ΓΕΩΡΓΙΟΥ Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ
ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1955

ΓΕΩΡ. Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΥ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΕΡΙ ΡΙΖΩΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ
ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ
ΤΩΝ ΕΜΠΟΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ
ΚΑΘΩΣ ΚΑΙ
ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΘΗΝΑΙ 1955

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Κατά τήν ἐπί σειράν ἐτῶν διδασκαλίαν καί φροντιστιριακήν ἐργασίαν μου διεπίστωσα, ὅτι οἱ πλεῖστοι τῶν μαθητῶν τῶν τελευταίων γυμνασιακῶν τάξεων καθώς καί ὑποψήφιοι τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν ἀγνοοῦν κατά μέγα μέρος τήν "εὕρεσιν τῆς τ.ρ. ἀριθμοῦ" καί παντελῶς τήν "εὕρεσιν τῆς κ.ρ. ἀριθμοῦ".

Ἐπειδή ἡ σχετική ἐργασία τῆς ἐξαγωγῆς τῆς τ.ρ ἀριθμοῦ διδάσκεται εἰς τάς πρώτας γυμνασιακάς τάξεις ἐπακόλουθον εἶναι ὅπως οἱ μαθηταί φθάνοντες εἰς τάς τελευταίας τάξεις τοῦ Γυμνασίου νά μήν ἐνθυμοῦνται ταύτην.

Ἐπιθυμῶν νά συμβάλω εἰς τήν βελτίωσιν τῆς καταστάσεως ταύτης, τοὐλάχιστον εἰς τόν κύκλον τῶν ἐργασιῶν μου, ἐκδίδω τό παρόν ἱκανοποιῶν συγχρόνως καί ἐπιθυμίαν μαθητῶν μου ἐν ταὐτῷ δέ καί συναδέλφων μου.

Ἡ ἐνταῦθα ἀναγραφομένη ἐργασία ἐπί τῆς κυβικῆς ρίζης ἀριθμοῦ καθιστᾶ τό ἀνά χεῖρας βιβλίον χρήσιμον καί ἀπαραίτητον βοήθημα διά τούς μαθητάς τῶν Τεχνικῶν Σχολῶν.

Διά τήν πληρεστέραν κατανόησιν ὑπό τῶν μαθητῶν τῆς ἀναγραφομένης ὕλης, διετήρησα κατά τό δυνατόν τό ὕφος καί τόν τρόπον τῆς ἀπ' εὐθείας διδασκαλίας.

Περισσότερα ἐπί τῶν ριζῶν προτίθεμαι νά γράψω εἰς τό ὑπό ἔκδοσιν βιβλίον μου "Ἄλγεβρα".

Ἀθῆναι, 14 Νοεμβρίου 1955

Γ.Π. ΜΠΑΚΟΥΡΟΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

στ.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟΝ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 1. Ὁρισμός. "Δευτέρα δύναμις ἤ τετράγωνον ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπό τόν δοθέντα ἐάν πολλαπλασιάσωμεν αὐτόν ἐπί τόν ἑαυτόν του".

Παραδείγματα: Τετράγωνον τοῦ 5 εἶναι ὁ ἀριθμός 25 ἀφοῦ $5^2 = 5.5 = 25$. Τετράγωνον τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{4}{9}$ ἀφοῦ $(\frac{2}{3})^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$. Τέλος τετράγωνον τοῦ 1,3 εἶναι ὁ ἀριθμός 1,69 ἀφοῦ $1{,}3^2 = 1{,}69$

§ 2. Ὁρισμός. "Τέλεια τετράγωνα καλοῦνται οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι εἶναι τετράγωνα ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν" Κατωτέρω ἀναγράφομεν πίνακα τελείων τετραγώνων.

§ 3. Ὁρισμός. "Τετραγωνική ρίζα ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ ἐπί τόν ἑαυτόν του (ἤ κατ᾽ ἄλλην ἔκφρασιν "νά ὑψωθῇ εἰς τό τετράγωνον") διά νά μᾶς δώσῃ τόν δοθέντα ἀριθμόν".

Παραδείγματα: Τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 25 εἶναι ὁ 5 διότι μόνον $5^2 = 5.5 = 25$. Τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{4}{9}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{3}$ διότι μόνον $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$. Τέλος τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ 1,69 εἶναι ὁ 1,3 διότι μόνον $1{,}3^2 = 1{,}69$

Σημείωσις: Λέγομεν ὅτι "τετραγωνική ρίζα τοῦ 25 εἶναι ὁ 5" γράφομεν ὅμως συντόμως "τ.ρ. τοῦ 25 εἶναι ὁ 5".

Τέλος σημειώνομεν συμβολικῶς $\sqrt[2]{25} = 5$ ἤ $\sqrt{25} = 5$".
Τό σύμβολον $\sqrt{\ }$, καλεῖται ῥιζικόν. Ὁ ὑπό τό ριζικόν γραφόμενος ἀριθμός καλεῖται ὑπόρριζον ἤ ὑπόρριζος ποσότης. Ὁ ἀριθμός 2 ὁ ὁποῖος γράφεται ἄνωθι τῆς γωνίας τοῦ ριζικοῦ καλεῖται "δείκτης τῆς ρίζης". Κατά ἐπικρατήσασαν συνήθειαν τόν δείκτην 2 παραλείπομεν, χάριν συντομίας.
Ἡ $\sqrt[2]{\ }$ ἤ $\sqrt{\ }$ καλεῖται ῥίζα δευτέρας ἤ ἀρτίας τάξεως.

§ 4. Πρίν ἀρχίσωμεν τήν ἐξέτασιν τῆς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι ἀνάγκη νά γνωρίζωμεν ἀπό μνήμης τόν κατωτέρω πίνακα τῶν τετραγώνων μερικῶν ἀριθμῶν.

ΠΙΝΑΞ ΤΕΛΕΙΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$	$25^2 = 625$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$	$30^2 = 900$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$	
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$	$50^2 = 2500$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$	$100^2 = 10000$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$	$200^2 = 40000$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$	
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$	$1000^2 = 10000\ 000$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$	

§ 5. Ἔχοντες ὑπ᾽ ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς τ.ρ. σχηματίζομεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τῶν τετραγώνων, ἄλλον πίνακα, τόν τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν.

ΠΙΝΑΞ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{441} = 21$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{144} = 12$	$\sqrt{625} = 25$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{169} = 13$	$\sqrt{900} = 30$

$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{196} = 14$	
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{225} = 15$	$\sqrt{2500} = 50$
$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{256} = 16$	$\sqrt{10000} = 100$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{289} = 17$	$\sqrt{40000} = 200$
$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{324} = 18$	
$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{361} = 19$	
$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{400} = 20$	$\sqrt{1.000.000} = 1000$

§ 6. Ἀκριβής τετραγωνική ρίζα ἀριθμοῦ.

Ὁρισμός: "Ἀκριβής τ.ρ. ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀκέραιος ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον μᾶς δίδει τόν δοθέντα".

Παραδείγματα: Τά τῆς § 3.

§ 7. Τ.ρίζα ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος

Ὁρισμός: "Τ.ρ. ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον δίδει ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ δοθέντος".

π.χ. ἡ $\sqrt{92}$ δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς διαπιστώνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν καί τοῦ πίνακος τῶν τετραγώνων.

Πράγματι:

$$9^2 = 81 < 92 \quad \text{καί τό} \quad 10^2 = 100 > 92$$

Ἡ τ.ρ. τοῦ 92 κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 9 διότι, κατά τόν ὁρισμόν, ὁ 9 εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις ὑψούμενος εἰς τό τετράγωνον δίδει ἐξαγόμενον (ἐδῶ 81) μικρότερον τοῦ 92.

Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τετραγώνων παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοί 81 καί 100 εἶναι διαδοχικά τέλεια τετράγωνα (δηλ. μεταξύ των δέν ὑπάρχει ἄλλο τέλειον τετράγωνον ἀκεραίου ἀριθμοῦ).

Λαμβάνοντες τώρα ὑπ'ὄψιν τόν σχετικόν ὁρισμόν διαπιστώνομεν ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοί ἀπό 82 μέχρι καί 99 δηλαδή οἱ συμπεριλαμβανόμενοι μεταξύ τῶν δύο τελείων τετραγώνων 81 καί 100 ἔχουν τήν αὐτήν κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, τετραγωνικήν ρίζαν.

§ 8. Ἐξαγωγή τετραγωνικῆς ρίζης ἑνός ἀριθμοῦ.

Ἡ ἐργασία διά τήν εὕρεσιν τῆς τετρ.ρίζης ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται "ἐξαγωγή τῆς τετραγωνικῆς ρίζης" αὐτοῦ. Διά νά δυνάμεθα εὐχερῶς νά εὑρίσκωμεν τήν τ.ρ. ἑνός ἀριθμοῦ πρέπει νά γνωρίζωμεν ἀπό μνήμης τούς δύο ἀνωτέρω ἀναγραφομένους πίνακας τῶν τετραγώνων καί τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν.

§ 9. Γενικαί παρατηρήσεις ἐπί τῶν δύο ἀνωτέρω πινάκων.

Α! Ἐάν γνωρίζωμεν τό τετράγωνον ἑνός ἀριθμοῦ καί θέλομεν νά εὕρωμεν τό τετράγωνον τοῦ κατά μονάδα μεγαλυτέρου του ἀρκεῖ εἰς τό τετράγωνον τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ νά προσθέσωμεν τό ἄθροισμα τοῦ μικροτέρου καί τοῦ κατά μονάδα μεγαλυτέρου του.

Παράδειγμα: "Ποῖον τό τετράγωνον τοῦ 21;

Γνωρίζομεν ὅτι $20^2 = 400$

ἄρα $21^2 = 20^2 + (20+21) = 400+41 = 441$

Β! Ἐάν γνωρίζωμεν τό τετράγωνον ἑνός ἀριθμοῦ καί θέλομεν νά εὕρωμεν τό τετράγωνον τοῦ κατά μονάδα μικροτέρου του ἀρκεῖ ἀπό τό τετράγωνον τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ νά ἀφαιρέσωμεν τό ἄθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καί τοῦ κατά μονάδα μικροτέρου του.

Παράδειγμα: "Ποῖον τό τετράγωνον τοῦ 19;"

Γνωρίζομεν ὅτι $20^2 = 400$

ἄρα $19^2 = 20^2 - (20+19) = 400-39 = 361.$

Γ! Κριτήριον περί ὑπάρξεως ἀκριβοῦς τετραγωνικῆς ρίζης.

Καθώς διαπιστώνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν τετραγώνων, τά τετράγωνα ὅλων τῶν ἀριθμῶν λήγουν εἰς 1,4,5,6,9 καί 00, 0000, κλπ.

Δυνάμεθα λοιπόν νά εἴπωμεν ὅτι ἡ τετρ. ρ. ἑνός ἀριθμοῦ ὑπάρχει πιθανότης νά ἐξάγεται ἀκριβῶς ἄν οὗτος λήγη εἰς 1,4,5,6,9 καί εἰς ἄρτιον ἀριθμόν μηδενικῶν.

Τοὐναντίον ὅταν ἕνας ἀριθμός λήγη εἰς 2,3,7,8 καί περιττόν ἀριθμόν μηδενικῶν τότε ὁπωσδήποτε ἡ τ.ρίζα του δέν ἐξάγεται ἀκριβῶς.

Δ! Συμβουλευτική πρός τούς μαθητάς παρατήρησις

Ὅταν οἱ μαθηταί πρωτομανθάνουν νά ἐξάγουν τήν τ.ρ. τῶν ἀριθμῶν, προτιμότερον εἶναι νά λαμβάνουν ἕνα ἀριθμόν π.χ. τόν 321 καί νά ὑψώνουν αὐτόν εἰς τό τετράγω-

γωνον, όπότε θά έχουν $321^2 = 103041$.
'Εάν τώρα θελήσουν νά εύρουν τήν τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ 103041, κατά τόν τρόπον καί τόν κανόνα τούς όποίους θά έκθέσωμεν κατωτέρω, είναι βέβαιοι έκ τῶν προτέρων ότι ή τ.ρ. τῶν 103041 έξάγεται ἀκριβῶς καί είναι αὐτη ὁ ἀριθμός 321.

§ 10. Τρόποι εὑρέσεως τῆς τετραγωνικῆς ρίζης ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ.

Πρῶτος τρόπος είναι ὁ ἀπό μνήμης
Δεύτερος " " " διά τῆς χρήσεως τῶν λογαρίθμων
Τρίτος " " " διά τῆς ἀναλύσεως τοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων
Τέταρτος " " " Πρακτικός τοιοῦτος μέ τόν ὁποῖον θά ἀσχοληθῶμεν ἰδιαιτέρως καί έν έκτάσει.

'Ανάπτυξις έκάστου τρόπου.

Πρῶτος τρόπος: Δέν ἰσχύει δι'όλους τούς ἀριθμούς διότι πᾶς ἀριθμός ὁ ὁποῖος μᾶς δίδεται δέν έχει ἀπαραιτήτως ἀκριβῆ τ.ρ. ἀφοῦ δέν γνωρίζομεν ἄν οὗτος είναι τέλειον τετράγωνον. "Αλλωστε είναι σχεδόν, ἄν όχι τελείως, ἀδύνατον νά ένθυμούμεθα ἀπό μνήμης τάς τ.ρ. ὅλων τῶν ἀριθμῶν.
Δεύτερος τρόπος: Αὐτός ὁ τρόπος διδάσκεται εἰς τούς μαθητάς τῶν μεγαλυτέρων γυμνασιακῶν τάξεων οἱ ὁποῖοι διδάσκονται "Αλγεβραν (δηλ. Γενική 'Αριθμητικήν)καί λογαρίθμους. (Σημ. Λογάριθμοι ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοί εἰς ένα κεφάλαιον τῆς 'Αλγέβρας έκ τοῦ τρόπου χρήσεως αὐτῶν).
Τρίτος τρόπος: Πρίν νά έξετάσωμεν τόν τρόπον αὐτόν ἀναφέρομεν ὀλίγα τινα περί τῶν ἀριθμῶν.
1. Η φυσική σειρά τῶν ἀριθμῶν είναι 1,2,3,4,5,6,....
2. Άρτιοι ή ζυγοί καλοῦνται οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 2. Είναι δέ αὐτοί οἱ 2,4,6,8,10,12, 14,...
3. Περιττοί ή μονοί καλοῦνται οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι δέν διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 2. Είναι δέ αὐτοί οἱ 1,3,5,7,9, 11,13,15.....
4. Πρῶτος καλεῖται πᾶς ἀριθμός ὁ ὁποῖος διαιρεῖται ἀκριβῶς μόνον ἀπό τήν μονάδα καί τόν ἑαυτόν του.
Πάντες οἱ πρῶτοι εὑρίσκονται διά μιᾶς μεθόδου ἥτις καλεῖται κόσκινον τοῦ 'Ερατοσθένους 'Εκ τῶν πρώτων πρέπει νά γνωρίζωμεν τοὐλάχιστον τούς ἀρχικούς.

Εἶναι δέ αὐτοί οἱ, 2,3,5,7,11,13,17,19,23,...
5. Σύνθετος καλεῖται πᾶς ἀριθμός ὁ ὁποῖος δέν εἶναι πρῶτος. Οἱ πρῶτοι πρῶτοι σύνθετοι εἶναι οἱ ἑξῆς:
4,6,8,9,10,12,14,15,..
Τώρα ἄς ἐπανέλθωμεν εἰς τό θέμα μας.
"Νά εὑρεθῇ ἡ τ.ρ. τοῦ 900".

Λύσις.
Ἔχοντες ὑπ'ὄψιν τό κριτήριον ὑπάρξεως ἀκριβοῦς τ.ρ. ἑνός ἀριθμοῦ παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχῃ πιθανότης νά ἐξάγεται ἀκριβῶς ἡ τ.ρ. τοῦ 900. Αναλύομεν τόν 900, κατά τά γνωστά, εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων ὡς φαίνεται εἰς τήν διάταξιν τῆς κατωτέρω πράξεως:

Διάταξις πράξεως

900	2
450	2
225	3
75	3
25	5
5	5
1	

Ἔχομεν λοιπόν:

$$900 = 2.2.3.3.5.5. \quad ἤ$$
$$900 = 2^2.3^2.5^2 \quad ἤ$$
$$900 = (2.3.5)^2 \quad ἤ$$
$$900 = 30^2 \quad ἄρα$$
$$\sqrt{900} = \sqrt{30^2} = 30$$

Κανών: "Ἵνα ἐξάγεται ἀκριβῶς ἡ τ.ρ. ἑνός ἀριθμοῦ ἀναλελυμένου εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων πρέπει οἱ ἐκθέται πάντων τῶν παραγόντων αὐτῶν νά διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 2, ὅπως εἰς τό παράδειγμά μας".

Σημείωσις: Ἄν κατά τήν ἀνάλυσιν ἑνός ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων δέν συμβαίνει νά διαιροῦνται ἀκριβῶς διά 2 οἱ ἐκθέται των τότε ἐξάγομεν τήν τ.ρ. μέ προσέγγισιν.

Τέταρτος τρόπος:

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗΣ
ΡΙΖΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Πρόβλημα: "Νά εὑρεθῇ ἡ τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ 103041".
Δίδομεν ἀμέσως τόν τρόπον εὑρέσεως τῆς τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος τρόπος ἀποτελεῖ καί τόν κανόνα.

Κανών: Διατάσσομεν τήν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς.
Γράφομεν εἰς τό χαρτί μας (ἤ εἰς τόν πίνακα) τήν γνωστήν γωνίαν τῆς διαιρέσεως (βλέπε διάταξιν πράξεως σελ.8)
Τοποθετοῦμεν τόν δοθέντα ἀριθμόν 103041 εἰς τήν θέσιν τοῦ διαιρετέου καί τόν χωρίζομεν εἰς διψήφια τμήματα

ἀπό τό τέλος δι'ἀποστρόφων ἤ ἄνω στιγμῶν (τό α΄πρός τά ἀριστερά τμῆμα δύναται νά εἶναι καί μονοψήφιον).

Τοῦ α΄αὐτοῦ πρός τά ἀριστερά τμήματος ἐδῶ τοῦ 10, εὑρίσκομεν τήν τ.ρ. εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Αὐτη εἶναι 3.

Γράφομεν τό 3 εἰς τήν θέσιν τοῦ διαιρέτου (βλέπε διάταξιν πράξεως) εἶναι δέ τό 3 τό πρῶτον ψηφίον τῆς ζητουμένης τ.ρίζης.

Τό τετράγωνον τοῦ 3 δηλ. τό 9 γράφομεν κάτωθι τοῦ 10 καί ἀφαιροῦντες, εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1.

Δίπλα εἰς τό 1 καταβιβάζομεν, ὅπως λέγομεν, τό ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ, ἐδῶ δέ αὐτό εἶναι τό 30. Οὕτω σχηματίζομεν τόν ἀριθμόν 130. (Σημείωσις: ἕκαστον διψήφιον τμῆμα τό ὁποῖον καταβιβάζομεν τό σημειώνομεν γράφοντες ὑπεράνω αὐτοῦ μίαν παῦλαν).

Διπλασιάζομεν τώρα τό μέχρι τῆς στιγμῆς εὑρεθέν τμῆμα τῆς ρίζης δηλ. τό 3 καί τό διπλάσιον αὐτοῦ δηλ.τό 6 γράφομεν εἰς τήν θέσιν τοῦ πηλίκου (βλέπε διάταξιν πράξεως).

Χωρίζοντες τώρα τό τελευταῖον ψηφίον τοῦ 130 διά μιᾶς ἄνω στιγμῆς ἐρωτῶμεν πόσας φοράς χωρεῖ τό 6 εἰς τό 13. Ἐδῶ χωρεῖ 2. Γράφομεν τό 2 δίπλα εἰς τό 6 καί ἐν συνεχείᾳ κάτωθι τοῦ 2 αὐτοῦ γράφομεν πάλι τό 2. Ἡ ὅλη ἔκφρασις εἶναι ὡς ἑξῆς "γράφομεν τό 2 δίπλα καί κάτω τοῦ 6". Ἐκτελοῦμεν τόν πολλαπλασιασμόν 62Χ2 καί εὑρίσκομεν 124.

<u>Παρατ. 1η.</u> "Ἐάν τό γινόμενον αὐτό, δέν ἀφαιρεῖτο ἀπό τό 130 θά γράφαμε εἰς τήν θέσιν τοῦ 2 τόν <u>κατά μονάδα μικρότερον</u> ἀριθμόν καί οὕτω καθεξῆς".

Γράφοντες τό γινόμενον 124 κάτωθι τοῦ 130 ἐκτελοῦμεν τήν ἀφαίρεσιν καί εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 06. Ἀναβιβάζομεν καθώς λέγομεν τό 2 καί τό γράφομεν δίπλα δεξιά τοῦ 3. Οὕτω ἔχομεν τόν ἀριθμόν 32 ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τά δύο πρῶτα ψηφία τῆς ζητουμένης τ.ρ.

<u>Παρατ. 2α.</u> "Ἐάν τό ὑπόλοιπον 06 ἦτο μεγαλύτερον τοῦ διπλασίου τοῦ μέχρι τῆς στιγμῆς εὑρεθέντος τμήματος τῆς τ.ρ. τότε εἰς τήν θέσιν τοῦ 2, ὡς ψηφίον τῆς ρίζης θά γράφαμε τόν <u>κατά μονάδα μεγαλύτερον</u> ἀριθμόν καί οὕτω καθ'ἑξῆς".

Δίπλα εἰς τό 06 καταβιβάζομεν, ὅπως λέγομεν τό ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ, ἐδῶ δέ αὐτό εἶναι τό 41. Οὕτω σχηματίζομεν τόν ἀριθμόν 0641.

Διπλασιάζομεν τώρα τό μέχρι τῆς στιγμῆς εὑρεθέν τμῆμα τῆς ρίζης δηλ. τό 32 καί τό διπλάσιον αὐτοῦ δηλ. τό

64 γράφομεν είς τήν θέσιν τοῦ πηλίκου (βλέπε διάταξιν πράξεως). Χωρίζοντες τώρα τό τελευταῖον ψηφίον τοῦ 0641 διά μιᾶς άνω στιγμῆς ερωτῶμεν πόσας φοράς χωρεῖ τό 64 είς τό 064 ἤ τό 6 είς τό 06. Ἐδῶ χωρεῖ 1. Γράφομεν τό 1 δίπλα καί κάτω τοῦ 64. Ἐκτελοῦμεν τόν πολλαπλασιασμόν 641Χ1 καί εὑρίσκομεν 641. (Ἐδῶ λαμβάνομεν ὑπ'ὄψιν μας τάς ἀνωτέρω παρατηρήσεις 1 καί 2).

<u>Παρατηρ. 3η.</u> "Ἐάν τό 64 (ἤ 6) δέν ἐχώρει καμμίαν φοράν είς τό 064 (ἤ είς τό 06) τότε εις μέν τήν ρίζαν θά γράφαμε 0 δίπλα δέ είς τό 0641 θά καταβιβάζαμε καί ἄλλο ὑπάρχον (ἐδῶ βέβαια δέν ὑπάρχει) διψήφιον τμῆμα τοῦ ἀριθμοῦ κλπ.".

<u>Παρατ. 4η.</u> "Γράφομεν 06 διότι κατά τήν ἀφαίρεσιν ἴσως να μήν ἦτο 0 τό ὑπόλοιπον ἀλλά κάποιο ἄλλο ψηφίον π.χ. 1 τότε θά εἴχαμε 16 κλπ.".

Γράφομεν τό γινόμενον 641 κάτωθι τοῦ 0641 ἐκτελοῦμεν τήν ἀφαίρεσιν καί εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0.

Ἀναβιβάζομεν τώρα καθώς λέγομεν τό 1 καί τό γράφομεν δίπλα είς τό 32. Οὕτω ἔχομεν τόν ἀριθμόν 321.

$$\text{Ὥστε} \quad \sqrt{103041} = 321$$

<u>Παρατήρ.5η.</u> "Ἐάν τελικῶς δέν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 ἰσχύει ὅμως ἡ παρατήρησις 2 τότε λέγομεν ότι ό 321 ἐδῶ εἶναι ἡ τ.ρ. τοῦ 103041 κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος (Ἡ συνέχεια τότε τῆς πράξεως ἀνάγεται είς κατωτέρω παράγραφον).

<u>Διάταξις τῆς πράξεως</u>

103041	321	
9	62	641
130	2	1
124	124	641
=0641		
641		
0		

<u>Ἕτερον παράδειγμα:</u> $\sqrt{11449} = \;;$

Διάταξις πράξεως

1'14'49	107	
1	20	207
01449	0	7
1449	00	1449
0		

§ 11. Τ.ρ. άριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ (ἕνα διά ν)

Ὁρισμός "Τ.ρ. ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καλεῖ-τό μεγαλύτερον ἀπό τά κλάσματα τά ὁποῖα ἔχουν παρανομαστήν ν καί τοῦ ὁποίου τό τετράγωνον χωρεῖ εἰς τόν Α". Παραδείγματα θά μάθωμεν εἰς τάς ἑπομένας παραγράφους.

§ 12. Εὕρεσις τῆς τ.ρ. ἀριθμοῦ τινός κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ.

Ὁρισμός "Τ.ρ. ἑνός ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. καλεῖται τό μεγαλύτερον ἀπό τά κλάσματα τά ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως παρονομαστή 10,100,1000 κλπ. καί τῶν ὁποίων τά τετράγωνα εἶναι ἀριθμοί μικρότεροι τοῦ δοθέντος".

Παράδειγμα:

Γνωρίζομεν ὅτι ἡ τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ 11, κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 3 (διότι $3^2 = 9 < 11$).

Ὡς θά μάθωμεν κατωτέρω $\sqrt{11}$

κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι τό 3,3

" " $\frac{1}{100}$ " " 3,31

" " $\frac{1}{1000}$ " " 3,316

" " $\frac{1}{10000}$ " " 3,3166

Τί σημαίνουν ταῦτα;

Διά τήν ἀπάντησιν ἄς λάβωμεν τούς δεκαδικούς αὐτούς καί ἄς τούς ὑψώσωμεν εἰς τό τετράγωνον γράφοντες συγχρόνως ἕκαστον τούτων ὡς κλάσμα:

$$3,3^2 = \left(\frac{33}{10}\right)^2 = \frac{1089}{100} = 10,89 < 1$$

$$3,31^2 = \left(\frac{331}{100}\right)^2 = \frac{109561}{10000} = 10,9561 < 11$$

$$3,316^2 = \left(\frac{3316}{1000}\right)^2 = \frac{10995856}{1000000} = 10,995856 < 11 \text{ κλπ.}$$

Παρατηρήσεις.

Α: Ἐξ ὅλων τῶν κλασμάτων τά ὁποῖα ἔχουν παρονομαστή 10, τό $\frac{33}{10}$, εἶναι τό μεγαλύτερον τό ὁποῖον ὑψούμενο εἰς τό τετράγωνον δίδει ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ 11.

Πράγματι $\left(\frac{33}{10}\right)^2 = \frac{1089}{100} = 10,89 < 11$

ἐνῷ $\left(\frac{34}{10}\right)^2 = \frac{1156}{100} = 11,56 > 11$

Τό αὐτό συμβαίνει καί μέ τά κλάσματα $\frac{331}{100}$ καί $\frac{332}{100}$, $\frac{3316}{1000}$ καί $\frac{3317}{1000}$ κλπ.

Β: Ὡς διαπιστώνομεν: $9 < 10,89 < 10,9561 < 10,995856$

Δηλαδή "ὅσον, περισσότερα δεκαδικά ψηφία λαμβάνομεν εἰς τήν τ.ρ. τόσον περισσότερον πλησιάζομεν εἰς τήν ἀκριβῆ τ.ρ. ἀφοῦ ὅταν ὑψώσωμεν τήν τ.ρ. εἰς τό τετράγωνον πλησιάζομεν τόν ἀριθμόν 11".

§ 13. Πρακτικός τρόπος καί κανών τῆς εὑρέσεως τῆς τ ἀκεραίου τινός ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, κλπ. τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Πρόβλημα: "Νά εὑρεθῆ ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 11 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ".

Κανών: Διατάσσομεν τήν πρᾶξιν ὡς ἑξῆς: Γράφομεν τόν ἀριθμόν, ἐδῶ τόν 11, καθώς εἰς τήν § 10 Δ: τρόπος καί ἀφοῦ θέσωμεν μετά μίαν ὑποδιαστολήν γράφομεν δεξιά του ἄρτιον πλῆθος μηδενικῶν, ὥστε νά δυνάμεθα νά καταβιβάζωμεν διψήφια τμήματα (ἀποτελούμενα ἐκ μηδενικῶν βέβαια). Ἀφοῦ εὕρωμεν τήν κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τ.ρ. τοῦ11 θέτομεν εἰς αὐτήν μίαν ὑποδιαστολήν.

Μετά ταῦτα καταβιβάζομεν τό α΄ μετά τήν ὑποδιαστολήν τοῦ ἀριθμοῦ διψήφιον (ἐκ μηδενικῶν ἀποτελούμενον) τμῆμα.

Συνεχίζομεν τήν πρᾶξιν μας, χωρίς νά λαμβάνωμεν ὑπ' ὄψιν μας πλέον τάς ὑποδιαστολάς, ἀκολουθοῦντες τόν κανόνα τῆς § 10 Δ΄ τρόπος. Τήν πρᾶξιν διακόπτομεν συνήθως ἀφοῦ εὕρωμεν τό β΄ μετά τήν ὑποδιαστολήν τῆς τ.ρ. ψηφίον της (ἤ καί τό γ΄ τοιοῦτον).

Αναλόγως τῆς θέσεως, μετά τήν ὑποδιαστολήν, τοῦ τελευταίου ψηφίου τῆς τ.ρ. λέγομεν ὅτι εὕρωμεν ταύτην μέ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ.

Διάταξις τ῀ς πράξεως

```
11 00000000   | 3,3166
 9            |--------------------------------
--------      | 63  | 661 | 6626  | 66326
 200          |  3  |   1 |     6 |     6
 189          |--------------------------------
--------      | 189 | 661 | 39756 | 397956
 =1100        |
   661        |
--------      |
   43900      |
   39756      |
  =414400     |
    397956    |
   =16444     |
```

Ὥστε:

ΠΡΑΓΜΑΤΙ

$\sqrt{11} = 3$ κατά προσέγ. ἀκερ. μον. $3^2 = 9 < 11$

$\sqrt{11} = 3,3$ " " $\frac{1}{10}$ $3,3^2 = 10,89 < 11$

$\sqrt{11} = 3,31$ " " $\frac{1}{100}$ $3,31^2 = 10,9561 < 11$

$\sqrt{11} = 3,316$ $\frac{1}{1000}$ $3,316^2 = 10,995856 < 11$

$\sqrt{11} = 3,3166$ $\frac{1}{10000}$ $3,3166^2 = 10,99... < 11$

§ 14. Ἐφαρμογαί: Νά εὑρεθῇ ἡ τ.ρ. τῶν ἀριθμῶν 2 καί 3 κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ.

Α΄ "Ποία ἡ $\sqrt{2}$; "

Λύσις: Διάταξις τῆς πράξεως

2,00 00 00	1,414		
1	24	281	2824
100	4	1	4
96	96	281	11296
=0400			
281			
=11900			
11296			
=0604			

Ὥ σ τ ε :

$\sqrt{2} = 1$ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος

$\sqrt{2} = 1,4$ " " $\frac{1}{10}$ $1,4^2 = 1,96 < 2$

$\sqrt{2} = 1,41$ " " $\frac{1}{100}$ $1,41^2 = 1,9881 < 2$

$\sqrt{2} = 1,414$ " " $\frac{1}{1000}$ $1,414^2 = 1,999396 < 2$

Β΄ "Ποία ἡ $\sqrt{3}$; "

Λύσις: Διάταξις πράξεως

3,00 00 00	1,732		
1	27	343	3462
200	7	3	2
189	189	1029	6924
=1100			
1029			
=07100			
6924			
=176			

Ὥ σ τ ε :

$\sqrt{3} = 1$ κατά προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος

$\sqrt{3} = 1,7$ " " $\frac{1}{10}$ $1,7^2 = 2,89 < 3$

$\sqrt{3} = 1,73$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$. $1,73^2 = 2,9929 < 3$

$\sqrt{3} = 1,732$ " " " " $\frac{1}{1000}$, $1,732^2 = 2,999824 < 3$

§ 15. Έτερος τρόπος εὑρέσεως τῆς τ.ρ. δοθέντος ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ. τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Κανών: "Διά νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. δοθέντος ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ. τῆς ἀκεραίας μονάδος πολλαπλασιάζομεν αὐτόν ἐπί τό τετράγωνον τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως καί τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τήν τ.ρ. κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Τέλος διαιροῦντες ταύτην δηλ. τήν τ.ρ. διά τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως ἔχομεν τήν κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ. τ.ρ. τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ"

Ἐφαρμογαί

1. Νά εὑρεθῇ ἡ τ.ρ. τοῦ 2 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$. Γράφομεν: $2.10^2 = 2.100 = 200$. Λέγομεν $\sqrt{200} = 14$ κατά προσέγγισιν μιᾶς ἀκεραίας μονάδος. Τώρα κατά τόν ἀνωτέρω κανόνα ἔχομεν:

$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{200}}{10} = \frac{14}{10} = 1,4$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

2. Νά εὑρεθῇ ἡ τ.ρ. τοῦ 3 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$

Κατά τά ἀνωτέρω ἔχομεν:

α') $\sqrt{3}$, $3.10^2 = 3.100 = 300$ καί $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{300}}{10} = \frac{17}{10} = 1,7$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

β') $\sqrt{3}$, $3.100^2 = 3.10000 = 30000$ καί $\sqrt{3} = \frac{\sqrt{30000}}{100} = \frac{173}{100} = 1,73$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$

§ 16. ΑΣΥΜΜΕΤΡΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ὁρισμός: "Ὁ δεκαδικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά καλεῖται ἀσύμμετρος ἀριθμός". Οἱ ἀκέραιοι καί οἱ κλασματικοί ἀριθμοί λέγονται σύμμετροι ἀριθμοί.

Ἄν ἐξετάσωμεν τάς τ.ρ. τῶν ἀριθμῶν 2,3 καί 11 (τούς ὁποίους ἐχρησιμοποιήσαμεν εἰς τά προηγούμενα παραδείγματα) θά ἴδωμεν ὅτι αὗται εἶναι ἀριθμοί ἀσύμμετροι κατά τόν ὁρισμόν ὡς ἔχοντες ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά (ἀρκεῖ νά συνεχίσωμεν τήν ἐξαγωγήν τῆς τ.ρ. διά νά διαπιστώσωμεν τοῦτο).

§ 17. Εὕρεσις τῆς τ.ρ. ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$

Ἔστω ὅτι ἡ τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ εἶναι τό κλάσμα $\frac{\mu}{\nu}$. Ἐπειδή τό ἀμέσως μεγαλύτερον, τοῦ κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$, κλάσμα μέ παρανομαστήν ν, εἶναι τό $\frac{\mu+1}{\nu}$ θά ἔχωμεν κατά τόν ὁρισμόν τῆς § 11:

$$\left(\frac{\mu}{\nu}\right)^2 < A < \left(\frac{\mu+1}{\nu}\right)^2 \text{ ἤ } \frac{\mu^2}{\nu^2} < A < \frac{(\mu+1)^2}{\nu^2} \text{ ἤ}$$

$$\mu^2 < A.\nu^2 < (\mu+1)^2.$$

Συμπέρασμα: Ὁ μ (δηλ. ὁ ἀριθμητής τῆς κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ τ.ρίζης) εἶναι ἡ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ $A.\nu^2$ (δηλ.τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐάν πολ/σωμεν τόν δοθέντα ἀριθμόν Α ἐπί τό τετράγωνον τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως).

Κανών: "Διά νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. δοθέντος ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ πολλαπλασιάζομεν αὐτόν ἐπί ν^2 (δηλ. ἐπί τό τετράγωνον τοῦ παρανομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως) καί τοῦ γινομένου $A.\nu^2$ ἐξάγομεν τήν τ.ρ. κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Τέλος τήν κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εὑρισκομένην τ.ρ. διαιροῦμεν διά ν. Οὕτω ἔχομεν τήν ζητουμένην τ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ ".

Ἐφαρμογήν τοῦ κανόνος εἴχομεν ἤδη εἰς τήν § 15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΔΕΚΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 18. Εἰσαγωγή εἰς τήν τ.ρ. τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν.
Κατά τήν ἐργασίαν διά τήν ἐξαγωγήν τῆς τ.ρ. ἑνός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ παρουσιάζονται τά ἑξῆς δύο προβλήματα.

1ον Πρόβλημα: Ἐξαγωγή τ.ρίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, ὁπότε ἐξετάζομεν τό ἀκέραιον μέρος του.

Σημείωσις: Ἐδῶ ἀνάγεται καί ἡ ἰδία περίπτωσις παντός μικτοῦ ἀριθμοῦ ἀφοῦ οὗτος δύναται νά λάβῃ δεκαδικήν μορφήν.

2ον Πρόβλημα: Ἐξαγωγή τ. ρίζης ἐπί ὁλοκλήρου τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

§ 19. Τ.ρ. δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

1ον Πρόβλημα: Ὁρισμός : "Τ.ρ. δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἤ μικτοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καλεῖται ἡ τ.ρ. (ἀκριβής ἤ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος) τοῦ ἀκεραίου μέρους τοῦ δεκαδικοῦ ἤ μικτοῦ ἀριθμοῦ".

Παραδείγματα:

Η τ.ρ.	τοῦ	$25,45$	κατά	προσέγ.	ἀκερ.μονάδος	εἶναι	τό		5
"	"	"	$73,11$	"	"	"	"	"	"	8
"	"	"	$49\frac{2}{3}$	"	"	"	"	"	"	7
"	"	"	$17\frac{1}{100}$	"	"	"	"	"	"	4

§ 20. Τ.ρ. ἐπί ὁλοκλήρου τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

2ον Πρόβλημα:

Περίπτωσις Α΄: Κατά τήν ἐξαγωγήν τῆς τ.ρ. δέν μένει ὑπόλοιπον.

Περίπτωσις Β΄: Μένει ὑπόλοιπον.

Περίπτωσις Γ΄: Τό ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ εἶναι 0.

Περίπτωσις Δ΄: Μικτός ἤ κλάσμα τι δύναται νά λάβῃ δεκαδικήν μορφήν.

§ 21. ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Οἱ ὁρισμοί περί τετραγώνων καί τετραγωνικῶν ριζῶν οἱ ὁποῖοι ἐδόθησαν εἰς τούς ἀκεραίους ἰσχύουν καί εἰς

τούς δεκαδικούς.

2. Τό κριτήριον περί ὑπάρξεως ἀκριβοῦς τ.ρ. ἰσχύει καί εἰς τούς δεκαδικούς.

3. Τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων πρέπει νά εἶναι ἄρτιον, ἄλλως γράφομεν εἰς τό τέλος ἕν μηδενικόν πρᾶγμα τό ὁποῖον δέν ἀλλάζει ἄλλωστε καί τήν ἀξίαν τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Προκειμένου π.χ. περί τοῦ ἀριθμοῦ 5,631 γράφομεν 5,6310.

4. Τήν ἐξαγωγήν τῆς τ.ρ. κλάσματος θά ἐξετάσωμεν εἰς τό Γ΄κεφάλαιον.

§ 22. Γενικός πρακτικός, κανών ἐξαγωγῆς τ.ρίζης δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ.

Τήν πρᾶξιν διατάσσομεν καθώς καί εἰς τούς ἀκεραίους ἀριθμούς. Χωρίζομεν κατόπιν τό ἀκέραιον μέρος τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ (ἐκτός ἄν αὐτό εἶναι 0, μονοψήφιον ἤ διψήφιον) εἰς διψήφια τμήματα ἀπό τό τέλος του καί τό δεκαδικόν μέρος εἰς διψήφια τμήματα ἀπό τήν ἀρχήν, (βλέπε διάταξιν πράξεως).

Ἐξάγομεν τήν τ.ρ. τοῦ ἀκεραίου μέρους κατά τόν γνωστόν τρόπον.

Ἀφοῦ καταβιβάσωμεν τό πρῶτον μετά τήν ὑποδιαστολήν διψήφιον τμῆμα τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ δοθέντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ γράφομεν μίαν ὑποδιαστολήν εἰς τό μέχρι τῆς στιγμῆς εὑρεθέν τμῆμα τῆς τ.ρίζης καί συνεχίζομεν τήν πρᾶξιν μας κατά τά γνωστά χωρίς νά μᾶς ἐνδιαφέρουν πλέον αἱ ὑποδιαστολαί τόσον τοῦ ἀριθμοῦ ὅσον καί τῆς τ.ρίζης.

Περίπτωσις καθ᾽ἥν τό ἀκέραιον μέρος τοῦ δεκαδικοῦ εἶναι 0.

Ὡς ἀκέραιον ψηφίον τοῦ τ.ρ. γράφομεν τό 0 καί συνεχίζομεν τήν πρᾶξιν κατά τά γνωστά.

§ 23. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. "Ποία ἡ τ.ρ. τοῦ 6,25;".

Λύσις: Ἔχοντες ὑπ᾽ὄψιν πάντα τά ἀνωτέρω διατάσσομεν τήν πρᾶξιν καί ἐργαζόμεθα κατά τά γνωστά.

Διάταξις πράξεως

$\overline{6},\ \overline{25}$	2,5
4	45
2 25	5
2 25	
= 0	225

2. "Ποία ἡ τ.ρ. τοῦ 552,7201".

Λύσις:

Διάταξις πράξεως

552,7201	23,51		
4	43 3	465 5	4701 1
152 129	129	2325	4701
=2372 2325			
=04701 4701			
= 0			

3. "Ποία ἡ τ.ρ. τοῦ 17,243;"

Λύσις: Γράφομεν 17,2430 ἤ 17,243000 κλπ. δηλ. προσθέτομεν τόσα μηδενικά ὥστε τό πλῆθος τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δεκαδικοῦ νά εἶναι ἄρτιον ἐπί πλέον δέ προχωροῦμεν τήν ἐξαγωγήν τῆς τ.ρ. μέχρις ἐκεῖ ὅπου ἐπιθυμοῦμεν.

Διάταξις πράξεως

17,243000	4,152		
16	81 1	825 5	8302 2
124 81	81	4125	16604
=4330 4125			
=20500 16604			
=3896			

Ὥ σ τ ε:

$\sqrt{17,243}$ = 4 κατά προσέγγισιν ἀκερ. μονάδος

" = 4,1 " " $\frac{1}{10}$

" = 4,15 " " $\frac{1}{100}$

" = 4,152 " " $\frac{1}{1000}$

4. "Ποία ἡ τ.ρ. τοῦ 0,0625;"

Λύσις:

Διάταξις πράξεως

```
0,0625  | 0,25
0 04    |--------------
--------|  45  |
= 0225  |   5  |
  0225  |------|
--------| 225  |
  =000  |      |
```

5. "Ποία ή τ.ρ. τοῦ $5\frac{3}{4}$; "

__Λύσις:__ Τρέπομεν τόν μικτόν είς δεκαδικόν. Ἐδῶ ἔχομεν:

$$5\frac{3}{4} = \frac{23}{4} = 5,75 \text{ καί } \sqrt{5\frac{3}{4}} = \sqrt{5,75} = ;$$

Διάταξις πράξεως

```
5,7500  | 2, 39
4       |-------------
--------| 43  | 469
1 75    |  3  |   9
1 29    |-----|-------
--------| 129 |4221
= 4600  |     |
  4221  |     |
--------|     |
  =379  |     |
```

Ὥστε $\sqrt{5\frac{3}{4}} = 2$ κατά προσέγγισιν ἀκερ. μονάδος

$\sqrt{5\frac{3}{4}} = 2,3$ " " $\frac{1}{10}$

$\sqrt{5\frac{3}{4}} = 2,39$ " " $\frac{1}{100}$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΡΙΖΑ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 24. Εἰσαγωγή εἰς τήν τ.ρ. τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν.

Γνωρίζομεν ὅτι διά νά ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν πρέπει νά ὑψώσωμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους εἰς τήν δύναμιν ταύτην.

Π.χ. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$

Συνδυάζοντες, τώρα ταῦτα καί τόν ὁρισμόν τῆς τ.ρ. ἀριθμοῦ καταλήγομεν εἰς τόν ἑξῆς κανόνα.

Κανών: "Διά νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. κλάσματος πρέπει νά ἐξαγάγωμεν τήν τ.ρ. ἑκάστου ὅρου χωριστά καί κατόπιν νά διαιρέσωμεν τήν τ.ρ. τοῦ ἀριθμητοῦ διά τῆς τ.ρ. τοῦ παρανομαστοῦ".

Π.χ. $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$

§ 25. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΕΞΑΓΩΓΗΣ ΤΕΤΡΑΓ. ΡΙΖΗΣ ΚΛΑΣΜΑΤΟΣ

Περίπτωσις 1η. "Ἐάν καί οἱ δύο ὅροι τοῦ κλάσματος εἶναι τέλεια τετράγωνα."

Παράδειγμα: Νά εὑρεθῇ ἡ $\sqrt{\frac{625}{961}}$

Λύσις: Κατά τά γνωστά κανών § 24 ἔχομεν:

$$\sqrt{\frac{625}{961}} = \frac{\sqrt{625}}{\sqrt{961}} = \frac{25}{31}$$

Σημείωσις: Ἐάν θέλωμεν ἐκτελοῦμεν καί τήν διαίρεσιν $\frac{25}{31}$.

Περίπτωσις 2α: "Ἐάν μόνον ὁ παρανομαστής εἶναι τέλειον τετράγωνον".

Π.χ. $\sqrt{\frac{2}{25}} = ;$

Λύσις

α' τρόπος: "Ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν $\frac{2}{25}$ (τελείαν ἤ ἀτελῆ καί τοῦ προκύπτοντος δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐξάγομεν τήν τ.ρ. κατά τά γνωστά § 22". Δηλαδή

$\sqrt{\frac{2}{25}} = \sqrt{0,08} = 0,28$ (κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$)

β΄ τρόπος ."'Εξάγομεν τήν τ.ρ ἑκάστου ὅρου χωριστά (ἀκριβῶς ἤ κατά προσέγγισιν) καί κατόπιν ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν". Δηλαδή

$$\sqrt{\frac{2}{25}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{25}} = \frac{1,41}{5} = 0,28$$

Περίπτωσις 3η. "'Εάν ὁ παρανομαστής δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἀνεξαρτήτως τοῦ ἄν ὁ ἀριθμητής εἶναι τέλειον τετράγωνον ἤ ὄχι".

Παράδειγμα $\sqrt{\frac{7}{12}} = ;$

Λύσις

α΄τρόπος: Ὡς ὁ α΄τρόπος τῆς περιπτώσεως 2. Δηλαδή:

$$\sqrt{\frac{7}{12}} = \sqrt{0,5833} = 0,76 \text{ (κατά προσέγγισιν } \frac{1}{100}\text{)}$$

β΄τρόπος: "Πολλαπλασιάζομεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί τόν παρανομαστήν του. Οὕτω καθιστῶμεν τόν παρονομαστήν τέλειον τετράγωνον καί ἐργαζόμεθα ὡς καί εἰς τήν περίπτωσιν 2.

$$\frac{7}{12} = \sqrt{\frac{7.12}{12.12}} = \sqrt{\frac{84}{144}} = \frac{\sqrt{84}}{\sqrt{144}} = \frac{9,16}{12} = 0,76$$

§ 26. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

1. Νά εὑρεθῆ ἡ τ.ρ. κλάσματος κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ (ἕνα διά ν) Π.χ. $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{7}$ κλπ.

"Εχοντες ὑπ'ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς τ.ρ. ἀκεραίου ἀριθμο κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καταλήγομεν καί ἐδῶ εἰς τόν ἑξῆς κανόνα.

Κανών: "Διά νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. κλάσματος κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ πολλαπλασιάζομεν αὐτό ἐπί τό τετράγωνον τοῦ ν δηλαδή ἐπί ν^2 καί τοῦ γινομένου τό ὁποῖον προκύπτει ἐξάγομεν τήν τ.ρ. κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Τέλος τήν οὕτω εὑρισκομένην τ.ρ. διαιροῦμεν διά ν".

Σημείωσις: Τοῦ ὡς ἄνω γινομένου εὑρίσκομεν πολλές φορές τήν τ.ρ. καί κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$ κλπ. διότι πιθανόν τό γινόμενον αὐτό νά εἶναι καί μικρότερον τῆς μονάδο

Παραδείγματα:

Νά εὑρεθῆ ἡ τ.ρ. τοῦ κλάσματος $\frac{3}{5}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{7}$;

Λύσις.

Ἀκολουθοῦντες τόν κανόνα ἔχομεν: $\sqrt{\frac{3}{5}} =$

$$= \frac{\sqrt{\frac{3}{5} \cdot 7^2}}{7} = \frac{\sqrt{\frac{3}{5} \cdot 49}}{7} = \frac{\sqrt{\frac{147}{5}}}{7} = \frac{\sqrt{29,40}}{7} = \frac{\sqrt{29}}{7} = \frac{5}{7}$$

Ὥστε: ἡ τ.ρ. τοῦ $\frac{3}{5}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ εἶναι τό κλάσμα $\frac{5}{7}$.

Πράγματι: $\left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} = 0,51 < \frac{3}{5}$ ἀφοῦ $\frac{3}{5} = 0,6$

δηλαδή συμφωνοῦμεν μέ τόν ὁρισμόν τῆς κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ (ἐδῶ $\frac{1}{7}$) τ.ρίζης ἀριθμοῦ ἀκεραίου ἤ κλασματικοῦ.

Ἄν ὅμως λάβωμεν ὡς τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ $\frac{3}{5}$, μέ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$, τό $\frac{6}{7}$ θά ἔχωμεν: $\left(\frac{6}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} = 0,7 > \frac{3}{5}$ ἀφοῦ $\frac{3}{5} = 0,6$.

2. Νά εὑρεθῆ ἡ τ.ρ. κλάσματος κατά προσέγγισιν π.χ. $\frac{\mu}{\nu}$ (μή διά νί) .

Παράδειγμα: Νά εὑρεθῆ ἡ τ.ρ. τοῦ κλάσματος $\frac{5}{7}$ κατά προσέγγισιν $\frac{2}{3}$.

Λύσις

Ἐπειδή $\frac{2}{3} = \frac{1}{\frac{3}{2}}$ ἕπεται ὅτι τ.ρ. κατά προσέγγιαν $\frac{2}{3}$ σημαίνει τ.ρ. κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\frac{3}{2}}$

Ἐφαρμόζοντες τώρα τόν κανόνα,θεωροῦντες ὡς παρονομαστή τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως τό $\frac{3}{2}$,εὑρίσκομεν τήν τ.ρ. μέ προσέγγισιν $\frac{1}{\frac{3}{2}}$ (δηλαδή μέ προσέγγισιν $\frac{2}{3}$)

Ἔχομεν λοιπόν:

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{7}\left(\frac{3}{2}\right)^2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{5}{7}\cdot\frac{9}{4}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{45}{28}}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{1,60}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{1}}{\frac{3}{2}}$$

$= \frac{1.2}{3} = \frac{2}{3} = 0,6$. Ὥστε: $\sqrt{\frac{5}{7}} = 0,6$ (κατά προσέγγισιν $\frac{2}{3}$).

§ 27. ΓΕΝΙΚΑΙ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Α. Ἐφ' ὅσον πλέον γνωρίζομεν νά εὑρίσκωμεν τήν τ.ρ. κλάσματος δυνάμεθα νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἀφοῦ γράψωμεν αὐτόν ὑπό μορφήν κλάσματος.

Παραδείγματα:

1. $\sqrt{10,24} = 3,2$ διότι $\sqrt{10,24} = \sqrt{\frac{1024}{100}} = \frac{\sqrt{1024}}{\sqrt{100}} = \frac{32}{10} = 3,2$

Β. Δυνάμεθα ἀκόμη νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἄν τρέψωμεν αὐτόν προηγουμένως εἰς κλάσμα. Κατόπιν ἐργαζόμεθα κατά τά γνωστά.

Γ. Διά νά εὕρωμεν τήν τ.ρ. μικτοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγιν ἀκεραίας μονάδος λαμβάνομεν τήν τ.ρ. μόνον τοῦ ἀκερ. μέρους. Δυνάμεθα ὅμως νά τρέψωμεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα ἤ ἀκόμη καί εἰς δεκαδικόν καί οὕτω νά καταλήξωμεν εἰς γνωστήν περίπτωσιν.

ΓΕΝΙΚΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΕΠΙ ΤΗΣ Τ.Ρ.

"Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{11}$ μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$".

Λύσις

Ἐδῶ δέν δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{11} = \sqrt{16}$ ὅπως ἴσως θά ἔγγραφον μερικοί μαθηταί ἀλλά εὑρίσκομεν τήν τ.ρ. ἑκάστου προσθετέου χωριστά, μέ τήν προσέγγισιν ἡ ὁποία μᾶς ζητεῖται καί κατόπιν προσθέτομεν τά ἐξαγόμεν

Ἐδῶ ἔχομεν $\sqrt{2} = 1,41$, $\sqrt{3} = 1,73$, $\sqrt{11} = 3,31$
Ἀντικαθιστῶμεν καί λαμβάνομεν:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{11} = 1,41+1,73+3,31 = 6,45.$$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

ΚΥΒΙΚΗ ΡΙΖΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

ΠΕΡΙ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΡΙΘΜΟΥ

§ 28. Ὁρισμός: "Τρίτη δύναμις ἤ κύβος ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος προκύπτει ἀπό τόν δοθέντα ἐάν πολλαπλασιάσωμεν αὐτόν ἐπί τόν ἑαυτόν του τρεῖς φορές".

Παραδείγματα: Κύβος τοῦ 5 εἶναι ὁ ἀριθμός 125 ἀφοῦ $5^3 = 5.5.5 = 125$. Κύβος τοῦ $\frac{2}{3}$ εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{8}{27}$ ἀφοῦ $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$. Τέλος κύβος τοῦ 1,3 εἶναι ὁ ἀριθμός 2,197 ἀφοῦ $1,3^3 = 1,3.1,3.1,3 = 2,197$

§ 29. Ὁρισμός: "Τέλειοι κύβοι καλοῦνται οἱ ἀριθμοί οἱ ὁποῖοι εἶναι κύβοι ἄλλων δοθέντων ἀριθμῶν". Κατωτέρω ἀναγράφομεν πίνακα τελείων κύβων.

§ 30. Ὁρισμός. "Κυβική ρίζα ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ τρεῖς φορές ἐπί τόν ἑαυτόν του (ἤ κατ'ἄλλην ἔκφρασιν "νά ὑψωθῇ εἰς τόν κύβον") διά νά μᾶς δώσῃ τόν δοθέντα ἀριθμόν".

Παραδείγματα: Κυβική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 125 εἶναι ὁ 5 διότι μόνον $5^3 = 5.5.5 = 125$. Κυβική ρίζα τοῦ $\frac{8}{27}$ εἶναι τό κλάσμα $\frac{2}{3}$ διότι μόνον $(\frac{2}{3})^3 = \frac{2}{3} . \frac{2}{3} . \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

Τέλος κυβική ρίζα τοῦ 2,197 εἶναι ὁ ἀριθμός 1,3 διότι μόνον $1,3^3 = 1,3.1,3.1,9 = 2,197$.

Σημείωσις: Λέγομεν ὅτι "κυβική ρίζα τοῦ 125 εἶναι τό 5" γράφομεν ὅμως συντόμως "κ.ρ. τοῦ 125 εἶναι τό 5". Τέλος σημειώνομεν συμβολικῶς $\sqrt[3]{125} = 5$ ".

Ἡ κυβική ρίζα καλεῖται ρίζα τρίτης τάξεως ἀκόμη δέ καί ρίζα περιττῆς τάξεως.

§ 31. Πρίν ἀρχίσωμεν τήν ἐξέτασιν τῆς κυβικῆς ρίζης εἶναι ἀνάγκη νά γνωρίζωμεν ἀπό μνήμης τόν κατωτέρω πίνακα τῶν κύβων μερικῶν ἀριθμῶν.

ΠΙΝΑΞ ΤΕΛΕΙΩΝ ΚΥΒΩΝ

$1^3 = 1$	$6^3 = 216$	$50^3 = 125000$
$2^3 = 8$	$7^3 = 343$	$100^3 = 1.000.000$
$3^3 = 27$	$8^3 = 512$	$1000^3 = 1000000000$
$4^3 = 64$	$9^3 = 729$	
$5^3 = 125$	$10^3 = 1000$	

§ 32. Ἔχοντες ὑπ᾽ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς κ.ρ, σχηματίζομεν ἐκ τοῦ ἀνωτέρω πίνακος τῶν κύβων, ἄλλον πίνακα, τόν τῶν κυβικῶν ριζῶν.

ΠΙΝΑΞ ΚΥΒΙΚΩΝ ΡΙΖΩΝ.

$\sqrt[3]{1} = 1$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$\sqrt[3]{125000} = 50$
$\sqrt[3]{8} = 2$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$\sqrt[3]{1.000.000} = 100$
$\sqrt[3]{27} = 3$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$\sqrt[3]{1000000000} = 1000$
$\sqrt[3]{64} = 4$	$\sqrt[3]{729} = 9$	
$\sqrt[3]{125} = 5$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	

§ 33. Ἀκριβής κυβική ρίζα ἀριθμοῦ.

Ὁρισμός: "Ἀκριβής κ.ρ. ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται ὁ ἀκέραιος ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τόν κύβον μᾶς δίδει τόν δοθέντα ἀριθμόν".

Παραδείγματα: Τά τῆς § 30.

§ 34. Κυβική ρίζα ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ὁρισμός: "Κ.ρ ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καλεῖται ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος, ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τόν κύβον δίδει ἐξαγόμενον μικρότερον τοῦ δοθέντος".

π.χ. ἡ $\sqrt[3]{92}$ δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, ὡς διαπιστώνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν κυβικῶν ριζῶν καί τοῦ πίνακος τῶν κύβων.

Πράγματι: $4^3 = 64 < 92$ καί $5^3 = 125 > 92$

Ἡ κ.ρ τοῦ 92 κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος εἶναι ὁ 4 διότι κατά τόν ὁρισμόν ὁ 4 εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀκέραιος ὅστις ὑψούμενος εἰς τόν κύβον δίδει ἐξαγόμενον (ἐδῶ 64) μικρότερον τοῦ 92.

Ἐκ τοῦ πίνακος τῶν κύβων παρατηροῦμεν ὅτι οἱ ἀριθμοί 64 καί 125 εἶναι διαδοχικοί τέλειοι κύβοι (δηλ. μεταξύ των δέν ὑπάρχει ἄλλος κύβος ἀκεραίου ἀριθμοῦ).

Λαμβάνοντες τώρα ὑπ' ὄψιν τόν σχετικόν ὁρισμόν διαπιστώνομεν ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοί ἀπό 65 μέχρι καί 124 δηλ. οἱ συμπεριλαμβανόμενοι μεταξύ τῶν δύο τελείων κύβων 64 καί 125 ἔχουν τήν αὐτήν κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος κυβικήν ρίζαν.

§ 35. Ἐξαγωγή κυβικῆς ρίζης ἑνός ἀριθμοῦ.

Ἡ ἐργασία διά τήν εὕρεσιν τῆς κυβ. ρίζ. ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ καλεῖται "ἐξαγωγή τῆς κυβικῆς ρίζης" αὐτοῦ.

Διά νά δυνάμεθα εὐχερῶς νά εὑρίσκωμεν τήν κ.ρ ἑνός ἀριθμοῦ πρέπει νά γνωρίζωμεν ἀπό μνήμης τούς δύο ἀνωτέρω ἀναγραφομένους πίνακας τῶν κύβων καί τῶν κυβικῶν ριζῶν.

§ 36. Γενικαί παρατηρήσεις ἐπί τῶν δύο ἀνωτέρω πινάκων.

Α:" Ἐάν γνωρίζωμεν τόν κύβον ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ καί θέλομεν νά εὕρωμεν τόν κύβον τοῦ κατά μονάδα μεγαλυτέρου του ἀρκεῖ εἰς τόν κύβον τοῦ μικροτέρου ἀριθμοῦ νά προσθέσωμεν τό ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου γινο-

μένου αὐτῶν καί τῆς μονάδος". (ἐπί τῆς μονάδος)
Παράδειγμα: "Ποῖος ὁ κύβος τοῦ 6;"

Γνωρίζομεν ὅτι $5^3 = 125$
ἄρα $6^3 = 5^3 + \left[3(5.6)+1\right] = 125+90+1 = 216$

Β΄ "Ἐάν γνωρίζωμεν τόν κύβον ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ καί θέλωμεν νά εὕρωμεν τόν κύβον τοῦ κατά μονάδα μικροτέρου του ἀρκεῖ ἀπό τόν κύβον τοῦ μεγαλυτέρου ἀριθμοῦ νά ἀφαιρέσωμεν τό ἄθροισμα τοῦ τριπλασίου γινομένου αὐτοῦ καί τῆς μονάδος".
Παράδειγμα: "Ποῖος ὁ κύβος τοῦ 9;"
Γνωρίζομεν ὅτι $10^3 = 1000$
ἄρα $9^3 = 10^3 - \left[3(9.10)+1\right] = 1000-271=729$

Γ΄ Κριτήριον περί ὑπάρξεως ἀκριβοῦς κυβικῆς ρίζης.

Καθώς διαπιστώνομεν ἐκ τοῦ πίνακος τῶν κύβων, οἱ κύβοι ὅλων τῶν ἀριθμῶν λήγουν εἰς 1,2,3,4,5,6,7,8,9 καί 000, 000000 κλπ. μηδενικά.

Δυνάμεθα λοιπόν νά εἴπωμεν ὅτι ἡ κ.ρ ἑνός ἀριθμοῦ ὑπάρχει πιθανότης νά ἐξάγεται πάντοτε ἀκριβῶς, ἀρκεῖ, ὅταν ὁ ἀριθμός λήγει εἰς 0, νά λήγῃ τοὐλάχιστον εἰς τρία, ἕξ κλπ. μηδενικά.

Δ΄ Συμβουλευτική πρός τούς μαθητάς παρατήρησις.

Ὅταν οἱ μαθηταί πρωτομανθάνουν νά ἐξάγουν τήν κυβικήν ρίζαν τῶν ἀριθμῶν, προτιμότερον εἶναι νά λαμβάνουν ἕνα ἀριθμόν π.χ. τόν 3245 νά τόν ὑψώνουν εἰς τόν κύβον καί κατόπιν τοῦ οὕτω εὑρισκομένου κύβου 34169931125 νά ἐξάγουν τήν κυβ.ρίζαν. Οὕτω εἶναι βέβαιοι ὅτι ἡ κ.ρ τοῦ 34169931125 ἐξάγεται ἀκριβῶς καί εἶναι αὐτη ὁ ἀριθμός 3245.

§ 37. Τρόπου εὑρέσεως τῆς κυβ.ρίζης ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ.

Ὁμοίως ὡς ἡ παράγραφος 10.

Ἀνάπτυξις ἑκάστου τρόπου.

Πρῶτος τρόπος: Ὅ,τι ἰσχύει διά τήν τ.ρ § 10 σελ.5 ἰσχύει ἐδῶ καί διά τήν κ.ρ.

Δεύτερος τρόπος: Ὁμοίως ὡς ἄνω.

Τρίτος τρόπος: Ἐδῶ δίδομεν ἀμέσως παράδειγμα καί κανόνα.

"Νά εὑρεθῇ ἡ κ.ρ τοῦ ἀριθμοῦ 27000".
Λύσις: Ἀναλύομεν κατά τά γνωστά τόν 27000 εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων (ἔχοντες ὑπ᾿ὄψιν τό κριτήριον ἐξαγωγῆς κ.ρ παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχῃ πιθανότης νά ἐξάγεται ἀκριβῶς ἡ κ.ρ τοῦ 27000).

Πρᾶξις

27000	2
13500	2
6750	2
3375	3
1125	3
375	3
125	5
25	5
5	5
1	

Ἔχομεν λοιπό:

$27000 = 2.2.2.3.3.3.5.5.5$ ἤ

$27000 = 2^3.3^3.5^3$ ἤ

$27000 = (2.3.5)^3$ ἤ

$27000 = 30^3$ ἄρα

$\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{30^3} = 30$

Κανών: Ὅ,τι ἰσχύει διά τήν τ.ρ § 10 σελ. 6 ἰσχύει ἐδῶ καί διά τήν κ.ρ
Σημείωσις: "Ὅταν ἔχωμεν ἕνα ἀριθμόν ἀναλελυμένον εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων καί οἱ ἐκθέται αὐτῶν δέν διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τό 3 τότε ἐξάγομεν τήν κ.ρ. αὐτοῦ κατά τόν τέταρτον τρόπον τόν ὁποῖον ἀναγράφομεν ἀμέσως κατωτέρω.

Τέταρτος τρόπος.

ΠΡΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΕΥΡΕΣΕΩΣ ΤΗΣ ΚΥΒΙΚΗΣ ΡΙΖΗΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Πρόβλημα: "Νά εὑρεθῇ ἡ κ.ρ. τοῦ ἀριθμοῦ 34169931125".
Δίδομεν ἀμέσως τόν τρόπον εὑρέσεως τῆς κ.ρ. ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος τρόπος ἀποτελεῖ καί τόν κανόνα τῆς ἐκτελέσεως τῆς πράξεως.
Κανών: Γράφομεν τήν γνωστήν γωνίαν τῆς διαιρέσεως (βλέπε διάταξιν πράξεως).
Τοποθετοῦμεν τόν δοθέντα ἀριθμόν εἰς τήν θέσιν τοῦ διαιρετέου καί τόν χωρίζομεν εἰς τριψήφια τμήματα ἀπό τό τέλος, δι᾿ἀποστρόφων ἤ ἄνω στιγμῶν.
Τό α΄πρός τ᾿ἀριστερά τμῆμα δύναται νά εἶναι καί μονοψήφιον ἤ διψήφιον.
Τοῦ α΄αὐτοῦ πρός τά ἀριστερά τμήματος, ἐδῶ τοῦ 34, εὑρίσκομεν τήν κ.ρ εἴτε ἀκριβῶς εἴτε κατά προσέγγισιν

ἀκεραίας μονάδος. Ἡ κ.ρ. εἶναι ἐδῶ 3. Γράφομεν τό 3 εἰς τήν θέσιν τοῦ διαιρέτου (βλέπε διάταξιν πράξεως), εἶναι δέ τό 3 τό α΄ψηφίον τῆς ζητουμένης κ.ρίζης.

Τόν κύβον τοῦ 3 δηλ. τό (3^3 =)27 γράφομεν κάτωθι τοῦ 34 καί ἐκτελοῦντες τήν ἀφαίρεσιν εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 07 (δηλ.7).

Δίπλα εἰς τό 7 κατεβάζομεν εἴτε ὁλόκληρον τό ἑπόμενον τριψήφιον τμῆμα εἴτε τό α΄ψηφίον αὐτοῦ (ἐδῶ) τό 1, σχηματίζοντες οὕτω τόν ἀριθμόν 71.

Λαμβάνομεν τώρα τό <u>τριπλάσιον τετράγωνον</u> τοῦ α΄ψηφίου τῆς κ.ρ. δηλ. τό (3.3^2) = 27 καί τό γράφομεν εἰς τήν θέσιν τοῦ πηλίκου (βλέπε διάταξιν πράξεως).

<u>Τώρα λέγομεν</u> "Τό 27 εἰς τό 71 χωρεῖ 2 φορές τό περισσότερον" (κάνομεν δηλ. διαίρεσιν). Κάτωθι τοῦ προαναφερθέντος τριπλασίου τετραγώνου γράφομεν τό α΄ψηφίον τῆς ζητουμένης κ.ρ, ἐδῶ τό 3, καί δίπλα αὐτοῦ γράφομεν καί τό 2 (τῆς φράσεως "2 φορές τό περισσότερον"). Τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ἀριθμοῦ 32 λαμβάνομεν τόν κύβον δηλ. τό (32^3 =) 32768 καί ἀφαιροῦμεν αὐτόν ἀπό τόν ἀριθμόν 34169 (ἐδῶ) τόν ὁποῖον ἀποτελοῦν τά δύο πρῶτα τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ (καί τόν ὁποῖον ἀριθμόν 34169 γράφομεν κάτωθι τοῦ 071 ἀφοῦ σύρομεν προηγουμένως ὁριζοντίαν εὐθεῖαν, βλέπε διάταξιν πράξεως).

<u>Παρατήρησις 1η.</u>" Ἐάν ὁ κύβος τοῦ 32 δέν ἀφαιρεῖτο ἀπό τόν 34169 τότε θά γράφαμε εἰς τήν θέσιν τοῦ 2 τόν κατά μονάδα μικρότερον ἀριθμόν καί οὕτω καθ᾽ἑξῆς μέχρι νά ἐπιτύχωμεν τήν ἀφαίρεσιν".

Ἐκτελοῦντες τώρα τήν προαναφερθεῖσαν ἀφαίρεσιν τοῦ 32768 ἀπό τοῦ ἀριθμοῦ 34169 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 1401.

Ἀνεβάζομεν τώρα καθώς λέγομεν τό 2 καί τό γράφομεν δίπλα εἰς τό 3 (θέσις διαιρέτου καί σχηματισμοῦ τῆς κ.ρ.) οὕτω ἔχομεν τόν ἀριθμόν 32 ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τά δύο πρῶτα ψηφία τῆς ζητουμένης κ. ρίζης.

Δίπλα εἰς τό 1401 κατεβάζομεν τώρα εἴτε ὁλόκληρον τό ἑπόμενον τριψήφιον τμῆμα εἴτε τό α΄ψηφίον αὐτοῦ (ἐδῶ) τό 9. Οὕτω σχηματίζομεν τόν ἀριθμόν 14019.

Λαμβάνομεν τώρα τό <u>τριπλάσιον τετράγωνον</u> τοῦ εὑρεθέντος διψηφίου τμήματος τῆς κ.ρ. τό ὁποῖον εἶναι (3.32^2 =) 3072 καί τό γράφομεν εἰς τήν θέσιν τοῦ πηλίκου χωρίζοντες τάς πράξεις ἀπό τάς προηγουμένας διά μιᾶς ὁριζοντίου εὐθείας (βλέπε διάταξιν πράξεως).

Τώρα λέγομεν "Τό 3072 είς τό 14019 χωρεῖ 4 φορές τό περισσότερον" (κάνομεν δηλ. διαίρεσιν). Κάτωθι τοῦ προαναφερθέντος τριπλασίου τετραγώνου γράφομεν τό εὑρεθέν διψήφιον τμῆμα τῆς ζητουμένης κ.ρ. ἐδῶ τό 32 καί δίπλα αὐτοῦ γράφομεν καί τό 4 (τῆς φράσεως "4 φορές τό περισσότερον"). Τοῦ οὕτω σχηματιζομένου ἀριθμοῦ 324 λαμβάνομεν τόν κύβον (ἐδῶ 34012224) καί ἀφαιροῦμεν αὐτόν ἀπό τόν ἀριθμόν 34169931 ἐδῶ) τό ὁποῖον ἀποτελοῦν τά τρία πρῶτα (πρός τ' ἀριστερά) τμήματα τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ καί τόν ὁποῖον ἀριθμόν 34169931 γράφομεν κάτωθι τοῦ 14091 (βλέπε διάταξιν πράξεως). [Ἐδῶ λαμβάνομεν ὑπ' ὄψιν μας τήν 1ην παρατήρησιν].

Ἐκτελοῦντες τώρα τήν ἀφαίρεσιν τοῦ 34012224 ἀπό τοῦ ἀριθμοῦ 34169931 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 157707.

Ἀνεβάζομεν τώρα καθώς λέγομεν τό 4 καί τό γράφομεν δίπλα είς τό 32 (δύο πρῶτα ψηφία τῆς κ.ρ.). Οὕτω ἔχομεν τόν ἀριθμόν 324 ὁ ὁποῖος μᾶς δίδει τά τρία πρῶτα ψηφία τῆς ζητουμένης κ.ρ.

Συνεχίζοντες ὡς ἄνω λαμβάνομεν ὅλα τά τριψήφια τμήματα τοῦ ἀριθμοῦ καί Οὕτω εὑρίσκομεν τήν ζητουμένην κ.ρ. ἥτις εἶναι ἐδῶ 3245.

Παρατήρησις 2α. "Ἐάν τελικῶς δέν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 (ἰσχύει ὅμως ἡ 1η παρατήρησις) λέγομεν ὅτι ὁ ἀριθμός 3245 εἶναι ἡ κ.ρ τοῦ 34169931125 κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. (Ἡ συνέχεια τότε τῆς πράξεως ἀνάγεται είς κατωτέρω παράγραφον).

Διάταξις πράξεως.

34169931125 27	3245
071	$3.3^2 = 3X9=27.$ "Τό 27 είς τό 71 χωρεῖ 2 φορές τό περισσότερον" $32^3 = 32768$
34169 32768	$3X32^2 = 3X1024 = 3072.$ "Τό 3072 είς τό 14019 χωρεῖ 4 φορές τό περισσότερον."
014019 34169931 34012224	$324^3 = 34012224$
001577071 34169931125 34169931125	$3.324^2 = 3X104976 = 314928.$ "Τό 314928 είς τό 1577071 χωρεῖ 5 φορ. τό περισσότερον."
0	$3245^3 = 34169931125$

Ἕτερον παράδειγμα $\sqrt[3]{1064332261} =$;

Διάταξις πράξεως.

1064332261 1	1021
00 00643 1064332 1061208 =0031242	$3X1^2 = 3X1 = 3$. "Τό 3 εἰς τό 00 δέν χωρεῖ οὐδεμίαν φοράν. Γράφομεν μηδέν δίπλα εἰς τό 1 τῆς κ.ρ. Κατεβάζομεν τώρα τό ὑπόλοιπον τριψήφιον τμῆμα καί τό α΄ψηφίον 3 τοῦ ἐπομένου τριψηφίου τμήματος."
1064332261 1064332261 0	$3X10^2 = 3X100 = 300$. Τό 300 εἰς τό 0643 χωρεῖ 2 φορ. τό περισσότερον". $102^3 = 1061208$
	$3 X 102^2 = 3X10404 = 31212$." Τό 31212 εἰς τό 31242 χωρίς 1 φορά τό περισσότερον (ἐδῶ ἀκριβῶς)." $1021^3 = 1064332261$

§ 38. Κ.ρ ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ (ἕνα διά ν)

Ὁρισμός. "Κ.ρ. ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$ καλεῖται τό μεγαλύτερον ἀπό τά κλάσματα τά ὁποῖα ἔχουν παρονομαστήν ν καί τοῦ ὁποίου ὁ κύβος χωρεῖ εἰς τό Α". Παραδείγματα θά μάθωμεν εἰς τάς επομένας παραγράφους.

Ἀποδεικνύεται καί ἐδῶ ὅπως καί εἰς τήν § 17 ὅτι "ἡ κ.ρ ἀριθμοῦ Α κατά προσέγγισιν $\frac{1}{\nu}$, ἰσοῦται μέ τήν κ.ρ τοῦ ἀριθμοῦ $A.\nu^3$ διαιρεθεῖσαν διά ν ."

§ 39. Εὕρεσις τῆς κ.ρ ἀριθμοῦ τινός κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ.

Ὁρισμός: "κ.ρ ἑνός ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. καλεῖται τό μεγαλύτερον ἀπό τά κλάσματα τά ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως παρονομαστή 10,100,1000 κλπ. καί τῶν ὁποίων οἱ κύβοι εἶναι ἀριθμοί μικρότεροι τοῦ δοθέντος αὐτοῦ ἀριθμοῦ".

<u>Παράδειγμα:</u> Ὡς θά μάθωμεν κατωτέρω:

ἡ $\sqrt[3]{92}$ κατά προσέγγισιν ἀκερ. μονάδος εἶναι τό 4

" " " $\frac{1}{10}$ εἶναι τό 4,5

" " " $\frac{1}{100}$ " " 4,51

" " " $\frac{1}{1000}$ " " 4,514

<u>Σημείωσις:</u> Διά τήν ἐπαλήθευσιν τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ λαμβανομεν: $4,5^3 = (\frac{45}{10})^3 = \frac{91125}{1000} = 91,125 < 92$

καί $(4,6)^3 = (\frac{46}{10})^3 = \frac{97336}{1000} = 97,336 > 92$

§ 40. <u>Πρακτικός τρόπος καί κανών τῆς εὑρέσεως τῆς κ.ρ ἀκεραίου τινος ἀριθμοῦ ἤ δεκαδικοῦ ἤ κλασματικοῦ, μέ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. τῆς ἀκεραίας μονάδος.</u>

<u>Περίπτωσις 1η.</u> "<u>Ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι ἀκέραιος</u>".

Εὑρίσκομεν τήν κ.ρ τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καί κατόπιν θέτομεν εἰς αὐτήν μίαν ὑποδιαστολήν. Μετά ταῦτα ἀναλόγως τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως (δηλ. ἄν αὐτός εἶναι 10,100, 1000 κλπ.) γράφομεν <u>τρία, ἕξ ἐννέα κλπ.</u> μηδενικά δεξιά τοῦ ὑπολοίπου (βλέπε διάταξιν πράξεως) καί συνεχίζομεν τήν πρᾶξιν μας ὅπως εἰς τήν § 37.

<u>Πρόβλημα:</u> "Ποία ἡ κ.ρ τοῦ ἀριθμοῦ 92;

<u>Διάταξις πράξεως</u>

92000000000	4,514
64	
280	$3.4^2 = 3.16 = 48.$ "Τό 48 εἰς τό 280 χωρεῖ 5 φορές τό περισσότερον."
92000 91125	$45^3 = 91125$
=08750	$3.45^2 = 3.2025 = 6075.$ "Τό 6075 εἰς τό 8750 χωρεῖ 1 φορά τό περισσότερον!"
92000000 91733851	$451^3 = 91733851$
=02661490	$3.451^2 = 3.203401 = 610203.$ "Τό 610203 εἰς τό 2661490 χωρεῖ 4 φορ. τό περισσότ!!
92000000000 91978148744	$4514^3 = 91978148744$
=0021851256 κλπ	κτλ.

Περίπτωσις 2α. "Ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι δεκαδικός".

Εὑρίσκομεν τήν κ.ρ τοῦ ἀκεραίου μέρους του κατά τά γνωστά § 37. Κατόπιν χωρίζομεν τό δεκαδικόν μέρος του εἰς τριψήφια τμήματα ἀπό τήν ἀρχήν.

Σημείωσις: ""Αν τό δεκαδικόν μέρος δέν ἔχει τρία, ἕξ, ἐννέα κλπ. δεκαδικά ψηφία, γράφομεν εἰς τό τέλος τόσα μηδενικά ὅσα ἀπαιτοῦνται ἵνα ἀποτελεσθῇ τό τελευταῖον πρός τά δεξιά τριψήφιον τμῆμα (ἀναλόγως τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος προσεγγίσεως)."

Μετά ταῦτα συνεχίζομεν τήν ἐξαγωγήν τῆς κ. ρίζης ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους.

Π.χ. Διά νά εὕρωμεν τήν $\sqrt[3]{12{,}71}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ ἤ $\frac{1}{100}$ κλπ. θά γράψωμεν ἀντιστοίχως.

$$\sqrt[3]{12{,}710} \quad \text{καί} \quad \sqrt[3]{12{,}710000} \quad \text{κλπ.}$$

Περίπτωσις 3η. "Ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι κλασματικός"

Εὑρίσκομεν τήν κ.ρ ἑκάστου ὅρου χωριστά καί κατόπιν διαιροῦμεν τήν κ.ρ τοῦ ἀριθμητοῦ διά τῆς κ.ρ τοῦ παρονομαστοῦ.

Δυνάμεθα ὅμως νά τρέψωμεν τό κλάσμα εἰς δεκαδικόν καί αὐτοῦ κατά τόν προηγούμενον τρόπον νά εὕρωμεν τήν κ.ρ.

Περίπτωσις 4η. "Ὁ δοθείς ἀριθμός εἶναι μικτός".

Τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα καί ἀναγόμεθα οὕτω εἰς τήν 3ην περίπτωσιν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΙ ΤΗΣ Κ.Ρ.

"Νά εὑρεθῇ ἡ κ. ρίζα τῶν ἀριθμῶν"

1. $\sqrt[3]{1879080904}$ (ἀπάντησις 1234)
2. $\sqrt[3]{944{,}076141}$ (" 9,81)
3. $\sqrt[3]{129554{,}216}$ (" 50,6)
4. $\sqrt[3]{2}$ (προσέγγισις $\frac{1}{100}$)(" 1,25)

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟΝ

ΡΙΖΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΤΑΞΕΩΝ

ΚΑΙ

ΓΕΝΙΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

§ 41. Ρίζαι διαφόρων τάξεων.

Γνωρίζοντες τί καλεῖται τετάρτη, πέμπτη κλπ. δύναμις ἑνός δοθέντος ἀριθμοῦ (καί ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τούς ὁρισμούς τῆς τετραγωνικῆς καί κυβικῆς ρίζης τῶν ἀριθμῶν) δυνάμεθα ἀντιστοίχως νά ὁρίσωμεν τήν τετάρτην, πέμπτην, κλπ. ρίζαν ἑνός ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα

Ἄν ἔχωμεν τό γινόμενον 2.2.2.2 τό γράφομεν συντόμως καί συμβολικῶς $2.2.2.2 = 2^4$ (= 16). Τό 2^4 διαβάζεται "2 εἰς τήν τετάρτην".

Ὁμοίως τό γινόμενον 5.5.5.5.5.5 τό γράφομεν συντόμως καί συμβολικῶς $5.5.5.5.5.5 = 5^6$ (= 15625). Τό 5^6 διαβάζεται "5 εἰς τήν ἕκτην".

Γενικῶς: Ἄν ἔχωμεν τό γινόμενον $\underbrace{α.α.α.....α.α}_{ν \text{ παράγοντες}}$

ΣΗΜΕΙΩΣΙΣ Τό Γ΄ μέρος ἀναπτύσσομεν χάριν τῶν μαθητῶν τῶν δύο τελευταίων Γυμνασιακῶν τάξεων καί τῶν ὑποψηφίων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν:

Θεωροῦμεν τοῦτο ὡς σύμπλήρωμα τῶν δύο πρώτων μερῶν τοῦ παρόντος βιβλίου καί ἐξετάζομεν τά διάφορα θέματα ὑποθέτοντες γνωστάς πολλάς προηγουμένας καί σχετικάς μέ ταῦτα προτάσεις τῆς Ἀριθμητικῆς καί Ἀλγέβρας.

(ὑποτίθεται ὅτι ὁ ν εἶναι θετικός καί ἀκέραιος) τό γράφομεν συντόμως καί συμβολικῶς α^{ν} καί τό διαβάζομεν "ἄλφα εἰς τήν νυοστήν".

Ἡ παράστασις $\sqrt[4]{16}$ διαβάζεται "τέταρτη ρίζα τοῦ 16". καί σημαίνει ὅτι πρέπει νά εὑρεθῇ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὑψούμενος εἰς τήν τετάρτη δύναμιν δηλ. εἰς τήν δύναμιν τήν ἔχουσαν ἐκθέτην τόν δείκτην τῆς ρίζης , νά μᾶς δίδη τό ὑπόρριζον δηλ. τόν ἀριθμόν ἐδῶ 16.

Ἀνάλογον σημασίαν ἔχουν καί αἱ παραστάσεις:

$\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[6]{15625}$, $\sqrt[8]{1}$

§ 42. Εὕρεσις τῆς τυχούσης ρίζης δοθέντος ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα: "Νά εὑρεθῇ ἡ ρίζα ἑκάστης τῶν παραστάσεων: $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{243}$, $\sqrt[6]{15625}$, $\sqrt[8]{1}$, $\sqrt[3]{92}$ "

Τρόποι λύσεως:

Α΄. τρόπος: Ἐφαρμόζομεν τούς λογαρίθμους καί εὑρίσκομεν τάς σημειωμένας ρίζας.

Β΄. τρόπος: Ἀναλύομεν τούς ὑπό τά ριζικά ἀριθμούς, εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων καί ἐργαζόμεθα κατά τά γνωστά (§ 10 - τρίτος τρόπος).

Σημείωσις: Ἄν ἡ ἀνάλυσις τοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων δέν ἐπιτυγχάνεται ἀκριβῶς τότε ἐφαρμόζομεν τούς λογαρίθμους. Ἐννοεῖται ὅτι ἄν ἡ ρίζα δέν ἐξάγεται ἀκριβῶς μέ τήν ἀνάλυσιν τοῦ ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον παραγόντων πρώτων τότε ἡ εὕρεσις ταύτης μέ τούς λογαρίθμους γίνεται μέ προσέγγισιν.

Εὕρεσις τῶν ὡς ἄνω σημειωμένων ριζῶν

Α΄ ΤΡΟΠΟΣ

1. Θέτομεν $\chi = \sqrt[4]{16}$. Λογαριθμίζοντες τήν ἰσότητα ἔχομεν $\lambda o\gamma\ \chi = \lambda o\gamma\ (\sqrt[4]{16})$ ἤ

$$\lambda o\gamma\ \chi = \frac{\lambda o\gamma\ 16}{4} = \frac{1,20412}{4} = 0,30103 \text{ ἤ}$$

$\lambda o\gamma\ \chi = 0,30103$ καί $\chi = 2$. Ὥστε: $\sqrt[4]{16} = 2$

2. Θέτομεν $\chi = \sqrt[5]{243}$ Λογαριθμίζοντες τήν ἰσότητα ἔχομεν $\lambda o\gamma\ \chi = \lambda o\gamma(\sqrt[5]{243})$ ἤ

$$λογ\ χ = \frac{λογ\ 243}{5} = \frac{2,38561}{5} = 0,47712 \quad ἤ$$

λογ χ = 0,47712 καί χ = 3. Ὥστε: $\sqrt[5]{243} = 3$

3. Θέτομεν $χ = \sqrt[6]{15625}$. Λογαριθμίζοντες τήν ἰσότητα ἔχομεν: $λογ\ χ = λογ\ (\sqrt[6]{15625})$ ἤ

$$λογ\ χ = \frac{λογ\ 15625}{6} = \frac{4,19382}{6} = 0,69897 \quad ἤ$$

λογ χ = 0,69897 καί χ = 5. Ὥστε: $\sqrt[6]{15625}=5$

4. Θέτομεν $χ = \sqrt[8]{1}$. Λογαριθμίζοντες τήν ἰσότητα ἔχομεν $λογ\ χ = λογ\ (\sqrt[8]{1})$ ἤ

$$λογ\ χ = \frac{λογ\ 1}{8} = \frac{0}{8} = 0 \quad ἤ \quad λογ\ χ = 0$$

Ἐπειδή ὅμως $10^0 = 1$, κατά τόν ὁρισμόν τῶν λογαρίθμων ἔχομεν λογ1=0 καί τότε λογχ=λογ1 ἤ χ=1. Ὥστε: $\sqrt[8]{1} = 1$.

5. Θέτομεν $χ = \sqrt[3]{92}$. Λογαριθμίζοντες τήν ἰσότητα

$$λογ\ χ = λογ(\sqrt[3]{92}) \quad ἤ$$

$$λογ\ χ = \frac{λογ\ 92}{3} = \frac{1,96379}{3} = 0,65459 \quad ἤ$$

λογ χ = 0,65459.

Ἐργαζόμενοι τώρα μέ τούς λογαριθμικούς πίνακας εὑρίσκομεν ὅτι χ = 4,5143.

Σημείωσις: Παρατηροῦμεν ὅτι τόν ἀριθμόν 4,514 εἴχομεν εὕρει ὡς κ.ρ τοῦ 92 εἰς τήν § 40 σελ. 31.

Βασική πρότασις διά τά κατωτέρω:

"Ὅταν τό ὑπόρριζον, μιᾶς ρίζης, εἶναι δυναμις ἔχουσα ἐκθέτην ἴσον μέ τόν δείκτην τῆς ρίζης τότε ἡ ζητουμένη ρίζα εἶναι ὁ ὑπό τό ριζικόν ἀριθμός".

Παράδειγμα: $\sqrt[4]{2^4} = 2$

Σημείωσις: Εἰς τήν προκειμένην μάλιστα περίπτωσιν λέγομεν τήν ἑξῆς χαρακτηριστικήν φράσιν "δείκτης, ἐκθέτης καί ριζικόν διαγράφονται καί μένει μόνον τό ὑπόρριζον" Τοῦτο σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς $\cancel{\sqrt[4]{2^4}} = 2$. Διά τήν $\sqrt{2^2}$ σημειοῦμεν $\sqrt[2]{2^2} = 2$.

Β΄ ΤΡΟΠΟΣ

Διάταξις πράξεως

1.

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Ἔχομεν λοιπόν: $16=2.2.2.2$ ἤ
$16=2^4$ ἄρα
$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

2.

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

Ἔχομεν λοιπόν: $243 = 3.3.3.3.3$ ἤ
$243 = 3^5$ ἄρα
$\sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

3.

15625	5
3125	5
625	5
125	5
25	5
5	5
1	

Ἔχομεν λοιπόν: $15625 = 5.5.5.5.5.5$ ἤ
$15625 = 5^6$ ἤ
$\sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

ΔΙΠΛΑ ΡΙΖΙΚΑ

Μερικές φορές συναντῶμεν παραστάσεις τῆς μορφῆς $\sqrt{\sqrt{81}}$, $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}}$. Λέγομεν ὅτι ἑκάστη τῶν παραστάσεων αὐτῶν ἔχει <u>διπλό ριζικό.</u>

Ἡ παράστασις $\sqrt{\sqrt{81}}$ διαβάζεται ὡς ἑξῆς: "τ.ρίζα τῆς τ.ρίζης τοῦ 81" καί σημαίνει τήν εὕρεσιν "τῆς τ.ρίζης, τῆς τ.ρ. τοῦ 81".

Ὑπολογισμός τῆς παραστάσεως $\sqrt{\sqrt{81}}$

Α΄ Τρόπος: Ὑπολογίζομεν τήν τ.ρ τοῦ 81 (ἀρχίζομεν τήν ἐργασίαν ἐκ τῶν ἔσω πρός τά ἔξω καθώς λέγομεν) καί τῆς τετραγωνικῆς ταύτης ρίζης ὑπολογίζομεν πάλιν τήν τ.ρ.

Πρᾶξις: $\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = 3$ (ἀφοῦ $\sqrt{81} = 9$)

Β΄Τρόπος: Γράφομεν τήν δοθεῖσαν παράστασιν ὡς ἑξῆς $\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}}$. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τούς δείκτας καί τό γινόμενον των τό γράφομεν ὡς δείκτην ρίζης ἐχούσης ὑπόρριζον τό ἀρχικόν ὑπόρριζον δηλαδή ἐδῶ τόν 81.

Οὕτω ἔχομεν $\sqrt[2]{\sqrt[2]{81}} = \sqrt[4]{81}$. Τώρα ἀκολουθοῦντες τόν Β΄τρόπον τῆς § 42 ἔχομεν $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

Ἕτερα παραδείγματα

α΄) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

β΄) $\sqrt[3]{\sqrt[2]{15625}} = \sqrt[6]{15625} = \sqrt[6]{5^6} = 5$

§ 44. Τετραγωνική ρίζα ἀκεραίου μονωνύμου καί γινομένου παραγόντων.

Κανών: "Διά νά ἐξαγάγωμεν τήν τ.ρ ἑνός μονωνύμου ἤ ἑνός γινομένου παραγόντων ἀρκεῖ νά ἐξαγαγωμεν τήν τ.ρ ἑκάστου ὅρου χωριστά ἄν βεβαίως ἐξάγεται αὐτη".

Παραδείγματα:

α΄) $\sqrt{25\alpha^2\beta^6\gamma^4} = 5\alpha\beta^3\gamma^2$ β΄) $\sqrt{25.16.100} = 5.4.10=200$

§ 45. Τετραγωνική ρίζα ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ

Γνωρίζομεν ὅτι $\sqrt{16} = \pm 4$ διότι $\begin{cases} \text{καί } (+4)^2 = 16 \\ \text{καί } (-4)^2 = 16 \end{cases}$

" ἀκόμη ὅτι $\sqrt[3]{27} = +3$ διότι μόνον $(+3)^3 = 27$

" ἐπίσης ὅτι $\sqrt[3]{-27} = -3$ " " $(-3)^3 = -27$

Ἄς εἴδωμεν τώρα ποία εἶναι ἡ τ.ρ τοῦ $\sqrt{-16}$.

Ἔχοντες ὑπ΄ὄψιν τά εἰς τήν ἀρχήν τῆς παρούσης παραγράφου ἀναγραφόμενα παρατηροῦμεν ὅτι $\sqrt{-16}$ δέν εἶναι οὔτε τό +4 οὔτε τό -4.

Γράφομεν τώρα τόν $-16 = 16(-1)$ καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τόν κανόνα τῆς προηγουμένης παραγράφου ἔχομεν

$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = \pm 4\sqrt{-1}$

Διά τήν ὁμοιομορφίαν τώρα τῶν πράξεων ἐπί τῶν ριζῶν φανταζόμεθα ὅτι $\sqrt{-1} = i$ (ι ἤ γιώτ).

Εἶναι δέ τό i τό α΄γράμμα τῆς Γαλλικῆς λέξεως.

IMAGINATIF (VE) = (φανταστικός)

Οὕτω ἔχομεν $\pm 4\sqrt{-1} = \pm 4i$ ἐπομένως $\sqrt{-16} = \pm 4i$

§ 46. ΔΙΑΦΟΡΟΙ ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΕΠΙ ΤΩΝ ΡΙΖΩΝ

Ἐφαρμογή 1η. "Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2}$ "

Λύσις: Κανών "Διά νά προσθέσωμεν ὁμοιοβαθμίους (ἤ ἰσοβαθμίους) ρίζας τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ προσθέτομεν τούς συντελεστάς τῶν ριζῶν θεωροῦντες ταύτας ὡς ὅμοια μονώνυμα".

Ἔχομεν λοιπον: $\sqrt{2} + 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

Παρατηρήσεις: α) Ἄν θέλωμεν τελειώνομεν ἐδῶ τήν πρᾶξιν μας. β) Δυνάμεθα νά γράψωμεν $\sqrt{2} = 1,41$ (μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ π.χ.) καί τότε ἔχομεν.

$$12\sqrt{2} = 12.1,41 = 16,92$$

γ) Δυνάμεθα νά λογαριθμίσωμεν τήν παράστασιν $12\sqrt{2}$ καί ἐν συνεχείᾳ νά εὕρωμεν ως ἀντίστοιχον ἀριθμόν τοῦ οὕτω εὑρισκομένου λογαρίθμου, πάλιν τόν 16,92.

Ἐφαρμογή 2α: "Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα $\sqrt{2} + \sqrt{32} + \sqrt{50}$ "

Λύσις: Α΄ τρόπος Ἀκολουθοῦμεν τόν τρόπον τῆς γενικῆς ἐφαρμογῆς τῆς σελίδος 22.

Β΄ τρόπος: Ἀναλύομεν, ἄν τοῦτο εἶναι δυνατόν ἕκαστον ἀριθμόν εὑρισκόμενον ὑπό τό ριζικόν ἑκάστης ρίζης εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἐκ τῶν ὁποίων τοῦ ἑνός νά ἐξάγεται ἡ ρίζα ἀκριβῶς ὁ δέ ἄλλος παράγων νά εἶναι ἡ αὐτή ὑπόρριζος ποσότης, δι΄ὅλας τάς ρίζας τῆς δοθείσης παραστάσεως".

Διά τήν προκειμένην περίπτωσιν ἔχομεν:

$\sqrt{2} + \sqrt{32} + \sqrt{50} = \sqrt{2} + \sqrt{16.2} + \sqrt{25.2} = \sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ ἤ ἄν θέλωμεν $10\sqrt{2} = 10.1,41 = 14,1$ (μέ προσέγγισιν $\frac{1}{100}$).

Ἐφαρμογή 3η. "Νά γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός $\sqrt{32} . \sqrt{2}$ "

Λύσις: Κανών: "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ὁμοιοβαθμίους ἤ ἰσοβαθμίους ρίζας πολλαπλασιάζομεν τάς ὑπορρίζους ποσότητας αὐτῶν καί τοῦ προκύπτοντος γινομένου ἐξάγομεν τήν ἰσοβάθμιον ρίζαν".

"Έχομεν λοιπόν: $\sqrt{32} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{32.2} = \sqrt{64} = 8$

Σημείωσις: Είς τό ἑξῆς θά λαμβάνωμεν μόνον τήν θετικήν ρίζαν.

Έτερον παράδειγμα: $\sqrt{50\alpha\beta^3\gamma^5} \cdot \sqrt{2\alpha\beta\gamma} = \sqrt{50\alpha\beta^3\gamma^5 . 2\alpha\beta\gamma} =$

$$= \sqrt{100\alpha^2\beta^4\gamma^6} = 10\alpha\beta^2\gamma^3$$

Έφαρμογή 4η : "Νά γίνη ή διαίρεσις $\sqrt{32} : \sqrt{2}$ "

Λύσις: Κανών: "Διά νά διαιρέσωμεν ρίζαν διά ρίζης όμοιοβαθμίου πρός αὐτήν διαιροῦμεν τάς ὑπορρίζους ποσότητας αὐτῶν καί τοῦ προκύπτοντος πηλίκου ἐξάγομεν τήν ἰσοβάθμιον ρίζαν".

"Έχομεν λοιπόν: $\sqrt{32} : \sqrt{2} = \sqrt{32 : 2} = \sqrt{16} = 4$

Έφαρμογή 5η. Νά ἐξαχθῇ ἡ τ.ρ. τῆς παραστάσεως $\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}$ "

Λύσις: Συμπτύσσοντες τό ὑπόρριζον καί ἐφαρμόζοντες τήν βασικήν πρότασιν τῆς § 42 ἔχομεν:

$$\sqrt{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2} = \sqrt[2]{(\alpha+\beta)^2} = \alpha+\beta$$

Έτερον παράδειγμα: "Νά ἐξαχθῇ ἡ τ.ρ τῆς παραστάσεως

$$\sqrt{-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2} \text{ "}$$

Λύσις: Ἐξάγομεν πρῶτον, ἐντός τοῦ ριζικοῦ, τό -1 ἐκτός παρενθέσεως, ὁπότε οἱ προσθετέοι ἐντός τῆς παρενθέσεως ἀλλάζουν σημεῖον. Κατόπιν προχωροῦμεν ὡς καί προηγουμένως

"Έχομεν λοιπόν: $\sqrt{-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2} = \sqrt{-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)} =$

$= \sqrt{-(\alpha-\beta)^2} = (\alpha-\beta)i$

Έφαρμογή 6η. "Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις

α') $5+\sqrt{4}$, β') $5-\sqrt{2}$, γ') $7-\sqrt{3}$ "

Λύσις: α) $5+\sqrt{4} = 5+2 = 7$

β) $5-\sqrt{2} = 5-1,41 = 5,00-1,41 = 3,59$ (Προσεγ. $\frac{1}{100}$)

γ) $7-\sqrt{3} = 7-1,73 = 7,00-1,73 = 5,27$ (" ")

Έφαρμογή 7η." Ἐξαγωγή ἀριθμητικοῦ παράγοντος ἐκτός τοῦ ριζικοῦ" Παραδείγματα. $\sqrt{25\alpha\beta^3\gamma}$, $\sqrt[3]{27\alpha\beta^3\gamma}$ "

Λύσις: Γράφομεν τήν ρίζαν τοῦ ἀριθμητικοῦ παράγοντος ἔμπροσθεν τοῦ ριζικοῦ ὡς εἶδος συντελεστοῦ (ἐφαρμόζοντες πρός τοῦτο τόν κανόνα τῆς § 44 μόνον διά τόν παράγοντα αὐτόν).

"Εχομεν λοιπόν: $\sqrt{25\alpha\beta^3\gamma} = 5\sqrt{\alpha\beta^3\gamma}$

Ὁμοίως: $\sqrt[3]{27\alpha\beta^2\gamma} = 3\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}$

<u>Ἐφαρμογή 8η.</u> <u>Εἰσαγωγή</u> ἀριθμητικοῦ συντελεστοῦ <u>ἐντός</u> τοῦ ριζικοῦ". Παραδείγματα, $5\sqrt{\alpha\beta^3\gamma}$, $3\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma}$.

<u>Λύσις:</u> Γράφομεν τόν ἀριθμόν αὐτόν ὑπό τόν ριζικόν ὡς παράγοντα καί ὑψωμένον εἰς τήν δύναμιν τήν ἔχουσαν ἐκθέτην τόν δείκτην τῆς ρίζης.

"Εχομεν λοιπόν: $5\sqrt{\alpha\beta^3\gamma} = \sqrt{5^2\alpha\beta^3\gamma} = \sqrt{25\alpha\beta^3\gamma}$

Ὁμοίως: $3\sqrt[3]{\alpha\beta^2\gamma} = \sqrt[3]{3^3\alpha\beta^2\gamma} = \sqrt[3]{27\alpha\beta^2\gamma}$

§ 47. <u>Τροπή ἀρρήτου παρονομαστοῦ κλάσματος εἰς ρητόν</u>

<u>Ὁρισμός:</u> "Ὅταν εἰς τόν παρονομαστήν μιᾶς ἀριθμητικῆς ἤ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ὑπάρχει σημειωμένη ρίζα ἐπί <u>ἀριθμοῦ</u>, <u>γράμματος ἤ παραστάσεώς τινος</u> τότε λέγομεν ὅτι ὁ παρονομαστής εἶναι <u>ἄρρητος</u>".

Εἰς τάς περιπτώσεις αὐτάς εἶναι ἀνάγκη πολλές φορές νά τραπῆ ὁ παρονομαστής εἰς <u>ρητόν</u>

Πρός τοῦτο πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ κλάσματος ἐπί τόν αὐτόν <u>κατάλληλον ἀριθμόν</u> ἤ ἐπί τήν αὐτήν <u>κατάλληλον παράστασιν</u> ἡ ὁποία καλεῖται συνήθως <u>συζυγής παράστασις τοῦ παρονομαστοῦ.</u> Ὁ κατάλληλος αὐτός ἀριθμός ἤ ἡ κατάλληλος παράστασις ἐξαρτῶνται ἐκ τῆς μορφῆς τοῦ παρονομαστοῦ.

<u>Ὁρισμός:</u> "Δύο παραστάσεις περιέχουσαι σημειωμένας ρίζας, καλοῦνται συζυγεῖς <u>ἄν διαφέρουν</u> κατά τό σημεῖον μιᾶς ρίζης".

<u>Παραδείγματα συζυγῶν παραστάσεων.</u>

$\sqrt{11} + \sqrt{7}$ καί $\sqrt{11} - \sqrt{7}$

$\alpha + \sqrt{\beta}$ " $\alpha - \sqrt{\beta}$

$\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ " $\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{3}$

Οὕτω πως διά τοῦ προηγουμένως ἀναφερθέντος πολλαπλασιασμοῦ τρέπομεν τόνπαρονομαστήν εἰς ρητόν χωρίς νά μεταβληθῆ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος ἀποφεύγοντες συγχρόνως καί τάς πολλάς προσεγγίσεις.

Παραδείγματα:

1. Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον $\frac{2}{\sqrt{2}}$ (μέ προσέγ. $\frac{1}{100}$).

Λύσις: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\cancel{\sqrt{\ }}2)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = \sqrt{2} = 1,41$

2. Νά τραπῇ τό κλάσμα. $\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον πρός αὐτό καί μέ παρονομαστήν ρητόν.

Λύσις: Πολλαπλασιάζομεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν μέ τήν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, ὁπότε εἰς τόν παρονομαστήν προκύπτει διαφορά δύο τετραγώνων, παράστασις ἡ ὁποία διευκολύνει εἰς τάς πράξεις.

Ἔχομεν λοιπόν: $\frac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} = \frac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})} =$

$$= \frac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{(\cancel{\sqrt{\ }}11)^{\cancel{2}} - (\cancel{\sqrt{\ }}7)^{\cancel{2}}} = \frac{4(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{11-7} = \frac{\cancel{4}(\sqrt{11}+\sqrt{7})}{\cancel{4}} = \sqrt{11}+\sqrt{7}$$

3. Νά τραπῇ τό κλάσμα $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον πρός αὐτό καί μέ παρονομαστήν ρητόν.

Λύσις: Γράφομεν τόν παρονομαστήν ὡς ἑξῆς: $(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{3}$ θεωροῦντες ὡς συζυγῆ παράστασιν τήν $(\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{3}$. Ἐφαρμόζοντες τώρα τά ἀνωτέρω ἔχομεν:

$$\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{2}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{3}} = \frac{2\left[(\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]}{\left[(\sqrt{5}+\sqrt{2})+\sqrt{3}\right]\left[(\sqrt{5}+\sqrt{2})-\sqrt{3}\right]}$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\cancel{\sqrt{\ }}5)^{\cancel{2}}+(\cancel{\sqrt{\ }}2)^{\cancel{2}}+2\sqrt{5}\sqrt{2}-(\cancel{\sqrt{\ }}3)^{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{5+2+2\sqrt{10}-3} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{4+2\sqrt{10}} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})}{\cancel{2}(2+\sqrt{10})} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+2}$$

Σημείωσις: Ἐφαρμόσαντες εἰς τόν παρονομαστήν τόν νόμον τῆς ἀντιμεταθέσεως ἐγράψαμεν $\sqrt{10}+2$ ἀντί $2+\sqrt{10}$. Τώρα πολλαπλασιάζομεν ἐκ νέου μέ τήν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ, ἡ ὁποία εἶναι $\sqrt{10}-2$, ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ τελευταίου αὐτοῦ κλάσματος.

Ἔχομεν λοιπόν: $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{10}+2} =$

$$= \frac{(\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-2)}{(\sqrt{10}+2)(\sqrt{10}-2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}.\sqrt{10}+\sqrt{2}.\sqrt{10}-\sqrt{3}.\sqrt{10}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{(\sqrt{10})^2-2^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{50}+\sqrt{20}-\sqrt{30}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{10-4} =$$

$$= \frac{\sqrt{25.2}+\sqrt{4.5}-\sqrt{30}-2\sqrt{5}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6} =$$

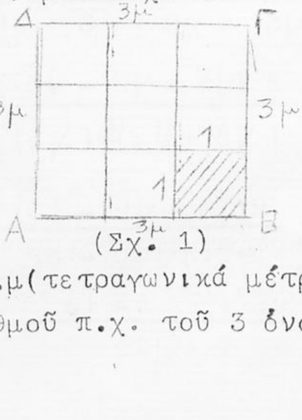
$$= \frac{5\sqrt{2}+\cancel{2\sqrt{5}}-\sqrt{30}-\cancel{2\sqrt{5}}-2\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}-\sqrt{30}}{6}$$

§ 48. Γενικαί Παρατηρήσεις.

1. "Διατί ἡ δευτέρα δύναμις ἑνός ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 3 ὀνομάζεται τετράγωνον αὐτοῦ;"

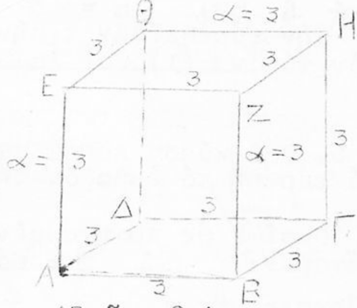
Ἀπάντησις: Διότι 3^2 (ἐδῶ). σημαίνει τό ἐμβαδόν Ε τετραγώνου ΑΒΓΔ π.χ. (Σχ.1) ἔχοντος πλευράν α. ἴσην πρός τόν ἀριθμόν 3.

Διά τό (σχῆμα 1) ἄν ἡ πλευρά του εἶναι 3 μ ἔχομεν [παριστῶντες τό ἐμβαδόν αὐτοῦ Ε μέ τό (ΑΒΓΔ)] (ΑΒΓΔ) = 3^2 ἤ $E = 3^2 = 9$ τ.μ(τετραγωνικά μέτρα)



(Σχ. 1)

2." Διατί ἡ τρίτη δύναμις ἑνός ἀριθμοῦ π.χ. τοῦ 3 ὀνομάζεται κύβος αὐτοῦ;"



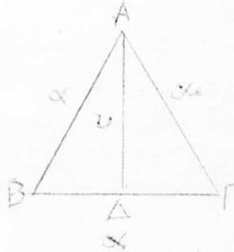
(Σχῆμα 2.)

'Απάντησις: Διότι 3^3 (ἐδῶ) σημαίνει τόν ὄγκον Ο κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ ἤ ΑΗ π.χ. (Σχ.2) ἔχοντος ἀκμήν α ἴσην πρός τόν ἀριθμόν 3.

Διά τό (σχῆμα 2) ἄν ἡ ἀκμή του εἶναι 3 μ ἔχομεν παριστῶντες τόν ὄγκον αὐτοῦ Ο μέ τό (ΑΗ) (ΑΓ) = 3^3 ἤ $O=3^3=27$ κ.μ (κυβικά μέτρα).

3. Γνωρίζομεν ὅτι τό ἐμβαδόν Ε ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ (Σχ.3) πλευρᾶς α δίδεται ὑπό τοῦ τύπου

$$E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



(Σχῆμα 3.)

'Εφαρμογή." "Αν εἰς τό (σχῆμα 3) α = 6μ ποῖον τό ἐμβαδόν τοῦ τριγ. ΑΒΓ;"

Λύσις. Λαμβάνοντες τόν ἀνωτέρω τύπον καί ἀντικαθιστῶντες ἔχομεν:

$$E = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ τ.μ}$$

"Ωστε: $E = 9\sqrt{3}$ τ.μ.

Σημείωσις: Τήν παράστασιν $9\sqrt{3}$ ἀφίνομεν ὡς ἔχει ἤ ἄν θέλωμεν θέτομεν $\sqrt{3} = 1,73$ καί ἔχομεν:

$$E = 9.1,73 \text{ ἤ } E = 15,57 \text{ τ.μ (προσέγγ. } \frac{1}{100})$$

4. Τοῦ κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχῆμα 2) ὁ ὄγκος εἶναι 125 κμ. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

Λύσις.

"Αν ἡ ἀκμή τοῦ ἐν λόγῳ κύβου εἶναι α μέτρα τότε τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ δίδεται ὑπό τοῦ τύπου $E=6\alpha^2$ (1).

'Εδῶ τώρα χρειαζόμεθα τήν ἀκμήν α.

Σκεπτόμεθα ὡς ἐξῆς: Ποῖος τύπος συνδέει τήν ζητουμένην ἀκμήν α καί τόν δοθέντα ὄγκον $\Theta = 27$ κμ;

Γνωρίζομεν ὅτι: ⟶ $O = \alpha^3$ ἤ (ἐναλλάσσω τά μέλη)
$\alpha^3 = O$ ἤ
$\alpha^3 = 27$ ἄρα
$\alpha = \sqrt[3]{27}$ (καί κατά τά γνω-

στά § 37) $\alpha = \sqrt[3]{3^3}$ ή $\boxed{\alpha = 3\mu}$

Τήν εὑρεθεῖσαν τιμήν τῆς ἀκμῆς α ἀντικαθιστῶμεν εἰς τόν τύπον (1) καί λαμβάνομεν $E = 6.3^2$ ἤ

$E = 6.9$ ἤ

$\boxed{E = 54 \text{ τ.μ.}}$

5. Τοῦ κύβου ΑΒΓΔΕΖΗΘ (σχ. 2) ὁ ὄγκος εἶναι 16 κμ. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ.

<u>Λύσις.</u>

Ὁμοίως ὡς προηγουμένως, ἄν ἡ ἀκμή τοῦ κύβου εἶναι α ἔχομεν: $E = 6\alpha^2$ (1)

<u>Εὕρεσις τῆς α</u>

$O = \alpha^3$ ἤ

$\alpha^3 = O$ ἤ

$\alpha^3 = 16$ κμ. ἤ

$\alpha = \sqrt[3]{16}$ ἤ

$\alpha = \sqrt[3]{8.2}$

$\alpha = \sqrt[3]{2^3.2}$ (ἀφοῦ $8 = 2^3$)

$\boxed{\alpha = 2\sqrt[3]{2}}$ μ

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν (1) κι ἔχομεν:

$E = 6.2\sqrt[3]{2}$

$\boxed{E = 12\sqrt[3]{2} \text{ τμ.}}$ (2)

<u>Σ Η Μ Ε Ι Ω Σ Ι Σ:</u>

Τήν τιμήν $\sqrt[3]{2}$ ὑπολογίζομεν λογαριθμικῶς καί λαμβάνομεν $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599$ μ (προσέγγισις $\frac{1}{1000}$).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τήν ἰσότητα (2) κι ἔχομεν: $E = 12.1{,}2599$

$E = 15{,}1188$ τμ.

Π Ι Ν Α Ξ   Δ Ι Ο Ρ Θ Ω Τ Ε Ω Ν

Σελ. 2 Στίχος 21ος 'Αντί 10.000.000 γράφε 1.000.000

" 10 " 2ος " $10{,}89 < 1$ " $10{,}89 < 11$

" 20 "" 16ος " $\frac{7}{12}=$ " $\sqrt{\frac{7}{12}} =$

" 21 " 16ος " "μή διά νί" " "μί διά νί"

" 22 " 3ος " $= -\frac{2}{3}$ " $= \frac{2}{3}$

" 23 " Τελευταῖος

'Αντί 1.3.1,3.1,9 = 2,197..
γράφε 1,3.1,3.1,3= 2,197.

" 26 Στίχος 29ος άντί τρόπου γράφε Τρόποι

" 27 Είς τήν διάταξιν τῆς πράξεως νά άχθῆ κατακόρυφος εὐθεῖα χωρίζουσα τούς διαιρέτας άπό τά πηλίκα ὅπως είς την σελίδα 6.

" 28 Στίχος 11ος γράφε καθαρά $(3.3^2)= 27$

" 29 " 20ος 'Αντί Οὕτω γράφε οὕτω

" 31 " 4ος (άπό τό τέλος)'Αντί "Τό 10203
γράφε καθαρώτερα "Τό 610203

" 31 " 2ος (άπό τό τέλος)
'Αντί 4514 = 919781487

" γράφε καθαρώτερα $4514^3 = 91978148744$

" 35 Στίχος 12ος 'Αντί $\sqrt{1} = 1$ γράφε $\sqrt[8]{1} = 1$

" 43 " 3ος γράφε καθαρώτερα ἤ ΑΗ π.χ.

" 43 " 25ος 'Αντί 125 κ.μ. γράφε 27 κμ.

ἜΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ

1) **Σημειώσεις Γεωμετρίας**

2) **Περὶ Ριζῶν** (Τετραγωνικὴ καὶ κυβικὴ ρίζα)

3) **Θεωρία ἐπὶ τῶν Λογαρίθμων** (Ἀναλυτικὴ ἀνάπτυξις τῆς χρήσεως τῶν Λογαρίθμων μετὰ παραδειγμάτων — Πρότυπον εἰς τὸ εἶδος του).

4) **Ἄλγεβρα** (Ἀπαραίτητον βοήθημα διὰ τοὺς μαθητὰς τῆς μέσης ἐκπαιδεύσεως καὶ τοὺς ὑποψηφίους Ἀνωτάτων Σχολῶν).

5) **Πρακτικὴ Ἀριθμητικὴ** (Ἐκτὸς τῆς γενικῆς χρήσεως, ἀποτελεῖ καὶ εἰδικὸν βοήθημα διὰ τοὺς ὑποψηφίους Παιδαγωγικῆς Ἀκαδημίας, Τραπεζῶν καὶ Ἀνωτάτης Ἐμπορικῆς).