δηλαδὴ} \quad \alpha=-\sqrt{(-\alpha)^2}=(-1)\sqrt{(-\alpha)^2},$$

ἡ ἐξίσωσις (1) γίνεται:

$$x^2=(-1)\sqrt{(-\alpha)^2}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \frac{x^2}{\sqrt{(-\alpha)^2}}=-1. \qquad (2)$$

Ἐὰν δὲ τεθῇ $\dfrac{x^2}{\sqrt{(-\alpha)^2}}=k$, ἡ (2) γίνεται: $k^2=-1$. $\qquad (3)$

Οὕτω, διὰ $\alpha>0$, ἡ ἐπίλυσις τῆς (1) ἀνάγεται εἰς τὴν ἐπίλυσιν τῆς (3). Δηλαδὴ εἰς τὴν εὕρεσιν ἑνὸς ἀριθμοῦ k, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦται μὲ $-1$. Τοιοῦτοι ἀριθμοὶ εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν δὲν ὑπάρχουν. Εἴμεθα λοιπὸν ὑποχρεωμένοι νὰ ἐπινοήσωμεν ***νέον εἶδος ἀριθμῶν***, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ ἐξίσωσις (3) νὰ ἔχῃ λύσιν.

Ἐκ τῆς (3) λαμβάνομεν: $k=\pm\sqrt{-1}$.

Τὸν νέον τοῦτον ἀριθμὸν ὁ Euler ἐκάλεσε ***φανταστικὴν μονάδα*** καὶ τὸν παρέστησε διὰ τοῦ γράμματος i, ἀρχικοῦ γράμματος τῆς Γαλλικῆς λέξεως *imagineure*. Δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$k=\pm\sqrt{-1}=\pm i \quad \text{καὶ ἄρα} \quad (\pm i)^2=i^2=-1=k^2.$$

Ὥστε: $\boxed{i^2=-1 \ \text{καὶ}\ (-i)^2=(-i)(-i)=+i^2=+(-1)=-1.}$

Διὰ τῆς ἐπαναλήψεως τῆς φανταστικῆς μονάδος $+i$, ἢ καὶ τῆς ἀντιθέτου $-i$, δημιουργοῦμεν νέους ἀριθμοὺς καὶ τοὺς καλοῦμεν ***φανταστικούς***, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τοὺς μέχρι τοῦδε γνωστούς, τοὺς ὁποίους ἐκαλέσαμεν ***πραγματικοὺς*** ἀριθμούς.

Οὕτω, οἱ ἀριθμοί:

$$2i, \quad -3i, \quad -2i, \quad 3i, \quad \frac{2}{5}\, i, \quad 0,44i, \quad -\frac{3}{4}\, i, \ldots$$

εἶναι φανταστικοὶ ἀριθμοί.

Ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς φανταστικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι: $\beta i$, ὅπου $\beta \in \Pi_\alpha$

Μεταξὺ τῶν νέων τούτων ἀριθμῶν φροντίζομεν νὰ διατηροῦνται αἱ θεμελιώδεις ἰδιότητες σχέσεων καὶ πράξεων (ἀρχὴ τῆς διατηρήσεως τῶν νόμων). Δηλαδή, τὸ νέον τοῦτο σύστημα τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν νὰ ἱκανοποιῇ τὰς τρεῖς κατὰ σειρὰν ἀπαιτήσεις:

1ον: ***Οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ νὰ εἶναι στοιχεῖα του.***

2ον: ***Τὰ στοιχεῖα του νὰ ἱκανοποιοῦν τὰς θεμελιώδεις ἰδιότητας*** (ἰσότητος καὶ πράξεων) ***τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.***

3ον: ***Νὰ περιέχῃ ἕνα ἀριθμὸν $z$ τοιοῦτον, ὥστε $z^2=-1$.***

Μὲ τὸ $z^2$ θὰ ἐννοοῦμεν τὸ γινόμενον $z\cdot z$.

**275. Ἀκέραιαι δυνάμεις τῆς μονάδος i.** Ἔστω ὅτι $\nu \in \Phi_0$. Θὰ εἶναι:

1ον: $i^{4\nu}=(i^2)^{2\nu}=(-1)^{2\nu}=+1$. Ἤτοι: $\boldsymbol{i^{4\nu}=+1}$.

2ον: $i^{4\nu+2}=i^{4\nu}\cdot i^2=(+1)(-1)=-1$. Ἤτοι: $\boldsymbol{i^{4\nu+2}=-1}$.

3ον: $i^{4\nu+1}=i^{4\nu}\cdot i=(+1)\cdot i=i$. Ἤτοι: $\boldsymbol{i^{4\nu+1}=i}$.

4ον: $i^{4\nu+3}=i^{4\nu+2}\cdot i=(-1)\cdot i=-i$. Ἤτοι: $\boldsymbol{i^{4\nu+3}=-i}$.

Ὁμοίως εὑρίσκονται καὶ αἱ ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ $-i$.

Τὰ σύμβολα: $i^0$ ***καὶ*** $i^{-\nu}$, ὅπου $\nu \in \Phi$, θὰ παριστάνουν ἀντιστοίχως τοὺς ἀριθμοὺς 1 καὶ $\frac{1}{i^\nu}$. Δηκαδή,

$$\boldsymbol{i^0=1} \quad \text{καὶ} \quad \boldsymbol{i^{-\nu}=\frac{1}{i^\nu}}.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $i^{4\nu}=1$ | $i^{4\nu+1}=i$ | $i^{4\nu+2}=-1$ | $i^{4\nu+3}=-i$ | $\nu \in \Phi_0$ |
| | $i^0=1$ | $i^{-\nu}=\frac{1}{i^\nu}$ | | |

Πλείονα περὶ τῶν φανταστικῶν ἀριθμῶν θὰ διαπραγματευθῶμεν εἰς τὸν τρίτον τόμον τῆς Ἀλγέβρας. Ἐπὶ τοῦ παρόντος ἀρκούμεθα εἰς τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα.

**276. Ἰδιότητες τῶν ριζῶν μὲ θετικὰ ὑπόρριζα.** Τὸ σύμβολον $\sqrt[\nu]{\alpha}$, ἔνθα $\alpha \geqslant 0$ καὶ $\nu \in \Phi$, μεγαλύτερος δὲ τῆς ἀκεραίας μονάδος, ὡρίσθη ὡς ἡ ***πρωτεύουσα νυοστὴ ρίζα τοῦ α.***

Τὰ σύμβολα: $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\nu]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\gamma}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην ν καὶ διαφορετικὰ ὑπόρριζα. Τὰ σύμβολα ταῦτα λέγονται ***ἰσόδεικτοι ῥίζαι.***

Ὥστε: ***Δύο ἢ καὶ περισσότεραι ῥίζαι λέγονται ἰσόδεικτοι, ὅταν ἔχουν τὸν αὐτὸν δείκτην.***

Ἐὰν δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸν δείκτην λέγονται ***ἑτερόδεικτοι.***

Οὕτω, αἱ ῥίζαι: $\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\sqrt[\mu]{\beta}$, $\sqrt[\rho]{\gamma}$ εἶναι ἑτερόδεικτοι.

**277. Θεώρημα I.** ***Τὸ γινόμενον ἰσοδείκτων ῥιζῶν ἰσοῦται μὲ ἰσόδεικτον ῥίζαν, ἔχουσαν ὡς ὑπόρριζον τὸ γινόμενον τῶν ὑπορρίζων τῶν δοθεισῶν ῥιζῶν.***

Ἔστωσαν οἱ ἄρρητοι ἀριθμοὶ (πρωτεύουσαι ῥίζαι).

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt[\nu]{\alpha} \\ y=\sqrt[\nu]{\beta} \\ \omega=\sqrt[\nu]{\gamma} \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^\nu=\alpha \\ y^\nu=\beta \\ \omega^\nu=\gamma \end{array}\right| \begin{array}{l} \Longrightarrow (xy\omega)^\nu=\alpha\beta\gamma \Longleftrightarrow xy\omega=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma} \\ \text{ἢ} \quad \sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma}. \end{array}$$

Ὥστε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}=\sqrt[\nu]{\alpha\beta\gamma} \qquad (1)$$

καὶ γενικῶς:

$$\underbrace{\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\gamma}\cdots\sqrt[\nu]{\lambda}}_{\nu \text{ φορὰς}}=\sqrt[\nu]{\alpha.\beta.\gamma\ldots\lambda} \qquad (2)$$

*ΣΗΜ.:* Ἐὰν $\alpha=\beta=\gamma\ldots=\lambda$, οἱ ν παράγοντες εἶναι ἴσοι, ὁπότε ἡ (2) γράφεται:

$$\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}\cdots\sqrt[\nu]{\alpha}=\sqrt[\nu]{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}$$

ἢ

$$(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu=\sqrt[\nu]{\alpha^\nu}.$$

Οὕτω:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{2\cdot 3}=\sqrt{6}.$$
$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}=\sqrt{2\cdot 32}=\sqrt{64}=8.$$
$$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2\cdot 4\cdot 8}=\sqrt[3]{64}=4.$$

**278. Θεώρημα II.** ***Τὸ πηλίκον δύο ἰσοδείκτων ῥιζῶν ἰσοῦται μὲ ἰσόδεικτον ῥίζαν, ἔχουσαν ὑπόρριζον τὸ πηλίκον τῶν δύο ὑπορρίζων.***

Πράγματι, ἐὰν εἶναι $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$ καὶ $y=\sqrt[\nu]{\beta}$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l} x=\sqrt[\nu]{\alpha} \\ y=\sqrt[\nu]{\beta} \end{array}\right| \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^\nu=\alpha \\ y^\nu=\beta \end{array}\right| \Longrightarrow \frac{x^\nu}{y^\nu}=\frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^\nu=\frac{\alpha}{\beta} \Longleftrightarrow \frac{x}{y}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}$$

ἢ

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Οὕτω: $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{8}{2}}=\sqrt{4}=2,\quad \dfrac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{\dfrac{128}{2}}=\sqrt[3]{64}=4.$

$$\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}},\quad \sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4},\quad \sqrt[3]{\frac{9}{8}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{\sqrt{\alpha-\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}}=\sqrt{\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}}=\sqrt{\alpha+\beta},\ \text{ἂν}\ \alpha\neq\beta.$$

**279. Θεώρημα III.** ***Μία ρίζα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν τὸ ὑπόρριζον ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην.***

Πράγματι, ἔστω ὅτι: $x=\sqrt[\nu]{\alpha}$. Κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ριζῶν θὰ εἶναι: $x^\nu=\alpha$. Ἄρα:

$$(x^\nu)^\mu=\alpha^\mu \ \text{ἢ}\ (x^\mu)^\nu=\alpha^\mu \Longleftrightarrow x^\mu=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}\ \text{ἢ}\ (\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}.$$

Ὥστε: $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$. $\quad(\mu\in\Phi)$

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης γίνεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Εἶναι: $(\sqrt[\nu]{\alpha})^\mu=\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha}.\sqrt[\nu]{\alpha}\ldots\sqrt[\nu]{\alpha}=\sqrt[\nu]{\alpha.\alpha.\alpha\ldots\alpha}=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$.

Οὕτω: $(\sqrt{2})^2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}=2,\quad (\sqrt[4]{\alpha})^5=\sqrt[4]{\alpha^5}$.

**280. Θεώρημα IV.** ***Ἡ ἀξία μιᾶς ρίζης δὲν βλάπτεται, ὅταν δείκτης καὶ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου πολλαπλασιασθοῦν ἢ διαιρεθοῦν διὰ τοῦ αὐτοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.***

Πράγματι, ἐὰν εἶναι $x=\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ἕπεται ὅτι $x^\nu=\alpha^\mu$.

Ἐὰν δὲ $\lambda\in\Phi$, ἕπεται ὅτι: $(x^\nu)^\lambda=(\alpha^\mu)^\lambda$ ἢ $x^{\nu\lambda}=\alpha^{\mu\lambda}$ ἢ $x=\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}}$

ἢ $$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^{\mu\lambda}}.$$

Ἡ πρότασις αὕτη μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἁπλοποιήσωμεν μίαν ρίζαν, ἢ νὰ τρέψωμεν ἑτεροδείκτους ρίζας εἰς ἰσοδείκτους:

Οὕτω, ἔχομεν: $\sqrt[12]{\alpha^8}=\sqrt[4\cdot3]{\alpha^{4\cdot2}}=\sqrt[3]{\alpha^2}$.

**281. Θεώρημα V.** ***Ἡ ρίζα ρίζης ἰσοῦται μὲ ρίζαν, ἔχουσαν δείκτην τὸ γινόμενον τῶν δεικτῶν καὶ ὑπόρριζον τὸ αὐτό.***

Πράγματι, ἐὰν εἶναι: $x=\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}$, ἕπεται ὅτι: $x^\nu=\sqrt[\rho]{\alpha}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $x^{\nu\rho}=(\sqrt[\rho]{\alpha})^\rho=\alpha \Longleftrightarrow x=\sqrt[\nu\rho]{\alpha}$ ἢ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}=\sqrt[\nu\rho]{\alpha}$.

Ὥστε : $\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\alpha}} = \sqrt[\nu\rho]{\alpha}$

Οὕτω : $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$, $\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[15]{4}$, $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\sqrt[\rho]{\alpha}}} = \sqrt[\mu\nu\rho]{\alpha}$.

**282. Θεώρημα VI.** ***Θετικὸς παράγων, εὑρισκόμενος πρὸ τοῦ ριζικοῦ, δύναται νὰ εἰσαχθῇ ὑπὸ τὸ ριζικόν, ἀφοῦ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν, τὴν ὁποίαν δεικνύει ὁ δείκτης καὶ ἀντιστρόφως.***

Πράγματι, ἐὰν $\alpha > 0$ καὶ $x = \alpha\sqrt[\nu]{\beta}$, θὰ ἔχωμεν :

$$x^\nu = (\alpha\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha^\nu (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha^\nu \beta \iff x = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta} \text{ ἢ } \alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}.$$

Ὥστε : $\alpha\sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha^\nu \beta}$ (ἂν $\alpha > 0$).

Οὕτω : $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{8 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$.

$\sqrt[5]{128} = \sqrt[5]{32 \cdot 4} = \sqrt[5]{2^5 \cdot 4} = \sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{4} = 2\sqrt[5]{4}$.

**283. Ἐνδιαφέρουσαι παρατηρήσεις :** Διὰ τοὺς τύπους τῶν θεωρημάτων I—VI τῶν παραγράφων 277—282 ὑπετέθησαν θετικὰ τὰ ὑπόρριζα. Ἐὰν ὅμως τὰ ὑπόρριζα εἶναι σχετικοὶ ἀριθμοί, ἀπαιτεῖται ἰδιαιτέρα προσοχὴ κατὰ τὴν ἐκτέλεσιν τῶν σημειωμένων πράξεων καὶ ἐφαρμογὴν τῶν ἰδιοτήτων τούτων. Οὕτω :

1ον : Θὰ εἶναι πάντοτε : $\sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, ὅταν $\alpha \geqslant 0$ καὶ $\beta \geqslant 0$.

καί : $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{-\alpha} \cdot \sqrt{-\beta}$ » $\alpha \leqslant 0$ καὶ $\beta \leqslant 0$.

2ον : Θὰ εἶναι πάντοτε : $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ ὅταν $\alpha \geqslant 0$ καὶ $\beta > 0$

καί : $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{-\alpha}}{\sqrt{-\beta}}$, ὅταν $\alpha \leqslant 0$ καὶ $\beta < 0$.

3ον : Θὰ εἶναι πάντοτε : $\sqrt{\alpha^2} = \sqrt{(-\alpha)^2} = |\alpha|$

Γενικῶς : $\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}} = |\alpha|$

Ἀλλά : $\sqrt{-\alpha^2}$ ἔχει ἔννοιαν, ***μόνον διὰ*** $\boldsymbol{\alpha = 0}$.

4ον : Ἐὰν $\nu \in \Phi$ καὶ $\alpha > 0$, θὰ εἶναι : $\sqrt[2\nu+1]{-\alpha} = -\sqrt[2\nu+1]{\alpha}$. (α′)

Πράγματι, ἐὰν ὑψωθοῦν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (α′) εἰς τὴν $2\nu+1$ δύναμιν, εὑρίσκομεν :

$(\sqrt[2\nu+1]{-\alpha})^{2\nu+1} = (-\sqrt[2\nu+1]{\alpha})^{2\nu+1}$, ἐξ οὗ : $-\alpha = -\alpha$ ἢ $\alpha = 0$,

δηλαδὴ ἐξαγόμενα ἴσα. Κατ' ἀκολουθίαν, πράξεις μεταξὺ ριζῶν μὲ ἀρνητικὰ ὑπόρριζα ἀνάγονται εἰς πράξεις μεταξὺ ριζῶν μὲ θετικὰ ὑπόρριζα, ὅταν οἱ δεῖκται εἶναι περιττοὶ ἀριθμοί.

Οὕτω, θὰ εἶναι:

$$\sqrt[3]{5}\ \sqrt[3]{-10}=\sqrt[3]{5}\ (-\sqrt[3]{10})=-\sqrt[3]{50}.$$

$$\sqrt[5]{-7}\cdot\sqrt[5]{-3}\sqrt[5]{6}=(-\sqrt[5]{7})(-\sqrt[5]{3})\sqrt[5]{6}=+\sqrt[5]{7\cdot3\cdot6}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{-4}}=\sqrt[3]{-\sqrt[3]{4}}=-\sqrt[3]{\sqrt[3]{4}}=-\sqrt[9]{4}\ .$$

5ον: Ἡ τιμὴ τῆς ρίζης $\sqrt[7]{(-2)^5}$ δὲν βλάπτεται, ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν δείκτην καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ περιττὸν ἀριθμόν, ἔστω τὸν 3.

Δηλαδή: $\sqrt[7]{(-2)^5}=\sqrt[7\cdot3]{(-2)^{5\cdot3}}=\sqrt[21]{(-2)^{15}}.$

Ἐνταῦθα αἱ δύο παραστάσεις εἶναι ὁμόσημοι.

Ἐὰν ὅμως πολλαπλασιάσωμεν δείκην καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἐπὶ ἕνα ἄρτιον ἀριθμόν, ἔστω τὸν 4, ἡ τιμὴ τῆς ρίζης μεταβάλλεται.

Δηλαδή: $\sqrt[5]{(-2)^3}\neq\sqrt[5\cdot4]{(-2)^{3\cdot4}}=\sqrt[20]{(-2)^{12}}.$

Ἐνταῦθα αἱ δύο παραστάσεις δὲν εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί.

Ἐπίσης δὲν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\sqrt[6]{(-5)^2}=\sqrt[3]{-5},\quad \text{διότι εἶναι:}\quad \sqrt[3]{-5}=-\sqrt[3]{5}.$$

Ἀλλὰ θὰ γράψωμεν: $\sqrt[6]{(-5)^2}=\sqrt[6]{25}=\sqrt[6]{5^2}=\sqrt[3]{5}.$

Οὐδέποτε θὰ γράφωμεν: $\sqrt[6]{(-5)^2}=(\sqrt[6]{-5})^2$, διότι τὸ δεύτερον μέλος δὲν ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

6ον: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$\sqrt[2\nu]{\alpha^{2\nu}}=\sqrt[2\nu]{|\alpha|^{2\nu}}=|\alpha|=-\alpha,\quad \text{ἂν}\quad \alpha<0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha}=\sqrt[\nu]{-\sqrt[\lambda]{\alpha^\lambda}}=-\sqrt[\nu\lambda]{\alpha^\lambda},$$

ἂν $\alpha<0$, $\lambda=$ἄρτιος καὶ $\nu=$περιττός.

Ὁμοίως: $\alpha\sqrt[\lambda]{\beta}=(-\sqrt[\lambda]{\alpha^\lambda})\sqrt[\lambda]{\beta}=-\sqrt[\lambda]{\alpha^\lambda\beta}$, ἂν $\lambda=$ἄρτιος καὶ $\alpha<0$.

Ὁμοίως: $\dfrac{\sqrt[\lambda]{\beta}}{\alpha}=\alpha^{-1}\sqrt[\lambda]{\beta}=(-\sqrt[\lambda]{\alpha^{-\lambda}})\sqrt[\lambda]{\beta}=-\sqrt[\nu]{\alpha^{-\lambda}\beta}=-\sqrt[\lambda]{\dfrac{\beta}{\alpha}}$

ἂν $\alpha<0$, $\lambda=$ἄρτιος.

Ἐὰν $\alpha>0$, τότε: $\alpha=|\alpha|=\sqrt{\alpha^2}$.

Ἄρα $\alpha\sqrt{\beta}=|\alpha|\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha^2\beta}$, ἂν $\beta\geqslant0$.

Ἐὰν $\alpha<0$, τότε: $\alpha=-|\alpha|=-\sqrt{\alpha^2}$.

Ἄρα $\quad \beta\sqrt{\alpha} = -|\alpha|\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha^2\beta}$, ἂν $\beta \geqslant 0$.

Ὥστε :

$$\boxed{\begin{array}{l} \alpha\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha^2\beta}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \geqslant 0 \\ \hline \alpha\sqrt{\alpha} = -\sqrt{\alpha^2\beta}, \quad \text{ἂν} \quad \alpha \leqslant 0 \end{array}}$$

Διὰ τὴν ἀντίστροφον πορείαν θὰ γράφωμεν :

$$\sqrt{\alpha^2\beta} = \sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta} = |\alpha|\sqrt{\beta}, \quad \text{ἂν} \quad \beta > 0.$$

7ον : Ἐὰν $\alpha < 0$, θὰ εἶναι : $\sqrt{\alpha} = i\sqrt{|\alpha|}$.

Οὕτω : $\sqrt{-18} = \sqrt{(-1)\cdot 18} = \sqrt{i^2\cdot 18} = i\sqrt{18} = i\,3\sqrt{2}$.

8ον : Εἶναι : $\sqrt{-5}\cdot\sqrt{-7} = i\sqrt{5}\cdot i\sqrt{7} = i^2\sqrt{5}\cdot\sqrt{7} = -1\cdot\sqrt{5\cdot 7} = -\sqrt{35}$.

9ον : Ἐπειδή : $\left.\begin{array}{l} \sqrt{5}\cdot\sqrt{-2} = \sqrt{5}\cdot i\sqrt{2} = i\sqrt{10} \\ \sqrt{5\cdot(-2)} = \sqrt{-10} = i\sqrt{10} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sqrt{(5-2)} = \sqrt{5}\cdot\sqrt{-2}$

καὶ

Δηλαδή : $\quad \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, ἂν $\alpha\beta < 0$.

**284. Πολλαπλασιασμὸς ἑτεροδείκτων ριζῶν.** Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἑτεροδείκτους ρίζας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἰσοδυνάμους ἰσοδείκτους, τῇ βοηθείᾳ τοῦ θεωρήματος IV, καὶ κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τὰ ἐξαγόμενα. Πρὸς τοῦτο πολλαπλασιάζομεν δείκτην καὶ ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου ἑκάστης ρίζης ἐπὶ κατάλληλον ἀκέραιον, ὥστε πάντες οἱ δεῖκται νὰ γίνουν ἴσοι καὶ ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα I.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1ον : Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[4]{\beta}\cdot\sqrt[3]{\gamma}\cdot\sqrt[6]{\delta} = \sqrt[12]{\alpha^6}\cdot\sqrt[12]{\beta^3}\cdot\sqrt[12]{\gamma^4}\cdot\sqrt[12]{\delta^2} = \sqrt[12]{\alpha^6\beta^3\gamma^4\delta^2}.$$

2ον : Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς, ἂν $(\alpha, \beta, \gamma) > 0$.

$$\sqrt{4\alpha^2\beta^3}\cdot\sqrt[3]{8\alpha^4\beta^2\gamma} = \sqrt[6]{(4\alpha^2\beta^3)^3}\cdot\sqrt[6]{(8\alpha^4\beta^2\gamma)^2} = \sqrt[6]{4^3\alpha^6\beta^9\cdot 8^2\beta^4\gamma^2\alpha^8} =$$
$$= \sqrt[6]{2^{12}\alpha^{14}\beta^{13}\gamma^2} = 4\alpha^2\beta^2\sqrt[6]{\alpha^2\beta\gamma^2}.$$

**285. Διαίρεσις δύο ἑτεροδείκτων ριζῶν.** Διὰ νὰ διαιρέσωμεν δύο ἑτεροδείκτους ρίζας, τρέπομεν πρῶτον αὐτὰς εἰς ἰσοδείκτους, καὶ κατόπιν διαιροῦμεν τὰ δύο ἐξαγόμενα, ὅπως γνωρίζομεν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1ον : Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\sqrt[8]{\alpha} : \sqrt[4]{\alpha} = \sqrt[8]{\alpha} : \sqrt[8]{\alpha^2} = \sqrt[8]{\frac{\alpha}{\alpha^2}} = \sqrt[8]{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt[8]{\alpha}}.$$

2ον : Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$\sqrt[3]{\alpha^5\beta^2} : \sqrt[4]{\alpha^7\beta^5\gamma^9} = \sqrt[12]{(\alpha^5\beta^2)^4} : \sqrt[12]{(\alpha^7\beta^5\gamma^9)^3} = \sqrt[12]{(\alpha^{20}\beta^8) : (\alpha^{21}\beta^{15}\gamma^{27})} =$$
$$= \sqrt[12]{\alpha^{-1}\beta^{-7}\gamma^{-27}}.$$

**286. Ἁπλούστευσις μιᾶς ρίζης:** Πολλάκις εἶναι δυνατὸν μία ρίζα νὰ ἀναχθῇ εἰς μίαν ἄλλην ἰσοδύναμον μὲ μικρότερον δείκτην ἢ μὲ μικρότερον ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: Ἔχομεν διαδοχικῶς, ἂν $\alpha>0$

$$\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{2^4\cdot 5}=2^2\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}.$$

$$\sqrt[3]{2401}=\sqrt[3]{343\cdot 7}=\sqrt[3]{7^3\cdot 7}=7\sqrt[3]{7}$$

$$\sqrt[3]{\frac{\alpha}{4}\sqrt{\frac{\alpha}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{\alpha^2}{16}\cdot\frac{\alpha}{4}}}=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{\alpha^3}{64}}}=\sqrt[6]{\frac{\alpha^3}{64}}=\sqrt[6]{\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3}=\sqrt{\frac{\alpha}{4}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{2}.$$

**287. Ἁπλοποίησις ἀρρήτων παραστάσεων.** Διὰ τῆς ἐφαρμογῆς τῶν κανόνων τῶν πράξεων ἐπὶ τῶν ριζῶν, εἶναι δυνατὸν πολύπλοκοι παραστάσεις νὰ καταστοῦν ἁπλούστεραι.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: Ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2^2-2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{4-2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2.$$

2ον: Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\sqrt[3]{-125}-\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-54}=-\sqrt[3]{5^3}+\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{3^3\cdot 2}=-5+5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}=$$
$$=-5+8\sqrt[3]{2}.$$

3ον: Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}=\frac{3\cdot 2\sqrt{2}-2\cdot 2\sqrt{3}+2\sqrt{5}}{3\cdot 3\sqrt{2}-2\cdot 3\sqrt{3}+3\sqrt{5}}=\frac{2(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})}=\frac{2}{3}.$$

4ον: **Ἐὰν οἱ $(x,y,\omega)\in\Pi_\alpha^+$ καὶ πληροῦν τὴν σχέσιν $xy+y\omega+\omega x=1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:**

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+\omega^2)}{1+x^2}}+y\sqrt{\frac{(1+\omega^2)(1+x^2)}{1+y^2}}+\omega\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+\omega^3}}=2.$$

*Λύσις:* Ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως $xy+y\omega+\omega x=1$, λαμβάνομεν τὰς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} xy+y\omega+\omega x+x^2=1+x^2\\ xy+y\omega+\omega x+y^2=1+y^2\\ xy+y\omega+\omega x+\omega^2=1+\omega^2\end{array}\right| \iff \begin{array}{l}(x+\omega)(y+x)=1+x^2\\ (y+x)(\omega+y)=1+y^2\\ (\omega+y)(x+\omega)=1+\omega^2\end{array}$$

Ἐὰν δὲ κληθῇ A ἡ παράστασις, θὰ ἔχωμεν τώρα:

$$A=x\sqrt{\frac{(y+x)(\omega+y)(\omega+y)(x+\omega)}{(x+\omega)(y+x)}}+y\sqrt{\frac{(\omega+y)(x+\omega)(x+\omega)(y+x)}{(y+x)(\omega+y)}}$$
$$+\omega\sqrt{\frac{(x+\omega)(y+x)(y+x)(\omega+y)}{(\omega+y)(x+\omega)}}=$$
$$=x\sqrt{(\omega+y)^2}+y\sqrt{(x+\omega)^2}+\omega\sqrt{(y+x)^2}$$
$$=x(\omega+y)+y(x+\omega)+\omega(y+x)=2(xy+y\omega+\omega x)=2\cdot 1=2.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Νὰ γίνουν ἁπλούστεραι αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

**1.** $\sqrt{49}$, $\sqrt[4]{25}$, $\sqrt[8]{64}$, $\sqrt[5]{9^{10}}$, $\sqrt[11]{8^{22}}$, $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{256}$.

**2.** $\sqrt[6]{0{,}027}$, $\sqrt[10]{0{,}00032}$, $\sqrt[4]{0{,}0625}$, $\sqrt[5]{0{,}00243^2}$, $\sqrt[6]{1{,}331}$.

**3.** $\sqrt[3]{-27}$, $\sqrt[9]{-512}$, $\sqrt[15]{-343}$, $\sqrt[3]{-0{,}125}$, $\sqrt[15]{-0{,}000064}$.

**4.** $\sqrt[8]{4x^2}$, $\sqrt[20]{16\alpha^4\beta^8}$, $\sqrt[15]{27\alpha^9\beta^{12}}$, $\sqrt[18]{64x^{12}y^{30}}$.

**5.** $\sqrt[15]{\dfrac{(x+1)^9}{8\alpha^3+12\alpha^2+6\alpha+1}}$, $\sqrt[12]{\dfrac{(x^2-2x+1)^3}{(x^3+3x^2+3x+1)^2}}$, $\sqrt[4]{\dfrac{x^3y+2x^2y^2+xy^3}{x^5y+2x^4y^2+x^3y^3}}$

**Β.** Νὰ ἐξαχθοῦν ἐκτὸς τῆς ρίζης οἱ κατάλληλοι παράγοντες.

**1.** $\sqrt{27}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{48}$, $\sqrt[3]{40}$, $\sqrt[3]{375}$, $\sqrt[3]{108}$, $\sqrt[5]{320}$.

**2.** $\sqrt[8]{0{,}054}$, $\sqrt[5]{0{,}00096}$, $\sqrt[4]{0{,}1250}$, $\sqrt[3]{6{,}655}$, $\sqrt{0{,}2366}$.

**3.** $\sqrt{5x^3}$, $\sqrt[4]{x^2y^8}$, $\sqrt[5]{\alpha^{15}\beta^2}$, $\sqrt{7x^4y^9\omega^{11}}$, $\sqrt[3]{8\alpha^3\beta^2\gamma^3}$.

**4.** $\sqrt[\nu]{x^{\nu+1}}$, $\sqrt[\nu]{x^{\nu+3}}$, $\sqrt[\nu]{5x^{2\nu+1}}$, $\sqrt[\nu]{\alpha x^{2\nu-1}}$ $\sqrt[3]{x^{3\mu}\,y^{3\nu+1}\,\omega}$.

**5.** $\sqrt[\nu]{7x^{3\nu+2}\,y^{4\nu+3}\,\omega^{5\nu+4}}$, $\sqrt[2x-5]{\alpha^{16x^2-46x+15}\,\beta^{6x-15}\,\gamma^{6x^2-19x+10}}$.

**Γ.** Οἱ ἐκτὸς τῆς ρίζης παράγοντες νὰ εἰσαχθοῦν ἐντὸς αὐτῆς.

**1.** $2\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$, $2\sqrt[3]{6}$, $-4\sqrt[3]{10}$, $\alpha\sqrt{5}$, $-\beta\sqrt{\beta}$.

**2.** $(x-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$, $\dfrac{2x^3y^2}{\omega^2}\sqrt[3]{\dfrac{\omega^5}{8x^6y^5}}$, $(2\alpha+3\beta)\sqrt[4]{\dfrac{4\alpha^2-9\beta^2}{(2\alpha+3\beta)^6}}$.

**3.** $(\alpha+\beta-\gamma)\sqrt{\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta}}$, $\dfrac{x-y}{x+y}\sqrt{\dfrac{x\omega}{x^2-2xy+y^2}}$,

**Δ.** Νὰ ἁπλουστευθοῦν αἱ παραστάσεις :

**1.** $\alpha=\sqrt{18}+\sqrt{8}+\sqrt{32}-\sqrt{50}$, $\beta=\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{150}+\sqrt{294}-\sqrt{384}$.

**2.** $\gamma=3\sqrt{20}+5\sqrt{20}+5\sqrt{45}-4\sqrt{80}-3\sqrt{500}+6\sqrt{605}$.

**3.** $\delta=5\sqrt{45}-3\sqrt{20}+7\sqrt{180}-9\sqrt{320}+13\sqrt{405}$.

**4.** $\varepsilon=\sqrt{300}-\dfrac{1}{2}\sqrt{12}+\dfrac{3}{5}\sqrt{75}+\dfrac{1}{10}\sqrt{3}$.

**5.** $\zeta=6\sqrt{\dfrac{9}{2}}-9\sqrt{\dfrac{25}{2}}+3\sqrt{2}-5\sqrt{18}+11$.

**6.** $\eta=5\sqrt[3]{54}-3\sqrt[3]{16}+6\sqrt[3]{128}-5\sqrt[3]{250}$.

**7.** $\vartheta=5\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{-54}-6\sqrt[3]{-128}$.

**8.** $\iota = 5\sqrt[3]{56} + \frac{5}{3}\sqrt[3]{187} - \frac{9}{4}\sqrt[3]{448} + \frac{8}{5}\sqrt{875}$.

**9.** $\varkappa = \sqrt{343xy} + \sqrt{112x^3y^3} - \sqrt{63xy^3}$.

**10.** $\lambda = \sqrt{48xy^2} - \sqrt{192x^5y^4} + 2\sqrt{12x^2y^6}$.

**11.** $\mu = \sqrt[3]{16\alpha^4\beta} - \sqrt{8\alpha^3\beta} + \sqrt[3]{54\alpha^7\beta^4} - \sqrt{98\alpha\beta^3}$.

**12.** $\nu = \sqrt[4]{162x^4y} - \sqrt[3]{54x^3y} - \sqrt[4]{32x^8y^5} + \sqrt[3]{16x^5y^4}$.

**13.** $\xi = \sqrt{(x+y)^2\alpha} + \sqrt{(x-y)^2\alpha} - \sqrt{\alpha x^2} + \sqrt{\alpha(1-x)^2} - \sqrt{\alpha}$.

**14.** $o = \sqrt{4+4x^2} + \sqrt{9+9x^2} + \sqrt{\alpha^2+\alpha^2x^2} - 5\sqrt{1+x^2}$.

**15.** $\pi = \sqrt{\alpha-\beta} + \sqrt{16\alpha-16\beta} + \sqrt{\alpha x^2-\beta x^2} - \sqrt{9(\alpha-\beta)}$.

**16.** $\varrho = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{\alpha^3-\alpha^2}{\beta+1}} - \frac{3\alpha}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta+1}} - 2\alpha\sqrt{\frac{\alpha-1}{\beta^3+\beta^2}}$.

**Ε.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα γινόμενα.

**1.** $\alpha = \sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$, $\sqrt{\beta} = \sqrt{20}\cdot\sqrt{45}$, $\gamma = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{125}$.

**2.** $\alpha = \sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{30}\cdot\sqrt[3]{150}$, $\beta = \sqrt[4]{24}\cdot\sqrt[4]{48}\cdot\sqrt[4]{48}$.

**3.** $\alpha' = \sqrt{5\alpha}\cdot\sqrt{15\beta}\cdot\sqrt{27\alpha\beta}$, $\beta' = \sqrt[3]{75\alpha\beta\gamma}\cdot\sqrt[3]{60\alpha^2\beta\gamma^2}\cdot\sqrt[3]{48\alpha^3\beta\gamma^3}$.

**4.** $\alpha_1 = \sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta^3}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-3}\beta^2}\cdot\sqrt[\nu]{\alpha^2\gamma^{\nu-2}}$.

**Ζ.** Νὰ γίνουν ἁπλούστεραι αἱ παραστάσεις :

**1.** $\sqrt[15]{\sqrt[5]{\alpha^{10}}}$, $\sqrt[8]{\sqrt[7]{\alpha^{24}\beta^{32}}}$, $\sqrt[6]{\sqrt[7]{\alpha^3\beta^4\gamma^6}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^{20}}}}$, $\sqrt[5]{\sqrt[11]{\sqrt[3]{\alpha^{55}}}}$

**2.** $\sqrt{\sqrt[6]{\alpha^2}}\,.\ \sqrt[4]{\sqrt[3]{\alpha^2}}\,.\ \sqrt[12]{\alpha^5}$, $\sqrt{\sqrt[4]{\sqrt[9]{\alpha^{13}}}}\,.\ \sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x^7}}}$.

**3.** $\sqrt[2\mu]{\sqrt[3\nu]{\alpha^5}}\,.\ \sqrt[6\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha^3}}\,.\ \sqrt[\mu]{\sqrt[6\nu]{\alpha^9}}\,.\ \sqrt[6\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$.

**4.** $\sqrt[5]{\alpha^2\sqrt[3]{\alpha\sqrt{\alpha}}}$, $\sqrt[4]{\alpha\cdot\sqrt[5]{\alpha^2\sqrt[9]{\alpha^7}}}$, $\sqrt[5]{\frac{\alpha}{\beta}\sqrt[5]{\frac{\beta}{\alpha}}}$.

**5.** $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y^2}{x^2}\sqrt[4]{\frac{y^3}{y^3}}}}$, $\sqrt[3]{9x^2\sqrt{\frac{2y}{3x}}}\sqrt[3]{4y^2\sqrt{\frac{3x}{2y}}}$.

6. $\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ , $\sqrt[7]{216\sqrt[4]{216\sqrt[3]{1296}}}$ .

**Η.** Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀκόλουθα πηλίκα :

1. $\alpha=\sqrt{24}:\sqrt{6}$, $\beta=\sqrt{45}:\sqrt{5}$, $\gamma=\sqrt[3]{81}:\sqrt[3]{3}$, $\delta=\sqrt[3]{320}:\sqrt[3]{5}$.

2. $(\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[6]{32}):\sqrt[8]{128}$, $\sqrt[6]{243}:(\sqrt[8]{27}\cdot\sqrt[12]{3})$,

3. $\sqrt[6]{x^3}:\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[4]{x^6}:(\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[9]{x^4})$, $\sqrt[11]{243\alpha^5\beta^9}:\sqrt[7]{81\alpha^4\beta^8}$,

4. $[(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu+5}\cdot(\sqrt[\nu]{\alpha})^{2\nu-3}]:(\sqrt[\nu]{\alpha})^{2\nu+2}$ .

**Θ.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα γινόμενα :

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

2. $(\sqrt[3]{\alpha}-\sqrt[3]{\beta})(\sqrt[3]{\alpha^2}-\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})$.

3. $(3+\sqrt{27}-\sqrt{12})(\sqrt{18}-\sqrt{8}+3\sqrt{2})$.

4. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(2\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

5. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{2+\sqrt{2}}\;\sqrt{2-\sqrt{2}}$

6. $(\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{75}-\sqrt{48})\sqrt{3}$.

7. $(3\sqrt{24}-2\sqrt{54}+7\sqrt{96}-4\sqrt{150})\,2\sqrt{6}$.

8. $(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{108}-\sqrt[3]{32}+\sqrt[3]{500})\cdot\sqrt[3]{2}$.

9. $(6\sqrt[3]{72}-3\sqrt[3]{243}+7\sqrt[3]{576}-2\sqrt[3]{1125})\cdot3\sqrt[3]{3}$.

10. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$, $(\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$.

11. $(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(2\sqrt[3]{9}-3\sqrt[3]{4})$, $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+5\sqrt{6})^2$.

12. $(\sqrt[3]{x}-2\sqrt[6]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x})$.

13. $(\sqrt[3]{xy^2}+\sqrt[3]{x^2y}+x+y)\cdot(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$.

14. $\dfrac{(\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{9x^2}+\sqrt[3]{15x}+\sqrt[3]{25})}{(\sqrt[3]{3x}+\sqrt[3]{5})(\sqrt[3]{9x^2}-\sqrt[3]{15x}+\sqrt[3]{25})}$

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον τῶν πράξεων :

$$A=(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-2)\sqrt{\sqrt{3}+2}\,,$$

ἀφοῦ εὕρετε πρῶτον τὸ $A^2$.

2. Θεωροῦμεν τοὺς δύο ἀριθμούς :

$$x_1=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\quad\text{καὶ}\quad x_2=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

Νὰ ὑπολογίσετε τὸν ἀριθμὸν $x_1+x_2$, ἀφοῦ πρῶτον ὑπολογίσετε τοὺς ἀριθμοὺς $x_1^2+x_2^2$ καὶ $x_1x_2$.

**3.** Ἐὰν πάντες οἱ ὅροι τῶν ἴσων κλασμάτων:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu},$$

**εἶναι** θετικοί, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{\alpha_1\beta_1}+\sqrt{\alpha_2\beta_2}+\sqrt{\alpha_3\beta_3}+\ldots+\sqrt{\alpha_\nu\beta_\nu}=\sqrt{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_\nu)(\beta_1+\beta_2+\beta_3+\ldots+\beta_\nu)}.$$

Ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον;

**4.** Ἐὰν ἰσχύῃ ἡ ἰσότης $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{\omega}=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$(x+y+\omega)^3=27xy\omega.$$

**5.** Ἐὰν $x^2+y^2+\omega^2=2(xy+y\omega+\omega x)$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μία ἐκ τῶν παραστάσεων $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}\pm\sqrt{\omega}$, εἶναι μηδέν.

**6.** Ἐὰν $\sqrt{y-\omega}+\sqrt{\omega-x}=\sqrt{y-x}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἢ $\omega=x$ ἢ $\omega=y$.

**7.** Ἐὰν $\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=\sqrt{\omega}$, νὰ εὑρεθῇ ῥητὴ παράστασις, συνδέουσα τὰ $x$, $y$, $\omega$.

**8.** Ἐάν $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $x^3-3\sqrt[3]{6}\cdot x=5$.

**9.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως:
$$x^3=6x+6.$$

**10.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός: $x=\sqrt[3]{\sqrt{17}+3}-\sqrt[2]{\sqrt{17}-3}$ εἶναι ῥίζα τῆς ἐξισώσεως: $x^3=6(1-x)$.

**11.** Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{19}$ καὶ $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

**12.** Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί: $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ καὶ $2\sqrt{11}$.

**13.** Ὁμοίως οἱ ἀριθμοί: $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ καὶ $\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

**14.** Νὰ γίνῃ γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις: $\sqrt[3]{2}+1$.

**15.** Ἐὰν $\alpha>\beta\geqslant 0$ καὶ $(\nu\geqslant 2)\equiv\Phi$ ἢ $\beta<\alpha<0$ καὶ $(\nu\geqslant 3)\in$ περιττούς:

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sqrt[\nu]{\alpha}>\sqrt[\nu]{\beta}$.

**16.** Ἐὰν $0<\alpha^3-A\leqslant\varepsilon$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\alpha-\sqrt[3]{A}<\dfrac{\varepsilon}{3(\sqrt[3]{A})^2}$

**17.** Ἐὰν $0<\alpha^2-A\leqslant\varepsilon$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\alpha-\sqrt{A}<\dfrac{\varepsilon}{2\sqrt{A}}$.

**288. Ἄρρητα ἀλγεβρικὰ κλάσματα.** Τὰ κλάσματα, τὰ ὁποῖα περιέχουν ἐξαγωγὴν ῥίζης εἰς ἕνα τοὐλάχιστον ἐκ τῶν ὅρων του, ὀνομάζονται ***ἄρρητα ἀλγεβρικὰ κλάσματα.***

Οὕτω, τὰ κλάσματα:

$$\frac{\sqrt{2}}{5},\quad \frac{\sqrt{3}+5}{6},\quad \frac{9}{\sqrt{7}},\quad \frac{3}{3+\sqrt{8}},\quad \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{6}},\quad \frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$$

εἶναι ἄρρητα ἀλγεβρικὰ κλάσματα.

**289. Συζυγεῖς παραστάσεις.** Αἱ ἄρρητοι παραστάσεις, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν μόνον ὡς πρὸς τὸ πρόσημον τοῦ ἑνὸς ῥιζικοῦ, ὀνομάζονται ***συζυγεῖς.***

Οὕτω, αἱ παραστάσεις:

$\alpha+\sqrt{\beta}$ καὶ $\alpha-\sqrt{\beta}$ εἶναι συζυγεῖς

Ὁμοίως αἱ: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ καὶ $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$ εἶναι συζυγεῖς

Ὁμοίως αἱ: $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})-\sqrt{\gamma}$ καὶ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})+\sqrt{\gamma}$ εἶναι συζυγεῖς.

**290. Ῥητοποίησις τοῦ παρονομαστοῦ.** Ὅταν ἕνα ἄρρητον ἀλγεβρικὸν κλάσμα περιέχῃ ῥιζικὰ εἰς τὸν παρονομαστήν, φροντίζομεν νὰ μετατρέπωμεν τοῦτο εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, ἀλλὰ μὲ ῥητὸν παρονομαστήν. Διότι τοῦτο μᾶς διευκολύνῃ πάρα πολὺ εἰς τὰς πράξεις καὶ εἰς τὸν ἀριθμητικὸν ὑπολογισμόν.

Ἡ ἐργασία, διὰ τῆς ὁποίας ἕνα ἄρρητον κλάσμα μετατρέπεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον, ἀλλὰ μὲ ῥητὸν παρονομαστήν, καλεῖται ***ῥητοποίσις τοῦ παρονομαστοῦ.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ῥητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τοῦ κλάσματος**

$$K=\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}},\ \text{ἂν } \beta>0 \text{ καὶ } \nu\in\Phi.$$

***Λύσις:*** Γνωρίζομεν ὅτι ἕνα κλάσμα δὲν μεταβάλλεται, ὅταν ἀμφότεροι οἱ ὅροι του πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμόν, διάφορον τοῦ μηδενός. Πολλαπλασιάζομεν λοιπὸν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ $\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}$ καὶ ἔχομεν:

$$K=\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta}\cdot\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\nu}}}=\frac{\alpha\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}}{\beta}.$$

Οὕτω: $$\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Ὁμοίως: $$\frac{5}{\sqrt[3]{2}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2^2}}=\frac{5\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{4}}{2}.$$

2ον: **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως:**

$$A=\frac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}} \qquad \gamma>0. \qquad (1)$$

***Λύσις:*** Πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπὶ τὴν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ. Δηλαδὴ ἐπὶ $\beta-\sqrt{\gamma}$ καὶ ἔχομεν διαδοχικῶς:

$$A=\frac{\alpha}{\beta+\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{(\beta+\sqrt{\gamma})(\beta-\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\beta-\sqrt{\gamma})}{\beta^2-\gamma}.$$

Ὁμοίως: $$B=\frac{\alpha}{\beta-\sqrt{\gamma}}=\frac{\alpha(\beta+\sqrt{\gamma})}{(\beta-\sqrt{\gamma})(\beta+\sqrt{\gamma})}=\frac{\alpha(\beta+\sqrt{\gamma})}{\beta^2-\gamma}.$$

Οὕτω: $$\frac{10}{5-\sqrt{2}}=\frac{10(5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})}=\frac{10(5+\sqrt{2})}{25-2}=\frac{10(5+\sqrt{2})}{23}.$$

Ὁμοίως: $$\frac{22}{5+\sqrt{3}}=\frac{22(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})}=\frac{22(5-\sqrt{3})}{25-3}=\frac{22(5-\sqrt{3})}{22}=5-\sqrt{3}.$$

Ἰσχύει ἡ (1) ἂν $\gamma<0$;

3ον: **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως:**

$$K=\frac{\Gamma}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}, \text{ ἂν } \alpha>0,\ \beta>0 \text{ καὶ } \nu\in\Phi.$$

***Λύσις:*** Κατὰ τὰ ἀνωτέρω θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$K=\frac{\Gamma}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}=\frac{\Gamma(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}=\frac{\Gamma(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}.$$

Ὁμοίως: $$\Lambda=\frac{\Delta}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}=\frac{\Delta(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}=\frac{\Delta(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\alpha-\beta}$$

Οὕτω, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{1(2-\sqrt{3})}{4-3}-\frac{1(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2}+\frac{1(2+\sqrt{3})}{4-3}=$$

$$=(2-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(2+\sqrt{3})=2-\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{3}=$$

$$=4-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

4ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:**

$$A=\sqrt{\frac{1}{(2-\sqrt{5})^2}}-\sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}}.$$

***Λύσις:*** Ἐπειδὴ $2-\sqrt{5}<0$, ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\frac{\sqrt{5}+2}{5-4}-\frac{\sqrt{5}-2}{5-4}=(\sqrt{5}+2)-(\sqrt{5}-2)=4.$$

5ον: **Ἐὰν $(\alpha,\beta,\mu)\in\Pi_\alpha^+$ καὶ $\alpha>\beta$, νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί:**

$$A=\sqrt{\alpha+\mu}-\sqrt{\alpha} \quad \text{καὶ} \quad B=\sqrt{\beta+\mu}-\sqrt{\beta}.$$

***Λύσις :*** Διὰ νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ Α καὶ Β, ἀρκεῖ νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοὶ $\frac{1}{A}$ καὶ $\frac{1}{B}$. Εἶναι δέ :

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\mu}-\sqrt{\alpha}}=\frac{\sqrt{\alpha+\mu}+\sqrt{\alpha}}{\mu} \quad \text{καὶ} \quad \frac{1}{B}=\frac{1}{\sqrt{\beta+\mu}-\sqrt{\beta}}=\frac{\sqrt{\beta+\mu}+\sqrt{\beta}}{\mu}$$

Ἄρα :

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}=\frac{\sqrt{\alpha+\mu}+\sqrt{\alpha}}{\mu}-\frac{\sqrt{\beta+\mu}+\sqrt{\beta}}{\mu}=$$

$$=\frac{(\sqrt{\alpha+\mu}-\sqrt{\beta+\mu})+(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}{\mu}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha>\beta$, ἕπεται $\alpha+\mu>\beta+\mu$ καὶ $\sqrt{\alpha+\mu}>\sqrt{\beta+\mu}$ καὶ $\sqrt{\alpha}>\sqrt{\beta}$, τὸ δεύτερον μέλος τῆς (1) εἶναι θετικόν. Ἄρα :

$$\frac{1}{A}-\frac{1}{B}>0 \quad \text{ἢ} \quad \frac{1}{A}>\frac{1}{B}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad A<B.$$

6ον : **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως :**

$$\mathbf{A=\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}}.$$

***Λύσις :*** Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$A=\frac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{[(2+\sqrt{3})-\sqrt{5}][(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}]}=$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2+3+2\sqrt{6}-5}=\frac{12(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})}{\sqrt{6}}=\frac{6(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6}}{6}=$$

$$=(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}.$$

7ον : **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως :**

$$\mathbf{\Pi=\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}} \qquad (\alpha,\ \beta>0 \quad \text{καὶ} \quad \nu\in\Phi) \qquad (1)$$

***Λύσις :*** Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται διαδοχικῶς :

$$\Pi=\frac{A}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{A}{\alpha-\beta}\cdot\frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu-(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}-\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{A}{\alpha-\beta}(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\beta^2}+\ldots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}})$$

Οὕτω :

$$\frac{5}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}=\frac{5}{7-2}(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot2}+\sqrt[3]{2^2})=\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}.$$

8ον : **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως :**

$$\mathbf{P=\frac{B}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}} \qquad (\alpha,\beta>0, \quad \nu\in\Phi) \qquad (2)$$

***Λύσις:*** Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

**α')**. Ἔστω : $\nu=2\rho+1$=περιττὸς ἀριθμός. Ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$P=\frac{B}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{B}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\alpha+\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{B}{\alpha+\beta}\cdot\frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu+(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{B}{\alpha+\beta}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\beta}-\ldots+\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right).$$

Οὕτω : $$\frac{8}{\sqrt[5]{5}+\sqrt[5]{3}}=\frac{8}{5+3}\left(\sqrt[5]{5^4}-\sqrt[5]{5^3\cdot 3}+\sqrt[5]{5^2\cdot 3^2}-\sqrt[5]{5\cdot 3^3}+\sqrt[5]{3^4}\right)=$$

$$=\sqrt[5]{625}-\sqrt[5]{375}+\sqrt[5]{225}-\sqrt[5]{135}+\sqrt[5]{81}.$$

**β')**. Ἔστω : $\nu=2\rho$=ἄρτιος. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$P=\frac{B}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{B}{\alpha-\beta}\cdot\frac{\alpha-\beta}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{B}{\alpha-\beta}\cdot\frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu-(\sqrt[\nu]{\beta})^\nu}{\sqrt[\nu]{\alpha}+\sqrt[\nu]{\beta}}=$$

$$=\frac{B}{\alpha-\beta}\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-1}}-\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-2}\beta}+\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu-3}\beta^2}-\ldots-\sqrt[\nu]{\beta^{\nu-1}}\right).$$

Οὕτω : $$\frac{3}{\sqrt[4]{5}+\sqrt[4]{2}}=\frac{3}{5-2}\left(\sqrt[4]{5^3}-\sqrt[4]{5^2\cdot 2}+\sqrt[4]{5\cdot 2^2}-\sqrt[4]{2^3}\right)=$$

$$=\sqrt[4]{125}-\sqrt[4]{50}+\sqrt[4]{20}-\sqrt[4]{8}.$$

9ον : **Νὰ ρητοποιηθῇ ὁ παρονομαστὴς τῆς παραστάσεως :**

$$\Sigma=\frac{\Gamma}{\sqrt[\lambda]{\alpha}\pm\sqrt[\nu]{\beta}}\qquad (\alpha,\beta)>0,\qquad (\nu,\lambda)\in\Phi$$

***Λύσις:*** Ἡ δοθεῖσα παράστασις ἰσοδυναμεῖ μὲ τήν :

$$\Sigma=\frac{\Gamma}{\sqrt[\lambda]{\alpha}\pm\sqrt[\nu]{\beta}}=\frac{\Gamma}{\sqrt[\lambda\nu]{\alpha^\nu}\pm\sqrt[\lambda\nu]{\beta^\lambda}}$$

**καὶ** ἀναγόμεθα εἰς τὰ παραδείγματα 7ον καὶ 8ον, καθόσον ὁ δείκτης λν θὰ εἶναι **περιττὸς** ἢ ἄρτιος.

Οὕτω : $$\frac{2}{\sqrt[3]{5}\pm\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt[6]{5^2}\pm\sqrt[6]{2^3}}=\frac{2}{\sqrt[6]{25}\pm\sqrt[6]{8}}=\ldots$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Νὰ γίνῃ ρητοποίησις τοῦ παρονομαστοῦ ἑκάστης τῶν ἀκολούθων παραστάσεων :

**1.** $\dfrac{1-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ **2.** $\dfrac{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}{1-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$ **3.** $\dfrac{x-y}{x+y+2\sqrt{xy}}$

4. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 5. $\dfrac{7}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}}$ 6. $\dfrac{5}{1-\sqrt[3]{2}}$

7. $\dfrac{13}{\sqrt[6]{7}+\sqrt[6]{6}}$ 8. $\dfrac{11}{\sqrt[3]{4}-\sqrt{3}}$ 9. $\dfrac{23}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[6]{2}}$.

**B.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1. $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}=8,$ 2. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}+\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}=\sqrt{2}.$

3. $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4. $\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=2x.$

5. $\dfrac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}+\dfrac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha+\sqrt{\alpha^2-1}}=2(2\alpha^2-1)$

6. $\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}+\dfrac{\sqrt{\alpha+\beta}+\sqrt{\alpha-\beta}}{\sqrt{\alpha+\beta}-\sqrt{\alpha-\beta}}=\dfrac{2\alpha}{\beta}$

7. $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{1-\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\dfrac{2}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}+\dfrac{3}{\sqrt{2}}=1$

**Γ.** Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

2. $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\dfrac{4\sqrt{xy}}{x-y}$

3. $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{2}{\sqrt{1-x^4}}$

4. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ 5. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

**Δ.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις:

1. $\left(\dfrac{\sqrt{x+\alpha}}{\sqrt{x-\alpha}}-\dfrac{\sqrt{x-\alpha}}{\sqrt{x+\alpha}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^3-\alpha^3}}{\sqrt{(x+\alpha)^2-\alpha x}}$ 2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}$

3. $\left(\sqrt{2x}+\sqrt{2(2x-1)}-\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{2x}}+\sqrt{2(2x-1)}-\sqrt{2x}\right)$

4. $\dfrac{1}{\alpha\sqrt{\alpha+1}+(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}-\dfrac{\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha(\alpha+1)}}$ 5. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$

6. $\dfrac{\nu^3-3\nu+(\nu^2-1)\sqrt{\nu^2-4}-2}{\nu^3-3\nu+(\nu^2-1)\sqrt{\nu^2-4}+2}$  7. $\dfrac{\sqrt{8}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt{8}-\sqrt[3]{4}}$

8. $\dfrac{27x^3-9x-2+(9x^2-1)\sqrt{9x^2-4}}{27x^3-9x+2+(9x-1)\sqrt{9x^2-3}}$

**Ε.** Νὰ γίνῃ ρητοποίησις τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀκολούθων παραστάσεων:

1. $\dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}}$  2. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$  3. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{8}}$.

**291. Παραστάσεις τῆς μορφῆς: $\alpha\pm\beta\sqrt{\gamma}$.** Εἰς τὰς παραστάσεις τῆς μορφῆς ταύτης ὑποθέτομεν ὅτι οἱ $\alpha,\beta,\gamma$ εἶναι ρητοὶ ἀριθμοὶ καὶ $\gamma>0$, μὴ τέλειον τετράγωνον. Τὴν παράστασιν ταύτην καλοῦμεν ***διώνυμον ὡς πρὸς*** $\sqrt{\gamma}$.

Εὔκολα ἀποδεικνύεται ὅτι: ***Πᾶσα ἀκεραία δύναμις τῆς παραστάσεως $\alpha\pm\beta\sqrt{\gamma}$ εἶναι διώνυμον ὡς πρὸς $\sqrt{\gamma}$.***

Οὕτω, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

α'). $(\alpha+\beta\sqrt{\gamma})^2=\alpha^2+\beta^2\gamma+2\alpha\beta\sqrt{\gamma}=(\alpha^2+\beta^2\gamma)+2\alpha\beta\sqrt{\gamma}=K+\Lambda\sqrt{\gamma}$,

**ἂν** τεθῇ $\alpha^2+\beta^2\gamma=K$ καὶ $2\alpha\beta=\Lambda$.

β'). $(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})^3=\alpha^3-\beta^3\sqrt{\gamma}^3-3\alpha\beta\sqrt{\gamma}(\alpha-\beta\sqrt{\gamma})=\alpha^3-\beta^3\gamma\sqrt{\gamma}-3\alpha^2\beta\sqrt{\gamma}+$
$+3\alpha\beta^2\gamma=(\alpha^3+3\alpha\beta^2\gamma)-(\beta^3\gamma+3\alpha^2\beta)\sqrt{\gamma}=M-N\sqrt{\gamma}$,

**ἂν** τεθῇ $\alpha^3+3\alpha\beta^2\gamma=M$ καὶ $\beta^3\gamma+3\alpha^2\beta=N$.

**292. Θεώρημα Ι.** ***Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in P$ καὶ $(\alpha,\gamma)>O$ μὴ τέλεια τετράγωνα, τότε, ἂν $\sqrt{\alpha}=\beta+\sqrt{\gamma}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\beta=O$ καὶ $\alpha=\gamma$.*** Πράγματι, ἐὰν $\beta=0$, τότε ἡ ἰσότης $\sqrt{\alpha}=\beta+\sqrt{\gamma}$ γίνεται:

$$\sqrt{\alpha}=\sqrt{\gamma}$$

Ἐπειδὴ δὲ $\alpha>0$, $\gamma>0$, ἕπεται $(\sqrt{\alpha})^2=(\sqrt{\gamma})^2$ ἢ $\alpha=\gamma$.

***Ἀντιστρόφως:*** Ἐὰν $\beta\neq 0$ καὶ $\sqrt{\alpha}=\beta+\sqrt{\gamma}$, θὰ εἶναι καὶ

$$\alpha=\beta^2+\gamma+2\beta\sqrt{\gamma},\quad \text{ἐξ οὗ:}\quad \sqrt{\gamma}=\frac{\alpha-\beta^2-\gamma}{2\beta}=\text{ρητὸς ἀριθμός},$$

ὅπερ ἄτοπον, καθόσον ὑπετέθη ὅτι ὁ γ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ὥστε, θὰ εἶναι $\beta=0$, ὁπότε καὶ $\alpha=\gamma$.

**293. Θεώρημα ΙΙ.** ***Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in P$, οἱ δὲ β καὶ δ θετικοὶ καὶ δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα καὶ ὑφίσταται ἡ ἰσότης:***

$$\alpha+\sqrt{\beta}=\gamma+\sqrt{\delta},\qquad (1)$$

***νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.***

Πράγματι, ἐὰν $\alpha=\gamma$, τότε ἡ (1) καταντᾷ:

$$\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta},\quad \text{ἐξ οὗ}\quad \beta=\delta.$$

Ἐξ ἄλλου ἡ (1) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\sqrt{\beta}=(\gamma-\alpha)+\sqrt{\delta},$$

ὁπότε, βάσει τοῦ προηγουμένου θεωρήματος, θὰ εἶναι:

$$\gamma-\alpha=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \alpha=\gamma \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \beta=\delta.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι, ἂν ὑφίσταται ἡ ἰσότης:

$$\alpha-\sqrt{\beta}=\gamma-\sqrt{\delta}, \qquad (2)$$

ὑπὸ τὰς αὐτὰς προϋποθέσεις, τότε θὰ εἶναι $\alpha=\gamma$ καὶ $\beta=\delta$.

Ἡ ἀπόδειξις τῆς πρώτης περιπτώσεως γίνεται καὶ κατ' ἄλλον τρόπον, ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν $\alpha\neq\gamma$, θὰ εἶναι καὶ $\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\delta}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$\sqrt{\beta}-\sqrt{\delta}=\gamma-\alpha \quad \text{καὶ} \quad \sqrt{\beta}+\sqrt{\delta}=\frac{\beta-\delta}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\delta}}=\frac{\beta-\delta}{\gamma-\alpha}, \quad \text{ἕπεται ὅτι:}$$

$$2\sqrt{\beta}=\gamma-\alpha+\frac{\beta-\delta}{\gamma-\alpha}=\text{ρητὸς ἀριθμός, ὅπερ ἄτοπον.}$$

Κατ' ἀνάγκην $\alpha=\gamma$, ὁπότε $\sqrt{\beta}=\sqrt{\delta}$, ἐξ οὗ: $\beta=\delta$.

**294. Θεώρημα III.** ***Ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης*** $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$, ***ἔνθα*** $(\alpha, \beta, x, y)\in P$, ***οἱ δὲ*** $(\beta, x, y)>O$ ***καὶ μὴ τέλεια τετράγωνα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:***

$$\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|.$$

Πράγματι, ἐκ τῆς δοθείσης σχέσεως $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$,

λαμβάνομεν: $\qquad \alpha+\sqrt{\beta}=x+y+2\sqrt{xy}$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $\quad \alpha=x+y \quad$ καὶ $\quad \sqrt{\beta}=2\sqrt{xy}$.

Ἄρα: $\qquad \alpha-\sqrt{\beta}=x+y-2\sqrt{xy}=(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2$

ἐξ οὗ: $\qquad \sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=|\sqrt{x}-\sqrt{y}|.$

**295. Θεώρημα IV.** ***Ἐὰν ὑφίσταται ἡ ἰσότης*** $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\beta}}=x+\sqrt{y}$, ***ἔνθα*** $(\alpha, \beta, x, y)\in P$ ***καὶ*** $(\beta, y)>O$ ***καὶ μὴ τέλεια τετράγωνα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:*** $\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\beta}}=x-\sqrt{y}$.

Πράγματι, ὑψοῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς $\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{\beta}}=x+\sqrt{y}$ εἰς τὸν κύβον, λαμβάνομεν τὴν ἰσότητα:

$$\alpha+\sqrt{\beta}=x^3+3x^2\sqrt{y}+3xy+y\sqrt{y}=(x^3+3xy)+(3x^2+y)\sqrt{y}$$
$$=(x^3+3xy)+\sqrt{(3x^2+y)^2y}$$

Ἄρα θὰ εἶναι: $\quad \alpha=x^3+3xy \quad$ καὶ $\quad \sqrt{\beta}=\sqrt{(3x^2+y)^2y}$,

ὁπότε: $\qquad \alpha-\sqrt{\beta}=x^3+3xy-\sqrt{(3x^2+y)^2y}=x^3+3xy-(3x^2+y)\sqrt{y}$
$$=(x-\sqrt{y})^3$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $\qquad \sqrt[3]{\alpha-\sqrt{\beta}}=x-\sqrt{y}.$

***296 Θεώρημα V.** ***Ἐὰν οἱ συντελεσταὶ τοῦ πολυωνύμου $f(x)$ εἶναι ρητοὶ ἀριθμοί, μηδενίζεται δὲ τοῦτο διὰ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$, ὅπου $(\alpha,\beta)\in P$ καὶ ὁ $\beta>0$ δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ $f(x)$ μηδενίζεται καὶ διὰ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$.***

Πράγματι, ἀφοῦ τὸ $f(x)$ μηδενίζεται διὰ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$, θὰ εἶναι:

$$f(\alpha+\sqrt{\beta})=0. \qquad (1)$$

Σχηματίζομεν τὸ γινόμενον:

$$\sigma(x)=[x-(\alpha+\sqrt{\beta})][x-(\alpha-\sqrt{\beta})]=(x-\alpha)^2-\beta=x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta.$$

Ἔστω ὅτι τὸ $f(x)$, διαιρούμενον διὰ τοῦ $\sigma(x)$, δίδει πηλίκον $\Pi(x)$ καὶ ὑπόλοιπον $\gamma x+\delta$. Θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$f(x)\equiv\sigma(x)\Pi(x)+\gamma x+\delta \qquad (2)$$

Διὰ $x=\alpha+\sqrt{\beta}$, ἡ (2) γίνεται:

$$f(\alpha+\sqrt{\beta})=\sigma(\alpha+\sqrt{\beta})\Pi(\alpha+\sqrt{\beta})+\gamma(\alpha+\sqrt{\beta})+\delta$$

ἢ $$0=0\cdot\Pi(\alpha+\sqrt{\beta})+(\alpha\gamma+\delta)+\gamma\sqrt{\beta}=(\alpha\gamma+\delta)+\gamma\sqrt{\beta} \qquad (3)$$

ἐξ οὗ: $\gamma=0$. Διότι, ἐὰν ἦτο $\gamma\neq0$, θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι:

$$\sqrt{\beta}=-\frac{\alpha\gamma+\delta}{\gamma}=\text{ρητός, ὅπερ ἄτοπον.}$$

Ἀφοῦ $\gamma=0$, ἡ (3) δίδει καὶ $\delta=0$. Ἄρα ἡ (2) καταντᾷ:

$$f(x)\equiv\sigma(x)\Pi(x) \qquad (4)$$

Αὕτη, διὰ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$, γίνεται:

$$f(\alpha-\sqrt{\beta})=\sigma(\alpha-\sqrt{\beta})\Pi(\alpha-\sqrt{\beta})=0,$$

καθόσον $\sigma(\alpha-\sqrt{\beta})=0$. Ἄρα τὸ $f(x)$ μηδενίζεται καὶ διὰ $x=\alpha-\sqrt{\beta}$.

**297. Ἐφαρμογαί.** 1ον: ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $8+2\sqrt{15}$.***

***Λύσις:*** Ἔστω ὅτι: $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$. (1)

Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη ταύτης εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν:

$$8+2\sqrt{15}=x+y+2\sqrt{xy}$$

Ἄρα: $x+y=8$ καὶ $xy=15$.

Ἐπειδὴ $(x,y)>0$, θὰ εἶναι $x=3$, $y=5$, ἢ $x=5$, $y=3$.

Ἄρα ἡ (1) γίνεται: $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

Ὁμοίως, ἐὰν $\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}$, θὰ εἶναι καὶ

$$19-8\sqrt{3}=x+y-2\sqrt{xy},$$

ἐξ οὗ: $x+y=19$ καὶ $2\sqrt{xy}=8\sqrt{3}$.

ἢ $x+y=19$ καὶ $xy=48$

Ἄρα: $x=16$ καὶ $y=3$, ὁπότε:

$$\sqrt{19-8\sqrt{3}}=\sqrt{16}-\sqrt{3}=4-\sqrt{3},$$

2ον: ***Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ*** $72-32\sqrt{5}$.

***Λύσις:*** Ἐὰν $\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=x-\sqrt{y}$, (1)

θὰ εἶναι καὶ $\sqrt[3]{72+32\sqrt{5}}=x+\sqrt{y}$ (2)

Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη τῶν (1) καὶ (2) ἔχομεν:

$\sqrt[3]{72^2-32^2\cdot 5}=x^2-y$ ἢ $4=x^2-y$, ἐξ οὗ: $y=x^2-4$. (3)

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν:

$$72-32\sqrt{5}=x^3-3x^2\sqrt{y}+3xy-y\sqrt{y}$$

ἐξ οὗ:
$$72=x^3+3xy=x^3+3x(x^2-4)$$

ἐξ οὗ πάλιν:
$$x^3-3x-18=0$$
$$(x-3)(x^2+3x+6)=0$$

ἢ
$$(x-3)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]=0.$$

Ἐπειδὴ ὁ δεύτερος παράγων εἶναι θετικὸς διὰ $x\in\Pi_\alpha$, ἕπεται ὅτι:

$$x=3 \quad \text{καὶ ἄρα} \quad y=x^2-4=3^2-4=5.$$

Ἄρα ἡ (1) γίνεται: $\sqrt[3]{72-32\sqrt{5}}=3-\sqrt{5}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ ἰσότης $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\alpha+\beta$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ $\alpha=0$ ἢ $\beta=0$.

Δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}=\alpha-\beta$;

**2.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in P$ καὶ $\alpha+\beta\sqrt{2}=\gamma\sqrt{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

**3.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in P$ καὶ $\alpha+\beta\sqrt{2}+\gamma\sqrt[3]{2}=0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$\alpha=\beta=\gamma=0.$$

**4.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,x,y)\in P$ καὶ $(\beta,y)>0$, μὴ τέλεια τετράγωνα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἰσότης $\alpha+\sqrt{\beta}=x-\sqrt{y}$ εἶναι ἀδύνατος.

**5.** Ἐὰν $(x,y)\in\Phi$ μὴ τέλεια τετράγωνα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ εἶναι ἄρρητος.

**6.** Ὁμοίως ἡ διαφορὰ $\sqrt{x}-\sqrt{y}$ εἶναι ἄρρητος, ἂν $x\neq y$.

**7.** Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x, y, z, ἂν ὑφίσταται ἡ ἰσότης:
$$\sqrt{21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}-\sqrt{z}.$$

**8.** Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ: $9\sqrt{3}+11\sqrt{2}$.

**9** Ἐὰν $x=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ καὶ $y=\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:
$$A=7x^2+11xy-7y^2$$

**10.** Ἐὰν $f(x)=x^2-2x-1$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί:

$$f(\sqrt{2}+1) \quad \text{καὶ} \quad f(\sqrt{2}-1).$$

**11.** Ἐὰν $f(x)=x^4-6x^3+8x^2+2x-1$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί:

$$f(2-\sqrt{3}) \quad \text{καὶ} \quad f(2+\sqrt{3}).$$

**12.** Ἐὰν $\sqrt[4]{\alpha+\sqrt{\beta}}=x+\sqrt{y}$ τότε $\sqrt[4]{\alpha-\sqrt{\beta}}=x-\sqrt{y}$,

ἂν $(\alpha, \beta, x\, y) \in \Phi$, $(\beta, y)>0$ καὶ μὴ τέλεια τετράγωνα.

**13.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ρίζα τῶν ἀριθμῶν:

$$10+6\sqrt{3}, \quad 38+17\sqrt{5}, \quad 99-70\sqrt{2}.$$

**14.** Ἂν $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in P$ καὶ $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\delta}$ ἄρρητοι καὶ $k=\alpha+\varepsilon_1\sqrt{\beta}$, $\lambda=\gamma+\varepsilon_2\sqrt{\delta}$, ὅπου $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$ εἶναι ἢ 1 ἢ $-1$, τότε, διὰ νὰ εἶναι $k+\lambda$ ρητὸς καὶ $k\lambda$ ρητὸς πρέπει καὶ ἀρκεῖ: $\alpha=\gamma$ καὶ $\varepsilon_1\sqrt{\beta}=\varepsilon_2\sqrt{\delta}$.

**298. Διπλᾶ ριζικά.** Διπλᾶ ριζικὰ εἶναι παραστάσεις τῆς μορφῆς:

$$\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}, \tag{1}$$

ἔνθα $\alpha, \beta$ ρητοὶ θετικοὶ καὶ $\sqrt{\beta}$ ἄρρητος.

***Διὰ νὰ ὑπάρχουν ρητοὶ θετικοὶ $x$ καὶ $y$ τοιοῦτοι, ὥστε:***

$$\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}=\sqrt{x} \pm \sqrt{y},$$

***πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\alpha>0$ καὶ $\alpha^2-\beta=\gamma^2$, $\gamma \in P$.***

Πράγματι, πρέπει, διότι ἀπὸ τὴν (1) συνάγομεν ὅτι:

$$\alpha \pm \sqrt{\beta}=x+y \pm 2\sqrt{xy}$$

Ἄρα: $x+y=\alpha>0$ καὶ $\sqrt{\beta}=2\sqrt{xy}$, ἐξ οὗ: $4xy=\beta$.

Ἐπειδὴ δὲ διὰ τοὺς $x$ καὶ $y$ ἰσχύει ἡ ταυτότης

$$(x+y)^2-4xy=(x-y)^2,$$

θὰ ἔχωμεν: $\alpha^2-\beta=(x-y)^2$, ἢ $(x-y)^2=\alpha^2-\beta=\gamma^2$, ἐξ οὗ: $x-y=|\gamma|$

Ἄρα ἡ πρότασις ἰσχύει διὰ $x-y=\gamma$.

Ἐκ τῶν σχέσεων:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=|\gamma| \end{array}\right\} \Rightarrow x=\frac{\alpha+|\gamma|}{2} \quad \text{καὶ} \quad y=\frac{\alpha-|\gamma|}{2}.$$

***Ἀντιστρόφως:*** Ἐπειδὴ οἱ $x$ καὶ $y$ εἶναι θετικοὶ καὶ ρητοί, θὰ ἔχωμεν:

$$(\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2=x+y \pm 2\sqrt{xy}=\alpha \pm \sqrt{\beta},$$

ὅθεν καὶ

$$\sqrt{x} \pm \sqrt{y}=\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}}.$$

Ὥστε, ἐὰν $\alpha>0$ καὶ $\sqrt{\alpha^2-\beta}=$ ρητὸς ἀριθμός, τότε θὰ εἶναι:

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{\frac{\alpha+|\gamma|}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-|\gamma|}{2}}$$

$$\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\sqrt{x}-\sqrt{y}=\sqrt{\frac{\alpha+|\gamma|}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-|\gamma|}{2}}$$

$$\left.\begin{aligned}\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}&=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}+\sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}\\ \text{ἢ}\qquad \sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}&=\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}-\sqrt{\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta}}{2}}\end{aligned}\right\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : 1ον : **Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ ἡ παράστασις:**

$$A=\sqrt{31+12\sqrt{3}}$$

***Λύσις :*** Ἡ παράστασις Α γράφεται διαδοχικῶς :

$$A=\sqrt{31+12\sqrt{3}}=\sqrt{31+\sqrt{12^2\cdot 3}}=\sqrt{31+\sqrt{432}}.$$

Ἐπειδὴ $\alpha=31$ καὶ $\beta=432$, ἕπεται ὅτι :

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta}=\sqrt{31^2-432}=\sqrt{961-432}=\sqrt{529}=23.$$

Ἄρα :

$$A=\sqrt{31+\sqrt{432}}=\sqrt{\frac{31+23}{2}}+\sqrt{\frac{31-23}{2}}=\sqrt{27}+\sqrt{4}=3\sqrt{3}+2.$$

2ον : **Νὰ μετασχηματισθῇ εἰς ἁπλᾶ ριζικὰ ἡ παράστασις :**

$$B=\sqrt{20-12\sqrt{6}}.$$

***Λύσις :*** Ἐπειδὴ $30-12\sqrt{6}>0$, ἡ παράστασις Β ἔχει ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Αὕτη γράφεται :
$$B=\sqrt{30-\sqrt{864}}$$

Ἐπειδὴ $\alpha=30$, $\beta=864$, ἕπεται ὅτι :

$$\gamma=\sqrt{\alpha^2-\beta}=\sqrt{900-864}=\sqrt{36}=6.$$

Ἄρα :

$$B=\sqrt{30-\sqrt{864}}=\sqrt{\frac{30+6}{2}}-\sqrt{\frac{30-6}{2}}=\sqrt{18}-\sqrt{12}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$$

3ον : **Δίδεται ἡ παράστασις :** $\mathbf{y=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}.$

**α΄). Νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς.**

**β΄). Νὰ ἁπλοποιηθῇ αὕτη εἰς τὸ ἐν λόγῳ πεδίον ὁρισμοῦ.**

***Λύσις :*** α΄). Διὰ νὰ ἔχῃ ἔννοιαν πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἡ παράστασις y, πρέπει :
$$x-1\geqslant 0,\quad x+2\sqrt{x-1}\geqslant 0 \quad\text{καὶ}\quad x-2\sqrt{x-1}\geqslant 0.$$

Ἐκ τῆς πρώτης τούτων ἕπεται $x\geqslant 1$.

Διὰ τὰς τιμὰς ταύτας τοῦ x ἀληθεύει καὶ ἡ δευτέρα σχέσις.

Ἡ τρίτη σχέσις γράφεται : $x\geqslant 2\sqrt{x-1}$.

Ἐπειδὴ $x\geqslant 1$, τὰ μέλη ταύτης εἶναι θετικά. Ἄρα :

$$x^2\geqslant 4(x-1)\quad\text{ἢ}\quad x^2-4x+4\geqslant 0\quad\text{ἢ}\quad (x-2)^2\geqslant 0,$$

ἡ ὁποία ἀληθεύει διὰ $\forall x\in\Pi_\alpha$.

Ἄρα :
$$y\in\Pi_\alpha,\quad\text{διὰ}\quad x\geqslant 1.$$

β΄). Ὑψοῦμεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς παραστάσεως εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν :
$$y^2=x+2\sqrt{x-1}+x-2\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2-4(x-1)}=2x+2\sqrt{(x-2)^2}$$
ἢ
$$y^2=2[x+|x-2|].$$

Ἐὰν $1 \leqslant x \leqslant 2$, θὰ εἶναι: $y^2=2[x-(x-2)]=4$, ἐξ οὗ: $y=2$, καθόσον $y \geqslant 0$.
Ἐὰν $x \geqslant 2$, θὰ εἶναι:

$$y^2=2(x+x-2)=2(2x-2)=4(x-1), \text{ ἐξ οὗ: } y=2\sqrt{x-1}.$$

Διὰ $x=\frac{5}{4}$ ἢ $x=5$, εἶναι $y=4$. Ἀποδείξατε τοῦτο.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**Α.** Τὰ ἀκόλουθα διπλᾶ ριζικὰ νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἁπλᾶ.

**1.** $\sqrt{8+\sqrt{15}}$, $\sqrt{8-\sqrt{15}}$, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

**2.** $\sqrt{28+5\sqrt{12}}$, $\sqrt{28-5\sqrt{12}}$, $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$, $\sqrt{9-4\sqrt{2}}$

**3.** $\sqrt{\sqrt{32}+\sqrt{24}}$, $\sqrt{\sqrt{27}-\sqrt{15}}$, $\sqrt{\sqrt{27}-2\sqrt{6}}$, $\sqrt{3\sqrt{5}-\sqrt{40}}$

**4.** $\sqrt{\alpha+2\sqrt{\alpha-1}}$, $\sqrt{2\alpha+2\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$, $\sqrt{x^2+y+2x\sqrt{y}}$

**5.** $\sqrt{x+y+2\sqrt{xy}}$, $\sqrt{x+y-2\sqrt{xy}}$

**6.** $\sqrt{\alpha+\beta-\sqrt{2\alpha\beta+\beta^2}}$, $\sqrt{\alpha x^2+\beta y^2+2xy\sqrt{\alpha\beta}}$

**7.** $\sqrt{x+y+\omega+2\sqrt{(x+y)\omega}}$, $\sqrt{x+y-\omega-2\sqrt{(y-\omega)x}}$

**Β.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

**1.** $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{5}-1$

**2.** $\sqrt{13-2\sqrt{42}}+\sqrt{11-2\sqrt{30}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{3}+\sqrt{7}$

**3.** $$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$$

**4.** $$\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2$$

**5.** $$\frac{1}{\sqrt{12-\sqrt{140}}}-\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{60}}}-\frac{2}{\sqrt{10+\sqrt{84}}}=0$$

**6.** $$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}}-\frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}}-\frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}=0$$

**7.** $$\frac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$$

**8.** $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$

**9.** $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{5}}$

**10.** $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

**Γ.** Νὰ συγκριθοῦν οἱ ἀριθμοί:

**1.** $A=(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ καὶ $B=30-12\sqrt{6}$.

**2.** $A_1=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$ καὶ $B_1=\sqrt{30-12\sqrt{6}}$

**3.** $A_2=5-2\sqrt{5}$ καὶ $B_2=\sqrt{45-20\sqrt{5}}$

**4.** $A_3=2-\sqrt{3}$ καὶ $B_3=\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

**5.** Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν ἀριθμῶν:

$$\alpha=5+2\sqrt{5} \quad \text{καὶ} \quad \beta=85-38\sqrt{5}.$$

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$y=\sqrt{\alpha+2\beta\sqrt{\alpha-\beta^2}}+\sqrt{\alpha-2\beta\sqrt{\alpha-\beta^2}}$$

ἰσοῦται μὲ $2\beta$, ἂν $\beta^2\leqslant\alpha\leqslant2\beta^2$ καὶ μὲ $2\sqrt{\alpha-\beta^2}$, ἂν $\alpha>2\beta^2$, $(\beta>0)$.

**2.** Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

1. $y=x(x+1)(x+2)(x+3)$ διὰ $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$

2. $y=x^3+3x$ διὰ $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

3. $y=\dfrac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\dfrac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ διὰ $x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

4. $y=\dfrac{\sqrt{\alpha+x}-\sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha+x}+\sqrt{\alpha-x}}$ διὰ $x=\dfrac{2\alpha\beta}{\beta^2+1}$

5. $y=\dfrac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}}$ διὰ $x=2+\sqrt{3}$ καὶ $x=2-\sqrt{3}$

6. $y=\dfrac{2\beta\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ διὰ $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)$, $(\alpha, \beta>0)$

7. $y=\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt{\beta}}x^2-2\alpha x+\alpha\sqrt{\beta}$ διὰ $x=\dfrac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}}$, καὶ

$$x=\frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}, \quad (\alpha, \beta>0)$$

**3.** Ἐὰν $\alpha>\beta>0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{2}\left(2\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \equiv \sqrt{(\alpha+\beta)^3}-\sqrt{(\alpha-\beta)^3}.$$

**4.** Θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν τῶν ἀριθμῶν $x_\nu$, ὁριζομένην ὑπὸ τῆς σχέσεως:

$$x_\nu=\frac{\sqrt{3}+x_{\nu-1}}{1-\sqrt{3}\cdot x_{\nu-1}} \qquad \text{μὲ} \quad x_1=1.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη εἶναι περιοδική.

**5.** Ἐὰν οἱ $\alpha$ καὶ $\beta$ εἶναι ρητοὶ καὶ διάφοροι τοῦ μηδενός, νὰ ὁρισθοῦν οἱ ρητοὶ $x$ καὶ $y$ οὕτως, ὥστε:

$$(\alpha+\beta\sqrt{5})(x+y\sqrt{5})=\beta+\alpha\sqrt{5}.$$

**6.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ ἑκάστης τῶν παραστάσεων:

$$A=\frac{1}{|x|+1}, \quad B=\sqrt{-(1-x)^2}, \quad \Gamma=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

**7.** Θεωροῦμεν τὴν ἀκολουθίαν:

$$x_1, \quad x_2=\frac{1+x_1}{1-x_1}, \quad x_3=\frac{1+x_2}{1-x_2},\ldots,x_\nu=\frac{1+x_{\nu-1}}{1-x_{\nu-1}},\ldots$$

εἰς τὴν ὁποίαν $x_1\neq-1$, $x_1\neq0$, καὶ $x_1\neq1$.

α'). Νὰ δειχθῇ ὅτι διὰ $\nu\geqslant1$ ἔχομεν: $x_\nu\cdot x_{\nu+2}=-1$.

β'). Ἐὰν $x_1=\sqrt{2}-1$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἀκολουθία:

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3,\ldots, \quad x_\nu,\ldots$$

εἶναι περιοδική.

γ'). Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ: $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$, διὰ $x_1=\sqrt{2}-1$.

**8.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Pi_\alpha^+$ καὶ ἰσχύῃ ἡ ἰσότης:

$$\frac{x-\alpha}{\sqrt{x}+\sqrt{\alpha}}+\frac{x-\beta}{\sqrt{x}+\sqrt{\beta}}=\frac{x-\gamma}{\sqrt{x}+\sqrt{\gamma}}$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $x=(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})^2$, ἂν $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\geqslant\sqrt{\gamma}$ καὶ $x>0$.

**9.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{(\nu+1)\sqrt{\nu}+\nu\sqrt{\nu+1}}=\frac{1}{\sqrt{\nu}}-\frac{1}{\sqrt{\nu+1}}, \qquad \text{ἂν } \nu\in\Phi.$$

καὶ ἀκολούθως νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:

$$\Sigma=\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

**10.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωγικὴ ρίζα τῆς παραστάσεως:

$$A=2(\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2})(\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}).$$

**11.** Ἐὰν $|\alpha|+|\beta|>0$ καὶ $(\alpha,\beta)\in P$, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός:

$$y=\alpha\sqrt[3]{4}+\beta\sqrt[3]{2} \quad \text{εἶναι ἄρρητος.}$$

**12.** Δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ εἶναι ἄρρητος.

**13**. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1, \quad \sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}=2$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{108}+10}-\sqrt[3]{\sqrt{108}-10}=2, \quad \sqrt[2]{\sqrt{243}+\sqrt{242}}-\sqrt[2]{\sqrt{243}-\sqrt{242}}=2\sqrt{2}.$$

**14**. Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}, \quad \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}}+\sqrt[3]{54-30\sqrt{3}},$$

$$(\sqrt{3}-1)\sqrt[3]{9+5\sqrt{3}}+(\sqrt{3}+1)\sqrt[3]{9-5\sqrt{3}},$$

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}.$$

**15**. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων:

$f(x)=x^3+3x^2-7x+6$ διὰ $x=1+\sqrt{2}$, $x=1-\sqrt{2}$.

$f_1(x)=2x^3-5x^2+11x-9$ διὰ $x=\sqrt{7}-3$, $x=\sqrt{7}+3$.

$f_2(x)=5x^3-7x^2+3x-1$ διὰ $x=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

**16**. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀκόλουθοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι.

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2}\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{2}\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$$

$$(\sqrt{6}-\sqrt{2})(2+\sqrt{3})\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\,(\sqrt{3}-1).$$

$$\sqrt[3]{\alpha+\frac{\alpha+1}{3}\sqrt{\frac{8\alpha-1}{3}}}+\sqrt[3]{\alpha-\frac{\alpha+1}{3}\sqrt{\frac{8\alpha-1}{3}}} \qquad (\text{θέσατε } 8\,\alpha=3\beta^2+1)$$

**17**. Ἐὰν οἱ ἀκέραιοι $\alpha,\beta,\gamma$ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν:

$$\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}+\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\gamma.$$

θὰ εἶναι τῆς μορφῆς $\alpha=2k^2-\mu$, $\beta=4k^2(k^2-\mu)$, $\gamma=2k$, ἔνθα $(k,\mu)\in\Phi$.

Ἀνάλογοι συνθῆκαι νὰ εὑρεθοῦν, ὅταν: $\sqrt{\alpha+\sqrt{\beta}}-\sqrt{\alpha-\sqrt{\beta}}=\gamma$.

**18**. Ἐὰν $x>2$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$$

**19**. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀκόλουθοι ἀριθμοὶ εἶναι ἀκέραιοι:

$$\sqrt{-\sqrt[4]{3}+\sqrt{-1+\sqrt{4+2\sqrt{3}}}}, \quad \sqrt{-\sqrt{3}+\sqrt{3+8\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}$$

**20.** Ἐὰν $(x,y,z,\omega) \in P$, καὶ πληροῦται ἡ σχέσις:

$$\frac{x(\sqrt{3}+\sqrt{2})+y}{z(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\omega}=3+\sqrt{2}-\sqrt{6}$$

**νὰ** ὑπολογισθοῦν οἱ $x$, $y$, $z$, $\omega$.

**21.** Ἐὰν $x=\frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{2\alpha-\beta}{\beta}}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1-\alpha x}{1+\alpha x}\sqrt{\frac{1+\beta x}{1-\beta x}}=1.$$

**22.** Ἐὰν $(\alpha, \beta)>0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{\sqrt{\alpha^6}+\sqrt{\alpha^4\beta^2}}+\sqrt{\sqrt{\alpha^2\beta^4}+\sqrt{\beta^6}}=\sqrt{(\alpha+\beta)^3}$$

**23.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:

$$A=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}.$$

$$B=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}-\sqrt{(1-\sqrt{5})^2}.$$

**24.** Δίδεται ἡ παράστασις: $\sqrt{x^5-x^4y}-\sqrt{4x^3y^2-4x^2y^3}+\sqrt{xy^5-y^5}$.

α'). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αὕτη ἔχει ἔννοιαν μόνον ἂν $x \geqslant y$

β'). Ἰσοῦται μὲ $\sqrt{(x-y)^5}$, ὅταν $xy>0$

γ'). Ποίαν μορφὴν λαμβάνει αὕτη, ὅταν $xy<0$

δ'). Νὰ γίνῃ ἐπαλήθευσις διά:
$(x=2,\ y=1)$, $(x=-1,\ y=-2)$, $(x=2,\ y=-1)$.

**25.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$A=\sqrt[3]{4\alpha^3+3\mu\alpha\beta^2+(4\alpha^2+\mu\beta^2)\sqrt{\alpha^2+\mu\beta^2}}+\sqrt[3]{4\alpha^3+3\mu\alpha\beta^2-(4\alpha^2+\mu\beta^2)\sqrt{\alpha^2+\mu\beta^2}}$$

**26.** Ἐὰν $x>0$ καὶ $y>0$, νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$A=\sqrt{x^2(x-y)^2}+\sqrt{y^2(x-y)^2}-2\sqrt{x^2y^2}$$

**27.** Ἐὰν $\alpha>0$, διὰ ποίας τιμὰς τοῦ $x$ ἔχει ἔννοιαν ἡ παράστασις:

$$B=\sqrt{x-\sqrt{2\alpha x-\alpha^2}}+\sqrt{x+\sqrt{2\alpha x-\alpha^2}}\ ;$$

**28.** Ἐὰν $(x,y,z,\omega) \in P$, $(\sqrt{y}, \sqrt{\omega}) \in A_\varrho$ καὶ $\sqrt[3]{x-\sqrt{y}}=z-\sqrt{\omega}$, **νὰ ἀποδειχθῇ** ὅτι: $\sqrt[3]{x^2-y} \in P$.

**29.** $x \in \Phi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ἀριθμοί:

$$A=\sqrt{x(x+1)(x+2)} \quad \text{καὶ} \quad B=\sqrt[3]{x(x+1)(x+2)}$$

**εἶναι** ἄρρητοι.

**299. Δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ρητοὺς ἀριθμούς.** Ἔστω $\frac{\mu}{\nu}$ ρητὸς ἀριθμὸς ($\nu \neq 0$) καὶ $\alpha > 0$ οἱοσδήποτε ἀριθμός. Τὴν $\frac{\mu}{\nu}$ δύναμιν τοῦ ἀριθμοῦ α θὰ τὴν συμβολίζωμεν διὰ τοῦ:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$$

καὶ θὰ διαβάζωμεν: ***ἄλφα εἰς τὴν*** $\frac{\mu}{\nu}$.

***Τὸν ἀριθμὸν*** $\sqrt[|\nu|]{\alpha^{|\mu|}}$ ***(πρωτεύουσαν ρίζαν) θὰ τὸν ὀνομάζωμεν δύναμιν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α μὲ ἐκθέτην τὸν θετικὸν ρητὸν*** $\frac{\mu}{\nu}$.

Δηλαδή, ἐὰν $\frac{\mu}{\nu} > 0$ καὶ $\alpha > 0$, θὰ γράφωμεν:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \quad \text{(πρωτεύουσα ρίζα).}$$

***Τὸν ἀριθμὸν*** $\frac{1}{\sqrt[|\nu|]{\alpha^{|\mu|}}}$ ***θὰ τὸν ὀνομάζωμεν δύναμιν τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ α μὲ ἐκθέτην τὸν ἀρνητικὸν ρητὸν ἀριθμὸν*** $\frac{\mu}{\nu}$.

Δηλαδή, ἐὰν $\frac{\mu}{\nu} < 0$ καὶ $\alpha > 0$, θὰ γράφωμεν:

$$\alpha^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}$$

Οὕτω, θὰ εἶναι: $\alpha^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{\alpha^4}$, $\alpha^{1,5} = \alpha^{\frac{15}{10}} = \alpha^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\alpha^3}$

καί: $$\alpha^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\alpha^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha^2}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\alpha^2}\cdot\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\alpha}.$$

ΣΗΜ.: Εἰς μερικὰς περιπτώσεις εἶναι δυνατὸν ἡ βάσις α νὰ εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Τότε ἡ παράστασις $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ νόημα πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Οὕτω: $$(-32)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-32} = -2.$$

Ἀλλά: $$(-32)^{\frac{2}{10}} = \sqrt[10]{(-32)^2} = \sqrt[10]{32^2} = \sqrt[5]{32} = +2$$

Δηλαδή: $$(-32)^{\frac{1}{5}} \neq (-32)^{\frac{2}{10}}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν δὲν δυνάμεθα νὰ ἐργασθῶμεν εὐχερῶς μὲ τοιαύτας δυνάμεις.

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δοθέντων ὁρισμῶν, ἕπεται ὅτι: ***κάθε ρίζα δύναται νὰ γραφῇ ὡς δύναμις μὲ ἐκθέτην κλασματικόν.***

Αἱ δυνάμεις αὗται, ἂν καὶ ἔχουν διάφορον ἔννοιαν ἀπὸ τὰς ἤδη γνωστὰς δυνάμεις μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους, ὑπακούουν εἰς τοὺς νόμους ἐκείνων.

Ἀποδεικνύονται δὲ οἱ νόμοι οὗτοι ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα θεωρήματα.

**300. Θεώρημα I.** ***Τὸ γινόμενον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ α ἰσοῦται μὲ δύναμιν τοῦ α, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.***

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\lambda}{\varrho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\varrho]{\alpha^{\lambda}} = \sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\mu\varrho}} \cdot \sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\nu\lambda}} = \sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\mu\varrho+\nu\lambda}} = \alpha^{\frac{\mu\varrho+\nu\lambda}{\nu\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\varrho}}$$

Ὥστε:

$$\boldsymbol{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \alpha^{\frac{\lambda}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\lambda}{\varrho}}}.$$

**301. Θεώρημα II.** ***Δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ α εἰς ἄλλην δύναμιν, ἰσοῦται μὲ δύναμιν τοῦ α, ἔχουσαν ἐκθέτην τὸ γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.***

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\lambda}{\varrho}} = \sqrt[\varrho]{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\lambda}} = \sqrt[\varrho]{\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\lambda}} = \sqrt[\varrho]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\lambda\mu}}} = \sqrt[\varrho\nu]{\alpha^{\lambda\mu}} = \alpha^{\frac{\lambda\mu}{\nu\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\lambda}{\varrho}}$$

Ὥστε:

$$\boldsymbol{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\lambda}{\varrho}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\lambda}{\varrho}}}.$$

**302. Θεώρημα III.** ***Γινόμενον ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ἕκαστος παράγων ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ κατόπιν πολλαπλασιασθοῦν τὰ ἐξαγόμενα.***

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}\cdot\beta^{\mu}\cdot\gamma^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma^{\mu}} =$$

$$= \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$$

Ὥστε:

$$\boldsymbol{(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}}.$$

**303. Θεώρημα IV.** ***Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἂν ἕκαστος ὅρος αὐτοῦ ὑψωθῇ εἰς τὴν δύναμιν ταύτην καὶ κατόπιν διαιρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα.***

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = (\alpha\cdot\beta^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{-\frac{\mu}{\nu}} = \alpha^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \frac{1}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

Ὥστε: $$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}}=\frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

**304. Θεώρημα V.** ***Τὸ πηλίκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ α, εἶναι δύναμις τοῦ α, ἔχουσα ἐκθέτην τὴν διαφορὰν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ διαιρετέου.***

Πράγματι, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{\frac{\lambda}{\varrho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}:\sqrt[\varrho]{\alpha^{\lambda}}=\sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\varrho\mu}}:\sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\lambda\nu}}=\sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\varrho\mu}:\alpha^{\lambda\nu}}=$$
$$=\sqrt[\nu\varrho]{\alpha^{\varrho\mu-\lambda\nu}}=\alpha^{\frac{\varrho\mu-\lambda\nu}{\nu\varrho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\lambda}{\varrho}}.$$

Ὥστε: $$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}:\alpha^{\frac{\lambda}{\varrho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\lambda}{\varrho}}.$$

ΣΗΜ.: Πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μὲ θετικοὺς ῥητοὺς ἐκθέτας ἰσχύουν καὶ ὅταν αἱ δυνάμεις ἔχουν ἐκθέτας οἱουσδήποτε ῥητοὺς ἀρνητικοὺς ἢ ῥητοὺς θετικούς, ἀδιακρίτως.

Οὕτω, θὰ εἶναι:

$$\alpha^{4,5}\cdot\alpha^{-0,5}=\alpha^{4},\quad (\alpha^{-0,75})^{-4}=\alpha^{3}$$
$$\alpha^{-3,14159}:\alpha^{-0,14159}=\alpha^{-3},\quad \alpha^{4}\cdot\alpha^{-4,5}=\alpha^{-0,5}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ ἄρρητον κλάσμα:**

$$\mathbf{A}=\frac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}.$$

***Λύσις:*** Θέτομεν $x^{\frac{1}{3}}=\alpha$, $y^{\frac{1}{3}}=\beta$ καὶ ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$A=\frac{\alpha^5-\alpha^4\beta-\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3}{\alpha^5-2\alpha^3\beta^2+\alpha\beta^4}=\frac{\alpha^4(\alpha-\beta)-\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)}{\alpha(\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4)}=\frac{\alpha^2(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)}{\alpha(\alpha^2-\beta^2)^2}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},$$

ἂν $\alpha(\alpha-\beta)\neq 0$.

Ἤτοι: $$A=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}.$$

2ον: **Ἐὰν $(\alpha,\beta)\in\Pi_{\alpha}^{+}$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως**

$$\mathbf{f(x)}=\frac{2\beta(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}{x-(x^2-1)^{\frac{1}{2}}},\ \textbf{διὰ}\ x=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

***Λύσις:*** Ἡ δοθεῖσα παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$f(x)=\frac{2\beta\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{2\beta\sqrt{x^2-1}\,(x+\sqrt{x^2-1})}{x^2-(x^2-1)}=2\beta\,(\sqrt{x^2-1}+x^2-1).$$

Θὰ εἶναι δέ:

$$x^2-1=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+2\right)-1=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2.$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν $\alpha\leqslant\beta$, τότε $\alpha^2\leqslant\beta^2$, ἐξ οὗ: $\frac{\alpha}{\beta}\leqslant\frac{\beta}{\alpha}$. Ἄρα:

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)$$

καὶ

$$x\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$f(x)=2\beta\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\right]=\frac{\beta}{2}\left(2\cdot\frac{\beta}{\alpha}-2\right)=\frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha}$$

β'). Ἐὰν $\alpha>\beta$, τότε $\alpha^2>\beta^2$, ἐξ οὗ: $\frac{\alpha}{\beta}>\frac{\beta}{\alpha}$ καὶ ἄρα:

$$\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$$

$$x\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$f(x)=2\beta\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right)\right]=\frac{\beta}{2}\left(2.\frac{\alpha}{\beta}-2\right)=\alpha-\beta.$$

3ον: **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:**

$$A\equiv\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

*Ἀπόδειξις:* Ἐπειδή: $\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\equiv\alpha^{\frac{4}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)\Rightarrow$

$$\left(\alpha^2+\alpha^{\frac{4}{3}}\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv\alpha^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ὁμοίως: $\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{3}{4}}\equiv\beta^{\frac{4}{3}}\left(\beta^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{2}{3}}\right)\Rightarrow\left(\beta^2+\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv\beta^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Ἄρα:

$$A\equiv\alpha^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{2}{3}}\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\equiv\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}\equiv\left(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν ἀκολούθων παραστάσεων :

1. $8^{\frac{4}{3}}$, $16^{\frac{5}{4}}$, $31^{\frac{1}{4}}$, $256^{\frac{1}{4}}$, $(0{,}027)^{\frac{1}{6}}$, $(0{,}00032)^{\frac{1}{10}}$.

2. $(-27)^{\frac{1}{3}}$, $(-512)^{\frac{1}{9}}$, $(-0{,}125)^{\frac{1}{3}}$, $(-0{,}000064)^{\frac{1}{15}}$.

3. $\left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$, $(-27)^{\frac{4}{3}}$, $(0{,}216)^{\frac{1}{3}}$, $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$, $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

**2.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀκολούθων πράξεων :

1. $\alpha^{\frac{1}{3}}\cdot\alpha^{\frac{7}{6}}$, $\alpha^{\frac{5}{4}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}}$, $\alpha^{\frac{1}{4}}\cdot\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{1}{12}}$.

2. $\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{5}{4}}\cdot\alpha^{\frac{1}{4}}$, $\alpha^{\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{-\frac{5}{6}}\cdot\alpha^{\frac{1}{2}}$, $\alpha^{\frac{3}{4}}\cdot\alpha^{-\frac{2}{3}}\cdot\alpha^{\frac{3}{2}}\cdot\alpha^{-\frac{1}{6}}$.

3. $\alpha^{\frac{5}{3}}:\alpha^{\frac{5}{6}}$, $\alpha^2:\alpha^{\frac{1}{2}}$, $(\alpha^{\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{3}{4}}\cdot\alpha^{\frac{7}{8}}):\alpha^{\frac{1}{8}}$.

4. $(\alpha^{\frac{3}{4}})^{\frac{2}{3}}$, $(\alpha^{\frac{5}{2}})^{\frac{3}{5}}$, $(\alpha^{\frac{3}{2}})^{\frac{4}{3}}:(\alpha^{\frac{3}{5}})^{\frac{5}{9}}$.

5. $\alpha^{-\frac{1}{3}}\cdot\beta^{-\frac{1}{2}}\cdot\alpha^{\frac{5}{6}}(\beta^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}$, $[(\alpha^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\cdot\alpha^{\frac{5}{6}}\cdot\alpha^{-\frac{1}{6}}]:\alpha^{\frac{3}{4}}$.

**3.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

1. $(\gamma^3)^{\frac{2}{3}}\cdot(\gamma^{-\frac{1}{2}})^{\frac{4}{5}}\cdot\sqrt{\gamma^{\frac{4}{5}}}$, $(\sqrt[4]{\beta^2})^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[9]{\beta^{-3}}:(\sqrt{\beta^{-7}})^{\frac{1}{6}}$

2. $\sqrt[3]{x^6\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot\omega^{\frac{1}{2}}}\cdot y^{\frac{7}{9}}(2^{-6}x^4y^2\omega^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}$, $\sqrt[\alpha]{\frac{\sqrt[\beta]{x}}{\sqrt[\gamma]{x}}}\cdot\sqrt[\beta]{\frac{\sqrt[\gamma]{x}}{\sqrt[\alpha]{x}}}\cdot\sqrt[\gamma]{\frac{\sqrt[\alpha]{x}}{\sqrt{x}}}$.

3. $\left[\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt[5]{\beta}^{-1}}\cdot\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt[6]{\alpha}}{\beta^{-1}}\right]^2$, $\left(\frac{\alpha^3}{\beta^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{\gamma^2}{\beta^{-1}}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(\frac{\alpha^{-\frac{3}{2}}}{\beta\gamma^{-3}}\right)^{\frac{1}{6}}$.

**4.** Νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀκολούθων πράξεων:

1. $(\alpha^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})$, $(\alpha^{\frac{1}{2}}+\beta^{\frac{1}{2}})(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}})$,

2. $(\alpha^{\frac{1}{3}}-\beta^{\frac{1}{3}})(\alpha^{\frac{2}{3}}+\alpha^{\frac{1}{3}}\beta^{\frac{1}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})$, $(\alpha^{\frac{1}{2}}-\beta^{\frac{1}{2}})(\alpha^{-\frac{1}{2}}+\beta^{-\frac{1}{2}})$

**5.** Νὰ ἁπλοποιηθοῦν αἱ ἀκόλουθοι παραστάσεις :

1. $(x^{\frac{1}{2}}-\alpha^{\frac{1}{4}}+1)(\alpha^{\frac{1}{2}}+\alpha^{\frac{1}{4}}+1)(\alpha-\alpha^{\frac{1}{2}}+1)$

2. $(2^{\frac{1}{4}}\alpha+3^{\frac{1}{4}}\beta)(3^{\frac{1}{4}}\alpha-2^{\frac{1}{4}}\beta)-6^{\frac{1}{4}}(\alpha^2-\beta^2)+2^{\frac{1}{2}}\alpha\beta$.

3. $\dfrac{x-y}{x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}, \qquad \dfrac{x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-2x^{\frac{1}{8}}+1}.$

4. $\dfrac{\alpha^2-\alpha^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}-2\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{3}{4}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}}, \qquad \dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{1}{3}}-xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y}{x^{\frac{5}{3}}-2xy^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{4}{3}}}$

5. $\dfrac{\alpha-x+4\alpha^{\frac{1}{4}}-4\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}}, \qquad \dfrac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-32x^{-1}}{x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{2}}}$

**6.** Νὰ ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\left[\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha}\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}\right]:\left[\left(\beta^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\beta}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^{\alpha-\beta}\right],$$

ἂν $\alpha>0$, $\beta>0$ καὶ $\alpha\beta>1$.

**7.** Ἐὰν $\alpha>0$, $\beta>0$ καὶ $x=\alpha\left[1-\dfrac{16\beta^2}{(1+\beta)^4}\right]$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$A=\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\left[\alpha-(\alpha^2-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

## ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐὰν $\alpha>\beta>0$, $k>0$, $(\lambda>0)\in A_{\varkappa}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sqrt[\lambda]{\alpha^k}>\sqrt[\lambda]{\beta^k}$.

**2.** Ἐὰν $\alpha>\beta>0$, $k<0$, $(\lambda>0)\in A_{\varkappa}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\sqrt[\lambda]{\alpha^k}<\sqrt[\lambda]{\beta^k}$.

**3.** Ἐὰν $\alpha^{\frac{\mu}{\lambda}}=\beta^{\frac{\lambda}{\varrho}}$ καὶ $\alpha\neq\beta$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\mu}{\nu}=\dfrac{\lambda}{\varrho}$.

**4.** Ἐὰν $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\beta^{\frac{\lambda}{\varrho}}$ καὶ $\dfrac{\mu}{\nu}\neq\dfrac{\lambda}{\varrho}$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\alpha=\beta$.

**5.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Pi_{\alpha}^{+}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\geqslant\frac{1}{\sqrt{\beta\gamma}}+\frac{1}{\sqrt{\gamma\alpha}}+\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}}.$$

**6.** Ἐὰν $\nu>3$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sqrt[\nu]{\nu}>\sqrt[3]{3}$, $(\nu\in\Phi)$.

**7.** Ἐὰν $\nu>9$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\sqrt[\nu]{\nu}<\sqrt[3]{2}$, $(\nu\in\Phi)$.

**8.** Ἐὰν $\nu \in \Phi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2\nu} < \dfrac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$

**9.** Ἐὰν $\nu \in \Phi$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdots(4\nu-1)}{5\cdot 9\cdot 13\cdots(4\nu+1)} < \sqrt{\frac{3}{4\nu+3}}$$

**10.** Ἐὰν $\alpha_\nu > 0$, $\alpha_{\nu+1}^2 > \alpha_\nu \cdot \alpha_{\nu+2}$, $\nu \in \Phi$ καὶ $\alpha_1 = 1$, νὰ ὑποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt[\nu+1]{\alpha_{\nu+2}} > \sqrt[\nu+2]{\alpha_{\nu+3}}$$

καὶ ἀκολούθως ὅτι: $2 > \sqrt{3} > \sqrt[3]{4} > \dots > \sqrt[\nu+1]{\nu+2} > \dots$

**11.** Ἐὰν $(\alpha,\beta) \in \Pi_\alpha^+$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leqslant \sqrt{|\alpha-\beta|}$

**12.** Ἐὰν $\alpha \neq \beta$ καὶ $\gamma > 0$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\left|\sqrt{\alpha^2+\gamma^2} - \sqrt{\beta^2+\gamma}\right| < |\alpha-\beta|.$$

**13.** Ἐὰν $(\alpha,\beta) \in \Pi_\alpha^+$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} < \sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}.$$

**14.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \Pi_\alpha^+$ καὶ $\sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} < \sqrt[\varrho]{\gamma} < \sqrt[\sigma]{\delta}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\mu+\nu+\varrho+\sigma]{\alpha\beta\gamma\delta} < \sqrt[\sigma]{\delta}.$$

**15.** Ἐὰν $x < \alpha < \beta < \gamma$ ἢ $\alpha < \beta < \gamma < x$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$A = \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{|\alpha-x|}} + \frac{\gamma-\alpha}{\sqrt{|\gamma-\alpha|}} + \frac{\alpha-\beta}{\sqrt{|\alpha-\beta|}} < 0$$

καὶ ἐὰν $x > \alpha > \beta > \gamma$ ἢ $\alpha > \beta > \gamma > x$, τότε $A > 0$.

**16.** Ἐὰν $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \dfrac{\alpha_{\nu-1}}{\beta_{\nu-1}} = \dfrac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \dots = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \sqrt{\frac{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_\nu^2}{\beta_1^2 + \dots + \beta_\nu^2}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha_1^\nu + \alpha_2^\nu + \dots + \alpha_\nu^\nu}{\beta_1^\nu + \beta_2^\nu + \dots + \beta_\nu^\nu}}.$$

**305. Τετραγωνικὴ ρίζα ἑνὸς πολυωνύμου.** Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἐξαγάγωμεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πολυωνύμου:

$$f(x) = 49x^4 - 42x^3 - 19x^2 + 12x + 4,$$

ἐργαζόμεθα ὅπως καὶ εἰς τὴν ἐξαγωγὴν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνὸς ἀριθμοῦ. Ἀρκεῖ νὰ παρομοιάσωμεν τοὺς ὅρους τοῦ πολυωνύμου μὲ τὰ ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ. Πρὸς τοῦτο διατάσσομεν τὸ πολυώνυμον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις ἑνὸς γράμματος καὶ εὑρίσκομεν τὴν τετραγωνικὴν ρίζαν τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ πολυωνύμου. Τὸ τετράγωνον ταύτης ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυώνυμον.

Ἀκολούθως διπλασιάζομεν τὴν εὑρεθεῖσαν ρίζαν καὶ διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον τοῦ α΄ ὑπολοίπου διὰ τοῦ διπλασίου τούτου τῆς ρίζης. Τὸ εὑρεθὲν πηλίκον γράφομεν δεξιὰ τοῦ διπλασίου τῆς ρίζης καὶ τὸ οὕτω προκύπτον διώνυμον πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ εὑρεθὲν πηλίκον, τὸ δὲ ἐξαγόμενον ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ πρῶτον ὑπόλοιπον. Τὸ ἐν λόγῳ πηλίκον εἶναι ὁ δεύτερος ὅρος τῆς τετραγωνικῆς ρίζης, τὸν ὁποῖον γράφομεν δεξιὰ τοῦ πρώτου ὅρου τῆς ρίζης.

Διπλασιάζομεν τὸ οὕτω εὑρεθὲν διώνυμον τῆς τετραγωνικῆς ρίζης κ.λ.π., ὅπως εἰς τὴν ἀριθμητικήν.

Ἡ διάταξις τῆς πράξεως εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $49x^4-42x^3-19x^2+12x+4$<br>$-49x^4$ | $7x^2-3x-2$ | |
| $\upsilon_1=$ | $-42x^3-49x^2+12x+4$<br>$42x^3-9x^2$ | $14x^2-3x$<br>$-3x$<br>$-42x^3+9x^2$ | $14x^2-6x-2$<br>$-2$<br>$-28x^2+12x+4$ |
| $\upsilon_2=$ | $-28x^2+12x+4$<br>$28x^2-12x-4$ | | |
| $\upsilon_3=$ | $0$ | | |

Ἄρα θὰ εἶναι: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{(7x^2-3x-2)^2}=|\,7x^2-3x-2\,|$.

Παρατήρησις: Ἐὰν ἕνα πολυώνμμον εἶναι τέλειον τετράγωνον, τότε ἀπαραιτήτως οἱ ἄκροι ὅροι του εἶναι τέλεια τετράγωνα, ὅταν τοῦτο εἶναι διατεταγμένον.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου:**
**$f(x)=x^6+4x^5-6x^4-14x^3+12x^2-30x+9$.**

***Λύσις:*** Ἐργαζόμεθα ἀκριβῶς, ὅπως καὶ προηγουμένως:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x^6+4x^5-6x^4-14x^3+12x^2-30x+9$<br>$-x^6$ | $x^3+2x^2-5x+3$ | | |
| $\upsilon_1=$ | $4x^5-6x^4-14x^3+12x^2-30x+9$<br>$-4x^5-4x^4$ | $2x^3+2x^2$<br>$2x^2$<br>$4x^5+4x^4$ | $2x^3+4x^2$<br>$-5x$<br>$-10x^4-20x^3$ | $2x^3+4x^2-10x+3$<br>$3$<br>$6x^3+12x^2-30x+9$ |
| $\upsilon_2=$ | $-10x^4-14x^3+12x^2-30x+9$<br>$10x^4+20x^3$ | | | |
| $\upsilon_3=$ | $6x^3+12x^2-30x+9$<br>$-6x^3-12x^2+30x-9$ | | | |
| $\upsilon_4=$ | $0$ | | | |

Ἄρα: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{(x^3+2x^2-5x+3)^2}=|x^3+2x^2-5x+3|$

2ον: **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου :**

$$\mathbf{f(x)=(3x^2-7x-6)\,(6x^2-11x-10)\,(2x^2-11x+15).}$$

***Λύσις:*** Τὸ δοθὲν πολυώνυμον γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς :

$$f(x)=(3x+2)\,(x-3)\,(3x+2)\,(2x-5)\,(2x-5)\,(x-3)=(3x+2)^2\,(x-3)^2\,(2x-5)^2.$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{(3x+2)^2(x-3)^2(2x-5)^2}=|(3x+2)(x-3)(2x-5)|.$$

3ον: **Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα τὸ πολυώνυμον :**

$$\mathbf{f(x)=16x^4-56x^3+\alpha x^2-28x+\beta,}$$

**εἶναι τέλειον τετράγωνον.**

***Λύσις:*** Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ f(x) θὰ εἶναι τῆς μορφῆς : $4x^2+\lambda x+\mu$, ὁπότε θὰ πρέπῃ νὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα :

$$\begin{aligned}16x^4-56x^3+\alpha x^2-28x+\beta&\equiv(4x^2+\lambda x+\mu)^2\\&\equiv16^4+\lambda^2x^2+\mu^2+8\lambda x^3+8\mu x^2+2\lambda\mu x\\&\equiv16x^4+8\lambda x^3+(\lambda^2+8\mu)x^2+2\lambda\mu x+\mu^2.\end{aligned}$$

Ἄρα, κατὰ τὴν ( § 21 τόμος Α), θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι :

$$\left.\begin{aligned}8\lambda&=-56\\\lambda^2+8\mu&=\alpha\\2\lambda\mu&=-28\\\beta&=\mu^2\end{aligned}\right|\Longrightarrow\left.\begin{aligned}\lambda&=-7\\\mu&=2\\\alpha&=65\\\beta&=4\end{aligned}\right|\Longrightarrow\begin{aligned}&f(x)=16x^4-56x^3+65x^2-28x+4\\&\sqrt{f(x)}=\sqrt{(4x^2-7x+2)^2}=|4x^2-7x+2|\end{aligned}$$

4ον: **Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ν καὶ μ, ὥστε τὸ πολυώνυμον :**

$$\mathbf{f(x)=x^4+\nu x^3+\mu x^2+4x+1,}$$

**νὰ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἀκολούθως ἡ παράστασις :**

$$\mathbf{\sqrt[4]{f(x)}\,.}$$

***Λύσις:*** Κατὰ τὸ προηγούμενον παράδειγμα θὰ πρέπῃ :

$$\begin{aligned}x^4+\nu x^3+\mu x^2+4x+1&\equiv(\alpha x^2+\beta x+\gamma)^2\\&\equiv\alpha^2x^4+\beta^2x^2+\gamma^2+2\alpha\beta x^3+2\alpha\gamma x^2+2\beta\gamma x\\&\equiv\alpha^2x^4+2\alpha\beta x^3+(\beta^2+2\alpha\gamma)x^2+2\beta\gamma x+\gamma^2.\end{aligned}$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\left.\begin{aligned}\alpha^2&=1\\2\alpha\beta&=\nu\\\beta^2+2\alpha\gamma&=\mu\\2\beta\gamma&=4\\\gamma^2&=1\end{aligned}\right\}$$

Ἐκ τῆς $\alpha^2=1$, ἕπεται : $\alpha=\pm1$.
Ἐκ τῆς $\gamma^2=1$, ἕπεται : $\gamma=\pm1$.
Ἐὰν λάβωμεν $\alpha=1$ καὶ $\gamma=1$, τότε ἡ $2\beta\gamma=4$ γίνεται :

$$2\cdot\beta\cdot1=4,\quad\text{ἐξ οὗ :}\quad\beta=2$$

καὶ $\nu=2\alpha\beta=2\cdot1\cdot2=4$, $\mu=\beta^2+2\alpha\gamma=4+2=6$.

Οὕτω, διὰ $\nu=4$ καὶ $\mu=6$, τὸ πολυώνυμον :

$$f(x)=x^4+4x^3+6x^2+4x+1\equiv(x^2+2x+1)^2\equiv(x+1)^4.$$

Ἄρα :

$$\sqrt{f(x)}=(x+1)^2.$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\sqrt[4]{f(x)}=\sqrt{\sqrt{f(x)}}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|.$$

Διὰ $\alpha=1$ καὶ $\gamma=-1$, εὑρίσκομεν : $\beta=-2$, $\nu=-4$, $\mu=2$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x^4-4x^3+2x^2+4x+1}=\sqrt{(x^2-2x-1)^2}=|x^2-2x-1|;$$

Διὰ $\alpha=-1$ καὶ $\gamma=1$ εὑρίσκομεν;

Διὰ $\alpha=-1$ καὶ $\gamma=-1$, εὑρίσκομεν;

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων:

1. $\alpha^2+6\alpha+9$ 2. $x^2-10x+25$

3. $16\alpha^4+56\alpha^2\beta^2+49\beta^4$ 4. $25x^6+40\alpha\beta x^3+16\alpha^2\beta^2$

5. $(\alpha+3)^2+6x(\alpha+3)+9x^2$ 6. $(x-y)^4+25\alpha^8+10\alpha^4(x-y)^2$

7. $x^2+2xy+y^2-2x-2y+1$ 8. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+12\alpha-12\beta+36$

9. $4x^2-8\alpha x+4\alpha^2-2\alpha x+20\alpha+25$

10. $9y^4+24y^3-20y^2-48y+36$ 11. $\alpha^4-4\alpha^3+12\alpha^2-16\alpha+16$

12. $16x^4-56x^2y+89x^2y^2-70xy^3+25y^4$

13. $1+6\mu+\mu^2-30\mu^3-2\mu^4+24\mu^5+9\mu^6$

14. $\alpha^6-10\alpha^5\beta+19\alpha^4\beta^2+38\alpha^3\beta^3-31\alpha^2\beta^4-24\alpha\beta^3+16\beta^4$

15. $4x^6+12x^5y-15x^4y^2-20x^3y^3+60x^2y^4-48xy^5+16y^6$.

**2.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$A=\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)+1$$

εἶναι τέλειον τετράγωνον. Ἀκολούθως δὲ νὰ εὑρεθοῦν τέσσαρες διαδοχικοὶ ἀριθμοί, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι 43680.

**3.** Ἐὰν $x=y+1$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τοῦ πολυωνύμου:

$$4x^6-12x^3y^2+13y^4+6x^3-5y^2-6x-8y.$$

**4.** Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α καὶ β, ἵνα αἱ ἀκόλουθαι παραστάσεις εἶναι τέλεια τετράγωνα:

1. $9x^4+12x^3-20x^2+\alpha x+\beta$ 2. $16x^4+24x^3+\alpha x^2+\beta x+4$

3. $25x^4-20x^3+\alpha x^2-12x+\beta$.

**5.** Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ α,β,γ, ἵνα τὰ ἀκόλουθα πολυώνυμα:

1. $4x^6-4x^5+13x^4+\alpha x^3+\beta x^2+6x+\gamma$

2. $9x^6+12x^5-8x^4+\alpha x^3+20x^2+\beta x+\gamma$,

εἶναι τέλεια τετράγωνα. Ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα αὐτῶν, διὰ τὰς ἐν λόγῳ τιμὰς τῶν α, β, γ.

**6.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετραγωνικὴ ρίζα τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων:

1. $(2\alpha^2-\alpha-6)(2\alpha^2-6\alpha+4)(4\alpha^2+2\alpha-6)$

2. $(6x^2-13x+6)(3x^2-11x+6)(2x^2-9x+9)$

3. $(15y^2-17y+4)(10y^2-3y-4)(6y^2+7y-3)(4y^2+8y+3)$

4. $(2\alpha^2-\alpha-28)(6\alpha^2+25\alpha+14)(3\alpha^2-13\alpha-10)(\alpha^2-9\alpha+20)$.

**7.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ τετάρτη ῥίζα τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων :

1. $\alpha^8-12\alpha^7+58\alpha^6-144\alpha^5+195\alpha^4-144\alpha^3+58\alpha^2-12\alpha+1$
2. $16x^8+32x^7y-8x^6y^2-40x^5y^3+x^4y^4+20x^3y^5-2x^2y^6-4xy^7+y^8$.

**306. Κυβικὴ ῥίζα πολυωνύμου.** Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὴν κυβικὴν ῥίζαν τοῦ πολυωνύμου :

$$f(x)=x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3+1.$$

Ἐπειδὴ τὸ πολυώνυμον f(x) εἶναι ἕκτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, ἡ κυβική του ῥίζα θὰ εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x καὶ τῆς μορφῆς :

$$\lambda x^2+\mu x+\nu.$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$$x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1\equiv(\lambda x^2+\mu x+\nu)^3\equiv$$
$$\equiv\lambda^3x^6+\mu^3x^3+\nu^3+3\lambda^2x^4(\mu x+\nu)+3\mu^2x^2(\lambda x^2+\nu)+3\nu^2(\lambda x+\mu x)+6\lambda\mu\nu x^3$$
$$\equiv\lambda^3x^6+\mu^3x^3+\nu^3+3\lambda^2\mu x^5+3\lambda^2\nu x^4+3\mu^2\lambda x^4+3\mu^2\nu x^2+3\nu^2\lambda x^2+3\mu\nu^2x+6\lambda\mu\nu x^3$$
$$\equiv\lambda^3x^6+3\lambda^2\mu x^5+(3\lambda^2\nu+3\mu^2\lambda)x^4+(\mu^3+6\lambda\mu\nu)x^3+(3\mu^2\nu+3\nu^2\lambda)x^2+3\mu\nu^2x+\nu^3$$

Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\lambda^3=1,\quad 3\lambda^2\mu=3,\quad 3\lambda^2\nu+3\mu^2\lambda=6,\quad \mu^3+6\lambda\mu\nu=7,$$
$$3\mu^2\nu+3\nu^2\lambda=6,\quad 3\mu\nu=3,\quad \nu^3=1.$$

Ὅθεν : $\lambda=1,\quad \nu=1,\quad \mu=1.$ Ὁπότε :

$$\lambda x^2+\mu x+\nu = x^2+x+1$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν :

$$\sqrt[3]{f(x)}=\sqrt[3]{(x^2+x+1)^3}=x^2+x+1.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Νὰ εὑρεθῇ ἡ κυβικὴ ῥίζα τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων :

1. $\alpha^3+3\alpha^2+3\alpha+1$
2. $8\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha-1$
3. $\alpha^3x^3-3\alpha^2x^2y^2+3\alpha xy^4-y^6$
4. $64\alpha^3-144\alpha^2\beta+108\alpha\beta^2-27\beta^3$
5. $1-6x+21x^2-44x^3+63x^4-54x^5+27x^6$
6. $8\alpha^6-36\alpha^4+66\alpha^4+63\alpha^3+33\alpha^2-9\alpha+1$
7. $27x^6-54x^5\alpha+117x^4\alpha^2-116x^3\alpha^3+117x^2\alpha^4-54x\alpha^5+27\alpha^6$
8. $\frac{x^3}{8}-\frac{3x^2}{4}+\frac{3x}{2}-1,$
9. $\frac{x^3}{27}+\frac{2x^2}{3}+4x+8$
10. $\frac{x^3}{27}-\frac{x^2}{4}+2x-7+\frac{18}{x}-\frac{27}{x^2}+\frac{27}{x^3}.$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV

## ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

### ΟΡΙΣΜΟΙ—ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

**307. Ὁρισμός.** ***Καλοῦμεν ἐξίσωσιν τοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς x, πᾶσαν ἀκεραίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς:***

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0. \qquad (1)$$

Ὁ συντελεστὴς $\alpha\neq0$, οἱ δὲ συντελεσταὶ β καὶ γ δύνανται νὰ εἶναι καὶ μηδέν, ἀλλ' ἀνεξάρτητοι τοῦ x.

Ἐὰν ἦτο $\alpha=0$, τότε (1) θὰ ἐγίνετο $\beta x+\gamma=0$. Δηλαδὴ ἐξίσωσις πρώτου βαθμοῦ ὡς πρὸς x.

Οὕτω, αἱ ἐξισώσεις:

$$2x^2=0, \quad 2x^2+5x-3=0, \quad 3x^2+7x=0, \quad 4x^2-9=0,$$

εἶναι ἐξισώσεις τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

Θὰ καλοῦμεν ***ρίζαν*** τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$, ἢ ***ρίζαν*** τοῦ πολυωνύμου $f(x)$, πᾶσαν τιμὴν $x_0$ τοῦ x, διὰ τὴν ὁποίαν $f(x_0)=0$.

Οὕτω, ἡ ἐξίσωσις: $2x^2+9x-5=0$, ἐπιδέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $x_0=-5$, διότι εἶναι:

$$f(-5)=2(-5)^2+9\cdot(-5)-5=2\cdot25-45-5=50-50=0.$$

Ἐὰν $\beta=\gamma=0$, ἡ (1) γίνεται: $\alpha x^2=0$. (2)

Ἐὰν $\beta=0$ ἡ (1) καταντᾷ: $\alpha x^2+\gamma=0$. (3)

Ἐὰν $\gamma=0$ ἡ (1) γράφεται: $\alpha x^2+\beta x=0$. (4)

Αἱ ἐξισώσεις (2), (3) καὶ (4) καλοῦνται ***ἐλλιπεῖς*** μορφαί.

Ἡ ἐξίσωσις (1) καλεῖται ***πλήρης*** μορφὴ τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως.

**308. Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2=0$.** Ἐπειδὴ $\alpha\neq0$, ἐκ τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha x^2=0 \Longrightarrow x^2=0, \quad \text{ἢ} \quad x\cdot x=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x=0 \quad (\text{διπλῆ ρίζα}).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Ἐὰν $3x^2=0$,** τότε: $x^2=0$, ἐξ οὗ: $x=0$.

2ον: **Ἐὰν $-\frac{2}{7}x^2=0$,** ἕπεται $x^2=0$, ἐξ οὗ: $x=0$.

**309. Ἐπίλυσις τῆς $\alpha x^2+\gamma=0$.** Ἐπειδὴ $\alpha\neq0$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\gamma=0$ γράφεται:

$$\alpha\left(x^2+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2+\frac{\gamma}{\alpha}=0. \qquad (1)$$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

α'). Ἐὰν ***οἱ α καὶ γ εἶναι ὁμόσημοι,*** τότε $\frac{\gamma}{\alpha}>0$. Ἄρα καὶ

$$x^2+\frac{\gamma}{\alpha}>0.$$

διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, ὅπερ ἄτοπον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\gamma=0$ ***δὲν ἔχει λύσιν εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.***

Ἐὰν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν τὴν § 274, τότε ἐκ τῆς:

$$x^2+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Rightarrow x^2=-\frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}=\pm i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

Ἄρα ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\gamma=0$, ἔχει δύο ρίζας φανταστικάς:

$$x_1=i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad x_2=-i\sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

ὅταν $\alpha\gamma>0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $3x^2+12=0$.**

***Λύσις:*** Ἡ ἐξίσωσις $3x^2+12=0$ γράφεται:

$x^2+4=0$ ἢ $x^2=-4$, ἐξ οὗ: $x=\pm\sqrt{-4}=\pm i\sqrt{4}=\pm i2$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $x_1=2i$ καὶ $x_2=-2i$.

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $-5x^2-45=0$.**

***Λύσις:*** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$5x^2+45=0$ ἢ $x^2=-9$, ἐξ οὗ: $x=\pm\sqrt{-9}=\pm i\sqrt{9}=\pm 3i$.

Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως εἶναι: $x_1=3i$ καὶ $x_2=-3i$.

β'). Ἐὰν ***οἱ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι,*** τότε ὁ ἀριθμὸς $\frac{\gamma}{\alpha}<0$,

ὁπότε $-\frac{\gamma}{\alpha}>0$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ (1) γράφεται:

$$x^2-\left(-\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2-\left(\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)^2=0$$

ἢ

$$\left(x-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)\left(x+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}\right)=0,$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγομεν ὅτι:

$$x_1=+\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{καὶ} \quad x_2=-\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $4x^2-36=0$.**

***Λύσις:*** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$4x^2=36$ ἢ $x^2=9$, ἐξ οὗ: $x=\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $4x^2-75=0$.**

***Λύσις:*** Ἐκ τῆς $4x^2-75=0$, λαμβάνομεν:

$$4x^2=75 \quad ἢ \quad x^2=\frac{75}{4}, \quad ἐξ\ οὗ: \quad x=\pm\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

**310. Ἐπίλυσις τῆς $\alpha x^2+\beta x=0$.** Ἡ ἐξίσωσις αὕτη γράφεται:

$$x(\alpha x+\beta)=0.$$

Αὕτη ἀναλύεται εἰς τὰς ἐξισώσεις: $x=0$ καὶ $\alpha x+\beta=0$.

Ἐκ τῆς δευτέρας τούτων λαμβάνομεν: $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $5x^2-20x=0$.**

***Λύσις:*** Ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$$x^2-4x=0 \quad ἢ \quad x(x-4)=0, \quad ἐξ\ οὗ: \quad x=0 \quad καὶ \quad x=4.$$

2ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $2x^2+5x=0$.**

***Λύσις:*** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$x(2x+5)=0, \quad ἐξ\ οὗ: \quad x=0 \quad καὶ \quad x=-\frac{5}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

$$2x^2=0, \quad -4x^2=0, \quad \frac{2}{3}x^2=0, \quad 4{,}5x^2=0, \quad \sqrt{2}x^2=0.$$

**2.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $3x^2-27=0$, $2x^2-50=0$, $\dfrac{4}{5}x^2-125=0$.
2. $3x^2+27=0$, $5x^2+125=0$, $2x^2+8=0$, $6x^2+96=0$.

**3.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $x^2-3x=0$, $3x^2+7x=0$, $-4x^2+11x=0$, $-13x^2-5x=0$.
2. $(x+5)^2=25$, $(x+2)(x+6)=12$, $(x-4)(x+5)=-20$.
3. $\dfrac{x^2-2x}{3}=\dfrac{x^2-3}{4}+\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{x^2+9}{3}-\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{x^2+6}{4}$.

**4.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $(x-2)(x+8)=6x$, $(x+5)(x+4)=9x$
2. $4(x+1)-x(x-4)=8x$, $10(x-3)^2+10(x+3)^2=29(x^2-9)$
3. $x^2-\beta x=0$, $5x^2=7\beta x$, $x^2-\alpha^2=0$, $(x-2\alpha)^2=4\alpha^2$.

**311. Ἐπίλυσις τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.** (1) Ἐπειδὴ $\alpha\neq 0$ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται:

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0. \tag{2}$$

Ἵνα ὁ x εἶναι ῥίζα τῆς (2), πρέπει καὶ ἀρκεῖ

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0. \tag{3}$$

Εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (3) προσθέτομεν $\frac{\beta^2}{4\alpha^2}$ καὶ ἔχομεν :

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}+\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \quad ἢ \quad x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{\gamma}{\alpha}$$

ἢ

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}. \tag{4}$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

α'). Ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma<0}$, τὸ δεύτερον μέλος τῆς (4) εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός, ἐνῷ τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικόν, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, πλὴν τῆς τιμῆς $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$. Ἄρα ἡ (4) εἶναι ἀδύνατος, διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x. Κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ ἰσοδύναμός της (1) εἶναι ἀδύνατος εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ : **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\mathbf{x^2-6x+34=0}$.**

***Λύσις :*** Ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γράφεται :

$$x^2-6x+9=-25 \quad ἢ \quad (x-3)^2=-25. \tag{5}$$

Διὰ πραγματικὰς τιμὰς τοῦ x, ἐξαιρέσει τῆς x=3, τὸ πρῶτον μέλος εἶναι θετικὸς ἀριθμός, ἐνῷ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ἀρνητικὸς ἀριθμός. Συνεπῶς ἡ (5) ἄρα καὶ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ἐκ τῆς (5) ὅμως λαμβάνομεν :

$$x-3=\pm\sqrt{-25}=\pm i\sqrt{25}=\pm 5i.$$

Ἐξ οὗ :

$$x_1=3+5i \quad καὶ \quad x_2=3-5i.$$

β'). Ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$, ἡ ἐξίσωσις (4) γίνεται :

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \quad ἢ \quad \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0.$$

Οἱ δύο παράγοντες τοῦ πρώτου μέλους αὐτῆς μηδενίζονται διὰ

$$x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Θὰ λέγωμεν λοιπὸν ὅτι ἡ (4), ἄρα καὶ ἡ (1), ἔχει δύο ῥίζας ἴσας ἢ μίαν ῥίζαν διπλῆν :

$$x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ : **Νὰ ἐπιλυθῇ ἐξίσωσις: $\mathbf{4x^2-12x+9=0}$.**

***Λύσις :*** Ἐπειδὴ $\beta^2-4\alpha\gamma=12^2-4\cdot4\cdot9=144-144=0$, ἡ ἐξίσωσις γράφεται :

$$(2x-3)^2=0 \quad ἢ \quad \left(x-\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$$

ἐξ οὗ :

$$x_1=x_2=\frac{3}{2}.$$

γ'). Ἐὰν $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma>0}$ ἢ $\boldsymbol{\dfrac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}>0}$, ἡ (4) γράφεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=0 \quad ἢ \quad \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)^2=0$$

ἢ
$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)=0. \qquad (6)$$

Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad καὶ \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \qquad (7)$$

Ὥστε, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἔχει ὡς ρίζας τάς:

$$\boxed{x=\frac{-\boldsymbol{\beta}\pm\sqrt{\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma}}}{\boldsymbol{2\alpha}}} \qquad (7')$$

***Παρατηρήσεις:*** Ἡ (6), βάσει τῶν (7), γράφεται:

$$(x-x_1)(x-x_2)=0 \qquad (8)$$

καὶ ἐπειδὴ $\alpha\neq0$, ἡ (8) γράφεται:

$$\alpha(x-x_1)(x-x_2)=0.$$

Ὁ διπλοῦς τύπος (7'), ἰσχύει ὅταν $\beta^2-4\alpha\gamma\geqslant0$, καθόσον $x\in\Pi_\alpha$.

Διὰ $\boldsymbol{\beta^2-4\alpha\gamma=0}$, ἐκ τῶν (7') ἔχομεν:

$$x=\frac{-\beta\pm0}{2\alpha} \quad ἢ \quad \boldsymbol{x_1=x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}}.$$

Διὰ $\boldsymbol{\gamma=0}$ ἢ $\alpha x^2+\beta x=0$, οἱ τύποι (7') δίδουν:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2}}{2\alpha} \quad ἢ \quad x=\frac{-\beta\pm\beta}{2\alpha}, \quad ἐξ\ οὗ:\ \boldsymbol{x_1=0}\ καὶ\ \boldsymbol{x_2=-\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Διὰ $\beta=0$ ἢ $\alpha x^2+\gamma=0$, οἱ τύποι (7') δίδουν, ἂν $\alpha>0$:

$$x=\frac{\pm\sqrt{-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\pm\sqrt{\frac{-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}}=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}} \quad ἤτοι:\ \boldsymbol{x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{\alpha}}}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: **1ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\boldsymbol{x^2-8x+15=0}$.**

***Λύσις:*** Ἐνταῦθα εἶναι: $\alpha=1$, $\beta=-8$ καὶ $\gamma=15$. Ἄρα:

$$\boldsymbol{x}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot1\cdot15}}{2\cdot1}=\frac{8\pm\sqrt{64-60}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{8\pm2}{2},$$

ἐξ οὗ:
$$x_1=\frac{8+2}{2}=\frac{10}{2}=5 \quad καὶ \quad x_2=\frac{8-2}{2}=\frac{6}{2}=3.$$

**2ον: Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\boldsymbol{5x^2+7x-12=0}$.**

***Λύσις:*** Ἐνταῦθα εἶναι: $\alpha=5$, $\beta=7$, $\gamma=-12$. Ἄρα:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-7\pm\sqrt{49-4\cdot5\cdot(-12)}}{2\cdot5}=\frac{-7\pm\sqrt{49+240}}{10}=$$

$$=\frac{-7\pm\sqrt{289}}{10}=\frac{-7\pm17}{10}$$

ἐξ οὗ:
$$x_1=\frac{-7+17}{10}=\frac{10}{10}=1 \quad καὶ \quad x_2=\frac{-7-17}{10}=\frac{-24}{10}=-\frac{12}{5}.$$

3ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x^2-4x+1=0$.**

***Λύσις:*** Ἐνταῦθα εἶναι: $\alpha=1,\ \beta=-4,\ \gamma=1$. Ἄρα:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3},$$

ἐξ οὗ:
$$x_1=2+\sqrt{3} \quad \text{καὶ} \quad x_2=2-\sqrt{3}.$$

4ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x^2+4x+13=0$.**

***Λύσις:*** Ἐνταῦθα εἶναι $\alpha=1,\ \beta=4,\ \gamma=13$. Ἄρα:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-4\pm\sqrt{16-4\cdot1\cdot13}}{2\cdot1}=\frac{-4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{-4\pm1\sqrt{36}}{2}=\frac{-4\pm6i}{2},$$

ἐξ οὗ:
$$x_1=\frac{-4+6i}{2}=-2+3i \quad \text{καὶ} \quad x_2=\frac{-4-6i}{2}=-2-3i\cdot$$

5ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $x^2-(3-2\sqrt{2})x+4-3\sqrt{2}=0$.**

***Λύσις:*** Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$x=\frac{3-2\sqrt{2}\pm\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2-4(4-3\sqrt{2})}}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}\pm\sqrt{17-12\sqrt{2}-16+12\sqrt{2}}}{2}=$$
$$=\frac{3-2\sqrt{2}\pm1}{2},$$

ἐξ οὗ: $x_1=\dfrac{3-2\sqrt{2}+1}{2}=\dfrac{4-2\sqrt{2}}{2}=2-\sqrt{2}$ καὶ $x_2=\dfrac{3-2\sqrt{2}-1}{2}=1-\sqrt{2}.$

6ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις: $\alpha(\beta-\gamma)x^2+\beta(\gamma-\alpha)x+\gamma(\alpha-\beta)=0$.**

***Λύσις:*** Ἵνα ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις εἶναι δευτεροβάθμιος, πρέπει $\alpha(\beta-\gamma)\neq0$, δηλαδὴ $\alpha\neq0$ καὶ $\beta\neq\gamma$.

Τούτων τεθέντων, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$x=\frac{-\beta(\gamma-\alpha)\pm\sqrt{\beta^2(\gamma-\alpha)^2-4\alpha(\beta-\gamma)\gamma(\alpha-\beta)}}{2\alpha(\beta-\gamma)}=\frac{-\beta(\gamma-\alpha)\pm\sqrt{[\beta(\gamma+\alpha)-2\alpha\gamma]^2}}{2\alpha(\beta-\gamma)}$$
$$=\frac{-\beta(\gamma-\alpha)\pm[\beta(\gamma+\alpha)-2\alpha\gamma]}{2\alpha(\beta-\gamma)}$$

ἐξ οὗ:
$$x_1=\frac{-\beta(\gamma-\alpha)+\beta(\gamma+\alpha)-2\alpha\gamma}{2\alpha(\beta-\gamma)}=\frac{2\alpha(\beta-\gamma)}{2\alpha(\beta-\gamma)}=1$$
$$x_2=\frac{-\beta(\gamma-\alpha)-\beta(\gamma+\alpha)+2\alpha\gamma}{2\alpha(\beta-\gamma)}=\frac{-2\gamma(\beta-\alpha)}{2\alpha(\beta-\gamma)}=\frac{\gamma(\alpha-\beta)}{\alpha(\beta-\gamma)}.$$

7ον: **Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$\lambda^2x^2-\lambda(5\lambda+1)x-(5\lambda+2)=0.$$

***Λύσις:*** Διὰ $\lambda=0$, ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος. Ἔστω $\lambda\neq0$.

Θὰ ἔχωμεν:
$$\beta^2-4\alpha\gamma=\lambda^2(5\lambda+1)^2+4\lambda^2(5\lambda+2)=\lambda^2[(5\lambda+1)^2+4(5\lambda+2)]=$$
$$=\lambda^2(25\lambda^2+30\lambda+9)=\lambda^2(5\lambda+3)^2.$$

Θὰ εἶναι δέ:
$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{\lambda(5\lambda+1)+\lambda(5\lambda+3)}{2\lambda^2}=\frac{5\lambda+2}{\lambda}\\ x_2&=\frac{\lambda(5\lambda+1)-\lambda(5\lambda+3)}{2\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda}\end{aligned}\right\} \quad \text{καὶ} \quad x_1\neq x_2, \ \text{διὰ} \ \lambda\neq-\frac{3}{5}.$$

Ἐὰν $\lambda=-\frac{3}{5}$, τότε: $x_1=x_2=\frac{5}{3}$.

8ον: **Ἐὰν $(\alpha,\beta)\in\Pi_\alpha$ καὶ $\alpha\beta\neq0$, νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

$$(\alpha+\beta)x^2-(\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2)x+2\alpha\beta(\alpha+\beta)=0.$$

***Λύσις:*** Ἐὰν $\alpha+\beta\neq0$, εὑρίσκομεν:

$$x_1=\alpha+\beta \quad \text{καὶ} \quad x_2=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

Ἐὰν δὲ $\alpha+\beta=0$, ὑπάρχει μία μόνον ῥίζα $x=0$.

**312. Ἀνακεφαλαίωσις:** Ὁ ἀριθμὸς καὶ τὸ εἶδος τῶν ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,$$

ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ποσότηνα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται ***διακρίνουσα τῆς ἐξισώσεως***. Τὰ ἀνωτέρω δὲ λεχθέντα συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| **Εἶδος ῥιζῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$** | | |
|---|---|---|
| | $\Delta<0$ | **Δὲν ὑπάρχουν πραγματικαὶ ῥίζαι** |
| $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ | $\Delta=0$ | **Μία ῥίζα διπλῆ:** $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ |
| | $\Delta>0$ | **Δύο ῥίζαι διάφοροι:** $x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ |

**Παρατήρησις.** ***Ἐὰν οἱ α καὶ γ εἶναι ἑτερόσημοι, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἐπιδέχεται δύο ῥίζας διαφόρους (ἑτεροσήμους).***

Πράγματι, ἐπειδὴ $\alpha\gamma<0$, ἕπεται $-4\alpha\gamma>0$. Ἐπειδὴ δὲ $\beta^2\geqslant0$, ἕπεται ὅτι $\beta^2-4\alpha\gamma>0$. Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ διακρίνουσα εἶναι θετική, ἡ ἐξίσωσις θὰ ἔχῃ δύο ῥίζας διαφόρους.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Ἔστω ἡ ἐξίσωσις: $x^2-2x-15=0$.

Ἐπειδὴ $\alpha\gamma=1\cdot(-15)=-15<0$, ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει δύο ῥίζας διαφόρους. Πράγματι, εἶναι:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-15)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{2\pm8}{2}.$$

Ἄρα: $x_1=\frac{2+8}{2}=\frac{10}{2}=5$ καὶ $x_2=\frac{2-8}{2}=\frac{-6}{2}=-3$.

Ὥστε, ἡ ἀνισότης $\frac{\gamma}{\alpha}<0$ ἢ $\alpha\gamma<0$, ἀποτελεῖ ***ἱκανὴν*** (ὄχι ὅμως καὶ ἀναγκαίαν) συνθήκην διὰ νὰ εἶναι αἱ ῥίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ πραγματικαὶ καὶ ἄνισοι (διάφοροι).

Δηλαδή, μὲ $\alpha\gamma<0$ εἶναι $x_1<0<x_2$ (κατ' ἀνάγκην δὲν σημαίνει $x_1$ ἡ λαμβανομένη ἐκ τοῦ τύπου μὲ πλήν).

**313. Σύγκρισις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.** Δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$x_1=-\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2=-\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Ἄρα:
$$x_1-x_2=\frac{2\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{\alpha}. \qquad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ ρίζαι εἶναι διάφοροι, ἕπεται ὅτι $\Delta>0$. Ἐξαρτᾶται λοιπὸν ἡ διαφορὰ $x_1-x_2$ ἀπὸ τὸ σημεῖον τοῦ $\alpha$.

α΄). Ἐὰν $\alpha>0$, τότε $x_1-x_2>0$, ἐξ οὗ: $x_1>x_2$.

β΄). Ἐὰν $\alpha<0$, τότε $x_1-x_2<0$, ἐξ οὗ: $x_1<x_2$.

Ὥστε: ***Ἡ μεγαλυτέρα ἐκ τῶν δύο ριζῶν $x=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ εἶναι ἐκείνη, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν, θέτοντες πρὸ τοῦ ριζικοῦ τὸ σημεῖον τοῦ συντελεστοῦ α.***

**314. Ἁπλοποίησις τοῦ τύπου.** Ὅταν ὁ συντελεστὴς $\beta$ τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι ἄρτιος, θέτομεν $\beta=2\beta_1$, ὅπου $\beta_1$ τὸ ἥμισυ τοῦ $\beta$, καὶ ἔχομεν:

$$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta_1\pm\sqrt{4\beta_1^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta_1\pm2\sqrt{\beta_1^2-\alpha\gamma}}{2\alpha}=$$
$$=\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

Δηλαδή:
$$x=\frac{-\beta_1\pm\sqrt{\beta_1^2-\alpha\gamma}}{\alpha}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Διὰ τὴν ἐξίσωσιν $x^2-18x+80=0$, ἔχομεν:

$$x=\frac{9\pm\sqrt{9^2-1\cdot80}}{1}=9\pm\sqrt{81-80}=9\pm\sqrt{1}=9\pm1.$$

Ἄρα:
$$x_1=9+1=10 \quad \text{καὶ} \quad x_2=9-1=8.$$

## ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1ον: **Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x:**
$$x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2+7=0, \qquad (1)$$
**ἐπιδέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $x=5$;**

***Λύσις:*** Ἀφοῦ ὁ $x=5$ εἶναι ρίζα τῆς (1), θὰ τὴν ἐπαληθεύῃ:
$$25-10(\lambda+2)+2\lambda^2+7=0 \quad \text{ἢ} \quad \lambda^2-5\lambda+6=0.$$
Ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας: $\lambda=2$ καὶ $\lambda=3$.
Διὰ $\lambda=2$, ἡ (1) γίνεται: $x^2-8x+15=0$, ἐξ οὗ: $x_1=5$ καὶ $x_2=3$.
Διὰ $\lambda=3$, ἡ (1) γίνεται: $x^2-10x+25=0$, ἐξ οὗ: $x_1=x_2=5$.

2ον: **Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x:**
$$(\lambda+1)x^2-(\lambda+3)x-(\lambda-3)=0, \qquad (1)$$
**ἔχει μίαν ρίζαν διπλῆν;**

***Λύσις:*** Ἵνα ἡ ἐξίσωσις (1) ἔχῃ μίαν διπλῆν ῥίζαν, πρέπει: $\Delta=0$

ἢ $$(\lambda+3)^2+4(\lambda+1)(\lambda-3)=0 \quad \text{ἢ} \quad 5\lambda^2-2\lambda-3=0$$

ἐξ οὗ: $$\lambda_1=1 \quad \text{καὶ} \quad \lambda_2=-\frac{3}{5}.$$

3ον: **Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις ὡς πρὸς x:**

$$(\lambda+7)x^2-2(\lambda-9)x-7\lambda+15=0,$$

**ἔχει δύο διαφόρους ρίζας;**

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ἔχῃ ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ῥίζας διαφόρους, πρέπει $\Delta>0$.

Δηλαδή: $4(\lambda-9)^2+4(\lambda+7)(7\lambda-15)>0$ ἢ $(\lambda-9)^2+(\lambda+7)(7\lambda-15)>0$,

ἢ $$\lambda^2-18\lambda+81+7\lambda^2+49\lambda-15\lambda-105>0 \quad \text{ἢ} \quad 8\lambda^2+16\lambda-24>0,$$

ἢ $$\lambda^2+2\lambda-3>0 \quad \text{ἢ} \quad (\lambda+3)(\lambda-1)>0,$$

ἐξ οὗ: $$\lambda<-3 \quad \text{καὶ} \quad \lambda>1.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $x^2+2x-3=0,\quad x^2-6x+8=0,\quad x^2+4x-45=0$
2. $3x^2-10x+4=0,\quad -5x^2+x+42=0,\quad 4x^2-4x+1=0$
3. $\frac{2}{3}x^2-x-1=0,\quad -\frac{1}{5}x^2+x-3=0,\quad \frac{3}{7}x^2+\frac{1}{4}x-2=0$
4. $4x^2-20x+25=0,\quad -5x^2+3x-1=0,\quad 6x^2+7x-20=0$
5. $-3x^2-14x+5=0,\quad x^2-|x|+4=0,\quad 5x^2+\sqrt{3}x-1=0$
6. $(1-\sqrt{2})x^2-2(1+\sqrt{2})x+1+3\sqrt{2}=0$
7. $(2+\sqrt{3})x^2-(2\sqrt{3}+1)x+(\sqrt{3}-1)=0.$

**2.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $(x-3)(2x+1)=(x-5)(x-7)+(x-2)^2+4-x$
2. $(5x-3)^2+(x+1)(x-9)=(9-2x)(4x+3)+(4x+1)(6x-7)$
3. $(2x-3)(x+2)x-(x+1)(2x+3)(x-3)=0$
4. $|x-3|(x+2)-(3x-1)(x-4)=0$
5. $\left(x+\frac{2}{3}\right)(3x-1)+\left(\frac{1}{2}-x\right)(x+2)=2x-1.$

**3.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $\frac{(x-3)(x+2)}{2}-\frac{(2x+7)(x-1)}{2}=\frac{(5+4x)(5x+1)}{6}$
2. $\frac{x^2+3}{5}-\frac{(2x-3)(x+4)}{3}=\frac{(7-4x)(16-5x)}{10}$
3. $\frac{(3x-5)(x+2)}{4}-\frac{x^2-3x}{3}=\frac{(6x-1)(x+1)}{6}.$

**4.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{3}$ 2. $\frac{x-3}{x+1}-\frac{3x+1}{x-3}=\frac{5}{3}$
3. $\frac{x-3}{2x+1}+\frac{2x+1}{x-3}=\frac{25}{12}$ 4. $\frac{1}{x-4}+\frac{8}{x-1}=\frac{15}{x+9}$
5. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}=\frac{33}{11x-26}$

6. $\dfrac{1}{x^2-2x-3}+\dfrac{x-2}{2x^2-5x-3}=\dfrac{5}{12(2x+1)}$

7. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{x+3}=\dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{6}{x+4}$.

**5.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις :

1. $x^2-(4\alpha-\beta)x+3\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=0$
2. $\alpha x^2-(\alpha^2+2\alpha+2)x+2(\alpha+2)=0$
3. $\alpha(\alpha-1)x-(2\alpha-1)x-\alpha(\alpha-1)=0$
4. $x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+(\alpha^2-\beta^2)^2=0$
5. $\alpha x^2-\beta x-\alpha+\beta=0$ 6. $\alpha x^2+\beta x-\alpha+\beta=0$
7. $\alpha x^2+\beta x-\alpha-\beta=0$ 8. $\alpha x^2+(\beta+\gamma)x-\alpha+\beta+\gamma=0$
9. $\alpha x^2-(\beta+\gamma)x+\beta+\gamma-\alpha=0$
10. $(\alpha+\beta)^2x^2-(\alpha-\beta)(\alpha^2-\beta^2)-2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=0$.

**6.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $\lambda x^2-2(\lambda-1)x+\lambda-3=0$.
α′). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ῥίζαι της, διὰ $\lambda=-0{,}75$, $\lambda=2$, $\lambda=8$.
β′). Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ εἶναι $x_1=x_2$ ;

**7.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $x^2-2(\lambda+2)x+2\lambda^2-17=0$.
α′). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ῥίζαι της, διὰ $\lambda=-2$, $\lambda=2$, $\lambda=5$.
β′). Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν ῥίζαν διπλῆν ;
γ′). Ἐὰν $x_1=11$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λ καὶ $x_2$.

**8.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $(\lambda+3)x^2-(2\lambda-1)x-5\lambda+4=0$.
α′). Διὰ ποῖον λ εἶναι $x_1=2$ ;
β′). Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις, διὰ τὴν ἐν λόγῳ τιμὴν τοῦ λ.

**9.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $(\lambda+5)x^2-(2\lambda+3)x+\lambda-1=0$.
α′). Διὰ ποῖον λ ἡ ἐξίσωσις ἔχει δύο ῥίζας ἴσας ;
β′). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διπλῆ αὕτη ῥίζα.
γ′). Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ῥίζαι εἶναι διάφοροι ;

**10.** Τὰ αὐτὰ ἐρωτήματα διὰ τὴν ἐξίσωσιν :

$$(2\lambda+1)x^2-(\lambda+3)x+\lambda+\frac{9}{4}=0.$$

**11.** Ὁμοίως τὰ αὐτὰ ἐρωτήματα διὰ τὴν ἐξίσωσιν :

$$(3\lambda+5)x^2+(\lambda+4)x-3(\lambda+4)=0.$$

**12.** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ αἱ ἐξισώσεις :

$$x^2-(\lambda+3)x+\lambda^2+2\lambda-3=0,\qquad (\lambda+5)x^2-2(\lambda+2)x+4=0,$$
$$(\lambda-3)x^2+(3\lambda-1)x+2\lambda+5=0,\qquad (\lambda-1)x^2-2(3\lambda+2)x+7\lambda+8=0,$$

ἔχουν ἀντιστοίχως διπλῆν ῥίζαν καὶ νὰ εὑρεθῇ αὕτη.

**13.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma)\in\Pi_\alpha$, νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἐξισώσεις :

1. $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)x^2+2(\alpha+\beta+\gamma)x+3=0$
2. $(\alpha^2+\alpha-2)x+(2\alpha^2+\alpha+3)x+\alpha^2-1=0$

**14.** Ἐὰν $(\alpha,\beta,\gamma) \in \Pi_\alpha$, νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ ἐξισώσεις:

1. $x^2-2\alpha x+\alpha^2+2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2=0$
2. $x^2-2\alpha x+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=0$
3. $(\alpha-\beta+\gamma)x^2+4(\alpha-\beta)x+\alpha-\beta-\gamma=0,$

ἔχουν ρίζας διαφόρους.

**15.** Ἐὰν $(\alpha, \beta, \gamma) \in P$, ἡ ἐξίσωσις: $(\alpha-\beta+\gamma)x^2+2\gamma x+\beta+\gamma-\alpha=0$, ἔχει ρητὰς ριζας.

**16.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $\dfrac{(\alpha-x)^2-(x-\beta)^2}{(\alpha-x)(x-\beta)}=\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$ 2. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

3. $\dfrac{x-\alpha}{x-\beta}+\dfrac{x-\beta}{x-\alpha}=\dfrac{x^2-2\alpha\beta}{x^2-\alpha x-\beta x+\alpha\beta}$

4. $(\alpha+\beta x)(\beta-\alpha x)+(\beta+\gamma x)(\gamma-\beta x)+(\gamma+\alpha x)(\alpha-\gamma x)=0.$

5. $(3\alpha+3\beta-x)^2+(x-3\alpha+3\beta)^2=(\alpha+\beta-3x)^2+(3x-\alpha+\beta)^2$

6. $\dfrac{(x-\alpha-2\beta)^2+(2x+2\alpha+\beta)^2}{(x-\alpha+2\beta)^2+(2x+2\alpha-\beta)^2}=\dfrac{3x+5\alpha+4\beta}{3x+5\alpha-4\beta}$

7. $\dfrac{x+\alpha+2\beta}{x+\alpha-2\beta}=\dfrac{\beta-2\alpha+2x}{\beta+2\alpha-2x}$ 8. $(\alpha^2-\beta^2)x^2-2(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2-\beta^2=0$

9. $\dfrac{(x-\alpha)^2+(x+\beta)^2}{(2x-\alpha+\beta)^2}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{(\alpha-\beta)^2}$ 10. $\dfrac{(\alpha-x)^3-(\beta-x)^3}{(x-\alpha)^2+(\beta-x)^2}=\alpha-\beta$

11. $\dfrac{2x-5\alpha-\beta}{2x-5\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha+\beta}{\beta-\alpha}\cdot\dfrac{x+2\alpha-2\beta}{x+2\alpha+2\beta}=0$

12. $\dfrac{\alpha}{x+\alpha}+\dfrac{\beta}{x+\beta}+\dfrac{\gamma}{x+\gamma}=3$

13. $\dfrac{\beta+\gamma}{\beta\gamma-x}+\dfrac{\gamma+\alpha}{\gamma\alpha-x}+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta-x}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{x}$

14. $(x-\alpha+2\beta)^3-(x-2\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)^3$ 15. $(\alpha-x)^3+(x-\beta)^3=(\alpha-\beta)^3.$

**315. Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.** Ἄς θεωρήσωμεν τὴν ἐξίσωσιν:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν:

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad \text{καὶ} \quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

$$x_1x_2=\frac{(-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})(-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-(\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma})^2}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

$$|x_1-x_2|=\left|\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}+\beta+\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right|=\left|\frac{2\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{|\alpha|},\quad \text{ἂν}\quad \Delta\geqslant 0.$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2}{\alpha^2}-\frac{2\gamma}{\alpha}=\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3-3\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=$$

$$=\frac{-\beta^3+3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$$

$$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left(\frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma^2}{\alpha^2}=\frac{\beta^4+2\alpha^2\gamma^2-4\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^4}.$$

Τὰ ἀνωτέρω συνοψίζομεν εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| **Σχέσεις συντελεστῶν καὶ ριζῶν τῆς: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$** | |
|---|---|
| $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ | $x_1^3+x_2^3=\dfrac{-\beta^3+3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$ |
| $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$ | $x_1^4+x_2^4=\dfrac{\beta^4+2\alpha^2\gamma^2-4\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^4}$ |
| $x_1^2+x_2^2=\dfrac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2}$ | $\lvert x_1-x_2\rvert=\dfrac{\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{\lvert\alpha\rvert}$ |

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι, δοθείσης τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν αὐτῆς.

***Ἀντιστρόφως***, ἐὰν δύο ἀριθμοὶ $x_1$ καὶ $x_2$ ἔχουν ἄθροισμα $-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ γινόμενον $\dfrac{\gamma}{\alpha}$, οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

Πράγματι, οἱ $x_1$ καὶ $x_2$ (§ 311) εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

ἢ τῆς:

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Ἐπειδὴ $x_1+x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ καὶ $x_1x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$, θὰ ἔχωμεν:

$$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0,\quad \text{ἐξ οὗ:}\quad \alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

Ἐντεῦθεν ἕπεται ἡ πρότασις:

***Ἵνα οἱ ἀριθμοὶ $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχωμεν:***

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \textit{καὶ} \quad x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $-\dfrac{\beta}{\alpha}=\Sigma$ καὶ $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\Gamma$, ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$

ἢ $$x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0, \quad \text{γράφεται:} \quad x^2-\Sigma x+\Gamma=0. \qquad (1)$$

Ἐὰν $\Delta \geqslant 0$, ἡ (1) ἔχει δύο ρίζας διαφόρους ἢ ἴσας: $x=\dfrac{\Sigma\pm\sqrt{\Sigma^2-4\Gamma}}{2}$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν συνάγομεν τὴν πρότασιν:

***Διὰ νὰ εἶναι δύο ἀριθμοὶ αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-\Sigma x+\Gamma=0$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμά των νὰ εἶναι $\Sigma$ καὶ τὸ γινόμενόν των νὰ εἶναι $\Gamma$.***

**316. Ἐφαρμογαί.** 1ον: ***Ἐὰν εἶναι γνωστὴ ἡ μία ρίζα τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη.***

Ἔστω ὅτι γνωρίζομεν τὴν μίαν ρίζαν $x_1$ τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$. Τότε ἡ ἄλλη ρίζα $x_2$ θὰ ὑπολογισθῇ ἀπὸ μίαν τῶν σχέσεων:

$$x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{ἢ} \quad x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Δηλαδὴ θὰ εἶναι: $x_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}-x_1$ ἢ $x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha x_1}$.

Οὕτω, ἐὰν $x_1=2$ εἶναι μία ρίζα τῆς ἐξισώσεως $3x^2-5x-2=0$, τότε:

$$x_2=\frac{\gamma}{\alpha x_1}=-\frac{2}{3\cdot 2}=-\frac{1}{3}.$$

2ον: ***Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ἐπιδέχεται ὡς ρίζαν τὸν ἀριθμὸν $x_1=1$, τότε: $\alpha+\beta+\gamma=0$.***

Πράγματι, διὰ $x=1$, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+\gamma=0, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad \boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=0}.$$

Κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἄλλη ρίζα θὰ εἶναι: $x_2=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Οὕτω, εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $3x^2-8x+5=0$, ἐπειδή: $\alpha+\beta+\gamma=3+(-8)+5=0$, ἡ μία ρίζα εἶναι 1 καὶ ἡ ἄλλη $\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{5}{3}$.

Ἐὰν ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἔχῃ ρίζαν $x_1=-1$, θὰ εἶναι:

$$\alpha(-1)^2+\beta(-1)+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \alpha-\beta+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad \boldsymbol{\beta=\alpha+\gamma},$$

ὁπότε ἡ ἄλλη ρίζα εἶναι $x_2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Οὕτω, εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $5x^2+3x-2=0$, ἐπειδὴ εἶναι $3=5+(-2)$, ἡ μία ρίζα εἶναι: $x_1=-1$ καὶ ἡ ἄλλη $x_2=-\dfrac{\gamma}{\alpha}=\dfrac{2}{3}$.

3ον: ***Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε:***

$$x_1+x_2=-\beta \quad \textit{καὶ} \quad x_1\cdot x_2=\alpha\gamma,$$

***τότε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ εἶναι:***

$$\frac{x_1}{\alpha} \quad \textit{καὶ} \quad \frac{x_2}{\alpha}.$$

Πράγματι, ἔχομεν:
$$\frac{x_1}{\alpha}+\frac{x_2}{\alpha}=\frac{x_1+x_2}{\alpha}=\frac{-\beta}{\alpha}$$

καὶ
$$\frac{x_1}{\alpha}\cdot\frac{x_2}{\alpha}=\frac{x_1x_2}{\alpha^2}=\frac{\alpha\gamma}{\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}.$$

Ἀναγόμεθα οὕτω εἰς τὴν εὕρεσιν τῶν ριζῶν τῆς $x^2+\beta x+\alpha\gamma=0$.

Οὕτω, εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $3x^2-16x+21=0$, αἱ ρίζαι της θὰ εὑρεθοῦν ἐκ τῶν ριζῶν τῆς $x^2-16x+63=0$, αἵτινες εἶναι 9 καὶ 7. Ἄρα αἱ ρίζαι τῆς δοθείσης θὰ εἶναι 3 καὶ $\dfrac{7}{3}$.

4ον: ***Ἐὰν $x_1=k_1$ καὶ $x_2=k_2$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐξίσωσις, ἡ ὁποία ἔχει ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $k_1$ καὶ $k_2$.***

Ἡ ζητουμένη ἐξίσωσις θὰ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \quad \text{ἢ} \quad x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

ἢ
$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Ἐπειδὴ δὲ $x_1+x_2=k_1+k_2$ καὶ $x_1x_2=k_1k_2$, ἡ προηγουμένη ἐξίσωσις γίνεται:

$$x^2-(k_1+k_2)x+k_1k_2=0 \qquad (1)$$

Οὕτω, ἐὰν $x_1=5$ καὶ $x_2=9$, ἡ (1) γίνεται:

$$x^2-14x+45=0.$$

5ον: ***Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $S_\nu=x_1^\nu+x_2^\nu$ τῶν ριζῶν τῆς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.***

Ἐπειδὴ οἱ $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x_1^2+\beta x_1+\gamma=0 \\ \alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} x_1^{\nu-2} \\ x_2^{\nu-2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζομεν ἀμφότερα τὰ μέλη τῆς (1) ἐπὶ $x_1^{\nu-2}$ καὶ τὰ τῆς (2) ἐπὶ $x_2^{\nu-2}$ καὶ ἔχομεν:

$$\left.\begin{aligned} \alpha x_1^\nu+\beta x_1^{\nu-1}+\gamma x_1^{\nu-2}=0 \\ \alpha x_2^\nu+\beta x_2^{\nu-1}+\gamma x_2^{\nu-2}=0 \end{aligned}\right\}$$

Διὰ προσθέσεως τούτων κατὰ μέλη, λαμβάνομεν:

$$\alpha(x_1^\nu+x_2^\nu)+\beta(x_1^{\nu-1}+x_2^{\nu-1})+\gamma(x_1^{\nu-2}+x_2^{\nu-2})=0$$

ἢ
$$\alpha S_\nu+\beta S_{\nu-1}+\gamma S_{\nu-2}=0.$$

Ἐκ τοῦ ἀναγωγικοῦ τούτου τύπου εὑρίσκομεν:

$$S_\nu = -\frac{\beta}{\alpha}S_{\nu-1} - \frac{\gamma}{\alpha}S_{\nu-2}, \qquad (K)$$

ἂν γνωρίζωμεν τὸ $S_{\nu-1}$ καὶ τὸ $S_{\nu-2}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: **Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα:**

$$A = (1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6. \qquad (1)$$

***Λύσις:*** Ἂν θέσωμεν: $x_1 = 1+\sqrt{2}$ καὶ $x_2 = 1-\sqrt{2}$, τότε θὰ εἶναι:

$$x_1+x_2=2 \quad \text{καὶ} \quad x_1x_2 = (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1.$$

Ἄρα οἱ $x_1$ καὶ $x_2$ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $x^2-2x-1=0$, ἐκ τῆς ὁποίας ἕπεται ὅτι: $S_1 = x_1+x_2 = 2$ καὶ $x_1x_2=-1$ καὶ

$$S_2 = x_1^2+x_2^2 = \frac{\beta^2-2\alpha\gamma}{\alpha^2} = 4-2\cdot 1(-1) = 4+2 = 6 \quad \text{καὶ} \quad S_0 = x_1^0+x_2^0 = 1+1 = 2.$$

Ἐκ τοῦ τύπου (K), διὰ $\nu = 2, 3, 4, 5, 6$ ἔχομεν:

$$S_2 = 2\cdot S_1 + S_0 = 2\cdot 2+2 = 6$$
$$S_3 = 2\cdot S_2 + S_1 = 2\cdot 6+2 = 14$$
$$S_4 = 2\cdot S_3 + S_2 = 2\cdot 14+6 = 34$$
$$S_5 = 2\cdot S_4 + S_3 = 2\cdot 34+14 = 82$$
$$S_6 = 2\cdot S_5 + S_4 = 2\cdot 82+34 = 198.$$

Ἄρα: $A = (1+\sqrt{2})^6 + (1-\sqrt{2})^6 = 198.$

6ον: ***Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:***

$$A = x_1^3+x_2^3+4x_1x_2^2+4x_1^2x_2+5x_1x_2.$$

***Λύσις:*** Ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς ὡς ἑξῆς:

$$A = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) + 4x_1x_2(x_1+x_2) + 5x_1x_2 =$$

$$\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 - 3\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + 4\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) + 5\cdot\frac{\gamma}{\alpha} = -\frac{\beta^3}{\alpha^3} +$$

$$+\frac{3\beta\gamma}{\alpha^2} - \frac{4\beta\gamma}{\alpha^2} + \frac{5\gamma}{\alpha} = \frac{-\beta^3+3\alpha\beta\gamma-4\alpha\beta\gamma+5\alpha^2\gamma}{\alpha^3} = \frac{-\beta^3-\alpha\beta\gamma+5\alpha^2\gamma}{\alpha^3}.$$

7ον: ***Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς παραστάσεως:***

$$A = \frac{1}{(\alpha x_1+\beta)^4} + \frac{1}{(\alpha x_2+\beta)^4}.$$

***Λύσις:*** Ἀφοῦ οἱ $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, θὰ ἔχωμεν:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha x_1^2+\beta x_1+\gamma=0\\ \alpha x_2^2+\beta x_2+\gamma=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}(\alpha x_1+\beta)x_1=-\gamma\\ (\alpha x_2+\beta)x_2=-\gamma\end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha x_1+\beta=-\dfrac{\gamma}{x_1}\\ \alpha x_2+\beta=-\dfrac{\gamma}{x_2}\end{array}\right\}$$

ὁπότε θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$A = \frac{1}{\left(-\dfrac{\gamma}{x_1}\right)^4} + \frac{1}{\left(-\dfrac{\gamma}{x_2}\right)^4} = \frac{x_1^4}{\gamma^4} + \frac{x_2^4}{\gamma^4} = \frac{x_1^4+x_2^4}{\gamma^4} = \frac{\beta^4+2\alpha^2\gamma^2-4\alpha\beta^2\gamma}{\alpha^4\gamma^4}$$

8ον: ***Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα αἱ ρίζαι $x_1$ καὶ $x_2$ τῆς ἐξισώσεως:***

$$x^2-\lambda x+\lambda-1=0,$$

***συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως:*** $x_1=2x_2$.

***Λύσις:*** Γνωρίζομεν ὅτι: $x_1+x_2=\lambda$, $x_1x_2=\lambda-1$ καὶ $x_1=2x_2$.

Διὰ $x_1=2x_2$, ἡ πρώτη τούτων γίνεται:

$$2x_2+x_2=\lambda \quad \text{ἢ} \quad 3x_2=\lambda, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x_2=\frac{\lambda}{3}, \quad \text{ὁπότε} \quad x_1=\frac{2\lambda}{3}.$$

Ἄρα ἡ δευτέρα γίνεται:

$$\lambda-1=x_1x_2=\frac{2\lambda}{3}\cdot\frac{\lambda}{3}=\frac{2\lambda^2}{9}, \text{ ἢ } 2\lambda^2-9\lambda+9=0, \text{ ἐξ οὗ } \lambda_1=3 \text{ καὶ } \lambda_2=\frac{3}{2}.$$

Διὰ $\lambda=3$, ἔχομεν $x_1=2$ καὶ $x_2=1$.

Διὰ $\lambda=\frac{3}{2}$, ἔχομεν $x_1=1$ καὶ $x_2=\frac{1}{2}$.

**317. Συμμετρικαὶ συναρτήσεις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.**

Ἔστω ἡ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, ἔχουσα ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$. Θὰ ὀνομάζωμεν ***συνάρτησιν τῶν ριζῶν*** πᾶσαν παράστασιν, περιέχουσαν τὰς ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$ τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Οὕτω, αἱ παραστάσεις:

$$x_1+x_2, \quad x_1x_2, \quad x_1^2+x_2^2, \quad x_1+3x_2, \ldots$$

εἶναι συναρτήσεις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Ἐὰν μία συνάρτησις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ δὲν μεταβάλλεται διὰ μετατροπῆς τῆς $x_1$ εἰς $x_2$, θὰ καλῆται ***συμμετρικὴ*** ὡς πρὸς τὰς ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$.

Οὕτω, αἱ συναρτήσεις:

$$x_1+x_2, \quad x_1x_2, \quad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}, \quad (2x_1-1)(2x_2-1), \quad (x_1-x_2)^2, \ldots$$

εἶναι συμμετρικαὶ συναρτήσεις τῶν ριζῶν τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

Πᾶσα συμμετρικὴ συνάρτησις τῶν ριζῶν μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσει τῶν $x_1+x_2$ καὶ $x_1x_2$, καὶ κατ' ἀκολουθίαν συναρτήσει τῶν συντελεστῶν τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ: 1ον: **Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $2x^2+3x-7=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:**

$$A=(2x_1-1)(2x_2-1).$$

***Λύσις:*** Ἐκ τῆς δοθείσης ἐξισώσεως λαμβάνομεν:

$$x_1+x_2=-\frac{3}{2} \quad \text{καὶ} \quad x_1x_2=-\frac{7}{2}.$$

Ἡ παράστασις γράφεται διαδοχικῶς:

$$A=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1=4\cdot\left(-\frac{7}{2}\right)-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+1=-14+3+1=-10.$$

2ον: **Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $(\lambda+1)x^2-2(\lambda+2)x+\lambda-3=0$, καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ μεταξὺ τῶν ριζῶν της $x_1$ καὶ $x_2$ μία συμμετρικὴ σχέσις:**

***Λύσις:*** Θὰ ἔχωμεν: $x_1+x_2=\dfrac{2(\lambda+2)}{\lambda+1}$ καὶ $x_1x_2=\dfrac{\lambda-3}{\lambda+1}$, ἂν $\lambda\neq-1$.

Αἱ σχέσεις αὗται δίδουν ἀντιστοίχως:

$$\lambda=\frac{4-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-2} \quad \text{καὶ} \quad \lambda=\frac{x_1x_2+3}{1-x_1x_2}.$$

Ἄρα:

$$\frac{4-(x_1+x_2)}{x_1+x_2-1}=\frac{x_1x_2+3}{1-x_1x_2}$$

ἐξ οὗ:

$$x_1x_2+2(x_1+x_2)=1.$$

3ον: **Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^2-8x+11=0$, νὰ εὑρεθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:**

$$y_1=\frac{x_1}{2x_1-3} \quad \text{καὶ} \quad y_2=\frac{x_2}{2x_2-3},$$

**χωρὶς νὰ λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:**

***Λύσις:*** Ἐκ τῆς πρώτης τῶν δοθεισῶν σχέσεων λαμβάνομεν:

$$2x_1y_1-3y_1=x_1, \quad \text{ἐξ οὗ:} \quad x_1=\frac{3y_1}{2y_1-1}.$$

Ἄρα, αἱ δύο ζητούμεναι τιμαὶ θὰ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως:

$$\left(\frac{3y_1}{2y_1-1}\right)^2-8\cdot\frac{3y_1}{2y_1-1}+11=0.$$

ἐξ οὗ:

$$5y_1^2-20y_1+11=0.$$

Ἐκ ταύτης εὑρίσκομεν:

$$y_1=\frac{10+3\sqrt{5}}{5} \quad \text{καὶ} \quad y_2=\frac{10-3\sqrt{5}}{5}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν ἑκάστης τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων, χωρὶς νὰ λυθοῦν αὗται:

1. $x^2-4x+1=0$, $\quad x^2+5x+\sqrt{3}=0$, $\quad -x^2-5x+4=0$
2. $x^2+7x-8=0$, $\quad x^2+5x+6=0$, $\quad x^2-8x+15=0$.

**2.** Νὰ εὑρεθοῦν ἀπὸ μνήμης αἱ ρίζαι τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων:

1. $x^2-3x+2=0$, $\quad 4x^2-11x+7=0$, $\quad 5x^2+26x-31=0$.
2. $7x^2+23x+16=0$, $\quad 9x^2+22x-31=0$,
3. $(\beta-\gamma)x^2+(\gamma-\alpha)x+(\alpha-\beta)=0$.
4. $\alpha(\beta-\gamma)x^2+\beta(\gamma-\alpha)x+\gamma(\alpha-\beta)=0$
5. $(\lambda-\alpha)(\beta-\gamma)x^2+(\lambda-\beta)(\gamma-\alpha)x+(\lambda-\gamma)(\alpha-\beta)=0$
6. $2\alpha\beta x^2-(\alpha+\beta)^2x+\alpha^2+\beta^2=0$
7. $5x^2+(\lambda-3)x-6\lambda^2+3\lambda=0$
8. $(\alpha+\beta)x^2+(\gamma-\alpha)x-\beta-\gamma=0$
9. $(3\alpha-2\beta)x^2-(2\alpha+5\beta)x-\alpha+7\beta=0$

**3.** Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις, ἔχουσα ρίζας:

1. 15 καὶ 27, $-7$ καὶ 17, $\frac{3}{4}$ καὶ $-\frac{11}{3}$

2. $\sqrt{3}$ καὶ $-\sqrt{2}$, $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ καὶ $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ καὶ $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$

3. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ καὶ $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$, $(\alpha+\beta)^2$ καὶ $(\alpha-\beta)^2$, $(\alpha+\beta)^3$ καὶ $(\alpha-\beta)^3$.

**4.** Νὰ ὑπολογισθοῦν δύο ἀριθμοὶ ἐκ τοῦ ἀθροίσματός των $\Sigma$ καὶ τοῦ γινομένου των $\Gamma$.

1. $\left.\begin{array}{l}\Sigma=28\\ \Gamma=195\end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l}\Sigma=14\\ \Gamma=851\end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l}\Sigma=-20\\ \Gamma=-1344\end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l}\Sigma=-44\\ \Gamma=475\end{array}\right\}$

**5.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $3x^2+7x-2=0$, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαὶ τῶν παραστάσεων:

1. $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, $x_1^2+x_2^2$, $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$, $x_1^3+x_2^3$

2. $x_1^2+x_1x_2+x_2^2$, $\frac{1}{x_1-2}+\frac{1}{x_2-2}$, $(5x_1-1)(5x_2-1)$

3. $(2x_1-5x_2)(2x_2-5x_1)$, $\frac{2x_1+3x_2}{x_1-1}+\frac{2x_2+3x_1}{x_2-1}$.

**6.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῶν παραστάσεων:

1. $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$, $(3x_1+2)(3x_2+2)$, $(x_1-1)^2+(x_2-1)^2$

2. $\frac{1}{x_1-3}+\frac{1}{x_2-3}$, $x_1x_2^3+x_1^3x_2$, $(\alpha x_1+\beta)^{-2}+(\alpha x_2+\beta)^{-2}$

3. $(\alpha x_1+\beta)^{-3}+(\alpha x_2+\beta)^{-3}$, $(\alpha x_1+\beta)^{-5}+(\alpha x_2+\beta)^{-5}$.

**7.** Νὰ ὁρισθῇ ὁ $\lambda$, ἵνα ἑκάστη τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων ἔχῃ ὡς ρίζαν τὸν ἔναντι σημειούμενον ἀριθμόν:

1. $x^2-3\lambda x+2\lambda-7=0$ $x_1=2$
2. $(\lambda+2)x^2-(2\lambda+4)x+\lambda-2=0$ $x_1=-3$
3. $(2\lambda-3)x^2+(\lambda-5)x+\lambda^2-6\lambda+1=0$ $x_1=2$
4. $(\lambda+1)x^2-(2\lambda-3)-5\lambda-10=0$ $x_1=\lambda+2$,

καὶ ἀκολούθως νὰ εὑρεθῇ ἡ ἄλλη ρίζα.

**8.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $x^2-(2\lambda+3)x+\lambda^2+5=0$

1. Νὰ ὁρισθῇ ὁ $\lambda$, ἵνα: $x_1^2+x_2^2=53$
2. Ὁμοίως, ἵνα: $|x_1-x_2|=13$.

**9.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς: $\lambda x^2-2(\lambda+4)x+\lambda-3=0$, νὰ ὁρισθῇ ὁ $\lambda$, ἵνα: $x_1+x_2+2x_1x_2-1=0$.

Νὰ σχηματισθῇ ἐξίσωσις, ἔχουσα ρίζας:

$$y_1=x_1-2 \text{ καὶ } y_2=x_2-2.$$

**10.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $(\lambda+3)x^2+2\lambda x+\lambda-5=0$, μὲ ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$.

1. Νὰ ὁρισθῇ ὁ $\lambda$, ἵνα: $(2x_1-1)(2x_2-1)=6$.
2. Νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ρίζας:

$$y_1=3x_1-2 \text{ καὶ } y_2=3x_2-2.$$

3. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν $x_1$, $x_2$, ἀνεξάρτητος τοῦ $\lambda$.

**11.** Αἱ ρίζαι μιᾶς δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως ἐπαληθεύουν τὰς σχέσεις:

$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2-2x_1x_2=0 \\ \lambda x_1x_2-(x_1+x_2)=2\lambda+1 \end{array}\right\}$$

1. Νὰ σχηματισθῇ ἡ ἐξίσωσις αὕτη.
2. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ ἡ ἐξίσωσις αὕτη ἔχει ρίζας;
3. Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ λ θὰ εἶναι $x_1=x_2$;
4. Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα: $x_1^2+x_2^2=2$.

**12.** Εἰς τὴν ἐξίσωσιν: $(\lambda-4)x^2-2(\lambda-2)x+\lambda-1=0$, νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν ριζῶν, ἀνεξάρτητος τοῦ λ.

**13.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ρίζας:

1. $\left.\begin{array}{l} y_1=x_1^2 \\ y_2=x_2^2 \end{array}\right\}$ 2. $\left.\begin{array}{l} y_1=x_1^3+x_2^3 \\ y_2=x_1^3-x_2^2 \end{array}\right\}$ 3. $\left.\begin{array}{l} y_1=x_1^3 \\ y_2=x_2^3 \end{array}\right\}$ 4. $\left.\begin{array}{l} y_1=\dfrac{1}{x_1} \\ y_2=\dfrac{1}{x_2} \end{array}\right|$

**14.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $x^2+\beta x+\gamma=0$, νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ρίζας:

$$y_1=\frac{x_1+1}{x_1-1}, \qquad y_2=\frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

Νὰ δειχθῇ δὲ ἀκολούθως ὅτι, ἂν σχηματίσωμεν ἐξίσωσιν μὲ ρίζας:

$$\omega_1=\frac{y_1+1}{y_1-1} \quad \text{καὶ} \quad \omega_2=\frac{y_2+1}{y_2-1},$$

ἐπανευρίσκομεν τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

**15.** Δίδονται αἱ ἐξισώσεις:

$x^2+\beta x+\gamma=0$ μὲ ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$

$x^2+\beta_1x+\gamma_1=0$ μὲ ρίζας $x_1$ καὶ $x_3$

$x^2+\beta_2x+\gamma_2=0$ μὲ ρίζας $x_3$ καὶ $x_2$

καὶ ζητεῖται νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν τρεῖς σχέσεις ἀνεξάρτητοι τῶν ριζῶν καὶ ἀντιστρόφως.

**16.** Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, μὲ ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$. Νὰ εὑρεθῇ σχέσις μεταξὺ τῶν μ καὶ ν καὶ τῶν α, β, γ, ἵνα $x_1=\dfrac{\mu}{\nu}x_2$.

**17.** Νὰ ὁρισθῇ ὁ λ οὕτως, ὥστε αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις νὰ ἔχουν ρίζας $x_1$ καὶ $x_2$, ἱκανοποιούσας τὰς ἔναντι σχέσεις:

1. $(\lambda+1)x^2-2(\lambda+2)x+\lambda-3=0$ σχέσις: $(4x_1+1)(4x_2+1)=18$
2. $\lambda x^2-(\lambda-4)x+2\lambda=0$ » $2(x_1^2+x_2^2)=5x_1x_2$
3. $x^2-(2\lambda+1)x+\lambda^2+2=0$ » $3x_1x_2-5(x_1+x_2)+7=0$.

**18.** Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν $x_1$, $x_2$ τῆς $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ τῶν $\rho_1$, $\rho_2$ τῆς $\alpha_1x^2+\beta_1x+\gamma_1=0$, ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$x_1\rho_2=x_2\rho_1.$$

**19.** Ἐὰν $\varrho_1$, $\varrho_2$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ καὶ $x_1$, $x_2$ αἱ ρίζαι τῆς $\alpha_1 x^2+\beta_1 x+\gamma_1=0$, νὰ σχηματισθῇ δευτεροβάθμιος ἐξίσωσις μὲ ρίζας:

1. $y_1=x_1\varrho_1+x_2\varrho_2$ καὶ $y_2=\varrho_1 x_2+\varrho_2 x_1$

2. $y_1=\dfrac{\varrho_1}{x_1}+\dfrac{\varrho_2}{x_2}$ καὶ $y_2=\dfrac{\varrho_1}{x_2}+\dfrac{\varrho_2}{x_1}$.

**20.** Ἐὰν $x_1$, $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $\alpha x^2+2\beta x+\gamma=0$ καὶ $x_1+\lambda$, $x_2+\lambda$ εἶναι ρίζαι τῆς $Ax^2+2Bx+\Gamma=0$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\alpha^2(B^2-A\Gamma)=A^2(\beta^2-\alpha\gamma).$$

**21.** Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2+x+\lambda=0$, νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν της $x_1$ καὶ $x_2$ ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$x_1^3+x_1x_2(2x_1+x_2)+2x_2=1.$$

**22.** Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $x^2-(\lambda-1)x+\lambda-2=0$, νὰ ὁρισθῇ ὁ λ, ἵνα μεταξὺ τῶν ριζῶν της $x_1$ καὶ $x_2$ ὑφίσταται ἡ σχέσις $x_1=3x_2$.

**23.** Ἐὰν $x_1$ καὶ $x_2$ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς $x^2-2x+\lambda=0$ $(\lambda\neq 0)$ καὶ $y_1$, $y_2$ αἱ τιμαί, τὰς ὁποίας λαμβάνει τὸ τριώνυμον:

$$y=x^2+\lambda x+\lambda^2,$$

ὅταν τὸ x λάβῃ τὰς τιμὰς $x_1$ καὶ $x_2$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\lambda\left(\frac{y_1}{x_1^3}+\frac{y_2}{x_2^3}\right)-2\left(\frac{y_1}{x_1^2}+\frac{y_1}{x_1^2}\right)+\left(\frac{y_1}{x_1}+\frac{y_2}{x_2}\right)=0.$$

**24.** Νὰ ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $(\alpha+\beta)x^2-2x-\alpha\beta=0$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι οἱ α, β εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $y^2-(\lambda+1)y+\lambda+3=0$.

**25.** Διὰ ποίας τιμὰς τοῦ α ἔχει ρίζας ἡ ἐξίσωσις:

$$x(x-1)(x-2)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ ;$$

**26.** Ἐὰν αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως: $\alpha x^2+\beta x+\beta=0$ ἔχούν λόγον $\mu:\nu$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}+\sqrt{\frac{\nu}{\mu}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=0.$$

**27.** Νὰ ἐπιλυθοῦν αἱ ἀκόλουθοι ἐξισώσεις:

1. $(2x-7\alpha+\beta)^2+16(7\alpha+5\beta-4x)^2=(31\alpha+23\beta-18x)^2$
2. $(\alpha+\beta+x)(\beta+\gamma+x)=(3\alpha-\beta-x)(3\alpha-2\beta+\gamma-2x)$
3. $(2\alpha-\beta-x)^3+(\alpha-2\beta+x)^3=27(\alpha-\beta)^3$
4. $(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)(x^2+x+1)+(\alpha-\beta)^2=(2\alpha\gamma+\beta^2)(x^2+x+1)+(\alpha-\gamma)^2x$
5. $(x-3\alpha+5\beta)^3-(x-5\alpha+3\beta)^3=8(\alpha+\beta)^3$
6. $(3\alpha-2\beta-x)^3+(2\alpha-3\beta+x)^3=125(\alpha-\beta)^3$
7. $\dfrac{5\alpha+\beta-2x}{5\alpha-\beta-2x}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\cdot\dfrac{2\alpha-2\beta+x}{2\alpha+2\beta+x}$
8. $\left(\dfrac{2x-5\alpha+3\beta}{2x-5\beta+3\alpha}\right)^2=\dfrac{25\alpha+9\beta-34x}{25\beta+9\alpha-34x}$
9. $\dfrac{\alpha+3\beta-4x}{\alpha+2\beta-3x}\cdot\dfrac{\alpha+6\beta-7x}{\alpha-9\beta+8x}=\dfrac{\alpha+13\beta-14x}{\alpha-13\beta+12x}$.

**28.** Εἰς τὴν ἐξίσωσιν $3x^2-4\lambda x+\mu=0$, νὰ ὁρισθοῦν οἱ λ καὶ μ, ἵνα αὕτη ἔχῃ ρίζας $x_1=\lambda$ καὶ $x_2=\mu$.

Ὁμοίως, ἵνα ἔχῃ ρίζας $x_1=2\lambda-\mu$ καὶ $x_2=2\mu-\lambda$.

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ
# ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ
# ΔΙΑ ΤΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΥΠΟ

ΙΩΑΝΝΟΥ Φ. ΠΑΝΑΚΗ

ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

**Πρὸς**

**χρῆσιν ὑπὸ τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων**
**καὶ πάντων τῶν περὶ τὰ Μαθηματικὰ ἀσχολουμένων**

ΕΚΔΟΣΙΣ ΠΡΩΤΗ

ΑΘΗΝΑΙ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ "Ι. ΣΙΔΕΡΗΣ,,

ΟΔΟΣ ΣΤΑΔΙΟΥ 44

1966

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

# ΠΙΝΑΞ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

| Σύμβολον | Σημασία εἴτε ὀνομασία |
|---|---|
| $\{\ \}$ | Δεσμοὶ ἢ ἄγκιστρα τοῦ συνόλου. |
| $\in$ | εἶναι, ἀνήκει εἰς τό, ἐν, τοῦ, εἶναι στοιχεῖον τοῦ. |
| $\notin$ | Δὲν ἀνήκει εἰς τό, οὐχί, δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ. |
| $\mid$ | ἔνθα, οὕτως ὥστε. |
| $\{x \mid \}$ | Συνολοδόμος τοῦ συνόλου διὰ συνθήκης. |
| $\{x :\}$ | ἔνθα, οὕτως ὥστε, συνολοδόμος διὰ συνθήκης. |
| $\Longrightarrow$ | συνεπάγεται, ὅθεν, τότε, ἄρα. |
| $\Longleftrightarrow$ | ἰσοδυναμεῖ μέ, τότε καὶ μόνον τότε, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν (λογικὴ ἰσοδυναμία). |
| $\forall$ | δι' ὅλα τά, διὰ κάθε (γενικὸς ποσοτιστής). |
| $\exists$ | ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα. |
| $\exists^*$ | ὑπάρχει ἕνα μόνον. |
| $=$ | ἰσοῦται μέ, εἶναι ἴσον μέ, εἶναι. |
| $\equiv$ | Τὸ σύμβολον τῆς ταυτότητος. |
| $<$ | εἶναι μικρότερον τοῦ. |
| $>$ | εἶναι μεγαλύτερον τοῦ. |
| $\leqslant$ | εἶναι μικρότερον εἴτε ἴσον τοῦ. |
| $\geqslant$ | εἶναι μεγαλύτερον εἴτε ἴσον τοῦ. |
| $\neq$ | εἶναι διάφορον τοῦ. |
| $\nparallel$ | εἶναι λογικῶς διάφορον τοῦ. |
| $+$ | σὺν (σύμβολον τῆς προσθέσεως). |
| $-$ | πλὴν (σύμβολον τῆς ἀφαιρέσεως). |
| $\times$ ἢ $\cdot$ | ἐπὶ (σύμβολον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ). |
| $:$ | διὰ (σύμβολον τῆς διαιρέσεως). |
| $\wedge$ | καὶ (σύμβολον λογικῆς συζεύξεως). |
| $\nu!$ | ν παραγοντικὸν ($\nu! = 1.2.3 \ldots \nu$), $\nu \in \Phi$. |
| $\Phi$ | Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν : $\Phi = \{1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}$ |
| $\Phi_o$ | Τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως (τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν φυσικῶν) : $[\Phi_o = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \nu, \ldots\}]$. |
| $A_\varkappa$ | Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων : $A_\varkappa = \{- \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ |
| $A_\varkappa^-$ | Τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων : $A_\varkappa^- = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ |

| Σύμβολον | Σημασία εἴτε ὀνομασία |
|---|---|
| $A_\kappa^+$ | Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ἀκεραίων: $A_\kappa^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$ |
| $P$ | Τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν. |
| $K_\lambda$ | Τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων. |
| $A_\varrho$ | Τὸ σύνολον τῶν ἀρρήτων. |
| $\Pi_\alpha$ | Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. |
| $\nu(A)$ | ν τοῦ Α, πληθικὸς ἢ ἀπόλυτος ἀριθμός, δυναμικότης, ἰσχύς, σθένος τοῦ συνόλου Α. |
| $\mid\ \mid$ | Τὸ σύμβολον τοῦ ἀπολύτου. |
| $\varnothing$ ἢ $\{\ \}$ | Τὸ κενὸν σύνολον. |
| $\subseteq$ | εἶναι ὑποσύνολον τοῦ. |
| $\nsubseteq$ | δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ. |
| $\supseteq$ | εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ. |
| $\nsupseteq$ | δὲν εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ. |
| $\subset$ | εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ. |
| $\not\subset$ | δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ. |
| $\supset$ | εἶναι γνήσιον ὑπερσύνολον τοῦ. |
| $\not\supset$ | δὲν εἶναι γνήσιον ὑπερσύνολον τοῦ. |
| $\leftrightarrow$ | ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσημάντως. |
| $\sim$ | εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ (ἄρνησις εἰς τὴν λογικήν). |
| $[\alpha, \beta]$ | κλειστὸν ἑκατέρωθεν διάστημα: $[\alpha,\beta] = \{x \mid x \in P,\ \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$ |
| $]\alpha, \beta[$ | ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν διάστημα: $]\alpha,\beta[ = \{x \mid x \in P,\ \alpha < x < \beta\}$ |
| $[\alpha, \beta[$<br>$]\alpha, \beta]$ | μικτὸν διάστημα $[\alpha,\beta[ = \{x \mid x \in P,\ \alpha \leqslant x < \beta\}$<br>» » $]\alpha,\beta] = \{x \mid x \in P,\ \alpha < x \leqslant \beta\}$ |
| $+\infty$ | θετικὸν ἄπειρον. |
| $-\infty$ | ἀρνητικὸν ἄπειρον. |
| | Διαστήματα μὴ περιωρισμένα<br>$]\leftarrow, \alpha] = ]-\infty, \alpha] = \{x \mid x \in P, x \leqslant \alpha\}$<br>$]\leftarrow, \alpha[ = ]-\infty, \alpha[ = \{x \mid x \in P, x < \alpha\}$<br>$[\alpha, \rightarrow[ = [\alpha, +\infty[ = \{x \mid x \in P, \alpha \leqslant x\}$<br>$]\alpha, \rightarrow[ = ]\alpha, +\infty[ = \{x \mid x \in P, \alpha < x\}$ |

| Σύμβολον | Σημασία εἴτε ὀνομασία |
|---|---|
| $\overline{A}$ | Συμπλήρωμα τοῦ Α ὡς πρὸς γνωστὸν κυρίαρχον σύνολον Σ |
| $C_{\Sigma}^{A}$ | » » » » » » |
| $\underline{V}$ | ἤ (ἀποκλειστικὴ διάζευξις προτάσεων). |
| $\vee$ | εἴτε (ἐγκλειστικὴ διάζευξις προτάσεων). |
| $-A$ | οὐχὶ Α. |
| $\cup$ | ἕνωσις. |
| $\cap$ | διατομὴ (ἢ τομή). |
| $//$ | εἶναι ξένον πρὸς τό, εἶναι διαχωρισμένον τοῦ. |
| $\dotplus$ | συμμετροδιαφορά. |
| $\parallel$ | παράλληλος πρός. |
| $(\Phi_o, +, \times)$ | $\Phi_o$, σύν, ἐπὶ (τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως μετὰ τῶν πράξεων (προσθέσεως +) καὶ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ×). |
| $P_{(E)}$ | Τὸ σύνολον τῶν μερῶν τοῦ Ε. |
| $2^{A}$ | Δυναμοσύνολον τοῦ Α. |
| $x\ R\ y$ | ὁ x ἔχει σχέσιν μὲ τὸν y. |
| $\dots$ | καὶ οὕτω καθεξῆς. |
| $(\alpha, \beta)$ | διατεταγμένον ζεῦγος. |
| $A \times B$ | Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα (γινόμενον) τῶν συνόλων Α καὶ Β. |
| $A - B$ | Τὸ σύμβολον τῆς διαφορᾶς τῶν συνόλων Α καὶ Β. |
| $\mathcal{D}$ | Τὸ σύμβολον τοῦ διαμερισμοῦ συνόλου. |
| $A \in \dot{\pi}$ | Τὸ σημεῖον Α ἀνήκει εἰς τὸ ἐπίπεδον $\dot{\pi}$. |
| $\longrightarrow$ | ἔχει ὡς εἰκόνα. |
| $f : A \longrightarrow B$ | Διὰ τοῦ νόμου f τὸ Α ἀπεικονίζεται εἰς τὸ Β ἢ ἐπὶ τὸ Β. |
| $f(x)$ ἢ $f$ | Τὸ σύμβολον τῆς συναρτήσεως ἔφ τοῦ x ἢ ἔφ. |
| $f^{-1}{}_{(x)}$ | Ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς f. |
| $Z$ | Τὸ σύνολον τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. |
| $\dot{\pi}_1 \cap \dot{\pi}_2 = (\delta)$ | Ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων $\dot{\pi}_1$ καὶ $\dot{\pi}_2$ εἶναι ἡ εὐθεῖα (δ). |
| $A \not\sim B$ | Α δὲν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ Β. |

# ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΚ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ι

## ΒΑΣΙΚΑΙ ΕΝΝΟΙΑΙ

### ΟΡΙΣΜΟΙ

**1. Σύνολον.** Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι μᾶς τίθεται ἡ ἐρώτησις :

α). **Ποῖοι εἶναι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 11 ;**

Εἶναι φανερὸν ὅτι πρέπει νὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ οὗτοι εἶναι οἱ :

4, 6, 8, 10.

Ἡ ἐρώτησις ὅμως δύναται νὰ τεθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

**Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τοῦ 3 καὶ τοῦ 11 ;**

Θὰ πρέπῃ καὶ πάλιν νὰ δοθῇ ἡ ὀρθὴ ἀπάντησις, ὅτι οὗτοι εἶναι οἱ 4, 6, 8, 10 καὶ ***ὄχι*** «τέσσαρες».

β). **Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου ;**

Ἡ ἀπάντησις εἶναι ὅτι τοῦτο θὰ εἶναι :

α, ε, η, ι, ο, υ, ω

καὶ ὄχι ἑπτά.

Ὁμοίως εἰς τὴν ἐρώτησιν :

γ). **Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν 31 ἡμέρας ;**

Ἡ ἀπάντησις εἶναι :

**Ἰανουάριος, Μάρτιος, Μάϊος, Ἰούλιος, Αὔγουστος, Ὀκτώβριος, Δεκέμβριος**

καὶ ***ὄχι*** ὅτι εἶναι κατὰ τὸ πλῆθος ἑπτά. Διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐννοοῦμεν συνολικὸν καὶ ἀφῃρημένον πλῆθος, ἀλλὰ νὰ διακριθοῦν καὶ ἀπαγγελθοῦν οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί, οἱ περιεχόμενοι μεταξὺ 3 καὶ 11 εἰς τὴν πρώτην ἐρώτησιν ἀνωτέρω. Ἐπίσης νὰ διακριθοῦν καὶ ἀπαγγελθοῦν τὰ φωνήεντα τοῦ ἀλφαβήτου εἰς τὴν δευτέραν ἐρώτησιν καὶ ὁμοίως νὰ διακριθοῦν καὶ ἀπαγγελθοῦν οἱ μῆνες τοῦ ἔτους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν 31 ἡμέρας εἰς τὴν τρίτην ἐρώτησιν.

Τὴν λέξιν ***σύνολον*** ἕκαστος ἐξ ἡμῶν τὴν μεταχειρίζεται εἰς τὴν καθημερινὴν ζωὴν καὶ ἐκφράζει μὲ αὐτὴν μίαν ὁλότητα ἢ καὶ μίαν ἑνότητα συγκεκριμένων ἢ καὶ ἀφῃρημένων ἐννοιῶν.

Εἰς τὴν Μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἡ λέξις ***σύνολον*** δὲν ἐκφράζει ἁπλῶς μίαν ὁλότητα, ἀλλὰ μίαν μαθηματικὴν ἔννοιαν τελείως ὡρισμένην. Τοῦτο θὰ φανῇ καὶ θὰ γίνῃ κατανοητὸν ἀπὸ τὰ ἀκόλουθα.

Αἱ ἑπόμεναι φράσεις δίδουν μίαν ἔννοιαν τοῦ συνόλου.

Τὸ σύνολον τῶν Γυμνασίων τῶν Ἀθηνῶν.
Τὸ σύνολον τῶν βιβλίων τῆς βιβλιοθήκης μας.
Τὸ σύνολον τῶν συμφώνων τοῦ ἀλφαβήτου.
Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τοῦ ἔτους.
Τὸ σύνολον τῶν ἑβδομάδων τοῦ ἔτους.
Τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους.
Τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος.
Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς τάξεως.
Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.
Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.
Τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.
Τὸ σύνολον τῶν χρωμάτων τοῦ ἡλιακοῦ φάσματος.
Τὸ σύνολον τῶν μελῶν μιᾶς οἰκογενείας.
Τὸ σύνολον τῶν προβάτων ἑνὸς ποιμνίου.
Τὸ σύνολον τῶν Ὑπουργείων ἑνὸς Κράτους.
Τὸ σύνολον τῶν Καθηγητῶν τοῦ Γυμνασίου μας.
Τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς εὐθείας.
Τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως Θεός.
Τὸ σύνολον τῶν θεωρημάτων τῆς Ἐπιπεδομετρίας.
Τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ ἀριθμοῦ 48.
Τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων τῶν περιεχομένων μεταξὺ 5 καὶ 6.
Τὸ σύνολον τῶν ὅρων ἑνὸς κλάσματος.
Τὸ σύνολον τῶν συναισθημάτων.
Τὸ σύνολον τῶν αἰσθημάτων.
Τὸ σύνολον τῶν αἰσθήσεών μας.
Τὸ σύνολον τῶν αὐτοκινήτων τῆς Ἑλλάδος.
Τὸ σύνολον τῶν πλανητῶν τοῦ ἡλιακοῦ μας συστήματος κ.λ.π.

Αἱ ἀνωτέρω φράσεις, καθὼς καὶ ἄλλαι παρόμοιαι μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ εἴπωμεν ὅτι :

***Σύνολον εἶναι μία συλλογὴ πραγμάτων.***

Ὁ ὁρισμὸς ὅμως οὗτος δὲν εἶναι μαθηματικῶς αὐστηρός, διότι ἡ λέξις *συλλογὴ* εἶναι συνώνυμος τῆς λέξεως *σύνολον*, τὴν ὁποίαν πρόκειται νὰ ὁρίσωμεν.

Ἡ λέξις σύνολον εἶναι **μία πρώτη** λέξις τῆς Μαθηματικῆς θεωρίας καὶ ἀποτελεῖ ἕνα ἀρχικὸν ὅρον. Εἶναι λοιπὸν μία λέξις, τὴν ὁποίαν *δεχόμεθα ἄνευ ὁρισμοῦ*.

Ἡ λέξις ***πρᾶγμα*** εἶναι ὅρος, ὁ ὁποῖος λαμβάνεται ὑπὸ τὴν εὐρεῖαν αὐτοῦ ἔννοιαν. Ἀναφέρεται, δηλαδή, εἰς συγκεκριμένα ἀντικείμενα, εἰς ἰδέας, εἰς αἰσθήματα, εἰς συναισθήματα κ.λ.π. Διότι εἶναι δυνατὸν νὰ διατυπωθῇ ἡ πρότασις: ***Τί πρᾶγμα εἶναι ἡ μνήμη; Τί πρᾶγμα εἶναι ἡ λύπη; Τί πρᾶγμα εἶναι ἡ χαρά;***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἀναφέρατε σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα νὰ εἶναι:

α). Φυσικοὶ νόμοι.
β). Διάφοροι Ἐφευρέται.
γ). Χημικὰ στοιχεῖα.
δ). Ζῶα.
ε). Ἀντικείμενα οἰκίας.
στ). Ἀνθρώπιναι ὑπάρξεις.
ζ). Ἀριθμοί.

**2.** Νὰ ἀναφερθοῦν σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἶναι:

α). Εὐρωπαϊκὰ Κράτη.
β). Ἑλληνικαὶ πόλεις.
γ). Ἀμερικανικὰ Κράτη.
δ). Πρωτεύουσαι Εὐρωπαϊκῶν Κρατῶν.
ε). Γεωμετρικὰ σώματα.
στ). Λέξεις μὲ 8 γράμματα.
ζ). Τὰ 5 ὑψηλότερα ὄρη τῆς Ἑλλάδος.

**2. Στοιχεῖα τοῦ συνόλου.** Εἴπομεν ἀνωτέρω ὅτι: ***Σύνολον εἶναι μία συλλογὴ πραγμάτων.*** Δηλαδὴ μία ἔννοια, ἡ ὁποία περιλαμβάνει μίαν ὁμάδα διαφόρων ἀντικειμένων (πραγμάτων), γραμμάτων, λέξεων, ἀριθμῶν, ἰδεῶν, αἰσθημάτων, συναισθημάτων κ.λ.π.

Κάθε πρᾶγμα τοῦ συνόλου λέγεται ***στοιχεῖον*** ἢ ***μέλος αὐτοῦ.*** Οὕτω, ὁ Καθηγητὴς εἶναι στοιχεῖον ἢ μέλος τοῦ συνόλου τῶν Καθηγητῶν τοῦ σχολείου μας.

Τὸ φωνῆεν ω εἶναι στοιχεῖον ἢ μέλος τοῦ συνόλου τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου. Ὁ ἀριθμὸς 5 εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Ἐὰν ἕνα στοιχεῖον ἑνὸς συνόλου ὑπάρχῃ δύο ἢ καὶ περισσοτέρας φοράς, τοῦτο θὰ λαμβάνεται ***μόνον μίαν*** φοράν. Οὕτω, ἐξ ὁρισμοῦ, θὰ δεχώμεθα ὅτι τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ εἶναι τό: Μ,Α,Θ,Η,Τ,Ι,Κ. Δηλαδὴ τὸ γράμμα Α λαμβάνεται μόνον μίαν φοράν, ἐνῷ ὑπάρχει τρεῖς φορὰς εἰς τὴν λέξιν ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ.

Τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου δύναται νὰ εἶναι οἱονδήποτε ἢ κανέν, ὅπως θὰ ἴδωμεν κατωτέρω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** α). Ποῖα εἶναι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν;
β). Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων μονοψηφίων ἀριθμῶν;
γ). Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων περιττῶν;
δ). Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 3, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 20 καὶ 50;
ε). Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν διψηφίων τελείων τετραγώνων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ 20 καὶ 90;

στ). Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ὑγρολήκτων συμφώνων τοῦ ἀλφαβήτου; Ποῖον τὸ τῶν ἐρρινολήκτων; Ποῖον τὸ τῶν ὀδοντικολήκτων;

**2.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ 12;

**3.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 120;

**3. Συμβολισμὸς τοῦ συνόλου.** Διὰ τὸν συμβολισμὸν ἑνὸς συνόλου χρησιμοποιοῦμεν δύο ***ἄγκιστρα*** { } ἢ ***ἑνωτικά,*** ἀντιμέτωπα ἀλλήλων καὶ κατακόρυφα, ἐντὸς τῶν ὁποίων γράφομεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου, κεχωρισμένα μεταξύ των δι' ἑνὸς κόμματος καὶ μίαν μόνον φορὰν ἕκαστον. Ἔμπροσθεν τῶν ἑνωτικῶν γράφομεν τὸ σύμβολον τῆς ἰσότητος = καὶ ἔμπροσθεν τοῦ ἴσον (=) ἕνα κεφαλαῖον γράμμα. Οὕτω, διὰ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου γράφομεν:

$$A = \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}. \tag{1}$$

καὶ ἀπαγγέλλομεν: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν φωνηέντων.*

Διὰ τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν γράφομεν:

$$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}. \tag{2}$$

Διὰ τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος γράφομεν:

$$\Gamma = \{\text{Δευτέρα}, \text{Τρίτη}, \text{Τετάρτη}, \text{Πέμπτη}, \text{Παρασκευή}, \text{Σάββατον}, \text{Κυριακή}\} \tag{3}$$

καὶ ἀπαγγέλλομεν: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος.*

Διὰ τὸ σύνολον τῆς λέξεως ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ γράφομεν:

$$\Sigma = \{M,A,\Theta,H,T,I,K\}. \tag{4}$$

Ἐξ ὁρισμοῦ, ὅμως, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$K = \{\omega,\omega,\omega,\omega\} = \{\omega\}$ καὶ $\Lambda = \{M,A,\Theta,H,M,A,T,I,K,A\} = \{M,A,\Theta,H,T,I,K\}$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω φαίνεται ὅτι ἔχομεν παραδείγματα συνόλων ***ἀριθμητικά,*** ὅπως τὸ (2), ***ἐγγράμματα,*** ὅπως τὸ (1), ***ἐννοιακά,*** ὅπως τὸ (3), καὶ ***γενικά,*** ὅπως τό:

$$T = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu\}. \tag{5}$$

Τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ γράφωνται κατὰ μίαν ὡρισμένην τάξιν ἕκαστον, ἀλλὰ τυχαίως καὶ μόνον μίαν φορὰν ἕκαστον.

Οὕτω, διὰ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$A = \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\},\ B = \{\omega,\alpha,\iota,\varepsilon,\eta,o,\upsilon\},\ \Gamma = \{\iota,\omega,\alpha,\eta,\upsilon,o,\varepsilon\}.$$

Δηλαδὴ ἡ σειρὰ τοποθετήσεως τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου ἐντὸς τῶν ἀγκίστρων δὲν μεταβάλλει αὐτό.

**4. Τὸ κενὸν σύνολον.** Τίθεται τὸ ἐρώτημα: **Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῶν μεταξὺ 5 καὶ 6;** Εἶναι γνωστὸν ὅτι οὐδεὶς ἀκέραιος ὑπάρχει μεταξὺ 5 καὶ 6. Θὰ ἀπαντήσωμεν ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο δὲν ἔχει στοιχεῖα ἢ ὅτι τὸ σύνολον εἶναι τὸ ***κενὸν*** ἢ τὸ ***μηδενικόν.***

Εἰς τὸ ἐρώτημα: **Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα ἀρχίζουν ἀπὸ Ν;** Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχουν ἡμέραι τῆς ἑβδομάδος, τῶν ὁποίων τὰ ὀνόματα νὰ ἀρχίζουν ἀπὸ τὸ γράμμα Ν, λέγομεν ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι τὸ κενόν.

Τὸ σύμβολον τοῦ κενοῦ εἶναι τὸ $\varnothing$ καὶ διαβάζεται :

$\varnothing$ *τὸ κενὸν σύνολον*

Εἰς κάθε σύνολον ἀντιστοιχεῖ ἕνα κενὸν σύνολον καὶ κατ' ἀκολουθίαν οὐδέποτε γίνεται χρῆσις τῆς ἐκφράσεως *δὲν ὑπάρχει σύνολον*, ἀλλὰ θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ ἐν λόγῳ σύνολον εἶναι τὸ $\varnothing$, ἤτοι τὸ κενόν. Ὥστε :

***Κενὸν λέγεται τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον.***

*Σημ.* Εἰς ἑπομένας παραγράφους θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνον ἕνα κενὸν σύνολον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 10 καὶ 20 ;

**2.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 8 καὶ 9;

**3.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος, τῶν ὁποίων τὸ ὄνομα ἀρχίζει ἀπὸ Λ ;

**4.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν βασιλέων τῆς Ἀμερικῆς ;

**5.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ζώντων ἀνθρώπων, τῶν ὁποίων ἡ ἡλικία εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 200 ἐτῶν ;

**6.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοί ;

**7.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι περιττοί ;

**8.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, οἱ ὁποῖοι ἔχουν 35 ἡμέρας ;

**9.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι ἄρτιοι ἀριθμοί ;

**10.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα εἶναι περιττοὶ ἀριθμοί ;

**11.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν ὀρθῶν γωνιῶν τῶν μικροτέρων τῶν $90^\circ$ ;

**12.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαγωνίων ἑνὸς τριγώνου ; Μιᾶς πυραμίδος ;

**5. Ἀνάγνωσις τοῦ συνόλου.** Ἔστω τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων :

$$A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}. \tag{1}$$

Τοῦτο διαβάζεται ὡς ἑξῆς : *Α εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου* $\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega$.

Τὸ σύνολον : $\Phi = \{1, 2, 3, \ldots, \nu\}$, διαβάζεται : *Φ εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 1,2,3, μέχρι καὶ τοῦ ν.*

Τὸ σύνολον τῶν δορυφόρων τῆς Γῆς εἶναι : $\Gamma = \{\text{Σελήνη}\}$.

Τὸ σύνολον τῶν δορυφόρων τῆς Σελήνης εἶναι τὸ $\varnothing$. Διότι, ὡς γνωστόν, ἡ Σελήνη οὐδένα δορυφόρον ἔχει.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Μὲ πόσους τρόπους διαβάζεται τὸ σύνολον

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \;;$$

**2.** Ὁμοίως τὸ σύνολον :

$$B = \{2, 4, 6, 8, 10\} \;;$$

**3.** Ὁμοίως τὸ σύνολον :

$$\Gamma = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\} \;;$$

**6. Μονομελές..., Πολυμελὲς σύνολον.** Ἐὰν ἕνα σύνολον περιέχῃ ἕνα μόνον μέλος, λέγεται ***μονομελές.*** Ἐὰν περιέχῃ δύο μέλη, λέγεται ***διμελές.*** Ἐὰν περιέχῃ τρία μέλη, λέγεται ***τριμελὲς*** κ.ο.κ., ἐὰν περιέχῃ πολλὰ μέλη, λέγεται ***πολυμελές.*** Οὕτω:

Τὸ σύνολον $A = \{\alpha\}$ εἶναι μονομελές.
Τὸ σύνολον $B = \{2,3\}$ εἶναι διμελές.
Τὸ σύνολον $\Gamma = \{$Γιῶργος, Κώστας, Ἀγαμέμνων$\}$ εἶναι τριμελές.
Τὸ σύνολον $\Delta = \{ x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu \}$ εἶναι πολυμελές.

Συνήθως τὰ στοιχεῖα (ἢ μέλη) ἑνὸς συνόλου γράφονται μὲ μικρὰ γράμματα ἢ μὲ ἀριθμοὺς ἢ μὲ λέξεις κ.λ.π.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὕρετε τὸ εἶδος τῶν ἀκολούθων συνόλων:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| α) | $\{\alpha\}$ | ε) | $\varnothing$ | θ) | $\{\ \}$ |
| β) | $\{\alpha,\beta\}$ | στ) | $\{\varnothing\}$ | ι) | $\{0,\varnothing,\alpha,1,2\}$ |
| γ) | $\{1,2,3)$ | ζ) | $\{0\}$ | κ) | $\{A,B,\Gamma,\Delta\}$ |
| δ) | $\{1,2,3,4\ldots,\}$ | η) | $\{0,\alpha\}$ | | |

**2.** Τί διαφορὰ ὑπάρχει μεταξὺ τοῦ 0 καὶ τοῦ $\varnothing$;
**3.** Ποία ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $\varnothing$ καὶ τοῦ $\{\ \}$;
**4.** Ποία ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ $\varnothing$ καὶ τοῦ $\{\varnothing\}$;
**5.** Ποία ἡ διαφορὰ μεταξὺ μεταξὺ τοῦ x καὶ τοῦ $\{x\}$;
**6.** Πόσα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον $A = \{\ ,\ \}$ καὶ πόσα τὸ $B = \{\alpha,\}$;
**7.** Πόσα μέλη ἔχει τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων τῶν μεταξὺ 5 καὶ 6; τῶν μεταξὺ 4 καὶ 20;
**8.** Πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ σύνολον:

$$\Sigma = \{1,2,(3,5),\ \{4\},\ \{6,7,8\},9,10\};$$

**9.** Τὸ σύνολον $A = \{\varnothing\}$ εἶναι τὸ κενόν;

**7. Καθορισμὸς συνόλου — Σύμβολον τοῦ ἀνήκειν.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$\Sigma = \{4,5,6,9,15\}. \qquad (1)$$

Τούτου τὰ στοιχεῖα εἶναι σαφῶς καθωρισμένα, διότι μετὰ πεποιθήσεως ἀποφαινόμεθα ὅτι τὸ στοιχεῖον 5 π.χ. ἀνήκει εἰς τὸ Σ. Τοῦτο τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$5 \in \Sigma.$$

Τὸ σύμβολον $\in$ διαβάζεται: *ἀνήκει, εἶναι στοιχεῖον τοῦ, εἶναι ἐν.*

Τὸ στοιχεῖον 8 δὲν ἀνήκει εἰς τὸ Σ. Τοῦτο τὸ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$8 \notin \Sigma.$$

Τὸ σύμβολον $\notin$ διαβάζεται: *δὲν ἀνήκει, δὲν εἶναι στοιχεῖον τοῦ.*

Ἐπίσης τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:

$$A = \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}$$

εἶναι διακεκριμένα ἀλλήλων καὶ σαφῶς καθωρισμένα καὶ μετὰ πεποιθήσεως, ἐρωτώμενοι, ἀπαντῶμεν ὅτι τὸ στοιχεῖον η ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον A, ἐνῷ τὸ στοιχεῖον λ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τοῦτο καὶ γράφομεν $\eta \in A$ καὶ $\lambda \notin A$.

*Σημ.* Κάθε σταθερὰ ἔκφρασις, ἔχουσα προτασιακὸν νόημα καὶ διὰ τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής, καλεῖται δήλωσις.

Οὕτω, ἡ δήλωσις: $5 \in \{3,5,7\}$ εἶναι ἀληθής.

Ἡ δήλωσις: $3 \notin \{3,5,7\}$ εἶναι ψευδής.

Ἡ δήλωσις: $\{\alpha\} \notin \{\alpha,\beta,\gamma\}$ εἶναι ἀληθής.

Ἡ δήλωσις: $\{\alpha\} \in \{\beta,\gamma,\{\alpha\}\}$ εἶναι ἀληθής.

Ἡ δήλωσις: $\alpha \in \{\beta,\gamma,\delta\}$ εἶναι ψευδής.

α). **Τὸ σύνολον τῶν πέντε φυσικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 10 καὶ 20, εἶναι καλῶς καθωρισμένον;**

Ἐνταῦθα θὰ πρέπῃ νὰ δοθῇ ἀρνητικὴ ἀπάντησις. Διότι δὲν καθορίζεται ποῖοι 5 φυσικοὶ ἀριθμοὶ ἐννοοῦνται καὶ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀπαντήσωμεν ἂν ὁ 16 ἀνήκῃ εἰς τὸ σύνολον τοῦτο, παρὰ τὸ ὅτι ὁ 16 εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ 10 καὶ 20.

Ἄρα τὸ ἐν λόγῳ σύνολον ***δὲν εἶναι καλῶς καθωρισμένον.***

β). **Τὸ σύνολον τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ 3 καὶ 4, εἶναι καλῶς καθωρισμένον;**

Τοῦ συνόλου τούτου δυνάμεθα νὰ ἀναγράψωμεν ὁσαδήποτε διακεκριμένα στοιχεῖα θέλομεν καὶ νὰ ἀποφανθῶμεν ἐπίσης ὅτι τὸ κλάσμα $\frac{7}{2}$ ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τοῦτο, ἐνῷ τὸ κλάσμα $\frac{2}{7}$ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ σύνολον τοῦτο. Ἄρα τὸ σύνολον τοῦτο ***εἶναι καλῶς καθωρισμένον.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸ συμπέρασμα ὅτι, διὰ νὰ ὁρισθῇ ἕνα σύνολον, πρέπει τὰ στοιχεῖα του νὰ εἶναι διακεκριμένα καὶ καλῶς καθωρισμένα. Κατ' ἀκολουθίαν:

***Ἕνα σύνολον καλεῖται καλῶς ὡρισμένον, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν τὰ στοιχεῖα του εἶναι διακεκριμένα καὶ καλῶς καθωρισμένα.***

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδεται τὸ σύνολον $A = \{1,2,3,4,5,6\}$: Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς;

| | | |
|---|---|---|
| α). $4 \in A$ | ε). $0 \in A$ | θ). $\{1\} \in A$ |
| β). $3 \notin A$ | στ). $\varnothing \in A$ | ι). $\{\varnothing\} \notin A$ |
| γ). $7 \in A$ | ζ). $\varnothing \notin A$ | κ). $10 \notin A$ |
| δ). $1 \in A$ | η). $\alpha_1 \in A$ | λ). $3 \in A$. |

**2.** Ἐὰν $A = \{2,3\}$ καὶ $\alpha \in A$, τί δύναται νὰ εἶναι τὸ $\alpha$;

**3.** Ἐὰν $\Sigma = \{1,2,3,4\}$ καὶ $x \in A$, τί δύναται νὰ εἶναι ὁ $x$;

**4.** Νὰ γίνῃ ἡ περιγραφὴ τῶν ἀκολούθων συνόλων

$$\Sigma = \{2,4,6,8,10,12\}$$
$$\Sigma_1 = \{1^2,2^2,3^2\}$$

**5.** Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων εἶναι ψευδεῖς καὶ ποῖαι εἶναι ἀληθεῖς;

| | |
|---|---|
| α). $3 \in \{4,5,3,2\}$ | δ). $\lambda \notin \{\kappa,\lambda,\mu\}$ |
| β). $5 \notin \{4,5,2,3\}$ | ε). $\{\lambda\} \in \{\kappa,\lambda,\mu\}$ |
| γ). $\lambda \in \{\kappa,\lambda,\mu\}$ | στ). $\varnothing \in \{1,2,3\}$. |

**6.** Ποῖον εἶναι τὸ σύνολον τῶν διαγωνίων τοῦ τετραγώνου ΑΒΓΔ; Ποῖον τὸ τῶν κορυφῶν του; Ποῖον τὸ τῶν γωνιῶν του;

**7.** Ἐὰν $\alpha \in \{1,2,3,\{\varnothing\},0\}$, τί δύναται νὰ εἶναι ὁ $\alpha$;

**8.** Ἐὰν $x \in \{0,\{3\},\{1,2\},\varnothing\}$, τί δύναται νὰ εἶναι ὁ $x$;

**8. Καθορισμὸς συνόλου δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του.** Ἔστω τὸ σύνολον:
$$A=\{5,6,7,8\},$$
τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα εἶναι ὅλα ἀναγεγραμμένα. Ἑπομένως τὰ στοιχεῖα του εἶναι διακεκριμένα καὶ σαφῶς καθωρισμένα. Διότι δυνάμεθα νὰ ἀποφανθῶμεν ὅτι τὸ στοιχεῖον $7 \in A$ καὶ τὸ στοιχεῖον $10 \notin A$.

Ἡ κατὰ τὸν τοιοῦτον τρόπον μέθοδος καθορισμοῦ ἑνὸς συνόλου ὀνομάζεται ***μέθοδος δι' ἀναγραφῆς*** τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Ἔστω ὅτι μᾶς ζητεῖται νὰ ἀναγράψωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου B τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν ἀπὸ τοῦ 20 μέχρι καὶ τοῦ 100.

Ἐπειδὴ ταῦτα εἶναι πολλά, πρὸς καθορισμὸν τοῦ συνόλου B, χρησιμοποιοῦμεν τὴν λεγομένην ***ἐλλιπῆ*** ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων τοῦ B. Οὕτω γράφομεν:
$$B=\{20,22,24,\ldots,98,100\}$$
μὲ τὴν πεποίθησιν ὅτι ἐξασφαλίζεται ὁ πλήρης καθορισμὸς τοῦ συνόλου B, διότι γνωρίζομεν τὸν σχηματισμὸν τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

Ἐὰν ἀναγράψωμεν:
$$\Phi=\{1,2,3,.\,\} \qquad (1)$$
χωρὶς καμμίαν ἄλλην ἔνδειξιν, θὰ ἀναγράψωμεν, ἂν μᾶς ἐρωτήσουν, καὶ τὰ στοιχεῖα 4,5,6, δηλ. θὰ ἀναγράψωμεν τὸ σύνολον:
$$\Phi=\{1,2,3,4,5,6,\ldots\} \qquad (2)$$
πιστεύοντες ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἔστω ὁ τύπος:
$$K_\nu=\nu+(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)(\nu-4)(\nu-5)(\nu-6), \qquad (2')$$
καὶ γνωστοῦ ὄντος ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου (1) σχηματίζονται βάσει τοῦ τύπου. Τότε παρατηροῦμεν ὅτι:

| | |
|---|---|
| διὰ $\nu=1$ εἶναι $k_1=1$ | Δηλαδὴ ἐθέσαμεν, ὅπου ν, διαδοχικῶς |
| διὰ $\nu=2$ » $k_2=2$ | τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν |
| διὰ $\nu=3$ » $k_3=3$ | ἀριθμῶν καὶ διὰ ν=7, ἀντὶ νὰ εὕρωμεν |
| διὰ $\nu=4$ » $k_4=4$ | τὸ στοιχεῖον 7 τοῦ συνόλου (2), εὕρο- |
| διὰ $\nu=5$ » $k_5=5$ | μεν τὸν ἀριθμὸν 727. Διὰ $\nu=8$ εὕρο- |
| διὰ $\nu=6$ » $k_6=6$ | μεν τὸν ἀριθμὸν 5048 καὶ ὄχι τὸ στοι- |
| διὰ $\nu=7$ » $k_7=727$ | χεῖον 8 τοῦ συνόλου (2). Κατ' ἀκολουθίαν |
| διὰ $\nu=8$ » $k_8=5048$ | πρέπει νὰ ἀποφεύγωμεν τὸν καθορισμὸν |

συνόλου δι' ἐλλιποῦς ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του, ἐκτὸς ἂν αὕτη συνοδεύεται ὑπὸ εἰδικῆς ἐνδείξεως. Δηλαδή, ἂν γράψωμεν:
$$\Phi=\{1,2,3,\ldots\}$$
δὲν εἴμεθα βέβαιοι ὅτι πρόκειται περὶ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἐὰν ὅμως θελήσωμεν νὰ εἴπωμεν ὅτι: ***Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀρι-***

***ϑμῶν Φ={1,2,3...}***, τότε εἴμεθα βέβαιοι ὅτι τοῦτο εἶναι τελείως καθωρισμένον, καίτοι ἀναγράφονται ἐλλιπῶς τὰ στοιχεῖα του.

**9. Καθορισμὸς συνόλου διὰ συνθήκης τῶν στοιχείων του.** Ἔστω ὅτι μᾶς ζητεῖται νὰ ἀναγράψωμεν τὸ σύνολον ὅλων τῶν μαθητῶν τῆς Ἑλλάδος. Ἐπειδὴ οἱ μαθηταὶ οὗτοι εἶναι πάρα πολλοί, δηλαδὴ τὰ στοιχεῖα τοῦ ζητουμένου συνόλου εἶναι πολλά, δὲν εἶναι εὔκολον νὰ ἀναγραφοῦν ὅλα, διότι ἀπαιτεῖται καὶ χρόνος καὶ κόπος. Διὰ τοῦτο χρησιμοποιοῦμεν ἄλλην μέθοδον ἀναγραφῆς, ὥστε νὰ ἐξασφαλίσωμεν τὸ διακεκριμένον καὶ σαφῶς καθωρισμένον αὐτῶν. Ἐξ ἄλλου καὶ ἡ ἐλλιπὴς μόνον ἀναγραφὴ μερικῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου δὲν ἐξασφαλίζει καὶ τὸ καθωρισμένον τῶν ὑπολοίπων στοιχείων αὐτοῦ. Διὰ τοῦτο ἀπαιτεῖται μία εἰδικὴ πρότασις, περιγράφουσα σαφῶς τὴν ἰδιότητα τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου.

Ἑπομένως, διὰ τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῆς Ἑλλάδος, γράφομεν:

$$\Sigma = \{x \mid x \text{ μαθητὴς τῆς Ἑλλάδος}\}$$

ἢ

$$\Sigma = \{x : x \text{ μαθητὴς τῆς Ἑλλάδος}\}$$

τὸ ὁποῖον διαβάζεται: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν x, ἔνθα x νὰ εἶναι μαθητὴς τῆς Ἑλλάδος.*

Τὸ σύμβολον τοῦ *ἔνθα* εἶναι τὸ | ,δηλαδὴ ἕνα κατακόρυφον μικρὸν τμῆμα, ἢ τὸ : καὶ διαβάζεται *ἔνθα* ἢ *ὅπου* ἢ *ὥστε* ἢ *διὰ* καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται ***συνδετικόν.***

Κατὰ τὴν μέθοδον λοιπὸν ταύτην γράφομεν πρῶτον τὸ κεφαλαῖον γράμμα Σ τοῦ συνόλου. Κατόπιν γράφομεν τὸ =. Μετὰ τὸ = γράφομεν τὸ ἄγκιστρον {. Μετὰ τὸ ἄγκιστρον τὸ γράμμα x. Μετὰ τὸ x γράφομεν τὸ συνδετικὸν | καὶ μετὰ τοῦτο πάλιν τὸ x, συνοδευόμενον ἀπὸ τὴν καθορίζουσαν τὴν ἰδιότητα τοῦ στοιχείου πρότασιν. Τέλος τὸ ἄγκιστρον }.

Ὁμοίως, διὰ τὸ σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους γράφομεν:

$$A = \{x \mid x \text{ μὴν τοῦ ἔτους}\}$$

καὶ διαβάζομεν: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν x, ἔνθα x νὰ εἶναι μὴν τοῦ ἔτους.*

Ὁμοίως, διὰ τὸ σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 120 γράφομεν:

$$B = \{x \mid x \text{ πρῶτος παράγων τοῦ } 120\}$$

καὶ διαβάζομεν: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν x, ἔνθα x νὰ εἶναι πρῶτος παράγων τοῦ 120.*

Ἡ μεταβλητὴ x ὀνομάζεται ***ἀκαθόριστος.***

Ἡ τοιαύτη μέθοδος καθορισμοῦ ἑνὸς συνόλου ὀνομάζεται ***μέθοδος διὰ συνθήκης τῶν στοιχείων του.***

Ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης ἢ ἡ ***συνθήκη***, ἡ καθορίζουσα ἕνα σύνολον, πρέπει νὰ εἶναι τοιαύτη, ὥστε νὰ μᾶς παρέχῃ τὴν ἱκανότητα νὰ ἀποφαινώμεθα, ἂν ἕνα στοιχεῖον ἀνήκῃ ἢ δὲν ἀνήκῃ εἰς τὸ περιγραφόμενον σύνολον.

Παράδειγμα: **Νὰ παρασταθῇ συμβολικῶς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 5 καὶ 17.**

Ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι τό:

$$\Phi = \{1,2,3,\ldots\}.$$

Ἄρα τὸ ζητούμενον σύνολον θὰ εἶναι τό:

$$A = \{x \in \Phi \mid 5 < x < 17\}$$

καὶ διαβάζεται: *Τὸ σύνολον ὅλων τῶν $x$ ἐν $\Phi$ οὕτως, ὥστε $5<x<17$.*

Καθωρίσθη λοιπὸν τὸ σύνολον Α, βάσει τῆς τεθείσης συνθήκης τῶν στοιχείων του.

**10. Καθορισμὸς συνόλου διὰ συνθήκης καὶ δι᾽ ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των.** Εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους εἴδομεν ὅτι ἕνα σύνολον εἶναι καλῶς καθωρισμένον, ὅταν δίδεται διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του. Ἐπίσης εἴδομεν ὅτι ἕνα σύνολον εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καλῶς καθωρισμένον, βάσει μιᾶς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του. Δηλαδὴ βάσει μιᾶς συνθήκης, τὴν ὁποίαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, νὰ πληροῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τούτου.

Ἤδη θὰ ἀναζητήσωμεν, κατὰ πόσον εἶναι δυνατὸν ἐκ τῆς περιγραφῆς ἑνὸς συνόλου νὰ προβῶμεν εἰς τὴν πλήρη ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τούτου. Πρὸς τοῦτο ἀναγράφομεν μερικὰ παραδείγματα.

Παραδείγματα: α). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι εἶναι μικρότεροι τοῦ 12.**

***Λύσις:*** Βάσει τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι τό:

$$\Sigma = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\} \qquad (1)$$

Βάσει ὅμως τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του εἶναι τό:

$$\Sigma = \{x \in \Phi \mid x < 12\} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι:

$$\{x \in \Phi \mid x < 12\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}.$$

β). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τῆς λέξεως Γεωμετρία.**

***Λύσις:*** Τὸ σύνολον τοῦτο, βάσει τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του, εἶναι τό:

$$A = \{x \mid x \text{ φωνῆεν τῆς λέξεως Γεωμετρία}\}. \qquad (3)$$

Βάσει ὅμως τῆς πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του εἶναι τό:

$$A = \{\varepsilon, \iota, \alpha, \omega\}. \qquad (4)$$

Κατ᾽ ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν:

$$\{x \mid x \text{ φωνῆεν τῆς λέξεως Γεωμετρία}\} = \{\varepsilon, \iota, \alpha, \omega\}.$$

γ). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων τοῦ τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ 5, τῶν μικροτέρων τοῦ 30.**

***Λύσις:*** Τὸ ζητούμενον σύνολον, βάσει τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του, εἶναι τό:

$$B = \{x \mid x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ 5 μικρότερον τοῦ 30}\}. \qquad (5)$$

Τὸ δι' ἀναγραφῆς ὅμως τῶν στοιχειων του εἶναι τό:

$$B = \{5,10,15,20,25\}. \qquad (6)$$

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ ἔχωμεν:

$\{x \mid x$ πολ/σιον τοῦ 5 μικρότερον τοῦ $30\} = \{5,10,15,20,25\}$.

δ). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 80.**

***Λύσις:*** Τὸ ζητούμενον σύνολον Γ, βάσει τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του, εἶναι τό:

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ πρῶτος παράγων τοῦ } 80\}. \qquad (7)$$

Τὸ αὐτὸ σύνολον, δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του, ἀφοῦ $80 = 2^4.5$, εἶναι τό:

$$\Gamma = \{2,5\} \qquad (8)$$

Ἄρα θὰ ἔχωμεν:

$\{x \mid x$ πρῶτος παράγων τοῦ $80\} = \{2,5\}$.

ε). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:**

$$\Sigma = \{x \in \Pi_\alpha \mid x > 10\}. \qquad (9)$$

***Λύσις:*** Ὡς γνωστόν, ὅλοι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, οἱ μεγαλύτεροι
τοῦ 10 ἀνήκουν εἰς τὸ $\Pi_\alpha$. Κατ' ἀκολουθίαν στοιχεῖα τοῦ διὰ περιγραφῆς
τοῦ δοθέντος συνόλου εἶναι ὅλοι οἱ ἀριθμοί, οἱ μεγαλύτεροι τοῦ 10, ῥητοὶ
καὶ ἀσύμμετροι. Ἄρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναγραφοῦν ὅλοι πλήρως. Ἑ-
πομένως τὸ διὰ τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του ὁρισθὲν
σύνολον, δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν
μελῶν του.

στ). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:**

$$\Delta = \{x \in \Phi_0 \mid 2x = 3\}. \qquad (10)$$

***Λύσις:*** Διὰ νὰ ὁρισθῇ ἕνα σύνολον διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ γνωρίζωμεν τὰ στοιχεῖα του. Ἐδῶ εἶναι $x = \frac{3}{2}$. Τὸ σύνολον ὅμως Δ, βάσει τῆς χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του, εἶναι τό:

$$\Delta = \Phi_0 = \{0,1,2,3,4,5,\ldots\}. \qquad (11)$$

Τὸ στοιχεῖον ὅμως $x = \frac{3}{2}$ δὲν ἀνήκει εἰς τὸ $\Phi_0$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον: $\{x \in \Phi_0 \mid 2x = 3\}$, δὲν ἔχει κανένα στοιχεῖον. Δηλαδὴ εἶναι τὸ ***κενὸν*** σύνολον. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην γράφομεν:

$$\{x \in \Phi_0 \mid 2x = 3\} = \varnothing.$$

ζ). **Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:**

$$\Theta = \{x \mid x \text{ ἀμελὴς μαθητὴς τῆς Α' τάξεως τοῦ Λυκείου}\}. \qquad (12)$$

***Λύσις:*** Ἐπειδὴ τὸ κριτήριον *ἀμελὴς μαθητὴς* εἶναι ἔννοια σχετική, εὑρισκόμεθα εἰς ἀμηχανίαν διὰ τὴν ἀναγραφὴν τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

Θ. Ὅθεν τὸ σύνολον τοῦτο δὲν εἶναι καλῶς καθωρισμένον. Ἐὰν ὅμως τὸ σύνολον τοῦτο ὡρίζετο ὡς:

$$\Theta = \{x \mid x \text{ μαθητὴς μὲ βαθμὸν μικρότερον τοῦ } 10\},$$

θὰ ἦτο καλῶς καθωρισμένον καὶ θὰ ἦτο δυνατὸν νὰ ἀναγράψωμεν τὰ στοιχεῖα του x. Δηλαδὴ ὅλους τοὺς μαθητὰς τῆς Α΄ τάξεως τοῦ Λυκείου, τοὺς ἔχοντας βαθμὸν κάτω τοῦ 10.

η). **Νὰ ὁρισθῇ βάσει συνθήκης τὸ σύνολον:** $\Sigma = \{2,5,7\}$.

***Λύσις:*** Μία ἁπλῆ παρατήρησις τοῦ συνόλου τούτου μᾶς ἄγει εἰς τὸ συμπέρασμα ὅτι τοῦτο εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τῶν περιεχομένων μεταξὺ 1 καὶ 8 καὶ διαφόρων τοῦ 3 καὶ 6.

Ἐπίσης εἶναι δυνατὸν τὸ σύνολον τοῦτο νὰ εἶναι τὸ σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 70, δηλαδὴ τό:

$$\Sigma = \{x \mid x \text{ πρῶτος παράγων τοῦ } 70\}.$$

Δηλαδὴ ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ αὐτὸ σύνολον εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχῃ πολλάς, ἀλλ' ἰσοδυνάμους χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας ἢ συνθήκας.

θ). **Ποίαν ἰδιότητα ἔχουν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου:**

$$K = \{\text{ὀκτώ, ὕδωρ, ἀεροπλάνον}\};$$

***Λύσις:*** Ἐδῶ, καλὸν εἶναι νὰ μὴ ἀναζητήσωμεν ἑτέραν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα, καθόσον αὕτη ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ὅτι τὰ στοιχεῖα *ὀκτώ, ὕδωρ, ἀεροπλάνον*, εἶναι μέλη τοῦ δι' ἀναγραφῆς δοθέντος συνόλου Κ. Δηλαδὴ δὲν εἶναι εὔκολον νὰ ὁρισθῇ τὸ Κ καὶ διὰ χαρακτηριστικῆς ἰδιότητος τῶν στοιχείων του.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι δὲν εἶναι δυνατὸν πάντοτε ἕνα σύνολον Σ νὰ ὁρισθῇ πλήρως διὰ συνθήκης τῶν στοιχείων του καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων αὐτοῦ.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον Α, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι αἱ πέντε αἰσθήσεις τοῦ ἀνθρώπου.

**2.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον Β, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι οἱ 12 θεοὶ τοῦ Ὀλύμπου.

**3.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον Γ, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ 18.

**4.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον Δ, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι τὰ τετράγωνα τῶν μονοψηφίων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ τοῦ 50 καὶ τοῦ 100.

**5.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον τῶν τετραψηφίων ἀριθμῶν x, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα ἱκανοποιοῦν τὴν $1948 \leqslant x \leqslant 1964$.

**6.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν x τοιούτων, ὥστε

$$5 < x \leqslant 20.$$

**7.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν x τοιούτων, ὥστε

$$4 < x < 30.$$

**8.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον τῶν τελείων τετραγώνων ἀριθμῶν, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα ἱκανοποιοῦν τὰς σχέσεις $16 \leqslant x^2 \leqslant 144$.

**9.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:

$$A = \{x \in \Phi \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

**10.** Ὁμοίως τό : $B = \{x \in \Phi \mid x^2 - 5x + 6 = 0\}$.

**11.** Ὁμοίως τό : $\Gamma = \{x \in \Phi_0 \mid x^3 - x = 0\}$.

**12.** Ὁμοίως τό : $\Delta = \{x \in \Pi_\alpha \mid x < 0\}$.

**13.** Ὁμοίως τό : $E = \{x \in \Pi_\alpha \mid x^2 + 2x + 3 = 0\}$.

**14.** Ὁμοίως τό : $Z = \{x \in \{2,3,4,5\} \mid x^2 - 1 = 0\}$.

**15.** Εἰς ποῖον ἐκ τῶν ἀκολούθων συνόλων :

$$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{καὶ} \quad 5x - 1 = 0\}$$
$$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{καὶ} \quad x^2 = 0\}$$
$$\Gamma = \{x \mid x \in \Phi_0 \quad \text{καὶ} \quad 2x = 0\}$$
$$\Delta = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{καὶ} \quad x^2 - 10x + 24 = 0\}$$

ἀνήκουν τὰ στοιχεῖα $0, 4, 6, 3, \frac{1}{5}$ ;

**16.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ στοιχεῖα $-1, 0, 1$ ἀνήκουν εἰς τὰ σύνολα :

$$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{καὶ} \quad x^{20} - 2x^9 + 1 = 0\}.$$
$$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{καὶ} \quad x^3 - x = 0\}.$$

**17.** Ἐὰν $(x^2 - 5x + 2) \in \{-4, -2\}$, νὰ ὁρισθοῦν αἱ δυναταὶ τιμαὶ τοῦ x.

**18.** Ὁμοίως, ἐὰν $(x^2 + 1) \in \{1,3\}$.

**19.** Ὁμοίως, ἐὰν $(x^2 - 1) \in \{3,8,0\}$.

**20.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$$A = \{x \mid x \in \Phi \quad \text{καὶ} \quad x \text{ διαιρέτης τοῦ } 24\}.$$

**21.** Ὁμοίως τό : $B = \{x \mid x \in A_\kappa \quad \text{μὲ} \quad |x| \leqslant 6\}$.

**22.** Ὁμοίως τό : $\Gamma = \{x \mid x \in A_\kappa \quad \text{μὲ} \quad 5 \leqslant x^2 \leqslant 49\}$.

**23.** Ὁμοίως τό : $\Delta = \{x \mid x \text{ τέλειον τετράγωνον μεταξὺ } 5 \text{ καὶ } 9\}$.

**24.** Ὁμοίως τό : $E = \{x \mid x \text{ ρίζα τῆς } \alpha x = 5 \quad \text{μὲ} \quad \alpha = 0\}$.

**25.** Ὁμοίως τό : $Z = \{x \mid x \text{ ρίζα τῆς } \alpha x + \beta = 0 \quad \text{μὲ} \quad \alpha = 0,\ \beta = 0\}$.

**26.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$$A_1 = \{x \mid x \in \Phi \quad \text{μὲ} \quad x^2 \leqslant 4\}.$$

**27.** Ὁμοίως τό : $A_2 = \{x \mid x \in \Phi \quad \text{μὲ} \quad x^2 < 50\}$.

**28.** Ὁμοίως τό : $A_3 = \{x \mid x \in \Phi \quad \text{μὲ} \quad x^3 \leqslant 64\}$.

**29.** Ὁμοίως τό : $A_4 = \{x \mid x \in \Phi \quad \text{μὲ} \quad 8 \leqslant x^3 < 625\}$.

**30.** Μὲ ποίαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα ὁρίζεται ἕκαστον τῶν ἀκολούθων συνόλων :

$$A = \{1,2,3,4,5\} ;$$
$$B = \{2,4,6,8,10\} ;$$
$$\Gamma = \{1,2,4,8,16,32,64,128\} ;$$
$$\Delta = \{5,9,13,17,21,25\} ;$$
$$E = \{-30, -25, -20, \ldots, 10\} ;$$

**31.** Νὰ ὁρισθοῦν τὰ στοιχεῖα ἑκάστου τῶν ἀκολούθων συνόλων :

$$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha^+ \quad \text{μὲ} \quad x^2 = 25\}.$$
$$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha^- \quad \text{μὲ} \quad x^2 = 64\}.$$
$$\Gamma = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{μὲ} \quad 3x - 7 = 5\}.$$
$$\Delta = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \quad \text{μὲ} \quad 5x^2 + 2 = 0\}.$$
$$E = \{x \mid x \in \Phi_0 \quad \text{μὲ} \quad x^4 - x^2 = 0\}.$$
$$Z = \{x \mid x \text{ γράμμα τῆς λέξεως Δημοκρατία}\}.$$

**32.** Νὰ καθορισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον :

$$A = \left\{x \mid x \in \Phi \quad \text{μὲ} \quad \frac{x+4}{x-2} \in \Phi \right\}.$$

(Ὑπόδ. : Σχηματίζομεν τὴν διαφορὰν $x + 4 - (x - 2) = 6$, ὅτε πρέπει $x - 2/6$).

**33.** Ὁμοίως τό: $A = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $\frac{x+10}{x-8} \in \Phi\}$.

**34.** Ὁμοίως τό: $B = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $\frac{x+2}{3x-4} \in \Phi\}$.

**35.** Νὰ εὑρεθῇ ποῖον ἐκ τῶν ἀκολούθων συνόλων εἶναι τὸ κενόν:

$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $x^2 = 9$ καὶ $x^2 - 5x + 6 = 0\}$
$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $x^2 = 4$ καὶ $x^2 - 10x + 24 = 0\}$
$\Gamma = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $x \neq x\}$
$\Delta = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $x + 8 = 8\}$
$E = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $7 < x < 8\}$
$Z = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x$ πρῶτος, ἄρτιος καὶ $x \neq 2\}$
$H = \{x \mid x \in \Phi_0$ μὲ $x^2 + 5x + 6 = 0\}$.

**36.** Εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν:
1). $\alpha = \{\alpha\}$ 2). $\alpha \in \{\alpha\}$ καὶ 3). $\alpha \neq \{\alpha\}$ ;

**37.** Πόσα καὶ ποῖα στοιχεῖα ἔχει τὸ σύνολον:
$A = \{x \mid x$ μὴν τοῦ ἔτους$\}$.

**38.** Ὁμοίως τό: $B = \{x \mid x$ ψηφίον τοῦ ἀριθμοῦ $13003101\}$.

**39.** Ὁμοίως τό: $\Gamma = \{x \mid x$ σύμφωνον τῆς λέξεως ἀεί$\}$.

**40.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$A = \{x \mid x$ πρῶτος μὲ $10 < x = 6\nu + 1 < 100$ καὶ $\nu \in \Phi\}$.

**41.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$A = \{x \mid x$ ἄρτιος μὲ $10 < x = 3k < 20,\ k \in \Phi\}$.

**42.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$B = \{x \mid x$ πρῶτος μὲ $24 < x < 28\}$.

**43.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$\Gamma = \{x \mid x$ ἄρτιος, τέλειον τετράγωνον μὴ διαιρετὸς διὰ $4\}$.

**44.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$\Delta = \{x \in \Phi \mid 5 \leqslant x \leqslant 26$ τῆς μορφῆς $\nu^2 + 1$ μὲ $\nu \in \Phi\}$.

**45.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$E = \{x \in \Phi \mid x$ διαιρετὸς διὰ 3 καὶ 7 ὄχι ὅμως καὶ διὰ $21\}$.

**46.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων, τῶν διαιρετῶν διὰ τοῦ 6, ἀλλὰ μὴ διαιρετῶν διὰ τοῦ 3.

**47.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$A = \left\{x \in A_\varkappa^+ \mid x\right.$ διαιρετὸς διὰ 7 μὲ $\left.100 < x < 150\right\}$.

**48.** Νὰ ὁρισθῇ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων του τὸ σύνολον:
$A = \{x \mid x$ ἀνάγωγον κλάσμα μὲ ἄθροισμα ὅρων $8\}$.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ II

## ΙΣΑ ΣΥΝΟΛΑ — ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ
## ΓΝΗΣΙΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ—ΙΣΟΔΥΝΑΜΑ ΣΥΝΟΛΑ

**11. Ὁρισμός.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{5,6,8,12\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{8,5,12,6\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β καὶ ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α.

Ὁμοίως διὰ τὰ σύνολα:

$$\Sigma = \{x \mid x \text{ πολλαπλάσιον τοῦ } 5\}$$

καὶ

$$\Sigma_1 = \{5,10,15,..,5\nu,...,\} \quad \text{μὲ} \quad \nu \in \Phi,$$

παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον x τοῦ συνόλου Σ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου $\Sigma_1$ καί, ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου $\Sigma_1$ εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου Σ.

Ὅταν δύο σύνολα ἔχουν τὴν ἰδιότητα ταύτην ὀνομάζονται ***ἴσα.***

Ἐντεῦθεν συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν.

***Δύο σύνολα Α καὶ Β λέγονται ἴσα, ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν ἔχουν τὰ αὐτὰ ἀκριβῶς στοιχεῖα.***

Τὸν ὁρισμὸν τοῦτον συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{(A = B) \iff \forall x : (x \in A \iff x \in B)}$$

καὶ διαβάζομεν: *Α = Β, ἐὰν καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε x ἐν Α, συνεπάγεται ὅτι x ἀνήκει καὶ εἰς τὸ Β καὶ ἀντιστρόφως.*

Τὸ σύμβολον $\iff$ διαβάζεται: *συνεπάγεται καὶ ἀντιστρόφως.*

Τὸ δὲ σύμβολον $\forall x$ διαβάζεται: *διὰ κάθε* x.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ὁρισμοῦ συνάγομεν ὅτι, ἂν τὰ δύο σύνολα Α καὶ Β ἔχουν ἀκριβῶς τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, κατὰ διάφορον τάξιν, τὰ σύνολα ταῦτα θὰ εἶναι ἴσα.

***Παρατήρησις Ι:*** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$\Gamma = \{5,9,12\} \quad \text{καὶ} \quad \Delta = \{6-1,\ 7+2,\ 15-3\}.$$

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων τούτων ἀντιπροσωπεύουν τιμὰς ἀριθμῶν, ἔπεται ὅτι ταῦτα εἶναι ἴσα. Δηλαδὴ Γ = Δ. Διότι 6—1 εἶναι μόνον ὁ ἀριθμὸς 5, 7+2 εἶναι μόνον ὁ ἀριθμὸς 9 καὶ 15—3 εἶναι μόνον ὁ ἀριθμὸς 12. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\{5,9,12\} = \{6-1,\ 7+2,\ 15-3\}.$$

'Εὰν ὅμως τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων Γ καὶ Δ θεωρηθοῦν ὡς διαφορετικὰ ὀνόματα (ἁπλᾶ σύμβολα), τότε τὸ σύμβολον «9» εἶναι διάφορον τοῦ συμβόλου «7+2». Διότι τὸ σύμβολον «9» ἀπαγγέλλεται *ἐννέα*, ἐνῷ τὸ σύμβολον «7+2» ἀπαγγέλλεται *ἑπτὰ σὺν δύο*. Δηλαδὴ τὰ στοιχεῖα ταῦτα ἔχουν διαφορετικὸν ὄνομα. Οὕτω, τὰ σύνολα:

{«5», «9», «12»} καὶ {«6—1», «7+2», «15—3}»

δὲν ὑπακούουν εἰς τὸν ἀνωτέρω δοθέντα ὁρισμὸν τῶν ἴσων συνόλων. Κατ' ἀκολουθίαν τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι διάφορα καὶ γράφομεν:

{«5», «9», «12»} ≠ {«6—1», «7+2», «15—3»}

Τὸ σύμβολον ≠ ἀπαγγέλλεται: *διάφορον τοῦ*.

'Ομοίως εἶναι:

$$\left\{«4»,\ «\frac{3}{2}»,\ «1{,}25»\right\} \neq \left\{«\frac{8}{2}»,\ «1{,}5»,\ «\frac{125}{100}»\right\}.$$

***Παρατήρησις II:*** Θεωροῦμεν τὸ σύνολον: $A = \{\alpha,\beta\}$. Ἂν εἰς τοῦτο ἐπιφέρωμεν ἀλλαγὴν τῶν στοιχείων του, λαμβάνομεν τὸ σύνολον $B = \{\beta,\alpha\}$. 'Επειδὴ τὰ σύνολα Α καὶ Β ἔχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα, ἕπεται ὅτι εἶναι ἴσα. Δηλαδὴ $A = B$. Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι μὲ τὰ στοιχεῖα α,β δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν δύο ἴσα σύνολα, τά: $\{\alpha,\beta\}$ καὶ $\{\beta,\alpha\}$.

Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν τὰ στοιχεῖα α,β,γ. Λαμβάνομεν τὰ στοιχεῖα α,β καὶ δημιουργοῦμεν τὰ σύνολα $\{\alpha,\beta\}$ καὶ $\{\beta,\alpha\}$.

'Εὰν τὸ στοιχεῖον γ τὸ θέσωμεν πρὸ τοῦ α, μεταξὺ τῶν α καὶ β καὶ μετὰ τὸ β, δημιουργοῦμεν τὰ σύνολα:

$$\{\gamma,\alpha,\beta\},\ \{\alpha,\gamma,\beta\},\ \{\alpha,\beta,\gamma\}. \qquad (1)$$

'Εὰν τώρα λάβωμεν τὴν διάταξιν β,α καὶ τὸ στοιχεῖον γ τεθῇ πρῶτον πρὸ τοῦ β, δεύτερον μετὰ τὸ β καὶ τρίτον τεθῇ μετὰ τὸ α, δημιουργοῦνται τὰ σύνολα:

$$\{\gamma,\beta,\alpha\},\ \{\beta,\gamma,\alpha\},\ \{\beta,\alpha,\gamma\} \qquad (2)$$

'Εκ τῶν (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι μὲ τὰ στοιχεῖα α,β,γ δημιουργοῦμεν ἓξ ἴσα σύνολα. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν:

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} = \{\gamma,\alpha,\beta\} = \{\alpha,\gamma,\beta\} = \{\gamma,\beta,\alpha\} = \{\beta,\gamma,\alpha\} = \{\beta,\alpha,\gamma\}.$$

Οὕτω, μὲ δύο στοιχεῖα α,β δημιουργοῦμεν $1 \cdot 2 = 2! = 2$ σύνολα ἴσα.

Μὲ τὰ στοιχεῖα α,β,γ δημιουργοῦμεν $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ σύνολα ἴσα.

'Ομοίως μὲ τέσσαρα στοιχεῖα α,β,γ,δ θὰ δημιουργήσωμεν ἐν ὅλῳ

$$1.2.3.4 = 4! = 24$$

ἴσα σύνολα.

Γενικῶς: Μὲ μ στοιχεῖα $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ θὰ δημιουργήσωμεν ἐν ὅλῳ

$$\boxed{1.2.3.4 \ldots \mu = \mu!}$$

ἴσα σύνολα.

Τὸ σύμβολον «μ!» διαβάζεται *μ παραγοντικὸν* καὶ παριστᾷ τὸ γινόμενον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν 1,2,3,4,...,μ.

***Παρατήρησις III.*** Κατόπιν τῶν ὅσων ἐλέχθησαν διὰ τὰ ἴσα σύνολα, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

***Ἕνα καὶ μόνον ἕνα κενὸν σύνολον ὑπάρχει.***

Πράγματι, ἂν ἐκτὸς τοῦ $\varnothing$ ὑπῆρχε καὶ ἄλλο κενὸν σύνολον, ἔστω τὸ y, τότε θὰ ἔπρεπε νὰ εἶναι $y \neq \varnothing$. Κατ' ἀκολουθίαν, σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων συνόλων, θὰ ἔπρεπε τὸ σύνολον y νὰ περιέχῃ στοιχεῖα διαφορετικὰ τῶν στοιχείων τοῦ κενοῦ συνόλου $\varnothing$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον, διότι οὔτε τὸ y οὔτε τὸ $\varnothing$ περιέχουν στοιχεῖα. Ἄρα $y = \varnothing$. Δηλαδὴ ὑπάρχει ***ἕνα καὶ μόνον ἕνα*** κενὸν σύνολον. Ἐντεῦθεν πρέπει νὰ λέγωμεν ὄχι ἁπλῶς: ἕνα κενὸν σύνολον, ἀλλά: ***τὸ κενὸν*** σύνολον. Δηλαδὴ μὲ 0 στοιχεῖα δημιουργοῦμεν ἕνα καὶ μόνον ἕνα σύνολον, τὸ $\varnothing$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι $0! = 1$. Ἤτοι, *τὸ 0 παραγοντικὸν ἰσοῦται μὲ 1.*

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Εἶναι ἀληθὴς ἡ σχέσις : $\{1,1,1\} = \{1\}$ ;

**2.** Ποῖα ἐκ τῶν ἀκολούθων συνόλων εἶναι διάφορα ;

$$\varnothing \ , \ \{0\} \ , \ \{\varnothing\}$$

**3.** Δίδονται τὰ σύνολα :

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{3,5,4,1,2\}.$$

Ποία ἐκ τῶν σχέσεων εἶναι ἀληθής ; ἡ $A = B$, ἢ ἡ $A \neq B$ ;

**4.** Τὰ σύνολα : $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{\{1,2,3,4\}\}$ εἶναι ἴσα ;

**5.** Εἶναι ἴσα τὰ σύνολα :

$$A = \{1,2,3,\{4\}\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\{1,2\},3,4\} ;$$

**6.** Δίδονται τὰ σύνολα : $A = \{7,8,9,10\}$ καὶ $B = \{9,7,10,8\}$. Εἶναι $A = B$ ;

**7.** Εἶναι ἴσα τὰ σύνολα :

$$A = \{4,5,6\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\{4\}, \{5\}, \{6\}\} ;$$

**8.** Ἐὰν $\alpha \neq \beta$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\{\alpha\} \neq \{\beta\}$ καὶ ἀντιστρόφως.

**9.** Ἐὰν $x = y$ καὶ $z = \omega$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

$$\{\{x,z\}, \{x\}\} = \{\{y\}, \{y,\omega\}\}$$

καὶ ἀντιστρόφως.

**10.** Ἐὰν $\alpha \neq \beta$ καὶ $x \neq y$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἐκ τῆς ἰσότητος

$$\{\alpha,x\} = \{\beta,y\},$$

ἕπονται αἱ ἰσότητες $\alpha = y$ καὶ $\beta = x$.

**11.** Νὰ ὁρισθοῦν οἱ α,β,γ, ἂν ὑφίσταται ἡ ἰσότης :

$$\{4, \{5,6\}\} = \{\{\alpha,\beta\},\gamma\}.$$

**12.** Δίδονται τὰ σύνολα :

$$A = \{x \mid x \in \Phi \ \text{καὶ} \ 2 < x \leqslant 7\}, \quad B = \{5,6,7,3,4\}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $B = A$.

**13.** Δίδονται τὰ σύνολα :

$$A = \{x \mid x \in \Phi_0 \ \text{καὶ} \ 0 \leqslant x < 5\}, \quad B = \{0,1,2,3,4\}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $A = B$.

**14.** Δίδονται τὰ σύνολα :

$$A = \{1,2,\{3\}\}, \quad B = \{1,2,3,4\}, \quad \Gamma = \{1,2,3,\{3\}\},$$

$$\Delta = \{x \mid x \in \Phi \ \text{καὶ} \ 1 \leqslant x < 5\}$$

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων ἰσοτήτων εἶναι ἀληθεῖς ;

α). $A = B$, β). $A = \Gamma$, γ). $B = \Delta$, δ). $\Gamma \neq \Delta$ ;

**15.** Εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης:
$\{x \mid x \in \Phi$ μὲ $3x - 6 = 0\} = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x = 2\}$;

**16.** Εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης {«7», «5»} = {7,5};

**17.** Εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης $\{0,\ 2-5,\ 8,\ 5^2\} = \{4 \cdot 0,\ 2^3,\ 25,\ 0-3\}$;

**18.** Εἶναι ἀληθὴς ἡ ἰσότης $A = B$, ἄν:
$A = \{x \mid x =$ πολλαπλάσιον τοῦ $3\}$, $B = \{3,6,9,\ldots,3\nu,\ldots\}$ καὶ $\nu \in \Phi$;

**19.** Ἰσχύει ἡ ἰσότης $A = B$, ὅταν: $A = \{x \mid x$ εἶναι τετράγωνον$\}$,
$B = \{x \mid x$ εἶναι ρόμβος μὲ ἴσας διαγωνίους$\}$;

**20.** Νὰ δειχθῇ ἂν ἀληθεύουν ἢ ὄχι αἱ ἰσότητες $A = B = \Gamma$, ὅταν:
$A = \{x \mid x$ γράμμα τῆς λέξεως ΚΡΙΜΑ$\}$.
$B = \{x \mid x$ γράμμα τῆς λέξεως ΜΙΚΡΑ$\}$.
$\Gamma = \{K, I, P, M, A\}$.

**12. Ἰδιότητες τῶν ἴσων συνόλων.** Τὰ ἴσα σύνολα ἔχουν τὰς ἀκολούθους χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας:

α). ***Τὴν ἀνακλαστικήν.*** Δηλαδή, ἐὰν $A = \{\lambda, \mu, \nu, \varrho\}$ εἶναι ἕνα σύνολον, τοῦτο, προφανῶς, ἰσοῦται μὲ τὸν ἑαυτόν του. Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\boxed{A = A}$$

β). ***Τὴν συμμετρικήν.*** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \text{ καὶ } B = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι ταῦτα ἔχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἄρα θὰ εἶναι $A = B$, ὁπότε καὶ $B = A$. Συμβολικῶς δὲ θὰ γράφωμεν:

$$\boxed{A = B \Longrightarrow B = A}$$

γ). ***Τὴν μεταβατικήν.*** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$\Sigma_1 = \{5,6,7,8\},\ \Sigma_2 = \{6,8,5,7\} \text{ καὶ } \Sigma_3 = \{8,7,5,6\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ $\Sigma_1$ εἶναι καὶ στοιχεῖα τοῦ $\Sigma_2$. Ἄρα κατὰ τὸν ὁρισμὸν τῶν ἴσων συνόλων θὰ εἶναι $\Sigma_1 = \Sigma_2$. Ἐπίσης τὰ στοιχεῖα τοῦ $\Sigma_2$ εἶναι καὶ στοιχεῖα τοῦ $\Sigma_3$. Ἄρα $\Sigma_2 = \Sigma_3$. Συμβολικῶς δέ,

$$\boxed{\Sigma_1 = \Sigma_2 \text{ καὶ } \Sigma_2 = \Sigma_3 \Longrightarrow \Sigma_1 = \Sigma_3}$$

Τὸ σύμβολον $\Longrightarrow$ διαβάζεται: *συνεπάγεται* ἢ *ἕπεται.*

**13. Γραφικὴ παράστασις ἑνὸς συνόλου.** Ἂς θεωρήσωμεν ἕνα σύνολον Α, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι τὰ γράμματα τῆς λέξεως ἄνθρωπος Δηλαδὴ τό: $A = \{\alpha, \nu, \vartheta, \varrho, \omega, \pi, o, \varsigma\}$.

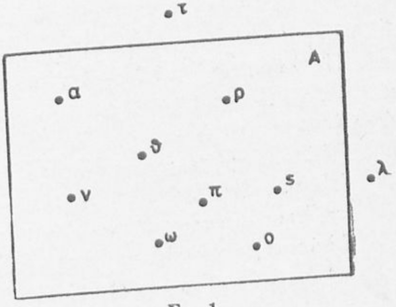
Διὰ νὰ δείξωμεν γραφικῶς ὅτι τὸ σύνολον τοῦτο περιέχει μόνον τὰ γράμματα τῆς λέξεως *ἄνθρωπος* καὶ μόνον αὐτά, γράφομεν μίαν κλειστὴν γραμμὴν καὶ ἐντὸς αὐτῆς σημειώνομεν τόσα σημεῖα, ὅσα καὶ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Α καὶ παραπλεύρως ἑκάστου σημείου ἕνα στοιχεῖον τοῦ Α, ὡς εἰς τὸ (σχ. 1) φαίνεται, ἀνεξαρτήτως τῆς φύσεως αὐτῶν.

Ἡ γεωμετρικὴ αὐτὴ παράστασις τοῦ συνόλου καλεῖται ***διάγραμμα*** τοῦ συνόλου ἢ διάγραμμα τοῦ *Venn*, πρὸς τιμὴν τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ Βένν, ὅστις πρῶτος ἐπενόησε τὴν τοιαύτην παράστασιν τοῦ συνόλου. Κατ' ἄλλους ὅμως συγγραφεῖς, πρῶτος ὁ Euler μετεχειρίσθη τὰ διαγράμματα ταῦτα, ὁ δὲ Venn τὰ ἐτελειοποίησε.

Διὰ τῆς τοιαύτης γραφικῆς παραστάσεως τοῦ συνόλου A, εἴμεθα εἰς θέσιν νὰ ἀποφανθῶμεν, ἂν ἕνα στοιχεῖον ἀνήκη ἢ δὲν ἀνήκη εἰς τὸ σύνολον A.

Οὕτω $\alpha \in A$, $\varrho \in A$, $\varsigma \in A$, $\nu \in A$. Ἐνῷ $\lambda \notin A$, $\tau \notin A$.

Τὰ στοιχεῖα λ καὶ τ, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου A, ἔχουν γραφῆ ἐκτὸς τοῦ διαγράμματος.

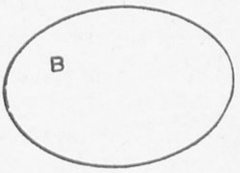



Σχ. 1.

***Οὐδὲν*** στοιχεῖον τοῦ συνόλου A ἀναγράφεται ἐπὶ τῆς κλειστῆς γραμμῆς.

Ἐὰν ἕνα σύνολον B ἔχῃ ἄπειρα στοιχεῖα (ἀπειρομελές), τοῦτο θὰ παρίσταται ἀπὸ ὁλόκληρον τὸ ἐσωτερικὸν τῆς κλειστῆς γραμμῆς.

Οὕτω, τὸ σύνολον: $B = \{x \mid x$ ἄρτιος ἀριθμός$\}$ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἐντὸς τῆς κλειστῆς γραμμῆς τοῦ (σχ. 2) περιεχομένου ἐπιπέδου.




Σχ. 2.

Οὐδὲν στοιχεῖον x τοῦ συνόλου B κεῖται ἐπὶ τῆς κλειστῆς γραμμῆς.

Κάθε περιττὸς ἀριθμὸς θὰ εὑρίσκεται ἐκτὸς τοῦ διαγράμματος τούτου.


Σχ. 3.

Τὸ κενὸν σύνολον παρίσταται ὑπὸ μιᾶς κλειστῆς γραμμῆς, ὅπως εἰς τὸ (σχ. 3), τῆς ὁποίας τὸ ἐσωτερικὸν εἶναι γραμμοσκιασμένον.

**14. Ὑποσύνολα.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ ἀλφαβήτου:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots, \chi, \psi, \omega\}. \tag{1}$$

Ἐκ τοῦ συνόλου τούτου λαμβάνομεν τὰ φωνήεντα καὶ σχηματίζομεν τὸ σύνολον:

$$B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}. \tag{2}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου B εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου A, ἐνῷ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου A δὲν εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου B. Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὸ σύνολον B λέγεται ***ὑποσύνολον*** τοῦ A, τὸ δὲ A λέγεται ***ὑπερσύνολον*** ἢ ***κυρίαρχον*** σύνολον ἢ ***σύνολον ἀναφορᾶς***.

Ἐπίσης, ἐκ τοῦ συνόλου $\Phi = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἂν λάβωμεν τὰ στοιχεῖα 10, 15, 20, ..., 100, τὰ ὁποῖα εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 5, σχηματίζομεν νέον σύνολον, τό:

$$K = \{10,15,20,\ldots,100\} \quad (3)$$

τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Φ

Ὁμοίως, ἀπὸ τὸ κυρίαρχον σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ Λυκείου μας:

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ μαθητὴς τοῦ Λυκείου μας}\}, \quad (4)$$

ἂν λάβωμεν τὸ σύνολον:

$$\Delta = \{x \mid x \text{ μαθητὴς τῆς Α΄ τάξεως τοῦ Λυκείου μας}\}, \quad (5)$$

θὰ λέγωμεν ὅτι τὸ σύνολον Δ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ συνόλου Γ.

Πολλάκις, ἀντὶ νὰ λέγωμεν ὅτι τὸ Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α, λέγομεν ὅτι τὸ Β *περιέχεται* εἰς τὸ Α, ἢ ὅτι τὸ Α *περιέχει* τὸ Β, ἢ ὅτι τὸ Β *ἐγκλείεται* εἰς τὸ Α.

Ἡ τοιαύτη σχέσις τοῦ Β πρὸς τὸ Α ὀνομάζεται *ἐγκλεισμός*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

***Ἕνα σύνολον Β θὰ λέγεται ὑποσύνολον ἑτέρου συνόλου Α, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α.***

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{B \subseteq A \iff \forall x : (x \in B \implies x \in A)}$$

καὶ διαβάζεται: *Β ὑποσύνολον Α, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, διὰ κάθε x ἐν Β συνεπάγεται ὅτι x ἀνήκει καὶ εἰς τὸ Α*, ὄχι πάντοτε καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπίσης δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$A \supseteq B$$

καὶ νὰ διαβάσωμεν: *τὸ σύνολον Α περιέχει τὸ σύνολον Β* ἢ *τὸ Α εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ Β.*

Τὸ σύμβολον $\subseteq$ εἶναι τὸ σύμβολον τοῦ ἐγκλεισμοῦ.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ὁρισμοῦ δεχόμεθα ὅτι:

***Τὸ μηδενικὸν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον οἱουδήποτε συνόλου.***

Δηλαδή: $\varnothing \subseteq \{5,6,7\}$, $\varnothing \subseteq \{\alpha,\varepsilon,\iota\}$, $\varnothing \subseteq \varnothing$,

Τὸ σύμβολον $\nsubseteq$ διαβάζεται: *δὲν εἶναι ὑποσύνολον τοῦ* καὶ ἐπὶ παραδείγματι ἔχομεν ὅτι:

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \nsubseteq \{x,y,\omega\}$$
$$\{1,2,3,4,5\} \nsubseteq \{\kappa,\lambda,\mu,\nu,\varrho\}$$

**15. Ἰδιότητες ἐγκλεισμοῦ.** *α*). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}.$$

Τούτου κάθε στοιχεῖον εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α. Δηλαδή, κάθε σύνολον Α, πληροῖ, ὡς πρὸς τὸν ἑαυτόν του, τὰς ἀπαιτήσεις τοῦ ἀνωτέρω δοθέντος ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου. Δηλαδή:

***Κάθε σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.***

Τοῦτο συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$A \subseteq A$$

Ἑπομένως ἡ σχέσις «⊆» εἶναι ***ἀνακλαστική***.

β). Ἔστω ὅτι ἔχομεν :

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \subseteq \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι, ναὶ μὲν κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου {α,β,γ} εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ συνόλου {α β,γ,δ,ε}, ἀλλὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου {α,β,γ,δ,ε} δὲν εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ {α,β,γ}. Διότι τὰ στοιχεῖα δ καὶ ε δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ {α,β,γ}. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ σχέσις **«⊆» *δὲν εἶναι συμμετρική***.

γ). Ἔστωσαν τὰ σύνολα :

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma\} \quad B=\{\gamma,\delta,\beta,\alpha\}, \quad \Gamma=\{\delta,\beta,\gamma,\alpha,\varepsilon\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β.

Ἄρα θὰ ἔχωμεν : $A \subseteq B$. (7)

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Γ. Ἄρα : $B \subseteq \Gamma$ (8)

Ἐκ τῶν (7) καὶ (8) συμπεραίνομεν ὅτι : $A \subseteq \Gamma$.

Ὅθεν ἡ στενογραφημένη πρότασις :

$$\boxed{(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq \Gamma) \Rightarrow (A \subseteq \Gamma)}$$

εἶναι ἀληθής. Κατ' ἀκολουθίαν ἡ σχέσις «⊆» εἶναι ***μεταβατική***.

Τὸ σύμβολον ∧ διαβάζεται ***καί***.

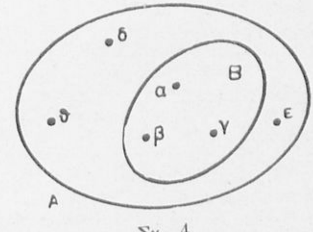
δ). Θεωρήσωμεν τὰ σύνολα :

$$A=\{x,y,\omega\} \quad \text{καὶ} \quad B=\{y,\omega,x\}.$$

Ταῦτα, ὡς γνωστόν, εἶναι ἴσα. Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β καὶ τὸ Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α. Ἑπομένως δυνάμεθα νὰ γράφωμεν :

$$\boxed{(A = B) \Longleftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A)}$$

Δηλαδὴ εἰς τὴν σχέσιν «⊆» ἰσχύει ἡ συμμετρία, μόνον ὅταν τὰ δύο σύνολα εἶναι ἴσα.



Σχ. 4.

Ἕνεκα δὲ τῆς συνεπαγωγῆς :

$$(A \subseteq B \wedge B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$$

διὰ τὴν ὁποίαν θὰ ὁμιλήσωμεν κατωτ. § 23, ἕπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ σχέσις «⊆» εἶναι ***ἀντισυμμετρική***.

***ΣΗΜ.*** Μεταξὺ τῶν ἐννοιῶν *ἀνήκει* καὶ *περιέχεται*, ὑπάρχει οὐσιώδης διαφορά. Διότι ἡ ἔννοια *ἀνήκει* εἶναι σχέσις στοιχείου πρὸς σύνολον, ἐνῷ ἡ ἔννοια *περιέχεται* εἶναι σχέσις συνόλου πρὸς σύνολον.

**16. Γραφικὴ παράστασις τοῦ ἐγκλεισμοῦ.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα :

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\vartheta\} \quad \text{καὶ} \quad B=\{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Προφανῶς τὸ σύνολον Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α, διότι κάθε στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α. Δηλαδή:

$$B \subseteq A \quad \text{ἢ καὶ} \quad A \supseteq B.$$

Ἡ τοιαύτη σχέσις τοῦ ἐγκλεισμοῦ τοῦ Β εἰς τὸ Α παρίσταται ὑπὸ τοῦ εἰς τὴν προηγουμένην σελίδα (σχ. 4) διαγράμματος τοῦ Venn.

***ΣΗΜ.*** Ἐὰν τὰ σύνολα Α καὶ Β εἶναι ἴσα, τότε αἱ κλεισταὶ γραμμαὶ πρέπει νὰ συμπίπτουν.

**17. Σθένος συνόλου.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$A = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\},$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν φωνηέντων τοῦ ἀλφαβήτου. Τούτου τὸ πλῆθος τῶν στοιχείων εἶναι ἑπτά. Ὁ ἀριθμὸς 7 λέγεται ***σθένος*** ἢ ***ἰσχὺς*** τοῦ συνόλου Α ἢ καὶ ***πληθικὸς ἀριθμὸς*** τοῦ συνόλου Α.

Τὸ σθένος τοῦ συνόλου Α συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$7\ (A)$$

καὶ διαβάζεται: *7 τοῦ Α*.

Ὁμοίως τὰ σύνολα: $\{x,y\}$, $\{10,3\}$, $\{8+2,\ 10-6\}$ εἶναι ἰσχύος 2 (Α).

Ὁμοίως, σύνολα Α ἰσχύος 3 (Α) εἶναι τά:

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}, \quad \{x,y,\omega\} \quad \{20,\ 3+5,\quad 10-7\}.$$

Ὁμοίως, σύνολον ἰσχύος ν (Α) εἶναι τό:

$$A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu\}.$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Σθένος ἑνὸς συνόλου Α λέγεται ὁ ἀριθμὸς ν τῶν στοιχείων αὐτοῦ.***

Τὸ σθένος ἑνὸς συνόλου Α μὲ ν στοιχεῖα, παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου

$$\nu\ (A)$$

καὶ διαβάζομεν: *ν τοῦ Α*.

**18. Δυναμοσύνολον συνόλου.** Εἴδομεν ὅτι τὸ ὑποσύνολον τοῦ $\varnothing$ εἶναι τὸ $A = \varnothing$, δηλαδὴ $2^0 = 1$ κατὰ τὸ πλῆθος

Ὁμοίως, ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $\Gamma = \{\lambda\}$, εἶναι τά: $\varnothing$ καὶ $\{\lambda\}$, ἤτοι $2^1 = 2$ κατὰ τὸ πλῆθος.

Ἔστω τὸ σύνολον $A = \{x,y\}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσχύος 2 (Α).

Ὑποσύνολα αὐτοῦ εἶναι τά:

$$\varnothing \text{ ἢ } \{\ \}, \quad \{x\}, \quad \{y\}, \quad \{x,y\},$$

δηλαδὴ $2^2 = 4$ κατὰ τὸ πλῆθος.

Ὁμοίως ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσχύος 3(Β), εἶναι τὰ σύνολα:

$$\varnothing, \{\alpha\}, \quad \{\beta\}, \quad \{\gamma\}, \quad \{\alpha,\beta\}, \quad \{\alpha,\gamma\}, \quad \{\beta,\gamma\}, \quad \{\alpha,\beta,\gamma\},$$

ἤτοι $2^3 = 8$ κατὰ τὸ πλῆθος, ὡς εἰς τὸ (σχ. 4) φαίνεται.

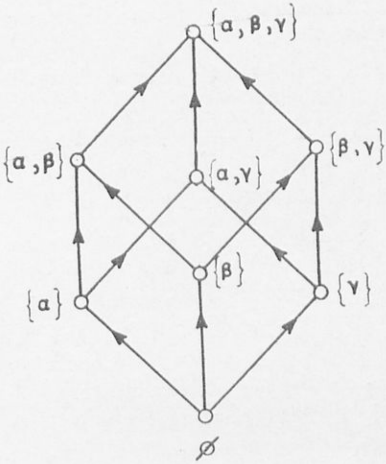
Τοῦ συνόλου $\Delta = \{1,2,3,4\}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσχύος 4 (Δ), τὰ ὑποσύνολα εἶναι $2^4 = 16$ κατὰ τὸ πλῆθος καὶ εὑρίσκονται εὐκόλως, ὅπως καὶ τὰ τοῦ συνόλου Β.

Ἐὰν ἕνα σύνολον Σ ἔχῃ ν στοιχεῖα, τότε τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ θὰ εἶναι $2^{\nu}$ κατὰ τὸ πλῆθος.

Τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Β εἶναι τό:

$$K = \{ \varnothing, \ \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \ \{\alpha,\beta\}, \{\alpha,\gamma\}, \ \{\beta,\gamma\{, \ \{\alpha,\beta,\gamma\} \}$$

διότι καθὲν ἀπὸ αὐτὰ τὰ ὑποσύνολα δυνάμεθα νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς ἕνα ἀντικείμενον καὶ νὰ σχηματίσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀντικειμένων αὐτῶν καὶ τὸ ὁποῖον καλεῖται ***δυναμοσύνολον*** τοῦ συνόλου $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.



Σχ. 5.

Τὸ δυναμοσύνολον ἑνὸς συνόλου Α θὰ τὸ παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου $2^A$. Δηλαδὴ θὰ εἶναι:

$$\boxed{2^A = \{x \mid x \subseteq A\}}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Δυναμοσύνολον $2^A$ ἑνὸς συνόλου Α εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Α.***

**19. Γνήσιον ὑποσύνολον.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{5,6,7\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{5,6,7,8,9\}.$$

Τὸ Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β, διότι κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β. Τὸ σύνολον ὅμως Β ἔχει καὶ τὰ στοιχεῖα 8,9, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ Α. Εἶναι δηλαδὴ $A \neq B$ ἢ μὲ ἄλλας λέξεις τὸ Α εἶναι τμῆμα (μέρος) τοῦ Β. Διὰ τοῦτο τὸ σύνολον Α θὰ λέγεται ***γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β.*** Ὥστε:

***Ἕνα σύνολον Α θὰ λέγεται γνήσιον ὑποσύνολον ἄλλου συνόλου Β, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Β καὶ ὑπάρχῃ εἰς τὸ Β ἕνα τοὐλάχιστον στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ Α.***

Οὕτω, ἑκάστη τάξις τοῦ Λυκείου μας εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου (καὶ τῶν τριῶν τάξεων). Διότι ὑπάρχουν μαθηταὶ τοῦ συνόλου ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι καὶ μαθηταὶ τῆς θεωρουμένης τάξεως (οἱ μαθηταὶ τῶν ἄλλων τάξεων).

Ὁμοίως, τοῦ συνόλου $A = \{\alpha,\beta\}$, ὑποσύνολα εἶναι τά:

$$A = \{\alpha\}, \ \{\beta\}, \ \{\alpha,\beta\}.$$

Ἐκ τούτων μόνον τὰ $\{\alpha\}$ καὶ $\{\beta\}$ εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ $\{\alpha,\beta\}$.

Τὸ κενὸν $\varnothing$ ***δὲν θεωρεῖται*** γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\{\alpha,\beta\}$.

Τὸ σύνολον $\{10,11,12\}$ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\{12,11,10\}$, δηλαδὴ τοῦ ἑαυτοῦ του. ***Δὲν εἶναι*** ὅμως γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του, καθόσον ἕκαστον σύνολον πρέπει νὰ περιέχῃ ***ἕνα τοὐλάχιστον*** στοιχεῖον περισσότερον ἀπὸ ἕκαστον γνήσιον ὑποσύνολόν του. Ὥστε :

***Ἕκαστον σύνολον δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του.***

Παραδείγματα: Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς κύκλου, ὡς καὶ τὰ σύνολα τῶν μερῶν τοῦ κύκλου, εἶναι ὑποσύνολα τοῦ κύκλου. Ὁ κύκλος ὅμως δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ κύκλου (ἑαυτοῦ του).

Τὸ σύμβολον τῆς ἐκφράσεως ***εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον***, εἶναι τὸ $\subset$, τὸ δὲ σύμβολον τῆς ἐκφράσεως ***δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον***, εἶναι τὸ $\not\subset$.

Οὕτω : $\{\alpha\} \subset \{\alpha,\beta\}$

διαβάζεται : *Τὸ σύνολον $\{\alpha\}$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\{\alpha,\beta\}$.*

Ὁμοίως : $\alpha \not\subset \{\alpha,\beta\}$ διαβάζεται : *Τὸ $\alpha$ δὲν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ $\{\alpha,\beta\}$*. Διότι τὸ $\alpha$ δὲν εἶναι κἂν σύνολον. Ἄρα δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι καὶ ὑποσύνολον τοῦ $\{\alpha,\beta\}$.

Τὸ $\varnothing \not\subset \varnothing$. Τοῦτο προκύπτει ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων.

Ἐπειδὴ τὸ κενὸν σύνολον δὲν θεωρεῖται ὡς γνήσιον ὑποσύνολον οὐδενὸς συνόλου, ἡ σχέσις : $\varnothing \subset A$ σημαίνει ὅτι τὸ σύνολον A περιέχει ***ἕνα τοὐλάχιστον*** στοιχεῖον.

Διὰ νὰ σημειώσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕνα τοὐλάχιστον στοιχεῖον ἀκόμη εἰς τὸ σύνολον B περισσότερον ἀπὸ τὰ στοιχεῖα τοῦ A, γράφομεν συμβολικῶς :

$$\forall \alpha \in A \Rightarrow \alpha \in B \quad \text{καὶ} \ \exists\, \beta \in B, \quad \text{ὥστε}\ \beta \notin A,$$

ὅπου τὴν φράσιν *ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα* ἀντικαθιστᾷ τὸ σύμβολον $\exists$.

**20. Πλῆθος τῶν ὑποσυνόλων συνόλου.** Εἴδομεν ὅτι τὸ πλῆθος τῶν γνησίων ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου $\{\alpha,\beta\}$ εἶναι δύο : τὰ σύνολα $\{\alpha\}$ καὶ $\{\beta\}$, δηλαδὴ $2^2 - 2 = 4 - 2 = 2$.

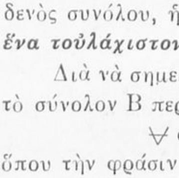
Ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $\{\alpha,\beta,\gamma\}$, τούτου γνήσια ὑποσύνολα εἶναι τά :

$$\{\alpha\},\ \ \{\beta\},\ \ \{\gamma\},\ \ \{\alpha,\beta\},\ \ \{\alpha,\gamma\},\ \ \{\beta,\gamma\}$$

δηλαδὴ $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ κατὰ τὸ πλῆθος.

Τὸ σύνολον $\{2,3,4,5\}$ θὰ ἔχῃ $2^4 - 2 = 16 - 2 = 14$ γνήσια ὑποσύνολα. Ποῖα εἶναι ταῦτα ; Γενικῶς δὲ ἔχομεν ὅτι :

***Δι' ἕκαστον σύνολον ἐκ ν στοιχείων ὑπάρχουν $2^\nu - 2$ γνήσια ὑποσύνολα.***




Σχ. 6.

**21. Γραφικὴ παράστασις γνησίου ὑποσυνόλου.** Ἐὰν παραστήσωμεν δι' ἑνὸς ὀρθογωνίου τὸ σύνολον B καὶ δι' ἑνὸς κύκλου τὸ σύνολον A, τότε ἡ σχέσις $A \subset B$ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ ἔναντι σχήματος 6.

**22. Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta,\vartheta\}.$$

Κατὰ τὰ προηγουμένως λεχθέντα τὸ A εἶναι ὑποσύνολον τοῦ B, δηλαδὴ $A \subseteq B$. Ἐπίσης τὸ A εἶναι καὶ γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B, δηλαδὴ $A \subset B$. Τὸ B λέγεται τότε καὶ ***ὑπερσύνολον*** τοῦ A.

Ἂν τώρα λάβωμεν τὰ στοιχεῖα δ,ε,ζ,η,θ τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ A, σχηματίζομεν ἕνα νέον σύνολον, τό:

$$\overline{A} = \{\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta\}$$

καὶ τὸ ὁποῖον λέγεται ***συμπληρωματικὸν*** τοῦ A ὡς πρὸς ὑπερσύνολον B καὶ σημειώνεται συνήθως ὡς ἑξῆς:

$$\overline{A} \quad ἢ \quad C_B^A.$$

Ὥστε, ἐὰν εἶναι: $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, τότε θὰ εἶναι καὶ $A \subseteq B$ καὶ $A \subset B$ ὁπότε:

$$\overline{A} = \{5,6,7\}.$$

Τῶν συνόλων $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{\gamma, \alpha, \beta\}$ συμπλήρωμα εἶναι τὸ $\overline{A} = \varnothing$, δηλαδὴ τὸ κενὸν σύνολον, διότι εἰς τὸ σύνολον B δὲν ὑπάρχει στοιχεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ μὴν εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ A.

Διὰ τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον ἰσχύουν αἱ συνεπαγωγαί:

$$x \in A \Rightarrow x \notin \overline{A} \quad καὶ \quad x \in \overline{A} \Rightarrow x \notin A.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός:

***Ἐὰν A εἶναι ὑποσύνολον ἑνὸς συνόλου B, τότε τὸ συμπλήρωμα τοῦ A ὡς πρὸς τὸ B εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ B, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ A.***

Ὁ ὁρισμὸς οὗτος ἐκφράζεται διὰ τοῦ τύπου:

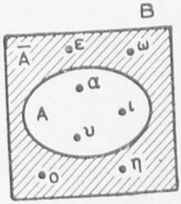
$$\boxed{\overline{A} = \{x \in B \mid x \notin A\}.}$$

Τὸ συμπλήρωμα τοῦ $\varnothing$, ὡς πρὸς τυχὸν μὴ κενὸν σύνολον A, εἶναι τό:

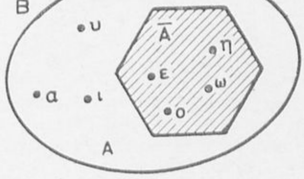
$$\overline{\varnothing} = A, \text{ διότι: } \overline{\varnothing} = \{x \in A \mid x \notin A\} = A.$$

**23. Γραφικὴ παράστασις συμπληρωματικοῦ συνόλου ἑνὸς συνόλου.** Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \iota, \upsilon\} \quad καὶ \quad B = \{\alpha, \varepsilon, \eta, \iota, o, \upsilon, \omega\}.$$




Σχ. 7.




Σχ. 7α.

Τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ $\overline{A}$ εἶναι τὸ $A = \{\varepsilon, \eta, o, \omega\}$. Διότι εἶναι $A \subset B$

καὶ τὰ στοιχεῖα ε,η,ο,ω τοῦ Β δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ Α. Δηλαδὴ εἶναι :

$$\bar{A} = C_B^A = \{\varepsilon, \eta, o, \omega\}$$

καὶ παρίσταται γραφικῶς ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ σχήματος 7, ὅπου τὰ δύο σύνολα Α καὶ $\bar{A}$ περικλείουν ὁλόκληρον τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἀπεικονίζει τὸ ὑπερσύνολον Β, ἢ ὑπὸ τοῦ σχήματος 7α, ὅπου ὁ γραμμοσκιασμένος χῶρος εἶναι τὸ $\bar{A}$ τοῦ Α.

**24. Ἡ συνεπαγωγή.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα :

Α = {x | x κυρτὸν τετράπλευρον μὲ διχοτομουμένας διαγωνίους}

καὶ Β = {x | x παραλληλόγραμμον}.

Τὴν πρώτην πρότασιν : *τὸ $x$ εἶναι κυρτὸν τετράπλευρον μὲ διαγωνίους διχοτομουμένας*, ἂς τὴν ὀνομάσωμεν Κ, τὴν δὲ δευτέραν πρότασιν : *τὸ $x$ εἶναι παραλληλόγραμμον*, ἂς τὴν ὀνομάσωμεν Λ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι κάθε κυρτὸν τετράπλευρον μὲ διαγωνίους διχοτομουμένας, εἶναι παραλληλόγραμμον. Τοῦτο σημειώνομεν ὡς ἑξῆς :

$$K \Longrightarrow \Lambda. \qquad (1)$$

Ἐπίσης μᾶς εἶναι γνωστὸν ὅτι : *Παντὸς παραλληλογράμμου αἱ διαγώνιοι διχοτομοῦνται*. Τοῦτο σημειώνομεν ὡς ἑξῆς :

$$\Lambda \Longrightarrow K. \qquad (2)$$

Αἱ δύο σχέσεις (1) καὶ (2) γράφονται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$K \Longleftrightarrow \Lambda \qquad (3)$$

καὶ λέγομεν ὅτι αἱ προτάσεις Κ καὶ Λ εἶναι *λογικῶς ἰσοδύναμοι*.

Θὰ διαβάζωμεν δὲ τὴν σχέσιν (3) ὡς ἑξῆς :

Κ ἰσοδυναμεῖ μὲ Λ καὶ ἀντιστρόφως

ἢ Κ συνεπάγεται τὴν Λ καὶ ἀντιστρόφως.

καὶ ἔχομεν οὕτω ἀποσαφηνίσει πλήρως τὴν πραγματικὴν σημασίαν τῶν συμβόλων $\Longrightarrow$ καὶ $\Longleftrightarrow$.

Ὥστε τὸ σύμβολον τῆς συνεπαγωγῆς εἶναι τὸ $\Longrightarrow$, ἢ τὸ $\Longleftrightarrow$. Καὶ τὸ μὲν $\Longrightarrow$ διαβάζεται *συνεπάγεται*, τὸ δὲ $\Longleftrightarrow$ διαβάζεται *συνεπάγεται καὶ ἀντιστρόφως*, ἢ *εἶναι ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη*, ἢ *πρέπει καὶ ἀρκεῖ*, ἢ *ἐὰν καὶ μόνον ἐάν*.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδεται τὸ σύνολον : Α = {α,β,γ}. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι εἶναι ψευδεῖς ;

1) $\alpha \in A$, 2) $\alpha \subseteq A$, 3) $\{\alpha\} \in A$, 4) $\{\alpha\} \subseteq A$.

**2.** Ποῖον ἐκ τῶν ἀκολούθων συνόλων (εἰς τὸ Εὐκλείδειον ἐπίπεδον)

Α = {x | x εἶναι τετράπλευρον},
Β = {x | x εἶναι ὀρθογώνιον},
Γ = {x | x εἶναι ῥόμβος},
Δ = {x | x εἶναι τετράγωνον},

εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου ;

**3.** Δύναται κάθε σύνολον νὰ ἔχῃ γνήσιον ὑποσύνολον ;

**4.** Ἐὰν $A \subseteq \varnothing$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $A = \varnothing$.

**5.** Ἐὰν $A = \{2,3,4,5\}$ καὶ $B = \{x \mid x$ εἶναι ἄρτιος$\}$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$A \nsubseteq B.$$

**6.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{\delta\}$, $B = \{\gamma,\delta\}$, $X = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $Y = \{\alpha,\beta\}$, $Z = \{\alpha,\beta,\delta\}$.

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς;

1) $Y \subseteq X$ 3) $B \neq Z$ 5) $A \nsubseteq Y$ 7) $A \subseteq X$ 9) $X = B$.

2) $B \nsupseteq A$ 4) $Z \supseteq A$ 6) $Z \nsupseteq X$ 8) $Y \nsubseteq Z$ 10) $B \subseteq Y$.

**7.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\eta\}$, $\Gamma = \{\beta,\delta,y,z\}$, $E = \{\beta,\delta\}$

$B = \{\delta,\varepsilon,\eta,x,y,z\}$, $\Delta = \{\delta,\varepsilon\}$, $\Theta = \{\beta\}$.

Ἔστω δὲ $X$ ἕνα ἄγνωστον σύνολον. Ποῖον ἐκ τῶν συνόλων $A,B,\Gamma,\Delta,E,\Theta$ δύναται νὰ εἶναι ἴσον πρὸς τὸ $X$, ὅταν ἰσχύουν αἱ δηλώσεις:

1) $X \subseteq A$ καὶ $X \subseteq B$ 3) $X \nsubseteq A$ καὶ $X \nsubseteq \Gamma$.

2) $X \nsubseteq B$ καὶ $X \subseteq \Gamma$ 4) $X \subseteq B$ καὶ $X \nsubseteq \Gamma$

1′) $X \subset A$ καὶ $X \subset B$ 3′) $X \not\subset A$ καὶ $X \not\subset \Gamma$

2′) $X \not\subset B$ καὶ $X \subset B$ 4′) $X \subset B$ καὶ $X \not\subset \Gamma$.

**8.** Ἔστω ὅτι $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, ὥστε $A \subset B$ καὶ $B \subset \Gamma$. Ἐπίσης ὑποθέτομεν ὅτι: $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma \in \Gamma$ καὶ $\delta \notin A$, $\varepsilon \notin B$, $\varphi \notin \Gamma$.

Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων δύνανται νὰ εἶναι ἀληθεῖς;

1) $\alpha \in \Gamma$ 3) $\gamma \notin A$ 5) $\varepsilon \notin A$

2) $\beta \in A$ 4) $\delta \in B$ 6) $\varphi \notin A$;

**9.** Ποία σχέσις συνδέει τὰ σύνολα

$$A = \{\varnothing,1,2,3\} \text{ καὶ } B = \{1,2,3\};$$

**10.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

1) Νὰ γράψετε ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $A$ μὲ τέσσαρα στοιχεῖα.

2) Νὰ γράψετε ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $A$, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ ὡς στοιχεῖα τὰ πολλαπλάσια τοῦ 3.

3) Νὰ γράψετε ἕνα ὑποσύνολον τοῦ $A$, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα νὰ εἶναι οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ ἢ οἱ περιττοί.

4) Νὰ κάμετε τὸ διάγραμμα ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω ὑποσυνόλων.

**11.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{\kappa\}$, $B = \{\mu,\nu\}$, $\Gamma = \{x,y,z\}$, $\Delta = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

Νὰ ἀναγραφοῦν ὅλα τὰ ὑποσύνολα ἑνὸς ἑκάστου τῶν συνόλων τούτων.

**12.** Εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν:

1) $\alpha \subseteq \{\alpha\}$, 2) $\alpha \subset \{\alpha\}$, 3) $\alpha \nsubseteq \{\alpha\}$, 4) $\alpha \supset \{\alpha\}$;

**13.** Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subset \Gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι $A \subset \Gamma$.

**14.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{2, \{4,5\}, 4\}$. Ποία ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων εἶναι ὀρθὴ καὶ διατί;

1) $\{4,5\} \subset A$, 2) $\{4,5\} \in A$, 3) $\{\{4,5\}\} \subset A$.

**15.** Νὰ ἀναγραφῇ τὸ δυναμοσύνολον $2^A$ τοῦ συνόλου:

$$A = \{3, \{1,4\}\}.$$

**16.** Ἐὰν $A \neq \varnothing$ καὶ $B \neq \varnothing$ καὶ $A$ ξένον πρὸς τὸ $B$, τότε τὰ σύνολα $A$ καὶ $B$ δὲν εἶναι συγκρίσιμα.

**17.** Δίδεται τὸ σύνολον $A = \{1,0\}$. Εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν:

1) $\{0\} \in A$ 3) $\{0\} \subset A$ 5) $0 \subset A$.

2) $\varnothing \in A$ 4) $0 \in A$ 6) $1 \subset A$.

**18.** Εἶναι ὀρθαὶ αἱ ἀκόλουθοι δηλώσεις;

1) $\{1,4,3\} = \{3,4,1\}$ 2) $\{\{4\} \in \{\{4\}\}$

3) $\{1,3,1,2,3,2\} \subset \{1,2,3\}$ 4) $\{\{4\} \subset \{\{4\}\}$ 5) $\varnothing \subset \{\{4\}\}$.

**19.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{1,2,\ldots,8,9\}$, $\Gamma = \{1,3,5,7,9\}$, $\Delta = \{3,5\}$
$B = \{2,4,6,8\}$, $\Delta = \{3,4,5\}$.

Ποῖον σύνολον δύναται νὰ ἰσοῦται πρὸς τὸ X, ἐὰν δίδωνται αἱ ἀκόλουθοι δηλώσεις:

1) X καὶ B εἶναι ξένα, 3) $X \subset A$ καὶ $X \not\subset \Gamma$
2) $X \subset \Delta$ καὶ $X \not\subset B$, 4) $X \subset \Gamma$ καὶ $X \not\subset A$.

**20.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{2,3,4\}$ $\Gamma = \{x \mid x^2 - 6x + 8 = 0\}$,
$B = \{x \mid x^2 = 4,\ x \in A_{\varkappa}^{+}\}$, $\Delta = \{x \mid x$ ἄρτιος$\}$.

Εἰς τὰς ἀκολούθους δηλώσεις νὰ συμπληρωθοῦν αἱ τελεῖαι μὲ ἕνα ἐκ τῶν συμβόλων $\subset$ ἢ $\supset$ ἢ τοῦ ὅρου *ὄχι συγκρίσιμα*, ὥστε νὰ καταστοῦν ἀληθεῖς:

1) A...B 3) B...Γ 5) B...Δ
2) A...Γ 4) A...Δ 6) Γ...Δ

**21.** Δίδεται ὅτι: $A \neq \varnothing$. Εἶναι ὀρθὸν νὰ γράφωμεν:

1) $A \in 2^A$, 2) $A \subset 2^A$, 3) $\{A\} \in 2^A$ 4) $\{A\} \subset 2^A$.

**22.** Ἐὰν $A \subset B$ καὶ $B \subset \Gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \subset \Gamma$.

**23.** Ἐὰν $A = \varnothing$. Ποῖον εἶναι τὸ $2^A$;

**24.** Εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἀκόλουθοι συνεπαγωγαί;

1) $(A \subseteq B \wedge B \nsubseteq \Gamma) \Longrightarrow (A \nsubseteq \Gamma)$
2) $(A \nsubseteq B) \Longrightarrow (B \nsubseteq A)$
3) $(A \subseteq B) \Longrightarrow (B \nsubseteq A)$.

**25.** Νὰ γράψετε δύο σύνολα A καὶ B τοιαῦτα, ὥστε αἱ σχέσεις:

$A \in B$ καὶ $A \subseteq B$

νὰ εἶναι ἀληθεῖς.

**26.** Ἐὰν $A = \{1,2,3,4\}$, νὰ ἀναγραφοῦν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου $2^A$.

**27.** Ἐὰν $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς;

1) $\{\alpha,\beta\} \notin A$, 2) $\{\alpha,\beta\} \in 2^A$, 3) $\{\alpha\} \in 2^A$, 4) $\varnothing \in A$
5) $\varnothing \in 2^A$, 6) $\alpha \notin 2^A$, 7) $\alpha \in A$, 8) $\{A\} \subseteq 2^A$.
9) $A \in 2^A$.

**28.** Διατί $\Phi \not\subset \Phi_o$;

**29.** Διατί $A \nsubseteq B \Longrightarrow A \not\subset B$;

**30.** Διατί $A \subset B \Longrightarrow A \subseteq B$;

**31.** Διατί $\varnothing \not\subset \varnothing$;

**32.** Διατί $\varnothing \nsubseteq \varnothing$;

**33.** Δίδεται τὸ σύνολον $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα X, ὥστε νὰ εἶναι:

1) $\{\alpha\} \subseteq A$, 2) $X \subseteq A$, 3) $A \neq X$.

**34.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ $2^A$ τοῦ $A = \{x \mid x$ φωνῆεν τῆς λέξεως Ἄλγεβρα$\}$.

**35.** Ποῖον εἶναι τὸ $2^A$ τοῦ $A = \{x \mid x$ φωνῆεν τοῦ Ἀλφαβήτου μας$\}$.

**25. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία.** α). Ἃς θεωρήσωμεν τὰ δύο σύνολα:

$$A = \{5,6,7,8,9\} \qquad B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

Εἰς ταῦτα δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ A πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ Β. Δηλαδὴ εἰς τὸ 5 ἀντιστοιχίζομεν τὸ α, εἰς τὸ 6 τὸ β, εἰς τὸ 7 τὸ γ, εἰς τὸ 8 τὸ δ καὶ εἰς τὸ 9 τὸ στοιχεῖον ε καὶ ἀντιστρόφως.

Τοῦτο δὲ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{ccccccc} A = \{ & 5, & 6, & 7, & 8, & 9\}, \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B = \{ & \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon\} \end{array}$$

β). Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$\Phi = \{1,2,3,4,5,\dots,\nu,\dots\}$$
$$K = \{2,4,6,8,10,\dots,2\nu,\dots\},$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, καὶ τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ Κ τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον, προφανῶς, εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Φ. Εἰς τὰ δύο ταῦτα σύνολα δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν, ἓν πρὸς ἕν, τὰ στοιχεῖα αὐτῶν. Δηλαδή:

$$\begin{array}{cccccccc} \Phi = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5,\dots, & \nu,\dots\} \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ K = \{ & 2, & 4, & 6, & 8 & 10,\dots, & 2\nu,\dots\} \end{array}$$

Διότι, δοθέντος οἱουδήποτε στοιχείου (ἀριθμοῦ) εἰς τὸ Φ, ὑπάρχει ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, διπλάσιον στοιχεῖον (ἀριθμὸς) εἰς τὸ Κ.

***Ἀντιστρόφως:*** Εἰς κάθε ἀριθμὸν (στοιχεῖον) τοῦ Κ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον (ἀριθμὸς) τοῦ Φ, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Ἄρα τὰ σύνολα Φ καὶ Κ εὑρίσκονται εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχίαν. Ἡ ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχία τῶν συνόλων Φ καὶ Κ δύναται νὰ ὁρισθῇ ἁπλῶς καὶ ἀπὸ τὴν σχέσιν:

$$y = 2x,$$

ὅπου x εἶναι στοιχεῖον τοῦ συνόλου Κ. Οὕτω:

Εἰς τὸ στοιχεῖον $x = 1$ τοῦ Φ ἀντιστοιχεῖ τὸ στοιχεῖον $y = 2\cdot 1 = 2$ τοῦ Κ
» $x = 2$ » Φ » » » $y = 2\cdot 2 = 4$ » »
» $x = 3$ » Φ » » » $y = 2\cdot 3 = 6$ » »
. . . . . . . . . . . . . . . .
» $x = \nu$ » Φ » » » $y = 2\cdot\nu = 2\nu$ » »

καὶ ἀντιστρόφως.

γ). Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$M = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \text{καὶ} \quad N = \{3,5,7,9,11,13\}.$$

Εἰς ταῦτα παρατηροῦμεν ὅτι: εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Μ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Ν, διδόμενον ὑπὸ τῆς σχέσεως: $y = 2x+1$.

Διότι, εἰς τὸ $x = 1$ ἀντιστοιχεῖ τό: $y = 2\cdot 1 + 1 = 3$
» $x = 2$ » $y = 2\cdot 2 + 1 = 5$
» $x = 3$ » $y = 2\cdot 3 + 1 = 7$
» $x = 4$ « $y = 2\cdot 4 + 1 = 9$
» $x = 5$ » $y = 2\cdot 5 + 1 = 11$
καὶ » $x = 6$ » $y = 2\cdot 6 + 1 = 13$

καί ἀντιστρόφως.

δ). Κατ' ἀνάλογον τρόπον, διὰ τῆς σχέσεως $y=2x-1$, ἐπιτυγχάνομεν τὴν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\Phi=\{1,2,3,\ldots,\nu,\ldots\}$ ἐπὶ τοῦ συνόλου $\Theta=\{1,3,5\ldots\}$ τῶν περιττῶν ἀριθμῶν. Διότι :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Εἰς τὸ στοιχεῖον $x=1$ | τοῦ Φ ἀντιστοιχεῖ τό : | $y=2\cdot1-1=1$ | τοῦ Θ |
| $x=2$ | » | $y=2\cdot2-1=3$ | » » |
| $x=3$ | » | $y=2\cdot3-1=5$ | » » |
| . . . . . . | . . . . . . | . . . . . . | . . . |

καὶ ἀντιστρόφως.

῞Ωστε : ***Δύο σύνολα Α καὶ Β εὑρίσκονται εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχίαν, ὅταν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Β καὶ εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Β ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Α.***

Ἡ ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων δύο συνόλων καλεῖται *ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις* τοῦ Α ἐπὶ τοῦ Β.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι : *Ἑκάστη ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις δύο συνόλων ἐγκαθίσταται καὶ ὑπὸ μιᾶς διαφορετικῆς σχέσεως.*

**25. Ἰσοδύναμα σύνολα.** ῎Ας θεωρήσωμεν τὰ σύνολα :

$$A=\{\alpha,\beta,\gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B=\{2,3,4\}.$$

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων ἕκαστον καὶ ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ ἀντιστοιχισθοῦν. Δηλαδή, εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Β, καὶ ὅτι ἡ ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχία δύναται νὰ γίνῃ κατὰ τοὺς ἑξῆς τρόπους :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha\longleftrightarrow2$ | $\alpha\longleftrightarrow2$ | $\alpha\longleftrightarrow3$ | $\alpha\longleftrightarrow3$ | $\alpha\longleftrightarrow4$ | $\alpha\longleftrightarrow4$ |
| $\beta\longleftrightarrow3$ | $\beta\longleftrightarrow4$ | $\beta\longleftrightarrow2$ | $\beta\longleftrightarrow4$ | $\beta\longleftrightarrow2$ | $\beta\longleftrightarrow3$ |
| $\gamma\longleftrightarrow4$ | $\gamma\longleftrightarrow3$ | $\gamma\longleftrightarrow4$ | $\gamma\longleftrightarrow2$ | $\gamma\longleftrightarrow3$ | $\gamma\longleftrightarrow2$ |

ἤτοι κατὰ $1\cdot2\cdot3=3!=6$ τρόπους.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ δύο σύνολα Α καὶ Β θὰ λέγωνται ***ἰσοδύναμα***. ῞Ωστε :

***Δύο σύνολα Α καὶ Β λέγονται ἰσοδύναμα, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν.***

Διὰ νὰ εἶναι λοιπὸν δύο σύνολα Α καὶ Β ἰσοδύναμα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων, ἤτοι : $\nu(A)=\nu(B)$.

Ἡ ἰσοδυναμία δύο συνόλων Α καὶ Β παρίσταται διὰ τοῦ :

$$A\longleftrightarrow B \quad \text{ἢ} \quad A\sim B$$

καὶ διαβάζεται : *Α ἰσοδυναμικὸν τοῦ Β*. Κατ' ἀκολουθίαν :

$$\boxed{(A\longleftrightarrow A)\iff\nu(A)=\nu(B)}$$

῞Ωστε, ἡ ἰσοδυναμία «$\longleftrightarrow$» τῶν συνόλων εἶναι διάφορος τῆς λογικῆς ἰσοδυναμίας $\iff$ τῶν προτάσεων. Διὰ νὰ μὴν ἐπέρχεται, λοιπόν, σύγχυσις μεταξὺ τῶν δύο ἰσοδυναμιῶν, πολλοὶ συγγραφεῖς προτιμοῦν, ἀντὶ τοῦ ὅρου *ἰσοδύναμα σύνολα*, τὸν ὅρον *ἰσοσθενῆ σύνολα*. Οὕτω, τὰ σύνολα:

$$A = \{x \mid x \text{ μὴν τοῦ ἔτους}\}$$
$$B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

εἶναι προφανῶς ἰσοσθενῆ. Ἄρα γράφομεν: $A \sim B$ ἢ $A \longleftrightarrow B$.

Τὰ σύνολα: $\Gamma = \{2,3\}$ καὶ $\Delta = \{\varkappa,\lambda,\varrho\}$ δὲν εἶναι ἰσοσθενῆ. Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Γ δύναται νὰ ἀντιστοιχισθῇ μὲ κάποιον στοιχεῖον τοῦ Δ, ἤτοι τὸ $2 \longleftrightarrow \varkappa$, τὸ $3 \longleftrightarrow \lambda$. Δὲν συμβαίνει ὅμως καὶ τὸ ἀντίστροφον. Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν $A \neq B$ καὶ διαβάζομεν: *Α διάφορον Β.*

Ἐδῶ παρατηροῦμεν ὅτι τὸ Γ δύναται νὰ ἀντιστοιχισθῇ μὲ ἓν μέρος τοῦ συνόλου Δ, π.χ. μὲ τὸ $\{\varkappa,\lambda\}$. Διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι:

***Τὸ σύνολον Γ ἀπεικονίζεται ἐντὸς ἢ εἰς τὸ Δ.***

Οὕτω: *Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν καὶ τὸ σύνολον τῶν θρανίων (διθέσια) μιᾶς τάξεως δὲν εἶναι ἰσοδύναμα (ἰσοσθενῆ).*

Ὁμοίως: *Τὸ σύνολον τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως καὶ τὸ σύνολον τῶν οἰκιῶν τῆς αὐτῆς πόλεως δὲν εἶναι ἰσοδύναμα.*

**26. Πλῆθος ἀντιστοιχιῶν δύο ἰσοσθενῶν συνόλων.** Εἴδομεν ὅτι: διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ ἀντιστοίχισις, ἓν πρὸς ἕν, δύο συνόλων, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ταῦτα νὰ περιέχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Τὰ μονοσύνολα:

$$A_1 = \{5\} \quad \text{καὶ} \quad B_1 = \{\alpha\}$$

ἀπεικονίζονται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατὰ $1! = 1$ μόνον τρόπον, τόν:

$$\boxed{5 \longleftrightarrow \alpha}$$

Τὰ σύνολα: $A_2 = \{1,2\}$ καὶ $B_2 = \{\alpha,\beta\}$ ἀπεικονίζονται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατὰ $2! = 2$ μόνον τρόπους, τούς:

$$\boxed{\begin{matrix}\alpha \longleftrightarrow 1\\ \beta \longleftrightarrow 2\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\alpha \longleftrightarrow 2\\ \beta \longleftrightarrow 2\end{matrix}}$$

Τὰ σύνολα: $A_3 = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ $B_3 = \{1,2,3\}$, ὅπως εἴδομεν εἰς τὴν § 25, ἀπεικονίζονται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατὰ $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3! = 6$ τρόπους.

Ὁμοίως τὰ σύνολα: $A_4 = \{8,9,10,11\}$ καὶ $B_4 = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ ἀπεικονίζονται τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατὰ $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ τρόπους.

Ἀναγράψατε αὐτούς.

Γενικῶς: ***Δύο ἰσοσθενῆ σύνολα, ἕκαστον τῶν ὁποίων περιέχει ν στοιχεῖα, ἀπεικονίζονται (ἀμφιμονοσημάντως) τὸ ἓν ἐπὶ τοῦ ἄλλου κατὰ ν! διαφορετικοὺς τρόπους.***

Ἐντεῦθεν, ἕνα σύνολον $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu\}$ ἐκ ν στοιχείων, ἀπεικονίζεται ἐπὶ τοῦ ἑαυτοῦ του (αὐτοαπεικόνισις) κατὰ $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \nu = \nu!$ διαφορετικοὺς τρόπους.

***Παρατήρησις.*** Τὰ σύνολα: $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{3,1,2,4\}$ εἶναι προφανῶς ἴσα. Ἐπειδὴ ὅμως ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων, εἶναι καὶ ἰσοδύναμα. Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$A = B \quad \text{καὶ} \quad A \sim B.$$

Δηλαδή: ***Ἐὰν δύο σύνολα εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι καὶ ἰσοδύναμα***

Τὰ σύνολα ὅμως: $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Δὲν εἶναι ὅμως καὶ ἴσα, διότι τὰ στοιχεῖα των εἶναι διάφορα.

Δηλαδή: ***Ἐὰν δύο σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα, δὲν ἕπεται ὅτι ταῦτα θὰ εἶναι καὶ ἴσα.***

**27. Ἰδιότητες τῶν ἰσοδυνάμων συνόλων.** α). Ἄς λάβωμεν τὸ σύνολον:

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Τοῦτο, προφανῶς, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν ἑαυτόν του, ἤτοι:

$$A \sim A,$$

διότι ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Δηλαδὴ ἰσχύει ἡ ***ἀνακλαστικὴ ἰδιότης.*** Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι:

***Κάθε σύνολον εἶναι ἰσοδύναμον ἑαυτοῦ.***

β). Ἄς λάβωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{x \mid x \text{ δάκτυλος τῆς χειρὸς}\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ αἴσθησις}\}.$$

Ταῦτα, ὡς γνωστόν, περιέχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Ἄρα εἶναι ἰσοδύναμα. Δηλαδή: $A \sim B$ καὶ $B \sim A$.

Ἰσχύει λοιπὸν ἡ ***συμμετρικὴ ἰδιότης.*** Κατ' ἀκολουθίαν:

***Ἐὰν ἕνα σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἕνα σύνολον B, τότε καὶ τὸ B θὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ A.***

Θὰ γράφωμεν δὲ τὴν ἰδιότητα ταύτην ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \sim B \Rightarrow B \sim A}$$

γ). Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{x \mid x \text{ Ὀλύμπιος Θεὸς}\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ μὴν τοῦ ἔτους}\}$$
$$\Gamma = \{x \mid x \text{ ζωδιακὸς ἀστερισμός}\}.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σύνολα ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα, διότι περιέχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων 12. Διότι 12 ἦσαν οἱ Θεοὶ τοῦ Ὀλύμπου, 12 μῆνας ἔχει τὸ ἔτος καὶ 12 ἀστερισμοὺς περιλαμβάνει ὁ ζωδιακὸς κύκλος.

Ἄρα τὸ σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ B καὶ τὸ B ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Γ. Ἰσχύει λοιπὸν ἡ ***μεταβατικὴ ἰδιότης:***

***Ἐὰν ἕνα σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον B καὶ***

***τὸ σύνολον B ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Γ, τότε τὸ A θὰ εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον Γ.***

Ἡ ἰδιότης αὕτη συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

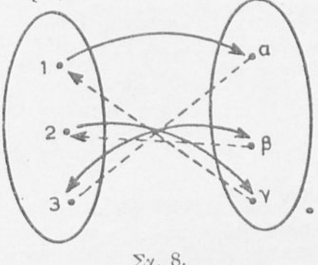
$$\boxed{A \sim B \wedge B \sim \Gamma \Rightarrow A \sim \Gamma}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι ἡ ἰσοδυναμία ἔχει τρεῖς βασικὰς ἰδιότητας, ἀντιστοίχους πρὸς τὰς τρεῖς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος.

Ἡ λέξις «καὶ» παρεστάθη διὰ τοῦ συμβόλου $\wedge$.

**28. Γραφικὴ παράστασις ἰσοδυνάμων συνόλων.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$$




Σχ. 8.

Ἐπειδὴ ταῦτα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ A πρὸς ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ B καὶ ἀντιστρόφως, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ B νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μὲ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ A. Ἡ τοιαύτη ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ (σχ. 8). Οἱ τρόποι τῶν ἀντιστοιχιῶν τούτων εἶναι, ὡς γνωστόν, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ κατὰ τὸ πλῆθος.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων προτάσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς.

1) $\{0\} = \varnothing$
2) $\varnothing \longleftrightarrow 0$
3) $\{0\} \longleftrightarrow \{1\}$
4) $\{\alpha,\beta,\gamma\} \longleftrightarrow \{\{\beta,\gamma,\alpha, \quad \{\alpha,\beta\}\}$
5) $\{4,5,6\} = \{\alpha,\beta,\gamma\}$,
6) $\{\varnothing,1,2\} = \{\varnothing,1,\{2\}\}$
7) $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \varnothing\} \longleftrightarrow \{1,2,3\}$
8) $2^A \{\varnothing\}$.

**2.** Ἐὰν $A = \{x \mid x =$ ἀστὴρ τῆς μικρᾶς Ἄρκτου$\}$
καὶ $B = \{x \mid x =$ ἀστὴρ τῆς μεγάλης Ἄρκτου$\}$,
νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \sim B$.

**3.** Ἐὰν $A = \{x \mid x =$ εἷς τῶν 7 σοφῶν τῆς Ἀρχαιότητος$\}$ καὶ
$B = \{x \mid x =$ ἡμέρα τῆς ἑβδομάδος$\}$
νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \sim B$.

**4.** Ἐὰν $A = \{x \mid x$ σημεῖον περιφερείας κέντρου $0\}$ καὶ
$B = \{x \mid x$ σημεῖον μιᾶς διαμέτρου τῆς $0\}$,
νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \sim B$.

**5.** Ἐὰν $\Sigma_1 = \{\alpha,\varepsilon,\eta,\iota,o,\upsilon,\omega\}$ καὶ $\{\Sigma_2 = \{A,E,H,I,O,Y,\Omega\}$,
νὰ δειχθῇ ὅτι: $\Sigma_1 \sim \Sigma_2$.

**29. Πεπερασμένον σύνολον.** Ἄς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$A = \{4,5,6\}. \tag{1}$$

Τοῦ συνόλου τούτου γνήσια ὑποσύνολα εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

$$\{4\}, \quad \{5\}, \quad \{6\}, \quad \{4,5\}, \quad \{4,6\}, \quad \{5,6\}, \tag{2}$$

δηλαδὴ $2^3 - 2 = 8 - 2 = 6$ κατὰ τὸ πλῆθος.

Τὸ σύνολον Α ἔχει τρία στοιχεῖα καὶ ἑπομένως δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ τεθῇ εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν (ἓν - πρὸς - ἓν) μὲ κανένα ἐκ τῶν συνόλων (2), ἐκ τῶν ὁποίων τὰ τρία πρῶτα εἶναι μονοσθενῆ καὶ τὰ τρία τελευταῖα δισθενῆ. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύνολον (1) θὰ λέγεται ***πεπερασμένον***. Ἰδιαίτερον γνώρισμα ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἀναγράφωμεν τὰ στοιχεῖα του κατ᾽ αὔξουσαν τάξιν καὶ νὰ φθάσωμεν μέχρις ἑνὸς ὡρισμένου τακτικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων συνάγομεν ὅτι :

***Ἐὰν ἑνὸς συνόλου Α δὲν ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον Β αὐτοῦ, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἰσοδύναμον (ἰσοσθενὲς) πρὸς τὸ Α, τότε τὸ Α εἶναι πεπερασμένον σύνολον.***

Παράδειγμα: α). Τὸ σύνολον τῶν μαθητῶν τῶν Λυκείων τῆς Ἑλλάδος εἶναι πεπερασμένον.

β). Τὸ σύνολον τῶν σταγόνων ποτηρίου ὕδατος εἶναι πεπερασμένον.

γ). Τὸ σύνολον τῶν αὐτοκινήτων τῆς Ἑλλάδος εἶναι πεπερασμένον.

δ). Τὸ σύνολον τῶν οἰκιῶν τῶν Ἀθηνῶν εἶναι πεπερασμένον.

**30. Ἀπέραντον σύνολον.** Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν :

$$\Phi = \{1,2,3,4,\ldots,\nu,\ldots\}$$

καὶ τὸ γνήσιον ὑποσύνολον αὐτοῦ Α τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν :

$$A = \{2,4,6,8,\ldots,2\nu,\ldots\}.$$

Εἰς τὴν § 24 εἴδομεν ὅτι ταῦτα δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν διὰ τῆς σχέσεως : $y = 2x$.

Ἐπίσης ὅτι τὸ Φ ἀπεικονίζεται ἀμφιμονοσημάντως ἐπὶ τοῦ Α κατὰ $\nu!$ διαφόρους τρόπους. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ σύνολον Φ ὀνομάζεται ***ἀπέραντον σύνολον*** ἢ ***ἀπειροσύνολον***.

Ἤδη λαμβάνομεν τὸ σύνολον :

$$A = \{2,4,6,8,\ldots,2\nu\ldots\}$$

τῶν φυσικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν καὶ τὴν σχέσιν $y = 2x$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Εἰς τὸ στοιχεῖον | 2 | τοῦ Α | ἀντιστοιχεῖ | τὸ στοιχεῖον | $y = 2\cdot 2 = 4$ |
| » | 4 | » | » | » | $y = 2\cdot 4 = 8$ |
| » | 6 | » | » | » | $y = 2\cdot 6 = 12$ |
| » | 8 | » | » | » | $y = 2\cdot 8 = 16$ |
| . | . | . | . | . | . |
| » | $2\nu$ | » | » | » | $y = 2\cdot 2\nu = 4\nu$ |
| . | . | . | . | . | . |

καὶ οὕτω τὰ στοιχεῖα $4,8,12,16,\ldots,4\nu,\ldots$ ἀποτελοῦν νέον σύνολον :

$$B = \{4,8,12,16,\ldots,4\nu,\ldots\},$$

τὸ ὁποῖον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α καὶ ὅτι τίθεται εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ Α καὶ ἀντιστρόφως. Ἄρα καὶ τὸ σύνολον Α εἶναι ἀπειροσύνολον.

Ὁμοίως τὸ Γ δύναται νὰ τεθῇ εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν (ἓν πρὸς ἓν) μὲ τὸ γνήσιον ὑποσύνολόν του:

$$\Gamma=\{8,16,24,32,\ldots,8\nu,\ldots\},$$

τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐκ τοῦ Β σύμφωνα μὲ τὴν σχέσιν $y=2x$.

Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι δύο σύνολα, τὰ ὁποῖα δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν εἶναι καὶ ἰσοδύναμα καὶ κατ' ἀκολουθίαν συνάγομεν ὅτι:

***Ἐὰν ἕνα σύνολον Α εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς ἕνα γνήσιον ὑποσύνολόν του Β ἢ Γ ἢ Δ, τότε τὸ σύνολον τοῦτο εἶναι ἀπειροσύνολον (ἀπέραντον).***

Εἰς τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων ὁ ὁρισμὸς οὗτος στενογραφεῖται ὡς ἑξῆς:

$$[\nu(A)=\nu(B)] \wedge (A \supset B) \Longrightarrow (A \text{ εἶναι ἀπειροσύνολον}).$$

*ΣΗΜ.* Τὸ σύνολον Γ προκύπτει ἐκ τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, βάσει τῆς σχέσεως $y=8x$.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι: *ἐκ τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δυνάμεθα νὰ δημιουργήσωμεν ἄπειρα γνήσια ὑποσύνολά του*, τὰ ὁποῖα, κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ εἶναι καὶ ταῦτα ἀπειροσύνολα.

Ἐπίσης, τὸ σύνολον $\Pi=\{1,3,5,7,\ldots,2\nu-1,\ldots\}$ τῶν περιττῶν ἀριθμῶν δύναται νὰ τεθῇ εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

$$\Phi=\{1,2,3,4,\ldots,\nu,\ldots\},$$

βάσει τῆς σχέσεως $y=2x-1$.

Ἄρα τὰ σύνολα Π καὶ Φ εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ὅτι $\Pi \subset \Phi$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ Π εἶναι ἀπέραντον, διότι ἐκ τοῦ Π, βάσει τῆς σχέσεως $y=2x-1$, δημιουργοῦμεν τὸ γνήσιον ὑποσύνολον αὐτοῦ

$$P=\{1,5,9,13,\ldots,4\nu-3,\ldots\},$$

τὸ ὁποῖον τίθεται εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ Π. Ἄρα τὰ σύνολα Π καὶ Ρ εἶναι ἰσοδύναμα. Δηλαδή:

$$\nu(\Pi) = \nu(\Phi) \quad \text{καὶ} \quad \nu(B) = \nu(\Phi).$$

Ἤτοι, τὸ σύνολον τῶν περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ὁμοίως, τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω λεχθέντων, ἕπεται ὅτι: *δὲν δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι περισσότεροι τῶν ἀρτίων ἢ τῶν περιττῶν ἀριθμῶν, ἀλλὰ ὅτι: ἔχουν τὸν αὐτὸν πληθικὸν ἀριθμόν*, ἢ ὅτι: *τὰ δύο ταῦτα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα.*

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $\Sigma=\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

καὶ τὴν σχέσιν $y=\frac{x}{2}$.

Εἰς τὸ στοιχεῖον $x = \frac{1}{2}$ τοῦ Σ ἀντιστοιχεῖ τὸ στοιχεῖον $y = \frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

» $x = \frac{1}{3}$ » » » $y = \frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

» $x = \frac{1}{4}$ » » » $y = \frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$

» $x = \frac{1}{5}$ » » » $y = \frac{1}{5} : 2 = \frac{1}{10}$

» $x = \frac{1}{6}$ » » » $y = \frac{1}{6} : 2 = \frac{1}{12}$

. . . . . . . . . . . . . . .

Οὕτω, τὰ στοιχεῖα: $\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots$ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον:

$$\Sigma_1 = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots\right\},$$

τὸ ὁποῖον εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Σ καὶ κατ' ἀκολουθίαν δύναται νὰ τεθῇ εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ Σ. Ἄρα: $\Sigma \sim \Sigma_1$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ Σ εἶναι ἀπειροσύνολον.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ποία σχέσις καθιστᾷ ἰσοδύναμα τὰ σύνολα:

$A = \{1,2,3,..,20\}$ καὶ $B = \{3,6,9,\ldots,60\}$;

**2.** Ὁμοίως τά: $A = \{1,2,\ldots,100\}$ καὶ $B = \{2,4,\ldots,200\}$;

**3.** Διὰ τῆς χρήσεως τῶν σχέσεων:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $y = 3x + 1$ | 4) $y = x^2$ | 7) $y = x^2 + 4$ |
| 2) $y = 5x + 2$ | 5) $y = x^3$ | 8) $y = 2x + 1$ |
| 3) $y = -2x$ | 6) $y = 2^x$ | 9) $y = x^4$ |

νὰ δημιουργήσετε σύνολα ἰσοδύναμα πρὸς τό: $A = \{1,2,3,\ldots,10\}$.

**4.** Εἰς ἕνα χορόν, πῶς εἶναι δυνατὸν νὰ ἐξακριβωθῇ, ἐὰν τὸ σύνολον τῶν γυναικῶν εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν ἀνδρῶν;

**5.** Ἐὰν $A = \{x \mid x =$ πολλαπλάσιον τοῦ $4\}$

καὶ $B = \{x \mid x =$ ἄρτιος$\}$, θὰ εἶναι $A \subset B$;

**6.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $3\Phi \supset 2.3\Phi$, 2) $2\Phi \supset 3.2\Phi$

3) $3.7\Phi \subset 7\Phi$, 4) $6.3\Phi \subset 3\Phi$.

**7.** Πόσα ὑποσύνολα σχηματίζονται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ ἀριθμοῦ 210;

**8.** Ἀπὸ τὸ σύνολον: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

1) Πόσα γνήσια ὑποσύνολα σχηματίζονται;
2) Πόσα ὑποσύνολα σχηματίζονται;
3) Ἐκ τοῦ συνόλου A, νὰ σχηματισθῇ τὸ σύνολον:

$B = \{x \mid x =$ ἄρτιος μὲ $x \in A\}$

4) Ὁμοίως τό: $\Gamma = \{x \mid x =$ περιττὸς$\}$
5) Ὁμοίως τό: $\Delta = \{x \mid x =$ πρῶτος$\}$
6) Τί σχέσιν ἔχει ἕκαστον τῶν συνόλων Γ καὶ Δ μετὰ τοῦ A;

**9.** Εἰς ποίαν σχέσιν εὑρίσκονται τὰ σύνολα:

$A = \{x \mid x =$ πρῶτος παράγων τοῦ $30\}$

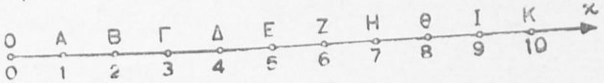
καὶ $B = \{3,5,7,2\}$;

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ III

## ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ *

**31. Ἀπεικόνισις τῶν θετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐπὶ ἡμιευθείας.**

Ἔστω ἡ ἡμιευθεῖα 0x. Ἐπ' αὐτῆς, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ 0, λαμβάνομεν μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου τὰ σημεῖα :




Σχ. 9.

Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ,..., τὰ ὁποῖα νὰ ἰσαπέχουν μεταξύ των. Ἡ ἡμιευθεῖα Ox δύναται νὰ προεκταθῇ, ὅσον θέλομεν πέραν τοῦ x. Ἐπομένως δυνάμεθα νὰ λάβωμεν ἐπ' αὐτῆς οἱονδήποτε πεπερασμένον πλῆθος ἰσαπεχόντων σημείων. Ἐκ τούτων θεωροῦμεν τὰ ἐννέα πρῶτα σημεῖα O,A,B, Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ. Ταῦτα ἀποτελοῦν τὸ σύνολον :

$$\Sigma = \{O, A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta\}.$$

Ἤδη θεωροῦμεν καὶ τὸ σύνολον :

$$\Phi_o = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}.$$

Τὰ δύο ταῦτα σύνολα ἔχουν τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν στοιχείων. Εἶναι ἄρα ἰσοδύναμα, διότι δύναται νὰ τεθοῦν εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν.

Ἕνεκα τούτου δυνάμεθα νὰ λέγωμεν ὅτι ὁ ἀριθμὸς 0 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον O, ὁ 1 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον A, ὁ 2 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον B κ.ο.κ., ὁ 8 ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον Θ.

Τὴν τοιαύτην μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τῶν ἀνωτέρω δοθέντων ἀριθμῶν 0,1,2,3,4,...,8 μὲ τὰ σημεῖα τῆς ἡμιευθείας 0x, δυνάμεθα νὰ ἐπεκτείνωμεν νοερῶς δι' ὅλους τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἔχομεν τὴν ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως :

$$\Phi_o = \{0,1,2,3,4,...\}$$

μὲ σημεῖα τῆς ἡμιευθείας 0x.

Ἡ ἡμιευθεῖα Ox καλεῖται ***ἡμιάξων.***

Τὸ διάγραμμα τοῦτο τοῦ συνόλου $\Phi_o$ χαρακτηρίζεται ὡς ***ἐλλιπές,*** διότι δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἀναγράψωμεν ὅλα τὰ στοιχεῖα αὐτοῦ, ἀλλὰ καὶ οὔτε νὰ εὕρωμεν ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἡμιάξονος 0x, τὰ ἀντίστοιχα πρὸς ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ $\Phi_o$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν διὰ τὰ δύο σύνολα:

$$\Phi_o = \{0,1,2,3,4...\} \quad \text{καὶ} \quad \Phi = \{1,2,3,4,...\}$$

ὅτι:

$$\boxed{\Phi \subset \Phi_o \quad \text{ἢ} \quad \Phi_o \supset \Phi}$$

Δηλαδή: *τὸ σύνολον $\Phi_o$ εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ $\Phi$.*

Ἂς μὴ λησμονῶμεν ὅτι τὸ μὲν $\Phi_o$ καλεῖται σύνολον ἀπαριθμήσεως, τὸ δὲ $\Phi$ καλεῖται σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Οἱ ἀριθμοὶ 1,2,3,4,... ὀνομάζονται ***θετικοὶ ἀκέραιοι.***

**32. Οἱ ἀρνητικοὶ ἀκέραιοι. Ἀπεικόνισις αὐτῶν ἐπὶ ἡμιευθείας.**

Ἔστω ὅτι δίδεται ἡ συνθήκη:

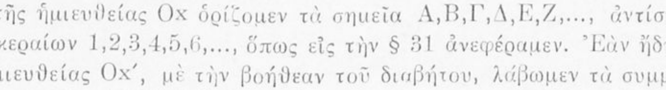
$$3 - 7 = x.$$

Παρατηροῦμεν ὅτι δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς (στοιχεῖον) τοῦ $\Phi_o = \{0,1,3,4,...\}$, τὸ ὁποῖον νὰ καθιστᾷ ἀληθῆ τὴν δήλωσιν ταύτην. Ἑπομένως, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι:

$$\{x \in \Phi_o \mid 3 - 7 = x\} = \varnothing.$$

Διὰ τοῦτο εἴμεθα ἀναγκασμένοι νὰ ἀναζητήσωμεν νέον εἶδος ἀριθμῶν, μὲ τοὺς ὁποίους ἡ ἀνωτέρω συνθήκη $3 - 7 = x$ νὰ εἶναι ἀληθὴς εἰς τὸ σύστημα τοῦτο. Οἱ νέοι οὗτοι ἀριθμοὶ εὑρίσκονται ἐκ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,.., ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμεν μίαν εὐθεῖαν x′x καὶ ἐπ᾽ αὐτῆς ἕνα σημεῖον Ο ἀντίστοιχον τοῦ ἀριθμοῦ 0 (μηδέν).




Σχ. 10.

Τὸ σημεῖον Ο χωρίζει τὴν εὐθεῖαν x′x εἰς δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Ox′. Ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox ὁρίζομεν τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,..., ἀντίστοιχα τῶν ἀκεραίων 1,2,3,4,5,6,..., ὅπως εἰς τὴν § 31 ἀνεφέραμεν. Ἐὰν ἤδη ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ox′, μὲ τὴν βοήθεαν τοῦ διαβήτου, λάβωμεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τῶν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,..., ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ σημεῖον Ο, τά: $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1, E_1, Z_1,...$, δημιουργοῦνται νέοι ἀριθμοί, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἔχει ἀντίστοιχον σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Ox′. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους, πρὸς διάκρισιν ἀπὸ τοὺς θετικοὺς ἀκεραίους, τοὺς καλοῦμεν ***ἀρνητικοὺς ἀκεραίους*** καὶ τοὺς γράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$-1, -2, -3, -4, -5, -6,...$$

καὶ ὁ μὲν $-1$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον $A_1$, ὁ $-2$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον $B_1$, ὁ $-3$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον $\Gamma_1$ κ.ο.κ., ὁ $-6$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ σημεῖον $Z_1$.

Οὗτοι ὀνομάζονται καὶ ***ἀντίθετοι*** τῶν ἀριθμῶν 1,2,3,4,5,6,...

Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἀπεκτήσαμεν πλουσιώτερον σύνολον ἀριθμῶν. Τὸ σύνολον τοῦτο ὀνομάζομεν ***σύνολον τῶν ἀκεραίων*** καὶ τὸ παριστῶμεν διὰ τοῦ $A_\kappa$.

Ἡ ἐλλιπὴς ἀναγραφὴ τούτου εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$A_\kappa = \{\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων, τοῦ μηδενὸς καὶ τῶν θετικῶν ἀκεραίων. Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς σχέσεις:

$$\boxed{A_\kappa \supset \Phi_0 \supset \Phi}$$

Δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ συνόλου $\Phi_0$ τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὑπερσύνολον τοῦ συνόλου $\Phi$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἔχομεν οὕτω μίαν ἀμφιμονοσήμαντον (ἓν πρὸς ἓν) ἀντιστοιχίαν τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων καὶ τῶν σημείων τοῦ ἄξονος Ox', ὁ ὁποῖος καλεῖται ***ἡμιάξων τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων***, ἐν ἀντιθέσει πρὸς τὸν ἄξονα Ox, ὅστις ὠνομάσθη θετικὸς ἡμιάξων τῶν ἀκεραίων. Ὁλόκληρος ἡ εὐθεῖα x'Ox λέγεται συνήθως καὶ ***κλῖμαξ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.***

Ἐὰν λοιπὸν ἔχωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας x'Ox τὰ σημεῖα τοῦ συνόλου $A_\kappa$, θὰ λέγωμεν ὅτι ἔχομεν τὴν κλίμακα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι τὸ σύνολον $\{x \in \Phi_0 \mid 3 - 7 = x\}$ δὲν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ἀλλὰ τὸ $\{-4\}$. Ἄρα δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\{x \in \Phi_0 \mid 3 - 7 = x\} = \{-4\}.$$

**33. Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν.** Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνθήκην:

$$5x = 7,$$

εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν ὅτι οὐδεὶς ἀκέραιος καθιστᾷ ἀληθῆ τὴν δήλωσιν ταύτην καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$\{x \in A_\kappa \mid 5x = 7\} = \varnothing.$$

Δηλαδὴ τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων εἶναι ἀνεπαρκές, διὰ νὰ ἱκανοποιήσῃ τὴν συνθήκην $5x = 7$.

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ δημιουργηθῇ σύστημα ἀριθμῶν, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ τὴν ἐν λόγῳ συνθήκην. Πρὸς τοῦτο θεωροῦμεν ἄλλους ἀριθμοὺς τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$, ἔνθα α καὶ β ἀκέραιοι, μὲ τὸν περιορισμὸν $\beta \neq 0$. Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ὀνομάζομεν ***ρητοὺς ἢ συμμέτρους*** ἢ ***κλάσματα.***

Ἐὰν εἰς τοὺς ἀκεραίους α, β δώσωμεν διαφόρους τιμάς, ἀλλὰ πάντοτε $\beta \neq 0$, ὅπως εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα φαίνεται, θὰ δημιουργήσωμεν ἀπείρους ρητοὺς ἀριθμούς:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | $-3$ | $5$ | $6$ | $7$ | $-8$ | $10$ | $-1$ | $12$ | .. |
| $\beta$ | $4$ | $-2$ | $3$ | $5$ | $4$ | $20$ | $-1$ | $-4$ | .. |
| $\frac{\alpha}{\beta}$ | $\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ | $\frac{5}{-2} = -\frac{5}{2}$ | $\frac{6}{3} = 2$ | $\frac{7}{5}$ | $\frac{-8}{4} = -2$ | $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$ | $\frac{-1}{-1} = 1$ | $\frac{12}{-4} = -3$ | .. |

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ $\alpha = 7$ καὶ $\beta = 5$ δημιουργεῖται ὁ ἀριθμὸς $\frac{5}{7}$ ὅστις ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκην $5x = 7$. Διότι, διὰ τὴν τιμὴν $x = \frac{7}{5}$ εἶναι $5 \cdot \frac{7}{5} = 7$ ἢ $7 = 7$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον $\{x \in A_\varkappa \mid 5x = 7\}$ δὲν εἶναι τὸ κενὸν σύνολον, ἀλλὰ τὸ $\left\{\frac{7}{5}\right\}$. Θὰ γράψωμεν λοιπόν:

$$\{x \in A_\varkappa \mid 5x = 7\} = \left\{\frac{7}{5}\right\}.$$

Τὸ νέον τοῦτο σύνολον τῶν ἀριθμῶν τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ ὀνομάζεται ***σύνολον τῶν ρητῶν*** καὶ θὰ παρίσταται διὰ τοῦ γράμματος Ρ. Περιέχει δὲ τοῦτο ὅλους τοὺς ἀκεραίους καὶ ὅλα τὰ κλάσματα, θετικὰ καὶ ἀρνητικά.

Οὕτω, εἰδικώτερον:

**Τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων θετικῶν παρίσταται διὰ τοῦ:**

$$A_\varkappa^+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

**Τὸ σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀκεραίων παρίσταται διὰ τοῦ:**

$$A_\varkappa^- = \{-1, -2, -3, -4, \ldots\}.$$

**Τὸ σύνολον τῶν θετικῶν ρητῶν παρίσταται διὰ τοῦ:**

$$P^+ = \left\{+\frac{1}{2}, +\frac{3}{4}, +\frac{5}{8}, +\frac{7}{9}, \ldots\right\}.$$

**Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀρνητικῶν παρίσταται διὰ τοῦ:**

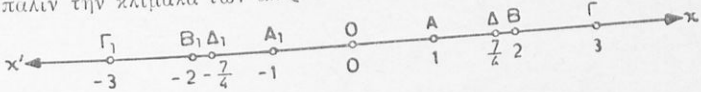
$$P^- = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{7}{9}, \ldots\right\}$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν δυνάμεθα νὰ γράψωμεν τὰς σχέσεις:

$$\boxed{P \supset A_\varkappa \supset \Phi_0 \supset \Phi}$$

Δηλαδὴ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ἀκεραίων καὶ κατ' ἀκολουθίαν ὑπερσύνολον τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως καὶ τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

**34. Ἀπεικόνισις τῶν ρητῶν ἀριθμῶν ἐπὶ ἄξονος.** Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὴν κλίμακα τῶν ἀκεραίων




Σχ. 11.

καὶ τὸν ρητὸν ἀριθμὸν $1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$. Δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν τὸν ρητὸν $\frac{7}{4}$ μὲ ἕνα ἀντίστοιχον σημεῖον τῆς εὐθείας τῶν ἀριθμῶν (ἄξονος x'x). Διότι, ἂν ὡς μονὰς τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ληφθῇ τὸ τμῆμα ΟΑ τοῦ ἄξονος, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν τοῦτο εἰς ὁσαδήποτε ἴσα τμήματα θέλομεν (ἐδῶ εἰς 4) καὶ νὰ λάβωμεν τὰ τρία ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν λοιπόν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου, λάβωμεν ἐκ τοῦ Ο ἐπὶ τῆς Οx τὸ τμῆμα ΟΑ καὶ ἐν συνεχείᾳ τὸ τμῆμα ΑΔ ἴσον πρὸς τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ΟΑ, εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς Οx, τὸ ὁποῖον θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν ρητὸν $\frac{7}{4}$.

Ἐὰν κατόπιν λάβωμεν τὸ συμμετρικὸν $Δ_1$ τοῦ Δ, ἐπὶ τοῦ ἡμιάξονος Οx', τοῦτο θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς τὸν ρητὸν $-\frac{7}{4}$, ὅστις εἶναι ἀντίθετος τοῦ $\frac{7}{4}$. Ἐν γένει, δυνάμεθα νὰ ὁρίσωμεν τὴν θέσιν οἱουδήποτε σημείου τοῦ ἄξονος x'Ox, ἀντίστοιχον τοῦ τυχόντος ρητοῦ $\frac{α}{β}$, ἔνθα α, β ἀκέραιοι καὶ $β \neq 0$. Τὰ σημεῖα ταῦτα εἶναι δυνατὸν νὰ πυκνωθοῦν ὅσον θέλομεν.

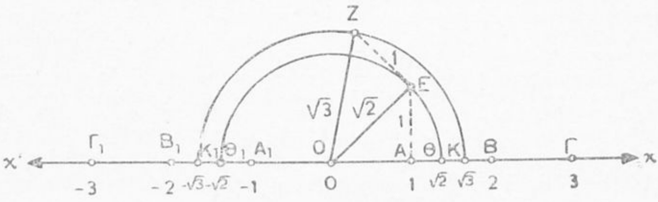
Κατ' ἀκολουθίαν, ἡ εὐθεῖα x'Ox δύναται νὰ ὀνομασθῇ καὶ ***ἄξων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν***. Οἱ ἀριθμοὶ $1, 2, \frac{7}{4}, 3, \ldots, -1, -2, -\frac{7}{4}, \ldots,$ καλοῦνται ἀντιστοίχως ***τετμημέναι τῶν σημείων*** $Α, Β, Δ, Γ, \ldots, Α_1, Β_1, Δ_1, \ldots$

Εἰς κάθε λοιπὸν ρητὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖον τοῦ ἄξονος x'Ox, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς τετμημένην τὸν ρητὸν τοῦτον. Εἰς δύο ἀνίσους ρητούς, ἀντιστοιχοῦν δύο διάφορα σημεῖα τῆς εὐθείας x'Ox. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ἔχει ἀντίστοιχον σύνολον τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ ἄξονος x'Ox. Ἆρά γε τὰ δύο ταῦτα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα; Τοῦτο θὰ φανῇ ἀπὸ τὰ ἑπόμενα.

**35. Ἄρρητοι ἀριθμοί — Ἀπεικόνισις αὐτῶν ἐπὶ ἄξονος.** Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὴν κλίμακα τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ τὴν τῶν ἀκεραίων καὶ τῶν κλασματικῶν, καὶ ἔστω ὅτι εἰς τὸ σημεῖον Α ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀκέραιος 1.

Εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα x'Ox καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $AE = OA = 1$. Ἄγομεν τὸ τμῆμα ΟΕ καὶ ἐκ τοῦ Πυθαγορείου θεωρήματος ἔχομεν:

$$OE^2 = OA^2 + AE^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2, \text{ ἐξ οὗ } OE = \sqrt{2}.$$




Σχ. 12.

Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΕ γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν ἄξονα x'Ox εἰς τὰ σημεῖα Θ καὶ $Θ_1$. Εἰς τὸ σημεῖον Θ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον $Θ_1$ ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀντίθετός του $-\sqrt{2}$.

Ἂν εἰς τὸ Ε ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὸ τμῆμα ΟΕ καὶ ληφθῇ ἐπ' αὐτῆς τμῆμα $EZ = 1$, ἀχθῇ δὲ καὶ τὸ τμῆμα ΟΖ, θὰ ἔχωμεν:

$$OZ^2 = OE^2 + EZ^2 = 2 + 1 = 3, \text{ ἐξ οὗ } OZ = \sqrt{3}.$$

Ἤδη, μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΖ, γράφομεν περιφέρειαν, τέμνουσαν τὸν ἄξονα x'Ox εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ $K_1$. Εἰς τὸ σημεῖον Κ θὰ ἀντιστοιχῇ ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{3}$ καὶ εἰς τὸ σημεῖον $K_1$ ὁ ἀντίθετός του $-\sqrt{3}$.

Εὐκόλως δὲ ἀποδεικνύεται ὅτι: **Ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι τῆς μορφῆς $\dfrac{\alpha}{\beta}$** ἔνθα α, β ἀκέραιοι καὶ $\beta \neq 0$.

Ἐν πρώτοις ὁ $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι οὔτε μηδέν, διότι

$$0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{ἄρα} \quad \sqrt{2} \neq 0,$$

καὶ οὔτε ἀκέραιος, καθόσον τὸ τετράγωνον παντὸς ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἶναι ἀκέραιος διάφορος τοῦ 2.

Ἐὰν ὁ $\sqrt{2}$ ἦτο ρητὸς τῆς μορφῆς $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$, θὰ ἦτο ἀνάγωγον κλάσμα καὶ κατ' ἀκολουθίαν οἱ ὅροι τοῦ α καὶ τοῦ β θὰ εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἄρα, ἐάν: $\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{2}$, ἕπεται ὅτι $\alpha^2 = 2\beta^2$ (1)

Ἐκ τῆς (1) συνάγομεν ὅτι ὁ $\alpha^2$ εἶναι ἄρτιος, ὡς ἔχων τὸν παράγοντα 2. Διότι, ἐὰν $\alpha \in Φ$ θὰ εἶναι ἢ ἄρτιος ἢ περιττὸς ἀριθμός, δηλαδὴ τῆς μορφῆς $\alpha = 2\nu$ ἢ τῆς μορφῆς $\alpha = 2\nu + 1$ ἀντιστοίχως, ἔνθα $\nu \in Φ$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν καθ' ἣν εἶναι $\alpha = 2\nu$, ἕπεται ὅτι:

$$\alpha^2 = (2\nu)^2 = 4\nu^2 = 2 \cdot 2\nu^2 = \text{ἄρτιος}.$$

Εἰς δὲ τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶναι $\alpha = 2\nu + 1$, ἕπεται ὅτι:

$$\alpha^2 = (2\nu + 1)^2 = 4\nu^2 + 4\nu + 1 = 2(2\nu^2 + 2\nu) + 1 = 2\lambda + 1 = \text{περιττός},$$

ἔνθα $\lambda = 2\nu^2 + 2\nu$ καὶ $(\lambda \in Φ)$.

Συνεπῶς ὁ α εἶναι τῆς μορφῆς 2ν, ὁπότε $\alpha^2 = 4\nu^2$ καὶ ἡ σχέσις (1) γίνεται :

$$4\nu^2 = 2\beta^2 \quad ἢ \quad \beta^2 = 2\nu^2$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται, ὁμοίως, ὅτι ὁ β εἶναι ἄρτιος, δηλαδὴ τῆς μορφῆς $\beta = 2\sigma$, ὅπου $\sigma \in \Phi$.

Ἀφοῦ λοιπὸν οἱ α καὶ β εἶναι ἄρτιοι, τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2\nu}{2\sigma}$ δὲν εἶναι ἀνάγωγον, ὅπερ ἄτοπον, λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι ὁ ἀριθμὸς $\sqrt{2}$ δὲν εἶναι οὔτε ρητός. Ὁμοίως καὶ ὁ ἀντίθετός του $-\sqrt{2}$ δὲν εἶναι ρητός.

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ οἱ ἀριθμοὶ $\sqrt{3}$ καὶ $-\sqrt{3}$ δὲν εἶναι ρητοί. Ἐκτὸς τούτων ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἀριθμοί, ὡς οἱ : $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ κ.ο.κ., οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ρητοί.

Ὑπάρχουν λοιπὸν ἐπὶ τοῦ ἄξονος x′Ox τῶν ρητῶν ἀριθμῶν σημεῖα, ὡς τὰ $K, \Theta, K_1, \Theta_1$ κλπ., τὰ ὁποῖα δὲν ἀντιστοιχοῦν εἰς ρητοὺς ἀριθμούς.

Τοὺς ἀριθμοὺς τούτους ὀνομάζομεν ***ἀρρήτους*** ἢ ***ἀσυμμέτρους***. Εἶναι δὲ οὗτοι, προφανῶς, ἄπειροι τὸ πλῆθος. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι :

***Τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἄξονος*** x′Ox.

Τὸ σύνολον τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν παριστῶμεν διὰ τοῦ $A_\rho$ . Καὶ τὸ μὲν σύνολον τῶν ἀρρήτων θετικῶν παριστῶμεν διὰ τοῦ $A_\rho^+$, τὸ δὲ τοῦ τῶν ἀρρήτων ἀρνητικῶν διὰ τοῦ $A_\rho^-$ .

Τοιουτοτρόπως τὸ νέον σύστημα, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνει ὅλους τοὺς ρητοὺς καὶ ὅλους τοὺς ἀρρήτους, ἀποτελεῖ τὸ σύστημα τῶν ***πραγματικῶν ἀριθμῶν***.

Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν το παριστῶμεν διὰ τοῦ $\Pi_\alpha$ . Τὸ σύνολον τῶν $\Pi_\alpha$ καλεῖται συχνὰ ***Εὐκλείδειος χῶρος μιᾶς διαστάσεως***.

Δυνάμεθα, ὅθεν, νὰ γράψωμεν τὰς σχεσεις :

$$\boxed{\Pi_\alpha \supset P \supset A_\varkappa \supset \Phi_o \supset \Phi}$$

Δηλαδὴ τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὑπερσύνολον τοῦ συνόλου P τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ κατ᾿ ἀκολουθίαν ὑπερσύνολον τοῦ τῶν ἀκεραίων, τοῦ τῶν $\Phi_o$ καὶ τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Ἄρα τὰ P, $A_\varkappa$ , $\Phi_o$ καὶ Φ εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δύνανται ὅθεν ταῦτα νὰ τεθοῦν εἰς (ἓν πρὸς ἓν) ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν.

Ἡ εὐθεῖα x′Ox καλεῖται ἄξων ***τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν***.

Οὕτω, χάρις εἰς τοὺς ἀσυμμέτρους, ἀποφεύγομεν τὰ χάσματα ἐπὶ τῆς εὐθείας x′Ox τῶν ἀριθμῶν καὶ εἶναι δυνατὸν νὰ λέγωμεν ὅτι :

***Εἰς κάθε σημεῖον τοῦ ἄξονος*** x′Ox ***τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀντιστοιχεῖ ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμὸς ρητὸς ἢ ἄρρητος*** καὶ ἀντιστρόφως :

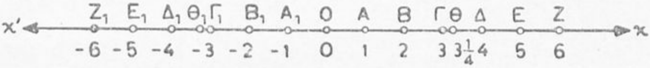
***Εἰς κάθε πραγματικὸν ἀριθμόν, ρητόν, ἢ ἄρρητον, ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τοῦ ἄξονος*** x′Ox.

Ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓν σημεῖον τοῦ ἄξονος x'Ox, καλεῖται *τετμημένη* τοῦ σημείου τούτου, ὡς καὶ ἀλλαχοῦ ἀνεφέραμεν.

**36. Σημειοσύνολα.** Ὅταν τὰ στοιχεῖα ἑνὸς συνόλου ἀντιπροσωπεύουν σημεῖα, τότε τὸ σύνολον τοῦτο καλεῖται ***σημειοσύνολον.*** Κατὰ τὰ λεχθέντα λοιπὸν εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον 35, ὁλόκληρος ὁ ἄξων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x'Ox εἶναι σημειοσύνολον.

Τὰ σημεῖα $\Gamma_1, B_1, A_1, O, A, B, \Gamma$ τοῦ ἄξονος x'Ox, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς ἀκεραίους $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$, ἀποτελοῦν ἕνα σημειοσύνολον, τὸ ὁποῖον εἶναι ὑποσημειοσύνολον τοῦ σημειοσυνόλου τῶν σημείων τοῦ ἄξονος x'Ox.

**37. Διαστήματα.** Ἂς θεωρήσωμεν τὴν κλίμακα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ τὰ σημεῖα Β, Θ, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τοὺς ἀριθμοὺς 2 καὶ $3\frac{1}{4}$. Τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων, τῶν μεταξὺ Β καὶ Θ, τοῦ τμήματος ΟΘ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν, τῶν ἀντιστοιχούν-




Σχ. 13.

των εἰς ἕκαστον τῶν ἐν λόγῳ σημείων μεταξὺ τῶν 2 καὶ $3\frac{1}{4}$ παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον: $]2, 3\frac{1}{4}[$, τὸ ὁποῖον διαβάζεται: *ἀνοικτὸν* 2, $3\frac{1}{4}$.

Τὸ σημειοσύνολον τοῦτο λέγεται ***ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν διάστημα*** καὶ μὲ τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων γράφεται:

$$]2, 3\frac{1}{4}[ = \left\{x \in \Pi_\alpha \mid 2 < x < 3\frac{1}{4}\right\}$$

Γενικῶς: Ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο πραγματικοὶ ἀριθμοὶ τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha < \beta$, τότε κάθε πραγματικὸς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι μεταξὺ τῶν α καὶ β, θὰ ἔχῃ ἀντιπρόσωπόν του ἕνα σημεῖον τοῦ τμήματος τούτου μὲ τετμημένας τῶν ἄκρων του α καὶ β ἀντιστοίχως. Μὲ ἄλλα λόγια θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ διάστημα $]\alpha, \beta[$ καὶ ἑπομένως θὰ γράψωμεν:

$$]\alpha, \beta[ = \{x \in \Pi_\alpha \mid \alpha < x < \beta\}$$

Εἰς τὸ διάστημα τοῦτο τῶν ἀριθμῶν δὲν ἀνήκει οὔτε ὁ α οὔτε ὁ β καὶ διὰ τὸν λόγον τοῦτον καλεῖται ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν.

Ἐὰν τὰ στοιχεῖα 2 καὶ $3\frac{1}{4}$ ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον τοῦτο, τότε τὸ διάστημα τοῦτο καλεῖται ***κλειστὸν ἑκατέρωθεν*** καὶ γράφομεν:

$$[2, 3\tfrac{1}{4}] = \{x \in \Pi_\alpha \,|\, 2 \leqslant x \leqslant 3\tfrac{1}{4}\}$$

καὶ γενικῶς τὸ διάστημα:

$$[\alpha, \beta] = \{x \in \Pi_\alpha \,|\, \alpha \leqslant x \leqslant \beta\}$$

εἶναι κλειστὸν ἑκατέρωθεν.

Ἐὰν θέλωμεν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ διάστημα ὁ $3\frac{1}{4}$ καὶ ὄχι ὁ 2, τότε τὸ διάστημα τοῦτο καλεῖται ***ἀνοικτὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ κλειστὸν πρὸς τὰ δεξιὰ*** καὶ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$]2, 3\tfrac{1}{4}] = \{x \in \Pi_\alpha \,|\, 2 < x \leqslant 3\}$$

καὶ γενικῶς τό: $\quad ]\alpha, \beta] = \{x \in \Pi_\alpha \,|\, \alpha < x \leqslant \beta\}$

εἶναι διάστημα ***ἀνοικτὸν πρὸς τὰ ἀριστερὰ καὶ κλειστὸν πρὸς τὰ δεξιά.***

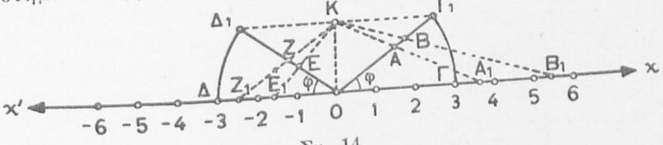
Ἂν θέλωμεν νὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ διάστημα ὁ 2 καὶ ὄχι ὁ $3\frac{1}{4}$, τότε ἔχομεν διάστημα ***ἀνοικτὸν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κλειστὸν πρὸς τὰ ἀριστερά,*** τὸ ὁποῖον συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$[2, 3\tfrac{1}{4}[ = \{x \in \Pi_\alpha \; 2 \leqslant x < 3\tfrac{1}{4}\}$$

καὶ γενικῶς τό: $\quad [\alpha, \beta[ = \{x \in \Pi_\alpha \,|\, \alpha \leqslant x < \beta\}$

εἶναι διάστημα ἀνοικτὸν πρὸς τὰ δεξιὰ καὶ κλειστὸν πρὸς τὰ ἀριστερά.

**38. Ἰσοδυναμία τοῦ ἄξονος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν πρὸς ἓν διάστημα αὐτοῦ.** α). Ἔστω ὁ ἄξων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x'Ox καὶ ἓν διάστημα αὐτοῦ, ἀνοικτὸν ἑκατέρωθεν, τό: $]-3, 3[$.




Σχ. 14.

Εἰς τὸ Ο ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΟΚ ἐπὶ τὸν ἄξονα x'Ox καὶ μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνας $\overline{O\Gamma} = 3$ καὶ $\overline{O\Delta} = -3$, γράφομεν τόξα πρὸς τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἄξονος x'Ox. Ἐκ τοῦ Κ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x'Ox, ἥτις τέμνει τὰ δύο τόξα εἰς τὰ σημεῖα $\Gamma_1$ καὶ $\Delta_1$ ἀντιστοίχως.

Ἄγομεν τὰ τμήματα $O\Gamma_1$ καὶ $O\Delta_1$

Οὕτω, τὸ διάστημα ΟΓ, δηλαδὴ τὸ $]0, 3[$, ἔλαβε τὴν θέσιν $O\Gamma_1$, τὸ δὲ διάστημα ΟΔ, δηλαδὴ τὸ $]-3, 0[$, ἔλαβε τὴν θέσιν $ΟΔ_1$. Θεωροῦμεν τὸ Κ ὡς κέντρον προβολῆς τῶν σημείων τοῦ $ΟΓ_1$ καὶ τῶν τοῦ $ΟΔ_1$ ἐπὶ τὸν ἄξονα x΄Ox. Οὕτω, εἰς τὸ σημεῖον Α τοῦ $ΟΓ_1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον $Α_1$ τοῦ ἡμιάξονος Ox. Εἰς τὸ σημεῖον Β τοῦ $ΟΓ_1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον $Β_1$ τοῦ Ox καὶ ἀντιστρόφως: εἰς ἕκαστον σημεῖον $Β_1$ τοῦ ἡμιάξονος Ox ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον Β τοῦ $ΟΓ_1$. Εἰς τὸ σημεῖον Ο τοῦ $ΟΓ_1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον Ο τοῦ Ox καὶ ἀντιστρόφως.

Ὁμοίως, εἰς τὸ σημεῖον Ε τοῦ $ΟΔ_1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον $Ε_1$ τοῦ ἡμιάξονος Ox΄. Εἰς τὸ σημεῖον Ζ τοῦ $ΟΔ_1$ ἀντιστοιχεῖ τὸ σημεῖον $Ζ_1$ τοῦ ἡμιάξονος Ox΄ καὶ ἀντιστρόφως: κάθε σημεῖον τοῦ ἡμιάξονος Ox΄ ἀπεικονίζεται εἰς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τοῦ $ΟΔ_1$.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐπιτυγχάνεται ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ διαστήματος $]-3, 3[$ ἐπὶ τὸν ἄξονα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως. Εἶναι ἄρα:

$$\Pi_\alpha \longleftrightarrow \, ]-3, 3[ \, = \{x \in \Pi_\alpha \mid -3 < x < 3\}.$$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι:

$$\Pi_\alpha \supset \, ]-3, 3[ \quad \text{καὶ} \quad \Pi_\alpha \longleftrightarrow \, ]-3, 3[,$$

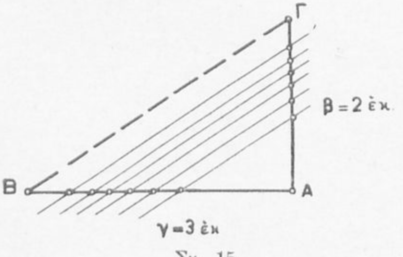
ἕπεται ὅτι τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ***ἀπειροσύνολον.***

***Παρατήρησις.*** Εἰς τὰ σημεῖα $Γ_1$ καὶ $Δ_1$ δὲν ἀντιστοιχοῦν σημεῖα τοῦ ἄξονος x΄Ox. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

***Ὁλόκληρος ὁ ἄξων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδυναμικὸς πρὸς τὸ τυχὸν διάστημά του.***

β). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος β = 2 ἑκ. εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου εὐθυγράμμου τμήματος γ = 3 ἑκ. ! !**

***Ἀπόδειξις:*** Σχηματίζομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ ΑΓ = 2ἑκ. ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ ΑΒ = 3 ἑκ. Ἐὰν φέρωμεν παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς κάθε σημεῖον τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ.



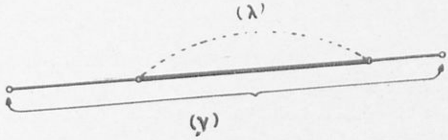
Σχ. 15.

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐπιτυγχάνεται μία (ἓν πρὸς ἕν) ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν σημείων x τοῦ τμήματος β = 2 ἑκ. καὶ τῶν σημείων y τοῦ τμήματος γ = 3 ἑκ. Ἄρα τὰ δύο ταῦτα σύνολα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ θὰ χαρακτηρίζωνται ἀπὸ τὸν ἴδιον μὴ πεπερασμένον πληθάριθμον.

Δηλαδή, τὰ δύο ταῦτα σύνολα περιέχουν ἀπείρως μέγαν ἀριθμὸν στοιχείων. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:

***Τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ ἑνὸς οἱουδήποτε εὐθυγράμμου τμήματος (λ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων ἐπὶ ἑνὸς ἄλλου εὐθυγράμμου τμήματος (γ)!!.***

Εἶναι φανερὸν ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα (λ) δύναται νὰ εἶναι ἁπλῶς καὶ ἓν τμῆμα ἐκ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος (γ) καὶ ἀντιστρόφως.

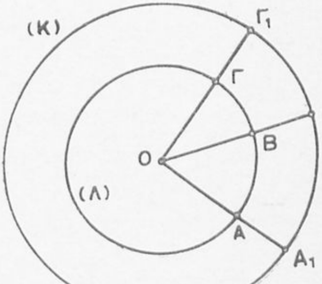


Σχ. 16.

Καταλήγομεν οὕτω εἰς τὸ περίεργον συμπέρασμα ὅτι: **τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου σχήματος (γ) ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων μὲ τὸ σύνολον ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς μόνον μέρους αὐτοῦ.** Ἐνταῦθα ὑποτίθεται ὅτι τὸ τμῆμα τοῦτο δύναται νὰ ληφθῇ ὁσονδήποτε μικρόν, χωρὶς ὅμως νὰ καταλήγῃ εἰς ἓν μοναδικὸν σημεῖον.

γ). **Ἐὰν δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ἐσωτερικῆς εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας.**

Ἔστωσαν (Λ) καὶ (Κ) δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ Α σημεῖον τῆς περιφερείας (Λ). Ἂν ἀχθῇ ἡ ἀκτὶς ΟΑ αὐτῆς, ἡ προέκτασίς της θὰ τέμνῃ τὴν ἐξωτερικὴν περιφέρειαν (Κ) εἰς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον $Α_1$. Δηλαδή, εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς (Λ) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον $Α_1$ τῆς (Κ). Ὁμοίως εἰς τὸ σημεῖον Β τῆς (Λ) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τῆς (Κ). Εἰς τὸ Γ τῆς (Λ) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, $Γ_1$ τῆς (Κ) κ.ο.κ.



Σχ. 17.

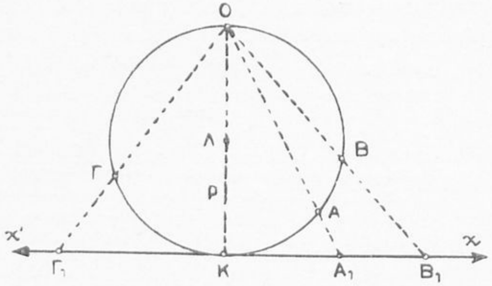
Ἀποκαθίσταται δὲ οὕτω ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῶν σημείων x τῆς περιφερείας (Λ) ἐπὶ τῶν σημείων y τῆς περιφερείας (Κ).

Κατ᾽ ἀκολουθίαν τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας (Λ) εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς περιφερείας (Κ).

δ). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἀπεράντου εὐθείας.**

Ἔστω ἡ περιφέρεια Λ καὶ μία ἀπέραντος εὐθεῖα x΄Kx, ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας ταύτης εἰς τὸ σημεῖον Κ.

Ἄγομεν τὴν διάμετρον ΚΛΟ καὶ θεωροῦμεν τὸ σημεῖον Ο ὡς κέντρον προβολῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι κάθε σημεῖον Α, Β, Γ,... τῆς περιφερείας Λ, ἐξαιρουμένου τοῦ Ο, ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον $Α_1, Β_1, Γ_1$,... τῆς εὐθείας x΄Kx, καὶ κάθε σημεῖον τῆς x΄x ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τῆς περιφερείας Λ. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σημειοσύνολον τῆς περιφερείας Λ εἶναι ἰσοδυναμικὸν πρὸς τὸ σημειοσύνολον τῆς ἀπεράντου εὐθείας x'x. Χαρακτηρίζονται οὕτω αἱ δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι ἀπὸ τὸν αὐτὸν ὑπερπεπερασμένον πληθικὸν ἀριθμόν.



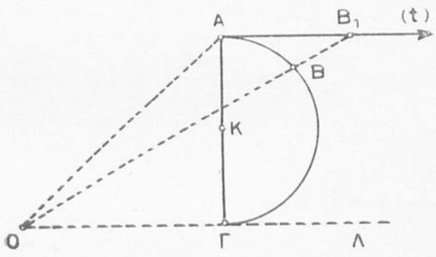

Σχ. 18.

*Σημ.* Ἐπὶ τῆς περιφερείας Λ ὑπάρχει τὸ σημεῖον O, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει ἀντίστοιχόν του ἐπὶ τῆς εὐθείας x'x.

Ἐὰν φαντασθῶμεν ὅμως ὅτι ἡ περιφέρεια (Λ,ρ), μήκους 2πρ, ἀναπτύσσεται ἐπὶ τῆς x'x, θὰ καταλάβῃ μόνον ἕνα ὡρισμένον τμῆμα αὐτῆς καὶ ἑπομένως θὰ ὑπάρχῃ θέσις ἐπὶ τῆς εὐθείας καὶ διὰ τὸ σημεῖον O. Ἄρα τὰ δύο σημειοσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα.

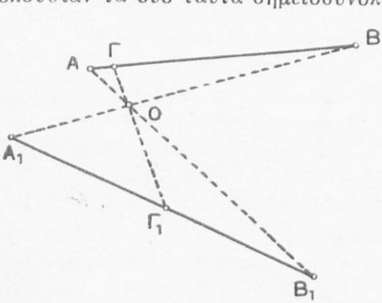
ε). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἡμιπεριφερείας K καὶ τὸ σύνολον τῶν σημείων ἡμιευθείας (t) εἶναι ἰσοδύναμα.**

Ἔστω K ἡ δοθεῖσα ἡμιπεριφέρεια καὶ At ἡμιευθεῖα, ἐφαπτομένη τῆς K εἰς τὸ ἓν ἄκρον αὐτῆς A. Ἐπὶ τῆς ἑτέρας ἐφαπτομένης τῆς K, τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν At, θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον O ὡς κέντρον προβολῆς τῶν σημείων τῆς K. Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς κάθε σημεῖον τῆς ἡμιπεριφερείας K ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τῆς ἡμιευθείας At καὶ ἀντιστρόφως. Κατ' ἀκολουθίαν τὰ δύο ταῦτα σημειοσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα.




Σχ. 19.

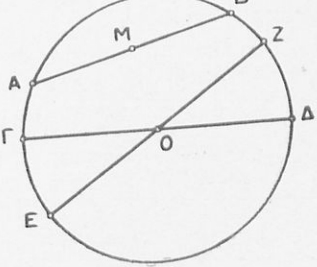
στ). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς ἄλλου τυχόντος εὐθυγράμμου τμήματος $A_1B_1$, κειμένου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετὰ τοῦ πρώτου.**




Σχ. 20.

Ἔστωσαν τὰ ὁμοεπίπεδα εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $A_1B_1$. Ἂν ἀχθοῦν τὰ τμήματα $AB_1$ καὶ $BA_1$, ταῦτα τέμνονται εἰς τὸ O, τὸ ὁποῖον θεωροῦμεν ὡς κέντρον προβολῆς. Παρατηροῦμεν ὅτι εἰς κάθε σημεῖον Γ τοῦ AB ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον $\Gamma_1$ τοῦ τμήματος $A_1B_1$ καὶ ἀντιστρόφως. Δηλαδὴ τὰ δύο ταῦτα σημειοσύνολα εἶναι ἰσοδύναμα.

ζ). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων ἑνὸς δίσκου εἶναι ἰσοδύναμον πρὸς τὸ σύνολον τῶν χορδῶν τοῦ δίσκου τούτου.**




Σχ. 21.

Ἔστω ὁ δίσκος Ο. Εἰς κάθε χορδὴν ΑΒ αὐτοῦ ἀντιστοιχεῖ ἓν μέσον Μ αὐτῆς. Ἔστω Σ τὸ σύνολον τῶν χορδῶν τοῦ δίσκου καὶ $\Sigma_1$ τὸ σύνολον τῶν σημείων τοῦ δίσκου. Εἰς πᾶν στοιχεῖον, μέσον τοῦ $\Sigma_1$, δηλαδὴ εἰς πᾶσαν χορδήν, ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ $\Sigma_1$, τὸ μέσον τῆς χορδῆς. Κατ' ἀκολουθίαν τὰ δύο ταῦτα σύνολα εἶναι ἰσοδυναμικά.

**39. Ἀριθμήσιμα σύνολα ἢ ἀπαριθμητὰ σύνολα.** Τὸ ἁπλούστερον καὶ τὸ πλέον σύνηθες σύνολον εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν :

$$\Phi = \{1,2,3,4,\ldots,\nu,\nu+1,\ldots\}$$

ἢ καὶ τὸ σύνολον τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως :

$$\Phi_0 = \{0,1,2,3,4,\ldots,\nu,\nu+1,\ldots\}.$$

Χαρακτηριστικὸν γνώρισμα τούτων εἶναι τὸ γεγονὸς τῆς ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των. Δηλαδὴ δυνάμεθα νὰ ἀναγράψωμεν ἕνα στοιχεῖον αὐτοῦ, ἂν μᾶς δοθῇ τὸ ἀμέσως προηγούμενον στοιχεῖον αὐτοῦ. Ἐπειδὴ δὲ τὸ γνώρισμα τοῦτο ἔχει κάποιαν ὁμοιότητα μὲ τὴν ἀπαρίθμησιν τῶν στοιχείων του, καλοῦμεν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ***ἀριθμήσιμον σύνολον*** ἢ καὶ ***ἀπαριθμητόν.***

Εἰς τὴν § 30 εἴδομεν ὅτι τὸ ἀπέραντον σύνολον :

$$\Phi = \{1,2,3,4,\ldots\},$$

καὶ τὸ διὰ τῆς σχέσεως $y = 2x$ ὁριζόμενον σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν :

$$A = \{2,4,6,8,\ldots\},$$

εἶναι ἀπέραντον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ Φ. Δηλαδή: $A \sim \Phi$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην καὶ τὸ Α θὰ λέγεται ἀπαριθμητὸν σύνολον.

Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν ἕνα σύνολον :

$$\Sigma = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\},$$

τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα δύνανται νὰ γραφοῦν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ὑπάρχῃ ἕνα πρῶτον ὡρισμένον στοιχεῖον, ἕνα δεύτερον, ἕνα τρίτον κ.ο.κ. Δηλαδὴ εἰς τὸν ἀριθμὸν 1, νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ $x_1$, εἰς τὸν 2 νὰ ἀντιστοιχῇ τὸ $x_2$, εἰς τὸν 3 τὸ $x_3$, εἰς τὸν 4 τὸ $x_4$ κ.ο.κ. ἤτοι :

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4\ldots \end{array}$$

ὁπότε $\Phi \sim \Sigma$ καὶ ἄρα τὸ Σ θὰ λέγεται τότε ἀπαριθμητὸν σύνολον.

Τὸ σύνολον $\Phi=\{1,2,3,4,...\}$ καὶ τὸ διὰ τῆς σχέσεως $y=x^2$ ὁριζόμενον σύνολον $B=\{1,4,9,16,...\}$ τίθεται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν ἓν πρὸς ἕν. Εἶναι ἄρα $B \sim \Phi$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ B εἶναι ἀπαριθμητὸν σύνολον :

Ὁμοίως τὸ σύνολον $\Phi_0=\{0,1,2,3,4,...\}$ καὶ τὸ διὰ τῆς σχέσεως $y=10^x$ ὁριζόμενον σύνολον :

$$\Gamma=\{1,10,100,1000,10000,...\},$$

εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα καὶ τὸ Γ εἶναι ἀπαριθμητὸν σύνολον.

Ὁμοίως, τὸ $\Phi_0$ καὶ τὸ διὰ τῆς σχέσεως $y=10^{-x}$ ὁριζόμενον σύνολον :

$$\Delta=\left\{1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, ...\right\},$$

εἶναι ἰσοδύναμα. Ἄρα καὶ τὸ Δ εἶναι ἀπαριθμητὸν σύνολον.

Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν :

$$A_\pi=\{2,3,5,7,11,13,...\}.$$

Τοῦτο εἶναι ἀπειροσύνολον, διότι, ἐὰν δοθῇ ἕνας οἱοσδήποτε ἐξ αὐτῶν πρῶτος ἀριθμός, ὑπάρχει ἕνας μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτὸν πρῶτος ἀριθμός.

Ὁ Εὐκλείδης ἐθεώρησε τὴν σειρὰν $2,3,5,7,...,P_\nu$ καὶ τὸν ἀριθμόν :

$$\varphi=(2.3.5.7...P_\nu)+1,$$

ὅστις, προφανῶς, εἶναι πρῶτος ἀριθμὸς μεγαλύτερος τοῦ $P_\nu$. Δηλαδή, ὑπάρχει πάντοτε ἕνας πρῶτος ἀριθμός, μεγαλύτερος τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ $P_\nu$. Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δηλαδὴ ὡς κάτωθι φαίνεται :

$$\begin{array}{cccccccc} A_\pi= \{2, & 3, & 5,...541,... & & 1223,... & 1957,...\} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \Phi= \ 1 & 2 & 3,... & 100,... & 200,... & 300,...\}. \end{array}$$

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι : $A_\pi \subset \Phi$ καὶ $A_\pi \sim \Phi$. Ὥστε, καὶ τὸ $A_\pi$ εἶναι ἀπαριθμητὸν σύνολον. Ἐντεῦθεν ἕπεται ὅτι :

***Ἕνα σύνολον καλεῖται ἀπαριθμητόν, ἐὰν μεταξὺ τῶν στοιχείων του καὶ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ἢ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως $\Phi_0$ ὑπάρχῃ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἓν πρὸς ἕν.***

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α. α). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀκεραίων εἶναι ἀπαριθμητόν.**

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀκεραίων ἀριθμῶν :

$$A_\alpha=\{..., -2\nu, ..., -4, -2, 0, 2, 4, ..., 2\nu, ...\},$$

ἔνθα $\nu \in \Phi$. Παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δὲν εἶναι πεπερασμένον. Διότι, δοθέντος οἱουδήποτε ἀρτίου $2\nu$, ὑπάρχει ὁ μεγαλύτερός του $2(\nu+1)$, καὶ δοθέντος οἱουδήποτε ἀρνητικοῦ ἀρτίου $-2\nu$, ὑπάρχει ὁ μικρότερός του $-2(\nu+1)$. Ἄρα τὸ $A_\alpha$ εἶναι ἀπειροσύνολον. Δυνάμεθα δὲ νὰ θέσωμεν τὸ $A_\alpha$ εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ σύνολον $\Phi_o$ τῶν ἀριθμῶν ἀπαριθμήσεως, ὡς κάτωθι φαίνεται :

$$\left.\begin{array}{llllllll} A_\alpha = \{0, & 2, & -2, & 4, & -4,\ldots, & 2\nu,\ldots, & -2\nu,\ldots\} \\ \quad\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \Phi_o = \{0, & 1, & 2, & 3, & 4,\ldots, & 2\nu-1,\ldots, & 2\nu,\ldots\} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Κατ' ἀκολουθίαν $A_\alpha \sim \Phi_o$.

Ὅθεν : ***Τὸ σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν εἶναι ἀπαριθμητόν.***

β). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων εἶναι ἀπαριθμητόν.**

Ἔστω τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων :

$$A_\varkappa = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots, \nu, -\nu, \ldots\}.$$

Τοῦτο, προφανῶς, λαμβάνεται ἐκ τῆς σχέσεως $x = \beta - \alpha$, ἔνθα $\alpha, \beta \in \Phi$, καὶ ἔχει γραφῆ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ἓν ὡρισμένον στοιχεῖον νὰ εἶναι πρῶτον, ἓν δεύτερον, ἓν τρίτον καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς.

Εἶναι δυνατόν, λοιπόν, νὰ τεθῇ εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ, ὡς κάτωθι φαίνεται :

$$\begin{array}{llllllll} A_\varkappa = \{0, & 1, & -1, & 2, & -2,\ldots, & \nu, & -\nu,\ldots\} \\ \quad\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \Phi\ = 1, & 2, & 3, & 4, & 5,\ldots, & 2\nu, & (2\nu+1),\ldots\} \end{array}$$

Κατ' ἀκολουθίαν : $A_\varkappa \sim \Phi$, ὁπότε καὶ τὸ $A_\varkappa$ εἶναι ἀπαριθμητὸν σύνολον.

γ). **Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπαριθμητόν.**

Γνωρίζομεν ὅτι πᾶς ρητὸς θετικὸς ἀριθμὸς εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{\beta}$, ἔνθα α καὶ β ἀκέραιοι θετικοὶ καὶ $\beta \neq 0$, οἱ δὲ α καὶ β πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Ἤδη, θὰ ἐπιδιώξωμεν νὰ διατάξωμεν τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ρ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ ἐξασφαλίσωμεν τὴν ἓν πρὸς ἓν ἀντιστοιχίαν των μὲ τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ὡς πρῶτον στοιχεῖον τοῦ Ρ θεωροῦμεν τὸ μηδὲν (0) καὶ προχωροῦμεν ὡς ἀκολούθως :

Τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta$ τῶν ὅρων τοῦ ρητοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ ὀνομάζομεν **ὕψος** αὐτοῦ. Διατάσσομεν τοὺς θετικοὺς ρητοὺς κατ' αὖξον ὕψος, τοὺς δὲ θετικοὺς ρητούς, τοῦ αὐτοῦ ὕψους, κατ' αὔξουσαν τιμήν, ὡς κάτωθι φαίνεται :

ὁ ρητός : $\frac{1}{1} = 1$ ἔχει ὕψος 2.

οἱ ρητοί : $\frac{1}{2}$ καὶ $\frac{2}{1} = 2$ ἔχουν ὕψος 3.

οἱ ρητοί : $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{2}$ καὶ $\frac{3}{1} = 3$ ἔχουν ὕψος 4.

οἱ ρητοί : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$ καὶ $\frac{4}{1}=4$ ἔχουν ὕψος 5.

οἱ ρητοί : $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{2}$ καὶ $\frac{5}{1}=5$ ἔχουν ὕψος 6.

οἱ ρητοί : $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{2}$ καὶ $\frac{6}{1}=6$ ἔχουν ὕψος 7.

. . . . . . . . . . . . . . . .

Εἰς τὸν πίνακα τοῦτον θὰ πρέπῃ νὰ ἀποκλείσωμεν τὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους καὶ θὰ ἀποφύγωμεν οὕτω τὴν ἐπανάληψιν τοῦ αὐτοῦ ρητοῦ θετικοῦ.

Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι, ἂν δοθῇ ἕνας ρητὸς (σύμμετρος) ἀριθμός, εἶναι εὔκολον νὰ προσδιορισθῇ ὁ ἑπόμενός του.

Ἂν δοθῇ ὁ ρητὸς $\frac{\alpha}{\beta}$ καὶ εἶναι $\alpha+\beta=2\varrho$, ὁ ἀμέσως ἑπόμενός του θὰ εἶναι ὁ $\frac{\alpha+1}{\beta-1}$ διὰ $\beta\neq 1$ ἢ ὁ $\frac{\alpha+\beta}{1}$, διὰ $\beta=1$.

Ἐὰν ὅμως $\alpha+\beta=2\varrho+1$, τότε ἑπόμενος τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ $\frac{\alpha}{\beta}$ θὰ εἶναι ὁ $\frac{\alpha-1}{\beta+1}$ διὰ $\alpha\neq 1$ ἢ ὁ $\frac{1}{\beta+1}$, ἂν $\alpha=1$.

Ἀκολούθως γράφομεν ἔπειτα ἀπὸ κάθε θετικὸν ρητὸν καὶ τὸν ἀντίθετόν του ἀρνητικόν. Σχηματίζεται οὕτω τὸ σύνολον P ὅλων τῶν ρητῶν ἀριθμῶν.

$$\begin{array}{l} P=\left\{0,1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2,-2,\frac{1}{3},-\frac{1}{3},3,-3,\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\ldots\right\} \\ \Phi=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,\ldots\} \end{array} \qquad (2)$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι, ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου P κατέχει μίαν ὡρισμένην θέσιν. Κατ' ἀκολουθίαν ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕνα ὡρισμένον στοιχεῖον τοῦ Φ καὶ ἀντιστρόφως. Ἐτέθη λοιπὸν τὸ P εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μὲ τὸ Φ. Ἄρα τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀπαριθμητόν.

Ἡ ἀναγραφὴ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου τῶν θετικῶν ρητῶν κατὰ τάξιν μεγέθους παρουσιάζει κάποιαν δυσκολίαν, ὀφειλομένην κυρίως εἰς τὸ γεγονὸς ὅτι δὲν εἶναι εὔκολος ἡ διαπίστωσις ἂν διὰ τοῦ ἐκλεγέντος τρόπου ἀναγραφῆς κατωρθώσαμεν νὰ ἔχωμεν ἀναγράψει ὅλους τοὺς μεταξὺ δύο συμμέτρων εὑρισκομένους συμμέτρους. Διότι γνωρίζομεν ὅτι : ***μεταξὺ δύο συμμέτρων ὑπάρχει ἄπειρον πλῆθος συμμέτρων.*** Ὁ μεγαλοφυὴς Cantor μετεχειρίσθη τὸν ἀκόλουθον τρόπον ἀναγραφῆς τῶν ρητῶν θετικῶν.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
1 & \longrightarrow & 2 & & 3 & \longrightarrow & 4 & & 5 & \longrightarrow & 6 \cdots \\
\frac{1}{2} & \swarrow & \frac{2}{2} & \nearrow & \frac{3}{2} & \swarrow & \frac{4}{2} & \nearrow & \frac{5}{2} & \swarrow & \frac{6}{2} \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{3} & \nearrow & \frac{2}{3} & \swarrow & \frac{3}{3} & \nearrow & \frac{4}{3} & \swarrow & \frac{5}{3} & & \frac{6}{3} \cdots \\
\frac{1}{4} & \swarrow & \frac{2}{4} & \nearrow & \frac{3}{4} & \swarrow & \frac{4}{4} & & \frac{5}{4} & & \frac{6}{4} \cdots \\
\downarrow & & & & & & & & & & \\
\frac{1}{5} & \nearrow & \frac{2}{5} & \swarrow & \frac{3}{5} & & \frac{4}{5} & & \frac{5}{5} & & \frac{6}{5} \cdots \\
\frac{1}{6} & \swarrow & \frac{2}{6} & & \frac{3}{6} & & \frac{4}{6} & & \frac{5}{6} & & \frac{6}{6} \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

Ἀνέγραψεν εἰς τὴν πρώτην σειρὰν τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν 1. Εἰς τὴν δευτέραν σειρὰν τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν 2. Εἰς τὴν τρίτην σειρὰν τὰ ἔχοντα παρονομαστὴν 3 κ.ο.κ. Διέγραψεν ὅμως τὰ κλάσματα, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι δὲν εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Διὰ τὴν τελικὴν ὅμως ἀναγραφὴν μετεχειρίσθη καὶ τὸ ἑξῆς τέχνασμα: Κατέγραψε πρῶτον τὰ κλάσματα τὰ ἔχοντα ὕψος 2. Ἐν συνεχείᾳ τὰ ἔχοντα ὕψος 3, ἐν συνεχείᾳ τὰ ἔχοντα ὕψος 4 κ.ο.κ. Ἐσχημάτισε δὲ τὴν ἀκόλουθον σειράν:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ldots$$

Διὰ τοῦ τρόπου τούτου εἶναι ἀπολύτως βέβαιον ὅτι ἀναγράφονται πάντες οἱ ρητοὶ θετικοὶ ἀριθμοί. Εἶναι δὲ δυνατὸν τώρα, ἔπειτα ἀπὸ κάθε ρητὸν θετικόν, νὰ ἀναγραφῇ καὶ ὁ ἀντίθετός του, ὁπότε σχηματίζεται τὸ σύνολον P τῶν ρητῶν, ἀφοῦ ὡς πρῶτον στοιχεῖον ἀναγραφῇ ὁ 0 (μηδέν).

$$P=\left\{0,1,-1,2,-2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},3,-3.4\ -4,\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\ldots\right\}$$

Τὰ στοιχεῖα τούτου τίθενται εἰς ἓν πρὸς ἓν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τοῦ Cantor, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἀναγραφὴ ἀκολουθεῖ τὰς παραλλήλους εὐθείας τῆς ἐκ δεξιῶν ἄνω πρὸς τὰ ἀριστερὰ κάτω διαγωνίου τοῦ τετραγώνου, ἐνῷ ἡ ἐξ ἀριστερῶν ἄνω πρὸς τὰ δεξιὰ κάτω διαγώνιος καλύπτεται ὑπὸ συμμέτρων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἰσοῦται πρὸς τὴν μονάδα. Διὰ τοὺς λόγους τούτους ὁ τρόπος ἀναγραφῆς καλεῖται ***πρώτη διαγώνιος μέθοδος*** τοῦ Cantor.

Ἄξιαι προσοχῆς εἶναι καὶ αἱ ἀκόλουθοι παρατηρήσεις ἐπὶ τοῦ πίνακος τοῦ Cantor.

1ον: Ὁ τρόπος ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου P τῶν ρητῶν θετικῶν μᾶς δίδει ὅλους τοὺς ρητοὺς τούτους, οἱ ὁποῖοι λαμβάνονται μίαν μόνον φορὰν ἕκαστος, καθόσον ἀπεκλείσθησαν τὰ μὴ ἀνάγωγα κλάσματα.

2ον: Οἱ ρητοὶ ἑκάστης διαγωνίου ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος.

3ον: Τὰ στοιχεῖα τοῦ P εἶναι ἀναγεγραμμένα κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε τὰ ὕψη των νὰ ἀκολουθοῦν πάντοτε τὴν αὐτὴν τάξιν (αὔξουσαν).

4ον: Κατὰ τὴν ἀναγραφεῖσαν ἀντιστοιχίαν (2), τὰ θετικὰ στοιχεῖα τοῦ αὐτοῦ ὕψους (τῆς αὐτῆς διαγωνίου) διατάσσονται ἐναλλάξ, κατ' ἀνιούσας καὶ κατιούσας τιμάς, ἀνὰ ἑκάστην διαγώνιον.

5ον: 'Αμέσως μετὰ ἀπὸ κάθε θετικὸν ρητὸν ἀκολουθεῖ ὁ ἀντίθετός του.

Τοιουτοτρόπως, κάθε στοιχεῖον τοῦ Ρ ἔχει ὡρισμένην πάντοτε θέσιν καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Φ καὶ ἀντιστρόφως. Κάθε στοιχεῖον τοῦ Φ ἀντιστοιχεῖ πρὸς ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Ρ. Δηλαδὴ τὸ Ρ τίθεται εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν πρὸς τὸ Φ. Ἑπομένως τὸ Ρ εἶναι ἀπαριθμητόν.

'Επειδὴ ὅμως εἶναι $Φ \subset Ρ$, ἕπεται ὅτι: *τὸ Ρ εἶναι ἀπειροσύνολον.*

***ΣΗΜ*: Τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν δὲν εἶναι ἀπαριθμητόν.**

Ἡ ἀπόδειξις τῆς προτάσεως ταύτης δὲν ἀνήκει εἰς τὴν σφαῖραν τοῦ παρόντος καὶ συνεπῶς δεχόμεθα πρὸς τὸ παρὸν ἀληθῆ ταύτην.

'Εντεῦθεν προκύπτει ὅτι: δύο ἀπειροσύνολα, ὡς τὸ σύνολον τῶν ρητῶν Ρ καὶ τὸ σύνολον τῶν Πα δὲν εἶναι ἰσοδυναμικά, καθόσον τὸ μὲν Ρ εἶναι ἀπαριθμητόν, τὸ δὲ Πα εἶναι μὴ ἀπαριθμητόν. Ἄρα δὲν δύνανται νὰ τεθοῦν εἰς ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν.

## Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

**1.** Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ὄχι.

| | | |
|---|---|---|
| 1) $Φ \subset Α_κ$ | 7) $Π_α \supset Α_ρ$ | 13) $Φ \not\subset Π_α^-$ |
| 2) $Α_ρ \subset Π_α^+$ | 8) $-4 \in Ρ$ | 14) $0 \in Π_α^-$ |
| 3) $Α_κ \subset Π_α$ | 9) $-5 \in Α_κ^-$ | 15) $0 \notin Α_ρ$ |
| 4) $Κ_λ \subset Ρ$ | 10) $-8 \notin Α_κ^-$ | 16) $-\frac{2}{5} \notin Π_α^-$ |
| 5) $0 \in Α_κ$ | 11) $Ρ \subset Π_α^+$ | 17) $-8 \in Α_κ^+$ |
| 6) $-5 \notin Ρ$ | 12) $Φ_ο \subset Π_α^+$ | 18) $Α_κ \notin Κ_λ$ |

**2.** 'Επὶ τοῦ ἄξονος τῶν Πα ἀριθμῶν νὰ τοποθετηθοῦν τὰ σημεῖα, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $-4\frac{1}{2}$ | 5) $\sqrt{5}$ | 9) $2+\sqrt{3}$ |
| 2) $-5\frac{3}{4}$ | 6) $-\sqrt{5}$ | 10) $-3-\sqrt{8}$ |
| 3) $-\sqrt{4}$ | 7) $\sqrt{7}$ | 11) $5-\sqrt{2}$ |
| 4) $+\sqrt{4}$ | 8) $-\sqrt{6}$ | 12) $10-\sqrt{4}$ |

Εἶναι ὅλαι αἱ περιπτώσεις δυναταὶ καὶ διατί;

**3.** Εἶναι ἀπαριθμητὸν ἕκαστον τῶν ἀκολούθων συνόλων:

| | |
|---|---|
| 1) $Φ = \{1,2,3,\ldots,ν,\ldots\}$; | 6) $Κ = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\ldots\}$; |
| 2) $Φ_α = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$; | 7) $Ε_1 = \{1,10,10^2,10^3,\ldots\}$; |
| 3) $Φ_π = \{1,3,5,7,9,\ldots\}$; | 8) $Ε_2 = \{1,10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3},\ldots\}$; |
| 4) $Π = \{2,3,5,7,\ldots\}$; | 9) $Ε_3 = \{1^3,2^3,3^3,4^3,\ldots\}$; |
| 5) $Τ = \{1^2,2^2,3^2,4^2,\ldots\}$; | |

**4.** 'Ισχύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις εἰς τὰ προηγούμενα σύνολα;

| | | |
|---|---|---|
| 1) $Φ \subset Φ$ | 4) $Τ \subset Φ$ | 7) $Ε_2 \subseteq Φ$ |
| 2) $Φ_π \subset Φ$ | 5) $Ε_1 \subset Φ$ | 8) $Κ \subseteq Π_α^+$ |
| 3) $Π \subset Φ$ | 6) $Ε_3 \subset Φ$ | 9) $Φ_α \not\subset Φ$ |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ IV

# ΠΡΑΞΕΙΣ ΕΠΙ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

## ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

**40. Ὁρισμὸς τῆς τομῆς.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,5,7,8,9,10\}$$

καὶ

$$B = \{2,4,6,8,9\},$$

εἰς τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα 2,8,9 εἶναι κοινά.

Τὸ σύνολον $\Gamma = \{2,8,9\}$ ὀνομάζεται ***τομὴ*** τῶν δοθέντων συνόλων Α καὶ Β. Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Τομὴ δύο δοθέντων συνόλων εἶναι τὸ σύνολον τῶν κοινῶν καὶ μόνον τῶν κοινῶν στοιχείων αὐτῶν.***

Τὸ σύμβολον τῆς τομῆς εἶναι τό: $\cap$ καὶ διαβάζεται τομή. Οὕτω διὰ τὰ ἀνωτέρω σύνολα Α καὶ Β γράφομεν: $A \cap B$ καὶ διαβάζομεν: *Α τομὴ Β.*

Ὥστε θὰ εἶναι:

$$A \cap B = \{2,8,9\}.$$

Ὁμοίως, διὰ τὰ σύνολα:

$$K = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 16\} = \{1,2,4,8,16\}$$

$$\Lambda = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 24\} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$$

εἶναι:

$$K \cap \Lambda = \{1,2,4,8\} = \{x \mid x \text{ κοινὸς διαιρέτης τῶν } 16 \textit{ καὶ } 24\}.$$

Δηλαδὴ ἡ τομὴ μᾶς δίδει τοὺς κοινοὺς διαιρέτας τῶν δοθέντων ἀριθμῶν 16 καὶ 24. Τὸ μεγαλύτερον στοιχεῖον τῆς τομῆς, ὁ ἀριθμὸς 8, ὀνομάζεται ***μέγιστος κοινὸς διαιρέτης*** τῶν ἀριθμῶν 16 καὶ 24.

Ὁμοίως, εἰς τὰ σύνολα:

$$\Sigma_1 = \{x \mid x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου}\}$$

$$\Sigma_2 = \{x \mid x \text{ σύμφωνον τοῦ ἀλφαβήτου}\},$$

παρ ατηροῦμεν ὅτι δὲν ἔχουν οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον. Ἄρα:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \varnothing.$$

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὰ $\Sigma_1$ καὶ $\Sigma_2$ καλοῦνται ***ξένα πρὸς ἄλληλα.*** Ἐντεῦθεν δὲ προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Δύο σύνολα καλοῦνται ξένα πρὸς ἄλληλα, ἐὰν οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν.***

Ἡ τομὴ τῶν δύο συνόλων A καὶ B συμβολίζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \frown B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}}$$

ἀλλὰ καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\forall\, x \in U : (x \in A \frown B) \Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)}$$

καὶ διαβάζεται: *Διὰ κάθε στοιχεῖον $x$ ἐν $U$, $x$ ἀνήκει εἰς τὸ $A \frown B$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $x$ ἀνήκει εἰς τὸ $A$ καὶ εἰς τὸ $B$.*

Τὸ U εἶναι τὸ κυρίαρχον σύνολον τῶν A καὶ B, τὸ δὲ σύμβολον $\wedge$ διαβάζεται, ὅπως γνωρίζομεν, ***καί.***

Ὅταν ὅμως τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε γράφομεν:

$$A \,//\, B = (A \frown B = \varnothing).$$

Τὸ σύμβολον τοῦ διαχωρισμοῦ (ξένον) εἶναι τό: //.

Ἐὰν τὰ σύνολα A καὶ B δὲν εἶναι ξένα, θὰ ὑπάρχῃ τοὐλάχιστον ἕνα κοινὸν στοιχεῖον, καὶ θὰ γράφωμεν:

$$\boxed{A \frown B \neq \varnothing \Longleftrightarrow \exists\, x : x \in A \wedge x \in B}$$

Τὸ σύμβολον $\exists x$ διαβάζεται: *ὑπάρχει τοὐλάχιστον ἕνα $x$.*

Ἐὰν $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, τότε $A \frown B \subseteq A$ καὶ $A \frown B \subseteq B$.

Διότι, ἀφοῦ κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου $A \frown B$ ἀνήκει εἰς τὸ A, ἕπεται ὅτι $A \frown B \subseteq A$. Ὁμοίως θὰ εἶναι καὶ $A \frown B \subseteq B$. Δηλαδή:

***Ἐὰν τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου U, τότε ἡ τομὴ τῶν A καὶ B εἶναι ὑποσύνολον ἑκάστου τῶν A καὶ B.***

Παραδείγματα: Ἐάν: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ καὶ ὑποσύνολα αὐτοῦ τά:

$$A = \{1,2,3,4\}, \qquad B = \{2,3,5,7,8\}$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι:

$$A \frown B = \{1,2,3,4\} \frown \{2,3,5,7,8\} = \{2,3\},$$

δηλαδὴ ἡ τομὴ $\{2,3\}$ εἶναι ὑποσύνολον ἑκάστου τῶν A καὶ B, ὁπότε:

$$A \subseteq U \wedge B \subseteq U \Longrightarrow (A \frown B) \subseteq A,\ (A \frown B) \subseteq B.$$

Ὁμοίως, μὲ κυρίαρχον σύνολον τό: $U = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ καὶ ὑποσύνολα τά:

$A = \{0,2,4\}$, $B = \{1,3,5\}$, θὰ ἔχωμεν: $\overline{A} \frown B = \{1,3,5\}$.

Διότι, διὰ τὸ συμπληρωματικὸν $\overline{A}$ τοῦ A ἐν τῷ U, ἔχομεν:

$$\overline{A} = \{x \in U \mid x \notin A\} = \{1,3,5,6\}.$$

Ἄρα: $\overline{A} \frown B = \{1,3,5,6\} \frown \{1,3,5\} = \{1,3,5\}$.

Ὁμοίως, ἐὰν $U = \{1,2,3,4,5,6\}$ καὶ $A = \{2,4,5\}$, ἤτοι $A \subseteq U$, θὰ εἶναι: $\overline{A} = \{1,3,6\}$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν: $\overline{A} \frown A = \{1,3,6\} \frown \{2,4,5\} = \varnothing$

Ὥστε: Ἐὰν $A \subseteq U$, τότε $\overline{A} \frown A = \varnothing$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἑξῆς ὁρισμὸς τοῦ κενοῦ συνόλου.

$$\boxed{\varnothing = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin A\} \quad \text{ἢ} \quad \varnothing = \{x \mid x \neq x\}.}$$

Ἐὰν ὡς κυρίαρχον σύνολον ληφθῇ τὸ κενὸν σύνολον, θὰ εἶναι: $\overline{A} = \varnothing = A$ καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν:

$$\boxed{A \frown \overline{A} = \varnothing \frown \varnothing = \varnothing}$$

**41. Γραφικὴ παράστασις τῆς τομῆς.** Ἔστω τὸ κυρίαρχον σύνολον:

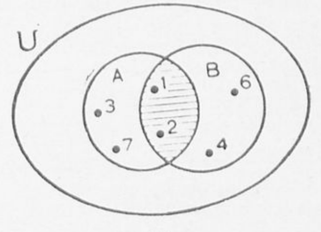
$$U = \{1,2,3,4,6,7\}$$

καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ:

$$A = \{1,2,3,7\}, \quad B = \{1,2,4,6\}.$$

Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἔχωμεν:

$$A \frown B = \{1,2,3,7\} \frown \{1,2,4,6\} = \{1,2\}.$$




Σχ. 22.

Τὸ γραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ (σχ. 22) παριστᾷ τὴν τομὴν τῶν A καὶ B, δηλαδὴ τὸ σύνολον $A \frown B = \{1,2\}$.

**42. Ἰδιότης τῆς τομῆς.** Χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς τομῆς δύο συνόλων εἶναι ἡ ***ἀντιμεταθετική.***

Διότι, ἐὰν $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ καὶ ἐπὶ πλέον εἶναι:

$$A = \{1,3,5,7,9\}, \qquad B = \{3,4,5,6,7\}$$

θὰ ἔχωμεν, ἀφ' ἑνὸς μέν:

$$A \frown B = \{1,3,5,7,9\} \frown \{3,4,5,6,7\} = \{3,5,7\} \qquad (1)$$

ἀφ' ἑτέρου δέ:

$$B \frown A = \{3,4,5,6,7\} \frown \{1,3,5,7,9\} = \{3,5,7\}. \qquad (2)$$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\boxed{A \frown B = B \frown A}$$

Ἰσχύει λοιπὸν εἰς τὴν τομὴν δύο συνόλων ἡ γνωστὴ ἰδιότης τῆς ***ἀντιμεταθέσεως.***

**43. Τομὴ συνόλων ἐκ περιγραφῆς.** Εἰς τὰς παραγράφους 40, 41 καὶ 42 εἴδομεν πῶς ὁρίζεται ἡ τομὴ δύο συνόλων δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των. Ἐνταῦθα θὰ ἴδωμεν πῶς παρίσταται ἡ τόμὴ δύο συνόλων διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων των.

Ἔστω πάλιν τὸ παράδειγμα τῆς παραγράφου 40:

$$A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 48\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 28\}$$

Ἄρα:

$$A \frown B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ 48 } \textit{\textbf{καὶ}} \text{ 28}\}.$$

Διότι εἶναι:

$$A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 48\} = \{1,2,3,4,6,8,12,16,24,48\},$$
$$B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 28\} = \{1,2,4,7,14,28\}.$$

Ἄρα: $A \frown B = \{1,2,4\}$. Δηλαδὴ κοινοὶ διαιρέται τῶν 48 καὶ 28 εἶναι οἱ 1,2,4. Τὰ ἀνωτέρω περιγράφομεν ὡς ἑξῆς:

$$A \frown B = \{x \in A \wedge x \in B\}.$$

Δηλαδή, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον A ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα κ καὶ τὸ σύνολον B ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα λ, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$A = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \kappa\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \lambda\},$$

ὁπότε θὰ εἶναι καί:

$$A \frown B = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \kappa \; \textit{\textbf{καὶ}} \text{ τὴν ἰδιότητα } \lambda\}.$$

Οὕτω, τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \frown B$, καὶ μόνον αὐτά, ἔχουν ἀμφοτέρας τὰς ἰδιότητας κ καὶ λ.

Ἡ χαρακτηριστικὴ αὕτη ἰδιότης τῆς τομῆς $A \frown B$ θὰ λέγωμεν ὅτι προκύπτει ἀπὸ τὴν ***σύζευξιν*** τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν δοθέντων συνόλων A καὶ B.

Τὸ σύμβολον τῆς συζεύξεως, ὡς εἴδομεν καὶ ἀλλαχοῦ, εἶναι ὁ συμπλεκτικὸς σύνδεσμος ***καί,*** ἀντὶ δὲ τοῦ ὅρου τούτου μεταχειριζόμεθα συχνὰ τὸ σύμβολον «$\wedge$».

**44. Τομὴ τριῶν συνόλων.** Ἔστω τὸ ὑπερσύνολον ἢ κυρίαρχον σύνολον $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ καὶ τὰ ὑποσύνολα αὐτοῦ:

$$A = \{1,2,3,7\}, \quad B = \{1,2,4,6\} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \{2,3,4,5\}.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν τῶν A,B,Γ, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν τομὴν τῶν A καὶ B, ἤτοι:

$$A \frown B = \{1,2,3,7\} \frown \{1,2,4,6\} = \{1,2\} = \Delta.$$

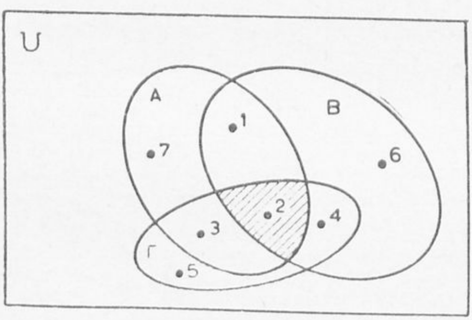
Κατόπιν εὑρίσκομεν τὴν τομὴν τῶν συνόλων Δ καὶ Γ, ἤτοι:

$$\Delta \frown \Gamma = \{1,2\} \frown \{2,3,4,5\} = \{2\} = E.$$

Ὥστε, ἡ τομὴ τῶν A,B,Γ εἶναι τὸ σύνολον $E = \{2\}$.

Τοῦτο γράφομεν καὶ ὡς ἑξῆς: $\quad E = (A \frown B) \frown \Gamma = \{2\}$.

**45. Γραφικὴ παράστασις τῆς τομῆς τριῶν συνόλων.** Ἡ τομὴ τῶν συνόλων A, B, Γ, τῆς προηγουμένης παραγράφου, παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ Venn (σχ. 23), ὅπου τὸ γραμμοσκιασμένον χωρίον τοῦ U παριστᾷ τὴν τομὴν τῶν δοθέντων συνόλων A, B, Γ.




Σχ. 23.

**46. Ἰδιότητες τῆς τομῆς τριῶν συνόλων.** Ἂς λάβωμεν πάλιν τὰ σύνολα τῆς παραγράφου 44, δηλαδὴ τὰ κάτωθι σύνολα:

$$A = \{1,2,3,7\}, \quad B = \{1,2,4,6\} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \{2,3,4,5\}.$$

Εἴδομεν ὅτι: $\quad (A \frown B) \frown \Gamma = \{2\}. \quad (1)$

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καί: $B \frown \Gamma = \{1,2,4,6\} \frown \{2,3,4,5\} = \{2,4\} = Z.$

καὶ $\quad A \frown Z = \{1,2,3,7\} \frown \{2,4\} = \{2\}, \quad (2)$

ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$(A \frown B) \frown \Gamma = A \frown Z = A \frown (B \frown \Gamma)$$

ἤτοι: $\boxed{(A \frown B) \frown \Gamma = A \frown (B \frown \Gamma)}$

Δηλαδή, ἡ τομὴ τριῶν συνόλων ἔχει τὴν ***προσεταιριστικὴν ἰδιότητα.*** Ἕνεκα τούτου συμφωνοῦμεν νὰ γράφωμεν: $A \cap B \cap \Gamma$ διὰ τὴν τομὴν τριῶν συνόλων Α, Β καὶ Γ. Δηλαδή, διὰ τῆς ἰδιότητος ταύτης δυνάμεθα νὰ παραλείπωμεν τὰς παρενθέσεις. Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον τῆς τομῆς τριῶν ἢ καὶ περισσοτέρων συνόλων εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς σειρᾶς, κατὰ τὴν ὁποίαν θὰ λάβωμεν τὰ σύνολα, διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τομὴν αὐτῶν.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α: α). **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῶν συνόλων:**

$A = \{x \mid x$ ἄρτιος καὶ μικρότερος τοῦ $24\}$

$B = \{x \mid x$ πολλαπλάσιον τοῦ 4 καὶ μικρότερον τοῦ $24\}$.

Γνωρίζομεν ὅτι:

$A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22\}$

$B = \{4,8,12,16,20\}$.

Ἄρα: $A \cap B = \{4,8,12,16,20\}$,

τὸ ὁποῖον, διὰ τῆς ἀναγραφῆς καὶ περιγραφῆς τῶν στοιχείων του, γράφεται ὡς ἑξῆς:

$A \cap B = \{4,8,12,16,20\} = \{x \mid x$ ἄρτιος $< 24 \wedge$ πολλαπλάσιον τοῦ $4 < 24\}$.

β). **Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῶν συνόλων:**

$A = \{x \mid x$ ἄρτιος ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $20\}$,

$B = \{x \mid x$ περιττὸς ἀριθμὸς μικρότερος τοῦ $20\}$,

$\Gamma = \{x \mid x$ πολλαπλάσιον τοῦ 3 μικρότερον τοῦ $20\}$.

Θὰ ἔχωμεν: $A = \{2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$,

$B = \{1,3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$, $\quad \Gamma = \{3,6,9,12,15,18\}$,

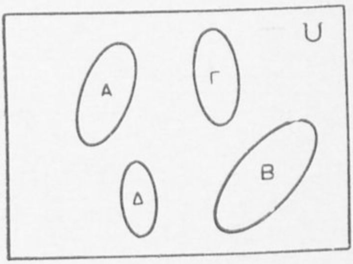
ὁπότε: $\Delta = A \cap B = \varnothing$, καθόσον οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν τὰ Α,Β.

Ἐπίσης: $\Delta \cap \Gamma = \varnothing \cap \Gamma = \varnothing$. Κατ' ἀκολουθίαν:

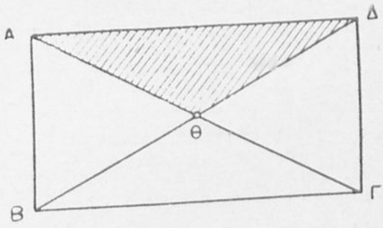
$$A \cap B \cap \Gamma = \varnothing.$$

γ). **Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς τομῆς δύο ἢ καὶ περισσοτέρων ξένων πρὸς ἄλληλα συνόλων,** παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ Venn (σχ. 24), ὅπου

$$A \cap B \cap \Gamma \cap \Delta = \varnothing.$$




Σχ. 24.




Σχ. 25.

δ). **Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ ἄγομεν τοὺς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $A\Gamma \cap B\Delta$ καὶ τὸ σύνολον $AB\Delta \cap A\Gamma\Delta$.**

Εἶναι προφανῶς: $A\Gamma \cap B\Delta = \{\Theta\}$ καὶ $AB\Delta \cap A\Gamma\Delta = A\Theta\Delta$

ε). **Ἐὰν $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $A \cap B = B \cap A$.**

Ἔστω ὅτι: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ καὶ ὅτι:

$A = \{3,4,5,6,\}$ $\quad B = \{2,3,4,5,6,7,8\}$

δηλαδή: $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα θὰ ἔχωμεν:

$A \cap B = \{3,4,5,6,\} \cap \{2,3,4,5,6,7,8\} = \{3,4,5,6\}$

'Επίσης: $B \frown A = \{2,3,4,5,6,7,8\} \frown \{3,4,5,6\} = \{3,4,5,6\}$.
Κατ' ἀκολουθίαν: $A \frown B = B \frown A$

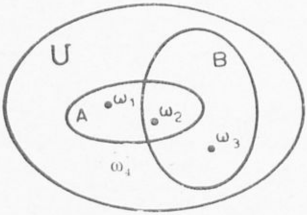
στ). **'Εὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ καὶ $A \subseteq B$, τότε $A \frown B = A$.**
Πράγματι, εἰς τὸ προηγούμενον παράδειγμα εἶναι:

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq U \quad \text{καὶ} \quad A \subseteq B,$$

εὑρέθη δὲ $A \frown B = \{3,4,5,6\} = A$.

ζ). **Διὰ διαγράμματος νὰ ἐπαληθευθῇ ὅτι: $A \frown \varnothing = \varnothing$.**
"Εστω τὸ κυρίαρχον σύνολον U καὶ ὅτι:

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq U \quad \text{καὶ ὅτι} \quad A \frown B = \text{τὸ χωρίον } \omega_2.$$



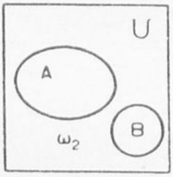

Σχ. 26.

Τὰ χωρία $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ δυνάμεθα νὰ τὰ θεωρήσωμεν ὅτι ἀντιπροσωπεύουν διάφορα σύνολα. Οὕτω τὸ B ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὰ χωρία $\omega_2$ καὶ $\omega_3$, τὸ A ἀπὸ τὰ $\omega_1$ καὶ $\omega_2$ καὶ τὸ U ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὰ $\omega_1$ καὶ $\omega_2$ καὶ $\omega_3$ καὶ $\omega_4$. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον $A \frown B$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ χωρίον $\omega_2$.

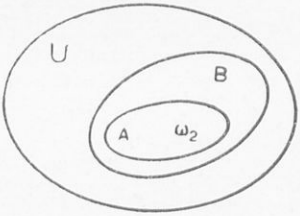
"Αν δεχθῶμεν ὅτι $B = \varnothing$, τότε τὰ χωρία $\omega_2$ καὶ $\omega_1$ ἀντιπροσωπεύουν τὸ $\varnothing$. 'Αφοῦ δὲ $A \frown B$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ $\omega_2$, ἕπεται ὅτι: $A \frown \varnothing = \varnothing$.

'Αλλὰ καὶ κατ' ἄλλον τρόπον φαίνεται ὅτι $A \frown \varnothing = \varnothing$. Εἶναι $\varnothing \subseteq A$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $\varnothing \frown A = \varnothing$. 'Επειδὴ δὲ $\varnothing \frown A = A \frown \varnothing$, ἕπεται ὅτι: $A \frown \varnothing = \varnothing$.

η). **'Ομοίως νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:** $(A \,//\, B) \Longleftrightarrow (A \frown B) = \varnothing$.




Σχ. 27.




Σχ. 28.

"Εστω ὅτι τὸ χωρίον $\omega_2$ ἀντιπροσωπεύει τὸ $\varnothing$. Τότε θὰ ἔχωμεν $A \frown B = \varnothing$.
'Αντιστρόφως: "Αν $A \frown B = \varnothing$, τότε τὸ χωρίον $\omega_2$ ἀντιπροσωπεύει τὸ $\varnothing$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν $A//B$. Δηλαδὴ τὰ A καὶ B εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα.

θ). **'Εὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$ καὶ $A \subseteq B$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $A \frown B = A$.**
Πράγματι, ἀφοῦ $A \subseteq B$, ἕπεται ὅτι τὸ χωρίον $\omega_2$ ἀντιπροσωπεύει τὸ $\varnothing$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ A ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ $\omega_2$. 'Αλλὰ καὶ τὸ $A \frown B$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὸ $\omega_2$. "Οθεν $A \frown B = A$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4\}, \qquad B = \{2,4,6,8\}, \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \{3,4,5,6\}$$

α') Νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα:

1) $A \frown B$ 2) $A \frown \Gamma$ 3) $B \frown \Gamma$ 4) $B \frown B$

β΄) Ὁμοίως, νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα:

1) $(A \cap B) \cap \Gamma$ 2) $A \cap (B \cap \Gamma)$.

2. Δίδονται τὰ μὴ συγκρίσιμα σύνολα A καὶ B. Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1) $(A \cap B) \subseteq A$ 2) $(A \cap B) \subseteq B$.

3. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \cap A = A$.

4. Ἐὰν U εἶναι ἕνα ὑπερσύνολον, νὰ δειχθῇ ὅτι:

1) $U \cap A = A$ 2) $U \cap \varnothing = \varnothing$.

5. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A \cap \varnothing = \varnothing$.

6. Ἐὰν $x \neq y$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $\{x\} \cap \{y\} = \varnothing$.

7. Ἐὰν $x = y$, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$\{x\} \cap \{y\} = \{x\} = \{y\}.$$

8. Ἐὰν $B \subseteq \Gamma$, δείξατε ὅτι: $(A \cap B) \subseteq (A \cap \Gamma)$.

9. Ἐὰν $\Gamma \subseteq A$ καὶ $\Gamma \subseteq B$, δείξατε ὅτι: $\Gamma \subseteq (A \cap B)$.

10. Ἐὰν $A \subseteq B$, $A \subseteq \Gamma$, $A \subseteq \Delta$, δείξατε ὅτι:

$$\Delta \subseteq (A \cap B \cap \Gamma).$$

11. Ἐὰν $A \cap B = \varnothing$ καὶ $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, ἀληθεύουν αἱ σχέσεις

$$A \subseteq B \text{ καὶ } B \subseteq A;$$

12. Ἐὰν αἱ σχέσεις: $A \subseteq B$, $B \subseteq A$ εἶναι ψευδεῖς, τότε: $A \cap B = \varnothing$.

## ΕΝΩΣΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

**47. Ὁρισμὸς τῆς ἑνώσεως.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\} \text{ καὶ } B = \{2,5,6\}.$$

Σχηματίζομεν τὸ σύνολον Γ, τὸ ὁποῖον περιέχει ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ καὶ μὴ κοινὰ τῶν δύο τούτων συνόλων καὶ μόνον αὐτά. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν

$$\Gamma = \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

Τὸ νέον τοῦτο σύνολον Γ λέγεται ***ἕνωσις*** τῶν συνόλων A καὶ B.

Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα:

$$\Delta = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} \text{ καὶ } E = \{\alpha,\beta,\delta,\eta,\vartheta,\iota\}.$$

Σχηματίζομεν τὸ σύνολον Z, τὸ ὁποῖον περιέχει τὰ κοινὰ καὶ μὴ κοινὰ στοιχεῖα τῶν δύο συνόλων A καὶ B καὶ μόνον αὐτά. Δηλαδὴ τό:

$$Z = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\eta,\vartheta,\iota\},$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται ἕνωσις τῶν συνόλων A καὶ B. Κατ᾽ ἀκολουθίαν:

***Ἕνωσις δύο συνόλων καλεῖται τὸ σύνολον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ καὶ μὴ κοινὰ στοιχεῖα τῶν δοθέντων καὶ μόνον μίαν φορὰν ἕκαστον.***

Ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων A καὶ B παρίσταται μὲ τὸ σύμβολον $A \cup B$ καὶ διαβάζεται: «A ἕνωσις B».

Τὸ σύμβολον τῆς ἑνώσεως εἶναι τό: $\cup$ καὶ διαβάζεται «ἕνωσις».

Οὕτω, διὰ τὰ σύνολα: $A = \{3,4,6,7,10\}$ καὶ $B = \{1,2,3,5,8\}$, θὰ ἔχωμεν:

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}.$$

Μὲ τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων, ὁ ἀνωτέρω δοθεὶς ὁρισμὸς τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων παρίσταται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \cup B = \{x \in A \vee x \in B\}}$$

Κατ' ἀκολουθίαν, ἐὰν $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, ὅπου $U$ τὸ κυρίαρχον σύνολον, διὰ κάθε στοιχεῖον $x$ τοῦ $U$, τὸ $x$ θὰ ἀνήκῃ εἰς τὸ $A \cup B$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, τὸ $x$ ἀνήκῃ εἰς τὸ $A$ εἴτε εἰς τὸ $B$ εἴτε εἰς ἀμφότερα, τὰ $A$ καὶ $B$, θὰ γράφωμεν δέ:

$$\boxed{\forall x \in U : (x \in A \cup B) \Longleftrightarrow (x \in A \vee x \in B)}$$

Ἐκ τούτου φαίνεται ὅτι ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων περιέχει ὅλα, καὶ μόνον ὅλα, τὰ στοιχεῖα τῶν συνόλων τούτων καὶ ἕκαστον μίαν μόνον φοράν, καθόσον ἡ ἕνωσις, ὡς σύνολον, πρέπει νὰ περιέχῃ στοιχεῖα διακεκριμένα, ἐξ ὁρισμοῦ.

***ΣΗΜ.*** Ἡ παράστασις $(A \cup B)$ σημαίνει ὅτι ἔχει γίνει ἡ ἕνωσις τῶν συνόλων $A$ καὶ $B$, ἐνῷ ἡ παράστασις $A \cup B$ σημαίνει ὅτι πρέπει νὰ γίνῃ ἡ ἕνωσις.

Ἐὰν ἕνα σύνολον $\Gamma$ προέρχεται ἀπὸ τὴν ἕνωσιν τῶν συνόλων $A$ καὶ $B$, θὰ γράφωμεν: $\Gamma = A \cup B$ ἢ $A \cup B = \Gamma$.

**48. Ἕνωσις δύο συνόλων διδομένων διὰ περιγραφῆς.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ δύο σύνολα:

$$A = \{x \mid x \text{ σύμφωνον τοῦ ἀλφαβήτου}\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου}\}.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου}\},$$

διότι τὸ $A \cup B$ πρέπει νὰ περιέχῃ ὡς στοιχεῖα τὰ κοινὰ καὶ μὴ κοινὰ στοιχεῖα τῶν $A$ καὶ $B$. Ἀλλὰ τὰ $A$ καὶ $B$ οὐδὲν κοινὸν στοιχεῖον ἔχουν. Ἄρα ἡ ἕνωσις αὐτῶν θὰ ἀποτελῆται ἀπὸ ὅλα τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου.

**49. Ἕνωσις ἑνὸς συνόλου καὶ ὑποσυνόλου του.** Θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{5,6,7,8,10,13,15\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{6,8,10,15\},$$

ἐκ τῶν ὁποίων τὸ $B \subseteq A$. Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι:

$$A \cup B = \{5,6,7,8,10,13,15\} \cup \{6,8,10,15\} = \{5,6,7,8,10,13,15\} = A$$

Ὥστε: $\boldsymbol{B \subseteq A, \Rightarrow A \cup B = A.}$

**50. Ἕνωσις ἑνὸς συνόλου καὶ τοῦ συμπληρωματικοῦ του.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{2,4\},$$

ἔνθα $B \subseteq A$. Τὸ συμπληρωματικὸν σύνολον $\overline{B}$ τοῦ $B$, ἐν τῷ $A$, εἶναι τό: $\overline{B} = \{1,3,5\}$. Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἔχωμεν:

$$B \cup \overline{B} = \{2,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,2,3,4,5\} = A.$$

Ὥστε: ἐὰν $B \subseteq A$, τότε $B \cup \overline{B} = A$. Δηλαδή:

***Ἐὰν B εἶναι ἕνα ὑποσύνολον ἑνὸς δοθέντος κυριάρχου συνόλου A, τότε:*** $\boldsymbol{B \cup \overline{B} = A.}$

**51. Ἕνωσις δύο συνόλων, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς συνόλου** ***U*****.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$U = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \vartheta\}$$

καὶ τά: $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B = \{\beta,\delta\}$. Δηλαδὴ εἶναι: $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $B \subseteq A$.

Θὰ ἔχωμεν: $A \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} \cup \{\beta,\delta\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} = A$.

Ὥστε: ***Ἐὰν A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα ἑνὸς κυριάρχου συνόλου U καί, ἐὰν A ⊆ B, τότε A ∪ B = A.*** Συμβολικῶς δέ:

$$\boxed{A \subseteq U, \quad B \subseteq U, \quad A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = A}$$

**52. Ἕνωσις ἑνὸς συνόλου καὶ τοῦ κενοῦ συνόλου.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ τὸ $\varnothing$. Θὰ ἔχωμεν:

$$A \cup \varnothing = \{\alpha,\beta,\gamma\} \cup \varnothing = \{\alpha,\beta,\gamma\},$$

διότι τὸ κενὸν σύνολον οὐδὲν στοιχεῖον περιέχει, καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον $A \cup \varnothing$ θὰ περιέχῃ τὰ στοιχεῖα τοῦ A καὶ μόνον αὐτά. Ὥστε:

***Εἰς τὴν ἕνωσιν τῶν συνόλων τὸ ∅ εἶναι οὐδέτερον στοιχεῖον.***

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι:

$$\boxed{\varnothing \cup \varnothing = \varnothing}$$

Δηλαδή: ***Ἡ ἕνωσις δύο κενῶν συνόλων εἶναι τὸ κενὸν σύνολον.***

**53. Ἡ ἕνωσις συνόλων καὶ ἡ διάζευξις προτάσεων.** Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 18\} = \{1,2,3,6,9,18\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ } 15\} = \{1,3,5,15\}.$$

Θὰ εἶναι:

$$A \cup B = \{1,2,3,6,9,18\} \cup \{1,3,5,15\} = \{1,2,3,5,6,9,15,18\}$$

ἤτοι: $A \cup B = \{x \mid x \text{ διαιρέτης τοῦ 18 } \textbf{\textit{εἴτε}} \text{ διαιρέτης τοῦ } 15\}$.

Ὁμοίως, ἐὰν δίδωνται τὰ σύνολα:

$$\Gamma = \{x \mid x \text{ ὀρθογώνιον τρίγωνον}\}$$
$$\Delta = \{x \mid x \text{ ἰσοσκελὲς τρίγωνον}\},$$

τότε θὰ εἶναι:

$$\Gamma \cup \Delta = \{x \mid x \text{ ὀρθογώνιον τρίγωνον } \textbf{\textit{εἴτε}} \text{ ἰσοσκελές}\},$$

ἔνθα ὁ ὅρος ***εἴτε*** δὲν ἀποκλείει τὸ τρίγωνον νὰ εἶναι καὶ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελές.

Εἰς τὸ πρῶτον παράδειγμα παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \cup B$ ἔχουν τὴν ἰδιότητα νὰ εἶναι διαιρέται τοῦ 18 εἴτε τοῦ 15.

Δυνάμεθα, λοιπόν, νὰ λέγωμεν ὅτι ἡ χαρακτηριστικὴ ἰδιότης τῆς ἑνώσεως $A \cup B$ προκύπτει ἀπὸ τὴν ***διάζευξιν*** τῶν χαρακτηριστικῶν ἰδιοτήτων τῶν συνόλων A καὶ B.

Ἡ διάζευξις αὕτη ὀνομάζεται ***μὴ ἀποκλειστική***, διότι ὑπάρχουν στοιχεῖα, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν καὶ αἱ δύο ἰδιότητες, ὡς τὸ 3, τὸ ὁποῖον εἶναι διαιρέτης καὶ τοῦ 18 καὶ τοῦ 15.

Ἐὰν λοιπὸν εἰς τὸ σύνολον:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

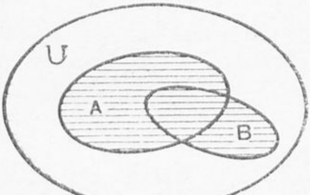
ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σύνολον A ὁρίζεται ἀπὸ τὴν ἰδιότητα κ καὶ τὸ σύνολον B ἀπὸ τὴν ἰδιότητα λ, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$A = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \kappa\}$$
$$B = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \lambda\},$$

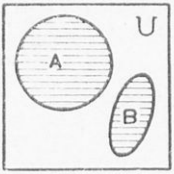
καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$A \cup B = \{x \mid x \text{ ἔχει τὴν ἰδιότητα } \kappa \textit{ εἴτε} \text{ τὴν ἰδιότητα } \lambda\}.$$

**54. Γραφικὴ παράστασις ἑνώσεως δύο συνόλων.** α). Ἐὰν εἶναι $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, δηλαδὴ τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι ὑποσύνολα τοῦ αὐ-




Σχ. 29.




Σχ. 30.

τοῦ ὑπερσυνόλου U, τότε ὡς γραφικὴν παράστασιν τῆς ἑνώσεως τῶν A καὶ B θὰ ἔχωμεν τὸ γραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ (σχ. 29).

β). Ἐὰν τὰ δύο σύνολα A καὶ B εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ συνόλου $A \cup B$ εἶναι τὸ γραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ (σχ. 30).

γ). Ἐὰν τὰ σύνολα εἶναι συμπληρωματικά, τότε, ὡς γνωστόν, τὸ σύνολον:

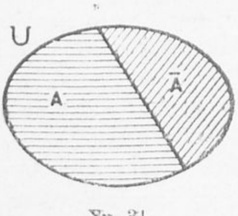
$$\boxed{A \cup \bar{A} = U}$$

θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ (σχ. 31), τὸ ὁποῖον εἶναι ὁλόκληρον γραμμοσκιασμένον.

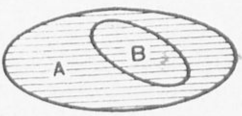
δ). Ἐὰν τὸ σύνολον B εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ A, δηλαδὴ $B \subset A$, τότε τὸ σύνολον:

$$\boxed{A \cup B = A}$$

καὶ θὰ παρίσταται ὑπὸ τοῦ δεξιὰ γραμμοσκιασμένου (σχ. 32).




Σχ. 31.




Σχ. 32.

**55. Ἰδιότητες τῆς ἑνώσεως δύο συνόλων.** Θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma\}, \quad B = \{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

Θὰ εἶναι, ἀφ' ἑνὸς μέν:

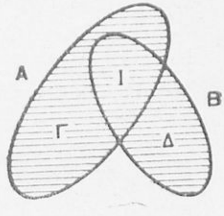
$A \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma\} \cup \{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (1)

ἀφ' ἑτέρου δέ:

$B \cup A = \{\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} \cup \{\alpha,\beta,\gamma\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ (2)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$A \cup B = B \cup A.$$




Σχ. 33.

Ἰσχύει λοιπὸν εἰς τὴν ἕνωσιν ἡ ἰδιότης **τῆς ἀντιμεταθέσεως**. Παρίσταται δὲ ὑπὸ τοῦ ἔναντι (σχ. 33). Ὥστε:

$$\boxed{A \subseteq U \wedge B \subseteq U \Rightarrow A \cup B = B \cup A}$$

**56. Ἕνωσις περισσοτέρων τῶν δύο συνόλων.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{2,3,4\} \quad \text{καὶ} \quad \Gamma = \{3,4,5,6\}.$$

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐξαγόμενον: $A \cup B \cup \Gamma$.

Πρὸς τοῦτο εὑρίσκομεν τὸ σύνολον:

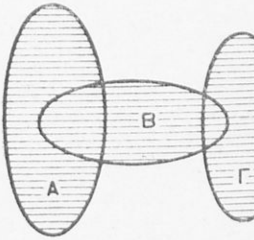
$$A \cup B = \{1,2,3,4\} \cup \{2,3,4\} = \{1,2,3,4\} = \Delta \qquad (1)$$

Κατόπιν εὑρίσκομεν τὸ σύνολον:

$$\Delta \cup \Gamma = \{1,2,3,4\} \cup \{3,4,5,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = \Sigma \qquad (2)$$

ἤτοι: $\Sigma = \Delta \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup B \cup \Gamma = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Ὥστε: ***Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἕνωσιν τριῶν συνόλων A,B,Γ, εὑρίσκομεν πρῶτον τὴν ἕνωσιν τῶν δύο πρώτων συνόλων καὶ κατόπιν τὴν ἕνωσιν τῆς εὑρεθείσης ἑνώσεως μετὰ τοῦ τρίτου συνόλου καὶ οὕτω καθ' ἑξῆς, ἐὰν δοθοῦν καὶ ἄλλα σύνολα.***




Σχ. 34.

Παραδείγματα: α) Θὰ ἔχωμεν:

$$\{\alpha,\beta,\gamma\} \cup \varnothing \cup \{\alpha,\gamma,\varepsilon\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon\}.$$

β). Θὰ εἶναι: $\boxed{\varnothing \cup \varnothing \cup \varnothing = \varnothing}$

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς ἑνώσεως τριῶν συνόλων παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ ἀνωτέρω γραμμοσκιασμένου (σχ. 34).

**57. Ἰδιότητες τῆς ἑνώσεως τριῶν συνόλων.** Ἄς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4\}, \quad B = \{\alpha,2,\beta,\gamma\}, \quad \Gamma = \{2,3,\beta,\gamma,\delta\}.$$

Θὰ ἔχωμεν, ὡς γνωστόν, ὅτι:

$$\begin{aligned}(A \cup B) \cup \Gamma &= (\{1,2,3,4\} \cup \{\alpha,2,\beta,\gamma\}) \cup \{2,3,\beta,\gamma,\delta\} = \\ &= \{1,2,3,4,\alpha,\beta,\gamma\} \cup \{2,3,\beta,\gamma,\delta\} = \{1,2,3,4,\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\end{aligned} \qquad (1)$$

**Ἀλλὰ καί:**

$$\begin{aligned}A \cup (B \cup \Gamma) &= \{1,2,3,4\} \cup (\{\alpha,2,\beta,\gamma\} \cup \{2,3,\beta,\gamma,\delta\}) = \\ &= \{1,2,3,4\} \cup \{2,3,\beta,\gamma,\delta\} = \{1,2,3,4,\alpha,\beta,\gamma,\delta\}\end{aligned} \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$\boxed{(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)} \qquad (3)$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι: εἰς τὴν ἕνωσιν τριῶν συνόλων ἰσχύει ὁ νόμος ***τῆς προσεταιριστικότητος.***

Ἐκ τῆς ἰσότητος (3) ἕπεται ἡ συνεπαγωγή:

$$\boxed{A \subseteq U \wedge B \subseteq U \wedge \Gamma \subseteq U \Rightarrow (A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma)}$$

**58. Ἕνωσις τριῶν συνόλων διὰ περιγραφῆς.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$A = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $8\}$,
$B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $9\}$,
$\Gamma = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $10\}$,

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον: $A \cup B \cup \Gamma$.

Ἔχομεν $A = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $8\} = \{1,2,4,8\}$,
$B = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $9\} = \{1,3,9\}$,
$\Gamma = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ $10\} = \{1,2,5,10\}$.

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$A \cup B \cup \Gamma = (A \cup B) \cup \Gamma = (\{1,2,4,8\} \cup \{1,3,9\} \cup \{1,2,5,10\} =$$
$$= \{1,2,3,4,8,9\} \cup \{1,2,5,10\} = \{1,2,3,4,5,8,9,10\} = \Delta.$$

Τὸ διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων του τοῦτο σύνολον γράφεται:

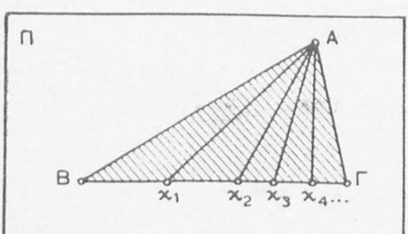
$\Delta = A \cup B \cup \Gamma = \{x \mid x$ διαιρέτης τοῦ 8 ***εἴτε*** τοῦ 9 ***εἴτε*** τοῦ $10\}$.

Πράγματι, εἰς τὸ $\Delta$ ὑπάρχουν τὰ στοιχεῖα 1,2, τὰ ὁποῖα εἶναι διαιρέται τοῦ 8 εἴτε τοῦ 9 εἴτε τοῦ 10.

Ὁμοίως, εἰς τὰ σύνολα: $\{\nu, \nu+1, \nu+2, \nu+3\}$, ὅπου $\nu \in A = \{2,3,4\}$, νὰ εὑρεθῇ ἡ ἕνωσις αὐτῶν.

Διὰ $\nu = 2$, ἔχομεν: $B = \{2,3,4,5\}$.
Διὰ $\nu = 3$, » $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.
Διὰ $\nu = 4$, » $\Delta = \{4,5,6,7\}$.

Ἄρα: $B \cup \Gamma \cup \Delta = \{2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6\} \cup \{4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.




Σχ. 35.

**59. Ἐφαρμογαὶ τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων εἰς τὴν Γεωμετρίαν.** Ἂς θεωρήσωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\pi$ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, μὴ κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Τὰ σημεῖα ταῦτα ὁρίζουν τὰ διαστήματα $\overline{AB}$, $\overline{B\Gamma}$, $\overline{\Gamma A}$, τῶν ὁποίων ἡ ἕνωσις γράφεται ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\overline{AB} \cup \overline{B\Gamma} \cup \overline{\Gamma A}}$$

καὶ ἀποτελεῖ κλειστὸν δρόμον μὲ τρεῖς κορυφάς, τὰ σημεῖα Α,Β,Γ, καὶ ὀνομάζεται ***περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ,*** σημειώνεται δὲ ὡς ἑξῆς: $\Delta$ ΑΒΓ.

Ἐὰν συνδέσωμεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὰ σημεῖα $x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots$ τῆς $\overline{ΒΓ}$ καὶ λάβωμεν τὴν ἕνωσιν τῶν τμημάτων:

$$Ax_1,\ Ax_2,\ Ax_3,\ Ax_4, \ldots$$

δηλαδὴ τὸ σύνολον:

$$Ax_1 \cup Ax_2 \cup Ax_3 \cup Ax_4 \cup \ldots$$

τὸ ὁποῖον συμβολίζεται:

$$\Delta_A = \cup\ Ax, \quad \text{ὅπου} \quad x \in \overline{ΒΓ},$$

τοῦτο θὰ γεμίσῃ ὅλην τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τῆς ὁποίας περιθώριον εἶναι ἡ ἕνωσις $\overline{ΑΒ} \cup \overline{ΒΓ} \cup \overline{ΓΑ}$.

Τὴν αὐτὴν ἐπιφάνειαν λαμβάνομεν καὶ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν:

$$\Delta_B = \cup\ By, \quad \text{ὅπου} \quad y \in \overline{ΓΑ}$$

ἢ ἀπὸ τὴν ἕνωσιν:

$$\Delta_\Gamma = \cup\ \Gamma\omega, \quad \text{ὅπου} \quad \omega \in \overline{ΑΒ}\cdot$$

Γενικώτερον, ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τριγώνου ΑΒΓ προκύπτει ἐκ τῆς ἑνώσεως ὅλων τῶν διαστημάτων $\overline{xy}$, ἔνθα $x \neq y$ εἶναι δύο σημεῖα ἐκ τοῦ συνόλου:

$$\overline{ΑΒ} \cup \overline{ΒΓ} \cup \overline{ΓΑ}.$$

**60. Τομαὶ καὶ ἑνώσεις συνόλων.** Ἄς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3\}, \qquad B = (2,3,4) \qquad \Gamma = (\varkappa,1,\lambda,2)$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = \{1,2,3\} \cap (\{2,3,4\} \cup \{\varkappa,1,\lambda,2\}) = \\ = \{1,2,3\} \cap \{1,2,3,4,\varkappa,\lambda\} = \{1,2,3\} \qquad (1)$$

Ἐπίσης θὰ ἔχωμεν:

$$(A \cap B) \cup \Gamma = (\{1,2,3\} \cap \{2,3,4\}) \cup \{\varkappa,1,\lambda,2\} = \{2,3\} \cup \{\varkappa,1,\lambda,2\} = \{1,2,3,\varkappa,\lambda\} \ (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι:

$$\boxed{A \cap (B \cup \Gamma) \neq (A \cap B) \cup \Gamma}$$

*ΣΗΜ.* Ἔχομεν $4\times(3+5) = 4\times8 = 32$ καὶ $(4\times3)+5 = 12+5 = 17$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$4\times(3+5) \neq (4\times3)+5.$$

Δηλαδὴ ἡ προσεταιριστικὴ ἰδιότης διὰ τὰ σύνολα Α,Β,Γ ἰσχύει, ὅταν ταῦτα συνδέωνται διὰ μιᾶς καὶ τῆς αὐτῆς πράξεως, καὶ ἑπομένως εἰς τὸ ἀριθμητικόν μας σύστημα ἡ πρᾶξις πρέπει νὰ εἶναι ἢ μόνον πολ/σμὸς ἢ μόνον πρόσθεσις. Ὅθεν καὶ εἰς τὰ σύνολα ἡ πρᾶξις πρέπει νὰ εἶναι ἢ μόνον ἕνωσις ἢ μόνον τομή.

Ἄς θεωρήσωμεν ἤδη τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}, \qquad B = \{\beta,\delta,\varepsilon\}.$$

Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$A \cup (B \cap A) \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cup (\{\beta,\delta,\varepsilon\} \cap \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}) \cup \{\beta,\delta,\varepsilon\} = \\ = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cup \{\beta,\delta\} \cup \{\beta,\delta,\varepsilon\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

Ἔστωσαν ἐπίσης τὰ σύνολα:

$$A = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\}, \qquad B = \{\lambda,\nu,\varrho\}, \qquad \Gamma = \{\varkappa,\mu,\sigma\}.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$A \cap (B \cup \Gamma) = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \cap (\{\lambda,\nu,\varrho\} \cup \{\varkappa,\mu,\sigma\}) = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \cap \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu,\varrho,\sigma\} = \\ = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \qquad (2)$$

καὶ

$$(A \cap B) \cup (A \cap \Gamma) = (\{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \cap \{\lambda,\nu,\varrho\}) \cup (\{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \cap \{\varkappa,\mu,\sigma,\}) = \\ = \{\lambda,\nu\} \cup \{\varkappa,\mu\} = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\}. \qquad (3)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) συνάγομεν ὅτι :

$$\boxed{A \frown (B \smile \Gamma) = (A \frown B) \smile (A \frown \Gamma)}$$

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἰσχύει ἐνταῦθα ἡ ***ἐπιμεριστικὴ*** ἰδιότης τοῦ πολλαπλασιασμοῦ :

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = (\alpha\cdot\beta)+(\alpha\cdot\gamma),$$

ἡ ὁποία εἰς τὰ σύνολα συνδέει τὴν πρᾶξιν $\frown$ μὲ τὴν πρᾶξιν $\smile$, κατόπιν ὅμως συμφωνίας.

Ἄς θεωρήσωμεν πάλιν τὰ σύνολα (1). Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$$A \smile (B \frown \Gamma) = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \smile (\{\lambda,\nu,\varrho\} \frown \{\varkappa,\mu,\sigma\}) = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \smile \varnothing = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \quad (4)$$

καὶ
$$(A \smile B) \frown (A \smile \Gamma) = (\{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \smile \{\lambda,\nu,\varrho\}) \frown (\{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\} \smile \{\varkappa,\mu,\sigma\}) =$$
$$= \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu,\varrho\} \frown \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu,\sigma\} = \{\varkappa,\lambda,\mu,\nu\}. \quad (5)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (4) καὶ (5) συνάγομεν ὅτι :

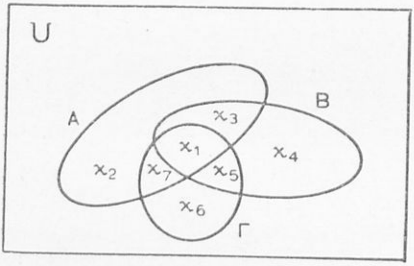
$$\boxed{A \smile (B \frown \Gamma) = (A \smile B) \frown (A \smile \Gamma)},$$

ἡ ὁποία σχέσις φανερώνει ὅτι ἰσχύει ***ὁ ἐπιμεριστικὸς*** νόμος εἰς τὰ σύνολα καὶ διὰ τὴν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\smile$ μὲ τὴν πρᾶξιν $\frown$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τὰ σύνολα ἔχομεν δύο ἐπιμεριστικοὺς νόμους :

1) ἕνα διὰ τὴν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\frown$ ἑνὸς στοιχείου μὲ τὴν πρᾶξιν $\smile$ δύο ἄλλων στοιχείων καὶ

2) ἕνα ἄλλον διὰ τὴν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\smile$ ἑνὸς στοιχείου μὲ τὴν πρᾶξιν $\frown$ δύο ἄλλων στοιχείων.




Σχ. 36.

Αἱ ἀνωτέρω ἰδιότητες ἐξηγοῦνται εὐκόλως καὶ ὑπὸ τοῦ ἀνωτέρω διαγράμματος (σχ. 36), ἐκ τοῦ ὁποίου καταδεικνύεται ὅτι :

α). Τὸ A ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὰ χωρία : $x_1, x_2, x_3, x_7$.
β). Τὸ B » » : $x_1, x_3, x_4, x_5$.
γ). Τὸ Γ » » : $x_1, x_5, x_6, x_7$
δ). Τὸ σύνολον $B \smile \Gamma$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ τὰ χωρία : $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6$
ε). Τὸ » $A \frown (B \smile \Gamma)$ » » : $x_1, x_3, x_7$
στ). Τὸ » $A \frown B$ » » : $x_1, x_3$.
ζ). Τὸ » $A \frown \Gamma$ » » : $x_1, x_7$.
η). Τὸ » $(A \frown B) \smile (A \frown \Gamma)$ » » : $x_1, x_3, x_7$.

Ἐκ τῶν (ε) καὶ (η) συνάγομεν ὅτι :

$$\boxed{A \frown (B \smile \Gamma) = (A \frown B) \smile (A \frown \Gamma)}\cdot$$

Ἐντελῶς ὁμοίως ἀποδεικνύεται καὶ ἡ ἄλλη ἰδιότης.

**61. Διαφορὰ δύο συνόλων.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{2,3,4\},$$

εἰς τὰ ὁποῖα, προφανῶς, εἶναι $B \subset A$. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα 1,5 δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον B. Τὰ στοιχεῖα ταῦτα συγκροτοῦν τὸ σύνολον $G = \{1,5\}$, τὸ ὁποῖον καλεῖται ***διαφορὰ*** τῶν A καὶ B. Τὸ σύνολον G εἶναι τὸ σύνολον ὅλων τῶν στοιχείων, τὰ ὁποῖα ἀπομένουν ἀπὸ τὸ A, ὅταν παραμερισθοῦν τὰ στοιχεῖα τοῦ B. Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ G εἶναι τὸ σύνολον τῶν στοιχείων τοῦ A, τὰ ὁποῖα δὲν ἀνήκουν εἰς τὸ B.

Ἂν ὅμως ἐνθυμηθῶμεν τὴν § 22, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ σύνολον G εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ B, δηλαδὴ τὸ $\overline{B}$ ἢ τὸ $C_A^B$.

Ἤδη, θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{\varkappa,1,2,3,4\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1,3,5,6\}.$$

Ἡ διαφορά, ἢ τὸ συμπλήρωμα αὐτῶν, εἶναι τὸ σύνολον $G = \{\varkappa,2,4\}$, διότι εἶναι φανερὸν ὅτι ἀπὸ τὸ A εἶναι δυνατὸν νὰ παραλειφθοῦν μόνον τὰ κοινὰ στοιχεῖα αὐτοῦ καὶ τοῦ B, ὁπότε θὰ ἀπομείνουν τὰ μὴ κοινὰ στοιχεῖα κ,2,4, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὸ A.

Τὰ ἐπὶ πλέον μὴ κοινὰ στοιχεῖα 5,6 δὲν λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν.

Τὴν διαφορὰν δύο συνόλων A καὶ B συμβολίζομεν ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{G = A - B = \overline{B} = C_A^B}\ .$$

Τὸ σύμβολον τῆς διαφορᾶς εἶναι τό: — καὶ κατ' ἄλλους τό: /.

Εἰς τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα θὰ εἶναι:

$$G = A - B = \{1,2,3,4,5\} - \{2,3,4\} = \{1,5\} = \overline{B}.$$

$$G = A - B = \{\varkappa,1,2,3,4\} - \{1,3,5,6\} = \{\varkappa,2,4\}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω καὶ ἄλλων ὁμοίων παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι:

***Διαφορὰ δύο δεδομένων συνόλων A καὶ B καλεῖται τὸ σύνολον G ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ A, τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι στοιχεῖα τοῦ B.***

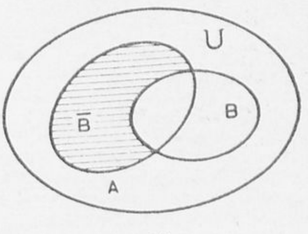
Γενικῶς δέ, διὰ περιγραφῆς τῶν στοιχείων τῶν A καὶ B, ἡ διαφορὰ αὐτῶν γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in \overline{B}\} = A \cap \overline{B}}\ .$$

**62. Γραφικὴ παράστασις τῆς διαφορᾶς δύο συνόλων.** Ἂν θεωρήσωμεν τὰ δύο σύνολα A καὶ B, διὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$A \subseteq U \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq U,$$

τότε τὸ γραμμοσκιασμένον χωρίον τοῦ (σχ. 37) παριστᾷ τὴν διαφορὰν τῶν A καὶ B ἢ τὸ συμπληρωματικὸν $\overline{B}$ τοῦ B.




Σχ. 37.

Ἐκ τούτου φαίνεται ἐπὶ πλέον ὅτι:

$$\boxed{U - A = \overline{B}}$$

**63. Διάφοροι ἐφαρμογαί.** α). Ἐὰν τὰ σύνολα: $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ $B = \{5,6,7,8\}$

εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, τότε θὰ ἔχωμεν: $G = A - B = \{\alpha,\beta,\gamma\} - \{5,6,7,8\} = A$.
Δηλαδή, ἂν τὰ A καὶ B δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα, ἤτοι $A \frown B = \varnothing$, τότε:

$$\boxed{A - B = A}\,.$$

β). Ἐὰν $A = \{\lambda,\mu,\nu,\varrho\}$ καὶ $B = \varnothing$, τότε θὰ ἔχωμεν:

$$\boxed{G = A - \varnothing = A}\,.$$

γ). Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{5,6,7\}$, $B = \{6,4,9\}$ καὶ $\Gamma = \{\alpha,7\}$.

Θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς:

$$(A-B)-\Gamma = (\{5,6,7\} - \{6,4,9\}) - \{\alpha,7\} = \{5,7\} - \{\alpha,7\} = \{5\}. \quad (1)$$

Ὁμοίως: $A-(B\smile\Gamma) = \{5,6,7\} - (\{6,4,9\} \smile \{\alpha,7\}) = \{5,6,7\} - \{4,6,7,9,\alpha\} = \{5\}$. (2)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν ὅτι:

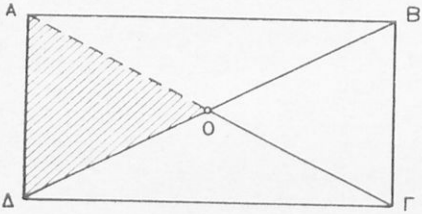
$$\boxed{(A - B) - \Gamma = A - (B \smile \Gamma)}\,.$$

δ). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΒΔ καὶ ΑΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα θὰ εἶναι:

$G = \Delta\cdot AB\Delta - \Delta\cdot AB\Gamma = \Delta\cdot AO\Delta$.

Ἐδῶ ἡ πλευρὰ ΑΟ, ὡς κοινὸν τμῆμα δὲν περιλαμβάνεται εἰς τὸ Δ·ΑΟΔ, καὶ διὰ τοῦτο παρίσταται ἐστιγμένη.

Διότι, ἐὰν παραμερίσωμεν τὸ κοινὸν τμῆμα Δ·ΑΒΟ, παραμένει ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ τὸ ἡμίκλειστον τρίγωνον ΑΟΔ (τὸ τμῆμα Δ·ΓΟΒ δὲν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν).




Σχ. 38.

ε). **Ἐὰν $A \subseteq U$, τότε $\overline{(\overline{A})} = A$.** Δηλαδή, τὸ συμπληρωματικὸν τοῦ συμπληρωματικοῦ τοῦ A ἐν τῷ U εἶναι τὸ σύνολον A. Τὸ αὐτὸ περιγραφικῶς συμβολίζεται ὡς ἀκολούθως:

$$\boxed{\overline{(\overline{A})} = \{x \in U \mid x \in \overline{A}\} = A}\,.$$

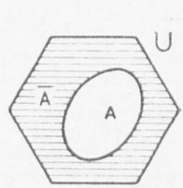
Τοῦτο φαίνεται εἰς τὸ ἔναντι (σχ. 39), ἔνθα τὸ γραμμοσκιασμένον χωρίον τοῦ U εἶναι τὸ συμπλήρωμα $\overline{A}$ τοῦ συνόλου A ἐν τῷ U.

Ἡ πρότασις αὕτη ἀποδεικνύεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἂν $U = \{1,2,3,4,5\}$ καὶ $A = \{2,3,4\}$, ἔνθα $A \subseteq U$, τότε, κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι: $\overline{A} = \{1,5\}$.

Κατ' ἀκολουθίαν $\overline{A} \subseteq U$.

Ὅθεν καὶ $\overline{(\overline{A})} = \{2,3,4\} = A$.




Σχ. 39.

Ἄρα: $\boxed{A \subseteq U \Longrightarrow \overline{(\overline{A})} = A}\,.$

Ὁ νόμος οὗτος λέγεται ***νόμος περιελίξεως.***

στ). Ἐὰν $U = \{1,2,3,4,5\}$ καὶ $A = \{2,3,4\}$, δηλαδὴ $A \subseteq U$, θὰ ἔχωμεν:

$$A \smile A = \{2,3,4\} \smile \{2,3,4\} = \{2,3,4\} = A.$$

Ὥστε : $\boxed{A \subseteq U \Rightarrow A \cup A = A}$,

ὅστις καλεῖται **νόμος αὐτοδυναμίας.**

ζ). Ἐπίσης θὰ εἶναι : $A \cap A = \{2,3,4\} \cap \{2,3,4\} = \{2,3,4\} = A.$

Ὥστε : $\boxed{A \subseteq U \Rightarrow A \cap A = A}$,

ὅστις καλεῖται **νόμος αὐτοδυναμίας.**

η). Διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἄνω σύνολα θὰ εἶναι : $\overline{A} = \{1,5\}$, καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν :

$$A \cup \overline{A} = \{2,3,4\} \cup \{1,5\} = \{1,2,3,4,5\} = U.$$

Ὥστε : $\boxed{A \subseteq U \Rightarrow A \cup \overline{A} = U}$,

ὅστις καλεῖται **νόμος ταυτότητος.**

θ). Ὁμοίως, διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἄνω σύνολα, θὰ εἶναι :

$$A \cap \overline{A} = \{2,3,4\} \cap \{1,5\} = \varnothing.$$

Ὥστε : $\boxed{A \subseteq U \Rightarrow A \cap \overline{A} = \varnothing}$,

ὅστις καλεῖται **νόμος ταυτότητος.**

ι). Ἐὰν $U = \{1,2,3,4\}$, $A = \{2,3\}$ καὶ $B = \{1,4\}$, θὰ ἔχωμεν διαδοχικῶς :

$A \cup (A \cap B) = \{2,3\} \cup (\{2,3\} \cap \{1,4\}) = \{2,3\} \cap \varnothing = \{2,3\} = A$ (1)

$A \cap (A \cup B) = \{2,3\} \cap (\{2,3\}) \cup \{1,4\}) = \{2,3\} \cap \{1,2,3,4\} = \{2,3\} = A.$ (2)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1) καὶ (2) λαμβάνομεν :

$$\boxed{A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B)},$$

ὅστις καλεῖται **νόμος ἀπορροφήσεως.**

**64. Νόμοι τοῦ de Morgan.** α). Ἄς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα :

$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{4,5,6,8\}$, $\Gamma = \{2,3,4,6,8\}$,

εἰς τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν ὅτι : $B \subseteq A$ καὶ $\Gamma \subseteq A$. Ἄρα θὰ ἔχωμεν :

$B \cup \Gamma = \{4,5,6,8\} \cup \{2,3,4,6,8\} = \{2,3,4,5,6,8\}$,

ὁπότε : $(\overline{B \cup \Gamma}) = \{1,7\}$ (1)

Ἀλλά : $\overline{B} = \{1,2,3,7\}$ καὶ $\overline{\Gamma} = \{1,5,7\}$,

ὁπότε : $\overline{B} \cap \overline{\Gamma} = \{1,2,3,7\} \cap \{1,5,7\} = \{1,7\}.$ (2)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν τὴν σχέσιν :

$$\boxed{(\overline{B \cup \Gamma}) = \overline{B} \cap \overline{\Gamma}},$$

ἥτις ἀποτελεῖ τὸν **πρῶτον** νόμον τοῦ *de Morgan*. Ὥστε :

$$\boxed{B \subseteq A \wedge \Gamma \subseteq A \Rightarrow (\overline{B \cup \Gamma} = \overline{B} \cap \overline{\Gamma}}.$$

β'. Διὰ τὰ αὐτὰ ὡς ἄνω σύνολα, θὰ εἶναι :

$B \cap \Gamma = \{4,5,6,8\} \cap \{2,3,4,6,8\} = \{4,6,8\}.$ (3)

Ἄρα : $\overline{B \cap \Gamma} = \{1,2,3,5,7\}.$ (4)

Ἀλλὰ καί : $\overline{B} \cup \overline{\Gamma} = \{1,2,3,7\} \cup \{1,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}.$ (5)

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (4) καὶ (5) συνάγομεν τὴν σχέσιν :

$$\boxed{\overline{B \cap \Gamma} = \overline{B} \cup \overline{\Gamma}},$$

ἥτις ἀποτελεῖ τὸν ***δεύτερον*** νόμον τοῦ *de Morgan.* Ὥστε :

$$\boxed{B \subseteq A \wedge \Gamma \subseteq A \Rightarrow (\overline{B \cap \Gamma}) = \overline{B} \cup \overline{\Gamma}}.$$

***ΣΗΜ :*** Οἱ νόμοι τοῦ de Morgan ἰσχύουν καὶ διὰ ν σύνολα $A_1, A_2, A_3, \dots, A\nu$ καὶ ἀποδεικνύονται ὁμοίως, ἔνθα $\nu \in \Phi$.

Δηλαδή, διὰ $\nu \in \Phi$ καὶ $A_1, A_2, A_3, \dots, A\nu \subseteq U$, τότε θὰ ἔχωμεν :

$$\overline{(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A\nu)} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \dots \cap \overline{A\nu},$$

καὶ

$$\overline{(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A\nu)} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3} \cup \dots \cup \overline{A\nu}.$$

**65. Συμμετροδιαφορά.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα :

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{3,5,7,9\}$, $B = \{2,3,4,5,6,7\}$,

εἰς τὰ ὁποῖα παρατηροῦμεν ὅτι : $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$.

Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ εἶναι :

$$\overline{B} = \{1,8,9,10\} \text{ καὶ } \overline{A} = \{1,2,4,6,8,10\},$$

ὁπότε : $A \cap \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \cap \{1,8,9,10\} = \{1,8,9,10\}$, (1)

$\overline{A} \cap B = \{1,2,4,6,8,10\} \cap \{2,3,4.5,6,7\} = \{2,4,6\}$ (2)

καὶ κατ᾽ ἀκολουθίαν :

$(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \{1,8,9,10\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,4,6,8,9,10\}$. (3)

Τὸ σύνολον (3) καλεῖται ***συμμετροδιαφορὰ*** τῶν A καὶ B, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ συμβόλου : $A \dot{+} B$, δηλαδή :

$$\boxed{A \dot{+} B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)}$$

καὶ διαβάζομεν : «*A σὺν B*» ἢ «*A κόντρα σὺν B*».

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδονται τὰ σύνολα :

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.

Νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα :

1) $A \cup B$ 3) $B \cup \Gamma$ 5) $(A \cup B) \cup \Gamma$
2) $A \cup \Gamma$ 4) $B \cup B$ 6) $A \cup (B \cup \Gamma)$.

**2.** Δίδονται τὰ σύνολα :

X = {Γεῶργος, Γιάννης, Πέτρος}
Y = {Γεῶργος, Μάρκος, Θωμᾶς}
Z = {Μάρκος, Θωμᾶς, Λάμπρος}

καὶ ζητεῖται νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα :

1) $X \cup Y$, 2) $Y \cup Z$, 3) $X \cup Z$.

**3.** Ἐὰν τὰ σύνολα A καὶ B εἶναι μὴ συγκρίσιμα, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $A \subset (A \cup B)$ καὶ 2) $B \subset (A \cup B)$.

4. Ἐὰν $A \subseteq B$, καὶ $(A \subset B) \Longrightarrow (A \cup B) = B$.
5. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A = A \cup A$.
6. Ἐὰν U εἶναι ὑπερσύνολον, νὰ δειχθῇ ὅτι: $U \cup A = U$.
7. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $'\varnothing \cup A = A$.
8. Ἐὰν $A \cup B = \varnothing$, τότε: $A = \varnothing$ καὶ $B = \varnothing$.
9. Ἐὰν $(A \cup B) = (A \cap B)$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $A = B$ καὶ ἀντιστρόφως.
10. Ἐὰν $A \subseteq \Gamma$ καὶ $B \subseteq \Gamma$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $(A \cup B) \subseteq \Gamma$.
11. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
$$A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A.$$
12. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
   1) $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (\Gamma \cup A)$
   2) $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$.
13. Δίδονται τὰ σύνολα:
   $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.
   Νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα:
   1) $(A - B)$ 3) $(B - \Gamma)$ 5) $(B - B)$.
   2) $(\Gamma - A)$ 4) $(B - A)$
14. Δίδονται τὰ μὴ συγκρίσιμα σύνολα A καὶ B. Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ διαγράμματα τῶν συνόλων:
   $A$, $B$, $(A - B)$, $(B - A)$, $\varnothing$ καὶ τοῦ $U$ = ὑπερσυνόλου.
15. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - A = \varnothing$.
16. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - (A - \varnothing) = \varnothing$.
17. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A - B) \neq (B - A)$.
18. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A - B) \subset A$ καὶ $(B - A) \subset B$.
19. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - B \subseteq A \cup B$.
20. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν: $B \subseteq A$, τότε: $B - \Gamma \subseteq A - \Gamma$.
21. Ἄν $B \subseteq A$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - (A - B) = B$.
22. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A - B) \cap B = \varnothing$.
23. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A - B) = A \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
24. Ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:
$$[(A - B) \cup B = A] \Longleftrightarrow B \subseteq A;$$
25. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A \cup B = (A - B) \cup B$.
26. Ἐὰν $A \subseteq \Gamma$, $B \subseteq \Gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:
   1) $A \subseteq (\Gamma - B) \Longleftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
   2) $(\Gamma - B) \subseteq A \Longleftrightarrow A \cup B = \Gamma$.
27. Δίδονται τὰ σύνολα:
   $U = \{1,2,3,\ldots,8,9\}$ $B = \{2,4,6,8\}$
   $A = \{1,2,3,4\}$ $\Gamma = \{3,4,5,6\}$.
   Νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα:
   1) $\overline{A}$, 3) $\overline{(A \cap \Gamma)}$, 5) $\overline{\overline{(A)}}$
   2) $\overline{B}$, 4) $\overline{(A \cup B)}$, 6) $\overline{(B - \Gamma)}$.
28. Δίδονται τὰ σύνολα:
   $U = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $B = \{\beta,\delta,\varepsilon\}$, $A = \{\alpha,\beta,\delta\}$
καὶ ζητοῦνται τὰ σύνολα:

1) $A \cup B$ 4) $(B - A)$ 7) $\overline{A} \cap \overline{B}$ 10) $\overline{(A \cup B)}$.

2) $B \cap A$ 5) $\overline{A} \cap B$ 8) $\overline{B} - \overline{A}$

3) $\overline{B}$ 6) $A \cup \overline{B}$ 9) $\overline{(A \cap B)}$

**29.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $B - A \subseteq \overline{A}$.

**30.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $B - \overline{A} = B \cap A$.

**31.** Δίδεται τὸ ὑπερσύνολον: $U = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$ καὶ τὰ σύνολα:

$A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$, $B = \{\alpha, \gamma, \varepsilon, \eta\}$, $\Gamma = \{\beta, \varepsilon, \zeta, \eta\}$.

Ζητεῖται νὰ σχηματισθοῦν τὰ σύνολα:

1) $A \cup \Gamma$ 3) $\Gamma - B$ 5) $\overline{A} - B$ 7) $\overline{(A - \Gamma)}$ 9) $\overline{(A - \overline{B})}$

2) $B \cap A$ 4) $\overline{B}$ 6) $\overline{B} \cup \Gamma$ 8) $\overline{\Gamma} \cap A$, 10) $\overline{(A \cap \overline{A})}$.

**32.** Ἐὰν $A \cap B = \varnothing$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \subset \overline{B}$.

**33.** Νὰ δειχθῇ ὅτι: $A - B \subseteq A \cup B$.

**34.** Νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A$.

**35.** Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἄν: $A \cap B = \varnothing$, τότε $B \cap \overline{A} = B$.

**36.** Ἐὰν $A \subset B$, τότε: $A \cup B = B$.

**37.** Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\overline{A} - \overline{B} = B - A$.

**38.** Ἐὰν $A \subset B$, τότε: $\overline{B} \subset \overline{A}$.

**39.** Ἐὰν $A \cap B = \varnothing$, νὰ δειχθῇ ὅτι: $A \cup \overline{B} = \overline{B}$.

**40.** Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

**41.** Ἐὰν $A \subset B$, τότε: $A \cup (B - A) = B$.

**42.** Νὰ ὁρισθοῦν τὰ ἀκόλουθα σύνολα:

1) $U \cap A$ 3) $\overline{\varnothing}$ 5) $\overline{A} \cap A$ 7) $U \cup A$ 9) $A \cap A$

2) $A \cup A$ 4) $\varnothing \cup A$ 6) $\overline{U}$ 8) $\overline{A} \cup A$ 10) $\varnothing \cap A$.

**43.** Ἐὰν $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, $\Gamma \neq \varnothing$, νὰ χαράξετε ἕνα διάγραμμα τοῦ Venn οὕτως, ὥστε νὰ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

1) $A \subset B$, $\Gamma \subset B$, $A \cap \Gamma = \varnothing$.

2) $A \subset B$, $\Gamma \not\subset B$, $A \cap \Gamma \neq \varnothing$.

3) $A \subset \Gamma$, $A \neq \Gamma$, $B \cap \Gamma = \varnothing$.

4) $A \subset (B \cap \Gamma)$, $B \subset \Gamma$, $\Gamma \neq B$, $A \neq \Gamma$.

**44.** Διὰ τῆς χρήσεως τῶν συμβόλων $\subset$, $\supset$ ἢ (μὴ συγκρίσιμα) νὰ ἀντικατασταθοῦν αἱ τελεῖαι εἰς τὰς ἀκολούθους δηλώσεις:

1) $A \ldots (A - B)$ 3) $\overline{A} \ldots (B - A)$ 5) $\overline{A} \ldots (A - B)$

2) $A \ldots (A \cap B)$ 4) $A \ldots (A \cup B)$ 6) $A \ldots (B - A)$,

ὥστε νὰ εἶναι ἀληθεῖς.

**45.** Ἐὰν $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$C_U^A - C_U^B = B - A.$$

**46.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, δείξατε ὅτι: $B - A \subseteq C_U^A$.

**47.** Ἐὰν $U = \{\varkappa, \lambda, \mu\}$, $A = \varnothing$, $B = \{\varkappa\}$, $\Gamma = \{\varkappa, \lambda\}$, νὰ ὁρισθοῦν δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τ' ἀκόλουθα σύνολα:

1) $\overline{A} \cup B$ 3) $\overline{A} \cup \overline{(\overline{B} \cup \Gamma)}$

2) $A \cup (B \cup \Gamma)$ 4) $A \cup \overline{B}$.

5) $\overline{A} \cup (B \cup \Gamma)$ 7) $\overline{A} \cup \overline{(\overline{B} \cup (\overline{\Gamma})}$

6) $\overline{A} \cup (\overline{B} \cup \Gamma)$ 8) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \Gamma$.

**48.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A \cup (A \cup B) = A \cup B$.

**49.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\overline{A} \cup (A \cup B = A \cup (\overline{A} \cup \overline{B}).$$

**50.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $A \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup B$.

2) $\overline{A} \cup (A \cup B) \neq \overline{(A \cup B)} \cup A$.

3) $A \cup (A \cup \overline{\overline{B}}) \neq (\overline{A} \cup B) \cup A$.

**51.** Ἐὰν $U = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3,4\}$, νὰ ὁρισθοῦν διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

1) $A \cup (A \cup B)$ 3) $\overline{A} \cup (A \cup B)$ 5) $A \cup \overline{(A \cup B)}$

2) $A \cup B$ 4) $A \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ 6) $\overline{A} \cup (A \cup B)$

7) $A \cup (\overline{A} \cup B)$ 9) $\overline{(\overline{A} \cup B)} \cup B$

8) $(A \cup \overline{B}) \cup A$ 10) $\overline{A} \cup (A \cup \overline{B})$

καὶ νὰ γίνῃ σύγκρισις τῶν 1,2, τῶν 3,4, τῶν 5,6, τῶν 7,8 καὶ τῶν 9,10 σχέσεων.

**52.** Νὰ ἀποδείξητε ὅτι, ἂν U εἶναι τὸ κυρίαρχον σύνολον, τότε $\overline{U} = \varnothing$.

**53.** Ὁμοίως ὅτι: $\overline{\varnothing} = U$.

**54.** Ἐὰν $U = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $A = \{\alpha\}$, $B = \{\beta\}$, νὰ ὁρισθοῦν δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

1) $\overline{(A \cup B)} \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$ 4) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cup \overline{(A \cap B)}$.

2) $\overline{(A \cup B)} \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$ 5) $(A \cap \overline{\varnothing}) \cup B$

3) $\overline{(A \cap B)} \cup (\overline{A} \cup \overline{B})$ 6) $(A \cap \varnothing) \cup (B \cap U)$.

**55.** Ἐὰν $U = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B = \{\alpha,\beta\}$, ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς;

1) $\overline{(A \cup B)} = A \cap \overline{B}$ 4) $A \cap B = \overline{A} \cup \overline{B}$

2) $A \cup (A \cap B) = \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{\overline{B}})$ 5) $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap \overline{B}$

3) $\overline{A} \cup B = \overline{(A \cap B)}$ 6) $\overline{A} \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})}$.

**56.** Ἐὰν $U = \{1,2,3,4\}$, $A = \{2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων ἰσοτήτων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι ψευδεῖς;

1) $A \cap \overline{B} = \overline{(\overline{A} \cup B)}$ 2) $\overline{A} \cap (A \cup B) = A \cup \overline{B}$

3) $A \cup (A \cap B) = \overline{A} \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$.

**57.** Ἐὰν $A \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $\overline{A} \cap A = \varnothing$.

**58.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A \cap B = A \cap (B \cup \overline{A})$ μὲ τὴν βοήθειαν διαγράμματος τοῦ Venn.

**59.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

**60.** Ὁμοίως ὅτι: $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap A)$.

**61.** Ὁμοίως ὅτι: $(\overline{A} \cap B) \cup A = B \cup A$.

**62.** Ὁμοίως ὅτι: $\overline{[A \cap (A \cup B)]} = A \cup \overline{\overline{B}}$.

**63.** Ἐὰν $U=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\}$, $A=\{\beta,\gamma,\varepsilon\}$, $B=\{\alpha,\beta,\delta,\eta\}$, $\Gamma=\{\alpha,\beta\}$ καὶ $\Delta=\{\alpha,\beta,\zeta,\eta\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $(A\cup\Gamma)\cup(B\cup\Gamma)\cup(A\cup\Delta)\cup(B\cup\Delta)=A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta$.
2) $(A\cap B)\cup(\Gamma\cap\Delta)=(A\cup\Gamma)\cap(B\cup\Gamma)\cap(A\cup\Delta)\cap(B\cup\Delta)$.
3) $(B\cap\Gamma)\cup(\Gamma\cap A)\cup(A\cap\Delta)\cup(\Delta\cap B)=(A\cup B)\cap(\Gamma\cup\Delta)$.

**64.** Ἐὰν $A\subseteq U$, $B\subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $A\dotplus\varnothing=A$ 4) $A\dotplus B=B\dotplus A$
2) $A\dotplus A=\varnothing$ 5) $\overline{A}\pm\overline{B}=A\dotplus B$
3) $A\dotplus U=\overline{A}$ 6) $A\cap(B\dotplus\Gamma)=(A\cap B)\dotplus(A\cap\Gamma)$.

**65.** Ἐὸν $A_\nu=\{x\mid x\in\Phi$ μὲ $x=k\nu\}=\{\nu,2\nu,3\nu,\ldots\}$, ἔνθα $\nu\in\Phi$ καὶ $k\in\Phi$, νὰ εὑρεθοῦν τὰ ἀκόλουθα σύνολα:

1) $A_2\cap A_7$ 4) $A_3\cap A_{12}$
2) $A_6\cap A_8$ 5) $A_2\cap A_{15}$
3) $A_3\cup A_{12}$ 6) $A_\sigma\cup A_{\sigma\tau}$ μὲ $\sigma,\tau\in\Phi$

**66.** Εἰς τὸ σύνολον $\Phi=\{1,2,3,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, παριστῶμεν διὰ τοῦ $\delta(\alpha)$ τὸ σύνολον τῶν διαιρετῶν τοῦ $\alpha\in\Phi$.

Νὰ εὑρεθοῦν οἱ:

1) $\delta(48)$
2) $\delta(60)$
3) $\delta(100)$
4) $\delta(72)$

Νὰ ὁρισθοῦν δὲ καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

α) $A=\delta(48)\cap\delta(60)$ γ) $\Gamma=\delta(72)\cap\delta(100)$
β) $B=\delta(60)\cap\delta(72)$ δ) $\Delta=A\cap\delta(72)$
ε) $Z=\delta(48)\cap B)$

καὶ ἀκολούθως νὰ συγκριθοῦν τὰ Δ καὶ Z.

**67.** Δίδονται οἱ $\alpha\in\Phi$ καὶ $\beta\in\Phi$. Δύνανται τὰ σύνολα $\delta(\alpha)$ καὶ $\delta(\beta)$ νὰ εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα; Εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι $\delta(\alpha)\cap\delta(\beta)=\{1\}$;
Ὑπάρχει πάντοτε ἀριθμὸς $x\in\Phi$, διὰ τὸν ὁποῖον: $\delta(x)=\delta(\alpha)\cap\delta(\beta)$;

**68.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν $\Phi=\{1,2,3,\ldots\}$ παριστῶμεν διὰ τοῦ $M(\alpha)$ τὸ σύνολον τῶν πολλαπλασίων τοῦ $\alpha\in\Phi$. Νὰ εὑρεθοῦν τά:

1) $M(6)$ 2) $M(4)$ 3) $M(12)$ 4) $M(25)$

καὶ ἀκολούθως νὰ ὁρισθοῦν καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

α) $A=M(4)\cap M(6)$
β) $B=M(6)\cap M(12)$
καὶ $\Gamma=M(12)\cap M(25)$.

**69.** Ἐὰν $\alpha\in\Phi$, $\beta\in\Phi$, εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι: $M(\alpha)\subset M(\beta)$; εἰς ποίαν περίπτωσιν εἶναι $M(\alpha)\cap M(\beta)=M(\alpha\beta)$; Ὑπάρχει ἀριθμὸς $x\in\Phi$ τοιοῦτος, ὥστε: $M(x)=M(\alpha)\cap M(\beta)$;

**70.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν τριγώνων T, ἔστωσαν:

E τὸ ὑποσύνολον τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων
I » ἰσοσκελῶν »
A » ὀξυγωνίων »
R » ὀρθογωνίων »

Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σύνολα:

1) $E\cap A$ 3) $I\cap R$ 5) $E\cap R$
2) $A\cap R$ 4) $E\cap I$ 6) $R\cap R$.

**71.** Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου $\pi$ δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ μὴ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἔστωσαν:

E τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ἰσαπεχόντων τῶν A καὶ B
Z » » » B » Γ
H » » » Γ » A

Νὰ καθορισθοῦν δὲ ἀκολούθως τὰ σύνολα:

1) $E \frown Z$ 4) $(E \frown Z) \frown H$

2) $Z \frown H$ 5) $E \frown (Z \frown H)$.

3) $H \frown E$

**66. Διαμερισμὸς ἑνὸς συνόλου.** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν:

$$\Phi = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots\}, \qquad (1)$$

καθὼς καὶ τὰ σύνολα:

$$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$$
$$B = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$$

τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Παρατηροῦμεν ὅτι: $A \subseteq \Phi$, $B \subseteq \Phi$, $A \frown B = \varnothing$, $A \smile B = \Phi$, $A \neq \varnothing$ $B \neq \varnothing$ καὶ ἐπὶ πλέον $A = \overline{B}$ καὶ $B = \overline{A}$.

Τὸ σύνολον $\Gamma = \{A, B\}$ καλεῖται ***διαμερισμὸς*** τοῦ συνόλου Φ.

Τὰ Α καὶ Β εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου Γ καὶ ὀνομάζονται ***κλάσεις***.

Ὥστε, τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διαμερίζεται εἰς δύο κλάσεις: τὴν τῶν περιττῶν καὶ τὴν τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν.

β). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ διὰ συνθήκης τῶν στοιχείων του περιγραφόμενον σύνολον:

$$K = \{x \mid x \text{ γράμμα τοῦ ἀλφαβήτου μας}\}. \qquad (2)$$

Τοῦτο διαμερίζεται εἰς τὰ σύνολα:

$$A_1 = \{x \mid x \text{ σύμφωνον τοῦ ἀλφαβήτου}\}$$
$$A_2 = \{x \mid x \text{ φωνῆεν τοῦ ἀλφαβήτου}\},$$

καθόσον εἶναι:

$A_1 \neq \varnothing$, $A_2 \neq \varnothing$, $A_1 \subseteq K$, $A_2 \subseteq K$, $A_1 \frown A_2 = \varnothing$, $A_1 \smile A_2 = K$.

Κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον: $\Lambda = \{A_1, A_2\}$ εἶναι ὁ διαμερισμὸς τοῦ συνόλου Κ. Κλάσεις δὲ εἶναι τὰ $A_1$ καὶ $A_2$ καὶ ὅτι:

$$A_1 = \overline{A_2}, \quad A_2 = \overline{A_1}.$$

Δηλαδή: ***Ἐὰν ἕνα σύνολον εἶναι διαμερισμένον εἰς δύο κλάσεις, τότε κάθε μία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι συμπλήρωμα τῆς ἄλλης.***

γ). Ἔστω τὸ σύνολον: $U = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$ (3)

καὶ τά:

$$B_1 = \{5, 10, 15, 20\}$$
$$B_2 = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$B_3 = \{12, 14, 16, 18\}$$
$$B_4 = \{1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19\}.$$

Ἄρα ὁ διαμερισμὸς εἶναι τό: $\Delta = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, τοῦ ὁποίου στοιχεῖα εἶναι αἱ κλάσεις: $B_1, B_2, B_3, B_4$. Ἐπὶ πλέον παρατηροῦμεν ὅτι:

1) $B_1 \neq \varnothing$, $B_2 \neq \varnothing$, $B_3 \neq \varnothing$, $B_4 \neq \varnothing$

2) $B_1 \subseteq U$, $B_2 \subseteq U$, $B_3 \subseteq U$, $B_4 \subseteq U$

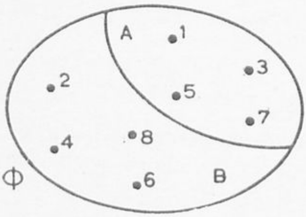
3) $B_1 \frown B_2 = B_1 \frown B_3 = B_1 \frown B_4 = B_2 \frown B_3 = B_2 \frown B_4 = B_3 \frown B_4 = \varnothing$

4) $B_1 \smile B_2 \smile B_3 \smile B_4 = U$.

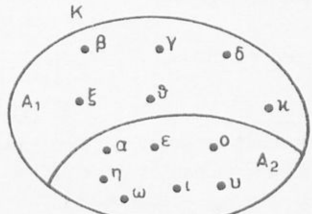
Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν:

***Διαμερισμὸς μὴ κενοῦ συνόλου $U$ καλεῖται τὸ σύνολον τῶν μὴ κενῶν ὑποσυνόλων του, τὰ ὁποῖα εἶναι ξένα ἀνὰ δύο καὶ ἔχουν ὡς ἕνωσιν τὸ δοθὲν σύνολον $U$.***

**67. Γραφικὴ παράστασις διαμερισμοῦ.** Ἡ γραφικὴ παράστασις τοῦ

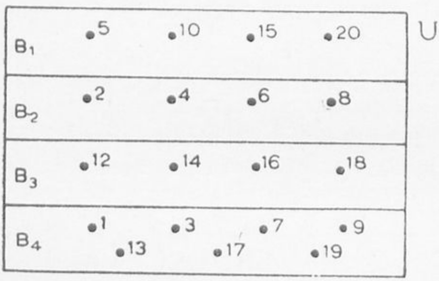



Σχ. 40.



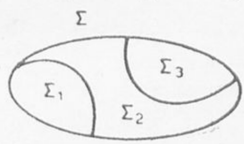

Σχ. 41.

διαμερισμοῦ τῶν συνόλων (1), (2) καὶ (3) τῆς παραγράφου 66 δίδεται ὑπὸ τῶν (σχ. 40, 41), ὅπου εἰς τὸ (σχ. 40) δὲν ἔχουν ἀναγραφῆ ὅλα τὰ στοιχεῖα τῶν Α καὶ Β ἀντιστοίχως, εἰς δὲ τὸ (σχ. 41) δὲν ἔχουν ἀναγραφῆ ὅλα τὰ σύμφωνα τοῦ ἀλφαβήτου.




Σχ. 42.

Παράδειγμα: Ἂς λάβωμεν τὸ σύνολον Σ τῶν τριγώνων. Ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Σ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ ὑποσύνολα:




Σχ. 43.

$\Sigma_1 = \{x \mid x$ τρίγωνον ὀρθογώνιον$\}$

$\Sigma_2 = \{x \mid x$ τρίγωνον ὀξυγώνιον$\}$

$\Sigma_3 = \{x \mid x$ τρίγωνον ἀμβλυγώνιον$\}$,

διότι εἶναι:

1) $\Sigma_1 \neq \varnothing, \quad \Sigma_2 \neq \varnothing, \quad \Sigma_3 \neq \varnothing$

2) $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma_1 \cap \Sigma_3 = \Sigma_2 \cap \Sigma_3 = \varnothing$

3) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma, \quad \Sigma_2 \subseteq \Sigma, \quad \Sigma_3 \subseteq \Sigma$

4) $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 = \Sigma$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν διαμερισμὸς τοῦ Σ εἶναι τὸ σύνολον: $E = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$, τὸ ὁποῖον γραφικῶς παρίσταται ὑπὸ τοῦ (σχ. 43).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθοῦν πᾶσαι αἱ δυναταὶ διαμερίσεις τοῦ συνόλου: $A = \{1,2,3,4\}$.

**2.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A_0, A_1, A_2\}$ εἶναι ἡ διαμέρισις τοῦ συνόλου $\Phi = \{1,2,3,4,\ldots,\nu,\nu+1,\ldots\}$, ἂν εἶναι:

$A_0 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $x =$ πολ $3\}$
$A_1 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $x =$ πολ $3 + 1\}$
$A_2 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $x =$ πολ $3 + 2\}$.

**3.** Ἐὰν $\Phi = \{1,2,3,4,\ldots\}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ
$A = \{2,4,6,\ldots\}$, $B = \{1,3,5,\ldots\}$,
νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον $\Delta = \{A,B\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ Φ.

**4.** Ἐὰν $T = \{1,2,\ldots,9,10\}$, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{2,6,10\}$, $\Gamma = \{4,8,9\}$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A,B,\Gamma\}$ δὲν εἶναι διαμερισμὸς τοῦ T.

**5.** Ἐὰν $T = \{1,2,\ldots,9,10\}$, $E = \{1,3,5,7,9\}$, $Z = \{2,4,10\}$, $H = \{3,5,6,8\}$, νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{E,Z,H\}$ δὲν εἶναι διαμερισμὸς τοῦ T.

**6.** Ἐὰν $U = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $1 \leqslant x \leqslant 10\}$
$A_1 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $1 \leqslant x \leqslant 7\}$
$A_2 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $x - 3 = 0\}$
$A_3 = \{4,8,10\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \Phi$ καὶ $x - 9 = 0\}$,
νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ U.

**7.** Ἐὰν $U = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $1 \leqslant x \leqslant 10\}$
$A_1 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $1 \leqslant x =$ περιττὸς $\leqslant 10\}$
$A_2 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $(x-2)(x-4)(x-10) = 0\}$
$A_3 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $(x-3)(x-8)(x-5)(x-6) = 0\}$,
πῶς θὰ διαπιστώσετε ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A_1, A_2, A_3\}$ εἶναι ἢ δὲν εἶναι διαμερισμὸς τοῦ U;

**8.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ εἶναι ἕνας διαμερισμὸς τοῦ συνόλου $\Phi = \{1,2,3,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἄν:
$A_0 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7\}$
$A_1 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 1\}$
$A_2 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 2\}$
$A_3 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 3\}$
$A_4 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 4\}$
$A_5 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 5\}$
$A_6 = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x =$ πολ $7 + 6\}$.

**9.** Δίδονται τὰ σύνολα:
$\Sigma = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $1 \leqslant x \leqslant 11\}$
$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$
$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $4 \leqslant x \leqslant 10$ καὶ x ἄρτιος$\}$
$\Gamma = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $5 \leqslant x < 10$ καὶ x περιττός$\}$.
Νὰ ἐξετάσετε, ἂν τὸ σύνολον $\Delta = \{A,B,\Gamma\}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου Σ.

**10.** Δίδονται τὰ σύνολα:
$\Sigma = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $1 \leqslant x \leqslant 13\}$
$A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0\}$
$B = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $5 \leqslant x < 12$ καὶ x περιττὸς$\}$
$\Gamma = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $6 \leqslant x \leqslant 12$ καὶ x ἄρτιος$\}$.
Νὰ ἐξετάσετε, ἂν τὸ σύνολον $\Delta = \{A,B,\Gamma\}$ εἶναι μία διαμέρισις τοῦ συνόλου Σ.

**11.** Δίδονται σύνολα:
$\Sigma = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $4 \leqslant x \leqslant 36\}$
$A = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x = 8 + 7\lambda$ καὶ $0 \leqslant \lambda \leqslant 4,\ \lambda \in A_\kappa\}$
$B = \{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x = 4 + 5\lambda$ καὶ $0 \leqslant \lambda < 5,\ \lambda \in A_\kappa\}$
Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον: $\Delta = \{A,B\}$ δὲν εἶναι διαμέρισις τοῦ Σ.

**12.** Ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου π δίδονται δύο εὐθεῖαι $\Delta_1$ καὶ $\Delta_2$, τεμνόμεναι εἰς τὸ I, δηλαδή: $\Delta_1 \frown \Delta_2 = \{I\}$. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον τῶν σημείων, τῶν ἀπεχόντων ἰσάκις τῶν δύο εὐθειῶν, εἶναι ἡ ἕνωσις τῶν δύο εὐθειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τοῦ I: $\Delta_1 \smile \Delta'$ μὲ $\Delta \frown \Delta' = \{I\}$.

**13.** Τί γίνεται τὸ προηγούμενον πρόβλημα, ἐάν:

1) $\Delta_1 \frown \Delta_2 = \varnothing$ 2) $\Delta_1 \frown \Delta_2 = \Delta_1 = \Delta_2$;

**14.** Δίδεται τὸ σύνολον $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ καὶ θεωροῦμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,4,7\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1,2,4,5,6,7,10\}.$$

Νὰ δειχθῇ ὅτι:

1) $A \subset B \Longleftrightarrow C_E^B \subset C_E^A$ καὶ 2) $A \subseteq B \Longleftrightarrow C_E^B \subseteq C_E^A$.

**15.** Ἐὰν $A \subseteq U$ καὶ $B \subseteq U$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$A \dotplus B = C_{(A \smile B)}^{(A \frown B)} = \left[A \frown C_E^B\right] \smile \left[C_E^A \frown B\right].$$

**16.** Νὰ δειχθῇ ὅτι: $B \subset C_E^A \Longleftrightarrow A \subset C_E^B$.

**17.** Ἐὰν

$$A = \{x \in A_\varkappa \mid \text{μὲ } y > 0 \text{ καὶ } x = 2y\}$$
$$B = \{x \in A_\varkappa \mid \text{μὲ } y > 0 \text{ καὶ } x = 2y - 1\}$$
$$\Gamma = \{x \in A_\varkappa \mid x < 10\},$$

νὰ καθορισθοῦν καὶ διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

1) $\overline{A}$ 3) $A - \Gamma$

2) $\overline{A \smile B}$ 4) $\Gamma - (A \smile B)$.

**18.** Ἐὰν $A \subseteq A_\varkappa^+$, $B \subseteq A_\varkappa^+$, $\Gamma \subseteq A_\varkappa^+$ καί:

$$A = \{x \in A_\varkappa^+ \mid \text{διὰ μερικὰ } y > 0, \ x = 2y\}, \ y \in A_\varkappa \}$$
$$B = \{x \in A_\varkappa^+ \mid \text{διὰ » } y > 0, \ y \in A_\varkappa, \ x = 2y + 1\}$$
$$\Gamma = \{x \in A_\varkappa^+ \mid \text{διὰ » } y > 0, \ y \in A_\varkappa, \ x = 3y\},$$

νὰ καθορισθοῦν διὰ πλήρους ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τὰ σύνολα:

1) $A \frown \Gamma$ 3) $B - \Gamma$ 5) $(A \frown B) \smile (A \frown \Gamma)$.

2) $B \smile \Gamma$ 4) $A \frown (B \smile \Gamma)$

καὶ ἀκολούθως νὰ συγκριθοῦν τὰ δύο τελευταῖα.

**19.** Νὰ καθορισθοῦν τὰ ἀκόλουθα σύνολα:

1) $\varnothing \frown \{\varnothing\}$ 3) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing$ 5) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\{\varnothing\}\}$.

2) $\{\varnothing\} \frown \{\varnothing\}$ 4) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$

**20.** Ἐὰν $A \subseteq U$,, $B \subseteq U$, $\Gamma \subseteq U$ οὕτως, ὥστε:

$$A \subseteq \overline{B \smile \Gamma} \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq \overline{A \smile \Gamma},$$

νὰ δειχθῇ ὅτι: $B = \varnothing$.

**21.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $\Gamma \subseteq U$ καὶ τοιαῦτα, ὥστε:

$$A \frown B \subseteq \overline{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad A \smile \Gamma \subseteq B,$$

νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A \frown \Gamma = \varnothing$.

**22.** Ἐὰν $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $A \smile B = U$, $A \frown B = \varnothing$, τότε: $B = \overline{A}$.

**23.** Δι᾿ ὅλα τὰ σύνολα A, B, Γ, νὰ δειχθῇ ὅτι:

$$(A - B) - \Gamma = (A - \Gamma) - (B - \Gamma).$$

**24.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $A - B = A \frown \overline{B} = \overline{B} - \overline{A}$.

**25.** Θὰ εἶναι: $A - B = \varnothing$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $A \subseteq B$.

**26.** Θὰ εἶναι: $A - B = B - A$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $A = B$.

**27.** Θὰ εἶναι: $A - B = A$, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν, $A \frown B = \varnothing$.

**28.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $(A - B) \smile (B - A) = (A \smile B) - (A \frown B)$.

**29.** Ὁμοίως ὅτι: $A - (B \smile \Gamma) = (A - B) \frown (A - \Gamma)$.

**30.** Ἐὰν $\beta \in [\alpha]$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $[\beta]=[\alpha]$, ἔνθα $[\alpha]$ εἶναι τὸ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀριθμοῦ α, δηλαδή: $[\alpha]$ εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος δὲν ὑπερβαίνει τὸ α. Π.χ. $[3{,}4]=3$, $[\sqrt{2}]=1$, $[\sqrt{3}]=1$, $[-5{,}2]=-5$, $[9]=9$, $[-3]=-3$, $[-7{,}25]=-8$ κ.ο.κ.

**31.** Ἐὰν $[\alpha] \frown [\beta]=\varnothing$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $[\alpha]=[\beta]$.

**32.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ τυχόντα σύνολα: $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ ἔνθα εἶναι: $(\nu \geqslant 2$ καὶ $\nu \in \Phi)$, ὑφίσταται ἡ ἰσότης:

$$A_1 \smile A_2 \smile A_3 \smile \ldots \smile A\nu = (A_1 - A_2) \smile (A_2 - A_3) \smile \ldots \smile (A_{\nu-1} - A_\nu) \smile (A\nu - A_1) \smile (A_1 \frown A_2 \frown A_3 \frown \ldots \frown A\nu)$$

**33.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι διὰ κάθε σύνολον Α θὰ ἀληθεύῃ ἡ σχέσις:

$$A \subseteq \varnothing, \quad \text{ἐὰν} \quad A = \varnothing.$$

## Ἀνακεφαλαίωσις

Ἐξ ὅσων ἐλέχθησαν εἰς τὰς προηγουμένας παραγράφους, πρὸς ἀπομνημόνευσιν τῶν ἀποδειχθέντων νόμων, βάσει τῶν τεθέντων ὅρων καὶ ὁρισμῶν, ἀναγράφομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, περιέχοντα τοὺς ἀποδειχθέντας νόμους τῆς Ἀλγέβρας τῶν Συνόλων, εἰς τὸν ὁποῖον $A \subseteq U \wedge B \subseteq U \wedge \Gamma \subseteq U$ καὶ U εἶναι τὸ κυρίαρχον σύνολον.

| ΝΟΜΟΙ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ | | |
|---|---|---|
| **Ἀποκλειστικότητος** (μονοσήμαντοι) | 1) $A \smile B \subseteq U,\ A=E \wedge B=\Theta \Longrightarrow A\smile B = E\smile\Theta$<br>2) $A \frown B \subseteq U,\ A=E \wedge B=\Theta \Longrightarrow A\frown B = E\frown\Theta$ | |
| **Ἀντιμεταθέσεως** | 3) $A \smile B = B \smile A$<br>4) $A \frown B = B \frown A$ | |
| **Προσεταιριστικοί** | 5) $(A \smile B) \smile \Gamma = A \smile (B \smile \Gamma)$<br>6) $(A \frown B) \frown \Gamma = A \frown (B \frown \Gamma)$ | |
| **Ἐπιμεριστικοί** | 7) $A \frown (B \smile \Gamma) = (A \frown B) \smile (A \frown \Gamma)$<br>8) $A \smile (B \frown \Gamma) = (A \smile B) \frown (A \smile \Gamma)$ | |
| **Ταυτότητος** | 9) $A \smile \varnothing = A$<br>10) $A \frown \varnothing = \varnothing$ | 11) $A \frown U = A$<br>12) $A \smile U = U$ |
| **Αὐτοδυναμίας** | 13) $A \smile A = A$<br>14) $A \frown A = A$ | |
| **Συμπληρώσεως** | 15) $A \smile \overline{A} = U$<br>16) $A \frown \overline{A} = \varnothing$ | 17) $\overline{(\overline{A})} = A$ |
| **Αὐτοεπιμεριστικοί** | 18) $A \smile (B \smile \Gamma) = (A \smile B) \smile (A \smile \Gamma)$<br>19) $A \frown (B \frown \Gamma) = (A \frown B) \frown (A \frown \Gamma)$ | |
| **Ἀπορροφήσεως** | 20) $A \smile (A \frown B) = A$<br>21) $A \frown (A \smile B) = A$ | |
| **de Morgan's** | 22) $\overline{(A \smile B)} = \overline{A} \frown \overline{B}$<br>23) $\overline{(A \frown B)} = \overline{A} \smile \overline{B}$ | |

# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ V.

# ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΑ ΖΕΥΓΗ

**68. Ἡ ἔννοια τοῦ διατεταγμένου ζεύγους.** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\frac{x}{y}$ (ἔνθα $y \neq 0$ καὶ $x \in \Phi_0$, $y \in \Phi$). Εἰς τοῦτο διαβάζομεν πρῶτον τὸν ἀριθμητὴν καὶ κατόπιν τὸν παρονομαστὴν καὶ γράφομεν συμβολικά:

$$(x, y).$$

β). Εἰς τὸν χαρτοφύλακά μας ἔχομεν δύο βιβλία: Τὴν Ἄλγεβραν καὶ τὴν Γεωμετρίαν. Ἂς παραστήσωμεν τὴν Ἄλγεβραν μὲ α καὶ τὴν Γεωμετρίαν μὲ β. Ἂν μᾶς ζητήσουν νὰ βγάλωμεν ἀπὸ τὸν χαρτοφύλακα τὰ δύο αὐτὰ βιβλία, εἶναι δυνατὸν νὰ βγάλωμεν πρῶτον τὴν Ἄλγεβραν καὶ δεύτερον τὴν Γεωμετρίαν ἢ νὰ βγάλωμεν πρῶτον τὴν Γεωμετρίαν καὶ κατόπιν τὴν Ἄλγεβραν. Δηλαδὴ εἶναι δυνατὸν νὰ παρουσιάσωμεν τὰ δύο αὐτὰ στοιχεῖα κατὰ δύο τρόπους: 1) *τὸ α πρῶτον καὶ τὸ β δεύτερον*. 2) *τὸ β πρῶτον καὶ τὸ α δεύτερον*.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, συμβολικά, θὰ σημειώνωμεν (α,β) καὶ εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν θὰ σημειώνωμεν (β,α).

Τὸ σύμβολον $(x,y)$ ἢ τὸ (α,β) λέγεται ***διατεταγμένον ζεῦγος*** καὶ τὸ μὲν στοιχεῖον x λέγεται ***πρῶτον*** μέλος, τὸ δὲ y ***δεύτερον*** μέλος. Ἔχει δὲ μεγάλην σημασίαν, ποῖον εἶναι τὸ πρῶτον μέλος καὶ ποῖον τὸ δεύτερον.

Διότι εἶναι:

$$\left.\begin{array}{ll} (x,y) \neq (y,x), & \text{ἐκτὸς ἐὰν } x = y \\ (\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha), & \text{» » } \alpha = \beta \end{array}\right\}$$

Ὁμοίως: $(2,5) \neq (5,2)$, διότι $2 \neq 5$

$(3,4) \neq (3,6)$, » $4 \neq 6$

$(8,9) \neq (10,9)$, » $8 \neq 10$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Ἕνα ζεῦγος ἀντικειμένων (στοιχείων), εἰς τὸ ὁποῖον γνωρίζομεν καλῶς ποῖον προηγεῖται καὶ ποῖον ἕπεται, ὀνομάζεται διατεταγμένον ζεῦγος.***

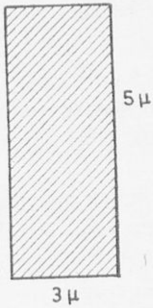
Θὰ εἶναι $(\alpha,\beta) = (x,y)$ ὅταν, καὶ μόνον ὅταν, $\alpha = x$ καὶ $\beta = y$.

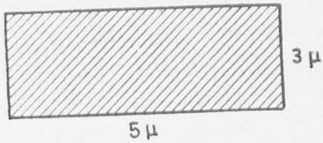
Οὕτω, ἐὰν $(x,y) = (3,8)$, τότε $x = 3$ καὶ $y = 8$.

Τὸ (α,β) διαβάζεται: «*τὸ διατεταγμένον ζεῦγος ἄλφα βῆτα*».

Τὸ ὅτι $(3,5) \neq (5,3)$, φαίνεται ἀπὸ τὸ ἑξῆς παράδειγμα. Ἂς φαντασθῶμεν ὅτι τὸ ζεῦγος (3,5) παριστᾷ τὰς διαστάσεις τῆς προσόψεως μιᾶς οἰκίας μὲ πρῶτον στοιχεῖον τὸ μῆκος 3μ. καὶ δεύτερον στοιχεῖον τὸ ὕψος 5μ., τότε τὸ δεύτερον ζεῦγος (5,3) θὰ παριστᾷ τὴν πρόσοψιν μιᾶς ἄλλης οἰκίας μὲ μῆκος 5 μ. καὶ ὕψος 3 μ. καὶ παρατηροῦμεν ἐκ τοῦ (σχ. 44), ὅτι αἱ προσόψεις τῶν δύο οἰκιῶν εἶναι ἐντελῶς διάφοροι.

*ΣΗΜ:* Εἶναι γνωστὸν ὅτι: $\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\alpha\}$, ἀλλὰ $(\alpha,\beta) \neq (\beta,\alpha)$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ $(\alpha,\beta)$ εἶναι διαφορετικῆς φύσεως ἀπὸ τὸ $\{\alpha,\beta\}$.




Σχ. 44

Τὸ διατεταγμένον ζεῦγος $(\alpha,\beta)$ δύναται νὰ ὁρισθῇ ὑπὸ τῆς ἀκολούθου σχέσεως:

$$(\alpha,\beta) \equiv \{\{\alpha\}, \{\alpha,\beta\}\}.$$

Διατεταγμένα ζεύγη δύνανται νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ στοιχεῖον ὡς πρῶτον καὶ δεύτερον, καθὼς τά: (1,1), (4,4), (10,10), (7,7).

Ἐπίσης: $(5,6) = (7-2,\ 4+2)$, διότι $5 = 7-2$ καὶ $6 = 4+2$

$(2,3) = (6:3,\ 8-5)$, διότι $2 = 6:3$ καὶ $3 = 8-5$.

Εἶναι δὲ δυνατὸν νὰ σχηματίσωμεν σύνολον, τοῦ ὁποίου τὰ στοιχεῖα νὰ εἶναι διατεταγμένα ζεύγη ὑπὸ ὡρισμένην συνθήκην ἢ ἀναγραφήν.

Ἔστωσαν τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$(2,3),\quad (4,9),\quad (8,27),\quad (16,81),$$

εἰς τὰ ὁποῖα τὸ πρῶτον μέλος ἑκάστου εἶναι ***διπλάσιον*** τοῦ ἀντιστοίχου προηγουμένου καὶ τὸ δεύτερον μέλος εἶναι ***τριπλάσιον*** τοῦ ἀντιστοίχου μέλους τοῦ προηγουμένου ζεύγους.

Ἔχομεν οὕτω τὸ σύνολον: $A = \{(2,3),\ (4,9),\ (8,27),\ (16,81)\}$.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐὰν $(3x+4y, -8) = (26,\ x-2y)$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x καὶ y.

**2.** Ἐὰν $A = \{1,2,3,4,5\}$, νὰ εὑρεθοῦν ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in A$, $y \in A$ καὶ $x < y$ ἢ $x + y = 6$, ἢ $x - y = 2$.

**3.** Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $A = \{1,2,3\}$ καὶ $B = \{1,3,4\}$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x, y) μὲ $x \in A$, $y \in B$ καὶ $x^2 = y$.

**4.** Ἐὰν $((x, y), \omega) = (2, (4,6))$, νὰ εὑρεθοῦν οἱ x, y, ω.

**5.** Ἐὰν $(x+y, 1) = (3, x-y)$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x καὶ y.

**6.** Ἐὰν $(x-1, y+3) = (y-4, 2x+3)$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ x καὶ y.

**69. Προσδιορισμὸς τῆς θέσεως σημείου ἐπὶ ἐπιπέδου.** Εἰς τὴν § 35 εἴδομεν ὅτι εἰς ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἄξονος x'Ox ἀντιστοιχεῖ ἕνας, καὶ μόνον ἕνας, πραγματικὸς ἀριθμὸς καὶ ἀντιστρόφως: Εἰς ἕκαστον πραγματικὸν ἀριθμὸν ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον τοῦ ἄξονος x'Ox. Τὸ σημεῖον τοῦτο καλεῖται ***εἰκὼν*** τοῦ δοθέντος πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἤδη θὰ ἀναζητήσωμεν, ἂν ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος $(\alpha,\beta)$ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καὶ β παριστᾷ ἕνα ὡρισμένον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου καὶ μόνον ἕνα:

Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου χαράσσομεν δύο εὐθείας καθέτους x'Ox καὶ y'Oy, τεμνομένας εἰς τὸ σημεῖον O. Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι $\overrightarrow{O\Theta}$ εἶναι τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα τοῦ ἄξονος x΄Ox καὶ $\overrightarrow{OH}$ τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα ἐπὶ τοῦ ἑτέρου ἄξονος y΄Oy.

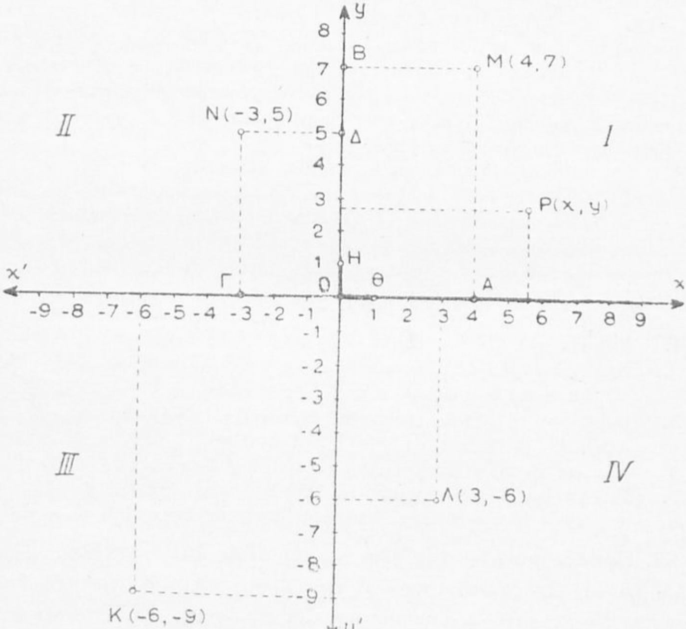
Ὑποθέτομεν, ἐπίσης, ὅτι τὰ μοναδιαῖα ταῦτα διανύσματα ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, δηλαδή:

$$\overline{O\Theta} = 1 \quad \text{καὶ} \quad \overline{OH} = 1.$$

Δύναται ὅμως νὰ ἔχουν καὶ διαφορετικὸν μέτρον.

Ἐπειδὴ οἱ ἄξονες x΄Ox καὶ y΄Oy εἶναι κάθετοι, λέγονται ***ὀρθογώνιοι ἄξονες.***

Ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Ox, ἔστω ἕνα σημεῖον A, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη εἶναι 4 καὶ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄Oy, ἔστω ἕνα ἄλλο σημεῖον B, τοῦ ὁποίου ἡ τετμημένη ἂς εἶναι 7. Ἐκ τοῦ A ἄγομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα y΄Oy καὶ ἐκ τοῦ B τὴν παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα x΄Ox, ἥτις τέμνει τὴν προηγουμένην εἰς τὸ σημεῖον M, τὸ ὁποῖον εἶναι ἕνα καὶ μόνον.




Σχ. 45.

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι, εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (4,7) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον M ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ σημεῖον M καλεῖται ***εἰκὼν*** τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (4,7), ὡς πρὸς τὸ σύστημα τῶν ὀρθογωνίων ἀξόνων x΄Ox καὶ y΄Oy.

***Ἀντιστρόφως:*** Ἔστω N τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων.

Ἐκ τοῦ N ἄγομεν τὰς καθέτους NΓ καὶ NΔ πρὸς τοὺς ἄξονας x΄Ox καὶ y΄Oy ἀντιστοίχως. Ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τοῦ ἄξονος x΄Ox θὰ εἶναι ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς x. Εἰς τὸ σχῆμα μας εἶναι :

$$x = \overline{O\Gamma} = -3.$$

Ἡ τετμημένη y τοῦ σημείου Δ ἐπὶ τοῦ ἄξονος y΄Oy θὰ εἶναι πάλιν ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς y. Εἰς τὸ σχῆμα μας εἶναι :

$$y = \overline{O\Delta} = 5.$$

Οὕτω, εἰς τὸ σημεῖον N ἀντιστοιχεῖ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος (x,y), εἰς τὸ σχῆμα μας τὸ (—3,5) καὶ ἕνα μόνον.

Ὁμοίως εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (—6, —9) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον K τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως : εἰς τὸ σημεῖον K ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, διατεταγμένον ζεῦγος (—6, —9).

Ὁμοίως, εἰς τὸ διατεταγμένον ζεῦγος (3, —6) ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, σημεῖον Λ τοῦ ἐπιπέδου, ὁριζόμενον, ὡς ἀνωτέρω ἐξετέθη, καὶ ἀντιστρόφως : εἰς τὸ δοθὲν σημεῖον Λ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ζεῦγος, τὸ (3, —6).

Βλέπομεν λοιπὸν ὅτι τῇ βοηθείᾳ τῶν ἀξόνων x΄Ox καὶ y΄Oy ἀποκαθίσταται μία πλήρης ἀντιστοιχία, ἕνα πρὸς ἕνα, τοῦ συνόλου τῶν ζευγῶν (x, y) καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου. Ἕκαστον δὲ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνός, καὶ μόνον ἑνός, διατεταγμένου ζεύγους.

Τὸ πρῶτον στοιχεῖον x (ἀριθμὸς) τοῦ ζεύγους (x, y) ὀνομάζεται ***τετμημένη*** τοῦ σημείου P. Τὸ δεύτερον στοιχεῖον (ἀριθμὸς) y τοῦ ζεύγους λέγεται ***τεταγμένη*** τοῦ σημείου P.

Ἀμφότεροι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x καὶ y, τοῦ ζεύγους (x, y), ὀνομάζονται ***συντεταγμέναι*** τοῦ σημείου P.

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν ὅτι αἱ συντεταγμέναι τοῦ σημείου P εἶναι x καὶ y, γράφομεν συμβολικῶς : P (x, y).

Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς O τῶν ἀξόνων x΄Ox καὶ y΄Oy ὀνομάζεται ***ἀρχὴ τῶν συντεταγμένων.***

Ὁ ἄξων x΄Ox καλεῖται ***ἄξων τῶν τετμημένων*** ἢ ἄξων τῶν x, καὶ ὁ μὲν Ox καλεῖται ***θετικὸς ἡμιάξων*** τῶν x, ὁ δὲ Ox΄ καλεῖται ***ἀρνητικὸς ἡμιάξων*** τῶν x. Ὁ ἄξων x΄Ox καλεῖται καὶ ***πρῶτος ἄξων.***

Ὁ ἄξων y΄Oy καλεῖται ***ἄξων τῶν τεταγμένων*** ἢ ἄξων τῶν y, καὶ ὁ μὲν Oy καλεῖται ***θετικὸς ἡμιάξων*** τῶν y, ὁ δὲ Oy΄ καλεῖται ***ἀρνητικὸς ἡμιάξων*** τῶν y. Ὁ ἄξων y΄Oy καλεῖται καὶ ***δεύτερος ἄξων.***

Αἱ συντεταγμέναι x καὶ y τοῦ σημείου P λέγονται καὶ Καρτεσιαναὶ συντεταγμέναι, πρὸς τιμὴν τοῦ Γάλλου μαθηματικοῦ καὶ φιλοσόφου ***Descartes***, ὅστις ἐπενόησε τοὺς ἄξονας.

Οἱ ὀρθογώνιοι ἄξονες χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς τέσσαρας διαδοχικὰς ὀρθὰς γωνίας, τάς :

$$xOy, \quad yOx', \quad x'O'y, \quad y'Ox.$$

Αὗται ὀνομάζονται κατὰ σειρὰν (I) ***πρώτη*** γωνία τῶν ἀξόνων, (II) ***δευτέρα*** γωνία, (III) ***τρίτη*** γωνία καὶ (IV) ***τετάρτη*** γωνία.

Ἐὰν ἕνα σημεῖον M κεῖται εἰς τὴν πρώτην γωνίαν, αἱ συντεταγμέναι του x, y εἶναι ***θετικαί***, δηλαδή: $\boxed{x > 0,\ y > 0}$.

Ἐὰν ἕνα σημεῖον N κεῖται εἰς τὴν δευτέραν γωνίαν τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι του εἶναι ἑτερόσημοι, ***ἀρνητικὴ*** ἡ τετμημενη x καὶ ***θετικὴ*** ἡ τεταγμένη y, δηλαδή: $\boxed{x > 0,\ y > 0}$.

Ἐὰν ἕνα σημεῖον K κεῖται εἰς τὴν τρίτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι του εἶναι ***ἀρνητικαί***, δηλαδή: $\boxed{x < 0,\ y < 0}$.

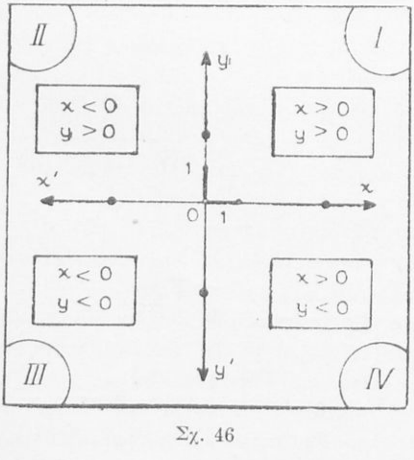
Τέλος, ἐὰν ἕνα σημεῖον Λ κεῖται εἰς τὴν τετάρτην γωνίαν τῶν ἀξόνων, αἱ συντεταγμέναι του εἶναι ἑτερόσημοι, ***θετικὴ*** ἡ τετμημένη x καὶ ***ἀρνητικὴ*** ἡ τεταγμένη y, δηλαδή: $\boxed{x > 0,\ y < 0}$.

Ἐὰν ἕνα σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $x'Ox$, ἡ τεταγμένη του y εἶναι ***μηδέν***, δηλαδή: $\boxed{y = 0}$.

Ἐὰν ἕνα σημεῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος $y'Oy$, ἡ τετμημένη του x εἶναι ***μηδέν***, δηλαδή: $\boxed{x = 0}$.

Αἱ συντεταγμέναι τῆς ἀρχῆς O τῶν ἀξόνων εἶναι: $\boxed{x = 0,\ y = 0}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα τοῦ προσήμου τῶν συντεταγμένων ἑνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων:




Σχ. 46

$$\forall P \in (I) \iff \left.\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (II) \iff \left.\begin{matrix} x < 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (Ox) \iff \left.\begin{matrix} x > 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (Ox') \iff \left.\begin{matrix} x < 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (III) \iff \left.\begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (IV) \iff \left.\begin{matrix} x > 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (Oy) \iff \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\forall P \in (Oy') \iff \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\text{καὶ } \forall P \equiv O \iff \left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$$

**70. Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα.** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον $U = \{3,5\}$. Ἐκ τούτου δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τὰ ἀκόλουθα διατεταγμένα ζεύγη: $(3,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$ καὶ $(5,5)$.

Ἐὰν καλέσωμεν $U \times U$ τὸ σύνολον αὐτῶν, ἤτοι:

$$U \times U = \{(3,3),\ (3,5),\ (5,3),\ (5,5)\}, \qquad (1)$$

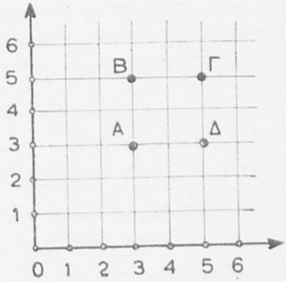
τοῦτο θὰ καλεῖται ***Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα*** ἢ ***Καρτεσιανὸν γινόμενον*** τοῦ συνόλου U.

Τὸ σύμβολον $U \times U$ διαβάζεται: «U ***διασταύρωσις*** U».

Μὲ ἄξονας συντεταγμένων τοὺς Ox καὶ Oy, τὸ ζεῦγος (3,3) ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ σημεῖον A, τὸ ζεῦγος (3,5) ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ σημεῖον B, τὸ ζεῦγος (5,3) ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ σημεῖον Δ καὶ τὸ ζεῦγος (5,5) ἔχει ὡς εἰκόνα τὸ σημεῖον Γ.

Ἔχομεν οὕτω ἀποκαταστήσει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν διατεταγμένων ζευγῶν καὶ τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου xOy.

Τὸ πλῆθος τῶν διατεταγμένων τούτων ζευγῶν εἶναι $2^2 = 4$.




Σχ. 47.

β). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$\Sigma = \{1,2,3,4\}.$$

Ἐκ τούτου, βάσει τοῦ κάτωθεν πίνακος,

$$1 - \begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}(1,1)\\(1,2)\\(1,3)\\(1,4)\end{vmatrix} \quad 2 - \begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}(2,1)\\(2,2)\\(2,3)\\(2,4)\end{vmatrix} \quad 3 - \begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}(3,1)\\(3,2)\\(3,3)\\(3,4)\end{vmatrix} \quad 4 - \begin{vmatrix}1\\2\\3\\4\end{vmatrix} \to \begin{vmatrix}(4,1)\\(4,2)\\(4,3)\\(4,4)\end{vmatrix}$$

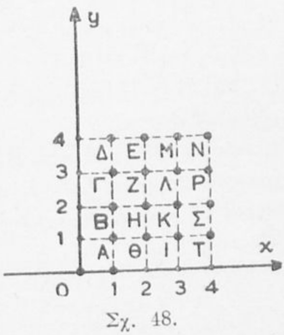
σχηματίζομεν τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$\left.\begin{array}{llll}(1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4)\\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,4)\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{llll}(3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4)\\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4)\end{array}\right\}$$

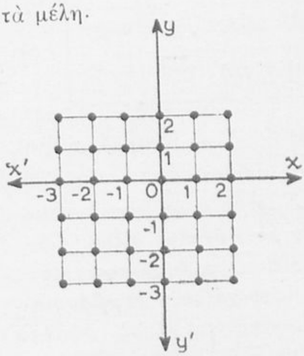
καὶ ἐκ τούτων τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα:

$$\Sigma \times \Sigma = \{(11,),\ (1,2), \dots, (4,3),\ (4,4)\},$$

εἰς τὸ ὁποῖον δὲν ἔχουν ἀναγραφῆ ὅλα τὰ μέλη.




Σχ. 48.




Σχ. 49.

Τὸ πλῆθος τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ $\Sigma \times \Sigma$ εἶναι: $4 \cdot 4 = 4^2 = 16$.

Ἐὰν τὸ σύνολον Ρ ἔχῃ τρία στοιχεῖα, τὸ Ρ×Ρ θὰ περιέχῃ ὡς στοιχεῖα $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ διατεταγμένα ζεύγη.

Ἐὰν τὸ σύνολον $\Sigma_1$ περιέχῃ ν στοιχεῖα, τότε τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα $\Sigma_1 \times \Sigma_1$ θὰ περιέχῃ ὡς στοιχεῖα $\nu \cdot \nu = \nu^2$ διατεταγμένα ζεύγη.

Αἱ εἰκόνες τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ Σ×Σ εἶναι τὰ σημεῖα:

Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι, Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ, Τ

τοῦ (σχ. 48), τὰ ὁποῖα εὑρίσκονται κατὰ τὰ γνωστά.

γ). 1). **Ἐὰν $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$, νὰ παρασταθοῦν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τὰ σημεῖα ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ U×U.**

| | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −3 | (−3, −3 | (−3, −2) | (−3, −1) | (−3, 0) | (−3, 1) | (−3, 2) |
| −2 | (−2, −3) | (−2, −2) | (−2, −1) | (−2, 0) | (−2, 1) | (−2, 2) |
| −1 | (−1, −3) | (−1, −2) | (−1, −1) | (−1, 0) | (−1, 1) | (−1, 2) |
| 0 | (0, −3) | (0, −2) | (0, −1) | (0, 0) | (0, 1) | (0, 2) |
| 1 | (1, −3) | (1, −2) | (1, −1) | (1, 0) | (1, 1) | (1, 2) |
| 2 | (2, −3) | (2, −2) | (2, −1) | (2, 0) | (2, 1) | (2, 2) |

Ἡ ἀπεικόνισις τῶν $6 \cdot 6 = 6^2 = 36$ στοιχείων τοῦ U×U δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 49) τῆς προηγουμένης σελίδος.

Τὸ U×U ὀνομάζεται ***τετράγωνον*** τοῦ U καὶ συμβολίζεται ὡς ἑξῆς:

$$U \times U = U^2.$$

δ). Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{4, 5, 6, 7\}.$$

| | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| α | (α,4) | (α,5) | (α,6) | (α,7) |
| β | (β,4) | (β,5) | (β,6) | (β,7) |
| γ | (γ,4) | (γ,5) | (γ,6) | (γ,7) |

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη μὲ πρῶτον στοιχεῖον ἐκ τοῦ Α καὶ δεύτερον ἐκ τοῦ Β εὑρίσκονται, ὅπως φαίνεται ἐκ τοῦ ἔναντι ἀριστερὰ πίνακος, καὶ εἶναι $3 \cdot 4 = 12$ κατὰ τὸ πλῆθος. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα τῶν Α καὶ Β εἶναι τό:

$$A \times B = \{(\alpha,4),(\alpha,5),(\alpha,6),(\alpha,7),(\beta,4), \beta,5),(\beta,6),(\beta,7),(\gamma,4),(\gamma,5),(\gamma,6),(\gamma,7)\}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα δύο μὴ κενῶν συνόλων Α καὶ Β λέγεται τὸ σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y), εἰς τὰ ὁποῖα τὸ πρῶτον στοιχεῖον x λαμβάνεται ἐκ τοῦ Α καὶ τὸ δεύτερον στοιχεῖον y λαμβάνεται ἐκ τοῦ Β.***

*Παρατηρήσεις:* 1). Ἐὰν τὸ ἓν ἐκ τῶν δύο συνόλων Α καὶ Β, ἔστω τὸ Β, εἶναι τὸ ∅, τότε, προφανῶς, θὰ ἔχωμεν:

| $A \times \varnothing = \varnothing$ | $\varnothing \times A = \varnothing$ | $\varnothing \times \varnothing = \varnothing$ |
|---|---|---|

**2). Ἐὰν $A = \{\alpha,\beta\}$ καὶ $B = \{x,y\}$ καὶ $A \times B = B \times A$, τότε: $A = B$.**

Πράγματι, εἶναι:

$A \times B = \{(\alpha,x), (\alpha,y), (\beta,x), (\beta,y)\}$, $\quad B \times A = \{(x,\alpha), (y,\alpha), (x,\beta), (y,\beta)\}$.

Ἐπειδὴ δὲ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A \times B = B \times A$, τὰ σύνολα ταῦτα θὰ περιέχουν τὰ αὐτὰ στοιχεῖα. Ἕκαστον δηλαδὴ ἀπὸ τὰ ζεύγη:

$$(\alpha,x),\ (\alpha,y),\ (\beta,x),\ (\beta,y),$$

πρέπει νὰ ἔχῃ, ἀντιστοίχως, καὶ ἕνα ἴσον του ἀπὸ τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$(x,\alpha),\ (y,\alpha),\ (x,\beta),\ (y,\beta).$$

Αὐτὸ ὅμως θὰ συμβαίνῃ μόνον, ὅταν:

$$\alpha = x \text{ καὶ } \beta = y \quad \text{ἢ} \quad \alpha = y \text{ καὶ } \beta = x.$$

Ἀλλὰ τότε, ὡς γνωστόν, θὰ εἶναι καί:

$$\{x,y\} = \{\alpha,\beta\} \quad \text{ἢ} \quad A = B,$$

καὶ ἀντιστρόφως, ἂν $A = B$, τότε: $A \times B = B \times A$.

3). **Εἶναι $A \times B \neq B \times A$.** Τοῦτο φαίνεται ἀμέσως ἀπὸ τὰ διατεταγμένα ζεύγη τῶν συνόλων τούτων, εἰς τὰ ὁποῖα διαφέρει ἡ σειρὰ τῶν στοιχείων. Διότι, τὸ μὲν $A \times B$ περιέχει ὡς στοιχεῖα τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$(\alpha,x),\quad (\alpha,y),\quad (\beta,x),\quad (\beta,y),$$

τὸ δὲ $B \times A$ περιέχει ὡς στοιχεῖα τὰ διατεταγμένα ζεύγη:

$$(x,\alpha),\quad (y,\alpha),\quad (x,\beta),\quad (y,\beta),$$

τὰ ὁποῖα εἶναι διάφορα τῶν προηγουμένων, δηλαδή: $(\alpha,x) \neq (x,\alpha)$.

Ἡ παρατήρησις αὕτη ἰσχύει δι᾽ ὁσαδήποτε σύνολα, μὲ πεπερασμένον πλῆθος στοιχείων ἢ μὲ ἄπειρον πλῆθος στοιχείων. Ὥστε:

***Εἰς τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα δὲν ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.***

Τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα $A \times B$ συμβολικῶς παρίσταται καὶ ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{A \times B = \{(\alpha,\beta) \mid \forall\, \alpha \in A,\ \ \forall\, \beta \in B\}}\,.$$

**71. Ἕνωσις δύο συνόλων, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἶναι διατεταγμένα ζεύγη.** Ἔστωσαν τὰ δύο σύνολα:

$$\Sigma_1 = \{(3,4),\quad (1,2),\quad (2,3)\}$$
$$\Sigma_2 = \{(1,2),\quad (2,1),\quad (3,4)\}.$$

Θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὴν § 47, ὅτι:

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 = \{(1,2),\ (2,3),\ (2,1),\ (3,4)\}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα τῆς ἑνώσεως τῶν συνόλων $\Sigma_1$ καὶ $\Sigma_2$ εἶναι πάλιν διατεταγμένα ζεύγη. Ὁμοίως θὰ εἶναι:

$$\{(\alpha,1)\ (\beta,2)\} \cup \{(2,3),\ (\alpha,1)\} = \{(\alpha,1),\ (\beta,2),\ (2,3)\}.$$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐὰν $A = \{\alpha,\beta\}$, $B = (2,3)$ καὶ $\Gamma = (3,4)$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ σύνολα:

1) $A \times (B \cup \Gamma)$   3) $A \times (B \cap \Gamma)$

2) $(A \times B) \cup (A \times \Gamma)$   4) $(A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.

**2.** Ἐὰν $A \subset B$ καὶ $\Gamma \subset \Delta$, νὰ δειχθῇ ὅτι :

$$(A \times \Gamma) \subset (B \times \Delta).$$

**3.** Ἐὰν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$ καὶ $\Gamma = \{3,4,5\}$, νὰ εὑρεθῇ τό :

$$\Sigma = A \times B \times \Gamma.$$

**4.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι : $A \times (B \cap \Gamma) = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$.

**5.** Ἐὰν $\Sigma = \{\alpha, \beta\}$, $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,5,7,9\}$, εὕρετε τό :

$$\Sigma_1 = (\Sigma \times A) \cap (\Sigma \times B).$$

**6.** Νὰ γίνῃ τὸ διάγραμμα τοῦ γινομένου :

$$\{x \mid 1 \leqslant x < 4\} \times \{x \mid -2 \leqslant x \leqslant 3\}.$$

**7.** Ἐὰν $A = B \cap \Gamma$, ποία τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθής ;

1) $A \times A = (B \times B) \cap (\Gamma \times \Gamma)$

2) $A \times A = (B \times \Gamma) \cap (\Gamma \times B)$.

**8.** Ἕνα σύνολον A περιέχει 2 στοιχεῖα καὶ ἕνα ἄλλο B περιέχει 4 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ σύνολον $A \times B$ ;

**9.** Ἕνα σύνολον A περιέχει μ στοιχεῖα κοὶ ἕνα ἄλλο B περιέχει ν στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ σύνολον $A \times B$ ;

**10.** Τὸ σύνολον $A \times B$ περιέχει 6 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα ἔχει ἕκαστον τῶν συνόλων A καὶ B ;

**11.** Τὸ σύνολον $A \times B$ περιέχει 12 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα εἶναι δυνατὸν νὰ περιέχῃ ἕκαστον τῶν A καὶ B ;

**12.** Τὸ σύνολον $A \times B$ περιέχει 11 στοιχεῖα. Πόσα στοιχεῖα περιέχει τὸ A καὶ πόσα τὸ B ;

**13.** Ἐὰν $A \subseteq B$, δείξατε ὅτι :

$$A \times B \subseteq B \times B \quad \text{καὶ} \quad A \times A \subseteq A \times B.$$

**14.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι :

1) $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

2) $A \times (B \cap \Gamma = (A \times B) \cap (A \times \Gamma)$

3) $(A \cup B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cup (B \times \Gamma)$

4) $(A \cap B) \times \Gamma = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Gamma)$.

**15.** Ἐὰν $E = \{1,2,3,\ldots,12\}$ καὶ $A = \{2,4,6\ldots,12\}$, $B = \{4,5,6,7,8\}$, νὰ συγκριθοῦν τὰ σύνολα :

1) $A \times B$ 2) $C_E^{(A \times B)}$ 3) $A \times C_E^B$ 4) $C_E^A \times C_E^B$.

**16.** Ἐὰν $E = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4\}$, νὰ συγκριθοῦν τά :

1) $\Sigma = C_{(E \times E)}^{(A \times B)}$ 2) $Z = C_E^A \times C_E^B$ 3) $H = B \times C_E^A$ 4) $\Theta = A \times C_E^B$.

**72. Τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα ὡς ἕνωσις συνόλων.** Ἂς λάβωμεν τὰ σύνολα :

| | 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|---|
| α | (α,1) | (α,2) | (α,3) | $A_1$ |
| β | (β,1) | (β,2) | (β,3) | $B_1$ |

$$\Sigma_1 = \{\alpha, \beta\} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma_2 = \{1,2,3\}$$

καὶ ἂς σχηματίσωμεν ὅλα τὰ διατεταγμένα ζεύγη, ὡς ἐκ τοῦ παραπλεύρως πίνακος φαίνεται, καὶ ἔστω ὅτι: $A_1 = \{(\alpha,1), (\alpha,2), (\alpha,3)\}$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς πρώτης σειρᾶς, καί :

$$B_1 = \{(\beta,1), (\beta,2), (\beta,3)\},$$

εἶναι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς δευτέρας σειρᾶς. Θὰ εἶναι:

$$\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\quad (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}. \qquad (1)$$

Ἀλλὰ καί:

$$A_1 \cup B_1 = \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3)\} \cup \{(\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\} =$$
$$= \{(\alpha,1),\ (\alpha,2),\ (\alpha,3),\quad (\beta,1),\ (\beta,2),\ (\beta,3)\}. \qquad (2)$$

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) ἕπεται ὅτι:

$$\boxed{\Sigma_1 \times \Sigma_2 = A_1 \cup B_1}\ .$$

Παρατηροῦμεν δὲ ἐνταῦθα ὅτι τὰ διατεταγμένα ζεύγη (στοιχεῖα) τοῦ $A_1$ σχηματίζονται, ἐὰν συνδέσωμεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον α τοῦ $\Sigma_1$ μὲ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ $\Sigma_2$. Ὁμοίως, τὰ διατεταγμένα ζεύγη (στοιχεῖα) τοῦ $B_1$ σχηματίζονται, ἐὰν συνδέσωμεν τὸ δεύτερον στοιχεῖον β τοῦ $\Sigma_1$ μὲ ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ $\Sigma_2$.

Τὴν μέθοδον ταύτην παριστάνομεν ὡς ἑξῆς:

$$\boxed{\Sigma_1 \times \Sigma_2 = \cup \{x\} \times \Sigma_2}\ ,$$

ἔνθα $x \in \Sigma_1$.

Ἄξιον παρατηρήσεως εἶναι τὸ ὅτι τὰ σύνολα $\{x\} \times \Sigma_2$ εἶναι ξένα πρὸς ἄλληλα, δηλαδὴ δὲν ἔχουν κοινὰ στοιχεῖα.

**73. Τομὴ δύο συνόλων, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἶναι διατεταγμένα ζεύγη.** Ὁ γενικὸς ὁρισμὸς τῆς τομῆς δύο συνόλων, ὁ δοθεὶς εἰς τὴν § 40, ἰσχύει καὶ διὰ τὰ σύνολα, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα εἶναι διατεταγμένα ζεύγη.

Οὕτω, διὰ τὰ σύνολα:

$$\Sigma_1 = \{(\alpha,1),\ (\beta,2),\ (6,7),\ (3,4)$$

καὶ

$$\Sigma_2 = \{(\beta,3),\ (\alpha,1),\ (5,8),\ (3,4),$$

θὰ ἔχωμεν:

$$\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \{(\alpha,1),\ (\beta,2),\ (6,7),\ (3,4)\} \cap \{(\beta,3),\ (\alpha,1),\ (5,8),\ (3,4)\} = \{(\alpha,1),\ (3,4)\}.$$

Ὁμοίως, διὰ τὰ σύνολα:

$$A_1 = \{(1,2),\ (5,6)\} \quad \text{καὶ} \quad A_2 = \{(3,7),\ (2,1),\ (6,5)\},$$

θὰ ἔχωμεν:

$$A_1 \cap A_2 = \{(1,2),\ (5,6)\} \cap \{(3,7),\ (2,1),\ (6,5)\} = \varnothing.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $2^A \cap 2^B = 2^{A \cap B}$.

**2.** Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $2^A \cup 2^B \subset 2^{A \cup B}$.

**3.** Νὰ ἀναγράψετε ἕνα παράδειγμα, εἰς τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι:

$$2^A \cup 2^B \neq 2^{A \cup B}.$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VI

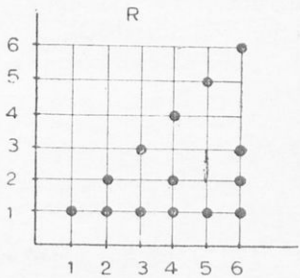
# ΔΙΜΕΛΕΙΣ ΣΧΕΣΕΙΣ

**74. Διμελεῖς σχέσεις.** 1). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον :

$$\Sigma = \{1,2,3,4,5,6\}$$

καὶ ἂς σχηματίσωμεν τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα $\Sigma \times \Sigma$ :

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | (1,6) | (2,6) | (3,6) | (4,6) | (5,6) | **(6,6)** |
| 5 | (1,5) | (2,5) | (3,5) | (4,5) | **(5,5)** | (6,5) |
| 4 | (1,4) | (2,4) | (3,4) | **(4,4)** | (5,4) | (6,4) |
| 3 | (1,3) | (2,3) | **(3,3)** | (4,3) | (5,3) | **(6,3)** |
| 2 | (1,2) | **(2,2)** | (3,2) | **(4,2)** | (5,2) | **(6,2)** |
| 1 | **(1,1)** | **(2,1)** | **(3,1)** | **(4,1)** | **(5,1)** | **(6,1)** |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |




Σχ. 50.

Τοῦ γινομένου τούτου ἀποκαθιστῶμεν μίαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα μεταξὺ τῶν ζευγῶν του, τὴν ἀκόλουθον :

***Τὸ δεύτερον μέλος ἑνὸς ζεύγους νὰ διαιρῇ τὸ πρῶτον.***

Τὰ ζεύγη ταῦτα εἶναι τὰ ἑξῆς :

$$(1,1),\ (2,1),\ (3,1),\ (4,1),\ (5,1),\ (6,1),\ (2,2)$$
$$(4,2),\ (6,2),\ (3,3),\ (6,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6),$$

καὶ ἀποτελοῦν ἕνα νέον σύνολον, τό :

$$R = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1),(2,2),(4,2),(6,2),(3,3),(6,3),(4,4),(5,5),(6,6)\} \quad (1)$$

Τὰ ὑπόλοιπα ζεύγη (στοιχεῖα) τοῦ $\Sigma \times \Sigma$ δὲν ἔχουν τὴν τεθεῖσαν χαρακτηριστικὴν ἰδιότητα, δηλαδή : τὸ δεύτερον μέλος ἑκάστου ζεύγους δὲν διαιρεῖ τὸ πρῶτον.

Ἐὰν παραστήσωμεν διὰ τοῦ (α,β) ἕνα τυχὸν στοιχεῖον τοῦ συνόλου (1), δηλαδὴ $(\alpha,\beta) \in R$, θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα α,β συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R καὶ θὰ γράφωμεν $\alpha R\beta$, ἤτοι :

$$\boxed{\alpha R\beta \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) \in R}$$

Οὕτω, θὰ ἔχωμεν ὅτι : 1R1, 6R2, 4R4, 6R3, κ.ο.κ.

Ὅταν ὅμως τὸ $(\alpha,\beta) \notin R$, θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα α καὶ β δὲν συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως R καὶ θὰ γράφωμεν : α R β, ἤτοι :

$$\boxed{\alpha \ R \ \beta \Longleftrightarrow (\alpha,\beta) \in R}.$$

Οὕτω, θὰ ἔχωμεν ὅτι : 1 R̸ 5, 3 R̸ 4, 2 R̸ 4, 6 R̸ 4, κ.ο.κ.

Τὸ σύνολον R καλεῖται ***διμελὴς σχέσις.***

Προφανῶς, τὸ R εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\Sigma\times\Sigma$, δηλαδή : $R \subseteq (\Sigma \times \Sigma)$.

Εἰς τὸ σύνολον R παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουν στοιχεῖα (ζεύγη), τῶν ὁποίων τὰ μέλη εἶναι ἴσα, ὡς τά :

$$(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4),\ (5,5),\ (6,6).$$

Ὥστε, ἡ ἰσότης $\alpha = \beta$ εἶναι μία διμελὴς σχέσις, εἰς τὴν ὁποίαν, ἀντὶ α R β, γράφομεν $\alpha = \beta$.

Εἰς τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα $\Sigma \times \Sigma$ δυνάμεθα νὰ ἀποκαταστήσωμεν μίαν ἄλλην σχέσιν μεταξὺ τῶν στοιχείων τῶν ζευγῶν του, τὴν ἑξῆς :

***Τὸ ἄθροισμα τῶν μελῶν ἑνὸς ζεύγους νὰ εἶναι 8.***

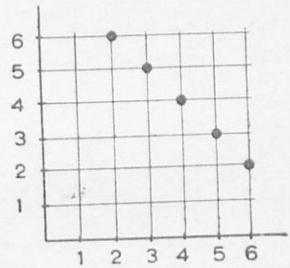
Τοιαῦτα ζεύγη εἶναι τὰ ἀκόλουθα :

$$(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2),$$

καὶ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον :

$$R_1 = \{(2,6),\ (3,5),\ (4,4),\ (5,3),\ (6,2)\}. \qquad (2)$$

Τὸ σύνολον τοῦτο $R_1$ ὀνομάζεται ***διμελὴς σχέσις*** τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $\Sigma \times \Sigma$.




Σχ. 51.

Ὥστε, θὰ ἔχωμεν :

$2R_1 6,\ 3R_1 5,\ 4R_1 4,\ 5R_1 3,\ 6R_1 2,$

ἐνῷ : 1 R̸₁ 2, 4 R̸₁ 6, 6 R̸₁ 6 κ.ο.κ.

2). Ἔστωσαν τὰ δύο μὴ κενὰ σύνολα Α καὶ Β.

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta\}.$$

Θὰ εἶναι :

$$A\times B = \{(1,\alpha),(1,\beta),(2,\alpha),(2,\beta),(3,\alpha),(3,\beta)\}. \ (3)$$

Τὸ ὑποσύνολον αὐτοῦ : $R = \{(1,\alpha),\ (3,\beta),\ (3,\alpha)\}, \qquad (4)$

εἶναι μία διμελὴς σχέσις ἀπὸ τὸ Α εἰς τὸ Β. Δηλαδὴ θὰ ἔχωμεν :

$$1\ R\ \alpha,\quad 3\ R\ \beta,\quad 3\ R\ \alpha,$$

ἐνῷ : 2 R̸ α, 2 R̸ β κ.ο.κ.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς διμελοῦς σχέσεως (1) παρίσταται ὑπὸ τοῦ (σχ. 50), ἡ δὲ τῆς διμελοῦς σχέσεως (2) παρίσταται ὑπὸ τοῦ (σχ. 51).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὁ ἑξῆς ὁρισμός :

***Διμελὴς σχέσις ἐκ τοῦ συνόλου Α εἰς τὸ σύνολον Β καλεῖται κάθε ὑποσύνολον R τοῦ Καρτεσιανοῦ κιγκλιδώματος Α×Β.***

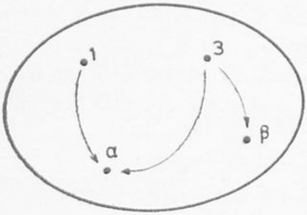
Ὁμοίως : ***Διμελὴς σχέσις εἰς ἓν σύνολον*** $\Sigma \neq \varnothing$ ***καλεῖται πᾶν ὑποσύνολον R τοῦ Καρτεσιανοῦ κιγκλιδώματος*** $\Sigma\times\Sigma$.

Ἡ σχέσις (1) συμβολικῶς γράφεται :

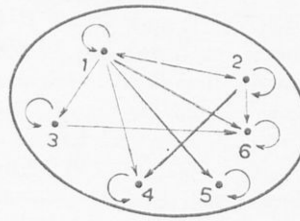
$$R = \{(x,y)\ |\ y \text{ διαιρέτης τοῦ } x\}.$$

Ἡ σχέσις (2) γράφεται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς:

$$R_1 = \{(x,y) \mid x + y = 8\}.$$

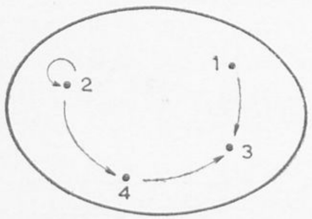



Σχ. 52.




Σχ. 53.

Τὸ διάγραμμα τῆς διμελοῦς σχέσεως (4): $R = \{(1,\alpha)\ (3,\beta),\ (3,\alpha)\}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 52).




Σχ. 54.

Τὸ διάγραμμα τῆς διμελοῦς σχέσεως (1) δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 53).

Τὸ διάγραμμα τῆς διμελοῦς σχέσεως:

$$R = \{(1,3),\ (2,4),\ (4,3),\ (2,2)\},$$

εἰς τὸ σύνολον: $\Gamma = \{1,2,3,4,5,6\}$ δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 54).

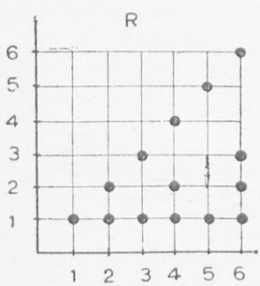
3). Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σύνολον $\Delta = \{1,2,3,4,5,6\}$ καὶ τὰς σχέσεις:

$$R = \{(x,y) \mid y \text{ διαιρέτης τοῦ } x\} \qquad (K)$$

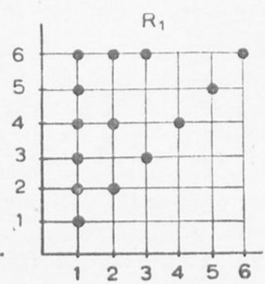
$$R_1 = \{x,y) \mid y \text{ πολλαπλάσιον τοῦ } x\} \qquad (\Lambda)$$

τοῦ Καρτεσιανοῦ κιγκλιδώματος $\Delta \times \Delta$.

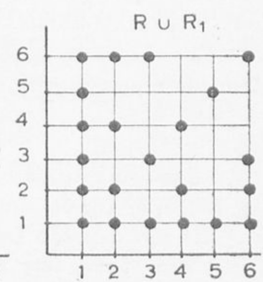
Αἱ γραφικαὶ παραστάσεις αὐτῶν, ἀντιστοίχως, δίδονται ὑπὸ τῶν κάτωθι (σχ. 55 καὶ 56).




Σχ. 55.




Σχ. 56.




Σχ. 57.

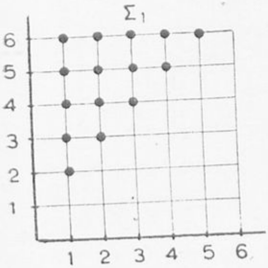
Εἰς τὸ (σχ. 57) ἔχομεν τὴν ἕνωσιν τῶν R καὶ $R_1$, δηλαδὴ τὸ σύνολον:

$$R \cup R_1 = \{(x,y) \mid y \text{ εἶναι διαιρέτης ἢ πολλαπλάσιον τοῦ } x\}.$$

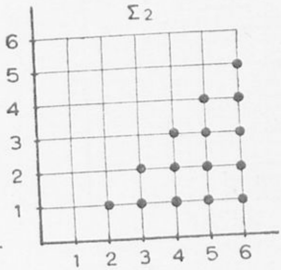
4). Ἂς θεωρήσωμεν πάλιν τὸ σύνολον $\Sigma = \{1,2,3,4,5,6\}$,

καὶ τὰς διμελεῖς σχέσεις: $\Sigma_1 = \{(x,y) \mid y > x\}$, ἔνθα $\Sigma_1 \in (\Sigma \times \Sigma)$
καὶ $\Sigma_2 = \{(x,y) \mid y < x\}$, » $\Sigma_2 \in (\Sigma \times \Sigma)$
καὶ $\Sigma_3 = \{(x,y) \mid y = x\}$, » $\Sigma_3 \in (\Sigma \times \Sigma)$.

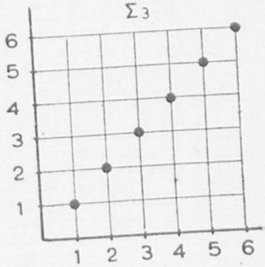
Κατὰ τὰ γνωστά, θὰ ἔχωμεν τὰς ἑξῆς γραφικὰς παραστάσεις αὐτῶν ἀντιστοίχως:




Σχ. 58.

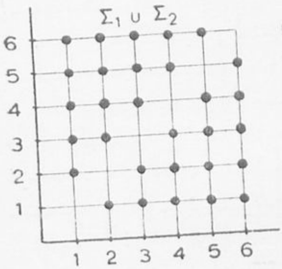



Σχ. 59.

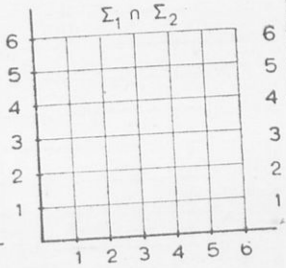



Σχ. 60.

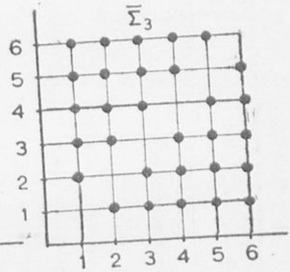
Ἡ γραφικὴ παράστασις τῶν συνόλων: $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, $\overline{\Sigma_3}$




Σχ. 61.

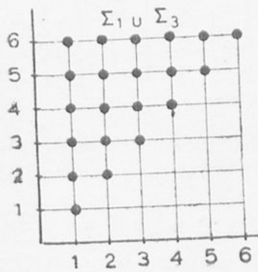



Σχ. 62.

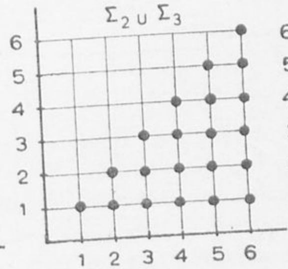



Σχ. 63.

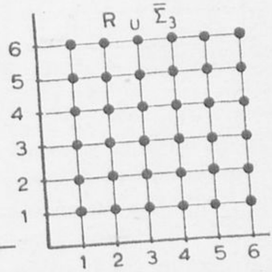
δίδεται ὑπὸ τῶν (σχ. 61, 62, 63) ἀντιστοίχως.




Σχ. 64.




Σχ. 65.

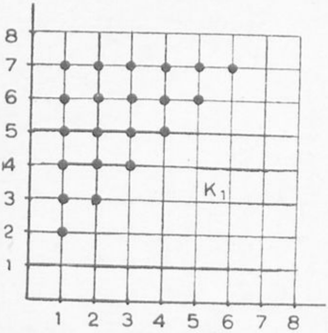



Σχ. 66.

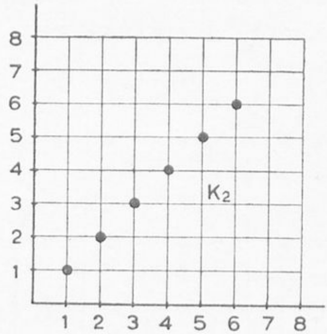
Ἡ δὲ γραφικὴ παράστασις τῶν συνόλων: $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$, $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$, $R \cup \overline{\Sigma_3}$ δίδεται ὑπὸ τῶν (σχ. 64, 65, 66) ἀντιστοίχως:

5). Ἂς θεωρήσωμεν ἤδη τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν :

$$\Phi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\dots\}.$$



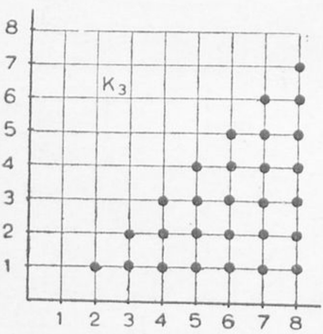

Σχ. 67.



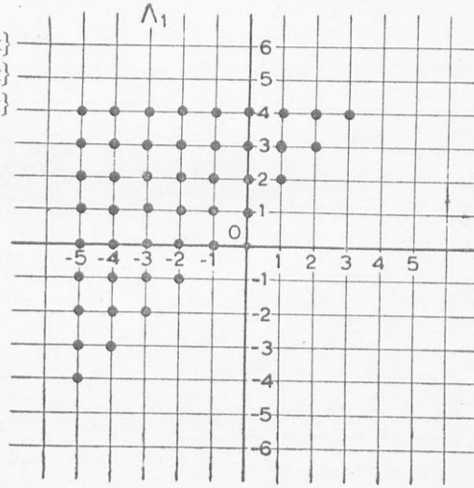

Σχ. 68.

Τοῦ συνόλου τούτου γνωρίζομεν τὸ πρῶτον στοιχεῖον, ἀλλὰ δὲν γνωρίζομεν τὸ τελευταῖον, διότι εἶναι ἀπειροσύνολον. Ἐάν :

$$K_1 = \{(x,y) \in \Phi \times \Phi \mid y > x\}$$
$$K_2 = \{(x,y) \in \Phi \times \Phi \mid y = x\}$$
$$K_3 = \{(x,y) \in \Phi \times \Phi \mid y < x\}$$




Σχ. 69.




Σχ. 70.

τότε, κατὰ τὰ γνωστά, αἱ γραφικαὶ παραστάσεις αὐτῶν, ἀντιστοίχως, δίδονται ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω (σχ. 67, 68, 69).

6). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων :

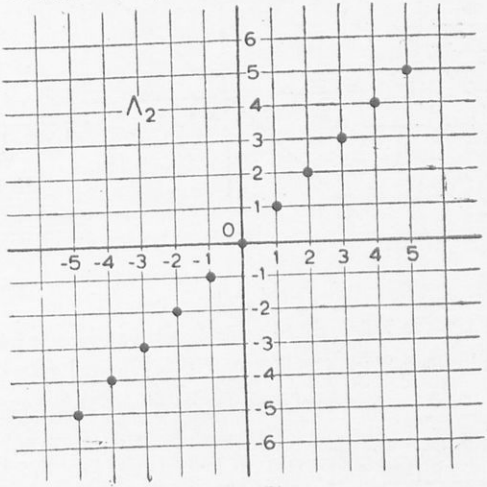
$$A_\varkappa = \{\dots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει οὔτε πρῶτον στοιχεῖον οὔτε τελευταῖον.

Ἂν :

$$\Lambda_1 = \{(x,y) \in A_\varkappa \times A_\varkappa \mid y > x\}$$
$$\Lambda_2 = \{(x,y) \in A_\varkappa \times A_\varkappa \mid y = x\}$$
$$\Lambda_3 = \{(x,y) \in A_\varkappa \times A_\varkappa \mid y < x\}$$

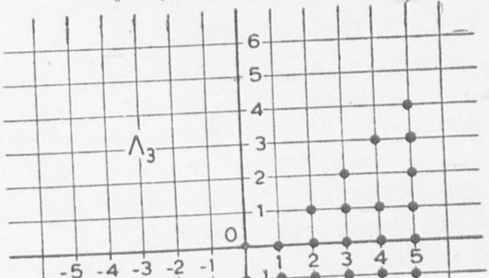
κατὰ τὰ ἀνωτέρω ἐκτεθέντα, αἱ γραφικαὶ αὐτῶν παραστάσεις δίδονται, ἀντιστοίχως, ἀπὸ τὰ (σχ. 70, 71, 72).




Σχ. 71.

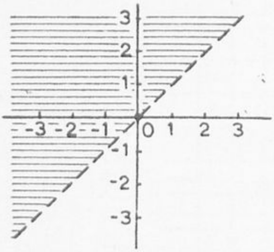
7). Ἐὰν P εἶναι τὸ σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, καί :

$$P_1 = \{(x,y) \in P \times P \mid y > x\}$$
$$P_2 = \{(x,y) \in P \times P \mid y = x\}$$
$$P_3 = \{(x,y) \in P \times P \mid y < x\},$$

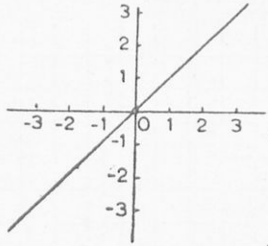



Σχ. 72.

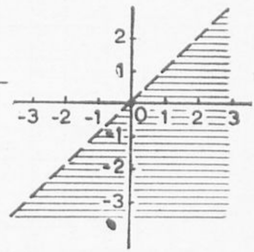
σύμφωνα μὲ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ ἔχωμεν τὰς κάτωθι γραφικὰς παραστάσεις αὐτῶν, ἀντιστοίχως, ὅπως ὑποδεικνύουν τὰ (σχ. 73, 74, 75).




Σχ. 73.




Σχ. 74.




Σχ. 75.

8). Ἄλλος τρόπος παραστάσεως τῆς διμελοῦς σχέσεως δύναται νὰ γίνη μὲ ἕνα πίνακα διπλῆς εἰσόδου. Εἰς τὴν θέσιν τῶν στοιχείων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς σχέσεως σημειώνομεν ἕνα γράμμα ×, ὁπότε ἔχομεν τὴν γραφικὴν ἀπεικόνισιν, ὡς δεικνύει τὸ ἔναντι (σχ. 76), διὰ τὴν σχέσιν (1) τῆς § 74.

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | × | × | × | × | × | × |
| 2 | | × | | × | | × |
| 3 | | | × | | | × |
| 4 | | | | × | | |
| 5 | | | | | × | |
| 6 | | | | | | × |

Σχ. 76.

Εἰς τὰ σχήματα 50, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66 ἡ ἀπεικόνισις τῶν στοιχείων τῶν διαφόρων σχέσεων εἶναι ***πλήρης***, ἐνῷ εἰς τὰ σχήματα 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74 καὶ 75 ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ***ἐλλιπής***.

## Προβλήματα.

**75. Διάφοροι ἄλλαι μαθηματικαὶ σχέσεις.** 1). **Νὰ εὑρεθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς τὸ σύνολον:**

$$\mathbf{R = \{(x,y) \mid y = x + 9} \text{ **καὶ x ἀκέραιος μεταξὺ 0 καὶ 10**}\}. \qquad (1)$$

Οἱ ἀκέραιοι, οἱ μεταξὺ 0 καὶ 10 εἶναι οἱ: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Οὗτοι ἀποτελοῦν τὸ σύνολον: $\Pi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, (2)

τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***περιοχὴ τῆς σχέσεως*** $R$.

Ἐκ τῆς ἀνοικτῆς περιόδου $y = x + 9$, θὰ ἔχωμεν:

Διὰ $x = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = 1 + 9 = 10$
» $x = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = 2 + 9 = 11$
» $x = 3 \quad \Longrightarrow \quad y = 3 + 9 = 12$
» $x = 4 \quad \Longrightarrow \quad y = 4 + 9 = 13$
» $x = 5 \quad \Longrightarrow \quad y = 5 + 9 = 14$
» $x = 6 \quad \Longrightarrow \quad y = 6 + 9 = 15$
» $x = 7 \quad \Longrightarrow \quad y = 7 + 9 = 16$
» $x = 8 \quad \Longrightarrow \quad y = 8 + 9 = 17$
» $x = 9 \quad \Longrightarrow \quad y = 9 + 9 = 18.$

Αἱ τιμαὶ αὗται τοῦ y ἀποτελοῦν ἕνα ἄλλο σύνολον, τό:

$$E = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18\}, \qquad (2')$$

τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται ***ἔκτασις τῆς σχέσεως*** R.

Τὰ διατεταγμένα ζεύγη (x,y) τῆς R εἶναι τὰ ἀκόλουθα:

(1,10), (2,11), (3,12) (4,13), (5,14), (6,15), (7,16), (8,17), (9,18),

καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ πλήρης ἀναγραφὴ τῆς R εἶναι:

$$R = \{(1,10),(2,11),(3,12),(4,13),(5,14),(6,15),(7,16),(8,17),(9,18)\}. \quad (3)$$

Αἱ τιμαὶ τῶν x καὶ y ἀποτελοῦν τὸ σύνολον:

$$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}, \qquad (4)$$

τὸ ὁποῖον καλεῖται ***βασικὸν σύνολον.***

Παρατηροῦμεν λοιπὸν ὅτι ἡ περιοχὴ τῆς σχέσεως R (διὰ τὸν x) εἶναι τὸ σύνολον (2), τῶν πρώτων μελῶν τῶν διατεταγμένων μελῶν τῆς (3), τὸ ὁποῖον καθωρίσθη βάσει τῆς συνθήκης ὅτι: ***ὁ x εἶναι ἀκέραιος μεταξὺ 0 καὶ 9.*** Ἡ ἔκτασις τῆς σχέσεως (διὰ τὸν y) εἶναι τὸ σύνολον (2′) τῶν δευτέρων μελῶν τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς (3), τὸ ὁποῖον καθωρίσθη βάσει τῆς ἀνοικτῆς περιόδου: $y = x + 9$.

Διὰ τὸ σύνολον λοιπὸν (3) παρατηροῦμεν ὅτι εἶναι μία σχέσις, ἡ ὁποία προσδιορίζεται βάσει κανόνος, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ πληροῦν οἱ x καὶ y. Τοῦτον παριστῶμεν διὰ τοῦ K(x,y), ὁ ὁποῖος διαβάζεται: ***κανὼν τῶν x, y.***

Ὥστε, K(x,y) εἶναι: x ἀκέραιος μεταξὺ 0 καὶ 10 ***καὶ*** $y = x + 9$.

Ἀνακεφαλαιοῦντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν τὰ ἑξῆς:

1ον: K(x,y) εἶναι: x ἀκέραιος μεταξὺ 0 καὶ 10 ***καὶ*** $y = x + 9$.

2ον: $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$, ***βασικὸν σύνολ.***

3ον: $\Pi = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, ἔνθα $\Pi \subseteq U$ καὶ $x \in \Pi$.

4ον: $E = \{10,11,12,13,14,15,16,17,18\}$, ἔνθα $E \subseteq U$ καὶ $y \in E$.

5ον: $R = \{(1,10),(2,11),(3,12),(4,13),(5,14),(6,15),(7,16),(8,17),(9,18)\}$,

ἔνθα $R \subseteq U \times U$, δηλαδή: $(x,y) \subseteq U \times U$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως R δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 76), εἰς τὸ ὁποῖον τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ,Η,Θ,Ι, ἀπεικονίζουν τὰ διατεταγμένα ζεύγη τοῦ συνόλου R. Ἀποτελοῦν, δηλαδή, τὰ σημεῖα ταῦτα τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τῆς σχέσεως R.

Ὥστε: Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος K(x,y) εὑρίσκομεν:

1ον: Τὴν περιοχὴν Π τοῦ x.

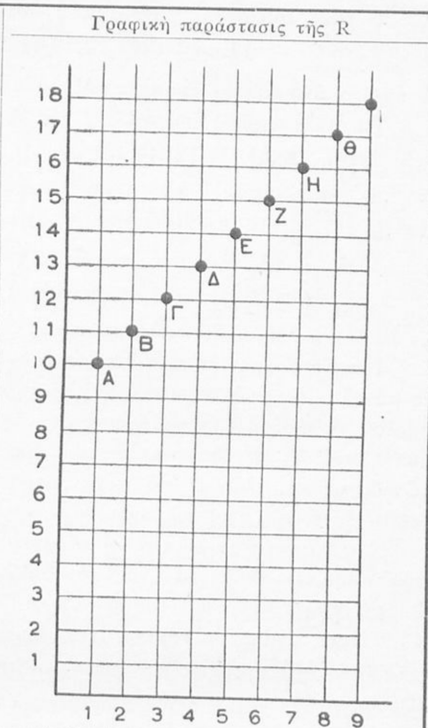
2ον: Τὴν ἔκτασιν E τοῦ y.

3ον: Τὴν $R = \{(x,y) \mid K(x,y),\ x \in \Pi,\ y \in E\}$,

καὶ ἐπὶ πλέον πρέπει νὰ ἀληθεύουν αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις: α) $x \in \Pi$ καὶ $\Pi \subseteq U$, β) $y \in E$ καὶ $E \subseteq U$), γ) $(x,y) \in R$ καὶ $R \subseteq U \times U$.

Τὰ ὅσα ἐλέχθησαν ἀνωτέρω, συνοψίζονται εἰς τὸν ἀκόλουθον πίνακα:

| Στοιχεῖα | Περιοχὴ | Ἔκτασις | Σχέσεις |
|---|---|---|---|
| U | Στοιχεῖα x | Στοιχεῖα y | Στοιχεῖα R (x,y) |
| 1 | 1 | 10 | (1,10) |
| 2 | 2 | 11 | (2,11) |
| 3 | 3 | 12 | (3,12) |
| 4 | 4 | 13 | (4,13) |
| 5 | 5 | 14 | (5,14) |
| 6 | 6 | 15 | (6,15) |
| 7 | 7 | 16 | (7,16) |
| 8 | 8 | 17 | (8,17) |
| 9 | 9 | 18 | (9,18) |
| 10 | | | |
| 11 | | | |
| 12 | | | |
| 13 | | | |
| 14 | $x \in \Pi$ | $y \in E$ | |
| 15 | | | $R \subseteq U \times U$ |
| 16 | $\Pi \subseteq U$ | $E \subseteq U$ | |
| 17 | | | |
| 18 | | | |




Σχ. 77.

***Πρόβλημα 2ον*: *Εἰς τὸ σύνολον*:** $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ***νὰ ἀναγραφῇ καὶ περιγραφῇ ἡ σχέσις*:**

$$R = \{(x,y) \mid y = 2x \text{ καὶ } (x,y) \in U \times U\}. \qquad (1)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι: διὰ $x = 6$ λαμβάνομεν:

$$y = 2 \cdot 6 = 12 \notin U.$$

Ἄρα τὰ στοιχεῖα τῆς περιοχῆς Π εἶναι: 1,2,3,4,5, ὁπότε ἡ ἔκτασις E ἔχει ὡς στοιχεῖα τά: 2,4,6,8,10.

Δηλαδὴ εἶναι:

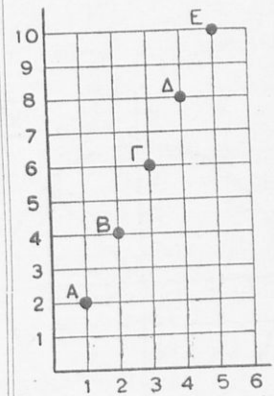
$$\Pi = \{1,2,3,4,5\} \quad \text{καὶ} \quad E = \{2,4,6,8,10\},$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$R = \{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10)\}.$$

Εἶναι δέ: $\Pi \subseteq U$ καὶ $x \in \Pi$, $E \subseteq U$ καὶ $y \in U$, $R \subseteq U \times U$.

Ὅθεν, εὐκόλως καταρτίζομεν τὸν ἀκόλουθον πίνακα, ὅστις περιέχει καὶ τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τῆς σχέσεως R.

| Στοιχεῖα τοῦ U | Στοιχεῖα τοῦ Π | Στοιχεῖα τοῦ Ε | Στοιχεῖα τοῦ R | Γραφικὴ παράστασις |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | (1,2) |  |
| 2 | 2 | 4 | (2,4) | |
| 3 | 3 | 6 | (3,6) | |
| 4 | 4 | 8 | (4,8) | |
| 5 | 5 | 10 | (5,10) | |
| 6 | | | | |
| 7 | | | | |
| 8 | | | | |
| 9 | | | | |
| 10 | | | | |



Σχ. 78.

***Πρόβλημα 3ον* : *Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν* :**

$$\Phi = \{1,2,3,4,5,\ldots\}$$

***νὰ ἀναγραφῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ σχέσις* :**

$R = (x,y) \mid x = 6$ καὶ $(x,y) \in \Phi \times \Phi\}$.

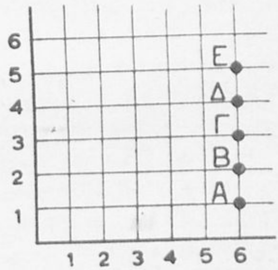
Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ εἶναι :

$\Pi = \{x \mid x = 6\} = \{6\}$.

$E = \{y \mid y$ φυσικὸς $= \{1,2,3,4,5,\ldots\} = \Phi$ :

$R = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5),\ldots\}$.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς R δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 79). Ἔχομεν δηλαδὴ μίαν ἐλλιπῆ ἀπεικόνισιν τῆς R ἐπὶ τοῦ Καρτεσιανοῦ ἐπιπέδου. Εἶναι τὰ σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε,..., δηλαδὴ ***ἐλλιπὴς ἀπεικόνισις*** τῆς R.





Σχ. 79.

***Πρόβλημα 4ον* : *Εἰς τὸ σύνολον* :**

$U = \{2,3,4,5,6\}$ ***νὰ ἀναγραφῇ καὶ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ σχέσις* :**

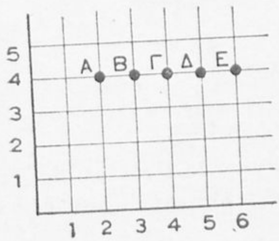
$$R = \{(x,y) \mid y = 4 \text{ καὶ } (x,y) \in U \times U\}.$$

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω λεχθέντα, θὰ ἔχωμεν :

$\Pi = \{2,3,4,5,6\}$,

$E = \{y \mid y = 4\} = \{4\}$,

$R = \{(2,4), (3,4), (4,4), (5,4), (6,4)\}$,





Σχ. 80.

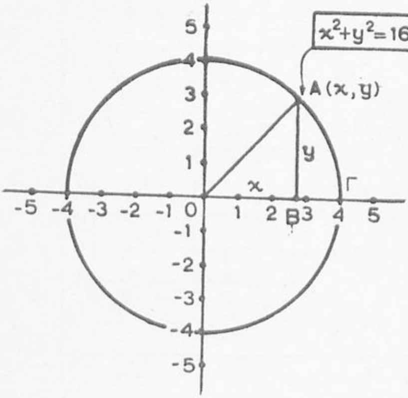
καὶ ἡ γραφικὴ ἀπεικόνισις τῆς R δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 80).

Εἶναι τὰ σημεῖα: Α,Β,Γ,Δ καὶ Ε, δηλαδὴ ***πλήρης ἀπεικόνισις τοῦ R.***

***Πρόβλημα 5ον: Εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\Pi_\alpha$, νὰ χαραχθοῦν τὰ σημεῖα τῆς σχέσεως:***

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 16 \wedge (x,y) \in \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha\}.$$

Μὲ κέντρον τὴν ἀρχὴν Ο τῶν συντεταγμένων καὶ ἀκτῖνα $\overline{O\Gamma} = 4$ γράφομεν μίαν περιφέρειαν (σχ. 81).




Σχ. 81.

Ἐὰν Α(x,y) εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας ταύτης καὶ ἀχθοῦν ἡ κάθετος ΑΒ ἐπὶ τὸν πρῶτον ἄξονα καὶ ἡ ΟΑ, ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΒΑ, κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν:

$$\overline{OB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{OA}^2$$

ἢ $$x^2 + y^2 = 4^2 = 16.$$

Ἡ περιφέρεια $(O, \overline{O\Gamma} = 4)$ εἶναι ἡ ***γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις*** τῆς σχέσεως R εἰς τὸ σύνολον τῶν $\Pi_\alpha$.

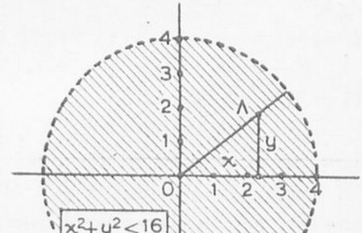
Διὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τῆς σχέσεως:

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 16 \text{ καὶ } (x,y) \in \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha\},$$

ἔχομεν τὸ ἔναντι (σχ. 82), εἰς τὸ ὁποῖον, διὰ πᾶν σημεῖον Λ τοῦ δίσκου Ο, πλὴν τῶν σημείων τῆς περιφερείας του, ἰσχύει ἡ: $x^2 + y^2 < 16$.

Ὥστε: Ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις τῆς $x^2 + y^2 < 16$ εἶναι ὁλόκληρος ὁ δίσκος Ο, ἐξαιρέσει τῶν σημείων τῆς περιφερείας του.

Ἡ συνθήκη ὅμως $x^2 + y^2 \leq 16$ περιλαμβάνει καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου Ο καὶ τὸν δίσκον ὁλόκληρον.




Σχ. 82.

Διὰ τὴν γεωμετρικὴν ἀπεικόνισιν τῆς σχέσεως:

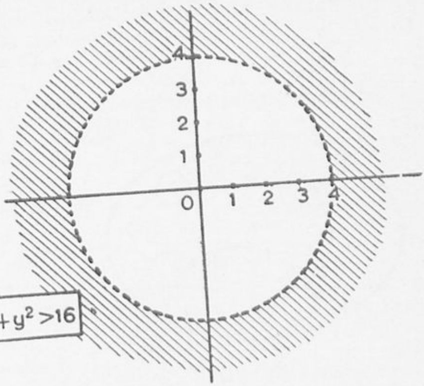
$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 16 \wedge (x,y) \in \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha\},$$

ἔχομεν τὸ (σχ. 83), εἰς τὸ ὁποῖον, διὰ πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς τοῦ δίσκου Ο, ἰσχύει ἡ σχέσις: $x^2 + y^2 > 16$.

Ὥστε: Ἡ γεωμετρικὴ ἀπεικόνισις τῆς $x^2 + y^2 > 16$ εἶναι ὁλόκληρος ὁ χῶρος (ἐπίπεδος), ὁ ἐκτὸς τοῦ δίσκου Ο περιλαμβανόμενος. Ἐξαιροῦνται δὲ τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας τοῦ δίσκου Ο.

Ἡ συνθήκη $x^2 + y^2 \geq 16$ περιλαμβάνει καὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ δίσκου Ο καὶ τὸν ἐκτὸς αὐτοῦ ἐπίπεδον χῶρον.

Μία σχέσις R δύναται νὰ εἶναι γενική, δηλαδὴ νὰ ἀναφέρεται εἰς οἱουδήποτε εἴδους πράγματα, ἄψυχα, ἔμψυχα, γεγονότα, αἰσθήματα, συναισθήματα κλπ. Διὰ νὰ εἴμεθα δὲ εἰς θέσιν νὰ ὁρίσωμεν τὴν R, πρέπει νὰ καθορίσωμεν τὸν κανόνα K (x,y), ὅστις διέπει τὴν σχέσιν, τὸ γενικὸν σύνολον U τῶν πραγμάτων, τὴν περιοχὴν Π τῆς σχέσεως καὶ τὴν ἔκτασιν τῆς σχέσεως. Εὐκόλως δὲ κατόπιν δυνάμεθα νὰ ἔχωμεν καὶ τὴν γραφικὴν λύσιν τῆς σχέσεως R.



Σχ. 83.

**76. Ἀντίστροφοι σχέσεις.** Ἔστωσαν τὰ μὴ κενὰ σύνολα:

$$A=\{1,2,3\} \quad \text{καὶ} \quad B=\{\alpha,\beta\}.$$

Μία σχέσις ἀπὸ τὸ A εἰς τὸ B εἶναι ἡ ἀκόλουθος:

$$R=\{(1,\alpha),\ (1,\beta),\ (3,\alpha)\}. \qquad (1)$$

Τὸ σύνολον $\{(\alpha,1),\ (\beta,1),\ (\alpha,3)\}$, τὸ ὁποῖον προκύπτει ἀπὸ τὸ (1), ἂν γίνῃ *ἐναλλαγὴ* τῶν μελῶν τῶν ζευγῶν τῶν στοιχείων τῆς (1), ὀνομάζεται **ἀντίστροφος σχέσις** τῆς R καὶ παρίσταται διὰ τοῦ: $R^{-1}$.

Ὥστε, θὰ εἶναι: $R^{-1}=\{(\alpha,1),\ (\beta,1),\ (\alpha,3\ \}.$ (2)

Ὁμοίως, ἐάν: $U=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί: $R=\{(\alpha,\beta),\ (\alpha,\gamma),\ (\gamma,\gamma),\ (\gamma,\beta)\}$ εἶναι μία σχέσις ἐντὸς τοῦ U, τότε ἡ ἀντίστροφος σχέσις τῆς R εἶναι ἡ:

$$R^{-1}=\{(\beta,\alpha),\ (\gamma,\alpha),\ (\gamma,\gamma),\ (\beta,\gamma)\}. \qquad (3)$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Ἀντίστροφος διμελὴς σχέσις τῆς R εἰς τὸ σύνολον U καλεῖται ἡ σχέσις $R^{-1}$, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:***

$$\alpha \in U:\quad \beta \in U:\quad \alpha R^{-1} \beta \Longleftrightarrow \beta R \alpha.$$

Συμβολικῶς δὲ διὰ τοῦ τύπου:

$$\boxed{R^{-1}=\{(\beta,\alpha)\ |\ (\alpha,\beta)\in U\}}.$$

**77. Ἰδιότητες διμελῶν σχέσεων μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς συνόλου.** ***1). Αὐτοπαθής.*** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $U=\{1,2,3,4\}$ καὶ τὸ ὑποσύνολον:

$$R=\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (4,4)\} \qquad (1)$$

τοῦ γινομένου $U \times U$, εἰς τὸ ὁποῖον παρατηροῦμεν ὅτι, διὰ κάθε $\alpha \in U$, εἶναι $(\alpha,\alpha)\in R$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ R καλεῖται ***αὐτοπαθής.***

Ὥστε: ***Μία σχέσις R καλεῖται αὐτοπαθής, ἐὰν διὰ κάθε στοι-***

***χεῖον α τοῦ U εἶναι «α R α»***. Δηλαδή: κάθε στοιχεῖον α σχετίζεται μὲ τὸν ἑαυτόν του. Συμβολικῶς μία σχέσις R εἶναι αὐτοπαθής, ἐάν:

$$\boxed{\forall x,\ x \in U \Longrightarrow x\ R\ x}.$$

Τὸ διάγραμμα μιᾶς αὐτοπαθοῦς σχέσεως εἶναι τὸ (σχ. 84).

Σχ. 84.

Παραδείγματα: α). Ἐὰν $x \in \Phi$ ἡ σχέσις: *«ὁ x διαιρεῖ τὸν x»* εἶναι αὐτοπαθής, διότι: κάθε φυσικὸς ἀριθμὸς διαιρεῖ τὸν ἑαυτόν του.

β). Ἡ σχέσις: ***«Ἡ εὐθεῖα α ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὴν $\alpha_1$»*** εἶναι αὐτοπαθής, διότι: κάθε εὐθεῖα ἔχει τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν μὲ τὸν ἑαυτόν της.

γ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\Pi_\alpha$ ἡ σχέσις: «$\leqslant$» εἶναι αὐτοπαθής, διότι $x \leqslant x\ \ \forall x,\ A \in \Pi_\alpha$, ἤτοι: *Κάθε πραγματικὸς ἀριθμὸς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἑαυτόν του.*

δ). Ἡ σχέσις *ὁμοιότητος* τῶν τριγώνων εἶναι αὐτοπαθής, διότι: *κάθε τρίγωνον εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸν ἑαυτόν του.*

***2). Μὴ αὐτοπαθής.*** α). Ἔστω τὸ σύνολον: $U = \{1,2,3,4,5\}$ καὶ ἡ σχέσις:

$$R = \{(1,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,3),\ (5,3)\}$$

εἰς τὸ σύνολον τοῦτο. Ἡ R ***δὲν*** εἶναι αὐτοπαθής, διότι: $4 \in U$, ἐνῷ $4 \not R 4$.

β). Ὁμοίως, εἰς τὸ σύνολον $\Sigma = \{1,2,3,4\}$ ἡ σχέσις:

$$R = \{(1,1),\ (2,4),\ (3,3),\ (4,1),\ (4,4)\}$$

δὲν εἶναι αὐτοπαθής, ἐπειδὴ τὸ ζεῦγος $(2,2) \notin R$.

γ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν παιδιῶν ἡ σχέσις: *«ὁ x ἔχει ἀδελφὸν τὸν y»*, δὲν εἶναι αὐτοπαθής, διότι οὐδεὶς ἔχει ἀδελφὸν τὸν ἑαυτόν του.

δ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἡ σχέσις: «$x<y$», δὲν εἶναι αὐτοπαθής.

ε). Ἡ σχέσις *«πατρότητος»* δὲν εἶναι αὐτοπαθὴς εἰς τὸ σύνολον τῶν κατοίκων τῆς Ἑλλάδος.

***3). Συμμετρικαὶ σχέσεις.*** Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι $R \subseteq A \times A$ καὶ ἔστω ὅτι R εἶναι μία σχέσις εἰς τὸ A.

***Ἡ R θὰ καλῆται συμμετρικὴ σχέσις, ἐάν:***

$$\boxed{(\alpha,\beta) \in R \Longrightarrow (\beta,\alpha) \in R},$$

δηλαδή, ἐὰν $\alpha\ R\ \beta$, τότε καὶ $\beta\ R\ \alpha$.

Παραδείγματα: α). Ἐὰν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$, τότε καὶ τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ.

β). ***Ἡ σχέσις ἰσότητος*** «$=$» εἶναι πάντοτε συμμετρική, διότι, ἐάν:

$$\alpha = \beta \Longrightarrow \beta = \alpha.$$

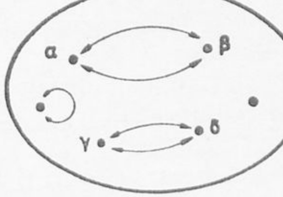
γ). Ἡ σχέσις: *«ὁ x εἶναι ἐξάδελφος τοῦ y»* εἶναι συμμετρική, διότι καὶ ὁ y εἶναι ἐξάδελφος τοῦ x.

δ). Ἡ σχέσις: *«ἐὰν ἡ εὐθεῖα x εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν y, τότε καὶ ἡ y εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν x»*, εἶναι σχέσις συμμετρικὴ εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν τοῦ ἐπιπέδου.

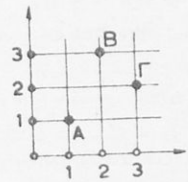
ε). Εἰς τὸ σύνολον $\Sigma = \{1,2,3\}$ ἡ σχέσις: $R = \{(1,1),\ (2,3),\ (3,2)\}$ εἶναι συμμετρική.

Ἡ γραφικὴ παράστασις τῆς σχέσεως ταύτης δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 86).

Τὸ διάγραμμα μιᾶς συμμετρικῆς σχέσεως R εἰς τὸ σύνολον U, δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 85).



Σχ. 85.



Σχ. 86.

***4). Μὴ συμμετρικαὶ σχέσεις.*** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$\Sigma = \{1,2,3,4\}$$

καὶ τὴν σχέσιν: $R = \{(1,3),\ (4,2),\ (2,4),\ (2,3),\ (3,1)\}$,

ἡ ὁποία δὲν εἶναι συμμετρική. Διότι: $(2,3) \in R$, ἀλλὰ $(3,2) \notin R$.

β). Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ, ἡ σχέσις: «x *διαιρεῖ τὸν* y» δὲν εἶναι συμμετρική, διότι ὁ y δὲν διαιρεῖ τὸν **x**.

Οὕτω, ἐπειδὴ ὁ 2 διαιρεῖ τὸν 4, δὲν ἕπεται ὅτι ὁ 4 διαιρεῖ τὸν 2.

γ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν ῥητῶν, ἡ σχέσις: «$x < y$» δὲν εἶναι συμμετρική.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι:

***Μία διμελὴς σχέσις $R$ εἰς ἕνα σύνολον $U$ δὲν εἶναι συμμετρική, ὅταν ὑπάρχῃ ἕνα τοὐλάχιστον ζεῦγος στοιχείων $\alpha \in U$, $\beta \in U$, μὲ $\alpha R \beta$ καὶ $\beta \not R \alpha$.***

Διὰ νὰ συμβαίνουν δὲ τὰ ἀνωτέρω, πρέπει: $\alpha \neq \beta$.

***5). Ἀντισυμμετρικαὶ σχέσεις.*** Τὸ ὑποσύνολον R τοῦ γινομένου $A \times A$ θὰ λέγεται ***ἀντισυμμετρικὴ σχέσις,*** ἐάν:

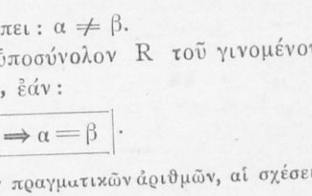
$$\boxed{(\alpha,\beta) \in R \text{ καὶ } (\beta,\alpha) \in R \Longrightarrow \alpha = \beta}.$$

Παραδείγματα: α). Εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, αἱ σχέσεις «$x \leqslant y$» καὶ «$y \leqslant x$» συνεπάγονται τήν: $x = y$.

β). Ἐὰν ὁ α διαιρῇ τὸν β καὶ ὁ β διαιρῇ τὸν α, ἕπεται ὅτι $\alpha = \beta$. Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἀντισυμμετρική.

γ). Ἐὰν δίδεται μία σχέσις R εἰς τὸ σύνολον **A**, ὁριζομένη ὑπὸ τῆς: «x *εἶναι ὑποσύνολον τοῦ* y», τότε ἡ R εἶναι ἀντισυμμετρικὴ σχέσις, ἐπειδή:

$$A \subseteq B \quad \text{καὶ} \quad B \subseteq A \Longrightarrow A = B.$$


Σχ. 87.

Τὸ διάγραμμα μιᾶς ἀντισυμμετρικῆς σχέσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 87).

δ). Θεωροῦμεν τὸ σύνολον $U = \{1,2,3,4,5\}$ καὶ τὰς ἐν αὐτῷ σχέσεις:

$$R = \{(1,2),\ (4,5)\} \quad \text{καὶ} \quad R_1 = \{(2,1),\ (3,4)\},$$

αἵτινες, ὡς γνωστόν, εἶναι ἀμφότεραι ἀντισυμμετρικαί. Τὸ σύνολον:

$$R \cup R_1 = \{(1,2),\ (4,5),\ (2,1),\ (3,4)\},$$

δὲν εἶναι ἀντισυμμετρικὴ σχέσις, διότι:

$$1 \in U,\quad 2 \in U,\quad 1\ R \cup R_1\ 2,\quad 2\ R \cup R_1 1,\quad 1 \neq 2.$$

***6). Μὴ ἀντισυμμετρικαὶ σχέσεις.*** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$$\Sigma_1 = \{1,2,3,4\}$$

καὶ τὴν ἐν αὐτῷ σχέσιν: $R = \{(1,2),\ (3,4),\ (2,2),\ (3,3),\ (2,1)\}$.

Ἐπειδή: $1 \in \Sigma_1$, $2 \in \Sigma_1$, $1 \neq 2$, $(1,2) \in R$ καὶ $(2,1) \in R$, τὴν σχέσιν R θὰ καλοῦμεν ***μὴ ἀντισυμμετρικήν.***

β). Ὁμοίως, εἰς τὸ σύνολον $K = \{1,2,3\}$, ἡ σχέσις: $R_1 = \{(1,1),\ (2,3),\ (3,2)\}$ δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, καθόσον $(2,3), \in R_1$ καὶ $(3,2) \in R_1$.

γ). Ὁμοίως, ἡ σχέσις $R_2 = K \times K$ εἶναι μὴ ἀντισυμμετρική, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ὥστε: ***Μία σχέσις R εἰς τὸ σύνολον A θὰ λέγεται μὴ ἀντισυμμετρική, ἐὰν ὑπάρχουν στοιχεῖα: $\alpha \in A$, $\beta \in A$, $\alpha \neq \beta$***

τοιαῦτα, ὥστε: $\boxed{(\alpha,\beta) \in R \quad \text{καὶ} \quad (\beta,\alpha) \in R}$.

δ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν παιδίων, ἡ σχέσις: «*ὁ* x *εἶναι ἀδελφὸς τοῦ* y», δὲν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι, ἐὰν ὁ x εἶναι ἀδελφὸς τοῦ y καὶ ὁ y εἶναι ἀδελφὸς τοῦ x, δὲν ἕπεται ὅτι $x = y$.

***7). Μεταβατικαὶ σχέσεις.*** Εἰς τὸ σύνολον A, μία σχέσις R θὰ λέγεται ***μεταβατικὴ σχέσις***, ἐάν:

$$\boxed{(\alpha,\beta) \in R \quad \text{καὶ} \quad (\beta,\gamma) \in R \Longrightarrow (\alpha,\gamma) \in R}$$

δηλαδή, ἐάν: $\alpha\ R\ \beta$ καὶ $\beta\ R\ \gamma$, τότε: $\alpha\ R\ \gamma$.

α). Ἔστω R μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν $\Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τῆς σχέσεως «$x < y$». Τότε, ἐάν:

$$\alpha < \beta \quad \text{καὶ} \quad \beta < \gamma \Longrightarrow \alpha < \gamma.$$

Ἄρα ἡ R εἶναι μεταβατική.

β). Εἰς τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου, ἐάν:

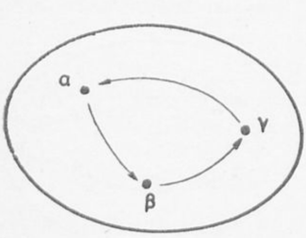
$$E_1 \parallel E_2 \quad \text{καὶ} \quad E_2 \parallel E_3 \Longrightarrow E_1 \parallel E_3,$$

ἔνθα $E_1$, $E_2$, $E_3$ εὐθεῖαι τοῦ ἐν λόγῳ ἐπιπέδου. Ἄρα: *ἡ σχέσις παραλληλίας*, μὲ εὐρεῖαν σημασίαν, εἶναι μεταβατική.

γ). Ἡ σχέσις «*ὁμοιότητος*» μεταξὺ τῶν τριγώνων εἶναι μεταβατική. Διότι, ἐὰν τὸ τρίγωνον $AB\Gamma \approx A_1B_1\Gamma_1$ καὶ τὸ τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1 \approx A_2B_2\Gamma_2$, τότε καὶ τὸ τρίγωνον

$$AB\Gamma \approx A_2B_2\Gamma_2,$$

Τὸ διάγραμμα μιᾶς μεταβατικῆς σχέσεως δίδεται ὑπὸ τοῦ ἔναντι (σχ. 87α).



Σχ. 87α.

δ). Εἰς τὸ σύνολον: $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ἡ σχέσις: $R = \{(1,2),\ (2,2),\ (3,4),\ (4,4),\ (5,6)\}$ εἶναι προφανῶς μεταβατική.

ε). Ἔστω R μία σχέσις εἰς τὸ σύνολον A, ὁριζομένη ὑπὸ τῆς σχέσεως: «$x \subseteq y$». Ἡ R θὰ εἶναι τότε μεταβατική, διότι, ἐάν:

$$A \subseteq B \text{ καὶ } B \subseteq \Gamma \Longrightarrow A \subseteq \Gamma.$$

*8). Μὴ μεταβατικαὶ σχέσεις:* α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $\Sigma = (\alpha,\beta,\gamma)$ καὶ τὴν σχέσιν: $R = \{(\alpha,\beta), (\gamma,\beta), (\beta,\alpha), (\alpha,\gamma)\}$. Ἐπειδὴ $(\gamma,\beta) \in R$ καὶ $(\beta,\alpha) \in R$, ἀλλὰ $(\gamma,\alpha) \notin R$ ἡ σχέσις R καλεῖται *μὴ μεταβατική.* Ὥστε:

***Μία διμελὴς σχέσις R εἰς τὸ σύνολον U δὲν εἶναι μεταβατική, ὅταν ὑπάρχουν στοιχεῖα $\alpha \in U$, $\beta \in U$, $\gamma \in U$, ὄχι ἀναγκαίως διακεκριμένα μεταξύ των τοιαῦτα, ὥστε:***

$$\alpha R \beta \text{ καὶ } \beta R \gamma, \text{ ἀλλὰ } \alpha \not{R} \gamma.$$

β). Ἡ σχέσις: $R = \{(2,1), (3,3), (1,5), (4,5), (3,1)\}$ εἰς τὸ ἀκόλουθον σύνολον $K = \{1,2,3,4,5\}$, δὲν εἶναι μεταβατική, διότι:

$$1 \in K,\ 2 \in K,\ 5 \in K,\ 2 R 1,\ 1 R 5, \text{ ἀλλὰ } 2 \not{R} 5.$$

γ). Ἡ σχέσις: $R = \{(2,2), (2,3), (1,4), (3,2)\}$, εἰς τὸ $\Lambda = \{1,2,3,4\}$, δὲν εἶναι μεταβατική, διότι: $(3,2) \in R$, $(2,3) \in R$, ἀλλὰ $(3,3) \notin R$.

δ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ, ἡ σχέσις R, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς «$x + 2y = 5$», δὲν εἶναι μεταβατική, διότι: $(3,1) \in R$, $(1,2) \in R$, ἀλλὰ $(3,2) \in R$ καὶ ἐπὶ πλέον: $3 + 2(1) = 5$, $1 + 2(2) = 5$, ἀλλὰ $3 + 2(2) \neq 5$.

ε). Ἡ συνθήκη «*καθετότητος*» τῶν εὐθειῶν $E_1$, $E_2$, $E_3$ ἑνὸς ἐπιπέδου δὲν εἶναι μεταβατική, διότι, ἐάν:

$$E_1 \perp E_2 \text{ καὶ } E_2 \perp E_3, \text{ δὲν ἕπεται ὅτι } E_1 \perp E_3.$$

στ). Εἰς τὸ σύνολον τῶν ἀνθρώπων, ἡ σχέσις «*πατρότητος*», δὲν εἶναι μεταβατική, διότι, ἐάν: «ὁ α εἶναι πατὴρ τοῦ β καὶ ὁ β πατὴρ τοῦ γ, δὲν ἕπεται ὅτι ὁ α εἶναι πατὴρ τοῦ γ».

*9). Ἡ μεταβατικότης εἰς τὰς ἀντιστρόφους σχέσεις.* Ἐὰν μία σχέσις R εἶναι μεταβατικὴ εἰς ἓν σύνολον U, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφός της $R^{-1}$ εἶναι μεταβατική.

Διότι, ἔστω ὅτι: $(\alpha,\beta) \in R^{-1}$ καὶ $(\beta,\gamma) \in R^{-1}$, τότε θὰ εἶναι:

$$(\gamma,\beta) \in R \text{ καὶ } (\beta,\alpha) \in R.$$

Ἐπειδὴ ἡ R εἶναι μεταβατική, ἕπεται ὅτι $(\gamma,\alpha) \in R$. Ἄρα $(\alpha,\gamma) \in R^{-1}$.

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$\boxed{(\alpha,\beta) \in R^{-1},\ (\beta,\gamma) \in R^{-1} \Longrightarrow (\alpha,\gamma) \in R^{-1}.}$$

Ὅθεν, ἡ $R^{-1}$ εἶναι μεταβατική.

**78. Σχέσεις ἰσοδυναμίας.** 1). Ἂς θεωρήσωμεν τὴν σχέσιν R τῆς ἰσότητος εἰς ἕνα σύνολον U, ἥτις συμβολίζεται διὰ τοῦ: «=». Ἐπειδή:

α). $(\forall x,\ x \in U): x = y$

β). $(\forall x,y,\ x \in U,\ y \in U): (x = y) \Longrightarrow (y = x)$

γ). $(\forall x,y,z \text{ καὶ } x \in U,\ y \in U,\ z \in U): (x = y \text{ καὶ } y = z) \Longrightarrow (x = z)$,

ἡ σχέσις ἰσότητος ἐν τῷ U εἶναι ***αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική.***

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι ἡ R τῆς ἰσότητος εἶναι σχέσις ***ἰσοδυναμίας.*** Ὥστε:

***Μία διμελὴς σχέσις $R$ εἰς τὸ σύνολον $U$ θὰ λέγεται σχέσις ἰσοδυναμίας, ἐὰν εἶναι: α) αὐτοπαθής, β) συμμετρική, γ) μεταβατική.***
Δηλαδὴ ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας:

α΄). $(\forall x,\ x \in U): x\,R\,x$ **αὐτοπαθής.**

β΄). $(x \in U,\ y \in U): x\,R\,y \Longrightarrow y\,R\,x$ **συμμετρική**

γ΄). $(x \in U,\ y \in U,\ z \in U): (x\,R\,y$ καὶ $y\,R\,x) \Longrightarrow x\,R\,z$ **μεταβατική.**

Διὰ τοῦτο, ἐὰν ἡ σχέσις R εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς τὸ U, ἀντὶ $x\,R\,y$ γράφομεν: $x \sim y$ καὶ διαβάζομεν: *x ἰσοδύναμον y*.

2). Ἡ σχέσις παραλληλίας (εὐρεῖα σημασία) εἰς τὸ σύνολον U τῶν εὐθειῶν ἑνὸς ἐπιπέδου $\pi$ (ἢ εἰς τὸν χῶρον) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Διότι ἔχομεν:

α΄). $(\forall\varepsilon,\ \varepsilon \in U): \varepsilon \parallel \varepsilon$ **αὐτοπαθής,**

β΄). $(\varepsilon \in U,\ \varepsilon_1 \in U): \varepsilon \parallel \varepsilon_1 \Longrightarrow \varepsilon_1 \parallel \varepsilon$ **συμμετρική,**

γ΄). $(\varepsilon \in U,\ \varepsilon_1 \in U,\ \varepsilon_2 \in U): (\varepsilon \parallel \varepsilon_1$ καὶ $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2) \Longrightarrow \varepsilon \parallel \varepsilon_2$ **μεταβατική,**

ἔνθα ε εἶναι τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου $\pi$.

3). Ἡ σχέσις ὁμοιότητος τῶν τριγώνων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, διότι:

α΄). $ΑΒΓ \approx Α\,Β\,Γ$ **αὐτοπαθής.**

β΄). Ἐὰν $ΑΒΓ \approx Α_1Β_1Γ_1 \Longrightarrow Α_1Β_1Γ_1 \approx ΑΒΓ$ **συμμετρική.**

γ΄). Ἐὰν $ΑΒΓ \approx Α_1Β_1Γ_1$ καὶ $Α_1Β_1Γ_1 \approx Α_2Β_2Γ_2 \Longrightarrow ΑΒΓ \approx Α_2Β_2Γ_2$ **μεταβατική.**

4). Ἡ *ἰσότης* μεταξὺ δύο εὐθυγράμμων σχημάτων εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας, διότι:

α΄). Εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $Α = Α$   Α / Α   **αὐτοπαθής.**

β΄). Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $Α_1 = Β_1 \Longrightarrow Β_1 = Α_1$   $Α_1$ / $Β_1$   **συμμετρική.**

γ΄). Ἐὰν τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα $Κ = Λ$ καὶ $Λ = Μ \Longrightarrow Κ = Μ$   Κ / Λ / Μ   **μεταβατική.**

5). Οἱ ἀριθμοὶ 49 καὶ 34 διαιρούμενοι διὰ 5 ἀφίνουν τὸ αὐτὸ ὑπόλοιπον 4. Οἱ 49 καὶ 34 ἀνήκουν εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Δυνάμεθα λοιπόν, ἀπὸ πλευρᾶς *ὑπολοίπου*, νὰ θεωρήσωμεν αὐτοὺς ὡς ἰσοδυνάμους.

6). Εἰς τὸ Καρτεσιανὸν κιγκλίδωμα:

$$Φ \times Φ = \{(α,β) \mid α \in Φ \ \text{καὶ}\ β \in Φ\},$$

θεωροῦμεν μίαν διμελῆ σχέσιν R μεταξὺ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν της, τήν:

$$R:\ (α,β)\ R(γ,δ) \Longrightarrow αδ = βγ. \qquad (1)$$

Οὕτω, τὰ ζεύγη (5,8) καὶ (20,32) ἀνήκουν εἰς τὴν R, διότι εἶναι:

$$5 \cdot 32 = 8 \cdot 20.$$

Ὁμοίως, τὰ ζεύγη (3,4) καὶ (27,36) ἀνήκουν καὶ αὐτὰ εἰς τὴν R, διότι εἶναι:

$$3 \cdot 36 = 4 \cdot 27.$$

Ἂς ἐξετάσωμεν, ἂν ἡ σχέσις (1) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

α΄) **Εἶναι:** $(α,β)\ R\ (α,β):\ αβ = βα$ **αὐτοπαθὴς**

β΄) Ἐὰν $(α,β)\ R\ (κ,λ)$, θὰ ἔχωμεν, ἐξ ὁρισμοῦ, ὅτι:

$$α \cdot λ = β \cdot κ \ \text{ἢ}\ κ \cdot β = α \cdot λ \Longrightarrow (κ,λ)\ R\ (α,β)$$ **συμμετρική.**

γ΄). Ἐὰν $(\alpha_1\,\beta_1)\ R\ (\alpha_2,\beta_2)$ καὶ $(\alpha_2,\beta_2)\ R\ (\varkappa,\lambda)$, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$\alpha_1\cdot\beta_2=\beta_1\cdot\alpha_2 \quad \text{καὶ} \quad \alpha_2\cdot\lambda=\beta_2\cdot\varkappa$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\beta_2\cdot\lambda=\alpha_1\cdot\varkappa\cdot\beta_1\cdot\beta_2 \quad \text{ἢ} \quad \alpha_1\cdot\lambda=\beta_1\cdot\varkappa, \text{ ἤτοι } (\alpha_1,\beta_1)\ R\ (\varkappa,\lambda),$$

δηλαδὴ ἡ R εἶναι καὶ *μεταβατική*. Ὅθεν, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

**79. Κλάσεις ἰσοδυναμίας.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν ἀκεραίων.

$$A_\varkappa=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ldots\}.$$

Εἰς τοῦτο ὁρίζομεν μίαν σχέσιν R ὡς ἑξῆς:

$$R=\{(\alpha,\beta)\mid \alpha\in A_\varkappa,\ \beta\in A_\varkappa \text{ καὶ } \alpha-\beta=\text{πολ } 5\}, \qquad (1)$$

δηλαδή:

$$\alpha\ R\ \beta \Longleftrightarrow \alpha-\beta=\text{πολ } 5.$$

Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ σχέσις (1) εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας.

α΄). $(\forall\alpha,\ \alpha\in A_\varkappa):\ \alpha\ R\ \alpha$, διότι:

$$\alpha-\alpha=0\cdot3 \text{ πολ } 3 \qquad \textit{αὐτοπαθής}.$$

β΄). Ἐὰν $\alpha-\beta=\text{πολ } 5 \Longrightarrow \beta-\alpha=\text{πολ } 5.$

Ἄρα: $(\alpha\in A_\varkappa,\ \beta\in A_\varkappa):\ \alpha\ R\ \beta \Longrightarrow \beta\ R\ \alpha$ *συμμετρική*.

γ΄). Ἐὰν $\alpha-\beta=\text{πολ } 5$ καὶ $\beta-\gamma=\text{πολ } 5 \Longrightarrow \alpha-\gamma=\text{πολ } 5.$

Ἄρα: $(\alpha\in A_\varkappa,\ \beta\in A_\varkappa,\ \gamma\in A_\varkappa):\ (\alpha\ R\ \beta \text{ καὶ } \beta\ R\ \gamma)\Longrightarrow \alpha\ R\ \gamma$ *μεταβατική*.

Ἀφοῦ λοιπὸν ἡ R εἶναι αὐτοπαθής, συμμετρικὴ καὶ μεταβατική, ἕπεται ὅτι εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας εἰς τὸ $A_\varkappa$.

Εἰς τὸ ἀνωτέρω σύνολον:

$$A_\varkappa=\{0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ldots\}$$

ὁρίζομεν τὴν σχέσιν:

$R_5=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει ὑπόλοιπον 0,1,2,3,4$\}$ μὲ $|\upsilon|\geqslant0$,

εἰς τὴν ὁποίαν παρατηροῦμεν ὅτι:

$R_0=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει $\upsilon=0\}=\{\ldots-10,-5,0,5,10,\ldots\}$

$R_1=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει $\upsilon=1\}=\{\ldots-9,-4,1,6,11,\ldots\}$

$R_2=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει $\upsilon=2\}=\{\ldots-8,-3,2,7,12,\ldots\}$

$R_3=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει $\upsilon=3\}=\{\ldots-7,-2,3,8,13\ldots\}$

$R_4=\{x\in A_\varkappa \mid x$ διαιρούμενος διὰ 5 ἀφίνει $\upsilon=4\}=\{\ldots-6,-1,4,9,14,\ldots\}$,

δηλαδὴ ὅτι τὸ σύνολον $A_\varkappa$ διεμερίσθη εἰς τὰ σύνολα $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὑποσύνολα τοῦ $A_\varkappa$.

Τοῦτο σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$\frac{A_\varkappa}{R_5}=\{R_0,\ R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4\}$$

καὶ τὸ καλοῦμεν ***σύνολον—πηλίκον***, μὲ κριτήριον τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως κάθε ἀκεραίου διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 5.

Παρατηροῦμεν δὲ ὅτι:

α΄). $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 \subseteq A_\varkappa$.

β΄). $R_0\cap R_1=R_0\cap R_2=R_0\cap R_3=R_0\cap R_4=R_1\cap R_2=R_1\cap R_3=R_1\cap R_4=$
$=R_2\cap R_3=R_2\cap R_4=R_3\cap R_4=\varnothing.$

γ΄). $R_0\cup R_1\cup R_2\cup R_3\cup R_4=A_\varkappa$.

δ΄). $R_0\neq\varnothing,\ R_1\neq\varnothing,\ R_2\neq\varnothing,\ R_3\neq\varnothing,\ R_4\neq\varnothing,$

δηλαδὴ πληροῦνται τὰ ὅσα ἐλέχθησαν εἰς τὴν § 66.

Τὰ σύνολα $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$, ὀνομάζονται ***κλάσεις ἰσοδυναμίας*** ὡς πρὸς τὸ σύνολον $R_5$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Καλοῦμεν κλάσιν ἰσοδυναμίας ὡς πρὸς R εἰς ἕνα σύνολον U,***

***ἑνὸς στοιχείου $\alpha \in U$, τὸ σύνολον τῶν στοιχείων $x \in U$, τῶν ἰσοδυνάμων πρὸς τὸ α.***

Τὴν κλάσιν ἰσοδυναμίας ἑνὸς στοιχείου $\alpha \in U$ συμβολίζομεν διὰ τοῦ:

$$R_\alpha = \{x \mid x \in U \ \text{μὲ} \ x\, R'\, \alpha\}$$

καὶ παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κλάσις ἰσοδυναμίας τοῦ α εἶναι ἕνα ὑποσύνολον τοῦ συνόλου U.

Παρατηρήσεις: α). ***Δύο τυχόντα στοιχεῖα $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ μιᾶς κλάσεως ἰσοδυναμίας $R_\alpha$ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.***

Διότι, ἐὰν $\alpha_1 \in R_\alpha$ καὶ $\alpha_2 \in R_\alpha$, τότε $\alpha_1\, R\, \alpha$ καὶ $\alpha_2\, R\, \alpha$.

Ἐπειδὴ ὅμως ἡ σχέσις $R_\alpha$ εἶναι συμμετρική, θὰ ἔχωμεν:

$$\alpha_1\, R\, \alpha \ \text{καὶ} \ \alpha\, R\, \alpha_2.$$

Ἀλλὰ ἡ $R_\alpha$ εἶναι καὶ μεταβατική. Ἄρα θὰ ἰσχύῃ ἡ ἰσοδυναμία:

$$(\alpha_1\, R\, \alpha \ \text{καὶ} \ \alpha\, R\, \alpha_2) \Longrightarrow \alpha_1\, R\, \alpha_2.$$

Κατ' ἀκολουθίαν τὰ $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των.

β'). ***Δύο κλάσεις ἰσοδυναμίας $R_\alpha$ καὶ $R_\beta$ μὲ ἓν κοινὸν στοιχεῖον ταυτίζονται.***

Πράγματι, ἐὰν $\gamma \in R_\alpha$ καὶ $\gamma \in R_\beta$, θὰ ἔχωμεν: $\gamma\, R\, \alpha$ καὶ $\gamma\, R\, \beta$:

Ἐὰν ὅμως **x** εἶναι στοιχεῖον τῆς $R_\alpha$, θὰ εἶναι καί:

$$x\, R\, \alpha \Longrightarrow \alpha\, R\, x.$$

Οὕτω: $$(\gamma\, R\, \alpha \ \text{καὶ} \ \alpha\, R\, x) \Longrightarrow \gamma\, R\, x \Longrightarrow x\, R\, \gamma.$$

Ὁμοίως: $$(x\, R\, \gamma \ \text{καὶ} \ \gamma\, R\, \beta) \Longrightarrow x\, R\, \beta \Longrightarrow x \in R_\beta.$$

Ἀπεδείξαμεν λοιπὸν ὅτι:

$$(\forall x,\ x \in R_\alpha) \Longrightarrow x \in R_\beta$$

ὅθεν: $$R_\alpha \subseteq R_\beta.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καὶ $R_\beta \subseteq R_\alpha$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $R_\alpha = R_\beta$.

γ'). **Ἐὰν δύο κλάσεις ἰσοδυναμίας $R_\alpha$ καὶ $R_\beta$ εἶναι διάφοροι, τότε εἶναι ξέναι μεταξύ των.**

Πράγματι, ἐὰν ἦτο $R_\alpha \cap R_\beta \neq \varnothing$, ἔπρεπεν αἱ κλάσεις $R_\alpha$ καὶ $R_\beta$ νὰ εἶχον ἓν τοὐλάχιστον στοιχεῖον κοινὸν καὶ κατὰ τὴν προηγουμένην ἰδιότητα θὰ ἦτο $R_\alpha = R_\beta$, ὅπερ ἄτοπον. Κατ' ἀκολουθίαν:

$$R_\alpha \cap R_\beta = \varnothing.$$

Τοῦτο ὅμως σημαίνει ὅτι αἱ $R_\alpha$ καὶ $R_\beta$ εἶναι ξέναι μεταξύ των.

Ἐξ ὅλων τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι:

***Μία σχέσις ἰσοδυναμίας $R_\alpha$, ὡρισμένη ἐπὶ ἑνὸς συνόλου U, ὁρίζει μίαν διαμέρισιν τοῦ U εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας.***

Μία δὲ κλάσις ἰσοδυναμίας ὁρίζεται δι' ἑνὸς τυχόντος στοιχείου αὐτῆς:

$$\alpha\, R\, \beta \Longrightarrow R_\alpha = R_\beta.$$

Εἰς τὸ 6ον παράδειγμα τῆς § 78 εἴδομεν ὅτι τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν φυσικῶν ἀριθμῶν διαμερίζεται εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας. Τὰ ζεύγη ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐὰν ὡς διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) θεωρήσωμεν τὸ κλάσμα $\dfrac{\alpha}{\beta}$ $(\beta \neq 0)$ $\alpha \in \Phi$, $\beta \in \Phi$, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ ἐν λόγῳ σχέσις ἰσοδυναμίας εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία διαμερίζει τὸ σύνολον τῶν κλασμάτων εἰς κλάσεις ἰσοδυναμίας.

Οὕτω, τὰ κλάσματα : $\frac{2}{5}, \frac{2\cdot2}{2\cdot5}, \frac{3\cdot2}{3\cdot5}, \frac{4\cdot2}{4\cdot5}, \ldots, \frac{\lambda\cdot2}{\lambda\cdot5}$, $(\lambda \in \Phi)$

εἶναι μεταξύ των ἰσοδύναμα, δηλαδή :

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{5} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20} = \ldots = \frac{\lambda\cdot2}{\lambda\cdot5}.$$

**80. Σχέσεις διατάξεως.** Εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$ ἡ σχέσις : «$\leqslant$» ἔχει τὰς ἀκολούθους ἰδιότητας :

α΄). $(\forall x,\ x \in \Pi_\alpha) : x \leqslant x$ *αὐτοπαθής.*

β΄). $(x \in \Pi_\alpha,\ (y \in \Pi_\alpha) : (x \leqslant y$ καὶ $y \leqslant x) \Longrightarrow (x = y)$ *ἀντισυμμετρική.*

γ΄). $(x \in \Pi_\alpha,\ y \in \Pi_\alpha,\ z \in \Pi_\alpha) : (x \leqslant y$ καὶ $y \leqslant z) \Longrightarrow (x \leqslant z)$ *μεταβατική.*

Διὰ τοῦτο τὴν σχέσιν : «$\leqslant$», ἐν τῷ $\Pi_\alpha$, ὀνομάζομεν *σχέσιν διατάξεως.*

Ὥστε : ***Μία διμελὴς σχέσις R εἰς τὸ σύνολον U θὰ λέγεται σχέσις διατάξεως, ἂν εἶναι αὐτοπαθής, ἀντισυμμετρικὴ καὶ μεταβατική.***

Οὕτω, ἡ σχέσις R τοῦ «*περιέχεσθαι*» εἰς τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων P(U) ἑνὸς συνόλου U, θὰ εἶναι :

α΄). $A \subseteq A$ *αὐτοπαθής.*

β΄). Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ *συμμετρική.*

γ΄). Ἐὰν $A \subseteq B$ καὶ $B \subseteq \Gamma \Longrightarrow A \subseteq \Gamma$ *μεταβατική.*

Ἄρα ἡ σχέσις R τοῦ «περιέχεσθαι» εἶναι σχέσις διατάξεως.

**81. Συγκρίσιμα στοιχεῖα.** Ἂς θεωρήσωμεν ἕνα σύνολον $U \neq \varnothing$ καὶ μίαν σχέσιν διατάξεως αὐτοῦ R ὁριζομένην διὰ τοῦ «$\leqslant$».

Ἐὰν $\in U$ καὶ $\beta \in U$ καὶ $\alpha \leqslant \beta$ ἢ $\beta \leqslant \alpha$, τότε θὰ λέγωμεν ὅτι τὰ δύο στοιχεῖα $\alpha \in U$ καὶ $\beta \in U$ εἶναι συγκρίσιμα.

Ὅταν ὅμως δὲν ἰσχύουν αἱ ἐν λόγῳ σχέσεις, τότε τὰ στοιχεῖα α καὶ β θὰ λέγωμεν ὅτι δὲν εἶναι συγκρίσιμα. Ὥστε :

***Δύο στοιχεῖα $\alpha \in U$ καὶ $\beta \in U$ εἶναι συγκρίσιμα, ὅταν εἶναι :***

$$\alpha \leqslant \beta \quad \text{ἢ} \quad \beta \leqslant \alpha.$$

Ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ συνόλου U εἶναι ἀνὰ δύο συγκρίσιμα, ἡ διάταξις $\leqslant$ ἐπὶ τοῦ U ὀνομάζεται ***ὁλικὴ*** καὶ τότε τὸ σύνολον U εἶναι ***ὁλικῶς διατεταγμένον.***

Οὕτω, τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν :

$$\Phi = \{1, 2, 3, 4, \ldots\},$$

εἶνα ὁλικῶς διατεταγμένον, διότι, διὰ δύο τυχόντα στοιχεῖα, τὰ α καὶ β, θὰ ἔχωμεν : $\alpha \leqslant \beta$ ἢ $\beta \leqslant \alpha$ καὶ ἐπὶ πλέον ἡ σχέσις : «$\leqslant$» εἶναι σχέσις διατάξεως, διότι :

α΄). $(\forall \alpha,\ \alpha \in \Phi) : \alpha \leqslant \alpha$ *αὐτοπαθής.*

β΄). $(\alpha \in \Phi,\ \beta \in \Phi) : (\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \alpha) \Longrightarrow (\alpha = \beta)$ *ἀντισυμμετρική.*

γ΄). $(\alpha \in \Phi,\ \beta \in \Phi,\ \gamma \in \Phi) : (\alpha \leqslant \beta$ καὶ $\beta \leqslant \gamma) \Longrightarrow (\alpha \leqslant \gamma)$ *μεταβατική.*

Ὥστε : ***Τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ εἶναι ἕνα ὁλικῶς διατεταγμένον σύνολον***, ὡς πρὸς τὴν σχέσιν «$\leqslant$».

Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν ἕνα μὴ κενὸν συνόλου U, δηλαδή : $U \neq \varnothing$ καὶ ἔστω P(U) τὸ δυναμοσύνολον τοῦ U (τὸ σύνολον τῶν ὑποσυνόλων τοῦ U).

Ἡ διμελὴς σχέσις: «$\subseteq$», εἰς τὸ δυναμοσύνολον P (U) εἶναι σχέσις διατάξεως, ὡς εἰς τὴν § 80 εἴδομεν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ὅμως, καθ' ἥν:

$$A \in P(U) \quad \text{καὶ} \quad B \in P(U) \text{ μὲ } A \cap B = \varnothing$$

θὰ ἔχωμεν:

$$A \nsubseteq B \quad \text{καὶ} \quad B \nsubseteq A.$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ δυναμοσυνόλου P (U) δὲν εἶναι ἀνὰ δύο συγκρίσιμα καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ σχέσις « $\subseteq$ » εἰσάγει εἰς τὸ P (U) μίαν μερικὴν διάταξιν.

Ὥστε: ***Τὸ δυναμοσύνολον P (U) εἶναι ἕνα μερικῶς διατεταγμένον σύνολον, ὡς πρὸς τὴν σχέσιν « $\subseteq$ ».***

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{x \mid x \in \Phi \text{ μὲ } 2 \leqslant x \leqslant 5\}$ καὶ $B = \{3,6,7,10\}$. Μία διμελὴς σχέσις R ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$x \in A, \; y \in B: \; x R y \Longleftrightarrow (x \text{ διαιρεῖ τὸν } y).$$

Νὰ ὁρισθῇ ἡ R καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς.

**2.** Μία διμελὴς σχέσις R ἐκ τοῦ $A = \{x \mid x \in \Phi \text{ μὲ } 1 \leqslant x \leqslant 6\}$ εἰς τὸ $B = \{x \mid x \in \Phi \text{ μὲ } 1 \leqslant x \leqslant 7 \text{ καὶ } x = \text{περιττὸς}\}$, ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$x \in A, \; y \in B: \; xRy \Longleftrightarrow (x < y).$$

Νὰ ὁρισθῇ καὶ νὰ παρασταθῇ γραφικῶς ἡ R.

**3.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{x \mid x \in \Phi \text{ μὲ } 1 \leqslant x \leqslant 6\}$, εἰς τὸ ὁποῖον ὁρίζομεν δύο σχέσεις R καὶ $R_1$, ὡς ἑξῆς:

$$x \in A, \; y \in A: \; yRy \Longleftrightarrow (x - y = -1) \text{ καί: } xR_1y \Longleftrightarrow (x \leqslant y).$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ σύνολα: $R, R_1, R \cup R_1, R \cup R, R \cap R_1$ καὶ νὰ παρασταθοῦν γραφικῶς αἱ R καὶ $R_1$.

**4.** Ἑκάστη τῶν ἀκολούθων ἀνοικτῶν προτάσεων ὁρίζει μίαν σχέσιν R εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ.

| | |
|---|---|
| 1) $x \leqslant y$ | 3) $x + y = 10$ |
| 2) x διαιρεῖ τὸν y | 4) $x + 2y = 10$. |

Ποία ἐκ τούτων εἶναι συμμετρική;

**5.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{1,2,3\}$ καὶ θεωροῦμεν ἐν αὐτῷ τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$
2) $R_2 = \{(1,1)\}$
3) $R_3 = \{(1,2)\}$
4) $R_4 = (1,1), (3,2), (2,3)\}$
5) $R_5 = A \times A$.

Ποία ἐκ τούτων εἶναι συμμετρική; Κατασκευάσατε τὰς ἀντιστοίχους γραφικὰς παραστάσεις.

**6.** Εἰς τὸ σύνολον A δίδονται δύο συμμετρικαὶ σχέσεις R καὶ $R_1$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ σύνολον $R \cap R_1$ εἶναι συμμετρικὴ σχέσις εἰς τὸ A.

**7.** Εἰς τὸ σύνολον $A = \{1,2,3\}$ δίδονται αἱ ἀκόλουθοι σχέσεις:

1) $R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (3,2), (2,3)\}$, 4) $R_4 = \{(1,1), (2,3), (3,2)\}$,

2) $R_2 = \{(1,1)\}$, 3) $R_3 = \{(1,2)\}$, 5) $R_5 = A \times A$.

Ποῖαι ἐκ τούτων εἶναι ἀντισυμμετρικαί ;

**8.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_1 y \Longleftrightarrow (x \leqslant y)$

2) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_2 y \Longleftrightarrow (x < y)$

3) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_3 y \Longleftrightarrow (x + 2y = 10)$

4) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_4 y \Longleftrightarrow$ (x διαιρεῖ τὸν y).

Ποῖαι ἐκ τούτων εἶναι συμμετρικαί ;

**9.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_1 y \Longleftrightarrow (x \leqslant y)$

2) $x R_2 y \Longleftrightarrow$ (x διαιρεῖ τὸν y)

3) $x R_3 y \Longleftrightarrow (x + y = 10)$

4) $x R_4 y \Longleftrightarrow (x + 2y = 5)$.

Ποῖαι ἐκ τούτων εἶναι μεταβατικαί ;

**10.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_1 y \Longleftrightarrow$ (x διαιρεῖ τὸν y)

2) $x R_2 y \Longleftrightarrow (x + y = 5)$

3) $x R_3 y \Longleftrightarrow (x + 2y = 12)$.

Ποῖαι ἐκ τούτων εἶναι συμμετρικαὶ καὶ ποῖαι μεταβατικαί ;

**11.** Εἰς τὸ σύνολον : $A = \{1,2,3\}$ θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις :

1) $R_1 = \{(1,2), (2,2)\}$ 3) $R_2 = \{(1,2)\}$ 5) $R_5 = A \times A$.

2) $R_2 = \{(1,2), (2,3), (1,3), (2,1), (1,1)\}$ 4) $R_4 = \{(1,1)\}$

Ποῖαι ἐκ τούτων εἶναι μεταβατικαί ; Κατασκευάσατε τὰ διαγράμματα αὐτῶν καὶ τὰς γραφικὰς παραστάσεις των ἀντιστοίχως.

**12.** Εἰς τὸ σύνολον A θεωροῦμεν δύο σχέσεις $R$ καὶ $R_1$.

1) Ἐὰν αἱ $R$ καὶ $R_1$ εἶναι ἀντιστοίχως συμμετρικαί, τότε καὶ ἡ $R \cup R_1$ εἶναι συμμετρική.

2) Ἐὰν ἡ $R$ εἶναι αὐτοπαθής, τότε καὶ ἡ $R \cup R_1$ εἶναι αὐτοπαθής.

**13.** Εἰς τὸ σύνολον A θεωροῦμεν τὰς σχέσεις $R$ καὶ $R_1$.

1) Ἐὰν αἱ $R$ καὶ $R_1$ εἶναι ἀντισυμμετρικαί, ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι καὶ ἡ $R \cup R_1$ ἀντισυμμετρική ;

2) Ἐὰν αἱ $R$ καὶ $R_1$ εἶναι μεταβατικαί, ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι καὶ ἡ $R \cup R_1$ μεταβατική ;

**14.** Εἰς τὸ σύνολον A θεωροῦμεν δύο σχέσεις $R$ καὶ $R_1$. Ποία ἐκ τῶν ἀκολούθων σχέσεων εἶναι ἀληθὴς ἢ ψευδής ;

1) Ἐὰν ἡ $R$ εἶναι συμμετρική, τότε καὶ ἡ $R^{-1}$ εἶναι συμμετρική.

2) Ἐὰν ἡ $R$ εἶναι ἀντισυμμετρική, τότε καὶ ἡ $R^{-1}$ εἶναι ἀντισυμμετρική.

3) Ἐὰν ἡ $R$ εἶναι αὐτοπαθής, τότε $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

4) Ἐὰν ἡ $R$ εἶναι συμμετρική, τότε $R \cap R^{-1} \neq \varnothing$.

5) Ἐὰν αἱ $R$ καὶ $R_1$ εἶναι μεταβατικαί, τότε $R \cup R$ εἶναι μεταβατική.

6) » » » » , τότε $R \cap R_1$ » »

7) » » » » ἀντισυμμετρικαί, τότε $R \cup R_1$ » ἀντισυμμετρική.

8) » » » » » , τότε $R \cap R_1$ » »

9) » » » » αὐτοπαθεῖς, τότε $R \cup R_1$ αὐτοπαθής.

10) » » » » » , τότε $R \cap R_1$ » »

**15.** Εἰς τὰς ἀντισυμμετρικὰς σχέσεις, νὰ δειχθῇ ὅτι: $R \cap R^{-1} = \varnothing$.

**16.** Εἰς τὰς συμμετρικὰς σχέσεις, νὰ δειχθῇ ὅτι: $R = R^{-1}$.

**17.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ, ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $x \in \Phi,\ y \in P:\ x R_1 y \Longleftrightarrow (x > y)$
2) $x R_2 y \Longleftrightarrow (x = ky),\ k \in \Phi$
3) $x R_3 y \Longleftrightarrow (xy = \lambda^2),\ \lambda \in \Phi$
4) $x R_4 z \Longleftrightarrow (x + 3y = 12)$.

Ποία ἐκ τούτων εἶναι ἢ δὲν εἶναι: α) αὐτοπαθής, β) συμμετρική, γ) ἀντισυμμετρικὴ καὶ δ) μεταβατική;

**18.** Εἰς τὸ σύνολον Φ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁρίζομεν τὰς ἀκολούθους σχέσεις:

1) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_1 y \Longleftrightarrow (x > y)$
2) $x R_2 y \Longleftrightarrow (x \geqslant y)$
3) $x R_3 y \Longleftrightarrow (x = yk),\ k \in \Phi$
4) $x R_4 y \Longleftrightarrow (2x + 2y = 30)$.

Δι' ἑκάστην τούτων, σχηματίσατε μίαν ἀνοικτὴν πρότασιν, διὰ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ἀντιστοίχως ἡ ἀντίστροφος σχέσις.

**19.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ δημιουργοῦμεν μίαν διμελῆ σχέσιν $R$, ὡς ἑξῆς: $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R y \Longleftrightarrow$ (x διαιρεῖ τὸν y).

Εἶναι ἡ $R$ σχέσις διατάξεως εἰς τὸ Φ; Περὶ ποίας διατάξεως πρόκειται;

**20.** Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ, ὁρίζομεν μίαν διμελῆ σχέσιν $R$, ὡς ἑξῆς:

1) $x \in \Phi,\ y \in \Phi:\ x R_1 y \Longleftrightarrow (x \leqslant y)$
2) $x R_2 y \Longleftrightarrow$ (x διαιρεῖ τὸν y).
3) $x R_3 y \Longleftrightarrow (x + y = 10)$
4) $x R_4 y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x = \text{σχετικῶς πρῶτος} \\ y = \text{» »} \end{pmatrix}$

Ποῖαι τούτων εἶναι αὐτοπαθεῖς;

**21.** Εἰς ἕνα σύνολον Α ὁρίζομεν μίαν σχέσιν $R$, ὡς ἑξῆς:

$$(\alpha\ R\ y \text{ καὶ } y\ R\ \omega) \Longrightarrow \omega\ R\ x$$

ἄν: $x \in A,\ y \in A,\ \omega \in A$.

Ἡ σχέσις αὕτη καλεῖται ***κυκλική***. Νὰ ἀποδειχθῇ ἀκολούθως, ὅτι μία σχέσις $R$ αὐτοπαθὴς καὶ κυκλική, εἶναι σχέσις ἰσοδυναμίας. Ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον;

**22.** Ἐὰν $E = \{1,2,3,4,\}$ καὶ $R = \{(1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (4,4,)\}$, εἶναι αὐτοπαθὴς ἡ σχέσις $R$;

**23.** Πότε εἰς ἕνα σύνολον Α μία σχέσις $R$ δὲν εἶναι αὐτοπαθής;

**24.** Ὑπάρχει σύνολον Α, εἰς τὸ ὁποῖον κάθε σχέσις $R$ εἰς τὸ Α εἶναι συμμετρική;

**25.** Δίδεται τὸ σύνολον : $E = \{1,2,3,4\}$ καὶ μία σχέσις ἐν αὐτῷ

$$R = \{(1,2), (3,4), (2,2), (3,3), (2,1)\}.$$

Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ἡ $R$ εἶναι ἀντισυμμετρική.

**26.** Δύναται μία σχέσις $R$ εἰς τὸ σύνολον $A$ νὰ εἶναι συγχρόνως συμμετρικὴ καὶ ἀντισυμμετρική ;

**27.** Δίδεται τὸ σύνολον : $E = \{1,2,3,4\}$ καὶ ἡ ἐν αὐτῷ σχέσις :

$$R = \{(1,2), (4,3), (2,2), (1,1), (3,1)\}.$$

Εἶναι μεταβατικὴ ἡ $R$ ;

**28.** Ἐὰν μία σχέσις $R$ εἶναι μεταβατική, τότε καὶ ἡ ἀντίστροφός της $R^{-1}$ εἶναι μεταβατική.

**29.** Εἰς τὸ σύνολον : $E = \{1,2,3,4\}$ θεωροῦμεν τὰς σχέσεις :

$R_1 = \{(1,1), (1,2)\}$ $\qquad$ $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,3), (4,1)\}$ $\qquad$ $R_5 = E \times E.$

$R_3 = \{(1,3), (2,4)\}$

Ποία ἐκ τούτων εἶναι συμμετρική, ἀντισυμμετρική, μεταβατική, ἀνακλαστική ;

**30.** Εἰς τὸ σύνολον : $E = \{2,3,4,5,6\}$ μία σχέσις $R$ ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως : $|x - y| = 3k$, ἔνθα $k \in \Phi$.

Νὰ ἀναγραφῇ ἡ $R$ ὑπὸ μορφὴν συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν.

**31.** Μία σχέσις $R$, ἐν τῷ συνόλῳ : $A = \{2,3,4,5,\}$, ὁρίζεται ὑπὸ τῆς ἀνοικτῆς προτάσεως : $x$ καὶ $y$ εἶναι σχετικῶς πρῶτοι.

1) Νὰ ὁρισθῇ ἡ $R$ ὑπὸ μορφὴν συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν.
2) Νὰ παρασταθῇ δὲ ἀκολούθως ἡ $R$ ὑπὸ μορφὴν διαγράμματος.

**32.** Ἐάν : $R = \{(x, y) \mid x \in \Phi, y \in \Phi, x + 3y = 12\}$,

1) Νὰ γραφῇ ἡ $R$ ὑπὸ μορφὴν συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν.
2) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς $R$.
3) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκτασις τῆς $R$.
4) Ποία εἶναι ἡ $R^{-1}$;

**33.** Ἐὰν $R = \{(x, y) \mid x \in \Phi, y \in \Phi, 2x + 4y = 15\}$,

1) Νὰ ὁρισθῇ ἡ $R$ ὑπὸ μορφὴν συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν.
2) Νὰ ὁρισθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς.
3) Νὰ ὁρισθῇ ἡ ἔκτασις αὐτῆς.
4) Ποία εἶναι ἡ $R^{-1}$ ;

**34.** Εἰς τὸ σύνολον : $E = \{1,2,3,\}$, νὰ ἀναγράψετε μίαν σχέσιν $R$ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ $R$ νὰ μὴν εἶναι συμμετρική, οὔτε ἀντισυμμετρική.

**35.** Εἰς τὸ σύνολον : $\Phi = \{1,2,3, \ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μία σχέσις $R$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς :

$$R = \{(x,y) \mid x \in \Phi, y \in \Phi, 2x + y = 10\}.$$

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς.
2) Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκτασις τῆς $R$.
3) Νὰ ὁρισθῇ ἡ $R^{-1}$ .

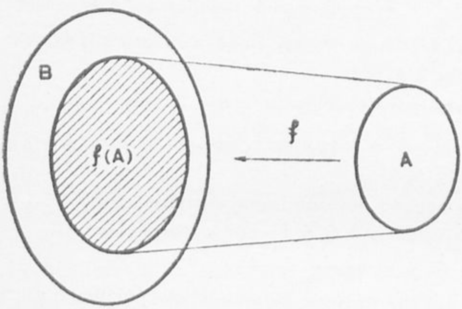
# ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VII

# ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

## ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ

**82. Ὁρισμός.** ***Καλοῦμεν ἀπεικόνισιν ἑνὸς συνόλου $A \neq \varnothing$ εἰς ἕνα σύνολον $B \neq \varnothing$, ἕνα νόμον (κανόνα) ἀντιστοιχίας, βάσει τοῦ ὁποίου εἰς κάθε στοιχεῖον $x$ τοῦ $A$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα τοὐλάχιστον στοιχεῖον $y$ τοῦ $B$.***

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, τὸ μὲν στοιχεῖον y καλεῖται ***εἰκὼν τοῦ x***, τὸ δὲ x ***ἀρχέτυπον τοῦ y***.




Σχ. 88.

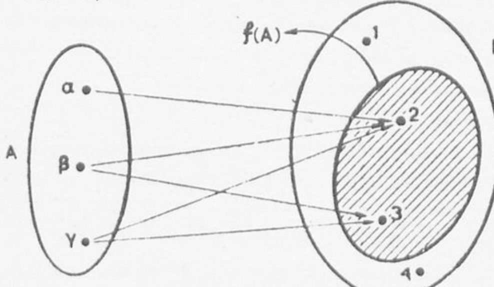
Τὸ σύνολον A καλεῖται ***πεδίον ὁρισμοῦ*** τῆς ἀπεικονίσεως καὶ τὸ σύνολον τῶν εἰκόνων καλεῖται ***πεδίον τιμῶν*** αὐτῆς.

Ἐὰν τὸν ἐν λόγῳ νόμον ἀντιστοιχίας τὸν παραστήσωμεν διὰ τοῦ f, τότε τὸ πεδίον τιμῶν παρίσταται διὰ τοῦ f(A).

Κατ' ἀκολουθίαν θὰ εἶναι:

$$f(A) \subseteq B.$$

Ἡ ἀπεικόνισις f τοῦ A εἰς τὸ B παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ ἀνωτέρω (σχ. 88).




Σχ. 89.

Παράδειγμα: Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα: $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ καὶ ἂς ὁρίσωμεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ A εἰς τὸ B (σχ. 89).

Εἰς τὸ στοιχεῖον α τοῦ A ἀντιστοιχεῖ τὸ στοιχεῖον 2 τοῦ B.

Εἰς τὸ β τοῦ A ἀντιστοιχεῖ τὸ 2 τοῦ B
Εἰς τὸ β τοῦ A » τὸ 3 » B
Εἰς τὸ γ τοῦ A » τὸ 2 » B
Εἰς τὸ γ τοῦ A » τὸ 3 » B

Ἐνταῦθα ἔχομεν ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τό: $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ ὡς πεδίον τιμῶν τό:

$$f(A) = \{2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} = B.$$

Συνήθως, τὴν ἀπεικόνισιν f τοῦ A εἰς τὸ B σημειώνομεν οὕτω:

$$f: \ A \longrightarrow B$$

ἤ

$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) \in B$$

ἤ

$$f: \ x \longrightarrow f(x)$$

ἤ

$$f: \ f(x) = y \in B$$

καὶ διαβάζομεν: ***Τὸ στοιχεῖον $x \in A$ ἀπεικονίζεται διὰ τῆς $f$ εἰς τὸ $f(x) = y \in B$.***

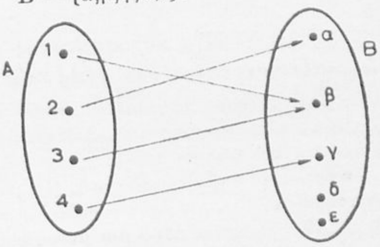
**83. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}.$$

Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: A \to B$, ὡς ἑξῆς:

$$f: \quad 2 \to f(2) = \alpha$$
$$1 \to f(1) = \beta$$
$$3 \to f(3) = \beta$$
$$4 \to f(4) = \gamma,$$

ὡς εἰς τὸ (σχ. 90) φαίνεται. Δηλαδή, εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον στοιχεῖον τοῦ B.




Σχ. 90.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀντιστοιχία f ὀνομάζεται ***μονοσήμαντος.***

Εἶναι δέ:

Πεδίον ὁρισμοῦ, τό: $A = \{1,2,3,4\}$.

Πεδίον τιμῶν, τό: $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma\} \subset \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} = B.$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

***Μία ἀπεικόνισις $f$ τοῦ συνόλου A εἰς τὸ B καλεῖται μονοσήμαντος, ὅταν, εἰς κάθε πρότυπον $x \in A$, ἀντιστοιχεῖ μία εἰκών:***

$$f(x) = y \in B.$$

Εὕρομεν ἀνωτέρω ὅτι τὸ πεδίον τιμῶν: $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma,\}$ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ B, ἤτοι: $f(A) \subset B$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀπεικόνισις f καλεῖται ***μονοσήμαντος*** ἀπεικόνισις τοῦ ***A εἰς τὸ B*** ἢ ***ἐν τῷ B.***

***Παρατήρησις:*** Ἐὰν μία ἀπεικόνισις $f: A \to B$ εἶναι μονοσήμαντος καὶ $x \in A$, $x_1 \in A$, τότε: $x = x_1 \Longrightarrow f(x) = f(x_1)$ ἢ ὅπερ τὸ αὐτό:

$$f(x) \neq f(x_1) \Longrightarrow x \neq x_1.$$

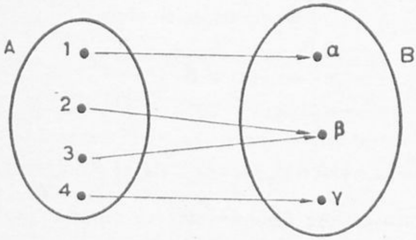
Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3,4\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: A \to B$, ὡς ἑξῆς:

$$
\begin{aligned}
f: \quad & 1 \to f(1) = \alpha \\
& 2 \to f(2) = \beta \\
& 3 \to f(3) = \beta \\
& 4 \to f(4) = \gamma,
\end{aligned}
$$

ἥτις εἶναι μονοσήμαντος. Ἐπὶ πλέον δὲ παρατηροῦμεν ὅτι:



Σχ. 91.

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ: $A = \{1,2,3,4\}$.

Τὸ πεδίον τιμῶν: $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma\} = B$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην, καθ' ἣν $f(A) = B$, ἡ ἀπεικόνισις f καλεῖται ***μονοσήμαντος*** ἀπεικόνισις τοῦ συνόλου A ***ἐπὶ*** τὸ σύνολον B (σχ. 91).

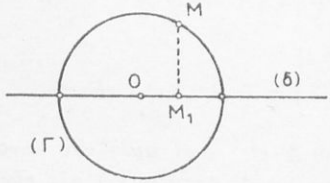
Ὥστε: ***Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου $A \to B$ καλεῖται ἐπί, ὅταν $f(A) = B$.***

Δηλαδή, ὅταν τὸ πεδίον τιμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ σύνολον B.

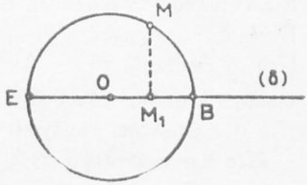
Παραδείγματα: α'). Δίδεται μία περιφέρεια (Γ) καὶ μία εὐθεῖα (δ), διερχομένη διὰ τοῦ κέντρου O αὐτῆς (σχ. 92).

Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς (Γ) καὶ $M_1$ ἡ ὀρθὴ προβολὴ αὐτοῦ ἐπὶ τῆς (δ). Παρατηροῦμεν ὅτι, εἰς κάθε σημεῖον M τῆς (Γ) ἀντιστοιχεῖ μία μόνον προβολὴ $M_1$ ἐπὶ τῆς (δ). Ὁρίζεται οὕτω μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου τῶν σημείων τῆς (Γ) ***εἰς*** τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς (δ). Γράφομεν δέ:

$$f: M \in (\Gamma) \Longrightarrow M_1 = f(M) \in (\delta).$$



Σχ. 92.



Σχ. 93.

β'). Ἂν ἡ (δ) τέμνῃ τὴν (Γ) εἰς τὰ B καὶ E, (σχ. 93), τότε ἡ f εἶναι μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τῆς περιφερείας (Γ) ***ἐπὶ*** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος BE.

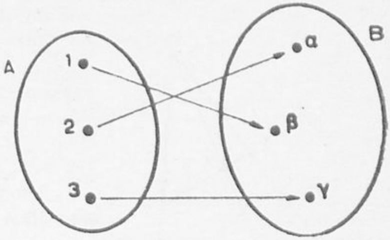
**84. Ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ μὴ κενὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

καὶ ἂς ὁρίσωμεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: A \to B$, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

$$
\begin{aligned}
f: \quad & 1 \to f(1) = \beta \\
& 2 \to f(2) = \alpha \\
& 3 \to f(3) = \gamma.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή, εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ A ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον στοιχεῖον τοῦ B καὶ ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖον τοῦ B εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνὸς μόνον στοιχείου (ἀρχετύπου) τοῦ A, (σχ. 94).




Σχ. 94.

Ἐνταῦθα εἶναι :

Πεδίον ὁρισμοῦ : $A = \{1,2,3\}$.

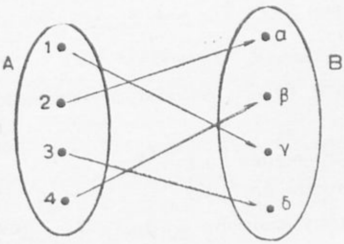
Πεδίον τιμῶν : $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma\} = B$.

Παρατηροῦμεν δηλαδὴ ὅτι : $f(A) = B$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν ἡ ἀπεικόνισις εἶναι ***ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A ἐπὶ τὸ σύνολον B.***

Ἔστωσαν τώρα τὰ σύνολα : $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$.

Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f : A \rightarrow B$, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον :

$$f: \quad 1 \rightarrow f(1) = \gamma$$
$$2 \rightarrow f(2) = \alpha$$
$$3 \rightarrow f(3) = \delta$$
$$4 \rightarrow f(4) = \beta.$$




Σχ. 95.

Δηλαδή, εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ A νὰ ἀντιστοιχῇ μόνον ἕνα στοιχεῖον τοῦ B καὶ ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖον τοῦ B νὰ εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνὸς μόνον στοιχείου τοῦ συνόλου A (σχ. 95). Θὰ εἶναι δέ :

Πεδίον ὁρισμοῦ, τό : $A = \{1,2,3,4\}$.

Πεδίον τιμῶν, τό : $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \subset \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} = B$.

Δηλαδὴ $f(A) \subset B$. Ἄρα ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι ***ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ A ἐν τῷ συνόλῳ B.***

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὸν ἀκόλουθον ὁρισμόν :

***Μία ἀπεικόνισις $f: A \rightarrow B$ θὰ ὀνομάζεται ἀμφιμονοσήμαντος, ὅταν διάφορα ἀρχέτυπα ($x \neq x_1$) ἔχουν διαφόρους εἰκόνας: $f(x) \neq f(x_1)$.***

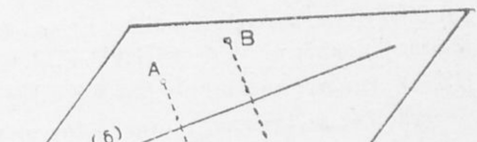
Δηλαδή, ἐὰν ἡ ἀπεικόνισις $f : A \rightarrow B$ εἶναι ἀμφιμοσήμαντος καί :

$x \in A$, $x_1 \in A$, τότε :

$$x \neq x_1 \Longleftrightarrow f(x) \neq f(x_1)$$

ἢ καὶ $f(x) = f(x_1) \Longleftrightarrow x = x_1$.

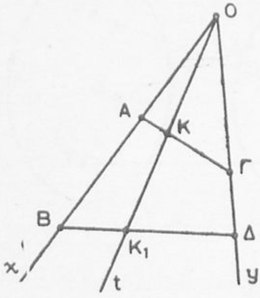
Παραδείγματα: α'). Ἔστω μια εὐθεῖα (δ) τοῦ ἐπιπέδου $\pi$. Κάθε σημεῖον A τοῦ $\pi$ ἔχει ἕνα μόνον συμμετρικὸν $A_1$ ὡς πρὸς ἄξονα τὴν εὐθεῖαν (δ).




Σχ. 96.

Ὁμοίως, εἰς τὸ B τοῦ $\pi$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα μόνον συμμετρικὸν $B_1$ αὐτοῦ, ὡς πρὸς τὴν (δ).

β'). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας xOy θεωροῦμεν τὰ σημεῖα A,B καὶ Γ,Δ ἀντιστοίχως καὶ χαράσσομεν τὴν ἡμιευθεῖαν Ot, ἡ ὁποία τέμνει τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ $K_1$, ἀντιστοίχως. Ἂν φαντασθῶμεν ὅτι ἡ Ot, (σχ. 97), στρέφεται περὶ τὸ Ο, τότε εἰς κάθε σημεῖον Κ τοῦ τμήματος ΑΓ, θὰ ἀντιστοιχῇ μία εἰκὼν αὐτοῦ $K_1$ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΔ, καὶ ἀντιστρόφως, κάθε σημεῖον $K_1$ τοῦ Β θὰ εἶναι ἡ εἰκὼν ἑνὸς σημείου τοῦ ΑΓ. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ὁρίζεται μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ σημειοσυνόλου (ΑΓ) *ἐπὶ* τὸ σημειοσύνολον (ΒΔ). Θὰ γράφωμεν δέ:




Σχ. 97.

$$f: K \in (\text{ΑΓ}) \rightarrow K_1 = f(K) \in (\text{ΒΔ}).$$

γ). Ἔστω ἡ ἀπεικόνισις:

$$f: x \in \Phi \rightarrow f(x) = (2x+1) \in \Phi.$$

Ἐὰν $x_1 \in \Phi$ καὶ $x_2 \in \Phi$, θὰ ἔχωμεν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow 2x_2 + 1 = 2x_2 + 1 \Longleftrightarrow 2x_1 = 2x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

Κατ' ἀκολουθίαν:

$$f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2$$

καὶ ἄρα ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐν*, καθόσον δὲν παρουσιάζονται ὡς εἰκόνες οἱ ἄρτιοι ἀριθμοὶ τοῦ Φ.

**85. Ἰσοδύναμα σύνολα.** α). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον:

$\Phi = \{1,2,3,4,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

καὶ $\Phi_2 = \{2,4,6,8,\ldots\}$ τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν (σχ. 98).

Ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: \Phi \rightarrow \Phi_2$ ὑπὸ τῆς:

$$x \in \Phi \rightarrow f(x) = 2x \in \Phi_2.$$

Θὰ ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} f: \quad & 1 \rightarrow f(1) = 2\cdot 1 = 2 \in \Phi_2 \\ & 2 \rightarrow f(2) = 2\cdot 2 = 4 \in \Phi_2 \\ & 3 \rightarrow f(3) = 2\cdot 3 = 6 \in \Phi_2 \\ & 4 \rightarrow f(4) = 2\cdot 4 = 8 \in \Phi_2 \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & \nu \rightarrow f(\nu) = 2\cdot 2 = 2\nu \in \Phi_2 \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

| | Φ | | $\Phi_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | → | 2 | |
| | 2 | → | 4 | |
| | 3 | → | 6 | |
| | 4 | → | 8 | |
| Φ | 5 | → | 10 | $\Phi_2$ |
| | . | | . | |
| | . | | . | |
| | . | | . | |

Σχ. 98.

Δηλαδή, εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Φ ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, στοιχεῖον τοῦ Φ. Ἔχομεν δὲ ὡς:

Πεδίον ὁρισμοῦ, τό: $\Phi = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

Πεδίον τιμῶν, τό: $f(\Phi) = \{2,4,6,8,\ldots\} \subset \{1,2,3,4,\ldots\} = \Phi$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ***ἐπί***, τὰ δὲ σύνολα Φ καὶ $\Phi_2$ λέγονται ***ἰσοδύναμα***.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

***Δύο σύνολα Α καὶ Β θὰ λέγωνται ἰσοδύναμα, ἄν, καὶ μόνον ἄν, ὑπάρχῃ μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις f τοῦ συνόλου Α ἐπὶ τὸ σύνολον Β.***

Ἡ ἰσοδυναμία τῶν A καὶ B σημειώνεται ὡς ἑξῆς: $A \sim B$.

β'). Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A=\{0,1,2,3,4\} \quad \text{καὶ} \quad B=\{5,7,9,11,13\}.$$

Ἡ ἀπεικόνισις $f: A \to B$, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς:

$$x \in \Phi \to f(x)=(2x+5) \in B,$$

εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί. Διότι:

$$\left.\begin{array}{ll} f: & 0 \to f(0)=2\cdot 0+5=\ 5 \in B \\ & 1 \to f(1)=2\cdot 1+5=\ 7 \in B \\ & 2 \to f(2)=2\cdot 2+5=\ 9 \in B \\ & 3 \to f(3)=2\cdot 3+5=11 \in B \\ & 4 \to f(4)=2\cdot 4+5=13 \in B \end{array}\right| \quad \text{Ὅθεν}: A \sim B$$

Ἔστωσαν ἤδη τὰ σύνολα: $A=\{1,2,3,4\}$ καὶ $B=\{1,2,3\}$.

Ἂν ἐξετάσωμεν ὅλας τὰς ἀπεικονίσεις τοῦ A εἰς τὸ B, θὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ***οὐδεμία ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί.*** Κατ' ἀκολουθίαν τὰ σύνολα A καὶ B δὲν εἶναι ἰσοδύναμα. Θὰ γράφωμεν δέ:

$$A \not\sim B.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων συνάγομεν ὅτι: δύο σύνολα A καὶ B θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, ἂν περιέχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος στοιχείων.

γ'). Ἔστωσαν τὸ σύνολον: $\Phi=\{1,2,3,4,\ldots\}$ τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ τό: $\Sigma=\{x \mid x \in \Phi$ μὲ $x=2^\nu$ καὶ $\nu \in \Phi\}$.

Μεταξὺ αὐτῶν ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν f, κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

$$f: \ \nu \in \Phi \to f(\nu)=2^\nu \in \Sigma.$$

Ἐὰν $\nu_1 \in \Phi$ καὶ $\nu_2 \in \Phi$, θὰ ἔχωμεν:

$$f(\nu_1)=f(\nu_2) \Longleftrightarrow 2\nu_1 \Longleftrightarrow \nu_1=\nu_2.$$

Δηλαδή: $f(\nu_1)=f(\nu_2) \Longleftrightarrow \nu_1=\nu_2$.

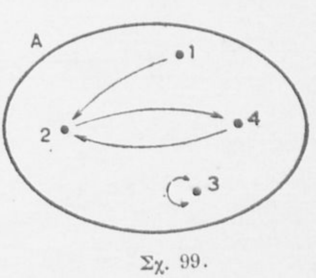
Ὅθεν ἡ ἀπεικόνισις f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καί, προφανῶς, ***ἐπί.***

Κατ' ἀκολουθίαν: $\Phi \sim \Sigma$.

**86. Ἀπεικόνισις ἑνὸς συνόλου εἰς τὸν ἑαυτόν του.** α'). Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $A=\{1,2,3,4\}$ καὶ ἂς ὁρίσωμεν μίαν ἀπεικόνισιν: $f: A \to A$, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{ll} f: & 1 \to f(1)=2 \\ & 2 \to f(2)=4 \\ & 3 \to f(3)=3 \\ & 4 \to f(4)=2, \end{array}$$

δηλαδὴ ἔχομεν μίαν ἀπεικόνισιν f τοῦ συνόλου A ***εἰς*** τὸν ἑαυτόν του.




Σχ. 99.

Προφανῶς ἡ ἀπεικόνισις αὕτη $f: A \to A$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ***ἐπί,*** ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἕνα ***μετασχηματισμὸν*** f τοῦ συνόλου A (σχ. 99).

β'). Εἰς τὴν προηγουμένην παράγραφον 85 εἴδομεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις f, ἡ ὁριζομένη ὑπό:

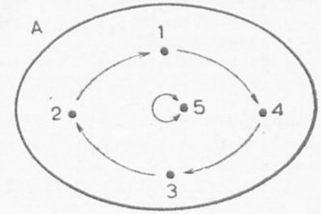
$$\nu \in \Phi \to f(\nu) = 2^\nu \in \Phi,$$

ἀπεικονίζει τὸ Φ εἰς τὸν ἑαυτόν του.

γ'). Ὁμοίως, εἰς τὸ σύνολον τῶν $\Pi_\alpha$ (πραγματικῶν ἀριθμῶν) ἡ ἀπεικόνισις f, ἡ ὁριζομένη ὑπό:

$$x \in \Pi_\alpha \to f(x) = (x^2 - 5) \in \Pi_\alpha\,,$$

ἀπεικονίζει τὸ $\Pi_\alpha$ εἰς τὸν ἑαυτόν του.




Σχ. 100.

δ'). Ὁμοίως, εἰς τὸ σύνολον: $A_1 = \{1,2,3,4,5\}$ ὁρίζομεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: A_1 \to A_1$, ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} f:\quad & 1 \to f(1) = 4 \\ & 2 \to f(2) = 1 \\ & 3 \to f(3) = 2 \\ & 4 \to f(4) = 3 \\ & 5 \to f(5) = 5. \end{aligned}$$

Ἔχομεν οὕτω ἕνα μετασχηματισμὸν f τοῦ συνόλου $A_1$, ὅστις παρίσταται ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ ἀνωτέρω (σχ. 100).

**87. Σχέσις ἰσοδυναμίας καὶ ἀπεικονίσεως.** Ἂς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα: $A_1 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ καὶ $B = \{0,1,3,6\}$ καὶ ἂς ὁρίσωμεν μίαν ἀπεικόνισιν $f: A_1 \to B$, ὡς ἑξῆς:

$$f:\quad x \in A_1 \to f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x) \in B.$$

$$\begin{aligned} f:\quad & -3 \to f(-3) = \frac{1}{2}(9-3) = 3 \in B \\ & -2 \to f(-2) = \frac{1}{2}(4-2) = 1 \in B \\ & -1 \to f(-1) = \frac{1}{2}(1-1) = 0 \in B \\ & 0 \to f(0) = \frac{1}{2}(0-0) = 0 \in B \\ & 1 \to f(1) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \in B \\ & 2 \to f(2) = \frac{1}{2}(4+1) = 3 \in B \\ & 3 \to f(3) = \frac{1}{2}(9+3) = 6 \in B. \end{aligned}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ στοιχεῖα $-1, 0$ ἀποτελοῦν τὸ σύνολον $\Sigma_1=\{-1,0\}$, τὰ $-2, 1$ ἀποτελοῦν τὸ $\Sigma_2=\{-2,1\}$, τὰ $-3, 2$ ἀποτελοῦν τὸ $\Sigma_3=\{-3,2\}$ καὶ τέλος τὸ στοιχεῖον 3 ἀποτελεῖ τὸ $\Sigma_4=\{3\}$.

Δηλαδὴ τὰ σύνολα $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4$ ἀποτελοῦν ἕνα διαμερισμὸν τοῦ $A_1$, καὶ ἐκαλέσαμεν κλάσεις.

Ἐπειδὴ τὰ $\Sigma_1$, $\Sigma_2$, $\Sigma_3$, $\Sigma_4 \neq \varnothing$, ἕπεται ὅτι εἶναι ξένα. Ἄρα

$$\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 = A_1.$$

Ἐπίσης παρατηροῦμεν ὅτι:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{-1, 0\} \Rightarrow f(\Sigma_1) = \{0\} \\ \Sigma_2 &= \{-2, 1\} \Rightarrow f(\Sigma_2) = \{1\} \\ \Sigma_3 &= \{-3, 2\} \Rightarrow f(\Sigma_3) = \{3\} \\ \Sigma_4 &= \{3\} \qquad \Rightarrow f(\Sigma_4) = \{6\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, τὰ στοιχεῖα $-1, 0$ τοῦ $A_1$ δίδουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα $0 \in B$
» $-2, 1$ » » » » $1 \in B$
» $-3, 2$ » » » » $3 \in B$.

Διὰ τὸν λόγον τοῦτον τὰ στοιχεῖα $-1,0$ εἶναι ***ἰσοδύναμα.***
» » $-2,1$ » »
καὶ » » $-3,2$ » »

Γενικῶς: ***Δύο στοιχεῖα $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ ἑνὸς συνόλου $A$ θὰ λέγωνται ἰσοδύναμα, ἂν ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα $\beta \in B$.***

Τὴν ἰσοδυναμίαν τῶν στοιχείων $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ σημειώνομεν ὡς ἑξῆς:

$$\alpha_1 \sim \alpha_2.$$

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι, διὰ δύο ἰσοδύναμα στοιχεῖα $\alpha_1$ καὶ $\alpha_2$ τοῦ συνόλου A, θὰ ἔχωμεν:

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \in B$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

α'). $\forall\, x \in A$ εἶναι x ἰσοδύναμον πρὸς τὸν x, διότι:

$$f(x) = f(x).$$

Ἄρα ἰσχύει ἡ ***ἀνακλαστικὴ*** ἰδιότης.

β'). Ἂν $\alpha_1 \sim \alpha_2$, θὰ ἔχωμεν:

$$f(\alpha_1) = f(\alpha_2) \quad \text{ἢ} \quad f(\alpha_2) = f(\alpha_1) \Rightarrow \alpha_2 \sim \alpha_1.$$

Ἰσχύει δηλαδὴ καὶ ἡ ***συμμετρικότης.***

γ'). Ἂν $\left.\begin{aligned} \alpha_1 \sim \alpha_2 &\Rightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha)_2 \\ \alpha_2 \sim \alpha_3 &\Rightarrow f(\alpha_2) = f(\alpha_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f(\alpha_1) = f(\alpha_3) \Rightarrow \alpha_1 \sim \alpha_3.$

Ἰσχύει δηλαδὴ καὶ ἡ ***μεταβατικότης.***

Κατ' ἀκολουθίαν: ***Ἡ ἰσοδυναμία μεταξὺ στοιχείων ἑνὸς συνόλου συνεπάγεται ἰσοδυναμίαν*** (μὲ τὰς ἀνωτέρω γνωστὰς ἰδιότητας).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ VIII.

# ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

**88. Ὁρισμός.** ***Μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις f ἑνὸς μὴ κενοῦ συνόλου A εἰς τὸ μὴ κενὸν σύνολον B καλεῖται συνάρτησις.***

Θὰ γράφωμεν : $f: \quad A \rightarrow B$

ἢ $\qquad f: x \in A \rightarrow f(x) = y \in B.$

Ἐνταῦθα τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως f εἶναι τὸ σύνολον A καὶ τὸ πεδίον τιμῶν αὐτῆς τὸ σύνολον : $f(A) \subseteq B$.

Μία συνάρτησις : $\quad f: \; x \in A \rightarrow f(x) = y \in B$

συμβολίζεται καὶ ὡς ἑξῆς :

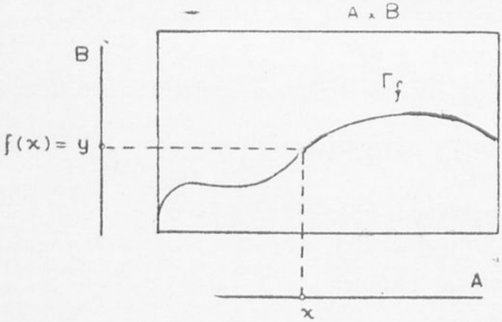
$$y = f(x) \mid A,$$

ὅπου τὸ σύμβολον f(x) διαβάζεται : «f τοῦ x».

Τὸ μὲν x ὀνομάζεται ***ἀνεξάρτητος μεταβλητή***, τὸ δὲ σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν (x, y = f(x)) ὀνομάζεται ***συνάρτησις.***

Τὸ $y \in B$ ὀνομάζεται ***ἐξηρτημένη μεταβλητή.***

Χαρακτηριστικὸν τῶν ζευγῶν τούτων εἶναι ὅτι ἔχουν ***διαφορετικὰ πρῶτα μέλη***, ἐνῷ τὰ δεύτερα μέλη αὐτῶν δύνανται νὰ εἶναι καὶ ἴσα, ὡς εἴδομεν εἰς τὴν § 75, παράδ. 4ον.




Σχ. 101.

Τὸ σύνολον τῶν διατεταγμένων τούτων ζευγῶν, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται μὲ τὴν f, εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου $A \times B$ καὶ παρίσταται διὰ τοῦ :

$$\Gamma f = \{[x, f(x)] \in A \times B \quad \text{μὲ} \quad x \in A\}.$$

Γραφικῶς δὲ ὑπὸ τοῦ (σχ. 101). Προφανῶς, μία μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ***ἐν*** ἢ ***ἐπὶ*** ὁρίζει μίαν συνάρτησιν f ***ἐν*** ἢ ***ἐπί***, ἀντιστοίχως.

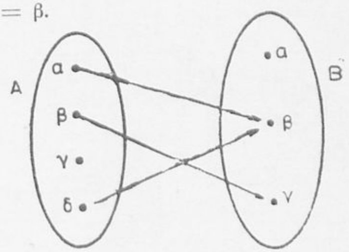
Ὁμοίως, μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀπεικόνισις ***ἐν*** ἢ ***ἐπὶ*** εἶναι μία συνάρτησις, ἡ ὁποία τότε καλεῖται ***ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις ἐν*** ἢ ***ἐπὶ ἀντιστοίχως.***

Παραδείγματα: α'). Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma\}.$$

Ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν $f: A \longrightarrow B$ ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} f:\ \alpha &\longrightarrow f(\alpha) = \beta \\ \beta &\longrightarrow f(\beta) = \gamma \\ \delta &\longrightarrow f(\delta) = \beta. \end{aligned}$$




Σχ. 102.

Ἑπομένως, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ εἰκὼν τοῦ α εἶναι τὸ β, ἡ εἰκὼν τοῦ β εἶναι τὸ γ καὶ ἡ εἰκὼν τοῦ δ εἶναι τὸ β.

Ἡ γραφικὴ παράστασις δίδεται ὑπὸ τοῦ (σχ. 102).

Ἡ ἔκτασις τῆς συναρτήσεως ταύτης $f$ εἶναι: $f(A) = \{\beta,\gamma\}$.

β'.) Ἔστω $A = \Pi_\alpha$ τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ $B = \{-1,1\}$. Συμφωνοῦμεν εἰς κάθε ἄρρητον ἀριθμὸν τοῦ $\Pi_\alpha$ νὰ ἀντιστοιχῇ ὁ $-1$ καὶ εἰς κάθε ρητὸν ἀριθμὸν τοῦ $\Pi_\alpha$ νὰ ἀντιστοιχῇ ὁ 1. Ὁρίζομεν οὕτω μίαν συνάρτησιν:

$$f:\ \Pi_\alpha \longrightarrow \{-1,1\},$$

ἡ ὁποία γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{ἂν } x \in A_\rho \\ 1 & \text{» } x \in P. \end{cases}$$

Ὁπότε διά:

$$\begin{aligned} x = \sqrt{10} &\longrightarrow f(\sqrt{10}) = -1 \\ x = \sqrt{7} &\longrightarrow f(\sqrt{7}) = -1 \\ x = \frac{2}{3} &\longrightarrow f\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \\ x = -\frac{17}{8} &\longrightarrow f\left(-\frac{17}{8}\right) = 1 \text{ κ.ο.κ.} \end{aligned}$$

γ'). Ἔστω ὅτι ἔχομεν ὁρίσει μίαν συνάρτησιν $f$ ὡς ἑξῆς:

$$f:\ x \in \Pi_\alpha \rightarrow f(x) = (2x^2 - 7) \in \Pi_\alpha.$$

Εἰς αὐτὴν πεδίον ὁρισμοῦ εἶναι τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$ καὶ τὸ πεδίον τιμῶν εἶναι πάλιν τὸ $\Pi_\alpha$. Διότι, διὰ πᾶσαν πραγματικὴν τιμὴν τοῦ x, τὸ $f(x) = 2x^2 - 7$ εἶναι πραγματικὸς ἀριθμός.

Οὕτω, διὰ $x = 0$ εἶναι $f(0) = -7 \in \Pi_\alpha$

$x = 2$ » $f(2) = 1 \in \Pi_\alpha$

$x = -3$ » $f(-3) = 11 \in \Pi_\alpha$ κ.ο.κ.

δ'). Ἐὰν ὡς πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς συναρτήσεως $f$ θεωρήσωμεν τὸ σύνολον τῶν χωρῶν τοῦ κόσμου:

Σ = {Ἀμερική, Ἀγγλία, Γερμανία, Ρωσσία,..., Ἑλλάς},

καὶ ὡς πεδίον τιμῶν αὐτῶν τὰς πρωτευούσας τῶν χωρῶν τούτων, τότε εἰκὼν τῆς Ἑλλάδος θὰ εἶναι αἱ Ἀθῆναι. Δηλαδή:

$f$ (Ἑλλὰς) = Ἀθῆναι

$f$ (Γαλλία) = Παρίσι

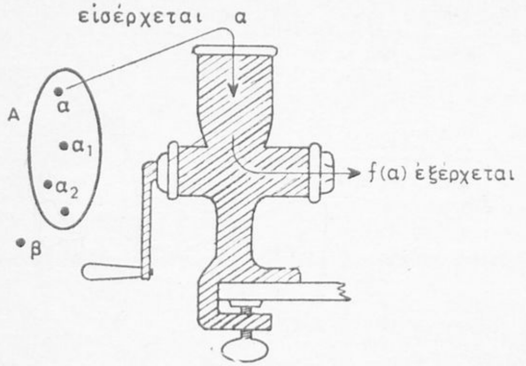
$f$ (Ρωσσία) = Μόσχα κ.ο.κ.

καὶ ἔχομεν οὕτω μίαν συνάρτησιν.

ε')*. Μίαν συνάρτησιν $f(x) \mid A$ δυνάμεθα νὰ παρομοιάσωμεν μὲ μίαν μηχα-

* Τὸ παράδειγμα τοῦτο ἐλήφθη ἐκ τοῦ βιβλίου: *Elementary Contemporary Algebra, by MERLIN M. OHMER—Blaisdell Publishing Company—New York.*

νὴν (σχ. 103), ἐντὸς τῆς ὁποίας, ρίπτοντες ἕνα $\alpha \in A$ ἐξέρχεται ἕνα $f(\alpha) \in f(A)$.




Σχ. 103.

Ἐὰν ρίψωμεν ἕνα $\alpha_1 \in A$, ἐξέρχεται ἕνα $f(\alpha_1) \in f(A)$, διάφορον ἢ μὴ τοῦ $f(\alpha)$.

Ἐὰν εἰς τὴν μηχανὴν ρίψωμεν ἕνα $\beta \notin A$, τότε ἡ μηχανὴ δὲν θὰ τὸ δεχθῇ, διότι αὕτη ἐργάζεται μόνον μὲ στοιχεῖα τοῦ συνόλου A, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως.

Τὸ α (μεταβλητὴ) εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ρίπτομεν ἐντὸς τῆς μηχανῆς, τὸ $f$ εἶναι ἡ μηχανὴ (νόμος ἀπεικονίσεως—συναρτήσεως) καὶ τὸ $f(x)$ (τιμὴ συναρτήσεως) εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἐξέρχεται τῆς μηχανῆς.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Νὰ εὑρεθῇ τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ $\Pi_\alpha$, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ τύπος $f(x) = x^2$ ὁρίζει μίαν ἀμφιμονοσήμαντον συνάρτησιν.

**2.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$A = \{-1, 1\} = \{x \mid x \in \Pi_\alpha \text{ μὲ } |x| \leqslant 1\}, \quad B = \{1, 3\}, \quad \Gamma = \{-3, -1\}$

καὶ θεωροῦμεν τὰς ἀκολούθους συναρτήσεις:

$$f_1: \quad x \in A \longrightarrow f_1(x) = x^2 \in \Pi_\alpha$$
$$f_2: \quad y \in B \longrightarrow f_2(y) = y^2 \in \Pi_\alpha$$
$$f_3: \quad z \in \Gamma \longrightarrow f_3(z) = z^2 \in \Pi_\alpha .$$

Ποῖαι ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι ἀμφιμονοσήμαντοι;

**3.** Θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν $f: \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 5 & \text{ἂν} \quad x > 9 \\ x^2 - |x| & \text{»} \quad |x| \leqslant 9 \\ x - 4 & \text{»} \quad x < -9. \end{cases}$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(3)$, 2) $f(12)$, 3) $f(-10)$, 4) $f(-15)$, 5) $f(f(5))$, 6) $f^2(5)$.

**4.** Δίδεται ἡ συνάρτησις $f: \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{ἂν} \quad x \geqslant 2 \\ x + 2 & \text{»} \quad x < 2. \end{cases}$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(5)$, 2) $f(0)$, 3) $f(-2)$.

**5.** Δίδεται ἡ συνάρτησις:

$$f: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (x^2 - 5x + 6) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(-3)$, 3) $f(x^2)$, 5) $f(2x - 3)$, 7) $f(f(x + 1))$,

2) $f(\alpha^2)$, 4) $f(x + 3)$, 6) $f(f(x))$, 8) $f(f(x - 2))$.

**6.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν:

$$f: x \in A \longrightarrow f(x) = (x + 5) \in \Pi_\alpha .$$

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $f(A)$.
2) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f.

**7.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = (x^2 - x + 1) \in \Pi_\alpha .$$

1) Νὰ εὑρεθῇ τὸ $f(A)$.
2) Νὰ γίνῃ ἡ γραφικὴ παράστασις καὶ τὸ διάγραμμα τῆς f.

**8.** Θεωροῦμεν τὰ σύνολα: $A = \{\alpha, \beta\}$ καὶ $B = \{1, 2, 3\}$. Πόσαι διαφορετικαὶ συναρτήσεις ὑπάρχουν ἐκ τοῦ A *εἰς* τὸ B;

**9.** Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f : \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ἐὰν} \quad x \in P \\ -1 & \text{»} \quad x \in A_\varrho . \end{cases}$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί:

$$f\left(\frac{1}{2}\right),\ f(\pi),\quad f\left(-\frac{1}{2}\right),\ f(\sqrt{3}),\quad f(\sqrt{2}),\quad f(1),\quad f(2{,}1313...).$$

**10.** Ἡ συνάρτησις $f(x) = x^2$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τὸ διάστημα:

$$-2 \leqslant x \leqslant 8.$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(4)$, 2) $f(-3)$, 3) $f(t-3)$.

**11.** Ἡ συνάρτησις $f : \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$ εἶναι ὡρισμένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{ἂν} \quad x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{»} \quad -2 \leqslant x \leqslant 3 \\ 2x + 3 & \text{»} \quad x < -2. \end{cases}$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(2)$, 2) $f(4)$, 3) $f(-1)$, 4) $f(-3)$, 5) $f(-4)$, 6) $f(5)$.

**12.** Δίδεται τὸ σύνολον: $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ καὶ ἡ συνάρτησις: $f : \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = (x^2 + 1) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἔκτασις τῆς συναρτήσεως ταύτης.

**13.** Ἔστω ἡ συνάρτησις: $f : \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(3)$, 2) $f(-3) - f(2)$, 3) $f(x-2)$, 4) $f(f(-2))$, 5) $f(4)$, 6) $f(x+\lambda)$, 7) $f(x+\lambda) - f(x)$, 8) $f(f(x))$.

**14.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ καὶ $B = \{0, 1, 2\}$. Ἐὰν $A \cup B = \Sigma$ καὶ θεωρήσωμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$f : x \in \Sigma \longrightarrow f(x) = x^2 \in \Pi_\alpha ,$$

1) Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα:
$f(A)$, $f(B)$, $f(A) \cup f(B)$, $f(A \cup B)$.
2) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι: $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

**15.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ καὶ $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν ἀπεικόνισιν:

$$f : x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (x^2 - 3\,|\,x\,| + 2) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$. 2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.

**16.** Γνωστοῦ ὄντος ὅτι: $f : \Sigma \longrightarrow \Delta$ καὶ $A \subseteq \Sigma$, $B \subseteq \Sigma$, νὰ ἀποδειχθῇ διὰ παραδείγματος ὅτι:

1) $A \subseteq B \Longrightarrow f(A) \subseteq f(B)$.
2) Ἐὰν $f(A) \subseteq f(B)$ δὲν ἕπεται ἀναγκαίως ὅτι $A \subseteq B$.

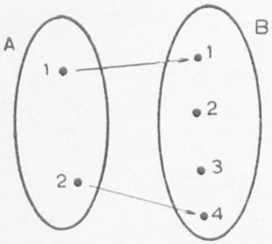
**17.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \{-3, -2, -1, 0, 1\}$ καὶ $B = \{-1, 0, 1, 2, 4\}$

καὶ ἡ ἀπεικόνισις: $f : x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (x^2 - 1) \in \Pi_\alpha$ .

Ζητοῦνται τὰ σύνολα:

$f(A)$, $f(B)$, $f(A \cap B)$, $f(A \cup B)$, $f(A) \cup f(B)$, $f(A) \cap f(B)$.

**89. Ἴσαι συναρτήσεις.** Ἂς θεωρήσωμεν τὸ σύνολον: $A = \{1,2\}$ ὡς πεδίον ὁρισμοῦ δύο συναρτήσεων f καὶ φ, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ φ ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου:




Σχ. 104.

$$\varphi(x) = x^2 \mid \{1,2\}.$$

Θὰ ἔχωμεν, ἀφ' ἑνὸς μὲν (σχ. 104)

$$f: \quad 1 \to f(1) = 1$$
$$\quad\quad 2 \to f(2) = 4$$

καὶ ἀφ' ἑτέρου δέ:

$$\varphi: \quad 1 \to \varphi(1) = 1^2 = 1$$
$$\quad\quad 2 \to \varphi(2) = 2^2 = 4.$$

Δηλαδή, παρατηροῦμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις f καὶ φ ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ $A = \{1,2\}$. Ἐπὶ πλέον ἕκαστον ἀρχέτυπον 1, 2 τοῦ A ἀπεικονίζεται ὑπὸ τῶν f καὶ φ εἰς τὴν ἰδίαν εἰκόνα. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην θὰ λέγωμεν ὅτι αἱ συναρτήσεις f καὶ φ εἶναι *ἴσαι* καὶ θὰ γράφωμεν:

$$f = \varphi.$$

Ὥστε: ***Δύο συναρτήσεις $f : A \to B$ καὶ $\varphi : A \to \Gamma$ θὰ εἶναι ἴσαι, ἐάν, καὶ μόνον ἐάν:***

$$\boxed{f(x) = \varphi(x) \mid \forall x,\ x \in A}\ .$$

Δηλαδή, ἂν ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ A καὶ τὰς αὐτὰς εἰκόνας, ἀντιστοίχως, ὡς εἰς τὸ (σχ. 104) φαίνεται.

Συμβολικῶς δέ:

$$\left(\begin{matrix} f: & A \to B \\ \varphi: & A \to \Gamma \end{matrix}\right\} f = \varphi \Bigg) \Longleftrightarrow (f(x) = \varphi(x) \mid \forall x,\ x \in A),$$

ὁπότε θὰ ἔχωμεν καὶ $f(A) = \varphi(A)$.

Ἐὰν αἱ δύο συναρτήσεις f καὶ φ δὲν εἶναι ἴσαι, θὰ γράφωμεν: $f \neq \varphi$.

Οὕτω, αἱ συναρτήσεις: $f(x) = 2x^2 - 5x + 3 \mid \{1,3,4\}$

$$\varphi(x) = 2x^2 - 5x + 3 \mid \{1,2,3,4,5\},$$

δὲν εἶναι ἴσαι, διότι $\{1,3,4\} \neq \{1,2,4,5\}$ καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $f \neq \varphi$.

Ὁμοίως, αἱ συναρτήσεις: $f(x) = x^2 \mid \{x \mid x \in \Pi_\alpha\}$

$$\varphi(x) = x^2 \mid \{x \mid x = \text{μιγαδικὸς}\}$$

δὲν εἶναι ἴσαι, διότι δὲν ἔχουν τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐάν: $A = \{0, 1\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f: x \in A \longrightarrow f(x) = (x + 1) \in \Pi_\alpha\ ,$$
$$\varphi: x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (3x^2 - 2x + 1) \in \Pi_\alpha\ ,$$

εἶναι ἴσαι.

**2.** 'Εάν: $A = \{0, 1\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = x^2 \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = x^3 \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι.

**3.** 'Εάν: $A = \{-2, -1, 0, 1\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = (x^4 - 2x) \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (x^2 - 2x^3) \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι.

**4.** 'Εάν: $A = \{0, 1\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x = (x^2 + x + 2) \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (2x^3 - x^2 + x + 2) \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι.

**5.** 'Εάν: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = (x^4 - 6x) \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (6x^3 - 11x^2) \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι.

**6.** 'Εάν: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = (x^5 + 35x^3) \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (10x^4 + 50x^2 - 24x) \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι.

**7.** Δίδονται τρεῖς συναρτήσεις f, φ καὶ σ, ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν ἀκολούθων τύπων, ἀντιστοίχως:

$$f(x) = x^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$\varphi(x) = x^2 \mid 0 < x < 1,$$
$$\sigma(x) = x^2 \mid x \in \Pi\alpha .$$

Ποῖαι ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι ἴσαι;

**8.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = (2x^3 + 9x^2 - 5x) \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (x^3 + 4x^2 - 11x) \in \Pi\alpha ,$$

ἔνθα $A \subseteq \Pi\alpha$. Νὰ ὁρισθῇ τὸ εὐρύτερον σύνολον A οὕτως, ὥστε αἱ δύο συναρτήσεις νὰ εἶναι ἴσαι.

**9.** 'Εάν: $A = \{0, 1\}$, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις:

$$f : x \in A \longrightarrow f(x) = 10 \in \Pi\alpha ,$$
$$\varphi : x \in A \longrightarrow \varphi(x) = (x^2 - x + 10) \in \Pi\alpha ,$$

εἶναι ἴσαι. Ποῖον συμπέρασμα συνάγομεν ἐντεῦθεν διὰ τὴν συνάρτησιν φ;

**10.** Δίδονται τὰ σύνολα:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \quad \Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}.$$

Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις f καὶ φ, ὁριζομένας ὡς ἑξῆς:

$$f : A \longrightarrow B \qquad\qquad \varphi : A \longrightarrow \Gamma$$

$$f : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow f(1) = \alpha \\ 2 \longrightarrow f(2) = \gamma \\ 3 \longrightarrow f(3) = \beta \\ 4 \longrightarrow f(4) = \beta \end{array} \qquad \varphi : \begin{array}{l} 1 \longrightarrow \varphi(1) = \alpha \\ 2 \longrightarrow \varphi(2) = \gamma \\ 3 \longrightarrow \varphi(3) = \beta \\ 4 \longrightarrow \varphi(4) = \beta. \end{array}$$

Εἶναι ἢ δὲν εἶναι ἴσαι αἱ δύο συναρτήσεις f καὶ φ;

**11.** Νὰ δημιουργήσετε τρεῖς ἴσας συναρτήσεις.

**12.** Ἔστωσαν αἱ συναρτήσεις f, φ καὶ t, ὁριζόμεναι ὑπὸ τῶν τύπων:

$$f(x) = x^2 \quad \text{μὲ} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$\varphi(y) = y^2 \quad \text{μὲ} \quad 2 \leqslant y \leqslant 8$$
$$t(z) = z^2 \quad \text{μὲ} \quad z \in \Pi\alpha .$$

Ποῖαι ἐκ τῶν συναρτήσεων τούτων εἶναι ἴσαι;

**90. Ταυτοτική συνάρτησις.** Ἂς θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν:

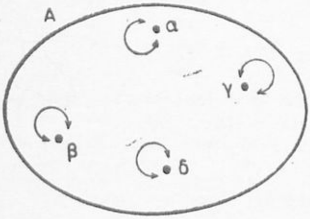
$$f: \quad x \in A \rightarrow f(x) = y \in A,$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ μὴ κενὸν σύνολον $A \neq \varnothing$ τοιαύτην, ὥστε:

$$f(x) = x \mid \forall x, \ x \in A.$$

Ταύτην καλοῦμεν ***ταυτοτικὴν συνάρτησιν*** ἢ ***ταυτοτικὸν μετασχηματισμὸν*** εἰς τὸ σύνολον A καὶ παρίσταται συνήθως μὲ $1_A$, δηλαδή:

$$1_A: \quad A \rightarrow A.$$




Σχ. 105.

Οὕτω, μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον: $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ ἡ ταυτοτικὴ συνάρτησις:

$$1_A: A \rightarrow A$$

εἶναι ἡ ὑπὸ τοῦ (σχ. 105) εἰκονιζομένη.

Θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

$$\begin{aligned} 1_A: \quad & \alpha \rightarrow 1_A(\alpha) = \alpha \\ & \beta \rightarrow 1_A(\beta) = \beta \\ & \gamma \rightarrow 1_A(\gamma) = \gamma \\ & \delta \rightarrow 1_A(\delta) = \delta. \end{aligned}$$

Ὁμοίως, εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$ ἡ συνάρτησις $f(x) = x$, δίδει:

$$\begin{aligned} f: \quad & 1 \rightarrow 1\,\Pi_\alpha(1) = 1 \\ & 2 \rightarrow 1\,\Pi_\alpha(2) = 2 \\ & 3 \rightarrow 1\,\Pi_\alpha(3) = 3 \quad \text{κ. ο. κ.} \end{aligned}$$

. . . . . . . . . . .

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (4x - 3) \in \Pi_\alpha,$$

$$\varphi: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = \frac{x+3}{4} \in \Pi_\alpha.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις $(f \cdot \varphi)$ καὶ $(\varphi \cdot f)$ εἶναι ταυτοτικαὶ εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$.

**2.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (2x - 10) \in \Pi_\alpha,$$

$$\varphi: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = \frac{x+10}{2} \in \Pi_\alpha.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις $(f \cdot \varphi)$ καὶ $(\varphi \cdot f)$ εἶναι ταυτοτικαὶ εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$.

**3.** Θεωροῦμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (8x + 9) \in \Pi_\alpha,$$

$$\varphi: x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = \frac{x-9}{8} \in \Pi_\alpha.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ συναρτήσεις $(f.\varphi)$ καὶ $(\varphi.f)$ εἶναι ταυτοτικαὶ εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha$.

**4.** Εἰς ποῖον σύνολον A μία ταυτοτικὴ συνάρτησις $1_A: A \longrightarrow A$ εἶναι ***ἀμφιμονοσήμαντος;***

**5.** Εἰς ποῖον σύνολον A μία ταυτοτικὴ συνάρτησις $1_A: A \longrightarrow A$ εἶναι *ἐπί;*

**6.** Δίδεται μία συνάρτησις $f: A \longrightarrow B$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:

1) $(1_B \cdot f) = f$ καὶ 2) $(f \cdot 1_A) = f$.

**7.** Ἔστω ὅτι $f: A \longrightarrow B$ καὶ $\varphi: B \longrightarrow A$ καὶ ὅτι: $(\varphi \cdot f) = 1_A$.
Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων δηλώσεων εἶναι ἀληθεῖς καὶ ποῖαι εἶναι ψευδεῖς;

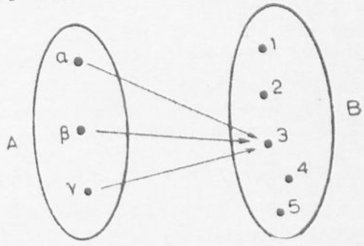
1) $\varphi = f$
2) f εἶναι μία συνάρτησις *ἐπὶ*
3) f εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος
4) φ εἶναι συνάρτησις *ἐπὶ*
5) φ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος.

**91. Σταθερὰ συνάρτησις.** Ἔστωσαν τὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1,2,3,4,5\}.$$

Ὁρίζομεν τὴν συνάρτησιν $f: A \rightarrow B$, ὡς ἑξῆς:

$$f: \quad \alpha \rightarrow f(\alpha) = 3$$
$$\beta \rightarrow f(\beta) = 3$$
$$\gamma \rightarrow f(\gamma) = 3,$$




Σχ. 106.

δηλαδὴ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A ἀπεικονίζονται εἰς ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον 3 τοῦ B (σχ. 106).

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ f ὀνομάζεται **σταθερὰ** συνάρτησις καὶ ἔχει ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τό: $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τό: $f(A) = 3$.

Ὥστε: ***Μία συνάρτησις $f: A \rightarrow B$ καλεῖται σταθερά, ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ A ἀπεικονίζωνται εἰς ἕνα μόνον καὶ τὸ αὐτὸ στοιχεῖον β τοῦ B.***

Δηλαδή: $\boxed{f: x \in A \rightarrow f(x) = \beta \in B}$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην τὸ πεδίον τιμῶν εἶναι τό: $f(A) = \{\beta\}$, δηλαδὴ μονοσύνολον, καὶ κατ' ἀκολουθίαν:

$$f(x) = \beta \in B \mid \forall x, \ x \in A.$$

Οὕτω, ἡ συνάρτησις $f: \ \Pi_\alpha \rightarrow \Pi_\alpha$, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = 5 \mid \forall x, \ x \in \Pi_\alpha,$$

εἶναι μία σταθερὰ συνάρτησις μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\Pi_\alpha$ καὶ πεδίον τιμῶν τὸ σύνολον: $f(\Pi_\alpha) = \{5\}$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{0, 1, 2\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:
$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = (x^3 - 3x^2 + 2x + 5) \in \Pi_\alpha,$$
εἶναι σταθερά.

**2.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{1, 2, 3\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:
$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) \in \Pi_\alpha,$$
εἶναι σταθερά.

**3.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{0, 1, 2, 3\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:
$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 9) \in \Pi_\alpha,$$
εἶναι σταθερά.

**4.** Δίδεται τὸ σύνολον: $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ καὶ ζητεῖται νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:
$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = (x^5 - 10x^4 - 7x^3 - 50x^2 + 24x + 8) \in \Pi_\alpha,$$
εἶναι σταθερά.

**5.** Ἐάν: $A = \{1, 2, 3\}$, νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:

$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = (x^3 - 6x^2 + 11x - 1) \in \Pi_\alpha,$$

εἶναι σταθερά.

**6.** Ἄν: $A = \Pi_\alpha - \{3, 2\}$, νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:

$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = \frac{7x^2 - 35x + 42}{(x-2)(x-3)} \in \Pi_\alpha,$$

εἶναι σταθερά.

**7.** Ἐάν: $A = \Pi_\alpha - \{2\}$, νὰ ἐξετασθῇ ἂν ἡ συνάρτησις:

$$f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = \frac{5x - 10}{x - 2} \in \Pi_\alpha,$$

εἶναι σταθερά.

**8.** Συμφώνως μὲ τὰς ἀνωτέρω ἀναγραφείσας συναρτήσεις, πῶς θὰ δημιουργήσετε σταθερὰς συναρτήσεις;

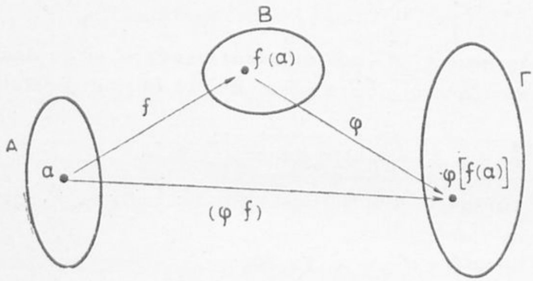
**9.** Δύναται μία σταθερὰ συνάρτησις νὰ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος;

**10.** Δύναται μία σταθερὰ συνάρτησις νὰ εἶναι *ἐπί*;

**92. Γινόμενον δύο συναρτήσεων.** Ἂς λάβωμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: \quad A \to B \quad \text{καὶ} \quad \varphi: \ B \to \Gamma,$$

ἀναφερομένας εἰς τὰ μὴ κενὰ σύνολα A,B,Γ (σχ. 107).




Σχ. 107.

Τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f, εἶναι τὸ A, ἐὰν $\alpha \in A$, ὁπότε πεδίον τιμῶν τῆς f εἶναι τό: $f(\alpha) \in B$.

Τὸ B εἶναι τὸ πεδίον ὁρισμοῦ τῆς φ. Κατ' ἀκολουθίαν τὸ στοιχεῖον f (α) τοῦ B ἀπεικονίζεται ὑπὸ τῆς συναρτήσεως φ εἰς τό: $\varphi(f(\alpha)) \in \Gamma$. Ἑπομένως ἔχομεν τώρα μίαν ***μονοσήμαντον*** ἀπεικόνισιν τοῦ A εἰς τὸ Γ. Διότι, εἰς ἕκαστον στοιχεῖον $\alpha \in A$ ἀντιστοιχεῖ ἓν στοιχεῖον $\varphi(f(\alpha)) \in \Gamma$.

Ἔχομεν δηλαδὴ μίαν συνάρτησιν τοῦ A εἰς τὸ Γ.

Ἡ συνάρτησις αὕτη ὀνομάζεται ***γινόμενον*** ἢ ***σύνθεσις*** τῶν δύο συναρτήσεων f καὶ φ καὶ παρίσταται ὡς ἑξῆς: $(\varphi \cdot f)$ ἢ $(\varphi f)$,

δηλαδή: $\quad (\varphi f): A \to \Gamma \quad$ μὲ $\quad (\varphi f)(\alpha) \equiv \varphi(f(\alpha)) \mid \forall_\alpha, \ \alpha \in A,$

ὅπου $\equiv$ σημαίνει ἰσότητα ἐξ ὁρισμοῦ.

Οὕτω, ἐὰν $\Pi_\alpha$ εἶναι τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ θεωρήσωμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: \quad x \in \Pi_\alpha \to f(x) = x^2 \in \Pi_\alpha$$

$$\varphi: \quad x \in \Pi_\alpha \to \varphi(x) = (x+3) \in \Pi_\alpha,$$

τότε θὰ ἔχωμεν:

$$2 \in \Pi_\alpha, \qquad (\varphi f)(2) \equiv \varphi(f(2)) = \varphi(4) = 4 + 3 = 7 \in \Pi_\alpha$$

$$(f \varphi)(2) \equiv f(\varphi(2)) = f(5) = 5^2 = 25 \in \Pi_\alpha$$

***ΣΗΜ.*** Διὰ $x \in \Pi_\alpha$, θὰ ἔχωμεν ἀντιστοίχως:

$$(f\varphi)(x) \equiv f(\varphi(x)) = f(x + 3) = (x+3)^2 = x^2+6x+9$$

καὶ $$(\varphi f)(x) \equiv \varphi(f(x)) = \varphi(x^2) = x^2 + 3.$$

Ἄρα: $$(f\varphi)(x) \neq (\varphi f)(x).$$

Δηλαδή, εἰς τὸ γινόμενον δύο συναρτήσεων δὲν ἰσχύει ἡ ἰδιότης τῆς ἀντιμεταθέσεως.

***ΣΗΜ.*** Ἐὰν ὅμως ἔχωμεν τὴν συνάρτησιν $f : A \to B$, τότε:

$$(1_B \circ f) = f \quad \text{καὶ} \quad (f \circ 1_A) = f,$$

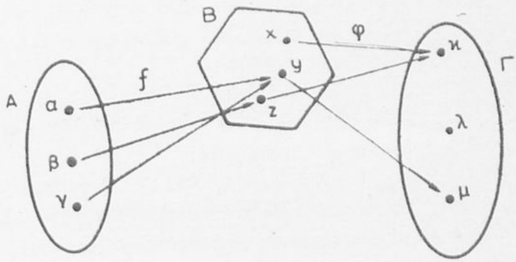
δηλαδὴ μόνον εἰς τὰς ταυτοτικὰς συναρτήσεις ἰσχύει ἡ ἀντιμεταθετικότης.

Ἤδη, ἂς θεωρήσωμεν τὰ μὴ κενὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\}, \quad B = \{x, y, z\}, \quad \Gamma = \{\varkappa, \lambda, \mu\}$$

καὶ ἔστω ὅτι ἡ $f: A \to B$ καὶ $\varphi: B \to \Gamma$ ὁρίζονται ὑπὸ τῶν κάτωθι διαγραμμάτων (σχ. 108).

$$f: \quad \alpha \to f(\alpha) = y$$
$$\beta \to f(\beta) = z$$
$$\gamma \to f(\gamma) = y$$
$$\varphi: \quad x \to \varphi(x) = \varkappa$$
$$y \to \varphi(y) = \mu$$
$$z \to \varphi(z) = \varkappa.$$




Σχ. 108.

Ἡ πρᾶξις συνθέσεως (γινόμενον) εἶναι: $(\varphi f): A \to \Gamma$, ὁριζομένη ὑπό:

$$\alpha \to (\varphi f)(\alpha) \equiv \varphi(f(\alpha)) = \varphi(y) = \mu$$
$$\beta \to (\varphi f)(\beta) \equiv \varphi(f(\beta)) = \varphi(z) = \varkappa$$
$$\gamma \to (\varphi f)(\gamma) \equiv \varphi(f(\gamma)) = \varphi(y) = \mu$$

Δηλαδή: $(\varphi f): \quad \alpha \to (\varphi f)(\alpha) = \mu$
$$\beta \to (\varphi f)(\beta) = \varkappa$$
$$\gamma \to (\varphi f)(\gamma) = \mu$$

**93. Προσεταιριστικὴ ἰδιότης τοῦ γινομένου τριῶν συναρτήσεων.**

Ἂς λάβωμεν τὰς συναρτήσεις:

$$f: \quad A \to B, \quad \varphi: B \to \Gamma \quad \text{καὶ} \quad \sigma: \Gamma \to \Delta,$$

ἔνθα τὰ σύνολα $A, B, \Gamma, \Delta$ δὲν εἶναι τὰ κενά. Ἐπειδή:

$$\left.\begin{array}{l} [(\sigma\varphi)f](x) = (\sigma\varphi)[f(x)] = \sigma[\varphi[f(x)] \\ \text{καὶ} \quad [\sigma(\varphi f)](x) = \sigma\,[[\varphi f](x)] = \sigma[\varphi[f(x)] \end{array}\right\} \forall x, \ x \in A,$$

θὰ ἔχωμεν: $$[(\sigma\varphi)f](x) = [\sigma(\varphi f)](x) \mid \forall x, \ x \in A$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν: $$(\sigma\varphi)f = \sigma(f\varphi).$$

Δηλαδὴ ἰσχύει ἡ ***προσεταιριστικὴ ἰδιότης.***

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = x^2 \in \Pi_\alpha,$$
$$\varphi: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = (x + 5) \in \Pi_\alpha.$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συναρτήσεις $(f \cdot \varphi)$ καὶ $(\varphi \cdot f)$. Ἀκολούθως δὲ νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί:

1) $(f\cdot\varphi)(0)$ 3) $(\varphi\cdot f)(2)$

2) $(f\cdot\varphi)(2)$ 4) $(\varphi\cdot f)(0)$.

***Λύσις.*** Κατὰ τὰ γνωστά, εἶναι:

$$(f\cdot\varphi)(x) = f(\varphi(x)) = f(x+5) = (x+5)^2 = x^2 + 10x + 25.$$

Ἄρα $$(f\cdot\varphi)(0) = 0^2 + 10\cdot 0 + 25 = 25.$$

$$(f\cdot\varphi)(2) = 2^2 + 10\cdot 2 + 25 = 49.$$

Ἐπίσης εἶναι:

$$(\varphi\cdot f)(x)) = \varphi(f(x)) = \varphi(x^2) = x^2 + 5.$$

Ἄρα $$(\varphi\cdot f)(2) = 2^2 + 5 = 4 + 5 = 9.$$

$$(\varphi\cdot f)(0) = 0^2 + 5 = 5.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι: $(f\cdot\varphi) \neq (\varphi\cdot f)$.

**2.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (x^2 - 2\,|\,x\,|\,) \in \Pi_\alpha .$$

$$\varphi: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = (x^2 + 4) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί:

1) $(\varphi\cdot f)(3)$ 3) $(\varphi\cdot f)(-4)$

2) $(f\cdot\varphi)(-2)$ 4) $(f\cdot\varphi)(5)$.

**3.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (x^2 + 3x + 1) \in \Pi_\alpha .$$

$$\varphi: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = (2x - 3) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθετικαὶ συναρτήσεις:

1) $(f\cdot\varphi)$ 3) $(\varphi\cdot\varphi)$

2) $(\varphi\cdot f)$ 4) $(f\cdot f)$.

**4.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (2x + 1) \in \Pi_\alpha .$$

$$\varphi: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = (x^2 - 2) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ συνθετικαὶ συναρτήσεις: $(\varphi\cdot f)$ καὶ $(f\cdot\varphi)$.

**5.** Δίδονται αἱ συναρτήσεις:

$$f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{ἂν} \quad x > 2 \\ x^2 - 2\,|\,x\,| & \text{ἂν} \quad x \leqslant 2 \end{cases}$$

καὶ $$\varphi: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \varphi(x) = (3x + 1) \in \Pi_\alpha .$$

Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαί:

1) $f(-2)$ 3) $f(4)$ 5) $(f\cdot\varphi)(2)$

2) $\varphi(-3)$ 4) $(\varphi\cdot f)(1)$ 6) $(f\cdot f)(3)$.

**6.** Ἐὰν $f$ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ Α *ἐπὶ* τὸ Β καὶ φ εἶναι μία συνάρτησις τοῦ Β *ἐπὶ* τὸ Γ, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ συνθετικὴ συνάρτησις $(\varphi\cdot f)$ εἶναι συνάρτησις τοῦ Α *ἐπὶ* τὸ Γ.

**7.** Ἐὰν ἡ συνάρτησις $f: \ A \rightarrow B$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπὶ* καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi: \ B \rightarrow \Gamma$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπί*, νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι καὶ ἡ συνθετικὴ συνάρτησις $(\varphi\cdot f)$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπί*.

**94. Ἀντίστροφος συνάρτησις.** Ἔστωσαν τὰ μὴ κενὰ σύνολα:

$$A = \{1,2,3\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

καὶ μία ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις: $f: \ A \rightarrow B,$

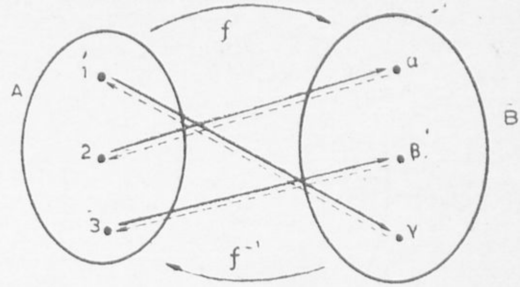
ὁριζομένη κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον, ὡς δεικνύει τὸ κάτωθι (σχ. 109).

f: $1 \rightarrow f(1) = \gamma$

$2 \rightarrow f(2) = \alpha$

$3 \rightarrow f(3) = \beta$,

δηλαδὴ ἔχουσα πεδίον ὁρισμοῦ τό: $A = \{1,2,3\}$ καὶ πεδίον τιμῶν τό: $f(A) = \{\alpha,\beta,\gamma\} = B$.




Σχ. 109.

Ἂν θεωρήσωμεν ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον B καὶ ὡς πεδίον τιμῶν τὸ f(B), δημιουργοῦμεν μίαν νέαν συνάρτησιν, τὴν ὁποίαν παριστῶμεν διὰ τοῦ $f^{-1}$ καὶ τὴν ὁποίαν καλοῦμεν ***ἀντίστροφον*** τῆς f. Θὰ ἔχωμεν δηλαδή:

$f^{-1}$: $\alpha \rightarrow f^{-1}(\alpha) = 2$

$\beta \rightarrow f^{-1}(\beta) = 3$

$\gamma \rightarrow f^{-1}(\gamma) = 1$.

Εἰς τὴν συνάρτησιν ταύτην $f^{-1}$ ὡς ἀρχέτυπα θεωροῦνται τὰ στοιχεῖα α,β,γ τοῦ B καὶ ὡς εἰκόνες αὐτῶν, ἀντιστοίχως, τὰ στοιχεῖα 2,3,1 τοῦ συνόλου A. Ἐνῷ εἰς τὴν συνάρτησιν f ἀρχέτυπα θεωροῦνται τὰ στοιχεῖα 1,2,3 τοῦ A καὶ εἰκόνες αὐτῶν, ἀντιστοίχως, τὰ στοιχεῖα γ,α,β. Ὥστε, διὰ τὴν συνάρτησιν $f^{-1}$ ἔχομεν:

Πεδίον ὁρισμοῦ τό: $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$.

Πεδίον τιμῶν τό: $f^{-1}(B) = \{2,3,1\} = A$.

Γενικώτερον, ἂν θεωρήσωμεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον καὶ ***ἐπὶ*** συνάρτησιν:

$$y = f(x) \mid A$$

ἢ

$$f: \; x \in A \rightarrow y = f(x) \in B,$$

θὰ ἔχωμεν ὅτι, εἰς κάθε ἀρχέτυπον $x \in A$, ἀντιστοιχεῖ μία, καὶ μόνον μία, εἰκὼν $y \in B$ καὶ ἀντιστρόφως, εἰς κάθε εἰκόνα $y \in B$, ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, ἀρχέτυπον $x \in A$.

Ἐνταῦθα ἔχομεν ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f τὸ A καὶ ὡς πεδίον τιμῶν τὸ $f(A) = B$.

Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν μίαν νέαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν (συνάρτησιν) μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τὸ B καὶ πεδίον τιμῶν τό: $f^{-1}(B) = A$, εἰς τὴν ὁποίαν τὰ ἀρχέτυπα θὰ εἶναι αἱ εἰκόνες καὶ αἱ εἰκόνες τὰ ἀρχέτυπα.

Τὴν νέαν ταύτην συνάρτησιν καλοῦμεν ***ἀντίστροφον*** συνάρτησιν τῆς f καὶ τὴν παριστῶμεν διὰ τοῦ $f^{-1}$.

Θὰ γράφωμεν δέ: $f^{-1}: \; f(x) \in B \rightarrow x = f^{-1}(y) \in A$,

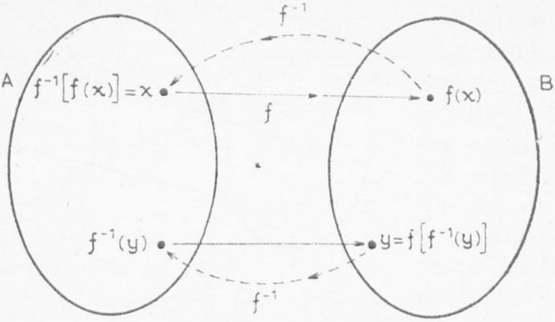
ἢ

$$f^{-1}: \; y \in B \rightarrow x = f^{-1}(y) \in A,$$

ἢ

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \mid A}\,.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἕπεται ὅτι, δοθείσης μιᾶς ἀμφιμονοσημάντου καὶ ***ἐπὶ*** συναρτήσεως f, εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθῇ ἡ ἀντίστροφος αὐτῆς συνάρτησις $f^{-1}$.




Σχ. 110.

Παραστατικὴν δὲ εἰκόνα τῶν ἀνωτέρω δίδει τὸ ἄνω (σχ. 110).

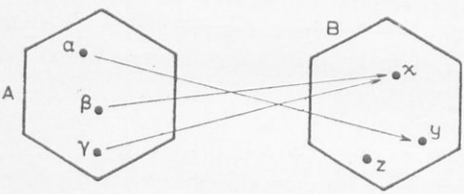
Παραδείγματα: α΄). Ἔστω ἡ συνάρτησις $f$: $A \to B$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ διαγράμματος τοῦ (σχ. 111). Θὰ ἔχωμεν: $f^{-1}(x) = \{\beta,\gamma\}$, καθόσον ἀμφότερα τὰ β καὶ γ ἔχουν τὴν αὐτὴν εἰκόνα x.

Ἐπίσης: $f^{-1}(y) = \{\alpha\}$, διότι μόνον τὸ α ἀπεικονίζεται εἰς τὸ y.

Ἀλλά: $f^{-1}(z) = \varnothing$, διότι οὐδὲν στοιχεῖον τοῦ A εἶναι εἰκὼν τοῦ z.

β΄). Ἔστω ἡ συνάρτησις $f$: $\Pi_\alpha \to \Pi_\alpha$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = (2x - 3) \mid \Pi_\alpha ,$$




Σχ. 111.

Ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἡ συνάρτησις $f^{-1}$: $\Pi_\alpha \to \Pi_\alpha$, καθὼς καὶ ὁ τύπος ὁ ὁρίζων ταύτην.

Ἔστω y ἡ εἰκὼν τοῦ x, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς f. Τότε:

$$y = f(x) = 2x - 3, \quad (1)$$

ὁπότε ὁ x θὰ εἶναι ἡ εἰκὼν τοῦ y, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τῆς $f^{-1}$, ἤτοι:

$$x = f^{-1}(y) \qquad (2)$$

Ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν: $x = \dfrac{y+3}{2}$, ὁπότε, ἕνεκα τῆς (2), θὰ ἔχωμεν:

$$f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}, \qquad (3)$$

ὅστις εἶναι ὁ τύπος ὁ ὁρίζων τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν.

Ἐπειδὴ ὁ y εἶναι βωβὸν στοιχεῖον, γράφομεν τὴν (3) καὶ ὡς ἑξῆς:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \in \Pi_\alpha \qquad (4)$$

καὶ λέγομεν ὅτι ἡ (4) εἶναι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $f$.

γ΄). Ὁμοίως, διὰ τὴν συνάρτησιν $f$: $\Pi_\alpha \to \Pi_\alpha$, τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = x^3 + 5 \mid \Pi_\alpha ,$$

ἐὰν τεθῇ $f(x) = y$, τότε $y = x^3 + 5$ ἢ $x^3 = y-5$ ἢ $x = \sqrt[3]{y-5}$ καὶ ἡ ἀντίστροφος ζητουμένη συνάρτησις $f^{-1}$ τῆς $f$ εἶναι ἡ:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-5} \mid \Pi_\alpha .$$

δ΄). Ἔστωσαν: $A = \Pi_\alpha - \{3\}$ καί: $B = \Pi_\alpha - \{1\}$ δύο σύνολα, εἰς τὰ ὁποῖα ἐξαιροῦνται τὰ στοιχεῖα 3 καὶ 1 ἀντιστοίχως καὶ μία συνάρτησις $f: \ A \to B$, ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου: $f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \in \Pi_\alpha$. (5)

Προφανῶς ἡ $f$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ ἐπί, διότι:

$$\forall y,\ y \in \Pi_\alpha,\ \exists x,\ x \in \Pi_\alpha: \ \frac{x-2}{x-3} = y.$$

Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν ἀντίστροφον $f^{-1}$ τῆς $f$, θέτομεν $y = \dfrac{x-2}{x-3}$ καὶ λαμβάνομεν: $x = \dfrac{2-3y}{1-y}$. Ὅθεν ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις εἶναι ἡ: $f^{-1}(x) = \dfrac{2-3x}{1-x}$ (6)

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \Pi_\alpha - \{3\}$, $B = \Pi_\alpha - \{1\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν: $f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = \dfrac{x-2}{x-3} \in B$.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $f$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπί*.
2) Ποία εἶναι ἡ ἀντίστροφος $f^{-1}$;

**2.** Δίδεται ἡ συνάρτησις: $f: \ x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) = (3x - 5) \in \Pi_\alpha$.
1) Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $f$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπί*.
2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος, ὁ ὁρίζων τὴν ἀντίστροφον συνάρτησιν $f^{-1}$.
3) Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τιμαί: $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

**3.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \Pi_\alpha - \{-4\}$, $B = \Pi_\alpha - \{1\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν: $f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = \dfrac{x-5}{x+4} \in B$.

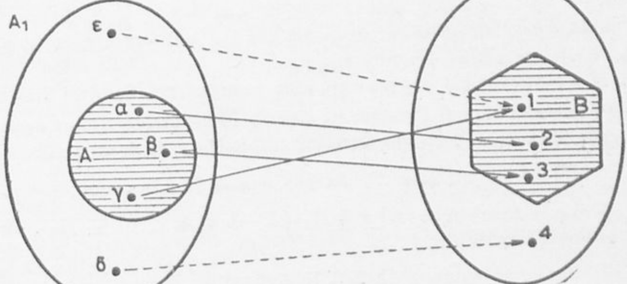
1) Εἶναι ἡ $f$ ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπὶ*; 2) Ποία ἡ ἀντίστροφος $f^{-1}$ τῆς $f$;

**4.** Δίδονται τὰ σύνολα: $A = \Pi_\alpha - \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $B = \Pi_\alpha - \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$ καὶ θεωροῦμεν τὴν συνάρτησιν: $f: \ x \in A \longrightarrow f(x) = \dfrac{x-3}{2x+1} \in B$.

1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ $f$ εἶναι ἀμφιμονοσήμαντος καὶ *ἐπί*.
2) Νὰ εὑρεθῇ ὁ τύπος, ὁ ὁρίζων τὴν $f^{-1}$.

**95. Ἐπέκτασις μιᾶς συναρτήσεως.** Θεωροῦμεν τὰ μὴ κενὰ σύνολα:

$$A = \{\alpha, \beta, \gamma\} \quad \text{καὶ} \quad B = \{1, 2, 3\}$$




Σχ. 112.

καὶ μίαν συνάρτησιν $f: \ A \to B$, ὁριζομένην ὡς ἑξῆς: (σχ. 112).

$$\begin{aligned} f: \quad & \alpha \to f(\alpha) = 2 \\ & \beta \to f(\beta) = 3 \\ & \gamma \to f(\gamma) = 1. \end{aligned}$$

Ἤδη, θεωροῦμεν τὸ γνήσιον ὑπερσύνολον $A_1$ τοῦ $A$, τό:

$$A_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\} \supset A$$

καὶ μίαν ἄλλην συνάρτησιν φ, ἔχουσαν ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $A_1$ καὶ ὁριζομένην ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & \alpha \to \varphi(\alpha) = 2 = f(\alpha) \\ & \beta \to \varphi(\beta) = 3 = f(\beta) \\ & \gamma \to \varphi(\gamma) = 1 = f(\gamma) \\ & \delta \to \varphi(\delta) = 4 \\ & \varepsilon \to \varphi(\varepsilon) = 1. \end{aligned}$$

Τὴν νέαν ταύτην συνάρτησιν φ καλοῦμεν ***ἐπέκτασιν*** τῆς συναρτήσεως f.

Ὥστε, ἐὰν δοθῇ ἡ συνάρτησις $f: \quad x \in A \to f(x) = y \in B$ καὶ τὸ σύνολον $A_1 \supset A$, τότε κάθε συνάρτησις φ, ἔχουσα πεδίον ὁρισμοῦ τὸ σύνολον $A_1$ καὶ τοιαύτη, ὥστε: $\varphi(x) = f(x) = y \mid \forall x,\ x \in A$, θὰ ὀνομάζεται ***ἐπέκτασις*** τῆς συναρτήσεως f.

Ἐκ τοῦ (σχ. 111), ἐκτὸς τῆς φ δυνάμεθα νὰ εὕρωμεν εὐκόλως καὶ ἄλλας συναρτήσεις $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, ὡς ἐπεκτάσεις τῆς f.

**96. Εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ μιᾶς πραγματικῆς συναρτήσεως.** Ἐν πρώτοις μία συνάρτησις $f: \ A \to B$ θὰ καλῆται συνάρτησις ***μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς***, ἐάν: $A \subseteq \Pi_\alpha$ καὶ $B \subseteq \Pi_\alpha$.

Οὕτω, ἡ $f: x \in \Pi_\alpha \to f(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 2$ εἶναι πραγματικὴ μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς x.

Ὅθεν: $\qquad f(0) = 2, \quad f(1) = -1$, κ.ο.κ.

α΄). Μία πραγματικὴ συνάρτησις $f$ μιᾶς μεταβλητῆς, ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3 - |x|}} \;\Big|\; \Pi_\alpha$$

καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς:

***Λύσις.*** Ἐπειδὴ $x \in \Pi_\alpha$ καὶ ζητοῦμεν $f(\mathbf{x}) \in \Pi_\alpha$, θὰ πρέπῃ:

$$3 - |x| > 0 \iff |x| < 3 \iff -3 < x < 3$$

καὶ κατ' ἀκολουθίαν τὸ σύνολον: $A = \{\mathbf{x} \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $-2 < x < 3\} \subseteq \Pi_\alpha$, εἶναι τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς $f$.

β΄). Μία συνάρτησις $f$ πραγματική, μιᾶς μεταβλητῆς, ὁρίζεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $f(\mathbf{x}) = \sqrt{6 + 5x - x^2} \mid \Pi_\alpha$ καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ αὐτῆς.

***Λύσις:*** Ἐπειδὴ $\mathbf{x} \in \Pi_\alpha$ καὶ ζητεῖται $f(\mathbf{x}) \in \Pi_\alpha$, θὰ πρέπῃ:

$$6 + 5x - \mathbf{x}^2 > 0 \iff x^2 - 5x - 6 < 0 \iff (x+1)(x-6) < 0).$$

Ἄρα τὸ σύνολον: $A = \{x \mid x \in \Pi_\alpha$ μὲ $-1 < \mathbf{x} < 6\} \subseteq \Pi_\alpha$, εἶναι τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς $f$.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Ἐὰν $\mathbf{x} \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \mathbf{x}$, $\varphi(x) = \dfrac{x^2}{x}$, νὰ εὑρεθῇ:

1) Τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ ἑκάστης συναρτήσεως.

2) Εἶναι δυνατὸν νὰ εἶναι $f = \varphi$ ;

**2.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x - 3} \in \Pi_\alpha$, ποῖον τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f ;

**3.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \in \Pi_\alpha$, ποῖον τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f ;

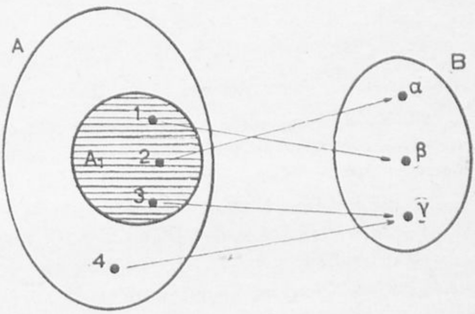
**4.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{1 - |x|}} \in \Pi_\alpha$, ποῖον τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f ;

**5.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \sqrt{|x^2 - 5x + 6|} \in \Pi_\alpha$, ποῖον τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f ;

**6.** Ἐὰν $x \in \Pi_\alpha$ καὶ $f(x) = \sqrt{x^2 - 5|x| + 6} \in \Pi_\alpha$, ποῖον τὸ εὐρύτερον πεδίον ὁρισμοῦ τῆς f ;

**97. Περιορισμὸς μιᾶς συναρτήσεως.** Θεωροῦμεν τὰ μὴ κενὰ σύνολα : $A = \{1,2,3,4\}$ καὶ $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ τὴν συνάρτησιν $f: A \longrightarrow B$, ὁριζομένην ὡς ἑξῆς : (σχ. 113).

$$f: \quad 1 \longrightarrow f(1) = \beta$$
$$2 \longrightarrow f(2) = \alpha$$
$$3 \longrightarrow f(3) = \gamma$$
$$4 \longrightarrow f(4) = \gamma.$$



Σχ. 113.

Ἤδη θεωροῦμεν τὸ : $A_1 = \{1,2,3\} \subset A$ καὶ τὴν συνάρτησιν φ, ὁριζομένην ὡς ἑξῆς :

$$\varphi: \quad 1 \longrightarrow \varphi(1) = \beta = f(1)$$
$$2 \longrightarrow \varphi(2) = \alpha = f(2)$$
$$3 \longrightarrow \varphi(3) = \gamma = f(3),$$

μὲ πεδίον ὁρισμοῦ τό: $A_1 = \{1,2,3\}$.

Τότε ἡ συνάρτησις φ εἶναι ἕνας ***περιορισμὸς τῆς*** $f$, ὁ ὁποῖος μάλιστα εἶναι μία ἀμφιμονοσήμαντος συνάρτησις $\varphi: A_1 \longrightarrow B$.

Ὥστε, ἐὰν λάβωμεν τὴν συνάρτησιν : $f: x \in A \longrightarrow f(x) \in B$ καὶ τὸ σύνολον $A_1 \subset A$, τότε, εἰς κάθε $x \in A_1$, ἀντιστοιχεῖ ἕνα, καὶ μόνον ἕνα, $f(x) \in B$.

Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ἡ συνάρτησις $\varphi: x \in A_1 \longrightarrow f(x) \in B$, ἡ ὁποία εἶναι τοιαύτη, ὥστε : $\varphi(x) = f(x) \mid \forall x, x \in A_1$, ὀνομάζεται ***περιορισμὸς*** τῆς $f$ εἰς τὸ σύνολον $A_1 \subset A$.

Παράδειγμα: Ἡ συνάρτησις $f: \Pi_\alpha \longrightarrow \Pi_\alpha$, ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου : $f(x) = \dfrac{1}{x} \mid \Pi_\alpha - \{0\} = \Pi_\alpha{}^*,\ 0 \mid x = 0$ καὶ ἡ συνάρτησις $\varphi: \Pi^* - \Pi$ ἡ ὁριζομένη ὑπὸ τοῦ τύπου $\varphi(x) = \dfrac{1}{x} \mid \Pi_\alpha{}^*$ εἶναι ὁ περιορισμὸς τῆς $f$ εἰς τὸ $\Pi_\alpha{}^*$.

Ἐντεῦθεν προκύπτει ὅτι αἱ δύο συναρτήσεις εἶναι διάφοροι ἀλλήλων. Δηλ. $f \neq \varphi$.

**98. Συνάρτησις δύο μεταβλητῶν.** Ἄς θεωρήσωμεν τὰ σύνολα : $A_1 = \{1.2\}$, $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ καὶ $A_2 = \{x,y\}$ καὶ ἄς σχηματίσωμεν τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον :

$$A = A_1 \times A_2 = \{(1,x), (1,y), (2,x), (2,y)\}.$$

'Ακολούθως ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν $f$ κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον:

$f$: $(1,x) \longrightarrow f(1,x) = \beta$
$(1,y) \longrightarrow f(1,y) = \beta$
$(2,x) \longrightarrow f(2,x) = \alpha$
$(2,y) \longrightarrow f(2,y) = \gamma$.

Ἡ $f$ εἶναι ***συνάρτησις δύο μεταβλητῶν*** x καὶ y.

Γενικώτερον, ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν συνάρτησιν $f$: $A \longrightarrow B$ καὶ ὑποθέσωμεν ὅτι $A = A_1 \times A_2$ εἶναι τὸ Καρτεσιανὸν γινόμενον τῶν συνόλων $A_1$ καὶ $A_2$, τὰ ὁποῖα ὑποτίθενται μὴ κενά, τότε, κάθε $x \in A$ θὰ εἶναι καὶ ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος $(x_1, x_2) \in (A_1 \times A_2)$ καὶ θὰ ἔχωμεν ὅτι: $f: (x_1,x_2) \in (A_1 \times A_2) \longrightarrow f(x_1,x_2) \in B$.

Ἡ $f$ καλεῖται ***συνάρτησις δύο μεταβλητῶν*** $x_1 \in A_1$ καὶ $x_2 \in A_2$.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α: 1). Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν $f$ δύο μεταβλητῶν x, y, ὡς ἑξῆς:

$$f: (x,y) \in \Phi \times \Phi \longrightarrow f(x,y) = (2x+y) \in \Phi, \text{ ὁπότε θὰ εἶναι:}$$

$$f(1,2) = (2\cdot 1+2) = 4 \in \Phi, \quad f(9,4) = 2\cdot 9+4 = 22 \in \Phi, \quad f(1,1) = 2\cdot 1+1 = 3 \in \Phi \text{ κλπ.}$$

2). Εἰς τὸ σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Φ ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν $f$ δύο μεταβλητῶν x,y κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: $f: (x,y) \in \Phi \times \Phi \Longleftrightarrow f(x,y) = y^x \in \Phi$, ὁπότε θὰ εἶναι: $f(1,1) = 1^1 = 1 \in \Phi$, $f(2,2) = 2^2 = 4 \in \Phi$, $f(2,3) = 3^2 = 9 \in \Phi$ κλπ.

3). Εἰς τὸ σύνολον τῶν $\Pi_\alpha$ ὁρίζομεν μίαν συνάρτησιν δύο μεταβλητῶν x,y κατὰ τὸν ἑξῆς τρόπον: $f: (x,y) \in \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha \longrightarrow f(x,y) = \dfrac{x-y^2}{1+y^2} \in \Pi_\alpha$, ὁπότε:

$$f(1,0) = \frac{1-0}{1+0} = 1 \in \Pi_\alpha, \; f(-2,3) = \frac{-2-9}{1+9} = \frac{-11}{10} \in \Pi_\alpha, \; f(1,-1) = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{1} = 0 \in \Pi_\alpha .$$

4). Εἰς τὸ σύνολον $\Pi_\alpha \times \Pi_\alpha - \{(2,3)\}$ ἡ συνάρτησις $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(x-2)(y-3)}$ εἶναι τελείως ὡρισμένη ἐπὶ τοῦ $\Pi_\alpha \times \Pi_\alpha$, ἐξαιρέσει τοῦ ζεύγους (2,3).

**99. Συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν.** Αὕτη εἶναι μία ἀντιστοιχία μεταξὺ διατεταγμένων τριάδων (x,y,ω) πραγματικῶν ἀριθμῶν, μὲ πραγματικοὺς ἀριθμούς, ἔχουσα ὡς πεδίον ὁρισμοῦ τὸ $\Pi_\alpha \times \Pi_\alpha \times \Pi_\alpha$ ἢ ἕνα ὑποσύνολον αὐτοῦ, ἐνῷ τὸ σύνολον τιμῶν αὐτῆς εἶναι ὑποσύνολον τοῦ $\Pi_\alpha$. Γράφομεν δὲ ταύτην ὡς ἑξῆς:

$$f: (x,y,\omega) \in \Pi_\alpha^3 \longrightarrow z = f(x,y,\omega) \in \Pi_\alpha .$$

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: 1). Ἡ $f(x,y,\omega) = x^2 + y^2 + xy\omega$ εἶναι μία συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν x,y,ω, ὡρισμένη διὰ $\forall (x,y,\omega)$, ἔνθα $(x,y,\omega) \in \Pi_\alpha^3$ καὶ θὰ ἔχωμεν:

$$f(0,1,2) = 0+1+0\cdot 1\cdot 2 = 1, \quad f(2,2,2) = 2^2+2^2+2\cdot 2\cdot 2 = 4+4+8 = 16.$$

2). Ἡ συνάρτησις $f(x,y,\omega) = x^3+y^3+\omega^3+3xy\omega$ εἶναι μία συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν x,y,ω, ὡρισμένη $\forall (x,y,\omega) \in \Pi_\alpha^3$.

**100. Στοιχειώδεις πράξεις μεταξὺ πραγματικῶν συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς x.** Ἔστωσαν δύο πραγματικαὶ συναρτήσεις τοῦ x, αἱ f(x) καὶ σ(x), ἔχουσαι τὸ αὐτὸ πεδίον ὁρισμοῦ $\Sigma \subseteq \Pi_\alpha$.

1). Ὀνομάζομεν ***ἄθροισμα*** τῶν $f(x)$ καὶ σ(x) τὴν συνάρτησιν: $x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) + \sigma(x)$, εἰς τὴν ὁποίαν εἰς τὸ x ἀντιστοιχεῖ ὁ ἀριθμὸς $f(x)+\sigma(x)$.

2). Ὀνομάζομεν ***διαφορὰν*** τῶν $f(x)$ καὶ σ(x) τὴν συνάρτησιν:

$$x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x) - \sigma(x).$$

3). Ὀνομάζομεν ***γινόμενον*** τῶν $f(x)$ καὶ σ(x) τὴν συνάρτησιν:

$$x \in \Pi_\alpha \longrightarrow f(x)\cdot \sigma(x).$$

4). Ὀνομάζομεν ***πηλίκον*** τῶν $f(x)$ καὶ σ(x) τὴν συνάρτησιν:

$$x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \frac{f(x)}{\sigma(x)}, \text{ ἔνθα } \sigma(x) \neq 0 \;\forall\; x \in \Sigma.$$

5). Ὀνομάζομεν ***νυοστὴν δύναμιν*** τῆς $f(x)$ τὴν συνάρτησιν: $x \in \Pi_\alpha \longrightarrow \{f(x)\}^\nu$.

---

$\Pi_\alpha{}^* = \Pi_\alpha - \{0\}$ σημαίνει τὸ σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἐξαιρέσει τοῦ στοιχείου 0 (μηδέν).

## ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

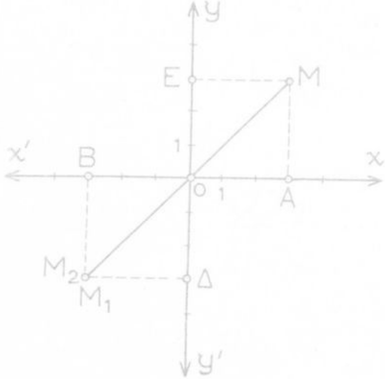
| Σελὶς | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 14 | στίχος | 9 | ἀντί : | *στοιχείων των* | γράφε : | *στοιχείων του* |
| 33 | » | 23 | » | Κ | » | Φ |
| 47 | » | 9 | » | $-\sqrt{5},\ \sqrt{7}$ | » | $-\sqrt{5},\ -\sqrt{7}$ |
| 56 | » | 16 | » | $-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}$ | » | $\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}$ |
| 60 | » | 39 | » | $A \cup \overline{A}$ | » | $A \cap \overline{A}$ |
| 72 | » | 31 | » | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ | » | $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ |
| 87 | » | 32 | » | $\{x,y),\omega\}=\{2,(4,6)$ | » | $\{(x,y),\omega\}=\{2,(4,6)\}$ |
| 103 | » | 14 | » | *καὶ 9* | » | *καὶ 10* |
| 108 | » | 15 | » | $A\in\Pi_\alpha$ | » | $x\in\Pi_\alpha$ |
| 113 | » | 13 | » | $0\cdot3$ πολ3 | » | $0\cdot3=$πολ3 |
| 115 | » | 15 | » | *συμμετρικὴ* | » | *ἀντισυμμετρικὴ* |
| 117 | » | 41 | » | $R \cup R$ | » | $R \cup R_1$ |
| 125 | » | 24 | » | $2\nu_1 \Longleftrightarrow \nu_1=\nu_2$ | » | $2^{\nu_1}=2^{\nu_2} \Longleftrightarrow \nu_1=\nu_2$ |

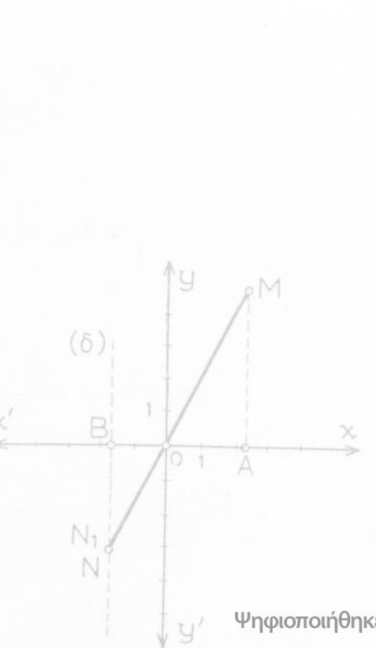
# ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ (ΤΟΜΟΣ Α)

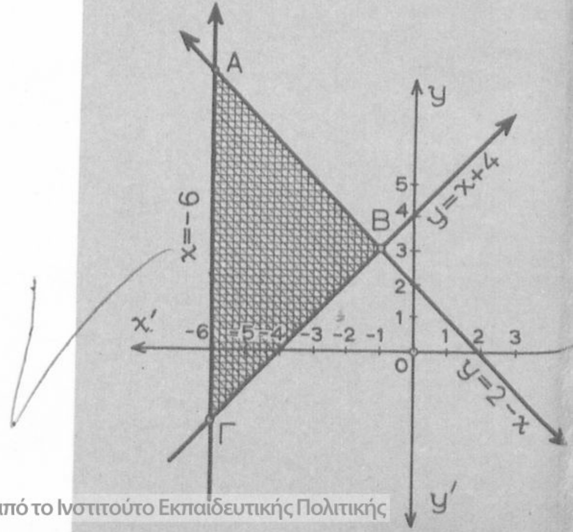
| Σελὶς | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | στίχος | 25 | ἀντὶ | δυώνυμον | γράφε | διώνυμον |
| 8 | » | 4 | » | $\Phi$ | » | $\Phi_0$ |
| 11 | » | 1—2 | » | 4. 5. | » | 3. 4. |
| 13 | » | 16 | » | δευτερομέλους | » | δευτέρου μέλους |
| 21 | » | 23 | » | $(x-\beta,$ | » | $(x-\beta),$ |
| 26 | » | 34 | » | μηδεν | » | μηδὲν |
| 36 | » | 11 | » | $(x^\mu \mp \alpha^\mu)\cdot(x^\mu \mp \alpha^\nu)$ | » | $(x^\mu \mp \alpha^\mu):(x^\nu \mp \alpha^\nu)$ |
| 50 | » | 38 | » | $f(x)\equiv(x-\alpha)^{\nu-1}\sigma(x)$ | » | $f(x)\equiv(x-\alpha)^\nu\,\sigma(x)$ |
| 56 | » | 17 | » | $\alpha(x-2^2$ | » | $\alpha(x-2)^2$ |
| 59 | » | 9 | » | $(\alpha+\beta)-(x+y)^2$ | » | $(\alpha+\beta)^2-(x+y)^2$ |
| 63 | » | 24 | » | $-(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$ | » | $=(\alpha^2+\beta^2)^2-\alpha^2\beta^2$ |
| 70 | » | 4 | » | $\frac{1}{4}(4x^2-9\cdot4x+8)$ | » | $\frac{1}{4}(16x^2-9\cdot4x+8)$ |
| 72 | » | 35 | » | $\alpha^{4\mu}-\beta^{6\nu}$ | » | $\alpha^{6\mu}-\beta^{6\nu}$ |
| 79 | » | 31 | » | $x^3-kx+\lambda$ | » | $x^3+kx+\lambda$ |
| 119 | » | 1 | » | $5x=0$ | » | $5x=30$ |
| 122 | » | 19 | » | $x+5=0$ | » | $x-5=0$ |
| 130 | » | 16 | » | $\frac{x-\alpha-1}{x-\beta-1}$ | » | $\frac{x-\alpha-1}{x-\alpha-2}$ |
| 179 | » | 3 | » | $(\beta i, \beta i)$ | » | $(\alpha i, \beta i)$ |
| 188 | » | 11 | » | $(-\infty,4]$ | » | $(-\infty, -4]$ |
| 190 | » | 20 | » | $(-4,2)=]4,2[$ | » | $(-4,2)=]-4,2]$ |
| 198 | » | 13 | » | $3<x\,\frac{19}{3}$ | » | $3<x<\frac{19}{3}$ |
| 207 | » | 22 | » | $0\cdot x-\alpha(\lambda-\upsilon_\beta)$ | » | $0\cdot x=\alpha(\lambda-\upsilon_\beta)$ |
| 207 | » | 27 | » | $M\Delta-ME=\beta$ | » | $M\Delta-ME=\lambda$ |
| 218 | » | 15 | » | $\frac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta}$ | » | $\frac{\gamma+\alpha-\beta}{y}$ |
| 230 | » | 28 | » | $\frac{\gamma^2+\alpha^2}{\lvert\gamma\rvert+\lvert\beta\rvert}$ | » | $\frac{\gamma^2+{}^2\alpha}{\lvert\gamma\rvert+\lvert\alpha\rvert}$ |
| 233 | » | 18 | » | $(\alpha\neq\beta)$ | » | $(x\neq y)$ |
| 237 | » | 3 | » | $\lvert x\rvert-x$ | » | $\lvert x\rvert=x$ |

## ΤΟΜΟΣ Β

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 280 | » | 29 | » | $y=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ | » | $x=\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$ |
| 286 | » | 9 | » | 200 | » | 201 |
| 292 | » | 22 | » | $3x-3y+4\omega-14=0$ | » | $3x-2y+4\omega-14=0$ |
| 327 | » | 23 | » | $y=\alpha y$ | » | $y=\alpha x$ |
| 371 | » | 1 | » | $\beta\sqrt{\alpha}$ | » | $\alpha\sqrt{\beta}$ |
| 371 | » | 3 | » | $\alpha\sqrt{\alpha}$ | » | $\alpha\sqrt{\beta}$ |
| 371 | » | 10 | » | $\sqrt{(5-2)}$ | » | $\sqrt{5\cdot(-2)}$ |
| 395 | » | 24 | » | $=2\beta(\sqrt{x^2}-1+x^2-1)$ | » | $=2\beta(x\sqrt{x^2-1}+x^2-1)$ |
| 403 | » | 12 | » | $+3\nu^2(\lambda x+\mu x)$ | » | $+3\nu^2(\lambda x^2+\mu x)$ |
| 404 | » | 1 | » | ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XV | » | ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ XVI |
| 404 | » | 8 | » | ἀλλ' ἀνεξάρτητοι | » | ἀλλὰ ὅλοι ἀνεξάρτητοι |
| 415 | » | 9 | » | $\frac{-\beta^2+3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$ | » | $\frac{-\beta^3+3\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}$ |


y
E
M
1
x'
B
x
O
1
A
$M_2$
$M_1$
Δ
y'


y
M
(δ)
1
x'
B
x
O
1
A
$N_1$
N
y'


A
y
x=-6
y=x+4
5
4
B
3
2
1
x'
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
0
y=2-x
Γ
y'