Δ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄.

ΑΘΗΝΑ
1953

Δ. Ι. ΛΙΒΕΡΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΒΟΗΘΟΥ ΤΗΣ ΕΔΡΑΣ ΤΗΣ ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΕΩΣ
ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΟΥ Ε. Μ. ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α'

ΑΘΗΝΑ
1950

Κάθε γνήσιο ἀντίτυπο ἔχει τήν ὑπογραφή τοῦ συγγραφέα.

Ὁ Σκοπός μου

Τά μαθήματα αὐτά ἀπευθύνονται κυρίως στό σπουδαστή, πού προπαρασκευάζεται γιά τίς εἰσιτήριες ἐξετάσεις τοῦ Ε.Μ. Πολυτεχνείου καί ἔχουν σκοπό νά τόν βοηθήσουν στήν κατανόηση καί στή σωστή διατύπωση τῶν ἐννοιῶν.

Τ' ἄλλα δυό μου βιβλία, τῆς Γεωμετρίας καί τῆς Τριγωνομετρίας, ἀποτελοῦν ἐπέκταση τῆς θεωρητικῆς γνώσεως, γιατί πραγματεύονται, ὅπως εἶναι γνωστό, τή θεωρία τῆς γεωμετρικῆς καί τῆς τριγωνομετρικῆς ἀσκήσεως.

Δέν θά συμβεῖ τό ἴδιο καί τώρα. Ἡ ἀλγεβρική ἄσκηση εἶναι ἡ ἴδια ἡ θεωρία σε μιά μερική της μορφή καί δέν ἀποτελεῖ ἐπέκταση της. Γι' αὐτό θά περιορισθῶ μόνο σέ μιά ἀρκετά πλατειά καί συστηματική διατύπωση τῶν παραδόσεών μου, ἐπιμένοντας στην ἀνάπτυξη μερικῶν βασικῶν θεωριῶν γιά τίς ὁποῖες, πρό παντός, μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ κατανόηση τῶν λεπτομερειῶν τους.

Δέν θά παραλείψω καί ἐδῶ νά δείξω τόν τρόπο τῆς ἐφαρμογῆς τῶν θεωριῶν στή λύση τῆς Ἀλγεβρικῆς Ἀσκήσεως, μά σίγουρα ἡ δουλειά αὐτή δέν παρουσιάζει τήν δυσκολία, πού συναντᾶμε στή Γεωμετρία.

Ὁ τίτλος ἑπομένως «θεωρία τῆς Ἀλγεβρικῆς ἀσκήσεως» δέ θά ἦταν δικαιολογημένος.

Ἄς ἐλπίσω ὅτι τά μαθήματα αὐτά δέν θά περιορισθοῦν μόνο στό νά αὐξήσουν τόν ἀριθμό τῶν βιβλίων Ἀλγέβρας, πού κυκλοφοροῦν.

Δ.Ι. ΛΙΒΕΡΗΣ

ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

α) ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1. Σύμμετρα ἀντικείμενα ὀνομάζονται τὰ ἀντικείμενα, ποὺ ἔχουν ἕνα κοινὸ χα κτηριστικὸ καὶ ποὺ γι' αὐτὸ μποροῦν νὰ ἀνήκουν στὴ ἴδια κατηγορία.

Λογουχάρη, οἱ ἄνθρωποι, ἀνόμοια κατὰ βάση ἀντικείμενα, ἐπειδὴ ἔχουν κατ τὸν Πλάτωνα, τὸ κοινὸ χαρακτηριστικὸ « νὰ ἐκφράζουν αὐτὸ ποὺ βλέπουν » εἰ ναι σύμμετρα ἀντικείμενα. Ἐπίσης δένδρα, τὰ ὁποῖα μᾶς δίδουν καρποὺς μὲ κοινὲς ἰδιότητες ἢ οἱ ἴδιοι οἱ καρποὶ αὐτῶν τῶν δένδρων, ἀποτελοῦν σύμμετρα ἀντικείμεν

Μπορεῖ ἀκόμη ἀντικείμενα μὲ τελείως διαφορετικὲς ἰδιότητες νὰ γίνουν σύμμετρα, ὅταν μπορέσουμε νὰ ἀποδόσουμε σ' αὐτὰ τὸ ἴδιο χαρακτηριστικό. Λογουχάρη, τὰ θρανία καὶ οἱ καρέκλες γίνονται σύμμετρα, χαρακτηρίζοντάς τα σὰν ἔπιπλα τοῦ σχολείου.

2. Ποσὸ ὀνομάζεται τὸ κάθε τι, γιὰ τὸ ὁποῖον ὑφίσταται ὁμοειδὲς μεγαλύτερο ἢ μικρότερο.

Τὰ ποσὰ διακρίνονται σὲ συνεχῆ καὶ ἀσυνεχῆ. Τὸ ποσὸ λέγεται συνεχές, ὅταν σχηματίζουμε ἰδέα γι' αὐτὸ μὲ καθολικὸ τρόπο καὶ ἀσυνεχές, ὅταν σχηματίζουμε γι' αὐτὸ ἰδέα μὲ τρόπο κομματιαστό.

Ἡ ἐπιφάνεια, τὸ μῆκος, ὁ ὄγκος ἢ χωρητικότητα, ὁ χρόνος κ.τ.λ. εἶναι ποσὰ συνεχῆ. Ὁ ἀριθμὸς ὅμως τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως ἢ τὸ πλῆθος τῶν δένδρων ἑνὸς δάσους, εἶναι ποσὰ ἀσυνεχῆ.

Ὅταν λέμε δέκα μῆλα ἢ πέντε δένδρα, δὲν κάμνουμε τίποτα ἄλλο παρὰ νὰ καθορίζουμε ἀφηρημένα, γενικά, ἕνα πλῆθος σύμμετρα ἀντικείμενα. Δηλ. οἱ λέξεις, δέκα καὶ πέντε, δὲν εἶναι παρὰ ἰδέες, ποὺ ἐκπροσωποῦν, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ποιότητά τους, ἕνα πλῆθος σύμμετρα ἀντικείμενα.

Μποροῦμε, λοιπόν, νὰ λέμε: Ἀκέραιος ἀριθμὸς ὀνομάζεται, ἡ ἀφηρημένη (γενικὴ ἢ ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ποιότητα) ἐκπροσώπηση ἑνὸς πλήθους συμμέτρων ἀντικειμένων.

Ἀκεραία μονάδα ὀνομάζεται τό ἀφηρημένο πρότυπο τοῦ ἑνός ἀπό ἄλλα σύμμετρα ἀντικείμενα.

Στήν γραπτή μαθηματική γλῶσσα οἱ ἰδέες αὐτές (οἱ ἀριθμοί) ἔχουν δικές τους εἰκόνες, πού τίς λέμε ψηφία.

β) ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

3. Μέ τούς ἀκεραίους ἀριθμούς μποροῦμε νά κάμνουμε πάντα δύο πράξεις: τήν πρόσθεση καί τόν πολλαπλασιασμό· θά ἦταν καλλίτερο νά ποῦμε, πώς μέ τούς ἀκεραίους ἀριθμούς λύνουμε πάντα τά προβλήματα, πού ἡ λύση τους ἐξαρτᾶται ἀπό τίς πράξεις: πρόσθεση καί πολλαπλασιασμό. Ἔτσι τό πρόβλημα: νά μοιράσωμε 2 δραχμές σέ 5 ἀνθρώπους, δέ μποροῦμε νά τό λύσουμε μέ τή νωση τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Θά πρέπει νά διαιρέσουμε τό 2 μέ τό 5 καί τή διαίρεση αὐτή τή λέμε ἀδύνατη. Ἐντούτοις εἶναι εὔκολο στόν καθένα μας νά πῆ, πώς τό μερίδιο τοῦ καθενός εἶναι 40 λεπτά. Πῶς βρέθηκε αὐτό τό ἀποτέλεσμα; Ὁ καθένας μας πάλι εἶναι σέ θέση νά τό πῆ: πήραμε τήν κάθε δραχμή καί τή χωρίσαμε σέ πέντε ἴσα μέρη, καί, ἐπειδή τό ἕνα ἀπ' αὐτά τά ἴσα μέρη ἦταν 20 λεπτά, εἴπαμε, πώς τό μερίδιο τοῦ καθενός εἶναι 40 λεπτά. Δηλ. εἴπαμε, πώς τό μερίδιο τοῦ καθενός εἶναι: τά δύο ἀπό τά πέντε ἴσα μέρη τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Νά λοιπόν ἡ σκέψη πού ὁδήγησε στήν ἐκτέλεση αὐτῆς τῆς πράξεως, πού τή θεωράσαμε ἀδύνατη, καί γιά νά δώσαμε μιά εἰκόνα, πού νά μᾶς θυμίζη τήν παραπάνω πνευματική μας ἐνέργεια, σημειώνουμε: $\frac{2}{5}$ μέ τή γραμμή —, ἐννοώντας τή μονάδα. Αὐτή ἡ εἰκόνα εἶναι τό σημάδεμα μιᾶς καινούργιας ἔννοιας, τῆς ἔννοιας τοῦ κλάσματος. Μᾶς λέει πώς πήραμε τά 2 ἀπό τά πέντε ἴσα μέρη τῆς μονάδος, πού τό καθένα τους θά ὀνομαστεῖ τώρα ἕνα πέμπτο καί θά σημαδευτεῖ: $\frac{1}{5}$.

Ὅταν λοιπόν θά σημειώνουμε ἐφεξῆς « $\frac{7}{4}$ » θά ἐννοοῦμε ἑπτά φορές τό $\frac{1}{4}$ δηλ. ἑπτά φορές τό ἕνα ἀπό τά τέσσερα ἴσα κομμάτια τῆς ἀκεραίας μονάδος. Ἔτσι ἡ ἔννοια ἑπτά τέταρτα δέν εἶναι τίποτε ἄλλο παρά « ἡ ἀφηρημένη ἐκπροσώπηση ἑνός πλήθους μονάδων », πού αὐτή τή φορά εἶναι κομμάτια τῆς ἀκεραίας μονάδος·

λέμε δέ, ἀφηρημένη ἐκπροσώπηση, γιατί καί ἐδῶ ἡ ἐκπροσώπηση εἶναι γενική, ἀνεξάρτητη ἀπό τήν ποιότητα. Μποροῦμε νά ποῦμε τά $\frac{2}{5}$ τῆς δραχμῆς, ἀλλά καί τά $\frac{2}{5}$ ἑνός θησαυροφυλακίου ἤ τά $\frac{2}{5}$ ἑνός μήλου.

Ὥστε ὁ ὁρισμός στόν ἀριθμό γιά νά συμπεριλάβει ἀκέραιο καί κλασματικό εἶναι αὐτός, πού εἴπαμε παραπάνω : *Ἀριθμός ὀνομάζεται ἡ ἀφηρημένη ἐκπροσώπηση ἑνός ὁρισμένου πλήθους μονάδων.* Οἱ μονάδες αὐτές φυσικά εἶναι ἄπειρες σέ πλῆθος.

γ) ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

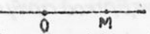
4. Εἴδαμε στό (ἐδ.3) πώς μέ τό σύστημα τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν ὁ ἄνθρωπος ἀπάλειψε τή μιά ἀπό τίς ἀδυναμίες τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, καί ἔτσι μένει ἀκόμη τό πρόβλημα τῆς ἀφαιρέσεως γιά τήν περίπτωση, πού ὁ μειωτέος εἶναι μικρότερος τοῦ ἀφαιρετέου. Ἐάν ἕνας ἄνθρωπος θά ἐκέρδιζε 5 δραχμές καί θά εἶχε ζημιά 8 δραχμῶν θά ἔκαμνε τήν ἀφαίρεση 5-8, ἐνῶ, ἐάν θά ἐκέρδιζε 8 δραχμές καί θά εἶχε ζημία 5 δραχμές θά ἔκαμνε τήν ἀφαίρεση 8-5. Εἶναι φανερό τώρα πώς καί στίς δύο περιπτώσεις τό ἐξαγόμενο ποσοτικά εἶναι 3 δρχ. χωρίς ὅμως τοῦτο νά χαρακτηρίζει τή μιά ἀπό τίς δυό πράξεις.* Ἔτσι ἡ ἀφηρημένη τιμή τοῦ ἀποτελέσματος, πού εἶναι 3, δέν εἶναι ἀρκετή γιά νά καθορίσει τό ἀποτέλεσμα μᾶς χρειάζεται ὁ χαρακτηρισμός του σάν ζημίας ἤ σάν κέρδους. Ἡ ἀφηρημένη λοιπόν ἔκφραση 3 κλίνει μέσα της δύο μορφές συγκεκριμένου ἀριθμοῦ ἤ καλλίτερα εἶναι ἡ ἑνότητα δύο μορφῶν συγκεκριμένου ἀριθμοῦ, στίς ὁποῖες καί διασπᾶται μόλις θελήσουμε νά τῆς δώσουμε περιεχόμενο.

Εἶναι εὔκολο νά καταλάβουμε πώς ὁ ἀφηρημένος ἀριθμός 3 μπορεῖ νά εἶναι ἡ ἑνότητα δύο ἄλλων μορφῶν συγκεκριμένου ἀριθμοῦ : τοῦ 3 χρέους καί τοῦ 3 περιουσίας ἤ τοῦ 3 θερμοκρασίας καί τοῦ 3 ψύξεως κ.ο.κ.

Στή διαπίστωση γιά τήν ὕπαρξη δύο μορφῶν συγκεκριμένου ἀριθμοῦ μᾶς ὁδηγοῦν

---

*Ἡ πράξη βέβαια 5-8 δέν ἔχει νόημα ἀριθμητικό δηλ δέν ἔχει νόημα στά καθαρά μαθηματικά, μά εἶναι γεγονός πώς τό πρόβλημα, πού ὁδηγεῖ σ' αὐτή τήν πράξη, ὑπάρχει καί πώς τά πράγματα μᾶς ὑπαγορεύουν τό ἐξαγόμενα, πού ποσοτικά εἶναι 3.

λες παρατηρήσεις : Ἡ θέση ἑνός σημείου Μ πάνω σέ μιά εὐθεῖα δέν εἶναι
ένη ἀπό τήν ἀπόσταση ΟΜ, πού τό διαχωρίζει ἀπό μιά ἀφετηρία (ἀρχή) Ο,


πού ἔχει ληφθεῖ πάνω στήν εὐθεῖα αὐτή· χρειάζεται ἀκόμη
ξουμε, ἐάν αὐτό τό σημεῖο εἶναι δεξιά ἤ ἀριστερά αὐτῆς τῆς ἀρχῆς. Ὁ ἀριθ-
ῆς ἀριθμητικῆς θά μᾶς κάμει νά γνωρίζουμε τήν ἀπόσταση ΟΜ, μά αὐτό
οκεῖ γιά νά ὁρίσει τό σημεῖο Μ. Γιά νά ὁρίσουμε ἐπίσης τήν ἡμερομηνία ἑ-
γεγονότος δέν ἀρκεῖ νά δώσουμε τόν ἀριθμό τῶν ἐτῶν, πού τό διαχωρίζουν
ή Χριστιανική ἐποχή, πρέπει ἀκόμη νά δείξουμε, ἄν αὐτό τό γεγονός εἶναι
νέστερο ἤ μεταγενέστερο αὐτῆς τῆς ἐποχῆς.

Ἔτσι ὁ μαθηματικός ἀναγκάζεται νά καθορίσει τίς δύο μορφές συγκε-
ένου ἀριθμοῦ μέ τρόπο γενικό δηλ ἀναγκάζεται γιά τίς συγκεκριμένες
ές νά ἐκφρασθεῖ ἀφηρημένα. Ἀπομονώντας τήν αἰτία, πού ἀπεκάλυψε
παρξη τῶν δύο μορφῶν συγκεκριμένου ἀριθμοῦ, περιορίζεται στό γεγονός
ὑπάρξεώς των καί ξεχωρίζει τίς δύο μορφές συγκεκριμένου ἀριθμοῦ, πού
τήν ἴδια ἀφηρημένη τιμή, μέ τά σημάδια + καί − ἀντιστοίχως. Ἔτσι
με πώς ἡ ἀφηρημένη ἔκφραση 3 εἶναι ἡ ἑνότητα τῶν συγκεκριμένων
μῶν +3 καί −3. Ἡ πρώτη ἔκφραση μέ τό + ὀνομάζεται θετικός ἀριθ-
καί ἡ δεύτερη μέ τό − ὀνομάζεται ἀρνητικός ἀριθμός*. Στήν καθαρή
ν μαθηματική γλῶσσα μποροῦμε νά λέμε : θετικοί ἀριθμοί
άζονται οἱ ἀριθμοί τῆς ἀριθμητικῆς, πού εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, καί
εἶναι προσημειωμένοι μέ τό σημεῖο + (σύν).

Ἀρνητικοί ἀριθμοί ὀνομάζονται οἱ ἀριθμοί τῆς ἀριθμητικῆς,
εἶναι διάφοροι τοῦ μηδενός, καί πού εἶναι προσημειωμένοι μέ τό σημεῖο
ν). Ἄν σ' αὐτούς τούς ἀριθμούς προσθέσουμε καί τόν ἀριθμό μηδέν, πού δέν εἶναι

---

* Θά μπορούσαμε νά ἐπινοήσουμε ἕναν ἄλλο συμβολισμό γιά τή διάκριση ἑνός ἀριθμοῦ
ριθμητικῆς σέ θετικό καί ἀρνητικό. Ὁ συμβολισμός ὅμως, πού δεχθήκαμε, παρουσιάζει
α πλεονεκτήματα γιά τό λογισμό, ὅπως θά φανεῖ στά ἑπόμενα. Ἔτσι διαπιστώνουμε
συμβολισμός αὐτός εἶναι σκόπιμος μά ὄχι ἀναντικατάστατος.

οὔτε θετικός οὔτε ἀρνητικός, ἔχουμε τό σύνολο τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν. Αὐτοί
ἀριθμοί λέγονται ἀκέραιοι ἤ κλασματικοί ἐφόσον οἱ ἀριθμοί τῆς ἀριθμητικῆς ἀπ
τούς ὁποίους προέρχονται εἶναι ἀκέραιοι ἤ κλασματικοί.

Ὀνομάζουμε ἀφηρημένη (ἀπόλυτο) τιμή ἤ μέτρο ἑνός ἀλγεβρικοῦ ἀριθμ
τόν ἀριθμό τῆς ἀριθμητικῆς, πού τόν ὁρίζει. Ἐξ ὁρισμοῦ ἡ ἀφηρημένη τιμή τοῦ
μηδενός εἶναι μηδέν.

4α. Σημείωση. Ἐάν α εἶναι ἕνας ἀλγεβρικός ἀριθμός σημειώνουμε τήν ἀπόλυτό τ
τιμή γράφοντας τόν ἀριθμό ἀνάμεσα ἀπό δυό κατακόρυφες χαραγές. Ἔτσι σημειώνουμ
|α| καί διαβάζουμε ἀφηρημένη (ἀπόλυτος) τιμή ἤ μέτρο τοῦ α

5. Ὁρισμοί. Λέγουμε πώς δυό ἀλγεβρικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, ὅταν ἔχουν τήν ἴδ
ἀπόλυτο τιμή καί τό ἴδιο σημεῖο.

Λέγουμε πώς δυό ἀλγεβρικοί ἀριθμοί εἶναι ἀντίθετοι, ὅταν ἔχουν τήν ἴδια
ἀπόλυτο τιμή καί σημεῖα διαφορετικά.

6. Ταυτότητα τῶν θετικῶν ἀριθμῶν καί τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

Εἴδαμε στά παραπάνω πώς θεωροῦμε τρία εἴδη ἀριθμῶν. Ἀπό τή μιά με
ριά τούς ἀριθμούς τῆς ἀριθμητικῆς καί ἀπό τήν ἄλλη τούς θετικούς καί του
ἀρνητικούς ἀριθμούς. Εἶναι εὔκολο νά ἀντιληφθοῦμε πώς εἶναι ἀνώφελο νά διατ
ρήσουμε αὐτή τή διάκριση γιατί εἶναι ἀρκετό γιά τήν ἀριθμητική ἔκφραση τ
διαφόρων ποσῶν καί, καθώς θά δοῦμε, γιά τή σπουδή τῶν συνδυασμῶν τους, πού
ἐκφράζονται μέ τίς γνωστές ἁπλές πράξεις, νά εἰσαγάγουμε παράπλευρα στο
ἀριθμό τῆς ἀριθμητικῆς μόνο τόν ἀρνητικό ἀριθμό ταυτίζοντας τό θετικό ἀ
ριθμό μέ τόν ἀριθμό τῆς ἀριθμητικῆς.

Καί πραγματικά, ἡ ἐπινόηση τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἀριθμῶν ἦταν
ἀποτέλεσμα τῆς διαπιστώσεως πώς τήν ἴδια ἀφηρημένη τιμή μποροῦν νά ἔχου
δυό ποσά, πού ἀπό τή φύση τους βρίσκονται σέ ἀντίθεση : Τόσο ὕψος, τόσο
θος. Τόσο μπροστά, τόσο πίσω. Τόσο πάνω, τόσο κάτω. Μιά δύναμη ἐξουδετερώ
κατά ἕνα ποσοστό ἤ καθολοκληρίαν μιάν ἄλλη. Γενικά, μέ βάση μιάν ἀφετη
ρία μποροῦμε σ᾽ ὁποιαδήποτε περίπτωση καί για ὁποιαδήποτε κατηγορία ποσ

νά ἔχουμε δύο ποσοτικές ἐκφράσεις, πού ἡ μιά νά ἀρνιέται τήν ἄλλη. Κι' αὐτό γίνεται στήν πραγματικότητα : στή φύση καί τήν κοινωνική ζωή.

Ἔτσι προκύπτει πώς, ἐάν συμφωνήσουμε νά παριστάνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε ποσό ἀπό ἕνα ἀριθμό τῆς ἀριθμητικῆς, μποροῦμε νά παριστάνουμε τό ἀντίθετό του ποσό ἀπό ἕνα ἀριθμό ἀρνητικό. Τό γεγονός πώς ἡ πράξη $3^{\text{κέρδος}} + 3^{\text{ζημία}} = 0$ τῶν συγκεκριμένων ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν πράξη 3-3=0 τῶν ἀφηρημένων τους τιμῶν, μᾶς βεβαιώνει πώς ὁ ἕνας ἀπό ταῖς συγκεκριμένοος ἀριθμούς ἀρνιέται τόν ἄλλον καί ὅτι δέν θά ὑπάρξει καμμιά δυνατή σύγχυση, ἐάν ὁ ἀριθμός τῆς ἀριθμητικῆς ἀντικαταστήσει τό θετικό ἀριθμό, πού τοῦ εἶναι ἡ ἀπόλυτός του τιμή.

Μέ βάση λοιπόν τήν παραπάνω διαπίστωση θά ἀκολουθήσουμε τήν ἑξῆς ἀρχή: θά δώσουμε τέτοιους ὁρισμούς γιά τίς πράξεις μέ ἀλγεβρικούς ἀριθμούς καί τέτοιους κανόνες θά ἐφαρμόσουμε γιά τήν ἐκτέλεσή τους, ὥστε, ὅταν αὐτοί οἱ ὁρισμοί καί αὐτοί οἱ κανόνες ἀφοροῦν τούς θετικούς ἀριθμούς νά βρισκόμαστε σέ συμφωνία μέ τήν ἀριθμητική.

δ) ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

7. Πρόσθεση. Ἄθροισμα δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καί β, ἄν αὐτοί εἶναι ὁμόσημοι, λέγεται ὁ ἀλγεβρικός ἀριθμός, πού ἔχει ἀφηρημένη τιμή τό ἄθροισμα τῶν ἀφηρημένων τιμῶν τους καί σημεῖο τό κοινό τους σημεῖο· ἄν εἶναι ἑτερόσημοι, λέγεται ὁ ἀλγεβρικός ἀριθμός, πού ἔχει ἀφηρημένη τιμή τή διαφορά τῶν ἀφηρημένων τιμῶν τους καί σημεῖο τό σημεῖο τοῦ ἀριθμοῦ ἐκείνου, πού ἔχει τή μεγαλύτερη ἀφηρημένη τιμή.

Ἐάν οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι δύο ἀριθμοί ἀντίθετοι τό ἄθροισμά τους ἰσοῦται μέ τό μηδέν.

Ἐάν ὁ ἕνας ἀπό τούς δύο ἀριθμούς εἶναι τό μηδέν τό ἄθροισμά τους εἶναι ἴσο μέ τόν ἄλλο.

8. Ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α, β, γ, ...λ, ποὺ εἶναι τοποθετημένοι κατὰ μία ὁρισμένη τάξη, ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός, ποὺ προκύπτει, ὅταν προσθέσουμε τοὺς δύο πρώτους καὶ στὸ ἄθροισμά τους τὸν τρίτο καὶ στὸ ἄθροισμα, ποὺ ἔτσι θὰ προκύψει, τὸν τέταρτο κ.ο.κ. μέχρις, ποὺ νὰ χρησιμοποιήσουμε ὅλους τοὺς θεωρουμένους ἀριθμούς.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΑΛΓΕΒΡΙΚΟΥ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ

9. Γιὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἰσχύουν οἱ ἰδιότητες, ποὺ ἰσχύουν γιὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς.

α) Τὸ ἄθροισμα πολλῶν προσθετέων δὲν ἀλλάζει τιμή, ὅταν ἀλλαχθεῖ ἡ τάξη τῶν ὅρων του.

Τὸ ἄθροισμα $\alpha+\acute{\beta}+\gamma+\acute{\delta}+\acute{\varepsilon}$, ὅπου τὰ ἄτονα γράμματα παριστάνουν θετικοὺς καὶ τὰ τονισμένα ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, μπορεῖ νὰ ἑρμηνευθεῖ ὡς ἑξῆς: Ἕνας ἔμπορος εἶχε μία εἴσπραξη α δραχμές, μία καταβολὴ β δραχμές, μία εἴσπραξη γ δραχμές, μία καταβολὴ δ δραχμὲς καὶ πάλι μία καταβολὴ ε δραχμές. Ἀπ' αὐτὴ τὴ σειρὰ τῶν γεγονότων θὰ προκύψει ἐνεργητικὸ ἢ παθητικὸ γιὰ τὸ ταμεῖο, ἂν αἱ εἰσπράξεις ἦταν ἀνώτερες ἢ κατώτερες ἀπὸ τὶς καταβολές.

Ἀπ' αὐτὸ τὸ συλλογισμὸ γίνεται φανερὸ ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα δὲν ἐπηρεάζεται ἀπὸ τὴν τάξη τῆς διαδοχῆς τῶν γεγονότων, μὰ μόνο ἀπὸ τὴ φύση τοῦ καθενὸς καὶ ἀπὸ τὸ μέγεθος* τῶν ἀριθμῶν, ποὺ παίρνουν μέρος.

β) Σὲ κάθε ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα μποροῦμε ν' ἀντικαταστήσουμε ὁσουσδήποτε προσθετέους μὲ τὸ ἄθροισμά τους ἢ τὸν ἕναν ἀπ' αὐτοὺς τοὺς προσθετέους μ' ἄλλους, ποὺ τὸν ἔχουν σὰν ἄθροισμά τους.

Ἔστω τὸ ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta$. θὰ δείξουμε ὅτι αὐτὸ ἰσοῦται μὲ $\alpha+\beta+(\gamma+\delta)+\varepsilon+\zeta$.

Κατὰ τὴν προηγούμενη ἰδιότητα, ἔχουμε: $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta=\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha+\beta+\zeta$.

---

* Δηλ. ἀπὸ τὴν ἀπόλυτό τους τιμή.

Καί κατά τόν ὁρισμό (έδ.8), $\gamma+\delta+\varepsilon+\alpha+\beta+\zeta=(\gamma+\delta)+\varepsilon+\alpha+\beta+\zeta=\alpha+\beta+(\gamma+\delta)+$
. Τώρα, ἄν ἐφαρμόσουμε τήν ἴδια σκέψη καί γιά τό ἄθροισμα $\alpha+\beta+(\gamma+\delta)+\varepsilon+\zeta$,
σκουμε πώς αὐτό ἤ τό $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta$ εἶναι ἴσο μέ τό $\alpha+\beta+(\gamma+\delta+\varepsilon)+\zeta$.

Ἡ ἀλήθεια τοῦ ἀντιστρόφου εἶναι φανερή.

Συνέπεια τῆς ἰδιότητος αὐτῆς τοῦ ἀθροίσματος εἶναι καί ἡ ἑξῆς:

γ) Προσθέτουμε ἕναν ἀριθμό σέ ἄθροισμα, ἄν τόν προσθέ-
με σέ ἕναν ἀπό τούς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος.

Δηλ $(\alpha+\beta)+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta=\alpha+(\beta+\gamma)$.

Πραγματικά, $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\gamma)+\beta$ ἤ $\alpha+(\beta+\gamma)$.

10. <u>Σημείωση</u>. Οἱ προσθετέοι, τούς ὁποίους ἀντικαθιστοῦμε μέ τό ἄθροισμά
, δέν εἶναι ἀνάγκη νά εἶναι διαδοχικοί, ἀφοῦ ἀδιαφοροῦμε γιά τήν τάξη τῶν
θετέων.

11. <u>Συμπερασμα</u>. Γιά νά ὑπολογίσουμε ἕνα ἀλγεβρικό ἄθροισμα, μποροῦμε νά
καταστήσουμε ὅλους τούς θετικούς μέ τό ἄθροισμά τους, ὅλους τούς ἀρνη-
ς μέ τό ἄθροισμά τους καί νά προσθέσουμε μέ ἀλγεβρικό τρόπο τά ἀποτε-
ιατα.

12. <u>Θεώρημα</u> 1ο. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος δύο προ-
τέων εἶναι τό πολύ ἴση μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀπο-
των τιμῶν τῶν προσθετέων καί τό λιγώτερο
μέ τή διαφορά τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθε-
ων του. Δηλ. θά δείξουμε ὅτι:

$$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta| \qquad (1)$$

Ἐάν οἱ ἀλγεβρικοί ἀριθμοί α, β εἶναι ὁμόσημοι, κατά τόν ὁρισμό τοῦ ἀθροί-
ος (έδ.7) ἔχουμε:

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta| \geqq |\alpha|-|\beta| \qquad (2)$$

ἀκόμη εἶναι ὁλοφάνερο πώς τό ἄθροισμα δυό θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι με-
τερο ἀπό τή διαφορά τους.

Ἐπίσης, ἐάν οἱ α, β εἶναι ἑτερόσημοι ἔχουμε (έδ.7):

$$|\alpha+\beta|=|\alpha|-|\beta|<|\alpha|+|\beta| \qquad (3)$$

Είναι εύκολο τώρα νά συμπεράνει κανείς, μέ σύγκριση τῶν σχέσεων (2),(3) πώς ἀνεξάρτητα ἀπό τό σημεῖο τῶν ἀριθμῶν α, β ἰσχύουν οἱ σχέσεις (1).

12α. <u>Θεώρημα.</u> Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀθροίσματος ὁσωδήποτε προσθετέων εἶναι τό πολύ ἴση μέ τό ἄθρο σμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν προσθετέων.

Τήν πρόταση αὐτή γιά τήν περίπτωση τῶν δύο προσθετέων τή δείξαμ μέ τό προηγούμενο θεώρημα. Γιά νά τή δείξουμε τώρα μέ τήν παραπάνω γε νική της διατύπωση μεταχειριζόμαστε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἤ ἐντελοῦς ἐπαγωγῆς. Ἡ μέθοδος αὐτή συνίσταται στό ἑξῆς: Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ πρόταση μας ἰσχύει γιά ἕνα ὁρισμένο, μά τυχόντα, ἀριθμό ν προσθετέων* καί ἀποδεικνύουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά ἕνα ἐπί πλέον. Επ

Ὑπόθεση: $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_\nu| \leqq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots\cdots+|\alpha_\nu| \quad (1)$

Συμπέρασμα: $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}| \leqq |\alpha_1|+|\alpha_2|+\cdots\cdots+|\alpha_\nu|+|\alpha_{\nu+1}| \quad (2)$

Πραγματικά, $|\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_\nu+\alpha_{\nu+1}| = |(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_\nu)+\alpha_{\nu+1}|$

Καί θεώρημα (ἐδ.12)

$$|(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\alpha_\nu)+\alpha_{\nu+1}| \leqq |\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_\nu|+|\alpha_{\nu+1}|$$

Καί ἐάν γιά τόν πρῶτο προσθετέο τοῦ δευτέρου μέλους τῆς τελευταίας σχέσεως λάβουμε ὑπόψη τήν σχέση (1), ἔχουμε τή σχέση (2).**

13. <u>Ἀφαίρεση.</u> Διαφορά δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καί β ὀνομάζεται ἕνας τρίτος ἀλγεβρικός ἀριθμός γ, πού, ἐάν προστεθεῖ στόν β, μᾶς δίδει γιά ἄθροισμα τόν α.

Τό πρόβλημα εἶναι πάντοτε δυνατό. Ὁ $\gamma = \alpha+\beta'$, ὅπου β' εἶναι ὁ ἀντίθετο τοῦ β, δηλ $\beta+\beta'=0$. Πραγματικά, $\beta+\alpha+\beta' = \alpha+\beta+\beta' = \alpha+0 = \alpha$.

---

* Ἡ ὑπόθεση αὐτή ὀνομάζεται καί ὑπόθεση τῆς τελείας ἐπαγωγῆς.

** Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ὅτι ἀφοῦ ἰσχύει (ἐδ.12) ἡ πρόταση μας γιά $\nu=2$, ἰσχύει, μετ τήν ἐπαγωγή, καί γιά $\nu+1$ προσθετέους δηλ ἰσχύει διά τρεῖς προσθετέους· καί ἀφοῦ τώρα ἰσχύει γιά $\nu=3$ ἰσχύει καί γιά $\nu+1$ προσθετέους δηλ καί γιά $\nu=4$ κ.ο.κ. Μποροῦμε ἀκόμη νά δώσουμε τήν ἑξῆς ἑρμηνεία στή μέθοδο. Ἐάν ἕνας ἀμφισβητήσει τήν ἰσχύ τῆς ἰδιότητος γιά 50 λ.χ. προσθετέους σημαίνει ὅτι παραδέχεται τήν ἰσχύ της γιά 49. Μά ἐάν ἰσχύε γιά $\nu=49$, σύμφωνα μέ τήν ἐπαγωγή, ἰσχύει καί γιά $\nu+1$ προσθετέους δηλ ἰσχύει γιά $\nu=50$.

14. Πολλαπλασιασμός. Γινομενο δυο άλγεβρικών άριθμών α και β, που ανένας άπ' αύτους δεν είναι μηδενικό, ονομάζουμε ένα τρίτο άλγεβρικό ριθμο γ, που να έχει άφηρημένη τιμή το γινομενο τών άφηρημένων τιμών τών ριθμών α και β και σημείο το +, άν οι δοσμένοι είναι ομόσημοι και το −, άν είναι έ- εροσημοι.

Εάν ο ένας άπο τους δυο παράγοντες τού γινομένου είναι μηδέν, θεωρούμε το γινομενο ίσο με το μηδέν.

14α. Γινομενο πολλών παραγοντων. Το γινομενο πολλών άλγεβρικών παραγοντων το οριζουμε όπως και το γινομενο πολλών παραγοντων στην Άριθμητική αι καταλαβαίνουμε πως το σημείο τού γινομένου θα είναι το + άν το πλήθος των ρνητικων παραγοντων είναι άρτιο ή μηδέν και το −, άν το πλήθος τών άρνητι- ών παραγόντων είναι περιττό.

14β. Ίδιοτητες του γινομένου. α) Το γινομενο όσωνδηποτε παρα- οντων δεν άλλάζει, όταν άλλάξει η τάξη τών παρα- οντων του.

Η άλήθεια της προτάσεως αύτής γίνεται φανερή άπο δύο λόγους:

1ο. Η άφηρημένη τιμή* τού γινομένου δεν άλλάζει έπειτα άπο ο θεώρημα της Άριθμητικής «της άδιαφορίας για τη τάξη τών παραγόντων».

2ο. Το σημείο τού γινομένου δεν άλλάζει, έπειδή αύτο έξαρτάται άπο ν άριθμο τών άρνητικών παραγοντων και όχι άπο τη θέση τους.

Και είναι γνωστό πώς καθε άριθμος χαρακτηρίζεται άπο την άφηρημένη του ιμη και άπο το σημείο του.

---

* Είναι εύκολο να δείξει κανείς το θεώρημα: η άφηρημένη τιμή ένος γινομένου γεβρικών άριθμών είναι ίση με το γινομενο τών άφηρημένων μών τών παραγοντων του. Για γινομενο δυο παραγόντων μάς το λέει ο ίδιος ο σμος του γινομένου, και για γινομενο πολλών παραγόντων μεταχειριζόμεθα τη μέθοδο της ρους έπαγωγής.

Υπόθεση: $|a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_\nu| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots\cdots |a_\nu|$

Συμπέρασμα: $|a_1 \cdot a_2 \cdots a_\nu \cdot a_{\nu+1}| = |a_1| \cdot |a_2| \cdots\cdots |a_\nu| \cdot |a_{\nu+1}|$

ιγματικά, $|a_1 a_2 \cdots a_\nu a_{\nu+1}| = |(a_1 a_2 \cdots a_\nu) a_{\nu+1}| = |a_1 a_2 \cdots a_\nu| \cdot |a_{\nu+1}| = |a_1||a_2| \cdots |a_\nu||a_{\nu+1}|$

Συνέπειαι τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι οἱ ἀκόλουθες δύο προτάσεις,
ὁποῖες ἐξ ἄλλου ἀποδεικνύουμε ὅπως καὶ στὴν ἀριθμητική.

1η. Πρόταση. Σὲ ἕνα γινόμενο παραγόντων μποροῦμε νὰ ἀντι
ταστήσουμε δυὸ ἢ περισσότερους παράγοντες μ' ἕναν μ
παράγοντα, τὸ γινόμενό τους.

2α. Πρόταση. Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα γινόμεν
ραγόντων ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσου
ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ ἕναν ἀπὸ τοὺς παράγοντες τοῦ γινομένου.

β) Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα ἄθροισμα ἀλγεβρικῶ
ριθμῶν ἐπὶ ἕναν ἀριθμό, ἀρκεῖ νὰ πολλαπλασιάσουμε διαδ
κὰ ὅλους τοὺς ὅρους τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὸν ἀριθμὸ καὶ να
σθέσουμε ἀλγεβρικὰ τὰ ἀποτελέσματα.

1η. Περίπτωση. Τὸ ἄθροισμα ἔχει ὅλους τοὺς ὅρους θετικ
Ἡ ἀπόδειξη στὴν περίπτωση αὐτὴ ἔγινε στὴν Ἀριθμητική.

2α. Περίπτωση. Οἱ ὅροι τοῦ ἀθροίσματος ἔχουν ὁποιαδήπ
σημεῖα, μὰ ὁ πολλαπλασιαστὴς εἶναι θετικός.

Ἔχουμε λόγου χάρη τὸ γινόμενο $(α+β+γ+δ)\cdot μ$. Ἐὰν οἱ β καὶ δ εἶναι ἀρνητικο
οἱ ἀφηρημένες τιμές τους ὀνομαστοῦν $β', δ'$ μποροῦμε νὰ ποῦμε πὼς ἔχουμε νὰ
λέσουμε τὸ γινόμενο $(α-β'+γ-δ')\cdot μ$, ποὺ κατὰ τὴν ἀριθμητική, εἶναι ἴσο μὲ $αμ-βμ$

Στὸ ἴδιο ἀποτέλεσμα θὰ φθάναμε, ἂν ἐφαρμόζαμε τὸν κανόνα τῶν σημείω
πολλαπλασιασμοῦ στὸ γινόμενο, ποὺ μᾶς δόθηκε.

3η. Περίπτωση. Οἱ ὅροι ἔχουν ὁποιαδήποτε σημεῖο κ
ὁ μ εἶναι ἀρνητικός.

Τὸ γινόμενο $(α+β+γ+δ)\cdot μ = (α+β+γ+δ)\cdot(-μ')$ ἂν μ' εἶναι ἡ ἀφηρημένη
τοῦ μ. Καὶ τὸ τελευταῖο γινόμενο εἶναι ἴσο μὲ $-(αμ'+βμ'+γμ'+δμ')=-αμ'-βμ$
δηλ. τὸ ἐξαγόμενο, ποὺ θὰ βρίσκαμε, ἐφαρμόζοντες τὸν κανόνα τῶν σημείων στὸ γι
$(α+β+γ+δ)\cdot μ$, ὅπου τὸ μ εἶναι ἀρνητικός.

γ) Γιὰ νὰ πολλαπλασιάσουμε ἕνα ἀλγεβρικὸ ἄθροι ἐπί ἕνα ἄλλο ἀλγεβρικό ἄθροισμα, πολλαπλασιάζουμε κάθε ὅρο τοῦ πρώτου μέ καθένα ὅρο τοῦ δευτέρου, καί ἀθροίζουμε τά μερικά γινόμενα.

Πραγματικά, κατά τό προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\cdot(\varepsilon+\zeta+\eta)=\alpha\cdot(\varepsilon+\zeta+\eta)+\beta\cdot(\varepsilon+\zeta+\eta)+\gamma\cdot(\varepsilon+\zeta+\eta)+\delta\cdot(\varepsilon+\zeta+\eta)=$$

$$\alpha\varepsilon+\alpha\zeta+\alpha\eta+\beta\varepsilon+\beta\zeta+\beta\eta+\gamma\varepsilon+\gamma\zeta+\gamma\eta+\delta\varepsilon+\delta\zeta+\delta\eta.$$

Φυσικά γιά κάθε μερικό πολλαπλασιασμό ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα τῶν σημείων.

15. Διαίρεση. Πηλίκο δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν α καί β λέγεται ἕνας τρίτος ἀριθμός γ, ὁ ὁποῖος, ἄν πολλαπλασιασθεῖ μέ τόν β θά μᾶς δώσει γιά γινόμενο τόν α.

Ζητᾶμε λοιπόν νά ἔχουμε: $\alpha=\gamma\cdot\beta$. Καί ἐπειδή $|\alpha|=|\gamma\cdot\beta|=|\gamma|\cdot|\beta|$ ἤ $|\gamma|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$, συμπεραίνουμε πώς τό πηλίκο θά ἔχει ἀφηρημένη τιμή τό πηλίκο τῶν ἀφηρημένων τιμῶν, διαιρετέου καί διαιρέτη· καί σημεῖο +, ἄν αὐτοί εἶναι ὁμόσημοι καί σημεῖο −, ἄν εἶναι ἑτερόσημοι.

16. Παρατήρηση. Στόν ὁρισμό αὐτό τοῦ πηλίκου δέν περιλαμβάνεται ἡ περίπτωση, πού $\beta=0$ καί $\alpha\neq0$, γιατί κανείς ἀριθμός δέν ὑπάρχει, πού, ἄν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό 0 νά δίδει α.

Ἄν δέ ὑποθέσουμε πώς οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι μηδενικά, παρατηροῦμε ὅτι κάθε ἀριθμός, ὅταν πολλαπλασιασθεῖ μέ τό β δηλ. μέ τό 0, θά ἔδιδε τόν α, δηλ. τό 0.

Στήν περίπτωση αὐτή λέμε πώς τό πηλίκο εἶναι ἀόριστο. Ὥστε, ἐάν γράφουμε $\frac{\alpha}{\beta}$, θεωροῦμε τό $\beta\neq0$ γιατί ἀλλοιῶς τό πηλίκο δέν ἔχει νόημα.

17. Ἀλγεβρικά κλάσματα. Ὅταν οἱ ὅροι ἑνός κλάσματος εἶναι ἀλγεβρικοί ἀριθμοί, τό κλάσμα ὀνομάζεται ἀλγεβρικό καί ἐκφράζει τό πηλίκο τῆς διαιρέσεώς τους.

Τά ἀλγεβρικά κλάσματα ἔχουν τίς ἴδιες ἰδιότητες μέ τά ἀριθμητικά κλάσματα καί οἱ πράξεις μ' αὐτά γίνονται κατά τόν ἴδιο τρόπο. Καί ἄς δείξουμε ἐδῶ τήν ἰσχύ τῆς βασικῆς ἰδιότητάς τους.

18. Ἡ ἀξία ἑνός ἀλγεβρικοῦ κλάσματος δέ βλάπτεται, ἄν πολλαπλασιάσουμε ἤ διαιρέσουμε καί τούς

δυὸ ὅρους του μὲ τὸν ἴδιο ἀριθμό.

Δηλ. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}=\frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}}$

Διότι, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$ καὶ $\left|\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}\right|=\frac{|\alpha\gamma|}{|\beta\gamma|}=\frac{|\alpha|\cdot|\gamma|}{|\beta|\cdot|\gamma|}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

Ἐπίσης $\left|\frac{\frac{\alpha}{\gamma}}{\frac{\beta}{\gamma}}\right|=\frac{\left|\frac{\alpha}{\gamma}\right|}{\left|\frac{\beta}{\gamma}\right|}=\frac{\frac{|\alpha|}{|\gamma|}}{\frac{|\beta|}{|\gamma|}}=\frac{|\alpha|}{|\beta|}$

δηλ καὶ τὰ τρία κλάσματα στὶς ἰσότητες (1) ἔχουν τὴν ἴδια ἀφηρημένη τιμὴ καὶ τὸ ἴδι σημεῖο.

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

19. Τὸ γινόμενο, ποὺ οἱ παράγοντές του εἶναι ἴσοι μ' ἕναν ἀλγεβρικὸ ἀριθμὸ α, ὀνομάζεται δύναμη τοῦ α.

Ἡ δύναμη παίρνει τὴν ὀνομασία της ἀπὸ τὸ πλῆθος τῶν παραγόντων.

Ἔτσι, τὸ γινόμενο $\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha$ ὀνομάζεται τρίτη δύναμη ἢ κύβος τοῦ α καὶ τὸ $\beta\cdot\beta\cdot\beta\cdot\beta$ ὀνομάζεται τετάρτη δύναμη τοῦ β.

20. <u>Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων</u>. α) Τὸ γινόμενο δυνάμεων τοῦ ἴδιου ἀριθμοῦ εἶναι ἴσο μὲ δύναμη τοῦ ἴδιου τοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ ἔχει σὰν ἐκθέτη τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Τὴν ἰδιότητα αὐτὴ θὰ τὴν ἀποδείξουμε πρῶτα για δυὸ παράγοντες.

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=(\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}^{\mu\ \text{παράγ.}})\cdot(\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}^{\nu\ \text{παράγ.}})=\overbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\cdots\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdots\alpha}^{\mu+\nu\ \text{παράγοντες}}=\alpha^{\mu+\nu}$$

Γιὰ νὰ ἐπεκτείνουμε τὴν ἰδιότητα γιὰ ὁσουσδήποτε παράγοντες θὰ μεταχειρισθοῦμε τὴ μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς.

Ὑπόθεση : $\alpha^{\mu_1}\cdot\alpha^{\mu_2}\cdots\cdots\alpha^{\mu_\nu}=\alpha^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\cdots\cdots+\mu_\nu}$

Συμπέρασμα : $\alpha^{\mu_1}\cdot\alpha^{\mu_2}\cdot\alpha^{\mu_3}\cdots\cdots\alpha^{\mu_\nu}\cdot\alpha^{\mu_{\nu+1}}=\alpha^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_\nu+\mu_{\nu+1}}$

Πραγματικά :

$$\alpha^{\mu_1}\cdot\alpha^{\mu_2}\cdots\cdots\alpha^{\mu_\nu}\cdot\alpha^{\mu_{\nu+1}}=(\alpha^{\mu_1}\cdot\alpha^{\mu_2}\cdots\alpha^{\mu_\nu})\cdot\alpha^{\mu_{\nu+1}}=\alpha^{\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_\nu}\cdot\alpha^{\mu_{\nu+1}}=\alpha^{\mu_1+\mu_2+\cdots\cdots\mu_\nu+\mu_{\nu+1}}$$

β) Γινόμενο ὁσωνδήποτε παραγόντων ὑψώνεται έ δύναμη, ἄν ὁ καθένας ἀπό τούς παράγοντες ψωθεῖ σ' αὐτή τή δύναμη.

Γιά γινόμενο δύο παραγόντων.

$$a_2)^{\mu}=\overbrace{(a_1a_2)\cdot(a_1a_2)\cdots\cdots(a_1a_2)}^{\mu\ \text{παράγοντες}}=a_1a_2a_1a_2\cdots a_1a_2=\overbrace{a_1a_1\cdots a_1}^{\mu\ \text{παράγ.}}\cdot\overbrace{a_2a_2\cdots a_2}^{\mu\ \text{παράγ.}}=a_1^{\mu}\cdot a_2^{\mu}$$

Καί πάλι ἐδῶ, γιά νά ἐπεκτείνουμε τήν ἰδιότητα γιά ὁσουσδήποτε παρά- οντες, μεταχειριζόμαστε τήν προηγούμενη μέθοδο.

Ὑπόθεση : $(a_1\cdot a_2\cdots\cdots a_\nu)^{\mu}=a_1^{\mu}\cdot a_2^{\mu}\cdots\cdots a_\nu^{\mu}$.

Συμπέρασμα : $(a_1a_2\cdots\cdots a_\nu\cdot a_{\nu+1})^{\mu}=a_1^{\mu}a_2^{\mu}\cdots\cdots a_\nu^{\mu}\cdot a_{\nu+1}^{\mu}$

ραγματικά, $(a_1\cdot a_2\cdots a_\nu\cdot a_{\nu+1})^{\mu}=[(a_1a_2\cdots a_\nu)\cdot a_{\nu+1}]^{\mu}=(a_1a_2\cdots a_\nu)^{\mu}\cdot a_{\nu+1}^{\mu}=a_1^{\mu}a_2^{\mu}\cdots a_\nu^{\mu}\cdot a_{\nu+1}^{\mu}$

γ) Δύναμη ὑψώνουμε σ' ἄλλη δύναμη, ἄν διατηρήσουμε ή βάση καί θέσουμε ἐκθέτη τό γινόμενο τῶν ἐκθετῶν.

Πραγματικά : $(a^{\kappa})^{\nu}=\overbrace{a^{\mu}\cdot a^{\mu}\cdots\cdots a^{\mu}}^{\nu\ \text{παράγοντες}}=a^{\overbrace{\mu+\mu+\cdots\cdots+\mu}^{\nu\ \text{φορές}}}=a^{\mu\nu}$

δ) Κλάσμα ὑψώνεται σέ δύναμη, ἄν ὁ ἀριθμητής καί ὁ αρονομαστής ὑψωθοῦν στήν ἴδια δύναμη.

Πραγματικά :

$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\mu}=\overbrace{\frac{a}{\beta}\cdot\frac{a}{\beta}\cdots\cdots\frac{a}{\beta}}^{\mu\ \text{παράγοντες}}=\frac{a\cdot a\cdots\cdots a}{\beta\cdot\beta\cdots\cdots\beta}=\frac{a^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

ε) Τό πηλίκο τῶν δυνάμεων a^{μ} καί a^{ν}, ὅπου τό μ εἶ- αι μεγαλύτερο ἀπό τό ν τουλάχιστο κατά 2, ἰσοῦται έ τή δύναμη, πού ἔχει τήν ἴδια βάση καί ἐκθέ- τη τή διαφορά τῶν ἐκθετῶν.

Ἄν καλέσουμε τό πηλίκο a^{κ}, θά πρέπει νά ἔχουμε $a^{\kappa}\cdot a^{\nu}=a^{\mu}$ δηλ $a^{\kappa+\nu}=a^{\mu}$ αί ἐπομένως $\kappa+\nu=\mu$ ἤ $\kappa=\mu-\nu$.

21. Σημασία τῶν συμβόλων a^1, a^0.

Κατά τόν ὁρισμό τῶν δυνάμεων, ἡ δύναμη ἀντιπροσωπεύει γινόμενο καί τό γινόμενο ἔχει νόημα, ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι τουλάχιστο 2. Ἔτσι ἡ δύναμη ἔχει νόημα, ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι τό λιγώτερο 2. Ἐάν ὅμως θελήσουμε ὁ ὁρισμός τῶν δυνάμεων νά ἰσχύσει καί ὅταν ὁ ἐκθέτης εἶναι 1, θά πρέπει νά παραδεχθοῦμε ὅτι $a^1=a$.

Ἡ παραδοχή αὐτή διατηρεῖ καί τή θεμελιακή ἰδιότητα τῶν δυνάμεων.

Πραγματικά,

$$a^1 \cdot a^\mu = a\cdot(\overbrace{a\cdot a \cdots\cdots a}^{\mu \text{ παράγοντες}}) = \overbrace{a\cdot a\cdot a \cdots\cdots a}^{\mu+1 \text{ παράγοντες}} = a^{\mu+1}$$

Ἄν ἀκόμη θελήσουμε νά πάρει νόημα τό σύμβολο a^0, θά πρέπει ἡ σημα
του νά ἐξαρτηθεῖ ἀπό τή διατήρηση τῆς θεμελιακῆς ἰδιότητος τῶν δυνάμεων. Θά πρέπει λοιπόν νά ἔχουμε: $a^0 \cdot a^\mu = a^\mu$. Καί ἐπειδή τό a εἶναι διαφορετικό ἀπ
τό μηδενικό, προκύπτει, ὅτι $a^0 = 1$.

22. <u>Σημασία τοῦ συμβόλου $a^{-\mu}$ ὅπου ὁ μ εἶναι θετικός καί ἀκέραιος.</u>

Καί ἐδῶ ἡ σημασία τοῦ συμβόλου αὐτοῦ πρέπει νά εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ θε
μελιακή ἰδιότητα τῶν δυνάμεων νά ἰσχύσει. Θά ἔχουμε λοιπόν, $a^{-\mu} \cdot a^\mu = a^0 = 1$. Καί ἐπειδή τό a διαφέρει ἀπό τό μηδενικό, $a^{-\mu} = \frac{1}{a^\mu}$.

<u>Παρατήρηση.</u> Χρωστᾶμε νά ξέρουμε ὅτι ἡ ἀναζήτηση σημασίας γιά τ
σύμβολα $a^1, a^0, a^{-\mu}$ δικαιολογεῖται ἀπό τήν παρατήρηση τοῦ μαθηματικοῦ, ὅ
ἔπρεπε νά ἰσχύσει ὁ κανόνας γιά τήν εὕρεση τοῦ πηλίκου $a^\mu : a^\nu$, ὅταν οἱ
ἀκέραιοι μ καί ν εἶχαν διαφορά 1, ὅταν ἦταν ἴσοι καί ὅταν ὁ μ ἦταν μικρό
τερος ἀπό τό ν. Κι' αὐτό γιατί ἡ ἐφαρμογή τοῦ ὁρισμοῦ τῶν δυνάμεων στού
ὅρους τοῦ κλάσματος $\frac{a^\mu}{a^\nu}$ ἔδιδε ἕνα ἀποτέλεσμα, πού συμφωνεῖ μέ τίς πα-
ραπάνω παραδοχές.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ</u>

1) Θεωροῦμε τήν ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 .... πού οἱ δυό πρῶτοι ὅροι της εἶναι οἱ 0, 1 καί καθένας ἀπό τούς ἑπομένους ὅρους γίνεται, ἄν προσθέσουμε τούς δυό προηγουμένους του ὅρους.

Νά δειχθεῖ, ὅτι σ' αὐτή τήν ἀκολουθία τό ἄθροισμα ἑνός ἀριθμοῦ ὅρων, πο
τούς παίρνουμε ἀρχίζοντας πάντοτε ἀπό τόν πρῶτο, ἐάν αὐξηθεῖ κατά 1, θά μᾶς δώσει

ν ὅρο πού ἔρχεται ὕστερα σάν δεύτερος ὅρος ἔπειτα ἀπό ἐκεῖνον στόν ὁποῖον
ταματήσαμε.

2) Ἕνα βιβλίο ἔχει 300 σελίδες. Πόσα ψηφία μᾶς χρειάζονται γιά νά
ριθμήσουμε αὐτές τίς σελίδες.;

3) Ἐάν σ' ἕνα φυσικό* ἀριθμό, πού ἔχει δυό ἤ περισσότερα ψηφία, πα-
αλείψουμε τό τελευταῖο ψηφίο προκύπτει ἄλλος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος δείχνει
ό πλῆθος τῶν δεκάδων, πού περιέχει ὁ πρῶτος. Ἐπίσης, ἄν παραλείψουμε
ά δυό τελευταῖα ψηφία, προκύπτει νέος ἀριθμός, πού δείχνει τίς ἑκατοντά-
ες ἐκείνου, πού μᾶς δόθηκε καί ἄν παραλείψουμε τά τρία τελευταῖα ψη-
ία προκύπτει ἀριθμός, πού μᾶς δείχνει τίς χιλιάδες γιά τό δοσμένο καί
τει καθεξῆς.

4) Τό πηλίκο δυό ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν ἔχει τόσα ψηφία,
όσα ψηφία ἔχει ὁ διαιρετέος περισσότερα ἀπό τό διαιρέτη ἤ ἀκόμα
να.

5) Πόσες μονάδες μποροῦμε νά προσθέσουμε στό διαιρετέο μιᾶς δι-
ιρέσεως θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθμῶν, γιά νά μή βλαφθεῖ τό πηλίκο
αί πόσες γιά νά αὐξηθεῖ κατά μιά μονάδα;

6) 1ο. Πόσοι εἶναι οἱ διαφορετικοί νψήφιοι ἀριθμοί; Καί πόσα ψηφία
χρειάζονται, γιά νά τούς γράψουμε;

2ο Πόσοι εἶναι οἱ διαφορετικοί ἀριθμοί, πού δέν ἔχουν περισσότερα ἀπό
ν ψηφία; Καί πόσα ψηφία χρειάζονται γιά νά τούς γράψουμε;

7) Τό ἄθροισμα τῶν 6 διψηφίων ἀριθμῶν (θετικῶν καί ἀκεραίων) μέ
διαφορετικά ψηφία, πού σχηματίζονται ἀπό τρία διαφορετικά μεταξύ τους
καί πρός τό μηδενικό ψηφία, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα αὐτῶν τῶν ψηφίων πολ-
λαπλασιασμένο ἐπί 22.

---

* Ἀκέραιο καί θετικό.

8) Νὰ βρεθοῦν τρεῖς ἀριθμοί γιὰ τοὺς ὁποίους νὰ ξέρουμε, ὅτι, προσθέτον τάς τους ἀνὰ δύο, βρίσκουμε 56,63 καὶ 105.

9) Αὐξάνοντας κατὰ 7 τοὺς δύο παράγοντες ἑνός γινομένου, αὐξάνουμε τ γινόμενο κατὰ 354. Νὰ βρεθοῦν οἱ δύο παράγοντες γιὰ τοὺς ὁποίους γνωρίζουμε ὅτι ἡ διαφορά τους εἶναι 5.

10) Νὰ δειχθεῖ, ὅτι ἕνας ἀριθμὸς ἀκέραιος δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι σύγχρονα πολλαπλάσιο τοῦ 12 αὐξημένο κατὰ 5 καὶ πολλαπλάσιο τοῦ 15 αὐξημένο κατὰ 4.

11) Ὅταν δύο τριψήφιοι θετικοὶ ἀριθμοί (μὲ τὰ ψηφία τους διαφορετικά μεταξύ τους) ἔχουν τὰ ἴδια ψηφία, μὰ τοποθετημένα κατὰ τάξη ἀντίστροφη, ἡ διαφορά τους ἔχει γιὰ ψηφίο δεκάδων τὸ 9 καὶ τὰ ἄλλα δυ της ψηφία ἔχουν ἄθροισμα 9.

12) Νὰ βρεθεῖ ἕνας ἀριθμός, ὁ ὁποῖος, πολλαπλασιάζοντας τὸν ἀριθμό 21, δίδει γινόμενο μὲ ὅλα τὰ ψηφία του ἴσα μὲ 5. (Ἀπ. ὑπάρχουν ἄπειροι ἀριθμοί· ὁ μικρότερος ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ὁ 26455).

13) Τὸ γινόμενο πολλῶν παραγόντων τελειώνει πρὸς τὰ δεξιά στὸ ἴδιο ψηφίο, ποὺ τελειώνει τὸ γινόμενο τῶν ψηφίων τῶν μονάδων τους.

14) Κάθε ἀριθμὸς τῆς μορφῆς $\frac{\nu(\nu+1)}{2}$ (ὅπου ν φυσικός) εἶναι ἀκέραιος καὶ δὲ μπορεῖ νὰ τελειώνει πρὸς τὰ δεξιά σ' ἕνα ἀπὸ τὰ ψηφία 2, 4, 7, ἢ 9.

15) Τὸ γινόμενο ἑνὸς τριψηφίου ἀριθμοῦ, ποὺ πολλαπλασιάζεται ἐπὶ τὸ 7 τελειώνει πρὸς τὰ δεξιά στὸν ἀριθμό 638. Νὰ βρεθεῖ αὐτὸς ὁ τριψήφιος ἀριθμός.

16) Σὲ ποιὸ ψηφίο τελειώνει τὸ γινόμενο $146^7 \cdot 675^4$;

17) Ὁ ἀριθμὸς τῶν ψηφίων ἑνὸς γινομένου ν παραγόντων εἶναι τὸ πολὺ ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν τῶν ψηφίων τῶν παραγόντων του ἢ τὸ λιγότερο ἴσος μ' αὐτὸ τὸ ἄθροισμα, ἐλαττωμένο κατὰ ν-1 μονάδες.

18) Νὰ δειχθεῖ ὅτι τὸ ἄθροισμα 2ν+1 διαδοχικῶν ἀκεραίων καὶ θετικῶν

ριθμῶν διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό 2ν+1.

19) Πότε ἰσχύει ἡ ἰσότης $|x|=x$ καί πότε ἡ ἰσότης $|x|=-x$;

20) Ποιοί εἶναι οἱ θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι, ὅταν διαιρε-
ῶν μέ τόν ἐπίσης ἀκέραιο καί θετικό α, δίδουν πηλίκο ἴσο μέ τό ὑπόλοιπο;

21) Θεωροῦμε τή φθίνουσα ἀκολουθία τῶν θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθ-
ῶν, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ .... Νά δειχθεῖ ὅτι, ἄν θέσουμε $\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_1-\alpha_2,$
$=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ ...... οἱ ἀριθμοί β πού ἔχουν δείκτη περιττό, πηγαίνουν
ίνοντας, οἱ ἀριθμοί β, πού ἔχουν δείκτη ἄρτιο, πηγαίνουν αὐξάνοντας καί
θένας ἀπό τούς πρώτους εἶναι μεγαλύτερος ἀπό καθένα ἀπό τούς δευτέ-
ους.

22) Μέ ποιό ἀριθμό πρέπει νά διαιρεθεῖ ἕνας ἄλλος ἀριθμός γιά νά ἐλατ-
θεῖ κατά τά $\frac{2}{5}$ του ;

√ 23) Τό ἄθροισμα δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ 729 καί ὁ μεγαλύτερος
οιέχει 8 φορές τόν μικρότερο. Μέ ποιό ἀριθμό πρέπει νά πολλαπλασιασθεῖ
729, γιά νά βροῦμε τό μεγαλύτερο ἀπ' αὐτούς τούς δύο ;

24) Ἐάν δώσω τό $\frac{1}{3}$ ἀπό τά χρήματά μου, ἔπειτα τό $\frac{1}{2}$ ἀπό ἐκεῖνα πού
ῦ μένουν καί τέλος τό $\frac{1}{4}$ τοῦ τελευταίου ὑπολοίπου, τί μοῦ ἀπομένει ;

√ 25) Τά $\frac{3}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι 30 καί ὁ μικρότερος εἶναι τά
τοῦ μεγαλύτερου. Νά βρεθοῦν οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί.

26) Ἕνα κλάσμα εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό κλάσμα $\frac{5}{7}$. Νά βρεθεῖ αὐτό τό κλά-
α, γνωρίζοντες ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ὅρων του εἶναι 216.

27) Τά $\frac{2}{3}$ τοῦ χρονικοῦ διαστήματος, πού μένει ἀπό τήν ἡμέρα, εἶναι ἀκρι-
ς ἴσο μέ ἐκεῖνο, πού ἔχει περάσει. Τί ὥρα εἶναι ;

28) Ἕνα βαρέλι περιέχει 340 ὀκάδες κρασί. Βγάζουμε 55 ὀκάδες καί τίς
τικαθιστοῦμε μέ νερό καί πάλι βγάζουμε 55 ὀκάδες καί τίς ἀντικαθιστοῦμε
νερό· καί γιά τρίτη τέλος φορά κάμνουμε τήν ἴδια πράξη.

Πόσο κρασί περιέχει στό τέλος τό βαρέλι;

29) Ἐπαναλαμβάνοντες στό προηγούμενο πρόβλημα ν φορές τήν πράξη

καὶ ὀνομάζοντες Α τὸ περιεχόμενο τοῦ βαρελιοῦ καὶ Β τὴν ποσότητα, πο ζουμε κάθε φορά, ποία ποσότητα κρασιοῦ θὰ μείνῃ στὸ τέλος μέσα στὸ λι;

30) Δύο κλάσματα λέγονται συμπληρωματικά, ὅταν τὸ ἄθροισμά τ δίδει τὴ μονάδα. Ἔπειτα ἀπ' αὐτὸ νὰ δειχθεῖ, ὅτι, ἂν ἕνα κλάσμα εἶναι ἀνα καὶ τὸ συμπληρωματικό του εἶναι ἐπίσης ἀνάγωγο.

31) Ποῖοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ ποὺ μποροῦν νὰ προστεθοῦν στοὺς δύο ὅρο ἑνὸς κλάσματος χωρὶς νὰ ἀλλάξει ἡ τιμή του;

32) Χρησιμοποιώντας τὴ σημασία τοῦ συμβόλου $\alpha^{-\mu}$, ὅπου μ θετι καὶ ἀκέραιος, γράψετε μὲ ἀκέραιη μορφὴ τὰ κλάσματα: $\frac{5}{3}, \frac{-3}{8}, \frac{7}{9}, -$

33) Δείξετε τὴν ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

α) $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\alpha)^3=0$. β) $(\alpha-\beta-\gamma)^2+(-\alpha+\beta+\gamma)^2=2(\alpha-\beta$

γ) $(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^5+(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)^5=0$. δ) $(\alpha-\beta)^{2\mu+1}\cdot(\beta-\alpha)^{2\mu+1}=-(\alpha-\beta)^{2}$

34) Ποιὸς εἶναι ὁ x, ἂν εἶναι ἀληθινὴ ἡ ἰσότητα $(3)^{x-2}=9$;

35) Ἡ ἰσότητα: $\left(-\frac{8}{27}\right)^{x-3}=-\frac{32}{243}$, γιὰ ποιὰ τιμὴ τοῦ x ἀληθεύει;

36) Τὸ γινόμενο $20\cdot14\cdot1225$ νὰ γραφτεῖ σὰν δύναμη ἑνὸς ἀριθμοῦ.

ΑΝΑΛΟΓΙΕΣ

22. Λόγος τοῦ ἀριθμοῦ α πρὸς τὸν β λέγεται ὁ ἀριθμός, ποὺ πρέπει πολλαπλασιάσει τὸν β, γιὰ νὰ μᾶς δώσει σὰν γινόμενο τὸν α.

Ἔτσι τὸ λόγο τῶν α καὶ β ἐκφράζει τὸ κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$.

23. Σημείωση. Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο ὁρίζεται καὶ ὁ λόγος δύο ὁμοειδῶν γεθῶν.

24. Ἀναλογία ὀνομάζεται ἡ ἰσότητα δύο λόγων· λογουχάρη, ἡ ἰσότητα $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἀναλογία. Οἱ ὅροι α, δ λέγονται ἄκροι καὶ οἱ β, γ μέσοι ὅροι τῆς

λογίας. Οἱ α, γ λέγονται ἡγούμενοι καὶ οἱ β, δ ἑπόμενοι.

25. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν.

α) Σὲ κάθε ἀναλογία τὸ γινόμενο τῶν ἄκρων όρων ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τῶν μέσων.

Πραγματικά, ἡ ἀναλογία μας γράφεται: $\frac{αδ}{βδ}=\frac{βγ}{βδ}$ καὶ ἐπομένως αδ = βγ (1).

β) Ἐὰν σὲ μία ἀναλογία ἐναλλάξουμε τοὺς μέσους ἢ τοὺς ἄκρους ὅρους προκύπτει νέα ἀναλογία.

Ἂν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς προηγουμένης ἰσότητος (1) τὰ διαιρέσουμε με τὸ γινόμενο γδ βρίσκουμε: $\frac{αδ}{γδ}=\frac{βγ}{γδ}$ ἢ $\frac{α}{γ}=\frac{β}{δ}$. καί, ἂν τὰ διαιρέσουμε με τὸ γινόμενο α·β, βρίσκουμε: $\frac{αδ}{αβ}=\frac{βγ}{αβ}$ ἢ $\frac{δ}{β}=\frac{γ}{α}$.

γ) Ἀπὸ τὴν ἀναλογία $\frac{α}{β}=\frac{γ}{δ}$ προκύπτουν καὶ οἱ ἑξῆς ἀναλογίες:

$$\frac{α+β}{β}=\frac{γ+δ}{δ},\quad \frac{α+β}{α}=\frac{γ+δ}{γ},\quad \frac{α-β}{β}=\frac{γ-δ}{δ},\quad \frac{α-β}{α}=\frac{γ-δ}{γ},\quad \frac{α+β}{α-β}=\frac{γ+δ}{γ-δ}$$

Ἂν καὶ στὰ δύο μέλη τῆς ἀναλογίας μας προσθέσουμε ἢ ἀφαιρέσουμε τὴ μονάδα, βρίσκουμε:

$$\frac{α}{β}+1=\frac{γ}{δ}+1 \text{ ἢ } \frac{α+β}{β}=\frac{γ+δ}{δ} \text{ καὶ } \frac{α}{β}-1=\frac{γ}{δ}-1 \text{ ἢ } \frac{α-β}{β}=\frac{γ-δ}{δ}$$

Ἐπειδὴ ἀκόμη ἀπὸ τὴν ἀναλογία μας ἔχουμε τὴν ἀναλογία

$$\frac{β}{α}=\frac{δ}{γ}$$

ν ἐργασθοῦμε μὲ τὸν ἴδιο τρόπο θὰ βροῦμε:

$$\frac{α+β}{α}=\frac{γ+δ}{γ} \text{ καὶ } \frac{β-α}{α}=\frac{δ-γ}{γ} \text{ ἢ } \frac{α-β}{α}=\frac{γ-δ}{γ}$$

Τὴν τελευταία πάλι ἰσότητά μας τὴν βρίσκουμε, ἂν διαιρέσουμε κατὰ μέλη τὴν πρώτη καὶ τὴν τρίτη ἀπὸ τὶς ἰσότητες, ποὺ ἦσαν γιὰ διαπίστωση.

26. Θεώρημα. (Γιά περισσότερα ἀπό δύο ἴσα κλάσματα).

Ἐάν πολλά κλάσματα εἶναι ἴσα, τότε τό κ σμα, πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀρ μητῶν καί παρονομαστή τό ἄθροισμ τῶν παρονομαστῶν τῶν ἴσων αὐτῶν κλ σμάτων, ἐκφράζει τόν ἴδιο λόγο, πού ἐκφράζουν καί τά θεωρούμενα κλάσμ τα.

Ἔστω: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\dots\dots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$. Καί ἄν καλέσουμε λ τόν κοιν λόγο, θά ἔχουμε τίς ἰσότητες:

$\alpha_1=\lambda\beta_1,\ \alpha_2=\lambda\beta_2,\ \dots\dots\ \alpha_\nu=\lambda\beta_\nu$. Καί ἀπ' αὐτές τήν ἰσότητα:

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_\nu=\lambda(\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_\nu) \quad (1)$$

ἤ τήν ἰσότητα:

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_\nu}{\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_\nu}=\lambda$$

27. Παρατήρηση. Ἡ παραπάνω ἀπόδειξη ἀφήνει νά ἐννοηθεῖ, ὅτι τό ἄθροισμα $\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_\nu\neq 0$ (ἐδ. 16).

Στήν περίπτωση πού $\beta_1+\beta_2+\dots\dots+\beta_\nu=0$ ἡ ἰσότητα (1) δείχνει, ὅτι ἀναγκαστικά καί τό ἄθροισμα: $\alpha_1+\alpha_2+\dots\dots+\alpha_\nu=0$

28. Πόρισμα. Ἐάν ἔχουμε πολλά ἴσα κλάσματα, μποροῦμε νά προσθέσουμε τούς ἀριθμητές καί τούς παρονομαστές τους, ἀφοῦ πρῶτα καί τούς δύο ὅρους τοῦ καθ' ἑνός ἀπ' αὐτά τά κλάσματα τους πολλαπλασιάσουμε μέ τόν ἴδιο ἀριθμό καί ν διατηρήσουμε τήν τιμή τοῦ λόγου.

29. Συνεχής ὀνομάζεται ἡ ἀναλογία, ὅταν οἱ δύο μέσοι εἶναι ἴσοι. Λογουχάρη, ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ εἶναι συνεχής.

Σέ μιά τέτοια ἀναλογία ἔχουμε $\beta^2=\alpha\gamma$ καί ὁ β ὀνομάζεται μέσο νάλογος τῶν ἄλλων δύο.

30. Καί μιά σειρά ἴσων κλασμάτων τήν ὀνομάζουμε ἀναλογία· τήν ναλογία αὐτή τήν λέμε συνεχῆ, ἄν ὁ παρονομαστής τοῦ καθενός λόγου ναι ἴσος μέ τόν ἀριθμητή τοῦ ἑπομένου λόγου. Ἡ ἀναλογία:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$$

ναι συνεχής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

37) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$ δείξετε ὅτι $\frac{\alpha^3+3\gamma^2\varepsilon+5\varepsilon^3}{\beta^3+3\delta^2\zeta+5\zeta^3}=\frac{\alpha^3}{\beta^3}$

38) Ἐάν ἔχουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}$, τότε: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\cdot(\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta)^2$.

39) Ἐάν εἶναι ἀληθινές οἱ ἰσότητες: $\frac{x}{\alpha+\beta-\gamma}=\frac{\psi}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{z}{\alpha+\gamma-\beta}$ θά ἀλη-
ύει καί ἡ ἰσότητα: $(\alpha-\beta)x+(\beta-\gamma)\psi+(\gamma-\alpha)z=0$.

40) Ἐάν $\frac{x}{\psi}=\frac{\omega}{\phi}$ τότε καί:

α) $\frac{x^2\omega+x\omega^2}{\psi^2\phi+\psi\phi^2}=\frac{(x+\omega)^3}{(\psi+\phi)^3}$ β) $\frac{\mu x^2+\nu\psi^2}{\mu x^2-\nu\psi^2}=\frac{\mu\omega^2+\nu\phi^2}{\mu\omega^2-\nu\phi^2}$

αιοι καί ἄν εἶναι οἱ μ, ν.

41) Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ, δ συνιστοῦν συνεχῆ ἀναλογία νά δειχθεῖ ὅτι

$$\frac{2\alpha^3+3\beta^3}{3\alpha^3-4\beta^3}=\frac{2\alpha+3\delta}{3\alpha-4\delta}.$$

42) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha'}{\beta'}$ δείξετε ὅτι $\frac{(\alpha-\beta)^4}{(\alpha'-\beta')^4}=\frac{\alpha^4+\beta^4}{\alpha'^4+\beta'^4}$.

43) Νά δειχθεῖ ὅτι, ἐάν $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha-\beta-\gamma+\delta)=(\alpha-\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$,
τέσσερες ἀριθμοί α, β, γ, δ φτιάνουν μιά ἀναλογία.

44) Ἐάν ὁ γ εἶναι ὁ μέσος ἀνάλογος τῶν α καί β, θά ἔχουμε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{(\alpha+\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2}$.

45) Νά δειχθεῖ, ὅτι τά τέσσερα ἀθροίσματα, πού προκύπτουν προσθέτοντας
ό δύο ἀναλογίες, ὅρο μέ ὅρο, δέ φτιάνουν μιά νέα ἀναλογία, παρά στίς δύο
λουθες περιπτώσεις:

1ο. Ἐάν οἱ λόγοι τῆς πρώτης ἀναλογίας εἶναι ἴσοι μέ τούς λόγους τῆς δεύτερης.

2º. Ἐάν ὁ λόγος τῶν ἀριθμητῶν ἤ τῶν παρονομαστῶν τῆς μιᾶς ἀπ
τίς ἀναλογίες ἰσοῦται μέ τό λόγο τῶν ἀντιστοίχων ὅρων τῆς δευτέρ
ἀναλογίας.

46) Νά δειχθεῖ, ὅτι σέ κάθε ἀναλογία μποροῦμε νά ἀντικαδι στοῦ
τούς ἀριθμητές τῶν δύο λόγων :

1º. Μέ τούς μέσους ἀριθμητικούς(1).

2º Μέ τούς μέσους γεωμετρικούς(2)

3º. Μέ τούς μέσους ἁρμονικούς(3) τῶν δύο ὅρων τοῦ καθενός ἀπό τούς
γους, καί νά προκύπτει νέα ἀναλογία.

47) Ἐάν ὁ β εἶναι μέσος ἁρμονικός τῶν α καί γ νά δειχθεῖ ὅτι :
$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma}$ καί ἀντίστροφα.

48) Ἐάν ἀπό τέσσερες ἀριθμούς α, β, γ, δ ὁ δεύτερος εἶναι μέσος ἀριθμ
τικός τοῦ πρώτου καί τοῦ τρίτου καί ὁ τρίτος μέσος ἁρμονικός τοῦ δεύτε
καί τοῦ τετάρτου, αὐτοί οἱ τέσσερες ἀριθμοί φτιάνουν μία ἀναλογία.

49) Ἐάν τά μ, ν εἶναι διαφορετικά ἀπό το μηδενικό καί εἶναι ἀληθι
ἡ ἰσότητα :

$(2\mu\alpha+6\mu\beta+3\nu\gamma+9\nu\delta)(2\mu\alpha-6\mu\beta-3\nu\gamma+9\nu\delta)=(2\mu\alpha-6\mu\beta+3\nu\gamma-9\nu\delta)(2\mu\alpha+$
$6\mu\beta-3\nu\gamma-9\nu\delta)$ τότε οἱ ἀριθμοί α, β, γ, δ φτιάνουν μιάν ἀναλογία.

49α. Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\delta}{\varepsilon}$

νά δειχθεῖ ὅτι : $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\varepsilon^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon)^2$.

50) Ἐάν $\frac{\alpha}{\lambda\mu-\nu^2}=\frac{\beta}{\mu\nu-\lambda^2}=\frac{\gamma}{\lambda\nu-\mu^2}$

νά δειχθεῖ ὅτι : 1º. $\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0$ 2º. $\mu\alpha+\nu\beta+\lambda\gamma=0$

---

(1) Μέσος ἀριθμητικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

(2) Μέσος γεωμετρικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός $\gamma=\sqrt{\alpha\beta}$ δηλ. ὁ μεσο
ἀνάλογος τῶν α καί β. Ἐννοεῖται φυσικά, ὅτι τό γινόμενο αβ εἶναι θετικό.

(3) Μέσος ἁρμονικός τῶν α καί β ὀνομάζεται ὁ ἀριθμός γ, ἄν εἶναι ἀληθιν
ἡ ἰσότητα : $\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$.

51) Ἐπαληθέψτε, ὅτι, ἐάν $\frac{\mu}{x} = \frac{\nu}{\psi} = \frac{\rho}{z}$ καί $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{\psi^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$, ἔχου-
ε : $\frac{\mu^2}{\alpha^2} + \frac{\nu^2}{\beta^2} + \frac{\rho^2}{\gamma^2} = \frac{\mu^2+\nu^2+\rho^2}{x^2+\psi^2+z^2}$.

52) Ἐάν $\frac{\beta z - \gamma\psi}{\alpha} = \frac{\gamma x - \alpha z}{\beta} = \frac{\alpha\psi - \beta x}{\gamma}$ θά ἔχουμε καί $\frac{x}{\alpha} = \frac{\psi}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$.

53) Ἐάν $\frac{x^2 - \psi z}{\alpha} = \frac{\psi^2 - xz}{\beta} = \frac{z^2 - x\psi}{\gamma}$ θά εἶναι ἀληθινές καί
ἰσότητες:

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma}{x} = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\psi} = \frac{\gamma^2 - \alpha\beta}{z}.$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ

91. Ὁρισμός. Ἕνας ἀριθμός α ὀνομάζεται μεγαλύτερος ἀπό ἄλλον β,
ταν ἡ διαφορά $\alpha - \beta$ εἶναι ἀριθμός θετικός.

Καί σημειώνουμε : $\alpha > \beta$.

Ὁ ὁρισμός αὐτός ἐξασφαλίζει τήν ἀλήθεια τῶν παρακάτω προ-
άσεων :

α) Κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι μεγα-
λύτερος ἀπό τό μηδενικό.

β) Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός εἶναι μικρό-
τερος ἀπό τό μηδενικό.

γ) Ἀπό δύο ἀρνητικούς ἀριθμούς ἐκεῖνος,
ού ἔχει τή μικρότερη ἀφηρημένη τιμή εἶ-
αι ὁ μεγαλύτερος.

32. Ἰδιότητες τῶν ἀνισοτήτων. α) Ἐάν καί στά δύο μέλη
ιᾶς ἀνισότητας προστεθεῖ ἤ καί ἀπό τά δύο
ιέλη ἀφαιρεθεῖ ὁ ἴδιος ἀριθμός, προκύπτει
ἀνισότητα τῆς ἴδιας φορᾶς.

Δηλ. ἄν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \mu > \beta + \mu$ καί $\alpha - \mu > \beta - \mu$.

Πραγματικά, κατά τόν ὁρισμό τῆς ἀνισότητος, ἔχουμε :

$\alpha-\beta=$ θετικός ἤ $\alpha=\beta+\text{θετ.}$ Ἐπομένως $\alpha+\mu=\beta+\mu+\text{θετ.}$ ἤ καί $\alpha-\mu=\beta-\mu+\text{θετ.}$ Δηλ. $\alpha+\mu>\beta+\mu$ ἤ καί $\alpha-\mu>\beta-\mu$.

33. <u>Συνέπεια.</u> Μποροῦμε νά μεταφέρουμε ἕναν ὅρο ἀπό τό ἕνα μ μιᾶς ἀνισότητος στό ἄλλο, ἀρκεῖ νά τοῦ ἀλλάξουμε τό σημεῖο.

β) Ἐάν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος πολλαπλασιασθοῦν ἤ διαιρεθοῦν με τόν ἴδιο ἀριθμό, προκύπτει ἀνισότητ τῆς ἰδίας φορᾶς, ἄν ὁ ἀριθμός, ἐπί τό ὁποῖον πολλαπλασιάζουμε ἤ διαιροῦμ εἶναι θετικός καί ἀντιθέτης φορᾶς, ἄν ὁ ριθμός εἶναι ἀρνητικός.

Δηλ ἀπό τήν $\alpha>\beta$ θά ἔχουμε: $\alpha\mu>\beta\mu$, ἄν $\mu>0$ καί $\alpha\mu<$ ἄν $\mu<0$. Κατά τόν ὁρισμό, $\alpha=\beta+\text{θετ.}$ καί $\alpha\mu=\beta\mu+\text{θετ.}\mu$ ἤ $\alpha\mu-\beta\mu=\text{θετ.}\mu$.

Ὥστε: ἄν $\mu>0$, $\alpha\mu-\beta\mu=\text{θετ}$ καί ἐπομένως $\alpha\mu>\beta\mu$ ἄν μ $\alpha\mu-\beta\mu=\text{ἀρνητ.}$ καί $\alpha\mu<\beta\mu$.

Τό ἴδιο συμβαίνει, ἄν διαιρέσουμε καί τά δύο μέλη με τόν ἴδιο ἀ μό, γιατί ἡ διαίρεση ἀνάγεται σέ πολλαπλασιασμό ἐπί τόν ἀντίστροφ

34. <u>Συνέπεια</u> Μποροῦμε νά ἀλλάξουμε τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων μ ἀνισότητος ὑπό τόν ὅρο νά ἀλλάξουμε τη φορά αὐτῆς τῆς ἀνισότητος.

γ) Ἐάν προσθέσουμε κατά μέλη δυ ἀνισότητες τῆς ἰδίας φορᾶς προ κύπτει ἀνισότητα τῆς ἰδίας φορᾶ με τίς δοσμένες.

Ἐάν $\begin{matrix}\alpha>\beta\\ \gamma>\delta\end{matrix}$ τότε $\alpha+\gamma>\beta+\delta$

Κατά τόν ορισμό, $\begin{matrix}\alpha=\beta+\text{θετ.}\\ \gamma=\delta+\text{θετ.}\end{matrix}$ ἤ $\alpha+\gamma=\beta+\delta+\text{θετ.}$ δηλ.

$$\alpha+\gamma>\beta+\delta$$

35. Παρατήρηση.

Ἡ κατ' εὐθεῖαν πρόσθεση δύο ἀνισοτήτων μέ φορές ἀντίθετες εἶναι ἀδύνα-
γιατί γενικά δέ μποροῦμε νά προσδιορίσουμε τή φορά τοῦ ἀποτελέσματος.
ροῦμε ὅμως νά ἐνεργήσουμε κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο :

Ἄς ποῦμε πώς ἔχουμε νά προσθέσουμε τίς ἀνισότητες :

$$\alpha > \beta$$

$$\gamma < \delta$$

Ἄν τή δεύτερη ἀνισότητα τήν γράφουμε ἀπό τά δεξιά στά ἀριστερά, ἔχου-

$$\delta > \gamma$$

ἐπειδή ἀκόμη : $\alpha > \beta$.

πρόσθεση αὐτῶν κατά μέλη, παίρνουμε :

$$\alpha+\delta > \beta+\gamma$$

δ) Ἐάν ἔχουμε ἀνισότητες τῆς ἴδιας φορᾶς
ι δύο ἀπό τά διαγώνια μέλη τους εἶναι
ιθμοί θετικοί, πολλαπλασιάζοντές
ς κατά μέλη, προκύπτει ἀνισό-
τα τῆς ἴδιας μέ αὐτές φορᾶς· ἐάν
εἶναι ἀριθμοί ἀρνητικοί, προκύπτει
ισότητα ἀντίθετης φορᾶς.

Δηλ. ἐάν $\begin{matrix}\alpha > \beta\\ \gamma > \delta\end{matrix}$, εἶναι δέ καί $\begin{matrix}\alpha > 0\\ \delta > 0\end{matrix}$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$. Ἐνῶ, ἐάν $\begin{matrix}\alpha < 0\\ \delta < 0\end{matrix}$
$\alpha\gamma < \beta\delta$.

Ἀφοῦ $\alpha > 0$, κατά τήν ἰδιότητα (β), ἔχουμε : $\alpha\gamma > \alpha\delta$ (1)

Ἀφοῦ $\delta > 0$, γιά τόν ἴδιο λόγο, παίρνουμε: $\alpha\delta > \beta\delta$ (2)

Συγκρίνοντες τώρα τίς ἀνισότητες (1) καί (2), βρίσκουμε : $\alpha\gamma > \beta\delta$.

Ἐπίσης, ἀφοῦ $\alpha < 0$, ἔχουμε $\alpha\gamma < \alpha\delta$ καί ἀφοῦ $\delta < 0$, $\alpha\delta < \beta\delta$.
Ὥστε καί $\alpha\gamma < \beta\delta$.

ε) Ἐάν τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶναι ὁμόση-
ἀριθμοί, οἱ ἀντίστροφοι αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν

δημιουργοῦν ἀνισότητα ἀντίθετης φο

Ἐάν $\alpha > \beta$ καί $\alpha\beta > 0$ τότε $\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}$.

Κατά τήν ἰδιότητα (β) παίρνουμε: $\frac{\alpha}{\alpha\beta} > \frac{\beta}{\alpha\beta}$ ἤ $\frac{1}{\beta} > \frac{1}{\alpha}$ δη

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\beta}.$$

στ) Ἐάν τά μέλη μιᾶς ἀνισότητος εἶν ἀριθμοί θετικοί, μποροῦμε νά τά ὑψ σουμε σέ μιά θετική καί ἀκεραία δύν μη, χωρίς νά μεταβάλουμε τή φορ τῆς ἀνισότητος καί σέ μιά ἀρνητικ καί ἀκεραία δύναμη ἀλλάζοντας τή ρά τῆς ἀνισότητος.

Δηλ ἄν $\alpha > \beta$ καί $\begin{matrix}\alpha > 0\\ \beta > 0\end{matrix}$ τότε $\alpha^{\mu} > \beta^{\mu}$, ἄν μ θετικός ἀκέραιος καί $\alpha^{\mu} < \beta^{\mu}$, ἄν μ ἀρνητικός καί ἀκέραιος.

Γράφουμε $\begin{matrix}\alpha > \beta\\ \alpha > \beta\end{matrix}$ καί ἐπειδή στίς δύο αὐτές ἀνισότητες δύο διαγώνι λη εἶναι ἀριθμοί θετικοί, κατά τήν προηγούμενη ἰδιότητα, παίρνουμε: α

Γιά νά δείξουμε ὅτι ἡ πρόταση ἰσχύει γιά κάθε ἀκεραία καί θετική τοῦ μ, χρησιμοποιοῦμε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς:

$$\frac{\text{Ὑποθ.: } \alpha^{\mu} > \beta^{\mu}}{\text{Συμπέρ. } \alpha^{\mu+1} > \beta^{\mu+1}}$$

Γράφουμε: $\begin{matrix}\alpha^{\mu} > \beta^{\mu}\\ \alpha > \beta\end{matrix}$ καί κατά τήν ἰδιότητα (ε) ἔχουμε:

$$\alpha^{\mu+1} > \beta^{\mu+1}$$

Ἔστω τώρα μ ἀρνητικό καί ἀκέραιο. Ἄς θέσουμε $\mu = -\lambda$ ὅπου λ θ καί ἀκέραιο.

Κατά τά προηγούμενα ἔχουμε: $\alpha^{\lambda} > \beta^{\lambda}$ καί κατά τήν ἰδιότητα

$$\frac{1}{\alpha^{\lambda}} < \frac{1}{\beta^{\lambda}}$$

Καί ἐπειδή $\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^{\lambda}}$ καί $\beta^{-\lambda} = \frac{1}{\beta^{\lambda}}$ παίρνουμε:

$$\alpha^{-\lambda} < \beta^{-\lambda} \text{ δηλ } \alpha^{\mu} < \beta^{\mu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

54) Νά δειχθεῖ, ὅτι δέν ὑπάρχει ἀλγεβρικός ἀριθμός μεγαλύτερος ἀπό
υς τούς ἄλλους ἀλγεβρικούς ἀριθμούς, οὔτε μικρότερος ἀπό ἄλους.

55) Ἐάν ὁσαδήποτε κλάσματα ἔχουν ὁμόσημους παρονομαστές, τό κλά-
, πού ἔχει ἀριθμητή τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστή τό
οισμα τῶν παρονομαστῶν, περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στό μικρότερο καί τό
αλύτερο ἀπό τά κλάσματα αὐτά.

56) Ἐάν προσθέσουμε τόν ἴδιο ἀριθμό στούς δυό ὅρους ἑνός κλάσματος
ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι ὁμόσημος μέ τόν παρονομαστή τοῦ κλάσματος,
κλάσμα, πού ἔτσι θά προκύψει, θά περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στό πρῶτο
τή μονάδα.

57) Νά δειχθεῖ, ὅτι ὁ λόγος δυό ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν, πού
ν τόν ἴδιο ἀριθμό ψηφίων, ἐνῶ ὁ παρονομαστής δέν περιέχει τό μηδεν-
περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στόν μικρότερο καί τόν μεγαλύτερο ἀπό τούς
ους τῶν ψηφίων, πού ἔχουν τήν ἴδια τάξη στόν ἀριθμητή καί στόν παρο-
αστή.

58) Νά δειχθεῖ, ὅτι, ἐάν α, β εἶναι δυό ἀριθμοί θετικοί καί A, B, Γ
αι ἀντίστοιχα ὁ μέσος ἀριθμητικός, ὁ μέσος γεωμετρικός καί ὁ μέ-
ἁρμονικός τῶν δυό αὐτῶν ἀριθμῶν, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα :

$$A \geqslant B \geqslant \Gamma.$$

59) Νά δειχθεῖ, ὅτι, ἀπό τίς ἀνισότητες $\begin{matrix}\alpha \geqslant \beta \\ \gamma \leqslant \delta\end{matrix}$ παίρνουμε τήν ἀνι-
οτα $\alpha-\gamma \geqslant \beta-\delta$.

60) Νά δειχθεῖ, μέ παραδείγματα ἀριθμητικά, ὅτι, ἄν ἀφαιρέσουμε
ά μέλη ἀνισότητες τῆς ἴδιας φορᾶς, μπορεῖ νά προκύψει ἀνισότητα
ἴδιας φορᾶς, ἀνισότητα τῆς ἀντίθετης φορᾶς ἤ καί ἰσότητα.

61) Νά δειχθεῖ, μέ ἀριθμητικά παραδείγματα, ὅτι, ἐάν ἔχουμε ἀνισό-
ς τῆς ἴδιας φορᾶς καί πού δυό διαγώνια τους μέλη εἶναι ἀριθμοί ἑτερό-
ι, ἡ σχέση, πού θά προκύψει, πολλαπλασιάζοντάς τες κατά μέλη, μπορεῖ

νά εἶναι ἀνισότητα τῆς ἴδιας φορᾶς, ἀνισότητα ἀντίθετης φορᾶς ἤ καί ἰ
τητα.

62) Ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι τά σημεῖα τῶν δυο μελῶν μιᾶς ἀνισό
τος μποροῦμε νά τά ὑψώσουμε στήν ἴδια περιττή δύναμη χωρίς νά ἀ
ξει ἡ φορά τῆς ἀνισότητος.

63) Ἐάν οἱ ἀριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι θετικοί καί ἐάν $\alpha > \beta$ κ
$\gamma < \delta$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\delta}$.

64) Νά δειχθεῖ μέ παραδείγματα, ὅτι, ἄν διαιρέσουμε κατά μέλη δ
ἀνισότητες τῆς ἴδιας φορᾶς, προκύπτει ἀνισότητα τῆς ἴδιας φορᾶς ἤ ἀνι
τα ἀντίθετης φορᾶς ἤ καί ἰσότητα.

65) Θεωροῦμε δύο θετικούς ἀριθμούς α, ν ἀπό τούς ὁποίους ὁ δεύ
εἶναι ἀκέραιος καί τούς πιό μεγάλους ἀκεραίους ἀριθμούς λ, μ, πού ε
ἀντιστοίχως μικρότεροι ἤ ἴσοι ἀπό τόν α καί τό πηλίκο $\frac{\alpha}{\nu}$.

Νά δειχθεῖ, ὅτι ὁ ἀριθμός μ εἶναι ἴσος μέ τόν μεγαλύτερο ἀκέρ
πού εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος ἀπό τό πηλίκο $\frac{\lambda}{\nu}$.

66) Νά δειχθεῖ ὅτι :

Ἄν κλάσμα μέ θετικούς ὅρους εἶναι μικρότερο ἀπό τή μονάδα, τότ
τήν πρόσθεση καί στούς δύο του ὅρους τοῦ αὐτοῦ θετικοῦ ἀριθμοῦ τό κ
σμα αὐξάνει, ἐνῶ, ἐάν τό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα,
ἐλαττώνεται.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΓΙΑ ΟΛΗ ΤΗΝ ΠΑΡΑΠΑΝΩ ΥΛΗ

67) Ἡ διαίρεση δύο θετικῶν καί ἀκεραίων ἀριθμῶν δίδει τόν ἀριθμό 35
πηλίκο καί τόν ἀριθμό 4623 γιά ὑπόλοιπο. Κατά πόσες μονάδες μποροῦμε
ξήσουμε σύγχρονα τόν διαιρετέο καί τόν διαιρέτη χωρίς νά μεταβληθεῖ τό πη

68) Σέ μιά διαίρεση ὁ διαιρετέος εἶναι ὁ ἀριθμός 802 καί τό πηλίκο ὁ ἀριθμός 14. Ποῖοι ἀριθμοί εἶναι ὁ διαιρέτης καί τό ὑπόλοιπο;

69) Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots\ldots \tau$ εἶναι ἀριθμοί θετικοί καί μικρότεροι ἀπό τή μονάδα νά δειχτεῖ ὅτι:

$$(1-\alpha)(1-\beta)\ldots\ldots\ldots(1-\tau) > 1-(\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\tau)$$

(μεταχειριστεῖτε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς)

70) Μέ τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς, δείξετε, ὅτι, ἄν οἱ ἀριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \tau$ εἶναι θετικοί, ἰσχύει ἡ ἀνισότητα:

$$(1+\alpha)(1+\beta)\ldots\ldots(1+\tau) > 1+\alpha+\beta+\gamma+\ldots\ldots+\tau$$

71) Ἐάν $-\alpha < x < \alpha$, τότε $|x| < \alpha$ καί ἀντίστροφα.

72) Τό τετράγωνο τῆς ἀφηρημένης τιμῆς ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο τοῦ ἴδιου τοῦ ἀριθμοῦ.

73) Ἐάν $\alpha < \beta < \gamma < \delta$, νά δειχτεῖ ὅτι $|\beta-\gamma| < |\alpha-\delta|$.

74) Νά βρεθοῦνε οἱ ἀκέραιες τιμές τοῦ x, γιά τίς ὁποῖες

$$|x| < 7{,}1 \text{ ἤ } |x| > 2{,}3.$$

75) Νά δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἀνισοτήτων

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right| \leqslant \frac{|\alpha|+|\beta|}{|\gamma|}, \quad \left|\frac{\alpha+\beta}{\gamma}\right| \geqslant \frac{|\alpha|-|\beta|}{|\gamma|}$$

76) Δείξετε ὅτι ἰσχύει γιά ὁποιαδήποτε α καί β ἡ ἰσότητα:

$$|\alpha^2-3\beta+1| = |3\beta-\alpha^2-1|.$$

77) Δείξετε ὅτι: $|\alpha|-|\beta| \leqslant \big||\alpha|-|\beta|\big|$.

78) Ἐάν $|x| > \alpha$, ὅπου ὁ α εἶναι θετικός, τότε $x > \alpha$ ἤ $x < -\alpha$. Τό ἀντίστροφο ἐπίσης εἶναι ἀληθινό.

79) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἰσχύει ἡ σχέση

$$|x^2-3x+1| = |x^2-5x-11|.$$

80) Δείξετε, ὅτι ἡ ἀφηρημένη τιμή μιᾶς διαφορᾶς εἶναι μεγαλύτερη ἀπό ἤ ἴση μέ τή διαφορά τῶν ἀφηρημένων τιμῶν.

81) Ἐάν α καί β εἶναι δύο θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί, νά δειχτεῖ,

ὅτι, ὁποιοσδήποτε καί ἄν εἶναι ὁ ἀκέραιος καί θετικός ν, τό πηλίκ

τοῦ $\alpha-1$ μέ τόν β καί τό πηλίκο τοῦ $\alpha\beta^{\nu-1}-1$ μέ τόν β^{ν} εἶναι ἴσα

82) Γνωρίζοντες ὅτι $2^{\mu}-1=\alpha\cdot\beta$, ὅπου τά μ, α, β, εἶναι ἀριθμ
ἀκέραιοι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα, δείξετε ὅτι, οἱ $\alpha+1$ καί $\beta-$
εἶναι περιττά πολλαπλάσια τῆς ἴδιας δυνάμεως τοῦ 2.

83) Ἐάν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}$, δείξετε ὅτι:

$$1^{\underline{o}}\quad \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}+\frac{\gamma^2+\delta^2}{\gamma+\delta}+\frac{\varepsilon^2+\zeta^2}{\varepsilon+\zeta}=\frac{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^2+(\beta+\delta+\zeta)^2}{\alpha+\gamma+\varepsilon+\beta+\delta+\zeta}$$

$$2^{\underline{o}}\quad \frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\gamma^3+\delta^3}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\varepsilon^3+\zeta^3}{\varepsilon^2+\zeta^2}=\frac{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^3+(\beta+\delta+\zeta)^3}{(\alpha+\gamma+\varepsilon)^2+(\beta+\delta+\zeta)^2}$$

84) Ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\frac{\frac{\mu}{(\alpha-\beta)^2}+\frac{\nu}{(\alpha+\gamma)^2}}{\alpha}=\frac{\frac{\nu}{(\beta+\gamma)^2}-\frac{\lambda}{(\alpha-\beta)^2}}{\beta}=\frac{\frac{\lambda}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{\mu}{(\beta+\gamma)^2}}{\gamma}$$

στίς ὁποῖες οἱ ἀριθμητές καί οἱ παρονομαστές δέν εἶναι μηδενικ
βγαίνουν οἱ ἰσότητες:

$$\alpha\lambda+\beta\mu=\gamma\nu \qquad \frac{\alpha}{(\beta+\gamma)^2}=\frac{\beta}{(\alpha+\gamma)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}$$

85) Ἐάν τοποθετήσουμε κατά σειρά μεγέθους ὅλα τά ἀνάγωγα
σματα, πού εἶναι μικρότερα ἀπό τή μονάδα καί πού οἱ παρονομαστ
τους εἶναι μικρότεροι ἀπό ἕνα δοσμένο ἀριθμό, τό ἄθροισμα δύο
σμάτων πού ἀπέχουνε ἴσα ἀπό τά ἀκρινά κλάσματα, εἶναι σταθερό
(Τούς ὅρους τῶν κλασμάτων μας τούς ὑποθέτουμε θετικούς).

86) Οἱ τρεῖς θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί Α, Β, Γ ἔχουνε ἀντίστ
α, β, γ ψηφία. Νά βρεθεῖ ἀνάμεσα σέ ποιούς ἀριθμούς περιλαμ
νεται ὁ ἀριθμός τῶν ψηφίων τῆς παραστάσεως $\left(\frac{A\cdot B}{\Gamma}\right)^{\nu}$.

87) Νά δειχτεῖ, ὅτι δέν ὑπάρχει ἀριθμός θετικός καί ἀκέραιος,
ὁ ὁποῖος, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό 15, νά ἀφίνει ὑπόλοιπο 6 καί ὅταν διαι
μέ τό 24 νά ἀφίνει ὑπόλοιπο 5.

88) Νά δειχτεῖ ὅτι στή χωρίς τέρμα ἀκολουθία

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots\ldots$$

ου οἱ δύο πρῶτοι ὅροι της εἶναι οἱ 1 καὶ 2 καὶ καθένας ἀπὸ τοὺς λλους ὅρους προκύπτει ἂν προσθέσουμε τοὺς δυὸ προηγούμενους ὅρους, άρχουνε τέσσερες ἢ τὸ πολὺ πέντε ἀριθμοὶ ποὺ ἔχουνε ἕνα ὁρισμένο ιθμό Κ. ψηφίων.

89) Νὰ δειχτεῖ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ ἑνὸς ἀκεραίου καὶ ός κλάσματος ἀναγώγου εἶναι ἕνα κλάσμα ἀνάγωγο.

90) Νὰ δειχτεῖ, ὅτι:

1ο Τὰ κλάσματα $\frac{23}{99}$, $\frac{2323}{9999}$, $\frac{232323}{999999}$ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ο Τὰ κλάσματα $\frac{27425-27}{99900}$, $\frac{27425425-27425}{99900000}$ εἶναι ἰσοδύαμα.

91) Τὸ ἄθροισμα τοῦ πιὸ μεγάλου καὶ τοῦ πιὸ μικροῦ ὅρου μιᾶς ναλογίας εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν δυὸ ἄλλων ὅρων. (οἱ ὅροι τῆς ἀναλογίας θεωροῦνται θετικοί).

92) Δείξετε, ὅτι ἂν τεθεῖ $\psi = \frac{x}{1-|x|}$, ἐνῶ $|x| > 1$, θὰ ἔχουμε πίσης

$$x = \frac{\psi}{1-|\psi|}$$

93) Ἐὰν θεωρήσουμε τὰ κλάσματα $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\ldots$ πορούμε νὰ πάρουμε ἕναν ἀριθμὸ ἀπ' αὐτὰ ἀρκετὰ μεγάλο, ὥστε τὸ θροισμά τους νὰ ὑπερβαίνει ἕναν ἀριθμὸ τυχόντα.

94) Νὰ δειχτεῖ, ὅτι ἂν ὁ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, μεγαλύτερος ἀπὸ μονάδα, ἔχουμε :

$$\frac{1}{\nu+1} + \frac{1}{\nu+2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2\nu} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2\nu-1} - \frac{1}{2\nu}$$

(Μεταχειρισθεῖτε τὴ μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς).

Ἴδε [illegible]

95) Τό ἄθροισμα τῶν κλασμάτων $\frac{1}{\nu+1}$, $\frac{1}{\nu+2}$, ...$\frac{1}{2\nu}$, όπ
ν φυσικός ἀριθμός, εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό $\frac{1}{2}$.

96) Νά δειχτεῖ, ὅτι ἡ παράσταση $\frac{1.2.3.4.\dots\dots.(2\mu-1).2\mu}{1.2.3.\dots\dots.\mu.2^{2\mu}}$ ἰσοῦτ

$$\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\dots\dots.\frac{2\mu-1}{2}.$$

97) Μᾶς δίνουν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{A}{B}$ καί μᾶς λέγουν
βροῦμε δύο ἀκεραίους καί ἀλγεβρικούς ἀριθμούς x καί ψ, τέτ
πού νά κάμνουν τό κλάσμα $\frac{\alpha x+\psi}{\beta x+\psi}$ ἰσοδύναμο μέ τό $\frac{A}{B}$.
Ποιές εἶναι οἱ λύσεις τῶν πιό μικρῶν ἀφηρημένων τιμῶν;

98) Ἄν $\frac{\beta x-\alpha\psi}{\gamma\psi-\alpha z}=\frac{\gamma x-\alpha z}{\beta\psi-\alpha x}=\frac{z+\psi}{x+z}$, νά δειχτεῖ, ὅτι καθένα ἀπ'
τά κλάσματα εἶναι ἴσο μέ $\frac{x}{\psi}$, ἐφ' ὅσον $\beta+\gamma\neq 0$.

99) Ἐάν οἱ ἀριθμοί α καί β εἶναι ὁμόσημοι τότε $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\geqslant$

100) Ἐάν $x_1, x_2, x_3 \dots\dots\dots x_\nu$ εἶναι ἀριθμοί ὁμόσημ
ἰσχύει ἡ ἀνισότητα :

$$(x_1+x_2+x_3+\dots\dots+x_\nu)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\dots+\frac{1}{x_\nu}\right)$$

101) Ἄν οἱ ἀλγεβρικοί ἀριθμοί α, β, x, ψ ἱκανοποιοῦν τίς ἰσό

$\alpha^2+\beta^2=1$, $x^2+\psi^2=1$, νά δειχτεῖ, ὅτι : $\alpha x+\beta\psi\leqslant 1$.

102) Ἐπίσης, ἄν οἱ ἀλγεβρικοί ἀριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, x, \psi, z$ ἱκανοποιοῦν

---

* Ὑποθέτουμε γνωστές ἀπό τήν ἀριθμητική τίς ἀριθμητικές ταυτό
$(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm 2\alpha\beta+\beta^2$.

** Τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2 \dots\dots x_\nu$ ὁ ἀριθμός $\frac{x_1+x_2+\dots+x_\nu}{\nu}$ ὀνομάζεται
ἀριθμητικός καί ὁ ἀριθμός $\frac{\nu}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_\nu}}$ μέσος ἁρμονικός. Ὥστε
η μπορούσε νά διατυπωθεῖ : Ὁ μέσος ἀριθμητικός τῶν ὁμοσήμων ἀριθμῶ
. . . . . x_ν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἤ ἴσος μέ τό μέσο ἁρμονικό τους.

ότητες :

$α^2+β^2+γ^2=1$, $x^2+ψ^2+z^2=1$, νά δειχτεῖ, ὅτι $αx+βψ+γz \leqslant 1$.

103) Ὁποιαδήποτε κι ἄν εἶναι οἱ ἀριθμοί α, β, γ ἰσχύει ἡ ἰσότητα :

$β^2γ^2+γ^2α^2+α^2β^2 \geqslant αβγ(α+β+γ)$.

104) Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ παρασταίνουν τά μήκη πλευρῶν τριγώ-
ἰσχύει ἡ ἀνισότητα : $α^2+β^2+γ^2 < 2αβ+2αγ+2βγ$.

105) Ἐάν ἕνας ἀριθμός εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων, καί τό δι-
άσιό του εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

106) Νά δειχτεῖ, ὅτι τό τετράγωνο ἑνός περιττοῦ ἀριθμοῦ εἶναι
λλαπλάσιο τοῦ 8 αὐξημένο κατά 1.

107) Ἐάν ἕνας ἀριθμός ἄρτιος εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνω
ί τό μισό του ἐπίσης, εἶναι ἄθροισμα δύο τετραγώνων.

108) Ἐάν x, ψ, z παρασταίνουν τρεῖς ἀκεραίους ἀριθμούς καί ἐάν ὁ
έραιος ἀριθμός $x^2+2ψ^2z$ εἶναι τετράγωνο ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ, νά
ιχτεῖ, ὅτι ὁ ἀκέραιος ἀριθμός $x^2+ψ^2z$ εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώ-
ν δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Α΄

α) Σκοπός τῆς Ἄλγεβρας

Ἡ ἐπιστήμη ἔχει φθάσει στή διαπίστωση γιά τήν ἀλληλουχία τῶν
γονότων καί γενικά τῶν φαινομένων ἀπό τά ὁποῖα ξεπήδησε ἡ γνώ
Ἡ διαπίστωση αὐτή εἶχε τή συνέπεια νά σταματήσει ἡ σπουδή τῶν δια
ρων φαινομένων χωριστά γιά τό καθένα καί ἡ μελέτη τους νά γίνει σ
λεια συνάρτηση τοῦ ἑνός μέ τό ἄλλο, ἔτσι πού νά βρεθεῖ, ὅτι τά διάφο
φυσικά ἤ ἄλλα πράγματα, ἀνάλογα μέ τά πολλά ἤ τά λίγα κοινά γν
σματά τους ἀνήκουν σέ ὡρισμένες ἀποκλειστικές κατηγορίες πού μπ
νά εἶναι γενικές, γενικότερες καί γενικότατες.

Τό δρόμο αὐτό δέ μποροῦσε παρά ν' ἀκολουθήσει καί ἡ διατύπωση
θε γνώσης. Αὐτό φαίνεται καλύτερα σέ ἐντελῶς περιγραφικές ἐπισ
μες, ὅπως ἡ ζωολογία λογουχάρη. Ὁ ἐπιστήμονας γιά νά ἐκθέσει εὐκ
τερα, καλύτερα, πιό κατανοητά τό ἀντικείμενο τῆς ἐπιστήμης του, τα
μεῖ τό ὑλικό της κατά κατηγορίες.

Κάτι ἀνάλογο θά γίνει καί μέ τήν ἀριθμητική.

Ὑπάρχουν στήν ἀριθμητική προβλήματα πού γιά τή λύση τους ἀκ
θοῦμε τήν ἴδια σειρά συλλογισμῶν καί ὅπου κάνουμε τίς ἴδιες πράξεις
Εἶναι τά προβλήματα ἐκεῖνα πού ἔχουνε τήν ἴδια σύσταση, μά εἶνα
φορετικά τά ποσά τους ἤ διαφορετικές οἱ τιμές τους. Μ' ἄλλους
μους ὑπάρχουν προβλήματα, πού ἔχουν τόν ἴδιο τύπο, δηλαδή ἔχ
τήν ἴδια μορφή, ἀποτελοῦνται ἀπό τίς ἴδιες σχέσεις, γνωστῶν καί ἀ
στων ἀριθμῶν καί πού γι' αὐτό θά τά ποῦμε προβλήματα τῆς ἴδιας
τηγορίας.

Τί χρειάζεται λοιπόν γιά τή συστηματοποίηση τοῦ ὑλικοῦ τῆς ἀρ
τικῆς; Ἡ κατάταξη τῶν προβλημάτων της σέ κατηγορίες καί φυσικά

μιουργία τοῦ ἀντιπροσωπευτικοῦ προβλήματος γιά κάθε κατηγορία.

Μιά κατηγορία λογουχάρη προβλημάτων εἶναι ἐκείνη ὅπου « γίνεται ιος γιά δυό ποσά, μᾶς δίνεται μιά τιμή γιά τό καθένα, μιά νέα τιμή τό ἕνα καί ζητιέται ἡ ἀντίστοιχη τιμή γιά τό ἄλλο ». Ἄν λοιπόν κάφορά μιλοῦμε γιά ἄλλα ποσά ἤ ἀλλάζουμε τίς τιμές αὐτῶν τῶν ποσῶν ιουργοῦμε προβλήματα πού γιά τή λύση τους ἐπαναλαμβάνουμε τίς έψεις πού μεταχειριστήκαμε γιά τό πρῶτο ἀπ' αὐτά. Γιά νά μή γίνεται πόν αὐτή ἡ ἐπανάληψη, δημιουργοῦμε τόν τύπο τῶν προβλημάτων τῆς τῆς κατηγορίας γενικεύοντας τά γνωστά μέ τήν εἰσαγωγή γραμτων στήν Ἀριθμητική.

έ τήν παραπάνου κατηγορία, νά τό ἀντιπροσωπευτικό της πρόβλημα :

α μονάδες ἑνός πράγματος, ἀξίζουν β δραχμές οἱ γ μονάδες τοῦ ου πράγματος, πόσο ἀξίζουν;

Λύοντας τό πρόβλημα αὐτό βρίσκουμε μιά τιμή τοῦ ἀγνώστου x τήν:

$$=\frac{\beta}{\alpha}\cdot\gamma .$$

36.- Ἡ τελευταία αὐτή ἰσότητα ὀνομάζεται Ἀλγεβρικός ύπος.

Ὥστε : Ἀλγεβρικός τύπος εἶναι ἡ ἔκφραση τοῦ ἐξαγομέ-
υ στό ἀντιπροσωπευτικό πρόβλημα μιᾶς ὡρισμένης κατηγορίας οβλημάτων.

37.- Ἄλγεβρα εἶναι ἡ γενική ἀριθμητική, ἡ ὁποία θά ἀσχοληθεῖ τά ζητήματα τῆς ἀριθμητικῆς, ὅπως καί μέ ζητήματα πού ἡ ἀριθμητιἀδυνατεῖ νά λύσει, χρησιμοποιώντας Ἀλγεβρικούς τύπους.

β) Ἀλγεβρικές Παραστάσεις

38.- Ἀλγεβρική παράσταση ὀνομάζεται ἕνα σύνο-
ἀριθμῶν καί γραμμάτων ἤ μόνο γραμμάτων πού συνδέονται

μέ τά σημεία τῶν ἀλγεβρικῶν πράξεων.

Ἔτσι σέ μιά ἀλγεβρική παράσταση μπορεῖ νά παρουσιάζετα πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, ὕψωση σέ δύναμ καί ἐξαγωγή ριζῶν.

Οἱ παραστάσεις διακρίνονται σέ μονώνυμα καί πολυώνυμα.

39.– Μονώνυμο ὀνομάζεται ἡ ἀλγεβρική παράστα ὅπου τό + καί τό – δέ χρησιμοποιοῦνται σά σημεία πράξεως.

40.– Πολυώνυμο ἀντιθέτως λέγεται ἡ παράσταση που τό + καί τό – χρησιμοποιοῦνται σά σημεία πράξεως. Ἔτσι τό πολυώνυμο εἶναι τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα μονωνύμων*.

Τά μονώνυμα καί τά πολυώνυμα μπορεῖ νά εἶναι παραστάσεις ρητές ἤ ἄρρητες, ἀκέραιες ἤ κλασμ τικές.

Ἡ παράσταση ὀνομάζεται ρητή, ὅταν δέν περιέχει γ ματα κάτου ἀπό ριζικό καί ἄρητη ὅταν περιέχει.

Ἡ παράσταση ὀνομάζεται ἀκεραία ὅταν δέν περιέχ παρονομαστή μέ γράμματα καί κλασματική ὅτα περιέχει.

41.– Ἀκέραιο μονώνυμο λέγεται ἡ ἀλ βρική παράσταση ὅπου οἱ μόνες πράξεις πού παρουσιάζου στά γράμματά της εἶναι πολλαπλασιασμός καί ὕψωση σέ θ τική καί ἀκεραία δύναμη.

42.– Ἀκέραιο πολυώνυμο λέγεται τό

---

* Τά μονώνυμα ἑνός πολυωνύμου ὀνομάζονται ὅροι τοῦ πολυ νύμου.

λυώνυμο ποῦ εἶναι ἀλγεβρικό ἄθροισμα ἀκεραίων μονω- μων.

43.- Βαθμός μιᾶς ἀλγεβρικῆς αραστάσεως.

1ο Ὁ βαθμός σέ ἕνα μονώνυμο δίνεται ἀπό τό ἄθροι- α τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμματικῶν του παραγόντων.

Παράδειγμα: Τό μονώνυμο $3αβ^2γ^3$ εἶναι 6ου βαθμοῦ.

2ο Ὁ βαθμός σέ ἕνα πολυώνυμο δίνεται ἀπό τό βαθμό τοῦ ὅρου , πού ἔχει τό μεγαλύτερο βαθμό.

Παράδειγμα: Τό πολυώνυμο $5αβ+15α^2β^2-3α^2+7β^2$ ἔχει τό βαθ- τοῦ $15α^2β^2$ εἶναι δηλ. 4ου βαθμοῦ.

3ο ὁ βαθμός μιᾶς ἀρρητης παραστάσεως οκύπτει ἄν διαιρέσουμε μέ τό δείχτη τοῦ ριζικοῦ, τό βαθμό τοῦ λυωνύμου πού εἶναι τοποθετημένο κάτου ἀπό τό ριζικό.

Παράδειγμα: Ἡ παράσταση $\sqrt[5]{x^3-5x^2+7x-6}$ εἶναι βαθμοῦ $\frac{3}{5}$.

44.- Παρατήρηση.

Τό βαθμό ἑνός πολυωνύμου παίρνουμε πολλές φορές ὡς πρός ἕνα του γράμμα· εἶναι γράμμα πού παίζει τό ρόλο ἀγνώστου.

Παράδειγμα: Τό πολυώνυμο $αx^3+βx^2+γx+δ$ εἶναι πολυώνυμο τρί- βαθμοῦ ὡς πρός τό γράμμα x.

45.- Πολυώνυμο μέ διάταξη.

α πολυώνυμο λέγεται πολυώνυμο μέ διάταξη ὡς πρός ἕνα γράμμα, ὅταν οἱ ὅροι του εἶναι γραμμένοι μέ τέτια τάξη, ὥστε κθέτες αὐτοῦ τοῦ γράμματος νά πηγαίνουν σταθερά ἐλαττούμενοι αὐξανόμενοι ἀπό ὅρο σέ ὅρο.

46.- Συντελεστές.

Σέ ἕνα ἀλγεβρικό ὅρο ὀνομά- με ἀριθμητικό συντελεστή, τόν ἀριθμητικό παράγοντα αὐτοῦ

τοῦ ὅρου.

Σέ ἕναν ὅρο πού περιέχει ἕναν ἄγνωστο, ὀνομάζουμε συντελεστ
τό γινόμενο τῶν γνωστῶν παραγόντων, ἤ ἐκείνων πού τούς ὑπο
θέτουμε γνωστούς.

Παράδειγμα: Στόν ὅρο $-\frac{4}{3}\alpha\beta^2$ ἀριθμητικός συντελεστής εἶναι $-\frac{4}{3}$, ἐνῶ στήν παράσταση $\alpha x^2+\beta x$, ὅπου τό x θεωρεῖται ἄγνωστος, τά
β θεωροῦνται ἀντίστοιχα συντελεστές τῶν ὅρων αx^2, βx.

47.- Ὅμοιοι ὅροι. Ὀνομάζουμε ὁμοίους ὅρους ἐκείνους τούς ὅρους, πού ἄν διαφέρουν, διαφέρουν μόνο κατά τ
συντελεστή.

48.- Ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων.
ὅμοιοι ὅροι πού ἀντιπροσωπεύουν μεγέθη τῆς ἴδιας φύσης, προσθέτουνται καί ἀφαιροῦνται, ἄν σχηματίσουμε ἕνα μοναδικό ὅρο, π
ἔχει γιά συντελεστή τό ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν.

49.- Ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως. Ὀνομάζουμε ἀριθμητική τιμή μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως τό ἀποτέλεσμα πού προκύπτει ἀπό τήν ἀντικατάσταση τῶν γραμμάτω
μέ ἀληθινούς ἀριθμούς καί τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων πού εἶναι σημειωμένες.

50.- Ταυτότητα. Ὀνομάζουμε ταυτότητα τή σχέση π
ἀληθεύει* γιά κάθε σύστημα τιμῶν πού δίνουμε στά γράμματά τη

Παράδειγμα: Ἡ σχέση $\alpha^2+\beta^2 \geqslant 2\alpha\beta$ εἶναι ταυτότητα. Αὐτή γρ
φεται: $\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geqslant 0$ ἤ $(\alpha-\beta)^2 \geqslant 0$. Καί γιά κάθε σύστημ

---

* Δηλ. μεταβάλλεται σέ ἀριθμητική ἀληθινή ἰσότητα ἤ σέ ἀληθινή ἀριθμητική ἀνισότητα.

ων τιμῶν τῶν α καί β ἀληθεύει ἐάν ἰσότητα καί γιά κάθε σύ-
τημα διαφορετικῶν τιμῶν τῶν α καί β ἀληθεύει ἐάν ἀνισότητα.

52.– Ἡ Συνάρτηση. Μιά βασική γνωρι-
ία μ' αὐτή. Μιά ποσότητα ὀνομάζεται σταθερή
ταν μπορεῖ νά διατηρεῖ τήν ἴδια τιμή παρά τό γεγονός ὅτι μιά ἄλλη
σότητα, πού συνδέεται μαζί της, μεταβάλλεται.

ό ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι
σότητα σταθερή, γιατί ἡ τιμή του εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπό τό μέγε-
ς τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

ό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνός σημείου στή βάση ἰσοσκε-
οῦς τριγώνου ἀπό τίς ἴσες πλευρές τοῦ τριγώνου εἶναι σταθε-
ό, γιατί ἡ τιμή του, πού ὅπως εἶναι γνωστό εἶναι τό ὕψος πού
ντιστοιχεῖ σέ κάθε μιά ἀπό τίς ἴσες πλευρές τοῦ τριγώνου, εἶναι ἀνε-
άρτητη ἀπό τή θέση τοῦ σημείου. Δηλ., ἐνῶ μέ τήν κίνηση τοῦ σημείου
άνου στή βάση τοῦ τριγώνου, μεταβάλλουνται οἱ ἀποστάσεις του ἀπό
ς πλευρές τοῦ τριγώνου, δηλ. μεταβάλλουνται ποσότητες πού συνδέ-
ουνται μέ τό ἄθροισμα, τό ἄθροισμα διατηρεῖ τήν τιμή του.

λόγος τῆς περιφερείας ἑνός ὁποιουδήποτε κύκλου πρός τή
άμετρο τοῦ ἴδιου τοῦ κύκλου εἶναι ποσότητα σταθερή, γιατί ἡ τιμή
υ, πού εἶναι ὁ γνωστός ὑπερβατικός* ἀριθμός π, εἶναι ἀνεξάρτητη
ό τήν περιφέρεια.

53.– Μιά ποσότητα ὀνομάζεται μεταβλητή, ὅταν ἀλλάζει
ιμή τή στιγμή πού ἄλλη ποσότητα, πού συνδέεται μ' αὐτή, μεταβάλ-
ται.

Ἄς δεχτοῦμε ὅτι ἕνα ἄτομο χρειάζεται 500 δραχμές τήν ἡμέρα γιά

---

* Ὑπερβατικοί ὀνομάζουνται οἱ ἀριθμοί πού δέν εἶναι ρίζες ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως.

μεταφορικά ἔξοδα. Εἶναι φανερό πώς ἔπειτα ἀπό δυό μέρες θά ἔχει ξοδέψει 500·2 δραχμές· ἔπειτα ἀπό τρεῖς ἡμέρες 500·3 καί γ νικά ἔπειτα ἀπό x ἡμέρες θά ἔχει ξοδέψει 500·x δραχμές. Ἄν αὐτό τό ποσό, πού θά ἔχει ξοδέψει μετά x ἡμέρες τό καλέσουμε y ἔχουμε τήν ἰσότητα:

$$y = 500 \cdot x \qquad (1)$$

πού ἐκφράζει τήν ἀλληλεξάρτηση τῶν μεταβλητῶν x καί y. Δηλ., ἐδ ἔχουμε δυό μεταβλητές:

Τόν ἀριθμό τῶν ἡμερῶν πού ἐκφράζεται μέ τό x καί τό ποσόν τῶν χρ μάτων πού ξοδεύουνται. Εὔκολα καταλαβαίνει κανείς, ὅτι αὐτές οἱ μεταβλητές δέν εἶναι ἀπό τήν ἴδια φύση. Ἡ μιά, ἡ x, μπορεῖ νά μετ βάλλεται αὐθαίρετα, κατά τήν ἐπιθυμία μας, ἐνῶ ἡ ἄλλη, ἡ y, μετ βάλλεται ἀναγκαστικά, ἐξαρτημένα, σέ συνάρτηση μέ τ x. Δηλ., ἐφόσο μεταχειριζόμαστε τά ἴδια μεταφορικά μέσα, δηλ., ἐφ σο μεταβάλλεται τό x, τό y ἀναγκαστικά μεταβάλλεται, γιατί βρίσ ται σέ ἐξάρτηση, σέ συνάρτηση μέ τή x, τήν ὁποίαν μάλιστα ἐκφρά ἡ παραπάνου ἰσότητα (1).

Ἄς θεωρήσουμε ἕνα πολυώνυμο, τό $5x^2-3x+7$. Ἄν τό πολυώνυμο αὐτό τό καλέσουμε y ἔχουμε τήν ἰσότητα $y=5x^2-3x+7$.

Ἐδῶ παρατηροῦμε, ὅτι ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου. ἐξαρτιέτ μόνου ἀπό τήν τιμή πού παίρνει τό γράμμα x. Ἐνῶ λοιπόν στό γράμ μα x δίνουμε μιάν αὐθαίρετη τιμή, τό y παίρνει μιά ὁρισμένη τιμ πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή τήν τιμή πού πῆρε τό x. Τά γράμματα λοιπόν καί y ἐκπροσωποῦνε δυό μεταβλητές πού ἡ μιά παίρνει τιμές κατ τήν ἐπιθυμία μας, ἐνῶ ἡ ἄλλη παίρνει τιμές πού εἶναι ἐξάρτηση τ τιμῶν πού δίνουμε στήν πρώτη.

Μέ τά παραπάνου δυό παραδείγματα νοιώσαμε νομίζω τήν ἔννοι τῆς μεταβλητῆς καί ξεκαθαρίσαμε τίς δυό χαρακτηριστικές κατηγορίες στίς ὁποῖες μπορεῖ νά ἀνήκει μιά μεταβλητή. Ἡ ποσότητα πού μεταβάλλεται αὐθαίρετα, ἀνεξάρτητα ἀπό ἄλλη ποσότητα, ὀνομάζεται ἀνεξάρτητη μεταβλητή, ἐνῶ ἐκείνη ἡ ποσότητα, πού ἡ μεταβολή της βρίσκεται σέ ἐξάρτηση μέ τήν αὐθαίρετη μεταβολή μιᾶς ἄλλης ποσότητας, ὀνομάζεται ἁπλῶς συνάρτηση αὐτῆς τῆς ποσότητας.

Ἔτσι στά δυό παραπάνου παραδείγματα τό x ἐκπροσωπεῖ μιάν ἀνεξάρτητη μεταβλητή ποσότητα, ἐνῶ τό y τή συνάρτηση αὐτῆς τῆς x.

Ἄς πάρουμε ἀκόμη τήν ἰσότητα $y=\sqrt{x}$. Ἐάν δίνουμε στό x μόνο θετικές τιμές, τότε σέ κάθε τέτια τιμή τοῦ x ἀντιστοιχοῦνε δυό τιμές τοῦ y. Στήν τιμή λογουχάρη τοῦ $x=25$ ἀντιστοιχοῦνε γιά τό y οἱ τιμές 5 καί -5 γιατί καί $5^2=25$ καί $(-5)^2=25$. Βλέπουμε λοιπόν ἀπό αὐτό τό παράδειγμα, ὅτι εἶναι τέτια ἡ ἐξάρτηση τῆς μεταβλητῆς y ἀπό τή μεταβλητή x, ὥστε σέ κάθε αὐθαίρετο θετικό προσδιορισμό τῆς x νά ἀντιστοιχοῦνε δυό τιμές τῆς y. Παρακάτου θά ἰδοῦμε παραδείγματα, πού σέ κάθε τιμή μιᾶς μεταβλητῆς x ἀντιστοιχοῦνε περισσότερες τιμές τῆς y. Ἔτσι μποροῦμε νά λέμε:

54.– 1º Ὀνομάζουμε ἀνεξάρτητες μεταβλητές τίς ποσότητες στίς ὁποῖες μποροῦμε νά δώσουμε τιμές διαλεγμένες αὐθαίρετα.

2º Ὀνομάζουμε μεταβλητές ἐξαρτημένες ἤ συναρτήσεις τίς ποσότητες πού εἶναι προσδιορισμένες ἀπό τήν τιμή τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν.

Τή συνάρτηση τή σημειώνουμε συμβολικά μέ τίς ἰσότητες $y=\sigma(x)$ ἤ $y=f(x)$ καί διαβάζουμε y ἴσον σίγμα τοῦ x ἤ y ἴ εφ τοῦ x.

Τά γράμματα σ καί f εἶναι τά ἀρχικά τῆς λέξεως συνάρτηση ἑλληνικά καί στά γαλλικά ὅπου λέγεται fonction.

Στά παραδείγματα πού ἀναφέραμε μέ τό $\sigma(x)$ ἤ μέ τό $f(x)$ μειώνουμε τό $500\cdot x$ γιά τό πρῶτο παράδειγμα καί τό πολυώνυμ $5x^2-3x+7$ γιά τό δεύτερο. Ἄν θέλουμε λοιπόν νά ἐκφράσουμε τό ἐμβαδόν E ἑνός κύκλου ἐξαρτιέται ἀπό τήν ἀκτίνα του γρ φουμε : $E=f(\rho)$.

Σημειώνουμε ὅτι δέν εἶναι ὑποχρεωτική ἡ χρήση τῶν γραμμά σ καί f γιά νά σημειώσουμε μιά συνάρτηση. Μποροῦμε νά μετα ριστοῦμε ὁποιοδήποτε γράμμα, ἀρκεῖ βέβαια νά ξέρουμε, ὅτι γ φοντας λογουχάρη $K(x)$ ἐννοοῦμε μιά ποσότητα, πού ἡ τιμή τη ἐξαρτιέται ἀπό τήν τιμή τοῦ x.

55.- Σημείωση. Σέ μιά σχέση, πού ἐκφράζει τήν ἀλλη ξάρτηση δύο μεταβλητῶν, μποροῦμε νά πάρουμε ὁποιαδήποτε ἀπ τίς δυό γιά ἀνεξάρτητη μεταβλητή. Ἔτσι ἡ ἄλλη μεταβλητή πού μέ θά ἐκπροσωπεῖ τή συνάρτηση.

Καί στά δυό παραδείγματα πού ἀναφέραμε μποροῦμε νά θεωρ με τήν ποσότητα y σάν ἀνεξάρτητη μεταβλητή καί τό x σά συ τηση· γιατί σέ κάθε αὐθαίρετο προσδιορισμό τῆς y θά ἀντιστοιχ ὁρισμένες τιμές τῆς x, τίς ὁποῖες θά μάθουμε νά βρίσκουμε στά σικά κεφάλαια λύσεως ἐξισώσεων $1^{ου}$ καί $2^{ου}$ βαθμοῦ πού θά π ματευτοῦμε ἀργότερα.

56.- Μία μεταβλητή u μπορεῖ νά εἶναι συνάρτηση ὄχι μιᾶς λά περισσοτέρων ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν. Ὅπως λογουχάρη, τό βαδό ἑνός παραλληλογράμμου εἶναι συνάρτηση τῶν δύο του διαστάσεων ἤ ὁ ὄγκος ἑνός στερεοῦ εἶναι συνάρτηση τῶν τριῶν του διαστάσεων. Ἀκόμη τό πολυώνυμο $3xy-5x^2y+3y^2$ εἶναι συνάρτηση τῶν γραμμάτων x καί y τά ὁποῖα περιέχει.

Τή συνάρτηση πολλῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν τή σημειώνουμε συμβολικά μέ τίς ἰσότητες:

$$u=\sigma(x,y,z,\ldots\ldots t) \text{ ἤ } u=f(x,y,z,\ldots\ldots t).$$

56.– Αὔξουσα λέγεται μιά συνάρτηση, ὅταν αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται τή στιγμή πού αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή ἀπό τήν ὁποίαν ἐξαρτιέται.

57.– Φθίνουσα λέγεται μιά συνάρτηση, ὅταν αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται τή στιγμή πού ἐλαττώνεται ἤ αὐξάνεται ἡ ἀνεξάρτητη μεταβλητή ἀπό τήν ὁποίαν ἐξαρτιέται.

Τό πρῶτο μας παράδειγμα εἶναι παράδειγμα μιά αὔξουσα συνάρτηση. Ἐνῶ ἡ συνάρτηση $y=\frac{5}{x}$, μέ τιμές τοῦ x μεγαλύτερες ἀπό τή μονάδα, εἶναι παράδειγμα μιά φθίνουσα συνάρτηση.

Ἀσκήσεις

109) Σέ ποιό εἶδος παραστάσεως ἀνήκει ἡ κάθε μιά ἀπό τίς παρακάτου ἀλγεβρικές παραστάσεις;

$$3\alpha\beta\sqrt{5}\ ,\ \frac{2}{3}\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2\ ,\ \frac{xy\sqrt{\omega}}{5}\ ,\ 2x^2y-5xy^3+7xy\ ,$$

$$\frac{2}{3}x^2y\sqrt{\omega},\ \frac{5xy}{\omega},\ \frac{xy^2-3xy+7x^2}{5x-3y}\ ,\ \frac{8x^2y\sqrt{\omega}}{\varphi}$$

110) Νά βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικές τιμές τῶν παρακάτου παραστάσεων μιά τίς σημειούμενες τιμές τῶν γραμμάτων τους.

1ο $$\frac{\alpha^3(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3(\gamma+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^3(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \text{ διά}$$

$$\alpha=6\ ,\ \beta=3\ ,\ \gamma=-2 \quad \text{ἤ} \quad \alpha=\frac{2}{3}\ ,\ \beta=\frac{1}{2}\ ;\ \gamma=-1$$

2ᵒ $$\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)}+\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{2xyz}{(y+z)(z+x)(x+y)}$$

διά $x=-\frac{3}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-2$.

3ᵒ $$\frac{1+\dfrac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\frac{1+x}{1-x}}}{1-3\cdot\dfrac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-3\frac{1+x}{1-3x}}}$$ διά $x=-2$ ἤ $x=-\frac{1}{3}$

4ᵒ $$\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma}(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)+\frac{\gamma+\alpha}{\alpha\gamma}(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$$

διά $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-3$ ἤ $\alpha=-\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{3}{2}$, $\gamma=\frac{1}{4}$.

111) Γιά ποιές τιμές τοῦ x ἡ παράσταση

$\frac{x+1}{x-2}-\frac{x+2}{x+3}-5$ δέν ἔχει νόημα; (δηλ. δέν ἔχει κάποια ἀρι
μητική τιμή;).

112) Ἀπό τή φυσική: Ἡ πίεση ὁρισμένης μάζας ἀερίου σέ ποιοῦ εἴδους συνάρτηση βρίσκεται μέ τόν ὄγκο του; (Νόμος τοῦ Boyl
Mariotte).

113) Νά δειχτεῖ, ὅτι γιά θετικές τιμές τοῦ x ἡ συνάρτηση $\frac{5}{x^2+3}$ εἶναι φθίνουσα, ἐνῶ γιά ἀρνητικές τιμές τοῦ x εἶναι αὔξουσα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

Άλγεβρικές πράξεις

58.– **Άλγεβρική πρόσθεση.** Τό νά προσθέσουμε άλγεβρικές αστάσεις σημαίνει, νά άναζητήσουμε μιάν άλλη άλγεβρική παράσταση, ή άριθμητική της τιμή θά είναι ίση μέ τό άθροισμα τών άριθμητικών ών τών παραστάσεων πού προσθέτουμε, όποιεσδήποτε καί νά είναι οί ίδιαί- ες τιμές μέ τίς όποίες άντικατασταίνουμε τά γράμματα τών παραστά- ν.

59.– **Πρόσθεση μονωνύμων.** Προσθέτουμε μονώνυμα σχη- ίζοντας ένα πολυώνυμο μέ όρους τά μονώνυμα αύτά. Αύτός ό κανόνας τό άποτέλεσμα άπό τόν όρισμό τού πολυωνύμου (έδ.40).

60.– **Πρόσθεση πολυωνύμων.** Προσθέτουμε πολυώνυ- σχηματίζοντας ένα μόνο πολυώνυμο άπό όλους τούς όρους αύτών τών υωνύμων.

Πραγματικά, μπορούμε νά γράψουμε:

$$(\alpha+\beta-\gamma)+(\rho-\kappa)+(-\mu+\nu+\tau)=\alpha+\beta-\gamma+\rho-\kappa-\mu+\nu+\tau.$$

Η δεύτερη παράσταση είναι ισοδύναμη μέ τήν πρώτη, γιατί είναι φα- , έπειτα άπό τόν όρισμό τού πολυωνύμου καί τήν ίδιότητα (έδ. 8β), σ' ένα πολυώνυμο μπορούμε νά άντικαταστήσουμε δύο ή περισσότερους ς μέ τό πραγματοποιούμενο άθροισμά τους.

Τό πολυώνυμο-άθροισμα- μπορεί νά έχει όμοιους όρους. Αύτών τών κάνουμε άναγωγή.

1.– **Άλγεβρική άφαίρεση.** Τό νά άφαιρέσουμε μιά άλγεβρι- αράσταση άπό μιάν άλλη, σημαίνει νά άναζητήσουμε μιά τρίτη άσταση, όπου ή άριθμητική της τιμή θά είναι ίση μέ τή διαφορά άριθμητικών τιμών τών δύο παραστάσεων πού μάς δίνουνται, ὁποιεσδήποτε κι ἄν εἶναι οἱ ἰδιαίτερες τιμές τίς ὁποῖες δίνουμε σ

γράμματα τῶν δύο παραστάσεων.

62.– Μποροῦμε ἀκόμη νά λέμε: Τό νά ἀφαιρε

με μιά Ἀλγεβρική παράσταση Α ἀπό μιάν ἄλλη Ἀλγεβρική

ράσταση Β, εἶναι, τό νά ἀναζητήσουμε μιά τρίτη παράσταση Γ,

α, ἄν προστεθεῖ στή Β, νά μᾶς δίνει τήν Α.

63.– Κανόνας. Γιά ν' ἀφαιρέσουμε ἕνα μονώνυμο ἤ ἕνα

ώνυμο ἀπό μιά ἀλγεβρική παράσταση, ἀρκεῖ νά προσθέσουμε στ

ράσταση αὐτή τό ἀντίθετο μονώνυμο ἤ πολυώνυμο. Ἔχουμε λοιπόν

$$A-(α-β+γ-δ)=A-α+β-γ+δ$$

Πραγματικά, ἄν στό πολυώνυμο $A-α+β-γ+δ$ προσθέσουμε τό

ώνυμο πού πρόκειται ν' ἀφαιρεθεῖ $α-β+γ-δ$, βρίσκουμε (ἐδ. 6

$$(A-α+β-γ+δ)+(α-β+γ-δ)=A-α+β-γ+δ+α-β+γ-δ=A$$

64.– Παρενθέσεις. Ἐπειδή ἡ χρήση τῶν παρενθέ

εἶναι πολύ συχνή στήν Ἄλγεβρα, ἀξίζει νά τονίσουμε τούς κ

νες μέ τούς ὁποίους τίς χρησιμοποιοῦμε, ἄν καί οἱ κανόνες αὐ

δέν εἶναι νέοι.

65.– Παρενθέσεις πού ἔχουνε τό σημεῖ

Οἱ παρενθέσεις αὐτές δείχνουνε μιά πρόσθεση πού ζητάει π

ματοποίηση. Ἔτσι μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τόν ἀκόλουθο κα

(ἐδ. 60).

66.– Μποροῦμε σέ μιά ἀλγεβρική παρά

ση νά παραλείψουμε μαζί μέ τό σημεῖ

τίς παρενθέσεις πού ἔχουνε μπροστά

τους τό σημεῖο +.

Παραδείγματα: $α+β+γ+(δ-ε+ζ)=α+β+γ+δ-ε+ζ$

$$α+β+(-γ-δ+ε)=α+β-γ-δ+ε$$

αρατηροῦμε, ὅτι αὐτός ὁ κανόνας δέ διαφέρει ἀπό τόν κανόνα τῆς
ροσθέσεως.

αρατηροῦμε ἀκόμη, πώς, ὅταν ὁ πρῶτος ὅρος μέσα σέ μιά πα-
ένθεση εἶναι θετικός, τό ὑπονοούμενο σημεῖο του + πρέπει νά τοῦ
οδοθεῖ μετά τήν ἀπάλειψη τῆς παρενθέσεως. Αὐτό ἐνδιαφέρει τό
ρῶτο μας παράδειγμα.

π' αὐτό τόν κανόνα βγάζουμε τόν ἀντίστροφο κανόνα:

67.– Σέ μιά Ἀλγεβρική παράσταση ἐπιτρέπεται πάντοτε νά θέ-
υμε ἕνα ὁποιοδήποτε ἀριθμό ὅρων μέσα σέ παρενθέσεις πού ἔχουνε
ροστά τους τό σημεῖο +.

Παράδειγμα :

$$\alpha-\beta-\gamma-\delta+\varepsilon=\alpha-\beta+(-\gamma-\delta+\varepsilon).$$

68.– Παρενθέσεις πού ἔχουνε τό σημεῖο –
αὐτές τίς παρενθέσεις, πού περιέχουνε ἕνα πολυώνυμο μιά ἀφαί-
ση. μποροῦμε νά λέμε (ἐδ. 63):

69.– Σέ μιά ἀλγεβρική παράσταση μποροῦμε νά
αραλείψουμε μέ τά σημεῖα τους τίς παρενθέ-
εις πού ἔχουνε μπροστά τους τό σημεῖο –, ὑπό
όν ὅρο νά ἀντικαταστήσουμε κάθε ὅρο τῶν
ολυωνύμων πού περιέχουν μέ τόν ἀντίθετό
ου.

70.– Ἀντίστροφα, μποροῦμε σέ μιά ἀλγεβρική
αράσταση νά θέσουμε σέ παρενθέσεις πού
ρνοῦνε μπροστά τους τό σημεῖο –, ἕνα ὁποιοδή-
τε ἀριθμό ὅρων, ἀρκεῖ, κάθε ὅρος πού θά μπαί-
ι στίς παρενθέσεις, νά ἀντικατασταίνεται ἀπό
υ ἀντίθετό του.

ράδειγμα : $\alpha-\beta-\gamma+\delta-\varepsilon=\alpha-\beta-(\gamma-\delta+\varepsilon).$

Ὅταν μιά παράσταση, πού βρίσκεται ἀνάμεσα σέ παρενθέσ
περιέχει κί αὐτή παρενθέσεις, γιά νά ἀποφύγουμε κάθε σύγχυση, ε
ἀνάγκη νά μεταχειριστοῦμε παρενθέσεις διαφορετικοῦ σχήματος.
αὐτό τό σκοπό χρησιμοποιοῦμε τά ζέγματα* $\{\,\}$ ἤ τίς ἀγκύλες $[\,]$

Σέ μιά παράσταση μποροῦμε νά καταργοῦμε τίς παρενθέσε
ζέγματα, τίς ἀγκύλες, πού περιέχει, ἐφαρμόζοντας τούς κανόνες
ἐδαφίων (66, 68).

Παραδείγματα : 1ο $a-\beta+2\gamma-[2\beta+(3a-5\beta-2\gamma)]=$

$$a-\beta+2\gamma-2\beta-(3a-5\beta-2\gamma)=a-\beta+2\gamma-2\beta-3a+5\beta+2\gamma=-2a+$$

2ο $a+\beta-[(\gamma-a)-(a-3\beta)]-\{2+[3a-(5+7a-3\beta)]$

$$=a+\beta-(\gamma-a)+(a-3\beta)-2-[3a-(5+7a-3\beta)]=$$

$$a+\beta-\gamma+a+a-3\beta-2-3a+(5+7a-3\beta)=$$

$$a+\beta-\gamma+a+a-3\beta-2-3a+5+7a-3\beta=7a-5\beta-\gamma$$

71.– **Ἀλγεβρικός πολλαπλασιασμός.** Πο
πλασιασμός δύο ἤ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ε
ἡ ἀναζήτηση μιᾶς ἄλλης παραστάσεως, πού ἡ ἀριθμητική της τ
νά εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν παραστά
πού μᾶς δίνουνται, ὁποιεσδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ ἰδιαίτερες τιμές
ὁποῖες ἀντικατασταίνουμε τά γράμματα τῶν παραστάσεων.

72.– **Πολλαπλασιασμός μονωνύμων.** Ἄς
ρήσουμε τά μονώνυμα : $5a^3\beta^2\gamma$, $\frac{2}{3}a^4\beta^3$. Πολλαπλασιάζοντ
ἔχουμε :

$$p=5a^3\beta^2\gamma\cdot\frac{2}{3}a^4\beta^3$$

καί ἀδιαφορώντας γιά τή τάξη τῶν παραγόντων, παίρνουμε :

$$p=5\cdot\frac{2}{3}a^3\cdot a^4\cdot\beta^2\cdot\beta^3\cdot\gamma$$

---

* Ἀπό τό ζέχνω (τό ἀρχαῖο ζευγνύω καί ζεῦγμα).

Καί έπειδή σ'ένα γινόμενο μπορούμε νά άντικαταστήσουμε δύο ή πε-
σσότερους παράγοντες μέ τό γινόμενό τους, παίρνουμε τελικά:

$$\rho=\frac{10}{3}\alpha^{7}\cdot\beta^{5}\cdot\gamma.$$

73.– Κανόνας. Γιά νά πολλαπλασιάσουμε δύο ή περισσότερα
ονώνυμα, πολλαπλασιάζουμε τούς συντελεστές τους καί δεξιά άπό
γινόμενό τους γράφουμε, σάν παράγοντα, κάθε γράμμα ύψωμένο
έκθέτη ίσο μέ τό άθροισμα τών έκθετών, πού έχει αύτό τό γράμμα στά
ονώνυμα πού πολλαπλασιάζονται.

74.– Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου έπί ένα μονώνυμο. Έπειτα άπό τό θεώρημα (έδ. 14β) βλέ-
ουμε, ότι άρκεί νά πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο τού πολυωνύμου έπί τό
ονώνυμο καί νά προσθέσουμε τά μερικά γινόμενα.

75.– Πολλαπλασιασμός πολυωνύμου έπί πολυώνυμο. Καί έδώ στηριζόμενοι στό θεώρημα
έδ. 14γ) βγάζουμε τόν κανόνα: Γιά νά πολλαπλασιάσουμε πολυώνυ-
ο έπί πολυώνυμο άρκεί νά πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο τού πολ-
απλασιαστέου έπί κάθε όρο τού πολλαπλασιαστή καί νά προσθέσου-
ε τά μερικά γινόμενα.

Περιττεύει νά έπαναλάβουμε έδώ τή γνωστή άπό τά Γυμνασιακά
βλία διάταξη πού έφαρμόζουμε σ' αύτή τήν πράξη, γιά νά εύκολύ-
ουμε τήν έκτέλεσή της. Έχουμε μόνο ύποχρέωση νά ύπενθυμίσουμε
μπεράσματα πού ή άλήθειά τους γίνεται άμεσα φανερή άπ'αύτό
ν ίδιο τόν τρόπο μέ τόν όποίο έκτελούμε τόν πολλαπλασιασμό δύο πο-
ωνύμων.

76.– Συμπέρασμα. Ό βαθμός τού γινομένου δύο πολυωνύμων
ός ένα τους γράμμα είναι ίσος μέ τό άθροισμα τών βαθμών τών πολυω-
μων, πού μάς δίνονται, πρός τό ίδιο γράμμα.

77.– 2ο Συμπέρασμα. Άν δύο πολυώνυμα έχουνε μπεί σέ διάταξη κατά τίς ἀνιοῦσες ἤ τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ ἴδιου γράμματος (κατά τόν ἴδιο τρόπο καί τά δυό) οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ γινομένου τους, εἶνα μενα τῶν ἄκρων ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου καί τοῦ πολλαπλασιαστ

Αὐτό τό συμπέρασμα περιέχεται μέσα σ' αὐτή τή γενικότερη πρ Τό γινόμενο δύο πολυωνύμων κλεῖ μέσα του τό λιγότερο δυό ὅρο πού δέν ἔχουνε τούς ὅμοιούς τους (δύο ὅρους μή ἀναγωγήσιμους) σπ νους στό εἶδος τους.

78.- 3º Συμπέρασμα. Ὁ ἀριθμός τῶν ὅρων ἑνός γινομέν προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό δύο πολυωνύμων, εἶναι τό πολύ ἴ μέ τό γινόμενο πού προκύπτει ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τοῦ ἀριθμ τῶν ὅρων τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπί τόν ἀριθμό τῶν ὅρων τοῦ πολλα σιαστῆ καί τό λιγότερο ἴσος μέ τόν ἀριθμό δύο.

Ἀσκήσεις

113) Νά ὑπολογίστε τά παρακάτου ἀθροίσματα :

1º $(9x^2-8xy+2y^2)+(-2x^2+10xy-y^2)+(9x^2-7xy-8y^2)$

2º $(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha\beta^3-\beta^4)+(2\alpha^3\beta+8\alpha^2\beta^2+2\beta^4)+(-5\alpha^4-9\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3)$

114) Νά βρεθοῦν τά ἐξαγόμενα ἔπειτα ἀπό τήν ἐκτέλεση τῶν πα κάτου πράξεων :

1º $2\alpha-3\beta+\gamma-(4\alpha-\beta+2\gamma)-[\alpha+3\beta-\gamma-(2\beta+\gamma)]+$
$[-2\alpha+\beta+\gamma+(4\beta-\gamma)]-[-(\alpha+\beta)+5\alpha+\beta-\gamma]$.

2º $\alpha-[\beta-[\alpha-(\beta-\alpha)]]-[\alpha+\beta-[\alpha+(\beta-\alpha)]]$.

3º $3\alpha^4-6\alpha^2\beta^2+[2\beta^4-\alpha^2\beta^2-[\alpha^4+\beta^4-(\alpha^2\beta^2-2\alpha^4)]]$.

115) Νά ὑπολογιστοῦν τά γινόμενα:

1º $\left(-\frac{5}{3}\alpha^3\beta x\right)\left(-\frac{3}{4}\alpha^5x^3y\right)\left(-\frac{4}{5}xy^2\gamma\right)$. 2º $\left(-\frac{3}{4}\alpha^{2\nu+1}\beta^{3\mu-1}\right)\left(-\frac{2}{9}\alpha\right.$

3º $\left(x^{\frac{\mu+\nu-\rho}{2}}+x^{\frac{\mu-\nu+\rho}{2}}+x^{\frac{\nu+\rho-\mu}{2}}\right)x^{\frac{\mu+\nu+\rho}{2}}$. 4º $\left(-\frac{1}{2}\alpha^2\beta\gamma\right)\left(3\alpha\beta^2\gamma-\frac{2}{3}\alpha^3\beta-\right.$

5º $\left(\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{4}x^3y+\frac{1}{6}x^2y^2-\frac{1}{4}xy^3+\frac{2}{3}y^4\right)\left(x^2-\frac{1}{2}xy+y^2\right)$.

116) Νά μποῦν σέ διάταξη κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τοῦ x τά όλουθα πολυώνυμα :

$$A = 2ax^3 - x^2 + 3a - x^3 + 4ax - ax^2 - 3x .$$

$$B = 2ax^2 - x^3 - 3 + x^2 - ax^3 + 2ax .$$

$$\Gamma = -4a + ax + 3ax^3 - 2x^3 + 4x - 1 - ax^2$$

ὶ κατόπιν νά ὑπολογιστοῦν τά πολυώνυμα :

$$\Pi_1 = 2A + 3B - 4\Gamma , \quad \Pi_2 = A - 2B + \Gamma , \quad \Pi_3 = -3A - B + 3\Gamma .$$

Τέλος νά διαπιστώσετε, ὅτι τό ἄθροισμα αὐτῶν τῶν τριῶν πολυωνύμων ναι μηδέν.

117) Δίνουνται τά πολυώνυμα :

$$= a^3 - 3a^2\beta + 2a\beta^2 - 5\beta^3 , \quad B = a^3 + 3a^2\beta - 5a\beta^2 + \beta^3 , \quad \Gamma = a^3 - a^2\beta + 2a\beta^2 + 2\beta^3$$

ά ὑπολογιστοῦν οἱ παραστάσεις :

) $AB\Gamma$ β) $(A+B)\Gamma$ γ) $A+B\Gamma$ δ) $(A-B)\Gamma$ ε) $A-B\Gamma$ στ) $3A(\Gamma-B)$.

79. – **Ἀλγεβρική διαίρεση.** Διαίρεση δύο ἀλγεβρικῶν ραστάσεων εἶναι ἡ ἀναζήτηση μιᾶς τρίτης παραστάσεως, πού ἡ ἀριθτική της τιμή νά εἶναι ἴση μέ τό πηλίκο τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν ο παραστάσεων πού μᾶς δίνουνται, ὁποιεσδήποτε κι ἄν εἶναι οἱ ἰδιαίτεες τιμές, μέ τίς ὁποῖες ἀντικατασταίνουμε τά γράμματα τῶν παραστάσεων.

Οἱ δυό παραστάσεις πού μᾶς δίνουνται ὀνομάζουνται διαιρετέος καί αιρέτης.

Ἡ διαίρεση εἶναι ἡ ἀντίστροφη πράξη τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.

80. – **Διαίρεση μονωνύμων.** Ὀνομάζουμε πηλίκο ἑνός ονωνύμου A μέ ἕνα μονώνυμο B ἕνα τρίτο μονώνυμο Γ, ἐάν ὑπάρχει, ού τό γινόμενό του ἐπί τό B νά δίνει τό A.

ς ὑποθέσουμε ὅτι τό μονώνυμο Γ ὑπάρχει. Τότε, σύμφωνα μέ τό ἐδάφιο 72 πρέπει:

1ο Ὁ συντελεστής τοῦ A νά εἶναι ἴσος μέ τό γινόμενο πού προκύπτει ἀπό ν πολλαπλασιασμό τοῦ συντελεστῆ τοῦ B ἐπί τό συντελεστή τοῦ Γ καί ἐποένως ὁ συντελεστής τοῦ Γ δέ μπορεῖ παρά νά εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ συντελεστῆ τοῦ Α μὲ τὸ συντελεστὴ τοῦ Β.

2ο Τὸ Α νὰ κλεῖ μέσα του κάθε κοινὸ γράμμα ποὺ ἔχουνε τὰ Β καὶ μὲ ἐκθέτη ἴσο μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν ποὺ ἔχει αὐτὸ τὸ γράμμα σ Β καὶ Γ. Ἐπομένως, ἐὰν τὰ Β καὶ Γ ἔχουνε ἕνα κοινὸ γράμμα, αὐτὸ θὰ καὶ κοινὸ γράμμα τῶν Α καὶ Β καὶ ὁ ἐκθέτης του στὸ Α θὰ εἶναι μεγα τερος ἀπὸ τὸν ἐκθέτη του στὸ Β. Ἔτσι βγαίνει τὸ συμπέρασμα, πὼς τὸ κλεῖ μέσα του ἕνα κοινὸ γράμμα τῶν Α καὶ Β, μὲ ἐκθέτη ἴσο μὲ τὴ δ φορὰ τῶν ἐκθετῶν, ποὺ ἔχει αὐτὸ τὸ γράμμα στὰ Α καὶ Β, ἐὰν ὁ ἐκθέτης ἔχει αὐτὸ τὸ γράμμα στὸ Α εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἐκθέτη ποὺ ἔχει ἴδιο γράμμα στὸ Β.

Ἐὰν ὁ ἐκθέτης σ' ἕνα γράμμα τοῦ μονωνύμου Β εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἐκθέτη ποὺ ἔχει τὸ ἴδιο γράμμα στὸ μονώνυμο Α, πηλίκο δὲν ὑπάρχε

3ο Τὸ Α νὰ κλεῖ μέσα του ἕνα γράμμα, τὸ ὁποῖο ὑπάρχει μόνο σ' ἕναν τοὺς παράγοντες, μὲ τὸν ἐκθέτη ποὺ ἔχει σ' αὐτὸ τὸν παράγοντα. Ἀκόμη, κα γράμμα ποὺ ὑπάρχει στὰ Β καὶ Α μὲ τὸν ἴδιο ἐκθέτη, νὰ μὴ μπορεῖ νὰ μπ στὸ Γ καὶ κάθε γράμμα, ποὺ περιέχεται στὸ Α χωρὶς νὰ περιέχεται στὸ Β, ν ἐξακολουθεῖ νὰ ὑπάρχει στὸ Γ μὲ τὸν ἐκθέτη ποὺ ἔχει στὸ Α.

Ἔτσι βγαίνει ὁ κανόνας: Γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα μονώνυμο μὲ ἕνα ἄλλο μονώνυμο διαιροῦμε τὸ συντελεστὴ τοῦ διαιρετέου μὲ τὸ συντε στὴ τοῦ διαιρέτη καὶ δεξιὰ ἀπὸ τὸ πηλίκο τους γράφουμε τὰ γράμματα, τ ὁποῖα εἶναι κοινὰ στὸ διαιρετέο καὶ τὸ διαιρέτη, μὲ ἐκθέτη τὴ διαφορὰ τῶ ἐκθετῶν. Ἐὰν ἕνα γράμμα εἶναι μόνο στὸ διαιρετέο τὸ γράφουμε στὸ πηλ μὲ τὸν ἐκθέτη του.

81.— Παρατήρηση. Στὴν περίπτωση ποὺ δὲν ὑπάρχει πηλίκο δύ μονωνύμων καὶ αὐτὸ συμβαίνει ὅταν 1ο ὁ διαιρέτης κλεῖ μέσα το γράμματα ποὺ δὲν περιέχει ὁ διαιρετέος καὶ 2ο διαιρέτης κλεῖ μέσα του γράμματα μὲ ἐκθέτη μ αλύτερο ἀπό τόν ἐκθέτη τῶν ἴδιων γραμμάων στό διαιρετέο, σημειώνουμε τό πηλίκο μέ τή μορφή ἑνός λάσματος κάνοντας τίς δυνατές ἀπλοποιήσεις. Θά ἰδοῦμε ἀργότερα μέ ί τρόπο ἀπλοποιεῖται ἕνα ἀλγεβρικό κλάσμα.

81.— Διαίρεση ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώνυμο. ὸ πηλίκο πού προκύπτει ἀπό τή διαίρεση ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώυμο εἶναι τό πολυώνυμο, ἐάν ὑπάρχει, πού τό γινόμενο τοῦ πολλαπλαασμοῦ του ἐπί τό μονώνυμο εἶναι τό δοσμένο πολυώνυμο.

Εἶναι φανερό, ὅτι τό πηλίκο δέν μπορεῖ νά εἶναι παρά πολυώνυμο, γιατί να μονώνυμο, ὅταν πολλαπλασιαστεῖ ἐπί ἕνα ἄλλο μονώνυμο, θά μᾶς δημιουργήσει καί πάλι μονώνυμο. Ἀλλά τό γινόμενο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἑνός ολυωνύμου ἐπί ἕνα μονώνυμο προκύπτει μέ τόν πολλαπλασιασμό ἐπί τό μοώνυμο τοῦ καθενός ὅρου τοῦ πολυωνύμου. Ὥστε, γιά νά βροῦμε τό πηλίο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μοώνυμο, ἀρκεῖ νά διαιρέσουμε μέ τό μονώνυμο κάε ὅρο τοῦ πολυωνύμου.

82.— Παρατήρηση. Γιά νά ὑπάρχει φυσικά τό πηλίκο τῆς ιαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου μέ ἕνα μονώνυμο, θά πρέπει κάθε ὅρος οῦ πολυωνύμου νά εἶναι διαιρετός (ἐδ.80) μέ τό μονώνυμο.

83.— Διαίρεση δύο ἀκεραίων καί μέ διάταξη πολυνύμων. Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο, πού βρίσκεται σέ διάταξη ὡς πρός να γράμμα x, εἶναι συνάρτηση αὐτοῦ τοῦ γράμματος. Μποροῦμε λοιπόν ά λέμε τό πολυώνυμο $f(x)$.

Διαίρεση ἑνός πολυωνύμου $f_1(x)$ μέ ἕνα ἄλλο πολυώνυο $f_2(x)$ εἶναι νά βροῦμε δύο ἄλλα πολυώνυμα $\pi(x)$ καί $\upsilon(x)$, ὅπου ό $\upsilon(x)$ νά εἶναι βαθμοῦ κατώτερου ἀπό τό βαθμό τοῦ $f_2(x)$ καί τέια, ὥστε νά ἰσχύει ἡ ταυτότητα :

$$f_1(x)\equiv f_2(x)\pi(x)+y(x) \qquad (1)$$[*]

Συμβαίνει τό $y(x)$ νά εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν, δηλ. νά ἰσχύει ἡ ταυτό $f_1(x)\equiv f_2(x)\pi(x)$. Στήν περίπτωση αὐτή λέμε, ὅτι ἡ διαίρεση τῶν δύο π νύμων εἶναι τελεία ἤ ὅτι τό πολυώνυμο $f_1(x)$ εἶναι διαιρετό μέ τό

Ἄς ὑποθέσουμε, ὅτι τό $f_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ μ καί τό $f_2(x)$ εἶναι β μοῦ ν, ἐνῶ $\mu \geqslant \nu$. Θά δημιουργήσουμε λοιπόν γιά δύο τέτια πολυώνυ τήν ταυτότητα (1), ἐνῶ τό $y(x)$ θά εἶναι βαθμοῦ κατώτερου ἀπό τό ν αὐτό τό πράγμα ἔχουμε πρῶτα πρῶτα ἀνάγκη νά δείξουμε τήν ἑξῆς θητική πρόταση:

84.— **Λῆμμα**. Ἄν δοθεῖ ἀκέραιο πολυώνυμο $f_1(x)$, βαθμοῦ μ κ ἀκέραιο πολυώνυμο $f_2(x)$ βαθμοῦ ν καί εἶναι $\mu \geqslant \nu$, ὑπάρχει μονω $\pi_1(x)$ καί πολυώνυμο $y_1(x)$, πού εἶναι βαθμοῦ κατώτερου ἀπό τό βα τοῦ $f_1(x)$ καί τέτια, ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ταυτότητα:

$$f_1(x)\equiv f_2(x)\pi_1(x)+y_1(x) \qquad (2)$$

Νά λοιπόν τά πολυώνυμα:

$$f_1(x)\equiv a_0x^{\mu}+a_1x^{\mu-1}+a_2x^{\mu-2}+\dots\dots+a_{\mu-1}x+a_{\mu}$$[**]

$$f_2(x)\equiv \beta_0x^{\nu}+\beta_1x^{\nu-1}+\beta_2x^{\nu-2}+\dots\dots+\beta_{\nu-1}x+\beta_{\nu}.$$

---

[*] Μέ τό σημεῖο $\equiv$ σημειώνουμε τήν ἰσότητα πού εἶναι ταυτότητα.-

[**] Ἕνα διώνυμο θά τό γράφαμε $\alpha x+\beta$. Γιά καλύτερο συμβολισμό μετ χειριζόμαστε σά συντελεστή τοῦ καθενός ὅρου τό ἴδιο γράμμα, λογουχάρη τό α, καί γιά νά διαστείλουμε τόν ἕνα συντελεστή ἀπό τόν ἄλλο βάζουμε σ'αὐτό τό γράμμα δείκτ Ἔτσι τό παραπάνου διώνυμο τό γράφουμε a_0x+a_1. Γιά τό τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x$ γράφουμε $a_0x^2+a_1x+a_2$. Ἔτσι μποροῦμε εὔκολα νά ἐξηγήσουμε καί τό συμβολισμό πού μεταχειριστήκαμε γιά τά πολυώνυμα τοῦ $\mu^{\underline{ου}}$ καί τοῦ $\nu^{\underline{ου}}$ βαθμοῦ.

Ἰσχυριζόμαστε πώς τό μονώνυμο $\pi_1(x)$ εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως οῦ πρώτου ὅρου τοῦ $f_1(x)$ μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ $f_2(x)$· δηλ. $\pi_1(x) = \frac{{}_0x^{\mu}}{x^{\nu}} = \frac{a_0}{\beta_0}x^{\mu-\nu}$. Ἄς πάμε τώρα νά ἐπαληθέψουμε τήν ταυτότητα (2). Ἔχουμε:

$$f_2(x)\,\pi_1(x) \equiv a_0x^{\mu} + \frac{a_0\beta_1}{\beta_0}x^{\mu-1} + \frac{a_0\beta_2}{\beta_0}x^{\mu-2} + \dots\dots + \frac{a_0\beta_{\nu-1}}{\beta_0}x^{\mu-\nu+1} + \frac{a_0\beta_\nu}{\beta_0}x^{\mu-\nu}$$

Καί:

$$f_1(x) - f_2(x)\,\pi_1(x) \equiv \left(a_1 - \frac{a_0\beta_1}{\beta_0}\right)x^{\mu-1} + \left(a_2 - \frac{a_0\beta_2}{\beta_0}\right)x^{\mu-2} + \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots + \left(a_{\nu-1} - \frac{a_0\beta_{\nu-1}}{\beta_0}\right)x^{\mu-\nu+1} + \left(a_\nu - \frac{a_0\beta_\nu}{\beta_0}\right)x^{\mu-\nu} + a_{\nu+1}x^{\mu-\nu-1} + a_{\nu+2}x^{\mu-\nu-2} + \dots + a_\mu.$$

Δηλαδή ἡ διαφορά $f_1(x) - f_2(x)\,\pi_1(x)$ εἶναι πολυώνυμο $y_1(x)$ βαθμοῦ τό πολύ $\mu-1$ δηλ. βαθμοῦ κατώτερου ἀπό τό βαθμό τοῦ $f_1(x)$.

Σημείωση. Πῶς σκεφτήκαμε, ὅτι τό $\pi_1(x)$ θά εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τῶν δύο πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$; Τά πο- υώνυμά μας βρίσκονται σέ διάταξη ὡς πρός τό γράμμα x. Βασικός κοπός μας εἶναι νά βροῦμε τό πηλίκο τους $\pi(x)$ καί τό ὑπόλοιπο τους $y(x)$, νά ἐπαληθέψουμε δηλαδή τήν ταυτότητα (1). Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ιώς τό $\pi(x)$ θά εἶναι πολυώνυμο μέ τήν ἴδια διάταξη ὡς πρός τό x, καί ὅτι (ἐδ. 77), ἀφοῦ τό $y(x)$ θέλουμε νά εἶναι πολυώνυμο σέ βαθμό κατώτερο ἀπό τό βαθμό τοῦ $f_2(x)$, ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ $f_1(x)$ θά εἶναι τό γινόμε- ο τῶν πρώτων ὅρων τῶν πολυωνύμων $f_2(x)$ καί $\pi(x)$. Ἔτσι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ $\pi(x)$ δηλ. τό $\pi_1(x)$ (γιατί γι' αὐτόν πρόκειται καθώς θά δοῦμε) θά εἶναι τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ $f_1(x)$ μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ $f_2(x)$.

85.— Ἐπαλήθεψη τῆς ταυτότητας (1). Ἐπαληθέψαμε παραπάνω τήν ταυτότητα (2). Ἐάν τό $y_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ κατώτερου κί ἀπό τό βαθμό τοῦ $f_2(x)$, τότε τό $\pi_1(x)$ εἶναι τό πηλίκο καί τό $y_1(x)$ εἶναι τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τῶν θεωρουμένων πολυωνύμων. Ἐάν ὅμως τό $y_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ ἀνώτερου ἀπό τό βαθμό τοῦ $f_2(x)$, τότε μποροῦμε νά ἐφαρμόσουμε τό παραπάνω λῆμμα γιά τά πολυώνυμα $y_1(x)$ καί $f_2(x)$.

Έτσι θά έπαληθεύψουμε τήν ταυτότητα :

$$y_1(x) \equiv f_2(x)\pi_2(x)+y_2(x)$$

όπου τό $\pi_2(x)$ θά είναι τό πηλίκο τής διαιρέσεως τών δύο πρώτων ό ρων τών πολυωνύμων $y_1(x)$ καί $f_2(x)$, καί τό $y_2(x)$ πολυώνυμο σε βαθμ κατώτερο άπό τό βαθμό τού $y_1(x)$. Καί πάλι θά σκεφτούμε όπως καί παρα νου. Άν τό $y_2(x)$ είναι σέ βαθμό κατώτερο καί άπό τό $f_2(x)$ θά σταματήσο με, άλλοιώτικα θά έφαρμόσουμε τό λήμμα, καί γιά τά πολυώνυμα $y_2(x)$ $f_2(x)$. Έτσι άπό τή διαδοχική χρησιμοποίηση τού λήμματος παίρνουμε τίς π ρακάτου ίσότητες:

$$f_1(x) \equiv f_2(x)\pi_1(x)+y_1(x)$$

$$y_1(x) \equiv f_2(x)\pi_2(x)+y_2(x)$$

$$y_2(x) \equiv f_2(x)\pi_3(x)+y_3(x)$$

....

....

....

$$y_{k-1}(x) \equiv f_2(x)\pi_k(x)+y(x)$$

όπου τό $y(x)$ είναι σέ βαθμό κατώτερο καί άπό τό $f_2(x)$. Άν τώρα προσθέ σουμε τίς παραπάνου ίσότητες, βρίσκουμε :

$$f_1(x) \equiv \left[\pi_1(x)+\pi_2(x)+\cdots\cdots+\pi_k(x)\right] f_2(x)+y(x)$$

όπου τό άθροισμα $\pi_1(x)+\pi_2(x)+\cdots+\pi_k(x)$ έκφράζει τό πηλίκο καί τό $y($ τό ύπόλοιπο τής διαιρέσεως τών πολυωνύμων $f_1(x)$ καί $f_2(x)$.

Έξηγήσαμε λοιπόν θεωρητικά τόν τρόπο μέ τόν όποιο προσδιορίζουμε, ό μέ όρο τό πηλίκο δύο άκεραίων καί μέ διάταξη πολυωνύμων καί μπορεί ό καθένας, έρμηνεύοντας λεκτικά τίς παραπάνου ίσότητες, νά 'χει τόν καν να τής διαιρέσεως αύτής.

Ή διάταξη πάλι τής πράξεως είναι γνωστή άπό τή γυμνασιακή διδασκ λία καί ό προορισμός τούτου τού βιβλίου δέν δικαιολογεί τέτιες έπαναλ

86.– Υπόλοιπο τής διαιρέσεως όποιουδήποτε άκεραί πρός x πολυωνύμου μέ τό διώνυμο τῆς μορφῆς ±β.

Ἄν ἔχουμε ἕνα ἀκέραιο ὡς πρός x πολυώνυμο καί πρόκειται νά τό διαιρέ-με μέ τό διώνυμο αx-β, σύμφωνα μέ αὐτά πού εἴπαμε παραπάνου, χρεια-μαστε νά ἐπαληθέψουμε τήν ταυτότητα :

$$f(x) \equiv (\alpha x-\beta)\pi(x)+\upsilon$$

ου τό υ, ἄν δέν εἶναι μηδενικό, θά εἶναι παράσταση ἀνεξάρτητη ἀπό τό x ἤ ἀ-θινός ἀριθμός, ἐφόσου οἱ συντελεστές τοῦ f(x) εἶναι ἀριθμητικοί, καί τά α ι β ἐπίσης εἶναι ἀριθμοί·

Ἡ παραπάνου ἰσότητα ἀληθεύει, σάν ταυτότητα πού εἶναι, γιά κάθε τιμή ῦ x, ἄρα καί γιά $x=\frac{\beta}{\alpha}$. Ἔτσι ἔχουμε :

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\alpha\cdot\frac{\beta}{\alpha}-\beta\right)\pi\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon \quad \text{ἤ}$$

$$f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=\upsilon \quad (1)$$

Ἀκόμη, ἄν ὁ διαιρέτης μας εἶναι τό διώνυμο αx+β συμπεραίνουμε τίς ἰσό-τες :

$$f(x)\equiv(\alpha x+\beta)\pi(x)+\upsilon$$

$$f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\left(\alpha\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\beta\right)\pi\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\upsilon \quad \text{ἤ}$$

$$f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=\upsilon \quad (2)$$

Ἀπό τίς ἰσότητες (1) καί (2) βγάζουμε τόν παρακάτου κανόνα, πού μιλεῖ γιά όν τρόπο νά βρίσκουμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου μέ τό διώνυμο αx±β, χωρίς νά ἐκτελεστεῖ πρῶτα ἡ πρά-η. « Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ὁποιουδήποτε ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου ιέ τό διώνυμο αx±β συμπίπτει μέ τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πολυωνύμου, πού πρόκει-αι νά διαιρέσουμε, γιά 'κείνη τήν τιμή τοῦ x πού μέ αὐτή ὁ διαιρέτης μηδενί-ζεται».

Σημείωση. Ἀπό τά προηγούμενα βγαίνει τό συμπέρασμα, ὅτι, ἄν τό $f\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$, τό πολυώνυμό μας f(x) διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό διώνυμο αx-β καί ἄν τό $f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)=0$, τότε τό πολυώνυμό μας εἶναι διαιρετό μέ τό αx+β.

87.- Τρόπος σχηματισμοῦ τῶν συντελεστῶν το πηλίκου τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου ὡς πρ x πολυωνύμου μέ τό διώνυμο $x-a$.

Ἄς ὑποθέσουμε, ὅτι πρόκειται τό πολυώνυμο :

$$A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\cdots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}.$$

νά τό διαιρέσουμε μέ τό διώνυμο $x-a$. Τό πηλίκο, ὅπως εἶναι φανερό, θ
ναι πολυώνυμο ἀκέραιο τοῦ x βαθμοῦ $\mu-1$ καί τό ὑπόλοιπο, ἄν ὑπάρχε
εἶναι ποσότητα y ἀνεξάρτητη ἀπό τό x. Θά ἔχουμε λοιπόν τήν ταυτότητα

$$A_0x^{\mu}+A_1x^{\mu-1}+A_2x^{\mu-2}+\cdots\cdots+A_{\mu-1}x+A_{\mu}\equiv(x-a)(B_0x^{\mu-1}+B_1x^{\mu-2}+$$

$$\cdots\cdots+B_{\mu-2}x+B_{\mu-1})+y.$$

Ἔπειτα ἀπό τήν ἐκτέλεση τῶν πράξεων στό δεύτερο μέλος τῆς
τητας βρίσκουμε τό πολυώνυμο :

$$B_0x^{\mu}+(B_1-aB_0)x^{\mu-1}+(B_2-aB_1)x^{\mu-2}+\cdots+(B_{\mu-1}-aB_{\mu-2})x-aB_{\mu-1}+y$$

πού οἱ συντελεστές του θά εἶναι ἀντίστοιχα ἴσοι μέ τούς συντελεστές τῶ
βαθμίων ὅρων τοῦ πολυωνύμου, πού πρόκειται νά διαιρεθεῖ. Ὥστε :

$$B_0=A_0$$
$$B_1-aB_0=A_1$$
$$B_2-aB_1=A_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_{\mu-1}-aB_{\mu-2}=A_{\mu-1}$$
$$y-aB_{\mu-1}=A_{\mu}$$

Ἀπό τίς ὁποῖες ἰσότητες παίρνουμε :

$$B_0=A_0$$
$$B_1=aB_0+A_1$$
$$B_2=aB_1+A_2$$
$$\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_{\mu-1}=aB_{\mu-2}+A_{\mu-1}$$
$$y=aB_{\mu-1}+A_{\mu}$$

Ἀπ' αὐτές τίς ἰσότητες βγαίνει ὁ παρακάτου κανόνας:

Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύ-
ου ἀκεραίου ὡς πρός x καί βαθμοῦ μ μέ
ό $x-a$, εἶναι ἕνα πολυώνυμο ἀκέραιο ὡς
ρός x βαθμοῦ $\mu-1$, πού ὁ πρῶτος ὅρος του ἔχει
όν ἴδιο συντελεστή μέ τόν πρῶτο ὅρο τοῦ δι-
ιρετέου.

Ὁ συντελεστής ἑνός τυχόντα ὅρου τοῦ πηλίκου,
ιό τό δεύτερο καί κάτου, προκύπτει πολλαπλα-
ιάζοντας τό συντελεστή τοῦ προηγούμενου
ρου ἐπί a καί προσθέτοντας αὐτό τό γινόμενο
τό συντελεστή τοῦ ὅρου, πού ἔχει τήν ἴδια τάξη
τό διαιρετέο.

Τό ὑπόλοιπο ὑπακούει στόν ἴδιο νόμο καί
ροκύπτει, πολλαπλασιάζοντας ἐπί a τόν τελευ-
αῖο ὅρο τοῦ πηλίκου καί προσθέτοντας σ' αὐτό
ό γινόμενο, τόν τελευταῖο ὅρο τοῦ διαιρετέου.

88.– Σημείωση. Εἶναι αὐτονόητο, πώς ἄν ὁ διαιρέτης μας εἶναι
ό διώνυμο $x+a$, ὁ παραπάνου κανόνας θά ἰσχύει μέ τή διαφορά, ὅτι ἀντί
τοῦ a θά βάζουμε τό $-a$.

89.– Ἀξιοσημείωτα πηλίκα. Πρόκειται γιά τά πηλίκα τῶν
διαιρέσεων: $(x^{\mu}\pm a^{\mu}):(x\pm a)$.

Ἐάν ὁ μ εἶναι ἄρτιος δηλ. ἄν $\mu=2\nu$, τότε οἱ διαιρέσεις $(x^{\mu}-a^{\mu}):(x\pm a)$
εἶναι τέλειες, ὅπως βλέπει καθείς, ἐφαρμόζοντας τόν κανόνα (ἐδ.86)·
ἐνῶ, ἄν ὁ μ εἶναι περιττός ἀριθμός. δηλ. ἄν $\mu=2\nu+1$, τότε οἱ διαιρέσεις
$(x^{\mu}+a^{\mu}):(x+a)$ καί $(x^{\mu}-a^{\mu}):(x-a)$ εἶναι τέλειες.

Ἄν τώρα σέ κάθε μιά ἀπ' αὐτές τίς τέλειες διαιρέσεις ἐφαρμόσουμε
τόν κανόνα (ἐδ.87), γιά νά βροῦμε τούς συντελεστές τοῦ πηλίκου τῆς διαι-

ρέσεως δύο ἀκεραίων πολυωνύμων, διαπιστώνουμε ὅτι: Ὅταν ὁ διαιρέτ
ἔχει τή μορφή $x-a$, ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου ἔχουνε τό σημεῖο +, ἐνῶ οἱ δυ
μεις τοῦ x πηγαίνουν ἐλαττούμενες ἀπό ὅρο σέ ὅρο καί οἱ δυνάμεις τοῦ
αὐξανόμενες. Ὅταν ὁ διαιρέτης ἔχει τή μορφή $x+a$ ἡ διαφορά εἶναι, ὅτι οἱ
τοῦ πηλίκου πηγαίνουν μέ τό σημεῖον + ὁ ἕνας καί μέ τό − ὁ ἄλλος. Ὥστ

$$\frac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x-a}=x^{\mu-1}+ax^{\mu-2}+a^2x^{\mu-3}+\cdots\cdots+a^{\mu-3}x^2+a^{\mu-2}x-a^{\mu-1}$$

Γιά τήν περίπτωση πού τό $\mu=2\nu$:

$$\frac{x^{\mu}-a^{\mu}}{x+a}=x^{\mu-1}-ax^{\mu-2}+a^2x^{\mu-3}-\cdots\cdots-a^{\mu-3}x^2+a^{\mu-2}x-a^{\mu-1}$$

Γιά τήν περίπτωση πού τό $\mu=2\nu+1$:

$$\frac{x^{\mu}+a^{\mu}}{x+a}=x^{\mu-1}-ax^{\mu-2}+a^2x^{\mu-3}-\cdots\cdots+a^{\mu-3}x^2-a^{\mu-2}x+a^{\mu-1}$$

Ἀσκήσεις

118) Πραγματοποιεῖστε τίς ἀκόλουθες διαιρέσεις:

α) $-105x^4y^9z^3 : 4x^4y^7$. β) $-96x^5y : (-24x^3y^4)$ γ) $-15x^2y^5z^6 : (-5xy^3z^4)$

δ) $42a^4\beta : (-7a^3\beta)$ ε) $15a^{\nu+1}\beta^{2\nu-1} : 3a^{\nu}\beta^{\nu-3}$ στ) $201a^{\mu}\beta^{\nu} : (-8a^2\beta^3)$

119) Τό ἴδιο γιά τίς διαιρέσεις:

α) $(4a^7x^5-24a^6x^6+36a^5x^7) : 4ax$ β) $(14a^5\beta^2-50a^3\beta^3+15a^3\beta^4) : 10a^2\beta$

γ) $(15\mu^4\nu^3\rho^2-25\mu^3\nu^4\rho^3+30\mu^2\nu^5\rho^4) : (-15\mu^3\nu^3\rho^3)$.

δ) $(40a^{\mu}\beta^{2\nu}+24a^{\mu+\nu}\beta^{\nu}-32a^{\nu}\beta^{\mu+\nu}) : (-8a^{\nu}\beta^{\nu})$.

120) Ἐπίσης ἐκτελέστε τίς διαιρέσεις:

α) $a^7-64a : a^2-2a+4$. β) $\left(x^4-\frac{5}{4}x^3+\frac{11}{8}x^2-\frac{1}{2}x\right) : \left(x^2-\frac{1}{2}x\right)$.

| γ) $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right) : \left(\frac{4}{3}x-2\right)$.

δ) $(12a^{2\nu-1}-25a^{2\nu-2}\beta^{\mu}+35a^{2\nu-3}\beta^{2\mu}-19a^{2\nu-4}\beta^{3\mu}+5a^{2\nu-5}\beta^{4\mu}) : (4a^{\nu-2}-3a^{\nu-3}\beta^{\mu}+a^{\nu-4}\beta$

ε) $\left(2x^4-\frac{11}{12}x^3y+\frac{11}{12}x^2y^2+\frac{5}{144}xy^3-\frac{1}{2}y^4\right) : \left(x^2-\frac{1}{3}xy+\frac{3}{4}y^2\right)$.

| στ) $(a^{2\nu}+2a^{\nu}\beta^{2\rho}+\beta^{4\rho}-\gamma^{2\pi}) : (a^{\nu}+\beta^{2\rho}+\gamma^{\pi})$. ‖ ζ) $(x^{8\nu}-y^{8\rho}) : (x^{5\nu}-x^{4\nu}y^{\rho}+x^{\nu}y^{4\rho}-y^{5\rho}$

| η) $(\rho^8x^4-81a^{12}) : (\rho^6x^3-3a^3\rho^4x^2+9a^6\rho^2x-27a^9)$.

θ) $\left(x^5-1\frac{1}{6}x^4+4\frac{1}{3}x^3-2\frac{5}{6}x^2+3\frac{2}{9}x-\frac{1}{3}\right) : \left(x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{1}{3}\right)$.

121) Νά προσδιορίσετε τό μ, ὥστε τό πολυώνυμο $x^4-3x^2+3x-\mu$

είναι διαιρετό μέ τό $x-3$.

122) Νά προσδιοριστεί τό λ, ώστε τό πολυώνυμο $x^4-3x^2+3x-\mu$ νά είναι
αιρετό μέ τό $x-2$.

123) Ποιές από τίς παρακάτου διαιρέσεις είναι τέλειες καί στήν περίπτω-
πού δέν είναι τέλειες, νά βρεθεί, χωρίς νά εκτελεστεί ή πράξη, ποιά
ναι τά υπόλοιπα.

α) $x^5-3x^4+5x^3-6x^2+7x-1$ μέ τό $x-1$ ή τό $x+1$.

β) $(10x^3-19x^2+13x-3):(2x-1)$, γ) $x^3-2ax^2+2a^2x-a^3$ μέ τό $x+a$ ή τό
$-a$, δ) $2x^4+(4a-3)x^3-6a(a+1)x^2-a^2(10a-9)x+15a^3$ μέ τό $2x-3$ ή
$2x+3$.

124) Νά βρεθούν, χωρίς νά εκτελεστεί ή διαίρεση, τά ακόλουθα πηλίκα:

$$\frac{x^5-a^5}{x-a}, \quad \frac{x^7-128y^7}{x-2y}, \quad \frac{16x^4-y^4}{2x+y}, \quad \frac{a^6\beta^6-\gamma^6}{a\beta-\gamma}, \quad \frac{125x^3+y^3}{5x+y}$$

$$\frac{a^9+\beta^3\gamma^3}{a^3+\beta\gamma}, \quad \frac{a^8-\beta^4y^4}{a^2-\beta y}, \quad \frac{x^{10}y^5+1}{x^2y+1}, \quad \frac{x^{2\nu}-y^{2\nu}}{x^2-y^2}.$$

125) Ποιές τέλειες διαιρέσεις έχουνε γιά πηλίκα τους τά ακόλουθα πολυ-
νυμα;

$$x^2-x+1, \quad x^2+x+1, \quad x^3-x^2+x-1, \quad a^3-2a^2+4a-8,$$

$$64x^6+32x^5y+16x^4y^2+8x^3y^3+4x^2y^4+2xy^5+y^6,$$

$$a^4\beta^4+a^3\beta^3+a^2\beta^2+a\beta+1, \quad x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+\cdots\cdots+x^2+x+1.$$

126) Άν τό $x+2$ είναι κοινός διαιρέτης τών πολυωνύμων $x^2+(2a-\beta)x+3\beta$
ί $x^2-(2\beta+1)x+2a$, νά βρεθούν τά α καί β.

127) Τό πολυώνυμο $x^3+7ax^2+11a^2x+2a^3$ έχει σάν παράγοντα τό $x+2a$;

128) Ποιό πρέπει νά είναι τό μ ώστε τά πολυώνυμα $x^3+2x^2+3x+\mu$ καί
$+x^2+3$, όταν διαιρεθούν μέ τό $x+2$, νά αφίνουν τά ίδια υπόλοιπα;

---

90. Άξιοσημείωτες ταυτότητες.

Οί ακόλουθες δεκαπέντε ταυτότητες είναι έξαιρετικά χρήσιμες γιά τήν
λοποίηση τών παραστάσεων καί συσταίνουμε στούς σπουδαστές νά τίς με-

λετήσουν καί νά τίς μάθουν καλά.

1) Τό τετράγωνο ἑνός διωνύμου. Τό τετράγωνο ἑνός μου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ καθενός ὅρου του μένο κατά τό διπλάσιο τοῦ γινομένου τους.

Ἔχουμε πραγματικά:

$$(\alpha+\beta)^2 \equiv (\alpha+\beta)(\alpha+\beta) \equiv \alpha^2+\alpha\beta+\alpha\beta+\beta^2$$

Ὥστε: $(\alpha+\beta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ (1)

2) Στήν προηγούμενη ἰσότητα οἱ ὅροι α^2 καί β^2 εἶναι πάντα θετικ ὁ ὅρος $2\alpha\beta$ θά εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός, καθόσο τά α καί β εἶνα σημα ἤ ἑτερόσημα.

Ἔτσι θά ἔχουμε:

$$(\alpha-\beta)^2 \equiv \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \qquad (2)$$

3) Ἀπό τίς ἰσότητες (1) καί (2) βρίσκουμε καί τίς ταυτότητ

$$\alpha^2+\beta^2 \equiv (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \equiv (\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta.$$

4) Ὁ κύβος ἑνός διωνύμου. Ὁ κύβος ἑνός διωνύμου τελεῖται ἀπό τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν δύο ὅρων, αὐξημένο κατα πλάσια γινόμενα τοῦ τετραγώνου τοῦ καθενός ὅρου ἐπί τόν ἄλλο.

Πραγματικά: $(\alpha+\beta)^3 \equiv (\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta) \equiv (\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$

Ὥστε: $(\alpha+\beta)^3 \equiv \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2$ ἤ

$$(\alpha+\beta)^3 \equiv \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad (3)$$

5) Συνδυάζοντας τόν παραπάνου κανόνα μέ τόν κανόνα τῶν σημεί πολλαπλασιασμοῦ, βρίσκουμε:

$$(\alpha-\beta)^3 \equiv \alpha^3-\beta^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2 \quad \text{ἤ}$$

$$(\alpha-\beta)^3 \equiv \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta) \qquad (4)$$

6) Ἀπό τήν ταυτότητα (3) παίρνουμε καί τήν ἑξῆς:

$$\alpha^3+\beta^3 \equiv (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \quad \text{ἤ}$$

$$\alpha^3+\beta^3 \equiv (\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta\right] \quad \text{δηλ.}$$

$$\alpha^3+\beta^3 \equiv (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

7) Ἀπό τήν ἰσότητα (4) ἐπίσης φτάνουμε καί τήν ταυτότητα:

$$α^3-β^3 \equiv (α-β)^3+3αβ(α-β) \quad ή$$

$$α^3-β^3 \equiv (α-β)\left[(α-β)^2+3αβ\right] \quad δηλ.$$

$$α^3-β^3 \equiv (α-β)(α^2+αβ+β^2)$$

8) Τό τετράγωνο ἑνός πολυωνύμου. Τό τετράγωνο ιός πολυωνύμου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τοῦ καθενός ρου του, αὐξημένο κατά τά διπλάσια τῶν γινομένων, πού σχηματίζονται ἀπό λους τούς ὅρους του, παίρνοντάς τους ἀνά δύο καί μέ ὅλους τούς δυνα- ύς τρόπους.

Πραγματικά:

$$(α_1+α_2+α_3+\cdots\cdots+α_ν)^2 \equiv (α_1+α_2+α_3+\cdots\cdots+α_ν)(α_1+α_2+α_3+\cdots\cdots+α_ν).$$

Ἔχοντας ὑπ' ὄψη τόν κανόνα τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δύο πολυωνύμων εἶναι κολο νά ἐννοήσουμε, ὅτι τό γινόμενό μας θά ἔχει ὅρους δύο εἰδῶν.

1ο Ἐκείνους, πού προέρχονται ἀπό ἴσους παράγοντες τοῦ πολλαπλασια- έου καί τοῦ πολλαπλασιαστῆ, καί αὐτοί εἶναι τά τετράγωνα τοῦ καθενός ὅ- υ τοῦ πολυωνύμου μας. Φανερό εἶναι, ὅτι αὐτοί οἱ ὅροι παρουσιάζουνται μιά φορά μόνο

2ο Ἐκείνους, πού προέρχονται ἀπό τό γινόμενο δύο διαφορετικῶν παραγόν- ν, ὅπως λογουχάρη οἱ $α_1α_2$, $α_1α_3$, $α_2α_3$ κ.τ.λ. Αὐτοί οἱ ὅροι παρουσιάζουνται ό δύο φορές ὁ καθένας, γιατί ὁ $α_1α_2$, λογουχάρη, μιά πρώτη φορά θά προ- ρχεται ἀπό τόν πολλαπλασιασμό τοῦ παράγοντα $α_1$ τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπί παράγοντα $α_2$ τοῦ πολλαπλασιαστῆ καί μιά δεύτερη φορά ἀπό τόν πολλα- ασιασμό τοῦ παράγοντα $α_2$ τοῦ πολλαπλασιαστέου μέ τόν παράγοντα $α_1$ τοῦ λλαπλασιαστῆ.

Ὁ καθένας λοιπόν ἀπό αὐτούς τούς ὅρους παρουσιάζεται μέ συντελεστή 2, κάτου ἀπό τή μορφή $2α_1α_2$, $2α_1α_3$, $2α_2α_3$, ... κ.τ.λ., πρᾶγμα πού δικαιολο- τοῦ παραπάνου κανόνα.

Στήν ἐφαρμογή τοῦ κανόνα, γιά νά μή παραλειφτεῖ κανένα διπλάσιο γινό- ο, γράφουμε πρῶτα τά διπλάσια γινόμενα τοῦ πρώτου ὅρου μέ ὅλους τούς ομένους ὅρους, ἔπειτα τοῦ δευτέρου μέ ὅλους τούς ἐπομένους καί ἔτσι συνεχί- με.

Ὥστε: $(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{\nu-1}+a_\nu)^2 \equiv a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_\nu^2+2a_1a_2+2a$
$+2a_1a_\nu+2a_2a_3+a_2a_4+\cdots\cdots+2a_2a_\nu+\cdots\cdots\cdots+2a_{\nu-1}a_\nu$.

9) Γινόμενο ἑνός ἀθροίσματος δύο ὅρων ἐπί τη φορά τους. Ἕνα τέτιο γινόμενο εἶναι ἴσο μέ τό τετράγωνο του ὅρου ἐλαττωμένο κατά τό τετράγωνο τοῦ δευτέρου.

Πραγματικά: $(a+\beta)(a-\beta) \equiv a^2+a\beta-a\beta-\beta^2$

Δηλ. $(a+\beta)(a-\beta) \equiv a^2-\beta^2$.

10) Ὁ κύβος ἑνός πολυωνύμου. Ὁ κύβος ἑνός πολυω εἶναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν κύβων τῶν ὅρων του, αὐξημένο ὅμως ἀπό πλάσιο τοῦ ἀθροίσματος τῶν γινομένων τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ τετραγών καθενός ὅρου ἐπί τό ἄθροισμα τῶν λοιπῶν ὅρων καί ἀπό τό ἑξαπλάσιο τοῦ εματος τῶν γινομένων, πού σχηματίζουνται μέ τό νά παρθοῦν ἀνά τρεῖς σ' ὅλους τούς δυνατούς τρόπους.

Πρῶτα πρῶτα θά πάρουμε τήν περίπτωση, ὅπου οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου εἶ

$$(a_1+a_2+a_3)^3 \equiv [(a_1+a_2)+a_3]^3 \equiv (a_1+a_2)^3+3a_3(a_1+a_2)^2+3a_3^2(a_1+a_2)+a_3^3 \equiv$$

$$a_1^3+a_2^3+3a_1^2a_2+3a_1a_2^2+3a_1^2a_3+6a_1a_2a_3+3a_2^2a_3+3a_1a_3^2+3a_2a_3^2+a_3^3 \equiv$$

$$\underline{a_1^3+a_2^3+a_3^3+3a_1^2a_2+3a_1^2a_3+3a_1a_2^2+3a_2^2a_3+3a_1a_3^2+3a_2a_3^2+6a_1a_2a_3 \equiv}$$

$$\underline{a_1^3+a_2^3+a_3^3+3a_1^2(a_2+a_3)+3a_2^2(a_1+a_3)+3a_3^2(a_1+a_2)+6a_1a_2a_3.}$$

Καί ὁ κανόνας δικαιολογεῖται, γιατί, ἀφοῦ οἱ ὅροι εἶναι τρεῖς, ἕνας τρ ὑπάρχει γιά νά σχηματίσουμε γινόμενο ἀπό τρεῖς ὅρους.

Γιά νά γενικέψουμε τώρα τήν πρόταση θά μεταχειριστοῦμε τή μέθοδο πλήρους ἐπαγωγῆς*.

---

* Ἄν οἱ ὅροι εἴτανε τέσσερες θά βρίσκαμε $(a_1+a_2+a_3+a_4)^3 \equiv a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+3$
$+3a_2^2(a_1+a_3+a_4)+3a_3^2(a_1+a_2+a_4)+3a_4^2(a_1+a_2+a_3)+6(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a$

Καί τά γινόμενα ἀνά τρεῖς τά σχηματίζουμε, ἄν σέ κάθε γινόμενο ἀνά δύο βά ὅλους τούς λοιπούς ὅρους. Νά, τά ἀνά δύο γινόμενα εἶναι: a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4, a_2a a_3a_4. Ἀπό τό γινόμενο a_1a_2, βάζοντας κάθε φορά ἕναν ἀπό τούς ὑπολειπομένου σχηματίζουμε τά ἑξῆς γινόμενα ἀνά τρεῖς: $a_1a_2a_3$, $a_1a_2a_4$. Ἀπό τό a_1a_3 τό: $a_1a_3a_4$

Ὑποθ.: $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)^3 \equiv a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_\nu^3+3a_1^2(a_2+a_3+\cdots\cdots+a_\nu)+$

$+3a_2^2(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_\nu)+\cdots\cdots 3a_\nu^2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{\nu-1})+6(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots$

$\cdots+a_1a_2a_\nu+a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+\cdots\cdots+a_1a_3a_\nu+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{\nu-2}a_{\nu-1}a_\nu)$.

Συμπ.: $(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})^3 \equiv a_1^3+a_2^3+\cdots\cdots+a_\nu^3+a_{\nu+1}^3+3a_1^2(a_2+a_3+\cdots$

$\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})+3a_2^2(a_1+a_3+\cdots\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})+\cdots\cdots+3a_{\nu+1}^2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)+$

$6(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots\cdots+a_1a_2a_\nu+a_1a_3a_4+\cdots\cdots+a_1a_3a_\nu+\cdots\cdots+a_{\nu-1}a_\nu a_{\nu+1})$

Ἔχουμε λοιπόν:

$(a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})^3 \equiv [(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)+a_{\nu+1}]^3 \equiv (a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)^3$

$+3a_{\nu+1}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)^2+3a_{\nu+1}^2(a_1+a_2+\cdots\cdots\cdots+a_\nu)+a_{\nu+1}^3$.

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματός μας, ἄν ἀναπτυχθεῖ κατά τήν ὑπόθεσή, θά περιέχει τούς κύβους ὅλων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου μέχρι τόν a_ν. τώρα πάρουμε καί τόν τελευταῖο ὅρο τοῦ ἀναπτύγματός μας, ἔχουμε τούς ους ὅλων τῶν ὅρων. Ἀπό τό ἀνάπτυγμα πάλι τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ παραπά- ἀναπτύγματός μας ἔχουμε καί τό γινόμενο: $3a_1^2(a_2+a_3+\cdots\cdots+a_\nu)$ καί ἄν ὑτό προσθέσουμε καί τό μερικό γινόμενο $3a_1^2a_{\nu+1}$, πού βρίσκουμε ἀπό τό δεύ- ὅρο τοῦ ἀναπτύγματός μας, παίρνουμε τόν ὅρο $3a_1^2(a_2+a_3+\cdots\cdots+a_\nu+a_{\nu+1})$ ἀναπτύγματός μας, πού ζητᾶμε. Ἔτσι θά σχηματίσουμε ὅλους τούς ὅρους, ὁ καθένας εἶναι τριπλάσιο γινόμενο τοῦ τετραγώνου ἑνός ὅρου τοῦ πο- υύμου μας, μέχρι τόν a_ν, ἐπί τό ἄθροισμα τῶν λοιπῶν. Ἄν σ' αὐτούς προσθέσου-

---

μενο a_1a_4 δέ μποροῦμε νά πάρουμε γινόμενο μέ τρεῖς παράγοντες, γιατί ἐπει- πό τό a_4 δέν ὑπάρχουν ἄλλοι ὅροι. Τέλος ἀπό τό a_1a_3 παίρνουμε τό $a_1a_3a_4$. Τώ- ιά τόν παραπάνου λόγο δέ μποροῦμε νά πάρουμε ἄλλους ὅρους ἀπό τά γινόμε- $_2a_4$, a_3a_4. Γενικά ἄν ἔχουμε ἕνα πολυώνυμο μέ ν ὅρους καί θέλουμε νά σχη- ουμε γινόμενα μέ τρεῖς ὅρους τοῦ πολυωνύμου, σ' ὅλους τούς δυνατούς συν- μούς, γιά νά μή παραλείψουμε κανένα ἀπ' αὐτά, πρέπει νά γράφουμε πρῶ- λα τά γινόμενα μέ δύο ὅρους καί κατόπιν σέ καθένα ἀπ' αὐτά βάζουμε κάθε ἕναν ἀπό τούς ὑπολειπομένους ὅρους τοῦ πολυωνύμου.

με καί τόν τρίτο ὅρο τοῦ ἀναπτύγματός μας ἔχουμε ὅλη τή δεύτερη σειρα τοῦ ἀναπτύγματός μας, πού ζητᾶμε. Τέλος ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγ μας περιέχει ὅλα τά ἑξαπλάσια γινόμενα ἐκείνων τῶν τριάδων, πού δέν νε τόν ὅρο $\alpha_{\nu+1}$, ἐνῶ ὁ δεύτερος ὅρος μᾶς δίνει καί αὐτά. Ἔτσι βεβα μαστε γιά τήν ἰσχή τοῦ κανόνα μας.

Σημείωση. Μπορούσαμε νά ἐφαρμόσουμε τήν ἴδια μέθοδο καί γιά προηγούμενη ταυτότητα, μά προτίμησα σ' αὐτή τόν προηγούμενο τρόπο, στήν περίπτωσή της ἔβλεπε κανείς εὔκολα τά εἴδη τῶν ὅρων, πού παρουσια

11) Ταυτότητα τοῦ Lagrange. Ἡ ταυτότητα αὐτή ε μιά σταθερή σχέση, πού συνδέει ἕναν ἄρτιο ἀριθμό ὅρους ἀπό τέσσερ καί πάνου. Φυσικά ἡ ἴδια ἰσχύει, ὅπως καί ὅλες οἱ παραπάνου ταυτότη καί γιά ἀριθμούς, ἀφοῦ κάθε ὅρος μπορεῖ γιά ὁρισμένες τιμές τῶν γ μάτων του νά ἀντιπροσωπεύει ἕναν ἀριθμό.

Ἡ ταυτότητα αὐτή γιά τέσσερες ὅρους εἶναι:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\beta_1^2+\beta_2^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2)^2 \equiv (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2.$$

Ἄν τούς ὅρους αὐτούς τούς τοποθετήσουμε ἔτσι: $\begin{array}{ll}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{array}$ καί κυττάξ με προσεχτικά τήν ταυτότητα, βγάζουμε εὔκολα ἕνα μνημονικό κα

Γιά ἕξη λοιπόν ὅρους: $\begin{array}{lll}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\end{array}$

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)^2 \equiv (\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3$$
$$(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2.$$

Καί τώρα γιά 2ν ὅρους: $\begin{array}{llll}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \ldots\ldots\ldots & \alpha_{\nu-1}\ \alpha_\nu\\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \ldots\ldots\ldots & \beta_{\nu-1}\ \beta_\nu\end{array}$

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_{\nu-1}^2+\alpha_\nu^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots\cdots+\beta_{\nu-1}^2+\beta_\nu^2)-(\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\cdots+$$
$$\equiv(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)^2+(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)^2+\cdots\cdots+(\alpha_1\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_1)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2+$$
$$(\alpha_2\beta_4-\alpha_4\beta_2)^2+\cdots\cdots+(\alpha_2\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_2)^2+\cdots\cdots+(\alpha_{\nu-1}\beta_\nu-\alpha_\nu\beta_{\nu-1})^2.$$

Γιά νά βεβαιωθοῦμε γιά τήν ἰσχή της δέν ἔχουμε παρά νά ἐκτελ σουμε τίς πράξεις στό πρῶτο μέλος, ὁπότε βρίσκουμε ὅλους τούς ὅρ τοῦ δευτέρου. Μά μποροῦμε καί συλλογιστικά νά πιστοποιήσουμε τήν ἀλ της:

Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ἕνα γινόμενο δύο πολυωνύμων
αί ἡ ἐκτέλεσή του θά μᾶς δώσει δύο εἰδῶν ὅρους.

1ο Ὅρους, πού θἄχουνε τή μορφή $a_i^2\beta_i^2$ ὅπου τό i μπορεῖ νά πάρει ὅλες
τιμές ἀπό τό 1 μέχρι τό ν, δηλ ὅρους πού τά a καί β θά εἶναι ὁμόδεικτα.
τοί οἱ ὅροι θά ἀπαλειφτοῦνε, γιατί τούς περιέχει καί τό ἀνάπτυγμα
ῦ δευτέρου ὅρου τοῦ πρώτου μας μέλους.

2ο Ὅρους τῆς μορφῆς $a_\kappa^2\beta_\lambda^2$, ἐνῶ τά κ καί λ παίρνουνε ὅλες τίς τιμές
ό τό 1 μέχρι τό ν, εἶναι ὅμως διαφορετικά μεταξύ τους. Ἔτσι ὁ ὅρος αὐτός
παρουσιάσει καί μέ τή μορφή $a_\lambda^2\ \beta_\kappa^2$.

Ἄν τώρα λάβουμε ὑπ' ὄψη, πώς θά ἔχουμε ἀπό τό ἀνάπτυγμα τοῦ δευ-
ρου ὅρου τοῦ πρώτου μας μέλους καί ὅρους τῆς μορφῆς $2a_\kappa a_\lambda\beta_\kappa\beta_\lambda$, κατα-
βαίνουμε ὅτι τό πρῶτο μέλος τῆς ταυτότητός μας θά εἶναι τριάδες ὅρων
ν αὐτή : $a_\kappa^2\beta_\lambda^2+a_\lambda^2\beta_\kappa^2-2a_\kappa a_\lambda\beta_\kappa\beta_\lambda\equiv(a_\kappa\beta_\lambda-a_\lambda\beta_\kappa)^2$

12) Μετασχηματισμός σέ γινόμενο τῆς παραστά-
ως : $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma$.

Χρησιμοποιώντας τήν ταυτότητα (6) ἔχουμε :

$$+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv(a+\beta)^3-3a\beta(a+\beta)+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv(a+\beta)^3+\gamma^3-3a\beta(a+\beta)-3a\beta\gamma$$

$$(a+\beta+\gamma)^3-3\gamma(a+\beta)(a+\beta+\gamma)-3a\beta(a+\beta+\gamma)\equiv(a+\beta+\gamma)\left[(a+\beta+\gamma)^2-3\gamma(a+\beta)-3a\beta\right]$$

$$(a+\beta+\gamma)(a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2a\gamma+2\beta\gamma-3a\gamma-3\beta\gamma-3a\beta).$$

Ὥστε : $\underline{a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv(a+\beta+\gamma)(a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-a\gamma-\beta\gamma)}$

Ἐπίσης μποροῦμε νά γράφουμε :

$$+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)(2a^2+2\beta^2+2\gamma^2-2a\beta-2a\gamma-2\beta\gamma)\ \text{Δηλ.}$$

$$\underline{a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv\frac{1}{2}(a+\beta+\gamma)\left[(a-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-a)^2\right]}.$$

<u>Σημείωση</u>. Ἐάν $a+\beta+\gamma=0$ τότε $a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\equiv0$ ἤ
$a^3+\beta^3+\gamma^3\equiv3a\beta\gamma$.

Δηλ. Ἄν τρεῖς ὁποιοιδήποτε ἀριθμοί ἔχουνε ἄθροισμα ἴσο μέ τό μηδέν,
τε τό ἄθροισμα τῶν κύβων τους εἶναι ἴσο μέ τό τριπλάσιο τοῦ γινο-
νου τους.

13) Τό ἀνάπτυγμα τοῦ γινομένου $(x+a_1)(x+a_2)($

Ἄς πάρουμε γινόμενο δύο παραγόντων.

$$(x+a_1)(x+a_2)\equiv x^2+a_1x+a_2x+a_1a_2\equiv x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2$$

Γιά τό γινόμενο τριῶν παραγόντων βρίσκουμε:

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\equiv\left[x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2\right](x+a_3)\equiv x^3+(a_1+a_2)x^2+$$

$$+a_3x^2+(a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3 \quad \Delta\eta\lambda:$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\equiv x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3.$$

Παρατηροῦμε λοιπόν, ὅτι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος ἀκολουθοῦνε ἐ νόμο: Ὅταν οἱ παράγοντες εἶναι λογουχάρη τρεῖς, πρῶτος ὅρος εἶν ὁ x^3, δεύτερος εἶναι τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν α, πού παίρν ται ἕνας ἕνας, πολλαπλασιασμένο ἐπί τήν ἀμέσως κατώτερη δύνα τοῦ x, Τρίτος ὅρος, τό ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν α, πού παίρνο ται ἀνά δύο, πολλαπλασιασμένο ἐπί τήν ἀμέσως κατώτερη δύναμη τοῦ καί τέταρτος ὅρος τό ἄθροισμα, πού ἐδῶ ἔχει ἕναν ὅρο, τῶν γινομέν τῶν α, πού παίρνουνται ἀνά τρεῖς, πολλαπλασιασμένο ἐπί τήν κατ ρη δύναμη τοῦ x, πού εἶναι ἡ μηδενική.

Γιά νά γενικέψουμε τήν ἰσχύ τοῦ νόμου στούς ὁσουσδήποτε πα γοντες, μεταχειριζόμαστε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Δέν ἔ με παρά νά ἐργαστοῦμε κατά τόν ἴδιο τρόπο πού ἐργαστήκαμε προ γούμενα, ὅταν ἀπό τό γινόμενο τῶν δύο παραγόντων πήγαμε στό μενο τῶν τριῶν. Ἐδῶ τώρα θά παραθέσουμε τό ἀνάπτυγμα τοῦ γιν νου τῶν ν διωνύμων.

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)\cdots(x+a_\nu)\equiv x^\nu+(a_1+a_2+\cdots a_\nu)x^{\nu-1}+(a_1a_2+a_1$$

$$\cdots+a_1a_\nu+a_2a_3+\cdots+a_2a_\nu+\cdots+a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-2}+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+\cdots$$

$$\cdots+a_1a_2a_\nu+a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+\cdots+a_1a_3a_\nu+\cdots\cdots+a_{\nu-2}a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-3}+\cdots$$

$$\cdots+a_1a_2\cdots a_\nu.$$

14) Τό ἀνάπτυγμα τοῦ γινομένου $(x-a_1)(x-a_2)\cdots$

Ἀκολουθώντας τήν ἴδια πορεία ἐργασίας μέ τήν προηγούμενη, βρίσκο

Γιά δύο παράγοντες : $(x-a_1)(x-a_2) \equiv x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2$

Γιά τρεῖς παράγοντες : $(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) \equiv x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2$

$$+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3 .$$

Δηλ. διαπιστώνουμε τήν ὕπαρξη τοῦ ἴδιου νόμου, μέ μόνη τή διαφορά, ός οἱ ὅροι πηγαίνουν ἕνας μέ τό σημεῖο + καί ἕνας μέ τό σημεῖο – .

Γενικά λοιπόν ἔχουμε : $(x-a_1)(x-a_2)\cdots\cdots(x-a_\nu) \equiv x^\nu-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_\nu)x^{\nu-1}+$

$$(a_1a_2+a_1a_3+\cdots\cdots+a_1a_\nu+\cdots\cdots+a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-2}+(a_1a_2a_3+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+a_1a_2a_\nu+a_1a_3a_4+\cdots\cdots+a_1a_3a_\nu+\cdots\cdots a_{\nu-2}a_{\nu-1}a_\nu)x^{\nu-3}+\cdots$$

$$\cdots\cdots+(-1)^\nu a_1a_2\cdots\cdots a_\nu$$

Τοῦ τελευταίου ὅρου τοῦ βάλαμε σάν παράγοντα τό $(-1)^\nu$, γιατί, ἄν τό πλῆθος παραγόντων τοῦ γινομένου μας εἶναι ἄρτιο, δηλ ἄν τό ν εἶναι ἄρτιο, πρέπει τελειώνουμε σέ ὅρο πού ἔχει μπροστά του τό σημεῖο +, ἐνῶ θά τελειώνουσέ ὅρο μέ τό σημεῖο –, ἄν τό ν εἶναι περιττό.

15) Τό ἀνάπτυγμα τῆς μιοστῆς δυνάμεως ἑνός διω- μου. Τύπος τοῦ Νιοῦτεν

Ἐμεῖς ξέρουμε τό ἀνάπτυγμα καί τῆς τρίτης δυνάμεως ἑνός διω- ιου. Μέ τόν τύπον ὅμως τοῦ Νιοῦτεν μποροῦμε καί βρίσκουμε τό ἀνά- γμα ὁποιασδήποτε ἀκεραίας καί θετικῆς δυνάμεως ἑνός διωνύμου. Γιά καταvοήσουμε καλά τόν τύπο χρειαζόμαστε νἄχουμε μάθει τό εἰδικό ινο κεφάλαιο τῆς Ἄλγεβρας, πού λέγεται « ἡ Συνδυαστική ». Τό άλαιο αὐτό δέ θά διατυπωθεῖ σ' ἐτοῦτο τό βιβλίο, γιατί ξεπερνάει τόν ρισμό, πού τοῦ βάλαμε. Ὡστόσο ὅμως θά δώσουμε τόν τύπο αὐτό καί ἐξηγήσουμε τήν πρακτική του χρησιμοποίηση, γιατί μᾶς χρειάζεται σέ λές ἐφαρμογές τῶν στοιχειωδῶν μαθηματικῶν.

Νά ὁ τύπος :

$$(x+a)^\mu \equiv x^\mu+\frac{\mu}{1}ax^{\mu-1}+\frac{\mu(\mu-1)}{1\cdot2}a^2x^{\mu-2}+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1\cdot2\cdot3}a^3x^{\mu-3}+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots\cdots(\mu-\nu+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdots\nu}a^\nu x^{\mu-\nu}+\cdots\cdots+a^\mu$$

Καὶ εἶναι εὔκολο νὰ παρατηρήσει κανείς τὸν νόμο, ποὺ ἀκολουθάει διαδοχὴ τῶν ὅρων του, γιὰ νὰ μπορεῖ καὶ νὰ τὸν θυμᾶται. Στὴν π κτικὴ του χρησιμοποίηση ὅμως, μεταχειριζόμαστε δύο ἰδιότητες τῶν ὅ του, ποὺ μᾶς εὐκολύνουν ἐξαιρετικά.

1η Ἰδιότητα. Οἱ συντελεστὲς τῶν ὅρων, ποὺ ἀπέχουνε ἴσα τοὺς ἀκρινοὺς ὅρους εἶναι ἴσοι. Τί σημαίνει γιὰ μᾶς αὐτὴ ἡ ἰδιότ Οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος, ὅπως εἶναι φανερό, εἶναι $\mu+1$ σὲ πλῆθος. Ὑποθέσουμε τώρα, ὅτι $\mu=2\nu$, τότε ὑπάρχει μεσαῖος ὅρος, δηλ. ἕνας ποὺ ἀπ' τὴ μιά του μεριὰ καὶ ἀπὸ τὴν ἄλλη, ἔχει τὸ ἴδιο πλῆθος ὅρου Ἀφοῦ λοιπὸν προσδιοριστοῦνε οἱ συντελεστὲς τοῦ ἀναπτύγματος, μέχ ὅρο ποὺ κατέχει τὴν $\nu+1$ θέση, ὁ συντελεστὴς αὐτοῦ τοῦ ὅρου δὲν ναλαμβάνεται καὶ οἱ συντελεστὲς τῶν ἄλλων ὅρων εἶναι οἱ συντελ τῶν προηγουμένων του ὅρων, ἐφόσον ὅμως παίρνουνται κατὰ τ ἀντίστροφη.

Ἂν ἔχουμε $\mu=2\nu+1$ τότε τὸ πλῆθος τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος ἄρτιο καὶ μεσαῖος ὅρος στὸ ἀνάπτυγμα δὲν ὑπάρχει.

Στὴν περίπτωση αὐτὴ οἱ συντελεστὲς τῶν ὅρων, ποὺ ἔρχουνται ἐ ἀπὸ κεῖνον, ποὺ κατέχει τὴ $\nu+1$ τάξη, συμπίπτουν μὲ τοὺς συντελ τῶν προηγουμένων ὅρων, μὰ ποὺ τοὺς παίρνουμε κατὰ τάξη ἀντιστ

2η Ἰδιότητα. Ὁ συντελεστὴς τοῦ κάθε ὅρου βρίσκεται, ἂ λαπλασιάσουμε τὸν συντελεστὴ τοῦ προηγουμένου ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέ ἔχει ὁ x σ' αὐτὸ τὸν ὅρο καὶ τὸ γινόμενο τὸ διαιρέσουμε μὲ τὸν ἀρ ποὺ δηλώνει τὴ θέση τοῦ ὅρου.

3η Ἰδιότητα. Ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι μονώ τοῦ ἴδιου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ γράμματα x καὶ α καὶ οἱ ἐκθέτες το πηγαίνουνε μικραίνοντας ἀπὸ ὅρο σὲ ὅρο, ἐνῶ οἱ ἐκθέτες τοῦ α πη νουνε μεγαλώνοντας.

Θὰ γράψουμε μερικὰ ἀναπτύγματα μὲ τρόπο, ποὺ νὰ φαίνεται ἡ σιμοποίηση τῶν παραπάνω ἰδιοτήτων.

Τό ἀνάπτυγμα τοῦ $(x+a)^4$ θά ἔχει πέντε ὅρους καί ἔτσι θά χρειαστεῖ ιά προσδιοριστοῦνε οἱ συντελεστές στούς τρεῖς πρώτους ὅρους.

Ὥστε : $(x+a)^4 \equiv x^4+\frac{1\cdot4}{1}\cdot ax^3+\frac{4\cdot3}{2}a^2x^2+\frac{1\cdot4}{1}a^3x+a^4 \equiv x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4$.

$$(x+a)^5 \equiv x^5+\frac{1\cdot5}{1}ax^4+\frac{5\cdot4}{2}a^2x^3+\frac{5\cdot4}{2}a^3x^2+\frac{1\cdot5}{1}a^4x+a^5 \equiv$$

$$x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5$$

$$(x+a)^6 \equiv x^6+\frac{1\cdot6}{1}ax^5+\frac{6\cdot5}{2}a^2x^4+\frac{15\cdot4}{3}a^3x^3+\frac{6\cdot5}{2}a^4x^2+\frac{1\cdot6}{1}a^5x+a^6 \equiv$$

$$x^6+6ax^5+15a^2x^4+20a^3x^3+15a^4x^2+6a^5x+a^6$$

Σημείωση. Ἄν πρόκειται γιά τό διώνυμο $x-a$ οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος τῆς μιοστῆς του δυνάμεως, θά εἶναι ἕνας μέ τό σημεῖο + καί ἕνας μέ τό –.

91. **Τρόποι γιά νά ἐπαληθευτεῖ μιά ταυτότητα.** Γιά νά μάθουμε πῶς πρέπει νά δουλεύουμε γιά τήν ἐπαλήθευση ιᾶς ταυτότητας, χρειάζεται πρῶτα πρῶτα νά ἐξακριβώσουμε πῶς δημιουργιέται μιά ταυτότητα.

Σέ κάθε Ἀλγεβρικό ζήτημα εἶναι δυνατό νά μᾶς χρειαστεῖ νά μετασχηματίσουμε μιά σχέση σ' ἄλλη ἰσοδύναμη καί ἁπλούστερη ἤ νά ἐξακριβώσουμε τή σχέση, πού συνδέει δύο δοσμένες παραστάσεις. Καί ἄς ἐξηγηθοῦμε καλλίτερα:

Ὅταν θελήσουμε νά ἐκφράσουμε ἀφηρημένα τίς σχέσεις, πού ὑπάρχουν ἀνάμεσα στά γνωστά καί στά ζητούμενα ἑνός ἀλγεβρικοῦ προβλήματος δημιουργοῦμε ἀλγεβρικές παραστάσεις καί σχέσεις ἀνάμεσα σ' αὐτές. Ἔτσι ἡ λύση κάθε ἀλγεβρικοῦ ζητήματος, πού ἔχει σάν ἔκφρασή του (σάν ἐκπροσώπησή του) μιά σχέση ἀνάμεσα σέ παραστάσεις, μᾶς ὁδηγεῖ νά μετασχηματίζουμε κάθε παράσταση αὐτῆς τῆς σχέσης σέ ἰσοδύναμη καί ἁπλούστερη ἤ γενικώτερα σέ μορφή πιό χρήσιμη. Ὅποιας λοιπόν μᾶς δώσει τήν ἰσοδύναμη παράσταση μιᾶς ἄλλης δοσμένης παράστασης πιό πολύπλοκης ἤ ποῦ θά ἐξακριβώσει ἀνάμεσα σέ δυό δοσμένες παραστάσεις Α καί Β ποιά εἶναι μεγαλύτερη ἔχει δημιουργήσει μιά ταυτότητα.

Γιά κείνου λοιπόν, πού θά μάθει μαθηματικά προκύπτει τό ζήτημα άσκηθεΐ σέ μετασχηματισμούς παραστάσεων. Κι έπειδή οί μορφές, πού μπ ρεί νά πάρει μιά παράσταση, έπειτα άπό τή χρησιμοποίηση πάνου σα τές άποδειγμένων σχέσεων, είναι ποικίλες, γι'αύτό δίνεται καί ή μορφ στήν όποία πρόκειται νά καταλήξουμε. Είναι ή μορφή, πού στάθηκε έξυπηρ τική σέ κάποιο μαθηματικό ζήτημα, πού ό δημιουργός τής ταυτότητας έξέτ

Πιστεύω πώς μπορούμε άπό τά παραπάνου καί τό γνωστό όρισμό τή ταυτότητας νά δικαιολογήσουμε καί νά νοιώσουμε, ότι ή ταυτότητα δέν είναι ένα άλγεβρικό θέμα, δέν είναι μ'άλλους λόγους μιά θεωρία, πού έκ φράζει τή λύση ζητημάτων μιάς ώρισμένης κατηγορίας, μά στοιχεί κάθε άλγεβρικού προβλήματος*.

Μετά τήν παραπάνου έξήγηση τού τρόπου μέ τόν όποίο δημιουργιέτα μιά ταυτότητα βγαίνει σάν συμπέρασμα, ότι πρέπει: νά παίρνου με ένα άπό τά δυό της μέλη καί μέ μετασχηματισμούς τών στοιχείων του σέ ίσοδύναμε παραστάσεις νά τού δίνουμε τή μορφή τού άλλου της μέλους. Ή έκλογή τού μέλους, άπό τό όποί θά ξεκινήσουμε είναι αύθαίρετη, μά γιά νά έξυπηρετήσουμε τό σκοπ πού έχει ή άσκηση** πάνου στίς ταυτότητες, θά πρέπει νά ξεκινάμε α τό μέλος πού 'χει τήν πιό πολύπλοκη μορφή.

Αύτή ή έργασία μπορεί νά όνομαστεί Συνδυαστική έργα γιατί άποβλέπει στόν συνδυασμό γνωστών σχέσεων, γιά νά πάρει ή παράσταση μας μιά ώρισμένη μορφή.

Μ'ένα παράδειγμα θά γίνουμε πιό κατανοητοί.

Παράδειγμα: Νά δειχτεί ή ταυτότητα:

$$(\mu-\nu)(\mu+\nu)^3-\mu^4+\nu^4\equiv 2\mu\nu(\mu^2-\nu^2)$$

---

* Κάτου άπό τή γενική έννοια τής άναζήτησης.

** Ή τριβή.

Ἐδῶ βλέπουμε, ὅτι στό δεύτερο μέλος ὑπάρχει σάν παράγοντας τό $\mu^2-\nu^2$. Εἶναι φυσικό λοιπόν νά ζητήσουμε νά κάμουμε στό πρῶτο μέλος μετασχηματισμούς τέτιους, ὥστε τό $\mu^2-\nu^2$ νά γίνει διαιρέτης τοῦ πρώτου μέλους. Ὀνομάζοντας λοιπόν Α τό πρῶτο μέλος ἔχουμε:

$$A\equiv(\mu-\nu)(\mu+\nu)(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2)-(\mu^4-\nu^4)\equiv(\mu^2-\nu^2)(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2)-(\mu^2-\nu^2)(\mu^2+\nu^2)\equiv$$

$$(\mu^2-\nu^2)\left[(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2)-(\mu^2+\nu^2)\right]\equiv(\mu^2-\nu^2)(\mu^2+2\mu\nu+\nu^2-\mu^2-\nu^2)\equiv2(\mu^2-\nu^2)\mu\nu.$$

Ὁδηγός μας στήν ἐργασία μας ἐτούτη θά εἶναι ἡ μορφή στήν ὁποία θέλουμε νά καταλήξουμε.

Μποροῦμε γιά τήν ἐπαλήθευση μιᾶς ταυτότητας νά ἐργαστοῦμε καί Ἁπλοποιητικά. Δηλ. νά ὑποθέσουμε ὅτι ἡ σχέση μας εἶναι ἀληθινή καί μέ μετασχηματισμούς, πού θά κάνουμε στό κάθε μέλος χωριστά καί σέ συνάρτηση τοῦ ἑνός μέ τό ἄλλο, νά δώσουμε σ' αὐτή μορφή τέτια, πού νά ἐκφράζει γνωστή ἀληθινή σχέση. Ἄν αὐτό τό ἐπιτύχουμε, σημαίνει πῶς ξεκινήσαμε ἀπό ἀλήθεια; Φυσικά ἄν ὅλες οἱ προτάσεις ἤ οἱ σχέσεις, πού μεταχειριστήκαμε μποροῦνε νά ἀντιστραφοῦνε. Χρειάζεται λοιπόν νά ξεκινήσουμε τώρα ἀπό τήν ἀληθινή σχέση καί νά καταλήξουμε μέ τήν ἀντίστροφη ἐργασία στή σχέση, πού μᾶς δόθηκε γιά ἐπαλήθευση.

Αὐτό τό δρόμο δέν τόν συσταίνουμε γιατί, ὅπως φαίνεται ἀπό τά παραπάνω μᾶς ἀπομακρύνει ἀπό τό σκοπό, πού ἔχει ἡ ἄσκηση πάνω στίς ταυτότητες.

Εἶναι εὔκολο νά καταλάβουμε, ὅτι ὅσα ἐκθέσαμε προηγουμένως ἀφοροῦνε καί τίς ταυτότητες, πού εἶναι ἀνισότητες. Γιά νά ἐξακριβώσουμε, ἄν μιά παράσταση Α εἶναι μεγαλύτερη ἤ μικρότερη ἀπό τή Β, θά πρέπει νά ἐξακριβώσουμε, ἄν ἡ διαφορά Α-Β ἤ ἡ Β-Α εἶναι θετική, δηλ. θά πρέπει νά μπορέσουμε νά θέσουμε τή μιά ἤ τήν ἄλλη διαφορά κάτου ἀπό τή μορφή ἑνός τετραγώνου ἤ ἀθροίσματος τετραγώνων. Καί στήν περίπτωση τούτη τό ζήτημά μας εἶναι ζήτημα κατάλληλων μετασχηματισμῶν. Νά ἕνα παράδειγμα:

Νά δειχτεῖ, ὅτι γιά κάθε τιμή τοῦ α ἰσχύει ἡ σχέση:

$$3(1+a^2+a^4) \geqslant (1+a+a^2)^2$$

Ἐκτελώντας τίς πράξεις βρίσκουμε πώς πρέπει νά δείξουμε ὅτι

$2(1-a^3+a^4-a) \geqslant 0$ ἤ ὅτι $1-a^3+a^4-a \geqslant 0$

Τό πολυώνυμο τοῦ πρώτου μέλους γράφεται: $(1-a)-a^3(1-a) \geqslant 0$

ἤ $(1-a)(1-a^3) \geqslant 0$ ἤ $(1-a)(1-a)(1+a+a^2) \geqslant 0$ ἤ $(1-a)^2(1+a+a^2) \geqslant 0$

Καί φυσικά θά πρέπει νά δείξουμε, ὅτι ἡ παράσταση $1+a+a^2$ εἶναι θετική γιά κάθε τιμή τοῦ α.

Πρέπει λοιπόν νά μπορεῖ νά πάρει τή μορφή τετραγώνου ἤ ἀθροίσματ τετραγώνων, καί πράγματι: $1+a+a^2=\left(\frac{1}{2}+a\right)^2+\frac{3}{4}$.

Ὥστε ἡ σχέση μας γιά κάθε τιμή τοῦ α διαφορετική ἀπό τή μονάδα ἰσχ ει σάν ἀνισότητα καί γιά α=1 σάν ἰσότητα.

Πρίν νά κλείσουμε ἐτοῦτο τό κεφάλαιο ἀξίζει νά μιλήσουμε γιά μερικ μαθηματικά ζητήματα (προβλήματα), πού γιά τή λύση τους χρησιμοποιοῦμ πολύ τίς ταυτότητες, πού ἀποδείξαμε. Εἶναι τά ζητήματα, μέ τά ὁποῖα ζητιέται νά ἐξακριβωθεῖ μιά σχέση, πού ἀληθεύει γιά ἄπειρα συστήματα ἀληθινῶν τιμῶν τῶν γραμμάτων της, μά πού τά συστήματα αὐτά χρωστ νε νά ὑποτάσσονται σέ μιά ἤ περισσότερες γνωστές σχέσεις, δηλ. νά βρ σκουνται κάτου ἀπό περιορισμούς** Οἱ ἀσκήσεις 102 καί 104 εἶναι ἡ καθεμιά ἕνα τέτιο ζήτημα.

Εἶναι εὔκολο νά καταλάβουμε ὅτι γιά τή λύση τέτιων ζητημάτων θά συμβαίνει: ἤ νά μποροῦμε ἀπό τό συνδυασμό τῶν γνωστῶν σχέσεων νά

---

* Ὁμάδες.

** Εἶδα τά ζητήματα αὐτά νά τά λένε « ταυτότητες κάτου ἀπό περιορισμού

Δέ βρίσκω δικαιολογημένη τήν ὀνομασία, γιατί πιστεύω ὅτι ἡ λέξη « περιορισμός » ἀφαιρεῖ ἀπό τή σχέση, πού πρόκειται νά ἐξακριβώσουμε τήν ἰδιότητα τῆς ταυτότητας.

τιάνουμε τή σχέση, πού πρόκειται νά ἐπαληθέψουμε, ἤ νά ἐπαληθεύουμε
ύτή τή σχέση δεχόμενοι ἐάν ἀληθινές τίς σχέσεις αὐτές στούς μετασχημα-
σμούς, πού πρόκειται νά χρησιμοποιήσουμε. Θά δώσουμε δύο παραδείγματα
ιά τά ζητήματα αὐτά.

1ο Παράδειγμα:

Ἄν οἱ ἀριθμοί x, ψ, z, φ ἱκανοποιοῦν τίς ἰσότητες:

$x+\psi+z+\varphi=1$, $x^2+\psi^2+z^2+\varphi^2=1$, $x^3+\psi^3+z^3+\varphi^3=1$ νά δειχτεῖ ὅτι ἱκανοποιοῦν
αί τήν ἰσότητα:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{z}+\frac{1}{\varphi}=0 \qquad (1)$$

Ὅπως εἶναι γραμμένη ἡ ἰσότητα (1) δέ φαίνεται ὁ τρόπος τῆς ἐξαρ-
σεώς της ἀπό τίς γνωστές σχέσεις.

Γι' αὐτό βρίσκουμε τήν ἰσοδύναμή της $yz\varphi+xz\varphi+xy\varphi+xyz=0$. Ἡ σχέ-
η αὐτή περιέχει τά γινόμενα τῶν ἀριθμῶν x, y, z, φ, πού τούς παίρνουμε
νά τρεῖς καί πού ὑπάρχουν, (ταυτότητα 10) καί στόν κύβο τοῦ ἀθροί-
ματος $x+y+z+\varphi$.

Ὑψώνουμε λοιπόν καί τά δύο μέλη τῆς πρώτης ἀπό τίς γνωστές σχέσεις
τόν κύβο. Ἔχουμε λοιπόν:

$x^3+y^3+z^3+\varphi^3+3x^2(y+z+\varphi)+3y^2(x+z+\varphi)+3z^2(x+y+\varphi)+3\varphi^2(x+y+z)+$
$6(xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi)=1$. Ἤ παίρνοντας ὑπ' ὄψη καί τίς ἄλλες γνω-
τές σχέσεις, βρίσκουμε:

$$1+3x^2(1-x)+3y^2(1-y)+3z^2(1-z)+3\varphi^2(1-\varphi)+6(xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi)=1$$
$$3x^2-3x^3+3y^2-3y^3+3z^2-3z^3+3\varphi^2-3\varphi^3+6(xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi)=0$$
$$3(x^2+y^2+z^2+\varphi^2)-3(x^3+y^3+z^3+\varphi^3)+6(xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi)=0$$

δηλ. $6(xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi)=0$

Καί ἐπομένως:

$$xyz+xy\varphi+xz\varphi+yz\varphi=0$$

2ο Παράδειγμα:

Ἐάν $\alpha^2+\beta^2=1$ τότε εἶναι ἀληθινή ἡ ἰσότητα:

$$(3a-4a^3)^2+(3\beta-4\beta^3)^2=1$$

Τό α΄ μέλος Α τῆς ἰσότητάς μας γράφεται:

$$A=9a^2+16a^6-24a^4+9\beta^2+16\beta^6-24\beta^4=9(a^2+\beta^2)+16(a^6+\beta^6)-24\,(a^4$$

Εἶναι φανερό, ὅτι πρέπει ἀπό τή δοσμένη σχέση νά ὑπολογιστοῦν

μές τῶν παραστάσεων: $a^6+\beta^6$ καί $a^4+\beta^4$. Ἔχουμε λοιπόν:

$$(a^2+\beta^2)^3=1 \text{ ἤ } a^6+\beta^6+3a^2\beta^2(a^2+\beta^2)=1 \text{ ἤ } a^6+\beta^6=1-3a^2\beta^2.$$

Ἐπίσης,

$$(a^2+\beta^2)^2=1 \text{ ἤ } a^4+\beta^4+2a^2\beta^2=1 \text{ ἤ } a^4+\beta^4=1-2a^2\beta^2.$$

Ὥστε:

$$A=9+16(1-3a^2\beta^2)-24(1-2a^2\beta^2)=9+16-48a^2\beta^2-24+48a^2\beta^2=1$$

Ἀσκήσεις

129) Νά ὑπολογιστοῦν τά γινόμενα: $(2ax+5\beta y)\cdot(2ax-5\beta y)$,
$(a+\beta+2)\cdot(a+\beta-2)$, $(x+2y-3)\cdot(x-2y+3)$, $(a+2\beta)(a-2$
$(a^2+4\beta^2)\cdot(a^4+16\beta^4)$, $(x+a)(x-a)(x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2)$,
$(1+x^2+x\sqrt{2})\cdot(1+x^2-x\sqrt{2})$, $(x-y)^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2$.

130) Νά δειχτεῖ, ὅτι οἱ παρακάτου ἰσότητες, εἶναι ἀληθινές:

α) $(a-\beta)^3+3(a-\beta)^2(a+\beta)+(a+\beta)^3+3(a-\beta)(a+\beta)^2=8a^3$.

β) $(a+\beta+\gamma)^2+(a-\beta)^2+(a-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=3(a^2+\beta^2+\gamma^2)$.

γ) $(a+\beta+\gamma+\delta)^2+(a-\beta)^2+(a-\gamma)^2+(a-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2=4(a^2+\beta^2$

δ) $(a+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-a)^3-(\gamma+a-\beta)^3-(a+\beta-\gamma)^3=24a\beta\gamma$.

ε) $(a+\beta+\gamma+\delta)^2+(a-\beta-\gamma+\delta)^2+(a-\beta+\gamma-\delta)^2+(a+\beta-\gamma-\delta)^2=4(a^2+\beta^2+\gamma^2$

131) Ἐάν θέσουμε $a+\beta+\gamma=2\tau$ νά δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτή

α) $$1+\frac{\beta^2+\gamma^2-a^2}{2\beta\gamma}=\frac{2\tau(\tau-a)}{\beta\gamma}.$$

β) $(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

γ) $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+2(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)=2\tau^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$

δ) $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)=\alpha\beta\gamma$.

32) Νά δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

α) $1+\alpha^6=(1+\alpha\sqrt{3}+\alpha^2)(1+\alpha^2)(1-\alpha\sqrt{3}+\alpha^2)$.

β) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$

γ) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)^2$.

33) Ἐάν θέσουμε $x+y=\alpha$ καί $xy=\beta$ νά δειχτεῖ ὅτι:

$$x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$$

$$x^5+y^5=\alpha^5-5\alpha^3\beta+5\alpha\beta^2$$

34) Ἐάν θέσουμε $x+y=\alpha$ καί $x^3+y^3=\beta^3$ νά εὐφραστοῦν οἱ παραστάσεις x^4+y^4 καί x^5+y^5 μέ τά α καί β.

135) Νά δειχτεῖ ὅτι: $(x^2+3xy+y^2)^2=x(x+y)(x+2y)(x+3y)+y^4$.

136) Ἐπαληθεύψετε τήν ταυτότητα τοῦ Euler:

$$\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta t)^2+(\beta x-\alpha y+\delta z-\gamma t)^2+(\gamma x-\delta y-\alpha z+\beta t)^2+(\delta x+\gamma y-\beta z-\alpha t)^2$$

$$\equiv(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+z^2+t^2).$$

137) Νά ὑπολογιστεῖ τό γινόμενο τῶν πολυωνύμων $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ καί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\alpha\delta-\beta\gamma-\beta\delta-\gamma\delta$. Ἀπό τόν ὑπολογισμό αὐτό πιό συμπέρασμα προκύπτει, ἄν ἰσχύει ἡ ἰσότητα $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$;

138) Ἐπαληθεύψετε τίς ταυτότητες:

α) $(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1\equiv(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$.

β) $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\equiv2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)$.

γ) $(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3-3(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\equiv0$

δ) $(x+y)(x+z)-x^2\equiv(y+z)(y+x)-y^2\equiv(z+x)(z+y)-z^2$.

139) Γνωρίζοντες ὅτι ἔχουμε: $x+y+z=\alpha$

$$x^2+y^2+z^2=\beta^2$$

$$x^3+y^3+z^3=\gamma^3$$

ὑπολογίστε τό γινόμενο xyz ἀπό τά α, β, γ.

140) Ἐπίσης, ἐὰν ἰσχύουν οἱ ἰσότητες: $x+y+z=\alpha$

$$xy+yz+zx=\beta$$

$$xyz=\gamma$$

νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ ἄθροισμα $x^3+y^3+z^3$ ἀπὸ τὰ α, β, γ.

141) Ἐπαληθεύσετε τὴν ταυτότητα: $\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\frac{(\nu-1)\nu(2\nu-1)}{6}\equiv$

καὶ ἔπειτα μὲ τὴ βοήθειά της νὰ βρῆτε τὴν ἰσοδύναμη παράσταση πρ

τὴν: $1^2+2^2+3^2+\ldots\ldots+\nu^2$ (ν = φυσικὸς ἀριθμός).

142) Κάμετε τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ταυτότητα $\left(\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{\nu(\nu-1)}{2}\right)^2\equiv\nu^3$ καὶ μὲ τὸ β

θειά της, νὰ βρῆτε τὴν ἰσοδύναμη παράσταση πρὸς τὴν: $1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3$ (ν=φ

σικὸς ἀριθμός).

143) Ἀναπτύξετε τὰ τετράγωνα:

1ο $(x^2+3x-2)^2$ 2ο $(2x^3-5x^2+6x-4)^2$

144) Νὰ δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητας:

$$4\left[(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\alpha\beta'-\alpha'\beta)(\beta\gamma'-\gamma\beta')\right]\equiv\left[2(\alpha\gamma'+\alpha'\gamma)-\beta\beta'\right]^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma').$$

145) Ἂν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$ καὶ $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\nu$ συνδέονται μὲ τὶς ἰσ

τητες: $\alpha^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots\ldots+\alpha_\nu^2$ $\beta^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\ldots\ldots+\beta_\nu^2$

$$\alpha\beta=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\ldots\ldots+\alpha_\nu\beta_\nu$$

τότε θὰ συμβαίνει νὰ ἔχουμε: $\frac{\alpha_1}{\beta_1}=\frac{\alpha_2}{\beta_2}=\frac{\alpha_3}{\beta_3}=\ldots=\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ (πολυτ. 1939).

146) Νὰ δειχτεῖ ὅτι οἱ παρακάτω ἰσότητες εἶναι ἀληθινές:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\alpha\gamma-\alpha\beta)^2=\frac{1}{2}\left[(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4+(\alpha-\beta)^4\right]=(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha$$

$$+(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2.$$

147) Ἐὰν τρεῖς διαφορετικοὶ μεταξύ τους ἀριθμοὶ α, β, γ ταυτοποιοῦ

τὶς ἰσότητες: $\alpha^3+\lambda\alpha+\mu=0$

$$\beta^3+\lambda\beta+\mu=0$$

$$\gamma^3+\lambda\gamma+\mu=0$$, νὰ δειχτεῖ ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

148) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ νὰ δειχτεῖ ὅτι: $(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)^2=9(\beta\gamma\delta+\gamma\delta\alpha+\delta\alpha\beta+$

149) Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=\tau$ νὰ δειχτεῖ ὅτι: $(\tau-3\alpha)^3+(\tau-3\beta)^3+(\tau-3\gamma)^3=$

$3(\tau-3\alpha)(\tau-3\beta)(\tau-3\gamma)$.

150) Ἐὰν ἰσχύει ἡ ἰσότητα $\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\gamma\delta(\gamma^2+\delta^2)$ καὶ θέσουμε:

$$α+β+γ+δ=Α,\quad α+β-γ-δ=Β,\quad α-β+γ-δ=Γ,\quad α-β-γ+δ=Δ,$$

νά δειχτεῖ, ὅτι θά ἰσχύει καί ἡ ἰσότητα: $ΑΒ(Α^2+Β^2)=ΓΔ(Γ^2+Δ^2)$ (J. Bertrand).

~~~~~~

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Γ΄.

Μετασχηματισμός ἑνός πολυωνύμου σέ γινόμενο.

92. Ὁ μετασχηματισμός τῶν πολυωνύμων σέ γινόμενα παραγόντων ἐξαρτιέται γενικά ἀπό τή θεωρία γιά τή λύση τῶν ἐξισώσεων καί πραγματοποιεῖ αὐτή τή λύση, ὅταν κατορθώσουμε νά τόν ἐπιτύχουμε. Τό γεγονός αὐτό μᾶς ἐμποδίζει νά ὁλοκληρώσουμε τήν ἀνάπτυξη τοῦ θέματός μας. Θά περιοριστοῦμε μόνο νά δώσουμε τίς στοιχειώδεις περιπτώσεις στίς ὁποῖες μποροῦμε νά πραγματοποιήσουμε τό μετασχηματισμό τῶν πολυωνύμων σέ γινόμενα καί πού συναντιοῦνται συχνά. Χρωστᾶμε ὡστόσο νά τονίσουμε τή χρησιμότητα τοῦ παρόντος κεφαλαίου, γιατί ἐκτός ἀπό τήν παραπάνου προσφορά του ἁπλοποιεῖ τίς πολύπλοκες παραστάσεις καί διευκολύνει τή λύση πολλῶν μαθηματικῶν ζητημάτων.

1η περίπτωση: Ἐάν ἕνα πολυώνυμο εἶναι τέτιο ὥστε οἱ συντελεστές τῶν ὅρων του νά δέχουνται ἕνα μ.κ.δ. διαφορετικό ἀπό τή μονάδα καί σύγχρονα μερικά γράμματα νά περιέχουνται σ' ὅλους τούς ὅρους, τό πολυώνυμο θά εἶναι διαιρετό μέ ἕνα μονώνυμο, πού ὁ συντελεστής του θά εἶναι αὐτός ὁ μ.κ.δ. καί τό γραμματικό του μέρος θ' ἀποτελεῖται ἀπό τά κοινά γράμματα τῶν ὅρων του, πού θά τά πάρουμε μέ τό μικρότερό τους ἐκθέτη.

Παράδειγμα: Τό πολυώνυμο $15α^3β^2γ^2-12α^2β^3γ^2+18α^2β^2γ^3$ ἔχει ὅλους τούς ὅρους διαιρετούς μέ τό μονώνυμο $3α^2β^2γ^2$ ἤ μέ τό $-3α^2β^2γ^2$ καί μποροῦμε νά γράψουμε:

$$15α^3β^2γ^2-12α^2β^3γ^2+18α^2β^2γ^3=3α^2β^2γ^2(5α-4β+6γ)=-3α^2β^2γ^2(-5α+4β-6γ).$$
~~~~~~

2η περίπτωση: Ἐάν τό πολυώνυμο μπορεῖ νά τεθεῖ κάτου τή μορφή διαφορᾶς δύο τετραγώνων. Στήν περίπτωση αὐτή ὁ τύπος

$$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha^2-\beta^2$$

μᾶς ἐπιτρέπει νά τό μορφώσουμε σέ παράγοντες.

Παραδείγματα: $4\alpha^2-9\beta^2=(2\alpha+3\beta)(2\alpha-3\beta)$

$12\alpha^2x-75\beta^2xy^2=3x(4\alpha^2-25\beta^2y^2)=3x(2\alpha+5\beta y)(2\alpha-5\beta y).$

3η περίπτωση: Ἐάν μπορούμε, χωρίζοντας τούς ὅρους τ πολυωνύμου σέ ὁμάδες ἤ μαζύ μ' αὐτό μετασχηματίζοντας μερικού του ὅρους, νά φέρουμε τό πολυώνυμο στίς παραπάνω μορφές. Τήν περίπ ση αὐτή μόνο μέ τά παραδείγματα μπορούμε νά ἐκφράσουμε καί νά κάμουμε κατανοητό.

Παραδείγματα: 1ο. $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\delta+\gamma\delta=(\alpha\beta+\alpha\gamma)+(\beta\delta+\gamma\delta)$
$=\alpha(\beta+\gamma)+\delta(\beta+\gamma)=(\beta+\gamma)(\alpha+\delta).$

2ο. $1+xy+\alpha(x+y)-(x+y)-\alpha(1+xy)=[(1+xy)-\alpha(1+xy)]+[\alpha(x+y)-(x+y)]$
$=(1+xy)(1-\alpha)-(x+y)(1-\alpha)=(1-\alpha)(1+xy-x-y)=(1-\alpha)[(1-x)-y(1-x)]$
$=(1-\alpha)(1-x)(1-y).$

3ο. $16-\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta=16-(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)=16-(\alpha-\beta)^2=[4+(\alpha-\beta)][4-(\alpha-\beta)]=(4+\alpha-\beta)(4-\alpha+\beta$

4ο. $9x^4+3x^2y^2+4y^4=9x^4+12x^2y^2+4y^4-9x^2y^2=(3x^2+2y^2)^2-(3xy)^2$
$=(3x^2+2y^2+3xy)(3x^2+2y^2-3xy).$

5ο. $\alpha^4\beta^4-15\alpha^2\beta^2+9=\alpha^4\beta^4-6\alpha^2\beta^2+9-9\alpha^2\beta^2=(\alpha^2\beta^2-3)^2-(3\alpha\beta)^2$
$=(\alpha^2\beta^2+3\alpha\beta-3)(\alpha^2\beta^2-3\alpha\beta-3).$

6ο. $\alpha^4+\beta^4=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta\sqrt{2})^2=$
$(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{2})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{2}).$

7ο. $\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\beta^4=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-3\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2)^2-(\alpha\beta\sqrt{3})^2$
$=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta\sqrt{3})(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta\sqrt{3}).$

4η περίπτωση: Ὅταν τό πολυώνυμο μπορέσουμε τό θέσουμε κάτου ἀπό τή μορφή ἀθροίσματος, ἤ διαφορᾶς κύβων· τότε τύποι:

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

μᾶς ἐπιτρέπουν νά τό μετασχηματίσουμε σέ γινόμενο.

Γενικότερα, ὅταν ἔχει ἤ μπορέσουμε νά τοῦ δώσουμε μορφή τέτοια ὥστε νά κάνουμε χρήση τῆς θεωρίας τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων. Νά τύποι γι' αὐτές τίς περιπτώσεις:

$$x^5-\alpha^5=(x-\alpha)(x^4+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x+\alpha^4)$$

$$x^5+\alpha^5=(x+\alpha)(x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4)$$

$$x^6-\alpha^6=(x^3-\alpha^3)(x^3+\alpha^3)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2)(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2).$$

$$x^7\pm\alpha^7=(x\pm\alpha)(x^6\mp\alpha x^5+\alpha^2x^4\mp\alpha^3x^3+\alpha^4x^2\mp\alpha^5x+\alpha^6)\quad \text{κ.ο.κ.}$$

Παραδείγματα: $1000x^3+27\alpha^3=(10x)^3+(3\alpha)^3=$

$$(10x+3\alpha)(100.x^2-30\alpha x+9\alpha^2).$$

$$32\gamma^4\delta-4\gamma\delta^4=4\gamma\delta(8\gamma^3-\delta^3)=4\gamma\delta(2\gamma-\delta)(4\gamma^2+2\gamma\delta+\delta^2).$$

93. Ἐφαρμογές τοῦ μετασχηματισμοῦ τῶν πολυωνύμων σέ γινόμενα.

Θά δώσουμε παρακάτου τή λύση μερικῶν μαθηματικῶν ζητημάτων γιά νά φανεῖ ἡ χρησιμότητα τοῦ παραπάνου κεφαλαίου.

Ζήτημα 1ο: Ἐάν οἱ ἀριθμοί α,β,γ ἱκανοποιοῦν τή σχέση $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ νά δειχτεῖ ὅτι τότε θά ἱκανοποιοῦν καί τή σχέση $(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}=x^{2\nu+1}+\beta^{2\nu+1}+\gamma^{2\nu+1}$, ὅπου τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός.

Καταλαβαίνουμε ὅτι γιά νά ἐπαληθέψουμε τή δεύτερη σχέση πρέπει νά χρησιμοποιήσουμε τήν πρώτη, πού ἀπό ὑπόθεση εἶναι ἀληθινή. Κ' ἐπειδή ἡ ἐμφάνισή της δέ μᾶς ἐξηγεῖ τόν τρόπο, πού θά τή χρησιμοποιήσουμε, γι' αὐτό τή μετασχηματίζουμε σ' ἄλλη ἁπλούστερη. Ἔχουμε λοιπόν:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2(\beta+\gamma)+3\beta^2(\alpha+\gamma)+3\gamma^2(\alpha+\beta)+6\alpha\beta\gamma=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$$

ἤ $$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\alpha+\gamma)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma=0$$

ἤ $$\alpha^2(\beta+\gamma)+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2+2\alpha\beta\gamma=0$$

ἤ $$\alpha^2(\beta+\gamma)+(\alpha\beta^2+\alpha\gamma^2+2\alpha\beta\gamma)+(\beta^2\gamma+\beta\gamma^2)=0$$

ἤ $$\alpha^2(\beta+\gamma)+\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta\gamma(\beta+\gamma)=0$$

ἤ $$(\beta+\gamma)(\alpha^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)=0$$

ἢ $$(β+γ)[α(α+β)+γ(α+β)]=0$$

δηλ. $$(β+γ)(α+β)(α+γ)=0$$

Καί ἐπειδή ἕνα γινόμενο εἶναι μηδενικό, ὅταν ἕνας ἀπό τούς παράγοντ του εἶναι μηδενικό, συμπεραίνουμε ὅτι: $α+β=0$ ἢ $α+γ=0$ ἢ $β+γ=0$. νά ἰσχύει λοιπόν ἡ δοσμένη σχέση, ἔχει σάν ἀποτέλεσμα, δύο ἀπό τούς ριθμούς πού θεωροῦμε, νά εἶναι ἀντίθετοι. Χρησιμοποιώντας αὐτό τ ποτέλεσμα βρίσκουμε:

$$(0+γ)^{2ν+1}=(-β)^{2ν+1}+β^{2ν+1}+γ^{2ν+1} \quad \text{δηλ.} \quad γ^{2ν+1}=γ^{2ν+1}$$

Ζήτημα 2ο. Νά δειχτεῖ ὅτι, ἐάν τά α καί β εἶναι ἀριθ θετικοί, οἱ ποσότητες $α^3+2β^3$ καί $3αβ^2$, πού σχηματίζονται ἀπ' αὐ τούς ἀριθμούς, ἱκανοποιοῦν τή σχέση:

$$\underline{α^3+2β^3 \geqslant 3αβ^2}$$

Ἔχουμε: $α^3+2β^3-2αβ^2-αβ^2 \geqslant 0$ ἢ $(α^3-αβ^2)+(2β^3-2αβ^2) \geqslant 0$

ἢ $α(α^2-β^2)-2β^2(α-β) \geqslant 0$ ἢ $(α-β)(α^2+αβ-2β^2) \geqslant 0$

ἢ $(α-β)[(α^2-β^2)+β(α-β)] \geqslant 0$ ἢ $(α-β)^2(α+2β) \geqslant 0$

Δηλ. σχέση πού ἱκανοποιεῖται ὁποιοιδήποτε θετικοί ἀρι καί ἄν εἶναι οἱ α καί β.

Ζήτημα 3ο: Νά δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση:

$$\frac{αx^2+βy^2+γz^2}{βγ(y-z)^2+αγ(z-x)^2+αβ(x-y)^2}$$

διατηρεῖ τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή γιά ὅλες τίς τιμές τῶν x, y, z μηδενίζουν τήν παράσταση $αx+βy+γz$.

Γιά νά δείξουμε τήν ἀλήθεια τῶν παραπάνω, θά πρέπει λάβουμε ὑπ' ὄψη σάν ἀληθινή τή σχέση:

$$αx+βy+γz=0 \qquad (1)$$

κι ἐπειδή, ὅπως εἶναι φανερό, δέ μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε αὐτή σχέση, γιά νά μετασχηματίσουμε τόν ἀριθμητή, ἄς κοιτάξουμε νά δ με μήπως μποροῦμε νά τό κάμουμε γιά τόν παρονομαστή. Ὁ παρ νομαστής γράφεται:

$$\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2+\alpha\gamma z^2+\alpha\gamma x^2+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz-2\alpha\beta xy.$$

ράγματι λοιπόν, ὑψώνοντας κανείς καί τά δύο μέλη τῆς (1) στό τε-
ράγωνο, βρίσκει: $\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz-2\alpha\beta xy$. Καί ὁ πα-
ονομαστής γίνεται:

$$\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2+\alpha\gamma z^2+\alpha\gamma x^2+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2+\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2=$$
$$(\alpha^2x^2+\alpha\beta y^2+\alpha\gamma z^2)+(\alpha\beta x^2+\beta^2y^2+\beta\gamma z^2)+(\alpha\gamma x^2+\beta\gamma y^2+\gamma^2z^2)=$$
$$\alpha(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)+\beta(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)+\gamma(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)=$$
$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)$$

καί ἡ παράστασή μας ἔχει γιά ἰσοδύναμή της τήν

$$\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

ηλ. παράσταση ἀνεξάρτητο ἀπό τίς τιμές, πού παίρνουν
ά x, y, z μά οἱ ὁποῖες, ὅπως λάβαμε ὑπόψη, ἐπαληθεύουν τήν
σότητα: $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$.

* * *

Ἀσκήσεις

Μετασχηματίστε σέ γινόμενα τίς παρακάτω παραστάσεις:

(51) 1η: $2\alpha^3\beta^2\gamma^4\delta-3\alpha\beta^4\gamma^5+7\alpha^2\beta^2\gamma^4\delta^2$
2η: $12\alpha^2\beta^3-30\alpha^3\beta^2+18\alpha\beta^4-42\alpha^4\beta$

(52) 1η: $6\alpha^2x^3-3\alpha x^4+21\alpha^2x^5$ 2η: $15\alpha^2x^2-30\alpha^2x^3+105\alpha^2x^4-75\alpha^2x^5$

Μετασχηματίστε σέ γινόμενα δύο παραγόντων τίς ἀκόλουθες
παραστάσεις:

(53) √1η: $125(x+y)^3+1$ 2η: $9\alpha^2-12\alpha\beta+4\beta^2$
3η: $\alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}$ 4η: $9x^2-3xy+\frac{y^2}{4}$ 5η: $\frac{\alpha^2}{16}-\frac{3}{2}\alpha\beta+9\beta^2$
6η: $x^2+\alpha x+\beta x+\alpha\beta$ 7η: $8\alpha x-\beta x+8\alpha y-6y$
8η: $\alpha\mu+\alpha x-2\beta x-2\beta\mu$ 9η: $x^2+2x+1-y^2$
10η: y^2-x^2+2x-1 11η: $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$
12η: x^2+3x+2 13η: $y^2-5y-66$

14η: $\alpha^2-13\alpha\beta+30\beta^2$ 15η: $x^2+4\alpha x-12\alpha^2$

Νά γίνουν γινόμενα οἱ παραστάσεις:

154) 1η: $125x^6-64y^3$ 2η: $\alpha^3-2\alpha^3-3\alpha$ 3η: $81x^8-16y^8$

155) 1η: $\frac{\alpha^3}{27}+\frac{1}{3}\alpha^2x+\alpha x^2+x^3$ 2η: $\mu^3\nu^3-3\mu^2\nu^2xy+3\mu\nu x^2y^2-x^3y^3$

3η: $\alpha^3\beta^3+3\alpha^2\beta^2xy+3\alpha\beta x^2y^2+x^3y^3$ 4η: $3\alpha^2x^3y+6\alpha^2x^2y^2+3\alpha^2xy^3-3\alpha^2xy$

5η: $36\alpha^2x^6y^3-24\alpha^3x^4y^2z+4\alpha^4x^2yz^2$.

6η: $4\alpha^7x^5-24\alpha^6x^6+36\alpha^5x^7$

156) 1η: $3x(3\alpha-\beta)^2-12x(\alpha+5\beta)^2$ 2η: $20(\alpha+\beta)^2-45(x+y)^2$

3η: $4-36\alpha^2-4\beta^2+24\alpha\beta$ 4η: $\alpha^4x^3-\alpha^2x-2\alpha x-x$

5η: $x^4-1000xy^5$

157) 1η: $8\alpha^5-120+40\alpha^4-24\alpha$ 2η: $\beta\gamma z-\alpha^2z+\alpha\gamma z-\alpha\beta z$

Μετασχηματίστε τά ἀκόλουθα πολυώνυμα σέ γινόμενα πα γόντων πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα πού περιέχουν.

158) 1ο: $(13x^2-5y^2)^2-(12x^2+4y^2)^2$ 2ο: $4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$

3ο: $4(\alpha\beta+\gamma\delta)^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)^2$ 4ο: $(\alpha\beta+\gamma\delta+\beta^2-\delta^2)^2-(\alpha\delta+\beta\gamma)^2$

5ο: $2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$ 6ο: $(\alpha^2+4\beta^2)x^2+2(\alpha^3+2\beta^3)x+\alpha^4-$

Κάμετε γινόμενα τίς παραστάσεις:

159) $x^2+3\gamma\delta(2-3\gamma\delta)-10xy-1+25y^2$

160) $x^{\mu+\nu}y^{\mu}-x^{2\nu}y^{\mu+\nu}-x^{\nu}y^{2\mu}$

161) $x^3(z-y^2)+y^3(x-z^2)+z^3(y-x^2)+xyz(xyz-1)$.

162) $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)$.

163) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

164) $\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4)$

165) $\alpha(\beta-\gamma)^2+\beta(\gamma-\alpha)^2+\gamma(\alpha-\beta)^2+8\alpha\beta\gamma$.

94. Μέγιστος κοινός διαιρέτης καί ἐλάχιστο κοι πολλαπλάσιο γνωστῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

Ὁρισμός. Μιά ἀλγεβρική παράσταση ὀνομάζεται π τη, ὅταν δέ μπορεῖ νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων μι ρου βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα πού περιέχει.

Τά πρωτοβάθμια πολυώνυμα εἶναι φανερό πώς εἶναι πρῶτα. Νά, σάν αὐτά: $x-5$, $\alpha+3\beta$, $x-y+2\omega$.

Ἄν σέ μιά ἀλγεβρική παράσταση μπορεῖ νά βγεῖ ἔξω ἀπό παρένθεση ἕνας παράγοντας, πού εἶναι ἀριθμητικός, αὐτό τό γεγονός δέν τῆς στερεῖ τό χαρακτηρισμό της σάν πρώτης. Τό πολυώνυμο $5x-15y+20\omega=5(x-3y+4\omega)$ εἶναι πρῶτο.

Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο Α εἶναι διαιρέτης ἑνός ἄλλου ἀκεραίου πολυωνύμου Β, ὅταν μποροῦμε νά ἔχουμε $B=A\cdot\Gamma$, ὅπου Γ εἶναι ἐπίσης ἀκέραιο πολυώνυμο.

Ὥστε ἕνα πολυώνυμο πρῶτο ἔχει γιά διαιρέτη ἤ τόν ἑαυτό του, ἤ ὁποιοδήποτε ἀριθμό.

Ὀνομάζουμε μέγιστο κοινό διαιρέτη (μ.κ.δ.) δύο ἤ περισσοτέρων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, τήν ἀκεραία παράσταση, πού εἶναι τοῦ πιό μεγάλου δυνατοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα πού περιέχει καί εἶναι διαιρέτης τοῦ καθενός ἀπό τά γνωστά πολυώνυμα.

95. Μ.κ.δ. μονωνύμων. Γνωρίζουμε ὅτι ἕνα μονώνυμο εἶναι διαιρέτης ἑνός ἄλλου μονωνύμου, ἄν σάν γραμματικούς παράγοντες δέν περιέχει παρά ἐκείνους τοῦ διαιρετέου καί ὄχι σέ μεγαλύτερο βαθμό. Ὥστε: ὁ μ.κ.δ. μονωνύμων εἶναι τό μονώνυμο, πού ἔχει γραμματικούς παράγοντες τούς κοινούς, στά θεωρούμενα μονώνυμα, καί τόν καθένα ἀπ' αὐτούς ὑψωμένο σέ ἐκθέτη, πού εἶναι ὁ πιό μικρός πού ἔχει στά δοσμένα μονώνυμα.

Λογουχάρη, τά μονώνυμα $18x^3y^2\omega$, $24x^5y^2\omega\varphi$, $12x^2y\omega^3$ ἔχουν μ.κ.δ. μέ γραμματικό μέρος $x^2y\omega$. Μποροῦμε αὐτοῦ τοῦ διαιρέτη νά τοῦ δώσουμε ὁποιοδήποτε συντελεστή. Εἶναι ὅμως χρήσιμο καί γιά τή συνεννόηση, νά τοῦ δίνουμε γιά συντελεστή τό μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν τῶν γνωστῶν μονωνύμων. Ἔτσι τῶν μονωνύμων μας μ.κ.δ. εἶναι τό $6x^2y\omega$.

96. Μ.κ.δ. πολυωνύμων. Ἄς θεωρήσουμε πολυώνυμα, πού εἶ-

καί μετασχηματισμένα σέ γινόμενα:

$3\alpha^2\gamma(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$, $6\alpha^3\beta(\alpha-\beta)^3(\alpha+\beta)^3$, $12\alpha^4(\alpha-\beta)^4(\alpha+\beta)(\gamma-\alpha)$.

Εἶναι φανερὸ ὅτι φτιάνουμε ἕνα κοινό διαιρέτη αὐτῶν τῶν πολυωνύμων ἐφαρμόζοντας τὸν ἴδιο κανόνα, πού ἐφαρμόσαμε στά μονώνυμα δηλ. ἐκλέγοντας κοινούς παράγοντες καί στά τρία πολυώνυμα.

Γιά νά φτιάσουμε τὸ μ.κ.δ., δηλ. τὸν κοινό διαιρέτη τοῦ πιό μεγάλου βαθμοῦ, παίρνουμε τὸν καθένα ἀπ' αὐτούς τούς παράγοντες στὸν πιό μεγάλο, κατά τὸ δυνατὸ ἐκθέτη, δηλ. στὸν ἐκθέτη πού εἶναι ὁ πιό μικρός, γιά νά εἶναι αὐτός ὁ παράγοντας κοινός παράγον τας (διαιρέτης) τῶν πολυωνύμων πού θεωροῦμε.

Εἶναι καί ἐδῶ χρήσιμο νά πάρουμε γιά συντελεστὴ τοῦ μ κ.δ. τό μ.κ.δ. τῶν συντελεστῶν τῶν πολυωνύμων.

Τῶν παραπάνου λοιπόν πολυωνύμων μ.κ.δ. εἶναι τό πολ ώνυμο: $3\alpha^2(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta)$.

97. <u>Κανόνας.</u> Γιά νά σχηματίσουμε τό μ.κ.δ. πολλῶν πολ ωνύμων μετασχηματίζουμε αὐτά τά πολυώνυμα σέ γινόμενα καί σχ ματίζουμε ἕνα γινόμενο ἀπ' ὅλους τούς κοινούς τους παράγοντες, ἐν τόν καθένα τους τόν παίρνουμε μέ τόν πιό μικρό του ἐκθέτη.

98. <u>Ὁρισμός.</u> Ὀνομάζουμε ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο (ε.κ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀκεραίων ἀλγεβρικῶν παραστάσεων τὴν ἀκε ραία παράσταση πού 'χει τόν πιό μικρό βαθμό καί πού ἡ κάθε μιά ἀπό τίς γνωστές μας παραστάσεις τή διαιρεῖ.

99. <u>Ε.κ.π. μονωνύμων.</u> Γιά νά σχηματίσουμε τό ε.κ.π. ἤ περισσοτέρων μονωνύμων φτιάνουμε ἕνα μονώνυμο μέ ὅλους το κοινούς καί μή κοινούς τους γραμματικούς παράγοντες καί τόν κ θένα ἀπ' αὐτούς παίρνουμε μέ τό μεγαλύτερό του ἐκθέτη. Ἐκλέγο με γιά συντελεστὴ τοῦ ε.κ.π. τό ε.κ.π. τῶν συντελεστῶν τῶν μονω μων. Λογουχάρη, τά μονώνυμα $5x^2y$, $2x^3y^2\omega$, $10xy^3\omega\varphi$ ἔχουνε γ ε.κ.π τους τὸ μονώνυμο $10x^3y^3\omega\varphi$. Γιατί, πρῶτο, αὐτό τό μονώνυμο ἔχοντας κάθε

ατικό παράγοντα τῶν γνωστῶν μονωνύμων σὲ ἐκθέτη μεγαλύτερο ἢ
ὸ λιγότερο ἴσο, εἶναι διαιρετέο μὲ τὸ καθένα ἀπ' αὐτά. Καὶ δεύτερο, εἶναι
τοῦ μικρότερου δυνατοῦ βαθμοῦ, ἀφοῦ καὶ ἕναν ἀπὸ τοὺς παράγον-
τές του ἂν ὑψώσουμε σὲ μικρότερη δύναμη, θὰ πάψει νὰ διαιρεῖ-
ται τὸ λιγότερο μὲ ἕνα ἀπὸ τὰ γνωστὰ μονώνυμα.

100. <u>Ε.κ.π. πολυωνύμων.</u> Τὸ καθένα ἀπὸ τὰ πολυώνυμα ποὺ
ᾶς δίνονται τὸ μετασχηματίζουμε σὲ γινόμενο καὶ κατόπιν ἐφαρ-
όζουμε τὸν κανόνα, ποὺ ἐφαρμόσαμε καὶ γιὰ τὰ μονώνυμα.

<u>Παράδειγμα</u>. Τὰ πολυώνυμα:

$6x(y+\omega)(y-\omega-\phi)$ $15x^2y(y-\omega)^2$ $3\omega(y+\omega)^3$

χουν γιὰ ε.κ.π. τους τὸ πολυώνυμο: $30x^2y\omega(y+\omega)^3(y-\omega)^2(y-\omega-\phi)$.

Ἀσκήσεις

66) Σχηματίστε τὸ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:

1. $54\alpha^4\beta x^5y^6$ $63\alpha^5x^7y$ $108\alpha^6x^8y^2z$
2. $3\alpha\beta^4\gamma$ $4\alpha^5\gamma^{12}$ $8\alpha^2\beta^2$
3. $4\alpha^2-4x^2$ α^4-x^4 α^2x-x^3
4. $2x^3-x^2-4x+3$ $3x^3-11x^2+13x-5$
5. x^2-9 x^2+x-12 x^2-4x+3
6. $x^8-\alpha^8$ $x^6-\alpha^6$

67) Νὰ βρεθεῖ τὸ ε.κ.π. τῶν παραστάσεων:

1. $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)$ $(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)$ $(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)$
2. $3x^3+3x^2-6x$ $2x^2y+4xy+6y$ $4x^3y+20x^2y+24xy$
3. $x^6+3\alpha x^2+3\alpha^2x+\alpha^3$ $x^3+\alpha x^2+\alpha^2x+\alpha^3$
4. $x^3-\alpha^3$ $x^4+\alpha^2x^2+\alpha^4$ $x^3+\alpha^3$

68) Νὰ βρεθεῖ ὁ μ.κ.δ. καὶ τὸ ε.κ.π. τῶν πολυωνύμων:

1. $\alpha(\alpha+\gamma)-x(x+\gamma)$ $x(x+\alpha)-\gamma(\gamma+\alpha)$ $\gamma(\gamma+x)-\alpha(\alpha+x)$
2. $\mu^3+2\mu^2\nu+\mu\nu^2+2\nu^3$ $\mu^3-2\mu^2\nu+\mu\nu^2-2\nu^3$
3. x^3+y^3 $3x^2+2xy-y^2$ $x^3+2x^2y+xy^2$

* * *

Γενικὲς Ἀσκήσεις

Πάνου στὴν ὕλη τοῦ Β΄ καὶ Γ΄ κεφαλαίου.

169) Νὰ διαιρεθεῖ τὸ πολυώνυμο:

$x^5+(\alpha-2\beta)x^4-(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)x^3+\beta(2\alpha^2-3\alpha\beta+2\beta^2)x^2-(\alpha^4-2\alpha^3\beta+2\alpha\beta^3-\beta$

$\alpha^2\beta(2\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2)$ μὲ τὸ πολυώνυμο $x^3+(2\alpha-\beta)x^2+(\alpha^2-\beta^2)x+\alpha^2(\alpha-\beta)$.

170) Νὰ δειχτεῖ, ὅτι τὸ πολυώνυμο $\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)$ εἶναι διαι

τὸ μὲ τὸ $\alpha+\beta+\gamma$.

171) Μὲ βάση τὸ θεωρία τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων, ὑπολογίστε

γινόμενο: $(x-1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

172) Συμπληρῶστε τὰ πολυώνυμα x^2-6x, x^2+7x, $x^2-\frac{1}{2}x$, $x^2+\frac{3}{5}$

γιὰ νὰ γίνουν τετράγωνα.

173) Νὰ δειχτεῖ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητας:

$$\Sigma x^4+\Sigma x^2y^2-2xyz(x+y+z)=\frac{1}{4}\Sigma(x+y)^2\,,\ \Sigma(x-y)^2,$$

ὅπου τὸ Σx^4, λογουχάρη, παρασταίνει τὸ $x^4+y^4+z^4$.

174) Ἐὰν τὰ x, y, z παρασταίνουν ἀλγεβρικοὺς ἀριθμούς, ἡ παράστα

$x^4+y^4+z^4+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-2xyz(x+y+z)$ ἀντιπροσωπεύει πάντο

θετικὸ ἀριθμό. Σὲ ποιά περίπτωση ἀντιπροσωπεύει τὸ μηδενικό;

175) Ἐὰν $\alpha x+\beta y+\gamma z=\delta$ νὰ δειχτεῖ ὅτι ἔχουμε:

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)-\beta\gamma(y-z)^2-\alpha\gamma(z-x)^2-\alpha\beta(x-y)^2=\delta^2$$

176) Ἐὰν τὰ x, y, z εἶναι ἀλγεβρικοὶ ἀριθμοὶ ἡ παράσταση

$$5(x^2+y^2+z^2)-4(xy+yz+zx)$$

μᾶς δίνει πάντοτε ἕνα θετικὸ ἀριθμὸ καὶ μᾶς δίνει τὸ μηδὲν

νον ὅταν $x=y=z=0$.

177) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ, ἱκανοποιοῦν τὸν ἰσότητα:

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^3=\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)^3$$

νὰ δειχτεῖ, ὅτι ὁ ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι μέσος ἀνάλογος τῶν ἄλλων

178) Γιὰ τιμὲς τοῦ x μεγαλύτερες τοῦ 2 ἡ ποσότητα x^3 εἶναι με

λύτερη ἀπὸ τὴν ποσότητα x^2+x+2.

179) Γιὰ τιμὲς τοῦ $x \geq \alpha$ ἰσχύει ἡ σχέση $x^3+13\alpha^2x \geqslant 5\alpha x^2+9\alpha^3$.

180) Νά μετασχηματιστεῖ σέ γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων ὡς πρός τά γράμματα α, β, γ ἡ παράσταση:

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\alpha^2\gamma^2$$

181) Τό ἴδιο νά γίνει γιά τήν παράσταση:

$$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma.$$

182) Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ ἱκανοποιοῦν τή σχέση:

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}$$

θά ἱκανοποιοῦν καί τή σχέση: $\frac{1}{\alpha^{2\nu+1}}+\frac{1}{\beta^{2\nu+1}}+\frac{1}{\gamma^{2\nu+1}}=\frac{1}{(\alpha+\beta+\gamma)^{2\nu+1}}$ ὅπου ν φυσικός ἀριθμός.

183) Ἐπαληθεύσετε τίς ταυτότητες:

1ο $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv 2(x^2+xy+y^2)^2$

2ο $(x+y)^5-x^5-y^5\equiv 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

3ο $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv 7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$

4ο $(x+y+z)^5-(y+z-x)^5-(z+x-y)^5-(x+y-z)^5\equiv 80xyz(x^2+y^2+z^2)$

184) Ἐάν ἔχουμε $\alpha+\beta+\gamma=0$ καί ἐάν θέσουμε $S_\nu=\alpha^\nu+\beta^\nu+\gamma^\nu$ θά ἔχουμε ἐπίσης:

$$2S_4=S_2^2, \quad \frac{S_3\,S_2}{S_5}=\frac{6}{5}, \quad \frac{S_5}{S_4}=\frac{5S_3}{3S_2}, \quad \frac{5S_7}{7S_5}=\frac{S_2}{S_2}$$

185) Ἐάν εἰς τό πολυώνυμον $x^3+y^3+z^3-3xyz$ θέσουμε

$$x=\alpha x_1+\beta y_1+\gamma z_1, \quad y=\alpha y_1+\beta z_1+\gamma x_1, \quad z=\alpha z_1+\beta x_1+\gamma y_1$$

αὐτό τό πολυώνυμο μετασχηματίζεται στό γινόμενο:

$$(x_1^3+y_1^3+z_1^3-3x_1y_1z_1)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma).$$

186) Ἐάν $\alpha>\beta>0$ καί $\mu>\nu>0$ νά ἀποδειχτεῖ ὅτι:

$$\frac{\alpha^\mu-\beta^\mu}{\alpha^\mu+\beta^\mu}>\frac{\alpha^\nu-\beta^\nu}{\alpha^\nu+\beta^\nu}$$

187) Ἐάν οἱ ἀριθμοί α, β, γ, εἶναι θετικοί καί διαφορετικοί μεταξύ τους νά δειχτεῖ ὅτι:

1ο $(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)<\alpha\beta\gamma$ 2ο $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3>3\alpha\beta\gamma$

3ο $\alpha\beta(\alpha+\beta)+\beta\gamma(\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\gamma)<2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$.

188) Ἐάν οἱ ἀριθμοί $\alpha, \alpha', \beta, \beta', x, y$ εἶναι θετικοί καί ἀποδειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση $\frac{\alpha x+\beta y}{\alpha' x+\beta' y}$ βρίσκεται πάντοτε ἀνάμεσα στούς

σιάσουμε ἢ νὰ διαιρέσουμε τοὺς δύο ὅρους ἑνὸς κλάσματος μὲ μιὰ καὶ τὴν
ἴδια, μὰ διαφορετικὸ ἀπὸ τὸ μηδενικὸ ποσότητα, γιατὶ μιὰ τέτια πράξη
δὲν μεταβάλλει τὴν ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ κλάσματος, γιὰ ὁποιεσδήπο
μὰ ὁρισμένες κάθε φορὰ ἀληθινὲς τιμὲς τῶν γραμμάτων του.

Ἔπειτα ἀπ' αὐτὸ καταλαβαίνουμε ὅτι μποροῦμε νὰ βάλουμε
κάτου ἀπὸ τὸν ἴδιο παρονομαστὴ πολλὰ δοσμένα τέτια κλάσματα κα
γενικὰ νὰ κάμουμε πράξεις πάνου σ' αὐτά, χρησιμοποιώντας τοὺς τρό
πους, ποὺ μεταχειριζόμαστε γιὰ τὰ ἀριθμητικά. Ἀλγεβρικὰ κλάσματα

103. Ἂς πάρουμε λοιπὸν τώρα τὸν ἀκόλουθη ἀλγεβρικὸ ρητ
καὶ κλασματικὴ παράσταση: $\frac{3\alpha+x}{\alpha+x}-\frac{5\alpha-x}{\alpha-x}+\frac{\alpha}{2x}$.
Ἐδῶ οἱ παρονομαστὲς εἶναι παραστάσεις πρῶτες καὶ τὸ ε.κ.π. εἶν
τὸ γινόμενό τους $(\alpha+x)(\alpha-x)2x$.

Ἔτσι τὸ πηλίκο τοῦ ε.κ.π. μὲ τὸν καθένα ἀπὸ τοὺς παρονομ
στὲς τῆς παραστάσεως εἶναι τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν τῶν ἄ
λων κλασμάτων. Ἔχουμε λοιπὸν τὸν ἰσοδύναμη παράσταση:

$$\frac{2x(3\alpha+x)(\alpha-x)}{2x(\alpha+x)(\alpha-x)}-\frac{2x(5\alpha-x)(\alpha+x)}{2x(\alpha+x)(\alpha-x)}+\frac{\alpha(\alpha+x)(\alpha-x)}{2x(\alpha+x)(\alpha-x)} \text{ ἢ τὸν}$$

$$\frac{2x(3\alpha+x)(\alpha-x)-2x(5\alpha-x)(\alpha+x)+\alpha(\alpha+x)(\alpha-x)}{2x(\alpha+x)(\alpha-x)}=\frac{\alpha^3-4\alpha^2x-13\alpha}{2\alpha^2x-2x^3}$$

ποὺ εἶναι ἕνα ρητὸ κλάσμα.

104. Μπορεῖ οἱ παρονομαστὲς τῆς παραστάσεως νὰ ε
ναι τέτιοι, ποὺ καὶ τὸ ε.κ.π. τους νὰ εἶναι παράσταση ἁπλού
στερη ἀπὸ τὸ γινόμενό τους. Νά ἕνα παράδειγμα:

$$\frac{x^2-1}{(1+xy)^2-(x+y)^2}+\frac{4}{(1-y)^2}+\frac{3}{1-y^2}$$

Ἀναλύοντες σὲ γινόμενα τοὺς παρονομαστὲς βρίσκουμε

$$(1+xy)^2-(x+y)^2=(1-x)(1+x)(1+y)(1-y)$$

$$(1-y)^2=(1-y)^2$$

$$1-y^2=(1+y)(1-y).$$

Ὥστε ε.κ.π. $= (1-x)(1+x)(1-y)^2(1+y)$. Ἡ παράστασή μας λοιπὸν γίνεται.

$$\frac{(x^2-1)(1-y)+4(1-x)(1+x)(1+y)-3(1+x)(1-x)(1-y)}{(1-x)(1+x)(1-y)^2(1+y)} =$$

$$\frac{8y-8x^2y}{(1-x)(1+x)(1-y)^2(1+y)} = \frac{8y(1-x)(1+x)}{(1-x)(1+x)(1-y)^2(1+y)} = \frac{8y}{(1-y)^2(1+y)}$$

105. Τὸ γινόμενο ἢ τὸ πηλίκο δύο ρητῶν κλασμάτων εἶναι ἕνα ρητὸ κλάσμα. Γιατὶ τὸ γινόμενο τῶν δύο κλασμάτων εἶναι ἕνα κλάσμα, ποὺ ἔχει γιὰ ἀριθμητὴ τὸ γινόμενο τῶν ἀριθμητῶν καὶ γιὰ παρονομαστὴ τὸ γινόμενο τῶν παρονομαστῶν. Οἱ δύο λοιπὸν ὅροι τοῦ γινομένου τῶν δύο ρητῶν κλασμάτων εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, ἀφοῦ εἶναι γινόμενα ἀκεραίων πολυωνύμων. Ἐπίσης, τὸ πηλίκο δύο ρητῶν κλασμάτων εἶναι ἕνα ρητὸ κλάσμα ἐπειδὴ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ κλάσματος, ποὺ εἶναι διαιρετέος, ἐπὶ τὸ ἀντίστροφο τοῦ κλάσματος, ποὺ εἶναι διαιρέτης.

106. <u>Συμπέρασμα</u>. Ἀπ' ὅλα τὰ παραπάνου γίνεται φανερὴ ἡ ἀλήθεια τῆς προτάσεως (ἐδ. 102). Γιατὶ 1ο κάθε ἀλγεβρικὴ ρητὴ κλασματικὴ παράσταση δημιουργιέται μὲ τὸ συνδυασμὸ τῶν τεσσάρων πράξεων (προσθέσεως, ἀφαιρέσεως, πολλαπλασιασμοῦ καὶ διαιρέσεως) πάνου σὲ ἀκέραια πολυώνυμα ἢ καὶ σὲ ρητὰ κλάσματα, καὶ 2ο κάθε μιὰ ἀπ' αὐτὲς τὶς πράξεις, ὅταν χρησιμοποιηθεῖ πάνου στὰ ρητὰ κλάσματα δίνει σὰν ἀποτέλεσμα ἕνα ρητὸ κλάσμα. Ἔτσι τελικὰ βρίσκεται ἕνα ρητὸ κλάσμα σὰν ἰσοδύναμη παράσταση τῆς δοσμένης ρητῆς κλασματικῆς παραστάσεως.

Ἀσκήσεις

204. Ἀπλοποιήσετε τὶς παρακάτου παραστάσεις:

$$\frac{1-a^2}{(1+ax)^2-(a+x)^2} \qquad \frac{(a^2-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma)(a+\beta-\gamma)}{(a+\beta+\gamma)(a^2+\gamma^2-2a\gamma-\beta^2)}$$

$$\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2} \qquad \frac{\alpha^2-3\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2}$$

$$\frac{\alpha\beta(x^2+y^2)+xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha\beta(x^2-y^2)+xy(\alpha^2-\beta^2)} \qquad \frac{\alpha^5+\alpha^2\beta^3-\alpha^4\beta-\alpha\beta^4}{\alpha^4-\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta-\alpha\beta^3}$$

205. Νά γίνει τό ἴδιο μέ τίς παραστάσεις:

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta}+1\right)\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2}$$

$$\frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^3+y^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)}{\frac{(x+y)^2-xy}{(x-y)^2+xy}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)}$$

206. Τά παρακάτου σύνθετα κλάσματα νά γίνουν ἁπλά.

$$\frac{\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}-\frac{x}{\alpha\beta}\right)(\alpha+\beta+x)}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{2}{\beta^2}+\frac{2}{\alpha\beta}-\frac{x^2}{\alpha^2\beta^2}} \qquad \frac{\frac{x-\alpha}{1+\alpha x}-\frac{x-\beta}{1+\beta x}}{1+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(1+\alpha x)(1+\beta x)}}$$

$$\frac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x-x^2}} \qquad \frac{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}\cdot\frac{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha+\gamma}}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha+\gamma}}$$

207. Νά ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις:

$$\frac{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta+\gamma}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta+\gamma}}\cdot\left(1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\right) \qquad \frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\beta}{\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\beta-2\gamma}}+\frac{\frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\gamma}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma-2\beta}}$$

208. Ὑπολογίστε τά ἀθροίσματα:

$$\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$$

$$\frac{x}{x^3+x^2y+xy^2+y^3}+\frac{y}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}+\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{x^2+3y}{x^4-y}$$

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha x+\beta y}+\frac{\alpha-\beta}{\alpha x-\beta x}+\frac{2(\alpha^2x+\beta^2y)}{\alpha^2x^2+\beta^2y^2}-\frac{4(\alpha^4x^3-\beta^4y^3}{\alpha^4x^4-\beta^4y^4}$$

$$\frac{1}{\alpha^2-3\beta^2+2\alpha\beta}+\frac{1}{\beta^2-3\alpha^2+2\alpha\beta}-\frac{2}{3\alpha^2+10\alpha\beta+3\beta^2}$$

$$\frac{2(7x-4)}{6x^2-7x+2}+\frac{x-10}{6x^2-x-2}-\frac{2(4x-1)}{4x^2-1}$$

209. Τό ἴδιο γιά τά ἀθροίσματα:

$$\frac{\alpha+\beta}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{\beta+\gamma}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}+\frac{\gamma+\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}$$

$$\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

210. Νά δειχτεῖ ὅτι οἱ παρακάτου ταυτότητες εἶναι ἀληθινές:

$$\frac{y^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(y^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(y^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}\equiv 1$$

$$\frac{x^2y^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(x^2-\beta^2)(y^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(x^2-\gamma^2)(y^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}\equiv x^2+y^2+z^2-\beta^2-\gamma^2$$

(Bertrand).

211. Τό ἴδιο γιά τίς ταυτότητες:

$$\frac{\beta+\gamma}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{\beta+\gamma+\delta}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{\delta}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}$$

ἤ γιά τή γενικώτερη

$$\frac{\beta+\gamma+\delta+\cdots\cdots+\kappa+\lambda}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\kappa+\lambda}\equiv\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}+\frac{\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}+\cdots\cdots+$$

$$+\frac{\lambda}{(\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\kappa)(\alpha+\beta+\cdots\cdots+\kappa+\lambda)}$$

(Smith).

212. Δεῖξτε ὅτι, ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$, ἔχουμε:

$$\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)=9$$

213. Ἐάν ἡ ποσότητα $A=\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}$ εἶναι ἴση μέ τό μηδέν, δεῖξτε, ὅτι συμβαίνει τό ἴδιο καί γιά τήν ποσότητα:

$$B=\frac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\frac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\frac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}$$

214. ᾿Εάν ἰσχύει ἡ ἰσότητα: $\frac{\beta-\gamma}{y-z}+\frac{\gamma-\alpha}{z-x}+\frac{\alpha-\beta}{x-y}=0$ θά ἰσχύ

πίσης καί ἡ ἰσότητα:

$$(\beta-\gamma)(y-z)^2+(\gamma-\alpha)(z-x)^2+(\alpha-\beta)(x-y)^2=0$$

215. Μᾶς εἶναι δοσμένη ἡ συνάρτηση $y=\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ (μέ τήν ὑπόθε

ὅτι $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$). Ἀντικαταστaίνουμε τό x διαδοχικά ἀπό τίς τέσ

διαφορικές μεταξύ τους τιμές x_1, x_2, x_3, x_4 καί ἡ y παίρνει ἀντ

κα τίς τέσσερες τιμές y_1, y_2, y_3, y_4. Νά δειχτεῖ, ὅτι ἔχουμε:

$$\frac{y_3-y_1}{y_3-y_2}:\frac{y_4-y_1}{y_4-y_2}=\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}:\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}$$

Γενικές παρατηρήσεις πάνου στή διαίρεση δύο πολυωνύμων.

107. Μᾶς ἐνδιαφέρει νά γνωρίσουμε τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο μ

ροῦμε νά προσδιορίσουμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός ὁποιο

ποτε ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου μέ τό διώνυμο $x^\nu-\alpha$. Θά

χρειαστεῖ γι' αὐτό νά ἀποδείξουμε τό ἑξῆς θεώρημα:

᾿Εάν ὁ ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, κάθε ἀκέραιο τοῦ x πολυώ

μο, πού εἶναι βαθμοῦ μεγαλυτέρου τοῦ ν, μπορεῖ νά τεθεῖ κά

ἀπό τή μορφή:

$$f(x^\nu)+xf_1(x^\nu)+\cdots\cdots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}(x^\nu) \qquad (1)$$

Τά $f, f_1, f_2, \cdots\cdots f_{\nu-1}$ εἶναι ἀκέραια πολυώνυμα, πού ὁ βαθ

γιά κάθε τους ὅρο ἐκφράζεται σέ πολλαπλάσιο τοῦ ν.

Γιά νά νοιώσουμε τόν πρόταση στή γενικότητά της θά ἀρχίσ

ἀπό μιά μερική της μορφή.

Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἔχουμε ἕνα πολυώνυμο 8ου βαθμοῦ καί

γιά ν παίρνουμε τόν 3. Θά πρέπει τότε νά δείξουμε, ὅτι αὐτό

πολυώνυμο μπορεῖ νά πάρει τή μορφή

$$f(x^3)+xf_1(x^3)+x^2f_2(x^3) \qquad (2)$$

που τά f, f_1, f_2 εἶναι πολυώνυμα, πού ὁ βαθμός γιά κάθε τους ὅ- ἐκφράζεται σέ πολλαπλάσιο τοῦ 3.

Νά ἕνα πολυώνυμο 8ου βαθμοῦ: $x^8-5x^7+4x^6-3x^5+4x^4-7x^3-2x^2-3x+6$.

σταθερός ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθμός τους εἶναι δι- ρετός μέ τό 3, ἀποτελοῦν ἕνα πολυώνυμα, στό ὁποῖο γιά μεταβλη- ό δυνάμεθα νά θεωρήσουμε τό x^3. Ἔτσι μποροῦμε νά σημειώσου- ε:

$$4x^6+7x^3+6=4(x^3)^2+7(x^3)+6=f(x^3)$$

Ἐπίσης ὁ πρωτοβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθμός υς εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 αὐξημένο κατά 1, ἀποτελοῦν ἕνα γινόμε τῆς μορφῆς $x\cdot f_1(x^3)$, ὅπου τό f_1 εἶναι πολυώνυμο μέ μεταβλητή x^3. Καί εἰς τό παράδειγμά μας ἔχουμε:

$$-5x^7+4x^4-3x=x(-5x^6+4x^3-3)=x\cdot f_1(x^3)$$

όμη ὁ δευτεροβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι, πού ὁ βαθ- ς τους εἶναι πολλαπλάσιο τοῦ 3 αὐξημένο κατά 2, ἀποτελοῦν α γινόμενο τῆς μορφῆς $x^2f_2(x^3)$, ὅπου τό f_2 εἶναι συνάρτηση τοῦ Καί γιά τό δικό μας πολυώνυμο παίρνουμε:

$$x^8-3x^5-2x^2=x^2(x^6-3x^3-2)=x^2f_2(x^3)$$

ι καταλαβαίνουμε, ὅτι ἡ μορφή (2) περικλείει ὅλους τούς ὅρους <u>ὁποιουδήποτε</u> ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου γιά τήν περί- ωση $\nu=3$. Καί αὐτό, ὄχι γιατί στό συγκεκριμένο μας παράδειγμα ἐπαληθεύουμε, ἀλλά καί γιατί μποροῦμε νά τό ἐξακριβώσουμε ωρητικά. Σ' ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ ὁποιουδήποτε βαθμοῦ, θε ἐκθέτης τοῦ x δέ μπορεῖ παρά νά εἶναι τῆς μορφῆς $3\lambda+\mu$, ὅπου μ παίρνει τίς τιμές 0, 1, 2 καί τούς ὅρους μέ τέτοιους ἐκθέτες, μφωνα μέ ἐκεῖνα πού παραπάνου ἐκθέσαμε, τούς πήραμε.

Τώρα εἶναι εὔκολο νά νοιώσουμε τήν πρόταση στή γενικότητά της. Τό ὁποιοδήποτε ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο θά ἔχει ὅρους, πού ὁ βαθμός τους θά ἐκφράζεται σέ ἀριθμό τῆς μορφῆς $\nu\lambda+\mu$, ὅπου τό λ θά εἶναι ἕνας ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός, ὁ δέ μ ἕνας ἀπ τούς ἀριθμούς $0, 1, 2, \ldots\ldots (\nu-1)$.

Ἔτσι ὁ σταθερός ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμ μας, πού εἶναι βαθμοῦ $\nu.\lambda$, ἀποτελοῦν μιά συνάρτηση τοῦ x^ν, τό λυώνυμο $f(x^\nu)$. Ἐπίσης ὁ πρωτοβάθμιος ὅρος καί ὅλοι ἐκεῖνοι οἱ ροι, πού εἶναι βαθμοῦ $\nu.\lambda+1$ ἀποτελοῦν τήν παράσταση $x.f_1(x$ ὅπου τό f_1 εἶναι συνάρτηση τοῦ x^ν. Ἀκόμη ὁ δευτεροβάθμιος ὅρ καί ὅλοι οἱ ὅροι τοῦ βαθμοῦ $\nu\lambda+2$ δημιουργοῦν παράσταση τῆς μο φῆς $x^2 f_2(x^\nu)$, ὅπου τό f_2 εἶναι συνάρτηση τοῦ x^ν. Καί ἐξακολουθ τες μ' αὐτό τόν τρόπο φτάνουμε νά πάρουμε τόν ὅρο μέ βαθμό ν καί ὅλους τούς ὅρους, πού ὁ βαθμός τους εἶναι τῆς μορφῆς $\nu\lambda+\nu-1$ αὐτοί οἱ ὅροι ἀποτελοῦν τήν παράσταση $x^{\nu-1}.f_{\nu-1}(x^\nu)$, ὅπου τό $f_{\nu-1}$ ε ναι πολυώνυμο μέ μεταβλητή τό x^ν.

108. Ἔπειτα ἀπό τό παραπάνου θεώρημα εἴμαστε σέ θέση νά δείξουμε τό ἑξῆς θεώρημα, πού θά ἱκανοποιήσει τόν ἀρχικό μας σκοπ

Τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου ὡς πρός x πολυωνύμου διά τοῦ διωνύμου $x^\nu-\alpha$ εὑρίσκεται, ἄν σ' αὐτό τό πολυώνυμο ἀντικαταστήσουμε τό x^ν μέ τό α.

Κατά τό προηγούμενο θεώρημα κάθε ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο παίρνει τή μορφή (1). Ἔτσι, ἄν ἀντικαταστήσουμε σ' αὐτό τό πολυώνυμο τό x^ν μέ τό α, παίρνουμε τό πολυώνυμο

$$f(\alpha)+xf_1(\alpha)+\cdots\cdots\cdots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}(\alpha) \qquad (3)$$

θά δείξουμε πώς αὐτό τό πολυώνυμο (3) ἀντιπροσωπεύει τ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ μας πολυωνύμου μέ τό διώνυμο

Ἀφοῦ τά $f, f_1, \ldots\ldots f_{\nu-1}$ εἶναι συναρτήσεις τοῦ x^ν οἱ ποσότητες $f(\alpha), f_1(\alpha), \ldots\ldots\ldots f_{\nu-1}(\alpha)$ ἐκφράζουν ἀντιστοίχως τά ὑπόλοιπα τῆς αιρέσεώς τους μέ τό $x^\nu-\alpha$. Αὐτό, γιατί ὁ διαιρέτης θεωρεῖται πρ

βάθμιο διώνυμο τοῦ x^{ν} καὶ μποροῦμε ἔτσι νὰ ἐφαρμόσουμε τὸν
ανόνα (ἐδ. 86). Θὰ ἔχουμε λοιπὸν τὶς ἰσότητες:

$$f(x^{\nu}) \equiv (x^{\nu}-a)\pi(x^{\nu})+f(a)$$

$$f_1(x^{\nu}) \equiv (x^{\nu}-a)\pi_1(x^{\nu})+f_1(a)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_{\nu-1}(x^{\nu}) \equiv (x^{\nu}-a)\pi_{\nu-1}(x^{\nu})+f_{\nu-1}(a)$$

Ἂν τώρα πολλαπλασιάσουμε τὶς ταυτότητες αὐτὲς ἀντίστοιχα
ε τὶς ποσότητες $1, x, x^2, \dots\dots x^{\nu-1}$ καὶ τὶς προσθέσουμε κατὰ μέλη,
αίρνουμε τὴν ταυτότητα:

$$\varphi(x) \equiv (x^{\nu}-a)\pi'(x)+f(a)+xf_1(a)+\dots\dots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}(a) \qquad (4)$$

ου τὸ $\varphi(x)$ ἐκφράζει τὸ ἀρχικό μας πολυώνυμο καὶ τὸ $\pi'(x)$ τὸ πο-
ώνυμο $\pi(x^{\nu})+\pi_1(x^{\nu})+\dots\dots+\pi_{\nu-1}(x^{\nu})$.

Ἐπειδὴ τώρα τὸ πολυώνυμο

$$\varphi_1(x) \equiv f(a)+xf_1(a)+\dots\dots+x^{\nu-1}f_{\nu-1}(a)$$

ιαι βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ $x^{\nu}-a$, ἡ ταυτότητα (4) ἑρμηνεύεται σὰν
ταυτότητα τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διὰ τοῦ $x^{\nu}-a$. Στὴ διαίρεση
τὴ τὸ $\pi'(x)$ ἀντιπροσωπεύει τὸ πηλίκο καὶ τὸ $\varphi_1(x)$ τὸ ὑπόλοιπο.

9. Ἐὰν τὰ μ, ρ ἀντιπροσωπεύουν φυσικοὺς ἀριθμοὺς νὰ δειχτεῖ ὅτι:

1ο. Γιὰ νὰ εἶναι τὸ $x^{\mu}-a^{\mu}$ διαιρετὸ μὲ τὸ $x^{\rho}-a^{\rho}$ πρέπει καὶ ἀρ-
τὸ μ νὰ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ ρ.

2ο. Γιὰ νὰ εἶναι τὸ $x^{\mu}+a^{\mu}$ διαιρετὸ μὲ τὸ $x^{\rho}+a^{\rho}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ μ
εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ ρ καὶ τὸ πηλίκο νὰ εἶναι ἀριθμὸς περιττός.

3ο. Γιὰ νὰ εἶναι τὸ $x^{\mu}-a^{\mu}$ διαιρετὸ μὲ τὸ $x^{\rho}+a^{\rho}$ πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ
ὰ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ ρ καὶ τὸ πηλίκο νὰ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος.

Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε γιὰ τὴν πρώτη πρόταση τὸ πρέπει δηλ. γιὰ νὰ
οδείξουμε ὅτι τὸ διαιρετὸ τοῦ $x^{\mu}-a^{\mu}$ μὲ τὸ $x^{\rho}-a^{\rho}$ φέρει σὰν ἀναγ-
στικὴ συνέπεια νὰ εἶναι τὸ μ διαιρετὸ μὲ τὸ ρ, παραδεχόμαστε
ἡ διαίρεση αὐτὴ εἶναι τελεία, χωρὶς τὸ μ νὰ εἶναι διαιρετὸ μὲ

τὸ ρ. Ὑποθέτουμε λοιπὸν ὅτι $\mu=\rho\lambda+\upsilon$, ὅπου $0<\upsilon\leq\rho-1$. Τότε ἔχουμε:

$$x^\mu-a^\mu=x^{\rho\lambda+\upsilon}-a^{\rho\lambda+\upsilon}=(x^\rho)^\lambda\cdot x^\upsilon-a^{\rho\lambda}\cdot a^\upsilon$$

Ἀλλά, σύμφωνα μὲ τὸ ἐδ. 107, τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^\mu-a$ μὲ τὸ $x^\rho-a^\rho$ εἶναι:

$$y\equiv(a^\rho)^\lambda\cdot x^\upsilon-a^{\rho\lambda}\cdot a^\upsilon=a^{\rho\lambda}(x^\upsilon-a^\upsilon)$$

Καὶ γιὰ νὰ εἶναι αὐτὸ τὸ ὑπόλοιπο μηδὲν ἀφοῦ $a\neq0$, πρέπ νὰ εἶναι $x^\upsilon=a^\upsilon$. Μὰ ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότητα, ὅπως εἶναι φανερό, μόνο γιὰ $\upsilon=0$ εἶναι δυνατή. Ὥστε τὸ μ εἶναι ἀναγκαστικὰ διαιρ τὸ μὲ τὸ ρ. Γιὰ νὰ ἀποδείξουμε τώρα τὸ <u>ἀρκεῖ</u> ἐργαζόμαστε ὡς ἑ Ἔστω $\mu=\rho\lambda$. Τότε $x^\mu-a^\mu=x^{\rho\lambda}-a^{\rho\lambda}=(x^\rho)^\lambda-(a^\rho)^\lambda=y^\lambda-\beta^\lambda$, ὅπου ἐθέ σαμε $y=x^\rho$ καὶ $\beta=a^\rho$. Ἔτσι γιὰ νὰ ἐκφράσουμε τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσεώς μας δὲν ἔχουμε παρὰ νὰ ἐκφράσουμε κατὰ τὰ γνω στὰ τὸ πηλίκο $\frac{y^\lambda-\beta^\lambda}{y-\beta}$ καὶ ἔπειτα σ' αὐτὸ τὸ πηλίκο νὰ ἀντικατ στήσουμε τὸ y μὲ τὸ x^ρ καὶ τὸ β μὲ τὸ a^ρ.

2ο. Ἔστω καὶ πάλι $\mu=\rho\lambda+\upsilon$ ὅπου $0<\upsilon\leq\rho-1$. Ἔχουμε:

$$x^\mu+a^\mu=x^{\rho\lambda+\upsilon}+a^{\rho\lambda+\upsilon}=(x^\rho)^\lambda\cdot x^\upsilon+a^{\rho\lambda}\cdot a^\upsilon$$

Καὶ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς μας θὰ εἶναι:

$$y=(-a^\rho)^\lambda\cdot x^\upsilon+a^{\rho\lambda}\cdot a^\upsilon \qquad (1)$$

Ἐδῶ βλέπουμε πώς, ἐὰν τὸ λ εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος, ἀποκλείεται εἶναι $y=0$. Ὥστε πρώτη ἀναγκαστικὴ συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μ ὅτι τὸ $x^\mu+a^\mu$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $x^\rho+a^\rho$, εἶναι τὸ πηλίκο τῆς διαιρέσε ως τοῦ μ διὰ τοῦ ρ νὰ εἶναι ἀριθμὸς περιττός. Ἐὰν λοιπὸν δεχτοῦμε τὸ λ σὰν περιττὸ ἀριθμὸ ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) ἔχουμε:

$$y=-a^{\rho\lambda}\cdot x^\upsilon+a^{\rho\lambda}\cdot a^\upsilon=a^{\rho\lambda}(a^\upsilon-x^\upsilon)$$

Καὶ γιὰ νὰ εἶναι $y=0$, ἀφοῦ $a\neq0$, πρέπει νὰ εἶναι $a^\upsilon=x^\upsilon$. Μὰ ἡ ἰσότ τα αὐτὴ εἴπαμε πὼς μόνο γιὰ $\upsilon=0$ ἱκανοποιεῖται. Τὸ ἀρκετὸ τῆς ἐν φρασθείσης συνθήκης δείχνεται ὅπως καὶ στὴν πρώτη πρόταση.

3ο. Κάμνουμε ἀνάλογο ἀπόδειξη.

10. Νά δειχτεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $x^{\kappa\alpha}+x^{\kappa\beta+1}+x^{\kappa\gamma+2}+\cdots+x^{\kappa\tau+\kappa-1}$ (ὅπου ,β,γ,....τ εἶναι φυσικοί ἀριθμοί) εἶναι διαιρετό μέ τό πολυώνυμο $x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+\cdots+x^2+x+1$.

Καί αὐτό τό θέμα θά τό πραγματευτοῦμε πρῶτα σέ μιά μερική ου μορφή. Νά δειχτεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $x^{3\alpha}+x^{3\beta}+x^{3\gamma+2}$ εἶναι διαιρετό ιέ τό πολυώνυμο x^2+x+1, ὁποιοιδήποτε καί ἄν εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί α,β,γ. διαιρέτης μας εἶναι, ὅπως εἶναι γνωστό, τό πηλίκο $\frac{x^3-1}{x-1}$. Ὥστε ἡ πρόασή μας θά εἶναι ἀληθινή, ἄν ἡ παράσταση $A=\frac{(x^{3\alpha}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2})(x-1)}{x^3-1}$ ποδειχτεῖ ἰσοδύναμη μ' ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο.

Εχουμε προφανῶς: $x^{3\alpha}+x^{3\beta+1}+x^{3\gamma+2}=(x^3)^\alpha+(x^3)^\beta\cdot x+(x^3)^\gamma\cdot x^2$. Καί (ἐδ. 107) ό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτῆς τῆς παραστάσεως μέ τό διώνυμο x^3-1 ἶναι τό πολυώνυμο x^2+x+1. Ἔτσι ἡ παραπάνω παράσταση Α γράφεται:

$$A=\frac{[(x^3-1)\pi(x)+x^2+x+1](x-1)}{x^3-1}=\frac{(x^3-1)(x-1)\pi(x)+x^3-1}{x^3-1}=(x-1)\pi(x)+1$$

ὅπου ό π(x) παριστᾶ τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου ιέ τό διώνυμο x^3-1. Ἄς πάρουμε τώρα τήν πρότασή μας στό γενικότητά της. Ἔχουμε: $x^{\kappa-1}+x^{\kappa-2}+\cdots+x^2+x+1=\frac{x^\kappa-1}{x-1}$. Καί θά πρέπει νά δείουμε ὅτι ἡ παράσταση: $B\equiv\frac{(x^{\kappa\alpha}+x^{\kappa\beta+1}+\cdots+x^{\kappa\tau+\kappa-1})(x-1)}{x^\kappa-1}$ εἶναι ἀκεραία.

ράφουμε: $x^{\kappa\alpha}+x^{\kappa\beta+1}+\cdots+x^{\kappa\tau+\kappa-1}=(x^\kappa)^\alpha+(x^\kappa)^\beta\cdot x+\cdots+(x^\kappa)^\tau\cdot x^{\kappa-1}$. Καί τό πόλοιπο τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου μέ τό διώνυμο $x^\kappa-1$ ἶναι: $1+x+x^2+\cdots+x^{\kappa-1}$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$B=\frac{[(x^\kappa-1)\pi(x)+1+x+x^2+\cdots+x^{\kappa-1}](x-1)}{x^\kappa-1}=\frac{(x^\kappa-1)(x-1)\pi(x)+x^\kappa-1}{x^\kappa-1}=(x-1)\pi(x)+1$$

που τό π(x) φανερώνει τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀρχικοῦ πολυωνύμου μέ τό διώνυμο $x^\kappa-1$.

11. Προσδιορισμός τοῦ μ.κ.δ. δύο ἀκεραίων πολυωνύμων τοῦ x, χωίς νά γίνει ἡ ἀνάλυσή τους σέ γινόμενα.

Γιά νά μπορέσουμε νά δείξουμε πῶς βρίσκεται ὁ μ.κ.δ. δύο ἀκεραίν τοῦ x πολυωνύμων χωρίς νά μεσολαβήσει ἡ ἀνάλυσή τους σέ μιόμενα, εἶναι ἀνάγκη νά δείξουμε τήν ἑξῆς πρόταση: Ὁ μ.κ.δ. δύο πολυωνύμων $f(x)$ καὶ $f_1(x)$ εἶναι ὁ ἴδιος μὲ τὸ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων f_1 καὶ $\upsilon(x)$, ὅπου τὸ $\upsilon(x)$ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τῶν δύο πρ των. Καὶ ἀντίστροφα: ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων $f_1(x)$ καὶ $\upsilon(x)$ εἶναι μ.κ.δ. τῶν $f(x)$ καὶ $f_1(x)$.

Ἔχουμε τὴν ταυτότητα: $f(x)\equiv f_1(x)\pi(x)+\upsilon(x)$ (1). Ἂν ὑποθέσουμε ὅ τὸ $(x-a)^{\mu}$ εἶναι κοινὸς διαιρέτης τῶν $f(x)$, $f_1(x)$ καὶ θέσουμε $f(x)\equiv(x-a)^{\mu}$ καὶ $f_1(x)\equiv(x-a)^{\mu}\pi_2(x)$ θὰ ἔχουμε:

$$(x-a)^{\mu}\pi_1(x)\equiv(x-a)^{\mu}\pi_2(x)\pi(x)+\upsilon(x) \qquad \text{ἤ}$$

$$\upsilon(x)\equiv(x-a)^{\mu}\left[\pi_1(x)-\pi_2(x)\pi(x)\right]$$

δηλ. ἔχει τὸ $\upsilon(x)$ τὸ $(x-a)^{\mu}$ σὰν παράγοντα. Ὥστε κάθε κοινὸς παράγοντας τῶν f καὶ f_1 εἶναι καὶ κοινὸς παράγοντας τῶν f_1 καὶ υ. Δηλ. πᾶς κοινὸς διαιρέτης τῶν f καὶ f_1 (ἑπομένως καὶ ὁ μ.κ.δ. τους) εἶναι ἐπίσης κοινὸς διαιρέτης καὶ γιὰ τὰ f_1 καὶ υ. Τὸ ἀντρίστροφο ἐπίσης εἶναι ἀληθινὸ καθὼς δείχνει ἡ ἰσότητα (1).

Ἀπὸ αὐτὸ τὸ θεώρημα συμπεραίνουμε πὼς μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε τὸ f ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεώς του μὲ τὸ $f_1(x)$, χωρὶς νὰ βλάψουμε τὸ μ.κ.δ. τῶν f καὶ f_1. Ἂν τώρα σκεφτοῦμε κατὰ τὸν ἴδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ὅτι ὁ μ.κ.δ. τῶν υ καὶ f_1 συμπίπτει μὲ τὸ μ.κ.δ. τῶν υ καὶ υ ὅπου τὸ $\upsilon_1(x)$ θὰ εἶναι τὸ ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f_1 μὲ τὸ υ.

Ἂν ἐξακολουθήσουμε ἔτσι καὶ φτάσουμε σὲ μιὰ διαίρεση, ποὺ νὰ μὴ ἀφήνει ὑπόλοιπο, ὁ διαιρέτης τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως, ὁ υ_ν θὰ εἶναι προφανῶς ὁ ζητούμενος μ.κ.δ. τῶν f καὶ f_1.

Ἐπειδὴ ὁ βαθμὸς τῶν $f, f_1, \upsilon, \upsilon_1, \ldots\ldots$ προχωρεῖ μικραίνοντας, εἶναι φανερὸ πὼς μὲ τὶς διαδοχικὲς αὐτὲς διαιρέσεις θὰ φθάσουμε τελικὰ ἢ σὲ ἕνα ὑπόλοιπο μηδενικὸ ἢ σὲ ἕνα ὑπόλοιπο ἀνεξάρτητο τοῦ x (δηλ σταθερό). Ὅταν τὸ ὑπόλοιπο αὐτὸ εἶναι μηδενικό, τὰ f καὶ f_1 ἔχουν μ.κ δ. τὸ διαιρέτη τῆς τελευταίας αὐτῆς διαιρέσεως, τὸν υ_ν. ἂν ὅμως τὸ ὑπόλοιπο αὐτὸ εἶναι σταθερὸς ἀριθμός, τὰ f καὶ f_1 εἶναι πρῶτα μεταξύ τους.

. <u>Παρατηρήσεις</u>: 1η. Ἂν οἱ συντελεσταί ἑνός ἀπό τά πολυώνυμα f, f_1, y,,....... εἶναι κλασματικοί, μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε τό πολυ-
νυμο αὐτό ἐπί τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν συντελεστῶν του. Ἔτσι
τορθώνουμε οἱ συντελεστές αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου νά εἶναι ἀκέραιοι.

. Μποροῦμε νά διαιρέσουμε τούς συντελεστές ἑνός ἀπό τά παραπάνου
λυώνυμα μ᾿ ἕνα κοινό τους παράγοντα, ἄν ἔχουν τέτοιον.

Οἱ παραπάνου παρατηρήσεις δικαιολογοῦνται ἀπό τό γεγονός, ὅτι
πράξεις τους μεταβάλλουν μόνο τό <u>συντελεστή</u> τοῦ μ.κ.δ. καί ὄχι
ὐτόν τόν ἴδιο· καί ὁ συντελεστής του, ὅπως εἶναι γνωστό, μπορεῖ
ά εἶναι ὁποιοσδήποτε ἀριθμός.

<u>Ἀσκήσεις</u>

216. Ἄν τά $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι εἶναι ἀκέραιοι καί θετικοί ἀριθμοί, νά βρε-
εῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ $x^{4\alpha}+x^{4\beta+1}+x^{4\gamma+2}+x^{4\delta+3}$ διά τοῦ
$^{4}-3$.

217. Νά προσδιοριστεῖ τό α, ὥστε τό πολυώνυμο $x^6+2x^5+\alpha x^4-6x^3-x^2+3$
αί εἶναι διαιρετό μέ τό x^2-3.

218. Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $x-1$ δίνει
πόλοιπο 2 καί ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $x+2$ δίνει ὑπόλοιπο -4
Ποιό ὑπόλοιπο θά δώσει, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό γινόμενο $(x-1)(x+2)$;

219. Ἕνα ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό
$^2-1$ δίνει ὑπόλοιπο $3x+5$. Ποιό ὑπόλοιπο θά μᾶς δώσει, ἄν διαιρε-
θεῖ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x+1$;

220. Νά δειχτεῖ ὅτι, ἄν τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, $7^{2\nu+1}+1$ εἶ-
ναι διαιρετός μέ τό 8.

221. Νά δειχτεῖ, ὅτι ὁ ἀριθμός $3^{15}-1$ εἶναι διαιρετός μέ τό 26
καί μέ τό 242.

222. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλέξουμε τὸ θετικὸ καὶ ἀκέραιο ἀριθμὸ ν, ὥστε ὁ ἀριθμὸς $N=2^{\nu}+1$ νὰ εἶναι διαιρετὸς μὲ τὸ 3 ἢ μὲ τὸ 5.

223. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλέξουμε τὸ θετικὸ καὶ ἀκέραιο ἀριθμὸ ν, ὥστε ὁ ἀριθμὸς $10^{\nu}-1$ νὰ εἶναι διαιρετὸς μὲ τὸ 9^2 ἢ μὲ τὸ 9^3.

224. Νὰ βρεθεῖ ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων:

$$x^4-2x^3-2x^2+9x-6$$

$$x^5-2x^4+2x^3-x^2+6$$

225. Νὰ δειχτεῖ ὅτι*: Τὸ γινόμενο τοῦ $\overbrace{\text{μ.κ.δ. ἐπὶ ε.κ.π.}}^{\text{δύο ἀκεραίων τοῦ x πολυωνύμ}}$ (ἐκτὸ ἀπὸ τὸν ἀόριστο σταθερὸ συντελεστὴ) εἶναι ἴσο μὲ τὸ γινόμενο τῶν πολυωνύμων. Ὥστε: τὸ ε.κ.π. δύο πολυωνύμων εἶναι ἴσο μὲ τὸ πηλί $\frac{f(x)f_1(x)}{\text{μ.κ.δ.}}$, ὅπου ὁ μ.κ.δ. βρέθηκε κατὰ τὸ ἐδ. 110.

226. Ἂν ἕνα πολυώνυμο $f_1(x)$ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ γινόμενο δύο ἄλλων: $f_2(x)f_3(x)$ καὶ εἶναι πρῶτο πρὸς τὸ $f_2(x)$, θὰ διαιρεῖ ἀκριβῶς τὸ $f_3(x)$. (Θεώρημα ἀντίστοιχο πρὸς τὸ βασικὸ θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς).

227. Ἂν τὰ πολυώνυμα $f_1(x)$ καὶ $f_2(x)$ εἶναι πρῶτα μεταξύ το καὶ τὰ πολυώνυμα $f_1(x)+f_2(x)$ καὶ $f_1(x)-f_2(x)$ εἶναι ἐπίσης πρῶτα μεταξύ τους.

228. Νὰ δειχτεῖ ὅτι ἡ μέθοδος, ποὺ μ' αὐτὸ βρίσκουμε τὸ μ.κ. δύο πολυωνύμων ἐφαρμόζεται στὸ νὰ βροῦμε τὸ μ.κ.δ. πολλῶν πολυωνύμων.

<u>Ἐφαρμογή.</u> Νὰ βρεθεῖ ὁ μ.κ.δ. τῶν πολυωνύμων:

$$3x^3-x^2-11x+35\ ,\qquad 3x^4+5x^3-9x-15\ ,$$

$$3x^2+11x+10$$

---

* Ἀντίστοιχο πρὸς τὸ γνωστὸ θεώρημα τῆς Θ. Ἀριθμητικῆς.

229. Νὰ δειχτεῖ ὅτι, ἂν πολυώνυμο ἀκέραιο τοῦ x παίρνει γιὰ $x=0$ καὶ $x=1$ ἀριθμητικὲς τιμές, ποὺ εἶναι ἀριθμοὶ περιττοί, τότε τὸ πολυώνυμο δὲν μηδενίζεται γιὰ ἀκεραία τιμὴ τοῦ x.

230. Νὰ δειχτεῖ ὅτι, γιὰ νὰ ἔχουν τὰ πολυώνυμα $x^3+\mu x+\lambda$ καὶ $3x^2+\mu$, μ.κ.δ. πρώτου βαθμοῦ, πρέπει $\frac{\mu^3}{27}+\frac{\lambda^2}{4}=0$.

231. Ἂν ὁ ν εἶναι φυσικὸς ἀριθμός, ἡ παράσταση $\frac{a^{3\nu}-1}{a^2+a+1}$ εἶναι ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ α.

232. Νὰ ἀποδειχτεῖ ὅτι τὸ πολυώνυμο $(x^2-xy+y^2)^3+(x^2+xy+y^2)^3$ διαιρεῖται μὲ τὸ $2(x^2+y^2)$ καὶ νὰ ὑπολογιστεῖ τὸ πηλίκο.

233. Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=0$, νὰ δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση $\alpha^5+\beta^5+\gamma^5$ εἶναι διαιρετὴ μὲ τὸ γινόμενο αβγ.

* * *

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Δ.

Ἄρρητοι Ἀριθμοί

113. Στὰ πρῶτα κεφάλαια τοῦ παρόντος βιβλίου περιγράψαμε τὴν πορεία, ποὺ ἀκολούθησε τὸ ἀνθρώπινο μυαλὸ στὸ δημιουργία τῶν δύο εἰδῶν ἀριθμῶν, τῶν ἀκεραίων 0, 1, 2, 3, ... καὶ τῶν κλασματικῶν, ποὺ σχηματίζονται ἀπὸ δύο ἀκεραίους ἀριθμοὺς διαφορετικοὺς ἀπὸ τὸ μηδενικό.

Τοὺς ἀριθμοὺς αὐτοὺς γιὰ νὰ τοὺς διακρίνουμε ἀπὸ ἄλλους ἀριθμούς, ποὺ πᾶμε νὰ εἰσαγάγουμε τοὺς ὀνομάζουμε ρητούς.

Μὲ τοὺς ρητοὺς ἀριθμοὺς (θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς) μποροῦμε νὰ λύνουμε κάθε ζήτημα, ποὺ ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ τὶς τέσσερες βασικές πράξεις: πρόσθεση, ἀφαίρεση, πολλαπλασιασμό καί διαίρεση δέ μποροῦμε νά ἱκανοποιήσουμε οὔτε πάντα τίς ἰσότητες τη μορφῆς $x^μ = A$, ὅπου Α εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός, οὔτε τόν ἕνα ἀ τούς βασικούς σκοπούς πού ἔχουμε, δημιουργώντας τήν ἰδέα ἀριθμοῦ: τό νά μποροῦμε δηλ. νά ἐκφράσουμε ἀριθμητικά (ρημένα) τά μεγέθη.

Καί πραγματικά, ἄν δέν ὑπάρχει ἀκεραία τιμή τοῦ x, πού ταυτοποιεῖ τήν ἰσότητα $x^μ = A$, δέν ὑπάρχει οὔτε κλασματική. ἄς ὑποτεθεῖ ὅτι ὑπάρχει κλάσμα $\frac{α}{β}$ (ἀνάγωγο, γιατί ἄν δέν ε τέτοιο τό φτιάνουμε), πού ἱκανοποιεῖ τήν παραπάνω ἰσότητα. Θά ἔχουμε:

$$\left(\frac{α}{β}\right)^μ = A \quad ἤ \quad \frac{α^μ}{β^μ} = A.$$

Μά ἡ τελευταία αὐτή ἰσότητα δέν εἶναι δυνατή, γιατί ὅπως ἠ ρουμε ἀπό τόν ἀριθμητικό καί τό κλάσμα $\frac{α^μ}{β^μ}$ εἶναι ἀνάγωγ

Ἐπίσης οἱ πυθαγόρειοι καί ἴσως ὁ ἴδιος ὁ Πυθαγόρας εἶχ διαπιστώσει τήν ὕπαρξη μεγεθῶν, πού γιά νά τά ἐκφράσουμε ριθμητικά, δέν ἀρκοῦν οἱ γνωστοί ἀριθμοί (ἀκέραιοι καί κλασμ τικοί). Τά μεγέθη αὐτά τά καλοῦσαν ἀσύμμετρα* μεγέθη.

Νά λοιπόν, πού, γιά νά δοθεῖ ἀπάντηση σέ θέματα πού ἀνα στικά μᾶς θέτουνται, εἶναι ἀναγκαῖο νά μπάσουμε νέα στοιχε πού ὁ λογισμός τους νά γίνεται μέ νόμους καθορισμένους. Αὐτ

---

*. Τέτοια εἶναι ἡ πλευρά καί ἡ διαγώνιος ἑνός τετραγώνου. Στά «στοιχεῖα» τοῦ κλείδη βρίσκουμε μιά θεωρία τοῦ λόγου τῶν ἀσυμμέτρων μεγεθῶν καί διάφ θεωρίες ἐπί τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.

Σημειώνουμε ὅτι ἀρκετά συχνά θέτουν τή λέξη ἀσύμμετροι ἀριθμ στή θέση τοῦ ἄρρητοι ἀριθμοί. Εἶναι καλύτερα μόνο τά μεγέθη νά λέγουν ἀσύμμετρα.

στοιχεῖα θὰ τὰ ὀνομάσουμε ἀρρήτους ἀριθμούς. Καὶ γιὰ νὰ νοιώσουμε τὰ νέα αὐτὰ στοιχεῖα, ποὺ θὰ μᾶς λύσουν ζητήματα, γιὰ τὰ ὁποῖα τὰ γνωστά μας στοιχεῖα δείχτηκαν ἀνεπαρκῆ, πρέπει νὰ νοιώσουμε βαθειὰ τὴ φύση τῶν γνωστῶν.

114. Ἕως τώρα ἡ ἔννοια τοῦ ἀπείρου ἔπαιξε ρόλο δευτέρας σειρᾶς. Στὴν ἀριθμητικὴ ἡ ἔννοια αὐτὴ δὲν κλείνει κανένα μυστήριο καὶ μὲ τὴ γνώση μονάχα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μποροῦμε νὰ τὴν ταυτόσουμε μὲ τὴν ἑξῆς πρόταση:

Ὅταν μᾶς δοθεῖ ἕνας ἀκέραιος ἀριθμός, ὑπάρχει μεγαλύτερός του.

Ἂς ἀνέβουμε τώρα μέχρι τὸν κλασματικὸ ἀριθμό. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς ποὺ, ὅπως εἶναι γνωστό, εἶναι ἕνα τελειωμένο πλῆθος μονάδες ὁρισμένου εἴδους (τὸ εἶδος αὐτὸ τὸ καθορίζει ὁ παρονομαστής του) μπορεῖ κατὰ τὴ θεωρητικὴ ἀριθμητικὴ νὰ ἀποτελεστεῖ καὶ ἀπὸ ἕνα ἄπειρο πλῆθος μονάδων ἄλλου εἴδους.

Πραγματικά, ὁ κλασματικὸς ἀριθμός, ὅταν τραπεῖ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, ἢ τρέπεται σὲ δεκαδικὸ μὲ τελειωμένο πλῆθος δεκαδικὰ ψηφία ἢ σὲ δεκαδικὸ μὲ ἄπειρο πλῆθος ψηφία, μὰ ποὺ ἀκολουθοῦν τὸ νόμο: νὰ ἐπαναλαμβάνουνται, ἀπὸ κάποιο καὶ πέρα, τὰ ἴδια ψηφία καὶ μὲ τὴν ἴδια τάξη. Οἱ κλασματικοὶ αὐτοὶ ἀριθμοὶ εἶναι ἐκεῖνοι ποὺ λέγουνται περιοδικὰ κλάσματα.

Ἂν λάβουμε ἀκόμη ὑπ' ὄψη, πὼς ἡ θεωρητικὴ ἀριθμητικὴ δείχνει καὶ τὸ ἀντίστροφο: δηλ. πὼς κάθε περιοδικὸ κλάσμα γίνεται ἀπὸ ἕνα κοινὸ κλάσμα, νοιώθουμε ὅτι κάθε περιοδικὸ κλάσμα εἶναι ἐντελῶς ὁρισμένος ἀριθμός.

Ἂς θεωρήσουμε λογουχάρη τὸν κλασματικὸ ἀριθμὸ $\frac{3}{7}$. Αὐτός, ἂν τραπεῖ σὲ δεκαδικὸ ἀριθμό, μᾶς δίνει τὸ ἁπλὸ περιοδικὸ κλάσμα 0,428571 428571......μὲ περίοδο 428571.

Οἱ ἀριθμοί:

(1) 0,4 , 0,42 , 0,428 , 0,4285, ...

εἶναι οἱ τιμὲς τοῦ $\frac{3}{7}$ μὲ προσέγγιση $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

σὲ ἔλλειψη καὶ οἱ τιμές:

(2) 0,5 , 0,43 , 0,429 , 0,4286, ...

εἶναι τιμὲς τοῦ $\frac{3}{7}$ πάλι μὲ προσέγγιση $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ...

μὰ σὲ ὑπεροχή.

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι ἔχουμε δυὸ ἀκολουθίες μὲ τὶς ἑξῆς ότητες:

1) Κάθε ἀριθμὸς τῆς ἀκολουθίας (1) εἶναι μικρότερος ἀπὸ κά ἀριθμὸ τῆς ἀκολουθίας (2).

2) Ἐὰν μᾶς δοθεῖ ἕνας θετικὸς ἀριθμὸς ε, ὁσοδήποτε μικρός, ροῦμε πάντα νὰ βροῦμε ἀριθμὸ τῆς ἀκολουθίας (2) καὶ ἀριθμὸ ἀκολουθίας (1), ποὺ νὰ διαφέρουν λιγότερο ἀπὸ ε.

Ἐὰν λογουχάρη γιὰ ε μᾶς δοθεῖ ὁ ἀριθμὸς $\frac{2}{875}$ ἐπειδὴ $\frac{2}{875} > \frac{1}{1000}$ ἀρκεῖ νὰ πάρουμε ἀπὸ τὴν ἀκολουθία (1) τὸν ἀριθμὸ 0,428 (ἢ ὁποιοδήποτε ἑπόμενό του) καὶ ἀπὸ τὴν ἀκολουθία (τὸν 0,4186 (ἢ ὁποιοδήποτε ἑπόμενό του) γιατὶ αὐτοί, ὅπως εἶ φανερό, θὰ διαφέρουνε λιγότερο ἀπὸ $\frac{1}{1000}$ καὶ πολὺ περισσό ρο, λιγότερο ἀπὸ $\frac{2}{875}$..

Ὅπως σχηματίσαμε τὶς ἀκολουθίες (1) καὶ (2) μπορούσαμε σχηματίσουμε ἀκολουθίες μὲ τιμὲς τοῦ $\frac{3}{7}$ κατὰ προσέγγιση $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{12^2}$, $\frac{1}{12^3}$, ... ἢ γενικὰ $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{1}{\alpha^3}$, ... (ὅπου $\alpha >$ ἢ γενικώτερα κατὰ προσέγγιση $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\alpha_2}{\beta_2}$, ... ὅπου κλάσματα αὐτὰ εἶναι θετικά, πηγαίνουν διαρκῶς ἐλαττούμενα καὶ γίνουνται μικρότερα ἀπὸ κάθε ποσότητα θετικὴ δοσμένη ἀπὸ πρῶτα.

115. Ἔτσι βλέπουμε ὅτι πάντοτε ἕνας ρητός ἀριθμός μπορεῖ νά θεωρηθεῖ τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ δύο ἀπεράτων ἀκολουθιῶν.

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots\ldots x_\nu \ldots\ldots$$
$$x'_1,\ x'_2,\ x'_3 \ldots\ldots x'_\nu \ldots\ldots$$

ὔ ἔχουν τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

1ο. <u>οἱ ὅροι τῆς πρώτης πηγαίνουν αὐξανόμενοι καί οἱ ὅροι τῆς δευτέρας αττούμενοι.</u>

2ο. <u>Κάθε ἀριθμός τῆς πρώτης ἀκολουθίας εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε ἀ μό τῆς δευτέρας.</u>

3ο. <u>Ἡ διαφορά $x'_\nu - x_\nu$ μπορεῖ νά γίνει ὅσο θέλουμε μικρή, ὅταν τό ν αὐ νει ἀπεριόριστα.</u>

116. Γεννιέται τώρα τό ἑξῆς ἐρώτημα: Ἀντιστρέφεται τό παραπάνω συμ ρασμα; Δηλ δύο ἀκολουθίες με τίς παραπάνω ἰδιότητες θά διαχωρίζον πάντα ἀπό ἕνα ρητό ἀριθμό;

Ξέρουμε, ὅτι τήν ἰσότητα $x^2=2$ δέν τήν ἱκανοποιεῖ κάποιος ρητός ἀριθ ς, δηλαδή ξέρουμε, ὅτι δέν ὑπάρχει ρητός ἀριθμός, πού νά εἶναι τετραγω ή ρίζα τοῦ 2.

Ἄς προσδιορίσουμε τώρα κατά τό γνωστό τρόπο ἀπό τήν ἀριθμητική τήν ραγωνική ρίζα τοῦ 2 μέ προσέγγιση μονάδος, δεκάτου, ἑκατοστοῦ κ.λ.π. ι βρίσκουμε τήν αὔξουσα ἀκολουθία.

$$1,\ 1{,}4,\ 1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ \ldots\ldots$$

προσθέτοντας μία μονάδα στό τελευταῖο ψηφίο τοῦ καθενός ἀπ' αὐτούς ς ἀριθμούς, ἔχουμε τή φθίνουσα ἀκολουθία.

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ 1{,}4143 \ldots\ldots$$

Εἶναι φανερό, ὅτι οἱ ἀκολουθίες αὐτές ἔχουν τίς ἰδιότητες τῶν ἀκολου ν τοῦ ἐδ. 115, δέν διαχωρίζονται ὅμως ἀπό ἕνα ρητό ἀριθμό, γιατί ε θά ὑπῆρχε ἡ τετραγωνική ρίζα τοῦ 2 δηλαδή ἡ τετραγωνική ριζα θά ἦταν ἕνας ρητός ἀριθμός.

117. Ἀπό ὅσα εἴπαμε στά δύο προηγούμενα ἐδάφια βγαίνει τό θε
σμα, ὅτι γιά ἀκολουθίες μέ τίς παραπάνω ἰδιότητες μποροῦν νά πα
στοῦν δύο περιπτώσεις:

1ο. Νά ὑπάρχει ἕνας* ρητός ἀριθμός Ν, ὁ
ος νά περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στά
x'_ν ὁποιοσδήποτε κι ἄν εἶναι ὁ ν.

2ο. Νά μήν ὑπάρχει ἕνας ἀκέραιος ἤ κλ
σματικός, πού νά περιλαμβάνεται μετα
καί x'_ν.

Στή δεύτερη περίπτωση λέμε, ὅτι οἱ ἀκολουθίες x_ν καί x'_ν
ἕναν ἄρρητο ἀριθμό ἤ ὅτι διαχωρίζονται ἀπό ἕναν ἄρρητο ἀρ
ἀκόμη ὅτι τείνουν πρός ἕνα ὅριο*** ἄρρητο.

118. <u>Ὁρισμός τοῦ ἄρρητου ἀριθμοῦ.</u> Ἄρρη
ριθμός ὀνομάζεται τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ δύο ἀπεράντων ἀ
θιῶν x_ν καί x'_ν, πού συνιστοῦν τίς ἀνισότητες:

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu < x'_\nu < x'_{\nu-1} < \cdots < x'_2 < x'_1$$

καί πού εἶναι τέτοιες, ὥστε ἡ διαφορά $x'_\nu - x_\nu$, ὅταν τό ν αὔξα

---

* Δέν μπορεῖ νά ὑπάρξουν δύο ἀριθμοί Ν καί Ν' ἀνάμεσα x_ν καί
κάθε τιμή τοῦ φυσικοῦ ν. Γιατί, ἄν αὐτό τό ὑποθέσουμε γιά ἀληθινό, ἡ δι
$x'_\nu - x_\nu$ δέν θά μποροῦσε νά γίνει μικρότερη ἀπό τήν $|N-N'|$.

** Συνηθίζουμε μέ τό γενικό ὅρο μιᾶς ἀκολουθίας νά συμβολίζου
κλήρη τήν ἀκολουθία.

*** Γιά τήν ἔννοια τοῦ ὁρίου θά μιλήσουμε σέ εἰδικό κεφάλαιο καί θ
θεῖ ἐκεῖ ἡ εὐκαιρία νά δικαιολογήσουμε γιατί, στήν περίπτωση πού ἐξετά
ὑπάρχει κοινό ὅριο τῶν δύο αὐτῶν ἀκολουθιῶν.

όριστα, νά μπορεῖ νά γίνει καί νά μείνει μικρότερη ἀπό κάθε ποσότητα
ρία εἶναι ὁσοδήποτε μικρή.

Ἐξυπακούεται βέβαια, ὅτι αὐτό συμβαίνει, ὅταν εἶναι ἐξακριβωμένο,
δέν μπορεῖ νά τίς διαχωρίζει ἕνας ἀκέραιος ἤ κλασματικός ἀριθ-

119. Σπουδαία σημείωση. Στό ἑδ. 116 χρησιμοποιήσαμε γιά τόν ὁρισμό τοῦ
του ἀριθμοῦ ἀκολουθίες, πού οἱ ὅροι τους ἀποτελοῦν τό δεκαδικό κατά
γγιση. προσδιορισμό του. Ἐννοοῦμε, ὅπως ὑποδείξαμε καί στήν περί-
τοῦ ρητοῦ ἀριθμοῦ (σελ. 112), ὅτι μποροῦμε νά χρησιμοποιήσουμε ἀ-
θίες, πού οἱ ὅροι τους νά εἶναι τιμές τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ κατά
γγιση $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \ldots\ldots$ ὅπου τά κλάσματα αὐτά εἶναι θετικά
νουν διαρκῶς ἐλαττούμενα καί γίνονται μικρότερα ἀπό κάθε πο
α θετική δοσμένη ἀπό πρῶτα. Ἔτσι ἐξηγεῖται καί ὁ παραπάνω
18) γενικός ὁρισμός τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ. Ἀξίζει νά σημειώσου-
ὁ δεκαδικός κατά προσέγγιση προσδιορισμός τοῦ ἀρρήτου ἀριθμοῦ
σέ δεκαδικό ἀριθμό μή περιοδικό, γιατί ἀλλοιῶς θά ἐπρόκειτο γιά
ἀριθμό.

20. Ἀριθμοί ἀντίθετοι. Μιλήσαμε προηγουμένως γιά τόν προσδιορι-
ἀρρήτων ἀριθμῶν μά θετικῶν. Ἐάν α εἶναι ὁ ἄρρητος ἀριθμός, πού
ό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν x_ν καί x'_ν (αὐτές τίς ἀ-
ίες μποροῦμε νά τίς θεωρήσουμε πάντα μέ ὅρους μόνο θετικούς)
ητος ἀριθμός α', πού εἶναι τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν
$-x'_\nu$,[*] θά εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ ἀντίθετος τοῦ α δηλ $\alpha' = -\alpha$.

Ὁ καθένας καταλαβαίνει πώς οἱ ἀκολουθίες $-x_\nu$, $-x'_\nu$ ἔχουν τίς ἰδιότητε
5 καί ἐπομένως ὁρίζουν μιά τομή.

121. Σύγκριση τῶν ἀριθμῶν. Ἰσότητα- τητα.

Σύγκριση ἑνός ρητοῦ ἀριθμοῦ καί ἐ ριθμοῦ, πού ὁρίζεται ἀπό μιά τομή.

Ὅταν δύο ἀκολουθίες x_ν καί x'_ν πληροῦν τίς ἰδιότητες τ
(115) λέμε ὅτι ὁρίζουν μιά τομή. Μιά τομή συμβολίζεται μέ τ
x_ν/x'_ν καί καθορίζει, ὅπως εἴδαμε παραπάνω, ἕνα ρητό ἤ ἀ
ριθμό.

Ἄς δεχθοῦμε λοιπόν πώς ἔχουμε τόν ἀριθμό α, πού καθορίζε
τήν τομή x_ν/x'_ν καί ἕνα ρητό ἀριθμό β.

Ἐάν ὁ β εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕναν ἀριθμό x'_ν ἤ ἴσος
τοιο ἀριθμό, θά λέμε πώς ὁ α εἶναι μικρότερος ἀπό τόν β κα
φουμε : $\beta > \alpha$.

Ἐάν ὁ β εἶναι μικρότερος ἀπό ἕναν ἀριθμό x_ν ἤ ἴσος μ
τοιο ἀριθμό θά λέμε πώς ὁ α εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν β
φουμε $\beta < \alpha$.

Ἐάν ὁ β εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε ἀριθμό x'_ν καί μεγ
ἀπό κάθε ἀριθμό x_ν, ἡ τομή καθορίζει τόν ἀριθμό β, σύμφων
εἴπομε παραπάνω. Θά λέμε τότε (βλέπε πρώτη ὑποσημ. σελ
$\alpha = \beta$.

122. Σύγκριση δύο ἀριθμῶν, πού ὁρί ἀπό δύο τομές.

Ἔστω α ὁ ἀριθμός, πού ὁρίζεται ἀπό τήν τομή x_ν/x'_ν
ριθμός, πού ὁρίζεται ἀπό τήν τομή y_ν/y'_ν.

Ἐάν ἕνας ἀριθμός x'_ν εἶναι μικρότερος ἀπό ἕναν ἀριθμό y
ὅτι ὁ α' εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν α καί θά γράφουμε : $\alpha' >$

Ἐάν ἕνας ἀριθμός x_ν εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ἕναν ἀριθμό
πώς ὁ α' εἶναι μικρότερος ἀπό τόν α καί θά γράφουμε : $\alpha' <$

λος, εάν κάθε αριθμός x_ν είναι μεγαλύτερος από κάθε αριθμό y_ν
θε αριθμός x_ν είναι μικρότερος από κάθε αριθμό y'_ν, θα λέμε πως
ριθμοί α και α' είναι ίσοι και θα γράφουμε : $\alpha = \alpha'$.

3. Παρατήρηση επί των τομών. Εις τα προηγου-
αφ. 114, 115) χρησιμοποιήσαμε δυο ειδικές τάξεις ρητών για τον ορισμό
ού και ενός άρρητου αριθμού. Μπορούμε όμως για τον ίδιο σκοπό να θεωρή-
ρισμένους όλους τούς ρητούς σε δύο τάξεις : Έτσι γιά τον καθορισμό
στην τάξη Α θέτουμε τον $\frac{3}{7}$ και όλους τους μικροτέρους του και στην τά-
υς τούς άλλους δηλ. όλους τούς μεγαλυτέρους από τον $\frac{3}{7}$. Είναι ολοφάνερο
συμβολίζει αυτό τον χωρισμό, είναι το σύνορο αυτού του χωρισμού.

ρούμε όμως να κάμουμε και άλλο χωρισμό : Στην τάξη Α' να βάλουμε όλους
οτέρους από τον $\frac{3}{7}$ και στην τάξη Β' τον $\frac{3}{7}$ και όλους τους μεγαλυτέρους
πάλι ο $\frac{3}{7}$ είναι το σύνορο αυτού του χωρισμού, αλλά, ενώ πριν ήταν ο με
ς της τάξεως Α τώρα είναι ο μικρότερος της τάξεως Β.

γιά τούς δύο χωρισμούς έχουμε :

Κάθε αριθμός της πρώτης τάξεως είναι μικρότερος από κάθε αριθμό της
ς και

Οσονδήποτε μικρός και άν είναι ένας θετικός αριθμός ε, μπορούμε να
υο αριθμούς έναν από τη δεύτερη και έναν από την πρώτη τάξη, που η
τους να είναι μικρότερη του ε.

μα γιά τον καθορισμό της $\sqrt{2}$ χωρίζουμε τους ρητούς σε δυο τάξεις ως ε-

ν τάξη Α όλους τούς θετικούς ρητούς, πού το τετράγωνό τους είναι μικρό-
τό 2, το μηδέν και όλους τούς αρνητικούς· και στην Β όλους τούς θε-
ητούς πού τό τετράγωνό τους είναι μεγαλύτερο από το 2. Σύμβολο αυ-
ρισμού δέν είναι προφανώς ένας ρητός αριθμός, γιατί κανείς ρητός δεν
ῖ την ισότητα : $x^2 = 2$. Στην περίπτωση αυτή λέμε πως υπάρχει ένας άρ-

ρητος ἀριθμός, πού εἶναι μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς ρητούς τῆς Α καί μικρ
ἀπό ὅλους τούς ρητούς τῆς Β καί αὐτός ἐπαληθεύει τήν ἰσότητα $x^2=2$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ἀπό τά παραπάνω τά ἑξῆς : ὅταν χωρίσο
τούς ρητούς σέ δύο τάξεις Α καί Β ἔτσι, πού κάθε ἀριθμός τῆς Α νά εἶναι μ
ρος ἀπό καθένα τῆς Β, παρουσιάζονται τρεῖς περιπτώσεις :

1ο Στήν τάξη Α ὑπάρχει ἀριθμός α μεγαλύτερος ἀπό κάθε ἄλλο, πού
σ' αὐτή.

2ο Στήν τάξη Β ὑπάρχει ἀριθμός α μικρότερος ἀπ' ὅλους τούς ἄλλους,
κουν σ' αὐτή.

Καί στίς δυό αὐτές περιπτώσεις ὁ ἀριθμός α συμβολίζει αὐτό τό χωρι
λέμε πώς ἡ τομή εἶναι ρητή.

3ο. Δέν ὑπάρχει οὔτε μεγαλύτερος στήν τάξη Α οὔτε μικρότερος
Β, τότε λέμε πώς ἡ τομή εἶναι ἄρρητος.

124. Πράξεις ἐπί τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν.

I. Πρόσθεση. Ἄς θεωρήσουμε τούς ἀριθμούς :

λ ὁριζόμενο ἀπό τήν τομή α/β
λ' » » » » α'/β'
λ'' » » » » α''/β''

Τό σύμβολο $\lambda+\lambda'+\lambda''$ εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ἀριθμός, πού ὁρίζε
τήν τομή $\alpha+\alpha'+\alpha''/\beta+\beta'+\beta''$

Εἶναι ὁλοφάνερο πώς τά σύνολα τῶν ἀριθμῶν $(\alpha+\alpha'+\alpha'')$ καί
$(\beta+\beta'+\beta'')$ ὁρίζουν μιά τομή. Πραγματικά, ἔχουμε : $\beta+\beta'+\beta''>$
γιατί $\alpha<\beta$, $\alpha'<\beta'$, $\alpha''<\beta''$ καί ἐξ ἄλλου $(\beta+\beta'+\beta'')-($
$(\beta-\alpha)+(\beta'-\alpha')+(\beta''-\alpha'')$, ἐνῶ κάθε ὅρος τοῦ δεύτερου μέλους μπ
γίνει ὅσο μικρός θέλουμε.

II. Ἀφαίρεση. Ἄς θεωρήσουμε τούς παραπάνω ἀριθμούς λ καί
ἄς θεωρήσουμε πώς $\lambda>\lambda'$.

όπως εἴδαμε (ἐδ. 120) οἱ ἀκολουθίες $-\beta'$, $-\alpha'$ ὁρίζουν μία τομή,
αθορίζει τόν $-\lambda'$, καί (ἐδ. 124) οἱ ἀκολουθίες $\alpha-\beta'$, $\beta-\alpha'$ ὁρίζουν καί
μιά τομή. Αὐτή ἡ τομή καθορίζει ἐξ ὁρισμοῦ τόν ἀριθμό $\lambda-\lambda'$.

III. Πολλαπλασιασμός. Ἄς θεωρήσουμε καί πάλι τούς ἀριθμούς
λ' (ἐδ. 124, I). Ἡ τομή : $\alpha\alpha'/\beta\beta'$ καθορίζει ἐξ ὁρισμοῦ τόν ἀριθ-
λ'.

V. Διαίρεση. Ἄν λ' εἶναι ὁ ἀριθμός (τοῦ ἐδ. 124 II) οἱ τάξεις
$\frac{1}{\alpha'}$ ὁρίζουν ἐξ ὁρισμοῦ τόν ἀριθμόν $\frac{1}{\lambda'}$, καί οἱ τάξεις $\frac{\alpha}{\beta'}$ καί $\frac{\beta}{\alpha'}$
24 III) τόν ἀριθμό $\frac{\lambda}{\lambda'}$.

25. Σύγκριση τῶν ἀρρήτων ἀριθμῶν μέ βάση εκαδική ἐκπροσώπησή τους.

Όσα ἐξεθέσαμε παραπάνω γιά τή σύγκριση δύο πραγματικῶν ἀ-
ν καί γιά τίς πράξεις μέ δύο τέτοιους ἀριθμούς, ἀφοροῦν τήν αὐ-
τερη θεωρητική ἐξέταση αὐτῶν τῶν θεμάτων. Μέ βάση ὅμως τή
ική παράστασή τους μποροῦμε νά ἔχουμε, γιά τά παραπάνω ζητή-
διατύπωση, πού θά εἶναι πιό χρήσιμη στήν πρακτική. Ἔτσι :
ύο ἄρρητοι ἀριθμοί ὀνομάζονται ἴσοι, ἐάν οἱ δεκαδικές τους ἐκπρο-
εις εἶναι οἱ ἴδιες. (ταυτίζονται).
άν οἱ δεκαδικές ἐκπροσωπήσεις δύο ἀρρήτων ἀριθμῶν κ καί κ'
ωτίζονται, οἱ δύο ἀριθμοί κ καί κ' εἶναι ἄνισοι· καί ἐάν λόγου
ἡ σέ ἔλλειψη καί κατά προσέγγιση $\frac{1}{10^\nu}$ τιμή τοῦ κ εἶναι μεγαλ-
πό τήν τιμή τοῦ κ' κατά προσέγγιση $\frac{1}{10^\nu}$ καί σέ ἔλλειψη, λέμε ὅτι
ναι μεγαλύτερος ἀπό τόν κ'.
σο γιά τίς πράξεις σχετικά μέ τούς ἀρρήτους ἀριθμούς, θά
με ὅτι γιά νά πραγματοποιήσουμε μιά πράξη (πρόσθεση
ση, πολλαπλασιασμό, διαίρεση, ἐξαγωγή ριζῶν) σέ τέτοιους

ἀριθμούς, μποροῦμε νά ἀντικαταστήσουμε αὐτούς τούς ἀριθμούς δεκαδικές τους ἐκπροσωπήσεις περιορισμένες σέ δεκαδικές μονάδες ὁρ τάξεως. Τό ἀποτέλεσμα ἀπό τή πράξη, πού θά πραγματοποιηθεῖ μέ τί αὐτές κατά προσέγγιση τιμές τῶν ἀριθμῶν μας, εἶναι μία κατά προσ τιμή τοῦ ἀποτελέσματος ἀπό τήν πράξη μέ τούς γνωστούς ἀρρήτου μούς· καί μποροῦμε νά πάρουμε τούς ἀριθμούς μας μέ τέτοιες δε προσεγγίσεις, ὥστε τό κατά προσέγγιση ἀποτέλεσμα νά εἶναι ὁ ἀκριβές θέλουμε.

126. Γενίκευση τοῦ ἀλγεβρικοῦ λο σμοῦ.

Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον ὁρίσθησαν οἱ πράξεις πάνω στού τους ἀριθμούς καί ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον γίνηκε ἡ σύγκριση ἀφήνουν νά ἰσχύουν καί γιά τέτοιους ἀριθμούς ὅλες οἱ θεμε ἰδιότητες τῶν ρητῶν ἀριθμῶν στίς ὁποῖες στηρίζεται ὁλό Ἀριθμητική. Ἔτσι :

1ο οἱ ἀντίθετοι ἄρρητοι ἀριθμοί ἔχουν σμα ἴσο πρός τό μηδέν.

Ἐάν ὁ ἄρρητος ἀριθμός α εἶναι τό σύμβολο τοῦ διαχω τῶν ἀπεράτων ἀκολουθιῶν x_ν καί x'_ν ὁ ἀντίθετος του α, ὅπ ὁρίσαμε, εἶναι τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθ καί $-x_\nu$. Ἐάν λοιπόν θεωρήσουμε τίς ἀκολουθίες $x_\nu - x'_\nu$ κ ὅπως εἶναι φανερό, κάθε ὅρος τῆς πρώτης ἀκολουθίας θά νητικός ἀριθμός, κάθε ὅρος τῆς δευτέρας θά εἶναι θετικ μός, ἐνῶ οἱ ἀκολουθίες αὐτές ἱκανοποιοῦν τίς ἰδιότητες τ 115). Ἐπομένως τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ τους θά εἶναι τ χουμε, $\alpha+\alpha'=0$. (ἐδ. 124 Ι).

2ο. Ὁ ἐναλλακτικός νόμος ἤ ἡ ἰδιότητα τῆς ντιμεταθέσεως, πού ἰσχύει γιά τήν πρό- θεση καί τόν πολλαπλασιασμό.

Ἄς εἶναι οἱ ἄρρητοι ἀριθμοί α, β, τά σύμβολα διαχωρισμοῦ γιά ζεύγη τῶν ἀκολουθιῶν:

$$\chi_\nu,\ \chi'_\nu$$

$$\psi_\nu,\ \psi'_\nu$$

Ὁ ἀριθμός $\alpha+\beta$ (ἐδ. 124 Ι) εἶναι τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ ιά τίς ἀκολουθίες $\chi_\nu+\psi_\nu$ καί $\chi'_\nu+\psi'_\nu$. Ἄν θεωρήσουμε τώρα τίς κολουθίες $\psi_\nu+\chi_\nu$ καί $\psi'_\nu+\chi'_\nu$ τότε τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ ους θά εἶναι ὁ ἀριθμός $\beta+\alpha$. Ἐπειδή ὅμως $\chi_\nu+\psi_\nu=\psi_\nu+\chi_\nu$ καί $+\psi'_\nu=\psi'_\nu+\chi'_\nu$, γιατί γιά τούς ρητούς ἰσχύει ὁ ἐναλλακτικός νόμος, μπεραίνουμε, ὅτι οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta$ καί $\beta+\alpha$ εἶναι τά σύμβολα τοῦ δια- ρισμοῦ τῶν αὐτῶν ἀκολουθιῶν καί ἐπειδή (σελ. 114 ὑποσ.) μόνον ἕνας ιθμός συμβολίζει τό διαχωρισμό δύο τέτοιων ἀκολουθιῶν, ἔχουμε $+\beta=\beta+\alpha$.

Γιά νά πεισθοῦμε ὅτι ὁ ἐναλλακτικός νόμος ἰσχύει γιά ὁσουσδή- ε προσθετέους, δέν ἔχουμε παρά νά ἐπεκτείνουμε τόν ὁρισμό τοῦ οίσματος γιά ἕνα μεγαλύτερο ἀριθμό προσθετέων.

Λόγου χάρη, ἄν οἱ ἄρρητοι ἀριθμοί α, α', α'' εἶναι τά σύμβολα χωρισμοῦ τῶν ζευγῶν ἀκολουθιῶν χ_ν καί χ'_ν, ψ_ν καί ψ'_ν, ω_ν ω'_ν, τότε ὁ ἀριθμός $\alpha+\alpha'+\alpha''$ εἶναι τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ ἀκολουθιῶν $\chi_\nu+\psi_\nu+\omega_\nu$ καί $\chi'_\nu+\psi'_\nu+\omega'_\nu$.

Ἔτσι δέν ἔχουμε παρά νά ἐπαναλάβουμε τίς παραπάνω σκέψεις νά ἔχουμε τόν ἐναλλακτικό νόμο σέ προσθετέους περισσότερους δύο. Ἡ ἐργασία εἶναι ἡ ἴδια γιά νά διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ ἐναλλακτικός νόμος ἰσχύει καί γιά τόν πολλαπλασιασμό.

Ὅπως γιά τούς ρητούς ἔτσι καί γιά τούς ἄρρητους ἀριθμούς, ἔχουμε, συνέπεια τοῦ ἐναλλακτικοῦ νόμου, τήν ἰδιότητα (ἐδ. 9 β) γιά τό ἄθρ- σμα καί τήν ἰδιότητα (σελ. 14 1η πρόταση) γιά τό γινόμενο.

3ο Ὁ νόμος τοῦ προσαιτερισμοῦ ἤ τῆς ἐναλλαγῆς, πού ἰσχύει ἐπίσης στήν πρόσθεση καί στόν πολλαπλα- σμό. Δηλ.

$$\alpha+(\alpha'+\alpha'')=(\alpha+\alpha')+\alpha'' \quad \alpha(\alpha'\cdot\alpha'')=(\alpha\cdot\alpha')\cdot\alpha''$$

Κατά τά προηγούμενα ἔχουμε:

$$\alpha+(\alpha'+\alpha'')=\alpha+\alpha'+\alpha''=(\alpha+\alpha')+\alpha''$$

Ὅμοια καί γιά τό γινόμενο.

4ο Ὁ ἐπιμεριστικός νόμος, πού συνδέει τήν πρόσθ μέ τόν πολλαπλασιασμό. Δηλ.

$$(\alpha+\alpha')\cdot\alpha''=\alpha\cdot\alpha''+\alpha'\cdot\alpha''$$

Ὅπως ἔχουμε πεῖ, τό ἄθροισμα τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν α, α' εἶν τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν $\chi_\nu+\psi_\nu$ καί $\chi'_\nu+\psi'_\nu$ κ ἔπειτα ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ γινομένου (ἐδ. 124 ▓) ὁ ἀριθμός $(\alpha+\alpha')$ ὁρίζεται ἀπό τό ζεῦγος τῶν ἀκολουθιῶν $(\chi_\nu+\psi_\nu)\cdot\omega_\nu$ καί $(\chi'_\nu+\psi'_\nu)\cdot\omega'$ Ἀκόμη οἱ ἀριθμοί $\alpha\alpha''$ καί $\alpha'\alpha''$ ὁρίζονται ἀπό τά ζεύγη τῶν ἀκολουθ $(\chi_\nu\omega_\nu, \chi'_\nu\omega'_\nu)$ καί $(\psi_\nu\omega_\nu, \psi'_\nu\omega'_\nu)$ καί ἔτσι ὁ ἀριθμός $\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''$ εἶ τό σύμβολο τοῦ διαχωρισμοῦ γιά τίς ἀκολουθίες $\chi_\nu\omega_\nu+\psi_\nu\omega_\nu$ καί $\chi'_\nu\omega'_\nu+\psi'_\nu\omega'_\nu$ (2).

Βλέπουμε ἔτσι, ὅτι οἱ ἀκολουθίες (1) καί (2) ταυτίζονται καί συνεπ ἡ παραπάνω ἰσότητα μας εἶναι ἀληθινή.

127. <u>Γενική ἐπισκόπηση</u>. Τώρα πού μέ τήν εἰσαγω τῶν ἄρρητων ἀριθμῶν ἔκλεισε ὁ κύκλος τῶν ἀριθμῶν, πού λεγ ται μέ ἕνα ὄνομα πραγματικοί ἀριθμοί, ἀξίζει νά

ίσουμε τά συμπεράσματά μας πάνω στά άριθμητικά συστήματα.

Πρώτη κατάκτηση τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος στάθηκε ἡ δημι-
ργία τοῦ συστήματος τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Βέβαια δέν πρό-
ται γιά καμμιά ἐξωφυσική δημιουργία ἀλλά γιά ἕνα ἀποτελε-
α ἀπό τήν ἀνθρώπινη δράση πάνω στον ἀντικειμενικό κοσμο, γιά
 συντήρηση τῆς ζωῆς. Ἐκεῖ ὁ ἄνθρωπος, ἀντιμετωπίζοντας στην ἀρχή
σμένα συγκεκριμένα πράγματα, ορισμένες ποιότητες, ἰκανές νά θε-
πεύουν τίς ἀνάγκες του καί μέ τήν ἀνανέωση αὐτῆς τῆς ἀνάγκης συγ-
οντάς τα μεταξύ τους μπορεσε νά δημιουργήσει την ἀφηρημενη ἔννοια
 πραγμάτων, πού εἶναι ἕνα αὐτή τη βασική ἔννοια τοῦ ἀσυνεχοῦς,
ῦ ξεχωριστοῦ, τοῦ ἀκεραίου, πού ἀποτελεῖ τό πρῶτο βῆμα στή στα-
δρομία γιά τη δημιουργία τῆς εννοίας τοῦ ποσοῦ ἤ τοῦ πλήθους.
ειάστηκε ἐν τούτοις κατόπιν ὁ ἄνθρωπος να παραγάγει αὐτά τά
γματα καί ἐπειδή τά πράγματα δεν εἶναι ἁπλᾶ ἡ παραγωγή τους
κισε νά γεννάει στό ἀνθρώπινο μυαλό την ἔννοια τῶν Ἕνα πραγ-
των, πού εἶναι δύο πράγματα μαζύ ἤ πού εἶναι τρία, τέσσερα κτλ.
χισε δηλ. νά γεννάει τήν ἀφηρημένη ἔννοια τοῦ πλήθους, την ἀνε-
ότητη ἀπό ὁποιαδήποτε ποιότητα. Μέχρι εδῶ εἶχε λίγο πολύ δημι-
γηθεῖ ὁ ἀκέραιος ἀριθμός. Ὅμως ἡ παραγωγή εἶναι μιά ενεργεια,
 πράξη, ἡ ὁποία οὔτε ἁπλή εἶναι οὔτε στάσιμη μένει καί ἡ σταδιο-
μία της ἀπό τό ἁπλούστερο στό περισσότερο σύνθετο ἀπαίτησε ὁ-
μένους συνδυασμούς, πού ἔφεραν στην ἐπιφάνεια την ἀνάγκη τῆς με-
σεως ἡ ὁποία καί δημιούργησε την ἀνάγκη τῶν ἀριθμητικῶν πρά-
ν. Ἡ ἐκτέλεση αὐτῶν τῶν πράξεων δεν εἶναι παρα δυο ενεργειες:
ώρηση τῶν ἀριθμῶν, πού παίρνουν μερος σ'αὐτή την πράξη, ἐάν σύ-
μονάδων διαφόρων τάξεων δηλ. ἡ ἀνάλυση του περιεχομένου

τους καὶ ἡ ἔννοια τοῦ προβλήματος, ποὺ ὁδηγεῖ σ᾽αὐτὴ τὴν πράξη. Παρ
ταῦτα ὁ τρόπος αὐτός, ποὺ ἐκτελοῦνται οἱ πράξεις, δὲν εἶναι ἐφαρμόσιμ
γιὰ τὴν ἀφαίρεση καὶ τὴ διαίρεση στὶς γνωστὲς περιπτώσεις. Καὶ χρε
σθηκε πολύμοχθη ἐργασία μέσα στὴν ἐξελικτικὴ του πορεία ὁ ἄνθρ
πος γιὰ νὰ δώσει, ὅπως ἐκθέτουμε στὶς πρῶτες σελίδες αὐτοῦ τοῦ βιβλ
τὴν ἀφηρημένη ἔκφραση στὰ ἀποτελέσματα, ποὺ ζητούσαμε. Ἔχουμε
τὸ σύστημα τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν σύστημα ἱκανό, ὅπως ξέρουμε,
τὴ λύση κάθε ζητήματος, ποὺ ὁδηγεῖ στὶς τέσσερες βασικὲς πράξεις.

Ἡ Γεωμετρία ὅμως, ποὺ στὸ μεταξὺ ἔχει ἀναπτυχθεῖ, δὲν ἱκανοποι
ται μὲ τοὺς ἀκεραίους καὶ τοὺς κλασματικούς. Φαίνεται πῶς ἀπὸ τὴ
ἐποχὴ τῶν Αἰγυπτίων ἀκόμη εἶχε διαπιστωθεῖ, ὅτι ὑπῆρχαν ἀσύμμετρα
γέθη δηλ. μεγέθη ποὺ ὁ λόγος τους δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἐκφρασθεῖ
λόγος δύο ἀκεραίων ἀριθμῶν. Ἐν τούτοις οἱ Ἕλληνες, ποὺ παράλαβ
ἀπὸ τοὺς Αἰγυπτίους τὴ Γεωμετρία καὶ ποὺ κατώρθωσαν νὰ τῆ
δώσουν πλήρη Ἐπιστημονικὴ διάρθρωση, δὲν κατώρθωσαν νὰ δημ
ουργήσουν τοὺς ἀρρήτους ἀριθμούς. Δὲν ἦταν τὸ πήδημα μικρό. Οἱ ἀ
ραῖοι ἀριθμοὶ ἦταν οἱ ἐκπρόσωποι τοῦ κομματιαστοῦ, τοῦ ἀσυνεχοῦ
καὶ χρειαζόταν πολλὴ δουλειά, γιὰ νὰ φθάσει τὸ ἀνθρώπινο μυαλό
σημεῖο νὰ βρεῖ τὸν ἀφηρημένο ἐκπρόσωπο τοῦ γεωμετρικοῦ μεγέθου
ποὺ παρουσίαζε συνέχεια. Δὲν ἦταν δηλ. εὔκολο νὰ ἰδοῦν πῶ
ὑπάρχει ἀριθμός, ποὺ παρακολουθεῖ τὸ μέγεθος στὴν προοδευτικὴ
θεσή του ἀπὸ τὰ ἄπειρα μέρη του.

Γι᾽αὐτὸ μόνο στὸ 16ο αἰῶνα ἔχουμε τὴν ὁριστικὴ παραδοχὴ τοῦ
του ἀριθμοῦ, πρᾶγμα ποὺ ἐπέτρεψε νὰ μπεῖ ἡ ἀριθμητικὴ σ᾽ὅλη τ
ἔκταση τοῦ ἀντικειμένου τῆς Γεωμετρίας καὶ νὰ βοηθήσει στὴ δημ
γία τῶν ἀνωτέρων κλάδων τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, τοῦ δ
φορικοῦ καὶ τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ. Καὶ μὲ τοὺς κλάδους αὐτοὺς

Μαθηματικὰ βοηθοῦν τὴ σπουδὴ καὶ τῶν φυσικῶν φαινομένων μέσα στὰ ὁποῖα μπαίνουν ποσὰ συνεχῆ, ὅπως ὁ χῶρος καὶ ὁ χρόνος.

Ἐκεῖνο ὅμως ποὺ ἐνδιαφέρει νὰ προσέξουμε, συνοψίζοντας τὰ συμπεράσματά μας, εἶναι ὁ τρόπος με τὸν ὁποῖον οἰκοδομεῖται ἡ ἀριθμητική. Πρῶτα-πρῶτα, ξεκινᾶμε ἀπὸ ὁρισμένα ἀξιώματα δηλ. ἀπὸ προτάσεις ποὺ ἡ δημιουργία τους δὲν εἶναι ἀποτέλεσμα τῆς ἐλευθέρας δράσεως τοῦ μυαλοῦ, παρὰ ἀποτέλεσμα τῆς διαπιστώσεως σχέσεων τὶς ὁποῖες ἡ παρατήρηση ἐπιτρέπει στὸν ἄνθρωπο νὰ ἐπαληθεύει: Καὶ αὐτὰ τὰ ἀξιώματα εἶναι :

1º. Ἀνάμεσα σὲ δύο ἀριθμοὺς α καὶ β τρεῖς σχέσεις εἶναι δυνατές

$$\alpha=\beta, \quad \alpha>\beta, \quad \alpha<\beta$$

2º. Ὑπάρχουν τουλάχιστον δύο διαφορετικοὶ ἀριθμοί

3º. Ἂν $\alpha>\beta$ καὶ $\beta>\gamma$ εἶναι καὶ $\alpha>\gamma$· καὶ ἂν $\alpha>\alpha'$ θὰ εἶναι καὶ $\alpha+\beta>\alpha'+\beta$.

Δεύτερο προσέχουμε ὥστε γιὰ κάθε νέο σύστημα ἀριθμῶν, ποὺ εἰσάγουμε στὴν ἀριθμητική, νὰ ἰσχύουν οἱ θεμελιακοὶ νόμοι τῶν πράξεων δηλ. οἱ νόμοι ἀπὸ τοὺς ὁποίους σὰν λογικὴ συνέπεια προκύπτουν ὅλοι οἱ ἄλλοι καὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι τρεῖς:

1º. ὁ ἐναλλακτικὸς νόμος (ἢ τῆς ἀντιμεταθέσεως) ποὺ ἰσχύει γιὰ τὴν πρόσθεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμό.

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \quad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$$

2º Ὁ νόμος τοῦ προσαιτερισμοῦ, ποὺ ἐπίσης ἰσχύει γιὰ τὴν πρόσθεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμό.

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \quad \alpha\cdot(\beta\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$$

3º Ὁ ἐπιμεριστικός, ποὺ συνδέει τὴν πρόσθεση καὶ τὸν πολλαπλασιασμό.

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$$

Αὐτό τό δεύτερο εἶναι λογικά ἀναγκαῖο ; ὄχι φυσικά. Μά ἄν γιά κ θε νέο σύστημα μποροῦσαν νά ἰσχύουν διαφορετικοί νόμοι, τότε τό οἰ κοδόμημα μας δέν θά παρουσίαζε τή σημερινή του κομψότητα κα πρό παντός ἁπλότητα. Θά εἴχαμε μεγάλη ἐπιβράδυνση στην ἀνάπτυ ξη του. Γιά κάθε συσχέτιση τῶν ἀριθμῶν, πού θά ἀνῆκαν σε διαφορετικ συστήματα, θά ἔπρεπε νά προχωροῦμε μέ ἐξαιρετική προσοχή, γιά ν μή γίνει σύγχιση στους διαφορετικούς νόμους στούς ὁποίους τό καθέν ἀπό τά συστήματα αὐτά θά ὑποτασσόταν.

Σημείωση. Ἄν θέλουμε ὁ ὁρισμός μας γιά τόν ἀριθμό νά περιέχει καί τόν ἄρρητο ἀριθμό, μπορουμε νά λέμε : Ἀριθμός ὀνομάζετ τό ἀφηρημένο πρότυπο ἑνός ὡρισμένου ἤ ἀπείρου πλήθους μον δων.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

232) Ἄν ὁ α εἶναι ἄρρητος καί ὁ ἀντίστροφός του $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι ἄρρητο

233) Ἄν α, β, γ, δ εἶναι ρητοί ἀριθμοί καί ὁ x ἄρρητος, κάτω ἀπό πο συνθῆκες εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}$ ρητός ;

234) Ἀνάμεσα ἀπό δυο ρητούς ὑπάρχει πάντα ἕνας ἄρρητος καί ἑ πομένως καί ἄπειροι.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ε'

ΡΙΖΙΚΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ

128. **Ὁρισμός.** Θά λέμε ὅτι ἕνας ἀριθμός x (ρητός ἤ ἄρρητος) εἶναι μ τάξεως ρίζα (ὅπου μ ἀριθμός θετικός καί ἀκέραιος) ἑνός ἀριθμοῦ α, ἐάν αὐτός ὁ x ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα $x^{\mu}=\alpha$. (1)

Θέλοντας νά σημειώσουμε ὅτι ὁ x εἶναι μ τάξεως ρίζα τοῦ α, γράφουμε $x=\sqrt[\mu]{\alpha}$ καί ὁ μ τότε ὀνομάζεται δείκτης τοῦ $\sqrt{\ }$ (ριζικοῦ). Ὁ δείκτης δέν σημειώνεται, ὅταν αὐτός εἶναι ὁ 2, ὁπότε ἡ ρίζα ὀνομάζεται τετραγωνική. Ἐπίσης ἡ ρίζα τρίτης τάξεως ὀνομάζεται καὶ κυβικὴ ρίζα.

Ἀπ' αὐτὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς ρίζας γίνεται φανερὴ ἡ ἀλήθεια τῶν ταυτοτήτων:

$$(\sqrt[\mu]{a})^{\mu}=a \quad \text{καὶ} \quad \sqrt[\mu]{a^{\mu}}=a \ (4)$$

Γιὰ νὰ βροῦμε ὅλους τοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα (1) διακρίνουμε τὶς παρακάτω περιπτώσεις.

1ο. $\mu=2\nu$ καὶ $a\geq 0$: Ἂν ὑποθέσουμε ὅτι εἶναι λ ὁ θετικὸς ἀριθμὸς ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα (1), θέτουμε $x=\pm\lambda\psi$. Ἔχουμε τότε $(\pm\lambda)^{2\nu}\psi^{2\nu}=a$ καὶ ἐπειδὴ $(\pm\lambda)^{2\nu}=\lambda^{2\nu}=a$ ἕπεται:

$$\psi^{2\nu}=1 \ \text{ἢ} \ (\psi-1)(\psi^{2\nu-1}+\psi^{2\nu-2}+\dots\dots+\psi+1)=0 \quad (2)$$

Καταλαβαίνουμε, ὅτι ἡ μόνη θετικὴ τιμή, ποὺ ταυτοποιεῖ τὴν ἰσότητα (2), εἶναι ἡ $\psi=1$. Ὥστε οἱ μόνες πραγματικὲς τιμὲς τοῦ x, ποὺ ἱκανοποιοῦν τὴν ἰσότητα (1), εἶναι ἡ λ καὶ $-\lambda$.

2ο. $\mu=2\nu$, $a<0$. Κάθε ἀριθμὸς πραγματικὸς (θετικὸς ἢ ἀρνητικός), ποὺ θὰ ὑψωθεῖ σὲ μιὰ δύναμη ἀρτία δίδει ἀποτέλεσμα θετικό. Ὥστε τὴν ἰσότητα (1) δὲν μπορεῖ νὰ τὴν ἱκανοποιήσει στὴν περίπτωση αὐτὴ κάποιος πραγματικὸς ἀριθμός.

3ο. $\mu=2\nu+1$, $a\gtrless 0$. Ἂς εἶναι καὶ πάλι λ ὁ θετικὸς ἀριθμός, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα $x^{\mu}=|a|$. Ἂν θέσουμε $x=\varepsilon\lambda\psi$, ὅπου τὸ ψ τὸ ὑποθέτουμε θετικὸ καὶ τὸ $\varepsilon=\pm1$, θὰ ἔχουμε

$$x^{\mu}=\varepsilon^{2\nu+1}\cdot\lambda^{2\nu+1}\cdot\psi^{2\nu+1}=\varepsilon\cdot\lambda^{2\nu+1}\cdot\psi^{2\nu+1}$$

καὶ ἑπομένως ζητᾶμε νὰ βροῦμε τὶς θετικὲς τιμὲς τοῦ ψ, ποὺ ἐπαληθεύουν (ταυτοποιοῦν) τὴν ἰσότητα:

$$\varepsilon\cdot\lambda^{2\nu+1}\cdot\psi^{2\nu+1}=a \quad (3)$$

Τὰ μέλη τῆς ἰσότητος (3) πρέπει νὰ εἶναι ὁμόσημα. Ἔτσι, ἂν $a\geq 0$

τό ε θά πρέπει νά τό πάρουμε μέ τήν τιμή +1 καί ἄν $\alpha<0$ τό ε
εἶναι ἴσο μέ −1. Ὁπωσδήποτε λοιπόν θά ἔχουμε :
$\varepsilon\cdot\lambda^{2\nu+1}=\alpha$ καί ἐπομένως τό ψ θά εἶναι θετικός ἀριθμός, πού θά ἱκαν
ποιεῖ τήν ἰσότητα $\psi^{2\nu+1}=1$. Ἄν ἐργασθοῦμε, ὅπως παραπάνω, βρίσκ
με ὅτι ἡ μόνη θετική τιμή τοῦ ψ εἶναι ἡ 1 καί συμπεραίνουμε πιά
ἡ $x=\lambda$ ταυτοποιεῖ τήν ἰσότητα (1) ἄν $\alpha>0$ καί ἡ $x=-\lambda$ ἄν $\alpha<$

Μποροῦμε νά συνοψίσουμε τά παραπάνω συμπεράσματα στίς ἑ
προτάσεις :

1) Κάθε θετικός ἀριθμός ἔχει δύο ρίζες ἀρτίας τάξεως καί μίαν ρίζαν περιττῆς τάξεως.

2) Κάθε ἀρνητικός ἀριθμός ἔχει μία ρίζαν περιττῆς τάξεως καί καμμία ἀρτίας.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΡΙΖΙΚΩΝ

129. Θεώρημα 1ο. Ἡ μ τάξεως ρίζα ἑνός γινομένου εἶναι ἴση μέ τ
γινόμενο τῶν μ τάξεως ριζῶν τῶν παραγόντων του.

Δηλ. $\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma}=\sqrt[\mu]{\alpha}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\gamma}$

$(\sqrt[\mu]{\alpha\beta\gamma})^{\mu}=\alpha\beta\gamma$ καί $(\sqrt[\mu]{\alpha}\sqrt[\mu]{\beta}\sqrt[\mu]{\gamma})^{\mu}=(\sqrt[\mu]{\alpha})^{\mu}\cdot(\sqrt[\mu]{\beta})^{\mu}\cdot(\sqrt[\mu]{\gamma})^{\mu}=\alpha\beta\gamma$

130. Πόρισμα 1ο. Μποροῦμε ἕναν παράγοντα, πού εἶναι κάτω ἀπ
ριζικό μ τάξεως, νά τόν θέσουμε ἔξω ἀπό τό ριζικό αὐτό, ἄν τ
βγάλουμε τή μιοστή του ρίζα· καί ἀντίστροφα νά τόν θέσουμε κά
ἀπό τό ριζικό αὐτό, ἄν τόν ὑψώσουμε στή μιοστή του δύναμη

Πραγματικά

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}\cdot\beta}=\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu}}\cdot\sqrt[\mu]{\beta}=\alpha\sqrt[\mu]{\beta}$$

131. Πόρισμα 2ο. Ὑψώνεται ἕνα ἀριθμητικό ριζικ

έ ἀκεραία καί θετική δύναμη, ἄν ὑψωθεῖ στή δύναμη αὐτή ὁ ἀριθμός, πού εἶναι κάτω ἀπό τό ριζικό.

Πραγματικά

$$(\sqrt[\mu]{a})^{\nu} = \sqrt[\mu]{a}\,\sqrt[\mu]{a}\cdots\cdots\sqrt[\mu]{a} = \sqrt[\mu]{a\cdot a\cdots a} = \sqrt[\mu]{a^{\nu}}$$

132) Θεώρημα 2ο. Ἡ μιοστή ρίζα τῆς νιοστῆς ρίζας ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι ἴση μέ τήν μν τάξεως ρίζα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Δηλ. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$

Γιατί $(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}})^{\mu\nu} = [(\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}})^{\mu}]^{\nu} = (\sqrt[\nu]{a})^{\nu} = a$ καί

$$(\sqrt[\mu\nu]{a})^{\mu\nu} = a$$

Καταλαβαίνουμε τώρα πώς ὁ κανόνας αὐτός μπορεῖ νά ἐφαρμοσθεῖ σέ περισσότερα (ἀλλεπάλληλα) ριζικά καί τότε θά ἔχουμε:

λογουχάρη, $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\sqrt[\rho]{\sqrt[\kappa]{a}}}} = \sqrt[\mu\nu\rho\kappa]{a}$

133) Θεώρημα 3ο. Μποροῦμε νά πολλαπλασιάσουμε ἤ νά διαιρέσουμε* μέ τόν ἴδιο ἀκέραιο ἀριθμό τό δείκτη τοῦ ριζικοῦ καί τόν ἐκθέτη τοῦ ἀριθμοῦ, πού εἶναι τοποθετημένος κάτω ἀπό τό ριζικό.

Δηλ. $\sqrt[\mu]{a^{\nu}} = \sqrt[\mu\lambda]{a^{\nu\lambda}}$

Γιατί $(\sqrt[\mu]{a^{\nu}})^{\mu\lambda} = [(\sqrt[\mu]{a^{\nu}})^{\mu}]^{\lambda} = a^{\lambda\nu}$ καί $(\sqrt[\mu\lambda]{a^{\nu\lambda}})^{\mu\lambda} = a^{\nu\lambda}$

134) Πόρισμα. Μποροῦμε ριζικά μέ διαφορετικούς

---

* Ἐδῶ ὑποθέτουμε τή διαίρεση τελεία.

δείκτες, νά τά μετασχηματίσουμε σέ ἰσοδύ
ναμα μέ τόν ἴδιο δείκτη.

Ἔστω πώς ἔχουμε τά ριζικά, $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\rho]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\gamma}$

Ἐάν λ εἶναι τό ἐλάχιστο κοινό πολλαπλάσιο τῶν δεικτῶν μ, ρ,
θά ἔχουμε : $\lambda=\mu\cdot\pi_1$, $\lambda=\rho\pi_2$, $\lambda=\nu\pi_3$ καί σύμφωνα μέ τό προ
γούμενο θεώρημα παίρνουμε

$$\sqrt[\mu]{\alpha} = \sqrt[\mu\pi_1]{\alpha^{\pi_1}} = \sqrt[\lambda]{\alpha^{\pi_1}}, \sqrt[\rho]{\beta} = \sqrt[\rho\pi_2]{\beta^{\pi_2}} = \sqrt[\lambda]{\beta^{\pi_2}}, \sqrt[\nu]{\gamma} = \sqrt[\nu\pi_3]{\gamma^{\pi_3}} = \sqrt[\lambda]{\gamma^{\pi_3}}$$

135.) <u>Σημείωση</u>. Τό παραπάνω πόρισμα μᾶς βοηθεῖ στό νά συγκρίνο
δύο ριζικά μεταξύ τους. Ἐάν λογουχάρη μᾶς δίδονται γιά σύγκρισ
τά ριζικά $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καί $\sqrt[\rho]{\beta}$, τά ἀντικαθιστοῦμε μέ τά ριζικά $\sqrt[\mu\rho]{\alpha}$
καί $\sqrt[\mu\rho]{\beta^{\mu}}$.

136.) <u>Θεώρημα 4ο</u>. Ἡ μιοστή ρίζα ἑνός λόγου εἶναι ἴση μέ τό λόγο τῶν μιοστῶν ριζῶν τ
δύο ὅρων τοῦ λόγου.

Δηλ.
$$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta}}$$

γιατί ἡ μιοστή δύναμη καί τῶν δύο μελῶν αὐτῆς τῆς ἰσότητος
δεν τό ἴδιο ἀποτέλεσμα.

137.) <u>Πόρισμα</u>. Διαιρέτης, πού εἶναι κάτω ἀπό ρι
ζικό μ τάξεως, τοποθετεῖται ἔξω ἀπ' αὐτό
ἄν τοῦ ἐξάγουμε τή μιοστή του ρίζα· καί
τίστροφα, τοποθετεῖται κάτω ἀπό τό ρι
κό, ἄν τόν ὑψώσουμε στή μιοστή δύναμ

Γιατί
$$\sqrt[\mu]{\frac{\alpha}{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{\beta}$$

Ἀναγωγή ριζικῶν μέ
ἄρρητο παρονομαστή σέ ἰσοδύναμα μέ ρητό παρονομα

138. Θά ὑποδείξουμε ἐδῶ τίς βασικές καί γενικές περιπτώσεις

ής ἀναγωγῆς. Αὐτή ἡ ἀναγωγή ἔχει σάν ἀποτέλεσμα, νά ἀντικαθιστοῦμε τίς παραστάσεις μας μέ ἰσοδύναμες παραστάσεις, γιά τίς ὁποῖ-ς μποροῦμε, ἀφοῦ ὁ παρονομαστής τους θά εἶναι ρητός καί ἐπομένως ὁρισμένος ἀριθμός, νά ἔχουμε τιμή μέ ὅση μεγάλη προσέγγιση θέλουμε.

1º
$$\frac{a}{\sqrt[\mu]{\beta}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta}\cdot\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\mu}}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}}}{\beta}$$

2º
$$\frac{a}{\sqrt[\mu]{\beta^{\nu}}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\nu}}\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\sqrt[\mu]{\beta^{\mu}}} = \frac{a\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-\nu}}}{\beta}$$

3º
$$\frac{A}{\pm\sqrt{a}\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\pm\cdots\pm\sqrt{\lambda}}$$

Ἐάν ὀνομάσουμε B τήν ποσότητα $\pm\sqrt{\beta}\pm\sqrt{\gamma}\pm\cdots\cdots\pm\sqrt{\lambda}$ ἡ παράστασή μας παίρνει τή μορφή $\frac{A}{\varepsilon\sqrt{a}+B}$ ὅπου $\varepsilon = \pm 1$. Ἐάν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δυό ὅρους τούς κλάσματός μας ἐπί τή συζυγῆ παράσταση τοῦ παρονομαστή του, παίρνουμε τήν ἰσοδύναμη παράσταση $\frac{A(\varepsilon\sqrt{a}-B)}{a-B^2}$, ὅπου ὁ παρονομαστής της δέν περιέχει τή $\sqrt{a}$. Τό B ἐπίσης περιέχει ἕνα μέρος ρητό, πού τό δημιουργοῦν τά τετράγωνα τῶν ριζικῶν $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, ... $\sqrt{\lambda}$ καί ἕνα ἄρρητο, πού δημιουργεῖται ἀπό τά γινόμενα, $2\sqrt{\beta\gamma}$, $2\sqrt{\beta\delta}$, ... $2\sqrt{\gamma\delta}$ .... Ἔτσι ἡ παράστασή μας γίνεται: $\frac{A'}{\Gamma\sqrt{\beta}+\Delta}$ ὅπου τά Γ καί Δ εἶναι ἀθροίσματα, πού δέν περιέχουν τήν $\sqrt{\beta}$, μά πού μποροῦν νά περιέχουν τά ἄλλα ριζικά $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$, ... $\sqrt{\lambda}$ καί τό καθένα στήν πρώτη δύναμη. Κάμνοντας ὅ,τι κάμαμε παραπάνω, ἔχουμε τήν ἰσοδύναμη παράσταση:

$$\frac{A'(\Gamma\sqrt{\beta}-\Delta)}{\beta\Gamma^2-\Delta^2}$$

μέ παρονομαστή, πού δέν περιέχει οὔτε τή $\sqrt{a}$ οὔτε τή $\sqrt{\beta}$.

Ἡ τελευταία πάλι παράσταση μπορεῖ νά γραφεῖ.

$$\frac{A''}{E\sqrt{\gamma}+Z}$$

ἐνῶ τά καί Ζ θά εἶναι παραστάσεις χωρίς τά ριζικά $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$

Ἀπ' αὐτά, πού εἴπαμε, γίνεται φανερό, ὅτι μποροῦμε κάθε φορά νεργοῦμε ἔτσι, ὥστε νά ἐξαλείφουμε τουλάχιστο ἕνα ριζικό κα μένως τελικά νά ἔχουμε παράσταση ἰσοδύναμη πρός τή δική μας παρονομαστή ρητό.

Παράδειγμα. Ἄς δώσουμε ἕνα εἰδικό παράδειγμα γι' αὐτ τήν περίπτωση, στό ὁποῖο μάλιστα ὁ ὑπολογισμός εἶναι εὐκολότ ρος.

Νά βρεθεῖ ἡ ἰσοδύναμη καί μέ ρ παρονομαστή παράσταση γιά τήν σότητα.

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}$$

Ἔχουμε

$$\frac{A}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}-\sqrt{\delta}}=\frac{A}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}-(\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta})}=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma})^2-(\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta}}$$

$$=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta})}{\alpha+\gamma-\beta-\delta+2(\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\delta})}=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\delta})[\alpha+\gamma-\beta-\delta-2(\sqrt{\alpha\gamma}}{(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2-4(\alpha\gamma+\beta\delta-2\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$=\frac{A(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta})[\alpha+\gamma-\beta-\delta-2(\sqrt{\alpha\gamma}-\sqrt{\beta\delta})][[(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2-4(\alpha\gamma+\beta\delta)]}{[(\alpha+\gamma-\beta-\delta)^2-4(\alpha\gamma+\beta\delta)]^2-64\alpha\beta\gamma\delta}$$

4ο $\dfrac{A}{\sqrt[\mu]{\alpha}-\sqrt[\mu]{\beta}}$

Ἄν θέσουμε $\sqrt[\mu]{\alpha}=x$ καί $\sqrt[\mu]{\beta}=\psi$ θά ἔχουμε $\alpha=x^\mu$ καί $\beta=\psi^\mu$

Εἶναι γνωστή ἡ ταυτότητα:

$$x^\mu-\psi^\mu=(x-\psi)(x^{\mu-1}+x^{\mu-2}\psi+x^{\mu-3}\psi^2+\cdots\cdots+x\psi^{\mu-2}+\psi^{\mu-1})$$

ποία γράφεται,

$$a-\beta=(\sqrt[\mu]{a}-\sqrt[\mu]{\beta})(\sqrt[\mu]{a^{\mu-1}}+\sqrt[\mu]{a^{\mu-2}\beta}+\sqrt[\mu]{a^{\mu-3}\beta^2}+\dots\dots+\sqrt[\mu]{a\beta^{\mu-2}}+\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}})$$

Ὥστε ἡ παράστασή μας ἔχει μιά ἰσοδύναμή της τή:

$$\frac{A(\sqrt[\mu]{a^{\mu-1}}+\sqrt[\mu]{a^{\mu-2}\beta}+\sqrt[\mu]{a^{\mu-3}\beta^2}+\dots\dots+\sqrt[\mu]{a\beta^{\mu-2}}+\sqrt[\mu]{\beta^{\mu-1}})}{a-\beta}$$

Σημείωση. Σέ περίπτωση, πού ὁ παρονομαστής ἔχει τή μορφή $\sqrt[\mu]{a}$ $\sqrt{\beta}$, ἐργαζόμαστε κατά τόν ἴδιο τρόπο φυσικά, μά ἐφ' ὅσον τό μ εἶναι ιττός ἀριθμός.

Παραδείγματα. 1ο. Νά τραπεῖ ἡ παράσταση $\frac{A}{a\pm\sqrt[3]{\beta}}$ σέ ἰσοδύναμη καί μέ ρητό παρονομαστή.

Γράφουμε:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{\beta}}=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}\mp\sqrt[3]{a\beta}+\sqrt[3]{\beta^2})}{a\pm\beta}$$

2ο. Τό ἴδιο γιά τήν παράσταση $K=\frac{A}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{\beta}}$

$$K=\frac{A}{\sqrt[6]{a^3}-\sqrt[6]{\beta^2}}=\frac{A[\sqrt[6]{a^{15}}+\sqrt{a^{12}\beta^2}+\sqrt[6]{a^9\beta^4}+\sqrt[6]{a^6\beta^6}+\sqrt[6]{a^3\beta^8}+\sqrt[6]{\beta^{10}}]}{a^3-\beta^2}$$

3ο. $$K=\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma}}$$

Ἄν θέσωμεν $\sqrt[3]{a}=x$, $\sqrt[3]{\beta}=\psi$, $\sqrt[3]{\gamma}=\omega$ θά ἔχουμε $x^3=a$, $\psi^3=\beta$, $\omega^3=\gamma$ ἡ γνωστή ταυτότητα.

$$x^3+\psi^3+\omega^3-3x\psi\omega=(x+\psi+\omega)(x^2+\psi^2+\omega^2-x\psi-x\omega-\psi\omega)$$ γίνεται:

$$a+\beta+\gamma-3\sqrt[3]{a\beta\gamma}=(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\beta}+\sqrt[3]{\gamma})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{\beta^2}+\sqrt[3]{\gamma^2}-\sqrt[3]{a\beta}-\sqrt[3]{a\gamma}-\sqrt{\beta\gamma})$$

Ὥστε

$$K=\frac{A(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{\beta^2}+\sqrt[3]{\gamma^2}-\sqrt[3]{a\beta}-\sqrt[3]{a\gamma}-\sqrt[3]{\beta\gamma}}{a+\beta+\gamma-3\sqrt[3]{a\beta\gamma}}$$ ἤ

$$K=\frac{A\cdot M^{*}}{\alpha+\beta+\gamma-\sqrt[3]{27\alpha\beta\gamma}}=\frac{A.M\left[(\alpha+\beta+\gamma)^{2}+3(\alpha+\beta+\gamma)\sqrt[3]{\alpha\beta\gamma}+9\sqrt[3]{\alpha^{2}\beta^{2}}\right.}{(\alpha+\beta+\gamma)^{3}-27\alpha\beta\gamma}$$

Μετασχηματισμός τῆς παραστάσεως $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$

139. Ἡ μορφή τῆς παραστάσεώς μας ὑπαγορεύει δύο πράγματα: ὅτι τά Α καί Β εἶναι ἀριθμοί ρητοί καί ὅτι ὁ Β δέν εἶναι ένα λειο τετράγωνο.

Θά ζητήσουμε τώρα νά βροῦμε τίς συνθῆκες κάτω ἀπό τίς ες θά πρέπει νά διατελοῦν τά Α καί Β, ὥστε νά ὑπάρχουν δύο ἀριθμοί x καί ψ τέτοιοι, ὥστε ἡ ἰσότητα:

$$\sqrt{A+\varepsilon\sqrt{B}}=\varepsilon_1\sqrt{x}+\varepsilon_2\sqrt{\psi}\qquad(1)$$

στήν ὁποία τά $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$, ἀντιπροσωπεύουν τή θετική ἤ τήν ἀρι μονάδα, νά ἰσχύει.

Δηλ. θά ζητήσουμε νά ἰδοῦμε ἄν καί πῶς εἶναι δυνατό νά με σχηματίσουμε ἕνα διπλό ριζικό σέ ἁπλά ριζικά.

Ὑψώνοντας καί τά δύο μέλη τῆς (1) στό τετράγωνο βρ με

$$A+\varepsilon\sqrt{B}=x+\psi+2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{x\psi}\qquad(2)$$

δηλ. ἰσότητα ἀπό τήν ὁποία ἔχουμε $\left.\begin{matrix}A=x+\psi\\ \varepsilon\sqrt{B}=2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{x\psi}\end{matrix}\right\}\ (3)$

Καί πραγματικά, ἡ (2) γράφεται:

$$(A-x-\psi)+\varepsilon\sqrt{B}=2\varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{x\psi}$$

Καί λαμβάνοντες τά τετράγωνα τῶν μελῶν της, βρίσκουμε:

$$(A-x-\psi)^{2}+B+2\varepsilon(A-x-\psi)\sqrt{B}=4x\psi$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ στό συμπέρασμα ὅτι ὁ συντε

---

* Τό Μ ἀντιπροσωπεύει προφανῶς τόν πολλαπλασιαστή στόν ἀριθμητή

ῆς $\sqrt{B}$ εἶναι μηδενικό, γιατί ἀλλοιῶς θά εἴχαμε

$$\sqrt{B} = \frac{4x\psi - B - (A-x+\psi)^2}{2\varepsilon\,(A-x-\psi)}$$

δηλ. ἰσότητα ἀδύνατη, ἀφοῦ ὁ B δέν εἶναι τέλειο τετράγωνο.

Οἱ ἰσότητες λοιπόν (3) ἰσχύουν καί ἀπό τή δεύτερη ἀπ' αὐτές αίρνουμε :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 = \varepsilon \quad \text{καί} \quad 2\sqrt{x\psi} = \sqrt{B}$$

Ἐάν τώρα $\varepsilon = 1$ τά ε_1 καί ε_2 θά εἶναι ὁμόσημα, πρέπει ὅμως νά εἶναι καί θετικά γιατί ἡ παράσταση $\varepsilon_1\sqrt{x} + \varepsilon_2\sqrt{\psi}$ τότε μόνο θά φανερώνει τή θετική τιμή, πού ἔχει ἡ παράσταση $\sqrt{A+\sqrt{B}}$.

Ἐάν ὅμως $\varepsilon = -1$, θά ἔχουμε ὅτι τά ε_1 καί ε_2 θά εἶναι ἑτερόσημα καί ὅπως εἶναι φανερό, μποροῦμε νά θέσουμε, $\varepsilon_1 = 1$ καί $\varepsilon_2 = -1$.

Ἔπειτα ἀπ' αὐτά βλέπουμε ὅτι ἔχουμε τίς ἰσότητες :

$$x+\psi = A \qquad 2\sqrt{x\psi} = \sqrt{B} \quad (4)$$

καί ἀπ' αὐτές τήν

$$(x-\psi)^2 = A^2 - B$$

Διαπιστώνεται λοιπόν ὅτι ἡ παράσταση A^2-B πρέπει νά εἶναι τέλειο τετράγωνο δηλ. πρέπει $A^2-B=\Gamma^2$ καί ἐπειδή $x+\psi=A$ συμπεραίνουμε ἀκόμη ὅτι $A>0$.

Ἔτσι βρήκαμε σάν ἀναγκαῖες συνθῆκες γιά τό μετασχηματισμό (1).

$$A^2 - B = \Gamma^2, \ A > 0$$

Θά ἰδοῦμε τώρα ὅτι οἱ συνθῆκες αὐτές εἶναι καί ἀρκετές. Πραγματικά, ὁρίζοντας τά x καί ψ ἀπό τίς σχέσεις

$$x+\psi = A$$

$$x-\psi = \sqrt{A^2-B} = \Gamma$$

λαβαίνουμε, $x = \frac{A+\Gamma}{2}$ καί $\psi = \frac{A-\Gamma}{2}$.

Ὥστε :

$$x+\psi+2\sqrt{x\psi} = A+\sqrt{A^2-\Gamma^2} = A+\sqrt{B}$$

καί

$$x+\psi-2\sqrt{x\psi} = A-\sqrt{A^2-\Gamma^2} = A-\sqrt{B}$$

ἤ καλλίτερα

$$(\sqrt{x}+\sqrt{\psi})^2 = A+\sqrt{B} \quad \text{δηλ.} \quad \sqrt{x}+\sqrt{\psi} = \sqrt{A+\sqrt{B}}$$

$$(\sqrt{x}-\sqrt{\psi})^2 = A-\sqrt{B} \quad \text{δηλ.} \quad \sqrt{x}-\sqrt{\psi} = \sqrt{A-\sqrt{B}}$$

Γενικό συμπέρασμα. Ἐάν $A>0$ καί $A^2-B=\Gamma^2$, ἰσχύει ἡ ἀρ μητική ταυτότητα :

$$\sqrt{A+\varepsilon\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \varepsilon\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad (\varepsilon=\pm1)$$

139α. **Παρατήρηση.** Ἐάν τό A^2-B δέν εἶναι τέλειο* τετράγων ἡ παραπάνω ταυτότητα ὑπάρχει, μά τότε τό δεύτερο μέλος τῆς ναι πολυπλοκότερο ἀπό τό πρῶτο καί ὁ μετασχηματισμός ἀξίζει, γίνεται ἀντίστροφα, ἀπό τό δεύτερο μέλος στό πρῶτο

Παραδείγματα Νά μετασχηματισθοῦ σέ ἰσοδύναμες παραστάσεις μέ ἀπ ριζικά οἱ παραστάσεις:

1ο $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$ 2ο. $\sqrt{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2-2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}}$.

1ο $\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{9+\sqrt{32}}$. Ὥστε, $A=9$, $B=32$ καί ἑπομένως

$$A^2-B = 81-32 = 49 = 7^2 = \Gamma^2$$

Ὥστε :

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{9+7}{2}} + \sqrt{\frac{9-7}{2}} = \sqrt{8}+1$$

ἤ

$$\sqrt{9+4\sqrt{2}} = 1+2\sqrt{2} .$$

---

* Τό τονίζουμε αὐτό γιατί κάθε θετικός ἀριθμός εἶναι τετράγωνο τῆς τε γωνικῆς του ρίζας, ὄχι ὅμως πάντα ἕνα τέλειο τετράγωνο.

2º. $\sqrt{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2-2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}} \quad = \quad \sqrt{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2-\sqrt{4\alpha\beta\gamma^2\delta^2}}$

$A=\alpha\gamma^2+\beta\delta^2, \quad B=4\alpha\beta\gamma^2\delta^2$ καὶ $A^2-B=(\alpha\gamma^2+\beta\delta^2)^2-4\alpha\beta\gamma^2\delta^2$

ἢ $A^2-B=(\alpha\gamma^2-\beta\delta^2)^2$ δηλ. $\Gamma=\alpha\gamma^2-\beta\delta^2$. Ὥστε :

$$\frac{A+\Gamma}{2}=\alpha\gamma^2 \quad \frac{A-\Gamma}{2}=\beta\delta^2$$

Καὶ ἐπομένως,

$$\sqrt{\alpha\gamma^2+\beta\delta^2-2\gamma\delta\sqrt{\alpha\beta}}=\gamma\sqrt{\alpha}-\delta\sqrt{\beta}$$

Ἀσκήσεις

236) Ἁπλοποιήσετε τὰ ριζικὰ καὶ κάμετε τὶς πράξεις, ποὺ εἶναι σημειωμένες.

1º $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48}$ 2º $8\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}\sqrt{12}+4\sqrt{27}-2\sqrt{\frac{3}{16}}$

3º $2\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\frac{3}{5}}$ 4º $\sqrt{45\gamma^3}-\sqrt{80\gamma^3}+\sqrt{5\alpha^2\gamma}$

5º $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{\alpha^3+\alpha^2\beta}}$ 6º $\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^2\beta\delta-2\alpha\beta^2\delta+\beta^3\delta}}$

7º $\sqrt{\frac{\alpha^3-\alpha x^2-\alpha^2x+x^3}{\beta^5\gamma^3\delta}}$ 8º $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{(\alpha-\beta)^2}}$

9º $\sqrt{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$ 10º $\sqrt[\nu-1]{\frac{\alpha}{\sqrt[\nu]{\alpha}}}$

237) Νὰ ἁπλοποιηθοῦν οἱ παραστάσεις :

1º $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$ 2º $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

3º $\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

4º $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})$

5º $\frac{3\sqrt{8}-2\sqrt{12}+\sqrt{20}}{3\sqrt{18}-2\sqrt{27}+\sqrt{45}}$ 6º $(\sqrt{72}+\sqrt{32}-4):\sqrt{8}$

238) Τό ἴδιο γιά τίς παραστάσεις:

1º $\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)^3 \sqrt{\frac{x}{a^2-x^2}}$ 2º $\sqrt{x^2(a^2-x^2)^3}\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$

3º $\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\ \sqrt{4a^2-x^2}\ \sqrt{2a+x}$ 4º $\left(\sqrt{x(2a-x)}\right)^5\left(\sqrt{\frac{2a+x}{2a-x}}\right)^3\sqrt{4a^2}$

239) Διαπιστώσετε τήν ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

1º $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ 2º $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\frac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$

3º $\left(\frac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\frac{91}{4}+10\sqrt{3}}$

4º $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$

5º $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$

6º $\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$

7º $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}=\sqrt{2}$

8º $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}=2$

240) Ἁπλοποιήσετε τίς παραστάσεις:

1º $\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{a+\sqrt{a^2-x^2}}$ 2º $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

3º $\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2}{\sqrt{1-x^4}}$ 4º $\frac{(x+\sqrt{x^2-a^2})^4-a^4}{4(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}$

5º $\dfrac{x^2-x-2+(x-1)\sqrt{x^2-4}}{x^2+x-2+(x+1)\sqrt{x^2-4}}$ 6º) $\dfrac{\alpha^3-2\sqrt[4]{\alpha^2\beta^3}-\alpha^2\sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}+2\beta\sqrt[12]{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt[3]{\beta}}$

241) Διαπιστώσετε τὴν ταυτότητα:

$$\sqrt{2}\left(2\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\right)\sqrt{\alpha-\sqrt{\alpha^2-\beta^2}} \equiv \sqrt{(\alpha+\beta)^3}-\sqrt{(\alpha-\beta)^3}$$

ὑποθέτοντες $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha > \beta$.

242) Νὰ βρεθοῦν οἱ ἀριθμητικὲς τιμὲς τῶν παραστάσεων, ποὺ ἀκολουθοῦν, γιὰ τὶς σημειούμενες τιμὲς τοῦ x.

1º $x(x+1)(x+2)(x+3)$ διὰ $x=\dfrac{\sqrt{5}-3}{2}$

2º x^3+3x διὰ $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$

3º $x^3+\lambda x+\mu$ διὰ $x=\sqrt[3]{-\dfrac{\mu}{2}+\sqrt{\dfrac{\mu^2}{4}+\dfrac{\lambda^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{\mu}{2}-\sqrt{\dfrac{\mu^2}{4}+\dfrac{\lambda^3}{27}}}$

4º $\dfrac{2\beta\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$ διὰ $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}-\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}\right)$, $(\alpha>0, \beta>0)$

5º $\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2+\beta x+\gamma}$ διὰ $x=\sqrt{\dfrac{\beta^2-\alpha\gamma}{\alpha-\beta}}$

243) Ἐὰν ἔχουμε $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\alpha'}{\beta'}=\dfrac{\alpha''}{\beta''}$ καὶ τὰ $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta''$ εἶναι ἀριθμοὶ θετικοί, θὰ ἔχουμε ἀκόμη

$$\sqrt{\alpha\beta}+\sqrt{\alpha'\beta'}+\sqrt{\alpha''\beta''}=\sqrt{(\alpha+\alpha'+\alpha'')(\beta+\beta'+\beta'')}$$

Τὸ ἀντίστροφο ἐπίσης εἶναι ἀληθινό.

244) Κάμετε ρητοὺς τοὺς παρονομαστὲς τῶν ἑπομένων κλασμάτων.

1º $\dfrac{1}{2+\sqrt[4]{3}}$ 2º $\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}$ 3º $\dfrac{1}{3+\sqrt[3]{4}}$

4º $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 5º $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$ 6º $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

7ο) $\dfrac{\mu}{\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}-\sqrt[3]{\alpha+\beta}}$ 8ο) $\dfrac{\alpha-\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}+\sqrt[3]{\alpha\beta}+\sqrt[3]{\beta^2}}$

245) Μετασχηματίσετε τά παρακάτω διπλά ριζικά σέ ἁπλά.

1ο) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2}{4}+\dfrac{\gamma}{2}\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}$ 2ο) $\sqrt{\dfrac{3\alpha}{\beta}+\sqrt{\dfrac{12\alpha^3\gamma^2}{\beta\delta^2}-\dfrac{4\alpha^4\gamma^4}{\delta^4}}}$

3ο) $\sqrt{\beta^2-\alpha\beta+\dfrac{\alpha^2}{4}+\sqrt{4\alpha\beta^3-8\alpha^2\beta^2+\alpha^3\beta}}$ 4ο) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\beta-\alpha\beta^2}{\gamma}\pm\sqrt{\dfrac{-4\alpha^3\beta^3}{\gamma^2}}}$

5ο) $\sqrt{\dfrac{\alpha^2\gamma}{\beta^2}-\gamma\delta+\dfrac{\alpha\gamma\sqrt{45}}{\beta}\sqrt{-1}}$ 6ο) $\sqrt{\dfrac{25\alpha^2\delta}{\gamma^2}-\dfrac{4\alpha^2\beta}{\delta}-\dfrac{20\alpha^2\sqrt{\beta}}{\gamma}\sqrt{-1}}$

Ἐκθέτες κλασματικοί
καί ἐκθέτες ἄρρητοι

140. Ἄς θεωρήσουμε τήν παράσταση $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$. Ἐάν τό μ εἶναι ἕνα πολλαπλάσιο τοῦ ν δηλ. ἐάν $\mu=\nu\pi$ θά ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\nu\pi}}=(\sqrt[\nu]{\alpha^\nu})^\pi=\alpha^\pi$$

Ἔτσι, βλέπουμε, πώς ἡ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ (1), ὅταν τό μ εἶναι διαιρετό μέ τό ν. Στήν ἀντίθετη περίπτωση ἡ παράσταση $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ δέν ἔχει ἔννοια ἀπό πρῶτα. Μά ὁ μαθηματικός ἔλησε νά ἰδῆ, ἄν μποροῦσε στό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ νά δώσει τήν ἔννοια $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$, ἐνῶ αὐτό τό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ θά ἐθεωρεῖτο καί θά λογαριαζόταν σάν δύναμη.

Ἔπρεπε κατά πρῶτον νά δείξει πώς ἡ ἰσότητα $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\mu'}{\nu'}}$ (2) εἶναι ἀληθινή, ἄν $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\mu'}{\nu'}$ (3). Πραγματικά σύμφωνα μέ τήν ἔννοια, πού δώσαμε στό σύμβολο $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἡ ἰσότητα (2) θά εἶναι ἀληθινή, ἄν εἶναι ἀληθινή ἡ ἰσότητα $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}=\sqrt[\nu']{\alpha^{\mu'}}$.

Ἄν τά ριζικά τά κάμουμε ὁμόδεικτα, θά ἔχουμε:

$$\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu\nu'}}=\sqrt[\nu\nu']{\alpha^{\mu'\nu}}$$

καί ἑπομένως θά πρέπει νά εἶναι $\alpha^{\mu\nu'}=\alpha^{\mu'\nu}$ ἤ $\mu\nu'=\mu'\nu$· ἀλλά ἡ τελευταία ἰσότητα εἶναι ἀληθινή ἕνεκα τῆς (3).

Καί τώρα πρέπει νά ἰδοῦμε, ἄν ἡ σημασία, πού δώσαμε στό σύμβολο $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, ἐπιτρέπει καί γι' αὐτό τήν ἰσχή τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων, πού ἔχουν ἐκθέτες ἀκεραίους.

1º, $a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$

Πραγματικά,

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'}}\ \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu'\nu}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'+\mu'\nu}}$$

$$= a^{\frac{\mu\nu'+\mu'\nu}{\nu\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\mu'}{\nu'}}$$

Ὁ κανόνας ἐπεκτείνεται μέ τό γνωστό τρόπο γιά ἕνα ὁποιοδήποτε ἀριθμό παραγόντων.

2º $a^{\frac{\mu}{\nu}} : a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\mu'}{\nu'}}$ ὑποθέτουμε $\frac{\mu}{\nu} > \frac{\mu'}{\nu'}$.

Γιατί, ἄν καλέσουμε a^{ρ} αὐτό τό πηλίκον, θά πρέπει νά εἶναι $a^{\frac{\mu'}{\nu'}} \cdot a^{\rho} = a^{\frac{\mu}{\nu}}{}^{+\rho}$.

Ἐπομένως καί $\frac{\mu'}{\nu'}+\rho = \frac{\mu}{\nu}$ ἢ $\rho = \frac{\mu}{\nu} - \frac{\mu'}{\nu'}$

3º. $(a\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$.

Γιατί $(a\beta\gamma)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a\beta\gamma)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu} \cdot \beta^{\mu} \cdot \gamma^{\mu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\beta^{\mu}} \cdot \sqrt[\nu]{\gamma^{\nu}} = a^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \beta^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot \gamma^{\frac{\mu}{\nu}}$

4º $\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$

Γιατί,
$$\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\mu}} = \sqrt[\nu]{\frac{a^{\mu}}{\beta^{\mu}}} = \frac{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}{\sqrt[\nu]{\beta^{\mu}}} = \frac{a^{\frac{\mu}{\nu}}}{\beta^{\frac{\mu}{\nu}}}$$

Πραγματικά, $a^{\frac{\mu}{\nu}} : a^{\frac{\mu'}{\nu'}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'}} : \sqrt[\nu\nu']{a^{\nu\mu'}} =$

$$\sqrt[\nu\nu']{\frac{a^{\mu\nu'}}{a^{\mu'\nu}}} = \sqrt[\nu\nu']{a^{\mu\nu'-\mu'\nu}} = a^{\frac{\mu\nu'-\mu'\nu}{\nu\nu'}} = a^{\frac{\mu}{\nu}-\frac{\mu'}{\nu'}}$$

5º $(a^{\mu})^{\frac{\kappa}{\lambda}} = a^{\frac{\mu\kappa}{\lambda}}$, $(a^{\frac{\kappa}{\lambda}})^{\mu} = a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda}}$ καί $(a^{\frac{\kappa}{\lambda}})^{\frac{\mu}{\nu}} = a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}$

Πραγματικά, $(a^{\mu})^{\frac{\kappa}{\lambda}} = \sqrt[\lambda]{(a^{\mu})^{\kappa}} = \sqrt[\lambda]{a^{\mu\kappa}} = a^{\frac{\mu\kappa}{\lambda}}$

$$(a^{\frac{\kappa}{\lambda}})^{\mu} = (\sqrt[\lambda]{a^{\kappa}})^{\mu} = \sqrt[\lambda]{a^{\kappa\mu}} = a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda}}$$

καί
$$(a^{\frac{\kappa}{\lambda}})^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{(a^{\frac{\kappa}{\lambda}})^{\mu}} = \sqrt[\nu]{a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda}}} = a^{\frac{\kappa\mu}{\lambda\nu}}$$

140α. Ἔτσι εἴμαστε σέ θέση νά ἐκτιμήσουμε τή σημασία τῆς παραπάνω παραδοχῆς. Ὁ Μαθηματικός εἶχε δύο παραστάσεις, τή $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$

καί τήν $a^{\frac{\mu}{\nu}}$. Γιά τήν πρώτη εἶχε ἔννοια, ὅταν τά μ καί ν ἦταν ἀκέραιοι καί θετικοί ἀριθμοί καί τό α ἀλγεβρικός ἀριθμός*· γιά τή δευτέρα εἶχε ἔννοια, ὅταν τό μ ἦταν διαιρετό μέ τόν ν καί στήν περίπτωση μάλιστα αὐτή ἀποδείκνυε τήν ἰσοδυναμία τῶν δύο αὐτῶν παραστάσεων. Σκέφθηκε λοιπόν, πώς, ἄν ἡ ἰσοδυναμία αὐτή ἐπιτρεπόταν νά γίνει παραδεκτή καί ὅταν τό μ δέν θά ἦταν διαιρετό μέ τό ν, θά εἶχε ἐπιτύχει μιά ἁπλούστευση τῶν πράξεων, πού θά ἔκανε πάνω σέ ριζικά, ἀφοῦ θά τίς εἶχε μετατρέψει σέ πράξεις πάνω σέ δυνάμεις. Καί εἴδαμε πραγματικά πώς τηροῦνται ὅλες ἐκεῖνες αἱ προϋποθέσεις, πού κάμνουν τήν παραδοχή αὐτή σεβαστή.

141. Ἐκθέτες ἀρνητικοί. Εἴδαμε (ἐδ.22) τή σημασία τῆς δυνάμεως, πού ἔχει ἐκθέτη ἀκέραιο καί ἀρνητικό.

Ἡ σημασία αὐτή μπορεῖ νά ἐπεκταθεῖ καί γιά ἐκθέτη κλασματικό καί ἀρνητικό.

Πραγματικά, ἄν $\frac{\mu}{\nu} > 0$ θά πρέπει νά ἔχουμε

$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} \cdot a^{\frac{\mu}{\nu}} = a^0 = 1$$

καί ἐπομένως, ἀφοῦ $a \neq 0$, $a^{-\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^\mu}}$

Πηγαίνουμε τώρα νά δείξουμε, ὅτι οἱ ἀρνητικοί ἐκθέτες διατελοῦν κάτω ἀπό τούς ἴδιους κανόνες ὑπολογισμοῦ, πού διατελοῦν κα οἱ θετικοί ἐκθέτες.

1ο. Θά δείξουμε, ὅτι ἡ ἰσότητα $a^x a^\psi = a^{x+\psi}$ εἶναι ἀληθινή, ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι τά σημεῖα τῶν x, ψ.

Ὑποθέτουμε στήν ἀρχή, ὅτι οἱ ἀριθμοί x καί ψ ἔχουν σημεῖα ἀντίθετα, λόγου χάρη $x > 0$ καί $\psi < 0$ καί θέτουμε $\psi = -\psi'$ ἐνῶ

---

* Ἐξαιρεῖται φυσικά (ἐδ. 120 2ο) ἡ περίπτωση, πού ὁ ν εἶναι ἄρτιος ἀριθμό ὁ μ περιττός καί ὁ α ἀρνητικός.

Ἔχουμε :

$$a^x a^\psi = a^x a^{-\psi'} = a^x \cdot \frac{1}{a^{\psi'}} = a^{x-\psi'} = a^{x+\psi}$$

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα $x<0$, $\psi<0$. θέτουμε $x=-x'$, $\psi=-\psi'$, ὅπου $x'>0$, $\psi'>0$.

Γράφουμε :

$$a^x \cdot a^\psi = a^{-x'} a^{-\psi'} = \frac{1}{a^{x'}} \cdot \frac{1}{a^{\psi'}} = \frac{1}{a^{x'+\psi'}} = a^{-(x'+\psi')} = a^{x+\psi}$$

Ἀνάλογες ἀποδείξεις κάμνουμε γιά τίς ἰσότητες (2), (3), (4) τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου.

2°. Τώρα θά δείξουμε τόν τύπο (5). Θά δείξουμε δηλ. ὅτι ὁποιαδήποτε καί ἄν εἶναι τά σημεῖα τῶν x καί ψ ἔχουμε

$$(a^x)^\psi = a^{x\psi}$$

Ὑποθέσεις 1° $x>0$, $\psi<0$. θέτουμε $\psi=-\psi'$ ἐνῶ $\psi'>0$

$$(a^x)^\psi = (a^x)^{-\psi'} = \frac{1}{(a^x)^{\psi'}} = \frac{1}{a^{x\psi'}} = a^{-x\psi'} = a^{x\psi}$$

2° $x<0$, $\psi>0$. θέτουμε $x=-x'$; $x'>0$

$$(a^x)^\psi = (a^{-x'})^\psi = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^\psi = \frac{1}{a^{x'\psi}} = a^{-x'\psi} = a^{x\psi}$$

3° $x<0$, $\psi<0$. θέτουμε $x=-x'$, $\psi=-\psi'$, $x'>0$ ἐνῶ $\psi'>0$

$$(a^x)^\psi = (a^{-x'})^{-\psi'} = \left(\frac{1}{a^{x'}}\right)^{-\psi'} = a^{x'\psi'} = a^{x\psi}$$

Ἀσκήσεις.

246) Ὑπολογίσετε τά γινόμενα :

1° $\left(\frac{a\psi}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\beta x}{\psi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{a^2\beta^2}{\psi^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

2° $\left(a^{\frac{7}{2}} - a^3 + a^{\frac{5}{2}} - a^2 + a^{\frac{3}{2}} - a + a^{\frac{1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)$

247) Ὑπολογίσετε τά πηλίκα :

1° $\left(a^{-1}-x^{-1}\right) : \left(a^{-\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}\right)$ 2° $\left(x^{\frac{3}{4}} - \psi^{\frac{3}{4}}\right) : \left(x^{\frac{1}{4}} - \psi^{\frac{1}{4}}\right)$

3° $\left(x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{4}} + 1\right) : \left(x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{1}{8}} + 1\right)$

248) Ἁπλοποιήσετε τίς παραστάσεις :

1° $\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}} + 1\right)\left(x - x^{\frac{1}{2}} + 1\right)$

2° $\left(2^{\frac{1}{4}}a + 3^{\frac{1}{4}}\beta\right)\left(3^{\frac{1}{4}}a - 2^{\frac{1}{4}}\beta\right) - 6^{\frac{1}{4}}\left(a^2-\beta^2\right) + 2^{\frac{1}{2}}a\beta$

3° $\frac{x-\psi}{x^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}\psi^{\frac{1}{4}} + x^{\frac{1}{4}}\psi^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + \psi^{\frac{1}{2}}}$ 4° $\frac{a^2 - a^{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} 2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}}$

5º $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\psi^{\frac{1}{3}}-x\psi^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\psi}{x^{\frac{5}{3}}-2x\psi^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}\psi^{\frac{4}{3}}}$ 6º $\dfrac{\alpha-x+4\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{3}{4}}-4\alpha^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+2\alpha^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{4}}-x^{\frac{1}{2}}}$

7º $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}-16x^{-\frac{2}{3}}-32x^{-1}}{x^{\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{6}}+4x^{-\frac{1}{2}}}$ 8º $\dfrac{1+x-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{1}{2}})+x^{\frac{1}{2}}(2+\frac{1}{16}x}{1-\frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}}$

9º $\left(\sqrt[x]{\alpha^{-\frac{2}{\psi}}}+\sqrt[\rho]{\alpha^{\frac{1}{\psi}}\beta}+2\sqrt{\sqrt[\rho]{\beta}}\ \sqrt{\sqrt[x]{\sqrt[\psi]{\sqrt[\rho]{\alpha^{x-2\rho}}}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

249) Κάμετε ρητή τὴν ἰσότητα : $(\alpha x)^{\frac{2}{3}}+(\beta\psi)^{\frac{1}{3}}=\gamma^{\frac{4}{3}}$

250) Τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ἰσότητα : $(x\psi)^{\frac{1}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{2}{3}})^{2}=\alpha^{2}$

251) Τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ἰσότητα : $(x^{\frac{2}{3}}+\psi^{\frac{2}{3}})\cdot x^{\frac{2}{3}}\psi^{\frac{2}{3}}=\rho^{2}$

252) Τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ἰσότητα :

$$(x^{2}+\psi^{2})^{2}=\left[(\alpha x)^{\frac{2}{3}}+(\beta\psi)^{\frac{2}{3}}\right]\left[(\alpha x)^{\frac{2}{3}}-(\beta\psi)^{\frac{2}{3}}\right]$$

253) Ἐπαληθεύσετε τὶς ταυτότητες :

$$1^{\underline{o}}\ \sqrt{\alpha^{2}+\sqrt[3]{\alpha^{4}\beta^{2}}}+\sqrt{\beta^{2}+\sqrt[3]{\alpha^{2}\beta^{4}}}=(\alpha^{\frac{2}{3}}+\beta^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

$$2^{\underline{o}}\ \left[\frac{\alpha+(\alpha^{2}-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{\alpha-(\alpha^{2}-\beta)^{\frac{1}{2}}}{2}\right]^{\frac{1}{2}}=(\alpha+\beta^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

254) Νὰ δειχθεῖ, ὅτι τὸ πολυώνυμο, $f(x)\equiv x^{3}-\alpha^{-\frac{2}{3}}\beta^{-1}(\alpha^{2}+\beta^{2})x+\beta$ μηδενίζεται γιὰ $x=\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$. Ὑπολογίσετε ἀκόμη τὸ πηλίκο τοῦ $f(x)$ τὸ $x-\alpha^{\frac{2}{3}}\beta^{-\frac{1}{2}}$.

255) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως :

$$\frac{\alpha^{\frac{1}{2}}-\left[\alpha-(\alpha^{2}-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}+\left[\alpha-(\alpha^{2}-\alpha x)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{2}{2}}}\quad \text{γιὰ } x=\alpha\left[1-\frac{16\beta^{2}}{(1+\beta)^{4}}\right],\ \ \begin{matrix}\alpha>0\\ \beta>0\end{matrix}$$

256) Νὰ ὑπολογισθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$A=\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha^{2}-\beta^{2}}{\alpha^{2}+\beta^{2}}\ \left(x^{\frac{1}{\lambda}}+x^{\frac{1}{\mu}}\right)\ \text{γιὰ } x=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\right)^{\frac{2\lambda\mu}{\mu-\lambda}}$$

Τὰ λ,μ παριστάνουν δύο ὁποιουσδήποτε ρητοὺς ἀριθμούς, θετικοὺς ἢ ἀρνητικοὺς καὶ τὸ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ εἶναι ἕνας θετικὸς ἀριθμός.

257) Κάμετε ρητὴ τὴν ἰσότητα : $\sqrt[\mu]{\alpha}+\sqrt[3]{\beta}+\gamma=0$.

258) Τὸ ἴδιο γιὰ τὴν ἰσότητα : $\sqrt[3]{\alpha}+\sqrt{\beta}+\gamma=0$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

258α) Ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως :

$4x^{-2}+4y^{-2}-3x^{-1}\cdot y^{-1}$ ἐάν $x=3+\sqrt{5}$ καί $y=3-\sqrt{5}$.

258β) Ἀποδείξετε ὅτι οἱ παραστάσεις :

1ο. $10^{2\nu}+10^{\nu}+1$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός, εἶναι διαιρετή μέ τό 3.

2ο. $\nu^5-5\nu^3+4\nu$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός ἀλλά μεγαλύτερος τοῦ 2, εἶναι διαιρετή μέ τό 120.

3ο. $2^{2\nu}+2^{\nu}+1$, ὅπου ν φυσικός ἀριθμός ἀλλά ὄχι πολλαπλάσιο τοῦ 3, εἶναι διαιρετή μέ τό 7.

258γ) Ὑπολογίσετε τό πηλίκο $\dfrac{(x-2)^{2\nu}-1}{x-1}$

258δ) Ἐκτελέσετε τή διαίρεση : $(5\alpha^2-41\alpha\beta+42\beta^2)\sqrt[12]{\alpha}:\left(\sqrt[3]{\alpha}-\dfrac{7\beta}{\sqrt[3]{\alpha^2}}\right)$ καί ὑπολογίσετε τήν ἀριθμητική τιμή τοῦ πηλίκου, ἐάν $\alpha=0{,}0001$ καί $\beta=-0{,}02$.

258ε) Νά ἁπλοποιηθεῖ ἡ παράσταση : $\dfrac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$.

258στ) Δείξετε ὅτι γιά ὁποιεσδήποτε τιμές τῶν x καί y ἀληθεύει ἡ ἀνισότητα : $2(x^2+xy+y^2)+3(x+y)+6>0$.
καί χρησιμοποιήσετε τό συμπέρασμά σας γιά νά δείξετε πώς τό πολυώνυμο $2x^3+3x^2+6x$ εἶναι αὔξουσα συνάρτηση τοῦ x στό διάστημα $-\infty\ldots\ldots\ldots+\infty$.

258ζ) Ὁ ἀκέραιος Α γράφεται μέ 2ν ψηφία ἴσα πρός τό 1, ὁ Β μέ ν+1 ψηφία ἴσα πρός τό 1 καί ὁ Γ μέ ν ψηφία ἴσα πρός τό 6. Ἀποδείξετε ὅτι ὁ Α+Β+Γ+8 εἶναι τέλειο τετράγωνο.

258η) Δίδεται ὁ ἀριθμός $A=99\ldots\ldots9$, πού ἔχει ν ψηφία ἴσα πρός τό 9. Νά βρεθεῖ τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων τοῦ A^2.

258θ) Ἐάν οἱ ἄνισοι ἀριθμοί x, y, z ἱκανοποιοῦν τίς σχέσεις :

$$2a-3y=\frac{(2-x)^2}{y}\qquad 2a-3z=\frac{(x-y)^2}{z}$$

δείξετε ὅτι θά ἱκανοποιοῦν καί τίς σχέσεις : $x+y+z=\alpha$, $2\alpha-3x\frac{(y-z)^2}{x}$.

142. <u>Ἐκθετική συνάρτηση</u>. Ὀνομάζουμε ἐκθετική συνά τηση τή συνάρτηση α^x, στήν ὁποία τό α εἶναι ἕνας ἀριθμ θετικός. Αὐτή ἡ συνάρτηση εἶναι τέλεια ὁρισμένη γιά κάθε ρητ τιμή, θετική ἤ ἀρνητική τοῦ x. Πραγματικά, ἐάν τό x εἶναι ἀκ ραιος καί θετικός ἀριθμός, τό α^x ἀντιπροσωπεύει τό γινόμενο x παραγόντων ἴσων πρός τό α· ἐάν ὁ x εἶναι κλασματικός καί θε κός, τῆς μορφῆς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅπου τά μ καί ν εἶναι ἀκέραιοι καί θετικ ἀριθμοί, εἶναι ἴση μέ $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$ δηλ μέ παράσταση, πού ἔχει πάντα ἔνν ἐπειδή τό α εἶναι θετικό· ἐάν τό x εἶναι ἀρνητικό, ἔχουμε $\alpha^x=\frac{1}{\alpha^{x'}}$ ὅπου τό x΄ εἶναι ἡ ἀφηρημένη τιμή τοῦ x καί ἐάν τέλος τό $x=$ τότε $\alpha^x=1$.

Ἔτσι βλέπουμε, ὅτι ἡ συνάρτηση α^x ἔχει πάντα μιά τιμή θετικ Δέν μένει τώρα παρά νά ὁρίσουμε τήν α^x γιά τίς ἄρρητες τιμές τ θά στηριχθοῦμε γι' αὐτό στά παρακάτω θεωρήματα.

143. <u>Θεώρημα</u>. Ἐάν τό α εἶναι μεγαλύτερ ἀπό τή μονάδα, ἡ α^x εἶναι συνάρτησ αὔξουσα· ἐάν τό α εἶναι μικρότερ ἀπό τή μονάδα, μά θετικό, ἡ α^x εἶνα συνάρτηση φθίνουσα.

Ἄς ὑποθέσουμε πρῶτα ὅτι ἔχουμε δύο ἀκεραίους καί ἀλγεβ κούς ἀριθμούς x, y καί ὅτι εἶναι $x>y$. Τότε, ἄν $\alpha>1$ (σελ.3 θά εἶναι $\alpha^{x-y}>1$ καί ἐάν $\alpha<1$, $\alpha^{x-y}<1$.

Ἐπειδή τώρα ἔχουμε $\alpha^x-\alpha^y=\alpha^y(\alpha^{x-y}-1)$ καί ἡ ποσότητα α^y εἰ πάντοτε θετική, ἡ διαφορά $\alpha^x-\alpha^y$ θά ἔχει τό σημεῖο τῆς διαφορᾶς Ἔτσι, ἄν $\alpha>1$, θά εἶναι $\alpha^x>\alpha^y$ καί ἐάν $\alpha<1$, $\alpha^x<\alpha^y$.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα πώς οἱ x καί y εἶναι τυχόντες ρητοί ἀρι Καταλαβαίνουμε πώς, γιά νά ἀποδείξουμε τό θεώρημά μας, πρέπει νά

είξουμε τήν ἐπέκταση τῆς ἰδιότητος τῶν ἀνισοτήτων (σελ.30 στ) καί γιά ἐκθέ-
η κλασματικό. Μά αὐτό γίνεται φανερό ἀπό τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖον συγκρίνον-
ται δυό ριζικά.

144. Συνέπειες τοῦ θεωρήματος. Συμπεραίνουμε λοιπόν ἀπό τά παρα-
άνω ὅτι: ἄν $a > 1,\ x > 0$.

$$a^{-x} < a^{0} < a^{x} \text{ ἤ } a^{-x} < 1 < a^{x}$$

αί ἐάν $a < 1,\ x > 0$

$$a^{x} < a^{0} < a^{-x} \text{ ἤ } a^{x} < 1 < a^{-x}$$

Δηλ. ὅτι:

1ο. Οἱ θετικές δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τή μονάδα εἶ-
αι μεγαλύτερες ἀπό τή μονάδα.

2ο. Οἱ ἀρνητικές δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τή μονά-
α εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα.

3ο. Οἱ θετικές δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μικροτέρου ἀπό τή μονάδα
εἶναι μικρότερες ἀπό τή μονάδα.

4ο. Οἱ ἀρνητικές δυνάμεις ἑνός ἀριθμοῦ μικροτέρου ἀπό τή μονάδα
εἶναι μεγαλύτερες ἀπό τή μονάδα.

145. Θεώρημα. Σέ κάθε θετικό ἀριθμό ε, διαλεγμέ-
ο αὐθαίρετα, ἀντιστοιχεῖ ἕνας θετικός ἀ-
ιθμός μ τέτοιος, ὥστε γιά κάθε τιμή τοῦ x
ἀπολύτως μικρότερη ἀπό τό μ νά ἔχουμε:

$$|a^{x}-1| < \varepsilon \quad (1)$$

Ὑποθέτουμε: 1ο. $a > 1,\ x > 0$.

Τότε $a^{x} > 1$ καί ἡ ἀνισότητα (1) γράφεται $a^{x}-1 < \varepsilon$ ἤ $a^{x} < 1+\varepsilon$.

Θά ζητήσουμε τώρα νά προσδιορίσουμε ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό μ
τέτοιο, ὥστε νά ἔχουμε $a^{\frac{1}{\mu}} < 1+\varepsilon$ ἤ $a < (1+\varepsilon)^{\mu}$.

Ἀναπτύσσοντες τό $(1+\varepsilon)^{\mu}$ κατά τό διώνυμο τοῦ Νιοῦτεν (σελ.73), βλέ-
πουμε ὅτι τό $(1+\varepsilon)^{\mu}$ εἶναι μεγαλύτερο ἀπό τό $1+\mu\varepsilon$. Ἐπομένως, ἐάν ὁρισθεῖ τό μ,

ὥστε νά ἔχουμε $a < 1 + \mu\varepsilon$ ἤ $\mu > \frac{a-1}{\varepsilon}$ θά ἔχουμε πολύ περισσότ
$a < (1+\varepsilon)^{\mu}$ ἤ $a^{\frac{1}{\mu}} < 1+\varepsilon$.

Μποροῦμε λοιπόν νά ποῦμε: Ἐάν μ' ἀντιπροσωπεύει τόν ἀντίστρ ἑνός ἀκεραίου ἀριθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό τό $\frac{a-1}{\varepsilon}$, θά ἔχουμε $a^{\mu'} <$ Ἐπομένως γιά κάθε τιμή τοῦ x ἀπολύτως μικρότερη ἀπό τό μ', θά χουμε $a^{x} < a^{\mu'} < 1+\varepsilon$· δηλ αὐτό πού θέλαμε νά δείξουμε.

2ο. $a > 1$, $x < 0$. Θέτουμε $x = -x'$, ὅπου $x' > 0$. Ἔχουμε $a^{x} =$ Ἀλλά σύμφωνα μέ τά παραπάνω $a^{x'} - 1 < \varepsilon'$* ἤ $a^{x'} < 1 + \varepsilon'$ ἤ $\frac{1}{a^{x'}} > \frac{1}{1+\varepsilon'}$ ἤ $a^{x} > \frac{1}{1+\varepsilon'}$. Ὥστε: $1 - a^{x} < 1 - \frac{1}{1+\varepsilon'}$ ἤ $1 - a^{x} <$ δηλ $|1-a^{x}| < \varepsilon$ ἤ $|a^{x}-1| < \varepsilon$, ἄν θέσουμε $\frac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'} = \varepsilon$.

3ο. $a < 1$. Στήν περίπτωση αὐτή ἀντικαθιστοῦμε τό $\frac{1}{a}$, πού ε μεγαλύτερο ἀπό τή μονάδα μέ β. Θά ἔχουμε λοιπόν: $a^{x} = \frac{1}{\beta^{x}}$ μποροῦμε νά διαπιστώσουμε καί πάλι τήν ἀλήθεια τοῦ θεωρήματ μας, ἄν ἐργασθοῦμε μέ τό β^{x}.

146. <u>Προσδιορισμός τῆς a^{x} ὅταν τό x εἶναι ἄρρητος ἀριθμός.</u> ὑποθέσουμε ὅτι $a > 1$ γιατί ὁ προσδιορισμός εἶναι ἀνάλογος ὅτ $a < 1$.

Ἄς θεωρήσουμε τίς χωρίς τέρμα ἀκολουθίες:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots x_\nu, \ldots\ldots$$
$$x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, \ldots\ldots x'_\nu, \ldots\ldots$$

οἱ ὁποῖες ὁρίζουν τόν ἄρρητο ἀριθμό x. Ἀπ' αὐτές σχηματίζουμε ἐπίσης τίς θίες:

$$a^{x_1}, a^{x_2}, a^{x_3}, \ldots\ldots a^{x_\nu}, \ldots\ldots$$
$$a^{x'_1}, a^{x'_2}, a^{x'_3}, \ldots\ldots a^{x'_\nu}, \ldots\ldots \quad (\lambda)$$

Οἱ τελευταῖες αὐτές ἀκολουθίες ὑπακούουν στίς ἰδιότητες τῶν ἀ θιῶν τοῦ ἐδ. 145, γιατί, 1ο σύμφωνα μέ τό θεώρημα 143 οἱ ὅροι τῆς πρώτης

---

* Φυσικά ἐννοοῦμε, πώς ἡ ἀνισότητα αὐτή ἰσχύει κάτω ἀπό τούς ὅρους, φράζει ἡ ἐκφώνηση τοῦ θεωρήματός μας.

υουν αὐξανόμενοι καί οἱ ὅροι τῆς δευτέρας ἐλαττούμενοι· 2º σύμφωνα μέ τό ἴδιο θεώρημα, κάθε ἀριθμός τῆς πρώτης ἀκολουθίας εἶναι μικρότερος ἀπό κάθε ἀριθμό τῆς δευτέρας. 3º ἡ διαφορά $\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu}$ μπορεῖ νά γίνει ὅσο θέλουμε μικρή, ὅταν τό ν αὐξάνει ἀπεριόριστα. Αὐτό τό 3º συμπέρασμα θά τό ἀποδείξουμε.

Εἶναι φανερό ὅτι, $\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu} = \alpha^{x_\nu}(\alpha^{x'_\nu} - 1)$. Ἄν κ εἶναι ἕνας ρητός ἀριθμός αὐθαίρετα ἐκλεγμένος μά ὁρισμένος, μεγαλύτερος δέ ἀπό τόν x, θά ἔχουμε $x_\nu < \kappa$ καί $\alpha^{x_\nu} < \alpha^{\kappa}$. Ὥστε, $\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu} < \alpha^{\kappa}(\alpha^{x'_\nu - x_\nu} - 1)$.

Ἡ ἀνισότητα πάλι

$$\alpha^{\kappa}(\alpha^{x'_\nu - x_\nu} - 1) < \varepsilon$$

ἤ

$$\alpha^{x'_\nu - x_\nu} - 1 < \frac{\varepsilon}{\alpha^{\kappa}} \qquad (1)$$

εἶναι ἀληθινή, ἐάν ἔχουμε $x'_\nu - x_\nu < \varepsilon'$, ὅπου τό ε' εἶναι ὁ ἀντίστροφος ἑνός ἀριθμοῦ ἀκεραίου μεγαλυτέρου ἀπό τό $\frac{\alpha - 1}{\frac{\varepsilon}{\alpha^{\kappa}}}$ (θεώρ. 145). Ἀλλά εἶναι πάντοτε, ὅπως εἶναι γνωστό, δυνατό νά βροῦμε δυό ἀριθμούς x_ν καί x'_ν, πού ἀνήκουν ἀντίστοιχα στήν τάξη τῶν πιό μικρῶν καί τῶν πιό μεγάλων ἀριθμῶν ἀπό τό x καί οἱ ὁποῖοι ἔχουν διαφορά μικρότερη ἀπό τόν ἀριθμο ε'. Γιά τέτοιους ἀριθμούς ἡ ἀνισότητα (1) θά εἶναι ἀληθινή καί γιά ἕνα παραπάνω λόγο θά εἶναι ἀληθινή καί ἡ ἀνισότητα:

$$\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu} < \varepsilon$$

Ἔπειτα ἀπ' αὐτά, πού προτάξαμε, μᾶς εἶναι εὔκολο νά ὁρίσουμε τήν α^x. Οἱ ἀκολουθίες (λ) πληροῦν τίς ἰδιότητες τοῦ (ἐδ. 115) καί ἑπομένως θά ὑπάρχει γιά αὐτές ἕνας* ἀριθμός πού θά συμβολίζει τόν διαχωρισμό τους. Αὐτός ὁ ἀριθμός θά εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ α^x.**

---

* Γιατί ἄν ὑποθέσουμε πώς ὑπάρχουν δυό, οἱ M καί N $(M > N)$ θά ἔχουμε, $\alpha^{x_\nu} < N < M < \alpha^{x'_\nu}$. Καί $\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu} > M - N$, πρᾶγμα πού εἶναι ἀδύνατο, ἐπειδή ἡ διαφορά $\alpha^{x'_\nu} - \alpha^{x_\nu}$ μπορεῖ νά γίνει ὅσο θέλουμε μικρή.

** Στό εἰδικό κεφάλαιο «Περί ὁρίων» θά δείξουμε πώς ὑπάρχει κοινό ὅριο τῶν ἀκολουθιῶν (λ).

Σημειώνουμε, ὅτι, ἄν $a<1$, θέτουμε $a=\frac{1}{\beta}$. καί ἔχουμε, $a^x=\frac{1}{\beta^x}$. Καί ἐπειδή γνωρίζουμε νά ὁρίσουμε τόν $-x$ (ἐδ. 120) ἐννοοῦμε, ἔπειτα ἀπ τά παραπάνω, τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖον θά ἐργασθοῦμε γιά τόν ὁρισμ τοῦ β^{-x}.

147. Δέν μένει λοιπόν πιά παρά νά δείξουμε τήν ἐπέκταση τῶν ἰδιο των τῶν δυνάμεων καί γιά ἐκθέτες ἄρρητους.

1º. $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$

Ἄς ὑποθέσουμε πώς ὁ x_1* (ρητός ἤ ἄρρητος) εἶναι τό σύμβολον τοῦ διαχωρισμοῦ τῶν ἀκολουθιῶν ψ_ν, ψ'_ν καί ἄς σημειώσουμε τό γεγον αὐτό, ἔτσι : $x_1=\psi_\nu/\psi'_\nu$.

Ἄς ὑποθέσουμε ἀκόμη πώς $x_2=\omega_\nu/\omega'_\nu$. Ὥστε : $x_1+x_2=\psi_\nu+\omega_\nu/\psi'_\nu+$ Καί ἑπομένως, $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{\psi_\nu}/a^{\psi'_\nu}\cdot a^{\omega_\nu}/a^{\omega'_\nu}=a^{\psi_\nu+\omega_\nu}/a^{\psi'_\nu+\omega'_\nu}$ δηλ. $a^{x_1}\cdot a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$ (βλέπε ἐδ. 124, I, III).

Εἶναι εὔκολο σέ μᾶς νά γενικεύσουμε κατά τά γνωστά τήν παρ πάνω ἰδιότητα.

Ἔτσι θά ἔχουμε :

$$a^{x_1}\cdot a^{x_2}\cdot\ldots\cdot a^{x_\nu}=a^{x_1+x_2+\cdots+x_\nu} \quad (1)$$

2º. $(a^x)^\nu=a^{\nu x}$ (ν ἀκέραιος καί θετικός).

Ἄν στήν παραπάνω ἰσότητα (1) ἔχουμε $x_1=x_2=\cdots\cdots=x_\nu=x$ ἰδιότητά μας γίνεται φανερή.

3º. $a^{x_1}:a^{x_2}=a^{x_1-x_2}$

Γιατί, $a^{x_1-x_2}\cdot a^{x_2}=a^{x_1}$.

---

* Φυσικά, ἕνας ἀπό τούς x_1, x_2 εἶναι ἄρρητος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΡΩΤΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

148. Ἀπό τήν ἀρχαία ἐποχή (αὐτό μᾶς τό ἀποκαλύπτουν τά "στοιχεῖα" τοῦ Εὐκλείδη) εἶχε γίνει φανερό, ὅτι ἡ μελέτη τῆς Γεωμετρίας μέ τήν Ἄλγεβρα (Ἀνάλυση), καθίσταται εὐκολότερη καί ἀντίστροφα, ἡ μελέτη τῆς Ἀναλύσεως μέ τή Γεωμετρία, καθίσταται αἰσθητότερη. Ἔτσι ἀπό παληά εἶχε ἀναγνωρισθεῖ ἡ ἀνάγκη νά ὑπεισέρχεται ὁ ἕνας ἀπό τούς δυό βασικούς κλάδους τοῦ πολύμορφου Μαθηματικοῦ δένδρου στό ἀντικείμενο τοῦ ἄλλου κλάδου, μέχρι πού, τό 1653, ὁ μεγάλος Γάλλος Μαθηματικός Descartes, μέ τήν Ἀναλυτική Γεωμετρία του, ἔκτισε τή γέφυρα, πού τούς συνδέει.

Ἐδῶ θά δώσουμε μερικές γνώσεις Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας οἱ ὁποῖες καί θά μᾶς βοηθήσουν νά σπουδάσουμε αἰσθητότερα πολλά οὐσιαστικά Ἀλγεβρικά θέματα.

149. <u>Διανύσματα. Θεώρημα τοῦ Chasles.</u>

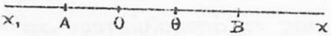
1) <u>Ἄξονας προσανατολισμένος.</u>

Μία ἀπέρατος εὐθεία εἶναι ἕνας ἄξονας ἤ μιά Διεύθυνση.

Ἐάν ἀπό ἕνα σημεῖο O μιᾶς εὐθείας ἀνακωρήσει ἕνα κινητό μπορεῖ νά κινηθεῖ εἴτε ἀπό τά ἀριστερά στά δεξιά εἴτε ἀπό τά δεξιά στά ἀριστερά. Ἔτσι πάνω σέ κάθε Διεύθυνση ἤ πάνω σέ κάθε ἄξονα διακρίνουμε δυό φορές· γιά νά τίς διαστέλλουμε, ὀνομάζουμε τή μιά ἀπ' αὐτές, τήν ἀπό τά ἀριστερά στά δεξιά, θετική καί τήν ἄλλη, τήν ἀπό τά δεξιά στά ἀριστερά ἀρνητική.

Ὁ ἄξονας, γιά τόν ὁποῖον εἶναι ὁρισμένη ἡ θετική καί ἡ ἀρνητική φορά, ὀνομάζεται **Ἄξονας προσανατολισμένος**.

2) Διάνυσμα. Πάνω σ' ἕνα προσανατολισμένο ἄξονα θεωροῦμε δυό σημεῖα Α, Β (σχ.1).



Σχ.1

Τό διάστημα, πού περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στά σημεῖα Α καί Β, μποροῦμε νά τό θεωρήσουμε διατρεχόμενο ἀπό ἕνα κινητό κατά δυό τρόπους :

1ο. Νά ἀναχωρήσει τό κινητό ἀπό τό Α, νά ἀκολουθήσει τή θετική φορά καί νά σταματήσει ὅταν φθάσει στό Β.

2ο. Νά ἀναχωρήσει τό κινητό ἀπό τό Β, νά ἀκολουθήσει τήν ἀρνητική φορά καί νά σταματήσει ὅταν θά φθάσει στό Α.

Βλέπουμε λοιπόν, ὅτι ἡ ἀφηρημένη τιμή * αὐτοῦ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος δέν εἶναι ἱκανή νά τό χαρακτηρίσει. Χρειάζεται νά καθορίσουμε καί τόν τρόπο κατά τόν ὁποῖο τό διέτρεξε τό κινητό· χρειάζεται δηλ. νά ἰδοῦμε τή φορά τοῦ κινητοῦ στήν κίνησή του. Ἑπομένως μαθαίνουμε ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ἑνός προσανατολισμένου ἄξονα, πού θά τό λέμε **Διάνυσμα**, εἶναι τέλεια καθορισμένο, ἐάν τοῦ δώσουμε ἀλγεβρική τιμή· τό σημεῖο αὐτῆς τῆς τιμῆς (ἀρνητικό ἤ θετικό) συμφωνεῖ μέ τόν τρόπο μέ τόν ὁποῖο τό εὐθύγραμμο τμῆμα θεωρεῖται διατρεχόμενο ἀπό ἕνα κινητό. Ἔτσι μποροῦμε νά ἔχουμε τόν ἑξῆς ὁρισμό γιά τό Διάνυσμα.

Διάνυσμα ὀνομάζεται εὐθύγραμμο τμῆμα πού ὁρίζεται ἀπό τή διεύθυνσή του, τό μέγεθός του καί τή φορά

---

* Πού εἶναι, μέ τή Γεωμετρική ἔννοια, τό ἐξαγόμενο τῆς συγκρίσεως του μέ ἕνα ἄλλο εὐθύγραμμο τμῆμα, ὁρισμένο ἀπό πρῶτα καί πού τό λέμε μονάδα

του πολλές δέ φορές καί άπό τή θέση του.*

3) <u>Σημείωση.</u> Τόν προσανατολισμό ένός άξονος τόν κάμνουμε παίρνοντας πάνω του ένα όποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{O\theta}$, πού κατά συνθήκη άντιπροσωπεύει τή μονάδα τῶν διανυσμάτων καί πού ή φορά του δείχνει τή θετική φορά τοῦ άξονος.

Όλα τά διανύσματα, πού έχουν τή φορά τής διανυσματικής μονάδος λέγονται θετικά καί τά άντίρροπα σ' αύτήν, άρνητικά.

Γιά νά συγκρίνουμε διανύσματα ώς πρός τήν φορά τους πρέπει νά άνήκουν στόν ίδιο ή σέ παράλληλους προσανατολισμένους άξονες. Έννοοῦμε έπειτα άπ' αύτό, ότι όλοι οί παράλληλοι άξονες κατά συνθήκη άντιπροσωπεύουν τήν αύτή διεύθυνση.

Όταν τό διάνυσμα τό θεωροῦμε μέ τή γεωμετρική του σημασία τό σημειώνουμε γράφοντας: $\overrightarrow{AB}$ καί άν θέλουμε νά έννοήσουμε τήν άλγεβρική του τιμή γράφουμε $(\overrightarrow{AB})$.

4) <u>Πολυγωνικό περίζωμα.</u> Όνομάζουμε πολυγωνικό περίζωμα τό έπίπεδο ή στρεβλό** σχήμα, πού τό άποτελεῖ μιά σειρά διαδοχικά διανύσματα δηλ. διανύσματα μέ τέτοιον τρόπον τοποθετημένα, ώστε τό πέρας τοῦ καθενός νά είναι άρχή τοῦ έπομένου.

. Τό διάνυσμα πού έχει γιά άρχή τήν άρχή τοῦ πρώτου άπό τά

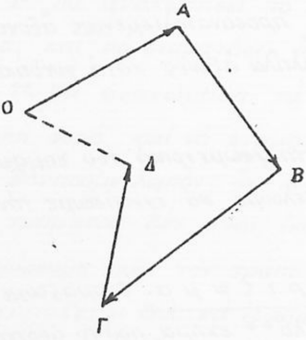
---

* Ή διανυσματική παράσταση ώρισμένων ποσῶν (δυνάμεως, ταχύτητος, έπιταχύνσεως κ.λ.π.) άπαιτεῖ καί τόν προσδιορισμό τής άρχής τοῦ διανύσματος, γιατί έτσι καθορίζεται τό σημεῖο στό όποῖον αύτό τό ποσό άσκεῖ τήν έπίδρασή του.

** Δυό εύθεῖες οί όποῖες δέν βρίσκονται στό ίδιο έπίπεδο (δηλ ούτε τέμνονται ούτε είναι παράλληλες) όνομάζονται στρεβλές. Όταν λοιπόν έχουμε μιά πολυγωνική γραμμή, μπορεῖ τά εύθύγραμμα τμήματα, πού τήν άποτελοῦν, νά μήν άνήκουν όλα στό ίδιο έπίπεδο, τότε ή γραμμή αύτή είναι ένα σχήμα στρεβλό.

διανύσματα ἑνός πολυγωνικοῦ περιζώματος καί γιά πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου ἀπ' αὐτά, ὀνομάζεται **συνισταμένη** ἤ **γεωμετρικό ἄθροισμα** τοῦ περιζώματος.

Τά διαδοχικά διανύσματα, πού ἀποτελοῦν τό περίζωμα, ὀνομάζονται συνιστῶντα ἤ συνιστῶσες αὐτοῦ. Ὅταν ἡ ἀρχή τοῦ πρώτου ἀπό τά διανύσματα συμπίπτει μέ τό πέρας τοῦ τελευταίου, λέμε πώς τό περίζωμα εἶναι κλειστό καί ἔχει συνισταμένη ἴση μέ τό μηδέν.



Σχ.2

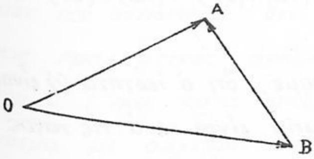
Τό (σχῆμα 2) μᾶς δείχνει ἕνα πολυγωνικό περίζωμα μέ συνισταμένη τό διάνυσμα $\vec{OΔ}$. Αὐτή τή γεωμετρική σχέση τή σημειώνουμε ἔτσι:

$$\vec{OA}+\vec{AB}+\vec{BΓ}+\vec{ΓΔ}=\vec{OΔ}.$$

5) <u>Σημείωση</u>. Ἄν ζητᾶμε τό γεωμετρικό ἄθροισμα διανυσμάτων, πού δέν εἶναι διαδοχικά, ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς: Παίρνουμε ἕνα ὁποιοδήποτε σημεῖο τοῦ χώρου καί ἀπ' αὐτό φέρουμε ἕνα διάνυσμα παράλληλο ἴσο καί ὁμόρροπο πρός τό ἕνα ἀπό ἐκεῖνα πού θεωροῦμε· ἀπό τό πέρας αὐτοῦ, φέρουμε ἐπίσης παράλληλο ἴσο καί ὁμόρροπο διάνυσμα πρός τό δεύτερο ἀπό τά γνωστά· ἀπό τό πέρας πάλι αὐτοῦ παράλληλο ἴσο καί ὁμόρροπο πρός τό τρίτο ἀπό τά γνωστά καί ἔτσι ἐξακολουθοῦμε καί γιά τά ὑπόλοιπα.

Σχηματίζουμε μ' αὐτό τόν τρόπο ἕνα πολυγωνικό περίζωμα, πού ἡ συνισταμένη του ἀποτελεῖ κατά συνθήκη τή συνισταμένη τῶν διανυσμάτων, πού μᾶς δόθηκαν.

6) Γεωμετρική διαφορά δύο διανυσμάτων. Καλοῦμε γεωμετρική διαφορά δύο διανυσμάτων $\vec{OA}$ καί $\vec{OB}$ τό διάνυσμα, πού προστιθέμενο γεωμετρικά στό $\vec{OB}$ μᾶς δίδει τό $\vec{OA}$. Ὥστε ἔχουμε :

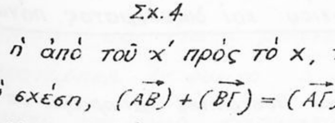


Σχ. 3

$$\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{BA} \text{ γιατί } \vec{OB}+\vec{BA}=\vec{OA}.$$

7) Θεώρημα τοῦ Chasles. Γιά διανύσματα διαδοχικά, πού βρίσκονται στόν ἴδιο προσανατολισμένο ἄξονα ἰσχύει τό ἑξῆς θεώρημα τοῦ Chasles:

Ἡ ἀλγεβρική τιμή τῆς συνισταμένης διαδοχικῶν διανυσμάτων, πού κεῖνται στόν ἴδιο προσανατολισμένο ἄξονα, ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν συνιστώντων διανυσμάτων.



Σχ. 4

Γιά νά ἀποδείξουμε αὐτό τό θεώρημα παίρνουμε πρῶτα, πάνω σ' ἕνα προσανατολισμένο ἄξονα, δύο διαδοχικά διανύσματα, πού νά εἶναι καί ὁμόρροπα. Ἄν (σχ.4) λάβουμε ὑπ' ὄψη πώς ἡ θετική φορά τοῦ ἄξονος εἶναι ἡ ἀπό τοῦ x' πρός τό x, τά διανύσματα AB, BΓ, AΓ εἶναι θετικά καί ἡ σχέση, $(\vec{AB})+(\vec{B\Gamma})=(\vec{A\Gamma})$ (1), εἶναι φανερή.

Εἶναι φανερή ἀκόμη ἡ ἰσότητα (1) καί στήν περίπτωση πού τά A, B, Γ εἶναι τοποθετημένα κατά τήν τάξη Γ, B, A πάνω στόν ἄξονα καί κατά τήν ἀπό τό x' πρός τό x φορά· καί τότε, πάλι τά διανύσματα θά εἶναι ὁμόρροπα ἀλλά ἀρνητικά.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι τά σημεῖα ἔχουν τήν τάξη A, Γ, B.

Γιά τά διανύσματα ΑΓ, ΓΒ, ΑΒ θά ἔχουμε: $(\overrightarrow{ΑΓ})+(\overrightarrow{ΓΒ})=(\overrightarrow{ΑΒ})$· καί ἐπειδή ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι ἀριθμητική: $(\overrightarrow{ΑΓ})+(\overrightarrow{ΓΒ})+(\overrightarrow{ΒΓ})=(\overrightarrow{ΑΒ})+(\overrightarrow{ΒΓ})$ ἤ $(\overrightarrow{ΑΓ})=(\overrightarrow{ΑΒ})+(\overrightarrow{ΒΓ})$, ἀφοῦ $(\overrightarrow{ΓΒ})+(\overrightarrow{ΒΓ})=0$

Ὅμοια ἐργαζόμαστε, γιά νά ἀποδείξουμε, ὅτι ἡ ἰσότητα (1) εἶναι ἀληθινή καί ὅταν τά τρία δοσμένα σημεῖα εἶναι κατά τίς τάξεις Β, Α, Γ ἤ Β, Γ, Α.

Γιά νά ἀποδείξουμε τήν ἰσχύ τοῦ θεωρήματος τοῦ Chasles γιά ὁσαδήποτε διαδοχικά διανύσματα τοῦ ἴδιου ἄξονος, θεωροῦμε πάνω σ' αὐτόν τόν ἄξονα ν σημεῖα, $M_1, M_2, M_3, M_4, \ldots\ldots\ldots M_{\nu-1}, M_\nu$ καί μέ ὁποιαδήποτε τάξη τοποθετημένα.

Ἄν τώρα λάβουμε ὑπ' ὄψη, ὅτι τό θεώρημα ἰσχύει γιά δυό διαδοχικά διανύσματα, συμπεραίνουμε ὅτι εἶναι ἀληθινές οἱ παρακάτω ἰσότητες:

$$(\overrightarrow{M_1M_2})+(\overrightarrow{M_2M_3})=(\overrightarrow{M_1M_3})$$

$$(\overrightarrow{M_1M_3})+(\overrightarrow{M_3M_4})=(\overrightarrow{M_1M_4}) \quad \text{δηλ.} \; (\overrightarrow{M_1M_2})+(\overrightarrow{M_2M_3})+(\overrightarrow{M_3M_4})=(\overrightarrow{M_1M_4})$$

$$(\overrightarrow{M_1M_4})+(\overrightarrow{M_4M_5})=(\overrightarrow{M_1M_5}) \quad \text{δηλ.} \; (\overrightarrow{M_1M_2})+(\overrightarrow{M_2M_3})+(\overrightarrow{M_3M_4})+(\overrightarrow{M_4M_5})=(\overrightarrow{M_1M_5})$$

....

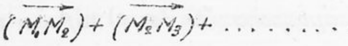
....

$$(\overrightarrow{M_1M_{\nu-1}})+(\overrightarrow{M_{\nu-1}M_\nu})=(\overrightarrow{M_1M_\nu}) \quad \text{δηλ.}$$

$$(\overrightarrow{M_1M_2})+(\overrightarrow{M_2M_3})+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+(\overrightarrow{M_{\nu-1}M_\nu})=(\overrightarrow{M_1M_\nu})$$

150. Ὁρισμός τῆς θέσεως σημείου καί διανύσματος πάνω σέ ἄξονα.

Μέ τόν προσανατολισμένο ἄξονα τοῦ Descartes μποροῦμε νά ἔχουμε πλήρη ἀντιστοιχία τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τῶν σημείων τοῦ ἄξονος. Καί ἰδού πῶς: Ἄν τό σημεῖον M_1 ἀνήκει στόν ἄξονα τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM_1}$ ἔχει μιά ἀλγεβρική τιμή· αὐτή ἡ ἀλγεβρική τιμή,



Σχ. 5

πού ὀνομάζεται καί τετμημένη τοῦ M_1, εἶναι ὁ ἀριθμός πού ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο αὐτό. Ἀντίστροφα ἄν μᾶς δοθεῖ ἕνας πραγματικός ἀριθμός α δέν ἔχουμε παρά νά πάρουμε ἀπό τοῦ 0 (πού κατά συνθήκη ἀντιστοιχεῖ στόν ἀριθμό 0) ἕνα διάνυσμα μέ ἀλγεβρική τιμή α. Τό πέρας αὐτοῦ τοῦ διανύσματος θά εἶναι τό σημεῖο πού ἀντιστοιχεῖ στόν ἀριθμό α. Ἐξυπακούεται φυσικά, πώς τό διάνυσμα αὐτό θά τό πάρουμε στόν θετικό ἤ ἀρνητικό ἡμιάξονα καθόσον ὁ ἀριθμός α εἶναι θετικός ἤ ἀρνητικός.

Χρειάζεται βέβαια νά τονίσουμε, ὅτι θά ἔχουμε (θεωρητικά) μέ ἀκρίβεια προσδιορισμένο τό σημεῖο, πού ἀντιστοιχεῖ στόν ἀριθμό α, ἄν αὐτός ὁ α εἶναι ρητός. Ἄν ὁ α εἶναι ἄρρητος θά πρέπει ἡ ἀφηρημένη του τιμή νά εἶναι τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, πού κατασκευάζεται γεωμετρικά (μέ τή χρήση τοῦ κανόνος καί τοῦ διαβήτου) ἀπό τή διανυσματική μονάδα $\overrightarrow{O\theta}$. Ἄν π.χ. ὁ $\alpha = \pm\sqrt{2}$, τότε τό σημεῖο πού ἀντιστοιχεῖ στό α εἶναι τό M' (τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος) ἤ τό M'' (τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος), καθόσον τό διάνυσμα $\overrightarrow{OM'}$ ἤ $\overrightarrow{OM''}$ εἶναι ἴσο (κατά μέγεθος) μέ τήν ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, πού κάθε του κάθετος πλευρά εἶναι ἴση (κατά μέγεθος) πρός τό $\overrightarrow{O\theta}$. Ἡ Γεωμετρία διδάσκει ποιά εἶναι τά ἀσύμμετρα μεγέθη, πού κατασκευάζονται γεωμετρικά καί ἔτσι ὁ μελετητής καταλαβαίνει καλά τήν τελευταία παρατήρηση. Ἄν φυσικά ὁ ἀριθμός α δέν ἐκπροσωπεῖ μέ τήν ἀφηρημένη του τιμή κατασκευάσιμο γεωμετρικά μέγεθος, τότε, μόνον κατά προσέγγιση μποροῦμε νά ὁρίσουμε τό σημεῖο, πού σ' αὐτόν ἀντιστοιχεῖ. Δηλ. ὁρίζουμε τόν α κατά προσέγγιση ἤ καλλίτερα ὁρίζουμε μέ ὅποια προσέγγιση θέλουμε μιά ρητή τιμή τοῦ α καί βρίσκουμε τό σημεῖο, πού ἀντιστοιχεῖ σ' αὐτή τήν τιμή.

151. Σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Chasles ἔχουμε τήν ἰσότητα :

$$(\overrightarrow{OM_1}) + (\overrightarrow{M_1M_2}) = (\overrightarrow{OM_2})$$

Καί ἄν x_1, x_2 ὀνομασθοῦν ἀντίστοιχα οἱ τετμημένες τῶν M_1, M_2 θά ἔχουμε :

$$(\overrightarrow{M_1M_2}) = x_2 - x_1$$

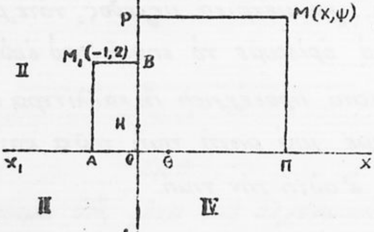
Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $(\overrightarrow{M_1M_2})$ ὀνομάζεται τετμημένη τοῦ διανύσματος καί ἄν τήν παραστήσουμε μέ τό γράμμα α ἔχουμε :

$$\alpha = x_2 - x_1 \quad (1)$$

δηλ ὅτι ἡ τετμημένη ἑνός διανύσματος εἶναι ἴση μέ τήν τετμημένη τοῦ πέρατος μεῖον τήν τετμημένη τῆς ἀρχῆς.

Καταλαβαίνουμε λοιπόν, ὅτι ἡ θέση ἑνός διανύσματος εἶναι ὁρισμένη, ἄν γνωρίζουμε τίς τετμημένες τῶν ἄκρων του ἤ τήν τετμημένη τοῦ ἑνός ἄκρου του καί τή δική του τετμημένη. Στήν τελευταία περίπτωση ἤ προσδιορίζουμε ἀπό τήν ἰσότητα (1) τήν τετμημένη τοῦ ἄλλου του ἄκρου ἤ ἀφοῦ ὁρίσουμε στόν ἄξονα τό ἄκρο πού τοῦ ξέρουμε τήν τετμημένη, παίρνουμε μετά ἀπ᾽αὐτό, μέ θετική ἤ ἀρνητική φορά, ἕνα διάνυσμα, πού νά ἔχει ἀλγεβρική τιμή τή γνωστή τετμημένη.

152. Ὁρισμός τῆς θέσεως σημείου καί διανύσματος στό ἐπίπεδο.



Σχ.6

Εἴδαμε (ἐδ. 150) πώς σέ κάθε πραγματικό ἀριθμό ἀντιστοιχεῖ ἕνα σημεῖο ἑνός προσανατολισμένου ἄξονος καί σέ κάθε σημεῖο ἑνός προσανατολισμένου ἄξονος ἀντιστοιχεῖ ἕνας ἀριθμός. Ἰδού τώρα πῶς ὁρίζεται ἡ θέση ἑνός σημείου στό ἐπίπεδο.

Παίρνουμε δυό ἄξονες, x,x, y,y, πού εἶναι κάθετοι* μεταξύ τους καί πού προσανατολίζονται μέ τίς διανυσματικές μονάδες $\overrightarrow{O\theta}$, $\overrightarrow{OH}$. Τό ἐπίπεδό μας δηλ. χωρίζεται σέ 4 μέρη πού θά τά χαρακτηρίσουμε λέγοντάς τα· τά μέρη τῆς 1ης, 2ας, 3ης καί 4ης γωνίας τῶν ἀξόνων.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου Μ. Ἐάν Π εἶναι ἡ ὀρθή προβολή του στόν ἄξονα x,x ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος ΟΠ ὀνομάζεται τετμημένη τοῦ Μ καί σημειώνεται μέ τό x δηλ. $(\overrightarrow{O\Pi}) = x$. Ἐπίσης, ἄν Ρ εἶναι ὀρθή προβολή τοῦ Μ στόν ἄξονα ψ,ψ, ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος ΟΡ ὀνομάζεται τεταγμένη τοῦ Μ καί σημειώνεται μέ τό ψ. Ἔτσι σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἀντιστοιχεῖ ἕνα ζεῦγος ἀριθμῶν, πού ὀνομάζονται συντεταγμένες τοῦ σημείου Μ.

Εἶναι εὔκολο νά ἐννοήσουμε, ὅτι σημεῖο τῆς πρώτης γωνίας τῶν ἀξόνων θά ἔχει τίς συντεταγμένες του θετικές· σημεῖο τῆς δευτέρας γωνίας θά ἔχει τήν τετμημένη του ἀρνητική καί τήν τεταγμένη του θετική· σημεῖο τῆς τρίτης γωνίας τῶν ἀξόνων· θά ἔχει τίς συντεταγμένες του ἀρνητικές καί σημεῖο τῆς τετάρτης γωνίας θά ἔχει τετμημένη θετική καί τεταγμένη ἀρνητική.

Ὁ ἄξονας x,x ὀνομάζεται ἄξονας τῶν x ἤ ἄξονας τῶν τετμημένων καί ὁ ἄξονας ψ,ψ ὀνομάζεται ἄξονας τῶν ψ ἤ ἄξο-

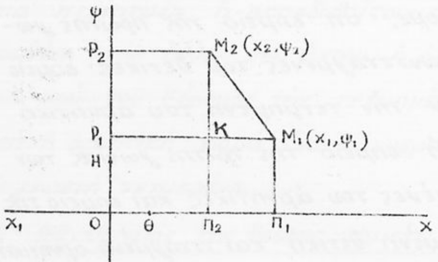
---

* Μποροῦσε νά σχηματίζαν οἱ ἄξονές μας μιά ὁποιαδήποτε γωνία, ὁπότε θά λέγαμε πώς ἔχουμε πλαγιογώνιο σύστημα ἀξόνων, μά προτιμοῦμε τό ὀρθογώνιο γιά νά ἔχουμε ἁπλούστερες τίς σχέσεις, πού χρειαζόμαστε. Εἴμαστε ἔτσι συνεπεῖς στόν προορισμό τοῦ βιβλίου μας.

νας τῶν τεταγμένων. Ἐπίσης, μαζί οἱ δύο ἄξονες ὀνομάζονται ἄξονες τῶν συντεταγμένων.

Μποροῦμε τώρα γιά κάθε ζεῦγος ἀριθμῶν νά ἔχουμε ἕνα σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου. Λόγου χάρη, γιά νά ὁρίσουμε τό σημεῖο, πού ἔχει τετμημένη -1 καί τεταγμένη 2 (αὐτό θά τό σημειώνουμε $M_1(-1,2)$) θά πάρουμε στόν ἀρνητικό ἡμιάξονα τῶν x τό διάνυσμα $(\overrightarrow{OA})=-1$, στό θετικό ἡμιάξονα τῶν ψ τό διάνυσμα $(\overrightarrow{OB})=2$ καί ἡ τομή τῆς παραλλήλου ἀπό τό Α πρός τόν ἄξονα τῶν ψ καί τῆς παραλλήλου ἀπό τό Β πρός τόν ἄξονα τῶν x θά μᾶς δώσει τό σημεῖο $M_1(-1,2)$. Μπορούσαμε ἀκόμη νά φέρουμε ἀπό τό Α παράλληλο πρός τό θετικό ἡμιάξονα τῶν ψ καί νά πάρουμε πάνω σ' αὐτή τήν παράλληλο διάνυσμα AM_1 μέ ἀφηρημένη τιμή 2· τό πέρας αὐτοῦ τοῦ διανύσματος θά ἦταν καί πάλι τό ζητούμενο σημεῖο M_1.

153. Ἄς ἰδοῦμε τώρα μέ ποιό τρόπο ὁρίζεται ἡ θέση ἑνός διανύσματος στό ἐπίπεδο.



Σχ.7

Ἐάν Π_1, Π_2 εἶναι ὀρθές προβολές τῶν ἄκρων τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ πάνω στόν ἄξονα τῶν x, ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}$ ὀνομάζεται *τετμημένη προβολή* τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$· ἐπίσης ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$ ὀνομάζεται *τεταγμένη* προβολή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$. Ἡ τετμημένη καί ἡ τεταγμένη προβολή ἑνός διανύσματος ὀνομάζονται μαζί συντεταγμένες προβολές τοῦ διανύσματος.

Ἐάν μέ τά α, β παραστήσουμε ἀντίστοιχα τίς συντεταγμένες προβολές ένός διανύσματος, θά έχουμε σύμφωνα μέ τό θεώρημα τοῦ Chasles:

$$(\overrightarrow{O\Pi_1}) + (\overrightarrow{\Pi_1\Pi_2}) = (\overrightarrow{O\Pi_2})$$

$$(\overrightarrow{OP_1}) + (\overrightarrow{P_1P_2}) = (\overrightarrow{OP_2})$$

$$\begin{aligned} x_1 + \alpha &= x_2 \\ \text{ή} \quad & \\ \psi_1 + \beta &= \psi_2 \end{aligned} \qquad \text{δηλ.} \qquad \begin{aligned} \alpha &= x_2 - x_1 \\ \beta &= \psi_2 - \psi_1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Οἱ συντεταγμένες λοιπόν προβολές ένός διανύσματος εἶναι ἴσες μέ τή διαφορά τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων τῶν ἄκρων του· (πέρατος μεῖον ἀρχῆς).

Τή θέση ένός διανύσματος στό έπίπεδο, έκτός πού μποροῦμε νά τήν καθορίσουμε, ὁρίζοντας τά ἄκρα του ἀπό τίς συντεταγμένες τους, μποροῦμε νά τήν καθορίσουμε ἀπό τίς συντεταγμένες τοῦ ένός ἀπό τά ἄκρα του καί ἀπό τίς συντεταγμένες του προβολές. Στήν τελευταία αὐτή περίπτωση ἤ ἀπό τίς ἰσότητες (1) καθορίζουμε τίς συντεταγμένες καί τοῦ ἀγνώστου του ἄκρου ἤ ἀφοῦ προσδιορίσουμε κατά θέση τό σημεῖο, πού τοῦ γνωρίζουμε τίς συντεταγμένες, λογουχάρη τό M_1, φέρνουμε παράλληλο πρός τόν ἄξονα τῶν x καί λαμβάνουμε $(\overrightarrow{M_1K}) = \alpha$ καί ἀπό τοῦ K παράλληλο πρός τόν ἄξονα τῶν ψ πάνω στήν ὁποία παίρνουμε $(\overrightarrow{KM_2}) = \beta$· τό M_2 εἶναι τό ἄλλο ἄκρο τοῦ διανύσματός μας.

154. <u>Σημείωση.</u> Ἄν ἔχουμε ἕνα έπίπεδο πολυγωνικό περίζωμα, λαβαίνοντες ὑπόψη τά παραπάνω καί τό θεώρημα τοῦ Chasles, συμπεραίνουμε ὅτι: Οἱ συντεταγμένες προβολές ένός γεωμετρικοῦ ἀθροίσματος διανυσμάτων εἶναι ἴσες μέ το ἀλγεβρικό ἄθροισμα τῶν ὁμωνύμων συντεταγμένων προβολῶν τῶν διανυσμάτων πού τό συνιστοῦν.

155. Ἀναλυτική ἔκφραση τῆς ἀποστάσεως δύο σημείων στό ἐπίπεδο

Ἄν στό ὀρθογώνιο τρίγωνο KM_1M_2 (σχ.7) ἐφαρμόσουμε τό Πυθαγόρειο θεώρημα βρίσκουμε :

$$(\overrightarrow{M_1K})^2 + (\overrightarrow{KM_2})^2 = (\overrightarrow{M_1M_2}) \quad \text{δηλ.} \quad a^2+\beta^2=\delta^2$$

ἄν δ ὀνομάσουμε τήν ἀπόσταση τῶν σημείων M_1, M_2. Ἄν στήν τελευταία αὐτή ἰσότητα ἀντικαταστήσουμε τά a, β ἀπό τίς τιμές τους (ἐδ. 153) βρίσκουμε :

$$|\delta| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2} \qquad (1)$$

Τό σημεῖο τοῦ ριζικοῦ ἐξαρτᾶται ἀπό τή φορά κατά τήν ὁποία θεωρεῖται διατρεχόμενο τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$ ἀπό ἕνα κινητό. Δηλ, ἄν θεωρήσουμε τή φορά ἀπό τό M_1 πρός τό M_2 θετική (καί αὐτό εἶναι ζήτημα ἐλευθέρας ἐκλογῆς)* ἡ ἀπόσταση δ θά εἶναι θετική καί τό ριζικό τῆς ἰσότητος (1) θά τό πάρουμε μέ τό σημεῖο +· φυσικά ἡ $-\sqrt{(x_2-x_1)^2+(\psi_2-\psi_1)^2}$ θά ἐκφράζει τότε τήν ἀπόσταση τοῦ M_2 ἀπό τό M_1.

Παράδειγμα. Νά βρεθοῦν οἱ συντεταγμένες ἑνός σημείου, πού ἀπέχει ἐξ ἴσου ἀπό τά σημεῖα $M_1(1,2)$, $M_2(-1,-2)$, $M_3(2,-5)$.

Ἄν $M(x,\psi)$ εἶναι τό σημεῖο πού ζητᾶμε, θά ἔχουμε :

$$(\overrightarrow{M_1M}) = (\overrightarrow{M_2M}) \quad \text{καί} \quad (\overrightarrow{M_2M}) = (\overrightarrow{M_3M})$$

δηλ.

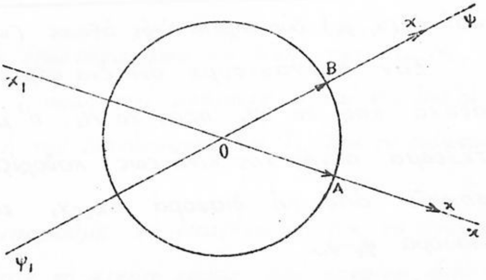
$$\sqrt{(x-1)^2+(\psi-2)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(\psi+2)^2}$$
$$\sqrt{(x+1)^2+(\psi+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2+(\psi+5)^2}$$

Ἀπό τή λύση αὐτοῦ τοῦ συστήματος βρίσκουμε $x=\frac{8}{3}$ καί $\psi=-\frac{4}{3}$. τό ζητούμενο λοιπόν σημεῖο εἶναι τό $M\left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

---

* Γιατί τό διάνυσμα M_1M_2 δέν εἶναι παράλληλο μέ ἕναν ἀπό τούς ἄξονες τῶν συντεταγμένων, πού εἶναι οἱ μόνες διευθύνσεις τοῦ ἐπιπέδου πάνω στίς ὁποῖες ἔχει καθορισθεῖ ἡ θετική φορά.

156. Γωνία δύο ἀξόνων. Μᾶς δίδονται οἱ προσανατολισμένοι ἄξονες x_1ox καί $\psi_1o\psi$ μέ θετικές φορές τίς σημειούμενες μέ τά βέλη. Ἄς καταστήσουμε τή γωνία τῶν δύο ἀξόνων ἐπίκεντρο κύκλου τριγωνομετρικοῦ. Μᾶς εἶναι γνωστή ἡ ἔννοια τοῦ τριγωνομετρικοῦ τόξου ΑΒ καί ἡ ἀναλυτική του ἔκφραση.



Σχ. 8

Ξέρουμε, πώς, ἄν τ εἶναι σέ ἀκτίνια τό μέτρο ἑνός ὁποιουδήποτε * ἀπό τά τόξα ΑΒ μά ὁρισμένου, τότε τό μέτρο x κάθε τόξου ΑΒ θά παρέχεται ἀπό τήν ἰσότητα: $x = 2\kappa\pi+\tau$, ὅπου ὁ κ εἶναι ἕνας ἀκέραιος (θετικός ἤ ἀρνητικός) ἀριθμός ἤ καί τό μηδέν. Ξέρουμε ἀκόμη, πώς, ἐπειδή τό τόξο καί ἡ ἐπίκεντρος γωνία, πού ἀντιστοιχεῖ σ'αὐτό, εἶναι ποσά τά ὁποῖα συνδέονται μέ τή σχέση τῆς ἀναλογίας, τά μέτρα τοῦ τόξου λαμβάνονται καί σάν μέτρα τῆς ἐπικέντρου γωνίας, πού ἀντιστοιχεῖ σ'αὐτό.

Ἔτσι θά ὀνομάζουμε γωνία τῶν δύο προσανατολισμένων ἀξόνων x_1x, $\psi_1\psi$ ἤ τῶν διανυσματικῶν τους μονάδων, κάθε γωνία πού προκύπτει, ἐάν ὁ θετικός ἡμιάξονας οx στραφεῖ περί τό Ο μέχρι πού νά πέσει στό θετικό ἡμιάξονα οψ. Ἡ γωνία μας θά ὀνομάζεται θετική ἤ ἀρνητική, ἄν ἡ στροφή γίνηκε κατά τή θετική (τήν ἀντίθετο πρός τήν κίνηση τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου) ἤ τήν ἀρνητική φορά. Ἡ παραπάνω πάλι ἀναλυτική ἔκφραση τοῦ τόξου ΑΒ

---

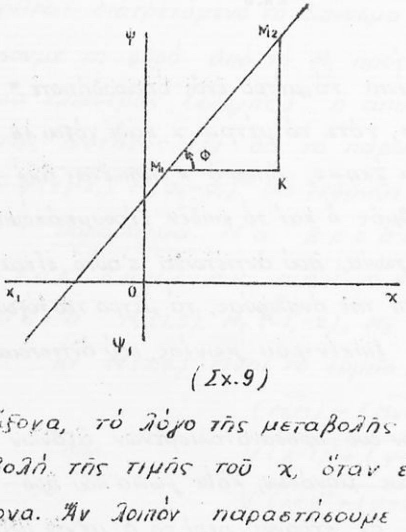
* Κατά προτίμηση παίρνουμε τό πρῶτο θετικό ἀπ'αὐτά, δηλ. τόξο πού θά περιλαμβάνεται μεταξύ 0 καί 2π.

εἶναι καί ἡ ἀναλυτική ἔκφραση τῆς γωνίας τῶν ἀξόνων μας.

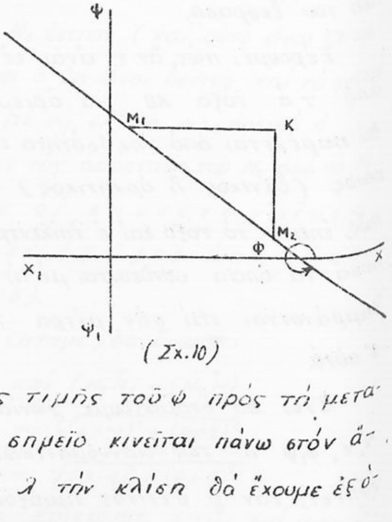
157. Κλίση ἤ γωνιακός συντελεστής ἑνός ἄξονος. Ἄς εἶναι $M_1(x_1,\psi_1)$ καί $M_2(x_2,\psi_2)$ δύο σημεῖα ἑνός ἄξονος (σχ. 9,10).

Ἐάν φανταστοῦμε ὅτι ἕνα σημεῖο κινεῖται πάνω σ' αὐτόν τόν ἄξονα ἀπό τό M_1 πρός τό M_2, ἡ μεταβολή τοῦ x, πού εἶναι ἀποτέλεσμα αὐτῆς τῆς κινήσεως, καθορίζεται κατά μέγεθος καί κατά σημεῖο ἀπό τή διαφορά x_2-x_1 καί ἡ μεταβολή τοῦ ψ ἀπό τή διαφορά $\psi_2-\psi_1$.

Ὀνομάζουμε κλίση ἤ γωνιακό συντελεστή ἄξονα, τό λόγο τῆς μεταβολῆς τῆς τιμῆς τοῦ ψ πρός τή μεταβολή τῆς τιμῆς τοῦ x, ὅταν ἕνα σημεῖο κινεῖται πάνω στόν ἄξονα. Ἄν λοιπόν παραστήσουμε μέ λ τήν κλίση θά ἔχουμε ἐξ ὁρισμοῦ:



(Σχ.9)



(Σχ.10)

$$\lambda = \frac{\psi_2-\psi_1}{x_2-x_1} \quad ἤ \quad \lambda = \frac{(\overrightarrow{KM_2})}{(\overrightarrow{M_1K})}$$

πρᾶγμα πού δείχνει ὅτι ἡ τιμή τοῦ λ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τῶν σημείων M_1, M_2 πάνω στόν ἄξονα μά μόνο ἀπό τόν ἄξονα.

Ὅπως εἶναι φανερό ἡ κλίση μπορεῖ νά εἶναι θετική ἤ ἀρνητική καί στό γεγονός αὐτό μποροῦμε νά δώσουμε τήν ἀκόλουθο γεωμετρική ἐξήγηση.

Ἀφοῦ ἡ τιμή τοῦ λ δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τῶν M_1, M_2, μποροῦμε νά τά πάρουμε (ὅπως στά σχήματα 9 καί 10) ἔτσι ὥστε ἡ τετμημένη προβολή τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ δηλ τό διάνυσμα $\overrightarrow{M_1K}$, νά εἶναι θετική.

Τότε δυό περιπτώσεις μποροῦμε νά διακρίνουμε, πού νά εἶναι οὐσιαστικά διαφορετικές: ὅταν τό κινητό σημεῖο, πού πηγαίνει ἀπό τό M_1 πρός τό M_2, ἀνεβαίνει, καί ὅταν κατεβαίνει. Στήν πρώτη περίπτωση τό KM_2 καί τό λ εἶναι θετικά (σχ.9), στή δευτέρα, τό KM_2 καί τό λ εἶναι ἀρνητικά. Ὥστε:

Ἡ κλίση ἑνός ἄξονα εἶναι θετική, ὅταν σέ μιά αὔξηση τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μιά αὔξηση τοῦ ψ καί ἀρνητική, ὅταν σέ μιά αὔξηση τοῦ x ἀντιστοιχεῖ μιά ἐλάττωση τοῦ ψ.

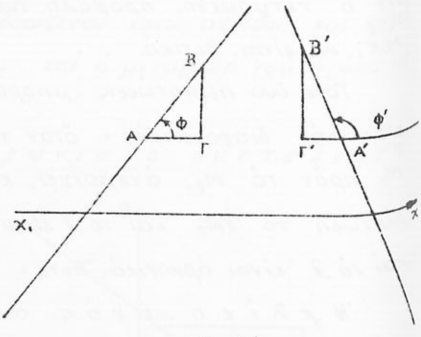
Ὅταν ὁ ἄξονας εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν x, $\psi_2=\psi_1$ καί ἐπομένως $\lambda=0$, ἐνῶ ὅταν ὁ ἄξονάς μας εἶναι παράλληλος πρός τόν ἄξονα τῶν ψ, $x_2=x_1$ καί $\lambda=\infty$.

158. **Συμπεράσματα.** 1ο. Ἄν λάβουμε ὑπόψη τόν ὁρισμό πού δώσαμε (ἐδ. 156) στή θετική γωνία δύο ἀξόνων καί τούς ὁρισμούς τῆς ἐφαπτομένης καί τοῦ συνημιτόνου μιᾶς γωνίας συμπεραίνουμε ὅτι:

1ο: Ἡ κλίση ἑνός ἄξονα εἶναι ἴση μέ τήν ἐφαπτομένη τῆς θετικῆς γωνίας φ τοῦ ἄξονα τῶν x μέ τόν ἄξονά μας (βλέπε σχ. 9 καί 10 ὅπου θετική φορά τοῦ ἄξονα θεωρεῖται ἡ ἀπό τό M_1 πρός τό M_2).

2ο. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τῆς ὀρθῆς προβολῆς ἑνός διανύσματος, πού γίνεται πάνω σέ ἕνα προσανατολισμένο ἄξονα εἶναι ἴση μέ τό γινόμενο τῆς ἀλγεβρικῆς τιμῆς τοῦ διανύσματος ἐπί τό συνημίτονο τῆς θετικῆς γωνίας τοῦ προβολικοῦ ἄξονα μέ τόν ἄξονα πού φέρει τό διάνυσμα.

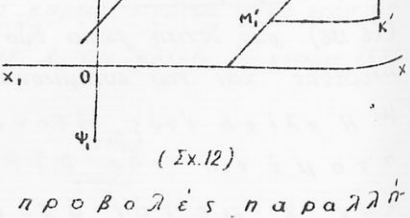
Εἰς τό σχ. 11 ἔχουμε τά διανύσματα AB καί A'B'. Ἐάν θετική φορά τοῦ προβολικοῦ ἄξονα x_1x εἶναι ἐκείνη πού δείχνει τό βέλος, τότε τοῦ $\overrightarrow{AB}$ ἡ προβολή εἶναι θετική καί τοῦ $\overrightarrow{A'B'}$ ἀρνητική. Εἶναι ὅμως φανερό, ὅτι οἱ ἰσότητες $(\overrightarrow{A\Gamma}) = (\overrightarrow{AB})$ συνφ, $(\overrightarrow{A'\Gamma'}) = (\overrightarrow{A'B'})$ συν φ' εἶνε ἀληθινές.



(Σχ.11)

3ο. Ἄς θεωρήσουμε δυό ἄξονες παραλλήλους, πού ὁρίζονται ἀπό τά σημεῖα $M_1(x_1,\psi_1)$, $M_2(x_2,\psi_2)$ ὁ ἕνας καί ἀπό τά σημεῖα $M'_1(x'_1,\psi'_1)$, $M'_2(x'_2,\psi'_2)$ ὁ ἄλλος. Τά τρίγωνα M_1KM_2 καί $M'_1K'M'_2$ εἶναι ὅμοια καί ἰσχύει ἡ ἰσότητα:

$$\frac{(\overrightarrow{M_1K})}{(\overrightarrow{M'_1K'})} = \frac{(\overrightarrow{KM_2})}{(\overrightarrow{K'M'_2})} = \frac{(\overrightarrow{M_1M_2})}{(\overrightarrow{M'_1M'_2})}$$



(Σχ.12)

πού δείχνει ὅτι: Οἱ ὁμώνυμες συντεταγμένες προβολές παραλλήλων διανυσμάτων εἶναι ἀνάλογοι καί ὁ λόγος τους εἶναι ἴσος μέ τό λόγο τῶν ἀλγεβρικῶν τιμῶν τῶν διανυσμάτων. Ἡ ἀντίστροφος ἐπίσης πρόταση εἶναι ἀληθινή. Ἀπλ.: Ἂν οἱ ὁμώνυμες συν-εταγμένες προβολὲς δυὸ διανυσμάτων εἶναι ἀνάλογες τὰ διανύσματα ἀνήκουν σὲ παραλλήλους ἄξονες. Γιατὶ ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴ δικαιολογοῦμε τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων M_1KM_2 καὶ $M_1'K'M_2'$.

Τὸ 3ο συμπέρασμα ἦταν εὔκολο νὰ τὸ σκεφθοῦμε, γιατὶ οἱ παράλληλοι ἄξονές μας θὰ ἔπρεπε νὰ ἔχουν τὴν ἴδια κλίση.

159. Διαίρεση ἑνὸς διανύσματος. Ἔστω $M(x,\psi)$ ἕνα σημεῖο τοῦ ἄξονα, ποὺ ὁρίζεται ἀπὸ τὰ σημεῖα $M_1(x_1,\psi_1)$, $M_2(x_2,\psi_2)$. Ζητᾶμε νὰ ὁρίσουμε ἔτσι τὸ M, ὥστε νὰ ἔχουμε $(\overrightarrow{M_1M}) = \lambda(\overrightarrow{M_1M_2})$.

Τρεῖς περιπτώσεις μποροῦμε νὰ θεωρήσουμε σχετικὰ μὲ τὴ θέση τοῦ M. 1ο. Ἐὰν τὸ M εἶναι ἀνάμεσα στὰ M_1 καὶ M_2· τότε τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_1M}$ καὶ $\overrightarrow{M_1M_2}$ εἶναι ὁμόρροπα καὶ τὸ λ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μικρότερος ἀπὸ τὴ μονάδα. 2ο. Ἐὰν τὸ M βρίσκεται μετὰ ἀπὸ τὸ M_2 τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_1M}$ καὶ $\overrightarrow{M_1M_2}$ εἶναι πάλιν ὁμόρροπα καὶ ὁ λ εἶναι ἀριθμὸς θετικὸς καὶ μεγαλύτερος ἀπὸ τὴ μονάδα. 3ο. Ἐὰν τὸ M βρίσκεται μπροστὰ ἀπὸ τὸ M_1 τὰ διανύσματα $\overrightarrow{M_1M}$ καὶ $\overrightarrow{M_1M_2}$ ἔχουν φορὲς ἀντίθετες καὶ τὸ λ εἶναι ἀριθμός, ποὺ μπορεῖ νὰ μεταβληθεῖ ἀπὸ τὸ 0 μέχρι τὸ $-\infty$.

Λαμβάνοντες ὑπόψη τὸ 3ο συμπέρασμα (ἐδ. 158) ἔχουμε:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \qquad \psi - \psi_1 = \lambda(\psi_2 - \psi_1)$$

ἢ

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \qquad \psi = \psi_1 + \lambda(\psi_2 - \psi_1)$$

Ἐὰν τὸ M εἶναι μέσο τοῦ διανύσματος $\overrightarrow{M_1M_2}$ τότε $\lambda = \frac{1}{2}$ καὶ

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

Ἀσκήσεις

259) Νὰ βρεθεῖ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου, ποὺ οἱ κορυφές του εἶναι $A(3,4)$, $B(-2,4)$, $\Gamma(2,2)$.

260) Νά βρεθεῖ ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου, πού οἱ κορυφές του εἶναι Α(2,1). Β(-2,8). Γ(-6,5), Δ(-2, -2).

261) Δείξετε πώς τό τρίγωνο, πού ἔχει κορυφές (-3,-2), (1,4), (-5,0), εἶνε ἰσοσκελές.

262) Δείξετε πώς τό τρίγωνο, πού οἱ κορυφές του εἶναι (-1,1), (1,3), $(-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$, εἶναι ἰσόπλευρο.

263) Νά δειχθεῖ ὅτι τό τετράπλευρο, πού ἔχει κορυφές (1,3), (3,6), (0,5), (-2,2) εἶναι ἕνα παραλληλόγραμμο.

264) Νά δειχθεῖ, ὅτι τό τρίγωνο (1,2), (3,4), (-1,4) εἶναι ὀρθογώνιο.

265) Νά δειχθεῖ ὅτι τά σημεῖα (8,0), (0,-6), (7,-7), (1,1) εἶναι σημεῖα τῆς περιφερείας, πού ἔχει κέντρο τό σημεῖο (4,3). Ποιά εἶναι ἡ ἀκτίνα αὐτῆς τῆς περιφερείας;

266) Νά βρεθεῖ τό κέντρο τῆς περιφερείας, πού περνάει ἀπό τά σημεῖα (0,0), (4,2) καί (6,4).

267). Ἀπό τό σημεῖο (5,0) φέρουμε μιά εὐθεία, πού ἔχει τήν κλίση τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τά σημεῖα (-1,2), (4,-1). Σέ ποιό σημεῖο ἡ πρώτη εὐθεία θά κόψει τόν ἄξονα τῶν ψ;

268) Μιά εὐθεία, πού ἔχει κλίση $-\frac{1}{2}$, περνάει ἀπό τό σημεῖο (2,0). Μιά ἄλλη εὐθεία ἔχει κλίση 1 καί περνάει ἀπό τό σημεῖο (-2,0). Σέ ποιό σημεῖο αὐτές οἱ δυό εὐθεῖες τέμνονται;

269) Τό κέντρο ἑνός κύκλου μέ ἀκτίνα 5 εἶναι τό σημεῖο (1,1). Νά βρεθοῦν τά ἄκρα τῆς διαμέτρου, πού ἡ κλίση της εἶναι $\frac{4}{3}$.

270) Νά βρεθοῦν τά σημεῖα, πού διαιροῦν σέ τρία ἴσα μέρη τό εὐθύγραμμο τμῆμα, πού συνδέει τά σημεῖα P_1 (-3,-7) καί P_2 (10,2).

271) Τρία σημεῖα Α (-2,4), Β(4,2), Γ(7,1) ἀνήκουν στήν ἴδια εὐθεία. Νά βρεθεῖ ἕνα τέταρτο σημεῖο Δ τέτοιο, ὥστε $\frac{(\overrightarrow{A\Delta})}{(\overrightarrow{\Delta\Gamma})} = -\frac{(\overrightarrow{AB})}{(\overrightarrow{B\Gamma})}$.

272) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι οἱ εὐθεῖες, πού συνδέουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου, τέμνονται στό κοινό τους μέσο.

273) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, πώς σέ κάθε ὀρθογώνιο τρίγωνο ἡ διάμεσος τῆς ὑποτεινούσης του εἶναι ἴση μέ τό ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης του.

274) ΟΑΒΓ εἶναι ἕνα τραπέζιο, πού οἱ πλευρές του ΟΑ καί ΓΒ εἶναι κάθετες στήν πλευρά του ΟΓ. Ἄν Δ εἶναι τό μέσο τῆς πλευρᾶς ΑΒ νά δειχθεῖ ἀναλυτικά ὅτι ΟΔ= ΓΔ.

275) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι οἱ διαγώνιες ἑνός παραλληλογράμμου τέμνονται στό μέσο τους.

276) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι : Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο πλευρῶν ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσο μέ τό διπλάσιο τοῦ τετραγώνου τῆς διαμέσου, πού ἀντιστοιχεῖ στήν τρίτη του πλευρά, αὐξημένο κατά τό διπλάσιο τοῦ τετραγώνου τοῦ ἡμίσεος τῆς τρίτης του πλευρᾶς.

277) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι ἡ εὐθεία, πού συνδέει τά μέσα τῶν μή παραλλήλων πλευρῶν ἑνός τραπεζίου, εἶναι ἴση μέ τό ἥμισυ τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο του βάσεων.

278) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι, ἄν δυό διάμεσοι ἑνός τριγώνου εἶναι ἴσες, τό τρίγωνο εἶναι ἰσοσκελές.

279) Νά δειχθεῖ ἀναλυτικά, ὅτι τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν ἑνός τετραπλεύρου εἶναι ἴσο μέ τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του αὐξημένο κατά τό τετραπλάσιο τοῦ τετραγώνου τῆς εὐθείας, πού συνδέει τά μέσα τῶν διαγωνίων του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

Θεωρία τῶν Μιγαδικῶν ἀριθμῶν

160. Ὀνομάζουμε ἀλγεβρική ἐξίσωση μέ ἕναν ἄγνωστο μιά ἰσότητα, πού προκύπτει, ἄν ἕνα πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς ἐξισωθεῖ μέ τό μηδενικό. Ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου εἶναι ἐξ ὁρισμοῦ ὁ βαθμός τῆς ἐξισώσεως.

Λογουχάρη, ἐάν $f(x) \equiv a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$ ἡ ἰσότητα $f(x)=0$ εἶναι μιά ἀλγεβρική ἐξίσωση βαθμοῦ μ. Οἱ συντελεστές a_0, a_1 .... a_μ τοῦ πολυωνύμου ὀνομάζονται ἐπίσης συντελεστές τῆς ἐξισώσεως.

Ὀνομάζεται ρίζα ἤ λύση τῆς ἐξισώσεως $f(x)=0$ ἕνας ρητός ἤ ἄρρητος ἀριθμός a τέτοιος, ὥστε ἡ ἰσότητα $f(a)=0$ νά εἶναι μιά ἀριθμητική ἰσότητα. Τό a ἐπίσης ὀνομάζεται καί ρίζα τοῦ πολυωνύμου $f(x)$.

Ἡ στοιχειώδης Ἄλγεβρα διδάσκει τή λύση τῶν ἐξισώσεων τοῦ πρώτου καί δευτέρου βαθμοῦ καί μάλιστα δίδει τύπους, πού ἐκφράζουν τίς ρίζες τους ἀπό τούς συντελεστές τους. Κάπως ἀνάλογα μά ὄχι καί μέ τόση εὐκολία, γίνεται ἡ λύση τῶν ἐξισώσεων τοῦ $3^{ου}$ καί $4^{ου}$ βαθμοῦ. Ὅσο γιά τίς ἐξισώσεις, πού εἶναι βαθμοῦ πιό μεγάλου ἀπό $4^{ου}$, δέν μποροῦμε νά ἔχουμε τύπους οἱ ὁποῖοι νά μᾶς δίδουν τίς ρίζες τους ἀπό τούς συντελεστές τους. Οἱ ρίζες αὐτῶν τῶν ἐξισώσεων βρίσκονται μέ τή χρησιμοποίηση τῶν ἰδιοτήτων τους, καί ἡ σπουδή τῶν ἰδιοτήτων τῶν ριζῶν εἶναι ἔργο τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῶν ἐξισώσεων. Ἡ ἀνάπτυξη τῆς γενικῆς θεωρίας τῶν ἐξισώσεων γίνεται ἀπό τήν ἀνωτέρα ἄλγεβρα.

161. Ἄς θεωρήσουμε τώρα τή δευτεροβάθμιο ἐξίσωση: $ax^2+\beta x+\gamma=0$.

Ἐπειδή $\alpha \neq 0$ μποροῦμε νά τήν γράψουμε κι ἔτσι:

$$\alpha\left(x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0 \quad \text{ἤ} \quad \alpha\left[\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]=0 \quad (1)$$

Ἄν ἡ παράσταση $4\alpha\gamma-\beta^2$ εἶναι ἀριθμός θετικός, ἡ ἐξίσωση (1) γράφεται: $\alpha\left[(x-\lambda)^2+\mu^2\right]=0$ (2) καί εἶναι ὁλοφάνερο ὅτι δέν ὑπάρχει πραγματικός ἀριθμός x, πού νά μηδενίζει τό πρῶτο της μέλος. Δέν ὑπάρχει δηλ. στήν περίπτωση αὐτή πραγματική ρίζα τῆς ἐξισώσεως.

Ἐάν τώρα κάμουμε τήν ἀντικατάσταση $x-\lambda=y$ ἡ ἐξίσωση (2) ἀνάγεται στήν ἰσοδύναμη $y^2+\mu^2=0$ (3), πού φυσικά δέν ἱκανοποιεῖται (δέν μεταβάλλεται σέ ἀριθμητική ἰσότητα) γιά κάποια πραγματική τιμή τοῦ y ἐφόσον κατά τήν ὑπόθεσή μας $\mu\neq 0$. Ἐάν τέλος θέσουμε $y=\mu\omega$, ἡ (3) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἐξίσωση $\omega^2+1=0$ (4).

Μέ τό μετασχηματισμό τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) στό πρῶτο μέλος τῆς (4) δέν ἐμετριάσθη ἡ ἀδυναμία μας νά ἱκανοποιήσουμε μέ κάποια πραγματική τιμή τοῦ x τήν ἐξίσωση (2). Μποροῦμε ὅμως νά ποῦμε πώς ἡ (4) ἐντοπίζει τό πρόβλημα, τό κάμνει πιό συγκεκριμένο. Ἡ ἱκανοποίηση τῆς (4), πού συνεπάγεται τήν ἱκανοποίηση τῆς (3) καί συνεπῶς καί τῆς (2), χρειάζεται τό σύμβολο, πού νά εἰκονίζει τήν ἀριθμητική ἐκείνη ποσότητα, πού τό τετράγωνό της νά ἰσοδυναμεῖ μέ τό -1. Ἔτσι, ἄν συμβολίσουμε μέ τό γράμμα i τή ζητούμενη ἀριθμητική ποσότητα θά ἔχουμε $i^2=-1$ ὅπου τό i^2 ἀντιπροσωπεύει τό γινόμενο $i\cdot i$. Καί τοῦτο, ἐπειδή θέλουμε καί γιά τό νέο σύμβολο νά ἰσχύουν οἱ βασικοί νόμοι, πού ἰσχύουν γιά τά σύμβολα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἐξίσωση λοιπόν (4), ἔπειτα ἀπό τήν τελευταία παραδοχή, ἱκανοποιεῖται γιά $\omega=\pm i$, ἡ (3) γιά $y=\pm\mu i$ καί τελικά ἡ (2) γιά $x=\lambda\pm\mu i$[*]· λέμε δέ τότε ὅτι ἡ ἐξίσωσή μας ἔχει ρίζα μιγαδική, ἄν $\lambda\neq 0$ ἤ φανταστική, ἄν $\lambda=0$.

Ὥστε: Ἕνα ἀκέραιο $f(x)$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμοῦ ἤ ἡ δευτεροβάθμια ἐξίσωση

---

[*] Συμφωνᾶμε δηλ. τό νέο μας ἀριθμητικό σύμβολο i νά συμπλεχθεῖ μέ τά γνωστά μας σύμβολα καί αὐτό γίνεται μέ τίς πράξεις, πολλαπλασιασμό καί πρόσθεση, ἐνῶ διατηροῦμε γιά τίς πράξεις αὐτές τά ἴδια σημάδια.

f(x)=0 ἔχει μιγαδική ἤ φανταστική ρίζα, ἄν μιά παράσταση τῆς μορφῆς λ+μi εἶναι τέτοια, ὥστε ἡ ἀντικατάσταση στό f(x) τοῦ x ἀπό τή λ+μi μᾶς δίδει πολυώνυμο διαιρετό μέ τό i^2+1· ἤ μᾶς δίδει ἕνα πολυώνυμο τοῦ i, πού μηδενίζεται, ἄν θέσουμε ἀντί τοῦ i^2 τό −1.

Αὐτό τόν ὁρισμό πού δώσαμε στή μιγαδική ρίζα γιά τή δευτεροβάθμια ἐξίσωση, μποροῦμε νά τόν διατηρήσουμε καί γιά ἐξίσωση ὁποιουδήποτε βαθμοῦ. Καί ἰδού ἡ παρατήρηση πού μᾶς ὁδηγεῖ σ' αὐτό.

Στό (ἐδ. 107) μάθαμε πώς κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x μποροῦμε νά τό θέσουμε κάτω ἀπό τή μορφή

$$f(x)=\phi(x^2)+x\phi_1(x^2).$$

Ἄν τώρα ἀντικαταστήσουμε τό x^2 μέ τό −1, τότε ἡ παράσταση

$$\phi(-1)+x\phi_1(-1) \qquad (u)$$

θά ἐκφράζει τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ f(x) μέ τό x^2+1.

Οἱ ἐκθέτες τοῦ x στούς ὅρους τοῦ f(x) εἶναι τῆς μορφῆς 4p+q, ὅπου τό q παίρνει τίς τιμές 0, 1, 2, 3. Οἱ ὅροι πού ἔχουν ἐκθέτες τοῦ x τούς 4p, 4p+2, συνιστοῦν τό $\phi(x^2)$ καί οἱ ὑπόλοιποι τό $x\phi_1(x^2)$.

Ἡ παραπάνω λοιπόν παράσταση βρέθηκε μέ τό νά θέσουμε

ἀντί τοῦ x^{4p} τό 1
" " x^{4p+1} " x
" " x^{4p+2} " −1 (λ)
" " x^{4p+3} " −x

Ἄν λοιπόν σέ ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x, βαθμοῦ μεγαλυτέρου ἀπό 1, κάναμε τήν ἀντικατάσταση x=λ+μi θά γινόταν τό πολυώνυμο αὐτό συνάρτηση τοῦ i. Ἐπειδή αὐτό τό πολυώνυμο δέ θά ἦταν διαφορετικό ἀπό ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x, παρά μόνο στήν ἀλλαγή τῆς μεταβλητῆς, θά εἴχαμε πώς ἡ παράσταση

$$\phi(-1)+i\phi_1(-1) \qquad (\nu)$$

θά ἐμφάνιζε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου μας μέ τό i^2+1. Καί στήν περίπτωση πού τό $\lambda+\mu i$ θά ἦταν ρίζα τοῦ πολυωνύμου μας, ἡ παράσταση αὐτή (ν) θά ἦταν μηδενικό.

Ὅταν λοιπόν σ' ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x κάμνουμε τήν ἀντικατάσταση $x=\lambda+\mu i$ κι ἀπό τή μιά μεριά τό i τό διατηροῦμε ἀμετάβλητο κι ἀπό τήν ἄλλη, σ' ὅλους τούς ὑπολογισμούς, πού πραγματοποιοῦμε, κάμνουμε τίς ἀντικαταστάσεις τοῦ πίνακος (λ), δηλ ἀντικαθιστοῦμε τά i^{4P}, i^{4P+1}, i^{4P+2}, i^{4P+3} ἀντίστοιχα μέ $1, i, -1, -i$, δημιουργοῦμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ ὡς πρός i πολυωνύμου μέ τό i^2+1.

Ὥστε, ἐάν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x)$, ἡ ἀντικατάσταση $x=\lambda+\mu i$ τό μηδενίζει, ἀφοῦ φυσικά στούς ὑπολογισμούς, πού θά συναντήσουμε, κάμνουμε τούς παραπάνω μετασχηματισμούς, αὐτό σημαίνει, ὅτι, χωρίς αὐτούς τούς μετασχηματισμούς, ἡ ἀντικατάσταση αὐτή θά τό μετέτρεπε σέ πολυώνυμο τοῦ i, διαιρετό μέ τό i^2+1.

Μέ τήν εἰσαγωγή τῶν νέων αὐτῶν ἀριθμητικῶν συμβόλων πλαταίνει ἡ ἔννοια « ἀριθμός ». Τά νέα μας σύμβολα περιλαμβάνουν καί τά παληά (τούς πραγματικούς ἀριθμούς) τά ὁποῖα τώρα εἶναι μιά μερική περίπτωσή τους. Καί ἰδού πῶς : Δεχόμαστε ὅτι $0\cdot i=0$ καί ἐπομένως ἡ ἰσότητα $x=\lambda+\mu i$ ἐκφράζει ἕνα πραγματικό ἀριθμό μέ τό νά ἔχουμε $\mu=0$. Ἔτσι, κάθε μιγαδικός ἀριθμός ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη : τό πραγματικό μέρος λ καί τό καθαρῶς φανταστικό μi. Ὁ πραγματικός ἀριθμός μ ὀνομάζεται συντελεστής τοῦ i.

162. Ὀνομάζουμε μέτρο (module) τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ τόν θετικό ἀριθμό $+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$. Ἀπ' αὐτό τόν ὁρισμό συμπεραίνουμε,

πώς τό μέτρο ἑνός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ἴσο μέ τήν ἀπόλυτό του τιμή. Σημειώνουμε μερικές φορές τό μέτρο τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ μέ $|\alpha+\beta i|$.

Λέμε πώς ἕνας μιγαδικός ἀριθμός $\alpha+\beta i$ εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν, ὅταν ἔχουμε σύγχρονα $\alpha=0$, $\beta=0$. Ἔτσι ἡ ἰσότητα $\alpha+\beta i=0$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς δυό ἰσότητες $\alpha=0, \beta=0$.

Ἔπειτα ἀπό τόν ὁρισμό, πού δώσαμε στό μέτρο, βλέπουμε πώς ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, γιά νά εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός ἴσος μέ τό μηδέν, εἶναι τό μέτρο του νά εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν.

Λέμε πώς δυό μιγαδικοί ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $\alpha_1+\beta_1 i$ εἶναι ἴσοι, ὅταν τά α, β εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μέ τά α_1, β_1. Ἡ ἰσότητα λοιπόν $\alpha+\beta i=\alpha_1+\beta_1 i$ εἶναι ἰσοδύναμη μέ τίς ἰσότητες $\alpha=\alpha_1$, $\beta=\beta_1$.

Λέμε πώς δυό μιγαδικοί ἀριθμοί εἶναι συζυγεῖς, ὅταν τά πραγματικά τους μέρη εἶναι ἴσα καί οἱ συντελεστές τοῦ i εἶναι ἀντίθετοι ἀριθμοί. Ἔτσι οἱ ἀριθμοί $\alpha+\beta i$ καί $\alpha-\beta i$ εἶναι δυό συζυγεῖς μιγάδες ἀριθμοί. Αὐτοί οἱ δυό ἀριθμοί ἔχουν μέτρα ἴσα.

Πράξεις μέ μιγαδικούς ἀριθμούς

163. Πρόσθεση. Ὀνομάζουμε ἄθροισμα πολλῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν τό μιγαδικό ἀριθμού, πού ἔχει γιά πραγματικό μέρος τό ἄθροισμα τῶν πραγματικῶν μερῶν τῶν προσθετέων καί γιά συντελεστή τοῦ i τό ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν τοῦ i στούς προσθετέους τοῦ ἀθροίσματος.

Ἔτσι ἐξ ὁρισμοῦ,

$$(\alpha+\beta i)+(\alpha_1+\beta_1 i)+(\alpha_2+\beta_2 i)+\cdots\cdots = (\alpha+\alpha_1+\alpha_2\cdots)+(\beta+\beta_1+\beta_2+\cdots)i$$

Ἔπειτα ἀπ' αὐτό τόν ὁρισμό καταλαβαίνουμε ὅτι ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως καὶ ὁ διαλυτικὸς (ἢ νόμος τοῦ προσεταιρισμοῦ) γιὰ τὴν πρόσθεση ἰσχύουν.

164. <u>Θεώρημα</u>. Τὸ μέτρο τοῦ ἀθροίσματος δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερο ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τους καὶ μεγαλύτερο ἀπὸ τὴ διαφορὰ τους.

Ἂν ἔχουμε τοὺς μιγαδικοὺς ἀριθμοὺς $\alpha+\beta i$, $\alpha_1+\beta_1 i$, θὰ δείξουμε, ὅτι:

$$1^{\underline{o}} \quad \sqrt{(\alpha+\alpha_1)^2+(\beta+\beta_1)^2} < \sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

$$2^{\underline{o}} \quad \sqrt{(\alpha+\alpha_1)^2+(\beta+\beta_1)^2} > \sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$$

Γιὰ νὰ δείξουμε, πὼς ἡ πρώτη ἀνισότητα ἰσχύει, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι*:

$$(\alpha+\alpha_1)^2+(\beta+\beta_1)^2-\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\right]^2 < 0$$

ἢ $$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1-\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)} < 0 \quad (1)$$

Ἐὰν ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ εἶναι ἀρνητικός, ἡ ἀλήθεια τῆς τελευταίας ἀνισότητος εἶναι φανερή· ἐὰν ὅμως ὁ ἀριθμὸς $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ εἶναι θετικός, ἀρκεῖ νὰ ἔχουμε,

$$(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2-(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2) < 0$$

ἢ $$-(\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2 < 0$$

Καὶ ἐπειδὴ ἡ τελευταία μας ἀνισότητα εἶναι ἀληθινὴ τὸ πρῶτο μέρος τῆς προτάσεώς μας ἀπεδείχθη.

Γιὰ νὰ δείξουμε τὸ $2^{\underline{o}}$ μέρος τῆς προτάσεώς μας ὑποθέτουμε $\sqrt{\alpha^2+\beta^2} > \sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}$**. Ἔτσι πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι:

$$(\alpha+\alpha_1)^2+(\beta+\beta_1)^2-\left[\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\sqrt{\alpha_1^2+\beta_1^2}\right]^2 > 0 \quad ἢ$$

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)} > 0 \quad (2)$$

Καὶ ἐὰν $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1 > 0$, τότε ἡ τελευταία ἀνισότητα εἶναι ὁλοφά-

---

* Εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν ἰδιότητα (στ) τῶν ἀνισοτήτων (σελ. 30), ὅτι τὸ σημεῖο μιᾶς διαφορᾶς δυὸ θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ σημεῖο τῆς διαφορᾶς τῶν τετραγώνων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

** Γιατί ἀλλοιῶς ἡ πρόταση εἶναι φανερή.

νερη. Έάν όμως $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1 < 0$ τό σημείο τού πρώτου μέλους της άνισότητός μας θά είναι τό ίδιο μέ τό σημείο της ποσότητος :

$$-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2) \text{ δηλ της } (\alpha\beta_1-\beta\alpha_1)^2.$$

Ώστε καί τό δεύτερο μέρος της προτάσεώς μας είναι άληθινό.

Ειδική περίπτωση. Έάν ή διαφορά $\alpha\beta_1-\beta\alpha_1$ είναι ίση μέ τό μηδέν, τό θεώρημα δέν ισχύει. Καί άς ύποθέσουμε πραγματικά ότι $\alpha\beta_1=\beta\alpha_1$ τότε θά έχουμε τήν άνισότητα :

$$/\alpha\alpha_1+\beta\beta_1/ = \sqrt{(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2} = \sqrt{\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\beta_1^2+2\alpha\beta\alpha_1\beta_1} = \sqrt{\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\beta_1^2+\alpha\beta\alpha_1\beta_1+\alpha\beta\alpha_1\beta}$$

καί έξ αίτίας πού $\alpha\beta_1=\beta\alpha_1$ έχουμε :

$$/\alpha\alpha_1+\beta\beta_1/ = \sqrt{\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\beta_1^2+\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)}$$

Έτσι, έάν ή ποσότητα $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ είναι θετική, τό πρώτο μέλος της άνισότητος (1) είναι ίσο μέ τό μηδέν καί έπομένως στήν περίπτωση αύτή τό μέτρο τού άθροίσματος είναι ίσο μέ τό άθροισμα τών μέτρων.

Έάν πάλι ή ποσότητα $\alpha\alpha_1+\beta\beta_1$ είναι άρνητική, τό πρώτο μέλος της (2) είναι ίσο μέ τό μηδέν καί έπομένως στήν περίπτωση αύτή τό μέτρο τού άθροίσματος είναι ίσο μέ τή διαφορά τών μέτρων.

165. Θεώρημα. Τό μέτρο τού άθροίσματος όσωνδήποτε μιγαδικών άριθμών είναι μικρότερο ή ίσο μέ τό άθροισμα τών μέτρων αύτών τών άριθμών.*

Τό θεώρημα αύτό τό δείξαμε παραπάνω γιά δυό προσθετέους, γιατί καί όταν τό μέτρο τού άθροίσματος είναι ίσο μέ τή διαφορά τών μέτρων τών δυό προσθετέων, είναι καί πάλι μικρότερο άπό τό άθροισμα τών μέτρων αύτών τών άριθμών.

---

* Όπως βλέπουμε ή πρόταση αύτή είναι ίδια μέ τή πρόταση, πού ισχύει γιά τήν άφηρημένη (άπόλυτη) τιμή τού άθροίσματος πραγματικών άριθμών.

Ἄς ὑποθέσουμε τώρα πώς εἶναι ἀληθινό τό θεώρημα γιά ἄθροισμα μέ $ν-1$ ὅρους καί θά δείξουμε ἐπίσης πώς εἶναι ἀληθινό καί γιά $ν$ ἀριθμούς.

Ὥστε, ἄν παραστήσουμε μέ $A_1, A_2, \dots A_{ν-1}$ τούς μιγαδικούς ἀριθμούς, πού θεωροῦμε, ὑποθέτουμε ὅτι :

$$|A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1}| \leq |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{ν-1}|$$

Ἔχουμε ὅμως : $|A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1}+A_ν| = |(A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1})+A_ν|.$

Καί ἐπειδή $|(A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1})+A_ν| \leq |A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1}|+|A_ν|$

ἔπειτα ἀπό τήν ὑπόθεσή μας, παίρνουμε τήν ἀνισότητα :

$$|A_1+A_2+\cdots+A_{ν-1}+A_ν| \leq |A_1|+|A_2|+\cdots+|A_{ν-1}|+|A_ν|.$$

166. Ἀφαίρεση. ὀνομάζουμε διαφορά δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν $α+βi$ καί $α_1+β_1 i$ τόν ἀριθμό $(α-α_1)+(β-β_1)i$.

167. Θεώρημα. Τό μέτρο τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι μικρότερο ἀπό τό ἄθροισμα καί μεγαλύτερο ἀπό τή διαφορά τῶν μέτρων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν.

Τό θεώρημα αὐτό γίνεται φανερό ἀπό τόν παραπάνω ὁρισμό τῆς διαφορᾶς δύο μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ἡ ποσότητα $α-α_1+(β-β_1)i$ ἐκφράζει τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀριθμῶν $α+βi$ καί $-α_1-β_1 i$, ἐνῶ οἱ ἀριθμοί $α_1+β_1 i$ καί $-α_1-β_1 i$ ἔχουν τό ἴδιο μέτρο.

168. Πολλαπλασιασμός. Τό γινόμενο ὁσωνδήποτε μιγαδικῶν ἀριθμῶν προκύπτει ἐξ ὁρισμοῦ, ἄν εἰς τό γινόμενο τῶν ὡς πρός i πρωτοβαθμίων διωνύμων, πού πραγματοποιεῖται μέ τό γνωστό ἀλγεβρικό κανόνα, ἀντικαταστήσουμε τό i^2 μέ τό -1.

Καί πρῶτα γιά δύο παράγοντες ἔχουμε :

$$(α+βi)\cdot(α_1+β_1 i) = αα_1+(α_1β+αβ_1)i+ββ_1 i^2$$

ἤ $$(α+βi)\cdot(α_1+β_1 i) = αα_1-ββ_1+(α_1β+αβ_1)i$$

Ἄς θεωρήσουμε τώρα ἕνα γινόμενο πολλῶν παραγόντων

$$(\alpha_1+\beta_1 i)(\alpha_2+\beta_2 i)(\alpha_3+\beta_3 i)\cdots\cdots(\alpha_\nu+\beta_\nu i)$$

Ἡ τιμή αὐτοῦ τοῦ γινομένου, ἔπειτα ἀπό τόν ὁρισμό πού δώσαμε, βρίσκεται κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο.

Πολλαπλασιάζουμε τόν πρῶτο παράγοντα μέ τόν δεύτερο, τό γινόμενο πού θά προκύψει μέ τόν τρίτο παράγοντα, τό νέο γινόμενο μέ τόν τέταρτο παράγοντα καί ἔτσι καθεξῆς.

Ἀπό τόν ὁρισμό, πού δίδουμε στό γινόμενο τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν, γίνεται φανερό πώς ἰσχύουν γι' αὐτό ἡ ἰδιότητα τῆς ἀντιμεταθέσεως καί ἡ ἰδιότητα τοῦ προσεταιρισμοῦ.

169. <u>Θεώρημα.</u> Τό μέτρο τοῦ γινομένου ὁσωνδήποτε μιγαδικῶν παραγόντων εἶναι ἴσο μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν παραγόντων.

Ἄς πάρουμε στήν ἀρχή δύο παράγοντες. Ἄν αὐτοί εἶναι οἱ $\alpha+\beta i$, $\alpha_1+\beta_1 i$ τό γινόμενό τους (ἐδ. 168) εἶναι ὁ ἀριθμός $\alpha\alpha_1-\beta\beta_1+(\alpha_1\beta+\alpha\beta_1)i$ καί τό μέτρο του εἶναι ἴσο μέ $\sqrt{(\alpha\alpha_1-\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1+\alpha_1\beta)^2}$ ἤ $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)}$ δηλ μέ τό γινόμενο τῶν μέτρων αὐτῶν τῶν ἀριθμῶν. Ὅσον ἀφορᾶ γιά γινόμενο πολλῶν μιγαδικῶν παραγόντων, μιά πού αὐτό ἔχει τίς ἴδιες ἰδιότητες πού ἔχει καί τό γινόμενο τῶν πραγματικῶν παραγόντων, μεταχειριζόμαστε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς καί ἐργαζόμαστε μέ τόν ἴδιο τρόπο πού ἐργαζόμαστε γιά γινόμενο πραγματικῶν παραγόντων.

170. <u>Θεώρημα.</u> Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι τό γινόμενο δύο μιγαδικῶν παραγόντων ἴσο μέ τό μηδέν, εἶναι, ὁ ἕνας ἀπό τούς δυό παράγοντές του νά εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν.

Γιά νά βροῦμε τό ἀναγκαῖο τῆς συνθήκης ὑποθέτουμε πώς τό γινόμενο $(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)$ εἶναι ἴσο μέ τό μηδέν.

Εἴδαμε (σελ. 174) ὅτι ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός ἴσος μέ τό μηδέν, εἶναι, τό μέτρο του νά εἶναι μηδέν· καί ἐπειδή τό μέτρο τοῦ παραπάνω γινομένου εἶναι ἴσο μέ

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\cdot\sqrt{\gamma^2+\delta^2} = \sqrt{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)}$$

ἕπεται ὅτι πρέπει $(\alpha^2+\beta^2)\cdot(\gamma^2+\delta^2)=0$. Τό τελευταῖο τοῦτο γινόμενο εἶναι γινόμενο πραγματικῶν ἀριθμῶν καί μᾶς εἶναι γνωστό πώς ἕνα τέτοιο γινόμενο εἶναι μηδενικό, ὅταν ἕνας ἀπό τούς παράγοντές του εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν. Ὥστε ἀναγκαστικά, ἤ θά ἔχουμε $\alpha^2+\beta^2=0$ ὁπότε $\alpha=\beta=0$ (1) ἤ $\gamma^2+\delta^2=0$ ὁπότε $\gamma=\delta=0$ (2). Οἱ ἰσότητες (1) δείχνουν τό μηδενισμό τοῦ πρώτου παράγοντα, οἱ ἰσότητες (2) τό μηδενισμό τοῦ δευτέρου.

Εἶναι ἡ συνθήκη ἀρκετή; Βέβαια, γιατί τότε τό μέτρο τοῦ ἑνός παράγοντα θά εἶναι μηδέν, ἄρα καί τό μέτρο τοῦ γινομένου τους.

171. Διαίρεση. Θά λέμε πώς διαιρέσαμε τό μιγαδικό ἀριθμό $\alpha+\beta i$ μέ τό μιγαδικό ἀριθμό $\gamma+\delta i$, ἄν βρήκαμε ἕναν μιγαδικό ἀριθμό $x+iy$ τέτοιον, ὥστε νά ἔχουμε: $\alpha+\beta i=(\gamma+\delta i)(x+iy)$.

Ἡ ἰσότητα αὐτή γράφεται: $\alpha+\beta i=\gamma x-\delta y+i(\delta x+\gamma y)$. Καί ἀπ' αὐτή προκύπτει $\alpha=\gamma x-\delta y$ $\quad\beta=\delta x+\gamma y$. Ἀπ' αὐτές τίς δυό τελευταῖες ἰσότητες παίρνουμε: $x=\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}$, $y=\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}$. Ὑποθέτουμε φυσικά ὅτι $\gamma^2+\delta^2\neq 0$ δηλ ὅτι ὁ μιγαδικός $\gamma+\delta i$ εἶναι διαφορετικός ἀπό τό μηδέν.

Τό πηλίκο λοιπόν τῆς διαιρέσεως τοῦ μιγαδικοῦ $\alpha+\beta i$ μέ τόν μιγαδικό $\gamma+\delta i$, πού τό σημειώνουμε μάλιστα μέ τό $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, ἐνῶ $\gamma+\delta i\neq 0$, εἶναι ὁ μιγαδικός ἀριθμός $\frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\cdot i$

172. Θεώρημα. Ἐάν πολλαπλασιάσουμε καί τούς δυό ὅρους ἑνός μιγαδικοῦ κλάσματος μέ τόν ἴδιο ἀριθμό, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν μεταβάλλεται.

Δηλ θά δείξουμε ὅτι εἶναι ἀληθινή ἡ ἰσότητα

$$\frac{A}{B}=\frac{A\cdot\Gamma}{B\cdot\Gamma}$$

ἄν τά Α, Β, Γ ἀντιπροσωπεύουν μιγαδικούς ἀριθμούς.

Πραγματικά, ἄν K εἶναι ἡ τιμή τοῦ λόγου $\frac{A}{B}$ θά ἔχουμε ἐξ ὁρισμοῦ $A = B\cdot K$ καί ἐπομένως καί $A\cdot\Gamma = B\cdot K\cdot\Gamma$ ἤ $A\cdot\Gamma = (B\cdot\Gamma)\cdot K$ πού δείχνει πώς K εἶναι ἐπίσης τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως τοῦ $A\cdot\Gamma$ μέ τό $B\cdot\Gamma$.

Χρησιμοποιοῦντες αὐτήν τήν ἰδιότητα μποροῦμε νά ἔχουμε ἕναν ἄμεσο προσδιορισμό τοῦ πηλίκου $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$· δέν ἔχουμε παρά νά πολλαπλασιάσουμε καί τούς δυό ὅρους τοῦ λόγου ἐπί τόν συζυγῆ ἀριθμό τοῦ διαιρέτου, δηλ μέ τόν $\gamma-\delta i$.

173. <u>Τετραγωνική ρίζα.</u> Νά βγάλουμε τήν τετραγωνική ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ $\alpha+\beta i$ σημαίνει νά βροῦμε ἕναν μιγαδικό ἀριθμό $x+iy$, πού νά ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα:

$$\alpha+\beta i = (x+iy)^2$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι, σύμφωνα μέ τά γνωστά, ἰσοδύναμη μέ τίς ἰσότητες:

$$x^2-y^2=\alpha \qquad 2xy=\beta \qquad (1)$$

Καταλαβαίνουμε λοιπόν πώς μένει ὁ προσδιορισμός τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν x καί y ἀπό τή λύση τοῦ συστήματος τῶν ἐξισώσεων (1).

Ἔτσι παίρνουμε: $(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)^2 = 4x^2y^2$ ἤ

$$(x^2+y^2)^2 = \alpha^2+\beta^2$$

καί ἐπειδή $x^2+y^2 > 0$, ἕπεται $x^2+y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ (2)

Ἄν τώρα τή (2) τή συνδυάσουμε μέ τήν πρώτη ἀπό τίς (1), βρίσκουμε:

$$x^2 = \frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}{2} \qquad y^2 = \frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}$$

δηλ ἰσότητες, πού τά δεύτερα μέλη τους εἶναι ὄντως ἀριθμοί θετικοί.

Τώρα τά x καί y πρέπει νά ἱκανοποιοῦν καί τή δευτέρα ἀπό τίς (1) καί ἔτσι, ἄν $\beta > 0$ τά x καί y θά εἶναι ὁμόσημα, ἄν ὅμως $\beta < 0$ τά x καί y θά εἶναι ἑτερόσημα. Ἔτσι:

$$\sqrt{\alpha+\beta i}\left\{\begin{array}{l} \text{ἄν } \beta > 0 \\ \text{ἄν } \beta < 0 \end{array}\right\}\begin{array}{l} = \pm\left[\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} + i\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right] \\ = \pm\left[\sqrt{\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}} - i\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right] \end{array}$$

Ἔτσι βλέπουμε πώς κάθε μιγαδικός ἀριθμός ἔχει πάντα δυό μιγαδικές ρίζες.

174. <u>Ρίζα μ τάξεως.</u> Ὀνομάζουμε ρίζα μ τάξεως (ὅπου μ θετικός

καί ἀκέραιος) τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ α+βi τόν μιγαδικό ἀριθμό x+iy, πού ἱκανοποιεῖ τήν ἰσότητα:

$$(x+iy)^{\mu} = \alpha+\beta i$$

Ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι ἰσοδύναμη μέ δυό ἰσότητες, πού περιέχουν τούς x καί y ὑψωμένους στή μιοστή δύναμη. Ἀπ' αὐτές τίς ἐξισώσεις, ἐξετάζοντες τό ζήτημα στή γενικότητά του, εἶναι ἀδύνατο μέ ἀλγεβρικούς τρόπους νά προσδιορίσουμε τά x καί y. Ἔτσι στά παρακάτω θά δείξουμε καλλίτερο τρόπο γιά τόν προσδιορισμό τῆς μιοστῆς ρίζας ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ καί θά βγάλουμε τό συμπέρασμα πώς κάθε μιγαδικός* ἀριθμός ἔχει μ ρίζες μ τάξεως.

175. Γεωμετρική παράσταση ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ μιγαδικός ἀριθμός ἀνήκει σέ διμοναδικό σύστημα ἀριθμῶν δηλ σέ σύστημα, πού οἱ ἀριθμοί του γίνονται ἀπό διαφορετικῆς φύσεως μονάδες δηλ ἀπό μονάδες, πού ἡ σχέση τους δέν εἶναι σχέση πρώτου βαθμοῦ. Πραγματικά, ἡ σχέση τῶν μονάδων τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δευτεροβάθμια.

Σχ. 27

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τόν ἄξονα τῶν x καί ἕνα σημεῖο του Α μέ τετμημένη α. Τό συμμετρικό σημεῖο τοῦ Α, ὡς πρός τήν ἀρχή Ο, θά ἔχει τετμημένη − α. Αὐτή τή σχέση ἀνάμεσα στίς τετμημένες τῶν σημείων Α καί Α΄ μποροῦμε νά τήν ἑρμηνεύσουμε ὡς ἑξῆς: Ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ ἀριθμοῦ α ἐπί τήν ἀρνητική μονάδα ἔχει σάν ἀποτέλεσμα νά μεταθέσει τό σημεῖο Α στή θέση Α΄ ἤ καλλίτερα νά στρέψει τό διάνυσμα ΟΑ κατά γωνία 180°.

---

* Καί γενικά κάθε ἀριθμός, ἀφοῦ τό σύμβολο α+βi κλίνει καί τούς πραγματικούς ἀριθμούς.

Ἑρμηνεύουμε δηλ. γεωμετρικά μιά ἀναλυτική πράξη, καί ἡ ἑρμηνεία αὐτή ἀποκαλύπτει τό ρόλο τοῦ -1· εἶναι ὁ στροφεύς τοῦ διανύσματος ΟΑ κατά γωνία 180°.

Αὐτή ὅμως τή στροφή μποροῦμε νά τή θεωρήσουμε γενομένη σέ δύο φάσεις· τή μιά πού στρέφει τό διάνυσμα ΟΑ κατά γωνία 90° καί τό φέρνει πάνω στόν ἄξονα τῶν y καί τήν ἄλλη, πού τό ξαναστρέφει κατά 90° καί τό φέρνει στή θέση ΟΑ'.

Γιά τή στροφή τοῦ ΟΑ κατά γωνία 180° χρειαστήκαμε σάν στροφέα τήν ποσότητα -1. Ἄν λοιπόν συμβολίσουμε μέ τό y τήν ἀριθμητική ἀξία τοῦ στροφέως ἑνός διανύσματος κατά γωνία 90°, ἐννοοῦμε πώς στή θέση ΟΒ τοῦ διανύσματος ΟΑ ἡ ἀριθμητική του ἐκπροσώπηση θά εἶναι αy. Ἐάν τώρα θέλουμε νά φέρουμε τό ΟΒ στή θέση ΟΑ', θά πρέπει τόν ἀριθμό αy νά τόν πολλαπλασιάσουμε ἐπί τόν στροφέα y. Δηλ. ἡ ἀριθμητική ἐκπροσώπηση τοῦ ΟΑ', ὁ ἀριθμός $-\alpha$, θά ἰσοῦται μέ $\alpha y \cdot y = \alpha y^2$, ἄν συμφωνήσουμε νά δώσουμε στό νέο σύμβολο τίς ἰδιότητες τῶν γνωστῶν μας συμβόλων. Ὥστε:

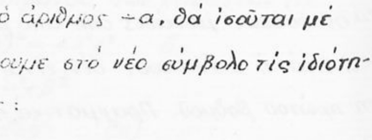
$$\alpha y^2 = -\alpha$$

δηλ.

$$y^2 = -1$$

Βλέπουμε λοιπόν πώς τό y εἶναι ταυτόσημο μέ τό i καί ἰδού μιά προσφορά τοῦ νέου μου συμβόλου: ἡ ἀναλυτική ἑρμηνεία μιᾶς στροφῆς.

Ἄς θεωρήσουμε τώρα τόν ἀριθμό $\alpha+\beta i$. Πάνω στόν ἄξονα τῶν x παίρνουμε ἕνα διάνυσμα ΟΑ μέ τετμημένη α καί ἀπό τό Α ἕνα διάνυσμα ΑΒ μέ τετμημένη β. Σύμφωνα μέ τά προηγούμενα ὁ ἀριθμός βi θά ἐκπροσωπεῖ τό διάνυσμα ΑΜ καί ὁ $\alpha+\beta i$ τό διάνυσμα ΟΜ, πού εἶναι ὅπως εἶναι γνωστό, τό γεωμετρικό ἄθροι-

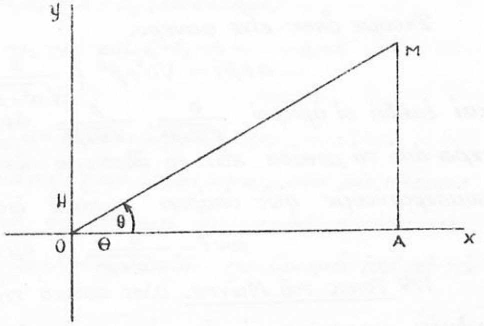


Σχ. 28

σμα τῶν διανυσμάτων ΟΑ καί ΑΜ. Ἔτσι μποροῦμε νά λέμε: ὁ ἀριθμός $\alpha+\beta i$ ἐκπροσωπεῖ τό σημεῖο, πού ἔχει τετμημένη α καί τεταγμένη βi, ὅπου τό i εἶναι μιά μονάδα, πού συνδέεται μέ τή μονάδα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν μέ τή δευτεροβάθμια σχέση $i^2=-1$. (Βλ. ἐδ.153).

176. Τριγωνομετρική ἔκφραση τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. Εἶναι φανερό πώς ἡ θέση τοῦ σημείου Μ στό ἐπίπεδο εἶναι ὁρισμένη, ἄν γνωρίζουμε τή γωνία $x\hat{O}M=\theta$ καί τόν ἀριθμό, πού μετράει τό διάνυσμα ΟΜ.

Ὁ ἀριθμός, πού μετράει τό ΟΜ παριστάνεται μέ τό ρ, εἶναι ἴσος μέ $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ * καί θεωρεῖται θετικός. Τό ρ θεωρεῖται μεταβαλλόμενο ἀπό τό 0.......+∞ καί ἡ θ ἀπό 0......2π ἀκτίνια. Οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί (ρ,θ) ὀνομάζονται μέτρο καί ὄρισμα τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ. Ἄν θ εἶναι τό ὄρισμα ἑνός μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ, μποροῦμε νά ποῦμε πώς εἶναι καί θ+2κπ, ὅπου κ ἀκέραιος καί ἀλγεβρικός ἀριθμός, γιατί οἱ γωνίες θ καί θ+2κπ θά μᾶς δώσουν τήν ἴδια διεύθυνση πάνω στήν ὁποία θά πάρουμε τό ρ. Ἄν παραπάνω εἴπαμε πώς ἡ θ μεταβάλλεται μεταξύ 0.....2π ἀκτίνια τό εἴπαμε γιατί αὐτή ἡ μεταβολή εἶναι ἱκανή γιά νά καλύψουμε ὁλόκληρη τήν ἔκταση τοῦ ἐπιπέδου.



Σχ. 29

Ἀπό τό ὀρθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ ἔχουμε:

$$(\overrightarrow{OA})=\alpha=\rho\,\sigma\upsilon\nu\theta \text{ καί } (\overrightarrow{AM})=\beta=\rho\,\eta\mu\theta$$

---

* Λέμε πώς τό μῆκος τοῦ ΟΜ εἶναι $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ γιατί τό β ἀποτελεῖ τό μέτρο τοῦ ἀριθμοῦ βi, τήν ἀφηρημένη (ἀπόλυτη) τιμή τοῦ διανύσματος ΑΜ. Τό i παίζει ρόλο, πού στούς πραγματικούς ἀριθμούς παίζει τό πρόσημο (+ ἤ –) τοῦ ἀριθμοῦ.

Ἔτσι ὁ $α+βi$ παίρνει τήν τριγωνομετρική μορφή $ρ\,(συνθ+iημθ)$ ἤ $ρ\,[συν(θ+2κπ)+iημ(θ+2κπ)]$.

177. Σημείωση. Δύο μιγαδικοί ἀριθμοί, πού εἶναι ἴσοι θά παριστάνουν τό ἴδιο σημεῖο καί ἐπομένως, ἄν εἶναι γραμμένοι μέ τριγωνομετρική μορφή, θά πρέπει νά ἔχουν τό ἴδιο μέτρο, τά δέ ὀρίσματά τους, ἄν διαφέρουν, νά διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο περιφερείας.

178. Παρατήρηση. Τήν τριγωνομετρική ἔκφραση τοῦ μιγαδικοῦ ἀριθμοῦ μπορούσαμε νά τήν δικαιολογήσουμε καί μ' ἄλλο τρόπο.

Ἔχουμε ὅπως εἶνε φανερό

$$α+βi=\sqrt{α^2+β^2}\left(\frac{α}{\sqrt{α^2+β^2}}+i\,\frac{β}{\sqrt{α^2+β^2}}\right)$$

καί ἐπειδή οἱ ἀριθμοί $\frac{α}{\sqrt{α^2+β^2}}$, $\frac{β}{\sqrt{α^2+β^2}}$ ἀφηρημένα (ἀπόλυτα) εἶναι μικρότεροι ἀπό τή μονάδα καί τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των κάμνει 1, συμπεραίνουμε πώς ὑπάρχει γωνία θ διά τήν ὁποίαν

$$συνθ=\frac{α}{\sqrt{α^2+β^2}}, \quad ημθ=\frac{β}{\sqrt{α^2+β^2}}.$$

179. Τύπος τοῦ Moivre. Ὅλες φυσικά τίς πράξεις ἐπί τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν μποροῦμε νά τίς κάμουμε καί ὅταν τούς θεωροῦμε μέ τήν τριγωνομετρική τους μορφή, μά ἀπό τίς τέσσερες πράξεις μᾶς ἐνδιαφέρει ἰδιαίτερα ὁ πολλαπλασιασμός καί αὐτόν θά ὑποδείξουμε. Ἄς ποῦμε πώς ἔχουμε τούς ἀριθμούς :

$$A_1=ρ_1\,(συνθ_1+iημθ_1), \quad A_2=ρ_2\,(συνθ_2+iημθ_2)$$

Εὔκολα βρίσκουμε :

$$A_1A_2=ρ_1ρ_2\,[συνθ_1συνθ_2-ημθ_1ημθ_2+i\,(ημθ_1συνθ_2+ημθ_2συνθ_1)] \text{ ἤ } A_1A_2=ρ_1ρ_2[συν(θ_1+θ_2)+iημ(θ_1+θ_2)]$$ [*]

Δηλ τό γινόμενο δυό μιγαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἕνας μιγαδικός ἀριθμός, πού ἔχει μέτρο τό γινόμενο τῶν μέτρων τῶν ἀριθμῶν μας καί ὄρισμα τό ἄθροισμα τῶν ὀρισμάτων τους.

---

[*] Ἡ τριγωνομετρία ἀποδεικνύει τίς ἰσότητες : $συν(θ_1+θ_2)=συνθ_1συνθ_2-ημθ_1ημθ_2$ καί $ημ(θ_1+θ_2)=ημθ_1συνθ_2+ημθ_2συνθ_1$.

Ἄν λοιπόν εἴχαμε κι ἄλλο μιγαδικό ἀριθμό τόν $A_3=\rho_3(\text{συν}\theta_3+i\,\text{ημ}\theta_3)$ ἐφαρμόζοντες τόν παραπάνω κανόνα γιά τούς ἀριθμούς A_1A_2 καί A_3, θά βρίσκαμε:

$$A_1A_2A_3=\rho_1\rho_2\rho_3[\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\theta_3)$$

Ὥστε, γενικά ἔχουμε:

$$A_1A_2\cdots A_\nu=\rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu[\text{συν}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu)+i\,\text{ημ}(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_\nu)] \quad (2)$$

Ἄν συνέβαινε νά ἔχουμε:

$$A_1=A_2=\cdots=A_\nu=A=\rho\;(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)$$

τότε: $\rho_1=\rho_2=\rho_3=\cdots=\rho_\nu=\rho$ καί $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\cdots=\theta_\nu=\theta$

καί ἡ ἰδιότητα (2) γίνεται:

$$A^\nu=\rho^\nu[\text{συν}(\nu\theta)+i\,\text{ημ}(\nu\theta)] \quad (3)$$

Ὁ τύπος (3) εἶναι ὁ τύπος τοῦ Moivre, πού μᾶς λέγει: Ἕνας μιγαδικός ἀριθμός ὑψοῦται σέ δύναμη, ἄν ὑψωθεῖ σ' αὐτή τή δύναμη τό μέτρο του καί πολλαπλασιασθεῖ τό ὄρισμά του μέ τόν ἐκθέτη αὐτῆς τῆς δυνάμεως.

180. **Ρίζα μ τάξεως.** Κάθε ἀριθμός, ὅπως ἐπανειλημμένα τονίσαμε, μορφοῦται στό σύμβολο α+βi. Θά ζητήσουμε τώρα τή μ τάξεως ρίζα αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ.

Ὅπως εἴπαμε ὁ ἀριθμός μας γράφεται $\rho(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)$ καί ζητᾶμε νά βροῦμε ἕναν ἄλλο ἀριθμό $r(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)$ τέτοιον, ὥστε νά ἀληθεύει ἡ ἰσότητα:

$$[r(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)]^\mu=\rho\,(\text{συν}\theta+i\,\text{ημ}\theta)$$

δηλ

$$r^\mu.[\text{συν}(\mu\varphi)+i\,\text{ημ}(\mu\varphi)]=\rho(\text{ων}\theta+i\,\text{ημ}\theta).$$

Ἀλλά ἡ ἰσότητα αὐτή εἶναι δυνατή, ἄν $r^\mu=\rho$· δηλ ἄν $r=\sqrt[\mu]{\rho}$ καί ἄν τό μφ συμπίπτει μέ τό θ ἤ διαφέρει ἀπ' αὐτό κατά πολλαπλάσιο ἀκεραίας περιφερείας, δηλ $\mu\varphi=\theta+2\kappa\pi$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$\sqrt[\mu]{\rho(\text{ων}\theta+i\,\text{ημ}\theta)}=r\,(\text{συν}\varphi+i\,\text{ημ}\varphi)=\sqrt[\mu]{\rho}\left[\text{συν}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\mu}+i\,\text{ημ}\frac{\theta+2\kappa\pi}{\mu}\right].$$

Ὁ παραπάνω τύπος, ἀφοῦ τό κ παίρνει κάθε ἀκεραία τιμή, μᾶς παρέχει ἄπειρες τιμές γιά τή μ τάξεως ρίζα τοῦ θεωρουμένου μιγάδος μά καθώς θά δείξουμε ἀπ'αὐτές οἱ διαφορετικές εἶναι μ.

Εἶναι γνωστό πώς κάθε ἀκέραιος κ μπορεῖ νά τεθεῖ κάτω ἀπό τή μορφή $κ = μλ + υ$, ὅπου τό λ εἶναι ὁ οἱοσδήποτε ἀκέραιος καί τό ν παίρνει τίς τιμές 0, 1, 2, ... (μ-1). Ἔτσι ἔχουμε :

$$\frac{θ+2κπ}{μ} = \frac{θ+2π(μλ+υ)}{μ} = 2λπ + \frac{θ+2πυ}{μ}.$$

καί κατά συνέπεια οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τοῦ $\frac{θ+2κπ}{μ}$ συμπίπτουν μέ τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τοῦ $\frac{θ+2πυ}{μ}$, γιατί τά τόξα αὐτά διαφέρουν κατά ἀκέραιες περιφέρειες.

<u>Ὥ</u>στε :

$$\sqrt[μ]{ρ(συνθ+iημθ)} = \sqrt[μ]{ρ}\left[συν\frac{θ+2πυ}{μ} + iημ\frac{θ+2πυ}{μ}\right]$$

ἐνῶ τό υ παίρνει, ὅπως εἴπαμε, τίς μ τιμές: 0, 1, 2, ... (μ-1).

Οἱ μ αὐτές τιμές τῆς μ τάξεως ρίζας τοῦ ἀριθμοῦ μας εἶναι διαφορετικές μεταξύ τους. Πραγματικά, ὅλες ἔχουν κοινό μέτρο τή $\sqrt[μ]{ρ}$ μά τά ὁρίσματά τους εἶναι διαφορετικά καί δέν διαφέρουν κατά ἀκέραιο πολλαπλάσιο περιφερείας. Ἰδού, ἄς πάρουμε ἀπό τίς παραπάνω τιμές τοῦ υ δύο οἱεσδήποτε, τίς $υ_1, υ_2$. Σ'αὐτές τίς τιμές ἀντιστοιχοῦν τά ὁρίσματα $\frac{θ+2πυ_1}{μ}$, $\frac{θ+2πυ_2}{μ}$ καί ἡ διαφορά τους εἶναι $\frac{2π(υ_1-υ_2)}{μ}$, ἐνῶ τό $\frac{υ_1-υ_2}{μ}$ εἶναι ἀφηρημένα (ἀπόλυτα) μικρότερο ἀπό τή μονάδα, ἀφοῦ τό καθένα ἀπό τά $υ_1, υ_2$ εἶναι μικρότερο ἀπό τό μ.

Ἀσκήσεις

280) Γράψετε τόν τύπο, πού δίδει τίς νιοστές ρίζες τῆς θετικῆς μονάδος καί δείξετε ὅτι μία ἀπ'αὐτές, (πού μάλιστα λέγεται ἀρχική ρίζα) ὅταν ὑψωθεῖ στίς δυνάμεις, πού ἔχουν ἐκθέτη 1, 2, 3, ... ν, δίδει ὅλες τίς ἄλλες ρίζες.

281) Νά δείξετε ὅτι οἱ νιοστές ρίζες ἑνός ἀριθμοῦ βρίσκονται ὅταν ἡ μιά ἀπ'αὐτές πολλαπλασιασθεῖ διαδοχικά μέ τίς νιοστές ρίζες τῆς θετικῆς μονάδος.

282) Ὅταν ἕνας ἀριθμός ἀντιστραφεῖ, τί παθαίνει τό μέτρο του καί τί τό ὄρισμά του;

283) Νά θέσετε στή μορφή α+βi τίς παραστάσεις:

$$\frac{25}{4+3i}, \quad \frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}, \quad \frac{(2+i)^2+(2-i)^2}{(2+i)^2-(2-i)^2}$$

284) Νά θέσετε τήν παράσταση $(1+i\sqrt{3})^7$ στή μορφή α+βi χρησιμοποιοῦντες τήν τριγωνομετρική μορφή.

285) Ὑπολογίσετε τήν τετραγωνική ρίζα τῶν ἀριθμῶν $4+3i$ καί $9+40i$ ἀκολουθοῦντες δρόμο καθαρά ἀλγεβρικό ἤ χρησιμοποιοῦντες μέτρα καί ὁρίσματα.

286) Ἡ μία ἀπό τίς κυβικές ρίζες τοῦ ἀριθμοῦ $18\sqrt{3}+35i$ εἶναι $2\sqrt{3}+i$. Ἐπαληθεύσετε αὐτό τό γεγονός καί ὑπολογίσετε τίς ἄλλες δύο ρίζες.

287) Διαπιστώσετε τήν ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma \equiv (\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta j+\gamma j^2)(\alpha+\beta j^2+\gamma j)$$

ὅπου j καί j^2 εἶναι οἱ φανταστικές κυβικές ρίζες τῆς μονάδος.

Γενική Θεωρία τῶν Ἀκεραίων Πολυωνύμων μέ πραγματικούς συντελεστές.

α) Ἐκ ταυτότητος ἴσα μέ τό μηδέν Πολυώνυμα. Ἐκ ταυτότητος ἴσα.

181. Ὁρισμός. Ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x ὀνομάζεται ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν, ὅταν παίρνει ἀριθμητική τιμή μηδέν γιά κάθε ὁρισμένη τιμή τοῦ x.

182. Θεώρημα. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἕνα ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν, εἶναι, ὅλοι οἱ συντελεστές του νά εἶναι μηδενικά.

Ἄς ζητήσουμε πρῶτα πρῶτα τήν ἀναγκαία συνθήκη γιά νά εἶναι ἕνα πρωτοβάθμιο διώνυμο ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν. Ἔστω λοιπόν ὅτι τό

$$f(x) \equiv a_1 x + a_0$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν δηλ. ἔστω ὅτι ἔχουμε $f(x) \equiv 0$. Ἀφοῦ τό $f(x)$, ἀπό ὑπόθεση, μηδενίζεται γιά κάθε τιμή τοῦ x, θά μηδενίζεται καί γιά τήν τιμή τοῦ $x=0$· ἄρα $f(0)=a_0=0$. Ἔτσι, συνέπεια τῆς ὑποθέσεώς μας εἶναι νά ἔχουμε $a_0=0$ καί ἐπομένως νά εἶναι τό $a_1 x \equiv 0$. Ἀφοῦ ὅμως ἡ τελευταία ἰσότητα θά ἀληθεύει γιά κάθε τιμή τοῦ x θά ἀληθεύει καί γιά τήν τιμή τοῦ $x=1$· μά τότε ἀναγκαστικά εἶναι τό $a_1=0$. Εἶναι εὔκολο τώρα νά καταλάβουμε πώς, γιά νά δείξουμε τήν ἰσχύ τοῦ θεωρήματος γιά κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x, ἀρκεῖ νά μεταχειριστοῦμε τή μέθοδο τῆς πλήρους ἐπαγωγῆς. Ἔτσι, ὑποθέτουμε πώς τό θεώρημα ἰσχύει γιά πολυώνυμο ἀκέραιο τοῦ x καί βαθμοῦ $\nu-1$ καί θά ἀποδείξουμε ὅτι ἰσχύει καί γιά πολυώνυμο* βαθμοῦ ν.

Ἐάν λοιπόν γιά τό

$$f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + a_{\nu-2} x^{\nu-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ἰσχύει ἡ ταυτότητα $f(x) \equiv 0$ δηλ. ἐάν

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1} x^{\nu-1} + a_{\nu-2} x^{\nu-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \equiv 0 \quad (1)$$

τότε ἡ ταυτότητα αὐτή θά ἰσχύει καί γιά τήν τιμή του x, κx ὅπου κ πραγματικός ἀριθμός διαφορετικός ἀπό τό μηδέν καί τή μονάδα.

Ἔτσι:

$$\kappa^\nu a_\nu x^\nu + \kappa^{\nu-1} a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \kappa^{\nu-2} a_{\nu-2} x^{\nu-2} + \cdots + \kappa^2 a_2 x^2 + \kappa a_1 x + a_0 \equiv 0 \quad (2)$$

Ἄν τώρα ἀφαιρέσουμε τά μέλη τῆς (2) ἀπό τά ἀντίστοιχα μέλη τῆς (1) ἀφοῦ πρῶτα τά μέλη τῆς (1) πολλαπλασιασθοῦν ἐπί κ^ν, δημιουργοῦμε καί πάλι μιά ταυτότητα. Ἔχουμε λοιπόν:

$$(\kappa^\nu - \kappa^{\nu-1}) a_{\nu-1} x^{\nu-1} + (\kappa^\nu - \kappa^{\nu-2}) a_{\nu-2} x^{\nu-2} + \cdots + (\kappa^\nu - \kappa) a_1 x + (\kappa^\nu - 1) a_0 \equiv 0$$

Μά γιά πολυώνυμο βαθμοῦ $\nu-1$ ὑποθέσαμε πώς ἡ πρόταση εἶναι ἀληθινή. Ἔτσι ἔχουμε, $a_{\nu-1} = a_{\nu-2} = \cdots = a_1 = a_0 = 0$ καί ἀπό τήν ἰσότητα (1) λαμβάνουμε:

---

* Ἀπό δῶ καί στό ἑξῆς, ὅταν θά λέμε ἁπλῶς πολυώνυμο θά ἐννοοῦμε ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο.

$$a_\nu x^\nu \equiv 0$$

Καί, ἐπειδή ἡ τελευταία αὐτή ταυτότητα θά ἰσχύει διά κάθε τιμή τοῦ χ, θά ἰσχύει καί γιά τήν τιμή τοῦ $x=1$· μά γι' αὐτή τήν τιμή παίρνουμε $a_\nu=0$.

Τό ἀρκετό πάλιν τῆς συνθήκης μας εἶναι ὁλοφάνερο.

183. Ὁρισμός. Δυό ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ χ ὀνομάζονται ἐκ ταυτότητος ἴσα, ἄν παίρνουν τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή γιά κάθε ὁρισμένη τιμή τοῦ χ μά τήν ἴδια καί γιά τά δύο.

184. Θεώρημα. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι δυό ἀκέραια τοῦ χ πολυώνυμα ἐκ ταυτότητος ἴσα, εἶναι, νά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ συντελεστές τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἴσοι.

Ἄς ὑποθέσουμε πώς τά ἀκέραια τοῦ χ πολυώνυμα:

$$f(x) \equiv a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + a_{\nu-2}x^{\nu-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$f_1(x) \equiv \beta_{\nu-\kappa}x^{\nu-\kappa} + \beta_{\nu-\kappa-1}x^{\nu-\kappa-1} + \dots + \beta_1x + \beta_0$$

ἱκανοποιοῦν τήν ἰσότητα:

$$f(x) \equiv f_1(x) \text{ ἤ τήν } f(x) - f_1(x) \equiv 0$$

ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ὁρισμένη τιμή, πού δίδουμε στή μεταβλητή χ.

Ἔτσι ἔχουμε πώς τό πολυώνυμο:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-\kappa+1}x^{\nu-\kappa+1} + (a_{\nu-\kappa} - \beta_{\nu-\kappa})x^{\nu-\kappa} + (a_{\nu-\kappa-1} - \beta_{\nu-\kappa-1})x^{\nu-\kappa-1} + \dots\dots$$

$$\dots\dots + (a_1 - \beta_1)x + a_0 - \beta_0,$$

εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν, καί σύμφωνα μέ τό προηγούμενο θεώρημα, παίρνουμε τίς ἰσότητες:

$$a_\nu = a_{\nu-1} = \dots = a_{\nu-\kappa+1} = 0, \quad a_{\nu-\kappa} = \beta_{\nu-\kappa}, \quad a_{\nu-\kappa-1} = \beta_{\nu-\kappa-1}, \dots a_1 = \beta_1,\ a_0 = \beta_0$$

πού, ὅπως εἶναι ὁλοφάνερο, δικαιολογοῦν τό ἀναγκαῖο τῆς συνθήκης, πού διατυπώσαμε. Τό ἀρκετό καί ἐδῶ τῆς συνθήκης μας εἶναι ὁλοφάνερο.

185. Θεώρημα. Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη ἵνα ὁ λόγος δυό ἀκεραίων πολυωνύμων

τοῦ x εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x* εἶναι, τά πολυώνυμα νά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ συντελεστές τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων νά εἶναι ἀνάλογοι.

Ἄς θεωρήσουμε τά πολυώνυμα τοῦ προηγουμένου ἐδαφίου καί ἄς ὑποθέσουμε πώς ἰσχύει ἡ ταυτότητα:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)} \equiv \lambda \quad \text{ἤ ἡ} \quad f(x) - \lambda f_1(x) \equiv 0$$

ὅπου λ ἕνας ὁρισμένος ἀριθμός, γιά ὁποιαδήποτε ὁρισμένη τιμή τοῦ x.

Ὥστε θά ἔχουμε:

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \dots + a_{\nu-\kappa-1}x^{\nu-\kappa-1} + (a_{\nu-\kappa} - \lambda\beta_{\nu-\kappa})x^{\nu-\kappa} + (a_{\nu-\kappa-1} - \lambda\beta_{\nu-\kappa-1})x^{\nu-\kappa-1} + \dots\dots$$

$$\dots\dots + (a_1 - \lambda\beta_1)x + a_0 - \lambda\beta_0 \equiv 0$$

καί κατά τό πρῶτο θεώρημα θά ἰσχύουν οἱ ἰσότητες:

$a_\nu = a_{\nu-1} = \dots = a_{\nu-\kappa-1} = 0$ (1) $a_{\nu-\kappa} = \lambda\beta_{\nu-\kappa}$, $a_{\nu-\kappa-1} = \lambda\beta_{\nu-\kappa-1} \cdots\cdots a_1 = \lambda\beta_1$, $a = \lambda\beta$ (2)

Οἱ ἰσότητες (1) μᾶς βεβαιώνουν πώς ἀναγκαστικά τό πολυώνυμα θά εἶναι ἰσοβάθμια καί οἱ (2), ἄν δέν εἶναι κάποιος ἀπό τούς συντελεστές $a_{\nu-\kappa}$, $a_{\nu-\kappa-1}\cdots$, a_0, μηδέν, ὁπότε καί ὁ ἀντίστοιχος β δέν θά εἶναι μηδέν, ἀντικαθίστανται ἀπό τίς ἰσότητες:

$$\lambda = \frac{a_{\nu-\kappa}}{\beta_{\nu-\kappa}} = \frac{a_{\nu-\kappa-1}}{\beta_{\nu-\kappa-1}} = \dots\dots = \frac{a_1}{\beta_1} = \frac{a_0}{\beta_0} \quad (3)$$

δηλ ἀπό ἰσότητες πού συμπληρώνουν τό ἀναγκαῖο τῆς συνθήκης, πού διατυπώσαμε. Καί τώρα ἄς δείξουμε τό ἀρκετό τῆς συνθήκης μας. Ὑποθέτουμε πώς τά πολυώνυμά μας εἶναι ἰσοβάθμια, ἐνῶ οἱ συντελεστές τῶν ὅρων τοῦ $f(x)$ εἶναι ἴσοι ἀντίστοιχα μέ τούς συντελεστές τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων τοῦ $f_1(x)$, πού εἶναι πολλαπλασιασμένοι ἐπί λ. Τότε

$$f(x) \equiv \lambda f_1(x) \quad \text{ἤ} \quad \frac{f(x)}{f_1(x)} \equiv \lambda.$$

186. <u>Παρατήρηση.</u> Ἐάν μερικοί ἀπό τούς συντελεστές a εἶναι μηδέν θά εἶναι μηδέν καί οἱ ἀντίστοιχοι β. Αἱ ἰσότητες τότε (3), πού δημιουργοῦνται

---

* Δηλ εἶναι ἴσος μέ μιά σταθερά τιμή λ ἀνεξάρτητα ἀπό τήν ὁρισμένη τιμή, πού παίρνει ἡ μεταβλητή x.

ἀπό τίς (2) θά ἐξασφαλίζουν σύμφωνα μέ τά ἐκτεθέντα τό ἀρκετόν τῆς συνθήκης μας.

187. Σημείωση. Εἶναι φανερό πώς γιά νά ἐξακριβώσουμε, ἄν τά παραπάνω τρία θεωρήματα ἰσχύουν καί γιά πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν, ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε καί γιά τέτοια πολυώνυμα τήν ἰσχύ τοῦ πρώτου ἀπ' αὐτά. Θά πρέπει λοιπόν νά δείξουμε ὅτι: Ἡ ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη γιά νά εἶναι ἕνα πολυώνυμο πολλῶν μεταβλητῶν ἐκ ταυτότητος ἴσο πρός τό μηδέν, εἶναι, ὅλοι οἱ συντελεστές του νά εἶναι μηδενικά.

Τό θεώρημά μας ἔχει ἤδη ἀποδειχθεῖ γιά πολυώνυμο μιᾶς μεταβλητῆς. Θά δεχθοῦμε λοιπόν πώς ἰσχύει γιά πολυώνυμο ν-1 μεταβλητῶν καί θά ἀποδείξουμε πώς ἰσχύει καί γιά πολυώνυμο ν μεταβλητῶν.

Ἔστω τό πολυώνυμο $f(x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_\nu)$ τῶν ν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $x_1, x_2, \dots\dots x_\nu$, πού ὑποτίθεται ἐκ ταυτότητος ἴσο μέ τό μηδέν.

Διατάσσουμε αὐτό τό πολυώνυμο κατά τίς κατιοῦσες δυνάμεις τῆς μεταβλητῆς x_1 καί παίρνουμε:

$$f(x_1, x_2, \dots\dots x_\nu) = A_\mu x_1^\mu + A_{\mu-1} x_1^{\mu-1} + \dots + A_1 x_1 + A_0$$

ὅπου τά $A_\mu, A_{\mu-1}, \dots A_1, A_0$ παριστοῦν πολυώνυμα τῶν ν-1 μεταβλιτῶν $x_2, x_3, \dots\dots x_\nu$. Ἄν δώσουμε σ' αὐτές τίς μεταβλητές τυχοῦσες ἀριθμητικές τιμές $x'_2, x'_3, \dots\dots x'_\nu$, τό πολυώνυμό μας γίνεται:

$$A'_\mu x_1^\mu + A'_{\mu-1} x_1^{\mu-1} + \dots\dots + A'_1 x_1 + A'_0$$

ὅπου $A'_\mu, A'_{\mu-1}, \dots\dots A'_0$ εἶναι οἱ ἀριθμητικές τιμές, πού παίρνουν τά πολυώνυμα $A_\mu A_{\mu-1}, \dots\dots A_0$ ὅταν σ' αὐτά ἀντικαταστήσουμε τίς μεταβλητές $x_2, x_3, \dots\dots x_\nu$ ἀπό τίς τιμές $x'_2, x'_3, \dots\dots x'_\nu$.

Κάτω ἀπ' αὐτές τίς συνθῆκες τό πολυώνυμό μας μένει ἐκ ταυτότητος ἴσο πρός τό μηδέν, ἐνῶ θεωρεῖται πολυώνυμο μόνο τῆς μεταβλητῆς x_1 Ὥστε :

$$A'_\mu = 0, \ A'_{\mu-1} = 0, \ A'_{\mu-2} = 0 \ldots\ldots A'_1 = 0 \quad A'_0 = 0 \quad (1)$$

Οἱ ἀριθμοί ὅμως $x'_2, x_3, \ldots\ldots x'_\nu$ εἶναι αὐθαίρετα ἐκλεγμένοι καί συνεπῶς οἱ ἰσότητες (1) ἐκφράζουν πώς τά πολυώνυμα $A_\mu, A_{\mu-1} \ldots\ldots A_0$ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα πρός τό μηδέν*. Ἐπειδή ὅμως τό καθένα ἀπ' αὐτά τά πολυώνυμα εἶναι πολυώνυμο τῶν $\nu-1$ μεταβλητῶν καί γιά τέτοια πολυώνυμα δεχθήκαμε τήν ἰσχύ τοῦ θεωρήματος, ἕπεται, ὅτι ὅλοι οἱ συντελεστές τους εἶναι μηδενικά. Συμπεραίνουμε λοιπόν πλέον πώς ὅλοι οἱ συντελεστές τοῦ $f(x_1, x_2, \ldots\ldots x_\nu) = 0$ εἶναι μηδενικά. Τό ἀρκετό φυσικά τῆς συνθήκης εἶναι φανερό.

β) Γενικές Ἰδιότητες τῶν Πολυωνύμων

188. Θεώρημα. Ἐάν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x διαιρεῖται μέ τό καθένα ἀπό τά διώνυμα $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, ἐνῶ τά α, β, γ εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους** θά διαιρεῖ-

---

* Δηλ. οἱ ἰσότητες (1) θά ἰσχύουν κάθε φορά, πού οἱ ἄγνωστοι $x_2, x_3, \ldots x_\nu$ ἀντικαθίστανται μέ ὁρισμένες τιμές.

** Ὅταν λέμε ὅτι τά α, β, γ εἶναι διαφορετικά μεταξύ τους εἶναι σάν νά λέμε πώς τά διώνυμα $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα ἀνά δύο. Ἔτσι καταλαβαίνουμε πώς τό θεώρημα αὐτό εἶναι ἀντίστοιχο μέ γνωστό θεώρημα τῆς ἀριθμητικῆς.

ται καί μέ τό γινόμενό τους $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$. Τό ἀντίστροφο ἀληθεύει.

Ἄς ὑποθέσουμε πώς ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x, τό $f(x)$, διαιρεῖται μέ τό καθένα ἀπό τά διώνυμα $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$. Ἀφοῦ λοιπόν διαιρεῖται μέ τό $x-\alpha$ θά ἰσχύει ἡ ταυτότητα τῆς διαιρέσεως

$$f(x)\equiv(x-\alpha)\,f_1(x) \qquad (1)$$

Καί, ἄν σ'αὐτή τήν ταυτότητα θέσουμε ὅπου x τό β, παίρνουμε τήν ἀριθμητική ταυτότητα $$f(\beta)\equiv(\beta-\alpha)\,f_1(\beta)$$
Καί ἐπειδή τό $f(\beta)=0$, γιατί τό πολυώνυμό μας διαιρεῖται μέ τό $x-\beta$, θά ἔχουμε καί $f_1(\beta)=0$, ἀφοῦ $\beta-\alpha\neq 0$. Ὥστε τό $f_1(x)$ μηδενίζεται γιά τήν τιμή τοῦ x, β καί ἐπομένως διαιρεῖται μέ τό $x-\beta$.

Ἔτσι ἔχουμε $f_1(x)\equiv(x-\beta)f_2(x)$ καί ἡ ἰσότητα (1) γίνεται:

$$f(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\,f_1(x) \qquad (2)$$

Ἄν τώρα στήν ταυτότητα (2) ἀντικαταστήσουμε τό x μέ τό γ παίρνουμε: $$f(\gamma)\equiv(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,f_1(\gamma)$$
Καί ἐπειδή κατά τήν ὑπόθεσή μας, $f(\gamma)=0$, ἐνῶ $\gamma-\alpha\neq 0$ καί $\gamma-\beta\neq 0$, ἔπεται $f_1(\gamma)=0$ δηλ $f_1(x)\equiv(x-\gamma)f_2(x)$ καί ἡ (2) γίνεται: $f(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)f_2(x)$ (3)

Ὅσον ἀφορᾶ τό ἀντίστροφο, αὐτό εἶναι φανερό ἀπό τήν (3).

189. **Λῆμμα τοῦ D'Alembert.** Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x δέχεται τουλάχιστο μιά ρίζα τῆς μορφῆς $\alpha+\beta i$ (δηλ. πραγματική, φανταστική, ἤ μιγαδική). Τό λῆμμα αὐτό, πού ἰσχύει καί γιά πολυώνυμο μέ μιγαδικούς συντελεστές, εἶναι βασικό θεώρημα τῆς Ἀλγέβρας. Θά τό δεχθοῦμε ὅμως χωρίς ἀπόδειξη γιατί ὁ προορισμός τοῦ βιβλίου μας δέν δικαιολογεῖ τήν ἀναγραφή ἀποδείξεως.

190. **Θεώρημα.** Κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x βαθμοῦ ν ἀναλύεται σέ γινόμενο ν πρωτοβαθμίων παραγόντων τῆς μορφῆς $x-\rho$ $(\rho=\alpha+\beta i)$ ἐπί τόν συντελεστή τοῦ x^ν.

Ἄς πάρουμε τό πολυώνυμα: $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$.

Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο λῆμμα τὸ πολυώνυμο αὐτὸ θὰ μηδενίζεται γιὰ κάποια τιμὴ τοῦ x, ἔστω τὴν ρ_1 καὶ ἐπομένως θὰ διαιρεῖται μὲ τὸ διώνυμο $x-\rho_1$ θὰ ἔχουμε λοιπόν :

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)\, f_1(x)$$

ὅπου τὸ $f_1(x)$ εἶναι βαθμοῦ ν-1. Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὸ λῆμμα καὶ τὸ $f_1(x)$ θὰ διαιρεῖται μὲ παράγοντα τῆς μορφῆς $x-\rho_2$ καὶ ἔτσι θὰ ἔχουμε ὅτι

$$f(x) \equiv (x-\rho_1)(x-\rho_2) f_2(x)$$

ὅπου τὸ $f_2(x)$ θὰ εἶναι βαθμοῦ ν-2. Ἂν ἐξακολουθήσουμε ἔτσι θὰ φθάσουμε, ὅπως εἶναι φανερό, σὲ πολυώνυμο πρώτου βαθμοῦ τὸ ὁποῖον κατὰ τὸ λῆμμα θὰ διαιρεῖται μὲ ἐπίσης πρωτοβάθμιο διώνυμο καὶ θὰ μᾶς δίνει γιὰ πηλίκο σταθερὰ ποσότητα Κ. Ὥστε θὰ φθάσουμε νὰ ἔχουμε : $f(x) \equiv K(x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdot\ldots\cdot(x-\rho_\nu)$ ἤ

$$a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \equiv K\left[x^\nu - (\rho_1+\rho_2+\cdots+\rho_\nu)\,x^{\nu-1} + \cdots + (-1)^\nu \rho_1\rho_2\cdots\rho_\nu\right].$$

Ἀλλὰ σύμφωνα μὲ τὸ θεώρημα (ἐδ. 184) $a_\nu = K$.

191. <u>Παρατήρηση</u>. Καταλαβαίνουμε πὼς τὸ θεώρημα αὐτὸ ἐκφράζει πὼς κάθε ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x βαθμοῦ ν ἔχει ν ρίζες. Ὀφείλουμε νὰ σημειώσουμε πὼς οἱ ρίζες αὐτὲς δὲν εἶναι ἀναγκαστικὰ ὅλες διαφορετικὲς μεταξύ τους. Ἔτσι, στὸ γινόμενο τῶν ν πρωτοβαθμίων παραγόντων ἕνας ἀπὸ τοὺς παράγοντες, λογουχάρη ὁ $x-\rho_\sigma$ (ὅπου σ ἕνας ἀπὸ τοὺς 1....ν) μπορεῖ νὰ ἐπαναλαμβάνεται περισσότερο ἀπὸ μιὰ φορά, ἔστω μ φορές· τότε ἡ ρ_σ ὀνομάζεται ρίζα πολλαπλὴ βαθμοῦ πολλαπλότητος μ. Γενικὰ λοιπὸν ἡ ἀνάλυση τοῦ πολυωνύμου τοῦ $\nu^{ου}$ βαθμοῦ παίρνει τὴ μορφὴ $f(x) \equiv a_0 (x-\rho_1)^{u} \cdot (x-\rho_8)^{\lambda} \cdots (x-\rho_\kappa)^{\mu}$ ἐνῶ $u+\lambda+\cdots\cdots+\mu=\nu$.

192. <u>Θεώρημα</u>. Ἐὰν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τοῦ x βαθμοῦ ν μηδενίζεται γιὰ $\nu+1$ διαφορετικὲς τιμὲς τοῦ x, μηδενίζεται γιὰ κάθε τιμὴ τοῦ x: εἶναι δηλ. ἐκ ταυτότητος ἴσο μὲ τὸ μηδέν.

Σύμφωνα μὲ τὸ προηγούμενο θεώρημα ἔχουμε : $f(x) \equiv a_\nu (x-\rho_1)(x-\rho_2)\cdots(x-\rho_\nu)$ καὶ ἔστω μιὰ τιμὴ τοῦ x ἡ $\rho_{\nu+1}$, ποὺ εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὶς $\rho_1, \rho_2 \cdots \rho_\nu$, γιὰ τὴν ὁποία ἐπίσης τὸ πολυώνυμό μας μηδενίζεται. Ἔτσι θὰ ἔχουμε :

$$f(\rho_{\nu+1}) = a_\nu (\rho_{\nu+1}-\rho_1)(\rho_{\nu+1}-\rho_2)\cdots\cdots(\rho_{\nu+1}-\rho_\nu) = 0.$$

Καί ἐπειδή καμμιά ἀπό τίς διαφορές $\rho_{\nu+1}-\rho_1, \rho_{\nu+1}-\rho_2, \ldots \rho_{\nu+1}-\rho_\nu$ δέν εἶναι μηδέν ἕπεται ὅτι $a_\nu=0$.

Τό πολυώνυμό μας λοιπόν θά εἶναι βαθμοῦ $\nu-1$ καί ἐπειδή θά μηδενίζεται καί γιά μιά τιμή τοῦ x παραπάνω ἀπό τό βαθμό του, σύμφωνα μέ τά παραπάνω, θά εἶναι $a_{\nu-1}=0$. Ἔτσι διαπιστώνουμε διαδοχικά ὅτι ὅλοι οἱ συντελεστές του εἶναι μηδενικά.

193. Ἐφαρμογές. Γιά νά κατανοήσουμε τήν παραπάνω θεωρία θά δώσουμε μερικές ἐφαρμογές της. 1ο. Ἐάν ὁ μ εἶναι ἀριθμός θετικός καί ἀκέραιος, νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)\equiv(x-2)^{2\mu}+(x-1)^{\mu}-1$ εἶναι διαιρετό μέ τό γινόμενο $(x-1)(x-2)$ καί νά βρεθεῖ τό πηλίκο.

Γιά νά διαιρεῖται τό πολυώνυμό μας μέ τό γινόμενο $(x-1)(x-2)$ ἀρκεῖ νά διαιρεῖται μέ τό καθένα ἀπό τά διώνυμα $x-1$, $x-2$ γιατί, ὅπως εἶναι φανερό, αὐτά τά διώνυμα εἶναι πρῶτα μεταξύ τους. Ἔτσι ἔχουμε:

$$f(1)=(1-2)^{2\mu}+(1-1)^{\mu}-1=0 \qquad f(2)=(2-2)^{2\mu}+(2-1)^{\mu}-1=0.$$

Τώρα γιά νά βροῦμε τό πηλίκο ἐργαζόμαστε ὡς ἑξῆς:

$$\frac{f(x)}{x-1}\equiv(x-1)^{\mu-1}+\frac{(x-2)^{2\mu}-1}{(x-2)+1} \qquad (1)$$

δηλ. διαιρέσαμε χωριστά τόν ὅρο $(x-1)^{\mu}$ μέ τό $x-1$ καί τή διαφορά $(x-2)^{2\mu}-1$ ἐπίσης μέ τό $x-1$, ἀφοῦ ὅμως τοῦ δώσαμε τή μορφή $(x-2)+1$· τό τελευταῖο γίνηκε γιά νά δημιουργήσουμε πηλίκο, πού ὅπως εἶναι γνωστό (ἐδ. 89) μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε μέ τή μνήμη.

Ἡ ἰσότητά μας (1) γράφεται: $\frac{f(x)}{x-1}\equiv(x-1)^{\mu-1}+(x-2)^{2\mu-1}+(x-2)^{2\mu-2}+\cdots+(x-2)-1.$

Τώρα δέν μένει παρά τό πηλίκο, πού βρήκαμε, νά τό διαιρέσουμε μέ τό $x-2$. Ἄν σκεφθοῦμε, ὅπως παραπάνω, παίρνουμε τήν ἰσότητα:

$\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}\equiv(x-2)^{2\mu-2}-(x-2)^{2\mu-3}+\cdots-(x-2)+1+\frac{(x-1)^{\mu-1}-1}{(x-1)-1}$ ἤ τήν

$$\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}\equiv(x-2)^{2\mu-2}-(x-2)^{2\mu-3}+\cdots\cdots-(x-2)+1+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+\cdots+(x-1)+1$$

Καί τελικά $\frac{f(x)}{(x-1)(x-2)}\equiv(x-2)^{2\mu-2}-(x-2)^{2\mu-3}+\cdots-(x-2)+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+\cdots+(x-1)+2$

2ο Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο

$f(x)\equiv\nu^2x^{\nu+2}-(2\nu^2+2\nu+1)x^{\nu+1}+(\nu+1)^2x^{\nu}-x-1$ (ὅπου ν θετικός καί ἀκέραιος) εἶναι διαιρετό μέ τό $(x-1)^3$.

ζοβάθμιο διώνυμο, ἡ ἰσότητά μας δικαιολογεῖται μέ τό νά εἶναι $1-x=\upsilon_1$. Ἄν σκεφθοῦμε μέ τόν ἴδιο τρόπο θά συμπεράνουμε, λαμβάνοντες τή δευτέρα ἀπό τίς (4), ὅτι τό y, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό x^2-x+1, θά μᾶς δώσει ὑπόλοιπο $3x+5$. Ἔτσι ἔχουμε:

$$y\equiv(x^2+x+1)(\alpha x+\beta)+1-x$$

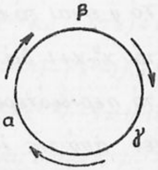
$$y\equiv(x^2-x+1)(\gamma x+\delta)+3x+5$$

Καί ἑπομένως: $(x^2+x+1)(\alpha x+\beta)+1-x\equiv(x^2-x+1)(\gamma x+\delta)+3x+5$ (5)

Ἄν ἐκτελέσουμε τίς πράξεις στά δύο μέλη τῆς (5) καί ἐξισώσουμε τούς συντελεστές τῶν ἰσοβαθμίων ὅρων (ἐδ. 184) βρίσκουμε τίς ἰσότητες: $\alpha=\gamma$, $\alpha+\beta=\delta-\gamma$, $\alpha+\beta-1=\gamma-\delta+3$, $\beta+1=\delta+5$ ἀπό τίς ὁποῖες παίρνουμε: $\alpha=-2$, $\beta=4$, $\gamma=-2$, $\delta=0$. Ἔτσι τό $y\equiv(x^2+x+1)(-2x+4)+(1-x)\equiv(x^2-x+1)(-2x)+3x+5$ δηλ. $y\equiv-2x^3+2x^2+x+5$.

γ) Συμμετρικά κατ' ἐναλλαγήν καί Ὁμογενῆ Πολυώνυμα.

194. Κυκλική ἐναλλαγή. Ἄς θεωρήσουμε μιά ἀλγεβρική παράσταση, ἔστω τήν $\alpha^2\beta-\gamma$. Ἡ παράσταση αὐτή περιέχει τρία γράμματα, τά α, β, γ. Τά γράμματα αὐτά τά θεωροῦμε τοποθετημένα πάνω σέ μιά περιφέρεια. Ἄν τήν περιφέρεια αὐτή τή διατρέξουμε κατά μιά ὁρισμένη φορά, λόγου χάρη ἀπό τά ἀριστερά στά δεξιά, ἀρχίζοντες ἀπό τό α συναντᾶμε κατά τήν πορεία μας πρῶτα τό β, μετά τό γ καί ξαναγυρίζουμε τέλος στό α. Ἄν τώρα στήν παράστασή μας ἀντικαταστήσουμε τό καθένα ἀπό τά γράμματά της μέ ἐκεῖνο πού αὐτό τό γράμμα ἐναλλάσσεται, ἐνῶ διατρέχουμε τήν περιφέρεια, λέμε πώς κάναμε κυκλική ἐναλλαγή αὐτῶν τῶν γραμμάτων. Ἔτσι ἡ παράστασή μας, ἔπειτα ἀπό κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων της, γίνεται $\beta^2\gamma-\alpha$.



Μπορεῖ ἡ κυκλική ἐναλλαγή νά γίνει σέ μιά παράσταση καί ὡς πρός περισσότερες ὁμάδες γραμμάτων. Ἔτσι ἡ παράσταση $(x-y)(\alpha-\beta)+(y-z)(\beta-\gamma)+(z-x)(\gamma-\alpha)$ μέ κυκλική ἐναλλαγή τῶν x, y, z καί τῶν α, β, γ γίνεται $(y-z)(\beta-\gamma)+(z-x)(\gamma-\alpha)+(x-y)(\alpha-\beta)$ δηλ ξαναγυρίζει στόν ἑαυτό της.

195. Μιά παράσταση ὀνομάζεται συμμετρική κατ' ἐναλλαγήν * ὡς πρός

---

* Ὑπάρχει καί ὁ ὅρος – συμμετρική – μόνον. Μιά παράσταση ἀλγεβρική ὀνομάζεται

ὁρισμένα γράμματα, ἄν ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν γραμμάτων αὐτῶν σ' αὐτή τήν παράσταση δέν τήν μεταβάλλει.

Λογουχάρη ἡ παράσταση $x^3+y^3+z^3+\lambda xyz$ εἶναι συμμετρική κατ' ἐναλλαγήν ὡς πρός τά γράμματά της x, y, z. Ἐπίσης οἱ παραστάσεις $\alpha(\beta-\gamma)+\beta(\gamma-\alpha)+\gamma(\alpha-\beta)$ $\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\alpha\beta^2+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2$ εἶναι συμμετρικές κατ' ἐναλλαγήν ὡς πρός τά α,β,γ.*

196. Ἰδιότητες τῶν ἀκεραίων καί συμμετρικῶν κατ' ἐναλλαγήν πολυωνύμων.

1ο. Ἐάν ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο τῶν α,β,γ εἶναι συμμετρικό κατ' ἐναλλαγήν ὡς πρός τά γράμματα αὐτά καί διαιρεῖται μέ τό διώνυμο $\alpha-\beta$ θά διαιρεῖται καί μέ τά διώνυμα $\beta-\gamma$ καί $\gamma-\alpha$ ἐπίσης, ἄν διαιρεῖται μέ τό διώνυμο $\alpha+\beta$ θά διαιρεῖται καί μέ τά διώνυμα $\beta+\gamma$ καί $\alpha+\gamma$.

Ἄς εἶναι $f(\alpha,\beta,\gamma)$ τό πολυώνυμό μας. Κατά τήν ὑπόθεσή μας θά ἔχουμε:

$$f(\alpha,\beta,\gamma)\equiv(\alpha-\beta)f_1(\alpha,\beta,\gamma)$$

καί

$$f(\beta,\gamma,\alpha)\equiv(\beta-\gamma)f_1(\beta,\gamma,\alpha)$$

μά $f(\alpha,\beta,\gamma)\equiv f(\beta,\gamma,\alpha)$ καί ἑπομένως $f(\alpha,\beta,\gamma)\equiv(\beta-\gamma)f_1(\beta,\gamma,\alpha)$. Ὥστε τό $\beta-\gamma$ εἶναι τοῦ $f(\alpha,\beta,\gamma)$ διαιρέτης. Ἄν τώρα στήν τελευταία ἰσότητα κάμουμε κυκλική ἐναλλαγή στά α,β,γ θά διαπιστώσουμε πώς καί τό $\gamma-\alpha$ εἶναι διαιρέτης τοῦ πολυωνύμου μας.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο ἄν ἐργασθοῦμε, θά βεβαιωθοῦμε καί γιά τό δεύτερο μέρος τῆς προτάσεώς μας.

2ο. Τό πηλίκο τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀκεραίου καί συμμετρικοῦ κατ' ἐναλλαγήν πολυωνύμου, ὡς πρός τά α, β, γ, μέ ἕνα ἄλλο ἀκέραιο καί συμμετρικό κατ' ἐναλλαγήν πολυώνυμο, ὡς πρός τά ἴδια γράμματα, εἶναι πολυώνυμο συμμετρικό κατ' ἐναλλαγήν ὡς πρός τά ἴδια γράμματα.

συμμετρική ὡς πρός τά x, y, z, ἐάν ἡ ἐναλλαγή δύο τυχόντων ἐξ αὐτῶν τῶν γραμμάτων δέν τήν μεταβάλλει. Καί μιά παράστασις, πού εἶναι συμμετρική, εἶναι συμμετρική καί κατ' ἐναλλαγήν, ἀλλά τό ἀντίστροφο δέν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀληθινό.

* Ἐνῶ ἡ πρώτη καί ἡ τρίτη, ἀπό τίς παραστάσεις εἶναι καί συμμετρικές.

Ἄς ποῦμε πώς ἔχουμε τά πολυώνυμα $f(\alpha,\beta,\gamma)$, $f_1(\alpha,\beta,\gamma)$. Ἄν τό πηλίκο τους εἶναι τό $f_2(\alpha,\beta,\gamma)$ θά ἔχουμε :
$$f_2(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \frac{f(\alpha,\beta,\gamma)}{f_1(\alpha,\beta,\gamma)}$$
καί
$$f_2(\beta,\gamma,\alpha) \equiv \frac{f(\beta,\gamma,\alpha)}{f_1(\beta,\gamma,\alpha)}$$
καί ἐπειδή τά δεύτερα μέλη, ἐξ αἰτίας τῆς ὑποθέσεώς μας, συμπίπτουν ἐκ ταυτότητος, θά ἔχουμε καί $f_2(\alpha,\beta,\gamma) \equiv f_2(\beta,\gamma,\alpha)$, δηλ αὐτό πού θέλαμε νά ἀποδείξουμε.

197. Ὁμογενές πολυώνυμο. Ἕνα ἀκέραιο τῶν x,y,z πολυώνυμο, λογουχάρη τό $f(x,y,z)$, ὀνομάζεται ὁμογενές ν βαθμοῦ ὁμογενείας, ἄν ἡ ἀντικατάσταση σ' αὐτό τῶν x,y,z ὑπό τῶν $\kappa x, \kappa y, \kappa z$, ἔχει σάν ἀποτέλεσμα ὁλόκληρο τό πολυώνυμό μας νά πολλαπλασιάζεται ἐπί κ^ν.

Ἄς θεωρήσουμε τό πολυώνυμο $x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2$. Τό πολυώνυμο αὐτό εἶναι ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ ὁμογενείας, γιατί ἔχουμε :
$$(\kappa x)^2\cdot\kappa y+(\kappa x)^2\cdot\kappa z+(\kappa y)^2\cdot\kappa x+(\kappa y)^2\kappa z+\kappa x\cdot(\kappa z)^2+\kappa y(\kappa z)^2 \equiv \kappa^3(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+xz^2+yz^2).$$

Ἐπίσης τό πολυώνυμο $\alpha\beta\gamma\delta+\alpha\gamma^2\delta-2\beta^2\alpha\delta$ εἶναι ὁμογενές τετάρτου βαθμοῦ ὁμογενείας ὡς πρός τά $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

Καταλαβαίνουμε φυσικά πώς τό ὁμογενές πολυώνυμο εἶναι ἄθροισμα ἀκεραίων μονωνύμων, πού εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ ὡς πρός τά γράμματα τοῦ πολυωνύμου μας. Ἔτσι, μποροῦμε νά λέμε πώς τό ἀκέραιο πολυώνυμο $f(x,y,z)$ εἶναι ὁμογενές ν βαθμοῦ ὁμογενείας, ὡς πρός τά γράμματα x,y,z, ἐάν εἶναι ἄθροισμα ὅρων τῆς μορφῆς $\lambda x^\mu y^\rho z^\sigma$, ὅπου λ εἶναι ἕνας ἀριθμητικός παράγοντας καί τά μ,ρ,σ θετικοί καί ἀκέραιοι ἀριθμοί τέτοιοι, ὥστε $\mu+\rho+\sigma=\nu$, ἐνῶ δύο ἤ ἕνας ἀπ' αὐτούς μπορεῖ νά εἶναι μηδέν. Σημειώνουμε μάλιστα συμβολικά : $f(x,y,z) \equiv \Sigma\,(\lambda x^\mu y^\rho z^\sigma)$ ὅπου τό Σ ἐκφράζει τή λέξη ἄθροισμα.

198. Ἰδιότητες τῶν ὁμογενῶν Πολυωνύμων. 1ο. Τό γινόμενο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων εἶναι ἐπίσης ἕνα ὁμογενές πολυώνυμο.

Ἔστω $f_1(x,y,z)$ πολυώνυμο ν βαθμοῦ ὁμογενείας καί $f_2(\alpha,\beta,\gamma)$ πολυώνυμο μ βαθμοῦ ὁμογενείας. Ἄν ὀνομάσουμε $f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma)$ τό γινόμενο τῶν γνωστῶν μας πολυωνύμων θά ἔχουμε : $f(x,y,z,\alpha,\beta,\gamma) \equiv f_1(x,y,z)f_2(\alpha,\beta,\gamma)$

ἤ $f(\kappa x,\kappa y,\kappa z,\kappa\alpha,\kappa\beta,\kappa\gamma) \equiv \kappa^{\mu+\nu} f_1(x,y,z) f_2(\alpha,\beta,\gamma) \equiv \kappa^{\mu+\nu} f(x,y,z,\alpha,\beta,$

δηλ. τὸ γινόμενον τῶν ἀρχικῶν πολυωνύμων εἶναι $\mu+\nu$ βαθμοῦ ὁμογενείας.

2ο. Τὸ πηλίκο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων (ποὺ εἶναι συναρτήσεις τῶν αὐτῶν γραμμάτων) ἐὰν ἡ διαίρεση εἶναι τελεία, εἶναι ἕνα ὁμογενὲς πολυώνυμο.

Ἂν λάβουμε ὑπόψη τὴν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως, μποροῦμε εὔκολα, μὲ ὅσα εἴπαμε γιὰ τὸ γινόμενο δύο ὁμογενῶν πολυωνύμων, νὰ συμπεράνουμε τὴν ἀλήθεια τῆς προτάσεώς μας.

3ο. Εἶναι ὁλοφάνερο πὼς ἕνα ἀκέραιο πολυώνυμο μπορεῖ νὰ εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς τὰ γράμματά του χωρὶς νὰ εἶναι σύγχρονα καὶ ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ ἴδια γράμματα· καὶ ἀντίστροφα, μπορεῖ νὰ εἶναι ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ γράμματά του καὶ νὰ μὴν εἶναι συμμετρικὸ ὡς πρὸς αὐτά, μπορεῖ ὅμως νὰ εἶναι καὶ τὰ δύο. Στὴν τελευταία περίπτωση παρουσιάζει ἕνα πλεονέκτημα καὶ ἡ ἀνάλυσή του σὲ γινόμενο, ἂν εἶναι δυνατή, γίνεται μὲ πολὺ εὔκολο τρόπο.

199. Προτοῦ δώσουμε παραδείγματα ἀναλύσεως σὲ γινόμενο ἑνὸς ἀκεραίου συμμετρικοῦ καὶ ὁμογενοῦς πολυωνύμου, ποὺ νὰ βασίζεται στὶς ἰδιότητες αὐτῶν τῶν πολυωνύμων, θὰ κατατοπίσουμε τὸ σπουδαστὴ πάνω στὸ σχηματισμὸ τῶν συμμετρικῶν καὶ ὁμογενῶν πολυωνύμων.

Καὶ πρῶτα ἡ γενικὴ μορφὴ ἑνὸς ἀκεραίου πολυωνύμου, ποὺ εἶναι πρωτοβάθμιο καὶ συμμετρικὸ κατ' ἐναλλαγὴν ὡς πρὸς τὰ x,y,z εἶναι ἡ $\lambda(x+y+z)+\mu$ ὅπου τὰ λ καὶ μ εἶναι σταθερὲς ποσότητες. Τὸ δικαιολογεῖ αὐτὸ κανεὶς εὔκολα· τὰ x,y,z δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ ἔχουν διαφορετικοὺς συντελεστές, γιατὶ ἡ ἐναλλαγὴ τῶν γραμμάτων θὰ ἄλλαζε τὸ πολυώνυμο. Φυσικὰ μπορεῖ τὸ μ νὰ εἶναι καὶ μηδέν. Στὴν περίπτωση αὐτὴ τὸ πολυώνυμό μας εἶναι συμμετρικὸ καὶ ὁμογενὲς ὡς πρὸς τὰ x,y,z.

Ἂς ἔλθουμε τώρα νὰ δοῦμε τὴ γενικὴ μορφὴ τοῦ συμμετρικοῦ δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρὸς τὰ x,y,z.

Εἶναι ὁλοφάνερο πὼς τὸ ἀκέραιο πολυώνυμο

$$\kappa(x^2+y^2+z^2)+\lambda(xy+xz+yz)+\mu(x+y+z)+\rho$$

ὅπου τὰ κ,λ,μ,ρ εἶναι σταθεροὶ ἀριθμοί, ἐνῶ τὰ κ,μ,ρ ἢ τὰ λ,μ,ρ δύνανται νὰ εἶναι καί μηδενικά, εἶναι συμμετρικό κατ' ἐναλλαγήν πολυώνυμο $2^{ου}$ βαθμοῦ. Θά δείξουμε τώρα ὅτι δέν μπορεῖ νά εἶναι διαφορετικό ἕνα τέτοιο πολυώνυμο. Ἡ γενική μορφή ἐνός $2^{ου}$ πολυωνύμου ὡς πρός $x.y.z$ εἶναι $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+a_4xy+a_5xz+$ $+a_6yz+a_7x+a_8y+a_9z+a_{10}$. Ἡ κυκλική ἐναλλαγή τῶν x, y, z μετατρέπει τό $a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2$ στό $a_1y^2+a_2z^2+a_3x^2$ καί γιά νά μήν ἐπέρχεται ἀλλαγή, σύμφωνα μέ τά ἐκ ταυτότητος ἴσα πολυώνυμα, θά πρέπει $a_1=a_2=a_3=\kappa\cdot$ ἐπίσης γιά νά συμπίπτει τό $a_4xy+a_5xz+a_6yz$ μέ τό $a_4yz+a_5xy+a_6xz$ πρέπει νά εἶναι $a_4=a_5=a_6=\lambda$.

Μέ ὅμοια σκέψη βρίσκουμε πώς πρέπει νά ἔχουμε $a_7=a_8=a_9=\mu$. Εἶναι εὔκολο ἐπίσης νά καταλάβει κανείς ὅτι τίποτα δέν ἀποκλείει νά εἶναι μερικά ἀπό τά $\kappa, \lambda, \mu, \rho$ ἤ καί ὅλα μεταξύ τους ἴσα.

Ἐάν τώρα $\mu=\rho=0$ τότε τό πολυώνυμο θά εἶναι καί ὁμογενές $2^{ου}$ βαθμοῦ. Μέ ἴδιες σκέψεις διαπιστώνει κανείς εὔκολα πώς τό συμμετρικό κατ' ἐναλλαγήν τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός τά x, y, z εἶναι τό $\kappa(x^3+y^3+z^3)+\lambda(x^2y+x^2z+xy^2+y^2z+$ $+xz^2+yz^2)+\mu xyz+\nu(x^2+y^2+z^2)+\pi(xy+xz+yz)+\rho(x+y+z)+\sigma$ ὅπου τά $\kappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma$ εἶναι σταθερές ποσότητες.

Ἄν τώρα $\nu=\pi=\rho=\sigma=0$ τότε εἶναι καί ὁμογενές τρίτου βαθμοῦ.

Παραδείγματα ἐφαρμογῆς. $1^{ο}$ Νά ἀναλυθεῖ σέ γινόμενο παραγόντων τό πολυώνυμο: $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)$.

Ἄν σ' αὐτό τό πολυώνυμο θέσουμε ὅπου α τό β βλέπουμε ὅτι μηδενίζεται. Ἄρα διαιρεῖται μέ τό $\alpha-\beta$ καί κατά τά προηγούμενα (ἐδ. 196 $1^{ο}$) διαιρεῖται καί μέ τά διώνυμα $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$ καί ἐπειδή τά διώνυμα αὐτά εἶναι πρῶτα πρός ἄλληλα ἀνά δύο διαιρεῖται καί μέ τό γινόμενό τους $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$. Ἐπειδή ἀκόμη διαιρετέος καί διαιρέτης εἶναι πολυώνυμα συμμετρικά καί ὁμογενῆ ὡς πρός τά α, β, γ καί τό πηλίκο θά εἶναι (ἐδ. 196, 198) ἐπίσης συμμετρικό καί ὁμογενές, καί ἐδῶ, ὅπως εἶναι φανερό, πρώτου βαθμοῦ. Ἔτσι θά ἔχουμε τήν ταυτότητα $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta) \equiv (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\,\kappa\,(\alpha+\beta+\gamma)$.

Ὅσον ἀφορᾶ τόν προσδιορισμό τοῦ κ διαθέτουμε δυό τρόπους.

$1^{ος}$ Τρόπος. Ἕνας ὅρος τοῦ πολυωνύμου τοῦ πρώτου μέλους εἶναι ὁ $\alpha^3\beta$. Ὁ ἰδιος ὅρος

πρέπει νά βρίσκεται καί στό 2ο μέλος· στό δεύτερο μέλος ἔχει τή μορφή $-\alpha^3\beta\kappa$*
καί ἐπομένως $\kappa=-1$. Ὥστε: $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)\equiv-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$.

2ος Τρόπος. Ἀφοῦ τά παραπάνω πολυώνυμα εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσα θά ἔχουν τήν ἴδια ἀριθμητική τιμή γιά τίς ἴδιες τιμές τῶν γραμμάτων. Ἐξισώνοντες τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν πολυωνύμων μας γιά μιά ὁποιαδήποτε τριάδα τιμῶν τῶν α, β, γ δημιουργοῦμε μιά ἰσότητα ὡς πρός κ ἀπό τήν ὁποίαν παίρνουμε $\kappa=-1$.

2ο. Νά γίνει γινόμενο παραγόντων ἡ παράσταση:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4).$$

Καί πάλι διαπιστώνουμε πώς τό πολυώνυμό μας διαιρεῖται μέ τό γινόμενο $(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$ ἐνῶ τό πηλίκο θά εἶναι συμμετρικό καί ὁμογενές πολυώνυμο 2ου βαθμοῦ. Θά ἔχουμε λοιπόν τήν ταυτότητα:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4)\equiv(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)[\kappa(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+\lambda(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)].$$

Γιά νά προσδιορίσουμε τώρα τά κ καί λ ἐξισώνουμε τίς ἀριθμητικές τιμές τῶν δύο πολυωνύμων γιά δυό τριάδες τιμῶν τῶν α, β, γ καί δημιουργοῦμε ἕνα σύστημα μέ ἀγνώστους τά κ καί λ. Φυσικά δέν πρέπει ἡ μιά ἀπ' αὐτές τίς τριάδες νά ἀποτελεῖ κυκλική ἐναλλαγή τῶν τιμῶν τῆς ἄλλης.

Ἔτσι μέ τίς τιμές $\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=2$ βρίσκουμε: $5\kappa+2\lambda=7$ καί μέ τίς τιμές $\alpha=0,\ \beta=1,\ \gamma=-1$ παίρνουμε: $2\kappa-\lambda=1$.

Ἄρα $\kappa=1$ καί $\lambda=1$. Ἡ παραπάνω λοιπόν ἰσότητά μας γίνεται:

$$\alpha(\beta^4-\gamma^4)+\beta(\gamma^4-\alpha^4)+\gamma(\alpha^4-\beta^4)\equiv(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma).$$

Ἀσκήσεις

288) Εἶναι γνωστό πώς ἡ παράσταση $x^3+y^3+z^3+\lambda xyz$ διά $\lambda=-3$ εἶναι διαιρετή μέ τό $x+y+z$. Νά δείξετε ὅτι μόνο γιά $\lambda=-3$ ἡ διαίρεση αὐτή εἶναι τελεία.

289) Νά ὁρισθοῦν τά α καί β ὥστε τό πολυώνυμο $\alpha x^4+\beta x^3+1$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $(x-1)^2$.

290) Γιά ποιές τιμές τῶν α, β, γ ἡ παράσταση $x^4+3x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι διαιρετή μέ τό γινόμενο $(x^2-1)(x+2)$;

---

* Κάθε ὅρος τοῦ γινομένου θά ἔχει καί ἀπό ἕνα ὅρο τοῦ καθενός παράγοντός του. Ἔτσι παίρνουμε τό α ἀπό τόν $\alpha-\beta$, τό β ἀπό τόν $\beta-\gamma$ τό $-\alpha$ ἀπό τόν $\gamma-\alpha$ καί τό α ἀπό τόν $\alpha+\beta+\gamma$.

291) Νά βρεθεῖ ἕνα ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο πού, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x+2$ ἤ μέ τό $x-4$, δίδει ὑπόλοιπο 10 καί τό ὁποῖο μηδενίζεται γιά $x=-1$· πόσα τέτοια πολυώνυμα ὑπάρχουν;

292) Ἐάν τό πολυώνυμο $x^4+px^2+qx+\alpha^2$ εἶναι διαιρετό μέ τό x^2-1 εἶναι ἐπίσης διαιρετό μέ τό $x^2-\alpha^2$.

293) Δείξετε ὅτι τό πολυώνυμο $2x^2y^2+2y^2z^2+2z^2x^2-(x^4+y^4+z^4)$ εἶναι διαιρετό μέ τό $(x+y+z)(x-y-z)$.

294) Ἕνα πολυώνυμο ἀκέραιο τοῦ x, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $x-3$ δίδει γιά ὑπόλοιπο 7, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $2x+5$ δίδει ὑπόλοιπο -4, μέ τό $3x-2$, τό -2 καί μέ τό $x+1$ δίδει γιά ὑπόλοιπο 1. Νά βρεθεῖ τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως του μέ τό $(x-3)(2x+5)(3x-2)(x+1)$.

295) Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ εἶναι διαιρετό μέ τό $(x-1)^2$ καί νά βρεθεῖ τό πηλίκο.

296) Νά βρεθεῖ ἕνα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο πού, ἄν διαιρεθεῖ μέ τό $x-1$ ἤ μέ τό $x-2$ νά δίδει γιά ὑπόλοιπο 3 καί τό ὁποῖο νά μηδενίζεται γιά $x=0$.

297) Τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων δύο πολυωνύμων $f(x)$ καί $f_1(x)$ διά x^2+x+1 εἶναι ἀντίστοιχα x καί $x+1$. Συμπεράνατε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως τοῦ γινομένου $f(x)f_1(x)$ διά τοῦ x^2+x+1.

298) Μποροῦμε νά βροῦμε τό ὑπόλοιπο τῆς διαιρέσεως ἑνός πολυωνύμου διά x^3-1 γνωρίζοντες τά ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων αὐτοῦ τοῦ πολυωνύμου διά $x-1$ καί x^2+x+1;

299) Νά ὁρισθοῦν τά α καί β ὥστε τό πολυώνυμο $x^6+2x^5+\alpha x^4+\beta x^3-x^2+3$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό x^2-3.

300) Ὁρίσετε τά α καί β ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο $x^6+\alpha x^5+(2\alpha+1)x^4+\beta x^3+(2\alpha+1)x^2+\alpha x+1$ νά διαιρεῖται μέ τήν κατά τό δυνατό μεγαλύτερη δύναμη τοῦ $x-1$· νά καθορισθεῖ δέ ὁ ἐκθέτης αὐτῆς τῆς δυνάμεως.

301) Νά δειχθεῖ ἡ ταυτότητα: $\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)} \equiv 1$ χωρίς νά ἐκτελεσθοῦν οἱ πράξεις.

302) Ἐάν ὁ μ εἶναι θετικός καί ἀκέραιος ἀριθμός νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα

$$\frac{\alpha^\mu}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^\mu}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^\mu}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

303) Ἐάν ὁ ν εἶναι ἕνας ἀριθμός θετικός καί ἀκέραιος νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $f(x)\equiv(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$ εἶναι διαιρετό μέ τό γινόμενο $x(x+1)(2x+1)$ καί νά βρεθεῖ τό πηλίκο.

304) Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $\nu x^{\nu+2}-(\nu+2)x^{\nu+1}+(\nu+2)x-\nu$ διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τό $(x-1)^3$.

305) Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $x^{4\nu+2}-(2\nu+1)x^{2\nu+2}+(2\nu+1)x^{2\nu}-1$ εἶναι διαιρετό μέ τό $(x^2-1)^3$.

306) Νά ὁρισθοῦν τά p καί q ὥστε τό πολυώνυμο x^4+1 νά εἶναι διαιρετό μέ τό x^2+px+q.

307) Νά ὁρισθοῦν τά α,β,γ ὥστε τό πολυώνυμο $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma$, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τά διώνυμα x^2+1 καί x^3+1, νά ἀφήνει ὑπόλοιπα, πού τό γινόμενό τους εἶναι $2x^2-12x+10$.

308) Ὁρίσετε τά α καί β ὥστε τό πολυώνυμο $x^3+3\mu x^2+3\alpha x+\beta$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό $x^2+2\mu x+\alpha$.

309) Νά γίνει γινόμενο πρώτων παραγόντων ἡ παράσταση:

$$(\mu^2-\nu^2)\rho^3+(\nu^2-\rho^2)\mu^3+(\rho^2-\mu^2)\nu^3.$$

310) Ὁρίσετε τά λ,μ,ν,ρ ἔτσι, ὥστε τό πολυώνυμο $x^5-x^4+x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu$, ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $x^3-\rho$, νά ἀφήνει ὑπόλοιπο $2x^2-2x+1$ καί ὅταν διαιρεθεῖ μέ τό $x^3+\rho$, νά ἀφήνει ὑπόλοιπο $-2x^2+2x-3$.

311) Νά ἀναλυθοῦν σέ γινόμενα πρώτων παραγόντων τά πολυώνυμα: $x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$.

312) Δείξετε ὅτι τό πολυώνυμο: $(\beta^2\gamma^2+\alpha^2\delta^2)(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)+(\gamma^2\alpha^2+\beta^2\delta^2)(\gamma-\alpha)(\beta-\delta)+(\alpha^2\beta^2+\gamma^2\delta^2)(\alpha-\beta)(\gamma-\delta)$ εἶναι διαιρετό μέ τό γινόμενο $P\equiv(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\gamma-\delta)$ καί προσδιορίσετε τό πηλίκο.

313) Νά βρεθεῖ ἕνα πολυώνυμο τῆς μορφῆς $\alpha x^4+\beta x+\gamma$ τέτοιο, ὥστε τό γινόμενο τῶν ὑπολοίπων τῆς διαιρέσεως αὐτοῦ διά τοῦ x^2-2 καί διά τοῦ x^3+1 νά εἶναι $\beta x(x-2)$.

314) Ὁρίσετε τό μ ὥστε τό πολυώνυμο $x^{2\mu}+x^{\mu}+1$ νά εἶναι διαιρετό μέ τό x^2+x+1.

315) Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο: $A\equiv x^{\nu}[z^2(x-y)^2-y^2(z-x)^2]+y^{\nu}[x^2(y-z)^2-z^2(x-y)^2]+z^{\nu}[y^2(z-x)^2-x^2(y-z)^2]$ ὅπου τό ν εἶναι φυσικός ἀριθμός, διαιρεῖται μέ τό γινόμενο

$P \equiv (y-z)(z-x)(x-y)$ καί νά βρεθεῖ τό πηλίκο.

316) Ἐάν ἕνα πολυώνυμο $f(x,y)$, πού εἶναι συμμετρικό ὡς πρός τά x,y, εἶναι διαιρετό μέ τό $x-y$ εἶναι ἐπίσης διαιρετό μέ τό $(x-y)^2$.

317) Νά δειχθεῖ, ὅτι, ἐάν $f(x)$ εἶναι ἕνα ἀκέραιο τοῦ x πολυώνυμο καί ἐάν ὑπάρχει ἕνας ἀριθμός τέτοιος, ὥστε νά εἶναι ἀληθινή ἡ ταυτότητα $f(x) \equiv f(x+a)$ αὐτό τό πολυώνυμο δέν ἀντιπροσωπεύει παρά μία σταθερή ποσότητα.

318) Νά δειχθεῖ ὅτι τό πολυώνυμο $(x+y)^\nu - x^\nu - y^\nu$, ὅταν τό $\nu = 6\kappa-1$, εἶναι διαιρετό μέ τό $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ καί ὅταν $\nu = 6\kappa+1$ εἶναι διαιρετό μέ τό $xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Η΄

Θεωρία τῶν λογαρίθμων

200. Τήν ἐκθετική συνάρτηση α^x τήν ὁρίσαμε στό ἐδ. 146 καί γιά τήν περίπτωση πού ὁ x εἶναι ἕνας ἄρρητος ἀριθμός.

Ἡ ρητή ἤ ἄρρητη τιμή τοῦ x γιά τήν ὁποία ἡ α^x γίνεται ἴση μέ τόν ἀριθμό y λέγεται <u>λογάριθμος</u> τοῦ y ὡς πρός βάση α.

Δηλ <u>λογάριθμος</u> ἑνός ἀριθμοῦ y ὡς πρός βάση α ὀνομάζεται ὁ ἐκθέτης στόν ὁποῖο πρέπει νά ὑψωθεῖ ἡ βάση α γιά νά προκύψει ὁ y.

Ἀποδεικνύεται* ὅτι ἡ συνάρτηση α^x μπορεῖ νά πάρει ὅλες τίς τιμές ἀπό τό $0 \cdots\cdots +\infty$ καί νά περάσει ἀπό τήν κάθε μιά μόνο μιά φορά.

Συγκεκριμένα: Ἐάν $\alpha > 1$. Γιά $x=0$ ἡ συνάρτηση α^x παίρνει τήν τιμή $\alpha^0=1$ καί ἐάν τό x μεταβάλλεται συνεχῶς** ἀπό τό 0 μέχρι τό $+\infty$ ἡ α^x μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο ἀπό τό $1 \cdots\cdots +\infty$***: ἐάν τό x μεταβάλλεται ἐπίσης συνεχῶς ἀπό τό $0 \cdots\cdots -\infty$ ἡ α^x μεταβάλλεται ἐπίσης συνεχῶς ἀπό τό $1 \cdots\cdots 0$. Σέ συμπέρασμα:

Ἐάν τό x μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο ἀπό τό $-\infty \cdots +\infty$

---

* Καί ἐμεῖς θά τό ἀποδείξουμε στό εἰδικό κεφάλαιο "Περί τῆς συνεχείας τῶν Συναρτήσεων"

** Παίρνει ὅλες τίς τιμές, ρητές καί ἄρρητες.

*** Βλέπετε καί ἐδ. 144.

ἡ a^x μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπο ἀπό τό $0 \cdots\cdots +\infty$.

Στήν περίπτωση πού τό $a < 1$, βλέπουμε πώς, ὅταν τό x μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπο ἀπό τό $-\infty \cdots\cdots\cdots +\infty$, ἡ συνάρτησή μας μεταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπο ἀπό τό $+\infty \cdots\cdots 0$.

Ἔτσι διαπιστώνουμε πώς σέ κάθε θετικό ἀριθμό y ἀντιστοιχεῖ ἕνας μόνο ἀριθμός x, πού ἐπαληθεύει τήν ἰσότητα $a^x = y$· καθορίζεται λοιπόν μιά νέα συνάρτηση ἡ $x = f(y)$, πού ὀνομάζεται λογαριθμική συνάρτηση καί στήν ὁποία τό x εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ y στό σύστημα μέ βάση a.

Ἔπειτα ἀπ' αὐτό τόν ὁρισμό προκύπτει πώς ὁ λογάριθμος εἶναι ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως (ἀπό τή μιά στήν ἄλλη ἔχουν ἀλλάξει ρόλο οἱ μεταβλητές x καί y) καί μεταβάλλεται κι αὐτή κατά συνεχῆ τρόπο, ὅταν τό y παίρνει τίς τιμές ἀπό τό $0 \cdots\cdots +\infty$.

Ἡ νέα μας -λοιπόν συνάρτηση εἶναι ἰσοδύναμη μέ τή $x = \log_a y$.

Παραθέτουμε ἕνα πίνακα τῶν μεταβολῶν τῆς λογαριθμικῆς συναρτήσεως, πού τόν συμπεραίνει κανείς εὔκολα ἀπό ὅ,τι εἴπαμε παραπάνω.

$$0 < a < 1$$

y	0	$\nearrow$	a	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$x = \log_a y$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

$$a > 1$$

x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$
$x = \log_a y$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Ἔτσι ἔχουμε τό συμπέρασμα:

1ο. Μόνο οἱ θετικοί ἀριθμοί ἔχουν λογαρίθμους.

2º. Ὁ λογάριθμος τῆς βάσεως εἶναι ἡ μονάς καί ὁ λογάριθμος τῆς μονάδος εἶναι τό μηδέν.

3º. Ἐάν ἡ βάση εἶναι $α > 1$ ὁ λογάριθμος (ἐδ. 144) εἶναι αὔξουσα συνάρτηση καί οἱ ἀριθμοί, πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα, ἔχουν λογαρίθμους θετικούς· καί οἱ ἀριθμοί οἱ μικρότεροι ἀπό τή μονάδα ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς.

4º. Ἐάν ἡ βάση εἶναι $α < 1$ ὁ λογάριθμος εἶναι μιά συνάρτηση φθίνουσα καί οἱ ἀριθμοί, πού εἶναι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς· οἱ ἀριθμοί οἱ μικρότεροι ἀπό τή μονάδα ἔχουν λογαρίθμους θετικούς.

201. Λογαριθμικά συστήματα σέ χρήση.

Εἴδαμε πώς ἡ βάση α μπορεῖ νά εἶναι ἕνας ὁποιοσδήποτε θετικός ἀριθμός· ἔτσι ἔχουμε ἄπειρα λογαριθμικά συστήματα.

Σέ χρήση βρίσκονται δύο:

1º. Τό δεκαδικό λογαριθμικό σύστημα δηλ. τό σύστημα βάσεως $α = 10$.*

2º. Τό Νεπέρειο λογαριθμικό σύστημα πού ἔχει γιά βάση $α = e = 2,718281828$**............... Τό πρῶτο χρησιμοποιεῖται σέ πρακτικούς ὑπολογισμούς καί τό δεύτερο κυρίως σέ θεωρητικές μελέτες.

---

* Πίνακες γιά τό σύστημα αὐτό κατεσκεύασε κατά σύσταση τοῦ Neper ὁ Briggs (1556-1630) καθηγητής τῶν Μαθηματικῶν στό Λονδίνο. Γι' αὐτό αὐτοί οἱ λογάριθμοι λέγονται καί λογάριθμοι τοῦ Briggs.

** Αὐτό τό σύστημα ὀνομάζεται Νεπέρειο ἀπό τό ὄνομα τοῦ John Néper ἤ Napier, baron de Merchishon (κοντά στό Edimbourg) 1550-1617, ὁ ὁποῖος καί ἀνεκάλυψε τούς λογαρίθμους.

Ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων

197. Θεώρημα 1ο. Ὁ λογάριθμος τοῦ γινομένου ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ παραγόντων ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν λογαρίθμων αὐτῶν τῶν παραγόντων.

Δηλ. θὰ δείξουμε ὅτι $\lambda o\gamma(x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_\nu) = \lambda o\gamma x_1 + \lambda o\gamma x_2 + \cdots + \lambda o\gamma x_\nu$.

Ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τοῦ λογαρίθμου, ἂν $y_1, y_2, \dots y_\nu$ εἶναι οἱ λογάριθμοι τῶν ἀριθμῶν $x_1, x_2, x_3, \dots x_\nu$ μὲ βάση α, παίρνουμε τὶς ἰσότητες:

$$\alpha^{y_1} = x_1$$

$$\alpha^{y_2} = x_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$\alpha^{y_\nu} = x_\nu$$

ἐπομένως καὶ τὴν ἰσότητα: $\alpha^{y_1+y_2+\cdots+y_\nu} = x_1 x_2 \cdots x_\nu$

ἢ τὴν ἰσότητα: $\lambda o\gamma(x_1 x_2 \cdots x_\nu) = y_1 + y_2 + \cdots + y_\nu = \lambda o\gamma x_1 + \lambda o\gamma x_2 + \cdots + \lambda o\gamma x_\nu$.

198. Θεώρημα 2ο. Ὁ λογάριθμος ἑνὸς πηλίκου βρίσκεται, ἂν ἀπὸ τὸ λογάριθμο τοῦ διαιρετέου ἀφαιρέσουμε τὸ λογάριθμο τοῦ διαιρέτου.

Δηλ. $\lambda o\gamma \frac{x_1}{x_2} = \lambda o\gamma x_1 - \lambda o\gamma x_2$

Μὲ τὴ σκέψη, ποὺ κάμαμε στὸ παραπάνω θεώρημα παίρνουμε τὶς ἰσότητες:

$$\alpha^{y_1} = x_1$$

$$\alpha^{y_2} = x_2$$

ἢ $\alpha^{y_1 - y_2} = \frac{x_1}{x_2}$. Δηλ. $\lambda o\gamma \frac{x_1}{x_2} = y_1 - y_2 = \lambda o\gamma x_1 - \lambda o\gamma x_2$.

199. Θεώρημα 3ο. Ὁ λογάριθμος μιᾶς δυνάμεως ἑνὸς ἀριθμοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενο τοῦ ἐκθέτου ἐπὶ τὸ λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ.

Δηλ. $λογ x^{ν} = ν . λογ x$.

Ἂν y εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ x μὲ βάση $α$ ἔχουμε: $α^{y} = x$ καὶ $α^{νy} = x^{ν}$. Ὥστε: $λογ x^{ν} = νy = ν . λογ x$.

205. Θεώρημα 4ο. Ὁ λογάριθμος τῆς ρίζας ἑνὸς ἀριθμοῦ βρίσκεται, ἂν τὸν λογάριθμο τοῦ ἀριθμοῦ διαιρέσουμε μὲ τὸ δείκτη τῆς ρίζας.

Δηλ. $λογ \sqrt[ν]{x} = \frac{1}{ν} \cdot λογ x$.

Ἂν y εἶναι ὁ λογάριθμος τοῦ x μὲ βάση $α$ ἔχουμε: $α^{y} = x$. Καὶ ἂν βγάλουμε τὴ νιοστὴ ρίζα καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητάς μας

$$\sqrt[ν]{α^{y}} = \sqrt[ν]{x} = α^{\frac{y}{ν}}.$$

δηλ. $λογ \sqrt[ν]{x} = \frac{y}{ν} = \frac{1}{ν} λογ x$.

206. Παρατήρηση. Οἱ ἰδιότητες τῶν λογαρίθμων μᾶς κάμνουν νὰ καταλάβουμε πῶς, μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς λογαριθμικοῦ πίνακα, μποροῦμε νὰ ἁπλοποιήσουμε ἕναν ἀριθμητικὸ ὑπολογισμό: μποροῦμε νὰ ἀντικαταστήσουμε ἕνα γινόμενο μὲ ἕνα ἄθροισμα, ἕνα πηλίκο μὲ μιὰ διαφορά, μιὰ ὕψωση σὲ δύναμη μ' ἕνα γινόμενο, μιὰ ἐξαγωγὴ ρίζας μὲ μιὰ διαίρεση.

Στὴν τελευταία περίπτωση, ὁ λογαριθμικὸς ὑπολογισμὸς εἶναι ἀναπόφευκτος, ὅταν ὁ δείκτης τοῦ ριζικοῦ εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3.

207. Χαρακτηριστικὸ τοῦ δεκαδικοῦ λογαρίθμου. Ἂν θεωρήσουμε τοὺς πίνακες:

$10^{0} = 1$

$10^{1} = 10$

$10^{2} = 100$

$13^{3} = 1000$

…………

…………

$10^{-1} = 0{,}1$

$10^{-2} = 0{,}01$

$10^{-3} = 0{,}001$

$10^{-4} = 0{,}0001$

…………

…………

παίρνουμε τοὺς πίνακες τῶν δεκαδικῶν λογαρίθμων τῶν θετικῶν ἀριθμῶν ποὺ 'ναι ἀκέραιες δυνάμεις τοῦ 10:

λογ $1 = 0$

λογ $10 = 1$

λογ $100 = 2$

λογ $1000 = 3$

....

....

λογ $0,1 = -1$

λογ $0,01 = -2$

λογ $0,001 = -3$

λογ $0,0001 = -4$

....

....

Ἄς θεωρήσουμε τώρα θετικούς ἀριθμούς, οἱ ὁποῖοι δέν εἶναι ἀκέραιες δυνάμεις τοῦ 10. Καί πρῶτα ἐκείνους, πού ᾽ναι μεγαλύτεροι ἀπό τή μονάδα.

Ἕνας ἀριθμός Α μεταξύ τοῦ 1 καί τοῦ 10 δηλ. ἕνας ἀριθμός, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τῆς μηδενικῆς καί τῆς πρώτης δυνάμεως τοῦ 10, θά ἔχει (σελίς 207 συμπ. 3º) λογάριθμο, πού θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 0 καί τοῦ 1 δηλ. θά εἶναι τῆς μορφῆς $0+\vartheta$, ὅπου ϑ τό δεκαδικό θετικό καί μικρότερο τῆς μονάδας μέρος τοῦ λογαρίθμου.

Ἄν σκεφτοῦμε κατά τόν ἴδιο τρόπο συμπεραίνουμε, πώς ἕνας ἀριθμός, πού περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 10 καί τοῦ 100, θά ἔχει λογάριθμο τῆς μορφῆς $1+\vartheta$, ὅπου $0<\vartheta<1$.

Γενικά, ὅταν ἕνας ἀριθμός Α περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στή ν-1 καί νιοστή δύναμη τοῦ 10 δηλ. ὅταν

$$10^{\nu-1} < A < 10^{\nu}$$

τότε ὁ λογάριθμός του θά εἶναι τῆς μορφῆς $(\nu-1)+\vartheta$, ὅπου $0<\vartheta<1$. Ὁ θεωρούμενος ἀριθμός Α ἤ εἶναι ἀκέραιος ἤ εἶναι δεκαδικός. Καί ἄν μέν εἶναι ἀκέραιος, τό ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου του, πού λέγεται καί χαρακτηριστικό τοῦ λογαρίθμου, ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν ψηφίων του ἐλαττωμένο κατά 1, ἄν δέ εἶναι δεκαδικός, τό πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ ἀκεραίου του μέρους ἐλαττωμένο κατά 1.

Λογουχάρη ἔχουμε

$$10^{3} < 3524 < 10^{4}$$

δηλ. $\text{λογ}\,3524 = 3+\vartheta$, ὅπου $0<\vartheta<1$, ὅπως ἐπίσης

$$10^3 < 3524,728 < 10^4$$

δηλ. $\text{λογ}\,3524,728 = 3+\vartheta'$, ὅπου $0<\vartheta'<1$.

Ἀντίστροφα: Ἄν τὸ ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ ἔχει $\nu-1$ μονάδες, ὁ ἀριθμός μας ἔχει ἀκέραιο μέρος μὲ ν ψηφία.

Ἄν $$\nu-1 < \text{λογ}\,A < \nu$$

τότε $$10^{\nu-1} < A < 10^{\nu}$$

δηλ. ὁ A εἶναι ἀριθμὸς μὲ ἀκέραιο μέρος νψήφιο.

Τώρα ἐκείνους, ποὺ εἶναι θετικοὶ καὶ μικρότεροι ἀπὸ τὴ μονάδα. Ἄν θεωρήσουμε ἕναν ἀριθμὸ A, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,1 καὶ τῆς μονάδας, θὰ ἔχουμε ὅτι ὁ λογάριθμός του θὰ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ -1 καὶ τοῦ 0, δηλ. θὰ ἔχουμε ὅτι $\text{λογ}\,A = -1+\vartheta$, ὅπου τὸ ϑ θὰ εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς καὶ μικρότερος τῆς μονάδας.

Ἐπίσης, ἂν ὁ A εἶναι ἀριθμός, ποὺ περιλαμβάνεται μεταξὺ τοῦ 0,1 καὶ τοῦ 0,01 θὰ ἔχει λογάριθμο τῆς μορφῆς $-2+\vartheta$, ὅπου $0<\vartheta<1$.

Γενικά, ἂν

$$10^{-\nu} < A < 10^{-(\nu-1)} \qquad (1)$$

τότε $\text{λογ}\,A = -\nu+\vartheta$, ὅπου $0<\vartheta<1$.

Εἶναι ὅμως φανερό, πὼς ὁ ἀριθμὸς A τῆς σχέσεως (1) θὰ ἔχει ἀκέραιο μέρος 0 καὶ δεκαδικὸ μέρος τέτοιο, ποὺ τὸ πρῶτο σημαντικό του ψηφίο (τὸ μὴ μηδενικό) νὰ κατέχει τὴ νιοστὴ θέση μετὰ τὴν ὑποδιαστολή.

Ἔτσι βγάζουμε τὸ ἑξῆς συμπέρασμα: Οἱ λογάριθμοι τῶν θετικῶν ἀριθμῶν, ποὺ εἶναι μικρότεροι τῆς μονάδας καὶ ποὺ δὲν εἶναι ἀκέραιες δυνάμεις τοῦ 10 εἶναι ἡμιαρνητικοί, ποὺ τὸ ἀκέραιό τους μέρος (τὸ χαρακτηριστικό) ἔχει τόσες ἀρνητικὲς μονάδες, ὅσες εἶναι ἀρκετὲς γιά νά δηλωθῆ ἡ θέση τοῦ πρώτου σημαντικοῦ ψηφίου τῶν ἀριθμῶν μετὰ τὴν ὑποδιαστολή.

203. Παρατήρηση. Ἀπὸ αὐτά, ποὺ ἀμέσως παραπάνου ἐκθέτουμε, γεννιέται μιὰ ἀπορία: Ἐνῶ (σελ. 207 συμπ. 3ο) οἱ ἀριθμοὶ οἱ μικρότεροι ἀπ' τὴ μονάδα ἔχουν λογαρίθμους ἀρνητικούς, πῶς συμβαίνει τώρα νά παρουσιάζουνται σάν ἡμιαρνητικοὶ δηλ. μέ μόνο τὸ ἀκέραιό τους μέρος ἀρνητικό;

Ἄν ὅλα τά μέλη τῶν ἀνισοτήτων (.) τά πολλαπλασιάσουμε μὲ τὸ 10^{ν} βρίσκουμε

$$10^{0} < A\cdot 10^{\nu} < 10^{1}$$

δηλ. $\lambda o\gamma (A.10^{\nu}) = 0+\vartheta$ ἤ $\lambda o\gamma A + \nu = 0+\vartheta$ ἤ $\lambda o\gamma A = -\nu+\vartheta$

Βλέπουμε λοιπὸν ὅτι τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ A, ποὺ εἶναι μικρότερος τῆς μονάδας καί ποὺ τὸ πρῶτο σημαντικό του ψηφίο μετά τὴν ὑποδιαστολὴ κατέχει τὴ νιοστὴ θέση, συμπίπτει μὲ τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου τοῦ ἀριθμοῦ $A\cdot 10^{\nu}$, ποὺ εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδας, γιατί ἔχει γιά ἀκέραιο μέρος τὸ ψηφίο, ποὺ ὁ A τὸ εἶχε γιά πρῶτο σημαντικὸ μετά τὴν ὑποδιαστολή.

Γιά νά ἐξηγήσουμε τέλεια τὴν ἀπορία μας πρέπει νά προσθέσουμε πώς ὁ ἡμιαρνητικός λογάριθμος δέν εἶναι παρά ὁ ἰσοδύναμος τοῦ ἐξ ὁλοκλήρου ἀρνητικοῦ λογαρίθμου.

Ὅταν λογουχάρη ἔχουμε, πώς ὁ

$$\lambda o\gamma A = -2,35724$$

μποροῦμε νά βροῦμε τόν ἰσοδύναμο αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ καί ἡμιαρνητικό.

Πραγματικά, $\lambda o\gamma A = -2+(-0,35724) = -3+1+(-0,35724)$.

Καί ἄν ἀπό τό $1 = \frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}$ ἀφαιρέσουμε τόν ἀριθμό $\frac{3}{10}+\frac{5}{10^2}+\frac{7}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{4}{10^5}$ βρίσκουμε

$$\lambda o\gamma A = \bar{3},64276$$

πού μόνο τό ἀκέραιό του μέρος εἶναι ἀρνητικό.

Ὁ ἀριθμός Α, πού ἔχει λογάριθμο −2,35724 θά περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ 10^{-3} καί τοῦ 10^{-2} δηλ. θά εἶναι $-3+\vartheta$, ὅπου ϑ θετικός μεταξύ 0 καί 1.

Ἀπό τή μετατροπή τοῦ ἐξ ὁλοκλήρου ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ σέ ἰσοδύναμο ἡμιαρνητικό βγάζουμε τόν κανόνα: Γιά νά μετατρέψουμε ἕναν ἐξ ὁλοκλήρου ἀρνητικό ἀριθμό σέ ἡμιαρνητικό προσθέτουμε στό ἀκέραιό του μέρος μιά ἀρνητική μονάδα καί ἀπό τά δεκαδικά του ψηφία ὅλα τά ἀφαιροῦμε ἀπό τό 9 ἐκτός ἀπό τό τελευταῖο, πού τό ἀφαιροῦμε ἀπό τό 10.

204. Θεώρημα. Τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου ἑνός ἀριθμοῦ, πού μᾶς δίνεται μέ δεκαδική μορφή, δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τή θέση τῆς ὑποδιαστολῆς.

Γι' αὐτό ἀρκεῖ νά δείξουμε πώς, ὅταν ἕναν δοσμένο ἀριθμό τόν πολλαπλασιάσουμε ἤ τόν διαιρέσουμε μέ τό 10^{ν}, τό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου του δέν μεταβάλλεται, ἀλλά τό χαρακτηριστικό του αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται κατά ν μονάδες.

Πραγματικά, πολλαπλασιάζοντας τόν ἀριθμό Α ἐπί τό 10^{ν}, ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma(A\cdot 10^{\nu}) = \lambda o\gamma A + \lambda o\gamma 10^{\nu} = \lambda o\gamma A + \nu\,\lambda o\gamma 10$$

$$\text{ἤ} \quad \lambda o\gamma(A\cdot 10^{\nu}) = \lambda o\gamma A + \nu$$

Ἐπίσης, διαιρόντας τον μέ τό 10^{ν}, ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma\left(\frac{A}{10^{\nu}}\right) = \lambda o\gamma A - \lambda o\gamma 10^{\nu}$$

$$\text{ἤ} \quad \lambda o\gamma \frac{A}{10^{\nu}} = \lambda o\gamma A - \nu$$

Ὁ ἀκέραιος ν εἶναι φανερό πώς καί στίς δύο περιπτώσεις δέν μπορεῖ νά μεταβάλλει παρά τό χαρακτηριστικό.

205. Σημείωση. Στήν παρατήρηση (203) πολλαπλασιάζοντας τὸν ἀριθμό μας ἐπὶ 10^{ν} τὸν κάμαμε μεγαλύτερο τῆς μονάδας, ἐνῶ κατὰ τὸ προηγούμενο θεώρημα διατηρήσαμε τὸ δεκαδικὸ μέρος τοῦ λογαρίθμου του.

206. Συμπέρασμα. Ὅταν δύο δεκαδικοὶ ἀριθμοὶ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὰ ἴδια ψηφία, οἱ λογάριθμοί των δὲν διαφέρουν μεταξύ των παρὰ κατὰ τὸ χαρακτηριστικόν των.

Ἀπ' αὐτὸ τὸ συμπέρασμα γίνεται φανερὸ γιατὶ θεώρησαν τοὺς λογαρίθμους τῶν ἀριθμῶν, ποὺ 'ναι μικρότεροι τῆς μονάδας καὶ θετικοί, μὲ τὴν ἡμιαρνητικὴ τους μορφή· ὁ λογισμὸς θὰ διευκολύνεται πολύ, ἀφοῦ τὰ μὲν χαρακτηριστικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων ἐκτιμιοῦνται ἀμέσως, γιὰ δὲ τὰ δεκαδικὰ δὲν ἔχουμε παρὰ νὰ περιορισθοῦμε εἰς τὰ δεκαδικὰ μέρη τῶν λογαρίθμων τῶν ἀριθμῶν τῶν μεγαλυτέρων τῆς μονάδος καὶ ἀκεραίων.

207. Συλλογάριθμος. Ὀνομάζουμε συλλογάριθμο ἑνὸς ἀριθμοῦ τὸν λογάριθμο τοῦ ἀντιστρόφου του.

Ἔτσι ἐξ ὁρισμοῦ

$$\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A = \lambda o\gamma \frac{1}{A}$$

ἢ

$$\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A = \lambda o\gamma\, 1 - \lambda o\gamma\, A = -\lambda o\gamma\, A$$

Ἡ εἰσαγωγὴ τῶν συλλογαρίθμων ἐπιτρέπει νὰ ἀντικαθιστοῦμε μιὰ διαφορὰ λογαρίθμων ἀπὸ ἕνα ἄθροισμα.

Ἔτσι ἔχουμε:

$$\lambda o\gamma \frac{A^{\mu}.B^{\nu}.\Gamma^{\rho}}{\Delta^{\kappa}.E} = \mu\lambda o\gamma A + \nu\lambda o\gamma B + \rho\lambda o\gamma \Gamma - \kappa\lambda o\gamma \Delta - \lambda o\gamma E$$

ἢ

$$\lambda o\gamma \frac{A^{\mu}.B^{\nu}.\Gamma^{\rho}}{\Delta^{\kappa}.E} = \mu\lambda o\gamma A + \nu\lambda o\gamma B + \rho\lambda o\gamma \Gamma + \kappa\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma \Delta + \sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma E.$$

208. Ὑπολογισμὸς τοῦ συλλογαρίθμου ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀπὸ τὸν λογάριθμόν του.

Ἂς ὑποθέσωμεν ὅτι ἔχουμε: $\lambda o\gamma A = 2,57834$

Τότε $\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A = -2,57834$ ἢ $\sigma\upsilon\lambda\lambda o\gamma\, A = -2-1+1-0,57834$

Δηλ. συλλογ Α = $\bar{3},42196$

Ὥστε: Γιὰ νὰ προσδιορίσουμε τὸν συλλογάριθμο ἑνὸς ἀριθμοῦ, ποὺ τοῦ γνωρίζουμε τὸν λογάριθμο, ἀρκεῖ νὰ προσθέσουμε μιὰ θετικὴ μονάδα στὸ χαρακτηριστικὸ τοῦ λογαρίθμου καὶ νὰ τοῦ ἀλλάξουμε τὸ σημεῖο· κατόπιν κάθε ψηφίο τοῦ δεκαδικοῦ μέρους τοῦ λογαρίθμου νὰ τὸ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ 9 ἐκτὸς ἀπὸ τὸ τελευταῖο, ποὺ θὰ τὸ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ 10.

Παραδείγματα:

λογ 0,08565 = $\bar{2},93273$ λογ 38,14 = 1,58138

συλλογ 0,08565 = 1,06727 συλλογ 38,14 = $\bar{2},41862$

Πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων

209. Οἱ πράξεις ἐπὶ τῶν λογαρίθμων, ποὺ 'χουν χαρακτηριστικὸ θετικὸ δὲν διαφέρουν ἀπὸ τὶς πράξεις, ποὺ κάμνουμε μὲ δεκαδικοὺς ἀριθμούς. Δὲν συμβαίνει ὅμως τὸ ἴδιο, ὅταν πρόκειται γιὰ πράξεις μὲ λογαρίθμους, ποὺ 'χουν χαρακτηριστικὸ ἀρνητικό. Αὐτοὶ ἔχουν μιὰ καινούργια μορφὴ (καλλίτερα: ἕνα ἰδιαίτερο σημάδεμα) καὶ χρειάζεται νὰ ἐξετάσουμε τὶς διαφορετικὲς περιπτώσεις, ποὺ μπορεῖ νὰ συναντήσουμε στὴν πρακτική.

210. Πρόσθεση. Ἂς εἶναι γιὰ πρόσθεση οἱ λογάριθμοι:

1ο
$$\begin{array}{r} 2,57834 \\ \underline{\bar{1},67943} \\ 2,25777 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \bar{3},56789 \\ \underline{\bar{2},67432} \\ \bar{4},24221 \end{array}$$

Στὸ πρῶτο παράδειγμα τὸ ἄθροισμα τῶν δεκαδικῶν μερῶν τῶν λογαρίθμων εἶναι 1,25777· γράφουμε λοιπὸν τὸ δεκαδικὸ μέρος αὐτοῦ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τὴ μονάδα, ποὺ περισσεύει, τὴν προσθέτουμε στὸ ἀλγεβρικὸ ἄθροισμα τῶν ἀκεραίων των μερῶν. Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἀποτέλεσμα, ποὺ 'ναι σημειὡμένο. Ὅμοια σκεφτόμαστε καὶ στὸ δεύτερο παράδειγμα.

211. Διαφορὰ δύο λογαρίθμων. Κάμνουμε χρήση τῶν συλλογαρίθμων καὶ ἔτσι ἀναγόμαστε στὴν πρόσθεση.

Μποροῦμε ὅμως νὰ ἐργαστοῦμε κατὰ τρόπο πιὸ πρακτικό. Ἄς ποῦμε πὼς θέλουμε νὰ ἀφαιρέσουμε τοὺς λογαρίθμους:

$$\begin{array}{r}\bar{3},45874\\ \bar{4},54782\\ \hline 0,91092\end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r}\bar{2},83754\\ \bar{5},32452\\ \hline \bar{3},51302\end{array}$$

Στὸ πρῶτο παράδειγμα ἀφαιροῦντες τὰ δεκαδικὰ μέρη βρίσκουμε τὸ δεκαδικὸ μέρος τῆς διαφορᾶς, ποὺ ἔχουμε γραμμένο, μὰ χρωστᾶμε μιὰ ἀκεραία μονάδα στὸν ἀφαιρετέο, γιατί κατὰ τὴν ἀφαίρεση τοῦ ψηφίου 5 τοῦ ἀφαιρετέου ἀπὸ τὸ ψηφίο 4 τοῦ μειωτέου προσθέσαμε μιὰ μονάδα στὸ μειωτέο. Ἔτσι λέμε $1+(-4)=-3$· καὶ ἂν αὐτὸ τὸ -3 τὸ ἀφαιρέσουμε ἀπὸ τὸ -3 τοῦ μειωτέου βρίσκουμε γιὰ ἀκέραιο μέρος τῆς διαφορᾶς μηδέν. Μὲ ὅμοια σκέψη βρίσκουμε καὶ τὸ ἀποτέλεσμα στὸ δεύτερο παράδειγμα.

212. Πολλαπλασιασμὸς ἑνὸς λογαρίθμου ἐπὶ ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό. Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμός:

$$\begin{array}{r}\bar{2},67893\\ 5\\ \hline \bar{7},39465\end{array}$$

Πολλαπλασιάζουμε πρῶτα τὸ 0,67893 μὲ τὸ 5 καὶ βρίσκουμε 3,39465· γράφουμε τὸ δεκαδικὸ μέρος καὶ προσθέτουμε 3 στὸ γινόμενο -10 τοῦ -2 μὲ τὸ 5. Ἔτσι βρίσκουμε τὸ παραπάνου ἀποτέλεσμα.

213. Διαίρεση ἑνὸς λογαρίθμου μ' ἕναν ἀκέραιο ἀριθμό 1ο Ἄς ὑποθέσουμε πὼς ἡ ἀφηρημένη τιμὴ τοῦ χαρακτηριστικοῦ εἶναι διαιρετὴ μὲ τὸν ἀκέραιο.

Νά, ἄς ποῦμε πώς πρόκειται νά διαιρέσουμε τόν $\bar{6}$,54782 μέ τόν 3. Εἶναι τό ἴδιο μέ τό νά διαιρέσουμε τό ἄθροισμα

$$-6+0,54782$$

μέ τόν 3. Ἔτσι βρίσκουμε ἀμέσως γιά πηλίκο: $\bar{2}$,18260.

2ο. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα πώς ἡ ἀφηρημένη τιμή τοῦ χαρακτηριστικοῦ δέν εἶναι διαιρετό μέ τόν ἀκέραιο.

Ἔστω πώς πρόκειται γιά τή διαίρεση $\bar{4}$,54782 : 3.

Ἔχουμε:

$$\bar{4},54782=\bar{6}+2,54782$$

Καί διαιροῦντες τό ἰσοδύναμο ἄθροισμα μέ 3 βρίσκουμε τό πηλίκο: $\bar{2}$,84927. Δηλ. προσθέτουμε στό ἀρνητικό ἀκέραιο μέρος τοῦ λογαρίθμου τόσες ἀρνητικές μονάδες, ὅσες χρειάζονται γιά νά γίνει τοῦτο διαιρετό μέ τόν ἀκέραιο διαιρέτη μας· τόν ἴδιο ἀριθμό θετικῶν μονάδων προσθέτουμε ἐπίσης στό θετικό δεκαδικό μέρος τοῦ λογαρίθμου μας.

214. Λογαριθμικοί πίνακες. Σ' ὅλα τά βιβλία λογαριθμικῶν πινάκων ἐκτίθεται μέ κάθε λεπτομέρεια ὁ τρόπος διατάξεως τῶν πινάκων καί ὁ τρόπος χρήσεώς των. Γι' αὐτό θεωροῦμε ἄσκοπη γιά τοῦτο τό βιβλίο μιά τέτια ἐπανάληψη.

215. Ἐφαρμογή. Νά ὑπολογιστεῖ τό

$$x=\frac{312,415\sqrt[3]{3,5781^{2}}}{17,1826^{2}\cdot\sqrt[10]{0,002987^{3}}}$$

$$\text{λογ}\,x=\text{λογ}\,312,415+\frac{2}{3}\text{λογ}\,3,5781-2\,\text{λογ}\,17,1826-\frac{3}{10}\text{λογ}\,0,002987$$

ἤ $\text{λογ}\,x=\text{λογ}\,312,415+\frac{2}{3}\text{λογ}\,3,5781+2\,\text{συλλογ}\,17,1826+\frac{3}{10}\,\text{συλλογ}\,0,002987$

$$\begin{aligned}\text{λογ}\,312,415 &= 2,49473\\ \frac{2}{3}\text{λογ}\,3,5781 &= 0,36910\\ 2\,\text{συλλογ}\,17,1826 &= \bar{3},52982\\ \frac{3}{10}\cdot\text{συλλογ}\,0,002987 &= 0,75743\\ \hline \text{λογ}\,x &= 1,15108\end{aligned}$$

καί $x=14,1606$

Ἀσκήσεις

319) Ἀναπτύξτε τούς παρακάτου λογαρίθμους:

$$\lambda o\gamma \sqrt[3]{\frac{\mu^2-\nu^2}{3\mu\nu^4}} \qquad \lambda o\gamma \frac{3\alpha\sqrt{\beta}}{\gamma^8} \qquad \lambda o\gamma \frac{3(\alpha^2-\beta^2)}{\sqrt[3]{\alpha^2+\beta^2}}$$

320) Διαπιστώστε μέ τή χρήση τῶν λογαριθμικῶν πινάκων τίς ἀκόλουθες ταυτότητες:

$$\sqrt[7]{349} = 2{,}3081 \qquad \frac{\sqrt[30]{0{,}00582156^{7}}\cdot\sqrt[7]{315{,}217^2}}{3{,}244256\cdot 1{,}12537^3} = 0{,}336838$$

$$\frac{31{,}62496\cdot 1{,}04569^5}{2{,}718282} = 14{,}546 \qquad \sqrt{8{,}5273\cdot\sqrt[3]{51{,}3388}} = 5{,}62962$$

$$\pi\cdot\sqrt{\frac{4{,}51}{9{,}81309}} = 2{,}1298 \qquad \sqrt[7]{\frac{721{,}5713^2\sqrt[4]{12{,}2758}}{\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[5]{0{,}0678368}}} = 7{,}11017$$

321) Νά βρῆτε τόν τύπο, πού μᾶς δίνει τόν λογάριθμο ἑνός ἀριθμοῦ ὡς πρός σύστημα τυχούσης βάσεως α, ὅταν ξέρουμε τόν δεκαδικό του λογάριθμο.

Γιά ἐφαρμογή, ὑπολογίστε τόν λογάριθμο τοῦ 139 στό σύστημα, πού 'χει βάση τόν 7.

322) Νά ὑπολογιστεῖ στό Παρίσι ἡ διάρκεια μιᾶς αἰωρήσεως ἑνός ἐκκρεμοῦς, πού 'χει μῆκος $\ell = 1{,}50^m$.

Ἄν πάρετε τίς τιμές: $\pi = 3{,}14159265$, $g = 9{,}8094$ θά βρῆτε γιά διάρκεια $t = 1{,}2285$ ἤ κατά προσέγγιση $1{,}23^{sec}$.

323) Δεῖξτε μέ θεωρητικό τρόπο πώς ἡ διαφορά μεταξύ τῶν λογαρίθμων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν ὅλο καί μικραίνει, ὅσο οἱ ἀριθμοί μεγαλώνουν.

Γενικὲς ἀσκήσεις γιὰ ὅλη τὴν προηγούμενη ὕλη

324) Γνωρίζοντες ὅτι ἔχουμε

$$S_\nu = 1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\dots\dots+\frac{1}{1.2.3\dots\nu}$$

δείξτε τὴν ἀλήθεια τῆς ἰσότητας : $\nu S_\nu=(\nu+1)S_{\nu-1}-S_{\nu-2}$

325) Ἐὰν α καὶ β εἶναι δύο θετικοὶ καὶ διαφορετικοὶ μεταξύ τους ἀριθμοὶ ἰσχύει ἡ σχέση :

$$\alpha^5+\beta^5-\alpha^4\beta-\alpha\beta^4>0.$$

326) Ἐὰν α, β, γ εἶναι τρεῖς θετικοὶ ἀριθμοὶ καὶ δὲν εἶναι ὅλοι ἴσοι ἡ ἀνισότητα :

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)>8\alpha\beta\gamma$$

εἶναι ἀληθινή.

327) Τί εἴδους τρίγωνο εἶναι ἐκεῖνο, ποὺ οἱ πλευρές του συνδέονται μὲ τὴ σχέση

$$\frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha}=\frac{1}{8}\ ;$$

328) Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ α, β, γ εἶναι θετικοὶ καὶ ὄχι ὅλοι ἴσοι 1ο Νὰ δείξτε πώς ἡ ἀνισότητα

$$\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)>6\alpha\beta\gamma$$

εἶναι ἀληθινό.

2ο Νὰ διαπιστῶστε τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου, ποὺ οἱ πλευρές του α, β, γ συνδέουνται μὲ τὸ σχέση

$$\alpha\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)+\beta\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)+\gamma\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)=6$$

329) Γνωρίζοντες ὅτι :

$$S_\nu=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots\dots+\frac{1}{\nu}$$

δείξτε πρῶτα τὴν ἀλήθεια τῆς ἀνισότητας : $S_{2\nu}-S_\nu>\frac{1}{2}$, καὶ θέτοντες $\nu=2^{\rho}$ διαπιστῶστε πώς καί ἡ ἀνισότητα

$$S_{2^{\rho}} > \frac{\rho}{2}+1$$

εἶναι ἀληθινή.

330. Ἔστω $f(x,y)=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2$ ἐνῶ $\beta^2-\alpha\gamma<0$ καί $\alpha>0$.

1º. Νά δειχθεῖ πώς ἡ συνάρτησις $f(x,y)$ δέν εἶναι ποτέ ἀρνητική.

2º. Ἐάν θέσουμε

$$z=\sqrt{f(x,y)} \qquad z'=\sqrt{f(x',y')} \qquad R=\sqrt{f(x+x',y+y')}$$

νά δειχθεῖ ὅτι ἔχουμε: $R\leqslant z+z'$ καί $R\geqslant|z-z'|$

3º. Νά γενικευτεῖ ἡ πρώτη ἰδιότητα τοῦ 2º.

331) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως.

$$u=\frac{x+y}{1-xy}$$

γιά $x=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ $\qquad y=\frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}$

332) Ἐάν α καί β εἶναι ἀριθμητικοί ἀριθμοί, νά δειχτεῖ ὅτι ἡ $\sqrt[\mu+\rho]{\alpha\beta}$ περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν $\sqrt[\mu]{\alpha}$ καί $\sqrt[\rho]{\beta}$.

33) Ἐάν α, β, γ εἶναι τρεῖς ἀριθμητικοί ἀριθμοί, νά δειχτεῖ ὅτι ἡ $\sqrt[\mu+\rho+\nu]{\alpha\beta\gamma}$ περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στόν πιό μεγάλο καί στόν πιό μικρό ἀπό τούς τρεῖς ἀριθμούς $\sqrt[\mu]{\alpha}$, $\sqrt[\rho]{\beta}$, $\sqrt[\nu]{\gamma}$. Νά γενικευτεῖ.

334) Ἁπλοποιῆστε τίς παραστάσεις:

1º $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}-\sqrt[3]{\frac{9}{12}}$ $\qquad$ 2º $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}:\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$

335) Νά βρεθεῖ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$$u=\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{3}{4xy}}$$

γιά $x=3+\sqrt{5}$ καί $y=3-\sqrt{5}$.

336) Γνωρίζοντες ὅτι λογ2=α καί λογ3=β νά ὑπολο-

γιστοῦν ἀπὸ τὰ α καὶ β οἱ παραστάσεις

$$\lambda o\gamma\, 151,875\,, \qquad \lambda o\gamma\, 243\cdot\sqrt[4]{\frac{364,5}{\sqrt[3]{2}}} \quad \text{καὶ } \lambda o\gamma\cdot\sqrt[5]{\frac{5}{3}\cdot\sqrt[4]{6}}$$

337) Νὰ ὁριστεῖ ἡ βάσις τοῦ λογαριθμικοῦ συστήματος στὸ ὁποῖο εἶναι ἀληθινὴ ἡ ἰσότητα:

$$2\left(\lambda o\gamma_x 8\right)^2 + \lambda o\gamma_x 64 + \lambda o\gamma_x 8 = 9$$

338) Νὰ δειχτεῖ ἡ ἰσότητα:

$$\lambda o\gamma_x y\cdot \lambda o\gamma_y \omega\, \lambda o\gamma_\omega x = 1$$

339) Ἀφοῦ $\lambda o\gamma 2 = 0,30103$ καὶ $\lambda o\gamma 3 = 0,47712$, πόσα ψηφία ἔχει ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς $3^{12}\cdot 2^{8}$;

340) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως: $x^4+4\lambda x^2+4\mu$

γιὰ $\quad x=\sqrt{-\lambda+\sqrt{\mu}}+\sqrt{-\lambda-\sqrt{\mu}}$

ἐνῶ $\mu \geqslant 0$ καὶ $\lambda \leqslant -\sqrt{\mu}$.

341) Ἐὰν θέσουμε $x+\frac{1}{x}=y$ συμπεράνατε τὶς ἰσότητες:

$$x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2 \qquad x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y$$

καὶ ἂν θέσουμε $S_\nu = x^\nu+\frac{1}{x^\nu}$ τὴν ἰσότητα:

$$S_\nu = y\cdot S_{\nu-1}-S_{\nu-2}$$

342) Νὰ δειχτεῖ ὅτι ἂν $\alpha>\beta>0$ ὑπάρχει πάντα ἕνας ἀριθμὸς γ, ποὺ περιλαμβάνεται ἀνάμεσα στὰ α καὶ β, καὶ ποὺ 'ναι τέτιος ὥστε νὰ ἰσχύει ἡ ἰσότητα:

$$\alpha^\nu-\beta^\nu=\nu(\alpha-\beta)\gamma^{\nu-1}$$

343) Μετασχηματίστε σὲ γινόμενο παραγόντων τὴν παράσταση:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^4-(\beta+\gamma)^4-(\gamma+\alpha)^4-(\alpha+\beta)^4+\alpha^4+\beta^4+\gamma^4$$

344) Νὰ δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση

$$\sqrt{x+\sqrt{x^2-\alpha^2}}+\sqrt{x-\sqrt{x^2-\alpha^2}}$$

εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{2(x+\alpha)}$ ἂν $\alpha>0$ καὶ μὲ $\sqrt{2(x-\alpha)}$ ἂν $\alpha<0$.

345) Γνωρίζοντες ὅτι ἔχουμε:

$$\frac{x-\alpha}{A}=\frac{y-\beta}{B}=\frac{z-\gamma}{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$

νὰ δειχτεῖ ὅτι ἔχουμε ἐπίσης

$$(A^2+B^2+\Gamma^2)\left[(x-\alpha^2)+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\right]=(A\alpha+B\beta+\Gamma\gamma+\Delta)^2$$

346) Διαπιστῶστε τὴν ἀλήθεια τῆς ἰσότητας:

$$\sqrt[3]{100+51\sqrt{3}}+\sqrt[3]{100-51\sqrt{3}}=8$$

347) Ἁπλοποιῆστε τὴν παράσταση:

$$\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)^3$$

348) Θεωροῦμε τὶς δύο ἐκφράσεις:

$$\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}+\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad \frac{x^3+y^3}{x^3-y^3}+\frac{x^3-y^3}{x^3+y^3}$$

Ἂν α εἶναι ἡ τιμὴ τῆς πρώτης ὑπολογίστε τὴν τιμὴ β τῆς δεύτερης.

349) Νὰ ὁριστοῦν τὰ α καὶ β ὥστε τὸ πολυώνυμον $\alpha x^4+\beta x^3+1$ νὰ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $(x-1)^2$.

350) Νὰ δειχτεῖ ὅτι γιὰ ὁποιαδήποτε τιμὴ τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ ν

1ο. Τὸ πολυώνυμο $(x^\nu-1)(x^{\nu+1}-1)$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $(x-1)(x^2-1)$.

2ο. Τὸ πολυώνυμο $(x^\nu-1)(x^{\nu+1}-1)(x^{\nu+2}-1)$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $(x-1)^3(x+1)(x^2+x+1)$.

351) Νὰ δειχτεῖ ὅτι τὸ $(x+\alpha+\beta)^3-x^3-\alpha^3-\beta^3$ εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ $(x+\alpha)(x+\beta)$ καὶ νὰ βρεθεῖ τὸ πηλίκο.

Νὰ γενικευτεῖ ἡ πρόταση γιὰ τὸ πολυώνυμο $(x+\alpha+\beta)^\mu-x^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu$ ὅταν τὸ μ εἶναι περιττὸς ἀριθμός.

352) Νὰ δειχτεῖ ὅτι τὸ πολυώνυμο

$$yz^{\mu}-zy^{\mu}+zx^{\mu}-xz^{\mu}+xy^{\mu}-yx^{\mu}$$

εἶναι διαιρετὸ μὲ τὸ γινόμενο $(y-z)(z-x)(x-y)$ καὶ νὰ βρεθεῖ τὸ πηλίκον.

353) Νὰ βρεθεῖ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ πολυωνύμου

$$2x^5+3x^4-2x^3-x^2+3x+1$$

γνωρίζοντες ὅτι $\frac{1}{x}=1-x^2$.

354) Ἀναλύσατε τὴν παράστασιν x^6+1 εἰς ἕνα γινόμενον παραγόντων τοῦ πρώτου ἢ τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

355) Προσδιορίστε τὰ p καὶ q ὥστε τὸ πολυώνυμον x^3+px+q νὰ εἶναι ἐκ ταυτότητος ἴσον πρὸς τὸ $(x^2+ax+\beta)^2-x^4$. Ἔπειτα ἀφοῦ ἀντικαταστήσετε τὰ p καὶ q ἀπὸ τὶς τιμές τους, λύστε τὴν ἐξίσωση $x^3+px+q=0$.

356) Νὰ βρεθοῦν οἱ τετραγωνικὲς ρίζες τῶν ἀκολούθων πολυωνύμων ποὺ 'ναι τέλεια τετράγωνα:

α) $\left[(\alpha+\beta)^2+\beta^2\right]^2+4\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)$

β) $\alpha^2x^4-4\alpha\beta x^3+2(2\beta^2-3\alpha\gamma)x^2+12\beta\gamma x+9\gamma^2$

γ) $(\alpha-\beta)^2(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\gamma-\beta)^2$.

357) Νὰ δειχτεῖ ὅτι τὸ πολυώνυμον : $8x^3-12(\alpha-1)x^2+6(\alpha^2-2\alpha+1)x+\alpha^3-3\alpha^2+3\alpha-1$ εἶναι τέλειος κύβος.

358) Νὰ δειχτεῖ, πὼς ἐὰν τὸ πολυώνυμον $\alpha x^3+3\beta x^2+3\gamma x+\delta$ εἶναι διαιρετὸν διὰ τοῦ τριωνύμου $\alpha x^2+2\beta x+\gamma$, τὸ πρῶτον εἶναι ἕνας τέλειος κύβος καὶ τὸ δεύτερον ἕνα τέλειον τετράγωνον.

359) Νὰ βρεθεῖ ὁ μ.κ.δ. τῶν δύο πολυωνύμων:

$$(\alpha-\beta)^5+(\beta-\gamma)^5+(\gamma-\alpha)^5 \quad , \quad (\alpha^2-\beta^2)^5+(\beta^2-\gamma^2)^5+(\gamma^2-\alpha^2)^5$$

(τὸ ζητούμενον πολυώνυμον προφανῶς θὰ προσδιοριστεῖ κατὰ προσέγγισιν σταθεροῦ παράγοντα.

360) Νὰ δειχτεῖ ὅτι ἡ παράσταση:

$$\frac{x^2}{(x+\alpha)(x-\beta)}+\frac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-x)}+\frac{\beta^2}{(\beta-\alpha)(\beta-x)}$$ εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.