Δ 1 ΜΜΚ

Αραχωβίτη (σκίτσα Γ.)

ΚΩΣΤΑ Γ. ΑΡΑΧΩΒΙΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΕΛΥΜΕΝΑΙ
ΚΑΙ
ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

ΤΟΜΟΣ Ι

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΙΔΙΚΑ δὲ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ τῆς ΑΝΩΤ. ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ καὶ ΑΝΩΤ. ΣΧΟΛΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ὡς ἐμπεριέχουσαι, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, τὰ σπουδαιότερα κατὰ καιροὺς δοθέντα Μαθηματικὰ θέματα κατὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν ὡς ἄνω ΣΧΟΛΩΝ.

ΑΘΗΝΑΙ — 1950

ΚΩΣΤΑ Γ. ΑΡΑΧΩΒΙΤΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

Κώστας Αραχωβίτης

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤ. ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΤΩΝ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ.

ΕΙΔΙΚΑ δὲ τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς εἰσαγωγικὰς τῆς ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ καὶ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ὡς ἐμπεριέχουσαι, ἐκτὸς τῶν ἄλλων, τὰ σπουδαιότερα κατὰ καιροὺς δοθέντα Μαθηματικὰ θέματα κατὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις τῶν ὡς ἄνω ΣΧΟΛΩΝ.

ΑΘΗΝΑΙ
1950

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον δέον
νά φέρῃ τήν ὑπογραφήν τοῦ
συγγραφέως.——

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μὲ τὸ βιβλίον τοῦτο «ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ», τὸ ὁποῖον ἀπεφασίσαμεν νὰ γράψωμεν, δὲν ἐσκέφθημεν νὰ προσθέσωμεν καὶ ἓν ἀκόμη εἰς τὰ τόσα πολλὰ κυκλοφοροῦντα καὶ θετικῶς συμβάλλοντα εἰς τὴν μελέτην τῶν μαθητῶν, ἀλλὰ ἠθελήσαμεν νὰ παρουσιάσωμεν εἰς τοὺς ὑποψηφίους σπουδαστὰς τὴν θεωρίαν καὶ ἄσκησιν τῆς Ἀλγέβρας, ἐν ταὐτῷ συγκεντρωμένην, κατὰ μέθοδον καὶ σύστημα πλέον ἐπαγωγικόν, πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον ἐκ τῆς πολυετοῦς ἡμῶν φροντιστηριακῆς πείρας ἔχομεν ἀποκομίσει.

Τὸ ἀνὰ χεῖρας βιβλίον εἶναι καταλληλότατον ὄχι μόνον διὰ τοὺς ὑποψηφίους καὶ σπουδαστὰς τῆς ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΜΠΟΡΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ, ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ καὶ ΑΝΩΤ. ΣΧ. ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ, διὰ τοὺς ὁποίους κυρίως ἐγράφη, λόγῳ ἀποφυγῆς τῆς θεωρητικῆς μακρυγορίας, ἀλλὰ καὶ διὰ τοὺς ἀρχαρίους ὑποψηφίους τοῦ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟΥ καὶ τῶν ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ. Διότι θὰ εὕρουν οὗτοι εἰς τὰ πρῶτα βήματα τῆς καταρτίσεώς των ὑλικὸν ἀσκήσεων ἐκλεκτὸν καὶ κατὰ τὸν ἐπαγωγικώτερον τρόπον ταξινομημένον εἰς τρόπον ὥστε εὐκόλως νὰ λύωνται αἱ ἀπορίαι των ἐκ τῶν κάτω, ἵνα δι' ἐμπεδώσεως τῶν ἁπλουστέρων συνηθοῦν νὰ μελετήσουν καὶ διερευνήσουν βαθύτερον τὰ θεωρητικώτερα κεφάλαια τῆς Ἀλγέβρας, τὰ ὁποῖα εἰς ὅλως ἰδιαίτερα τεύχη θέλομεν ἐκδόσει.

Δὲν παραλείψαμεν ἐνταῦθα νὰ διαλάβωμεν τὰς ἀποδείξεις καὶ ἐφαρμογὰς τῶν θεωρημάτων τῆς διαιρετότητος πολυωνύμου τινος $\varphi(x)$ διὰ τῶν πρωτοβαθμίων πρὸς x διωνύμων $(x \pm \alpha)$, $(\alpha x + \beta)$, τὰ ἀξιοσημείωτα πηλίκα τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm \alpha^\mu):(x \pm \alpha)$ καὶ τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm \alpha^\nu):(x^\rho \pm \alpha^\sigma)$ μετὰ πλήθους λελυμένων ἀσκήσεων, τὰς ἀξιοσημειώτους ταυτότητας, ταυτότητας ὑπὸ ὅρους κ.λ.π., τοὺς τύπους τοῦ διωνύμου τοῦ Νεύτωνος μὲ ἐπέκτασιν. Ὁμοίως τὸ σπουδαῖον κεφάλαιον ἀναλύσεως παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων ἐταξινομήσαμεν εἰς 10 κυρίως περιπτώσεις μετὰ τῶν τεχνασμάτων, μὲ πληθὺν ἀσκήσεων λελυμένων καὶ μὴ πρὸς αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν. Ἐξισώσεις καὶ συστήματα ἐξισώσεων α΄ βαθμοῦ, β΄ βαθμοῦ καὶ ἀνωτέρου βαθμοῦ μετὰ προβλημάτων ἐπ᾽ αὐτῶν κατόπιν ἐπιλογῆς. Ἰδιαιτέρα προσοχὴ ἐδόθη εἰς τὰ περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας κλασματικοὺς θετικοὺς καὶ ἀρνητικούς, περὶ ριζῶν κ.λ.π. κ.λ.π.

Ὀφείλομεν ἐνταῦθα νὰ τονίσωμεν ὅτι παρακολουθοῦντες ἀγρύπνως ἀπὸ 20ετίας καὶ πλέον τὰ θέματα, τὰ ὁποῖα ἐδόθησαν κατὰ τὰς εἰσαγωγικὰς ἐξετάσεις εἰς τὰς Ἀνωτάτας Σχολὰς καὶ κρατοῦντες ταῦτα στατιστικῶς κατὰ χρονολογίαν, προτείνομεν ἐνταῦθα τὰ ζητήματα ταῦτα ἄλλα λελυμένα καὶ ἄλλα πρὸς λύσιν ὑπὸ τῶν ὑποψηφίων, ἵνα κατατοπίσωμεν αὐτοὺς καλύτερον πρὸς τὸ πνεῦμα τῶν ἀπαιτήσεων τῆς Ἀνωτάτης Σχολῆς, δι᾽ ἣν προορίζονται.

Ἐλπίζοντες, κατόπιν τούτων, ὅτι οἱ κ.κ. ὑποψήφιοι σπουδασταὶ θέλουσιν εὕρει ἕνα θετικὸν βοήθημα, διὰ τὴν μελέτην τῆς Ἀλγέβρας των, συγκεντρωτικὸν (Θεωρία + Ἀσκήσεις) θὰ δοκιμάσωμεν μεγάλην ἱκανοποίησιν διὰ τὴν ἐπιτυχίαν τῆς καινοτομίας μας ταύτης.—

Ὁ Συγγραφεύς.

ΚΩΣΤΑΣ Γ. ΑΡΑΧΩΒΙΤΗΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΟΡΙΣΜΟΙ

§1. Ὁρισμός καί σκοπός τῆς Ἀλγέβρας. Καθώς ἡ Ἀριθμητική οὕτω καί ἡ Ἄλγεβρα ἀσχολεῖται περί τούς ἀριθμούς καί τήν λύσιν διαφόρων ἐπ᾽ αὐτῶν ζητημάτων καί προβλημάτων κατά τρόπον ὅμως εὐρύτερον καί γενικώτερον. Ἡ Ἄλγεβρα ἐν τῇ γενικεύσει της ἁπλοποιεῖ τά ζητήματα τῆς Ἀριθμητικῆς καί προβλήματα δυσκολώτερα, ἐν πολλοῖς δέ καί ἄλυτα ἐν αὐτῇ, δύναται νά λύσῃ.

Εἶναι ὅθεν ἡ Ἄλγεβρα εἷς κλάδος τῶν Μαθηματικῶν ἐπιστημῶν σκοπόν ἔχων νά ἁπλοποιῇ καί γενικεύῃ τήν λύσιν τῶν ζητημάτων καί προβλημάτων τῆς Ἀριθμητικῆς δηλ. ἡ Ἄλγεβρα εἶναι μία Γενική Ἀριθμητική ἤ ὅπως ὀρθῶς ἐκάλεσε ταύτην ὁ Νεύτων εἶναι μία Διεθνής Ἀριθμητική.

§2. Ἀλγεβρικοί τύποι. Μία ἰσότης, ἡ ὁποία παρέχει τήν τιμήν ἑνός ἀγνώστου ποσοῦ, ὅταν γνωρίζωμεν τάς τιμάς τῶν ἄλλων ποσῶν, αἱ ὁποῖαι παρίστανται μέ γράμματα, καλεῖται ἀλγεβρικός τύπος. Π.χ. αἱ ἰσότητες:

$E = \beta \cdot \upsilon$, $S = \upsilon \cdot t$, $T = \frac{K \cdot E \cdot X}{100}$ εἶναι ἀλγεβρικοί τύποι.

§3. Ἀλγεβρικοί ἀριθμοί. Θετικός ἀριθμός καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μηδενός καί ἔχει ἔμπροσθέν του τό σημεῖον +. Ἀρνητικός ἀριθμός καλεῖται πᾶς ἀριθμός, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ μηδενός καί ἔχει ἔμπροσθέν του τό σημεῖον −.

π.χ. οἱ ἀριθμοί $+12$, $+\frac{3}{5}$, $+3{,}5$ εἶναι θετικοί ἀριθμοί

οἱ ἀριθμοί -3 , $-\frac{5}{8}$, $-4{,}75$ εἶναι ἀρνητικοί ἀριθμοί.

Τό σύνολον τῶν θετικῶν καί ἀρνητικῶν ἀριθμῶν καλοῦνται ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ἤ σχετικοί ἀριθμοί.

§4. Ὁμόσημοι λέγονται δύο ἤ περισσότεροι ἀριθμοί ὅταν ἔχουν τό αὐτό σημεῖον καί ἑτερόσημοι ὅταν ἔχουν διάφορα σημεία ἔμπροσθέν των.

π.χ. οἱ ἀριθμοί $+5$, $+\frac{4}{9}$, $+0,25$ εἶναι ὁμόσημοι,

ὁμοίως οἱ » -3, $-\frac{7}{12}$, $-5,8$ εἶναι ὁμόσημοι,

ἐνῷ οἱ » -5, $+4$, $-\sqrt{24}$, $+\frac{3}{4}$, $-\frac{1}{5}$ εἶναι ἑτερόσημοι.

§5. <u>Ἀπόλυτος τιμή</u>. Ἀ π ό λ υ τ ο ς τ ι μ ή ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ καλεῖται αὐτός οὗτος ὁ ἀριθμός θετικῶς λαμβανόμενος δηλ. ὁ ἀριθμός τῆς Ἀριθμητικῆς, ὁ προκύπτων ὅταν παραλείψωμεν τό σημεῖον τοῦ δοθέντος ἀλγεβρικοῦ ἀριθμοῦ.

Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ $+7$ εἶναι ὁ 7 ἡ δέ ἀπόλυτος τιμή τοῦ -7 εἶναι πάλιν ὁ 7. Ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ± 12 εἶναι ὁ 12.

Διά νά παραστήσωμεν τήν ἀπόλυτον τιμήν ἀλγεβρικοῦ τινος ἀριθμοῦ α, θέτομεν αὐτόν μεταξύ δύο κατακορύφων χαραγῶν, οὕτω: $|\alpha| = \alpha$, $|-\beta| = \beta$, $|\pm 12| = 12$. Ὡς ἀπόλυτος τιμή τοῦ μηδενός λαμβάνεται τό μηδέν, τό ὁποῖον δέν ἔχει σημεῖον $|0| = 0$.

§6. <u>Ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ἴσοι, ἄνισοι, ἀντίθετοι, ἀντίστροφοι.</u>

Ἴ σ ο ι λέγονται δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί τό αὐτό σημεῖον. Π.χ. $-6=-6$, $+9=+9$, ἐνῶ $-6 \neq +6$. Κατά ταῦτα ἡ ἰσότης $\alpha=\beta$ δηλοῖ ὅτι οἱ δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί α καί β ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί τό αὐτό σημεῖον.

§7. Ἄ ν ι σ ο ι λέγονται δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ἐάν διαφέρουν εἴτε κατά τήν ἀπόλυτον τιμήν αὐτῶν, εἴτε κατά τό σημεῖον, ἤ καί κατά τήν ἀπόλυτον τιμήν καί κατά τό σημεῖον. Π.χ. οἱ ἀριθμοί $+8$ καί $+15$ εἶναι ἄνισοι. Ὡσαύτως οἱ ἀριθμοί $+8$ καί -8 καθώς καί $+12$ καί -5 εἶναι ἄνισοι.

§8. Ἀ ν τ ί θ ε τ ο ι λέγονται δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί, ὅταν ἔχουν τήν αὐτήν ἀπόλυτον τιμήν καί διάφορα σημεῖα. Π.χ. οἱ ἀριθμοί $+7$ καί -7 εἶναι ἀντίθετοι καθώς καί οἱ ἀριθμοί $-\frac{8}{15}$ καί $+\frac{8}{15}$ εἶναι ἀντίθετοι. Τό αὐτό συμβαίνει μέ τούς ἀριθμούς $+\alpha$ καί $-\alpha$.

Σημ. Τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα δύο ἀντιθέτων ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό μηδέν, ὡς θά ἴδωμεν κατωτέρω. Οὕτω $(+7)+(-7)=0$.

§9. Ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ι λέγονται δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ὅταν τό γινόμενον αὐτῶν ἰσοῦται μέ τήν μονάδα 1. π.χ. οἱ ἀριθμοί $(+\frac{2}{5})$ καί $(+\frac{5}{2})$ εἶναι ἀντίστροφοι, καθότι: $(+\frac{2}{5})\times(+\frac{5}{2})=\frac{2\times5}{5\times2}=1$, ὁμοίως $\alpha\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha}{\alpha}=1$, ἄρα οἱ ἀριθμοί α καί $\frac{1}{\alpha}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

§ 10. Διά νά προσθέσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους ἀλγεβρικούς ἀριθμούς ὁμοσήμους ἤ ἑτεροσήμους πρέπει νά ἔχωμεν ὑπ᾽ ὄψιν τούς κάτωθι κανόνας ἤ ὁρισμούς.

I. Τό ἄθροισμα δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ὁμοσήμων εἶναι εἷς ἀλγεβρικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό ἀριθμητικόν ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν καί ὡς σημεῖον τό κοινόν σημεῖον τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν.

II. Τό ἄθροισμα δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν ἑτεροσήμων εἶναι εἷς ἀλγεβρικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τήν ἀριθμητικήν διαφοράν τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο τούτων ἀριθμῶν καί ὡς σημεῖον, τό σημεῖον ἐκείνου ἐκ τῶν δύο ἀριθμῶν, ὅστις ἔχει τήν μεγαλυτέραν ἀπόλυτον τιμήν.

III. Ἐάν δύο ἀλγεβρικοί ἀριθμοί ἔχουν ἴσας ἀπολύτους τιμάς καί εἶναι ἑτερόσημοι, τότε οὗτοι καλοῦνται **ἀντίθετοι** ἤ **συμμετρικοί** καί ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μέ μηδέν κατά τόν κανόνα II. π.χ. $(+6)+(-6)=0$.

IV. Τό ἄθροισμα πολλῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται ἐάν προσθέσωμεν χωριστά τούς θετικούς καί χωριστά τούς ἀρνητικούς ἀριθμούς καί προσθέσωμεν ἀκολούθως τά δύο ἐξαγόμενα.

Ἀσκήσεις ἐπί τῆς προσθέσεως.

1. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:*

1. $(+4)+(+5)$	4. $(-3)+(-9)$	7. $(-\frac{1}{2})+(+2)$	10. $(+\frac{3}{8})+(-\frac{1}{6})$
2. $(+7)+(-3)$	5. $(+5)+(-5)$	8. $(+\frac{3}{4})+(-2)$	11. $(-\frac{11}{18})+(+\frac{5}{12})$
3. $(-10)+(+8)$	6. $(+3)+(+\frac{2}{5})$	9. $(-\frac{5}{3})+(-3)$	12. $(-0,7)+(-5,3)$

Ἀποκρίσεις.

1. $(+4)+(+5)$.

Ἐπειδὴ οἱ δύο ἀριθμοὶ $+4$ καὶ $+5$ ἔχουν τὸ αὐτὸ σημεῖον προσθέτομεν τὰς ἀπολύτους τιμὰς 4 καὶ 5 καὶ εὑρίσκομεν 9 καὶ δίδομεν εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸ σημεῖον $+$, τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν εἰς τοὺς δύο δοθέντας ἀριθμοὺς $+4$ καὶ $+5$. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀλγεβρ. ἀριθμῶν $+4$ καὶ $+5$ εἶναι λοιπὸν ἴσον μὲ $+9$ καὶ γράφομεν:

$$(+4)+(+5)=+9$$

ἢ ἁπλούστερον ἐξαλείφοντες τὰς παρενθέσεις:

$$+4+5=+9 \quad \text{ἢ} \quad 4+5=9.$$

2. $(+7)+(-3)$

Οἱ ἀριθμοὶ $+7$ καὶ -3 εἶναι ἑτερόσημοι. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἄθροισμά των, ἀφαιροῦμεν τὴν μικροτέραν ἀπόλυτον τιμὴν 3 ἀπὸ τῆς μεγαλυτέρας 7 καὶ εὑρίσκομεν 4· δίδομεν δὲ εἰς τὸν ἀριθμὸν τοῦτον τὸ σημεῖον $+$, σημεῖον τοῦ $+7$, διότι ὁ $+7$ ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ ἀριθμοῦ -3. Τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀλγεβρ. ἀριθμῶν $+7$ καὶ -3 εἶναι ὅθεν ἴσον μὲ $+4$ καὶ δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$(+7)+(-3)=+4 \quad \text{ἢ} \quad +7-3=+4 \quad \text{ἢ} \quad 7-3=4.$$

3. $(-10)+(+8)=;$

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἴση πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν ἀπολύτων τιμῶν $10-8=2$ καὶ τὸ σημεῖον εἶναι $-$ διότι ὁ ἀριθμὸς -10 ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν μεγαλυτέραν τοῦ $+8$· ὅθεν:

$$(-10)+(+8)=-2 \quad \text{ἢ} \quad -10+8=-2.$$

4. $(-3)+(-9)=;$

Ἡ ἀπόλυτος τιμὴ τοῦ ἀθροίσματος εἶναι ἴση πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀπολύτων τιμῶν, $3+9=12$ καὶ τὸ σημεῖον εἶναι $-$, ἐπειδὴ τὸ σημεῖον τοῦτο εἶναι κοινὸν καὶ τῶν δύο ἀριθμῶν· ὅθεν:

$$(-3)+(-9)=-12 \quad \text{ἢ} \quad -3-9=-12.$$

5. $(+5)+(-5)=;$

Ἐπειδὴ οἱ δύο ἀριθμοὶ $+5$ καὶ -5 εἶναι ἀντίθετοι, τὸ ἄθροισμά των εἶναι μηδέν· $(+5)+(-5)=0$ ἤ $5-5=0$.

6. $(+3)+\left(+\frac{2}{5}\right)=\left(+\frac{15}{5}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)=+\frac{17}{5}$ ἤ $3+\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$.

7. $\left(-\frac{1}{2}\right)+(+2)=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{4}{2}\right)=+\frac{3}{2}$ ἤ $-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$.

8. $\left(+\frac{3}{4}\right)+(-2)=\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{8}{4}\right)=-\frac{5}{4}$ ἤ $\frac{3}{4}-2=-\frac{5}{4}$.

9. $\left(-\frac{5}{3}\right)+(-3)=\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(-\frac{9}{3}\right)=-\frac{14}{3}$ ἤ $-\frac{5}{3}-3=-\frac{14}{3}$.

10. $\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)=\left(+\frac{9}{24}\right)+\left(-\frac{4}{24}\right)=+\frac{5}{24}$ ἤ $\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$.

11. $\left(-\frac{11}{18}\right)+\left(+\frac{5}{12}\right)=\left(-\frac{22}{36}\right)+\left(+\frac{15}{36}\right)=-\frac{7}{36}$.

12. $(-0,7)+(-5,3)=-0,7-5,3=-6$.

2. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:*

1. $(+3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-4)$
2. $(+2,5)+(-4,7)+(-8,3)+(-5)$.

Ἀπόκ:

1. Εὑρίσκομεν τό ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων προσθετέων +3 καί +7 καί ἔχομεν: $(+3)+(+7)=+10$.
Εἰς τόν ἀριθμόν τοῦτον +10 προσθέτομεν τόν τρίτον προσθετέον −5 καί λαμβάνομεν: $(+10)+(-5)=+5$.
Εἰς τόν νέον τοῦτον ἀριθμόν +5 προσθέτομεν τόν τέταρτον προσθετέον +2 ὅτε λαμβάνομεν: $(+5)+(+2)=+7$.
Τέλος εἰς τόν +7 προσθέτομεν τόν τελευταῖον προσθετέον −4 καί ἔχομεν: $(+7)+(-4)=+3$.
Τό ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι +3 καί δυνάμεθα νά γράψωμεν: $(+3)+(+7)+(-5)+(+2)+(-4)=+3$,
ἤ ἁπλούστερον ἀπαλείφοντες τάς παρενθέσεις:

$$3+7-5+2-4=3.$$

2. Προσθέτοντες τούς δύο πρώτους προσθετέους θά ἔχωμεν: $(+2,5)+(-4,7)=-2,2$, $(-2,2)+(-8,3)=-10,5$

$$(-10,5)+(-5)=-15,5.$$

Τό ζητούμενον ἄθροισμα εἶναι −15,5.

3. <u>Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:</u>

$A = (+5)+(+9)+(+13)+(+8)+(+25)+(+34)+(+50).$

<u>Ἀποκ.</u> Θά ἔχωμεν: $A = 5+9+13+8+25+34+50 = +144 = 144.$

4. <u>Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:</u> $A = (-7)+(-2)+(-10)+(-12)+(-50).$

<u>Ἀποκ.</u> Θά ἔχωμεν: $A = -7-2-10-12-50 = -(7+2+10+12+50) = -81.$

5. <u>Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:</u>

$A = 15+(+10)+(-7)+20-12+(+8)+3+(-2)-9.$

<u>Ἀποκ.</u> Θά ἔχωμεν:

$A = 15+10-7+20-12+8+3-2-9.$

$A = (15+10+20+8+3)-(7+12+2+9)$

$A = 56-30 = 26.$

6. <u>Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:</u>

$A = (+2,6)+(-1,4)+(-3,8)+(+1,8)+(-0,6)+(+1,4).$

<u>Ἀπόκ.</u> Θά ἔχωμεν:

$A = 2,6-1,4-3,8+1,8-0,6+1,4 = (+5,8)+(-5,8) = 0$

7. <u>Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:</u>

1. $\left(+\frac{3}{8}\right)+\left(+\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{8}+\frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$
2. $\left(-\frac{5}{8}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{5}{8}-\frac{7}{8} = -\frac{12}{8} = -\frac{3}{2}$
3. $\left(+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{5}-\frac{3}{4} = \frac{12}{20}-\frac{15}{20} = \frac{12-15}{20} = -\frac{3}{20}.$

8. <u>Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:</u>

1. $\left(+7\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{4}\right)$, <u>Ἀπ.</u> $= 4\frac{1}{4}$
2. $\left(-2\frac{1}{5}\right)+\left(-3\frac{1}{5}\right)$, <u>Ἀπ.</u> $= -6\frac{1}{5}$
3. $\left(+5\frac{1}{4}\right)+\left(-2\frac{5}{6}\right)$ <u>Ἀπ.</u> $= 2\frac{5}{12}.$

9. <u>Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:</u>

1. $(-4)+(-5)+(+8)+(-7)+(-8)+(-9) =$; <u>Ἀπ.</u> $= -25.$
2. $(-5)+(+8)+(-10)+(-2)+(+23)+(-15)+(+1) =$; <u>Ἀπ.</u> $= 0.$
3. $(+15,8)+(-20,45)+(+9,35)+(-6,20)+1,5$ <u>Ἀπ.</u> $= 0.$

10. <u>Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:</u>

1. $\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)+(+5)+\left(-\frac{1}{4}\right) =$; <u>Ἀπ.</u> $= +\frac{53}{12}.$
2. $\left(+\frac{7}{8}\right)+\left(-\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)+\left(-\frac{7}{10}\right)+\left(+\frac{1}{2}\right) =$; <u>Ἀπ.</u> $= -\frac{47}{40}.$

3. $\left(-\frac{6}{5}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+1\frac{9}{40}\right)+(+0,1)=;$ Ἀπ. = 0.

11. *Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:*

$$250+(+150)+(-650)+1000-1750+(+1950)+(-3500)$$
$$+1850+(7020+9000-3070)+(-2250)=;$$ Ἀπ. = 10000.

12. *Ὁδοιπόρος ἀναχωρήσας ἀπό σημείου Α ὁδοῦ διήνυσε τήν πρώτην ἡμέραν (+8,35) χιλιόμετρα, τήν δευτέραν ἡμέραν (−3,75) χιλιόμ. τήν δέ τρίτην (+4,50) χιλιόμ. Πόσον ἀπέχει ἤδη ἀπό τοῦ Α;*

Ἀποκ. $=(+8,35)+(-3,75)+(+4,50)=8,35-3,75+4,50$
$=12,85-3,75=9,10$ χιλιόμ.

13. *Ἡ θερμοκρασία ἀσθενοῦς ἦτο τήν 8ην ὥραν π.μ. $(+37,8)^\circ$. Μετά 2 ὥρας ηὐξήθη κατά $(+0,6)^\circ$, μετά 4 ὥρας ηὐξήθη κατά $(-0,8)^\circ$ καί μετά 2 ὥρας ηὐξήθη κατά $(+1,2)^\circ$. Πόση ἦτο ἡ θερμοκρασία κατά τό τέλος τῶν 2 τελευταίων ὡρῶν;*

Ἀποκ. $=(+37,8)+(+0,6)+(-0,8)+(+1,2)=(+38,8)^\circ$.

14. *Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:*

$$\left[(+20)+(-15)+(-35)\right]+(+15)=(-15).$$

15. *Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι:*

$$\left[(-8)+(+12)\right]+\left[(+8)+(-12)\right]=0.$$

Ἀποκ. Πράγματι:

$$\left[(-8)+(+12)\right]+\left[(+8)+(-12)\right]=(-8+12)+(8-12)=$$
$$=(+4)+(-4)$$
$$=4-4=0.$$

16. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:*

$$\left[(+15)+(-7)+(-3)\right]+\left[(+25)+(+7)+(-2)\right]=(+35).$$

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ.

§11. Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό ἕνα ἀλγεβρικόν ἀριθμόν (μειωτέον) ἕνα ἄλλον (ἀφαιρετέον) προσθέτομεν εἰς τόν μειωτέον τόν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου.

17. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ διαφοραί:

1. $(+2)-(-4)$ 2. $(-7)-(-3)$ 3. $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)$
4. $\left(+\frac{2}{5}\right)-(+0{,}3)$ 5. $\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(-\frac{5}{21}\right)$ 6. $\left(-\frac{17}{48}\right)-\left(+\frac{11}{36}\right)$.
7. $\left(-2\frac{1}{5}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)$ 8. $\left(-10\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{8}\right)$ 9. $(+3{,}50)-(-4{,}25)$.
10. $(-2{,}40)-(+3{,}60)$.

Ἀποκρίσεις:

1. $(+2)-(-4)=;$

Διά νά ἀφαιρέσωμεν τόν ἀλγεβρικόν ἀριθμόν -4 ἀπό τόν ἀλγεβρ. ἀριθμόν $+2$ προσθέτομεν εἰς τόν μειωτέον $+2$ τόν ἀντίθετον τοῦ ἀφαιρετέου -4, ἤτοι:

$$(+2)-(-4)=(+2)+(+4)=+6.$$

2. $(-7)-(-3)=-7+3=-4.$

3. $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{3}{6}\right)-\left(+\frac{2}{6}\right)=-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=-\frac{5}{6}$

4. $\left(+\frac{2}{5}\right)-(+0{,}3)=\left(+\frac{4}{10}\right)-\left(+\frac{3}{10}\right)=\frac{4}{10}-\frac{3}{10}=\frac{1}{10}.$

5. $\left(-\frac{3}{7}\right)-\left(-\frac{5}{21}\right)=-\frac{9}{21}+\frac{5}{21}=-\frac{4}{21}$

6. $\left(-\frac{17}{48}\right)-\left(+\frac{11}{36}\right)=-\frac{51}{144}-\frac{44}{144}=-\frac{95}{144}.$

7. $\left(-2\frac{1}{5}\right)-\left(-3\frac{1}{4}\right)=\left(-\frac{11}{5}\right)-\left(-\frac{13}{4}\right)=-\frac{11}{5}+\frac{13}{4}=-\frac{44}{20}+\frac{65}{20}=\frac{21}{20}.$

8. $\left(-10\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{8}\right)=-\frac{21}{2}-\frac{41}{8}=-\frac{84}{8}-\frac{41}{8}=-\frac{125}{8}.$

9. $(+3{,}50)-(-4{,}25)=+3{,}50+4{,}25=+7{,}75=7{,}75.$

10. $(-2{,}40)-(+3{,}60)=-2{,}40-3{,}60=-6.$

18. Νά ὑπολογισθῇ ἡ διαφορά $x=\alpha-\beta$:

1. Ἐάν $\alpha=-9$, $\beta=-8$
2. » $\alpha=0$, $\beta=+5$
3. » $\alpha=-18$, $\beta=0$.

Ἀποκρ. Θὰ ἔχωμεν:

1. $x = (-9) - (-8) = (-9) + (+8) = -9 + 8 = -1.$
2. $x = 0 - (+5) = 0 + (-5) = 0 - 5 = -5.$
3. $x = (-18) - (-0) = -18 + 0 = -18.$

19. *Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἀλγεβρικὰ ἀθροίσματα:*

1. $(-2) + (-4) - (-7) + (+2) - (+5).$
2. $(-13) - (-8) + (-2) - (-10) - (+6) - (-11).$
3. $\left(-\frac{3}{8}\right) + \left(+\frac{5}{2}\right) - \left(-\frac{7}{4}\right) - (-2).$
4. $(+2,5) - (+4,9) + (-3,7) - (-5,8).$

Ἀποκρ. Θὰ ἔχωμεν:

1. $-2 - 4 + 7 + 2 - 5 = -2$
2. $-13 + 8 - 2 + 10 - 6 + 11 = +8$
3. $-\frac{3}{8} + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} + 2 = -\frac{3}{8} + \frac{20}{8} + \frac{14}{8} + \frac{16}{8} = \frac{47}{8}.$
4. $2,5 - 4,9 - 3,7 + 5,8 = -0,3.$

20. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τοῦ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος* $\alpha - \beta + \gamma - \delta$.

1ον Ἐὰν $\alpha = 40$, $\beta = -25$, $\gamma = +20$, $\delta = -11$

2ον » $\alpha = 2,5$, $\beta = 0,25$, $\gamma = -0,5$, $\delta = -1,75$.

Ἀπόκρ. Θὰ ἔχωμεν:

1. $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 40 - (-25) + (+20) - (-11) = 96.$
2. $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 2,5 - 0,25 + (-0,5) - (-1,75) = 3,5.$

21. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ ἀκόλουθοι πράξεις:*

1. $15 + (-5 + 17)$ Ἀπ. 27.
2. $20 - (+8 - 15)$ Ἀπ. 27.
3. $14 - (-9 + 4)$ Ἀπ. 19.
4. $-15,8 + (-7,5 + 23,3)$ Ἀπ. 0.
5. $7,5 - (-2,5 + 1,75)$ Ἀπ. 8,25.
6. $5000 - (4500 - 8000 + 2000 - 3600)$ Ἀπ. 10.100.

22. *Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:*

1. $(-3 + 4 - 5) - (2 + 7 - 6)$ Ἀπ. $= -7$.
2. $(-7,5 + 3,4 - 2,3) + (4,6 - 8,1) - (-5,8 + 6,2 + 9,6)$ Ἀπ. $= -19,9$.
3. $\left(2 - \frac{1}{9} + \frac{4}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{15}\right) + \left(-\frac{2}{9} + 1 - \frac{5}{3}\right)$ Ἀπ. $= \frac{17}{15}$.

4. $\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{16}+\frac{2}{9}-\frac{4}{3}+2\right)-\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{18}\right)$ Ἀπ. $= -\frac{75}{144}$.

23. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:

1. $(-5+6-8)+(7-9+6)-(12+8-25)$ Ἀπ. $= 2$.

2. $(-4{,}5+2{,}6-3{,}5)+(2{,}6-7{,}3)-(-2{,}7+5{,}1-4{,}6)$ Ἀπ. $= -3{,}9$.

3. $\left(3-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{2}-\frac{3}{10}\right)+\left(\frac{1}{5}+3-\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)$ Ἀπ. $= \frac{157}{30}$.

4. $(7.500-3800+200)-(-3500+4200-2500)-(6000-2300+1000)$

Ἀπ. $= 1000$.

24. Νά εὑρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:

1. $9+[-4+6-(-7+3+8)+5]$ Ἀπ. $= 12$.

2. $2-7-[8-5+(5-2+4)-(6-1+3)]$ Ἀπ. $= -7$.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α.

25. Ἔμπορός τις ἔχει εἰς τό ταμεῖον του 15000 δρχ. Κατά τήν διάρκειαν τῆς ἡμέρας ἔκαμε τάς κάτωθι διαδοχικάς εἰσπράξεις καί πληρωμάς:
+ 4500 δρχ, − 2100 δρχ, + 1550 δρχ., + 4300 δρχ, − 2850 δρχ. + 4900 δρχ., − 3800 δρχ.
Τί ταμεῖον θά κλείσῃ εἰς τό τέλος τῆς ἡμέρας;

Ἀπ. + 22000 δρχ.

26. Ἕν ἀεροπλάνον ἀνῆλθεν εἰς ὕψος 3300 μέτρων, ἔπειτα κατῆλθε κατά 1600 μέτρα, ἀνῆλθε ὅμως πάλιν κατά 750 μ. καί κατῆλθεν πάλιν κατά 1200 μ.
Νά εὑρεθῇ τό τελικόν ὕψος τοῦ ἀεροπλάνου.

Ἀπ. ὕψος = 1250 μ.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ.

§ 12. Γινόμενον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν.

Γ ι ν ό μ ε ν ο ν   δ ύ ο   ἀ λ γ ε β ρ ι κ ῶ ν   ἀ ρ ι θ μ ῶ ν λέγεται εἷς τρίτος ἀλγεβρικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό ἀριθμητικόν γινόμενον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τῶν δύο δοθέντων ἀριθμῶν καὶ ὡς σημεῖον + ἐάν οἱ δύο οὗτοι ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι ἤ τό σημεῖον − ἐάν οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἑτερόσημοι.

Ἐάν ὁ εἷς τῶν ἀριθμῶν εἶναι 0, τό γινόμενον τότε θά ἰσοῦται μέ μηδέν.

§13. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τόν κάτωθι πίνακα ὡς κανόνα τῶν σημείων:

$$(+) \text{ ἐπί } (+) = +$$
$$(+) \text{ ἐπί } (-) = -$$
$$(-) \cdot (+) = -$$
$$(-) \cdot (-) = +$$

27. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:*

1. $(+2)\cdot(+3)$ 2. $(+3)\cdot(-4)$ 3. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(+5)$
4. $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$ 5. $(-9)\cdot\left(+\frac{4}{7}\right)$ 6. $\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)$.
7. $\left(-\frac{8}{11}\right)\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)$ 8. $\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot 0$ 9. $(-3,5)\cdot(-0,6)$.
10. $(+1,5)\cdot(+3,4)$ 11. $\left(+7\frac{1}{2}\right)\cdot(-0,05)$.

<u>Ἀποκ.</u> Θά ἔχωμεν:

1. $(+2)\cdot(+3)=+6$ 2. $(+3)\cdot(-4)=-12$
3. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(+5)=-\frac{5}{2}$ 4. $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{8}{15}$
5. $(-9)\cdot\left(+\frac{4}{7}\right)=\frac{-36}{7}$ 6. $\left(+\frac{4}{9}\right)\cdot\left(+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{9}$.
7. $\left(-\frac{8}{11}\right)\cdot\left(-\frac{11}{8}\right)=1$ 8. $\left(-\frac{7}{5}\right)\cdot 0=0$.
9. $(-3,5)\cdot(-0,6)=2,1$ 10. $(+1,5)\cdot(+3,4)=5,1$
11. $\left(+7\frac{1}{2}\right)\cdot(-0,05)=-0,375$.

28. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:*

1. $(-2)(+4)(+3)(-7)$ 2. $\left(+\frac{2}{3}\right)(-5)\left(-\frac{3}{8}\right)(-2)\left(+\frac{3}{4}\right)$
3. $(-2)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)$ 4. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)$
5. $(+2,4)\left(+\frac{3}{4}\right)(-10)\left(-\frac{2}{3}\right)$ 6. $(-9)\cdot\left(-\frac{5}{36}\right)\cdot(-0,6)$.

<u>Ἀποκρ.</u>

1. Διά νά ὑπολογίσωμεν τό γινόμενον $(-2)\cdot(+4)\cdot(+3)\cdot(-7)$

λαμβάνομεν τό γινόμενον τῶν δύο πρώτων παραγόντων:

$(-2)(+4)=-8$, $(-8)(+3)=-24$, $(-24)\cdot(-7)=168$

ὅθεν θά ἔχωμεν: $(-2)(+4)(+3)(-7)=168$.

2. $\left(+\frac{2}{3}\right)(-5)\left(-\frac{3}{8}\right)(-2)\left(+\frac{3}{4}\right)$

$\left(+\frac{2}{3}\right)\cdot(-5)=-\frac{10}{3}$, $\left(-\frac{10}{3}\right)\left(-\frac{3}{8}\right)=+\frac{10\cdot 3}{3\cdot 8}=+\frac{5}{4}$, $\left(+\frac{5}{4}\right)(-2)=-\frac{5}{2}$, $\left(-\frac{5}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{15}{8}$.

ὅθεν: $\left(+\frac{2}{3}\right)(-5)\left(-\frac{3}{8}\right)(-2)\left(+\frac{3}{4}\right)=-\frac{15}{8}$.

3. $(-2)\left(+\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{2}{5}$

4. $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)=-\frac{1}{28}$

5. $(+2{,}4)\left(+\frac{3}{4}\right)(-10)\left(-\frac{2}{3}\right)=12$

6. $(-9)\left(-\frac{5}{36}\right)(-0{,}6)=-\frac{3}{4}$

29. *Νά εὑρεθῇ τό ἐξαγόμενον:* $(+2)\cdot(-3)-(+5)(-8)+(-9)(-6)-3(-10)$.

Θά ἔχωμεν μετά τάς πράξεις:

$-6-(-40)+(+54)-(-30)=-6+40+54+30=118$.

30. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:* $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{6}\right)\left(+\frac{5}{8}\right)$.

Ἀ π ό κ. Θά ἔχωμεν μετά τινας πράξεις:

$\left(-\frac{2}{6}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{5}{48}\right)=-\frac{16}{48}-\frac{12}{48}-\frac{5}{48}=-\frac{11}{16}$

31. *Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον:* $(-2+4-7)\cdot(-5)$.

Ἀπόκ. Θά ἔχωμεν:

$(-2+4-7)\cdot(-5)=(-5)\cdot(-5)=+25=25$

Ἄλλος τρόπος.

$(-2+4-7)(-5)=(-2)(-5)+(+4)(-5)+(-7)(-5)$

$=10-20+35=25$.

32. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

1. $(+3-6+8-2)\cdot(+7)$ Ἀπ. $=21$
2. $\left(-\frac{1}{2}+5+\frac{1}{3}-4\right)\cdot(-6)$ Ἀπ. $=-5$.
3. $\left(-3+11-\frac{1}{4}\right)\left(+\frac{1}{2}\right)$ Ἀπ. $=\frac{31}{8}$
4. $(2{,}5-4{,}75+0{,}25)\cdot(-1{,}5)$ Ἀπ. $=3$.

33. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

1. $(-3+5+8-4)\cdot(+2-7-6)$ ᾿Απ.$=-66$.
2. $\left(-2+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(+6-\frac{3}{5}-9\right)$ ᾿Απ.$=$ $6{,}9$.
3. $(-3{,}4-7+6{,}1)\cdot(+1{,}5-4+2{,}3+5)$ ᾿Απ.$=-20{,}64$

34. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:*

1. $(+3)\cdot(-5)\cdot(-6)\cdot(+4)\cdot(-7)$ ᾿Απ.$=-2520$
2. $(-7)\cdot(-2)\cdot(-6)\cdot(+2)\cdot(-10)$ ᾿Απ.$=$ 1680
3. $(-9)\cdot\left(-\frac{5}{27}\right)\cdot(-0{,}6)\cdot(-10)$ ᾿Απ.$=$ 10.
4. $\left(-3\frac{1}{4}\right)\cdot(+2{,}15)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)$ ᾿Απ.$=\frac{1677}{640}$

35. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

1. $(3-2+4)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-4+\frac{1}{5}\right)$ ᾿Απ.$=-\frac{19}{6}$
2. $K=\left(-2+\frac{7}{4}-1\right)\cdot\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}-1\right)-(-3)\left(\frac{5}{3}-\frac{9}{4}\right)\left(2+\frac{6}{7}\right)\right]$

<u>Ἀ π ό κ ρ.</u> Ἀντικαθιστῶντες ἕκαστον ἄθροισμα διά τῆς τιμῆς του λαμβάνομεν:

$$K=\left(-\frac{5}{4}\right)\left[\left(+\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)-(-3)\left(-\frac{7}{12}\right)\left(+\frac{20}{7}\right)\right]$$

ἤ ἀντικαθιστῶντες τά ἐντός τῶν ἀγκυλῶν γινόμενα διά τῶν ἴσων των ἔχομεν:

$$K=\left(-\frac{5}{4}\right)\left[\left(-\frac{1}{10}\right)-(+5)\right]=\left(-\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{51}{10}\right)=\frac{51}{8}.$$

Δ Ι Α Ι Ρ Ε Σ Ι Σ.

§ 14. Τό πηλῖκον δύο ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν εἶναι εἷς τρίτος ἀλγεβρικός ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς ἀπόλυτον τιμήν τό πηλῖκον τῶν ἀπολύτων τιμῶν τοῦ διαιρετέου διά τοῦ διαιρέτου καί ὡς σημεῖον τό + ἐάν οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ὁμόσημοι ἤ τό σημεῖον − ἐάν οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἑτερόσημοι.

§ 15. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ συνάγομεν τόν κάτωθι πίνακα ὡς κ α ν ό ν α τ ῶ ν σ η μ ε ί ω ν:

$$\begin{cases} (+) : (+) = + \\ (+) : (-) = - \\ (-) : (+) = - \\ (-) : (-) = + \end{cases}$$

36. *Ὑπολογίσατε τὰ κάτωθι πηλῖκα:*

1. $\dfrac{+12}{+3}$ 2. $\dfrac{+10}{-5}$ 3. $\dfrac{-24}{+8}$

4. $(-45):(-9)$ 5. $(+0,95):(-0,5)$ 6. $(-8):\left(-\dfrac{8}{9}\right)$

7. $\left(-\dfrac{5}{6}\right):(-4)$ 8. $\dfrac{+\frac{5}{6}}{-\frac{2}{3}}$ 9. $\dfrac{-\frac{13}{4}}{-\frac{5}{8}}$

Ἀ π ό κ. Θὰ ἔχωμεν ὡς ἐξαγόμενα:

1. $\dfrac{+12}{+3} = +4$ 2. $\dfrac{+10}{-5} = -2$ 3. $\dfrac{-24}{+8} = -3$

4. $(-45):(-9) = \dfrac{-45}{-9} = +5$ 5. $(+0,95):(-0,5) = -1,9$

6. $(-8):\left(-\dfrac{8}{9}\right) = (-8)\cdot\left(-\dfrac{9}{8}\right) = 9$

7. $\left(-\dfrac{5}{6}\right):(-4) = +\dfrac{5}{24}$ 8. $\dfrac{+\frac{5}{6}}{-\frac{2}{3}} = -\dfrac{5}{4}$

9. $\dfrac{-\frac{13}{4}}{-\frac{5}{8}} = \dfrac{26}{5}$

37. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ πηλίκου* $\dfrac{\alpha}{\beta}$:

1. Ἐὰν $\alpha = +12,6$, $\beta = -1,8$
2. » $\alpha = -5,64$, $\beta = +0,6$
3. » $\alpha = +29,6$, $\beta = -0,4$.

Ἀ π ο κ ρ ί σ ε ι ς:

1. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{+12,6}{-1,8} = \dfrac{+126}{-18} = -\dfrac{63}{9} = -7$

2. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{-5,64}{+0,6} = \dfrac{-56,4}{+6} = -9,4$

3. $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{+29,6}{-0,4} = \dfrac{+296}{-4} = -74$.

Εὕρετε τὸ ἐξαγόμενον:

38. $3\dfrac{2}{5}:\left(-2\dfrac{1}{3}\right):\dfrac{8}{5} = \dfrac{17}{5}:\left(-\dfrac{7}{3}\right):\dfrac{8}{5} = \dfrac{17}{5}\cdot\left(-\dfrac{3}{7}\right):\dfrac{8}{5} =$

$$= -\frac{51}{35} : \frac{8}{5} = -\frac{51 \cdot 5}{35 \cdot 8} = -\frac{51}{56}.$$

39. <u>Ὁμοίως τό ἐξαγόμενον:</u>

$$(-125):(-5):(0{,}8 \cdot 7\tfrac{1}{2}) = [(-125):(-5)] : (0{,}8 \cdot \frac{15}{2})$$
$$= (+25) : 0{,}4 \cdot 15 = (+25) : (+6) = \frac{25}{6}.$$

40. <u>Ὁμοίως τό ἐξαγόμενον:</u>

$$[(-24):(+3)] - [(-18):(-6)] + [(+36):(-9)] = \left(\frac{-24}{+3}\right) - \left(\frac{-18}{-6}\right) + \left(\frac{+36}{-9}\right)$$
$$= (-8) - (+3) + (-4) = -8 - 3 - 4 = -15.$$

41. <u>Ὁμοίως</u>: $(+5)\cdot(-4) - [(-375):(-25)] + (-4 + 12 - 7)$.

<u>Ἀπ.</u> $= -34.$

42. <u>Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:</u>

1. $(-10 + 8 - 24 + 32 - 12) : (+2) = \frac{-10}{+2} + \frac{8}{+2} + \frac{-24}{+2} + \frac{32}{+2} + \frac{-12}{+2}$
$$= -5 + 4 - 12 + 16 - 6 = -3.$$

2. $\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{2}{5} - 1 + \frac{7}{8}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)$ <u>Ἀπ.</u> $= -\frac{31}{20}$

3. $(0{,}25 - 5{,}5 + 3{,}75 - 4{,}5) : (+0{,}5)$ <u>Ἀπ.</u> $= -12$

43. <u>Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:</u>

1. $(+35 - 45 + 80) : (+5) - (-24 + 20 - 16) : (-4)$
$$= (+70) : (+5) - (-20) : (-4) = (+14) - (+5) = +9$$

2. $\left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right) : \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{5} - \frac{7}{10} + \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)$
$$= \left(-\frac{4}{12} + \frac{10}{12} - \frac{9}{12}\right) : \frac{1}{2} - \left(\frac{4}{20} - \frac{14}{20} + \frac{5}{20}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$= \left(-\frac{3}{12}\right) : \frac{1}{2} - \left(-\frac{5}{20}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{6}{12}\right) - \left(+\frac{15}{20}\right)$$
$$= \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(+\frac{3}{4}\right) = -\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}.$$

44. <u>Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:</u>

1. $[(-8)\cdot 7(-12)\cdot 9] : (-12)$ <u>Ἀπ.</u> $= -504$

2. $[10(-5)\cdot 17(-3)] : (+15)$ <u>Ἀπ.</u> $= 170$

3. $[(+2)(-3)\cdot(+7)] : (+3) - [(-15)(+20)(-8)] : (-5)$ <u>Ἀπ.</u> $= 466$

45. <u>Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:</u>

1. $[(+7)\cdot(-12) - (-25)(+6)] : (-3)$ <u>Ἀπ.</u> $= -22$

2. $\left[(+6)\cdot(-12)+(-6)\cdot(+5)-(+7)\cdot(-15)\right]:(+3)$ <u>Ἀπ</u> = 1

3. $\left[(-4)(+15)-(+20)\cdot(-7)+(-5)\cdot(-12)\right]:(+5)$ <u>Ἀπ.</u> = 28

46. *<u>Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις:</u>*

1. $\dfrac{-2+3-7}{5-2+11}$ 2. $\dfrac{\frac{5}{4}-3-\frac{4}{3}}{-4+\frac{2}{5}-\frac{3}{2}}$

<u>Ἀπ.</u> $=-\dfrac{3}{7}$ <u>Ἀπ.</u> $=\dfrac{185}{306}$

47. *<u>Νά ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:</u>*

$$\frac{\left(\frac{2}{7}-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{2}{11}+3\right)}{\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{5}-2\right)}$$

Ἐάν ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις χωριστά ἀριθμητοῦ καί παρονομαστοῦ λαμβάνομεν:

$\frac{2}{7}-\frac{3}{5}=-\frac{11}{35}$, $\frac{2}{11}+3=\frac{35}{11}$, $\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$, $\frac{4}{5}-2=-\frac{6}{5}$

Ἡ δοθεῖσα ἄρα παράστασις δύναται νά γραφῇ:

$$\frac{\left(-\frac{11}{35}\right)\cdot\left(+\frac{35}{11}\right)}{\left(+\frac{5}{6}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$

48. *<u>Νά ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:</u>*

$$\frac{\frac{8}{3}-2+\frac{1}{2}}{-4+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}-\frac{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}-1}$$

<u>Ἀπ.</u> $=\dfrac{578}{45}$

49. *<u>Νά ὑπολογισθῇ ἡ παράστασις:</u>*

$$\left(\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{4}{9}-2}{\frac{7}{6}}\right)\cdot\left(\frac{\frac{7}{10}+\frac{1}{3}}{\frac{11}{5}}-\frac{\frac{3}{4}+1}{\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\right)$$

<u>Ἀπ.</u> $=-\dfrac{175}{36}$

50. *<u>Νά ὑπολογισθῇ ὁ ἄγνωστος x ὥστε νά ἀληθεύῃ ἡ ἰσότης:</u>*

α) $(-9)x=72$ α) <u>Ἀπ.</u> $x=72:(-9)=-8$

β) $(+12)x=-96$ β) » $x=(-96):(+12)=-8$

γ) $1,3\,x=-1,69$ γ) » $x=(-1,69):1,3=-1,3$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ με ἐκθέτας ἀκεραίους καί θετικούς.

Ὁρισμός τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ.

§16. Δύναμιν ἀλγεβρικοῦ τινος ἀριθμοῦ καλοῦμεν γινόμενον παραγόντων ἴσων πρός τόν ἀριθμόν τοῦτον.

π.χ. $(+2)\cdot(+2)\cdot(+2) = (+2)^3 = +8$

$(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = (-3)^4 = +81$

$(-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = (-5)^3 = -125$

§17. Καλοῦμεν νυοστήν δύναμιν ἀριθμοῦ α τό γινόμενον ν παραγόντων ἴσων μέ τόν ἀριθμόν α.

Ἤτοι ἡ νυοστή δύναμις τοῦ α γράφεται:

$$\alpha^\nu = \alpha\,\alpha\,\alpha \ldots\ldots \alpha. \quad (\nu \text{ παράγοντες})$$

Ὁ παράγων α καλεῖται βάσις τῆς δυνάμεως καί ὁ ἀριθμός ν, ὅστις γράφεται ἄνω δεξιᾷ τῆς βάσεως, καλεῖται ἐκθέτης τῆς δυνάμεως.

Ἡ δευτέρα δύναμις (α^2) τοῦ ἀριθμοῦ α καλεῖται καί τετράγωνον αὐτοῦ, ἡ δέ τρίτη δύναμις (α^3) καλεῖται καί κύβος αὐτοῦ.

§18. Ἐκ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ τῶν δυνάμεων συνάγομεν ὅτι: 1ον Ὅλαι αἱ δυνάμεις ἑνός θετικοῦ ἀριθμοῦ εἶναι θετικαί. 2ον Αἱ δυνάμεις τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν εἶναι θετικαί, ἐάν ὁ ἐκθέτης αὐτῶν εἶναι ἄρτιος καί ἀρνητικαί ἐάν ὁ ἐκθέτης αὐτῶν εἶναι περιττός ἀριθμός.

Ἤτοι:	$(+5)^3 = +125$	$(-\alpha)^\nu = +\alpha^\nu$ ὅταν ν = ἄρτιος
	$(+5)^4 = +625$	$(-\alpha)^\nu = -\alpha^\nu$ » ν = περιττός
	$(-5)^3 = -125$	$(-\alpha)^{2\mu} = +\alpha^{2\mu}$ καθόσον 2μ = ἄρτιος
	$(-5)^4 = +625$	$(-\alpha)^{2\mu+1} = -\alpha^{2\mu+1}$ » $2\mu+1$ = περιττός

§19. Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

I Ἰδιότης : $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\rho}\ldots\alpha^{\tau} = \alpha^{\mu+\nu+\rho+\ldots+\tau}$

II » : $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} = (\alpha^{\nu})^{\mu}$

III » : $(\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\cdots\tau)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu}\cdots\tau^{\nu}$

IV » : $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$

V » : $\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ ἐάν $\mu > \nu$

$\alpha^{0} = 1$ » $\mu = \nu$

$\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^{\lambda}}$ » $\nu = \mu+\lambda$

§20. Ἀπόδειξις τῶν ἰδιοτήτων τῶν δυνάμεων.

I Ἰδιότης: Τό γινόμενον ὁσωνδήποτε δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἥ ὁποία ἔχει ὡς ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις: Θεωροῦμεν κατ᾽ ἀρχάς δύο μόνον παράγοντας $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}$ · τοῦτο θά ἰσοῦται μέ $\alpha^{\mu+\nu}$.

Πράγματι κατά τόν ὁρισμόν τῶν δυνάμεων:

$$\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu} = \overbrace{\alpha\alpha\alpha\alpha\ldots\ldots\alpha}^{\mu \text{ φοράς}}\cdot\overbrace{\alpha\alpha\alpha\alpha\ldots\ldots\alpha}^{\nu \text{ φοράς}} = \alpha^{\mu+\nu}$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\rho} = \alpha^{\mu+\nu+\rho}$

καί γενικῶς : $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\rho}\ldots\ldots\alpha^{\tau} = \alpha^{\mu+\nu+\rho+\ldots+\tau}$.

Παράδ. $\alpha^{5}\,\alpha^{4}\,\alpha^{3} = \alpha^{12}$

II Ἰδιότης: Διά νά ὑψώσωμεν μίαν δύναμιν εἰς ἄλλην δύναμιν, σχηματίζομεν μίαν νέαν δύναμιν, ἥ ὁποία ἔχει βάσιν τόν δοθέντα ἀριθμόν καί ἐκθέτην τό γινόμενον τῶν δύο ἐκθετῶν.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι $(\alpha^{5})^{3} = \alpha^{15}$

Πράγματι: $(\alpha^{5})^{3} = \alpha^{5}\cdot\alpha^{5}\cdot\alpha^{5} = \alpha^{5+5+5} = \alpha^{3\cdot 5} = \alpha^{15}$

Γενικῶς: $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \underbrace{\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\mu}\ldots\ldots\alpha^{\mu}}_{\nu \text{ φοράς}} = \alpha^{\mu+\mu+\mu+\ldots+\mu} = \alpha^{\nu\cdot\mu} = \alpha^{\mu\nu}$.

Ὥστε θά ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες $(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu} = (\alpha^{\nu})^{\mu}$

Παραδ. $(x^4)^5 = x^{20}$

$$\left[(x^2)^3\right]^4 = (x^6)^4 = x^{24}$$

$$\left[(-2)^3\right]^4 = (-2)^{12} = +2^{12} = 4096.$$

III Ἰδιότης: Διά νά ὑψώσωμεν γινόμενον πολλῶν παραγόντων εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν ἕκαστον παράγοντα τοῦ γινομένου εἰς τήν δύναμιν ταύτην.

Ἀπόδειξις. Πρέπει νά ἀποδείξωμεν ὅτι $(\alpha\beta\gamma)^3 = \alpha^3\beta^3\gamma^3$

Πράγματι, διότι, κατά τόν ὁρισμόν τῶν δυνάμεων,

$$(\alpha\beta\gamma)^3 = \alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma = \alpha\alpha\alpha\cdot\beta\beta\beta\cdot\gamma\gamma\gamma = \alpha^3.\beta^3.\gamma^3$$

Καί γενικῶς:

$$(\alpha\beta\gamma)^{\nu} = \overbrace{\alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma\cdot\alpha\beta\gamma\cdots\cdots\alpha\beta\gamma}^{\nu \text{ φοράς}}$$

$$= \alpha\alpha\alpha\cdots\alpha\cdot\beta\beta\beta\cdots\beta\cdot\gamma\gamma\gamma\cdots\gamma$$

$$= \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}\cdot\gamma^{\nu}$$

Καί γενικώτερον:

$$(\alpha\beta\gamma\cdots\tau)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}\gamma^{\nu}\cdots\tau^{\nu}$$

Καί ἀντιστρόφως:

$$\alpha^{\nu}\beta^{\nu}\gamma^{\nu}\delta^{\nu} = (\alpha\beta\gamma\delta)^{\nu}$$

Π.χ. 51. $(3xy\omega)^2 = 9x^2y^2\omega^2$

52. $(-4\alpha\beta^2x^3)^3 = (-4)^3\alpha^3\beta^6x^9 = -64\alpha^3\beta^6x^9$

53. $(+5x^2y^3\omega^4)^3 = 5^3x^6y^9\omega^{12} = 125x^6y^9\omega^{12}$

IV Ἰδιότης: Διά νά ὑψώσωμεν ἕνα ἀλγεβρικόν κλάσμα εἰς μίαν δύναμιν, ὑψώνομεν τόν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τοῦ κλάσματος εἰς τήν δύναμιν ταύτην.

Ἀπόδειξις. Πρέπει νά ἀποδείξωμεν ὅτι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$

Πράγματι κατά τόν ὁρισμόν τῶν δυνάμεων θά ἔχωμεν:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha}{\beta\cdot\beta\cdot\beta} = \frac{\alpha^3}{\beta^3}$$

Καί γενικῶς:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \overbrace{\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\alpha}{\beta}\cdots\frac{\alpha}{\beta}}^{\mu \text{ φοράς}} = \frac{\alpha\alpha\alpha\cdots\alpha}{\beta\beta\beta\cdots\beta} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$$

Ἤτοι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\mu} = \frac{\alpha^{\mu}}{\beta^{\mu}}$ καί ἀντιστρόφως: $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$.

π.χ. 54. $\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} = \frac{64}{125}$,

55. $\left(\frac{3xy^2}{5\omega^3}\right)^3 = \frac{27x^3y^6}{125\omega^9}$

V Ἰδιότης: Τό πηλῖκον δύο δυνάμεων τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ εἶναι δύναμις τοῦ αὐτοῦ ἀριθμοῦ, ἡ ὁποία ἔχει ἐκθέτην τήν διαφοράν τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπό τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.

Ἀπόδειξις. Πρέπει νά ἀποδείξωμεν ὅτι: $\alpha^8 : \alpha^5 = \alpha^{8-5} = \alpha^3$

Πράγματι· διότι: $\alpha^8 : \alpha^5 = \frac{\alpha^8}{\alpha^5} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} = \alpha\cdot\alpha\cdot\alpha = \alpha^3$

Καί γενικῶς, ἐάν $\mu > \nu$ θά ἔχωμεν:

$$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$$

π.χ. $\alpha^5 : \alpha^3 = \alpha^2$, $\quad x^9 : x^4 = x^5$

$9^{12} : 9^9 = 9^3 = 729$, $\quad (-5)^6 : (-5)^4 = (-5)^2 = +25$

$(+0{,}05)^5 : (+0{,}05)^3 = (+0{,}05)^2 = 0{,}0025$

$(-0{,}07)^6 : (-0{,}07)^4 = (-0{,}07)^2 = 0{,}0049$

§21. Περί τῶν δυνάμεων $\alpha^1, \alpha^0, \alpha^{-\lambda}$

Ἐάν θέλωμεν νά εὕρωμεν τό πηλίκον τῆς δυνάμεως α^5 διά α^4 θά ἔχωμεν κατά τήν ἰδιότητα V:

$$\frac{\alpha^5}{\alpha^4} = \alpha^{5-4} = \alpha^1 \quad (1)$$

Τό σύμβολον α^1, τό ὁποῖον προέκυψε, δέν δύναται νά θεωρηθῇ ὡς δύναμις τοῦ α, διότι ὁ ἐκθέτης τοῦ α εἶναι μικρότερος τοῦ 2.

Ἀλλ' ἐπειδή ἀφ' ἑτέρου τό πηλίκον $\alpha^5 : \alpha^4$ δύναται νά γραφῇ: $\frac{\alpha^5}{\alpha^4} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha\alpha} = \alpha \quad (2)$

εἴμεθα ἠναγκασμένοι νά παραδεχθῶμεν, ὅταν συγκρίνωμεν τάς ἰσότητας (1) καί (2), ὅτι τά σύμβολα α^1 καί α εἶναι ἴσα, διότι τά πρῶτα μέλη εἶναι ἴσα, ἤτοι:

$$\boxed{\alpha^1 = \alpha}$$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι:

§22. Ἡ πρώτη δύναμις ἀριθμοῦ τινος εἶναι ἴση μὲ αὐτὸν τοῦτον τὸν ἀριθμόν.

Π.χ. $(+5)^1 = +5 = 5$, $(-0,35)^1 = -0,35$

§23. Εἰς τὴν ἰδιότητα V ἀπεδείχθη ὅτι $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ καὶ ὑπετέθη $\mu > \nu$. Ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι αὕτη ἰσχύει καὶ διὰ $\mu = \nu$, ἤτοι ὅταν οἱ δύο ἐκθέται μ καὶ ν εἶναι ἴσοι, θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\mu-\mu} = \alpha^0 \quad (1)$$

Τὸ σύμβολον α^0, τὸ ὁποῖον προέκυψε, δὲν ἔχει καμίαν ἔννοιαν συμφώνως πρὸς τὸν ὁρισμὸν τῶν δυνάμεων, διότι ὁ ἐκθέτης 0 εἶναι μικρότερος τοῦ 2. Ἀλλ᾽ ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου τὸ πηλίκον $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu}$ ὡς πηλίκον δύο ἴσων ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὴν μονάδα, δηλαδὴ $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu} = 1$ (2), εἴμεθα ἠναγκασμένοι νὰ παραδεχθῶμεν ὅταν συγκρίνωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ὅτι τὸ σύμβολον α^0 παριστάνει τὴν μονάδα 1.

Ἤτοι: $\boxed{\alpha^0 = 1}$ ὁμοίως $(-\beta)^0 = 1$.

Ὅθεν συνάγομεν καὶ παραδεχόμεθα ὅτι:

§24. Ἡ μηδενικὴ δύναμις παντὸς ἀριθμοῦ, διαφόρου τοῦ 0, εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.1.

Π.χ.56. α) $7^0 = 1$, β) $(-5)^0 = 1$, γ) $(+0,025)^0 = 1$

57. $\alpha^0 + \beta^0 + \gamma^0 = 1 + 1 + 1 = 3$

58. $\alpha^0 \cdot \beta^0 \cdot \gamma^0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

§25. Ὅταν ὁ ἐκθέτης μ εἶναι μικρότερος τοῦ ν.

Ἡ ἰδιότης V, καθ᾽ ἣν $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$, ἐὰν ὑποθέσωμεν ὅτι ἰσχύει καὶ ὅταν $\mu < \nu$ θὰ ἔχωμεν ἐὰν θέσωμεν $\mu = 4$ καὶ $\nu = 7$ $\frac{\alpha^4}{\alpha^7} = \alpha^{4-7} = \alpha^{-3}$ (1)

Παρατηροῦμεν ὅτι προκύπτει τὸ σύμβολον α^{-3}, τὸ ὁποῖον δὲν ἔχει καμίαν ἔννοιαν δυνάμεως.

Ἀλλ᾽ ἐπειδή τό πηλίκον τοῦ α^4 διά τοῦ α^7 δύναται νά γραφῇ: $\frac{\alpha^4}{\alpha^7} = \frac{\alpha\alpha\alpha\alpha}{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha} = \frac{1}{\alpha^3}$ (2)

Διά συγκρίσεως τῶν ἰσοτήτων (1) καί (2) εἴμεθα ἠναγκασμένοι νά παραδεχθῶμεν ὅτι:

$$\alpha^{-3} = \frac{1}{\alpha^3} \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$$

καί γενικῶς

$$\boxed{\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^\lambda}} \quad (3)$$

καί ἀντιστρόφως:

$$\frac{1}{\alpha^\nu} = \alpha^{-\nu}$$

Παρατ.

Ἡ ἰσότης $\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^\lambda}$ ἀποδεικνύεται καί κατ᾽ ἄλλον τρόπον ὡς ἑξῆς:

Ἀφοῦ ὑπετέθη $\mu < \nu$ ἕπεται ὅτι $\nu = \mu + \lambda$. Ἄρα ἡ γνωστή ἰδιότης $\frac{\alpha^\mu}{\alpha^\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$ γίνεται ἄν ἀντικαταστήσωμεν καί εἰς τά δύο μέλη τό ν διά τοῦ ἴσου του $\mu+\lambda$,

$$\frac{\alpha^\mu}{\alpha^{\mu+\lambda}} = \alpha^{\mu-(\mu+\lambda)} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha^\mu}{\alpha^\mu \cdot \alpha^\lambda} = \alpha^{\mu-\mu-\lambda}$$

$$\text{ἤ} \quad \frac{1}{\alpha^\lambda} = \alpha^{-\lambda} \qquad \text{δηλ.} \qquad \boxed{\alpha^{-\lambda} = \frac{1}{\alpha^\lambda}}$$

Ὅθεν συνάγομεν ὅτι:

§26. Πᾶσα δύναμις ἀριθμοῦ μέ ἐκθέτην ἀρνητικόν ἀριθμόν, ἰσοῦται μέ κλάσμα, τό ὁποῖον ἔχει ἀριθμητήν μέν τήν μονάδα 1 καί παρονομαστήν τόν αὐτόν ἀριθμόν μέ τόν ἐκθέτην του θετικόν.

59. $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$, 60. $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$

61. $(-5)^{-4} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{625}$,

62. $(0{,}04)^{-2} = \frac{1}{(0{,}04)^2} = \frac{1}{0{,}0016} = \frac{10000}{16} = 625$

63. $(-0{,}01)^{-4} = \frac{1}{(-0{,}01)^4} = \frac{1}{+0{,}00000001} = 100.000.000.$

Περί τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ἀρνητικούς ἀριθμούς.

§27. Αἱ προαποδειχθεῖσαι ἰσότητες $\alpha^0=1$ καί $\alpha^{-\lambda}=\frac{1}{\alpha^\lambda}$ μᾶς ἐπιτρέπουν νά γενικεύσωμεν τήν ἔννοιαν τῆς δυνάμεως ἀριθμοῦ τινος, ἐπεκτείνοντες ταύτην καί εἰς τήν περίπτωσιν καθ' ἥν οἱ ἐκθέται εἶναι μηδέν ἤ ἀρνητικοί ἀριθμοί. Ὅθεν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων μέ ἐκθέτας ἀκεραίους καί θετικούς ἰσχύουν καί διά τάς δυνάμεις μέ ἐκθέτας ἀκεραίους καί ἀρνητικούς. Ἄρα δυνάμεθα νά παραδεχθῶμεν τάς ἀντιστοίχους ἰδιότητας.

I.- $\alpha^{-\mu}\cdot\alpha^{-\nu}=\alpha^{(-\mu)+(-\nu)}=\alpha^{-\mu-\nu}$

Διότι: $\alpha^{-\mu}\cdot\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\mu}\cdot\frac{1}{\alpha^\nu}=\frac{1}{\alpha^\mu\cdot\alpha^\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu+\nu}}=\alpha^{-(\mu+\nu)}=\alpha^{-\mu-\nu}$.

II.- $(\alpha^\mu)^{-\nu}=\alpha^{-\mu\nu}$

Διότι: $(\alpha^\mu)^{-\nu}=\frac{1}{(\alpha^\mu)^\nu}=\frac{1}{\alpha^{\mu\nu}}=\alpha^{-\mu\nu}$

III.- $(\alpha\beta\gamma)^{-\nu}=\alpha^{-\nu}\cdot\beta^{-\nu}\cdot\gamma^{-\nu}$

Διότι: $(\alpha\beta\gamma)^{-\nu}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu\cdot\beta^\nu\cdot\gamma^\nu}=\frac{1}{\alpha^\nu}\cdot\frac{1}{\beta^\nu}\cdot\frac{1}{\gamma^\nu}=\alpha^{-\nu}\cdot\beta^{-\nu}\cdot\gamma^{-\nu}$

IV.- $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\frac{\alpha^{-\nu}}{\beta^{-\nu}}=\frac{\frac{1}{\alpha^\nu}}{\frac{1}{\beta^\nu}}=\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Διότι: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu}=1:\frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}=\frac{\beta^\nu}{\alpha^\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

V.- $\alpha^{-\mu}:\alpha^{-\nu}=\alpha^{(-\mu)-(-\nu)}=\alpha^{\nu-\mu}$

Διότι: $\alpha^{-\mu}:\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^\mu}:\frac{1}{\alpha^\nu}=\frac{1}{\alpha^\mu}\cdot\frac{\alpha^\nu}{1}=\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu}=\alpha^{\nu-\mu}$.

———.———

Ἀσκήσεις ἐπί τῶν δυνάμεων

64. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $(+2)^6 = (+2)(+2)(+2)(+2)(+2)(+2) = +64$
2. $(-2)^7 = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2)(-2) = -128$
3. $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81$
4. $(+0,1)^3 = (+0,1)\cdot(+0,1)\cdot(+0,1) = +0,001$
5. $(-0,1)^4 = (-0,1)(-0,1)(-0,1)(-0,1) = +0,0001$
6. $(-0,01)^3 = (-0,01)(-0,01)(-0,01) = -0,000001$
7. $-(+2,5)^2 = -(+6,25) = -6,25$
8. $-(-0,5)^3 = +0,125$
9. $(-0,001)^2 = +0,000001$
10. $\left[(-0,3)^2\right]^3 = (-0,3)^6 = +0,000729$

65. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $a^4 a^3 a = a^8$
2. $a\cdot a^6 a^9 = a^{16}$
3. $x^{12}\cdot x^8 = x^{20}$
4. $y^3 y^4 y^5 = y^{12}$
5. $y^6 y^5 y\, y^8 = y^{20}$
6. $a^x\cdot a^y\cdot a^z = a^{x+y+z}$

66. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $5^2\cdot 5^4 = 5^6 = 15625$
2. $(-5)^2\cdot(-5)^4 = (-5)^6 = 15625$
3. $10^3\cdot 10^6 = 10^9 = 1.000.000.000$
4. $2^2\cdot 2^3\cdot(-2)^4 = 2^2\cdot 2^3\cdot 2^4 = 2^{11} = 2048$
5. $(-3)^2(-3)^3\cdot(-3)^1 = (-3)^6 = +729.$

67. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $5^2 + 2^5 = 25 + 32 = 57$

2. $4^3 + 7^3 = 64 + 343 = 407$

3. $2^7 - 7^2 = 128 - 49 = 79$

4. $2^3 - 3^3 + 4^3 - 5^3 + 6^3 = 8 - 27 + 64 - 125 + 216 = 136$

5. $1^2 - (-3)^2 + (-5)^2 - (-7)^2 = 1 - (+9) + (+25) - (+49) = 1 - 9 + 25 - 49$

$= 26 - 58 = -32$

68. <u>Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:</u>

1. $(-7)^2 + (-7)^3 + (-7)^1 = 49 + (-343) + (-7) = -301$
2. $(+5)^3 - (+6)^3 = 125 - (+216) = 125 - 216 = -91$
3. $-(-7)^3 + (-8)^3 = -(-343) + (-512) = 343 - 512 = -169$
4. $-5(-3)^4 - 6(-2)^5 = -5(+81) - 6(-32) = -405 + 192 = -213$
5. $(-0{,}1)^2 + (-0{,}01)^2 - (-0{,}001)^2 = 0{,}01 + (+0{,}0001) - (+0{,}000001)$

$= 0{,}01 + 0{,}0001 - 0{,}000001$

$= +0{,}010099$

69. <u>Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:</u>

1. $(-\alpha)^3 \cdot (-\alpha)^4 = (-\alpha)^7 = -\alpha^7$
2. $(-\beta) \cdot (-\beta)^7 = (-\beta)^8 = +\beta^8 = \beta^8$
3. $(-x)^5 \cdot (-x)^4 = (-x)^9 = -x^9$
4. $(-x)^6 \cdot x^5 \cdot x^2 (-x)^8 = x^6 \cdot x^5 \cdot x^2 \cdot x^8 = x^{21}$
5. $(-y)^5 \cdot y^3 (-y)^2 = (-y^5) \cdot y^3 \cdot y^2 = -y^{10}$
6. $(-\alpha)^{2\mu} \cdot \alpha^{2\nu} = \alpha^{2\mu} \cdot \alpha^{2\nu} = \alpha^{2\mu+2\nu}$
7. $x^{2\nu} \cdot (-x)^6 = x^{2\nu} \cdot x^6 = x^{2\nu+6}$
8. $(-x)^{2\rho} \cdot (-x)^7 = (+x^{2\rho}) \cdot (-x^7) = -(x^{2\rho+7})$
9. $(-\beta)^7 \cdot (-\beta)^{2\nu+1} = (-\beta^7) \cdot (-\beta^{2\nu+1}) = \beta^{2\nu+8}$
10. $x^{2\nu} \cdot x \cdot (-x)^{2\nu} = x^{2\nu} \cdot x \cdot x^{2\nu} = x^{4\nu+1}$

70. <u>Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:</u>

1. $(-x)^{2\mu} \cdot x^{2\nu} \cdot (-x)^{2\rho} = x^{2\mu} \cdot x^{2\nu} \cdot x^{2\rho} = x^{2\mu+2\nu+2\rho}$
2. $(-x)^{2\mu+1} \cdot x^{2\nu-1} \cdot (-x)^{2\rho} = (-x^{2\mu+1}) \cdot x^{2\nu-1} \cdot x^{2\rho} = (-x^{2\mu+1}) \cdot x^{2\nu+2\rho-1}$

$= -(x^{2\mu+2\nu+2\rho})$

3. $(-x)^{2\nu+3} \cdot x^{2\nu-5} \cdot (+x)^{2\nu-3} \cdot (-x)^5$ <u>Ἀπ. $= x^{6\nu}$</u>

71. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $5(-3)^2\cdot(-1)^4 + 4(-5)^2\cdot 2^3 - (-10)^3(-1)^2$

$= 5\cdot 9\cdot 1 + 4\cdot 25\cdot 8 - (-1000)\cdot 1$

$= 45 + 800 + 1000 = 1845$

2. $3(-4)^2-(-5)^2(-1)^4-9(-2)^4-(-11)^2\cdot(-1)^5$ Ἀπ. = 0.

3. $6^2-4\cdot 2^3(-3)^2+3^2(-4)^2-6(-5)^2+(-10)^2(-2)^2$ Ἀπ. = 142

72. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $(\alpha^3)^4 = \alpha^{12}$
2. $(\alpha^5)^3 = \alpha^{15}$
3. $(\alpha^9)^3 = \alpha^{27}$
4. $\left[(\beta^3)^2\right]^5 = \beta^{30}$
5. $\left[\left[(-\beta)^3\right]^4\right]^5 = \beta^{60}$
6. $\left[(-y)^3\right]^5 = -y^{15}$
7. $(-x^3)^6 = +x^{18}$
8. $(-x^6)^3 = -x^{18}$
9. $\left[(-x)^6\right]^3 = (x^6)^3 = x^{18}$
10. $\left[(-x)^3\right]^6 = (-x^3)^6 = x^{18}$

73. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $2^6\cdot 5^6 = (2\cdot 5)^6 = 10^6 = 1.000.000$
2. $125^3\cdot 8^3 = (125\cdot 8)^3 = 1000^3 = 1.000.000.000$
3. $5^4\cdot 20^4 = (5\cdot 20)^4 = 100^4 = 1.000.000$
4. $2^5\cdot 5^5\cdot 10^5 = (2\cdot 5\cdot 10)^5 = 100^5 = 10.000.000.000$

74. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $(\alpha\beta\gamma)^3 = \alpha^3\beta^3\gamma^3$
2. $(5xy^2\omega^3)^3 = 125x^3y^6\omega^9$
3. $(\alpha^4\beta^5\gamma^6)^4 = \alpha^{16}\beta^{20}\gamma^{24}$
4. $(-xy\omega)^1 = -xy\omega$
5. $(-5xy\omega)^2 = 25x^2y^2\omega^2$
6. $\left[(\alpha^2\beta^3)^2\right]^4 = \alpha^{16}\beta^{24}$
7. $\left(-\frac{2}{3}\alpha\beta^3\right)^3 = -\frac{8}{27}\alpha^3\beta^9$
8. $\left(\frac{3\alpha^2\beta}{4\gamma\delta^2}\right)^2 = \frac{9\alpha^4\beta^2}{16\gamma^2\delta^4}$
9. $\left(-\frac{1}{5}x^3y^2\omega\right)^3 = -\frac{1}{125}x^9y^6\omega^3$
10. $\left(\frac{\alpha^\mu\beta^\nu\gamma^\rho}{x^\lambda y^\kappa}\right)^\tau = \frac{\alpha^{\mu\tau}\cdot\beta^{\nu\tau}\cdot\gamma^{\rho\tau}}{x^{\lambda\tau}\cdot y^{\kappa\tau}}$

75. *Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι ἐξαγόμενα:*

1. $\alpha^8 : \alpha^3 = \alpha^5$
2. $\alpha^5 \cdot \alpha^4 \cdot \alpha^3 : \alpha^7\alpha^2 = \alpha^{12} : \alpha^9 = \alpha^3$
3. $(-\alpha)^7 : (-\alpha)^3 = (-\alpha)^4 = \alpha^4$
4. $\left(\frac{5}{8}\right)^6 : \left(\frac{5}{8}\right)^4 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$

76. *Νά εὑρεθοῦν τά ἐξαγόμενα:*

1. $\frac{(\alpha^2 x^3)^4}{(\alpha x)^5} = \frac{\alpha^8 x^{12}}{\alpha^5 x^5} = \frac{\alpha^8}{\alpha^5} \cdot \frac{x^{12}}{x^5} = \alpha^3 x^7$
2. $\frac{(\alpha\beta)^6}{(\alpha^2\beta^3)^3} = \frac{\alpha^6\beta^6}{\alpha^6\beta^9} = \frac{\beta^6}{\beta^9} = \beta^{-3} = \frac{1}{\beta^3}$
3. $\frac{(x^3y^5)^3}{(xy)^7}$ Ἀπ. x^2y^8
4. $\frac{(x^6y^3)^2}{(x^5y^2)^4}$ Ἀπ. $\frac{1}{x^8y^2}$

77. *Νά εὑρεθῇ τό ἐξαγόμενον:*

$$\left(\frac{\alpha^9 \cdot \beta^{28} \cdot \gamma^{47}}{\delta^{10} \cdot \varepsilon^{29}}\right)^{17} \cdot \left(\frac{\delta^9 \cdot \varepsilon^{26}}{\alpha^8 \cdot \beta^{25} \cdot \gamma^{42}}\right)^{19}$$

Ἀπ. $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \delta\, \varepsilon$

78. *Νά εὑρεθῇ τό γινόμενον:*

$$\left(\frac{3\mu\nu}{5\kappa\pi}\right)^4 \cdot \left(\frac{5\pi}{6\mu}\right)^3 \cdot \left(\frac{4\nu}{3\kappa}\right)^2$$

Ἀπ. $\frac{2\mu\nu^6}{15\pi\kappa^6}$

79. *Τό γινόμενον $9 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 81 \cdot 3^3$ νά τραπῇ εἰς γινόμενον δυνάμεων δύο ἀριθμῶν.*

Ἀπ. Θά ἔχωμεν διά μετασχηματισμῶν:

$9 \cdot 32 \cdot 64 \cdot 81 \cdot 3^3 = 3^2 \cdot 2^5 \cdot 2^6 \cdot 3^4 \cdot 3^3 = 2^{11} \cdot 3^9.$

80. *Νά τραπῇ εἰς γινόμενον τριῶν δυνάμεων τό γινόμενον* $5^4 \cdot 81 \cdot 10 \cdot 72$.   Ἀπ. $5^5 \cdot 3^6 \cdot 2^4$

81. *Νά τραπῇ τό γινόμενον $16 \cdot 25^4 \cdot 75 \cdot 8^2 \cdot 9 \cdot 3^7$ εἰς μίαν μόνον δύναμιν.*   Ἀπ. 30^{10}

82. *Ὁμοίως τό γινόμενον $320 \cdot 125^2 \cdot 24 \cdot 25 \cdot 9^4$*   Ἀπ. 30^9

83. *Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις:*

1. $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
2. $(-2)^{-5} = \frac{1}{(-2)^5} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$

3. $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$ 4. $20^{-2} = \frac{1}{20^2} = \frac{1}{400}$

5. $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{27}{64}} = \frac{64}{27}$

6. $(0,25)^{-2} = \frac{1}{(0,25)^2} = \frac{1}{0,0625} = \frac{10000}{625} = 16$

7. $(-0,01)^{-4} = \frac{1}{(-0,01)^4} = \frac{1}{0,00000001} = 100.000.000$

8. $\frac{1}{(-5)^{-4}} = \frac{1}{\frac{1}{(-5)^4}} = \frac{1}{\frac{1}{625}} = 625$

84. *Νά ὑπολογισθοῦν αἱ κάτωθι δυνάμεις:*

1. $(-\alpha)^{-2}$, 2. $(-\alpha)^{-3}$, 3. $(-\alpha)^{-4}$, 4. $(-\alpha)^{-2\nu}$.

Ἀπ. $\frac{1}{\alpha^2}$, Ἀπ. $-\frac{1}{\alpha^3}$, Ἀπ. $\frac{1}{\alpha^4}$, Ἀπ. $\frac{1}{\alpha^{2\nu}}$

85. *Νά δειχθῇ ὅτι* $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$

Ἐφαρμογή: 1. $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}$

2. $\left(-\frac{5}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{25}$

3. $\left(\frac{9}{7}\right)^{-3} = \frac{343}{729}$

Εὕρετε τά ἐξαγόμενα:

86. 64×4^{-3} Ἀπ. 1, 87. 125×5^{-3} Ἀπ. 1.

88. 128×2^{-6} Ἀπ. 2, 89. $(0,5)^{-2} \cdot 1000$ Ἀπ. 4000

90. $(0,3)^{-4} \cdot 810$ Ἀπ. 100000, 91. $(-0,8)^{-2} \cdot 256$ Ἀπ. 400

92. $\left(\frac{3}{7}\right)^{-2} : \left(\frac{9}{28}\right)^{-2}$ Ἀπ. $\frac{9}{16}$, 93. $\left(\frac{3\frac{2}{5}}{4\frac{1}{5}}\right)^{-3} : \left(\frac{8\frac{1}{2}}{10\frac{1}{2}}\right)^{-3}$ Ἀπ. 1

94. $\left(\alpha^{x}\beta^{-y}\right)^{-3} : \left(\frac{\alpha^{-x}}{\beta^{y}}\right)^{-3}$ Ἀπ. $\frac{1}{\alpha^{6x}}$

95. $\left(\frac{\alpha^2}{\beta^{-3}}\right)^{-2} : \left(\frac{\alpha^{-3}}{\beta^4}\right)^{-2}$ Ἀπ. $\frac{1}{\alpha^{10}\beta^{14}}$

96. *Νά δειχθῇ ὅτι:*

$64 \cdot 2^{-4} + 32 \cdot 2^{-3} + 16 \cdot 2^{-2} + 8 \cdot 2^{-1} + 4 \cdot 2^{0} = 20.$

97. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$0,01^3 + \frac{0,2}{0,01} - 0,3^3 - \frac{2\frac{1}{3}}{0,2^2} + \frac{0,5}{3,02}.$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1945

Ἀπ. Θά ἔχωμεν ἐάν καλέσωμεν Κ τήν δοθεῖσαν παράστασιν

$$K = 0,000001 + 20 - 0,027 - \frac{\frac{7}{3}}{0,04} + \frac{50}{302} = 19,973001 - \frac{7}{0,12} + \frac{25}{151}$$

$$K = 19,973001 - \frac{700}{12} + \frac{25}{151} = 19,973001 - 58,333333 + 0,165563$$

$$K = 20,138564 - 58,333333 = -38,194769.$$

98. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$0,02^2 - \frac{2\frac{1}{3}}{0,5} + 0,4 \times 0,01 - \frac{0,4}{3\frac{1}{2}} + \frac{0,3}{0,2}.$$ Ἀπ. $-3,2765$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1945.

99. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$\frac{1\frac{2}{3}}{0,02} - \frac{0,012}{0,4^2} + 0,2 \times 0,03 - 0,02^3 + \frac{0,14}{4\frac{1}{3}}$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1945

Ἀπόκ. Ἐάν παραστήσωμεν διά Κ τήν παράστασιν θά ἔχωμεν

$$K = \frac{\frac{5}{3} \times 100}{0,02 \times 100} - \frac{0,012 \times 1000}{0,16 \times 1000} + 0,006 - 0,000008 + \frac{0,14 \times 100}{\frac{13}{3} \times 100}$$

$$K = \frac{500}{6} - \frac{12}{160} + 0,006 - 0,000008 + \frac{14 \times 3}{1300}$$

$$K = \frac{250}{3} - \frac{3}{40} + 0,005992 + \frac{21}{650} = 83,333333 - 0,075 + 0,005992 +$$

$$+ 0,032307 = 83,371632 - 0,075000 = 83,296632$$

100. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

1. $\dfrac{\frac{1}{4^{-3}} - \frac{2}{10^{-2}}}{\frac{1}{2^{-2}} + \frac{1}{4^{-1}}}$ Ἀπ. -17 , 2. $\left(\dfrac{\frac{1}{3^{-3}} - \frac{1}{9^{-2}}}{\frac{1}{2^{-5}} + \frac{2}{4^{-3}}}\right)^{-2}$ Ἀπ. $\dfrac{6400}{729}$

101. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$\left[\left(\frac{\alpha^5 \beta^3}{\pi^2 \kappa^2}\right)^3 \times \left(\frac{\alpha \kappa^3}{\beta}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{\alpha^3 \beta}{\pi^2 \kappa^3}\right)^5 : \left(\frac{\alpha^2 \kappa^3}{\beta^2 \pi}\right)^6\right]$$ Ἀπ. $\dfrac{\alpha^{16}}{\beta^{12}} \dfrac{\kappa^{39}}{\pi^2}$

102. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$\left[\left(\frac{\alpha^4 \beta^3}{\gamma^2 x^3}\right)^5 : \left(\frac{\alpha x^3}{\beta \gamma^4}\right)^4\right] : \left[\left(\frac{\alpha \beta^3}{\gamma^2 x^3}\right)^6 : \left(\frac{\alpha^2 x^3}{\beta^2 \gamma^3}\right)^5\right] \quad \text{Ἀπ. } \frac{\alpha^{20}\gamma^3 x^6}{\beta^9}$$

103. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$0{,}02 \times 0{,}01 + \frac{0{,}04}{0{,}1^2} - 0{,}3^2 + \frac{2\frac{3}{5}}{0{,}02} + \frac{0{,}4}{2\frac{1}{3}}$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1943

Ἀπ. 134,082 καθ' ὑπεροχήν

104. *Εὕρετε διά ποίαν τιμήν τοῦ x ἀληθεύουν αἱ κάτωθι ἰσότητες:*

1.	$\alpha^{2x}\cdot\alpha^x = \alpha^4\cdot\alpha^5$	7.	$(-2)^x = -32$
2.	$\beta^{5x} = \beta^{10}$	8.	$(-2)^x = 16$
3.	$3^x = 81$	9.	$\frac{1}{2^x} = \frac{1}{128}$
4.	$2^x = 64$	10.	$10^{-x} = 10.000$
5.	$9^x = 729$	11.	$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$
6.	$4^x = \frac{1}{64}$	12.	$(0{,}25)^x = 2^{12}$

Πρός εὕρεσιν τῆς τιμῆς τοῦ x φροντίζομεν νά ἀναγάγωμεν τάς ἰσότητας εἰς τήν μορφήν $\alpha^x = \alpha^\mu$, (ἔνθα πρέπει νά εἶναι $\alpha \neq 1$ καί $\alpha \neq 0$) ὁπότε δυνάμεθα νά εἴπωμεν, « ἐπειδή αἱ δύο ἴσαι δυνάμεις ἔχουν τάς βάσεις ἴσας ἕπεται ὅτι καί οἱ ἐκθέται πρέπει νά εἶναι ἴσοι » ἤτοι θά ἔχωμεν $x = \mu$.

Ἑπομένως αἱ ἰσότητες γίνονται κατά σειράν:

1. $\alpha^{2x}\cdot\alpha^x = \alpha^4\cdot\alpha^5$

$\alpha^{3x} = \alpha^9$

ἄρα $3x = 9$

$\boxed{x = 3}$

2. $\beta^{5x} = \beta^{10}$

$5x = 10$

$\boxed{x = 2}$

3. $3^x = 81$

$3^x = 3^4$

$\boxed{x = 4}$

4. $2^x = 64$

$2^x = 2^6$

$\boxed{x = 6}$

5. $9^x = 729 = 9^3$

$\boxed{x = 3}$

6. $4^x = \frac{1}{64} = \frac{1}{4^3} = 4^{-3}$

$4^x = 4^{-3}$

$\boxed{x = -3}$

7. $(-2)^x = -32$

$(-2)^x = (-2)^5$

$\boxed{x = 5}$

8. $(-2)^x = 16$

$(-2)^x = (-2)^4$

$\boxed{x = 4}$

9. $\dfrac{1}{2^x} = \dfrac{1}{128} = \dfrac{1}{2^7}$

$2^{-x} = 2^{-7}$

$-x = -7$

$\boxed{x = 7}$

10. $10^{-x} = 10.000$

$10^{-x} = 10^4$

$-x = 4$

$\boxed{x = -4}$

11. $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-5}$

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^5$

$\boxed{x = 5}$

12. $(0,25)^x = 2^{12}$

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x = 2^{12}$

$2^{-2x} = 2^{12}$

$-2x = 12$

$\boxed{x = -6}$

Εὕρετε διά ποίαν τιμήν τοῦ x ἀληθεύουν αἱ κάτωθι ἴσαι δυνάμεις:

105. $125^x = 3125$ Ἀπόκ. $x = \dfrac{5}{3}$

106. $1000^x = 100^3 \cdot 10^{-3}$ Ἀπόκ. $x = 1$

107. $\left(\dfrac{1}{125}\right)^x = 25^3$ Ἀπόκ. $x = -2$

108. $\left(\dfrac{1}{0,125}\right)^x = 128$ Ἀπόκ. $x = \dfrac{7}{3}$

109. *Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ x δι' ἥν ἀληθεύει ἡ ἰσότης: $x^{x+1} = 1$.*

Ἀπόκ. $x^{x+1} = 1$ Ἐπειδή $1 = x^0$ θά ἔχωμεν:

$x^{x+1} = x^0$ ἄρα $x + 1 = 0$,

ὅθεν $\boxed{x = -1}$

110. *Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ x δι' ἥν ἀληθεύει ἡ ἰσότης:*

$$3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$$

Ἀπόκ. Αὕτη δύναται νά γραφῇ καί οὕτω:

$$3\cdot 3^x + \frac{3^x}{3^2} - \frac{3^x}{3^3} + \frac{3^x}{3^4} = 2\cdot 3\cdot 5^3$$

Πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἰσότητος ἐπί 3^4

$$3^5\cdot 3^x + 3^2\cdot 3^x - 3\cdot 3^x + 3^x = 2\cdot 3^5\cdot 5^3$$

ἤ $$(3^5 + 3^2 - 3 + 1)\cdot 3^x = 2\cdot 3^5\cdot 5^3$$

ἤ $$250\cdot 3^x = 250\cdot 3^5$$

ἤ $$3^x = 3^5 \quad \text{ὅθεν} \quad \boxed{x = 5}$$

111. *Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ x δι' ἥν ἀληθεύει ἡ ἰσότης:*

$$3\cdot 2^{x+3} = 192\cdot 3^{x-3}$$

Ἀπόκ. Αὕτη δύναται νά γραφῇ καί οὕτω

$$3\cdot 2^3\cdot 2^x = 192\cdot 3^x\cdot 3^{-3} \qquad (192 = 3\cdot 2^6)$$

ἤ $$3\cdot 2^3\cdot 2^x = 2^6\cdot 3^{-2}\cdot 3^x$$

ἤ $$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^6\cdot 3^{-2}}{2^3\cdot 3} = 2^3\cdot 3^{-3} = \frac{2^3}{3^3}$$

ἤ $$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \quad \text{ὅθεν} \quad \boxed{x = 3}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ.

Εἴδη Ἀλγεβρικῶν Παραστάσεων

Μονώνυμα – Πολυώνυμα.

§29. Ἀλγεβρική παράστασις λέγεται τό σύνολον τῶν ἀλγεβρικῶν ἀριθμῶν καί γραμμάτων, τά ὁποῖα συνδέονται δι' ἀλγεβρικῶν συμβόλων, π.χ. $5a^2b$, $9x^3 - 4x^2 + \sqrt{y}$

Διακρίνομεν ἀλγεβρικάς παραστάσεις: 1) Ρητάς, 2) Ἀρρήτους, 3) Ἀκεραίας, 4) Κλασματικάς.

§30. Ρητή καλεῖται ἡ ἀλγεβρική παράστασις εἰς τήν ὁποίαν δέν σημειώνεται ἐξαγωγή ρίζης ἐπί τῶν γραμμάτων της, π.χ. $9a^2\beta$, $\frac{7a\beta+\sqrt{5}\,\beta\gamma}{6\delta}$, x^2+x-5.

§31. <u>Ἄρρητος</u> λέγεται ἡ ἀλγεβρική παράστασις εἰς τήν ὁποίαν σημειώνεται ἐξαγωγή ρίζης ἐπί τῶν γραμμάτων της π.χ $7a\sqrt{\beta}$, $9xy\sqrt{\omega}$, $a^2+\beta\sqrt{\gamma}-\gamma\sqrt{\delta}$.

§32. <u>Ἀκεραία</u> λέγεται μία ἀλγεβρική παράστασις, ὅταν δέν περιέχῃ διαίρεσιν διά γράμματός τινος.

π.χ. $5a^2+8a$, $9x^2+\frac{xy}{5}$, $\frac{10a^3\beta^2\gamma}{7}$.

§33. <u>Κλασματική</u> λέγεται μία ἀλγεβρική παράστασις, ὅταν περιέχῃ διαίρεσιν δι' ἑνός τουλάχιστον τῶν γραμμάτων αὐτῆς. Π.χ. αἱ παραστάσεις:

$\frac{3a+2\beta-\gamma}{5a}$, $\frac{a-\beta+\gamma}{a\beta}$, $\frac{xy\omega}{2x+3\omega}$ εἶναι κλασματικαί.

§34. <u>Μονώνυμον</u> λέγεται ἡ ἀλγεβρική παράστασις εἰς τήν ὁποίαν δέν ἔχει σημειωθῆ οὔτε πρόσθεσις οὔτε ἀφαίρεσις. Π.χ. αἱ παραστάσεις:

$8a^3\beta$, $-\frac{5}{6}xy\sqrt{a}$, $\frac{7a\beta}{3\gamma\delta}$, $\frac{a\beta\sqrt{\gamma}}{7}$ εἶναι μονώνυμα.

Κατά ταῦτα ἕν μονώνυμον δύναται νά εἶναι: ρητόν ἤ ἄρρητον, ἀκέραιον ἤ κλασματικόν ὡς πρός ἕνα γράμμα ἤ ὡς πρός περισσότερα γράμματα ἤ ὡς πρός ὅλα τά γράμματα αὐτοῦ. Π.χ.:

Τά μονώνυμα: $9a^2\beta$, $\frac{5x^2y\omega}{7}$ εἶναι ἀμφότερα ρητά καί ἀκέραια.

Τά μονώνυμα: $\frac{8a^4\beta^3}{5\gamma^2}$, $\frac{4a\beta\gamma}{9\delta}$ εἶναι ρητά καί κλασματικά.

Τά μονώνυμα: $\sqrt{15a\beta\gamma}$, $a+5\beta-\sqrt{\gamma}$, $9x\sqrt[3]{\omega}$ εἶναι ἄρρητα καί ἀκέραια.

Τά μονώνυμα: $\frac{a^3+\beta^2+7\sqrt{\gamma\delta}}{a\beta}$, $\frac{x+\sqrt{y}+\omega}{5\sqrt{\omega}}$ εἶναι ἄρρητα καί κλασματικά.

§35. <u>Συντελεστής μονωνύμου</u>. Εἰς ἕκαστον μονώνυμον διακρίνομεν τό **ἀριθμητικόν μέρος** καί τό **γραμματικόν μέρος** αὐτοῦ.

Τό ἀριθμητικόν μέρος δηλ. ὁ ἀριθμητικός παράγων τοῦ μονωνύμου καλεῖται **συντελεστής** αὐτοῦ, τό δέ ἐγγράμματον μέρος καλεῖται **κύριον ποσόν** τοῦ μονωνύμου. Π.χ. Τά μονώνυμα:

$$12\alpha^2\beta, \quad -3xy, \quad -\frac{4}{5}\alpha\beta\sqrt{x}, \quad -\alpha x, \quad \alpha$$

ἔχουν κατά σειράν συντελεστάς μέν

$$+12, \quad -3, \quad -\frac{4}{5}, \quad -1, \quad +1$$

κύρια ποσά δέ

$$\alpha^2\beta, \quad xy, \quad \alpha\beta\sqrt{x}, \quad \alpha x, \quad \alpha$$

§ 36. Βαθμός μονωνύμου. Καλοῦμεν **βαθμόν μονωνύμου** ὡς πρός ἕν γράμμα αὐτοῦ τόν ἐκθέτην τοῦ γράμματος τούτου εἰς τό μονώνυμον.

Π.χ. Τό μονώνυμον $5x^3y^2\omega$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός τό γράμμα x, δευτέρου βαθμοῦ πρός τό γράμμα y, πρώτου βαθμοῦ πρός τό γράμμα ω καί μηδενός βαθμοῦ πρός τά γράμματα α, β, τά ὁποῖα δέν ὑπάρχουσι εἰς τό μονώνυμον· διότι τό δοθέν μονώνυμον γράφεται καί οὕτω

$$5x^3y^2\omega = 5x^3y^2\omega\alpha^0\beta^0$$

Τό μονώνυμον $9\alpha^\nu\beta^{2\nu}\gamma^\rho$ εἶναι $\nu^{ου}$ βαθμοῦ πρός τό γράμμα α, εἶναι 2ν βαθμοῦ πρός τό γράμμα β καί ρ βαθμοῦ πρός τό γράμμα γ.

Καλοῦμεν **βαθμόν μονωνύμου** ὡς πρός δύο ἤ τρία ἤ ὡς πρός ὅλα τά γράμματα αὐτοῦ τό **ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν** τῶν γραμμάτων τούτων εἰς τό μονώνυμον. Π.χ. τό μονώνυμον $-7\alpha^3\beta^4\gamma$ εἶναι ἑβδόμου βαθμοῦ πρός τά γράμματα α καί β, τετάρτου βαθμοῦ πρός τά γράμματα α καί γ, πέμπτου βαθμοῦ πρός τά γράμματα β καί γ καί ὀγδόου βαθμοῦ πρός ὅλα τά γράμματα αὐτοῦ.

§ 37. Ὅμοια μονώνυμα. Δύο ἤ περισσότερα μονώνυμα καλοῦνται ὅ μ ο ι α ὅταν ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν καὶ διαφέρουν (ἂν διαφέρουν) κατὰ τοὺς συντελεστὰς αὐτῶν.

Π.χ. Τὰ μονώνυμα $9a^3b$, $-5a^3b$, $-\frac{3}{8}a^3b$, a^3b εἶναι ὅμοια διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ κύριον ποσὸν a^3b. Ὡσαύτως τὰ μονώνυμα $3a^2bx$, $-5bx$, $4ax$ εἶναι ὅμοια ἐὰν ληφθῇ ὡς κύριον ποσὸν τὸ γράμμα x μόνον, ὁπότε συντελεσταὶ κατὰ σειρὰν θεωροῦνται τὰ $3a^2b$, $-5b$, $4a$.

§ 38. Ἀναγωγὴ ὁμοίων μονωνύμων. Ἀναγωγὴ ἢ ἄθροισμα ὁμοίων μονωνύμων καλεῖται ἡ εὕρεσις ἑνὸς μονωνύμου ὁμοίου πρὸς τὰ δοθέντα καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστὴν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν συντελεστῶν των.

Παράδ. 1ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων

$$7ab^2, \quad -3ab^2, \quad 5ab^2$$

σημειώνεται ὡς ἑξῆς: $7ab^2 + (-3ab^2) + 5ab^2$ ἢ

$7ab^2 - 3ab^2 + 5ab^2$ καὶ θὰ ἰσοῦται μὲ

$$(7-3+5)\,ab^2 = 9ab^2.$$

Παράδ. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων $-9a^2xy$, $+12a^2xy$, $-8a^2xy$.

$$A = -9a^2xy + 12a^2xy - 8a^2xy = (-9+12-8)\,a^2xy = -5a^2xy.$$

112. *Νὰ χαρακτηρισθῇ τὸ εἶδος τῶν κάτωθι παραστάσεων:*

1. $a^3 + 7a^2b + b^3$ Ἀπ. Ρητὴ καὶ ἀκεραία

2. $\dfrac{9a^2b + ab^2}{5}$ Ἀπ. » » »

3. $\dfrac{ax + by - \gamma}{7a}$ Ἀπ. Ρητὴ καὶ κλασματική

4. $\dfrac{10a^3b}{7a} = \dfrac{10a^2b}{9}$ Ἀπ. $\left\{\begin{array}{l}\text{Φαινομενικῶς κλασματική,}\\ \text{ἄρα ρητὴ καὶ ἀκεραία}\end{array}\right.$

5. $\dfrac{20a^2\sqrt{b} + 8\gamma}{15\sqrt{x}}$ Ἀπ. Ἄρρητος - Κλασματική

6. $\sqrt{9a^2b^2}$ <u>Ἀπ.</u> Φαινομενικῶς εἶναι ἄρρητος, πραγματικῶς εἶναι ρητή - ἀκεραία διότι ἰσοῦται μέ τό $3ab$.

113. <u>*Νά χαρακτηρισθῇ τό εἶδος τῶν κάτωθι παραστάσεων:*</u>

1. $\dfrac{12a^3b^2\gamma}{ab\gamma}$ 2. $\dfrac{15(x-y)^3}{8(x-y)}$ 3. $\sqrt[3]{\dfrac{(a+b)^3}{8}}$

114. <u>*Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων:*</u>

1. $9x^2$, $-5x^2$, $+12x^2$, $-25x^2$ <u>Ἀπ.</u> $-9x^2$.
2. $12a^2b^3$, $-4a^2b^3$, $-a^2b^3$, $7a^2b^3$ <u>Ἀπ.</u> $14a^2b^3$
3. $7a^3b^4\gamma$, $-\frac{3}{8}a^3b^4\gamma$, $-11a^3b^4\gamma$, $\frac{1}{4}a^3b^4\gamma$. <u>Ἀπ.</u> $-\frac{33}{8}a^3b^4\gamma$
4. $-\frac{5}{8}a^2x^3$, $0{,}25a^2x^3$, $-1{,}125a^2x^3$, $2{,}5a^2x^3$. <u>Ἀπ.</u> a^2x^3

<u>*Νά ἀφαιρεθοῦν τά κάτωθι μονώνυμα:*</u>

115. <u>*Τό μονώνυμον $+7a^3b^2$ ἀπό τό $-8a^3b^2$.*</u>

<u>Ἀπ.</u> $-8a^3b^2-(+7a^3b^2) = -8a^3b^2+(-7a^3b^2)$

$= -8a^3b^2-7a^3b^2 = -15a^3b^2.$

116. <u>*Τό μονώνυμον $-5x^2y\omega$ ἀπό τό $-9x^2y\omega$.*</u>

<u>Ἀπ.</u> $-9x^2y\omega-(-5x^2y\omega) = -9x^2y\omega+5x^2y\omega = -4x^2y\omega.$

117. <u>*Τό μονώνυμον $-\frac{8}{3}a^5bx^2$ ἀπό τό $-\frac{3}{4}a^5bx^2$.*</u>

Ἀπ. $\frac{23}{12}a^5bx^2$

§ 39. <u>Πολυώνυμα.</u> Πολυώνυμον καλεῖται ἡ ἀλγεβρική παράστασις, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπό πολλά μονώνυμα συνδεόμενα μεταξύ των διά τῶν συμβόλων τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως.

π.χ. Πολυώνυμα εἶναι αἱ παραστάσεις:

$$9a^3+8a^2b-10ab^2+b^3$$

$$a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4$$

Τά μονώνυμα, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τό πολυώνυμον, λαμβανόμενα έκαστον με το έμπροσθέν του σημείον καλοῦνται ὅροι τοῦ πολυωνύμου.

Ὁ πρῶτος καὶ ὁ τελευταῖος ὅρος καλοῦνται ἄκροι ὅροι αὐτοῦ.

Πολυώνυμον ἔχον δύο ὅρους καλεῖται διώνυμον, ἔχον τρεῖς ὅρους καλεῖται τριώνυμον. π.χ. Αἱ παραστάσεις $x-\alpha$ καὶ $\alpha x+\beta$ εἶναι διώνυμα. Αἱ παραστάσεις x^3-5x^2+10 καὶ $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ εἶναι τριώνυμα.

§40. <u>Ἀκέραιον</u> καλεῖται τὸ πολυώνυμον τοῦ ὁποίου ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι ἀκέραια μονώνυμα.

§41. <u>Κλασματικὸν</u> καλεῖται τὸ πολυώνυμον ἐὰν ὅλοι οἱ ὅροι του ἢ μερικοὶ ἐξ αὐτῶν εἶναι κλασματικὰ μονώνυμα. Π.χ. τὸ πολυώνυμον $5x^3+\frac{9x^2}{y}-\frac{4y^2}{3x}+y^3$ εἶναι κλασματικὸν πολυώνυμον.

Τὸ πολυώνυμον $\alpha^5+3\alpha^4-8\alpha^3+10\alpha^2-7\alpha+15$ λέγομεν ὅτι βαίνει κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ γράμματος α, ἐπειδὴ οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων βαίνουν ἐλαττούμενοι.

Τὸ πολυώνυμον $1+5x-7x^2+10x^3+x^4$ λέγομεν ὅτι εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x, ἐπειδὴ οἱ ἐκθέται τῶν ὅρων αὐτοῦ βαίνουν αὐξανόμενοι ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον.

§42. <u>Βαθμὸς πολυωνύμου</u>. Καλοῦμεν βαθμὸν πολυωνύμου ὡς πρὸς ἕνα γράμμα αὐτοῦ τὸν μέγιστον ἐκθέτην τοῦ γράμματος τούτου εἰς ἕνα οἱονδήποτε ὅρον τοῦ πολυωνύμου.

π.χ. Τὸ πολυώνυμον $x^3+9\alpha^3\beta^2x^4+10\alpha^5\beta^3$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα α, τετάρτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα x, καὶ τρίτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα β.

Καλοῦμεν βαθμὸν πολυωνύμου ὡς πρὸς δύο ἢ περιςσότερα γράμματα αὐτοῦ τὸ μεγαλύτερον ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τῶν γραμμάτων τούτων εἰς ἕνα οἱονδήποτε ὅρον τοῦ πολυωνύμου.

π.χ. Τὸ πολυώνυμον $x^5-4xy^4+3xy^2+6x^2y^3+x^3y^4+y^6$ εἶναι πέμπτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα x, ἕκτου βαθμοῦ πρὸς τὸ γράμμα y καὶ ἑβδόμου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα x καὶ y.

§43. <u>Ὁμογενῆ πολυώνυμα.</u> Ἓν πολυώνυμον καλεῖται ὁ μ ο γ ε ν ὲ ς πρὸς ἓν γράμμα ἢ πρὸς περισσότερα γράμματα αὐτοῦ ὅταν ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι τοῦ αὐτοῦ βαθμοῦ εἴτε πρὸς τὸ ἐξεταζόμενον γράμμα, εἴτε πρὸς τὰ δοθέντα γράμματα.

π.χ. Τὸ πολυώνυμον $\alpha x^5+7\alpha^2\beta x^5-9\alpha^3\beta x^5+\beta^2x^5$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον πέμπτου βαθμοῦ πρὸς x.

Τὸ πολυώνυμον $\alpha^4+5\alpha^3\beta-8\alpha^2\beta^2+15\alpha\beta^3+20\alpha\beta^4$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον τοῦ τετάρτου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα α καὶ β.

Τὰ $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$ εἶναι ὁμογενῆ $2^{ου}$ βαθμοῦ πρὸς α καὶ β.

Τὸ $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον $3^{ου}$ βαθμοῦ πρὸς α καὶ β.

Τὸ $x^3+y^3+z^3-3xyz$ ἐπειδὴ γράφεται καὶ οὕτω $x^3y^0z^0+y^3x^0z^0+z^3x^0y^0-3xyz$ διὰ τοῦτο εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον τρίτου βαθμοῦ πρὸς τὰ γράμματα x, y, z.

§44. <u>Πλήρη καὶ ἐλλιπῆ (μὴ πλήρη) πολυώνυμα.</u>

Πολυώνυμόν τι διατεταγμένον καλεῖται π λ ῆ ρ ε ς ὡς πρὸς τὸ γράμμα τῆς διατάξεως, ὅταν οἱ ἐκθέται τοῦ γράμματος τούτου βαίνουν αὐξανόμενοι ἢ ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον. Ἐν ἐναντίᾳ περιπτώσει καλεῖται ἐ λ λ ι π ὲ ς ἢ μ ὴ π λ ῆ ρ ε ς.

π.χ. Τὸ πολυώνυμον $x^5+x^4y+x^3y^2+x^2y^3+xy^4+y^5$ εἶναι διατεταγμένον κατὰ τὰς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ y· πλῆρες ὡς πρός x πέμπτου βαθμοῦ, πλῆρες ὡς πρός y καί πέμπτου βαθμοῦ. Ἐπειδή δέ ὅλοι οἱ ὅροι του εἶναι πέμπτου βαθμοῦ καί πρός τά γράμματά x καί y εἶναι ὁμογενές πέμπτου βαθμοῦ πρός x καί y.

Τό πολυώνυμον $x^5+7x^3-4x^2+10$ εἶναι ἐλλιπές πέμπτου βαθμοῦ πρός τό γράμμα x, διότι λείπουν οἱ ὅροι τοῦ $4^{ου}$ καί $1^{ου}$ βαθμοῦ. Δυνάμεθα ὅμως, ὅταν παραστῇ ἀνάγκη, νά συμπληρώσωμεν ἕν ἐλλιπές πολυώνυμον, ἐάν εἰσαγάγωμεν τούς ὅρους, οἱ ὁποῖοι λείπουν μέ συντελεστήν μηδέν. π.χ. Τό ἀνωτέρω ἐλλιπές πολυώνυμον δύναται νά γραφῇ:

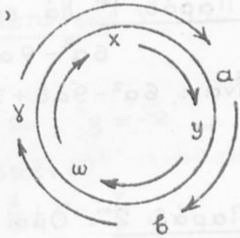
$$x^5+0.x^4+7x^3-4x^2+0.x+10.$$

§45. Συμμετρικά πολυώνυμα. Πολυώνυμόν τι καλεῖται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ό ν ὡς πρός τά γράμματα, τά ὁποῖα περιέχει, ὅταν δέν ἀλλοιοῦται τοῦτο ἄν τά γράμματά του ἀντιμετατεθοῦν κατά κυκλικήν τινα τάξιν.

π.χ. Τό πολυώνυμον

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$$

εἶναι συμμετρικόν τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός x, y, ω διότι ἄν τεθῇ εἰς αὐτό ἀντί x τό y, ἀντί y τό ω καί ἀντί τό ω τό x εὑρίσκομεν τό πολυώνυμον



$$y^3+\omega^3+x^3+3y\omega x$$

τό ὁποῖον εἶναι τό αὐτό μέ τό δοθέν.

Σημ. Τά γράμματα x, y, ω ἀντικαθίστανται κυκλικῶς ἕκαστον μέ τό ἀμέσως ἑπόμενόν του, ὅπως δεικνύει τό βέλος κατά ὡρισμένην φοράν (ἔστω τήν τῆς κινήσεως τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου) εἰς τό ἀνωτέρω σχῆμα.

Ὁμοίως τό πολυώνυμον $\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)$ εἶναι συμμετρικόν τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός α, β, γ διότι ἐὰν τεθῇ ἀντὶ α τὸ ἑπόμενόν του β, ἀντὶ β τὸ γ καὶ ἀντὶ γ τὸ α προκύπτει τὸ $\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)+\alpha^2(\beta-\gamma)$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ δοθέν.

Ὁμοίως τὰ πολυώνυμα : $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ (1)

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma \quad (2)$$

εἶναι ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὰ γράμματα τὰ ὁποῖα ἕκαστον περιέχει.

Τὸ μὲν (1) εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν 3ου βαθμοῦ πρὸς α καὶ β, τὸ δὲ (2) εἶναι ὁμογενὲς καὶ συμμετρικὸν 2ου βαθμοῦ πρὸς α, β καὶ γ.

Τὰς ἰδιότητας τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων καὶ τὴν σπουδαίαν συμβολὴν των πρὸς λύσιν ὡρισμένων ἀσκήσεων θέλομεν πραγματευθῇ βραδύτερον ἐν ἰδίῳ κεφαλαίῳ.

§46. Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρικῆς παραστάσεως.

Ἀριθμητικὴ τιμὴ μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως καλεῖται τὸ ἀριθμητικὸν ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον εὑρίσκομεν, ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν τὰ γράμματα τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως μὲ δοθέντας ἀριθμοὺς καὶ ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις, αἱ ὁποῖαι σημειώνονται.

Παράδ. 1ον Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῆς παραστάσεως

$$6\alpha^2-9\alpha\beta+7\beta^2 \quad \text{ὅταν} \quad \alpha=5 \quad \text{καὶ} \quad \beta=-4$$

Εἶναι:
$$\begin{aligned} 6\alpha^2-9\alpha\beta+7\beta^2 &= 6\cdot5^2-9\cdot5\cdot(-4)+7(-4)^2 \\ &= 6\cdot25-9\cdot5\cdot(-4)+7\cdot16 \\ &= 150+180+112 = 442. \end{aligned}$$

Παράδ. 2ον. Ὁμοίως ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:

$$\frac{\alpha}{4}-\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{\beta^2}{9} \quad \text{διὰ} \quad \alpha=\frac{1}{3},\ \beta=\frac{1}{2}.$$

Εἶναι:
$$\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\alpha\beta}{3}+\frac{\beta^2}{9}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{4}-\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}=\frac{\frac{1}{9}}{4}-\frac{\frac{1}{6}}{3}+\frac{\frac{1}{4}}{4}$$

$$=\frac{1}{36}-\frac{1}{18}+\frac{1}{16}=\frac{4-8+9}{144}=\frac{5}{144}.$$

Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων.

118. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως*

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

1. διὰ $a = 2$, $b = -1$, 2. διὰ $a = -\frac{1}{3}$, $b = +\frac{1}{3}$

Ἀπ. 1. Διὰ $a = 2$, $b = -1$ τὸ δοθὲν πολυώνυμον λαμβάνει τὴν τιμήν: $2^4 + 4\cdot 2^3(-1) + 6\cdot 2^2(-1)^2 + 4\cdot 2\cdot(-1)^3 + (-1)^4$

ἢ $16 - 32 + 24 - 8 + 1 = 1$

2. Διὰ $a = -\frac{1}{3}$, $b = +\frac{1}{3}$ λαμβάνει τὴν τιμήν:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^4 + 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\left(+\frac{1}{3}\right) + 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(+\frac{1}{3}\right)^2 + 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\left(+\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

ἢ $\frac{1}{3^4} - \frac{4}{3^4} + \frac{6}{3^4} - \frac{4}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{8}{3^4} - \frac{8}{3^4} = 0$

119. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητικὴ τιμὴ τῆς παραστάσεως:*

$$x(y+z)^2 + y(z+x)^2 + z(x+y)^2 - 4xyz$$

διὰ $x = 3$, $y = -2$, $z = 1$

Ἀπ. Ἀντικαθιστῶντες τὰς δοθείσας τιμὰς λαμβάνομεν: $3(-2+1)^2 + (-2)(1+3)^2 + 1(3-2)^2 - 4\cdot 3(-2)\cdot 1$

$3 - 32 + 1 + 24 = -4$

120. *Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμὴ τῆς παραστάσεως*

$$x(x-2y)^3 + y(2x-y)^3$$

διὰ 1. $x = \frac{2}{3}$, $y = -1$ 2. $x = 2$, $y = -2$

Ἀπ. Διὰ $x = \frac{2}{3}$, $y = -1$ θὰ ἔχωμεν:

$x - 2y = \frac{2}{3} + 2 = \frac{8}{3}$, καὶ $2x - y = \frac{4}{3} + 1 = \frac{7}{3}$,

καὶ ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τὴν τιμὴν

$$\frac{2}{3}\left(\frac{8}{3}\right)^3 - \left(\frac{7}{3}\right)^3 = \frac{1024}{81} - \frac{343}{27} =$$

$$= \frac{1024}{81} - \frac{1029}{81} = -\frac{5}{81}$$

2. Διὰ $x = 2$, $y = -2$ ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τὴν τιμὴν 0.

121. *Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τῆς παραστάσεως:*

$$\frac{3\alpha^2+2\beta^2-3\alpha\beta}{4\alpha^2+3\beta^2} \quad \text{διά} \quad \alpha=5, \ \beta=-4.$$

Ἀπ. Διά $\alpha=5$, $\beta=-4$ ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τήν τιμήν:

$$\frac{3\cdot5^2+2(-4)^2-3\cdot5\,(-4)}{4\cdot5^2+3\cdot(-4)^2}=\frac{75+32+60}{100+48}=\frac{167}{148}$$

122. *Νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:*

$$\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1} \quad \text{διά} \quad 1) \ x=-2 \quad 2) \ x=-\frac{3}{4}$$

Ἀπ. 1) Διά $x=-2$ θά ἔχωμεν:

$$x^2+\frac{1}{x}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2},$$

$$x+\frac{1}{x}-1=-2-\frac{1}{2}-1=-\frac{7}{2}$$

ἑπομένως ἡ παράστασις γίνεται:

$$\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}=\frac{\frac{7}{2}}{-\frac{7}{2}}=-1.$$

2) Διά $x=-\frac{3}{4}$ θά ἔχωμεν:

$$x^2+\frac{1}{x}=\frac{9}{16}-\frac{4}{3}=\frac{27}{48}-\frac{64}{48}=-\frac{37}{48}$$

$$x+\frac{1}{x}-1=-\frac{3}{4}-\frac{4}{3}-1=-\frac{37}{12}$$ ὅθεν ἡ παράστασις

λαμβάνει τήν τιμήν: $$\frac{x^2+\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}-1}=\frac{-\frac{37}{48}}{-\frac{37}{12}}=\frac{1}{4}$$

123. *Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῆς παραστάσεως:*

$$\frac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}} \quad \text{διά} \quad 1. \ x=-3 \qquad 1 \ \text{Ἀπ.} = 1$$

$$2 \ x=\frac{1}{5} \qquad 2 \ \text{Ἀπ} = 1$$

124. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:

$K = (a+b)^3 - (a-b)^3 + a^3 - b^3$ 1. Διά $a = 6$, $b = -3$

2 » $a = 0{,}5$, $b = -0{,}4$

Ἀπ. 1. Διά $a = 6$, $b = -3$ λαμβάνομεν:

$$K = (6-3)^3 - (6+3)^3 + 6 - (-3)^3 = 27 - 729 + 216 + 27 = -459.$$

2. Διά $a = 0{,}5$, $b = -0{,}4$ λαμβάνομεν:

$$K = (0{,}5 - 0{,}4)^3 - (0{,}5 + 0{,}4)^3 + (0{,}5)^3 - (-0{,}4)^3$$
$$= (0{,}1)^3 - (0{,}9)^3 + (0{,}5)^3 - (-0{,}4)^3$$
$$= 0{,}001 - 0{,}729 + 0{,}125 - 0{,}064 = -0{,}539.$$

125. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τῆς παραστάσεως:

$$\frac{1}{a^2 - 3b^2 + 2ab} + \frac{1}{b^2 - 3a^2 + 2ab} - \frac{2}{3a^2 + 10ab + 3b^2}$$

1. ἐάν $a = 2$, $b = -3$,   2. ἐάν $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$.

Ἀπ. 1. Διά $a = 2$, $b = -3$ θά λάβουν τάς κάτωθι τιμάς οἱ παρονομασταί:

$$a^2 - 3b^2 + 2ab = 4 - 27 - 12 = -35,$$
$$b^2 - 3a^2 + 2ab = 9 - 12 - 12 = -15,$$
$$3a^2 + 10ab + 3b^2 = 12 - 60 + 27 = -21.$$

Ὅθεν ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τήν μορφήν:

$$-\frac{1}{35} - \frac{1}{15} + \frac{2}{21} = -\frac{3}{105} - \frac{7}{105} + \frac{10}{105} = 0$$

2. Διά $a = -\frac{1}{3}$, $b = \frac{1}{4}$ θά ἔχωμεν ἐργαζόμενοι ὁμοίως:

$$a^2 - 3b^2 + 2ab = -\frac{35}{144}$$

$$b^2 - 3a^2 + 2ab = -\frac{7}{16}$$

$$3a^2 + 10ab + 3b^2 = -\frac{5}{16}$$

καί ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει δι' ἀντικαταστάσεως ἀριθμητικήν τιμήν 0.

126. Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:

$$\frac{2\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{2\beta}{\beta+\gamma}+\frac{2\gamma}{\gamma+\alpha}+\frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}$$

διά $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 3$.

Ἀπ. Ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν:

$$\frac{2\cdot 1}{1-2}+\frac{2(-2)}{-2+3}+\frac{2\cdot 3}{3+1}+\frac{(-2-3)(3-1)(1+2)}{(-2+3)(3+1)(1-2)}$$

ἤ $$\frac{2}{-1}+\frac{-4}{1}+\frac{6}{4}+\frac{(-5)\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 4\cdot(-1}$$ ἤ $$-2-4+\frac{3}{2}+\frac{15}{2}=3$$

127. *Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:*

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)^2-\left(\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}\right)\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

1. διά $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 3$

2. » $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$

Ἀπ 1. Ἀντικαθιστῶντες τάς δοθείσας τιμάς εἰς ἕκαστον κλάσμα λαμβάνομεν:

$$\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}=-\frac{1}{3}-3=-\frac{10}{3}$$

$$\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$$

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-2-\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$$

ὅθεν ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται:

$$\frac{100}{9}+\frac{169}{36}+\frac{25}{4}-\frac{(-10)\cdot 13\cdot(-5)}{3\cdot 6\cdot 2}$$

ἤ $$\frac{400}{36}+\frac{169}{36}+\frac{225}{36}-\frac{650}{36}=\frac{794-650}{36}=4$$

2. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως διά $\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = \frac{3}{4}$, $\gamma = -\frac{1}{2}$ εὑρίσκομεν ἀριθμητικήν τιμήν ἴσην πάλιν μέ 4.

Νά εὑρεθοῦν αἱ ἀριθμητικαί τιμαί τῶν παραστάσεων διά τάς σημειουμένας τιμάς τῶν γραμμάτων αὐτῶν:

128. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$

1. διά: $\alpha=0{,}1$, $\beta=-0{,}2$, $\gamma=0{,}3$

2 » : $\alpha=(0{,}1)^{-1}$, $\beta=(-0{,}2)^{-2}$, $\gamma=(0{,}5)^{-2}$

Ἀπ. 1. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma=(0{,}1)^2+(-0{,}2)^2+(0{,}3)^2-$

$-2(0{,}1)(-0{,}2)+2(0{,}1)(0{,}3)-2(-0{,}2)(0{,}3)$

$=0{,}01+0{,}04+0{,}09+0{,}04+0{,}06+0{,}12=0{,}36$

2. Διά $\alpha=(0{,}1)^{-1}=\dfrac{1}{0{,}1}=10$

$\beta=(-0{,}2)^{-2}=\dfrac{1}{(-0{,}2)^2}=\dfrac{1}{0{,}04}=25$

$\gamma=(0{,}5)^{-2}=\dfrac{1}{0{,}25}=4$

ἀντικαθιστῶντες λαμβάνομεν ἀριθμ. τιμήν 49

129. $\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

διά $\alpha=5$, $\beta=-1$ Ἀπ. 1024

130. $\alpha^5-5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2-10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

1. διά $\alpha=5$, $\beta=-1$ 2. διά $\alpha=0{,}2$, $\beta=-0{,}3$

Ἀπ. 7776 Ἀπ. 0,03125

131. *Τῆς παραστάσεως*: $8\alpha\beta^4-5\alpha^2\beta^3+\alpha^3\beta^2+\alpha^4\beta$

1. διά $\alpha=-2$, $\beta=-3$ Ἀπ. -876

2. διά $\alpha=0{,}01$, $\beta=-0{,}02$ Ἀπ. 0,000 000 017

Λύσις. 2. $\alpha\beta^4=(0{,}01)(-0{,}02)^4=(0{,}01)(0{,}000\,000\,16)=$

$=0{,}000\,000\,0016$

ἄρα: $8\alpha\beta^4=0{,}000\,000\,0128$

$\alpha^2\beta^3=(0{,}01)^2(-0{,}02)^3=(0{,}0001)(-0{,}000\,008)=-0{,}000\,000\,0008$

ἄρα: $-5\alpha^2\beta^3=+0{,}000\,000\,0040$

$\alpha^3\beta^2=(0{,}01)^3(-0{,}02)^2=(0{,}000\,001)(0{,}0004)=0{,}000\,000\,0004$

$\alpha^4\beta=(0{,}000\,000\,01)(-0{,}02)=-0{,}000\,000\,0002$

ὅθεν: $8\alpha\beta^4-5\alpha^2\beta^3+3\alpha^3\beta^2+\alpha^4\beta=+0{,}000\,000\,017$

132. *Ὁμοίως τῆς παραστάσεως*: $x^3+y^3+z^3+3(x+y)(y+z)(z+x)$

1. διά $x=-4$, $y=2$, $z=1$, 2. διά $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{6}$, 3. διά $x=0{,}1$, $y=-0{,}2$, $z=0{,}3$

Ἀπ. -1. Ἀπ. $\frac{1}{27}$ Ἀπ. 0,008

133. *Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:*

$$\alpha(\beta+\gamma-\alpha)^2+\beta(\gamma+\alpha-\beta)^2+\gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)$$

διά $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{3}$, $\gamma=2$ Ἀπ. $\frac{4}{3}$

134. *Ὁμοίως τῶν παραστάσεων:*

1. $\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2-4\alpha\gamma}}{2\alpha}$ διά $\alpha=5$, $\beta=12$, $\gamma=4$. Ἀπ -2

2. $\frac{\sqrt{\alpha^2+2\beta}\pm\sqrt{\alpha^2-2\beta}}{2\alpha}$ διά $\alpha=5$, $\beta=12$ Ἀπ. $\frac{4}{5}$ ἤ $\frac{3}{5}$

135. *Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:* $(x+2y)^2-(2y+3\omega)^2+(3\omega+x)^2$

1. ἐάν $x=1$, $y=\frac{1}{2}$, $\omega=\frac{1}{3}$ Ἀπ. 4
2. » $x=-1$, $y=\frac{1}{2}$, $\omega=-\frac{1}{2}$ Ἀπ. 6

136. *Ἐάν $x=1$, $y=2$, $\omega=4$ εὕρετε τάς ἀριθμ. τιμάς τῶν:*

1. $\frac{x}{y}+\frac{y}{\omega}+\frac{\omega}{x}+5$ Ἀπ. 10
2. $\frac{x^2}{\omega}+\frac{\omega^2}{y}-\frac{y^2}{x}+\frac{4\omega+1}{4}$ Ἀπ. $\frac{17}{2}$

137. *Δοθείσης τῆς ἰσότητος $5x-0,6=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ εὕρετε τήν τιμήν τοῦ x διά $\alpha=0,4$, $\beta=0,06$ κατ' ἔλλειψιν ἤ καθ' ὑπεροχήν*

Ἀπ. $x=0,13$ κατ' ἔλλειψιν.

138. *Δοθείσης τῆς ἰσότητος:*

$$2x=\frac{\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta-\gamma}$$ *εὕρετε τήν τιμήν τοῦ x.*

διά $\alpha=0,3$, $\beta=0,4$, $\gamma=0,5$ Ἀπ. $x=-5,7$

139. *Εὑρεῖν τήν ἀριθμ. τιμήν τῆς παραστάσεως:*

$$\frac{\alpha^2}{4}+\beta^3+\frac{\gamma^3}{9}+\alpha\beta^2-\frac{\alpha\gamma^2}{3}-\frac{2\alpha\beta\gamma^2}{3}$$

διά $\alpha=-0,1$, $\beta=\frac{1}{2}$, $\gamma=-0,3$ κατά προσέγ. ἑκατοστοῦ κατ' ἔλλειψιν ἤ καθ' ὑπεροχήν. Ἀνωτ. Ἐμπορική 1945

Ἀπόκ. Ἀντικαθιστῶντες τάς δοθείσας τιμάς τῶν γραμμάτων θά ἔχωμεν ἐάν διά K καλέσωμεν τήν παράστασιν:

$$K=\frac{(-0,1)^2}{4}+(0,5)^3+\frac{(-0,3)^3}{9}+(-0,1)(0,5)^2-\frac{(-0,1)(-0,3)^2}{3}-\frac{2(-0,1)(0,5)(-0,3)^3}{3}$$

$$K=\frac{0,01}{4}+0,125-\frac{0,027}{9}-0,025+\frac{0,009}{3}+\frac{0,10\cdot 0,09}{3}$$

$$K=0,0025+0,125-0,003-0,025+0,003+0,003$$

$$K=0,1305-0,025=0,1055$$

ἤτοι $K=0,11$ κατὰ προσέγγ. 0,01 καθ' ὑπεροχήν.

140. *Εὑρεῖν τὴν ἀριθμ. τιμὴν τῆς παραστάσεως:*

$$\frac{x^3}{2}+\frac{1}{y^3}+\frac{z^3}{2}+\frac{x}{y}-\frac{xy}{4}-\frac{2xyz^2}{5}$$

ὅταν $x=-\frac{1}{2}$, $y=0,2$ *καὶ* $z=-0,01$. Ἀνωτ. Ἐμπορικὴ 1949

Ἀπόκ. Καλοῦντες τὴν παράστασιν Κ καὶ ἀντικαθιστῶντες τὰ γράμματα διὰ τῶν τιμῶν των λαμβάνομεν:

$$K=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}{2}+\frac{1}{(0,2)^3}+\frac{(-0,01)^3}{2}+\frac{-\frac{1}{2}}{0,2}-\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0,2}{4}-\frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)0,2(-0,01)^2}{5}$$

$$K=\frac{-1}{16}+\frac{1000}{8}-\frac{0,000001}{2}-\frac{1}{0,4}+\frac{0,1}{4}+\frac{0,2\cdot 0,0001}{5}$$

$$K=-0,0625+125-0,0000005-2,5+0,025+0,000004$$

$$K=(125+0,025+0,000004)-(0,0625+0,0000005+2,5)$$

$$K=125,025004-2,5625005=122,4625035$$

ἤτοι $K=122,4625$ κατ' ἔλλειψιν.

141. *Ὁμοίως τῆς παραστάσεως:*

$$4a^2\left[(a^2-b^2)^2-(a^2+b^2+2ab)^2\right]+(a-b-\gamma)(a+b)$$

ὅταν $a=1$, $b=2$, $\gamma=3$. Ἀπ. -300

142. *Ὁμοίως τῆς:* $\frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

1. ὅταν $x=-2$, $y=+3$ Ἀπ. $\frac{1}{36}$
2. » $x=\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{2}$ Ἀπ. 144.

143. $2a^2-b^2-3\gamma^2+4b\gamma-a\gamma-ab+6a-3b+\gamma+4.$

1. ἐὰν $a=-2$, $b=1$, $\gamma=+3$ Ἀπ. -8
2. » $a=-\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$, $\gamma=-1$ Ἀπ. 0.

144. $\frac{xy}{\alpha\beta} + \frac{(x-\alpha)(y-\alpha)}{\alpha(\alpha-\beta)} + \frac{(x-\beta)(y-\beta)}{\beta(\beta-\alpha)}$

διά $x = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{5}$, $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = -1$ Ἀπ. 1.

145. $\frac{(x+\beta)(x+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{(x+\gamma)(x+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

διά $x = -2$, $\alpha = 1$, $\beta = 3$, $\gamma = -3$ Ἀπ. 1.

146. $\frac{\alpha^2(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \frac{\beta^2(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \frac{\gamma^2(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

1. ἐάν $x = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = -\frac{1}{2}$, $\gamma = -2$ Ἀπ. $\frac{1}{4}$
2. » $x = -\frac{2}{5}$, $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{3}$, $\gamma = 4$ Ἀπ. $\frac{4}{25}$

147. *Τρίγωνόν τι ἔχει πλευράς $\alpha = 13$, $\beta = 14$, $\gamma = 15$ · νά ὑπολογισθοῦν: 1) Τό ἐμβαδόν του διδόμενον ὑπό τοῦ τύπου:*

$$E = \frac{1}{4}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\beta+\gamma-\alpha)}.$$

2) Ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου διδομένη ὑπό τοῦ τύπου: $A = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$.

Λύσ. 1. $E = \frac{1}{4}\sqrt{42\times 12\times 14\times 16} = \frac{1}{4}\sqrt{6\cdot 7\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 4\cdot 4}$

$= \frac{1}{4}\sqrt{6\cdot 6\cdot 7\cdot 7\cdot 4\cdot 4\cdot 4} = \frac{1}{4}\sqrt{6^2\cdot 7^2\cdot 4^2\cdot 2^2} = \frac{1}{4}\cdot 6\cdot 7\cdot 4\cdot 2 = 84$

2. $A = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = 8,125.$

148. *Νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:*

$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ ὅταν $\alpha = 35$, $\beta = 28$, $\gamma = 21$, $\tau = 42$.

Λύσ. $E = \sqrt{42\cdot(42-35)(42-28)(42-21)} = \sqrt{42\times 7\times 14\times 21}$

$= \sqrt{6\cdot 7\cdot 7\cdot 2\cdot 7\cdot 7\cdot 3} = \sqrt{6^2\cdot 7^2\cdot 7^2} = 6\cdot 7\cdot 7 = 294.$

149. *Οἱ τύποι*

1. $\alpha = \sqrt{\upsilon^2 + \rho^2}$ 2. $E = \pi\rho\alpha$
3. $E' = \pi\rho(\rho+\alpha)$ 4. $O = \frac{1}{3}\pi\rho^2\upsilon$

παρέχουσι τήν πλευράν, τήν παράπλευρον ἐπιφάνειαν, τήν ὁλικήν ἐπιφάνειαν καί τόν ὄγκον κυκλικοῦ κώνου· ὑπολογίσατε τάς τιμάς τῶν α, E, E', O, ἐάν $\upsilon = 6\ \mu$, $\rho = 0{,}38\ \mu$. γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\pi = 3{,}14159$.

Ἀπόκ. 1. $\alpha = \sqrt{6^2 + 0{,}38^2} = 6{,}012$ μ. κατά προσέγγ. 0,001.

2. $E = \pi \cdot 0{,}38 \cdot 6 = 7{,}163$ μ. καθ' ὑπεροχήν.

3. $E' = \pi \cdot 0{,}38 \cdot 6{,}392 = 7{,}631$ τ.μ. »

4. $O = \frac{1}{3}\pi \cdot 0{,}38^2 \cdot 6 = 0{,}907$ κ.μ. κατ' ἔλλειψιν.

150. Οἱ τύποι:

$$E = 4\pi\rho^2, \quad V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$$

παρέχουσι τήν ἐπιφάνειαν καί τόν ὄγκον τῆς σφαίρας συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος ρ· ὑπολογίσατε τά 1) E καί 2) V, ἐάν $\rho = 0{,}04\ \mu$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι $\pi = 3{,}14159$.

1. $E = 4\pi \times (0{,}04)^2 = 4 \times 3{,}14159 \times 0{,}0016$

$= 12{,}56636 \times 0{,}0016 = 0{,}0201$ τ.μ.

2. $V = \frac{4}{3}\pi \times (0{,}04)^3 = \frac{4\pi}{3} \times 0{,}000064 = \frac{12{,}56636}{3} \times 0{,}000064$

$= \frac{12{,}56636 \times 64}{3 \times 1000\,000} = \frac{804{,}24704}{3000\,000} = \frac{0{,}00080424704}{3}$

$= 0{,}00026808234 =$ 0 κ.μ. 268 κ. δακτ.

151. Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ x ἐκ τῶν ἑξῆς τύπων:

α) $x = B\sqrt{2-\sqrt{3}} - B\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ἐάν $B = 16$

Ἀπ. $x = 16\sqrt{2 - 1{,}732051} - 16\sqrt{2 - 1{,}414213}$

$= 16(0{,}5176 - 0{,}7654) = -3{,}9648$

β) $x = \frac{B}{2}(\sqrt{5} - 1) - \frac{B}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ ἐάν $B = 16$.

Ἀπ. $x = -8{,}920$

γ) $x = \alpha - 2\sqrt{\alpha+1} - \frac{2\sqrt[3]{4\alpha-5} - \sqrt{2\alpha-7}}{\sqrt{\alpha-4}}$ ἐάν $\alpha = 8$

Ἀπ. $x = \frac{1}{2}$

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§ 47. Πρόσθεσις μονωνύμων. Τό ἄθροισμα πολλῶν μονωνύμων εἶναι ἕν πολυώνυμον, τό ὁποῖον περιέχει ὅλα τά μονώνυμα καὶ ἕκαστον μὲ τὸ σημεῖον αὐτοῦ.

π.χ. Τὸ ἄθροισμα τῶν μονωνύμων:

$$M = 5\alpha^3\beta \,, \quad M' = -\frac{3}{4}\alpha^2 x^2 \,, \quad M'' = 9\alpha\beta x$$

εἶναι τὸ πολυώνυμον

$$\Pi = M + M' + M'' = 5\alpha^3\beta - \frac{3}{4}\alpha^2 x^2 + 9\alpha\beta x.$$

§48. <u>Πρόσθεσις πολυωνύμων.</u> Μέθοδος α': Τὸ ἄθροισμα πολλῶν πολυωνύμων εὑρίσκομεν ἐὰν θέσωμεν τὸ ἕν κατόπιν τοῦ ἄλλου ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ἕκαστον πολυώνυμον μὲ τὰ σημεῖα τῶν ὅρων του. Ἔπειτα κάμωμεν ἀναγωγὴν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐὰν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Μέθοδος β': Τὸ ἄθροισμα πολλῶν πολυωνύμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὁμοίους ὅρους, εὑρίσκεται ἐὰν γράψωμεν τὸ ἕν κάτωθι τοῦ ἄλλου, εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὅμοιοι ὅροι νὰ εὑρίσκωνται εἰς τὴν αὐτὴν κατακόρυφον στήλην καὶ ἔπειτα εὑρίσκομεν τὸ ἀλγεβρικὸν ἄθροισμα τῶν ὁμοίων μονωνύμων ἑκάστης στήλης.

π.χ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \,, \quad \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\text{καὶ} \quad -\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

<u>Μέθοδος α'.</u>

$$\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 + \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 - \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 =$$

$$= \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 - \beta^3$$

<u>Μέθοδος β'.</u>

$$\begin{array}{r} \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 \\ \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ -\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 \\ \hline \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 9\alpha\beta^2 - \beta^3 \end{array}$$

152. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:*

$$5\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 8\beta\gamma \quad \text{καὶ} \quad -3\alpha\beta + 2\beta\gamma - 4\alpha\gamma$$

<u>Ἀπ.</u> $(5\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 8\beta\gamma) + (-3\alpha\beta + 2\beta\gamma - 4\alpha\gamma) =$

$$= 5\alpha\beta + 4\alpha\gamma - 8\beta\gamma - 3\alpha\beta + 2\beta\gamma - 4\alpha\gamma = 2\alpha\beta - 6\beta\gamma$$

153. *Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα τῶν πολυωνύμων:*

$$-\frac{2}{5}x^2 - 7xy + 3y^2, \quad 3x^2 + 8\frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{5}xy, \quad \frac{x^2}{4} - xy - \frac{y^2}{5}$$

<u>Ἀπ.</u> $\text{Ἄθ} = -\frac{2}{5}x^2 - 7xy + 3y^2 + 3x^2 + \frac{33}{4}y^2 + \frac{3}{5}xy + \frac{x^2}{4} - xy - \frac{y^2}{5}$

$$= \left(-\frac{2}{5} + 3 + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-7 + \frac{3}{5} - 1\right)xy + \left(3 + \frac{33}{4} - \frac{1}{5}\right)y^2$$

$$= \frac{57}{20}x^2 - \frac{37}{5}xy + \frac{221}{20}y^2$$

Νά εὑρεθοῦν τά ἀθροίσματα τῶν κάτωθι πολυωνύμων:

154. $\alpha^3\beta - \alpha\beta^3, \quad \alpha^2\beta^2 - \beta^4, \quad \alpha^4 - \alpha^2\beta^2$

Ἀπ. $\alpha^4 + \alpha^3\beta - \alpha\beta^3 - \beta^4$

155. $x^3 - 2x^2y + 5xy^2, \quad -7x^2y - xy^2 + 3y^3, \quad x^3 - y^3.$

156. $2x^3 - 4x^2 + 7x + 1, \quad -x^3 + 2x^2 + 3x - 5, \quad 4x^3 - 7x^2 - 5x + 6$

Ἀπ. $5x^3 - 9x^2 + 5x + 2$

157. $10x^2 - 8y^2, \quad 2x^2 + y^2, \quad -5y^2 + 7xy - 3x^2, \quad x^2 - 7xy + 12y^2$

158. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 2x + 1, \quad -x^3 + 4x - 3, \quad -3x^4 + 2x^2 + 3x + 2, \quad x^4 - 3x + 4$

<u>Ἀπ.</u>

$$\begin{array}{rrrrr}
x^4 & -2x^3 & +5x^2 & -2x & +1 \\
 & -x^3 & & +4x & -3 \\
-3x^4 & & +2x^2 & +3x & +2 \\
x^4 & & & -3x & +4 \\
\hline
-x^4 & -3x^3 & +7x^2 & +2x & +4
\end{array}$$

159. $\alpha^5 - 8\alpha^4\beta + 10\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + 7\alpha\beta^4 - 2\beta^5, \quad \alpha^5 - 10\alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \beta^5$

160. $10\alpha^\mu - 18\beta^\nu + 5\gamma^\rho, \quad 3\alpha^\mu + 8\beta^\nu - 3\gamma^\rho, \quad -\alpha^\mu - \beta^\nu + \gamma^\rho$

Ἀπ. $12\alpha^\mu - 11\beta^\nu + 3\gamma^\rho$

161. $x^\mu + 9x^{\mu-1} - 10x^{\mu-2} + 15x^{\mu-3} + y^\mu$ καί $4x^\mu - x^{\mu-1} + x^{\mu-2} - 15x^{\mu-3} + 4y^\mu$

Ἀπ. $5x^\mu + 8x^{\mu-1} - 9x^{\mu-2} + 5y^\mu$

162. $\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{3} + \frac{3\gamma}{5}, \quad \frac{2\alpha}{3} + \frac{\beta}{4} - \gamma, \quad -3\alpha - \frac{\beta}{2} + \frac{2\gamma}{3}, \quad \alpha + \frac{4\beta}{3} - \frac{\gamma}{2}$

Ἀπ. $-\frac{5\alpha}{6} + \frac{3\beta}{4} - \frac{7\gamma}{30}$

163. $-\frac{2}{3}x^2 - 3xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}x - 3y + 3, \quad x^2 - y^2 + x - y,$

$\frac{1}{6}xy + \frac{1}{4}y^2 - 2x + 4y - 1, \quad x^2 + \frac{5}{6}x - 4$

Ἀπ. $\frac{4}{3}x^2-\frac{17}{6}xy-\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}x-2$,

164. *Νά προστεθοῦν τά πολυώνυμα:*

$$a_1x^3+b_1x^2-\gamma_1x+\delta_1\ ,\quad a_2x^3-b_2x^2-\delta_2\ ,\quad a_3x^3+b_3x^2+\gamma_3x-\delta_3$$

Ἀπ. Γράφομεν τό ἕν κάτωθεν τοῦ ἄλλου ὡς ἑξῆς:

$$\begin{array}{rrrr}
a_1x^3 & +b_1x^2 & -\gamma_1x & +\delta_1 \\
a_2x^3 & -b_2x^2 & & -\delta_2 \\
a_3x^3 & +b_3x^2 & +\gamma_3x & -\delta_3 \\
\hline
\begin{array}{r}a_1\\+a_2\\+a_3\end{array}\Bigg| x^3 & \begin{array}{r}+b_1\\-b_2\\+b_3\end{array}\Bigg| x^2 & \begin{array}{r}-\gamma_1\\+\gamma_3\end{array}\Bigg| x & \begin{array}{r}+\delta_1\\-\delta_2\\-\delta_3\end{array}\Bigg| x^0
\end{array}$$

ἤ $(a_1+a_2+a_3)x^3+(b_1-b_2+b_3)x^2+(\gamma_3-\gamma_1)x+(\delta_1-\delta_2-\delta_3)$

Προβλήματα

165. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τριῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου ὄντος a.

Ἀπ. Ἐάν ὁ πρῶτος εἶναι a ὁ διαδοχικός εἶναι $(a+1)$ καί ὁ ἑπόμενος διαδοχικός $(a+2)$ ἑπομένως τό ἄθροισμά των θά εἶναι:

$$a+(a+1)+(a+2)=a+a+1+a+2=3(a+1)$$

Δηλ. τό ἄθροισμα τριῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό τριπλάσιον τοῦ μεσαίου.

166. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τριῶν διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν τοῦ πρώτου ὄντος $(2\nu+1)$.

Ἀπ. Ἐπειδή οἱ διαδοχικοί περιττοί ἀριθμοί διαφέρουν κατά τόν ἀριθμόν 2, ἕπεται ὅτι ὁ ἀμέσως ἑπόμενος ἀριθμός θά εἶναι $(2\nu+1)+2=2\nu+3$

καί ὁ τρίτος διαδοχικός $=2\nu+5$

ὅθεν τό ἄθροισμα εἶναι $(2\nu+1)+(2\nu+3)+(2\nu+5)=6\nu+9$.

167. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα 3 διαδοχικῶν ἀρτίων ἀριθμῶν τοῦ πρώτου ὄντος $2a$. Ἀπ. $6a+6$

168. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:

α) 5 διαδοχικῶν περιττῶν ἀριθμῶν

β) 5 » ἀρτίων »

169. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καί νά γίνῃ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων:

1. $(5\alpha^3-8\alpha^2+7\alpha-3)+(-4\alpha^3-9\alpha+6\alpha^2+2)+(-\alpha^3+\alpha^2-\alpha)$

Ἀπ. $-\alpha^2-3\alpha-1$

2. $(4\alpha^2x-\alpha\beta+3\beta^2x^3)+(3\alpha\beta x^2+\beta^2x-3\alpha\beta)+(-7\alpha^2x+5\beta^2x^3-6\alpha\beta x^2)$

Ἀπ. $-3\alpha^2x-4\alpha\beta+8\beta^2x^3-3\alpha\beta x^2+\beta^2x$

3. $(5x^\mu y-4x^{\mu-1}y^2+8x^{\mu-2}y^3-10x^{\mu-\nu})+(-3x^{\mu-1}y^2+x^{\mu-3}y^4)+$
$+(-5x^\mu y-x^{\mu-3}y^4+8x^{\mu-1}y^2+3x^{\mu-\nu})$

Ἀπ. $x^{\mu-1}y^2+8x^{\mu-2}y^3-7x^{\mu-\nu}$.

ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§48. Ἀφαίρεσις μονωνύμων. Κ α ν ώ ν. Διαφορά ἑνός μονωνύμου Ν ἀπό ἑνός ἄλλου μονωνύμου Μ λέγεται μία ἄλλη ἀλγεβρική παράστασις Δ (μονώνυμον ἤ διώνυμον) τοιαύτη ὥστε $\Delta = M - N$.

π.χ. Ἡ διαφορά τοῦ μονωνύμου $-5\alpha^2\beta$ ἀπό τοῦ μονωνύμου $9\alpha^2\beta$ θά εἶναι μονώνυμον.

$$9\alpha^2\beta-(-5\alpha^2\beta)=9\alpha^2\beta+(+5\alpha^2\beta)=14\alpha^2\beta$$

Ἐνῷ ἡ διαφορά τοῦ $-5\alpha^2\beta$ ἀπό τοῦ μονωνύμου $10\alpha\beta\gamma$ θά εἶναι τό διώνυμον: $10\alpha\beta\gamma-(-5\alpha^2\beta)=10\alpha\beta\gamma+5\alpha^2\beta$.

Ὁμοίως: $7x^3y-(-3x^3y)=7x^3y+3x^3y=10x^3y$

» : $9\alpha\beta^2-(+4\alpha^2\beta)=9\alpha\beta^2-4\alpha^2\beta$.

§49. Ἀφαίρεσις πολυωνύμων.

Κ α ν ώ ν. Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἕν πολυώνυμον Π′ ἀπό ἕν ἄλλο πολυώνυμον Π, γράφομεν δεξιά τοῦ πολυωνύμου Π τούς ὅρους τοῦ πολυωνύμου Π′ μέ ἠλλαγμένα τά σημεῖά των καί κάμνομεν ἔπειτα τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἐάν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

π.χ. Ἔστω ὅτι θέλομεν νά ἀφαιρέσωμεν τό πολυώνυμον

$\Pi' = 5x^4 - 12x^3 + 9x - 3$ ἀπὸ τὸ πολυώνυμον $\Pi = 9x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 9x + 10$.

Ἐνταῦθα μειωτέος εἶναι τὸ πολυώνυμον Π

καὶ ἀφαιρετέος » » » Π'.

Ἀλλάσσομεν τὰ σημεῖα τῶν ὅρων τοῦ ἀφαιρετέου καὶ γράφομεν τούτους δεξιὰ τοῦ μειωτέου.

$$\Pi - \Pi' = 9x^4 + 5x^3 - 8x^2 + 9x + 10 - 5x^4 + 12x^3 - 9x + 3 = 4x^4 + 17x^3 - 8x^2 + 13.$$

<u>Παρατ.</u> Ἡ διαφορὰ τῶν δύο προηγουμένων πολυωνύμων εὑρίσκεται καὶ ὡς κατωτέρω:

$$\begin{array}{rrrrrr} \Pi = & 9x^4 & +5x^3 & -8x^2 & +9x & +10 \\ -\Pi' = & -5x^4 & +12x^3 & & -9x & +3 \\ \hline \Pi - \Pi' = & 4x^4 & +17x^3 & -8x^2 & & +13. \end{array}$$

<u>*Νὰ ἀφαιρεθοῦν τὰ μονώνυμα:*</u>

170. Τὸ $3\alpha\beta$ ἀπὸ τὸ $-7\alpha\beta$ — <u>Ἀπ.</u> $-10\alpha\beta$
171. » $-5x^2y$ » » $-9x^2y$ » $-4x^2y$
172. » $-10\alpha^2\gamma$ » » $+8\alpha^2\gamma$
173. » $9xy$ » » $10y\omega$ » $10y\omega - 9xy$
174. » $-3xy\omega$ » » $7x^2y^2\omega^2$ » $7x^2y^2\omega^2 + 3xy\omega$.
175. Ἀπὸ τὸ $9\alpha^2 - 5\beta^2$ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ $3\alpha^2 + 2\beta^2$.

<u>Ἀπ.</u> $6\alpha^2 - 7\beta^2$

176. » » $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ » » » $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

<u>Ἀπ.</u> $4\alpha\beta$

177. » » $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ » » » $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

<u>Ἀπ.</u> $6\alpha^2\beta + 2\beta^3$.

178. » » $5x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ » » $-x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 10$.
179. » » $\frac{3}{5}\alpha^2 + \frac{4}{7}\alpha\beta$ » » $\frac{1}{5}\alpha^2 - \frac{3}{7}\alpha\beta$.

<u>Ἀπ.</u> $\frac{2}{5}\alpha^2 + \alpha\beta$.

180. » » $x^5 - \frac{5}{2}x^4y + 2x^3y^2 - \frac{3}{4}x^2y^3 - \frac{6}{5}xy^4 - y^5$ νὰ ἀφαιρεθῇ τὸ: $-2x^5 - \frac{4}{3}x^4y + \frac{1}{2}x^3y^2 + 6x^2y^3 - \frac{4}{3}xy^4 - 3y^5$

<u>Ἀπ.</u> $3x^5 - \frac{7}{6}x^4y + \frac{3}{2}x^3y^2 - \frac{27}{4}x^2y^3 + \frac{2}{15}xy^4 + 2y^5$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:

181.
$$\begin{array}{r} -4a^3b+2a^2b^2+7ab^3 \\ +5a^3b+6a^2b^2-4ab^3 \\ -9a^3b+5a^2b^2+17ab^3 \\ +6a^3b+7a^2b^2-2ab^3 \\ \hline -2a^3b+20a^2b^2+18ab^3 \end{array}$$

182.
$$\begin{array}{r} 3a^{\mu}-2b^{\nu}-5\frac{2}{3}\gamma^{\rho} \\ 4\frac{1}{5}a^{\mu}+7\frac{3}{4}b^{\nu}+2\frac{5}{6}\gamma^{\rho} \\ -5a^{\mu}+2b^{\nu}-4\gamma^{\rho} \\ \hline 2\frac{1}{5}a^{\mu}+7\frac{3}{4}b^{\nu}-6\frac{5}{6}\gamma^{\rho} \end{array}$$

183.
$$\begin{array}{r} 0{,}465a^3-3{,}566a^2-3\frac{7}{8}a \\ +5{,}375a^3+2{,}4375a^2-4\frac{2}{3}a \\ \hline 5{,}840a^3-1{,}1285a^2-8\frac{13}{24}a \end{array}$$

184.
$$\begin{array}{r} -0{,}45xy+6{,}256y\omega+\frac{5}{2}\omega x \\ +0{,}148xy-1\frac{3}{4}y\omega-2{,}75\omega x. \\ \hline -0{,}302xy+4{,}506y\omega-0{,}25\omega x. \end{array}$$

185.
$$\begin{array}{r} (a^2-2ab+b^2)x^2-(a^2-b^2)x+(a+b) \\ -(a^2+2ab+b^2)x^2+(a^2-b^2)x+(a+b) \\ \hline -4abx^2 \qquad\qquad +2(a+b) \end{array}$$

186.
$$\begin{array}{r} (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)x^2-(a^2-ab-b^2)x \\ -(3a^2b+3ab^2)x^2-(ab+b^2)x \\ \hline (a^3+b^3)x^2-a^2x \end{array}$$

187.
$$\begin{array}{r} ax^3-bx^2-\gamma x+\delta \\ -a'x^3+b'x^2-\gamma'x-\delta' \\ \hline (a-a')x^3-(b-b')x^2-(\gamma+\gamma')x+(\delta-\delta') \end{array}$$

§50. Ἀπαλοιφή παρενθέσεων καί ἀγκυλῶν.

Κ α ν ώ ν 1. Ἐάν πρό παρενθέσεως ἤ πρό ἀγκύλης, πού περικλείεται μία ἀλγεβρική παράστασις, ὑπάρχῃ τό σημεῖον +, δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τήν παρένθεσιν ἤ τήν ἀγκύλην χωρίς νά ἀλλάξωμεν τά σημεῖα τῶν ὅρων τῆς ἐντός παραστάσεως.

π.χ. Ἐάν ἔχωμεν τήν παράστασιν:

$+(5a-8b+9\gamma)$ ἤ ἁπλῶς $(5a-8b+9\gamma)$

δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τήν παρένθεσιν καί νά τήν γράψωμεν ὡς ἑξῆς: $5\alpha - 8\beta + 9\gamma$.

Ὁμοίως: $+\left[10\alpha - 5\beta + (\alpha - \beta)\right] = 10\alpha - 5\beta + (\alpha - \beta)$

$= 10\alpha - 5\beta + \alpha - \beta$

$= 11\alpha - 6\beta$.

Κανών 2. Ἐάν πρό παρενθέσεως ἤ πρό ἀγκύλης, ἐντός τῆς ὁποίας περικλείεται μία ἀλγεβρική παράστασις, ὑπάρχῃ τό σημεῖον —, δυνάμεθα νά παραλείψωμεν τό — καί τήν παρένθεσιν ἤ τήν ἀγκύλην, ἀρκεῖ νά ἀλλάξωμεν τά σημεῖα ὅλων τῶν ὅρων τῆς ἐντός παραστάσεως.

π.χ. Ἐάν ἔχωμεν τήν παράστασιν:

$$-(x^3 - 4x^2 + 10x - 8)$$

δυνάμεθα νά τήν γράψωμεν καί οὕτω:

$$-x^3 + 4x^2 - 10x + 8.$$

Ὁμοίως ἐάν ἔχωμεν: $-\left[x^4 - 5x^3 + (x^3 + x^2 - 5x) - 10\right] =$

$$= -x^4 + 5x^3 - (x^3 + x^2 - 5x) + 10 =$$

$$= -x^4 + 5x^3 - x^3 - x^2 + 5x + 10 =$$

$$= -x^4 + 4x^3 - x^2 + 5x + 10.$$

Νά ἀπαλειφθοῦν αἱ παρενθέσεις καί αἱ ἀγκύλαι καί νά γίνῃ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων:

188. $100 - (26 - 9) - 2 = 100 - 17 - 2 = 100 - 19 = 81$

189. $100 - \left[(26 - 9) - 2\right] = 100 - (17 - 2) = 100 - 15 = 85$

190. $100 - \left[26 - (9 - 2)\right] = 100 - 26 + (9 - 2) = 81$

191. $93 - \left\{50 - \left[(15 - 3) - (8 - 5)\right]\right\} = 93 - \left\{50 - \left[12 - 3\right]\right\}$

$= 93 - \left\{50 - 9\right\} = 93 - 41 = 52.$

192. $x + \left[(\alpha + \beta) - (\beta + \gamma)\right] = x + (\alpha + \beta) - (\beta + \gamma)$

$= x + \alpha + \beta - \beta - \gamma = x + \alpha - \gamma.$

193. $x - \left[(\alpha + \beta) + (\beta - \gamma)\right] = x - (\alpha + \beta) - (\beta - \gamma)$

$$= x - \alpha - \beta - \beta + \gamma = x - \alpha - 2\beta + \gamma$$

194. $\alpha - \left\{ \beta - \left[(\gamma - \delta) - (\beta - \gamma) \right] \right\} = \alpha - \beta + \left[(\gamma - \delta) - (\beta - \gamma) \right]$

$= \alpha - \beta + (\gamma - \delta) - (\beta - \gamma) = \alpha - \beta + \gamma - \delta - \beta + \gamma = \alpha - 2\beta + 2\gamma - \delta.$

195. $\alpha - \left\{ \beta - \left[\gamma - (\beta - \delta) \right] \right\} = \alpha - \left\{ \beta - \left[\gamma - \beta + \delta \right] \right\}$

$= \alpha - \left\{ \beta - \gamma + \beta - \delta \right\} = \alpha - \beta + \gamma - \beta + \delta = \alpha - 2\beta + \gamma + \delta.$

196. $(\alpha - \beta - 2\gamma) - (2\alpha - 3\beta - \gamma) + \left\{ \alpha - \left[(\beta - \gamma) - (\alpha - \beta) \right] \right\}$

$= \alpha - \beta - 2\gamma - 2\alpha + 3\beta + \gamma + \alpha - (\beta - \gamma) + (\alpha - \beta)$

$= \alpha - \beta - 2\gamma - 2\alpha + 3\beta + \gamma + \alpha - \beta + \gamma + \alpha - \beta = \alpha.$

197. $1 - (1 - 2\alpha) + (1 - 2\alpha + \alpha^2) - (1 - 2\alpha + \alpha^2 - \alpha^3)$

$= 1 - 1 + 2\alpha + 1 - 2\alpha + \alpha^2 - 1 + 2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3 = \alpha^3 + 2\alpha.$

198. $(\alpha - \beta) - (\beta + \gamma - \delta) + (\beta + \gamma - \delta) + (2\beta - \alpha)$ <u>Ἀπ.</u> $= \beta$

199. $\alpha^2 - (\beta^2 - \gamma^2) + \beta^2 - (\alpha^2 + \gamma^2) - \gamma^2 - (\alpha^2 - \beta^2)$

<u>Ἀπ.</u> $-\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2$

200. $(\alpha + 2\beta - 6\alpha) - \left[3\beta - (6\alpha - 6\beta) \right]$ <u>Ἀπ.</u> $\alpha - 7\beta$

201. $x + \left[(y - x) - (y - \omega) \right]$ <u>Ἀπ.</u> ω

202. $\left[(\alpha + \beta - \nu - \pi) - (\gamma - \delta - \mu + \kappa) \right] - \left[(\alpha + \pi - \kappa) - (\beta - \mu) - (\gamma + \delta - \nu) \right]$

<u>Ἀπ.</u> $2(\beta + \delta - \nu - \pi).$

203. $2\alpha - \left(\frac{1}{2}\alpha\beta + \frac{1}{3}\beta \right) + \left(\frac{1}{3}\alpha\beta - \frac{1}{2}\beta \right) - \left(\frac{1}{4}\alpha + \frac{2}{3}\alpha\beta \right)$

<u>Ἀπ.</u> $\frac{7}{4}\alpha - \frac{5}{6}\alpha\beta - \frac{5}{6}\beta$

204. $2x - 3y + \omega - (4x - y + 3\omega) - \left[x + 2y - \omega - (3x + 5\omega) \right]$

$= 2x - 3y + \omega - 4x + y - 3\omega - x - 2y + \omega + 3x + 5\omega = 4\omega - 4y.$

205. $\alpha - \left\{ 2\beta - \left[6\alpha - (2\gamma - \beta) \right] + \left[2\alpha - (\beta + \gamma) \right] \right\} =$

$= \alpha - 2\beta + [6\alpha - (2\gamma - \beta)] - [2\alpha - (\beta + \gamma)]$

$= \alpha - 2\beta + 6\alpha - (2\gamma - \beta) - 2\alpha + \beta + \gamma = 5\alpha - \gamma.$

206. $5\alpha - \left\{3\beta + (2\alpha - \beta) - \gamma - [3\alpha + (2\beta - \gamma)]\right\}$

$= 5\alpha - 3\beta - 2\alpha + \beta + \gamma + 3\alpha + 2\beta - \gamma = 6\alpha.$

207. $5x - \left\{8x - \left\{5x - [2x - (4\alpha - 2\beta)]\right\}\right\}$ <u>Ἀπ.</u> $4\alpha - 2\beta$

208. $2\alpha - \left\{3\beta + (2\beta - \gamma) - 4\gamma + [2\alpha - (3\beta - \gamma)]\right\}$

<u>Ἀπ.</u> $-2\beta + 4\gamma$

209. $4,535\,\alpha - \left(0,4\beta - \frac{1}{4}\gamma\right) - \left[2,750\,\beta - \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{5}{16}\gamma\right)\right]$

$= 4,535\,\alpha - 0,4\beta + \frac{1}{4}\gamma - 2,750\,\beta + \frac{3}{4}\alpha - \frac{5}{16}\gamma$

$= 5,285\alpha - 3,15\beta - \frac{1}{16}\gamma.$

210. $5,3\alpha - \left[0,345y + \left(3\frac{1}{4}\alpha - 0,56y\right) + \frac{3}{8}\alpha\right] - \left(0,165\alpha - \frac{3}{16}y\right)$

<u>Ἀπ.</u> $8,01\alpha - 0,7175y.$

211. $(5\alpha^2 - 3\alpha x + x^2) + \left[4\alpha^2 + 5\alpha x - (3\alpha^2 - 7\alpha x + 5x^2)\right] - 7x^2$

<u>Ἀπ.</u> $6\alpha^2 + 9\alpha x - 11x^2$

212. $\alpha - \left\{-3\beta + [2\gamma - \alpha - (\alpha + \gamma)] + [2\alpha + (\beta + 2\gamma)]\right\}$ <u>Ἀπ.</u> $\alpha + 2\beta - 3\gamma$

213. $-\left\{x - [y - (\omega - x)]\right\} - \left\{\beta - [\gamma - (\alpha - \beta)]\right\}$

<u>Ἀπ.</u> $y - \omega + \gamma - \alpha.$

214. $3x^4 - \left\{2x^3 - [4x^2 - (3x + 1)]\right\} - \left[2x^4 + 5x^3 - (2x^2 + 6x) - 1\right]$

<u>Ἀπ.</u> $x^4 - 7x^3 + 6x^2 + 3x$

215. <u>*Νά προστεθοῦν τά ἐγγράμματα πολυώνυμα:*</u>

$$\begin{array}{r} ax^{\nu} + a^2x^{\nu-1} + a^3x^{\nu-2} + a^4x^{\nu-3} + \cdots \\ x^{\nu} - 6x^{\nu-1} - b^3x^{\nu-2} + 8x^{\nu-3} + \cdots \\ -2x^{\nu} + 7x^{\nu-1} - a^2bx^{\nu-2} - b^4x^{\nu-3} + \cdots \\ \hline (a-1)x^{\nu} + (a^2+1)x^{\nu-1} + (a^3 - a^2b - b^3)x^{\nu-2} + (a^4 - b^4 + 8)x^{\nu-3} + \cdots \end{array}$$

216. <u>Ἀπό τοῦ πολυωνύμου</u>

$$x^{\mu+1} + ax^{\mu} + a^2x^{\mu-1} + a^3x^{\mu-2} + a^4x^{\mu-3} + \cdots$$

<u>νά ἀφαιρεθῇ τό πολυώνυμον</u>

$$x^{\mu+1} - (\mu+1)ax^{\mu} - (\mu-1)a^2x^{\mu-1} + (\mu+1)a^3x^{\mu-2} - (\mu-1)a^4x^{\mu-3} + \cdots$$

<u>Ἀπ.</u> $(\mu+2)ax^{\mu} + \mu a^2x^{\mu-1} - \mu a^3x^{\mu-2} + \mu a^4x^{\mu-3} + \cdots$

217. <u>Δίδονται τά πολυώνυμα:</u> $A = 4a^3 - 5a^2b + 7b^3$,

$A_1 = 2a^3 + 11a^2b - 8b^3$ καί $A_2 = 4a^3 + 5a^2b - 8b^3$.

<u>νά ὑπολογισθῶσι:</u> α) $A - A_1$ καί β) $A + A_1 - A_2$.

Ἀπόκ. α) $2a^3 - 16a^2b + 15b^3$

» β) $2a^3 + a^2b + 7b^3$.

<u>Δίδονται τά πολυώνυμα:</u>

$A = 5a^3 + 3a^2b - 7b^3$, $B = 8a^3 - 9a^2b - 3b^3$

$\Gamma = 9a^2b - 3a^3 - 7b^3$, $\Delta = 8a^2b - 7a^3 - 2b^3$

<u>καί ζητεῖται ἁ εὑρεθῇ τό:</u>

218. $$\Delta - \left[B - (\Gamma - A)\right]$$

<u>Ἀπ.</u> $\Delta - \left[B - (\Gamma - A)\right] = \Delta - B + \Gamma - A = 23a^3b - 23a^3 + b^3$

219. Νά εὑρεθῇ τό: $\Gamma - \left[\Delta - (A + \Delta)\right]$

Ἀπ. $= 12a^2b + 2a^3 - 14b^3$.

220. <u>Νά γραφῇ καταλλήλως ἡ κάτωθι παράστασις οὕτως ὥστε οἱ ὅροι αὐτῆς ἀπό τοῦ τρίτου καί ἑξῆς νά εἶναι ἐντός παρενθέσεως μέ τό σημεῖον + ἤ τό − πρό αὐτῆς:</u>

$$a^2 + b^2 - \gamma^2 + 2ab - 2a\gamma + 2b\gamma.$$

<u>Ἀπόκ.</u> Ἐάν πρό τῆς παρενθέσεως θέσωμεν τό +:

$$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma=\alpha^2+\gamma^2+(-\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma)$$

ἤ $$\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma=\alpha^2+\gamma^2-(\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma).$$

221. *Δίδεται τό πολυώνυμον*

$$\Pi=x^2+y^2+z^2+\omega^2+2xy-2xz-2x\omega-2yz-2y\omega+2z\omega$$

καί ζητεῖται νά γραφοῦν οἱ ὅροι ἀνά δύο ἐντός παρενθέσεως α) μέ τό σημεῖον + ἐκτός τῆς παρενθέσεως, β) μέ τό σημεῖον − ἐκτός αὐτῆς:

Ἀπ. α) $\Pi=(x^2+y^2)+(z^2+\omega^2)+(2xy-2xz)+(-2x\omega-2yz)+$
$+(-2y\omega+2z\omega).$

β) $\Pi=-(-x^2-y^2)-(-z^2-\omega^2)-(-2xy+2xz)-(2x\omega+2yz)-(2y\omega-2z\omega).$

§51. Προβλήματα ἐπί τῆς προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως πολυωνύμων.

222. Πατήρ διένειμε ποσόν τι μήλων εἰς τούς υἱούς του. Ὁ δεύτερος ἔλαβεν α μῆλα περισσότερα τοῦ πρώτου καί ὁ τρίτος β μῆλα περισσότερα τοῦ δευτέρου. Ἐάν διά x παραστήσωμεν τήν μερίδα τοῦ πρώτου, ποῖον εἶναι τό διανεμηθέν ποσόν.

Ἀπ. Ἐάν ὁ α΄ ἔλαβε x μῆλα, ὁ β΄ ἔλαβε $(x+\alpha)$ μῆλα καί ὁ γ΄ ἔλαβε $(x+\alpha)+\beta$ μῆλα· ἑπομένως τό διανεμηθέν ποσόν θά ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα:

$$x+(x+\alpha)+[(x+\alpha)+\beta]=x+x+\alpha+x+\alpha+\beta=3x+2\alpha+\beta.$$

223. Ἐκ τῶν 32 παιγνιοχάρτων ἐξάγομεν κατ' ἀρχάς x χαρτιά καί 3 ἀκόμη, δευτέραν φοράν ἐξάγομεν τό διπλάσιον τῶν ὅσων εἴχομεν ἐξαγάγει καί 4 ἀκόμη. Νά παρασταθῇ τό ὑπόλοιπον τῶν παιγνιοχάρτων.

Ἀπ. Κατ' ἀρχάς ἐξήχθησαν $(x+3)$ χαρτιά

τήν δευτέραν φοράν ἐξήχθησαν $2(x+3)+4=2x+10$

ἄρα ἔμειναν $32-[(x+3)+(2x+10)]$

$=32-(x+3)-(2x+10)$

$=32-x-3-2x-10=19-3x.$

224. Ἐδαπανήθη ποσόν τι χρημάτων διά τήν ἀγοράν 4 πραγμάτων· τό δεύτερον ἐκόστισεν α δραχ. περισσοτέρας τοῦ πρώτου, τό τρίτον β δραχ. περισσοτέρας τοῦ δευτέρου, τό τέταρτον γ δραχ. περισσοτέρας τοῦ τρίτου. Ἐάν τό πρῶτον ἐστοίχισεν x δραχ., πόσον ποσόν χρημάτων ἐδαπανήθη;

Ἀπ. $4x + 3\alpha + 2\beta + \gamma$.

225. Ἐκ δύο ἀνθρώπων Α καί Β ὁ πρῶτος ἔχει x δραχ. καί οἱ δύο ὁμοῦ ἔχουν y δραχ. Ὁ Α δίδει εἰς τόν Β 5 δραχ. καί κατόπιν δίδει ὁ Β εἰς τόν Α 12 δραχ. Πόσας δραχμάς θά ἔχῃ ἕκαστος;

Ἀπ. Ὁ Α θά ἔχῃ $(x+7)$ δρχ., ὁ δέ Β, $(y-x-7)$ δρχ.

226. Ἡ ἡλικία τοῦ πατρός εἶναι α ἐτῶν, ὁ υἱός εἶναι κατά β ἔτη μικρότερος καί ὁ πάππος εἶναι κατά γ ἔτη μεγαλύτερος τοῦ πατρός. Ζητεῖται. 1) Ποῖον θά εἶναι τό σύνολον τῶν ἐτῶν τῶν τριῶν προσώπων μετά ν ἔτη. 2) Ποῖον θά ἦτο πρό ν ἐτῶν. 3) Εὑρεῖν τήν διαφοράν τῶν δύο τούτων ἀθροισμάτων καί 4) Τό ἄθροισμα αὐτῶν.

Ἀπ. 1) $3(\alpha+\nu)+\gamma-\beta$, 2) $3(\alpha-\nu)+\gamma-\beta$, 3) 6ν καί 4) $6\alpha+2(\gamma-\beta)$.

§ 52. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ καί ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ.

Κανών. Τό γινόμενον πολλῶν μονωνύμων εἶναι ἕν μονώνυμον, τό ὁποῖον ἔχει ὡς συντελεστήν μέν τό γινόμενον τῶν συντελεστῶν τῶν δοθέντων μονωνύμων, ὡς κύριον ποσόν δέ γράφομεν δεξιά ὅλα τά διάφορα γράμματα, πού ὑπάρχουν εἰς τά μονώνυμα καί ἕκαστον ἐξ αὐτῶν μέ ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν τοῦ κοινοῦ γράμματος εἰς τά μονώνυμα.

π.χ. $(2\alpha^3\beta^2\gamma)\cdot(3\alpha^2\beta\gamma^3) = 2\cdot 3\,\alpha^5\beta^3\gamma^4 = 6\alpha^5\beta^3\gamma^4$

$(-3\alpha^4\beta^5)\cdot(-4\alpha^3\beta^4\gamma^2)\cdot(+5\alpha^4\beta\gamma\delta^5) = 60\alpha^{11}\beta^{10}\gamma^3\delta^5$.

Νά εὑρεθοῦν τά κάτωθι γινόμενα τῶν μονωνύμων:

227. $(-5xy\omega)(x^2y^2\omega^2) = -5x^3y^3\omega^3$

228. $(-6x^3y^4)(-3x^4y^3\omega^3) = 18x^7y^7\omega^3$

229. $\left(\frac{4}{3}x^3y^2\right)\left(-\frac{2}{5}x^2\omega^3\right)\left(+\frac{3}{8}x^3y^3\omega^4\right) = -\frac{1}{5}x^8y^5\omega^7$.

230. $\left(3\frac{1}{8}\alpha x^2\right)\left(2\frac{1}{4}\gamma^2\delta\right)\left(-1\frac{3}{5}\alpha\gamma\delta\right) = -\frac{45}{4}\alpha^2\gamma^3\delta^2x^2$.

231. $(0{,}45\alpha x)(3\beta\gamma^4) = 1{,}35\,\alpha\beta\gamma^4x$.

232. $0,3838\ldots\ldots\alpha \times 0,4545\ldots\beta = \frac{38}{99}\alpha \times \frac{45}{99}\beta = \frac{190}{1089}\alpha\beta.$

233. $0,48\alpha \times 0,333\ldots\beta^2\gamma = 0,48\alpha \times \frac{1}{3}\beta^2\gamma = 0,16\,\alpha\beta^2\gamma.$

234. $\left(\frac{2}{9}\beta^{\mu+\nu}\right)\left(\frac{4}{5}\beta^{\mu-\nu}\right) = \frac{8}{45}\beta^{2\mu}$

235. $(-9\alpha^{\mu+\nu}\beta^{\mu-\nu})(-5\alpha^{\nu-\mu}\beta^{\nu+\mu}) = 45\,\alpha^{2\nu}\beta^{2\mu}.$

236. $\left(10\,\alpha^{\mu+2\nu}x^{3\nu-2\mu}\right)\left(-2\frac{1}{5}\alpha^{\mu-2\nu}x^{2\mu-\nu}\right) = -22\,\alpha^{2\mu}x^{2\nu}$

237. $(A x^{\mu} y^{\nu})\cdot(B x^{\rho} y^{\lambda})\cdot(\Gamma x^{\sigma} y^{\tau}) = A\cdot B\cdot\Gamma\cdot x^{\mu+\rho+\sigma}\cdot y^{\nu+\lambda+\tau}$

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:

238 1. $(5\alpha^{2x}\beta^{3y})(-4\alpha^{3x}\beta^{2y})$ 2. $-\left(-\frac{x^3y^2}{2}\right)^2\cdot(2x^2y^2)^3$

3. $\left(2\frac{2}{3}\alpha^{\mu+2\nu-3\rho}\right)\cdot\left(-3\frac{3}{4}\alpha^{\mu-2\nu+5\rho}\right)$ 4. $\alpha^{\mu+\nu}\cdot\alpha^{\mu-\nu}\cdot\alpha^{-\mu}$

5. $\alpha^{\mu-\nu}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\beta^{2\mu-3\nu}\cdot\beta^{4\nu-\mu}$ 6. $\alpha^{\nu+3}\cdot\alpha^{\nu+2}\cdot\alpha^{\nu+1}\cdot\alpha^{\nu}\cdot\alpha^{\nu-1}\cdot\alpha^{\nu-2}\cdot\alpha^{\nu-3}$

239. $(5\alpha\beta^2\gamma^3)^2 = (5\alpha\beta^2\gamma^3)\cdot(5\alpha\beta^2\gamma^3) = 25\alpha^2\beta^4\gamma^6$

240. $(-0,5x^2y^4)^3 = (-0,5x^2y^4)\cdot(-0,5x^2y^4)\cdot(-0,5x^2y^4) = -0,125\,x^6y^{12}$

ἤ $(-0,5x^2y^4)^3 = (-0,5)^3\cdot(x^2)^3\cdot(y^4)^3 = -0,125\,x^6y^{12}$

241. $(\alpha x^3)^2\cdot(-\alpha^3x)^3\cdot(-\alpha x)^5$ Ἀπ. $\alpha^{16}x^{14}$, 242. $\left[(3x^2y)^2\cdot(-2xy^2)^3\right]^2$ Ἀπ. $5184\,x^{14}y^{16}$

§53. Κανών: Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἕν πολυώνυμον ἐπί μονώνυμον ἤ ἕν μονώνυμον ἐπί πολυώνυμον, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολυωνύμου ἐπί τό μονώνυμον καί προσθέτομεν τά προκύπτοντα γινόμενα.

π.χ. $(7x^3y - 5x^2y^2 + 10xy^3 - 9y^4)\cdot 2x^3y^3$

$= 14x^6y^4 - 10x^5y^5 + 20x^4y^6 - 18x^3y^7.$

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:

243. $(x^3 - 5x^2 + 6x - 8)\cdot(-4x) = -4x^4 + 20x^3 - 24x^2 + 32x.$

244. $(-4\alpha\beta)(\alpha^3 - 5\alpha^2\beta + \alpha\beta^2) = -4\alpha^4\beta + 20\alpha^3\beta^2 - 4\alpha^2\beta^3.$

245. 1. $\left(\frac{4}{5}\alpha^2\gamma - \frac{2}{3}\beta\gamma^2 + \frac{5}{6}\alpha\beta\gamma\right)\frac{3}{4}\alpha\beta\gamma = \frac{3}{5}\alpha^3\beta\gamma^2 - \frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma^3 + \frac{5}{8}\alpha^2\beta^2\gamma^2$

2. $\left(-\frac{1}{2}x^2yz\right)\left(3xy^2z - \frac{2}{3}x^2y - 4yz^2 + \frac{3}{4}x^2z^2\right)$

$= -\frac{3}{2}x^3y^3z^2 + \frac{1}{3}x^4y^2z + 2x^2y^2z^3 - \frac{3}{8}x^4yz^3$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καί νά γίνῃ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων:

246. $(3a+5b)4a-(4a-7b)5b+(a-3b)6a$

$= 12a^2+20ab-20ab+35b^2+6a^2-18ab = 18a^2-18ab+35b^2$

247. $(x^2-5x+1)(-5xy)-(2x^2-6x+4)(2xy)$ Ἀπ. $-9x^3y+37x^2y-13xy$

248. $(4a-5b)3ab-2ab(3a-4b)-(a-b)(-3ab)$.

249. $(x-3y+\omega)2x-(x+2y-3\omega)y-\omega(3x+3y-5\omega)$.

250. $11a(a-3b+\gamma)-11b(b-3a+\gamma)-11\gamma(3\gamma-b+a)$ Ἀπ. $11a^2-11b^2-33\gamma^2$

251. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις, νά γίνῃ ἡ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου, διά $a=-0,1$, $b=-0,2$.

$(a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4)\cdot 5ab-(a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4)\cdot(-3ab)$

Ἀπ. $8a^5b+8a^4b^2+48a^3b^3+8a^2b^4+8ab^5$ Ἀρ.τιμή $=0,000816$.

252. Ἄν $A=x^2+2xy+y^2$, $B=x^2-2xy+y^2$, $\Gamma=4x^2-5xy+4y^2$ νά ὑπολογισθοῦν 1) $4A-3B-\Gamma$, 2) $5A-2(B-\Gamma)$.

Ἀπ. 1)

$$\begin{aligned} 4A &= 4(x^2+2xy+y^2) &&= 4x^2+8xy+4y^2 \\ -3B &= -3(x^2-2xy+y^2) &&= -3x^2+6xy-3y^2 \\ -\Gamma &= &&= -4x^2+5xy-4y^2 \\ \hline 4A-3B-\Gamma & &&= -3x^2+19xy-3y^2 \end{aligned}$$

Ἀπ. 2) $5A-2(B-\Gamma)=5A-2B+2\Gamma=11x^2+4xy+11y^2$.

Κανών. Διά νά πολλαπλασιάσωμεν δύο πολυώνυμα, πολλαπλασιάζομεν ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστέου ἐπί ἕκαστον ὅρον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ καί προσθέτομεν τά μερικά γινόμενα. Ἔπειτα κάμνομεν τήν ἀναγωγήν τῶν ὁμοίων ὅρων, ἄν ὑπάρχουν τοιοῦτοι.

Παράδ. 1ον $(x^3-3x^2y+4xy^2+y^3)\cdot(x^2+y^2)$

$=(x^3-3x^2y+4xy^2+y^3)\cdot x^2+(x^3-3x^2y+4xy^2+y^3)\cdot y^2$

$=x^5-3x^4y+4x^3y^2+x^2y^3+x^3y^2-3x^2y^3+4xy^4+y^5$

$=x^5-3x^4y+5x^3y^2-2x^2y^3+4xy^4+y^5$

Ὁ ἀνωτέρω πολλαπλασιασμός, ὁ ὁποῖος ἐγένετο σύμφωνα μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα τῆς Ἀριθμητικῆς, γίνεται καί ὡς κατωτέρω. Διατάσσομεν δηλ. τόν πολλαπλασιαστέον κατά τάς κατιούσας (ἤ ἀνιούσας) δυνάμεις τοῦ αὐτοῦ γράμματος x, κάτωθεν τούτου γράφομεν τόν πολλαπλασιαστήν καί ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις, γράφοντες τούς ὁμοιοβαθμίους ὅρους κάτωθεν τῶν ὁμοιοβαθμίων ὅρων, ἵνα διευκολυνθῇ ἡ πρόσθεσις πρὸς εὕρεσιν τοῦ τελικοῦ γινομένου.

Πολλαπλασιαστέος: $x^3 - 3x^2y + 4xy^2 + y^3$

Πολλαπλασιαστής: $x^2 + y^2$

α′ μερικὸν γινόμενον: $x^5 - 3x^4y + 4x^3y^2 + x^2y^3$

β′ » » : $+ x^3y^2 - 3x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$

Ὁλικὸν γινόμενον: $x^5 - 3x^4y + 5x^3y^2 - 2x^2y^3 + 4xy^4 + y^5$

Παρ/δ. 2ον. Νὰ ἐκτελεσθῇ ὁ πολλαπλασιασμός:

$$(x^4 + 3x^3 - 5x + 4)\cdot(2 - 3x + 2x^2)$$

Διατάσσομεν ὡς ἀκολούθως:

$$\begin{array}{lllllll}
x^4 & +3x^3 & & & -5x & +4 & \\
2x^2 & -3x & +2 & & & & \\
\hline
2x^6 & +6x^5 & & -10x^3 & +8x^2 & & \text{α′ μερικὸν γινόμενον} \\
 & -3x^5 & -9x^4 & & +15x^2 & -12x & \text{β′ »} \\
 & & +2x^4 & +6x^3 & & -10x+8 & \text{γ′ »} \\
\hline
2x^6 & +3x^5 & -7x^4 & -4x^3 & +23x^2 & -22x+8 & \text{Ὁλικὸν γινόμενον.}
\end{array}$$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

253. $(2x-3)\cdot(3x+4) = 6x^2 - 9x + 8x - 12 = 6x^2 - x - 12.$

254. $(x^3-11x+5)\cdot(x+3) = x^4 - 11x^2 + 5x + 3x^3 - 33x + 15 = x^4 + 3x^3 - 11x^2 - 28x + 15.$

255. $(5αβ+1)\cdot(3-4αβ) = 15αβ + 3 - 20α^2β^2 - 4αβ = -20α^2β^2 + 11αβ + 3.$

256. $(α+β-γ)\cdot(α-β+γ) = α^2 + αβ - αγ - αβ - β^2 + βγ + αγ + βγ - γ^2 = α^2 - β^2 - γ^2 + 2βγ$

257. $(x^2+2x+1)\cdot(x^2-2x+1) = x^4 - 2x^2 + 1.$

Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ κάτωθι γινόμενα:

258 $(5x-3y)\cdot(4x-2y)$.	262. $(α^2+αx+x^2)(α^2-αx+x^2)(α+x)$.
259 $(3x^2+7y^2)\cdot(2x^2-3y^2)$	263 $(α+x)\cdot(α+2x)\cdot(α+3x)\cdot(α+4x)$
260. $(α+β+1)\cdot(α+β)$,	264. $(2α+x)(3α+2x)(4α+3x)\cdot(5α+4x)$
261. $(α+β-1)\cdot(α-β)$	265. $(x^4+x^3+x^2+x+1)\cdot(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)$.

Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καὶ νὰ γίνῃ ἡ ἀναγωγὴ τῶν ὁμοίων ὅρων:

266. $(α+2β)\cdot(4α-β) - (5α-2β)(3α+β) - 5β(β-α)$

$= (4α^2 + 7αβ - 2β^2) - (15α^2 - αβ - 2β^2) - (5β^2 - 5αβ) =$

$= 4a^2+7ab-2b^2-15a^2+ab+2b^2-5b^2+5ab = -11a^2+13ab-5b^2.$

267. $(3x+4y)\cdot(x-3y)-(2x-y)\cdot(-x-y)-5xy(y-x)$ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $x=-2$, $y=-3$.

Ἀπ. $5x^2-4xy-13y^2-5xy^2+5x^2y$, Ἀριθμ. τιμή $= -91$.

268. $5(x+2)(y-3)-7(3y-5)(x-2)+10(2x-3y)$ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $x=\frac{1}{(0,2)^{-2}}$, $y=\frac{1}{(0,3)^{-2}}$

Ἀπ. $-16xy+40x+22y-100.$, Ἀριθ. τιμή $= -96,4776.$

269. $(x+3y)\cdot(3x-y)-\left[5xy+x\cdot(3y-x)\right]$

270. $(\alpha+\beta-\gamma)\cdot(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)+(\beta+\gamma-\alpha)(\beta+\gamma)$, Ἀπ. $2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2.$

271. $(x-y)(x+y-2\omega)+(y-\omega)(y+\omega-2x)+(\omega-x)(\omega+x-2y)$ Ἀπ. $= 0.$

272 $(2\alpha-3\beta)(5\alpha-8\beta)-\left[(4\alpha-5\beta)\cdot(2\alpha-6\beta)-(3\alpha-4\beta)\cdot(7\alpha-2\beta)\right].$

$=(2\alpha-3\beta)(5\alpha-8\beta)-(4\alpha-5\beta)(2\alpha-6\beta)+(3\alpha-4\beta)\cdot(7\alpha-2\beta)$

$= 23\alpha^2-31\alpha\beta+2\beta^2.$

273. $(x^{\nu}-x^{\nu-1}y+x^{\nu-2}y^2-x^{\nu-3}y^3+y^4)\cdot(x+y)$ Ἀπ. $=x^{\nu+1}+xy^4-x^{\nu-3}y^4+y^5.$

274. Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον: $(x^4+\alpha^2x^2-\alpha x^3-\alpha^3x+\alpha^4)\cdot(x+\alpha).$

Ἀποκ.
$$\begin{array}{r}
x^4-\alpha x^3+\alpha^2x^2-\alpha^3x+\alpha^4\\
x+\alpha\\
\hline
x^5+\alpha x^4+\alpha^2x^3-\alpha^3x^2-\alpha^4x\\
+\alpha x^4-\alpha^2x^3+\alpha^3x^2-\alpha^4x+\alpha^5\\
\hline
x^5+\alpha^5
\end{array}$$

275. Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον: $(x^{3\nu}-x^{2\nu}y^{\rho}-y^{3\rho}+x^{\nu}y^{2\rho})\cdot(x^{\nu}+y^{\rho})$

Ἀπόκ.
$$\begin{array}{r}
x^{3\nu}-x^{2\nu}y^{\rho}+x^{\nu}y^{2\rho}-y^{3\rho}\\
x^{\nu}+y^{\rho}\\
\hline
x^{4\nu}-x^{3\nu}y^{\rho}+x^{2\nu}y^{2\rho}-x^{\nu}y^{3\rho}\\
+x^{3\nu}y^{\rho}-x^{2\nu}y^{2\rho}+x^{\nu}y^{3\rho}-y^{4\rho}\\
\hline
x^{4\nu}-y^{4\rho}
\end{array}$$

276. $\left[(2\alpha-3\beta)x^2-(\alpha-\beta)x+(2\alpha+\beta)\right]\cdot\left[(2\alpha+3\beta)x^2+(\alpha+\beta)x-(2\alpha-\beta)\right]$

Ἀπ.

$4\alpha^2$ $-9\beta^2$	$x^4-2\alpha\beta$	$x^3-\alpha^2$ $+16\alpha\beta$ $+\beta^2$	$x^2+4\alpha^2$ $+2\beta^2$	$x-4\alpha^2$ $+\beta^2$	x^0

277. $\left[x^3-(2a-1)x^2-(a^2-2a+1)x+(a^2-4a+2)\right]\cdot\left[x^2+(2a+1)x+(a+1)\right]$

$$\underline{\text{Απ.}} = \begin{array}{l|l|l|l|l} x^5+4ax^4+3a^2 & x^3-2a^3 & x^2+a^3 & x+a^3 & x^0 \\ \qquad\qquad\quad +3a & \quad +6a^2 & \quad -6a^2 & \quad -3a^2 & \\ \qquad\qquad\quad -1 & \quad -3a & \quad +a & \quad -2a & \\ & & \quad +1 & \quad +2 & \end{array}$$

278. $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy)$ $\underline{\text{Απ.}}$ $x^3+y^3+z^3-3xyz$.

Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ἰσοτήτων:

279. $(a^2+ab+b^2)\cdot(a-b) = a^3-b^3$

280. $(a^2-ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3+b^3$.

281. $(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\cdot(a-b) = a^4-b^4$

282. $(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\cdot(a-b) = a^5-b^5$

283. $(x^2-x+1)\cdot(x+1)-(x^2+x+1)(x-1) = 2$

284. $(x^{\mu-1}+x^{\mu-2}y+x^{\mu-3}y^2+\cdots\cdots+y^{\mu-1})\cdot(x-y) = x^\mu-y^\mu$

285. $(x^{\mu-1}+x^{\mu-2}+x^{\mu-3}+x^{\mu-4}+\cdots\cdots+x+1)\cdot(x-1) = x^\mu-1$.

§54. Κ α ν ώ ν. Διά νά πολλαπλασιάσωμεν πολλά πολυώνυμα πολλαπλασιάζομεν τό πρῶτον ἐπί τό δεύτερον· τό εὑρεθέν γινόμενον ἐπί τό τρίτον πολυώνυμον· τό νέον γινόμενον ἐπί τό τέταρτον πολυώνυμον καί οὕτω καθεξῆς.

286. *Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον:* $(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+\gamma)$.

Τό γινόμενον τοῦ $(x+a)$ ἐπί $(x+b)$ εἶναι:

$$(x+a)\cdot(x+b) = x^2+ax+bx+ab = x^2+(a+b)x+ab.$$

Πολλαπλασιάζομεν τώρα τό $x^2+(a+b)x+ab$ ἐπί $(x+\gamma)$ καί λαμβάνομεν:

$$\begin{array}{l} x^2+(a+b)x+ab \\ x+\gamma \\ \hline x^3+(a+b)x^2+abx \\ \quad +\ \gamma x^2 \quad +(a+b)\gamma x+ab\gamma \\ \hline x^3+(a+b+\gamma)x^2+\left[ab+(a+b)\gamma\right]x+ab\gamma \end{array}$$

Ὅθεν θά ἔχωμεν:

$(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+\gamma) = x^3+(a+b+\gamma)x^2+(ab+a\gamma+b\gamma)x+ab\gamma$.

287. *ὁμοίως τό γινόμενον:* $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-\gamma)$.

$\underline{\text{Απ.}}$ $(x-a)\cdot(x-b)\cdot(x-\gamma) = x^3-(a+b+\gamma)x^2+(ab+b\gamma+\gamma a)x-ab\gamma$.

288. *ὁμοίως τό :* $(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+\gamma)\cdot(x+\delta)$.

$\underline{\text{Απ.}} = x^4+(a+b+\gamma+\delta)x^3+(ab+a\gamma+a\delta+b\gamma+b\delta+\gamma\delta)x^2+$
$+(ab\gamma+ab\delta+a\gamma\delta+b\gamma\delta)x+ab\gamma\delta$.

289. *Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα:*

1) $(y+z)\cdot(z+x)(x+y)$ Ἀπ. $2xyz+xy^2+xz^2+yz^2+yx^2+zx^2+zy^2$

2) $(y-z)\cdot(z-x)\cdot(x-y)$ » $xy^2-xz^2+yz^2-yx^2+zx^2-zy^2$

3) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)\cdot(x^2-1)$ Ἀπ $=\ x^6-1$

4) $(-a+b+\gamma)\cdot(a-b+\gamma)\cdot(a+b-\gamma)$ Ἀπ. $-a^3-b^3-\gamma^3+a^2b+a^2\gamma+b^2\gamma+b^2a+\gamma^2a+\gamma^2b-2ab\gamma$

5) $(-a+b+\gamma+\delta)\cdot(a-b+\gamma+\delta)\cdot(a+b-\gamma+\delta)\cdot(a+b+\gamma-\delta)$.

Ἀπ. $-a^4-b^4-\gamma^4-\delta^4+2a^2b^2+2a^2\gamma^2+2a^2\delta^2+2b^2\gamma^2+2b^2\delta^2+2\gamma^2\delta^2+8ab\gamma\delta$.

290. *Νά δειχθῇ ὅτι:* $(1+x)\cdot(1+x^2)\cdot(1+x^4)\cdot(1+x^8)=$
$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}+x^{12}+x^{13}+x^{14}+x^{15}$.

Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα:

291. $\left[x^{\nu(\mu-1)}-y^{\mu(\nu-1)}\right]\cdot(x^\nu-y^\mu)=x^{\nu(\mu-1)}x^\nu-x^\nu y^{\mu(\nu-1)}-x^{\nu(\mu-1)}y^\mu+y^{\mu(\nu-1)}y^\mu$
$=x^{\mu\nu-\nu+\nu}-x^\nu y^{\mu(\nu-1)}-y^\mu x^{\nu(\mu-1)}+y^{\mu\nu-\mu+\mu}$
$=x^{\mu\nu}-x^\nu y^{\mu(\nu-1)}-y^\mu x^{\nu(\mu-1)}+y^{\mu\nu}$.

292. $(a^\mu+3a^{\mu-1}b^\nu-6a^{\mu-2}b^{2\nu})\cdot(a^\nu b^\nu-7a^{\nu-1}b^{2\nu})$

Ἀπ. $=a^{\mu+\nu}b^\nu-4a^{\mu+\nu-1}b^{2\nu}-27a^{\mu+\nu-2}b^{3\nu}+42a^{\mu+\nu-3}b^{4\nu}$.

293. $(0{,}3a^3+0{,}7a^2b-0{,}6ab^2)\cdot(0{,}9a+2{,}1b)$.

Ἀπ. $=0{,}27a^4+1{,}26a^3b+0{,}93a^2b^2-1{,}26ab^3$.

294. $(0{,}5x^5-0{,}4x^3+0{,}2x)\cdot(0{,}01x^3+0{,}1x)$
$=0{,}005x^8-0{,}004x^6+0{,}002x^4+0{,}05x^6-0{,}04x^4+0{,}02x^2$
$=0{,}005x^8+0{,}046x^6-0{,}038x^4+0{,}02x^2$.

295. $(0{,}4x^6+0{,}5x^4-0{,}1x^2)\cdot(0{,}1x^4-0{,}2x^2)$

Ἀπ. $=0{,}04x^{10}-0{,}03x^8-0{,}11x^6+0{,}02x^4$.

296. $(a^{\nu+1}+3a^\nu-4a^{\nu-1}-2a^{\nu-2})\cdot(a^{2\nu-1}-a^{2\nu-2}+a^{2\nu-3})$.

297. $(a^{2\nu+1}-a^{\nu+1}-a^\nu+a^{\nu-1})\cdot(a^{\nu+2}-a^2-a+1)$

§55 ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

Ὁρισμός. Ταυτότης καλεῖται ἡ ἰσότης, ἡ ὁποία εἶναι ἀληθής διά πᾶσαν τιμήν τῶν εἰς αὐτήν περιεχομένων γραμμάτων.

1) Τό γινόμενον $(a+b)(a+b)$ ἰσοῦται μέ τό πολυώνυμον:

$$a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2 \quad \text{ἢ} \quad a^2+b^2+2ab.$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ $(a+b)\cdot(a+b)$ ἐκφράζει τὴν δευτέραν δύναμιν τοῦ ἀθροίσματος $a+b$ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab \qquad (1).$$

Κ α ν ώ ν. Τὸ τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου ἀλγεβρικοῦ γινομένου αὐτῶν.

Παρατ. Ἡ ταυτότης (1) εἶναι εὔχρηστος ἐπίσης ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$a^2+b^2 = (a+b)^2 - 2ab.$$

2) Τὸ γινόμενον $(a-b)\cdot(a-b)$ δηλ. τὸ $(a-b)^2$ ἰσοῦται μὲ τὸ πολυώνυμον: $a^2-a\cdot b-b\cdot a+b^2$ ἢ $a^2-2ab+b^2$ ἢ $a^2+b^2-2ab.$

Ὅθεν:

$$(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab \qquad (2)$$

Κ α ν ώ ν. Τὸ τετράγωνον τῆς διαφορᾶς δύο οἱωνδήποτε ἀριθμῶν ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων αὐτῶν πλὴν τοῦ διπλασίου γινομένου αὐτῶν.

Παρατ. Ἡ ταυτότης (2) εἶναι εὔχρηστος ἐπίσης ὑπὸ τὴν μορφήν:

$$a^2+b^2 = (a-b)^2+2ab$$

3) Τὸ γινόμενον $(a+b)\cdot(a-b)$ ἰσοῦται μὲ τὸ πολυώνυμον:

$$a^2+a\cdot b-b\cdot a-b^2 = a^2-b^2$$

Ὅθεν

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \qquad (3)$$

Κ α ν ώ ν. Τὸ ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν πολλαπλασιασθὲν δίδει τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων αὐτῶν.

Καὶ ἀντιστρόφως: Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (3) γράφεται καὶ οὕτω:

$$a^2-b^2 = (a+b)\cdot(a-b) \qquad (4)$$

ἕπεται ὁ ἑξῆς κανών:

Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπὶ τὴν διαφορὰν αὐτῶν.

Ἡ τελευταία ἰσότης (4) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ τρέψωμεν μίαν διαφορὰν τετραγώνων εἰς γινόμενον:

π.χ. Ἡ παράστασις $25x^2-9a^2$ τρέπεται εἰς γινόμενον παραγόντων, διότι γράφεται: $(5x)^2-(3a)^2 = (5x+3a)(5x-3a)$

ἄρα: $25x^2-9a^2 = (5x+3a)(5x-3a).$

Ὁμοίως: $100\alpha^2 - 49\beta^2 = (10\alpha + 7\beta)(10\alpha - 7\beta)$

Ὁμοίως: $9\alpha^2x^2 - 4\beta^2y^6 = (3\alpha x + 2\beta y^3)(3\alpha x - 2\beta y^3)$

Παραδείγματα:

1) $(\alpha x+\beta y)^2 = (\alpha x)^2 + (\beta y)^2 + 2\cdot \alpha x\cdot \beta y = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 + 2\alpha x\beta y$

2) $(\alpha x-\beta y)^2 = (\alpha x)^2 + (\beta y)^2 - 2\cdot \alpha x\cdot \beta y = \alpha^2x^2 + \beta^2y^2 - 2\alpha x\beta y$

3) $\alpha^2x^2 - \beta^2y^2 = (\alpha x)^2 - (\beta y)^2 = (\alpha x + \beta y)(\alpha x - \beta y)$.

4) $(\mu x+\nu y)(\mu x - \nu y) = \mu^2x^2 - \nu^2y^2$

5) $(x+\alpha)(x-\alpha)(x^2+\alpha^2) = (x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2) = x^4 - \alpha^4$

Κύβος διωνύμου. Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν ἤ δύο μονωνύμων α καί β γράφεται: $(\alpha+\beta)^3$ ἤ $(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta)$ ἤ $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)$, ὁ δέ κύβος τῆς διαφορᾶς των εἶναι:

$$(\alpha-\beta)^3 \text{ ἤ } (\alpha-\beta)^2(\alpha-\beta) \text{ ἤ } (\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-\beta).$$

Ἐκτελοῦντες τόν πολλαπλασιασμόν ὡς κατωτέρω λαμβάνομεν τά ἐξαγόμενα:

$$\begin{array}{r} \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha+\beta \\ \hline \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ +\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2+\beta^3 \\ \hline \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \\ \alpha-\beta \\ \hline \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2 \\ -\alpha^2\beta+2\alpha\beta^2-\beta^3 \\ \hline \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3 \end{array}$$

Ἤτοι:

$$\underline{(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3}$$

$$\underline{(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3}$$

Αἱ ἰσότητες αὗται ἐκφράζουν ὅτι:

α) Ὁ κύβος τοῦ ἀθροίσματος δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μέ τόν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ σύν τῷ τριπλασίῳ γινομένῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπί τόν δεύτερον σύν τῷ τριπλασίῳ γινομένῳ τοῦ πρώτου ἐπί τό τετράγωνον τοῦ δευτέρου, σύν τῷ κύβῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

β) Ὁ κύβος τῆς διαφορᾶς δύο ἀριθμῶν εἶναι ἴσος μέ τόν κύβον τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ πλήν τῷ τριπλασίῳ γινομένῳ τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ἐπί τόν δεύτερον, σύν τῷ τριπλασίῳ γινομένῳ τοῦ πρώτου ἐπί τό τετράγωνον τοῦ δευτέρου, πλήν τῷ κύβῳ τοῦ δευτέρου ἀριθμοῦ.

Παραδείγματα:

1) $(ax+by)^3=(ax)^3+3(ax)^2\cdot by+3\cdot ax\cdot(by)^2+(by)^3$

$= a^3x^3+3a^2x^2by+3axb^2y^2+b^3y^3.$

2) $(ax-by)^3=(ax)^3-3\cdot(ax)^2\cdot by+3ax\cdot(by)^2-(by)^3$

$= a^3x^3-3a^2x^2by+3axb^2y^2-b^3y^3$

3) $(5a^2-4b^3)^3=(5a^2)^3-3(5a^2)^2 4b^3+3\cdot 5a^2(4b^3)^2-(4b^3)^3$

$=125a^6-300a^4b^3+240a^2b^6-64b^9.$

<u>Παρατήρησις</u>. Αἱ ἀποδειχθεῖσαι ἀνωτέρω ταυτότητες:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

δύνανται νά λάβουν τήν κάτωθι μορφήν:

$$\begin{aligned}(a+b)^3&=a^3+b^3+3ab(a+b)\\(a-b)^3&=a^3-b^3-3ab(a-b)\end{aligned}\quad(5)$$

Ἐκ τούτων δέ προκύπτουν εὐκόλως αἱ κάτωθι ἀξιοσημείωτοι ταυτότητες:

$$\begin{aligned}a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\a^3-b^3&=(a-b)^3+3ab(a-b)\end{aligned}\quad(6)$$

298. *<u>Νά εὑρεθῶσι τά κάτωθι ἀναπτύγματα:</u>*

1) $(4a+3b)^2=(4a)^2+(3b)^2+2\cdot 4a\cdot 3b=16a^2+9b^2+24ab.$

2) $(7a+b)^2=49a^2+b^2+14ab.$

3) $(a^2x-ax^2)^2=a^4x^2+a^2x^4-2a^3x^3$

4) $(a^3x^2-b^2y^3)^2=a^6x^4+b^4y^6-2a^3b^2x^2y^3$

5) $(4a^3+5b\gamma)^2=16a^6+25b^2\gamma^2+40a^3b\gamma.$

6) $(ax+1)^2=a^2x^2+2ax+1.$

7) $(ax-1)^2=a^2x^2-2ax+1.$

8) $\left(\frac{4}{5}a+\frac{5}{3}b\right)^2=\frac{16}{25}a^2+\frac{25}{9}b^2+\frac{8}{3}ab$

9) $\left(\frac{1}{2}ax-\frac{5}{6}by\right)^2=\frac{1}{4}a^2x^2+\frac{25}{36}b^2y^2-\frac{5}{6}abxy.$

10) $(x^5y^3-x^3y^5)^2=x^{10}y^6+x^6y^{10}-2x^8y^8$

11) $(a^\lambda\pm b^\nu)^2=a^{2\lambda}+b^{2\nu}\pm 2a^\lambda b^\nu$

12) $(x^{2\lambda}\pm y^{3\nu})^2=x^{4\lambda}+y^{6\nu}\pm 2x^{2\lambda}y^{3\nu}$

13) $\left(\frac{2}{3}ab+3a\right)^2=\frac{4}{9}a^2b^2+9a^2+4ab.$

299. *Νά εὑρεθοῦν τά ἀναπτύγματα:*

1. $(\alpha^2 \pm \beta^2)^2$
2. $(\alpha^3 \pm \beta^3)^2$
3. $(\alpha^5 \pm \beta^7)^2$
4. $(\alpha^4 x^3 + \alpha^3 x^4)^2$
5. $(x^7 y^4 - x^4 y^7)^2$
6. $(x^{3\mu} - y^{4\nu})^2$
7. $(\alpha x^{\nu(\mu-1)} + \beta x^{\mu(\nu-1)})^2$
8. $(0{,}2\alpha x^2 - 0{,}05\alpha^2 x)^2$

300. *Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀναπτύγματα:*

1. $(x+4)^3 = x^3 + 3\cdot x^2\cdot 4 + 3\cdot x\cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64.$
2. $(x-5)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 5 + 3\cdot x\cdot 5^2 - 5^3 = x^3 - 15x^2 + 75x - 125.$
3. $(2\alpha\beta + 3\gamma\delta)^3 = 8\alpha^3\beta^3 + 3\cdot(2\alpha\beta)^2\cdot 3\gamma\delta + 3\cdot 2\alpha\beta\cdot(3\gamma\delta)^2 + (3\gamma\delta)^3$
$= 8\alpha^3\beta^3 + 36\alpha^2\beta^2\gamma\delta + 54\alpha\beta\gamma^2\delta^2 + 27\gamma^3\delta^3$
4. $(8\alpha^3 x - 2\alpha^4 x^2)^3 = 512\alpha^9 x^3 - 3\cdot 64\alpha^6 x^2\cdot 2\alpha^4 x^2 + 3\cdot 8\alpha^3 x\cdot 4\alpha^8 x^4 - 8\alpha^{12} x^6$
$= 512\alpha^9 x^3 - 384\alpha^{10} x^4 + 96\alpha^{11} x^5 - 8\alpha^{12} x^6.$
5. $(\alpha^4\beta^2 - \alpha^2\beta^4)^3 = \alpha^{12}\beta^6 - 3\alpha^{10}\beta^8 + 3\alpha^8\beta^{10} - \alpha^6\beta^{12}.$

301. *Νά ἀναπτυχθοῦν αἱ παραστάσεις:*

1. $(\alpha x^2 + \beta y^2)^3$
2. $(\alpha^3 x - \beta^3 y)^3$
3. $\left(x + \frac{1}{4}\right)^3$
4. $(x \pm 1)^3$
5. $(\alpha^3\beta^2 x - \alpha\beta^2 x^3)^3$
6. $(x^{2\mu} + y^{3\nu})^3$

302. *Ν᾿ ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις:*

1. $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 - 2\alpha\beta$ — *Ἀπ.* $2\alpha\beta$.
2. $(\alpha^2+\beta^2)^2 - (\alpha^2-\beta^2)^2 - 4\alpha^2\beta^2$ — » 0
3. $(x+y)^3 - (x-y)^3 - 2y^3$ — » $6x^2y$
4. $(2\alpha+\beta)^3 + (2\alpha-\beta)^3 - 4\alpha(4\alpha^2+3\beta^2)$ — » 0
5. $(1+x^2)^3 - 3x^2(1+x^2)$ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή αὐτῆς διά $x=-1$. — » $(1+x^6)$, 2

303. *Ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις* $K = (x^2+y^2)^3 - (x^2-y^2)^3 - 2y^2(3x^4+y^4)$ *εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x καί y.*

Ἀπ. Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις λαμβάνομεν:

$K = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 - x^6 + 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + y^6 - 6x^4y^2 - 2y^6 = 0$

Ἐπειδή εὕρομεν ἐξαγόμενον μηδέν καί οὐχί παράστασίν τινα περιέχουσαν τό x καί y, λέγομεν ὅτι ἡ δοθεῖσα παράστασις K εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν x καί y.

304. *Ν᾿ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις* $\Lambda = (x+y)^3 - (x-y)^3 - 6x^2y$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x καί συνάρτησις τοῦ y.

305. Νά τραποῦν διά συμπτύξεως εἰς γινόμενα παραγόντων τά τριώνυμα: 1. $x^2+2x+1=(x+1)(x+1)$ 4. $9x^2+6xy+y^2=$;

2. $a^2-4ab+4b^2=(a-2b)(a-2b)$ 5. $a^4-2a^2b^2+b^4=$;

3. $25x^2+70xy+49y^2=(5x+7y)(5x+7y)$ 6. $\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{9}b^2+\frac{1}{3}ab=$;

306. Ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ἑκάστη τῶν παραστάσεων:

α) $(x^2+1)(y^2+4)-(2x+y)^2$ καί β) $(x^2+4)(a^2+9)-(ax+6)^2$

εἶναι τέλειον τετράγωνον.

Ἀπ. α) $(x^2+1)(y^2+4)-(2x+y)^2=x^2y^2+y^2+4x^2+4-4x^2-y^2-4xy$

$=x^2y^2-4xy+4=(xy-2)^2$.

β) $(x^2+4)(a^2+9)-(ax+6)^2=a^2x^2+4a^2+9x^2+36-a^2x^2-36-12ax$

$=(2a-3x)^2$

Ἤτοι καί αἱ δύο παραστάσεις εἶναι τέλειον τετράγωνον.

307. Νά εὑρεθῇ ποῖον ὅρον πρέπει νά προσλάβῃ ἕκαστον τῶν κάτωθι διωνύμων, ὅπως γίνῃ τέλειον τετράγωνον διωνύμου καί νά προσδιορισθῇ τοῦτο.

1. $a^2+2ab+\dots$ Ἀπ. $(a+b)^2$
2. $49x^2+4y^2\pm\dots$ » $(7x\pm2y)^2$
3. $4x^2y^4-8xy^3\omega+\dots$ » $(2xy^2-2xy\omega)^2$
4. $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{3}ab+\dots$ » τό $\frac{1}{9}b^2$
5. $x^2+y^2\pm\dots$
6. $9x^2-12xy+\dots$
7. $25a^2-40ax+\dots$
8. $b^2+bx+\dots$

308 Ποῖον ὅρον πρέπει νά προσλάβῃ τό τριώνυμον $a^3+6a^2b+8b^3$ διά νά γίνῃ κύβος διωνύμου; Ποῖον δέ ὅρον τό $a^3x^3+12ab^2x-8b^3$;

Ἀπ. Τό β΄ τριών. τόν ὅρον $-6a^2bx^2$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις καί νά γίνῃ ἡ ἀναγωγή τῶν ὁμοίων ὅρων:

309. $(3a+4b)^2-(5b-2a)^2-3(a-b)^2=9a^2+16b^2+24ab-(25b^2+4a^2-$ $-20ab)-3(a^2+b^2-2ab)=9a^2+16b^2+24ab-25b^2-4a^2+20ab-$ $-3a^2-3b^2+6ab=2a^2-12b^2+50ab$.

310. $2(a+8b)^2-5(b-3a)^2+6(a+b)(a-2b)$ Ἀπ. $-37a^2+111b^2+56ab$.

311. $(a-b)^2(x-y)+(a-x)^2(y-b)+(a-y)^2(b-x)$

Ἀπ. $b^2x-bx^2-b^2y+by^2+x^2y-xy^2$.

312. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $(\alpha+5)(\alpha-5)$
2. $(\alpha x+\beta)(\alpha x-\beta)=\alpha^2x^2-\beta^2$
3. $(5x+3y)(5x-3y)$
4. $(10x-7)(7+10x)=100x^2-49$
5. $(1+x)(1-x)$
6. $(1+\alpha x)(1-\alpha x)$
7. $(-3\alpha x+5\beta y)(5\beta y+3\alpha x)$
8. $(\mu^2+\nu^2)(\mu^2-\nu^2)$

313. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀξιοσημείωτα γινόμενα:

1. $(x^\alpha+y^\beta)(x^\alpha-y^\beta)$
2. $(\alpha^{2\lambda}+\beta^{3\nu})(\alpha^{2\lambda}-\beta^{3\nu})=\alpha^{4\lambda}-6^{6\nu}$
3. $\left(\frac{1}{4}x+\frac{3}{5}y\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{3}{5}y\right)=\frac{1}{16}x^2-\frac{9}{25}y^2$
4. $\left(\frac{2}{3}\alpha x+\frac{1}{7}y\right)\left(\frac{2}{3}\alpha x-\frac{1}{7}y\right)$
5. $\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\cdot\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)$
6. $\left(-\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{y}{3}+\frac{x}{5}\right)$.
7. $\left(x^2y^3-\frac{\alpha}{10}\right)\left(\frac{\alpha}{10}+x^2y^3\right)$
8. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις διά τῆς συντομωτέρας ὁδοῦ.

314. $(x^2-\alpha^2)(x^2+\alpha^2)(x^4+\alpha^4)(x^8+\alpha^8)=(x^4-\alpha^4)(x^4+\alpha^4)(x^8+\alpha^8)$
$=(x^8-\alpha^8)(x^8+\alpha^8)=x^{16}-\alpha^{16}$

315. $(x-2\alpha)(x+2\alpha)(x^2+4\alpha^2)(x^4+16\alpha^4)=(x^2-4\alpha^2)(x^2+4\alpha^2)(x^4+16\alpha^4)$
$=(x^4-16\alpha^4)(x^4+16\alpha^4)=x^8-256\alpha^8$.

316. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$ Ἀπ. $x^{32}-1$.

317. $(\alpha^2+9\beta^2)(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)(\alpha^4+81\beta^4)$ » $\alpha^8-6561\beta^8$

Νά ὑπολογισθοῦν τά γινόμενα μέσῳ διαφορᾶς τετραγώνων:

318. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)=[(\alpha+\beta)+\gamma][(\alpha+\beta)-\gamma]=(\alpha+\beta)^2-\gamma^2$
$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\gamma^2$

319. $(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)=[(\alpha+\gamma)+\beta][(\alpha+\gamma)-\beta]=(\alpha+\gamma)^2-\beta^2$
$=\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma-\beta^2$

320. $(\alpha-\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)=[\gamma-(\beta-\alpha)][\gamma+(\beta-\alpha)]=\gamma^2-\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta$

321. $(5\alpha+\beta-7)(5\alpha+\beta+7)=[(5\alpha+\beta)-7][(5\alpha+\beta)+7]=(5\alpha+\beta)^2-49$
$=25\alpha^2+\beta^2+10\alpha\beta-49$.

322. $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)=[(x^2+y^2)+xy][(x^2+y^2)-xy]$
$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=x^4+y^4+x^2y^2$

323. $(x+y+\alpha+\beta)(x+y-\alpha-\beta)=\left[(x+y)+(\alpha+\beta)\right]\left[(x+y)-(\alpha+\beta)\right]$
$=(x+y)^2-(\alpha+\beta)^2=x^2+y^2+2xy-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta$

324. $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

325. $(x^2+x+1)(x^2-x-1)$

326. $(\alpha^2-3\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha-1)$

327. $(\alpha+\beta+\gamma-\delta)(\alpha+\beta-\gamma+\delta)$

328. $(x+y-3\omega-2\varphi)(x+y+3\omega+3\varphi)$

329. $(-\mu^3+\nu^3-\rho^3)(\nu^3-\mu^3+\rho^3)$

330. $(x^2+y^2+xy\sqrt{2})(x^2+y^2-xy\sqrt{2})$ Ἀπ. x^4+y^4

331. $(x^4+y^4+x^2y^2\sqrt{2})(x^4+y^4-x^2y^2\sqrt{2})$ » x^8+y^8

332. $(1+\alpha\sqrt{3}+\alpha^2)(1-\alpha\sqrt{3}+\alpha^2)$ » $1-\alpha^2+\alpha^4$

333 *Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:*

1.	$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$	7.	x^4-y^4
2.	$\alpha^2x^2-\beta^2y^2=(\alpha x+\beta y)(\alpha x-\beta y)$	8.	$x^6-25\alpha^6$
3.	$16\alpha^2-9\beta^2=(4\alpha+3\beta)(4\alpha-3\beta)$	9.	$x^{2\mu}-y^{2\nu}$
4.	$4\alpha^2\beta^2-x^2y^2=(2\alpha\beta+xy)(2\alpha\beta-xy)$	10.	$x^{4\mu}-\alpha^{4\mu}$
5.	$400x^2-1=(20x+1)(20x-1)$	11.	$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}$
6.	$1-\frac{1}{9}\alpha^2=(1+\frac{1}{3}\alpha)(1-\frac{1}{3}\alpha)$	12.	$\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}$

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

334. $(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2=\left[(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha-\beta+\gamma)\right]\left[(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha-\beta+\gamma)\right]$
$=(\alpha+\beta+\gamma+\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma-\alpha+\beta-\gamma)=(2\alpha+2\gamma)(2\beta)=4\beta(\alpha+\gamma).$

335. $(13x^2-5y^2)^2-(12x^2+4y^2)^2=\left[(13x^2-5y^2)+(12x^2+4y^2)\right]\cdot\left[(13x^2-5y^2)-\right.$
$\left.-(12x^2+4y^2)\right]=(25x^2-y^2)(x^2-9y^2)=(5x+y)(5x-y)(x+3y)(x-3y)$

336. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=(\alpha-\beta)^2-\gamma^2=(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma).$

337. $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2=\alpha^2-(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$

338. $x^2-\alpha^2+2\alpha-1=x^2-(\alpha^2-2\alpha+1)=x^2-(\alpha-1)^2=(x+\alpha-1)(x-\alpha+1).$

339. $4\beta^2\gamma^2-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)=(2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2)$
$=\left[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2\right]\left[\alpha^2-(\beta-\gamma)^2\right]$
$=(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma).$

§56 Τετράγωνον Πολυωνύμου

Διά νά ὑψώσωμεν τό τριώνυμον $\alpha+\beta+\gamma$ εἰς τό τετράγωνον παρατηροῦμεν ὅτι τοῦτο δύναται νὰ γραφῇ καὶ οὕτω: $\alpha+\beta+\gamma=(\alpha+\beta)+\gamma$

ἄρα $(\alpha+\beta+\gamma)^2=[(\alpha+\beta)+\gamma]=(\alpha+\beta)^2+2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$
$$=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma+\gamma^2.$$

ἑπομένως: $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι:
$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta.$$

ὅθεν συνάγεται ὅτι:

Κ α ν ώ ν. Τὸ τετράγωνον πολυωνύμου ἀποτελεῖται ἐκ τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων αὐτοῦ καὶ ἐκ τοῦ διπλασίου γινομένου τῶν ὅρων αὐτοῦ λαμβανομένων ἀνὰ δύο καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους. Οὕτω:

$$(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\alpha\delta-2\beta\gamma+2\beta\delta-2\gamma\delta.$$
$$(x^3+3x^2-4x+1)^2=x^6+9x^4+16x^2+1+6x^5-8x^4+2x^3-24x^3+6x^2-8x$$
$$=x^6+6x^5+x^4-22x^3+22x^2-8x+1.$$

§57. Κύβος Πολυωνύμου.

Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ $(\alpha+\beta+\gamma)^3$ θεωροῦμεν ὅτι εὑρέθη τὸ ἄθροισμα $(\alpha+\beta)$, ὅπερ παριστῶμεν ἴσον μὲ ω, $(\alpha+\beta)=\omega$, ὁπότε θὰ ἔχωμεν: $(\alpha+\beta+\gamma)^3=(\omega+\gamma)^3=\omega^3+3\omega^2\gamma+3\omega\gamma^2+\gamma^3$
$$=(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2\gamma+3(\alpha+\beta)\gamma^2+\gamma^3$$
$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\gamma(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2+\gamma^3$$
$$=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3+3\alpha^2\gamma+6\alpha\beta\gamma+3\beta^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta\gamma^2+\gamma^3$$

ἄρα:
$$(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2+6\alpha\beta\gamma$$

Κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι:
$$(\alpha-\beta+\gamma)^3=\alpha^3-\beta^3+\gamma^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-6\alpha\beta\gamma.$$

Κ α ν ώ ν. Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν κύβων ὅλων τῶν ὅρων αὐτοῦ, ηὐξημένον κατὰ τὰ τριπλάσια γινόμενα τοῦ τετραγώνου ἑκάστου ὅρου ἐπὶ ἕκαστον τῶν ἄλλων ὅρων, καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους, καὶ ηὐξημένον ἀκόμη κατὰ τὰ ἑξαπλάσια γινόμενα τῶν ὅρων του, λαμβανομένων ἀνὰ τρεῖς καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους.

Παρατήρησις I. Τὸ τετράγωνον ἑνὸς πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\dots)^2$ παρίσταται συμβολικῶς καὶ ὡς ἑξῆς: $(\Sigma\alpha)^2=\Sigma\alpha^2+2\Sigma\alpha\beta.$

ἔνθα $(\Sigma\alpha)^2$ παριστᾷ τὸ τετράγωνον τοῦ πολυωνύμου $(\alpha+\beta+\gamma+\cdots)^2$, τὸ $\Sigma\alpha^2$ παριστᾷ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ὅλων τῶν ὅρων του, δηλ. τὸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots$ καὶ τὸ $2\Sigma\alpha\beta$ παριστᾷ τὸ διπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων του, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται καθὼς ὁ $\alpha\beta$, δηλ. τῶν ὅρων $\alpha\beta, \alpha\gamma, \alpha\delta, \ldots, \beta\gamma, \beta\delta, \ldots$

Παρατήρησις II. Ὁ κύβος ἑνὸς πολυωνύμου παρίσταται συμβολικῶς ὡς ἑξῆς

$$(\Sigma\alpha)^3 = \Sigma\alpha^3 + 3\Sigma\alpha^2\beta + 6\Sigma\alpha\beta\gamma$$

ἔνθα τὸ $\Sigma\alpha^3$ παριστᾷ τὸ ἀλγεβρ. ἄθροισμα τῶν κύβων ὅλων τῶν ὅρων τοῦ πολυωνύμου, δηλ. τὸ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\cdots$, τὸ $3\Sigma\alpha^2\beta$ παριστᾷ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὅρων του, οἱ ὁποῖοι σχηματίζονται καθὼς ὁ ὅρος $\alpha^2\beta$, δηλ. τῶν ὅρων $\alpha^2\beta, \alpha^2\gamma, \alpha^2\delta, \ldots, \beta^2\gamma, \beta^2\delta, \ldots$ Τὸ $6\Sigma\alpha\beta\gamma$ παριστᾷ τὸ ἑξαπλάσιον ἄθροισμα τοῦ γινομένου τῶν ὅρων ἀνὰ τρεῖς λαμβανομένων δηλ. τῶν ὅρων $\alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta, \ldots \beta\gamma\delta, \ldots$

Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ παραστάσεις:

340. $(10\mu-5\nu-2\rho)^2 = 100\mu^2+25\nu^2+4\rho^2-100\mu\nu-40\mu\rho+20\nu\rho.$

341. $(\alpha^3+\beta^4-\gamma^5)^2 = \alpha^6+\beta^8+\gamma^{10}+2\alpha^3\beta^4-2\alpha^3\gamma^5-2\beta^4\gamma^5$

342. $(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2 = \alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2\omega^2+2\alpha\beta xy+2\alpha\gamma x\omega+2\beta\gamma y\omega.$

343. $(\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+2)^2 = \alpha^8-2\alpha^7+3\alpha^6-4\alpha^5+7\alpha^4-6\alpha^3+5\alpha^2-4\alpha+4.$

344. $(x+y-z)^3 = x^3+y^3-z^3+3x^2y+3xy^2-3x^2z+3xz^2-3y^2z+3yz^2-6xyz.$

345 *Νὰ ἀναπτυχθοῦν αἱ παραστάσεις:*

1. $(\alpha-\beta+\gamma-\delta+\varepsilon)^2$
2. $(1+3x-2x^2-5x^3)^2$
3. $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)^2$
4. $(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')^2$
5. $\left(\frac{1}{4}\alpha^{\mu}\beta^{x}-\frac{1}{3}\alpha^{\mu+1}\beta^{x-1}\right)^2$
6. $(1+\alpha-\beta)^2$
7. $(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^3$
8. $(2x+1)^3+(2x-1)^3$

Ἐξαγωγὴ κοινοῦ παράγοντος ἐκτὸς παρενθέσεως.

Κατὰ τὸν πολλαπλασιασμὸν πολυωνύμου ἐπὶ μονώνυμον ἢ μονωνύμου ἐπὶ πολυώνυμον ἔχομεν:

$$(\alpha+\beta-\gamma)\cdot x^2 = \alpha x^2+\beta x^2-\gamma x^2$$

Ἐπειδὴ δὲ ἡ ἰσότης αὕτη γράφεται καὶ οὕτω: $\alpha x^2+\beta x^2-\gamma x^2 = x^2(\alpha+\beta-\gamma)$, παρατηροῦμεν ὅτι τὸ x^2 ὡς κοινὸς παράγων τοῦ τριωνύμου: $\alpha x^2+\beta x^2-\gamma x^2$ δύναται νὰ ἐξαχθῇ ἐκτὸς παρενθέσεως. Ὁμοίως ἔχομεν: $\alpha x+\beta x = x\cdot(\alpha+\beta).$

$ax - a = a(x-1)$ καθώς $9x^3y^2 - 3x^2y^3 = 3x^2y^2(3x-y)$.

Νά ἐξαχθοῦν οἱ κοινοί παράγοντες ἐκτός παρενθέσεως:

346. $5a^2x^2 + 4ax^2 - bx^2 = x^2(5a^2 + 4a - b)$.

347. $a^3b^4 - a^4b^5 + a^5b^6 - a^7b^7 = a^3b^4(1 - ab + a^2b^2 - a^4b^3)$

348. $12a^2b - 8a^3b^2 - 16a^4b^3 = 4a^2b(3 - 2ab - 4a^2b^2)$

349. $\frac{3}{2}ax^3 - \frac{3}{4}a^2x^2 = \frac{3}{4}ax^2(2x - a)$

350. $\frac{5}{12}a^4x^3 - \frac{1}{3}a^3x^2 + \frac{7}{6}a^2x = \frac{1}{12}a^2x(5a^2x^2 - 4ax + 14)$

351. $a^{\nu+1} - a^\nu = a^\nu \cdot a - a^\nu = a^\nu(a-1)$

352. $(1+a)^{\nu+1} - (1+a)^\nu = (1+a)^\nu\left[(1+a) - 1\right] = (1+a)^\nu \cdot a$.

353. Ν᾽ ἀποδειχθῆ ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι παραστάσεων εἶναι γινόμενον δύο τετραγώνων.

1. $a^2x^2 + 6ax^2 + 9x^2 = x^2(a^2 + 6a + 9) = x^2(a+3)^2$
2. $9a^2 + 18ab + 9b^2 = 9(a^2 + 2ab + b^2) = 3^2 \cdot (a+b)^2$
3. $a^4x^2 + 2a^2x^4 + x^6 = x^2(a^4 + 2a^2x^2 + x^4) = x^2 \cdot (a^2 + x^2)^2$.

354. Ν᾽ ἀποδειχθῆ ὅτι τά κάτωθι τριώνυμα εἶναι γινόμενον τριῶν τελείων τετραγώνων:

1. $a^4b^2 - 2a^3b^3 + a^2b^4 = a^2b^2(a^2 - 2ab + b^2) = a^2 \cdot b^2 \cdot (a-b)^2$.
2. $16a^2x^2 - 32a^2xy + 16a^2y^2 = 16a^2(x^2 - 2xy + y^2) = 4^2 \cdot a^2 \cdot (x-y)^2$

355. Ν᾽ ἀποδειχθῆ ὅτι τό τριώνυμον $8a^2x^3 + 16ax^4 + 8x^5$ εἶναι γινόμενον κύβου ἐπί τετράγωνον.

356. Νά εὑρεθῆ τό ἀνάπτυγμα τῆς παραστάσεως $(4a+b)^3$ καί νά εὑρεθῆ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἀναπτύγματος διά $a = 0,1$ καί $b = -0,02$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

Ἀπόκ. $(4a+b)^3 = 64a^3 + 48a^2b + 12ab^2 + b^3$ Ἀριθμ. τιμή. $= 0,054872$.

357. Νά εὑρεθῆ τό ἀνάπτυγμα $(5x-3y)^3$ καί νά εὑρεθῆ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἀναπτύγματος διά $x = 0,02$, $y = -0,03$.

Ἀπόκ. $(5x-3y)^3 = 125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$.

Ἀριθμ. τιμή. $= 125(0,02)^3 - 225(0,02)^2(-0,03) + 135(0,02)(-0,03)^2 - 27(-0,03)^3$

Ἀριθ. Τιμή $= 0,006859$.

358. Ν᾽ ἀποδειχθῆ ὅτι τό γινόμενον $(a^2+b^2) \cdot (a_1^2 + b_1^2)$ εἶναι ἄθροισμα δύο

τελείων τετραγώνων.

Πράγματι: $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)=\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\alpha_1^2+\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\beta_1^2$

$$=(\alpha^2\alpha_1^2+\beta^2\beta_1^2+2\alpha\alpha_1\beta\beta_1)+(\alpha^2\beta_1^2+\beta^2\alpha_1^2-2\alpha\alpha_1\beta\beta_1)$$
$$=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2+(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2.$$

§58.* Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος. Τὰ ἀναπτύγματα τῶν διωνύμων $(\alpha\pm\beta)^2, (\alpha\pm\beta)^3, (\alpha\pm\beta)^4, (\alpha\pm\beta)^5, \ldots\ldots (\alpha\pm\beta)^\mu$, ἔνθα ὁ ἐκθέτης μ ὑποτίθεται ἀκέραιος καὶ θετικὸς ἀριθμός, εὑρίσκονται μὲ ἕνα γενικὸν τύπον, ὁ ὁποῖος καλεῖται τύπος τοῦ διωνύμου ἢ τύπος τοῦ Νεύτωνος. Ἡ θεωρία τῆς εὑρέσεως τοῦ τύπου τούτου παρέλκει ἐνταῦθα καὶ διὰ τοῦτο θὰ περιορισθῶμεν εἰς τὸν πρακτικὸν κανόνα τῆς εὑρέσεως ἀναπτυγμάτων τοῦ διωνύμου τῆς μορφῆς $(\alpha\pm\beta)^\mu$ ὅταν $\mu=4,5,6,7,\ldots\ldots$

§59. Πρακτικὸς κανών. Τὸ ἀνάπτυγμα τοῦ $(\alpha+\beta)^\mu$ εἶναι ὁμογενὲς πολυώνυμον πρὸς α καὶ β βαθμοῦ $\mu^{ου}$ καὶ περιλαμβάνει $(\mu+1)$ ὅρους. Ἐπομένως ἐὰν $\mu=$ ἄρτιος, οἱ ὅροι τοῦ ἀναπτύγματος θὰ εἶναι $(\mu+1)$ ἤτοι περιττὸν τὸ πλῆθος, ὁπότε ὑπάρχει καὶ μεσαῖος ὅρος, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸν μεγαλύτερον συντελεστήν. Οἱ ἐκθέται τοῦ α βαίνουν ἐλαττούμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον, τοῦ δὲ β αὐξανόμενοι κατὰ μονάδα ἀπὸ ὅρου εἰς ὅρον. Ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ ἀναπτύγματος εἶναι α^μ καὶ ὁ τελευταῖος β^μ. Διὰ νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τοῦ πρώτου εἰς τὸν $2^{ον}$ ὅρον, ἀπὸ τοῦ δευτέρου εἰς τὸν $3^{ον}$ καὶ ἐν γένει ἀπὸ τοῦ τυχόντος εἰς τὸν ἑπόμενόν του πρὸς εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἑπομένου τούτου ὅρου πολλαπλασιάζομεν τὸν συντελεστὴν τοῦ τυχόντος ὅρου ἐπὶ τὸν ἐκθέτην τοῦ α ἐν τῷ ὅρῳ τούτῳ καὶ τὸ γινόμενον διαιροῦμεν διὰ τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ δηλοῦντος τὴν τάξιν τοῦ ὅρου τούτου. Παραπλεύρως δὲ τοῦ εὑρεθέντος πηλίκου γράφομεν τὸ μὲν α μὲ ἐκθέτην κατὰ 1 μικρότερον τὸν δὲ β μὲ ἐκθέτην κατὰ 1 μεγαλύτερον. π.χ. $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+\frac{4}{1}\alpha^3\beta+\frac{4\cdot3}{2}\alpha^2\beta^2+\frac{6\cdot2}{3}\alpha^1\beta^3+\frac{4\cdot1}{4}\beta^4$

ἤτοι: $(\alpha+\beta)^4=\alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4.$

$$(\alpha+\beta)^5=\alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5.$$

$$(\alpha+\beta)^6=\alpha^6+6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2+20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4+6\alpha\beta^5+\beta^6.$$

$(\alpha-\beta)^7=\alpha^7-7\alpha^6\beta+21\alpha^5\beta^2-35\alpha^4\beta^3+35\alpha^3\beta^4-21\alpha^2\beta^5+7\alpha\beta^6-\beta^7$.

Σημ. Ὁ αὐτὸς κανὼν ἰσχύει καὶ διὰ τὰ ἀναπτύγματα τῆς μορφῆς $(\alpha-\beta)$ μὲ τὴν διαφορὰν ὅτι πρέπει νὰ θέτωμεν ἐναλλὰξ τὰ σημεῖα + καὶ − πρὸ τῶν ὅρων τοῦ ἀναπτύγματος.

359. Νὰ ἀναπτυχθοῦν τὰ κάτωθι διώνυμα:

1. $(x-\alpha)^4=x^4-4\alpha x^3+6\alpha^2x^2-4\alpha^3x+\alpha^4$
2. $(x\pm\alpha)^5=x^5\pm5\alpha x^4+10\alpha^2x^3\pm10\alpha^3x^2+5\alpha^4x\pm\alpha^5$
3. $(x+y)^8$ 4. $(x-y)^9$ 5. $\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^{10}$

360. Ν' ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$(\alpha+\beta)^4-2(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2+2(\alpha^4+\beta^4)$ Ἀπ. $(\alpha^2+\beta^2)^2$

361. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\alpha\beta$

Ἀπ. Θὰ ἔχωμεν:

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2=\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]=$$
$$=\left(\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\left(\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{4\alpha\beta}{4}=\alpha\beta.$$

362. Νὰ δειχθῇ ὅτι: $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)^2+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$

363. Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια: $\frac{1}{2}(\alpha+\alpha')(\beta-\beta')+\frac{1}{2}(\beta+\beta')(\alpha-\alpha')=\alpha\beta-\alpha'\beta'$.

364. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Ἀπ. Θὰ ἔχωμεν:

1ον μέλος: $=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)$
$+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)=3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$

365. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\alpha-\delta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\beta-\delta)^2+(\gamma-\delta)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$$

Ἀπ. Θὰ ἔχωμεν:

1ον μέλος: $=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\alpha\delta+2\beta\gamma+2\beta\delta+2\gamma\delta)+(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$
$+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+(\alpha^2-2\alpha\delta+\delta^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)+(\beta^2-2\beta\delta+\delta^2)$
$+(\gamma^2-2\gamma\delta+\delta^2)=4\alpha^2+4\beta^2+4\gamma^2+4\delta^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$

366. Νὰ ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\beta+\gamma-\alpha)^2+(\gamma+\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

Ἀπ. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν ἀνωτέρω ἄσκησιν.

367. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\alpha-\beta-\gamma)^2+(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2 = 8\alpha\beta.$$

Ἀπ. Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

368. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha+\beta)^3+3(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)+3(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^3 = 8\alpha^3$$

Ἀπ. Πράγματι τό α΄ μέλος εἶναι ἀνάπτυγμα κύβου τοῦ ἀθροίσματος τῶν διωνύμων $(\alpha+\beta)$ καί $(\alpha-\beta)$. Ἦτοι: 1ον μέλος $:=\left[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)\right]^3=$

$$=(\alpha+\beta+\alpha-\beta)^3 = (2\alpha)^3 = 8\alpha^3.$$

369. *Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:* $(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^3-\alpha^4+\beta^4=$ $=2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)$ *καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ β΄ μέλους διά* $\alpha=0,1$, $\beta=-0,02$. **Ἀνωτ. Ἐμπορική 1949.**

Ἀπόκ. Ἐκτελοῦντες τάς πράξεις ἤ μετασχηματισμούς εἰς τό α΄ μέλος εὐκόλως καταλήγομεν εἰς τό β΄ μέλος.

Ἀριθμ. τιμή. $2\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) = 2(0,1)(-0,02)\left[(0,1)^2-(-0,02)^2\right]$

$$=(-0,004)(0,01-0,0004)=(-0,004)(+0,0096)$$

$$=-0,0000384.$$

370. *Ἐάν* $\alpha+\beta+\gamma=0$ *νά ἀποδειχθῇ ὅτι* $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.

Ἀπόκ. Ἐπειδή ἐξ ὑποθέσεως $\alpha+\beta=-\gamma$ θά ἔχωμεν:

$$(\alpha+\beta)^3=-\gamma^3 \quad \text{ἤ} \quad \alpha^3+\beta^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2=-\gamma^3$$

$$\text{ἤ} \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2=-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

$$\text{ἤ} \quad \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3\alpha\beta(-\gamma)$$

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$$

371. *Ἐάν* $\alpha+\beta+\gamma=0$ *νά δειχθῇ ὅτι:* $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)\cdot(\gamma-\alpha)$.

Ἀπόκ. Ἐάν καλέσωμεν: $\alpha-\beta=x$, $\beta-\gamma=y$ καί $\gamma-\alpha=\omega$, παρατηροῦμεν ὅτι τό ἄθροισμα $x+y+\omega=0$, ἄρα κατά τήν προηγουμένην ἄσκησιν θά ἀληθεύῃ $x^3+y^3+\omega^3=3xy\omega$. Ἤδη δι᾽ ἀντικαταστάσεως τῶν x, y, ω διά τῶν ἴσων των λαμβάνομεν:

$$(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3=3(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$$

372. *Ἐάν* $\alpha+\beta+\gamma=1$ *νά δειχθῇ ὅτι:*

$$(3\alpha-1)^3+(3\beta-1)^3+(3\gamma-1)^3=3(3\alpha-1)(3\beta-1)(3\gamma-1).$$

Ἀπόκ. Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω θέτοντες $3\alpha-1=x$, $3\beta-1=y$ καὶ $3\gamma-1=\omega$ ὁπότε $x+y+\omega=3\alpha+3\beta+3\gamma-3=3(\alpha+\beta+\gamma)-3=3\cdot1-3=0$. καὶ ἐπειδὴ $x+y+\omega=0$ πορίζόμεθα τὴν ἀλήθειαν τῆς ταυτότητος.

373. *Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$(2\tau-3\alpha)^3+(2\tau-3\beta)^3+(2\tau-3\gamma)^3=3(2\tau-3\alpha)(2\tau-3\beta)(2\tau-3\gamma).$$

Ἀπόκ. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὰς προηγουμένας ἀσκήσεις θέτοντες ὅπου $2\tau-3\alpha=x$, $2\tau-3\beta=y$, $2\tau-3\gamma=\omega$.

374. *Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

Ἀπόκ. Ἐὰν ἐκτελέσωμεν τὰς πράξεις εἰς τὸ β' μέλος φθάνομεν εὐκόλως εἰς τὸ α'. Δεύτερος τρόπος εἶναι νὰ πολλαπλασιάσωμεν ἐπὶ 2 καὶ διαιρέσωμεν διὰ 2 τὸ α' μέλος.

1ον μέλος: $=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma)$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)+(\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2)+(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

375. *Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma).$$

Ἀπόκ. Ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος γίνεται φανερὰ εὐκόλως ἐὰν ἐκτελεσθῶσιν αἱ πράξεις εἰς τὸ β' μέλος ὁπότε καταλήγομεν εἰς τὸ α'. μέλος. Ἡ ταυτότης ἀποδεικνύεται καὶ ἀπὸ τὸ α'. μέλος.

376. *Νὰ δειχθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

Ἀπόκ. Ἐὰν εἰς τὸ β' μέλος τῆς ἀσκ. 375 ἀντικατασταθῇ τὸ $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\alpha\gamma$ μὲ τὸ ἴσον του, ὡς ἀπεδείχθη εἰς τὴν ἄσκησ. 374, πορίζόμεθα τὴν ἀλήθειαν τῆς ταυτότητος:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$

377. *Ἐὰν $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι:*

1. $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἢ 2. $\alpha=\beta=\gamma$.

Ἀπόκ. Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0$ τὸ δὲ

α′ μέλος συμφώνως πρός τήν ἄσκ. 375 ἰσοῦται μέ $\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\cdot$ $\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$ θά ἔχωμεν τήν ἀληθῆ ἰσότητα:
$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=0$· ἐκ ταύτης ἕπεται ὅτι
1) $\alpha+\beta+\gamma=0$ καί 2) $(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0$. Ἀλλ' ἵνα τό ἄθροισμα 3 τελείων τετραγώνων εἶναι ἴσον μέ 0 πρέπει καί ἀρκεῖ αἱ βάσεις νά εἶναι μηδενικαί (οὐχί θετικαί ἤ ἀρνητικαί) ἤτοι νά ἔχωμεν $\alpha-\beta=0$, $\beta-\gamma=0$, $\gamma-\alpha=0$ ἐκ τῶν ὁποίων συνάγεται 2) $\alpha=\beta=\gamma$.

379. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+\omega^2)-(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2=(\alpha y-\beta x)^2+(\alpha\omega-\gamma x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2$$

Ταυτότης τοῦ Lagrange.

378. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2=(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2).$$ Ταυτότης τοῦ Lagrange.

380. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος τοῦ Euler.*

$$(\alpha x+\beta y+\gamma\omega+\delta\varphi)^2+(\beta x-\alpha y+\delta\omega-\gamma\varphi)^2+(\gamma x-\delta y-\alpha\omega+\beta\varphi)^2+(\delta x+\gamma y-\beta\omega-\alpha\varphi)^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(x^2+y^2+\omega^2+\varphi^2).$$

381. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος τοῦ Moivre:*

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$$

1ος τρόπος: Α′ μέλος $=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^2$ (προσθαφαιρῶν τό $4\alpha^2\beta^2$), $=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-2\alpha\beta)$

$$=\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\left[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2\right]=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma).$$

2ος τρόπος: Β′ μέλος $=\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right]\left[(\alpha+\beta)-\gamma\right]\left[(\alpha-\beta)+\gamma\right]\left[(\alpha-\beta)-\gamma\right]$

$$=\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\left[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2\right]=(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta-\gamma^2)$$
$$=\left[(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)+2\alpha\beta\right]\left[(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)-2\alpha\beta\right]$$
$$=(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-4\alpha^2\beta^2$$
$$=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2-4\alpha^2\beta^2$$
$$=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\alpha^2\gamma^2-2\beta^2\gamma^2$$

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΜΟΝΩΝΥΜΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

§60. Διαίρεσις ἀκεραίου μονωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμου.

Ὁρισμός. Ὡς γνωρίζομεν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς οὕτω καί εἰς τήν Ἄλγεβραν: Καλοῦμεν διαίρεσιν μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Δ (διαιρετέος) δι' ἄλλης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δ (διαιρέτης) τήν εὕρεσιν μιᾶς τρίτης ἀλγεβρικῆς παραστάσεως Π (πηλῖκον), ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπὶ τὴν δευτέραν δ μᾶς δίδει τὴν πρώτην Δ.

Ταῦτα σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς: $\Delta : \delta = \Pi$ ἢ ἄλλως $\frac{\Delta}{\delta} = \Pi$.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν δὲ θὰ ἔχωμεν τὴν ταυτότητα:

$$\Delta \equiv \delta \cdot \Pi$$

Διαιρετέος ≡ διαιρέτην × πηλῖκον

Π.χ. τὸ πηλῖκον τοῦ ἀκεραίου μονωνύμου $15\alpha^5x^3y$ διὰ τοῦ ὡσαύτως ἀκεραίου $3\alpha^2xy$ εἶναι τὸ ἀκέραιον μονώνυμον $5\alpha^3x^2$, διότι ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὸν διαιρέτην $3\alpha^2xy$ ἐπὶ τὸ πηλῖκον $5\alpha^3x^2$ εὑρίσκομεν τὸν διαιρετέον $15\alpha^5x^3y$. Πράγματι: $(3\alpha^2xy)\cdot(5\alpha^3x^2) = 15\alpha^5x^3y$.

Ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως σημειοῦται ὡς ἑξῆς:

$$15\alpha^5x^3y : 3\alpha^2xy = 5\alpha^3x^2y^0 = 5\alpha^3x^2$$

ἢ ἄλλως: $\frac{15\alpha^5x^3y}{3\alpha^2xy} = 5\alpha^3x^2y^0 = 5\alpha^3x^2$

Ὅθεν: Διὰ νὰ διαιρέσωμεν ἀκέραιον μονώνυμον δι' ἀκεραίου μονωνύμου διαιροῦμεν τὸν συντελεστὴν τοῦ διαιρετέου διὰ τοῦ συντελεστοῦ τοῦ διαιρέτου καὶ δεξιὰ τοῦ πηλίκου τούτου γράφομεν ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρετέου καὶ ἕκαστον γράμμα μὲ ἐκθέτην ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τὴν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀφαιροῦντες τὸν ἐκθέτην, ὃν ἔχει τοῦτο εἰς τὸν διαιρέτην, ἀπὸ τὸν ἐκθέτην, ὃν ἔχει εἰς τὸν διαιρετέον.

Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι: 1) Διὰ νὰ εἶναι ἀκέραιον μονώνυμον διαιρετὸν δι' ἄλλου ἀκεραίου μονωνύμου (ἤτοι νὰ δίδωσι πηλῖκον ἀκέραιον μονώνυμον) πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ διαιρετέος νὰ ἔχῃ ὅλα τὰ γράμματα τοῦ διαιρέτου καὶ οὐδὲν μὲ ἐκθέτην μικρότερον.

2) Ὁ βαθμὸς τοῦ πηλίκου πρὸς γράμμα ἢ γράμματα αὐτοῦ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καὶ διαιρέτου πρὸς τὸ αὐτὸ γράμμα ἢ γράμματα.

Παρατήρ. Ἡ διαίρεσις δύο μονωνύμων εἶναι ἀδύνατος 1) Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἓν γράμμα μὲ ἐκθέτην μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ἐκθέτην τοῦ αὐτοῦ γράμματος εἰς τὸν διαιρετέον. 2) Ἐὰν ὁ διαιρέτης ἔχῃ ἓν ἢ περισσότερα γράμματα, τὰ ὁποῖα δὲν ὑπάρχουν εἰς τὸν διαιρετέον. Εἰς τὰς δύο ταύτας περιπτώσεις τὸ πηλῖκον τῶν δύο μονωνύμων θὰ εἶναι κλασματικὸν μονώνυμον.

Παράδ. 1ον. Τό πηλίκον τῶν $30x^2y^3\omega$ καί $5x^3y^5$ εἶναι

$\frac{30x^2y^3\omega}{5x^3y^5} = \frac{6\omega}{xy^2}$ ἤτοι κλασματ. μονώνυμον.

Παράδ. 2ον. $(-27a^3\beta^2):(+9a^2\beta^2\gamma\delta^3) = \frac{-27a^3\beta^2}{9a^2\beta^2\gamma\delta^3} = -\frac{3a\beta^0}{\gamma\delta^3}$

$= -\frac{3a}{\gamma\delta^3}$ ἤτοι κλασμ. μονώνυμον.

Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:

382. $12a^3x^4 : 3a^2x = 4ax^3$

383. $(-18a^5x^6y^3):(-3a^3x^3y^3) = 6a^2x^3$

384. $6a^4\beta^3\gamma^2 : (-2a\beta) = -3a^3\beta^2\gamma^2$

385. $0,125x^5y^3 : (-0,5x^2y) = -0,25x^3y^2$

386. $(-5x^2y^3)(-10x^4y^3\omega^4):(-2,5x^3y^3\omega^3) = 50x^6y^6\omega^4:(-2,5x^3y^3\omega^3) = -20x^3y^3\omega$

387. $(0,35a^3x^3y)(-0,5a^2x^2y^3)(-\frac{2}{5}axy\omega^5):(0,07a^2x^2y\omega)$ Ἀπ. $a^4x^4y^4\omega^4$

388. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι πηλίκα:*

1. $\frac{25a^3\beta^4\gamma^5\delta}{20a^3\beta^2\gamma^7} = \frac{5\beta^2\delta}{4\gamma^2}$ 2. $\frac{-12x^4y^3}{-5x^3y^4\omega} = \frac{12x}{5y\omega}$

389. *Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι πηλίκα:*

1. $\frac{3}{4}x^4y^5\omega^6 : \frac{1}{2}x^3y^3\omega^2$
2. $\left(\frac{3}{4}xy\omega\right):\left(-\frac{5}{4}x^2y^3\omega\right)$
3. $9a^4\beta^3 : (-9a^4\beta^3)$
4. $\frac{3}{8}a^{\mu}\beta^{\nu} : \frac{5}{6}a^2\beta^3$
5. $\frac{12a^x\beta^{y+1}}{0,4242\ldots a^{x-2}\beta^{y-1}}$ Ἀπ. $= \frac{198}{7}a^2\beta^2$
6. $(a+\beta)^{\mu}:(a+\beta)^{\nu} = (a+\beta)^{\mu-\nu}$
7. $5(\mu+\nu)^x : 3(\mu+\nu)^{x-3}$

§ 61. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου μονωνύμ.

Κανών. Διά νά διαιρέσωμεν ἀκέραιον πολυώνυμον δι' ἀκεραίου μονωνύμου, διαιροῦμεν ὅλους τούς ὅρους τοῦ διαιρετέου πολυωνύμου διά τοῦ μονωνύμου καί προσθέτομεν τά προκύπτοντα πηλίκα.

Π.χ. Διά νά διαιρέσωμεν τό πολυώνυμον $15a^3-12a^2+6a$ διά τοῦ μονωνύμου $3a$ δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν ἀνωτέρω κανόνα, ὅπως ἐν τῇ Ἀριθμητικῇ διαιροῦμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ. Ἤτοι:

$(15a^3-12a^2+6a):3a = \frac{15a^3}{3a} - \frac{12a^2}{3a} + \frac{6a}{3a} = 5a^2-4a+2$

Ὁμοίως: $(10x^4y^3-15x^3y^4+30x^2y^5+25xy^6):(-5xy^3)$

$= -2x^3+3x^2y-6xy^2-5y^3$.

Ἐκ τούτων συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι:

§62.1) Διά νά εἶναι ἕνα ἀκέραιον πολυώνυμον διαιρετόν δι' ἀκεραίου μονωνύμου, (ἤτοι τό πηλίκον νά εἶναι ἀκέραιον πολυώνυμον), πρέπει καί ἀρκεῖ πάντες οἱ ὅροι τοῦ πολυωνύμου νά εἶναι διαιρετοί διά τοῦ μονωνύμου.

2) Ὁ βαθμός τοῦ πηλίκου πρός γράμμα ἤ γράμματα ἰσοῦται πρός τήν διαφοράν τῶν βαθμῶν διαιρετέου καί διαιρέτου πρός τό γράμμα ἤ τά γράμματα ταῦτα.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

390. $(6x^5-12x^4+15x^3-18x^2):(-3x^2)=-2x^3+4x^2-5x+6.$

391. $(12a^4x^3+30a^3x^4-18a^2x^5+6ax^6):6ax^3=2a^3+5a^2x-3ax^2+x^3$

392. $\dfrac{4a^6b^3-3a^5b^4+5a^3b^5}{-a^2b^3}=\dfrac{4a^6b^3}{-a^2b^3}-\dfrac{3a^5b^4}{-a^2b^3}+\dfrac{5a^3b^5}{-a^2b^3}=-4a^4+3a^3b-5ab^2.$

393. $\dfrac{2a^2-3b^2+\gamma^2}{a\beta\gamma}=\dfrac{2a^2}{a\beta\gamma}+\dfrac{-3b^2}{a\beta\gamma}+\dfrac{\gamma^2}{a\beta\gamma}=\dfrac{2a}{\beta\gamma}-\dfrac{3b}{a\gamma}+\dfrac{\gamma}{ab}$

394. $\dfrac{8a^5b^3}{6a^2b^3-4a^3b^2+12a^4b^2}=\dfrac{4a^3b}{3b-2a+6a^2}$

395. $\left(\frac{4}{5}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{7}x\right):3x=\frac{4}{15}x^2-\frac{2}{15}x+\frac{1}{21}$

396. $\left(\frac{15}{8}a^4b-\frac{12}{5}a^3b^2+7a^2b^3-\frac{1}{3}ab^4\right):4ab=\frac{15}{32}a^3-\frac{3}{5}a^2b+\frac{7}{4}ab^2-\frac{1}{12}b^3$

397. $\left(\frac{5}{8}a^3b^2-\frac{15}{14}a^2b^3+\frac{5}{9}ab^4\right):\frac{5}{4}ab^2=\frac{1}{2}a^2-\frac{6}{7}ab+\frac{4}{9}b^2.$

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι πηλίκα:

398. $(a^3x^3y-3a^2bx^2y+3ab^2xy^2-b^3xy^3):abxy$

399. $(280a^3b^4-420a^3b^8+490a^7b^4):70a^3b^4$

400. $(0{,}8a^4b-\frac{7}{9}a^3b^2-a^2b+5ab^4):\frac{3}{4}a^3b^2$

401. $\left[12x^2(a+b)^4-2xy(a+b)^3+3ax(a+b)^2\right]:\left[-4x(a+b)^2\right]$

402. $x^5(a^2+b^2)-2x^4(a^2+b^2)^3$ διά τοῦ $x^3(a^2+b^2)$.

403. $-7ab(x^2-y^2)-8a^2(x-y)^2+9b^2(x-y)$ διά τοῦ $12ab(x-y)$

Ἀπ. $-\frac{7}{12}(x+y)-\frac{2a}{3b}(x-y)+\frac{3b}{4a}$

404. $(x^{\mu+2}y^{\nu}+2x^{\mu+1}y^{\nu+1}+x^{\mu}y^{\nu+2}):x^{\mu}y^{\nu}$ Ἀπ. $(x+y)^2$

405. $\left(0,8x^{\mu}y^{\nu}+0,54x^{\mu-1}y^{\nu-2}-0,22x^{\mu-2}y^{\nu-4}+12x^{\mu-3}y^{\nu-6}\right):$
$:\left(\frac{2}{3}x^{\mu+1}y^{\nu+2}\right)$. Ἀπ. $=1,2x^{-1}y^{-2}+0,81x^{-2}y^{-4}-0,33x^{-3}y^{-6}+18x^{-4}y^{-8}$

§63. Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἀκεραίου πολυωνύμου. Ἔστω ὅτι δίδονται δύο ἀκέραια πολυώνυμα τοῦ x, τά Δ καί δ, διατεταγμένα κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ὅτι ζητοῦμεν νά εὕρωμεν τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ Δ διά τοῦ δ. Ἐάν ὑποδέσωμεν ὅτι ὑπάρχει ἕν τρίτον πολυώνυμον Π τοῦ x, ἀκέραιον καί διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί τοιοῦτον ὥστε πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τόν διαιρέτην δ νά μᾶς δίδη τόν διαιρετέον Δ θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα:

$$\Delta = \delta \cdot \Pi \qquad (1)$$

Πρός προσδιορισμόν τοῦ ἀγνώστου πολυωνύμου πηλίκου Π μέ ἀνηγμένους καί διατεταγμένους ὅρους στηριζόμεθα ἐπί τῶν κάτωθι δύο θεμελιωδῶν θεωρημάτων.

Θεώρημα Ι. Κατά τήν διαίρεσιν ἀκεραίου πολυωνύμου διατεταγμένου κατά τάς κατιούσας (ἤ ἀνιούσας) δυνάμεις ἑνός γράμματος αὐτοῦ, δι' ἄλλου ὁμοίως διατεταγμένου, διά νά εὕρωμεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τόν α'. ὅρον τοῦ διαιρετέου διά τοῦ α'. ὅρου τοῦ διαιρέτου.

Ἀπόδειξις: Ἄς παραστήσωμεν τούς διαδοχικούς ὅρους τῶν διατεταγμένων πολυωνύμων Δ, δ καί Π ὡς ἑξῆς:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots$$
$$\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \cdots$$
$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \cdots$$

Ἡ ταυτότης (1) ἄρα δι' ἀντικαταστάσεως γίνεται:

$$\left(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots\right) = \left(\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots\right)\cdot\left(\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\cdots\right)$$

Ἀλλ' ὡς γνωστόν κατά τόν πολλαπλασιασμόν ἀκεραίων πολυωνύμων ὁμοίως διατεταγμένων, οἱ ἄκροι ὅροι τοῦ γινομένου αὐτῶν ἰσοῦνται μέ τό γινόμενον τῶν ἄκρων ὅρων πολλαπλασιαστέου καί πολλαπλασιαστοῦ ἀντιστοίχως. Ἄρα θά ἔχωμεν $\Delta_1 = \delta_1 \cdot \Pi_1$ ἤ $\frac{\Delta_1}{\delta_1} = \Pi_1$.

ἤτοι ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ πηλίκου Π_1 εὑρίσκεται ἄν διαιρέσωμεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ διαιρετέου Δ_1 διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου δ_1

<u>Θεώρημα ΙΙ. Διά νά εὕρωμεν τούς λοιπούς ὅρους τοῦ πηλίκου, μετά τήν εὕρεσιν τοῦ πρώτου ὅρου αὐτοῦ, ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν τόν εὑρεθέντα α' ὅρον τοῦ πηλίκου ἐπί τόν διαιρέτην, τό γινόμενον νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν διαιρετέον καί τό οὕτω προκῦπτον α' ὑπόλοιπον νά διαιρέσωμεν διά τοῦ διαιρέτου.</u>

<u>Ἀπόδειξις:</u> Παριστῶμεν τό διαιρετέον πολυώνυμον διά τοῦ Δ, τόν διαιρέτην διά τοῦ δ, τόν πρῶτον ὅρον τοῦ πηλίκου διά τοῦ Π_1 καί τούς λοιπούς ὅρους κατά σειράν $\Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \ldots\ldots, \Pi_\nu$.

Πρέπει νά δειχθῇ ὅτι: $\dfrac{\Delta - \delta\Pi_1}{\delta} = \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots + \Pi_\nu$.

Πράγματι συμφώνως πρός τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως θά ἔχωμεν:

$$\Delta = \delta\,(\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu)$$

ἤ

$$\Delta = \delta\Pi_1 + \delta\,(\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu)$$

Καί ἀφαιροῦντες ἀπό τά δύο μέλη τόν ὅρον $\delta\Pi_1$ λαμβάνομεν:

$$\Delta - \delta\Pi_1 = \delta\Pi_1 - \delta\Pi_1 + \delta\,(\Pi_2 + \Pi_3 + \cdots\cdots + \Pi_\nu)$$

$$\text{ἤ } \Delta - \delta\Pi_1 = \delta\,(\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu) \qquad (2)$$

$$\text{ἤ } \frac{\Delta - \delta\Pi_1}{\delta} = \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu \qquad (3) \qquad \text{ὅ.ἔ.δ.}$$

Ἐάν ἤδη παραστήσωμεν διά Y_1 τήν διαφοράν $\Delta - \delta\Pi_1$ δηλ. τοῦ διαιρετέου Δ καί τοῦ γινομένου τοῦ διαιρέτου δ ἐπί τόν α' ὅρον Π_1 τοῦ πηλίκου καί τήν ὁποίαν διαφοράν θεωροῦμεν ὡς νέον διαιρετέον καί ὀνομάζομεν ταύτην π ρ ῶ τ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν, αἱ ταυτότητες (2) καί (3) γράφονται:

$$Y_1 = \delta\,(\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu) \qquad (4)$$

Ἀνάλογα σκεπτόμεθα καί ἐργαζόμεθα ἐπί τῆς ταυτότητος (4) θεωροῦντες τό Y_1 ὡς νέον διαιρετέον. Διά νά εὕρωμεν τόν δεύτερον ὅρον τοῦ πηλίκου Π_2, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τόν πρῶτον ὅρον τοῦ Y_1 διά τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου δ ἵνα εὕρωμεν τόν β' ὅρον τοῦ πηλίκου Π_2· τό γινόμενον $\delta\Pi_2$ θά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τοῦ νέου διαιρετέου Y_1 κ.ο.κ. Τοῦτο φαίνεται καί ἐκ τῆς (4)

$$Y_1 = \delta\Pi_2 + \delta\,(\Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu)$$

$$\text{ἤ} \quad Y_1 - \delta \Pi_2 = \delta\left(\Pi_3 + \Pi_4 + \cdots + \Pi_\nu\right)$$

Καλοῦντες τὴν διαφορὰν $Y_1 - \delta\Pi_2 = Y_2$ λαμβάνομεν:

$$Y_2 = \delta\left(\Pi_3 + \Pi_4 + \cdots\cdots + \Pi_\nu\right).$$

Τὸ Y_2 καλοῦμεν δ ε ύ τ ε ρ ο ν ὑ π ό λ ο ι π ο ν καὶ θεωροῦμεν τοῦτο ὡς νέον διαιρετέον, τοῦ ὁποίου διαιροῦμεν τὸν πρῶτον ὅρον του διὰ τοῦ πρώτου ὅρου τοῦ διαιρέτου δ πάντοτε διὰ νὰ εὕρωμεν τὸν τρίτον ὅρον τοῦ πηλίκου Π_3. Συνεχίζοντες κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον θὰ εὕρωμεν ὅλους τοὺς διαδοχικοὺς ὅρους τοῦ πηλίκου $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \ldots, \Pi_\nu$, τῶν ὁποίων οἱ βαθμοὶ βαίνουν συνεχῶς ἐλαττούμενοι. Καὶ ἐὰν μὲν τὸ τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μηδὲν ἡ διαίρεσις καλεῖται τ ε λ ε ί α , ἐὰν δὲ τοῦτο εἶναι διάφορον τοῦ μηδενὸς καὶ βαθμοῦ μικροτέρου τοῦ διαιρέτου ἡ διαίρεσις εἶναι ἀδύνατος καὶ καλεῖται ἀ τ ε λ ή ς.

Κατὰ ταῦτα θὰ ἔχωμεν τὰς ταυτότητας:

$$\Delta \equiv \delta\cdot\Pi \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Delta}{\delta} \equiv \Pi \qquad \text{(τελεία διαίρεσις)}$$

$$\Delta \equiv \delta\cdot\Pi + Y \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Delta}{\delta} \equiv \Pi + \frac{Y}{\delta} \qquad \text{(ἀτελὴς διαίρεσις).}$$

406. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:*

1. $(6x^3+13x^2+4x-3):(2x+3)$, 2. $(2x^4-3x^2+2x+3):(x^2+2x+1)$

3. $(x^4-\alpha^4):(x-\alpha)$

Ἀπόκ.

1.
$$\begin{array}{r|l}
6x^3+13x^2+4x-3 & 2x+3 \\ \cline{2-2}
-6x^3-9x^2 \qquad\qquad & 3x^2+2x-1 \\ \hline
4x^2+4x-3 & \\
-4x^2-6x \quad\; & \\ \hline
-2x-3 & \\
+2x+3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

2.
$$\begin{array}{r|l}
2x^4 \qquad -3x^2+2x+3 & x^2+2x+1 \\ \cline{2-2}
-2x^4-4x^3-2x^2 \qquad\qquad & 2x^2-4x+3 \\ \hline
-4x^3-5x^2+2x+3 & \\
4x^3+8x^2+4x \quad\; & \\ \hline
3x^2+6x+3 & \\
-3x^2-6x-3 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r|l}
x^4 \qquad\qquad\qquad -\alpha^4 & x-\alpha \\ \cline{2-2}
-x^4+\alpha x^3 \qquad\qquad\qquad & x^3+\alpha x^2+\alpha^2 x+\alpha^3 \\ \hline
\alpha x^3 \qquad\qquad -\alpha^4 & \\
-\alpha x^3+\alpha^2x^2 \qquad\qquad & \\ \hline
\alpha^2x^2 \qquad -\alpha^4 & \\
-\alpha^2x^2+\alpha^3x \qquad & \\ \hline
\alpha^3x-\alpha^4 & \\
-\alpha^3x+\alpha^4 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

407. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:*

1. $\left(x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x\right) : \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right)$

2. $\left(0{,}48y^4 + 0{,}44y^3z - 0{,}18y^2z^2 - 0{,}1yz^3 + 0{,}02z^4\right) : \left(0{,}4y + 0{,}2z\right)$

3. $\left(x^{8\nu} - y^{8\rho}\right) : \left(x^{5\nu} - x^{4\nu}y^{\rho} + x^{\nu}y^{4\rho} - y^{5\rho}\right)$

Ἀπόκ.

1.

$$
\begin{array}{r|l}
x^4 - \frac{5}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x & x^2 - \frac{1}{2}x \\ \cline{2-2}
-x^4 + \frac{1}{2}x^3 \qquad\qquad\qquad & x^2 - \frac{3}{4}x + 1 \\ \cline{1-1}
-\frac{3}{4}x^3 + \frac{11}{8}x^2 - \frac{1}{2}x & \\
+\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 \qquad & \\ \cline{1-1}
+\frac{8}{8}x^2 - \frac{1}{2}x & \\
-x^2 + \frac{1}{2}x & \\ \cline{1-1}
0 \qquad &
\end{array}
$$

2

$$
\begin{array}{r|l}
0{,}48y^4 + 0{,}44y^3z - 0{,}18y^2z^2 - 0{,}1yz^3 + 0{,}02z^4 & 0{,}4y + 0{,}2z \\ \cline{2-2}
-0{,}48y^4 - 0{,}24y^3z \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & 0{,}12y^3 + 0{,}5y^2z \\ \cline{1-1}
0{,}20y^3z - 0{,}18y^2z^2 - 0{,}1yz^3 + 0{,}02z^4 & -0{,}7yz^2 + 0{,}1z^3 \\
-0{,}20y^3z - 0{,}10y^2z^2 \qquad\qquad\qquad & \\ \cline{1-1}
-0{,}28y^2z^2 - 0{,}1yz^3 + 0{,}02z^4 & \\
+0{,}28y^2z^2 + 0{,}14yz^3 \qquad\quad & \\ \cline{1-1}
+0{,}04yz^3 + 0{,}02z^4 & \\
-0{,}04yz^3 - 0{,}02z^4 & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad &
\end{array}
$$

3. $\left(x^{8\nu} - y^{8\rho}\right) : \left(x^{5\nu} - x^{4\nu}y^{\rho} + x^{\nu}y^{4\rho} - y^{5\rho}\right)$

Ἀπ. $\Pi\pi\lambda. = x^{3\nu} + x^{2\nu}y^{\rho} + x^{\nu}y^{2\rho} + y^{3\rho}$ $\Upsilon\pi. = 0$

408. *Νὰ ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:*

$$(x^3 + y^3 + \omega^3 - 3xy\omega) : (x + y + \omega)$$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad - 3xy\omega \qquad\qquad + (y^3 + \omega^3) & x + (y + \omega) \\ \cline{2-2}
-x^3 - x^2(y+\omega) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \Pi = x^2 - x(y+\omega) + (y^2 + \omega^2 - y\omega) \\ \cline{1-1}
-x^2(y+\omega) - 3xy\omega \qquad + (y^3 + \omega^3) & \qquad\text{ἤ} \\
+x^2(y+\omega) + x(y+\omega)^2 \qquad\qquad\qquad & \Pi = x^2 + y^2 + \omega^2 - xy - x\omega - y\omega. \\ \cline{1-1}
+x(y^2 + \omega^2 - y\omega) + (y^3 + \omega^3) & \\
-x(y^2 + \omega^2 - y\omega) - (y^3 + \omega^3) & \\ \cline{1-1}
0 \qquad\qquad &
\end{array}
$$

ΣΗΜ. Συμφώνως δὲ πρὸς τὴν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως $\Delta \equiv \delta \cdot \Pi$ θὰ ἔχωμεν:

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega \equiv (x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-xy-x\omega-y\omega),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἀ ξ ι ο σ η μ ε ί ω τ ο ς καὶ περὶ ἧς ὡμιλήσαμεν ἀνωτέρω ἄσκ. 375 καὶ ἄσκ. 376.

409. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:*

1. $(2x^5+6x^4-23x^3+2x^2+16x-3):(x^2+5x-1)$

Ἀπ. $\Pi = 2x^3-4x^2-x+3$, $\Upsilon = 0$.

2. $(8-6x-4x^2+5x^3-4x^4-x^5+2x^6):(-2+x^2)$

Ἀπ. $\Pi = -4+3x-x^3+2x^4$, $\Upsilon = 0$.

3. $(6\alpha^6+5\alpha^5\beta-\alpha^4\beta^2+4\alpha^3\beta^3-17\alpha^2\beta^4+8\alpha\beta^5-\beta^6):(3\alpha^4-2\alpha^3\beta+4\alpha^2\beta^2-5\alpha\beta^3+\beta^4)$.

Ἀπ. $\Pi = 2\alpha^2+3\alpha\beta-\beta^2$, $\Upsilon = 0$

410. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:*

1. $(\alpha^5x^5+y^5):(\alpha x+y)$
2. $(32\alpha^5+\beta^5):(2\alpha+\beta)$
3. $(81x^8-16y^8):(3x^2-2y^2)$.

411. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:*

1. $\left(x^4-\frac{13}{6}x^3+x^2+\frac{4}{3}x-2\right):\left(\frac{4}{3}x-2\right)$

2. $\left(\frac{9}{16}\alpha^4-\frac{7}{8}\alpha^3\beta+\frac{19}{36}\alpha^2\beta^2+\frac{1}{6}\alpha\beta^3\right):\left(\frac{3}{2}\alpha+\frac{1}{3}\beta\right)$

Ἀπ. $\Pi = \frac{3}{8}\alpha^3-\frac{2}{3}\alpha^2\beta+\frac{1}{2}\alpha\beta^2$

3. $\left(x^5-\frac{23}{30}x^4+\frac{31}{10}x^3-\frac{7}{3}x^2-\frac{181}{18}x+\frac{5}{3}\right):\left(x^2-\frac{x}{6}+5\right)$

4. $\left(-\frac{1}{8}y^5+\frac{5}{6}y^4-\frac{41}{24}y^3+y^2\right):\left(-\frac{3}{4}y^2+2y\right)$

412. *Νὰ ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:*

1. $(0{,}27\alpha^4+1{,}26\alpha^3\beta+0{,}93\alpha^2\beta^2-1{,}26\alpha\beta^3):(0{,}9\alpha+2{,}1\beta)$

Ἀπ. $\Pi = 0{,}3\alpha^3+0{,}7\alpha^2\beta-0{,}6\alpha\beta^2$. $\Upsilon = 0$

2. $(0{,}04x^{10}-0{,}03x^8-0{,}11x^6+0{,}02x^4):(0{,}1x^4-0{,}2x^2)$.

3. $(0{,}005\alpha^8+0{,}046\alpha^6-0{,}038\alpha^4+0{,}02\alpha^2):(0{,}01\alpha^3+0{,}1\alpha)$

Ἀπ. $\Pi = 0{,}5\alpha^5-0{,}4\alpha^3+0{,}2\alpha$. $\Upsilon = 0$.

4. $(-0{,}1x^4+0{,}75x^3y-1{,}6x^2y^2+1{,}3xy^3-2y^4):(-0{,}5x+2y)$

413. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ διαιρέσεις:

1. $(\alpha^{2\mu}+2\alpha^{\mu}\beta^{2\nu}+\beta^{4\nu}-\gamma^{2\rho}):(\alpha^{\mu}+\beta^{2\nu}+\gamma^{\rho})$ Ἀπ. $Y=0$.

2. $(\kappa^8x^4-81\alpha^{12}):(\kappa^6x^3-3\alpha^3\kappa^4x^2+9\alpha^6\kappa^2x-27\alpha^9)$ Ἀπ. $Y=0$.

414. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\left[x^4-(\mu+\nu)^2x^2+2\mu\nu(\mu+\nu)x-\mu^2\nu^2\right]:\left[x^2-(\mu+\nu)x+\mu\nu\right]$

Ἀπ. $\Pi=x^2-(\mu+\nu)x-\mu\nu$. $Y=0$

2. $\left\{\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x+x^3\right\}:(\alpha x+x^2+\alpha\beta+\beta x)$.

Ἀπ. $Y=0$

3. $\left\{(\mu^2-\nu^2)z^4+(\mu^2+\nu^2+6\mu\nu)z^3-(5\mu\nu+\nu^2)z^2+(4\mu^2+7\mu\nu-3\nu^2)z-6\mu\nu\right\}:$
$:\left\{(\mu-\nu)z^2+2(\mu+\nu)z-3\nu\right\}$

Ἀπ. $\Pi=(\mu+\nu)z^2-(\mu-\nu)z+2\mu$, $Y=0$.

4. $(x^{\mu\nu}-x^{\nu}y^{(\nu-1)\mu}-y^{\mu}x^{(\mu-1)\nu}+y^{\mu\nu}):(x^{\nu}-y^{\mu})$ Ἀπ. $Y=0$.

5. $(\alpha^{\mu+\nu}\beta^{\nu}-4\alpha^{\mu+\nu-1}\beta^{2\nu}-27\alpha^{\mu+\nu-2}\beta^{3\nu}+42\alpha^{\mu+\nu-3}\beta^{4\nu}):$
$:(\alpha^{\mu}+3\alpha^{\mu-1}\beta^{\nu}-6\alpha^{\mu-2}\beta^{2\nu})$.

Ἀπ. $\Pi=\alpha^{\nu}\beta^{\nu}-7\alpha^{\nu-1}\beta^{2\nu}$, $Y=0$

6. $\left\{\left(\frac{1}{16}-\frac{1}{81}x^4\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x\right)\right\}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}x^2\right)$ Ἀπ. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}x\right)$

415. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$(x^{5/2}-x^2+6x-4x^{3/2}-2x^{1/2}):(x^{3/2}-4x^{1/2}+2)$

Ἀπ. Διατάσσοντες κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x θά ἔχωμεν:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^{5/2} & -x^{4/2} & -4x^{3/2} & +6x^{2/2} & -2x^{1/2} & x^{3/2}-4x^{1/2}+2 \\
\cline{6-6}
-x^{5/2} & & +4x^{3/2} & -2x^{2/2} & & \Pi=x^{2/2}-x^{1/2} \\
\hline
 & -x^{4/2} & & +4x^{2/2} & -2x^{1/2} & \text{ἤ } \Pi=x-x^{\frac{1}{2}} \\
 & +x^{4/2} & & -4x^{2/2} & +2x^{1/2} & \\
\hline
\end{array}
$$

Ὑπ. $=0$.

416. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$$\left(\frac{1}{5}x^{\frac{8}{15}} - \frac{3}{10}x^{\frac{7}{10}} + \frac{1}{2}x^{\frac{3}{4}} - \frac{1}{3}x^{\frac{7}{12}} - \frac{3}{20}x^{\frac{9}{20}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}}\right) : \left(x^{\frac{1}{4}} - \frac{3}{5}x^{\frac{1}{5}}\right)$$

Ἀπόκ. Τρέπομεν τούς κλασματικούς ἐκθέτας εἰς ὁμώνυμα κλάσματα καί διατάσσομεν κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x:

$$\begin{array}{l|l}
\frac{1}{2}x^{\frac{45}{60}} - \frac{3}{10}x^{\frac{42}{60}} - \frac{1}{3}x^{\frac{35}{60}} + \frac{1}{5}x^{\frac{32}{60}} + \frac{1}{4}x^{\frac{30}{60}} - \frac{3}{20}x^{\frac{27}{60}} & x^{\frac{15}{60}} - \frac{3}{5}x^{\frac{12}{60}} \\
\hline
-\frac{1}{2}x^{\frac{45}{60}} + \frac{3}{10}x^{\frac{42}{60}} & \Pi = \frac{1}{2}x^{\frac{30}{60}} - \frac{1}{3}x^{\frac{20}{60}} + \frac{1}{4}x^{\frac{15}{60}}. \\
\hline
\qquad -\frac{1}{3}x^{\frac{35}{60}} + \frac{1}{5}x^{\frac{32}{60}} + \frac{1}{4}x^{\frac{30}{60}} - \frac{3}{20}x^{\frac{27}{60}} & \text{ἤ} \\
\qquad +\frac{1}{3}x^{\frac{35}{60}} - \frac{1}{5}x^{\frac{32}{60}} & \Pi = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}x^{\frac{1}{4}} \\
\hline
\qquad\qquad +\frac{1}{4}x^{\frac{30}{60}} - \frac{3}{20}x^{\frac{27}{60}} & \\
\qquad\qquad -\frac{1}{4}x^{\frac{30}{60}} + \frac{3}{20}x^{\frac{27}{60}} & \\
\hline
\qquad\qquad\quad \upsilon = 0 &
\end{array}$$

417. *Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:*

$$\left(x^{1/2} + y^{1/2} + z^{1/2} + x^{1/6}y^{1/3} + x^{1/6}z^{1/3} + x^{1/3}y^{1/6} + x^{1/3}z^{1/6} + y^{1/6}z^{1/3} + y^{1/3}z^{1/6}\right) :$$
$$: \left(x^{1/6} + y^{1/6} + z^{1/6}\right).$$

Ἀπόκ. $\Pi = x^{1/3} + y^{1/3} + z^{1/3}$ καί $Y = 0$

418. *Νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου:* $a^2 + 3a^{5/3} + 6a^{4/3} + 7a + 6a^{2/3} + 3a^{1/3} + 1$ *διά τοῦ τριωνύμου:* $\left(a^{2/3} + a^{1/3} + 1\right)$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1949.

$$\begin{array}{l|l}
a^2 + 3a^{5/3} + 6a^{4/3} + 7a + 6a^{2/3} + 3a^{1/3} + 1 & a^{\frac{2}{3}} + a^{1/3} + 1 \\
\hline
-a^2 - a^{5/3} - a^{4/3} & a^{\frac{4}{3}} + 2a + 3a^{\frac{2}{3}} + 2a^{1/3} + 1. \\
\hline
\quad 2a^{5/3} + 5a^{4/3} + 7a + 6a^{2/3} + 3a^{1/3} + 1 & \\
\quad -2a^{5/3} - 2a^{4/3} - 2a & \\
\hline
\qquad 3a^{4/3} + 5a + 6a^{2/3} + 3a^{1/3} + 1 & \\
\qquad -3a^{4/3} - 3a - 3a^{2/3} & \\
\hline
\qquad\quad 2a + 3a^{2/3} + 3a^{1/3} + 1 & \\
\qquad\quad -2a - 2a^{2/3} - 2a^{1/3} & \\
\hline
\qquad\qquad a^{2/3} + a^{1/3} + 1 & \\
\qquad\qquad -a^{2/3} - a^{1/3} - 1 \; = \; \upsilon = 0. &
\end{array}$$

419. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου: $x^{-\frac{7}{5}}-4x^{-1}+12x^{-\frac{2}{5}}-17x^{-\frac{3}{5}}+16x^{-\frac{4}{5}}$ διά τοῦ τριωνύμου: $x^{-\frac{3}{5}}+3x^{-\frac{1}{5}}-2x^{-\frac{2}{5}}$

Ἀπόκ. Διατάσσομεν διαιρετέον καί διαιρέτην κατά τάς αὐτάς δυνάμεις τοῦ γράμματος x.

$$\left(x^{-\frac{7}{5}}-4x^{-1}+16x^{-\frac{4}{5}}-17x^{-\frac{3}{5}}+12x^{-\frac{2}{5}}\right):\left(x^{-\frac{3}{5}}-2x^{-\frac{2}{5}}+3x^{-\frac{1}{5}}\right)$$

καί ἐκτελοῦντες τήν διαίρεσιν εὑρίσκομεν:

$$\Pi\eta\lambda. = x^{-\frac{4}{5}}+2x^{-\frac{3}{5}}-3x^{-\frac{2}{5}}+4x^{-\frac{1}{5}} \quad \text{καί} \quad Υ=0.$$

420. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου: $x^{-\frac{4}{3}}+x^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{4}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}z^{-\frac{2}{3}}$ διά τοῦ διωνύμου: $x^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1949.

Ἀπόκ. $\Pi\eta\lambda. = x^{-\frac{2}{3}}-y^{-\frac{2}{3}}+z^{-\frac{2}{3}}$ καί $Υπ.=0$.

421. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου: $x^{-\frac{7}{3}}-3x^{-2}+x^{-\frac{5}{3}}-4+12x^{-\frac{1}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}$ διά τοῦ διωνύμου: $x^{-\frac{5}{3}}-4$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1949

Ἀπόκ. Διατάσσοντες κατά τάς ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ἐκτελοῦντες τήν διαίρεσιν εὑρίσκομεν:

$$\begin{array}{l|l}
x^{-\frac{7}{3}}-3x^{-2}+x^{-\frac{5}{3}}-4x^{-\frac{2}{3}}+12x^{-\frac{1}{3}}-4 & x^{-\frac{5}{3}}-4 \\ \cline{2-2}
-x^{-\frac{7}{3}}\qquad\qquad\quad +4x^{-\frac{2}{3}} & x^{-\frac{2}{3}}-3x^{-\frac{1}{3}}+1. \\ \cline{1-1}
\quad -3x^{-2}+x^{-\frac{5}{3}}\qquad +12x^{-\frac{1}{3}}-4 & \\
\quad +3x^{-2}\qquad\qquad\quad -12x^{-\frac{1}{3}} & \\ \cline{1-1}
\qquad\quad x^{-\frac{5}{3}}\qquad\qquad\qquad -4 & \\
\qquad -x^{-\frac{5}{3}}\qquad\qquad\qquad +4 & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0. &
\end{array}$$

422. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις τῆς διαιρέσεως: $\left(\alpha^{1/2}-\beta^{1/2}-\gamma^{1/2}+2\beta^{1/4}\gamma^{1/4}\right):\left(\alpha^{1/4}+\beta^{1/4}-\gamma^{1/4}\right)$. Ἀπ. $Υ=0$

423. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις: $\left(2x^{1/5}y^{1/5}+y^{2/5}+2x^{1/5}z^{1/5}+x^{2/5}+2y^{1/5}z^{1/5}+z^{2/5}\right):\left(x^{1/5}+y^{1/5}+z^{1/5}\right)$.

Ἀπ. $Υ=0$

424. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:

$(x+y+z-3x^{1/3}y^{1/3}z^{1/3}):(x^{1/3}+y^{1/3}+z^{1/3})$

Ἀπόκ. $\Pi\eta\lambda.= x^{2/3}+y^{2/3}+z^{2/3}-x^{1/3}y^{1/3}-y^{1/3}z^{1/3}-z^{1/3}x^{1/3}$ Ὑπ. $=0$

425. *Νά ἐκτελεσθῇ ἡ κάτωθι διαίρεσις:*

$$\left[x^{-\frac{3}{5}}+2x^{-\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{5}}\left(y^{-\frac{1}{5}}-x^{-\frac{1}{5}}\right)+3x^{-\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{5}}\left(x^{-\frac{1}{5}}-\pi^{-\frac{1}{5}}\right)+6y^{-\frac{1}{5}}\pi^{-\frac{1}{5}}\left(y^{-\frac{1}{5}}+\pi^{-\frac{1}{5}}\right)-4y^{-\frac{3}{5}}-\right.$$
$$\left.-9\pi^{-\frac{3}{5}}\right]:\left(x^{-\frac{1}{5}}-2y^{-\frac{1}{5}}+3\pi^{-\frac{1}{5}}\right).$$

Ἀπόκ. $\Pi\eta\lambda. = x^{-\frac{2}{5}}+2y^{-\frac{2}{5}}-3\pi^{-\frac{2}{5}}$, $Y=0$

§ 64.* Συμβολική παράστασις πολυωνύμου τινός καί ἀριθμητική τιμή αὐτοῦ. Πᾶν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x δύναται νά παρασταθῇ συμβολικῶς διά τῶν συμβόλων $\Pi(x)$ ἤ $\sigma(x)$ ἤ $\varphi(x)$ κ.λ.π. Ταῦτα ἀπαγγέλλονται Π τοῦ x , ἤ σ τοῦ x , ἤ φ τοῦ x. Π.χ. τό πολυώνυμον x^3-3x^2+5x-3 παρίσταται καί διά τοῦ $\Pi(x)$ ἤτοι: $\Pi(x)=x^3-3x^2+5x-3$. $\sigma(x)=\alpha x+\beta$. Τό τριώνυμον $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ δύναται νά παρασταθῇ καί $\varphi(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$.

Ἀ ρ ι θ μ η τ ι κ ή τ ι μ ή πολυωνύμου τινός ὡς πρός x διά τιμήν τινα τοῦ x καλεῖται τό ἐξαγόμενον, τό ὁποῖον εὑρίσκομεν ἄν εἰς τό πολυώνυμον θέσωμεν ἀντί x τήν δεδομένην τιμήν του. π.χ. τό πολυώνυμον $\Pi(x)=x^3-3x^2+5x-3$ διά $x=2$ λαμβάνει τήν τιμήν:

$$\Pi(2) = 8-3\cdot 2^2+5\cdot 2-3 = 3 \quad \text{ἤτοι} \quad \Pi(2)=3$$

διά $x=1$ λαμβάνει τήν τιμήν:

$$\Pi(1) = 1^3-3\cdot 1^2+5\cdot 1-3 = 6-6=0 \quad \text{ἤτοι} \quad \Pi(1)=0$$

καί διά $x=3$ λαμβάνομεν:

$$\Pi(3)=3^3-3\cdot 3^2+5\cdot 3-3 = 12 \quad \text{ἤτοι} \quad \Pi(3)=12$$

426. *Ἄν $\varphi(x)=x^2-7x+10$ νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῶν $\varphi(1)$, $\varphi(-2)$, $\varphi(0)$, $\varphi(x-1)$.*

Ἀπόκ. $\varphi(1)=1^2-7\cdot 1+10 = 4$ ἄρα $\varphi(1)=4$.

$\varphi(-2)=(-2)^2-7\cdot(-2)+10=28$ » $\varphi(-2)=28$

$\varphi(0)=0-7\cdot 0+10=10$ » $\varphi(0)=10$

$\varphi(x-1)=(x-1)^2-7\cdot(x-1)+10=x^2-2x+1-7x+7+10=x^2-9x+18$

ἄρα $\varphi(x-1)=x^2-9x+18$.

427. Ἄν $\sigma(x)=x^3-\alpha x^2+5\alpha^2 x+3\alpha^3$ νά ὑπολογισθοῦν τά $\sigma(\alpha)$ καί $\sigma(-\alpha)$.

Ἀπόκ. $\sigma(\alpha)=\alpha^3-\alpha^3+5\alpha^3+3\alpha^3=8\alpha^3$ ἤτοι: $\sigma(\alpha)=8\alpha^3$

$$\sigma(-\alpha)=(-\alpha)^3-\alpha\cdot(-\alpha)^2+5\alpha^2(-\alpha)+3\alpha^3=-\alpha^3-\alpha^3-5\alpha^3+3\alpha^3=$$
$$=-4\alpha^3 \text{ ἤτοι: } \sigma(-\alpha)=-4\alpha^3$$

428. Ἄν $f(\nu)=3\nu^2-\nu+1$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $f(\nu+1)-f(\nu)-2f(0)$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 6.

Ἀπόκ.
$$\begin{aligned}
f(\nu+1) &= 3(\nu+1)^2-(\nu+1)+1=3\nu^2+6\nu+3-\nu-1+1\\
&= 3\nu^2+5\nu+3\\
-f(\nu) &= -3\nu^2+\nu-1\\
-2f(0) &= \qquad\quad -2\\
\hline
f(\nu+1)-f(\nu)-2f(0) &= 6\nu = \text{πολλ } 6.
\end{aligned}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ X ΔΙΑ ΤΩΝ ΔΙΩΝΥΜΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: 1) $x-\alpha$, 2) $x+\alpha$, 3) $\alpha x+\beta$.

§65. Διαιρετότης διά $x-\alpha$. Θεώρημα. Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου τινος πολυωνύμου τοῦ x διά τοῦ πρωτοβαθμίου διωνύμου τῆς μορφῆς $x-\alpha$, εἶναι ἴσον μέ τό ἐξαγόμενον, τό ὁποῖον προκύπτει ἐάν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτό τό x διά τοῦ α.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\varphi(x)$ τό δοθέν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x. Θά ἀποδείξωμεν ὅτι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τούτου διά $(x-\alpha)$ εἶναι ἴσον μέ $\varphi(\alpha)$. Ἐάν καλέσωμεν $\pi(x)$ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ταύτης καί Y τό ὑπόλοιπον ἀρκεῖ ν' ἀποδειχθῇ $Y=\varphi(\alpha)$. Τό ὑπόλοιπον Y εἶναι ἀνεξάρτητον προφανῶς τοῦ x, δηλ. δέν θά περιέχῃ x, διότι ὁ διαιρέτης $x-\alpha$ εἶναι πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x τό δέ ὑπόλοιπον ὡς κατωτέρου βαθμοῦ τοῦ διαιρέτου θά εἶναι μηδενικοῦ ἤτοι σταθερά ποσότης.

Συμφώνως δέ πρός τήν ταυτότητα τῆς διαιρέσεως $\Delta\equiv\delta\pi+\upsilon$ θά ἔχωμεν:
$$\varphi(x)\equiv(x-\alpha)\pi(x)+Y \qquad (1)$$

Ἐπειδή δέ ἡ (1) ὡς ταυτότης ἐπαληθεύεται διά πᾶσαν τιμὴν τοῦ x θὰ ἐπαληθεύεται καὶ διὰ $x=\alpha$,

ἤτοι: $\varphi(\alpha) = (\alpha-\alpha)\Pi(\alpha)+Y$

$\varphi(\alpha) = 0\cdot\Pi(\alpha)+Y$

$\varphi(\alpha) = Y$ ὅ. ἔ. δ.

Πόρισμα I. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου τινος πολυωνύμου τοῦ x, ἔστω $\varphi(x)$, διὰ τοῦ πρωτοβαθμίου διωνύμου τῆς μορφῆς $x+\alpha$ θὰ εἶναι $\varphi(-\alpha)$. Διότι τὸ διώνυμον $x+\alpha$ γράφεται $x-(-\alpha)$, ἑπομένως εἰς τὸν διαιρετέον $\varphi(x)$ θὰ ἀντικαταστήσωμεν τὸ x διὰ τοῦ $-\alpha$ καὶ θὰ ἔχωμεν $Y=\varphi(-\alpha)$.

Πόρισμα II. Διὰ νὰ εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, ἔστω $\varphi(x)$, διαιρετὸν διὰ $x-\alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ πολυώνυμον νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ α· δηλ. πρέπει τὸ $\varphi(\alpha)=0$.

Πόρισμα III. Διὰ νὰ εἶναι ἓν ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x, ἔστω $\varphi(x)$, διαιρετὸν διὰ $x+\alpha$, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τοῦτο νὰ μηδενίζεται, ὅταν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ $-\alpha$· δηλ. πρέπει τὸ $\varphi(-\alpha)=0$.

Παράδειγμα 1ον. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)=x^3-5x^2+7x+4$ διὰ $x-2$ εἶναι $\varphi(2)=2^3-5\cdot2^2+7\cdot2+4=$

$=8-20+14+4=6$ ἤτοι $Y=\varphi(2)=6$.

Παράδ. 2ον. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\sigma(x)=x^4-3x^2+6x-1$ διὰ $x+1$ εἶναι $\sigma(-1)=(-1)^4-3\cdot(-1)^2+6(-1)-1$

$=1-3-6-1=-9$

Παράδ. 3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ πολυώνυμον $\varphi(x)=2x^3-x^2-15x+18$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $x-2$ καὶ διὰ $x+3$.

Ἵνα συμβαίνῃ τοῦτο πρέπει $\varphi(2)=0$ καὶ $\varphi(-3)=0$.

Πράγματι: $\varphi(2)=2\cdot2^3-2^2-15\cdot2+18 = 34-34=0$

$\varphi(-3)=2\cdot(-3)^3-(-3)^2-15\cdot(-3)+18=-54-9+45+18=0$

§66. Διαιρετότης διὰ $\alpha x+\beta$. Θεώρημα. Τὸ ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἀκεραίου τινος πολυωνύμου τοῦ x διὰ τοῦ πρωτοβαθμίου διωνύμου τῆς μορφῆς $\alpha x+\beta$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐξαγόμενον τὸ ὁποῖον προκύπτει ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς αὐτὸ τὸ x διὰ τοῦ $-\frac{\beta}{\alpha}$ ἤτοι τῆς τιμῆς τοῦ x, ἡ ὁποία μηδενίζει τὸν διαιρέτην $\alpha x+\beta$.

Ἡ ἀπόδειξις τοῦ θεωρήματος τούτου εἶναι ἀκριβῶς, ὡς ἡ τοῦ προηγουμένου θεωρήματος § 65 καί ἀφίνομεν τήν ἀπόδειξιν εἰς τόν σπουδαστήν.

Παράδειγμα. Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου

$\varphi(x) = 9x^2 - x - 3$ διά $2x+4$ εἶναι

$\varphi\left(-\frac{4}{2}\right) = \varphi(-2) = 9(-2)^2 - (-2) - 3 = 36 + 2 - 3 = 35$

ἐνῷ τό πολυώνυμον $\sigma(x) = 2x^3 - x^2 - 15x + 18$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $2x-3$ καθόσον: $\sigma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 15 \cdot \frac{3}{2} + 18$

$= \frac{27}{4} - \frac{9}{4} - \frac{45}{2} + 18 = \frac{27}{4} - \frac{9}{4} - \frac{90}{4} + \frac{72}{4} = 0.$

429. *Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρίς νά ἐκτελεσθοῦν αὗται:*

1 $(x^3 - 5x^2 + 6) : (x-1)$
2 $(x^4 - 5x^2 + 6x - 3) : (x-2)$
3. $(x^3 - 5ax^2 + 6a^2x - 2a^3) : (x-a)$
4. $(5x^3 + 4x^2 + 3x + 2) : (x+1)$
5. $(6x^3 - 4x + 3) : (x+3)$
6. $(x^4 - ax^3 + \mu a^2x^2 + 5a^3x - 2a^4) : (x+a)$

Ἀπόκ. 1. $Y = 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 6 = 2$ ἤτοι ὑπόλ. $= 2$

2. $Y = 2^4 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 3 = 16 - 20 + 12 - 3 = 5.$

3. $Y = a^3 - 5aa^2 + 6a^2a - 2a^3 = a^3 - 5a^3 + 6a^3 - 2a^3 = 0$

4. $Y = -6$, 5. $Y = -147$, 6. $Y = (\mu - 5)a^4.$

430. *Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων:*

1. $\varphi(x) = (x^3 + x^2 + x + 1) : (2x+1)$ Ἀπ. $Y = \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

2. $\varphi(x) = (2x^3 - 4x^2 + 5x - 1) : (3x-2)$ » $Y = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{31}{27}$

3. $\varphi(x) = (3x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 4x - 5) : \left(x + \frac{2}{3}\right)$ » $Y = \varphi\left(-\frac{2}{3}\right) = -9.$

4. $\varphi(x) = (2x^2 + x - 10) : (2x+5)$ » $Y = \varphi\left(-\frac{5}{2}\right) = 0.$

431. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἕκαστον τῶν διωνύμων $(x-1)$, $(x+2)$ καί $(2x-1)$ εἶναι παράγων τοῦ πολυωνύμου $\sigma(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$.*

Ἀπόκ. Πράγματι διότι $\sigma(1) = 2 \cdot 1^3 + 1^2 - 5 \cdot 1 + 2 = 0$,

$\sigma(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 2 = -16 + 4 + 10 + 2 = 0$

$\sigma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 0$

432. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον* $a^2\gamma - a\gamma^2 + a\beta^2 - a^2\beta + \beta\gamma^2 - \beta^2\gamma$

εἶναι διαιρετόν διά τῶν διωνύμων $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ καί $\gamma-\alpha$.

433. *Νά προσδιορισθῇ τό μ ἵνα τό πολυώνυμον $\sigma(x)=x^3-3x^2+4x+\mu$ εἶναι διαιρετόν διά $x-3$.*

Ἀπόκ. Εὑρίσκομεν τό ὑπόλοιπον $\sigma(3)$ θέτοντες ὅπου x τό 3 $Y=\sigma(3)=3^3-3\cdot3^2+4\cdot3+\mu=12+\mu$, $Y=12+\mu$. Ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ μ ἵνα τό ὑπόλοιπον $12+\mu$ γίνῃ ἴσον μέ 0 εἶναι $\mu=-12$ ὥστε διά $\mu=-12$ τό δοθέν πολυώνυμον $\sigma(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-3$.

434. *Νά προσδιορισθῇ ἡ τιμή τοῦ λ ἵνα τό πολυώνυμον $\sigma(x)=x^4-5x^2+4x-\lambda$ εἶναι διαιρετόν διά $x+\frac{1}{2}$.*

Ἀπόκ. Ἀρκεῖ νά εὕρωμεν τό ὑπόλοιπον τοῦ πολυωνύμου $\sigma(x)$ διά $(x+\frac{1}{2})$ θέτοντες ὅπου x τό $-\frac{1}{2}$.

$$Y=\sigma\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^4-5\left(-\frac{1}{2}\right)^2+4\left(-\frac{1}{2}\right)-\lambda=\frac{1}{16}-\frac{5}{4}-\frac{4}{2}-\lambda=$$
$$=\frac{1}{16}-\frac{20}{16}-\frac{32}{16}-\lambda=-\frac{51}{16}-\lambda.$$

Τό ὑπόλοιπον τοῦτο $-\frac{51}{16}-\lambda$ πρέπει νά ἰσοῦται μέ 0 ἤτοι: $-\frac{51}{16}-\lambda=0$ ἄρα $\lambda=-\frac{51}{16}$.

435. *Νά προσδιορισθῇ τό μ εἰς τρόπον ὥστε:*

1. τό $4x^2-6x+\mu$ νά εἶναι διαιρετόν διά $x-3$. Ἀπ. $\mu=-18$
2. » $x^4+\mu a^2x^2-5a^3x+a^4$ νά εἶναι διαιρετόν διά $x-a$. » $\mu=3$
3. » $2x^4+4ax^3-5a^2x^2-3a^3x+\mu a^4$ νά εἶναι διαιρετόν διά $x-a$. Ἀπ. $\mu=2$.

436. *Νά δειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $x^3+7\gamma x^2+11\gamma^2x+2\gamma^3$ ἔχει ὡς παράγοντα τό $x+2\gamma$.*

437. *Ἄν τά πολυώνυμα $x^3+2x^2+3x+\lambda$ καί x^3+x^2+9 διαιρούμενα διά $(x+2)$ ἀφίνουν ὑπόλοιπα ἴσα, νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ λ.*

Ἀπ. $\lambda=11$.

438. *Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha\beta^4-\alpha^4\beta+\beta\gamma^4-\beta^4\gamma+\gamma\alpha^4-\gamma^4\alpha$ εἶναι διαιρετή δι' ἑκάστου τῶν διωνύμων $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$.*

Ἀπόκ. Ἀρκεῖ νά θέσωμεν εἰς τήν δοθεῖσαν παράστασιν ὅπου α τό β διά νά εὕρωμεν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως διά $(\alpha-\beta)$.

τοῦτο θά εἶναι $\beta^5-\beta^5+\beta\gamma^4-\beta^4\gamma+\gamma\beta^4-\gamma^4\beta=0$

Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τά διώνυμα $(\beta-\gamma)$ καί $(\gamma-\alpha)$ καί εὑρίσκομεν ὑπόλοιπα μηδέν. Ἄρα ἡ δοθεῖσα παράστασις διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τῶν $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$ καί $\gamma-\alpha$.

439. *Νά προσδιορισθῶσι τά μ καί ν, οὕτως ὥστε τό πολυώνυμον $x^4-3x^3+\mu x+\nu$ νά εἶναι διαιρετόν διά x^2-2x+4.*

Ἀπ. Ἀρκεῖ νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις ὁπότε: $\mu=8$, $\nu=-24$.

440. *Ποίαν τιμήν πρέπει νά λάβῃ τό μ ἵνα τά πολυώνυμα:*

1) $x^4+\mu\alpha^2x^2+\alpha^4$, 2) $x^3-\mu\alpha x^2+\mu\alpha^2x-\alpha^3$

εἶναι διαιρετά διά $x^2-\alpha x+\alpha^2$;

Ἀπ. 1) $\mu=1$, 2) $\mu=2$.

441. *Νά προσδιορισθῶσι τά μ, ν, κ ἵνα τό πολυώνυμον*

$$x^5-2x^4-6x^3+\mu x^2+\nu x+\kappa$$

εἶναι διαιρετόν διά $(x-3)(x+1)(x-1)$.

Ἀπ. $\mu=8$, $\nu=5$, $\kappa=-6$.

*ΠΗΛΙΚΑ ΔΙΑΙΡΕΣΕΩΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΔΙΑ $x\pm\alpha$.

Ὅταν ἔχωμεν νά διαιρέσωμεν ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ διά τῶν διωνύμων τῆς μορφῆς $x\pm\alpha$, δυνάμεθα νά εὕρωμεν, χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις, ὄχι μόνον τό ὑπόλοιπον, ὡς ἀνωτέρω ἐπραγματεύθημεν, ἀλλά καί τό πηλῖκον, στηριζόμενοι εἰς τόν κάτωθι κανόνα.

§ 67. Κ α ν ώ ν. Διά νά εὕρωμεν τόν συντελεστήν ἑνός ὅρου τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως πολυωνύμου τινος $\varphi(x)$ διά $x-\alpha$, πολλαπλασιάζομεν ἐπί α τόν συντελεστήν τοῦ προηγουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου καί εἰς τό ἐξαγόμενον προσθέτομεν τόν συντελεστήν τοῦ ὅρου τοῦ διαιρετέου τοῦ κατέχοντος τήν αὐτήν τάξιν μέ τήν τάξιν τοῦ ζητουμένου ὅρου τοῦ πηλίκου. Τά ἀνωτέρω δυνάμεθα νά διαπιστώσωμεν ἀμέσως ἐάν ἐκτελέσωμεν τήν κάτωθι διαίρεσιν. Ἔστω τό διαιρετέον πολυώνυμον $\varphi(x)=Ax^4+Bx^3+\Gamma x^2+\Delta x+E$ καί διαιρέτης τό διώνυμον $x-\alpha$. Ἐάν ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις εὑρίσκομεν ὡς πηλίκον τό πολυ-

$$Ax^3+(A\alpha+B)x^2+\left[(A\alpha+B)\alpha+\Gamma\right]x+\left[(A\alpha+B)\alpha+\Gamma\right]\alpha+\Delta$$

ΣΗΜ. Πρός εὕρεσιν τοῦ συντελεστοῦ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ πηλίκου διαιροῦμεν τόν συντελεστήν τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρετέου διά τοῦ συντελεστοῦ τοῦ α΄ ὅρου τοῦ διαιρέτου.

<u>Παράδ.</u> Νά εὑρεθῇ τό πηλῖκον καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)=5x^4-4x^3+7x^2-x+4$ διά τοῦ $x-2$, χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.

Οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου συμφώνως πρός τόν ἀνωτέρω κανόνα θά εἶναι κατά σειράν:

Συντελεστής τοῦ	α΄ ὅρου	x^3	εἶναι	$5:1 =$	5
»	» β΄ »	x^2	»	$5\cdot2+(-4)=$	6
»	» γ΄ »	x^1	»	$6\cdot2+7=$	19
»	» δ΄ »	x^0 (σταθερός ὅρος)	εἶναι	$19\cdot2+(-1)=$	37
»	» ε΄ »	(τό ὑπόλοιπον)	»	$37\cdot2+4=$	78.

Ὅθεν οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου διατεταγμένου κατά τάς κατιούσας δυνάμεις εἶναι κατά σειράν 5, 6, 19, 37 καί ὁ τελευταῖος ὅρος 78 εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως. Τό πηλῖκον ἄρα τῆς ἀνωτέρω διαιρέσεως εἶναι: $5x^3+6x^2+19x+37$ καί $Y=78$.

442. <u>*Νά εὑρεθῇ τό πηλῖκον καί τό ὑπόλοιπον τῆς κάτωθι διαιρέσεως:*</u> $(x^5-3x^2-4):(x+3)$.

Πρός ἐφαρμογήν τοῦ κανόνος θεωροῦμεν τόν διαιρετέον πλήρες πολυώνυμον διατεταγμένον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x, ὡς ἑξῆς: $x^5-3x^2-4=x^5+0x^4+0x^3-3x^2+0x-4$ τόν δέ διαιρέτην $x+3=x-(-3)$

Ὅθεν οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου θά εἶναι:

Συντελεστής τοῦ	α΄ ὅρου	$1:1=1$
»	» β΄ »	$1\cdot(-3)+0=-3$
»	» γ΄ »	$-3\cdot(-3)+0=9$
»	» δ΄ »	$9\cdot(-3)+(-3)=-30$
»	» ε΄ » (σταθερός ὅρος)	$-30\cdot(-3)+0=90$
	Τό ὑπόλοιπον	$90\cdot(-3)+(-4)=-274$.

Ἄρα τό μέν πηλίκον τῆς διαιρέσεως εἶναι: $x^4-3x^3+9x^2-30x+90$

τό δέ ὑπόλοιπον εἶναι: -274.

443. *Νά εὑρεθῇ τό πηλῖκον καί τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως $(2x^3-8x^2+3x+4):(2x-1)$ χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.*

Οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων τοῦ πηλίκου κατά σειράν θά εἶναι ἐνταῦθα:

Συντελεστής τοῦ α΄. ὅρου		$2:2=1$
»	» β΄. »	$\left[1\cdot1+(-8)\right]:2=-\frac{7}{2}$
»	» γ΄ » σταθερός ὅρος	$\left[\left(-\frac{7}{2}\right)\cdot1+3\right]:2=-\frac{1}{4}$

Ἑπομένως τό πηλῖκον θά εἶναι : $x^2-\frac{7}{2}x-\frac{1}{4}$. Τό δέ ὑπόλοιπον εὑρίσκομεν θέτοντες εἰς τόν διαιρετέον ὅπου x τό $\frac{1}{2}$.

$$Y=2\left(\frac{1}{2}\right)^3-8\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\frac{1}{2}+4=\frac{1}{4}-\frac{8}{4}+\frac{6}{4}+4=\frac{15}{4}.$$

444. *Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον καί τό ὑπόλοιπον τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις:*

1. $(x^5-4x^4+x^2-2x-8):(x-2)$ Ἀπ. $\Pi=x^4-2x^3-4x^2-7x-16$, $Y=-40$
2. $(2x^3-5x^2-10x+6):(x+4)$ » $\Pi=2x^2-13x+42$, $Y=-162$
3. $(3x^2-6x+4):(2x+3)$ » $\Pi=\frac{3}{2}x-\frac{21}{4}$, $Y=\frac{79}{4}$

---

§ 68. ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΑ ΠΗΛΙΚΑ

Αἱ τέσσαρες διαιρέσεις διωνύμων τῆς μορφῆς $(x^\mu\pm\alpha^\mu):(x\pm\alpha)$ παρέχουν ὑπόλοιπα καί πηλίκα, τά ὁποῖα εὑρίσκομεν χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις. Τά οὕτω εὑρισκόμενα πηλίκα καλοῦνται <u>ἀξιοσημείωτα πηλίκα</u> καί εἶναι πολυώνυμα πλήρη, βαθμοῦ κατά μονάδα μικροτέρου ἀπό τόν βαθμόν τοῦ διαιρετέου καί διατεταγμένα κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x καί ἀνιούσας δυνάμεις τοῦ α. Οἱ ὅροι τοῦ πηλίκου εἶναι ὅλοι μέν θετικοί ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς μορφῆς $x-\alpha$, ἐναλλάξ δέ θετικοί καί ἀρνητικοί ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι τῆς μορφῆς $x+\alpha$.

α) <u>Διαίρεσις τοῦ $(x^{\mu}-\alpha^{\mu}):(x-\alpha)$.</u>

Τό ὑπόλοιπον ταύτης εἶναι $Y=\alpha^{\mu}-\alpha^{\mu}=0$ · ἤτοι ἡ διαίρεσις εἶναι πάντοτε τελεία, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἐκθέτου μ. Τό πηλίκον ταύτης εἶναι: $\Pi(x)=x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}+\alpha^{3}x^{\mu-4}+\cdots+\alpha^{\mu-2}x^{1}+\alpha^{\mu-1}$

Ἄρα: $x^{\mu}-\alpha^{\mu}=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}+\cdots\cdots+\alpha^{\mu-1})$.

β) <u>Διαίρεσις τοῦ $(x^{\mu}+\alpha^{\mu}):(x-\alpha)$.</u>

Ἡ διαίρεσις αὕτη εἶναι ἀτελής οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἐκθέτου μ. Διότι: $Y=\alpha^{\mu}+\alpha^{\mu}=2\alpha^{\mu}$.

Τό πηλίκον δέ: $\Pi(x)=x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}+\alpha^{3}x^{\mu-4}+\cdots\cdots+\alpha^{\mu-1}$

Ἄρα: $x^{\mu}+\alpha^{\mu}=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}+\cdots\cdots+\alpha^{\mu-1})+2\alpha^{\mu}$.

γ) <u>Διαίρεσις τοῦ $(x^{\mu}-\alpha^{\mu}):(x+\alpha)$.</u>

Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ διά τοῦ $x+\alpha$ θά εἶναι:

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^{\mu}-\alpha^{\mu}\begin{cases}=0 & \text{ὅταν } \mu=\text{ἄρτιος}=2K\\ =-2\alpha^{\mu} & \text{»}\quad \mu=\text{περιττός}=2K+1\end{cases}$$

τό δέ πηλίκον εἰς τάς δύο περιπτώσεις θά εἶναι:

$$\Pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}-\alpha^{3}x^{\mu-4}+\cdots\cdots\mp\alpha^{\mu-1}$$

Ἄρα: $x^{\mu}-\alpha^{\mu}=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}-\cdots\cdots-\alpha^{\mu-1})$ ὅταν μ = ἄρτιος

$x^{\mu}-\alpha^{\mu}=(x+\alpha)(x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}-\cdots\cdots+\alpha^{\mu-1})+(-2\alpha^{\mu})$ ὅταν μ=περιττός

δ) <u>Διαίρεσις τοῦ $(x^{\mu}+\alpha^{\mu}):(x+\alpha)$</u>

Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)=x^{\mu}+\alpha^{\mu}$ διά τοῦ $x+\alpha$ θά εἶναι:

$$\varphi(-\alpha)=(-\alpha)^{\mu}+\alpha^{\mu}\begin{cases}=0 & \text{ὅταν } \mu=\text{περιττός}=2K+1\\ 2\alpha^{\mu} & \text{ὅταν } \mu=\text{ἄρτιος}=2K.\end{cases}$$

τό δέ πηλίκον ὅταν μ = περιττός, ἄρα μ−1 = ἄρτιος θά εἶναι:

$$\Pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}-\cdots\cdots-\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1}$$

ὅταν δέ μ = ἄρτιος, ὁπότε μ−1 = περιττός θά εἶναι:

$$\Pi(x)=x^{\mu-1}-\alpha x^{\mu-2}+\alpha^{2}x^{\mu-3}-\cdots\cdots+\alpha^{\mu-2}x-\alpha^{\mu-1}$$

<u>Παραδείγματα.</u> Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα καί τά πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

1) $(x^{5}-\alpha^{5}):(x-\alpha)$. $\quad Y=\alpha^{5}-\alpha^{5}=0$

$$\Pi=x^{4}+\alpha x^{3}+\alpha^{2}x^{2}+\alpha^{3}x+\alpha^{4}.$$

ἄρα: $x^5 - a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4)$.

2) $(x^5 + a^5) : (x-a)$ $\qquad Y = a^5 + a^5 = 2a^5$

$$\Pi = x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4$$

ἄρα: $x^5 + a^5 = (x-a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) + 2a^5$.

3) $(x^5 + a^5) : (x+a)$ $\qquad Y = (-a)^5 + a^5 = -a^5 + a^5 = 0$

$$\Pi = x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4$$

ἄρα: $x^5 + a^5 = (x+a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4)$.

4) $(x^7 - a^7) : (x+a)$ $\qquad Y = (-a)^7 - a^7 = -a^7 - a^7 = -2a^7$

$$\Pi = x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6$$

ἄρα: $x^7 - a^7 = (x+a)(x^6 - ax^5 + a^2x^4 - a^3x^3 + a^4x^2 - a^5x + a^6) + (-2a)^7$

5) $x^4 - a^4 = (x+a)(x^3 - ax^2 + a^2x + a^3)$ $\qquad Y = 0$

6) $x^4 - a^4 = (x-a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3)$ $\qquad Y = 0$

ΣΗΜ. Ἐπί τῇ βάσει τῶν ἀνωτέρω παραδειγμάτων ἀναλύονται εἰς γινόμενα δύο παραγόντων τά διώνυμα τῆς μορφῆς $x^\mu \pm a^\mu$, τά ὁποῖα διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τῶν διωνύμων $x \pm a$.

1. $x^3 - a^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2)$
2. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2)$
3. $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 + x + 1)$
4. $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1)$
5. $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
6. $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
7. $x^3 - 27 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$
8. $x^3 + 64 = (x+4)(x^2 - 4x + 16)$

445. *Νά εὑρεθῇ ποίων τελείων διαιρέσεων τῆς μορφῆς $(x^\mu \pm a^\mu) : (x \pm a)$ εἶναι πηλίκα τά κάτωθι:*

1. $a^2 - ab + b^2$ $\qquad$ Ἀπ. $\dfrac{a^3 - b^3}{a - b}$
2. $a^2 + ab + b^2$ $\qquad$ » $\dfrac{a^3 + b^3}{a + b}$
3. $x^2 + x + 1$ $\qquad$ » $\dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$
4. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$ $\qquad$ » $\dfrac{x^6 - 1}{x + 1}$
5. $x^5 - x^4y + x^3y^2 - x^2y^3 + xy^4 - y^5$
6. $a^5b^5 + a^4b^4\rho + a^3b^3\rho^2 + a^2b^2\rho^3 + ab\rho^4 + \rho^5$
7. $a^{\nu-1} + a^{\nu-2} + a^{\nu-3} + \dots + a^2 + a + 1$
8. $64x^6 - 32x^5y + 16x^4y^2 - 8x^3y^3 + 4x^2y^4 - 2xy^5 + y^6$.

446. *Νά ὑπολογισθοῦν τά πηλίκα καί τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις:*

1. $\dfrac{x^3+125y^3}{x+5y}$ ᾿Απ. $Y=(-5y)^3+125y^3=-125y^3+125y^3=0$
$\Pi=x^2-5xy+25y^2$.

2. $\dfrac{64x^3-1}{4x-1}$ ᾿Απ. $\dfrac{(4x)^3-1^3}{4x-1}=(4x)^2+4x+1^2=16x^2+4x+1$
$Y=1^3-1^3=0$

3. $\dfrac{a^5x^5+b^5y^5}{ax+by}$ ᾿Απ. $\dfrac{(ax)^5+(by)^5}{ax+by}=a^4x^4+a^3x^3by+a^2x^2b^2y^2+axb^3y^3+$
$+b^4y^4$. $Y=0$

447. *Νά ὑπολογισθοῦν τά πηλίκα καί τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις:*

1. $\dfrac{625a^4-81b^4}{5a-3b}$

2. $\dfrac{x^{4a}-y^{4b}}{x^a-y^b}$

3. $\left(\dfrac{1}{x^{3\omega}}-y^{3\omega}\right):\left(\dfrac{1}{x^{\omega}}-y^{\omega}\right)$

4. $\left(x^{5\nu}-\dfrac{1}{y^{5\nu}}\right):\left(x^{\nu}-\dfrac{1}{y^{\nu}}\right)$

᾿Αποκ.

1. $\dfrac{625a^4-81b^4}{5a-3b}=\dfrac{(5a)^4-(3b)^4}{5a-3b}=\Pi=(5a)^3+(5a)^2\cdot 3b+5a(3b)^2+(3b)^3$

ἤ $\Pi=125a^3+75a^2b+45ab^2+27b^3$

καί $Y=0$

2. $\dfrac{x^{4a}-y^{4b}}{x^a-y^b}=\dfrac{(x^a)^4-(y^b)^4}{x^a-y^b}=\Pi=(x^a)^3+(x^a)^2\cdot y^b+x^a(y^b)^2+(y^b)^3$

ἤ $\Pi=x^{3a}+x^{2a}y^b+x^ay^{2b}+y^{3b}$.

῾Η διαίρεσις εἶναι τελεία διότι θέτοντες εἰς τόν διαιρετέον ὅπου x^a τό y^b λαμβάνομεν $Y=(y^b)^4-(y^b)^4=0$

3. ᾿Αντικαθιστῶντες τό $\dfrac{1}{x^{\omega}}=a$ καί $y^{\omega}=b$ ἑπομένως $\dfrac{1}{x^{3\omega}}=a^3$ καί $y^{3\omega}=b^3$ ἡ δοθεῖσα διαίρεσις λαμβάνει τήν μορφήν:

$$\left(\frac{1}{x^{3\omega}}-y^{3\omega}\right):\left(\frac{1}{x^{\omega}}-y^{\omega}\right)=(a^3-b^3):(a-b)=a^2+ab+b^2$$

ἤτοι: $\Pi=\dfrac{1}{x^{2\omega}}+\dfrac{y^{\omega}}{x^{\omega}}+y^{2\omega}$ ἤ $\Pi=x^{-2\omega}+x^{-\omega}y^{\omega}+y^{2\omega}$.

῾Η διαίρεσις εὐκόλως δεικνύεται ὅτι εἶναι τελεία.

4. ᾿Εργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω θέτοντες ὅπου $x^{\nu}=a$ καί $\dfrac{1}{y^{\nu}}=b$ ἑπομένως ὅπου $x^{5\nu}=a^5$ καί $\dfrac{1}{y^{5\nu}}=b^5$ εὑρίσκομεν:

$$\Pi = x^{4\nu} + x^{3\nu}\cdot\frac{1}{y^{\nu}} + x^{2\nu}\cdot\frac{1}{y^{2\nu}} + x^{\nu}\cdot\frac{1}{y^{3\nu}} + \frac{1}{y^{4\nu}}$$

ἢ $\Pi = x^{4\nu} + x^{3\nu}y^{-\nu} + x^{2\nu}y^{-2\nu} + x^{\nu}y^{-3\nu} + y^{-4\nu}$ καὶ $Y = 0$.

448. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετόν διά $x+y+\omega$ καί νά εὑρεθῇ τό πηλίκον χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις.*

Ἀπόκ. Ὁ διαιρέτης $x+y+\omega$ δύναται νά λάβῃ τήν μορφήν $x+a$ ἐάν γραφῇ οὕτω: $x+(y+\omega)$. Πρός εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου θέτομεν εἰς τόν διαιρετέον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ ὅπου x τό $-(y+\omega)$ ὁπότε λαμβάνομεν:

$$Y = \left[-(y+\omega)\right]^3 + y^3 + \omega^3 - 3y\omega\left[-(y+\omega)\right]$$

$$Y = -y^3 - 3y^2\omega - 3y\omega^2 - \omega^3 + y^3 + \omega^3 + 3y^2\omega + 3y\omega^2 = 0$$

Ἐπειδή δέ εὑρέθη ὑπόλοιπον 0, τό πολυώνυμον $x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega$ εἶναι διαιρετόν διά $x+y+\omega$.

Πρός εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τῆς διαιρέσεως διατάσσομεν τό πολυώνυμον κατά τάς κατιούσας δυνάμεις ἑνός γράμματός του, ἔστω τοῦ x, καί ἔπειτα ἐφαρμόζομεν τόν κανόνα τῆς § 67. Ἤτοι θά ἔχωμεν διατάσσοντες: $\left[x^3+0x^2-3y\omega x+(y^3+\omega^3)x^0\right] : \left[x+(y+\omega)\right]$

$$\text{Πηλ.} = x^2-(y+\omega)x+\left[(y+\omega)^2-3y\omega\right] = x^2+y^2+\omega^2-xy-y\omega-x\omega$$

Ἑπομένως δικαιολογεῖται καί πάλιν ἡ γνωστή ἀξιοσημείωτος ταυτότης, ὡς ἀναφέραμεν εἰς τάς ἀσκ. 375, 376 καί 408

$$x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega \equiv (x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2-xy-y\omega-\omega x).$$

449. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(x+y)^{\mu}-x^{\mu}-y^{\mu}$ εἶναι διαιρετή διά $x+y$ ὅταν τό μ εἶναι περιττός ἀριθμός.*

Ἀπ. $Y = (-y+y)^{\mu} - (-y)^{\mu} - y^{\mu} = -(-y)^{\mu} - y^{\mu} = y^{\mu} - y^{\mu} = 0$

καθόσον $\mu =$ περιττός $(-y)^{\mu} = -y^{\mu}$.

450. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(\alpha+\beta+\gamma)^{\mu}-\alpha^{\mu}-\beta^{\mu}-\gamma^{\mu}$ εἶναι διαιρετή διά $\alpha+\beta$, $\beta+\gamma$, $\gamma+\alpha$, ὅταν ὁ μ εἶναι ἀκέραιος θετικός καί περιττός ἀριθμός.*

Ἀπόκ. Διά νά δειχθῇ τοῦτο πρέπει θέτοντες εἰς τόν διαιρετέον

$(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$ ὅπου α τό $-\beta$ νά προκύπτῃ ἐξαγόμενον (δηλ. ὑπόλοιπον) μηδέν. Τό αὐτό πρέπει νά συμβῇ θέτοντες χωριστά ὅπου β τό $-\gamma$ νά προκύπτῃ ἐξαγόμενον μηδέν, ὁπότε θά διαιρῆται καί διά $\beta+\gamma$. Τό αὐτό, τέλος, ἄν θέσωμεν ὅπου γ τό $-\alpha$ νά προκύπτῃ μηδέν. Ἀλλά τοῦτο ὅμως συμβαίνει, διότι προκειμένου περί τοῦ διαιρέτου $\alpha+\beta$ θά ἔχωμεν:

$$Y=(-\beta+\beta+\gamma)^\mu-(-\beta)^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu=\gamma^\mu-(-\beta)^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu=\gamma^\mu+\beta^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu=0.$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται ὅτι καί τά ἄλλα δύο διώνυμα $(\beta+\gamma)$ καί $(\gamma+\alpha)$ διαιροῦν ἀκριβῶς τό $(\alpha+\beta+\gamma)^\mu-\alpha^\mu-\beta^\mu-\gamma^\mu$

451. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $7^{2\nu+1}+1$ εἶναι διαιρετός διά 8, τοῦ ν ὄντος ἀκεραίου καί θετικοῦ.*

Ἀπόκ. Πράγματι ἐπειδή ὁ ἐκθέτης $2\nu+1$ = περιττός ἀριθμός τό δέ 8 γράφεται 7+1. ἀγόμεθα εἰς τήν διαίρεσιν τῆς μορφῆς $(x^\nu+1):(x+1)$, ἡ ὁποία εἶναι τελεία ὅταν ν = περιττός. Ἑπομένως ἡ διαίρεσις $(7^{2\nu+1}+1):(7+1)$ εἶναι τελεία. Πράγματι θέτοντες ὅπου 7 τό -1 λαμβάνομεν: $Y=(-1)^{2\nu+1}+1=-1+1=0$

452. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $15^\nu-1$ εἶναι διαιρετός διά 14· εἰς ποίαν περίπτωσιν οὗτος εἶναι διαιρετός διά τοῦ 16; (ν = ἀκέρ.)*

Ἀπόκ. Πράγματι, ἐπειδή ὁ $14=15-1$ ἀγόμεθα εἰς τήν διαίρεσιν $(15^\nu-1):(15-1)$, ἡ ὁποία εἶναι τελεία διά πᾶσαν ἀκεραίαν τιμήν τοῦ ν. Ἐπειδή ὁ 16 γράφεται 15+1 θά ἔχωμεν τήν διαίρεσιν: $(15^\nu-1):(15+1)$, ἡ ὁποία διά νά εἶναι δυνατή πρέπει ὁ ν = ἄρτιος.

453. *Ὁ ἀριθμός $25^\rho+1$ εἶναι διαιρετός διά τοῦ 24; διά ποίαν ἀκεραίαν τιμήν τοῦ ρ θά εἶναι διαιρετός διά 26;*

454. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $5^{2\nu+1}+4^{2\nu+1}$ εἶναι διαιρετός διά 9 δι' οἱανδήποτε ἀκεραίαν τιμήν τοῦ ν.*

Ἀπ. Πράγματι ἐπειδή $9=5+4$ καί $2\nu+1$ = περιττός κ.λ.π.

455. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $5^{14}+5^7$ εἶναι διαιρετή διά 6, καθώς ἡ παράστασις 2^5+2^{10} εἶναι διαιρετή διά 3.*

Ἀπ. $5^{14}+5^7=5^7(5^7+1)$ καί ἐπειδή $6=5+1$ ἕπεται ὅτι ὁ β' παράγων (5^7+1) διαιρεῖται ἀκριβῶς διά 5+1· ἄρα τό 5+1 = 6 διαιρεῖ καί τό πολλαπλάσιον τοῦ (5^7+1) δηλ. $5^{14}+5^7$. Ὁμοίως ἀποδεικνύεται καί διά τό ἄθροισμα 2^5+2^{10}, ὅτι διαιρεῖται διά 3.

456. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $2^{35}-1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 31 καί τοῦ 127.*

457. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό $x^\mu-\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετόν διά $x^\nu-\alpha^\nu$, ἀρκεῖ τό μ νά εἶναι εἴτε ἄρτιον εἴτε περιττόν πολλαπλάσιον τοῦ ν.*

Ἀπόκ. Πρός ἀπόδειξιν τούτου θέτομεν $x^\nu=y$, $\alpha^\nu=\beta$ καί $\mu=\kappa\nu$, ἔνθα κ δύναται νά εἶναι τυχών ἀκέραιος ἀριθμός. Ἡ διαίρεσις τότε $(x^\mu-\alpha^\mu):(x^\nu-\alpha^\nu)$ γίνεται τῆς μορφῆς $(y^\kappa-\beta^\kappa):(y-\beta)$ ἡ ὁποία ὡς γνωστόν εἶναι τελεία καί δίδει:

$$\Pi\eta\lambda. = y^{\kappa-1}+\beta y^{\kappa-2}+\beta^2 y^{\kappa-3}+\dots\dots+\beta^{\kappa-1}.$$

Ἀντικαθιστῶντες τώρα τό y διά τοῦ ἴσου του x^ν καί τό β διά τοῦ ἴσου του α^ν λαμβάνομεν πηλίκον:

$$\Pi\eta\lambda. = x^{\mu-\nu}+\alpha^\nu x^{\mu-2\nu}+\alpha^{2\nu}x^{\mu-3\nu}+\dots\dots+\alpha^{\mu-\nu}$$

διότι ὁ ὅρος $y^{\kappa-1}=(x^\nu)^{\kappa-1}=x^{\kappa\nu-\nu}=x^{\mu-\nu}$

ὁ δέ ὅρος $\beta^{\kappa-1}=(\alpha^\nu)^{\kappa-1}=\alpha^{\kappa\nu-\nu}=\alpha^{\mu-\nu}$ κ.λ.π.

Π.χ. Αἱ διαιρέσεις $(x^{15}-\alpha^{15}):(x^5-\alpha^5)$ καί $(x^{18}-\alpha^{18}):(x^3-\alpha^3)$ εἶναι δυναταί (τέλειαι) καθόσον εἶναι τῆς ἀνωτέρω μορφῆς καί ὁ μέν 15 = περιττόν πολλαπλ. τοῦ 5, $(15=3\cdot5)$ καί ὁ 18 ἄρτιον πολλαπλ. τοῦ 3, $(18=6\cdot3)$.

$$\frac{x^{15}-\alpha^{15}}{x^5-\alpha^5}=\frac{(x^5)^3-(\alpha^5)^3}{x^5-\alpha^5}=(x^5)^2+x^5\alpha^5+(\alpha^5)^2=x^{10}+\alpha^5x^5+\alpha^{10}$$

$$\frac{x^{18}-\alpha^{18}}{x^3-\alpha^3}=\frac{(x^3)^6-(\alpha^3)^6}{x^3-\alpha^3}=x^{15}+\alpha^3x^{12}+\alpha^6x^9+\alpha^9x^6+\alpha^{12}x^3+\alpha^{15}.$$

458. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό $x^\mu+\alpha^\mu$ εἶναι διαιρετόν διά $x^\nu+\alpha^\nu$, ἀρκεῖ τό μ νά εἶναι περιττόν πολλαπλάσιον τοῦ ν ($\mu=(2\kappa+1)\nu$) καί νά ὑπολογισθῇ τό πηλίκον.*

Ἀπόκ. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τήν ἀνωτέρω ἄσκησιν μέ ἀντικατάστασιν βοηθητικῶν γραμμάτων ἤ ἐργαζόμεθα ἀπ' εὐθείας ἐπί τῇ ὑποθέσει ὅτι $\mu=(2\kappa+1)\nu=2\kappa\nu+\nu$. Ἡ δοθεῖσα διαίρεσις $(x^\mu+\alpha^\mu):(x^\nu+\alpha^\nu)$ γίνεται:

$$\left[x^{(2\kappa+1)\nu}+\alpha^{(2\kappa+1)\nu}\right]:(x^{\nu}+\alpha^{\nu})=\left[(x^{\nu})^{2\kappa+1}+(\alpha^{\nu})^{2\kappa+1}\right]:(x^{\nu}+\alpha^{\nu}).$$

Πρός εὕρεσιν τοῦ ὑπολοίπου θέτομεν ὅπου x^{ν} τό $-\alpha^{\nu}$ εἰς τόν διαιρετέον καί λαμβάνομεν $Y=(-\alpha^{\nu})^{2\kappa+1}+(\alpha^{\nu})^{2\kappa+1}=-\alpha^{\nu(2\kappa+1)}+\alpha^{\nu(2\kappa+1)}=0$. Ἄρα τό $x^{\mu}+\alpha^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν διά $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ ὅταν $\mu=(2\kappa+1)\nu$.

Τό δέ πηλίκον τῆς διαιρέσεως κατ' ἀνάλογον τρόπον εὑρίσκομεν ὅτι θά εἶναι: $\Pi\eta\lambda.=x^{\mu-\nu}-\alpha^{\nu}x^{\mu-2\nu}+\alpha^{2\nu}x^{\mu-3\nu}-\alpha^{3\nu}x^{\mu-4\nu}+\cdots+\alpha^{\mu-\nu}$.

459. *Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό $x^{\mu}-\alpha^{\mu}$ εἶναι διαιρετόν διά $x^{\nu}+\alpha^{\nu}$ ὅταν τό μ εἶναι ἄρτιον πολλαπλάσιον τοῦ ν. ($\mu=2\kappa\nu$).*

Ἀπόκ. Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω, ἄσκ. 458.

460. *Ἐάν μ καί ν εἶναι περιττά ἰσοπλάσια τῶν ρ καί σ, ἀντιστοίχως, νά δειχθῆ ὅτι τό πολυώνυμον $x^{\mu}+\alpha^{\nu}$ εἶναι διαιρετόν διά $x^{\rho}+\alpha^{\sigma}$. ($\mu=(2\kappa+1)\rho$ καί $\nu=(2\kappa+1)\sigma$)*

Ἀπόκ. Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω.

461. *Ἐάν οἱ τρεῖς ἀριθμοί α,β,γ εἶναι διάφοροι ἀλλήλων καί ἐπαληθεύουν τάς σχέσεις*

$$\alpha^3+\mu\alpha+\nu=0\ ,\quad \beta^3+\mu\beta+\nu=0\ ,\quad \gamma^3+\mu\gamma+\nu=0$$

νά δειχθῆ ὅτι $\alpha+\beta+\gamma=0$.

Ἀπόκ. Ἀφαιροῦμεν τήν δευτέραν ἰσότητα ἀπό τήν πρώτην καί λαμβάνομεν:

$$\alpha^3-\beta^3+\mu(\alpha-\beta)=0$$

ἤ $$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)+\mu(\alpha-\beta)=0$$

καί διαιροῦντες διά $\alpha-\beta\neq 0$ καθόσον $\alpha\neq\beta$

$$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+\mu=0 \qquad (1)$$

Ἀφαιροῦμεν τήν τρίτην ἰσότητα ἀπό τήν πρώτην

$$\alpha^3-\gamma^3+\mu(\alpha-\gamma)=0$$

ἤ $$(\alpha-\gamma)(\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2)+\mu(\alpha-\gamma)$$

ἤ $$\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+\mu \quad \text{ἐπειδή} \quad \alpha-\gamma\neq 0 \qquad (2)$$

Ἀφαιροῦντες τάς ἰσότητας (1) καί (2) κατά μέλη λαμβάνομεν

$$\alpha\beta-\alpha\gamma+\beta^2-\gamma^2=0$$

ἤ $$\alpha(\beta-\gamma)+(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)=0$$

καί ἐπειδή $\beta-\gamma\neq 0$ διαιροῦντες διά $\beta-\gamma$ λαμβάνομεν $\alpha+\beta+\gamma=0$.

462. Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα καί τά πηλίκα τῶν κάτωθι διαιρέσεων χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις.

1) $\frac{x^{21}+\alpha^{21}}{x^7+\alpha^7}$ Πηλ. $= x^{14} - x^7y^7 + y^{14}$, $\Upsilon = 0$.

2) $\frac{x^{24}-\alpha^{24}}{x^6+\alpha^6}$ Πηλ. $= x^{18} - x^{12}\alpha^6 + x^6\alpha^{12} - \alpha^{18}$, $\Upsilon = 0$.

3) $\frac{x^{20}-y^{15}}{x^4-y^3}$ Πηλ. $= x^{16} + x^{12}y^3 + x^8y^6 + x^4y^9 + y^{12}$, $\Upsilon = 0$.

4) $\frac{\alpha^{10}\beta^5-1}{\alpha^2\beta-1}$ Πηλ. $= \alpha^8\beta^4 + \alpha^6\beta^3 + \alpha^4\beta^2 + \alpha^2\beta + 1$, $\Upsilon = 0$.

463. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα καί τά ὑπόλοιπα τῶν κάτωθι διαιρέσεων.

1) $\left(x^{\frac{3}{5}} - y^{\frac{3}{5}}\right) : \left(x^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{5}}\right)$, 2) $\left(x^{\frac{3}{5}} - y^{\frac{3}{8}}\right) : \left(x^{\frac{1}{5}} - y^{\frac{1}{8}}\right)$, 3) $\left(x^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{1}{7}}\right) : \left(x^{\frac{1}{15}} + y^{\frac{1}{21}}\right)$.

Ἀπόκ. 1) $\left[\left(x^{1/5}\right)^3 - \left(y^{1/5}\right)^3\right] : \left(x^{\frac{1}{5}} - y^{1/5}\right)$ ἤ $(\alpha^3-\beta^3):(\alpha-\beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$

ἐάν τεθῇ $x^{1/5} = \alpha$, $y^{1/5} = \beta$ ἄρα $\Upsilon = 0$, $\Pi = x^{\frac{2}{5}} + x^{\frac{1}{5}}y^{\frac{1}{5}} + y^{\frac{2}{5}}$.

2) $\left[\left(x^{1/5}\right)^3 - \left(y^{1/8}\right)^3\right] : \left(x^{1/5} - y^{1/8}\right) = x^{2/5} + x^{1/5}y^{1/8} + y^{1/4}$, $\Upsilon = 0$

3) $\left[\left(x^{1/15}\right)^3 + \left(y^{1/21}\right)^3\right] : \left(x^{1/15} + y^{1/21}\right) = x^{\frac{2}{15}} - x^{\frac{1}{15}}y^{\frac{1}{21}} + y^{\frac{2}{21}}$ καί $\Upsilon = 0$.

464. Νά εὑρεθοῦν τά πηλίκα καί ὑπόλοιπα τῶν διαιρέσεων:

1) $\left(\alpha^{1/2} - \beta^{1/3}\right) : \left(\alpha^{1/10} - \beta^{1/15}\right)$ Ἀπ. Πηλ $= \alpha^{2/5} + \alpha^{3/10}\beta^{1/15} + \alpha^{1/5}\beta^{2/15} + \alpha^{1/10}\beta^{1/5} + \beta^{4/15}$, $\Upsilon = 0$.

2) $\left(\alpha^1 + \beta^{1/2}\right) : \left(\alpha^{1/3} + \beta^{1/6}\right)$ Ἀπ. $\Upsilon\pi = 0$, Πηλ. = ;

3) $\left(\alpha^2 + \beta^{3/2}\right) : \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{1/2}\right)$ Ἀπ. $\Upsilon\pi = 0$, Πηλ. = ;

465. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ κάτωθι διαίρεσις καί νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ πηλίκου διά $\alpha = 0{,}01$ καί $\beta = 0{,}16$, $\left(\alpha^{3/4} - \beta^{3/4}\right) : \left(\alpha^{1/4} - \beta^{1/4}\right)$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1946

Ἀπόκ. $\left(\alpha^{3/4} - \beta^{3/4}\right) : \left(\alpha^{1/4} - \beta^{1/4}\right) = \alpha^{1/2} + \alpha^{1/4}\beta^{1/4} + \beta^{1/2}$

$$= (0{,}01)^{1/2} + (0{,}01 \cdot 0{,}16)^{\frac{1}{4}} + (0{,}16)^{1/2}$$

$$= \left[(0{,}1)^2\right]^{1/2} + \left[(0{,}2)^4\right]^{1/4} + \left[(0{,}4)^2\right]^{1/2} = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}7.$$

466. Νά εὑρεθοῦν τά ὑπόλοιπα καί πηλίκα τῶν διαιρέσεων:

1) $\left(x^{-\frac{4}{5}}-y^{-\frac{1}{2}}\right):\left(x^{-\frac{1}{5}}-y^{-\frac{1}{8}}\right)$. ***Ἀπ.*** $\Pi=x^{-\frac{3}{5}}+x^{-\frac{2}{5}}y^{-\frac{1}{8}}+x^{-\frac{1}{5}}y^{-\frac{1}{4}}+y^{-\frac{3}{8}}$, $Y=0$.

2) $\left(x^{-\frac{5}{11}}+y^{-1}\right):\left(x^{-\frac{1}{11}}+y^{-\frac{1}{5}}\right)$, 3) $\left(x^{-2}+y^{-3}\right):\left(x^{-2/3}+y^{-1}\right)$

Ἀπ. $Y\pi.=0$, Πηλ. = ; Ἀπ. $Y\pi.=0$, Πηλ. = ;

467. *Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως:*

$$\left[(\alpha^2-2\alpha\gamma)^3+\gamma^6\right]:(\alpha-\gamma)^2$$

Ἀπόκ. Ἐάν ἀναπτύξωμεν τόν διαιρέτην $(\alpha-\gamma)^2=\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2=$ $=(\alpha^2-2\alpha\gamma)+\gamma^2$ καί ἀντικαταστήσωμεν θά ἔχωμεν τήν διαίρεσιν: $\left[(\alpha^2-2\alpha\gamma)^3+(\gamma^2)^3\right]:\left[(\alpha^2-2\alpha\gamma)+\gamma^2\right]$ ἡ ὁποία δίδει προφανῶς $Y\pi=0$ καί

$$\Pi\eta\lambda.=(\alpha^2-2\alpha\gamma)^2-(\alpha^2-2\alpha\gamma)\gamma^2+\gamma^4=\alpha^4-4\alpha^3\gamma+3\alpha^2\gamma^2+2\alpha\gamma^3+\gamma^4.$$

468. *Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως:*

$$\left[(x+y+z)^3-(2x-y)^3\right]:(2y-x+z)$$

Ἀπόκ. Ὁ διαιρέτης $2y-x+z$ δύναται νά γραφῇ καί οὕτω: $2y-x+z=y+y+x+2x+z=(x+y+z)-(2x-y)$ καί ἡ διαίρεσις γράφεται: $\left[(x+y+z)^3-(2x-y)^3\right]:\left[(x+y+z)-(2x-y)\right]$ ἔνθα $Y=(2x-y)^3-(2x-y)^3=0$

$$\Pi\eta\lambda.=(x+y+z)^2+(x+y+z)(2x-y)+(2x-y)^2=$$
$$=7x^2-xy+4xz+y^2+z^2+yz.$$

469. *Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως:*

$$(343x^3-735x^2y+525xy^2-125y^3):(49x^2-70xy+25y^2).$$

Ἀπ. $=7x-5y$.

470. *Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον:*

$$\frac{(x+y)^4-(x-y)^4}{(x+y)^3+(x+y)^2(x-y)+(x+y)(x-y)^2+(x-y)^3}$$ Ἀπ $=2y$

471. *Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις:*

$(\alpha^3-1)x^3+(2\alpha^3-\alpha^2-1)x^2+(\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+3)x+3\alpha^2$

διά τοῦ $(\alpha-1)x^2+(\alpha-1)x+3$. Ἀπ $=Y=0$

* ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ $\varphi(x)$ ΔΙΑ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ ΠΟΛΛΩΝ ΔΙΩΝΥΜΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ.

§69. Διαίρεσις διά $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Θεώρημα. Όταν ἕν ἀκέραιον πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν δι᾽ ἑκάστου τῶν διωνύμων $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$ χωριστά, ἔνθα $\alpha\neq\beta\neq\gamma$, τό πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ γινομένου αὐτῶν $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδή τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν, χωριστά, διά $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$ ἕπεται ὅτι θά ἔχωμεν ἀντιστοίχως ὑπόλοιπα:

$$\varphi(\alpha)=0$$
$$\varphi(\beta)=0 \quad (1)$$
$$\varphi(\gamma)=0$$

Ἐάν καλέσωμεν $\pi_1(x)$ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πολυωνύμου $\varphi(x)$ διά $(x-\alpha)$ θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα $\varphi(x)\equiv(x-\alpha)\pi_1(x)$ (2)

Ἐπειδή ἡ (2) ὡς ταυτότης ἀληθεύει διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x θά ἀληθεύῃ καί διά $x=\beta$. Ἄρα ἡ (2) γίνεται $\varphi(\beta)=(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)$.

Ἀλλά τό $\varphi(\beta)$ ἐκ τῶν σχέσεων (1) ἰσοῦται μέ 0, ἄρα θά ἔχωμεν $0=(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)$. Διά νά εἶναι ὅμως τό γινόμενον $(\beta-\alpha)\pi_1(\beta)$ ἴσον μέ μηδέν πρέπει ὁ εἷς ἐκ τῶν δύο παραγόντων νά ἰσοῦται μέ μηδέν καί ἐπειδή $\beta-\alpha\neq 0$ καθότι ἐξ ὑποθέσεως $\alpha\neq\beta$ ἕπεται $\pi_1(\beta)=0$. Ἀλλ᾽ ἐπειδή $\pi_1(\beta)=0$, ἕπεται ὅτι τό πολυώνυμον $\pi_1(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-\beta)$ καί ἔστω ὅτι δίδει πηλίκον $\pi_2(x)$. Θά ἔχωμεν τότε τήν ταυτότητα $\pi_1(x)\equiv(x-\beta)\pi_2(x)$ (3)

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν (2) τό $\pi_1(x)$ μέ τό ἴσον του $(x-\beta)\pi_2(x)$ λαμβάνομεν: $\varphi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)\pi_2(x)$ (4)

Ἡ ταυτότης αὕτη ἐπειδή ἀληθεύει διά πᾶσαν τιμήν τοῦ x θά ἀληθεύῃ καί διά $x=\gamma$· ἐάν λοιπόν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τήν (4) τό x διά τοῦ γ λαμβάνομεν $\varphi(\gamma)=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\pi_2(\gamma)$

Ἀλλά τό $\varphi(\gamma)=0$ καθόσον τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν ἐξ ὑποθέσεως, διά $x-\gamma$, ὡς ἐμφαίνεται ἐκ τῶν σχέσεων (1), ἐπομένως θά ἔχωμεν:

$$0=(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\pi_2(\gamma).$$

Ἀλλ᾽ ἐπειδή $\gamma-\alpha\neq 0$ καί $\gamma-\beta\neq 0$ κατ᾽ ἀνάγκην ὁ τρίτος παράγων $\Pi_2(\gamma)$ πρέπει νά ἰσοῦται μέ μηδέν: $\Pi_2(\gamma)=0$.

Ἐπειδή $\Pi_2(\gamma)=0$, ἕπεται ὅτι τό πολυώνυμον $\Pi_2(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-\gamma$ καί ἔστω ὅτι δίδει πηλίκον $\Pi_3(x)$, ὁπότε θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα: $\Pi_2(x)\equiv(x-\gamma)\Pi_3(x)$.

Ἀντικαθιστῶντες ἤδη εἰς τήν (4) τό $\Pi_2(x)$ διά τοῦ ἴσου του $(x-\gamma)\Pi_3(x)$ λαμβάνομεν
$$\varphi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\Pi_3(x) \qquad (5)$$

Ἀλλά ἡ (5) δηλοῖ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ καί δίδει πηλίκον πολυώνυμόν τι $\Pi_3(x)$. ὅ. ἔ. δ.

Ἀντιστρόφως. Ἐάν πολυώνυμόν τι $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$, θά εἶναι διαιρετόν χωριστά διά $(x-\alpha)$, διά $(x-\beta)$, διά $(x-\gamma)$.

Πράγματι ἐάν καλέσωμεν $\Pi(x)$ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ $\varphi(x)$ διά $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ θά ἔχωμεν τήν ταυτότητα $\varphi(x)\equiv(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\Pi(x)$.

Ἡ ταυτότης ὅμως αὐτή δεικνύει ὅτι τό $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-\alpha$ καί δίδει πηλίκον $(x-\beta)(x-\gamma)\Pi(x)$ ἤ ὅτι εἶναι διαιρετόν διά $x-\beta$ καί δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\gamma)\Pi(x)$ ἤ ὅτι εἶναι διαιρετόν διά $x-\gamma$ καί δίδει πηλίκον $(x-\alpha)(x-\beta)\Pi(x)$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύεται τό θεώρημα, ἐάν οἱ διώνυμοι παράγοντες εἶναι περισσότεροι τῶν τριῶν.

Παράδειγμα. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)=7x^3-42x^2+77x-42$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ γινομένου $(x-1)(x-2)(x-3)$.

Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἀποδειχθῇ ὅτι διαιρεῖται χωριστά διά $(x-1)$, διά $(x-2)$ καί διά $(x-3)$. Ἵνα τοῦτο συμβαίνῃ πρέπει τά $\varphi(1)=0$, $\varphi(2)=0$, $\varphi(3)=0$.

Πράγματι τοῦτο συμβαίνει καθόσον:

$$\varphi(1)=7\cdot1^3-42\cdot1^2+77\cdot1-42=7-42+77-42=84-84=0.$$
$$\varphi(2)=7\cdot2^3-42\cdot2^2+77\cdot2-42=56-168+154-42=210-210=0$$
$$\varphi(3)=7\cdot3^3-42\cdot3^2+77\cdot3-42=189-378+231-42=420-420=0.$$

Ἄρα τό $\varphi(x)$ ἀφοῦ διαιρεῖται διά $(x-1)$, $(x-2)$, $(x-3)$ χωριστά θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου $(x-1)(x-2)(x-3)$ κατά τό ἀνωτέρω θεώρημα.

472. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)=2x^5-x^4-10x^3+5x^2+8x-4$ εἶναι διαιρετόν διά τοῦ $(x^2-1)(x^2-4)$.*

Ἀπ. Ἐπειδή $(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$, ἀρκεῖ τό $\varphi(x)$ νά διαιρῆται ἀκριβῶς δι' ἑκάστου τῶν τεσσάρων διωνύμων χωριστά, ἤτοι πρέπει $\varphi(1)=0$, $\varphi(-1)=0$, $\varphi(2)=0$ καί $\varphi(-2)=0$. Πράγματι:

$\varphi(1)=2\cdot 1^5-1^4-10\cdot 1^3+5\cdot 1^2+8\cdot 1-4=2-1-10+5+8-4=0.$

Ὁμοίως: $\varphi(-1)=2\cdot(-1)^5-(-1)^4-10\cdot(-1)^3+5\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)-4=-2-1+10+5-8-4=0$

Ὁμοίως δεικνύεται ὅτι καί $\varphi(2)=0$ καί $\varphi(-2)=0$.

Ἄρα τό πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι δι[αι]ρετόν διά τοῦ γινομένου $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$ ἤ ὅπερ τό αὐτ[ό] διά $(x^2-1)(x^2-4)$.

473. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $y=\beta(x^3-\alpha^3)+\alpha x(x^2-\alpha^2)+\alpha^3(x-\alpha)$ εἶναι διαιρετόν διά $(\alpha+\beta)(x-\alpha)$.*

Ἀπ. Ἀρκεῖ νά ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι διαιρετόν χωριστά διά $(\alpha+\beta)$ καί $(x-\alpha)$. Πράγματι θέτοντες ὅπου α τό $-\beta$ εὑρίσκομεν

$$y_\Pi=\beta\left[(x^3-(-\beta)^3\right]+(-\beta)x\left[x^2-(-\beta)^2\right]+(-\beta)^3\left[x-(-\beta)\right]$$

$$=\beta(x^3+\beta^3)-\beta x(x^2-\beta^2)-\beta^3(x+\beta)$$

$$=\beta x^3+\beta^4-\beta x^3+\beta^3x-\beta^3x-\beta^4=0.$$

Ἑπομένως τό πολυώνυμον διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $(\alpha+\beta)$.

Ἐάν ἤδη ἀντικαταστήσωμεν ὅπου x τό α εὑρίσκομεν ἐξαγόμενον: $y_\Pi=\beta(\alpha^3-\alpha^3)+\alpha^2(\alpha^2-\alpha^2)+\alpha^3(\alpha-\alpha)=0$

ἄρα διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά $(x-\alpha)$. Ἑπομένως τό δοθέν πολυώνυμον εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ γινομένου $(\alpha+\beta)(x-\alpha)$.

474. *Ἐάν μ εἶναι ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)=(x-2)^{2\mu}+(x-1)^\mu-1$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-1)(x-2)$ καί νά εὑρεθῇ τό πηλίκον.*

Ἀπ. Ἵνα τό δοθέν πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-1)(x-2)$ πρέπει καί ἀρκεῖ τά $\varphi(1)=0$ καί $\varphi(2)=0$.

Πράγματι: $\varphi(1)=(1-2)^{2\mu}+(1-1)^\mu-1=(-1)^{2\mu}+0-1=1-1=0.$

Ὁμοίως: $\varphi(2)=(2-2)^{2\mu}+(2-1)^\mu-1=0+1^\mu-1=0.$

Πρός εὕρεσιν τοῦ πηλίκου τοῦ $\varphi(x)$ διά $(x-1)(x-2)$, διαιροῦμεν τό $\varphi(x)$ πρῶτον διά $(x-2)$ καί εὑρίσκομεν τό πηλίκον αὐτῶν καὶ κατόπιν τὸ εὑρεθὲν πηλίκον διαιροῦμεν διὰ x−1 καὶ εὑρίσκομεν τὸ νέον πηλίκον ὡς κατωτέρω:

$$\frac{\varphi(x)}{x-2}=\frac{(x-2)^{2\mu}+(x-1)^{\mu}-1}{x-2}=(x-2)^{2\mu-1}+\frac{(x-1)^{\mu}-1}{x-2}=(x-2)^{2\mu-1}+\frac{(x-1)^{\mu}-1}{(x-1)-1} \quad (1)$$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τῆς μορφῆς $\frac{x^{\mu}-\alpha^{\mu}}{x-\alpha}$ εἶναι τελεία πάντοτε δίδουσα πηλίκον $x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\cdots\cdots+\alpha^{\mu-1}$ ἕπεται ὅτι τελεία θὰ εἶναι καὶ ἡ διαίρεσις

$$\frac{(x-1)^{\mu}-1}{(x-1)-1}=\Pi\eta\lambda=(x-1)^{\mu-1}+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+\cdots\cdots+(x-1)+1.$$

Ὅθεν ἡ (1) γράφεται:

$$\frac{\varphi(x)}{x-2}=(x-2)^{2\mu-1}+(x-1)^{\mu-1}+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+\cdots\cdots+(x-1)+1$$

Διαιροῦντες ἀμφότερα τὰ μέλη καὶ διὰ (x−1) λαμβάνομεν:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-2)(x-1)}=\frac{(x-2)^{2\mu-1}+1+(x-1)^{\mu-1}+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+\cdots\cdots+(x-1)}{x-1}$$

$$=\frac{(x-2)^{2\mu-1}+1}{x-1}+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+(x-1)^{\mu-4}+\cdots\cdots\cdots+1 \quad (2)$$

Ἀλλὰ εἶναι τελεία καὶ ἡ κατωτέρω διαίρεσις τοῦ (2μ−1) ὄντος περιττοῦ

$$\frac{(x-2)^{2\mu-1}+1}{x-1}=\frac{(x-2)^{2\mu-1}+1}{(x-2)+1}=$$

$$=(x-2)^{2\mu-2}-(x-2)^{2\mu-3}+(x-2)^{2\mu-4}-\cdots\cdots\cdots-(x-2)+1$$

Ἑπομένως ἡ ἰσότης (2) γίνεται:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-2)(x-1)}=(x-2)^{2\mu-2}-(x-2)^{2\mu-3}+(x-2)^{2\mu-4}-\cdots\cdots-(x-2)+1+$$
$$+(x-1)^{\mu-2}+(x-1)^{\mu-3}+(x-1)^{\mu-4}+\cdots\cdots\cdots+(x-1)+1. \quad (3)$$

Ἄρα ἀπεδείχθη ὅτι τὸ $\varphi(x)=(x-2)^{2\mu}+(x-1)^{\mu}+1$ εἶναι διαιρετὸν διὰ (x−1)(x−2) καὶ τὸ πηλίκον αὐτῶν εἶναι τὸ β' μέλος τῆς ἰσότητος (3).

475. *Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τριώνυμον $\varphi(x)=99x^{100}-100x^{99}+1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ $(x-1)^2$ καὶ νὰ εὑρεθῇ τὸ πηλίκον.*

Ἀπ. Πράγματι ἐπειδὴ $\varphi(1)=99\cdot1-100\cdot1+1=0$ τὸ τριώνυμον φ(x) διαιρεῖται ἀκριβῶς διὰ (x−1) καὶ δίδει πηλίκον:

$$\frac{\varphi(x)}{x-1}=\frac{99x^{100}-100x^{99}+1}{x-1}=\frac{99x^{100}-99x^{99}-x^{99}+1}{x-1}=\frac{99x^{99}(x-1)-(x^{99}-1)}{x-1}$$

$$=\frac{99x^{99}(x-1)}{x-1}-\frac{x^{99}-1}{x-1}=99x^{99}-\frac{x^{99}-1}{x-1} \quad (1)$$

Ἀλλά τό διώνυμον $(x^{99}-1)$ εἶναι διαιρετόν διά $x-1$ δίδον πηλίκον

$$\frac{x^{99}-1}{x-1}=x^{98}+x^{97}+x^{96}+x^{95}+\ldots\ldots+x^2+x+1.$$

Ἄρα ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$\frac{\varphi(x)}{x-1}=99x^{99}-x^{98}-x^{97}-x^{96}-x^{95}-\ldots\ldots-x^2-x-1 \quad (2)$$

Ἀλλά τό πολυώνυμον $99x^{99}-x^{98}-x^{97}-x^{96}-\ldots\ldots-x^2-x-1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $(x-1)$, διότι ἐάν ἀντικαταστήσωμεν τό x διά τοῦ 1 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον 0, ὡς εὐκόλως δεικνύεται. Διαιροῦντες λοιπόν ἀμφότερα τά μέλη τῆς (2) διά $(x-1)$ λαμβάνομεν:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}=\frac{99x^{99}-x^{98}-x^{97}-x^{96}-\ldots\ldots-x^2-x-1}{x-1}$$

Καί εὑρίσκοντες τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ β' μέλους, χωρίς νά ἐκτελεσθῇ ἡ πρᾶξις, συμφώνως § 67, εὑρίσκομεν πηλίκον:

$$99x^{98}+98x^{97}+97x^{96}+96x^{95}+\ldots\ldots+3x^2+2x+1.$$

Ὅθεν τό $\varphi(x)$ ὡς διαιρούμενον ἀκριβῶς διά τῶν διωνύμων $(x-1)$ καί $(x-1)$ διαδοχικῶς, θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου των $(x-1)(x-1)=(x-1)^2$ τό δέ πηλίκον θά εἶναι:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}=99x^{98}+98x^{97}+97x^{96}+96x^{95}+\ldots\ldots+3x^2+2x+1.$$

476. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)=\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $(x-1)^2$ καί νά εὑρεθῇ τό πηλίκον.*

Ἀπ. Πράγματι ἐπειδή $\varphi(1)=\nu\cdot 1^{\nu+1}-(\nu+1)1^{\nu}+1=0$, ἕπεται ὅτι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-1$ τό δέ πηλίκον εἶναι συμφώνως § 67 ἐάν καταστήσωμεν τό $\varphi(x)$ πλῆρες πολυώνυμον

$$\frac{\varphi(x)}{x-1}=\nu x^{\nu}-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-x^{\nu-3}-\ldots\ldots\ldots-x-1$$

Τό πηλίκον ὅμως αὐτό διαιρεῖται διά $x-1$, διότι ἐάν τεθῇ ὅπου x τό 1 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον:

$$\upsilon=\nu\cdot 1^{\nu}-1^{\nu-1}-1^{\nu-2}-1^{\nu-3}-\ldots\ldots\ldots-1-1=\nu-\nu=0$$

διαιροῦντες ὅθεν ἀμφότερα τά μέλη διά $x-1$ λαμβάνομεν

$$\frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}=\frac{\nu x^{\nu}-x^{\nu-1}-x^{\nu-2}-\cdots\cdots-x-1}{x-1}$$

$$\frac{\varphi(x)}{(x-1)^2}=\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)x^{\nu-2}+(\nu-2)x^{\nu-3}+\cdots\cdots+3x^2+2x+1$$

Ἄρα τό δοθέν πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρεῖται διαδοχικῶς διά $(x-1)$ καί $(x-1)$ ἑπομένως καί διά τοῦ γινομένου $(x-1)^2$, τό δέ πηλίκον εἶναι $\nu x^{\nu-1}+(\nu-1)x^{\nu-2}+(\nu-2)x^{\nu-3}+\cdots\cdots+3x^2+2x+1$.

477. *Ἐάν ν ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός, νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$ εἶναι διαιρετόν διά $x(x+1)(2x+1)$.*

Ἀπ. Ἀρκεῖ πρός τοῦτο νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό $\varphi(x)$ διαιρεῖται χωριστά διά $(x-0)$, $(x+1)$, $(2x+1)$. Πράγματι διότι:

$$\varphi(0)=(0+1)^{2\nu}-0^{2\nu}-2\cdot 0-1=0$$

$$\varphi(-1)=(-1+1)^{2\nu}-(-1)^{2\nu}-2\cdot(-1)-1=-(1^{2\nu})+2-1=0$$

$$\varphi\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+1\right)^{2\nu}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-2\left(-\frac{1}{2}\right)-1=\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu}+1-1=0$$

Ἄρα τό πολυώνυμον θά διαιρῆται καί διά τοῦ γινομένου $x(x+1)(2x+1)$.

478. *Πᾶν τέλειον τετράγωνον περιττοῦ ἀριθμοῦ ἐλαττωθέν κατά μονάδα εἶναι διαιρετόν διά 8.*

479. *Τό ἄθροισμα ἤ ἡ διαφορά τῶν κύβων δύο ἀρτίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 8, ἤτοι διαιρετόν διά 8.*

480. *Ἐάν ὁ ἀριθμός $3^{\nu}+1$ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 10, τότε καί ὁ ἀριθμός $3^{\nu+4}+1$ θά εἶναι ὡσαύτως πολλαπλάσιον τοῦ 10.* Σχ. Ν. Δοκίμων

Ἀπ. $3^{\nu+4}+1=3^{\nu}\cdot 3^4+1=3^{\nu}\cdot 81+1=3^{\nu}(80+1)+1$

$=3^{\nu}\cdot 80+3^{\nu}+1=10\cdot 8\cdot 3^{\nu}+(3^{\nu}+1)=10\cdot 8\cdot 3^{\nu}+$ πολ. 10

$=$ πο 10 $+$ πολ. 10 $=$ πολ 10

481. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο διαδοχικῶν ἀριθμῶν δέν εἶναι ποτέ διαιρετή διά 2.*

482. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων δύο περιττῶν ἀριθμῶν εἶνα διαιρετή διά 8.*

483. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^3-\alpha$ εἶναι διαιρετή διά 6, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α.*

Ἀπόκ. Πράγματι ἐάν α παριστᾷ τυχόντα ἀκέραιον ἀριθμόν, τό διώνυμον $\alpha^3-\alpha=\alpha(\alpha^2-1)=(\alpha-1)\alpha\cdot(\alpha+1)$ παριστᾷ τό γινόμενον τριῶν ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν. Ἐκ τούτων ὁ εἷς εἶναι πάντοτε διαιρετός διά τοῦ 2 καί εἷς ἄλλος διαιρετός διά τοῦ 3 (κατά τήν Ἀριθμητικήν), ἄρα τό γινόμενον αὐτῶν θά διαιρῆται διά τοῦ γινομένου $2\cdot 3=6$ (καθόσον 2 καί 3 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους).

484. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^3-\alpha$ εἶναι διαιρετή διά 24 ἐάν α εἶναι περιττός ἀριθμός.*

485. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^4+2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha$ εἶναι διαιρετή διά 24, οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ α.*

Ἀπόκ. Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι τό γινόμενον 4 ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 24. Ἐπειδή ἐνταῦθα ἡ δοθεῖσα παράστασις ἀναλύεται εἰς τό γινόμενον: $\alpha^4+2\alpha^3-\alpha^2-2\alpha=$ $=(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$ ἤτοι εἰς γινόμενον 4 ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι εἶναι διαιρετή διά 24.

486. *Ἐάν α εἶναι ἀκέραιος καί μεγαλύτερος τοῦ 2, ν' ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $\alpha^5-5\alpha^3+4\alpha$ εἶναι διαιρετός διά 120.*

Ἀπόκ. Εἶναι γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ὅτι τό γινόμενον 5 ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν εἶναι διαιρετόν διά τοῦ 120. Ἐπειδή δέ ἡ δοθεῖσα παράστασις μετασχηματίζεται εἰς τό γινόμενον: $\alpha^5-5\alpha^3+4\alpha$ $=\alpha(\alpha^4-5\alpha^2+4)=\alpha(\alpha^4-\alpha^2-4\alpha^2+4)=(\alpha-2)(\alpha-1)\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)$, ἤτοι εἰς γινόμενον 5 ἀκεραίων διαδοχικῶν ἀριθμῶν ἕπεται ὅτι θά εἶναι διαιρετή διά 120.

487. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό ἄθροισμα τοῦ κύβου ἀρτίου ἀριθμοῦ καί τοῦ εἰκοσαπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι διαιρετόν διά 48.*

488. *Οἱουδήποτε ὄντος τοῦ ἀκεραίου καί θετικοῦ ἀριθμοῦ $\nu \geqslant 2$ τό πολυώνυμον $x^\nu(y-z)+y^\nu(z-x)+z^\nu(x-y)$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-y)(y-z)(z-x)$.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΟΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ

Ἡ ἀνάλυσις τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων ἔχει μεγάλην σπουδαιότητα ἐν τῷ ἀλγεβρικῷ ὑπολογισμῷ, διότι συντομεύομεν τάς πράξεις, ἁπλοποιοῦμεν τά ἀλγεβρικά κλάσματα, βοηθούμεθα εἰς τήν εὕρεσιν τοῦ ε.κ.π. ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, λύομεν ἐξισώσεις ἀνωτέρου βαθμοῦ κ.λ.π. Διά τοῦτο θέλομεν ἀσχοληθῆ ἀρκούντως μέ τό κεφάλαιον τῆς ἀναλύσεως παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων ἐξετάζοντες ὅλας τάς δυνατάς περιπτώσεις.

Περίπτ. I. Ὅταν πάντες οἱ ὅροι ἀλγεβρικῆς παραστάσεως ἔχουν κοινόν παράγοντα ἤ κοινούς παράγοντας, τούς ὁποίους ἐξάγομεν ἐκτός παρενθέσεως.

Παράδ. 1ον. Τό πολυώνυμον $4\alpha^3\beta^4\gamma - 8\alpha^2\beta^2\delta + 16\alpha^3\beta^3\gamma^3$ ἔχει κοινόν παράγοντα τό μονώνυμον $4\alpha^2\beta^2$. Ἐάν ἐξαγάγωμεν τοῦτον ἐκτός παρενθέσεως θά ἔχωμεν:

$$4\alpha^3\beta^4\gamma - 8\alpha^2\beta^2\delta + 16\alpha^3\beta^3\gamma^3 = 4\alpha^2\beta^2(\alpha\beta^2\gamma - 2\delta + 4\alpha\beta\gamma^3).$$

Παράδ. 2ον. $\alpha x(\alpha+\beta) - \beta y(\alpha+\beta)$· κοινός παράγων εἶναι τό διώνυμον $(\alpha+\beta)$, τό ὁποῖον ἐξάγομεν ἐκτός παρενθέσεως:

$$\alpha x(\alpha+\beta) - \beta y(\alpha+\beta) = (\alpha+\beta)(\alpha x - \beta y).$$

Παράδ. 3ον. $\alpha(x-y) - \beta(y-x) = \alpha(x-y) + \beta(x-y) = (x-y)(\alpha+\beta).$

Περίπτ. II. Ὅταν μία παράστασις εἶναι διαφορά δύο τετραγώνων ἤ δι᾿ ἐξαγωγῆς κοινοῦ παράγοντος νά ἀνάγεται εἰς διαφοράν δύο τετραγώνων, ὁπότε αὕτη ἀναλύεται εἰς γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος ἐπί τήν διαφοράν τῶν δύο ἀριθμῶν.

Π.χ. $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$; $16x^2 - 9y^2 = (4x+3y)(4x-3y)$

$$\alpha^3\gamma - 9\alpha\gamma = \alpha\gamma(\alpha^2-9) = \alpha\gamma(\alpha+3)(\alpha-3).$$

489. $x^3y^2\omega^2 - x^2y^2\omega^3 + x^2y^3\omega^2 = x^2y^2\omega^2(x - \omega + y)$

490. $8x^2y^2 + 16xy\omega^2 - 32x^2y^2\omega = 8xy(xy + 2\omega^2 - 4xy\omega).$

491. $7x^2 - 14x^3 = 7x^2(1-2x)$

492. $9\alpha^3 - 18\alpha^2 = 9\alpha^2(\alpha-2).$

493. $x^3+x=x(x^2+1)$

494. $x^3-x=x(x^2-1)=x(x+1)(x-1)$

495. $\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)$

496. $\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4=\alpha^2\beta^2(\alpha^2-\beta^2)=$
$=\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

497. $5\alpha^3\beta-10\alpha^4\beta^2\gamma+25\alpha^3\beta\gamma^2=5\alpha^3\beta(1-2\alpha\beta\gamma+5\gamma^2)$.

498. $x^{\mu+\nu}y^{\mu}-x^{2\nu}y^{\mu+\nu}+x^{\nu}y^{2\mu}=x^{\nu}y^{\mu}(x^{\mu}-x^{\nu}y^{\nu}+y^{\mu})$.

499. $110\alpha^2x^{\nu+1}-66\alpha^3x^{\nu+2}-22\alpha x^{\nu}=22\alpha x^{\nu}(5\alpha x-3\alpha^2x^2-1)$.

500. $44\alpha x^{\mu}+286\alpha^2x^{\mu+\nu}-66\alpha^3x^{\mu+2}=22\alpha x^{\mu}(2+13\alpha x^{\nu}-3\alpha^2x^2)$.

501. $(5\alpha-1)(\beta+\gamma)-(5\alpha-1)(\beta-\delta)=(5\alpha-1)[(\beta+\gamma)-(\beta-\delta)]=(5\alpha-1)(\gamma+\delta)$.

502. $(x-3y)(2a+b)+(3y-x)(a-b)=(x-3y)(2a+b)-(x-3y)(a-b)$
$=(x-3y)[(2a+b)-(a-b)]=(x-3y)(a+2b)$.

503. $75x^2-48=3(5x+4)(5x-4)$

504. $3x^2-243$

505. $8\alpha^2\beta^2-50\alpha^2\gamma^2=2\alpha^2(2\beta+5\gamma)(2\beta-5\gamma)$

506. $\alpha x^2-25\alpha$.

507. $27\alpha^3\beta-12\alpha\beta^3=3\alpha\beta(3\alpha+2\beta)(3\alpha-2\beta)$

508. $2\alpha x^2-162\alpha$

509. $45x^2y^4-80y^2=5y^2(3xy+4)(3xy-4)$

510. $x^5y^3-x^3y^5$

511. $(x+\alpha)(2\alpha-\beta)+(x^2-\alpha^2)=(x+\alpha)(2\alpha-\beta)+(x+\alpha)(x-\alpha)=$
$=(x+\alpha)[(2\alpha-\beta)+(x-\alpha)]=(x+\alpha)(\alpha-\beta+x)$.

512. $(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)+(\beta-\alpha)(\alpha-\beta-\gamma)=(\alpha-\beta)(2\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha-\beta)(\alpha-\beta-\gamma)$
$=(\alpha-\beta)[(2\alpha-\beta+\gamma)-(\alpha-\beta-\gamma)]=(\alpha-\beta)(\alpha+2\gamma)$.

513. $(\gamma-\alpha-\beta)(2\alpha-\beta)-(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\beta)$ Ἀπ. $3\alpha(\gamma-\alpha-\beta)$.

514. $(x-y)(\alpha-5)-(y-x)(\beta+6)-(x-y)(1-\gamma)$ » $(x-y)(\alpha+\beta+\gamma)$.

515. $(2x+1)(4x-2)-(x-7)(2x+1)-(2x+1)^2$ » $(2x+1)(x+4)$.

516. $(\alpha^2-\beta^2)-(\alpha-\beta)(2\alpha+\beta)$ » $(\alpha-\beta)(-\alpha)$.

517. $(2x-y)(\alpha+\beta)-(2x-y)^2$ » $(2x-y)(\alpha+\beta-2x+y)$.

518. $(\alpha+\beta)(\alpha-2)-(\alpha^2-4)$ » $(\alpha-2)(\beta-2)$.

519. $(\alpha+1)(2-\alpha)+(\alpha-2)^2+(\alpha^2-4)$ » $(\alpha-1)(\alpha-2)$.

520. $(\alpha-2\beta)(\alpha+\beta)-(\alpha-2\beta)^2-(\alpha^2-4\beta^2)$ » $(\alpha-2\beta)(\beta-\alpha)$.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ κάτωθι παραστάσεις:

521. $\alpha^2\beta^2-9\gamma^2=(\alpha\beta+3\gamma)(\alpha\beta-3\gamma)$

522. $5x^2-45y^2$

523. $9x^2-16y^2=(3x+4y)(3x-4y)$.

524. $x^2-\frac{\alpha^2}{9}$

525. $25\alpha^2-1=(5\alpha+1)(5\alpha-1)$.

526. $\frac{1}{x^2}-x^2$

527. $9\mu^2-4\nu^2=(3\mu+2\nu)(3\mu-2\nu)$.

528. $\alpha^4-\beta^2$

529. $15\alpha x^2-135\alpha y^2=15\alpha(x+3y)(x-3y)$.

530. $2\alpha^5\beta^3-18\alpha\beta^7$

531. $3\alpha^2\beta^4-12\alpha^4\beta^2=3\alpha^2\beta^2(\beta+2\alpha)(\beta-2\alpha)$.

532. $81x^4-y^4$

533. $2\alpha^3\beta\gamma-18\alpha\beta^3\gamma=2\alpha\beta\gamma(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)$.

534. $\frac{x^2}{\alpha^4}-\frac{\alpha^2}{x^4}$

535. $3\alpha^5x-12\alpha x^3=3\alpha x(\alpha^2+2x)(\alpha^2-2x)$.

536. $3\alpha^3\beta-3\alpha\beta^3$

537. $x^{5\mu}-9x^{3\mu}y^{4\nu}=x^{3\mu}(x^{\mu}+3y^{2\nu})(x^{\mu}-3y^{2\nu})$.

538. $8\alpha^3\beta^2\omega^4x-18\alpha^5\beta^4\omega^2x$.

539. $(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2=\left[(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)\right]\left[(\alpha+\beta)-(\gamma+\delta)\right]=$
$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$.

540. $\alpha^2-(\beta-\gamma)^2=\left[\alpha+(\beta-\gamma)\right]\left[\alpha-(\beta-\gamma)\right]=(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)$.

541. $(2\alpha+\beta)^2-(2\alpha-\beta)^2=\left[(2\alpha+\beta)+(2\alpha-\beta)\right]\left[(2\alpha+\beta)-(2\alpha-\beta)\right]$
$=(2\alpha+\beta+2\alpha-\beta)(2\alpha+\beta-2\alpha+\beta)=4\alpha\cdot 2\beta=8\alpha\beta$.

542. $25(x+y)^2-9(x-y)^2=\left[5(x+y)+3(x-y)\right]\left[5(x+y)-3(x-y)\right]$
$=(5x+5y+3x-3y)(5x+5y-3x+3y)=(8x+2y)(2x+8y)=4(4x+y)(x+4y)$.

543. $(2\alpha-\beta)^2-100$.

544. $9(x+y)^2-4(x-y)^2$

545. $81-(3\alpha-5\beta)^2$

546. $25(x-2y)^2-36(2x-y)^2$

547. $16\alpha^2-(2\beta-\gamma)^2$

548. $100(\alpha-2\beta)^2-81(\alpha+2\beta)^2$

549. $25\alpha^4\beta^2-(\beta-\gamma)^2$

550. $5(x+y)^2-45(x-y)^2$

551. $(x+y+1)^2-(x-y+1)^2$

552. $(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2-(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2)^2$

553. $(x+\sqrt{x}+1)^2-(x-\sqrt{x}-1)^2$

554. $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2-(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2$

Περίπτ. III. Όταν μία παράστασις είναι τέλειον ανάπτυγμα τετραγώνου ή κύβου άλλης παραστάσεως, τότε αναλύεται είς γινόμενον ομοίων παραγόντων.

Παράδ. 1ον. $\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2=(\alpha\pm\beta)^2=(\alpha\pm\beta)(\alpha\pm\beta)$.

» 2ον. $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

» 3ον. $9x^2-12xy+4y^2=(3x-2y)^2=(3x-2y)(3x-2y)$.

» 4ον. $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.

» 5ον. $\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3=(\alpha+\beta)^3=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)$.

Παράδ. 6ον. $\alpha^3-2\alpha^2+\alpha=\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)=\alpha(\alpha-1)^2=\alpha(\alpha-1)(\alpha-1)$.

» 7ον. $12\alpha^3-36\alpha^2+27\alpha=3\alpha(4\alpha^2-12\alpha+9)=3\alpha(2\alpha-3)^2=$
$=3\alpha(2\alpha-3)(2\alpha-3)$.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων:

555. $49x^2+28xy+4y^2=(7x+2y)^2=(7x+2y)(7x+2y)$.
556. $49-140\alpha^2+100\alpha^4=(7-10\alpha^2)^2=(7-10\alpha^2)(7-10\alpha^2)$.
557. $\alpha^2\beta^2-16\alpha\beta\gamma^2+64\gamma^4=(\alpha\beta-8\gamma^2)^2=(\alpha\beta-8\gamma^2)(\alpha\beta-8\gamma^2)$.
558. $x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)(x-1)$.
559. $8x^3-12x^2+6x-1=(2x-1)^3=(2x-1)(2x-1)(2x-1)$.
560. $\frac{9}{16}\mu\nu^2+\frac{4}{25}\mu\rho^2-\frac{3}{5}\mu\nu\rho=\mu\left(\frac{3}{4}\nu-\frac{2}{5}\rho\right)^2=\mu\left(\frac{3}{4}\nu-\frac{2}{5}\rho\right)\left(\frac{3}{4}\nu-\frac{2}{5}\rho\right)$.
561. $(\alpha+\beta)^2+4(\alpha+\beta)x+4x^2=\left[(\alpha+\beta)+2x\right]^2=(\alpha+\beta+2x)(\alpha+\beta+2x)$.

562. $100\lambda^4-180\lambda^2+81$.
563. $144+168x+49x^2$.
564. $36x^2-60xy+25y^2$.
565. $3\alpha^3x^4-6\alpha^2x^2y^2+3\alpha y^4$.
566. $\alpha^3-16\alpha^2\beta^2+64\alpha\beta^4$
567. $\alpha^2x^2+2\alpha(\beta+\gamma)x+(\beta+\gamma)^2$.
568. $\alpha-2\alpha xy\omega+\alpha x^2y^2\omega^2$.
569. $50\alpha^2+220\alpha+242$.
570. $64\alpha^2x^2+49\beta^2\gamma^2x^2-112\alpha\beta\gamma x^2$.
571. $\frac{1}{4}\mu^2\rho+\frac{1}{9}\nu^2\rho+\frac{1}{3}\mu\nu\rho$.

__Περίπτ. IV.__ __Ὅταν μία παράστασις χωρίζεται εἰς ὁμάδας εἰς τρόπον ὥστε οἱ ὅροι της νά ἔχουν κοινόν παράγοντα.__

Παράδ. 1ον. $2\alpha\beta-3\alpha\gamma-2\beta y+3\gamma y=(2\alpha\beta-2\beta y)-(3\alpha\gamma-3\gamma y)$
$=2\beta(\alpha-y)-3\gamma(\alpha-y)=(\alpha-y)(2\beta-3\gamma)$.

» 2ον. $15\alpha x+6\alpha y-35\beta x-14\beta y=(15\alpha x+6\alpha y)-(35\beta x+14\beta y)$
$=3\alpha(5x+2y)-7\beta(5x+2y)=(5x+2y)(3\alpha-7\beta)$.

» 3ον. $\alpha^2+2\alpha\beta+3\alpha\gamma-\alpha x-2\beta x-3\gamma x=(\alpha^2-\alpha x)+(2\alpha\beta-2\beta x)+(3\alpha\gamma-$
$-3\gamma x)=\alpha(\alpha-x)+2\beta(\alpha-x)+3\gamma(\alpha-x)=(\alpha-x)(\alpha+2\beta+3\gamma)$.

» 4ον. $\alpha x-\beta x+\beta y-\alpha y-\gamma x+\gamma y=(\alpha x-\beta x-\gamma x)-(\alpha y-\beta y-\gamma y)$
$=x(\alpha-\beta-\gamma)-y(\alpha-\beta-\gamma)=(\alpha-\beta-\gamma)(x-y)$.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων:

572. $x^2+xy-\alpha x-\alpha y$ — Ἀπ. $=(x-\alpha)(x+y)$.
573. $x^3+x-x^2\omega-\omega$ — » $(x-\omega)(x^2+1)$.

574. $2x^2 - 3xy + 4\alpha x - 6\alpha y$ — Ἀπ. $(x+2\alpha)(2x-3y)$.

575. $x^3 + 7x^2 + 3x + 21$

576. $11x^3 + 55x^2 + 6x + 30$ — » $(x+5)(11x^2+6)$.

577. $\alpha x^2 + \alpha^2 x + x + \alpha$

578. $\alpha^2\gamma^2 - \alpha\gamma\delta + \alpha\beta\gamma - \beta\delta$ — » $(\alpha\gamma-\delta)(\alpha\gamma+\beta)$.

579. $\omega^4 - \omega^3 - \omega + 1$

580. $x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = (x+\alpha)(x+\beta)$.

581. $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = x^2 - \alpha x - \beta x + \alpha\beta = (x-\alpha)(x-\beta)$.

582. $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2-\beta^2)xy - \alpha\beta y^2$ — Ἀπ. $(\beta x - \alpha y)(\alpha x + \beta y)$.

583. $\alpha^2\gamma xy - \alpha y^2 x - \alpha\gamma y x^2 + x^2y^2$ — » $xy(\alpha-x)(\alpha\gamma-y)$.

584. $\alpha^2x^2 - \beta^2y^2 - \alpha^2y^2 + \beta^2x^2 + \gamma^2x^2 - \gamma^2y^2$ 585. $\alpha^2x + \alpha\beta x + \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\beta y + \beta^2 y$.

586. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον ἡ παράστασις* $3(x-y)^2(x+y) - 3(x+y)^2(x-y)$ *καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $x=-0,1$ καί $y=-\frac{1}{3}$.* Ἀνωτ. Ἐμπορική 1943.

Ἀπόκ. $3(x-y)^2(x+y) - 3(x+y)^2(x-y) = 3(x-y)(x+y)\left[(x-y)-(x+y)\right]$

$$= 3(x-y)(x+y)(x-y-x-y) = -6y(x^2-y^2) = 6y(y^2-x^2).$$

Ἀριθμ. τιμή $= 6\left(-\frac{1}{3}\right)\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - (-0,1)^2\right] = (-2)\left(\frac{1}{9} - 0,01\right) = -\frac{2}{9} + 0,02$

$$= -0,2222\ldots + 0,02 = -0,20222\ldots$$

587. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:* $(1+xy) + \alpha(x+y) - (x+y) - \alpha(1+xy)$ *καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $\alpha=0,1$, $y=-\frac{1}{3}$, $x=-0,1$.*

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1943.

Ἀπόκ. Καλοῦντες Κ τήν παράστασιν θά ἔχωμεν ἐάν λάβωμεν κατά ζεύγη τούς ὅρους:

$$K = (1+xy)(1-\alpha) - (x+y)(1-\alpha) = (1-\alpha)\left[(1+xy)-(x+y)\right].$$

$$K = (1-\alpha)(1+xy-x-y) = (1-\alpha)\left[(1-x)-y(1-x)\right] = (1-\alpha)(1-x)(1-y).$$

Ἀριθμ. τιμή $K = (1-\alpha)(1-x)(1-y) = (1-0,1)(1+0,1)\left(1+\frac{1}{3}\right)$

$$K = (1-0,01)\cdot\frac{4}{3} = 0,99\cdot\frac{4}{3} = 0,33\cdot 4 = 1,32.$$

588. $(\gamma+\delta)^2(\alpha-\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2(\gamma-\delta)^2 + \gamma^2(\gamma-\delta)^2 - (\gamma+\delta)^2\gamma^2 =$

$=(\alpha-\beta)^2\left[(\gamma+\delta)^2-(\gamma-\delta)^2\right]-\gamma^2\left[(\gamma+\delta)^2-(\gamma-\delta)^2\right]$
$=\left[(\gamma+\delta)^2-(\gamma-\delta)^2\right]\cdot\left[(\alpha-\beta)^2-\gamma^2\right]$
$=(\gamma+\delta+\gamma-\delta)(\gamma+\delta-\gamma+\delta)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$
$=4\gamma\delta\,(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma).$

589. $\alpha^2\gamma^2x^2-\alpha^4\gamma^2-\beta^2\gamma^2x^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\delta^2x^2+\alpha^4\delta^2+\beta^2\delta^2x^2-\alpha^2\beta^2\delta^2.$

<u>Ἀπ.</u> $=(x+\alpha)(x-\alpha)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\gamma+\delta)(\gamma-\delta).$

<u>Περίπτ. V.</u> <u>Τά διώνυμα τῆς μορφῆς $x^\mu\pm\alpha^\mu$ ἀναλύονται εἰς γινόμενον παραγόντων ὅταν διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τῶν διωνύμων τῆς μορφῆς $x\pm\alpha$.</u>

Παράδ. 1ον. Τό διώνυμον $x^3-\alpha^3$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x-\alpha$ διότι δίδει $\upsilon=\alpha^3-\alpha^3=0$ καί πηλ.$=x^2+\alpha x+\alpha^2$ ἄρα

$$x^3-\alpha^3=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2).$$

Παράδ. 2ον. Τό $x^3+\alpha^3$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $x+\alpha$, ἄρα:

$$x^3+\alpha^3=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2).$$
$$x^5-\alpha^5=(x-\alpha)(x^4+\alpha x^3+\alpha^2x^2+\alpha^3x+\alpha^4).$$

ὁμοίως: $$x^\mu-\alpha^\mu=(x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\dots+\alpha^{\mu-1}).$$

Παράδ. 3ον. $\alpha^3\beta^3+343=(\alpha\beta)^3+7^3=(\alpha\beta+7)(\alpha^2\beta^2-7\alpha\beta+49).$

Παράδ. 4ον. $x^{20}-\alpha^{15}=(x^4-\alpha^3)(x^{16}+\alpha^3x^{12}+\alpha^6x^8+\alpha^9x^4+\alpha^{12}).$

590. $x^3\pm125\alpha^3=x^3\pm(5\alpha)^3=(x\pm5\alpha)(x^2\mp5\alpha x+25\alpha^2).$

591. $x^3\pm8y^3\omega^3=x^3\pm(2y\omega)^3=(x\pm2y\omega)(x^2\mp2xy\omega+4y^2\omega^2).$

592. $216\mu^3+\nu^6=6^3\mu^3+(\nu^2)^3=(6\mu+\nu^2)(36\mu^2-6\mu\nu^2+\nu^4).$

593. $xy^4-x^4y=xy(y^3-x^3)=xy(y-x)(y^2+yx+x^2).$

594. $x^5y^5\pm1=(xy\pm1)(x^4y^4\mp x^3y^3+x^2y^2\mp xy+1).$

595. $x^6-\alpha^6=(x^3+\alpha^3)(x^3-\alpha^3)=(x+\alpha)(x^2-\alpha x+\alpha^2)(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2).$

596. $x^{10}+\alpha^{10}=(x^2)^5+(\alpha^2)^5=(x^2+\alpha^2)\left[(x^2)^4-\alpha^2(x^2)^3+(\alpha^2)^2(x^2)^2-(\alpha^2)^3x^2+(\alpha^2)^4\right]=(x^2+\alpha^2)(x^8-\alpha^2x^6+\alpha^4x^4-\alpha^6x^2+\alpha^8).$

<u>*Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα αἱ παραστάσεις:*</u>

597. $x^3\pm1$	600. $9x^3-72$	603. $x^3-\frac{1}{27}$
598. $x^5\mp1$	601. $2x^3-250y^3$	604. $\frac{x^3}{125}-\frac{\alpha^3}{64}$
599. $\alpha^6\beta^3-1$	602. $7x^7y^4+7x^4y^7$	605. $(\alpha+\beta)^3+\gamma^3.$

<u>Περίπτ. VI</u> <u>Όταν μία παράστασις χωριζομένη εἰς ὁμάδας καθίσταται διαφορά δύο τετραγώνων ἤ ὑπάγεται εἰς μίαν τῶν προηγουμένων περιπτώσεων.</u>

Παράδ. 1ον. $\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2+2(\alpha\gamma-\beta\delta)=\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2+2\alpha\gamma-2\beta\delta$
$=(\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma)-(\beta^2+\delta^2+2\beta\delta)=(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=$
$=(\alpha+\gamma+\beta+\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)$.

Παράδ. 2ον. $x^4+y^4-\alpha^4-\beta^4+2x^2y^2-2\alpha^2\beta^2=(x^4+y^4+2x^2y^2)-(\alpha^4+$
$+\beta^4+2\alpha^2\beta^2)=(x^2+y^2)^2-(\alpha^2+\beta^2)^2=$
$=(x^2+y^2+\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2-\alpha^2-\beta^2)$.

Παράδ. 3ον. $\alpha^5-2\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2+\alpha^2x^3-2\alpha\beta x^3+\beta^2x^3=$
$=(\alpha^5-2\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2)+x^3(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$
$=\alpha^3(\alpha-\beta)^2+x^3(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)^2(\alpha^3+x^3)$
$=(\alpha-\beta)^2(\alpha+x)(\alpha^2-\alpha x+x^2)$.

Παράδ. 4ον. $\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=(\alpha+\beta)^2-\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$.

<u>Νά τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις:</u>

606. $\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2=(\alpha-\beta)^2-\gamma^2=(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$.
607 $\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma-\gamma^2=\alpha^2-(\beta+\gamma)^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)$.
608 $\alpha^2-\beta^2+2\beta\gamma-\gamma^2$ <u>Ἀπ.</u> $(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)$.
609. $x^2+2x+1-y^2$ » $(x+y+1)(x-y+1)$.
610. $\mu^2-2\nu\pi-\nu^2-\pi^2$ <u>611.</u> $\mu^2+2\nu\pi-\nu^2\pi^2$
612. $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2-2(\alpha\delta-\beta\gamma)$ <u>Ἀπ.</u> $(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)$.
613. $\alpha^5+\alpha^4\beta+\alpha^3\beta^2-\alpha^2\beta^3-\alpha\beta^4-\beta^5$ » $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^2$.
614. $2\alpha^3x^2y+4\alpha^2\beta x^2y+2\alpha\beta^2x^2y-2\alpha\gamma^2x^2y$ Ἀπ. $2\alpha x^2y(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$.

<u>Περίπτ. VII</u> <u>Όταν μία παράστασις διά τῆς προσθαφαιρέσεως καταλλήλου ὅρου καθίσταται γνωστή ταυτότης ἀναλυομένη εἰς γινόμενον παραγόντων.</u>

Παράδ. 1ον: $x^4+x^2y^2+y^4$. Ὁ κατάλληλος ὅρος εἶναι ὁ x^2y^2, τόν ὁποῖον προσθέτομεν καί ἀφαιροῦμεν ἵνα ἔχωμεν διαφοράν τετραγώνων. $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=$
$=(x^2+y^2)^2-x^2y^2=(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$.

Παρδ. 2ον $x^4+y^4=x^4+y^4+2x^2y^2-2x^2y^2=(x^4+y^4+2x^2y^2)-2x^2y^2$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy\sqrt{2})^2=(x^2+y^2+xy\sqrt{2})(x^2+y^2-xy\sqrt{2})$$

Παρδ. 3ον $x^4+y^4-x^2y^2$. Προσθαφαιροῦμεν τό $3x^2y^2$:
$$x^4+y^4-x^2y^2=x^4+y^4-x^2y^2+3x^2y^2-3x^2y^2=(x^4+y^4+2x^2y^2)-3x^2y^2$$
$$=(x^2+y^2)^2-(xy\sqrt{3})^2=(x^2+y^2+xy\sqrt{3})(x^2+y^2-xy\sqrt{3}).$$

Παράδ. 4ον $4\alpha^4+16\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4$. Ἵνα τό δοθέν τριώνυμον γίνῃ τέλειον τετράγωνον τοῦ διωνύμου $2\alpha^2+5\gamma^2$ ἀρκεῖ νά προσθαφαιρέσωμεν τόν ὅρον $4\alpha^2\gamma^2$ ἤτοι:
$$4\alpha^4+16\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4=4\alpha^4+20\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4-4\alpha^2\gamma^2=$$
$$=(4\alpha^4+20\alpha^2\gamma^2+25\gamma^4)-4\alpha^2\gamma^2=(2\alpha^2+5\gamma^2)^2-(2\alpha\gamma)^2=$$
$$=(2\alpha^2+5\gamma^2+2\alpha\gamma)(2\alpha^2+5\gamma^2-2\alpha\gamma).$$

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

615. $4\alpha^4+3\alpha^2+1=4\alpha^4+4\alpha^2+1-\alpha^2=(4\alpha^4+4\alpha^2+1)-\alpha^2$
$$=(2\alpha^2+1)^2-\alpha^2=(2\alpha^2+1+\alpha)(2\alpha^2+1-\alpha).$$

616. $4x^4-21x^2y^2+9y^4$ — Ἀπ. $(2x^2-3y^2+3xy)(2x^2-3y^2-3xy)$.

617. $\alpha^4+3\alpha^2\beta^2+4\beta^4$ — » $(\alpha^2+2\beta^2+\alpha\beta)(\alpha^2+2\beta^2-\alpha\beta)$.

618. x^4-13x^2+36 — » $(x+2)(x-2)(x+3)(x-3)$.

619. $x^4-2x^2y^2-63y^4$ — » $(x+3y)(x-3y)(x^2+7y^2)$.

620. $4x^4-37x^2y^2+9y^4$ — » $(2x^2-3y^2+5xy)(2x^2-3y^2-5xy)$.

Νά τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις:

621. $9x^3-12x^2y+4xy^2$

622. $x^5y^2+6x^3y+9x$

623. $\alpha^3-2\alpha^2-3\alpha$

624. $\alpha^3+\alpha^2-4\alpha-4$

625. $3x^5-48xy^8$

626. α^8-1.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων αἱ παραστάσεις:

627. $3\alpha^2x^3y+6\alpha^2x^2y^2+3\alpha^2xy^3-3\alpha^2xy\omega^2$ — Ἀπ. $3\alpha^2xy(x+y+\omega)(x+y-\omega)$.

628. $36\alpha^2x^5y^3-24\alpha^3x^4y^2\omega+4\alpha^4x^3y\omega^2$ — » $4\alpha^2x^3y(3xy-\alpha\omega)^2$

629. $4\alpha^7x^5-24\alpha^6x^6+36\alpha^5x^7$ — » $4\alpha^5x^5(\alpha-3x)^2$

630. $9\alpha^2-12\alpha x-\beta^2-\gamma^2-2\beta\gamma+4x^2$ — » $(3\alpha-2x+\beta+\gamma)(3\alpha-2x-\beta-\gamma)$.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων:

631. $x^2+9(\beta^2-\alpha^2)+6\beta x$
632. $9x^2-16y^2-16y\omega-4\omega^2$
633. $\alpha^3+\beta^3+\alpha+\beta$
634. $\alpha\beta x^2+\alpha\beta^2-\alpha^2\beta-\beta^2x^2$.
635. $x^{\nu+1}y^{\nu-1}+x^{\nu-1}y^{\nu+1}-2x^\nu y^\nu$
636. x^3+2x^2-1
637. $x^3-3\alpha^2x+2\alpha^3$
638. $x^7+8x^4-x^3-8$ (Γινόμ. 5 παργ)
639. $x^2+y^2-4x+4y-2xy+3$
640. $\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\beta\gamma-2\alpha+1$
641. $\alpha^{\mu+\nu}-\alpha^\mu\beta^\nu+\alpha^\nu\beta^\mu-\beta^{\mu+\nu}$
642 $\alpha^{2\mu+3\nu}-\alpha^{2\mu}-\alpha^{3\nu}+1$

Περίπτ. VIII Τά τριώνυμα τῆς μορφῆς $x^2+\beta x+\gamma$ ἀναλύονται εἰς γινόμενον δύο παραγόντων ὅταν τό $\beta=\rho+\rho'$ καί τό $\gamma=\rho\rho'$, ἔνθα ρ καί ρ' δύο ἁρμόδιοι ἀριθμοί, τούς ὁποίους ἀναζητοῦμεν νά εὕρωμεν.

Πράγματι τό τριώνυμον $x^2+\beta x+\gamma$ δι' ἀντικαταστάσεως τῶν β καί γ διά τῶν ἴσων των $\rho+\rho'$ καί $\rho\rho'$ γίνεται:

$$x^2+\beta x+\gamma=x^2+(\rho+\rho')x+\rho\rho'=x^2+\rho x+\rho' x+\rho\rho'=x(x+\rho)+\rho'(x+\rho)$$

$$\text{ἄρα: } x^2+\beta x+\gamma=(x+\rho)(x+\rho').$$

Παράδ. 1ον $x^2+11x+24=(x+3)(x+8)$

καθόσον $\beta=11=3+8$ καί $\gamma=24=3\cdot 8$.

Παράδ. 2ον $x^2-11x+18=(x-2)(x-9)$

καθόσον $\beta=-11=(-2)+(-9)$ καί $\gamma=18=(-2)\cdot(-9)$.

Παράδ. 3ον $\omega^2+9\omega y+20y^2=(\omega+4y)(\omega+5y)$

καθόσον $\beta=9y=5y+4y$ καί $\gamma=20y^2=(5y)(4y)$.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τά τριώνυμα:

643. $x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$ διότι $10=4+6$, $24=4\cdot 6$
644. $x^2-10x+24=(x-4)(x-6)$ » $-10=(-4)+(-6)$, $24=(-4)\cdot(-6)$.
645. $x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$
646. $x^2+10x+9=(x+1)(x+9)$
647. $\alpha^2x^2-10\alpha x+9=(\alpha x-1)(\alpha x-9)$
648. $\alpha^2\beta^2-13\alpha\beta\gamma+22\gamma^2=(\alpha\beta-2\gamma)(\alpha\beta-11\gamma)$
649. $\alpha^2x^2-3\alpha x-28=(\alpha x-7)(\alpha x+4)$
650. $x^2y^2+xy-12=;$
651. $x^2y^2-xy-12=;$
652. $x^4-7\beta x^2+10\beta^2=;$
653. $x^4-10x^2+9.=;$
654. $x^6-10x^2+9=;$

655. $\alpha^4-25\alpha^2+144=(\alpha+3)(\alpha-3)(\alpha+4)(\alpha-4)$.

Περίπτ. IX. Τά τριώνυμα τῆς μορφῆς $ax^2+bx+\gamma$ (ἔνθα $\alpha \neq 1$) ἀναλύονται εἰς γινόμενον παραγόντων ἀφοῦ τά ἀναγάγωμεν εἰς τήν μορφήν $x^2+bx+\gamma$ (ἔνθα $\alpha=1$). Πρός τοῦτο πολλαπλασιάζομεν καί διαιροῦμεν διά τοῦ α τό τριώνυμον $ax^2+bx+\gamma$ ὡς κατωτέρω: $ax^2+bx+\gamma=\frac{1}{a}(a^2x^2+bax+a\gamma)=\frac{1}{2}(\omega^2+b\omega+a\gamma)$ ἔνθα $ax=\omega$, ἄρα $a^2x^2=\omega^2$.

Μετά ταῦτα ἀναζητοῦμεν νά εὕρωμεν δύο ἀριθμούς ρ, ρ', οἱ ὁποῖοι νά ἔχουν ἄθροισμα $\rho+\rho'=b$ καί γινόμενον $\rho\cdot\rho'=a\gamma$, ἵνα ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον τό τριώνυμον $\omega^2+b\omega+a\gamma$. Τέλος ἀντικαθιστῶμεν τό ω διά τοῦ ax.

Παράδ. 1ον. Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων:

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-4 &= \frac{1}{3}(3^2x^2+4\cdot 3x-12) \\ &= \frac{1}{3}(\omega^2+4\omega-12) \qquad \text{ἐτέθη } 3x=\omega \\ &= \frac{1}{3}(\omega+6)(\omega-2) \\ &= \frac{1}{3}(3x+6)(3x-2) \\ &= \frac{3}{3}(x+2)(3x-2) \end{aligned}$$

ἄρα $3x^2+4x-4=(x+2)(3x-2)$.

Παράδ. 2ον. $6x^2+17x+12=\frac{1}{6}(6^2x^2+17\cdot 6x+72)=\frac{1}{6}(\omega^2+17\omega+72)$
$=\frac{1}{6}(\omega+9)(\omega+8)=\frac{1}{6}(6x+9)(6x+8)=\frac{3\cdot 2}{6}(2x+3)(3x+4)$

ἄρα $6x^2+17x+12=(2x+3)(3x+4)$.

Παρατήρ. Τό τριώνυμον $6x^2+17x+12$ καί ὅλα τῆς μορφῆς $ax^2+bx+\gamma$ ἀναλύονται συντομώτερον εἰς γινόμενον, ὅταν δύνανται νά ἀναλυθοῦν καταλλήλως εἰς 4 προσθετέους, ὡς κατωτέρω:

$6x^2+17x+12=6x^2+9x+8x+12=3x(2x+3)+4(2x+3)=(2x+3)(3x+4)$.

Ὁμοίως ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν:

656. $3x^2-2x-5=3x^2-5x+3x-5=3x(x+1)-5(x+1)=(x+1)(3x-5)$

657. $6x^2+5x-4=(3x+4)(2x-1)$.

658. $6a^2-11ab+5b^2=(6a-5b)(a-b)$.

659. $2x^2-11xy+15y^2=(x-3y)(2x-5y)$.

660. $12x^2-68x+91=(2x-7)(6x-13)$.

Περίπτ. X. Μέθοδος τῶν διωνύμων παραγόντων. Διά νά ἀναλυθῇ ἕν πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἰς γινόμενον παραγόντων διά τῆς μεθόδου τῶν διωνύμων παραγόντων ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς.

Εὑρίσκομεν τούς διαιρέτας τοῦ σταθεροῦ ὅρου τοῦ δοθέντος πολυωνύμου $\varphi(x)$, ἀφοῦ ἀναλύσωμεν τόν σταθερόν ὅρον εἰς γινόμενον παραγόντων· ἔστωσαν δέ $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ οἱ διαιρέται, ἤτοι οἱ παράγοντες οὗτοι. Ἔπειτα δοκιμάζομεν ποῖοι ἐξ αὐτῶν θετικῶς ἤ ἀρνητικῶς λαμβανόμενοι μηδενίζουν τό πολυώνυμον $\varphi(x)$ θέτοντες διαδοχικῶς ὅπου x τό α, κατόπιν τό β, κατόπιν τό γ καί ἐάν μέν $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=0$, $\varphi(\gamma)=0$, τότε τό $\varphi(x)$ θά διαιρῆται διά $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$, ἄρα § 69 καί διά τοῦ γινομένου $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Οἱ διώνυμοι παράγοντες ἐνταῦθα εἰς τούς ὁποίους ἀναλύεται τό $\varphi(x)$ θά εἶναι οἱ $(x-\alpha)$, $(x-\beta)$, $(x-\gamma)$, τό δέ $\varphi(x)$ ἐάν εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός x ἀναλύεται εἰς τό κάτωθι γινόμενον: $\varphi(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Ἐάν τό δοθέν πολυώνυμον εἶναι $4^{ου}$ ἤ $5^{ου}$ βαθμοῦ ὡς πρός x ἀναζητοῦμεν νά εὕρωμεν καί τούς ἄλλους διωνύμους παράγοντας.

Παράδ. $1^{ον}$. Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τό πολυώνυμον:

$$\varphi(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8.$$

Ἀπόκ. Οἱ διαιρέται ἤ παράγοντες τοῦ σταθεροῦ ὅρου 8 εἶναι:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8.$$

ἐπομένως οἱ πιθανοί διαιρέται (διώνυμοι παράγοντες) τοῦ δοθέντος πολυωνύμου $\varphi(x)$ θά εἶναι:

$$x-1,\ x+1,\ x-2,\ x+2,\ x-4,\ x+4,\ x-8,\ x+8.$$

Διά νά εὕρωμεν ποῖοι ἐκ τῶν διωνύμων τούτων παραγόντων εἶναι διαιρέται τοῦ $\varphi(x)$ ὑπολογίζομεν τά ὑπόλοιπα $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(-2)$ ..... διά νά ἴδωμεν ποῖα ἰσοῦνται μέ 0.

$$\varphi(1) = 1^3 - 3\cdot1^2 - 6\cdot1 + 8 = 0, \quad \varphi(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 6(-1) + 8 = 10$$

$$\varphi(2) = 2^3 - 3\cdot2^2 - 6\cdot2 + 8 = -8, \quad \varphi(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 6(-2) + 8 = 0$$

Ἐπειδή ἐνταῦθα $\varphi(1)=0$ καί $\varphi(-2)=0$ τό πολυώνυμον

$\varphi(x)=x^3-3x^2-6x+8$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-1)$ καί $(x+2)$, ἄρα θά εἶναι διαιρετόν καί διά τοῦ γινομένου $(x-1)(x+2)$ ἤτοι διά τοῦ x^2+x-2. Πρός εὕρεσιν τοῦ τρίτου διωνύμου παράγοντος πρωτοβαθμίου ὡς πρός x, καθότι τό δοθέν πολυώνυμον $\varphi(x)$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός x, ἐκτελοῦμεν τήν διαίρεσιν τοῦ $\varphi(x) = x^3-3x^2-6x+8$ διά τοῦ x^2+x-2 καί εὑρίσκομεν πηλίκον μέν $x-4$, ὑπόλοιπον δέ μηδέν. Ἄρα θά ἔχωμεν σύμφωνα μέ τήν ταυτότητα τῆς τελείας διαιρέσεως $\varphi(x)=x^3-3x^2-6x+8=(x-1)(x+2)(x-4)$.

Σημ. Τόν τρίτον διώνυμον παράγοντα $x-4$ δυνάμεθα νά εὕρωμεν συντομώτερον καί ὡς ἑξῆς, ἀφοῦ εὕρωμεν πρῶτον τούς δύο πρώτους παράγοντας $(x-1)$ καί $(x+2)$ ὡς ἀνωτέρω. Ἐπειδή ὁ σταθερός ὅρος 8 πρέπει νά εἶναι γινόμενον τοῦ 1 καί -2 ἐπί τρίτον τινα ἀριθμόν, οὗτος δέν δύναται νά εἶναι ἄλλος παρά ὁ -4, διότι $1\cdot(-2)\cdot(-4)=8$. Ἑπομένως τό τρίτον διώνυμον, τό ὁποῖον διαιρεῖ ἀκριβῶς τό $\varphi(x)$ θά εἶναι τό $x-4$.

661. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων τό πολυώνυμον:*

$$\varphi(x)=3x^3-16x^2+3x+10.$$

Ἀπόκ. Οἱ διαιρέται τοῦ 10 εἶναι οἱ ±1, ±2, ±5, ±10.
Παρατηροῦμεν ὅτι: $\varphi(1)=3\cdot1^3-16\cdot1^2+3+10=0$, $\varphi(2)=-24$, $\varphi(-2)=-84$, $\varphi(5)=0$. Ἐπειδή ἐνταῦθα $\varphi(1)=0$ καί $\varphi(5)=0$ ἕπεται ὅτι τό πολυώνυμον $\varphi(x)$ διαιρεῖται ἀκριβῶς καί διά τοῦ γινομένου $(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$. Ἐπειδή δέ τό δοθέν $\varphi(x)=3x^3-16x^2+3x+10$ εἶναι τρίτου βαθμοῦ ὡς πρός x, ἐάν διαιρεθῇ διά τοῦ x^2-6x+5 θά δόσῃ $\upsilon=0$ καί πηλίκον πρώτου βαθμοῦ ὡς πρός x, τό $3x+2$. Ἄρα θά ἔχωμεν τήν ἀνάλυσιν:

$$3x^3-16x^2+3x+10=(x-1)(x-5)(3x+2).$$

662. *Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:*

1. $\sigma(x)=x^3-5x^2-x+5.$

Ἀπ. Ἐπειδή $\sigma(1)=0$, $\sigma(-1)=0$ καί $\sigma(5)=0$, ἕπεται ὅτι οἱ διώνυμοι παράγοντες εἶναι $(x-1)$, $(x+1)$ καί $(x-5)$, οἱ ὁποῖοι διαιροῦν ἀκριβῶς τό $\sigma(x)$· ἄρα θά ἔχωμεν τήν ἀνάλυσιν

$$\sigma(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 = (x-1)(x+1)(x-5).$$

2). $f(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$ Ἀπ. $(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

3). $2x^3 + 3x^2 - 8x - 12$ 4) $3x^4 - 11x^3 - x^2 + 19x + 6$.

663. *Νά τραπῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$4(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2$ Ἀνωτ. Ἐμπορική 1949

Ἀπόκ. $4(\alpha\delta + \beta\gamma)^2 - (\alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)^2$

$$= \left[2(\alpha\delta+\beta\gamma) + (\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)\right]\left[2(\alpha\delta+\beta\gamma) - (\alpha^2+\delta^2-\beta^2-\gamma^2)\right]$$

$$= (2\alpha\delta + 2\beta\gamma + \alpha^2 + \delta^2 - \beta^2 - \gamma^2)(2\alpha\delta + 2\beta\gamma - \alpha^2 - \delta^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

$$= \left[(\alpha^2+\delta^2+2\alpha\delta) - (\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma)\right]\left[(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma) - (\alpha^2+\delta^2-2\alpha\delta)\right]$$

$$= \left[(\alpha+\delta)^2 - (\beta-\gamma)^2\right]\left[(\beta+\gamma)^2 - (\alpha-\delta)^2\right]$$

$$= \left[(\alpha+\delta)+(\beta-\gamma)\right]\left[(\alpha+\delta)-(\beta-\gamma)\right]\left[(\beta+\gamma)+(\alpha-\delta)\right]\left[(\beta+\gamma)-(\alpha-\delta)\right]$$

$$= (\alpha+\delta+\beta-\gamma)(\alpha+\delta-\beta+\gamma)(\beta+\gamma+\alpha-\delta)(\beta+\gamma-\alpha+\delta).$$

664. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$K = (\alpha\beta + \gamma\delta + \beta^2 - \delta^2)^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$$

Ἀπ. $K = (\alpha\beta + \gamma\delta + \beta^2 - \delta^2)^2 - (\alpha\delta + \beta\gamma)^2$

$$K = (\alpha\beta + \gamma\delta + \beta^2 - \delta^2 + \alpha\delta + \beta\gamma)(\alpha\beta + \gamma\delta + \beta^2 - \delta^2 - \alpha\delta - \beta\gamma)$$

$$K = \left[(\alpha\beta+\alpha\delta) + (\beta\gamma+\gamma\delta) + (\beta^2-\delta^2)\right]\left[(\alpha\beta-\alpha\delta) - (\beta\gamma-\gamma\delta) + (\beta^2-\delta^2)\right]$$

$$K = \left[\alpha(\beta+\delta) + \gamma(\beta+\delta) + (\beta+\delta)(\beta-\delta)\right]\left[\alpha(\beta-\delta) - \gamma(\beta-\delta) + (\beta+\delta)(\beta-\delta)\right]$$

$$K = (\beta+\delta)(\alpha+\gamma+\beta-\delta)(\beta-\delta)(\alpha-\gamma+\beta+\delta).$$

665. *Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:*

1) $\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta)$.

2) $\alpha(\beta^2-\gamma^2) + \beta(\gamma^2-\alpha^2) + \gamma(\alpha^2-\beta^2)$.

3) $\alpha^2(\beta+\gamma) + \beta^2(\gamma+\alpha) + \gamma^2(\alpha+\beta) + 2\alpha\beta\gamma$.

Ἀπόκ. 1) $\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta)$

$$= \alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2\gamma - \alpha\beta^2 + \alpha\gamma^2 - \beta\gamma^2 = \alpha^2(\beta-\gamma) + (\beta^2\gamma - \beta\gamma^2) - (\alpha\beta^2 - \alpha\gamma^2)$$

$$= \alpha^2(\beta-\gamma) + \beta\gamma(\beta-\gamma) - \alpha(\beta+\gamma)(\beta-\gamma) = (\beta-\gamma)(\alpha^2 + \beta\gamma - \alpha\beta - \alpha\gamma) =$$

$= (\beta-\gamma)\left[(\alpha^2-\alpha\beta)-(\alpha\gamma-\beta\gamma)\right] = (\beta-\gamma)\left[\alpha(\alpha-\beta)-\gamma(\alpha-\beta)\right]$
$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma).$

2) $\alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta(\gamma^2-\alpha^2)+\gamma(\alpha^2-\beta^2)$
$= \alpha(\beta^2-\gamma^2)+\beta\gamma^2-\beta\alpha^2+\gamma\alpha^2-\gamma\beta^2$
$= \alpha(\beta^2-\gamma^2)-(\gamma\beta^2-\beta\gamma^2)-(\beta\alpha^2-\gamma\alpha^2)$
$= \alpha(\beta+\gamma)(\beta-\gamma)-\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha^2(\beta-\gamma)$
$= (\beta-\gamma)\left[\alpha(\beta+\gamma)-\beta\gamma-\alpha^2\right] = (\beta-\gamma)(\alpha\beta+\alpha\gamma-\beta\gamma-\alpha^2)$
$= (\beta-\gamma)\left[(\alpha\beta-\beta\gamma)-(\alpha^2-\alpha\gamma)\right] = (\beta-\gamma)\left[\beta(\alpha-\gamma)-\alpha(\alpha-\gamma)\right]$
$= (\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\beta-\alpha) \quad = (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha).$

3) $\alpha^2(\beta+\gamma)+\beta^2(\gamma+\alpha)+\gamma^2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\gamma$

<u>Ἀπ.</u> $= (\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).$

666. *<u>Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:</u>*

$$\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)+\alpha\beta(\alpha-\beta).$$

<u>Ἀπ.</u> Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν ἄσκ. 665 εὑρίσκομεν: $-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

667. *<u>Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:</u>*

$$\beta\gamma(\beta+\gamma)+\gamma\alpha(\gamma+\alpha)+\alpha\beta(\alpha+\beta)+2\alpha\beta\gamma.$$

<u>Ἀπ.</u> Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 665 εὑρίσκομεν ὡς ἐξαγόμενον:

$$(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).$$

668. *<u>Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:</u>*

1) $\alpha(\beta^3-\gamma^3)+\beta(\gamma^3-\alpha^3)+\gamma(\alpha^3-\beta^3)$

2) $\alpha^2(\beta^3-\gamma^3)+\beta^2(\gamma^3-\alpha^3)+\gamma^2(\alpha^3-\beta^3).$

<u>Ἀπ.</u> Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν ἄσκησ. 665 εὑρίσκομεν ἐξαγόμενα:

1. $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$

2. $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha).$

669. *<u>Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:</u>*

$$(x+y)^5-x^5-y^5.$$

<u>Ἀπ.</u> Θά ἔχωμεν: $(x+y)^5-x^5-y^5 = (x+y)^5-(x^5+y^5)$
$=(x+y)^5-(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)$
$=(x+y)\left[(x+y)^4-(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)\right]$
$=(x+y)(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4-x^4+x^3y-x^2y^2+xy^3-y^4)$
$=(x+y)(5x^3y+5x^2y^2+5xy^3) = 5xy(x+y)(x^2+xy+y^2).$

670. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$(x-y)^5 - x^5 + y^5$$

Ἀπ. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν ἀνωτέρω ἄσκησιν εὑρίσκομεν:

$$(x-y)^5 - x^5 + y^5 = -5xy(x-y)(x^2-xy+y^2)$$

671. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7$$

Ἀπ. Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 669 εὑρίσκομεν:

$$(x+y)^7 - x^7 - y^7 = 7xy\,(x+y)(x^2+xy+y^2).$$

672. *Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:*

1. $x^4-4y^4-9\omega^4-4x^2y^2$ Ἀπ. $(x^2-2y^2+3\omega^2)(x^2-2y^2-3\omega^2)$.
2. $\alpha x+\alpha y+\alpha\omega-\beta x-\beta y-\beta\omega$. Ἀπ. = ;
3. $\alpha^3+\beta^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-\alpha-\beta$ Ἀπ. $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta+1)(\alpha-\beta-1)$
4. $(x-y)(x+y)^2-(x-y)(x-\omega)^2$ Ἀπ. = ;
5. $(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+(\alpha-1)(\alpha-2)-(\alpha-1)$. Ἀπ. $(\alpha-1)(\alpha-1)(\alpha-3)$.
6. $(\alpha-\beta)(\alpha^2-\gamma^2)-(\alpha-\gamma)(\alpha^2-\beta^2)$. Ἀπ. = ;
7. $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3+\beta^3\gamma-\beta\gamma^3+\gamma^3\alpha-\gamma\alpha^3$ Ἀπ. $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.
8. $(\alpha x+\beta y)^2+(\beta x-\alpha y)^2$ Ἀπ. = ;
9. $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7$ Ἀπ. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$.
10. $x^4+2x^3+2x^2+2x+1$ Ἀπ. = ;
11. $x^8-x^6-x^4+x^2$ Ἀπ. $x^2(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)$.
12. $x^5+y^5+xy(x^3+y^3)$. Ἀπ. = ;

673. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$18\alpha^2\gamma^2-21\alpha^3\beta-30\beta\gamma^3+35\alpha\beta^2\gamma$$

Ἀπ. Λαμβάνομεν τούς ὅρους κατά ζεύγη βοηθούμενοι ἀπό τήν ἀναλογίαν τῶν συντελεστῶν τῶν ὅρων. Παρατηροῦμεν ὅτι ἐπειδή $18:(-30)=(-21):35$ ἤτοι $3:(-5)=(-3):5$ θά ἔχωμεν:

$$18\alpha^2\gamma^2-21\alpha^3\beta-30\beta\gamma^3+35\alpha\beta^2\gamma=(18\alpha^2\gamma^2-30\beta\gamma^3)-(21\alpha^3\beta-35\alpha\beta^2\gamma)$$

$$=6\gamma^2(3\alpha^2-5\beta\gamma)-7\alpha\beta(3\alpha^2-5\beta\gamma)=(3\alpha^2-5\beta\gamma)(6\gamma^2-7\alpha\beta).$$

674. $40\alpha^2\beta^4-32\alpha^3\beta x^2-5\beta^3x^3+4\alpha x^5$.

Ἀπ. Ἐπειδή $\frac{40}{-5}=\frac{-32}{4}=-8$, λαμβάνομεν α' ὅρον μετά τοῦ γ' ὅρου καὶ β' ὅρον μετὰ τοῦ δ' ὅρου.

$$40\alpha^2\beta^4 - 32\alpha^3\beta x^2 - 5\beta^3x^3 + 4\alpha x^5 = (40\alpha^2\beta^4 - 5\beta^3x^3) - (32\alpha^3\beta x^2 - 4\alpha x^5)$$
$$= 5\beta^3(8\alpha^2\beta - x^3) - 4\alpha x^2(8\alpha^2\beta - x^3) = (8\alpha^2\beta - x^3)(5\beta^3 - 4\alpha x^2).$$

675. *Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:*

1. $4\alpha\beta^2x^3 - 36\alpha^4x^2 - 5\beta^5x + 45\alpha^3\beta^3$ Ἀπ. $(\beta^2x - 9\alpha^3)(4\alpha x^2 - 5\beta^3)$.
2. $12\alpha^4\beta^4 - 28\alpha^7x + 21\alpha^3\beta x^4 - 9\beta^5x^3$ Ἀπ. = ;
3. $21\alpha^2\beta^2 - 35\beta^3\gamma - 12\alpha^3\gamma + 20\alpha\beta\gamma^2$ Ἀπ. $(3\alpha^2 - 5\beta\gamma)(7\beta^2 - 4\alpha\gamma)$.
4. $\alpha\beta(\alpha\beta - 3\gamma^2) - \gamma(3\alpha^3 - \beta^3)$ Ἀπ. = ;
5. $\alpha\gamma(\alpha\gamma - 4\beta^2) - \beta(4\alpha^3 - \gamma^3)$ Ἀπ. $(\gamma^2 - 4\alpha\beta)(\alpha^2 + \beta\gamma)$.

676. *Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$K = 28\alpha^3\beta^2 - 42\alpha^4 - 18\alpha^2\beta^2 - 32\alpha^2\beta^3 + 48\alpha^3\beta + 12\alpha\beta^4$$

Ἀπ. Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν τοὺς 6 ὅρους τοῦ πολυωνύμου ἀνὰ δύο α' ὅρον μὲ β', τὸν γ' ὅρον μὲ τὸν στ', τὸν δὲ δ' ὅρον μὲ τὸν ε' καθότι ἔχομεν:

$$28 : (-42) = (+12) : (-18) = (-32) : 48 = -\frac{2}{3} \quad \text{ἤτοι}$$
$$K = (28\alpha^3\beta^2 - 42\alpha^4) + (12\alpha\beta^4 - 18\alpha^2\beta^2) - (32\alpha^2\beta^3 - 48\alpha^3\beta).$$
$$K = 14\alpha^3(2\beta^2 - 3\alpha) + 6\alpha\beta^2(2\beta^2 - 3\alpha) - 16\alpha^2\beta(2\beta^2 - 3\alpha).$$
$$K = (2\beta^2 - 3\alpha)(14\alpha^3 + 6\alpha\beta^2 - 16\alpha^2\beta)$$
$$K = 2\alpha(2\beta^2 - 3\alpha)(7\alpha^2 + 3\beta^2 - 8\alpha\beta).$$

677. *Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων ἑκάστη τῶν παραστάσεων:*

1) $15\alpha^3 - 28\beta\gamma + 12\alpha^2\beta - 35\alpha\gamma - 18\alpha^2\gamma + 42\gamma^2$
Ἀπ. $(3\alpha^2 - 7\gamma)(5\alpha + 4\beta - 6\gamma)$.

2) $45\alpha\beta^2 + 36\beta^3 + 20\alpha^3 - 54\beta^2\gamma + 16\alpha^2\beta - 24\alpha^2\gamma$.
Ἀπ. $(9\beta^2 + 4\alpha^2)(5\alpha + 4\beta - 6\gamma)$.

678. *Νὰ ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$(7\alpha - \beta)^2 - 4(7\alpha - \beta)(2\alpha + \beta - 1) + 3(2\alpha + \beta - 1)^2.$$

Ἀπ. = $(5\alpha - 2\beta + 1)(\alpha - 4\beta + 3)$.

Γενικαὶ ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἀναλύσεως παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων.

Νὰ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

679. $12a^2x - 48b^2x$
680. $27a^4b^2x^2 - 75a^2x^4$
681. $x^6y^2z^4 - x^2y^{10}$
682. $225a^6y^2 - 36a^2x^2y^2$
683. $243a^6x^6 - 675a^4x^8$
684. $a^4 - a^3b - a^2b^2 + ab^3$
685. $a^5 - a^4b - ab^4 + b^5$
686. $a(a^2+1) - b(b^2+1)$
687. $3x^2(x-y)^3 - 6x(x-y)$
688. $a^{2\mu+3\nu} - a^{2\mu} - a^{3\nu} + 1$

689. $(a-x)(b-y) - 5(a-x) + b(3-x) + (x-3)(y+5)$ ’Απ. $(a-2x+3)(b-y-5)$
690. $x^2 + (a+b+\gamma)x + (a+b)\gamma$ ’Απ. $=$;
691. $x^2 + (b-\gamma-a)x - (b-\gamma)a$ ’Απ. $(x-a)(x+b-\gamma)$.
692. $ax^2 + (b\gamma - ab - a\gamma)x + ab\gamma - b^2\gamma$ ’Απ. $=$;
693. $a^4 + 3a^2b^2 + 4b^4$ ’Απ. $(a^2+2b^2+ab)(a^2+2b^2-ab)$
694. $\mu^4 - 2\lambda^2\mu^2 - 63\lambda^4$ ’Απ. $=$;
695. $a^4 + b^4 - 5a^2b^2$ ’Απ. $(a^2-b^2+ab\sqrt{3})(a^2-b^2-ab\sqrt{3})$.

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων αἱ παραστάσεις:

696. $x^{10} - y^{10}$
697. $x^{10} + y^{10}$
698. $x^{12} - y^{12}$
699. $x^{12} + y^{12}$
700. $a^6b^{12} - 1$
701. $a^{10}b^5 - \gamma^{20}$
702. $x^7y^2 + x^2y^7$
703. $(a+b)^3 - (a-b)^3$
704. $x^4y^2 + \omega^2 - 2x^2y\omega$
705. $\frac{a^2}{16} - \frac{3}{2}ab + 9b^2$
706. $x^{3\mu} - 3x^{2\mu} + 3x^{\mu} - 1$
707. $a^3b^3 + 3a^2b^2xy + 3abx^2y^2 + x^3y^3$
708. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - 2$
709. $\frac{a^3}{b^3} + 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \frac{b^3}{a^3}$
710. $x^{3\mu} - y^{3\nu} - 3x^{\mu}y^{\nu}(x^{\mu} - y^{\nu})$
711. $a^4 + b^4 + \gamma^4 + 2a^2b^2 - 2a^2\gamma^2 - 2b^2\gamma^2$

Νά ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενον παραγόντων:

712. $x^4 + (2b^2 - a^2)x^2 + b^4$ ’Απ. $(x^2+ax+b^2)(x^2-ax+b^2)$
713. $x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - b^4$ ’Απ $=$;
714. $8a^3 - 4ab^2 + 24a^2x - 12b^2x$ ’Απ. $4(2a^2-b^2)(a+3x)$.
715. $35a^5 + 24a^2b^2 - 21a^3b + 15a^3b^2 - 40a^4b - 9ab^3$ ’Απ $=$;

Νά τραποῦν εἰς γινόμενον:

716. $x^2 - 7x + 12$ ’Απ. $= (x-3)(x-4)$.
717. $x^3 - 7x^2 + 6x$ ’Απ. $= x(x-1)(x-6)$.

718. x^3-x^2-20x. Ἀπ. $x(x-5)(x+4)$
719. $2\alpha^2-\alpha\beta-3\beta^2$. » $(\alpha+\beta)(2\alpha-3\beta)$
720. $2x^3+5x^2-12x$. » $x(x+4)(2x-3)$
721. $5x^3-13xy+6y^2$. » $(x-2y)(5x-3y)$
722. $2x^3-3x^2-12x+20$. » $(x-2)^2(2x+5)$

723. $\alpha^2-9\alpha\beta+14\beta^2$
724. $2\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2$
725. $7x^3+25x^2+12x$
726. $250(\alpha-\beta)^3+2$
727. $\alpha^4-\alpha^3\beta-7\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+6\beta^4$

728. $(x+2\alpha)^3+(2x+\alpha)^3+x^3+\alpha x^2-10\alpha^2x-10\alpha^3$
729. $(\alpha-2\beta)^2-6(\alpha-2\beta)(3\alpha+\beta)+8(3\alpha+\beta)^2$ Ἀπ. $(5\alpha+4\beta)(11\alpha+6\beta)$.
730. $(\alpha\beta-\gamma\delta)(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)+(\alpha\gamma-\beta\delta)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2-\delta^2)$

Ἀπ. $(\beta+\gamma)(\alpha+\delta)(\alpha-\delta+\beta-\gamma)(\alpha-\delta-\beta+\gamma)$

731. $(x^2+xy+y^2)^2-x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2$ Ἀπ. $(x^2+y^2)(x+y+z)(x+y-z)$.
732. $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3$ Ἀπ. = ;
733. $(\alpha-\beta)^3+(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3$ Ἀπ. = ;
734. $(x-\alpha)^2(\beta-\gamma)+(x-\beta)^2(\gamma-\alpha)+(x-\gamma)^2(\alpha-\beta)$. Ἀπ. $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)$.
735. $\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)$ Ἀπ. $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.
736. $x^3(y-z^2)+y^3(z-x^2)+z^3(x-y^2)+xyz(xyz-1)$. Ἀπ. $(x^2-z)(y^2-x)(z^2-y)$.
737. $xyz(x^2y^2z^2-z^2x-x^2y-zy^2)+x^2z+y^2x+z^2y-1$. » $(xy^2-1)(zx^2-1)(yz^2-1)$.

Νά δειχθῇ ὅτι:

738. $(\alpha\mu+\beta\nu)^2+(\alpha\nu-\beta\mu)^2+\gamma^2\mu^2+\gamma^2\nu^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\mu^2+\nu^2)$.
739. $(\alpha\mu+\beta\nu)^2+(\alpha\nu-\beta\mu)^2+(\gamma\mu+\delta\nu)^2+(\gamma\nu-\delta\mu)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\mu^2+\nu^2)$.
740. *Νά ἀναλυθῇ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ παράστασις:*

$$\varphi(x)=x^3+(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)x-(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta).$$

Ἀπ. Ἐπειδή τό $\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$ δύναται νά γραφῇ

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)+(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\beta-\gamma)$$

ἐάν θέσωμεν:

$$\alpha-\beta=A$$
$$\beta-\gamma=B$$
$$\gamma-\alpha=\Gamma$$

ὁπότε: $0=A+B+\Gamma$

τό δοθέν πολυώνυμον γράφεται:

$$\varphi(x)=x^3-(A+B+\Gamma)x^2+(AB+B\Gamma+\Gamma A)x-AB\Gamma$$

ἀλλά τοῦτο, ὡς γνωστόν, εἶναι γινόμενον τῶν τριῶν τριωνύμων $(x-A)(x-B)(x-\Gamma)$. Ἄρα θά ἔχωμεν:

$$\varphi(x) = (x-A)(x-B)(x-\Gamma) = (x-\alpha+\beta)(x-\beta+\gamma)(x-\gamma+\alpha).$$

741. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(2x-y)^2(3x+2y)^2-(3x-2y)^2(2x-y)^2+(3x-2y)^2 4y^2-(3x+2y)^2 4y^2 =$$
$$= (2x+y)(2x-3y)\,24xy.$$ Ἀν. Ἐμπορική 1940

742. *Νά τραπῇ εἰς γινόμενον τριῶν παραγόντων τό πολυώνυμον* $x^3-x^2(\alpha+4)+x(3+4\alpha)-3\alpha$ *γνωστοῦ ὄντος ὅτι τοῦτο γίνεται 0 διά* $x=\alpha$.

Ἀπόκ. $(x-\alpha)(x-3)(x-1)$.

ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ

Κανών. Διά νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀναλύομεν αὐτάς εἰς γινόμενα παραγόντων καί ἔπειτα σχηματίζομεν ἕν γινόμενον, τό ὁποῖον περιέχει πάντας τούς κοινούς παράγοντας τῶν δοθεισῶν παραστάσεων εἴτε ἀριθμητικοί εἶναι οὗτοι εἴτε μονώνυμα εἴτε πολυώνυμα καί ἕκαστον μέ τόν μικρότερον ἐκθέτην.

Παράδ. 1ον. Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:

$$15\alpha^3\beta^2\gamma,\quad 20\alpha^4\beta^3,\quad 30\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

Ἀπ. Ἀναλύοντες εἰς γινόμενον παραγόντων λαμβάνομεν:

$$15\alpha^3\beta^2\gamma = 3\cdot 5\alpha^3\beta^2\gamma$$
$$20\alpha^4\beta^3 = 2^2\cdot 5\alpha^4\beta^3$$
$$30\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 2\cdot 3\cdot 5\alpha^2\beta^2\gamma^2$$

μ.κ.δ. $= 5\alpha^2\beta^2$

Παράδ. 2ον. Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:

$$\alpha^2-\beta^2,\quad \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2,\quad \alpha^3-\beta^3.$$

Ἀπ. Θά ἔχωμεν:

$$\alpha^2-\beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$$
$$\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$$
$$\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$$

μ.κ.δ. $= (\alpha-\beta)$.

743. *Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ τῶν παραστάσεων:*

$$x^3y^2\omega,\quad xy^3\omega^2,\quad x^2y\omega^3.$$

Ἀπ. μ.κ.δ $= xy\omega$

744. *Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν παραστάσεων:*

$a^3 - ab^2$, $a^2b - b^3$, $(a+b)^2$. Ἀπ. $M = (a+b)$.

745. Νά εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν παραστάσεων:

$x^2 - 5x + 6$, $x^2 - 7x + 10$, $x^2 - 10x + 16$, $x^2 - 4$.

Ἀπ. Ἀναλύοντες εἰς γινόμενα τά πολυώνυμα λαμβάνομεν

$$\left.\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= (x-2)(x-3) \\ x^2 - 7x + 10 &= (x-2)(x-5) \\ x^2 - 10x + 16 &= (x-2)(x-8) \\ x^2 - 4 &= (x+2)(x-2). \end{aligned}\right| \quad \mu.\kappa.\delta. = (x-2).$$

Σημ. Τῶν ἀλγεβρ. παραστάσεων τῶν μή ἐχουσῶν οὐδένα κοινόν διαιρέτην εἴτε ἀριθμητικόν εἴτε μονώνυμον εἴτε πολυώνυμον, θεωρεῖται ὡς κοινός διαιρέτης αὐτῶν ἡ 1 ἄρα καί μ. κ. δ. = 1. Καλοῦνται δέ αἱ παραστάσεις αὗται πρῶται πρός ἀλλήλας. Π.χ. αἱ 3 παραστάσεις $5a^2b$, $2ax^2$, $10xy$ οὐδένα κοινόν διαιρέτην περιέχουν ἐκτός τῆς μονάδος, ἄρα μ. κ. δ. = 1.

Νά εὑρεθῇ ὁ μ. κ. δ. τῶν κάτωθι παραστάσεων:

746. $9a^3b^2$, $15a^2b^3$, $75ab^2\gamma^3$

747. $16x^2y^2$, $24x^3y^3$, $48x^2y^2\omega^2$

748. ab, $b\gamma$, γa Ἀπ. $M = 1$.

749. x^3y^2, $y^3\omega^2$, ω^3x^2 » $M = 1$

750. $x^3 - xy^2$, $x^2y - y^3$, $a(x+y)$ » $M = (x+y)$

751. $a - b$, $a^2 - b^2$, $a^2 + b^2 - 2ab$.

752. $x^2 - 6x + 8$, $x^2 - 10x + 21$, $x^2 - 13x + 22$.

753. $13104\,a^{\mu}b^{\nu-1}$, $16848\,a^{\mu-1}b^{\nu-2}$, $24024\,a^{\mu+1}b^{\nu}$, $6048\,a^{\mu-2}b^{\nu+1}$.

ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ ΚΟΙΝΟΝ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ

Κανών. Διά νά εὕρωμεν τό ε. κ. π. πολλῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων ἀναλύομεν αὐτάς εἰς γινόμενον παραγόντων (τούς συντελεστάς εἰς γινόμενον πρώτων παραγόντων) καί ἔπειτα σχηματίζομεν ἕν γινόμενον λαμβάνοντες τούς κοινούς καί μή κοινούς παράγοντας εἴτε ἀριθμητικοί εἶναι οὗτοι, εἴτε μονώνυμα, εἴτε πολυώνυμα καί ἕκαστον μέ τόν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

754. *Νά εὑρεθῇ τό ἐ.κ.π. τῶν παραστάσεων:*

$$12\alpha^3\beta^4\gamma \quad , \quad 20\alpha^4\beta^3 \quad , \quad 80\alpha^2\beta^3\gamma^3.$$

Ἀπ. Ἀναλύοντες θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} 12\alpha^3\beta^4\gamma &= 2^2\cdot 3\alpha^3\beta^4\gamma \\ 20\alpha^4\beta^3 &= 2^2\cdot 5\alpha^4\beta^3 \\ 80\alpha^2\beta^3\gamma^3 &= 2^4\cdot 5\alpha^2\beta^3\gamma^3 \end{aligned} \qquad \text{ε.κ.π.} = 2^4\cdot 3\cdot 5\alpha^4\beta^4\gamma^3 = 240\alpha^4\beta^4\gamma^3$$

755. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν παραστάσεων:*

$$\alpha^3(x^2-y^2), \quad \alpha^2\beta^3(x+y)^2 \quad , \quad \alpha^2\beta^2(x-y)^3.$$

Ἀπ. Ἀναλύοντες εἰς γινόμενον παραγόντων θά ἔχωμεν:

$$\begin{aligned} \alpha^3(x^2-y^2) &= \alpha^3(x+y)(x-y) \\ \alpha^2\beta^3(x+y)^2 &= \alpha^2\beta^3(x+y)^2 \\ \alpha^2\beta^2(x-y)^3 &= \alpha^2\beta^2(x-y)^3 \end{aligned} \qquad \text{ἐ.κ.π.} = \alpha^3\beta^3(x+y)^2(x-y)^3$$

756. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν παραστάσεων:*

$$\begin{aligned} 3x^4-3x^2 &= 3x^2(x^2-1) = 3x^2(x+1)(x-1) \\ 9x^3-9x &= 9x(x^2-1) = 3^2x(x+1)(x-1) \\ x^4-x &= x(x^3-1) = x(x-1)(x^2+x+1). \end{aligned}$$

Ἀπ. $\text{ε.κ.π.} = 3^2\cdot x^2(x+1)(x-1)(x^2+x+1) = 9x^2(x^2-1)(x^2+x+1).$

757. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν παραστάσεων:*

$x^2y \quad , \quad y^2\omega \quad , \quad \omega^3x.$ Ἀπ. $\text{ε.κ.π.} = x^2y^2\omega^3.$

758. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν παραστάσεων:*

$$x^2-7x+10 \quad , \quad x^2-5x+6 \quad , \quad x^2-8x+15.$$

Ἀπ. $$\begin{aligned} x^2-7x+10 &= (x-2)(x-5) \\ x^2-5x+6 &= (x-2)(x-3) \\ x^2-8x+15 &= (x-3)(x-5) \end{aligned} \qquad \text{ε.κ.π.} = (x-2)(x-3)(x-5).$$

759. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν κάτωθι παραστάσεων:*

$$\alpha^3+\beta^3 \quad , \quad (\alpha+\beta)^3 \quad , \quad \alpha^2-\alpha\beta+\beta^2 \quad , \quad \alpha^2-\beta^2.$$

<u>Ἀπ.</u> Θά ἔχωμεν:

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$	
$(a+b)^3=(a+b)^3$	
$a^2-ab+b^2=(a^2-ab+b^2)$	ε.κ.π. $=(a-b)(a+b)^3(a^2-ab+b^2)$.
$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$	

760. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν ἑξῆς παραστάσεων:*

$2x+2\ ,\ 4x-4\ ,\ 6(x^2-1),\ 16(x^4-1)$.

<u>Ἀπ.</u> ε.κ.π. $=2^4\cdot 3(x+1)(x-1)(x^2+1)=48(x+1)(x-1)(x^2+1)$.

761. *Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν κάτωθι παραστάσεων:*

$(a-b)(a-\gamma),\ (b-a)(\gamma-b),\ (\gamma-a)(b-\gamma)$.

<u>Ἀπ.</u> Θά ἔχωμεν:

$(a-b)(a-\gamma)=(a-b)(a-\gamma)$	$E=(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)(-1)=$
$(b-a)(\gamma-b)=(a-b)(b-\gamma)$	$=(a-b)(b-\gamma)(\gamma-a)$.
$(\gamma-a)(b-\gamma)=(-1)\cdot(a-\gamma)(b-\gamma)$.	

762. *Ὁμοίως τό ε.κ.π. τῶν κάτωθι:*

$(a-b)^2-\gamma^2=(a-b+\gamma)(a-b-\gamma)$.

$(a+\gamma)^2-b^2=(a+b+\gamma)(a+\gamma-b)$.

$a^2-(b+\gamma)^2=(a+b+\gamma)(a-b-\gamma)$.

<u>Ἀπ.</u> ε.κ.π. $=(a+b+\gamma)(a-b+\gamma)(a-b-\gamma)$.

Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π. τῶν κάτωθι παραστάσεων:

763. $4x^3y^2z,\ 6xy^3z^2,\ 18x^2yz^3$. <u>Ἀπ.</u> ε.κ.π. $=36x^3y^3z^3$

764. $x^2-y^2\ ,(x-y)^2\ ,\ (x+y)$. » » $=(x+y)(x-y)^2$

765. $(x-1)\ ,\ x^2+x+1\ ,\ x^3-1$. » » $=x^3-1$.

766. $x^2+3x+2,\ x^2+4x+3,\ x^2+5x+6$. » » $=(x+1)(x+2)(x+3)$.

767. $x^2+2x-3,\ x^3+3x^2-x-3,\ x^3+4x^2+x-6$. » » $=(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$.

768. $x^2-1\ ,\ x^2+1\ ,\ x^4+1\ ,\ x^8-1$. <u>Ἀπ.</u> $E=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^4+1)=x^8-1$

769. $x^2-1\ ,\ x^3+1\ ,\ x^3-1\ ,\ x^6+1$. » $E=x^{12}-1$.

770. $x^2-(a+b)x+ab,\ x^2-(b+\gamma)x+b\gamma\ ,\ x^2-(\gamma+a)x+a\gamma$

Ἀπ. ε.κ.π. $=(x-a)(x-b)(x-\gamma)$.

771. $a^{\mu}b^{\nu-2}\ ,\ a^{\mu-1}b^{\nu-1}\ ,\ a^{\mu-2}b^{\nu}$.

<u>Ἀπ.</u> ε.κ.π. $=a^{\mu}b^{\nu}$.

772. $13104x^{\mu}y^{\nu-1}$, $16848x^{\mu-1}y^{\nu-2}$, $24024x^{\mu+1}y^{\nu}$, $6048x^{\mu-2}y^{\nu+1}$.

Ἀπ. $13104x^{\mu}y^{\nu-1} = 2^4\cdot 3^2\cdot 7\cdot 13\,x^{\mu}y^{\nu-1}$

$16848x^{\mu-1}y^{\nu-2} = 2^4\cdot 3^4\cdot 13\,x^{\mu-1}y^{\nu-2}$

$24024x^{\mu+1}y^{\nu} = 2^3\cdot 3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\,x^{\mu+1}y^{\nu}$

$6048x^{\mu-2}y^{\nu+1} = 2^5\cdot 3^3\cdot 7\,x^{\mu-2}y^{\nu+1}$

ε.κ.π. $= 2^5\cdot 3^4\cdot 7\cdot 11\cdot 13\,x^{\mu+1}\cdot y^{\nu+1}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ.′

ΠΕΡΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ

Πρός ἐπαλήθευσιν μιᾶς ἀλγεβρικῆς ταυτότητος λαμβάνομεν τό α′ μέλος καί προσπαθοῦμεν διά καταλλήλων μετασχηματισμῶν καί πράξεων νά καταλήξωμεν εἰς τό β′. μέλος. Τό αὐτό πράττομεν ὅταν μᾶς συμφέρῃ νά λάβωμεν τό β′ μέλος ἵνα καταλήξωμεν εἰς τό α′. μέλος. Σπανίως ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις ἐπ᾽ ἀμφοτέρων τῶν μελῶν ἵνα ἀποδείξωμεν τήν ἀλήθειαν τῆς ταυτότητος.

Παραθέτομεν κατωτέρω πρός ἐπανάληψιν τάς ἑξῆς ἀποδειχθείσας ταυτότητας, αἱ ὁποῖαι εἶναι λίαν χρήσιμοι:

Ὁμάς 1η (Διώνυμα τοῦ Νεύτωνος).

α) $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$

β) $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$

γ) $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+\beta^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)$.

δ) $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-\beta^3-3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.

ε) $(\alpha+\beta)^4 = \alpha^4+4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2+4\alpha\beta^3+\beta^4$

στ) $(\alpha-\beta)^4 = \alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4$

ζ) $(\alpha+\beta)^5 = \alpha^5+5\alpha^4\beta+10\alpha^3\beta^2+10\alpha^2\beta^3+5\alpha\beta^4+\beta^5$

η) $(\alpha\pm\beta)^6 = \alpha^6\pm 6\alpha^5\beta+15\alpha^4\beta^2\pm 20\alpha^3\beta^3+15\alpha^2\beta^4\pm 6\alpha\beta^5+\beta^6$

Ὁμάς 2α (Πηγάζουσα ἐκ τῆς ὁμ. 1η)

α′) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

β′) $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta$

γ′) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

δ′) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$

ε′) $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha+\beta)^4-4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2$

στ′) $\alpha^4+\beta^4 = (\alpha-\beta)^4+4\alpha\beta(\alpha-\beta)^2+2\alpha^2\beta^2$

ζ′) $\alpha^5+\beta^5 = (\alpha+\beta)^5-5\alpha\beta(\alpha+\beta)^3+5\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$.

η′) $\alpha^6+\beta^6 = (\alpha+\beta)^6-6\alpha\beta(\alpha+\beta)^4+9\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2-2(\alpha\beta)^3$.

Ὁμάς 3η (Πηγάζουσα ἐκ τῶν ἀξιοσημειώτων πηλίκων).

1. $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

2. $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

3. $\alpha^4 - \beta^4 = (\alpha-\beta)(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3) = (\alpha+\beta)(\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3)$

ἤ $\alpha^4-\beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$.

4. $\alpha^5-\beta^5 = (\alpha-\beta)(\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4)$.

5. $\alpha^5+\beta^5 = (\alpha+\beta)(\alpha^4-\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+\beta^4)$.

6. $x^\mu-\alpha^\mu = (x-\alpha)(x^{\mu-1}+\alpha x^{\mu-2}+\alpha^2x^{\mu-3}+\dots\dots+\alpha^{\mu-2}x+\alpha^{\mu-1})$.

7. $x^\nu-1 = (x-1)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}+x^{\nu-3}+\dots\dots+x^2+x+1)$.

773. <u>Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:</u>

$$(\alpha+\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta+\gamma)^2-(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2+4\alpha\gamma = 0.$$

<u>Ἀπ.</u> Α′ μέλος $= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma)$
$-(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)+(\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta)+4\alpha\gamma = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma$
$-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma+2\beta\gamma-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta+4\alpha\gamma=0$

774. <u>Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:</u>

$$(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta-\gamma+\delta)^2+(\alpha-\beta+\gamma-\delta)^2+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2=4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2).$$

<u>Ἀπ.</u> Ἐργαζόμεθα ὡς ἀνωτέρω ἤ ὡς εἰς ἄσκ. 365.

775. <u>Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:</u>

$$(\alpha+\beta-\gamma)^2+(\alpha-\beta+\gamma)^2 = 2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2].$$

<u>Ἀπ.</u> Α′ μέλος $= \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta-2\alpha\gamma-2\beta\gamma+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\alpha\gamma-2\beta\gamma$
$= 2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-4\beta\gamma = 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma) = 2[\alpha^2+(\beta-\gamma)^2]$.

776. <u>Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:</u> $\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)^2$.

<u>Ἀπ.</u> Α′ μέλος. $= \alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$
$= \alpha^2\beta^2+\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha^2\beta^2+2\alpha\beta^3+\beta^4$
$= \alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^3\beta+2\alpha\beta^3$
$= (\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)^2$.

777. <u>Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:</u>

$$\alpha(\alpha+\beta)(\alpha+2\beta)(\alpha+3\beta)+\beta^4 = (\alpha^2+3\alpha\beta+\beta^2)^2$$

Ἀπ. Α΄ μέλος $= (a^2+ab)(a^2+5ab+6b^2)+b^4$

$$= a^4+5a^3b+6a^2b^2+a^3b+5a^2b^2+6ab^3+b^4$$
$$= a^4+6a^3b+11a^2b^2+6ab^3+b^4$$
$$= a^4+9a^2b^2+b^4+6a^3b+2a^2b^2+6ab^3=(a^2+3ab+b^2)^2$$

778. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(a^4-b^4)+2b(a^3+b^3)-(a+b)^2(a-b)^2 = 2a^2b(a+b).$$

Ἀπ. Α΄ μέλος $=a^4-b^4+2a^3b+2b^4-(a^2-b^2)^2=a^4+2a^3b+b^4-a^4-b^4+2a^2b^2$

$$=2a^3b+2a^2b^2 \quad = 2a^2b(a+b).$$

779. *Νά ἐπαληθευθοῦν αἱ ταυτότητες:*

1. $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$
2. $x^6+y^6=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2).$

Ἀπ. 1. $x^6+y^6=x^6+y^6+2x^3y^3-2x^3y^3$

$$=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$$

2. $x^6+y^6=(x^6+y^6+3x^4y^2+3x^2y^4)-3x^4y^2-3x^2y^4$

$$=(x^2+y^2)^3-3x^2y^2(x^2+y^2).$$

780. *Νά ἀποδειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^2+y^2+xy\sqrt{3})\cdot(x^2+y^2-xy\sqrt{3}).$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

Ἀπ. Α΄ μέλος. $x^6+y^6=(x^2)^3+(y^2)^3=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

$$=(x^2+y^2)\left[(x^2+y^2)^2-3x^2y^2\right]$$
$$=(x^2+y^2)(x^2+y^2+xy\sqrt{3})\cdot(x^2+y^2-xy\sqrt{3}).$$

Ἡ ταυτότης ἠδύνατο νά ἀποδειχθῇ δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων εἰς τό β΄ μέλος, ὁπότε κατόπιν ἀναγωγῆς φθάνομεν εἰς τό α΄ μέλος.

781. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$x^4+4y^4=(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2).$$

Ἀπ. $x^4+4y^4=x^4+4y^4+4x^2y^2-4x^2y^2=(x^2+2y^2)^2-4x^2y^2$

$$=(x^2+2y^2+2xy)(x^2+2y^2-2xy).$$

782. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$x^6+27y^6=(x^2+3y^2)(x^2-3xy+3y^2)(x^2+3xy+3y^2)$ *καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ α΄ μέλους διά $x=\frac{1}{2}$ καί $y=0{,}01$.*

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

Ἀπ. $x^6+27y^6=(x^2)^3+(3y^2)^3=(x^2+3y^2)(x^4-3x^2y^2+9y^4)$
$=(x^2+3y^2)(x^4+6x^2y^2+9y^4-9x^2y^2)=(x^2+3y^2)[(x^2+3y^2)^2-(3xy)^2]$
$=(x^2+3y^2)(x^2+3y^2-3xy)(x^2+3y^2+3xy).$

Ἀριθμ. τιμὴ α΄ μέλους $=\left(\frac{1}{2}\right)^6+27\cdot(0{,}01)^6=\frac{1}{64}+27\cdot 0{,}000\,000\,000\,001$
$=\frac{1}{64}+0{,}000\,000\,000\,027=0{,}015\,625+0{,}000\,000\,000\,027$
$=0{,}015\,625\,000\,027.$

783. Ἐάν $x+y=\alpha$ καί $xy=\beta$ νά ἐπαληθευθοῦν αἱ ἰσότητες:

1. $x^2+y^2=\alpha^2-2\beta$ 2. $x^3+y^3=\alpha^3-3\alpha\beta$
3. $x^4+y^4=\alpha^4-4\alpha^2\beta+2\beta^2$ 4. $x^5+y^5=\alpha^5-5\alpha^3\beta+5\alpha\beta^2$

καί 5. $x^6+y^6=\alpha^6-6\alpha^4\beta+9\alpha^2\beta^2-2\beta^3.$

Ἀπ. Ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τάς ταυτότητας Σελ. 144 ὁμάς 2^{α} θά ἔχωμεν: 1. $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\alpha^2-2\beta.$
2. $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=\alpha^3-3\alpha\beta.$ κ.λ.π.

784. Ἐάν $x=(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2)^2$, $y=2\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)^2$, $\omega=\alpha^2+\beta^2$ νά δειχθῇ ὅτι: $x^2+y^2=\omega^6.$

Ἀπ. $x^2+y^2=(\alpha^2-\beta^2)^2(\alpha^2+\beta^2)^4+4\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)^4$
$=(\alpha^2+\beta^2)^4\left[(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2\right]=(\alpha^2+\beta^2)^4(\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2)=$
$=(\alpha^2+\beta^2)^4(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2+\beta^2)^6=\omega^6$

785. Ἐάν $x=\alpha(3\beta^2-\alpha^2)$, $y=\beta(3\alpha^2-\beta^2)$, $\omega=\alpha^2+\beta^2$ νά δειχθῇ ὅτι: $x^2+y^2=\omega^3$

Ἀπ. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τήν ἀνωτέρω ἄσκησιν.

786. Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης
$$(\alpha+\beta+\gamma)^3+3(\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta-\gamma)-3(\beta+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)^2-(\beta+\gamma)^3=\alpha^3$$

Ἀπ. Παρατηροῦμεν ὅτι τό α΄ μέλος εἶναι τέλειον ἀνάπτυγμα κύβου τῆς διαφορᾶς τῶν παραστάσεων $(\alpha+\beta+\gamma)$ καί $(\beta+\gamma)$. Ἄρα τοῦτο γράφεται:

Α΄ μέλος. $=\left[(\alpha+\beta+\gamma)-(\beta+\gamma)\right]^3=(\alpha+\beta+\gamma-\beta-\gamma)^3=\alpha^3.$

787. *Νά ἐπαληθευθῆ ἡ ταυτότης.*

$$(\alpha+\beta+\gamma)^3-3(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3.$$

Ἀπ. Α′ μέλος $=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2$
$+6\alpha\beta\gamma-3(\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta\gamma^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma)$
$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+3\alpha^2\gamma+3\alpha\gamma^2+3\beta^2\gamma+3\beta\gamma^2+6\alpha\beta\gamma$
$-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2-3\alpha^2\gamma-3\alpha\gamma^2-3\beta^2\gamma-3\beta\gamma^2-6\alpha\beta\gamma$
$=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3.$

788. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$\alpha^3(\alpha^3-2\beta^3)^3+\beta^3(2\alpha^3-\beta^3)^3=(\alpha^3-\beta^3)(\alpha^3+\beta^3)^3.$$

Ἀπ. Ἀναπτύσσοντες τό α′ μέλος κατόπιν ἀναγωγῆς ὁμοίων ὅρων καί συμπτύξεως φθάνομεν εἰς τό β′ μέλος.

789. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$(x+y)^4+x^4+y^4-2(x^2+y^2+xy)^2=0.$$

Ἀπ. Α′ μέλος $=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4-2(x^4+y^4+x^2y^2+2x^2y^2+2x^3y+2xy^3)$
$=2x^4+2y^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3-2x^4-2y^4-6x^2y^2-4x^3y-4xy^3=0$

790. *Νά ἀποδειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)-\beta\gamma(y-z)^2-\gamma\alpha(z-x)^2-\alpha\beta(x-y)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2.$$

791. *Νά δειχθῆ ἡ ἀλήθεια τῶν κάτωθι ταυτοτήτων:*

1. $(x+y)^3+3xy(1-x-y)-1\equiv(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1).$
2. $(\beta+\gamma)^3+(\gamma+\alpha)^3+(\alpha+\beta)^3-3(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)\equiv2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma).$
3. $(\alpha^2-\beta\gamma)^3+(\beta^2-\gamma\alpha)^3+(\gamma^2-\alpha\beta)^3-3(\alpha^2-\beta\gamma)(\beta^2-\alpha\gamma)(\gamma^2-\alpha\beta)\equiv(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2.$

Ἀπ. 1. Α′ μέλος $=(x+y)^3-1^3-3xy(x+y-1)\equiv[(x+y)-1][(x+y)^2+(x+y)+1]-$
$-3xy(x+y-1)\equiv(x+y-1)(x^2+y^2+2xy+x+y+1-3xy)$
$\equiv(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1).$

2. Ἐάν εἰς τό α′ μέλος ἀντικαταστήσωμεν διά x, y, z τά διώνυμα $(\beta+\gamma), (\gamma+\alpha), (\alpha+\beta)$ ἀντιστοίχως λαμβάνομεν:
Α′ μέλος $=x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]$
κατά ἄσκ. 376. $\equiv\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta+2\gamma)[(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2]$
$\equiv(\alpha+\beta+\gamma)[(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2]\equiv2\left[\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)[(\beta-\alpha)^2+\right.$
$\left.+(\gamma-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2]\right]\equiv2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma).$

3. Ἐάν εἰς τό α′ μέλος ἀντικαταστήσωμεν τά διώνυμα ὡς ἑξῆς:

$x=\alpha^2-\beta\gamma$ ὁπότε: $x-y=\alpha^2-\beta\gamma-\beta^2+\gamma\alpha=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+\gamma)$.

$y=\beta^2-\gamma\alpha$ » $y-z=\beta^2-\gamma\alpha-\gamma^2+\alpha\beta=(\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)$.

$z=\gamma^2-\alpha\beta$ » $z-x=\gamma^2-\alpha\beta-\alpha^2+\beta\gamma=(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)$.

τότε θά ἔχωμεν:

$$\text{Α}'\ \text{μέλος}=x^3+y^3+z^3-3xyz\equiv\frac{1}{2}(x+y+z)\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]$$
$$\equiv\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2(\alpha+\beta+\gamma)^2\right]$$
$$\equiv\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)^2\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$$
$$\equiv\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]\cdot(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma).$$
$$\equiv(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)\equiv(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma)^2.$$

792. *Ἐάν $\alpha^2-\beta\gamma=x$, $\beta^2-\alpha\gamma=y$, $\gamma^2-\alpha\beta=z$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι:*

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=(x+y+z)(\alpha+\beta+\gamma).$$

Ἀπ. Εἰς τό α΄ μέλος ἀντικαθιστῶντες τά x, y, z διά τῶν ἴσων των λαμβάνομεν: $\alpha x+\beta y+\gamma z=\alpha(\alpha^2-\beta\gamma)+\beta(\beta^2-\alpha\gamma)+\gamma(\gamma^2-\alpha\beta)=$ $=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\alpha\gamma-\beta\gamma)$ κατά τήν γνωστήν ταυτότητα ἄσκ. 375 ἤ $\alpha x+\beta y+\gamma z=$
$=(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha^2-\beta\gamma)+(\beta^2-\alpha\gamma)+(\gamma^2-\alpha\beta)\right]=(\alpha+\beta+\gamma)(x+y+z)$.

793. *Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι τέλειον τετράγωνον ἡ παράστασις:* $2(y-\omega)^2+2(\omega-x)^2+2(x-y)^2+6(xy+y\omega+\omega x)-3(x^2+y^2+\omega^2)$.

Ἀπ. $=(x+y+\omega)^2$.

794. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2+(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2=2(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$$

Ἀπ. Α΄ μέλος $=\left[(\alpha+\beta)^2-(\gamma+\delta)^2\right]+\left[(\alpha+\gamma)^2-(\beta+\delta)^2\right]$
$$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta)+(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\gamma-\delta-\beta)$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha+\beta-\gamma-\delta+\alpha+\gamma-\delta-\beta).$$
$$=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(2\alpha-2\delta)=2(\alpha-\delta)(\alpha+\beta+\gamma+\delta).$$

795. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\alpha(\beta+\gamma)^2+\beta(\gamma+\alpha)^2+\gamma(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha).$$

796. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha^2-\beta\gamma)^2+(\beta^2-\alpha\gamma)^2+(\gamma^2-\alpha\beta)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-(\beta\gamma+\alpha\gamma+\alpha\beta)^2$$

Α΄ μέλος $=\alpha^4-2\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma^2+\beta^4-2\alpha\beta^2\gamma+\alpha^2\gamma^2+\gamma^4-2\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta^2$
$$=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\alpha^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\beta^2\gamma^2-\alpha^2\gamma^2-2\alpha^2\beta\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2$$

$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2)$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)^2.$$

797. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-(\alpha+\beta+\gamma)^2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2$$

Ἀπ. Πρός εὐκολίαν ἐνταῦθα δυνάμεθα νά κάμωμεν ἀντικατάστασιν θέτοντες $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=x$ καί $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=y$ ὁπότε $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=x+2y$, ἐπομένως τό α' μέλος τῆς δοθείσης ταυτότητος γράφεται:

$$\text{Α' μέλος} = (x+y)^2-(x+2y)x = x^2+y^2+2xy-x^2-2xy$$
$$= y^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2.$$

798. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2=\left[(\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)\right]^2$$

Ἀπ. Ἐνταῦθα συμφέρει νά ἀρχίσωμεν ἐκ τοῦ β' μέλους.

$$\text{Β}^{\text{ον}}\text{ μέλος}=\left[(\beta-\gamma)^2-(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)\right]^2=(\beta-\gamma)^4-2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2$$
$$=(\beta-\gamma)^2\left[(\beta-\gamma)^2-2(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)\right]+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2$$
$$=(\beta-\gamma)^2(\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2-2\alpha\gamma+2\beta\gamma+2\alpha^2-2\alpha\beta)+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2$$
$$=(\beta-\gamma)^2\left[(\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta)+(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma)\right]+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2$$
$$=(\beta-\gamma)^2\left[(\alpha-\beta)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]+(\alpha-\beta)^2(\gamma-\alpha)^2$$
$$=(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2(\gamma-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2(\alpha-\beta)^2.$$

799. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:*

$$\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]^2=2\left[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4\right]$$

Ἀπ. $\text{Α}^{\text{ον}}\text{ μέλος}=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\alpha\gamma+\alpha^2)^2$

$$=\left[2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\right]^2$$
$$=4(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\alpha^2\gamma^2+2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2-2\alpha^3\beta-2\alpha^2\beta\gamma-$$
$$-2\alpha^3\gamma+2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3-2\beta^3\gamma-2\alpha\beta^2\gamma-2\alpha\beta\gamma^2-2\beta\gamma^3-2\alpha\gamma^3+$$
$$+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta\gamma^2)$$
$$=4\alpha^4+4\beta^4+4\gamma^4+12\alpha^2\beta^2+12\alpha^2\gamma^2+12\beta^2\gamma^2-8\alpha^3\beta-8\alpha\beta^3-8\alpha^3\gamma-$$
$$-8\alpha\gamma^3-8\beta^3\gamma-8\beta\gamma^3$$
$$=2(\alpha^4-4\alpha^3\beta+6\alpha^2\beta^2-4\alpha\beta^3+\beta^4)+2(\gamma^4-4\gamma^3\alpha+6\gamma^2\alpha^2-4\gamma\alpha^3+$$

$+\alpha^4)+2(\beta^4-4\beta^3\gamma+6\beta^2\gamma^2-4\beta\gamma^3+\gamma^4)$

$=2(\alpha-\beta)^4+2(\gamma-\alpha)^4+2(\beta-\gamma)^4 = 2\left[(\alpha-\beta)^4+(\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4\right]$

800. <u>*Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης*</u>

$(\alpha+\beta+\gamma)^3-(\beta+\gamma-\alpha)^3-(\gamma+\alpha-\beta)^3-(\alpha+\beta-\gamma)^3 = 24\alpha\beta\gamma.$

<u>Ἀπ.</u> Ἀναπτύσσοντες τούς κύβους τῶν 4 τριωνύμων θέτοντες τούς ὁμοιοβαθμίους ὅρους κάτωθεν τῶν ὁμοιοβαθμίων ὅρων καί ἐκτελοῦντες τάς προσθαφαιρέσεις εὑρίσκομεν τό β′ μέλος $24\alpha\beta\gamma$.

801. <u>*Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ταυτοτήτων*</u>

1) $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$, 2) $\alpha^4+\beta+\gamma^4= 2(\gamma^2-\alpha\beta)^2$

3) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)$, 4) $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=4(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6)-12\alpha^2\beta^2\gamma^2$

<u>Ἀπ.</u> 1. Ἐξ ὑποθέσεως $\alpha+\beta+\gamma=0$, ἄρα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\alpha\gamma+2\beta\gamma=0$ καί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)$

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=4(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2)$ ἤ

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4+2(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2)=4(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+8\alpha^2\beta\gamma+8\alpha\beta^2\gamma+$

$+8\alpha\beta\gamma^2$ ἤ $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)+8\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$

ἀλλά $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἄρα $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$.

2. Ἀρχόμενοι ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδειχθείσης ταυτότητος $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2)$ καί ὅτι ἐξ ὑποθέσεως $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(-\gamma)^2$ ἤ $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2-2\alpha\beta$. Θά ἔχωμεν:

$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=2\left[\alpha^2\beta^2+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)\right]=2\left[\alpha^2\beta^2+\gamma^2(\gamma^2-2\alpha\beta)\right]=$

$=2(\alpha^2\beta^2+\gamma^4-2\alpha\beta\gamma^2)=2(\gamma^2-\alpha\beta)^2.$

3. Ἐπειδή $\alpha+\beta+\gamma=0$ καί $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ ἕπεται ὅτι: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=4(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+2\alpha^2\beta\gamma+2\alpha\beta^2\gamma+2\alpha\beta\gamma^2)=$

$=2\left[\alpha^2(\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma)+\beta^2(\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma)+\gamma^2(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)+2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\right]$

$=2\left[\alpha^2(\beta+\gamma)^2+\beta^2(\alpha+\gamma)^2+\gamma^2(\alpha+\beta)^2\right]$

ἤ ἐπειδή $\beta+\gamma=-\alpha$, $\alpha+\gamma=-\beta$, $\alpha+\beta=-\gamma$, θά ἔχωμεν:

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2=2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4).$$

4. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καί διά τήν ταυτότητα ταύτην ἀρχόμενοι ἐκ τοῦ α′ μέλους

$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+3\left[\alpha^4(\beta^2+\gamma^2)+\beta^4(\alpha^2+\gamma^2)+\gamma^4(\alpha^2+\beta^2)+2\alpha^2\beta^2\gamma^2\right]$

ἢ ἐπειδὴ $\alpha+\beta+\gamma=0$ ἢ $\beta^2+\gamma^2=\alpha^2-2\beta\gamma$, $\alpha^2+\gamma^2=\beta^2-2\alpha\gamma$, $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2-2\alpha\beta$ εὑρίσκομεν: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+3\left[\alpha^6+\beta^6+\gamma^6-2\alpha\beta\gamma(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+\right.$ $\left.+2\alpha^2\beta^2\gamma^2\right]$. Ἀλλ' ἐπειδὴ Ἄσκησ. 370 $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$ θὰ ἔχωμεν: $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^3=\alpha^6+\beta^6+\gamma^6+3(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6-4\alpha^2\beta^2\gamma^2)=4(\alpha^6+\beta^6+\gamma^6)-12\alpha^2\beta^2\gamma^2$.

802. *Νὰ δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:*

$$\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)\equiv\beta\gamma(\beta-\gamma)+\gamma\alpha(\gamma-\alpha)+\alpha\beta(\alpha-\beta)\equiv$$
$$\equiv-(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)\equiv-\frac{1}{3}\left[(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3\right]$$

803. *Ἐὰν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ νὰ δειχθῇ ὅτι:*

1. $1+\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}=\dfrac{2\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$.
2. $(\tau-\alpha)^2+(\tau-\beta)^2+(\tau-\gamma)^2+\tau^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.
3. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)+2(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+2(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)=2\tau^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$.
4. $2(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\alpha(\tau-\beta)(\tau-\gamma)+\beta(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)+\gamma(\tau-\alpha)(\tau-\beta)=\alpha\beta\gamma$.
5. $16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$.

804. *Νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες τοῦ **Cauchy**:*

1. $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv2(x^2+xy+y^2)^2$
2. $(x+y)^5-x^5-y^5\equiv5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$
3. $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2$
4. $(x+y)^9-x^9-y^9\equiv3xy(x+y)\left[3(x^2+xy+y^2)^3+x^2y^2(x+y)^2\right]$

<u>Ἀπ.</u> 1. $(x+y)^4+x^4+y^4\equiv x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4+x^4+y^4$
$$\equiv2(x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4)$$
$$\equiv2(x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)$$
$$\equiv2(x^2+xy+y^2)^2.$$

2. Ἔχει λυθῇ ὡς ἄσκησις

3. $(x+y)^7-x^7-y^7\equiv x^7+7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6+y^7-x^7-y^7$
$$\equiv7x^6y+21x^5y^2+35x^4y^3+35x^3y^4+21x^2y^5+7xy^6$$
$$\equiv7xy(x^5+3x^4y+5x^3y^2+5x^2y^3+3xy^4+y^5)$$
$$\equiv7xy\left[(x^5+y^5)+(3x^4y+3xy^4)+(5x^3y^2+5x^2y^3)\right]$$
$$\equiv7xy\left[(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)+3xy(x^3+y^3)+5x^2y^2(x+y)\right]$$
$$\equiv7xy(x+y)(x^4+x^2y^2+y^4+2x^3y+2x^2y^2+2xy^3)$$
$$\equiv7xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^2.$$

4. Ὁμοίως ἐργαζόμεθα καὶ διὰ τὴν ταυτότητα ταύτην.

Σημ. Αἱ 4 αὗται ταυτότητες τοῦ Cauchy ἀποδεικνύονται θεωρητικώτερα διά τῆς ἐφαρμογῆς τῶν ἰδιοτήτων τῶν συμμετρικῶν πολυωνύμων.

805. *Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης*

$$(x+y+\omega)^3 = 3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2) - 2(x^3+y^3+\omega^3) + 6xy\omega.$$

Ἀπ. $(x+y+\omega)^3 = x^3+y^3+\omega^3+3x^2y+3x^2\omega+3y^2x+3y^2\omega+3\omega^2x+3\omega^2y+6xy\omega$

$= x^3+y^3+\omega^3+3(x^2y+x^2\omega+x^3+y^2x+y^2\omega+y^3+\omega^2x+\omega^2y+\omega^3-x^3-y^3-\omega^3)+6xy\omega$

$= x^3+y^3+\omega^3+3\left[x^2(x+y+\omega)+y^2(x+y+\omega)+\omega^2(x+y+\omega)-(x^3+y^3+\omega^3)\right]-6xy\omega$

$= x^3+y^3+\omega^3+3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2)-3(x^3+y^3+\omega^3)+6xy\omega$

$= 3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2)-2(x^3+y^3+\omega^3)+6xy\omega.$

806. *Ἐάν $x+y+\omega=0$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι διαιρετά διά $xy\omega$ τά τριώνυμα: 1) $x^3+y^3+\omega^3$ καί 2) $x^5+y^5+\omega^5$.*

Ἀπ. 1). Ἐπειδή $x+y+\omega=0$ θά ἔχωμεν ἄσκ. 370 ὅτι: $x^3+y^3+\omega^3=3xy\omega$. Ἄρα τό $x^3+y^3+\omega^3$ διαιρεῖται διά τοῦ $xy\omega$ καί δίδει πηλίκον 3.

2). Ἐπειδή $x^3+y^3+\omega^3=3xy\omega$ ἕπεται: $x^3+y^3=3xy\omega-\omega^3$ (1) ὁμοίως ἐπειδή $(x+y)^2=\omega^2$ ἤτοι: $x^2+y^2=\omega^2-2xy$ (2) ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τάς (1) καί (2) κατά μέλη μετά τινας μετασχηματισμούς καταλήγομεν:

$$x^5+y^5+\omega^5 = 5xy\omega^3-5x^2y^2\omega$$

ἤ $$x^5+y^5+\omega^5 = 5xy\omega(\omega^2-xy) \qquad (3)$$

Ἡ (3) δηλοῖ ὅτι τό $x^5+y^5+\omega^5$ εἶναι διαιρετόν διά $xy\omega$ καί δίδει πηλίκον $5(\omega^2-xy)$.

807. *Ἐάν εἶναι :*

$$\left.\begin{aligned} x+y+\omega &= \alpha \\ x^2+y^2+\omega^2 &= \beta^2 \\ x^3+y^3+\omega^3 &= \gamma^3 \end{aligned}\right\} (1),$$

νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον $xy\omega$ συναρτήσει τῶν α, β, γ.

Ἀπ. Ἀρχόμενοι ἐκ τῆς προαποδειχθείσης ταυτότητος Ἄσκ. 805. $(x+y+\omega)^3 = 3(x+y+\omega)(x^2+y^2+\omega^2)-2(x^3+y^3+\omega^3)+6xy\omega$ καί δι' ἀντικαταστάσεως τῶν ἴσων ἐκ τῶν σχέσεων (1) λαμβάνομεν $xy\omega = \dfrac{\alpha^3+2\gamma^3-3\alpha\beta^2}{6}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

§70. Έννοια ἀλγεβρικοῦ κλάσματος. Ὡς γνωστόν ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀριθμοῦ δι' ἄλλου γράφεται ὡς κλάσμα ἔχον ἀριθμητήν μέν τόν διαιρετέον παρονομαστήν δέ τόν διαιρέτην.

π.χ. $10:2=\frac{10}{2}=5$, $19:4=\frac{19}{4}$, $4{,}5:7=\frac{4{,}5}{7}$.

Κατ' ἀνάλογον τρόπον παριστῶμεν καί τό πηλίκον μιᾶς ἀλγεβρικῆς παραστάσεως δι' ἄλλης, ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής π.χ. $5\alpha^2x:3y^2=\frac{5\alpha^2x}{3y^2}$, $(\alpha^2+\beta^2):5(\alpha-\beta)=\frac{(\alpha^2+\beta^2)}{5(\alpha-\beta)}$, $(x^2+y^2):10=\frac{(x^2+y^2)}{10}$. κ.ο.κ.

Αἱ ἀλγεβρικαί παραστάσεις αἱ προκύπτουσαι κατ' αὐτόν τόν τρόπον: $\frac{5\alpha^2x}{3y^2}$, $\frac{\alpha^2+\beta^2}{5(\alpha-\beta)}$, $\frac{(x^2+y^2)}{10}$ καλοῦνται ἀλγεβρικά κλάσματα.

Κανών. Ἀλγεβρικόν κλάσμα καλεῖται πᾶν κλάσμα, τοῦ ὁποίου εἷς τουλάχιστον ὅρος εἶναι ἀλγεβρική παράστασις. Ἀλγεβρικόν τι κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{A}{B}$ καλεῖται ρητόν κλάσμα ἐάν αἱ παραστάσεις Α καί Β εἶναι ρηταί ἀλγεβρικαί παραστάσεις. Αἱ ἰδιότητες τῶν ἀριθμητικῶν κλασμάτων, γνωσταί ἐκ τῆς Ἀριθμητικῆς ἰσχύουν καί διά τά ἀλγεβρικά κλάσματα.

§71. Ἰδιότητες ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

I.- Ἐάν ἀμφότεροι οἱ ὅροι ἀλγεβρ. κλάσματος πολλαπλασιασθῶσιν ἤ διαιρεθῶσι διά τῆς αὐτῆς παραστάσεως (ἤ ἀριθμοῦ) προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρός τό δοθέν. π.χ.

$$\frac{3\alpha^2x}{7y^3}=\frac{3\alpha^2x\cdot2\alpha}{7y^3\cdot2\alpha}=\frac{6\alpha^3x}{14\alpha y^3}.$$

II.- Πᾶν ἀλγεβρικόν κλάσμα πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τόν παρονομαστήν του δίδει γινόμενον τόν ἀριθμητήν του. π.χ.

$$\frac{5\alpha\beta}{4y}\cdot4y=5\alpha\beta.$$

III.- Ἐάν ὁ ἀριθμητής ἀλγεβρ. κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἤ διαιρεθῇ δι' ἀλγεβρ. παραστάσεως (ἤ ἀριθμοῦ) καί τό κλάσμα πολλαπλ/ται ἤ διαιρεῖται διά τῆς αὐτῆς παραστάσεως ἤ ἀριθμοῦ.

IV. Ἐάν ὁ παρονομαστής ἀλγεβρ. κλάσματος πολλαπλασιασθῇ ἤ διαιρεθῇ δι' ἀλγεβρικῆς παραστάσεως (ἤ ἀριθμοῦ) τό κλάσμα διαιρεῖται ἤ πολλ/ται ἐπί τήν αὐτήν παράστασιν (ἤ ἀριθμόν).

§72. Ἁπλοποίησις ἀλγεβρικῶν κλασμάτων.

Διά νά ἁπλοποιήσωμεν ἀλγεβρικόν τι κλάσμα, ἀναλύομεν εἰς γινόμενα παραγόντων τούς ὅρους αὐτοῦ (ἐάν τοῦτο εἶναι δυνατόν) καί διαιροῦμεν ἔπειτα ἀμφοτέρους διά τῶν κοινῶν αὐτῶν παραγόντων.

Παράδ. 1ον. $\frac{20a^3\beta^4\gamma^2}{15a\beta^3y^2}=\frac{5a\beta^3\times 4a^2\beta\gamma^2}{5a\beta^3\times 3y^2}=\frac{4a^2\beta\gamma^2}{3y^2}$.

Παράδ. 2ον $\frac{3ax+6a^2}{5\beta x+10a\beta}=\frac{3a(x+2a)}{5\beta(x+2a)}=\frac{3a}{5\beta}$.

Παράδ. 3ον Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα: $K=\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$.

Θά ἔχωμεν: $K=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x+y)(x-y)}=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.

Παράδ. 4α. Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα: $K=\frac{a^2+\beta^2-\gamma^2+2a\beta}{a^2-\beta^2+\gamma^2-2a\gamma}$.

καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἁπλοποιημένου κλάσματος εἰς χιλιοστά καθ' ὑπεροχήν διά $a=-\frac{1}{3}$, $\beta=\frac{1}{7}$, $\gamma=-0,02$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

$$K=\frac{(a^2+2a\beta+\beta^2)-\gamma^2}{(a^2-2a\gamma+\gamma^2)-\beta^2}=\frac{(a+\beta)^2-\gamma^2}{(a-\gamma)^2-\beta^2}=\frac{(a+\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)}{(a-\gamma+\beta)(a-\gamma-\beta)}=\frac{a+\beta+\gamma}{a-\beta-\gamma}.$$

$$\text{Ἀρ. τιμή}=\frac{-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}+(-0,02)}{-\frac{1}{3}-\frac{1}{7}-(-0,02)}=\frac{-\frac{4}{21}-\frac{2}{100}}{-\frac{10}{21}+\frac{2}{100}}=\frac{-442}{-958}=\frac{221}{479}=0,462$$

καθ' ὑπεροχήν.

Ἀσκήσεις ἐπί τῆς ἁπλοποιήσεως κλασμάτων.

808. *Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα:*

1) $\frac{12a^2x}{18ax^2}=\frac{2a}{3x}$

2) $\frac{-28axy^3}{7a^2xy}=-\frac{4y^2}{a}$

3) $\frac{-45x^4y^3\omega}{-63x^3y^3\omega^3}=\frac{5x}{7\omega^2}$

4) $\frac{9a^3\beta(a+\beta)^2}{18a^4(a+\beta)}=\frac{\beta(a+\beta)}{2a}$

5) $\frac{-57x^3y^4}{19x^2y^5}$

6) $\frac{-8a\beta\gamma}{-32a^3\beta^3\gamma^3}$

7) $\frac{36x^3(a-\beta)^4}{9x^2(a^2-\beta^2)^2}$

8) $\frac{-105x^{2\nu}y^3}{15x^{\nu}y^5}$

809. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

1) $\frac{ab+b^2}{a^2-b^2}=\frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)}=\frac{b}{a-b}$

2) $\frac{3ax-4bx}{6ay-8by}=\frac{x(3a-4b)}{2y(3a-4b}=\frac{x}{2y}$

3) $\frac{9a+9b-9\gamma}{45a+45b-45\gamma}=\frac{9(a+b-\gamma)}{45(a+b-\gamma)}=\frac{1}{5}$

4) $\frac{33x^2y^3-36xy^3}{55x^3y\omega-60x^2y\omega}=\frac{3xy^3(11x-12)}{5x^2y\omega(11x-12)}=\frac{3y^2}{5x\omega}$

5) $\frac{x^2-4}{x^2+2x}$.

6) $\frac{3a^2x-3a^2y}{3a^2x+3a^2y}$.

7) $\frac{a^4-x^4}{a^3x-ax^3}$

8) $\frac{x^5y^3-x^3y^5}{x^3y-xy^3}$.

Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

810. $\frac{x^2+2ax+a^2}{\mu x+\mu a}$

811. $\frac{x^2-2xy+y^2}{x^2-y^2}$

812. $\frac{a^3+b^3+3ab(a+b)}{(a+b)^2x^3}$

813. $\frac{a\gamma+b\gamma+a\delta+b\delta}{a^2+ab}$

814. $\frac{xy-2x-3y+6}{xy-2x}$

815. $\frac{35+5x+7y+xy}{y+5}$. Ἀπ. $=7+x$

816. $\frac{42a^2+51ab+15b^2}{6a+3b}$. Ἀπ. $=7a+5b$

817. $\frac{6a^2b^2-3a^3b-3ab^3}{ab^3-a^3b}$. Ἀπ. $=\frac{3(a-b)}{a+b}$

818. $\frac{x^2-4ax^2+4a^2}{x^2-4a^2}$. Ἀπ. $=\frac{x-2a}{x+2a}$

819. $\frac{x^2-1}{(1+ax)^2-(x+a)^2}$. Ἀπ. $=\frac{1}{a^2-1}$

820. $\frac{x^3-1}{x-1}$

821. $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$

822. $\frac{x^6+1}{x^2+1}$

823. $\frac{a^3+b^3}{(a-b)^2+ab}$

824. $\frac{(a+b)(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)^2}$

Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

825. $\frac{(a^2+b^2-\gamma^2)^2-(a^2-b^2+\gamma^2)^2}{4ab^2+4ab\gamma}$. Ἀπ. $=$;

826. $\frac{x^5-ax^4-a^4x+a^5}{x^4-ax^3-a^2x^2+a^3x}$ Ἀπ. $=\frac{x^2+a^2}{x}$

827. $\frac{x^4+(2b^2-a^2)x^2+b^4}{x^4+2ax^3+a^2x^2-b^4}$ Ἀπ. $=\frac{x^2+b^2-ax}{x^2-b^2+ax}$

828. $\frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$ Ἀπ. $=\frac{ax+by}{ax-by}$

829. $\frac{(a^8+2a^4x^2+x^4)(a^4-x^2)}{(a^2+x)(a^6-a^4x+a^2x^2-x^3)}$ Ἀπ. $=a^4+x^2$:

830. $\frac{(x+a)^2-(b+\gamma)^2}{(x+b)^2-(a+\gamma)^2}$

831. $\frac{(x^2-4)(x^2-2x+1)}{x^3-2x^2-x+2}$

832. $\frac{x^3-x^2-x+1}{x^4-x^3-3x^2+5x-2}$

833. $\frac{a^5+a^2b^3-a^4b-ab^4}{a^4-a^2b^2+a^3b-ab^3}$

834. $\frac{a^{12}+b^{12}}{a^5+a^4b+ab^4+b^5}$.

Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα:

835. $\dfrac{2x^2z^2-3x^2y^2-2y^2z^2+3y^4}{3x^2z^2+2y^4-2x^2y^2-3y^2z^2}$ Ἀπ. $=\dfrac{2z^2-3y^2}{3z^2-2y^2}$

836. $\dfrac{21\alpha^2\beta^2-35\beta^3\gamma-12\alpha^3\gamma+20\alpha\beta\gamma^2}{18\alpha^2\gamma^2-21\alpha^3\beta-30\beta\gamma^3+35\alpha\beta^2\gamma}$ Ἀπ. = ;

837. $\dfrac{\alpha^3+(1+\alpha)\alpha\beta+\beta^2}{\alpha^3+(1-3\gamma^2)\alpha\beta-3\alpha^3\gamma^2}$. Ἀπ. $=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha(1-3\gamma^2)}$

838 $\dfrac{6x^2-3y-2x^4+x^2y}{9x^2-3y^2-3x^4+x^2y^2}$.

839 $\dfrac{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}{x^2-(\alpha-\gamma)x-\alpha\gamma}$

840. $\dfrac{\alpha^2\beta\gamma-\beta^3\gamma+2\beta^2\gamma^2-\beta\gamma^3}{4\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)^2}$.

841 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κάτωθι κλάσμα:

$$K=\dfrac{15\alpha^3-28\beta\gamma+12\alpha^2\beta-35\alpha\gamma-18\alpha^2\gamma+42\gamma^2}{45\alpha\beta^2+36\beta^3+20\alpha^3-54\beta^2\gamma+16\alpha^2\beta-24\alpha^2\gamma}.$$ Ἀπ. $K=\dfrac{3\alpha^2-7\gamma}{9\beta^2+4\alpha^2}$.

Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

842. $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+6x+5}$ Ἀπ. $\dfrac{x+2}{x+5}$

843. $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15}$ Ἀπ. $\dfrac{x-4}{x-5}$

844. $\dfrac{x^2-x-20}{x^2+x-30}$. Ἀπ. $\dfrac{x+4}{x+6}$

845. $\dfrac{2\alpha^2-\alpha\beta-3\beta^2}{2\alpha^2-5\alpha\beta+3\beta^2}$ Ἀπ. $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$

846. $\dfrac{2x^3+5x^2-3x}{x^3+2x^2-3x}$ Ἀπ. $\dfrac{2x-1}{x-1}$.

847. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-x}$

848. $\dfrac{2x^3+5x^2-12x}{7x^3+25x^2+12x}$

849. $\dfrac{3x^2-10xy+8y^2}{5x^2-13xy+6y^2}$

850. $\dfrac{12\alpha^3-7\alpha^2-12\alpha}{9\alpha^3+6\alpha^2-24\alpha}$

851. $\dfrac{(x+y)^7-x^7-y^7}{(x+y)^5-x^5-y^5}$ Ἀπ. $\dfrac{7(x^2+xy+y^2)}{5}$

Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα:

852. $\dfrac{\alpha^3-\alpha^2\beta-9\alpha\beta^2+9\beta^3}{\alpha^6-9\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4+9\beta^6}$ Ἀπ. $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)}$

853. $\dfrac{\alpha^2-3\alpha\beta+\alpha\gamma+2\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+\alpha\gamma}$ Ἀπ. $\dfrac{\alpha-\beta+\gamma}{\alpha+\gamma}$

854. $\dfrac{4\omega^3-11\omega^2-2\omega-3}{4\omega^3+13\omega^2+4\omega+3}=\dfrac{(\omega-3)(4\omega^2+\omega+1)}{(\omega+3)(4\omega^2+\omega+1)}=\dfrac{\omega-3}{\omega+3}$

855. Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα:

$$K=\frac{(x^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2-4(\alpha x-\beta\gamma)^2}{(x-\beta)^2-(\alpha-\gamma)^2}$$

Ἀπόκ. $K=\frac{(x^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+2\alpha x-2\beta\gamma)(x^2+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2-2\alpha x+2\beta\gamma)}{(x-\beta+\alpha-\gamma)(x-\beta-\alpha+\gamma)}$

$$K=\frac{[(x+\alpha)^2-(\beta+\gamma)^2]\cdot[(x-\alpha)^2-(\beta-\gamma)^2]}{(x-\beta+\alpha-\gamma)(x-\beta-\alpha+\gamma)}$$

$$K=\frac{(x+\alpha+\beta+\gamma)(x+\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha+\beta-\gamma)(x-\alpha-\beta+\gamma)}{(x-\beta+\alpha-\gamma)(x-\beta-\alpha+\gamma)}$$

$$K=(x+\alpha+\beta+\gamma)(x-\alpha+\beta-\gamma).$$

856. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

1) $\frac{\alpha^3-\alpha^2\beta-\alpha\beta^2-2\beta^3}{\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+2\beta^3}$ Ἀπ. $\frac{\alpha-2\beta}{\alpha+2\beta}$

2) $\frac{\alpha\beta\gamma+(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}$ Ἀπ. $\alpha+\beta+\gamma$

3) $\frac{(\alpha^2-7\alpha\beta+12\beta^2)(\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2)}{(\alpha^2+5\alpha\beta+6\beta^2)(\alpha^2-5\alpha\beta+4\beta^2)}$ Ἀπ. $\frac{\alpha-3\beta}{\alpha+3\beta}$

857. Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα:

1) $\frac{\alpha^2\beta+\alpha^2\gamma+\beta^2\alpha+\beta^2\gamma+\gamma^2\alpha+\gamma^2\beta+2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta+\gamma)^3-\alpha^3-\beta^3-\gamma^3}$ Ἀπ. $=\frac{1}{3}$

2) $\frac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{\alpha^2(\beta-\gamma)+\beta^2(\gamma-\alpha)+\gamma^2(\alpha-\beta)}$ Ἀπ. $\alpha+\beta+\gamma$.

3) $\frac{\alpha^2(\beta-\gamma)^3+\beta^2(\gamma-\alpha)^3+\gamma^2(\alpha-\beta)^3}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$ Ἀπ. $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

4) $\frac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{(\beta-\gamma)^3+(\gamma-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3}$ Ἀπ. $-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$

Τροπή ἑτερωνύμων ἀλγεβρ. κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

Δύο ἤ περισσότερα ρητά ἀλγεβρ. κλάσματα, τά ὁποῖα ἔχουν τόν αὐτόν παρονομαστήν καλοῦνται ὁμώνυμα, ἄλλως καλοῦνται ἑτερώνυμα.

Κατά τήν ἰδιότητα 1 § 71. δυνάμεθα νά πολλαπλασιάσωμεν καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν (ἤ παράστασιν) ὁπότε προκύπτει κλάσμα ἰσοδύναμον πρός τό δοθέν. Ἐπί τῆς ἰδιότητος ταύτης τῶν κλασμάτων στηριζόμενοι ἐξάγομεν τόν κάτωθι κανόνα τροπῆς τῶν ἑτερωνύμων ἀλγεβρ. κλασμάτων εἰς ὁμώνυμα.

§ 73. Κανών. Διά νά τρέψωμεν ἑτερώνυμα ἀλγεβρικά κλάσματα εἰς ὁμώνυμα 1ον ἁπλοποιοῦμεν τά δοθέντα κλάσματα ἐάν δέν εἶναι ἀνάγωγα. 2ον Εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἁπλοποιημένων κλασμάτων 3ον Διαιροῦμεν τό ε.κ.π. διά τοῦ παρονομαστοῦ ἑκάστου κλάσματος καί 4ον μέ τό εὑρεθέν πηλίκον πολλαπλασιάζομεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους τοῦ ἀντιστοίχου κλάσματος.

Παράδ. 1ον. Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα:

$$\frac{3\alpha}{5\beta\gamma^2}, \quad \frac{\beta^2}{10\alpha^2\gamma}, \quad \frac{7\gamma}{\alpha^2\beta^2}.$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $E = 10\alpha^2\beta^2\gamma^2$. Τά πηλίκα τοῦ ε.κ.π. δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι κατά σειράν: $2\alpha^2\beta$, $\beta^2\gamma$, $10\gamma^2$. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν καί τούς δύο ὅρους ἑκάστου κλάσματος ἐπί τά ἀντίστοιχα πηλίκα λαμβάνομεν τά κάτωθι ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα:

$$\frac{6\alpha^3\beta}{10\alpha^2\beta^2\gamma^2}, \quad \frac{\beta^4\gamma}{10\alpha^2\beta^2\gamma^2}, \quad \frac{70\gamma^3}{10\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

Παράδ. 2ον. Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα:

$$\frac{x+1}{2x-2}, \quad \frac{x-1}{2x+2}, \quad \frac{9x}{4x^2-4}, \quad \frac{x^2}{8x^2-8} \quad (1).$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν ἀφοῦ ἀναλυθοῦν εἰς γινόμενα παραγόντων θά εἶναι:

$2(x-1),\ 2(x+1),\ 2^2(x+1)(x-1),\ 2^3(x+1)(x-1)$. $E=2^3(x+1)(x-1)=8(x^2-1)$.

Διαιρούμενον τό ε.κ.π. δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ δίδει πηλίκα κατά σειράν τά ἑξῆς: $2^2(x+1),\ 2^2(x-1),\ 2,\ 1,$ (2).

Πολλ/ντες καί τούς δύο ὅρους τῶν κλασμάτων (1) ἐπί τά ἀντίστοιχα πηλίκα (2) εὑρίσκομεν τά κάτωθι ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα:

$$\frac{4(x+1)^2}{8(x^2-1)},\quad \frac{4(x-1)^2}{8(x^2-1)},\quad \frac{18x}{8(x^2-1)},\quad \frac{x^2}{8(x^2-1)}.$$

858. *Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα:*

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\quad \frac{\beta}{(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)},\quad \frac{\gamma}{(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

Τά κλάσματα ταῦτα γράφονται καί οὕτω:

$$\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)},\quad \frac{-\beta}{(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)},\quad \frac{\gamma}{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι: $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$. Τά πηλίκα τοῦ ε.κ.π. δι' ἑκάστου παρονομαστοῦ εἶναι κατά σειράν: $(\gamma-\alpha)$, $(\beta-\gamma)$, $(\alpha-\beta)$.

Τά δέ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα εἶναι:

$$\frac{\alpha(\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)},\quad \frac{-\beta(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)},\quad \frac{\gamma(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}.$$

859. *Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα:*

$$\frac{1}{x^2-1},\quad \frac{2}{x},\quad \frac{3}{x+1},\quad \frac{4}{x-1}.$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι: $E=x(x+1)(x-1)$.

Τά δέ ἰσοδύναμα ὁμώνυμα κλάσματα θά εἶναι:

$$\frac{x}{x(x^2-1)},\quad \frac{2(x^2-1)}{x(x^2-1)},\quad \frac{3x(x-1)}{x(x^2-1)},\quad \frac{4x(x+1)}{x(x^2-1)}$$

Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κάτωθι κλάσματα:

860. $\frac{x}{\alpha\beta},\ \frac{y}{\beta\gamma},\ \frac{\omega}{\gamma\alpha}$ 861. $\frac{1}{x},\ \frac{1}{y},\ \frac{1}{z},\ \frac{1}{\omega}$.

862. $\frac{\alpha}{x^3y^2\omega},\ \frac{\beta}{xy^3\omega^2},\ \frac{\gamma}{x^2y\omega^3}$ 863. $\frac{x}{8\alpha^2\beta\gamma},\ \frac{y}{12\alpha\beta^2\gamma},\ \frac{\omega}{6\alpha\beta\gamma^2}$

864. $\frac{1}{x+1},\ \frac{2}{x-1},\ \frac{3}{(x+1)^2},\ \frac{4}{(x^2-1)^2}$. ε.κ.π.$=(x+1)^2(x-1)^2$.

Ἀπ. $=\frac{(x+1)(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2},\ \frac{2(x-1)(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2},\ \frac{3(x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2},\ \frac{4}{(x+1)^2(x-1)^2}.$

Νά τραποῦν εἰς ὁμώνυμα τά κλάσματα:

865. $\frac{1}{\alpha(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$, $\frac{2}{\beta(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$, $\frac{3}{\gamma(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$.

866. $\frac{\alpha}{x^2-5x+6}$, $\frac{\beta}{x^2-8x+15}$, $\frac{\gamma}{x^2-7x+10}$.

867. $\frac{x}{x^2-1}$, $\frac{x^2-x+1}{x^3-x^2+x-1}$, $\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+1}$, $\frac{x^3}{x^4-1}$.

ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ Κ ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡ. ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

§ 74. Κανών α΄. Διά νά προσθέσωμεν ὁμώνυμα ἀλγεβρ. κλάσματα προσθέτομεν τούς ἀριθμητάς αὐτῶν καί τό ἄθροισμά των γράφομεν ἀριθμητήν, παρονομαστήν δέ τόν κοινόν αὐτῶν παρονομαστήν.

§ 75. Κανών β΄. Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἀλγεβρ. κλάσμα ἀπό ἄλλου ὁμωνύμου, ἀφαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό τόν ἀριθμητήν τοῦ μειωτέου καί ὑπό τήν διαφοράν γράφομεν τόν κοινόν αὐτῶν παρονομαστήν.

§ 76. Ἐάν τά κλάσματα εἶναι ἑτερώνυμα, τρέπομεν πρῶτον αὐτά εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα καί ἐφαρμόζομεν τούς ἀνωτέρω κανόνας.

Παράδ. 1ον. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

$$\frac{x-1}{x^2}+\frac{3x-3}{x^2}+\frac{2x^2-3x+4}{x^2}=\frac{(x-1)+(3x-3)+(2x^2-3x+4)}{x^2}$$

$$=\frac{x-1+3x-3+2x^2-3x+4}{x^2}=\frac{2x^2+x}{x^2}=\frac{x(2x+1)}{x^2}=\frac{2x+1}{x}.$$

Παράδ. 2ον Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^4-\beta^4}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha^4-\beta^4}=\frac{(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}{\alpha^4-\beta^4}=\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2-\beta^2)}=\frac{2}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Παράδ. 3ον Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:

$$K=\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2x+2}-\frac{4x}{x^2-1}+\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1939.

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι: $E=2(x+1)(x-1)$.

Τρέποντες τά ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ἰσοδύναμα ὁμώνυμα, τό δοθέν ἄθροισμα γράφομεν οὕτω:

$$K=\frac{(x+1)^2}{2(x^2-1)}-\frac{(x-1)^2}{2(x^2-1)}-\frac{8x}{2(x^2-1)}+\frac{2(x^2+1)}{2(x^2-1)}$$

$$K=\frac{(x+1)^2-(x-1)^2-8x+2(x^2+1)}{2(x^2-1)}$$

$$K=\frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1-8x+2x^2+2}{2(x^2-1)}=\frac{2x^2-4x+2}{2(x^2-1)}$$

$$K=\frac{2(x-1)^2}{2(x^2-1)}=\frac{x-1}{x+1}.$$

868. *Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:*

1. $\frac{9x+7}{5}+\frac{6x+5}{4}+\frac{9x-8}{8}$ 2. $\frac{4x-5}{7}+\frac{2x+6}{9}+\frac{4x+8}{11}$

Ἀπόκρ.

1. $$\frac{9x+7}{5}+\frac{6x+5}{4}+\frac{9x-8}{8}=\frac{8(9x+7)}{40}+\frac{10(6x+5)}{40}+\frac{5(9x-8)}{40}$$

$$=\frac{72x+56+60x+50+45x-40}{40}=\frac{177x+66}{40}.$$

2. Ἀπόκρ. $=\frac{802x+471}{693}.$

869. *Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:*

$$K=\frac{x^{3\nu}}{x^{\nu}-1}-\frac{x^{2\nu}}{x^{\nu}+1}-\frac{1}{x^{\nu}-1}+\frac{1}{x^{\nu}+1}. \qquad \text{ΕΚΠ.}=(x^{\nu}+1)(x^{\nu}-1)$$

$$K=\frac{x^{3\nu}(x^{\nu}+1)}{x^{2\nu}-1}-\frac{x^{2\nu}(x^{\nu}-1)}{x^{2\nu}-1}-\frac{x^{\nu}+1}{x^{2\nu}-1}+\frac{x^{\nu}-1}{x^{2\nu}-1}.$$

$$K=\frac{x^{3\nu}(x^{\nu}+1)-x^{2\nu}(x^{\nu}-1)-(x^{\nu}+1)+(x^{\nu}-1)}{x^{2\nu}-1}$$

$$K=\frac{x^{4\nu}+x^{3\nu}-x^{3\nu}+x^{2\nu}-x^{\nu}-1+x^{\nu}-1}{x^{2\nu}-1}=\frac{x^{4\nu}+x^{2\nu}-2}{x^{2\nu}-1}=$$

$$=\frac{(x^{4\nu}-1)+(x^{2\nu}-1)}{x^{2\nu}-1}=\frac{(x^{2\nu}-1)(x^{2\nu}+2)}{x^{2\nu}-1}=x^{2\nu}+2.$$

870. *Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:*

1. $1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}$, 2. $1-x+x^2-\frac{x^3}{1+x}$, 3. $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2-\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$.

Ἀπόκ. 1. Θά ἔχωμεν: $\frac{(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}+\frac{x^3}{1-x}=\frac{(1-x^3)+x^3}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$

Ἀπ. 2. Θά ἔχωμεν: $\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{1+x}-\frac{x^3}{1+x}=\frac{(1+x^3)-x^3}{1+x}=\frac{1}{1+x}.$ Ἀπ. 3. $=0.$

871. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα:

$$\Sigma = \frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{x-a}{a+x} + \frac{3ax-a^2-x^2}{x^2-a^2}.$$

Ἀπ. Ἐάν τοῦ τρίτου κλάσματος πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν ἐπί −1 λαμβάνομεν:

$$\Sigma = \frac{ax}{a^2-x^2} + \frac{x-a}{a+x} + \frac{a^2+x^2-3ax}{a^2-x^2}.$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $E=(a+x)(a-x)$.

$$\Sigma = \frac{ax+(x-a)(a-x)+a^2+x^2-3ax}{(a+x)(a-x)} = \frac{3ax-3ax}{a^2-x^2} = \frac{0}{a^2-x^2} = 0.$$

872. Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:

$$\Sigma = \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{2}{(x-1)(3-x)} + \frac{2}{(1-x)(2-x)}.$$

Ἀπόκ. Τό ἄθροισμα τοῦτο γράφεται καί οὕτω:

$$\Sigma = \frac{1}{(x-2)(x-3)} + \frac{-2}{(x-1)(x-3)} + \frac{2}{(x-1)(x-2)}.$$

Τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι $E=(x-1)(x-2)(x-3)$.

Ἄρα θά ἔχωμεν: $\Sigma = \frac{(x-1)-2(x-2)+2(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{x-1-2x+4+2x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)} =$

$$= \frac{x-3}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(x-1)(x-2)}.$$

873. Νά ὑπολογισθῇ τό ἀλγεβρ. ἄθροισμα τῶν κλασμάτων:

$$K = \frac{1}{a(a-b)(a-\gamma)} + \frac{1}{b(b-\gamma)(b-a)} + \frac{1}{\gamma(\gamma-a)(\gamma-b)}.$$

Ἀπόκ. Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τοῦ μέν δευτέρου κλάσματος πολλ/μεν ἀμφοτέρους τούς ὅρους ἐπί −1 καί οὕτω τό $(b-a)$ τοῦ παρονομαστοῦ γίνεται $(a-b)$, ἐνῷ ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν βλάπτεται. Είς τό τρίτον κλάσμα ἀλλάσσοντες τά σημεῖα καί τῶν δύο παραγόντων τοῦ παρονομαστοῦ, τό γινόμενον δέν μεταβάλλεται καί τό δοθέν ἄθροισμα γράφεται:

$$K = \frac{1}{a(a-b)(a-\gamma)} + \frac{-1}{b(b-\gamma)(a-b)} + \frac{1}{\gamma(a-\gamma)(b-\gamma)}.$$

Κατόπιν τῶν μετασχηματισμῶν τούτων τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν εἶναι: $E = ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)$.

ὅθεν: $K = \frac{b\gamma(b-\gamma)}{ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)} + \frac{-a\gamma(a-\gamma)}{ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)} + \frac{ab(a-b)}{ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)}$

$$K = \frac{b\gamma(b-\gamma)-a\gamma(a-\gamma)+ab(a-b)}{ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)} = \frac{b\gamma(b-\gamma)-a^2\gamma+a\gamma^2+a^2b-ab^2}{ab\gamma(a-b)(b-\gamma)(a-\gamma)}.$$

$$K=\frac{\beta\gamma(\beta-\gamma)+\alpha^2(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{(\beta-\gamma)(\beta\gamma+\alpha^2-\alpha\beta-\alpha\gamma)}{\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}$$

$$K=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα τῶν κάτωθι κλασμάτων:

874. $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}$ Ἀπ. $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$

875. $\frac{1}{x^\nu}+\frac{1}{x^{\nu-1}}$.

876. $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$ Ἀπ. $\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$

877. $\frac{\alpha^\mu+\beta^\mu}{\alpha^\mu-\beta^\mu}-\frac{\alpha^\mu-\beta^\mu}{\alpha^\mu+\beta^\mu}$.

878. $\frac{\alpha}{\alpha(\alpha-x)}-\frac{x}{\alpha(\alpha+x)}$ Ἀπ. $\frac{\alpha^2+x^2}{\alpha(\alpha^2-x^2)}$

879. $\frac{x^{\nu-1}}{(x+y)^{\mu-1}}-\frac{x^\nu}{(x+y)^\mu}$.

880. $2-\frac{6\alpha}{3\alpha+2\beta}$ Ἀπ. $\frac{4\beta}{3\alpha+2\beta}$

881. $1+\frac{\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}{2\beta\gamma}$.

882. $\alpha-\frac{\alpha^2-1}{\alpha}$ Ἀπ. $\frac{1}{\alpha}$

883. $1-\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$.

884. Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:

1) $\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-\frac{2x}{1-x^2}$ Ἀπ. $\frac{2}{1+x}$.

2) $\frac{1+5x}{1-5x}-\frac{1-5x}{1+5x}$ Ἀπ. $\frac{-8x}{1-25x^2}$

3) $\frac{2\alpha+3x}{2\alpha-3x}+\frac{2\alpha-3x}{3x-2\alpha}$ Ἀπ. $\frac{6x}{2\alpha-3x}$

4) $\frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}$ Ἀπ. $\frac{\alpha+\beta}{2(\beta-\alpha)}$

5) $\frac{5x-3}{x+1}-\frac{2x^2-14x}{x^2-1}$ Ἀπ. $\frac{3(x+1)}{x-1}$.

885. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις $\frac{5}{2x-4}-\frac{x}{x^2+2x}-\frac{x+10}{2x^2-8}$ καί νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $x=0{,}0001$ εἰς δεκαδικόν κατά προσέγγισιν ἑκατομμυριοστοῦ

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

Ἀπόκ. Ἐάν καλέσωμεν K τήν δοθεῖσαν παράστασιν θά ἔχωμεν:

$$K=\frac{5}{2(x-2)}-\frac{x}{x(x+2)}-\frac{x+10}{2(x+2)(x-2)}.\quad E=2x(x+2)(x-2)=2x(x^2-4).$$

$$K=\frac{5x(x+2)-2x(x-2)-x(x+10)}{2x(x+2)(x-2)}=\frac{5x^2+10x-2x^2+4x-x^2-10x}{2x(x^2-4)}.$$

$$K=\frac{2x^2+4x}{2x(x^2-4)}=\frac{2x(x+2)}{2x(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x-2}$$

Ἀριθμ. τιμή τῆς $K=\frac{1}{0{,}0001-2}=\frac{1}{-1{,}9999}=-\frac{10\,000}{19\,999}=-0{,}500025.$

Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα τῶν κάτωθι κλασμάτων:

886. $\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$ Ἀπ. x^2+2

887. $\frac{3\alpha-6\beta}{\alpha+\beta} - \frac{5\alpha-6\beta}{\alpha-\beta} - \frac{4\alpha-5\beta}{\alpha+\beta} + \frac{7\alpha-8\beta}{\alpha-\beta}$ Ἀπ. 1.

888. $\frac{4\alpha-3\beta+2\gamma}{9} - \frac{\beta+\gamma-3\alpha}{4} + \frac{\beta-2\alpha}{2} - \frac{2\alpha-\beta}{3} + \frac{\gamma-\beta+2\alpha}{6}$ Ἀπ. $\frac{-5\alpha+3\beta+5\gamma}{36}$

889. $\frac{\beta}{\delta} - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\delta(\gamma+\delta x)} - \frac{\alpha+\beta x}{\gamma+\delta x} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma-\alpha}{\alpha\gamma} + \frac{\beta-\gamma}{\beta\gamma}$ Ἀπ. 0.

Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν κλασμάτων:

890. $\frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha-\beta} + \frac{2\beta^3-\beta^2+\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$ Ἀπ. 1.

891. $\frac{\alpha^\mu}{(\alpha+\beta)^\nu} + \frac{\alpha^{\mu-2}\beta^2}{(\alpha+\beta)^{\nu-1}} - \frac{\alpha^{\mu-3}\beta^2}{(\alpha+\beta)^{\nu-2}}$ Ἀπ. $\frac{\alpha^\mu-(\alpha^{\mu-2}+\alpha^{\mu-3}\beta)\beta^3}{(\alpha+\beta)^\nu}$.

892. $-\frac{\alpha}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} + \frac{4\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-\beta^4}$ Ἀπ. $\frac{4\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}$.

893. $\frac{3}{4(1-x)^2} + \frac{3}{8(1-x)} + \frac{1}{8(1+x)} + \frac{x-1}{4(1+x)^2}$ Ἀπ. $\frac{2-x^2+5x}{2(1-x)^2(1+x)^2}$.

894. $\frac{1}{2\alpha^2-4\alpha+2} + \frac{1}{2\alpha^2+4\alpha+2} - \frac{1}{\alpha^2-1}$ Ἀπ. $\frac{2}{(\alpha^2-1)^2}$

Νά εὑρεθῇ τό ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τῶν κάτωθι:

895. $\alpha+x - \frac{2\alpha x-x^2}{\alpha+x}$ Ἀπ. $\frac{\alpha^2+2x^2}{\alpha+x}$

896. $\alpha^4-\alpha^3+\alpha^2-\alpha+1-\frac{2}{\alpha+1}$ Ἀπ. $\frac{\alpha^5-1}{\alpha+1}$.

897. $\alpha+\beta - \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha+2\beta}$ Ἀπ. $\frac{3\beta(\alpha+\beta)}{\alpha+2\beta}$

898. $1+x^2+x^4 - \frac{x^6}{1-x^2}$ Ἀπ. $\frac{1-2x^6}{1-x^2}$.

899. $\alpha^3-\alpha^2x+\frac{\alpha^4+x^4}{\alpha+x}$ Ἀπ. $\frac{2\alpha^4-\alpha^2x^2+x^4}{\alpha+x}$

900. $1-2x+x^2+\frac{1-x^4}{1+2x+x^2}$ Ἀπ. $\frac{2(1-x)}{1+x}$.

Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:

901. $x^2-2x+2-\frac{x^3-6x+5}{x-2}$ Ἀπ. $-\frac{4x^2-12x+9}{x-2}$.

902. $x^2-2x+4-\frac{9(x^2-9)}{x^3+2x^2-9(x+2)}$ Ἀπ. $\frac{x^3-1}{x+2}$.

Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:

903. $\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ Ἀπ. ;

904. $\dfrac{a}{(1-a)^2} - \dfrac{a^2}{(1-a)^3} + \dfrac{1}{(1-a)}$ Ἀπ. $\dfrac{1-a-a^2}{(1-a)^3}$.

905. $\dfrac{2}{x+4} - \dfrac{x-3}{x^2-16x+8} - \dfrac{x^3}{x^3+64}$ Ἀπ. ;

906. $\dfrac{x-1}{x^2-7x+10} - \dfrac{x-2}{x^2-9x+14} - \dfrac{x-3}{x^2-12x+35}$ Ἀπ. $-\dfrac{x^2-4x+9}{x^3-14x^2+59x-70}$.

907. *Νά ὑπολογισθῇ τό ἄθροισμα:*

$$\Sigma = \frac{1}{a^2+7a+12} + \frac{2}{a^2-4a+3} - \frac{3}{a^2-5a+4}.$$

Ἀπ. Ἀναλύομεν τούς παρονομαστάς εἰς γινόμενα παραγόντων διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. αὐτῶν.

$$a^2-7a+12 = (a-3)(a-4)$$

$$a^2-4a+3 = (a-1)(a-3) \qquad E=(a-1)(a-3)(a-4).$$

$$a^2-5a+4 = (a-1)(a-4)$$

Θά ἔχωμεν: $\Sigma = \dfrac{1}{(a-3)(a-4)} + \dfrac{2}{(a-1)(a-3)} - \dfrac{3}{(a-1)(a-4)}$

$$\Sigma = \frac{(a-1)+2(a-4)-3(a-3)}{(a-1)(a-3)(a-4)}$$

$$\Sigma = \frac{a-1+2a-8-3a+9}{(a-1)(a-3)(a-4)} = \frac{0}{(a-1)(a-3)(a-4)} = 0.$$

908. *Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα:*

1. $\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+7x+10} - \dfrac{x+1}{x+2}$. Ἀπ. $= \dfrac{(x+3)(x+5)}{(x+2)(x+5)} - \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{2}{x+2}$

2. $\dfrac{x^2-5ax+6a^2}{x^2-8ax+15a^2} - \dfrac{x-7a}{x-5a}$ Ἀπ. $= \dfrac{5a}{x-5a}$.

909. *Νά ὑπολογισθοῦν τά ἀθροίσματα τῶν κλασμάτων:*

1. $\dfrac{2}{a-b} + \dfrac{2}{b-\gamma} + \dfrac{2}{\gamma-a} + \dfrac{(a-b)^2+(b-\gamma)^2+(\gamma-a)^2}{(a-b)(b-\gamma)(\gamma-a)}$ Ἀπ. $=0$.

2. $\dfrac{x-y}{x+y} + \dfrac{y-z}{y+z} + \dfrac{z-x}{z+x} + \dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ Ἀπ. $=0$.

3. $\dfrac{1}{x^2-(a+b)x+ab} + \dfrac{1}{x^2-(a+\gamma)x+a\gamma} + \dfrac{1}{x^2-(b+\gamma)x+b\gamma}$. Ἀπ. $\dfrac{3x-(a+b+\gamma)}{(x-a)(x-b)(x-\gamma)}$.

4. $\dfrac{xy}{ab} + \dfrac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} + \dfrac{(x-b)(y-b)}{b(b-a)}$ Ἀπ. $=1$.

5. $\dfrac{x^2y^2}{b^2\gamma^2} + \dfrac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(\gamma^2-b^2)} + \dfrac{(\gamma^2-x^2)(\gamma^2-y^2)}{\gamma^2(\gamma^2-b^2)}$ Ἀπ. $=1$.

6. $\dfrac{5(2x-3)}{11(6x^2+x-1)} + \dfrac{7x}{6x^2+7x-3} - \dfrac{12(3x+1)}{11(4x^2+8x+3)}$.

Ἀπόκ. Ε.Κ.Π. $= 11(3x-1)(2x+1)(2x+3)$. Ἄρα θά ἔχωμεν:

$$\frac{5(2x-3)(2x+3)+77x(2x+1)-12(3x+1)(3x-1)}{11(3x-1)(2x+1)(2x+3)} = \frac{1}{2x+1}.$$

7. $\dfrac{5\alpha}{2\alpha^2-4\alpha x-6x^2} - \dfrac{15(x-\alpha)}{16(5\alpha x-\alpha^2-6x^2)} + \dfrac{9(\alpha+3x)}{16(\alpha x-\alpha^2+2x^2)}$

Ἀπόκ. Τοῦτο δύναται νά γραφῇ καί οὕτω:

$$\frac{5\alpha}{2(\alpha^2-2\alpha x-3x^2)} + \frac{15(x-\alpha)}{16(\alpha^2-5\alpha x+6x^2)} - \frac{9(\alpha+3x)}{16(\alpha^2-\alpha x-2x^2)} =$$

$$= \frac{5\alpha}{2(\alpha+x)(\alpha-3x)} + \frac{15(x-\alpha)}{16(\alpha-3x)(\alpha-2x)} - \frac{9(\alpha+3x)}{16(\alpha-2x)(\alpha+x)}$$

Ε.Κ.Π. $= 16(\alpha+x)(\alpha-2x)(\alpha-3x)$,

καί τελικόν ἐξαγόμενον: $= \dfrac{1}{\alpha+x}$.

910. Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} - \dfrac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\beta\gamma}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} + 1$, καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου ὅταν τεθῇ $\alpha=3$, $\beta=2$, $\gamma=1$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1939.

Ἀπόκ. Ἐάν καλέσωμεν Κ τήν παράστασιν, αὕτη δύναται νά γραφῇ καί οὕτω: $K = \dfrac{\alpha\beta}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\gamma}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} + \dfrac{\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} + 1$

$$K = \frac{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma+(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)} = \frac{2\alpha\beta+2\beta\gamma-\beta^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)}.$$

Ἀριθμ. τιμή $K = \dfrac{2\cdot3\cdot2+2\cdot2\cdot1-2^2}{(3-2)(2-1)} = 12.$

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:

911. $\dfrac{\alpha^2}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Ἀπ. $= 1$.

912. $\dfrac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Ἀπ. $= \alpha+\beta+\gamma$.

913 $\dfrac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)} + \dfrac{\alpha^2\gamma^2}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} + \dfrac{\beta^2\gamma^2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}$. Ἀπ. $= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

914 $\dfrac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta^4}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma^4}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$

Λύσις. Τό ἄθροισμα τοῦτο γράφεται καί οὕτω:

$$\frac{\alpha^4}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} - \frac{\beta^4}{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)} + \frac{\gamma^4}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\alpha^4(\beta-\gamma)-\beta^4(\alpha-\gamma)+\gamma^4(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)}$$

Καί ἐπειδή ὁ ἀριθμητής ἀναλυόμενος εἰς γινόμενον παραγόντων γίνεται: $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$ εὑρίσκομεν ὡς ἀποτέλεσμα: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$.

915. $\dfrac{\beta\gamma(\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\alpha\gamma(\gamma+\alpha)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Ἀπ. $= \alpha+\beta+\gamma$.

916. $\dfrac{\alpha^2\beta\gamma}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta^2\gamma}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} + \dfrac{\alpha\beta\gamma^2}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Ἀπ. $= 0$.

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι ἀθροίσματα:

917. $\dfrac{x+\alpha}{x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma} + \dfrac{x+\beta}{x^2-(\alpha+\gamma)x+\alpha\gamma} + \dfrac{x+\gamma}{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta}$. Ἀπ. $\dfrac{3x^2-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}$

918. $\dfrac{yz}{(x+y)(x+z)} + \dfrac{zx}{(y+z)(y+x)} + \dfrac{xy}{(z+x)(z+y)} + \dfrac{2xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$. Ἀπ. $= 1$

919. $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2} + \dfrac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1} + \dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$. Ἀπ. $= 1$.

920. $\dfrac{\alpha^2(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + \dfrac{\beta^2(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + \dfrac{\gamma^2(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$. Ἀπ. $= x^2$.

921. $\dfrac{x+\alpha}{x(x-y)(x-z)} + \dfrac{y+\alpha}{y(y-z)(y-x)} + \dfrac{z+\alpha}{z(z-x)(z-y)}$. Ἀπ. $\dfrac{\alpha}{xyz}$.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

§77. Κανών I. Διά νά πολλαπλασιάσωμεν δύο ἤ περισσότερα ἀλγεβρικά κλάσματα, τό γινόμενον τῶν ἀριθμητῶν γράφομεν ὡς ἀριθμητήν, τό δέ γινόμενον τῶν παρονομαστῶν παρονομαστήν καί κάμνομεν ἀκολούθως τάς δυνατάς ἁπλοποιήσεις. π.χ $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{\Gamma}{\Delta}\times\dfrac{E}{Z}=\dfrac{A\times\Gamma\times E}{B\times\Delta\times Z}$

§78. Κανών II. Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἀλγεβρικόν κλάσμα ἐπί ἀκεραίαν τινα παράστασιν, πολλαπλασιάζομεν τήν ἀκεραίαν παράστασιν ἐπί τόν ἀριθμητήν τοῦ κλάσματος ἀφίνοντες παρονομαστήν τόν ἴδιον. π.χ. $\dfrac{A}{B}\times\Gamma=\dfrac{A\times\Gamma}{B}$ ἤ $\Gamma\times\dfrac{A}{B}=\dfrac{A\times\Gamma}{B}$

Παράδ. 1ον. Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον: $\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}\cdot\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}$.

Ἀπόκ. Θά ἔχωμεν: $\dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}\cdot\dfrac{\beta^2}{\alpha\gamma}\cdot\dfrac{\gamma^2}{\alpha\beta}=\dfrac{\alpha^2\cdot\beta^2\gamma^2}{\alpha^2\cdot\beta^2\cdot\gamma^2}=1$.

Παράδ. 2ον. $\dfrac{a^2x^2}{y^2}\cdot\dfrac{xy}{a(x+y)}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{axy} = \dfrac{a^2x^2\cdot xy\cdot(x^2-y^2)}{y^2(x+y)a^2xy} =$

$$= \frac{a^2x^3y(x+y)(x-y)}{a^2xy^3(x+y)} = \frac{x^2(x-y)}{y^2}.$$

Παράδ. 3ον. $4a^2\cdot\dfrac{3\beta^2\gamma^2}{7x^2y^3}\cdot\dfrac{14x^3y}{8a^2\gamma^5}\cdot 5\gamma^2y$

Απ. $= \dfrac{4a^2\cdot 3\beta^2\gamma^2\cdot 14x^3y\cdot 5\gamma^2y}{7x^2y^3\cdot 8a^2\gamma^5} = \dfrac{60\cdot 14\cdot a^2\beta^2\gamma^4x^3y^2}{7\cdot 8\cdot a^2\gamma^5x^2y^3} = \dfrac{15\beta^2x}{\gamma y}.$

922. *Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον:*

$$\Gamma = \frac{a^3-\beta^3}{a^3+\beta^3}\cdot\frac{a+\beta}{a-\beta}\cdot\frac{(a^2-a\beta+\beta^2)^2}{a^2+a\beta+\beta^2}$$

Απόκ. Θά ἔχωμεν: $\Gamma = \dfrac{(a^3-\beta^3)(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)^2}{(a^3+\beta^3)(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)}.$

ἤ $\Gamma = \dfrac{(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)^2}{(a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)} = a^2-a\beta+\beta^2$

Σημ. Κατά τόν πολλ/σμόν τῶν κλασμάτων συμφέρει ὁ πολλ/σμός νά γίνεται τυπικός, ἵνα ἔχωμεν γινόμενα παραγόντων ὅσον τό δυνατόν περισσότερα εἰς τούς δύο ὅρους καί ἐπι-τυγχάνεται συντομώτερον ἡ ἁπλοποίησις.

923. *Νά ὑπολογισθῇ τό γινόμενον:*

$$\Gamma = \frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}\cdot\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x+1}\cdot\frac{x^2-6x+5}{x^2-7x+12}.$$

Απόκ. Θά ἔχωμεν: $\Gamma = \dfrac{(x^2-5x+6)(x^2-5x+4)(x^2-6x+5)}{(x^2-9x+20)(x^2-2x+1)(x^2-7x+12)}.$

$$= \frac{(x-2)(x-3)(x-1)(x-4)(x-1)(x-5)}{(x-4)(x-5)(x-1)^2(x-3)(x-4)} = \frac{x-2}{x-4}.$$

924. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:*

$$(a^2-1)\left(\frac{a}{a+1}+\frac{a}{a-1}-1\right).$$

Απόκ. $(a^2-1)\left[\dfrac{a(a-1)}{a^2-1}+\dfrac{a(a+1)}{a^2-1}-\dfrac{a^2-1}{a^2-1}\right] = (a^2-1)\left[\dfrac{a(a-1)+a(a+1)-(a^2-1)}{a^2-1}\right]$

$$= \frac{(a^2-1)(a^2+1)}{a^2-1} = a^2+1.$$

925. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:*

$$K=\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right).$$

Ἀπόκ. $K=\left[\frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{1-x^2}\right]\cdot\left(\frac{3+x^2-4x^2}{4x}\right)=$

$$=\left(\frac{1+x^2+2x-1-x^2+2x}{1-x^2}\right)\left(\frac{3-3x^2}{4x}\right)=\left(\frac{4x}{1-x^2}\right)\left[\frac{3(1-x^2)}{4x}\right]=3$$

926. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:*

$$\left(\frac{x-y}{x+y}+\frac{x+y}{x-y}\right)\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}+1\right)\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$$

καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $x=-0,0001$ καί $y=-0,25$. Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940.

Ἀπόκ. Καλοῦντες K τήν παράστασιν θά ἔχωμεν, ἐάν ἐκτελέσωμεν τάς προσθαφαιρέσεις ἑκάστου παράγοντος:

$$K=\frac{(x-y)^2+(x+y)^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x^2+y^2+2xy}{2xy}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$K=\frac{2(x^2+y^2)(x+y)^2\cdot xy}{(x+y)(x-y)2xy(x^2+y^2)}=\frac{x+y}{x-y}.$$

Ἀριθμ. τιμή τῆς $K=\frac{x+y}{x-y}=\frac{(-0,0001)+(-0,25)}{(-0,0001)-(-0,25)}=$

$$=\frac{-0,2501}{+0,2499}=-\frac{2501}{2499}=-1,0008.$$

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:

927. $4a^2\cdot\frac{3b^2}{2a^2}$

928. $\frac{5a^2b}{3\gamma\delta}\cdot\frac{4b^2\gamma}{10a^2}\cdot\frac{9\gamma^2\delta}{16b^3}$ Ἀπ. $\frac{3\gamma^2}{8}$.

929. $\frac{3a^2}{5b^3}\cdot 20ab^2$

930. $\left(\frac{2ab}{3\gamma x}\right)^2\cdot\left(\frac{5\gamma^2x}{4y^2}\right)^2\cdot\left(\frac{3\gamma y}{5a}\right)^2$ Ἀπ. $\frac{5a^3b^5\gamma^3}{54x^2y^4}$

931. $9x^7y^4\cdot\frac{4a^2b^2}{27x^3y^{11}}$

932. $\frac{15z-30}{2z}\cdot\frac{3z^2}{5z-10}$ Ἀπ. $\frac{9z}{2}$

933. $4(a+b)^2\cdot\frac{3ab}{8(a+b)^3}$

934. $\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{1}{a+b}\cdot\frac{a}{a-b}$ Ἀπ. 1.

935. $\frac{3y}{4(x+y)^2}\cdot 2(x^2-y^2)$

936. $\frac{3x^3+y}{2x^2-1}\cdot\frac{4x^4-1}{9x^6-y^2}\cdot\frac{3x^3-y}{2x^2+1}$ Ἀπ. $=1$.

Νά ὑπολογισθοῦν τά κάτωθι γινόμενα:

937. $\dfrac{\alpha+x}{(\mu+v)^3}\cdot\dfrac{x^2-y^2}{12}\cdot\dfrac{(\mu+v)^2}{\mu-v}\cdot\dfrac{6(\mu^2-v^2)}{x+y}$ ᾿Απ. $\dfrac{(\alpha+x)(x-y)}{2}$

938. $\dfrac{\alpha x+x^2}{2\beta-\gamma x}\cdot\dfrac{2\beta x-\gamma x^2}{(\alpha+x)^4}\cdot\dfrac{\alpha^2+2\alpha x+x^2}{x^2}$ ᾿Απ. $\dfrac{1}{\alpha+x}$

939. $\left(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^4+x^3\right)$ ᾿Απ $1+x^3$

940. $\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$ ᾿Απ. $\dfrac{1}{x}$.

941. $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2(\alpha-\beta)}-\dfrac{\alpha-\beta}{2(\alpha+\beta)}+\dfrac{2\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}\right]\cdot\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2\beta}\right)$ ᾿Απ. 1.

942. *Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καί νά ἁπλοποιηθῇ τό ἐξαγόμενον.*

$$K=\frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{\beta^2+\beta\gamma-\alpha\beta}\times\frac{(\gamma+\alpha)^2-\beta^2}{(\alpha+\beta)^2-\gamma^2}\times\frac{\beta^2+\alpha\beta-\beta\gamma}{\alpha\gamma+\alpha^2-\alpha\beta}.$$

᾿Απόκ. $K=\dfrac{\left[(\beta+\gamma)^2-\alpha^2\right]\cdot\left[(\gamma+\alpha)^2-\beta^2\right]\cdot\left(\beta^2+\alpha\beta-\beta\gamma\right)}{\left(\beta^2+\beta\gamma-\alpha\beta\right)\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\left(\alpha\gamma+\alpha^2-\alpha\beta\right)}$.

$$K=\frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha+\beta)(\gamma+\alpha-\beta)\beta(\beta+\alpha-\gamma)}{\beta(\beta+\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\alpha(\gamma+\alpha-\beta)}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}.$$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι πράξεις:

943. $\dfrac{x^4-y^4}{x^2+xy+y^2}\cdot\dfrac{x^3-y^3}{(x-y)(x-2y)}\cdot\dfrac{x^2-4y^2}{(x+y)(x+2y)}\cdot\dfrac{1}{(x-y)(x^2+y^2)}$ ᾿Απ. $=1$.

944. $\dfrac{\alpha^2(\alpha-4)^2}{(\alpha+4)^2-4\alpha}\cdot\dfrac{64-\alpha^3}{16-\alpha^2}\cdot\dfrac{(\alpha+4)^2}{(\alpha^2-4\alpha)^3}$ ᾿Απ. $=\dfrac{\alpha+4}{\alpha(\alpha-4)}$

945. $\dfrac{\alpha^3+4\alpha\beta+4\alpha\beta^2}{3\alpha^2\beta-5\alpha\beta^2-2\beta^3}\cdot\dfrac{\alpha^2-4\beta^2}{9\alpha^2-3\alpha\beta+\beta^2}\cdot\dfrac{27\alpha^3+\beta^3}{\alpha+2\beta}$ ᾿Απ. $=\dfrac{\alpha(\alpha+2\beta)^2}{\beta}$.

946. $\dfrac{2\alpha^2+3\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2+2\alpha\beta+4\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^3-8\beta^3}{\alpha^2+3\alpha\beta+2\beta^2}\cdot\dfrac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{2\alpha^2-5\alpha\beta+2\beta^2}$ ᾿Απ. $=\alpha+\beta$

947. $\dfrac{x^2+2xy+y^2-\alpha^2}{y^2-\gamma^2+2\gamma x-x^2}\cdot\dfrac{y^2-2xy+x^2-\gamma^2}{(y-\gamma)^2-x^2}\cdot\dfrac{x+y-\gamma}{x+y+\alpha}$ ᾿Απ. $=\dfrac{x+y-\alpha}{x+y-\gamma}$.

948. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις: $\left(\frac{\beta-\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta-\gamma}+\frac{\beta}{\gamma-\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)$ ἰσοῦται μέ τήν 1 ἄν $\gamma=\pm(\alpha-\beta)$ καί μέ 9 ἄν $\alpha+\beta+\gamma=0$.

949. Νά δειχθῇ ὅτι: $\frac{x^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(y-\frac{\alpha^2x}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2=\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\beta}\right)^2$.

Ἀπόκ. Τό α' μέλος γίνεται: $\frac{x^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\left[y(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2x\right]^2}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}=$

$$=\frac{\alpha^2\beta^2x^2+y^2(\alpha^2+\beta^2)^2+\alpha^4x^2-2\alpha^2xy(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\left[\alpha^2x^2+(\alpha^2+\beta^2)y^2-2\alpha^2xy\right]}{\alpha^2\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}=$$

$$=\frac{\alpha^2x^2+(\alpha^2+\beta^2)y^2-2\alpha^2xy}{\alpha^2\beta^2}=\frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{x^2+y^2-2xy}{\beta^2}=\left(\frac{y}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{x-y}{\beta}\right)^2.$$

950. Ἐάν $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις:

$$\Pi=\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{\beta\gamma(y-z)^2+\alpha\gamma(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2}$$ εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν τιμῶν x, y, z.

Ἀπόκ. Λαμβάνομεν τόν παρονομαστήν καί ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις διατάσσοντες ὡς πρός x, y, z, ἤτοι:

Παρονομ. $=\beta\gamma(y-z)^2+\alpha\gamma(z-x)^2+\alpha\beta(x-y)^2=\beta\gamma y^2+\beta\gamma z^2-2\beta\gamma yz+\alpha\gamma z^2+$
$+\alpha\gamma x^2-2\alpha\gamma zx+\alpha\beta x^2+\alpha\beta y^2-2\alpha\beta xy$.

Παρονομ. $=\alpha(\beta+\gamma)x^2+\beta(\gamma+\alpha)y^2+\gamma(\alpha+\beta)z^2-2\alpha\beta xy-2\alpha\gamma zx-2\beta\gamma yz$ (1)

Ἐξ ἄλλου ἡ δοθεῖσα σχέσις: $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$ δίδει $(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=0$

ἤ $\alpha^2x^2+\beta^2y^2+\gamma^2z^2+2\alpha\beta xy+2\alpha\gamma zx+2\beta\gamma yz=0$ (2)

Προσθέτοντες εἰς τήν (1) τήν (2), ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ 0 λαμβάνομεν:

Παρον. $=\alpha(\alpha+\beta+\gamma)x^2+\beta(\alpha+\beta+\gamma)y^2+\gamma(\alpha+\beta+\gamma)z^2=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)$.

Ὅθεν ἡ δοθεῖσα παράστασις γίνεται:

$$\Pi=\frac{\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2}{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma z^2)}=\frac{1}{\alpha+\beta+\gamma}.$$ Αὕτη ὡς μή περιέχουσα τά x, y, z εἶναι ἀνεξάρτητος αὐτῶν.

951. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0$ νά δειχθῇ ἡ ταυτότης:

$$\alpha\frac{\beta^3-\gamma^3}{\beta-\gamma}+\beta\frac{\alpha^3-\gamma^3}{\alpha-\gamma}+\gamma\frac{\beta^3-\alpha^3}{\beta-\alpha}\equiv 0.$$

952. Ἐάν $x=\alpha(\beta-\gamma)$, $y=\beta(\gamma-\alpha)$, $z=\gamma(\alpha-\beta)$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^3+\left(\frac{y}{\beta}\right)^3+\left(\frac{z}{\gamma}\right)^3=\frac{3xyz}{\alpha\beta\gamma}.$$

953. Ἐάν $x=\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}$ καί $y=\dfrac{(\alpha+\gamma-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha+\beta+\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}$

νά δειχθῇ ὅτι: $(x+1)(y+1)=2.$

954. Ἐάν $\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}=0$ νά δειχθῇ ὡσαύτως ὅτι:

$\dfrac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}=0.$ Λύσις. Ἕνεκα τῆς ὑποθέσεως ἔχομεν τήν ἀλήθειαν τῆς προφανοῦς ἰσότητος:

(1) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}\right)\left(\dfrac{1}{\beta-\gamma}+\dfrac{1}{\gamma-\alpha}+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\right)=0.$ Ἐκτελοῦντες τόν πολ/σμόν εἰς τό α΄ μέλος καί διατάσσοντες καταλλήλως λαμβάνομεν:

(2) $\dfrac{\alpha}{(\beta-\gamma)^2}+\dfrac{\beta}{(\gamma-\alpha)^2}+\dfrac{\gamma}{(\alpha-\beta)^2}+\left[\dfrac{\alpha}{\beta-\gamma}\left(\dfrac{1}{\gamma-\alpha}+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\right)+\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}\left(\dfrac{1}{\beta-\gamma}+\dfrac{1}{\alpha-\beta}\right)+\dfrac{\gamma}{\alpha-\beta}\left(\dfrac{1}{\beta-\gamma}+\dfrac{1}{\gamma-\alpha}\right)\right]=0.$

Ἀλλά ἡ ἀγγύλη μετά τάς πράξεις ἰσοῦται μέ 0, ἐξ οὗ πορίζόμεθα τό ζητούμενον.—

ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ.

§79. Κανών. Καθώς εἰς τήν Ἀριθμητικήν οὕτω καί εἰς τήν Ἄλγεβραν: Διά νά διαιρέσωμεν κλάσμα διά κλάσματος ἤ ἀκεραίαν τινα παράστασιν διά κλάσματος, ἀρκεῖ νά ἀντιστρέψωμεν τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καί ἀντί διαιρέσεως νά κάμωμεν πολλαπλασιασμόν.

Π.χ 1) $\dfrac{A}{B}:\dfrac{\Gamma}{\Delta}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{\Delta}{\Gamma}=\dfrac{A\times\Delta}{B\times\Gamma}.$

2) $A:\dfrac{B}{\Gamma}=A\times\dfrac{\Gamma}{B}=\dfrac{A\times\Gamma}{B}.$

3) $\dfrac{8\alpha^3\beta}{5xy^2}:\dfrac{16\alpha^4\beta\gamma}{25xy^3}=\dfrac{8\alpha^3\beta}{5xy^2}\cdot\dfrac{25xy^3}{16\alpha^4\beta\gamma}=\dfrac{8\alpha^3\beta\cdot25xy^3}{5xy^2\cdot16\alpha^4\beta\gamma}=\dfrac{5y}{2\alpha\gamma}.$

4) $(-15x^4y^3\omega):\left(\dfrac{-5x^3y^4\omega}{4\alpha\beta}\right)=(-15x^4y^3\omega)\cdot\left(\dfrac{4\alpha\beta}{-5x^3y^4\omega}\right)=$

$$=\frac{-60\alpha\beta x^4y^3\omega}{-5x^3y^4\omega}=\frac{12\alpha\beta x}{y}.$$

955 Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

1. $\dfrac{9\alpha^2\beta^2}{5x^3y}:\dfrac{3\alpha\beta}{20x^2y^2}=\dfrac{9\alpha^2\beta^2}{5x^3y}\cdot\dfrac{20x^2y^2}{3\alpha\beta}=\dfrac{180\alpha^2\beta^2x^2y^2}{15\alpha\beta x^3y}=\dfrac{12\alpha\beta y}{x}.$

2. $30x^3y^4 : \frac{45x^4y^5}{4a\beta} = 30x^3y^4 \cdot \frac{4a\beta}{45x^4y^5} = \frac{120a\beta x^3y^4}{45x^4y^5} = \frac{8a\beta}{3xy}$.

3. $\frac{-12x^7y^2}{7a^3\beta^2} : 3x^4y^2 = \frac{-12x^7y^2}{21a^3\beta^2x^4y^2} = -\frac{4x^3}{7a^3\beta^2}$.

4. $\frac{a+\beta}{a-\beta} : \frac{a^2+2a\beta+\beta^2}{a^2-\beta^2} = \frac{a+\beta}{a-\beta} \cdot \frac{(a+\beta)(a-\beta)}{(a+\beta)^2} = \frac{(a+\beta)^2(a-\beta)}{(a-\beta)(a+\beta)^2} = 1$.

5. $\frac{x+7}{x-6} \cdot \frac{2x+10}{3x+21} : \frac{5x+25}{x^2-6x} = \frac{(x+7)(x+5)\cdot 2}{(x-6)(x+7)\cdot 3} \cdot \frac{x(x-6)}{5(x+5)} = \frac{2x}{15}$.

6. $\frac{a^2+4a-21}{a+4} \cdot \frac{a^2-16}{a^2+4a+4} : \frac{a-4}{a+2} = \frac{(a+7)(a-3)(a+4)(a-4)}{(a+4)(a+2)^2} \cdot \frac{(a+2)}{(a-4)} = \frac{(a+7)(a-3)}{(a+2)}$

7. $\frac{(a+\gamma)^2-\beta^2}{(a+\beta)^2-\gamma^2} : \frac{a\beta-\beta^2+\beta\gamma}{a^2+a\beta-a\gamma} = \frac{(a+\gamma+\beta)(a+\gamma-\beta)}{(a+\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)} : \frac{\beta(a-\beta+\gamma)}{a(a+\beta-\gamma)} =$

$$= \frac{(a+\gamma-\beta)}{(a+\beta-\gamma)} \cdot \frac{a(a+\beta-\gamma)}{\beta(a-\beta+\gamma)} = \frac{a}{\beta}$$

956. <u>Νά εὑρεθῆ τό ἐξαγόμενον:</u> $\left(1+\frac{a-\beta}{a+\beta}\right) : \left(1-\frac{a-\beta}{a+\beta}\right)$.

<u>Ἀπ.</u> $\left(1+\frac{a-\beta}{a+\beta}\right) : \left(1-\frac{a-\beta}{a+\beta}\right) = \left(\frac{a+\beta+a-\beta}{a+\beta}\right) : \left(\frac{a+\beta-a+\beta}{a+\beta}\right) =$

$$= \frac{2a}{a+\beta} : \frac{2\beta}{a+\beta} = \frac{2a(a+\beta)}{(a+\beta)\cdot 2\beta} = \frac{a}{\beta}.$$

957. <u>Νά εὑρεθῆ τό ἐξαγόμενον:</u> $\left(\frac{x}{x-a}+\frac{a}{x+a}\right) : \left(\frac{x}{x-a}-\frac{a}{x+a}\right)$.

<u>Ἀπ.</u> Θά ἔχωμεν: $\frac{x(x+a)+a(x-a)}{(x-a)(x+a)} : \frac{x(x+a)-a(x-a)}{(x-a)(x+a)} =$

$$= \frac{x^2+ax+ax-a^2}{x^2-a^2} : \frac{x^2+ax-ax+a^2}{x^2-a^2} = \frac{x^2+2ax-a^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{x^2-a^2}{x^2+a^2} = \frac{x^2+2ax-a^2}{x^2+a^2}.$$

958. <u>Νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις:</u>

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}-\frac{x}{a\beta}\right)(a+\beta+x) : \left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{2}{a\beta}-\frac{x^2}{a^2\beta^2}\right).$$

<u>Ἀπόκ.</u> Θά ἔχωμεν:

$$\left(\frac{b+a-x}{ab}\right)(a+b+x):\left(\frac{b^2+a^2+2ab-x^2}{a^2b^2}\right)=\frac{(a+b-x)(a+b+x)}{ab}:$$

$$:\frac{(a+b)^2-x^2}{a^2b^2}=\frac{(a+b)^2-x^2}{ab}\cdot\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-x^2}=ab.$$

959. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις:
$\frac{a^2b^2}{\gamma}:\left[\frac{a^2\gamma^2}{b}:\left(\frac{b^2\gamma^2}{a}\cdot\frac{a\gamma}{b^2}\right):\left(\frac{ab}{\gamma^2}:\frac{b\gamma}{a^2}\right)\right]$ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθμητική τιμή τοῦ ἐξαγομένου διά $a=0{,}1$, $b=-0{,}2$ καί $\gamma=\frac{1}{2}$.

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940

Ἀπόκ. Θά ἔχωμεν:
$$\frac{a^2b^2}{\gamma}:\left[\frac{a^2\gamma^2}{b}\cdot\frac{ab^2\gamma^3}{ab^2}:\left(\frac{ab}{\gamma^2}\cdot\frac{a^2}{b\gamma}\right)\right]=\frac{a^2b^2}{\gamma}:\left[\frac{a^2\gamma^2}{b}\cdot\frac{ab^2}{ab^2\gamma^3}:\left(\frac{a^3b}{b\gamma^3}\right)\right]=$$

$$=\frac{a^2b^2}{\gamma}:\left(\frac{a^3b^2\gamma^2}{ab^3\gamma^3}\cdot\frac{b\gamma^3}{a^3b}\right)=\frac{a^2b^2}{\gamma}:\frac{a^3b^3\gamma^5}{a^4b^4\gamma^3}=\frac{a^2b^2}{\gamma}:\frac{\gamma^2}{ab}=\frac{a^3b^3}{\gamma^3}$$

Ἀριθμ. τιμή $\frac{(0{,}1)^3(-0{,}2)^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{(0{,}001)(-0{,}008)}{\frac{1}{8}}=8(-0{,}000008)=$

$=-0{,}000064.$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

960. $\frac{24x^4y^5}{35a^4b^5}:\left(\frac{18x^3y^4}{7}:5a^2b^2\right)$ Ἀπ. $=\frac{4xy}{3a^2b^3}$

961. $\frac{\mu^2\nu}{a^2b}\cdot\frac{2ab^2}{9xy}:\frac{\mu\nu^2}{axy}$

962. $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}:\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$ Ἀπ. $=\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$

963. $\frac{57x^4y^3\omega^2}{4a^2b}:(-19x^3y^3\omega^3)$

964. $\frac{a^2x^2-x^4}{a^3-x^3}:\frac{ax^2+x^2}{a^2+ax+x^2}$ Ἀπ. $=1.$

965. $\frac{x^4-a^4}{(x-a)^2}:\frac{x^2+ax}{x-a}$

966. $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$ Ἀπ. $=\frac{a+x}{ax}$

967. $\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{a^2}{x^2}\right):\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)$

968. $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$ Ἀπ. $=\frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2b^2}$

969. $\left(a+\frac{b-a}{1+ab}\right):\left(1-\frac{1+ab}{a(b-a)}\right).$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

970. $\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\cdot x^2:\left[\frac{(1+x)-(1-x)}{1-x}\right]\cdot\left(1-\frac{1}{1+x}\right)$ Ἀπ. $=2x.$

971. $\left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}\right):\left(\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)$ Ἀπ $=(x-2)$.

972. $\left(x-3+\frac{5x}{2x-6}\right):\left(2x-1+\frac{15}{x-3}\right)$ Ἀπ. $=\frac{1}{2}$.

973. $\left(\frac{x+1}{x}-\frac{y-1}{y}+\frac{z+1}{z}\right):\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$ Ἀπ. $=1$.

974. $\left[\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right):(x^3-y^3)\right]$ Ἀπ. $=x^2y^2$.

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

975. $\left(1-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2\alpha}+\frac{\alpha-\beta}{2\beta}\right):\left(\alpha-2\beta+\frac{\beta^2}{\alpha}\right)\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha-\beta}\right)$ Ἀπ. $\frac{(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)(\alpha+\beta)}{2\alpha\beta^2(\alpha-\beta)}$.

976. $\frac{7\alpha(3\mu+7\nu)-(5\alpha+2\beta)(3\mu+7\nu)}{(2\alpha-2\beta)(7\rho+6\kappa)}:\frac{3\mu+7\nu}{7\rho+6\kappa}$ Ἀπ. $=1$.

977. $\left(\frac{x^2+8x+15}{x^2+x-12}\cdot\frac{x^2-x-20}{x^2+12x+35}\right):\left(\frac{x^2-2x-15}{x^2+11x+28}\right)$ Ἀπ $=\frac{x+4}{x-3}$.

978. $\frac{6\pi^2\kappa^2}{\mu+\nu}:\left\{\frac{3\pi(\mu-\nu)}{7(\alpha+\beta)}:\left[\frac{4(\alpha-\beta)}{21\pi\kappa^2}\cdot\frac{4(\mu^2-\nu^2)}{\alpha^2-\beta^2}\right]\right\}$ Ἀπ. $10\frac{2}{3}$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ κάτωθι διαιρέσεις:

979. $\frac{x^3+8y^3}{x^3-3xy+2y^2}\times\frac{2x^2-3xy-2y^2}{x^2-xy+4y^2}:\frac{2x^2+5xy+2y^2}{x^2-2xy+y^2}$ Ἀπ. $x-y$.

980. $\frac{8\alpha^3+1}{(2-\alpha)^3}\times\frac{4\alpha-\alpha^3}{1-4\alpha^2}:\frac{(1-2\alpha)^2+2\alpha}{2-5\alpha+2\alpha^2}$ Ἀπ. $\alpha(\alpha+2)$.

981. $\frac{\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4}{\alpha^2-4\alpha\beta-21\beta^2}\times\frac{\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta^2}{\alpha^3-\beta^3}:\frac{1}{\alpha-7\beta}$ Ἀπ. $=\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$.

ΣΥΝΘΕΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ.

§ 80. Ὁρισμός : Σύνθετον κλάσμα καλεῖται τὸ ἀλγεβρικὸν κλάσμα, τοῦ ὁποίου καὶ οἱ δύο ὅροι ἢ εἷς τοὐλάχιστον ἐξ αὐτῶν εἶναι ἀλγεβρικὰ κλάσματα. Αἱ μορφαὶ τῶν συνθέτων κλασμάτων δύνανται νὰ εἶναι αἱ κάτωθι :

$$\text{I)}\ \frac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}}\ ,\qquad \text{II)}\ \frac{\frac{A}{B}}{\Gamma}\ ,\qquad \text{III)}\ \frac{A}{\frac{B}{\Gamma}}$$

Διὰ νὰ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν πολλαπλασιάζομεν καὶ τοὺς δύο ὅρους τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπὶ τὸ ε.κ.π τῶν παρονομαστῶν τῶν ὅρων του.

I)

1ος Τρόπος) $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \dfrac{\frac{A}{B}\cdot B.\Delta}{\frac{\Gamma}{\Delta}\cdot B.\Delta} = \dfrac{\frac{A.B.\Delta}{B}}{\frac{\Gamma.B.\Delta}{\Delta}} = \dfrac{A.\Delta}{B.\Gamma}$ καθότι τῶν παρονομαστῶν τὸ ε.κ.π $= B.\Delta$

2ος Τρόπος) $\dfrac{\frac{A}{B}}{\frac{\Gamma}{\Delta}} = \dfrac{A}{B}:\dfrac{\Gamma}{\Delta} = \dfrac{A}{B}\times\dfrac{\Delta}{\Gamma} = \dfrac{A.\Delta}{B.\Gamma}$

II) $\dfrac{\frac{A}{B}}{\Gamma} = \dfrac{A}{B}:\dfrac{\Gamma}{1} = \dfrac{A}{B}\times\dfrac{1}{\Gamma} = \dfrac{A}{B.\Gamma}$. III) $\dfrac{A}{\frac{B}{\Gamma}} = A:\dfrac{B}{\Gamma} = A\times\dfrac{\Gamma}{B} = \dfrac{A.\Gamma}{B}$

Παραδ. 1ον $\dfrac{\frac{(x+y)^2}{x-y}}{\frac{x+y}{(x-y)^2}} = \dfrac{\frac{(x+y)^2}{x-y}.(x-y)^2}{\frac{x+y}{(x-y)^2}(x-y)^2} = \dfrac{(x+y)^2(x-y)}{(x+y)} = (x+y)(x-y) = x^2-y^2.$

Παραδ. 2ον $\dfrac{\frac{3x^2}{a^3+x^3}}{\frac{x}{a+x}} = \dfrac{3x^2}{a^3+x^3}:\dfrac{x}{a+x} = \dfrac{3x^2}{a^3+x^3}\cdot\dfrac{a+x}{x} = \dfrac{3x^2(a+x)}{(a+x)(a^2-ax+x^2).x} = \dfrac{3x}{a^2-ax+x^2}$

Παραδ. 3ον $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{a\beta}}{x+y} = \dfrac{\frac{x^2-y^2}{a\beta}.a\beta}{(x+y)a\beta} = \dfrac{x^2-y^2}{(x+y)a\beta} = \dfrac{x-y}{a\beta}$

982. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα: $K = \dfrac{\frac{a+\beta}{a-\beta}-1}{\frac{a-\beta}{a+\beta}+1}$.

Ἀπόκρ. Θὰ ἔχωμεν $K = \left(\dfrac{a+\beta}{a-\beta}-1\right):\left(\dfrac{a-\beta}{a+\beta}+1\right) = \dfrac{(a+\beta)-(a-\beta)}{a-\beta}:\dfrac{a-\beta+a+\beta}{a+\beta} =$

$= \dfrac{2\beta}{a-\beta}:\dfrac{2a}{a+\beta} = \dfrac{2\beta}{a-\beta}\cdot\dfrac{a+\beta}{2a} = \dfrac{\beta(a+\beta)}{a(a-\beta)}$

983. Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ σύνθετον κλάσμα $K = \dfrac{\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}}{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}}$

Ἀπόκρ. Τὸ ε.κ.π τῶν παρονομαστῶν εἶναι : $(x+y)(x-y)$

Πολλαπλασιάζοντες τοὺς δύο ὅρους λαμβάνομεν :

$$K=\frac{\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\cdot(x^2-y^2)}{\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}(x^2-y^2)}=\frac{x^3+y^3}{(x^2-xy+y^2)(x+y)}=\frac{x^3+y^3}{x^3+y^3}=1$$

984. Νά ἁπλοποιηθῆ τό σύνθετον κλάσμα $K=\dfrac{x+\frac{y-x}{1+xy}}{1-\frac{y-x}{1+xy}\,x}$

Ἀπόκ. Θά ἔχωμεν: $K=\dfrac{\frac{x(1+xy)+y-x}{1+xy}}{\frac{1+xy-(y-x)x}{1+xy}}=\dfrac{x(1+xy)+y-x}{1+xy-(y-x)x}=\dfrac{x+x^2y+y-x}{1+xy-xy+x^2}=$

$$=\frac{x^2y+y}{1+x^2}=\frac{y(x^2+1)}{(x^2+1)}=y.$$

985. Νά ἁπλοποιηθῆ τό σύνθετον κλάσμα. $K=\dfrac{a-1+\frac{6}{a-6}}{a-2+\frac{3}{a-6}}$

Ἀπόκ. Ἐάν πολ/σωμεν ἀριθμητήν καί παρονομαστήν τοῦ συνθέτου κλάσματος ἐπί $(a-6)$ λαμβάνομεν:

$$K=\frac{(a-1)(a-6)+6}{(a-2)(a-6)+3}=\frac{a^2-7a+6+6}{a^2-8a+12+3}=\frac{a^2-7a+12}{a^2-8a+15}=\frac{(a-3)(a-4)}{(a-3)(a-5)}=\frac{a-4}{a-5}$$

986. Νά ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα. $K=\dfrac{1}{a+\frac{1}{1+\frac{a+1}{3-a}}}$

Ἀπόκ. Τό σύνθετον κλάσμα τοῦ παρονομαστοῦ γράφεται:

$$\frac{1}{1+\frac{a+1}{3-a}}=\frac{1}{\frac{3-a+a+1}{3-a}}=\frac{3-a}{4}$$

Ὅθεν τό δοθέν κλάσμα γράφεται $K=\dfrac{1}{a+\frac{3-a}{4}}=\dfrac{1}{\frac{4a+3-a}{4}}=\dfrac{4}{3(a+1)}$

987 Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καί ἁπλοποιηθῆ ἡ παράστασις:

$$K=\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)-\frac{\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}}{\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}}.$$

Ἀπόκ. Τό σύνθετον κλάσμα (ὁ ἀφαιρετέος) δύναται νά ὑπολογισθῆ χωριστά οὕτω: $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right):\left(\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}\right)=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{x^2-y^2}:\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=$

$$=\frac{4xy}{x^2-y^2}:\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}=\frac{4xy\,(x^2-y^2)}{2(x^2+y^2)(x^2-y^2)}=\frac{2xy}{x^2+y^2}$$

Ἐπομένως ἀντικαθιστῶντες εἰς τήν δοθεῖσαν K λαμβάνομεν:

$$K=\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x}{x+y}\right)-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{x(x+y)-x(x-y)}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}=$$

$$=\frac{2xy}{x^2-y^2}-\frac{2xy}{x^2+y^2}=\frac{2xy(x^2+y^2)-2xy(x^2-y^2)}{x^4-y^4}=\frac{4xy^3}{x^4-y^4}$$

988. Νά άπλοποιηθῆ ἡ παράστασις: $K=\dfrac{x+\frac{1}{y}}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}-\dfrac{1}{y(xyz+x+z)}$

Άπόκ. Τό σύνθετον κλάσμα (ὁ μειωτέος) δύναται νά γραφῆ:

$$\frac{x+\frac{1}{y}}{x+\frac{z}{yz+1}}=\frac{\frac{xy+1}{y}}{\frac{xyz+x+z}{yz+1}}=\frac{(xy+1)(yz+1)}{y(xyz+x+z)}$$

Ὅθεν ἡ δοθεῖσα παράστασις K γράφεται:

$$K=\frac{(xy+1)(yz+1)}{y(xyz+x+z)}-\frac{1}{y(xyz+x+z)}=\frac{xy^2z+yz+xy+1-1}{y(xyz+x+z)}=\frac{y(xyz+x+z)}{y(xyz+x+z)}=1$$

Νά άπλοποιηθοῦν τά κάτωθι κλάσματα:

989. $\dfrac{\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}}{\frac{\alpha^2-(\beta+\gamma)^2}{\alpha\beta}}$ Άπ. $\dfrac{1}{\gamma(\alpha-\beta-\gamma)}$

990. $\dfrac{\frac{\gamma}{\alpha+\beta}-\frac{\gamma}{\alpha+2\beta}}{\frac{\gamma}{\alpha+2\beta}-\frac{\gamma}{\alpha+3\beta}}$ Άπ. $\dfrac{\alpha+3\beta}{\alpha+\beta}$

991. $\dfrac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}-\alpha}{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}\times\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3}$ Άπ. α

992. $\dfrac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\beta^2}}:\dfrac{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}}{\alpha^3-\beta^3}$ Άπ. $\alpha^2\beta^2$

993. $\dfrac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\beta}{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta-2\alpha}}+\dfrac{\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\alpha}{\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha-2\beta}}$ Άπ. $=\alpha\beta$

994. $\dfrac{\frac{\alpha^3+\beta^3}{\beta}}{\alpha-\frac{\beta}{1+\frac{\beta}{\alpha-\beta}}}-\dfrac{\frac{\alpha^3-\beta^3}{\beta}}{\alpha+\frac{\beta}{1-\frac{\beta}{\alpha+\beta}}}$ Άπ. $=2\alpha\beta$

995. $\dfrac{\frac{x^3}{y^3}-\frac{y^3}{x^3}}{\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\right)}:\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$ Άπ. $=x-y$

996. $\dfrac{\left(\alpha^2-\frac{1}{\beta^2}\right)^{\alpha}\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)^{\beta-\alpha}}{\left(\beta^2-\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\beta}\cdot\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha-\beta}}$ Άπ. $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha+\beta}$

Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καί ἁπλοποιηθοῦν αἱ παραστάσεις τῶν ἐξαγομένων δέ νά εὑρεθῆ ἡ ἀριθμ. τιμή διά $x=-\frac{1}{3}$

997. $\dfrac{\frac{1}{1+x}}{1-\frac{1}{1+x}}+\dfrac{\frac{-1}{1+x}}{\frac{x}{1-x}}+\dfrac{\frac{1}{1-x}}{\frac{x}{1+x}}$ Άπ. $\dfrac{x^2+3}{x(1-x^2)}$, Άρ. Τιμή $=-10,5$

998. $\dfrac{\frac{1+x}{1-x}+\frac{4x}{1+x^2}+\frac{8x}{1-x^4}-\frac{1-x}{1+x}}{\frac{1+x^2}{1-x^2}+\frac{4x^2}{1+x^4}-\frac{1-x^2}{1+x^2}}$ Άπ. $\dfrac{2(1+x^4)}{x}$, Άρ. Τιμή $=-\dfrac{164}{27}$

999. $\dfrac{\left[\frac{(\alpha+\beta)^2}{4\alpha\beta}-1\right]\left[\frac{(\alpha-\beta)^2}{4\alpha\beta}+1\right]}{\left[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\right]}\times\dfrac{\left[(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\right]\cdot\left[(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta\right]}{\left[(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)\right]}$ Άπ. $=\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{16\alpha^2\beta^2}$

Νά άπλοποιηθῆ ἡ κάτωθι παράστασις:

1000. $\left\{\dfrac{1}{\alpha+\frac{1}{\beta+\frac{1}{\gamma}}}:\dfrac{1}{\alpha+\frac{1}{\beta}}\right\}-\dfrac{1}{\beta(\alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma)}$ Άπ. $=1$

Νά ἁπλοποιηθοῦν αἱ κάτωθι παραστάσεις:

1001. $\dfrac{x}{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x}}} : \dfrac{1+x+x^2}{1+3x+3x^2+2x^3}$ $\text{Ἀπ} = x(1+x-x^2)$.

1002. $\left[\dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}+2\alpha}{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}-2\alpha} - \dfrac{2\beta+\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta-\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}\right] : \dfrac{\dfrac{4\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}}{\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$ $\text{Ἀπ.} = \dfrac{3\beta+\alpha}{\beta}$.

1003. Ἐάν $\gamma=\alpha+2$ καί $\beta=\alpha-1$ νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει:

$$\frac{\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^2\beta^2-\gamma^2+1}{\alpha^2\beta\gamma-\dfrac{\gamma}{\beta}+\beta\left(\alpha^2-\dfrac{1}{\beta^2}\right)}+1=\alpha^2$$

1004. Ἐάν $x=\dfrac{2\beta^2-\alpha^2+\gamma^2}{3\alpha}$ καί $y=\dfrac{2\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{3\beta}$ νά ἐπαληθευθῇ ὅτι θά εἶναι: $\dfrac{x+\alpha}{y+\beta}=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

§ 81 ΠΕΡΙ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΜΟΡΦΩΝ ΚΑΙ ΕΥΡΕΣΙΣ ΑΛΗΘΟΥΣ ΤΙΜΗΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΣ. Σύμβολα: $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{0}{\beta}, \frac{\alpha}{0}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$.

Κατά τήν εὕρεσιν τῶν ἀριθμητικῶν τιμῶν τῶν ἀλγεβρικῶν παραστάσεων διά δεδομένας τιμάς τοῦ γράμματος ἤ τῶν γραμμάτων αὐτῶν καταλήγομεν συνήθως εἰς ἐξαγόμενα τῶν κάτωθι μορφῶν: 1/ $\frac{\alpha}{\beta}$. 2/ $\frac{0}{\beta}$. 3/ $\frac{\alpha}{0}$ 4/ $\frac{0}{0}$, 5/ $\frac{\infty}{\infty}$, 6/ $\infty-\infty$, 7/ $0.\infty$ κ.λ.π. ἔνθα α καί β ποσότητες διάφοροι τοῦ μηδενός $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$.

1. Μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$. Τό κλάσμα τοῦτο ἔνθα $\alpha\neq 0$ καί $\beta\neq 0$ ἔχει ἔννοιαν ἀριθμοῦ ὡρισμένου καί πεπερασμένου.

π.χ. Ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ κλάσματος $K=\dfrac{x+5}{y-3}$ διά $x=2$, $y=7$ εἶναι: $K=\dfrac{2+5}{7-3}=\dfrac{7}{4}$.

2. Μορφή $\frac{0}{\beta}$. Τό κλάσμα τοῦτο παριστᾷ ἀριθμητικόν ἐξαγόμενον ἴσον μέ 0, διότι ὁ διαιρέτης β ἐπί 0 μόνον πολλαπλασιαζόμενος δίδει τόν διαιρετέον 0. Ἄρα δυνάμεθα νά γράφωμεν: $\frac{0}{\beta}=0$ ἤ $0=\beta\times 0$.

π.χ. Ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ κλάσματος $K=\dfrac{x+5}{y-3}$ διά $x=-5$, $y=7$ εἶναι: $K=\dfrac{-5+5}{7-3}=\dfrac{0}{4}=0$

3. Μορφή $\frac{\alpha}{0}$. Τό κλάσμα τοῦτο (ἔνθα $\alpha\neq 0$) δέν ἔχει καμμίαν ἔννοιαν ἀριθμοῦ καί δέν παριστᾷ οὐδεμίαν ἀριθμητικήν τιμήν, διότι δέν

ὑπάρχει ὡς πηλίκον ποσότης π, ἡ ὁποία πολλαπλασιαζομένη ἐπί τό μηδέν (0) νά δίδῃ γινόμενον ἕνα ἀριθμόν α διάφορον τοῦ μηδενός, δηλαδή δέν δυνάμεθα νά ἔχωμεν: $\alpha = 0.\pi$ ἔνθα $\alpha \neq 0$.

Ἐν τούτοις παραδεχόμεθα ὅτι τό κλάσμα τῆς μορφῆς $\frac{\alpha}{0}$ ἔνθα α ὑποθέτομεν ὅτι εἶναι μία ὡρισμένη ποσότης $\neq 0$, ὁ δέ παρονομαστής ποσότης ὄχι ἀκριβῶς 0, ἀλλά τείνουσα πρός τό 0, θά ἔχῃ μίαν τιμήν ἀπολύτως μεγαλυτέραν παντός ἀριθμοῦ θετικοῦ, ὁσονδήποτε φαντασθῶμεν μεγάλον. Τόν ἀριθμόν τοῦτον καλοῦμεν **ἄπειρον** καί παριστῶμεν διά τοῦ συμβόλου ∞

Παραδεχόμεθα λοιπόν ὅτι $\frac{\alpha}{0} = +\infty$ ὅταν α = θετικός

καί ὅτι $\frac{\alpha}{0} = -\infty$ ὅταν α = ἀρνητικός

Πράγματι: Ἔστω τό κλάσμα $\frac{\alpha}{x}$ ἔνθα $\alpha \neq 0$ καί σταθερός ἀριθμός, ὁ δέ παρονομαστής x ὅτι μεταβάλλεται λαμβάνων τάς ἀκολούθους τιμάς:

Διά $x = 0{,}01$ τό κλάσμα $\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{0{,}01} = 100.\alpha$

" $x = 0{,}001$ " " $\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{0{,}001} = 1000.\alpha$

" $x = 0{,}000001$ " " $\frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{0{,}000001} = 1000000.\alpha$

Παρατηροῦμεν δηλαδή ὅτι ὅσον ὁ παρονομαστής x ἐλαττοῦται τόσον ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος $\frac{\alpha}{x}$ αὐξάνει, εἰς τρόπον ὥστε ὅταν τό x θά τείνει πρός τό 0 ἤτοι $x = 0{,}000000000\ldots\ldots1$ τό κλάσμα $\frac{\alpha}{x} = 1000000000000\ldots\ldots\alpha$ θά γίνῃ ἴσον μέ ἀριθμόν ὁσονδήποτε φαντασθῶμεν μεγάλον ἤτοι θά τείνῃ εἰς τό ∞. π.χ. Ἡ ἀριθμ. τιμή τοῦ κλάσματος $K = \frac{x+5}{y-3}$ διά $x=4$, $y=3$ εἶναι: $K = \frac{4+5}{3-3} = \frac{9}{0} = \infty$, ἐνῶ διά $x=-7$, $y=3$ εἶναι:

$$K = \frac{-7+5}{3-3} = \frac{-2}{0} = -\infty$$

4. <u>Μορφή</u> $\frac{0}{0}$. Διά νά ἐξετάσωμεν τήν μορφήν ταύτην προτάσσομεν τό κάτωθι παράδειγμα:

1005. *Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος* $K = \frac{x^2-16}{2x-8}$ <u>διά $x = 4$</u>

<u>Ἀπ.</u> Θά ἔχωμεν: $K = \frac{4^2-16}{2.4-8} = \frac{0}{0}$. Ἡ μορφή αὕτη $\frac{0}{0}$ εἶναι ἀόριστος, διότι παριστᾶ πάντα ἀριθμόν θετικόν ἤ ἀρνητικόν καθότι σημαίνει νά εὑρεθῇ ὡς πηλίκον ἀριθμός τις π τοιοῦτος ὥστε νά ἀληθεύῃ ἡ σχέσις:

$$0 = 0.\pi \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ (1) ἀληθεύει διὰ πᾶσαν τιμὴν τοῦ πηλίκου Π

ἤτοι: $\Pi = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \dots$

Ἐπειδὴ ὅμως τὸ κλάσμα $K = \frac{x^2-16}{2x-8}$ δύναται νὰ ἁπλοποιηθῇ καὶ μᾶς δώσῃ τὸ ἰσοδύναμόν του $\frac{x+4}{2}$ καθότι: $K = \frac{x^2-16}{2x-8} = \frac{(x+4)(x-4)}{2(x-4)} = \frac{x+4}{2}$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν εἰς τὸ ἁπλοποιημένον κλάσμα ὅπου $x = 4$ ὁπότε: $K = \frac{4+4}{2} = 4$. Ὅθεν ἡ ἀόριστος μορφὴ $\frac{0}{0}$ ἰσοῦται ἐνταῦθα μόνον μὲ 4. Ἡ τιμὴ 4 καλεῖται <u>ἀληθὴς τιμὴ</u> τοῦ δοθέντος κλάσματος, ἡ δὲ ἐργασία αὐτὴ λέγεται <u>ἄρσις τῆς ἀοριστίας</u>.

1006. <u>*Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ κλάσματος*</u>

$K = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ διά: 1) $x = 1$ καὶ 2) διά: $x = -2$

1. <u>Ἀπόκ.</u> Θὰ ἔχωμεν: $K = \frac{1^3+2.1^2-1-2}{1^2+1-2} = \frac{3-3}{2-2} = \frac{0}{0} = ;$

Ἵνα ἄρωμεν τὴν ἀοριστίαν καὶ εὕρωμεν τὴν ἀληθῆ τιμὴν τοῦ κλάσματος πρέπει νὰ ἁπλοποιήσωμεν τὸ κλάσμα διαιροῦντες διὰ τινος κοινοῦ παράγοντος ἀριθμητὴν καὶ παρονομαστήν, ὁ ὁποῖος καθιστᾷ ἀμφοτέρους τοὺς ὅρους ἴσον μὲ μηδέν· ὁ κοινὸς παράγων ἐνταῦθα θὰ εἶναι ὁ $(x-1)$ προφανῶς καὶ ὁ $(x+2)$. Πράγματι τὸ δοθὲν κλάσμα γράφεται:

$$K = \frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2} = \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)} = x+1$$

Ἄρα: <u>Ἀριθ. Τιμὴ τῆ</u> $K = x+1 = 1+1 = 2$. Ὅθεν ἡ ἀληθὴς τιμὴ τῆς K εἶναι: $\frac{0}{0} = 2$ ἐνταῦθα.

2. <u>Ἀποκ.</u> Διὰ $x = -2$ θὰ ἔχωμεν πάλιν $K = \frac{(-2)^3+2(-2)^2-(-2)-2}{(-2)^2+(-2)-2} = \frac{0}{0} = ;$

Ἀλλ' ἐπειδὴ ἁπλοποιηθεῖσα ἡ παράστασις K εἶναι ἰσοδύναμος μὲ $x+1$ θὰ ἔχωμεν: <u>Ἀριθ. Τιμὴ</u> $K = -2+1 = -1$

Ἤτοι ἡ ἀληθὴς τιμὴ τοῦ δοθέντος κλάσματος εἶναι -1 ἐνταῦθα.

<u>Μορφαὶ</u> $\frac{\infty}{\infty}$ καὶ $\infty - \infty$. Ὁμοίως καὶ αἱ δύο αὗται μορφαὶ εἶναι ἀόριστοι. Πρὸς ἄρσιν τῆς ἀοριστίας, ἁπλοποιοῦμεν τὰς κλασματικὰς παραστάσεις ἐξ ὧν προέρχονται ἢ ἐκτελοῦμεν τὰς πράξεις, ὡς κατωτέρω.

1007. <u>*Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ κλάσματος*</u> $K = \frac{5x^2+4x^2+3}{4x^2-7}$ <u>διὰ $x = \infty$</u>

<u>Ἀπόκ.</u> Διὰ $x = \infty$ τὸ δοθὲν κλάσμα λαμβάνει τὴν μορφὴν $\frac{\infty}{\infty}$, ἡ ὁποία εἶναι ἀόριστος καθόσον πᾶς ἀριθμὸς Π διάφορος τοῦ μηδενὸς ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσότητα $\frac{\infty}{\infty} = \Pi$ ἐφ' ὅσον $\infty = \Pi \cdot \infty$. Πρὸς ἄρσιν τῆς ἀοριστίας διαιροῦμεν

καί τούς δύο όρους τοῦ κλάσματος διά x^2 ὁπότε λαμβάνομεν:

$$K = \frac{5x^2+4x+3}{4x^2-7} = \frac{5+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{4-\frac{7}{x^2}}$$

Θέτοντες εἰς τό τελευταῖον ἰσοδύναμον κλάσμα ὅπου $x = \infty$

λαμβάνομεν: $K = \dfrac{5+\frac{4}{\infty}+\frac{3}{\infty}}{4-\frac{7}{\infty}} = \dfrac{5+0+0}{4-0} = \dfrac{5}{4}$

Ἄρα ἡ ἀληθής τιμή τοῦ δοθέντος κλάσματος Κ εἶναι $\frac{5}{4}$ διά $x=\infty$

ἤτοι $\frac{\infty}{\infty} = \frac{5}{4}$ ἐνταῦθα.

1008. *Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως:*

$$K = \frac{3}{25x-125} - \frac{3}{x^3-5x^2} \quad \text{διά } x=5$$

Ἀποκ. Διά $x=5$ ἡ δοθεῖσα παράστασις λαμβάνει τήν μορφήν

$$K = \frac{3}{125-125} - \frac{3}{125-125} = \frac{3}{0} - \frac{3}{0} = \infty - \infty,$$

ἥτις εἶναι ἀόριστος. Διά νά ἄρωμεν τήν ἀοριστίαν ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις ὁπότε λαμβάνομεν:

$$K = \frac{3}{25(x-5)} - \frac{3}{x^2(x-5)} = \frac{3x^2-75}{25x^2(x-5)} = \frac{3(x+5)(x-5)}{25x^2(x-5)} = \frac{3(x+5)}{25x^2}$$

Τό τελευταῖον τοῦτο κλάσμα διά $x=5$ λαμβάνει τήν τιμήν $\frac{6}{125}$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀληθής τιμή τῆς δοθείσης παραστάσεως.

1009. *Νά εὑρεθῇ ἡ ἀληθής τιμή τοῦ κλάσματος*

$$K = \frac{x^3-1}{x^2-2x+1} \quad \text{διά } x=1$$

Ἀποκ. Τό δοθέν κλάσμα διά $x=1$ λαμβάνει τήν τιμήν $\frac{0}{0}$

Ἐπειδή τό δοθέν κλάσμα γράφεται $K = \dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$

θέτομεν εἰς τό τελευταῖον τοῦτο ἰσοδύναμον κλάσμα ὅπου $x=1$ καί

λαμβάνομεν τιμήν $\dfrac{1^2+1+1}{1-1} = \dfrac{3}{0} = \infty$. Τό ∞ εἶναι ἡ ἀληθής τιμή τοῦ δοθέντος κλάσματος.

1010. *Νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος.*

$$K = \frac{(x^3-a^3)(y-\beta)}{(x^2-a^2)(y^2-\beta^2)} \quad \text{διά } x=a \text{ καί } y=\beta$$

Ἀποκ. Τό δοθέν κλάσμα Κ διά $x=a$, $y=\beta$ λαμβάνει τήν ἀόριστον

μορφήν $\frac{0}{0}$. Ἐάν ἀναλύσωμεν εἰς γινόμενα παραγόντων τούς ὅρους

λαμβάνομεν $K = \dfrac{(x-a)(x^2+ax+a^2)(y-\beta)}{(x+a)(x-a)(y+\beta)(y-\beta)} = \dfrac{x^2+ax+a^2}{(x+a)(y+\beta)}$. Τό τελευταῖον τοῦτο κλάσμα διά $x=a$, $y=\beta$ λαμβάνει τήν τιμήν:

$\dfrac{a^2+a^2+a^2}{(a+a)(\beta+\beta)} = \dfrac{3a^2}{4a\beta} = \dfrac{3a}{4\beta}$. Ἡ τιμή αὐτή $\dfrac{3a}{4\beta}$ εἶναι ἡ ἀληθής τιμή τοῦ δοθέντος κλάσματος.

1011. <u>Νά εὑρεθῇ ἡ ἀληθής τιμή τοῦ κλάσματος:</u>

$$K=\frac{2x^2+4x-1}{x^2-3} \qquad \underline{\text{ὅταν } x=\infty}$$

<u>Ἀπόκ.</u> Ἐπειδή διά $x=\infty$ τό δοθέν κλάσμα Κ λαμβάνει προφανῶς τήν ἀόριστον μορφήν $\frac{\infty}{\infty}$, πρός ἄρσιν τῆς ἀοριστίας ταύτης ἐξάγομεν τό x^2 ὡς κοινόν παράγοντα καί εἰς τόν ἀριθμητήν καί εἰς τόν παρονομαστήν (ἤ διαιροῦμεν διά x^2 καί τούς δύο ὅρους) ὁπότε λαμβάνομεν:

$K=\frac{x^2\left(2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}=\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x^2}}$. Τό τελευταῖον τοῦτο κλάσμα διά $x=\infty$ γίνεται $\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{3}{\infty}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2$ · Ἡ ἀληθής τιμή εἶναι ὁ 2.

1012. <u>Νά εὑρεθῇ ἡ ἀληθής τιμή τῆς παραστάσεως:</u>

$$K=\frac{x-12}{x^2+2x-8}-\frac{x^2+1}{3(x^2-5x+6)} \qquad \underline{\text{διά } x=2}$$

<u>Ἀπόκ.</u> Ἡ δοθεῖσα παράστασις διά $x=2$ γίνεται:

$$K=\frac{2-12}{4+4-8}-\frac{4+1}{3(4-10+6)}=\frac{-10}{0}-\frac{5}{0}=-\infty-\infty$$

Πρός ἄρσιν τῆς ἀοριστίας ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις καί λαμβάνομεν:

$$K=\frac{x-12}{(x+4)(x-2)}-\frac{x^2+1}{3(x-2)(x-3)}=\frac{3(x-12)(x-3)-(x^2+1)(x+4)}{3(x-2)(x-3)(x+4)}=\frac{x^2+3x+52}{3(x+4)(3-x)}$$

Τό τελευταῖον τοῦτο κλάσμα διά $x=2$ παρέχει τήν ἀληθῆ τιμήν $\frac{31}{9}$.

1013. <u>Νά εὑρεθῇ ἡ ἀληθής τιμή τῶν κάτωθι κλασμάτων διά τήν ἔναντι αὐτῶν σημειουμένην τιμήν τοῦ γράμματος.</u>

			<u>Μορφαί</u>	<u>Ἀληθεῖς τιμαί</u>
1.	$\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$	διά $x=2$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	Ἀπ. $\frac{1}{5}$
2.	$\frac{x^2-6x+5}{x^2-8x+15}$	» $x=5$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	» 2
3.	$\frac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$	» $x=2$	$\left(\frac{0}{0}\right)$	» $\frac{3}{4}$
4	$\frac{x+3+\frac{x+1}{x-2}}{x+\frac{x^2}{x-2}}$	» $x=2$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	» $\frac{3}{4}$
5.	$\frac{x+6}{x^2-16}-\frac{x+1}{x(x-4)}$	» $x=4$	$(\infty-\infty)$	» $\frac{1}{32}$
6.	$\frac{7-2x}{x^2-x-2}-\frac{1}{x^2-3x+2}$	» $x=2$	$(\infty-\infty)$	Ἀπ = ;
7	$\frac{ax^2+\beta x+\gamma}{a'x^2+\beta' x+\gamma'}$	» $x=\infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	» $=\frac{a}{a'}$
8	$\frac{3x^3-8x^2+3x-4}{2x^2-x+6}$	» $x=\infty$	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	» $=\infty$

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ πρός ἐπανάληψιν ἐπί τοῦ α! τόμου.

1014 Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^2\beta^2+(\alpha^2+\beta^2)(\alpha+\beta)^2$ εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1015. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(x^2+Ky^2)(x'^2+Ky'^2)$ δύναται νά τεθῇ ὑπό τήν μορφήν $X^2+K\psi^2$.

1016. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις: $(\alpha y-\beta x)^2+(\beta\omega-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha\omega)^2+(\alpha x+\beta y+\gamma\omega)^2$ εἶναι διαιρετή διά τῶν τριωνύμων $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$ καί $(x^2+y^2+\omega^2)$.

1017. Νά πολλαπλασιασθῇ τό πολυώνυμον:

$(\alpha+\beta)x^3+(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)x^2+(\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)x+\alpha^4+\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3+\beta^4$ ἐπί τό πολυώνυμον $(\alpha-\beta)x^2+(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)x+\alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta^3$

Ἀπόκ. $(\alpha^2-\beta^2)x^5+2\alpha^3x^4+(3\alpha^4+\alpha^2\beta^2-\beta^4)x^3+(3\alpha^5+2\alpha^3\beta^2-\beta^5)x^2+(2\alpha^6+2\alpha^4\beta^2+\alpha^3\beta^3)x+(\alpha^7+\alpha^5\beta^2-\alpha^2\beta^5-\beta^7)$

1018. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις τοῦ πολυωνύμου.

$(\alpha^3+\beta^3)x^3+(2\alpha^4-\alpha^3\beta+3\alpha^2\beta^2-\alpha\beta^3+2\beta^4)x^2-(\alpha^2\beta^3+3\alpha^4\beta+3\alpha\beta^4+\alpha^3\beta^2)x+$
$-\alpha^6-\alpha^4\beta^2-\alpha^2\beta^4-\alpha^3\beta^3-\beta^6$ διά τοῦ $(\alpha+\beta)x+\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$

1019. Νά εὑρεθῇ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως.

$$(\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3-3\alpha^2\beta^2\gamma^2):(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$$

1020. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=2$ νά δειχθῇ ὅτι:

$$(3\alpha-2)^3+(3\beta-2)^3+(3\gamma-2)^3=3(3\alpha-2)(3\beta-2)(3\gamma-2)$$

1021. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $A=5^{2\nu}(5^{\nu+1}-5+1)-1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 144 ὅταν ν εἶναι ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός.

(Ἀπόκ Ἀναλύσατε τήν παράστασιν A εἰς γινόμενον παραγόντων καί γράψατε $144=24.6$)

1022. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $\alpha^4+81-18\alpha^2$ εἶναι διαιρετή διά 64 ὅταν α εἶναι περιττός ἀριθμός.

1023. Νά δειχθῇ ὅτι ὁ ἀριθμός $A=156^\nu-12^\nu-13^\nu+1$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 132 ὅταν ν εἶναι ἀκέραιος καί θετικός ἀριθμός.

(Ἀπόκ Ἐπειδή $156=13.12$ καί $132=11.12$ ὁ δοθείς ἀριθμός γράφεται: $A=12^\nu.13^\nu-12^\nu-13^\nu+1=(13^\nu-1)(12^\nu-1)$ καί ὁ μέν α! παράγων διαιρεῖται διά $13-1=12$, ὁ δέ β παράγων διαιρεῖται διά $12-1=11$ ἄρα ὁ ἀριθμός A διαιρεῖται διά τοῦ γινομένου $12.11=132$)

1024. Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:

$$4\left[(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2-(\beta\gamma'-\beta'\gamma)(\alpha\beta'-\alpha'\beta)\right]\equiv(2\alpha\gamma'+2\alpha'\gamma-\beta\beta')^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)(\beta'^2-4\alpha'\gamma')$$

1025. Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος τοῦ Lagrange.

$$(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2+\delta_1^2)-(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1+\delta\delta_1)^2\equiv$$

$$\equiv(\alpha\beta_1-\alpha_1\beta)^2+(\alpha\gamma_1-\alpha_1\gamma)^2+(\alpha\delta_1-\alpha_1\delta)^2+(\beta\gamma_1-\beta_1\gamma)^2+(\beta\delta_1-\beta_1\delta)^2+(\gamma\delta_1-\gamma_1\delta)^2.$$

1026. Ἐάν $(x+\alpha)^2+(y+\beta)^2=4(\alpha x+\beta y)$ καί τά x καί y εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί νά δειχθῇ ὅτι $x=\alpha$ καί $y=\beta$.

1027. Ἐάν $\alpha^2+\delta^2=2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta-\beta^2-\gamma^2)$ τά δέ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί νά δειχθῇ ὅταν $\alpha=\beta=\gamma=\delta$.

1028. Ἐάν $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2)=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)^2$ τότε νά δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}$.

1029 Ἐάν $(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2)=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1)^2$ τότε νά δειχθῇ ὅτι $\frac{\alpha}{\alpha_1}=\frac{\beta}{\beta_1}=\frac{\gamma}{\gamma_1}$

1030. Ποία σχέσις ὀφείλει νά συνδέῃ τα π καί κ ἵνα ὑπάρχῃ ἀριθμός τις α τοιοῦτος ὥστε τό τριώνυμον $x^3+\pi x+\kappa$ νά εἶναι διαιρετόν διά $(x-\alpha)^2$. Ὑπολογίσατε τό α.

Ἀπόκ. Ἡ ζητουμένη σχέσις εἶναι: $4\pi^3+27\kappa^2=0$ καί $\alpha=-\frac{3\kappa}{2\pi}$.

1031. Οἱωνδήποτε ὄντων τῶν ἀκεραίων καί θετικῶν ἀριθμῶν μ,ν,ρ νά δειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $x^\mu(y^\nu-z^\nu)^{2\rho+1}+y^\mu(z^\nu-x^\nu)^{2\rho+1}+z^\mu(x^\nu-y^\nu)^{2\rho+1}$ εἶναι διαιρετόν διά $(x-y)(y-z)(z-x)$.

1032. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον $x^\alpha y^\beta+y^\alpha\omega^\beta+\omega^\alpha x^\beta-x^\beta y^\alpha-y^\beta\omega^\alpha-\omega^\beta x^\alpha$ διαιρεῖται ἀκριβῶς διά $(x-y)(y-\omega)(\omega-x)$

1033. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον:

$$\alpha^\mu\beta^\nu\gamma^\rho+\alpha^\nu\beta^\rho\gamma^\mu+\alpha^\rho\beta^\mu\gamma^\nu-\alpha^\rho\beta^\nu\gamma^\mu-\alpha^\nu\beta^\mu\gamma^\rho-\alpha^\mu\beta^\rho\gamma^\nu$$

εἶναι διαιρετόν διά $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

1034. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(6x^2-7x-3)(x^2-7x+12)$ εἶναι διαιρετή διά $3x^2-11x-4$. Ἀπόκ. (Ἀναλύσατε τά τριώνυμα εἰς γινόμενα παραγόντων).

1035. Νά ἐκτελεσθῇ ἡ διαίρεσις: $(x^2-3x+1)^3+(x^2+3x+1)^3$ διά τοῦ (x^2+1).

1036 Νά ἀποδειχθῇ ὅτι τό πολυώνυμον:

$$x^4+y^4+z^4+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2-2xyz(x+y+z)$$

α/ οὐδέποτε δύναται νά γίνῃ ἀρνητικός ἀριθμός

β/ εἰς ποίαν περίπτωσιν γίνεται τοῦτο μηδέν.

1037. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις: $\lambda^2(x^2+y^2+z^2)+2\lambda(\alpha x+\beta y+\gamma z)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

α/ οὐδέποτε γίνεται μηδέν ἤ ἀρνητικός ἀριθμός.

β/ ἐάν ἰσοῦται μέ μηδέν τότε θά εἶναι: $\lambda^2 = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{x^2+y^2+z^2}$

1038. Ἐάν K_1, K_2, K_3 εἶναι τρεῖς δοθέντες ἀριθμοί ἐπαληθεύοντες τήν σχέσιν: $K_1^2+K_2^2+K_3^2 = K_1K_2+K_2K_3+K_1K_3$ νά δειχθῇ ὅτι: $K_1 = K_2 = K_3$

1039. Ἐάν $K_1K_2 = 1+3\lambda$ καί $K_1+K_2 = 2(1+\lambda)$ νά δειχθῇ ὅτι τό γινόμενον: $\left(K_1-\frac{5}{2}\right)\left(K_2-\frac{5}{2}\right)$ εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τιμῆς τοῦ λ.

1040. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(7\alpha^2+4\alpha+8)^2-(\alpha^2-9\alpha+13)^2$ εἶναι πολλαπλάσιον τῆς παραστάσεως $(3\alpha-1)(2\alpha+5)$.

1041. Νά δειχθῇ ὅτι ἡ παράστασις $(3\alpha^2-7\alpha+2)^3-(\alpha^2-8\alpha+8)^3$ εἶναι πολλαπλάσιον ἑκάστου τῶν διωνύμων $(2\alpha-3)$ καί $(\alpha+2)$.

1042 Ἐάν $\alpha y+\alpha z-x=0$, $\beta z+\beta x-y=0$, $\gamma x+\gamma y-z=0$ νά δειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ ταυτότης: $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+2\alpha\beta\gamma \equiv 1$

1043 Ἐάν $\alpha, \beta, \gamma, x, y, \omega$ εἶναι πραγματικοί ἀριθμοί καί ἀληθεύει ἡ σχέσις: $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta-x^2-y^2-z^2)$ τότε θά ἔχωμεν $\alpha=\beta=\gamma$ καί $x=y=z=0$.

1044. Δοθείσης τῆς παραστάσεως $K = 2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4$ καί ὅτι $\alpha=\pi^2+\rho^2$, $\beta=\pi^2-\rho^2$ καί $\gamma=2\pi\rho$ νά δειχθῇ τότε ὅτι ἡ K εἶναι τέλειον τετράγωνον.

1045. Νά προσδιορισθῇ ὁ μ ἵνα τό πολυώνυμον:

1- $x^3+y^3+\omega^3+\mu xy\omega$ εἶναι διαιρετόν διά $x+y+\omega$ Ἀπ. $\mu=-3$

2- $(x+y+\omega)^3+\mu(x^3+y^3+\omega^3)$ εἶναι διαιρετόν διά $x+y$ Ἀπ $\mu=-1$

1046. Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:

$$(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2(\alpha+\beta)^2+2\alpha^2\beta^2\gamma^2-\alpha^4(\beta+\gamma)^2-\beta^4(\gamma+\alpha)^2-\gamma^4(\alpha+\beta)^2 \equiv 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2$$

1047. Νά ἐκτελεσθοῦν αἱ πράξεις καί εὑρεθοῦν τά ἐξαγόμενα

1- $(x+y)^4+x^4+y^4-2(x^2+y^2+xy)^2$ Ἀπ. $=0$

2- $8(x-1)^3+4(x-1)^2+(x^2-4x+2)^2-(x^4-x^2+1)$ Ἀπ $=x^2-1$.

1048 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα

$$\frac{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{\dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}$$ ἐπί τῇ ὑποθέσει ὅτι $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$.

1049. Νά δειχθῇ ἡ ἀλήθεια τῆς ταυτότητος:

$$\frac{1}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)}\cdot\left[\frac{(\alpha+\beta)^3-(\beta+\gamma)^3}{\alpha-\gamma}-\frac{(\alpha+\beta)^3+(\beta+\gamma)^3}{\alpha+2\beta+\gamma}\right]\equiv 2$$

1050 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα:

$$\frac{\alpha-x+4\alpha^{1/4}x^{3/4}-4\alpha^{1/2}x^{1/2}}{\alpha^{1/2}-x^{1/2}+2\alpha^{1/4}x^{1/4}}$$

('Απόκ. θέσατε $\alpha^{1/4}=\beta$ καί $x^{1/4}=y$ ὁπότε Ἐξαγόμενον $=(\alpha^{1/4}-x^{1/4})^2$.

1051 Νά ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις:

$$\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha^4-\beta^4}-\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2-\beta^2}-\frac{\alpha-\beta}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}-\frac{1}{\alpha-\beta}\right)$$ καί νά εὑρεθῇ ἡ ἀριθ. τιμή τοῦ ἐξαγομένου ὅταν τεθῇ $\alpha=3$, $\beta=2$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1940

1052. Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$\frac{x^2y^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(x^2-\beta^2)(y^2-\beta^2)(z^2-\beta^2)}{\beta^2(\beta^2-\gamma^2)}+\frac{(x^2-\gamma^2)(y^2-\gamma^2)(z^2-\gamma^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}\equiv x^2+y^2+z^2-\beta^2-\gamma^2$$

1053 Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$\frac{y^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(z^2-\beta^2)(\beta^2-y^2)}{\beta^2(\gamma^2-\beta^2)}+\frac{(\gamma^2-z^2)(\gamma^2-y^2)}{\gamma^2(\gamma^2-\beta^2)}\equiv 1$$

1054 Νά ἐπαληθευθῇ ἡ ταυτότης:

$$\frac{x^2z^2}{\beta^2\gamma^2}+\frac{(x^2-\beta^2)(\beta^2-z^2)y^2}{(y^2-\beta^2)(\gamma^2-\beta^2)\beta^2}+\frac{(x^2-\gamma^2)(\gamma^2-z^2)y^2}{(\gamma^2-y^2)(\gamma^2-\beta^2)\gamma^2}\equiv\frac{(x^2-y^2)(y^2-z^2)}{(y^2-\beta^2)(\gamma^2-y^2)}$$

1055 Ἐάν $\frac{2(x+y)}{y}=\frac{7x-8y}{x-y}$ νά δειχθῇ ὅτι ὁ λόγος $\frac{x}{y}=2$ ἤ $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$.

1056 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα:

$$K=\frac{x^3(y-z)+y^3(z-x)+z^3(x-y)}{x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3}$$ Ἀπόκ $=-1$

1057 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα:

$$K=\frac{2\alpha x^2y^2-4\alpha x^4-\alpha x^3y+3\alpha xy^3}{3\beta x^2y^2-2\beta xy^3+\beta x^3y-2\beta y^4}$$

1058 Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα:

$$K=\frac{xy(x+y)+xz(x+z)+yz(y+z)+2xyz}{(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3}$$ Ἀπόκ $=\frac{1}{3}$

1059. Νά ἁπλοποιηθῆ ἡ παράστασις:

$$\frac{(xy)^{\mu+\nu}+x^{\nu}y^{\mu}-x^{\mu}y^{\nu}-1}{\left(\frac{y}{x}\right)^{\mu}\cdot(xy)^{\nu}+y^{\mu+\nu}\cdot\left[(xy)^{\nu}-(xy)^{-\mu}\right]-y^{2\nu}}$$

Ἀπόκ. $\frac{x^{\mu}}{y^{\nu}}$

1060 Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα:

1. $\frac{\alpha^{1/2}-2\alpha^{1/4}+1}{\alpha^{1/4}-2\alpha^{1/8}+1}$ 2. $\frac{x^3+x^{-3}+2(x+x^{-1})}{x+x^{-1}}$ 3. $\frac{\alpha+\beta}{\alpha+(\alpha\beta^2)^{1/3}-(\alpha^2\beta)^{1/3}}$

1. Ἀπ. $=(\alpha^{1/8}+1)^2$ 2. Ἀπ. $= x^2+x^{-2}+1$ 3. Ἀπ. $=\frac{\alpha^{1/3}+\beta^{1/3}}{\alpha^{1/3}}$

1061. Νά ἁπλοποιηθῆ ἡ παράστασις:

$$K=\frac{x^{5/3}-x^{4/3}y^{1/3}-xy^{2/3}+x^{2/3}y}{x^{5/3}-2xy^{2/3}+x^{1/3}y^{4/3}}$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1948

(Ἀποκ. Θέσατε ὅπου $x^{1/3}=\alpha$ καί ὅπου $y^{1/3}=\beta$ ὁπότε ἡ παράστασις λαμβάνει μορφήν μέ ἀκεραίους ἐκθέτας καί ἁπλοποιεῖται εὐκολώτερον ἦτοι $K=\frac{\alpha^5-\alpha^4\beta-\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3}{\alpha^5-2\alpha^3\beta^2+\alpha\beta^4}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{x^{1/3}}{x^{1/3}+y^{1/3}}$)

1062. Νά ἐκτελεσθῆ ἡ διαίρεσις:

$$\left(\frac{2}{5}x^{8/15}+\frac{1}{2}x^{1/2}-\frac{2}{3}x^{7/12}-\frac{3}{5}x^{7/10}+x^{3/4}-\frac{3}{10}x^{9/20}\right):\left(x^{1/4}-\frac{3}{5}x^{1/5}\right)$$

Ἀπόκ. $\Upsilon=0$

1063. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀληθής τιμή τῆς παραστάσεως:

$$K=\frac{x^{4/3}+\alpha^{2/3}x^{2/3}-2\alpha^{1/3}x}{x^{4/3}-\alpha x^{1/3}-\alpha^{1/3}x+\alpha^{4/3}}$$ διά $x=\alpha$

Ἀπόκ. $\frac{1}{3}$

1064 Νά ἁπλοποιηθῆ τό κλάσμα:

$$\frac{\alpha^2-\alpha^{3/2}x^{1/2}-2\alpha^{1/2}x^{1/4}+2x^{3/4}}{\alpha^{1/2}-x^{1/2}}$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1948

(Ἀπόκ. Θέσατε $\alpha^{1/4}=\beta$ καί $x^{1/4}=\gamma$ ὁπότε Ἐξαγόμενον $=\alpha^{3/2}-2x^{1/4}$)

1065. Νά δειχθῆ ὅτι:

$$(\alpha^2+\alpha^{4/3}\beta^{2/3})^{1/2}+(\beta^2+\alpha^{2/3}\beta^{4/3})^{1/2}=(\alpha^{2/3}+\beta^{2/3})^{3/2}$$

Ἀνωτ. Ἐμπορική 1948.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΜΟΥ I

ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίς
ΚΕΦ. Α΄ Εἰσαγωγὴ – Ὁρισμοί	3-7
Πρόσθεσις Ἀλγεβρικῶν Ἀριθμῶν – Ἀσκήσεις ἐπὶ τῆς προσθέσεως	7-11
Ἀφαίρεσις " " " " " ἀφαιρέσεως	12-14
Πολλαπλασιασμὸς " " " " τοῦ πολλαπλασιασμοῦ	14-17
Διαίρεσις " " " " τῆς διαιρέσεως	17-20
ΚΕΦ. Β΄. Περὶ δυνάμεων μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ θετικούς	21-26
" " " " " " ἀρνητικούς	27
Ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν δυνάμεων γενικῶς	28-36
ΚΕΦ. Γ΄ ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ (Εἴδη ἀλγ. παραστάσεων, Μονώνυμα, Πολυώνυμα, βαθμὸς μονωνύμου καὶ πολυωνύμου, πλήρη καὶ ἐλλιπῆ, ὁμογενῆ καὶ συμμετρικὰ πολυώνυμα) Ἀσκήσεις	36-44
Ἀριθμητικὴ τιμὴ ἀλγεβρ. παραστάσεως, ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν ἀριθμητ. τιμῶν ἀλγεβρ. παραστάσεων	44-53
ΠΡΟΣΘΕΣΙΣ Πολυωνύμων Ἐφαρμογαί – Ἀσκήσεις	53-57
ΑΦΑΙΡΕΣΙΣ Πολυωνύμων, Ἀπαλοιφὴ παρενθέσεων καὶ ἀγκυλῶν, ἐφαρμογαὶ ἀσκήσεις	57-64
Προβλήματα ἐπὶ προσθέσεως καὶ ἀφαιρέσεως πολυωνύμων	64-65
ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ μονωνύμων καὶ πολυωνύμων – Ἀσκήσεις	65-71
ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – Θεωρία – Ἀσκήσεις	71-78
Τετράγωνον πολυωνύμου, κύβος πολυωνύμου, Ἀσκήσεις	78-82
Διώνυμον τοῦ Νεύτωνος, Ἀναπτύγματα τοῦ διωνύμου, Διάφοροι ἀσκήσεις ἐπ' αὐτῶν, ταυτότητες διάφοροι	82-86
ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ μονωνύμων καὶ πολυωνύμων ἀκεραίων – Θεωρία – Ἀσκήσεις	86-90
Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου δι' ἄλλου ἀκεραίου Θεωρ I, Θεωρ. II	
Ἀσκήσεις ἐπ' αὐτῶν μὲ ἐκθέτας ἀκεραίους καὶ κλασματικούς	90-98
Συμβολικὴ παράστασις πολυωνύμου τινὸς καὶ ἀριθμητικὴ τιμὴ αὐτοῦ – ἀσκήσεις	98-99
ΚΕΦ. Δ΄ ΔΙΑΙΡΕΣΙΣ ΑΚΕΡΑΙΟΥ ΠΟΛΥΩΝΥΜΟΥ ΤΟΥ Χ ΔΙΑ ΤΩΝ ΔΙΩΝΥΜΩΝ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ: 1/ (x−α), 2)(x+α), 3)(αx+β) Θεωρήματα, Πορίσματα – Ἀσκήσεις ἐπ' αὐτῶν.	99-103

Πηλίκα διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διά $x \pm a$ Ἀσκήσεις	103-105
Ἀξιοσημείωτα πηλίκα: Διαιρέσεις τῶν μορφῶν $(x^\mu \pm a^\mu):(x \pm a)$ $(x^\mu \pm a^\mu):(x^\nu \pm a^\gamma)$ καί $(x^\mu \pm a^\nu):(x^\rho \pm a^\sigma)$. Ἀσκήσεις ἐπ' αὐτῶν . . .	105-114
Διαίρεσις ἀκεραίου πολυωνύμου $\varphi(x)$ διά γινομένου πολλῶν διωνύμων $(\kappa-a)(x-\beta)(x-\gamma)$ Θεώρημα - Ἐφαρμογαί - Ἀσκήσεις . . .	115-121
ΚΕΦ. Ε' ΑΝΑΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΕΙΣ ΓΙΝΟΜΕΝΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ (10 διάφοροι περιπτώσεις μετ' ἐφαρμογῶν καί σειρᾶς ἀσκήσεων . . .	122-137
Γενικαί ἀσκήσεις πρός ἐπανάληψιν ἀναλύσεως παραστάσεων εἰς γινόμενον παραγόντων	137-140
ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΚΟΙΝΟΣ ΔΙΑΙΡΕΤΗΣ Ἀλγεβρικῶν παραστάσεων - Ἀσκήσεις .	140-141
ΕΛΑΧΙΣΤΟΝ Κ. ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΟΝ Ἀλγεβρ. παραστάσεων - Ἀσκήσεις	141-144
ΚΕΦ. ΣΤ' ΠΕΡΙ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ (Σειρά ταυτοτήτων λελυμένων)	144-153
ΚΕΦ Ζ' ΑΛΓΕΒΡΙΚΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ (Ἔννοια ἀλγεβρ. κλάσματος, Ἰδιότητες ἀλγεβρ. κλασμάτων, ἁπλοποίησις αὐτῶν) Ἀσκήσεις ἐπί τῆς ἁπλοποιήσεως κλασμάτων καί Τροπῆς ἑτερωνύμων εἰς ὁμώνυμα. . . .	154-161
Πρόσθεσις καί ἀφαίρεσις ἀλγεβρ. κλασμάτων - Ἀσκήσεις διάφοροι . . .	161-168
Πολλαπλασιασμός ἀλγεβρ. κλασμάτων - Ἀσκήσεις διάφοροι . . .	168-173
Διαίρεσις ἀλγεβρ. κλασμάτων. - Ἀσκήσεις διάφοροι	173-176
ΣΥΝΘΕΤΑ ΚΛΑΣΜΑΤΑ - Ἐφαρμογαί - Ἀσκήσεις διάφοροι.	177-180
ΠΕΡΙ ΑΟΡΙΣΤΩΝ ΜΟΡΦΩΝ, εὕρεσις ἀληθοῦς τιμῆς ἀλγεβρ. παραστάσεως, Σύμβολα $\frac{a}{\beta}$, $\frac{o}{\beta}$, $\frac{a}{o}$, $\frac{o}{o}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, Ἀσκήσεις ἐπ' αὐτῶν. . . .	180-184
ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ἐφ' ὅλης τῆς ὕλης τοῦ Α τόμου πρός ἐπανάληψιν.	185-189
ΠΙΝΑΞ ΤΩΝ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ	190-191
ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ	192

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

Σελίς	Άσκησις	Στίχος	Αντί τού	Γράφε
10	8.2	2	$-6\frac{1}{5}$	$-5\frac{2}{5}$
49	128	10	τιμήν 49	τιμήν 121
64	220	1 καί 2	$=\alpha^2+\gamma^2+(\dots$	$=\alpha^2+\beta^2+(\dots$
74	298.1β)	τελευταία	$\dots+9\alpha^2+4\alpha\beta$	$\dots+9\alpha^2+4\alpha^2\beta$
78	328	4	$(\dots)(\dots+3\omega+3\varphi)$	$(\dots)(\dots+3\omega+2\varphi)$
78	339	1	$-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)$	$-(\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)^2$
84	369	1	$(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^3$	$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3$
95	414.1.	3	Απ $=\Pi=x^2-(\mu+\nu)x-\mu\nu$	Απ. $\Pi=x^2+(\mu+\nu)x-\mu\nu$
98	425	2	$\dots+3x^{-1/5}y^{-1/5}(x^{-1/5}-\pi^{-1/5})+\dots$	$\dots+3x^{-1/5}\pi^{-1/5}(x^{-1/5}-\pi^{-1/5})$
101	429.4.	9	4. $\gamma=-6$	4. $\gamma=-2$
107	445.1.	3	$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$	$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$
107	445.2.	4	$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$	$\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2$
108	147.3	3	$\dots(\alpha x)^5+(\beta y)^5\dots$	$(\alpha x)^5-(\beta y)^5$
112	461	12	$\dots+\mu(\alpha-\gamma)$	$\dots+\mu(\alpha-\gamma)=0$
112	461	13	ή $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+\mu$	ή $\alpha^2+\alpha\gamma+\gamma^2+\mu=0$
113	462	3	$=x^{14}-x^7y^7+y^{14}$	$=x^{14}-x^7\alpha^7+\alpha^{14}$
136	672	2	$x^4-4y^4-9\omega^4-4x^2y^2$	$x^4+4y^4-\omega^4-4x^2y^2$
147	786	2	$3(\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta-\gamma)$	$3(\beta+\gamma)^2(\alpha+\beta+\gamma)$
152	804.2	10.	Απ 2. Έχει λυθή ως άσκησις.	.... ως άσκησις 669.
156	818	1	$\frac{x^2-4\alpha x^2+4\alpha^2}{x^2-4\alpha^2}$	$\frac{x^2-4\alpha x+4\alpha^2}{x^2-4\alpha^2}$
168	917	1	$\frac{x+\alpha}{\dots}-\frac{x+\beta}{\dots}$	$\frac{x+\alpha}{\dots}+\frac{x+\beta}{\dots}$
170	930	1	Απ. $\frac{5\alpha^3\beta^5\gamma^3}{54x^2y^4}$	Απ $\frac{\beta^2\gamma^4}{4y^2}$
171	945	1	$\frac{\alpha^3+4\alpha\beta+4\alpha\beta^2}{\dots}$	$\frac{\alpha^3+4\alpha^2\beta+4\alpha\beta^2}{\dots}$
175	964	1	$:\frac{\alpha x^2+x^2}{\dots}$	$:\frac{\alpha x^2+x^3}{\dots}$
176	971	1	$\left(1-\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\dots\right)$	$\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}+\dots\right)$
176	979	1	$\times\frac{2x^2-3xy-2y^2}{x^2-xy+4y^2}$	$\times\frac{2x^2-3xy-2y^2}{x^2-2xy+4y^2}$
176	979	1	$\frac{\dots}{x^3-3xy+2y^2}$	$\frac{\dots}{x^2-3xy+2y^2}$
176	980	1	$\frac{\dots}{(2-\alpha)^3}$	$\frac{\dots}{(2-\alpha)^2}$

ΔΙΕΥΘΥΝΣΙΣ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ :

ΚΩΣΤΑΣ Γ. ΑΡΑΧΩΒΙΤΗΣ
ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΣ
ΟΔΟΣ ΚΡΗΤΗΣ 41
ΤΗΛ. 593-882 - ΑΘΗΝΑΙ