ΔΙΩΝ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕ ΜΕΘΟΔΙΚΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΝ
ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΑΘΗΝΑΙ
1963

Δ 2 ΜΜΙ *

ΔΙΟΝ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ

Λιβέρης, Διον. Ι.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΜΕ ΜΕΘΟΔΙΚΗΝ ΣΠΟΥΔΗΝ
ΘΕΩΡΗΤΙΚΗΝ ΚΑΙ ΠΡΑΚΤΙΚΗΝ
ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΑΣΚΗΣΕΩΣ

ΤΟΜΟΣ Α΄

ΑΘΗΝΑΙ
1963

Τά γνήσια άντίτυπα εἶναι ὑπογεγραμμένα ἀπό τόν συγγραφέα.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Διά πρώτην φοράν κάμνει τήν έμφάνισίν του είς τήν Ἑλλάδα βιβλίον Ἀλγέβρας μέ τό ἐπίθετον «Φροντιστηριακή».
Τό ἐπίθετον αὐτό χρησιμοποιεῖται εἰς τήν Ἀγγλίαν καί ἀναφέρω τό ὡραῖον δίτομον βιβλίον : « The Tutorial Algebra » by Dr William Briggs and Prof. G.h. Bryan. Τό περιεχόμενον τοῦ βιβλίου αὐτοῦ δικαιολογεῖ αὐτό, πού ὁ συγγραφεύς ἀναφέρει εἰς τόν πρόλογόν του, ὅτι εἶναι ἕνα βιβλίον πού ἀπευθύνεται εἰδικά εἰς τόν διδάσκοντα καί τό ὁποῖον ἐξηγεῖ εὐρύτερον εἰδικά θέματα, τήν ἐνδελεχῆ διδασκαλίαν τῶν ὁποίων μία συνήθης διδασκαλία σχολική δέν προϋποθέτει.
Εἰς ἐμέ συνέβαινε νά ἀναζητῶ ἕνα τίτλον, ὁ ὁποῖος θά ἐδικαιολόγει ἕνα περιεχόμενον Ἀλγέβρας ὅπως αὐτή ἐμορφώθη ὑπό τήν ἐπίδρασιν τῶν Εἰσαγωγικῶν ἐξετάσεων τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν καί δή ἐκείνων τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου. Διότι εἶναι ἀληθές, ὅτι οἱ καλοί καθηγηταί, πού εἶδον εἰς κάθε μορφήν τῶν καθηκόντων των τήν ἀνάγκην τῆς ὑπάρξεως συνεπείας, σοβαρότητος καί εὐθύνης, ἔδωσαν διά τῶν θεμάτων των τήν εὐκαιρίαν εἰς ὅσους ἀπό τούς Φροντιστάς ἀσκοῦν τό ἐπάγγελμά των ὡς λειτούργημα νά κάμουν βαθεῖαν κριτικήν, εἰς ὅ,τι ἀπετέλει τό ἀντικείμενον τῶν ἐξετάσεων αὐτῶν καί τσιουτοτρόπως νά δημιουργηθῇ μία ἀληθῶς εὐχάριστος κατάστασις διά τά στοιχειακά Μαθηματικά* εἰς τήν Ἑλλάδα.
Ὁ ἀναγνώστης μου λοιπόν ἐννοεῖ τήν αἰτίαν διά τήν ὁποίαν ὠνόμασα τήν Ἄλγεβράν μου «Φροντιστηριακήν» : Ἐνῷ ἐξετάζω κάθε θέμα, τό ὁποῖον ἀναφέρεται εἰς τά προγράμματα τῶν Σχολι-

---

*Ἡ μετονομασία τῶν «Στοιχειωδῶν Μαθηματικῶν» εἰς «Στοιχειακά» ὀφείλεται εἰς τόν ὁμότιμον καθηγητήν τοῦ Ε.Μ.Πολυτεχνείου κ. Ν. Κριτικόν.

κῶν βιβλίων Ἀλγέβρας, προσπαθῶ νά δημιουργήσω μίαν ὑψηλοτέρας στάθμης ἀντιμετώπισιν ἑκάστου θέματος· ἀλλά καί μέ τήν εὐχέρειαν, τήν ὁποίαν μοῦ παρέχει τό γεγονός, ὅτι ἀπευθύνομαι εἰς ἀποφοίτους τοῦ Γυμνασίου, νά θίξω χωρίς ἀνωφελεῖς λεπτομερείας τά ὁπωσδήποτε ἐπί τοῦ θέματος γνωστά καί νά ἐπιμείνω εἰς τήν κριτικήν ἀνάπτυξίν του μέ ἀποτέλεσμα νά ἐμφανίσω τάς ἐπιδράσεις τοῦ θέματος αὐτοῦ εἰς τό ὅλον σῶμα τῆς Ἀλγέβρας.

Θά μακρηγοροῦσα, ἐάν ἔθιγα ἐδῶ τό «πιστεύω» μου ὅσον ἀφορᾶ τήν διδασκαλίαν τῶν Στοιχειακῶν Μαθηματικῶν. Θά τό κάμω εἰς τόν πρόλογον τοῦ δευτέρου τόμου αὐτοῦ τοῦ βιβλίου, ὁ ὁποῖος ἤδη προπαρασκευάζεται καί εἰς τόν ὁποῖον θά χρησιμοποιήσω τό νέον μαθηματικόν «ἔνδυμα». Ἡ χρησιμοποίησις αὐτοῦ τοῦ «ἐνδύματος» θά γίνη ἐκεῖ χωρίς νά λησμονῶ, ὅτι ἡ κατανόησις ἀπό τόν σπουδαστήν τῆς σημασίας τῆς νέας ἐμφανίσεως τῶν Μαθηματικῶν γνώσεων ἐπιτυγχάνεται μέ τήν ἀνάπτυξιν τῆς κριτικῆς ἐπί ἐκείνου, τό ὁποῖον ἀποτελεῖ ἱστορικήν διαδρομήν εἰς τήν γνῶσιν.

Δι' ἐμέ αὐτήν τήν στιγμήν γεννᾶται ἕνα ἐρώτημα: Αὐτό πού δίδω σήμερον εἶναι μία καλή ἀρχή δι' ὅ,τι ὑπόσχομαι ἀνωτέρω;

Ἄς μέ πιστέψη ὁ Ἀναγνώστης μου: θά τόν εὐγνωμονῶ, ἄν μοῦ εἴπη τήν ειλικρινῆ του γνώμην, φυσικά καλήν ἤ κακήν.

Διον. Ι. Λιβέρης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΜΕΤΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

Πραγματικοί Ἀριθμοί

1. Ἀπό τήν Ἀριθμητικήν εἰς τήν Ἄλγεβραν.

Κάθε ἐπιστήμη διά νά εὐκολύνη τήν σπουδήν τοῦ ἀντικειμένου της ταξινομεῖ τό ὑλικό του. Αὐτό ἔγινε καί εἰς τήν Ἀριθμητικήν: Διά προβλήματα, τά ὁποῖα ἐξέφραζον τάς αὐτάς σχέσεις μεταξύ γνωστῶν καί ἀγνώστων, ἀλλά τά διδόμενα ποσά ἦσαν διαφορετικῆς φύσεως ἤ εἶχον διαφορετικάς τιμάς δηλ. διά προβλήματα, πού ἀνῆκον εἰς μίαν καί τήν αὐτήν κατηγορίαν καί πού φυσικά διά τήν λύσιν των ἐγίνοντο αἱ αὐταί σκέψεις καί ἠκολουθεῖτο ἡ ἰδία σειρά συλλογισμῶν, ἐδημιουργήθησαν προβλήματα ἀντιπροσωπευτικά τῆς κατηγορίας των. Τά ἀντιπροσωπευτικά αὐτά προβλήματα δηλ. τά προβλήματα «τύποι» λυόμενα μᾶς δίδουν μίαν τοιαύτην ἔκφρασιν τοῦ αἰτουμένου των, ὥστε νά γίνωνται ἀμέσως ἀντιληπταί αἱ πράξεις, πού μεσολαβοῦν διά τήν εὕρεσίν του.

Ἡ ταξινόμησις αὐτη τοῦ ὑλικοῦ τῆς ἀριθμητικῆς, πού ἐπῆλθε μέ τήν εἰσαγωγήν τῶν γενικευμένων ἤ γραμματικῶν ἀριθμῶν * ἐδημιούργησε γενικοποιήσεις μεγάλας διά τά θέματα τῆς Ἀριθμητικῆς. Καί αἱ γενικοποιήσεις αὐται ὡδήγησαν εἰς νέας μεθόδους ἐρεύνης τῶν θεμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς, ἀλλά καί ὡδήγησαν εἰς τήν δημιουργίαν νέων κατηγοριῶν ἀριθμῶν.

Οὕτως ἕνας νέος κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐδημιουργήθη, ἕνας κλάδος, πού διαθέτει νέαν τεχνικήν ἐργασίας διά τήν καθόλου σπουδήν τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν, τόσον ἐκείνων τῆς ἀριθμητικῆς ὅσον καί ἐκεί-

---

* Μεταχειριζόμεθα ἕνα γράμμα: α, β, γ, . . . x, y, ω διά νά σημειώσωμεν ἕνα ἀριθμόν μή καθωρισμένον ἐκ τῶν προτέρων διότι δέν δυνάμεθα ἤ διότι δέν ἐπιθυμοῦμεν νά γνωρίζωμεν ἀπ' ἀρχῆς περί ποίου ἀριθμοῦ πρόκειται.

νων, πού ὁ ἴδιος αὐτός ὁ κλάδος ἐδημιούργησεν καί καθιστᾷ τά ἐκ τῆς σπουδῆς αὐτῆς συμπεράσματα ἐπωφελῆ δι᾽ ἰδικῶν του μεθόδων. Ὁ κλάδος αὐτός ὠνομάσθη «Ἄλγεβρα».

2. Θεμελίωσις τῶν διαφόρων συστημάτων Ἀριθμῶν.

Διά νά ἐννοήσωμεν τόν σχηματισμόν τῆς ἐννοίας τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ πρέπει νά ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν μας δύο τινά: 1ον Ἡ ἐπινόησις ἑνός νέου συστήματος ἀριθμῶν, ἦτο τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀδυναμίας τοῦ ὑπάρχοντος συστήματος νά δώσῃ λύσιν εἰς πολύ ἁπλᾶ προβλήματα. Καί τό νέον σύστημα δημιουργοῦν μίαν ἐπέκτασιν τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ, τήν ὁποίαν παρεῖχε τό προηγουμένως γνωστόν, ἀπήλειφε μίαν τῶν ἀδυναμιῶν τούτου καί τό συνεχώνευε εἰς ἑαυτό, ὥστε τό προηγουμένως γνωστόν νά μή ἀποτελῇ πλέον παρά εἰδικήν τούτου κατηγορίαν. 2ον Ἡ ἀποδοχή ἑνός νέου συστήματος ἀριθμῶν σημαίνει, ὅτι ὄχι μόνον ἔχουν ὁρισθῆ οἱ ἀριθμοί (τά στοιχεῖα) αὐτοῦ τοῦ συστήματος ἀλλά καί αἱ ἐπ᾽ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν πράξεις ἔχουν ὁρισθῆ κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ βασικαί ἰδιότητες τῶν πράξεων, πού ἰσχύουν διά τό προηγούμενον σύστημα νά παραμένουν ἀναλλοίωτοι.

3. Οἱ ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς Ἀριθμητικῆς*

Οἱ ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ὡς γνωστόν:

1ον **Οἱ ἀκέραιοι**: 0, 1, 2, 3, 4, ...

2ον **Οἱ ρητοί κλασματικοί**** τούς ὁποίους εἰκονίζει τό σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$, πού ἀπαγγέλλεται ἄλφα διά βῆτα, ἐνῶ οἱ α, β εἶναι ἀκέραιοι καί ὁ β διάφορος τοῦ μηδενός.

3ον **Οἱ ἄρρητοι ἤ ἀσύμμετροι ἀριθμοί**, οἱ ὁποῖοι εἰς τήν δεκαδικήν των ἐκπροσώπησιν ἔχουν ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά.

Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί, ἐκτός τοῦ μηδενός, ὀνομάζονται **Φυσικοί Ἀριθ-**

---

* Εἰς τά ἐδάφια (3 – 4) οἱ ἀναφερόμενοι ἀριθμοί εἶναι ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς Ἀριθμητικῆς.

** ἤ ρητά κλάσματα.

θμοί. Δηλ. Φυσικοί ἀριθμοί εἶναι οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας* :

1, 2, 3, ... (1) ἐνῶ τά ἀποσιωπητικά ὑποδεικνύουν, ὅτι ἡ παράθεσις τῶν ἀριθμῶν συνεχίζεται πρός τά δεξιά ἀτερμόνως. Ἐξ αὐτῆς τῆς αἰτίας λέγομεν, ὅτι τό πλῆθος τῶν ὅρων τῆς ἀκολουθίας (1) εἶναι ἄπειρον, ἐνῶ ἡ ἀκολουθία (1) χαρακτηρίζεται ὡς ἀπέραντος ἀκολουθία ἤ ὡς ἀτέρμων.

3.1. Ἀπό τήν προαλγεβρικήν ἀριθμητικήν γνωρίζομεν ὅτι:

3.1.1. Δύο ἀκέραιοι δύνανται νά προστεθοῦν καί νά πολλαπλασιασθοῦν καί τό ἀποτέλεσμα εἶναι ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός. Ἐδέχθημεν πρός τούτοις, ὅτι: $a+0=a$ καί $a.0=0$, ἄν a εἶναι ἕνας οἱοσδήποτε – μηδέ καί αὐτοῦ τοῦ ἰδίου τοῦ μηδενός ἐξαιρουμένου – ἀκέραιος ἀριθμός**

3.1.2. Αἱ πράξεις πρόσθεσις καί πολλαπλασιασμός διέπονται ἀπό τούς ἑξῆς θεμελιώδεις νόμους:

α) Τόν ἀντιμεταθετικόν νόμον, ὅστις ἰσχύει δι' ἀμφοτέρας τάς πράξεις: $a+\beta=\beta+a \quad a.\beta=\beta.a$.

β) Τόν προσεταιριστικόν νόμον, ὅστις ἰσχύει ἐπίσης δι' ἀμφοτέρας τάς πράξεις: $(a+\beta)+\gamma=(a+\gamma)+\beta=a+(\beta+\gamma)$

$$(a.\beta).\gamma=(a.\gamma).\beta=a.(\beta.\gamma)$$

γ) Τόν ἐπιμεριστικόν νόμον, ὅστις συνδέει τάς δύο αὐτάς πράξεις:

---

* Ὀνομάζομεν ἀκολουθίαν μίαν παράθεσιν ἀριθμῶν ὑπό ἕνα νόμον διαδοχῆς· ἕνα νόμον, ὅστις μᾶς ἐπιτρέπει διδομένου ἑνός τῶν ὅρων της (οἱ ἀριθμοί μιᾶς ἀκολουθίας ὀνομάζονται ὅροι τῆς ἀκολουθίας) νά γνωρίζωμεν τόν προηγούμενόν του καί τόν ἑπόμενόν του.

** Δηλ. τό μηδέν εἰσήχθη εἰς τήν προαλγεβρικήν Ἀριθμητικήν ὡς τό σύμβολον, τό ὁποῖον συμπεριφέρεται πρός τά ἄλλα ἀριθμητικά σύμβολα (εἰς τήν ἔννοιαν ἀριθμητικά σύμβολα – περιλαμβάνομεν τούς ρητούς κλασματικούς καί ἀσυμμέτρους — διά τούς ἀσυμμέτρους θά ὁμιλήσωμεν κατωτέρω) βάσει τῶν σχέσεων: $a+0=a$, $a.0=0$. Ὁ ὁρισμός οὗτος τοῦ μηδενός συνεπάγεται νά ἔχωμεν $x=0$, ἄν $a+x=a$. Πράγματι, ἀφοῦ $a+0=a$, θά ἔχωμεν καί $a+x=a+0$ δηλ. $x=0$.

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$

Ἐξ αὐτῶν τῶν θεμελιωδῶν νόμων πηγάζουν καί οἱ ἀκόλουθοι:

3.1.2.1 Διά τήν πρόσθεσιν: α) Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους προσθετέους διά τοῦ ἀθροίσματός των.

β) Εἰς πᾶν ἄθροισμα δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα προσθετέον δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτόν ὡς ἄθροισμα.

γ) Διά νά προσθέσωμεν ἀθροίσματα σχηματίζομεν ἕν ἄθροισμα, πού ἔχει ὡς προσθετέους τούς προσθετέους τῶν ἀθροισμάτων.

3.1.2.2. Διά τόν πολλαπλασιασμόν: α) Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους παράγοντας διά τοῦ γινομένου των.

β) Εἰς πᾶν γινόμενον δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα παράγοντα δι' ἄλλων ἐχόντων αὐτόν ὡς γινόμενον.

γ) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον, πού ἔχει ὡς παράγοντας τούς παράγοντας τῶν γινομένων.

Καί ἐπιπροσθέτως ἐκ τοῦ ἐπιμεριστικοῦ νόμου πηγάζει ἡ ἰδιότης:

δ) Ἄθροισμα πολλαπλασιάζεται ἐπί ἄλλο ἄθροισμα, ἐάν ἕκαστος προσθετέος τοῦ ἑνός πολλαπλασιασθῇ ἐπί ἕνα ἕκαστον προσθετέον τοῦ ἄλλου καί ἀθροισθῶσι τά μερικά γινόμενα.

3.2. Ἡ ἰσότης: $\beta.x=\alpha$ εἰς τήν ὁποίαν τά α, β ἐκπροσωποῦν ἀκεραίους τῆς ἀριθμητικῆς καί $\beta\neq 0$* δέν ἱκανοποιεῖται πάντοτε ἀπό ἀκεραίαν τι-

---

* Ἐφόσον ἐδέχθημεν, ὅτι $0.x=0$ δέν ὑπάρχει ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις νά ἱκανοποιῇ τήν ἰσότητα: $0.x=\alpha$, ὅπου $\alpha\neq 0$. Ἄν πάλιν εἰς τήν ἰσότητα: $\beta.x=\alpha$, οἱ α,β εἶναι μηδενικά, δυνάμεθα νά δεχθῶμεν ὡς πηλίκον τοῦ α διά τοῦ β τόν οἱονδήποτε ἀκέραιον. Αὐτή εἶναι ἡ αἰτία, διά τήν ὁποίαν λέγομεν, ὅτι τό σύμβολον $\frac{0}{0}$ ἔχει τιμήν ἀόριστον.

μήν τοῦ x. Δέν ὑφίσταται π.χ. ἀκέραιος x, ὥστε νά ἔχωμεν: $3x=5$. Τοιοῦτοι περιορισμοί ὡδήγησαν εἰς τό νά ὁρίσωμεν τά ρ η τ ά κ λ ά σ μ α τ α. Δηλ. ἐ δ έ χ θ η μ ε ν, πώς τό σύμβολον $\frac{a}{\beta}$, πού ὅπως εἴπομεν ἀπαγγέλλεται α διά β καί πού ὁ α ὀνομάζεται ἀριθμητής καί ὁ β παρονομαστής, ἐκφράζει εἰς πᾶσαν περίπτωσιν τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀκεραίου α διά τοῦ ἀκεραίου $\beta\neq 0$ *. Εἰς τό παράδειγμά μας λοιπόν τό σύμβολον $\frac{5}{3}$ θά ἐκφράζῃ τόν x δηλ. θά ε ἰ κ ο ν ί ζ ῃ τό πηλίκον τοῦ 5 διά τοῦ 3. Ἕκαστος ἐπίσης ἀκέραιος α δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν ρητοῦ κλάσματος μέ ἀριθμητήν αὐτόν τοῦτον τόν ἀκέραιον καί παρονομαστήν τήν μονάδα. Διότι κατά τόν ὁρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν ἐδέχθημεν, ὅτι $1.\alpha=\alpha$**.

3.2.1. Αἱ πράξεις ἐπί τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁρίζονται κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ ἀναφερθεῖσαι ἰδιότητες (3.1.2) νά ἰσχύουν διά τήν πρόσθεσιν καί τόν πολλαπλασιασμόν τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος ***.

3.3. Ἡ ἰσότης $x^{\mu}=A$ (1), ὅπου A ἕνας φυσικός ἀριθμός δέν ἱκανοποιεῖται πάντοτε ἀπό μίαν ἀκεραίαν τιμήν τοῦ x, ὅπως συμβαίνει π.χ. μέ τήν ἰσότητα: $x^2=2$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην μία τοιαύτη ἰσότης δέν ἱκανοποιεῖται μήτε ἀπό ἕνα ρητόν κλάσμα.

Καί πράγματι, ἐάν δεχθῶμεν, ὅτι τό ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ ἱκανοποιεῖ τήν

---

* Δηλ. ρητόν κλάσμα ἤ ρητός κλασματικός ἀριθμός ὀνομάζεται τό σύμβολον $\frac{a}{\beta}$ ὅπου α, β ἀκέραιοι καί $\beta\neq 0$.

** Ἐκ τοῦ λόγου τούτου οἱ ἀκέραιοι καί οἱ ρητοί κλασματικοί ἀριθμοί λέγονται μέ ἕνα ὄνομα ρ η τ ο ί ἀ ρ ι θ μ ο ί.

*** Εἴδομεν προηγουμένως (ὑποσημ. σελ. 3) ὅτι, ἐάν εἰς ἕνα γινόμενον δύο παραγόντων ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι μηδέν, τό γινόμενον εἶναι μηδέν. Ἀντιστρόφως, ἐάν $\alpha.\beta=0$ θά δείξωμεν, ὅτι τουλάχιστον ὁ ἕνας τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου εἶναι μηδέν. Πράγματι, ἐάν $\alpha\neq 0$ καί τό $\frac{1}{a}$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός καί συνεπῶς: $\alpha.\beta\cdot\frac{1}{a}=0\cdot\frac{1}{a}$ ἤ $\beta=0$. ὅ.ἔ.δ.

Ἐδῶ ὑπεθέσαμεν τά α, β ἐκπροσωποῦντα ρητούς ἀριθμούς, τήν αὐτήν ὅμως ἀπόδειξιν θά μεταχειρισθῶμεν καί ὅταν ταῦτα θά ἐκπροσωποῦν τυχόντας πραγματικούς ἀριθμούς. Σκοπός δέ τοῦ κεφαλαίου τούτου, ὅπως γνωρίζομεν, εἶναι ὁ σχηματισμός τῆς ἐννοίας τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

ἰσότητα (1), θά ἔχωμεν: $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\mu} = A$ ἤ $\frac{a^{\mu}}{\beta^{\mu}} = A$ (2). δηλ. ἰσότητα, πού δικαιολογεῖται ἐφόσον δεχθῶμεν, ὡς κοινόν διαιρέτην τῶν ἀριθμῶν a^{μ} καί β^{μ}, τόν β^{μ}. Ἀλλά τό τοιοῦτον δέν εἶναι ἀληθές διότι αἱ δυνάμεις τῶν πρώτων πρός ἀλλήλους ἀριθμῶν εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους*.

Ἐάν εἰς τήν συγκεκριμένην ἰσότητα: $x^2 = 2$ ζητήσωμεν τιμάς προσεγγιστικάς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 εὑρίσκομεν τάς διπλάς ἀνισότητας: $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$, $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$ κ.ο.κ.

Καί τώρα εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι μήτε θά ὑπάρξη ἀριθμός μέ πεπερασμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων μήτε δεκαδικός περιοδικός, πού τό τετράγωνόν του νά ἰσοῦται μέ τόν 2. Διότι εἰς τάς δύο αὐτάς περιπτώσεις ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ 2 θά ἦτο ἕνας κλασματικός ἀριθμός**

Συμπέρασμα Ἐάν ἐξακολουθήσωμεν νά ἐργαζώμεθα ὡς ἀνωτέρω θά εὑρίσκωμεν πάντοτε τήν $\sqrt{2}$ περιλαμβανομένην μεταξύ δύο ἀριθμῶν, πού θά διαφέρουν ὅσον θέλομεν ὀλιγώτερον, ἐνῶ ὁ ὑπολογισμός θά ἐξακολουθῆ ἀπεριορίστως μέ δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά. Ἡ $\sqrt{2}$ λοιπόν θά συμβολίζη τόν διαχωρισμόν τῶν ἀκολουθιῶν:

$$1,4\ ,\quad 1,41\ ,\quad 1,414\ ,\quad 1,4142\ ,\ \dots$$
$$1,5\ ,\quad 1,42\ ,\quad 1,415\ ,\quad 1,4143\ ,\ \dots$$

ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μέν πρώτη μέ τούς ὅρους της παρέχει τιμήν τῆς $\sqrt{2}$ κατά προσέγγισιν 0,1 , 0,01, 0,001 κ.λ.π. κατ' ἔλλειψιν, ἐνῶ ἡ ἄλλη μέ τάς αὐτάς προσεγγίσεις ἀλλά καθ' ὑπεροχήν. Εἰς μίαν τοιαύτην περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι τό σύμβολον αὐτοῦ τοῦ καταμερισμοῦ εἶναι κάποιος ἀ-

* Ἕνας «σύνθετος» φυσικός ἀριθμός ἀναλύεται, ὡς γνωστόν, εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων. Δύο λοιπόν «σύνθετοι» φυσικοί ἀριθμοί καί πρῶτοι πρός ἀλλήλους δέν θά εἶχον κάποιον κοινόν πρῶτον· ἡ ὕψωσίς των δέ εἰς κάποιαν δύναμιν θά μετέβαλε μόνον τούς ἐκθέτας τῶν «πρώτων των» παραγόντων καί συνεπῶς θά διατηροῦσε τήν ἰδιότητά των ὡς πρώτων πρός ἀλλήλους ἀριθμῶν.

** Εἶναι γνωστόν ἀπό τήν ἀριθμητικήν, ὅτι ἕνα ρητόν κλάσμα ἐκφράζεται εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν μέ πεπερασμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων ἤ εἰς περιοδικόν δεκαδικόν ἀριθμόν δηλ. εἰς δεκαδικόν τοῦ ὁποίου τά δεκαδικά ψηφία ἐπαναλαμβάνονται ἀπό τινος καί πέραν τά αὐτά καί κατά τήν αὐτήν τάξιν. Τό ἀντίστροφον ἐπίσης εἶναι ἀληθές.

ριθμός ἀσύμμετρος ἤ ἄρρητος καί αὐτός εἶναι ἡ $\sqrt{2}$.
Οὕτως ἀφ' ἑνός μέν ἔχομεν τούς ρητούς ἤ συμμέτρους δηλ. τούς δυναμένους νά ἐκπροσωπηθοῦν ἀπό τό σύμβολον $\frac{\alpha}{\beta}$, ὅπου α, β ἀκέραιοι καί $\beta \neq 0$ καί τούς ἀρρήτους ἤ ἀσυμμέτρους, οἵτινες δέν δύνανται νά τεθοῦν ὑπό τήν μορφήν $\frac{\alpha}{\beta}$ ὑπό τάς αὐτάς συνθήκας καί οἱ ὁποῖοι συνεπῶς εἰς τήν δεκαδικήν των ἐκπροσώπησιν ἔχουν ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά *.
Ἡ σύγκρισις μεταξύ ἀσυμμέτρου ἤ μεταξύ συμμέτρου καί ἀσυμμέτρου εἰς τάς πρακτικάς ἐφαρμογάς γίνεται μέ βάσιν τήν κατά προσέγγισιν ἐκπροσώπησιν τοῦ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ. Ἡ θεωρητική ὅμως ἐξέτασις τοῦ θέματος ἀντιμετωπίζεται ἐν συσχετίσει μέ τούς ὁρισμούς τῶν πράξεων ἐπί τοιούτων ἀριθμῶν, οἵτινες δίδονται μέ βάσιν τήν θεωρίαν τῆς τομῆς τοῦ Dedekind.
Οἱ ὁρισμοί οὗτοι ἐπιτρέπουν τήν διατήρησιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν τεσσάρων πράξεων καί ἐπί τῶν νέων μας ἀριθμῶν καί δημιουργεῖται οὕτω μία νέα ἐπέκτασις τῆς ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ περιλαμβάνουσα τήν προηγουμένην ὡς μίαν εἰδικήν περίπτωσιν.

4. Ἀριθμοί θετικοί καί ἀρνητικοί. – Ἀριθμοί τῆς μεταλγεβρικῆς Ἀριθμητικῆς.

Ἔστωσαν δύο ρητοί ἤ ἄρρητοι ἀριθμοί α καί β τοιοῦτοι, ὥστε $\alpha > \beta$. Συμφώνως μέ τούς ὁρισμούς, πού δίδομεν εἰς τήν ἀριθμητικήν, δέν ὑφίσταται ρητός ἤ ἄρρητος ἀριθμός γ' τοιοῦτος, ὥστε νά ἔχωμεν: $\alpha + \gamma' = \beta$, ἐνῶ ὑφίσταται ἀριθμός γ ὥστε νά ἔχωμεν $\beta + \gamma = \alpha$. Δηλ. οἱ ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς παρουσιάζουν ἀδυναμίαν διά τόν καθορισμόν τοῦ γ', πού ἀνταποκρίνεται εἰς τήν προηγουμένην ὑπόθεσιν ἤ

* Εἰς τά ἑπόμενα θά δώσωμεν τόν ὁρισμόν τοῦ ἀσυμμέτρου μέ τήν καλουμένην θεωρίαν τῆς τομῆς τοῦ Dedekind, ἀλλά θεωροῦντες τόν ἀσύμμετρον ὡς τήν ἀριθμητικήν ὀντότητα, τήν ὁποίαν δέν δυνάμεθα νά θέσωμεν ὑπό τήν μορφήν $\frac{\alpha}{\beta}$ (α, β ἀκέραιοι, $\beta \neq 0$) ἔχομεν ἕνα ἀρνητικόν ὁρισμόν τοῦ ἀσυμμέτρου δηλ. ὁρισμόν καθορίζοντα τό τί δέν εἶναι ὁ ἀσύμμετρος καί ὄχι τό τί εἶναι, ἀλλά ἕνα ὁρισμόν εὔχρηστον καί κατάλληλον πολλάκις διά θεωρητικάς διαπιστώσεις.

εἰς ἄλλας ἀναλόγους τάς ὁποίας συνηντήσαμεν εἰς τήν ἀριθμητικήν.
Ἐάν θελήσωμεν ὅμως νά δεχθῶμεν τήν ὕπαρξιν τοῦ γ', θά εἴχομεν ἐκ τῶν προηγουμένων ἰσοτήτων: $\alpha+\beta+\gamma+\gamma'=\alpha+\beta$ δηλ. $\gamma+\gamma'=0$ (βλ. ὑποσημ. σελ. 3)
Τόν ἀριθμόν γ' ὠνόμασαν ἀρνητικόν, ἐνῶ τούς γ καί γ' χαρακτηρίζουν ὡς ἀριθμούς ἀντιθέτους.
Ἐπειδή ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ἀνταποκρίνεται εἰς τήν ἰσότητα $\gamma-\gamma=0$ τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς, συνεφώνησαν οἱ μαθηματικοί, ὥστε δι' ἕκαστον ἀντίθετον ἑνός ἀριθμοῦ τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς δηλ. δι' ἕνα ἀρνητικόν ἀριθμόν νά χρησιμοποιήσουν τό σύμβολον τοῦ ἀντιστοίχου ἀριθμοῦ τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς ἀλλά μέ διακριτικόν σημάδι (πρόσημον) τό πλήν (−).
Οἱ ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς (σύμμετροι — ἀκέραιοι καί ρητοί κλασματικοί — καί ἀσύμμετροι) ὀνομάζονται πλήν τοῦ μηδενός θετικοί ἀριθμοί. Ἕνας θετικός ἀριθμός δύναται νά φέρη πρόσημον τό (+) σύν.
Τό πρόσημον ἀποτελεῖ διά τόν ἀρνητικόν ἀριθμόν ἀναπόσπαστον τμῆμα του καί δέν πρέπει πρός στιγμήν νά τό ἐκλαμβάνωμεν ὡς σημάδι ἀφαιρέσεως *
Οὕτω δημιουργεῖται μία πλατυτέρα ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ἔννοια τοῦ «σχετικοῦ ἀριθμοῦ», τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμός τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς μορφώνει μίαν εἰδικήν κατηγορίαν.
Δυνάμεθα λοιπόν νά λέγωμεν: Ὀνομάζομεν σχετικόν ἀριθμόν τό σύνολον ἑνός προσήμου (τοῦ προσήμου + ἤ τοῦ προσήμου −)

---

* Εἰς ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα π.χ. ἀντιστοιχοῦμεν ἕνα ἀριθμόν τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς, ὁ ὁποῖος εἶναι τό μῆκος του ἐν σχέσει πρός ἕνα μοναδιαῖον εὐθύγραμμον τμῆμα. Προκειμένου ὅμως νά τό προσανατολίσωμεν — νά τοῦ διακρίνωμεν τρόπον διαγραφῆς του ὑπό τινος κινητοῦ — εἴμεθα ὑποχρεωμένοι νά χαρακτηρίσωμεν τόν ἀριθμόν — μῆκος διά τοῦ προσήμου. Τήν ἀνάγκην τοῦ διακριτικοῦ προσήμου ἐδημιούργησαν πλεῖστα ὅσα γεγέθη, τά ὁποῖα παρουσιάζονται εἰς τάς φυσικομαθηματικάς καί τεχνικάς ἐπιστήμας, ἀλλά καί εἰς αὐτήν ταύτην τήν κοινωνικήν ζωήν.

καί ἑνός ἀριθμοῦ τῆς Ἀριθμητικῆς.
Ἡ μεταλγεβρική ἀριθμητική καί ἡ ἄλγεβρα μεταχειρίζονται τόν ἀριθμόν (0) μέ τόν ὁρισμόν τόν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τήν προαλγεβρικήν ἀριθμητικήν. Οὕτω $a+0=a$ οἱοσδήποτε σχετικός ἀριθμός καί ἄν εἶναι ὁ a ἤ καί αὐτός ὁ ἴδιος ὁ μηδέν. Ὥστε $0+0=0$ καί συνεπῶς ὁ μηδέν ἔχει ὡς ἀντίθετόν του ἐξ ὁρισμοῦ τόν ἴδιόν του ἑαυτόν · $0=-0$. Εἶναι ὁ μόνος ἀριθμός, ὅστις ἀπολαύει αὐτῆς τῆς ἰδιότητος.
Οἱ σχετικοί ἀριθμοί (σύμμετροι καί ἀσύμμετροι) μαζί μέ τό μηδέν μορφώνουν τήν ἔννοιαν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.*
Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί, πού φέρουν τό αὐτό πρόσημον, ὀνομάζονται ὁμόσημοι καί οἱ φέροντες διαφορετικά πρόσημα ὀνομάζονται ἑτερόσημοι.

4.1. Ἀπόλυτος τιμή.
Ἡ ἀπόλυτος τιμή ἑνός θετικοῦ ἤ τοῦ μηδενός εἶναι αὐτός οὗτος ὁ ἀριθμός · ἡ ἀπόλυτος τιμή ἑνός ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς (ὁ θετικός ἀριθμός) ἀπό τόν ὁποῖον οὗτος προῆλθεν μέ τήν τοποθέτησιν τοῦ προσήμου.
Μία ἀπόλυτος λοιπόν τιμή εἶναι ἕνας ἀριθμός τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς ἤ ἄλλως ἕνας θετικός ἀριθμός ἄν δέν πρόκειται διά τό μηδέν.
Ἐννοοῦμεν ἀκόμη ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ὅτι δύο ἀντίθετοι ἀριθμοί ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί διαφορετικά πρόσημα.

4.2. Ἰσότης – Πράξεις καί Ἀνισότης πραγματικῶν Ἀριθμῶν.
4.2.1. Δύο πραγματικοί ἀριθμοί θά λέγωνται ἴσοι, ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί τό αὐτό πρόσημον.

---

* Εἰς τούς πραγματικούς ἀριθμούς ὑπάγονται καί δύο ἄλλοι ἀριθμοί, πού εἶναι γνωστοί μέ τό ὄνομα ὑπερβατικοί ἀριθμοί. Οἱ ἀριθμοί οὗτοι εἶναι ὁ γνωστός ἀριθμός π, πού ἐκφράζει τόν σταθερόν λόγον μιᾶς περιφερείας πρός τήν διάμετρόν της καί ἕνας ἄλλος ἀριθμός γνωστός μέ τό σύμβολον e. Οἱ ἀριθμοί οὗτοι εἶναι ἀσύμμετροι, ὠνομάσθησαν ὅμως ὑπερβατικοί, διά λόγους τούς ὁποίους θά ἀναφέρωμεν μεταγενεστέρως.

4.2.2. Διά τάς πράξεις ἐπί πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀκολουθεῖται ἡ ἑξῆς ἀρχή: Οἱ ὁρισμοί τῶν πράξεων ἀφ' ἑνός καί οἱ κανόνες ἐκτελέσεώς των ἀφ' ἑτέρου νά μᾶς ὁδηγοῦν εἰς συμφωνίαν μέ τήν προαλγεβρικήν ἀριθμητικήν, ὅταν αὐτοί οἱ κανόνες ἀφοροῦν τούς θετικούς ἀριθμούς. Οὕτω ἐπιτυγχάνεται ἡ διατήρησις τῶν ἰδιοτήτων τῶν θεμελιωδῶν πράξεων καί ἐπί τῶν νέων μας ἀριθμῶν τῶν ἀρνητικῶν δηλ. ἀριθμῶν. Καί:

α) Ὀνομάζομεν ἄθροισμα δύο ὁμοσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν τόν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων καί ὡς πρόσημον τό κοινόν των πρόσημον.

β) Ὀνομάζομεν ἄθροισμα δύο ἑτεροσήμων πραγματικῶν ἀριθμῶν τόν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων των τιμῶν καί ὡς πρόσημον τό πρόσημον τοῦ καί ἀπόλυτον τιμήν μεγαλυτέρου. Ἐάν οἱ προσθετέοι εἶναι πλείονες τῶν δύο, ὀνομάζομεν ἄθροισμά των τόν ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος θά προκύψη, ἄν προσθέσωμεν τούς δύο ἐξ αὐτῶν, καί εἰς τό ἄθροισμα τούτων κάποιον ἄλλον ἐξ αὐτῶν καί οὕτω καθ' ἑξῆς μέχρις ὅτου λάβωμεν ὅλους τούς θεωρουμένους προσθετέους.

γ) Ὀνομάζομεν διαφοράν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ β ἀπό τόν πραγματικόν ἀριθμόν α ἕνα τρίτον γ, ὅστις προστιθέμενος εἰς τόν β νά μᾶς δίδη τόν α.

δ) Ὀνομάζομεν γινόμενον ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν τόν ἀριθμόν, ὅστις ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν θεωρουμένων ἀριθμῶν καί πρόσημον τό (+) ἐάν τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄρτιον (δυνατόν καί μηδέν) καί τό (–) ἐάν τό πλῆθος τῶν ἀρνητικῶν εἶναι περιττόν.

ε) Ὀνομάζομεν πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α διά τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ β ἕνα τρίτον πραγματικόν ἀριθμόν γ, ὁ ὁποῖος, ἐάν πολλαπλασιασθῆ μέ τόν β θά μᾶς δώση τόν α.

4.2.3. Ἕνας πραγματικός ἀριθμός α θά ὀνομάζεται μεγαλύτερος ἄλλου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ β, καί θά σημειοῦμεν $\alpha > \beta$, ἄν ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι ἀριθμός θετικός. Ὁ ὁρισμός αὐτός τῆς ἀνισότητος συνιστᾶ τήν καλουμένην ἀρχήν τῆς διατάξεως.

Συνέπεια τῆς ἀρχῆς ταύτης, πού λέγεται καί ἀρχή τοῦ μεγέθους εἶναι ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι προτάσεων:

α) Ἕκαστος θετικός ἀριθμός εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός*.

β) Ἕκαστος ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός**.

γ) Ἐκ δύο ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἐκεῖνος, πού ἔχει τήν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμήν εἶναι ὁ μεγαλύτερος***.

5. Γενική ἐπισκόπησις εἰς τόν σχηματισμόν τῆς ἐννοίας τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀφετηρίαν διά τόν σχηματισμόν τῆς ἐννοίας τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ μᾶς παρέχει ἡ ἔννοια τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἀπό τήν προαλγεβρικήν ἀριθμητικήν ὡρίσθησαν αἱ ἔννοιαι τῆς ἰσότητος καί ἀνισότητος ἐπί τοιούτων ἀριθμῶν ὡς καί αἱ ἔννοιαι τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων καί αἱ συνθῆκαι δυνατότητός των.

Ἡ εἰσαγωγή τοῦ 0 ἔδωσε εἰς τό σύστημα τοῦτο τήν δυνατότητα τῆς ἐκφράσεως τῆς διαφορᾶς δύο ἴσων, ἐνῶ παρέμεινον ἐπί τοιούτων ἀριθμῶν ἀνεκτέλεστοι ὑπό ὡρισμένας συνθήκας αἱ πράξεις: ἀφαίρεσις – διαίρεσις – ἐξαγωγή ρίζης.

Ἡ εἰσαγωγή τῶν ρητῶν κλασμάτων καί ἐν συνεχείᾳ ἡ δημιουργία τῆς ἐννοίας τοῦ ρητοῦ ἤ συμμέτρου ἀριθμοῦ ἐπέτρεψεν τήν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως ἐπί τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.

Ὡρίσθησαν καί ἐδῶ ὑπό τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς αἱ ἔννοιαι τῆς ἰσότητος καί ἀνισότητος τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, ὥστε νά ἰσχύουν καί ἐπί τῶν νέων μας ἀριθμῶν αἱ ἰδιότητες τῶν θεμελιωδῶν πράξεων αἱ συναχ-

---

* Πράγματι, ἕνας θετικός ἀριθμός $\vartheta > 0$ διότι $\vartheta - 0 = \vartheta$.

** Πράγματι, ἄν α εἶναι κάποιος ἀρνητικός ἀριθμός ἔχομεν $0 > \alpha$ διότι $0 - \alpha = -\alpha =$ θετικός.

*** Ἐάν ϑ_1, ϑ_2 εἶναι δύο θετικοί ἀριθμοί καί $\vartheta_2 > \vartheta_1$ ἔχομεν: $-\vartheta_1 > -\vartheta_2$ διότι $-\vartheta_1 - (-\vartheta_2) = \vartheta_2 - \vartheta_1 =$ θετικός.

Βλέπομεν λοιπόν, πώς ἡ ἀρχή τῆς διατάξεως κατέστησεν τόν 0 μεγαλύτερον τοῦ τυχόντος ἀρνητικοῦ καί μικρότερον τοῦ τυχόντος θετικοῦ. Τόν κατέστησεν – ὅπως θά εἴδομεν εἰς τά περί τομῆς Dedekind – τό σύμβολον (τό σύνορον) τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἀριθμῶν.

θεῖσαι ἐκ τῶν ἀντιστοίχων πράξεων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.
Ἡ ἔννοια κατόπιν τοῦ ἀρρήτου ἢ ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ ὁλοκλήρωσε τὴν ἔννοιαν τῆς ἐξαγωγῆς ρίζης ἐπί ἑνός ἀριθμοῦ τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς.
Ὅπως δέ ἐτονίσαμεν ἐπανειλημμένως, ἡ θεωρία τῆς τομῆς τοῦ Dedekind θά μᾶς ἐπιτρέψη νά καθορίσωμεν κατ' ἀσφαλῆ θεωρητικῶς τρόπον τήν ἔννοιαν τῆς συγκρίσεως δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς – ρητῶν ἢ ἀρρήτων – καί νά ὁρίσωμεν τάς πράξεις ἐπί τοιούτων ἀριθμῶν ὥστε νά ἐφαρμόζωνται καί εἰς τήν περίπτωσιν τῶν ἀρρήτων πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τῶν ἐπί τῶν ρητῶν μόνον ἀριθμῶν πράξεων.
Τέλος ἡ ἔννοια τοῦ σχετικοῦ ἀριθμοῦ κατέστησε δυνατήν τήν ἀφαίρεσιν δύο ἤδη γνωστῶν ἀριθμῶν εἰς πᾶσαν περίπτωσιν.
Μέ τήν ἐπέκτασιν ἐπιπροσθέτως τῶν ἐννοιῶν τῆς ἰσότητος καί ἀνισότητος ἐπί τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ὡς καί τοῦ ὁρισμοῦ τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων συνάγομεν εὐκόλως τάς θεμελιώδεις ἰδιότητας τῶν ὁποίων ἀπολαύει τό σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν:

α) Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

1. Διά πάντα ἀριθμόν a εἶναι $a=a$. – Ἰδιότης αὐτοπαθητική ἢ ἀνταναклαστική.

2. Ἐκ τῆς σχέσεως $a=\beta$ ἔπεται $\beta=a$ – Ἰδιότης συμμετρική.

3. Ἀπό τάς ἰσότητας $a=\beta$ καί $\beta=\gamma$ ἔπεται ἡ ἰσότης $a=\gamma$. – Ἰδιότης μεταβατική.

β) Ἰδιότητες τῆς διατάξεως.

1. Ἄν a, β εἶναι δύο διάφοροι μεταξύ των πραγματικοί ἀριθμοί τότε ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἄλλον – Ἰδιότης μεγέθους.
Ὥστε, μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν πληροῦται μόνον μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων: $a<\beta$, $a=\beta$, $a>\beta$.

2. Ἄν $a\leq\beta$ καί $\beta<\gamma$ ἢ ἐάν $a<\beta$ καί $\beta\leq\gamma$ τότε $a<\gamma$ (ἐνῶ τό $a\leq\beta$ σημαίνει ὅτι ὁ a δέν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β) – Ἰδιότης μεταβατική τῆς ἀνισότητος.

6. Συνοπτικός πίναξ ὁρισμῶν.

1. Φυσικοί ἀριθμοί ὀνομάζονται οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας:

1, 2, 3, 4, 5, . . .

2. Ἡ παράθεσις τῶν ἀριθμῶν: $a_1, a_2, \ldots a_{\nu_1} \ldots$ συνιστᾶ ἀκολουθίαν, ἐάν διακρίνωμεν νόμον διαδοχῆς αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν· δηλ. ἐάν γνωρίζωμεν βάσει αὐτοῦ τοῦ νόμου διαδοχῆς – τόν προηγούμενον καί τόν ἑπόμενον τοῦ τυχόντος ἐξ αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

3. Μηδέν ὀνομάζεται τό σύμβολον (0) τό ὁποῖον συμπεριφέρεται πρός τά ἄλλα ἀριθμητικά σύμβολα καί πρός τόν ἑαυτόν του βάσει τῶν σχέσεων: $a+0=a \qquad a \cdot 0 = 0$.

4. Οἱ ἀκέραιοι τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς εἶναι οἱ: 0, 1, 2, 3, . . .

5. Ρητόν κλάσμα ἤ ρητός κλασματικός ἀριθμός ὀνομάζεται τό σύμβολον $\frac{a}{\beta}$ (ἄλφα διά βῆτα), ὅπου a, β ἀκέραιοι καί $\beta \neq 0$· ἐκφράζει δέ τοῦτο κατά συνθήκην τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ του διά τοῦ παρονομαστοῦ του. (Ὁ a ὀνομάζεται ἀριθμητής καί ὁ β παρονομαστής).

6. Οἱ ἀκέραιοι καί οἱ ρητοί κλασματικοί λέγονται μέ ἕνα ὄνομα ρητοί ἤ σύμμετροι ἀριθμοί.

7. Ἄρρητος ἤ Ἀσύμμετρος ἀριθμός ὀνομάζεται ὁ μή δυνάμενος νά γραφῆ ὑπό τήν μορφήν $\frac{a}{\beta}$, ὅπου a, β ἀκέραιοι καί $\beta \neq 0$.

Οἱ ἀνωτέρω ρητοί ἤ ἄρρητοι ἀριθμοί συνιστοῦν τούς ἀριθμούς τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς.

8. Σχετικός ἀριθμός ὀνομάζεται τό σύνολον ἑνός προσήμου τοῦ προσήμου (+) ἤ τοῦ (–) καί ἑνός ἀριθμοῦ τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς. Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ὀνομάζεται θετικός (δύναται μάλιστα οὗτος νά μή ἔχη πρόσημον – δηλ. οἱ ἀριθμοί τῆς προαλγεβρικῆς ἀριθμητικῆς εἶναι οἱ θετικοί ἀριθμοί)· εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ὀνομάζεται ἀρνητικός.

9. Οἱ σχετικοί ἀριθμοί (ρητοί καί ἄρρητοι) μαζί μέ τό μηδέν μορφώνουν τήν ἔννοιαν τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

10. Ἀπόλυτος τιμή ἤ μέτρον ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a ὀνομάζεται αὐτός οὗτος ὁ a, ἐάν πρόκειται δι' ἀριθμόν θετικόν ἤ τόν μηδέν καί ὁ $-a$, ἐάν πρόκειται δι' ἀριθμόν ἀρνητικόν.

Καί σημειοῦμεν:

$$|a| = a \quad \text{ἐάν} \quad a \geq 0$$
$$|a| = -a \quad \text{»} \quad a < 0$$

Ὅταν θέτωμεν τόν ἀριθμόν a μεταξύ δύο μικρῶν κατακορύφων σημειοῦμεν τήν ἀπόλυτον αὐτοῦ τιμήν - τό μέτρον του.

7. Ἡ μέθοδος τῆς πλήρους ἤ τελείας ἤ ἐντελοῦς ἐπαγωγῆς.

Ὡς γνωστόν, ὁ ἄνθρωπος οἰκοδομεῖ τόν πνευματικόν του κόσμον κατά δύο τρόπους: Ἐπαγωγικῶς - συλλογιστική πορεία, πού μᾶς μεταφέρει ἀπό τό μερικόν εἰς τό γενικόν - καί Ἀπαγωγικῶς - συλλογιστική πορεία, πού μᾶς μεταφέρει ἀπό τό γενικόν εἰς τό μερικόν.

Ὁ ἐπαγωγικός καί ὁ ἀπαγωγικός ἤ ἄλλως παραγωγικός συλλογισμός ὁδηγοῦν εἰς τήν δημιουργίαν δύο μορφῶν ἀποδεικτικῶν μεθόδων διά τά Μαθηματικά: τήν μέθοδον τῆς ἐπαγωγῆς καί τήν μέθοδον τῆς ἀπαγωγῆς. Ἡ πρώτη τούτων διακρίνεται εἰς ἁ π λ ῆ ν καί εἰς τ ε λ ε ί α ν ἤ π λ ή ρ η ἐ π α γ ω γ ή ν.

Ἡ μέθοδος τῆς ἐπαγωγῆς ἐφαρμόζεται εἰς μαθηματικάς προτάσεις, πού ἐξαρτῶνται ἀπό τόν φυσικόν ν. Αἱ δύο πρῶται προτάσεις τοῦ ἑπομένου ἐδαφίου εἶναι προτάσεις ἐξαρτώμεναι ἀπό τόν φυσικόν ν. Αὗται μάλιστα αἱ προτάσεις ἐξαρτῶνται ἀπό τόν φυσικόν ν, ὁ ὁποῖος λαμβάνει τάς τιμάς: 2, 3, 4, . . . Αἱ προτάσεις δηλ. αὗται ἐξ αὐτῆς τῆς φύσεώς των δέν ἐπιτρέπουν εἰς τόν φυσικόν ν τήν τιμήν 1.

Ὑπάρχουν εἰς τά μαθηματικά προτάσεις γενικαί, ἐξαρτώμεναι ἀπό τόν φυσικόν ν, ἄς τάς ὀνομάσωμεν προτάσεις π(ν), αἱ ὁποῖαι ἰσχύουν διά πᾶσαν τιμήν τοῦ φυσικοῦ ν· δηλ. προτάσεις τῶν ὁποίων ἡ φύσις δέν περιλαμβάνει μή ἐπιτρεπομένας τιμάς τοῦ ν, ὅπως αἱ ἑπόμεναι προτάσεις (8. 1, α, β). Ὑπάρχουν ὅμως καί προτάσεις π(ν), ὅπου αἱ μή ἐπιτρεπόμεναι τιμαί τοῦ φυσικοῦ ν εἶναι περισσότεραι τῆς μιᾶς ἤ προτάσεις, ὅπου ὁ ν δύναται νά ἐκταθῆ καί εἰς εὐρύτερον σύνολον τιμῶν· π.χ. νά λαμβάνη οὗτος ἐκτός ἐκείνων τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί τινας τιμάς ἀκεραίας καί ἀρνητικάς ὡς καί τό μηδέν.

Ἡ μέθοδος τῆς τελείας ἐπαγωγῆς διά μίαν πρότασιν π(ν) ἐφαρμόζεται ὡς ἑξῆς:

Ἀποδεικνύομεν τήν πρότασίν μας διά τήν τιμήν τοῦ $\nu=\nu_0$, ὅπου ν_0 εἶναι ἡ minimum τιμή διά τήν ὁποίαν ἀληθεύει αὐτη καί κατόπιν, δεχόμενοι, ὅτι ἰσχύει διά τήν αὐθαίρετον ἀλλ' ὡρισμένην τιμήν τοῦ $\nu=\varkappa$, ἀποδεικνύομεν τήν πρότασίν μας καί διά τήν ἐπομένην τιμήν τοῦ ν τήν $\varkappa+1$.

Ἐννοοῦμεν τώρα, ὅτι ἡ ἀπόδειξίς μας περιλαμβάνει πᾶσαν τιμήν τοῦ φυσικοῦ ν ἑπομένην τῆς ν_0. Διότι, ἀφοῦ ἡ $\varkappa$ εἶναι αὐθαίρετος τιμή, ἐάν θεωρηθῆ αὐτη ἴση μέ τήν ν_0, ἡ πρότασίς μας θά ἰσχύη καί διά τήν ν_0+1 καί ἀφοῦ ἰσχύει διά τήν ν_0+1, πού εἶναι τώρα ἡ νέα τιμή τοῦ $\varkappa$ θά ἰσχύη καί διά τήν $\nu+2$ κ.ο.κ. Ὡδηγήθημεν οὕτω εἰς τήν τελείαν ἐπαγωγήν δηλ. εἰς τήν ἀπόδειξιν τῆς $\pi(\nu)$ εἰς ὁλόκληρον τό σύνολον τῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ ν ἀπό τῆς ν_0 καί ἑφεξῆς.

Ἡ τιμή $\varkappa$ τοῦ ν διά τήν ὁποίαν ὑποθέτομεν τήν πρότασίν μας ἀληθῆ ὀνομάζεται τυχοῦσα ἀλλ' ὡρισμένη ἤ αὐθαίρετος δοθεῖσα καί αὐτό εἶναι ἐκεῖνο, πού μετατρέπει τήν ἁπλῆ ἐπαγωγή εἰς πλήρη.

Ἐάν ὀνοματίζαμεν τήν ἀποδιδομένην εἰς τό ν τιμήν δηλ. ἐάν, ἀφοῦ θά εἴχομεν ἀποδείξει τήν $\pi(\nu)$ διά τήν ἐλαχίστην τιμήν ν_0 τοῦ ν ἀπεδεικνύαμεν τήν ἰσχύν τῆς $\pi(\nu)$ διά τήν ν_0+1 τιμήν τοῦ ν, θά εἴμεθα ἑφεξῆς ὑποχρεωμένοι, διά νά ἀποφύγωμεν τήν ἀτέρμονα ἐπανάληψιν τῆς ἀποδείξεως, νά δεχθῶμεν, ὅτι καί ἑφεξῆς θά ἔχουν τά πράγματα ὁμοίως. Δηλ. θά ἀνεθέταμεν τήν ἀπόδειξιν τῆς ἰσχύος τῆς προτάσεως διά πάντα φυσικόν ν ἑπόμενον τοῦ ν_0 εἰς τήν σύμβασιν τοῦ «οὕτω καθ' ἑξῆς».

Ἡ μέθοδος ὅμως ἐξασφαλίζει τό οὕτω καθ' ἑξῆς συλλογιστικῶς καί αἴρει τήν ἀμφιβολίαν, πού γεννᾶται, ὅσον ἀφορᾶ τήν ἰσχύν τῆς $\pi(\nu)$ διά μίαν τιμήν λ τοῦ ν ἑπομένην τῆς $\lambda-1$ διά τήν ὁποίαν καί ἔχει ἀποδειχθῆ ἡ πρότασίς μας.

Πρέπει ὅμως νά τονισθῆ, ὅτι τό νά εἶναι ἡ ἐπαγωγή πλήρης ἐπιβάλλεται καί ἀπό τό γεγονός, ὅτι εἰς πλείστας προτάσεις $\pi(\nu)$ συνέβαινε νά δεικνύεται ἡ ἰσχύς των δι' ἕνα σημαντικόν ἀριθμόν διαδοχικῶν φυσικῶν τιμῶν τοῦ ν ἑπομένων τῆς κάποιας ἀρχικῆς, νά μή ἰσχύουν ὅμως αὐται δι' ὅλας τάς ἑπομένας αὐτῆς τῆς ἀρχικῆς τιμῆς τοῦ φυσικοῦ ν.

Πρέπει νά σημειώσωμεν, ὅτι τῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ὑπάρχουν γενικεύσεις. Οὕτω, ὑπάρχουν προτάσεις π(ν) ἡ ἰσχύς τῶν ὁποίων διά πᾶσαν τιμήν τοῦ φυσικοῦ ν ἀποδεικνύεται ὄχι μέ τήν μετάβασιν ἀπό τῆς μιᾶς τιμῆς τοῦ φυσικοῦ ν εἰς τήν ἑπομένην ἀλλά μέ τήν μετάβασιν ἀπό δύο ἤ περισσοτέρας διαδοχικάς τιμάς τοῦ φυσικοῦ ν εἰς τήν ἑπομένην.

Ἐπίσης ὑπάρχει ἡ ἐπαγωγή κατά Cauchy.

Εἰς τήν ἐπαγωγήν κατά Cauchy, ἡ ὁποία ἀφορᾶ προτάσεις π(ν) μέ μικροτέραν τιμήν τοῦ ν τήν 2, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀποδεικνύομεν τήν π(2) καί κατόπιν δεχόμενοι ἰσχύουσαν τήν π(ν), ἀποδεικνύομεν τήν π(2ν). Οὕτω βεβαιούμεθα, ὅτι ἡ πρότασίς μας ἰσχύει διά τάς τιμάς τοῦ ν: $2, 2^2, 2^3, \ldots 2^k$ δηλ. διά τάς τιμάς τοῦ ν τάς ἐκφραζομένας μέ δύναμιν τοῦ 2.

Διά νά ἀποδείξωμεν τώρα τήν π(ν) διά πᾶσαν τιμήν τοῦ φυσικοῦ ν μεγαλυτέραν τοῦ 2 καί μή ἀνήκουσαν εἰς τήν μορφήν 2^ρ, δεχόμεθα τήν π(ν+κ) ἰσχύουσαν, (ὅπου $\nu+\kappa = 2^\lambda$) καί ἐκ ταύτης ἀποδεικνύομεν τήν π(ν).

7.1. Ὑπάρχουν προτάσεις ἐξαρτώμεναι ἀπό δύο ἀκεραίους ν, Ν καί, ἐάν εἶναι ν_0, N_0 αἱ ἐλάχισται αὐτῶν τιμαί, ἀποδεικνύομεν τήν πρότασιν $\pi(\nu_0, N_0)$· κατόπιν τήν $\pi(\nu_0, N)$, ἀκολουθοῦντες φυσικά τήν πλέον ἐξυπηρετικήν πορείαν καί τέλος τήν πρότασιν π(ν, Ν).

8. Δυνάμεις τῶν πραγματικῶν Ἀριθμῶν.

Δ ύ ν α μ ι ς πραγματικοῦ τινος ἀριθμοῦ α ὀνομάζεται τό γινόμενον παραγόντων ἴσων πρός τόν α.

Ἡ δύναμις ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α λαμβάνει ὀνομασίαν ἀπό τό πλῆθος τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου. Οὕτω, τό γινόμενον: α.α.α...α μέ μ παράγοντας ὀνομάζεται μιοστή δύναμις τοῦ α καί συμβολίζεται α^μ. Ὁ α ὀνομάζεται βάσις τῆς δυνάμεως καί εἶναι οὗτος, ὡς εἴπομεν, ἕνας οἱοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός καί ὁ μ ἐκθέτης καί εἶναι οὗτος φ υ σ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς ὄχι μικρότερος τοῦ 2.

8.1. Ἰδιότητες τῶν Δυνάμεων.

α) Γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, μέ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Δηλ: $a^{\mu_1} \cdot a^{\mu_2} \cdots a^{\mu_\nu} = a^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu}$ *

1ον Παράγοντες δύο δηλ. διά $\nu_{min}=2$.

$$a^{\mu_1} \cdot a^{\mu_2} = (\overbrace{a.a.a\ldots a}^{\mu \text{ παραγ.}})(\overbrace{a.a\cdots a}^{\nu \text{ παραγ.}}) = a.a.a\ldots a.a.a\ldots a = a^{\mu_1+\mu_2} \quad (3.1.2.2,\gamma)$$

2ον Δι' οἱονδήποτε ν

Ὑπόθεσις	$a^{\mu_1}.a^{\mu_2}\ldots a^{\mu_\kappa} = a^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa}$
Συμπερ.	$a^{\mu_1}.a^{\mu_2}\ldots a^{\mu_\kappa}.a^{\mu_{\kappa+1}} = a^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa+\mu_{\kappa+1}}$

Δηλ. ἀφοῦ ἀπεδείξαμεν τήν πρότασίν μας διά τήν ἐλαχίστην τιμήν τοῦ $\nu=2$, δεχόμεθα αὐτήν ὡς ἀληθῆ διά $\nu=\kappa$ καί θά τήν ἀποδείξωμεν διά τήν τιμήν τοῦ ν τήν ἑπομένην τῆς κ.

Καί πράγματι, $a^{\mu_1}.a^{\mu_2}\ldots a^{\mu_\kappa}.a^{\mu_{\kappa+1}} = (a^{\mu_1}.a^{\mu_2}\ldots a^{\mu_\kappa}).a^{\mu_{\kappa+1}}$

$$= a^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa}.a^{\mu_{\kappa+1}} = a^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\kappa+\mu_{\kappa+1}}$$

Οὕτω μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἐξησφαλίσαμεν τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεώς μου διά πᾶσαν τιμήν τοῦ φυσικοῦ ν, ἑπομένην τῆς ἐλαχίστης τιμῆς του 2.

β) Γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων** ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐάν ἕκαστος τῶν παραγόντων ὑψωθῆ εἰς αὐτήν τήν δύναμιν.

1ον Διά γινόμενον δύο παραγόντων

$$(a_1.a_2)^{\mu} = \overbrace{(a_1a_2)(a_1a_2)\cdots(a_1a_2)}^{\mu \text{ παραγ.}} = a_1a_2.a_1a_2\ldots a_1.a_2$$

$$= a_1.a_1.a_1\ldots a_1.a_2.a_2.a_2\ldots a_2 = a_1^{\mu}\,a_2^{\mu}. \quad (3.1.2.2,\gamma,\ 3.1.2,a)$$

---

* Μεταχειριζόμεθα τό αὐτό γράμμα μ διά τόν εἰκονισμόν τῶν διαφόρων ἐκθετῶν, ἐνῶ διαστέλλομεν τόν ἕνα ἐκθέτην ἀπό τόν ἄλλον μέ ἕνα δείκτην. Διά τοῦ τρόπου τούτου ἐκτός τῆς οἰκονομίας σκέψεως, ἐπιτυγχάνομεν διά τῶν δεικτῶν εἰς τούς ἐκθέτας τήν ἀπαρίθμησιν τῶν παραγόντων τοῦ θεωρουμένου γινομένου.

** Ἐννοεῖται φυσικά, ὅτι αὐτοί οἱ παράγοντες εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί. Καί ἐφεξῆς, ὅταν παραλείπεται ἡ κατηγορία τοῦ ἀριθμοῦ θά ἐννοοῦμεν πραγματικόν ἀριθμόν μέ τήν γενικήν του σημασίαν.

2^{ov}. Διά γινόμενον ὁσωνδήποτε παραγόντων

Ὑπόθεσις	$(a_1 a_2 \ldots a_\kappa)^\mu = a_1^\mu \cdot a_2^\mu \ldots a_\kappa^\mu$
Συμπέρασμα	$(a_1 a_2 \ldots a_\kappa \cdot a_{\kappa+1})^\mu = a_1^\mu \cdot a_2^\mu \ldots a_\kappa^\mu \cdot a_{\kappa+1}^\mu$

$$(a_1 a_2 \ldots a_\kappa \cdot a_{\kappa+1})^\mu = [(a_1 a_2 \ldots a_\kappa) \cdot a_{\kappa+1}]^\mu = (a_1 a_2 \ldots a_\kappa)^\mu \cdot a_{\kappa+1}^\mu$$
$$= a_1^\mu \cdot a_2^\mu \ldots a_\kappa^\mu \cdot a_{\kappa+1}^\mu \quad (3.1.2, a).$$

γ) Δύναμις πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὑψοῦται εἰς ἄλλην δύναμιν, ἐάν διατηρήσωμεν τήν βάσιν καί θέσωμεν ὡς ἐκθέτην τό γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Δηλ. $(a^\mu)^\nu = a^{\mu \cdot \nu}$

Κατά τόν ὁρισμόν τῶν δυνάμεων

$$(a^\mu)^\nu = \overbrace{a^\mu \cdot a^\mu \ldots a^\mu}^{\nu \text{ παραγ.}} = a^{\overbrace{\mu+\mu+\ldots+\mu}^{\nu \text{ φοράς}}} = a^{\mu\nu}$$

δ) Κλάσμα ὑψοῦται εἰς δύναμιν, ἐάν ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής τοῦ κλάσματος ὑψωθοῦν εἰς τήν δύναμιν ταύτην.

Δηλ. $\left(\frac{a}{\beta}\right)^\mu = \frac{a^\mu}{\beta^\mu}$

Πράγματι, $\left(\frac{a}{\beta}\right)^\mu = \overbrace{\frac{a}{\beta} \cdot \frac{a}{\beta} \ldots \frac{a}{\beta}}^{\mu \text{ παραγ.}} = \frac{a \cdot a \ldots a}{\beta \cdot \beta \ldots \beta} = \frac{a^\mu}{\beta^\mu}$

ε) Πηλίκον δυνάμεων τῆς αὐτῆς βάσεως εἶναι δύναμις μέ βάσιν τήν αὐτήν καί ἐκθέτην τήν διαφοράν τῶν ἐκθετῶν (ἡ διαφορά τῶν ἐκθετῶν ὑποτίθεται ὄχι μικροτέρα τοῦ 2).

Δηλ. $a^\mu : a^\nu = a^{\mu-\nu} \quad (\mu - \nu \geq 2)$

Πράγματι, $a^{\mu-\nu} \cdot a^\nu = a^{\mu-\nu+\nu} = a^\mu$.

9. Σημασία τῶν Συμβόλων: $a^1, a^0, a^{-\mu}$ (μ = φυσικός). 0^0 *

Ἀρχή. Θά δώσωμεν τοιαύτην σημασίαν εἰς τά ἀνωτέρω σύμβολα, ὥ-

---

* Εἴπομεν (8), ὅτι ἡ δύναμις ἔχει ἐκθέτην φυσικόν ἀριθμόν ὄχι μικρότερον τοῦ 2.
Συνεπῶς τά σύμβολα ταῦτα δέν ἔχουν ἔννοιαν ὡς δυνάμεις. Δέν δυνάμεθα μέ ἄλλους λό-
γους νά θεωρήσωμεν ἰσχύουσαν τήν ἰδιότητα (8, ε) εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $\mu = \nu + 1$,
$\mu = \nu$, $\mu < \nu$, ἐνῷ παρουσιάζεται ἡ ἀνάγκη τῆς ἐκφράσεως τοιούτων πηλίκων. Ἡ ἔκ-
φρασις ὅμως αὐτῶν τῶν πηλίκων ὑπό τήν μορφήν δυνάμεων θά ἐσυντόμευε τήν γρα-
φήν καί θά διηυκόλυνε τόν λογισμόν. Ἐντεῦθεν λοιπόν ἡ Ἀρχή, τῆς ὁποίας ἡ ἱ-
κανοποίησις θά μοῦ ἐπιτρέψη τήν καταχώρησιν τῶν νέων μας συμβόλων εἰς τάς δυνάμεις.
Μέ τήν εὐκαιρίαν τονίζομεν, ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀρχή εἰσάγεται ὑπό τήν ἔννοιαν «Ὅρος».
«Ὁ ὅρος» ὅστις πρέπει νά τηρηθῆ διά νά...
Σημειοῦμεν ἐδῶ, ὅτι ἀρκεῖ ὅπως ἡ ἀποδοθησομένη εἰς τά σύμβολα ταῦτα σημασία ἐξασφα-
λίζη τήν ἰσχύν τῆς ἰδιότητος (8.1, α) διά νά ἰσχύουν μέ τήν αὐτήν σημασίαν καί αἱ ἄλλαι ἰ-
διότητες τοῦ (8.1)

στε νά ἰσχύουν ἐπ' αὐτῶν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$1^{ον}$ Ἀφοῦ λοιπόν θέλομεν νά κατατάξωμεν τό a^1 εἰς τάς δυνάμεις θά πρέπει νά εἶναι καί: $a^1 . a^\mu = a^{\mu+1}$. Καί ἀφοῦ τό δεξιά μέλος τῆς ἰσότητός μας ἀντιπροσωπεύει ἕνα γινόμενον μέ $\mu+1$ παράγοντας, ἐνῶ ὁ $2^{ος}$ παράγων τοῦ πρώτου μέλους ἀντιπροσωπεύει ἕνα γινόμενον μέ μ παράγοντας, ἐννοοῦμεν, ὅτι ἡ ἰσότης δέν δικαιολογεῖται παρά ἐφόσον δεχθῶμεν, ὅτι τό a^1 ἀντιπροσωπεύει τόν a.

Σ υ μ π έ ρ α σ μ α. Τό a^1 ΠΡΕΠΕΙ νά ἰσοῦται μέ a διά νά ἰσχύουν ἐπί τοῦ συμβόλου αὐτοῦ αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$2^{ον}$ $a^0 . a^1 = a^1$. Καί συνεπῶς (3.2) τό a^0 ΠΡΕΠΕΙ νά ἰσοῦται μέ 1 διά νά ἰσχύουν ἐπ' αὐτοῦ αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$3^{ον}$ $a^{-\mu} . a^\mu = a^0 = 1$. Καί ἐπειδή $a^\mu \neq 0$* ἕπεται: $a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}$. Δηλ. τό $a^{-\mu}$ ΠΡΕΠΕΙ νά ἰσοῦται μέ $\frac{1}{a^\mu}$ διά νά ἰσχύουν ἐπ' αὐτοῦ αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$4^{ον}$ $0^0 . 0^\mu = 0^{\mu+0} = 0^\mu$. Καί ἐπειδή τό 0^μ ἰσοῦται μέ 0 — ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς δυνάμεως πραγματικοῦ ἀριθμοῦ καί τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ μηδενός — ἕπεται, ὅτι ἔχομεν: $0^0 . 0 = 0$. Δηλ. τό 0^0 δύναται νά ἔχη τιμήν ο ἱ α ν δ ή π ο τ ε. Ἐπειδή ὅμως εἰς πᾶσαν περίπτωσιν ὅπου $a \neq 0$ πρέπει νά εἶναι $a^0 = 1$, δ ε χ ό μ ε θ α ὅτι καί $0^0 = 1$.

10. Συστήματα Ἀριθμήσεως.**

Ὅλοι μας γνωρίζομεν, ὅτι εἰς τόν λογισμόν χρησιμοποιοῦμεν τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως, τοῦ ὁποίου τό ὄνομα ὀφείλεται εἰς τήν βάσιν του. Συμβαίνει δηλ. εἰς τό σύστημα τοῦτο τῆς ἀριθμήσεως αἱ μο-

---

* Διά νά ἐκφράσωμεν, ὅτι οἱ ἀριθμοί a καί β εἶναι διάφοροι μεταξύ των γράφομεν $a \neq \beta$ καί τό ἀπαγγέλομεν a διάφορον τοῦ β.

** Ἄν καί σήμερον χρησιμοποιοῦμεν τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως εἶναι βέβαιον πώς εἰς παλαιοτέρας ἐποχάς ἐχρησιμοποιοῦντο ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως καί διαφορετικά εἰς τούς διαφόρους λαούς. Τό γεγονός π.χ. ὅτι μέχρι σήμερον διαιροῦμεν τό ἔτος εἰς 12 μῆνας, τό ἡμερονύκτιον εἰς 24 ὥρας καί ὅτι ἀκόμα εἰς τήν καθημερινήν μας ζωήν μετρῶμεν τάς ὥρας ἕως τό 12 εἶναι ἀποδεικτικόν στοιχεῖον, ὅτι παλαιότερον ἐχρησιμοποιεῖτο τό 12καδικόν σύστημα ἀριθμήσεως.
Διάφοροι ἀκόμα λόγοι πείθουν, ὅτι εἰς ἄλλας ἐποχάς ἐχρησιμοποιήθησαν τό 20δικόν καί τό 60δικόν σύστημα ἀριθμήσεως.

νάδες τῶν διαφόρων τάξεων νά ἀκολουθοῦν τόν νόμον: ἑκάστη νά εἶναι δεκαπλασία τῆς προηγουμένης. Ἐννοοῦμεν λοιπόν, ὅτι ἡ ἀλλαγή τῆς βάσεως τοῦ συστήματος δημιουργεῖ καί νέον σύστημα ἀριθμήσεως. Θά λέγωμεν π.χ. πενταδικόν σύστημα ἀριθμήσεως ἐκεῖνο τό σύστημα εἰς τό ὁποῖον ἡ βάσις του εἶναι ὁ ἀριθμός 5, ὁπότε καί αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων θά ἀκολουθοῦν τόν νόμον: ἑκάστη νά εἶναι πενταπλασία τῆς προηγουμένης. Καί γενικώτερον, ὅταν θά λέγωμεν ἀλφαδικόν σύστημα, θά ἐννοοῦμεν τό σύστημα βάσεως α δηλ. τό σύστημα εἰς τό ὁποῖον αἱ μονάδες τῶν διαφόρων τάξεων ἀκολουθοῦν τόν νόμον: ἑκάστη νά εἶναι α/πλασία τῆς προηγουμένης.

Αὐτός οὗτος ὁ ὁρισμός τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος εἶναι ἀρκετός διά νά ἐννοήσωμεν εὐκόλως δύο τινά: 1ον τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως: Κάθε ἀριθμός, ὅστις θά ἀναφέρεται εἰς τό ἀλφαδικόν π.χ. σύστημα ἀριθμήσεως, θά ἀποτελεῖται ἀπό τάς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων καί ἐξ ἑκάστης τάξεως δέν θά περιέχῃ περισσοτέρας ἀπό α − 1 μονάδας καί 2ον ὅτι διά νά γράψωμεν ἕνα ἀριθμόν εἰς τό ἀλφαδικόν σύστημα μᾶς χρειάζονται ἄλφα ψηφία: τά 1, 2, 3, . . . (α − 1) καί τό μηδέν διά νά καταλαμβάνῃ τοῦτο τήν θέσιν τῶν μονάδων τῆς τάξεως ἐκείνης τῆς ὁποίας τάξεως μονάδας δέν ἔχει ὁ θεωρούμενος ἀριθμός.

Τά βασικά προβλήματα, πού παρουσιάζονται εἰς τά διάφορα συστήματα ἀριθμήσεως εἶναι τά ἑξῆς τρία:

α) Νά γράψωμεν εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως ἕνα ἀριθμόν, πού εἶναι γραμμένος εἰς τό σύστημα βάσεως α.

β) Νά γράψωμεν εἰς τό σύστημα βάσεως α ἕνα ἀριθμόν, πού εἶναι γραμμένος εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως

γ) Νά γράψωμεν εἰς τό σύστημα βάσεως α ἕνα ἀριθμόν, πού εἶναι γραμμένος εἰς τό σύστημα βάσεως β.

Ἡ λύσις τῶν ἀνωτέρω προβλημάτων εἶναι ἁπλῆ. Πρέπει: 1ον ἄν πρόκειται νά μεταβῶμεν ἀπό ἑνός συστήματος τυχούσης βάσεως α εἰς τό δεκαδικόν, νά ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι ἡ ἀπαγγελία ἑνός ἀριθμοῦ εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως, δέν εἶναι παρά ὁ καθορισμός τοῦ πλήθους τῶν ἁπλῶν μονάδων, τάς ὁποίας ὁ θεωρούμενος ἀριθμός περιέχει καί $2^{ον}$, ἄν πρόκειται νά μεταβῶμεν ἀπό τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως εἰς τό σύστημα τυχούσης βάσεως $α$, δέν ἔχομεν παρά τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν μονάδων τοῦ θεωρουμένου ἀριθμοῦ νά τό ἐκφράσωμεν εἰς μονάδας τῶν διαφόρων τάξεων τοῦ ἀλφαδικοῦ συστήματος, ἐνῶ αἱ μονάδες αὗται δι' ἑκάστην τάξιν δέν ὑπερβαίνουν τάς $α-1$. Ἰδού κατόπιν τούτου αἱ λύσεις τῶν βασικῶν προβλημάτων.

α) Ὁ ἀριθμός $\overline{λ_ν λ_{ν-1} λ_{ν-2} \ldots λ_2 λ_1 λ_0}$* ἀνήκει εἰς τό ἀλφαδικόν σύστημα. Ἔχει δηλ. $λ_0, λ_1, λ_2, \ldots λ_ν$ μονάδας τῆς $1^{ης}$, $2^{ας}$, $3^{ης}$, $\ldots ν+1$ τάξεως. Ἔτσι τοῦ θεωρουμένου ἀριθμοῦ τό πλῆθος τῶν ἁπλῶν μονάδων εἶναι:

$$λ_0 + λ_1 \cdot α + λ_2 \cdot α^2 + \cdots λ_ν \cdot α^ν$$

Ὁ ὑπολογισμός αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος δίδει προφανῶς τόν θεωρούμενον ἀριθμόν εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως. Ἐάν π.χ. εἴχομεν τόν ἀριθμόν: 23046_7 εἰς τό δεκαδικόν σύστημα θά ἦτο ὅ:

$$6 + 4 \cdot 7 + 0 \cdot 7^2 + 3 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^4$$

δηλ. ὅ $\qquad 6 + 28 + 1029 + 4802 = 5865_{10}$

β) Ἀντίστροφα τώρα, ἄν θελήσωμεν τό 5865_{10} νά τόν γράψωμεν εἰς τό ἑπταδικόν σύστημα ἀριθμήσεως, θά ἐργασθῶμεν ὡς ἀκολούθως:

```
5865 | 7
     |_________
26    837 | 7
       13 |________
           119 | 7
       49   17 |______
              17 | 7
   67
```

5865 | 7
26   837 | 7
49   13   119 | 7
67   17 | 7

2 μονάδας πέμπτης τάξεως

3 μονάδας τετάρτης τάξεως

0 μονάδας τρίτης τάξεως

4 ἑπτάδας

6 ἁπλᾶς μονάδας.

γ) Ἡ λύσις τοῦ τρίτου βασικοῦ προβλήματος γίνεται, ὡς εἶναι φανερόν, διά μεταβάσεως πρῶτον εἰς τό δεκαδικόν καί ἐκ τοῦ δεκαδικοῦ κατόπιν εἰς τό σύστημα βάσεως $β$.

* Διά νά μήν ἐπέρχεται σύγχυσις δυνάμεθα νά σημειώνωμεν $\overline{λ_ν λ_{ν-1} \ldots λ_2 λ_1 λ_0}_α$ καί νά ἐννοοῦμεν, ὅτι ὁ θεωρούμενος ἀριθμός ἀνήκει εἰς τό σύστημα ἀριθμήσεως βάσεως $α$.

Ἀσκήσεις*

1.) Ἕνα βιβλίον ἔχει 300 σελίδας. Πόσα ψηφία χρειάζονται διά νά ἀριθμήσωμεν αὐτάς τάς σελίδας**;

2.) Τό πηλίκον δύο φυσικῶν ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα ἀπό τόν διαιρέτην ἤ ἀκόμα ἕν.

Ἀπαγγέλοντες τόν κανόνα ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως δύο φυσικῶν ἀριθμῶν θά εὕρετε τήν ἀπόδειξιν τῆς προτάσεως ταύτης.

3.) Ἀπό πόσας ἕως πόσας τό πολύ μονάδας δυνάμεθα νά προσθέσωμεν εἰς τόν διαιρετέον μιᾶς διαιρέσεως φυσικῶν ἀριθμῶν διά νά μή βλάψωμεν τό πηλίκον καί πόσας ἀκριβῶς μονάδας πρέπει νά προσθέσωμεν διά νά τό αὐξήσωμεν κατά μίαν μονάδα.

Πρέπει νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι τό ὑπόλοιπον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως ἐκφράζει πόσαι μονάδες περισσεύουν ἀπό τόν διαιρετέον, ἀφοῦ ἀφαιρεθῆ τό μέγιστον δυνατόν πολλαπλάσιον τοῦ διαιρέτου.

4) Ἐάν εἰς ἕνα φυσικόν ἀριθμόν, πού ἔχει δύο ἤ περισσότερα ψηφία, παραλείψωμεν τό τελευταῖον ψηφίον προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀπαγγελλόμενος φανερώνει τό πλῆθος τῶν δεκάδων τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ. Ἐπίσης, ἄν παραλείψωμεν τά δύο τελευταῖα ψηφία, προκύπτει νέος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀπαγγελλόμενος φανερώνει τό πλῆθος τῶν ἑκατοντάδων τοῦ ἀρχικοῦ. Καί, ἄν παραλείψωμεν τά τρία τελευταῖα ψηφία προκύπτει ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀπαγγελλόμενος φανερώνει τό πλῆθος τῶν χιλιάδων τοῦ ἀρχικοῦ ἀριθμοῦ κ.ο.κ.

---

*Εἰς τάς ἑπομένας ἀσκήσεις πολλάκις κάμνομεν ὑποδείξεις διά τήν λύσιν των διά νά ἐξοικειώσωμεν τόν ἀναγνώστην μέ τάς ἁπλᾶς ἀλλά κάπως πρωτοτύπους ἀσκήσεις μας ἐπί τοῦ πρώτου κεφαλαίου.

Ὅταν πάλιν ὁμιλοῦμεν δι' ἀριθμούς καί δέν σημειοῦμεν ἤ δέν ἀναφέρομεν σύστημα ἀριθμήσεως διάφορον τοῦ δεκαδικοῦ τοιούτου, ἐννοοῦμεν, ὅτι πρόκειται περί ἀριθμῶν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος ἀριθμήσεως.

** Σημειοῦμεν, ὅτι ἕνας φυσικός ἀριθμός ἀπαγγελλόμενος εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως μᾶς ἀνακοινώνει ἐπιπροσθέτως πόσοι εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί μέχρις αὐτόν π.χ., ὅταν λέγωμεν 301 ἐννοοῦμεν καί ὅτι ὅλοι οἱ φυσικοί ἀπό τόν 1 μέχρις αὐτόν εἶναι 301. Εἰς τό προκείμενον πρόβλημα θά πρέπει νά ἐξακριβώσωμεν πόσοι εἶναι οἱ διψήφιοι ἀριθμοί καί πόσοι εἶναι οἱ τριψήφιοι εἰς τόν 300 καί ἡ ὑπόδειξίς μας εἶναι δι' αὐτό ἀπαραίτητος.

Λάβετε ὑπ' ὄψιν (ἐδ. 6), ὅτι θέλοντες νά παρουσιάσωμεν γραπτῶς τήν ἀπαγγελίαν τοῦ ἀριθμοῦ $\lambda_\nu \lambda_{\nu-1} \ldots \lambda_2 \lambda_1 \lambda_0$ εἰς τό δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως, γράφομεν: $10^\nu \lambda_\nu + 10^{\nu-1}\lambda_{\nu-1} + \cdots + 10^2\lambda_2 + 10\lambda_1 + \lambda_0$.

5.) Τό ἄθροισμα τῶν ἕξ διψηφίων φυσικῶν ἀριθμῶν μέ διαφορετικά ψηφία, πού σχηματίζονται ἀπό τρία διαφορετικά μεταξύ των καί πρός τό μηδέν ψηφία, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα αὐτῶν τῶν ψηφίων πολλαπλασιασμένον μέ τόν 22.

Λάβετε ὑπ' ὄψιν τήν προηγουμένην ὑπόδειξιν.

6.) Ἡ διαφορά μεταξύ τριψηφίου φυσικοῦ ἀριθμοῦ, ἔχοντος τά ψηφία του διαφορετικά μεταξύ των καί τοῦ ἔχοντος τά αὐτά ψηφία ἀλλά τοποθετημένα κατ' ἀντίστροφον τάξιν, ἔχει ὡς ψηφίον δεκάδων τό 9 καί τά ἄλλα της δύο ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 9.

Ἐδῶ δυνάμεθα νά ἔχωμεν δύο τρόπους ἀποδείξεως τῆς προτάσεώς μας: ὁ ἕνας στηρίζεται εἰς τήν γραπτήν ἀπαγγελίαν τῶν ἀριθμῶν καί ὁ ἄλλος εἰς τήν ἀπαγγελίαν τοῦ κανόνος ἐκτελέσεως τῆς ἀφαιρέσεως δύο φυσικῶν ἀριθμῶν.

7) Νά εὑρεθῇ ἕνας φυσικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιάζων τόν ἀριθμόν 21, δίδει γινόμενον μέ ὅλα του τά ψηφία ἴσα μέ τό 5.

Θά εὕρετε ὅτι ὑπάρχουν ἀναρίθμητοι τοιοῦτοι φυσικοί ἀριθμοί ἀπό τούς ὁποίους ὁ μικρότερος εἶναι 26455.

8) Τό γινόμενον ἑνός τριψηφίου ἀριθμοῦ, πού πολλαπλασιάζεται μέ τόν 7 τελειώνει πρός τά δεξιά εἰς τόν ἀριθμόν 638. Νά εὑρεθῇ αὐτός ὁ τριψήφιος ἀριθμός.

Ὁ τρόπος ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἀρκετός διά τήν λύσιν τῆς ἀσκήσεως.

9) Τό γινόμενον πολλῶν παραγόντων, πού ἀναφέρονται ὅλοι εἰς τό ἀλφαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως, ἔχει ὡς ψηφίον μονάδων τό ψηφίον μονάδων τοῦ γινομένου τῶν ψηφίων τῶν μονάδων τῶν παραγόντων.

Χρησιμοποιήσατε τήν γραπτήν ἀπαγγελίαν τῶν παραγόντων, πού ἀναφέρονται εἰς τό ἀλφαδικόν σύστημα (6) καί τόν τρόπον πολλαπλασιασμοῦ ἀθροίσματος ἀριθμῶν ἐπί ἄλλο ἄθροισμα ἀριθμῶν (3.1.2.2, δ).

10) Ποῖον εἶναι τό ψηφίον τῶν μονάδων τοῦ γινομένου:

$$146^7 . 675^4 ;$$

11.) Κάθε ἀριθμός τῆς μορφῆς: $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$, ὅπου ν φυσικός, εἶναι ἕνας φυσικός ἀριθμός καί δέν δύναται νά ἔχη ὡς ψηφίον μονάδων ἕνα ἀπό τά ψηφία: 2, 4, 7 ἤ 9.

Λάβετε ὑπ' ὄψιν ἀφ' ἑνός μέν, ὅτι οἱ ν καί ν+1 εἶναι διαδοχικοί φυσικοί καί ἀφ' ἑτέρου τήν ἄσκησιν (9).

12) Εἰς πᾶσαν διαίρεσιν φυσικῶν ἀριθμῶν τό ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον τοῦ ἡμίσεως τοῦ διαιρετέου.

Δέν ἔχετε παρά νά σκεφθῆτε, ὅτι τό πηλίκον δέν δύναται παρά νά εἶναι τό ὀλιγώτερον ἴσον πρός τήν μονάδα καί τό ὑπόλοιπον μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

13) Ἐάν διαιροῦντες ἕνα φυσικόν ἀριθμόν διά δύο ἄλλων φυσικῶν διαδοχικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκομεν τό αὐτό ἀκέραιον πηλίκον καί εἰς τάς δύο διαιρέσεις, εἶναι τό πηλίκον τοῦτο μικρότερον ἤ τό πολύ ἴσον πρός τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ διαιρετέου τῆς διαιρέσεώς μας διά τοῦ μικροτέρου τῶν διαιρετῶν.

14) Ὁ διαιρέτης μιᾶς διαιρέσεως εἶναι ὁ ἀριθμός 45· τό ὑπόλοιπον εἶναι τό τετράγωνον τοῦ πηλίκου. Νά ὑπολογισθῇ ὁ διαιρετέος.

15) Παρατηροῦντες, ὅτι ἔχομεν: $10^3 - 1 = 27 \times 37$ νά δειχθῆ ὅτι, ἐάν ὁ τριψήφιος ἀριθμός $\overline{\alpha\beta\gamma}$ εἶναι διαιρετός μέ τό 27 ἤ μέ τό 37 συμβαίνει τό αὐτό καί διά τούς ἀριθμούς $\overline{\beta\gamma\alpha}$ καί $\overline{\gamma\alpha\beta}$, πού προκύπτουν ἀπό τόν ἀρχικόν διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν ψηφίων του.

16) Δείξατε, ὅτι ὁ ἀριθμός $\alpha(\alpha^2-1)$ καί γενικώτερον ὁ ἀριθμός $\alpha(\alpha^{2\nu}-1)$, ὅπου οἱ α καί ν φυσικοί ἀριθμοί, εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά τοῦ 6.

Ἐφαρμογή: Νά δειχθῆ, ὅτι, ἐάν τό ἕν ἐκ τῶν δύο ἀθροισμάτων

$$S = \alpha+\beta+\cdots+\lambda = \Sigma\alpha \quad \text{καί} \quad S_\nu = \alpha^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}+\cdots+\lambda^{2\nu+1} = \Sigma\alpha^{2\nu+1}$$

εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 6, θά συμβαίνη τό αὐτό καί διά τό ἄλλο ἀπό αὐτά.

Ὑποδεικνύομεν εἰς τόν ἀναγνώστην νά ἀποδείξη, ὅτι, μεταξύ τριῶν διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ὁ ἕνας εἶναι διαιρετός διά τοῦ 3. Δέν ἔχει διά τοῦτο παρά νά λάβη ὑπ' ὄψιν του, ὅτι κάθε φυσικός ἔχει τήν ἔκφρασιν

$3\lambda+\upsilon$ ὅπου $\upsilon=0,1,2$

17) Ἕνα βαρέλι περιέχει 340 ὀκάδες κρασί. Ἀφαιροῦμεν 55 ὀκάδες καί τάς ἀντικαθιστῶμεν μέ νερό. Καί πάλιν ἀφαιροῦμεν 55 ὀκάδες καί τάς ἀντικαθιστῶμεν μέ νερό. Καί διά τρίτην τέλος φοράν ἐνεργοῦμεν ὁμοίως. Ποίαν ποσότητα κρασιοῦ περιέχει εἰς τό τέλος τό βαρέλι;

Ὅταν ἐνεργοῦμεν κατά τό πρόβλημα διά πρώτην φοράν, σχηματίζομεν μῖγμα 285 ὀκάδων κρασιοῦ καί 55 νεροῦ. Ἀφαιροῦντες τώρα 55 ὀκάδες τοῦ μίγματος τῶν 340 ὀκάδων, ἀφαιροῦμεν τά $\frac{55}{340}$ τοῦ μίγματος καί συνεπῶς ἀφήνομεν εἰς τό μῖγμα τά $\frac{285}{340}$ του. Δηλ. κάθε φοράν, πού ἀπό τό μῖγμα 340 ὀκάδων ἀφαιροῦμεν 55 ὀκάδες ἀφήνομεν εἰς τό μῖγμα τά $\frac{285}{340}$ του καί συνεπῶς ἀφήνομεν τά $\frac{285}{340}$ ἑκάστου εἴδους τοῦ μίγματος.

18) Ἐπαναλαμβάνοντες εἰς τό προηγούμενον πρόβλημα ν φοράς τήν πρᾶξιν καί ὀνομάζοντες Α τήν ἀρχικήν ποσότητα κρασιοῦ τοῦ βαρελιοῦ καί Β τήν ποσότητα, πού ἀφαιροῦμεν ἑκάστην φοράν ἀπό τό περιεχόμενον τοῦ βαρελιοῦ, ποία ποσότης κρασιοῦ θά μείνη εἰς τό τέλος μέσα εἰς τό βαρέλι;

19) Χρησιμοποιοῦντες τήν σημασίαν τοῦ συμβόλου $a^{-\mu}$, ὅπου μ φυσικός, γράψατε μέ ἀκεραίαν μορφήν τά κλάσματα: $\frac{5}{3}$, $-\frac{3}{8}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{-13}{16}$.

20) Ποῖος εἶναι ὁ x ἐάν εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἰσότητες:

1ον $\quad 3^{x-2}=9 \qquad$ 2ον $\quad \left(\frac{-8}{27}\right)^{x-3}=-\frac{32}{243}$

Δέν ἔχομεν δι' ἀμφότερα τά μέλη τῆς προτάσεώς μας παρά νά λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τόν ὁρισμόν τῆς δυνάμεως πραγματικοῦ τινός ἀριθμοῦ α.

21) Δείξατε, ὅτι ὁ $\sqrt[3]{5}$ εἶναι ἀριθμός ἀσύμμετρος.

Ἐάν δέν ἦτο ἀσύμμετρος θά ἦτο σύμμετρος δηλ. θά ὑπῆρχε ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{a}{\beta}$ τοιοῦτον ὥστε $\frac{a^3}{\beta^3}=5$. Ἀλλά... (βλ. 3.3).

22) Ἐάν σ ἐκπροσωπεῖ ἕνα σύμμετρον ἀριθμόν $\neq 0$ καί ὁ α ἕνα ἀσύμμετρος δείξατε διά τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς, ὅτι τό ἄθροισμα $a+\sigma$, τό γινόμενον $a\cdot\sigma$ καί τό πηλίκον $\frac{a}{\sigma}$ εἶναι ἀριθμοί ἀσύμμετροι.

23) Δείξατε διά παραδειγμάτων, ὅτι τό ἄθροισμα, τό γινόμενον καί τό πηλίκον δύο ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν δύνανται νά εἶναι ἀριθμοί σύμμετροι.

24) Νά δειχθῆ, ὅτι ἕνας φυσικός ἀριθμός δέν δύναται νά εἶναι συγχρόνως πολλαπλάσιον τοῦ 12 ηὐξημένον κατά 5 καί πολλαπλάσιον τοῦ 15 ηὐξημένον κατά 4.

Θά δεχθῶμεν τήν ὕπαρξιν τοιούτου φυσικοῦ ἀριθμοῦ καί θά δείξωμεν, ὅτι ἡ ἰσότης $12x+5 = 15\psi+4$ δέν εἶναι ἀληθής.

25) Ποῖοι εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν διαιρεθοῦν μέ τόν φυσικόν ἀριθμόν a δίδουν πηλίκον ἴσον μέ τό ὑπόλοιπον;

Ἐάν καλέσωμεν N τόν τυχόντα τοιοῦτον φυσικόν ἀριθμόν θά ἔχωμεν τήν ἰσότητα: $N = a.\pi + \upsilon$ ἤ $N = a.\upsilon + \upsilon$. Δεδομένου δέ, ὅτι εἰς τήν διαίρεσιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν τό $\upsilon \leq a-1$, ποῖοι εἶναι οἱ N;

26) Θεωροῦμεν τήν ἀκολουθίαν: $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$ * τῆς ὁποίας οἱ δύο πρῶτοι ὅροι της εἶναι οἱ $0, 1$ καί καθένας ἐκ τῶν ἄλλων της ὅρων εἶναι τό ἄθροισμα τῶν δύο προηγουμένων της ὅρων. Δείξατε, ὅτι τό ἄθροισμα ἑνός οἱουδήποτε πλήθους ὅρων της, πού τούς λαμβάνομεν πάντοτε ἀρχίζοντες ἀπό τόν πρῶτον της ὅρον, αὐξανόμενον κατά 1 μᾶς κάμνει τό δεύτερον ὅρον ἀπό ἐκεῖνον εἰς τόν ὁποῖον ἐσταματήσαμεν.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τριῶν πρώτων ὅρων ἱκανοποιεῖ τήν πρότασιν. Οὕτω: $(0+1+1)+1 = 3$. Ἐπίσης διά τούς τέσσαρας πρώτους λαμβάνομεν: $(0+1+1+2)+1 = 5$. Τώρα θά μεταχειρισθῶμεν τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς:

Ὑπόθεσις	$(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)+1 = a_{\nu+2}$
Συμπέρασμα	$(a_1+a_2+\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})+1 = a_{\nu+3}$

Δηλ. ὑποθέτομεν τήν πρότασιν ἀληθῆ διά τούς ν πρώτους ὅρους καί θά τήν ἀποδείξωμεν ἰσχύουσαν διά τούς $\nu+1$.

11. Ἀναλογίαι.

11.1. Λόγος τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a πρός τόν πραγματικόν ἀριθμόν β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, πού πρέπει νά πολλαπλασιάση τόν β διά νά μᾶς δώ-

* Ἀκολουθία τοῦ Fibonacci (Leonard τῆς Πίζης 1180 – 1225). Λέγεται, ὅτι ὁ μαθηματικός οὗτος ἔφθασε εἰς τήν ὁμώνυμόν του ἀκολουθίαν μελετῶν ἕνα πρόβλημα σχετιζόμενον μέ τήν γονιμότητα τῶν κονίκλων.

ση ὡς γινόμενον τόν a

Ἔτσι τόν λόγον τῶν a καί β ἐκφράζει τό κλάσμα $\frac{a}{\beta}$*

11.2. Ἀναλογία ὀνομάζεται ἡ ἰσότης δύο λόγων. Π.χ. ἡ ἰσότης: $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀναλογία ($\beta.\delta \neq 0$). Οἱ ὅροι a, δ λέγονται ἄκροι ὅροι, οἱ β, γ μέσοι ὅροι τῆς ἀναλογίας. Ἐπίσης, οἱ a, γ λέγονται ἡγούμενοι καί οἱ β, δ ἑπόμενοι ὅροι τῆς ἀναλογίας.

11.3. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

α) Εἰς κάθε ἀναλογίαν τό γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων της ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν μέσων της ὅρων.

Δηλ. ἐάν $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν καί: $a.\delta=\beta.\gamma$.

Πράγματι, ἀφοῦ $\beta.\delta\neq 0$ λαμβάνομεν: $\frac{a}{\beta}.\beta\delta=\frac{\gamma}{\delta}.\beta\delta$ ἤ $a\delta=\beta\gamma$.

β) Οἱ ἀντίστροφοι τῶν μελῶν μιᾶς ἀναλογίας συνιστοῦν ἀναλογίαν. Δηλ. ἐάν $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν καί: $\frac{\beta}{a}=\frac{\delta}{\gamma}$ ($a\beta\gamma\delta\neq 0$).

Πράγματι, ἀφοῦ $a\delta=\beta\gamma$ θά ἔχωμεν καί: $\frac{a\delta}{a\gamma}=\frac{\beta\gamma}{a\gamma}$ ἤ $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{\beta}{a}$

γ) Ἐάν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἐναλλάξωμεν τούς μέσους ἤ τούς ἄκρους της ὅρους, προκύπτει ἀναλογία.

Ἐάν $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ($a\beta\gamma\delta\neq 0$) τότε καί $\frac{a}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$ ὅπως ἐπίσης $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{a}$.

Πράγματι, ἀπό τήν ἰσότητα: $a\delta=\beta\gamma$ λαμβάνομεν:

$$\frac{a\delta}{\delta\gamma}=\frac{\beta\gamma}{\delta\gamma} \quad ἤ \quad \frac{a}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$$

Ἐπίσης λαμβάνομεν: $\frac{a\delta}{a\beta}=\frac{\beta\gamma}{a\beta}$ ἤ $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{a}$

δ) Ἀπό τήν ἀναλογίαν: $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ προκύπτουν καί αἱ ἑξῆς ἀναλογίαι: $\frac{a+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$, $\frac{a+\beta}{a}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma}$, $\frac{a-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$, $\frac{a-\beta}{a}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma}$, $\frac{a-\beta}{a+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$ καί $\frac{a+\beta}{a-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ (ὑποτίθεται ὅτι οἱ παρονομασταί τῶν διαφόρων λόγων εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός).

Ἐκ τῆς $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ λαμβάνομεν: $\frac{a}{\beta}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1$ ἤ $\frac{a+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (1). Ἐπίσης ἐκ τῆς $\frac{\beta}{a}=\frac{\delta}{\gamma}$ λαμβάνομεν: $\frac{\beta}{a}+1=\frac{\gamma}{\delta}+1$ ἤ $\frac{a+\beta}{a}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ (2).

Ἐκ τῆς $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν: $\frac{a}{\beta}-1=\frac{\gamma}{\delta}-1$ ἤ $\frac{a-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$ (3)

Ἐκ τῆς $\frac{\beta}{a}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἐπίσης ἔχομεν: $1-\frac{\beta}{a}=1-\frac{\gamma}{\delta}$ ἤ $\frac{a-\beta}{a}=\frac{\delta-\gamma}{\delta}$ (4)

Διά διαιρέσεως κατά μέλη τῶν (1) καί (3) ἤ τῶν (2) καί (4) λαμβάνο-

* Διότι (3.2) ἐδέχθημεν πώς τό κλάσμα ἐκφράζει τό πηλίκον τοῦ ἀριθμητοῦ του διά τοῦ παρονομαστοῦ του.

μεν ἀκόμη : $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$ ἤ καί $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}$.

11.4. Διά περισσότερα ἀπό δύο ἴσα κλάσματα.

α) Ἐάν δύο ἤ περισσότερα κλάσματα εἶναι ἴσα, τότε τό κλάσμα, πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν τῶν ἴσων αὐτῶν κλασμάτων ἐκφράζει τόν αὐτόν λόγον, πού ἐκφράζουν καί τά θεωρούμενα κλάσματα.

Ὥστε, ἐάν $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\cdots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\lambda$ τότε θά ἔχωμεν καί:

$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}=\lambda$ (ὑποτίθεται, ὅτι $\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu\neq 0$).

Διότι, $\alpha_1=\lambda\beta_1$, $\alpha_2=\lambda\beta_2$, ..., $\alpha_\nu=\lambda\beta_\nu$. Καί $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu=\lambda(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu)$, ἤ λόγω τῆς ὑποθέσεως: $\lambda=\frac{\alpha_1+\beta_2+\cdots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu}$.

Ἡ πρότασίς μας αὐτη ἰσχύει καί ὑπό μίαν γενικωτέραν διατύπωσιν:

γ) Ἐάν ἔχωμεν πολλά ἴσα κλάσματα, τόν λόγον των ἐκφράζει καί τό κλάσμα, πού προκύπτει, ὅταν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ καθενός ἀπ' αὐτά τά κλάσματα τούς πολλαπλασιάσωμεν μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν καί τῶν οὕτω προκυπτόντων κλασμάτων, πού εἶναι ἰσοδύναμα πρός τά ἀρχικά κλάσματα, προσθέσωμεν τούς ἀριθμητάς καί τούς παρονομαστάς.

Δηλ.: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\cdots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}=\frac{\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_\nu\alpha_\nu}{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_\nu\beta_\nu}$

(ὑποτίθεται καί ἐδῶ, ὅτι $\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_\nu\beta_\nu\neq 0$).

11.4.1. Συνεχής ὀνομάζεται ἡ ἀναλογία, ὅταν οἱ δύο μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι. Π.χ. ἡ ἀναλογία: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ εἶναι συνεχής.

Εἰς μίαν τοιαύτην ἀναλογίαν ἔχομεν: $\beta^2=\alpha\gamma$ καί ὁ β ὀνομάζεται μέσος ἀνάλογος τῶν α καί γ.

11.4.1.1. Σημείωσις. Ὅταν ἔχωμεν πολλά ἴσα κλάσματα λέγομεν καί πάλιν, ὅτι ἔχομεν ἀναλογίαν· τήν ἀναλογίαν ταύτην ὀνομάζομεν συνεχῆ, ἄν ὁ παρονομαστής τοῦ καθενός λόγου εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμητήν τοῦ ἑπομένου λόγου. Ἡ ἀναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$$

εἶναι μία συνεχής ἀναλογία.

Ἀσκήσεις

27) Ἐάν ἔχωμεν: $\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ δείξατε ὅτι $\frac{a^3+3\gamma^2\varepsilon+5\varepsilon^3}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3}=\frac{a^3}{\beta^3}$

Ἐάν καλέσωμεν λ τήν τιμήν τῶν ἴσων λόγων, πού μᾶς δίδονται, λαμβάνομεν: $a=\lambda\beta$, $\gamma=\lambda\delta$, $\varepsilon=\lambda\zeta$. Καί συνεπῶς:

$$\frac{a^3+3\gamma^2\varepsilon+5\varepsilon^3}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3}=\frac{\lambda^3\beta^3+3\lambda^3\delta^2\zeta+5\lambda^3\zeta^3}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta}=\frac{\lambda^3(\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3)}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3}=\lambda^3=\frac{a^3}{\beta^3}$$

Ἰδού τώρα καί μία δευτέρα λύσις:

$$\lambda^3=\frac{a^3}{\beta^3}=\frac{\gamma^2}{\delta^2}\cdot\frac{\varepsilon}{\zeta}=\frac{\varepsilon^3}{\zeta^3}=\frac{a^3}{\beta^3}=\frac{3\gamma^2\varepsilon}{3\delta^2\zeta}=\frac{5\varepsilon^3}{5\zeta^3} \quad \text{ἤ} \quad \frac{a^3}{\beta^3}=\frac{a^3+3\gamma^2\varepsilon+5\varepsilon^3}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3}$$

(βλ. 11.4.γ).

28) Ἐάν εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἰσότητες: $\frac{x}{a+\beta-\gamma}=\frac{\psi}{\beta+\gamma-a}=\frac{z}{a+\gamma-\beta}$ θά εἶναι ἐπίσης ἀληθής ἡ ἰσότης: $(a-\beta)x+(\beta-\gamma)\psi+(\gamma-a)z=0$.

Ἐάν καί πάλιν καλέσωμεν λ τήν κοινήν τιμήν τῶν δεδομένων ἴσων λόγων, λαμβάνομεν:

$$\lambda=\frac{(a-\beta)x}{(a-\beta)(a+\beta-\gamma)}=\frac{(\beta-\gamma)\psi}{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-a)}=\frac{(\gamma-a)z}{(\gamma-a)(\gamma+a-\beta)}=\frac{(a-\beta)x+(\beta-\gamma)\psi+(\gamma-a)z}{0}$$

Καί κατά τά γνωστά θά πρέπει νά δεχθῶμεν: $(a-\beta)x+(\beta-\gamma)\psi+(\gamma-a)z=0$ διότι μόνον τότε δυνάμεθα ὡς τιμήν τοῦ δημιουργηθέντος λόγου νά θεωρήσωμεν τήν λ. (βλ. ὑποσημ. σελ. 4).

29) Ἐάν $\frac{x}{\psi}=\frac{\omega}{\varphi}$ τότε καί:

$$1^{ον}\quad \frac{x^2\omega+x\omega^2}{\psi^2\varphi+\psi\varphi^2}=\frac{(x+\omega)^3}{(\psi+\varphi)^3} \qquad 2^{ον}\quad \frac{\mu x^2+\nu\psi^2}{\mu x^2-\nu\psi^2}=\frac{\mu\omega^2+\nu\varphi^2}{\mu\omega^2-\nu\varphi^2}$$

ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ μή μηδενικοί ἀριθμοί μ καί ν.

Διά τό $1^{ον}$ μέρος ἡ ἐργασία εἶναι ἁπλῆ. Διά τό $2^{ον}$ μέρος ἀφοῦ ὑψώσωμεν ἀμφότερα τά μέλη τῆς δοθείσης εἰς τό τετράγωνον καί κατόπιν τά πολλαπλασιάσωμεν ἐπί $\frac{\mu}{\nu}$ ἐφαρμόζομεν τήν ἰδιότητα (7.3.δ).

30) Ἐάν οἱ ἀριθμοί a, β, γ, δ, συνιστοῦν συνεχῆ ἀναλογίαν νά δειχθῇ ὅτι: $\frac{2a^3+3\beta^3}{3a^3-4\beta^3}=\frac{2a+3\delta}{3a-4\delta}$

Κατά τήν ὑπόθεσιν: $\frac{a}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$. Καί συνεπῶς: $\beta^2=a\gamma$, $\beta\gamma=a\delta$. Ὥστε: $\beta^3\gamma=a^2\gamma\delta$ ἤ $\beta^3=a^2\delta$. Δέν μένει παρά ἡ ἀντικατάστασις.

31) Ἐάν $\frac{a}{\beta}=\frac{a'}{\beta'}$ δείξατε ὅτι: $\frac{(a-\beta)^4}{(a'-\beta')^4}=\frac{a^4+\beta^4}{a'^4+\beta'^4}$

Ἀπό τήν δοθεῖσαν ἀναλογίαν λαμβάνομεν: $\frac{a}{a'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{a-\beta}{a'-\beta'}$ κ.λ.π.

32) Δείξατε, ὅτι, ἐάν: $(a+\beta+\gamma+\delta)(a-\beta-\gamma+\delta)=(a-\beta+\gamma-\delta)(a+\beta-\gamma-\delta)$ οἱ τέσσαρες ἀριθμοί a, β, γ, δ συνιστοῦν ἀναλογίαν.

Ἡ ἰσότης δύο γινομένων προέρχεται ἀπό ἀναλογίαν κ.τ.λ.

33) Ἐάν ὁ γ εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν α καί β, θά ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}$$

34) Νά δειχθῇ, ὅτι τά τέσσαρα ἀθροίσματα, πού προκύπτουν προσθέτοντες ἀπό δύο δεδομένας ἀναλογίας, ὅρον μέ ὅρον δέν συνιστοῦν μίαν νέαν ἀναλογίαν, παρά εἰς τάς δύο ἀκολούθους περιπτώσεις: 1ον Ἐάν οἱ λόγοι τῆς πρώτης ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μέ τούς λόγους τῆς δευτέρας 2ον. Ἐάν ὁ λόγος τῶν ἀριθμητῶν ἤ τῶν παρονομαστῶν τῆς μιᾶς ἀπό τάς ἀναλογίας ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς δευτέρας ἀναλογίας

Ὑπόθεσις: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\lambda$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\gamma_1}{\delta_1}=\lambda_1$

Ὑφίσταται ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha+\alpha_1}{\beta+\beta_1}=\frac{\gamma+\gamma_1}{\delta+\delta_1}$; Ἡ ἀπάντησις λέγει ἡ ἐκφώνησις εἶναι καταφατική 1ον ὅταν $\lambda=\lambda_1$ καί 2ον ὅταν $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ ἤ $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta_1}{\delta_1}$ (1). Μάλιστα, λέγει ἡ ἐκφώνησις μόνον τότε συμβαίνει τοῦτο. Τό θέμα μας λοιπόν ἔχει δύο μέρη:

Πρῶτον, θά δεχθῶμεν, ὅτι $\lambda=\lambda_1$ καί θά δείξωμεν ὑφισταμένην τήν ἀναλογίαν. Εἰς τό ἴδιον συμπέρασμα θά καταλήξωμεν, ἄν παραδεχθῶμεν, ὅτι $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ ἤ $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta_1}{\delta_1}$. Δεύτερον, θά δεχθῶμεν ὑφισταμένην τήν ἀναλογίαν καί ὡς συνέπειαν ἀναγκαίαν αὐτῆς τῆς ὑποθέσεώς μας θά δείξωμεν, ὅτι $\lambda=\lambda_1$ ἤ ὅτι, $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ ἤ ὅτι $\frac{\beta}{\delta}=\frac{\beta_1}{\delta_1}$.

Εἶναι εὔκολον νά παρατηρήσωμεν, ὅτι, ὅταν ἰσχύῃ ἡ μία τῶν ἀναλογιῶν (1) ἰσχύει καί ἡ ἄλλη.

35) Νά δειχθῇ, ὅτι, ἐάν εἰς μίαν ἀναλογίαν ἀντικαταστήσωμεν τούς ἀριθμητάς τῶν λόγων:

1ον Μέ τούς μέσους ἀριθμητικούς *

2ον Μέ τούς μέσους γεωμετρικούς **

3ον Μέ τούς μέσους ἁρμονικούς *** τῶν δύο ὅρων τοῦ καθενός ἀπό

---

* Μέσος ἀριθμητικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$

** Μέσος γεωμετρικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός $\gamma=\sqrt{\alpha\beta}$ δηλ. ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν α καί β. Τό γινόμενον $\alpha.\beta$ θεωρεῖται θετικός ἀριθμός.

*** Μέσος ἁρμονικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός γ, ἄν εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης: $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$ δηλ. $\gamma=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$.

τούς λόγους προκύπτει νέα ἀναλογία.

36.) Ἐάν ὁ β εἶναι μέσος ἁρμονικός τῶν a καί γ νά δειχθῆ ὅτι $\frac{a-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{a}{\gamma}$ καί ἀντιστρόφως.

37) Ἐάν ἐκ τεσσάρων ἀριθμῶν a, β, γ, δ ὁ δεύτερος εἶναι μέσος ἀριθμητικός τοῦ πρώτου καί τοῦ τρίτου καί ὁ τρίτος μέσος ἁρμονικός τοῦ δευτέρου καί τοῦ τετάρτου, αὐτοί οἱ τέσσαρες ἀριθμοί συνιστοῦν μίαν ἀναλογίαν.

38) Ἐάν τά μ, ν εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός ἀριθμοί καί εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης:

$$(2\mu a+6\mu\beta+3\nu\gamma+9\nu\delta)(2\mu a-6\mu\beta-3\nu\gamma+9\nu\delta)=(2\mu a-6\mu\beta+3\nu\gamma-9\nu\delta)(2\mu a+6\mu\beta-3\nu\gamma-9\nu\delta)$$

τότε οἱ ἀριθμοί a, β, γ, δ, συνιστοῦν μίαν ἀναλογίαν.

39) Ἐάν $\frac{a}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$ νά δειχθῆ ὅτι:

$$(a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=(a\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon)^2$$

Ἐάν λ ὀνομασθῆ ἡ τιμή τῶν δεδομένων ἴσων λόγων, λαμβάνομεν:

$$\lambda=\frac{a^2}{a\beta}=\frac{\beta^2}{\beta\gamma}=\frac{\gamma^2}{\gamma\delta}=\frac{\delta^2}{\delta\varepsilon}=\frac{a\beta}{\beta^2}=\frac{\beta\gamma}{\gamma^2}=\frac{\gamma\delta}{\delta^2}=\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon^2}=\frac{a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}{a\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon}=$$

$$=\frac{a\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon}{\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

40) Ἐάν $\frac{a}{\lambda\mu-\nu^2}=\frac{\beta}{\mu\nu-\lambda^2}=\frac{\gamma}{\lambda\nu-\mu^2}$ νά δειχθῆ ὅτι

1ον $\lambda a+\mu\beta+\nu\gamma=0$ 2ον $\mu a+\nu\beta+\lambda\gamma=0$

Ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τήν ἄσκ. (28).

41) Δείξατε, ὅτι, ἐάν $\frac{\mu}{x}=\frac{\nu}{\psi}=\frac{\rho}{z}$ καί ἐάν $\frac{x^2}{a^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$ ἔχομεν καί:

$$\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}+\frac{\rho^2}{\gamma^2}=\frac{\mu^2+\nu^2+\rho^2}{x^2+\psi^2+z^2}$$

Πράγματι, ἐκ πρώτης ὑποθέσεως λαμβάνομεν:

$$\frac{\mu^2}{x^2}=\frac{\nu^2}{\psi^2}=\frac{\rho^2}{z^2}=\frac{\frac{\mu^2}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}}=\frac{\frac{\nu^2}{\beta^2}}{\frac{\psi^2}{\beta^2}}=\frac{\frac{\rho^2}{\gamma^2}}{\frac{z^2}{\gamma^2}}=\frac{\frac{\mu^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{\beta^2}+\frac{\rho^2}{\gamma^2}}{1} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

42) Ἐάν $\frac{\beta z-\gamma\psi}{a}=\frac{\gamma x-az}{\beta}=\frac{a\psi-\beta x}{\gamma}$ θά ἔχωμεν καί: $\frac{x}{a}=\frac{\psi}{\beta}=\frac{z}{\gamma}$.

Παρατηρήσατε, ὅτι τό συμπέρασμά μας δεικνύει πώς οἱ ἀριθμηταί τῶν διδομένων ἴσων λόγων εἶναι μηδενικά. Κατόπιν τούτου, ἐννοοῦμεν, ὅτι πρέπει νά ἀποδείξωμεν πώς εἶναι μηδέν ἡ τιμή τῶν διδομένων ἴσων λόγων.

43) Ἐάν $\frac{x^2-\psi z}{a}=\frac{\psi^2-xz}{\beta}=\frac{z^2-x\psi}{\gamma}$ θά εἶναι ἀληθεῖς καί αἱ ἰσότητες: $\frac{a^2-\beta\gamma}{x}=\frac{\beta^2-a\gamma}{\psi}=\frac{\gamma^2-a\beta}{z}$

Ἐάν λ ὀνομασθῆ ἡ τιμή τῶν διδομένων ἴσων λόγων, παρατηρήσατε, ὅτι δημιουργοῦντες τό λ κατά διπλοῦν τρόπον, δύνασθε νά ἐμφανίσητε τάς παραστάσεις: $a^2-\beta\gamma$, $\beta^2-a\gamma$, $\gamma^2-a\beta$ κ.τ.λ.

12. Ἀριθμητικαί Ἀνισότητες

Εἴδομεν (4.2.3) τόν ὁρισμόν τῆς ἀνισότητος μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν a καί β, ὡς καί τάς συνεπείας τοῦ ὁρισμοῦ τούτου.

12.1. Ἰδιότητες τῶν Ἀνισοτήτων

α) Ἐάν εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος προστεθῆ ἤ ἀπό τά δύο μέλη ἀφαιρεθῆ ὁ αὐτός ἀριθμός προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Δηλ. ἐάν $a>\beta \rightsquigarrow$ (τότε) $a+\mu>\beta+\mu$

Ἐξ ὁρισμοῦ $a-\beta=$ θετ. ἤ $a=\beta+$ θετ. Ἄρα $a+\mu=(\beta+\mu)+$θετ. ἤ $a+\mu>\beta+\mu$.

Τό νά ἀφαιρέσωμεν ἀπ' ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος τόν αὐτόν ἀριθμόν εἶναι ὡς νά προσθέσωμεν τόν ἀντίθετόν του.

Συνέπεια: Δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν ἕνα ὅρον ἀπό τό ἕνα μέλος μιᾶς ἀνισότητος εἰς τό ἄλλο· ἀρκεῖ νά τοῦ ἀλλάξωμεν τό σημεῖον.

β) Ἐάν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν, προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἄν ὁ ἀριθμός ἐπί τόν ὁποῖον πολλαπλασιάζωμεν ἤ διαιροῦμεν εἶναι θετικός καί ἀντιθέτου φορᾶς, ἄν ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός.

Δηλ. ἐάν $a>\beta \rightsquigarrow a\mu>\beta\mu$ ἤ $\frac{a}{\mu}>\frac{\beta}{\mu}$ ἄν $\mu>0$ καί $a\mu<\beta\mu$ ἤ $\frac{a}{\mu}<\frac{\beta}{\mu}$ ἄν $\mu<0$.

Πράγματι, $a=\beta+$θετ. ἤ $a\mu=\beta\mu+$ θετμ. Ὥστε, ἄν $\mu>0 \rightsquigarrow a\mu=\beta\mu+$θετ. δηλ. $a\mu>\beta\mu$ · ἄν ὅμως $\mu<0 \rightsquigarrow a\mu=\beta\mu+$ ἀρνητ. δηλ. $a\mu<\beta\mu$.

Ἡ διαίρεσις πάλιν τῶν μελῶν μιᾶς ἀνισότητος διά τινος ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλασιασμός ἐπί τόν ἀντίστροφόν του.

Συνέπεια: Δυνάμεθα νά ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μιᾶς ἀνισότητος ὑπό τόν ὅρον νά ἀλλάξωμεν τήν φοράν αὐτῆς τῆς ἀνισότητος.

γ) Ἐάν προσθέσωμεν κατα μέλη δύο ἀνισότητας τῆς αὐτῆς φορᾶς, προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς μέ τάς διδομένας.

Δηλ., ἐάν $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix} \rightsquigarrow \alpha+\beta > \gamma+\delta$

Πράγματι, $\left.\begin{matrix} \alpha = \beta + \theta\varepsilon\tau. \\ \gamma = \delta + \theta\varepsilon\tau. \end{matrix}\right\} \alpha+\gamma = \beta+\delta+\theta\varepsilon\tau.$ ἤ $\alpha+\gamma > \beta+\delta$

Παρατήρησις:

Ἡ κατ' εὐθεῖαν πρόσθεσις δύο ἀνισοτήτων μέ φοράς ἀντιθέτους εἶναι ἀδύνατος, διότι γενικά δέν δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν τήν φοράν τοῦ ἀποτελέσματος. Δυνάμεθα ὅμως νά ἐνεργήσωμεν κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον:

Ἔστωσαν αἱ ἀνισότητες: $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma < \delta \end{matrix}$ Γράφομεν: $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \delta > \gamma \end{matrix}$ καί λαμβάνομεν: $\alpha+\delta > \beta+\gamma$.

δ) Ἐάν ἔχωμεν δύο ἀνισότητας τῆς αὐτῆς φορᾶς καί δύο ἀπό τά διαγώνιά της μέλη εἶναι ἀριθμοί θετικοί, πολλαπλασιάζοντες αὐτάς κατά μέλη, προκύπτει ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς μέ αὐτάς ἐάν δέ εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί, προκύπτει ἀνισότης ἀντιθέτου φορᾶς.

Δηλ. ἐάν $\begin{matrix} \alpha > \beta \\ \gamma > \delta \end{matrix}$ καί εἶναι οἱ $\alpha, \delta > 0$ ἤ οἱ $\beta, \gamma > 0$* τότε θά εἶναι καί $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Πράγματι, ἀφοῦ $\alpha > 0 \rightsquigarrow \alpha\gamma > \alpha\delta$

καί ἀφοῦ $\delta > 0 \rightsquigarrow \alpha\delta > \beta\delta$

Καί ἐκ τῶν (5.β.2) ἔχομεν: $\alpha\gamma > \beta\delta$

Ἐπίσης, ἐάν $\alpha, \delta < 0$ λαμβάνομεν:

$$\begin{matrix} \alpha\gamma < \alpha\delta \\ \alpha\delta < \beta\delta \end{matrix} \rightsquigarrow \alpha\gamma < \beta\delta$$

---

* Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ἔχομεν ὑποχρεωτικῶς καί $\gamma > 0$, εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν καί $\alpha > 0$.

ε) Ἐάν τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν δημιουργοῦν ἀνισότητα ἀντιθέτου φορᾶς, ἐνῶ, ἐάν εἶναι ἑτερόσημοι, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν δημιουργοῦν ἀνισότητα τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Πράγματι, ἄν $a>\beta$ καί $a\beta>0$ ἔχομεν (12, β)

$$\frac{a}{a\beta} > \frac{\beta}{a\beta} \quad ἤ \quad \frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$$

ἐνῶ, ἐάν $a\beta<0 \rightsquigarrow \dfrac{a}{a\beta} < \dfrac{\beta}{a\beta}$ ἤ $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{\beta}$.

στ) Ἐάν τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι ἀριθμοί θετικοί δυνάμεθα νά τά ὑψώσωμεν εἰς μίαν θετικήν καί ἀκεραίαν δύναμιν χωρίς νά μεταβάλωμεν τήν φοράν τῆς ἀνισότητος καί εἰς μίαν ἀρνητικήν καί ἀκεραίαν δύναμιν, ἀλλάζοντες τήν φοράν τῆς ἀνισότητος.

Τῆς προτάσεως ταύτης ἰσχύει καί ἡ ἀντίστροφος.

Ἔστω $a>\beta$ καί $a,\beta,\mu>0$ ἐνῶ ὁ μ καί ἀκέραιος.

Κατά τήν ἰδιότητα (δ) ἐκ τῶν ἀνισοτήτων: $\begin{matrix} a>\beta \\ a>\beta \end{matrix}$ λαμβάνομεν $a^2>\beta^2$ καί ἐκ τῶν $\begin{matrix} a^2>\beta^2 \\ a>\beta \end{matrix}$ τήν $a^3>\beta^3$ καί συνεπῶς $a^\mu>\beta^\mu$.

Ἔστω τώρα $\mu=-\lambda$ ($\lambda>0$ καί ἀκέραιος). Τότε, κατά τά προηγηθέντα, $a^\lambda>\beta^\lambda$. Καί ἐκ τῆς (ε) $\dfrac{1}{a^\lambda}<\dfrac{1}{\beta^\lambda}$ ἤ $a^{-\lambda}<\beta^{-\lambda}$ δηλαδή $a^\mu<\beta^\mu$.

Ἡ ἀντίστροφος πρότασις ἔχει ὡς ἑξῆς: Ἐάν $a^\mu>\beta^\mu$ καί $a,\beta,\mu>0$ ἐνῶ μ καί ἀκέραιος, τότε θά εἶναι καί $a>\beta$· ἐάν ἐπίσης $a,\beta>0$ καί μ ἀρνητικόν εἶναι δέ $a^\mu<\beta^\mu$ θά εἶναι καί $a>\beta$.

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν, ἐάν δέν εἴχομεν $a>\beta$ θά εἴχομεν $a<\beta$ ἤ $a=\beta$. Ἀλλά αἱ τελευταῖαι σχέσεις ἀποκλείονται. Πράγματι ἡ $a<\beta$ συνεπάγεται $a^\mu<\beta^\mu$ ἀφοῦ $\mu>0$ (κατά τήν ὀρθήν πρότασιν) καί ἡ $a=\beta$ ὁδηγεῖ εἰς τήν $a^\mu=\beta^\mu$ ἀνεξαρτήτως τοῦ προσήμου τοῦ μ· δηλ. εἰς συμπεράσματα ἀντίθετα τῆς ὑποθέσεώς μας.

Ἔστω τώρα, ὅτι ἔχομεν $a^\mu<\beta^\mu$ μέ τά $a,\beta>0$ καί $\mu<0$. Ἐάν δέν θά εἴχομεν $a>\beta$ θά εἴχομεν $a<\beta$ ἤ $a=\beta$. Ἡ $a<\beta$ ὁδηγεῖ εἰς τήν $a^\mu>\beta^\mu$ ὅταν $\mu<0$ (κατά τήν ὀρθήν πρότασιν) καί ἡ $a=\beta$ εἰς τήν ἰσότητα $a^\mu=\beta^\mu$. Εὑρισκόμεθα οὕτως εἰς ἀντίθεσιν μέ τήν ὑπόθεσιν.

'Ασκήσεις

44) Νά δειχθῆ, ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς ἄλλους πραγματικούς ἀριθμούς, οὔτε μικρότερος ἀπό ὅλους τούς ἄλλους.

Δέν ἔχετε παρά νά στηριχθῆτε εἰς τόν ὁρισμόν τῆς ἀνισότητος.

45) 'Εάν ὁσαδήποτε κλάσματα ἔχουν ὁμοσήμους παρονομαστάς, τό κλάσμα, πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καί τοῦ μεγαλυτέρου ἀπ' αὐτά τά κλάσματα.

"Ας εἶναι $\frac{a_1}{\beta_1}, \frac{a_2}{\beta_2}, \ldots \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$ ν κλάσματα μέ παρονομαστάς θετικούς καί ἄς θεωρήσωμεν τό $\frac{a_1}{\beta_1}$ ὡς τό μικρότερον καί τό $\frac{a_\nu}{\beta_\nu}$ ὡς τό μεγαλύτερον ἀπ' αὐτά. Οὕτω δημιουργοῦνται αἱ σχέσεις (1) καί ἐκ τῶν (1) (12.1, β) ἔχομεν τάς σχέσεις (2):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a_1}{\beta_1} = \frac{a_1}{\beta_1} < \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \\ \frac{a_1}{\beta_1} < \frac{a_2}{\beta_2} < \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_1}{\beta_1} < \frac{a_\nu}{\beta_\nu} = \frac{a_\nu}{\beta_\nu} \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} \frac{a_1\beta_1}{\beta_1} = a_1 < \frac{a_\nu\beta_1}{\beta_\nu} \\ \frac{a_1\beta_2}{\beta_1} < a_2 < \frac{a_\nu\beta_2}{\beta_\nu} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_1\beta_\nu}{\beta_1} < a_\nu = \frac{a_\nu\beta_\nu}{\beta_\nu} \end{array}\right\} (2)$$

Καί διά προσθέσεως τῶν (2) κατά μέλη προκύπτουν αἱ σχέσεις (1) καί ἐκ τῶν (1), (12.1.β) ἔχομεν τάς σχέσεις (2).

$$\frac{a_1}{\beta_1}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu) < a_1+a_2+\ldots+a_\nu < \frac{a_\nu}{\beta_\nu}(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu) \quad (3)$$

ἤ αἱ $\frac{a_1}{\beta_1} < \frac{a_1+a_2+\ldots+a_\nu}{\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu} < \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$ (4).

Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τά β εἶναι ἀριθμοί ἀρνητικοί αἱ (2) καί (3) θά παρουσιασθοῦν μέ ἀντιθέτους φοράς, ἀλλά αἱ (4) μέ τήν αὐτήν φοράν διότι τώρα ὁ ἀριθμός $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\nu$ εἶναι ἀρνητικός.

46) 'Εάν προσθέσωμεν τόν αὐτόν ἀκέραιον ἀριθμόν εἰς τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος καί ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ὁμόσημος μέ τόν παρονομαστήν τοῦ κλάσματος, τό κλάσμα, πού οὕτω θά προκύψη, θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ πρώτου καί τῆς μονάδος.

Εἶναι ἄμεσος ἐφαρμογή τοῦ προηγουμένου θεωρήματος.

47) Νά δειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος δύο φυσικῶν ἀριθμῶν, πού ἔχουν τόν αὐτόν ἀριθμόν ψηφίων, ἐνῶ ὁ παρονομαστής δέν περιέχει τό μηδέν, περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ μικροτέρου καί τοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τούς λόγους τῶν ψηφίων, πού ἔχουν τήν αὐτήν τάξιν εἰς τόν ἀριθμητήν καί τόν παρονομαστήν.

Ἄς θεωρήσωμεν κατ' ἀρχάς τόν λόγον: $\frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\varepsilon\zeta\eta\theta}$ καί ἄς δεχθῶμεν, ὅτι ἀπό τούς λόγους $\frac{\alpha}{\varepsilon}$, $\frac{\beta}{\zeta}$, $\frac{\gamma}{\eta}$, $\frac{\delta}{\theta}$, ὁ $\frac{\beta}{\zeta}$ εἶναι ὁ μικρότερος καί ὁ $\frac{\delta}{\theta}$ ὁ μεγαλύτερος. Ὁ ἀρχικός λόγος ἀπαγγέλλεται: $\frac{10^3\alpha+10^2\beta+10\gamma+\delta}{10^3\varepsilon+10^2\zeta+10\eta+\theta}$ καί οἱ λόγοι τῶν ὁμοταξίων ψηφίων εἶναι ἰσοδύναμοι πρός τούς λόγους: $\frac{10^3\alpha}{10^3\varepsilon}$, $\frac{10^2\beta}{10^2\zeta}$, $\frac{10\gamma}{10\eta}$, $\frac{\delta}{\theta}$. Ἐάν τώρα ἐφαρμόσωμεν τήν ἀσκ. 45 εἰς τούς τελευταίους αὐτούς λόγους ἔχομεν τήν ὑπό ἀπόδειξιν πρότασιν. Εὐκόλως δέ δυνάμεθα νά τήν γενικεύσωμεν.

48) Νά δειχθῇ, ὅτι, ἐάν α, β εἶναι δύο θετικοί ἀριθμοί καί ἐάν Α, Β, Γ, εἶναι ἀντιστοίχως, ὁ μέσος ἀριθμητικός, ὁ μέσος γεωμετρικός καί ὁ μέσος ἁρμονικός τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$A \geqslant B \geqslant \Gamma$$

Θά δείξωμεν κεχωρισμένως ἰσχυούσας τάς σχέσεις:

$$A \geq B \qquad B \geq \Gamma$$

49) Νά δειχθῇ μέ παραδείγματα ἀριθμητικά, ὅτι, ἄν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη ἀνισότητας τῆς αὐτῆς φορᾶς, δυνατόν νά προκύψῃ ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἀνισότης ἀντιθέτου φορᾶς ἤ καί ἰσότης.

50) Νά δειχθῇ μέ ἀριθμητικά παραδείγματα, ὅτι, ἐάν ἔχωμεν ἀνισότητας τῆς ἰδίας φορᾶς καί πού τά δύο ζεύγη τῶν διαγωνίων των μελῶν εἶναι ἀριθμοί ἑτερόσημοι, ἡ σχέσις, ἥτις θά προκύψῃ πολλαπλασιάζοντάς τας κατά μέλη, δυνατόν νά εἶναι ἀνισότης τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἀνισότης ἀντιθέτου φορᾶς ἤ καί ἰσότης.

51) Ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι τά σημεῖα τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἀνισότητος δυνάμεθα νά τά ὑψώσωμεν εἰς τήν αὐτήν περιττήν δύναμιν χωρίς νά ἀλλάξῃ ἡ φορά τῆς ἀνισότητος.

Θά διακρίνωμεν τρεῖς περιπτώσεις: ὅταν καί τά δύο μέλη εἶναι θετικά, όταν τό πρώτον μέλος είναι θετικόν καί τό δεύτερον άρνητικόν καί όταν καί τά δύο μέλη είναι άρνητικά. Είς τάς δύο πρώτας περιπτώσεις ή άλήθεια είναι φανερά, είς τήν τρίτην περίπτωσιν πολλαπλασιάζομεν άμφότερα τά μέλη έπί -1 καί άναγόμεθα είς τήν πρώτην περίπτωσιν.

52) Έάν οί άριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ είναι θετικοί καί έάν $\alpha>\beta$ καί $\gamma<\delta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma}>\frac{\beta}{\delta}$.

Στηριχθήτε στήν ίδιότητα (ε) τών άνισοτήτων.

53) Νά δειχθή μέ άριθμητικά παραδείγματα, ότι, άν διαιρέσωμεν κατά μέλη άνισότητας τής αύτής φοράς, προκύπτει άνισότης τής αύτής φοράς ή άνισότης άντιθέτου φοράς ή καί ίσότης.

54) Θεωρούμεν δύο θετικούς άριθμούς α, ν άπό τούς όποίους ό δεύτερος είναι άκέραιος καί τούς πλέον μεγάλους άκεραίους άριθμούς λ, μ, πού είναι άντιστοίχως μικρότεροι ή ίσοι άπό τόν α καί τό πηλίκον $\frac{\alpha}{\nu}$. Νά δειχθή, ότι ό μ είναι ίσος μέ τόν μεγαλύτερον άκέραιον, πού είναι μικρότερος ή ίσος μέ τό πηλίκον $\frac{\lambda}{\nu}$ *.

13. Θεωρήματα έπί τής άπολύτου τιμής τού πραγματικού άριθμού.

13.1. Ή άπόλυτος τιμή τού άθροίσματος δύο πραγματικών άριθμών δέν ύπερβαίνει τό άθροισμα τών άπολύτων τιμών αύτών τών άριθμών ούτε είναι μικροτέρα τής άπολύτου τιμής τής διαφοράς τών άπολύτων τιμών αύτών τών ίδίων άριθμών.

Άπδ. έάν θεωρήσωμεν τούς πραγματικούς άριθμούς α καί β έχομεν:

$$||\alpha|-|\beta|| \leq |\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$$

---

* Έάν σημειώσωμεν $\lambda \leq \alpha$ καί έννοούμεν πώς ό λ είναι ό μεγαλύτερος άκέραιος, πού χωρεί είς τόν α, είναι φανερόν πώς ή σχέσις μας δέν δηλοί έκείνο πού έννοούμεν. Ούτω, έάν σημειώσωμεν $\lambda \leq \frac{22}{7}$ καί ό λ είναι θετικός καί άκέραιος δυνάμεθα ώς λ νά έννοούμεν ένα τών: 0, 1, 2, 3, ένώ ό 3 είναι ό μέγιστος άκέραιος, πού χωρεί είς τόν $\frac{22}{7}$. Έκ τού λόγου τούτου χρησιμοποιούμεν τόν συμβολισμόν $[\alpha]=\lambda$ καί διαβάζομεν, ό μεγαλύτερος άκέραιος πού χωρεί είς τόν α είναι ό λ. Συγκεκριμένως, γράφομεν $\left[-\frac{22}{7}\right]=-4$ διότι ό (-4) είναι ό μεγαλύτερος άκέραιος, πού δέν ύπερβαίνει τόν $-\frac{22}{7}$.

Καί αἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἰσχύουν καί διά τήν περίπτωσιν, ὅπου ὁ ἕνας ἀπό τούς a, β ἤ καί οἱ δύο μαζί εἶναι ἴσοι μέ τό μηδέν.

Ἡ διπλῆ μας σχέσις εἶναι ἰσοδύναμος (12.1., δ) μέ τήν:

$$\big||a|-|\beta|\big|^2 \leq |a+\beta|^2 \leq (|a|+|\beta|)^2$$

ἤ τήν*: $\quad (|a|-|\beta|)^2 \leq (a+\beta)^2 \leq (|a|+|\beta|)^2$

ἤ τήν $\quad |a|^2+|\beta|^2-2|a|\cdot|\beta| \leq a^2+\beta^2+2a\beta \leq |a|^2+|\beta|^2+2|a|\cdot|\beta|$

ἤ ἀκόμη τήν: $\quad -2|a||\beta| \leq 2a\beta \leq 2|a|\cdot|\beta|$

ἥτις προφανῶς εἶναι ἀληθής οἱοιδήποτε καί ἐάν εἶναι οἱ πραγματικοί ἀριθμοί a καί β.

13.2. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν δέν ὑπερβαίνει τό ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἡ πρότασίς μας διά δύο προσθετέους ἐδείχθη μέ τήν (13.1). Διά νά τήν ἀποδείξωμεν δι' οἱουσδήποτε προσθετέους μεταχειριζόμεθα τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ὑπόθεσις $\quad |a_1+a_2+\dots+a_\nu| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_\nu|$

Συμπερ. $\quad |a_1+a_2+\dots+a_\nu+a_{\nu+1}| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_\nu|+|a_{\nu+1}|$

Πράγματι, $\quad |a_1+a_2+\dots+a_\nu+a_{\nu+1}| = |(a_1+a_2+\dots+a_\nu)+a_{\nu+1}|$

Συνεπῶς: $\quad |a_1+a_2+\dots+a_\nu+a_{\nu+1}| \leq |a_1+a_2+\dots+a_\nu|+|a_{\nu+1}|$

Καί λόγῳ τῆς ὑποθέσεώς μας ἔχομεν τελικῶς:

$$|a_1+a_2+\dots+a_\nu+a_{\nu+1}| \leq |a_1|+|a_2|+\dots+|a_\nu|+|a_{\nu+1}|$$

13.3. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου.

Ἐξ ὁρισμοῦ τό γινόμενον ὁσωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁ ἀριθμός, ὅστις ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν παραγόντων του.

Οὕτω: $\quad |a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_\nu| = |a_1|\cdot|a_2|\cdot|a_3|\dots|a_\nu|$.

---

* Εἶναι εὔκολον νά ἐννοήσῃ κανείς, ὅτι τό τετράγωνον τῆς ἀπολύτου τιμῆς ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἰσοῦται μέ τό τετράγωνον τοῦ ἰδίου αὐτοῦ ἀριθμοῦ.

13.4. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ πηλίκου δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν διαιρετέου καί διαιρέτου.

Ἐάν γ εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ α διά τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ β, θά ἔχωμεν:

$$\alpha = \beta . \gamma$$

Καί συνεπῶς: $|\alpha| = |\beta| . |\gamma|$ ἤ $|\gamma| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Ἀσκήσεις

55) Δι' ἕνα πραγματικόν ἀριθμόν x ἰσχύει ἡ ἰσότης: $x^{2\nu} = |x|^{2\nu}$.

Ἄμεσος συνέπεια τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ἀπολύτου τιμῆς πραγματικοῦ ἀριθμοῦ.

56) Ἐάν $|\alpha\beta| < 1$ εἷς τοὐλάχιστον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν α καί β εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος καί ἄν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ἕκαστος τῶν α καί β εἶναι ἀπολύτως μικρότερος τῆς μονάδος.

57) Ἐάν $-\alpha \leq x \leq \alpha$ τότε $|x| \leq \alpha$ καί ἀντιστρόφως.

Ἀφοῦ $-\alpha < \alpha$ τό α εἶναι θετικός ἀριθμός, διότι, ἐάν $\alpha < 0$, θά εἴχομεν, ὅτι ὁ θετικός $-\alpha$ εἶναι μικρότερος τοῦ ἀρνητικοῦ α. Τώρα, ἄν $x \geqslant 0$ δυνάμεθα νά θέσωμεν $x = |x|$ καί ἡ ὑπόθεσίς μας δίδει $|x| \leq \alpha$· ἐάν $x < 0$ θέτομεν $x = -|x|$ καί ἡ ὑπόθεσίς μας δίδει $-\alpha \leq -|x|$ ἤ $\alpha \geqslant |x|$.

Ἀντιστρόφως. Ὑπόθεσις: $|x| \leq \alpha$. Τό α προφανῶς εἶναι ἀριθμός θετικός, ἄν $x \neq 0$. Οὕτω ἐάν $x > 0$ ἡ ὑπόθεσίς μας γράφεται $x \leq \alpha$ καί ἐπειδή τό $-\alpha$ θά εἶναι ἀριθμός ἀρνητικός θά εἶναι καί $-\alpha < x$ δηλ. γενικά θά ἔχωμεν $-\alpha < x \leq \alpha$ · ἐάν πάλιν $x < 0$ τότε ἡ ὑπόθεσίς μας γράφεται $-x \leq \alpha$ ἤ $x \geqslant -\alpha$ καί ἐπειδή $x < 0$ θά εἶναι καί $\alpha > x$ δηλ. γενικά θά ἔχωμεν $-\alpha \leq x < \alpha$. Ὥστε, διά $x \lessgtr 0$ θά ἰσχύουν αἱ σχέσεις: $-\alpha \leq x \leq \alpha$. Εἰς τάς σχέσεις ταύτας περιλαμβάνεται προφανῶς καί ἡ περίπτωσις $x = 0$.

58) Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀκέραιοι τιμαί τοῦ x διά τάς ὁποίας: $|x| < 5,4$ ἤ

$|x| > 3{,}5$

Διά τό πρῶτον μέρος θά στηριχθῆτε εἰς τήν ἄσκησιν (57) διά τό δεύτερον δέ μέρος θά διακρίνεται τάς περιπτώσεις $x \geqslant 0$ καί $x < 0$.

59) Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῶν σχέσεων: $\dfrac{||\alpha| - |\beta||}{|\gamma|} \leqslant \left|\dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}\right| \leqslant \dfrac{|\alpha| + |\beta|}{|\gamma|}$

Χρησιμοποιήσατε τάς προτάσεις: (13,1) καί (13.4).

60) Δείξατε, ὅτι δι' οἱουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α καί β ἰσχύει ἡ ἰσότης: $|\alpha^2 - 5\beta + 1| = |5\beta - \alpha^2 - 1|$.

61) Δείξατε ὅτι: $|\alpha| - |\beta| \leqslant ||\alpha| - |\beta||$.

62) Ἐάν $|x| > \alpha$, ὅπου ὁ α εἶναι ἀριθμός θετικός, τότε $x > \alpha$ ἤ $x < -\alpha$. Τό ἀντίστροφον ἐπίσης εἶναι ἀληθές.

Θά ὑποθέσετε πρῶτον $x \geqslant 0$ καί δεύτερον $x < 0$.

63) Δείξατε ὅτι: $||\alpha| - |\beta|| \leqslant |\alpha - \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$

Ἔχομεν ὡς γνωστόν: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$

64) Ἐάν $\alpha = \dfrac{\gamma}{|\gamma| + |\delta|}$ καί $\beta = \dfrac{\delta}{|\gamma| + |\delta|}$ τότε $|\alpha| + |\beta| = 1$.

65) Ἐάν $|\alpha| \neq |\beta|$ δείξατε ὅτι: $\dfrac{|\alpha| - |\beta|}{||\alpha| - |\beta||} + \dfrac{||\alpha| - |\beta||}{|\alpha - \beta|} + \dfrac{|\alpha + \beta|}{|\alpha| + |\beta|} \leqslant 3$.

Ἄμεσος συνέπεια τῶν ἀσκ. (61, 63) καί τοῦ θεωρ. (13.1).

66) Εὕρετε, συμφώνως πρός τάς διαφόρους τιμάς τοῦ x τήν τιμήν τῆς παραστάσεως: $\psi = 3 + \dfrac{x-3}{|x-3|} + \dfrac{x-4}{|x-4|} + \dfrac{x-5}{|x-5|}$.

67) Εὕρετε διά ποίας τιμάς τῶν x καί ψ ἱκανοποιεῖται ἡ ἰσότης: $|x - \psi| + |x^2 - x\psi| = 0$.

Πότε τό ἄθροισμα ὁμοσήμων ἀριθμῶν εἶναι μηδέν;

68) Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος: $|\alpha|\gamma| + \gamma\beta| = |\beta|\gamma| + \alpha\gamma|$.

Θά διακρίνετε τάς περιπτώσεις $\gamma \geqslant 0$ καί $\gamma < 0$.

69) Διά ποίας πραγματικάς τιμάς τοῦ x δυνάμεθα νά ἔχωμεν: $|x - 2| < 5$;

Χρησιμοποιήσατε τήν ἄσκησιν (57).

70) Εὕρετε τάς τιμάς τοῦ ψ διά τάς ὁποίας ἰσχύει ἡ ἀνισότης $|\psi - x\omega| < \omega$ δεδομένου, ὅτι $x = 15$ καί $\omega = 16$.

Θά χρησιμοποιήσετε τήν ἄσκησιν (57).

71) Διά ποίας τιμάς τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x ἡ ἰσότης: $5|x|-3=0$ εἶναι ἀληθής;

72) Διά ποίας τιμάς τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ x εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης: $2|x|+3x-4=0$;

73) Τό αὐτό διά τήν ἰσότητα: $5x-2|x|+7=0$

74) Δείξατε, ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:

$$\psi=|2-x|+|3-x|+|4-x|+|5-x|$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν τιμῶν τοῦ x τῶν ἱκανοποιούντων τήν διπλῆν σχέσιν: $3\leq x\leq 4$.

75) Δεδομένου, ὅτι $\alpha<\beta$, νά καθορισθοῦν αἱ τιμαί τοῦ x διά τάς ὁποίας ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως: $\psi=||\alpha-x|-|\beta-x||$ εἶναι ἀνεξάρτητος αὐτῶν τῶν τιμῶν.

Θά διακρίνωμεν τάς περιπτώσεις: $x<\alpha$, $\alpha<x<\beta$, $x>\beta$.

76) Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς σχέσεως: $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu|\geqslant|\alpha_1|-|\alpha_2|-|\alpha_3|-\cdots-|\alpha_\nu|$

Ἐφαρμογή τοῦ ἀριστερά σκέλους τῆς διπλῆς σχέσεως (13.1).

Ἀσκήσεις ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ὕλης τοῦ πρώτου Κεφαλαίου.

77. Δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα $2\nu+1$ διαδοχικῶν ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν διαιρεῖται διά τοῦ $2\nu+1$.

Εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσωμεν, ὅτι, οἱ ἰσαπέχοντες τῶν ἄκρων ὅρων της ὅροι τῆς σχηματιζομένης ἀκολουθίας, ἔχουν ἄθροισμα τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων ὅρων.

78. Δείξατε, ὅτι ἕνα ρητόν καί ἀνάγωγον κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό κλάσμα $\frac{\alpha+x}{\beta+y}$, ἐάν καί ἐφόσον οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x καί y εἶναι ἰσοπολλαπλάσια ἀντιστοίχως τῶν α καί β*.

---

* Μέ τήν εὐκαιρίαν τῆς προτάσεως ταύτης ὑπενθυμίζομεν χρησίμους καί βασικάς προτάσεις τῆς ἀριθμητικῆς, αἱ ὁποῖαι μάλιστα θά ἀποδειχθοῦν καί εἰς τήν Ἄλγεβραν μεταγενεστέρως καί εἰς τό κεφάλαιον τοῦ μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων. Οἱ φυσικοί ἀριθμοί διακρίνονται εἰς τούς «πρώτους» — εἶναι ἐκεῖνοι, πού δέν ἔχουν ἄλλον διαιρέτην παρά τήν μονάδα καί τόν ἑαυτόν των — καί εἰς τούς «συνθέτους» δηλ. ἐκείνους, οἱ ὁποῖοι ἐκτός τῆς μονάδος καί τοῦ ἑαυτοῦ των ἔχουν καί ἄλλους διαιρέτας.
Ἐάν φυσικοί ἀριθμοί, ἐξεταζόμενοι πρός ἀλλήλους, δέν ἔχουν ἄλλον κοινόν

Οὕτω διά τῆς προτάσεως ταύτης συμπεραίνομεν, ὅτι διατηροῦμεν τήν ἀξίαν ἑνός ρητοῦ καί ἀναγώγου κλάσματος, ἐάν καί ἐφόσον πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν καί τούς δύο του ὅρους μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν.

διαιρέτην παρά τήν μονάδα ὀνομάζονται «πρῶτοι πρός ἀλλήλους». Οὕτω συμπεραίνομεν, ὅτι ὅλοι οἱ φυσικοί «πρῶτοι» εἶναι καί «πρῶτοι πρός ἀλλήλους»· τό ἀντίστροφον ὅμως δέν εἶναι ἀληθές.
Ἕνα ρητόν κλάσμα ὀνομάζεται «ἀνάγωγον» ὅταν δέν ἁπλοποιεῖται δηλ. δέν ἀνάγεται εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον καί μέ ὅρους μικροτέρους.
Εἶναι γνωστόν, ὅτι, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν καί τούς δύο ὅρους ἑνός ρητοῦ κλάσματος μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν διατηροῦμεν τήν ἀξίαν τοῦ κλάσματος. Εἰς τήν περίπτωσιν φυσικά ὅπου διαιροῦμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν ἁπλοποιοῦμεν τό κλάσμα.
Ἀποδεικνύεται, ὅτι, ὅταν καί τούς δύο ὅρους ἑνός ρητοῦ κλάσματος τούς διαιρέσωμεν μέ τόν μέγιστον κοινόν διαιρέτην των δηλ. μέ τόν μεγαλύτερον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν των διαιρετῶν, τότε τό κλάσμα ἀποκτᾶ ὅρους πρώτους πρός ἀλλήλους. Καί γεννᾶται τό ἐρώτημα: Ἕνα ρητόν κλάσμα μέ ὅρους πρώτους πρός ἀλλήλους εἶναι ἀνάγωγον; Δηλ. μόνον διαιροῦντες καί τούς δύο ὅρους ἑνός ρητοῦ κλάσματος μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν τό ἁπλοποιοῦμεν; Ἤ ὑφίσταται καί ἄλλος τρόπος π.χ. πρόσθεσις εἰς τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος ἴσως καί διαφορετικῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν;
Ἡ πρότασίς μας (78) αὐτό ἀκριβῶς ἀποκλείει. Καί τό ἀποκλείει διότι ἡ Ἀριθμητική δι' ἕνα ρητόν καί μέ ὅρους θετικούς - κλάσμα, ἀποδεικνύει, ὅτι ἕνα ἄλλο κλάσμα ἰσοδύναμόν του ἔχει τούς ὅρους του ἰσοπολλαπλάσια τῶν ὅρων του.
Καί διά νά ἀποδείξη τήν πρότασιν ταύτην, δηλ. ὅτι ἡ ἰσότης: $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (α, β θετικοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους) συνεπάγεται τάς ἰσότητας: $\gamma = \kappa\alpha$, $\delta = \kappa\beta$ (κ φυσικός) στηρίζεται εἰς τήν πρότασιν τοῦ Εὐκλείδου: Ἐάν ἕνας φυσικός διαιρῆ τό γινόμενον δύο ἄλλων φυσικῶν ἀριθμῶν καί εἶναι πρῶτος πρός τό ἕνα ἐξ αὐτῶν (δηλ. αὐτός καί ὁ ἕνας παράγων τοῦ γινομένου εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους) τότε θά διαιρῆ τόν ἄλλον παράγοντα τοῦ γινομένου.
Ἡ πρότασις πάλιν αὐτή τοῦ Εὐκλείδου εἶναι συνέπεια τῆς προτάσεως: Ἐάν φυσικοί ἀριθμοί πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν μέ ἕνα τρίτον καί τόν αὐτόν φυσικόν καί ὁ μ.κ.δ. των πολλαπλασιάζεται ἤ διαιρεῖται μέ αὐτόν τόν τρίτον.
Δέν μένει παρά νά ὑπενθυμίσωμεν τούς τρόπους εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο φυσικῶν ἀριθμῶν καί τάς ἰδιότητάς του ἀλλά παρέλκει τοῦτο ἐδῶ διότι πάντα ταῦτα ἀφοροῦν καί τόν μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων καί ἡ πλήρης ἔκθεσίς των θά γίνη, ὡς εἴπομεν ἀνωτέρω εἰς τό εἰδικόν κεφάλαιον τῆς Ἀλγέβρας.
Εἶναι ἀνάγκη μόνον νά ὑπενθυμίσωμεν τάς ἑξῆς ἰδιότητας τῶν πρώτων πρός ἀλλήλους ἀριθμῶν, ἐκφραζομένων διά τῶν ἀκολούθων προτάσεων.
«Ἕνας φυσικός ἀριθμός, πού εἶναι πρῶτος μέ ἕκαστον ἐκ δύο διδομένων ἀριθμῶν θά εἶναι πρῶτος καί πρός τό γινόμενόν των».
«Ἕνας φυσικός, πού διαιρεῖται δι' ἑνός ἑκάστου ἐκ διδομένων φυσικῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι ὅμως εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀνά δύο, διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενόν των».

79) Δύο κλάσματα λέγονται συμπληρωματικά, όταν τό άθροισμά των ἰσοῦται μέ τήν μονάδα. Κατόπιν τούτου, νά δειχθῆ, ὅτι, ἄν ἕνα κλάσμα εἶναι ἀνάγωγον καί τό συμπληρωματικόν του εἶναι ἀνάγωγον.

80) Εἰς μίαν διαίρεσιν φυσικῶν ἀριθμῶν ὁ διαιρέτης εἶναι ὁ 45 καί τό ὑπόλοιπον τό τετράγωνον τοῦ πηλίκου. Εὕρετε τάς δυνατάς τιμάς τοῦ διαιρετέου καί τάς ἀντιστοίχους τοῦ πηλίκου.

Θά στηριχθῆτε εἰς τήν ἰδιότητα τοῦ ὑπολοίπου εἰς μίαν διαίρεσιν φυσικῶν ἀριθμῶν.

81) Θεωροῦμεν τόν ἀριθμόν $N = \overline{3x6y20}$. Νά ὁρισθοῦν ὅλα τά ζεύγη τῶν ψηφίων x, y τά ὁποῖα εἶναι τοιαῦτα, ὥστε ὁ ἀριθμός N νά εἶναι διαιρετός διά τοῦ 36.

Δεδομένου ὅτι $36 = 4 \cdot 9$ καί ὅτι οἱ 4, 9 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, θά πρέπει νά ἐπιτύχωμεν, ὥστε ὁ ἀριθμός μας νά εἶναι διαιρετός διά τῶν 4 καί 9 διότι, ὡς γνωστόν, (βλ. τελευταίαν πρότασιν ὑποσημ. σελ. 42) μόνον τότε θά εἶναι οὗτος διαιρετός διά τοῦ 36.

82) Ἡ διαίρεσις δύο θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθμῶν δίδει τόν ἀριθμόν 356 ὡς πηλίκον καί τόν ἀριθμόν 4623 ὡς ὑπόλοιπον. Κατά πόσας μονάδας δυνάμεθα νά αὐξήσωμεν συγχρόνως τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην χωρίς νά μεταβληθῆ τό πηλίκον;

83) Εἰς μίαν διαίρεσιν θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθμῶν ὁ διαιρετέος εἶναι ὁ ἀριθμός 802 καί τό πηλίκον ὁ ἀριθμός 14. Ποῖοι ἀριθμοί εἶναι ὁ διαιρέτης καί τό ὑπόλοιπον;

84) Νά δειχθῆ, ὅτι δέν ὑπάρχει θετικός καί ἀκέραιος ἀριθμός, ὅστις, ὅταν διαιρεθῆ μέ τόν 15 νά ἀφήνη ὑπόλοιπον 6 καί ὅταν διαιρεθῆ μέ τόν 24 νά ἀφήνη ὑπόλοιπον 5 (Βλ. ἄσκ. 24).

85) Νά δειχθῆ, ὅτι τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ καί ἑνός ἀναγώγου κλάσματος εἶναι ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα.

Χρησιμοποιήσατε τήν μέθοδον τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

86) Δείξατε, ὅτι, 1ον: Τά κλάσματα: $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232323}{999999}$ εἶναι ἰσοδύναμα, 2ον: Τά κλάσματα: $\frac{27425-27}{99900}$, $\frac{27425425-27425}{99900000}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

87) Οἱ ὅροι μιᾶς ἀναλογίας εἶναι ἀριθμοί θετικοί. Δείξατε, ὅτι εἰς μίαν τοιαύτην ἀναλογίαν τό ἄθροισμα τοῦ μεγαλυτέρου καί τοῦ μικροτέρου της ὅρου εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ὅρων.

88) Ἐάν ἕνας θετικός καί ἀκέραιος ἀριθμός εἶναι ἄθροισμα τετραγώνων δύο ἄλλων ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν, καί τό διπλάσιόν του εἶναι ἐπίσης τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν.

89) Δείξατε, ὅτι τό τετράγωνον ἑνός περιττοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8 ηὐξημένον κατά 1.

Θά λάβετε τό τετράγωνον τῆς γενικῆς ἐκφράσεως τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ καί θά χρησιμοποιήσετε τήν πρότασιν, ὅτι τό γινόμενον δύο διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2.

90) Ἐάν, ἕνας φυσικός ἄρτιος ἀριθμός, εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν καί τό ἥμισύ του ἐπίσης εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἄλλων φυσικῶν ἀριθμῶν.

Θά ἐκφράση τις τό ἥμισυ τοῦ θεωρουμένου ἀριθμοῦ ὡς ἄθροισμα τετραγώνων δύο ρητῶν ἀριθμῶν καί κατόπιν θά ἀποδείξη πώς αὐτοί οἱ ρητοί ἀριθμοί εἶναι φυσικοί ἀριθμοί.

91) Ἐάν x, ψ, z ἀντιπροσωπεύουν τρεῖς φυσικούς ἀριθμούς καί ἐάν ὁ ἀριθμός $x^2+2\psi^2 z$ εἶναι τό τετράγωνον ἑνός ἄλλου φυσικοῦ ἀριθμοῦ, νά δειχθῆ, ὅτι ὁ φυσικός ἀριθμός $x^2+\psi^2 z$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἄσκησις αὐτή ἀποτελεῖ ἐφαρμογήν τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

92) Ἐάν $a_1, a_2, a_3, \ldots a_\nu$ εἶναι ἀριθμοί θετικοί καί μικρότεροι τῆς μονάδος, δείξατε ὅτι: $(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_\nu)>1-(a_1+a_2+\ldots+a_\nu)$.

Δέν ἔχετε παρά νά χρησιμοποιήσετε τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

93) Δείξατε, ὅτι οἱ θετικοί ἀριθμοί: $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα: $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_\nu)>1+a_1+a_2+\ldots+a_\nu$.

Εἰς τήν ἄσκησιν ταύτην δέν ἐνδείκνυται μόνον ἡ μέθοδος τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς, ἀλλά τήν συνιστῶμεν διά νά εἴμεθα συνεπεῖς πρός τήν ἐξετασθεῖσαν ὕλην.

94) Δείξατε, ὅτι ἰσότης $a+\sqrt{\beta}=\gamma+\sqrt{\delta}$ ὅπου οἱ a, β, γ, δ εἶναι ῥητοί καί οἱ β, δ μή τέλεια τετράγωνα ῥητῶν ἀριθμῶν συνεπάγεται τάς ἰσότητας: $a=\gamma$, $\beta=\delta$.

Πράγματι, ἔχομεν: $\sqrt{\beta}=\gamma-a+\sqrt{\delta}$. Καί ὑψοῦντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς εἰς τό τετράγωνον, λαμβάνομεν: $\beta=(\gamma-a)^2+\delta+2(\gamma-a)\sqrt{\delta}$ ἤ $\beta-\delta-(\gamma-a)^2=2(\gamma-a)\sqrt{\delta}$. Ἡ τελευταία αὐτή ἰσότης συνεπάγεται τόν μηδενισμόν τῆς διαφορᾶς $\gamma-a$, διότι, ἐάν $\gamma-a\neq 0$ τότε θά ἔχωμεν καί: $\sqrt{\delta}=\dfrac{\beta-\delta-(\gamma-a)^2}{2(\gamma-a)}$ δηλ. ἰσότητα ἀρρήτου καί ῥητοῦ ἀριθμοῦ. Ἐφεξῆς ὁ σπουδαστής ἄς συμπληρώσῃ τήν λύσιν.

95) Δείξατε, ὅτι ὁ ἀριθμός $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-2}$ εἶναι ἀσύμμετρος.

Χρησιμοποιήσατε τήν εἰς ἄτοπον ἀπαγωγήν.

96) Δείξατε, ὅτι, ἐάν ὁ λ εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμός καί ὁ $\frac{1}{\lambda}$ εἶναι ἐπίσης ἀσύμμετρος ἀριθμός.

97) Ἐάν a καί β εἶναι ῥητοί ἀριθμοί καί ὁ β εἶναι θετικός καί μή τετράγωνον ῥητοῦ ἀριθμοῦ, ὁ ἀριθμός $(a+\sqrt{\beta})^2$ εἶναι ἀριθμός ἀσύμμετρος.

98) Εὕρετε τήν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα ἡ παράστασις: $\dfrac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$ εἶναι ῥητός ἀριθμός δεδομένου, ὅτι οἱ a, β, γ, δ, εἶναι ῥητοί ἀριθμοί καί ὁ x ἀσύμμετρος ἀριθμός.

99) Συγκρίνατε τούς ἀριθμούς $15+\sqrt{17}$ καί $19,12$.

Συγκρίνομεν τά τετράγωνά των (Βλ. 12 1. στ.)

100) Τό αὐτό διά τούς ἀριθμούς: $\sqrt[3]{3,52424\ldots}$ καί $\frac{8}{5}$.

101) Ἐάν a καί β εἶναι δύο φυσικοί ἀριθμοί, δείξατε, ὅτι δι' οἱονδήποτε φυσικόν ν τό πηλίκον τοῦ $a-1$ διά τοῦ β καί τό πηλίκον τοῦ $a\beta^{\nu-1}-1$ διά τοῦ β^{ν} εἶναι ἴσα.

Δεχόμεθα τήν ἰσότητα: $a-1=\beta.\pi+\upsilon$ (1) ὅπου φυσικά $\upsilon\leq\beta-1$. Τώρα πρέπει νά δείξωμεν ὅτι: $a.\beta^{\nu-1}-1=\beta^{\nu}.\pi+Y$ (2). Ἡ ἰσότης (2) εἶναι συνέπεια τῆς (1). Πῶς λοιπόν θά τήν δημιουργήσωμεν; Δέν ἔχομεν παρά νά άντικαταστήσωμεν είς τήν έκφρασιν $\alpha\beta^{\nu-1}-1$ τό α μέ τό ίσον του άπό τήν (1).

102) Είς ένα άριθμητικόν σύστημα τυχούσης βάσεως α μεγαλυτέρας τοῦ 2 λαμβάνομεν τόν άριθμόν $\alpha-1$. Δείξατε, ότι οἱ άριθμοί: $2(\alpha-1)$ καί $(\alpha-1)^2$ γράφονται είς τό θεωρούμενον άριθμητικόν σύστημα μέ τά αύτά ψηφία άλλά τοποθετημένα κατά τάξιν άντίστροφον.

$$(\alpha-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1=\alpha(\alpha-2)+1, \text{ ἐνῶ } 2(\alpha-1)=\alpha+(\alpha-2).$$

'Εξηγήσατε άπό τόν τρόπον αύτόν τῆς γραφῆς τῶν θεωρουμένων άριθμῶν τήν άλήθειαν τῆς ύπό άπόδειξιν προτάσεως (βλ. έδ.10)

103) α εἶναι ή βάσις ένός άριθμητικοῦ συστήματος. Τά γινόμενα τοῦ $\alpha-1$ έπί δύο άριθμούς, πού δέν εἶναι οἱ α καί 1 άλλά τῶν όποίων τό ἄθροισμα εἶναι $\alpha+1$, γράφονται μέ τά αύτά ψηφία άλλά τοποθετημένα κατά τάξιν άντίστροφον.

104) Πῶς πρέπει νά έκλεγοῦν δύο φυσικοί άριθμοί, οἵτινες ἔχουν ἄθροισμα s, ὥστε τό γινόμενόν των νά εἶναι τό μεγαλύτερον δυνατόν. 'Εφαρμογαί 1ον $s=14$, 2ον $s=15$.

Λάβετε ὑπ' ὄψιν τήν ίσότητα: $(x+\psi)^2-(x-\psi)^2=4x\psi$ όπου τά x, ψ άντιπροσωπεύουν τούς ζητουμένους φυσικούς άριθμούς.

105) Ένας φυσικός άριθμός γράφεται 111011 είς τό δυαδικόν σύστημα άριθμήσεως. Γράψετέ τον 1ον είς τό τριαδικόν σύστημα άριθμήσεως καί 2ον είς τό δωδεκαδικόν.

106) 'Εάν: $\dfrac{\psi+z}{p\beta+q\gamma}=\dfrac{z+x}{p\gamma+q\alpha}=\dfrac{x+\psi}{p\alpha+q\beta}$, δείξατε ότι:

$$\frac{2(x+\psi+z)}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{(\beta+\gamma)x+(\alpha+\gamma)\psi+(\alpha+\beta)z}{\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta}$$

107) 'Εάν: $\dfrac{2\psi+2z-x}{\alpha}=\dfrac{2z+2x-\psi}{\beta}=\dfrac{2x+2\psi-z}{\gamma}$ δείξατε ότι:

$$\frac{x}{2\beta+2\gamma-\alpha}=\frac{\psi}{2\gamma+2\alpha-\beta}=\frac{z}{2\alpha+2\beta-\gamma}$$

108) 'Εάν: $\lambda(\mu\psi+\nu z-\lambda x)=\mu(\nu z+\lambda x-\mu\psi)=\nu(\lambda x+\mu\psi-\nu z)$ δείξατε ότι: $\dfrac{\psi+z-x}{\lambda}=\dfrac{z+x-\psi}{\mu}=\dfrac{x+\psi-z}{\nu}$

109) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, ἐνῶ οἱ ἀριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοί, δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος:

$$\frac{\alpha}{\delta}=\sqrt{\frac{\alpha^5+\beta^2\gamma^2+\alpha^3\gamma^2}{\beta^4\gamma+\delta^4+\beta^2\gamma\delta^2}}$$

110) Ἐάν $\frac{x}{\lambda(\mu\beta+\nu\gamma-\lambda\alpha)}=\frac{\psi}{\mu(\nu\gamma+\lambda\alpha-\mu\beta)}=\frac{z}{\nu(\lambda\alpha+\mu\beta-\nu\gamma)}$ τότε:

$$\frac{\lambda}{x(\beta y+\gamma z-\alpha x)}=\frac{\mu}{y(\gamma z+\alpha x-\beta y)}=\frac{\nu}{z(\alpha x+\beta y-\gamma z)}$$

111) Δίδονται $3\nu+2$ τό πλῆθος ἀριθμοί: $a_1, a_2, \ldots a_{3\nu+2}$ (ν φυσικός ἀριθμός) τοιοῦτοι, ὥστε $a_1=a_2=1$ καί $a_{\mu+1}=a_\mu+a_{\mu-1}$ ($\mu=2,3,\ldots 3\nu+1$). Δείξατε τάς ἰσότητας:

1ον $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_\nu^2=a_\nu \cdot a_{\nu+1}$ 2ον $a_3+a_6+\cdots+a_{3\nu}=\frac{1}{2}(a_{3\nu+2}-1)$

Δι' ἀμφοτέρας τάς ἰσότητας χρησιμοποιήσατε τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

112) Τό ἄθροισμα τῶν κλασμάτων: $\frac{1}{\nu+1}, \frac{1}{\nu+2}, \ldots \frac{1}{2\nu}$ (ν φυσικός) εἶναι μεγαλύτερον ἀπό $\frac{1}{2}$.

Ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον τῶν κλασμάτων τούτων μέ τό $\frac{1}{2\nu}$, τί ἄθροισμα δημιουργοῦμεν ὡς πρός τό ἀρχικόν τοιοῦτον;

113) Ἐάν οἱ ἀριθμοί a καί β εἶναι ὁμόσημοι τότε: $\frac{a}{\beta}+\frac{\beta}{a}\geqslant 2$.

114) Ἐάν οἱ ἀριθμοί $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ εἶναι ὁμόσημοι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)\cdot\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_\nu}\right)\geqslant \nu^2.$$

Δύνασθε νά ἀποδείξετε τήν ἀλήθειαν τῆς ἀνωτέρω σχέσεως χρησιμοποιοῦντες τήν ἄσκησιν (113), ἀλλά δύνασθε νά μεταχειρισθῆτε καί τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

115) Διά ποίαν τιμήν τοῦ ν εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης;

$$\Big|\,|3,17-\sqrt{3}|-|\sqrt{3}-2|-5\,\Big|=2,23+10\cdot(-0,4)^\nu$$

116) Ἁπλοποιήσατε τήν παράστασιν: $\frac{x^2+2|x|-3|x|-6}{x^2-9}$

117) Δείξατε, ὅτι διά πραγματικούς ἀριθμούς a καί β ἔχομεν: $a\beta\geq a|\beta|+\beta|a|-|a\beta|$.

118) Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων: $\big||x|+x|-|x-|x|\big|=2x$

$||\alpha+\beta|+(\alpha+\beta)|+|\alpha-|\alpha||+|\beta-|\beta||=||\alpha+\beta|-(\alpha+\beta)|+||\alpha|+\alpha|+||\beta|+\beta|$

119) Ἐάν τεθῇ $\psi=\dfrac{x}{1-|x|}$ ἐνῶ $|x|>1$ θά ἔχωμεν ἐπίσης: $x=\dfrac{\psi}{1-|\psi|}$.

120) Δείξατε, ὅτι ἡ ἰσότης: $\psi(1+|x|)=1+x+|x|$, συνεπάγεται τήν ἰσχύν τῶν σχέσεων: $|\psi-1|<1$, $x[1-|\psi-1|]=\psi-1$ Καί ἀντιστρόφως: ἡ ἰσχύς τῶν δύο τελευταίων σχέσεων συνεπάγεται τήν ἰσχύν τῆς ἀρχικῆς ἰσότητος.

120.1) Ἐάν $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\gamma}{\delta}=\dfrac{\varepsilon}{\zeta}$ δείξατε ὅτι:

1ον. $$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma+\delta}+\frac{\varepsilon^2+\zeta^2}{\varepsilon+\zeta}=\frac{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^2+(\beta+\delta+\zeta)^2}{\alpha+\gamma+\varepsilon+\beta+\delta+\zeta}$$

2ον. $$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\gamma^2}+\frac{\gamma^3+\delta^3}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\varepsilon^3+\zeta^3}{\varepsilon^2+\zeta^2}=\frac{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^3+(\beta+\delta+\zeta)^3}{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^2+(\beta+\delta+\zeta)^2}$$

120.2) Ἀπό τάς ἰσότητας:

$$\frac{\dfrac{\mu}{(\alpha-\beta)^2}+\dfrac{\nu}{(\alpha+\gamma)^2}}{\alpha}=\frac{\dfrac{\nu}{(\beta+\gamma)^2}-\dfrac{\lambda}{(\alpha-\beta)^2}}{\beta}=\frac{\dfrac{\lambda}{(\alpha+\gamma)^2}+\dfrac{\mu}{(\beta+\gamma)^2}}{\gamma}$$

εἰς τάς ὁποίας οἱ ἀριθμηταί καί οἱ παρονομασταί δέν εἶναι μηδενικοί ἐξάγονται αἱ ἰσότητες: $\alpha\lambda+\beta\mu=\gamma\nu$ $\quad \dfrac{\alpha}{(\beta+\gamma)^2}=\dfrac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}$

120.3) Ἐάν τοποθετήσωμεν κατά σειράν μεγέθους ὅλα τά ἀνάγωγα κλάσματα, τά ὁποῖα εἶναι μικρότερα ἀπό τήν μονάδα καί τῶν ὁποίων οἱ παρονομασταί εἶναι μικρότεροι ἀπό ἕνα γνωστόν ἀριθμόν, τό ἄθροισμα δύο κλασμάτων, ἰσαπεχόντων τῶν ἀκραίων κλασμάτων, εἶναι σταθερόν (Οἱ ὅροι τῶν κλασμάτων ὑποτίθενται θετικοί).

120.4) Οἱ φυσικοί ἀριθμοί Α, Β, Γ ἔχουν ἀντιστοίχως α, β, γ ψηφία. Νά εὑρεθῇ μεταξύ τίνων ἀριθμῶν περιλαμβάνεται ὁ ἀριθμός τῶν ψηφίων τοῦ $\left(\dfrac{A\cdot B}{\Gamma}\right)^{\nu}$

120.5) Νά δειχθῇ, ὅτι εἰς τήν ἀτέρμονα ἀκολουθίαν: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, . . . εἰς τήν ὁποίαν οἱ δύο πρῶτοι ὅροι εἶναι οἱ 1 καί 2 καί ἕκαστος τῶν ἄλλων ὅρων προκύπτει ἄν προσθέσωμεν τούς δύο προηγουμένους ὅρους, ὑπάρχουν τέσσαρες ἤ τό πολύ πέντε ὅροι, πού ἔχουν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν Κ ψηφίων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄
Λογισμός τῶν Ἀλγεβρικῶν Παραστάσεων
Μονώνυμα - Πολυώνυμα
Ἀλγεβρικαί παραστάσεις

14. **Αἱ πράξεις τῆς Ἀλγέβρας** εἶναι: Ἡ Πρόσθεσις, ἡ Ἀφαίρεσις, ὁ Πολλαπλασιασμός καί ἡ Διαίρεσις. Δυνάμεθα εἰς αὐτάς νά προσθέσωμεν τήν ὕψωσιν εἰς δύναμιν, ἥτις εἶναι μία διαδοχή πολλαπλασιασμῶν καί τήν ἐξαγωγήν μιᾶς ρίζης.

14.1. Ὀνομάζομεν **Ἀλγεβρικήν παράστασιν** τήν ἀναγραφήν ἑνός λογισμοῦ πρός πραγμάτωσιν ἐπί ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι συνολικά ἤ ἐν μέρει εἶναι γραμματικοί (γενικευμένοι), ἐφόσον αἱ σημειούμεναι λογιστικαί πράξεις εἶναι αἱ ἀνωτέρω ἀλγεβρικαί.

14.2. **Ἀριθμητική τιμή** ἀλγεβρικῆς παραστάσεως διά τινας συγκεκριμένας τιμάς τῶν γραμμάτων, τά ὁποῖα αὐτή περικλείει, ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος προκύπτει, ὅταν τά ἐν τῇ παραστάσει γράμματα ἀντικατασταθοῦν ὑπό τῶν διδομένων τιμῶν καί ἐκτελεσθοῦν αἱ εἰς τήν παράστασιν σημειούμεναι πράξεις. Εἶναι δυνατόν μία παράστασις νά μή ἔχῃ ἀριθμητικήν τιμήν δι' ὡρισμένας τιμάς τῶν γραμμάτων της. Π.χ. ἡ παράστασις: $3x+\sqrt{x-7}$ δέν ἔχει νόημα διά $x=5$ καί τοῦτο διότι διά $x=5$ ἡ ἔκφρασις $x-7$ γίνεται -2, ἐνῶ οὐδείς πραγματικός ἀριθμός ἔχει τετράγωνον -2. Ἐπίσης ἡ παράστασις: $\sqrt{-x^2-1}$ δι' οἱανδήποτε πραγματικήν τιμήν δέν ἔχει νόημα διά τόν αὐτόν λόγον. Ἀκόμη ἡ παράστασις: $\frac{x-2}{x+3}-5$ δέν ἔχει νόημα διά $x=-3$ (βλ. 3.2 ὑποσημείωσιν)*.

---

* Συγκεκριμένη τιμή εἶναι ἡ ὀνοματισμένη τιμή, ἡ μή γραμματική. Ἐκείνη, πού δύναται νά ἀντιπροσωπεύῃ τόν ἑαυτόν της μόνον.
Τό συγκεκριμένον ὅμως καί τό ἀφηρημένον συμπλέκονται. Δέν εἶναι δυνατόν νά ἐννοήση κανείς τήν ἀφηρημένην ἔκφρασιν τοῦ ἀριθμοῦ, ἐάν προηγουμένως δέν ἐγνώριζεν

14.3. Εἴδη ἀλγεβρικῶν παραστάσεων. Τάς παραστάσεις διακρίνομεν εἰς Ρητάς, Ἀρρήτους, Ἀκεραίας καί Κλασματικάς.
Ρητή ὀνομάζεται ἡ ἀλγεβρική παράστασις, ἥτις δέν ἔχει ὑπό ριζικόν γράμμα.
Ἄρρητος ὀνομάζεται ἡ παράστασις, ἡ ὁποία ἔχει ὑπό ριζικόν γράμμα.
Ἀκεραία ὀνομάζεται ἡ παράστασις, ὅταν δέν εἶναι ἐν αὐτῇ σημειωμένη διαίρεσις διά γράμματος.
Κλασματική ὀνομάζεται ἡ παράστασις εἰς τήν ὁποίαν ἔχει σημειωθῆ διαίρεσις διά γράμματος.

Ἡ παράστασις: $\dfrac{-3x^2\psi\sqrt{5}}{2}$ εἶναι καί ρητή καί ἀκεραία.

Ἡ παράστασις: $\dfrac{-2x^2\psi-\sqrt{\omega\varphi}}{5}$ εἶναι ἄρρητος καί ἀκεραία.

Ἡ παράστασις: $\dfrac{2x^3-5\omega^2\sqrt{\psi}}{2x-\psi}$ εἶναι ἄρρητος καί κλασματική.

14.4. Μία παράστασις, πού ἀνήκει εἰς μίαν τῶν ἀνωτέρω τεσσάρων κατηγοριῶν χαρακτηρίζεται εἰδικώτερον ὡς Μονώνυμον* ἤ ὄχι τοιοῦτον.
Θά λέγεται μία ἀλγεβρική παράστασις μονώνυμον, ἐάν τά σημάδια (+) καί (−) δέν εἰσέρχονται εἰς αὐτήν ὡς σημάδια προσθέσεως ἤ ἀφαιρέσεως.
Οὕτω εἰς τά ἀνωτέρω παραδείγματα παραστάσεων, μόνον ἡ πρώτη ἐξ αὐτῶν εἶναι μονώνυμον, ἐνῶ αἱ ἄλλαι δύο παραστάσεις δέν εἶναι μονώνυμα.

τόν ἀριθμόν εἰς τάς συγκεκριμένας του μορφάς.
Ὑπάρχει ὅμως περίπτωσις, ὅπου ἕνας γραμματικός ἀριθμός − παρά τό γεγονός, ὅτι δυνάμεθα νά τοῦ ἀποδώσωμεν περισσοτέρας τῆς μιᾶς συγκεκριμένας τιμάς ἤ καί τήν τυχοῦσαν συγκεκριμένην τιμήν − νά θεωρεῖται συγκεκριμένη τιμή ἑνός ἄλλου γράμματος τό ὁποῖον ἐμφανίζεται μέ αὐτόν συνδεδεμένον εἰς μίαν ἀλγεβρικήν παράστασιν − ἔκφρασιν.
Οὕτω, ἐκεῖ ὅπου λέγομεν ἀνωτέρω διά $x=5$ ἠδυνάμεθα νά ἐλέγομεν διά $x=\alpha$ ὅπου $\alpha<5$. Ἡ τιμή αὐτή α ἐν προκειμένῳ εἶναι συγκεκριμένη τιμή τοῦ γράμματος x.
* Ἡ λέξις μονώνυμον προέρχεται ἀπό τάς λέξεις μόνος καί νόμος ἡ ὁποία ἐσήμαινεν τό τμῆμα γῆς τό ὁποῖον ἀπεδίδετο εἰς ἕν ἄτομον πρός βοσκήν ἤ καλλιέργειαν. Ὁ καθείς δηλ. εἶχε τόν νόμον του.
Ἕνα λοιπόν μονώνυμον εἶναι ἕνα μόνον σύνολον, μία μόνη σύνθεσις.

Ἐπίσης αἱ παραστάσεις: $-5\alpha^2\beta\gamma$, $\frac{4}{5}\alpha\beta\sqrt{\chi\psi}$, $\frac{3\alpha\beta\gamma^2}{\delta\varepsilon}$ εἶναι μονώνυμα.
Εἰς τό πρῶτον ἐξ αὐτῶν τό σημάδι (–) τίθεται διά νά χαρακτηρίσῃ τόν ἀριθμητικόν παράγοντα τόν ὁποῖον περιέχει τό μονώνυμον καί ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται συντελεστής τοῦ μονωνύμου. Οἱ συντελεσταί τῶν δύο ἑπομένων μονωνύμων εἶναι ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί $\frac{4}{5}$ καί 3.
Διά τά μονώνυμα ἐπίσης: $\frac{-\chi^2\psi}{\omega}$ καί $\frac{\chi\psi\sqrt{\omega}}{\varphi}$ συντελεσταί θεωροῦνται ἀντιστοίχως οἱ ἀριθμοί –1 καί 1.
Ἕκαστον λοιπόν μονώνυμον ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη: Τόν συντελεστήν του καί τό γραμματικόν του μέρος.
Καί μονώνυμα, πού διαφέρουν, ἄν διαφέρουν, μόνον κατά τόν συντελεστήν ὀνομάζονται ὅμοια.
Τό ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων ὁμοίων μονωνύμων εἶναι ἕνα μονώνυμον ὅμοιον πρός τά δοθέντα καί τό ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστήν τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων μονωνύμων.
14.4.1. Ἀπό τά ἀνωτέρω ἀναφερθέντα τέσσερα μονώνυμα τά: $\frac{-3\chi^2\psi\sqrt{5}}{2}$ καί $-5\alpha^2\beta\gamma$ εἶναι μονώνυμα ρητά καί ἀκέραια (14.3).
Τά ἀκέραια, καί ρητά μονώνυμα εἶναι αἱ ἀλγεβρικαί παραστάσεις, εἰς τάς ὁποίας αἱ μόναι πράξεις ἐπί γραμμάτων των εἶναι ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ ὕψωσις εἰς θετικήν καί ἀκεραίαν δύναμιν.
Ἔτσι τό ἀκέραιον καί ρητόν μονώνυμον παρουσιάζει τήν γενικήν ἔκφρασιν: $\alpha x_1^{\mu_1}\cdot x_2^{\mu_2}\ldots x_\nu^{\mu_\nu}$, ὅπου α (συντελεστής) εἶναι ὁ οἱοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός καί τά $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\nu$ ἀριθμοί θετικοί καί ἀκέραιοι ἤ καί μηδέν.
Τό ἀκέραιον καί ρητόν μονώνυμον θά τό ἀναφέρωμεν ἐφεξῆς μόνον μέ τό ἐπίθετον ἀκέραιον χάριν συντομίας. Ὅταν λοιπόν θά λέγωμεν ἀκέραιον μονώνυμον θά ἐννοοῦμεν, κατά σύμφωνίαν, καί ρητόν. Ἡ ἔκφρασις: αx^μ ὅπου α ὁ οἱοσδήποτε πραγματικός ἀριθμός καί μ θετικός καί ἀκέραιος ἀριθμός ἤ μηδέν εἶναι ἡ γενική μορφή ἀκεραίου μονωνύμου μέ ἕνα μόνον γράμμα.
14.4.2. Βαθμός ἀκεραίου μονωνύμου ὀνομάζεται τό ἄθροι-

σμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων του. Οὕτω εἰς τάς δύο ἀνωτέρω γενικάς ἐκφράσεις τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου ὁ βαθμός εἶναι ἀντιστοίχως: $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu$ καί μ. Δηλ. εἰς τάς δύο ἀνωτέρω μορφάς τοῦ μονωνύμου δέν ἐλήφθη ὑπ' ὄψιν ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἰς τόν καθορισμόν τοῦ βαθμοῦ τῶν μονωνύμων, διότι τό α ἀντιπροσωπεύει συγκεκριμένον ἀριθμόν καί δέν ἀποτελεῖ γραμματικόν παράγοντα τῶν μονωνύμων.

Λογισμός Μονωνύμων

15. **Ἄθροισμα ἀκεραίων Μονωνύμων.** **Ὁρισμός**: Τό ἄθροισμα πολλῶν ἀκεραίων μονωνύμων εἶναι ἡ ἀλγεβρική παράστασις, τήν ὁποίαν μορφοῦμεν, γράφοντες τά δεδομένα μονώνυμα τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου, ἀνεξαρτήτως τάξεως, καί συνοδεύοντες αὐτά μέ τό σημάδι (+). Ὅταν μερικά ἀπό τά μονώνυμα εἶναι ὅμοια, τά ἀνάγομεν εἰς ἕν (14.3). Αὐτή τήν πρᾶξιν (τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων μονωνύμων εἰς ἕν) τήν ὀνομάζομεν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων.
Οὕτω τό ἄθροισμα τῶν μονωνύμων: $5x^3\psi^2\omega$, $-2x^2\psi$, $5x^2\psi$, $-3x\psi$, 7 εἶναι: $5x^3\psi^2\omega+(-2x^2\psi)+5x^2\psi+(-3x\psi)+7$ πού δυνάμεθα νά τό γράψωμεν: $5x^3\psi^2\omega-2x^2\psi+5x^2\psi-3x\psi+7$ ἤ καί: $5x^3\psi^2\omega+3x^2\psi-3x\psi+7$, μετά τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων μονωνύμων (ὅρων).
Ἡ παράστασις, ἥτις ἐκπροσωπεῖ τό ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, ὀνομάζεται ἀκέραιον πολυώνυμον.
Τά διάφορα μονώνυμα, τά ὁποῖα συνθέτουν τό ἀκέραιον πολυώνυμον ὀνομάζονται ὅροι τοῦ πολυωνύμου.

15.1. **Διαφορά δύο ἀκεραίων μονωνύμων.** Διαφορά ἑνός μονωνύμου Β ἀπό ἄλλο μονώνυμον Α ὀνομάζεται τό ἄθροισμα τοῦ μονωνύμου Α μέ τό ἀντίθετον* μονώνυμον τοῦ Β.

15.2. **Γινόμενον** δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων μονωνύ-

---

* Ὀνομάζομεν οὕτω τό μονώνυμον, πού μορφοῦται ἀλλάζοντες τό πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ τοῦ μονωνύμου Β.

μων ὀνομάζομεν τό μονώνυμον, τό ὁποῖον ἔχει συντελεστήν τό γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν μονωνύμων καί ἕκαστον γράμμα μέ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν αὐτοῦ τοῦ γράμματος εἰς ὅλα τά πολλαπλασιαζόμενα μονώνυμα.

15.3. **Πηλίκον** ἑνός ἀκεραίου μονωνύμου Α μέ ἕνα ἄλλο ἀκέραιον μονώνυμον Β ὀνομάζεται ἕνα τρίτον ἀκέραιον μονώνυμον Γ, ἐάν ὑπάρχη, τοῦ ὁποίου τό γινόμενον ἐπί τό Β νά δίδη τό Α.

Ἡ ὕπαρξις τοῦ μονωνύμου Γ προϋποθέτει: 1ον Τό Β νά μήν περιέχη γράμματα, τά ὁποῖα δέν περιέχει τό Α καί 2ον Τό Β νά μήν περιέχη γράμματα ὑψωμένα εἰς ἐκθέτην μεγαλύτερον ἐκείνου πού τά ἴδια αὐτά γράμματα ἔχουν εἰς τό Α.

Τό μονώνυμον Γ, ὅταν ὑπάρχη, ἔχει συντελεστήν τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Α διά τοῦ συντελεστοῦ τοῦ Β καί ἕκαστον γράμμα τοῦ Α μέ ἐκθέτην τήν διαφοράν τῶν ἐκθετῶν του εἰς τά Α καί Β.

15.3.1. **Σημείωσις**. Εἰς περίπτωσιν, πού δέν πληροῦνται καί αἱ δύο προϋποθέσεις διά τήν ὕπαρξιν πηλίκου δύο ἀκεραίων μονωνύμων (ἐδ. 15.3) Α καί Β παρουσιάζομεν τό πηλίκον των ὑπό τήν κλασματικήν μορφήν $\frac{A}{B}$ καί διαβάζομεν: Α διά Β.

Ὁποιονδήποτε καί ἄν εἶναι τό σύστημα* τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων τῶν δύο μονωνύμων, ἐφ' ὅσον αἱ τιμαί αὗται δέν μηδενίζουν τόν παρονομαστήν, ἡ ἀριθμητική τιμή αὐτοῦ τοῦ κλάσματος εἶναι τό πηλίκον τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ μονωνύμου, πού εἶναι διαιρετέος, διά τῆς ἀριθμητικῆς τιμῆς τοῦ μονωνύμου, πού εἶναι διαιρέτης. Αὐτό θά συμβαίνη καί ἐάν διαιρέσωμεν τά μονώνυμα Α καί Β δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ μονωνύμου Γ, ἐάν φυσικά εἶναι τοῦτο δυνατόν.

Οὕτω τά κλάσματα: $\frac{3\alpha^3\beta^2\gamma}{5\alpha^2\beta\gamma\delta}$, $\frac{3\alpha\beta}{5\delta}$ ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν διά πᾶν σύστημα διδομένων τιμῶν εἰς τά α, β, γ, δ.

---

*Ἐάν ἕνα μονώνυμον ἔχει τρία π.χ. γράμματα, μία τριάς συγκεκριμένων τιμῶν τῶν γραμμάτων του (ἀπό μία δι' ἕκαστον τούτων) χαρακτηρίζεται ὡς σύστημα τιμῶν.

Συμπέρασμα: Ὅλαι αἱ πράξεις ἐπί μονωνύμων ὡρίσθησαν, ὥστε αἱ προκύπτουσαι παραστάσεις, ὡς ἐξαγόμενα αὐτῶν τῶν πράξεων, νά ἔχουν τό ἄθροισμα, τήν διαφοράν, τό γινόμενον, τό πηλίκον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν θεωρουμένων μονωνύμων διά πᾶν αὐθαίρετον σύστημα συγκεκριμένων τιμῶν τῶν γραμμάτων των, ὡς ἀριθμητικήν των τιμήν.

Λογισμός Πολυωνύμων

16. Εἴδομεν ἀνωτέρω, ὅτι τό ἀκέραιον πολυώνυμον εἶναι τό ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων. Ἐάν μετά τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων τό ἀκέραιον πολυώνυμον περιορίζεται εἰς ἕνα μόνον ὅρον αὐτό τό ἀκέραιον πολυώνυμον δέν εἶναι παρά ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον. Ὅταν τό ἀκέραιον πολυώνυμον περιορίζεται εἰς δύο ὅρους τότε τό πολυώνυμον τοῦτο ὀνομάζεται διώνυμον, ὅταν περιορίζεται εἰς τρεῖς ὅρους ὀνομάζεται τριώνυμον, διά περισσοτέρους ὅμως ὅρους ὀνομάζεται ἁπλῶς πολυώνυμον *.

16.1. **Βαθμός ἑνός Πολυωνύμου**, εἰς τό ὁποῖον ἔχει πραγματοποιηθεῖ ἡ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων, ὀνομάζεται ὁ μέγιστος τῶν βαθμῶν τῶν μονωνύμων του.

16.2 **Ὁμογενῆ Πολυώνυμα**. Λέγομεν, ὅτι ἕν πολυώνυμον** εἶναι ὁμογενές ν βαθμοῦ ὁμογενείας, ἐάν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ν.

Οὕτω τό πολυώνυμον: $2x^2-5x\psi+4\psi^2$ εἶναι ὁμογενές πολυώνυμον 2ου βαθμοῦ ὁμογενείας. Ἐπίσης τό πολυώνυμον: $\alpha x^2\psi+3\beta x\psi^2+5\gamma\psi^3$ εἶναι ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ ὁμογενείας, ἄν τά γράμματα α, β, γ

---

* Λέγοντες μόνον "Πολυώνυμον" ἐννοοῦμεν "ἀκέραιον πολυώνυμον" καί ἐφεξῆς τό ἀκέραιον πολυώνυμον θά τό ἀναφέρωμεν μετά ἤ ἄνευ τοῦ χαρακτηρισμοῦ του ὡς ἀκεραίου.
Ἡ ἄλγεβρα ἀσχολεῖται μέ τό ἀκέραιον πολυώνυμον καί τά ἐκ τῆς σπουδῆς αὐτοῦ συμπεράσματα χρησιμοποιεῖ διά τήν σπουδήν καί τῶν ἄλλου εἴδους ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

** Εἰς τό ὁποῖον ἔχει πραγματοποιηθεῖ πᾶσα ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων. Καί ἐφεξῆς λέγοντες "Πολυώνυμον" θά ἐννοῦμεν, ὅπως εἰς τά προηγούμενα ἐδηλώσαμεν, ἀκέραιον ἀλλά καί εἰς τό ὁποῖον ἔχει γίνει πᾶσα ἀναγωγή ὁμοίων ὅρων, ἐφόσον ἐπαρουσιάσθησαν ὅμοιοι ὅροι.

παίζουν τόν ρόλον συντελεστῶν καί ὄχι γραμματικῶν παραγόντων.

Εἰς τά ἑπόμενα θά δώσωμεν τόν ὁρισμόν τῆς ὁμογενείας ἑνός πολυωνύμου κατά ἕνα ἄλλον τρόπον, ὁ ὁποῖος μᾶς εὐκολύνει εἰς τάς ἐφαρμογάς.

16.3. Πολυώνυμα διατεταγμένα. Ἕνα πολυώνυμον λέγεται διατεταγμένον κατά κατιούσας ἤ ἀνιούσας δυνάμεις ἑνός γράμματος, ἐάν οἱ ὅροι του εἶναι γεγραμμένοι κατά τοιαύτην τάξιν, ὥστε οἱ ἐκθέται αὐτοῦ τοῦ γράμματος νά βαίνουν σταθερῶς ἐλαττούμενοι ἤ αὐξανόμενοι.

16.4. Πολυώνυμον ἀντίθετον δοθέντος πολυωνύμου. Ὀνομάζομεν οὕτω τό πολυώνυμον, τό ὁποῖον μορφοῦται, ἀλλάζοντες τό πρόσημον τοῦ συντελεστοῦ ἑνός ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ δοθέντος πολυωνύμου.

16.5. Ὅπως ἐπράξαμεν διά τά μονώνυμα, θά ὁρίσωμεν τάς πράξεις ἐπί πολυωνύμων κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε αἱ μορφούμεναι ἀλγεβρικαί παραστάσεις, ὡς ἐξαγόμενα αὐτῶν τῶν πράξεων, νά λαμβάνουν ἀριθμητικήν τιμήν: τό ἄθροισμα, ἤ τήν διαφοράν, ἤ τό γινόμενον ἤ τό πηλίκον τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων διά τό αὐτό αὐθαίρετον σύστημα τιμῶν τῶν γραμμάτων των.

Αὐτοί οἱ ὁρισμοί θά ἀφοροῦν καί τήν περίπτωσιν, ὅπου τό ἕνα ἀπό τά δύο θεωρούμενα πολυώνυμα εἶναι ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον καί αὐτό διότι ἕνα ἀκέραιον μονώνυμον δύναται νά θεωρηθῇ ὡς ἕνα πολυώνυμον ἑνός μόνον ὅρου.

16.5.1. Πρόσθεσις Πολυωνύμων. Ὁρισμός. Τό ἄθροισμα δύο ἤ περισσοτέρων πολυωνύμων εἶναι τό πολυώνυμον, τό ὁποῖον προκύπτει ὅταν προσθέσωμεν ὅλα τά μονώνυμα, τά ὁποῖα συνθέτουν τά δοθέντα πολυώνυμα.

Εἶναι φανερόν πώς ὁ βαθμός τοῦ ἀθροίσματος πολυωνύμων δέν δύναται νά ὑπερβῇ τόν βαθμόν αὐτῶν τῶν πολυωνύμων. Καί μάλιστα, ἔπειτα ἀπό τάς ἀναγωγάς, ἐνδέχεται ὁ βαθμός τοῦ ἀθροίσματος τῶν πολυωνύμων νά εἶναι μικρότερος τοῦ βαθμοῦ ἐκείνου τῶν πολυωνύμων, πού ὁ βαθμός του εἶναι ὁ μεγαλύτερος.

16.5.2. Ἀφαίρεσις. Ὁρισμός. Διαφορά ἑνός πολυωνύμου B ἀπό ἑνός πολυωνύμου A εἶναι τό πολυώνυμον, τό ὁποῖον προκύπτει, προσθέτοντες εἰς τό Α τό ἀντίθετον πολυώνυμον τοῦ Β.

16.5.3. **Πολλαπλασιασμός**. Ὁρισμός. Τό γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γινομένων, πού προκύπτουν, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ ἑνός ἐπί ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ ἄλλου.

16.5.4. **Γινόμενον δύο πολυωνύμων ἑνός γράμματος***. Εἶναι αὐτονόητον, ὅτι διά νά διευκολύνωμεν τόν πολλαπλασιασμόν εἰς τήν περίπτωσιν δύο πολυωνύμων ἑνός γράμματος θά πρέπει νά διατάσωμεν καί τά δύο πολυώνυμα κατά τόν αὐτόν τρόπον δηλ. κατά τάς κατιούσας ἤ ἀνιούσας δυνάμεις αὐτοῦ τοῦ γράμματος. Ὑπενθυμίζομεν δέ ἐνταῦθα συμπεράσματα, πού ἡ ἀλήθειά των γίνεται ἀμέσως φανερά καί ἀπό αὐτόν τοῦτον τόν τρόπον ἐκτελέσεως τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο τοιούτων πολυωνύμων: 1ον Ὁ βαθμός τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων, ὅταν ταῦτα εἶναι ἤ θεωροῦνται πολυώνυμα ἑνός γράμματος, εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων. 2ον Οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ γινομένου των εἶναι τά γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καί τοῦ πολλαπλασιαστοῦ.

Αὐτό τό 2ον συμπέρασμα περιλαμβάνεται εἰς τήν ἑξῆς γενικωτέραν πρότασιν: Τό γινόμενον δύο πολυωνύμων περικλείει τό ὀλιγώτερον δύο ὅρους, οἵτινες δέν εἶναι ἀναγωγήσιμοι (διά τούς ὁποίους δέν ὑφίστανται ἄλλα ὅμοια μονώνυμα.

3ον Ὁ ἀριθμός τῶν ὅρων τοῦ γινομένου δύο πολυωνύμων δέν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες ἐκφράζουν ἀντιστοίχως τό πλῆθος τῶν ὅρων πολλαπλασιαστέου καί πολλαπλασιαστοῦ καί τό ὀλιγώτερον ἴσος μέ τόν ἀριθμόν δύο.

16.5.5. Τό γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἑ-

---

*Ἕνα πολυώνυμον, τό ὁποῖον περιέχει ἕνα μόνον γράμμα π.χ. τό γράμμα x λέγομεν, ὅτι περιέχει μίαν μόνον μεταβλητήν ἤ καί ὅτι τοῦτο εἶναι πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς.

ἕνα ὁμογενές πολυώνυμον τοῦ ὁποίου ὁ βαθμός εἶναι τό ἄθροισμα τῶν βαθμῶν τῶν παραγόντων.

Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ταύτης εἶναι ἄμεσον συμπέρασμα τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὁμογενείας (16.2) καί τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο πολυωνύμων (16.5.3).

16.5.6. **Γινόμενον περισσοτέρων πολυωνύμων.** Ἐάν θεωρήσωμεν τά πολυώνυμα $A, B, \Gamma, \ldots$ ὀνομάζομεν γινόμενον αὐτῶν τῶν πολυωνύμων (ἤ μονωνύμων) τό πολυώνυμον τό ὁποῖον προκύπτει, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τά A, B καί τό γινόμενόν των ἐπί τό Γ καί καθ' ἑξῆς οὕτω μέχρις ὅτου χρησιμοποιήσωμεν ὅλα τά θεωρούμενα πολυώνυμα.

Εἶναι εὔκολον νά συμπεράνωμεν καί ἐνταῦθα, ὅτι οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ γινομένου πολλῶν πολυωνύμων εἶναι τά γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων καί εἶναι οἱ ὅροι οὗτοι μή ἀναγωγήσιμοι*

17. **Πολυώνυμον ταυτοτικῶς μηδέν.** Ἕνα πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς ὀνομάζεται ταυτοτικῶς μηδέν, ὅταν λαμβάνη ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν ἀνεξαρτήτως τῆς συγκεκριμένης τιμῆς τήν ὁποίαν ἀποδίδομεν εἰς τό γράμμα x

17.1. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἕνα πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν εἶναι πάντες οἱ συντελεσταί του νά εἶναι μηδενικά.

Ἄς ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχάς, ὅτι ἔχομεν τό πρωτοβάθμιον διώνυμον a_1x+a_0. Τό ὅτι ἀρκεῖ νά εἶναι $a_1=a_0=0$, ὥστε νά ἔχη τοῦτο ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν διά πᾶσαν συγκεκριμένην τιμήν τοῦ x, εἶναι φανερόν. Ἐναπομένει λοιπόν νά δείξωμεν τό ἀναγκαῖον τῆς ἐκφρασθείσης συνθήκης.

Δεχόμενοι, ὅτι $a_1x+a_0 \equiv 0$ δεχόμεθα, ὅτι τοῦτο θά ἔχη ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν καί διά τήν τιμήν τοῦ x μηδέν. Συνεπῶς θά ἔχωμεν

---

* Ὑποτίθενται φυσικά τά πολυώνυμα ταῦτα διατεταγμένα κατά τόν αὐτόν τρόπον ὡς πρός τό αὐτό γράμμα.

ἀναγκαίως $\boxed{a_0 = 0}$. Ἡ παραδοχὴ λοιπόν, ὅτι τὸ ἀρχικόν μας διώνυμον εἶναι μηδὲν ἀνεξαρτήτως τῆς ἀποδιδομένης τιμῆς εἰς τὴν μεταβλητὴν x ἔχει ὡς ἀναγκαίαν συνέπειαν νὰ ἀνάγεται ἡ προηγουμένη ταυτότης εἰς τὴν $a_1 x \equiv 0$. Καὶ ἐπειδὴ ἡ τελευταία αὕτη ταυτότης θὰ πρέπει νὰ ἔχῃ ἀριθμητικὴν τιμὴν μηδὲν καὶ διὰ $x=1$ θὰ ἔχωμεν ἀναγκαίως καὶ $\boxed{a_1 = 0}$

Διὰ νὰ δείξωμεν τὸ θεώρημά μας διὰ πολυώνυμον οἱουδήποτε βαθμοῦ μεταχειριζόμεθα τὴν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς: θὰ δεχθῶμεν, ὅτι τὸ θεώρημά μας ἰσχύει ὡς ἀναγκαία συνθήκη διὰ πολυώνυμον νιοστοῦ βαθμοῦ καὶ θὰ τὸ ἀποδείξωμεν ἰσχῦον καὶ διὰ πολυώνυμον $\nu+1$ βαθμοῦ.

Λέγομεν, ὅτι θὰ μεριμνήσωμεν διὰ τὸ ἀναγκαῖον τῆς ἐκφρασθείσης συνθήκης διότι τὸ ἀρκετὸν τῆς συνθήκης ταύτης εἶναι προφανές. Εἶναι δηλ. προφανές, ὅτι, ἐὰν ὅλοι οἱ συντελεσταὶ τυχόντος πολυωνύμου εἶναι ἴσοι μὲ τὸ μηδέν, τότε τὸ πολυώνυμον εἶναι ταυτοτικῶς ἴσον μὲ τὸ μηδέν.

Καὶ τώρα, δεχόμεθα ὅτι: ἐφόσον $\beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0 \equiv 0$* ἀναγκαίως ἔχομεν: $\beta_\nu = \beta_{\nu-1} = \dots = \beta_1 = \beta_0 = 0$. Καὶ θὰ δείξωμεν, ὅτι, ἐὰν $a_{\nu+1} x^{\nu+1} + a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_1 x + a_0 \equiv 0$ (1) θὰ ἔχωμεν ἐπίσης ἀναγκαίως: $a_{\nu+1} = a_\nu = a_{\nu-1} = \dots = a_1 = a_0 = 0$

Ἀφοῦ ἡ (1) ἰσχύει διὰ πᾶσαν συγκεκριμένην τιμὴν τοῦ x θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὴν συγκεκριμένην τιμὴν $\lambda \neq 0$** τοῦ x. Ὥστε:

$$a_{\nu+1}\lambda^{\nu+1} + a_\nu \cdot \lambda^\nu + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \qquad (2)$$

Ἐὰν πάλιν θέσωμεν εἰς τὴν (1) ὅπου λ τὴν συγκεκριμένην τιμὴν 2λ

---

* Εἰς τὸν γενικὸν συμβολισμὸν τοῦ πολυωνύμου, ἀντὶ νὰ μεταχειριζόμεθα διαφορετικὰ γράμματα διὰ τὸν εἰκονισμὸν τῶν συντελεστῶν μεταχειριζόμεθα ἕνα μόνον γράμμα διαστέλλοντες τὸν ἕνα συντελεστὴν τὸ τὸν ἄλλον μὲ τὸν δείκτην αὐτοῦ τοῦ γράμματος. Διὰ τοῦ τρόπου τούτου ἐπέρχεται οἰκονομία σκέψεως καὶ ἡ δυνατότης νὰ γνωρίζωμεν καὶ τοὺς συντελεστὰς ἐκείνων τῶν ὅρων, οἱ ὁποῖοι -λόγῳ τῆς γενικότητος τοῦ εἰκονισμοῦ- δὲν ἀναγράφονται.

** Ἰδοὺ ἐδῶ ποὺ ἡ τιμὴ λ εἶναι συγκεκριμένη τιμὴ τοῦ γράμματος x παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι εἶναι αὐτὴ γραμματική. Δηλ. παρὰ τὸ γεγονός, ὅτι δύναται νὰ εἶναι ἡ τυχοῦσα ὀνοματισμένη τιμὴ (βλ. ὑποσ. 14.2).

τοῦ x, λαμβάνομεν: $2^{\nu+1}a_{\nu+1}\lambda^{\nu+1}+2^{\nu}.a_{\nu}.\lambda^{\nu}\ldots+2a_1\lambda+a_0=0$ (3).
Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) ἐπί $2^{\nu+1}$, ἔχομεν:

$$2^{\nu+1}.a_{\nu+1}\lambda^{\nu+1}+2^{\nu+1}a_{\nu}\lambda^{\nu}+\ldots+2^{\nu+1}a_1\lambda+2^{\nu+1}a_0=0 \quad (4).$$

Καί, ἐάν τώρα ἀφαιρέσωμεν τάς (3), (4) εὑρίσκομεν:

$$(2^{\nu+1}-2^{\nu})a_{\nu}\lambda^{\nu}+(2^{\nu}-2^{\nu-1})a_{\nu-1}\lambda^{\nu-1}+\ldots+(2^{\nu+1}-2)a_1\lambda+(2^{\nu+1}-1)a_0\equiv 0 \quad (5).$$

Ἀλλά ἡ (5) ἀντιπροσωπεύει πολυώνυμον μέ μεταβλητόν τό γράμμα λ, πού εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν. Καί συμφώνως πρός τήν ὑπόθεσίν μας ἔχομεν ἀναγκαίως: $a_{\nu}=a_{\nu-1}=\ldots=a_1=a_0=0$. Οὕτω ἡ καθ' ὑπόθεσιν ἰσχύουσα ταυτότης (1) ἀνήχθη εἰς τήν $a_{\nu+1}x^{\nu+1}\equiv 0$. Καί ἐπειδή αὐτή πρέπει νά ἰσχύη καί διά τήν τιμήν 1 τοῦ x, συμπεραίνομεν, ὅτι καί $a_{\nu+1}=0$.

17.1.1. Πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς ταυτοτικῶς ἴσα

Δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς ὀνομάζονται ταυτοτικῶς ἴσα, ὅταν λαμβάνουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν διά πᾶσαν συγκεκριμένην τιμήν τῆς μεταβλητῆς ἀλλά τήν αὐτήν δι' ἀμφότερα.
Σημειοῦμεν, ὅτι δύο πολυώνυμα εἶναι ταυτοτικῶς ἴσα ἐάν διαχωρίσωμεν αὐτά μέ τό σύμβολον (≡) τό ὁποῖον διαβάζεται ταυτοτικῶς ἴσον.
Μία τοιαύτη ἰσότης δηλ. μία ἰσότης εἰς τήν ὁποίαν τό σύμβολον (=) ἀντικαθίσταται μέ τό σύμβολον (≡) χαρακτηρίζεται ὡς ταυτότης.

17.1.2. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι ταυτοτικῶς ἴσα, εἶναι, νά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ συντελεσταί τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἴσοι.

Εἶναι φανερόν πώς, ἀρκεῖ δύο πολυώνυμα τῆς αὐτῆς μεταβλητῆς νά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ συντελεσταί τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἴσοι δηλ. ἀρκεῖ τό ἕνα νά εἶναι ἕνα καί τό αὐτό μέ τό ἄλλο διά νά ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν διά τήν οἱανδήποτε συγκεκριμένην τιμήν τῆς μεταβλητῆς των ἀλλά τήν αὐτήν δι' ἀμφότερα τά πολυώνυμα.
Εἶναι ὅμως ἡ συνθήκη ἀναγκαία;
Δεχόμεθα τήν ταυτότητα:

$$a_{\nu}x^{\nu}+a_{\nu-1}x^{\nu-1}+a_{\nu-2}x^{\nu-2}+\ldots+a_1x+a_0\equiv\beta_{\nu-\rho}x^{\nu-\rho}+\beta_{\nu-\rho-1}x^{\nu-\rho-1}+\ldots+\beta_1x+\beta_0 \quad (1)$$

παρά τό γεγονός, ὅτι τό ἕνα τῶν πολυωνύμων εἶναι βαθμοῦ ν καί τό ἄλλο βαθμοῦ $\nu-\rho$.

Ἡ (1) γράφεται:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-\rho+1}x^{\nu-\rho+1} + (a_{\nu-\rho}-\beta_{\nu-\rho})x^{\nu-\rho} + (a_{\nu-\rho-1}-\beta_{\nu-\rho-1})x^{\nu-\rho-1} + \dots + (a_2-\beta_2)x^2 + (a_1-\beta_1)x + a_0 - \beta_0 \equiv 0 \quad (2).$$

Καί ἡ (2) συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα ἰσχύουσα συνεπάγεται νά ἔχωμεν:

$a_\nu = a_{\nu-1} = \dots = a_{\nu-\rho+1} = 0$ καί $a_{\nu-\rho} = \beta_{\nu-\rho}$, $a_{\nu-\rho-1} = \beta_{\nu-\rho-1}$, ...
$a_1 = \beta_1$, $a_0 = \beta_0$.

Δηλ. ἰσότητας ἱκανοποιούσας τό ἀναγκαῖον τῆς προτάσεώς μας.

17.1.3 **Σημείωσις**. Τά δύο ἀνωτέρω θεωρήματα ἀποτελοῦν μέρος τῆς καλουμένης «Γενικῆς θεωρίας τῶν πολυωνύμων» τήν ὁποίαν θά πραγματευθῶμεν μεταγενεστέρως. Ἡ ἀναγραφή ὅμως αὐτῶν τῶν δύο θεωρημάτων ἐδῶ – τά ὁποῖα ὅπως θά ἴδωμεν ἰσχύουν καί διά πολυώνυμα μέ περισσότερα γράμματα ἤ μέ περισσοτέρας μεταβλητάς – ἔγινε, ὡς θά ἴδωμεν ἀμέσως, διά νά βεβαιωθῶμεν διά τήν μοναδικότητα τῶν ἀποτελεσμάτων ἐπί τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων ἐπί πολυωνύμων

18. Συνθήκη ἵνα ἕνα γινόμενον δύο πολυωνύμων εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν.

Εἶναι προφανές, ὅτι, ἐάν τό ἕν ἐξ αὐτῶν εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν, τό γινόμενον θά εἶναι μηδέν.

Ἐξ ἄλλου ἀπό τά θεωρήματα (16.5.4.) προκύπτει, ὅτι ἐάν δέν εἶναι τό ἕνα ἐκ δύο πολυωνύμων ταυτοτικῶς μηδέν, τό γινόμενόν των θά ἔχῃ τοὐλάχιστον δύο ὅρους μή μηδενικούς καί συνεπῶς δέν θά εἶναι τοῦτο ταυτοτικῶς μηδέν.

Συμπέρασμα: Διά νά εἶναι ἕνα γινόμενον δύο πολυωνύμων ταυτοτικῶς μηδέν πρέπει καί ἀρκεῖ, ὅπως τό ἕνα τούτων εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν.

19. Μοναδικότης τῶν ἀποτελεσμάτων τῶν πράξεων ἐπί πολυωνύμων.

Εἰς ὅ,τι προηγεῖται εἰς πράξεις ἐπί τῶν πολυωνύμων, τά ἀποτελέσμα-

τα εἶναι μ ο ν α δ ι κ ά. Δέν εἶναι δηλ. δυνατόν νά ὑπάρξουν δύο ἀποτελέσματα μή ταυτοτικῶς ἴσα.
Πράγματι, οἱ ὁρισμοί τῶν πράξεων ἐδόθησαν (16.5) κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε, ἐάν δεχθῶμεν δύο διαφορετικά ἀποτελέσματα μιᾶς πράξεως, τά ἀποτελέσματα αὐτά - πολυώνυμα νά ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν δι' οἱασδήποτε συγκεκριμένας τιμάς τῶν γραμμάτων των καί συμφώνως πρός τό θεώρημα (17.1.2) τά ἀποτελέσματα ταῦτα θά συμπίπτουν.

Ἀξιοσημείωτοι Ταυτότητες

Ὁ ὁρισμός (17.1.1) μᾶς κάμνει νά ἐννοήσωμεν, ὅτι δημιουργοῦμεν μίαν ἀλγεβρικήν παράστασιν Β ταυτοτικῶς ἴσην πρός μίαν δοθεῖσαν παράστασιν Α ἐφόσον πραγματοποιήσωμεν σημειωμένας ἐπί τῆς Α πράξεις ἤ δημιουργήσωμεν ἐπ' αὐτῆς ἐπιτρεπομένους μετασχηματισμούς. Ἐδῶ τώρα θά σημειώσωμεν 15 κλασσικά ἀποτελέσματα, πού εἶναι χρήσιμον νά ἔχωμεν ἀπομνημονεύσει διότι διευκολύνουν τά μέγιστα τόν λογισμόν τῶν παραστάσεων.

1. $(a+\beta)^2 \equiv a^2+\beta^2+2a\beta$ Τά ἐξαγόμενα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ
2. $(a-\beta)^2 \equiv a^2+\beta^2-2a\beta$ $a+\beta$ ἤ τοῦ $a-\beta$ ἐπί τόν ἑαυτόν του.
3. $(a+\beta).(a-\beta) \equiv a^2-\beta^2$ Τό ἀποτέλεσμα τοῦ Π/σμοῦ.
4. $(a+\beta)^3 \equiv a^3+\beta^3+3a^2\beta+3a\beta^2 \equiv a^3+\beta^3+3a\beta\,(a+\beta)$.
5. $(a-\beta)^3 \equiv a^3-\beta^3-3a^2\beta+3a\beta^2 \equiv a^3-\beta^3-3a\beta\,(a-\beta)$
6. $a^2+\beta^2 \equiv (a+\beta)^2-2a\beta \equiv (a-\beta)^2+2a\beta$ Προκύπτουν ἐκ τῶν (1) καί (2).
7. $a^3+\beta^3 \equiv (a+\beta)^3-3a\beta\,(a+\beta) \equiv (a+\beta)\left[(a+\beta)^2-3a\beta\right] \equiv (a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)$

Προκύπτουν ἐκ τῆς (4).

8. $a^3-\beta^3 \equiv (a-\beta)^3+3a\beta\,(a-\beta) \equiv (a-\beta)\left[(a-\beta)^2+3a\beta\right] \equiv (a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)$.

Προκύπτουν ἐκ τῆς (5).

9. $(a+\beta+\gamma)^2 \equiv \left[(a+\beta)+\gamma\right]^2 \equiv (a+\beta)^2+2\gamma(a+\beta)+\gamma^2 \equiv a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2a\gamma+2\beta\gamma$.

Γενικῶς: $(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)^2 \equiv a_1^2+a_2^2+\cdots+a_\nu^2+2a_1a_2+2a_1a_3+\cdots$
$+2a_1a_\nu+2a_2a_3+2a_2a_4+\cdots+2a_2a_\nu+\cdots+2a_{\nu-1}a_\nu$. Ἤτοι:
Τό τ ε τ ρ ά γ ω ν ο ν τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε προσθετέων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προσθετέων ηὐξημένον κατά τό διπλάσιον τοῦ ἀθροίσμα-

τος τῶν γινομένων των λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Τήν γενίκευσιν αὐτήν ἀποδεικνύομεν εὐκόλως μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἀπαγωγῆς, δυνάμεθα ὅμως νά ἐξαγάγωμεν τό συμπέρασμα τοῦτο ἀπ' εὐθείας ἐκ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ:

$$(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)\cdot(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)$$

θά παρατηρήσωμεν, ὅτι ὑπάρχουν εἰς τό γινόμενον δύο εἴδη ὅρων: Ἐκεῖνοι, πού προέρχονται ἀπό ἴσους παράγοντας τοῦ πολλαπλασιαστέου καί τοῦ πολλαπλασιαστοῦ – αὐτοί παρουσιάζονται μόνον μίαν φοράν – καί ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι εἶναι γινόμενα διαφορετικῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καί τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. Καί αὐτοί οἱ τελευταῖοι, ὡς εὐκόλως ἐννοεῖ τις, παρουσιάζονται δύο φορές.

Στήν ἐφαρμογή τοῦ κανόνος διά νά μή παραληφθῆ κανένα διπλάσιον γινόμενον γράφομεν πρῶτον ἐκεῖνα τοῦ πρώτου ὅρου μέ ὅλους τούς ἑπομένους ὅρους, ἔπειτα ἐκεῖνα τοῦ δευτέρου ὅρου μέ ὅλους τούς ἑπομένους καί οὕτω καθεξῆς.

10. $(a+\beta+\gamma)^3 \equiv [(a+\beta)+\gamma]^3 \equiv (a+\beta)^3+3\gamma(a+\beta)^2+3\gamma^2(a+\beta)+\gamma^3 \equiv a^3+\beta^3+\gamma^3+3a^2\beta+3a^2\gamma+3a\beta^2+3\beta^2\gamma+3a\gamma^2+3\beta\gamma^2+6a\beta\gamma = a^3+\beta^3+\gamma^3+3a^2(\beta+\gamma)+3\beta^2(a+\gamma)+3\gamma^2(a+\beta)+6a\beta\gamma.$

Γενικῶς: $(a_1+a_2+\cdots+a_\nu)^3 \equiv a_1^3+a_2^3+\cdots+a_\nu^3+3a_1^2(a_2+a_3+\cdots+a_\nu)+3a_2^2(a_1+a_3+\cdots+a_\nu)+\cdots+3a_\nu^2(a_1+a_2+\cdots+a_{\nu-1})+6(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots+a_1a_2a_\nu+a_1a_3a_4+\cdots+a_1a_3a_\nu+\cdots+a_1a_{\nu-1}a_\nu+a_2a_3a_4+\cdots+a_2a_3a_\nu+\cdots+a_2a_{\nu-1}a_\nu+\cdots+a_{\nu-2}a_{\nu-1}a_\nu)$. Ἤτοι:

Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε προσθετέων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν προσθετέων ηὐξημένον ἀφ' ἑνός μέν κατά τό τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τοῦ τετραγώνου ἑκάστου τῶν ὅρων ἐπί τό ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων ἀφ' ἑτέρου δέ κατά τό ἑξαπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων των λαμβανομένων ἀνά τρεῖς καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Τήν γενίκευσιν αὐτήν ἀποδεικνύομεν εὐκόλως μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ὁ ἄλλος τρόπος διαπιστώσεως τοῦ ἀναπτύγματος, ὡς ἐπράξαμεν διά τό προηγούμενον ἀνάπτυγμα, ἐδῶ δέν ἐνδείκνυται· παρουσιάζει δυσχέρειαν.

11. $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta)^3+\gamma^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv (\alpha+\beta+\gamma)^3-3\gamma(\alpha+\beta).(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma) \equiv (\alpha+\beta+\gamma).[(\alpha+\beta+\gamma)^2-3\gamma(\alpha+\beta)-3\alpha\beta] \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma) \equiv \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma) \equiv \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2]$. Ἐγράψαμεν ὑπό μορφήν γινομένου τήν παράστασιν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ καί ὑπό δύο μορφάς. Εἶναι φανερόν τώρα, ὅτι ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ διατελοῦν ὑπό τόν περιορισμόν : $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἤ τόν περιορισμόν $\alpha=\beta=\gamma$ τότε: $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\equiv 3\alpha\beta\gamma$.

Γεννᾶται τώρα τό ἐρώτημα : Ἐάν ἰσχύη ἡ ἰσότης : $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\equiv 3\alpha\beta\gamma$, πρέπει νά συμπεράνωμεν, ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἤ $\alpha=\beta=\gamma$;

Ἡ δευτέρα μορφή ὑπό τήν ὁποίαν ἐτέθη ἡ παράστασις $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma$ μᾶς λέγει ὅτι, ἐάν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$ τότε $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἤ $\alpha=\beta=\gamma$.

12. **Ταυτότης τοῦ Lagrange**. Ἡ ταυτότης αὕτη ἐκφράζει μίαν σχέσιν μεταξύ ἀρτίου ἀριθμοῦ ἀριθμῶν.

Ἔστωσαν οἱ 2ν ἀριθμοί : $\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_\nu \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_\nu \end{matrix}$

Τότε: $(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$
$\equiv (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+\cdots+(\alpha_1\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2$
$+\cdots+(\alpha_2\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_2)^2+\cdots+(\alpha_{\nu-1}\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_{\nu-1})^2$.

Θά τήν ἀποδείξωμεν διά τέσσαρας ἀριθμούς κατ' ἀρχάς καί κατόπιν θά τήν γενικεύσωμεν μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ταυτότητες τοῦ Newton.

13. $(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\equiv x^2+\alpha_1x+\alpha_2x+\alpha_1\alpha_2\equiv x^2+(\alpha_1+\alpha_2).x+\alpha_1\alpha_2$

$(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)(x+\alpha_3)\equiv x^3+(\alpha_1+\alpha_2)x^2+\alpha_1\alpha_2x+\alpha_3x^2+(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x$
$+\alpha_1\alpha_2\alpha_3\equiv x^3+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3)x+\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.

Γενικῶς: $(x+\alpha_1)(x+\alpha_2)\cdots(x+\alpha_\nu)\equiv x^\nu+(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu)x^{\nu-1}$
$+(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_2\alpha_\nu+\cdots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-2}$
$+(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_2\alpha_\nu+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\cdots+\alpha_1\alpha_3\alpha_\nu+\cdots+\alpha_1\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$
$+\alpha_2\alpha_3\alpha_4+\cdots+\alpha_2\alpha_3\alpha_\nu+\cdots+\alpha_2\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu+\cdots+\alpha_{\nu-2}\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)x^{\nu-3}$

$+ \cdots + \alpha_1 a_2 \ldots a_\nu.$

Καί ἐδῶ διά τήν γενίκευσιν χρησιμοποιεῖται ἡ μέθοδος τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

14. $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\nu) \equiv x^\nu - (a_1+a_2+\ldots+a_\nu)x^{\nu-1}$
$+ (a_1a_2+\ldots+a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-2} - (a_1a_2a_3+\ldots+a_{\nu-2}a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-3}+\ldots$
$+(-1)^\nu a_1a_2\ldots a_\nu.$

Ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ταυτότης (14) δέν εἶναι παρά ἡ (13) μέ τήν διαφοράν ὅτι τά α παρουσιάζονται μέ ἀντίθετον πρόσημον.

Ἐπειδή οἱ ὅροι βαίνουν μέ ἐναλλαγήν τοῦ προσήμου (ἡ αἰτία αὐτῆς τῆς ἐναλλαγῆς διαπιστοῦται ἀμέσως) ἐννοοῦμεν ὅτι, ἐάν τό ν εἶναι ἄρτιον τό πρόσημον τοῦ τελευταίου ὅρου θά εἶναι τό +, ἐνῶ, ἐάν τό ν εἶναι περιττόν τό πρόσημον τοῦ τελευταίου ὅρου θά εἶναι τό −. Ἐντεῦθεν δικαιολογεῖται τό ὅτι ἐθέσαμεν τόν τελευταῖον ὅρον τοῦ ἀναπτύγματος μέ τόν παράγοντα $(-1)^\nu$.

15. **Διώνυμον τοῦ Newton.** Ἡ ταυτότης αὐτη μᾶς παρέχει τό ἀνάπτυγμα τῆς μιοστῆς δυνάμεως (μ φυσικός) ἑνός διωνύμου καί δημιουργεῖται ἀπό τάς δύο προηγουμένας (13, 14) μέ τό νά ὑποθέσωμεν τά α ἴσα. Ἡ ἀπ' εὐθείας ἐξακρίβωσις τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος δέν εἶναι τόσον εὐχερής εἰς τήν γενικήν περίπτωσιν χωρίς τήν γνῶσιν τοῦ εἰδικοῦ κεφαλαίου τῆς Ἀλγέβρας, πού φέρει τόν τίτλον «Συνδυαστική», δυνάμεθα ὅμως νά ἐργασθῶμεν καί ἐδῶ μέ τήν πλήρη ἐπαγωγήν. Θά ἀναφέρωμεν δέ τάς διαπιστουμένας ἰδιότητας τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος διά νά διευκολυνόμεθα εἰς τήν πρακτικήν χρησιμοποίησίν του.

1ον Ὁ συντελεστής ἑκάστου ὅρου τοῦ ἀναπτύγματος $(x \pm a)^\mu$ ἀπό τοῦ 2ου καί ἐφεξῆς (ὁ πρῶτος ὅρος προφανῶς εἶναι ὁ x^μ) εὑρίσκεται, ἐάν τόν συντελεστήν τοῦ προηγουμένου ὅρου πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τόν ἐκθέτην τοῦ x εἰς αὐτόν τοῦτον τόν προηγούμενον ὅρον καί τό γινόμενον διαιρέσωμεν διά τοῦ ἀριθμοῦ πού ἐκφράζει τήν θέσιν αὐτοῦ τοῦ προηγουμένου ὅρου.

2ον Οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος, πού ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων του ὅρων εἶναι ἴσοι. Ἄν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ

ἀναπτύγματος θά εἶναι $\mu+1$ κατά τό πλῆθος * συμπεραίνομεν ὅτι:
$1^{ον}$ Ἄν $\mu=2\nu$ τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος θά εἶναι ἀριθμός περιττός καί συνεπῶς εἰς τό ἀνάπτυγμα θά ὑπάρχη μεσαῖος ὅρος δηλ. ὅρος πού ἀντιστοιχεῖ εἰς ἑαυτόν ἀπό τήν ἄποψιν τοῦ ἰσαπέχοντος τῶν ἄκρων ὅρου· αὐτοῦ φυσικά ὁ συντελεστής δέν θά ἐπαναλαμβάνεται (εἶναι ὁ ὅρος ὁ κατέχων τήν $\nu+1$ τάξιν) ἐνῷ οἱ συντελεσταί τῶν ὑπολοίπων ν ὅρων θά εἶναι οἱ αὐτοί μέ τούς συντελεστάς τῶν προηγουμένων τοῦ μεσαίου ν ὅρων, θεωρούμενοι κατ' ἀντίστροφον τάξιν. $2^{ον}$ Ἄν $\mu=2\nu+1$ τό πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος θά εἶναι ἀριθμός ἄρτιος καί συνεπῶς δέν θά ὑφίσταται μεσαῖος ὅρος. Οὕτω, ἀφοῦ προσδιορισθοῦν οἱ συντελεσταί μέχρι καί τοῦ κατέχοντος τήν $\nu+1$ θέσιν ὅρου, κατόπιν οἱ συντελεσταί τῶν ἑπομένων ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος θά εἶναι οἱ συντελεσταί τῶν προηγουμένων ὅρων θεωρούμενοι κατ' ἀντίστροφον τάξιν.
$3^{ον}$ Ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι μονώνυμα τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ, φυσικά ὡς πρός ἀμφότερα τά γράμματα x καί a καί οἱ μέν ἐκθέται τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμενοι ἀπό ὅρου εἰς ὅρον οἱ δέ ἐκθέται τοῦ a αὐξανόμενοι.
Παραθέτομεν ἀναπτύγματα μέ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νά παρακολουθῆ τις τήν χρησιμοποίησιν τῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων τοῦ ἀναπτύγματος:

$$(x\pm a)^4 \equiv x^4 \pm \frac{1.4}{1}ax^3 + \frac{4.3}{1.2}\cdot a^2x^2 \pm \frac{1.4}{1}a^3x + a^4 \equiv x^4 \pm 4ax^3 + 6a^2x^2 \pm 4a^3x + a^4.$$

$$(x\pm a)^5 \equiv x^5 \pm \frac{1.5}{1}ax^4 + \frac{5.4}{1.2}a^2x^3 \pm \frac{5.4}{1.2}a^3x^2 + \frac{1.5}{1}a^4x \pm a^5 \equiv x^5 \pm 5ax^4 + 10a^2x^3 \pm 10a^3x^2 + 5a^4x \pm a^5.$$

$$(x\pm a)^6 \equiv x^6 \pm \frac{1.6}{1}ax^5 + \frac{6.5}{1.2}a^2x^4 \pm \frac{6.5.4}{1.2.3}a^3x^3 + \frac{6.5}{1.2}a^4x^2 \pm \frac{1.6}{1}a^5x + a^6 \equiv x^6 \pm 6ax^5 + 15a^2x^4 \pm 20a^3x^3 + 15a^4x^2 \pm 6a^5x + a^6.$$

Γενικῶς: $$(x\pm a)^\mu \equiv x^\mu \pm \frac{\mu}{1}ax^{\mu-1} + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^2x^{\mu-2} \pm \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}a^3x^{\mu-3} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{1.2.3.4}a^4\cdot x^{\mu-4} \pm \dots \pm (-1)^{\nu+1}\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\dots\nu}a^\nu x^{\mu-\nu} + \dots + (-1)^{\mu+1}a^\mu.$$

---

* Διότι τό ἀνάπτυγμα θά περιέχη τούς ὅρους μέ τάς δυνάμεις τοῦ x ἀπό τήν $1^{ην}$ μέχρι τήν $\mu^{ην}$ καί τόν σταθερόν ὅρον.

Εἰς τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(x-a)^{\mu}$ ὁ συντελεστής $\dfrac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}$

τοῦ γενικοῦ ὅρου ἔχει τό πρόσημον (+) ἤ (-) καθόσον τό ν εἶναι ἄρτιον ἤ περιττόν. Καί διά τοῦτο ἐθέσαμεν τοῦ συντελεστοῦ αὐτοῦ ὡς παράγοντα τό $-(-1)^{\nu+1}$. Αὐτός ὁ γενικός ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι ὁ κατέχων τήν ν+1 θέσιν καί προφανῶς μᾶς παρέχει διά τάς τιμάς τοῦ ν: 1, 2, 3, ... τούς ὅρους 2ον, 3ον, 4ον κ.λ.π.

21. **Τρόποι ἐπαληθεύσεως μιᾶς ταυτότητος.** Ὁ τρόπος δημιουργίας μιᾶς ταυτότητος (17) μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τό συμπέρασμα, ὅτι προκειμένου νά διαπιστώσωμεν τήν ἀλήθειαν της θά πρέπει: νά λαμβάνωμεν τό ἕνα ἀπό τά δύο της μέλη καί νά τοῦ δίδωμεν μέ τήν χρησιμοποίησιν τῶν νομίμων μετασχηματισμῶν τήν μορφήν τοῦ ἑτέρου της μέλους.

Ἡ ἐκλογή τοῦ μέλους, τό ὁποῖον θά μετασχηματίσωμεν, εἶναι αὐθαίρετος, ἀλλά ὁ σκοπός διά τόν ὁποῖον ἐδημιουργήθη μία ταυτότης (ἡ ἄσκησις εἰς τούς μετασχηματισμούς παραστάσεων) δικαιολογεῖ νά προτιμῶμεν ὡς ἀφετηρίαν τό μέλος τό ὁποῖον ἔχει τήν πολυπλοκωτέραν παράστασιν.

Διά τήν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας μιᾶς ταυτότητος δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν καί ἁπλοποιητικά δηλ. νά ὑποθέσωμεν τήν ἰσότητά μας ἀληθῆ καί μέ μετασχηματισμούς τούς ὁποίους θά κάμωμεν εἰς ἕκαστον μέλος χωριστά καί ἐν συνδυασμῷ τοῦ ἑνός μέλους μέ τό ἄλλο νά καταλήξωμεν εἰς σχέσιν ἐκ τῶν προτέρων γνωστήν ὡς ἀληθῆ.

Ἀλλά τώρα γεννᾶται τό ἐρώτημα: Αὐτό τό ὁποῖον ἐπετύχομεν βεβαιώνει καί τήν ἀλήθειαν τῆς ἀρχικῆς ταυτότητος; Φυσικά, ἄν ὅλοι οἱ μετασχηματισμοί ἔγιναν ἐπί τῇ βάσει προτάσεων ἀντιστρεπτῶν. Χρειάζεται λοιπόν νά ἐκκινήσωμεν τώρα ἀπό τήν ἀληθῆ σχέσιν καί νά καταλήξωμεν μέ τήν ἀντίστροφον ἐργασίαν εἰς τήν ὑπό διαπίστωσιν δοθεῖσαν ἰσότητα.

Αὐτόν τόν δρόμον δέν τόν συνιστῶμεν διότι ὁ σκοπός τόν ὁποῖον ἐξυπηρετεῖ ἡ ἄσκησις * ἐπί τῶν ταυτοτήτων δηλ. ὁ μετασχηματισμός παρα-

* Ἡ τριβή.

στάσεων εἰς μορφάς ἁπλουστέρας ἤ καλλίτερον πλέον ἐπωφελεῖς διά τά θέματα εἰς τά ὁποῖα παρουσιάζονται, δέν ἐξυπηρετεῖται.
Ἕνας τρίτος τρόπος ὁ ὁποῖος ἐνδείκνυται εἶναι ἡ ἐξ ὑπαρχῆς δημιουργία τῆς ταυτότητος. Δηλ. ἡ ἐκκίνησίς μας ἀπό μίαν γνωστήν ἀληθῆ σχέσιν καί ἡ μεταμόρφωσις αὐτῆς βάσει νομίμων μετασχηματισμῶν εἰς τήν ὑπό βεβαίωσιν ἰσότητα. Ἕνας τοιοῦτος τρόπος θά ἦτο ἡ ἀντίστροφος πορεία τοῦ προηγουμένου τρόπου ἤ μᾶλλον τό 2ον αὐτοῦ μέρος, τό συνθετικόν. Ἀλλά, ὅπως ἐννοεῖ τις θά εἶναι δύσκολον νά γνωρίζωμεν τήν ἰσότητα ἐκκινήσεως χωρίς νά μεσολαβήση ὁ ἁπλοποιητικός κατ' ἀρχήν τρόπος δηλ. τό 1ον μέρος τοῦ προηγουμένου δευτέρου τρόπου βεβαιώσεως μιᾶς ταυτότητος. Ἐν τούτοις ὑπάρχουν ταυτότητες, πού δέν προέκυψαν ἀπό μετασχηματισμούς παραστάσεων ἀλλά ἐδημιουργήθησαν βάσει ὡρισμένων δεδομένων καί μέ τήν χρησιμοποίησιν ἄλλων γνωστῶν ἐκ τῶν προτέρων σχέσεων. Εἰς αὐτάς τάς ταυτότητας ἐπιβάλλεται ὁ συνθετικός τρόπος δημιουργίας των καί δέν εἶναι δύσκολον νά ἀντιληφθῆ τις τήν ἰσότητα ἤ τάς ἰσότητας ἐκκινήσεως.

21.1. Μαθηματικαί σχέσεις. Μόνιμοι σχέσεις. Ἡ « μαθηματική σχέσις » δέν περιορίζεται εἰς τήν ἰσότητα ἤ τήν ἀνισότητα, ὅπως συνήθως ἑρμηνεύεται ὁ ὅρος αὐτός. Πᾶσα ἔκφρασις, ἡ ὁποία δύναται νά συσχετίση μαθηματικάς ὀντότητας ἐπί θέματος, πού εἶναι ἀντικείμενον τῶν μαθηματικῶν, εἶναι μία «μαθηματική σχέσις». Π.χ. ὀνομάζομεν ἀκέραιον μέρος πραγματικοῦ τινός ἀριθμοῦ x τόν μεγαλύτερον ἐκ τῶν ἀκεραίων, οἱ ὁποῖοι δέν ὑπερβαίνουν τόν x. Ἐάν συμφωνήσωμεν αὐτό τό ἀκέραιον μέρος νά τό συμβολίζωμεν γράφοντες $[x]$, προκειμένου περί τοῦ ἀριθμοῦ $\frac{22}{7}$ ἤ τοῦ $-\frac{22}{7}$ γράφομεν:
$\left[\frac{22}{7}\right]=3 \quad \left[-\frac{22}{7}\right]=-4.$
Μία ἰσότης ἤ μία ἀνισότης ἤ καί διπλῆ σχέσις (ἰσότης καί ἀνισότης) ἥτις συνδέει δύο ἀλγεβρικάς παραστάσεις A καί B ὀνομάζεται μόνιμος, ἐάν ἰσχύη δι' οἱασδήποτε πραγματικάς τιμάς τῶν γραμμάτων τῶν δύο παραστάσεων. Π.χ. ἡ διπλῆ σχέσις: $a^2+\beta^2 \geqslant 2a\beta$ εἶναι μία μόνιμος σχέσις, διότι γράφεται: $(a-\beta)^2 \geqslant 0$. Ἐπίσης ἡ ἀνισότης: $(x-\psi)^2+\omega^2+5>0$ εἶναι μία μόνιμος ἀνισότης διότι ἰσχύει δι' οἱασ-

δήποτε πραγματικάς τιμάς τών γραμμάτων της x, ψ, ω.

Πώς δύναταί τις νά διαπιστώση, ότι ή σχέσις $A \geqslant B$ είναι μία μόνιμος σχέσις; Εάν φυσικά διαπιστώση, ότι ή διαφορά $A - B$ δέν γίνεται ποτέ άρνητικός άριθμός. Καί θά τό έπιτύχη τούτο, έάν μετασχηματίση τήν έν λόγω διαφοράν είς άθροισμα άρτίων δυνάμεων ή είς γινόμενον όπου οί μονίμως άρνητικοί παράγοντες θά είναι είς πλήθος μηδέν ή είς πλήθος άρτιον.

Ἀσκήσεις

121. Δεδομένου ότι: $A = x+\psi-1$, $B = 2x-\psi+3$, $\Gamma = x-2\psi+1$, ύπολογίσατε τάς παραστάσεις:

$$A^2+B^2+\Gamma^2, \quad B\Gamma+\Gamma A+AB, \quad B\Gamma-A, \quad A\Gamma-B, \quad AB-\Gamma$$

$$B^2\Gamma+B\Gamma^2+\Gamma^2A+A\Gamma^2+A^2B+AB^2, \quad A^3+B^3+\Gamma^3, \quad (A+B+\Gamma)^3.$$

122. Ύπολογίσατε τά γινόμενα:

$(2ax+5\beta\psi)(2ax-5\beta\psi)$, $(a+\beta+2)(a+\beta-2)$, $(x+2\psi-3)(x-2\psi+3)$,

$(a+2\beta)(a-2\beta)(a^2+4\beta^2)(a^4+16\beta^4)$, $(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$,

$(1+x^2+x\sqrt{2})(1+x^2-x\sqrt{2})$, $(x-\psi)^2(x+\psi)^2(x^2+\psi^2)^2$, $\left(a^\mu+\frac{1}{\beta^\nu}\right)\left(a^\mu-\frac{1}{\beta^\nu}\right)$.

123. Εύρετε τά γινόμενα:

α') $(x-1)\left(x^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)$

β') $\left[x^2+\left[2-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right]\cdot x+1+\sqrt{2}-\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right]\left[x^2+\left[2+\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right]x+1+\sqrt{2}+\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}\right]$

Άπ. $\left[(x+1)^2+1\right]^2+1$.

124. Τό πολυώνυμον : $A \equiv 4x^8+20x^7+21x^6+18x^5+67x^4-24x^3+51x^2-14x+1$ είναι τετράγωνον ένός πολυωνύμου B. Εύρετε τό πολυώνυμον B.

125. Εύρετε ένα πρωτοβάθμιον διώνυμον τού x γνωρίζοντες, ότι οί δύο πρώτοι όροι τού κύβου του είναι x^3+ax^2.

126. Ποίον είναι τό πολυώνυμον, πού τό τετράγωνόν του είναι:

$$x^4-6x^3+13x^2-12x+4\,;$$

127. Ύφίσταται πολυώνυμον τού όποίου ό κύβος είναι:

$$x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1\,;$$

128. Ύπολογίσατε τό άθροισμα:

$$(2\beta+2\gamma-a)^2+(2\gamma+2a-\beta)^2+(2a+2\beta-\gamma)^2$$

129. Διαπιστώσατε, ὅτι ἡ παράστασις: $s=\sqrt{p(p-a)(p-\beta)(p-\gamma)}$ ὅπου $2p=a+\beta+\gamma$ γίνεται $\frac{1}{2}|\beta\gamma|$ ὅταν $a^2=\beta^2+\gamma^2$.

130. Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων:

α′) $(a-\beta)^3+3(a-\beta)^2(a+\beta)+(a+\beta)^3+3(a+\beta)^2(a-\beta)\equiv 8a^3$.

Τί ἐκφράζει τό πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητός μας ἐν τῷ συνόλῳ του;

β′) $(a+\beta+\gamma)^2+(a-\beta)^2+(a-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2\equiv 3(a^2+\beta^2+\gamma^2)$

γ′) $(a+\beta+\gamma+\delta)^2+(a-\beta)^2+(a-\gamma)^2+(a-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2$
$\equiv 4(a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$

δ′) $(a+\beta+\gamma+\delta)^2+(a-\beta-\gamma+\delta)^2+(a-\beta+\gamma-\delta)^2+(a+\beta-\gamma-\delta)^2\equiv$
$4(a^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$

ε′) $(a+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-a)^3-(\gamma+a-\beta)^3-(a+\beta-\gamma)^3\equiv 24a\beta\gamma$.

Αἱ τέσσαρες τελευταῖαι ταυτότητες εἶναι ζήτημα ἁπλῶν ἀναπτυγμάτων.

131. Ἐάν θέσωμεν: $a+\beta+\gamma=2\tau$, δείξατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων:

α′) $1+\frac{\beta^2+\gamma^2-a^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-a)}{\beta\gamma}$,

β′) $(\tau-a)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=a^2+\beta^2+\gamma^2$,

γ′) $2(\tau-a)(\tau-\beta)+2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+2(\tau-\gamma)(\tau-a)=2\tau^2-a^2-\beta^2-\gamma^2$,

δ′) $2(\tau-a)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+a(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-a)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-a)(\tau-\beta)=a\beta\gamma$.

Διά τάς ἰσότητας (γ′, δ′) θά χρησιμοποιήσετε τήν ταυτότητα (14) (ἐδ. 20).

132. Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῶν ταυτοτήτων:

α′) $1+a^6\equiv(1+a^2)(1+a\sqrt{3}+a^2)(1-a\sqrt{3}+a^2)$

β′) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1\equiv(x^2+3x+1)^2$

γ′) $(a^2+\beta^2+\gamma^2+a\beta+a\gamma+\beta\gamma)^2-(a+\beta+\gamma)^2(a^2+\beta^2+\gamma^2)\equiv(a\beta+a\gamma+\beta\gamma)^2$

Διά τήν πρώτην ταυτότητα ἐνδείκνυται νά ἐκκινήσωμεν ἀπό τό πρῶτον μέλος της, μετασχηματίζοντες αὐτό εἰς γινόμενον. Εἶναι φανερόν πώς αὐτό τό μέλος δύναται νά θεωρηθῇ ἄθροισμα κύβων.

Διά τήν (β′) ταυτότητα θά χρησιμοποιήσωμεν τήν ταυτότητα (14) (ἐδ. 20).

Διά τήν (γ′) ταυτότητα πρέπει νά παρατηρήσωμεν, ὅτι τό πρῶτον της μέλος συντίθεται ἐκ τῶν παραστάσεων: $a^2+\beta^2+\gamma^2$ καί $a\beta+a\gamma+\beta\gamma$.

133. Ἐάν θέσωμεν: $x+y=\alpha$ καί $xy=\beta$, δείξατε ὅτι:

$$x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2 \qquad x^5+y^5=\alpha^5-5\alpha^3\beta+5\alpha\beta^2$$

Πρέπει προφανῶς νά ἐκφράσωμεν τάς παραστάσεις x^4+y^4 καί x^5+y^5 μέ τάς παραστάσεις $x+y$ καί xy. Δυνάμεθα διά τήν παράστασιν x^4+y^4 νά χρησιμοποιήσωμεν τήν ἔκφρασιν τοῦ $(x+y)^4$ (σελ.65). Δυνάμεθα ὅμως νά τήν ἐκφράσωμεν θεωροῦντες αὐτήν ὡς ἄθροισμα τετραγώνων.

Ὅσον ἀφορᾶ τήν παράστασιν x^5+y^5 δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν ἔκφρασιν τοῦ $(x+y)^5$. Δυνάμεθα ἐπίσης νά ἐκτελέσωμεν τό γινόμενον $(x+y)(x^4+y^4)$ καί ἐκ τῆς δημιουργουμένης ἰσότητος νά εὕρωμεν τήν κατάλληλον ἔκφρασιν τοῦ x^5+y^5.

Ἕνας τρίτος τρόπος διά τήν παράστασιν x^5+y^5 προκύπτει ἀπό τήν ταυτότητα: $x^5+y^5\equiv(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$, τήν ὁποίαν θά μάθωμεν ἀργότερα εἰς τό κεφάλαιον «Ἀξιοσημείωτα πηλίκα».

134. Ἐάν θέσωμεν: $x+y=\alpha$ καί $x^3+y^3=\beta^3$ ἐκφράσατε τάς παραστάσεις: x^4+y^4 καί x^5+y^5 ἀπό τά α καί β.

Ἀναγάγατε τό θέμα τοῦτο εἰς τό προηγούμενον.

135. Ὑπολογίσατε τό γινόμενον τῶν πολυωνύμων: $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ καί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta$ καί ἀπό τόν ὑπολογισμόν αὐτόν ἄς ἐξαχθῇ χαρακτηριστικόν συμπέρασμα διά τήν περίπτωσιν ὅπου $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$.

136. Διαπιστώσατε τήν ἀλήθειαν τῶν ταυτοτήτων:

α') $(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1\equiv(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$

β') $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\equiv2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$.

γ') $(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3-3(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\equiv0$.

δ') $(x+y)(x+z)-x^2\equiv(y+z)(y+x)-y^2\equiv(z+x)(z+y)-z^2$

Διά τάς ταυτότητας (α', β', γ') θά χρησιμοποιήσετε τήν ταυτότητα (11) (σελ. 63).

137. Δεδομένου, ὅτι x, y, z συνδέονται διά τῶν ἰσοτήτων

$$x+y+z=\alpha \qquad x^2+y^2+z^2=\beta^2 \qquad x^3+y^3+z^3=\gamma^3$$

ὑπολογίσατε τό γινόμενον xyz ἀπό τά α, β, γ.

'Εάν ὑψώσωμεν τά μέλη τῆς πρώτης τῶν διδομένων ἰσοτήτων εἰς τόν κύβον ἐμφανίζεται τό γινόμενον xyz καί ἐφεξῆς τό θέμα εἶναι ἁπλοῦν.

'Επίσης δυνάμεθα νά χρησιμοποιήσωμεν τήν ταυτότητα (11)

138. 'Εάν τά x, y, z συνδέωνται διά τῶν ἰσοτήτων:

$$x+y+z=\alpha \qquad xy+xz+yz=\beta \qquad xyz=\gamma$$

ἐκφράσατε τό ἄθροισμα: $x^3+y^3+z^3$ ἀπό τά α, β, γ.

Αἱ ὑποδείξεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἰσχύουν καί ἐδῶ.

139. 'Εάν οἱ ἀριθμοί: $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ καί $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ συνδέωνται μέ τάς ἰσότητας: $\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_\nu^2$, $\beta^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots+\beta_\nu^2$, $\alpha\beta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu$, τότε θά ἰσχύουν καί αἱ ἰσότητες:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$$

'Εφαρμόσατε τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange διά τούς 2ν ἀριθμούς: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ καί $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$.

140. 'Εάν τρεῖς διάφοροι μεταξύ των ἀριθμοί α, β, γ ἱκανοποιοῦν τάς ἰσότητας: $\alpha^3+\lambda\alpha+\mu=0$, $\beta^3+\lambda\beta+\mu=0$, $\gamma^3+\lambda\gamma+\mu=0$, δείξατε ὅτι: $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ σχέσις, πού πρέπει νά δημιουργηθῆ ἐκ τῶν τριῶν δοθεισῶν ἰσοτήτων δέν περιέχει τά λ καί μ. Ἑπομένως προβάλλει ζήτημα ἀπαλοιφῆς τῶν λ καί μ. 'Αφαιροῦντες κατά μέλη $1^{\text{ην}}$ καί $2^{\text{αν}}$ καί τήν $1^{\text{ην}}$ καί $3^{\text{ην}}$ δημιουργοῦμεν δύο ἰσότητας χωρίς τό μ καί ἐφεξῆς ...

141. 'Εάν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ δείξατε ὅτι:

$$(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)^2=9(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\beta\gamma\delta+\alpha\gamma\delta)^2$$

Χρησιμοποιήσατε τό συμπέρασμα ἐκ τῆς ἀσκήσεως (135).

142. 'Εάν $\alpha+\beta+\gamma=\tau$ δείξατε ὅτι:

$$(\tau-3\alpha)^3+(\tau-3\beta)^3+(\tau-3\gamma)^3=3(\tau-3\alpha)(\tau-3\beta)(\tau-3\gamma)$$

143. 'Εάν ἰσχύη ἡ ἰσότης: $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)$ καί θέσωμεν:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=A, \quad \alpha+\beta-\gamma-\delta=B, \quad \alpha-\beta+\gamma-\delta=\Gamma, \quad \alpha-\beta-\gamma+\delta=\Delta$$

δείξατε, ὅτι θά ἰσχύη καί ἡ ἰσότης:

$$AB(A^2+B^2)=\Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2).$$

Διαπιστώσατε τήν συγγένειαν μεταξύ τῶν παραστάσεων A, B ἀφ' ἑνός καί Γ, Δ ἀφ' ἑτέρου καί κατόπιν δημιουργήσατε τό ἰσοδύναμον τῶν ἐκφράσεων: $AB(A^2+B^2)$, $\Gamma\Delta(\Gamma^2+\Delta^2)$. Ἐφεξῆς τά πράγματα εἶναι ἁπλᾶ.

144. Ἐάν $\alpha^2+\beta^2=1$ δείξατε ὅτι ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$(3\alpha-4\alpha^3)^2+(3\beta-4\beta^3)^2=1$$

Ἀφοῦ κάμετε τά ἀναπτύγματα ὑπολογίσατε τάς δημιουργουμένας παραστάσεις μέ τάς ταυτότητας (6,7).

145. Ἐάν οἱ ἀριθμοί x, y, z, φ ἱκανοποιοῦν τάς ἰσότητας:

$$x+y+z+\varphi=1 \qquad x^2+y^2+z^2+\varphi^2=1 \qquad x^3+y^3+z^3+\varphi^3=1$$

νά δειχθῆ, ὅτι θά ἱκανοποιοῦν καί τήν ἰσότητα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\varphi}=0$$

Ἐάν ἀμφότερα τά μέλη τῆς ὑπό διαπίστωσιν ἰσότητος τά πολλαπλασιάσωμεν ἐπί $xyz\varphi$ εὑρίσκομεν τήν ἰσοδύναμον ἰσότητα: $xyz+xz\varphi+xy\varphi+yz\varphi=0$. Τώρα σκεφθεῖτε ποῖον ἀνάπτυγμα περιέχει τό πρῶτον μέλος τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος.

146. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ τότε ἀληθεύει ἡ ἰσότης:

$$(\alpha y+\beta x)^3+(\alpha x+\gamma y)^3+(\gamma x+\beta y)^3=3(\alpha y+\beta x)(\alpha x+\gamma y)(\gamma x+\beta y)$$

147. Δείξατε ὅτι ἡ σχέσις:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_\nu^2)\geqslant(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+\alpha_\nu\beta_\nu)^2$$

εἶναι μόνιμος.

Ἡ σχέσις αὐτη, ἡ ὁποία εἶναι γνωστή μέ τό ὄνομα τοῦ δημιουργοῦ της (Σχέσις τοῦ Schwarz) εἶναι μία συνέπεια τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange.

148. Ἐάν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ εἶναι τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί, ὑφίσταται ἡ σχέσις:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_\nu^2\geqslant\frac{2}{\nu-1}(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_1\alpha_\nu+\alpha_2\alpha_3+\cdots+\alpha_{\nu-1}\alpha_\nu)$$

ὅπου εἰς τό $2^{ον}$ μέλος ὑφίστανται τά γινόμενα τῶν θεωρουμένων πραγματικῶν ἀριθμῶν λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Χρησιμοποιήσατε τήν μόνιμον σχέσιν: $\alpha^2+\beta^2\geqslant 2\alpha\beta$.

149. Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ταυτότητος:

$$[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2][x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2]-[x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2]^2 \equiv 3(y-z)^2(z-x)^2(x-y)^2.$$

Εἶναι εὔκολον νά ἰδῇ κανείς πώς ὑπάρχουν δύο τριάδες ποσῶν διά τάς ὁποίας ἐφαρμόζεται ἡ ταυτότης τοῦ Lagrange.

150. Νά δειχθῇ ἐπίσης ἡ ἀλήθεια τῶν ταυτοτήτων:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)^2 \equiv \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha^4)] \equiv (\alpha-\beta)^2\cdot(\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2+(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2.$$

Εἶναι γνωστή ἡ σχέσις:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma \equiv \frac{1}{2}[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2].$$

Χρησιμοποιήσατε τώρα αὐτήν τήν ἔκφρασιν τῆς παραστάσεως τοῦ πρώτου μέλους τῶν ὑπό διαπίστωσιν ἰσοτήτων καί λάβετε ἀκόμη ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ ποσότητες $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μέ τό μηδέν.

Ἡ ἔννοια «Συνάρτησις» – Μία πρώτη γνωριμία.

22. Ἡ ἔννοια τοῦ Ἀριθμοσυνόλου. Ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ἀριθμοί, πού ἀπολαύουν μιᾶς καί τῆς αὐτῆς ἰδιότητος, συνιστοῦν ἕνα σύνολον ἀριθμῶν ἤ ἕνα ἀριθμοσύνολον.

Ἕνα σύνολον χαρακτηρίζεται ἀπό τοῦτο τό γεγονός: διδομένου ἑνός ἀριθμοῦ δυνάμεθα νά εἴπωμεν, ἐάν οὗτος ἀνήκη ἤ ὄχι εἰς αὐτό τό σύνολον. Οὕτω δυνάμεθα νά ὁμιλῶμεν διά τό σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, διά τό σύνολον τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν, διά τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξύ τῶν διδομένων ρητῶν α καί β (ἐνῶ αὐτοί οὗτοι οἱ α, β ἀνήκουν ἤ ὄχι εἰς αὐτό τό σύνολον) κ.λ.π.

Ἕνα σύνολον εἶναι φραγμένον ἄνωθεν, ὅταν ὑφίσταται ὡρισμένος ἀριθμός Β ὄχι μικρότερος ἀπό τόν οἱονδήποτε ἀριθμόν τοῦ συνόλου. Ἕν σύνολον εἶναι φραγμένον κάτωθεν, ὅταν ὑφίσταται ὡρισμένος ἀριθμός Α ὄχι μεγαλύτερος ἀπό τόν οἱονδήποτε ἀριθμόν τοῦ συνόλου.

Εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν ὁ Β εἶναι ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ὁ Α εἶναι ἕνα κάτω φράγμα τοῦ συνόλου.

Ἕνα σύνολον δύναται νά μή εἶναι φραγμένον ἄνωθεν ἤ κάτωθεν ὅπως δύναται νά εἶναι φραγμένον μόνον ἄνωθεν ἤ μόνον κάτωθεν ἤ νά εἶναι φραγμένον ἄνωθεν καί κάτωθεν*. Ἐάν ἕνα σύνολον εἶναι φραγμένον ἄνωθεν ἀπό ἕνα ἀριθμόν Β κάθε ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ Β εἶναι ἐπίσης, ὅπως ὁ Β, ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου· ἐπίσης, ἕν σύνολον φραγμένον κάτωθεν ἀπό τόν ἀριθμόν Α δέχεται κάθε ἀριθμόν μικρότερον τοῦ Α ὡς κάτω φράγμα. Ὅταν ἕνα σύνολον δέν εἶναι φραγμένον ἄνωθεν ὑφίσταται τοὐλάχιστον ἕνας ἐκ τῶν ἀριθμῶν του, πού ὑπερβαίνει τόν οἱονδήποτε διδόμενον ἀριθμόν Β. Φθάνομεν εἰς ἀνάλογον συμπέρασμα δι' ἕνα σύνολον, τό ὁποῖον δέν εἶναι φραγμένον κάτωθεν. Οὕτω τό σύνολον, τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι φραγμένον ἄνωθεν, διότι οἱοσδήποτε θετικός ἀριθμός ὅπως καί τό μηδέν εἶναι ἕνα ἄνω φράγμα τοῦ συνόλου.

Ἐπίσης, τό σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι φραγμένον κάτωθεν, ἐνῶ τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τῶν περιλαμβανομένων μεταξύ 1 καί 3 εἶναι ἕνα φραγμένον σύνολον.

23. **Μεταβλητή - Σταθερά.** Λέγομεν, ὅτι ἕνα γράμμα x εἶναι μεταβλητή διά νά ἐκφράσωμεν, ὅτι τοῦτο, εἰς τήν ἔκτασιν ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ θέματος, εἶναι δεκτικόν ἀπεριορίστου ἀριθμοῦ τιμῶν.

Ἐν ἀντιθέσει, ὀνομάζεται σταθερά ἕνα γράμμα, τό ὁποῖον εἰς τήν ἔκτασιν ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ θέματος εἶναι δεκτικόν μιᾶς ἤ περισσοτέρων (ἀλλά περιωρισμένου φυσικά ἀριθμοῦ) καθωρισμένων τιμῶν. Ἡ μεταβλητή χαρακτηρίζεται ὡς ἀνεξάρτητος, ἐάν δύναται νά ἀποκτήση τήν οἱανδήποτε συμφέρουσαν εἰς ἡμᾶς τιμήν, ἐνῶ ἡ ἐκλογή αὐτῆς τῆς τιμῆς δέν ὑπόκειται εἰς ἄλλον περιορισμόν πλήν ἐκείνου τῆς θελήσεώς μας.

24. **Ἡ ἔννοια «Συνάρτησις».** Ἄν εἰς ἕνα γράμμα x δίδωμεν ὡς τιμάς τούς ἀριθμούς (τά στοιχεῖα) ἑνός ὡρισμένου ἀριθμοσυνόλου

---

* Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι τό «σύνολον εἶναι φραγμένον».

Σ καί ἐάν εἰς ἑκάστην τῶν τιμῶν τούτων κάμωμεν νά ἀντιστοιχῇ, μέ κάποιον τρόπον, ἕνας ἤ περισσότεροι καθωρισμένοι ἀριθμοί, πού τούς εἰκονίζομεν μέ τό γράμμα y ἤ μέ τό $f(x)$, λέγομεν ὅτι τό y ἤ τό $f(x)$ εἶναι μία ὡ ρ ι σ μ έ ν η συνάρτησις τοῦ x εἰς τό σύνολον Σ*.

---

* Μία συνάρτησις παρουσιάζεται ὑπό διαφόρους μορφάς:

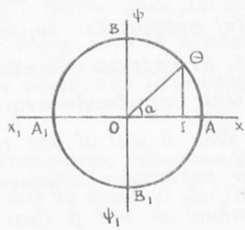
I. Ὑπό τήν μορφήν ἑνός διστήλου ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ο ῦ πίνακος διδοντος τάς ἀντιστοίχως ἀνταποκρινομένας τιμάς τῶν x καί y.

Παράδειγμα τοιαύτης περιπτώσεως εἶναι τό μέν y νά ἀντιπροσωπεύῃ τήν θερμοκρασίαν ἑνός ἀντικειμένου ἀπό ὥρας εἰς ὥραν τό δέ x τήν ὥραν τῆς παρατηρήσεως.

x	2	3	4	5	6 . . .
y	15°	15,3°	16°	17,4°	16,5° . . .

Ἐπίσης, ἡ ἀναγραφή τῶν βαρομετρικῶν πιέσεων εἰς καθωρισμένας χρονικάς στιγμάς, ἡ ἐπιμήκυνσις ἑνός στελέχους χαλκοῦ συνεπείᾳ τῆς μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας ὅπως καί πολυάριθμα ἄλλα φυσικά φαινόμενα παρέχουν παραδείγματα συναρτήσεως ἐμφανιζομένης ὑπό τήν ἀνωτέρω μορφήν.

II. Ὑπό τήν μορφήν μιᾶς γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ῆ ς κ α τ α σ κ ε υ ῆ ς. Αὐτή ἡ περίπτωσις παρουσιάζεται εἰς τόν ὁρισμόν τῶν τριγωνομετρικῶν λόγων. Π.χ. $συνα = \frac{(\overline{OI})}{(\overline{OA})}$. Εἰς ἑκάστην τιμήν τῆς γωνίας α ἀντιστοιχεῖ μία καί μόνον θέσις τοῦ σημείου Θ ἐπί τῆς περιφερείας· συνεπῶς μία μόνον ἀριθμητική τιμή τοῦ διανύσματος $\overline{OI}$ δηλαδή μία μόνον τιμή τοῦ συνα. Τό συνα εἶναι μία συνάρτησις τῆς α.



III. Ὑπό τήν μορφήν μιᾶς Ἀ ν α λ υ τ ι κ ῆ ς ἐ κ φ ρ ά σ ε ω ς (Ἀλγεβρικῆς ἤ Τριγωνομετρικῆς), ἥτις καί ἐπιτρέπει νά συμπεραίνῃ κανείς τάς πράξεις, αἱ ὁποῖαι πρέπει νά πραγματοποιηθοῦν διά νά κρούψῃ ἡ τιμή τοῦ y.

Οὕτω αἱ ἐκφράσεις: $y = 5x+3$ καί $y = συνx - 2ημx$ εἶναι δύο παραδείγματα τῆς μορφῆς αὐτῆς.

Ἡ μορφή αὐτή συναρτήσεως εἶναι ἡ πλέον συνήθης καί ἐκείνη τήν ὁποίαν σχεδόν ἀποκλειστικά θά συναντῶμεν. Παρά ταῦτα εἶναι χρήσιμον νά τονίσωμεν, ὅτι ἡ δημιουργία μιᾶς συναρτήσεως δέν ἀπαιτεῖ παρά νά εἶναι προφανής ὁ νόμος καθορισμοῦ τῶν ἀντιστοίχων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y.

Οὕτως ἔχομεν ἕνα παράδειγμα συναρτήσεως τῆς x, ἐάν τό μέν πεδίον μεταβολῆς τῆς x εἶναι τό σύνολον τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, αἱ δέ ἀντίστοιχοι τιμαί τοῦ y εἶναι αἱ ἱκανοποιοῦσαι τήν διπλῆν σχέσιν:

$$10^{\psi} \leq x < 10^{\psi+1}$$

Παράδειγμα ἐπίσης συναρτήσεως εἶναι τό ἑξῆς: πεδίον μεταβολῆς τῆς x τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί ἀντίστοιχοι τιμαί τῆς y οἱ ὅροι τῆς ἀκολουθίας: 0,27, 0,2727, 0,272727 . . . Ὁ νόμος τῆς ἀντιστοιχίας τῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν x καί y εἶναι προφανής.

Τό σύνολον Σ ἀποτελεῖ τό πεδίον μεταβολῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς x ἤ τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως y.
Ἐάν εἰς ἑκάστην τιμήν τοῦ x δέν ἀντιστοιχεῖ παρά μία μόνον τιμή διά τό y λέγομεν, ὅτι ἔχομεν μίαν μονοσήμαντον ἤ μονότιμον συνάρτησιν τῆς x. Εἰς τήν ἀντίθετον περίπτωσιν ἔχομεν μίαν πολυσήμαντον ἤ πλειότιμον συνάρτησιν τῆς x.
Γράφομεν συνήθως: $y=f(x)$, $y=\sigma(x)$ καί ἀπαγγέλλομεν ἀντιστοίχως, $y=f$ τοῦ x, $y=\sigma$ τοῦ x διά νά εἴπωμεν μέ σύντομον τρόπον: τό y εἶναι συνάρτησις τοῦ x. Τά γράμματα f καί σ εἶναι τά ἀρχικά τῶν λέξεων: Fonction (πού σημαίνει συνάρτησις) καί συνάρτησις. Τώρα μεταχειριζόμεθα καί ἄλλα γράμματα ἐκτός τῶν f καί σ διά νά ἐκφράσωμεν καί πάλιν, ὅτι τό y εἶναι συνάρτησις τοῦ x. Οὕτω σημειοῦμεν: $y=\varphi(x)$, $y=g(x)$, $y=K(x)$, $y=R(x)$ κ.λ.π.
Ἐάν γράψωμεν: $y_0=f(x_0)$ ἐννοοῦμεν πώς τό y_0 προκύπτει, ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό x ἀπό τήν τιμήν x_0 εἰς τήν ἔκφρασιν, τήν ὁποίαν ἡ $f(x)$ παρουσιάζει συμβολικῶς.
25. **Διάστημα**. Συνήθως τό σύνολον Σ συνίσταται ἀπό τούς ἀριθμούς, οἵτινες περιλαμβάνονται μεταξύ δύο γνωστῶν ἀριθμῶν a καί β, ἐνῶ ὁ ἕνας ἤ καί οἱ δύο τούτων ἀνήκουν ἤ ὄχι εἰς τό σύνολον. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν λέγομεν, ὅτι τό x κινεῖται εἰς τό διάστημα (a,β). Οἱ ἀριθμοί a καί β εἶναι τά ἄκρα τοῦ διαστήματος. Ἐάν δέν ὑφίσταται ἄλλη τις ἔνδειξις περί τοῦ ἀντιθέτου, τό διάστημα (a,β) συνίσταται ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, πού περιλαμβάνονται μεταξύ a καί β ὡς καί αὐτῶν τούτων τῶν a καί β*
Ἐάν μᾶς εἴπουν, ὅτι τό σύνολον Σ μορφοῦται ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, πού δέν εἶναι μικρότεροι διδομένου ἀριθμοῦ a, θά ἐννοοῦμεν, ὅτι τό x μεταβάλλεται ἀπό τό a μέχρι τό «σύν ἄπειρον» καί τό διάστημα σημειοῦται $(a,+\infty)$. Ἐπίσης, ἐάν τό σύνολον Σ μορφοῦται ἐξ ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες δέν εἶναι μεγαλύτεροι διδομένου ἀριθμοῦ β, θά λέ-

* Εἰς τάς περιπτώσεις, ὅπου σημειοῦμεν: $a<x<\beta$, $a\leq x\leq\beta$, $a\leq x<\beta$, $a<x\leq\beta$ λέγομεν, ὅτι ἔχομεν ἀντιστοίχως διάστημα: ἀνοικτόν, κλειστόν, ἀνοικτόν πρός τά δεξιά καί κλειστόν πρός τά ἀριστερά, κλειστόν πρός τά δεξιά καί ἀνοικτόν πρός τά ἀριστερά.

γωμεν, ὅτι τό Σ εἶναι τό διάστημα $(-\infty, \beta)$. Ἐάν τέλος τό x λαμβάνη πᾶσαν πραγματικήν τιμήν λέγομεν, ὅτι τό πεδίον μεταβολῆς του εἶναι τό διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

25.1. **Παραδείγματα συναρτήσεων ὡρισμένων**. Διά νά δώσωμεν παραδείγματα συναρτήσεων ὡρισμένων πρέπει νά λάβωμεν ὅλας τάς ἀναγκαίας προφυλάξεις διά νά ἔχωμεν μέ ἀκρίβειαν καθορίσει τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως. Οὕτω: Ἕνα πολυώνυμον (π.χ. $y=x^3-5x+1$) εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $(-\infty, +\infty)$. Διότι δίδοντες εἰς τό x τήν αὐθαίρετον τιμήν x_0 εἴμεθα βέβαιοι, ὅτι δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν τήν ἀντίστοιχον τιμήν y.

Τό κλάσμα: $y=\frac{3x+1}{x^2-1}$ εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη δι' ὅλας τάς τιμάς τοῦ x ἐξαιρέσει τῶν τιμῶν $+1$ καί -1 διά τάς ὁποίας ὁ παρανομαστής τοῦ κλάσματος μηδενίζεται.

Ἡ ἰσότης: $y=\sqrt{(x-3)(5-x)}$ δημιουργεῖ μίαν ἀντιστοιχίαν μεταξύ μιᾶς τιμῆς τῆς μεταβλητῆς x μέ μίαν τιμήν τῆς μεταβλητῆς y ὑπό τόν ὅρον ἡ ἀποδιδομένη τιμή εἰς τό x νά δίδη ὡς ἀριθμητικήν τιμήν εἰς τό γινόμενον $(x-3)(5-x)$ ἀριθμόν θετικόν ἤ μηδέν. Τό y λοιπόν εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη ἐφ' ὅσον τό πεδίον μεταβολῆς τῆς x εἶναι τό κλειστόν διάστημα $(3,5)$ δηλ. ἐφ' ὅσον τό x λαμβάνη τάς τιμάς, πού ἱκανοποιοῦν τήν διπλῆν σχέσιν: $3 \leq x \leq 5$.

Ἡ ἔκφρασις: $\frac{1}{x(x-3)}$ εἶναι ἕνα παράδειγμα συναρτήσεως ὡρισμένης εἰς τά διαστήματα: $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$, $(3, +\infty)$ ἐνῶ τά ἄκρα 0 καί 3 δέν ἀνήκουν εἰς αὐτά τά διαστήματα.

Ἡ συνάρτησις: $y=\sqrt{\frac{2x+3}{x-5}}$ εἶναι ὡρισμένη εἰς τά διαστήματα: $(-\infty, -\frac{3}{2})$, $(5, +\infty)$ ἐξαιρουμένης τῆς τιμῆς 5.

25.2. Μία συνάρτησις ὀνομάζεται περιοδική, ἐάν ἰσχύη ἡ ταυτότης: $f(x) \equiv f(x+K\mu)$ ὅπου μ εἶναι ὡρισμένη σταθερά καί K ὁ οἱοσδήποτε ἀκέραιος.

Ἡ ἐλαχίστη θετική τιμή τῆς ἐκφράσεως $K\mu$ ὀνομάζεται περίοδος.

Οὕτως, αἱ συναρτήσεις ημx, συνx εἶναι περιοδικαί μέ περίοδον 2π. Πράγματι, ημ$x \equiv$ ημ$(x+2K\pi)$, συν$x \equiv$ συν$(x+2K\pi)$. Αἱ συναρτήσεις εφx, σφx εἶναι ἐπίσης περιοδικαί μέ περίοδον π διότι εφ$x \equiv$ εφ$(x+K\pi)$,

$\sigma\varphi x \equiv \sigma\varphi(x+k\pi)$*.

Μία συνάρτησις τοῦ x ὀνομάζεται ἀρτία ἢ περιττή ἐάν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί διά δύο τυχούσας τιμάς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ των καί ἀντιθέτους εἶναι ἴσαι ἢ ἀντίθετοι.

Δηλ. ἐάν $f(x) \equiv f(-x)$ ἔχομεν ἀρτίαν συνάρτησιν· ἐάν $f(x) \equiv -f(-x)$ ἔχομεν περιττήν.

Οὕτως, αἱ συναρτήσεις: $y = x^2$, $y = \sigma\upsilon\nu x$ εἶναι συναρτήσεις ἄρτιαι ἐνῶ αἱ συναρτήσεις: $y = x^3$, $y = \eta\mu x$ εἶναι συναρτήσεις περιτταί.

26. **Συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητῶν.** Ἡ ἰσότης: $u = 2x + 5y - 1$ μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντιστοιχήσωμεν μίαν τιμήν τοῦ γράμματος u εἰς πᾶν ζεῦγος τιμῶν, πού δυνάμεθα νά δώσωμεν εἰς τά γράμματα x καί y. Αὐτή ἡ ἀντιστοιχία μορφώνει μίαν συνάρτησιν u τῶν μεταβλητῶν x καί y.

Ἡ ἰσότης: $z = \dfrac{5x - 7y + 6}{3x - 5y + 9}$ καθορίζει μίαν συνάρτησιν τῶν μεταβλητῶν x καί y δι' ὅλα τά συστήματα τιμῶν τῶν x καί y, τά ὁποῖα δέν μηδενίζουν τήν παράστασιν: $3x - 5y + 9$.

Ἡ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ εἶναι μία συνάρτησις ὡρισμένη δι' ὅλας τάς τιμάς τῶν x καί y, πού ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $x^2 + y^2 \leq 1$.

Συμπέρασμα: Ἐάν εἴς τινα συστήματα τιμῶν** ἀποδιδομένων εἰς τάς μεταβλητάς x, y... κάμωμεν κατά κάποιον τρόπον νά ἀντιστοιχῇ μία ἢ περισσότεραι καθωρισμέναι τιμαί ἑνός γράμματος u, θά λέγωμεν, ὅτι τό u εἶναι μία ὡρισμένη συνάρτησις τῶν x, y... διά τά θεωρούμενα συστήματα τιμῶν.

27. **Αὔξουσα καί φθίνουσα Συνάρτησις.** Ἔστω συνάρτησις $f(x)$ ὡρισμένη εἰς τό διάστημα (α, β). Θά λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτη εἶναι αὔξουσα εἰς τό διάστημα τοῦτο, ἐάν, διά δύο οἱασδήποτε τιμάς x_1, x_2 τοῦ διαστήματος τούτου καί τοιαύτας ὥστε $x_1 > x_2$ ἔχομεν καί $f(x_1) > f(x_2)$· ἐνῶ θά λέγωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, ἐάν διά τάς ἀνωτέρω τιμάς ἔχομεν $f(x_1) < f(x_2)$.

---

* Τό θέμα τῆς περιοδικότητος τῶν συναρτήσεων ἐκτίθεται λεπτομερῶς εἰς τήν Τριγωνομετρίαν μας σελ. 39.

** Ἀπειροπληθῆ ἀλλ' ὡρισμένα.

Ἔστω π.χ. ἡ συνάρτησις $y=\frac{5}{x^2+3}$, πού εἶναι ὡρισμένη εἰς τό διάστημα $(-\infty, +\infty)$ θά δείξωμεν ὅτι ἡ συνάρτησις αὐτή εἶναι αὔξουσα εἰς τό διάστημα $(-\infty, 0)$ καί φθίνουσα εἰς τό διάστημα $(0, +\infty)$.

Πράγματι, ἔστωσαν x_1, x_2 δύο αὐθαίρετοι ἀρνητικαί τιμαί καί τοιαῦται, ὥστε $x_1 > x_2$. Θά δείξωμεν ὅτι $y_1 > y_2$*.

Ἔχομεν: $-x_1 < -x_2$ (12.1, β) καί $x_1^2 < x_2^2$ ἤ καί $x_1^2+3 < x_2^2+3$.

Τότε, $\frac{1}{x_1^2+3} > \frac{1}{x_2^2+3}$ (12.1, δ) ἤ καί $\frac{5}{x_1^2+3} > \frac{5}{x_2^2+3}$ (12.1, β).

Ἐπίσης, ἐάν x_1, x_2 εἶναι δύο αὐθαίρετοι θετικαί τιμαί καί τοιαῦται, ὥστε $x_1 > x_2$ θά δείξωμεν ὅτι $y_1 < y_2$.

Ἔχομεν κατά τά ἀνωτέρω $x_1^2 > x_2^2$ καί $x_1^2+3 > x_2^2+3$ ἤ καί

$$\frac{1}{x_1^2+3} < \frac{1}{x_2^2+3}. \quad \text{Συνεπῶς} \quad \frac{5}{x_1^2+3} < \frac{5}{x_2^2+3}.$$

Ἀσκήσεις

151. Ποῖα εἶναι τά διαστήματα ὁρισμοῦ τῶν συναρτήσεων:

$$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}-5, \quad \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad \frac{x+1}{\sqrt{x+2}}, \quad y=2x+1.$$

152. Ἡ πίεσις ὡρισμένης μάζης ἀερίου εἰς ποίου εἴδους συνάρτησιν εὑρίσκεται μέ τόν ὄγκον του; (Νόμος τοῦ Boyle-Mariotte).

153. Ποῖαι ἐκ τῶν ἀκολούθων συναρτήσεων εἶναι ἄρτιαι καί ποῖαι περιτταί;

$$y=x^2-1-3.\text{συν}x, \quad y=x^2+\eta\mu^2x+1, \quad y=x^3+x+\eta\mu x$$

$$y=\frac{x}{\eta\mu x}+\text{συν}x, \quad y=\frac{\eta\mu x+\varepsilon\varphi x+x^2}{\text{συν}x}, \quad y=\frac{\eta\mu^2x+\text{συν}3x}{x^2}$$

154. Νά εὑρεθῇ ἡ περίοδος τῆς συναρτήσεως: $y=\eta\mu\frac{x}{2}+\varepsilon\varphi x$

Διά νά εἶναι ἡ συνάρτησις $\eta\mu\frac{x}{2}$ περιοδική (25.2) πρέπει νά ὑφίσταται μία σταθερά μ, ὥστε νά εἶναι:

$$\eta\mu\frac{x+\mu}{2} \equiv \eta\mu\frac{x}{2}.$$

Ἀλλά τότε ὡς γνωστόν:

$$\frac{x+\mu}{2}=2K_1\pi+\frac{x}{2} \quad \text{καί} \quad \frac{x+\mu}{2}=(2K_1+1)\pi-\frac{x}{2} \qquad (1)$$

ὅπου K_1 αὐθαίρετος ἀκέραιος.

Ἐκ τῆς πρώτης τῶν (1) λαμβάνομεν $\mu=4K_1\pi$ ἐνῶ ἡ δευτέρα τῶν (1)

---

* y_1, y_2 ὠνομάσαμεν τάς τιμάς τῆς συναρτήσεως τάς ἀντιστοιχούσας εἰς τάς τιμάς x_1, x_2 τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς.

μᾶς δίδει τό μ συναρτήσει τῆς μεταβλητῆς x. Ἡ συνάρτησις λοιπόν $\eta\mu\frac{x}{2}$ εἶναι περιοδική μέ περίοδον 4Π διότι τό 4Π εἶναι ἡ ἐλαχίστη θετική τιμή τῆς σταθερᾶς μ. Ἐπειδή ἀκόμη ἡ εφx εἶναι περιοδική συνάρτησις μέ περίοδον Π, ἡ περίοδος τῆς διδομένης συναρτήσεως θά εἶναι τό ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον τῶν 4Π καί Π δηλ. τό 4Π.

155. Δείξατε, ὅτι ἡ συνάρτησις: $y = 2x^3+3x^2+6x$ εἶναι αὔξουσα εἰς ὁλόκληρον τό πεδίον ὁρισμοῦ της δηλ. εἰς τό διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

Ἔστωσαν x_1, x_2 δύο αὐθαίρετοι τιμαί τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεώς μας. Διά νά δείξωμεν, ὅτι ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἀρκεῖ νά δείξωμεν ὅτι:

$$2x_1^3+3x_1^2+6x_1-(2x_2^3+3x_2^2+6x_2)>0$$

ἐφ' ὅσον $x_1>x_2$. Πράγματι ἔχομεν: $2x_1^3+3x_1^2+6x_1-(2x_2^3+3x_2^2+6x_2)\equiv 2(x_1^3-x_2^3)+3(x_1^2-x_2^2)+6(x_1-x_2)\equiv 2(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+3(x_1-x_2)(x_1+x_2)+6(x_1-x_2)\equiv (x_1-x_2)[2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+3(x_1+x_2)+6]$.

Ἐπειδή τώρα κατά τήν ὑπόθεσίν μας ἡ διαφορά x_1-x_2 εἶναι ἀριθμός θετικός θά πρέπει νά δείξωμεν ὅτι καί ἡ ἔκφρασις

$$2x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+3(x_1+x_2)+6$$

εἶναι θετική. Πρός τοῦτο δέν ἔχομεν παρά ἡ ἔκφρασις αὐτη νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν ἀθροίσματος τετραγώνων.

Διαίρεσις δύο πολυωνύμων διατεταγμένων κατά τάς κατιούσας δυνάμεις ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ γράμματος – Ρητά Κλάσματα

28. Διαίρεσις ἑνός πολυωνύμου δι' ἑνός μονωνύμου. Πηλίκον ἑνός πολυωνύμου δι' ἑνός μονωνύμου εἶναι τό πολυώνυμον, ἐάν ὑπάρχῃ, πού τό γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ του ἐπί τό μονώνυμον εἶναι τό διδόμενον πολυώνυμον.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τό πηλίκον πολυωνύμου διά μονωνύμου δέν εἶναι δυνατόν παρά νά εἶναι πολυώνυμον, διότι ἕνα μονώνυμον, ὅταν πολλαπλασιασθῆ ἐπί ἕνα ἄλλο μονώνυμον θά μᾶς δημιουργήσῃ καί πάλιν μονώνυμον. Ἐάν τώρα λάβωμεν ὑπ' ὄψιν ὅτι τό γινόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός πολυωνύμου ἐπί ἕνα μονώνυμον προκύπτει μέ τόν πολλαπλασιασμόν ἐπί τό μονώνυμον ἑκάστου τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου συμπεραίνομεν ὅτι: Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώνυμον εὑρίσκεται, ἐάν διαιρέσωμεν μέ τό μονώνυμον ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου.

28.1. Παρατήρησις. Διά νά ὑπάρχῃ φυσικά τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώνυμον, θά πρέπει ἕκαστος ὅρος τοῦ πολυωνύμου νά εἶναι διαιρετός μέ τό μονώνυμον.

29. **Διαίρεσις δύο ἀκεραίων καί διατεταγμένων πολυωνύμων.**

Εἴδομεν ὅτι κάθε ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον εἶναι συνάρτησις ὡρισμένη εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Δυνάμεθα λοιπόν νά λέγωμεν: τό πολυώνυμον $f(x)$.

Διαίρεσις ἑνός πολυωνύμου $f_1(x)$ μέ ἕνα ἄλλο πολυώνυμον $f_2(x)$ εἶναι νά εὕρωμεν δύο ἄλλα πολυώνυμα $\Pi(x)$ καί $Y(x)$, ὅπου τό $Y(x)$ νά εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ $f_2(x)$ καί τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ ταυτότης

$$f_1(x) \equiv f_2(x)\Pi(x) + Y(x) \qquad (1)$$

Ἐάν συμβῇ τό $Y(x)$ νά μή ὑπάρχῃ δηλ. ἐάν ἰσχύῃ ἡ ταυτότης: $f_1(x) \equiv f_2(x)\Pi(x)$ λέγομεν πώς ἡ διαίρεσις τῶν δύο πολυωνύμων εἶναι τελεία ἤ ὅτι τό πολυώνυμον $f_1(x)$ εἶναι διαιρετόν μέ τό $f_2(x)$.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τό $f_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ μ καί τό $f_2(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν, ἐνῶ $\mu \geq \nu$. Θά δημιουργήσωμεν λοιπόν διά δύο τοιαῦτα πολυώνυμα τήν ταυτότητα (1), ἐνῶ τό $Y(x)$ θά εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ ν. Δι' αὐτήν τήν πραγματοποίησιν ἔχομεν κατά πρῶτον ἀνάγκην νά δείξωμεν τήν ἑξῆς βοηθητικήν πρότασιν:

29.1. Λῆμμα. Ἄν δοθῇ ἀκέραιον πολυώνυμον $f_1(x)$ βαθμοῦ μ καί ἀκέραιον πολυώνυμον $f_2(x)$ βαθμοῦ ν καί εἶναι $\mu \geq \nu$, ὑφίσταται μονώνυμον $\Pi_1(x)$ καί πολυώνυμον $Y_1(x)$, πού τό $Y_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ μ, καί τοιαῦτα, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ ταυτότης:

$$f_1(x) \equiv f_2(x)\Pi_1(x) + Y_1(x) \qquad (2)$$

Ἔχομεν τά πολυώνυμα:

$$f_1(x) \equiv a_\mu x^\mu + a_{\mu-1}x^{\mu-1} + a_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

$$f_2(x) \equiv \beta_\nu x^\nu + \beta_{\nu-1}x^{\nu-1} + \beta_{\nu-2}x^{\nu-2} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$$

Ἰσχυριζόμεθα πώς τό μονώνυμον $\Pi_1(x)$ εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ $f_1(x)$ διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ $f_2(x)$ δηλ. $\Pi_1(x) = \dfrac{a_\mu x^\mu}{\beta_\nu x^\nu} = \dfrac{a_\mu}{\beta_\nu}x^{\mu-\nu}$ *. Ἄς ἔλθωμεν τώρα νά ἐπαληθεύσωμεν τήν ταυτότητα (2).

Ἔχομεν: $f_2(x)\Pi_1(x) \equiv a_\mu x^\mu + \dfrac{a_\mu\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}x^{\mu-1} + \dfrac{a_\mu\beta_{\nu-2}}{\beta_\nu}x^{\mu-2} + \ldots +$

$$+\frac{a_\mu\beta_1}{\beta_\nu}x^{\mu-\nu+1} + \frac{a_\mu\beta_0}{\beta_\nu}x^{\mu-\nu}$$

Καί: $f_1(x) - f_2(x)\Pi_1(x) \equiv \left(a_{\mu-1} - \dfrac{a_\mu\beta_{\nu-1}}{\beta_\nu}\right)x^{\mu-1} + \left(a_{\mu-2} - \dfrac{a_\mu\beta_{\nu-2}}{\beta_\nu}\right)x^{\mu-2} + \ldots +$

$$+\left(a_{\mu-\nu+1} - \frac{a_\mu\beta_1}{\beta_\nu}\right)x^{\mu-\nu+1} + \left(a_{\mu-\nu} - \frac{a_\mu\beta_0}{\beta_\nu}\right)x^{\mu-\nu} + a_{\mu-\nu-1}x^{\mu-\nu-1} +$$

$$+ a_{\mu-\nu-2}x^{\mu-\nu-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Δηλαδή ἡ διαφορά $f_1(x) - f_2(x)\Pi_1(x)$ εἶναι πολυώνυμον $Y_1(x)$ βαθμοῦ τό πολύ $\mu-1$ δηλαδή βαθμοῦ κατωτέρου ἀπό τόν βαθμόν τοῦ $f_1(x)$.

29.2. **Ἐπαλήθευσις τῆς ταυτότητος** (1). Ἐπηληθεύσαμεν ἀνωτέρω τήν ταυτότητα (2). Ἐάν τό $Y_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου τοῦ ν τότε τό $\Pi_1(x)$ εἶναι τό πηλίκον καί τό $Y_1(x)$ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων. Ἐάν ὅμως τό $Y_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ ἀνωτέρου ἀπό τόν βαθμόν τοῦ $f_2(x)$, τότε δυνάμεθα νά ἐκφράσωμεν τό ἀνωτέρω λῆμμα διά τά πολυώνυμα $Y_1(x)$ καί $f_2(x)$. Οὕτω θά ἐπαληθεύσωμεν τήν ταυτότητα:

$$Y_1(x) \equiv f_2(x)\Pi_2(x) + Y_2(x)$$

ὅπου τό $\Pi_2(x)$ θά εἶναι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τῶν δύο πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων $Y_1(x)$ καί $f_2(x)$ καί τό $Y_2(x)$ πολυώνυμον βαθμοῦ κατωτέρου ἐκείνου τοῦ $Y_1(x)$. Καί πάλιν θά σκεφθῶμεν ὁμοίως. Δηλ. ἐάν τό $Y_2(x)$ εἶναι κατωτέρου βαθμοῦ ἐκείνου τοῦ $f_2(x)$ θά σταματήσωμεν ἄλλεώς θά ἐφαρμόσωμεν τό λῆμμα καί διά τά πολυώνυμα

---

* Εἶναι εὔκολον νά βεβαιώσωμεν τόν ἰσχυρισμόν μας παρατηροῦντες πώς εἰς τήν ταυτότητα (1) ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ $f_2(x)$ μέ τόν πρῶτον ὅρον τοῦ $\Pi_1(x)$ θά μᾶς δώσουν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ $f_1(x)$ ἐφ' ὅσον τό $Y(x)$ θά πρέπει νά εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου ἐκείνου τοῦ $f_2(x)$.

6

$Y_2(x)$ καί $f_2(x)$. Οὕτω ἀπό τήν διαδοχικήν χρησιμοποίησιν τοῦ λήμματος λαμβάνομεν τάς ἀκολούθους ἰσότητας:

$$f_1(x) \equiv f_2(x)\Pi_1(x) + Y_1(x)$$
$$Y_1(x) \equiv f_2(x)\Pi_2(x) + Y_2(x)$$
$$Y_2(x) \equiv f_2(x)\Pi_3(x) + Y_3(x)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Y_{\kappa-1}(x) \equiv f_2(x)\Pi_\kappa(x) + Y(x)$$

ὅπου τό $Y(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατωτέρου καί ἐκείνου τοῦ $f_2(x)$.

Ἄν τώρα προσθέσωμεν τάς ἀνωτέρω ἰσότητας, εὑρίσκομεν:

$$f_1(x) \equiv f_2(x)\left[\Pi_1(x) + \Pi_2(x) + \cdots + \Pi_\kappa(x)\right] + Y(x)$$

δηλ. πραγματοποιοῦμεν τήν ἰσότητα (1) μέ $\Pi(x) \equiv \Pi_1(x) + \Pi_2(x) + \cdots + \Pi_\kappa(x)$.

Ἐξηγήσαμεν λοιπόν θεωρητικά τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον προσδιορίζομεν, ὅρον μέ ὅρον, τό πηλίκον δύο ἀκεραίων καί διατεταγμένων κατά κατιούσας δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος πολυωνύμων καί ὁ καθείς δύναται ἑρμηνεύων λεκτικά τάς ἀνωτέρω ἰσότητας νά συμπεράνῃ τόν κανόνα μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως.

Ἡ διάταξις πάλιν τῆς πράξεως εἶναι γνωστή ἀπό τήν Γυμνασιακήν διδασκαλίαν καί ὁ προορισμός τοῦ βιβλίου αὐτοῦ δέν δικαιολογεῖ τοιαύτας ἐπαναλήψεις.

30. Ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως οἱουδήποτε ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha x \pm \beta$.

Ἐννοοῦμεν πώς τό ὑπόλοιπον μιᾶς τοιαύτης διαιρέσεως καί ἄν δέν εἶναι μηδέν θά εἶναι μία σταθερά δηλ. ἀριθμός ἀνεξάρτητος τοῦ γράμματος x, ἐφ' ὅσον τό ὑπόλοιπον μιᾶς διαιρέσεως πρέπει νά εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου ἐκείνου τοῦ διαιρέτου.

Ζητοῦμεν λοιπόν, γνωρίζοντες ἕνα ὁποιοδήποτε πολυώνυμον $f(x)$ καί τόν διαιρέτην $\alpha x \pm \beta$, νά προσδιορίσωμεν τήν σταθεράν υ τῆς ταυτότητος:

$$f(x) \equiv (\alpha x \pm \beta)\,\Pi(x) + \upsilon \qquad (1)$$

χωρίς νά μεσολαβήσῃ ἡ ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως.

Ἡ ταυτότης (1) δίδει: $f\left(\mp \frac{\beta}{\alpha}\right) = \upsilon$. Δηλ: Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς συμπίπτει μέ τήν ἀριθμητικήν τιμήν τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου διά τήν τιμήν ἐκείνην τοῦ x διά τήν ὁποίαν ὁ διαιρέτης μηδενίζεται.

31. Συμπέρασμα τῶν ἀνωτέρω εἶναι, ὅτι ἡ ἰσότης $f\left(\mp \frac{\beta}{a}\right)=0$ δεικνύει τό διαιρετόν τοῦ $f(x)$ διά τοῦ διωνύμου $ax \pm \beta$.

32. Τρόπος σχηματισμοῦ τῶν συντελεστῶν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου $x-a$.

Ἔστω ὅτι πρόκειται νά διαιρέσωμεν τό πολυώνυμον : $A_\mu x^\mu + A_{\mu-1}x^{\mu-1} + \ldots + A_0$ διά τοῦ διωνύμου $x-a$. Τό πηλίκον, εἶναι φανερόν, θά εἶναι ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον βαθμοῦ $\mu-1$ καί τό ὑπόλοιπον, ἄν δέν εἶναι μηδέν, θά εἶναι μία σταθερά· θά ἔχωμεν λοιπόν τήν ταυτότητα:

$$A_\mu x^\mu + A_{\mu-1}x^{\mu-1} + \cdots + A_1 x + A_0 \equiv (x-a)(B_{\mu-1}x^{\mu-1} + B_{\mu-2}x^{\mu-2} + \ldots + B_1 x + B_0) + Y \equiv B_{\mu-1}x^\mu + (B_{\mu-2} - aB_{\mu-1})x^{\mu-1} + (B_{\mu-3} - aB_{\mu-2})x^{\mu-2} + \cdots + (B_0 - aB_1)x - aB_0 + Y.$$

Καί ἐπειδή (17.1.2) τά δύο πολυώνυμα συνίστανται ἐκ τῶν αὐτῶν ὅρων, ἔχομεν: $A_\mu = B_{\mu-1}$, $A_{\mu-1} = B_{\mu-2} - aB_{\mu-1}$, $\ldots A_1 = B_0 - aB_1$, $A_0 = -aB_0 + Y$ ἤ $B_{\mu-1} = A_\mu$, $B_{\mu-2} = A_{\mu-1} + aB_{\mu-1}$, $\ldots B_0 = A_1 + aB_1$, $Y = A_0 + aB_0$.

Ἀπό αὐτάς τάς ἰσότητας ἐξάγεται ὁ ἑπόμενος κανών:

Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου βαθμοῦ μ διά τοῦ διωνύμου $x-a$ εἶναι ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον βαθμοῦ $\mu-1$, πού ὁ πρῶτος ὅρος του ἔχει τόν αὐτόν συντελεστήν μέ τόν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου.

Ὁ συντελεστής ἑνός τυχόντος ὅρου τοῦ πηλίκου, ἀπό τοῦ δευτέρου καί πέραν, προκύπτει, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τόν συντελεστήν τοῦ προηγουμένου ὅρου ἐπί a καί προσθέσωμεν αὐτό τό γινόμενον εἰς τόν συντελεστήν τοῦ ὅρου, πού ἔχει τήν αὐτήν τάξιν εἰς τόν διαιρετέον.

Τό ὑπόλοιπον ὑπακούει εἰς τόν αὐτόν νόμον καί προκύπτει ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί a τόν τελευταῖον ὅρον τοῦ πηλίκου καί προσθέσωμεν εἰς αὐτό τό γινόμενον τόν τελευταῖον ὅρον τοῦ διαιρετέου.

32.1. Σημείωσις: Εἶναι αὐτονόητον ὅτι, ἄν ὁ διαιρέτης μας εἶναι τό διώνυμον $x+a$, ὁ ἀνωτέρω κανών θά ἰσχύη μέ τήν διαφοράν, ὅτι ἀντί τοῦ a θά θέτωμεν $(-a)$.

33. **Ἀξιοσημείωτα πηλίκα**. Πρόκειται περί τῶν πηλίκων τῶν διαιρέσεων: $(x^{\mu} \pm a^{\mu}):(x \pm a)$. Τά πηλίκα ταῦτα, διά τήν περίπτωσιν, ὅπου αἱ ἀνωτέρω διαιρέσεις εἶναι τέλειαι, εἶναι χρήσιμον νά γνωρίζωμεν νά προσδιορίζωμεν ἀπό μνήμης διότι συναντῶνται ταῦτα εἰς πλεῖστα ζητήματα τῆς Ἀλγέβρας. Καί: Ἐάν $\mu=2\nu$ αἱ τέλειαι διαιρέσεις εἶναι αἱ: $(x^{\mu}-a^{\mu}):(x \pm a)$. Δηλ. ὅταν ὁ μ εἶναι ἄρτιος ἀριθμ. ἔχομεν τελείαν διαίρεσιν ἐάν ὁ μέν διαιρετέος εἶναι διαφορά ὁ δέ διαιρέτης ἄθροισμα ἤ διαφορά. Καί πράγματι, εἰς τήν πρώτην περίπτωσιν τό ὑπόλοιπον τῆς σημειουμένης διαιρέσεως (30) εἶναι: $\upsilon = (-a)^{\mu} - a^{\mu} = a^{\mu} - a^{\mu} = 0$· καί εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ἔχομεν ἐπίσης $\upsilon = a^{\mu} - a^{\mu} = 0$.

Ὅσον τώρα ἀφορᾶ τούς ὅρους τοῦ πηλίκου δέν ἔχομεν παρά νά ἀκολουθήσωμεν τά συμπεράσματα τοῦ (32). Καί διά τήν πρώτην περίπτωσιν οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου ἐναλλάσσουν τό πρόσημον (+) καί (-) μέ πρόσημον προφανῶς τοῦ πρώτου ὅρου τό (+)· εἰς τήν δευτέραν περίπτωσιν ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου ἔχουν πρόσημον τό (+). Αἱ δυνάμεις δέ τοῦ x βαίνουν ἐλαττούμεναι ἀπό ὅρου εἰς ὅρον καί αἱ δυνάμεις τοῦ a αὐξανόμεναι. Οὕτως ἔχομεν:

$$\frac{x^4-a^4}{x \pm a} = x^3 \mp ax^2 + a^2x \mp a^3$$

Ἐάν $\mu=2\nu+1$ αἱ τέλειαι διαιρέσεις εἶναι αἱ: $(x^{\mu}+a^{\mu}):(x+a)$ ἀφ' ἑνός καί $(x^{\mu}-a^{\mu}):(x-a)$ ἀφ' ἑτέρου.

Δηλ. ὅταν ὁ μ εἶναι περιττός ἀριθμός ἔχομεν τελείαν διαίρεσιν, ἐάν διαιρετέος καί διαιρέτης εἶναι ἀθροίσματα ἤ διαφοραί.

Τώρα, ὅσον ἀφορᾶ τά πηλίκα αὐτῶν τῶν διαιρέσεων, ἰσχύουν τά ἀνωτέρω ἀναφερθέντα. Οὕτω:

$$\frac{x^5+a^5}{x+a} = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4, \quad \frac{x^5-a^5}{x-a} = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4.$$

33.1. **Συμπέρασμα**: Ἡ διαίρεσις: $\frac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x-a}$ εἶναι τελεία εἴτε ὁ φυσικός μ εἶναι ἄρτιος εἴτε εἶναι περιττός. Ἡ διαίρεσις: $\frac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x+a}$ εἶναι τελεία ἐάν μ εἶναι ἄρτιος, ἐνῷ ἡ διαίρεσις: $\frac{x^{\mu}+a^{\mu}}{x+a}$ εἶναι τελεία ἐάν ὁ μ εἶναι περιττός.

Ἀσκήσεις

156. Πραγματοποιήσατε τάς ἀκολούθους διαιρέσεις:
α) $-105x^4y^7z^3 : 4x^4y^7$ β) $-96x^5y : (-24x^3y)$ γ) $-15x^2y^3z^6 : (-5xy^3z^4)$ δ) $42a^4\beta : (-7a^3\beta)$ ε) $15a^{\nu+1}\beta^{2\nu-1} : 3a^{\nu}\beta^{\nu-3}$
στ) $201a^{\mu}\beta^{\nu} : (-8a^2\beta^3)$.

157. Τό αὐτό διά τάς διαιρέσεις:
α) $(4a^7x^5-24a^6x^6+35a^5x^7) : 4ax$ β) $(14a^5\beta^8-50a^3+15a^2\beta^4) : 10a^2\beta^2$
γ) $(15\mu^4\nu^3\rho^3-25\mu^5\nu^4\rho^3+30\mu^8\nu^5\rho^4) : (-15\mu^3\nu^3\rho^3)$
δ) $(40a^{\mu}\beta^{2\nu}+24a^{\mu+\nu}\beta^{\nu}-32a^{\nu}\beta^{\mu+\nu}) : (-8a^{\nu}\beta^{\nu})$

158. Ἐπίσης ἐκτελέσατε τάς διαιρέσεις:
α) $(a^7-64a) : (a^2-2a+4)$ β) $\left(x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x\right) : \left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$
γ) $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right) : \left(\frac{4}{3}x-2\right)$
δ) $(12a^{2\nu-1}-25a^{2\nu-2}\beta^{\mu}+35a^{2\nu-3}\beta^{2\mu}-19a^{2\nu-4}\beta^{3\mu}+5a^{2\nu-5}\beta^{4\mu}) : (4a^{\nu-2}-3a^{\nu-3}\beta^{\mu}+a^{\nu-4}\beta^{2\mu})$.
ε) $\left(2x^4-\frac{11}{12}x^3y+\frac{11}{12}x^2y^2+\frac{5}{144}xy^3-\frac{1}{2}y^4\right) : \left(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{4}y^2\right)$.
στ) $(a^{2\nu}+2a^{\nu}\beta^{2\rho}+\beta^{4\rho}-\gamma^{2\pi}) : (a^{\nu}+\beta^{2\rho}+\gamma^{\pi})$
ζ) $x^{8\nu}-y^{8\rho} : (x^{5\nu}-x^{4\nu}y^{\rho}+x^{\nu}y^{4\rho}-y^{5\rho})$
η) $(\rho^8x^4-81a^{12}) : (\rho^6x^3-3a^3\rho^4x^2+9a^6\rho^2x-27a^9)$
θ) $\left(x^5-1\frac{1}{6}x^4+4\frac{1}{3}x^3-2\frac{5}{6}x^2-3\frac{2}{9}x-\frac{1}{3}\right) : \left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{3}\right)$.

159. Νά προσδιορισθῆ τό μ, ὥστε τό πολυώνυμον $x^4-3x^2+3x-\mu$ νά εἶναι διαιρετόν μέ τό $x-3$. (Ἐφαρμογή τοῦ ἐδ. 30).

160. Νά προσδιορισθῆ τό μ ὥστε τό πολυώνυμον $x^4-3x^2+3x-\mu$ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $2x+1$.

161. Ποῖαι τῶν ἑπομένων διαιρέσεων εἶναι τέλειαι καί εἰς τήν περίπτωσιν πού εἶναι ἀτελεῖς νά εὑρεθῆ χωρίς νά ἐκτελεσθῆ ἡ πρᾶξις, ποῖα εἶναι τά ὑπόλοιπα.
α) $(x^5-3x^4+5x^3-6x^2+7x-1) : (x\pm1)$ β) $(10x^3-19x^2+13x-3) : (2x-1)$
γ) $[2x^4+(4a-3)x^3-6a(a+1)x^2-a^2(10a-9)x+15a^3] : (2x\mp3)$
δ) $(x^3-2ax^2+2a^2x-a^3) : (x\pm a)$

162. Νά εὑρεθοῦν, χωρίς νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις, τά ἀκόλουθα πηλίκα:

$\frac{x^6-a^6}{x+a}$, $\frac{x^7-128y^7}{x-2y}$, $\frac{16x^4-y^4}{2x+y}$, $\frac{a^6\beta^6-\gamma^6}{a\beta-\gamma}$, $\frac{125x^3+y^3}{5x+y}$, $\frac{a^9+\beta^3\gamma^3}{a^3+\beta\gamma}$

$\frac{a^3-\beta^4y^4}{a^2-\beta y}$, $\frac{x^{10}y^5+1}{x^2y+1}$, $\frac{x^{2\nu}-y^{2\nu}}{x^2-y^2}$

163. Ποῖαι τέλειαι διαιρέσεις ἔχουν ὡς πηλίκα των τά ἀκόλουθα πολυώνυμα;

x^2+x+1 , x^2-x+1 , x^3-x^2+x-1 , a^3-2a^2+4a-8 , $a^4+2a^3+4a^2+8a+16$, $64x^6+32x^5y+16x^4y^2+8x^3y^3+4x^2y^4+2xy^5+y^6$, $x^4-3x^3y+9x^2y^2-27xy^3+81y^4$, $a^4\beta^4+a^3\beta^3+a^2\beta^2+a\beta+1$, $x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\dots+x^2+x+1$.

("Ας λάβωμεν ἐξ αὐτῶν τό x^2+x+1. Ἀφοῦ ὅλοι του οἱ ὅροι ἔχουν πρόσημον τό (+) ἐννοοῦμεν πώς ὁ διαιρέτης θά εἶναι διαφορά. Καί ἐπειδή ὁ διαιρετέος θά εἶναι περιττοῦ βαθμοῦ θά πρέπει καί αὐτός νά εἶναι διαφορά. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τά ἄλλα πολυώνυμα).

164. "Αν τό $x+2$ εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν πολυωνύμων $x^2+(2a-\beta)x+3\beta$ καί $x^3-(2\beta-1)x+2a$, νά εὑρεθοῦν τά a καί β.

165. Τό πολυώνυμον $x^3+7ax^2+11a^2x+2a^3$ ἔχει ὡς παράγοντα τό $x+2a$;

166. Διά ποίαν τιμήν τοῦ μ τά πολυώνυμα $x^3+2x^2+3x+\mu$ καί x^3+x^2+3 διαιρούμενα μέ τό $x+2$ ἀφήνουν ὑπόλοιπα ἴσα;

34. **Μετασχηματισμός ἑνός πολυωνύμου εἰς γινόμενον.** Ὁ μετασχηματισμός τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενα πρώτων* παραγόντων ἐξαρτᾶται γενικά ἀπό τήν θεωρίαν διά τήν λύσιν τῶν ἐξισώσεων καί πραγματοποιεῖ αὐτήν τήν λύσιν, ὅταν κατορθώσωμεν νά τόν ἐπιτύχωμεν.

---

* Ἕνα πολυώνυμον ὀνομάζεται «πρῶτον» ἐάν δέν δύναται νά ἀναλυθῆ εἰς γινόμενον παραγόντων μικροτέρου βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα, πού περιέχει.
Τά πρωτοβάθμια πολυώνυμα εἶναι ἀναμφισβήτητα πολυώνυμα «πρῶτα» ὅπως τά πολυώνυμα: $x-5$, $a+3\beta$, $x-y+2\omega$. Μέ τό νά τίθεται ἕνας ἀριθμητικός παράγων ἐκτός παρενθέσεως δι' ἕνα πολυώνυμον, αὐτό δέν λαμβάνεται ὑπ' ὄψιν εἰς τόν χαρακτηρισμόν του ὡς Πολυωνύμου «Πρώτου». Οὕτω τό πολυώνυμον: $5x-15y+20\omega=5(x-3y+4\omega)$ ἤ τό πολυώνυμον $3x-5y+7\omega=8\left(\frac{3}{8}x-\frac{5}{8}y+\frac{7}{8}\omega\right)$ εἶναι πολυώνυμα «Πρῶτα».
Εἴδομεν (29) ὅτι ἕνα πολυώνυμον Α εἶναι **διαιρέτης** ἑνός ἄλλου πολυωνύμου Β, ὅταν δυνάμεθα νά ἔχωμεν: $B=A\cdot\Gamma$ ὅπου Γ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιον πολυώνυμον. Ὥστε, ἕνα πολυώνυμον «Πρῶτον» ἔχει ὡς διαιρέτην τόν ἑαυτόν του ἤ ὁποιονδήποτε ἀριθμόν

Τό γεγονός αὐτό μᾶς ἐμποδίζει νά ὁλοκληρώσωμεν τήν ἀνάπτυξιν τοῦ θέματός μας. Θά περιορισθῶμεν νά δώσωμεν τάς στοιχειώδης περιπτώσεις εἰς τάς ὁποίας δυνάμεθα νά πραγματοποιήσωμεν τόν μετασχηματισμόν τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενα καί αἱ ὁποῖαι συναντῶνται συχνά. Χρεωστοῦμεν ἐν τούτοις νά τονίσωμεν τήν χρησιμότητα τοῦ παρόντος θέματος, διότι ἐκτός ἀπό τήν ἀνωτέρω ἀναφερομένην προσφοράν του ἁπλοποιεῖ τάς πολυπλόκους παραστάσεις καί διευκολύνει τήν λύσιν πολλῶν μαθηματικῶν ζητημάτων.

1η Περίπτωσις: Ἐάν ἕνα πολυώνυμον εἶναι τοιοῦτον, ὥστε οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων του νά δέχωνται ἕνα μ.κ.δ. διάφορον τῆς μονάδος καί συγχρόνως μερικά γράμματα νά περιλαμβάνωνται εἰς ὅλους τούς ὅρους του, τό πολυώνυμον θά εἶναι διαιρετόν μέ ἕνα μονώνυμον, τοῦ ὁποίου ὁ συντελεστής θά εἶναι αὐτός ὁ μ.κ.δ. καί τό γραμματικόν του μέρος θά ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά γράμματα τῶν ὅρων του, πού θά τά λάβωμεν μέ τόν μικρότερόν των ἐκθέτην.

Παράδειγμα. Τό πολυώνυμον $15a^3\beta^2\gamma^3 - 12a^2\beta^3\gamma^2 + 18a^2\beta^3\gamma^3$ ἔχει ὅλους τούς ὅρους του διαιρετούς μέ τό μονώνυμον $3a^2\beta^2\gamma^2$ ἤ μέ τό $-3a^2\beta^2\gamma^2$ καί δυνάμεθα νά τό γράψωμεν: $3a^2\beta^2\gamma^2(5a-4\beta+6\gamma)$ ἤ $-3a^2\beta^2\gamma^2(-5a+4\beta-6\gamma)$.

2α Περίπτωσις: Ἐάν εἶναι δυνατόν τό πολυώνυμον νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν διαφορᾶς δύο τετραγώνων. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἡ ταυτότης:

$$(a+\beta)(a-\beta) \equiv a^2 - \beta^2$$

μᾶς ἐπιτρέπει νά τό μορφώσωμεν εἰς γινόμενον.

Παραδείγματα: $4a^2-9\beta^2 \equiv (2a+3\beta)(2a-3\beta)$, $12a^2x-75\beta^2xy^2 \equiv 3x(4a^2-25\beta^2y^2) \equiv 3x(2a+5\beta y)(2a-5\beta y)$.

3η Περίπτωσις: Ἐάν δυνάμεθα χωρίζοντες τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου εἰς ὁμάδας ἤ συγχρόνως μετασχηματίζοντες μερικούς του ὅρους, νά φέρωμεν τό πολυώνυμον εἰς τάς ἀνωτέρω μορφάς. Τήν περίπτωσιν αὐτήν μόνον μέ τά παραδείγματα δυνάμεθα νά καταστήσωμεν νοητήν.

Παραδείγματα: 1ον. $a\beta+a\gamma+\beta\delta+\gamma\delta \equiv (a\beta+a\gamma)+(\beta\delta+\gamma\delta) \equiv a(\beta+\gamma)\delta(\beta+\gamma) \equiv (\beta+\gamma)(a+\delta)$

2ον. $1+xy+a(x+y)-(x+y)-a(1+xy) \equiv (1+xy)(1-a)-(x+y)(1-a) \equiv$

$(1-a)(1+xy-x-y) \equiv (1-a)[(1-x)-y(1-x)] = (1-a)(1-x)(1-y)$

3^{ov}. $16-a^2-\beta^2+2a\beta \equiv 16-(a^2+\beta^2-2a\beta) \equiv 16-(a-\beta)^2 \equiv [4+(a-\beta)][4-(a-\beta)] \equiv (4+a-\beta)(4-a+\beta)$.

4^{ov}. $9x^4+3x^2y^2+4y^4 \equiv 9x^4+12x^2y^2+4y^4-9x^2y^2 \equiv (3x^2+2y^2)^2-(3xy)^2 \equiv (3x^2+2y^2+3xy)(3x^2+2y^2-3xy)$.

5^{ov}. $a^4\beta^4-15a^2\beta^2+9 \equiv a^4\beta^4-6a^2\beta^2+9-9a^2\beta^2 \equiv (a^2\beta^2-3)^2-(3a\beta)^2 \equiv$
$(a^2\beta^2+3a\beta-3)(a^2\beta^2-3a\beta-3)$.

6^{ov}. $a^4+\beta^4 \equiv (a^2+\beta^2)^2-2a^2\beta^2 \equiv (a^2+\beta^2)^2-(a\beta\sqrt{2})^2$
$\equiv (a^2+\beta^2+a\beta\sqrt{2})(a^2+\beta^2-a\beta\sqrt{2})$

7^{ov}. $a^4-a^2\beta^2+\beta^4 \equiv a^4+2a^2\beta^2+\beta^4-3a^2\beta^2 \equiv (a^2+\beta^2)^2-(a\beta\sqrt{3})^2 \equiv$
$(a^2+\beta^2+a\beta\sqrt{3})(a^2+\beta^2-a\beta\sqrt{3})$

4^{η}. Περίπτωσις. Ὅταν δυνηθῶμεν νά θέσωμεν τό πολυώνυμον ὑπό τήν μορφήν ἀθροίσματος ἤ διαφορᾶς κύβων· τότε αἱ ταυτότητες:

$$a^3+\beta^3 \equiv (a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2) \qquad a^3-\beta^3 \equiv (a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)$$

μᾶς ἐπιτρέπουν νά τό μετασχηματίσωμεν εἰς γινόμενον.
Γενικώτερον, ὅταν ἔχῃ ἤ δυνηθῶμεν νά τοῦ δώσωμεν μορφήν τοιαύτην, ὥστε νά κάμνωμεν χρῆσιν τῆς θεωρίας τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων. Ἰδού ταυτότητες δι' αὐτάς τάς περιπτώσεις

$$x^5 \pm a^5 \equiv (x \pm a)(x^4 \mp ax^3+a^2x^2 \mp a^3x+a^4)$$

$$x^6-a^6 \equiv (x^3-a^3)(x^3+a^3) \equiv (x-a)(x^2+ax+a^2)(x+a)(x^2-ax+a^2)$$

$$x^7 \pm a^7 \equiv (x \pm a)(x^6 \mp ax^5+a^2x^4 \mp a^3x^3+a^4x^2 \mp a^5x+a^6) \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παραδείγματα: $1000x^3+27a^3 \equiv (10x)^3+(3a)^3 \equiv (10x+3a)(100x^2-30ax+9a^2)$, $32\gamma^4\delta-4\gamma\delta^4 \equiv 4\gamma\delta(8\gamma^3-\delta^3) \equiv 4\gamma\delta(2\gamma-\delta)(4\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2)$.

32.1. Ἐφαρμογαί τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενα. Θά δώσωμεν τήν λύσιν μερικῶν μαθηματικῶν θεμάτων διά νά φανῇ ἡ χρησιμότης τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν πολυωνύμων εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

Θέμα 1^{ov}. Ἐάν οἱ ἀριθμοί a, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $(a+\beta+\gamma)^3 = a^3+\beta^3+\gamma^3$ (1), νά δειχθῇ ὅτι τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν σχέσιν: $(a+\beta+\gamma)^{2\nu+1} = a^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}+\gamma^{2\nu+1}$ (2), ὅπου τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός.

Ἐννοοῦμεν, ὅτι διά νά ἐπαληθεύσωμεν τήν $2^{\alpha\nu}$ σχέσιν πρέπει νά χρησιμοποιήσωμεν τήν πρώτην, πού ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ἀληθής. Καί ἐπειδή ἡ μορφή της δέν μᾶς ἐξηγεῖ τόν τρόπον τῆς χρησιμοποιήσεώς της διά τοῦτο τήν μετασχηματίζομεν εἰς ἄλλην ἁπλουστέραν. Ἔχομεν λοιπόν:

$$a^3+\beta^3+\gamma^3+3a^2(\beta+\gamma)+3\beta^2(a+\gamma)+3\gamma^2(a+\beta)+6a\beta\gamma=a^3+\beta^3+\gamma^3$$

$$\text{ἤ}\quad a^2(\beta+\gamma)+\beta^2(a+\gamma)+\gamma^2(a+\beta)+2a\beta\gamma=0$$

$$\text{ἤ}\quad a^2(\beta+\gamma)+a\beta^2+\beta^2\gamma+a\gamma^2+\beta\gamma^2+2a\beta\gamma=0$$

$$\text{ἤ}\quad a^2(\beta+\gamma)+(a\beta^2+a\gamma^2+2a\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)=0$$

ἤ $a^2(\beta+\gamma)+a(\beta+\gamma)^2+\beta\gamma(\beta+\gamma)=0$ ἤ $(\beta+\gamma)(a^2+a\beta+a\gamma+\beta\gamma)=0$

ἤ $(\beta+\gamma)[a(a+\beta)+\gamma(a+\beta)]=0$ δηλ. $(a+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+a)=0$

Ἐπειδή τώρα ἕνα γινόμενον εἶναι μηδέν, ὅταν τουλάχιστον ἕνας ἐκ τῶν παραγόντων του εἶναι μηδέν, συμπεραίνομεν ὅτι: $a+\beta=0$ ἤ $a+\gamma=0$ ἤ $\beta+\gamma=0$. Ἡ ἰσχύς λοιπόν τῆς διδομένης ἰσότητος ἔχει ὡς συνέπειαν δύο τῶν ἀριθμῶν a, β, γ, νά εἶναι ἀντίθετοι, ἐνῶ ἰσχύει καί τό ἀντίστροφον: Δηλ. ὅταν $a+\beta=0$ ἤ $a+\gamma=0$ ἤ $\beta+\gamma=0$ θά εἶναι καί:

$$(a+\beta+\gamma)^3=a^3+\beta^3+\gamma^3.$$

Τό θέμα μας λοιπόν ἀνήχθη εἰς τό ἑξῆς: Δεδομένου ὅτι οἱ ἀριθμοί a, β, γ, ἱκανοποιοῦν μίαν τῶν σχέσεων: $a+\beta=0$, $a+\gamma=0$, $\beta+\gamma=0$ θά ἱκανοποιοῦν καί τήν σχέσιν (2).

Καί πράγματι ἡ (2), ἐάν θέσωμεν εἰς αὐτήν ὅπου a τό $-\beta$ γίνεται

$$(0+\gamma)^{2\nu+1}=(-\beta)^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}+\gamma^{2\nu+1}\quad\text{ἤ}\quad \gamma^{2\nu+1}=\gamma^{2\nu+1}$$

δηλαδή ἱκανοποιεῖται.

Θέμα 2ον. Νά δειχθῆ, ὅτι, ἐάν τά a καί β εἶναι ἀριθμοί θετικοί, αἱ ἐκφράσεις $a^3+2\beta^3$ καί $3a\beta^2$, πού σχηματίζονται ἀπ' αὐτούς τους ἀριθμούς, ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $a^3+2\beta^3\geqslant 3a\beta^2$. Ἡ σχέσις μας γράφεται:

$a^3+2\beta^3-a\beta^2-2a\beta^2\geqslant 0$ ἤ $(a^3-a\beta^2)+(2\beta^3-2a\beta^2)\geqslant 0$ ἤ

$a(a^2-\beta^2)-2\beta^2(a-\beta)\geqslant 0$ ἤ $(a-\beta)(a^2+a\beta-2\beta^2)\geqslant 0$ ἤ

$(a-\beta)[(a+\beta)(a-\beta)+\beta(a-\beta)]\geqslant 0$ ἤ $(a-\beta)^2(a+2\beta)\geqslant 0$. Καί ὑπό τήν τελευταίαν ταύτην μορφήν ἡ σχέσις μας φαίνεται ἀμέσως ἱκανοποιουμένη δι' οἱασδήποτε θετικάς τιμάς τῶν a καί β.

Θέμα 3ον. Νά δειχθῆ, ὅτι ἡ παράστασις:

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\beta\gamma(y-z)^2+\alpha\gamma(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$ διατηρεῖ τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν δι' ὅλα τά συστήματα τιμῶν τῶν x, y, z, πού ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$.

Ἡ κλασματική μας λοιπόν παράστασις θά ἀποδειχθῇ ἀνεξάρτητος τῶν x, y, z, διά τά συστήματα τιμῶν τῶν x, y, z, πού ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ (1). Θά πρέπει λοιπόν, χρησιμοποιοῦντες τήν ἰσότητα (1), νά μετασχηματίσωμεν τήν παράστασίν μας εἰς ἰσοδύναμον, ἥτις δέν περιέχῃ τά x, y, z.

Ὁ ἀριθμητής τῆς παραστάσεώς μας δέν προσφέρεται προφανῶς διά τήν χρησιμοποίησιν τῆς (1) καί διά τοῦτο ἀναπτύσσομεν τόν παρονομαστήν. Ὁ παρονομαστής γράφεται: $\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2+\alpha\gamma z^2+\alpha\gamma x^2+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2-2\beta z y\gamma-2\alpha\gamma zx-2\alpha\beta xy$. Ἐάν τώρα ὑψώσωμεν τήν (1) εἰς τό τετράγωνον λαμβάνομεν: $\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=-2\alpha\beta xy-2\alpha\gamma xz-2\beta\gamma yz$ καί ὁ παρονομαστής τῆς παραστάσεώς μας γράφεται: $\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2+\alpha\gamma z^2+\alpha\gamma x^2+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=(\alpha^2x^2+\alpha\beta y^2+\alpha\gamma z^2)+(\alpha\beta x^2+\beta^2y^2+\beta\gamma z^2)+(\alpha\gamma x^2+\beta\gamma y^2+\gamma^2z^2)=\alpha(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)+\beta(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)+\gamma(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)$. Τό ἰσοδύναμον λοιπόν τῆς παραστάσεώς μας εἶναι $\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Ἀσκήσεις.

167. Μετασχηματίσατε εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τάς παραστάσεις:

$2\alpha^3\beta^2\gamma^4\delta-3\alpha\beta^4\gamma^5+7\alpha^2\beta^2\gamma^4\delta^2$, $10\alpha^2\beta^3-30\alpha^3\beta^2+18\alpha\beta^4-42\alpha^4\beta$

$6\alpha^2x^3-3\alpha x^4+21\alpha^2x^5$, $15\alpha^2x^2-30\alpha^2x^3+105\alpha^2x^4-75\alpha^2x^5$

168. Τό αὐτό διά τάς παραστάσεις:

$125(x-y)^3+1$, $9\alpha^2-12\alpha\beta+4\beta^2$, $\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$, $9x^2-3xy+\frac{y^2}{4}$,
$\frac{\alpha^2}{16}-\frac{3}{2}\alpha\beta+9\beta^2$, $x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta$, $8\alpha x-\beta x+8\alpha y-\beta y$
$\alpha\mu+\alpha x-2\beta x-2\mu\beta$, $x^2+2x+1-y^2$, y^2-x^2+2x-1, $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$,
x^2+3x+2, $y^2-5y-66$, $\alpha^2-13\alpha\beta+30\beta^2$, $x^2+4\alpha x-12\alpha^2$

169. Νά γίνουν γινόμενα πρώτων παραγόντων αἱ παραστάσεις:

$125x^6-64y^3$, a^3-2a^2-3a , $81x^8-16y^8$, $\frac{a^3}{27}+\frac{1}{3}a^2x+ax^2+x^3$, $\mu^3\nu^3-3\mu^2\nu^2xy+3\mu\nu x^2y^2-x^3y^3$, $a^3\beta^3+3a^2\beta^2xy+3a\beta x^2y^2+x^3y^3$ $3a^2x^3y+6a^2x^2y^2+3a^2xy^3-3a^2xy$, $36a^2x^5y^3-24a^3x^4y^2z+4a^4x^3yz^2$ $4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7$, $3x(3a-\beta)^2-12x(a+5\beta)^2$, $20(a+\beta)^2-45(x+y)^2$, $x^4-1000xy^3$, $4-36a^2-4\beta^2+24a\beta$, $a^4x^3-a^2x-2ax-x$ $8a^5-120+40a^4-24a$.

170. Μετασχηματίσατε τά ἀκόλουθα πολυώνυμα εἰς γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων.

$(13x^2-5y^2)^2-(12x^2+4y^2)^2$, $4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-a^2)^2$, $4(a\beta+\gamma\delta)^2-(a^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$, $(a\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(a\delta+\beta\gamma)^2$, $(a^2-4\beta^2)x^2+2(a^3-4\beta^3)x+a^4-4\beta^4$.

171. Τέλος μετασχηματίσατε εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων τάς παραστάσεις:

$x^2+3\gamma\delta(2-3\gamma\delta)-10xy-1+25y^2$, $x^{\mu+\nu}y^{\mu}-x^{2\nu}y^{\mu+\nu}-x^{\nu}y^{2\mu}$,

$x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)$

$a^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-a)+\gamma^3(a-\beta)$, $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$a(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-a^4)+\gamma(a^4-\beta^4)$, $a(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-a)^2+\gamma(a-\beta)^2+8a\beta\gamma$.

33. Μέγιστος κοινός διαιρέτης διδομένων πολυωνύμων.

Ὀνομάζομεν μέγιστον κοινόν διαιρέτην (μ.κ.δ.) δύο ἤ περισσοτέρων πολυωνύμων, τό πολυώνυμον, πού εἶναι τοῦ πλέον μεγάλου δυνατοῦ βαθμοῦ, ὡς πρός τά γράμματα τά ὁποῖα περιέχει καί εἶναι διαιρέτης ἑκάστου τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων

33.1. **Μ.κ.δ. μονωνύμων.** Γνωρίζομεν ὅτι ἕνα μονώνυμον εἶναι διαιρέτης ἑνός ἄλλου μονωνύμου, ἐάν ὡς γραμματικούς παράγοντας δέν περιέχει παρά ἐκείνους τοῦ διαιρετέου καί ὄχι εἰς μεγαλύτερον ἐκθέτην. Ὥστε, ὁ μ.κ.δ. μονωνύμων εἶναι τό μονώνυμον πού ἔχει γραμματικούς παράγοντας τούς κοινούς εἰς τά διδόμενα μονώνυμα καί ἕκαστον ἐξ αὐτῶν ὑψωμένον εἰς ἐκθέτην, πού εἶναι ὁ πλέον μικρός τόν ὁποῖον ἔχει αὐτός ὁ παράγων εἰς αὐτά τά μονώνυμα.

Παράδειγμα: Τά μονώνυμα $18x^3y^2\omega$, $24x^3y^2\omega\varphi$, $12x^2y\omega^3$, ἔχουν μ.κ.δ. μέ γραμματικόν μέρος $x^2y\omega$. Δυνάμεθα αὐτοῦ τοῦ κοινοῦ διαιρέτου νά τοῦ δώσωμεν οἱονδήποτε συντελεστήν *. Εἶναι ὅμως χρήσιμον καί διά τήν συνενόησιν νά τοῦ δώσωμεν ὡς συντελεστήν τόν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν τῶν γνωστῶν μονωνύμων. Οὕτω τῶν ἀνωτέρω μονωνύμων μ.κ.δ. εἶναι τό μονώνυμον $6x^2y\omega$.

33.2. Μ.Κ.Δ. πολυωνύμων. Εἴδομεν εἰς τό (32) ὅτι ἡ ἀνάλυσις ἑνός πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων εἶναι εὐχερής εἰς ὡρισμένας στοιχειώδεις περιπτώσεις. Ἐπειδή ὅμως τό θέμα τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. πολυωνύμων εἶναι βασικόν διά τήν Ἄλγεβραν θά τό πραγματευθῶμεν καί εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἡ ἀνάλυσις τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων εἰς γινόμενα εἶναι ἐφικτή καί χωρίς νά μεσολαβήσῃ παραγοντοποίησις τῶν πολυωνύμων **.

33.2.1. Ἄς θεωρήσωμεν λοιπόν κατά πρῶτον τά παραγοντοποιημένα πολυώνυμα:

$$3\alpha^2\gamma(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta) \qquad 6\alpha^3\beta(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta)^3 \qquad 12\alpha^4(\alpha-\beta)^4(\alpha+\beta)(\gamma-\alpha)$$

Εἶναι φανερόν, ὅτι δημιουργοῦμεν ἕνα κοινόν διαιρέτην αὐτῶν τῶν πολυωνύμων ἐφαρμόζοντες τόν αὐτόν κανόνα, πού ἐφηρμόσαμεν εἰς τά μονώνυμα δηλ. ἐκλέγοντες κοινούς παράγοντας καί εἰς τά τρία πολυώνυμα. Διά νά δημιουργήσωμεν ὅμως τόν μ.κ.δ. δηλαδή τόν κοινόν διαιρέτην τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ, λαμβάνομεν ἕκαστον τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων μέ τόν μεγαλύτερον κατά τό δυνατόν ἐκθέτην δηλ. μέ τόν ἐκθέτην ὅστις εἶναι ὁ μικρότερος, τόν ὁποῖον ὁ καθείς τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων ἔχει εἰς τά θεωρούμενα πολυώνυμα. Μόνον οὕτως ἕκαστος τῶν κοινῶν παραγόντων θά εἶναι κοινός παράγων δηλ. διαιρέτης τῶν πολυωνύμων αὐτῶν. Εἶναι καί ἐδῶ χρήσιμον νά λάβωμεν ὡς συντελεστήν τόν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων μας.

Τῶν ἀνωτέρω λοιπόν πολυωνύμων μ.κ.δ. εἶναι τό πολυώνυμον:

---

* Διότι, ἐάν ἕνα μονώνυμον ἤ ἕνα πολυώνυμον διαιρεῖται διά τινος μονωνύμου ἤ πολυωνύμου Α θά διαιρεῖται καί διά τοῦ λ.Α ὅπου λ ὁποιαδήποτε σταθερό διάφορος τοῦ μηδενός. Τό πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως θά εἶναι ἀκεραία παράστασις διότι δέν θά περιέχῃ εἰς τόν παρονομαστήν γράμμα.

** Παραγοντοποίησιν ὀνομάζομεν τήν μετατροπήν τοῦ πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων.

$$3a^2(a-\beta)^2(a+\beta)$$

33.2.2. Κανών. Διά νά σχηματίσωμεν τόν μ.κ.δ. πολλῶν πολυωνύμων μετασχηματίζομεν αὐτά τά πολυώνυμα εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων καί σχηματίζομεν ἕνα γινόμενον ἀπ' ὅλους τούς κοινούς των παράγοντας, ἐνῶ ἕκαστον ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν μέ τόν μικρότερόν του ἐκθέτην. Συντελεστήν αὐτοῦ τοῦ γινομένου θέτομεν αὐθαίρετον ἀριθμόν ἤ καλλίτερον τόν μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων μας.

33.2.3. Καί τώρα ἡ εὕρεσις τοῦ μ.κ.δ. χωρίς παραγοντοποίησιν τῶν πολυωνύμων. Ὅταν δύο πολυώνυμα ἔχουν πολλούς κοινούς διαιρέτας δέν γνωρίζομεν καί δέν εἶναι προφανές ὅτι δέν ὑπάρχουν περισσότερα ἀπό ἕνα πολυώνυμα, πού εἶναι τοῦ αὐτοῦ ἀλλά τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ καί τά ὁποῖα νά εἶναι κοινοί διαιρέται τῶν διδομένων πολυωνύμων.

Τά δύο θεωρήματα (λήμματα) πού θά ἐκθέσωμεν κατωτέρω θά καταστήσουν προφανές τό ἑξῆς βασικόν θεώρημα:

Ἐάν δίδωνται δύο πολυώνυμα, ὑπάρχει κατά προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος, ἕνα καί μόνον ἕνα πολυώνυμον, πού εἶναι τοῦ μεγαλυτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ καί πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν δύο θεωρουμένων πολυωνύμων. (δηλ. ὑπάρχει ἕνα καί μόνον ἕνα πολυώνυμον, πού εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν δύο διδομένων πολυωνύμων)*.

33.2.4. Λῆμμα 1ον. Ἐάν ἐκ δύο πολυωνύμων A καί B τό B, πού εἶναι βαθμοῦ ὄχι μεγαλυτέρου τοῦ A διαιρεῖ τό A, τότε τό B εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν A καί B.

Ἀφοῦ τό B διαιρεῖ τό A πᾶς διαιρέτης τοῦ B εἶναι προφανῶς διαιρέτης τοῦ A. Συνεπῶς οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι μόνον οἱ διαιρέται τοῦ B. Οἱ κοινοί λοιπόν διαιρέται τῶν A καί B δέν δύνανται νά εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἐκείνου τοῦ B. Ἐπί πλέον πᾶς διαιρέτης τοῦ B, πού εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ μέ τό B θά εἶναι πολυώνυμον, πού δέν θά διαφέρῃ τοῦ B παρά κατά σταθερόν παράγοντα.

---

*Περιλαμβάνεται φυσικά καί ἡ περίπτωσις ὅπου τό πολυώνυμον αὐτό θά εἶναι μηδενικοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα τῶν δύο πολυωνύμων.

Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τό B εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν A καί B.

33.2.5. **Λῆμμα 2ον** 'Εάν διά τά ἀνωτέρω πολυώνυμα τό B δέν διαιρεῖ τό A, οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι οἱ κοινοί διαιρέται τοῦ B καί τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ A διά τοῦ B.

Ἔστω Q_1 τό πηλίκον καί R_1 τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ A διά τοῦ B. Ἔχομεν τήν ταυτότητα: $A \equiv BQ_1 + R_1$.

Κάθε κοινός διαιρέτης τῶν A καί B διαιρεῖ τήν διαφοράν $A - BQ_1$ δηλ. τό R_1. Ὥστε, κάθε κοινός διαιρέτης τῶν A καί B εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν B καί R_1.

Ἀντιστρόφως, κάθε κοινός διαιρέτης τῶν B καί R_1 διαιρεῖ τό $BQ_1 + R_1$ δηλ. τό A. Ὥστε κάθε κοινός διαιρέτης τῶν B καί R_1 εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν A καί B.

33.2.6. **Συμπέρασμα**: Οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι οἱ κοινοί διαιρέται τῶν B καί R_1.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς διά τήν εὕρεσιν τοῦ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων A καί B ἐκ τῶν ὁποίων τό B δέν εἶναι μεγαλυτέρου βαθμοῦ τοῦ A.

Διαιροῦμεν τό A διά τοῦ B. 'Εάν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία τό B εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν A καί B. 'Εάν ὅμως ἡ διαίρεσις ἀφίνη ὑπόλοιπον R_1, οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι οἱ αὐτοί μέ τούς κοινούς διαιρέτας τῶν B καί R_1.

Διαιροῦμεν τώρα τό B διά τοῦ R_1. 'Εάν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, τό R_1 εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν B καί R_1 καί συνεπῶς καί τῶν A καί B. 'Εάν ὅμως ἀφίνη ὑπόλοιπον R_2, οἱ κοινοί διαιρέται τῶν B καί R_1 εἶναι οἱ αὐτοί μέ τούς κοινούς διαιρέτας τῶν R_1 καί R_2 καί συνεπῶς οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι οἱ αὐτοί μέ τούς κοινούς διαιρέτας τῶν R_1 καί R_2.

Τήν δυάδα τώρα τῶν R_1, R_2 θά ἀντικαταστήσωμεν μέ τήν δυάδα τῶν R_2, R_3, ὅπου R_3 τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ R_1 διά τοῦ R_2 κ.ο.κ.

Τά διάφορα ὑπόλοιπα $R_1, R_2, R_3, \ldots$ ἔχουν βαθμούς, οἵτινες βαίνουν ἐλαττούμενοι διότι μεταξύ δύο διαδοχικῶν ὑπολοίπων τό πρῶτον εἶναι διαιρέτης καί τό δεύτερον ὑπόλοιπον μιᾶς καί τῆς αὐτῆς διαιρέσεως. Θά ἔλθη λοιπόν στιγμή, ὅπου κάποιο ὑπόλοιπον R_ν δέν θά περιέχη τό x καί ἕνα τοιοῦτον πολυώνυμον δύναται νά εἶναι μηδέν ἤ ἀριθμός διάφορος τοῦ μηδενός.

Καί τώρα: 1ον. Ἐάν τό R_ν εἶναι μηδέν τό $R_{\nu-2}$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $R_{\nu-1}$ καί συνεπῶς τό $R_{\nu-1}$ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν $R_{\nu-2}$ καί $R_{\nu-1}$ καί ἀνολούθως τῶν A καί B ἀφοῦ οἱ κοινοί διαιρέται τῶν A καί B εἶναι οἱ αὐτοί μέ τούς κοινούς διαιρέτας δύο οἱωνδήποτε διαδοχικῶν ὑπολοίπων.

2ον. Ἐάν τό R_ν εἶναι μή μηδενικός ἀριθμός τά $R_{\nu-2}$, $R_{\nu-1}$ δέν ἔχουν κοινόν τινα γραμματικόν διαιρέτην, διότι κάθε κοινός διαιρέτης τῶν $R_{\nu-2}$ καί $R_{\nu-1}$ εἶναι διαιρέτης τοῦ R_ν. Συμπεραίνομεν λοιπόν, ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην τά A καί B δέν ἔχουν κοινούς γραμματικούς διαιρέτας.

33.2.7. **Σημείωσις**: Τό βασικόν θεώρημα (33.2.3) μέ τά δύο ἐκτεθέντα λήμματα ἔχει ἀποδειχθῆ καί ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς ἀποδείξεως συνάγεται καί ὁ τρόπος εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων, ὅταν οὗτος ὑφίσταται. Εἰς τήν περίπτωσιν, πού δέν ὑφίσταται μ.κ.δ. μεταξύ τῶν διδομένων πολυωνύμων A καί B δηλ. εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου τό R_ν δέν εἶναι μηδέν, λέγομεν ὅτι τά πολυώνυμα A καί B εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα.

33.2.8. **Παρατηρήσεις**: 1ον. Ἡ θεωρία τῆς εὑρέσεως τοῦ μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων ἐπεκτείνεται βάσει τῶν δύο ἐκτεθέντων λημμάτων καί ἐπί περισσοτέρων πολυωνύμων.

2ον. Ὁ ὑπολογισμός τοῦ μ.κ.δ. γίνεται κατά τά ἀνωτέρω κατά προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος διότι ὅπως δικαιολογήσαμεν ἀνωτέρω, ἐάν $\sigma(x)$ εἶναι διαιρέτης πολυωνύμου τινός καί τό πολυώνυμον $K\sigma(x)$ ὅπου K τυχοῦσα σταθερά διάφορος τοῦ μηδενός, θά τοῦ εἶναι ἐπίσης διαιρέτης.

3ον Ἐάν οἱ συντελεσταί ἑνός ἀπό τά πολυώνυμα $A, B, R_1, R_2, \ldots$ εἶναι κλασματικοί, δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν τό πολυώνυμον αὐτό ἐπί τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν συντελεστῶν του. Ἔτσι κατορθώνομεν οἱ συντελεσταί αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου νά εἶναι ἀκέραιοι.

4ον. Δυνάμεθα νά διαιρέσωμεν τούς συντελεστάς ἑνός ἀπό τά ἀνωτέρω πολυώνυμα μέ ἕνα κοινόν των παράγοντα, ἄν ἔχουν τοιοῦτον.

Αἱ παρατηρήσεις (3,4) δικαιολογοῦνται ἀπό τό γεγονός ὅτι αἱ πράξεις των μεταβάλλουν μόνον τόν συντελεστήν τοῦ μ.κ.δ. καί ὄχι αὐτόν τόν ἴδιον καί ὁ συντελεστής τοῦ μ.κ.δ. (παρατ. 2α) δύναται νά εἶναι ὁ οἱοσδήποτε ἀριθμός.

33. 2.9. Ὅλαι αἱ ἰδιότητες τοῦ μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου δύο φυσικῶν ἀριθμῶν ἐπεκτείνονται καί εἰς τό πολυώνυμον πού εἶναι μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων καί αἱ ἀποδείξεις ὑφίστανται χωρίς μεταβολήν. Οὕτω:

1ον Οἱ κοινοί διαιρέται δύο πολυωνύμων εἶναι οἱ διαιρέται τοῦ μ.κ.δ. των καί ἀντιστρόφως.

Πράγματι, ἕνας κοινός διαιρέτης τῶν A καί B διαιρεῖ τά διαδοχικά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων καί συνεπῶς καί τόν μ.κ.δ. των, ὅστις εἶναι ἕνα ἀπ' αὐτά τά ὑπόλοιπα· ἀντιστρόφως ἕνας διαιρέτης τοῦ μ.κ.δ. τῶν A καί B διαιρεῖ καί αὐτά τά ἴδια πολυώνυμα A καί B ἐφ' ὅσον ἔχουν τόν μ.κ.δ. των ὡς κοινόν των παράγοντα*.

2ον Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μέ ἕνα πολυώνυμον ἤ ἐάν διαιρέσωμεν μέ ἕνα τῶν κοινῶν διαιρετῶν των δύο πολυώνυμα καί ὁ μ.κ.δ. των πολλαπλασιάζεται ἤ διαιρεῖται μέ αὐτό τό πολυώνυμον.

Πράγματι, τά ὑπόλοιπα τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων θά πολλαπλασιά-

---

* Αὐτή ἡ ἰδιότης τοῦ μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων μᾶς κάμνει νά ἐννοήσωμεν, ὅτι, ἐάν ἔχωμεν περισσότερα ἀπό δύο πολυώνυμα π.χ. τά πολυώνυμα $A_1, A_2, \dots A_\nu$ ἀναζητοῦντες τόν μ.κ.δ. των ἀρκεῖ νά ἀναζητήσωμεν τόν μ.κ.δ. τῶν $\Delta_1, A_3, A_4, \dots A_\nu$ ὅπου Δ_1, ὁ μ.κ.δ. τῶν A_1, A_2. Καί διά τά ν-1 τώρα πολυώνυμα ἀναζητοῦμεν τόν μ.κ.δ. τῶν $\Delta_2, A_4, A_5, \dots A_\nu$ ὅπου Δ_2 ὁ μ.κ.δ. τῶν Δ_1, A_2. Ἐξακολουθοῦντες μέ αὐτόν τόν τρόπον θά φθάσωμεν εἰς δύο πολυώνυμα $\Delta_{\nu-2}, A_\nu$ τά ὁποῖα ἔχουν κοινούς διαιρέτας τούς κοινούς διαιρέτας τῶν ἀρχικῶν ν πολυωνύμων καί μόνον αὐτούς καί κατ' ἀκολουθίαν τόν αὐτόν μ.κ.δ. Ἐάν τό ἕνα ἀπό τά πολυώνυμα $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ ἀναχθῇ εἰς σταθεράν, εἶναι φανερόν, ὅτι τά πολυώνυμά μας εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα.

ζωνται ἤ θά διαιροῦνται μ' αὐτό τό πολυώνυμον καί συνεπῶς τό αὐτό θά συμβῆ καί διά τόν μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων μας, ὅστις εἶναι ἕνα ἀπ' αὐτά τά πολυώνυμα * (ὑπόλοιπα).

34. **Πολυώνυμα πρῶτα πρός ἄλληλα.** Δύο ἤ περισσότερα πολυώνυμα ὀνομάζονται πρῶτα πρός ἄλληλα, ὅταν ὁ μ.κ.δ. των εἶναι μία σταθερά.

Αἱ ἰδιότητες αὐτῶν τῶν πολυωνύμων εἶναι ἀνάλογοι μέ ἐκείνας τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί αἱ ἀποδείξεις τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν παραμένουν χωρίς μεταβολήν. Οὕτω:

1ον. Τά πηλίκα πολυωνύμων τινων διά τοῦ μ.κ.δ. των εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρός ἄλληλα. Ἀντιστρόφως, ἐάν τά ἀκέραια πηλίκα πολυωνύμων τινων διά τινος πολυωνύμου Δ εἶναι πολυώνυμα πρῶτα πρός ἄλληλα, τό Δ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων.

Πράγματι, ἐάν διαιρέσωμεν αὐτά τά πολυώνυμα διά τοῦ μ.κ.δ. των τά πηλίκα, πού οὕτω θά προκύψουν, θά ἔχουν μ.κ.δ. τό πηλίκον τοῦ μ.κ.δ. τῶν ἀρχικῶν πολυωνύμων διά τοῦ ἑαυτοῦ του δηλ. τήν μονάδα.

Ἀντιστρόφως, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τά ἀκέραια πηλίκα αὐτῶν τῶν πολυωνύμων διά Δ θά δημιουργήσωμεν τά ἀρχικά πολυώνυμα μέ μ.κ.δ. των τό Δ.

2ον. Ἕνα πολυώνυμον, πού διαιρεῖ τό γινόμενον δύο ἄλλων καί εἶναι πρῶτον πρός τό ἕνα ἐξ αὐτῶν διαιρεῖ τό ἄλλο.

Ἔστω Γ τό πολυώνυμον, πού διαιρεῖ τό γινόμενον Α.Β ἐνῶ εἶναι πρῶτον πρός τό Α.

Ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων Γ καί Α εἶναι σταθερά τις Κ καί συνεπῶς ὁ μ.κ.δ. τῶν γινομένων Β.Γ καί Α.Β θά εἶναι τό πολυώνυμον Κ.Β.

---

* Εἶναι εὔκολον νά ἀποδείξη τις τάς ἑξῆς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως δύο πολυωνύμων, πού εἶναι αἱ αὐταί μέ τάς ἰδιότητας τῆς διαιρέσεως δύο φυσικῶν ἀριθμῶν: 1ον. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην μέ τό αὐτό πολυώνυμον τό πηλίκον μένει τό αὐτό, ἐνῶ τό ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται ἐπ' αὐτό τό πολυώνυμον. 2ον Ἐάν διαιρέσωμεν δι' ἑνός καί τοῦ αὐτοῦ κοινοῦ διαιρέτου των τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην τό πηλίκον μένει τό αὐτό ἐνῶ τό ὑπόλοιπον διαιρεῖται μέ αὐτόν τόν διαιρέτην.

Τό πολυώνυμον λοιπόν Γ, πού διαιρεῖ τά πολυώνυμα Β.Γ καί Α.Β θά διαιρῆ καί τό πολυώνυμον Κ.Β, πού εἶναι ὁ μ.κ.δ. των δηλ. θά διαιρῆ τό Β.

3ον. Ἕνα πολυώνυμον, πού εἶναι πρῶτον μέ ἕκαστον ἐκ διδομένων πολυωνύμων θά εἶναι πρῶτον καί πρός τό γινόμενόν των.

Ἔστω τό πολυώνυμον Γ πού εἶναι πρῶτον μέ ἕκαστον τῶν πωλυωνύμων Α καί Β. Ἐάν τό πολυώνυμον τοῦτο Γ δέν ἦτο πρῶτον πρός τό γινόμενον Α.Β θά ὑπῆρχε κοινός τις παράγων διά τά πολυώνυμα ταῦτα Γ καί Α.Β. Αὐτός ὁ παράγων διαιρῶν τό γινόμενον Α.Β καί ὤν πρῶτος πρός τό Α* θά διαιροῦσε τό Β δηλαδή θά ὑπῆρχε κοινός διαιρέτης μεταξύ τῶν Γ καί Β. Ἀλλά αὐτό εἶναι ἀντίθετον πρός τήν ὑπόθεσίν μας.

4ον. Ἕνα πολυώνυμον, πού διαιρεῖται δι' ἑνός ἑκάστου διδομένων πολυωνύμων, τά ὁποῖα εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα ἀνά δύο διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου των.

Ἔστω τό πολυώνυμον Α, πού εἶναι διαιρετόν μέ τά πολυώνυμα Β,Γ,Δ, τά ὁποῖα εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα ἀνά δύο.

Ἔχομεν: $A \equiv B.Q_1$. Τό γινόμενον λοιπόν $B.Q_1$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ Γ, τό ὁποῖον ὅμως ἀφοῦ εἶναι πρῶτον πρό τό Β διαιρεῖ τό Q_1. Θά ἔχωμεν συνεπῶς $A \equiv B.\Gamma.Q_2$ (1).

Ἀφοῦ τώρα τό Δ διαιρῆ τό γινόμενον $B.\Gamma.Q_2$ καί θά εἶναι πρῶτον πρός τό πολυώνυμον Β.Γ (κατά τήν προηγουμένην ἰδιότητα) θά διαιρῆ τό Q_2. Ἡ ἰσότης λοιπόν (1) γίνεται:

$$A \equiv B \cdot \Gamma \cdot \Delta \cdot Q_3 .$$

35. Ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον διδομένων πολυωνύμων.

Ὀνομάζομεν ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον (ἐ.κ.π.) δύο ἤ περισσοτέρων πολυωνύμων τό πολυώνυμον, πού εἶναι τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ καί πού ἕκαστον τῶν διδομένων πολυωνύμων τό διαιρεῖ.

---

*Διότι ἄλλως θά ὑπῆρχε κοινός διαιρέτης μεταξύ τῶν Γ καί Α.

35.1. **Ε.Κ.Π. μονωνύμων.** Διά νά σχηματίσωμεν τό ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων μονωνύμων δημιουργοῦμεν ἕνα μονώνυμον ἐξ ὅλων τῶν κοινῶν καί μή κοινῶν των γραμματικῶν παραγόντων καί ἕκαστον ἐξ αὐτῶν λαμβάνομεν μέ τόν μεγαλύτερόν του ἐκθέτην. Ὡς συντελεστήν τοῦ ε.κ.π. δυνάμεθα νά θέσωμεν τόν οἱονδήποτε ἀριθμόν ἀλλά διά τήν συνεννόησιν εἶναι καλλίτερον νά ἐκλέξωμεν τό ε.κ.π. τῶν συντελεστῶν τῶν θεωρουμένων μονωνύμων.

Π.χ. τά μονώνυμα: $5x^2\psi$, $2x^3\psi^3\omega$, $10x\psi^3\omega\varphi$ ἔχουν ὡς ε.κ.π. των τό μονώνυμον $10x^3\psi^3\omega\varphi$. Διότι, πρῶτον, αὐτό τό μονώνυμον ἔχον ἕκαστον γραμματικόν παράγοντα τῶν γνωστῶν μονωνύμων εἰς ἐκθέτην ὄχι μικρότερον ἀπό ἐκεῖνον τόν ὁποῖον οὗτος ἔχει εἰς τά θεωρούμενα μονώνυμα, εἶναι διαιρετόν μέ ἕκαστον τῶν μονωνύμων τούτων καί δεύτερον, εἶναι τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ, ἀφοῦ καί ἕναν ἀπό τούς παράγοντάς του νά ὑψώσωμεν εἰς μικροτέραν δύναμιν, θά τοῦ στερήσωμεν τήν ἰδιότητα τοῦ πολλαπλασίου τουλάχιστον ἑνός τῶν θεωρουμένων μονωνύμων. Τό αὐτό θά συμβῆ, ἄν τοῦ ἀφαιρέσωμεν καί ἕνα τῶν γραμματικῶν του παραγόντων.

35.2. **Ε.κ.π. πολυωνύμων μέ παραγοντοποίησίν των.** Δεδομένου, ὅτι θά δυνηθῶμεν νά μετασχηματίσωμεν τά θεωρούμενα πολυώνυμα εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων, ἐφαρμόζομεν διά τήν εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. των τόν κανόνα πού ἐφηρμόσαμεν διά τό ε.κ.π. μονωνύμων.

Π.χ. Τά πολυώνυμα: $6x(\psi+\omega)(\psi-\omega-\varphi)$, $15x^2\psi(\psi-\omega)^2$, $3\omega(\psi+\omega)^3$ ἔχουν ὡς ε.κ.π. των τό πολυώνυμον: $30x^2\psi\omega(\psi+\omega)^3(\psi-\omega)^2(\psi-\omega-\varphi)$.

35.3. **Ε.κ.π. πολυωνύμων ἄνευ παραγοντοποιήσεώς των.**

35.3.1. *Περίπτωσις δύο πολυωνύμων.*

Θεώρημα. *Πᾶν κοινόν πολλαπλάσιον δύο πολυωνύμων Α καί Β εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ ε.κ.π. των.*

Κάθε πολυώνυμον διαιρετόν διά τοῦ πολυωνύμου Α εἶναι ἕνα γινόμενον τῆς μορφῆς Α.Μ ὅπου Μ εἰκονίζει ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον. Πρόκειται λοιπόν νά καθορίσωμεν τήν μορφήν τοῦ πολυωνύμου Μ, ὥστε τό Α.Μ νά εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ Β. Θέλομεν λοιπόν νά ἔχωμεν: $A.M = B.N$ (1).

Ἔστω $Δ$ ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων A καί B καί ἄν A' καί B' εἶναι τά πηλίκα τῆς διαιρέσεως τῶν A καί B διά τοῦ $Δ$ ἡ ἰσότης (1) γίνεται: $A'.M = B'.N$ ἥτις ἰσότης δεικνύει, ὅτι τό B' πρέπει νά διαιρῇ τό $A'.M$. Ἐπειδή ὅμως τό B' εἶναι πρῶτον πρός τό A' (34, 1ον) ὀφείλει νά διαιρῇ τό M.

Θά ἔχωμεν λοιπόν: $M = B'.Γ$ καί συνεπῶς: $A.M = A.B'.Γ$.

Ὥστε: Τό $A.M$, πού εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ A, ἐάν εἶναι καί πολλαπλάσιον τοῦ B ἔχομεν $M = B'.Γ$, ὅπου τό B' τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ B διά τοῦ μ.κ.δ. τῶν A καί B καί $Γ$ αὐθαίρετον ἀκέραιον πολυώνυμον.

Ἀντιστρόφως, κάθε πολυώνυμον τῆς μορφῆς $A.B'.Γ$ εἶναι κοινόν πολλαπλάσιον τῶν A καί B.

Καί τοῦ μέν A εἶναι προφανές ὅτι εἶναι πολλαπλάσιον, εἶναι δέ καί τοῦ B, διότι $A.B'.Γ = \frac{A.B.Γ}{Δ} = A'.B.Γ$.

Ἀφοῦ τώρα διεπιστώθη ὅτι πᾶν κοινόν πολλαπλάσιον τῶν A καί B εἶναι τῆς μορφῆς $\frac{A.B}{Δ}.Γ$ καί μόνον αὐτῆς τῆς μορφῆς, ὅπου $Γ$ αὐθαίρετον ἀκέραιον πολυώνυμον, ἐννοοῦμεν πώς εὑρίσκομεν τόν κοινόν πολλαπλάσιον τοῦ μικροτέρου δυνατοῦ βαθμοῦ, ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό $Γ$ μέ ἕνα ἀριθμητικόν παράγοντα. Δυνάμεθα φυσικά νά θέσωμεν καί τήν μονάδα ἀντί τοῦ $Γ$.

Πᾶν λοιπόν κοινόν πολλαπλάσιον τῶν A καί B εἶναι τό γινόμενον τοῦ $\frac{A.B}{Δ}$*, πού εἶναι τό ε.κ.π. τῶν πολυωνύμων μας καί ἑνός αὐθαιρέτου ἀκεραίου πολυωνύμου $Γ$

Διά τῆς αὐτῆς προτάσεως διεπιστώσαμεν ἀκόμα ὅτι: Τό γινόμενον τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀκεραίων πολυωνύμων ἐπί τό ε.κ.π. των, ἐάν δέν λάβωμεν ὑπ' ὄψιν τόν αὐθαίρετον σταθερόν παράγοντα πού δυνάμεθα νά ἀποδώσωμεν τόσον εἰς τό ε.κ.π. ὅσον καί εἰς τόν μ.κ.δ. αὐτῶν τῶν πολυωνύμων, ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν πολυωνύμων.

Οὕτω, προκειμένου περί δύο πολυωνύμων, εὑρίσκομεν τό ε.κ.π.

---

* ἤ τοῦ $\frac{A.B}{Δ}.K$, ὅπου K εἶναι αὐθαίρετος ἀριθμός.

χωρίς νά μεσολαβήση παραγοντοποίησίς των, καί κατά προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος, ἐάν διαιρέσωμεν τό γινόμενον τῶν πολυωνύμων διά τοῦ μ.κ.δ. των*.

35.3.2. Περίπτωσις περισσοτέρων πολυωνύμων

Ἡ εὕρεσις τοῦ ε.κ.π. περισσοτέρων πολυωνύμων στηρίζεται εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. δύο πολυωνύμων βάσει τῶν ἀκολούθων συλλογισμῶν.
Ἔστω P_1 τό ε.κ.π. τῶν πολυωνύμων A_1, A_2. Πᾶν κοινόν πολλαπλάσιον τῶν A_1, A_2 (θεωρ. 35.3.1) εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ P_1 καί ἀντιστρόφως, πᾶν πολλαπλάσιον τοῦ P_1 εἶναι ἕνα κοινόν πολλαπλάσιον τῶν A_1 καί A_2. Ὥστε, τά διδόμενα πολυώνυμα ἔχουν τά αὐτά κοινά πολλαπλάσια μέ τά πολυώνυμα P_1, A_3, A_4, ... A_ν τά ὁποῖα εἶναι $\nu-1$ εἰς ἀριθμόν.
Ἐάν τώρα ἐξακολουθήσωμεν μέ τόν αὐτόν τρόπον ἐργαζόμενοι θά φθάσωμεν εἰς δύο πολυώνυμα $P_{\nu-2}$, A_ν τῶν ὁποίων τό ε.κ.π. τό $P_{\nu-1}$ θά εἶναι τό ε.κ.π. τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων. Ἐπί πλέον κάθε πολλαπλάσιον τοῦ $P_{\nu-1}$ θά εἶναι ἕνα κοινόν πολλαπλάσιον τῶν διδομένων πολυωνύμων καί ἀντιστρόφως.

36. Ρητά Ἀλγεβρικά Κλάσματα.

Ρητήν κλασματικήν παράστασιν ὠνομάσαμεν εἰς τό (14.3) τήν ἀλγεβρικήν παράστασιν, ἥτις δέν περιέχει γράμματα ὑπό ριζικά καί ἡ ὁποία περιέχει παρονομαστήν μέ γράμματα.
Ἡ διαίρεσις ἑνός πολυωνύμου A δι' ἑνός πολυωνύμου B, ὅπως εἴδομεν εἰς τά ἐπί τῆς διαιρέσεως πολυωνύμων ἐδάφια, δέν ὁδηγεῖ ἐν γένει εἰς τήν εὕρεσιν ἑνός πολυωνύμου Γ ὥστε νά ἰσχύη ἡ ταυτότης: $A \equiv B.\Gamma$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ὁ λόγος τῶν πολυωνύμων A καί B, πού εἶναι πολυώνυμα μιᾶς ἤ περισσοτέρων μεταβλητῶν, σημειοῦται μέ τήν ἔκφρασιν: $\frac{A}{B}$ ἤ μέ τήν πλέον συγκεκριμένην ἔκφρασιν: $\frac{f(x_1, x_2, \dots x_\nu)}{\varphi(x_1, x_2, \dots x_\nu)}$ πού ὀνομάζεται ρητόν κλάσμα.
Ὀνομάζομεν λοιπόν ρητόν κλάσμα τό κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ δύο

---

*τοῦ ὁποίου τήν εὕρεσιν ἐπιτυγχάνομεν κατά τά ἐν (33.2.6).

ὅροι εἶναι πολυώνυμα.

Εἶναι φανερόν ὅτι τό ρητόν κλάσμα εἶναι ἡ πλέον ἁπλῆ μορφή μιᾶς ρητῆς κλασματικῆς παραστάσεως διότι παρουσιάζει μόνον μίαν διαίρεσιν σημειουμένην. Ὅπως δέ ἕνας ἀκέραιος a (3.2) δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν ρητοῦ ἀριθμητικοῦ κλάσματος μέ ἀριθμητήν αὐτόν τοῦτον τόν ἀκέραιον καί παρονομαστήν τήν μονάδα, οὕτω καί ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νά θεωρηθῆ ρητόν ἀλγεβρικόν κλάσμα μέ παρονομαστήν μίαν σταθεράν καί τήν ὁποίαν δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν πάντοτε ἴσην μέ τήν μονάδα.

36.1. Ἡ ἀριθμητική τιμή ἑνός ρητοῦ κλάσματος εἶναι ὡρισμένη δι' ὅλα τά συστήματα ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν μεταβλητῶν ἐξαιρέσει ἐκείνων τά ὁποῖα μηδενίζουν τόν παρονομαστήν. Εἰς τήν τελευταίαν ταύτην περίπτωσιν, ἐάν ὁ ἀριθμητής ἔχῃ ἐπίσης ἀριθμητικήν τιμήν 0, ἡ ἔκφρασίς μας ἔχει τιμήν ἀόριστον (βλ. καί ὑποσημ. ἐδ. 3.2) καί ὡς ἀριθμητικήν τιμήν τοῦ ρητοῦ κλάσματος δυνάμεθα νά δεχθῶμεν τόν οἱονδήποτε ἀριθμόν. Πράγματι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἡ τιμή ἑνός λόγου εἶναι ἕνας ἀριθμός πού τό γινόμενόν του ἐπί τόν παρονομαστήν ἰσοῦται μέ τόν ἀριθμητήν: ἐάν ἐξ ἀντιθέτου ὁ ἀριθμητής δέν εἶναι μηδέν ἡ ἔκφρασίς μας δέν ἔχει ἔννοιαν· ἡ ἀριθμητική της τιμή δέν δύναται νά εἶναι ἕνας ὡρισμένος ἀριθμός*

36.2. **Λογισμός τῶν Ρητῶν κλασμάτων.** Πολλαπλασιάζοντες τούς δύο ὅρους ἑνός ρητοῦ κλάσματος A/B ἐπί τό αὐτό πολυώνυμον Γ δημιουργοῦμεν ἕνα ρητόν κλάσμα, πού ἔχει τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν μέ τό πρῶτον ἐφόσον ἑκάστην φοράν δίδομεν τιμάς εἰς τάς μεταβλητάς, πού δέν μηδενίζουν τό Γ ἢ τό B. Ὑπό τόν περιορισμόν αὐτόν γράφομεν: $\frac{A}{B}=\frac{A.\Gamma}{B.\Gamma}$ καί λέγομεν ὅτι αὐτά τά κλάσματα εἶναι

---

* Παρά τάς σαφεῖς ἐξηγήσεις τάς ὁποίας ἐδώσαμεν διά τάς περιπτώσεις, ὅπου αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν μεταβλητῶν εἰς ἕνα ρητόν κλάσμα δύνανται νά τό παρουσιάσουν ὑπό τήν μορφήν $\frac{c}{0}$ ἤ $\frac{0}{0}$ θά εἴδωμεν εἰς τό εἰδικόν κεφάλαιον τῶν «ὁρίων» καί ἄλλον τρόπον ἀντιμετωπίσεώς των, ὅστις θά μᾶς ὁδηγήσῃ ὑπό ὡρισμένας προϋποθέσεις εἰς νέα συμπεράσματα.

ταυτοτικῶς ἴσα. Οὕτω τά κλάσματα: $\frac{x-3x}{3x-5}$, $\frac{(x-3x)(x+3)}{(3x-5)(x+3)}$ ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν δι' ὅλας τάς τιμάς τοῦ x ἐξαιρέσει τῶν εἰδικῶν τιμῶν $\frac{5}{3}$ καί -3· καί διά τήν πρώτην τῶν τιμῶν τούτων δέν ἔχουν ἔννοιαν ἀμφότερα τά κλάσματα καί διά τήν δευτέραν τό 2ον ἐξ αὐτῶν δέν ἀντιπροσωπεύει ὡρισμένον ἀριθμόν.

Ὅταν ἀντιστρόφως ἀντικαθιστῶμεν τό κλάσμα $\frac{A.\Gamma}{B.\Gamma}$ μέ τό κλάσμα $\frac{A}{B}$ λέγομεν ὅτι τό ἁπλοποιοῦμεν. Ὑπό τούς ἀνωτέρω τεθέντας περιορισμούς αὐτή ἡ ἁπλοποίησις ὁδηγεῖ εἰς ἕνα ρητόν κλάσμα ἤ εἰς ἕνα πολυώνυμον ἔχον, ὁποιαιδήποτε τιμαί καί ἐάν δοθοῦν εἰς τάς μεταβλητάς, τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν μέ τό ἀρχικόν κλάσμα. Ἐξ αἰτίας τούτου τό κλάσμα $\frac{x^3+\psi^3}{x+\psi}$ ἔχει τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν μέ τό πολυώνυμον: $x^2-x\psi+\psi^2$ δι' ὅλας τάς τιμάς τῶν x καί ψ, πού δέν μηδενίζουν τό $x+\psi$. Γράφομεν εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην: $\frac{x^3+\psi^3}{x+\psi}\equiv x^2-x\psi+\psi^2$. Ἐάν $\frac{A}{B}$, $\frac{A'}{B'}$, $\frac{A''}{B''}$ εἶναι ρητά κλάσματα καί ἐάν M εἶναι ἕνα πολυώνυμον διαιρετόν διά τῶν πολυωνύμων B, B', B'' δηλ. τοιοῦτον, ὥστε νά ὑφίστανται πολυώνυμα Q, Q', Q'' ἱκανοποιοῦντα τάς ταυτότητας: $M\equiv B.Q$, $M\equiv B'.Q'$, $M\equiv B''.Q''$ τά κλάσματα: $\frac{A.Q}{B.Q}$, $\frac{A'.Q'}{B'.Q'}$, $\frac{A''.Q''}{B''.Q''}$ ἔχουν καί τά τρία τόν αὐτόν παρονομαστήν. Ταῦτα ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν μέ τά διδόμενα κλάσματα δι' ὁποιασδήποτε τιμάς τῶν μεταβλητῶν, αἵτινες δέν μηδενίζουν τό M.

Εἶναι αὐτονόητον, ὅτι ὡς M προτιμῶμεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν θεωρουμένων κλασμάτων.

36.2.1. **Πράξεις**. Ἐάν δεχθῶμεν διά τάς πράξεις: Πρόσθεσιν, Ἀφαίρεσιν, Πολλαπλασιασμόν ἐπί ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων τούς ὁρισμούς, πού ἀφοροῦν τάς αὐτάς πράξεις ἐπί τῶν ἀκεραίων πολυωνύμων, αὐταί αἱ πράξεις πραγματοποιοῦνται ὅπως καί ἐπί τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων. Συμβαίνει τό αὐτό καί διά τόν λόγον δύο ρητῶν ἀλγεβρικῶν κλασμάτων τόν ὁποῖον ὁρίζομεν οὕτω: Ὁ λόγος ἑνός ρητοῦ κλάσματος δι' ἑνός ἄλλου ρητοῦ κλάσματος εἶναι ἕνα τρίτον ρητόν κλάσμα τοῦ ὁποίου τό γινόμενον ἐπί τό δεύτερον εἶναι ταυτοτικῶς ἴσον μέ τό πρῶτον. Ἐξυπακούεται ὅτι ἀποκλείομεν πάντοτε τά συστήματα τῶν μεταβλητῶν, τά ὁποῖα δέν καθιστοῦν ὡρισμένα ὅλα τά ρητά κλάσματα ἐπί τῶν ὁποίων λογιζόμεθα. Ἁρμόζει τόν λόγον δύο ρητῶν κλασμάτων νά τόν γράφωμεν ὑπό τήν μορφήν ἑνός κλάσματος, πού ἔχει ὡς ὅρους ἀντιστοίχως τά δύο θεωρούμενα ρητά κλάσματα. Καί δυνάμεθα νά λογιζόμεθα ἐπί τῶν νέων αὐτῶν παραστάσεων ὅπως ἐπί τῶν ρητῶν κλασμάτων.

36.2.2. **Σημείωσις**. Τά ἀναφερόμενα εἰς τά ἀνωτέρω ἐδάφια (36.2, 36.2.1) ὁδηγοῦν ἀμέσως εἰς τό συμπέρασμα, ὅτι δυνάμεθα διά πᾶσαν ρητήν κλασματικήν παράστασιν νά εὕρωμεν ἕνα ἰσοδύναμον ρητόν ἀλγεβρικόν κλάσμα.

Θά δώσωμεν παραδείγματα ἐπί τοῦ θέματος τούτου.

1ον Νά γίνη ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις:

$$\frac{3a+x}{a+x}-\frac{5a-x}{a-x}+\frac{a}{2x}$$

Ἐδῶ οἱ παρονομασταί εἶναι παραστάσεις πρῶται καί τό ε.κ.π. εἶναι τό γινόμενόν των $2x(a+x)(a-x)$. Οὕτω τό πηλίκον τοῦ ε.κ.π. μέ ἕκαστον τῶν παρονομαστῶν τῆς παραστάσεώς μας εἶναι τό γινόμενον τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄλλων κλασμάτων.

Ἔχομεν λοιπόν τήν ἰσοδύναμον παράστασιν:

$$\frac{2x(3a+x)(a-x)}{2x(a+x)(a-x)}-\frac{2x(5a-x)(a+x)}{2x(a+x)(a-x)}+\frac{a(a+x)(a-x)}{2x(a+x)(a-x)} \quad \text{ἤ τήν}$$

$$\frac{2x(3a+x)(a-x)-2x(5a-x)(a+x)+a(a+x)(a-x)}{2x(a+x)(a-x)}=\frac{a^3-4a^2x-13ax^2}{2a^2x-2x^3}$$

πού εἶναι ἕνα ρητόν κλάσμα.

2ον. Νά γίνη ρητόν κλάσμα ἡ παράστασις:

$$\frac{x^2-1}{(1+x\psi)^2-(x+\psi)^2}+\frac{4}{(1-\psi)^2}+\frac{3}{1-\psi^2}$$

Ἀναλύοντες τούς παρονομαστάς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων εὑρίσκομεν:

$(1+x\psi)^2-(x+\psi)^2=(1-x)(1+x)(1+\psi)(1-\psi)$, $(1-\psi)^2=(1-\psi)^2$, $1-\psi^2=(1-\psi)(1+\psi)$. Ὥστε ε.κ.π. $=(1-x)(1+x)(1-\psi)^2(1+\psi)$. Ἡ παράστασίς μας γίνεται:

$$\frac{(x^2-1)(1-\psi)+4(1-x)(1+x)(1+\psi)-3(1+x)(1-x)(1-\psi)}{(1-x)(1+x)(1-\psi)^2(1+\psi)}=$$

$$\frac{8\psi-8x^2\psi}{(1-x)(1+x)(1-\psi)^2(1+\psi)}=\frac{8\psi(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)(1-\psi)^2(1+\psi)}=\frac{8\psi}{(1-\psi)^2(1+\psi)}$$

$3^{ον}$ Νά γίνῃ ῥητόν κλάσμα ἡ παράστασις:

$$\frac{\dfrac{2\psi}{(\psi-x)^2}}{1+\left(\dfrac{\psi+x}{\psi-x}\right)^2}$$

λαμβάνομεν: $\dfrac{\dfrac{2\psi}{(\psi-x)^2}}{1+\left(\dfrac{\psi+x}{\psi-x}\right)^2} \overset{*}{\equiv} \dfrac{2\psi}{(\psi-x)^2+(\psi+x)^2} \equiv \dfrac{2\psi}{2(x^2+\psi^2)} \equiv \dfrac{\psi}{x^2+\psi^2}$

Ἀσκήσεις πρός λύσιν

172. Σχηματίσατε τόν μ.κ.δ. τῶν κάτωθι ὁμάδων παραστάσεων:

$1^{ον}$. $54a^4\beta x^5\psi^6$ $\quad 63a^5x^7\psi \quad 108a^6x^8\psi^2 z$

$2^{ον}$. $3a\beta^4\gamma \quad 4a^5x^7\psi \quad 8a^2\beta^2$

$3^{ον}$. $4a^2-4x^2 \quad a^4-x^4 \quad a^2x-x^3$

$4^{ον}$ $2x^3-x^2-4x+3 \quad 3x^3-11x^2+13x-5$

$5^{ον}$ $x^2-9 \quad x^2+x-12 \quad x^2-4x+3$

$6^{ον}$ $x^8-a^8 \quad x^6-a^6$

173. Καθορίσατε τό ε.κ.π. τῶν ἑπομένων ὁμάδων παραστάσεων:

$1^{ον}$. $(a-\beta)(a-\gamma) \quad (\beta-a)(\beta-\gamma) \quad (a-\gamma)(\beta-\gamma)$

$2^{ον}$. $3x^3+3x^2-6x \quad 2x^2\psi+4x\psi+6\psi \quad 4x^3\psi+20x^2\psi+24x\psi$

$3^{ον}$. $x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 \quad x^3+ax^2+a^2x+a^3$

$4^{ον}$. $x^3-a^3 \quad x^4+a^2x^2+a^4 \quad x^3+a^3$

174. Ἁπλοποιήσατε τά ἑπόμενα ῥητά κλάσματα:

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2}, \quad \frac{(a^2-\beta^2-\gamma^2-2a\gamma)(a+\beta-\gamma)}{(a+\beta+\gamma)(a^2+\gamma^2-2a\gamma-\beta^2)}$$

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}, \quad \frac{a^2-3a\beta+a\gamma+2\beta^2-2\beta\gamma}{a^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}$$

$$\frac{a\beta(x^2+\psi^2)+x\psi(a^2+\beta^2)}{a\beta(x^2-\psi^2)+x\psi(a^2-\beta^2)}, \quad \frac{a^5+a^2\beta^2-a^4\beta-a\beta^4}{a^4-a^2\beta^2+a^3\beta-a\beta^3}$$

175. Ἁπλοποιήσατε τάς ἑπομένας παραστάσεις:

$$\left(\frac{a-\beta}{a+\beta}+\frac{a+\beta}{a-\beta}\right)\left(\frac{a^2+\beta^2}{2a\beta}+1\right)\frac{a\beta}{a^2+\beta^2} \qquad \frac{\dfrac{x^3-\psi^3}{x^2+\psi^2}\cdot\dfrac{x^2-\psi^2}{x^3+\psi^3}\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{\psi^2}\right)}{\dfrac{(x+\psi)^2-x\psi}{(x-\psi)^2+x\psi}\left(\dfrac{1}{\psi}-\dfrac{1}{x}\right)}$$

---

*) Ἐπολλαπλασιάσαμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος, πού ἕκαστος ἐξ αὐτῶν τῶν ὅρων εἶναι ἕνα ῥητόν κλάσμα, ἐπί $(\psi-x)^2$.

$$\left(\frac{x^2}{\psi^2}-2+\frac{\psi^2}{x^2}\right)\cdot\frac{x^4\psi^4}{x\psi+\psi^2}\cdot\frac{\frac{x}{\psi}-1+\frac{\psi}{x}}{x^3-2x^2\psi+x\psi^2}$$

176. Νά γίνουν ρητά κλάσματα αἱ κάτωθι παραστάσεις:

$$\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{x}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+x) \qquad \frac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\frac{x-\beta}{1+\beta x}$$

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{x^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad 1+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}$$

$$\frac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}} \qquad \frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}} \quad \frac{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\gamma}}$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right) \qquad \frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\beta}{\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta-2\gamma}}+\frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\gamma}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma-2\beta}}$$

177. Εὕρατε τό ἰσοδύναμον ρητόν κλάσμα πρός τά κάτωθι ἀθροίσματα:

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$$

$$\frac{x}{x^3+x^2\psi+x\psi^2+\psi^3}+\frac{\psi}{x^3-x^2\psi+x\psi^2-\psi^3}+\frac{1}{x^2-\psi^2}-\frac{1}{x^2+\psi^2}-\frac{x^2+3\psi^2}{x^4-\psi^4}\cdot$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha x+\beta\psi}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha x-\beta\psi}+\frac{2(\alpha^2x+\beta^2\psi)}{\alpha^2x^2+\beta^2\psi^2}-\frac{4(\alpha^4x^3-\beta^4\psi^3)}{\alpha^4x^4-\beta^4\psi^4}$$

178. Δείξατε, ὅτι αἱ ἀκόλουθοι ταυτότητες τοῦ BERTRAND εἶναι ἀληθεῖς:

$1^{ον}$. $$\frac{\psi^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(\psi^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(\psi^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}\equiv 1$$

$2^{ον}$ $$\frac{x^2\psi^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(x^2-\beta^2)(\psi^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(x^2-\gamma^2)(\psi^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}$$

$$\equiv x^2+\psi^2+z^2-\beta^2-\gamma^2$$

179. Τό αὐτό διά τάς ταυτότητας SMITH:

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{\delta}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$

Καί γενικῶς:

$$\frac{\beta+\gamma+\delta+\cdots+\kappa+\lambda}{\alpha(\alpha+\beta+\cdots+\kappa+\lambda}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}+\cdots+\frac{\lambda}{(\alpha+\beta+\cdots+\kappa)(\alpha+\beta+\cdots+\kappa+\lambda)}$$

Ἀρχίζοντες ἀπό τό $2^{ον}$ μέλος τῆς πρώτης ταυτότητος SMITH καταλήγομεν εἰς τό πρῶτον της μέλος.
Διά τήν $2^{αν}$ ταυτότητα SMITH θά ἐργασθῶμεν ὁμοίως λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν ὅτι οἱ δύο πρῶτοι ὅροι ἀντιπροσωπεύουν τό $1^{ον}$ μέλος τῆς προηγουμένης ταυτότητος.
Διά νά δείξωμεν τέλος τήν γενικήν μορφήν τῆς ταυτότητος ταύτης θά χρησιμοποιήσωμεν τήν πλήρη ἐπαγωγήν, ἐργαζόμενοι κατά τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον ἐπηληθεύσαμεν τήν $2^{αν}$ ταυτότητα χρησιμοποιοῦντες τό ἀποτέλεσμα τῆς πρώτης.

Γενικαί παρατηρήσεις ἐπί τῆς Διαιρέσεως δύο Πολυωνύμων

37. Μᾶς ἐνδιαφέρει νά γνωρίσωμεν τόν τρόπον προσδιορισμοῦ τοῦ ὑπολοίπου τῆς διαιρέσεως τοῦ οἱουδήποτε ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου $αx^ν \pm β$. Θά μᾶς χρειασθῆ δι' αὐτό νά ἀποδείξωμεν τό ἑξῆς θεώρημα: Ἐάν ὁ ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, πᾶν ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον, πού εἶναι βαθμοῦ μ ὄχι μικροτέρου τοῦ ν δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν

$$f(x^ν)+x f_1(x^ν)+\dots+x^{ν-1} f_{ν-1}(x^ν) \qquad (1)$$

Τά $f, f_1, f_2, \dots, f_{ν-1}$, εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, πού ὁ βαθμός ἑκάστου των ὅρου ἐκφράζεται εἰς πολλαπλάσιον τοῦ ν.
Διά νά ἐννοήσωμεν εὐκόλως τήν πρότασιν εἰς τήν γενικότητά της θά χρησιμοποιήσωμεν κατ' ἀρχάς ἕνα συγκεκριμένον πολυώνυμον. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν ἕνα πολυώνυμον $8^{ου}$ βαθμοῦ καί ὡς ν ἄς λάβωμεν τόν 3. Θά πρέπει τότε νά δείξωμεν, ὅτι αὐτό τό πολυώνυμον δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν: $f(x^3)+xf_1(x^3)+x^2f_2(x^3)$ (2) ὅπου τά f, f_1, f_2 εἶναι πολυώνυμα, πού ὁ βαθμός ἑκάστου των ὅρου ἐκφράζεται εἰς πολλαπλάσιον τοῦ 3.
Ἰδού ἕνα πολυώνυμον $8^{ου}$ βαθμοῦ: $x^8-5x^7+4x^6-3x^5+4x^4+7x^3-2x^2-3x+6$.
Ὁ σταθερός του ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθμός των εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 συνιστοῦν ἕνα πολυώνυμον εἰς τό ὁποῖον δυνάμε-

θα νά σημειώσωμεν : $4x^6+7x^3+6 \equiv 4(x^3)^2+7\cdot(x^3)+6 \equiv f(x^3)$ (3). Ἐπίσης ὁ πρωτοβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθμός των εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 ηὐξημένον κατά 1, συνιστοῦν ἕνα γινόμενον τῆς μορφῆς $x.f_1(x^3)$, ὅπου τό f_1 εἶναι πολυώνυμον μέ μεταβλητήν τό x^3. Καί διά τό θεωρούμενον πολυώνυμον ἔχομεν: $-5x^7+4x^4-3x \equiv x(-5x^6+4x^3-3) \equiv xf_1(x^3)$ (4). Ἀκόμη ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθμός των εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 ηὐξημένον κατά 2 συνιστοῦν ἕνα γινόμενον τῆς μορφῆς $x^2f_2(x^3)$, ὅπου τό f_2 εἶναι συνάρτησις τοῦ x^3. Καί εἰς τό παράδειγμά μας ἔχομεν: $x^8-3x^5-2x^2=x^2(x^6-3x^3-2)=x^2f_2(x^3)$ (5). Καί οὕτω διά τῶν ἐκφράσεων (3), (4), (5) τό προταθέν πολυώνυμον ἐτέθη ὑπό τήν μορφήν (2). Εἶναι ὅμως αὐτονόητον, ὅτι ὑπό τήν μορφήν (2) θά ἐτίθετο τό ὁποιοδήποτε πολυώνυμον μέ ν φυσικά τόν 3. Καί αὐτό, διότι ὁ κάθε ἐκθέτης τοῦ x εἰς ἕνα πολυώνυμον, τό ὁποῖον θά ἐθεωρούσαμεν, θά ἀνῆκε εἰς μίαν τῶν ἐκφράσεων: 3λ, ἤ 3λ+1 ἤ 3λ+2 καί κατά τά ἀνωτέρω ἀναφερόμενα ἐλάβομεν ὅλους τούς ὅρους, πού ἔχουν ἐκθέτας αὐτῶν τῶν μορφῶν*.

Εἴμεθα τώρα εἰς θέσιν νά ἐννοήσωμεν τήν πρότασίν μας εἰς τήν γενικότητά της:

Τό ὁποιοδήποτε πολυώνυμον τοῦ x θά ἔχη ὅρους, πού ὁ βαθμός των θά ἐκφράζεται εἰς ἀριθμούς τῆς μορφῆς: νλ+μ, ὅπου τό μέν λ θά εἶναι ἕνας ἀκέραιος καί θετικός ἤ ὁ μηδέν ὁ δέ μ ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς: 0, 1, 2, ... (ν−1). Οὕτω:

Ὁ σταθερός ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου μας, πού εἶναι βαθμοῦ νλ, συνιστοῦν μίαν συνάρτησιν τοῦ x^ν, τό πολυώνυμον $f(x^\nu)$. Ἐπίσης, ὁ πρωτοβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού εἶναι βαθμοῦ νλ+1 συνιστοῦν τήν ἔκφρασιν $x.f_1(x^\nu)$, ὅπου τό f_1 εἶναι συνάρτησις τοῦ x^ν. Ἀκόμη ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος καί ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ βαθμοῦ νλ+2 δημιουργοῦν τήν ἔκφρασιν $x^2f_2(x^\nu)$ ὅπου καί πάλιν τό f_2 εἶναι πωλυώνυμον μέ μεταβλητήν τό x^ν. Καί ἐξακολουθοῦντες κατ' αὐτόν τόν

---

*Ὁ καθείς γνωρίζει ὅτι κάθε ἀκέραιος N=3λ+μ ὅπου τό μ λαμβάνει τάς τιμάς: 0, 1, 2.

τρόπον φθάνομεν νά λάβωμεν τόν ὅρον, πού ἔχει βαθμόν $\nu-1$ καί ὅλους τούς ὅρους, πού ὁ βαθμός των εἶναι τῆς μορφῆς $\nu\lambda+\nu-1$· αὐτοί οἱ ὅροι συνιστοῦν τήν ἔκφρασιν $x^{\nu-1}f_{\nu-1}(x^{\nu})$, ὅπου τό $f_{\nu-1}$ εἶναι πολυώνυμον μέ μεταβλητήν τό x^{ν}.

37.1. Τό ἀνωτέρω ἀποδειχθέν θεώρημα θά μᾶς βοηθήσῃ εἰς τήν ἀπόδειξιν τοῦ ἑπομένου θεωρήματος, τό ὁποῖον θά ἱκανοποιήσῃ τόν ἀρχικῶς τεθέντα σκοπόν.

Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου $ax^{\nu}\pm\beta$ εὑρίσκεται ἄν εἰς τό θεωρούμενον πολυώνυμον ἀντικαταστήσωμεν τό x^{ν} μέ $\mp\frac{\beta}{a}$.

Συμφώνως πρός τό θεώρημα (37) τό ὁποιοδήποτε πολυώνυμον $\sigma(x)$, πού θά εἶναι φυσικά βαθμοῦ $\mu\geqslant\nu$, θά τίθεται ὑπό τήν μορφήν (1) (37). Οὕτω, ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτό τό πολυώνυμον τό x^{ν} μέ τό $\mp\frac{\beta}{a}$, λαμβάνομεν τό πολυώνυμον: $f\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+xf_1\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+\ldots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$ (1).

Θά δείξωμεν πώς αὐτό τό πολυώνυμον (1) ἀντιπροσωπεύει τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ μας πολυωνύμου μέ τό διώνυμον $ax^{\nu}\pm\beta$.

Ἀφοῦ τά $f, f_1 \ldots f_{\nu-1}$ εἶναι συναρτήσεις τῆς μεταβλητῆς x^{ν} αἱ ποσότητες $f\left(\mp\frac{\beta}{a}\right), f_1\left(\mp\frac{\beta}{a}\right), \ldots, f_{\nu-1}\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$ ἐκφράζουν ἀντιστοίχως τά ὑπόλοιπα τῆς διαιρέσεώς των μέ τό $ax^{\nu}\pm\beta$. Καί αὐτό διότι ὁ διαιρέτης θεωρεῖται πρωτοβάθμιον διώνυμον τοῦ x^{ν} καί δυνάμεθα οὕτω νά ἐφαρμόσωμεν τό συμπέρασμα τοῦ (29). Θά ἔχωμεν λοιπόν τάς ἰσότητας:

$$f(x^{\nu})\equiv(ax^{\nu}\pm\beta)\Pi(x^{\nu})+f\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$$
$$f_1(x^{\nu})\equiv(ax^{\nu}\pm\beta)\Pi_1(x^{\nu})+f_1\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{\nu-1}(x^{\nu})\equiv(ax^{\nu}\pm\beta)\Pi_{\nu-1}(x^{\nu})+f_{\nu-1}\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$$

Ἄν τώρα τάς ἀνωτέρω ταυτότητας πολλαπλασιάσωμεν ἀντιστοίχως μέ 1, $x, x^2, \ldots, x^{\nu-1}$ καί τάς προσθέσωμεν κατά μέλη λαμβάνομεν τήν ταυτότητα: $\sigma(x)\equiv(ax^{\nu}\pm\beta)\Pi'(x)+f\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+xf_1\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+\ldots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$ (2)

ὅπου τό $\Pi'(x)$ ἐκφράζει τό πολυώνυμον: $\Pi(x^{\nu})+x\Pi_1(x^{\nu})+x^2\Pi_2(x^{\nu})+\ldots+x^{\nu-1}\Pi_{\nu-1}(x^{\nu})$.

Ἐπειδή τώρα τό πολυώνυμον: $\varphi(x)\equiv f\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+xf_1\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)+\ldots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}\left(\mp\frac{\beta}{a}\right)$

εἶναι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $ax^{\nu} \pm \beta$, ἡ ταυτότης (2) ἑρμηνεύεται ὡς ἡ ταυτότης τῆς διαιρέσεως τοῦ $\sigma(x)$ διά τοῦ $ax^{\nu} \pm \beta$. Εἰς τὴν διαίρεσιν ταύτην τό $\Pi'(x)$ ἀντιπροσωπεύει τό πηλίκον καί τό $\varphi(x)$ τό ὑπόλοιπον.

38. Ἐάν τά μ, ρ ἀντιπροσωπεύουν φυσικούς ἀριθμούς νά δειχθῆ ὅτι: 1ον Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό $x^{\mu}-a^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν μέ τό $x^{\rho}-a^{\rho}$ εἶναι τό μ νά εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ρ. 2ον. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό $x^{\mu}-a^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $x^{\rho}+a^{\rho}$ εἶναι τό μ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ ρ καί τό πηλίκον νά εἶναι ἀριθμός ἄρτιος 3ον. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα τό $x^{\mu}+a^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $x^{\rho}+a^{\rho}$ εἶναι τό μ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ ρ καί τό πηλίκον νά εἶναι ἀριθμός περιττός.

1ον. Ὑποθέτομεν πώς ἡ διαίρεσις: $x^{\mu}-a^{\mu} : x^{\rho}-a^{\rho}$ εἶναι τελεία ἀνεξαρτήτως φυσικά τῶν συγκεκριμένων τιμῶν τάς ὁποίας δυνάμεθα νά ἀποδώσωμεν εἰς τά x καί a $(x \neq a)$ καί ζητοῦμεν τήν ἀναγκαίαν τῆς ὑποθέσεώς μας συνέπειαν.

Ἐν γένει ἔχομεν: $\mu = \lambda\rho + \upsilon$

$x^{\mu}-a^{\mu} = x^{\rho\lambda+\upsilon}-a^{\rho\lambda+\upsilon} = (x^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}-a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon}$ (1). Καί διά νά εὕρωμεν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς μας, πού κατά τήν ὑπόθεσίν μας θά εἶναι μηδέν, θά ἐφαρμόσωμεν τό θεώρημα (37.1). Ἐκ τῆς ἰσότητος λοιπόν (1) λαμβάνομεν: $Y = (a^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}-a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon} = 0$ ἤ $a^{\rho\lambda}(x^{\upsilon}-a^{\upsilon}) = 0$ δηλ. $x^{\upsilon} = a^{\upsilon}$ (2).

Ἡ ἰσότης ὅμως (2) εἶναι δυνατή ἀφοῦ $x \neq a$; Ἐάν ἔχωμεν $\upsilon = 0$ ἡ ἰσότης (2) εἶναι προφανῶς δυνατή διά πᾶσαν τιμήν τῶν x καί a, ἐάν ὅμως $\upsilon \neq 0$ δέν εἶναι προφανῶς δυνατή διά πᾶσαν τιμήν τῶν x καί a $(x \neq a)$. Ὥστε ἡ (2) ὑπό τάς τεθείσας συνθήκας εἶναι δυνατή μόνον ἐάν $\upsilon = 0$ δηλ. ἐάν $\mu = \lambda.\rho$. Ἐδείξαμεν λοιπόν τό ἀναγκαῖον τῆς ἐκφρασθείσης συνθήκης. Καί τώρα τό ἀρκετόν:

Δεχόμεθα $\mu = \lambda.\rho$ τότε $\dfrac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x^{\rho}-a^{\rho}} = \dfrac{x^{\lambda\rho}-a^{\lambda\rho}}{x^{\rho}-a^{\rho}} = \dfrac{(x^{\rho})^{\lambda}-(a^{\rho})^{\lambda}}{x^{\rho}-a^{\rho}} = \dfrac{\psi^{\lambda}-\beta^{\lambda}}{\psi-\beta}$, ἐάν θέσωμεν $x^{\rho} = \psi$ καί $a^{\rho} = \beta$. Ἡ τελευταία ὅμως ἔκφρασις ἀντιπροσωπεύει μίαν ἀκεραίαν παράστασιν (31.1).

2ον. Καί πάλιν θέτομεν $\mu = \lambda\rho + \upsilon$. Οὕτω:

$x^{\mu}-a^{\mu} = x^{\rho\lambda+\upsilon}-a^{\rho\lambda+\upsilon} = (x^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}-a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon}$. Καί: $Y = (-a^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}-a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon}$.

Ἐάν δεχθῶμεν τό λ περιττόν ἀριθμόν θά ἔχωμεν: $Y=a^{\rho\lambda}(x^{\upsilon}+a^{\upsilon})$. Προφανῶς ὅμως οὔτε δι' $\upsilon=0$ εἶναι 0 τό Y διά πᾶσαν τιμήν τῶν x καί a $(x\neq a)$ οὔτε δι' $\upsilon\neq 0$. Συνεπῶς ἀναγκαίως θά ἔχωμεν τό λ ἄρτιον. Τότε ὅμως ἔχομεν $Y=a^{\rho\lambda}(x^{\upsilon}-a^{\upsilon})$ καί ὅπως προηγουμένως ἀπεδείξαμεν ὑπό τάς τεθείσας συνθήκας ἀναγκαίως θά ἔχωμεν $\upsilon=0$ διά νά ἔχωμεν καί $Y=0$. Ὥστε δεχθέντες τήν διαίρεσιν $(x^{\mu}-a^{\mu})(x^{\rho}+a^{\rho})$ τελείαν εὑρήκαμεν ἀναγκαίως τό μ διαιρετόν διά τοῦ ρ καί τό πηλίκον λ τῆς διαιρέσεως ταύτης ἀριθμόν ἄρτιον. Καί τώρα, ἡ συνθήκη αὕτη εἶναι ἀρκετή;

$$\frac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{x^{\rho\lambda}-a^{\rho\lambda}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{(x^{\rho})^{\lambda}-(a^{\rho})^{\lambda}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{(x^{\rho})^{2\nu}-(a^{\rho})^{2\nu}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{\psi^{2\nu}-\beta^{2\nu}}{\psi+\beta}$$

Ἀλλά, (33) ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

3ον Καί πάλιν ὑποθέτομεν τήν διαίρεσιν τελείαν καί λαμβάνομεν: $x^{\mu}+a^{\mu}=\lambda^{\rho\lambda+\upsilon}+a^{\rho\lambda+\upsilon}=(x^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}+a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon}$. Καί: $Y=(-a^{\rho})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon}+a^{\rho\lambda}\cdot a^{\upsilon}$. Δέν θά εἶναι προφανῶς $Y=0$ ἄν $\lambda=2\nu$ ἄν σκεφθῶμεν κατά τόν ἀνωτέρω ἐκτεθέντα τρόπον. Ὥστε θά πρέπει νά εἶναι $\lambda=2\nu+1$ καί τότε: $Y=a^{\rho\lambda}(x^{\upsilon}-a^{\upsilon})=0$ ὁπότε $x^{\upsilon}=a^{\upsilon}$ δηλ. καί πάλιν κατά τά ἀνώτερω $\upsilon=0$. Ἀναγκαία λοιπόν συνθήκη εἶναι νά ἔχωμεν: $\mu=\rho.(2\nu+1)$. Εἶναι ὅμως ἡ συνθήκη αὕτη ἀρκετή;

$$\frac{x^{\mu}+a^{\mu}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{x^{\rho\lambda}+a^{\rho\lambda}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{(x^{\rho})^{2\nu+1}+(a^{\rho})^{2\nu+1}}{x^{\rho}+a^{\rho}}=\frac{\psi^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}}{\psi+\beta}$$

. Ἀλλά (33) ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

38.1. **Ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή**. Νά δειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $x^{\kappa a}+x^{\kappa\beta+1}+\ldots+x^{\kappa\tau+\kappa-1}$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+\ldots+x+1$ οἱοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί $a,\beta,\gamma,\ldots\tau$.

Τό θέμα τοῦτο θά τό πραγματευθῶμεν κατ' ἀρχάς εἰς μίαν μερικήν του μορφήν: Δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον: $x^{3a}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2}$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ x^2+x+1 δι' οἱασδήποτε ἀκεραίας καί θετικάς τιμάς τῶν a,β,γ.

Τό πολυώνυμον x^2+x+1 εἶναι τό πηλίκον τῆς τελείας διαιρέσεως $\frac{x^3-1}{x-1}$ καί συνεπῶς τό θέμα μας ὁδηγεῖ εἰς τό νά δείξωμεν ὅτι ἡ παράστασις: $\frac{(x^{3a}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2})(x-1)}{x^3-1}$ εἶναι ἀκεραία.

Ἔχομεν: $x^{3\alpha}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2}=(x^3)^{\alpha}+(x^3)^{\beta}\cdot x+(x^3)^{\gamma}\cdot x^2$. Καί ἐάν θέσωμεν εἰς αὐτό ὅπου x^3 τό 1 θά εὕρωμεν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά τοῦ x^3-1. Οὕτω $Y=1+x+x^2$ καί συνεπῶς $x^{3\alpha}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2}\equiv (x^3-1)\Pi(x)+x^2+x+1$. Ἡ κλασματική μας λοιπόν ἔκφρασις γίνεται:

$$\frac{[(x^3-1)\Pi(x)+x^2+x+1](x-1)}{x^3-1}=\frac{(x^3-1)(x-1)\Pi(x)+x^3-1}{x^3-1}=(x-1)\Pi(x)+1.$$

Εἶναι λοιπόν αὐτή ἰσοδύναμος πρός παράστασιν ἀκεραίαν.

Καί τώρα τό θέμα μας εἰς τήν γενικήν του μορφήν:

$x^{k-1}+x^{k-2}+\dots+x+1=\dfrac{x^k-1}{x-1}$. Θά πρέπει ἡ παράστασις:

$$R=\frac{[x^{k\alpha}+x^{k\beta+1}+\dots+x^{k\tau+k-1}](x-1)}{x^k-1}$$ νά εἶναι ἀκεραία.

$x^{k\alpha}+x^{k\beta+1}+\dots+x^{k\tau+k-1}=(x^k)^{\alpha}+(x^k)^{\beta}\cdot x+\dots+(x^k)^{\tau}\cdot x^{k-1}$. Καί

$Y=1+x+\dots+x^{k-1}$. Καί $R=\dfrac{[(x^k-1)\Pi(x)+x^{k-1}+x^{k-2}+\dots+x+1](x-1)}{x^k-1}$

$=\dfrac{(x-1)(x^k-1)\Pi(x)+x^k-1}{x^k-1}=(x-1)\Pi(x)+1$ ὅ.ἔ.δ.

Ἀσκήσεις.

180. Ἄν τά $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι ἀκέραιοι τῆς ἀριθμητικῆς νά εὑρεθῇ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^{4\alpha}+x^{4\beta+1}+x^{4\gamma+2}+x^{4\delta+3}$ διά τοῦ x^4-3.

Ἐφαρμογή τοῦ θεωρ. (37.1).

181. Νά προσδιορισθῇ τό α, ὥστε τό πολυώνυμον: $x^6+2x^5+\alpha x^4-6x^3-x^2+3$ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ x^2-3.

182. Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον, ὅταν διαιρεθῇ μέ τό $x-1$ δίδει ὑπόλοιπον τόν ἀριθμόν 2 καί ὅταν διαιρεθῇ μέ τό $x+2$ δίδει ὑπόλοιπον τόν -4. Ποῖον ὑπόλοιπον θά δώσῃ, ἄν διαιρεθῇ μέ τό γινόμενον $(x-1)(x+2)$;

Ζητοῦμεν τά α,β τῆς ταυτότητος: $f(x)\equiv(x-1)(x-2)\Pi(x)+\alpha x+\beta$. Δέν ἔχομεν δι' αὐτό παρά νά λάβωμεν τό $f(1)$ καί τό $f(-2)$.

183. Ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον, ὅταν διαιρεθῇ μέ τό x^2-1 δίδει ὡς ὑπόλοιπον τό $3x+5$. Ποῖον ὑπόλοιπον θά μᾶς δώσῃ, ἄν διαιρεθῇ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x+1$;

Ἐκ τῆς ταυτότητος: $f(x) \equiv (x+1)(x-1)\Pi(x)+3x+5$ θά προσδιορίσωμεν τό $f(1)$ καί τό $f(-1)$. Δικαιολογήσατε τάς σκέψεις αὐτάς.

184. Δείξατε πώς ἐάν τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός ὁ $7^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετός μέ τό 8.

185. Δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός $3^{15}-1$ εἶναι διαιρετός μέ τό 26 καί μέ τό 242.

Δύνασθε νά στηριχθῆτε εἰς τό ἐδάφιον (38) ἤ εἰς τό ἐδ. (30).

186. Πῶς πρέπει νά ἐκλέξωμεν τόν θετικόν καί ἀκέραιον ἀριθμόν ν, ὥστε ὁ ἀριθμός $N=4^\nu+1$ νά εἶναι διαιρετός μέ τό 3 ἤ μέ τό 5.

187. Πῶς πρέπει νά ἐκλέξωμεν τόν θετικόν καί ἀκέραιον ἀριθμόν ν, ὥστε ὁ ἀριθμός $N=4^\nu+1$ νά εἶναι διαιρετός διά τοῦ 17.

188. Πῶς πρέπει νά ἐκλέξωμεν τόν θετικόν καί ἀκέραιον ν, ὥστε ὁ ἀριθμός $10^\nu-1$ νά εἶναι διαιρετός 1ον μέ τό 9^2 καί 2ον μέ τό 9^3.

Ὁ $10^\nu-1$ εἶναι προφανῶς ὁ μεγαλύτερος τῶν νψηφίων ἀριθμῶν δηλ. ὁ $\overbrace{99\ldots9}^{\nu\ \text{ψηφία}}$. Ἀνεξαρτήτως λοιπόν τοῦ ν ὁ θεωρούμενος ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά τοῦ 9 καί τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι ὁ ἀριθμός $\overbrace{111\ldots1}^{\nu\ \text{ψηφία}}$. Αὐτό τό πηλίκον πρέπει νά διαιρῆται ἐπίσης διά τοῦ 9 διά νά εἶναι ὁ ἀρχικός ἀριθμός διαιρετός διά τοῦ 9^2. Δηλ. πρέπει νά εἶναι $\nu=9.K$. Διατί;

Καί τώρα ἀφοῦ διαιρέσωμεν τόν 111...1 διά τοῦ 9 θά πρέπει νά ὁρίσωμεν τό K συνεπῶς καί τόν ν διά νά εἶναι τό εὑρεθησόμενον πηλίκον διαιρετόν διά τοῦ 9. (Θά χρησιμοποιήσετε τό (34.2ον) καί φυσικά ὅσον ἀφορᾶ τούς φυσικούς ἀριθμούς.

189. Πῶς πρέπει νά ἐκλέξωμεν τόν φυσικόν ἀριθμόν ν, ὥστε ὁ ἀριθμός $A=10^\nu-1$ νά εἶναι διαιρετός 1ον μέ τόν 11 2ον μέ τόν 11^2.

Θά ἐργασθῶμεν ὅπως καί διά τήν ἄσκησιν (188).

190. Νά εὑρεθῇ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων: $x^4-2x^3-2x^2+9x-6$, $x^5-2x^4+2x^3-x^2+6$ χρησιμοποιοῦντες τό συμπέρασμα τοῦ (33.2.6).

191. Ἐάν τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ των τότε καί τά πολυώνυμα $f_1(x)+f_2(x)$ καί $f_1(x)-f_2(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ των.

192. Νά εὑρεθῇ διά διαιρέσεων ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων:

$3x^3-x^2-11x+35$, $3x^4+5x^3-9x$, $3x^2+11x+10$.

193. Δείξατε, ὅτι διά νά ἔχουν τά πολυώνυμα $x^3+\mu x+\lambda$ καί $3x^2+\mu$ μ.κ.δ. πρωτοβάθμιον πρέπει καί ἀρκεῖ νά ὑφίσταται ἡ σχέσις: $\frac{\mu^3}{27}+\frac{\lambda^2}{4}=0$.

Θά ἀκολουθήσωμεν τό (33.2.6) καί θά μηδενίσωμεν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἐκείνης εἰς τήν ὁποίαν ὁ διαιρέτης εἶναι πρωτοβάθμιος.

194. Ἄν ὁ ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, ἡ παράστασις: $\frac{a^{3\nu}-1}{a^2+a+1}$ εἶναι ἀκέραιον τοῦ α πολυώνυμον.

Ὁ διαιρέτης γράφεται: $\frac{a^3-1}{a-1}$ καί τῆς οὕτω δημιουργουμένης παραστάσεως φαίνεται ἡ ἀκεραία μορφή ἀπό τό (38).

195. Ἀποδείξατε ὅτι τό πολυώνυμον: $(x^2-x\psi+\psi^2)^3+(x^2+x\psi+\psi^2)^3$ διαιρεῖται μέ τό διώνυμον $2(x^2+\psi^2)$ καί νά ὑπολογισθῇ τό πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

Ἡ διαιρετέα παράστασις εἶναι ἄθροισμα κύβων.

196. Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις: $a^5+\beta^5+\gamma^5$ εἶναι διαιρετή μέ τό γινόμενον $a.\beta.\gamma$, ἐάν αἱ ποσότητες a, β, γ ὑπόκεινται εἰς τόν περιορισμόν $a+\beta+\gamma=0$. Ὑπολογίσατε καί τό πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

Θέτοντες εἰς τήν διαιρετέαν παράστασιν $\gamma=-(a+\beta)$ δυνάμεθα νά τήν ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενον τοῦ ὁποίου τό $a\beta\gamma$ εἶναι παράγων.

Ἀσκήσεις ἐφ' ὁλοκλήρου τῆς ὕλης τοῦ δευτέρου κεφαλαίου

197. Τό πολυώνυμον $x^3-3a\beta x+a^3+\beta^3$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ διωνύμου $x+a+\beta$;

198. Διά ποίας τιμάς τοῦ φυσικοῦ ν οἱ ἀριθμοί $5^\nu+1$ καί $9^\nu+1$ εἶναι ἀντιστοίχως διαιρετοί διά τῶν ἀριθμῶν 6 καί 10;

199. Εὕρετε τάς ἰσοδυνάμους καί ἀκεραίας παραστάσεις πρός τάς παραστάσεις:

1ον $$\frac{a+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-a)}+\frac{\beta+\gamma}{(\gamma-a)(a-\beta)}+\frac{\gamma+a}{(a-\beta)(\beta-\gamma)}$$

2ον $$\frac{a^3}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-a)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}$$

200. Δείξατε, ὅτι, ἐάν τό ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον $f(x)$ ἤθελε διαιρεθῇ διά τοῦ γινομένου $(x-a)(x-\beta)$ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύ-

της εἶναι ἡ παράστασις:

$$x\,\frac{f(a)-f(\beta)}{a-\beta}+\frac{af(\beta)-\beta f(a)}{a-\beta}$$

Κατά τήν ὑπόθεσίν μας θά ἔχωμεν:

$f(x)\equiv(x-a)(x-\beta)\Pi(x)+Ax+B$ (1). Καί ἡ (1) διά $x=a$ καί $x=\beta$ ἀντιστοίχως μᾶς δίδει: $f(a)=Aa+B$, $f(\beta)=A\beta+B$ (2). Αἱ ἰσότητες αὐταί (2) μᾶς δίδουν τά A καί B καί συνεπῶς μορφοῦμεν τό ὑπόλοιπον $Ax+B$.

201. Ἐάν οἱ θετικοί ἀριθμοί x, ψ, ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $x\psi+xz+\psi z=a^2$ τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν ἰσότητα:

$$\frac{1}{\psi z(a^2+x^2)}+\frac{1}{xz(a^2+\psi^2)}+\frac{1}{x\psi(a^2+z^2)}=\frac{2a^2}{x\psi z\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+\psi^2)(a^2+z^2)}}$$

Ἡ διδομένη ἰσότης γράφεται: $\psi z+xz+x\psi+x^2=a^2+x^2$ ἤ $(x+\psi)(x+z)=a^2+x^2$ κ.λ.π. Καί συνεπῶς: $\Sigma\,\dfrac{1}{\psi z(a^2+x^2)}=\dfrac{\Sigma x(\psi+z)}{x\psi z(\psi+z)(z+x)(x+\psi)}=$

$$\frac{2a^2}{x\psi z\sqrt{(a^2+x^2)(a^2+\psi^2)(a^2+z^2)}}$$

202. Δείξατε ὅτι, ἐάν $a+\beta+\gamma=0$ ἔχομεν:

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{a}+\frac{\gamma-a}{\beta}+\frac{a-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{a}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-a}+\frac{\gamma}{a-\beta}\right)=9$$

Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις εἰς τό πρῶτον μέλος καί λαμβάνομεν τό ζεῦγος τῶν ὅρων:

$$\frac{\beta(\beta-\gamma)}{a(\gamma-a)}+\frac{\beta(a-\beta)}{\gamma(\gamma-a)}=\frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)+a\beta(a-\beta)}{a\gamma(\gamma-a)}=\frac{\beta(\beta\gamma-\gamma^2+a^2-a\beta)}{a\gamma(\gamma-a)}=$$

$$\frac{\beta[\beta(\gamma-a)-(\gamma+a)(\gamma-a)]}{a\gamma(\gamma-a)}=\frac{\beta(\gamma-a)[\beta-(\gamma+a)]}{a\gamma(\gamma-a)}=\frac{2\beta^2}{a\gamma}$$ διότι καθ' ὑπόθεσιν

$a+\gamma=-\beta$. Οὕτω τό πρῶτον μέλος θά συντεθῇ ἀπό τόν ἀριθμόν 3 καί ἀπό τρία ζεύγη ὅρων ὡς τό ἀνωτέρω. Ἐφεξῆς ἡ ἐργασία εἶναι ἁπλῆ λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τήν ταυτότητα (11).

203. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $a\beta\gamma+(a+\beta)(a+\gamma)(\beta+\gamma)$ εἶναι διαιρετόν μέ τό $a+\beta+\gamma$.

204. Μέ βάσιν τήν θεωρίαν τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων ὑπολογίσατε τό γινόμενον:

$$(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

205. Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:

$$\Sigma x^4+\Sigma x^2\psi^2-2x\psi z(x+\psi+z)\equiv\frac{1}{4}\,\Sigma(x+\psi)^2\cdot\Sigma(x-\psi)^2$$

ὅπου τό Σx^4 ἀποτελεῖ σύντομον γραφήν τοῦ ἀθροίσματος $x^4+\psi^4+z^4$ καί φυσικά καί τά ἄλλα Σ συντομεύουν ἀντιστοίχους γραφάς.

Τό πρῶτον μέλος τῆς ταυτότητός μας γράφεται:
$x^4+\psi^4+z^4+x^2\psi^2+\psi^2z^2+z^2x^2-2x^2z\psi-2x\psi^2z-2x\psi z^2 \equiv \frac{1}{4}(4x^4+4\psi^4+4z^4+4x^2\psi^2+4\psi^2z^2+4z^2x^2-8x^2\psi z-8x\psi^2z-8x\psi z^2) \equiv \frac{1}{4}[4x^4+4\psi^4+4z^4+8x^2\psi^2+8\psi^2z^2+8z^2x^2-4x^2\psi^2-4\psi^2z^2-4z^2x^2-8x^2\psi z-8x\psi^2z-8x\psi z^2] = \frac{1}{4}[(2x^2+2\psi^2+2z^2)^2-(2x\psi+2\psi z+2zx)^2]$ κ.τ.λ.

206. Ἐάν τά x, ψ, z, ἀντιπροσωπεύουν πραγματικούς ἀριθμούς ἡ ἔκφρασις: $x^4+\psi^4+z^4+x^2\psi^2+x^2z^2+\psi^2z^2-2x\psi z(x+\psi+z)$ ἀντιπροσωπεύει πάντοτε ἕνα θετικόν ἀριθμόν. Ὑπό ποίας συνθήκας ἀντιπροσωπεύει τό μηδέν;

Θά μετασχηματίσετε τήν παράστασίν μας εἰς ἄθροισμα τετραγώνων.

207. Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτησις: $f(x) \equiv x^2-5x+6$ εἶναι αὔξουσα εἰς τό διάστημα $(3, +\infty)$.

208. Ἐάν $\alpha x+\beta\psi+\gamma z=\delta$ καί $\alpha, \beta, \gamma, x, y, z$ εἶναι ἀριθμοί θετικοί, δείξατε
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta\psi^2+\gamma z^2)-\beta\gamma(\psi-z)^2-\alpha\gamma(z-x)^2-\alpha\beta(x-\psi)^2=\delta^2$$
Καί ἐδῶ γίνεται ἐφαρμογή τῆς ταυτότητος LAGRANGE · ἀλλά ἐπί ποίων ἀριθμῶν;

209. Ἐάν τά x, ψ, z, εἶναι τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί ἡ ἔκφρασις: $5(x^2+\psi^2+z^2)-4(x\psi+\psi z+zx)$ ἐκπροσωπεῖ πάντοτε ἕνα θετικόν ἀριθμόν καί μᾶς δίδει τόν μηδέν μόνον ἐάν $x=\psi=z=0$.

210. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3 \equiv \alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$ δείξατε, ὅτι ὁ ἕνας τουλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων δύο.

Μετασχηματίσατε εἰς γινόμενον τήν παράστασιν: $(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3-\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$.

211. Διά τιμάς τοῦ x μεγαλυτέρας τοῦ 2 ὁ ἐκπροσωπούμενος ἀριθμός ἀπό τό x^3 ὑπερβαίνει τόν ἀριθμόν x^2+x+2;

Δηλ. πρέπει νά δείξωμεν τήν ἰσχύν τῆς ἀνισότητος: $x^3 > x^2+x+2$ ἤ τήν ἰσχύν τῆς ἀνισότητος $(x^3-1)-(x^2+x+1)>0$ ἤ τῆς $(x^2+x+1)(x-2)>0$. Ἀλλ' ἡ τελευταία προφανῶς ἰσχύει διά $x>2$.

Δυνάμεθα ἐπίσης νά ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν ὑπό ἀπόδειξιν σχέσιν τό x μέ τό $2+\theta$ καί τήν οὕτω δημιουργουμένην ἀνισότητα νά δείξωμεν ἀληθῆ διά πᾶσαν θετικήν τιμήν τοῦ θ.

212. Διά τιμάς τοῦ $x \geqslant a$ ἰσχύει ἡ σχέσις: $x^3+13a^2x \geqslant 5ax^2+9a^3$.

Ἡ μετατροπή τοῦ πρώτου μέλους τῆς ὑπό ἀπόδειξιν σχέσεως, ἐνῶ τό 2ον μέλος της εἶναι μηδέν, εἰς γινόμενον, θά ἐξυπηρετήση ἀποτελεσματικά τήν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας της. Δυνάμεθα ἐπίσης νά ἀκολουθήσωμεν καί τόν 2ον τρόπον ἀποδείξεως τόν ὁποῖον καί ὑπεδείξαμεν διά τήν προηγουμένην ἄσκησιν.

213. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $2x^2\psi^2+2\psi^2z^2+2z^2x^2-(x^4+\psi^4+z^4)$ εἶναι διαιρετόν μέ τό γινόμενον: $(x+\psi+z)(x-\psi-z)$.

214. Μετασχηματίσατε εἰς γινόμενον τήν παράστασιν:

$$a^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+a)+\gamma^2(a+\beta)+2a\beta\gamma$$

215. Ἐάν οἱ ἀριθμοί a, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν σχέσιν: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{a+\beta+\gamma}$, θά ἱκανοποιοῦν καί τήν σχέσιν: $\frac{1}{a^{2\nu+1}}+\frac{1}{\beta^{2\nu+1}}+\frac{1}{\gamma^{2\nu+1}}=\frac{1}{(a+\beta+\gamma)^{2\nu+1}}$.

Ἐάν μεταφέρωμεν τό 2ον μέλος τῆς διδομένης ἰσότητος εἰς τό πρῶτον της μέλος καί τήν οὕτω δημιουργουμένην παράστασιν μετασχηματίσωμεν εἰς γινόμενον, ὁδηγούμεθα εἰς συνεπείας καθιστώσας προφανῆ τήν ὑπό ἀπόδειξιν ἰσότητα.

216. Ἐπαληθεύσατε τάς ταυτότητας:

1ον. $(x+\psi)^4+x^4+\psi^4 \equiv 2(x^2+x\psi+\psi^2)^2$

2ον. $(x+\psi)^5-x^5-\psi^5 \equiv 5x\psi(x+\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)$

3ον. $(x+\psi)^7-x^7-\psi^7 \equiv 7x\psi(x+\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)^2$

4ον. $(x+\psi+z)^5-(\psi+z-x)^5-(z+x-\psi)^5-(x+\psi-z)^5 \equiv 80x\psi z(x^2+\psi^2+z^2)$.

217. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί a, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα $a+\beta+\gamma=0$ καί ἐάν θέσωμεν $S_\nu=a^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$ δείξατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων:

$$2S_4=S_2{}^2, \quad \frac{S_3 . S_2}{S_5}=\frac{6}{5}, \quad \frac{S_5}{S_4}=\frac{5S_3}{3S_2}, \quad \frac{5S_7}{7S_5}=\frac{S_4}{S_2}.$$

Δέν ἔχετε παρά νά μορφώσετε εἰς γινόμενα τάς παραστάσεις S_2, S_3, S_4, S_5, S_7 ἀντικαθιστῶντες εἰς αὐτάς τό γ π.χ. διά τοῦ ἴσου του $-(a+\beta)$. Δύνασθε μάλιστα νά χρησιμοποιήσετε καί τάς τρεῖς πρώτας ταυτότητας τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως.

218. Σχηματίζομεν ἀτέρμονα δεκαδικόν ἀριθμόν ὡς ἑξῆς: μετά τήν ὑποδιαστολήν γράφομεν τό ψηφίον 9 ἀκολουθούμενον ἀπό τόν ἀριθμόν 22, κατόπιν πάλιν τό ψηφίον 9 ἀκολουθούμενον τώρα ἀπό τόν 222, κατόπιν καί πάλιν τό 9 ἀκολουθούμενον ἀπό τόν 2222 κ.ο.κ. Νά δειχθῇ, ὅτι ὁ οὕτω μορφούμενος δεκαδικός ἀριθμός εἶναι ἀσύμμετρος.

Οἱ ἀτέρμονες δεκαδικοί, ὡς γνωστόν, διά νά εἶναι σύμμετροι πρέπει νά εἶναι περιοδικοί. Διά νά δείξωμεν λοιπόν τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεώς μας πρέπει καί ἀρκεῖ νά δείξωμεν, ὅτι ὁ ἀριθμός μας δέν εἶναι περιοδικός. Μία ὅμως περίοδος, ἐάν εἶναι ν ψηφία, δέν πρέπει νά ἔχῃ συμπίπτοντα ψηφία περισσότερα ἀπό ν-1. Ὁ τρόπος ὅμως σχηματισμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ μας μᾶς κάμνει νά ἐννοήσωμεν, ὅτι εἴμεθα εἰς θέσιν νά εὕρωμεν τμήματά του ὅπου τά συμπίπτοντα ψηφία εἶναι ὁσαδήποτε, ἐνῶ δέν θά συμβῇ ποτέ νά ἐπαναλαμβάνεται ἀπό τινος ψηφίου καί πέραν τό αὐτό πάντοτε ψηφίον.

219. Δείξατε, ὅτι, ἐάν $0<\omega<1$ καί $\nu>\mu$ ὅπου ν, μ φυσικοί ἀριθμοί τότε $\omega^\nu<\omega^\mu$, ἐνῶ, ἐάν $\omega>1$ τότε $\omega^\nu>\omega^\mu$.

Ἀφοῦ $\nu-\mu>0$ (12.1,στ), $\omega^{\nu-\mu}<1$ ἤ $\dfrac{\omega^\nu}{\omega^\mu}<1$ ἤ $\omega^\nu<\omega^\mu$ (12.1,β). Ὁμοίως θά ἐργασθῶμεν διά τήν δευτέραν περίπτωσιν.

220. Ἐάν εἰς τό πολυώνυμον $x^3+\psi^3+z^3-3x\psi z$ θέσωμεν: $x=\alpha x_1+\beta\psi_1+\gamma z_1$, $\psi=\alpha\psi_1+\beta z_1+\gamma x_1$, $z=\alpha z_1+\beta x_1+\gamma\psi_1$ αὐτό τό πολυώνυμον μετασχηματίζεται εἰς τό γινόμενον:

$$(x_1^3+\psi_1^3+z_1^3-3x_1\psi_1 z_1)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$$

Εἶναι γνωστόν (20 ταυτ. 11) ὅτι: $x^3+\psi^3+z^3-3x\psi z=\frac{1}{2}(x+\psi+z)\left[(x-\psi)^2+(\psi-z)^2+(z-x)^2\right]$. Τώρα χρησιμοποιοῦντες τάς διδομένας τιμάς τῶν x, ψ, z ὑπολογίζομεν τούς παράγοντας τοῦ $2^{ου}$ μέλους τῆς ἰσότητός μας. Ἔπειτα δέ θά μᾶς χρειασθῇ νά χρησιμοποιήσωμεν τήν πρότασιν, ὅτι, ἐάν τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα ἴσον με τό μηδέν, τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των ἰσοῦται μέ τόν ἀντίθετον τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων των λαμβανομένων ἀνά δύο καθ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

221. Ἐάν $\alpha>\beta>0$ καί ἐάν οἱ μ, ν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί, ἔχομεν:

$$\frac{a^\mu-\beta^\mu}{a^\mu+\beta^\mu} > \frac{a^\nu-\beta^\nu}{a^\nu+\beta^\nu}.$$

222. Ἐάν οἱ ἀριθμοί a, β, γ εἶναι θετικοί καί διαφορετικοί μεταξύ των ἰσχύουν αἱ ἀνισότητες:
1^{ov}. $a^3+\beta^3+\gamma^3 > 3a\beta\gamma$ 2^{ov} $a\beta(a+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+a\gamma(a+\gamma) < 2(a^3+\beta^3+\gamma^3)$, 3^{ov} $a^4+\beta^4+\gamma^4 > a\beta\gamma(a+\beta+\gamma)$, 4^{ov} $(a+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-a)(\gamma+a-\beta) < a\beta\gamma$.

1^{ov}. Θά στηριχθῆτε εἰς τήν ταυτότητα (20 ταυτ. 11). 2^{ov}. Εἶναι γνωστή ἡ ἀνισότης: $a^2+\beta^2 > 2a\beta$ ἤ $a^2+\beta^2-a\beta > a\beta$ ἤ $(a+\beta)(a^2+\beta^2-a\beta) > a\beta(a+\beta)$ δηλ. $a^3+\beta^3 > a\beta(a+\beta)$ κ.τ.λ.
3^{ov}. $a^4+\beta^4 > 2a^2\beta^2$ κ.τ.λ. ἐπομένως $a^4+\beta^4+\gamma^4 > a^2\beta^2+a^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2$. Τώρα ἐφαρμόσατε τήν αὐτήν ἀνισότητα διά τούς ἀριθμούς $a\beta, a\gamma, \beta\gamma$.
4^{ov}. Μία τριάς διαφόρων μεταξύ των ἀριθμῶν ἔχει μίαν διαδοχήν, ἔστω τήν διαδοχήν $a > \beta > \gamma$. Συνεπῶς $a+\beta > \gamma$, $a+\gamma > \beta$ ἀλλά $\beta+\gamma \gtreqless a$. Διακρίνομεν λοιπόν δύο περιπτώσεις: Καί, ἐάν $\beta+\gamma < a$, ἡ ἀλήθεια τῆς ἀνισότητός μας φανερά, ἐάν ὅμως $\beta+\gamma > a$; Διά τήν 2^{av} αὐτήν περίπτωσιν λαμβάνομεν τάς προφανεῖς ἀνισότητας: $a^2-(\beta-\gamma)^2 < a^2$ κ.ο.κ. ἤ $(a+\beta-\gamma)(a-\beta+\gamma) < a^2$ κ.ο.κ. Ὁ πολλαπλασιασμός των τώρα κατά μέλη ὁδηγεῖ εἰς τήν διαπίστωσιν τῆς ἀληθείας τῆς ἀνισότητός μας λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν, ὅτι αἱ ἀνισότητες $a > \beta$, $a^2 > \beta^2$ εἶναι ἰσοδύναμοι τῶν a, β ὄντων θετικῶν ἀριθμῶν.

223. Ἐάν οἱ ἀριθμοί $a, a', \beta, \beta', x, \psi$, εἶναι θετικοί δείξατε πῶς ὁ ἀριθμός: $\frac{ax+\beta\psi}{a'x+\beta'\psi}$ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν $\frac{a}{a'}$ καί $\frac{\beta}{\beta'}$ (βλ. ἄσκ. 45).

224. Διαπιστώσατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἀκολούθων ταυτοτήτων:
$(a^2+2\beta\gamma)^3+(\beta^2+2a\gamma)^3+(\gamma^2+2a\beta)^3-3(a^2+2\beta\gamma)(\beta^2+2a\gamma)(\gamma^2+2a\beta) \equiv (a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma)^2$.

$$\frac{[(a+\beta)(a+\gamma)+2a(\beta+\gamma)]^2-(a-\beta)^2(a-\gamma)^2}{a}$$
$$\equiv \frac{[(\beta+\gamma)(\beta+a)+2\beta(\gamma+a)]^2-(\beta-\gamma)^2(\beta-a)^2}{\beta}$$
$$\equiv \frac{[(\gamma+a)(\gamma+\beta)+2\gamma(a+\beta)]^2-(\gamma-a)^2(\gamma-\beta)^2}{\gamma} \equiv 8(\beta+\gamma)(\gamma+a)(a+\beta)$$

225. Ὅταν δύο πολυώνυμα A καί B εἶναι πρῶτα μεταξύ των πᾶν ρητόν κλάσμα $\frac{\Gamma}{\Delta}$ ἰσοδύναμον* πρός τό ρητόν κλάσμα $\frac{A}{B}$ ἔχει τούς ὅρους του Γ καί Δ ἀντιστοίχως ἴσους μέ τά γινόμενα $A.E$ καί $B.E$ ὅπου E κατάλληλον πολυώνυμον.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως τοῦ ἀντιστοίχου θεωρήματος τῆς Ἀριθμητικῆς μέ τήν χρησιμοποίησιν τοῦ 2ου θεωρ.-(34) Βλ. καί ἄσκ. 78.

226. Ἀποδείξατε μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς ἤ κατ' ἄλλον τρόπον τήν ἀλήθειαν τῶν ἀνισοτήτων:

1ον $\dfrac{1.3.5...(2\nu-1)}{2.4.6...(2\nu)} < \dfrac{1}{\sqrt{2\nu+1}}$ 2ον $\dfrac{3.7.11...(4\nu-1)}{5.9.13...(4\nu+1)} < \sqrt{\dfrac{3}{4\nu+3}}$.

Ἰδού ἕνας 2ος τρόπος ἀποδείξεως: Εἶναι ἀληθεῖς αἱ ἀνισότητες: $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, ... $\frac{2\nu-1}{2\nu}<\frac{2\nu}{2\nu+1}$ καί διά πολλαπλασιασμοῦ των κατά μέλη διαπιστοῦται ἡ ἀλήθεια τῆς 1ης ἀνισότητος. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα διά τήν 2αν.

227. Δείξατε ὅτι ὁ ἀριθμός $156^\nu-12^\nu-13^\nu+1$ εἶναι διαιρετός μέ τόν ἀριθμόν 132.

228. Δείξατε, ὅτι τό γινόμενον τεσσάρων διαδοχικῶν φυσικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Τό γινόμενον $x(x+1)(x+2)(x+3) \equiv (x^2+3x+1)^2-1$. Συνεπῶς θά πρέπει νά εἶναι $(x^2+3x+1)^2-1=K^2$. Τοῦτο ὅμως εἶναι δυνατόν;

229. Ἐάν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί x, ψ, z, ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $\dfrac{x-\psi}{1+x\psi}+\dfrac{\psi-z}{1+\psi z}+\dfrac{z-x}{1+zx}=0$ δύο τούτων τουλάχιστον εἶναι ἴσοι.

230. Ὁ κύβος ἑνός φυσικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαφορά δύο τετραγώνων, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕνα τουλάχιστον εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 9.

$$\alpha^3=\alpha^2.\alpha=\alpha^2.\frac{(\alpha+1)^2-(\alpha-1)^2}{4} \quad \text{κ.τ.λ.}$$

231. Ἀποδείξατε ὅτι κάθε πρῶτος ἀριθμός, πού εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν $\psi_1^2+\psi_1 z_1+z_1^2$ καί $\psi_2^2+\psi_2 z_2+z_2^2$ (ψ_1, ψ_2, z_1, z_2 φυσικοί ἀριθμοί) διαιρεῖ μίαν τουλάχιστον ἀπό τάς διαφοράς $\psi_1 z_2-z_1\psi_2$, $\psi_1\psi_2-z_1 z_2$.

Ἔστω δ ἀριθμός τις πρῶτος καί κοινός διαιρέτης τῶν θεωρουμένων ποσοτήτων: Ὥστε: $\psi_1^2+\psi_1 z_1+z_1^2=\delta.\pi_1$, $\psi_2^2+\psi_2 z_2+z_2^2=\delta.\pi_2$ ἤ

---

* πού ἔχει τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν διά πᾶσαν τιμήν τῆς μεταβλητῆς των.

$\frac{\psi_1}{z_1}+\frac{z_1}{\psi_1}+1=\frac{\delta.\pi_1}{\psi_1 z_1}$, $\frac{\psi_2}{z_2}+\frac{z_2}{\psi_2}+1=\frac{\delta.\pi_2}{\psi_2 z_2}$. Δι' ἀφαιρέσεως τῶν τελευταίων ἰσοτήτων κατά μέλη καταλήγομεν εὐκόλως εἰς τήν βεβαίωσιν τῆς ἀληθείας τῆς προτάσεώς μας.

232 Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἀνισότητος:

$$(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3+\dots)\left(\frac{a_1}{\beta_1}+\frac{a_2}{\beta_2}+\frac{a_3}{\beta_3}+\dots\right)>(a_1+a_2+a_3+\dots)^2.$$

Εἶναι ἡ ἀνισότης τοῦ SCHWARZ ἀλλά διά ποίους πραγματικούς ἀριθμούς;

233 Νά εὑρεθῆ ὁ μ.κ.δ. καί τό ε.κ.π. τῶν δύο πολυωνύμων: $x^8+x^7-2x^6-3x^5+3x^3+2x^2-x-1$ καί $8x^7+7x^6-12x^5-15x^4+9x^2+4x-1$.

234 Νά εὑρεθοῦν δύο φυσικοί ἀριθμοί x, ψ, ὅταν γνωρίζωμεν τό ἄθροισμα τῶν S καί τό ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιόν των m.

Δεχόμεθα ὅτι $x=\Delta.a$, $\psi=\Delta.\beta$ ὅπου Δ ὠνομάσαμεν τόν μ.κ.δ. των καί a,β ἀντιστοίχως τά πηλίκα τῆς διαιρέσεώς των διά τοῦ Δ. Ἔχομεν λοιπόν, $S=\Delta.(a+\beta)$ καί $x.\psi=\Delta^2.a\beta=m.\Delta$ ἤ $\Delta.a\beta=m$. Οἱ ἀριθμοί $a+\beta$ καί $a\beta$ εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους· διότι, ἐάν p ἦτο ἀριθμός τις πρῶτος καί κοινός διαιρέτης των αὐτός θά διαιροῦσε τόν a ἤ τόν β καί ἀφοῦ θά διαιροῦσε καί τόν $a+\beta$ θά διαιροῦσε καί τόν β ἤ τόν a καί οἱ a,β δέν θά ἦσαν πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Ὥστε ὁ Δ θά εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν m καί S. Ἀφοῦ λοιπόν προσδιορίσωμεν τό Δ γνωρίζομεν τούς ἀριθμούς $a+\beta=\frac{S}{\Delta}$ καί $a\beta=\frac{m}{\Delta}$. Ἀλλά $(a-\beta)^2=(a+\beta)^2-4a\beta$· καί ἐάν $S^2-4m\Delta=0$ θά ἔχωμεν $a=\beta$, συνεπῶς $a=\beta=\frac{S}{2\Delta}$ καί τελικά $x=\psi=\frac{S}{2}$· ἐάν δέ $S^2-4m\Delta=\lambda^2$ τότε $a-\beta=\frac{\lambda}{\Delta}$ καί ἐπειδή $a+\beta=\frac{S}{\Delta}$ προσδιορίζομεν τά a,β καί ἐκ τῶν ἀρχικῶν ἰσοτήτων τούς ἀριθμούς x καί ψ.

Παρατήρησις. Ἀπό τήν λύσιν τοῦ θέματός μας διεπιστώσαμεν ὅτι ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν μ.κ.δ. τοῦ ἀθροίσματός των καί τοῦ ε.κ.π. των.

Ἐφαρμόσατε τά ἀνωτέρω εἰς τήν εὕρεσιν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1ον μέ $S=26$ καί $m=23$ καί 2ον μέ $S=32$ καί $m=60$.

235 Εὕρετε δύο πολυώνυμα γνωρίζοντες τό ἄθροισμά των καί τό ε.κ.π. των.

Θά μεταφέρετε τούς συλλογισμούς τῆς ἀποδείξεως τῆς (ἀσκ. 235).

236. Δείξατε ὅτι αἱ παραστάσεις:

1ον $(a^2+a\beta+\beta\gamma+a\gamma)(\beta\gamma+a\gamma+a\beta+\beta^2)(\beta\gamma+a\gamma+a\beta+\gamma^2)$

2ον $(a^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-a\gamma)^3+(\gamma^2-a\beta)^3-3(a^2-\beta\gamma)(\beta^2-a\gamma)(\gamma^2-a\beta)$

εἶναι τετράγωνα ἄλλων παραστάσεων.

Μετασχηματίσατε αὐτάς εἰς γινόμενα πρώτων παραγόντων.

237. Ἐάν οἱ διάφοροι τοῦ μηδενός ἀριθμοί a, β, γ ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=0$ τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τήν ἰσότητα: $(a^2+\beta^2+\gamma^2)^3=(a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma)^2$.

238. Δείξατε ὅτι τό γινόμενον δύο παραστάσεων, πού ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι ἐπίσης ἄθροισμα δύο τετραγώνων. Καί γενικώτερον δείξατε, ὅτι τό γινόμενον ν παραστάσεων, πού ἑκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

Ἔχομεν: $(A^2+B^2)(a^2+\beta^2)\equiv A^2a^2+B^2a^2+A^2\beta^2+B^2\beta^2$

$\equiv(Aa+B\beta)^2-2ABa\beta+A^2\beta^2+B^2a^2\equiv(Aa+B\beta)^2+(A\beta-Ba)^2$.

Μεταχειρισθῆτε τήν πλήρη ἐπαγωγήν διά τήν γενίκευσιν τῆς προτάσεώς μας.

239. Τό τετράγωνον ἑνός τριωνύμου διατεταγμένου κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x ἔχει τό πολυώνυμον $x^4+6x^3+10x^2$ ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων του τοῦ ἀνωτέρου βαθμοῦ. Νά εὑρεθῇ αὐτό τό τριώνυμον.

240. Τό τετράγωνον ἑνός δευτ/μίου τριωνύμου ἔχει τό τριώνυμον $5x^2-12x+4$ ὡς ἄθροισμα τῶν ὅρων του τοῦ κατωτέρου βαθμοῦ. Νά εὑρεθῇ αὐτό τό τριώνυμον.

241. Νά εὑρεθῇ ὁ συντελεστής τοῦ $x^{\nu+2}$ εἰς τό γινόμενον τῶν πολυωνύμων $a_\mu x^\mu+a_{\mu-1}x^{\mu-1}+\dots+a_\mu$ καί $ax^2+\beta x+\gamma$ ὅπου $\mu>\nu$.

Ὁ ὅρος μέ τό $x^{\nu+2}$ δημιουργεῖται κατά τρεῖς τρόπους: ὡς γινόμενον τοῦ ὅρου $a_\nu x^\nu$ μέ τό ax^2, ὡς γινόμενον τοῦ ὅρου $a_{\nu+1}x^{\nu+1}$ μέ τό βx καί ὡς γινόμενον τοῦ ὅρου $a_{\nu+2}x^{\nu+2}$ μέ τό γ. Ὁ συντελεστής λοιπόν τοῦ $x^{\nu+2}$ εἰς τό θεωρούμενον γινόμενον εἶναι...

242. Συμπεράνατε ἀπό τήν προηγουμένην ἄσκησιν τάς σχέσεις, αἵτινες συνδέουν τούς συντελεστάς τῶν $(x+a)^\mu$ καί $(x+a)^{\mu+2}$.

243. Ἐάν τιμαί τῶν a, β, γ δίδουν εἰς τήν ἔκφρασιν: $A=\frac{a}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-a}+\frac{\gamma}{a-\beta}$ ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν, δείξατε, ὅτι αἱ αὐταί τιμαί τῶν a, β, γ δί-

δουν καί εἰς τήν ἔκφρασιν $B = \frac{a}{(\beta-\gamma)^2} + \frac{\beta}{(\gamma-a)^2} + \frac{\gamma}{(a-\beta)^2}$ ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν.

Εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσετε πώς ἰσχύει ἡ ἰσότης:
$B = A\left(\frac{1}{\beta-\gamma} + \frac{1}{\gamma-a} + \frac{1}{a-\beta}\right) = 0.$

244. Ἐάν δι' ὡρισμένας τιμάς τῶν $a, \beta, \gamma, x, y, z$ ἰσχύη ἡ ἰσότης: $\frac{\beta-\gamma}{\psi-z} + \frac{\gamma-a}{z-x} + \frac{a-\beta}{x-\psi} = 0$ θά ἰσχύη ἐπίσης καί ἡ ἰσότης: $(\beta-\gamma)(\psi-z)^2 + (\gamma-a)(z-x)^2 + (a-\beta)(x-\psi)^2 = 0$ διά τάς αὐτάς τιμάς τῶν γραμμάτων της.

Ἀπό τήν δοθεῖσαν ἰσότητα ἔχομεν: $(\beta-\gamma)(z-x)(x-\psi) + (\gamma-a)(\psi-z)(x-\psi) + (a-\beta)(\psi-z) + (z-x) = 0$ ἤ $\beta(z-x)[(x-\psi)-(\psi-z)] + \gamma(x-\psi)[(\psi-z) - (z-x)] + a(\psi-z)[(z-x)-(x-\psi)] = 0$ ἤ $\beta[(x-\psi)+(\psi-z)][(x-\psi)-(\psi-z)] + \gamma[(\psi-z)+(z-x)][(\psi-z)-(z-x)] + a(z-\psi)[(z-x)+(x-\psi)][(z-x)-(x-\psi)] = 0$ κ.τ.λ.

245. Δίδεται ἡ συνάρτησις: $\psi = \frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}$ ἐνῶ τά a, β, γ, δ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι, ὥστε $a\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ἀντικαθιστῶμεν τό x διαδοχικά ἀπό τάς τέσσαρας διαφορετικάς μεταξύ των τιμάς x_1, x_2, x_3, x_4 καί ἡ ψ λαμβάνει τάς τιμάς $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$. Δείξατε, ὅτι ἔχομεν:

$$\frac{\psi_3-\psi_1}{\psi_3-\psi_2} : \frac{\psi_4-\psi_1}{\psi_4-\psi_2} = \frac{x_3-x_1}{x_3-x_2} : \frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$$

Ἔχομεν: $\psi_3 - \psi_1 = \frac{ax_3+\beta}{\gamma x_3+\delta} - \frac{ax_1+\beta}{\gamma x_1+\delta} = \frac{(\beta\gamma - a\delta)(x_1-x_3)}{(\gamma x_3+\delta)(\gamma x_1+\delta)}$

Ἐφεξῆς τό θέμα εἶναι ἁπλό διότι θά δημιουργοῦμεν τάς ἄλλας διαφοράς κατ' ἀναλογίαν.

246. Ἐάν $M = x^{\mu}-1$, $N = x^{\nu}-1$ καί $R = x^{\upsilon}-1$ ὅπου υ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μ διά τοῦ ν, (τά μ, ν φυσικοί ἀριθμοί καί $\mu > \nu$) δείξατε ὅτι, πᾶς κοινός διαιρέτης τῶν M καί N, εἶναι κοινός διαιρέτης τῶν N καί R καί ἀντιστρόφως· πᾶς κοινός διαιρέτης τῶν N καί R εἶναι καί κοινός διαιρέτης τῶν M καί N.

Ἐάν $\mu = \nu\lambda + \upsilon$ ἔχομεν: $M = x^{\mu}-1 = (x^{\nu})^{\lambda}\cdot x^{\upsilon} - 1 = (N+1)^{\lambda}\cdot x^{\upsilon} - 1$. Ἐπειδή δέ τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(N+1)$ κατά τόν τύπον τοῦ διωνύμου τοῦ NEWTON δέν θά ἔχη ὅρον ἀνεξάρτητον τοῦ N παρά μόνον τόν τελευταῖον ὅρον, λαμβάνομεν:

$$M = \pi o\lambda N + x^{\upsilon} - 1 \quad \text{ή} \quad M = \pi o\lambda N + R$$

'Από τήν ἔκφρασιν αὐτήν τοῦ M γίνεται φανερόν ὅτι πᾶς διαιρέτης τῶν M καί N, πού εἶναι φυσικά διαιρέτης καί τοῦ πολN θά εἶναι καί τῆς διαφορᾶς M − πολN δηλ. τοῦ R. 'Αντιστρόφως πάλιν, πᾶς διαιρέτης κοινός τῶν N καί R εἶναι καί κοινός διαιρέτης τῶν πολN καί R ἑπομένως καί διαιρέτης τοῦ ἀθροίσματος πολN+R δηλ. τοῦ M.

247. Δείξατε, ὁ μ.κ.δ. τῶν διωνύμων $M = x^{\mu} - 1$ καί $N = x^{\nu} - 1$ εἶναι τό διώνυμον $R = x^{\delta} - 1$ ὅπου δ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν μ καί ν (μ, ν φυσικοί καί $\mu > \nu$).

Εἴδομεν (38, 1ον) ὅτι, ἐάν τό μ εἶναι διαιρετόν μέ τό ν τό διώνυμον $x^{\mu} - 1$ εἶναι διαιρετόν μέ τό διώνυμον $x^{\nu} - 1$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ὁ μ.κ.δ. τῶν M καί N εἶναι προφανῶς τό N (ἄσκ. 247). Ἡ πρότασίς μας λοιπόν εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ἀληθεύει διότι ὁ μ.κ.δ. τῶν μ καί ν, ὅταν τό μ διαιρεῖται μέ τό ν, εἶναι ὁ ν. Ἔστω τώρα ὅτι $\mu = \nu\lambda + \upsilon$· τότε ὁ μ.κ.δ. τῶν M καί N (ἄσκ. 247) συμπίπτει μέ τόν μ.κ.δ. τῶν N καί $R = x^{\upsilon} - 1$. Καί διά τά νέα τώρα διώνυμα N καί R θά σκεφθῶμεν ὁμοίως· καί ἐάν τό ν δέν εἶναι διαιρετόν διά τοῦ υ θά ζητήσωμεν τόν μ.κ.δ. τῶν R καί R_1 ὅπου $R_1 = x^{\upsilon_1} - 1$ ἐάν $\nu = \upsilon.\lambda + \upsilon_1$.

Ἡ διαδικασία τῆς ἐργασίας αὐτῆς εἰκονίζεται εἰς τόν ἑπόμενον πίνακα:

$x^{\mu} - 1$	$x^{\nu} - 1$
$x^{\upsilon} - 1$	$x^{\nu} - 1$
$x^{\upsilon} - 1$	$x^{\upsilon_1} - 1$
. . . .	. . . .
0	$x^{\delta} - 1$

Ὁ πίναξ οὗτος ἀφήνει νά ὑπονοηθῆ, ὅτι ὁ ἐκθέτης τοῦ ἄνωθεν τοῦ μηδενός διωνύμου εἶναι διαιρετός διά τοῦ δ. 'Εννοοῦμεν ὅτι τοῦτο θά συμβῆ κάποτε, ἀφοῦ οἱ ἐκθέται ὁλονέν ἐλαττοῦνται· δέν ἀποκλείεται φυσικά αὐτός ὁ δ νά εἶναι καί ἡ μονάς. 'Εάν τώρα παραθέσωμεν τόν πίνακα τῶν διαδοχικῶν ἐκθετῶν, πού ἐδημιουργήθησαν κατά τάς διαιρέσεις τοῦ ἀνωτέρω πίνακος θά ἐννοήσωμεν πώς ὁ νέος αὐτός πίναξ εἶναι ἐκεῖνος τῆς εὑρέσεως, κατά τά γνωστά ἐκ τῆς ἀριθμητικῆς, τοῦ μ.κ.δ. τῶν μ καί ν.

248 Δείξατε ὅτι ἡ παράστασις : $\dfrac{(a-1)(a^{\mu\nu}-1)}{(a^{\mu}-1)(a^{\nu}-1)}$ εἶναι ἀκεραία ἐάν τά μ καί ν εἶναι φυσικοί ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

'Εφαρμογή τῆς ἀσκ. 247.

249. Νά εὑρεθῆ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν : $A = \overset{\alpha\ \text{ψηφία}}{222\ldots2}$, $B = \overset{\beta\ \text{ψηφία}}{88\ldots8}$. 'Εφαρμογή τῆς ἀσκ. 247.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

Θεωρία τῶν 'Ασυμμέτρων 'Αριθμῶν - Ριζικά.

39. Ὁρισμός τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

Θεωροῦμεν μίαν ἀπέραντον ἀκολουθίαν:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots a_\nu, \ldots$$

θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν, πού βαίνουν αὐξανόμενοι καί μίαν ἀκολουθίαν:

$$A_1, A_2, A_3, \ldots A_\nu, \ldots$$

ἐπίσης θετικῶν ρητῶν ἀριθμῶν, πού βαίνουν ἐλαττούμενοι καί τοιαύτας ὥστε: 1ον. Πᾶς ὅρος τῆς 2ας νά εἶναι μεγαλύτερος κάθε ὅρου τῆς πρώτης. 2ον. Ἡ διαφορά $A_\nu - a_\nu$ νά γίνεται καί νά μένη μικροτέρα τοῦ οἱουδήποτε θετικοῦ ἀριθμοῦ, ὅταν ὁ φυσικός ἀριθμός ν αὐξάνεται ἀπεριορίστως.

Δύο περιπτώσεις εἶναι δυνατόν νά παρουσιασθοῦν:

1ον. Νά διαπιστωθῆ, ὅτι ὑφίσταται ἕνας καθωρισμένος ρητός ἀριθμός, πού νά περιλαμβάνεται οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν μεταξύ a_ν καί A_ν. Εἰς αὐτήν τήν περίπτωσιν δέν θά συμβῆ δύο ρητοί ἀριθμοί N καί N' νά εὑρίσκωνται μεταξύ a_ν καί A_ν οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ν· διότι, ἐάν ὑποτεθῆ ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατόν, ἡ διαφορά $A_\nu - a_\nu$ δέν θά ἠδύνατο νά καταστῆ μικροτέρα τοῦ ἀριθμοῦ $|N-N'|$.

'Ιδού ἕνα παράδειγμα διά τήν ἀναφερομένην περίπτωσιν:

'Εάν ἀναχθῆ εἰς τήν δεκαδικήν του μορφήν τό κλάσμα $\frac{3}{7}$, εὑρίσκομεν τά αὐξανόμενα κλάσματα:

$$0,4,\ 0,42,\ 0,428,\ 04285, \ldots \quad (1)$$

τά ὁποῖα ἐκφράζουν τό $\frac{3}{7}$ κατά προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001 κ.τ.λ. καί κατ' ἔλλειψιν· αὐξάνοντες ἀκολούθως κατά μονάδα τό τελευταῖον ψηφίον ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων δημιουργοῦμεν τήν φθίνουσαν ἀκολουθίαν:

$$0,5,\ 0,43,\ 0,429,\ 0,4286, \ldots \quad (2)$$

τῆς ὁποίας οἱ ὅροι ἐκφράζουν τό $\frac{3}{7}$ κατά προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001 κ.τ.λ. καί καθ' ὑπεροχήν.

Συμπεραίνομεν λοιπόν ἐκ τούτων ὅτι δυνάμεθα νά προσεγγίσωμεν ὅσον θέλομεν πρός τόν $\frac{3}{7}$ μέ τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας (1) ἤ μέ τούς ὅρους τῆς ἀκολουθίας (2). Οἱ ὅροι τῆς (1) πλησιάζουν τόν $\frac{3}{7}$ ὁλονέν αὐξανόμενοι, ἐνῶ οἱ τῆς (2) ὁλονέν ἐλαττούμενοι. Πάντοτε συνεπῶς ὁ $\frac{3}{7}$ θά εὑρίσκεται μεταξύ δύο ὁμοταξίων ὅρων τῶν ἀνωτέρω ἀκολουθιῶν καί οἱ ὁποῖοι ὅροι μάλιστα εἶναι δυνατόν νά διαφέρουν ὀλιγώτερον ἀπό οἱονδήποτε θετικόν ἀριθμόν ε.

2ον. Νά διαπιστωθῆ, ὅτι δέν ὑφίσταται ἕνας ἀκέραιος ἤ κλασματικός ἀριθμός, πού νά περιλαμβάνεται μεταξύ α_ν καί A_ν. Π.χ. αἱ ἀκολουθίαι:

$$1,\ 1,4,\ 1,41,\ 1,414,\ 1,4142, \ldots \quad (3)$$

$$2,\ 1,5,\ 1,42,\ 1,415,\ 1,4143, \ldots \quad (4)$$

πού ὅπως εἴδομεν (3.3) ἐκφράζουν τιμάς τῆς τετραγωνικῆς ρίζης τοῦ 2 κατά προσέγγισιν 0,1, 0,01, 0,001 κ.λ.π. κατ' ἔλλειψιν καί καθ' ὑπεροχήν ἀντιστοίχως, δέν διαχωρίζονται ἀπό ἕνα ρητόν ἀριθμόν· ἄλλως ὁ ἀριθμός 2 θά ἦτο τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ. Προφανῶς ἡ διαφορά μεταξύ δύο ὅρων τῆς αὐτῆς τάξεως εἰς τάς ἀνωτέρω ἀκολουθίας τείνει πρός τό μηδέν, ἐνῶ προχωροῦμεν εἰς αὐτάς ἀδιακόπως.

39.1. Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, θά λέγωμεν ὅτι αἱ ἀκολουθίαι α_ν καί A_ν (τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι θετικοί ρητοί ἀριθμοί) καθορίζουν ἕνα θετικόν ἀσύμμετρον ἤ ἄρρητον ἀριθμόν ἤ ὅτι διαχωρίζονται ἀπό ἕνα θετικόν ἀσύμμετρον ἀριθμόν ἤ ὅτι ἔχουν ἕνα θετικόν ἀσύμμετρον ὅριον, ἐάν 1ον ἱκανοποιοῦν τάς ἀνισότητας:

$$a_1 < a_2 < \dots a_\nu < A_\nu < A_{\nu-1} \dots < A_2 < A_1$$

2ον. ἡ διαφορά $A_\nu - a_\nu$ γίνεται καί μένει μικροτέρα τοῦ οἱουδήποτε θετικοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ, τοῦ φυσικοῦ ν αὐξανομένου ἀπεριορίστως καί 3ον εἶναι ἐξηκριβωμένον ὅτι δέν διαχωρίζονται ἀπό ἕνα ρητόν ἀριθμόν.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ τό α αὐτόν τόν ἀσύμμετρον ἀριθμόν γράφομεν ἐξ ὁρισμοῦ: $a = \lim\limits_{\nu \to \infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu \to \infty} A_\nu$ *

39.1.2. Σημειοῦμεν: 1ον. Ὅτι εἰκονίζομεν ἕνα ἀσύμμετρον ἀριθμόν μέ τό σύμβολον τῆς πράξεως, ἡ ὁποία παρέχει τούς ὅρους τῆς μιᾶς τῶν ἀκολουθιῶν, πού καθορίζουν αὐτόν τόν ἀριθμόν. Οὕτω λέγομεν, ὅτι αἱ δύο ἀκολουθίαι (3) καί (4) (39) διαχωρίζονται ἀπό τόν ἀσύμμετρον ἀριθμόν $\sqrt{2}$.

Διά τόν αὐτόν λόγον τό σύμβολον $\sqrt{5}$ ἀντιπροσωπεύει τόν ἀσύμμετρον ἀριθμόν, πού καθορίζουν αἱ δύο ἀκολουθίαι:

$$1,\ 1{,}7,\ 1{,}70,\ 1{,}709,\ \dots \quad (1)$$

$$2,\ 1{,}8,\ 1{,}71,\ 1{,}710,\ \dots \quad (2)$$

2ον. Ὅτι ὁ ἀνωτέρω τρόπος ὁρισμοῦ τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ, πού λέγεται μέθοδος τῆς τομῆς ὀφείλεται εἰς τόν γερμανόν μαθηματικόν Dedekind, ἐνῶ τά ἀνωτέρω ἐκτεθέντα ἀποτελοῦν λίαν περιωρισμένην ἔκθεσιν τῆς μεθόδου ταύτης· τοῦτο ὅμως ἐπεβάλλετο ἀπό τόν προορισμόν τοῦ βιβλίου μας.

3ον. Ὅτι μία τομή συμβολίζεται μέ τήν γραφήν a_ν / A_ν ὅπου a_ν, A_ν εἶναι ἀντιστοίχως οἱ γενικοί ὅροι τῶν ἀκολουθιῶν πού καθορίζουν, ἐφόσον πληροῦν τάς ἀναφερθείσας ἰδιότητας, ἕνα ρητόν ἤ ἄρρητον ἀριθμόν.

39.2. **Ἀριθμοί ἀντίθετοι**. Ἐπραγματεύθημεν ἀνωτέρω τόν προσδιο-

---

* Ἐκ τοῦ λατινικοῦ LIMES = ὅριον. Ἡ συγκεκομένη αὐτή γραφή ἀποτελεῖ διεθνῆ συμβολισμόν τῆς ἐννοίας τοῦ «ὁρίου» διά τήν ὁποίαν θά ὁμιλήσωμεν εἰς εἰδικόν κεφάλαιον. Ὁ συμβολισμός ἐπίσης $(\nu \to \infty)$ χαρακτηρίζει τήν ἀπεριόριστον αὔξησιν τοῦ ν.

ρισμόν ἀρρήτων ἀριθμῶν ἀλλά θετικῶν. Διά τόν προσδιορισμόν ἀρρήτων ἀριθμῶν ἀλλά ἀρνητικῶν σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἐάν οἱ ἐκ ρητῶν θετικῶν ὅρων συγκείμεναι ἀκολουθίαι a_ν καί A_ν ἔχουν ὡς σύμβολον διαχωρισμοῦ τόν ἄρρητον ἀριθμόν a αἱ ἀκολουθίαι $-A_\nu$ καί $-a_\nu$, πού ἔχουν τάς ἀνωτέρω ἀναφερομένας ἰδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν a_ν καί A_ν (ὅπως εἶναι εὔκολον νά διαπιστώσῃ τις) ἔχουν κοινόν ὅριον ἄρρητόν τινα ἀριθμόν a', ὅστις ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ὁ ἀντίθετος τοῦ a*.

Οἱ ἀριθμοί οἱ ἀντίθετοι τῶν θετικῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν ὀνομάζονται ἀρνητικοί ἄρρητοι ἀριθμοί.

40. Σύγκρισις ἑνός ἀριθμοῦ ρητοῦ καί ἑνός ἀριθμοῦ ὁριζομένου ἀπό μίαν τομήν.

Ἔστω ἡ τομή a_ν/A_ν, ἥτις ὁρίζει τόν ἀριθμόν a καί ἔστω σ ἕνας ρητός ἀριθμός. Ἐάν ὁ σ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕνα ἀριθμόν A_ν θά λέγωμεν ὅτι ὁ a εἶναι μικρότερος τοῦ σ καί θά γράφωμεν: $a<\sigma$ ἤ $\sigma>a$.

Ἐάν ὁ σ εἶναι μικρότερος ἀπό ἕνα ἀριθμόν a_ν, θά λέγωμεν ὅτι ὁ a εἶναι μεγαλύτερος τοῦ σ καί θά γράφωμεν: $a>\sigma$ ἤ $\sigma<a$.

Ἐάν ὁ σ δέν εἶναι μεγαλύτερος ἀριθμοῦ τινος A_ν οὔτε μικρότερος ἀριθμοῦ τινος a_ν ἡ τομή καθορίζει τόν σ, ὅπως εἴδομεν ἀνωτέρω καί θά γράφωμεν: $a=\sigma$.

40.1. Σύγκρισις δύο ἀριθμῶν ὁριζομένων ἀπό δύο τομάς.

Ἔστωσαν ὁ ἀριθμός a ὁριζόμενος ἀπό τήν τομήν a_ν/A_ν καί ὁ ἀριθμός a' ὁριζόμενος ἀπό τήν τομήν a'_ν/A'_ν.

Ἐάν ἕνας ἀριθμός A_ν εἶναι μικρότερος ἀπό ἕνα ἀριθμόν a'_ν θά λέγωμεν ὅτι ὁ a εἶναι μικρότερος ἀπό τόν a' καί θά γράφωμεν: $a'>a$ ἤ $a<a'$.

Ἐάν ἕνας ἀριθμός a_ν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕνα ἀριθμόν A'_ν θά λέγωμεν ὅτι ὁ a' εἶναι μικρότερος ἀπό τόν a καί θά γράφωμεν: $a'<a$ ἤ $a>a'$.

* Ὁ a' εἶναι ἄρρητος, διότι, ἐάν ὑποτεθῇ ρητός, θά ὑφίσταται ἡ διπλῆ ἀνισότης $-A_\nu<a'<-a_\nu$ διά πάν ν καί συνεπῶς θά ὑφίσταται καί ἡ διπλῆ ἀνισότης $a_\nu<-a<A_\nu$ διά πάν ν. Τότε ὅμως τό σύμβολον τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν a_ν καί A_ν θά ἦτο ὁ ρητός ἀριθμός $-a'$.

Τέλος, ἐάν κάθε ἀριθμός A_ν εἶναι μεγαλύτερος παντός ἀριθμοῦ a'_ν καί κάθε ἀριθμός a_ν εἶναι μικρότερος παντός ἀριθμοῦ A'_ν θά λέγωμεν ὅτι οἱ δύο ἀριθμοί a καί a' εἶναι ἴσοι καί θά γράφωμεν : $a = a'$.

41. Πράξεις ἐπί τῶν Ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν.

41.1. Π ρ ό σ θ ε σ ι ς : Ἔστωσαν οἱ ἀριθμοί :

a ὁριζόμενος ἀπό τήν τομήν a_1/A_1

a' " " " " a'_1/A'_1

a'' " " " " a''_1/A''_1

ὁ ἕνας τῶν ὁποίων τουλάχιστον εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

Τό σύμβολον $a+a'+a''$ εἶναι ἐξ ὁ ρ ι σ μ ο ῦ ὁ ἀ ρ ι θ μ ό ς ὁ ὁ ρ ι ζ ό μ ε ν ο ς ἀπό τήν τ ο μ ή ν $a_1+a'_1+a''_1/A_1+A'_1+A''_1$ καί ὀ ν ο μ ά ζ ε τ α ι ἄ θ ρ ο ι σ μ α τῶν θ ε ω ρ ο υ μ έ ν ω ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν.

Εἶναι προφανές, ὅτι αἱ ἀκολουθίαι $a_1+a'_1+a''_1$ καί $A_1+A'_1+A''_1$ ὁρίζουν μίαν τομήν. Ἔχομεν πράγματι:

$$A_1+A'_1+A''_1 > a_1+a'_1+a''_1 \quad \text{διότι} \quad A_1 > a_1\,,\ A'_1 > a'_1\,,\ A''_1 > a''_1.$$

καί ἀκόμη : $A_1+A'_1+A''_1-(a_1+a'_1+a''_1) = (A_1-a_1)+(A'_1-a'_1)+(A''_1-a''_1)$ ἐνῶ ἕκαστος ὅρος τοῦ 2ου μέλους δύναται νά καταστῆ ὅσον θέλομεν ἀριθμός μικρός.

Ἔπειτα ἀπό τόν ὁρισμόν αὐτόν τοῦ ἀθροίσματος ἔχομεν:

$$a+a' = a'+a \quad \text{καί} \quad (a+a')+a'' = a+(a'+a'') = a'+(a+a'')$$

Μέ ἄλλας λέξεις: ἡ πρόσθεσις τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν* εἶναι ἐ ν α λ λ α κ τ ι κ ή καί π ρ ο σ ε τ α ι ρ ι σ τ ι κ ή.

41.2. **Παρατήρησις**. Οἱ ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι ἀ σ ύ μ μ ε τ ρ ο ι ἀ ρ ι θ μ ο ί ἔ χ ο υ ν ἄ θ ρ ο ι σ μ α ἴ σ ο ν π ρ ό ς τ ό μ η δ έ ν.

Ἐάν ὁ ἀριθμός a ὁρίζεται ἀπό τήν τομήν a/A ὁ ἀριθμός a', πού ὁρίζεται ἀπό τήν τομήν $-A/-a$ ὠνομάσθη (39,2) ἀντίθετος τοῦ a καί τόν συμβολίζομεν μέ τό $-a$. Ἄν λοιπόν θεωρήσωμεν τάς ἀκολουθίας : $a-A$ καί $A-a$, ὅπως εἶναι φανερόν, κάθε ὅρος τῆς

---

* Εἶναι δέ πραγματικοί ἀριθμοί, ὅπως ἔχομεν εἰπῆ οἱ ρητοί δηλ. οἱ ἀριθμοί τοῦ συμβόλου $\frac{a}{\beta}$ (ὅπου a, β ἀκέραιοι καί $\beta \neq 0$) καί οἱ ἄρρητοι (φυσικά θετικοί ἤ ἀρνητικοί).

πρώτης ἀκολουθίας θά εἶναι ἀρνητικός ἀριθμός, κάθε ὅρος τῆς δευτέρας θά εἶναι θετικός ἀριθμός, ἐνῶ αἱ ἀκολουθίαι αὐταί ἱκανοποιοῦν τάς ἰδιότητας (39). Συνεπῶς τό σύμβολον τοῦ διαχωρισμοῦ των θά εἶναι τό 0. Ὥστε ἔχομεν (41.1).

$$a+(-a) \quad \text{ἤ ἁπλῶς} \quad a-a=0.$$

41.3. **Ἀφαίρεσις**. Θά λέγωμεν ὅτι ἕνας πραγματικός ἀριθμός a'' εἶναι ἡ διαφορά δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν a καί a' ἐάν ἔχωμεν: $a''+a'=a$.

Ἐάν δεχθῶμεν ὑφιστάμενον τόν a'' τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος καί ἐάν a, a' εἶναι οἱ ἀριθμοί τοῦ (41.1) θά ἔχωμεν προφανῶς:

$$a''+a'+(-a')=a+(-a') \quad \text{ἤ ἀκόμη} \quad a''=a-a'$$

41.4 **Πολλαπλασιασμός**. Ἔστωσαν a, a' δύο θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί. Ἐάν εἶναι καί οἱ δύο ρητοί ἀριθμοί ὁ ὁρισμός τοῦ γινομένου των aa' εἶναι γνωστός καί τό σύμβολον aa' εἶναι ἕνας ἀριθμός ρητός.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ ἕνας τουλάχιστον τῶν ἀριθμῶν a, a' εἶναι ἄρρητος καί ὅτι οἱ ἀριθμοί οὗτοι εἶναι οἱ ἀριθμοί τοῦ (41.1).

Θεωροῦμεν τό σύνολον K_1 τῶν ἀριθμῶν $a_1 . a_1'$ καί τό σύνολον K_2 τῶν ἀριθμῶν $A_1 . A_1'$. Ἔχομεν: $a_1 a_1' < A_1 A_1'$.

Ἐπί πλέον, ἐάν ε εἶναι αὐθαίρετος θετικός ρητός καί ν ἕνας ρητός, πού νά ἔχη πεπερασμένον πλῆθος μεγαλυτέρων του εἰς τά σύνολα A_1 καί A_1' συγχρόνως, τότε θά ἔχωμεν ἀπό τινος καί πέραν $A_1<\nu$, ἐνῶ ἀπό τινος καί πέραν θά ἔχωμεν ἐπίσης:

$$A_1-a_1<\frac{\varepsilon}{2\nu} \quad \text{καί} \quad A_1'-a_1'<\frac{\varepsilon}{2\nu}$$

Θά εἶναι λοιπόν τότε:

$$A_1A_1'-a_1a_1'=A_1(A_1'-a_1')+a_1'(A_1-a_1)<\nu\quad[(A_1'-a_1')+(A_1-a_1)]<\varepsilon$$

διότι τά a_1' εἶναι φυσικά μικρότερα τοῦ ν.

Τά σύνολα λοιπόν K_1 καί K_2 ἱκανοποιοῦν τάς ἰδιότητας τοῦ (39) καί ὁρίζουν μίαν τομήν, ἡ ὁποία καλεῖται γινόμενον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν a καί a' καί παρίσταται μέ τήν γραφήν aa'.

Διά νά καθορίσωμεν τό γινόμενον δύο τυχόντων πραγματικῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμεν τόν κανόνα τῶν σημείων. Θά θέτωμεν:

$-a.a' = a(-a') = (-a)\cdot a'$, $aa' = (-a)(-a') = -a(-a')$.

Ἐκ τῶν προηγουμένων ὁρισμῶν προκύπτει ὅτι, ἐάν a, a', a'' εἶναι τυχόντες πραγματικοί ἀριθμοί ἔχομεν: $aa' = a'a$.

$$aa'a'' = a(a'a'') = a'(aa'') = a''(aa')$$

$$a(a'+a'') = aa' + aa''$$

Ὁ πολλαπλασιασμός λοιπόν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἐναλλακτικός, προσεταιριστικός, ἐπιμεριστικός.

41.5. **Ἀντίστροφος ἀσυμμέτρου ἀριθμοῦ.**

Ἔστω θετικός ἀσύμμετρος ἀριθμός a ὁριζόμενος ἀπό τήν τομήν a_1/A_1. Σχηματίζομεν τάς ἀκολουθίας $\frac{1}{A_1}$ καί $\frac{1}{a_1}$ αἵτινες ὡς εὐκόλως δεικνύεται ἔχουν τάς ἰδιότητας τοῦ (39) καί συνεπῶς ὁρίζουν μίαν τομήν, ἥτις εἶναι ἕνας ἀριθμός a' ὅστις ὀνομάζεται ἀντίστροφος τοῦ a καί συμβολίζεται μέ τό σύμβολον $\frac{1}{a}$.

Θά διαπιστώσωμεν, ὅτι ὁ ἀντίστροφος ἀρρήτου ἀριθμοῦ εἶναι ἄρρητος ἀριθμός. Διότι, ἐάν ἡ τομή $\frac{1}{A_1} / \frac{1}{a_1}$ ὥριζε ἀριθμόν ρητόν σ θά ἴσχυε πάντοτε ἡ διπλῆ ἀνισότης $\frac{1}{A_1} < \sigma < \frac{1}{a_1}$ ἄρα καί θά ἴσχυε καί ἡ διπλῆ ἀνισότης $a_1 < \frac{1}{\sigma} < A_1$ πάντοτε δηλ. δι' ὅλους τούς a_1 καί δι' ὅλους τούς A_1 καί συνεπῶς τό σύμβολον τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν a_1 καί A_1 θά ἦτο ὁ σύμμετρος $\frac{1}{\sigma}$ γεγονός τό ὁποῖον ἔρχεται εἰς ἀντίθεσιν μέ τήν ἀρχικήν ὑπόθεσιν.

Θά δείξωμεν ὅτι οἱ ἀνωτέρω ὁρισθέντες ἀντίστροφοι ἄρρητοι ἀριθμοί ἔχουν γινόμενον τήν μονάδα.

Αἱ ἀκολουθίαι $\frac{a_1}{A_1}$ καί $\frac{A_1}{a_1}$ πληροῦν τάς ἰδιότητας τοῦ (39) ὡς εὐκόλως διαπιστώνει τις καί οἱ μέν ἀριθμοί $\frac{a_1}{A_1}$ εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος οἱ δέ $\frac{A_1}{a_1}$ εἶναι μεγαλύτεροι τῆς μονάδος. Οὕτω ἡ διπλῆ ἀνισότης $\frac{a_1}{A_1} < 1 < \frac{A_1}{a_1}$ ἰσχύει δι' ὅλους τούς $\frac{a_1}{A_1}$ καί δι' ὅλους τούς $\frac{A_1}{a_1}$ καί συνεπῶς τό 1 εἶναι ὁ ἀριθμός ὁ ὁριζόμενος ἀπό τήν τομήν $\frac{a_1}{A_1} / \frac{A_1}{a_1}$.

Ἀλλά (41.4) ἡ τομή αὕτη εἶναι ὁ ἀριθμός $a.a'$ ὅπου a' ὠνομάσαμεν ἀνωτέρω τόν ἀντίστροφον τοῦ a.

41.6. **Διαίρεσις**. Τό πηλίκον ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a δι' ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ a' εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ πραγματικός ἀριθμός a'' τοιοῦτος ὥστε: $a'.a'' = a$.

Ἐάν δεχθῶμεν ὑφιστάμενον τόν a'' τῆς ἀνωτέρω ἰσότητος καί ἐάν a, a' εἶναι οἱ ἀριθμοί τοῦ (41.1) θά ἔχωμεν προφανῶς: $a''.a'.\left(\frac{1}{a'}\right) = a\cdot\frac{1}{a'}$ ἤ ἀκόμη $a'' = a\cdot\frac{1}{a'} = \frac{a}{a'}$ δηλ. καθωρίσαμεν τόν a''.

41.6.1. **Γενικόν συμπέρασμα**. Αἱ τέσσαρες θεμελιώδεις πράξεις τῆς ἀριθμητικῆς εἶναι ἐφαρμόσιμοι καί ἐπί τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Οὕτω δυνάμεθα νά λέγωμεν: Προσθέτομεν, ἀφαιροῦμεν, πολλαπλασιάζομεν καί διαιροῦμεν πραγματικούς ἐν γένει ἀριθμούς καί τά ἀποτελέσματα εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

42. **Γενικαί ἰδιότητες τῶν Πραγματικῶν Ἀριθμῶν**:

Ἀφοῦ πλέον ὡρίσθησαν αἱ πράξεις καί ἐπί τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν καί ὑπεδείχθησαν οἱ τρόποι συγκρίσεως τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μεταξύ των εἶναι εὔκολον νά συναγάγωμεν τάς θεμελιώδεις ἰδιότητας τῶν ὁποίων ἀπολαύει τό σύστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

α) Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος.

1. Διά πάντα ἀριθμόν a εἶναι $a = a$ (Ἰδιότης αὐτοπαθητική ἤ ἀντανακλαστική).

2. Ἐκ τῆς σχέσεως $a = \beta$ ἕπεται $\beta = a$ (Ἰδιότης συμμετρική).

3. Ἀπό τάς ἰσότητας $a = \beta$ καί $\beta = \gamma$ ἕπεται ἡ ἰσότης $a = \gamma$ (Ἰδιότης μεταβατική).

β) Ἰδιότητες τῆς διατάξεως

1. Ἄν a, β εἶναι δύο διάφοροι μεταξύ των πραγματικοί ἀριθμοί τότε ὁ ἕνας ἐξ αὐτῶν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν ἄλλον (Ἰδιότης μεγέθους).

Ὥστε μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν πληροῦται μόνον μία ἐκ τῶν τριῶν σχέσεων: $a < \beta$ $a = \beta$ $a > \beta$.

2. Ἄν $a \leq \beta$ καί $\beta < \gamma$ ἤ ἐάν $a < \beta$ καί $\beta \leq \gamma$ τότε $a < \gamma$. (ἐνῶ τό $a \leq \beta$ σημαίνει ὅτι ὁ a δέν εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β)-(Ἰδιότης μεταβατική τῆς ἀνισότητος).

Διά τήν ἀπόδειξιν τῆς τελευταίας ἰδιότητος διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α') Οἱ a, β, γ νά εἶναι ρητοί. Τότε ἡ πρότασις εἶναι φανερά ἐκ τοῦ τρόπου συγκρίσεως τῶν ρητῶν.

β') Ὁ ἕνας τῶν α, β, γ εἶναι ἀσύμμετρος, ἔστω ὁ α καί οἱ ἄλλοι δύο ρητοί.
Ἐάν A/A' εἶναι ἡ τομή ἐκ τῆς ὁποίας ὁρίζεται ὁ α, ἀφοῦ ὁ β θά εἶναι μεγαλύτερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου A', ἔπεται, ὅτι καί ὁ γ θά εἶναι μεγαλύτερος αὐτοῦ τοῦ ὅρου τοῦ συνόλου A'. Ἄρα $\alpha<\gamma$.
Μέ παρομοίας σκέψεις συμπεραίνομεν τήν πρότασιν εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου ὁ β ἤ ὁ γ εἶναι ἀσύμμετροι.
γ') Οἱ δύο τῶν α, β, γ ἀσύμμετροι, ἔστωσαν οἱ α, β καί ὁ γ σύμμετρος.
Ἐάν A/A' καί B/B' εἶναι αἱ τομαί ἐξ ὧν ὁρίζονται οἱ α, β, ὁ γ θά εἶναι μεγαλύτερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου B', ἐνῶ θά ὑπάρχῃ ὅρος τοῦ συνόλου B μεγαλύτερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου A' διά τήν περίπτωσιν ὅπου $\alpha<\beta$. Ἀφοῦ ὅμως ὁ γ εἶναι μεγαλύτερος ὅρου τινός τοῦ B' θά εἶναι μεγαλύτερος καί παντός ὅρου τοῦ B ἄρα καί ἐκείνου τοῦ ὅρου τοῦ B, ὅστις θά εἶναι μεγαλύτερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου A'. Θά ἔχωμεν λοιπόν $\alpha<\gamma$. Ἄν τώρα συμβῆ εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην νά ἔχωμεν $\alpha=\beta$ καί $\beta<\gamma$ ἡ πρότασις εἶναι φανερά ἐκ τῆς συμμετρικῆς ἰδιότητος τῆς ἰσότητος.
Παρόμοιαι σκέψεις μᾶς βεβαιώνουν διά τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεως εἰς τάς περιπτώσεις ὅπου οἱ α, γ εἶναι ἀσύμμετροι ἤ οἱ β, γ.
δ') Καί οἱ τρεῖς ἀριθμοί εἶναι ἀσύμμετροι. Ἔστω $\alpha<\beta$, $\beta<\gamma$ θά δείξωμεν: $\alpha<\gamma$.
Οἱ α, β, γ εἶναι ἀντιστοίχως ἀριθμοί ὁριζόμενοι ἀπό τάς τομάς A/A', B/B', Γ/Γ'.
Τότε, θά ὑπάρχῃ ὅρος τοῦ συνόλου A' ἔστω ὁ α_1, μικρότερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου B ἔστω τοῦ β'. Θά ὑπάρξῃ ἐπίσης ὅρος τοῦ συνόλου B' ἔστω ὁ β_1 μικρότερος ὅρου τινός τοῦ συνόλου Γ ἔστω τοῦ γ'. Δηλ. θά ἔχωμεν: $\alpha_1'<\beta'$ καί $\beta_1'<\gamma'$. Ἀλλά ἐπειδή ὁ β_1' εἶναι μεγαλύτερος τοῦ β' καί συνεπῶς καί τοῦ α_1' θά ἔχωμεν $\alpha_1'<\gamma'$. Συνεπῶς ὑπάρχει ρητός μικρότερος τοῦ ἀρρήτου γ, πού εἶναι μεγαλύτερος ρητοῦ μεγαλυτέρου τοῦ ἀρρήτου α. Θά ἔχωμεν λοιπόν $\alpha<\gamma$.
Ἐάν $\alpha\leq\beta$ ἤ $\beta\leq\gamma$ ἡ πρότασίς μας γίνεται φανερά ἐκ τῆς συμμετρικῆς

ἰδιότητος τῆς ἰσότητος.

43. Ριζικά Ἀριθμητικά.

43.1. Ὑπό τήν μορφήν παρατηρήσεων. 1ον Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα δύο θετικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι εἶναι αἱ μιοσταί των δυνάμεις (μ θετικός καί ἀκέραιος ἀριθμός) νά εἶναι ἴσαι.

Τό ἀναγκαῖον τῆς συνθήκης γίνεται φανερόν ἀπό τήν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως. Δηλ, ἐάν $a=\beta$ ἀναγκαίως $a^\mu=\beta^\mu$ (1).

Δεχόμενοι τώρα τήν (1) ὑφισταμένην λαμβάνομεν:

$$a^\mu-\beta^\mu=(a-\beta)(a^{\mu-1}+a^{\mu-2}\beta+\ldots+\beta^{\mu-1})=0.$$

Καί ἐπειδή ὁ 2ος παράγων τοῦ γινομένου, ὡς ἄθροισμα θετικῶν ἀριθμῶν, δέν δύναται νά εἶναι μηδέν, θά ἔχωμεν $a=\beta$. Ὥστε ἀρκεῖ νά εἶναι $a^\mu=\beta^\mu$ διά νά εἶναι καί $a=\beta$.

2ον. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα οἱ θετικοί ἀριθμοί a, β ἱκανοποιοῦν τήν ἀνισότητα $a<\beta$ εἶναι νά εἶναι $a^\mu<\beta^\mu$ ὅπου μ θετικός καί ἀκέραιος.

Πράγματι, ἐάν $a<\beta$ εἶναι καί $a^\mu<\beta^\mu$ κατά τήν ἰδιότητα (στ) τῶν ἀνισοτήτων (12.1).

Ἐάν πάλιν $a^\mu<\beta^\mu$ θά εἶναι καί: $(a-\beta)(a^{\mu-1}+a^{\mu-2}\cdot\beta+\cdots+\beta^{\mu-1})<0$ ἤ $a-\beta<0$ δηλ. $a<\beta$ ἀφοῦ ὁ 2ος παράγων τοῦ γινομένου εἶναι ἀριθμός θετικός.*

43.2. Θεώρημα I. Δοθέντος ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ A καί ἑνός θετικοῦ καί ἀκεραίου μ, ὑφίσταται ἕνας καί μόνον ἕνας θετικός ἀριθμός a, ρητός ἤ ἄρρητος τοιοῦτος, ὥστε $a^\mu=A$.

Τό ὅτι ὑφίσταται θετικός ἀριθμός a ρητός ἤ ἄρρητος, τοῦ ὁποίου ἡ μιοστή δύναμις νά ἰσοῦται μέ τόν οἱονδήποτε διδόμενον θετικόν ἀριθμόν A, θά τό δεχθῶμεν ἄνευ ἀποδείξεως. Θά ἀποδείξωμεν δέ ἐνταῦθα τό 2ον μέρος τῆς προτάσεως δηλ. θά ἀποδείξωμεν ὅτι ὁ a εἶναι ὁ μοναδικός θετικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου ἡ μιοστή δύναμις εἶναι ὁ θετικός A.

Πράγματι, ἄν ὑφίστατο καί ἄλλος διάφορος αὐτοῦ, ἔστω ὁ β, θά εἴ-

* Τήν πρότασιν ταύτην ἀπεδείξαμεν εἰς τό (12.1) ἀλλά ἡ ἀπόδειξις ἐδῶ εἶναι περισσότερον ἁπλή.

χομεν : $a^{\mu}=A$, $\beta^{\mu}=A$ καί συνεπῶς $a^{\mu}=\beta^{\mu}$. Ἀλλά τότε (43.1) θά εἴχομεν καί $a=\beta$.

Οὕτω ἐάν: $A=64$ καί $\mu=3$, ἐπειδή $4^3=64$ ἔχομεν $a=4$

» $A=\frac{32}{243}$ » $\mu=5$, » $\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$ » $a=\frac{2}{3}$

» $A=0{,}01$ » $\mu=2$, » $(0{,}1)^2=0{,}01$ » $a=0{,}1$

43.2.1 **Ὁρισμοί**. Ὀνομάζομεν *ἀριθμητικήν ρίζαν μ τάξεως* (μ θετικός καί ἀκέραιος) τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ Α τόν μοναδικόν θετικόν ἀριθμόν τοῦ ὁποίου ἡ μιοστή δύναμις ἰσοῦται μέ τόν Α.

Τήν ἀριθμητικήν μιοστήν ρίζαν τοῦ Α τήν παρουσιάζομεν μέ τήν γραφήν $\sqrt[\mu]{A}$. Αὐτό τό σύμβολον εἶναι ἕνα *ριζικόν*, Α εἶναι ἡ ὑπό τό ριζικόν ἔκφρασις ἤ τό *ὑπόρριζον* καί μ ὁ *δείκτης* τοῦ ριζικοῦ.

Ἐάν πρόκειται περί τῆς 2ας τάξεως ἤ τῆς 3ης τάξεως ρίζης τοῦ Α λέγομεν *τετραγωνική* ρίζα τοῦ Α. ἤ *κυβική* ρίζα τοῦ Α, ἐνῶ ἀντί $\sqrt[2]{A}$ γράφομεν ἁπλῶς $\sqrt{A}$.

Ὅταν θά λέγωμεν *ὑπολογίσατε* τήν *ρίζαν* τοῦ Α δυνάμεθα νά λέγωμεν καί *ἐξαγάγατε* αὐτήν τήν ρίζαν*.

Ὁ ὁρισμός τῆς μιοστῆς ρίζης ὁδηγεῖ εἰς τήν διαπίστωσιν τῶν ἰσοτήτων: $\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^{\mu}=A$. καί $\sqrt[\mu]{A^{\mu}}=A$.

44. **Λογισμός μέ ριζικά. Θεώρημα Η.** *Δέν μεταβάλλεται ἡ ἀξία ἑνός ριζικοῦ ὑψοῦντες τό ὑπόρριζον εἰς μίαν δύναμιν καί πολλαπλασιάζοντες συγχρόνως τόν δείκτην*

---

* Ἡ ἀνάλυσις ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων μᾶς ἐπιτρέπει νά γνωρίζωμεν, ἐάν ὁ ἀκέραιος οὗτος εἶναι ἀκριβής μιοστή δύναμις καί τούτου βεβαιωμένου νά ὑπολογίσωμεν τήν μιοστήν του ρίζαν.
Δυνάμεθα πάντοτε νά ἀντικαθιστῶμεν ἕνα κλάσμα ἀπό ἕνα ἰσοδύναμον κλάσμα τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής εἶναι μία ἀκριβής μιοστή δύναμις. Ἐάν ὁ ἀριθμητής εἶναι ἐπίσης μία ἀκριβής μιοστή δύναμις θά γνωρίζωμεν τήν ἀκριβῆ μιοστήν ρίζαν τοῦ κλάσματος.
Εἰς ὅλας τάς ἄλλας περιπτώσεις, ἐάν a εἶναι ἡ ἄγνωστος ἀκριβής μιοστή ρίζα τοῦ θετικοῦ Α, δηλ., ἐάν δεχθῶμεν $a^{\mu}=A$, ἐπειδή μέ τό νά ἔχωμεν $\beta^{\mu}<A$ θά ἔχωμεν καί $\beta<a$ ἤ μέ τό νά ἔχωμεν $\beta^{\mu}>A$ θά ἔχωμεν καί $\beta>a$ ἐπενοήθησαν λογιστικοί τρόποι ἐπιτρέποντες τήν εὕρεσιν τιμῶν, πού πλησιάζουν τό a μέ μίαν διδομένην προσέγγισιν.

τοῦ ριζικοῦ μέ τόν ἐκθέτην αὐτῆς τῆς δυνάμεως*.
Καλούμεθα λοιπόν νά δείξωμεν, ὅτι: $\sqrt[\mu]{A} = \sqrt[\mu\nu]{A^\nu}$ (1). Πράγματι, $(\sqrt[\mu]{A})^{\mu\nu} = [(\sqrt[\mu]{A})^\mu]^\nu = A^\nu$. Καί ἐπίσης: $(\sqrt[\mu\nu]{A^\nu}) = A^\nu$. Αἱ δυνάμεις λοιπόν μν τάξεως τῶν δύο μελῶν τῆς (1) εἶναι ἴσαι καί συνεπῶς (43.1) ἡ ἰσότης (1) εἶναι ἀληθής.

44.1. Ἐπειδή κατά τό ἀνωτέρω θεώρημα ἔχομεν: $\sqrt[\mu]{A^\rho} = \sqrt[\mu\nu]{(A^\rho)^\nu}$ ἤ $\sqrt[\mu]{A^\rho} = \sqrt[\mu\nu]{A^{\rho\nu}}$. Καί ἐπειδή γράφοντες $A = A'$ ἔχομεν ἐπίσης: $\sqrt[\mu]{A} = \sqrt[\mu\nu]{A^{1\cdot\nu}}$ συμπεραίνομεν καί τήν ἑξῆς ἰσοδύναμον ἔκφρασιν τοῦ θεωρήματος (44).
Ἡ ἀξία ἑνός ριζικοῦ μεταβάλλεται ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τόν δείκτην καί τόν ἐκθέτην τοῦ ὑπορρίζου μέ τόν αὐτόν ἀκέραιον.

45. **Ἁπλοποιήσεις**: 1. **Ἁπλοποίησις ἑνός ριζικοῦ**. Ἐάν ἕνα ριζικόν δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $\sqrt[\mu\nu]{a^{\rho\nu}}$ ὅπου μ, ρ, ν εἶναι θετικοί καί ἀκέραιοι καί μ, ν διάφοροι τῆς μονάδος, δυνάμεθα κατά τό θεώρημα (44) νά τό ἀντικαταστήσωμεν μέ τό ἴσον του $\sqrt[\mu]{a^\rho}$ καί τότε λέγομεν ὅτι ἁπλοποιήσαμεν τό διδόμενον ριζικόν.
Οὕτω, $\sqrt[12]{81} = \sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$.
Εἰς τήν εἰδικήν περίπτωσιν ὅπου $\mu=1$ δηλ. εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ὁ ἐκθέτης τοῦ ὑπορρίζου εἶναι διαιρετός διά τοῦ δείκτου, τό ριζικόν ἐξαφανίζεται.
Πράγματι, $\sqrt[\nu]{a^{\rho\nu}} = \sqrt[\nu]{(a^\rho)^\nu} = a^\rho$
Οὕτω, $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

2ον **Ἀναγωγή ἑτεροδείκτων ριζικῶν εἰς ὁμόδεικτα**. Ἔστωσαν π.χ. τά ριζικά:

$$\sqrt[\mu]{A}, \quad \sqrt[\nu]{B}, \quad \sqrt[\rho]{\Gamma}$$

Ἐάν K εἶναι τό ε.κ.π. τῶν δεικτῶν ἤ γενικώτερον ἕν κοινόν πολλαπλάσιόν των θά ἔχωμεν: $K = \mu\cdot\mu'$, $K = \nu\nu'$, $K = \rho\rho'$ καί κατά τό θεώρημα (44):

$$\sqrt[\mu]{A} = \sqrt[\mu\mu']{A^{\mu'}} = \sqrt[K]{A^{\mu'}}, \quad \sqrt[\nu]{B} = \sqrt[\nu\nu']{B^{\nu'}} = \sqrt[K]{B^{\nu'}} \quad \text{καί} \quad \sqrt[\rho]{\Gamma} = \sqrt[\rho\rho']{\Gamma^{\rho'}} = \sqrt[K]{\Gamma^{\rho'}}$$

---

* Ἐξυπακούεται, ὅτι ὁμιλῶμεν ἐδῶ διά τάς ἰδιότητας τῶν ἀριθμητικῶν ριζικῶν δηλ. διά ριζικά μέ ὑπόρριζα ἀριθμούς θετικούς καί δείκτας θετικούς καί ἀκεραίους. Ὅταν δέν θά πρόκειται περί ἀριθμητικῶν ριζικῶν θά τό ἀναφέρωμεν.

Ὁ ἀναγνώστης θά ἴδῃ εὐκόλως ὅτι τά ριζικά $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[6]{3}$ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μέ τά ριζικά $\sqrt[12]{625}$, $\sqrt[12]{343}$, $\sqrt[12]{9}$.

46. **Θεώρημα III**. Τό γινόμενον ριζικῶν τῆς αὐτῆς τάξεως εἶναι ἕνα ριζικόν τῆς αὐτῆς τάξεως μέ ὑπόρριζον τό γινόμενον τῶν ὑπορρίζων.

Πρέπει λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι: $\sqrt[\mu]{A}\cdot\sqrt[\mu]{B}\cdot\sqrt[\mu]{\Gamma}=\sqrt[\mu]{A.B.\Gamma}$.

Καί κατά τήν παρατ. 1 (43.1) πρέπει νά δείξωμεν ὅτι:

$$\left(\sqrt[\mu]{A}\cdot\sqrt[\mu]{B}\cdot\sqrt[\mu]{\Gamma}\right)^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{AB\Gamma}\right)^{\mu}$$

Ἀλλά πράγματι, $\left(\sqrt[\mu]{A}\cdot\sqrt[\mu]{B}\cdot\sqrt[\mu]{\Gamma}\right)^{\mu}=\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^{\mu}\cdot\left(\sqrt[\mu]{B}\right)^{\mu}\cdot\left(\sqrt[\mu]{\Gamma}\right)^{\mu}=A.B.\Gamma$ καί $\left(\sqrt[\mu]{AB\Gamma}\right)^{\mu}=AB\Gamma$.

Εἰδικά, Διά νά ὑψώσωμεν ἕνα ριζικόν εἰς μίαν οἱανδήποτε θετικήν καί ἀκεραίαν δύναμιν, δυνάμεθα νά ὑψώσωμεν τήν ὑπόρριζον παράστασιν εἰς τήν δύναμιν ταύτην.

Πράγματι, $\left(\sqrt[\mu]{A}\right)^{\rho}=\underbrace{\sqrt[\mu]{A}\cdot\sqrt[\mu]{A}\cdots\sqrt[\mu]{A}}_{\rho\ \text{παράγοντες}}=\sqrt[\mu]{\underbrace{A.A\dots A}_{\rho\ \text{παραγ.}}}=\sqrt[\mu]{A^{\rho}}$

Παραδείγματα:

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{100}=10$$

$$\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{64}=\sqrt[5]{2.2^{3}.2^{6}}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^{2}=4$$

$$\left(\sqrt[4]{2}\right)^{3}=\sqrt[4]{2^{3}}=\sqrt[4]{8}$$

46.1. **Πόρισμα**. Τό πηλίκον τῆς μιοστῆς ρίζης ἑνός ἀριθμοῦ A διά τῆς μιοστῆς ρίζης ἑνός ἀριθμοῦ B, ἰσοῦται μέ τήν μιοστήν ρίζαν τοῦ πηλίκου $\frac{A}{B}$.

Πράγματι, ἡ ἰσότης: $\sqrt[\mu]{B}\cdot\sqrt[\mu]{\frac{A}{B}}=\sqrt[\mu]{B\cdot\frac{A}{B}}=\sqrt[\mu]{A}$ δεικνύει πώς ἡ $\sqrt[\mu]{\frac{A}{B}}$ εἶναι τό πηλίκον τῆς $\sqrt[\mu]{A}$ διά τῆς $\sqrt[\mu]{B}$.

Παράδειγμα, $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{\frac{81}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$.

47. **Ἐφαρμογαί**: 1. Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἑτεροδεικτα ριζικά ἀνάγομεν κατ' ἀρχάς ταῦτα εἰς τόν αὐτόν δείκτην καί κατόπιν ὑπολογίζομεν τό γινόμενόν των ἐφαρμόζοντες τό θεώρημα (ἐδ. 40).

Παράδειγμα: $\sqrt[3]{A}\cdot\sqrt[4]{B}\cdot\sqrt[6]{\Gamma}=\sqrt[12]{A^{4}}\cdot\sqrt[12]{B^{3}}=\sqrt[12]{\Gamma^{2}}=\sqrt[12]{A^{4}.B^{3}.\Gamma^{2}}$

2. Δυνάμεθα ἕνα παράγοντα πού εἶναι ὑπό ριζικόν μ τά-

ξεως νά τόν θέσωμεν ἐκτός τοῦ ριζικοῦ τούτου, ἄν τοῦ ἐξαγάγωμεν τήν μιοστήν ρίζαν καί ἀντιστρόφως. παράγοντα πού εἶναι ἐκτός τῆς μιοστῆς τάξεως ριζικοῦ νά τόν θέσωμεν ὑπό τό ριζικόν, ἄν τόν ὑψώσωμεν εἰς τήν μιοστήν δύναμιν.

Ἐάν λοιπόν a εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός καί χρησιμοποιήσωμεν τό θεωρ. (40) λαμβάνομεν:

$$a\sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\mu]{a^{\mu}} \cdot \sqrt[\mu]{\beta} = \sqrt[\mu]{a^{\mu}\cdot\beta}$$

Ἐπίσης $\dfrac{\sqrt[\mu]{\beta}}{a} = \dfrac{\sqrt[\mu]{\beta}}{\sqrt[\mu]{a^{\mu}}} = \sqrt[\mu]{\dfrac{\beta}{a^{\mu}}}$

Οὕτω, ἐάν μεταβῶμεν ἀπό τό 2ον μέλος αὐτῶν τῶν ἰσοτήτων εἰς τό πρῶτον ἐξάγομεν παράγοντα τοῦ ὑπορρίζου, ἐνῶ ἐάν μεταβῶμεν ἀπό τό πρῶτον μέλος των εἰς τό δεύτερον εἰσάγομεν παράγοντα εἰς τό ὑπόρριζον.

3. Κατόπιν τῶν δύο ἀνωτέρω ἐφαρμογῶν ὁδηγούμεθα εἰς τήν ἑξῆς ἀξιοσημείωτον παρατήρησιν.

Ἐάν τό σύμβολον $\sqrt[\mu]{A}$ ἀντιπροσωπεύῃ ἕνα ἀριθμητικόν ριζικόν καί ἐάν τό a εἰκονίζῃ ἀριθμόν θετικόν ἤ ἀρνητικόν θά πρέπει νά γράψωμεν:

$$\sqrt{a^2} = a \quad \text{ἐάν } a>0 \quad \text{καί } \sqrt{a^2} = -a \quad \text{ἐάν } a<0$$
$$a\sqrt[3]{\beta^2} = \sqrt[3]{a^3\beta^2} \quad \text{ἐάν } a>0 \quad \text{καί } a\sqrt[3]{\beta^2} = -\sqrt[3]{-a^3\beta^2} \quad \text{ἐάν } a<0$$
$$a\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{3a^4} \quad \text{ἐάν } a>0 \quad \text{καί } a\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{3a^4} \quad \text{ἐάν } a<0$$

48. **Ἐπάλληλα ριζικά. Θεώρημα.** Ἡ μιοστή ἀριθμητική ρίζα ἑνός ἀριθμητικοῦ ριζικοῦ προκύπτει ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί μ τόν δείκτην τοῦ ριζικοῦ.

Πρέπει λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι ἔχομεν: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{A}} = \sqrt[\mu\nu]{A}$

Πράγματι, $\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{A}}\right)^{\mu\nu} = \left(\left(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{A}}\right)^{\mu}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{A}\right)^{\nu} = A$ καί $\left(\sqrt[\mu\nu]{A}\right)^{\mu\nu} = A$.

Εἶναι εὔκολον νά ἐννοήσωμεν ὅτι ὁ κανών δύναται νά ἐπεκταθῇ ἐπί οἱουδήποτε ἀριθμοῦ ἐπαλλήλων ριζικῶν. Οὕτω:

$$\sqrt[\mu]{\sqrt[\rho]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\lambda]{a}}}} = \sqrt[\mu\rho\nu\lambda]{a}$$

καί συμπεραίνομεν ἐπίσης καί ὅτι δυνάμεθα νά διατάξωμεν τά ριζικά κατά βούλησιν.

Παράδειγμα: $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[5]{64}}} = \sqrt[30]{64} = \sqrt[30]{2^6} = \sqrt[5]{2}$

49. Ἀναγωγή παραστάσεων μέ ριζικόν εἰς τόν παρονομαστήν εἰς ἰσοδυνάμους μέ παρονομαστήν χωρίς ριζικόν.

Θά ὑποδείξωμεν ἐδῶ τάς βασικάς καί γενικάς περιπτώσεις αὐτῆς τῆς ἀναγωγῆς. Αὐτή ἡ ἀναγωγή ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα νά ἀντικαθιστῶμεν τάς παραστάσεις μας μέ ἰσοδυνάμους παραστάσεις διά τάς ὁποίας δυνάμεθα, ἐφόσον ὁ παρονομαστής των θά εἶναι ρητός καί ἑπομένως ἕνας ὡρισμένος (μέ ἀκρίβειαν) ἀριθμός, νά ἔχωμεν τιμήν μέ ὅσον μεγαλυτέραν προσέγγισιν θέλομεν.

1ον $\dfrac{a}{\sqrt[\mu]{\beta}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\mu}}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\beta}$

2ον $\dfrac{a}{\sqrt[\mu]{\beta^{\nu}}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\nu}}\cdot\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\mu}}} = \dfrac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\beta}$

3ον $\dfrac{A}{\pm\sqrt{a} \pm\sqrt{\beta} \pm \sqrt{\gamma} \pm \ldots \pm\sqrt{\lambda}}$

Ἐάν ὀνομάσωμεν B τήν ποσότητα: $\pm\sqrt{\beta} \pm\sqrt{\gamma} \pm \ldots \pm\sqrt{\lambda}$ ἡ παράστασίς μας λαμβάνει τήν μορφήν: $\dfrac{A}{\varepsilon\sqrt{a}+B}$ ὅπου $\varepsilon = \pm 1$. Πολλαπλασιάζομεν τώρα καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματός μας ἐπί τήν συζυγῆ παράστασιν τοῦ παρονομαστοῦ καί λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον παράστασιν: $\dfrac{A(\varepsilon\sqrt{a}-B)}{a-B^2}$, τῆς ὁποίας ὁ παρονομαστής δέν περιέχει τήν $\sqrt{a}$.

Ἡ παράστασις B^2 περιέχει ἕνα ρητόν μέρος, πού δημιουργεῖται ἀπό τά τετράγωνα τῶν ριζικῶν: $\sqrt{\beta}, \sqrt{\gamma}, \ldots \sqrt{\lambda}$ καί ἕνα ἄρρητον, πού δημιουργεῖται ἀπό τά γινόμενα: $2\sqrt{\beta\gamma}$, $2\sqrt{\beta\delta} \ldots 2\sqrt{\gamma\delta} \ldots$ Οὕτω ἡ ἀρχική μας παράστασις λαμβάνει τήν μορφήν: $\dfrac{A'}{\Gamma\sqrt{\beta}+\Delta}$ ὅπου $A' = A(\varepsilon\sqrt{a}-B)$ καί τά Γ καί Δ εἶναι ἀθροίσματα τά ὁποῖα δέν περιέχουν τήν $\sqrt{\beta}$ ἀλλά τά ὁποῖα δύνανται νά περιέχουν τά ἄλλα ριζικά: $\sqrt{\gamma}, \sqrt{\delta}, \ldots \sqrt{\lambda}$ καί ἕκαστον εἰς τήν πρώτην δύναμιν.

Ἄν τώρα ἐργασθῶμεν ὅπως ἀνωτέρω, λαμβάνομεν τήν ἰσοδύναμον παράστασιν: $\dfrac{A'(\Gamma\sqrt{\beta}+\Delta)}{\beta\Gamma^2-\Delta^2}$ μέ παρονομαστήν, ὁ ὁποῖος δέν περιέχει οὔτε τήν $\sqrt{\alpha}$ οὔτε τήν $\sqrt{\beta}$.

Ἡ τελευταία πάλιν παράστασις δύναται νά γραφῆ: $\dfrac{A''}{E\sqrt{\gamma}+Z}$ ἐνῶ τά Ε καί Ζ εἰκονίζουν παραστάσεις χωρίς τά ριζικά $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$.

Κατόπιν τῶν ὅσων ἐξεθέσαμεν γίνεται πλέον φανερόν, ὅτι δυνάμεθα ἑκάστην φοράν νά ἐνεργοῦμεν κατά τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νά ἐξαλείφωμεν τουλάχιστον ἕνα ριζικόν καί συνεπῶς τελικά νά ἔχωμεν παράστασιν ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν καί μέ παρονομαστήν χωρίς ριζικόν.

Παράδειγμα. Ζητοῦμεν τήν ἰσοδύναμον καί μέ ρητόν παρονομαστήν πρός τήν παράστασιν:

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}$$

Ἔχομεν:

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}=\frac{A}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})-(\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta})}=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2-(\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta})^2}$$

$$=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})}{\alpha+\gamma-\beta-\delta+2(\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\delta})}=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})[\alpha+\gamma-\beta-\delta-2(\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\delta})]}{(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2-4(\alpha\gamma+\beta\delta-2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})}$$

$$=\frac{A.B.\Gamma\,[(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2+4(\alpha\gamma+\beta\delta-2\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta})]^{*}}{[(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2-4(\alpha\gamma+\beta\delta)]^2-64\alpha\beta\gamma\delta}$$

4ον

$$\frac{A}{\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta}}$$

Ἐάν θέσωμεν $\sqrt[\mu]{\alpha}=x$ καί $\sqrt[\mu]{\beta}=\psi$ θά ἔχωμεν $x^\mu=\alpha$ καί $\psi^\mu=\beta$. Καί ἐπειδή,

$$x^\mu-\psi^\mu=(x-\psi)(x^{\mu-1}+x^{\mu-2}\psi+x^{\mu-3}\psi^2+\dots+x\psi^{\mu-2}+\psi^{\mu-1})$$

λαμβάνομεν: $\alpha-\beta=(\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta})(\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-1}}+\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-2}\beta}+\dots+\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}})$. Ἡ παράστασίς μας λοιπόν ἔχει ἰσοδύναμον τήν:

$$\frac{A[\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-1}}+\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-2}\beta}+\dots+\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}]}{\alpha-\beta}$$

Σημείωσις: Εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ὁ παρονομαστής ἔχει τήν μορφήν $\sqrt[\mu]{\alpha}+\sqrt[\mu]{\beta}$ ἐργαζόμεθα κατά τόν αὐτόν τρόπον ἀλλά ἐφόσον φυσικά τό μ (33) εἶναι ἀριθμός περιττός.

Παραδείγματα: 1ον Εὕρετε τάς ἰσοδυνάμους καί μέ ρητόν πα-

* Ὠνομάσαμεν Β, Γ ἀντιστοίχως τούς παράγοντας: $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}$ καί $\alpha+\gamma-\beta-\delta-2(\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\delta})$.

ρονομαστήν πρός τάς παραστάσεις: $\dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha} \pm \sqrt[3]{\beta}}$

Γράφομεν: $\dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha} \pm \sqrt[3]{\beta}} = \dfrac{A\left(\sqrt[3]{\alpha^2} \mp \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2}\right)}{\alpha \pm \beta}$

2ον. Τό αὐτό διά τήν παράστασιν: $K = \dfrac{A}{\sqrt{\alpha} - \sqrt[3]{\beta}}$

$$K = \frac{A}{\sqrt[6]{\alpha^3} - \sqrt[6]{\beta^2}} = \frac{A\left[\sqrt[6]{\alpha^{15}} + \sqrt[6]{\alpha^{12}\beta^2} + \sqrt[6]{\alpha^9\beta^4} + \sqrt[6]{\alpha^6\beta^6} + \sqrt[6]{\alpha^3\beta^8} + \sqrt[6]{\beta^{10}}\right]}{\alpha^3 - \beta^2}$$

3ον. $K = \dfrac{A}{\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}}$

Ἐάν θέσωμεν $\sqrt[3]{\alpha} = x$, $\sqrt[3]{\beta} = \psi$, $\sqrt[3]{\gamma} = \omega$ θά ἔχωμεν $x^3 = \alpha$, $\psi^3 = \beta$, $\omega^3 = \gamma$ καί ἡ γνωστή ταυτότης:

$x^3 + \psi^3 + \omega^3 - 3x\psi\omega \equiv (x+\psi+\omega)(x^2+\psi^2+\omega^2 - x\psi - x\omega - \psi\omega)$, γίνεται:

$\alpha+\beta+\gamma - 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} \equiv \left(\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} + \sqrt[3]{\gamma}\right)\left(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} + \sqrt[3]{\gamma^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} - \sqrt[3]{\alpha\gamma} - \sqrt[3]{\beta\gamma}\right)$. Ὥστε:

$$x = \frac{A\left(\sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\beta^2} + \sqrt[3]{\gamma^2} - \sqrt[3]{\alpha\beta} - \sqrt[3]{\alpha\gamma} - \sqrt[3]{\beta\gamma}\right)}{\alpha+\beta+\gamma - 3\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}} \qquad B$$

$$x = \frac{A.B^*\left[(\alpha+\beta+\gamma)^2 + 3(\alpha+\beta+\gamma)\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma} + 9\sqrt[3]{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right]}{(\alpha+\beta+\gamma)^3 - 27\alpha\beta\gamma}$$

50. Μετασχηματισμός τῆς παραστάσεως $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

Ὑποθέτοντες, ὅτι τά A, B εἶναι θετικοί ρητοί ἀριθμοί, ὅτι τό B δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ καί ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ ἀνισότης: $A^2 > B$, ζητοῦμεν τάς ἀναγκαίας καί ἱκανάς συνθήκας διά νά ὑφίστανται δύο θετικοί ρητοί ἀριθμοί x καί ψ τοιοῦτοι ὥστε νά εἶναι:

$$\sqrt{A + \varepsilon\sqrt{B}} = \varepsilon_1\sqrt{x} + \varepsilon_2\sqrt{\psi} \qquad (1)$$

Τά ε, ε_1, ε_2 ἀντιπροσωπεύουν τήν θετικήν ἤ τήν ἀρνητικήν μονάδα. Οὕτω ζητοῦμεν τάς ἀναγκαίας καί ἱκανάς συνθήκας ἵνα ἡ διδομένη παράστασις τοῦ διπλοῦ ριζικοῦ ἐκφράζεται συναρτήσει ἁπλῶν ριζικῶν.

Ἡ ἰσότης (1) διά τετραγωνισμοῦ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν της δίδει τήν ἰσότητα: $A + \varepsilon\sqrt{B} = x + \psi + 2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{x\psi}$ (2). Ἐκ τῆς ὁποίας καί λαμ-

---

*Τό B ἀντιπροσωπεύει προφανῶς τόν πολλαπλασιαστήν τοῦ ἀριθμητοῦ.

βάνομεν ἀναγκαίως (ἀσκ. 94) τάς ἰσότητας : $A = x + \psi \quad \varepsilon\sqrt{B} = 2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{x\psi}$ (3).
Ἐκ τῆς δευτέρας τῶν (3) γίνεται φανερόν ὅτι, ἐάν $\varepsilon = 1$ τότε θά εἶναι $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ ἤ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -1$. Τό 2ον ὅμως συμπέρασμα ἀποκλείεται διότι τότε ἡ (1) θά ἐκφράζῃ ὑπό τούς τεθέντας ὅρους ἀδυνατότητα. Ἐάν πάλιν $\varepsilon = -1$ ἡ 2α τῶν (3) ὁδηγεῖ εἰς τό συμπέρασμα ὅτι $\varepsilon_1 = 1$ καί $\varepsilon_2 = -1$ ἤ $\varepsilon_1 = -1$ καί $\varepsilon_2 = 1$ χωρίς τό 2ον συμπέρασμα νά διαφέρῃ τοῦ πρώτου ἐφόσον ἡ (1) θά παρουσιάζῃ τήν αὐτήν μορφήν*. Ὥστε, δι' $\varepsilon = +1$ ἡ ἰσότης (1) θά γίνῃ:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{\psi}$$

καί δι' $\varepsilon = -1$ $\qquad \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{\psi}$ ** $\qquad$ (4)

Δέν ἐναπομένει πλέον παρά νά ὁρισθῇ ἡ συνθήκη ὑπάρξεως τῶν x καί ψ καί εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην νά εὑρεθοῦν καί αὐτά ταῦτα τά x καί ψ.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (3) λαμβάνομεν: $(x+\psi)^2 - 4x\psi = A^2 - B$ ἤ

$$(x-\psi)^2 = A^2 - B \qquad (5)$$

Ἡ παραδοχή λοιπόν ὑπάρξεως τῶν x καί ψ ὥστε νά ἱκανοποιοῦνται αἱ ἰσότητες (1) ὑπό τούς τεθέντας ὅρους, ἔδωσε ὡς ἀναγκαῖα ἐπακόλουθα: 1ον Ὅτι αἱ ἰσότητες (1) θά λάβουν τήν μορφήν τῶν (4) 2ον Ὅτι ἡ ἔκφρασις $A^2 - B$ εἶναι τέλειον τετράγωνον ρητοῦ ἀριθμοῦ (Βλ. ἰσότητα 5) καί 3ον ὅτι τά ζητούμενα x καί ψ συνδέονται διά τῶν ἰσοτήτων : $x + \psi = A$ καί $x - \psi = \sqrt{A^2 - B} = \Gamma$ (6) ὅπου Γ θετικός ρητός.

Καί τίθεται πλέον τό ἐρώτημα: Εἶναι αἱ συνθῆκαι αὗται ἀρκεταί;
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (6) λαμβάνομεν: $x = \frac{A+\Gamma}{2}$ καί $\psi = \frac{A-\Gamma}{2}$. Καί ἐξ αὐτῶν:

$$x + \psi + 2\sqrt{x\psi} = A + \sqrt{A^2 - \Gamma^2} = A + \sqrt{B}$$
$$x + \psi - 2\sqrt{x\psi} = A - \sqrt{A^2 - \Gamma^2} = A - \sqrt{B}$$

ἤ τάς:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{\psi})^2 = A + \sqrt{B}$$
$$(\sqrt{x} - \sqrt{\psi})^2 = A - \sqrt{B}$$

---

* Μέ τό 1ον δηλ. συμπέρασμα θά πρέπει νά εἶναι $x > \psi$ καί μέ τό 2ον $\psi > x$.

** Διεπιστώθη δηλ. ὅτι, ἐφόσον θά ὑπάρξουν τά x, ψ, ἡ ρίζα ἀθροίσματος θά προσδιορισθῇ ἀναγκαίως ὡς ἄθροισμα ἁπλῶν ριζικῶν καί ἡ ρίζα διαφορᾶς ὡς διαφορά ἁπλῶν ριζικῶν.

ἢ καί ἀκόμη:

$$\sqrt{x}+\sqrt{\psi}=\sqrt{A+\sqrt{B}}$$
$$\sqrt{x}+\sqrt{\psi}=\sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Δυνάμεθα πλέον νά λέγωμεν: Ἐάν A, B θετικοί ρητοί καί B μή τέλειον τετράγωνον, εἶναι δέ καί $A^2=B+\Gamma^2$, ὅπου Γ θετικός ρητός, ὑφίσταται ἡ ταυτότης:

$$\sqrt{A+\varepsilon\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\varepsilon\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (\varepsilon=\pm 1)$$

Σημειοῦμεν ὅτι ἡ τελευταία ταύτότης ὑφίσταται καί ἐάν ἡ ποσότης A^2-B δέν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Καί δεδομένου ὅτι τό 2ον μέλος της εἶναι πλέον πολύπλοκον ἀπό τό πρῶτον, ἐνδείκνυται νά χρησιμοποιεῖται ἡ ταὐτότης αὐτη εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν συμφέρει νά ἀντικαθίσταται τό 2ον μέλος της ἀπό τό πρῶτον.

51. **Πρόβλημα**: Τοῦ μ ὄντος γνωστοῦ θετικοῦ ἀκεραίου εὕρετε τάς ρίζας μ τάξεως τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ A δηλ. ὅλας τάς θετικάς καί ἀρνητικάς τιμάς τοῦ x αἱ ὁποῖαι νά ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα: $x^{\mu}=A$.

Παρατηροῦμεν κατ' ἀρχάς πώς, ἐάν $A=0$, ὁ ἀριθμός 0 εἶναι ὁ μόνος πού ἱκανοποιεῖ τό θέμα, τοῦ μ ὄντος ἀρτίου ἢ περιττοῦ. Θά ὑποθέσωμεν λοιπόν $A\neq 0$.

Περίπτωσις 1η: $\mu=2\nu$, $A>0$. Ἔστω λ ἡ μιοστή ἀριθμητική ρίζα τοῦ A*. Τότε, εἰς τήν ἔκφρασιν: $x=\pm\lambda\psi$ δυνάμεθα νά περιλάβωμεν πᾶσαν τιμήν τοῦ ζητουμένου x, ἐάν τό ψ εἶναι ὁ θετικός ἀριθμός, ὅστις θά ἱκανοποιῇ τήν ἰσότητα:

$$(\pm\lambda\psi)^{2\nu}=A \quad ἢ \quad \lambda^{2\nu}\psi^{2\nu}=A \quad ἢ \; τήν \quad \psi^{2\nu}=1 \quad (1)$$

Ἡ (1) δίδει: $\psi^{2\nu}-1=(\psi-1)(\psi^{2\nu-1}+\psi^{2\nu-2}+\dots+\psi+1)=0$

Καί ἡ ταὐτότης αὐτη δέν ἱκανοποιεῖται παρά διά $\psi=1$ ἐφ' ὅσον $\psi>0$.

Συνεπῶς: Πᾶς θετικός ἀριθμός ἔχει ὡς ρίζας ἀρτίας τάξεως δύο ἀριθμούς ἀντιθέτους μέ ἀπόλυτον τιμήν τήν ἀριθμητικήν του ρίζαν αὐτῆς τῆς τάξεως.

---

* Βλέπε (43.2).

Περίπτωσις 2α: $\mu=2\nu$, $A<0$. Κάθε πραγματικός ἀριθμός (θετικός ἤ ἀρνητικός) ὑψούμενος εἰς μίαν ἀρτίαν δύναμιν δίδει ἐξαγόμενον θετικόν. Ὥστε, ἡ ἰσότης $x^{2\nu}=A$ δέν ἱκανοποιεῖται διά τινα πραγματικήν τιμήν τοῦ x.

Περίπτωσις 3η: $\mu=2\nu+1$ $A\gtrless 0$. Ἐάν λ καί πάλιν ὀνομάσωμεν τήν ἀριθμητικήν ρίζαν τῆς $2\nu+1$ τάξεως τοῦ ἀριθμοῦ $|A|$ δυνάμεθα εἰς τήν ἔκφρασιν $x=\varepsilon\lambda\psi$ ὅπου $\varepsilon=\pm1$ νά περιλάβωμεν πᾶσαν τιμήν τοῦ ζητουμένου x ἐφόσον τό θετικόν ψ ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα:

$$x^{\mu}=\varepsilon^{2\nu+1}\lambda^{2\nu+1}\psi^{2\nu+1}=\varepsilon\lambda^{2\nu+1}\psi^{2\nu+1}=A.$$

Ἀφοῦ τά δύο μέλη αὐτῆς τῆς ἰσότητος πρέπει νά εἶναι ὁμόσημα συμπεραίνομεν ὅτι: Ἐάν $A>0$ θά πρέπει νά λάβωμεν $\varepsilon=1$ καί ἐάν $A<0$ θά πρέπει νά εἶναι $\varepsilon=-1$. Θά ἔχωμεν λοιπόν πάντοτε $\varepsilon.\lambda^{2\nu+1}=A$ καί τό ψ θά εἶναι ὁ θετικός ἀριθμός ὁ ὁποῖος θά ἱκανοποιῇ τήν ἰσότητα: $\psi^{2\nu+1}=1$ ἤ τήν ἰσότητα:

$$(\psi-1)(\psi^{2\nu}+\psi^{2\nu-1}+\ldots+\psi+1)=0$$

ἡ ὁποία δέν ἱκανοποιεῖται παρά διά $\psi=1$.

Συμπέρασμα: Ἡ ἰσότης $x^{\mu}=A$ εἰς τήν ἐξεταζομένην περίπτωσιν ἱκανοποιεῖται διά $x=\varepsilon\lambda$ μέ $\varepsilon=+1$ ἐάν $A>0$ καί μέ $\varepsilon=-1$ ἄν $A<0$.

Πᾶς λοιπόν θετικός ἤ ἀρνητικός ἀριθμός ἔχει μίαν μόνον ρίζαν περιττῆς τάξεως θετικήν ἤ ἀρνητικήν ἀντιστοίχως καί μέ ἀπόλυτον τιμήν τήν ἀριθμητικήν ρίζαν αὐτῆς τῆς τάξεως τοῦ $|A|$.

Παράδειγμα. Ἡ ἰσότης $x^4=16$ ἱκανοποιεῖται διά $x=\pm2$ καί ἡ ἰσότης $x^3=-8$ διά $x=-2$.

52. Ἐνδιαφέρουσα σημείωσις: Τά συμπεράσματα ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος δικαιολογοῦν διατί ἐμελετήσαμεν ἀρχικῶς τάς ἰδιότητας τῶν ἀριθμητικῶν ριζικῶν δηλ. διατί περιωρίσθημεν εἰς τήν περίπτωσιν $A>0$.

Ἐπί τῇ εὐκαιρίᾳ μάλιστα ὀφείλομεν νά τονίσωμεν ὅτι οἱ διαπιστωθέντες κανόνες δέν ἀφοροῦν παρά τά ἀριθμητικά ριζικά. Ὅλοι αὐτοί οἱ κανόνε βεβαιώνουν τήν ἰσότητα δύο ἀριθμῶν ἀπό τήν ἰσό-

τητα τῶν μιοστῶν των δυνάμεων. Καί ὅπως ἀπεδείξαμεν (43.1) αὐτό τό συμπέρασμα δέν συμβιβάζεται παρά μέ ἀριθμούς θετικούς.
Ἰδού παραδείγματα δεικνύοντα λάθη εἰς τά ὁποῖα δυνάμεθα νά περιπέσωμεν, ἐάν λησμονήσωμεν αὐτήν τήν σύστασιν.
Παράδειγμα 1ον. Πραγματοποιήσατε τό γινόμενον: $\sqrt[3]{-2}.\sqrt{3}$.
Ἐάν ἀναγάγωμεν χωρίς περίσκεψιν τά ριζικά εἰς τόν αὐτόν δείκτην θά γράψωμεν: $\sqrt[3]{-2}=\sqrt[6]{4}$ καί οὕτω θά δημιουργήσωμεν ἰσότητα ἑνός ἀρνητικοῦ καί ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ.
Πρέπει νά γράψωμεν: $\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}=-\sqrt[6]{4}$, $\sqrt{3}=\sqrt[6]{27}$. Καί ἐπομένως:
$\sqrt[3]{-2}.\sqrt{3}=-\sqrt[6]{4}.\sqrt[6]{27}=-\sqrt[6]{108}$
Γενικῶς τό γινόμενον: $\sqrt[2\mu+1]{a}.\sqrt[2\nu]{\beta}$ ὅπου $\beta>0$ δυνάμεθα νά τό ἐκφράσωμεν διά ἑνός ριζικοῦ κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον:
Ἐάν $a>0$ $\quad \sqrt[2\mu+1]{a}.\sqrt[2\nu]{\beta}=\sqrt[2\nu(2\mu+1)]{a^{2\nu}.\beta^{2\mu+1}}$
Ἐάν $a<0$ $\quad \sqrt[2\mu+1]{a}.\sqrt[2\nu]{\beta}=-\sqrt[2\nu(2\mu+1)]{a^{2\nu}.\beta^{2\mu+1}}$
Παράδειγμα 2ον. Ἄς θεωρήσωμεν τήν ἔκφρασιν:

$$a=\sqrt{x^2(x^2+x+1)}$$

Ἡ ἔκφρασις αὐτή καθορίζει ἕνα θετικόν ἀριθμόν δι' οἱανδήποτε πραγματικήν τιμήν τοῦ x. Προφανῶς ἔχομεν: $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$
Ἐάν τώρα θέσωμεν τό x ἐκτός τοῦ ριζικοῦ καί γράψωμεν:
$a=x\sqrt{x^2+x+1}$ θά ἔχωμεν δημιουργήσει μίαν ἀδυνατότητα διά τήν περίπτωσιν ὅπου $x<0$.
Ἡ ἀκριβής ἔκφρασις εἶναι: $a=|x|\sqrt{x^2+x+1}$.

53. Ἐκθέται κλασματικοί - Ἐκθέται ἀρνητικοί - Ἐκθέται Ἀσύμμετροι.

Θά ζητήσωμεν τήν σημασίαν τοῦ συμβόλου $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ ὅπου a πραγματικός θετικός ἀριθμός καί τά μ, ν, θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί, χωρίς ὅμως ὁ λόγος των $\frac{\mu}{\nu}$ νά εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.
Καί τήν σημασίαν αὐτοῦ τοῦ συμβόλου θά τήν ζητήσωμεν βάσει τῆς ἀρχῆς τῆς τεθείσης εἰς τό (9).
Ἐάν συμβῇ νά εἶναι $\mu=\nu.\lambda$ ὅπου λ ἀκέραιος, τότε, ὡς γνωστόν, θά εἶναι:

$$\sqrt[\nu]{a^{\mu}}=\sqrt[\nu]{a^{\nu\lambda}}=a^{\lambda}=a^{\frac{\mu}{\nu}} \quad (1)$$

Βλέπομεν λοιπόν ὅτι τό σύμβολον $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει τήν σημασίαν $\sqrt[\nu]{a^\mu}$, ἐφόσον τό $\frac{\mu}{\nu}$ ἀντιπροσωπεύει ἀριθμόν ἀκέραιον. Καί τίθεται τό ἐρώτημα: Δίδοντες εἰς τό σύμβολον τοῦτο τήν ἀνωτέρω σημασίαν καί διά τήν περίπτωσιν ὅπου τό $\frac{\mu}{\nu}$ δέν εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός θά διατηρηθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων*; Καί εἰς τό ἐρώτημά μας αὐτό θά θεωρήσωμεν τήν ἀπάντησιν καταφατικήν, ἐάν ἔχωμεν:

1ον. $a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\mu'}{\nu'}}$ (1) εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu'}{\nu'}$ (2)

$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^\mu}$ καί $a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu']{a^{\mu'}}$. Ἀλλά, $\sqrt[\nu]{a^\mu} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'}}$ καί $\sqrt[\nu']{a^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu'\nu}}$.

Ἐπειδή ὅμως $a^{\mu\nu'} = a^{\mu'\nu}$ λόγω τῆς (2) συμπεραίνομεν τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος (1) μέ τήν τεθεῖσαν σημασίαν τοῦ συμβόλου μας.

2ον. $a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$

$a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu]{a^\mu} \cdot \sqrt[\nu']{a^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'}} \cdot \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'+\mu'\nu}} = a^{\frac{\mu\nu'+\mu'\nu}{\nu\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$

Δηλ. καί πάλιν ἡ τεθεῖσα σημασία τοῦ συμβόλου μας ἐπέτρεψε τήν διατήρησιν τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῶν δυνάμεων.

Τήν ἰδιότητα αὐτήν ἐπεκτείνομεν ἐπί ὁσωνδήποτε δυνάμεων διά τῆς μεθόδου τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

3ον. $(a.\beta)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$

$(a.\beta)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a.\beta)^\mu} = \sqrt[\nu]{a^\mu.\beta^\mu} = \sqrt[\nu]{a^\mu} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^\mu} = a^{\frac{\mu}{\nu}} . \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$

Καί τήν ἰδιότητα αὐτήν δυνάμεθα νά ἐπεκτείνωμεν ἐπί γινομένου ὁσωνδήποτε παραγόντων μέ τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

4ον. $a^{\frac{\mu}{\nu}} : a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\mu'}{\nu'}}$ ὑποτίθεται $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\mu'}{\nu'}$

$a^{\frac{\mu}{\nu}} : a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu]{a^\mu} : \sqrt[\nu']{a^{\mu'}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'}} : \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'-\mu'\nu}} = a^{\frac{\mu\nu'-\mu'\nu}{\nu\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\mu'}{\nu'}}$

Τήν διατήρησιν τῆς τετάρτης ταύτης ἰδιότητος τῶν δυνάμεων μέ τήν δοθεῖσαν σημασίαν εἰς τό σύμβολόν μας ἠδυνάμεθα νά ἐξαρτήσωμεν ἐκ τῆς προηγουμένης ἰδιότητος. Ἠδυνάμεθα νά εἴπωμεν: Εἶναι ἡ ἀνωτέρω ἰσότης ἀληθής διότι, $a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\mu'}{\nu'}} . a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}}$ συμφώνως πρός τήν προηγουμ. ἰδιότητα.

5ον $(a^\mu)^{\frac{\nu}{\lambda}} = a^{\frac{\mu\nu}{\lambda}}$ ὅπου μ θετικός ρητός.

---

* Εἶναι βέβαια φανερόν, ὅτι τό σύμβολόν μας δέν ἔχει ἐκ τῶν προτέρων ἔννοιαν εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην.

1η Περίπτωσις: μ θετικός καί ἀκέραιος.

$$(\alpha^{\mu})^{\frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{(\alpha^{\mu})^{\nu}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\mu\nu}} = \alpha^{\frac{\mu\nu}{\lambda}}$$

2α Περίπτωσις: $\mu = \frac{\rho}{\kappa}$

$$\left(\alpha^{\frac{\rho}{\kappa}}\right)^{\frac{\nu}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\kappa]{\alpha^{\rho}}\right)^{\nu}} = \sqrt[\lambda]{\sqrt[\kappa]{\alpha^{\rho\nu}}} = \sqrt[\lambda\kappa]{\alpha^{\rho\nu}} = \alpha^{\frac{\rho\nu}{\lambda\kappa}}$$

6ον. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}} = \frac{\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

53.1. **Συμπεράσματα:** 1ον. Τό σύμβολον $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ὅπου α θετικός πραγματικός ἀριθμός καί μ, ν θετικοί καί ἀκέραιοι, δύναται νά συμπεριφέρεται ὡς δύναμις **ἐφόσον** δοθῆ εἰς αὐτό ἡ σημασία: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$. Δεχόμενοι δηλ. τήν ἰσότητα: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ ἐπεκτείνομεν τόν λογισμόν τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ἀκεραίους καί εἰς δυνάμεις μέ ἐκθέτας κλασματικούς, ἐνῶ συγχρόνως εὐκολύνομεν τόν λογισμόν ἐπί ριζικῶν, ἀνάγοντες τοῦτον εἰς λογισμόν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ρητούς.

2ον. Συνέπεια ἀκόμη τῶν ἀνωτέρω εἶναι, ὅτι ἡ διαφορά $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} - \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$ ἔχει τό πρόσημον τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$, ἄν α, β εἶναι τυχόντες θετικοί ἀριθμοί καί τά μ, ν θετικοί καί ἀκέραιοι.

Ἔχομεν προφανῶς: $\alpha^{\mu} - \beta^{\mu} = (\alpha-\beta)(\alpha^{\mu-1} + \alpha^{\mu-2}\cdot\beta + \alpha^{\mu-3}\cdot\beta^{2} + \dots + \beta^{\mu-1})$ καί ἡ διαφορά $\alpha^{\mu} - \beta^{\mu}$ ἔχει τό πρόσημον τῆς διαφορᾶς $\alpha - \beta$.

Ἐάν εἰς τήν ἀνωτέρω ἰσότητα ἀντικαταστήσωμεν τά α, β ἀντιστοίχως ὑπό τῶν $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καί $\beta^{\frac{1}{\nu}}$ βλέπομεν ὅτι ἡ διαφορά $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} - \beta^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἔχει τό αὐτό πρόσημον μέ τήν διαφοράν $\alpha^{\frac{1}{\nu}} - \beta^{\frac{1}{\nu}}$ ἤ μέ τήν διαφοράν $\alpha - \beta$ ἐφόσον $(\alpha^{\frac{1}{\nu}})^{\nu} = \alpha$ καί $(\beta^{\frac{1}{\nu}})^{\nu} = \beta$ καί ἐφόσον ἡ διαφορά δύο θετικῶν ἐκφράσεων ἔχει τό σημεῖον τῆς διαφορᾶς τῶν νιοστῶν των δυνάμεων, ἄν ν θετικός καί ἀκέραιος (43.1).

53.2. Παρατήρησις: Πᾶσα ρητή δύναμις τοῦ 1 ἰσοῦται μέ 1. Πράγματι, ἐάν μ, ν εἶναι θετικοί καί ἀκέραιοι, ἔχομεν: $1^{\mu} = 1$ καί $\sqrt[\nu]{1} = 1$.

---

* Διότι ἡ ἰσότης μας ἰσχύει δι' οἱουσδήποτε πραγματικούς ἀριθμούς α καί β ἄρα καί διά τούς $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καί $\beta^{\frac{1}{\nu}}$. Τό συμπέρασμά μας δέν εἶναι ὀρθόν ἐφόσον οἱ $\alpha^{\frac{1}{\nu}}$ καί $\beta^{\frac{1}{\nu}}$ εἶναι καί θετικοί.

Ὥστε, $1^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{1^{\mu}} = \sqrt[\nu]{1} = 1$.

54. Ἐκθέται ἀρνητικοί. Ἐάν a εἶναι ἕνας πραγματικός θετικός ἀριθμός καί x, ψ δύο θετικοί ρητοί τοιοῦτοι, ὥστε $x > \psi$, ἔχομεν (ἐδ.53, 4ον) $\frac{a^x}{a^\psi} = a^{x-\psi}$ (1).

Ἐάν ὅμως θελήσωμεν νά διατηρήσωμεν τήν ἀνωτέρω γραφήν διά τάς περιπτώσεις: $x = \psi$ καί $x < \psi$ εὑρίσκομεν: 1ον $a^0 = 1$ συμφώνως πρός τό (ἐδ. 53, 1ον) καί 2ον ἐάν $\psi = x + h$, ὅπου h θετικός ρητός, $\frac{a^x}{a^{x+h}} = \frac{1}{a^h} = a^{-h}$.

Δηλ. μέ τήν ἀνωτέρω σύμβασιν τῆς διατηρήσεως τῆς γραφῆς (1) δι' οἱουσδήποτε θετικούς ρητούς x, ψ ἐπανεύρομεν διά τά σύμβολα : a^0, a^{-h}, τά ὁποῖα ἐκ τῶν προτέρων δέν εἶχον ἔννοιάν τινα, τήν σημασίαν τήν ὁποίαν ἀπεδώσαμεν εἰς αὐτά, ὅταν ἐλογιζόμεθα ἐπί ἐκθετῶν x, ψ θετικῶν καί ἀκεραίων. Θά ἴδωμεν τώρα, ὅτι ἡ σύμβασις αὕτη ἔχει τό πλεονέκτημα τῆς διατηρήσεως τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων καί ἐπί ἐκθετῶν ρητῶν καί ἀρνητικῶν.

1ον. $a^x . a^\psi = a^{x+\psi}$. Ἐάν ὁ εἷς τῶν ἐκθετῶν, ὁ ψ π.χ. εἶναι ἀρνητικός καί ὀνομάσωμεν ψ' τήν ἀπόλυτόν του τιμήν, ἔχομεν: $a^x . a^\psi = a^x . a^{-\psi'} = a^x . \frac{1}{a^{\psi'}} = \frac{a^x}{a^{\psi'}} = a^{x-\psi'} = a^{x+\psi}$

Ἐάν καί οἱ δύο ἐκθέται x, ψ εἶναι ἀρνητικοί καί ἐάν x', ψ' ὀνομάσωμεν τάς ἀπολύτους των τιμάς ἀντιστοίχως, ἔχομεν:

$$a^x . a^\psi = a^{-x'} . a^{-\psi'} = \frac{1}{a^{x'}} . \frac{1}{a^{\psi'}} = \frac{1}{a^{x'+\psi'}} = a^{-(x'+\psi')} = a^{x+\psi}$$

Ἐάν ὁ εἷς τοὐλάχιστον τῶν ἐκθετῶν, ὁ ψ π.χ., εἶναι μηδέν ἔχομεν: $a^x . a^0 = a^x . 1 = a^x = a^{x+0}$

2ον. $\frac{a^x}{a^\psi} = a^{x-\psi}$. Ἄμεσος συνέπεια τῶν προηγουμένων.

3ον. $(a^x)^\psi = a^{x\psi}$. Ἐάν x θετικόν καί ψ ἀρνητικόν, θέτοντες $\psi = -\psi'$ λαμβάνομεν: $(a^x)^\psi = (a^x)^{-\psi'} = \frac{1}{(a^x)^{\psi'}} = \frac{1}{a^{x\psi'}} = a^{-x\psi'} = a^{x\psi}$

Ἐάν x ἀρνητικόν καί ψ θετικόν, θέτοντες $x = -x'$ λαμβάνομεν: $(a^x)^\psi = (a^x)^{-\psi'} = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^\psi = \frac{1}{(a^{x'})^\psi} = \frac{1}{a^{x'\psi}} = a^{x\psi}$

Ἐάν τά x, ψ ἀρνητικά ἔχομεν, ἐάν θέσωμεν $\psi = -\psi'$,

$$(a^x)^\psi = (a^{-x})^\psi = \frac{1}{(a^x)^{\psi'}} = \frac{1}{a^{x\psi'}} = a^{-x\psi'} = a^{x\psi}$$

Ἐάν $\psi = 0$, εὑρίσκομεν: $(a^x)^0 = 1 = a^0$

Ἐάν $x = 0$, » $(a^0)^\psi = 1^\psi = a^0$

Ἐάν $x = \psi = 0$, » $(a^0)^0 = 1^0 = 1 = a^0$

4ον. $(a\beta)^x = a^x.\beta^x$. Θέτοντες $x = -x'$ ἔχομεν:

$$(a\beta)^x = (a\beta)^{-x'} = \frac{1}{(a\beta)^{x'}} = \frac{1}{a^{x'}.\beta^{x'}} = \frac{1}{a^{x'}}\cdot\frac{1}{\beta^{x'}} = a^{-x'}.\beta^{-x'} = a^x.\beta^x$$

Ἐάν $x = 0$ λαμβάνομεν: $(a\beta)^0 = 1 = 1.1 = a^0.\beta^0$

54.1. **Παρατήρησις**: Πρέπει νά ἀποφεύγωμεν νά ἐφαρμόζωμεν εἰς ἀριθμούς ἀρνητικούς τόν συμβολισμόν τῶν κλασματικῶν ἐκθετῶν διότι ὑποκείμεθα εἰς λογισμόν ἐπί συμβόλων ἐστερημένων σημασίας.

Π.χ. $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ δέν ἔχει σημασίαν τινα

Ἀλλά $(-1)^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{(-1)^2} = 1$. Καί δέν δυνάμεθα φυσικά νά εἴπωμεν ὅτι $(-1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{4}}$.

55. **Ἐκθέται Ἄρρητοι. Ἡ ἐκθετική συνάρτησις.** Ὀνομάζομεν ἐκθετικήν συνάρτησιν τήν συνάρτησιν a^x, εἰς τήν ὁποίαν τό a εἶναι ἕνας ἀριθμός θετικός. Αὐτή ἡ συνάρτησις εἶναι τελείως ὡρισμένη διά πᾶσαν ρητήν (θετικήν ἤ ἀρνητικήν) τιμήν τοῦ x.

Πράγματι: Ἐάν τό x εἶναι ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός, ἡ συνάρτησις a^x ἀντιπροσωπεύει τό γινόμενον x παραγόντων ἴσων πρός τό a.

Ἐάν τό x εἶναι ἕνας θετικός κλασματικός ἀριθμός, τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου τά μ, ν εἶναι θετικοί ἀκέραιοι, ἡ συνάρτησις a^x ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν ἔκφρασιν $\sqrt[\nu]{a^\mu}$, ἥτις ἔχει πάντοτε ἔννοιαν ἀφοῦ τό a εἶναι θετικός ἀριθμός.

Ἐάν τό x εἶναι ἀρνητικός ρητός ἀριθμός ἔχομεν: $a^x = \frac{1}{a^{x'}}$, ὅπου x' εἰκονίζει τήν ἀπόλυτον τιμήν τοῦ x. Τέλος διά $x = 0$, ἡ a^x ἰσοῦται μέ 1.

Οὕτω βλέπομεν, ὅτι ἡ συνάρτησις a^x ἔχει πάντοτε μίαν τιμήν θετικήν.

Δέν ἐναπομένει πλέον παρά νά ὁρίσωμεν τήν συνάρτησιν a^x διά τιμάς ἀρρήτους τῆς μεταβλητῆς x. Θά στηριχθῶμεν πρός τοῦτο εἰς τά ἀκόλουθα θεωρήματα.

55.1 **Θεώρημα.** Ἐάν ὁ θετικός ἀριθμός a εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τήν μονάδα, ἡ συνάρτησις a^x εἶναι συνάρτησις αὔξουσα· ἐάν ὁ θετικός ἀριθμός a εἶναι μικρότερος ἀπό τήν μονάδα, ἡ συνάρτησις a^x εἶναι συνάρτησις φθίνουσα.

Ἔστωσαν x, ψ δύο τυχόντες ρητοί ἀριθμοί καί ἔστω $x > \psi$. Ἔχομεν:

$$a^x - a^\psi = a^\psi (a^{x-\psi} - 1)$$

Ἀφοῦ $x - \psi > 0$ ἡ διαφορά $a^{x-\psi} - 1$ ἔχει τό σημεῖον τῆς διαφορᾶς $a-1$ (53.1, 2ον) καί ἐπειδή ἡ ἔκφρασις a^ψ εἶναι ἀριθμός θετικός, ἕπεται, ὅτι ἡ διαφορά $a^x - a^\psi$ ἔχει τό σημεῖον τῆς διαφορᾶς $a - 1$. Οὕτω, ἐάν $a > 1$ ἔχομεν $a^x > a^\psi$ καί ἐάν $a < 1$, $a^x < a^\psi$.

55. 2. **Συνέπεια**. Τό ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τά συμπεράσματα:

Ἐάν $a > 1$, $x > 0$ τότε $a^{-x} < a^0 < a^x$ ἤ $a^{-x} < 1 < a^x$

Καί, ἐάν $a < 1$, $x > 0$ τότε $a^x < a^0 < a^{-x}$ ἤ $a^x < 1 < a^{-x}$

Δηλ. ὅτι:

Αἱ θετικαί δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος εἶναι μεγαλύτεραι τῆς μονάδος.

Αἱ ἀρνητικαί δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου τῆς μονάδος εἶναι μικρότεραι τῆς μονάδος.

Αἱ θετικαί δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος εἶναι μικρότεραι τῆς μονάδος.

Αἱ ἀρνητικαί δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μικροτέρου τῆς μονάδος εἶναι μεγαλύτεραι τῆς μονάδος.

55.3. **Θεώρημα**. Εἰς πάντα θετικόν ἀριθμόν ε, αὐθαιρέτως εἰλημμένον, ἀντιστοιχεῖ ἕνας θετικός ἀριθμός μ' τοιοῦτος, ὥστε διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x ἀπολύτως μικροτέραν ἀπό τό μ' νά ἔχωμεν:

$$|a^x - 1| < \varepsilon \qquad (1)$$

Ὑποθέτομεν: 1ον $a > 1$, $x > 0$.

Τότε $a^x > 1$ καί ἡ ἀνισότης (1) γράφεται: $a^x - 1 < \varepsilon$ ἤ $a^x < 1 + \varepsilon$. Θά ζητήσωμεν τώρα νά προσδιορίσωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν μ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν: $a^{\frac{1}{\mu}} < 1 + \varepsilon$ ἤ $a < (1+\varepsilon)^\mu$.

Ἀναπτύσσοντες τό $(1+\varepsilon)^\mu$ κατά τό διώνυμον τοῦ NEWTON βλέπομεν ὅτι $(1+\varepsilon)^\mu$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό $1 + \mu\varepsilon$. Ἑπομένως, ἐάν ὁρισθῇ τό μ, ὥστε νά ἔχωμεν $a<1+\mu\varepsilon$ ἤ $\mu>\frac{a-1}{\varepsilon}$ θά ἔχωμεν ἀσφαλῶς καί $a<(1+\varepsilon)^{\mu}$ ἤ $a^{\frac{1}{\mu}}<1+\varepsilon$.

Δυνάμεθα λοιπόν νά εἴπωμεν: Ἐάν μ' ἀντιπροσωπεύῃ τόν ἀντίστροφον ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τόν ἀριθμόν $\frac{a-1}{\varepsilon}$, θά ἔχωμεν $a^{\mu'}<1+\varepsilon$. Ἑπομένως, διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x θετικήν καί μικροτέραν ἀπό τό μ', θά ἔχωμεν: $a^{x}<a^{\mu'}<1+\varepsilon$ ἤ $a^{x}-1<\varepsilon$ δηλ. αὐτό τό ὁποῖον ἠθέλαμεν νά ἀποδείξωμεν.

2ον. $a>1$, $x<0$. Θέτομεν $x=-x'$ ὅπου $x'>0$. Ἔχομεν: $a^{x}=\frac{1}{a^{x'}}$. Ἀλλά συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω $a^{x'}-1<\varepsilon'$* ἤ $a^{x'}<1+\varepsilon'$ ἤ $\frac{1}{a^{x'}}>\frac{1}{1+\varepsilon'}$ ἤ $a^{x}>\frac{1}{1+\varepsilon'}$ καί: $a^{x}-1>\frac{-\varepsilon'}{1+\varepsilon}$. Ἐπειδή δέ (55.2) $a^{x}-1<0$ καί συνεπῶς $a^{x}-1<\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon}$ συμπεραίνομεν (ἄσκ. 57) ὅτι: $|a^{x}-1|<\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$ ἤ $|a^{x}-1|<\varepsilon$ ἄν θέσωμεν $\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}=\varepsilon$ καί φυσικά διά τιμάς τοῦ x ἀπολύτως μικροτέρας τοῦ ἀναφερθέντος εἰς τήν ὑποσημείωσιν θετικοῦ ἀριθμοῦ μ'.

3ον. $a<1$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην θέτομεν $\frac{1}{a}=\beta$ θά ἔχωμεν τότε: $a^{x}=\frac{1}{\beta^{x}}$ ἐνῶ $\beta>1$. Καί δυνάμεθα καί πάλιν νά διαπιστώσωμεν τήν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματός μας, ἄν ἐργασθῶμεν μέ τό β^{x}.

55.4. Προσδιορισμός τῆς a^{x}, ὅταν τό x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.

Θά ὑποθέσωμεν ὅτι $a>1$ διότι ὁ προσδιορισμός εἶναι ἀνάλογος ὅταν $a<1$. Ἄς θεωρήσωμεν τάς ἀκολουθίας:

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \dots x_\nu \dots$$
$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \dots x'_\nu \dots$$

αἱ ὁποῖαι ὁρίζουν τόν ἄρρητον ἀριθμόν x.

Ἀπό τάς ἀκολουθίας ταύτας σχηματίζομεν ἐπίσης τάς ἀκολουθίας:

$$\begin{array}{l} a^{x_1},\ a^{x_2},\ a^{x_3},\dots a^{x_\nu},\dots \\ a^{x'_1},\ a^{x'_2},\ a^{x'_3},\dots a^{x'_\nu},\dots \end{array} \qquad (\lambda)$$

Αἱ ἀκολουθίαι (λ) ὑπακούουν εἰς τάς ἰδιότητας τῶν ἀκολουθιῶν τοῦ (33.1). Πράγματι: 1ον. Κατά τό θεώρημα (55.1) οἱ ὅροι τῆς πρώτης τῶν

---

* Ἐννοοῦμεν φυσικά, ὅτι ἡ ἀνισότης αὕτη ἰσχύει ὑπό τούς ὅρους, τούς ὁποίους θέτει ἡ ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματός μας. Δηλαδή διά τιμάς τοῦ θετικοῦ x' μικροτέρας τοῦ μ', ἄν τό μ' μᾶς ἐπιτρέπει νά ἔχωμεν $a^{\mu'}<1+\varepsilon$.

(λ) βαίνουν αὐξανόμενοι καὶ οἱ ὅροι τῆς δευτέρας τῶν (λ) βαίνουν ἐλαττούμενοι. 2ον. Κατὰ τὸ αὐτὸ θεώρημα κάθε ὅρος τῆς πρώτης τῶν (λ) εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν κάθε ὅρο τῆς δευτέρας. 3ον. Ἡ διαφορὰ $a^{x'_\nu} - a^{x_\nu}$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά, ὅταν τὸ ν αὐξάνει ἀπεριορίστως. Αὐτὸ τὸ 3ον συμπέρασμα θὰ τὸ ἀποδείξωμεν.
Ἔχομεν: $a^{x'_\nu} - a^{x_\nu} = a^{x_\nu}(a^{x'_\nu - x_\nu} - 1)$. Ἂν K εἶναι ἕνας ρητὸς ἀριθμὸς αὐθαίρετα ἐκλεγόμενος μὰ ὡρισμένος, μεγαλύτερος δὲ ἀπὸ τὸν x, θὰ ἔχωμεν: $x_\nu < K$ καὶ $a^{x_\nu} < a^K$. Ὥστε, $a^{x'_\nu} - a^{x_\nu} < a^K(a^{x'_\nu - x_\nu} - 1)$.
Ἡ ἀνισότης πάλιν, $a^K(a^{x'_\nu - x_\nu} - 1) < \varepsilon$ ἢ $a^{x'_\nu - x_\nu} - 1 < \frac{\varepsilon}{a^K}$ (1) εἶναι ἀληθής, ἐὰν ἔχωμεν: $x'_\nu - x_\nu < \varepsilon'$, ὅπου τὸ ε' εἶναι ὁ ἀντίστροφος ἑνὸς ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπὸ τὸ $\dfrac{a-1}{\frac{\varepsilon}{a^K}}$ (55.3). Ἐπειδὴ δέ, ὅπως εἶναι γνωστὸν δυνάμεθα πάντοτε νὰ εὕρωμεν δύο ἀριθμοὺς x_ν καὶ x'_ν, οἵτινες νὰ ἔχουν διαφορὰν μικροτέραν τοῦ ε', συμπεραίνομεν ὅτι διὰ τοιούτους ἀριθμοὺς ἡ ἀνισότης (1) θὰ εἶναι ἀληθὴς καὶ κατ' ἀκολουθίαν καὶ ἡ ἀνισότης:

$$a^{x'_\nu} - a^{x_\nu} < \varepsilon$$

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω, μᾶς εἶναι εὔκολον νὰ ὁρίσωμεν τὴν συνάρτησιν a^x διὰ x ἀσύμμετρον.
Αἱ ἀκολουθίαι (λ) πληροῦν τὰς ἰδιότητας τοῦ (39.1) καὶ συνεπῶς θὰ ὁρίζουν μίαν* τομήν. Αὐτὴ ἡ τομὴ ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι ὁ ἀριθμὸς a^x.
Σημειώνομεν, ὅτι, ἂν $a<1$ θέτομεν $a = \frac{1}{\beta}$ καὶ ἔχομεν $a^x = \frac{1}{\beta^x} = \beta^{-x}$. Καὶ ἐπειδὴ γνωρίζομεν νὰ ὁρίσωμεν τὸν $-x$ (39.2) ἐννοοῦμεν, κατόπιν τῶν ὅσων προηγήθησαν, τὸν τρόπον μὲ τὸν ὁποῖον θὰ ἐργασθῶμεν διὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ β^{-x}.
56. Δὲν ἐναπομένει λοιπὸν πλέον παρὰ νὰ δείξωμεν τὴν ἐπέκτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων καὶ διὰ ἐκθέτας ἀρρήτους.
1ον. $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$
Ἂς ὑποθέσωμεν πὼς οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοὶ x_1, x_2 ὁρίζονται ἀντι-

* Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχουν δύο τομαί, οἱ ἀριθμοὶ M καὶ N, $(M>N)$, θὰ ἔχωμεν: $a^{x_\nu} < N < M < a^{x'_\nu}$ καὶ συνεπῶς $a^{x'_\nu} - a^{x_\nu} > M - N$. Οὕτω ὁδηγούμεθα εἰς ἄτοπον συμπέρασμα ἐπειδὴ ἡ διαφορὰ $a^{x'_\nu} - a^{x_\nu}$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά.

στοίχως ἀπό τάς τομάς ψ_ν/ψ'_ν, ω_ν/ω'_ν δηλ. ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι: $x_1+x_2=\psi_\nu+\omega_\nu/\psi'_\nu+\omega'_\nu$ (41.1).

Ἔχομεν προφανῶς: $a^{x_1}.a^{x_2}=a^{\psi_\nu/\psi'_\nu}.a^{\omega_\nu/\omega'_\nu}=a^{\psi_\nu+\omega_\nu/\psi'_\nu+\omega'_\nu}=a^{x_1+x_2}$ συμφώνως πρός τά διαλαμβανόμενα εἰς τά ἐδάφια (41.1, 41.4).

Εἶναι εὔκολον εἰς ἡμᾶς νά γενικεύσωμεν κατά τά γνωστά τήν ἀνωτέρω ἰδιότητα καί νά ἔχωμεν:

$$a^{x_1}.a^{x_2}\dots a^{x_\nu}=a^{x_1+x_2+\dots+x_\nu} \qquad (1)$$

2ον. $(a^x)^\nu=a^{\nu x}$ ὅπου ν ἀκέραιος καί θετικός.

Ἐάν εἰς τήν ἀνωτέρω ἰσότητα (1) ἔχωμεν: $x_1=x_2=\dots=x_\nu=x$ δημιουργεῖται ἡ ὑπό βεβαίωσιν ἰσότης.

3ον. $a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2}$

Διότι: $a^{x_1-x_2}.a^{x_2}=a^{x_1}$.

Ἀσκήσεις.

250. Μεταξύ δύο οἱωνδήποτε ρητῶν ὑπάρχει πάντοτε ρητός καί ἑπομένως ἀπειρία ρητῶν.

Ἐάν ἔχωμεν τούς ρητούς ρ, ρ' καί εἶναι $\rho<\rho'$ εἶναι φανερόν, ὅτι ἔχομεν καί: $\rho<\frac{\rho+\rho'}{2}<\rho'$. Ἐφεξῆς γίνεται φανερά ἡ ὕπαρξις ἀπειρίας ρητῶν.

251. Μεταξύ δύο οἱωνδήποτε πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχει πάντοτε ρητός καί ἑπομένως ἀπειρία ρητῶν.

1ον. Ἔστωσαν ὁ ρητός ρ καί ὁ ἀσύμμετρος a, ἐνῶ ἔχομεν $\rho<a$. Ἐάν ὁ a ὁρίζεται ἀπό τήν τομήν A/A' αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ ρ εἶναι μικρότερος ὅρου τινός A_1 τῆς A καί συνεπῶς ἔχομεν $\rho<A_1<a$. Ἡ ὕπαρξις τώρα ἀπειρίας ρητῶν ἱκανοποιούντων τήν πρότασίν μας δικαιολογεῖται ἀπό τήν προηγουμένην ἄσκησιν (250).

2ον. Ἄς ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι ἔχομεν δύο ἀσυμμέτρους τούς a καί a' καί ὅτι εἶναι $a<a'$. Ὁ τρόπος συγκρίσεως τῶν ἀριθμῶν τούτων μαζί μέ τήν 1ην περίπτωσιν τῆς προτάσεώς μας εἶναι ἱκανά διά νά ἀποδείξωμεν τήν πρότασίν μας καί εἰς τήν δευτέραν αὐτήν περίπτωσιν.

252. Μεταξύ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν ὑπάρχουν ἄπειροι ἀσύμμετροι ἀριθμοί.

Ἔστωσαν οἱ πραγματικοί ἀριθμοί α, β καί $\alpha<\beta$. Ἐάν γ εἶναι κάποιος ἀσύμμετρος τότε: $\alpha-\gamma<\beta-\gamma$. Ἀλλά κατά τήν (ἄσκησιν 251) ὑπάρχει ρητός ρ, ὥστε νά ἔχωμεν $\alpha-\gamma<\rho<\beta-\gamma$ δηλαδή $\alpha<\rho+\gamma<\beta$. Ὁ ἀσύμμετρος λοιπόν $\rho+\gamma$ ἱκανοποιεῖ τήν πρότασίν μας καί ἐπειδή ὁ γ εἶναι ὁ τυχών ἀσύμμετρος δικαιολογεῖται ἡ ὕπαρξις ἀπείρων ἀσυμμέτρων ἱκανοποιούντων τό θέμα μας.

253. Ἁπλοποιήσατε τά ριζικά καί ἐκτελέσατε τάς σημειωμένας πράξεις:

$$\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48} \qquad 8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}$$

$$2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \sqrt{45\gamma^3}-\sqrt{80\gamma^3}+\sqrt{5a^2\gamma} \quad (a,\gamma>0)$$

$$\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2\beta}} \quad (x.(a+\beta)>0) \qquad \sqrt{\frac{\alpha}{a^2\beta\delta-2a\beta^2\delta+\beta^3\delta}} \quad (a\beta\delta>0)$$

254. Ὑπολογίσατε τάς παραστάσεις:

$$x=\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}} \qquad \psi=\sqrt[\nu-1]{\frac{a}{\sqrt[\nu]{a}}}$$

$$x=\frac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}} \qquad \psi=\frac{\sqrt[3]{9}\sqrt{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27}.\sqrt{6}}$$

255. Ἁπλοποιήσατε τάς παραστάσεις:

$$\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{2}}.\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\ \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

256. Τό αὐτό διά τάς παραστάσεις:

$$\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\cdot\sqrt{4a^2-x^2}\cdot\sqrt{2a+x}\ , \qquad \left(\sqrt{x(2a-x)}\right)^5\left(\sqrt{\frac{2a+x}{2a-x}}\right)^3\sqrt{4a^2-x^2}$$

$$\frac{\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^4-a^4}{4\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right)^2} \qquad \frac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$$

$$\frac{a^3-2\sqrt[4]{a^2\beta^3}-a^2\sqrt[6]{a^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{\beta}}$$

257. Διαπιστώσατε τήν ἀλήθειαν τῶν ἰσοτήτων:

$$\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}\ , \qquad \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$$

$$\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}\;, \qquad \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$$

$$\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$$

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

258. Διαπιστώσατε τήν ταυτότητα:

$$\sqrt{2}\left(2a+\sqrt{a^2-\beta^2}\right)\sqrt{a-\sqrt{a^2-\beta^2}}\equiv\sqrt{(a+\beta)^3}-\sqrt{(a-\beta)^3}$$

ὑποθέτοντες $a>0,\ \beta>0,\ a>\beta$.

259. Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν ἑπομένων παραστάσεων διά τάς σημειουμένας τιμάς τοῦ x.

$x(x+1)(x+2)(x+3)$ διά $x=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$

x^3+3x διά $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

$x^3+\lambda x+\mu$ διά $x=\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}+\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\mu}{2}\sqrt{\frac{\mu^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$

$\dfrac{2\beta\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ διά $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{\beta}}-\sqrt{\frac{\beta}{a}}\right)$ $(a>0,\ \beta>0)$

$\dfrac{x^2+ax+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$ διά $x=\sqrt{\dfrac{\beta^2-a\gamma}{a-\beta}}$

260. Ἐάν οἱ θετικοί ἀριθμοί $a, a', a'', \beta, \beta', \beta''$ ἱκανοποιοῦν τάς ἰσότητας: $\frac{a}{\beta}=\frac{a'}{\beta'}=\frac{a''}{\beta''}$ θά ἔχωμεν ἀκόμη

$$\sqrt{a\beta}+\sqrt{a'\beta'}+\sqrt{a''\beta''}=\sqrt{(a+a'+a'')(\beta+\beta'+\beta'')}$$

Τό ἀντίστροφον ἐπίσης εἶναι ἀληθές.

261. Μετασχηματίσατε τάς κάτωθι παραστάσεις εἰς ἰσοδυνάμους μέ ρητούς παρονομαστάς.

$$\frac{1}{2+\sqrt[4]{32}},\quad \frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}},\quad \frac{1}{3+\sqrt[3]{4}},\quad \frac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}},\quad \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$$

$$\frac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{12}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}},\quad \frac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{a+\beta}},$$

262. Ἐκφράσατε τάς ἑπομένας παραστάσεις συναρτήσει ἁπλῶν ριζικῶν.

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{a^2-\gamma^2}}\qquad \sqrt{\frac{3a}{\beta}+\sqrt{\frac{12a^3\gamma^2}{\beta\delta^2}-\frac{4a^4\gamma^4}{\delta^4}}}$$

$$\sqrt{\beta^2-a\beta+\frac{a^2}{4}+\sqrt{4a\beta^3-8a^2\beta^2+a^3\beta}}\;,\qquad \sqrt{\frac{a^2\beta-a\beta^2}{\gamma}\pm\sqrt{\frac{-4a^3\beta^3}{\gamma^2}}}$$

263. Ἁπλοποιήσατε τάς παραστάσεις:

$$\frac{a^2 - a^{3/2}x^{1/2} - 2a^{1/2}x^{1/4} + 2x^{3/4}}{a^{1/2} - x^{1/2}} \qquad \frac{a - x + 4a^{1/4}x^{3/4} - 4a^{1/2}x^{1/2}}{a^{1/2} + 2a^{1/4}x^{1/4} - x^{1/2}}$$

$$\frac{1 + x - \frac{3}{2}x^{1/3}(1 + x^{1/2}) + x^{1/2}\left(2 + \frac{9}{16}x^{1/6}\right)}{1 - \frac{3}{4}x^{1/3} + x^{1/2}}$$

$$\left(\sqrt[x]{a^{-\frac{2}{\psi}}} + \sqrt[\rho]{a^{\frac{1}{\psi}}}\cdot\beta + 2\sqrt{\sqrt[\rho]{\beta}}\sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[\psi]{\sqrt[\rho]{a^{x-2\rho}}}}}\right)^{1/2}$$

264 Ἐπαληθεύσατε τάς ταυτότητας:

1ον. $\sqrt{a^2 + \sqrt[3]{a^4\beta^2}} + \sqrt{\beta^2 + \sqrt[3]{a^2\beta^4}} \equiv \left(a^{2/3} + \beta^{2/3}\right)^{3/2}$

2ον. $\left[\dfrac{a + (a^2 - \beta)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} + \left[\dfrac{a - (a^2 - \beta)^{1/2}}{2}\right]^{1/2} \equiv (a + \beta^{1/2})^{1/2}$.

265. Νά δειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον : $f(x) \equiv x^3 - a^{-2/3}\beta^{-1}\cdot(a^2 + \beta^2)x + \beta^{1/2}$ μηδενίζεται διά $x = a^{2/3}\beta^{-1/2}$. Ὑπολογίσατε ἀκόμη τό πηλίκον $f(x)$ διά τοῦ διωνύμου $x - a^{2/3}\beta^{-1/2}$.

266 Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:

$$\frac{a^{1/2} - \left[a - (a^2 - ax)^{1/2}\right]^{1/2}}{a^{1/2} + \left[a - (a^2 - ax)^{1/2}\right]^{1/2}} \quad \text{διά } x = a\left[1 - \frac{16\beta^2}{(1+\beta)^4}\right] \qquad \begin{matrix} a > 0 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$

267. Τό αὐτό διά τήν παράστασιν:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2 - \beta^2}{a^2 + \beta^2}\left(x^{1/\lambda} + x^{1/\mu}\right) \quad \text{διά } x = \left(\frac{a + \beta}{a - \beta}\right)^{\frac{2\lambda\mu}{\mu - \lambda}}$$

Τά λ, μ ἐκπροσωποῦν δύο οἱουσδήποτε ρητούς ἀριθμούς θετικούς ἤ ἀρνητικούς) καί τό $\dfrac{a+\beta}{a-\beta}$ εἶναι ἕνας θετικός ἀριθμός.

268. Μετασχηματίσατε εἰς ἰσοδύναμον καί ρητήν τήν ἰσότητα:

$$(ax)^{2/3} + (\beta\psi)^{1/3} = y^{4/3}$$

269. Τό αὐτό διά τήν ἰσότητα : $(x\psi)^{1/3}\cdot\left(x^{2/3} + \psi^{2/3}\right)^2 = a^2$

270. Τό αὐτό διά τήν ἰσότητα: $\left(x^{2/3} + \psi^{2/3}\right)x^{2/3}\psi^{2/3} = \rho^2$

271. Τό αὐτό διά τήν ἰσότητα:

$$(x^2 + \psi^2)^2 = \left[(ax)^{2/3} + (\beta\psi)^{2/3}\right]\left[(ax)^{2/3} - (\beta\psi)^{2/3}\right]$$

272. Δεδομένου ὅτι τά a, β, γ ἐκπροσωποῦν θετικούς ἀριθμούς εὕρητε τήν ἐκ τῆς ἀρρήτου ἰσότητος $\sqrt[3]{a} + \sqrt{\beta} + \gamma = 0$ δημιουργουμένην ρητήν ἰσότητα.

273. Τό αὐτό μέ τήν προηγουμένην ἄσκησιν ἀπό τήν ἰσότητα:

$$\sqrt[\mu]{\alpha} + \sqrt{\beta} + \gamma = 0$$

274. Ἐπαληθεύσατε τάς ἰσότητας:

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} + \sqrt{17-12\sqrt{2}} = 6 \qquad \sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = 4$$

$$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6 \qquad \sqrt[3]{54+30\sqrt{3}} + \sqrt[3]{54-30\sqrt{3}} = 6$$

275. Δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}} = x \quad (x^2>4)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Θεωρία τῶν Μιγαδικῶν Ἀριθμῶν

57. Ὀνομάζομεν **Ἀλγεβρικήν ἐξίσωσιν** μέ ἕνα ἄγνωστον τήν ἰσότητα, ἡ ὁποία προκύπτει, ἄν ἕνα πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς ἐξισωθῆ μέ τό μηδέν. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ βαθμός τῆς ἐξισώσεως.

Οὕτως, ἐάν ἔχωμεν : $f(x) \equiv a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, ἡ ἰσότης: $f(x)=0$ εἶναι μία ἀλγεβρική ἐξίσωσις μ βαθμοῦ. Οἱ συντελεσταί a_0, $a_1 a_2 \ldots a_\mu$ τοῦ πολυωνύμου ὀνομάζονται ἐπίσης συντελεσταί τῆς ἐξισώσεως.

Ὀνομάζεται ρίζα ἤ λύσις τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ ἕνας πραγματικός ἀριθμός a τοιοῦτος, ὥστε ἡ ἰσότης $f(a)=0$ νά εἶναι μία ἀριθμητική ἰσότης ἤ καλλίτερον μία ἀριθμητική ταυτότης.

Συνηθίζομεν μάλιστα νά λέγωμεν τότε, ὅτι ὁ a ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωσιν.

Ὁ a ὀνομάζεται ἐπίσης καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$. Δηλαδή ρίζα ἑνός πολυωνύμου εἶναι ὁ ἀριθμός, ὁ ὁποῖος τό μηδενίζει.

Ἡ στοιχειώδης Ἄλγεβρα διδάσκει τήν λύσιν τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου βαθμοῦ καί μάλιστα, ὡς θά ἴδωμεν εἰς τό 2ον μέρος τοῦ παρόντος βιβλίου, δίδει τύπους, οἵτινες ἐκφράζουν τάς ζας των ἀπό τούς συντελεστάς τών. Κατ᾽ ἀνάλογον τρόπον, ἄν καί ὄχι μέ τόσην εὐκολίαν, γίνεται ἡ λύσις τῶν ἐξισώσεων τοῦ 3ου καί 4ου βαθμοῦ. Ὅσον ἀφορᾶ τάς ἐξισώσεις, αἵτινες εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ 4ου δέν δυνάμεθα νά ἔχωμεν τύπους, οἱ ὁποῖοι νά μᾶς δίδουν τάς ρίζας των ἀπό τούς συντελεστάς των. Αἱ ρίζαι τῶν ἐξισώσεων εὑρίσκονται μέ τήν χρησιμοποίησιν τῶν ἰδιοτήτων των καί ἡ σπουδή τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν εἶναι ἔργον τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῶν ἐξισώσεων. Ἡ ἀνάπτυξις ὅμως τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων γίνεται εἰς τήν Ἀνωτέραν Ἄλγεβραν.

58. Ἄς θεωρήσωμεν τώρα τήν δευτ/ον ἐξίσωσιν: $ax^2+\beta x+\gamma=0$. Δυνάμεθα νά τήν γράψωμεν καί οὕτω:

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{a}x+\frac{\gamma}{a}\right)=0 \quad \text{ἤ} \quad a\left[\left(x+\frac{\beta}{2a}\right)^2+\frac{4a\gamma-\beta^2}{4a^2}\right]0 \qquad (1)$$

Ἄν ἡ παράστασις $\frac{4a\gamma-\beta^2}{4a^2}$ ἐκπροσωπῇ ἀριθμόν θετικόν, ἡ ἐξίσωσις (1) γράφεται: $a.\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]^*=0$ (2) καί εἶναι φανερόν, ὅτι δέν ὑφίσταται πραγματική τιμή τοῦ x διά τήν ὁποίαν θά ἔχωμεν: $(x-\lambda)^2+\mu^2=0$ (3) ἐφ᾽ ὅσον $\mu\neq 0$.

Ἐάν τώρα θέσωμεν εἰς τήν (3) $x=\lambda+\mu\psi$ λαμβάνομεν: $\mu^2(\psi^2+1)=0$ ἤ $\psi^2+1=0$ (4) διαπιστουμένου οὕτω, ὅτι ἡ ἀδυναμία μας νά δώσωμεν λύσιν εἰς τήν (1) ἀνάγεται εἰς τήν ἀδυναμίαν μας νά δώσωμεν λύσιν εἰς τήν (4). Ἡ ἄρσις αὐτῆς τῆς ἀδυναμίας μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τήν εἰσαγωγήν συμβόλου μέ τήν ἰδιότητα, τό τετράγωνόν του νά ἰσοῦται μέ -1. Ὡς τοιοῦτον σύμβολον λαμβάνομεν κατά πρότασιν τοῦ Euler τό i ἀρχικόν τῆς λέξεως imaginaire καί συνεπῶς δεχόμεθα ὅτι $i^2=-1$.

Ἡ εἰσαγωγή ὅμως τοῦ νέου μοναδιαίου ἀριθμητικοῦ συμβόλου, συνεπάγεται, ὡς γνωστόν, τήν δημιουργίαν νέου συστήματος ἀριθμῶν καί συνεπῶς ἐπέκτασιν τῆς ἤδη ὑφισταμένης ἐννοίας τοῦ ἀριθμοῦ. Ἀλλά μία τοιαύτη ἐπέκτασις ἀπαιτεῖ τόν πλήρη καθορισμόν αὐτῶν τούτων τῶν ἀριθμῶν τοῦ νέου συστήματος, ἀλλά καί τοῦ τρόπου συμπεριφορᾶς των

---

* Ἐθέσαμεν: $\frac{\beta}{2a}=-\lambda$, $\frac{4a\gamma-\beta^2}{4a}=\mu^2$

μεταξύ των καί πρός τά παλαιά σύμβολα, τούς πραγματικούς ἀριθμούς. Δέν ἔχομεν φυσικά (2) παρά οἱ ὁρισμοί τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων νά γίνουν, ὥστε νά τηρηθοῦν αἱ βασικαί ἰδιότητες τῶν πράξεων, πού ἰσχύουν διά τούς πραγματικούς ἀριθμούς.
Οὕτω δεχόμεθα ἐπίσης ὅτι $(-1)^2=-1$ καί ἀποφασίζομεν νά συμπλέκωμεν τό i μέ τά παλαιά μας σύμβολα, τούς πραγματικούς ἀριθμούς, μέ τά ἴδια σύμβολα τῶν πράξεων. Ὥστε, $\pm\mu i$ θά σημαίνη τό γινόμενον τοῦ πραγματικοῦ $\pm\mu$ ἐπί τό i καί $\lambda\pm\mu i$ θά εἶναι ἕνα νέον ἀριθμητικόν σύμβολον προερχόμενον ἀπό τό ἄθροισμα τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ λ καί τοῦ φανταστικοῦ μi πού ὀνομάζεται οὕτω ἐπειδή, καί ὄχι ὀρθῶς, ὠνομάσθη τό i φανταστική μονάς *. Τό νέον αὐτό σύμβολον ὀνομάζεται μιγάς, περιέχει δέ καί τά παλαιά σύμβολα τούς πραγματικούς ἀριθμούς, ἄν δεχθῶμεν τήν ἰσότητα: $0.1=0$.
Τό σύμβολον λοιπόν $\alpha+\beta i$ εἶναι μία γενικωτέρα τῆς παλαιᾶς ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ, ἐνῶ ἡ παλαιά ἀποτελεῖ μίαν κατηγορίαν της.
Ἀπό τά ἀνωτέρω ἐξάγεται τό συμπέρασμα, ὅτι, ἐάν ἡ $f(x)=0$ εἶναι μία ἐξίσωσις 2ος, ἔχει αὐτη μιγαδικήν ἤ φανταστικήν ρίζαν, ἐάν ἡ παράστασις $f(\lambda+\mu i)$ εἶναι παράστασις διαιρετή μέ τό i^2+1 δηλ. εἶναι παράστασις, πού μηδενίζεται, ἄν θέσωμεν ἀντί τοῦ i^2 τό -1.
Αὐτόν τόν ὁρισμόν τῆς μιγαδικῆς ρίζης δυνάμεθα νά τόν ἐπεκτείνωμεν ἐπί ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως οἱουδήποτε βαθμοῦ. Θά χρειασθῆ πρός τοῦτο νά ἐκτιμήσωμεν τά ἰσοδύναμα τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ i καί τοῦ $-i$.
Ὡς γνωστόν δέν ὑφίσταται φυσικός ἀριθμός, πού νά μή μορφοῦται εἰς τήν ἔκφρασιν: $4q+r$ ὅπου $r=0,1,2,3$. Οὕτω πᾶσα δύναμις τοῦ i θά ἀνήκη εἰς μίαν τῶν κατηγοριῶν: i^{4q}, i^{4q+1}, i^{4q+2}, i^{4q+3}.
Καί ἔχομεν:

---

* Καί λέγομεν ὄχι ὀρθῶς διότι ἡ εἰσαγωγή τοῦ νέου αὐτοῦ συμβόλου δέν εἶχε αἰτίαν διάφορον ἐκείνης δι' ἥν εἰσήχθησαν τά σύμβολα τῶν ἄλλων μονάδων.

$$i^{4q}=1\,,\ i^{4q+1}=i\,,\ i^{4q+2}=-1\,,\ i^{4q+3}=-i$$

Ἐπίσης, $(i)^{4q}=1$, $(-i)^{4q+1}=-i$, $(-i)^{4q+2}=-1$, $(i)^{4q+3}=i$

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι αἱ δυνάμεις τοῦ i, πού μᾶς δίδουν πραγματικόν ἐξαγόμενον εἶναι ἐκεῖναι, πού μᾶς δίδουν καί διά τό $-i$ πραγματικόν ἐξαγόμενον καί τό αὐτό, ἐνῶ αἱ δυνάμεις τοῦ i, πού μᾶς δίδουν φανταστικόν ἐξαγόμενον εἶναι ἐκεῖναι, πού μᾶς δίδουν καί διά τό $-i$ φανταστικόν ἐξαγόμενον ἀλλά μέ ἀντίθετον πρόσημον.

Εἶναι γνωστόν (37) ὅτι ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον $f(x)$ δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν: $f(x)=\varphi(x^2)+x\varphi_1(x^2)$ * (1) καί ὅτι συνεπῶς ἡ ἔκφρασις: $\varphi(-1)+x\varphi_1(-1)$ ** (2)(37.1) ἐκφράζει τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διά τοῦ x^2+1.

Ἐάν τώρα ἡ ἔκφρασις (2) εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν σημαίνει ὅτι ἡ (1) ἦτο παράστασις διαιρετή διά τοῦ x^2+1.

Οὕτω, θέτοντες εἰς τό πολυώνυμόν μας $f(x)$ ἀντί τοῦ x τό $\lambda+\mu i$ δημιουργοῦμεν ἕνα πολυώνυμον τοῦ i, δυνάμενον προφανῶς, νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν: $f_1(i^2)+if_2(i^2)$ (4) καθ' ὅν τρόπον τό $f(x)$ ἔλαβε τήν μορφήν (1). Ἡ ἔκφρασις πάλιν: $f_1(-1)+if_2(-1)$ (5) ἐκπροσωπεῖ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(\lambda+\mu i)$ διά τοῦ i^2+1 καθ' ὅν τρόπον ἡ (2) ἐκπροσωποῦσε τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $f(x)$ διά τοῦ x^2+1. Συνεπῶς εἰς περίπτωσιν ὅπου ἡ (5) εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν, αὐτό σημαίνει, ὅτι ἡ παράστασις (1) δηλ. ἡ $f(\lambda+\mu i)$, εἶναι παράστασις διαιρετή διά τοῦ διωνύμου i^2+1 καί τότε λέγομεν, ὅτι τό $\lambda+\mu i$ εἶναι τοῦ $f(x)$ ρίζα.

59 Ὀνομάζομεν **μέτρον** (module) ἤ ἀπόλυτον τιμήν τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ τόν θετικόν ἀριθμόν $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Ὁ ὁρισμός αὐτός τῆς ἀπολύτου τιμῆς καλύπτει καί τήν περίπτωσιν ὅπου $\beta=0$ δηλ. ὅπου ἡ ἔκφρασις $\alpha+\beta i$ εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός. Σημειοῦμεν:

---

* Διότι, οἱ μέν ὅροι, πού ἔχουν τό x εἰς ἀρτίας δυνάμεις, δηλ. εἰς τάς δυνάμεις $4q$ καί $4q+2$ συνιστοῦν τό $\varphi(x^2)$, οἱ δέ ὅροι πού ἔχουν τό x εἰς περιττάς δυνάμεις δηλ. εἰς τάς δυνάμεις $4q+1, 4q+3$, συνιστοῦν τό $x\varphi_1(x^2)$.

** Διά τό ἀποτέλεσμα αὐτό ἀντικατεστήσαμεν τό x^{4q} μέ τό 1 τό x^{4q+4} μέ τό x, τό x^{4q+2} μέ τό -1 καί τό x^{4q+3} μέ τό $-x$.

$|\alpha+\beta i|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

59. 1. Λέγομεν πώς ἕνας μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν, ὅταν ἔχωμεν συγχρόνως $\alpha=0$, $\beta=0$. Καί ἐπειδή τό ἀντίστροφον εἶναι ἐπίσης ἀληθές συμπεραίνομεν πώς ἡ ἰσότης: $\alpha+\beta i=0$ εἶναι ἰσοδύναμος μέ τό σύστημα $\alpha=0$, $\beta=0$.

Κατόπιν τούτων συμπεραίνομεν εὐκόλως πώς, ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα ἕνας μιγάς εἶναι μηδέν εἶναι τό μέτρον του νά εἶναι μηδέν.

59.2. Λέγομεν ὅτι δύο μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $\alpha_1+\beta_1 i$ εἶναι ἴσοι, ἐάν καί ἐφ' ὅσον τά α καί β εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μέ τά α_1, β_1. Ἡ ἰσότης λοιπόν $\alpha+\beta i=\alpha_1+\beta_1 i$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ἰσοδύναμος πρός τάς ἰσότητας: $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$.

59.3. Δύο μιγάδες, πού ἔχουν τά αὐτά πραγματικά μέρη καί τούς συντελεστάς τοῦ i μέ ἀντίθετα πρόσημα ὀνομάζονται συζυγεῖς. Οὕτω οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta i$, $\alpha-\beta i$ εἶναι συζυγεῖς, ἔχουν δέ ἴσα μέτρα.

59.4. Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί, πού τά πραγματικά των μέρη καί οἱ συντελεσταί τοῦ i εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί ὀνομάζονται ἀντίθετοι μιγαδικοί ἀριθμοί. Εἶναι εὐνόητον πώς καί οἱ καθαρῶς φανταστικοί ἀριθμοί εἶναι ἀντίθετοι ἐφόσον οἱ συντελεσταί τοῦ i εἶναι ἀντίθετοι.

Οὕτως οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $\alpha-\beta i$ εἶναι ἀντιστοίχως ἀντίθετοι πρός τούς $-\alpha-\beta i$, $-\alpha+\beta i$. Καί γίνεται φανερόν πώς οἱ ἀντίθετοι τῶν συζυγῶν εἶναι συζυγεῖς καί πώς οἱ ἀντίθετοι μιγάδες ἔχουν τό αὐτό μέτρον.

60. Πράξεις ἐπί τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

60.1. Πρόσθεσις: Ὀνομάζομεν ἄθροισμα πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, τόν μιγαδικόν ἀριθμόν, πού ἔχει πραγματικόν μέρος τό ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν μερῶν τῶν προσθετέων καί ὡς συντελεστήν τοῦ i τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ i εἰς τούς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος.

Οὕτως ἐξ ὁρισμοῦ,

$$(a_1+\beta_1 i)+(a_2+\beta_2 i)+\dots+(a_\nu+\beta_\nu i)=a_1+a_2+\dots+a_\nu+i(\beta_1+\beta_2+\dots\beta_\nu)$$

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τούτου τοῦ ἀθροίσματος γίνεται φανερόν ὅτι ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως καί ὁ νόμος τοῦ προσεταιρισμοῦ ἰσχύουν καί διά τήν πρόσθεσιν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

60.1.1. Θεώρημα: Τό μέτρον τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό ἄθροισμα τῶν μέτρων των καί δέν εἶναι μικρότερον ἀπό τήν ἀπόλυτον τιμήν τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων των.

Ἐάν λοιπόν θεωρήσωμεν τούς διαφόρους τοῦ μηδενός μιγαδικούς ἀριθμούς $a+\beta i$, $a_1+\beta_1 i$ θά ἔχωμεν:

$$\left|\sqrt{a^2+\beta^2}-\sqrt{a_1^2+\beta_1^2}\right| \leq \sqrt{(a+a_1)^2+(\beta+\beta_1)^2} \leq \sqrt{a^2+\beta^2}+\sqrt{a_1^2+\beta_1^2} \quad (1)$$

Διά νά δείξωμεν ἐκ τῶν σχέσεων (1) τό μόνιμον τῆς δεξιᾶς κειμένης ἀρκεῖ νά δείξωμεν (12 στ.) τήν ἰσοδύναμον σχέσιν:

$$(a+a_1)^2+(\beta+\beta_1)^2 \leq \left[\sqrt{a^2+\beta^2}+\sqrt{a_1^2+\beta_1^2}\right]^2$$

ἤ τήν $aa_1+\beta\beta_1 \leq \sqrt{(a^2+\beta^2)(a_1^2+\beta_1^2)}$ (2).

Ἐάν τώρα ὁ πραγματικός ἀριθμός $aa_1+\beta\beta_1$ εἶναι ἀρνητικός ἤ μηδέν ἡ (2) ἰσχύει ὡς ἀνισότης, ἄν δέ ὁ ἀριθμός οὗτος εἶναι θετικός, τότε ἡ (2) εἶναι ἰσοδύναμος σχέσις πρός τήν

$$(aa_1+\beta\beta_1)^2-(a^2+\beta^2)(a_1^2+\beta_1^2) \leq 0 \quad \text{ἤ τήν} \quad -(a\beta_1-\beta a_1)^2 \leq 0$$

ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μόνιμος.

Τώρα ἐρχόμεθα νά δείξωμεν τήν ἀριστερά τῶν σχέσεων (1).

Ἡ σχέσις αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν σχέσιν:

$$(a+a_1)^2+(\beta+\beta_1)^2 \geq \left[\sqrt{a^2+\beta^2}-\sqrt{a_1^2+\beta_1^2}\right]^2$$

ἤ πρός τήν: $aa_1+\beta\beta_1 \geq -\sqrt{(a^2+\beta^2)(a_1^2+\beta_1^2)}$ (3)

Καί, ἐάν ὁ πραγματικός ἀριθμός $aa_1+\beta\beta_1$ εἶναι θετικός ἤ μηδέν ἡ (3) ἰσχύει ὡς ἀνισότης, ἐάν δέ ὁ ἀριθμός οὗτος εἶναι ἀρνητικός, ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν:

$$-(aa_1+\beta\beta_1) \leq \sqrt{(a^2+\beta^2)(a_1^2+\beta_1^2)} \quad \text{ἤ τήν:} \quad (a_1\beta-a\beta_1)^2 \geq 0$$

ἡ ὁποία προφανῶς εἶναι μόνιμος.

60.1.2. Συμπεράσματα: Εἶναι πολύ εὔκολον ἐκ τῶν ἀνωτέρω νά συναγάγη τις τά κάτωθι συμπεράσματα:

1ον. Ἐάν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta \neq 0$ ἡ (1) ἰσχύει ὡς διπλῆ ἀνισότης.

2ον. Ἐάν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ ἐνῶ $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 > 0$ ἡ δεξιά σχέσις ἐκ τῶν (1) εἶναι ἰσότης.

3ον. Ἐάν $\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = 0$ ἐνῶ $\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 < 0$ ἡ ἀριστερά σχέσις ἐκ τῶν (1) εἶναι ἰσότης.

60.1.3. Θεώρημα: Τό μέτρον τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε μιγαδικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν μέτρων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Τό θεώρημα τοῦτο ἀπεδείχθη ἀνωτέρω διά δύο προσθέτους διά νά τό ἀποδείξωμεν δέ τώρα δι' ὁσουσδήποτε προσθετέους μεταχειριζόμεθα τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς:

Ὑπόθεσις $|A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu| \leq |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_\nu|$

Συμπέρασμα $|A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + A_{\nu+1}| \leq |A_1| + \cdots + |A_\nu| + |A_{\nu+1}|$

Ἔχομεν ὡς γνωστόν $|A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + A_{\nu+1}| \leq |(A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu) + A_{\nu+1}|$

Καί, ἐπειδή $|(A_2 + A_2 + \cdots + A_\nu) + A_{\nu+1}| \leq |A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu| + |A_{\nu+1}|$ κατόπιν τῆς ὑποθέσεώς μας, λαμβάνομεν τήν ὑπό διαπίστωσιν σχέσιν:

60.2. Ἀφαίρεσις. Ὀνομάζομεν διαφοράν δύο ἀριθμῶν $\alpha + \beta i$ καί $\alpha_1 + \beta_1 i$ (τοῦ 2ου ἀπό τόν πρῶτον) τόν ἀριθμόν $x + i\psi$ ὁ ὁποῖος προστιθέμενος εἰς τόν 2ον θά μᾶς δώση τόν πρῶτον.

Δηλ. ἐξ ὁρισμοῦ θά πρέπει $(\alpha_1 + x) + i(\beta_1 + \psi) = \alpha + \beta i$ καί συνεπῶς

(59.2) $\alpha_1 + x = \alpha$, $\beta_1 + \psi = \beta$ ἤ $x = \alpha - \alpha_1$, $\psi = \beta - \beta_1$.

Δυνάμεθα λοιπόν νά λέγωμεν πώς ἡ διαφορά εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ ἀριθμός $\alpha - \alpha_1 + i(\beta - \beta_1)$.

60.2.1. Θεώρημα. Τό μέτρον τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό ἄθροισμα καί δέν εἶναι μικρότερον ἀπό τήν ἀπόλυτον τιμήν τῆς διαφορᾶς τῶν μέτρων, αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως ταύτης γίνεται φανερά ἀπό τό γεγονός, ὅτι ἡ ἔκφρασις $\alpha - \alpha_1 + i(\beta - \beta_1)$ ἐκφράζει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν $α+βi$ καί $-α_1-β_1 i$ ἐνῶ οἱ ἀριθμοί $α_1+β_1 i$ καί $-α_1-β_1 i$ ἔχουν τό αὐτό μέτρον.

61. Πολλαπλασιασμός: Τό γινόμενον ὁσωνδήποτε μηγαδικῶν ἀριθμῶν προκύπτει ἐξ ὁρισμοῦ, ἄν εἰς τὶ γινόμενον τῶν ὡς πρός i πρωτοβαθμίων διωνύμων πού πραγματοποιεῖται μέ τόν γνωστόν ἀλγεβρικόν κανόνα, ἀντικαταστήσωμεν τό i^2 μέ τό -1.

Καί πρῶτον διά δύο παράγοντας ἔχομεν:

$$(α+βi)(α_1+β_1 i) \equiv αα_1+(α_1β+αβ_1)i+ββ_1 i^2 \quad ἤ$$

$$(α+βi)(α_1+β_1 i) \equiv αα_1-ββ_1+(α_1β+αβ_1)i$$

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα ἕν γινόμενον πολλῶν παραγόντων

$$(α_1+β_1 i)(α_2+β_2 i)\dots(α_ν+β_ν i) \qquad (1)$$

Τό γινόμενον αὐτό, ἔπειτα ἀπό τόν ὁρισμόν τόν ὁποῖον ἐδώσαμεν, πραγματοποιεῖται κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον: Πολλαπλασιάζομεν δύο ἀπό τούς παράγοντάς του, κατόπιν τό γινόμενόν των ἐπί ἕνα τρίτον, τό νέον γινόμενον ἐπί ἕνα τέταρτον καί οὕτω καθεξῆς μέχρις ὅτου χρησιμοποιήσωμεν ὅλους τούς παράγοντας τοῦ γινομένου. Καί, εἰς τό ἐξαγόμενον, πού κατ' αὐτόν τόν τρόπον θά προκύψῃ, θά ἀντικαταστήσωμεν τό i^2 μέ τό -1.

61.1. Ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ. Διά τόν πολλαπλασιασμόν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, κατόπιν τοῦ δοθέντος ὁρισμοῦ του, ἰσχύουν αἱ γνωσταί ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἐπί πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οὕτω, ἡ πρᾶξις αὐτή κέκτηται τάς ἰδιότητας:

1ον. Τῆς ἀντιμεταθέσεως. Πράγματι, κατά τόν δοθέντα ὁρισμόν (61) τό γινόμενον (1) (58) δέν εἶναι παρά τό ὑπόλοιπον τοῦ πολυωνύμου: $P_ν \equiv (α_1+β_1x)(α_2+β_2x)\dots(α_ν+β_νx)$ διά τοῦ διωνύμου x^2+1. Ἀλλά τό $P_ν$, ὡς γνωστόν, εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως τῶν παραγόντων του καί συνεπῶς καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά τοῦ διωνύμου x^2+1.

2ον. Τοῦ προσεταιρισμοῦ: Διά νά δείξωμεν ὅτι: $(α.β).γ = (α.γ).β = α.(β.γ)$ δηλ. ὅτι τό γινόμενον μιγαδικῶν πολλαπλασιάζεται ἐπί ἕτερον μιγάδα, ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἕνα τῶν παραγόντων τοῦ γινομένου ἐπί τόν μιγάδα, ἀρκεῖ νά παρατηρήσωμεν, ὅτι καί τά τρία μέλη τῶν ἀνωτέρω δύο ἰσοτήτων ἀντιπροσωπεύουν τό γινόμενον $a.\beta.\gamma$.

Πράγματι, διά νά πραγματοποιήσωμεν τό γινόμενον $a.\beta.\gamma$ ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν τούς δύο πρώτους παράγοντας καί τό γινόμενόν των δηλ. τό $(a\beta)$ νά τό πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τόν τρίτον παράγοντα δηλ. ἀρκεῖ νά σχηματίσωμεν τό γινόμενον $(a\beta).\gamma$. Ἐπίσης, ἠδυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν κατά πρῶτον τούς παράγοντας $a.\gamma$ καί τό γινόμενόν των $(a.\gamma)$ νά τό πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τόν τρίτον παράγοντα β δηλ. ἀρκεῖ νά σχηματίσωμεν τό γινόμενον $(a.\gamma).\beta$. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καί διά τήν ἔκφρασιν $a.(\beta.\gamma)$ τοῦ γινομένου $a.\beta.\gamma$*.

3ον. Τήν ἐπιμεριστικήν. Ἀρκεῖ νά δείξωμεν αὐτήν τήν ἰδιότητα διά πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς, ὅταν ἕκαστον τούτων, ἀντικαθίσταται μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά τοῦ x^2+1.

Ἔστω τό γινόμενον $f(x)[\varphi(x)+\varphi_1(x)]$ ὅπου f, φ, φ_1 εἶναι πολυώνυμα τοῦ x.

Ἔστω ὅτι, $f(x)\varphi(x) \equiv (x^2+1)\Pi_1(x)+ax+\beta$

$$f(x)\varphi_1(x) \equiv (x^2+1)\Pi_2(x)+a_1x+\beta_1$$

Καί ἐάν τάς ἰσότητας ταύτας προσθέσωμεν κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$f(x)[\varphi_1(x)+\varphi(x)] \equiv (x^2+1)[\Pi_1(x)+\Pi_2(x)]+(a+a_1)x+\beta+\beta_1$$

ὥστε, τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ διδομένου γινομένου, διά τοῦ x^2+1 ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων διά x^2+1 τῶν μερικῶν γινομένων.

61.2. Θεώρημα: Τό μέτρον τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε μιγαδικῶν παραγόντων εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων.

Ἐάν θεωρήσωμεν κατ' ἀρχάς δύο παράγοντας, τούς $a+\beta i$ καί $a_1+\beta_1 i$ τό γινόμενόν των (61) ἔχει μέτρον.

$$\sqrt{(aa_1-\beta\beta_1)^2+(a\beta_1+a_1\beta)^2} \equiv \sqrt{(a^2+\beta^2)(a_1^2+\beta_1^2)}$$

δηλ. μέ τό γινόμενον τῶν μέτρων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

---

* Τά a, β, γ ἐκπροσωποῦν μιγαδικούς ἀριθμούς.

Διά νά ἐπεκτείνωμεν τώρα τήν ἰσχύν τοῦ θεωρήματός μας ἐπί γινομένου πολλῶν παραγόντων δέν ἔχομεν παρά νά χρησιμοποιήσωμεν τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

61. 3. Θεώρημα: Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη διά νά εἶναι τό γινόμενον δύο μιγαδικῶν παραγόντων ἴσον μέ τό μηδέν, εἶναι ὁ ἕνας τουλάχιστον ἀπό τούς δύο του παράγοντας νά εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν.

Εἴδομεν (59.1) ὅτι διά νά εἶναι τό γινόμενον $(a+\beta i)(\gamma+\delta i)$ ἴσον μέ τό μηδέν πρέπει καί ἀρκεῖ τό γινόμενον: $\sqrt{(a^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}$ νά εἶναι ἴσον μέ τό μηδέν. Ἀλλά τό τελευταῖον γινόμενον, ὡς γινόμενον πραγματικῶν ἀριθμῶν, εἶναι μηδέν ἐάν καί ἐφόσον $a^2+\beta^2=0$, ὁπότε $a=\beta=0$ ἤ $\gamma^2+\delta^2=0$, ὁπότε $\gamma=\delta=0$ ἤ καί ἐφόσον $a^2+\beta^2=\gamma^2+\delta^2=0$.

62. Διαίρεσις: Θά λέγωμεν, ὅτι διηρέσαμεν τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $a+\beta i$ μέ τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $\gamma+\delta i$ ἐάν εὕρωμεν ἕνα μιγαδικόν ἀριθμόν $x+i\psi$ τοιοῦτον, ὥστε νά ἔχωμεν: $a+\beta i = (\gamma+\delta i)(x+i\psi)$.

Ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται: $a+\beta i \equiv \gamma x-\delta\psi+i(\delta x+\gamma\psi)$. Καί ἐξ αὐτῆς λαμβάνομεν τάς ἰσότητας: $\gamma x-\delta\psi=a$, $\delta x+\gamma\psi=\beta$ ἀπό τάς ὁποίας προκύπτει:

$$x=\frac{a\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} \quad , \quad \psi=\frac{\beta\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

Ὑποθέτομεν φυσικά, ὅτι $\gamma^2+\delta^2\neq 0$ δηλ. ὅτι ὁ διαιρέτης δέν εἶναι μηδέν.

Ὥστε:
$$x+i\psi=\frac{a\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+i\,\frac{\beta\gamma-a\delta}{\gamma^2+\delta^2}$$

62.1. Θεώρημα: Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν καί τούς δύο ὅρους ἑνός μιγαδικοῦ κλάσματος μέ τόν αὐτόν ἀριθμόν, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται.

Δηλ. θά δείξωμεν ὅτι εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης: $\frac{A}{B}=\frac{A.\Gamma}{B.\Gamma}$ ἐάν τά A, B, Γ, ἀντιπροσωπεύουν μιγαδικούς ἀριθμούς.

Πράγματι, ἐάν K εἶναι ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{A}{B}$ θά ἔχωμεν ἐξ ὁρισμοῦ

$A \equiv B.K$ καί συνεπῶς $A.\Gamma \equiv B.K.\Gamma$ ἤ $A.\Gamma \equiv (B.\Gamma).K$ (61.1, 2ον) δηλ. ἰσότητα, πού δεικνύει πώς K εἶναι ἐπίσης ἡ ἀξία τοῦ 2ου λόγου.

Ἐάν τώρα χρησιμοποιήσωμεν αὐτήν τήν ἰδιότητα τοῦ μιγαδικοῦ κλάσματος δυνάμεθα νά ἔχωμεν ἕνα ἄμεσον προσδιορισμόν τοῦ πηλίκου $\frac{a+\beta i}{\gamma+\delta i}$ · δέν ἔχομεν παρά νά πολλαπλασιάσωμεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ λόγου μέ τόν συζυγῆ ἀριθμόν τοῦ διαιρέτου δηλ. μέ τό $\gamma-\delta i$.

63. Τετραγωνική ρίζα μιγάδος: Ζητοῦμεν λοιπόν τούς πραγματικούς ἀριθμούς x, ψ ὥστε νά εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης: $a+\beta i \equiv (x+i\psi)^2$ ἤ

αἱ ἰσότητες $x^2-\psi^2=a \quad 2x\psi=\beta$ (1)

Εἶναι γνωστή ἡ ταυτότης: $(x^2+\psi^2)^2-(x^2-\psi^2)^2 \equiv 4x^2\psi^2$

Καί λόγω τῶν (1) $(x^2+\psi^2)^2=a^2+\beta^2$ ἤ $x^2+\psi^2=\sqrt{a^2+\beta^2}$

Ἔχομεν λοιπόν: $x^2+y^2=\sqrt{a^2+\beta^2}$ καί $x^2-y^2=a$ ἐκ τῶν ὁποίων διά προσθέσεως καί ἀφαιρέσεώς των κατά μέλη λαμβάνομεν:

$$x=\pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}} \qquad \psi=\pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}$$

δηλ. ἰσότητας μέ τά ὑπόρριζά των θετικά.

Δυνάμεθα λοιπόν, κατά τά φαινόμενα, νά ἔχωμεν τέσσαρας ἀριθμούς $x+i\psi$ ἱκανοποιοῦντας τήν ἀρχικήν μας ἰσότητα. Ἀλλά αὐτό δέν εἶναι ἀληθές, διότι τά x, ψ ὑποχρεωμένα νά ἱκανοποιοῦν καί τήν 2αν τῶν ἰσοτήτων (1), θά εἶναι ὁμόσημα, ἄν $\beta>0$ καί ἑτερόσημα, ἄν $\beta<0$.

Δηλ. ἐδῶ τί συνέβη καί ἐπαρουσιάσθησαν τέσσαρες δυνατοί συνδυασμοί; Ἐχρησιμοποιήθη τό τετράγωνον τῆς τιμῆς τοῦ $2x\psi$ τό ὁποῖον περικλείει καί τήν τιμήν β, τήν ὁποίαν καί ἔχει καί τήν τιμήν $-\beta$. Οὕτω τά ἀποτελέσματά μας ἀφοροῦν καί τήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ $a-\beta i$.

Κατόπιν λοιπόν τῶν ἀνωτέρω λαμβάνομεν τάς ἰσότητας:

$$\sqrt{\alpha+\beta i}\left\{\begin{array}{l}\text{ἄν } \beta>0 \\ \text{ἄν } \beta<0\end{array}\right\}\begin{array}{l} = \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}} + i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}\right] \\ = \pm\left[\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}} - i\sqrt{\dfrac{-a+\sqrt{a^2+\beta^2}}{2}}\right]\end{array}$$

αἵτινες μᾶς λέγουν, ὅτι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, ἔχει δύο μιγαδικάς ρίζας 2ας τάξεως.

63.1. Παρατηρήσεις: Ἀφοῦ ὁ μιγαδικός ἀριθμός περικλείει καί τόν πραγματικόν ἀριθμόν ὡς μερικήν του περίπτωσιν θά πρέπει νά ζητήσωμεν ἐάν ἕνας πραγματικός ἀριθμός a δέχεται μίαν τετραγωνικήν ρίζαν τῆς μορφῆς $x+i\psi$. Θά πρέπει νά ἔχωμεν: $(x+i\psi)^2 = a$, ἤ τό ζεῦγος τῶν ἰσοτήτων: $x^2-\psi^2=a$ $2x\psi=0$ πού εἶναι ἰσοδύναμον μέ τά δύο ἑπόμενα ζεύγη:

$$\begin{array}{ll} \psi=0 & x=0 \\ x^2=a & \psi^2=-a \end{array}$$

Ἐάν ὁ a εἶναι ἀριθμός θετικός, τό 2ον ζεῦγος δέν δίδει πραγματικάς τιμάς διά τό ψ. Τό πρῶτον μᾶς δίδει $x=\pm\sqrt{a}$ $\psi=0$, ἐνῶ ἡ $\sqrt{a}$ εἰκονίζει τήν ἀριθμητικήν τετραγωνικήν ρίζαν τοῦ a. Ὥστε, ἐάν $a>0$ δέχεται οὗτος δύο ρίζας 2ας τάξεως, αἵτινες εἶναι πραγματικαί.

Ἐάν τώρα ὑποθέσωμεν $a<0$ τό πρῶτον ζεῦγος δέν δίδει πραγματικάς τιμάς διά τό x, ἐνῶ τό 2ον ζεῦγος δίδει $x=0$, $\psi=\pm i\sqrt{-a}$ ἐνῶ $\sqrt{-a}$ εἶναι ἡ ἀριθμητική τετραγωνική ρίζα τοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ $-a$.

Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην ὁ ἀρνητικός ἀριθμός a δέχεται δύο φανταστικάς ρίζας $\pm i\sqrt{-a}$.

Ἐάν $a=-1$ ἡ τελευταία ἔκφρασις γίνεται $\pm i$.

64. Ρίζα μ τάξεως: Ὀνομάζομεν ρίζαν μ τάξεως τοῦ μιγαδικοῦ $a+\beta i$, τόν μιγαδικόν ἀριθμόν $x+i\psi$, ὅστις ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα: $(x+i\psi)^\mu = a+\beta i$.

Ἡ ἰσότης αὕτη εἶναι ἰσοδύναμος μέ δύο ἐξισώσεις, αἵτινες περιέχουν τούς πραγματικούς ἀριθμούς x, ψ ὑψωμένους εἰς τήν μιοστήν δύναμιν. Ἀπ' αὐτάς τάς ἐξισώσεις, ἐξετάζοντες τό θέμα μας εἰς τήν γενικότητά του, εἶναι ἀδύνατον μέ ἀλγεβρικούς τρόπους νά προσδιορίσωμεν τά x, ϕ. Οὕτω εἰς τά ἑπόμενα θά ὑποδείξωμεν ἕνα ἐπιτυχῆ τρόπον προσδιορισμοῦ τῆς μιοστῆς ρίζης ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καί θά ἐξαγάγωμεν τό συμπέρασμα, ὅτι κάθε μιγαδικός ἀριθμός ἔχει μ διακεκριμένας ρίζας μ τάξεως.

64. Τριγωνομετρική μορφή τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ:

$$a+\beta i=\sqrt{a^2+\beta^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}+i\,\frac{\beta}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\right) \qquad (1)$$

Ἐπειδή $\sqrt{a^2+\beta^2}\geqslant |a|$ καί $\sqrt{a^2+\beta^2}\geqslant|\beta|$ ἔπεται, ὅτι οἱ ἐν τῇ παρενθέσει ἀριθμοί εἶναι ἀπολύτως μικρότεροι τῆς μονάδος. Καί ἐπειδή τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τήν μονάδα, ὑφίσταται μία γωνία θ, ἥτις ὁρίζεται κατά προσέγγισιν 2π καί διά τήν ὁποίαν θά ἔχωμεν:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+\beta^2}}\ ,\quad \eta\mu\theta=\frac{\beta}{\sqrt{a^2+\beta^2}}$$

Ἡ γωνία αὕτη θ ὀνομάζεται ὅρισμα (L' argument) τοῦ ἀριθμοῦ $a+\beta i$.

Ἐάν παραστήσωμεν μέ ρ τό μέτρον τοῦ ἀριθμοῦ $a+\beta i$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται: $a+\beta i=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$.

Τό 2ον μέλος τῆς τελευταίας αὐτῆς ἰσότητος ἀποτελεῖ τήν τριγωνομετρικήν ἔκφρασιν τοῦ μιγάδος.

Οἱ πραγματικοί ἀριθμοί δύνανται ἐξ ἴσου νά γράφωνται ὑπ' αὐτήν τήν μορφήν. Εἰς τήν περίπτωσιν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν τό ὅρισμα εἶναι ἕνα πολλαπλάσιον τοῦ π.

65. 1. Ἀπό τά ἀνωτέρω προκύπτει, ὅτι, ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη ἵνα δύο μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, εἶναι, τά μέτρα των νά εἶναι ἴσα καί τά ὁρίσματά των νά διαφέρουν, ἐάν διαφέρουν, κατά πολλαπλάσιον τοῦ 2π.

66. Πολλαπλασιασμός τῶν μιγάδων ὑπό Τριγωνομετρικήν μορφήν. Τύπος τοῦ de Moivre.

Ἔστωσαν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί:

$$A_1=\rho_1\,(\sigma\upsilon\nu\theta_1+i\eta\mu\theta_1) \qquad A_2=\rho_2\,(\sigma\upsilon\nu\theta_2+i\eta\mu\theta_2)$$

Εὐκόλως εὑρίσκομεν : $A_1 A_2 = \rho_1 \rho_2 [\sigma \upsilon \nu (\theta_1 + \theta_2) + i \eta \mu (\theta_1 + \theta_2)]$
Δηλ. τό γινόμενον, δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, ὅστις ἔχει μέτρον τό γινόμενον τῶν μέτρων τῶν ἀριθμῶν μας καί ὅρισμα τό ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων των.
Ὁ κανών οὗτος τοῦ πολλαπλασιασμοῦ μιγάδων ἐπεκτείνεται ἐπί ὁσωνδήποτε παραγόντων καί δυνάμεθα νά ἔχωμεν αὐτό τό ἀποτέλεσμα, ἐάν ἐφαρμόσωμεν τήν μέθοδον τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Καί αὐτό, διότι τό γινόμενον ὁσωνδήποτε μιγαδικῶν παραγόντων δυνάμεθα νά τό ἀναγάγωμεν εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ἐφόσον, ὡς εἴδομεν, ἰσχύουν πᾶσαι αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πραγματικῶν ἀριθμῶν καί διά τόν πολλαπλασιασμόν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.
Ὥστε, ἐάν ἔχωμεν τούς μιγαδικούς $A_1, A_2 \ldots A_\nu$ μέ μέτρα ρ_1, $\rho_2, \ldots \rho_\nu$ καί ὁρίσματα $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_\nu$ ἀντιστοίχως θά ἔχωμεν:
$$A_1 A_2 \ldots A_\nu = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_\nu [\sigma\upsilon\nu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu) + i\eta\mu(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_\nu)] \quad (1)$$
Ἐάν τώρα ὑποθέσωμεν ὅτι $A_1 = A_2 = \ldots = A_\nu = A$, καί τότε θά ἔχωμεν : $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_\nu = \rho$ καί δυνάμεθα ἐπίσης νά δεχθῶμεν $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_\nu = \theta$ ὁ ἀνωτέρω τύπος γίνεται :
$$A^\nu = [\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)]^\nu = \rho^\nu [\sigma\upsilon\nu(\nu\theta) + i\eta\mu(\nu\theta)]$$
Ὁ τύπος αὐτός λέγεται τύπος τοῦ de Moivre καί δεικνύει ὅτι μιγάς ὑψοῦται εἰς τήν νοστήν δύναμιν (ν φυσικός καί ὄχι μικρότερος τοῦ 2) ἐάν τό μέν μέτρον ὑψωθῇ εἰς τήν νοστήν δύναμιν τό δέ ὅρισμα πολλαπλασιασθῇ ἐπί ν*.
Ὁ κανών οὗτος ἐπεκτείνεται καί ἐπί τῶν ἐκθετῶν : 0, 1, −ν (ν θετικός καί ἀκέραιος) ὡς καί ἐπί κλασματικοῦ ἐκθέτου $\frac{\mu}{\nu}$ (μ, ν ἀκέραιοι διάφοροι τοῦ μηδενός καί ν διάφορος καί τῆς μονάδος). Τήν ἐπέκτασιν τοῦ κανόνος διαπιστοῦμεν εὐκόλως ἱκανοποιοῦντες τήν ἀρχήν ὅτι: Ἡ σημασία τοῦ συμβόλου $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)^\kappa$, ὅπου κ ἕνας τῶν ἀνωτέρω ἐκθετῶν πρέπει νά εἶναι τοιαύτη, ὥστε

---

* Ἐδῶ ὁ μιγάς ὑποτίθεται ἔχων τήν τριγωνομετρικήν μορφήν.

νά ἰσχύουν ἐπ' αὐτοῦ, αἱ γνωσταί ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

66. Ρίζα μ τάξεως : Κάθε ἀριθμός, ὅπως μᾶς ἐδόθη ἡ εὐκαιρία νά ἀναφέρωμεν, μορφοῦται εἰς τήν ἔκφρασιν $\alpha+\beta i$. Θά ζητήσωμεν τώρα τήν μ τάξεως ρίζαν αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Τό θέμα μας τώρα εἶναι, δοθέντος τοῦ ἀριθμοῦ $\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$ νά εὑρεθῆ ὁ ἀριθμός $r.(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)$ τοιοῦτος, ὥστε νά ὑφίσταται ἡ ἰσότης: $[r\,(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)]^{\mu}=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

δηλ. ἡ ἰσότης : $r^{\mu}[\sigma\upsilon\nu\,(\mu\varphi)+i\eta\mu(\mu\varphi)]=\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)$

Ἀλλά κατά τά γνωστά ἡ τελευταία ἰσότης εἶναι δυνατή, ἐάν καί ἐφόσον $r^{\mu}=\rho$ δηλ. $r=\sqrt[\mu]{\rho}$ καί ἐάν $\mu\varphi=\theta+2K\Pi$ ἤ $\varphi=\frac{\theta+2K\Pi}{\mu}$ ὅπου K ἀριθμός τις ἀκέραιος.

Ἐκ τούτων λοιπόν μορφοῦται ἡ ἰσότης:

$$\sqrt[\mu]{\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}=r\,(\sigma\upsilon\nu\varphi+i\eta\mu\varphi)=\sqrt[\mu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2K\Pi}{\mu}+i\eta\mu\,\frac{\theta+2K\Pi}{\mu}\right]$$

Ἐπειδή τώρα ὁ K δύναται νά ἔχη αὐθαίρετον ἀκεραίαν τιμήν ὁ τελευταῖος τύπος μᾶς παρέχει τήν ἐντύπωσιν τῆς ὑπάρξεως ἀπεριορίστου ἀριθμοῦ ριζῶν μ τάξεως διδομένου ἀριθμοῦ. Ἔχομεν ὅμως ὅτι $K=\mu\lambda+\nu$, ὅπου λ αὐθαίρετος ἀκέραιος καί ν ἕνας τῶν μ ἀκεραίων: $0, 1, 2 \ldots (\mu-1)$.

Καί συνεπῶς :

$$\frac{\theta+2\mu\Pi}{\mu}=\frac{\theta+2\Pi(\lambda\mu+\nu)}{\mu}=2\lambda\Pi+\frac{\theta+2\Pi\nu}{\mu}$$

Ὁ τελευταῖος λοιπόν τύπος γίνεται:

$$\sqrt[\mu]{\rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta+i\eta\mu\theta)}=\sqrt[\mu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\,\frac{\theta+2\Pi\nu}{\mu}+i\eta\mu\,\frac{\theta+2\Pi\nu}{\mu}\right]$$

ὅπου τό ν λαμβάνει, ὡς ἀνεφέραμεν, τάς τιμάς: $0, 1, 2 \ldots (\mu-1)$.

Διεπιστώσαμεν λοιπόν ὅτι: κάθε ἀριθμός ἔχει μ ρίζας μ τάξεως, αἵτινες παρέχονται ἀπό τήν τελευταίαν ἰσότητα. Θά δείξωμεν τώρα ὅτι αἱ ρίζαι αὗται εἶναι διακεκριμέναι.

Θά πρέπει λοιπόν νά δείξωμεν ὅτι οὔτε δύο τιμαί τοῦ ν, εἰλημμέναι ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἀναφερομένων, δέν δημιουργοῦν ὀρίσματα διαφέροντα ἀλλήλων κατά πολλαπλάσιον τοῦ 2Π.

Πράγματι, $\frac{\theta+2\Pi\nu_1}{\mu}-\frac{\theta+2\Pi\nu_2}{\mu}=\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu}\cdot 2\Pi$

Ἐπειδή ὅμως ἕκαστον τῶν ν_1, ν_2 εἶναι μικρότερον τοῦ μ ἡ διαφορά των θά εἶναι ἀπολύτως ἔτι μικροτέρα τοῦ μ καί συνεπῶς

$\left|\frac{\nu_1-\nu_2}{\mu}\right|<1$ δηλ. ἡ διαφορά τῶν ἀνωτέρω ὁρισμάτων μικροτέρα τοῦ 2Π.

67. Ἐφαρμογαί τινες τῶν μιγαδικῶν εἰς τήν Τριγωνομετρίαν.

1ον. Ὁ τύπος τοῦ de Moivre μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐκφράσωμεν τό συνημίτονον καί τό ἡμίτονον τοῦ ἀθροίσματος ὁσωνδήποτε τόξων ἀπό τά ἡμίτονα καί τά συνημίτονα τῶν τόξων.

Πράγματι, γνωρίζομεν ὅτι:

$$(\text{συν}\theta_1+i\text{ημ}\theta_1)(\text{συν}\theta_2+i\text{ημ}\theta_2)\dots(\text{συν}\theta_\nu+i\text{ημ}\theta_\nu)=$$
$$\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)$$

Τό πρῶτον ὅμως μέλος αὐτῆς μας τῆς ἰσότητος γράφεται:

$$\text{συν}\theta_1\,\text{συν}\theta_2\dots\text{συν}\theta_\nu\cdot(1+i\,\text{εφ}\theta_1)(1+i\,\text{εφ}\theta_2)\dots(1+i\,\text{εφ}\theta_\nu)=$$
$$\text{συν}\theta_1\,\text{συν}\theta_2\dots\text{συν}\theta_\nu\cdot(1+iS_1+i^2S_2+\dots+i^\nu S_\nu)$$

ὅπου διά τῶν $S_1,S_2,\dots S_\nu$ ἐσημειώσαμεν τό ἄθροισμα τῶν ποσοτήτων $\text{εφ}\theta_1$, $\text{εφ}\theta_2\dots\text{εφ}\theta_\nu$ λαμβανομένων ἀνά μία, ἀνά δύο,...ἀνά ν.

Ἐάν τώρα ἀντικαταστήσωμεν τάς δυνάμεις τοῦ i ὑπό τῶν ἀντιστοίχων των τιμῶν λαμβάνομεν τήν ἰσότητα:

$$\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)+i\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)=$$
$$\text{συν}\theta_1\,\text{συν}\theta_2\dots\text{συν}\theta_\nu\left[1-S_2+S_4-\dots+i(S_1-S_3+S_5-\dots)\right]$$

Συνεπῶς:

$$\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)=\text{συν}\theta_1\,\text{συν}\theta_2\dots\text{συν}\theta_\nu\,(1-S_2+S_4-\dots)$$
$$\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)=\text{συν}\theta_1\,\text{συν}\theta_2\dots\text{συν}\theta_\nu\,(S_1-S_3+S_5-\dots)$$

καί ἀκολούθως:

$$\text{εφ}(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_\nu)=\frac{S_1-S_3+S_5-\dots}{1-S_2+S_4-\dots}$$

2ον. Ἄθροισμα τῶν ἡμιτόνων καί συνημιτόνων τόξων, ἅτινα, εἶναι διαδοχικοί ὅροι ἀριθμητικῆς προόδου.

$$S_1=\text{συν}a+\text{συν}(a+\omega)+\text{συν}(a+2\omega)+\dots+\text{συν}[a+(\nu-1)\omega]$$
$$S_2=\text{ημ}a+\text{ημ}(a+\omega)+\text{ημ}(a+2\omega)+\dots+\text{ημ}[a+(\nu-1)\omega]$$

Ἔχομεν: $S_1+iS_2=(\text{συν}a+i\text{ημ}a)+[\text{συν}(a+\omega)+i\text{ημ}(a+\omega)]+$
$[\text{συν}(a+2\omega)+i\text{ημ}(a+2\omega)]+\dots+\left[\text{συν}[a+(\nu-1)\omega]+i\text{ημ}[a+(\nu-1)\omega]\right]$

Ἀλλά κατά τό (56) ἡ ἰσότης μας αὐτη δύναται νά γραφῇ:

$$S_1 + iS_2 = (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha) + (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega) + (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)^2 + \ldots + (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)^{\nu-1}$$

Τό 2ον μέλος τῆς τελευταίας ἰσότητος ἀποτελεῖ, ὡς εἶναι φανερόν, τό ἄθροισμα ν ὅρων γεωμετρικῆς προόδου καί συνεπῶς λαμβάνομεν:

$$S_1 + iS_2 = \frac{(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega)^{\nu} - (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)}{(\sigma\upsilon\nu\omega + i\eta\mu\omega) - 1}$$

ἤ $$S_1 + iS_2 = (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\,\frac{1 - [\sigma\upsilon\nu(\nu\omega) + i\eta\mu(\nu\omega)]}{(1 - \sigma\upsilon\nu\omega) - i\eta\mu\omega}$$

ἤ ἀκόμη $$S_1 + iS_2 = (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\cdot\frac{2\eta\mu^2\frac{\nu\omega}{2} - 2i\,\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\omega}{2}}{2\eta\mu^2\frac{\omega}{2} - 2i\,\eta\mu\frac{\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}$$

ἤ ἀκόμη $$S_1 + iS_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}\cdot(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\,\frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2} - i\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2}}$$

Καί ἐάν καί τούς δύο ὅρους τοῦ 2ου κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἐπί i ἔχομεν:

$$S_1 + iS_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}\,(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\omega}{2} + i\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} + i\eta\mu\frac{\omega}{2}}$$

ἤ $$S_1 + iS_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}\,(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\nu\omega}{2} + i\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}\right]\left[\sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\omega}{2}\right) + i\eta\mu\left(-\frac{\omega}{2}\right)\right]$$

ἤ $$S_1 + iS_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}\,(\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)\left[\sigma\upsilon\nu\frac{(\nu-1)\omega}{2} + i\eta\mu\frac{(\nu-1)\omega}{2}\right]$$

ἤ $$S_1 + iS_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}\left[\sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right] + i\eta\mu\left[\alpha + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right]\right]$$

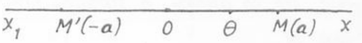
Καί τελικῶς (59.2)

$$S_1 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}\,\sigma\upsilon\nu\left[\alpha + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right]}{\eta\mu\frac{\omega}{2}} \qquad S_2 = \frac{\eta\mu\frac{\nu\omega}{2}\,\eta\mu\left[\alpha + \frac{(\nu-1)\omega}{2}\right]}{\eta\mu\frac{\omega}{2}}$$

68. Γεωμετρική Παράστασις τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ – Διάγραμμα τοῦ ARGAND.

Εἶναι γνωστόν τό πῶς ὁ μεγάλος Γάλλος Μαθηματικός Descartes ἐπέτυχε μίαν ἀμφιμονοσήμαντον* ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνός προσανατολισμένου ἄξονος.

Ἐάν $\overline{O\Theta}$ (Σχ. 1) ἀντιπροσωπεύη τό μοναδιαῖον διάνυσμα ἐπί τοῦ ἄξονος x_1x, εἰς τό σημεῖον M τοῦ ἄξονος τούτου ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσημάντως ὁ ἀριθμός $(\overline{OM})=a$ ἤ ἄλλως ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$, ἥτις εἶναι τό ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως τοῦ $\overline{OM}$ πρός τό $\overline{O\Theta}$. Ὁ ἀριθμός αὐτός a ὀνομάζεται τετμημένη τοῦ σημείου M ἤ ἐπίσης καί τετμημένη τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$.

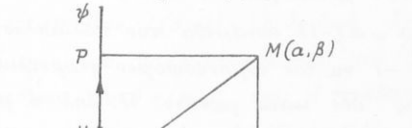


Σχ. 1.

Ὥστε, ἔχομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ σημείου M καί τοῦ ἀριθμοῦ a ἤ τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ καί τοῦ ἀριθμοῦ a.

Εἶναι γνωστόν ἐπίσης, ὅτι διά τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου ἐδημιουργήθη ἀπό τόν Descartes μία ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ ἑκάστου τῶν σημείων τούτων καί ἑνός διατεταγμένου ζεύγους** πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Οὕτω, ἐάν x_1Ox, $\psi_1O\psi$ εἶναι δύο ἄξονες κάθετοι ἐπ' ἀλλήλους καί προσανατολισμένοι δι' ἴσων*** μοναδιαίων διανυσμάτων $\overline{O\Theta}$, $\overline{OH}$, ἔχομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ σημείου M τοῦ ἐπιπέδου καί τοῦ διατεταγμένου ζεύγους τῶν ἀ-



Σχ. 2

* Δηλ. ἀντιστοιχίαν τοῦ ἑνός πρός ἕνα.

** Δηλ. ζεύγους πραγματικῶν ἀριθμῶν, μέ ὡρισμένον ἐξ αὐτῶν ὡς πρῶτον.

*** Χωρίς ὅμως τοῦτο νά εἶναι ἐπιβεβλημένον.

ριθμῶν $(\overline{O\Pi})$, $(\overline{OP})$, οἵτινες ἐκφράζουν τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν διανυσμάτων $\overline{O\Pi}$, $\overline{OP}$. Τά σημεῖα Π καί Ρ εἶναι ἀντιστοίχως αἱ ὀρθαί προβολαί τοῦ σημείου Μ ἐπί τῶν ἀξόνων x_1x καί $\psi_1\psi$. Ὁ πρῶτος τῶν ἀριθμῶν τούτων ὀνομάζεται τετμημένη καί ὁ δεύτερος τεταγμένη τοῦ σημείου Μ. Ἐάν λοιπόν ὀνομάσωμεν α, β τήν τετμημένην καί τήν τεταγμένην τοῦ Μ, ἔχομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ σημείου Μ τοῦ ἐπιπέδου καί τοῦ διατεταγμένου ζεύγους (α, β) δηλ. τοῦ ζεύγους εἰς τό ὁποῖον ὁ πρῶτος εἰκονίζει ἀναγκαίως τήν τετμημένην τοῦ Μ.

Δυνάμεθα ἐπίσης νά λέγωμεν, ὅτι ἔχομεν μίαν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ (τοῦ ὁποίου οἱ α, β ὀνομάζονται ἐπίσης τετμημένη καί τεταγμένη προβολή), καί τοῦ διατεταγμένου ζεύγους τῶν ἀριθμῶν α, β, οἱ ὁποῖοι θεωρούμενοι μαζί ὀνομάζονται συντεταγμέναι τοῦ σημείου Μ ἤ καί συντεταγμέναι προβολαί τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$.

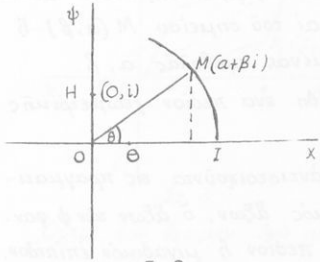
Εἶναι γνωστόν, ὅτι καθιστῶμεν τήν σπουδήν τῆς ἀναλύσεως* αἰσθητοτέραν διά τῆς Γεωμετρίας καί διά τοῦτο ὁ Μαθηματικός ἐπεζήτησε καί τήν γεωμετρικήν ἀπεικόνησιν τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν καί διά ταύτης τήν γεωμετρικήν ἑρμηνείαν τῶν ἐπ' αὐτῶν πράξεων.

Ἐάν εἰς τό σχῆμα (1) λάβωμεν τό σημεῖον Μ', συμμετρικόν τοῦ Μ ὡς πρός τήν ἀρχήν Ο τοῦ ἄξονος, τοῦτο θά ἔχη τετμημένην $-\alpha$. Καί ἐπειδή δυνάμεθα νά γράφωμεν: $\alpha = \alpha\,(\text{συν}\,0 + i\,\text{ημ}\,0)$ καί $-\alpha = \alpha(\text{συν}\,\Pi + i\,\text{ημ}\,\Pi)$ εἶναι δέ $-\alpha = \alpha(-1)$ δυνάμεθα τόν πολλαπλασιασμόν τοῦ α μέ τόν ἀριθμόν -1 νά τόν ἑρμηνεύσωμεν γεωμετρικῶς ὡς στροφήν τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ κατά γωνίαν Π. Δηλ. ὁ μέν ἀριθμός α ἀντιπροσωπεύει τό σημεῖον Μ ἤ τό διάνυσμα ΟΜ, πού σχηματίζει μέ τόν ἄξονα τῶν τετμημένων, ἤ ὅπως ἄλλως λέγεται τῶν x γωνίαν 0, ὁ δέ ἀριθμός $-\alpha$ ἀντιπροσωπεύει τό σημεῖον Μ' ἤ τό διάνυσμα ΟΜ', πού σχηματίζει μέ τόν ἄξονα

---

* Ἡ Ἄλγεβρα καί ὅλοι οἱ κλάδοι, πού ἀποτελοῦν τά παράγωγά της ἀποτελοῦν τόν ἕνα τῶν δύο βασικῶν κλάδων τοῦ Μαθηματικοῦ δένδρου, τόν κλάδον τῆς "Ἀναλύσεως".

τῶν x γωνίαν Π. Εἰς τὴν περίπτωσιν ταύτην ὀνομάζομεν τὸν παράγοντα -1 στροφέα τοῦ διανύσματος ΟΜ κατὰ γωνίαν Π.
Δεδομένου τώρα, ὅτι δυνάμεθα ἐπίσης νὰ γράψωμεν: $1 \cdot i = 1 \cdot \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\Pi}{2} + i\eta\mu \frac{\Pi}{2}\right)$ θὰ πρέπει νὰ δεχθῶμεν ὅτι τὸ i ἀντιπροσωπεύει



Σχ. 2

τὸ μοναδιαῖον διάνυσμα ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν τεταγμένων ἢ ἄλλως τοῦ ἄξονος τῶν ψ ἢ καὶ τὸ σημεῖον μὲ συντεταγμένας (0, 1).
Πράγματι, $1 = 1 \cdot (\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$, $i = \sigma\upsilon\nu \frac{\Pi}{2} + \eta\mu \frac{\Pi}{2}$ καὶ $1 \cdot i = 1 \cdot \left(\sigma\upsilon\nu \frac{\Pi}{2} + i\eta\mu \frac{\Pi}{2}\right)$ (Βλ 66), δηλ. τοῦ μοναδιαίου διανύσματος ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x, ἀντιστοίχου τοῦ ἀριθμοῦ 1, ἐγένετο στροφὴ κατὰ γωνίαν $\frac{\Pi}{2}$. Τοιουτοτρόπως δυνάμεθα τὸ i νὰ τὸ ὀνομάσωμεν στροφέα κατὰ γωνίαν $\frac{\Pi}{2}$.
Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω διὰ τὸν μιγαδικὸν ἀριθμὸν $\alpha + \beta i =$
$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} + i\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right) = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ δυνάμεθα νὰ δεχθῶμεν,

ὅτι ἀντιπροσωπεύει τὸ σημεῖον Μ, ποὺ εἶναι πέρας τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ μήκους $\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ καὶ τὸ ὁποῖον σχηματίζει μὲ τὸν ἄξονα τῶν x γωνίαν θ ἢ καὶ τὸ διάνυσμα $\overline{OM}$, ποὺ ἔχει συντεταγμένας προβολὰς $\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta$ καὶ $\rho\,\eta\mu\theta$ ἢ α καὶ β. Διότι, $\rho = \rho \cdot (\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$ καὶ ἀντιπροσωπεύει διάνυσμα $\overline{OI}$ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τῶν x μὲ τετμημένην ρ ἢ τὸ σημεῖον $I(\rho, 0)$. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως $\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ εἶναι τὸ ἐξαγόμενον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ $\rho(\sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0)$ μὲ τὸν ἀριθμὸν $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ καὶ ὁ πολλαπλασιασμὸς αὐτὸς ηὔξησε τὸ ὄρισμα κατὰ γωνίαν θ. Ὁ ἀριθμὸς λοιπὸν $\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta$ εἶναι ὁ στροφεὺς τοῦ διανύσματος $\overline{OI}$ κατὰ γωνίαν θ.
Τί λοιπὸν ἐπετύχομεν; Νὰ ἔχωμεν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξὺ τοῦ συνόλου τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ τοῦ συνόλου τῶν ἀριθμῶν $\alpha + \beta i$ ὅπου α, β τυχόντες πραγματικοὶ ἀριθμοί.
Οὕτω, ἐὰν $\beta = 0$ δηλ. ἐὰν πρόκειται περὶ τοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ

α οὗτος ἀντιστοιχεῖ ἀμφιμονοσημάντως μέ ἕνα σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν x ἐάν $\alpha = 0$, ὁπότε πρόκειται περί τοῦ καθαροῦ (ὅπως συνηθίζομεν νά τόν ὀνομάζωμεν) φανταστικοῦ ἀριθμοῦ $i\beta$, ἔχομεν καί πάλιν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν τούτου μέ σημεῖον τοῦ ἄξονος τῶν ψ· ἐάν τέλος $\alpha, \beta \neq 0$ ἔχομεν ἀμφιμονοσήμαντον ἀντιστοιχίαν μεταξύ τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ καί τοῦ σημείου $M(\alpha,\beta)$ ἤ τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$, πού ἔχει συντεταγμένας προβολάς α, β.
Κατ' αὐτόν λοιπόν τόν τρόπον ἐδημιουργήθη ἕνα πεδίον γεωμετρικῆς ἀπεικονίσεως τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.
Ὁ ἄξων τῶν x, πού περιέχει σημεῖα ἀντιστοιχοῦντα εἰς πραγματικούς ἀριθμούς, ὀνομάζεται πραγματικός ἄξων, ὁ ἄξων τῶν ψ φανταστικός καί τό ὅλον πεδίον μιγαδικόν πεδίον ἤ μιγαδικόν ἐπίπεδον.
Τό (Σχ. 2) πού μορφώνει αὐτό τό μιγαδικόν πεδίον ὀνομάζεται διάγραμμα τοῦ Argand πρός τιμήν τοῦ Ἑλβετοῦ μαθηματικοῦ J.R. Argand, ὅστις καί τό εἰσήγαγε τό 1806. Ἡ ἰδέα αὐτή τῆς γεωμετρικῆς ἀπεικονίσεως τοῦ μιγάδος εἶχε προταθῆ ἐνωρίτερον μεταξύ ἄλλων μαθηματικῶν καί ἀπό τόν Νορβηγόν Gaspar Wessel τό 1797*.

69. Γεωμετρική ἑρμηνεία τῶν πράξεων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

69.1. Γεωμετρική ἑρμηνεία τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

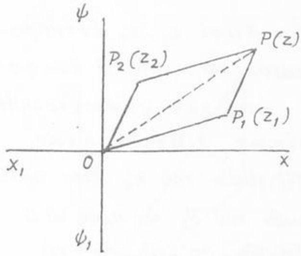
1ον. **Πρόσθεσις**. Ἐάν ν μιγαδικοί ἀριθμοί $z_K = x_K + i\psi_K$ ($K = 1.2.\dots\nu$) ἔχουν ὡς εἰκόνας των ν σημεῖα P_K, τό ἄθροισμά των ἔχει ὡς εἰκόνα τό σημεῖον P πού ὁρίζεται ἀ-

---

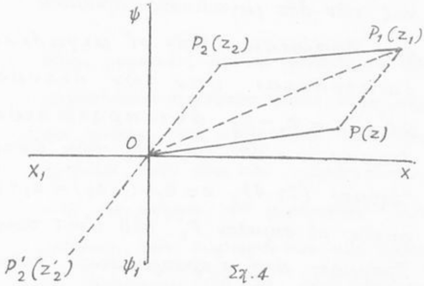
*Οἱ δύο αὐτοί μαθηματικοί ἀνέπτυξαν τήν καλουμένην γεωμετρικήν θεωρίαν. Ἐθεώρησαν δηλ. τόν μιγάδα ἀριθμόν ὡς ἕνα διατεταγμένον ζεῦγος πραγματικῶν ἀριθμῶν α, β καί οὕτω ὡς ἀντίστοιχον τοῦ σημείου M, πού ἔχει συντεταγμένας α, β ἤ τοῦ διανύσματος $\overline{OM}$ πού ἔχει προβολάς α, β. Τό σημεῖον $M(\alpha,\beta)$ εἶναι ἡ εἰκών ἤ τό ἀντιπροσωπευτικόν σημεῖον τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ (α,β)· τό α ὀνομάζεται πραγματικόν μέρος καί τό β φανταστικόν μέρος τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ: $z = (\alpha,\beta)$. Ἐπί τῇ βάσει τώρα τοῦ δοθέντος αὐτοῦ ὁρισμοῦ ὡρίσθησαν ἡ ἰσότης καί αἱ πράξεις μεταξύ αὐτῶν, ὥστε νά εἶναι δυνατόν τά ζεύγη ταῦτα νά ἀποτελέσουν ἀριθμούς.

πό τήν γεωμετρικήν ἰσότητα:

$$\overline{OZ} = \overline{OZ}_1 + \overline{OZ}_2 + \cdots \overline{OZ}_\nu \; {}^{*}$$



Σχ. 3

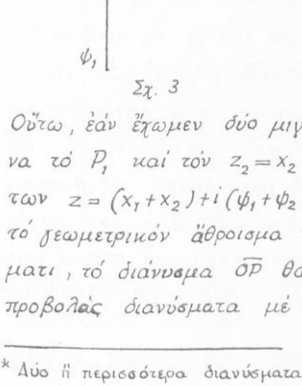


Σχ. 4

Οὕτω, ἐάν ἔχωμεν δύο μιγαδικούς ἀριθμούς, τόν $z_1 = x_1 + i\psi_1$ μέ εἰκόνα τό P_1 καί τόν $z_2 = x_2 + i\psi_2$ μέ εἰκόνα τό σημεῖον P_2 τό ἄθροισμά των $z = (x_1+x_2)+i(\psi_1+\psi_2)$ θά ἔχῃ εἰκόνα τό σημεῖον P, πού εἶναι τό γεωμετρικόν ἄθροισμα τῶν διανυσμάτων OP_1 καί OP_2. Καί πράγματι, τό διάνυσμα $\overline{OP}$ θά ἔχῃ ἐπί τῶν Ox καί $O\psi$ ἀντιστοίχως ὡς προβολάς διανύσματα μέ ἀριθμητικάς τιμάς x_1+x_2 καί $\psi_1+\psi_2$**.

---

* Δύο ἤ περισσότερα διανύσματα ὀνομάζονται διαδοχικά, ὅταν εἶναι κατά τοιοῦτον τρόπον διατεταγμένα, ὥστε τό πέρας ἑκάστου νά εἶναι ἀρχή τοῦ ἑπομένου. Ἰδού (Σχ. 5) μία πολυγωνική γραμμή συνισταμένη ἀπό διαδοχικά διανύσματα, τά ὁποῖα δύνανται νά μή εἶναι συνεπίπεδα ἐφ' ὅσον εἶναι πλείονα τῶν δύο.



Σχ. 5

Τό διάνυσμα τό ὁποῖον ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τοῦ πρώτου ἐξ αὐτῶν καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ὀνομάζεται συνισταμένη τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἤ γεωμετρικόν ἄθροισμα τῶν διαδοχικῶν διανυσμάτων. Σημειοῦμεν δέ: $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{B\Gamma}=\overline{O\Gamma}$, δηλοῦντες δι' αὐτοῦ, ὅτι οἱ δύο δρόμοι, ὁ τεθλασμένος καί ὁ εὐθύγραμμος, εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἐάν τώρα τά διανύσματα δέν εἶναι διαδοχικά ἀλλ' ἔχουν κοινήν ἀρχήν, ὡς τά $\overline{OA}, \overline{OB}_1, \overline{O\Gamma}_1$, ὀνομάζομεν γεωμετρικόν των ἄθροισμα πάλιν τό διάνυσμα $\overline{O\Gamma}$, ἐάν $\overline{AB}$ εἶναι διάνυσμα ἰσοπαράλληλον πρός τό OB_1 καί $B\Gamma$ ἰσοπαράλληλον πρός τό $O\Gamma_1$.

** Ὑπάρχει εἰς τήν γεωμετρίαν τό θεώρημα τῆς προβολῆς: Ἡ προβολή τῆς συνισταμένης μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐπί τινα προσανατολισμένον ἄξονα ἔχει ἀριθμητικήν τιμήν τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν προβολῶν τῶν συνιστώντων διανυσμάτων ἐπί τόν αὐτόν προσανατολισμένον ἄξονα (βλ. Τριγωνομετρίαν μου-Κεφ.-"Θεωρία τῶν προβολῶν").

Εὐκόλως τώρα ἐννοοῦμεν τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεώς μας διά πλείονας τῶν δύο μιγαδικούς ἀριθμούς.

2ον. Ἀφαίρεσις. Ἐάν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z_1, z_2 ἀντιπροσωπεύονται ὑπό τῶν διανυσμάτων $\overline{OP}_1$, $\overline{OP}_2$ ἡ διαφορά: $z = z_1 - z_2$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τήν γεωμετρικήν διαφοράν: $\overline{OP} = \overline{OP}_1 - \overline{OP}_2$ τῶν ἀντιστοίχων διανυσμάτων.

Ἔχομεν (Σχ.4), $z = z_1 + (-z_2) = z_1 + z_2'$. Ἡ εἰκών τοῦ z_2' εἶναι προφανῶς τό σημεῖον P_2', πού εἶναι συμμετρικόν τοῦ P_2 ὡς πρός τό O. Πράγματι, ἀπό τό προηγούμενον, ἔχομεν: $\overline{OP} = \overline{OP}_1 + \overline{OP}_2' = \overline{OP}_1 - \overline{OP}_2$ (1).

69.2. Παρατηρήσεις: 1ον. Κάθε διάνυσμα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Argand ἀντιπροσωπεύει τόν μιγαδικόν ἀριθμόν, πού δημιουργεῖται ἀπό τήν διαφοράν τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, τόν ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει ἡ ἀρχή του ἀπό τόν μιγαδικόν ἀριθμόν τόν ὁποῖον ἀντιπροσωπεύει τό πέρας του. Πράγματι, ἡ ἰσότης (1) τοῦ (69.1) δίδει: $(\overline{OP}) = (\overline{P_2P_1})$ δηλαδή: $z = z_1 - z_2$. (Σχ.4).

2ον. Κάθε ἰσότης τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι διανύσματα τοῦ πεδίου τοῦ Argand εἶναι ἰσοδύναμος μέ μίαν ἰσότητα ἀριθμητικήν τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί, πού ἀντιπροσωπεύονται ἀπό αὐτά τά διανύσματα καί ἀντιστρόφως.

Οὕτως, ἐάν $x_1 + i\psi_1$, $x_2 + i\psi_2$, $x_3 + i\psi_3$, $x_4 + i\psi_4$, $x_5 + i\psi_5$, $x_6 + i\psi_6$ εἶναι οἱ ἀριθμοί πού ἐκπροσωποῦνται ἀπό τά σημεῖα $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ Argand, μία σχέσις ὡς ἡ:

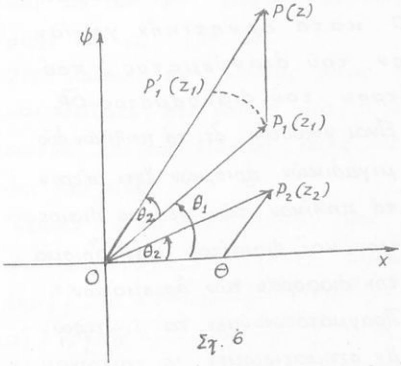
$$(\overline{M_1M_2}) = (\overline{M_3M_4}) + (\overline{M_5M_6})$$

εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἀριθμητικήν σχέσιν:

$$(x_2 - x_1) + i(\psi_2 - \psi_1) = (x_4 - x_3) + i(\psi_4 - \psi_3) + (x_6 - x_5) + i(\psi_6 - \psi_5).$$

70. Πολλαπλασιασμός. Ἐάν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z_1, z_2 ἀντιπροσωπεύουν τά διανύσματα $\overline{OP}_1$, $\overline{OP}_2$ τό γινόμενον: $z = z_1 z_2$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό διάνυσμα $\overline{OP}$, πού εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς: 1ον. Στρέφομεν τό $\overline{OP}_1$ περί τό O κατά γωνίαν ἴσην μέ τό ὄρισμα τοῦ ἑτέρου

διανύσματος $\overline{OP}_2$. 2ον. Πολλαπλασιάζομεν τό οὕτω προκύπτον διάνυσμα ἐπί τό μέτρον τοῦ διανύσματος $\overline{OP}_2$.



Σχ. 6

Εἶναι γνωστόν, ὅτι τό γινόμενον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγάς μέ ὅρισμα τό ἄθροισμα τῶν ορισμάτων τῶν δύο του παραγόντων καί μέ μέτρον τό γινόμενον τῶν μέτρων τῶν παραγόντων του. Οὕτω τό διάνυσμα $\overline{OP}\,(z)$, πού ἐδημιουργήθη, κατά τόν τρόπον τόν ὁποῖον ἐκθέτει ἡ ἐκφώνησις τοῦ θεωρήματος, ἔχει ὅρισμα $\theta_1+\theta_2$ καί μέτρον $\rho_1\cdot\rho_2=|Oz_1 . Oz_2|$.

Δυνάμεθα νά πραγματοποιήσωμεν τά ἀνωτέρω, ἐάν λάβωμεν ἐπί τοῦ ἄξονος Ox τό σημεῖον Θ τετμημένης 1. Τό ζητούμενον σημεῖον $P(z)$ εἶναι ἡ τρίτη κορυφή τοῦ τριγώνου OP_1P, πού εἶναι ὅμοιον πρός τό τρίγωνον $O\Theta P_2$. Πράγματι,

$$(O\widehat{x, O}P)=\theta_1+\theta_2$$

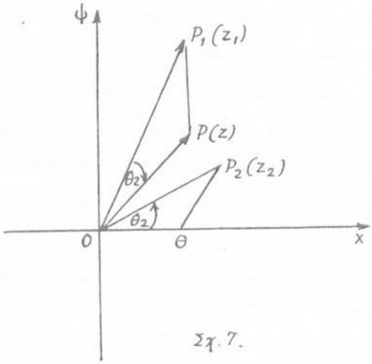
καί λόγῳ τῆς ὁμοιότητος

$$\frac{|z|}{|z_2|}=\frac{|z_1|}{1} \quad \text{ἤ} \quad |z|=|z_1|.|z_2|$$

Εἰδικαί περιπτώσεις: 1ον. Ὁ ἀριθμός z_2 εἶναι πραγματικός. Τό ὅρισμά του εἶναι 0 ἤ Π καθόσον εἶναι οὗτος ἀριθμός θετικός ἤ ἀρνητικός. Συνεπῶς ὁ ἀριθμός z ἀντιπροσωπεύει διάνυσμα ἐπί τῆς εὐθείας $\overline{OP}_1$. 2ον. Ὁ ἀριθμός εἶναι μιγάς μέτρου 1. Ὁ ἀριθμός z ἀντιπροσωπεύει τό σημεῖον P_1' εἰς τό ὁποῖον ἔρχεται τό P_1, ὅταν τό διάνυσμα $\overline{OP}_1$ στραφῇ κατά γωνίαν θ_2. 3ον. Ὁ ἀριθμός z_2 εἶναι ὁ i ἤ ὁ $-i$. Νά πολλαπλασιάσωμεν τόν ἀριθμόν z_1 ἐπί i ἤ ἐπί $-i$ σημαίνει νά στρέψωμεν τό διάνυσμα $\overline{OP}_1$ κατά γωνίαν $\pm\frac{\pi}{2}$.

71. Διαίρεσις. Ἐάν οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z_1, z_2 ἀντιπρο-

σωπεύονται ἀπό τά διανύσματα $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$ τό πηλίκον $z = \frac{z_1}{z_2}$ ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τό διάνυσμα $\overline{OP}$, τό ὁποῖον δημιουργεῖται ὡς ἀκολούθως: 1ον. Στρέφομεν τό διάνυσμα $\overline{OP_1}$ περί τό O κατά ἀρνητικήν γωνίαν $-\theta_2$. 2ον. διαιροῦμεν τό μέτρον τοῦ διανύσματος, πού οὕτω προκύπτει, διά τοῦ μέτρου τοῦ διανύσματος $\overline{OP_2}$.



Σχ. 7.

Εἶναι γνωστόν, ὅτι τό πηλίκον δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν ἔχει μέτρον τό πηλίκον τῶν μέτρων διαιρετέου καί διαιρέτου καί ὅρισμα τήν διαφοράν τῶν ὁρισμάτων. Πραγματοποιοῦμεν τά ἀνωτέρω, ἄν σχηματίσωμεν τό τρίγωνον OP_1P ὅμοιον μέ τό τρίγωνον $OP_2\Theta$, ὅπου $O\Theta$ εἶναι διάνυσμα ἴσον μέ τήν μονάδα. Πράγματι,

$$(O\hat{x}, OP) = \theta_1 - \theta_2$$

καί ἐκ τῆς ὁμοιότητος

$$\frac{|z|}{1} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Ἀσκήσεις

276. Δώσατε τάς νιοστάς ρίζας τῆς μονάδος καί δείξατε, ὅτι ἡ μία ἐξ αὐτῶν, ἡ ὡρισμένη, πού λέγεται καί ἀρχική ὑψουμένη εἰς τήν 1ην, 2αν, 3ην, ... νην δύναμιν μᾶς δίδει ὅλας τάς ἄλλας ρίζας.

Εἶναι γνωστόν, ὅτι $1 = \sigma\upsilon\nu\, 0 + i\eta\mu 0$ καί συνεπῶς: $\sqrt[\nu]{1} = \sigma\upsilon\nu\frac{2\mu\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\mu\pi}{\nu}$, ὅπου μ: $0, 1, 2, \ldots (\nu-1)$. Ὥστε, ἄν $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$, ὀνομασθοῦν αἱ νιοσταί ρίζαι τῆς μονάδος λαμβάνομεν:

$a_0 = \sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0$, $a_1 = \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2\pi}{\nu}$, $a_2 = \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{4\pi}{\nu} \ldots a_{\nu-1} = \sigma\upsilon\nu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}$.

Εἶναι τώρα φανερόν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων, ὅτι ἡ a_1 ὑψουμένη εἰς τήν 1ην δύναμιν μᾶς δίδει τόν ἑαυτόν της, εἰς τήν 2αν μᾶς δίδει τήν a_2 ρίζαν ... εἰς τήν $\nu-1^{\eta\nu}$ μᾶς δίδει τήν $a_{\nu-1}$ ρίζαν καί εἰς τήν $\nu^{\eta\nu}$ γίνεται $\sigma\upsilon\nu 2\pi + i\eta\mu 2\pi = \sigma\upsilon\nu 0 + i\eta\mu 0$ δηλ. μᾶς δίδει τήν a_0 (βλ. 66).

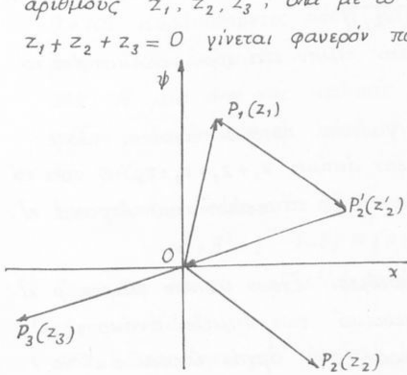
277. Δώσατε τάς νιοστάς ρίζας τοῦ τυχόντος μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καί δείξατε, ὅτι ἐάν ἡ μία, ἡ ὁποιαδήποτε ἀπ' αὐτάς, πολλαπλασιασθῇ ἐπί τάς νιοστάς ρίζας τῆς μονάδος μᾶς δίδει ὅλας τάς ἄλλας του ρίζας.

Ἔχομεν: $A = \rho\,(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ καί $\sqrt[\nu]{A} = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\mu\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\mu\pi}{\nu}\right]$ διά $\mu = 0, 1, 2, 3, \ldots (\nu-1)$. Λαμβάνομεν λοιπόν: $a_0' = \sqrt[\nu]{\rho}.\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta}{\nu}\right]$, $a_1' = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2\pi}{\nu}\right]$, $a_2' = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+4\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+4\pi}{\nu}\right]$, $a_3' = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+6\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+6\pi}{\nu}\right], \ldots a_{\nu-1}' = \sqrt[\nu]{\rho}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{\theta+2(\nu-1)\pi}{\nu} + i\eta\mu\frac{\theta+2(\nu-1)\pi}{\nu}\right]$

Δέν ἔχομεν τώρα παρά νά θεωρήσωμεν μίαν ἐκ τῶν ἀνωτέρω ριζῶν καί νά τήν πολλαπλασιάσωμεν (βλ. 66) ἐπί τάς νιοστάς ρίζας τῆς μονάδος.

278. Ἐάν z_1, z_2, z_3 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί καί τοιοῦτοι, ὥστε $z_1 + z_2 + z_3 \equiv 0$ εἶναι δέ $|z_1| = |z_2| = |z_3| = P$ τότε, $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = P\sqrt{3}$.

Ἐάν $\overline{OP_1}$, $\overline{OP_2}$, $\overline{OP_3}$ εἶναι τά διανύσματα πού ἀντιπροσωπεύουν τούς ἀριθμούς z_1, z_2, z_3, ὅλα μέ τό αὐτό μέτρον ρ, λόγω τῆς ἰσότητος: $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ γίνεται φανερόν πώς ἡ συνισταμένη των θά εἶναι 0. Δηλ. ἐάν $\overline{P_1P_2'}$ εἶναι διάνυσμα ἰσοπαράλληλον πρός τό $\overline{OP_2}$ τό $\overline{P_2'O}$ θά εἶναι ἰσοπαράλληλον διάνυσμα πρός τό $\overline{OP_3}$. Τό τρίγωνον λοιπόν OP_1P_2' εἶναι ἰσόπλευρον καί κατά συνέπειαν, $(\widehat{OP_1, OP_2}) = (\widehat{OP_2, OP_3}) = (\widehat{OP_3, OP_1}) = \frac{2\pi}{3}$. Οὕτως, ἐκ τοῦ τριγώνου OP_2P_1 (69.2 1ον) λαμβάνομεν:



$|z_2 - z_1|^2 = |z_2|_2^2 + |z_1|^2 - 2|z_1 . z_2| \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}$ ἤ $|z_2 - z_1|^2 = 2\rho^2 + \rho^2$ ἤ $|z_2 - z_1|^2 = 3\rho^2$ καί συνεπῶς: $|z_2 - z_1| = \rho\sqrt{3}$.

Εἶναι φανερόν τώρα, ὅτι τά ἄλλα δύο ἀποτελέσματα θά τά ἔχωμεν ἀπό τά τρίγωνα P_3OP_2 καί P_3OP_1.

Δώσατε καί ἀναλυτικήν λύσιν τοῦ θέματος.

279. Ἐάν z_1, z_2, z_3 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί ἡ ἰσότης: $|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ εἶναι δυνατή, ἐάν καί ἐφόσον: $z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3$.

1ον. Δεχόμεθα ὅτι $|z_1-z_2|=|z_2-z_3|=|z_3-z_1|$ καί συνεπῶς ὅτι $|z_1-z_2|^2=|z_2-z_3|^2=|z_3-z_1|^2=K^2$ ὅπου K^2 ἡ κοινή τιμή τῶν τετραγώνων τῶν μέτρων τῶν διαφορῶν z_1-z_2, z_2-z_3, z_3-z_1.

Ἐάν $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3$ ἀντιπροσωπεύουν τούς συζυγεῖς τῶν θεωρουμένων μιγάδων ἔχομεν προφανῶς:

$(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=(z_2-z_3)(\bar{z}_2-\bar{z}_3)=(z_3-z_1)(\bar{z}_3-\bar{z}_1)=K^2$ καί συνεπῶς:

$\bar{z}_1-\bar{z}_2=\dfrac{K^2}{z_1-z_2}$, $\bar{z}_2-\bar{z}_3=\dfrac{K^2}{z_2-z_3}$, $\bar{z}_3-\bar{z}_1=\dfrac{K^2}{z_3-z_1}$ ἤ $K^2\left(\dfrac{1}{z_1-z_2}+\dfrac{1}{z_2-z_3}+\dfrac{1}{z_3-z_1}\right)=0$ ἤ ἀκόμη:

$$K^2\cdot\frac{(z_2-z_3)(z_3-z_1)+(z_1-z_2)(z_3-z_1)+(z_1-z_2)(z_2-z_3)}{(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)}=0$$

ἤ
$$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3 \qquad (1)$$

2ον. Δεχόμεθα τώρα ὅτι ἡ (1) ἰσχύει. Ἔχομεν προφανῶς:

$z_1^2+z_2^2-2z_1z_2=z_2z_3+z_1z_3-z_1z_2-z_3^2$ ἤ $(z_1-z_2)^2=(z_2-z_3)(z_3-z_1)$

ἤ $(z_1-z_2)^3=(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)$ ἤ $|z_1-z_2|^3=|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|$

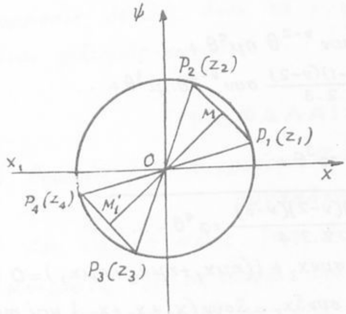
ἤ $|z_1-z_2|=\sqrt[3]{|(z_1-z_2)(z_2-z_3)(z_3-z_1)|}$.

Ἐννοοῦμεν φυσικά, ὅτι τήν αὐτήν τιμήν θά εὕρωμεν καί διά τά μέτρα τῶν ἄλλων διαφορῶν.

280. Ἐάν z_1, z_2, z_3, z_4 εἶναι μιγαδικοί ἀριθμοί τοιοῦτοι ὥστε: $|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$, καί ἐάν ἀκόμη $z_1+z_2+z_3+z_4=0$ τότε τά σημεῖα πού τούς ἀντιπροσωπεύουν εἰς τό πεδίον τοῦ Argand εἶναι κορυφαί ὀρθογωνίου.

Ἀφοῦ οἱ διδόμενοι μιγαδικοί ἀριθμοί ἔχουν κοινόν μέτρον ρ εἶναι φανερόν ὅτι τά ἀντιπροσωπευτικά των σημεῖα ἀνήκουν εἰς τήν περιφέρειαν, πού ἔχει κέντρον τήν ἀρχήν 0 καί ἀκτίνα 1.

Ἀκόμη εἶναι φανερόν πώς τό μέσον Μ τῆς χορδῆς P_1P_2 ἀντιπροσωπεύεται ἀπό τόν ἀριθμόν $\dfrac{z_1+z_2}{2}$ καί τό μέσον M_1 τῆς χορδης P_3P_4 ἀπό τόν ἀριθμόν $\frac{z_3+z_4}{2}$. Ἀλλά $\frac{z_1+z_2}{2} = -\frac{z_3+z_4}{2}$ δηλ. τά σημεῖα M καί M_1 εἶναι συμμετρικά ὡς πρός τήν ἀρχήν τῶν συντεταγμένων O καί ἐπειδή αἱ εὐθεῖαι OM καί OM_1 εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπί τάς εὐθείας P_1P_2 καί P_3P_4, ἕπεται, ὅτι τά εὐθύγραμμα τμήματα P_1P_2 καί P_3P_4 εἶναι ἰσοπαράλληλα. Ἡ ἀλήθεια πλέον τῆς προτάσεως προφανής.



Σχ. 9

281. Ὁ ἀντίστροφος δοθέντος μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ τί μέτρον ἔχει καί τί ὄρισμα;

Ἡ ὕψωσις ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἰς τήν -1 δύναμιν ἀκολουθεῖ τόν γνωστόν κανόνα ὑψώσεως μιγάδος εἰς δύναμιν;

282. Θέσατε ὑπό τήν μορφήν $\alpha+\beta i$ τάς παραστάσεις:

$$\frac{25}{4+3i}, \quad \frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}, \quad \frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2+i)^2-(2-i)^2}$$

283. Νά θέσετε τήν παράστασιν $(1+i\sqrt{3})^7$ ὑπό τήν μορφήν $\alpha+\beta i$ χρησιμοποιοῦντες τριγωνομετρικήν μορφήν τοῦ $1+i\sqrt{3}$.

284. Ὑπολογίσατε τήν τετραγωνικήν ρίζαν τῶν ἀριθμῶν $4+3i$ καί $9+40i$ ἀκολουθοῦντες ὁδόν καθαρά ἀλγεβρικήν ἤ χρησιμοποιοῦντες μέτρα καί ὁρίσματα.

285. Ἡ μία ἀπό τάς κυβικάς ρίζας τοῦ ἀριθμοῦ $18\sqrt{3}+35i$ εἶναι $2\sqrt{3}+i$. Ἐπαληθεύσατε αὐτό τό γεγονός καί ὑπολογίσατε τάς ἄλλας δύο ρίζας.

286. Διαπιστώσατε τήν ἀλήθειαν τῆς ταυτότητος:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta z+\gamma z^2)(\alpha+\beta z^2+\gamma z)$$

ὅπου διά τῶν z καί z^2 ἐννοοῦμεν τάς κυβικάς μιγαδικάς ρίζας τῆς μονάδος.

287. Ἐκφράσατε τά ημ(νθ), συν(νθ) καί εφ(νθ) (ὅπου ν φυσικός ἀριθμός) συναρτήσει τῶν ημθ, συνθ, εφθ ἀντιστοίχως.

Ἐφόσον $\text{συν}(\nu\theta) \pm i\,\text{ημ}(\nu\theta) = (\text{συν}\theta + i\,\text{ημ}\theta)^\nu$ ἀναπτύσσοντες τό 2ον μέλος κατά τό διώνυμον τοῦ Newton καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τό (59.2) εὑρίσκομεν:

$$\sigma\upsilon\nu\,(\nu\theta) = \sigma\upsilon\nu^{\nu}\theta - \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu-2}\theta\,\eta\mu^{2}\theta + \cdots$$

$$\eta\mu\,(\nu\theta) = \nu\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-1}\theta\,\eta\mu\,\theta - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\,\sigma\upsilon\nu^{\nu-3}\theta\,\eta\mu^{3}\theta + \cdots$$

Καί συνεπῶς:

$$\varepsilon\varphi\,\nu\theta = \frac{\nu\,\varepsilon\varphi\,\theta - \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}\,\varepsilon\varphi^{3}\theta + \cdots}{1 - \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}\,\varepsilon\varphi\,\theta + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)(\nu-3)}{1.2.3.4}\,\varepsilon\varphi^{4}\theta - \cdots}$$

288 Δεδομένου ὅτι: $\sigma\upsilon\nu x_1 + \sigma\upsilon\nu x_2 + \sigma\upsilon\nu x_3 + i(\eta\mu x_1 + \eta\mu x_2 + \eta\mu x_3) = 0$ διαπιστώσατε ὅτι: $\sigma\upsilon\nu 3x_1 + \sigma\upsilon\nu 3x_2 + \sigma\upsilon\nu 3x_3 = 3\sigma\upsilon\nu(x_1 + x_2 + x_3)$ καί $\eta\mu 3x_1 + \eta\mu 3x_2 + \eta\mu 3x_3 = 3\eta\mu(x_1 + x_2 + x_3)$.

289. Ὑπολογίσατε τάς κυβικάς ρίζας τῶν $\pm i$.

290. Ὑπολογίσατε τάς ρίζας τετάρτης τάξεως τῶν ἀριθμῶν $\pm i$.

291. Νά δειχθῇ, ὅτι κάθε μιγαδικός ἀριθμός μέτρου 1 δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν: $\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} + i\,\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ ἤ ὑπό τήν μορφήν: $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ ὅπου λ κατάλληλος πραγματικός ἀριθμός.

292. Ἄν ν φυσικός ἀριθμός δείξατε ὅτι:

$$\left(\frac{1+\eta\mu\theta + i\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta - i\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^{\nu} = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\nu\pi}{2} - \nu\theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\nu\pi}{2} - \nu\theta\right)$$

293. Δείξατε, ὅτι πᾶσα ἀκεραία δύναμις μιᾶς νιοστῆς ρίζης τῆς μονάδος εἶναι ἐπίσης ρίζα νιοστῆς τάξεως αὐτῆς.

294 Ἐάν οἱ φυσικοί μ, ν εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους, αἱ $\mu\nu$ τάξεως ρίζαι τῆς μονάδος εὑρίσκονται, ἄν πολλαπλασιάσωμεν ἑκάστην μιοστήν ρίζαν τῆς μονάδος ἐπί ἑκάστην νιοστήν ρίζαν αὐτῆς.

295 Ἐάν $z = a + \beta i$ ὅπου a, β πραγματικοί ἀριθμοί θά εἶναι $|z| = |z+1| = 1$ ἐάν καί ἐφόσον $z^2 + z + 1 = 0$.

296. Ἄν z_1, z_2 μιγαδικοί ἀριθμοί καί γ πραγματικός ἀριθμός νά δειχθῇ ὅτι εἶναι ἀληθής ἡ διπλῆ σχέσις:

$$|z_1 + z_2|^2 \leq (1+\gamma)|z_1|^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)|z_2|^2$$

297. Ἄν $|2z - 1| = |z - 2|$ ὅπου $z = a + \beta i$ (a, β πραγματικοί ἀριθμοί) τότε θά εἶναι $a^2 + \beta^2 = 1$.

298. Δείξατε, ὅτι δυνάμεθα νά λάβωμεν ὅλας τάς πραγματικάς ἤ ὄχι τιμάς τῶν x, ψ, z, πού ἱκανοποιοῦν τήν $x^2 + \psi^2 + z^2 = 1$ ἄν θέσω

μεν: $x = \frac{1-\kappa\nu}{\kappa-\nu}$, $\psi = i\,\frac{1+\kappa\nu}{\kappa-\nu}$, $z = \frac{\kappa+\nu}{\kappa-\nu}$

Παρατηρήσατε δέ ὅτι: ὅταν τά x, ψ, z εἶναι πραγματικά, τά κ, $-\frac{1}{\nu}$ εἶναι συζυγεῖς μιγάδες.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

Γενική θεωρία τῶν Ἀκεραίων Πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστάς

α) Ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα.

72. Σημείωσις. Εἰς τά ἐδάφια ἀπό (17–17.2.1) ἐδώσαμεν τούς ὁρισμούς τοῦ ἐκ ταυτότητος ἴσου πρός τό μηδέν πολυωνύμου μιᾶς μεταβλητῆς» (17) καί τῆς «ἐκ ταυτότητος ἰσότητος δύο πολυωνύμων μιᾶς μεταβλητῆς» (17.2).

Ἐπίσης, (17.1) διεπιστώσαμεν τήν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα «πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι ταυτοτικῶς ἴσον μέ τό μηδέν» καί εἰς τό (17.2.1) διεπιστώσαμεν τήν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα «δύο πολυώνυμα μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι ταυτοτικῶς ἴσα».

Καί τώρα ἐρχόμεθα νά συμπληρώσωμεν τήν θεωρίαν τοῦ κεφαλαίου «Ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα» τοῦ ὁποίου ὅπως προανηγγείλαμεν (17.2.2) τά ἀνωτέρω (ὁρισμοί καί θεωρήματα) ἀποτελοῦν τό εἰσαγωγικόν τμῆμα.

72.1. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ὁ λόγος δύο ἀκεραίων ὡς πρός x πολυωνύμων εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς συγκεκριμένης τιμῆς τῆς μεταβλητῆς x, εἶναι, τά πολυώνυμα νά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ συντελεσταί τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἀνάλογοι.

Θεωροῦμεν τά πολυώνυμα:

$$f_1(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$f_2(x) \equiv \beta_{\nu-\rho}x^{\nu-\rho} + \beta_{\nu-\rho-1}x^{\nu-\rho-1} + \dots + \beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0$$

δεχόμεθα ὅτι ἰσχύει διά πᾶσαν συγκεκριμένην τιμήν τοῦ x, μή μηδενίζουσα τό $f_2(x)$, ἡ ταυτότης:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \equiv K$$

ἤ ἡ ἰσοδύναμός της: $f_1(x) - Kf_2(x) \equiv 0$

ὅπου K εἶν[αι μία σταθερά, θά ἔχωμεν:]

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-\rho+1} x^{\nu-\rho+1} + (a_{\nu-\rho} - K\beta_{\nu-\rho}) x^{\nu-\rho} + (a_{\nu-\rho-1} - K\beta_{\nu-\rho-1}) x^{\nu-\rho-1} +$$
$$\dots + (a_2 - K\beta_2) x^2 + (a_1 - K\beta_1) x + a_0 - K\beta_0 \equiv 0 \quad (1).$$

Καί κατά τό θεώρημα (17.1) λαμβάνομεν:

$$a_\nu = a_{\nu-1} = \dots = a_{\nu-\rho+1} = 0 \quad (2), \quad a_{\nu-\rho} = K\beta_{\nu-\rho}, \quad a_{\nu-\rho-1} = K\beta_{\nu-\rho-1},$$
$$a_{\nu-\rho-2} = K\beta_{\nu-\rho-2} \dots a_2 = K\beta_2, \quad a_1 = K\beta_1, \quad a_0 = K\beta_0 \quad (3).$$

Αἱ ἰσότητες (2) μᾶς βεβαιώνουν, ὅτι ἀναγκαίως τά πολυώνυμα $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι ἰσοβάθμια, ἐνῶ αἱ ἰσότητες (3), ἄν δέν εἶναι ἕνας ἀπό τούς συντελεστάς α καί β μηδέν, γράφονται:

$$K = \frac{a_{\nu-\rho}}{\beta_{\nu-\rho}} = \frac{a_{\nu-\rho-1}}{\beta_{\nu-\rho-1}} = \dots = \frac{a_2}{\beta_2} = \frac{a_1}{\beta_1} = \frac{a_0}{\beta_0} \quad (4)$$

καί βεβαιώνουν τό 2ον μέρος τῆς διά τοῦ θεωρήματός μας ἐκφρασθείσης ἀναγκαίας συνθήκης.

Ἔστω τώρα, ὅτι τά $f_1(x)$ καί $f_2(x)$ εἶναι ἰσοβάθμια, βαθμοῦ $\nu-\rho$, καί ὅτι ἰσχύουν αἱ ἰσότητες (4), ἐνῶ τά α καί β εἶναι διάφορα τοῦ μηδενός. Αἱ ἰσότητες (4) ἰσχύουν καί μέ τήν μορφήν:

$$\frac{a_{\nu-\rho}\cdot x^{\nu-\rho}}{\beta_{\nu-\rho}\cdot x^{\nu-\rho}} = \frac{a_{\nu-\rho-1}\cdot x^{\nu-\rho-1}}{\beta_{\nu-\rho-1}\cdot x^{\nu-\rho-1}} = \dots = \frac{a_2 x^2}{\beta_2 x^2} = \frac{a_1 x}{\beta_1 x} = \frac{a_0}{\beta_0} = K \quad (5)$$

διά π ᾶ σ α ν τιμήν τοῦ x*. Ἐκ τῶν (5) λαμβάνομεν προφανῶς:

$$\frac{a_{\nu-\rho} x^{\nu-\rho} + a_{\nu-\rho-1} x^{\nu-\rho-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{\beta_{\nu-\rho} x^{\nu-\rho} + \beta_{\nu-\rho-1} x^{\nu-\rho-1} + \dots + \beta_2 x^2 + \beta_1 x + \beta_0} \equiv K$$

τοῦ σημείου τῆς ταυτότητος, δικαιολογουμένου ἐκ τοῦ γεγονότος, ὅτι ἡ ἰσχύς τῶν (5) ὑφίσταται διά π ᾶ σ α ν συγκεκριμένην τιμήν τοῦ x.

72.1.2. **Παρατήρησις**: Αἱ ἰσότητες (3) δέν ἀντικαθίστανται ἀπό τάς ἰσότητας (4), ὅταν ἕνας ἀπό τούς α, π.χ. ὁ $a_{\nu-\rho-\mu}$, ὅπου μ μεταξύ 1 καί $\nu-\rho$ εἶναι μηδέν. Ἀπό τάς (3) ἡ $a_{\nu-\rho-\mu} = K\beta_{\nu-\rho-\mu}$ μᾶς δίδει καί $\beta_{\nu-\rho-\mu} = 0$ καί συνεπῶς τά δύο πολυώνυμα δέν θά ἔχουν τόν ὅρο μέ τό $x^{\nu-\rho-\mu}$ καί ἀπό τάς ἰσότητας (4) θά λείπη

---

* Διότι καί εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου ἀποδίδομεν εἰς τό x τήν συγκεκριμένην τιμήν μηδέν ἕκαστος τῶν ἀναφερομένων λόγων γίνεται $\frac{0}{0}$ καί ὡς γνωστόν δυνάμεθα νά δεχθῶμεν ὡς τιμήν αὐτοῦ τοῦ λόγου τήν οἱανδήποτε τιμήν, ἄρα καί τήν τιμήν K.

ὁ λόγος $\dfrac{a_{\nu-\rho-\mu}}{\beta_{\nu-\rho-\mu}}$

Ἐάν πάλιν τό $\beta_{\nu-\rho-\mu}$ εἶναι μηδέν ὁ λόγος $\dfrac{a_{\nu-\rho-\mu}}{\beta_{\nu-\rho-\mu}}$ δέν θά ἔχη νόημα, ἀλλά τότε θά εἶναι καί $a_{\nu-\rho-\mu}=0$ καί συνεπῶς καί πάλιν μεταξύ τῶν λόγων τῶν ἰσοτήτων (4) δέν θά ὑπάρχη ὁ λόγος $\dfrac{a_{\nu-\rho-\mu}}{\beta_{\nu-\rho-\mu}}$.

Συμπέρασμα: Ἡ ὑπόθεσίς μας ἵνα ὁ λόγος $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ εἶναι ἴσος μέ τήν σταθεράν Κ ἀνεξαρτήτως ἀπό τήν οἱανδήποτε συγκεκριμένην τιμήν τοῦ x, ἔχει ὡς ἐπακόλουθον νά ἰσχύουν αἱ ἰσότητες (2) καί αἱ ἰσότητες (4) ἐνῶ μερικοί ἀπό τούς λόγους τῶν (4) εἶναι δυνατόν νά μή ὑπάρχουν.

72.2. Ταυτοτικῶς ἴσα πολυώνυμα περισσοτέρων τῆς μιᾶς ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

72.2.1. Σημείωσις: Εἶναι φανερόν, ὅτι διά νά ἐξακριβώσωμεν, ἄν τά ἀνωτέρω τρία θεωρήματα ἰσχύουν καί διά πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν, ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν καί διά τοιαῦτα πολυώνυμα τήν ἰσχύν τοῦ πρώτου τῶν θεωρημάτων τούτων. Θά πρέπει λοιπόν νά ἀποδείξωμεν, ὅτι: Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ἕνα πολυώνυμον πολλῶν μεταβλητῶν εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν*, εἶναι ὅλοι οἱ συντελεσταί του νά εἶναι μηδενικά.

Διά τήν ἀπόδειξιν τοῦ θεωρήματός μας θά δεχθῶμεν τήν ἰσχύν τοῦ θεωρήματος διά πολυώνυμον $\nu-1$ μεταβλητῶν καί θά τό ἀποδείξωμεν καί διά πολυώνυμον ν μεταβλητῶν.

Ἔστω τό πολυώνυμον $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ τῶν ν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, πού ὑποτίθεται ταυτοτικῶς ἴσον μέ τό μηδέν.

Διατάσσομεν αὐτό τό πολυώνυμον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x_1 καί λαμβάνομεν:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) \equiv A_\mu x_1^{\mu} + A_{\mu-1} x_1^{\mu-1} + \ldots + A_1 x + A_0 \quad (1)$$

* Δηλ. νά ἔχη ἀριθμητικήν τιμήν μηδέν διά πᾶν σύστημα συγκεκριμένων τιμῶν τῶν μεταβλητῶν των.

ὅπου τά $A_0, A_1, \ldots, A_\mu$ ἀντιπροσωπεύουν πολυώνυμα τῶν $\nu-1$ μεταβλητῶν $x_2, x_3, \ldots, x_\nu$.

Ἄν δώσωμεν εἰς αὐτάς τάς μεταβλητάς τυχούσας ἀριθμητικάς τιμάς $x_2', x_3', \ldots, x_\nu'$, τό πολυώνυμόν μας γίνεται:

$$A_\mu' x_1^\mu + A_{\mu-1}' x_1^{\mu-1} + \cdots + A_1' x + A_0'$$

ὅπου A_μ', $A_{\mu-1}'$, … A_ν', A_0' εἶναι αἱ ἀριθμητικαί τιμαί, τάς ὁποίας λαμβάνουν τά πολυώνυμα A διά τάς ἀποδοθείσας εἰς τάς μεταβλητάς $x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ συγκεκριμένας τιμάς.

Ὑπό αὐτάς τάς συνθήκας τό πολυώνυμον (1), πού εἶναι πολυώνυμον μιᾶς μεταβλητῆς, εἶναι ταυτοτικῶς μηδέν καί συνεπῶς:

$$A_\mu' = 0, \quad A_{\mu-1}' = 0, \ldots A_1' = 0, \quad A_0' = 0 \qquad (2)$$

Οἱ ἀριθμοί ὅμως $x_2', x_3', \ldots x_\nu'$ εἶναι αὐθαίρετα ἐκλεγμένοι καί συνεπῶς αἱ ἰσότητες (2) ἐκφράζουν πώς τά πολυώνυμα $A_\mu, A_{\mu-1}, \ldots A_1, A_0$ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα πρός τό μηδέν *. Ἐπειδή δέ τά πολυώνυμα A εἶναι πολυώνυμα $\nu-1$ μεταβλητῶν, καί διά τοιαῦτα πολυώνυμα ἐδέχθημεν τήν ἰσχύν τοῦ θεωρήματος, ἕπεται, ὅτι ὅλοι οἱ συντελεσταί των εἶναι μηδενικά. Συμπεραίνομεν λοιπόν πλέον πώς καί ὅλοι οἱ συντελεσταί τοῦ $f(x_1, x_2, \ldots x_\nu)$ εἶναι μηδενικά.

Τό ἀρκετόν τῆς συνθήκης εἶναι φανερόν.

β) Γενικαί ἰδιότητες τῶν Πολυωνύμων

73. Ἐάν ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον διαιρεῖται μέ ἕκαστον τῶν διωνύμων $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ὅπου τά α, β, γ, εἶναι διάφορα μεταξύ των, θά διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενόν των $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Τό ἀντίστροφον ἐπίσης εἶναι ἀληθές**.

Ἀφοῦ τά α, β, γ εἶναι διάφορα ἀλλήλων ἀποτελεῖ τό θεώρημά μας μερικήν περίπτωσιν τοῦ θεωρήματος (34, 4ον). Θά δώσωμεν ὅμως

* Δηλ. αἱ ἰσότητες (2) θά ἰσχύουν ἑκάστην φοράν, πού οἱ ἄγνωστοι x_2, x_3, x_ν ἀντικαθίστανται μέ συγκεκριμένας τιμάς.

** Ὅπως γνωρίζομεν πᾶσα πρωτοβάθμιος ἀκεραία παράστασις εἶναι ΠΡΩΤΗ· συνεπῶς, τά θεωρούμενα διώνυμα εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα ἀνά δύο ἀφοῦ $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$. Οὕτω τό θεώρημα εἶναι ἀντίστοιχον θεώρημα τῆς θεωρητικῆς ἀριθμητικῆς.

παρά ταῦτα μίαν ἰδικήν του ἀπόδειξιν.

Καθ' ὑπόθεσιν ἔχομεν: $f(x) \equiv (x-a)f_1(x)$ (1)

Καί συνεπῶς: $f(\beta) = (\beta - a)f_1(\beta)$ (2)

Ἐπειδή δέ $f(\beta)=0$, λόγῳ τοῦ διαιρετοῦ τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $x-\beta$, εἶναι δέ $\beta \neq a$ θά ἔχωμεν $f_1(\beta)=0$. Ἡ τελευταία ὅμως ἰσότης (30) δεικνύει τό διαιρετόν τοῦ $f_1(x)$ διά τοῦ $x-\beta$ καί συνεπῶς ἡ (1) γράφεται:

$$f(x) \equiv (x-a)(x-\beta)f_2(x) \qquad (3)$$

Ἐκ τῆς (3) πάλιν λαμβάνομεν: $f(\gamma) = (\gamma - a)(\gamma-\beta)f_2(\gamma) = 0$.

Καί ἐπειδή αἱ διαφοραί: $\gamma - a$, $\gamma - \beta$, εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός θά ἔχωμεν $f_2(\gamma)=0$ δηλ. συμπεραίνομεν τό διαιρετόν τοῦ $f_2(x)$ διά τοῦ διωνύμου $x-\gamma$.

Ὥστε ἡ (3) γίνεται: $f(x) \equiv (x-a)(x-\beta)(x-\gamma)f_3(x)$ (4)

Ἡ (4) δεικνύει τήν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματός μας ὡς καί τήν ἀλήθειαν τῆς ἀντιστρόφου προτάσεως.

73.1. Θεμελιῶδες Θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας, λῆμμα τοῦ D'Alembert. Ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον ἔχει τοὐλάχιστον μίαν ρίζαν τῆς μορφῆς $a+\beta i$ (δηλ. πραγματικήν, φανταστικήν ἤ μιγαδικήν).

Τό θεώρημα τοῦτο, πού ἰσχύει καί διά πολυώνυμον μέ μιγαδικούς συντελεστάς, θά τό δεχθῶμεν χωρίς ἀπόδειξιν διότι ὁ προορισμός τοῦ βιβλίου μας δέν δικαιολογεῖ τήν ἔκθεσιν ἀποδείξεως.

73.2. Θεώρημα. Ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον $\nu^{ου}$ βαθμοῦ ἀναλύεται εἰς γινόμενον ν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῆς μορφῆς $x-\rho$ $(\rho = a+\beta i)$ ἐπί τόν συντελεστήν τοῦ x^ν.

Ἄς θεωρήσωμεν τό πολυώνυμον: $f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ (1). Συμφώνως πρός τό προηγούμενον θεώρημα τό πολυώνυμον (1) θά μηδενίζεται διά τινα ἀριθμητικήν τιμήν ρ_1 τοῦ x καί συνεπῶς θά διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου $x-\rho_1$. Ὥστε θά ἔχωμεν:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)f_1(x) \qquad (2)$$

ὅπου τό $f_1(x)$ εἶναι πολυώνυμον $\nu-1$ βαθμοῦ.

Συμφώνως ὅμως πρός τό αὐτό θεώρημα τό $f_1(x)$ διαιρεῖται διά τινος διωνύμου $x-\rho_2$, ὅπου ρ_2 κάποιος ὡρισμένος ἀριθμός καί ἡ ἰσότης (2) θά γίνεται:

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2)f_2(x) \qquad (3)$$

ὅπου $f_2(x)$ εἶναι πολυώνυμον $\nu-2$ βαθμοῦ.

Ἐφαρμόζοντες διαδοχικά τό θεμελιῶδες θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας θά φθάσωμεν, ἐάν χρησιμοποιήσωμεν καί τήν ἔκφρασιν (1), ἀπό τήν ταυτότητα (3) εἰς τήν ταυτότητα:

$$f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv K(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu) \quad (4)$$

ὅπου K κάποια σταθερά.

Ἡ (4) γράφεται λόγω τῆς γνωστῆς ταυτότητος τοῦ Newton:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv K[x^\nu - x^{\nu-1}\Sigma\rho_1 + x^{\nu-2}\Sigma\rho_1\rho_2 - \dots + (-1)^\nu \rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu].$$

καί συνεπῶς: $a_\nu = K$ (17.1.2).

73.2.1. Παρατήρησις. Ἀντιλαμβανόμεθα πώς τό θεώρημα αὐτό ἐκφράζει πώς ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x βαθμοῦ ν ἔχει (ν) ρίζας. Ὀφείλομεν νά σημειώσωμεν πώς αἱ ρίζαι αὗται δέν εἶναι ἀναγκαίως ὅλαι διάφοροι μεταξύ των. Οὕτως εἰς τό γινόμενον (4) ἕνας ἤ περισσότεροι τῶν ν πρωτοβαθμίων παραγόντων δυνατόν νά ἐπαναλαμβάνωνται δύο ἤ περισσοτέρας φοράς καί συνεπῶς οὗτοι εἰς τήν ἀνάπτυξιν τοῦ πολυωνύμου εἰς γινόμενον νά παρουσιάζωνται ὑψωμένοι εἰς δυνάμεις διαφόρους τῆς μονάδος. Ἡ ἀνάλυσις λοιπόν ἑνός πολυωνύμου ν βαθμοῦ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων* εἶναι γενικά:

$$f(x) \equiv a_\nu (x-\rho_1)^\lambda \cdot (x-\rho_2)^\mu \cdots (x-\rho_\nu)^\tau$$

ἐνῶ $\lambda+\mu+\dots+\tau=\nu$**

73.3. Θεώρημα. Ἐάν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x

---

* Δηλ. εἰς γινόμενον παραστάσεων, ὅπου ἑκάστη αὐτῶν ὑψωμένη εἰς τήν πρώτην δύναμιν εἶναι παράστασις ΠΡΩΤΗ.

** Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην αἱ ρίζαι $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_\nu$ λέγονται πολλαπλαῖ καί ἀντιστοίχως οἱ $\lambda, \mu, \dots \tau$ εἶναι οἱ βαθμοί πολλαπλότητός των.

βαθμοῦ ν μηδενίζεται διά ν+1 διαφορετικάς τιμάς τοῦ x θά μηδενίζεται διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x· θά εἶναι δηλαδή ταὐτοτικῶς μηδέν.

Ἔστω $\rho_{\nu+1}$ ἡ τιμή ἡ διάφορος τῶν $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_\nu$ διά τήν ὁποίαν τό πολυώνυμον τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου μηδενίζεται. Θά ἔχωμεν λοιπόν:

$$f(\rho_{\nu+1}) = a_\nu(\rho_{\nu+1}-\rho_1)(\rho_{\nu+1}-\rho_2)\ldots(\rho_{\nu+1}-\rho_\nu) = 0$$

Καί ἐπειδή κατά τήν ὑπόθεσιν οὐδεμία τῶν διαφορῶν $\rho_{\nu+1}-\rho_K$ $(K=1\ldots\nu)$, εἶναι μηδέν θά εἶναι $a_\nu = 0$.

Συμπέρασμα: Ὅταν ἕνα πολυώνυμον $\nu^{ου}$ βαθμοῦ ἔχει μίαν ρίζαν πλείονα τοῦ βαθμοῦ του ἔχει τόν συντελεστήν τοῦ x^ν μηδέν, εἶναι δηλ. τοῦτο πολυώνυμον βαθμοῦ ν−1.

Ἐπειδή τώρα διά τό πολυώνυμον τοῦ ν−1 βαθμοῦ θά συμβαίνη ἐπίσης νά ἔχη ρίζαν πλείονα τοῦ βαθμοῦ του θά ἔχη τόν συντελεστήν του $a_{\nu-1}$ μηδέν.

Μέ συνεχῆ ἐφαρμογήν τοῦ ἀναφερθέντος συμπεράσματος διαπιστοῦμεν πώς ὅλοι οἱ συντελεσταί τοῦ πολυωνύμου μας εἶναι ἴσοι μέ τό μηδέν καί συνεπῶς βεβαιούμεθα διά τήν ἀλήθειαν τοῦ θεωρήματος, ἥτις συνδυαζομένη μέ ἐκείνην τοῦ προηγουμένου θεωρήματος μᾶς ὁδηγεῖ εἰς τήν διαπίστωσιν πώς: ἕνα πολυώνυμον βαθμοῦ ν ἔχει ν ρίζας καί μόνον ν.

73.4. **Ἐφαρμογαί**: Διά νά ἐννοήσωμεν καλῶς τήν ἀνωτέρω ἐκτεθεῖσαν θεωρίαν θά δώσωμεν μερικάς ἀξιοσημειώτους ἐφαρμογάς της.

1ον. Ἐάν μ εἶναι φυσικός τις ἀριθμός νά δειχθῆ, ὅτι τό πολυώνυμον: $$f(x) \equiv (x-2)^{2\mu} + (x-1)^\mu - 1$$
εἶναι διαιρετόν μέ τό γινόμενον $(x-1)(x-2)$ καί νά εὑρεθῆ τό πηλίκον.

α). Ἔχομεν: $f(1) = (1-2)^{2\mu} + (1-1)^\mu - 1 = 0$ καί $f(2) = (2-2)^{2\mu} + (2-1)^\mu - 1 = 0$. Ὥστε (73) τό $f(x)$ διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου $(x-1)(x-2)$.

β). $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv \dfrac{(x-2)^{2\mu}-1}{(x-2)+1} + (x-1)^{\mu-1}$, ἐνῶ ἡ πρώτη σημειουμένη διαίρεσις εἶναι τελεία (33).

Ὥστε: $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv (x-2)^{2\mu-1} - (x-2)^{2\mu-2} + \dots + (x-2) - 1 + (x-1)^{\mu-1}$.

Ἀκόμη ἔχομεν: $\dfrac{f(x)}{(x-1)(x-2)} \equiv (x-2)^{2\mu-2} - (x-2)^{2\mu-3} + \dots - (x-2) + 1 + \dfrac{(x-1)^{\mu-1}-1}{(x-1)-1}$

ἢ $\dfrac{f(x)}{(x-1)(x-2)} \equiv (x-2)^{2\mu-2} - (x-2)^{2\mu-3} + \dots - (x-2) + (x-1)^{\mu-2} + (x-1)^{\mu-3} + \dots + (x-1) + 2$.

2ον. Νά δειχθῆ, ὅτι τό πολυώνυμον:

$f(x) \equiv \nu^2 x^{\nu+2} - (2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1} + (\nu+1)^2 x^\nu - x - 1$ (ὅπου ν φυσικός ἀριθμός) εἶναι διαιρετόν μέ τό $(x-1)^3$.

Μᾶς ζητοῦν δηλαδή νά διαπιστώσωμεν, ὅτι τό $f(x)$ ἔχει τήν μονάδα ὡς ρίζαν πολλαπλῆν βαθμοῦ πολλαπλότητος τρία.

Εὐκόλως διαπιστοῦται, ὅτι $f(1)=0$ καί συνεπῶς συμπεραίνομεν τό διαιρετόν τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $x-1$. Τώρα, ὡς ἐννοεῖ τις, θά πρέπει νά πραγματοποιήσωμεν τήν διαίρεσιν τοῦ $f(x)$ διά τοῦ $x-1$ καί νά διαπιστώσωμεν, ὅτι τοῦ πηλίκου τό $x-1$ εἶναι διαιρέτης. Ἀφοῦ καί τοῦτο διαπιστωθῆ θά πρέπει νά διαιρέσωμεν αὐτό τό πηλίκον διά τοῦ $x-1$ καί ἐάν διαπιστωθῆ πώς τοῦ νέου πηλίκου τό $x-1$ εἶναι ἐπίσης διαιρέτης θά συμπεράνωμεν τό ἀληθές τοῦ αἰτουμένου.

Παραθέτομεν τώρα τήν ἐκτέλεσιν τῶν ὅσων ἐξεθέσαμεν μέ τήν ὑπόδειξιν πρός τόν ἀναγνώστην πώς ἑκάστην φοράν ἡ διάταξις τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου γίνεται μέ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νά ἐμφαίνεται τό διαιρετόν του διά τοῦ διωνύμου $x-1$.

$f(x) \equiv \nu^2 x^{\nu+2} - (2\nu^2+2\nu-1)x^{\nu+1} + (\nu^2+2\nu+1)x^\nu - x - 1 \equiv \nu^2 x^{\nu+2} - \nu^2 x^{\nu+1} - (\nu^2+2\nu)x^{\nu+1} + (\nu^2+2\nu)x^\nu + x^{\nu+1} + x^\nu - x - 1$ ἢ $f(x) \equiv \nu^2 x^{\nu+1}(x-1) - (\nu^2+2\nu)x^\nu(x-1) + x(x^\nu-1) + x^\nu - 1$.

Ὥστε: $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv \nu^2 x^{\nu+1} - (\nu^2+2\nu)x^\nu + x(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1) + x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1$ ἢ $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv \nu^2 x^{\nu+1} - (\nu^2+2\nu)x^\nu + (x^\nu + x^{\nu-1} + \dots + x^2 + x) + (x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1)$ ἢ $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv \nu^2 x^\nu(x-1) - (\underbrace{2x^\nu+2x^\nu+\dots+2x^\nu}_{\nu-1\ \text{φοράς}}) - x^\nu + (2x^{\nu-1}+2x^{\nu-2}+\dots+2x) + 1$ ἢ $\dfrac{f(x)}{x-1} \equiv \nu^2 x^\nu(x-1) - 2x^{\nu-1}(x-1) - 2x^{\nu-2}(x^2-1) - \dots - 2x(x^{\nu-1}-1) - (x^\nu-1)$.

Καί ἑπομένως: $f_1(x) \equiv \dfrac{f(x)}{(x-1)^2} \equiv \nu^2 x^\nu - 2x^{\nu-1} - 2x^{\nu-2}(x+1) - \dots$

$- 2x\,(x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\dots+1)-(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1)$.

Ἀλλά $f_1(1)=\nu^2-2\left[1+2+\dots+(\nu-1)\right]-\nu=\nu^2-2\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{2}-\nu=0$* ὅ.ἔ.δ.

Ἐ ν δ ι α φ έ ρ ο υ σ α σ η μ ε ί ω σ ι ς: Εἰς τό ἀνωτέρω θέμα, πού ζητεῖται ἡ ἐξακρίβωσις τῆς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης, χωρίς συγχρόνως νά ζητεῖται καί ἡ εὕρεσις τοῦ πηλίκου δυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν καί κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον.

Θέτομεν $x-1=\psi$, ἤ $x=\psi+1$, ὁπότε τό θέμα μας ἀνάγεται εἰς τό ἑξῆς: Ν ά ἐ ξ α κ ρ ι β ω θ ῆ τ ό δ ι α ι ρ ε τ ό ν τ ο ῦ π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ: $f'(\psi)\equiv\nu^2(\psi+1)^{\nu+2}-(2\nu^2+2\nu-1)(\psi+1)^{\nu+1}+(\nu+1)^2(\psi+1)^{\nu}-(\psi+1)-1$ διά τοῦ ψ^3.

Ἕνα πολυώνυμον τοῦ ψ (ὑποτίθεται τοῦτο διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ ψ) διά νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ ψ^3 θά πρέπει νά στερεῖται τοὐλάχιστον τῶν ὅρων τοῦ μηδενός, τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου βαθμοῦ. Καί εἰς τό προκείμενον θέμα θά πρέπει νά διαπιστωθῆ, ὅτι οἱ συντελεσταί τῶν ἀναφερθέντων ὅρων τοῦ πολυωνύμου μας εἶναι μηδενικά.

Πράγματι, λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τά γνωστά ἐκ τῆς ἀναπτύξεως μιᾶς δυνάμεως ἑνός διωνύμου (σελ. 64,15), εὑρίσκομεν ἀντιστοίχως ὡς συντελεστάς αὐτῶν τῶν ὅρων:

$$\nu^2-(2\nu^2+2\nu-1)+(\nu+1)^2-1-1=0$$

$$\nu^2(\nu+2)-(2\nu^2+2\nu-1)(\nu+1)+(\nu+1)^2\nu-1=0$$

$$\frac{\nu^2(\nu+2)(\nu+1)}{2}-\frac{(2\nu^2+2\nu-1)(\nu+1)\nu}{2}+\frac{(\nu+1)^2\nu(\nu-1)}{2}=0$$

Βλέπομεν λοιπόν πόσον ταχέως ἐλύσαμεν διά τοῦ παρατεθέντος τρόπου τό προηγούμενον θέμα. Ὁ τρόπος ὅμως οὗτος δέν ἐφαρμόζεται, ἄν μαζί μέ τήν ἐξακρίβωσιν τῆς πολλαπλότητος τῆς ρίζης ἐζητεῖτο καί ἡ εὕρεσις τοῦ πηλίκου τοῦ πολυωνύμου διά τοῦ $(x-1)^3$. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν μόνον ὁ πρῶτος ἐκ τῶν ἐκτεθέντων τρόπων ἐνδείκνυται.

---

* Εἰς τό ἄθροισμα: $1+2+\dots+(\nu-2)+(\nu-1)$ οἱ ὅροι του, οἱ ὁποῖοι ἰσαπέχουν τῶν ἄκρων του ὅρων, ἔχουν ἄθροισμα ν. Καί ἐπειδή οὗτοι ἀντιπροσωπεύουν $\frac{\nu-1}{2}$ ζεύγη συμπεραίνομεν ὡς τιμήν τοῦ ἐν λόγῳ ἀθροίσματος τόν ἀριθμόν $\nu\cdot\frac{\nu-1}{2}$.

Μέ τήν εὐκαιρίαν τῆς τελευταίας μας παρατηρήσεως θά ὁλοκληρώσωμεν τήν εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου διά τοῦ $(x-1)^3$.

Γράφομεν : $\dfrac{f(x)}{(x-1)^2} \equiv \nu^2 x^\nu - 2(\nu-1)x^{\nu-1} - 2(\nu-2)x^{\nu-2} - \dots - 2x - (x^{\nu-1} + x^{\nu-2} + \dots + x + 1)$.

Τά x^ν εἶναι ν^2 εἰς πλῆθος ἀλλά δύναταί τις νά διαπιστώση, ὅτι καί ὅλοι οἱ ἄλλοι ὅροι εἶναι εἰς πλῆθος ν^2. Πράγματι,

$$2[(\nu-1)+(\nu-2)+\dots+1]+\nu = 2\,\frac{1+\nu-1}{2}\cdot(\nu-1)+\nu = \nu^2$$

Διά νά ἐμφανίσωμεν τώρα τό διαιρετόν αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου μέ τό $x-1$ γράφομεν:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2} \equiv (2\nu-1)x^{\nu-1}(x-1)+(2\nu-3)x^{\nu-2}(x^2-1)+\dots+3x(x^{\nu-1}-1)+(x^\nu-1)^*$$

Ὥστε: $\dfrac{f(x)}{(x-1)^3} \equiv (2\nu-1)x^{\nu-1}+(2\nu-3)x^{\nu-2}(x+1)+\dots+3x(x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\dots+x+1)+x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+\dots+x+1$.

καί τελικά:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} \equiv [(2\nu-1)+(2\nu-3)+\dots+3+1]x^{\nu-1}+[(2\nu-3)+(2\nu-5)+\dots+3+1]x^{\nu-2}+\dots+(3+1)x+1^{**}$$ ἤ

$$\frac{f(x)}{(x-1)^3} \equiv \nu^2 x^{\nu-1}+(\nu-1)^2 x^{\nu-2}+\dots+4\cdot x+1$$

3ον Ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον, ὅταν διαιρεθῆ διά τοῦ x^2+x+1 δίδει ὡς ὑπόλοιπον $1-x$ καί ὅταν διαιρεθῆ διά τοῦ x^2-x+1 δίδει ὡς ὑπόλοιπον $3x+5$. Ποῖον ὑπόλοιπον θά δώση αὐτό τό ἴδιον πολυώνυμον, ἄν διαιρεθῆ μέ τό x^4+x^2+1;

Ἔστω $f(x)$ αὐτό τό πολυώνυμον. Κατά τήν ἐκφώνησιν ὑφίστανται αἱ ταυτότητες:

$$f(x) \equiv (x^2+x+1)\Pi_1(x)+1-x \qquad (1).$$

---

* Διότι τά $x^{\nu-1}$ εἶναι εἰς πλῆθος $2(\nu-1)+1=2\nu-1$, τά $x^{\nu-2}$ εἶναι $2(\nu-2)+1=2\nu-3$ καί τελικά τά x εἶναι τρία, μένει δέ ἀκόμη ἕνα x^ν διά νά συνδυασθῆ μέ τό 1 τοῦ τελευταίου ὅρου.

** Παρατηροῦμεν ὅτι ὁ συντελεστής τοῦ $x^{\nu-1}$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν (ὁ $2\nu-1$ ἐκφράζει τόν ν^{ov} περιττόν διότι οὗτος διά $\nu=1$ μᾶς δίδει τόν 1 δηλ. τόν πρῶτον περιττόν) ἐνῶ ἕκαστον ζεῦγος τούτων - ἐκ τῶν ἴσων τῶν ἄκρων ἀπεχόντων - ἔχει ἄθροισμα 2ν. Ὁμοίως σκεπτόμεθα διά τόν ὑπολογισμόν τῶν συντελεστῶν καί τῶν ἄλλων ὅρων.

$$f(x) \equiv (x^2-x+1)\,\Pi_2(x)+3x+5 \qquad (2)$$

$$f(x) \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)\,\Pi(x)+Y \qquad (3)^*$$

Ἐπειδὴ τὸ Y θὰ εἶναι ἐν γένει βαθμοῦ 3ου δημιουργοῦνται δύο νέαι ταυτότητες:

$$Y \equiv (x^2+x+1).(ax+\beta)+\upsilon_1 \qquad (4) \qquad\qquad Y \equiv (x^2-x+1)(\gamma x+\delta)+\upsilon_2 \qquad (5)$$

Ἡ (3) γράφεται: $\quad f(x)-Y \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)\Pi(x) \qquad (6)$

Ἡ (6) διὰ τῆς χρησιμοποιήσεως τῶν ἐκφράσεων (1) καὶ (4) γίνεται:

$$(x^2+x+1)\Pi(x)+(1-x)-(x^2+x+1)(ax+\beta)-\upsilon_1 \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)\Pi(x) \qquad (7)$$

Καὶ ὡς εἶναι φανερὸν ἡ (7) ἐκφράζει δυνατότητα ἐφ' ὅσον ἡ παράστασις $1-x-\upsilon_1$ εἶναι μηδέν. Ἔχομεν λοιπὸν $\upsilon_1 = 1-x$ **. Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὴν (6) τὰς ἐκφράσεις (2) καὶ (5) διαπιστοῦμεν εὐκόλως ὅτι θὰ πρέπει νὰ εἶναι $\nu_2 = 3x+5$.

Κατόπιν τῶν τελευταίων διαπιστώσεων αἱ ἰσότητες (4) καὶ (5) γίνονται:

$$Y \equiv (x^2+x+1)(ax+\beta)+1-x \qquad (8) \qquad\qquad Y \equiv (x^2-x+1)(\gamma x+\delta)+3x+5 \qquad (9)$$

Ἐκ τῶν (8) καὶ (9) δημιουργεῖται ἡ ταυτότης:

$$(x^2+x+1)(ax+\beta)+(1-x) \equiv (x^2-x+1)(\gamma x+\delta)+3x+5 \qquad (10)$$

Ἡ ταυτότης (10) μᾶς δίδει τὸ σύστημα:

$$a=\gamma\ , \quad a+\beta=\gamma+\delta\ , \quad a+\beta-1=\gamma-\delta+3\ , \quad \beta+1=\delta+5$$

ἐκ τῆς λύσεως τοῦ ὁποίου λαμβάνομεν : $a=-2$, $\beta=4$, $\gamma=-2$, $\delta=0$.

Οὕτω $Y \equiv (x^2+x+1)(-2x+4)+(1-x) \equiv (x^2-x+1)(-2x)+3x+5$ ἤ

$Y \equiv -2x^3+2x^2+x+5$.

γ). Συμμετρικὰ καὶ Ὁμογενῆ Πολυώνυμα.

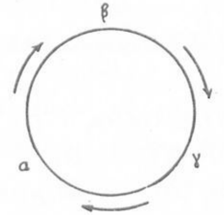
73. 5. **Κυκλικὴ ἐναλλαγή**. Ἄς θεωρήσωμεν μίαν ἀλγεβρικὴν παράστασιν, ἔστω τήν: $a^2\beta-\gamma$. Ἡ παράστασις αὕτη περιέχει τρία γράμματα, τὰ a, β, γ. Τὰ γράμματα αὐτὰ τὰ θεωροῦμεν τοποθετημένα ἐπὶ μιᾶς περιφερείας. Ἄν τώρα τὴν περιφέρειάν μας τὴν διατρέξωμεν κατὰ μίαν ὡρισμένην φοράν, π.χ. ἐξ ἀριστερῶν πρὸς τὰ δεξιά, ἀρχίζοντες ἀπὸ τὸ a, συναντῶμεν κατὰ τὴν πορείαν μας πρῶ-

---

* Διότι $x^4+x^2+1 \equiv (x^2+x+1)(x^2-x+1)$

** Τὸ πρῶτον μέλος τῆς (7) γίνεται διαιρετὸν διὰ τοῦ x^2+x+1 μόνον ὅταν $\upsilon_1=1-x$.

τον τό β, μετά τό γ καί ἐπανερχόμεθα τέλος εἰς τό α.



Ἡ ἀντικατάστασις εἰς τήν θεωρηθεῖσαν παράστασιν ἑκάστου τῶν γραμμάτων της μέ ἐκεῖνο μέ τό ὁποῖον αὐτό τό γράμμα ἐναλλάσσεται, ἐνῶ διατρέχωμεν τήν περιφέρειαν κατά μίαν καί τήν αὐτήν φοράν, δημιουργεῖ τήν καλουμένην κυκλικήν ἐναλλαγήν.

Εἶναι δυνατόν ἡ κυκλική ἐναλλαγή νά γίνῃ εἰς μίαν παράστασιν καί ὡς πρός περισσοτέρας ὁμάδας γραμμάτων. Οὕτως ἡ παράστασις: $(x-\psi)(\alpha-\beta)+(\psi-z)(\beta-\gamma)+(z-x)(\gamma-\alpha)$ ἔπειτα ἀπό κυκλικήν ἐναλλαγήν τῶν x, ψ, καί τῶν α, β, γ γίνεται: $(\psi-z)(\beta-\gamma)+(z-x)(\gamma-\alpha)+(x-\psi)(\alpha-\beta)$, δηλ. ἐπανέρχεται εἰς ἑαυτήν.

73.6. Μία παράστασις ὀνομάζεται συμμετρική ὡς πρός ὡρισμένα γράμματα, ἄν ἡ οἱαδήποτε* κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων αὐτῶν εἰς αὐτήν τήν παράστασιν δέν τήν μεταβάλλει.

Π.χ. ἡ παράστασις: $x^3+\psi^3+z^3+\lambda x\psi z$ εἶναι συμμετρική ὡς πρός τά γράμματά της x, ψ, z. Ἐπίσης αἱ παραστάσεις:

$$\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta) \qquad \alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2$$

εἶναι συμμετρικαί ὡς πρός τά α, β, γ.

73.7. Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων καί συμμετρικῶν πολυωνύμων.

1ον. Ἐάν ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν α, β, γ εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός τά γράμματα ταῦτα καί διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου $\alpha-\beta$ διαιρεῖται καί διά τῶν διωνύμων $\beta-\gamma$ καί $\gamma-\alpha$· ἐπίσης, ἐάν διαιρεῖται διά τοῦ διωνύμου $\alpha+\beta$ θά διαιρεῖται καί διά τῶν διωνύμων $\beta+\gamma$ καί $\gamma+\alpha$**.

---

* Δηλ. ἡ καθ' οἱονδήποτε δυνατόν τρόπον τοποθέτησις τῶν γραμμάτων αὐτῶν ἐπί μιᾶς περιφερείας καί ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων αὐτῶν ἐπί τῆς παραστάσεως ἐπαναφέρει τήν παράστασιν εἰς ἑαυτήν.

** Δηλ. διά τῶν διωνύμων, τά ὁποῖα προκύπτουν ἐκ τοῦ ἀρχικοῦ διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς.

Ἐάν $f(a,\beta,\gamma)$ εἶναι τό πολυώνυμόν μας, λαμβάνομεν τήν ταυτότητα:

$$f(a,\beta,\gamma) \equiv (a-\beta) f_1(a,\beta,\gamma) \qquad (1)$$

Καί διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν a, β, γ, τήν ταυτότητα:

$$f(\beta,\gamma,a) \equiv (\beta-\gamma) f_1(\beta,\gamma,a) \qquad \text{ἤ}$$

τήν: $$f(a,\beta,\gamma) \equiv (\beta-\gamma) f_1(\beta,\gamma,a) \qquad (2)$$

ἀφοῦ: $$f(a,\beta,\gamma) \equiv (\beta,\gamma,a)$$

Ἐάν καί εἰς τήν (2) κάμωμεν κυκλικήν ἐναλλαγήν, λαμβάνομεν:

$$f(a,\beta,\gamma) \equiv (\gamma-a) f_1(\gamma,a,\beta) \qquad (3)$$

Αἱ ταυτότητες (2) καί (3) βεβαιώνουν τήν ἀλήθειαν τῆς προτάσεώς μας. Ἄν ἐργασθῶμεν μέ τόν αὐτόν τρόπον δεικνύομεν τήν ἀλήθειαν τοῦ 2ου μέρους τῆς προτάσεώς μας.

2ον. Τό π η λ ί κ ο ν τῆς τ ε λ ε ί α ς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου καί συμμετρικοῦ πολυωνύμου ὡς πρός τά a, β, γ, δι' ἑνός ἄλλου ἐπίσης ἀκεραίου καί συμμετρικοῦ πολυωνύμου ὡς πρός τά αὐτά γράμματα, εἶναι πολυώνυμον ἀκέραιον καί συμμετρικόν ὡς πρός τά αὐτά γράμματα.

Ἐάν εἰς τήν θεωρουμένην τελείαν διαίρεσιν $f(a,\beta,\gamma)$, $f_1(a,\beta,\gamma)$, $f_2(a,\beta,\gamma)$ εἶναι ἀντιστοίχως ὁ διαιρετέος, ὁ διαιρέτης καί τό πηλίκον, λαμβάνομεν:

$$f(a,\beta,\gamma) \equiv f_1(a,\beta,\gamma) f_2(a,\beta,\gamma) \qquad (1)$$

Καί διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς: $f(\beta,\gamma,a) \equiv f_1(\beta,\gamma,a) f_2(\beta,\gamma,a)$

ἤ τήν: $$f(a,\beta,\gamma) \equiv f_1(a,\beta,\gamma) f_2(\beta,\gamma,a) \qquad (2)$$

ἀφοῦ τά f καί f_1 ὑπετέθησαν συμμετρικά.

Διά συγκρίσεως τώρα τῶν (1) καί (2) λαμβάνομεν:

$$f_2(a,\beta,\gamma) \equiv f_2(\beta,\gamma,a)$$

δηλ. διαπιστοῦμεν, ὅτι τό $f_2(a,\beta,\gamma)$ εἶναι συμμετρικόν.

73.8. **Ὁμογενές πολυώνυμον**. Ἕνα ἀκέραιον τῶν x, ψ, z, πολυώνυμον, τό $f(x,\psi,z)$, ὀνομάζεται ὁμογενές ν βαθμοῦ ὁμογενείας, ἄν ἡ ἀντικατάστασις εἰς αὐτό τῶν x, ψ, z ὑπό τῶν $Kx, K\psi, Kz$, ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα ὁλόκληρον τό πολυώνυμον νά πολλαπλασιάζεται ἐπί K^ν.

Οὕτως ἀπό τό $f(x,\psi,z)$ δημιουργεῖται ἡ ταυτότης:

$$f(Kx,\ K\psi,\ Kz) \equiv K^{\nu} f(x,\psi,z)$$

Εἰδικά τό πολυώνυμον: $x^2\cdot\psi + x^2 z + x\psi^2 + \psi^2 z + xz^2 + \psi z^2$ εἶναι ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ διότι ἔχομεν:

$$(Kx)^2\cdot K\psi + (Kx)^2\cdot Kz + Kx(K\psi)^2 + (K\psi)^2\cdot(Kz) + Kx\cdot(Kz)^2 + K\psi(Kz)^2 \equiv$$
$$K^3(x^2\psi + x^2 z + x\psi^2 + \psi^2 z + xz^2 + \psi z^2).$$

Ἐπίσης τό πολυώνυμον: $\alpha\beta\gamma\delta + \alpha\gamma^2\delta - 2\beta^2\alpha\delta$ εἶναι ὁμογενές τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας ὡς πρός τά $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Ἐννοοῦμεν φυσικά, ὅτι τό ὁμογενές πολυώνυμον εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, τά ὁποῖα εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα τοῦ πολυωνύμου μας. Οὕτω δυνάμεθα νά λέγωμεν, ὅτι τό ἀκέραιον πολυώνυμον $f(x,\psi,z)$ εἶναι ὁμογενές ν βαθμοῦ ὁμογενείας, ὡς πρός τά γράμματα x, ψ, z, ἐάν τοῦτο εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $\lambda x^{\mu}\psi^{\rho}z^{\sigma}$ ὅπου λ εἶναι ἕνας ἀριθμητικός παράγων καί τά μ, ρ, σ θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί τοιοῦτοι, ὥστε $\mu+\rho+\sigma=\nu$, ἐνῶ δύο ἤ ἕνας ἐξ αὐτῶν δύνανται νά εἶναι μηδέν. Γράφομεν μάλιστα συμβολικά $f(x,\psi,z) \equiv \Sigma(\lambda x^{\mu}\psi^{\rho}z^{\sigma})$ ὅπου τό Σ, ὡς γνωστόν, ἀντικαθιστᾷ τήν λέξιν ἄθροισμα.

Σημειοῦμεν ὅμως, ὅτι ὁ πρῶτος ὁρισμός τῆς ὁμογενείας διευκολύνει ὡς μαθηματική ἔκφρασις τάς ἐφαρμογάς.

73.9. Ἰδιότητες τῶν Ὁμογενῶν Πολυωνύμων. 1ον. Τό γινόμενον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ἕνα ὁμογενές πολυώνυμον.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν τό πολυώνυμον $f(x,\psi,z)$, ν βαθμοῦ ὁμογενείας καί ἕνα ἄλλο πολυώνυμον ὡς πρός τά αὐτά ἤ ἄλλα γράμματα μ βαθμοῦ ὁμογενείας· ἄς ὑποθέσωμεν μάλιστα πώς τό δεύτερον εἶναι συνάρτησις τῶν α, β, γ καί εἶναι τό $f_1(\alpha,\beta,\gamma)$. Οὕτω τό μέν πρῶτον θά εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $\lambda x^{\rho}\psi^{\sigma}z^{\pi}$ ὅπου $\rho+\sigma+\pi=\nu$ καί τό ἄλλο ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $\lambda_1\alpha^{\rho_1}\cdot\beta^{\sigma_1}\cdot\gamma^{\pi_1}$ ὅπου $\rho_1+\sigma_1+\pi_1=\mu$.

Ἐπειδή τώρα τό γινόμενον δύο πολυωνύμων εὑρίσκεται, ἄν ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου τόν πολλαπλασιάσωμεν ἐπί

ἕνα ἕκαστον τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστοῦ, συμπεραίνομεν, ὅτι τό γινόμενον τῶν πολυωνύμων θά εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς: $\lambda\lambda_1 x^{\rho}y^{\sigma}z^{\pi}\alpha^{\rho_1}\beta^{\sigma_1}\gamma^{\pi_1}$ δηλ. ἄθροισμα ὅρων βαθμοῦ $\mu+\nu$.
Παραθέτομεν τώρα τήν ἀπόδειξιν τοῦ αὐτοῦ θεωρήματος μέ τήν χρησιμοποίησιν τοῦ πρώτου ὁρισμοῦ τῆς ὁμογενείας· θά καταδειχθῆ ἡ παρεχομένη οὕτω διευκόλυνσις.
Ἔχομεν κατά τά διδόμενα:

$$f(Kx, K\psi, Kz) \equiv K^{\nu} f(x, \psi, z)$$
$$f_1(K\alpha, K\beta, K\gamma) \equiv K^{\mu} f_1(\alpha, \beta, \gamma)$$

Καί συνεπῶς: $f(Kx, K\psi, Kz) f_1(K\alpha, K\beta, K\gamma) \equiv$
$$K^{\mu+\nu} f(x, \psi, z) f_1(\alpha, \beta, \gamma) \quad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

2ον. Τό πηλίκον δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων (τά ὁποῖα εἶναι συναρτήσεις τῶν αὐτῶν γραμμάτων), ἐάν ἡ διαίρεσις εἶναι τελεία, εἶναι ἕνα ὁμογενές πολυώνυμον.
Ἔστωσαν $f(x,\psi,z)$, $f_1(x,\psi,z)$, $\Pi(x,\psi,z)$ ὁ διαιρετέος, ὁ διαιρέτης καί τό πηλίκον μιᾶς τελείας διαιρέσεως, ἐνῶ τά δύο πρῶτα πολυώνυμα ὑποτίθενται ὁμογενῆ τό ἕνα ν καί τό ἄλλο μ βαθμοῦ ὁμογενείας $(\nu > \mu)$.

Ὥστε: $$f(x,\psi,z) \equiv f_1(x,\psi,z)\Pi(x,\psi,z) \quad (1)$$
Καί: $$f(Kx, K\psi, Kz) \equiv f_1(Kx, K\psi, Kz)\Pi(Kx, K\psi, Kz)$$
ἤ $$K^{\nu} f(x,\psi,z) \equiv K^{\mu} f_1(x,\psi,z)\Pi(Kx, K\psi, Kz) \quad (2)$$
ἤ $$K^{\nu-\mu} f_1(x,\psi,z)\Pi(x,\psi,z) \equiv f_1(x,\psi,z)\Pi(Kx, K\psi, Kz)^{*} \quad (3)$$
ἤ $$K^{\nu-\mu}\Pi(x,\psi,z) \equiv \Pi(Kx, K\psi, Kz) \quad (4)$$

Ἡ (4) μᾶς βεβαιώνει, ὅτι τό $\Pi(x,\psi,z)$ εἶναι ὁμογενές πολυώνυμον $\nu-\mu$ βαθμοῦ ὁμογενείας.
73.10. Παρατήρησις: Εἶναι φανερόν πώς ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον δύναται νά εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός τά γράμματά του χωρίς συγχρόνως νά εἶναι καί ὁμογενές ὡς πρός τά ἴδια αὐτά γράμματα. Καί ἀντιστρόφως, δύναται νά εἶναι ὁμογενές ὡς πρός τά γράμματά

* Διά τήν δημιουργίαν τῆς (3) ἐχρησιμοποιήσαμεν τήν ἔκφρασιν (1) τοῦ $f(x,\psi,z)$.

του καί νά μή εἶναι συμμετρικόν ὡς πρός αὐτά, εἶναι ὅμως δυνατόν νά ἔχη ἀμφοτέρας τάς ἰδιότητας. Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν παρουσιάζει ἕνα πλεονέκτημα καί ἡ ἀνάλυσίς του εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ἄν εἶναι δυνατή, γίνεται μέ πολύ εὔκολον τρόπον.

73.11. Σημείωσις. Προτοῦ νά δώσωμεν παραδείγματα ἀναλύσεως εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων ἑνός ἀκεραίου συμμετρικοῦ καί ὁμογενοῦς πολυωνύμου, ἡ ὁποία νά βασίζεται εἰς τάς ἰδιότητας πολυωνύμων αὐτοῦ τοῦ εἴδους, θά κατατοπίσωμεν τούς ἀναγνώστας ἐπί τοῦ τρόπου σχηματισμοῦ τῶν συμμετρικῶν καί ὁμογενῶν πολυωνύμων.

Καί κατά πρῶτον, ἡ γενική μορφή ἑνός ἀκεραίου πολυωνύμου, τό ὁποῖον εἶναι πρωτοβάθμιον καί συμμετρικόν ὡς πρός τά x, ψ, z εἶναι ἡ $\lambda(x+\psi+z)+\mu$ ὅπου τά λ, μ ἐκπροσωποῦν πραγματικούς ἀριθμούς. Τό δικαιολογεῖ αὐτό ὁ καθείς εὐκόλως: Τά x, ψ, z δέν θά ἠδύναντο νά ἔχουν διαφορετικούς συντελεστάς, διότι ἡ ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων θά μετέβαλε τό πολυώνυμον. Ὅσον ἀφορᾶ τό μ, δύναται νά εἶναι τοῦτο καί μηδέν. Εἰς τήν τελευταίαν αὐτήν περίπτωσιν τό πολυώνυμόν μας εἶναι συμμετρικόν καί ὁμογενές ὡς πρός τά x, ψ, z.

Ἡ γενική πάλιν μορφή ἑνός συμμετρικοῦ πολυωνύμου 2ου βαθμοῦ ὡς πρός τά x, ψ, z εἶναι:

$$K(x^2+\psi^2+z^2)+\lambda\,(x\psi+xz+\psi z)+\mu(x+\psi+z)+\rho$$

ὅπου τά K, λ, μ, ρ ἐκπροσωποῦν πραγματικούς ἀριθμούς· τά K, μ, ρ ἤ τά λ, μ, ρ δύνανται νά εἶναι καί μηδενικά. Δικαιολογοῦμεν τήν μορφήν μέ τούς ἑξῆς συλλογισμούς:

Ἡ γενική μορφή ἑνός 2ου πολυωνύμου ὡς πρός x, ψ, z εἶναι:

$$a_1x^2+a_2\psi^2+a_3z^2+a_4x\psi+a_5xz+a_6\psi z+a_7x+a_8\psi+a_9z+a_{10}$$

Ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν x, ψ, z μετατρέπει τό τμῆμα $a_1x^2+a_2\psi^2+a_3z^2$ εἰς τό $a_1\psi^2+a_2z^2+a_3x^2$ καί διά νά εἶναι τοῦτο ταυτοτικῶς ἴσον πρός τό προηγούμενον θά πρέπει νά ἔχωμεν: $a_1=a_2=a_3=K$.

Ἐπίσης διά νά ἔχωμεν: $a_4x\psi+a_5xz+a_6\psi z \equiv a_4\psi z+a_5x\psi+a_6xz$ πρέπει νά εἶναι: $a_4=a_5=a_6=\lambda$.

Ὁμοίως σκεπτόμενοι εὑρίσκομεν πώς πρέπει νά ἔχωμεν: $a_7 = a_8 = a_9 = \mu$.

Εἶναι εὔκολον ἐπίσης νά ἐννοήση τις, ὅτι τίποτε δέν ἀποκλείει νά εἶναι μερικά ἀπό τά K, λ, μ, ρ ἤ καί ὅλα μεταξύ των ἴσα.

Ἐάν τώρα $\mu = \rho = 0$ τότε τό πολυώνυμον θά εἶναι καί ὁμογενές 2ου βαθμοῦ.

Δέν εἶναι πλέον δύσκολον νά διαπιστώση τις πώς τό συμμετρικόν τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός τά x, ψ, z εἶναι τό:

$$K(x^3+\psi^3+z^3)+\lambda(x^2\psi+x^2z+x\psi^2+\psi^2z+xz^2+\psi z^2)+\mu x\psi z+\nu(x^2+\psi^2+z^2)$$
$$+\pi(x\psi+xz+\psi z)+\rho(x+\psi+z)+\sigma.$$

ὅπου τά $K, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἄν συμβῆ νά ἔχωμεν: $\nu = \pi = \rho = \sigma = 0$ τότε θά εἶναι τό πολυώνυμό μας καί ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ.

73.12. Παραδείγματα ἐφαρμογῆς : 1ον. Νά ἀναλυθῆ εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων τό πολυώνυμον: $a^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-a)+\gamma^3(a-\beta)$.

Τό πολυώνυμόν μας, τό ὁποῖον προφανῶς εἶναι συμμετρικόν καί ὁμογενές ὡς πρός τά γράμματά του a, β, γ, δι' $a=\beta$ μηδενίζεται συνεπῶς θά μηδενίζεται τοῦτο διά $\beta=\gamma$ καί $\gamma=a$. Τό πολυώνυμόν μας λοιπόν θά διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου $(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$, συμφώνως πρός τά προηγουμένως ἐκτεθέντα. Καί ἐπειδή τό πηλίκον τῆς τοιαύτης διαιρέσεως θά εἶναι ὁμογενές καί συμμετρικόν πολυώνυμον πρώτου βαθμοῦ, θά ἰσχύη ἡ ταυτότης:

$$a^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-a)+\gamma^3(a-\beta) \equiv (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)K(a+\beta+\gamma) \quad (1)$$

Δέν ὑπολείπεται λοιπόν παρά ὁ προσδιορισμός τῆς σταθερᾶς K ὁ ὁποῖος δύναται νά γίνη κατά δύο τρόπους:

Ὁ πρῶτος τρόπος στηρίζεται εἰς τήν παρατήρησιν, ὅτι τά πολυώνυμα τῶν δύο μελῶν τῆς ταυτότητος (1) θά ἔχουν τήν αὐτήν ἀριθμητικήν τιμήν διά τήν οἱανδήποτε τριάδα τιμῶν τῶν a, β, γ. Ἐάν λοιπόν θέσωμεν: $a=0$, $\beta=1$, $\gamma=2$ λαμβάνομεν:

$1.(2-0)+8(0-1)=(0-1)(1-2)(2-1)K(0+1+2)$ ἤ $-6=6K$ δηλ. $K=-1$.

Ὁ δεύτερος πάλιν τρόπος στηρίζεται εἰς τήν παρατήρησιν, ὅτι πᾶς ὅρος τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) θά πρέπει νά συμπίπτῃ μέ ὅρον τοῦ 2ου μέλους της. Συνεπῶς ὁ ὅρος $\alpha^3\beta$ πρέπει νά εἶναι καί ὅρος τοῦ 2ου μέλους τῆς (1). Γνωρίζομεν ὅμως, ὅτι, ὅταν πολλαπλασιάζωμεν πολυώνυμα κάθε ὅρος τοῦ γινομένου των περιέχει καί ἀπό ἕναν ὅρον τοῦ κάθε παράγοντος αὐτοῦ τοῦ γινομένου. Οὕτω, διά τόν σχηματισμόν τοῦ $\alpha^3\beta$ εἰς τό 2ον μέλος τῆς (1) θά λάβωμεν τόν ὅρον α ἀπό τόν παράγοντα $\alpha-\beta$ τόν ὅρον β ἀπό τόν παράγοντα $\beta-\gamma$, τόν ὅρον $-\alpha$ ἀπό τόν $\gamma-\alpha$ καί τόν $K\alpha$ ἀπό τόν παράγοντα $K(\alpha+\beta+\gamma)$. Εἰς τό 2ον λοιπόν μέλος τῆς (1) ὁ ὅρος $\alpha^3\beta$ τοῦ πρώτου της μέλους παρουσιάζεται μέ τήν μορφήν $-K\alpha^3\beta$. Καί ἐπειδή $\alpha^3\beta \equiv -K\alpha^3\beta$ συμπεραίνομεν, ὅτι $K=1$.

2ον. Νά γίνῃ γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta^4(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4)$$

Καί πάλιν διαπιστοῦμεν, ὅτι τό πολυώνυμόν μας εἶναι διαιρετόν διά τοῦ γινομένου $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ ἐνῶ τό πηλίκον θά εἶναι ὁμογενές καί συμμετρικόν δευτέρου βαθμοῦ. Ὥστε:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4) \equiv (\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[K(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\lambda(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)]$$

Διά νά προσδιορίσωμεν τώρα τά K καί λ ἐξισοῦμεν τάς ἀριθμητικάς τιμάς τῶν δύο πολυωνύμων διά δύο τριάδας τιμῶν τῶν α, β, γ καί δημιουργοῦμεν ἕνα σύστημα μέ ἀγνώστους τά K καί λ· φυσικά δέν πρέπει ἡ μία ἀπ' αὐτάς τάς τριάδας νά ἀποτελῇ κυκλικήν ἐναλλαγήν τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης.

Μέ τάς τιμάς, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=2$ εὑρίσκομεν: $5K+2\lambda=7$. Καί μέ τάς τιμάς, $\alpha=0$, $\beta=1$, $\gamma=-1$ ἔχομεν: $2K-\lambda=1$.

Ἐπειδή αἱ δύο τελευταῖαι ἐξισώσεις ἱκανοποιοῦνται διά $K=1$ καί $\lambda=1$, ἡ ἀνωτέρω ταυτότης γίνεται:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4) \equiv (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma).$$

Ἀσκήσεις.

299. Νά ὁρισθοῦν τά a καί β, ὥστε ἡ παράστασις $f(x) \equiv ax^4+\beta x^3+1$ νά εἶναι διαιρετή μέ τό $(x-1)^2$.

Δυνάμεθα διά τήν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ταύτης νά ἀκολουθήσωμεν πέντε τρόπους.

1ος Τρόπος. Ἐπειδή ὁ διαιρέτης εἶναι δευτεροβάθμιος καί τό πηλίκον θά εἶναι δευτεροβάθμιον. Ὥστε $ax^4+\beta x^3+1 \equiv (x^2-2x+1)(ax^2+\lambda x+1)$ (1).

Τό ὅτι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου εἶναι ὁ ax^2 καί ὁ σταθερός του ὁ 1 δικαιολογεῖται ἀπό τό γεγονός, ὅτι οἱ ἄκροι ὅροι ἑνός γινομένου δύο πολυωνύμων, διατεταγμένων κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, εἶναι γινόμενα τῶν ἄκρων ὅρων πολλαπλασιαστέου καί πολλαπλασιαστοῦ.

Ἡ (1) γίνεται: $ax^4+\beta x^3+1 \equiv ax^4+(\lambda-2a)x^3+(a-2\lambda+1)x^2+(\lambda-2)x+1$.

Ὥστε: $\lambda-2a=\beta$, $a-2\lambda+1=0$, $\lambda-2=0$.

Συνεπῶς: $a=3$, $\beta=-4$, $\lambda=2$.

Διά τοῦ τρόπου αὐτοῦ διεπιστώσαμεν τάς συνθήκας ὑπό τάς ὁποίας τό πολυώνυμόν μας εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x-1)^2$ (ἤ ἄλλως, ἔχει τό 1 ὡς διπλῆν ρίζαν) καί συμπεράναμεν, ὅτι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης εἶναι τό τριώνυμον $3x^2+2x+1$. Ἡ τελευταία διαπίστωσις δέν ἦτο προφανῶς ἀπαίτησις τοῦ θέματος. Ὀφείλομεν δέ νά σημειώσωμεν, ὅτι ὁ τρόπος οὗτος δέν θά ἦτο ἐφαρμόσιμος, ἄν οἱ ἐκθέται τοῦ x εἰς τούς ὅρους τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου ἦσαν γενικευμένοι φυσικοί ἀριθμοί.

2ος Τρόπος. Ὁ τρόπος οὗτος εἶναι ἐκεῖνος, πού μετεχειρίσθημεν εἰς τήν 2αν ἐφαρμογήν (73.4).

Διά νά εἶναι ἡ $f(x)$ διαιρετή μέ τό $x-1$ πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι:
$$f(1)=a+\beta+1=0 \quad ἤ \quad \beta=-(a+1) \qquad (1)$$

Ὥστε: $f(x) \equiv ax^4-(a+1)x^3+1 \equiv ax^3(x-1)-(x^3-1)$. Καί
$$f_1(x) \equiv \frac{f(x)}{x-1} \equiv ax^3-(x^2+x+1) \qquad (2)$$

Δέν μένει παρά καί τό $f_1(x)$ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $x-1$, καί εἶναι, ἄν $f_1(1) = a-3 = 0$ δηλ. ἄν $a=3$. Ὁπότε, ἡ (1) δίδει: $\beta = -4$.

Ἄν μᾶς ἐζητεῖτο καί τό πηλίκον, ἀπό τήν (2) λαμβάνομεν: $f_1(x) \equiv 3x^3-x^2-x-1 \equiv x^2(x-1)+x(x^2-1)+x^3-1$. Καί συνεπῶς:

$$\frac{f_1(x)}{x-1} \equiv \frac{f(x)}{(x-1)^2} \equiv x^2+x(x+1)+x^2+x+1 \equiv 3x^2+2x+1.$$

3ος Τρόπος. Προβαίνομεν εἰς τήν διαίρεσιν τοῦ $f(x)$ διά τοῦ x^2-2x+1 καί εὑρίσκομεν ὡς ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ταύτης τήν παράστασιν: $(4a+3\beta)x-(3a+2\beta-1)$. Καί ἐπειδή θά πρέπει ἡ παράστασις αὕτη νά εἶναι μηδέν, ἀνεξαρτήτως τῆς συγκεκριμένης τιμῆς τοῦ x, θά ἔχωμεν: $4a+3\beta=0$ καί $3a+2\beta-1=0$. Ἐκ τῆς λύσεως τοῦ συστήματος τῶν δύο τελευταίων ἐξισώσεων λαμβάνομεν: $a=3$ καί $\beta=-4$.

4ος Τρόπος. Εἶναι ὁ αὐτός μέ τόν τρίτον τρόπον μέ τήν διαφοράν ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως δέν τό εὑρίσκομεν μέ τήν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου διά τοῦ x^2-2x+1 ἀλλά ὡς ἑξῆς: Ἐάν τόν διαιρέτην τόν γράψωμεν $x^2-(2x-1)$, συμφώνως πρός τά γνωστά (37.1) θέτοντες εἰς τό $f(x)$ ἀντί x^2 τό $2x-1$ εὑρίσκομεν: $(4a+2\beta)x^2-(4a+\beta)x+a+2$ τό ὁποῖον εἶναι τό πρῶτον ὑπόλοιπον τῆς ἀναφερομένης διαιρέσεως. Ἐάν τώρα εἰς τό ὑπόλοιπον τοῦτο θέσωμεν καί πάλιν ὅπου x^2 τό $2x-1$ εὑρίσκομεν τό τελικόν ὑπόλοιπον δηλ. τό πολυώνυμον: $(4a+3\beta)x-(3a+2\beta-1)$. Ἐφεξῆς ἡ ἐργασία γνωστή.

5ος Τρόπος. Εἶναι ἐκεῖνος τόν ὁποῖον ἐφηρμόσαμεν ἤδη (βλ. ἐνδιαφ. σημ. σελ. 195). Θέτομεν λοιπόν καί ἐδῶ $x-1=\psi$ καί συνεπῶς ζητοῦμεν νά ὁρίσωμεν τά a, β τοῦ $f(\psi+1) \equiv a(\psi+1)^4+\beta(\psi+1)^3+1$ ὥστε τοῦτο νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ ψ^2.

Ἐπειδή τοῦτο θά εἶναι δυνατόν ἐάν καί ἐφόσον τό $f(\psi+1)$ στερεῖται πρωτοβαθμίου καί σταθεροῦ ὅρου, μηδενίζομεν τούς συντελεστάς τῶν ὅρων τούτων.

$a+\beta+1=0$, $4a+3\beta=0$. Ἡ λύσις τοῦ συστήματος τούτου δίδει τάς γνωστάς τιμάς τῶν a καί β.

Ὁ τελευταῖος αὐτός τρόπος δέν εἶναι ἁπλῶς ὁ ἐνδεδειγμένος τρόπος εἰς τήν περίπτωσιν, ὅπου ζητεῖται μόνον ἡ ἐξακρίβωσις τῆς πολλαπλότητος μιᾶς ρίζης, ἀλλά καί ὁ ἐφαρμόσιμος εἰς τοιούτου εἴδους θέματα ἀνεξαρτήτως μορφῆς διαιρετέου πολυωνύμου. Ἐνῶ δέν συμβαίνει τό αὐτό διά τούς 1ον 3ον καί 4ον. Ὅσον διά τόν 2ον τρόπον εἴπομεν καί ἀνωτέρω ὅτι οὗτος ἐνδείκνυται ἐφ' ὅσον προστίθεται καί ἡ ἀπαίτησις εὑρέσεως τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως.

300. Εἶναι γνωστόν πώς ἡ παράστασις : $x^3+\psi^3+z^3+\lambda x\psi z$ διά $\lambda=-3$ εἶναι διαιρετή διά τοῦ $x+\psi+z$. Δείξατε, ὅτι μόνον διά $\lambda=-3$ ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι τελεία.

301. Διά ποίας τιμάς τῶν a, β, γ ἡ παράστασις : $x^4+3x^3+ax^2+\beta x+\gamma$ εἶναι διαιρετή μέ τό γινόμενον $(x^2-1)(x+2)$;

302. Ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον, ὅταν διαιρεθῆ μέ τό $x-3$ δίδει ὡς ὑπόλοιπον τόν 7, ὅταν διαιρεθῆ μέ τό $2x+5$ δίδει ὡς ὑπόλοιπον τόν -4, μέ τό $3x-2$ τόν -2 καί μέ τό $x+1$ δίδει ὡς ὑπόλοιπον τόν -1. Ποῖον τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεώς του διά τοῦ γινομένου $(x-3)(2x+5)(3x-2)(x+1)$;

303. Ἐάν τό πολυώνυμον: $x^4+px^2+qx+a^2$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ x^2-1, εἶναι ἐπίσης διαιρετόν διά τοῦ x^2-a^2.

304. Νά εὑρεθῆ ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον, τό ὁποῖον ἄν διαιρεθῆ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x+2$ ἤ μέ τό $x-4$ νά δίδη ὡς ὑπόλοιπον τόν ἀριθμόν 10 καί τό ὁποῖον νά μηδενίζεται διά $x=-1$. Πόσα τοιαῦτα πολυώνυμα ὑπάρχουν;

Ἐάν $f(x)$ εἶναι τό πολυώνυμον μέ τάς ἰδιότητας τῆς ἐκφωνήσεως, εἶναι φανερόν, ὅτι τό $f(x)-10$ θά εἶναι διαιρετόν μέ τά διώνυμα $x-1$, $x+2$, $x-4$· θά ὑφίσταται λοιπόν ἡ ταυτότης:

$f(x)-10 \equiv (x-1)(x+2)(x-4)\Pi(x)$ (1).

Ἐπειδή τώρα $f(-1)=0$, λόγω τοῦ τετάρτου ὅρου τοῦ θέματος, λαμβάνομεν : $f(-1)-10=10.\Pi(-1)$ ἤ $\Pi(-1)=-1$.

Ἑρμηνεύοντες τήν τελευταίαν ἰσότητα δίδετε τήν γενικήν μορφήν εἰς τήν (1) καί συμπεραίνετε πώς αἱ λύσεις εἶναι ἀπεριορίστου ἀριθμοῦ ὡς καί τόν τρόπον τῆς δημιουργίας των.

305. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ εἶναι διαιρετόν μέ τό $(x-1)^2$ καί νά εὕρητε τό πηλίκον αὐτῆς τῆς διαιρέσεως.

306. Νά εὑρεθῆ ἕνα δευτεροβάθμιον πολυώνυμον, τό ὁποῖον ἄν διαιρεθῆ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x-2$ νά δίδη ὡς ὑπόλοιπον τόν 3 καί τό ὁποῖον νά μηδενίζεται διά $x=0$.

307. Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων δύο πολυωνύμων $f(x)$ καί $f_1(x)$ διά τοῦ x^2+x+1 εἶναι ἀντιστοίχως x καί $x+1$. Συμπεράνατε τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $f(x)f_1(x)$ διά τοῦ x^2+x+1.

Ἐκφράσατε εἰς μαθηματικάς ἰσότητας τά ἐπιτάγματα τοῦ προβλήματος καί ἡ λύσις θά δημιουργηθῆ.

308. Δυνάμεθα νά εὕρωμεν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου x^3-1, ὅταν γνωρίζωμεν τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου διά τοῦ $x-1$ ἤ διά τοῦ x^2+x+1;

Τό θέμα τοῦτο ἀποτελεῖ ἐπανάληψιν τῆς 3ης ἐφαρμογῆς (73.4,3ον).

309. Νά ὁρισθοῦν τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμον: $x^6+2x^5+\alpha x^4+\beta x^3-x^2+3$ νά εἶναι διαιρετόν διά τοῦ διωνύμου x^2-3.

310. Νά ὁρισθοῦν τά α καί β, ὥστε τό πολυώνυμον:

$$x^6+\alpha x^5+(2\alpha+1)x^4+\beta x^3+(2\alpha+1)x^2+\alpha x+1$$

νά διαιρεῖται μέ τήν κατά τό δυνατόν μεγαλυτέραν δύναμιν τοῦ $x-1$ νά καθορισθῆ δέ ὁ ἐκθέτης αὐτῆς τῆς δυνάμεως.

Ζητεῖται λοιπόν ὁ καθορισμός τοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος τῆς ρίζης 1 διά τό πολυώνυμόν μας. Συνιστῶμεν τήν μέθοδον (ἐνδιαφ. Σημ. τῆς 2ας ἐφαρμογῆς σελ. 195).

311. Νά δειχθῆ ἡ ταυτότης: $\dfrac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\equiv 1$ χωρίς νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις.

Στηριχθῆτε εἰς τό θεώρημα (73.3).

312. Ἐάν ὁ μ εἶναι φυσικός ἀριθμός, δείξατε, ὅτι ἡ παράστασις: $\dfrac{\alpha^\mu}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\beta^\mu}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\dfrac{\gamma^\mu}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$ εἶναι ἀκεραία.

313. Ἐάν ὁ ν εἶναι φυσικός ἀριθμός δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $f(x)\equiv(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$ εἶναι διαιρετόν μέ τό γινόμενον: $x(x+1)(2x+1)$

καί νά εὐρεθῆ τό πηλίκον.

Ἐφαρμογή τῆς μεθόδου πού ἠκολουθήσαμεν (ἐφαρ. 1η, 73.3).

314. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $\nu x^{\nu+2}-(\nu+2)x^{\nu+1}+(\nu+2)x-\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό $(x-1)^3$.

315. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $x^{4\nu+2}-(2\nu+1)x^{2\nu+2}+(2\nu+1)x^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετόν μέ τό $(x^2-1)^3$.

316. Νά ὁρισθοῦν τά a, β, ὥστε τό πολυώνυμον: $x^3+3\mu x^2+3ax+\beta$ νά εἶναι διαιρετόν μέ τό τριώνυμον $x^2+2\mu x+a$.

Θά ἀκολουθήσετε τόν 1ον τρόπον λύσεως τῆς ἀσκήσεως (299).

317. Νά γίνη γινόμενον πρώτων παραγόντων ἡ παράστασις:

$$(\mu^2-\nu^2)\rho^3+(\nu^2-\rho^2)\mu^3+(\rho^2-\mu^2)\nu^3.$$

318. Τό αὐτό διά τάς παραστάσεις:

$x^2(\psi-z)+\psi^2(z-x)+z^2(x-\psi)$ $\qquad$ $x^4(\psi^2-z^2)+\psi^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-\psi^2)$

319. Νά δειχθῆ, ὅτι τό πολυώνυμον: $(\beta^2\gamma^2+a^2\delta^2)(\beta-\gamma)(a-\delta)+(a^2\gamma^2+\beta^2\delta^2)(\gamma-a)(\beta-\delta)+(a^2\beta^2+\gamma^2\delta^2)(a-\beta)(\gamma-\delta)$ εἶναι διαιρετόν μέ τό γινόμενον: $P\equiv(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$ καί νά εὐρεθῆ τό πηλίκον.

320. Νά ὁρισθῆ τό μ, ὥστε τό πολυώνυμον: $x^{2\mu}+x^{\mu}+1$ νά εἶναι διαιρετόν μέ τό τριώνυμον x^2+x+1.

Ἔχομεν: $x^2+x+1\equiv\dfrac{x^3-1}{x-1}$. Πρέπει λοιπόν νά διαπιστώσωμεν διά ποίας ἀριθμητικάς ἐκφράσεις τοῦ μ ἡ παράστασις: $\dfrac{(x^{2\mu}+x^{\mu}+1)(x-1)}{x^3-1}$ εἶναι ἀκεραία. Θέτομεν, ὡς γνωστόν: $\mu=3\lambda+\upsilon$ μέ $\upsilon=1,2,3$ καί εὑρίσκομεν διά ποίας ἐκ τῶν ἀριθμητικῶν αὐτῶν ἐκφράσεων τοῦ μ ἱκανοποιεῖται τό θέμα μας.

321. Νά δειχθῆ, ὅτι τό πολυώνυμον: $A\equiv x^{\nu}[z^2(x-\psi)^2-\psi^2(z-x)^2]+\psi^{\nu}[x^2(\psi-z)^2-z^2(x-\psi)^2]+z^{\nu}[\psi^2(z-x)^2-x^2(\psi-z)^2]$, ὅπου τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, διαιρεῖται μέ τό γινόμενον: $P\equiv(\psi-z)(z-x)(x-\psi)$ καί νά εὐρεθῆ τό πηλίκον.

Μέ κατάλληλον γραφήν τῶν ὅρων του ἐμφανίσατε ἀμέσως (καί ὄχι σταδιακά) τό διαιρετόν του διά τοῦ γινομένου P.

322. Ἐάν ἕνα πολυώνυμον $f(x,\psi)$, τό ὁποῖον εἶναι συμμετρικόν ὡς

πρός τά x, ψ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ διωνύμου $x-\psi$ θά εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ $(x-\psi)^2$.

323. Δείξατε, ὅτι ἐάν $f(x)$ εἶναι ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον καί ἐάν δι' ἕνα ἀριθμόν a ἰσχύη ἡ ταυτότης: $f(x) \equiv f(x+a)$ αὐτό τό πολυώνυμον δέν εἶναι παρά μία σταθερά ποσότης.

Θεωρήσατε τό πολυώνυμον $f(x)-a_0$ ἐάν a_0 εἶναι ἡ σταθερά τοῦ πολυωνύμου καί διαπιστώσατε ὅτι τό πολυώνυμον τοῦτο δέχεται ρίζας πλείονας τοῦ βαθμοῦ του.

324. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον: $(x-\psi)^\nu - x^\nu - \psi^\nu$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ γινομένου $x\psi(x+\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)$ ἐφόσον ὁ ν εἶναι φυσικός τῆς μορφῆς $6K-1$, καί διά τοῦ γινομένου: $x\psi(x+\psi)(x^2+x\psi+\psi^2)^2$ ἐφόσον ὁ ν εἶναι φυσικός τῆς μορφῆς $6K+1$.

Ἀφοῦ διαπιστώσωμεν εὐκόλως, ὅτι τοῦτο διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου $x.\psi(x+\psi)$ ἀπομένει ἡ διαπίστωσις τοῦ διαιρετοῦ του διά τοῦ τριωνύμου $x^2+x\psi+\psi^2$. Γράφομεν τό πολυώνυμόν μας:
$(x+\psi)^{6K-1} - x^{6K-1} - \psi^{6K-1} \equiv [(x+\psi)^3]^{2K-1} \cdot (x+\psi)^2 - (x^3)^{2K-1} \cdot x^2 - \psi^{6K-1}$. Διαιροῦμεν τώρα τά $(x+\psi)^3$ καί x^3 διά τοῦ $x^2+x\psi+\psi^2$ καί ἐκφράζοντες τοῦτο μέ τήν ταὐτότητα τῆς διαιρέσεως ὁδηγούμεθα εἰς τήν αἰτουμένην διαπίστωσιν.

Μέ μίαν ἀνάλογον γραφήν καί μέ τόν αὐτόν τρόπον ἐνεργείας ἀπαντῶμεν εἰς τό 2ον αἴτημα τοῦ θέματός μας

Ἰδιότητες τῶν Ριζῶν τῶν Πολυωνύμων

74. Σχέσις ριζῶν καί συντελεστῶν.

Ἔχομεν (73.2):
$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \equiv a_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu) \equiv$
$a_\nu[x^\nu - x^{\nu-1}\Sigma\rho_1 + x^{\nu-2}\Sigma\rho_1\rho_2 - \dots + (-1)^\nu\rho_1\rho_2\dots\rho_\nu]$. Ὥστε: $a_{\nu-1} = -a_\nu\Sigma\rho_1$, $a_{\nu-2} = a_\nu\Sigma\rho_1\rho_2, \dots a_0 = a_\nu(-1)^\nu\rho_1\rho_2\dots\rho_\nu$ ἤ $\Sigma\rho_1 = -\frac{a_{\nu-1}}{a_\nu}$, $\Sigma\rho_1\rho_2 = \frac{a_{\nu-2}}{a_\nu}, \dots \rho_1\rho_2\dots\rho_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{a_0}{a_\nu}$, δηλ. ἰσότητας, αἵτινες μᾶς παρέχουν συναρτήσει τῶν συντελεστῶν τοῦ πολυωνύμου τά ἀθροίσματα τῶν ριζῶν λαμβανομένων ἀνά μία, ἀνά δύο, ἀνά τρία, ... ἀνά

75. Ἐάν ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον ἔχει ὡς ρίζαν τόν ἀριθμόν $\alpha+\beta i$ θά ἔχη ὡς ρίζαν καί τόν συζυγῆ τούτου δηλ. τόν ἀριθμόν $\alpha-\beta i$.

Ὅταν εἰς ἕνα πολυώνυμον $f(x)$ ἀντικαταστήσωμεν τό x διά τοῦ $\alpha+\beta i$ θά μετατρέψωμεν τό πολυώνυμόν μας εἰς πολυώνυμον τοῦ i, καί λαμβάνοντες ὑπ' ὄψιν τά εἰς τό (57) λεχθέντα ὡς πρός τά ἰσοδύναμα τῶν διαφόρων δυνάμεων τοῦ i ἐννοοῦμεν πώς θά ἔχωμεν $f(\alpha+\beta i)\equiv A+Bi$ ὅπου A καί B πραγματικοί ἀριθμοί.

Ἐπειδή τώρα αἱ δυνάμεις τοῦ i, αἵτινες δίδουν ὡς ἐξαγόμενον πραγματικόν ἀριθμόν εἶναι ἐκεῖναι αἵτινες δίδουν καί διά τό $-i$ πραγματικόν ἐξαγόμενον καί μάλιστα τό αὐτό, ἐνῶ αἱ δυνάμεις τοῦ i, αἵτινες δίδουν ὡς ἐξαγόμενον φανταστικόν ἀριθμόν εἶναι ἐκεῖναι αἵτινες δίδουν καί διά τόν $-i$ φανταστικόν ἐξαγόμενον ἀλλά μέ ἀντίθετον πρόσημον, συμπεραίνομεν ὅτι θά ἔχωμεν: $f(\alpha-\beta i)= A-iB$.

Οὕτως, ἐάν $f(\alpha+\beta i)=0$, ὁπότε θά εἶναι $A=B=0$, θά εἶναι καί $f(\alpha-\beta i)=0$ ὅ. ἔ.δ.

75.1. Ἐάν ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον ἔχει τόν $\alpha+\beta i$ ὡς ρίζαν πολλαπλῆν βαθμοῦ πολλαπλότητος λ, θά ἔχη καί τόν $\alpha-\beta i$ ἐπίσης ὡς ρίζαν πολλαπλῆν καί εἰς τόν αὐτόν βαθμόν πολλαπλότητος.

Ἔστω τό $f(x)$ ἔχει τόν μέν $\alpha+\beta i$ ὡς ρίζαν μέ βαθμόν πολλαπλότητος λ τόν δέ $\alpha-\beta i$ μέ βαθμόν πολλαπλότητος μ καί ἔστω $\lambda>\mu$.

Οὕτω λαμβάνομεν: $f(x)\equiv[(x-\alpha)-\beta i]^{\lambda}[(x-\alpha)+\beta i]^{\mu}f_1(x)$ (1) ἐνῶ τό $f_1(x)$ δέν ἔχει οὔτε τόν $\alpha+\beta i$ οὔτε τόν $\alpha-\beta i$ ὡς ρίζαν.

Ἡ (1) γράφεται: $f(x)\equiv[(x-\alpha)-\beta i]^{\mu}[(x-\alpha)+\beta i]^{\mu}[(x-\alpha)-\beta i]^{\lambda-\mu}f_1(x)$ ἤ $f(x)\equiv[(x-\alpha)^2+\beta^2]^{\mu}[(x-\alpha)-\beta i]^{\lambda-\mu}f_1(x)$.

Τό πολυώνυμον $[(x-\alpha)-\beta i]^{\lambda-\mu}f_1(x)$ ἔχει προφανῶς τόν $\alpha+\beta i$ ὡς ρίζαν καί μάλιστα πολλαπλῆν (βαθμοῦ πολλαπλότητος $\lambda-\mu$) χωρίς νά ἔχη καί τόν $\alpha-\beta i$ ὡς ρίζαν· ἀποτέλεσμα ἀντικείμενον πρός τό προηγούμενον θεώρημα.

Ἐπειδή τώρα ὠδηγήθημεν εἰς ἄτοπον ἐκ τῆς παραδοχῆς ὅτι $\lambda > \mu$ εἰς τό αὐτό δέ ἄτοπον, ὡς εἶναι φανερόν, θά ὠδηγούμεθα ἐάν ἐδεχόμεθα $\lambda < \mu$, συμπεραίνομεν ὅτι $\lambda = \mu$.

76. Μία ἀκεραία ρίζα ἑνός ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου καί τοῦ ὁποίου οἱ συντελεσταί εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ του ὅρου.

Ἔστω τό μέ ἀκεραίους συντελεστάς ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον $f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ καί ἔστω ρ ἀκεραία της ρίζα του. Κατά τόν ὁρισμόν τῆς ρίζης (57) πολυωνύμου ἔχομεν: $f(\rho)=0$ ἤ $a_\nu \rho^\nu + a_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots + a_1 \rho = -a_0$ (1). Καί ἀφοῦ τό ρ εἶναι διαιρέτης τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου μέλους τῆς (1) θά εἶναι ἐπίσης διαιρέτης καί τοῦ δευτέρου της μέλους.

77. Ἐάν ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον μέ ἀκεραίους συντελεστάς ἔχει κλασματικήν τινα ρίζαν $\frac{a}{\beta}$ (a, β πρῶτοι πρός ἀλλήλους) τότε, τό μέν a εἶναι διαιρέτης τοῦ σταθεροῦ του ὅρου τό δέ β διαιρέτης τοῦ συντελεστοῦ τῆς ἀνωτέρας δυνάμεως τοῦ x.

Ἀπό τό προηγουμένως θεωρηθέν πολυώνυμον λαμβάνομεν:

$$a_\nu \cdot \frac{a^\nu}{\beta^\nu} + a_{\nu-1}\frac{a^{\nu-1}}{\beta^{\nu-1}} + \ldots + a_1 \frac{a}{\beta} + a_0 = 0 \quad \text{ἤ}$$

$$a_\nu a^\nu + a_{\nu-1} a^{\nu-1}.\beta + \ldots + a_1 . a . \beta^{\nu-1} = -a_0 \beta^\nu \quad (1) \quad \text{ἤ}$$

$$-a_\nu a^\nu = a_{\nu-1} a^{\nu-1}\beta + \ldots + a_1 . a . \beta^{\nu-1} + a_0 \beta^\nu \quad (2)$$

Ἡ (1) μᾶς λέγει, ὅτι ἀφοῦ τό a εἶναι διαιρέτης τοῦ πρώτου της μέλους (ἀντιπροσωπεύει τοῦτο ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν) θά εἶναι ἐπίσης διαιρέτης καί τοῦ δευτέρου της μέλους καί ἐπειδή τό a εἶναι πρῶτον πρός τό β^ν, θά διαιρῆ τό a_0. Ἡ (2) πάλιν μέ τάς αὐτάς σκέψεις μᾶς λέγει, ὅτι τό β θά εἶναι διαιρέτης τοῦ a_ν.

77.1. Παρατήρησις: 1ον. Τά δύο τελευταῖα θεωρήματα μᾶς διδάσκουν τόν ἀσφαλῆ τρόπον εὑρέσεως τῶν ἀκεραίων καί κλασματικῶν ριζῶν ἑνός ἀκεραίου καί μέ ἀκεραίους συντελεστάς πολυωνύμου, ἄν φυσικά τό πολυώνυμον τοῦτο ἔχει τοιαύτας ρίζας. Καί διά μέν τάς ἀκεραίας ρίζας ὁ τρόπος ἐνεργείας γίνεται φανερός ἐξ αὐτῆς ταύτης τῆς ἐκφωνήσεως τοῦ θεωρήματος (76) ὅσον ἀφορᾶ τάς κλασματικάς τό θεώρημα (77) μᾶς λέγει ὅτι θά πρέπει: νά παρατάξωμεν τούς διαιρέτας τοῦ a_0, τούς διαιρέτας τοῦ a_ν καί διαιροῦντες τούς πρώτους διά τῶν δευτέρων νά ἴδωμεν πόσα ἀνάγωγα κλάσματα θά σχηματισθοῦν. Μεταξύ τῶν ἀναγώγων τούτων κλασμάτων εὑρίσκονται αἱ κλασματικαί ρίζαι τοῦ πολυωνύμου μας, ἄν, ἐπαναλαμβάνωμεν, ἔχει τοῦτο τοιαύτας. Εἶναι φανερόν, κατόπιν τῶν ἐκτεθέντων, ὅτι ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον καί μέ ἀκεραίους συντελεστάς καί μέ συντελεστήν τῆς ἀνωτέρας δυνάμεως τοῦ x τήν μονάδα δέν ἔχει κλασματικάς ρίζας.

Ὅσον ἀφορᾶ τήν ἐξακρίβωσιν τῶν ἀσυμμέτρων ριζῶν ἑνός πολυωνύμου ὑφίστανται πολλαί μέθοδοι, οἵτινες ἐκτίθενται εἰς τά βιβλία ἀνωτέρας Ἀλγέβρας. Ὁ προορισμός ὅμως τοῦ βιβλίου τούτου δέν ἐπιτρέπει τήν ἔκθεσιν τοιούτων μεθόδων.

2ον. Τά θεωρήματα (75, 75.1) μᾶς ἐξηγοῦν τό διατί ἕνα ἀκέραιον τοῦ x πολυώνυμον καί ἐάν ἔχῃ ρίζας μιγαδικάς παρουσιάζεται πάντοτε ἔχων πραγματικούς συντελεστάς. Διαπιστοῦται δηλ. ὅτι κάθε ἀκέραιον πολυώνυμον ἀναλυόμενον εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων μέ πραγματικούς συντελεστάς ἀναλύεται εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων καί δευτεροβαθμίων παραγόντων· οἱ τελευταῖοι οὗτοι εἶναι τά γινόμενα πρωτοβαθμίων παραγόντων ἀλλά μέ ρίζας μιγαδικούς ἀντιστοίχως συζυγεῖς. Ἡ ὅλη ἐπίσης θεωρία τῆς ἀναλύσεως ἑνός πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων συνεπικουρουμένη ἀπό τά θεωρήματα (75, 75.1) μᾶς βεβαιώνει διά τό μ ο ν ο τ ρ ο π ι κ ό ν τῆς ἀναλύσεως ταύτης, δηλ. διά τό ὅτι: μ ί α μ ο ν α δ ι κ ή σ ύ ν θ ε σ ι ς ἑ ν ό ς π ο λ υ ω ν ύ μ ο υ ἐκ π α ρ α γ ό ν τ ω ν π ρ ώ τ ω ν ε ἶ ν α ι δ υ ν α τ ή (πρωτοβαθμίων ἤ πρωτοβαθμίων καί δευτεροβαθμίων). Καί πράγματι, ἐάν ἦτο δυνατή καί κάποια ἄλλη, μή ἀναγομένη εἰς τήν προηγουμένην καί συνεπῶς διάφορος ἐκείνης, τότε τό πολυώνυμόν μας θά εἶχε ρίζας πλείονας τοῦ βαθμοῦ του καί συνεπῶς θά ἦτο ταυτοτικῶς ἴσον πρός τό μηδέν.

Τό συμπέρασμα τοῦτο, τοῦ μονοτροπικοῦ τῆς ἀναλύσεως τοῦ πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων εἶναι χρήσιμον εἰς πλείστας ἐφαρμογάς καί θά δώσωμεν ἐκ τοῦ λόγου τούτου τρία λελυμένα θέματα.

77.1.1. **Παράδειγμα.** 1ον. Νά ὁρισθοῦν τά p καί q ὥστε τό πολυώνυμον x^4+1 νά εἶναι διαιρετόν μέ τό τριώνυμον x^2+px+q.

Ἔχομεν: $x^4+1 \equiv (x^2+1)^2-2x^2 \equiv (x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$ (1).

Δεδομένου ὅμως, ὅτι ἰσχύει τό μονοτροπικόν τῆς ἀναλύσεως ἑνός πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων, ἕπεται ὅτι τό τριώνυμον x^2+px+q θά ταυτίζεται μέ τόν ἕνα τῶν δύο δευτεροβαθμίων παραγόντων τοῦ 2ου μέλους τῆς (1) ἐνῶ ὁ ἕτερος θά ἐκφράζη τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ x^4+1 διά τοῦ ἄλλου τούτων.

Παράδειγμα 2ον. Νά ὁρισθοῦν τά a, β, γ ὥστε τό πολυώνυμον: $ax^4+\beta x^3+\gamma$, ὅταν διαιρεθῆ μέ τά διώνυμα x^2+1 καί x^3+1 νά ἀφήνη ὑπόλοιπα τῶν ὁποίων τό γινόμενον νά εἶναι $2x^2-12x+10$.

Τό πολυώνυμόν μας γράφεται: $a(x^2)^2+\beta x.x^2+\gamma$ ἤ $ax.x^3+\beta x^3+\gamma$ καί συνεπῶς ἀντίστοιχα τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων εἶναι: $-\beta x+(a+\gamma)$, $-ax+\gamma-\beta$. Ὥστε:

$$[-\beta x+(a+\gamma)][-ax+(\gamma-\beta)] \equiv 2(x^2-6x+5) \equiv 2(x-1)(x-5)$$

ἤ $a\beta\left[x-\dfrac{a+\gamma}{\beta}\right]\left[x-\dfrac{\gamma-\beta}{a}\right] \equiv 2(x-1)(x-5)$ *. Λόγω τώρα τοῦ μονοτροπικοῦ τῆς ἀναλύσεως ἑνός πολυωνύμου εἰς γινόμενον πρωτοβαθμίων παραγόντων θά ἔχωμεν:

$$a\beta=2, \quad \frac{a+\gamma}{\beta}=1, \quad \frac{\gamma-\beta}{a}=5 \quad \text{ἤ} \quad a\beta=2, \quad \frac{a+\gamma}{\beta}=5, \quad \frac{\gamma-\beta}{a}=1.$$

---

* Διότι $a\beta\neq0$. Ἐάν τό a ἤ τό β ἦτο μηδέν, ὡς εὐκόλως τις συμπεραίνει, τό ἕνα τῶν ὑπολοίπων θά ἦτο μηδενικοῦ βαθμοῦ καί τό ἄλλο πρωτοβάθμιον καί οὕτω τό γινόμενον τῶν ὑπολοίπων αὐτῶν δέν θά ἦτο δευτεροβάθμιον τριώνυμον ὅπως ἀπαιτεῖ τό θέμα μας.

Θά ζητήσωμεν τώρα τάς τιμάς τῶν a, β, γ, πού ἱκανοποιοῦν τάς τρεῖς πρώτας ἰσότητας καί ἐκείνας πού ἱκανοποιοῦν τάς τρεῖς τελευταίας.

Ἐκ τῆς 2ας καί 3ης τῆς πρώτης τριάδος λαμβάνομεν: $a+\gamma=\beta$ καί $\gamma-\beta=5a$. Καί δι' ἀφαιρέσεώς των κατά μέλη ἔχομεν: $a+\beta=\beta-5a$ ἤ $6a=0$ δηλ. $a=0$. Ἡ μηδενική τιμή τοῦ a μᾶς δεικνύει ὅτι τό θέμα μας προσαρμόζεται πρός τήν 2αν τριάδα τῶν ἰσοτήτων τῶν a, β, γ.

Ἀπό τήν 2αν καί 3ην τῆς 2ας αὐτῆς τριάδος ἔχομεν: $a+\gamma=5\beta$ $\gamma-\beta=a$. Καί δι' ἀφαιρέσεώς των κατά μέλη λαμβάνομεν: $a+\beta=5\beta-a$ ἤ $2a=4\beta$ ἤ $a=2\beta$. Καί λόγῳ τῆς πρώτης εὑρίσκομεν: $2\beta^2=2$ ἤ $\beta^2=1$ δηλ. $\beta=\pm 1$.

Προκύπτουν λοιπόν αἱ ἑξῆς κατάλληλοι τριάδες τιμῶν διά τά a, β, γ, 1ον. $a=2$, $\beta=1$, $\gamma=3$, 2ον. $a=-2$, $\beta=-1$, $\gamma=-3$.

Παράδειγμα 3ον. Νά εὑρεθῇ πολυώνυμον τῆς μορφῆς $ax^4+\beta x+\gamma$, ὥστε τό γινόμενον τῶν ὑπολοίπων τῶν διαιρέσεων αὐτοῦ διά τῶν διωνύμων x^2-2 καί x^3+1 ἀντιστοίχως νά εἶναι $\beta x.(x-2)$.

Ἐπειδή καί ἐδῶ θά ἐργασθῶμεν ὅπως καί εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα τήν λύσιν τήν ἀφήνομεν εἰς τόν ἀναγνώστην.

Ἀσκήσεις.

325. Ἐάν $A_1, A_2, \ldots A_\nu$, $a_1, a_2, \ldots a_\nu$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί δείξατε ὅτι τό πολυώνυμον:

$$\frac{A_1^2}{x-a_1}+\frac{A_2^2}{x-a_2}+\ldots+\frac{A_\nu^2}{x-a_\nu}$$

ἔχει μόνον πραγματικάς ρίζας.

Στηριχθῆτε εἰς τό θεωρ. (75).

326. Ἔστω ἡ συνάρτησις: $f(x,\psi)\equiv ax^2+2\beta x\psi+\gamma\psi^2$ τῶν πραγματικῶν μεταβλητῶν x, ψ ἐνῷ οἱ πραγματικοί συντελεσταί a, β, γ

ἱκανοποιοῦν τάς ἀνισότητας : $\beta^2 - a\gamma < 0$ καί $a > 0$

1ον. Νά δειχθῆ, ὅτι ἡ συνάρτησις $f(x,\psi)$ δέν ἀντιπροσωπεύει ποτέ ἀρνητικόν ἀριθμόν.

2ον. Ἐάν θέσωμεν : $r = \sqrt{f(x,\psi)}$, $r' = \sqrt{f(x',\psi')}$, $R = \sqrt{f(x+x',\psi+\psi')}$ νά δειχθῆ ὅτι ἔχομεν: $|r - r'| \leq R \leq r + r'$.

3ον. Γενικεύσατε τήν ἰδιότητα : $R \leq r + r'$.

Τό θέμα αὐτό εἶναι θέμα ἐπί τῶν μέτρων τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν.

327. Νά ὁρισθοῦν τά A καί B ὥστε τό πολυώνυμον : $Ax^{\nu+1} + Bx^{\nu} + 1$ νά εἶναι διαιρετόν μέ τό $(x-1)^2$.

328. Ποία σχέσις πρέπει νά ὑφίσταται μεταξύ τῶν p καί q ὥστε τό πολυώνυμον : $x^3 + px + q$ νά εἶναι διαιρετόν διά τριωνύμου τῆς μορφῆς : $x^2 + px - 1$;

329. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον :

$$x^{2\nu} - \nu^2 x^{\nu+1} + 2(\nu^2 - 1)x^{\nu} - \nu^2 x^{\nu-1} + 1$$

εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x-1)^4$ καί εὕρετε τήν γενικήν ἔκφρασιν τοῦ πηλίκου.

330. Δείξατε, ὅτι, ἵνα οἱ μιγαδικοί ἀριθμοί z καί z' ἀντιπροσωπεύωνται ἀπό σημεῖα τοῦ μιγαδικοῦ πεδίου τά ὁποῖα νά εἶναι συνευθειακά μετά τῆς ἀρχῆς O τῶν συντεταγμένων πρέπει καί ἀρκεῖ ὁ λόγος $z' : z$ αὐτῶν νά εἶναι ἕνας πραγματικός ἀριθμός.

331. Ἐάν θεωρήσωμεν δύο ἀριθμούς : $z = x + i\psi$ καί $z_0 = x_0 + i\psi_0$ εἰς τούς ὁποίους οἱ συντελεσταί τοῦ i εἶναι θετικοί ἀριθμοί καί ἐάν $\bar{z}$ καί $\bar{z}_0$ εἶναι οἱ συζυγεῖς τῶν z καί z_0 ἀριθμοί, δείξατε ὅτι τό μέτρον τοῦ ἀριθμοῦ : $\dfrac{z - z_0}{\bar{z} - \bar{z}_0}$ εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος.

332. Δώσατε τήν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα ἡ ἐξίσωσις: $x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ ἔχει δύο ρίζας ἀντιθέτους.

333. Δώσατε ἐπίσης τήν ἀναγκαίαν καί ἱκανήν συνθήκην ἵνα τῆς ἐξισώσεως : $x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ μία ρίζα ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

334. Δείξατε, ὅτι πᾶσαι αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου : $x^3 + 6x^2 + 9x + 4$ εἶναι ἀκέραιοι ἀριθμοί.

335. Ἡ ἐξίσωσις $x^4-6x^3+18x^2-30x+25=0$ ἔχει ὡς δύο της ρίζας ἀριθμούς τῆς μορφῆς $a+i\beta$ καί $\beta+ia$. Προσδιορίσατε ὅλας της τάς ρίζας.

336. Νά δειχθῇ, ὅτι ἡ ἐξίσωσις: $x^\mu-1=0$ καί γενικώτερον ἡ $ax^\mu+\beta=0$ $(\beta\neq 0)$ δέν ἔχει πολλαπλᾶς ρίζας.

337. Νά εὑρεθοῦν οἱ κοιναί ρίζαι τῶν πολυωνύμων:

$x^3-18x^2+107x-210$ καί $x^3-19x^2+118x-240=0$

338. Τό αὐτό διά τά πολυώνυμα:

$x^5-2x+2x^2+x-10$ καί $x^4-2x^3+5x^2-9x-2$

339. Εὑρεῖν τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ριζῶν τοῦ πολυωνύμου: x^3+px+q.

340. Δείξατε, ὅτι, ἐάν a, β, γ εἶναι αἱ ρίζαι τοῦ πολυωνύμου: $x^3+3\lambda x+\mu$, τό τριώνυμον, τό ὁποῖον ἔχει ὡς ρίζας τούς ἀριθμούς $(a-\beta)(a-\gamma)$, $(\beta-\gamma)(\beta-a)$, $(\gamma-a)(\gamma-\beta)$ εἶναι τό: $x^3+9\lambda x^2-27(\mu^2+4\lambda^3)=0$.

341. Ἐάν διά τοῦ S_2 ἐκπροσωπεῖται τό ἄθροισμα τῶν τ δυνάμεων τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως: $x^\mu+ax^2+\beta=0$, δείξατε, ὅτι, ἐάν $\mu>5$ ἔχομεν: $S_{2\mu-1}=0$.

342. Ἐάν (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) εἶναι τρία συστήματα τιμῶν τῶν x, y, z, τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν τάς ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned} x^3+y^3+z^3+axyz&=0 \\ \lambda x+\mu y+\nu z&=0 \end{aligned}$$

τότε: $x_1x_2x_3+y_1y_2y_3+z_1z_2z_3=0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Στ΄

Θεωρία τῶν λογαρίθμων

78. Τήν ἐκθετικήν συνάρτησιν a^x ὡρίσαμεν (55.4) καί διά τήν περίπτωσιν καθ' ἥν ὁ x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.
Ἡ ρητή ἤ ἄρρητος τιμή τοῦ x διά τήν ὁποίαν ἡ a^x γίνεται ἴση μέ τόν ἀριθμόν y λέγεται λογάριθμος τοῦ y ὡς πρός βάσιν a.
Δηλ. λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ y ὡς πρός βάσιν a ὀνομάζεται ὁ ἐκθέτης εἰς τόν ὁποῖον πρέπει νά ὑψωθῆ ἡ βάσις a διά νά προκύψη ὁ y.
Ἀποδεικνύεται*, ὅτι ἡ συνάρτησις a^x δύναται νά λάβη ὅλας τάς τιμάς ἀπό τοῦ $0 \ldots +\infty$ καί νά διέλθη ἅπαξ ἐξ ἑκάστου τῶν ἀριθμῶν τούτων.
Συγκεκριμένα: Ἐάν $a > 1$. Διά $x = 0$ ἡ συνάρτησις a^x λαμβάνει τήν τιμήν $a^0 = 1$ καί, ἐάν τό x μεταβάλλεται συνεχῶς** ἀπό τοῦ $0 \ldots +\infty$ ἡ a^x μεταβάλλεται ἐπίσης συνεχῶς ἀπό τοῦ $1 \ldots +\infty$***· ἐάν τό x μεταβάλλεται ἐπίσης συνεχῶς ἀπό τοῦ $0 \ldots -\infty$ ἡ a^x μεταβάλλεται ἐπίσης συνεχῶς ἀπό τοῦ $1 \ldots 0$.
Ἐν συμπεράσματι: Ἐάν τό x μεταβάλλεται κατά τρόπον συνεχῆ ἀπό τοῦ $-\infty \ldots +\infty$ ἡ a^x μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπο ἀπό τοῦ $0 \ldots +\infty$.
Ἐάν $a < 1$. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην βλέπομεν, ὅτι, ὅταν τό x μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπον ἀπό τοῦ $-\infty \ldots +\infty$, ἡ συνάρτησίς μας μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπον ἀπό τοῦ $+\infty \ldots 0$.
Οὕτω διαπιστώνομεν, ὅτι εἰς ἕκαστον θετικόν ἀριθμόν y ἀντιστοιχεῖ

---

* Καί ἡμεῖς θά τό ἀποδείξωμεν εἰς τό εἰδικόν κεφάλαιον « περί τῆς συνεχείας τῶν συναρτήσεων ».

** Δηλ. λαμβάνων ὅλας τάς τιμάς: ρητούς καί ἀρρήτους.

*** Βλ. καί ἐδ. (55.1).

ἕνας μόνον ἀριθμός x, ὅστις ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα $a^x = y$· καθορίζεται λοιπόν μία νέα συνάρτησις, ἡ $x = f(y)$, ἡ ὁποία ὀνομάζεται λογαριθμική συνάρτησις καί εἰς τήν ὁποίαν τό x εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ y εἰς τό σύστημα μέ βάσιν α.
Κατόπιν τοῦ ὁρισμοῦ τούτου προκύπτει, ὅτι ὁ λογάριθμος εἶναι ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως (ἐκ τῆς μιᾶς εἰς τήν ἄλλην ἔχουν ἐναλλαγεῖ οἱ ρόλοι τῶν μεταβλητῶν x καί y) καί μεταβάλλεται καί αὐτός κατά τρόπον συνεχῆ, ὅταν τό y λαμβάνη τιμάς ἀπό τό $0 \ldots +\infty$. Ἡ νέα μας λοιπόν συνάρτησις εἶναι ἰσοδύναμος μέ τήν $x = \lambda o\gamma_a y$*.
Παραθέτομεν ἕνα πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως, τόν ὁποῖον συμπεραίνομεν εὐκόλως ἀπό τά ἀνωτέρω ἐκτεθέντα.

$a < 1$.

y	$0 \nearrow a \nearrow 1 \nearrow +\infty$
$x = \lambda o\gamma_a y$	$+\infty \searrow 1 \searrow 0 \searrow -\infty$

$a > 1$

y	$0 \nearrow 1 \nearrow a \nearrow +\infty$
$x = \lambda o\gamma_a y$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$

Οὕτω συμπεραίνομεν:
1ον Μόνον οἱ θετικοί ἀριθμοί ἔχουν λογαρίθμους.
2ον. Ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς καί ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τό μηδέν ὡς πρός οἱανδήποτε βάσιν.
3ον. Ἐάν ἡ βάσις $a > 1$ ὁ λογάριθμος (55.1) εἶναι αὔξουσα συνάρτησις καί οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τήν μονάδα, ἔχουν λογαρίθμους θετικούς· καί οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι μικρότεροι ἀπό τήν μονάδα, ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς.
4ον. Ἐάν ἡ βάσις $a < 1$ ὁ λογάριθμος εἶναι μία συνάρτησις φθίνουσα καί οἱ ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τήν μονάδα ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς· οἱ ἀριθμοί, οἱ μικρότεροι ἀπό τήν μονάδα,

* Ὁ συμβολισμός: $\lambda o\gamma_a y$ διαβάζεται: λογάριθμος y ὡς πρός βάσιν α.

ἔχουν λογαρίθμους θετικούς.

79. Τά χρησιμοποιούμενα λογαριθμικά συστήματα.

Εἴδομεν, ὅτι ἡ βάσις α δύναται νά εἶναι ἕνας οἱοσδήποτε θετικός ἀριθμός· οὕτω δημιουργοῦνται ἄπειρα λογαριθμικά συστήματα. Τά χρησιμοποιούμενα εἶναι δύο:

1ον. Τό δεκαδικόν λογαριθμικόν σύστημα δηλ. τό σύστημα βάσεως $\alpha = 10$*

2ον. Τό Νεπέρειον λογαριθμικόν σύστημα δηλ. τό σύστημα τοῦ ὁποίου ἡ βάσις α εἶναι ὁ $e = 2,7182811828$**...

Τό πρῶτον χρησιμοποιεῖται εἰς πρακτικούς σκοπούς καί τό δεύτερον κυρίως εἰς θεωρητικάς μελέτας.

80. Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων.

80.1. Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἑνός οἱουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν παραγόντων.

Θά ἀποδείξωμεν λοιπόν, ὅτι: $\lambda o\gamma(x_1 . x_2 \ldots x_\nu) = \lambda o\gamma x_1 + \lambda o\gamma x_2 + \ldots + \lambda o\gamma x_\nu$.

Ἀπό τόν ὁρισμόν τοῦ λογαρίθμου, ἄν $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, \ldots x_\nu$ ὡς πρός βάσιν α, λαμβάνομεν τάς ἰσότητας:

$a^{y_1} = x_1$, $a^{y_2} = x_2$, ... $a^{y_\nu} = x_\nu$ ἑπομένως καί τήν ἰσότητα:

$a^{y_1 + y_2 + \ldots + y_\nu} = x_1 x_2 \ldots x_\nu$ ἤ τήν ἰσότητα:

$$\lambda o\gamma(x_1 + x_2 + \cdots + x_\nu) = y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = \lambda o\gamma x_1 + \lambda o\gamma x_2 + \cdots + \lambda o\gamma x_\nu$$

80.2. Ὁ λογάριθμος ἑνός πηλίκου εὑρίσκεται, ἄν ἀπό τόν λογάριθμον τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσωμεν τόν λογάριθμον τοῦ διαιρέτου.

---

* Πίνακας διά τό σύστημα τοῦτο κατεσκεύασε κατά σύστασιν τοῦ Neper ὁ Briggs (1556–1630) καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν εἰς τό Λονδῖνον. Ἕνεκα τοῦ λόγου τούτου οἱ δεκαδικοί λογάριθμοι λέγονται λογάριθμοι τοῦ Briggs ἤ καί λαϊκοί λογάριθμοι ἐπειδή εἶναι οἱ εἰς τήν πρακτικήν χρησιμοποιούμενοι.

** Αὐτό τό σύστημα ὀνομάζεται Νεπέρειον πρός τιμήν τοῦ John Neper ἤ Napier (Baron de Merchiston) – πλησίον τοῦ Edimbourg – (1550 – 1617), ὁ ὁποῖος καί ὑπῆρξε ὁ ἐφευρέτης τῶν λογαρίθμων.

Δηλ. $λογ \frac{x_1}{x_2} = λογx_1 - λογx_2$

Συμφώνως πρός τά ἀνωτέρω ἐκτεθέντα λαμβάνομεν τάς ἰσότητας:
$a^{y_1}=x_1$, $a^{y_2}=x_2 \rightarrow a^{y_1-y_2}=\frac{x_1}{x_2}$ ἤ $λογ\left(\frac{x_1}{x_2}\right)=y_1-y_2=λογx_1-λογx_2$.

80.3. Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως ἑνός ἀριθμοῦ ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐκθέτου αὐτῆς τῆς δυνάμεως ἐπί τόν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ.

Δηλ. $λογx^ν = ν λογx$.

Ἄν y εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ x μέ βάσιν α ἔχομεν: $a^y=x$ καί $a^{νy}=x^ν$. Ὥστε: $λογx^ν = νy = ν.λογx$.

80.4. Ὁ λογάριθμος τῆς ρίζης ἑνός ἀριθμοῦ εὑρίσκεται, ἐάν τόν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ διαιρέσωμεν διά τοῦ δείκτου τῆς ρίζης.

Δηλ. $λογ\sqrt[ν]{x} = \frac{1}{ν}λογx$.

Ἄν y εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ x μέ βάσιν α ἔχομεν: $a^y=x$ καί ἐάν κάμωμεν ἐξαγωγήν τῆς νιοστῆς ρίζης καί τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητός μας $\sqrt[ν]{a^y}=\sqrt[ν]{x}=a^{\frac{y}{ν}}$ δηλ. $λογ.\sqrt[ν]{x}=\frac{y}{ν}=\frac{1}{ν}λογx$.

80.5. Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων μᾶς κάμνουν νά ἐννοήσωμεν, ὅτι μέ τήν βοήθειαν ἑνός λογαριθμικοῦ πίνακος δυνάμεθα νά ἁπλοποιήσωμεν ἕνα ἀριθμητικόν ὑπολογισμόν: δυνάμεθα νά ἀντικαταστήσωμεν ἕνα γινόμενον μέ ἕνα ἄθροισμα, ἕνα πηλίκον μέ μίαν διαφοράν, μίαν ὕψωσιν εἰς δύναμιν μέ ἕνα γινόμενον καί μίαν ἐξαγωγήν ρίζης μέ μίαν διαίρεσιν.
Εἰς τήν τελευταίαν περίπτωσιν ὁ λογαριθμικός ὑπολογισμός εἶναι ἀναπόφευκτος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ριζικοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

81. Χαρακτηριστικόν τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου. Ἄν θεωρήσωμεν τούς πίνακας:

$10^0=1$	$10^{-1}=0,1$
$10^1=10$	$10^{-2}=0,01$
$10^2=100$	$10^{-3}=0,001$
$10^3=1000$	$10^{-4}=0,0001$
. . . . . .	. . . . . .

τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ 10, δημιουργοῦμεν τούς ἀντιστοίχους πίνακας:

$\lambda o\gamma\, 1 = 0$	$\lambda o\gamma\, 0,1 = -1$
$\lambda o\gamma\, 10 = 1$	$\lambda o\gamma\, 0,01 = -2$
$\lambda o\gamma\, 100 = 2$	$\lambda o\gamma\, 0,001 = -3$
$\lambda o\gamma\, 1000 = 3$	$\lambda o\gamma\, 0,0001 = -4$
. . . .	. . . .

Ἄς θεωρήσωμεν τώρα θετικούς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δέν εἶναι ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ 10. Καί κατά πρῶτον τούς μεγαλυτέρους τῆς μονάδος.

Ἕνας ἀριθμός Α, ὅστις εὑρίσκεται μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ 10 δηλ. ἕνας ἀριθμός, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς μηδενικῆς καί τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ 10, θά ἔχη (55.1) λογάριθμον, ὅστις θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 1 δηλ. θά εἶναι τῆς μορφῆς $0+\theta$, ὅπου θ τό δεκαδικόν θετικόν καί μικρότερον τῆς μονάδος μέρος τοῦ λογαρίθμου.

Ἄν σκεφθῶμεν κατά τόν αὐτόν τρόπον συμπεραίνομεν, ὅτι ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 10 καί τοῦ 100, θά ἔχη λογάριθμον τῆς μορφῆς $1+\theta$, ὅπου $0<\theta<1$.

Γενικῶς, ὅταν ἕνας ἀριθμός Α περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δυνάμεων $\nu-1$ καί ν τοῦ 10 δηλ. ὅταν $10^{\nu-1}<A<10^{\nu}$, τότε ὁ λογάριθμός του θά εἶναι τῆς μορφῆς $(\nu-1)+\theta$, ὅπου $0<\theta<1$.

Ὁ θεωρούμενος ἀριθμός Α ἤ εἶναι ἀκέραιος ἤ εἶναι δεκαδικός. Καί, ἄν μέν εἶναι ἀκέραιος, τό ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου του, τό ὁποῖον λέγεται καί *χαρακτηριστικόν* τοῦ λογαρίθμου, ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν ψηφίων του ἠλαττωμένον κατά ἕνα, ἄν δέ εἶναι δεκαδικός, τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου του μέρους ἠλαττωμένον κατά ἕνα.

Π.χ. ἔχομεν $10^3<3524<10^4$ δηλ. $\lambda o\gamma.3594=3+\theta$ ὅπου $0<\theta<1$ ὅπως ἐπίσης $10^3<3524,728<10$ δηλ. $\lambda o\gamma\, 3524,728=3+\theta'$ ὅπου $0<\theta'<1$.

Ἀντιστρόφως: Ἄν τό ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι $\nu-1$ μονάδες, ὁ ἀριθμός μας ἔχει ἀκέραιον μέρος μέ ν ψηφία.

Ἄν $\nu-1 < \log A < \nu$ τότε $10^{\nu-1} < A < 10^{\nu}$

δηλ. ὁ A εἶναι ἀριθμός μέ ἀκέραιον μέρος νψήφιον.

Καί τώρα ἐκείνους, οἵτινες εἶναι θετικοί καί μικρότεροι τῆς μονάδος. Ἄν θεωρήσωμεν ἕνα ἀριθμόν A, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 0,1 καί τῆς μονάδος, θά ἔχωμεν, ὅτι ὁ λογάριθμός του θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ -1 καί τοῦ 0 δηλ. θά ἔχωμεν, ὅτι $\log A = -1+\theta$, ὅπου τό θ θά εἶναι δεκαδικός καί μικρότερος τῆς μονάδος.

Ἐπίσης, ἄν ὁ A εἶναι ἀριθμός, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 0,1 καί τοῦ 0,01 θά ἔχῃ λογάριθμον τῆς μορφῆς $-2+\theta$, ὅπου $0<\theta<1$.

Γενικῶς, ἄν $10^{-\nu} < A < 10^{-(\nu-1)}$ (1)

τότε $\log A = -\nu+\theta$ ὅπου $0<\theta<1$.

Εἶναι ὅμως φανερόν, ὅτι ὁ ἀριθμός A τῆς σχέσεως (1) θά ἔχῃ ἀκέραιον μέρος 0 καί δεκαδικόν μέρος τοιοῦτον, ὥστε τό πρῶτον σημαντικόν του ψηφίον (τό διάφορον τοῦ μηδενός) νά κατέχῃ τήν νιοστήν θέσιν μετά τήν ὑποδιαστολήν. Οὕτω ἐξάγεται τό ἑξῆς συμπέρασμα: Οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος καί οἵτινες δέν εἶναι ἀκέραιαι δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι ἡμιαρνητικοί, τῶν ὁποίων τό ἀκέραιον μέρος (τό χαρακτηριστικόν) ἔχει τόσας ἀρνητικάς μονάδας, ὅσαι εἶναι ἀρκεταί διά νά δηλωθῇ ἡ θέσις τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τῶν ἀριθμῶν μετά τήν ὑποδιαστολήν.

82. Παρατήρησις. Ἀπ' ὅ,τι εὐθύς ἀνωτέρω ἐξετέθη δημιουργεῖται μία ἀπορία: Ἐνῶ οἱ ἀριθμοί οἱ μικρότεροι τῆς μονάδος ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, πῶς συμβαίνει τώρα νά παρουσιάζωνται ὡς ἡμιαρνητικοί δηλ. μέ μόνον τό ἀκέραιόν των μέρος ἀρνητικόν;

Ἄν ὅλα τά μέλη τῶν ἀνισοτήτων (1)(ἐδ.81) τά πολλαπλασιάσωμεν μέ τό 10^{ν}, εὑρίσκομεν: $10^{0} < A\cdot10^{\nu} < 10^{1}$ δηλ. $\log(A\cdot10^{\nu}) = 0+\theta$ ἤ $\log A+\nu = 0+\theta$ ἤ $\log A = -\nu+\theta$.

Βλέπομεν λοιπόν, ὅτι τό δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ A, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος καί τοῦ ὁποίου τό πρῶτον μή μηδενικόν ψηφίον μετά τήν ὑποδιαστολήν κατέχει τήν νιοστήν θέσιν, συμπίπτει μέ τό δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ $A \cdot 10^{\nu}$, ὅστις εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος διότι ἔχει ἀκέραιον μέρος τό ψηφίον, τό ὁποῖον ὁ A τό εἶχε ὡς πρῶτον διάφορον τοῦ μηδενός ψηφίον μετά τήν ὑποδιαστολήν.

Διά νά δώσωμεν μίαν τελείαν ἑρμηνείαν εἰς τήν δημιουργουμένην ἀπορίαν πρέπει νά προσθέσωμεν, ὅτι ὁ ἡμιαρνητικός λογάριθμος δέν εἶναι παρά ὁ ἰσοδύναμος τοῦ ἐξ ὁλοκλήρου ἀρνητικοῦ λογαρίθμου.

Ὅταν π.χ. ἔχωμεν, πώς $\lambda o\gamma A = -2,35724$ δυνάμεθα νά εὕρωμεν τόν ἰσοδύναμόν τοῦ ἀριθμοῦ τούτου καί ἡμιαρνητικόν.

Πράγματι, $\lambda o\gamma A = -2 + (-0,35724) = -3 + 1 + (-0,35724)$. Καί, ἐάν ἀπό τό $1 = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{10}{10^5}$ ἀφαιρέσωμεν τόν ἀριθμόν $\frac{3}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{7}{10^3} + \frac{9}{10^4} + \frac{11}{10^5}$, εὑρίσκομεν: $\lambda o\gamma A = \overline{3},64276$ τοῦ ὁποίου μόνον τό ἀκέραιον μέρος εἶναι ἀρνητικόν.

Ὁ ἀριθμός A, ὅστις ἔχει λογάριθμον $-2,35724$ θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 10^{-3} καί τοῦ 10^{-2} δηλ. θά εἶναι $-3+\theta$, ὅπου θ θετικός μεταξύ 0 καί 1.

Ἀπό τήν μετατροπήν τοῦ ἐξ ὁλοκλήρου ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ εἰς ἰσοδύναμον ἡμιαρνητικόν ἐξάγομεν τόν κανόνα: Διά νά μετατρέψωμεν ἕναν ὅλως ἀρνητικόν ἀριθμόν εἰς ἡμιαρνητικόν προσθέτομεν εἰς τό ἀκέραιόν του μέρος μίαν ἀρνητικήν μονάδα καί τά δεκαδικά του ψηφία πλήν τοῦ τελευταίου τά ἀφαιροῦμεν ἀπό τοῦ 9 ἐνῶ τό τελευταῖον τό ἀφαιροῦμεν ἀπό τόν 10.

83. Τό δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ, ὅστις ἔχει δεκαδικήν μορφή, δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν θέσιν τῆς ὑποδιαστολῆς.

Θά πρέπει λοιπόν νά δείξωμεν, ὅτι, ὅταν ἕνα γνωστόν ἀριθμόν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν μέ τόν 10^{ν}, τό δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου του δέν μεταβάλλεται, ἀλλά τό χαρακτηριστικόν του αὐξάνεται ἤ ἐλαττοῦται κατά ν μονάδας.

Πράγματι, πολλαπλασιάζοντες τόν ἀριθμόν Α μέ τό 10^ν ἔχομεν:

$\lambda o\gamma(A\cdot 10^\nu)=\lambda o\gamma A+\lambda o\gamma 10^\nu=\lambda o\gamma A+\nu\lambda o\gamma 10$ ἤ $\lambda o\gamma(A\cdot 10^\nu)=\lambda o\gamma A+\nu$.

Ἐπίσης, ἄν διαιρέσωμεν τόν Α μέ τό 10^ν, ἔχομεν:

$$\lambda o\gamma\left(\frac{A}{10^\nu}\right)=\lambda o\gamma A-\lambda o\gamma 10^\nu \quad \text{ἤ} \quad \lambda o\gamma\left(\frac{A}{10^\nu}\right)=\lambda o\gamma A-\nu$$

Ὅπως ἐννοοῦμεν καί εἰς τάς δύο περιπτώσεις ὁ φυσικός ν δέν δύναται νά μεταβάλλη παρά τά χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου, τοῦ θεωρουμένου ἀριθμοῦ.

83.1. Σημείωσις. Εἰς τήν παρατήρησιν (82) πολλαπλασιάσαντες τόν ἀριθμόν μας ἐπί 10^ν τόν κάμαμε μεγαλύτερον τῆς μονάδος, ἐνῶ κατά τό προηγούμενον Θεώρημα διετηρήσαμεν τό δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

83.2. Συμπέρασμα. Ὅταν δύο ἄνισοι ἀλλήλων δεκαδικοί ἀριθμοί ἀποτελοῦνται ἀπό τά αὐτά ψηφία, οἱ λογάριθμοί των δέν διαφέρουν μεταξύ των παρά κατά τό χαρακτηριστικόν των.

Ἀπ' αὐτό τό συμπέρασμα γίνεται φανερόν τό διατί θεώρησαν τούς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδος καί θετικοί, ὑπό τήν ἡμιαρνητικήν των μορφήν. Ὁ λογισμός θά διευκολύνεται μεγάλως, ἀφοῦ τά χαρακτηριστικά μέρη τῶν λογαρίθμων ἐκτιμῶνται ἀμέσως διά δέ τά δεκαδικά δέν ἔχομεν παρά νά περιορισθῶμεν εἰς τά δεκαδικά μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τῆς μονάδος καί ἀκεραίων.

84. Συλλογάριθμος. Ὀνομάζομεν συλλογάριθμον ἑνός ἀριθμοῦ τόν λογάριθμον τοῦ ἀντιστρόφου του. Οὕτω ἐξ ὁρισμοῦ

$$\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A=\lambda o\gamma\frac{1}{A} \quad \text{ἤ} \quad \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A=\lambda o\gamma 1-\lambda o\gamma A=-\lambda o\gamma A.$$

Ἡ εἰσαγωγή τῶν συλλογαρίθμων ἐπιτρέπει νά ἀντικαθιστῶμεν μίαν διαφοράν λογαρίθμων μέ ἕνα ἄθροισμα. Οὕτως ἔχομεν:

$\lambda o\gamma\dfrac{A^\mu\cdot B^\nu\cdot \Gamma^\rho}{\Delta^\kappa\cdot E}=\mu\lambda o\gamma A+\nu\lambda o\gamma B+\rho\lambda o\gamma\Gamma-\kappa\lambda o\gamma\Delta-\lambda o\gamma E$, ἤ $\lambda o\gamma\dfrac{A^\mu B^\nu\Gamma^\rho}{\Delta^\kappa\cdot E}=$ $\mu\lambda o\gamma A+\nu\lambda o\gamma B+\rho\lambda o\gamma\Gamma+\kappa\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\,\Delta+\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, E$.

85. Ὑπολογισμός τοῦ συλλογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ

ἀπό τόν συλλογάριθμόν του.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἔχομεν: $λογA = 2,57834$. Τότε $συλλογ.A = -2,57834$ ἤ $συλλογ.A = -2-1+1-0,57834$. Δηλ. $συλλογ.A = \overline{3},42196$.

Ὥστε: Διά νά προσδιορίσωμεν τόν συλλογάριθμον ἑνός ἀριθμοῦ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τόν λογάριθμον ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν μίαν θετικήν μονάδα εἰς τό χαρακτηριστικόν τοῦ λογαρίθμου καί νά τοῦ ἀλλάξωμεν κατόπιν τό πρόσημον· κατόπιν ἕκαστον ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου νά τό ἀφαιρέσωμεν ἀπό τό 9 πλήν τοῦ τελευταίου, τό ὁποῖον θά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν 10.

Παραδείγματα:

$λογ\,0,08565 = \overline{2},93273$ $\qquad$ $λογ\,38,14 = 1,58138$

$συλλογ.\,0,08565 = 1,06727$ $\qquad$ $συλλογ.\,38,14 = \overline{2},41862$

86. Πράξεις ἐπί τῶν λογαρίθμων. Αἱ πράξεις ἐπί τῶν λογαρίθμων, οἵτινες ἔχουν χαρακτηριστικόν θετικόν δέν διαφέρουν ἀπό τάς πράξεις τάς ὁποίας κάμνομεν μέ δεκαδικούς ἀριθμούς. Δέν συμβαίνει ὅμως τό αὐτό, ὅταν πρόκειται διά πράξεις μέ λογαρίθμους, οἵτινες ἔχουν χαρακτηριστικόν ἀρνητικόν. Αὐτοί παρουσιάζουν μιά νέα μορφή ἀριθμοῦ (καλλίτερα μορφώνουν ἕνα νέο συμβολισμό) καί χρειάζεται νά ἐξετάσωμεν τάς διαφορετικάς περιπτώσεις, τάς ὁποίας δυνάμεθα νά συναντήσωμεν εἰς τήν πρακτικήν.

86.1. Πρόσθεσις. Ἔστω, ὅτι πρόκειται νά προσθέσωμεν τούς λογαρίθμους:

$$1^{ον}\qquad \begin{array}{r} 2,57834 \\ \overline{1},67943 \\ \hline 2,25777 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \overline{3},56789 \\ \overline{2},67432 \\ \hline \overline{4},24221 \end{array}$$

Εἰς τό πρῶτον παράδειγμα τό ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων εἶναι 1,25777· γράφομεν λοιπόν τό δεκαδικόν μέρος αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος, καί τήν μονάδα, τήν ὁποίαν τοῦ χρεωστοῦμεν, τήν προσθέτομεν εἰς τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων του μερῶν. Οὕτω προκύπτει τό ἀναγραφόμενον ἀποτέλεσμα. Ὁμοίως σκεπτόμεθα καί διά τό δεύτερον παράδειγμα.

86.2. Διαφορά δύο λογαρίθμων. Κάμνομεν χρῆσιν τῶν συλλογαρίθμων καί οὕτω ἀναγόμεθα εἰς τήν πρόσθεσιν.
Δυνάμεθα ὅμως νά ἐργασθῶμεν κατά τρόπον πλέον πρακτικόν. Ἄς εἴπομεν, ὅτι θέλομεν νά ἀφαιρέσωμεν τούς λογαρίθμους:

$$\begin{array}{r} \overline{3},45874 \\ \overline{4},54782 \\ \hline 0,91092 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \overline{2},83754 \\ \overline{5},32452 \\ \hline \overline{3},51302 \end{array}$$

Εἰς τό πρῶτον παράδειγμα ἀφαιροῦντες τά δεκαδικά μέρη εὑρίσκομεν τό δεκαδικόν μέρος τῆς διαφορᾶς – εἶναι αὐτό τοῦτο τό ἀναγραφόμενον – ἀλλά χρεωστοῦμεν μίαν ἀκεραίαν μονάδα εἰς τόν ἀφαιρετέον, διότι κατά τήν ἀφαίρεσιν τοῦ ψηφίου 5 τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό τό ψηφίον 4 τοῦ μειωτέου προσθέτομεν μίαν μονάδα εἰς τόν μειωτέον. Οὕτω λέγομεν: $1+(-4)=-3$ καί, ἄν αὐτό τό -3 τό ἀφαιρέσωμεν ἀπό τό -3 τοῦ μειωτέου εὑρίσκομεν ὡς ἀκέραιον μέρος τῆς διαφορᾶς μηδέν. Μέ παρομοίαν σκέψιν εὑρίσκομεν τό ἀναγραφόμενον ἀποτέλεσμα εἰς τό δεύτερον παράδειγμα.

86.3. Πολλαπλασιασμός ἑνός λογαρίθμου ἐπί ἕνα ἀκέραιον ἀριθμόν. Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμός:

$$\begin{array}{r} \overline{2},67893 \\ 5 \\ \hline \overline{7},39465 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζομεν πρῶτον τό 0,67893 μέ τό 5 καί εὑρίσκομεν 3,39465 γράφομεν τό δεκαδικόν μέρος καί προσθέτομεν 3 εἰς τό γινόμενον -10 τοῦ -2 μέ τό 5. Οὕτως εὑρίσκομεν τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα.

86.4. Διαίρεσις ἑνός λογαρίθμου δι' ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ.

1ον Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ χαρακτηριστικοῦ εἶναι διαιρετή διά τοῦ ἀκεραίου.
Ἔστω π.χ., ὅτι πρόκειται νά διαιρέσωμεν τόν $\overline{6},54782$ διά τοῦ 3. Εἶναι τό αὐτό μέ τό νά διαιρέσωμεν τό ἄθροισμα $-6+0,54782$ μέ τόν 3. Οὕτως εὑρίσκομεν ἀμέσως ὡς πηλίκον: $\overline{2},18260$.

2ον. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ χαρακτηριστικοῦ δέν εἶναι διαιρετή διά τοῦ ἀκεραίου. Ἔστω, ὅτι πρόκειται διά

τήν διαίρεσιν : $\bar{4},54782:3$. Ἔχομεν : $\bar{4},54782 = \bar{6}+2,54782$.
Καί διαιροῦντες τό ἰσοδύναμον πρός τόν ἀρχικόν ἀριθμόν ἄθροισμα διά 3 εὑρίσκομεν τό πηλίκον : $\bar{2},84927$. Δηλ. προσθέτομεν εἰς τό ἀρνητικόν ἀκέραιον μέρος τοῦ λογαρίθμου τόσας ἀρνητικάς μονάδας, ὅσαι χρειάζονται διά νά γίνη τοῦτο διαιρετόν διά τοῦ ἀκεραίου διαιρέτου μας· τόν αὐτόν ἀριθμόν θετικῶν μονάδων προσθέτομεν ἐπίσης εἰς τό θετικόν δεκαδικόν μέρος τοῦ λογαρίθμου μας.

87. Λογαριθμικοί πίνακες. Εἰς ὅλα τά βιβλία λογαριθμικῶν πινάκων ἐκτίθεται μέ πᾶσαν λεπτομέρειαν ὁ τρόπος διατάξεως τῶν πινάκων καί ὁ τρόπος χρήσεώς των. Διά τοῦτο θεωροῦμεν ἄσκοπον διά τό βιβλίον μας μίαν τοιαύτην ἐπανάληψιν.

87.1. Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογισθῇ τό $x = \dfrac{312,415\sqrt[3]{3,5781^2}}{17,1826^2\ \sqrt[10]{0,002987^3}}$

$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma\, 312,415 + \frac{2}{3}\lambda o\gamma\, 3,5781 - 2\lambda o\gamma\, 17,1826 - \frac{3}{10}\lambda o\gamma\, 0,002987 \quad \text{ἤ}$$
$$\lambda o\gamma x = \lambda o\gamma\, 312,415 + \frac{2}{3}\lambda o\gamma\, 3,5781 + 2\,\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, 17,1826 + \frac{3}{10}\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, 0,002987$$

$$\begin{aligned} \lambda o\gamma\, 312,415 &= 2,49473 \\ \frac{2}{3}\lambda o\gamma\, 3,5781 &= 0,36910 \\ 2\,\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, 17,1826 &= \bar{3},52982 \\ \frac{3}{10}\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, 0,002987 &= 0,75743 \\ \hline \lambda o\gamma x &= 1,15108 \end{aligned}$$

καί $x = 14.1606$

Ἀσκήσεις

343. Ἀναπτύξατε τούς ἑπομένους λογαρίθμους :

$$\lambda o\gamma\sqrt[3]{\frac{\mu^2-\nu^2}{3\mu\nu^4}}, \quad \lambda o\gamma\frac{3\alpha\sqrt{\beta}}{\gamma^8}, \quad \lambda o\gamma\frac{3(\alpha^2-\beta^2)}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}$$

344. Διαπιστώσατε διά τῆς χρήσεως τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τάς ἀκολούθους ἰσότητας :

$$\sqrt[7]{349} = 2,3081 \qquad \frac{\sqrt[30]{0,00582156^7}\cdot\sqrt[7]{315,217^2}}{3,244256\cdot 1,12537^3} = 0,336838$$

$$\frac{31,62496\cdot 1,04569^5}{2,718282} = 14,546 \qquad \sqrt{8,5273\sqrt[3]{51,3388}} = 5,62962$$

$$\pi\sqrt{\frac{4,51}{9,81309}} = 2,1298 \qquad \sqrt[7]{\frac{721,5713^2\sqrt[4]{12,2758}}{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[5]{0,0678368}}} = 7,11017$$

245. Εὕρητε τόν τύπον, ὅστις μᾶς δίδει τόν λογάριθμον ἑνός ἀριθμοῦ ὡς πρός σύστημα τυχούσης βάσεως α, ὅταν γνωρίζωμεν τόν δεκαδικόν του λογάριθμον.

Ὡς ἐφαρμογήν, ὑπολογίσατε τόν λογάριθμον τοῦ 139 εἰς τό σύστημα βάσεως 7.

246. Νά ὑπολογισθῆ εἰς τούς Παρισίους ἡ διάρκεια μιᾶς αἰωρήσεως ἑνός ἐκκρεμοῦς, τό ὁποῖον ἔχει μῆκος $l = 1,5^{\mu}$.

Ἄν λάβετε τάς τιμάς $\pi = 3,14159265$, $g = 9,8094$ θά εὕρητε ὡς διάρκειαν $t = 1,2285\,sec$ ἤ κατά προσέγγισιν 1,23 sec.

247. Δείξατε θεωρητικῶς, ὅτι ἡ διαφορά μεταξύ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἐλαττοῦται ἐφόσον οἱ ἀριθμοί αὐξάνουν.

248. Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $\log_\alpha(\log_\alpha x) = \log_{\alpha^2}(\log_{\alpha^2} x)$.

Ὅπως βλέπομεν ἐδῶ ἔχομεν λογαρίθμους ὡς πρός βάσιν α καί ὡς πρός βάσιν α^2.

Θά στηριχθῆτε διά τήν λύσιν τῆς ἀσκήσεως ταύτης εἰς τόν τύπον τόν ὁποῖον ἐξακριβώσατε ἐκ τῆς λύσεως τῆς ἀσκήσεως (245). Θά διαπιστώσατε ἐκεῖ, ὅτι ὁ λογάριθμος ἑνός ἀριθμοῦ ὡς πρός τήν τυχοῦσαν βάσιν ἰσοῦται μέ τόν δεκαδικόν λογάριθμον τοῦ ἀριθμοῦ διά τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου τῆς βάσεως.

Ἀσκήσεις γενικῆς ἐπαναλήψεως.

249. Γνωρίζοντες, ὅτι ἔχομεν: $S_\nu = 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots\nu}$ δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος: $\nu S_\nu = (\nu+1)S_{\nu-1} - S_{\nu-2}$.

250. Δείξατε, ὅτι, ἐάν α, β εἶναι δύο θετικοί καί διάφοροι ἀλλήλων ἀριθμοί, ἰσχύει ἡ ἀνισότης: $\alpha^5 + \beta^5 - \alpha^4\beta - \alpha\beta^4 > 0$.

251. Ἐάν α, β, γ εἶναι τρεῖς θετικοί ἀριθμοί καί δέν εἶναι ὅλοι ἴσοι ἰσχύει ἡ ἀνισότης: $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma) > 8\alpha\beta\gamma$.

252. Τί εἴδους τρίγωνον εἶναι ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί συνδέονται μέ τήν σχέσιν: $\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)} = \frac{1}{8}$;

253. Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ εἶναι θετικοί καί ὄχι ὅλοι ἴσοι

1ον. Δείξατε, πώς άληθεύει ή άνισότης:

$$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)>6\alpha\beta\gamma.$$

2ον. Διαπιστώσατε τό εἶδος τοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραί μέ μήκη α, β, γ συνδέονται μέ τήν σχέσιν:

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=6.$$

254. Ἐάν θέσωμεν $S_\nu=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{\nu}$ δείξατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἀνισότητος: $S_{2\nu}-S_\nu>\frac{1}{2}$, καί ἐν συνεχεία διαπιστώσατε καί τήν ἀνισότητα: $S_{2^p}>\frac{p}{2}+1$.

255. Θεωροῦμεν τήν φθίνουσαν ἀκολουθίαν τῶν θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθμῶν: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$ Δείξατε, ὅτι, ἄν θέσωμεν $\beta_1=\alpha_1$, $\beta_2=\alpha_1-\alpha_2$, $\beta_3=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3, \dots$, οἱ ἀριθμοί β, οἱ ὁποῖοι ἔχουν δείκτην περιττόν βαίνουν ἐλαττούμενοι, οἱ ἀριθμοί β μέ δείκτην ἄρτιον βαίνουν αὐξανόμενοι καί ὁ καθείς ἐκ τῶν πρώτων εἶναι μεγαλύτερος τοῦ καθενός τῶν δευτέρων.

256. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως: $u=\frac{x+y}{1-xy}$ διά $x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καί $y=\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}$

257. Ἐάν α, β εἶναι θετικοί ἀριθμοί, δείξατε, ὅτι ἡ $\sqrt[\mu+\rho]{\alpha\beta}$ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καί $\sqrt[\rho]{\beta}$.

258. Ἐάν α, β, γ εἶναι τρεῖς θετικοί ἀριθμοί δείξατε, ὅτι, ἡ $\sqrt[\mu+\rho+\nu]{\alpha\beta\gamma}$ περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ μεγαλυτέρου καί τοῦ μικροτέρου ἀπό τούς ἀριθμούς $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\rho]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\gamma}$. Γενικεύσατε τό θέμα.

259. Ἁπλοποιήσατε τάς παραστάσεις:

1ον. $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{9}{12}}$ 2ον $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

260. Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως: $u=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{3}{4xy}}$ διά

$x=3+\sqrt{5}$ καί $y=3-\sqrt{5}$

261. Γνωρίζοντες, ὅτι $\log 2=\alpha$ καί $\log 3=\beta$ νά ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν α καί β αἱ παραστάσεις:

$$\log 151{,}875,\quad \log 243\sqrt[4]{\frac{364{,}5}{\sqrt[3]{2}}}\quad \text{καί}\quad \log\sqrt[5]{\frac{5}{3}\sqrt[4]{6}}$$

262. Νά εὑρεθῆ ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος εἰς τό ὁποῖον εἶναι ἀληθής ἡ ἰσότης:

$$2(\log_x 8)^2+\log_x 64+\log_x 8=9$$

263. Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ἰσότητος: $\log_x y \cdot \log_y \omega \cdot \log_\omega x=1$

264 Ἀφοῦ $\log 2 = 0{,}30103$ καί $\log 3 = 0{,}47712$, πόσα ψηφία ἔχει ὁ ἀριθμός $3^{12} \cdot 2^{8}$;

265 Νά εὑρεθῆ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως: $x^4 + 4\lambda x^2 + 4\mu$ διά $x = \sqrt{-\lambda + \sqrt{\mu}} + \sqrt{-\lambda - \sqrt{\mu}}$ ἐνῷ $\mu \geqslant 0$ καί $\lambda \leqslant -\sqrt{\mu}$.

266. Ἐάν θέσωμεν $x + \frac{1}{x} = y$ συμπεράνατε τάς ἰσότητας:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \qquad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$$

καί, ἐάν θέσωμεν $S_\nu = x^\nu + \frac{1}{x^\nu}$ τήν ἰσότητα: $S_\nu = y S_{\nu-1} - S_{\nu-2}$

267 Δείξατε, ὅτι, ἄν $\alpha > \beta > 0$ ὑπάρχει πάντοτε ἕνας ἀριθμός γ, ὅστις περιλαμβάνεται μεταξύ α καί β καί ὅστις εἶναι τοιοῦτος, ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ ἰσότης: $\alpha^\nu - \beta^\nu = \nu(\alpha - \beta)\gamma^{\nu-1}$

268 Μετασχηματίσατε εἰς γινόμενον παραγόντων τήν ἔκφρασιν:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^4 - (\beta+\gamma)^4 - (\gamma+\alpha)^4 - (\alpha+\beta)^4 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4$$

269. Δείξατε, ὅτι ἡ ἔκφρασις: $\sqrt{a\sqrt{x^2-a^2}} + \sqrt{x - \sqrt{x^2 - a^2}}$ εἶναι ἴση μέ $\sqrt{2(x+a)}$ ἄν $a > 0$ καί μέ $\sqrt{2(x-a)}$ ἄν $a < 0$.

270 Γνωρίζοντες, ὅτι ἔχομεν: $\frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{\Gamma}$ καί $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ δείξατε ὅτι ἔχομεν ἐπίσης:

$$(A^2 + B^2 + \Gamma^2)\left[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\right] = (A\alpha + B\beta + \Gamma\gamma + \Delta)^2$$

271. Διαπιστώσατε τήν ἀλήθειαν τῆς ἰσότητος:

$$\sqrt[3]{100 + 51\sqrt{3}} + \sqrt[3]{100 - 51\sqrt{3}} = 8$$

272. Ἁπλοποιήσατε τήν παράστασιν: $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^3 - \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3$

273. Θεωροῦμεν τάς δύο ἐκφράσεις: $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} + \frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$

Ἄν α ὀνομασθῇ ἡ τιμή τῆς πρώτης ἐκφράσατε συναρτήσει τοῦ α τήν τιμήν β τῆς δευτέρας.

274. Ὁρίσατε τά α, β, ὥστε τό πολυώνυμον $\alpha x^4 + \beta x^3 + 1$ νά εἶναι διαιρετόν μέ τό $(x-1)^2$.

275. Δείξατε, ὅτι δι' οἱανδήποτε τιμήν τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν 1ον Τό πολυώνυμον $(x^\nu - 1)(x^{\nu+1} - 1)$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x-1)(x^2-1)$. 2ον. Τό πολυώνυμον $(x^\nu - 1)(x^{\nu+1} - 1)(x^{\nu+2} - 1)$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$.

276. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον $(x+\alpha+\beta)^3 - x^3 - \alpha^3 - \beta^3$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x+\alpha)(x+\beta)$ καί νά εὑρεθῇ τό πηλίκον.

Γενικεύσατε τήν πρότασιν διά τό πολυώνυμον $(x+a+\beta)^{\mu}-x^{\mu}-a^{\mu}-\beta^{\mu}$, ὅταν τό μ εἶναι περιττός ἀριθμός.

277. Δείξατε, ὅτι τό πολυώνυμον $yz^{\mu}-zy^{\mu}+zx^{\mu}-xz^{\mu}+xy^{\mu}-yx^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν μέ τό γινόμενον $(y-z)(z-x)(x-y)$ καί νά εὑρεθῆ τό πηλίκον.

278. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου:

$$2x^5+3x^4-2x^3-x^2+3x+1 \quad \text{γνωρίζοντες, ὅτι} \quad \frac{1}{x}=1-x^2$$

279. Ἀναλύσατε τήν παράστασιν x^6+1 εἰς ἕνα γινόμενον παραγόντων τοῦ πρώτου ἤ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

280. Προσδιορίσατε τά p καί q ὥστε τό πολυώνυμον x^3+px+q νά εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρός τό $(x^2+ax+\beta)^2-x^4$.
Κατόπιν, ἀφοῦ ἀντικαταστήσετε τά p καί q μέ τάς τιμάς των, λύσατε τήν ἐξίσωσιν $x^3+px+q=0$.

281. Νά εὑρεθοῦν αἱ τετραγωνικαί ρίζαι τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων, ἅτινα εἶναι τέλεια τετράγωνα.

α) $[(a+\beta)^2+\beta^2]^2+4a\beta(a+\beta)(a+2\beta)$

β) $a^2x^4-4a\beta x^3+2(2\beta^2-3a\gamma)x^2+12\beta\gamma x+9\gamma^2$

γ) $(a-\beta)^2(a-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\beta-a)^2+(\gamma-a)^2(\gamma-\beta)^2$

282. Νά δειχθῆ, ὅτι τό πολυώνυμον $8x^3-12(a-1)x^2+6(a^2-2a+1)x$ $-(a^3-3a^2+3a-1)$ εἶναι τέλειος κύβος.

283. Νά δειχθῆ, ὅτι, ἐάν τό πολυώνυμον $ax^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ τριωνύμου $ax^2+2\beta x+\gamma$, τό πρῶτον εἶναι ἕνας τέλειος κύβος καί τό δεύτερον ἕνα τέλειον τετράγωνον.

284. Νά εὑρεθῆ ὁ μ.κ.δ. τῶν δύο πολυωνύμων:

$$(a-\beta)^5+(\beta-\gamma)^5+(\gamma-a)^5 \qquad (a^2-\beta^2)^5+(\beta^2-\gamma^2)^5+(\gamma^2-a^2)^5$$

(Τό ζητούμενον πολυώνυμον προφανῶς θά προσδιορισθῆ κατά προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντος).

285. Δείξατε, ὅτι ἡ παράστασις: $\dfrac{x^2}{(x-a)(x-\beta)}-\dfrac{a^2}{(a-\beta)(a-x)}+\dfrac{\beta^2}{(\beta-a)(\beta-x)}$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

Πραγματικοί Ἀριθμοί

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

Λογισμός τῶν Ἀλγεβρικῶν Παραστάσεων

Μονώνυμα – Πολυώνυμα

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Στ΄.