Δ 2 ΜΜΙ

ΗΛΙΑ Δ. ΣΑΡΑΚΙΩΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ—ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

Σαρακιώτης (Ηλίας Δ.)

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Λυκείων

154

ΑΘΗΝΑΙ
1967

ΠΟΛΥΓΡΑΦΗΜΕΝΑΙ ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΣΤΕΦΑΝΟΥ Π. ΚΕΦΑΛΛΟΝΙΤΗ
ΣΟΛΩΜΟΥ 5α. Τηλ. 628145
ΑΘΗΝΑΙ

ΗΛΙΑ Δ. ΣΑΡΑΚΙΩΤΟΥ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ—ΓΥΜΝΑΣΙΑΡΧΟΥ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Διὰ τοὺς μαθητὰς τῶν Λυκείων

ΑΘΗΝΑΙ
1967

Πᾶν γνήσιον ἀντίτυπον φέρει
τήν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

'Η ἐξέλιξις τῆς Μαθηματικῆς 'Επιστήμης, τήν σημερινήν ἐποχήν, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τήν εἰσαγωγήν εἰς τόν Μαθηματικόν λογισμόν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων.

Πολλοί ἐπιστήμονες κατά διαφόρους ἐποχάς, ἀσχολούμενοι μέ τήν Μαθηματικήν 'Επιστήμην, ὡς οἱ Allendoerfer, Oakley, Kemeny καί ἄλλοι, διετύπωσαν κατά διαφόρους τρόπους τήν ἔννοιαν τοῦ συνόλου. 'Εκεῖνος ὅμως, ὅστις θεωρεῖται ὁ πατήρ τῆς θεωρίας ταύτης εἶναι ὁ G. Cantor, ἑβραϊκῆς καταγωγῆς, γεννηθείς εἰς Petersburg τῆς Ρωσσίας τό ἔτος 1845. Οὗτος ἤρχισε τάς Πανεπιστημιακάς του σπουδάς εἰς τό Πανεπιστήμιον τῆς Ζυρίχης, διά νά καταλήξῃ εἰς τό Πανεπιστήμιον τοῦ Βερολίνου. Τήν θεωρίαν τῶν συνόλων ἀνέπτυξεν ἀπό τοῦ ἔτους 1874 ἕως τοῦ 1895. Εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις συνέλαβε τήν ἀκριβῆ ἔννοιαν τοῦ συνόλου, καθορίσας τόν ὁρισμόν αὐτοῦ, ὡς καλῶς καθωρισμένην συλλογήν διακεκριμένων πραγμάτων, οἱουδήποτε εἴδους, π.χ. προσώπων, ἀριθμῶν, ἀποτελεσμάτων πειραμάτων, γεωμετρικῶν σχημάτων κ.λ.π. καί τοῦ ὁποίου συνόλου τά στοιχεῖα δηλοῦνται εἴτε διά τῆς πλήρους ἀναγραφῆς αὐτῶν, εἴτε διά τῆς περιγραφῆς τῆς κοινῆς ἰδιότητος τούτων.

'Η θεωρία τῶν συνόλων, εἰσαχθεῖσα εἰς τά Μαθηματικά, συντελεῖ εἰς τήν συσχέτισιν καί τήν πλήρη κατανόησιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων καί τήν ἀκριβῆ ἔκφρασιν τούτων, ἀσκεῖ δέ πρωτεύοντα ρόλον εἰς τήν δομήν τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν. 'Η θεωρία τῶν πιθανοτήτων ἔχει ἀποτελεσματικῶς διαμορφωθῆ σήμερον, χάρις εἰς τήν χρῆσιν τῶν συνόλων.

ΗΛΙΑΣ ΣΑΡΑΚΙΩΤΗΣ

ΑΝΤΙ ΠΡΟΛΟΓΟΥ

Ἡ ἐξέλιξις τῆς Μαθηματικῆς Ἐπιστήμης, τὴν τελευταίαν ἐποχήν, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα τὴν εἰσαγωγὴν εἰς τὸν Μαθηματικὸν λογισμὸν τῆς θεωρίας τῶν συνόλων.

Πολλοὶ ἐπιστήμονες κατὰ διαφόρους ἐποχάς, ἀσχοληθέντες μὲ τὴν Μαθηματικὴν Ἐπιστήμην, ὡς οἱ Alexandroff, Θαλῆν, Kennedy καὶ ἄλλοι, διετύπωσαν κατὰ διαφόρους τρόπους τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου. Ἐκεῖνος ὅμως, ὅστις θεωρεῖται ὁ πατὴρ τῆς θεωρίας ταύτης εἶναι ὁ G. Cantor, ἑβραϊκῆς καταγωγῆς, γεννηθεὶς εἰς Πετρούπολιν τῆς Ρωσσίας τὸ ἔτος 1845. Οὗτος ἤρχισε τὰς πανεπιστημιακάς του σπουδὰς εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τῆς Ζυρίχης διὰ νὰ συνεχίσῃ εἰς τὸ Πανεπιστήμιον τοῦ Βερολίνου. Τὴν θεωρίαν τῶν συνόλων ἀνέπτυξεν ἀπὸ τοῦ ἔτους 1874 ἕως τοῦ 1897. Εἶναι ὁ πρῶτος, ὅστις συνέλαβε τὴν ἀφηρημένην ἔννοιαν τοῦ συνόλου, ποιούμενος τὸν ὁρισμὸν αὐτοῦ, ὡς πολλῆς καθωρισμένην συλλογὴν διακεκριμένων πραγμάτων, οἱουδήποτε εἴδους, π.χ. προσώπων, ἀριθμῶν, [illegible] [illegible], γεωμετρικῶν σχημάτων κ.λ.π. καὶ τοῦ ὁποίου συνόλου τὰ στοιχεῖα δηλοῦνται εἴτε διὰ τῆς πλήρους ἀναγραφῆς αὐτῶν, εἴτε διὰ τῆς περιγραφῆς τῆς κοινῆς ἰδιότητος τούτων.

Ἡ θεωρία τῶν συνόλων, εἰσαχθεῖσα εἰς τὰ Μαθηματικά, συντελεῖ εἰς τὴν θεμελίωσιν καὶ τὴν πλήρη κατανόησιν τῶν διαφόρων ἀριθμητικῶν πράξεων καὶ τὴν ἀκριβῆ ἔκφρασιν τούτων, ἀσκεῖ δὲ πρωτεύοντα ρόλον εἰς τὴν δομὴν τῶν νεωτέρων Μαθηματικῶν. Ἡ θεωρία τῶν πιθανοτήτων ἔχει ἀποτελεσματικὸν διακεκριμένον σήμερον, χάρις εἰς τὴν χρῆσιν τῶν συνόλων.

ΗΛΙΑΣ ΚΑΡΑΚΙΤΣΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

1. Σύνολον — Ἔννοια αὐτοῦ

Πολλάκις ὁμιλοῦμεν διά πολλά πράγματα συγχρόνως, διακεκριμένα, χρησιμοποιοῦντες μίαν περιληπτικήν ἔκφρασιν, ἥτις τά ἀντιπροσωπεύει :

Παραδείγματος χάριν, λέγει ὁ καθηγητής τῆς Φυσικῆς νά συγκεντρωθῶσιν εἰς τήν αἴθουσαν τοῦ ἐργαστηρίου τῆς Φυσικῆς οἱ μαθηταί τῆς Γ΄ τάξεως τοῦ Λυκείου, χρησιμοποιῶν οὕτω ἕν κοινόν χαρακτηριστικόν, τό ὁποῖον ἔχουσιν οἱ μαθηταί οὗτοι μόνον καί οὐχί οἱ ἄλλοι μαθηταί τοῦ σχολείου.Προσκαλοῦμεν νά συγκεντρωθῇ ἡ 1η ἐνωμοτία τῶν προσκόπων τοῦ σχολείου μας, ἐννοοῦντες οὕτω ὅλους τούς μαθητάς, οἵτινες ἀνήκουσιν εἰς τήν ἐνωμοτίαν αὐτήν καί οὐχί τούς ἄλλους.

Ἡ τοιαύτη περιληπτική ἔκφρασις πολλῶν πραγμάτων, ἀνηκόντων εἰς ἕν ὅλον, ἀποτελεῖ τήν ἔννοιαν τοῦ συνόλου. Ἑπομένως σ ύ ν ο λ ο ν καλεῖται ἡ συλλογή πολλῶν πραγμάτων. Εἰς τόν ὅρον "πράγματα" ἀναφέρονται τόσον τά ὑλικῶς συγκεκριμένα ἀντικείμενα, ὅσον καί αἱ ἰδέαι, αἰσθήματα,συναισθήματα κ.λ.π., δηλ. ἀντικείμενα φυσικά καί νοητικά.

Παραδείγματα συνόλου : 1. Τά θρανία μιᾶς τάξεως σχολείου. 2. Τά δένδρα ἑνός κήπου. 3. Τά μέλη ἑνός συλλόγου. 4. Τά ἔπιπλα, πίναξ, ἕδρα, θρανία, καθίσματα μιᾶς αἰθούσης διδασκαλίας. 5. Οἱ ἄρρενες μιᾶς χώρας. 6. Αἱ θεμελιώδεις πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς (Πρόσθεσις, ἀφαίρεσις, πολλαπλασιασμός, διαίρεσις). 7. Οἱ φυσικοί ἀριθμοί 1,2,3,4,....... (αἱ τελεῖαι δηλοῦσι τό ἄπειρον τῶν ἀριθμῶν). 8. Οἱ περιττοί ἀριθμοί ἀπό 1 ἕως 9. 9. Οἱ ἄρτιοι ἀριθμοί ἀπό 1 ἕως 100. 10. Αἱ εὐθεῖαι, αἵτινες δύνανται νά χαραχθοῦν ἐπί ἑνός ἐπιπέδου κ.ο.κ.

Λέγοντες σύνολον έννοοῦμεν συλλογήν άντικειμένων οιουδήποτε εἴδους : οἷον προσώπων, βιβλίων, ἀριθμῶν, ἀποτελεσμάτων πειραμάτων, γεωμετρικῶν σχημάτων κ.λ.π.

Πᾶν ἀντικείμενον ἀνῆκον εις τό σύνολον καλεῖται μέλος ἤ στοιχεῖον τοῦ συνόλου.

Τό σύνολον δυνατόν νά ἔχῃ ἕν μέλος ἤ στοιχεῖον, ὅτε καλεῖται μονομελές ἤ μονοστοιχειακόν, δύο, διμελές, περισσότερα πεπερασμένου πλήθους ἤ καί ἄπειρα, ὅτε καλεῖται ἀπειροσύνολον. Ὡσαύτως εἶναι δυνατόν νά μή ἔχῃ μέλος ἤ στοιχεῖον, ὅτε καλεῖται κενόν.

Τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου πρέπει νά εἶναι σαφῶς καθωρισμένα καί νά διακρίνεται τό ἕν ἀπό τό ἄλλο. Ἕν στοιχεῖον θά ἀνήκῃ ἤ ὄχι εἰς ἕν σύνολον. Δύο σύνολα λέγονται ξένα πρός ἄλληλα, ἄν δέν ἔχωσι κοινά στοιχεῖα. Π.χ. τά ὑπ'ἀριθ. 1 καί 2 εἶναι ξένα μεταξύ των, τά 5 καί 6 ὡσαύτως κ.λ.π.

Εἰς ἕν σύνολον δέν δύναται νά ἐπαναλαμβάνηται δύο ἤ πλείονας φοράς ἕν στοιχεῖον. Π.χ. "Ποῖον εἶναι τό σύνολον τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως "θ ά λ α σ σ α"". Θά ἀναγράφωμεν μόνον τά τέσσαρα διακεκριμένα γράμματα θ,α,λ,σ καί οὐχί ἅπαντα.

2. Συμβολική παράστασις τοῦ συνόλου

Τό σύνολον θά παρίσταται συμβολικῶς μέ ἕν κεφαλαῖον γράμμα τῆς ἀλφαβήτου, ἐνῷ τό στοιχεῖον, τό ὁποῖον ἀνήκει εἰς τό σύνολον μέ μικρόν γράμμα αὐτῆς. Διά νά δηλωθῇ ὅτι τό στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τό σύνολον Β, θά σημειωθῇ συμβολικῶς $α \in B$ καί ἀπαγγέλλεται "Τό στοιχεῖον α ἀνήκει εἰς τό σύνολον Β". Ἄν συμβῇ ἕν στοιχεῖον β νά μή ἀνήκῃ εἰς τό σύνολον Β, τότε θά σημειωθῇ συμβολικῶς $β \notin B$ καί ἀπαγγέλλεται : "Τό β δέν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Β".

Τό σύμβολον $\in$ δηλοῖ τό "ἀνήκειν". Τό σύμβολον $\notin$ τό"μή ἀνήκειν".

Τά στοιχεΐα ένός συνόλου τοποθετοΰνται έντός δύο ένωτικών { } δπερ κάλεΐται καί ἄγκιστρον, ή δέ σειρά μέ τήν όποίαν άναγράφονται ταΰτα εΐναι άδιάφορος.

Ύποθέτομεν δτι τό σύνολον Α έχει ώς στοιχεΐα τούς άριθμούς 2,4,6,8,10. Τοΰτο σημειοΰται συμβολικώς οΰτω :

$A = \{2,4,6,8,10\}$ ἤ $A = \{4,10,6,8,2\}$ ἤ $A = \{6,2,8,4,10\}$ κ.ο.κ.

Έκ τούτου συμπεραίνομεν δτι $2 \in A$, $4 \in A$, $6 \in A$, $8 \in A$, $10 \in A$, ένῷ $1 \notin A$, $3 \notin A$ κ.ο.κ.

Ύποθέτομεν δτι τό σύνολον Β παριστάνει τά φωνήεντα τῆς λέξεως "Πατήρ". θά σημειώσωμεν συμβολικώς :

$$B = \{\alpha, \eta\}$$

Έάν τό Γ παριστᾷ τό σύνολον τών συμφώνων τῆς λέξεως "πατήρ", θά σημειώσωμεν συμβολικώς :

$$\Gamma = \{\pi, \tau, \rho\}$$

<u>Άσκήσεις</u>

Γράφατε συμβολικώς τά κάτωθι σύνολα μέ τά στοιχεΐα των έντός τών ένωτικών :

1. Τό σύνολον τών μηνών πού έχουσι 31 ήμέρας.
2. Τό σύνολον τών τετραγώνων τών άριθμών άπό 1 έως 16.
3. Τό σύνολον τών όρέων τοΰ Νομοΰ Φθιώτιδος.
4. Τό σύνολον τών περιττών άριθμών, οΐτινες περιέχονται μεταξύ τών 10 καί 30.
5. Τό σύνολον τών ήμερών τῆς έβδομάδος πού τό δνομά των άρχίζει άπό Τ.
6. Άναγράψατε τό σύνολον τών φωνηέντων τῆς λέξεως "Δημήτριος".
7. Άναγράψατε τό σύνολον τών γραμμάτων τῆς ώς άνω λέξεως.

3. Κενὸν σύνολον

Ὅπως εἰς τήν Ἀριθμητικήν, διά τήν ἀναγραφήν τῶν διαφόρων ἀριθμῶν, ἐκτός τῶν σημαντικῶν ψηφίων 1,2,.....9 λαμβάνομεν καί τό ἀσήμαντον 0, οὕτω καί ἐδῶ μέ τήν δημιουργίαν τοῦ συνόλου, δέον νά λάβωμεν καί ἕν σύνολον ἄνευ στοιχείων. Τοῦτο καλοῦμεν κενόν σύνολον καί τό παριστῶμεν συμβολικῶς διά τοῦ κενοῦ ἀγκίστρου $\{\ \}$ ἤ διά τοῦ συμβόλου ϕ, ὅπερ εἶναι καί τό ἐπικρατέστερον καί τό ἀπαγγέλλομεν "Τό κενόν σύνολον".

<u>Παραδείγματα</u> : Ποῖα εἶναι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, τῶν ὁποίων τά ὀνόματα ἀρχίζουν ἀπό Γ. Τοιοῦτοι μῆνες δέν ὑπάρχουσιν. Ἄρα τό σύνολον εἶναι κενόν.

Ποῖον τό σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι ἄρτιοι;

Ποῖον τό σύνολον τῶν συμφώνων τῆς λέξεως "οἱ".

Σύνολον συμφώνων τῆς λέξεως "οἱ" = ϕ. Σύνολον πρώτων ἀρτίων = ϕ.

<u>Ἀσκήσεις</u>

Ἀναφέρατε ποῖα τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι κενά :

8. Τό σύνολον τῶν πρώτων ἀριθμῶν ἀπό 10 ἕως 25.
9. Τό σύνολον τῶν τριψηφίων ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τοῦ 100.
10. Τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν μεταξύ 21 καί 35, περιττῶν, οἵτινες διαιροῦνται διά τοῦ 4.
11. Τό σύνολον ὅλων τῶν πρώτων παραγόντων τοῦ 64, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 2.
12. Τό σύνολον τῶν ἰσοπλεύρων τριγώνων, ἅτινα εἶναι ὀρθογώνια.
13. Τό σύνολον ὅλων τῶν περιττῶν ἀριθμῶν.

4. Ἀναγραφή καί περιγραφή τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου

Θεωροῦμεν ἕν σύνολον Α μέ πολλά στοιχεῖα, π.χ. ὅλους τούς φυσικούς ἀριθμούς 1,2,3 μέχρι καί τοῦ 199. Διά νά ἀναγράφωμεν ἅπαντα ταῦτα τά στοιχεῖα ἐντός τοῦ ἀγκίστρου $\{\ \}$ δέν εἶναι πολλάκις εὔκολον. Διά τοῦτο σημειοῦμεν ὡς ἑξῆς: $A = \{1,2,3,\ldots,199\}$, ἤτοι ἀναγράφομεν τά τρία πρῶτα στοιχεῖα ἐντός τοῦ ἀγκίστρου, ἔπειτα τρεῖς τελείας καί τέλος τό τελευταῖον στοιχεῖον. Τοῦτο γίνεται διότι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου παρουσιάζουν ἀφ'ἑαυτῶν μίαν φυσικήν σειράν. Ἄν ὅμως τοῦτο δέν εἶναι δυνατόν, πῶς πρέπει νά διευκολύνωμεν τήν συμβολικήν παράστασιν τοῦ συνόλου; Ἰδού εἷς ἁπλοῦς καί σύντομος τρόπος παραστάσεως αὐτοῦ.

Παριστῶμεν μέ ἕνα ἀπό τά τελευταῖα γράμματα τῆς ἀλφαβήτου, ἔστω τοῦ χ, γενικῶς κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου. Γράφομεν ἐντός τοῦ ἀγκίστρου πρῶτον τό χ, μετά ἕνα διαχωριστικόν σημεῖον (τό / ἤ :) καί κατόπιν τό χ, ὅπερ χαρακτηρίζει μίαν ἰδιότητα τήν ὁποίαν ἔχουσι πάντα τά στοιχεῖα τά ἀνήκοντα εἰς τό σύνολόν καί μόνον αὐτά. Εἰς τήν προκειμένην περίπτωσιν γράφομεν διά τό σύνολον Α,

$A = \{\chi/\chi$ φυσικός ἀριθμός μικρότερος τοῦ $200\}$

καί ἀπαγγέλλομεν : "Τό Α εἶναι σύνολον τῶν χ στοιχείων" μέ τήν ἰδιότητα ὅτι ὁ χ εἶναι φυσικός ἀριθμός μικρότερος τοῦ 200.

Ἡ τοιαύτη ἁπλουστέρα μέθοδος τῆς παραστάσεως τοῦ συνόλου εἶναι ἡ π ε ρ ι γ ρ α φ ή, ἐνῷ ἡ προηγουμένη, ἡ ἀ ν α γ ρ α φ ή.

<u>Παραδείγματα</u> : Τό σύνολον {Ἰωάννης, Ἰάκωβος} ἀναγράφεται : Τό σύνολον ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ σχολείου, τῶν ὁποίων τό ἀνάστημα εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 1,50 μ. Περιγράφεται:

'<u>Ασκήσεις</u>

Παραστήσατε διά της άναγραφής ή της περιγραφής, έφ'όσον είναι δυνατόν, τά κάτωθι σύνολα :

14. Τό σύνολον τοῦ όποίου τά στοιχεῖα εἶναι ὅλοι οἱ περιττοί ἀριθμοί ἀπό 1 ἕως 20.
15. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι τά τετράγωνα ἀπό τοῦ 2 ἕως 40.
16. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι τά φωνήεντα τῆς ἀλφαβήτου.
17. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι ὀρθογώνια παρ/μα.
18. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί ἀπό τοῦ 10 μέχρι τοῦ 28, μή συμπεριλαμβανομένου.
19. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι τά γράμματα τῆς λέξεως "Ἑ λ λ ά ς".

'Απαντήσατε ἄν ἡ ἀναγραφή τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι δυνατή ἤ ἀδύνατος.

20. Τό σύνολον ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀρτίων ἀριθμῶν.
21. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι ὅλοι οἱ φυσικοί ἀριθμοί.
22. Τό σύνολον τῶν κλασμάτων μεταξύ $\frac{1}{4}$ καί $\frac{1}{5}$.
23. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι ὅλα τά παραλληλόγραμμα.
24. Τό σύνολον τῶν μηνῶν τοῦ ἔτους, τῶν ὁποίων τό ὄνομα ἀρχίζει ἀπό Ι.
25. Τό σύνολον τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα εἶναι οἱ φυσικοί ἀριθμοί, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 9 καί μικρότεροι τοῦ 17.

5. Σύνολα ξένα μεταξύ των

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B = \{\delta,\varepsilon,\zeta,\eta\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τά δύο ταῦτα σύνολα οὐδέν κοινόν στοιχεῖον ἔχουσιν. Τά σύνολα ταῦτα λέγονται ξένα μεταξύ των ἤ "ἐξωτερικά" ἀλλήλων.

Ἑπομένως δύο σύνολα Α καί Β λέγονται ξένα μεταξύ των ἤ "ἐξωτερικά" ἀλλήλων, ἄν οὐδέν κοινόν στοιχεῖον ἔχουσιν.

6. Ἰσότης συνόλων

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{3,4,5,6\}$, $B = \{4,3,6,5\}$. Παρατηροῦμεν ὅτι τά σύνολα Α καί Β ἔχουσι τά αὐτά ἀκριβῶς στοιχεῖα, ἀσχέτως ἄν ἡ ἀναγραφή αὐτῶν δέν ἀκολουθῇ τήν αὐτήν σειράν. Ἤτοι πᾶν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α εἶναι στοιχεῖον καί τοῦ Β καί ἀντιστρόφως πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Α. Τά σύνολα ταῦτα λέγονται ἴσα. Δύο ἤ περισσότερα σύνολα λέγονται ἴσα, ἐάν τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός ἀναγράφωνται καί εἰς τά ἄλλα καί μόνον αὐτά καί τἀνάπαλιν.

$K = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $\Lambda = \{\beta,\alpha,\delta,\gamma\}$

Σημειοῦμεν $A = B$, $K = \Lambda$ ἤ $\{3,4,5,6\} = \{4,3,6,5\}$,

$$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} = \{\beta,\alpha,\delta,\gamma\}$$

Ἡ ἰσότης τῶν δύο ἤ περισσοτέρων συνόλων λέγεται καί ταυτότης τῶν συνόλων.

Πολλάκις εἶναι δυνατόν τό αὐτό σύνολον νά ἀναγραφῇ μέ διαφορετικά ὀνόματα ἤ διαφορετικάς περιγραφάς. Π.Χ. τό σύνολον $\{2,4\}$ = τό σύνολον ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ γινομένου τῶν ἀριθμῶν 4 καί 6...ἤ $\{2,4\}$ = τό σύνολον ὅλων τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 6 ἤ $\{2,4\}$ = τό σύνολον τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος 12+12. Εἰς πάσας τάς ἀνωτέρω περιπτώσεις ἐκφράζεται τό αὐτό σύνολον.

<u>Ἀσκήσεις</u>.

26. Τό κενόν σύνολον ϕ δύναται νά ἰσοῦται μέ μή κενόν καί διατί;

27. Τό σύνολον $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ μέ ποῖα σύνολα εἶναι ἴσον.

28. Ἕν μονομελές σύνολον εἶναι δυνατόν νά ἰσοῦται μέ ἕν διμελές καί διατί;

Σημειώσατε ποῖα τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι ἴσα.

29. $A = \{3,8,5\}$, $B = \{38,5\}$

30. $\Gamma = \{\chi,\psi,\omega,\varphi\}$, $\Delta = \{\psi,\omega,\varphi,\chi\}$

31. $E = \emptyset$ $\quad Z = \{0\}$

32. $H = \{0,5\}$, Θ = τό σύνολον ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος 18 καί 32.

33. $I = \{1,3,5\}$, K = τό σύνολον ὅλων τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος 60,30 καί 45.

34. $\Lambda = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $M = \{\beta,\gamma,\delta\}$

35. $N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, Ξ = τό σύνολον ὅλων τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν.

7. Ἰδιότητες τῶν ἴσων συνόλων

Εἰς τήν ἰσότητα τῶν συνόλων δυνάμεθα νά παρατηρήσωμεν τάς κάτωθι ἰδιότητας :

α) Πᾶν σύνολον A εἶναι ἴσον μέ τόν ἑαυτόν του :

$$A = A\ , \quad \{\alpha,\beta,\gamma\} = \{\alpha,\beta,\gamma\}$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ή.

β) Ἐάν ἕν σύνολον A εἶναι ἴσον μέ ἕν σύνολον B, τότε καί τό σύνολον B εἶναι ἴσον μέ τό σύνολον A.

Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή καί σημειοῦται συμβολικῶς :

$$A = B \Longrightarrow B = A$$

Τό σύμβολον $\Longrightarrow$ ἀπαγγέλλεται οὕτω : "ἔχει ὡς συνέπειαν" ἤ "συνεπάγεται".

γ) Ἐάν ἕν σύνολον A εἶναι ἴσον μέ ἕν σύνολον B, καί τό σύνολον B εἶναι ἴσον μέ ἕτερον σύνολον Γ, τότε τό σύνολον A ἰσοῦται μέ τό Γ.

'Η ἰδιότης αὕτη λέγεται μ ε τ α β α τ ι κ ή καί συμβολικῶς παρίσταται οὕτω :

$$A = B \text{ καί } B = \Gamma \Longrightarrow A = \Gamma$$

Π.χ. $\{2,3,5\} = \{3,5,2\}$ καί $\{3,5,2\} = \{5,2,3\}$

Τότε θά ἔχωμεν τήν ἰσότητα

$$\{2,3,5\} = \{5,2,3\}$$

8. Σύνολα ισοδύναμα

'Υποθέτομεν ὅτι μία τάξις σχολείου ἔχει 40 μαθητάς καί ἐν τῇ αἰθούσῃ ὑπάρχουσι 40 καθίσματα, δηλαδή ἕν διά κάθε μαθητήν. Εἰς κάθε μαθητήν ἀντιστοιχεῖ ἕν κάθισμα καί ἀντιστρόφως εἰς κάθε κάθισμα ἀντιστοιχεῖ εἷς μαθητής. Ἤτοι μεταξύ τοῦ συνόλου Α τῶν μαθητῶν καί τοῦ συνόλου Β τῶν καθισμάτων ὑπάρχει μία ἀντιστοιχία. Ἤτοι "ἕνα πρός ἕνα". Τά δύο αὐτά σύνολα Α καί Β λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ α. 'Επομένως δύο σύνολα Α καί Β λέγονται ἰσοδύναμα, ἐάν τά στοιχεῖα τοῦ Α δύνανται νά ἔχωσιν ἀντιστοιχίαν ἕν πρός ἕν πρός τά στοιχεῖα τοῦ Β. Τότε λέγομεν ὅτι ὑπάρχει μεταξύ τῶν δύο ἀνωτέρω συνόλων ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία ἤ ἀντιστοιχία ἑνός πρός ἕν. Διά νά δηλώσωμεν ὅτι τό σύνολον Α εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό Β, γράφομεν συμβολικῶς :

$$A \sim B$$

<u>Παράδειγμα</u> : Ἔστωσαν τά δύο σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$ καί $B = \{\zeta,\eta,\theta,\iota,\kappa\}$. Δυνάμεθα νά συνδυάσωμεν ὅλα τά στοιχεῖα των εἰς ζεύγη, ἔνθα κάθε ζεῦγος θά ἀποτελῆται ἀπό ἕν στοιχεῖον τοῦ Α συνόλου καί ἀπό ἕν στοιχεῖον τοῦ Β. Ἤτοι νά προσεταιρίσωμεν τά α μέ τό ζ, τό β μέ τό η, τό γ μέ τό θ, τό δ μέ τό ι καί τό ε μέ τό κ.

$\alpha \longleftrightarrow \zeta$, $\beta \longleftrightarrow \eta$, $\gamma \longleftrightarrow \theta$, $\delta \longleftrightarrow \iota$, $\varepsilon \longleftrightarrow \kappa$.

Τό ζ λέγεται ἀντίστοιχον τοῦ α, τό η ἀντίστοιχον τοῦ β κ.ο.κ. 'Αντιστρόφως τό α εἶναι ἀντίστοιχον τοῦ ζ, τό β τοῦ η κ.ο.κ.

"Οταν ὅλα τά στοιχεῖα καί τῶν δύο συνόλων διαταχθῶσι κατά ζεύγη, δέν περισσεύει κανέν στοιχεῖον τοῦ ἑνός ἤ τοῦ ἄλλου συνόλου, τό ὁποῖον νά μή ἔχῃ ἀντίστοιχόν του.

Προφανές ὅτι εἰς τά ἰσοδύναμα σύνολα δυνάμεθα νά δημιουργήσωμεν ἀμοιβαίαν ἀντιστοιχίαν κατά πολλούς τρόπους. Δηλαδή δύναται νά γίνῃ ἡ ἀνακατάταξις τῶν στοιχείων τοῦ ἑνός συνόλου καί νά δημιουργηθῶσι τότε διαφορετικά ζεύγη ἀντιστοίχων στοιχείων, χωρίς νά παύσῃ ἡ ἀμοιβαία ἀντιστοιχία τῶν δύο συνόλων. Π.χ. εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα δυνάμεθα νά συνδυάσωμεν τό στοιχεῖον α μέ τό θ, τό γ μέ τό ζ καί νά ἀφήσωμεν τά λοιπά ζεύγη ἀμετάβλητα, ἤ νά ἀλλάξωμεν ὅλα τά ζεύγη. Τά σύνολα $\Gamma = \{\kappa, \lambda, \mu\}$ καί $\Delta = \{\nu, \pi\}$ δέν εἶναι ἰσοδύναμα, διότι δέν δύναται νά δημιουργηθῇ ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν στοιχείων των. Τό κ δύναται νά προσεταιρισθῇ τό ν καί τό λ τό π. μένει ὅμως τό μ χωρίς ἀντίστοιχον.

"Εστωσαν τά ἴσα σύνολα $\{\kappa, \lambda, \mu\} = \{\lambda, \kappa, \mu\}$. Ταῦτα κατά συνέπειαν εἶναι καί ἰσοδύναμα."Ητοι

$$\{\kappa, \lambda, \mu\} \sim \{\lambda, \mu, \kappa\}$$

Δηλαδή ἡ ἰσότης δύο συνόλων $A = B$, ἔχει ὡς συνέπειαν τήν ἰσοδυναμίαν αὐτῶν $A \sim B$.

'Αντιθέτως δύο ἰσοδύναμα σύνολα, π.χ. $\{2, 3, 4\} \sim \{\kappa, \lambda, \mu\}$ δέν εἶναι ἴσα.'Επομένως ἡ ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας εἶναι διάφορος τῆς ἐννοίας τῆς ἰσότητος.

Καί εἰς τήν ἰσοδυναμίαν τῶν συνόλων διακρίνομεν ἀναλόγους ἰδιότητας πρός τάς τῆς ἰσότητος."Ητοι :

α) Τήν ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ή ν ἰδιότητα. Δηλαδή κάθε σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον πρός ἑαυτό : $A \sim A$.

β) Τήν σ υ μ μ ε τ ρ ι κ ή ν ἰδιότητα. Δηλαδή ἐάν ἕν σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον B, τότε καί τό σύνολον B εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό A.

$$A \sim B \Longrightarrow B \sim A$$

γ) Τήν μ ε τ α β α τ ι κ ή ν ἰδιότητα. Δηλαδή ἐάν τό σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον B καί τό σύνολον B εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον Γ, τότε τό A εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό Γ.

$$A \sim B \text{ καί } B \sim \Gamma \Longrightarrow A \sim \Gamma$$

<u>Παράδειγμα</u> : $\{4,5,6,7\} \sim \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί
$\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \sim \{\kappa,\lambda,\mu,\nu\}$

Ἄρα $\{4,5,6,7\} \sim \{\kappa,\lambda,\mu,\nu\}$

Ἔστωσαν τά ἰσοδύναμα σύνολα $\{3,4,5\}$, $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $\{\kappa,\lambda,\mu\}$, τά ὁποῖα ἔχουσι τό αὐτό πλῆθος στοιχείων, ἤτοι 3. Τότε λέγομεν ὅτι τά σύνολα ταῦτα ἔχουσι τήν αὐτήν δυναμικότητα, ὁ δέ ἀριθμός, ὅστις ἐκφράζει τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑκάστου συνόλου, ἤτοι ὁ ἀριθμός 3, καλεῖται π λ η θ ι κ ό ς ἀ ρ ι θ μ ό ς. Ἐάν δύο σύνολα δέν εἶναι ἰσοδύναμα, ὡς π.χ. τά $\{\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $\{\kappa,\lambda,\mu,\nu\}$, ταῦτα ἔχουσι διαφόρους πληθικούς ἀριθμούς.

<u>Ἀσκήσεις</u>

36. Τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1, ἕως καί 7 εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον τῶν ἡμερῶν τῆς ἑβδομάδος καί διατί;

37. Τό σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό σύνολον A τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν καί διατί;

38. Γράψατε τρία σύνολα οὐχί ἴσα μεταξύ των, ἀλλά ἰσοδύναμα πρός τό σύνολον {Ἰανουάριος, Φεβρουάριος, Μάρτιος, Ἀπρίλιος, Μάϊος}.

39. Δύο ὁποιαδήποτε διμελῆ σύνολα, εἶναι ἰσοδύναμα μεταξύ των καί διατί;

40. Ἕν σύνολον μή κενόν εἶναι ἰσοδύναμον μέ τό κενόν σύνολον ϕ καί διατί;

41. Νά όρισθῆ ἄν τά σύνολα $A = \{4,6,8\}$ καί $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$ εἶναι ἰσοδύναμα καί ἄν ναί, νά ἐξετασθῆ κατά πόσους τρόπους δύναται νά διαταχθῆ ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία των.

9. Ὑπερσύνολον, ὑποσύνολον

Οἱ μαθηταί ἑνός σχολείου κατατάσσονται εἰς 6 τάξεις, α,β,γ,δ,ε,στ. Οὗτοι ἀποτελοῦσιν ἕν σύνολον $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\sigma\tau\}$ Οἱ μαθηταί π.χ. τῶν τριῶν τάξεων α,β,γ ἀποτελοῦσιν ἕν σύνολον $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Τό δεύτερον σύνολον B λέγεται ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο ν τοῦ συνόλου A, τό δέ A ὑ π ε ρ σ ύ ν ο λ ο ν ἤ γ ε ν ι κ ό ν σ ύ ν ο λ ο ν.

Εἰς πᾶσαν σπουδήν τῶν συνόλων εἶναι ἀπαραίτητον νά καθορίζηται ἕν ὡρισμένον σύνολον στοιχείων, τό ὁποῖον ὀνομάζεται β α σ ι κ ό ν ἤ κ υ ρ ί α ρ χ ο ν σ ύ ν ο λ ο ν ἤ ὑ π ε ρ σ ύ ν ο λ ο ν.

Τά παιδιά τῆς γειτονιᾶς, 10 τόν ἀριθμόν, ἔχουσι χωρισθῆ εἰς τρεῖς ὁμάδας :

α) Οἱ Γεώργιος, Δημήτριος, 'Αθανάσιος, Πέτρος, ἀποτελοῦσι τήν καλλιτεχνικήν ὁμάδα τῆς γειτονιᾶς.

β) Οἱ Δημήτριος Κώστας, 'Αλέκος, 'Ιωάννης τήν ὁμάδα τοῦ ποδοσφαίρου,

γ) Οἱ 'Ιωάννης, 'Ηλίας, Θεμιστοκλῆς, Παναγιώτης τήν ἐκδρομικήν ὁμάδα. Ἤτοι

K = {Γεώργιος, Δημήτριος, 'Αθανάσιος, Πέτρος}

Π = {Δημήτριος, Κώστας, 'Αλέκος, 'Ιωάννης}

E = {'Ιωάννης, 'Ηλίας, Θεμιστοκλῆς, Παναγιώτης}

Τά τρία αὐτά σύνολα ἀποτελοῦνται ἀπό στοιχεῖα τοῦ συνόλου P τῶν παιδιῶν τῆς γειτονιᾶς. Εἶναι δυνατόν ἕνα παιδί νά ἀνήκῃ εἰς δύο ἤ περισσοτέρας ὁμάδας. Τά τρία αὐτά σύνολα K,Π,E λέγονται ὑ π ο σ ύ ν ο λ α τοῦ συνόλου P :

Ρ = {Γεώργιος, Δημήτριος, 'Αθανάσιος, Πέτρος, Κώστας, 'Αλέκος, 'Ιωάννης, 'Ηλίας, Θεμιστοκλῆς, Παναγιώτης}
καί τό ὁποῖον εἶναι τό ὑ π ε ρ σ ύ ν ο λ ο ν ἤ γ ε ν ι κ ό ν σ ύ ν ο λ ο ν

Ρ = {χ/χ παιδί τῆς γειτονιᾶς}

"Εστω Λ = {χ/χ φυσικός ἀριθμός}

Μ = {χ/χ φυσικός ἀριθμός μέχρι καί τοῦ 50}

Κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Μ εἶναι στοιχεῖον τοῦ Λ. Διά τοῦτο τό σύνολον Μ λέγεται ὑποσύνολον τοῦ Λ, τό δέ Λ εἶναι τό ὑπερσύνολον.

'Επομένως ἕν σύνολον Χ λέγεται ὑποσύνολον ἑνός συνόλου Ψ, ἐάν κάθε στοιχεῖον τοῦ Χ εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Ψ. Τήν σχέσιν αὐτήν μεταξύ τῶν Χ καί Ψ σημειοῦμεν συμβολικῶς

$$X \subseteq \Psi$$

'Απαγγέλλεται δέ "τό Χ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Ψ" ἤ "Τό Χ περιέχεται εἰς τό Ψ".

Διά τά ἀνωτέρω σύνολα Β,Α καί Κ,Π,Ε, Ρ καί Μ,Λ δυνάμεθα νά γράφωμεν συμβολικῶς

$B \subseteq A$, $K \subseteq P$, $\Pi \subseteq P$, $E \subseteq P$, $M \subseteq \Lambda$

Τήν σχέσιν $B \subseteq A$, ἥτις ἀπαγγέλλεται "Τό Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α" δυνάμεθα νά γράφωμεν καί οὕτω $A \supseteq B$, ὁπότε ἀπαγγέλλεται "Τό Α ἔχει ὑποσύνολον τό Β".

'Εκ τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὑποσυνόλου συμπεραίνομεν ὅτι πᾶν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του. Π.χ. διά τά ἀνωτέρω σύνολα Κ,Ρ,Λ,Μ, ἔχομεν :

$K \subseteq K$, $P \subseteq P$, $\Lambda \subseteq \Lambda$, $M \subseteq M$

Τό σύνολον Κ εἴδομεν ὅτι εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Ρ, ὑπάρχει ὅμως ἕν τοὐλάχιστον στοιχεῖον τοῦ Ρ, π.χ. τό παιδί "'Ηλίας", πού δέν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Κ. Τόσύνολον Κ λέγεται τότε γ ν ή σ ι ο ν ὑ π ο σ ύ ν ο λ ο ν τοῦ Ρ. Συμβολικῶς σημειοῦται $K \subset P$. Τό αὐτό συμβαίνει διά τά σύνολα Π καί Ε, εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ Ρ, ἤτοι

$$\Pi \subset P \ , \ E \subset P$$

'Ομοίως συμβαίνει τό σύνολον Μ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Λ, διότι τό Λ ἔχει φυσικούς ἀριθμούς, οἵτινες δέν εἶναι στοιχεῖα τοῦ Μ. Ἄρα $M \subset \Lambda$.

Ἔστω Α τό σύνολον τῶν μαθητῶν "Γεώργιος, Δημήτριος, 'Ιωάννης, 'Ηλίας, Πέτρος", οἵτινες ἀποτελοῦσι τήν ἀθλητικήν ὁμάδα τῶν μαθητῶν τῆς Ε΄ τάξεως τοῦ Γυμνασίου, ἤτοι

Α = {Γεώργιος, Δημήτριος, 'Ιωάννης, 'Ηλίας, Πέτρος}

Β = {χ/χ μαθητής τῆς Ε΄ τάξεως τοῦ Γυμνασίου}

'Αλλά καί οἱ μαθηταί τῆς Ε΄ τάξεως ἀποτελοῦσιν ἕν σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου

Γ = {χ/χ μαθητής τοῦ Γυμνασίου}

Τό σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β, ἀλλά καί τό σύνολον Β εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Γ, δηλαδή ὅλων τῶν μαθητῶν τοῦ Γυμνασίου. Τότε κατά συνέπειαν ἔχομεν ὅτι τό σύνολον Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Γ. Συμβολικῶς παρίσταται

$$A \subseteq B \text{ καί } B \subseteq \Gamma \Longrightarrow A \subseteq \Gamma$$

'Ομοίως ἄν θεωρήσωμεν τά σύνολα

Θ = {χ/χ ἄρρενες κάτοικοι τῆς περιοχῆς Παγκρατίου}

Η = {χ/χ κάτοικος τῆς περιοχῆς τοῦ Παγκρατίου}

Ζ = {χ/χ κάτοικος τῆς πόλεως 'Αθηνῶν}

$$\Theta \subseteq H \ , \ H \subseteq Z \Longrightarrow \Theta \subseteq Z$$

Ὅθεν παρατηροῦμεν ὅτι, ἐάν ἕν σύνολον Σ_1 περιέχηται εἰς τό σύνολον Σ_2 καί τό σύνολον Σ_2 περιέχεται εἰς τό σύνολον Σ_3, τότε τό σύνολον Σ_1 περιέχεται εἰς τό Σ_3. Ἡ τοιαύτη ἰδιότης τοῦ "περιέχεσθαι" λέγεται μ ε τ α β α τ ι κ ή ἰ δ ι ό τ η ς.

Εἴδομεν ἀνωτέρω ὅτι πᾶν σύνολον εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του, πλήν ὅμως τοῦτο δέν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του. Π.χ. τοῦ συνόλου $\{3,4,5\}$ ὑποσύνολα εἶναι $\{3,4,5\}$, $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ καί ϕ. Ἐκ τούτων μόνον τά $\{3,4\}$, $\{3,5\}$, $\{4,5\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$ εἶναι γνήσια ὑποσύνολα τοῦ $\{3,4,5\}$. Τό κενόν σύνολον δέν θεωρεῖται γνήσιον ὑποσύνολον.

Τό σύνολον πάντων τῶν σημείων ἑνός ὀρθογωνίου, ὡς καί τά σύνολα τῶν σημείων τῶν μερῶν αὐτοῦ, εἶναι ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν σημείων τοῦ ὀρθογωνίου. Τό σύνολον ὅμως τῶν σημείων τοῦ ὀρθογωνίου δέν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ἑαυτοῦ του. Τό σύνολον τῶν κατοίκων τοῦ Δήμου Κυψέλης καί τά σύνολα τῶν κατοίκων ἑκάστης συνοικίας τοῦ Δήμου αὐτῆς εἶναι ὑποσύνολα τῶν κατοίκων τῆς περιοχῆς Κυψέλης, πλήν ὅμως τό σύνολον ὅλων τῶν κατοίκων τῆς Κυψέλης δέν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ὅλων τῶν κατοίκων αὐτῆς.

Τό κενόν σύνολον πρέπει νά θεωρηθῇ ὑποσύνολον παντός συνόλου Α. Ἤτοι $\phi \subseteq A$. Ἐάν ἕν σύνολον Α δέν εἶναι ὑποσύνολον ἄλλου Β, σημειοῦται συμβολικῶς $A \nsubseteq B$. Ἐάν ἕν σύνολον Α δέν εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον ἄλλου Β, σημειοῦται συμβολικῶς $A \not\subset B$.

<u>Ἀσκήσεις</u>

42. Δίδεται τό σύνολον $A = \{1,2,3,4,5\}$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ ποῖον ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Α: $B = \{1,2,5\}$, $\Gamma = \{6,7\}$, $\Delta = \{2,3,5\}$, $E = \{2,\alpha,\beta\}$, $Z = \phi$

43. Δίδεται τό σύνολον $K = \{\alpha,\beta\}$. Σημειώσατε ὅλα τά ὑποσύνολα αὐτοῦ.

44. Ἔστω τό σύνολον $\Lambda = \{14,20,25,33,41\}$. Προσδιορίσατε τά κάτωθι ὑποσύνολα τοῦ Λ.

α) Τό ὑποσύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Λ, ἅτινα διαιροῦνται διά τοῦ 2.

β) Τό ὑποσύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Α, ἅτινα διαιροῦνται διά τοῦ 3.

γ) Τό ὑποσύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Α, ἅτινα διαιροῦνται διά τοῦ 5.

δ) Τό ὑποσύνολον τῶν στοιχείων τοῦ Α, ἅτινα δέν διαιροῦνται διά τοῦ 2.

45. Ἔστωσαν $\Pi = \{3,4,5\}$, $P = \{4,5,1\}$, $\Sigma = \{1,2,3,4,5\}$, $T = \{3,4\}$. Ἀναφέρατε ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι ἐκφράσεων εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς

α) $T \subseteq \Pi$, β) $\Pi \subseteq P$, γ) $P \subseteq \Sigma$, δ) $T \subseteq P$.

46. Προσδιορίσατε τά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου

$$\Gamma = \{2,3,5,6\}$$

47. Δίδεται τό σύνολον $\Theta = \{14,21,24,28,30\}$. Προσδιορίσατε τά ὑποσύνολα τῶν στοιχείων τοῦ Θ, ἅτινα εἶναι πολλαπλάσια τοῦ 7.

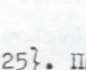
48. Δίδεται τό σύνολον $H = \{1,4,6,9,10,16,18,25\}$. Προσδιορίσατε τά ὑποσύνολα, ἅτινα εἶναι τέλεια τετράγωνα.

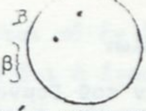
49. Δίδεται ἡ $A \nsubseteq B$ καί ζητεῖται ἄν ἡ ἔκφρασις $A \not\subset B$ εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

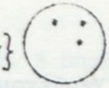
50. Δίδεται ἡ ἔκφρασις $A \subset B$ καί ζητεῖται ἄν ἡ ἔκφρασις $A \subseteq B$ εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

10. Γραφική παράστασις συνόλου

Προκειμένου νά παραστήσωμεν γραφικῶς ἕν σύνολον, ἐργαζόμεθα ὡς κάτωθι :

Γράφομεν μίαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν, π.χ. μίαν περιφέρειαν κύκλου, καί ἐντός αὐτῆς ἀναγράφομεν σημεῖα, ἅτινα ἀντιπροσωπεύουσι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Ἔστω τό μονομελές σύνολον $A = \{\alpha\}$. Τοῦτο θά παρασταθῇ γραφικῶς 

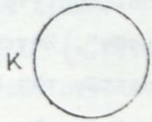
. Τό διμελές $B = \{\alpha, \beta\}$ 

Τό τριμελές $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma\}$  κ.ο.κ.

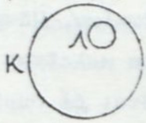
'Η τοιαύτη παράστασις τοῦ συνόλου λέγεται <u>διάγραμμα</u>.

"Εστω τό $\Sigma_1 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ καί τό $\Sigma_2 = \{\delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \alpha, \beta, \gamma\}$. Τό Σ_1 εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Σ_2, ἤτοι $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$. 'Η γραφική των παράστασις εἶναι

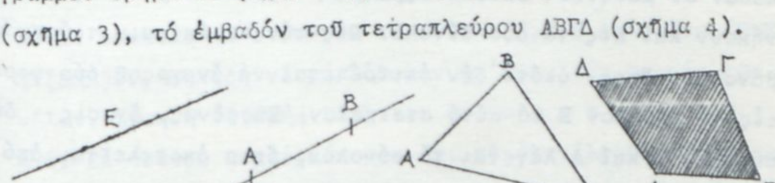
'Εάν ἕν σύνολον Κ ἔχῃ μέγαν ἀριθμόν στοιχείων ἤ καί ἄπειρα, τοῦτο θά παρίσταται γραφικῶς μέ ὁλόκληρον τό ἐπίπεδον, τό περιεχόμενον ὑπό τῆς κλειστῆς καμπύλης γραμμῆς, δηλαδή οὕτω :



'Εάν ἕν σύνολον Λ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Κ, τότε τοῦτο θά παρασταθῆ γραφικῶς μέ ἕν μέρος ἐσωτερικόν τοῦ ἐπιπέδου του, ἤτοι :



Πᾶν γεωμετρικόν σχῆμα σύγκειται ἀπό σύνολον σημείων. Τό σύνολον τῶν γεωμετρικῶν σημείων καλεῖται σημειοσύνολον. 'Επομένως πᾶν γεωμετρικόν σχῆμα δύναται νά θεωρηθῆ ὡς ἕν σημειοσύνολον. "Οπως λ.χ. ἡ εὐθεῖα Ε (σχῆμα 1), τό εὐθύγραμμον τμῆμα ΑΒ (σχῆμα 2), ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ (σχῆμα 3), τό ἐμβαδόν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (σχῆμα 4).



Σχῆμα 1 Σχῆμα 2 Σχῆμα 3 Σχῆμα 4

11. Ένωσις συνόλων

Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς τήν Α'τάξιν τοῦ Γυμνασίου ὑπάρχουν δύο ὁμάδες μαθητῶν. Ἡ ποδοσφαιρική ὁμάς καί ἡ τοῦ Βόλλεϋ - μπώλ, αἵτινες ἀπαρτίζονται ὡς κάτωθι :

α) Ποδοσφαιρική ὁμάς

Π ={Ἰωάννης,Βασίλειος,Χρῆστος,Δημήτριος,Κώστας,Νῖκος, Παῦλος,Πέτρος,Φωκίων}

β) Βόλλεϋ-μπῶλ ὁμάς

Β = {Βασίλειος,Δημήτριος,Φωκίων,Πέτρος,Πᾶνος,Γεώργιος}

Αἱ ὁμάδες αὗται ἀποτελοῦσι δύο σύνολα."Ας ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι αἱ δύο ὁμάδες ἀποφασίζουσι νά ἑνωθῶσιν εἰς μίαν ὑπό τήν ἐπωνυμίαν ""Ενωσις παικτῶν". Ζητεῖται ποῖον θά εἶναι τό σύνολον ὅλων αὐτῶν τῶν παικτῶν τῶν δύο ὁμάδων.

Προφανῶς θά εἶναι :

Ε ={Ἰωάννης,Βασίλειος,Χρῆστος,Δημήτριος,Κώστας,Νῖκος, Παῦλος, Πέτρος, Φωκίων, Πᾶνος, Γεώργιος}

Ἡ τοιαύτη ἐνέργεια καλεῖται ἕ ν ω σ ι ς τῶν δύο συνόλων Π καί Β. Σημειοῦται δέ συμβολικῶς Π∪Β καί ἀπαγγέλλεται "Π ἕνωσις Β".

Παρατηροῦμεν ὅτι τό πλῆθος τῶν μελῶν τοῦ συνόλου Ε,τό ὁποῖον ἀποτελεῖ τήν ἕνωσιν τῶν δύο συνόλων, δέν ἰσοῦται μέ τό ἄθροισμα τῶν μελῶν τῶν δύο ἀρχικῶν συνόλων, διότι συνέπεσεν οἱ μαθηταί "Βασίλειος,Δημήτριος,Φωκίων,Πέτρος" νά ἀνήκουν καί εἰς τά δύο σύνολα. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λαμβάνονται ἅπαξ, διότι δέν ἐπιτρέπεται νά ἀναγραφῆ δύο φοράς εἰς τό σύνολον Ε τό αὐτό στοιχεῖον. Ἐπομένως, ἕνωσις δύο συνόλων Γ καί Δ λέγεται τό σύνολον, ὅπερ ἀποτελεῖται ἀπό τά στοιχεῖα τοῦ Γ καί Δ. Ἐννοεῖται ὅτι πᾶν κοινόν στοιχεῖον τῶν δύο τούτων συνόλων δέν ἐμφανίζεται εἰς τήν ἕνωσιν δύο φοράς, ἀλλά μόνον μίαν, διότι τά στοιχεῖα ἑνός συνόλου πρέπει νά διακρίνωνται τό ἕν ἀπό τό ἄλλο.

Εἴδομεν ὅτι ἡ ἕνωσις τῶν στοιχείων Π καί Β σημειοῦται συμβολικῶς $\Pi \cup B$. Δύναται πρός τούτοις νά σημειωθῇ καί $B \cup \Pi$. Ἤτοι $\Pi \cup B = B \cup \Pi$. Δηλαδή ὅταν ἔχωμεν "Π ἕνωσις Β" συμπεραίνομεν ὅτι θά εἶναι καί "Β ἕνωσις Π". Ἡ ἰδιότης αὕτη λέγεται ἀ ν τ ι μ ε τ α θ ε τ ι κ ή.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν νά εὕρωμεν τήν ἕνωσιν τῶν συνόλων

$A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ καί $B = \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$ ἤτοι

$A \cup B = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cup \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$.

Εἰς τό αὐτό ἀποτέλεσμα θά φθάσωμεν, ἐάν ἀλλάξωμεν τήν σειράν τῶν συνόλων, δηλ. θά ἔχωμεν

$B \cup A = \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\} \cup \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta\}$.

Ὅπως γίνεται ἡ ἕνωσις δύο συνόλων Α καί Β δύναται νά ἐπεκταθῇ αὕτη καί εἰς περισσότερα τῶν δύο σύνολα. Διά νά εὕρωμεν τήν ἕνωσιν περισσοτέρων τῶν δύο συνόλων, εὑρίσκομεν πρῶτον τήν ἕνωσιν τῶν δύο πρώτων, ἔπειτα εἰς τό εὑρεθέν σύνολον ἑνοῦμεν τό τρίτον σύνολον, εἰς τό νέον εὑρεθέν σύνολον ἑνοῦμεν τό τέταρτον κ.ο.κ.

Ὑποθέτομεν ὅτι ἔχομεν τήν ἕνωσιν τῶν συνόλων :

$\Gamma = \{1,2,3\}$, $\Delta = \{2,3,5,6\}$, $E = \{3,5,7\}$ ἤτοι

$\{1,2,3\} \cup \{2,3,5,6\} \cup \{3,5,7\} = (\{1,2,3\} \cup \{2,3,5,6\}) \cup \{3,5,7\} =$

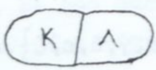
$= \{1,2,3,5,6\} \cup \{3,5,7\} = \{1,2,3,5,6,7\}$ ἤτοι

$$\Gamma \cup \Delta \cup E = (\Gamma \cup \Delta) \cup E$$

Εἶναι δυνατόν νά ἑνώσωμεν τά σύνολα Γ,Δ,Ε καί οὕτω $(\Gamma \cup E) \cup \Delta$ ἤ $(\Delta \cup E) \cup \Gamma$, δηλαδή νά μή λάβωμεν ὑπ'ὄψιν τήν σειράν τῶν συνόλων. Αὕτη ἡ ἰδιότης λέγεται π ρ ο σ ε τ α ι ρ ι σ τ ι κ ή. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τό ἀποτέλεσμα δύο ἤ περισσοτέρων συνόλων εἶναι ἀνεξάρτητον ἀπό τήν σειράν τήν ὁποίαν θά λάβωσι τά σύνολα.

Εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἕνωσις συνόλου τινός Α μέ τό κενόν φ δίδει ὡς ἀποτέλεσμα τό ἴδιον σύνολον Α. Ἤτοι $A \cup \phi = A$. Τό κενόν σύνολον φ καλεῖται οὐδέτερον σύνολον διά τήν ἕνωσιν.

Τήν ἕνωσιν δύο συνόλων Κ καί Λ δυνάμεθα νά παραστήσωμεν γραφικῶς ὡς κάτωθι : Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :α) ὅταν τά σύνολα Κ καί Λ εἶναι ξένα μεταξύ των, δηλαδή οὐδέν κοινόν στοιχεῖον ἔχουσιν (σχῆμα 1). β) Ὅταν τό σύνολον Κ εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Λ (σχῆμα 2). γ) Ὅταν τά σύνολα Κ καί Λ ἔχωσι μέν κοινά στοιχεῖα, χωρίς ὅμως τό ἕν νά εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ἄλλου (σχῆμα 3).

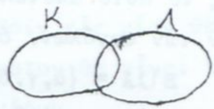


$K \cup \Lambda$

<u>Σχῆμα 1</u>

$K \cup \Lambda$

<u>Σχῆμα 2</u>



$K \cup \Lambda$

<u>Σχῆμα 3</u>

<u>Ἀσκήσεις</u>

51. Δίδονται τά σύνολα $A = \{3,4,5\}$, $B = \{1,2,6,7\}$, $\Gamma = \{5,6,9,10\}$. Νά εὑρεθῶσιν αἱ ἑνώσεις $A \cup B$, $B \cup \Gamma$, $A \cup \Gamma$, $A \cup B \cup \Gamma$.
52. Δίδονται τά σύνολα $\Delta =$ {Λαμία, Πάτραι, Βόλος, Θεσσαλονίκη} $E =$ {Πάτραι, Βόλος, Μεσολόγγιον}, $Z =$ {Λάρισα, Βόλος, Ἀγρίνιον}. Νά εὑρεθῶσιν αἱ ἑνώσεις $\Delta \cup E$, $E \cup Z$, $\Delta \cup Z$.
53. Ἔστωσαν $H = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $\Theta = \{\beta,\gamma,\zeta,\eta\}$, $I = \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon\}$. Νά εὑρεθῶσιν αἱ ἑνώσεις $H \cup I$, $\Theta \cup I$.
54. Ἔστω Α τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες λήγουν εἰς 0 καί Β τό σύνολον τῶν ἀκεραίων, οἵτινες λήγουσιν εἰς 5. Ζητεῖται ἡ ἕνωσις $A \cup B$.
55. Ἔστω Γ τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν, οἵτινες λήγουσιν εἰς δύο μηδέν καί Δ τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν οἵτινες λήγουσιν εἰς 25. Ζητεῖται ἡ ἕνωσις $\Gamma \cup \Delta$.

56. Παραστήσατε γραφικῶς τά σύνολα τῆς ἀσκήσεως 51 Α,Β,Γ
καί τάς ἑνώσεις $A\cup B$, $B\cup\Gamma$, $A\cup\Gamma$.

57. Ἔστωσαν $A = \{$Κώστας, Δημήτριος$\}$, $B = \{\alpha, \beta, 2\}$, $\Gamma = \{$Κώστας, $\beta\}$
$\Delta = \phi$, $E = \{\alpha, 1, 2, 3\}$. Νά εὑρεθῶσιν αἱ ἑνώσεις $A\cup B$, $B\cup\Delta$, $\Gamma\cup E$, $B\cup\Gamma\cup E$.

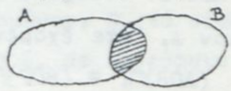
12. Διατομή ἤ τομή συνόλων

Ἔστωσαν δύο σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ καί $B = \{3, 4, 5, 7, 8\}$. Ἐκ τῶν δύο τούτων συνόλων σχηματίζομεν ἕν σύνολον τό ὁποῖον ἔχει τά κοινά στοιχεῖα αὐτῶν. Ἤτοι :

$$\Gamma = \{3, 4, 5\}$$

Τό σύνολον Γ λέγεται δ ι α τ ο μ ή ἤ τ ο μ ή τοῦ συνόλου Α μέ τό Β. Παρίσταται δέ συμβολικῶς $A\cap B$ καί ἀπαγγέλλεται "Α διατομή ἤ τομή Β".

Διατομή ἤ τομή τοῦ συνόλου Κ μέ τό σύνολον Λ, $K\cap\Lambda$, λέγεται τό σύνολον Μ, τό ὁποῖον περιέχει τά κοινά στοιχεῖα τῶν Κ καί Λ. Γραφικῶς ἡ διατομή $A\cap B$ παρίσταται οὕτω :



Τό γραμμοσκιασμένον μέρος τοῦ σχήματος παριστάνει τήν διατομήν τῶν συνόλων Α καί Β.

Γενικῶς διατομή ἤ τομή δύο δοθέντων συνόλων εἶναι τό σύνολον, τό ὁποῖον περιέχει τά κοινά στοιχεῖα καί μόνον αὐτά τῶν δύο συνόλων.

Ἐάν δέν ὑπάρχωσι κοινά στοιχεῖα μεταξύ τῶν συνόλων Α καί Β, τότε ἡ διατομή τούτων εἶναι τό κενόν σύνολον ϕ. $A\cap B = \phi$.

<u>Παράδειγμα</u> : $\Delta = \{$Δημήτριος, Γεώργιος, Κώστας, Νῖκος, Πᾶνος$\}$
$E = \{$Κώστας, Παντελῆς, Πᾶνος$\}$
$\Delta\cap E = \{$Δημήτριος, Γεώργιος, Κώστας, Νῖκος, Πᾶνος$\}\cap$
$\cap\ \{$Κώστας, Παντελῆς, Πᾶνος$\} = \{$Κώστας, Πᾶνος$\}$

Εὐκόλως δυνάμεθα νά ἀντιληφθῶμεν ὅτι ἐάν ἔχωμεν $\Delta\cap E$, θά ἔχωμεν καί $E\cap\Delta$, ἤτοι $\Delta\cap E = E\cap\Delta$

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται ἀ ν τ ι μ ε τ α θ ε τ ι κ ή.

Ὑποθέτομεν τώρα ὅτι ἔχομεν περισσότερα τῶν δύο συνόλων καί πρόκειται νά εὕρωμεν τήν διατομήν αὐτῶν. Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,5\}$, $\Gamma = \{1,4,5,6\}$.

Διά νά εὕρωμεν τήν διατομήν τῶν τριῶν τούτων συνόλων, εὑρίσκομεν πρῶτον τήν διατομήν τῶν A καί B καί ἐν συνεχείᾳ τήν διατομήν τοῦ νέου συνόλου μέ τό σύνολον Γ. Ἤτοι :

$(A\cap B)\cap\Gamma = (\{1,2,3,4\}\cap\{2,4,5\})\cap\{1,4,5,6\} = \{2,4\}\cap\{1,4,5,6\} = \{4\}$. Οὕτω ἔχομεν τό σύνολον, τό ὁποῖον ἔχει κοινόν στοιχεῖον καί εἰς τά τρία δοθέντα σύνολα. Δυνάμεθα νά ἐνεργήσωμεν καί ἄλλως, ἀδιαφοροῦντες ποίων συνόλων πρῶτον θά εὕρωμεν τήν διατομήν. Π.χ. εὑρίσκομεν πρῶτον τήν διατομήν τῶν συνόλων B καί Γ καί ἐν συνεχείᾳ τήν διατομήν τοῦ νέου συνόλου μέ τό σύνολον A. Ὅτε ἔχομεν τό αὐτό ἀποτέλεσμα, ἤτοι

$$(A\cap B)\cap\Gamma = (B\cap\Gamma)\cap A$$

Ἡ ἰδιότης αὕτη καλεῖται π ρ ο σ ε τ α ι ρ ι σ τ ι κ ή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συμπεραίνομεν ὅτι δυνάμεθα νά δώσωμεν οἱανδήποτε σειράν εἰς τά σύνολα, προκειμένου νά εὕρωμεν τήν διατομήν των. Ἤτοι

$$A\cap B\cap\Gamma = A\cap\Gamma\cap B = B\cap A\cap\Gamma \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Ἀσκήσεις

58. Νά εὑρεθῶσιν αἱ διατομαί $\Pi\cap P$, $P\cap\Sigma$, $\Pi\cap T$, $\Pi\cap\Sigma$, $\Pi\cap P\cap\Sigma$ τῶν συνόλων τῆς ἀσκήσεως 45.

Νά εὑρεθῶσιν αἱ κάτωθι διατομαί

59. $\{\alpha,\beta,\gamma\}\cap\{\delta,\varepsilon,3\}$
60. $\{1,2,3,4\}\cap\{0,2,4,7\}$
61. $\{\alpha,\beta,\gamma\}\cap\{\alpha,\beta,\gamma\}$

62. $\{\lambda,\alpha,\theta,o,\varsigma\}\cap\{\lambda\acute{\alpha}\theta o\varsigma\}$

63. $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}\}\cap\{\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{4}{3}\}$

64. $\{-2,-\frac{1}{2},2,5\}\cap\{-\frac{1}{2},2,6\}$

65. {Ἀθῆναι, Τρίπολις, Κόρινθος} ∩ {Τρίπολις, Κόρινθος, Λαμία, Λάρισα}

66. $\{-3,-5,4,7,8\}\cap\{-5,-6,4,8\}$

67. Δίδονται δύο εὐθεῖαι E_1, E_2 τεμνόμεναι εἰς τό σημεῖον Κ. Νά εὑρεθῇ ἡ διατομή $E_1\cap E_2$.

68. Ἐάν τό σύνολον Κ εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Λ, ποία εἶναι ἡ τομή Κ∩Λ καί διατί;

69. Α = {χ/χ πρωτεύουσα νομοῦ τῆς Ἑλλάδος}

Β = {ψ/ψ πόλις τῆς Ἑλλάδος τῆς ὁποίας τό ὄνομα ἀρχίζει ἀπό Π}. Νά εὑρεθῇ ἡ διατομή Α∩Β.

70. Ἔστω Ε τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν 1 ἕως καί 8. E_1 τό σύνολον τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν περιεχομένων μεταξύ τοῦ 1 καί 8 συμπεριλαμβανομένου. E_2 τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν μικροτέρων τοῦ 6. Νά εὑρεθῶσιν αἱ διατομαί $E\cap E_1$, $E\cap E_2$, $E_1\cap E_2$.

71. Α = {χ/χ φυσικός ἀριθμός}

Β = {ψ/ψ ἄρτιος ἀριθμός}

Νά εὑρεθῇ ἡ διατομή Α∩Β.

72. Α = {χ/χ φωνῆεν τῆς ἀλφαβήτου}

Β = {ψ/ψ μακρόν φωνῆεν τῆς ἀλφαβήτου}

Νά εὑρεθῇ ἡ διατομή Α∩Β.

13. Διατομαί καί ἑνώσεις συνόλων.

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $B = \{\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $\Gamma=\{1,\alpha,2,\gamma\}$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ : α) τό ἐξαγόμενον $A\cap(B\cup\Gamma)$ καί β) τό ἐξαγόμενον $(A\cap B)\cup\Gamma$.

α) Ἔχομεν $A\cap(B\cup\Gamma) = \{\alpha,\beta,\gamma\}\cap(\{\gamma,\delta,\varepsilon\}\cup\{1,\alpha,2,\gamma\}) =$

$= \{\alpha,\beta,\gamma\} \cap \{\alpha,\gamma,\delta,\varepsilon,1,2\} = \{\alpha,\gamma\}$.

β)Ἔχομεν $(\{\alpha,\beta,\gamma\} \cap \{\gamma,\delta,\varepsilon\}) \cup \{1,\alpha,2,\gamma\} =$

$= \{\gamma\} \cup \{1,\alpha,2,\gamma\} = \{\alpha,\gamma,1,2\}$.

Ἐκ τούτων παρατηροῦμεν ὅτι $A\cap(B\cup\Gamma) \neq (A\cap B)\cup\Gamma$. Ἑπομένως ἡ προσεταιριστική ἰδιότης διά τά τρία σύνολα Α,Β,Γ ἰσχύει μόνον ὅταν ταῦτα συνδέωνται μέ μίαν καί τήν αὐτήν πρᾶξιν δηλαδή ἤ μόνον μέ διατομήν, ἤ μόνον μέ ἕνωσιν. Ἤτοι : $4 \times (5+6) \neq (4\times5)+6$.

Εἰς τό ἀριθμητικόν σύστημα ἡ πρᾶξις αὕτη πρέπει νά εἶναι ἤ μόνον πρόσθεσις ἤ μόνον πολλαπλασιασμός, ἐνῷ εἰς τά σύνολα ἡ πρᾶξις αὕτη πρέπει νά εἶναι ἤ μόνον διατομή ἤ μόνον ἕνωσις.

Ἔστωσαν τά σύνολα : $A = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $B = \{\beta,\delta,\varepsilon\}$, $\Gamma = \{\alpha,\gamma,\varepsilon\}$ καί ζητεῖται νά δειχθῇ ἄν ἡ σχέσις $A\cap(B\cup\Gamma) = (A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

Λαμβάνομεν : $A\cap(B\cup\Gamma) = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap (\{\beta,\delta,\varepsilon\} \cup \{\alpha,\gamma,\varepsilon\}) =$
$= \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap \{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$. Ὁμοίως :
$(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma) = (\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap \{\beta,\delta,\varepsilon\}) \cup (\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\} \cap \{\alpha,\gamma,\varepsilon\}) =$
$= \{\beta,\delta\} \cup \{\alpha,\gamma\} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$.

Ἑπομένως ἡ ἰσότης $A\cap(B\cup\Gamma)=(A\cap B)\cup(A\cap\Gamma)$ εἶναι ἀληθής. Ἐνταῦθα παρατηροῦμεν ὅτι ἰσχύει ἡ ἐπιμεριστική ἰδιότης, ἥτις συνδέει εἰς τά σύνολα τήν πρᾶξιν $\cap$ (διατομή) μέ τήν πρᾶξιν $\cup$ (ἕνωσις) καί δύναται νά ἀντιστοιχηθῇ μέ τήν ἐπιμεριστικήν ἰδιότητα $2 \times (3+4) = 2\times3+2\times4$, ἥτις εἰς τό ἀριθμητικόν σύστημα συνδέει τόν πολλαπλασιασμόν μέ τήν πρόσθεσιν.

Δυνάμεθα νά ἀντιστοιχήσωμεν τήν πρᾶξιν $\cap$ (διατομή) τῶν συνόλων μέ τήν πρᾶξιν Χ (πολλαπλασιασμός) τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος, ὡσαύτως τήν πρᾶξιν $\cup$ (ἕνωσις) μέ τήν πρᾶξιν + (πρόσθεσις) τοῦ ἀριθμητικοῦ συστήματος.

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,2,4\}$, $\Gamma = \{2,4,6\}$.

Ζητεῖται νά ἐξετασθῇ ἡ σχέσις $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ ἄν εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.

Λαμβάνομεν $\{0,1,2,3\}\cup(\{0,2,4\}\cap\{2,4,6\}) = \{0,1,2,3\}\cup\{2,4\} =$
$= \{0,1,2,3,4\}$.

Ὁμοίως $(\{0,1,2,3\}\cup\{0,2,4\})\cap(\{0,1,2,3\}\cup\{2,4,6\}) =$
$=\{0,1,2,3,4\}\cap\{0,1,2,3,4,6\}=\{0,1,2,3,4\}$.

Ἐπομένως ἡ σχέσις $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ εἶναι ἀληθής. Ἄρα ὁ ἐπιμεριστικός Νόμος εἰς τά σύνολα ἰσχύει καί διά τήν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\cup$(ἕνωσις) μέ τήν πρᾶξιν $\cap$(διατομή). Ἀφοῦ παρεδέχθημεν τήν ἀντιστοιχίαν τῆς πράξεως $\cap$ μέ τήν πρᾶξιν Χ καί τῆς πράξεως $\cup$ μέ τήν πρᾶξιν + ἀριθμητικοῦ συστήματος, ὁ ἐπιμεριστικός νόμος συνδέσεως τῆς πράξεως $\cup$ μέ τήν πρᾶξιν $\cap$ δέν ἔχει ἀντιστοιχίαν εἰς τό ἀριθμητικόν σύστημα, δηλαδή

$$\alpha+(\beta X\gamma)\neq(\alpha+\beta)X(\alpha+\gamma)$$

ἐνῷ εἰς τά σύνολα $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$

Κατ'ἀκολουθίαν παρατηροῦμεν ὅτι εἰς τό ἀριθμητικόν σύστημα ἔχομεν ἕνα μόνον ἐπιμεριστικόν νόμον, ὅστις συνδέει τήν πρᾶξιν Χ ἑνός στοιχείου μέ τήν πρᾶξιν + δύο ἄλλων στοιχείων, ἤτοι $\alpha X (\beta+\gamma) = \alpha X \beta + \alpha X \gamma$, ἐνῷ εἰς τά σύνολα ἔχομεν δύο ἐπιμεριστικούς νόμους, ἕνα διά τήν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\cap$ ἑνός συνόλου μέ τήν πρᾶξιν $\cap$ δύο ἄλλων τοιούτων καί ἕνα διά τήν σύνδεσιν τῆς πράξεως $\cup$ ἑνός συνόλου μέ τήν πρᾶξιν $\cap$ δύο ἄλλων τοιούτων.

Ἀσκήσεις

73. Δίδονται τά σύνολα $A = \{2,3,4\}$, $B = \{0,1,2\}$, $\Gamma = \{\alpha,\beta\}$. Νά ἐξετασθῇ ἄν ἡ σχέσις $A\cap(B\cup\Gamma)\cap A = (A\cap B)\cup(\Gamma\cap A)$ εἶναι ἀληθής ἤ ψευδής.
74. Νά ἐξετασθῇ διά παραδείγματος μέ σύνολα δι'ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των, ἄν ἡ σχέσις $(B\cap\Gamma)\cup A = \Gamma\cap(A\cup B)$ εἶναι ἀλη-

θής ἤ ψευδής.

75. Νά εὑρεθῶσι μέ σύνολα δι'ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων τῶν αἱ σχέσεις $A\cup(A\cap B)$ καί $(A\cup B)\cap A$.

76. Νά εὑρεθῶσι μέ σύνολα δι'ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων τῶν αἱ σχέσεις $(A\cap A)\cup(A\cap A)$ καί $(A\cup A)\cap(A\cup A)$.

14. Διαφορὰ δύο συνόλων

Ἔστωσαν τά σύνολα $A=\{1,2,\alpha,\beta,\gamma\}$ καί $B=\{2,\alpha,\gamma\}$. Ἡ διαφορά τῶν δύο συνόλων Α καί Β, ἥτις σημειοῦται $A\setminus B$ (τό σύμβολον $\setminus$ ἀπαγγέλλεται μεῖον) εἶναι τό σύνολον, ὅπερ περιέχει στοιχεῖα τοῦ Α, ἅτινα δέν ἀνήκουσιν εἰς τό Β. Ἤτοι

$$A\setminus B=\{1,\beta\}$$

Ἐπομένως δυνάμεθα νά γράφωμεν

$$A\setminus B=\{\chi/\chi\in A \text{ καί } \chi\notin B\} \text{ ἤ}$$

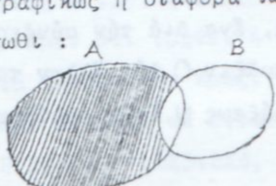
$$A\setminus B=\{\chi/\chi\in A \text{ καί } \chi\in B'\} \text{ ἤ}$$

$$A\setminus B=A\cap B'$$

Ἄν θεωρήσωμεν τό ὑπερσύνολον Σ καί A' τό συμπλήρωμα τοῦ Α, ἔχομεν $\Sigma\setminus A=A'$.

<u>Γραφική παράστασις τῆς διαφορᾶς</u>

Γραφικῶς ἡ διαφορά τῶν δύο συνόλων Α καί Β παρίσταται ὡς κάτωθι :



Τό τμῆμα τοῦ σχήματος ὅπερ σημειοῦται διά γραμμῶν εἶναι ἡ διαφορά τῶν συνόλων $A\setminus B$.

<u>Ἀσκήσεις</u> :

Νά ἀποδειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις δι'ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων τῶν συνόλων :

77. $A\setminus B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

78. $A\setminus\phi=A$

79. $B\setminus A=A'$.

80. $A \setminus A = \phi$

81. $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$.

82. $A \cap (B \setminus \Gamma) = (A \cap B) \setminus (A \cap \Gamma)$.

83. 'Εάν $B \subset A$ καί $\Gamma \subset B$ νά δειχθῆ ἡ σχέσις $(A \setminus B) \cup (B \setminus \Gamma) = (A \setminus \Gamma)$.

84. 'Εάν $B \subset A$ καί Γ τυχόν σύνολον, νά δειχθῆ ἡ σχέσις

$$(A \setminus B) \cap \Gamma = (A \cap \Gamma) \setminus (B \cap \Gamma)$$

85. Διά δύο τυχόντα σύνολα Α καί Β νά δειχθῆ ἡ σχέσις

$$A \cap B = B \setminus \{(A \cup B) \setminus A\}$$

86. 'Εάν Σ εἶναι τό ὑπερσύνολον καί Α καί Β δύο ὑποσύνολα τοῦ Σ τοιαῦτα ὥστε $B \subset A$, νά δειχθῆ ὅτι $A \setminus B = A \cap B'$, ἔνθα B' τό συμπληρωματικόν τοῦ Β.

15. Συμπλήρωμα συνόλου ὡς πρὸς ἓν ὑπερσύνολον

Θεωροῦμεν τό σύνολον $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ καί τό ὑποσύνολον αὐτοῦ $A = \{\alpha, \beta\}$. Τό σύνολον $A' = \{\gamma, \delta, \varepsilon\}$ ὅπερ περιέχει στοιχεῖα τοῦ συνόλου Σ τά ὁποῖα δέν ἀνήκουσιν εἰς τό Α καλεῖται σ υ μ π λ ή ρ ω μ α ἤ σ υ μ π λ η ρ ω μ α τ ι κ ό ν τοῦ συνόλου Α ὡς πρός τό σύνολον Σ.

'Επομένως θά ὀνομάζωμεν συμπλήρωμα ἤ συμπληρωματικόν τοῦ συνόλου Α, ὡς πρός τό ὑπερσύνολον Σ, τό σύνολον A' τό ὁποῖον περιέχει στοιχεῖα τοῦ συνόλου Σ, ἅτινα δέν περιέχονται εἰς τό Α.

Τό συμπλήρωμα τοῦ Α θά παρίσταται συνήθως ὑπό τοῦ A'.

'Εκ τούτων συμπεραίνομεν ὅτι

$$A \cap A' = \phi \quad , \quad A \cup A' = \Sigma$$

Εἰς τήν παράγραφον 9 (ὑπερσύνολον, ὑποσύνολον) ἔχομεν

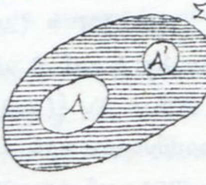
K' = συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῆς καλλιτεχνικῆς ὁμάδος Κ ὡς πρός Ρ τό ὑπερσύνολον τῶν παιδιῶν τῆς γειτονιᾶς.

Π' = συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῆς ποδοσφαιρικῆς ὁμάδος Π ὡς πρός Ρ τό ὑπερσύνολον τῶν παιδιῶν τῆς γειτονιᾶς.

Ε′= συμπλήρωμα τοῦ συνόλου τῆς ἐκδρομικῆς ὁμάδος Ε ὡς πρός Ρ τό ὑπερσύνολον τῶν παιδιῶν τῆς γειτονιᾶς.

Ὅθεν $K \cup K' = P$, $K \cap K' = \phi$, $\Pi \cup \Pi' = P$, $\Pi \cap \Pi' = \phi$, $E \cup E' = P$, $E \cap E' = \phi$.

Γραφικῶς τό συμπλήρωμα Α′ τοῦ συνόλου Α ὡς πρός τό ὑπερσύνολον Σ παρίσταται οὕτω :



Δηλαδή εἶναι τό γραμμοσκιασμένον μέρος ὅπερ ἀπομένει, ἄν ἀπό τό διάγραμμα τοῦ ὑπερσυνόλου Σ ἀφαιρεθῆ τό μέρος πού δίδει τήν παράστασιν τοῦ συνόλου Α.

Τό συμπληρωματικόν ἤ συμπλήρωμα σύνολον Α′ τοῦ Α ὡς πρός τό σύνολον Σ (παράγραφος 13) δύναται νά θεωρηθῆ καί ὡς διαφορά τῶν Σ καί Α, ἤτοι $\Sigma - A = A'$.

Τό συμπληρωματικόν σύνολον τοῦ Α ὡς πρός Σ ὑφίσταται μόνον ὅταν $A \subset \Sigma$. Δύναται νά παρασταθῆ συμβολικῶς οὕτω : $\complement A = A'$ καί ἀπαγγέλλεται "συμπλήρωμα τοῦ Α ὡς πρός τό σύνολον Σ εἶναι τό Α′".

Συνήθως τά συμπληρώματα τῶν ἐξεταζομένων συνόλων λαμβάνονται ὡς πρός ἕνα γνωστόν ἐκ τῶν προτέρων σύνολον, τό ὁποῖον περιέχει ὅλα τά ἐξεταζόμενα, ὡς ὑποσύνολα αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

87. Ἔστω Σ τό σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου καί Α τό σύνολον τῶν συμφώνων αὐτοῦ. Ζητεῖται τό συμπλήρωμα Α′ τοῦ συνόλου Α ὡς πρός τό σύνολον Σ.

88. Ἔστω τό σύνολον $\Gamma = \{1,2,3,4,5\}$ καί τά ὑποσύνολα $B = \{2,3\}$, $\Delta = \{1,4,5\}$. Νά εὑρεθῶσι τά συμπληρωματικά σύ-

νολα Β΄ καί Δ΄ τῶν συνόλων Β καί Δ ὡς πρός τό σύνολον Γ.

89. Δίδεται τό σύνολον Ε = {χ/χ φυσικός ἀριθμός ἀπό 1 ἕως καί 60}
καί τό σύνολον Ζ = {ψ/ψ ἄρτιος ἀριθμός φυσικῶν τοιούτων μέχρι καί τοῦ 60}
Ζητεῖται τό συμπλήρωμα σύνολον Ζ΄ τοῦ Ζ ὡς πρός τό σύνολον Ε.

90. Δίδεται τό σύνολον Κ = {χ/χ τετράπλευρον}
καί τό Λ = {ψ/ψ ὀρθογώνιον παραλληλόγραμμον}
Ζητεῖται τό συμπλήρωμα σύνολον Λ΄ τοῦ Λ ὡς πρός τό σύνολον Κ.

91. Δίδεται τό σύνολον Μ ={χ/χ φωνῆεν τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου}
καί τό Ν ={ψ/ψ μακρόν φωνῆεν τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου}
Ζητεῖται τό συμπλήρωμα σύνολον Ν΄ τοῦ Ν ὡς πρός τό σύνολον Μ.

92. Εἰς τήν ἄσκησιν 87 νά εὑρεθῇ τό συμπλήρωμα τοῦ συνόλου Σ ὡς πρός τόν ἑαυτόν του.

93. Εἰς τήν ἄσκησιν 88 νά εὑρεθῇ τό συμπλήρωμα τοῦ $\emptyset$ ὡς πρός τό Γ.

94. Δίδεται τό σύνολον :
Π={χ/χ τετράγωνον φυσικοῦ ἀριθμοῦ ἀπό 1 μέχρι καί τοῦ 8}
καί τό Ρ={ψ/ψ τετράγωνον φυσικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἄνω συνόλου διαιρούμενον διά 2}
Νά εὑρεθῇ τό συμπλήρωμα σύνολον Ρ΄ τοῦ συνόλου Ρ ὡς πρός τό σύνολον Π.

16. Διατεταγμένον ζεῦγος

Προηγουμένως ἐμάθομεν ὅτι, ὅταν ἔχωμεν δύο σύνολα, δυνάμεθα διά διαφόρων πράξεων, π.χ. διά τῆς ἑνώσεως καί τῆς διατομῆς των, νά σχηματίσωμεν ἐξ αὐτῶν νέα σύνολα. Τώρα θά ἴδωμεν πῶς δυνάμεθα κατ'ἄλλον τρόπον νά σχηματίσωμεν ἕν νέον σύνολον ἐκ δύο δοθέντων τοιούτων.

Ἔστω ὅτι ἔχομεν δύο ἀντικείμενα α καί β. Ταῦτα δυνάμεθα νά τακτοποιήσωμεν ἐπί μιᾶς εὐθείας γραμμῆς κατά δύο τρόπους, ἤτοι πρῶτον τό α καί κατόπιν τό β, ἤ πρῶτον τό β καί κατόπιν τό α˙ δηλαδή (α,β),(β,α).'Εάν ἔχωμεν τό κλάσμα $\frac{3}{4}$, ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τόν ἀριθμητήν 3 καί κατόπιν τόν παρονομαστήν 4.Ἤτοι δυνάμεθα νά σημειώσωμεν (3,4). Καί εἰς τά δύο ταῦτα παραδείγματα λέγομεν ὅτι ἔχομεν ἕν διατεταγμένον ζεῦγος. Δηλαδή τά (α,β),(β,α),(3,4) εἶναι διατεταγμένα ζεύγη.

Ἔστωσαν ὅτι ἔχομεν τά δύο σύνολα $A = \{\gamma,\delta\}$ καί $B=\{\varepsilon,\zeta,\eta\}$. 'Εκ τῶν δύο τούτων συνόλων δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν ἕν νέον σύνολον Γ, περιέχον τά στοιχεῖα τούτων ἀνά δύο λαμβανόμενα, ἤτοι :

$$\Gamma = \{(\gamma,\varepsilon),(\gamma,\zeta),(\gamma,\eta),(\delta,\varepsilon),(\delta,\zeta),(\delta,\eta)\}$$

Ἕκαστον τῶν ζευγῶν τοῦ συνόλου Γ καλεῖται διατεταγμένον ζεῦγος. Τό καθ'ἕν ἔχει δύο στοιχεῖα, τό μέν ἕν χαρακτηρίζεται ὡς πρῶτος μέλος, τό δέ ἕτερον ὡς δεύτερον.'Η κατάταξις τῶν δύο μελῶν τοῦ ζεύγους δηλοῦται μέ τόν τρόπον τῆς γραφῆς τούτων ἐντός τῆς παρενθέσεως. Δηλαδή πρῶτον γράφεται τό πρῶτον μέλος καί κατόπιν τό δεύτερον, χωρίζονται δέ μεταξύ των μέ ἕν κόμμα.

Παρατηροῦμεν εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα, ὅτι τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ συνόλου Γ εἶναι 6, ἤτοι 2Χ3.Τό διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) εἶναι διάφορον τοῦ συνόλου $\{\alpha,\beta\}$, τό ὁποῖον περιέχει τά δύο στοιχεῖα α καί β. Εἰς τό σύνολον $\{\alpha,\beta\}$ δέν ὑπάρχει διάκρισις τοῦ ποῖον στοιχεῖον πρέπει νά εἶναι πρῶτον καί ποῖον δεύτερον, καθ'ὅσον $\{\alpha,\beta\} = \{\beta,\alpha\}$, ἐνῷ ἀντιθέτως, θέλομεν νά ὑπάρχῃ διάκρισις μεταξύ τῶν ζευγῶν (α,β) καί (β,α).

Θά λέγωμεν ὅτι δύο διατεταγμένα ζεύγη εἶναι ἴσα, ἐάν τά πρῶτα μέλη των εἶναι ἴσα καί τά δεύτερα μέλη των ἴσα καί μόνον τότε. Ἤτοι ἐάν ἔχωμεν

$$(\gamma,\delta) = (\alpha,\beta)$$

πρέπει νά εἶναι $\gamma = \alpha$ καί $\delta = \beta$.

Πᾶν ἀριθμητικόν κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ (α καί $\beta \neq 0$) δύναται νά θεωρηθῇ ὡς διατεταγμένον ζεῦγος δύο φυσικῶν ἀριθμῶν, διότι κάμνομεν διάκρισιν α ἀριθμητής, β παρονομαστής. Τά ζεύγη (α,β), (β,α) παριστῶσιν εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἀντίστροφα κλάσματα.

Ὡσαύτως πᾶν ἄνυσμα $\overrightarrow{AB}$ κείμενον ἐπί μιᾶς εὐθείας (ε) δύναται νά θεωρηθῇ ὅτι ἀποτελεῖ ἕν διατεταγμένον ζεῦγος (A,B) δύο σημείων Α καί Β τῆς εὐθείας, ἤτοι ἕν διατεταγμένον ζεῦγος δύο σημείων τοῦ σημειοσυνόλου (ε). Καί τοῦτο διότι διακρίνομεν τό Α ὡς ἀρχήν καί τό Β ὡς πέρας.

Τά ζεύγη (A,B) καί (B,A) παριστῶσιν ἀντίθετα ἀνύσματα. Οὕτω τό $(3,4) \neq (4,3)$ διότι τό $3 \neq 4$.

τό $(3,4) \neq (3,5)$ διότι τό $4 \neq 5$.

τό $(3,4) \neq (5,4)$ διότι τό $3 \neq 5$.

Δυνάμεθα ἐνίοτε νά σχηματίσωμεν σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν ὑπό ὡρισμένην συνθήκην ἤ περιγραφήν. Π.χ. τό $\{(4,2),(2\alpha,\alpha),(6,3),(4\frac{2}{3},\frac{7}{3})\}$ εἶναι σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων τό πρῶτον μέλος εἶναι διπλάσιον τοῦ δευτέρου.

Τό $\left\{(\frac{\beta}{2},\beta),(3,6),(\frac{2}{3} : \frac{3}{4}),(1\frac{1}{5}, \frac{12}{5})\right\}$ εἶναι σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, εἰς ἕκαστον τῶν ὁποίων τό πρῶτον μέλος εἶναι τό ἥμισυ τοῦ δευτέρου.

'Ασκήσεις

95. Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{2,4,5\}$, $B = \{7,8\}$. Νά σχηματισθῇ τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τῶν δύο συνόλων Α καί Β.

96. Νά συμπληρωθῇ ἡ ἀναγραφή τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ κατωτέρω συνόλου Γ, οὕτως ὥστε τό δεύτερον μέλος ἑκάστου ζεύγους νά εἶναι διπλάσιον τοῦ πρώτου.

$$\Gamma = \left\{(;,6),(\chi,;),(4,;),(;,1\frac{3}{5})\right\}$$

97. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι διατεταγμένων ζευγῶν ἀνήκουσιν εἰς τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, εἰς τό ὁποῖον τό πρῶτον μέλος ἑκάστου ζεύγους εἶναι τά $\frac{2}{3}$ τοῦ δευτέρου : α) $(\frac{2}{3},1)$, β) $(1,\frac{2}{3})$, γ) $(2\chi,3\psi)$, δ) $(\alpha,\frac{3}{2}\alpha)$, ε) $(-6,-9)$.

98. Νά συμπληρωθῇ ἡ ἀναγραφή τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ κατωτέρω συνόλου Δ, οὕτως ὥστε τό α΄ μέλος ἑκάστου ζεύγους νά εἶναι τό τρίτον τοῦ δευτέρου :

$$\Delta = \left\{(\chi,;),(;,4),(2\frac{1}{4},;),(;,-9)\right\}$$

99. Νά ἀναγραφῇ τό σύνολον ὅλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, τῶν ὁποίων τό πρῶτον μέλος εἶναι 7 ἤ 8, τό δέ δεύτερον 8 ἤ 7.

100. Δίδονται τά σύνολα $A = \{3,4\}$, $B = \{5,6\}$. Νά σχηματισθῇ τό σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτον μέλος ἐκ τοῦ Α καί δεύτερον μέλος ἐκ τοῦ Β. Ὁμοίως νά σχηματισθῇ τό σύνολον Δ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτον μέλος ἐκ τοῦ Β καί δεύτερον μέλος ἐκ τοῦ Α. Κατόπιν νά ἐξετασθῶσιν ἄν τά σύνολα Γ καί Δ εἶναι ἴσα ἤ ὄχι.

101. Δίδονται δύο σύνολα Ε καί Ζ καί ἐκ τούτων σχηματίζεται νέον σύνολον Κ διατεταγμένων ζευγῶν, ὅπερ ἔχει 12 στοιχεῖα. Δεδομένου ὅτι τό Ε ἔχει 3 στοιχεῖα, ποῖον εἶναι τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Ζ.

102. Δίδεται τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν

$M = \{(\varkappa,4),(\varkappa,5),(\lambda,4),(\lambda,5),(\mu,4),(\mu,5)\}$

καί ζητεῖται νά ἀναγραφῶσι τά δύο σύνολα ἐκ τῶν ὁποίων ἐσχηματίσθη τοῦτο.

103. Νά συμπληρωθῇ ἡ ἀναγραφή τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ κατωτέρω συνόλου Κ, οὕτως ὥστε τό δεύτερον μέλος ἑκάστου ζεύγους νά εἶναι τά $\frac{4}{5}$ τοῦ πρώτου :

$$K = \{(\psi,;),(5,;),(;,2),(2\tfrac{1}{2},;)\}$$

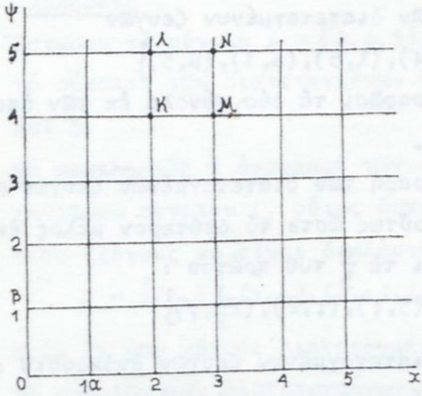
104. Ποῖα ἐκ τῶν κάτωθι διατεταγμένων ζευγῶν ἀνήκουσιν εἰς τό σύνολον διατεταγμένων ζευγῶν, εἰς τό ὁποῖον τό πρῶτον μέλος ἑκάστου ζεύγους εἶναι τά $\frac{3}{5}$ τοῦ δευτέρου : α) $(\frac{9}{5},3)$, β) $(1,\frac{3}{5})$, γ) $(\beta,\frac{5}{3}\beta)$, δ) $(-3,-8)$, ε) $(-6,-10)$.

17. Γραφική παράστασις συνόλου διατεταγμένων ζευγῶν

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{2,3\}$, $B = \{4,5\}$. Ἐκ τῶν δύο τούτων συνόλων δυνάμεθα νά σχηματίσωμεν τό σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, ἤτοι

$$\Gamma = \{(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

Γραφικῶς δυνάμεθα νά παραστήσωμεν τό σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ὡς ἑξῆς : Λαμβάνομεν δύο εὐθείας Οχ, Οψ, τεμνομένας κατ' ὀρθήν γωνίαν, αἵτινες καλοῦνται ἄξονες. Τετραγωνίζομεν τό ἐπίπεδον τῶν δύο ἀξόνων, λαμβάνοντες ἐπ' αὐτῶν ὡς μονάδα ἕν αὐθαίρετον μῆκος, τό Οα καί Οβ, ἅτινα καλοῦμεν διευθύνοντα ἀνύσματα. Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ δύναται νά παρασταθῇ μέ ἕν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, ἤτοι τό στοιχεῖον (2,4) μέ τό σημεῖον Κ, τό (2,5) μέ τό σημεῖον Λ, τό (3,4) μέ τό σημεῖον Μ καί τό (3,5) μέ τό Ν. Παρατηροῦμεν ὅτι ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος, στοιχεῖον τοῦ συνόλου Γ παρίσταται ὑπό ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων Οχ, Οψ καί ἀντιστρόφως ἕκαστον σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου παρίσταται ὑπό ἑνός διατεταγμένου ζεύγους τοῦ συνόλου Γ. Ἡ τοιαύτη παράστασις καλεῖται γραφική τοῦ συνόλου Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν.

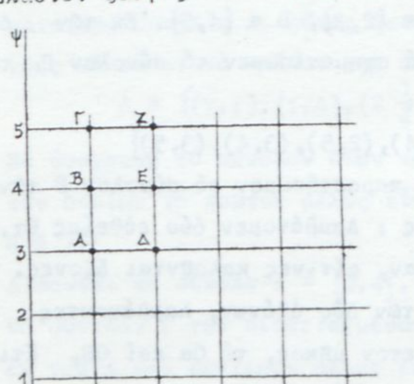


Ἔστω τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν

$$\Sigma = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}$$

ὅπερ προκύπτει ἐκ τῶν συνόλων $\Pi = \{1,2\}$, $P = \{3,4,5\}$.

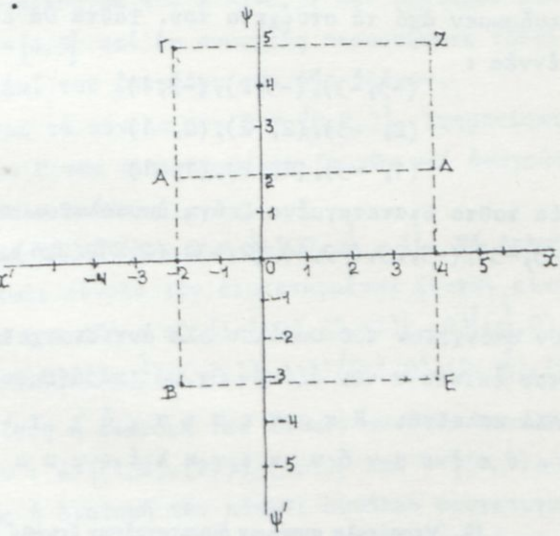
Ἕκαστον ζεῦγος τοῦ συνόλου Σ παρίσταται ἀντιστοίχως κατά σειράν ὑπό ἑνός σημείου τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων. Ἤτοι τά ἀντίστοιχα σημεῖα εἶναι Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ. Δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ὑπάρχει πλήρης ἀντιστοιχία, ἕν πρός ἕν μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου Σ καί τῶν ἕξ σημείων Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ τοῦ τετραγωνισμένου ἐπιπέδου τῶν δύο ἀξόνων. Τό πρῶτον



μέλος ἑκάστου ζεύγους παριστάνει τήν τ ε τ μ η μ έ ν η ν τοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου, τό δέ δεύτερον μέλος τήν τ ε -

τ α γ μ έ ν η ν αύτοῦ. Ἀμφότεραι ὀνομάζονται σ υ ν τ ε - τ α γ μ έ ν α ι τοῦ σημείου τοῦ ἐπιπέδου. Οἱ ἄξονες Οχ καί Οψ καλοῦνται ἄξονες τῶν συντεταγμένων καί ὁ μέν Οχ εἶναι ὁ ἄξων τῶν τετμημένων, ὁ δέ Οψ ὁ ἄξων τῶν τεταγμένων.

Ἔστωσαν τώρα τά δύο σύνολα $T = \{-2,4\}$, $T' = \{2,-3,5\}$. Ἐκ τούτων σχηματίζομεν τό σύνολον Σ΄ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, ἤτοι $Σ' = \{(-2,2),(-2,-3),(-2,5),(4,2),(4,-3),(4,5)\}$. Ζητεῖται νά εὑρεθῶσι τά σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, ἅτινα παρίστανται ὑπό τῶν διατεταγμένων ζευγῶν τοῦ ἀνωτέρω συνόλου Σ΄.



Οἱ δύο ἄξονες, διασταυρούμενοι εἰς τό σημεῖον Ο, τέμνονται εἰς δύο ἡμιάξονας. Οἱ Οχ,Οψ εἶναι οἱ θετικοί ἡμιάξονες,ἐνῷ οἱ Οχ΄,Οψ΄ οἱ ἀρνητικοί ἡμιάξονες. Τά ἀντίστοιχα σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων, τά ὁποῖα παριστῶσι τά διατεταγμένα ζεύγη τοῦ συνόλου Σ΄, εἶναι κατά σειράν Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ.

18. Καρτεσιανὸν γινόμενον ἢ Καρτεσιανὸν Κιγκλίδωμα

Θεωροῦμεν τά σύνολα $A = \{1,4,5\}$ καί $B = \{2,3\}$. Σχηματίζομεν τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτον στοιχεῖον ἐκ τοῦ A καί δεύτερον ἐκ τοῦ B, ἤτοι

$$\Gamma = \{(1,2),(1,3),(4,2),(4,3),(5,2),(5,3)\}$$

Τό σύνολον τοῦτο Γ καλεῖται Καρτεσιανόν γινόμενον τῶν συνόλων A καί B καί σημειοῦται A X B.

Δίδεται τό σύνολον $\Delta = \{-3,2,1\}$ καί ζητεῖται νά σχηματίσωμεν ὅλα τά διατεταγμένα ζεύγη τά ὁποῖα δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν ἀπό τά στοιχεῖα του. Ταῦτα θά εἶναι τά ἀκόλουθα ἐννέα :

$$(-3,-3),(-3,2),(-3,1)$$
$$(2,-3),(2,2),(2,1)$$
$$(1,-3),(1,2),(1,1)$$

Τά ἐννέα ταῦτα διατεταγμένα ζεύγη ἀποτελοῦσι τό σύνολον

$$\Delta X\Delta=\{(-3,-3),(-3,2),(-3,1),(2,-3),(2,2),(2,1),(1,-3),(1,2),(1,1)\}$$

Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ συνόλου ΔΧΔ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἕν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων Οχ,Οψ (παράγραφος 16). Τό σύνολον ΔΧΔ καλεῖται Καρτεσιανόν γινόμενον ἤ Καρτεσιανόν κιγκλίδωμα τοῦ συνόλου Δ.

19. Ὑποσύνολα συνόλων διατεταγμένων ζευγῶν

Καί εἰς τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν ἰσχύει ὁ αὐτός ὁρισμός τῶν ὑποσυνόλων.

Ἔστω τό σύνολον $A = \{2,3,4\}$. Γνωρίζομεν ὅτι

$$AXA=\{(2,2),(2,3),(2,4),(3,2),(3,3),(3,4),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

Ὑποσύνολα τοῦ συνόλου ΑΧΑ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι:

$$Y_1=\{(2,3),(2,4),(3,4)\} \subseteq A\ X\ A$$
$$Y_2=\{(3,2),(3,3),(4,3)\} \subseteq A\ X\ A \text{ κ.ο.κ.}$$

20. Διατομή συνόλων διατεταγμένων ζευγῶν

Διά τήν διατομήν τῶν συνόλων τῶν διατεταγμένων ζευγῶν, ἰσχύει ὁ αὐτός ὁρισμός τῆς διατομῆς τῶν συνόλων ἁπλῶν στοιχείων.

Ἔστω $A = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ καί $B = \{(1,0),(2,3),(3,4)\}$

Ἡ διατομή αὐτῶν εἶναι :

$A \cap B = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \cap \{(1,0),2,3),(3,4)\} = \{(2,3),(3,4)\}$.

<u>Ἀσκήσεις</u>

105. Σχηματίσατε τό σύνολον Σ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν μέ πρῶτον μέλος ἐκ τοῦ $A = \{-2,3\}$ καί δεύτερον μέλος ἐκ τοῦ $B = \{4,5\}$ καί ἐν συνεχείᾳ παραστήσατε τοῦτο γραφικῶς ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο ἀξόνων.

106. Δίδονται τά σύνολα $A = B = \{0,2,3\}$. Σχηματίσατε τό σύνολον Γ τῶν διατεταγμένων ζευγῶν καί ἀναγράψατε τά ὑποσύνολα τούτων.

107. Δίδεται τό σύνολον $\Delta = \{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\}$. Νά δηλωθῶσιν ἄν τά κάτωθι σύνολα τῶν διατεταγμένων ζευγῶν εἶναι ὑποσύνολα τοῦ $\Delta X \Delta$: α) $\{(-1,0),(0,-1)\}$, β) $\{(\frac{1}{2},0),(0,2)\}$, γ) $\{(-1,0),(1,\frac{1}{2}),(-1,1)\}$, δ) $\{(-1,0),(0,\frac{1}{2}),(\frac{1}{2},0)\}$.

108. Νά ὁρισθῇ ἡ διατομή τῶν κάτωθι συνόλων διατεταγμένων ζευγῶν : $A = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ καί $B = \{(1,2),(0,3),(3,4)\}$

109. Ὁμοίως ἡ διατομή τῶν κάτωθι συνόλων διατεταγμένων ζευγῶν : $\Gamma = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ καί $B = \{(0,1),(2,1),(4,3)\}$

110. Νά παρασταθῶσι γραφικῶς ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν ἀξόνων τά σημεῖα ὅλων τῶν στοιχείων τοῦ KXK ὅταν $K = \{-2,-1,0\}$.

111. Νά ἀναγραφῶσι καί παρασταθῶσι γραφικῶς τά Καρτεσιανά κιγκλιδώματα τοῦ συνόλου $\Lambda X \Lambda$, ὅταν $\Lambda = \{-1,-2\}$.

112. Εἰς τήν ἄσκησιν 106 παραστήσατε γραφικῶς τό ὑποσύνολον τοῦ Γ, τό ἀποτελούμενον ἀπό τά ζεύγη τῶν ὁποίων τά μέλη ἔχουσιν ἄθροισμα 5.

21. Ἰσότης καὶ ἀνισότης ἀριθμῶν

Εἰς τήν παράγραφον 8 εἴδομεν ὅτι δύο σύνολα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἔχωσι τό αὐτό πλῆθος στοιχείων (τόν αὐτόν πληθικόν ἀριθμόν) καί δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν τά στοιχεῖα τοῦ ἑνός συνόλου εἰς τά στοιχεῖα τοῦ ἄλλου ἕν πρός ἕν. Οἱ πληθικοί ἀριθμοί δύο ἰσοδυνάμων συνόλων λέγονται ἴσοι.

Ἐπομένως δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι δύο φυσικοί ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, ὅταν εἰς κάθε μονάδα τοῦ ἑνός ἀντιστοιχῇ μία μονάς τοῦ ἄλλου. Διά νά δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι ἴσοι, σημειοῦμεν μεταξύ αὐτῶν τό σύμβολον =. Οὕτω γράφομεν 4 = 4, 15 = 15. Ἡ σχέσις ἡ ὁποία συνδέει τούς δύο ἴσους ἀριθμούς καλεῖται ἰσότης καί ἀποτελεῖται ἀπό δύο μέρη, τό πρός τά ἀριστερά τοῦ συμβόλου = ὅπερ ἀποτελεῖ τό πρῶτον μέλος καί τό πρός τά δεξιά αὐτοῦ, ὅπερ ἀποτελεῖ τό δεύτερον μέλος.

Ἔστωσαν τά σύνολα Α = {α,β,γ} καί Β = {Γεώργιος, Δημήτριος, Νῖκος}. Ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα καί ἔχουσι τόν αὐτόν πληθικόν ἀριθμόν, τόν 3. Ἐπομένως ἔχομεν 3 = 3.

Λαμβάνομεν τώρα τά σύνολα Γ = {κ,λ,μ,ν}, Δ = {α,β,γ}. Τούτων ὁ πληθικός ἀριθμός δέν εἶναι ὁ αὐτός. Τό σύνολον Γ περιέχει στοιχεῖον τό ὁποῖον δέν εὑρίσκει ἀντίστοιχον στοιχεῖον εἰς τό σύνολον Δ. Εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην λέγομεν ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός 4, τοῦ πρώτου συνόλου, εἶναι μεγαλύτερος τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ 3 τοῦ δευτέρου συνόλου· καί ἀντιστρόφως, ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ δευτέρου εἶναι μικρότερος τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ τοῦ πρώτου συνόλου καί ὅτι οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι.

Ἐπομένως δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι δύο φυσικοί ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι, ἐάν αἱ μονάδες τοῦ ἑνός εἶναι περισσότεραι τῶν μονάδων τοῦ ἄλλου, δηλαδή ἄν μονάδες τοῦ ἑνός δέν ἔχωσιν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τόν ἕτερον.

Ἡ σχέσις αὕτη μεταξύ δύο ἀνίσων ἀριθμῶν καλεῖται ἀ ν ι σ ό τ η ς καί σημειοῦται μέ τά σύμβολα $\neq$ ἤ $<$, $>$. Ἤτοι ἔχομεν $4 \neq 3$, $4 > 3$ ἤ $3 < 4$. Ἀπαγγέλλεται ἡ συμβολική αὕτη γραφή τῆς ἀνισότητος κατά σειράν "4 διάφορος τοῦ 3","4 μεγαλύτερος τοῦ 3","3 μικρότερος τοῦ 4". Καί ἐδῶ διακρίνομεν τό πρῶτον μέλος, κείμενον πρός τό ἀριστερόν τοῦ συμβόλου καί τό δεύτερον μέλος κείμενον πρός τό δεξιόν αὐτοῦ.

22. Ἰδιότητες τῆς ἰσότητος καί ἀνισότητος τῶν ἀριθμῶν

Ἔστω τό σύνολον τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους :

$$A = \{\text{Ἔαρ, θέρος, Φθινόπωρον, Χειμών}\}$$

Ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου A εἶναι ὁ 4. Ἐπειδή τό σύνολον A εἶναι ἰσοδύναμον πρός τόν ἑαυτόν του, ἕπεται ὅτι καί ὁ πληθικός ἀριθμός 4 εἶναι ἴσος πρός ἑαυτόν, ἤτοι $4 = 4$. Λαμβάνομεν τώρα καί τό σύνολον $B = \{\text{Ἀθῆναι, Πάτραι, Κόρινθος, Ἄργος}\}$ ἰσοδύναμον πρός τό A. Ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου B εἶναι ἐπίσης ὁ 4. Ἐπομένως δυνάμεθα ἀδιακρίτως νά λέγωμεν, ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου A εἶναι ἴσος μέ τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ συνόλου B ἤ ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου B εἶναι ἴσος μέ τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ συνόλου A.

Ἔστω καί τό ἰσοδύναμον πρός τό B, $\Gamma = \{\kappa, \lambda, \mu, \nu\}$, τοῦ ὁποίου ὁ πληθικός ἀριθμός εἶναι ὁ 4. Ἐπειδή ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου A ἰσοῦται μέ τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ συνόλου B, καί ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ συνόλου B ἰσοῦται μέ τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ συνόλου Γ, συμπεραίνομεν εὐκόλως ὅτι ὁ πληθικός ἀριθμός τοῦ A ἰσοῦται μέ τόν πληθικόν ἀριθμόν τοῦ Γ.

Καί οὕτω ἔχομεν τάς βασικάς ἰδιότητας τῆς ἰσότητος μεταξύ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Τάς αὐτάς ἰδιότητας συνηντήσαμεν εις τάς παραγράφους 7 καί 8 τῶν ἴσων καί ἰσοδυνάμων συνόλων.

'Εάν παραστήσωμεν διά τῶν γραμμάτων α,β,γ τούς πληθικούς ἀριθμούς τῶν συνόλων Α,Β,Γ ἀντιστοίχως, ἔχομεν :

α)'Ανακλαστική ἰδιότης : Πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός ἰσοῦται μέ τόν ἑαυτόν του : $\alpha = \alpha$.

β) Συμμετρική ἰδιότης :"Αν εἷς ἀκέραιος ἀριθμός α εἶναι ἴσος πρός ἕτερον β, τότε καί ὁ β εἶναι ἴσος πρός τόν α :

$$\alpha = \beta \Longrightarrow \beta = \alpha$$

γ) Μεταβατική ἰδιότης :"Αν εἷς ἀκέραιος ἀριθμός α εἶναι ἴσος πρός ἄλλον β, ὁ δέ β εἶναι ἴσος πρός ἕτερον γ, τότε καί ὁ ἀριθμός α ἰσοῦται πρός τόν γ :

$$(\alpha = \beta \text{ καί } \beta = \gamma) \Longrightarrow \alpha = \gamma.$$

"Οσον ἀφορᾷ εἰς τήν ἀνισότητα τῶν ἀριθμῶν συμπεραίνομεν ὅτι ἐκ τῶν τριῶν ἀνωτέρω ἰδιοτήτων, μόνον ἡ μεταβατική τοιαύτη ἰσχύει καί δι'ἀνισότητα μιᾶς ὡρισμένης φορᾶς, ἤτοι τήν $<$ ἤ τήν $>$. Πράγματι ἔχομεν :

$$(5 < 7 \text{ καί } 7 < 10) \Longrightarrow 5 < 10$$

$$\text{καί } (9 > 4 \text{ καί } 4 > 2) \Longrightarrow 9 > 2$$

Δηλαδή ἐάν εἷς ἀριθμός α εἶναι μικρότερος ἤ μεγαλύτερος ἑνός ἄλλου ἀριθμοῦ β καί ὁ β εἶναι μικρότερος ἤ μεγαλύτερος ἑνός ἄλλου ἀριθμοῦ γ, τότε ὁ ἀριθμός α εἶναι μικρότερος ἤ μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ γ."Ητοι

$$(\alpha < \beta \text{ καί } \beta < \gamma) \Longrightarrow \alpha < \gamma$$

$$\text{ἤ } (\alpha > \beta \text{ καί } \beta > \gamma) \Longrightarrow \alpha > \gamma.$$

23. Σύνολα ἀκεραίων ἀριθμῶν

"Εστω ἕν σύνολον μονομελές $A = \{\alpha\}$. 'Ο πληθικός ἀριθμός τοῦ μονομελοῦς τούτου συνόλου εἶναι ὁ 1 καί λέγεται ἀ κ ε ρ α ί α μ ο ν ά ς. 'Εάν ἔχωμεν τό διμελές σύνολον $B = \{\beta, \gamma\}$, ὁ πληθικός ἀριθμός τούτου εἶναι ὁ 2. Οὗτος ἀπαρτίζεται ἀπό δύο ἀκεραίας μονάδας. Προχωροῦντες οὕτω παρατηροῦμεν ὅτι τό τριμελές σύνολον ἔχει πληθικόν ἀριθμόν τόν 3 κ.ο.κ. Δυνάμεθα ὅθεν νά σχηματίσωμεν ἀπεριορίστως νέον φυσικόν ἀριθμόν, ἀρκεῖ εἰς τάς μονάδας αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦσιν ἕνα τοιοῦτον ἀριθμόν νά προσθέσωμεν μίαν ἤ περισσοτέρας ἀκεραίας μονάδας. Ἐπομένως τό πλῆθος τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἶναι μή πεπερασμένον, ἤτοι ἀπεριόριστον.

Ἔστω τό σύνολον Κ = {1,2,3,4,5,...}, ὅπερ ἔχει στοιχεῖα ἀπεριόριστα. Αἱ τρεῖς τελεῖαι εἰς τό τέλος δηλοῦσιν ὅτι ἀκολουθεῖ ἀπεριόριστος σειρά τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Τό σύνολον τοῦτο λέγεται ἀ π ε ι ρ ο σ ύ ν ο λ ο ν καί δηλοῖ τήν σειράν τοῦ ἀπείρου πλήθους τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Ἐάν λάβωμεν τό σύνολον Γ = {2,3,5,6,7}. Τοῦτο ἔχει ὡρισμένον πλῆθος στοιχείων, δι'ὅ καλεῖται π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν σ ύ ν ο λ ο ν. Ἀπειροσύνολα εἶναι καί τά ἑξῆς. Π.χ. τό σύνολον τῶν ἀρτίων φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολον τῶν περιττῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς γραμμῆς, τό σύνολον τῶν σημείων μιᾶς ἐπιφανείας ἤ τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός στερεοῦ.

Οἱ φυσικοί ἀριθμοί χρησιμοποιοῦνται ὄχι μόνον ὅταν πρόκειται νά εὕρωμεν τό πλῆθος τῶν στοιχείων ἑνός πεπερασμένου συνόλου, δηλαδή ὡς πληθικοί ἀριθμοί, ἀλλά καί ὅταν πρόκειται νά κατατάξωμεν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου εἰς μίαν σειράν, δηλαδή ὡς ἀριθμοί διατάξεως. Π.χ. ὅταν πρόκειται νά διατάξωμεν τά θρανία μιᾶς αἰθούσης διδασκαλίας, λέγομεν, πρῶτον, δεύτερον, τρίτον κ.ο.κ.

Λαμβάνομεν τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν

Κ = {1,2,3,4,...}

Τό ἀπειροσύνολον τοῦτο εἶναι διατεταγμένον κατ'αὔξουσαν σειράν τῶν στοιχείων του. Τό πρῶτον στοιχεῖον τῆς διατάξεως 1 εἶναι τό μικρότερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου. Τελευταῖον στοιχεῖον δέν ὑπάρχει εἰς τήν διάταξιν, ἐφ᾿ὅσον τό πλῆθος τῶν στοιχείων τοῦ Κ εἶναι ἀπεριόριστον. Κατά συνέπειαν τό σύνολον Κ δέν ἔχει μέγιστον στοιχεῖον. Ἐκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι εἰς ἕν μή πεπερασμένον σύνολον ὑπάρχει πάντοτε ἐλάχιστον στοιχεῖον, οὐχί ὅμως καί μέγιστον.

Ἔστω τό σύνολον $Λ = \{2,5,3,8,6,4\}$. Δυνάμεθα νά κατατάξωμεν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Λ, ὅπερ εἶναι πεπερασμένον κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ἤτοι $Λ = \{2,3,4,5,6,8\}$

ἤ κατά τάξιν φθίνοντος μεγέθους ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ἤτοι $Λ = \{8,6,5,4,3,2\}$

Καί εἰς μέν τήν πρώτην περίπτωσιν, τό πρῶτον στοιχεῖον εἶναι ὁ 2, μικρότερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου, καί τελευταῖον στοιχεῖον ὁ 8, μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα, εἰς δέ τήν δευτέραν περίπτωσιν τό πρῶτον στοιχεῖον εἶναι ὁ 8, μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα τοῦ συνόλου, καί τελευταῖον ὁ 2, μικρότερον ἀπό ὅλα τά ἄλλα στοιχεῖα.

<u>Ἀσκήσεις</u>

113. Ποῖος εἶναι ὁ μικρότερος καί ποῖος ὁ μεγαλύτερος τετραψήφιος ἀριθμός, ὅστις δύναται νά γραφῆ μέ τά ψηφία 3,1,6,4.

114. Νά γραφῶσι κατά τάξιν αὐξάνοντος μεγέθους ὅλοι οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί, οἵτινες σχηματίζονται μέ τά ψηφία 4,6,9.

115. Νά εὑρεθῆ ὁ μικρότερος τριψήφιος ἀριθμός καί ὁ μεγαλύτερος.

116. Ὁ Α ἔχει τήν ἡλικίαν τοῦ Β, ὁ δέ Β ἔχει τήν ἡλικίαν τοῦ Γ, ὅστις εἶναι 37 ἐτῶν. Ποία εἶναι ἡ ἡλικία τοῦ Α;

24. Διαμερισμός συνόλου

Ἔστω Α τό σύνολον τῶν γραμμάτων τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου. Τό σύνολον τοῦτο ἔχει ὑποσύνολα α) τό σύνολον Β τῶν συμφώνων καί β) τό σύνολον Γ τῶν φωνηέντων. Ἤτοι ἔχομεν :

$A = \{\chi / \chi$ γράμμα τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου$\}$

$B = \{\psi / \psi$ σύμφωνον τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου$\}$

$\Gamma = \{\varphi / \varphi$ φωνῆεν τοῦ Ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου$\}$

Τά δύο ὑποσύνολα Β καί Γ εἶναι ξένα μεταξύ των. Ἡ ἕνωσις αὐτῶν δίδει τό ἀρχικόν σύνολον Α. Τό σύνολων τῶν δύο συνόλων Β καί Γ ἀποτελεῖ τόν δ ι α μ ε ρ ι σ μ ό ν τοῦ συνόλου Α.

Ἑπομένως δ ι α μ ε ρ ι σ μ ό ς ἑνός συνόλου Α, μή κενοῦ, θά λέγεται τό σύνολον τῶν ὑποσυνόλων του, μή κενῶν καί ξένων μεταξύ των, ἅτινα ἔχουσιν ὡς ἕνωσιν τό δοθέν σύνολον Α.

Ἔστω τό σύνολον $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon\}$ καί τά ὑποσύνολά του $\Lambda = \{\alpha, \beta\}$, $M = \{\gamma\}$, $N = \{\delta, \varepsilon\}$. Ἔχομεν

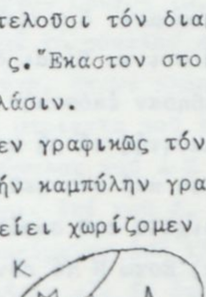
$$\Lambda \subset K \ , \ M \subset K \ , \ N \subset K$$

$$\Lambda \cap M = M \cap N = \Lambda \cap N = \Phi$$

$$\Lambda \cup M \cup N = K$$

Τά ὑποσύνολα ἅτινα ἀποτελοῦσι τόν διαμερισμόν ἑνός συνόλου καλοῦνται κ λ ά σ ε ι ς. Ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ ὑποσυνόλου ἀνήκει εἰς τήν αὐτήν κλάσιν.

Διά νά παραστήσωμεν γραφικῶς τόν διαμερισμόν συνόλου, λαμβάνομεν μίαν κλειστήν καμπύλην γραμμήν καί εἰς τό ἐπίπεδον τό ὁποῖον περικλείει χωρίζομεν τόσα τμήματα, ὅσα τά ὑποσύνολα. Π.χ.



'Ασκήσεις

117. Έστω τό σύνολον τῶν τετραπλεύρων ἐπιπέδων σχημάτων. Νά ὁρισθῶσιν αἱ κλάσεις τοῦ συνόλου τούτου.

118. Εἰς τό σύνολον τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους νά ὁρισθῶσιν αἱ κλάσεις τοῦ συνόλου τούτου.

119. Εἰς τό σύνολον τῶν κατοίκων μιᾶς πόλεως ὁρίσατε διαφόρους τρόπους διαμερισμοῦ τοῦ συνόλου.

120. Εἰς τό σύνολον τῶν ὀπωροφόρων δένδρων ἑνός κήπου, νά ὁρισθῶσι διάφοροι κλάσεις αὐτοῦ.

25. Δυαδικαί σχέσεις

Θεωροῦμεν τό σύνολον τῶν μαθητῶν

X ={Γεώργιος, Δημήτριος, Πᾶνος, Νῖκος, Χρῖστος}

καί τό σύνολον τῶν πόλεων

Ψ ={'Αθῆναι, Πάτραι, Μεσολόγγιον, Λαμία, Λάρισα}.

Εἶναι δυνατόν μαθητής τοῦ συνόλου X νά μετέβη ἐκδρομήν εἰς πόλιν τινά τοῦ συνόλου Ψ. Δηλαδή α στοιχεῖον ἀνῆκον εἰς τό σύνολον X συνδέεται μέ στοιχεῖον β ἀνῆκον εἰς τό σύνολον Ψ, ($\alpha \in X$, $\beta \in \Psi$) μέ τήν σχέσιν "ὁ μαθητής μετέβη ἐκδρομήν εἰς τινα πόλιν". 'Επομένως ὑπάρχει σχέσις συνδέουσα δύο τυχόντα στοιχεῖα τῶν συνόλων X καί Ψ. Τήν σχέσιν ταύτην σημειοῦμεν συμβολικῶς $\alpha R \beta$ καί καλοῦμεν δ υ α δ ι κ ή ν σ χ έ σ ι ν ἤ δ ι μ ε λ ῆ σ χ έ σ ι ν. Εἶναι δυνατόν δύο ἤ περισσότεροι μαθηταί νά μετέβησαν ἐκδρομήν εἰς τήν ἰδίαν πόλιν. Ὅπως εἶναι δυνατόν μαθητής νά μή μετέβη εἰς πόλιν ἐκδρομήν. 'Επομένως ὑπάρχουσι καί στοιχεῖα τοῦ συνόλου X, ἅτινα δέν συνδέονται μέ στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ψ.

Παραδείγματα : α) Ἔστω Ν τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί (α,β) τυχόν διατεταγμένον ζεῦγος τῶν στοιχείων τοῦ Ν. 'Εάν ὁ πρῶτος α τῶν δύο ἀριθμῶν διαιρῇ τόν δεύτερον β, λέγομεν ὅτι συνδέεται ὁ α μέ τόν β διά τῆς δυαδικῆς σχέσεως.

β)"Εστω Σ τό σύνολον τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου καί Ο ἕν σταθερόν σημεῖον αὐτοῦ. Τότε εἰς ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (Α,Β) σημείων τοῦ ἐπιπέδου, δυνάμεθα νά διακρίνωμεν ἄν τό πρῶτον σημεῖον Α ἀπέχῃ τοῦ Ο περισσότερον παρά τό δεύτερον Β ἤ ὄχι.'Η ἰδιότης αὔτη εἶναι μία δυαδική σχέσις τῶν σημείων Α καί Β.

γ)"Εστω Κ τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν."Εν διατεταγμένον ζεῦγος (χ,ψ) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ Κ πληροῖ τήν ἰσότητα 2χ+4ψ-10 = 0. Τοῦτο εἶναι μία δυαδική σχέσις."Εκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (χ,ψ) τοῦ Κ ἤ τήν πληροῖ ἤ δέν τήν πληροῖ. Π.χ. τό διατεταγμένον ζεῦγος (1,2) τήν πληροῖ, ἐνῷ τό (2,1) δέν τήν πληροῖ.

δ)"Εστω Ε σύνολον καί Α ἕν ὑποσύνολν τοῦ Ε. Μία δυαδική σχέσις R μεταξύ τῶν στοιχείων τοῦ Ε εἶναι ἡ ἑξῆς "ἕν ζεῦγος (α,β),(α∈Ε,β∈Ε) πληροῖ τήν σχέσιν R, ἄν ἀμφότερα τά στοιχεῖα α,β, ἀνήκουσιν εἰς τό Α". Πράγματι τό τυχόν διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) ἤ ἔχει τήν ἰδιότητα αὐτήν ἤ δέν τήν ἔχει.

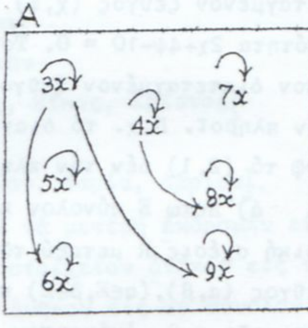
"Εκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) ἐκ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου Α ἀνήκει καί τό σύνολον Α Χ Α (παράγραφος 18). Διά τοῦτο ἅπαντα τά ζεύγη, ἅτινα πληροῦσι μίαν οἱανδήποτε δυαδικήν σχέσιν, εἶναι στοιχεῖα τοῦ Α Χ Α καί κατά συνέπειαν ἀποτελοῦσιν ἕν ὑποσύνολον τοῦ Α Χ Α, ἔστω τό Υ. Δηλαδή εἰς πᾶσαν δυαδικήν σχέσιν ἐπί τοῦ Α, ἀντιστοιχεῖ ἕν ὑποσύνολον Υ τοῦ Α Χ Α, συγκείμενον ἀπό τά ζεῦγη, ἅτινα πληροῦσι τήν σχέσιν.'Αντιστρόφως εἰς ἕν ὑποσύνολον Υ τοῦ ΑΧΑ ὁρίζεται μία δυαδική σχέσις ἐπί τοῦ Α, διότι πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος τοῦ Α ἤ θά ἀνήκῃ εἰς τό Υ, ὁπότε πληροῦται ἡ σχέσις ἤ δέν ἀνήκει, ὁπότε δέν πληροῦται. Ἐπομένως ἐπί τοῦ συνόλου A ὁρίζεται μία δυαδική σχέσις, ὅταν δοθῇ ἕν ὑποσύνολον τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου A X A.

26. Γραφική παράστασις τῆς δυαδικῆς ἤ διμελοῦς σχέσεως

Ἔστω τό σύνολον A = $\{3,4,5,6,7,8,9\}$. Ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει ἡ δυαδική σχέσις R = "χ∈A διαιρεῖ ψ∈A". Συμβολικῶς τήν τοιαύτην σχέσιν δυνάμεθα νά παραστήσωμεν κατά τούς δύο ἑπομένους τρόπους (σχῆμα 1ον) καί (σχῆμα 2ον).

	3	4	5	6	7	8	9
3	×			×			×
4		×				×	
5			×				
6				×			
7					×		
8						×	
9							×

Σχῆμα 1ον



Σχῆμα 2ον

Ἐπειδή ἕκαστος ἀριθμός διαιρεῖται διά τοῦ ἑαυτοῦ του, εἰς τό σχῆμα 2ον παρίσταται ἡ σχέσις αὐτη διά βέλους, ὅπερ στρεφόμενον γυρίζει πάλιν εἰς τό ἴδιον στοιχεῖον. Εἰς τήν παράγραφον 25 ὑποθέτομεν ὅτι ὑπάρχει ἡ ἀκόλουθος δυαδική σχέσις :

ὁ Γεώργιος μετέβη εἰς Πάτρας

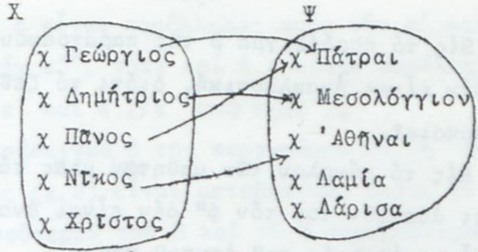
ὁ Δημήτριος " " Μεσολόγγιον

ὁ Πᾶνος " " Πάτρας

ὁ Νῖκος " " Ἀθήνας

ὁ Χρῖστος -

Συμβολικῶς ἡ σχέσις παρίσταται :



'Από στοιχεῖα τοῦ συνόλου X ξεκινοῦσι βέλη, τά ὁποῖα κατευθύνονται πρός τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου Ψ μέ τά ὁποῖα σχετίζονται.'Από ἕκαστον πρῶτον μέλος στοιχεῖον τῆς σχέσεως, ἀναχωρεῖ ἕν μόνον βέλος, ἐνῷ ὑπάρχουν δεύτερα μέλη στοιχείων ὅπου καταλήγουσιν δύο βέλη (Πάτραι).

27. Ἰδιότητες δυαδικῶν σχέσεων μεταξὺ στοιχείων ἑνὸς συνόλου

Ὅπως διακρίνομεν ὡρισμένας ἰδιότητας εἰς τά σύνολα,οὕτω καί ἐνταῦθα δυνάμεθα νά ἔχωμεν τοιαύτας, εἰς τάς δυαδικάς σχέσεις μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνός συνόλου.

1. Σχέσις ἀνακλαστική

Θά λέγωμεν ὅτι μία δυαδική σχέσις R εἶναι ἀ ν α κ λ α σ τ ι κ ή, ἄν ἕκαστον στοιχεῖον χ τοῦ συνόλου Α εἶναι χRχ, δηλαδή ἕκαστον στοιχεῖον σχετίζεται πρός ἑαυτό.

Παραδείγματα : α) Εἰς τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν Σ ={1,2,3,4,5,...} ἡ σχέσις "ὁ 3 διαιρεῖ τόν 3" εἶναι ἀνακλαστική, διότι ἕκαστος φυσικός ἀριθμός διαιρεῖ τόν ἑαυτόν του.

β) Εἰς τό σύνολον Π τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου δυνάμεθα νά καθορίσωμεν τήν δυαδικήν σχέσιν : Τά σημεῖα Α καί Β νά κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας Οχ τοῦ ἐπιπέδου.'Η σχέσις αὕτη εἶναι ἀνακλαστική, διότι πληροῦται ἀπό ἕν ζεῦγος συμπιπτόντων σημείων (Α, Α).

γ) Εἰς τό παράδειγμα β τῆς παραγράφου 25, ἡ δυαδική σχέσις δέν εἶναι ἀνακλαστική, διότι τό ζεῦγος (Α,Α) δέν τήν ἱκανοποιεῖ.

δ) Εἰς τό σύνολον τῶν μαθητῶν μιᾶς τάξεως ἡ σχέσις "ὁ χ ἔχει ἀδελφόν του τόν ψ" δέν εἶναι ἀνακλαστική, διότι οὐδείς εἶναι ἀδελφός τοῦ ἑαυτοῦ του.

2. <u>Σχέσις συμμετρική</u>

Θά λέγωμεν ὅτι μία δυαδική σχέσις R εἶναι συμμετρική, ἄν δι'ἕκαστον διατεταγμένον ζεῦγος (χ,ψ) τοῦ ΑΧΑ συνόλου, ὅπου ὑπάρχει χRψ, ἰσχύει καί ψRχ.

<u>Παραδείγματα</u> : α)"Αν ὑπάρχη ἡ ἰσότης δύο στοιχείων α = β, θά εἶναι καί β = α.

β)'Εάν εἰς σύνολον παιδιῶν τό χ παιδίον εἶναι ἀδελφός τοῦ ψ, τότε καί τό ψ παιδίον εἶναι ἀδελφός τοῦ χ.

γ) Εἰς σύνολον δύο παραλλήλων εὐθειῶν, ἄν ἡ ε εὐθεῖα εἶναι παράλληλος τῇ ε΄, τότε καί ἡ ε΄ εἶναι παράλληλος τῇ ε.

δ) Εἰς τό σύνολον Π τῶν σημείων ἑνός ἐπιπέδου τά σημεῖα Α καί Β κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς ἡμιευθείας Οχ."Αρα πληροῦται μία δυαδική σχέσις τούτων.'Ασφαλῶς ἡ σχέσις αὕτη εἶναι συμμετρική, διότι, ἄν τό ζεῦγος (Α,Β) τῶν σημείων τήν ἱκανοποιῇ, τότε καί τό (Β,Α) τήν ἱκανοποιεῖ ὡσαύτως.

ε) Εἰς τό παράδειγμα β τῆς παραγράφου 25, ἡ σχέσις δέν εἶναι συμμετρική, διότι ἄν τό ζεῦγος (Α,Β) τήν ἱκανοποιῇ, τότε τό ζεῦγος (Β,Α) δέν τήν ἱκανοποιεῖ.

3. <u>Σχέσις μεταβατική</u>

Θά λέγωμεν ὅτι μία δυαδική σχέσις R εἶναι μεταβατική, ἄν αRβ καί βRγ, τότε αRγ.

<u>Παραδείγματα</u> : α)"Εστω α > β καί β > γ. Τότε ἰσχύει α > γ.

Π.χ. 10 > 7 , 7 > 4 , 10 > 4.

β)"Αν εὐθεῖα ε εἶναι παράλληλος πρός τήν ε΄ καί ἡ ε΄ παράλληλος πρός τήν ε΄΄, τότε καί ἡ ε εἶναι παράλληλος πρός τήν ε΄΄, ἤτοι ε//ε΄ καί ε΄//ε΄΄$\Longrightarrow$ε//ε΄΄.

γ) Εἰς τό παράδειγμα β τῆς παραγράφου 25, ἡ δυαδική σχέσις τοῦ ζεύγους (Α,Β) εἶναι μεταβατική, διότι ἄν τό Α ἀπέχῃ τοῦ Ο περισσότερον τοῦ Β καί τό Β περισσότερον τοῦ Γ, τότε τό Α ἀπέχει περισσότερον τοῦ Γ : ἤτοι ΟΑ$>$ΟΒ καί ΟΒ$>$ΟΓ$\Longrightarrow$ΟΑ$>$ΟΓ.

δ)'Η σχέσις τῆς μητρότητος δέν εἶναι μεταβατική."'Η "Αννα εἶναι μήτηρ τῆς Καλλιόπης καί ἡ Καλλιόπη εἶναι μήτηρ τῆς Μαρίας", τότε προφανῶς ἡ "Αννα δέν εἶναι μήτηρ τῆς Μαρίας.

ε)'Η σχέσις τῆς καθετότητος εὐθειῶν δέν εἶναι μεταβατική."Αν εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος τῇ ε΄ καί ἡ ε΄ κάθετος τῇ ε΄΄, δέν εἶναι προφανῶς ἡ ε κάθετος τῇ ε΄΄.

4. Σχέσις ἀντισυμμετρική

Θά λέγωμεν μίαν σχέσιν ἀντισυμμετρικήν, ὅταν

$$\{\alpha R\beta, \beta R\alpha\} \Longrightarrow \alpha = \beta$$

Δηλαδή ἐάν ἕν ζεῦγος (α,β) πληροῖ τήν σχέσιν, τό (β,α) δέν τήν πληροῖ, ἐκτός ἐάν ὑπάρχῃ ἡ περίπτωσις καθ'ἥν α = β.

Παραδείγματα : α)'Εἰς τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν, ἄν λάβωμεν τήν σχέσιν $\alpha \leqslant \beta$ καί $\beta \leqslant \alpha$ θά εἶναι α = β

β)'Επί τοῦ συνόλου Ν τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, ἔστω τό ζεῦγος (α,β), ἕν διατεταγμένον ζεῦγος τῶν στοιχείων αὐτοῦ. "Αν ὁ α διαιρῇ τόν β καί ὁ β διαιρῇ τόν α, τότε πρέπει νά ἔχωμεν α = β.

γ)'Εάν Α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ Β καί Β ὑποσύνολον τοῦ Α, τότε ἔχομεν Α = Β."Ητοι $A \subseteq B$ καί $B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

δ) Εἰς τό παράδειγμα β τῆς παραγράφου 2 (συμμετρική σχέσις) ἡ σχέσις "ὁ χ εἶναι ἀδελφός τοῦ φ" δέν εἶναι ἀντισυμμετρική, διότι ἄν ὁ χ εἶναι ἀδελφός τοῦ ψ καί ὁ ψ ἀδελφός τοῦ χ, δέν συνεπάγεται ὅτι χ = ψ.

ε) Εἰς τό παράδειγμα δ τῆς ἰδίας ὡς ἄνω παραγράφου 2, ἡ δυαδική σχέσις τοῦ ζεύγους (Α,Β), ἥτις εἶναι συμμετρική, δέν εἶναι δυνατόν νά εἶναι καί ἀντισυμμετρική.

28. Σχέσις ἰσοδυναμίας

Μία δυαδική σχέσις R ἐπί συνόλου Α θά λέγεται σ χ έ σ ι ς ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς ἐπί τοῦ Α, ὅταν εἶναι ἀνακλαστική, μεταβατική καί συμμετρική. Π.χ. ἐάν ἔχωμεν τό ζεῦγος (α,β) στοιχείων τοῦ συνόλου Α, ἔνθα $\alpha \in A$, $\beta \in B$, ἅτινα συνδέονται διά μιᾶς σχέσεως ἰσοδυναμίας R, σημειοῦμεν $\alpha \sim \beta$ (α ἰσοδύναμον πρός τό β) ἀντί $\alpha R \beta$. Τά στοιχεῖα α καί β εἰς τήν περίπτωσιν ταύτην καλοῦνται ἰ σ ο δ ύ ν α μ α. Κατά συνέπειαν αἱ τρεῖς ἰδιότητες τῆς ἰσοδυναμίας σημειοῦνται ὡς ἑξῆς :

'Ανακλαστική : $\alpha \sim \alpha$

Μεταβατική : $\alpha \sim \beta$ καί $\beta \sim \gamma \Longrightarrow \alpha \sim \gamma$

Συμμετρία : $\alpha \sim \beta \Longrightarrow \beta \sim \alpha$

<u>Παραδείγματα</u> : α) Λαμβάνομεν τό σύνολον Α ὅλων τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου. Δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν ὡς σχέσιν ἰσοδυναμίας δύο στοιχεῖα α καί β τοῦ συνόλου Α (ἤτοι δύο εὐθειῶν) τήν παραλληλίαν. ῎Ητοι "$\alpha \sim \beta$, ὅταν α καί β εἶναι παράλληλοι (α//β)". Ἡ σχέσις τῆς παραλληλίας εἶναι ἀνακλαστική (πᾶσα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρός ἑαυτήν), εἶναι μεταβατική (α//β καί β//γ $\Longrightarrow$ α//γ) καί προφανῶς συμμετρική. ῞Απασαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ συνόλου Α, αἵτινες εἶναι παράλληλοι πρός μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε, ἀποτελοῦσιν ἕν σύνολον, ὅπερ καλεῖται κ λ ά σ ι ς ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς. Αὗται εἶναι ἰσοδύναμοι πρός τήν ε ἀπό ἀπόψεως διευθύνσεως.

Ἑκάστη τῶν παραλλήλων τούτων εἶναι καί εἷς ἀντιπρόσωπος τῆς κοινῆς διευθύνσεως καί καθορίζει αὐτήν, ὡς καί πᾶσαν τήν κλάσιν τῶν παραλλήλων.

β) Ἔστω τό σύνολον K τῶν συμμέτρων ἀριθμῶν τῆς Ἀλγέβρας, ἤτοι τῶν κλασμάτων $\frac{\kappa}{\lambda}$, ἔνθα κ,λ εἶναι ἀκέραιοι καί $\lambda \neq 0$. Ὁρίζομεν τήν ἑξῆς σχέσιν ἰσοδυναμίας : Δύο κλάσματα, $\frac{\kappa}{\lambda}$ καί $\frac{\kappa'}{\lambda'}$, εἶναι ἰσοδύναμα, ὅταν πληροῦται ἡ ἰσότης $\kappa\lambda' = \kappa'\lambda$, ἤτοι $\frac{\kappa}{\lambda} \sim \frac{\kappa'}{\lambda'}$, ὅταν $\kappa\lambda' = \kappa'\lambda$. Πράγματι ἡ σχέσις αὕτη εἶναι α) ἀνακλαστική ($\frac{\kappa}{\lambda} \sim \frac{\kappa}{\lambda}$, διότι εἶναι $\kappa\lambda = \kappa\lambda$), β) εἶναι μεταβατική ($\frac{\kappa}{\lambda} \sim \frac{\kappa'}{\lambda'}$ καί $\frac{\kappa'}{\lambda'} \sim \frac{\kappa''}{\lambda''} \Longrightarrow \kappa\lambda' = \kappa'\lambda$ καί $\kappa'\lambda'' = \kappa''\lambda' \Longrightarrow (\kappa\lambda')(\kappa'\lambda'') = (\lambda\kappa')(\kappa''\lambda') \Longrightarrow (\kappa\lambda'')(\kappa'\lambda') = (\lambda\kappa'')(\kappa'\lambda') \Longrightarrow \kappa\lambda'' = \lambda\kappa'' \Longrightarrow \frac{\kappa}{\lambda} \sim \frac{\kappa''}{\lambda''}$) καί γ) προφανῶς συμμετρική. Κατ' ἀκολουθίαν εἶναι πράγματι σχέσις ἰσοδυναμίας.

Πάντα τά κλάσματα, ἰσοδύναμα πρός τρίτον, ἀποτελοῦσι μίαν κλάσιν ἰσοδυναμίας, ἥτις καθορίζει ἕνα καί τόν αὐτόν σύμμετρον ἀριθμόν. Οἱονδήποτε τούτων τῶν ἰσοδυνάμων κλασμάτων εἶναι εἷς ἀντιπρόσωπος τῆς κλάσεως καί προσδιορίζει αὐτήν. Εἰς τήν πρᾶξιν τό σύμβολον $\sim$ ἀντικαθίσταται ὑπό τοῦ συμβόλου =.

29. Σχέσις τάξεως

Μία δυαδική σχέσις ὡρισμένη ἐπί ἑνός συνόλου A λέγεται σ χ έ σ ι ς τ ά ξ ε ω ς ἐπί τοῦ A, ἄν συμβαίνη νά εἶναι ἀνακλαστική, μεταβατική καί ἀντισυμμετρική, ἤτοι ἄν ἔχη τάς τρεῖς ἰδιότητας : 1) $\alpha R \alpha$ (ἀνακλαστική), 2) $\alpha R \beta$ καί $\beta R \gamma \Longrightarrow \alpha R \gamma$ (μεταβατική) καί 3) $\alpha R \beta$ καί $\beta R \alpha \Longrightarrow \alpha = \beta$ (ἀντισυμμετρική). Λέγομεν τότε ὅτι ἡ δυαδική σχέσις διατάσσει τό σύνολον A ἤ ὅτι τό A εἶναι σύνολον διατεταγμένον ὑπό τῆς R. Τοιαύτην σχέσιν παρατηροῦμεν εἰς τήν παράγραφον 25, παράδειγμα α', ἔνθα ἐπί τοῦ συνόλου N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν εἰς τό διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) ὁ α διαιρεῖ τόν β.

30. Σχέσις ὁλικῆς τάξεως

Μία σχέσις τάξεως ἐπί ἑνός συνόλου Α δέν ἐπιτρέπει πάντοτε νά διατάξωμεν ὅλα τά ζεύγη. Ἐάν ἡ σχέσις τάξεως R εἶναι τοιαύτη, ὥστε διά κάθε ζεῦγος (α,β) νά ἰσχύῃ, τότε ἡ σχέσις R λέγεται σ χ έ σ ι ς ὁ λ ι κ ῆ ς τ ά ξ ε ω ς καί τό σύνολον Α καλεῖται ὁλικῶς διατεταγμένον ὑπό τῆς δυαδικῆς σχέσεως R. Π.χ. τό σύνολον N τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, εἰς ὅ παρατηρεῖται ἡ σχέσις $\leqslant$ εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένον. Πράγματι ἄν $\alpha\in N$ καί $\beta\in N$, θά ἔχωμεν

$\alpha\leqslant\beta$ ἤ $\beta\leqslant\alpha$

$\alpha\leqslant\alpha$ (ἡ σχέσις εἶναι ἀνακλαστική)

$\{\alpha\leqslant\beta$ καί $\beta\leqslant\gamma\}\Longrightarrow\alpha\leqslant\gamma$ (ἡ σχέσις εἶναι μεταβατική)

$\{\alpha\leqslant\beta$ καί $\beta\leqslant\alpha\}\Longrightarrow\alpha=\beta$ (ἡ σχέσις εἶναι ἀντισυμμετρική)

Εἰς περίπτωσιν καθ' ἥν ἡ σχέσις R εἶναι σχέσις ὁλικῆς τάξεως, ἀντί τοῦ συμβόλου R δυνάμεθα νά χρησιμοποιῶμεν τό σύμβολον $\prec$ ἤτοι ἀντί αRβ, δυνάμεθα νά γράφωμεν $\alpha\prec\beta$ καί ἀπαγγέλλεται "τό α προηγεῖται τοῦ β".

<u>Ἀσκήσεις γενικαί</u>

121. Ἐξετάσατε ποῖα ἀπό τά κάτωθι σύνολα εἶναι κενά :

α) Α = {χ/χ κύβος ἀριθμοῦ μεταξύ 4 καί 18}

β) Β = {χ/χ μήν ἔτους ὅστις ἔχει 27 ἡμέρας}

γ) Γ = {χ/χ μαθητής τῆς τάξεως ἔχων ἀνάστημα πλέον τῶν δύο μέτρων}.

122. Εὕρετε τό σύνολον τῶν πρώτων παραγόντων, οἵτινες εἶναι μικρότεροι τοῦ 30.

123. Εὕρετε τό σύνολον ὅλων τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν μεταξύ τοῦ 8 καί 28.

124. Εὕρετε τό σύνολον τῶν σημείων, ἅτινα ἀπέχουσιν ἴσον ἀπό δοθέν σημεῖον (εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον).

125. Εὕρετε τό σύνολον τῶν τετραπλεύρων, ἐχόντων ἴσας γωνίας.

126. Εὕρετε τό σύνολον τῶν κλασμάτων, τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι μονοψήφιοι καί ἀνήκουσιν εἰς τό σύνολον $\{6,7,8\}$

127. Ποῖον τό σύνολον τῶν ριζῶν τῆς ἐξισώσεως $2\chi+4 = 0$, ἄν $2 = 0$ καί $4 = 0$.

128. Ποῖα τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι πεπερασμένα καί ποῖα ἀπειροσύνολα :

α) Τό σύνολον τῶν διαγωνίων πενταγώνου.

β) Τό σύνολον τῶν σημείων κειμένων εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπό δοθείσης εὐθείας.

γ) Τό σύνολον τῶν κορυφῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

δ) Τό σύνολον τῶν σημείων τῆς διχοτόμου γωνίας.

129. Ἀπαντήσατε ἄν ἡ ἀναγραφή τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι δυνατή ἤ ἀδύνατος.

α) Τό σύνολον τῶν μαθητῶν τοῦ γυμνασίου τῆς Ἑλλάδος.

β) Τό σύνολον τῶν κλασμάτων μεταξύ τοῦ $\frac{1}{3}$ καί $\frac{1}{4}$.

γ) Τό σύνολον τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν μεταξύ τοῦ 5 καί 6.

130. Ἀναγράψατε τά στοιχεῖα ἑκάστου τῶν κάτωθι περιγραφομένων συνόλων :

α) Τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 10 καί μικρότεροι τοῦ 19.

β) Τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν μεταξύ τοῦ 15 καί 25, οἵτινες διαιροῦνται διά τοῦ 3.

γ) Τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν μεταξύ 11 καί 17, οἵτινες διαιροῦνται διά τοῦ 9.

δ) Τό σύνολον ὅλων τῶν καταχρηστικῶν κλασμάτων, ἅτινα ἔχουσιν ὡς ὅρους τούς 5,6,7,8.

131. Χρησιμοποιήσατε τήν σύντομον συμβολικήν γραφήν διά τά κάτωθι περιγραφόμενα σύνολα : $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8,10\}$, $\Gamma = \{1,4,9,16,25,36\}$.

132. Ὁμοίως ὡς ἄνω διά τά σύνολα :

α) Τό σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ 8+11.

β) Τό σύνολον ὅλων τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι περιττοί

γ) Τό σύνολον $\{21,23,25,27,29\}$.

δ) Τό σύνολον {'Ιανουάριος, 'Ιούνιος, 'Ιούλιος}.

133. Σημειώσατε δύο ξένα σύνολα.

134. Προσδιορίσατε τά γνήσια ὑποσύνολα τοῦ συνόλου $A = \{1,3,5,7,9\}$.

135. Ἀναγράψατε ἐπί τῆς παύλας τό σημεῖον = ἤ $\neq$, ὥστε νά εἶναι ἀληθεῖς αἱ κάτωθι σχέσεις :

α) $A = \{3,4,5\}$, $B = \{34,5\}$ $\qquad A$ —— B

β) $\Gamma = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, $\Delta = \{\beta,\gamma,\delta\}$ $\qquad \Gamma$ —— Δ

γ) $E = \{4,7,6,5,2\}$, $Z = \{7,2,6,4,5\}$ $\qquad E$ —— Z

δ) $H = \left\{\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}\right\}$, $\Theta = \left\{0{,}25,\ 0{,}4,\ \frac{3}{4}\right\}$ $\qquad H$ —— Θ

ε) $N = \emptyset$ $\quad \Xi = \{0\}$ $\qquad N$ —— Ξ

136. Ἄν ἔχωμεν $\Pi = \{2,3\}$, $P = \{2,3,5\}$, $\Sigma = \{1,2,3,4\}$, $T = \{2,3,4,5\}$, σημειώσατε ποῖαι ἐκ τῶν κάτωθι δηλώσεων εἶναι ἀληθεῖς καί ποῖαι ψευδεῖς : $\Pi \subseteq P$, $\Pi \subseteq \Sigma$, $\Pi \subseteq T$, $P \subseteq \Sigma$, $\Sigma \subseteq T$, $P \subseteq T$.

137. Δίδεται τό σύνολον $A = \{1,8,27,64,125\}$. Προσδιορίσατε τά ὑποσύνολα, ἅτινα εἶναι τέλειοι κύβοι.

138. Δίδεται τό σύνολον $B = \{4,6,7,10,12,15\}$. Προσδιορίσατε τά ὑποσύνολα τῶν στοιχείων τοῦ B, ἅτινα εἶναι πολ-

λαπλάσια τοῦ 3.

139. Ποία σχέσις ὑπάρχει μεταξύ τοῦ συνόλου $\{φ,α,ρ,ο,ς\}$ καί τοῦ συνόλου τῶν γραμμάτων τῆς λέξεως φάρος.

140. Ἀναφέρατε ἄν αἱ κάτωθι δηλάσεις εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς: α) $\{4,5\} \subseteq \{4,5\}$, β) $\{4,5\} \subset \{4,5\}$, γ) $\phi \subset \{4,5\}$, δ) $\phi \subseteq \{4,5\}$.

141. Ὁμοίως ὡς ἄνω ἄν $K = \{β,γ,δ,ε\}$, νά ἀναφέρητε, ἄν αἱ κάτωθι δηλώσεις εἶναι ἀληθεῖς ἤ ψευδεῖς :
α) $\{β,γ,δ,ε\} \subset K$, β) $\{β,γ,δ\} \subseteq K$, γ) $\{γ\} \subseteq K$.

142. Ἄν $A = \{2,3,4\}$, σημειώσατε ποῖαι τῶν κάτωθι δηλώσεων εἶναι ἀληθεῖς καί ποῖαι ψευδεῖς :
α) $\{(2,2),(3,4),(4,3)\} \subseteq A \times A$
β) $\{(3,4),(5,6),(2,3)\} \subseteq A \times A$
γ) $\{(2,4),(4,4)\} \subseteq A \times A$
δ) $\{(4,3),(2,5)\} \subseteq A \times A$

143. Ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό ἐξαγόμενον : $\{1,2,3\} \cup \{2,3,4\} \cup \{3,4,5\}$.

144. Ὁμοίως ὡς ἄνω τό ἐξαγόμενον $\{α,β,γ\} \cup \phi \cup \{β,γ,δ\}$.

145. Ὁμοίως ὡς ἄνω τό ἐξαγόμενον :
{Πᾶνος, Ἑλένη} ∪ {1,2} ∪ {Πᾶνος, α} ∪ φ ∪ {Κώστας, Ἑλένη, 3, 4, 5}

146. Ὁμοίως ὡς ἄνω τό ἐξαγόμενον $\{α,β,γ\} \cup \phi \cup \{α,β\}$.

147. Νά εὑρεθῶσιν αἱ κάτωθι διατομαί καί ἑνώσεις $A \cup B$ καί $A \cap B$, ὅταν : A = {χ/χ συμμαθητής σας},
B = {χ/χ συμμαθητής σας μέ ἀρχικόν γράμμα ἐπωνύμου Κ}.

148. Ὁμοίως ὡς ἄνω $A \cap B$ καί $A \cup B$ ἄν
A = {χ/χ θετικός ἀριθμός ἤ μηδέν}
B = {χ/χ ἀρνητικός ἀριθμός ἤ μηδέν}.

149. Νά εὑρεθῶσιν αἱ κάτωθι διατομαί καί ἑνώσεις $A \cap B$ καί $A \cup B$, ὅταν $A = \{χ/χ < -4\}$, $B = \{χ/χ > 2\}$.

150. Ὁμοίως ὡς ἄνω αἱ διατομαί καί ἑνώσεις
$A = \{χ/χ > -4\}$, $B = \{χ/χ < 2\}$.

151. Δίδονται τά σύνολα $A=\{\kappa,\lambda\}$ καί $B=\{1,2,3\}$. Νά σχηματισθῶσι τά Καρτεσιανά γινόμενα $A\times B$, $B\times A$, $A\times A$.

152. Ποία ἐκ τῶν κάτωθι ἐκφράσεων εἶναι ἀληθής καί διατί;
α) $\{1\}\in\{\{1\}\}$, β) $\{1\}\subseteq\{\{1\}\}$, γ) $\{1\}\in\{1,\{1\}\}$
δ) $\{1\}\subseteq\{1,\{1\}\}$.

153. Δίδονται $A=\{\alpha\}$ καί $B=\{\alpha,\beta\}$. Ποία τῶν κάτωθι δηλώσεων εἶναι ἀληθής καί ποία ψευδής καί διατί;
$A\subseteq B$ καί $B\subseteq A$

154. Μᾶς δίδεται ἕν καί μόνον σύνολον A τοιοῦτον, ὥστε $A\subseteq B$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῇ τό σύνολον B.

155. Εἷς ἄνθρωπος ἔχει 5 κέρματα καί πρόκειται νά δώσῃ ἀνά ἕν κέρμα εἰς τόν υἱόν του καί τήν κόρην του. Κατά πόσους τρόπους δύναται νά γίνῃ τοῦτο;

156. Ἔστωσαν ὅτι $A=\{1,2\}$, $B=\{2,3\}$, $\Gamma=\{3\}$ εἶναι ὑποσύνολα τοῦ κυριάρχου συνόλου $\Delta=\{1,2,3\}$. Νά καθορισθῶσι δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τά κάτωθι σύνολα :
α) $A\times A$, β) $A\times B$, γ) $B\times A$, δ) $(A\times B)\cap(B\times\Gamma)$, ε) $A\times B\times\Gamma$.

157. Ἔστωσαν $K=\{\alpha,\beta,\gamma\}$, $A=\{\alpha\}$, $B=\{\beta\}$. Νά ὁρισθῶσι δι' ἀναγραφῆς τῶν στοιχείων των τά σύνολα A', B', $A\cup B$, $A\cap B$, $A'\cap B'$, $A'\cap(A\cup B)$. (A' καί B' εἶναι τά συμπληρώματα τῶν συνόλων).

158. Ἀποφανθῆτε ἄν $A=B$ ἤ $A\neq B$:
α) $A=\{2,4,6\}$, $B=\{4,6,2\}$
β) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{$Ἀλέκος, Ἰωάννης, Πᾶνος$\}$
γ) $A=\{\chi/\chi$ ἐπίπεδον ἰσόπλευρον τρίγωνον$\}$
$B=\{\chi/\chi$ ἐπίπεδον ἰσογώνιον τρίγωνον$\}$
δ) $A=\{\chi/\chi-3=0\}$, $B=\{\chi/2\chi-6=0\}$
ε) $A=\{\chi/2\chi-\frac{3}{2}=0\}$, $B=\{\chi/\chi-\frac{4}{5}=0\}$

159. Ἡ δυαδική σχέσις "Τό ζεῦγος (α,β) ἔνθα $\alpha\in N$, $\beta\in N$ ἔχει

Μ.Κ.Δ. 1". Τίνα ἰδιότητα ἔχει ἐκ τῶν τεσσάρων ἰδιοτήτων;

160. Ἡ δυαδική σχέσις "ἡ εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος ἐπί τήν ε΄, ἔνθα ε καί ε΄ εἶναι στοιχεῖα τοῦ συνόλου τῶν εὐθειῶν ἑνός ἐπιπέδου", τίνα ἰδιότητα ἔχει;

161. Ἔστω $A \subset E$, $\alpha \in E$, $\beta \in E$. Ἡ δυαδική σχέσις "ἀμφότερα τά στοιχεῖα τοῦ ζεύγους (ἀ,β) ἀνήκουσιν εἰς τό Α" ποίαν ἰδιότητα ἔχει;

162. Ἐπί τοῦ συνόλου Ε τῶν εὐθειῶν τοῦ χώρου δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν μίαν σχέσιν ἰσοδυναμίας;

163. Ἐάν ὡς στοιχεῖα ἑνός συνόλου Α θεωρηθῶσιν ὅλα τά ὑποσύνολα ἑνός συνόλου Σ, τότε ἡ σχέσις ἡ ὁποία σημειοῦται μέ $\subset$ εἶναι διά τό Α σχέσις τάξεως; Εἶναι σχέσις ὁλικῆς τάξεως;

~~30.~~ 31. Μονοσήμαντος ἀπεικόνισις συνόλου εἰς σύνολον

Ἔστω ἕν σύνολον Α καί ἕτερον σύνολον Β διάφορον ἤ ταυτιζόμενον μέ τό Α. Ὑποθέτομεν ὅτι εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ Α $\chi \in A$ προσεταιρίζεται ἕν στοιχεῖον τοῦ Β, $\phi \in B$. Ἡ ἀντιστοιχία αὕτη ὁρίζει μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν, τοῦ συνόλου Α εἰς τό σύνολον Β. Καί λέγομεν ὅτι ἀπεικονίζομεν τό σύνολον Α εἰς τό σύνολον Β. Τήν ἀπεικόνισιν ταύτην σημειοῦμεν συμβολικῶς μέ τό γράμμα φ. Δυνατόν πολλάκις εἰς διαφορετικά στοιχεῖα τοῦ Α νά προσεταιρίζεται τό αὐτό στοιχεῖον τοῦ Β. Τό στοιχεῖον $\phi \in B$ καλεῖται ε ἰ κ ώ ν τοῦ $\chi \in A$. Ἡ ἀπεικόνισις αὕτη σημειοῦται συμβολικῶς :

$$\varphi : \chi \in A \longrightarrow \phi \in B$$

δηλαδή μέ τήν φ τό χ ἔχει εἰκόνα τό φ.

Ἡ εἰκών τοῦ χ παρίσταται πολλάκις μέ τό σύμβολον φ(χ), ὁπότε σημειοῦται :

$$\varphi : \chi \in A \longrightarrow \varphi(\chi) \in B$$

δηλαδή φ(χ) = εἰκών τοῦ χ, ἤτοι φ' = φ(χ). Τό βέλος $\longrightarrow$ ἀναγιγνώσκεται "παρέχει","μετασχηματίζεται εἰς","ἔχει ὡς εἰκόνα".

<u>Παράδειγμα</u> : Λαμβάνομεν ὡς σύνολον Α τό σύνολον Κ τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν τῆς 'Αλγέβρας καί ὡς Β τό αὐτό σύνολον Κ. Εἰς κάθε στοιχεῖον χ τοῦ Κ, δηλ. εἰς κάθε ἀκέραιον ἀριθμόν, ἄς ἀντιστοιχίσωμεν τόν ἀριθμόν χ^2, ὅστις εἶναι πάλιν στοιχεῖον τοῦ Κ. Οὕτω ὁρίζομεν μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν φ τοῦ Κ εἰς τό Κ.

$$\varphi : \chi \in K \longrightarrow \chi^2 \in K$$

Κάθε χ Κ ἔχει μίαν εἰκόνα $\varphi(\chi) = \chi^2 \in K$. 'Η ἀπεικόνισις αὕτη εἶναι τοῦ συνόλου Κ εἰς τό Κ.

32. 'Απεικόνισις συνόλου ἐπί συνόλου

Εἰς τό προηγούμενον παράδειγμα τῶν συνόλων Α καί Β, ἐνῷ κάθε στοιχεῖον τοῦ Α ἔχει μίαν εἰκόνα εἰς τό Β, κάθε στοιχεῖον τοῦ Β δέν εἶναι γενικῶς εἰκών ἑνός στοιχείου τοῦ Α, ἤτοι ἐν γένει τό σύνολον τῶν εἰκόνων δέν καλύπτει τό Β, ἀλλά μέρος αὐτοῦ. Δυνατόν ὅμως ἔν οἱονδήποτε στοιχεῖον τοῦ Β νά εἶναι εἰκών ἑνός τοὐλάχιστον στοιχείου τοῦ Α. Τότε λέγομεν ὅτι ἡ ἀπεικόνισις φ εἶναι μία ἀπεικόνισις τοῦ Α ἐπί τοῦ Β.

Εἰς τό ἀνωτέρω παράδειγμα τῶν συνόλων Κ δέν δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι ἔχομεν ἀπεικόνισιν τοῦ Κ ἐπί τοῦ Κ, διότι πᾶς ἀκέραιος ἀριθμός δέν εἶναι ἀναγκαστικῶς τέλειον τετράγωνον.

<u>Παράδειγμα</u> :'Εάν τήν ἀνωτέρω ἀπεικόνισιν $\chi \longrightarrow \chi^2$ ἐφαρμόσωμεν ἐπί τῶν Ν πραγματικῶν ἀριθμῶν :

$$\varphi : \chi \in N \longrightarrow \chi^2 = \varphi(\chi) \in N$$

Τότε ἔχομεν ἀπεικόνισιν τοῦ N ἐπί τοῦ N. Διότι πᾶν στοιχεῖον τοῦ N (δηλ. πᾶς πραγματικός ἀριθμός) εἶναι εἰκών ἑνός στοιχείου τοῦ N, δηλ. τετράγωνον κάποιου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ. Ἡ ἀνωτέρω μονοσήμαντος ἀπεικόνισις ἐκφράζεται ὡς ἑξῆς : $\varphi(\chi) = \chi^2$.

33. Ἀπεικόνισις συνόλου ἐντὸς ἄλλου συνόλου

Θά λέγωμεν ὅτι ἀπεικονίζομεν ἕν σύνολον Κ ἐντός ἄλλου συνόλου Λ, ὅταν τό σύνολον τῶν εἰκόνων τοῦ Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β.

Παράδειγμα : Θεωροῦμεν τό σύνολον Α τῶν σχετικῶν ἀριθμῶν ἀκεραίων καί μίαν εὐθεῖαν ε. Ἐπί τῆς εὐθείας ε ὁρίζομεν ἕν ἄνυσμα ΟΘ ἴσον μέ τήν μονάδα μήκους. Εἰς ἕκαστον στοιχεῖον $\alpha \in A$ ἀντιστοιχοῦμεν ἕν σημεῖον β ἐπί τῆς εὐθείας οὕτως ὥστε ἡ ἀπόστασίς του ἀπό τοῦ Ο νά ἰσοῦται μέ α (ἀριστερά ἤ δεξιά τοῦ Ο). Οὕτως ἔχομεν μίαν ἀπεικόνισιν τῶν σχετικῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν μέσα εἰς τό σημειοσύνολον τῆς εὐθείας ε. Τό σύνολον τῶν εἰκόνων τοῦ Α εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β.

Ἀσκήσεις

164. Σχηματίσατε μίαν ἀπεικόνισιν φ τοῦ συνόλου $A = \{1,2\}$ εἰς τό σύνολον $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Ποῖον εἶναι τό $\varphi(1)$ καί τό $\varphi(2)$. Σχηματίσατε ὅλας τάς δυνατάς ἀπεικονίσεις τοῦ Α εἰς τό Β.

165. Εὕρετε τάς δυνατάς μονοσημάντους ἀπεικονίσεις τοῦ $\Gamma = \{1,2,3\}$ ἐπί τοῦ Γ.

166. Εὕρετε μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν τοῦ συνόλου Τ τῶν τριγώνων, τά ὁποῖα κεῖνται ἐπί ἑνός ἐπιπέδου, ἐπί τοῦ συνόλου Θ τῶν θετικῶν ἀριθμῶν (ἕκαστον στοιχεῖον τοῦ Τ εἶναι ἕν τρίγωνον).

167. Δίδεται τό σύνολον $Δ = \{3,4,5\}$. Νά εύρεθῶσι διάφοροι άπεικονίσεις τοῦ Δ έντός τοῦ Δ.

168. Δίδονται $K = \{α,β\}$ καί $Λ = \{γ,δ,ε\}$. Νά σχηματισθῶσιν άπεικονίσεις τοῦ Κ είς τό Λ καί νά έξετασθῆ ἄν δύναται νά ὑπάρξῃ ἀπεικόνισις τοῦ Κ ἐπί τοῦ Λ.

34. Ἀντιστοιχία ἕν πρός ἕν καί ἀπέραντον σύνολον

Γνωρίζομεν ὅτι ἕν σύνολον Α λέγεται ὑποσύνολον τοῦ Β ($A \subseteq B$), ὅταν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Β. Ὡσαύτως ἕν σύνολον Α λέγεται γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Β ($A \subset B$), ὅταν κάθε στοιχεῖον τοῦ Α εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Β καί ὑπάρχῃ ἕν τοὐλάχιστον στοιχεῖον τοῦ Β, τό ὁποῖον δέν εἶναι στοιχεῖον τοῦ Α. Οὕτως ἡ δήλωσις $\{α,β,γ\} \subseteq \{α,β,γ\}$ εἶναι ἀληθής, ἐνῷ ἡ δήλωσις $\{α,β,γ\} \subset \{α,β,γ\}$ εἶναι ψευδής.

Ἔστω $A = \{1,2,3,4,...ν...\}$, τό σύνολον τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καί $B = \{2,4,6,8,...2ν...\}$. Τό σύνολον Β εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α, διότι πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β εἶναι καί στοιχεῖον τοῦ Α, ὑπάρχουσιν ὅμως είς τό Α στοιχεῖα (οἱ περιττοί ἀριθμοί), τά ὁποῖα δέν εἶναι στοιχεῖα τοῦ Β.

Δυνάμεθα νά ἀντιστοιχίσωμεν ἕν πρός ἕν τά στοιχεῖα τοῦ Α καί τοῦ Β, ἤτοι :

$$\begin{array}{llllllll} A = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & ...ν... \\ & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ B = \{ & 2, & 4, & 6, & 8, & 10, & ...2ν... \end{array}$$

διότι είς οἱονδήποτε ἀριθμόν τοῦ συνόλου Α ὑπάρχει εἷς καί μόνον εἷς διπλάσιος αὐτοῦ τοῦ συνόλου Β. Καί ἀντιστρόφως, είς οἱονδήποτε ἀριθμόν τοῦ Β ἀντιστοιχεῖ εἷς καί μόνον εἷς ἀριθμός τοῦ Α, ὅστις εἶναι τό ἥμισυ τοῦ ἀριθμοῦ τούτου. Τότε λέγομεν ὅτι τά σύνολα Α καί Β εὑρίσκονται είς ἀντιστοιχίαν ἕν πρός ἕν.

Ἑπομένως λέγομεν ὅτι δύο σύνολα Α καί Β εὑρίσκονται εις ἀντιστοιχίαν ἕν πρός ἕν, ὅταν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ συνόλου Α ἀντιστοιχῆ ἕν καί μόνον ἕν στοιχεῖον τοῦ συνόλου Β καί ἀντιστρόφως.

Εἰς τήν ἀνωτέρω περίπτωσιν τό σύνολον Β εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ Α. Παρατηροῦμεν δέ ὅτι τό σύνολον Α δύναται νά τεθῆ εις ἀντιστοιχίαν ἕν πρός ἕν μέ τό γνήσιον ὑποσύνολόν του Β. Διά τοῦτο τό σύνολον Α θά λέγεται ἀ π έ ρ α ν τ ο ν σ ύ ν ο λ ο ν (ἀ π ε ι ρ ο σ ύ ν ο λ ο ν). Ἕν σύνολον θά λέγεται ἀ π έ ρ α ν τ ο ν σ ύ ν ο λ ο ν (ἀ π ε ι ρ ο σ ύ ν ο λ ο ν), ὅταν ὅλα τά στοιχεῖα του δύνανται νά τεθῶσιν εις ἕν πρός ἕν ἀντιστοιχίαν μέ τά στοιχεῖα ἑνός ὑποσυνόλου του. Τό σύνολον τό ὁποῖον δέν εἶναι ἀπέραντον, δέν δύναται νά τεθῆ εις τήν ἀντιστοιχίαν αὐτοῦ τοῦ εἴδους καί θά λέγεται π ε π ε ρ α σ μ έ ν ο ν. Ἡ τοιαύτη ἕν πρός ἕν ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων δύο συνόλων, καθ'ἥν εἰς κάθε στοιχεῖον τοῦ ἑνός συνόλου ἀντιστοιχεῖ ἕν καί μόνον ἕν στοιχεῖον τοῦ ἑτέρου, λέγεται ἀ μ φ ι μ ο ν ό τ ι μ ο ς ἤ ἀμφιμονοσήμαντός ἀπεικόνισις. Ὡς δέ εἴδομεν εις τήν παράγραφον 8, τά δύο σύνολα λέγονται ἰ σ ο δ ύ ν α μ α καί μεταξύ αὐτῶν σημειοῦται τό σύμβολον $\sim$. Ἀντ'αὐτοῦ δύναται μεταξύ τῶν δύο ἰσοδυνάμων συνόλων νά σημειοῦται τό σύμβολον $\longleftrightarrow$ ἤ $\Longleftrightarrow$, ἤτοι $A \sim B$, $A \longleftrightarrow B$, $A \Longleftrightarrow B$. Τό ἀπέραντον σύνολον εἶναι ἰσοδύναμον πρός ἕν γνήσιον ὑποσύνολόν του.

Ἑπομένως, ἄν δέν ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον ἑνός συνόλου Α, ὅπερ νά εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό Α, τότε τό Α εἶναι πεπερασμένον σύνολον. Ἄν ἑνός συνόλου Β ὑπάρχῃ γνήσιον ὑποσύνολον, τό ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον τοῦ Β, τότε τό Β εἶναι ἀπέραντον σύνολον. Πᾶν σύνολον εἶναι ἰσοδύναμον πρός τόν ἑαυτόν του. Ἤτοι $A \longleftrightarrow A$.

Εἰς τό ἀξίωμα τοῦ Εὐκλείδου, ἔνθα τό ὅλον εἶναι μεγαλύτερον οἱουδήποτε ἐκ τῶν μερῶν του, δέν ἰσχύει διά τά ἀπέραντα σύνολα.

'Ασκήσεις

169. 'Απαντήσατε τίνα ἐκ τῶν κάτωθι συνόλων εἶναι πεπερασμένα καί τίνα ἀπέραντα καί δικαιολογήσατε τοῦτο.

α) $\{3,6,9,12...\}$

β) Ἕν σύνολον κερμάτων, ἅτινα ἔχει τις εἰς τήν τσέπην του.

γ) Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων θετικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες διαιροῦνται διά 10.

δ) Τό σύνολον ὅλων τῶν σταγόνων τοῦ ὕδατος ἐντός ἑνός ποτηρίου.

ε) Τό σύνολον ὅλων τῶν δένδρων τῆς γῆς.

στ) Τό σύνολον ὅλων τῶν σημείων εὐθυγράμμου τμήματος.

ζ) Τό σύνολον ὅλων τῶν σημείων μιᾶς περιφερείας.

35. Τρόποι ἀμφιμονοσημάντου ἀντιστοιχίας

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{\alpha,\beta\}$, $B = \{1,2\}$. Ταῦτα εἶναι ἰσοδύναμα, διότι δύναται νά τεθῶσιν εἰς ἕν πρός ἕν ἀντιστοιχίαν τά στοιχεῖα των καί μάλιστα κατά τούς ἑξῆς δύο τρόπους.

A		B	καί	A		B
α	$\longleftrightarrow$	1		α	$\longleftrightarrow$	2
β	$\longleftrightarrow$	2		β	$\longleftrightarrow$	1

Ἔστωσαν τώρα τά ἰσοδύναμα σύνολα $A = \{1,2,3\}$ καί $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, ἅτινα ἔχουσιν ἀνά τρία στοιχεῖα. Τά στοιχεῖα τούτων δύνανται νά τεθῶσιν εἰς ἕν πρός ἕν ἀντιστοιχίαν κατά τούς ἑξῆς 6 τρόπους :

1ος	2ος	3ος	4ος	5ος	6ος
$1\leftrightarrow\alpha$	$1\leftrightarrow\alpha$	$1\leftrightarrow\gamma$	$1\leftrightarrow\beta$	$1\leftrightarrow\beta$	$1\leftrightarrow\gamma$
$2\leftrightarrow\beta$	$2\leftrightarrow\gamma$	$2\leftrightarrow\alpha$	$2\leftrightarrow\alpha$	$2\leftrightarrow\gamma$	$2\leftrightarrow\beta$
$3\leftrightarrow\gamma$	$3\leftrightarrow\beta$	$3\leftrightarrow\beta$	$3\leftrightarrow\gamma$	$3\leftrightarrow\alpha$	$3\leftrightarrow\alpha$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω δύο παραδειγμάτων συμπεραίνομεν ὅτι ἡ ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν στοιχείων δύο ἰσοδυνάμων συνόλων, δύναται νά γίνῃ κατά πολλούς τρόπους. Ἤτοι ἐάν τά σύνολα ἔχωσιν ἀνά δύο στοιχεῖα, οἱ τρόποι ἀντιστοιχίας εἶναι $1\cdot 2 = 2$, ἐάν τά σύνολα ἔχωσιν ἀνά τρία στοιχεῖα, οἱ τρόποι ἀντιστοιχίας εἶναι $1\cdot 2\cdot 3 = 6$ καί γενικῶς ἐάν τά σύνολα ἔχωσιν ἀνά ν στοιχεῖα, οἱ τρόποι ἀντιστοιχίας εἶναι $1\cdot 2\cdot 3\ldots\nu$.

36. Γραφική παράστασις ἀπεικονίσεως

Ἔστωσαν τά σύνολα $A = \{-1,0,1,2,3\}$ καί $B = \{0,1,2,3,4,5\}$ καί θέλομεν νά ἀπεικονίσωμεν τό A εἰς τό B.

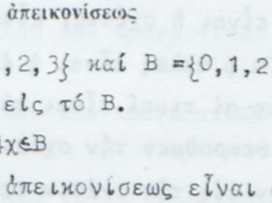
Ἔστω $\chi\in A \longrightarrow \varphi(\chi) = \psi = \chi^3 - 4\chi \in B$

Ἡ γραφική παράστασις τῆς ἀνωτέρω ἀπεικονίσεως εἶναι ὡς κατωτέρω (σχῆμα 1ον καί σχῆμα 2ον).

x	-1	0	1	2	3
ψ	3	0	-3	0	15

15					x
0				x	
-3			x		
0		x			
3	x				
A/B	-1	0	1	2	3

σχῆμα 1ον



Σχῆμα 2ον

37. Συνάρτησις

Λαμβάνομεν μίαν μονοσήμαντον ἀπεικόνισιν φ ἑνός συνόλου Α, εἰς τό σύνολον Β (παράγραφος 31). Ἡ τοιαύτη ἀπεικόνισις λέγεται σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς. Τό στοιχεῖον χ∈Α λέγεται ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο ς μ ε τ α β λ η τ ή, τό δέ στοιχεῖον ψ∈Β, ὅπερ ὡς εἴδομεν εἶναι ἡ εἰκών τοῦ χ, λέγεται ἐ ξ η ρ τ η μ έ ν η μ ε τ α β λ η τ ή ἤ τ ι μ ή καί σημειοῦται $\psi = \varphi(\chi)$. Τό φ δηλοῖ τήν ἀπεικόνισιν, ἥτις ἐκ τοῦ χ παρέχει τό ψ. Σημειοῦται συμβολικῶς $\chi \longrightarrow \varphi(\chi)$, ἤτοι "τό χ δίδει τό φ(χ)".

Ἡ ἔκφρασις "ψ εἶναι συνάρτησις τοῦ χ" εἶναι ἐσφαλμένη. Δηλαδή συνάρτησις δέν εἶναι ὁ ψ, δέν εἶναι αἱ τιμαί τοῦ ψ, ἀλλά εἶναι ἡ σχέσις, εἶναι τό σύνολον τῶν διατεταγμένων ζευγῶν. Ὁ ψ ἁπλῶς εἶναι ἡ ἐξηρτημένη μεταβλητή τοῦ ζεύγους, τῆς ὁποίας αἱ τιμαί εἶναι τά μέλη ἑνός συνόλου.

Θεωροῦμεν τήν σχέσιν $K = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$. Παρατηροῦμεν εἰς τήν σχέσιν ταύτην, ὅτι δέν ὑπάρχουσι δύο διατεταγμένα ζεύγη, ἅτινα ἔχουσι τό αὐτό πρῶτον μέλος, δηλαδή τήν αὐτήν τετμημένην. Εἰς τά ζεύγη ταῦτα διακρίνομεν τρεῖς διαφόρους τετμημένας 1,2,3. Λαμβάνομεν τώρα τήν σχέσιν $K' = \{(1,2),(3,4),(1,3),(4,5)\}$. Εἰς ταύτην παρατηροῦμεν ὅτι ὑπάρχουσι δύο ζεύγη, τά (1,2) καί (1,3), ἅτινα ἔχουσι τό αὐτό πρῶτον μέλος, δηλαδή τήν αὐτήν τετμημένην.

Κατά συνέπειαν εἰς κάθε τετμημένην τῆς σχέσεως Κ ἀντιστοιχεῖ ἕν καί μόνον ἕν ζεῦγος, ἐνῷ εἰς τήν σχέσιν Κ΄ ὑπάρχει τετμημένη, εἰς τήν ὁποίαν ἀντιστοιχοῦσι δύο ζεύγη. Ἐξ αὐτῶν ἡ Κ λέγομεν ὅτι εἶναι συνάρτησις, ἐνῷ ἡ Κ΄ δέν εἶναι συνάρτησις.

Ἐπομένως σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς θά λέγεται ἡ σχέσις, εἰς τήν ὁποίαν δέν ὑπάρχουσι δύο ἤ περισσότερα διατεταγμένα ζεύγη μέ τήν αὐτήν τετμημένην.

<u>'Ασκήσεις</u>

Τίνες ἐκ τῶν κάτωθι σχέσεων εἶναι συναρτήσεις καί τίνες δέν εἶναι καί διατί;

170. $K=\{(-2,0),(-1,3),(1,2),(3,4)\}$.

171. $K=\{(2,3),(-2,2),(2,4),(1,0)\}$.

172. $K=\{(-1,2),(0,3),(3,5),(-1,2)\}$.

173. $K=\{(\chi,\psi)/\psi=3\chi-1\}$ εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

174. $K=\{(\chi,\psi)/\psi=-2\chi^2\}$ εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

175. $K=\{(\chi,\psi)/\psi<3\chi\}$ εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

176. $K=\{(\chi,\psi)/\chi=5\}$ εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

177. $K=\{(\chi,\psi)/\psi=\chi\}$ εἰς τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

178. $K=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,3)\}$ εἰς τό $\{1,2,3,4\}$.

179. K = Δίδεται τό Καρτεσιανόν γινόμενον $\{\alpha,\beta\}X\{2,3\}$ καί ζητεῖται νά εὑρεθῶσιν ὑποσύνολα τούτου, ἅτινα δέν εἶναι συναρτήσεις καί ἕτερα τοιαῦτα, ἅτινα εἶναι συναρτήσεις.

180. Δίδεται τό σύνολον $A=\{-1,-2\}$ νά ἐξετασθῇ ἄν τοῦ Καρτεσιανοῦ γινομένου A X A ὑπάρχῃ συνάρτησις καί ποία.

181. Θεωροῦμεν τό σύνολον Σ τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καί μίαν ἀπεικόνισιν $\varphi:\chi\in\Sigma\longrightarrow\psi=\frac{3\chi-1}{2}\in\Sigma$. 'Εξετάσατε ἄν τά σχηματιζόμενα διατεταγμένα ζεύγη δημιουργοῦσι μίαν συνάρτησιν ἐκ τοῦ Σ εἰς τό Σ.

<u>Παρατήρησις</u> : Είς τήν γενικήν ἔννοιαν τῆς συναρτήσεως ἤ τῆς ἀμφιμονοσημάντου ἀπεικονίσεως, τόσον ἡ ἀνεξάρτητος μεταβλητή $\chi \in A$, ὅσον καί ἡ τιμή $\psi = \varphi(\chi)$ τῆς σύναρτήσεως δύναται νά εἶναι ἤ νά μή εἶναι ἀριθμοί. Ὅταν ἡ συνάρτησις ἔχῃ τιμήν $\varphi(\chi)$ πραγματικόν ἀριθμόν, καλεῖται ἀ ρ ι θ μ ο - σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς ἤ π ρ α γ μ α τ ι κ ή σ υ ν ά ρ - τ η σ ι ς ἤ καί ἁπλῶς σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς. Ὅταν εἰς μίαν συνάρτησιν ὑπάρχῃ γράμμα, π.χ. τό γ, ὅπερ συμβολίζει ἕνα καί μόνον ἀριθμόν, τότε τό γ καλεῖται σ τ α θ ε ρ ά π ο σ ό τ η ς, ἐν ἀντιθέσει πρός τήν μεταβλητήν $\chi \in A$, ἥτις θεωρεῖται ὡς σύμβολον τό ὁποῖον παριστᾷ οἱονδήποτε ἀριθμόν τοῦ συνόλου Α, ὅπερ ἔχει ἐν γένει ἄπειρον πλῆθος στοιχείων. Αἱ σταθεραί ποσότητες θά παρίστανται πάντοτε ὑπό τῶν ἀρχικῶν γραμμάτων τοῦ ἑλληνικοῦ ἀλφαβήτου, ἤτοι διά α,β,γ...

38. Εἴδη συναρτήσεως

α) <u>Συνάρτησις μιᾶς μεταβλητῆς</u> : Ἔστω $\chi \in A$, ἔνθα Α σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δηλ. ὁ χ εἶναι πραγματικός ἀριθμός. Τότε πᾶσα συνάρτησις τοῦ χ ἤ $\varphi(\chi)$ λέγεται συνάρτησις μιᾶς πραγματικῆς μεταβλητῆς. Τοιαῦται συναρτήσεις μιᾶς μεταβλητῆς εἶναι :

$\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi+\beta$ (πρωτοβάθμιος συνάρτησις τοῦ χ ἤ γραμμική)

$\psi = \varphi(\chi) = \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$ (δευτεροβάθμιος συνάρτησις τοῦ χ)

$\psi = \varphi(\chi) = \alpha_0\chi^{\mu}+\alpha_1\chi^{\mu-1}+\alpha_2\chi^{\mu-2}+\dots\dots\dots\alpha_\nu$ (ἀκέραιον πολυώνυμον ν βαθμοῦ, ἔνθα ν φυσικός ἀριθμός)

$$\psi = \frac{\alpha\chi+\gamma}{\beta\chi+\delta}$$

Εἰς τάς ἀνωτέρω συναρτήσεις οἱ $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\alpha_0,\alpha_1\dots\alpha_\nu$ εἶναι σταθεραί ποσότητες.

β) <u>Συνάρτησις δύο μεταβλητῶν</u> : Ἔστω ὅτι εἰς κάθε διατεταγμένον ζεῦγος $(\chi,\psi)\in A^2$ ἀντιστοιχεῖ εἷς ἀριθμός $\omega\in A$.Τότε διά τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς ὁρίζεται μία συνάρτησις φ τῶν δύο μεταβλητῶν χ καί ψ. Δυνάμεθα νά γράφωμεν :

$$\varphi : (\chi,\psi)\in A^2 \longrightarrow \omega = \varphi(\chi,\psi)\in A.$$

<u>Παράδειγμα</u> : $\varphi(\chi,\psi) = 2\chi-3\psi+4$. Εἶναι μία συνάρτησις δύο μεταβλητῶν (χ,ψ). Εἰς πᾶν διατεταγμένον ζεῦγος τιμῶν (χ,ψ) ἀντιστοιχεῖ μία τιμή τῆς συναρτήσεως. Π.χ.

$$\varphi(0,1) = 1 \quad , \quad \varphi(1,3) = -3$$

Αὔτη ἡ συνάρτησις εἶναι γραμμική συνάρτησις δύο μεταβλητῶν.

γ) <u>Συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν</u>. Ἡ συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν εἶναι μία ἀντιστοιχία μεταξύ μιᾶς διατεταγμένης τριάδος (χ,ψ,z) πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ἑνός ἀριθμοῦ $\omega\in A$ καί σημειοῦται οὕτω :

$$\varphi : (\chi,\psi,z)\in A^3 \longrightarrow \omega = \varphi(\chi,\psi,z)\in A$$

<u>Παράδειγμα</u> : $\varphi(\chi,\psi,z) = \chi^3-3\psi^2+2\chi\psi z$, εἶναι μία συνάρτησις τριῶν μεταβλητῶν (χ,ψ,z). Εἰς πᾶσαν διατεταγμένην τριάδα (χ,ψ,z) ἀντιστοιχεῖ μία τιμή τῆς συναρτήσεως. Π.χ.

$$\varphi\ (0,1,2) = -3 \quad , \quad \varphi = (1,2,3) = 1$$

δ) <u>Συνάρτησις ἀντίστροφος</u>. Ἔστω φ μία συνάρτησις, Α ἕν σύνολον αὐτῆς καί Β τό σύνολον ὅλων τῶν τιμῶν της. Ἐάν τό $\chi\in A$ ἔχῃ ὡς εἰκόνα τό $\psi = \varphi(\chi)\in B$, τότε λέγομεν ὅτι ἡ εἰκών ψ ἔχει ἀ ρ χ έ τ υ π ο ν τ ό χ. Ἐάν συμβῇ ἡ ἀπεικόνισις φ τοῦ Α ἐπί τοῦ Β νά εἶναι μονοσήμαντος, καί ὄχι μόνον πᾶν στοιχεῖον $\chi\in A$ νά ἔχῃ μίαν καί μόνον εἰκόνα $\psi\in B$, ἀλλά καί πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β νά εἶναι εἰκών ἑνός καί μόνον στοιχείου τοῦ Α, τότε εἶναι δυνατόν νά ἀντιστοιχίσωμεν πᾶν στοιχεῖον τοῦ Β μέ τό ἀρχέτυπόν του ἐν τῷ Α. Ἡ τοιαύτη μονοσήμαντος ἀπεικόνισις τοῦ Β ἐπί τοῦ Α λέγεται ἀ ν τ ί σ τ ρ ο φ ο ς σ υ ν ά ρ τ η σ ι ς τοῦ φ καί παρίσταται διά τοῦ φ^{-1}. Δυνάμεθα νά γράφωμεν :

$$\varphi : \chi\epsilon A \longrightarrow \psi\epsilon B \qquad (\psi = \varphi(\chi))$$

$$\varphi^{-1}: \psi\epsilon B \longrightarrow \chi\epsilon A \qquad (\chi = \varphi^{-1}(\psi))$$

Παράδειγμα : Ἔστω $\chi\epsilon A \longrightarrow \psi = \chi^2 \epsilon A$. Εἰς ἑκάστην τιμήν τοῦ ψ ἀντιστοιχεῖ μία μόνον τιμή τοῦ χ. Διά νά μεταβῶμεν ἐκ τῆς εἰκόνος χ^2 εἰς τό ἀρχέτυπον χ, πρέπει νά ἐξαγάγωμεν τήν τετραγωνικήν ρίζαν. Κατά συνέπειαν ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις φ_1 τῆς φ εἶναι $\varphi^{-1}: \psi\epsilon A \longrightarrow \sqrt{\psi}\epsilon A$ καί παριστῶντες τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν ψ διά τοῦ χ ἔχομεν :

$$\varphi^{-1}: \chi\epsilon A \longrightarrow \sqrt{\chi}\epsilon A$$

Ἄρα ἡ ἀντίστροφος συνάρτησις τῆς $\psi = \chi^2$ εἶναι $\psi = \sqrt{\chi}$.

39. Ἔννοια διαστήματος συναρτήσεως

Δίδεται ἡ σχέσις $\alpha < \beta$ δύο πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι τοῦ α καί μικρότεροι τοῦ β, θά καλοῦμεν ἀνοικτόν διάστημα ἀπό α ἕως β. Ἐάν παραστήσωμεν τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν διά χ, οὗτοι ὀφείλουσι νά πληρῶσι τήν διπλῆν ἀνισότητα

$$\alpha < \chi < \beta$$

Οἱ ἀριθμοί α καί β, οἵτινες εἶναι τά ἄκρα τοῦ διαστήματος, δέν συμπεριλαμβάνονται εἰς τό ἀνοικτόν διάστημα. Τό ἀνοικτόν διάστημα θά παρίσταται συμβολικῶς οὕτω : $[\alpha,\beta]$.

Τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν χ, οἵτινες πληροῦσι τήν διπλῆν σχέσιν $\alpha \leqslant \chi \leqslant \beta$, καλεῖται κλειστόν διάστημα ἀπό α ἕως β. Εἰς τό κλειστόν διάστημα περιλαμβάνονται καί τά ἄκρα α καί β. Τό κλειστόν διάστημα σημειοῦται συμβολικῶς (α,β).

Ὁμοίως δυνάμεθα νά ἔχωμεν τάς σχέσεις (1) $\alpha < \chi \leqslant \beta$, ἤτοι τό ἀνοικτόν διάστημα πρός τά ἀριστερά $[\alpha,\beta)$ καί (2) $\alpha \leqslant \chi < \beta$ τό ἀνοικτόν διάστημα πρός τά δεξια $(\alpha,\beta]$. Τά διαστήματα (1) καί (2) καλοῦνται ἡ μ ι α ν ο ι κ τ ά. Ἐκτός τῶν ἀνωτέρω διαστημάτων ἔχομεν καί τά κάτωθι :

Τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μεγαλύτεροι δοθέντος ἀριθμοῦ α. Οἱ ἀριθμοί οὗτοι χ, ὀφείλουσι νά πληρῶσι τήν ἀνισότητα (3) $\chi > \alpha$. Τήν σχέσιν ταύτην δυνάμεθα νά σημειώσωμεν καί οὕτω :

$$\alpha < \chi < +\infty$$

Συμβολικῶς αὕτη παρίσταται $[\alpha, +\infty)$.

Τό σύνολον τῶν ἀριθμῶν, οἵτινες εἶναι μικρότεροι δοθέντος ἀριθμοῦ α. Οἱ ἀριθμοί οὗτοι χ, ὀφείλουσι νά πληρῶσι τήν ἀνισότητα (4) $\chi < \alpha$. Ἡ σχέσις αὕτη δύναται νά γραφῇ καί οὕτω : $-\infty < \chi < \alpha$. Συμβολικῶς δέ παρίσταται $(-\infty, \alpha]$. Τέλος δυνάμεθα νά ἔχωμεν τά διαστήματα (5) $\chi \geqslant \alpha$, ὅπερ παρίσταται συμβολικῶς $(\alpha, +\infty)$ καί (6) $\chi \leqslant \alpha$, ὅπερ παρίσταται συμβολικῶς $(-\infty, \alpha)$.

Τά ἀνωτέρω διαστήματα δυνάμεθα νά παραστήσωμεν γεωμετρικῶς ὡς ἑξῆς : Τό κλειστόν διάστημα παρίσταται ἀπό ἕν εὐθύγραμμόν τμῆμα, λαμβανόμενον ἐπί ἑνός ἄξονος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τό ὁποῖον ἔχει ἄκρα τά δύο σημεῖα, ἅτινα παριστῶσι τούς ἀριθμούς α καί β. Τό ἀνοικτόν διάστημα, ὡς καί τά ἡμιανοικτά τοιαῦτα, παρίστανται ἀπό τό εὐθύγραμμον τμῆμα ἐπί τοῦ ἄξονος, ὅταν ἐξαιρέσωμεν τά δύο ἤ τό ἕν ἄκρον του. Τά διαστήματα (3), (4), (5) καί (6) παρίστανται γεωμετρικῶς ἀπό ἀπεράντους ἡμιευθείας, αἵτινες ἄρχονται ἀπό τοῦ σημείου Α, ὅπερ ἔχει τετμημένην α, καί εἰς τάς ὁποίας συμπεριλαμβάνεται ἤ ὄχι ἡ ἀρχή των Α. Τέλος διακρίνομεν καί τό διάστημα ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ὅπερ γεωμετρικῶς δύναται νά παρασταθῇ ἀπό ὅλην τήν εὐθεῖαν τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τοῦτο καλοῦμεν διάστημα ἀπό $-\infty$ ἕως $+\infty$ καί παριστῶμεν συμβολικῶς $(-\infty, +\infty)$. Τά διαστήματα εἶναι προφανῶς ὑποσύνολα τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό διάστημα $α<χ<β$ δύναται νά θεωρηθῇ ὡς τομή τῶν διαστημάτων $χ<β$ καί $χ>α$.

40. Αὔξουσα καί φθίνουσα συνάρτησις

Μία συνάρτησις φ(χ) λέγεται αὔξουσα εἰς ἕν διάστημα $α<χ<β$, ὅταν αὐξανομένης ἤ ἐλαττουμένης τῆς τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, βαίνῃ αὐξανομένη ἤ ἐλαττουμένη καί ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως ἐν τῷ διαστήματι τούτῳ. Ἤτοι αἱ τιμαί τῆς συναρτήσεως καί τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, συγχρόνως αὐξάνουσιν ἤ συγχρόνως ἐλαττοῦνται.

Μία συνάρτησις φ(χ) λέγεται φθίνουσα εἰς ἕν διάστημα $α<χ<β$, ὅταν αὐξανομένης τῆς τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως βαίνει ἐλαττουμένη ἤ ἐλλατουμένης τῆς τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς χ, ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως βαίνει αὐξανομένη.

Παραδείγματα

Ἔστω ἡ συνάρτησις $φ : χ\in A \longrightarrow φ = 2χ-3\in A$. Δίδομεν διαφόρους τιμάς εἰς τόν χ καί ἔχομεν ἀντιστοίχους τιμάς τοῦ φ. Σχηματίζομεν τόν κάτωθι πίνακα :

χ	-2	-1	0	1	2	3
φ	-7	-5	-3	-2	1	3

Παρατηροῦμεν ὅτι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τοῦ χ, αὐξάνει ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως. Ἄρα ἡ συνάρτησις εἶναι αὔξουσα.

Ἔστω τώρα ἡ συνάρτησίς $φ : χ\in A \longrightarrow φ = \frac{4-χ}{2}\in A$

Ἐνεργοῦντες ὡς ἀνωτέρω σχηματίζομεν τόν πίνακα :

χ	-2	-1	0	1	2	3
φ	3	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

Ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα, διότι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τοῦ χ, ἐλαττοῦται ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως.

Διά νά ἴδωμεν ἐάν μία συνάρτησις εἶναι αὔξουσα ἤ φθίνουσα, δίδομεν είς τήν ἀνεξάρτητον μεταβλητήν χ δύο τυχούσας τιμάς καί παρατηροῦμεν ποία εἶναι μεγαλυτέρα ἀπό τάς δύο τιμάς πού ἀντιστοιχοῦσιν εἰς τήν συνάρτησιν.'Εάν εἰς τήν μεγαλυτέραν τιμήν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ πάντοτε ἡ μεγαλυτέρα τιμή τῆς συναρτήσεως, ἡ συνάρτησις αὔτη εἶναι αὔξουσα.'Εάν ὅμως εἰς τήν μεγαλυτέραν τιμήν τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς ἀντιστοιχῇ τοὐναντίον πάντοτε ἡ μικροτέρα τιμή τῆς συναρτήσεως, ἡ συνάρτησις αὔτη εἶναι φθίνουσα.

'Εκ τῆς Γεωμετρίας δυνάμεθα νά λάβωμεν τό παράδειγμα τοῦ τόξου περιφερείας τινός καί τῆς ἀντιστοίχου εἰς αὐτό χορδῆς. Τό μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ τόξου εἶναι αὔξουσα συνάρτησις τοῦ τόξου, τό ὁποῖον ὑποτείνει ἡ χορδή, ὅταν τό τόξον μεταβάλληται ἀπό 0 ἕως 180° καί φθίνουσα συνάρτησις τοῦ χ ὅταν τό χ μεταβάλληται ἀπό 180° ἕως 360°.'Εκ τῆς τριγωνομετρίας λαμβάνομεν τό συνημίτονον τόξου καί παρατηροῦμεν ὅτι συνχ εἶναι φθίνουσα συνάρτησις τοῦ χ εἰς τό διάστημα $0 \leq \chi \leq 180^{\circ}$ καί αὔξουσα συνάρτησις τοῦ χ εἰς τό διάστημα $180^{\circ} \leq \chi \leq 360^{\circ}$.

41. Συμβολική παράστασις αὐξούσης καί φθινούσης συναρτήσεως.

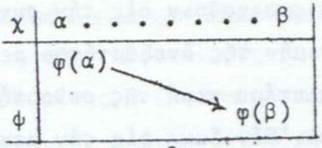
Δυνάμεθα συμβολικῶς νά παριστῶμεν μίαν συνάρτησιν $\psi = \varphi(\chi)$ αὔξουσαν ἤ φθίνουσαν εἰς ἕν διάστημα $\alpha \leq \chi \leq \beta$ ὡς ἀκολούθως :

α)"Εστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\chi)$ αὔξουσα εἰς τό διάστημα $\alpha \leq \chi \leq \beta$. Αὔτη παρίσταται συμβολικῶς οὕτω :

χ	α . . . . β
ψ	φ(α) ↗ φ(β)

Σχῆμα 1ον

β)Ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = \varphi(\chi)$ φθίνουσα εἰς τό διάστημα $\alpha \leqslant \chi \leqslant \beta$. Αὕτη παρίσταται συμβολικῶς οὕτω :

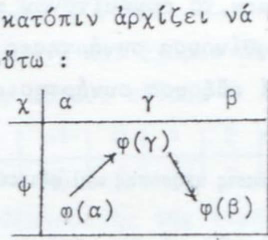


Σχῆμα 2ον

Δηλαδή εἰς τό σχῆμα 1ον διά τήν αὔξουσαν συνάρτησιν τό βέλος ἐντός τοῦ ὀρθογωνίου ἀνέρχεται ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά, ἐνῷ εἰς τό σχῆμα 2ον διά τήν φθίνουσαν συνάρτησιν τό βέλος κατέρχεται ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά.

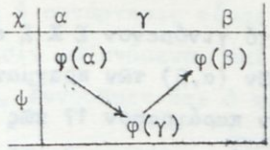
γ)Ἔστω τό διάστημα $\alpha < \gamma < \beta$.

Δυνατόν μία συνάρτησις $\psi = \varphi(\chi)$ νά εἶναι αὔξουσα εἰς τό διάστημα $\alpha \leqslant \chi \leqslant \gamma$ καί φθίνουσα εἰς τό διάστημα $\gamma \leqslant \chi \leqslant \beta$. Τότε λέγομεν ὅτι διά $\chi = \gamma$ ἡ συνάρτησις ἔχει μέγιστον. Ἡ τιμή τοῦ μεγίστου εἶναι $\varphi(\gamma)$. Ἤτοι αὐξάνει μέχρι μιᾶς μεγίστης τιμῆς καί κατόπιν ἀρχίζει νά ἐλαττοῦται. Συμβολικῶς τότε σημειοῦται οὕτω :



δ)Ἔστω τό διάστημα $\alpha < \gamma < \beta$.

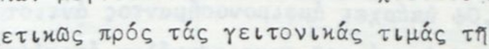
Δυνατόν μία συνάρτησις $\psi = \varphi(\chi)$ νά εἶναι φθίνουσα εἰς τό διάστημα $\alpha \leqslant \chi \leqslant \gamma$ καί αὔξουσα εἰς τό διάστημα $\gamma \leqslant \chi \leqslant \beta$. Τότε λέγομεν ὅτι διά $\chi = \gamma$ ἡ συνάρτησις ἔχει ἐλάχιστον. Ἡ τιμή τοῦ ἐλαχίστου εἶναι $\varphi(\gamma)$. Ἤτοι ἐλαττοῦται μέχρι μιᾶς ἐλαχίστης τιμῆς καί ἐν συνεχείᾳ ἀρχίζει νά αὐξάνῃ. Συμβολικῶς παρίσταται οὕτω :



<u>Παρατήρησις</u>. Πολλάκις δύναται μία συνάρτησις νά διέρχεται διά πολλῶν μεγίστων καί πολλῶν ἐλαχίστων. Κάθε μέγιστον εἶναι σχετικῶς πρός τάς γειτονικάς τιμάς τῆς συναρτήσεως ἡ μεγαλυτέρα τιμή, ἀνάλογον δέ ἰσχύει καί διά τά ἐλάχιστα. Ὅλα τά μέγιστα καί ὅλα τά ἐλάχιστα καλοῦνται σ χ ε τ ι κ ά ἀ κ ρ ό τ α τ α τῆς συναρτήσεως.

42. Γραφική παράστασις συναρτήσεως

Ἔστω τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν Σ = {1,2,3,4,..} Λαμβάνομεν ἕνα ἄξονα χ΄Οχ καί ἐπ'αὐτοῦ τό διευθῦνον ἄνυσμα Οθ. Μεταξύ τοῦ συνόλου Σ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καί τοῦ σημειοσυνόλου χ΄χ ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία. Διότι είς κάθε πραγμάτικόν ἀριθμόν α ἀντιστοιχεῖ ἕν μόνον ση-



μεῖον Μ τοῦ ἄξονος χ΄χ, τοιοῦτον ὥστε $\overline{OM}$ = α καί ἀντιστρόφως. Κατά συνέπειαν πᾶς ἄξων χ΄χ ὑποδηλοῖ πάντας τούς πραγματικούς ἀριθμούς καί καλεῖται ἄ ξ ω ν τ ῶ ν π ρ α γ μ α τ ι κ ῶ ν ἀ ρ ι θ μ ῶ ν , εἶναι δέ μία γεωμετρική εἰκών τοῦ συνόλου Σ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Τό σημεῖον Ο, ὅπερ θεωρεῖται ὡς ἀρχή τῶν ἀνυσμάτων, διαμορφώνει ἐπί τοῦ ἄξονος δ ύ ο φ ο ρ ά ς (διευθύνσεις), ἤτοι τήν θετικήν Οχ (θετικός ἡμιάξων) καί τήν ἀρνητικήν Οχ΄ (ἀρνητικός ἡμιάξων). Πᾶν σημεῖον κείμενον ἐπί τοῦ θετικοῦ ἡμιάξονος παρίσταται ὑπό θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, ἐνῷ πᾶν σημεῖον, κείμενον ἐπί τοῦ ἀρνητικοῦ ἡμιάξονος, ὑπό ἀρνητικοῦ ἀριθμοῦ. Ὁ ἀριθμός α, ὅστις ὑποδηλοῖ τό ἄνυσμα $\overline{OM}$, εἶναι ἡ τετμημένη τοῦ σημείου Μ. Ἔστω ὅτι τό γινόμενον Σ Χ Σ εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν δυνατῶν ζευγῶν (α,β) τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν (α∈Σ, β∈Σ). Εἴδομεν εἰς τήν παράγραφον 17 πῶς παρίσταται γραφικῶς πᾶν τοιοῦτον διατεταγμένον ζεῦγος (α,β) πραγματικῶν ἀριθμῶν. Εἰς τό ἐπίπεδον (Π) τό διαμορφούμενον ὑπό τῶν δύο καθέτων ἀξόνων Οχ,Οφ ὑπάρχει ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία μεταξύ τοῦ συνόλου Σ Χ Σ καί τοῦ σημειοσυνόλου ἐπιπέδου (Π). Πάντα τά ζεύγη τοῦ Σ Χ Σ εἰκονίζονται ὡς σημεῖα τοῦ (Π) καί ἀντιστρόφως. Ἡ γεωμετρική εἰκών τοῦ συνόλου Σ Χ Σ = $Σ^2$ εἶναι τό ἐπίπεδον Π τῶν ἀξόνων. Τοῦτ' αὐτό συμβαίνει καί διά τό Καρτεσιανόν γινόμενον δύο συνόλων Α καί Β, ἤτοι Α Χ Β.

1. Λαμβάνομεν Σ τό σύνολον τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καί θεωροῦμεν τήν ἀπεικόνισιν

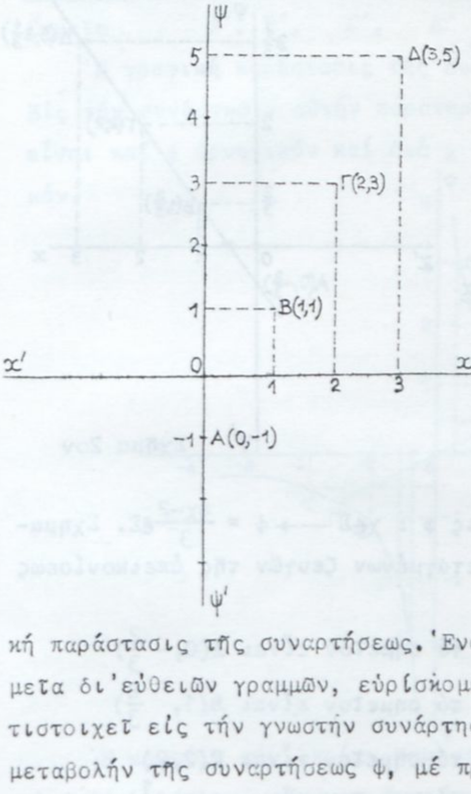
$$φ : χ∈Σ \longrightarrow φ = 2χ-1∈Σ$$

Τά ὁριζόμενα διατεταγμένα ζεύγη συνιστῶσι μίαν συνάρτησιν τοῦ Σ εἰς τό Σ. Διότι ἄν συμβῇ νά εἶναι $χ_1 = χ_2$, θά εἶναι καί $φ_1 = φ_2$. Ἄρα τά διάφορα διατεταγμένα ζεύγη θά ἔχωσι τά πρῶτα μέλη διάφορα.

Σχηματίζομεν μίαν σειράν διατεταγμένων ζευγῶν, καταλλήλων, διά νά ἔχωμεν καί μίαν εἰκόνα τῆς γραφικῆς παραστάσεως τῆς συναρτήσεως :

Ὅταν χ = 0, φ = -1 καί τό σημεῖον εἶναι Α(0,-1)
Ὅταν χ = 1, φ = 1 καί τό σημεῖον εἶναι Β(1,1)
Ὅταν χ = 2, φ = 3 καί τό σημεῖον εἶναι Γ(2,3)
Ὅταν χ = 3, φ = 5 καί τό σημεῖον εἶναι Δ(3,5) κ.ο.κ.

Λαμβάνομεν δύο ὀρθογωνίους ἄξονας χ΄Οχ καί φ΄Οφ καί ὁρίζομεν ἐπί μέν τοῦ ἄξονος χ΄Οχ τά σημεῖα ἅτινα ἔχουσι τετμημένας 0,1,2,3, ἐπί δέ τοῦ ἄξονος φ΄Οφ, τά σημεῖα ἅτινα ἔχουσι τεταγμένας -1,1,3,5. Παρατηροῦμεν ὅτι αὐξανομένης τῆς τιμῆς τῆς ἀνεξαρτήτου μεταβλητῆς, αὐξάνει καί ἡ τιμή τῆς συναρτήσεως, έπομένως ή συνάρτησις είναι αὔξουσα. Ἐπειδή αἱ τιμαί τοῦ χ βαίνουσιν αὐξανόμεναι καί αἱ τιμαί τοῦ ψ μεταβάλλονται ἀναλόγως, έννοοῦμεν ὅτι ὁ τόπος τῶν εὑρισκομένων



σημείων καί τῶν ὁποίων αἱ συντεταγμέναι ἐπαληθεύουσι τήν ἐξίσωσιν $\psi = 2\chi-1$ εἶναι ἐν γένει μία γραμμή, ἥν παριστᾷ ἡ δοθεῖσα συνάρτησις. Ἐπομένως εἰς πᾶσαν συνάρτησιν, ἐάν νοήσωμεν τάς μεταβλητάς αὐτῆς ὡς συντεταγμένας σημείου, ἀντιστοιχεῖ μία γραμμή, ἥτις καί δεικνύει τήν μεταβολήν τῆς συναρτήσεως. Ἐνταῦθα τό σημειοσύνολον $\{A, B, \Gamma, \Delta\}$ εἶναι ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως. Ἑνοῦντες τά διαδοχικά σημεῖα δι' εὐθειῶν γραμμῶν, εὑρίσκομεν τήν γραμμήν, ἥτις ἀντιστοιχεῖ εἰς τήν γνωστήν συνάρτησιν καί ἥτις δεικνύει τήν μεταβολήν τῆς συναρτήσεως ψ, μέ προσέγγισιν τόσῳ μεγαλυτέραν, ὅσῳ περισσότερα διατεταγμένα ζεύγη λαμβάνομεν αὐτῆς.

2. Ἔστω ἡ ἀπεικόνισις $\varphi : \chi\in\Sigma \longrightarrow \psi = 3\chi\in\Sigma$. Σχηματίζομεν μίαν σειράν διατεταγμένων ζευγῶν αὐτῆς τῆς ἀπεικονίσεως :

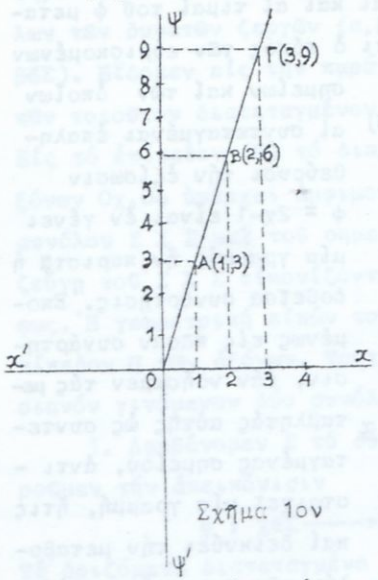
Ὅταν $\chi = 0$, $\psi = 0$ καί τό σημεῖον εἶναι $O(0,0)$

" $\chi = 1$, $\psi = 3$ καί τό σημεῖον εἶναι $A(1,3)$

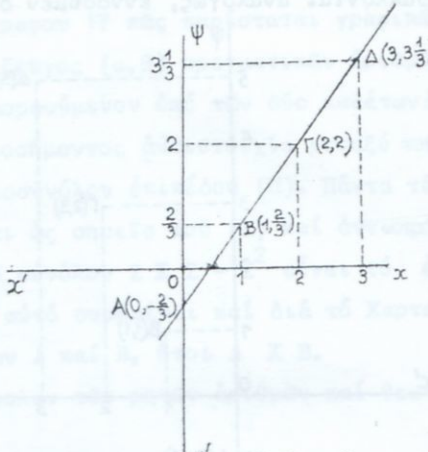
" $\chi = 2$, $\psi = 6$ καί τό σημεῖον εἶναι $B(2,6)$

" $\chi = 3$, $\psi = 9$ καί τό σημεῖον εἶναι $\Gamma(3,9)$ κ.ο.κ.

Ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως παρίσταται ὡς κάτωθι (σχ. 1).



Σχῆμα 1ον



Σχῆμα 2ον

3. Ἔστω ἡ ἀπεικόνισις $\varphi : \chi\in\Sigma \longrightarrow \psi = \frac{4\chi-2}{3}\in\Sigma$. Σχηματίζομεν μίαν σειράν διατεταγμένων ζευγῶν τῆς ἀπεικονίσεως ταύτης :

Ὅταν $\chi = 0,\ \psi = -\frac{2}{3}$ τό σημεῖον εἶναι $A(0,-\frac{2}{3})$

" $\chi = 1,\ \psi = \frac{2}{3}$ τό σημεῖον εἶναι $B(1,\ \frac{2}{3})$

" $\chi = 2,\ \psi = 2$ τό σημεῖον εἶναι $\Gamma(2,2)$

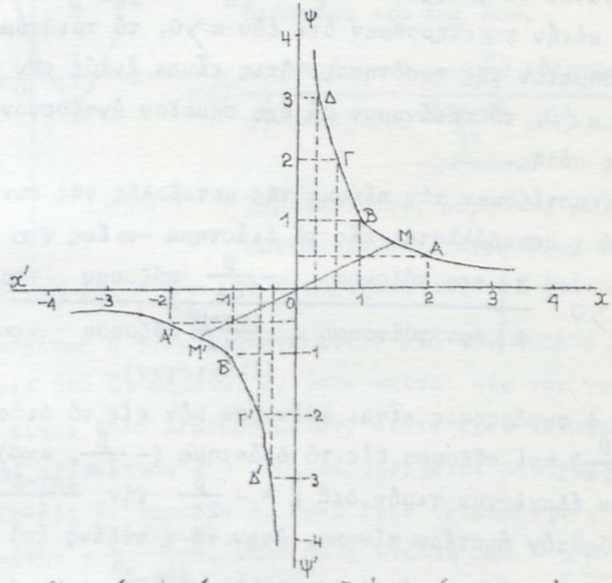
" $\chi = 3,\ \psi = 3\frac{1}{3}$ τό σημεῖον εἶναι $\Delta(3,3\frac{1}{3})$

Ἡ γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως παρίσταται ὡς ἀνωτέρω (σχ. 2).

4. θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $\varphi(\chi) = \psi = \frac{1}{\chi}$. Ἐξετάζομεν τήν μεταβολήν της είς τό διάστημα $-\infty$ ἕως $+\infty$. Σχηματίζομεν μίαν σειράν διατεταγμένων ζευγῶν, ὡς δεικνύει ὁ κάτωθι πίναξ :

χ	$-\infty$.....-2 , -1 , $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$....	$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2........$+\infty$
ψ	0 $\quad -\frac{1}{2}$, -1 , -2 , -3....	3 , 2 , 1, $\frac{1}{2}$........ 0
Σημεῖα	Α΄, Β΄, Γ΄, Δ΄	Δ Γ Β Α

῾Η γραφική παράστασις τῆς συναρτήσεως εἶναι ὡς κάτωθι. Εἰς τήν συνάρτησιν αὐτήν παρατηροῦμεν ὅτι διά χ ἀρνητικόν εἶναι καί ψ ἀρνητικόν καί διά χ θετικόν εἶναι καί ψ θετικόν.



῾Η καμπύλη τήν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις ἀποτελεῖται ἀπό δύο κλάδους, οἵτινες ἐκτείνονται ἐπ'ἄπειρον.῾Η καμπύλη αὕτη λέγεται ὑ π ε ρ β ο λ ή.᾿Επειδή οἱ χ καί ψ εἶναι πάντοτε ὁμόσημοι, τά σημεῖα τά ὁποῖα ἔχουσι συντεταγμένας τάς χ καί ψ, εὑρίσκονται πάντοτε ἐντός τῶν γωνιῶν χΟψ καί χ΄Οψ΄. ᾿Εάν τυχόν σημεῖον Μ τῆς καμπύλης ΑΒΓΔ ἔχῃ συντεταγμένας χ καί ψ, τό συμμετρικόν του Μ΄, ὡς πρός κέντρον συμμετρίας τό Ο, θά ἔχῃ συντεταγμένας -χ,-ψ.

᾿Από τήν ἰσότητα $\psi = \frac{1}{\chi}$ λαμβάνομεν τήν ἰσότητα $-\psi = -\frac{1}{\chi}$

'Εκ τούτου συμπεραίνομεν ὅτι τό σημεῖον Μ΄ ἀνήκει εἰς τήν καμπύλην, τήν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις $\psi = \frac{1}{\chi}$. Ὅταν προσδιορίσωμεν ἕνα κλάδον τῆς καμπύλης, δυνάμεθα νά προσδιορίσωμεν καί τόν ἄλλον κλάδον, ἀρκεῖ νά λάβωμεν τόν συμμετρικόν αὐτοῦ, ὡς πρός κέντρον συμμετρίας τήν ἀρχήν Ο τῶν συντεταγμένων.

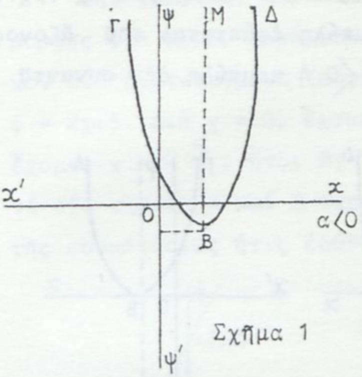
5. Θεωροῦμεν τήν συνάρτησιν $\psi = \alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. Τό τριώνυμον δύναται νά γραφῆ $\psi = \alpha\left[(\chi + \frac{\beta}{2\alpha})^2 + \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2}\right]$. Ὑπό τήν μορφήν αὐτήν παρατηροῦμεν ὅτι ἐάν $\alpha > 0$, τό τριώνυμον θά ἔχη τό σημεῖον τῆς ποσότητος, ἥτις εἶναι ἐντός τῶν ἀγκυλῶν, ἐάν δέ $\alpha < 0$, τό τριώνυμον θά ἔχη σημεῖον ἀντίθετον τῆς ποσότητος αὐτῆς.

Σχηματίζομεν τόν πίνακα τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὅταν τό χ μεταβάλληται εἰς τό διάστημα $-\infty$ ἕως $+\infty$.

1ον. $\alpha > 0$

χ	$-\infty$	αὔξουσα	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	αὔξουσα	$+\infty$
ψ	$+\infty$	φθίνουσα	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (ἐλάχιστον)	αὔξουσα	$+\infty$

Δηλαδή ἡ συνάρτησις εἶναι φθίνουσα μέν εἰς τό διάστημα ($-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$) καί αὔξουσα εἰς τό διάστημα ($-\frac{\beta}{2\alpha}$, $+\infty$). Ἔχει αὐτη μίαν ἐλαχίστην τιμήν διά $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ τήν $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Συμφώνως πρός τόν ἀνωτέρω πίνακα, ὅταν τό χ αὐξάνη ἀπό $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, τό ψ ἐλαττοῦται ἀπό $+\infty$ εἰς $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή τήν ὁποίαν παριστᾷ ἡ συνάρτησις θά ἀποτελῆται ἀπό ἕνα κλάδον συνεχῆ ΓΒ, ὅστις θά ἀναχωρῆ ἀπό τό σημεῖον Γ, ὅπερ κεῖται εἰς τήν γωνίαν ψΟχ΄ καί εἶναι πολύ μεμακρυσμένον, διότι ἔχει τετμημένην $\chi = -\infty$ καί τεταγμένην $\psi = +\infty$, θά κατέρχεται συνεχῶς καί θά καταλήξῃ εἰς ἕν σημεῖον Β, τό ὁποῖον ἔχει τετμημένην $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ καί τεταγμένην $\psi = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἔπειτα, ἐπειδή εἰς τό διάστημα $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$ εἶναι αὔξουσα, θά ἀνέρχεται ἀπό τό σημεῖον Β καί θά ἀπομακρύνεται εἰς ἕν σημεῖον Δ, ὅπερ εὑρίσκεται εἰς τήν γωνίαν χΟφ καί εἶναι πολύ μεμακρυσμένον, διότι ἔχει τετμημένην $\chi = +\infty$ καί τεταγμένην $\psi = +\infty$. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις παριστᾷ τήν καμπύλην (σχ.1).



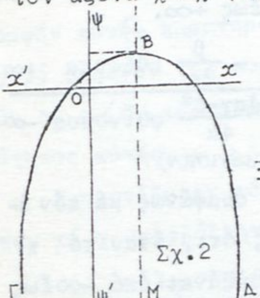
Σχῆμα 1

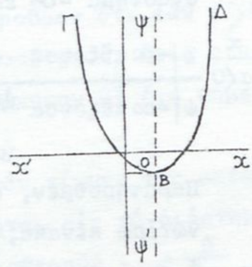
2ον. Ἔστω $\alpha < 0$. Σχηματίζομεν τόν πίνακα τῆς μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως ὡς ἀνωτέρω εἰς τό διάστημα $-\infty$ ἕως $+\infty$.

χ	$-\infty$	αὔξουσα	$-\frac{\beta}{2\alpha}$	αὔξουσα	$+\infty$
ψ	$-\infty$	αὔξουσα	$\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ (μέγιστον)	φθίνουσα	$-\infty$

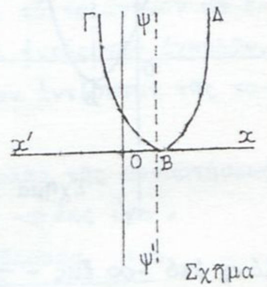
Παρατηροῦμεν, συμφώνως μέ τόν ἀνωτέρω πίνακα, ὅτι, ὅταν τό χ αὐξάνῃ ἀπό $-\infty$ ἕως $-\frac{\beta}{2\alpha}$, ἡ συνάρτησις αὐξάνει ἀπό $-\infty$ ἕως $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ἑπομένως ἡ γραμμή ἀποτελεῖται ἀπό τόν κλάδον ΓΒ, ὅστις ἀναχωρεῖ ἀπό ἕν σημεῖον Γ, ὅπερ κεῖται εἰς τήν γωνίαν χ΄Οφ΄ καί εἶναι πολύ μεμακρυσμένον, διότι ἔχει τετμημένην $\chi = -\infty$ καί τεταγμένην $\psi = -\infty$, θά ἀνέρχεται συνεχῶς καί θά καταλήξῃ εἰς ἕν σημεῖον Β, ὅπερ ἔχει τετμημένην $\chi = -\frac{\beta}{2\alpha}$ καί τεταγμένην $\psi = \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$. Ὅταν τό χ αὐξάνῃ ἀπό $-\frac{\beta}{2\alpha}$ ἕως $+\infty$ τό ψ ἐλαττοῦται ἀπό $\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha}$ ἕως $-\infty$ καί ἡ συνάρτησις παριστᾷ ἄλλον κλάδον τῆς γραμμῆς, ὅστις κατέρχεται ἀπό τό σημεῖον Β, πρός τό σημεῖον Δ, τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τήν γωνίαν χΟφ΄ καί εἶναι πολύ μεμακρυσμένον, διότι ἔχει τετμημένην $\chi = +\infty$ καί τεταγμένην $\psi = -\infty$. Ἑπομένως ἡ συνάρτησις παριστᾷ τήν καμπύλην (σχ. 2). Ἡ καμπύλη αὕτη λέγεται παραβολή καί οἱ δύο κλάδοι της ΓΒ καί ΒΔ εἶναι συμμετρικοί ὡς πρός τήν εὐθεῖαν ΒΜ. Ἡ καμπύλη ΓΒΔ δύναται νά λάβῃ διαφόρους θέσεις ὡς πρός τούς ἄξονας χ΄Οχ καί φ΄Οφ, ἀναλόγως πρός τήν διακρίνουσαν τοῦ τριωνύμου $\beta^2-4\alpha\gamma$.

1ον. $\alpha>0$. Ἐάν ἡ διακρίνουσα $\beta^2-4\alpha\gamma>0$, ἡ καμπύλη τέμνει τόν ἄξονα $\chi'O\chi$ εἰς δύο σημεῖα $M'M$, τῶν ὁποίων αἱ τετμημέναι εἶναι αἱ πραγματικαί ρίζαι τοῦ τριωνύμου $\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$. (Σχῆμα 3ον). Ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$, ἡ καμπύλη ἐφάπτεται τοῦ ἄξονος $\chi'O\chi$ (σχῆμα 4ον) καί ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ ἡ καμπύλη δέν συναντᾷ τόν ἄξονα $\chi'O\chi$ (σχῆμα 5ον).



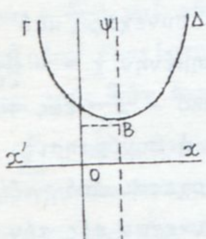


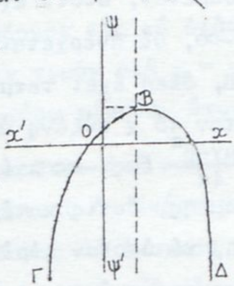
Σχῆμα 3ον

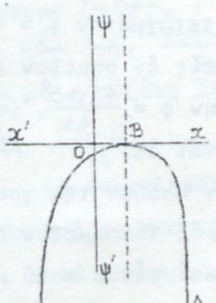


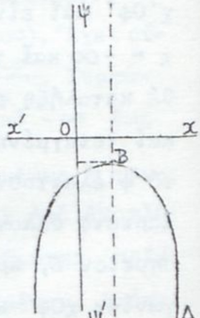
Σχῆμα 4ον

2ον. $\alpha<0$. Αἱ θέσεις τῆς καμπύλης εἶναι ἀναλόγως τῆς διακρινούσης $\beta^2-4\alpha\gamma$. Ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma>0$ (σχῆμα 6ον), ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma=0$ (σχῆμα 7ον) καί ἐάν $\beta^2-4\alpha\gamma<0$ (σχῆμα 8ον).







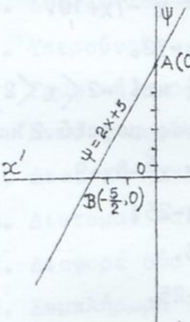


Σχῆμα 5ον Σχῆμα 6ον Σχῆμα 7ον Σχῆμα 8ον

<u>Παρατήρησις</u> : Εἰς τήν γραφικήν παράστασιν τῆς γραμμικῆς συναρτήσεως (παράδειγμα 2) παρατηροῦμεν ὅτι ἡ γραμμή διέρχεται διά τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων O. Ἐπομένως πᾶσα συνάρτησις μορφῆς $\psi=\alpha\chi$ (α σταθερά ποσότης διάφορος τοῦ μηδενός)

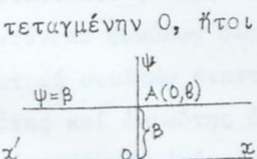
παριστᾷ τοιαύτην γραμμήν. Ἐνῷ πᾶσα συνάρτησις μορφῆς $\psi = \alpha\chi+\beta$ (α καί β σταθεραί ποσότητες διάφοροι τοῦ μηδενός) (παράδειγμα 3ον) παριστᾷ εὐθεῖαν γραμμήν τέμνουσαν τούς δύο ἄξονας χ΄Οχ, ψ΄Οψ.

Τήν γραφικήν παράστασιν μιᾶς γραμμικῆς συναρτήσεως, μορφῆς $\psi = \alpha\chi+\beta$, δυνάμεθα νά διευκολύνωμεν, εὑρίσκοντες μόνον δύο διατεταγμένα ζεύγη αὐτῆς. Π.χ. ἔστω ἡ συνάρτησις $\psi = 2\chi+5$. Διά $\chi = 0$, ἔχομεν $\psi = 5$. Ἤτοι Α(0,5) καί διά $\psi=0$ ἔχομεν $\chi = -\frac{5}{2}$, ἤτοι $B(-\frac{5}{2},0)$. Ἐπομένως, ἔχοντες ὑπ' ὄψιν τά δύο σημεῖα Α καί Β παριστῶμεν τήν γραφικήν παράστασιν τῆς συναρτήσεως ἥτις ἐδόθη ὡς κάτωθι :

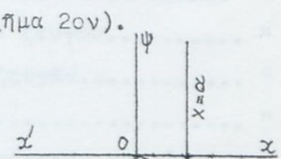


Πᾶσα συνάρτησις μορφῆς $\psi=\beta$, ἔνθα β σταθερά ποσότης διάφορος τοῦ 0, παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι χ΄Οχ καί τέμνουσαν τόν ἄξονα ψ΄Οψ εἰς τό σημεῖον Α, ἔχον τετμημένην 0 καί τεταγμένην β, ἤτοι Α(0,β)(σχῆμα 1ον).

Πᾶσα συνάρτησις μορφῆς $\chi=\alpha$, ἔνθα α εἶναι σταθερά ποσότης διάφορος τοῦ 0, παριστᾷ εὐθεῖαν παράλληλον τῷ ἄξονι ψ΄Οψ καί τέμνουσαν τόν ἄξονα χ΄Οχ εἰς τό σημεῖον Β, ἔχον τετμημένην α καί τεταγμένην 0, ἤτοι Β(α,0)(σχῆμα 2ον).



Σχῆμα 1ον



Σχῆμα 2ον

'<u>Ασκήσεις</u> :

182. Νά παρασταθῆ γραφικῶς ἡ συνάρτησις

$$\varphi : \chi\in A \longrightarrow \psi \doteq \frac{3\chi}{2} -1\in A$$

183. 'Ομοίως ἡ συνάρτησις : $\varphi : \chi\in A \longrightarrow \psi = -2\chi+1\in A$.

184. 'Ομοίως ἡ συνάρτησις $\varphi : \chi\in A \longrightarrow \psi = -\frac{2\chi}{2}\in A$

185. Νά παρασταθῆ γραφικῶς τό $\{(\chi,\psi)/\psi = \chi-4\}$ εἰς τό Α Χ Α, ἔνθα Α εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

186. Νά παρασταθῆ γραφικῶς τό $\{(\chi,\psi)/\psi = 2\chi\}$ εἰς τό ΑΧΑ, ἔνθα Α εἶναι τό σύνολον ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν.

187. Νά παρασταθῆ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \chi^2-7\chi+10$.

188. 'Ομοίως ὡς ἄνω ἡ συνάρτησις $\psi = -\chi^2+12\chi-32$.

189. Νά παρασταθῆ γραφικῶς τό $\{(\chi,\psi)/\psi = 2\chi$ καί $-2<\chi<2\}$.

190. 'Ομοίως ὡς ἄνω τό $\{(\chi,\psi)/\psi$ καί χ ἀκέραιος μεταξύ 2 καί 5$\}$

191. Νά παρασταθῆ γραφικῶς ἡ συνάρτησις $\psi = \chi^2-6\chi+9$.

192. 'Ομοίως ὡς ἄνω ἡ συνάρτησις $\psi = -\chi^2+10\chi-25$.

193. 'Ομοίως ὡς ἄνω ἡ συνάρτησις $\psi = \chi^2-4\chi+5$.

194. 'Ομοίως ὡς ἄνω ἡ συνάρτησις $\psi = -\chi^2+6\chi-25$.

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

Π Α Ρ Ο Ρ Α Μ Α Τ Α

Σελίς	34.	Στίχος	11	'Αντί παράγραφος 13 νά γραφῇ παράγραφος 14.
"	34.	"	15	'Αντί $CA = A'$ νά γραφῇ $\underset{\Sigma}{C}A = A'$
"	42.	"	19	'Αντί παράγραφος 16 νά γραφῇ παράγραφος 17
"	61.	"	4	'Αντί δηλάσεις νά γραφῇ δηλώσεις
"	63	"	15	Νά διαγραφῇ ὁ ἀριθμός 30
"	64	"	13	Εἰς χ Κ νά σημειωθῇ χΒΚ
"	66	"	21,22	Νά τεθῇ }

ΕΡΓΑ ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ ΥΠΟ ΕΚΤΥΠΩΣΙΝ

1. Ἀσκήσεις Γεωμετρίας—Γ.ωμετρικοὶ τόποι, Τεύχη Α, Β.
2. Ἀσκήσεις Γεωμετρίας, Γενικαί. Τεύχη Α, Β, Γ, Δ, Ε, ΣΤ, Ζ.
3. Ἀσκήσεις Ἀλγέβρας. Τεύχη Α, Β, Γ, Δ.
4. Ἀσκήσεις Τριγωνομετρίας. Τεύχη Α, Β.