ΚΩΝΣΤ. Ν. ΣΒΕΡΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Οἰκονομικοῦ καὶ
Τεχνικοῦ Κύκλου

*

ΑΘΗΝΑΙ 1969

ΚΩΝΣΤ. Ν. ΣΒΕΡΚΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Διὰ τοὺς ὑποψηφίους τοῦ Οἰκονομικοῦ καὶ
Τεχνικοῦ Κύκλου

*

ΑΘΗΝΑΙ 1969

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις τῶν μαθημάτων τῆς τριγωνομετρίας ἀναφέρεται εἰς τὴν ὕλην τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἔχουν ὑπ'ὄψιν των οἱ ὑποψήφιοι τοῦ Οἰκονομικοῦ καὶ Τεχνικοῦ κύκλου βάσει τοῦ προγράμματος τοῦ Ὑπουργείου Παιδείας καὶ Θρησκευμάτων.

Εἶναι ἐμπλουτισμένη μὲ χαρακτηριστικὲς ἀσκήσεις καὶ γενικῶς πιστεύομεν ὅτι θὰ ἀποβῇ χρήσιμον βοήθημα διὰ τὴν ἐπιτυχίαν τῶν ἀνωτέρω ὑποψηφίων.

Ἀθῆναι Νοέμβριος 1969 — Κ.Ν. Σβέρκος

Ἡ παροῦσα ἔκδοσις τῆς μεθόδου τῆς ταχυγραφίας μας ἀπευθύνεται εἰς τὴν ὕλην τὴν ὁποίαν πρέπει νά ἔχουν ἐν ὄψει των οἱ [illegible] τοῦ Οἰκονομικοῦ καί Τεχνικοῦ κλάδου μέσης καί [illegible] τοῦ [illegible] Παιδείας καί [illegible].

Εἶναι ἐμπλουτισμένη μέ χαρακτηριστικάς ἀσκήσεις καί πιστεύομεν ὅτι θά ἀποτελέσῃ χρήσιμον βοήθημα διά τήν ἐκμάθησιν τῆς ὡραίας ἐπιστήμης.

Ἀθῆναι [illegible] 19[illegible] [illegible] Στέφανος

I. ΠΕΡΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1.- Διάνυσμα ὀνομάζομεν τμῆμα εὐθείας ΟΑ ἔχον ἀρχὴν Ο καὶ πέρας Α.

O A ε

Π.χ. Ὑποθέτομεν ὅτι ἕν κινητὸν ἀναχωρεῖ (κινούμενον ἐπὶ τῆς εὐθείας ε) ἐκ τοῦ σημείου Ο καὶ φθάνει εἰς τὸ σημεῖον Α. Τὸ διανυθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ ὀνομάζομεν διάνυσμα.

Ἡ ἔννοια τοῦ διανύσματος εἶναι ἀπαραίτητος διότι πλεῖστα μεγέθη δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν πλήρως μόνον δι' ἑνὸς στοιχείου (π.χ. ἀριθμοῦ).

Ὅπως παρατηροῦμεν εἰς τὸ ἀνωτέρω παράδειγμα τὸ διανυθὲν εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ διὰ νὰ ὁρισθῇ πλήρως πρέπει α) νὰ γνωρίζωμεν τὸν ἀριθμὸν τῆς ἀριθμητικῆς ὅστις θὰ ἐκφράζῃ ἀπὸ πόσας μονάδας μήκους ἢ καὶ μέρη αὐτῆς ἀποτελεῖται τὸ εὐθύγραμμον τμῆμα ΟΑ. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς καλεῖται μῆκος τοῦ διανύσματος. β) Τὴν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται τὸ ΟΑ ἡ ὁποία καλεῖται φορεὺς τοῦ διανύσματος καὶ ὁρίζει τὴν διεύθυνσιν αὐτοῦ.(Συνεπῶς διανύσματα κείμενα ἐπὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν). γ) Τὴν ἔννοιαν κατὰ τὴν ὁποίαν διενύθη τὸ ΟΑ καὶ ἡ ὁποία ὁρίζει τὴν φορὰν τοῦ διανύσματος.

2.- Προσανατολισμένη εὐθεῖα

Ὅταν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας x'x ἔχομεν ὁρίσει τὴν κίνησιν ἐκ τοῦ x' πρὸς τὸ x ὡς θετικὴν καὶ συνεπῶς ἡ ἀντίθετος θὰ καλεῖται ἀρνητική, τότε ἡ εὐθεῖα αὕτη ὀνομάζεται προσανατολισμένη.

$$x' \xrightarrow{\quad\quad\quad\quad\quad +\quad\quad} x$$

Παρατήρησις: Ὅταν ἔχωμεν τήν παράστασιν

$$A \longrightarrow B$$

τότε λέγωμεν ὅτι ἔχομεν ἕνα διάνυσμα μέ φοράν ἐκ τοῦ Α πρός τό Β. Ἐάν ἐπί πλέον ἔχωμεν ὁρίση τήν θετικήν φοράν τῆς εὐθείας ἐπί τῆς ὁποίας κεῖται τότε ἡ φορά τοῦ διανύσματος ἤ θά σύμπίπτη μέ τήν φοράν τῆς εὐθείας ὁπότε καί αὐτό λέγομεν ἔχει φοράν θετικήν ἤ θά εἶναι ἀντίθετος αὐτῆς ὁπότε λέγομεν ὅτι ἔχει φοράν ἀρνητικήν.

3.- Μοναδιαῖον διάνυσμα

Ὀνομάζομεν μοναδιαῖον διάνυσμα ἐκεῖνο τό ὁποῖον ἔχει μῆκος ἴσον πρός τήν μονάδα τοῦ μήκους καί φοράν θετικήν.

4.- Ἄξων

Μία προσανατολισμένη εὐθεῖα ἐπί τῆς ὁποίας ἔχομεν ὁρίσει τό μοναδιαῖον διάνυσμα ὀνομάζεται ἄξων.

$$x' \;\text{———}\; \overset{O}{\bullet} \longrightarrow \overset{A}{} \;\overset{+}{\longrightarrow}\; x$$

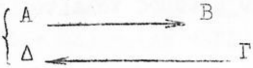
5.- Ὁμόρροπα διανύσματα

Δύο ἤ περισσότερα διανύσματα ὀνομάζονται ὁμόρροπα ὅταν ἔχουν τήν ἰδίαν διεύθυνσιν καί τήν ἰδίαν φοράν

$$\left\{\begin{array}{l} A \longrightarrow B \\ \Gamma \longrightarrow \Delta \\ E \longrightarrow Z \end{array}\right.$$

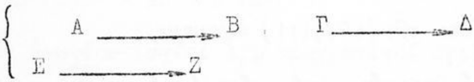
6.- <u>Ἀντίρροπα διανύσματα</u>

Δύο διανύσματα ὀνομάζονται ἀντίρροπα ὅταν ἔχουν τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν ἀλλὰ ἀντιθέτους φοράς.



7.- <u>Ἴσα διανύσματα</u>

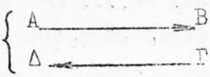
Δύο ἤ περισσότερα διανύσματα ὀνομάζονται ἴσα ὅταν εἶναι ὁμόρροπα καί ἔχουν ἴσα μήκη.



Συμβολικῶς : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{EZ}$

8.- <u>Ἀντίθετα διανύσματα</u>

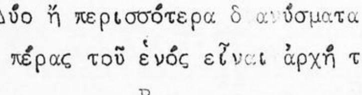
Δύο διανύσματα ὀνομάζονται ἀντίθετα ὅταν εἶναι ἀντίρροπα καί ἔχουν ἴσα μήκη.



<u>Παρατήρησις:</u> Τά ἴσα διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ἐνῷ τά ὁμόρροπα δέν εἶναι γενικῶς ἴσα. Ὁμοίως τά ἀντίθετα διανύσματα εἶναι ἀντίρροπα ἐνῶ τά ἀντίρροπα δέν εἶναι γενικῶς ἀντίθετα.

9.- <u>Διαδοχικά διανύσματα</u>

Δύο ἤ περισσότερα διανύσματα ὀνομάζονται διαδοχικά ὅταν τό πέρας τοῦ ἑνός εἶναι ἀρχή τοῦ ἄλλου.



10.- Ἀλγεβρική τιμή διανύσματος

Ἐάν ἔμπροσθεν τοῦ ἀριθμοῦ ὁ ὁποῖος παριστάνει τό μῆκος τοῦ διανύσματος θέσωμεν τό + ἤ τό - ἀναλόγως τῆς φορᾶς τοῦ διανύσματος τότε ὁ προκύπτον ἀριθμός καλεῖται ἀλγεβρική τιμή τοῦ διανύσματος.

11.- Συμβολισμός

Διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$

Μῆκος διανύσματος (AB)

Ἀλγεβρική τιμή διανύσματος $(\overrightarrow{AB})$

Παρατήρησις: Βάσει τῶν (10),(11) ἔχομεν:

α) Ἔστω $\overrightarrow{AB}$ μέ θετικήν φοράν τότε ἰσχύει $(\overrightarrow{AB}) = (AB)$

β) Ἔστω $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ μέ ἀρνητικήν φοράν τότε ἰσχύει $(\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = -(\Gamma\Delta)$

12.- Πρόσθεσις διανυσμάτων

Ἡ πρόσθεσις διανυσμάτων ὁρίζεται διά διαδοχικά τοιαῦτα κατά τόν ἑξῆς τρόπον: Ἔστω $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$,.., $\overrightarrow{MN}$ διαδοχικά διανύσματα τότε ἡ πρόσθεσις αὐτῶν δίδει τό διάνυσμα $\overrightarrow{AN}$ δηλαδή ἐκεῖνο πού ἔχει ἀρχή τήν ἀρχή τοῦ πρώτου καί πέρας τό πέρας τοῦ τελευταίου. Ἤτοι:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma} + \ldots\ldots + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN}$$

13.- Πολλαπλασιασμός πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί διάνυσμα

Οὗτος ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

λ πραγματικός

$\lambda.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$: ἐάν

$\lambda > 0$ τότε $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ὁμόρροπα καί $(\Gamma\Delta) = \lambda(AB)$

$\lambda = 0$ τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = 0$

$\lambda < 0$ τότε $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ἀντίρροπα καί $(\Gamma\Delta) = -\lambda(AB)$

Παρατήρησις

Διά τάς ἀνωτέρω δύο πράξεις ἰσχύουν αἱ ἰδιότητες:

α) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{AB}$ ('Αντιμεταθετική)

β) $\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{\Gamma\Delta} + \overrightarrow{EZ}) = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Gamma\Delta}) + \overrightarrow{EZ}$ (Προσεταιριστική)

γ) $\lambda(\mu\,\overrightarrow{AB}) = (\lambda.\mu)\overrightarrow{AB} = \mu(\lambda.\overrightarrow{AB})$ (Προσεταιριστική ὡς πρός τόν πολλαπλασιασμόν)

$$\left.\begin{array}{ll} \delta) & (\lambda+\mu)\,\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \mu\,\overrightarrow{AB} \\ \varepsilon) & \lambda(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}) = \lambda\,\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} \end{array}\right\}\ \text{ἐπιμεριστική}$$

Διά τάς ἀνωτέρω ἰσχύει λ,μ πραγματικοί ἀριθμοί.

14.- Ἀφαίρεσις δύο διανυσμάτων

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί τῆς προσθέσεως δυνάμεθα νά ὁρίσωμεν καί τήν ἀφαίρεσιν δύο διανυσμάτων. Πράγματι ἔστω τό ἄθροισμα $\overrightarrow{AB} + \lambda\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ εἰς τό ὁποῖον εἶναι $\lambda = -1$ τότε ὅμως $\lambda\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$ καί τό ἄθροισμα γίνεται $\overrightarrow{AB} + (-1)\,\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{EZ}$. Τό διάνυσμα $\overrightarrow{EZ}$ καλεῖται ἡ διαφορά τῶν διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ καί $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$. Δηλαδή διά νά ἀφαιρέσωμεν δύο διανύσματα ἀρκεῖ εἰς τό πρῶτον νά προσθέσωμεν τό ἀντίθετον τοῦ δευτέρου.

15.- Λόγος διανυσμάτων τῆς ἰδίας διευθύνσεως

Τῇ βοηθείᾳ τοῦ πολλαπλασιασμοῦ δυνάμεθα νά δόσωμεν καί τόν κατωτέρω ὁρισμόν.

Λόγος διανύσματος πρός ἄλλο διάνυσμα τῆς ἰδίας διευθύνσεως καί διαφόρου τοῦ μηδενικοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός μέ τόν ὁποῖον πρέπει νά πολλαπλασιασθῇ τό δεύτερον διάνυσμα διά νά μᾶς δώση τό πρῶτον. Συνεπῶς ἐάν τά διανύσματα εἶναι ὁμόρροπα ὁ ἀριθμός εἶναι θετικός καί ἐάν τά διανύσματα εἶναι ἀντίρροπα ὁ ἀριθμός εἶναι ἀρνητικός.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1.- Νά ἀποδειχθοῦν οἱ ἰδιότητες τῶν πράξεων τῶν διανυσμάτων.

2.- Ἐάν ΑΔ ἡ διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ νά δειχθῇ ὅτι:

$\vec{A\Delta} = \dfrac{\vec{AB} + \vec{A\Gamma}}{2}$ καί ἐάν ἐπίσης Ε τό μέσον τῆς ΑΓ τότε νά δειχθῇ καί $\vec{\Delta E} = \dfrac{\vec{BA}}{2}$.

3.- Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τάς διαμέσους ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ οἱ ὁποῖες τέμνονται εἰς τό Κ.

Δείξατε ὅτι : $\frac{2}{3}\vec{A\Delta} + \frac{1}{3}\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{A\Gamma}$

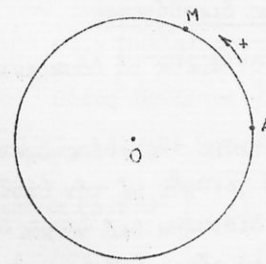
$$\vec{\Delta A} + \vec{EB} + \vec{Z\Gamma} = \vec{0}$$

$$\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{K\Gamma} = \vec{0}$$

4.- Θεωροῦμεν ἐπί ἄξονος x'x τρία τυχόντα σημεῖα Ο,Α,Β καί τό μέσον Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι:

$$\vec{OA} + \vec{OB} = 2\,\vec{OM}$$

ΙΙ. 1. Προσανατολισμένη περιφέρεια - Ἔννοια τόξου



Σχῆμα 1

Θεωροῦμεν περιφέρειαν κέντρου Ο. Ἔστω δέ κινητόν σημεῖον κινούμενον ἐπί τῆς περιφερείας ὅπως δικνύει τό βέλος τοῦ σχήματος. Καλοῦμεν τ ή ν κίνησιν αὐτήν θετικήν καί τήν ἀντίθετον κίνησιν θά καλοῦμεν ἀρνητικήν Ἤ ἄλλως τήν κίνησιν ἐπί τῆς περιφερείας τήν ἀντίθετον τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καλοῦμεν θετικήν καί τήν κίνησιν τήν ὁμοίαν τῆς τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου καλοῦμεν ἀρνητικήν. Ὅταν ἐπί μιᾶς περιφερείας ἔχομεν ὁρίσει τήν θετικήν φοράν κινήσεως καί συνεπῶς αὐτομάτως ὁρίζομεν καί τήν ἀρνητικήν φοράν κινήσεως τότε ἡ περιφέρεια αὔτη καλεῖται <u>προσανατολισμένη</u>.

Ἔστω ἐπί προσανατολισμένης περιφερείας (Σχ. 1) δύο σημεῖα Α καί Μ. Θεωροῦμεν κινητόν σημεῖον κινούμενον ἐπί τῆς περιφερείας εἴτε κατά τήν ἀρνητικήν φοράν εἴτε κατά τήν θετικήν φοράν ἀρχίζον τήν κίνησιν του ἀπό τό Α καί καταλῆγον στό Μ ἤ μόλις συναντήσει τό Μ ἤ ἀφοῦ συναντήσει τό Μ διά πρώτην, δευτέραν καί γενικῶς διά νυοστήν φοράν. Τόν δρόμον ἐπί τῆς περιφερείας πού διέγραψε τό κινητόν σημεῖον ἀρχίζον τήν κίνησίν του ἀπό τό Α καί καταλῆγον στό Μ κατά τόν ἀνωτέρω περιγραφέντα τρόπον καλοῦμεν γενικῶς τόξον. Συνεπῶς διά νά ὁρίσωμεν πλήρως ἕν τόξον πρέπει, νά ὁρίσωμεν τήν ἀρχήν αὐτοῦ τό πέρας αὐτοῦ τόν ἀριθμόν τῶν περιφερειῶν πού διαγράφει ἕν κινητόν ἕως ὅτου καταλήξει στό πέρας αὐτοῦ καί τήν φοράν κινήσεως τοῦ κινητοῦ.

2. <u>Μονάδες μετρήσεως τῶν τόξων</u>

Ὅπως διά κάθε μέγεθος ἔτσι καί διά τά τόξα ὁρίζομεν μονάδας μετρήσεως αὐτῶν. Συνήθως χρησιμοποιοῦμεν τάς ἑξῆς μονάδας μετρήσεως.

α) <u>Τήν μοῖραν</u>. Ἡ μοῖρα ($^{\circ}$) εἶναι τόξον τό ὁποῖον ἰσοῦται μέ τό $\frac{1}{360}$ τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει, δηλαδή εἰς μίαν περιφέρειαν ἀντιστοιχοῦμεν 360°. Τό $\frac{1}{60}$ τῆς μοίρας καλεῖται πρῶτον λεπτόν ($'$) καί τό $\frac{1}{60}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καλεῖται δεύτερον λεπτόν ($''$). Ἤτοι ἡ 1° ἔχει $60'$ καί τό $1'$ ἔχει $60''$.

β) <u>Τόν βαθμόν</u>. Ὁ βαθμός ($^{\beta}$) εἶναι τόξον τό ὁποῖον ἰσοῦται μέ τό $\frac{1}{400}$ τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει, δηλαδή εἰς μίαν περιφέρειαν ἀντιστοιχοῦμεν 400 βαθμούς. Τό $\frac{1}{100}$ τοῦ βαθμοῦ καλεῖται πρῶτον λεπτόν ($'$) καί τό $\frac{1}{100}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ καλεῖται δεύτερον λεπτόν ($''$). Ἤτοι ὁ 1^{β} ἔχει $100'$ καί $1'$ ἔχει $100''$.

γ) <u>Τό ἀκτίνιον</u>. Τό ἀκτίνιον ($^{\alpha}$) εἶναι τόξον τοῦ ὁποίου τό μῆκος τοῦ ἀναπτύγματός του ἰσοῦται μέ τό μῆκος τῆς ἀκτῖνος τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστόν ὅτι τό μῆκος τῆς περιφερείας εἶναι $2\pi R$ ἄρα εἰς μίαν περιφέρειαν ἀντιστοιχοῦμεν 2π ἀκτίνια.

<u>Παρατήρησις</u> : Ὅταν θά λέγωμεν τό τόξον ΑΒ θά σημειώνωμεν: $\overset{\frown}{AB}$ Ὅταν δέ ἐννοοῦμεν τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τοῦ τόξου πού εἶναι ὁ ἀριθμός τῆς ἀριθμητικῆς ὁ ὁποῖος προκύπτει ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτοῦ μέ τήν μονάδα καί μέ + ἤ - ἔμπροσθεν αὐτοῦ τοῦ ἀριθμοῦ θά σημειώνωμεν $(\overset{\frown}{AB})$.

3.- <u>Σχέσεις τῶν μονάδων μετρήσεως τῶν τόξων</u>

Ἔστω τό τόξον $\overset{\frown}{AM}$ (Σχ. 1) τό ὁποῖον διανύεται ὑπό ἑνός κινητοῦ κατά τόν ἑξῆς τρόπον: ἀρχίζει τήν κίνησίν του ἀπό τό Α καί σταματᾶ εἰς τό Μ κινούμενον θετικῶς ἀφοῦ συναντήσει τό Μ διά πρώτην φοράν. Αὐτό τό τόξον $\overset{\frown}{AM}$ λέγεται ἐλάχιστον μή ἀρνητικόν τόξον. Ὑποθέτουμε τώρα ὅτι μετροῦμε τό $\overset{\frown}{AM}$ μέ τό τόξον τῆς 1^{o} καί ἔστω ὅτι προκύπτει ἕνας ἀριθμός α, ἐν συνεχείᾳ κάνουμε τή μέτρηση μέ τό τόξον τοῦ 1^{β} καί ἔστω ὅτι προκύπτει ἀριθμός β. Τέλος δέ μετροῦμε τό τόξον μέ τό τόξον τοῦ 1^{α} καί ἔστω ὅτι προκύπτει ἕνας τρίτος ἀριθμός γ. Εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων ἡ σχέσις μεγέθους τοῦ ἐλαχίστου μή ἀρνητικοῦ τόξου $\widehat{AM}$ καί τῆς περιφερείας εἰς τήν ὁποίαν ἀνήκει εἶναι ἀντιστοίχως $\frac{\alpha}{360}$, $\frac{\beta}{400}$, $\frac{\gamma}{2\pi}$ καί ἐπειδή πρόκειται περί τοῦ ἰδίου τόξου οἱ τρεῖς αὐτοί ἀριθμοί θά εἶναι ἴσοι δηλαδή $\frac{\alpha}{360} = \frac{\beta}{400} = \frac{\gamma}{2\pi}$ ἤ $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{200} = \frac{\gamma}{\pi}$. Αὕτη εἶναι ἡ ζητουμένη σχέσις.

4.- <u>Γενική ἔκφρασις τοῦ μέτρου ἑνός τόξου</u>

Θεωροῦμεν τό τόξον $\widehat{AM}$ μέ $(\widehat{AM}_0) = \alpha$ (μέ τό σύμβολον $(\widehat{AM}_0)$ παριστάνομεν συνήθως τήν ἐλαχίστην μή ἀρνητικήν τιμήν τοῦ τόξου $\widehat{AM}$). Ἔστω δέ κινητόν τό ὁποῖον ἀρχίζον τήν κίνησιν του ἀπό τό Α καί κινούμενον θετικῶς τελειώνει τήν κίνησιν του εἰς τό Μ ἀφοῦ προηγουμένως διαγράψῃ Κ περιφερείας. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ τόξου αὐτοῦ θά δίδεται συνεπῶς ὑπό τῆς σχέσεως:

$$(\widehat{AM}_K) = 2K\pi + \alpha \quad \Big| \quad K = 0,1,2,\ldots,\ 0 \leq \alpha < 2\pi \qquad (1)$$

Ἔστω ἐπίσης ὅτι τό κινητόν ἀρχίζον τήν κίνησιν του ἀπό τό Α καί κινούμενον ἀρνητικῶς τελειώνει αὐτήν εἰς τό Μ ἀφοῦ προηγουμένως διαγράψει ν_1 περιφερείας. Ἡ ἀλγεβρική τιμή τοῦ τόξου αὐτοῦ θά δίδεται συνεπῶς ὑπό τῆς σχέσεως:

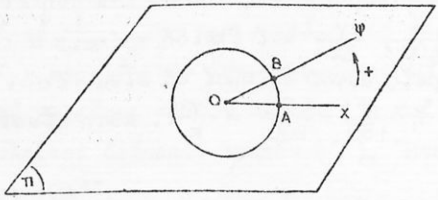
$$(\widehat{AM}_\nu) = 2\nu\pi + \alpha \quad \Big| \quad \nu = -1,-2,-3,\ldots\ 0 \leq \alpha < 2\pi \qquad (2)$$

Παρατηροῦμεν ὅτι αἱ σχέσεις (1) καί (2) δυνανται νά συμπτυχθοῦν εἰς τήν ἑξῆς:

$$(\widehat{AM}_\lambda) = 2\lambda\pi + \alpha \quad \Big| \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3,\ldots\ 0 \leq \alpha < 2\pi$$

5.- <u>Ἀμφιμονοσήμαντος ἀντιστοιχία γωνίας καί τόξου</u>

Ἐπί ἐπιπέδου Π (Σχ.2) θεωροῦμεν ἡμιευθείας ΟΧ καί ΟΨ. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ἡ ΟΧ στρέφεται περί τό Ο ὅπως δεικνύει



Σχῆμα 2

τό βέλος λέγομεν ὅτι κινεῖται θετικῶς, συνεπῶς ἔχομεν καί τήν ἔννοιαν τῆς ἀρνητικῆς κινήσεως. Ἐπίπεδον ἐπί τοῦ ὁποίου ἔχομεν ὁρίσει τήν θετικήν κίνησιν μιᾶς ἡμιευθείας καί συνεπῶς καί τήν ἀρνητικήν, καλεῖται <u>προσανατολισμένον</u>.

Τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου τό ὁποῖον διαγράφει ἡ ΟΧ ἕως ὅτου καταλήξει εἰς τήν θέσιν τῆς ΟΨ καλεῖται γενικῶς γωνία.

Θεωροῦμεν ἐπί τοῦ Π (Σχ. 2) μία περιφέρειαν κέντρου Ο καί ὁμοίως προσανατολισμένη ὅπως τό ἐπίπεδον. Ἔστω Α,Β ἀντιστοίχως τά σημεῖα τομῆς τῆς περιφερείας καί τῶν ΟΧ, ΟΨ. Οὕτω ἐάν θεωρήσωμεν τό τόξον $\overset{\frown}{AB}$ δυνάμεθα ν'ἀντιστοιχίσωμεν σ'αὐτό τή γωνία $\widehat{XO\Psi}$ καί ἐάν θεωρήσωμεν ἕν κινητόν τό ὁποῖον ξεκίνησε ἀπό τό Α καί κατέληξε στό Β ἀφοῦ προηγουμένως διέγραψε Κ περιφέρειες (Κ ἀκέραιος) οὕτω καί ἡ ΟΧ κινεῖται περί τό Ο καί καταλήγει στήν θέση τῆς ΟΨ ἀφοῦ προηγουμένως διαγράψει Κ στροφάς περί τό Ο. Δηλαδή τά σημεῖα Α καί Β θεωροῦνται ἀναποσπάστως συνδεδεμένα μέ τάς ΟΧ καί ΟΨ ἀντιστοίχως. Ὑποθέτοντες λοιπόν τά στοιχεῖα γωνία καί τόξον συνδεδεμένα ὡς ἀνωτέρω ἤτοι σέ ὡρισμένον τόξον νά ἀντιστοιχῇ ὡρισμένη γωνία παρατηροῦμεν ὅτι ὅταν λέγωμεν διά τό μέτρον τοῦ τόξου θά ἐννοοῦμεν καί τό μέτρον τῆς ἀντιστοίχου γωνίας καί ἀντιστρόφως.

<u>Ἀσκήσεις</u>

5.- Ἐάν ἡ ἀλγεβρική τιμή ἑνός τόξου εἶναι 30° ἤ 45° ἤ 60° ἤ 90° ἤ 120° ἤ 135° ἤ 150° νά ἐκφρασθῇ ἀντιστοίχως εἰς βαθμούς καί ἀκτίνια.

6.- Ἐάν οἱ ἀλγεβρικές τιμές τῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι ἀνάλογες τῶν ἀριθμῶν 3,8,7 νά εὑρεθοῦν εἰς μοίρας.

7.- Νά μετατραποῦν οἱ ἐνδείξεις $61^{c}40'$ καί $30^{c}50'$ εἰς βαθμούς καί ἀκτίνια.

8.- Νά μετατραποῦν εἰς μοίρας οἱ $50^{\beta}\ 80'$.

9.- Νά ὑπολογισθῆ τό ἄθροισμα $3\chi + \psi - \omega$ ἐάν $\chi = 30^{o}$, $\psi = \dfrac{2\pi^{\alpha}}{3}$, $\omega = 65^{\beta}$.

10.- Νά ὑπολογισθῆ εἰς μοίρας ἡ ἐλαχίστη θετική γωνία τῶν δεικτῶν τοῦ ὡρολογίου ὅταν ἡ ὥρα εἶναι δώδεκα παρά εἴκοσι.

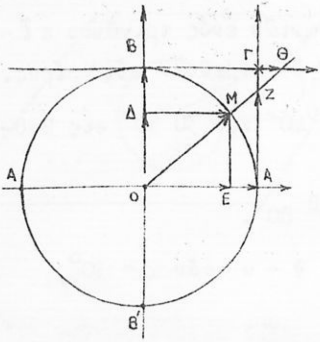
11.- Νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀλγεβρική τιμή γωνίας τῆς ὁποίας ἡ διαφορά τῶν ἀντιστρόφων τῶν τιμῶν της εἰς μοίρας καί βαθμούς ἰσοῦται μέ τήν τιμήν εἰς ἀκτίνια διά 2Π.

12.- Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Α εἶναι 3χ μοιρῶν, ἡ γωνία Β εἶναι χ βαθμῶν καί ἡ γωνία Γ εἶναι $\dfrac{\pi\chi}{300}$ ἀκτίνια. Νά ὑπολογισθῆ ἑκάστη γωνία εἰς μοίρας.

13.- Ἡ διαφορά δύο τόξων εἶναι 10^{β} καί τό ἄθροισμα των εἶναι 10^{o}. Πόσων ἀκτινίων εἶναι ἕκαστον τῶν τόξων αὐτῶν;

III. 1. <u>Τριγωνομετρικός κύκλος καί στοιχεῖα αὐτοῦ</u>

<u>Τριγωνομετρικός κύκλος</u>: Καλεῖται ἐκεῖνος, ὁ ὁποῖος γράφεται μέ ἀκτίνα τῆς ὁποίας τό μῆκος ἰσοῦται μέ τήν μονάδα, ἡ περιφέρεια του εἶναι προσανατολισμένη καί ἐπί τῆς περιφερείας του ὁρίζομεν σημεῖον Α ὡς ἀρχή τῶν τόξων.



Σχῆμα 3

Ὁ ἄξων ὁ ὁποῖος ὁρίζεται ἀπό τό κέντρον τοῦ κύκλου καί τήν ἀρχήν τῶν τόξων καλεῖται <u>ἄξων τῶν συνημιτόνων</u>. Δι᾽αὐτόν, τό μοναδιαῖον διάνυσμα εἶναι τό $\overrightarrow{OA}$. Τό σημεῖον Ο ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν 0, τό σημεῖον Α συνεπῶς εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν +1, τό Α΄ εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν −1, καί ἀναλόγως οἱ ἄλλοι.

Ὁ ἄξων, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος πρός τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων εἰς τό κέντρον τοῦ κύκλου καλεῖται <u>ἄξων τῶν ἡμιτόνων</u> μέ μοναδιαῖον διάνυσμα τό $\overrightarrow{OB}$. Τό σημεῖον Ο ἀντιστοιχεῖ εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν 0, τό σημεῖον Β εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν +1 τό σημεῖον Β΄ εἰς τόν πραγματικόν ἀριθμόν −1 καί ἀναλόγως οἱ ἄλλοι.

Ὁ ἄξων ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τήν ἀρχήν τῶν τόξων καλεῖται <u>ἄξων τῶν ἐφαπτομένων</u>, μέ μοναδιαῖον διάνυσμα τό $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Ὁ ἄξων, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς περιφερείας εἰς τό πέρας τό πρῶτον τεταρτημόριον καλεῖται ἄξων τῶν συνεφαπτομένων, μέ μοναδιαῖον διάνυσμα τό $\overrightarrow{B\Gamma}$.

<u>Παρατήρησις</u>: Χάριν συντομίας θά λέγωμεν "τό τόξον" καί θά ἐννοοῦμεν τήν ἀλγεβρικήν τιμήν αὐτοῦ. Ὁμοίως θά λέγωμεν "ἡ

γωνία" καί θά έννοοῦμεν τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τῆς γωνίας.

2. Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξων καί γωνιῶν

Ἀναφερόμεθα εἰς τό σχῆμα 3.

α) Καλοῦμεν ἡμίτονον τόξου $(\widehat{AM})$ ἤ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας $(\widehat{AOM})$ τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος εἰς τόν ἄξονα τῶν ἡμιτόνων, ἤτοι:

$$\eta\mu\ (\widehat{AM}) = \eta\mu\ (\widehat{AOM}) = (\overrightarrow{O\Delta})$$

β) Καλοῦμεν συνημίτονον τόξου $(\widehat{AM})$ ἤ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας $(\widehat{AOM})$ τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τῆς προβολῆς τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος εἰς τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων, ἤτοι:

$$\sigma\upsilon\nu\ (\widehat{AM}) = \sigma\upsilon\nu\ (\widehat{AOM}) = (\overrightarrow{OE})$$

γ) Καλοῦμεν ἐφαπτομένην τόξου $(\widehat{AM})$ ἤ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας $(\widehat{AOM})$ τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τοῦ διανύσματος, τό ὁποῖον ἔχει ἀρχήν τήν ἀρχήν τῶν τόξων καί πέρας τό σημεῖον τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος μέ τόν ἄξονα τῶν ἐφαπτομένων ἤτοι

$$\varepsilon\varphi\ (\widehat{AM}) = \varepsilon\varphi\ (\widehat{AOM}) = (\overrightarrow{AZ})$$

δ) Καλοῦμεν συνεφαπτομένην τόξου $(\widehat{AM})$ ἤ τῆς ἀντιστοίχου ἐπικέντρου γωνίας $(\widehat{AOM})$ τήν ἀλγεβρικήν τιμήν τοῦ διανύσματος πού ἔχει ἀρχήν τό πέρας τοῦ πρώτου τεταρτημορίου καί πέρας τό σημεῖον τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς τελικῆς διανυσματικῆς ἀκτῖνος μέ τόν ἄξονα τῶν συνεφαπτομένων, ἤτοι

$$\sigma\varphi(\widehat{AM}) = \sigma\varphi(\widehat{AOM}) = (\overrightarrow{B\Theta})$$

3. Μεταβολή τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν

Βάσει τῶν ὁρισμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν παρατηροῦμεν τά ἑξῆς διά τάς μεταβολάς αὐτῶν ὅταν τό τόξον μεταβάλλεται ἀπό 0 ἕως 2π ἀκτίνια.

α) Τό ἡμίτονον τόξου $0^{\text{ακτ.}}$ εἶναι μηδέν καί ἐνῶ τό τόξον αὐξάνει ἀπό $0^{\text{ακτ}}$ ἕως $\frac{\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ τό ἡμίτονον αὐξάνει ἀπό 0 ἕως 1. Ἀκολούθως αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπό $\frac{\pi}{2}^{\text{ακ}}$ ἕως π τό ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπό 1 ἕως 0. Ὁμοίως αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπό $\pi^{\text{ακτ.}}$ ἕως $\frac{3\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ τό ἡμίτονον ἐλαττοῦται ἀπό 0 ἕως -1. Τέλος αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπό $\frac{3\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ ἕως $2\pi^{\text{ἀκτ.}}$ τό ἡμίτονον αὐξάνει ἀπό -1 ἕως 0, ἤτοι:

$(\widehat{AM})$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
ημ $(\widehat{AM})$	$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$

β) Σκεπτόμενοι ὁμοίως παρατηροῦμεν τήν ἑξῆς μεταβολήν διά τό συνημίτονον

$(\widehat{AM})$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2} \nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2} \nearrow 2\pi$
συν$(\widehat{AM})$	$1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0 \nearrow 1$

γ) Διά τήν μεταβολήν τῆς ἐφαπτομένης παρατηροῦμεν τά ἑξῆς: Τόξον $0^{\text{ἀκτ}}$ ἔχει ἐφαπτομένην 0 καί αὐξανομένου τοῦ τόξου τείνοντος τοῦ μέτρου πρός τά $\frac{\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει τείνουσα πρός τό $+\infty$. Ὅταν τό τόξον γίνῃ $\frac{\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ ἡ ἐφαπτομένη του δέν ἔχει ἔννοια. Ἤτοι εἰς τήν περιοχήν τῶν $\frac{\pi}{2}^{\text{ἀκτ.}}$ ἡ ἐφαπτομένη ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: ὅρ εφ $x = +\infty$ ὅταν τό $x \to \frac{\pi}{2}$ ἀπό μικρότερες τιμές καί ορ εφ $x = -\infty$ ὅταν τό $x \to \frac{\pi}{2}$ ἀπό μεγαλύτερες τιμές. Ἀκολούθως αὐξανομένου τοῦ τόξου ἕως τά $\pi^{\alpha\kappa\tau}$ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει ἀπό πολύ μικρές τιμές ἀρνητικές ἕως τό μηδέν. Ὁμοίως αὐξανομένου τοῦ τόξου ἀπό $\pi^{\alpha\kappa\tau}$ καί τείνοντος πρός τά $\frac{3\pi}{2}^{\alpha\kappa\tau}$ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει ἀπό 0 καί τείνει πρός τό $+\infty$, εἰς δέ τήν περιοχήν τῶν $\frac{3\pi}{2}^{\alpha\kappa\tau}$ ἡ ἐφαπτομένη ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

ὀρ εφ $x = +\infty$ ὅταν τό $x \to \frac{3\pi}{2}$ ἀπό μικρότερες τιμές καί

ὀρ εφ $x = -\infty$ ὅταν τό $x \to \frac{3\pi}{2}$ ἀπό μεγαλύτερες τιμές

Ἀκολούθως αὐξανομένου τοῦ τόξου ἕως τά $2\pi^{\alpha\kappa\tau}$ ἡ ἐφαπτομένη αὐξάνει ἀπό πολύ μικρές ἀρνητικές τιμές ἕως τό μηδέν ἤτοι:

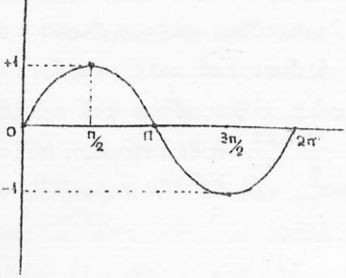
$(\widehat{AM})$	$0 \nearrow \frac{\pi}{2}$	$\nearrow \pi \nearrow \frac{3\pi}{2}$	$\nearrow 2\pi$
εφ $(\widehat{AM})$	$0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow 0$

δ) Ὁμοίως σκεπτόμενοι παρατηροῦμεν τήν ἑξῆς μεταβολήν διά τήν συνεφαπτομένην

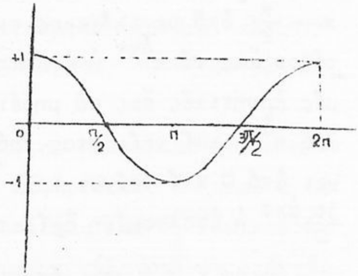
$(\widehat{AM})$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	π	$\nearrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\nearrow$	2π
σφ$(\widehat{AM})$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$

Γραφικῶς οἱ μεταβολές τῶν τριγωνομετρικῶν συναρτήσεων ημ x, συν x, εφ x, σφ x συναρτήσει τῆς μεταβολῆς τοῦ τόξου x ἀπό 0 ἕως 2π εἶναι αἱ ἑξῆς:

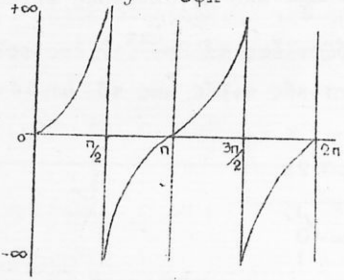
y = ημx



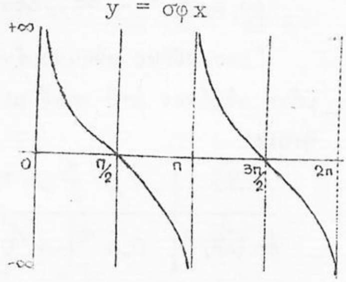
y = συνx



y = εφx



y = σφx



Ἀσκήσεις

14.- Εἰς ποῖα τεταρτημόρια πρέπει νά λήγουν τά τόξα τά ὁποῖα ἔχουν θετικήν ἐφαπτομένην καί ἀρνητικόν συνημίτονον ἤ ἀρνητικήν συνεφαπτομένην καί ἀρνητικόν ἡμίτονον.

15.- Νά εὑρεθῆ τό πρόσημον τῶν παραστάσεων

α) $ημx - ημ\frac{x}{2} - εφ\frac{x}{3} + εφx, \quad 0 < x < 90^0$

β) $συν\frac{x}{5} - συν\frac{x}{3} + σφ\frac{x}{5} - σφ\frac{x}{3}, \quad 0 < x < 90^0$

γ) $ημx - ημ\frac{x}{4} + εφ\frac{2x}{5} - εφ\frac{x}{5}, \quad 0 < x < 90^0$

16.- Ἄν τά τόξα x_1 καί x_2 πληροῦν τήν σχέσιν $\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \pi$ ποῖαι σχέσεις ἀνισότητος ὑπάρχουν μεταξύ τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

17.- Ἄν $0 < x_1 < x_2 < \pi$ νά εὑρεθοῦν ποῖαι σχέσεις ἀνισότητος ὑπάρχουν μεταξύ τῶν ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

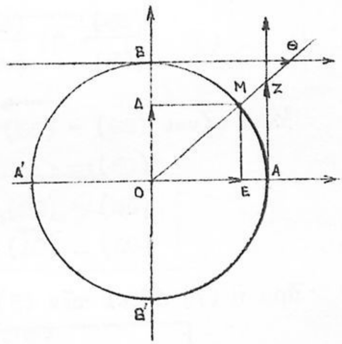
IV 1. Βασικαί σχέσεις αἱ ὁποῖαι συνδέουν τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τυχόντος τόξου.

α) Θεωροῦμεν τό τρίγωνον ΟΕΜ (Σχ. 4), εἰς αὐτό ἰσχύει ἡ σχέσις (Πυθαγόρειον Θεώρημα) $(ΕΜ)^2 + (ΟΕ)^2 = (ΟΜ)^2$ (1)

ἀλλά εἶναι:

$$\left.\begin{array}{l}(ΕΜ) = (ΟΔ) = (\overrightarrow{ΟΔ}) \equiv ημ(\overset{\frown}{ΑΜ}) \\ (ΟΕ) = (\overrightarrow{ΟΕ}) \equiv συν\ (\overset{\frown}{ΑΜ}) \\ (ΟΜ) = 1\end{array}\right\} 2$$

ἄρα ἡ (1) βάσει τῶν (2) γίνεται:



Σχῆμα 4

$$\boxed{ημ^2(\overset{\frown}{ΑΜ}) + συν^2(\overset{\frown}{ΑΜ}) = 1} \quad (3)$$

β) Θεωροῦμεν τά τρίγωνα ΟΕΜ καί ΟΑΖ (Σχ.4) ταῦτα εἶναι ὅμοια καί συνεπῶς ἰσχύει:

$$\frac{(ΑΖ)}{(ΟΑ)} = \frac{(ΕΜ)}{(ΟΕ)} \quad (4)$$

ἀλλά εἶναι $\left.\begin{aligned} (AZ) &= (\overrightarrow{AZ}) \equiv \varepsilon\varphi\ (\widehat{AM}) \\ (OA) &\equiv 1 \\ (EM) &= (\overline{O\Delta}) = (\overrightarrow{O\Delta}) \equiv \eta\mu\ (\widehat{AM}) \\ (OE) &= (\overrightarrow{OE}) \equiv \sigma\upsilon\nu\ (\widehat{AM}) \end{aligned}\right\} \quad (5)$

ἄρα ἡ (4) βάσει τῶν (5) γίνεται

$$\boxed{\varepsilon\varphi(\widehat{AM}) = \frac{\eta\mu(\widehat{AM})}{\sigma\upsilon\nu(\widehat{AM})}} \qquad (6)$$

γ) Θεωροῦμεν τά τρίγωνα ΟΔΜ καί ΟΒΘ (Σχ. 4) ταῦτα εἶναι ὅμοια καί συνεπῶς ἰσχύει

$$\frac{(B\Theta)}{(OB)} = \frac{(\Delta M)}{(O\Delta)} \qquad (7)$$

ἀλλά εἶναι $\left.\begin{aligned} (B\Theta) &= (\overrightarrow{B\Theta}) \equiv \sigma\varphi(\widehat{AM}) \\ (OB) &\equiv 1 \\ (\Delta M) &= (OE) = (\overrightarrow{OE}) \equiv \sigma\upsilon\nu(\widehat{AM}) \\ (O\Delta) &= (\overrightarrow{O\Delta}) \equiv \eta\mu(\widehat{AM}) \end{aligned}\right\} \quad (8)$

ἄρα ἡ (7) βάσει τῶν (8) γίνεται

$$\boxed{\sigma\varphi(\widehat{AM}) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\widehat{AM})}{\eta\mu(\widehat{AM})}} \qquad (9)$$

Ἤτοι ἐάν $(\widehat{AM}) = \alpha$ ἔχομεν

$$\boxed{\begin{aligned} \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha &= 1 \\ \varepsilon\varphi\ \alpha &= \frac{\eta\mu\ \alpha}{\sigma\upsilon\nu\ \alpha} \\ \sigma\varphi\ \alpha &= \frac{\sigma\upsilon\nu\ \alpha}{\eta\mu\ \alpha} \end{aligned}} \qquad (10)$$

<u>Παρατήρησις</u>: Διά νά έχη έννοια ή εφα θά πρέπη τό συνα $\neq 0$ καί διά νά έχη έννοια ή σφα θά πρέπη τό ημα $\neq 0$.

2. <u>Δοθέντος ενός τριγωνομετρικού άριθμού νά υπολογισθούν οί άλλοι</u>

<u>Α΄ Πρόβλημα</u>. Δίδεται ημx = α μέ $-1 \leqslant \alpha \leqslant +1$ καί $-\infty < x < +\infty$ νά υπολογισθούν οί συνx, έφx, σφx

<u>Απάντησις</u>

Έκ τού τύπου $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$ έχομεν

$$\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x \Longrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x} \quad \text{άρα}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\, x = \pm\sqrt{1-\alpha^2}} \qquad (1)$$

Έκ τού τύπου $\varepsilon\varphi\, x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ έχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi\, x = \frac{\alpha}{\pm\sqrt{1-\alpha^2}} \quad \text{μέ} \quad \alpha \neq \pm 1} \qquad (2)$$

καί έκ τού τύπου $\sigma\varphi\, x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x}$ έχομεν

$$\boxed{\sigma\varphi\, x = \frac{\pm\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \quad \text{μέ} \quad \alpha \neq 0} \qquad (3)$$

Διά τό διπλούν σημείον παρατηρούμεν τά έξής: α) Έάν δέν τίθεται περιορισμός διά τό πού λήγει τό τόξον x δηλαδή σέ ποιό τεταρτημόριο, τότε θά διατηρούμε τό διπλό πρόσημο. β) Έάν π.χ. τεθή ό περιορισμός $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε πρέπει άφ'ένός τό α νά εἶναι $0<\alpha<1$ καί εἰς τάς σχέσεις (1),(2),(3) θά διατηρήσωμεν μόνον τό (+) καί τοῦτο διότι βάσει τῶν ὁρισμῶν, οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί, οἱ ὁποῖοι ἀντιστοιχοῦν εἰς τόξα, τά ὁποῖα λήγουν εἰς τό α' τεταρτημόριο εἶναι θετικοί. γ) Ἐάν π.χ. τεθῆ ὁ περιορισμός $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ τότε ἐπειδή τά τόξα πού λήγουν στό β' τεταρτημόριο ἔχουν ἡμίτονον θετικόν καί τό συνημίτονον τήν ἐφαπτομένην καί τήν συνεφαπτομένην ἀρνητικήν ἔπεται ὅτι θά πρέπη $0<\alpha<1$ καί οἱ σχέσεις (1),(2),(3) θά ληφθοῦν μόνο μέ τό πρόσημο (-).

<u>Β' Πρόβλημα.</u> Δίδεται $σφx = \alpha$ μέ $-\infty<\alpha<+\infty$ καί $-\infty<x<+\infty$. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ημx, συνx, εφx.

<u>Ἀπάντησις</u>

Ἰσχύει $εφx = \dfrac{1}{σφx}$ ἄρα

$$\boxed{εφx = \frac{1}{\alpha} \quad μέ \quad \alpha \neq 0} \qquad (1)$$

Διά νά ὑπολογίσωμεν τό ημ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

$$\frac{1}{ημ^2x} = \frac{ημ^2x + συν^2x}{ημ^2x} = \frac{ημ^2x}{ημ^2x} + \frac{συν^2x}{ημ^2x} = 1 + σφ^2x \quad ἄρα$$

$$ημ^2x = \frac{1}{1+σφ^2x} \quad ἤτοι \quad ημx = \pm\sqrt{\frac{1}{1+σφ^2x}}$$

συνεπῶς

$$\boxed{ημx = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}} \qquad (2)$$

Ἐκ τοῦ τύπου $ημ^2x = \dfrac{1}{1+σφ^2x}$ ἔχομεν $1-συν^2x = \dfrac{1}{1+σφ^2x}$

ἄρα $συν^2x = \dfrac{σφ^2x}{1-σφ^2x}$ ἤτοι $συνx = \pm\dfrac{σφx}{\sqrt{1+σφ^2x}}$

συνεπῶς $\boxed{\text{συν}\, x = \pm \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}}$ (3)

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

18.- Εἰς ποῖα σημεῖα τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου πρέπει νά λήγῃ ἕν τόξον x ὥστε ἡ εφ x ἀντιστοίχως ἡ σφ x νά μήν ἔχουν ἔννοιαν.

19.- Νά ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ βασικοί τύποι πού συνοδεύουν τούς τεσσάρους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς ἰσχύουν καί διά τόξα τά ὁποῖα λήγουν εἰς τά ὑπόλοιπα ἐκτός τοῦ πρώτου τεταρτημόρια.

20.- Δίδεται ημ $x = \alpha$ μέ $-1 \leq \alpha \leq \pm 1$ καί $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

21.- Δίδεται εφ $x = \alpha$ μέ $-\infty < \alpha < +\infty$ καί $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

22.- Νά εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί μιᾶς γωνίας θ συναρτήσει τῆς εφ θ.

23.- Δίδεται συν $x = +\frac{1}{2}$ μέ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

24.- Δίδεται εφ $x = -\sqrt{3}$ μέ $0 < x < \pi$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

25.- Δίδεται ημ $x = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

26.- Δίδεται $σφ\,x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ καί $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

27.- Δίδεται $εφ\,x = \frac{3}{2}$ μέ $\pi < x < 2\pi$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

28.- Δίδεται $συν\,x = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

29.- Νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι ταυτότητες:

α) $(ημx + συνx)^2 + (ημx - συνx)^2 = 2$

β) $ημ^4x - συν^4x = ημ^2x - συν^2x = 1-2συν^2x$

γ) $\frac{1}{ημ^2x} + \frac{1}{συν^2x} = \frac{1}{ημ^2x\,συν^2x}$

δ) $ημ^2α\,συν^2β - συν^2α\,ημ^2β = ημ^2α - ημ^2β$

ε) $ημ^3α + συν^3α = (ημα + συνα)(1 - ημα\,συνα)$

στ) $ημ^6α + συν^6α + 3ημ^2α\,συν^2α = 1$

ζ) $1 + εφ^2x = \frac{1}{συν^2x}$

η) $1 + σφ^2x = \frac{1}{ημ^2x}$

θ) $σφ^2x\,συν^2x = σφ^2x - συν^2x$

ι) $εφ\,x + εφ\,ω = εφ\,x\,εφ\,ω\,(σφ\,x + σφ\,ω)$

ια) $(1-ημ^2α)(1+εφ^2α) = 1$

ιβ) $(1+συνθ)\left(1 - \frac{1}{συνθ}\right) σφ\,θ = -ημ\,θ$

ιγ) $\dfrac{1-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\ \alpha} = \varepsilon\varphi\,\alpha - \sigma\varphi\,\alpha$

ιδ) $\varepsilon\varphi^2 x \quad \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} \quad \sigma\varphi^2 x\ \eta\mu^2 x = 1$

ιε) $1 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\theta}{1+\eta\mu^2\theta} = \dfrac{2\eta\mu^2\theta}{1+\eta\mu^2\theta}$

ιστ) $\varepsilon\varphi\,\theta - \dfrac{1-2\sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\ \theta} = \sigma\varphi\,\theta$

ιζ) $\eta\mu^2\alpha\ \varepsilon\varphi\,\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha\ \sigma\varphi\,\alpha = \varepsilon\varphi\,\alpha - \sigma\varphi\,\alpha$

ιη) $2(\eta\mu^4\alpha + \sigma\upsilon\nu^4\alpha + \eta\mu^2\alpha\ \sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2 = \eta\mu^8\alpha + \sigma\upsilon\nu^8\alpha + 1$

ιθ) $(x\eta\mu\theta - y\sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (x\sigma\upsilon\nu\theta + y\eta\mu\theta)^2 = x^2+y^2$

κ) $(2x\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\,\theta)^2 + x^2(\sigma\upsilon\nu^2\theta - \eta\mu^2\theta)^2 = x^2$

κα) $(x\,\eta\mu\theta\ \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + (x\,\eta\mu\theta\ \eta\mu\varphi)^2 + (x\,\sigma\upsilon\nu\,\theta)^2 = x^2$

κβ) $\dfrac{\varepsilon\varphi\,x + \varepsilon\varphi\,\omega}{\sigma\varphi\,x + \sigma\varphi\,\omega} = \varepsilon\varphi\,x\ \varepsilon\varphi\,\omega$

κγ) $\dfrac{1-\varepsilon\varphi\,x}{1+\varepsilon\varphi\,x} = \dfrac{\sigma\varphi\,x - 1}{\sigma\varphi\,x + 1}$

κδ) $\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\omega}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$

κε) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta}{\eta\mu^2\alpha\ \eta\mu^2\beta} = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}{\varepsilon\varphi^2\alpha\ \varepsilon\varphi^2\beta}$

κστ) $(1+\varepsilon\varphi x)\ (1+\sigma\varphi x)\ \eta\mu x\sigma\upsilon\nu\ x = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu\ x)^2$

κζ) $\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,\beta + \eta\mu\alpha\ \eta\mu\beta + \sigma\upsilon\nu\,\alpha\ \eta\mu\beta =$
$= (1+\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta)\ \sigma\upsilon\nu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\,\beta$

30.- Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ημx, συνx, εφx, σφx ἐάν

$$6\eta\mu x + 8\sigma\upsilon\nu x = 10$$

31.- Νά δειχθῆ ὅτι αἱ παραστάσεις

$$A = 4(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - 6(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$$

$$B = (1-\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x)\,\sigma\upsilon\nu x\,\eta\mu x(1-2\sigma\upsilon\nu^2 x) - \eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x(\eta\mu^6 x - \sigma\upsilon\nu^6 x)$$

εἶναι ἀνεξάρτητες τοῦ τόξου x.

32.- Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ παράστασις

$$y = (1-\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x)(\eta\mu^3 x\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^3 x\,\eta\mu x) - (\eta\mu^7 x\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu^7 x\,\eta\mu x)$$

εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ τόξου x.

33.- Δείξατε ὅτι οἱ παραστάσεις

$$y = \eta\mu^4 x(3-2\eta\mu^2 x) + \sigma\upsilon\nu^4 x\,(3-2\sigma\upsilon\nu^2 x) \quad \text{καί}$$

$$z = \eta\mu^6 x + 3\eta\mu^2 x\,\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^6 x$$

εἶναι ἀνεξάρτητες τοῦ x.

34.- Εἶναι δυνατόν νά ὑπολογίσωμεν ἐκ τῶν προτέρων τήν σταθεράν τιμήν τῶν παραστάσεων εἰς τάς ἀσκήσεις 31, 32, 33.

35.- Νά προσδιορισθῆ ἡ τιμή τοῦ λ ὥστε ἡ παράστασις

$$y = \lambda(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) - (\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x)$$

νά εἶναι ἀνεξάρτητος τοῦ x.

36.- Νά προσδιορισθῆ ἡ τιμή τῶν λ καί μ ὥστε νά ἰσχύῃ ἡ

$$\lambda(\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x) + \mu(\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x) = -2.$$

37.- Ἐάν $x > 0$ καί $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ καί

$\eta\mu\,\alpha = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$ καί $\sigma\upsilon\nu\,\beta = \sqrt{\dfrac{1}{x+1}}$ τότε νά δειχθῆ ὅτι $\alpha=\beta$.

38.- Ἐάν $0<x,\ y<\frac{\pi}{2}$ καί $\eta\mu\,x = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$ καί $\sigma\upsilon\nu\,y = \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ τότε $x=y$.

39.- Νά δειχθῆ ὅτι $\dfrac{1+\varepsilon\varphi^3 x}{1+\sigma\varphi^3 x} = \left(\dfrac{1+\varepsilon\varphi x}{1+\sigma\varphi x}\right)^3$

40.- Ἐάν $\sigma\varphi\, x = \dfrac{\beta}{\alpha}$ νά ὑπολογισθῃ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\alpha\,\sigma\upsilon\nu\, x + \beta\,\eta\mu\, x$ (Διερεύνησις).

41.- Ἐάν $\varepsilon\varphi\, x = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ νά ὑπολογισθῆ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως $\sqrt{\alpha}\ \sigma\upsilon\nu\, x + \dfrac{\sqrt{\beta}}{\sigma\upsilon\nu\, x}$ (Διερεύνησις).

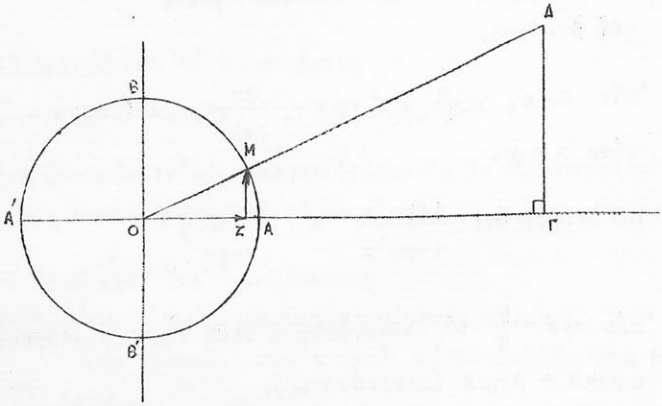
42.- Ἐάν $\varepsilon\varphi^2\gamma = \varepsilon\varphi\,\alpha\,\varepsilon\varphi\,\beta$ νά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha(1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\,\beta)} + \frac{\eta\mu^2\gamma}{\eta\mu^2\alpha} = 1$$

43.- Δίδεται ἕνα τόξον $(\overset{\frown}{AM}_{0}) = 60^{\circ}$. Ποῖα εἶναι ὅλα τά τόξα τά ὁποῖα ἔχουν ἀρχήν τό A καί τέλος τό M ; Ποῦ καταλήγουν τά τόξα τά ὁποῖα εἶναι τό $\frac{1}{4}$ ὅλων αὐτῶν τῶν τόξων ; Τί σχῆμα σχηματίζουν αἱ κορυφαί τῶν τόξων αὐτῶν ;

44.- Νά εὑρεθοῦν τά πέρατα τῶν τόξων τά ὁποῖα τόξα εἶναι τό $\frac{1}{6}$ ὅλων τῶν τόξων μέ $(\overset{\frown}{AM}_{0}) = \frac{2\pi}{5}$.

3. Ὁρισμὸς τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον



Σχῆμα 5

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΓΔ (Σχ.5). Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα ΟΑ γράφωμεν περιφέρειαν καὶ θεωρήσωμεν αὐτὴν τριγωνομετρικὴν μὲ τὸ σημεῖον Α εἰς τὴν ἀρχὴν τῶν τόξων τότε ἔχομεν:

$$\text{ημ}\ (\overset{\frown}{AM}) = \text{ημ}(\widehat{\Gamma O \Delta}) = (\overrightarrow{ZM})$$

$$\text{συν}\ (\overset{\frown}{AM}) = \text{συν}(\widehat{\Gamma O \Delta}) = (\overrightarrow{OZ})$$

$$\text{εφ}\ (\overset{\frown}{AM}) = \text{εφ}(\widehat{\Gamma O \Delta}) = \frac{(\overrightarrow{ZM})}{(\overrightarrow{OZ})}$$

$$\text{σφ}\ (\overset{\frown}{AM}) = \text{σφ}(\widehat{\Gamma O \Delta}) = \frac{(\overrightarrow{OZ})}{(\overrightarrow{ZM})}$$

Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΓΔ καὶ ΟΖΜ εἶναι ὅμοια ($\hat{Z} = \hat{\Gamma} = 1^L$, $\widehat{\Gamma O \Delta} \equiv$ κοινή) ἄρα ἔχομεν τὴν ἑξῆς σχέσιν:

$$\frac{(\Gamma\Delta)}{(O\Delta)} = \frac{(ZM)}{(OM)} \quad \text{καὶ ἐπειδή}$$

$$(ZM) = (\overrightarrow{ZM}) \equiv \eta\mu(\widehat{\Gamma O \Delta}) \;\; \kappa\alpha\acute{\iota} \;\; (OM) \equiv 1$$

συνεπάγεται ὅτι

$$\boxed{\eta\mu\,(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{(\Gamma\Delta)}{(O\Delta)}} \qquad (1)$$

Δηλαδή τό ἡμίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῆς ἀπέναντι καθέτου πρός τήν ὑποτείνουσαν.

Ὁμοίως ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν

$$\frac{(O\Gamma)}{(O\Delta)} = \frac{(OZ)}{(OM)} \quad \kappa\alpha\grave{\iota}\ \acute{\epsilon}\pi\epsilon\iota\delta\acute{\eta}\ (OZ) = (\overrightarrow{OZ}) \equiv \sigma\upsilon\nu(\widehat{\Gamma O\Delta}) \;\; \kappa\alpha\acute{\iota} \;\; (OM) \equiv 1$$

ἔχομεν

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu\,(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{(O\Gamma)}{(O\Delta)}} \qquad (2)$$

Δηλαδή τό συνημίτονον ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῆς προσκειμένης καθέτου πρός τήν ὑποτείνουσαν.

Ἐκ τῶν σχέσεων (1), (2) συνεπάγεται

$$\epsilon\varphi\,(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{\eta\mu(\widehat{\Gamma O\Delta})}{\sigma\upsilon\nu(\widehat{\Gamma O\Delta})} = \frac{\dfrac{(\Gamma\Delta)}{(O\Delta)}}{\dfrac{(O\Gamma)}{(O\Delta)}} = \frac{(\Delta\Gamma)}{(O\Gamma)} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\epsilon\varphi\,(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{(\Delta\Gamma)}{(O\Gamma)}} \qquad (3)$$

Δηλαδή ἡ ἐφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τόν λόγον τῆς ἀπέναντι καθέτου πρός τήν προσκειμένην.

Τέλος ἐκ τῶν σχέσεων ἐπίσης (1),(2) συνεπάγεται

$$\sigma\varphi\,(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\widehat{\Gamma O\Delta})}{\eta\mu(\widehat{\Gamma O\Delta})} = \frac{\dfrac{(O\Gamma)}{(O\Delta)}}{\dfrac{(\Gamma\Delta)}{(O\Delta)}} = \frac{(O\Gamma)}{(\Gamma\Delta)} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\sigma\varphi(\widehat{\Gamma O\Delta}) = \frac{(O\Gamma)}{(\Gamma\Delta)}} \qquad (4)$$

<u>Δηλαδή ἡ συνεφαπτομένη ὀξείας γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται πρός τόν λόγον τῆς προσκειμένης καθέτου πρός τήν ἀπέναντι.</u>

<u>Ἀ σ κ ή σ ε ι ς</u>

45.- Νά δειχθῇ ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

α) $\dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu B}{1 + \sigma\upsilon\nu \Gamma} = \dfrac{\alpha - \gamma}{\alpha + \beta}$

β) $\dfrac{\varepsilon\varphi B\, \sigma\varphi B + 1}{\eta\mu^2 B + \eta\mu^2 \Gamma} = 2$

γ) $\varepsilon\varphi B + \sigma\varphi\Gamma - \dfrac{2\sigma\upsilon\nu\,\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\, B} = 0$

δ) $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\, B = \alpha$

ε) $\alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\,\sigma\upsilon\nu\, A = \beta$

στ) $\alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\,\sigma\upsilon\nu\, A = \gamma$

ζ) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 4E\,\sigma\varphi A$

η) $\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 4E\,\sigma\varphi B$

θ) $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 4E\,\sigma\varphi\Gamma$

ι) $\sigma\upsilon\nu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 B + \sigma\upsilon\nu^2\Gamma = 1$

ια) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B + \eta\mu^2\Gamma = 2$

ιβ) $\eta\mu^2 A + \eta\mu^2 B - \eta\mu^2\Gamma = 2\eta\mu A\,\eta\mu B\,\sigma\upsilon\nu\Gamma$

ιγ) $\eta\mu A = \dfrac{\eta\mu B + \eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma}$

ιδ) $\dfrac{\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu\Gamma} = \eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A\,\sigma\varphi B$

ιε) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu A}{\sigma\upsilon\nu\Gamma\,\sigma\upsilon\nu B} + \dfrac{\eta\mu\Gamma}{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu B} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\eta\mu A\,\sigma\upsilon\nu\Gamma} = 2$

ιστ) $\dfrac{\beta - 2\alpha\eta\mu B}{\alpha\,\sigma\upsilon\nu B} + \dfrac{\gamma - 2\beta\sigma\upsilon\nu A}{\beta\,\eta\mu A} + \dfrac{\alpha - 2\gamma\eta\mu\Gamma}{\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma} = 0$

46.- α) Νά κατασκευασθῆ ὀξεῖα γωνία ω ἄν $\eta\mu\,\omega = \frac{1}{2}$

β) Νά κατασκευασθῆ ὀξεῖα γωνία φ ἄν $\eta\mu\,\varphi = \frac{7}{8}$

γ) Νά κατασκευασθῆ ὀξεῖα γωνία x ἄν $\varepsilon\varphi\, x = \frac{5}{3}$

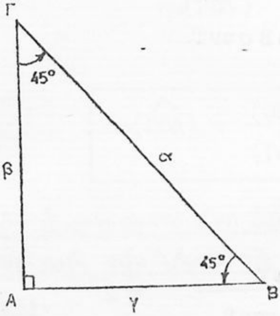
δ) Νά κατασκευασθῆ ὀξεῖα γωνία y ἄν $\sigma\varphi\, y = 5$

ε) Νά κατασκευασθῆ ὀξεῖα γωνία z ἄν $\sigma\upsilon\nu\, z = 0{,}15$

47.- Δίδεται ὀξεῖα γωνία α. Νά κατασκευασθῆ γωνία x τοιαύτη ὥστε $\eta\mu\, x = 3\eta\mu\,\alpha$ (Διερεύνησις).

48.- Δίδεται ὀξεῖα γωνία α. Νά κατασκευασθῆ γωνία x τοιαύτη ὥστε $\sigma\upsilon\nu\, x = 3\sigma\upsilon\nu\alpha$.

4.— Εὕρεσις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν γωνιῶν 45°, 30°, 60°

α) 

Σχῆμα 6

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ.6) μὲ $B = \Gamma = 45^\circ$ ἄρα καὶ $\beta = \gamma$ καὶ βάσει τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος ἔχομεν

$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Longrightarrow \alpha^2 = 2\beta^2 \Longrightarrow$

$\beta = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2}$ ἤτοι $\alpha = \alpha$

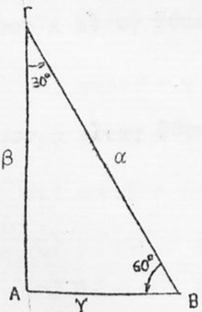
$$\beta = \gamma = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

ἄρα $\eta\mu 45^\circ = \eta\mu B = \dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\alpha} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\sigma\upsilon\nu 45^\circ = \sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\gamma}{\alpha} = \dfrac{\frac{\alpha\sqrt{2}}{2}}{\alpha} = \dfrac{\alpha\sqrt{2}}{2\alpha} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\varepsilon\varphi 45^\circ = \varepsilon\varphi B = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\beta}{\beta} = 1$

$\sigma\varphi 45^\circ = \sigma\varphi B = \dfrac{\gamma}{\beta} = \dfrac{\beta}{\beta} = 1$

β) 

Σχῆμα 7

Ἔστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓ (Σχ.5) μὲ $\Gamma = 30^\circ$, $B = 60^\circ$. Ἐκ τῆς Γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι $\gamma = \dfrac{\alpha}{2}$ καὶ ἐκ τοῦ Πυθαγορείου Θεωρήματος ἔχομεν

$\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2 = \alpha^2 - \left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2 = \dfrac{3\alpha^2}{4} \Longrightarrow$

$\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ ἤτοι $\quad \alpha = \alpha$

$$\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}$$

ἄρα $\eta\mu 30^{\circ} = \eta\mu\Gamma = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu 30^{\circ} = \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{3}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 30^{\circ} = \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sigma\varphi 30^{\circ} = \sigma\varphi\Gamma = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\alpha} = \sqrt{3}$$

γ) Βάσει ἐπίσης τοῦ (Σχ.5) ἔχομεν

$$\eta\mu 60^{\circ} = \eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = \sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\alpha} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon\varphi 60^{\circ} = \varepsilon\varphi B = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{\alpha} = \sqrt{3}$$

$$\sigma\varphi 60^{\circ} = \sigma\varphi B = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}} = \frac{\alpha}{\alpha\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ἀσκήσεις

49.- Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τῶν κάτωθι παραστάσεων

α) $ημ30^{0} + συν60^{0} + εφ45^{0} + σφ90^{0}$

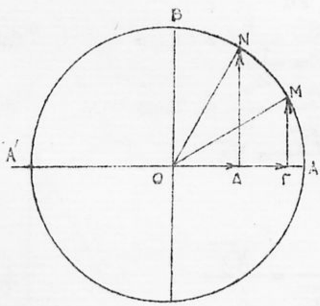
β) $συν30^{0} + ημ60^{0} + εφ0^{0} + σφ60^{0}$

γ) $(ημ45^{0} + συν90^{0})^{2} + (εφ45^{0} + σφ30^{0})^{2}$

δ) $$\frac{ημ^{2}30^{0} + συν^{2}45^{0} + εφ^{2}60^{0} + σφ^{2}30^{0} + \frac{3}{4}}{εφ45^{0} + εφ^{2}60^{0}}$$

ε) $$\frac{ημ^{2}30^{0} + ημ^{2}45^{0} + ημ^{2}60^{0}}{συν^{2}30^{0} + συν^{2}45^{0} + συν^{2}60^{0}} - \frac{σφ^{2}30^{0}+σφ^{2}45^{0}+ σφ^{2}60^{0}}{εφ^{2}30^{0}+εφ^{2}45^{0}+εφ^{2}60^{0}}$$

5. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν συμπληρωματικῶν τόξων ἤ γωνιῶν



Σχῆμα 8

Θεωροῦμεν δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΜ}$ καί $\overset{\frown}{ΑΝ}$ συμπληρωματικά ἤτοι: $(\overset{\frown}{ΑΜ})_{0} = α$ καί $(\overset{\frown}{ΑΝ})_{0} = 90-α$

Θεωροῦμεν τά τρίγωνα ΟΓΜ καί ΟΔΝ, τά ὁποῖα εἶναι ἴσα διότι $(\widehat{ΟΓΜ})=(\widehat{ΟΔΝ}) = 1^{L}$ $(\widehat{ΓΟΜ}) = (\widehat{ΔΝΟ}) = α$ καί $(ΟΜ) = (ΟΝ) = 1$ (Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ κύκλος Σχ. 8 εἶναι τριγωνομετρικός). Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων συνεπάγεται ὅτι:

$(\Gamma M) = (O\Delta)$ ἤ $(\overrightarrow{\Gamma M}) = (\overrightarrow{O\Delta})$ ἤ $\eta\mu\alpha = \sigma\upsilon\nu(90-\alpha)$ (1)

$(O\Gamma) = (\Delta N)$ ἤ $(\overrightarrow{O\Gamma}) = (\overrightarrow{\Delta N})$ ἤ $\sigma\upsilon\nu\alpha = \eta\mu(90-\alpha)$ (2)

Διά διαιρέσεως τῶν (1) καί (2) κατά μέλη ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = \sigma\varphi(90-\alpha) \qquad (3)$$

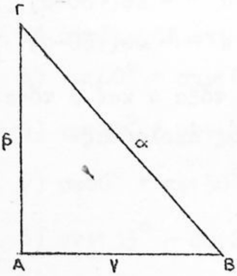
$$\text{καί} \quad \sigma\varphi\,\alpha = \varepsilon\varphi(90-\alpha) \qquad (4)$$

ἤτοι ἐάν ἔχωμεν δύο συμπληρωματικά τόξα ἀντιστοίχως γωνίας α καί β τότε οἱ τριγωνομετρικοί των ἀριθμοί συνδέονται ὡς ἀκολούθως:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 90 \\ \eta\mu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\beta \\ \sigma\upsilon\nu\,\alpha = \eta\mu\,\beta \\ \varepsilon\varphi\,\alpha = \sigma\varphi\,\beta \\ \sigma\varphi\,\alpha = \varepsilon\varphi\,\beta \end{array}\right\}$$

<u>Παρατήρησις:</u>

Τούς ἀνωτέρω τύπους δυνάμεθα νά συμπεράνωμεν καί βάσει τῶν ὁρισμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ὀξειῶν γωνιῶν ὀρθογωνίου τριγώνου. Πράγματι ἔστω τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (μέ $\hat{A} = 1^L$ ἄρα $\hat{B}+\hat{\Gamma} = 1^L$) (Σχ. 9) εἰς τό ὁποῖον ἰσχύει



Σχῆμα 9

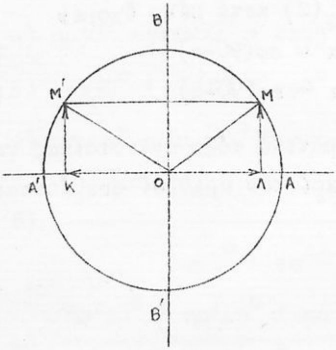
$$\eta\mu\,B = \frac{\beta}{\alpha} = \sigma\upsilon\nu\,\Gamma$$

$$\sigma\upsilon\nu\,B = \frac{\gamma}{\alpha} = \eta\mu\,\Gamma$$

$$\varepsilon\varphi\,B = \frac{\beta}{\gamma} = \sigma\varphi\,\Gamma$$

$$\sigma\varphi\,B = \frac{\gamma}{\beta} = \varepsilon\varphi\,\Gamma$$

6. Σχέσεις τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν παραπληρωματικῶν τόξων ἤ γωνιῶν



Σχῆμα 10

Θεωροῦμεν δύο παραπληρωματικά τόξα $(\overset{\frown}{\underset{O}{AM}}) = \alpha$, $(\overset{\frown}{\underset{O}{AM'}}) = 180-\alpha$ (σχ. 10). Ἐν συνεχείᾳ παρατηροῦμεν ὅτι τά τρίγωνα ΟΛΜ καί ΟΚΜ' εἶναι ἴσα διότι:

$$(\widehat{O\Lambda M}) = (\widehat{OKM'}) = 1^{L}$$

$$(\widehat{\Lambda OM}) = (\widehat{M'OK}) = \alpha \quad \text{καί}$$

$$(OM) = (OM') \equiv 1$$

(Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ κύκλος εἶναι τριγωνομετρικός).

Ἐκ τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων ἔχομεν:

$$(\Lambda M) = (KM') \text{ ἤ } (\overrightarrow{\Lambda M}) = (\overrightarrow{KM'}) \text{ ἤ } \quad \eta\mu\,\alpha = \eta\mu(180-\alpha) \qquad (1)$$

$$(O\Lambda) = (OK) \text{ ἤ } (\overrightarrow{O\Lambda}) = -(\overrightarrow{OK}) \text{ ἤ } \quad \sigma\upsilon\nu\,\alpha = -\sigma\upsilon\nu(180-\alpha) \qquad (2)$$

Διά διαιρέσεως τῶν (1) καί (2) κατά μέλη ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\,\alpha = -\varepsilon\varphi(180-\alpha) \qquad (3)$$

$$\text{καί} \quad \sigma\varphi\,\alpha = -\sigma\varphi(180-\alpha) \qquad (4)$$

Ἤτοι ἐάν ἔχουμε δύο παραπληρωματικά τόξα α καί β τότε οἱ τριγωνομετρικοί των ἀριθμοί συνδέονται ὡς ἀκολούθως

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha + \beta = 180 \\ \eta\mu\,\alpha = \eta\mu\,\beta \\ \sigma\upsilon\nu\,\alpha = -\sigma\upsilon\nu\,\beta \\ \varepsilon\varphi\,\alpha = -\varepsilon\varphi\,\beta \\ \sigma\varphi\,\alpha = -\sigma\varphi\,\beta \end{array}\right\}$$

7. Τριγωνομετρικοί ἀριθμοί ἀμβλείας γωνίας ἤ τόξου α με $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Ἐάν θεωρήσωμεν (Σχ.10) τό $(\overset{\frown}{AM'}) = \alpha$ τότε τό $(\overset{\frown}{AM_0}) = 180 - \alpha$ ὁπότε καί ἐν προκειμένῳ ἔχουμε τίς σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\text{ημ}\,\alpha &= \text{ημ}(180-\alpha) \\
\text{συν}\alpha &= -\text{συν}(180-\alpha) \\
\text{εφ}\,\alpha &= -\text{εφ}(180-\alpha) \\
\text{σφ}\,\alpha &= -\text{σφ}(180-\alpha)
\end{aligned}
$$

ἤτοι δυνάμεθα νά εἴπωμεν ὅτι

α) Τό ἡμίτονον ἀμβλείας γωνίας (ἤ τόξου α μέ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$) ἰσοῦται μέ τό ἡμίτονον τῆς παραπληρωματικῆς της.

β) Τό συνημίτονον ἀμβλείας γωνίας ἰσοῦται μέ τό ἀντίθετον συνημίτονον τῆς παραπληρωματικῆς της.

γ) Ἡ ἐφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας ἰσοῦται μέ τήν ἀντίθετον ἐφαπτομένην τῆς παραπληρωματικῆς της.

δ) Ἡ συνεφαπτομένη ἀμβλείας γωνίας ἰσοῦται μέ τήν ἀντίθετον συνεφαπτομένην τῆς παραπληρωματικῆς της.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

50.- Νά ἀποδειχθῆ ὅτι

α) $\text{ημ}140^\circ + \text{συν}160^\circ + \text{συν}20^\circ - \text{ημ}40^\circ = 0$

β) $\text{ημ}120^\circ + \text{συν}150^\circ + \text{σφ}45^\circ = 1$

γ) $\text{σφ}60^\circ + \text{εφ}150^\circ + \text{ημ}135^\circ - \text{συν}45^\circ = 0$

δ) $\text{συν}135^\circ - \text{σφ}120^\circ + \text{ημ}45^\circ - \text{εφ}30^\circ = 0$

ε) $\text{ημ}75^\circ - \text{συν}50^\circ + \text{ημ}40^\circ - \text{συν}15^\circ = 0$

στ) $\text{ημ}105^\circ + \text{συν}130^\circ + \text{συν}50^\circ - \text{συν}15^\circ = 0$

ζ) $\eta\mu 150^{\circ}\ \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} - \sigma\upsilon\nu 150^{\circ}\ \eta\mu 60^{\circ} = 1$

η) $\sigma\upsilon\nu^{2} 150^{\circ} + \sigma\upsilon\nu^{2} 45^{\circ} + \sigma\upsilon\nu^{2} 120^{\circ} = \frac{3}{2}$

θ) $\eta\mu 138^{\circ} - \sigma\upsilon\nu 15^{\circ} + \sigma\upsilon\nu 132^{\circ} + \eta\mu 75^{\circ} = 0$

51.- Νά εὑρεθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων 150° καί 135° (θέμα 8ου κύκλου 1968).

52.- Νά ἀποδειχθῆ ὅτι διά πᾶν τρίγωνον ΑΒΓ ἀληθεύουν αἱ ἰσότητες $\eta\mu \frac{A+B}{2} = \sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2}$, $\varepsilon\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = \sigma\varphi \frac{A}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} = \eta\mu \frac{\Gamma}{2}, \quad \sigma\varphi \frac{B+\Gamma}{2} = \varepsilon\varphi \frac{A}{2}$$

53.- Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τῶν κάτωθι παραστάσεων:

α) $\eta\mu 60^{\circ}\eta\mu 135^{\circ}\ \sigma\upsilon\nu 150^{\circ}\ \sigma\upsilon\nu 45^{\circ}$

β) $\dfrac{\frac{1}{2}\eta\mu 120^{\circ} - \frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon\varphi 150^{\circ}\ \sigma\upsilon\nu 150^{\circ}}{\frac{\sqrt{2}}{3}\varepsilon\varphi 120^{\circ} + \frac{\sqrt{2}}{5}\varepsilon\varphi 135^{\circ}}$

γ) $\dfrac{10\ \sigma\upsilon\nu 120^{\circ}}{\sqrt{3 - \sqrt{10\ \eta\mu \frac{\pi}{6}} + \sqrt{\eta\mu 135^{\circ}\ \sigma\upsilon\nu 45^{\circ}}}}$

δ) $\dfrac{5\sqrt{3\ \varepsilon\varphi\ 60} + 8\ \eta\mu 30^{\circ}}{\sqrt[3]{9\ \sigma\varphi^{2}\ 30^{\circ}} - \sqrt{4\eta\mu\ 150^{\circ}}}$

ε) $\dfrac{\sqrt[3]{\sigma\varphi^{2} 30^{\circ}.9} - \sqrt[3]{9.3\sqrt{\sigma\varphi^{2} 45^{\circ}}}}{\frac{1}{3}\varepsilon\varphi 135^{\circ} + \frac{2}{3}\sigma\varphi 125^{\circ} + \eta\mu 30^{\circ}}$

54.- Νά εὑρεθῆ τό πρόσημον τῶν κάτωθι παραστάσεων

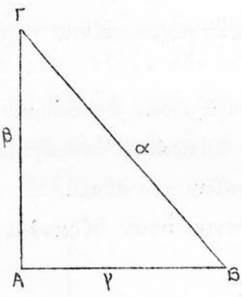
α) $\etaμ78^{\circ} + συν220^{\circ}$

β) $εφ135^{\circ} - σφ285^{\circ}$

γ) $εφ\frac{3\pi}{5} - σφ\frac{2\pi}{8}$

δ) $ημ\frac{\pi}{7} - συν\frac{\pi}{5}$

8.- Τριγωνομετρικοί τύποι συνδέοντες τάς πλευράς καί τάς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου



Σχῆμα 11

Ἐξ ὁρισμοῦ ἔχομεν

$$ημΓ = \frac{γ}{α} \Longrightarrow γ = α\,ημΓ$$

$$συνΒ = \frac{γ}{α} \Longrightarrow γ = α\,συνΒ$$

$$εφΓ = \frac{γ}{β} \Longrightarrow γ = β\,εφΓ$$

$$σφΒ = \frac{γ}{β} \Longrightarrow γ = β\,σφΒ$$

Ὁμοίως ἔχομεν

$$ημΒ = \frac{β}{α} \Longrightarrow β = α\,ημΒ$$

$$συνΓ = \frac{β}{α} \Longrightarrow β = α\,συνΓ$$

$$εφΒ = \frac{β}{γ} \Longrightarrow β = γ\,εφΒ$$

$$σφΓ = \frac{β}{γ} \Longrightarrow β = γ\,σφΓ$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τύπων παρατηροῦμεν ὅτι ἑκάστη, κάθετος πλευρά ὀρθογωνίου τριγώνου ἰσοῦται μέ τήν ὑποτείνουσαν ἐπί τό ἡμίτονον τῆς ἀπέναντι ἤ ἐπί τό συνημίτονον τῆς προσκειμένης γωνίας. Ἐπίσης ὅτι ἑκάστη κάθετος πλευρά ἰσοῦται μέ τήν ἄλλη κάθετον ἐπί τήν ἐφαπτομένη τῆς ἀπέναντι ἤ ἐπί τήν συνεφαπτομένη τῆς προσκειμένης γωνίας.

V. Ἐπίλυσις ὀρθογωνίων τριγώνων (μέ τήν βοήθειαν πινάκων τῶν φυσικῶν τιμῶν τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν), καί διάφοροι ἐφαρμογαί.

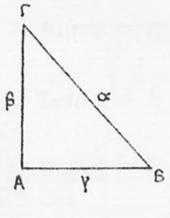
1. Τά διάφορα στοιχεῖα ἑκάστου τριγώνου διακρίνονται εἰς κύρια καί εἰς δευτερεύοντα. Κύρια στοιχεῖα εἶναι οἱ πλευρές οἱ γωνίες καί τό ἐμβαδόν. Δευτερεύοντα στοιχεῖα εἶναι ὅλα τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα ὕψη, διάμεσος, ἀκτίς ἐγγεγραμμένης περιφερείας κ.λ.π.

Ὅταν λέγωμεν νά ἐπιλύσωμεν ἕνα τρίγωνον ἐννοοῦμεν νά ὑπολογίσωμεν τά κύρια στοιχεῖα αὐτοῦ. Κατωτέρω ἀναφέρομεν τίς τέσσαρες περιπτώσεις ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων.

α) Νά ἐπιλυθῇ ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅταν δίδωνται ἡ ὑποτείνουσα καί μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.

Ἐπίλυσις

Δίδονται	α, Β
Ζητοῦνται	β, γ, Γ, Ε



Ἐκ τῶν σχέσεων

$\Gamma = 90^{0} - B$

$\beta = \alpha \text{ ημ} B$

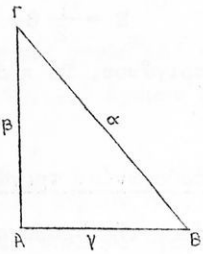
$\gamma = \alpha \text{ συν} B$

$E = \frac{1}{2}\beta \gamma$

εὑρίσκομεν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μία λύσιν.

β) Νά ἐπιλυθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ὅταν δίδωνται ἡ ὑποτείνουσα καί μία κάθετος πλευρά.

<u>'Επίλυσις</u>



Δίδονται	α,β
Ζητοῦνται	γ,Β,Γ,Ε

'Εκ τῶν σχέσεων $συνΓ = \frac{β}{α}$

$Β = 90-Γ$

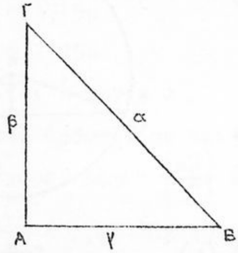
$γ = α\,ημΓ$

$Ε = \frac{1}{2}βγ$

εὑρίσκομεν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Τό πρόβλημα ἔχει μία λύσιν ἐάν $α > β$ καί δέν ἔχει καμμίαν λύσιν ἐάν $α \leq β$.

γ) Νά ἐπιλυθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἄν εἶναι γνωσταί αἱ κάθετοι πλευραί αὐτοῦ.

<u>'Επίλυσις</u>



Δίδονται	β,γ
Ζητοῦνται	α,Β,Γ,Ε

'Εκ τῶν σχέσεων $εφΓ = \frac{γ}{β}$

$Β = 90-Γ$

$α = \frac{β}{συνΓ}$

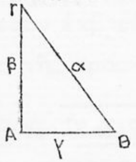
$Ε = \frac{1}{2}βγ$

εὑρίσκομεν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μία λύσιν.

δ) Νά ἐπιλυθῆ ἕν ὀρθογώνιον τρίγωνον ἄν εἶναι γνωστά μία κάθετος πλευρά καί μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ.

Δίδονται	β,Γ
Ζητοῦνται	α,γ,Β,Ε

'Επίλυσις



'Εκ τῶν σχέσεων $B = 90^\circ - \Gamma$

$$\gamma = \beta \varepsilon\varphi \Gamma$$

$$\alpha = \frac{\beta}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma$$

Εὑρίσκομεν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τριγώνου. Τό πρόβλημα ἔχει πάντοτε μία λύσιν.

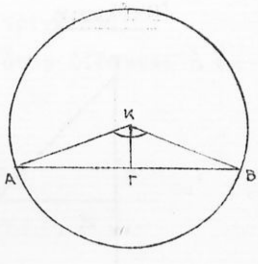
2. 'Εφαρμογαί ἐπί τῆς ἐπιλύσεως ὀρθογωνίων τριγώνων

'Υπάρχουν προβλήματα τῆς Γεωμετρίας, τῆς Κοσμογραφίας κ.λπ τῶν ὁποίων ἡ λύσις ἀνάγεται είς τήν ἐπίλυσιν ὀρθογωνίων τριγώνων. Κατωτέρω δίδομεν ὡρισμένα ἁπλᾶ παραδείγματα.

α) Νά εὑρεθῆ τό ἀπόστημα τόξου $132^\circ\ 35'$ ἀνήκοντος είς περιφέρειαν ἀκτῖνος 15,45μ.

ΛΥΣΙΣ

Είς τό (Σχ. 12) ἡ $(\widehat{AKB}) = 132^\circ 36'$ ἡ ΚΓ κάθετος πρός τήν ΑΒ ἄρα $(\widehat{AK\Gamma}) = 66^\circ 18'$. Συνεπῶς ἀρκεῖ νά ἐπιλύσωμεν τό ὀρθογώνιον τρίγωνον ΚΓΑ.



'Ισχύει $(K\Gamma) = (AK)\,\sigma\upsilon\nu(\widehat{AK\Gamma})$

ἤ $(K\Gamma) = 15{,}45 . \sigma\upsilon\nu(66^\circ 18') \quad (1)$

Σχῆμα 12

Διά τούς ὑπολογισμούς τοῦ $\sigma\upsilon\nu(66^\circ 18')$ παρατηροῦμεν ὅτι

$$66^\circ\ 10' < 66^\circ\ 18' < 66^\circ\ 20' \qquad \text{ἄρα}$$

$$\sigma\upsilon\nu\ 66^\circ\ 10' > \sigma\upsilon\nu 66^\circ 18' > \sigma\upsilon\nu 66^\circ 20' \qquad \text{ἤ}$$

$$0{,}40408 > \quad ; \quad > 0{,}40141 \qquad \text{ἤτοι}$$

Εἰς αὔξησιν τοῦ τόξου κατά 10΄ εἴχομεν ἐλάτ. τοῦ συν. κατά 0,00267
" " " 8΄ " " " X;

"Αρα $X = 0{,}00267 \cdot \frac{8}{10} = 0{,}00214$

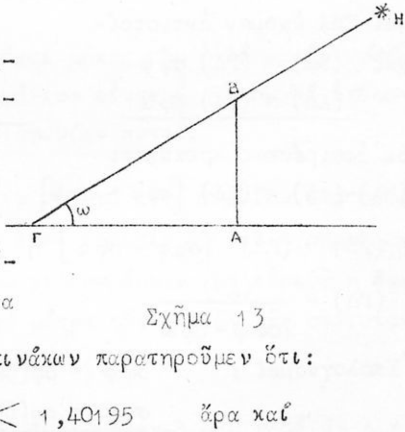
καί συνεπῶς συν$66^{\circ}18΄ = 0{,}40408 - 0{,}00214 = 0{,}40194$

ἄρα ἐκ τῆς (1) ἔχομεν $(ΚΓ) = 15{,}45 \cdot 0{,}40194 = 6{,}21$μ ἤτοι

β) Νά εὑρεθῇ ἡ γωνιακή ἀπόστασις τοῦ Ἡλίου ἀπό τοῦ ὁρίζοντος (δηλ. τό ὕψος τοῦ Ἡλίου) ἄν κατακόρυφος ἱστός ὕψους 3,15μ ρίπτῃ ἐπί ὁριζοντίου ἐπιπέδου διερχομένου διά τῆς βάσεως του σκιάν μήκους 2,25μ

ΛΥΣΙΣ

Βάσει τοῦ (Σχ.13) καί τῶν δεδομένων τοῦ προβλήματος ἔχομεν (ΑΒ) = 3,15μ
(ΑΓ) = 2,25μ
καί ζητεῖται ἡ γωνία α.



Σχῆμα 13

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΑΒ ἔχομεν $εφ\,ω = \frac{(ΑΒ)}{(ΑΓ)}$ ἄρα

$εφ\,α = \frac{3{,}15}{2{,}25} = 1{,}4$. Ἐκ τῶν πινάκων παρατηροῦμεν ὅτι:

$$1{,}39336 < 1{,}4 < 1{,}40195 \quad \text{ἄρα καί}$$
$$54^{\circ}\,20΄ < α < 54^{\circ}30΄$$

συνεπῶς $1{,}40195 - 1{,}39336 = 0{,}00859$

$54^{\circ}30΄ - 54^{\circ}20΄ = 10΄$ ἤτοι

Εἰς αὔξ. τῆς εφ κατά 0,00859 ἔχομεν αὔξ. τοῦ τόξου κατά 10΄
" " " " 0,00664 " " X;

$$X = 10 \cdot \frac{0,00664}{0,00859} = 7,73''$$

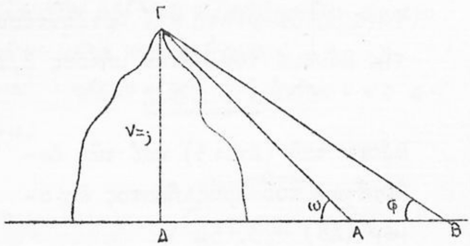
ἄρα $\omega = 54^{\circ}\ 20' + 7,73'' = 54^{\circ}\ 27'\ 44''$

3. Δύο σημεῖα Α καί Β (σχ.14) ἀπέχοντα κατά 100μ εὑρίσκονται ἐπί ὁριζοντίας εὐθείας ἡ ὁποία κεῖται ἐπί κατακορύφου ἐπιπέδου διερχομένου ἐκ τῆς κορυφῆς Γ ἑνός ὄρους. Τό ὕψος Γ ἐκ τοῦ Α εἶναι $65^{\circ}\ 50'$ καί ἐκ τοῦ Β εἶναι $58^{\circ}\ 40'$. Νά εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ Γ ἀπό τό ὁριζόντιον ἐπίπεδον.

Λ Υ Σ Ι Σ

Βάσει τοῦ (Σχ.14) ζητεῖται τό (ΓΔ). Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων Γ Δ Β καί ΓΔΑ ἔχομεν ἀντιστοίχως

$$(ΒΔ) = (ΓΔ)\ σφ\,\varphi$$
$$(ΑΔ) = (ΓΔ)\ σφ\,\omega$$



Σχῆμα 14

δι'ἀφαιρέσεως προκύπτει

$$(ΒΔ)-(ΑΔ) = (ΓΔ)\ \left[σφ\,\varphi - σφ\,\omega\right]$$

ἤ $(ΑΒ) = (ΓΔ)\ \left[σφ\,\varphi - σφ\,\omega\right]$ ἤ

$$(ΓΔ) = \frac{(ΑΒ)}{σφ\,\varphi - σφ\,\omega}$$

Ὑπολογισμοί :

$$σφ\,\varphi = σφ(58^{\circ}40') = 0,60881$$
$$σφ\,\omega = σφ(65^{\circ}50') = 0,44872$$
$$σφ\,\varphi - σφ\,\omega = 0,16009 \quad \text{ἄρα}$$

$$(ΓΔ) = \frac{100}{0,16009} = 624,6\,μ.$$

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

55.- Ὑπολογίσατε τάς γωνίας ἑνός ρόμβου τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 422μ καί μία τῶν διαγωνίων του εἶναι 32μ.

56.- Ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 30μ καί μία ὀξεῖα γωνία αὐτοῦ $40^{\circ}30'$. Νά ὑπολογισθῇ τό ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ὕψος.

57.- Ἄν ΑΔ εἶναι τό ἐπί τήν ὑποτείνουσαν ὕψος ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ καί εἶναι ΔΓ = 3596,32μ καί ΒΔ =2465,15μ τότε νά ἐπιλυθῇ τό τρίγωνον.

58.- Ἡ πλευρά ἑνός ρόμβου ἔχει μῆκος 15μ ἡ δέ γωνία αὐτῆς μέ τήν μικροτέραν διαγώνιον εἶναι $\frac{3}{4}$ ὀρθῆς.Νά ὑπολογισθῶσι τά μήκη τῶν διαγωνίων αὐτοῦ.

59.- Δύο δυνάμεις ἐνεργοῦσιν εἰς τό αὐτό σημεῖον ὑπό ὀρθήν γωνίαν. Ἡ μία τούτων ἔχει ἔντασιν 25 χιλιογράμμωνκαί ἡ συνισταμένη αὐτῶν 40 χιλιογράμμων. Νά εὑρεθῇ ἡ ἔντασις τῆς ἄλλης καί τά μέτρα τῶν γωνιῶν τῆς συνισταμένης μέ τάς δυνάμεις ταύτας.

60.- Ἡ μία διαγώνιος ρόμβου ἔχει μῆκος 3,48μ ἡ δέ ἄλλη 2,20μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς πλευρᾶς καί τά μέτρα τῶν γωνιῶν αὐτοῦ.

61.- Τό ἀπόστημα ἑνός κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 0,90μ. Νά εὑρεθῇ τό μῆκος τῆς πλευρᾶς του.

62.- Ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος 60 cm, βάσιν ΓΔ=30 cm καὶ αἱ παρὰ τὴν βάσιν ΑΒ γωνίαι του εἶναι ἑκάστη 55^{0}. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς ΑΒ.

63.- Τραπεζίου ΑΒΓΔ τὸ ὕψος ΔΕ εἶναι $8\sqrt{3}$ ἡ μικροτέρα βάσις ΔΓ εἶναι 10 cm καὶ αἱ γωνίαι Α = 68 καὶ Β = 45^{0}. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν αὐτοῦ.

64.- Μία χορδὴ ἑνὸς κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{4}{5}$ τῆς διαμέτρου του. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μέτρα τῶν τόξων ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν ταύτην.

65.- Εἰς τὴν μίαν ὄχθην ποταμοῦ ἐπισημαίνεται σημεῖον Μ, εἰς δὲ τὴν ἄλλην θεωροῦνται δύο σημεῖα M_2, M_3 τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 100μ. Ἐκ τοῦ σημείου M_3 ἡ ἀπόστασις MM_2 φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $53^{0}42'$ ἐκ δὲ τοῦ σημείου M_2 ἡ ἀπόστασις MM_3 φαίνεται ὑπὸ γωνίαν $36^{0}18'$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις MM_2.

66.- Ἁμαξοστοιχία διανύει ἀνωφερικὸν τμῆμα 850 μέτρων σιδηροδρομικῆς γραμμῆς. Ἐὰν εἰς τὸ πέρας τοῦ τμήματος τούτου ἡ ἁμαξοστοιχία ἀνῆλθε κατὰ 25μ, Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία κλίσεως καθὼς καὶ ποίαν ὁριζοντίαν ἀπόστασιν διήνυσεν.

67.- Ὁ παρατηρητὴς ἑνὸς πλοίου, τὸ ὁποῖον διευθύνεται πρὸς ἀνατολὰς βλέπει πρὸς βορρᾶν δύο φάρους Φ_1 καὶ Φ_2. Μετὰ πλεῦσιν μιᾶς ὥρας οἱ δύο φάροι φαίνονται ὁ μὲν Φ_1, πρὸς βορειο-δυτικά, ὁ δὲ Φ_2 πρὸς βορειο-βορειο-δυτικὰ τοῦ πλοίου. Νά ὑπολογισθῆ ἡ ταχύτης τοῦ πλοίου ἐάν ἡ ἀπόστασις τῶν φανῶν εἶναι 7 χιλ.

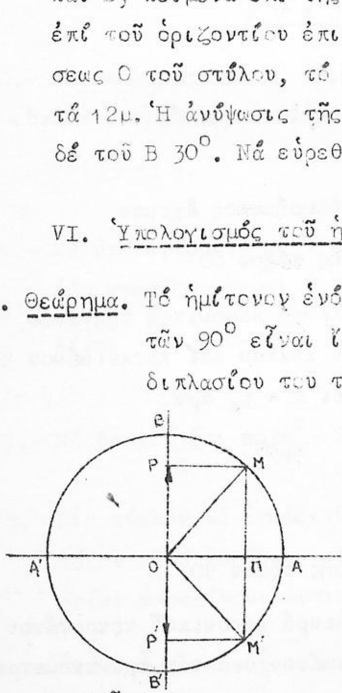
68.- Τρία σημεῖα Α,Β,Γ ἐπί ὁριζοντίου ἐδάφους κεῖνται ἐπ'εὐθείας καί τά Β,Γ εἶναι ἀπρόσιτα. Ἕν τέταρτον σημεῖον Δ τοῦ αὐτοῦ ὁριζοντίου ἐδάφους ἀπέχει 600μ τοῦ Α φαίνεται δέ ἐξ αὐτοῦ τό μέν ΑΒ ὑπό γωνίαν 43° τό δέ ΑΓ ὑπό γωνίαν 78°. Ἀπό δέ τοῦ Α φαίνεται τό τμῆμα ΒΔ ὑπό γωνίαν 47°. Νά εὑρεθῆ τό μῆκος τῆς ἀποστάσεως ΒΓ.

69.- Δίδεται κατακόρυφος στύλος ΟΣ καθώς καί δύο σημεῖα Α καί Β, κείμενα ἐπί τῆς αὐτῆς κατακορύφου. Τό Α κεῖται ἐπί τοῦ ὁριζοντίου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διά τῆς βάσεως Ο τοῦ στύλου, τό δέ Β εὑρίσκεται ἄνωθεν αὐτοῦ κατά 12μ. Ἡ ἀνύψωσις τῆς κορυφῆς Σ ἐκ τοῦ Α εἶναι 60° ἐκ δέ τοῦ Β 30°. Νά εὑρεθῆ τό ὕψος τοῦ στύλου.

VI. Ὑπολογισμός τοῦ ἡμιτόνου ὡρισμένων τόξων

1. Θεώρημα. Τό ἡμίτονον ἑνός τόξου θετικοῦ καί μικροτέρου τῶν 90° εἶναι ἴσον μέ τό ἥμισυ τῆς χορδῆς τοῦ διπλασίου του τόξου.

Ἀ π ό δ ε ι ξ ι ς



Σχῆμα 15

Ἔστω ὁ τριγωνομετρικός κύκλος Ο (Σχ.15). Α ἡ ἀρχή τῶν τόξων. Θεωροῦμεν τό τόξον ΑΜ μέ $(\widehat{AM}) < 90^{\circ}$. Ἀπό τό πέρας Μ φέρομεν τήν κάθετον ΜΠ ἐπί τόν ἄξονα τῶν συνημιτόνων ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τήν περιφέρειαν εἰς τό σημεῖον Μ'. Ἰσχύει $\etaμ(\overset{\frown}{AM}) = (\overrightarrow{OP})$ ἀλλά $(\overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{ΠΜ}) = (ΠΜ)$ ἄρα

$$ημ(\overset{\frown}{AM}) = (ΠΜ) \qquad (1)$$

καί ἐπειδή ἡ ΟΑ ἐκ κατασκευῆς εἶναι κάθετος πρός τήν χορδήν Μ'Μ συνεπάγεται ὅτι: $(Μ'Π) = (ΠΜ) = \frac{(Μ'Μ)}{2}$ (2) καί συνεπῶς ἡ (1) βάσει τῆς (2) γίνεται $ημ(\overset{\frown}{AM}) = \frac{(Μ'Μ)}{2}$, ἤτοι:

$$\boxed{ημω = \frac{1}{2} \text{ μήκους χορδῆς τόξου } 2ω \text{ μέ } ω < 90^\circ} \qquad (3)$$

Ἐν συνεχείᾳ μέ τούς γνωστούς τύπους ὑπολογίζομεν τούς ὑπολοίπους τριγωνομετρικούς ἀριθμούς.

2. <u>Ἐφαρμογαί</u>

Βάσει τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος, ὑπολογισμός τοῦ ἡμιτόνου τῶν τόξων 30°, 45°, 60°

α) Κατά τόν τύπον (3) τοῦ θεωρήματος ἔχομεν

$$ημ\, 30^\circ = \frac{1}{2} \text{ μήκους χορδῆς τόξου } 60^\circ$$

Ἀλλά ἡ χορδή τόξου 60° εἶναι πλευρά κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ τήν ἀκτῖνα R τοῦ κύκλου καί προκειμένου διά τόν τριγωνομετρικόν κύκλον ἰσχύει R = 1, ἄρα

$$ημ30^\circ = \frac{1}{2} \cdot 1 \Longrightarrow ημ30^\circ = \frac{1}{2}$$

β) Ὁμοίως ἔχομεν

$$ημ45^\circ = \frac{1}{2} \text{ μήκους χορδῆς τόξου } 90^\circ$$

Ἀλλά ἡ χορδή τόξου 90° εἶναι πλευρά κανονικοῦ τετραγώνου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ $R\sqrt{2}$ καί προκειμένου διά τόν τριγωνομετρικόν κύκλον εἶναι R = 1. Συνεπῶς τό μῆκος εἶναι 1. $\sqrt{2} = \sqrt{2}$. Ἄρα

$$\eta\mu 45^\circ = \frac{1}{2}.\sqrt{2} \Longrightarrow \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

γ) Ὁμοίως ἰσχύει

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ μήκους χορδῆς τόξου } 120^\circ$$

Ἀλλά ἡ χορδή τόξου 120° εἶναι πλευρά κανονικοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ $R\sqrt{3}$ καί προκειμένου διά τόν τριγωνομετρικόν κύκλον εἶναι R = 1. Συνεπῶς τό μῆκος εἶναι 1. $\sqrt{3} = \sqrt{3}$.

Ἄρα

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{1}{2}.\sqrt{3} \Longrightarrow \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ἀσκήσεις

70.- Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξου 18° ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ πλευρά κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$.

71.- Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τόξου 36° ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι ἡ πλευρά τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι $\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

72.- Νά δειχθῆ ὅτι $\varepsilon\varphi 36^\circ - 2\varepsilon\varphi 18^\circ - \varepsilon\varphi 36^\circ \varepsilon\varphi^2 18^\circ = 0$

73.- Εἰς κύκλον νά ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ χορδή ἡ ὁποία ὑποτείνει τόξον 108° ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν χορδῶν, αἱ ὁποῖαι ὑποτείνουν ἀντιστοίχως τόξα 36° καί 60°.

74.- Ἐάν εἶναι $\alpha = \frac{\pi}{5}$ τότε νά δειχθῆ ὅτι:

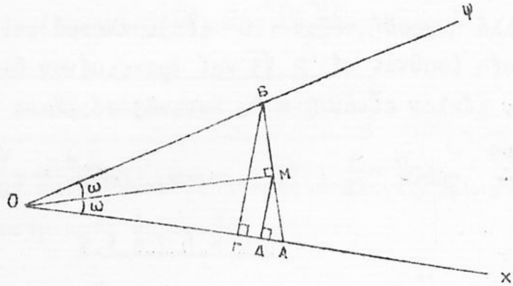
$\eta\mu\,\alpha\;\eta\mu 2\alpha\;\eta\mu 3\alpha\;\eta\mu 4\alpha = \frac{5}{16}$ γνωστοῦ ὄντος ὅτι

$\Pi_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

VII. Τριγωνομετρικός ἀριθμός τῆς διπλασίας γωνίας ω μέ $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$

1. Πρόβλημα

Ἔστω $(\widehat{XO\Psi}) = 2\omega$ μέ $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$ (Σχ. 16). Λαμβάνομεν ἀντιστοίχως ἐπί τῆς ΟΧ καί τῆς ΟΨ τμήματα ΟΑ καί ΟΒ μέ $(OA) = (OB) = 1$ Φέρομεν ἐν συνεχείᾳ



Σχῆμα 16

τήν διχοτόμον ΟΜ ἡ ὁποία λόγῳ τοῦ ὅτι τό τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές εἶναι καί ὕψος καί ἐν συνεχείᾳ φέρομεν τάς ΜΔ καί ΒΓ καθέτους ἐπί τό ΟΧ. Παρατηροῦμεν δέ ὅτι Μ εἶναι μέσον τῆς ΑΒ, ἐπίσης ΜΔ $\parallel$ ΒΓ ὡς κάθετος πρός τήν ἰδίαν εὐθεῖαν ἄρα Δ μέσον τῆς ΑΓ ἤτοι $(A\Delta) = (\Delta\Gamma)$ καί ἐπίσης $(B\Gamma) = 2(M\Delta)$. Ἐν συνεχείᾳ παρατηροῦμεν $\eta\mu 2\omega = \frac{(B\Gamma)}{(OB)} = \frac{(B\Gamma)}{1} = (B\Gamma) = 2(M\Delta) =$

$= 2(OM)\eta\mu\omega = 2.(OB)\sigma\upsilon\nu\omega.\,\eta\mu\omega = 2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega$ ἄρα

$$\boxed{\eta\mu 2\omega = 2\eta\mu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega, \quad 0^\circ < 2\omega < 90^\circ} \qquad (1)$$

$\sigma\upsilon\nu 2\omega = \frac{(O\Gamma)}{(OB)} = \frac{(O\Gamma)}{1} = (O\Gamma) = (OA) - (\Gamma A) = 1 - 2(\Delta A) =$

$= 1 - 2\left[(OA)-(O\Delta)\right] = 1 - 2\left[1-(OM)\sigma\upsilon\nu\omega\right] = 1 - 2 + 2(OB)\sigma\upsilon\nu\omega\,\sigma\upsilon\nu\omega =$

$= -1 + 2\sigma\upsilon\nu^2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1$ ἄρα

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu 2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1, \quad 0^\circ < 2\omega < 90^\circ} \qquad (2)$$

Ὁ τύπος (2) δύναται νά λάβη καί τάς ἑξῆς μορφάς:

$\sigma\upsilon\nu 2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - (\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega) = \sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega$ καί

$\sigma\upsilon\nu 2\omega = 2\sigma\upsilon\nu^2\omega - 1 = 2(1 - \eta\mu^2\omega) - 1 = 2 - 2\eta\mu^2\omega - 1 = 1 - 2\eta\mu^2\omega$

2. Πρόβλημα

Νά εὑρεθῆ ἡ εφ2ω καί ἡ σφ2ω ἄν γνωρίζωμεν τήν εφω καί τήν σφω ἀντιστοίχως καί $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$.

ΛΥΣΙΣ

Ἰσχύει $\varepsilon\varphi 2\omega = \dfrac{\eta\mu 2\omega}{\sigma\upsilon\nu 2\omega}$ μέ $\sigma\upsilon\nu 2\omega \neq 0$ τό ὁποῖον ἰσχύει διότι $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$ ἄρα $\varepsilon\varphi 2\omega = \dfrac{2\eta\mu\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega}{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega}$ καί ἄν τούς ὅρους τοῦ κλάσματος διαιρέσωμεν διά τοῦ $\sigma\upsilon\nu^2\omega$, τό ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός λόγῳ τοῦ ὅτι $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$ ἄρα καί $0^\circ < \omega < 45^\circ$ ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi 2\omega = \frac{2\varepsilon\varphi\omega}{1 - \varepsilon\varphi^2\omega} \qquad (3)$$

Ἐπίσης ἰσχύει $\sigma\varphi 2\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu 2\omega}{\eta\mu 2\omega}$ μέ $\eta\mu 2\omega \neq 0$ τό ὁποῖον ἰσχύει διότι $0^\circ < 2\omega < 90^\circ$ ἄρα

$$\sigma\varphi 2\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu^2\omega - \eta\mu^2\omega}{2\eta\mu\omega\ \sigma\upsilon\nu\omega}$$

καί ἄν τούς ὅρους τοῦ κλάσματος διαιρέσωμεν διά τοῦ $\eta\mu^2\omega$ τό ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός λόγῳ τοῦ ὅτι $0 < 2\omega < 90^\circ$ ἄρα καί $0^\circ < \omega < 45^\circ$ ἔχομεν

$$\boxed{\sigma\varphi 2\omega = \frac{\sigma\varphi^2\omega - 1}{2\sigma\varphi\,\omega}} \qquad (4)$$

Παρατήρησις: Ἐάν εἰς τούς τύπους (2),(3),(4) ἀντικαταστήσωμεν τό $2\omega = \alpha$ ὁπότε $\omega = \frac{\alpha}{2}$ δυνάμεθα νά γράψωμεν αὐτούς καί ὡς ἑξῆς:

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu\,\alpha &= 2\eta\mu\frac{\alpha}{2}\ \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2} \\ \sigma\upsilon\nu\alpha &= 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\alpha}{2} - 1 \\ \varepsilon\varphi\,\alpha &= \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha}{2}} \\ \sigma\varphi\,\alpha &= \frac{\sigma\varphi^2\frac{\alpha}{2} - 1}{2\sigma\varphi\frac{\alpha}{2}} \end{aligned}\right\} \quad \text{μέ } 0 < \alpha < 90^\circ$$

Ἀσκήσεις

75.- α) Ἄν $\eta\mu\frac{\omega}{2} = \frac{1}{2}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$ νά εὑρεθοῦν οἱ ημω,συνω

β) Ἄν $\sigma\upsilon\nu\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$ νά εὑρεθ.οἱ ημω,εφω

γ) Ἄν $\varepsilon\varphi\frac{\omega}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$ νά εὑρεθ.οἱ εφω,σφω

δ) Ἄν $\sigma\varphi\frac{\omega}{2} = \sqrt{3}$, $0^\circ < \omega < 90^\circ$ νά εὑρεθοῦν οἱ συνω,εφω

76.- Νά δειχθῇ ὅτι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{\eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$ μέ $0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$

77.- Ἐάν $0^\circ < x < 45^\circ$ καί ἰσχύει ἡ σχέσις $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ νά εὑρεθῆ τό ημ2x καί συν2x

78.- Ἐάν $0^\circ < x < 45^\circ$ καί $\eta\mu x\ \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ νά εὑρεθῆ τό x.

79.- Νά ὑπολογισθῆ τό ημ2x γνωστοῦ ὄντος ὅτι

$$\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{5} \quad \text{μέ } 0^\circ < x < 45^\circ$$

80.- Νά δειχθῆ ὅτι $\sigma\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\alpha = 2\sigma\varphi 2\alpha$ μέ $0^\circ < \alpha < 45^\circ$

81.- Νά δειχθῆ ὅτι $\left(\sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{4}{1-2\varepsilon\varphi\alpha\sigma\varphi 2\alpha}$ μέ $0 < 2\alpha < 90^\circ$

82.- Νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

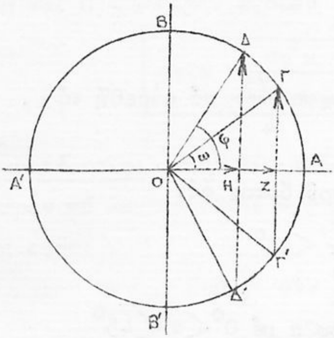
$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi^2\alpha \quad \text{μέ } 0^\circ < 2\alpha < 90^\circ$$

83.- Νά δειχθῆ ὅτι $\eta\mu 40^\circ + 2\eta\mu 20\ \sigma\upsilon\nu 160^\circ = 0$

VIII. Γεωμετρική ἀπόδειξις τῆς μεταβολῆς τοῦ ἡμιτόνου καί τοῦ συνημιτόνου ὀξείας γωνίας

α) Ἔστω ἡ ὀξεῖα γωνία $(\widehat{A O \Gamma}) = \omega$ (Σχ. 17) διά τήν ὁποίαν ἔχομεν $\eta\mu\omega = (\overrightarrow{Z\Gamma}) = (Z\Gamma)$ καί $\sigma\upsilon\nu\omega = (\overrightarrow{OZ}) = (OZ)$, (ὁ κύκλος ὑποτίθεται τριγωνομετρικός).

Ἐάν δέ ἡ γωνία αὐξηθῆ καί γίνη ὡς εἰς τό σχῆμα $(\widehat{A O \Delta}) = \varphi$ τότε παρατηροῦμεν ὅτι $\eta\mu\varphi = (\overrightarrow{H\Delta}) = (H\Delta)$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = (\overrightarrow{OH}) = (OH)$. Ἐάν δέ προεκτείνομεν τό ΓΖ καί τό ΔΗ θά τμήσουν ἀντιστοί-



Σχῆμα 17

χως τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ'. Ἐὰν δὲ συγκρίνωμεν τὰ τρίγωνα ΓΟΓ' καὶ ΔΟΔ' παρατηροῦμεν ὅτι

$$O\Gamma = O\Gamma' = O\Delta = O\Delta' = R$$

καὶ $\widehat{\Gamma O \Gamma'} < \widehat{\Delta O \Delta'}$ ἄρα συμφώνως μὲ γεωμετρικὴν πρότασιν θὰ εἶναι

$(\Gamma\Gamma') < (\Delta\Delta')$ ἢ

$2(Z\Gamma) < 2(H\Delta)$ ἢ

$(Z\Gamma) < (H\Delta)$ ἤτοι

αὐξανομένης τῆς γωνίας (ἢ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου) ἀπὸ 0° ἕως 90° τὸ ἡμίτονον αὐξάνει.

β) Κατὰ τὸ Πυθαγόρειον θεώρημα ἔχομεν διὰ τὰ τρίγωνα ΟΖΓ καὶ ΟΗΔ ὅτι $(OZ)^2 + (Z\Gamma)^2 = 1$ καὶ $(OH)^2 + (H\Delta)^2 = 1$ ἄρα

$$(OZ)^2 + (Z\Gamma)^2 = (OH)^2 + (H\Delta)^2 \qquad (1)$$ καὶ

ἐπειδὴ $(Z\Gamma) < (H\Delta)$ ἐκ τῆς ὁποίας ἔχομεν $(Z\Gamma)^2 < (H\Delta)^2$ λόγῳ τοῦ ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $(Z\Gamma)$ καὶ $(H\Delta)$ εἶναι θετικοὶ συνεπάγεται ὅτι $(OZ)^2 > (OH)^2$ ἐκ τῆς ὁποίας ἐπειδὴ (OZ) καὶ (OH) ἀριθμοὶ θετικοὶ ἔχομεν $(OZ) > (OH)$.

Ἤτοι αὐξανομένης τῆς γωνίας (ἢ τοῦ ἀντιστοίχου τόξου) ἀπὸ 0° ἕως 90° τὸ συνημίτονον ἐλαττοῦται.

Ἀσκήσεις

84.- Βάσει τοῦ Κεφ. VIII ποία ἡ μεταβολὴ τῆς εφω καὶ σφω συναρτήσει τῆς μεταβολῆς τῆς ω ἀπὸ 0° ἕως 90°.

85.- Βάσει τοῦ Κεφ. VIII νὰ δικαιολογηθῆ ἡ μεταβολὴ τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν συναρτήσει τῶν μεταβολῶν τῶν τόξων ἀπό 0° ἕως 360°.

Ἀσκήσεις ἐπαναλήψεως

86.- Νά δειχθῆ ὅτι:

$$\frac{\varepsilon\varphi^3\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}+\frac{\sigma\varphi^3\alpha}{1+\sigma\varphi^2\alpha}=\frac{\eta\mu^4\alpha+\sigma\upsilon\nu^4\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1-2\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha}$$

87.- Νά ἐκφρασθῆ μόνο συναρτήσει τῆς εφα ἡ παράστασις

$$(1+\sigma\upsilon\nu\alpha)(1-\sigma\upsilon\nu\alpha)+\varepsilon\varphi\alpha(\sigma\varphi^2\alpha-1)$$

88.- Δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι παραστάσεις εἶναι ἀνεξάρτητοι τοῦ x.

(1) $y=\eta\mu^6x+\sigma\upsilon\nu^6x-2\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x+\eta\mu^2x$

(2) $y=2(1-\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2x)^2-(\eta\mu^8x+\sigma\upsilon\nu^8x)$

89.- Ἄν ἰσχύῃ ἡ σχέσις $2\varepsilon\varphi x=3\varepsilon\varphi y$ νά δειχθῆ ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y}{1+\varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi y}=\frac{\eta\mu y\,\sigma\upsilon\nu y}{3-\sigma\upsilon\nu^2y}$$

90.- Ἄν $3\eta\mu x+5\sigma\upsilon\nu x=5$ τότε δείξατε ὅτι:

$$(3\sigma\upsilon\nu x-5\;\eta\mu x)^2=9$$

91.- Ἄν $\eta\mu x=\dfrac{\lambda^2+2\lambda\mu}{\lambda^2+2\lambda\mu+2\mu^2}$ νά εὑρεθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

92.- Ἄν $\alpha\sigma\upsilon\nu^2\theta+\beta\eta\mu^2\theta=\gamma$ τότε δείξατε ὅτι $\varepsilon\varphi^2\theta=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}$

93.- Ἂν α, β εἶναι ὁμόσημοι ἀριθμοί καί x ὀξεῖα γωνία τοιαύτη ὥστε $\varepsilon\varphi\, x = \sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}}$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἄλλοι τριγωνομετρικοί ἀριθμοί.

94.- Εἰς κύκλον Κ ἀκτῖνος 4cm λαμβάνομεν $(\widehat{AB}) = \dfrac{\pi}{3}$ καί ἐν συνεχείᾳ $(\widehat{B\Gamma}) = \dfrac{2\pi}{3}$. Νά ἐπιλυθῇ τό τρίγωνον ΑΒΓ.

95.- Γνωστοῦ ὄντος ἀπό τήν Γεωμετρίαν ὅτι ἡ πλευρά κανονικοῦ δεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτῖνος 1 εἶναι ἴση μέ $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῆς γωνίας τῶν 18° (Θέμα Οἰκον. Σχολῶν 1967).

96.- Εἰς ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($A = 90^{\circ}$) νά ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ = α πρός τήν ἀκτῖνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τό τρίγωνον κύκλου ἐάν μία τῶν ὀξειῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου π.χ. ἡ Β εἶναι 30° καί θεωρουμένου γνωστοῦ ὅτι

$\sigma\upsilon\nu\, 15^{\circ} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (Θέμα Τεχνικῶν Σχολῶν 1967)

97.- Νά ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι ἑνός ρόμβου ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ καί μιᾶς τῶν διαγωνίων δ.

98.- Νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία θ τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων δύο κύκλων ἀκτίνων 9cm καί 4cm ἐφαπτομένων ἐξωτερικῶς.

99.- Ἐάν $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{5}{7}$ νά ὑπολογισθῇ ἡ τιμή τῆς παραστάσεως :

$$\frac{3ημθ + 4συνθ}{11ημθ - 4συνθ}$$

100.- Ποίας ὀξείας γωνίας τό ἡμίτονο ἰσοῦται μέ τό συνημίτονο ;

101.- Ποίας ὀξείας γωνίας ἡ συνεφαπτομένη εἶναι διπλασία τοῦ συνημιτόνου ;

102.- Ἄν $εφθ = \frac{x\,ημω}{1 - x\,συνω}$ καί $εφω = \frac{y\,ημθ}{1 - y\,συνθ}$ τότε

$$\frac{ημθ}{ημω} = \frac{x}{y}$$

103.- Ἄν $εφx = \frac{ημy - συνy}{ημy + συνy}$ τότε δείξατε ὅτι

$$2ημ^2x = (ημy - συνy)^2$$

104.- Ἄν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ διάμεσος ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΑΒ δείξατε ὅτι $2εφΒ + εφΑ = 0$

105.- Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν τόξων 15° καί $7^\circ\,30'$ συναρτήσει τοῦ $ημ30^\circ$ ἤ τοῦ $συν30^\circ$.

106.- Νά ὑπολογισθῇ ἡ εφx γνωστοῦ ὄντος ὅτι

$$4ημ2x + 3συν2x = 3 \quad μέ\ 0 < 2x < 90^\circ$$

107.- Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ καί ἡ ἐφαπτομένη εἰς τό Β. Νά εὑρεθῇ ἡ γωνία x, τήν ὁποίαν πρέπει νά σχηματίζῃ μέ τήν ΑΒ τέμνουσα συναντῶσα τήν καμπύλην εἰς τό Γ καί τήν ἐφαπτομένην εἰς τό Δ ἵνα (ΑΔ) = 4(ΑΓ).

108.- Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀπό τήν κορυφήν Α εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῶν ἀποστάσεων αὐτοῦ ἀπό τάς κορυφάς Β καί Γ. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἀληθεύει ἡ σχέσις $ημ^2\frac{A}{2} = ημ\frac{B}{2}\,ημ\frac{Γ}{2}$.

109.- Διά τόξα x κείμενα μεταξύ 0^o καί 45^o νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἶναι ημx < συνx καί ἐν συνεχείᾳ νά εὑρεθῇ τό πρόσημον τῆς παραστάσεως $K = ημx + συνx$ ὅταν α) $x = 130^o$, β) $= 160^o$, γ) $\frac{3\pi}{5}$.

110.- Νά δειχθῇ ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχομεν τάς σχέσεις

$$εφ\frac{B}{2} = \frac{β}{α+γ}\ ,\quad εφ2B = \frac{2βγ}{γ^2-β^2}$$

111.- Ν'ἁπλοποιηθῇ ἡ παράστασις

$$\frac{(1-α^2)ημ2x - 2ασυν2x}{ημx - ασυνx} \quad μέ\ 0^o < 2x < 90^o$$

112.- Ἄν ἰσχύῃ ἡ σχέσις $εφα = \frac{ημβ - συνβ}{ημβ + συνβ}$ ν' ἀποδειχθῇ

ὅτι $ημβ - συνβ = \pm\sqrt{2}\,ημα$

113.- Νά ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς περιμέτρου 2τ καί τῆς ὀξείας γωνίας Β.

114.- Νά ἐπιλυθῇ ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐκ τῆς ὀξείας γωνίας Β καί τῆς διαφορᾶς $\alpha-\beta = \lambda$.

115.- Ποίας ὀξείας γωνίας ἡ συνεφαπτομένη εἶναι διπλασία τοῦ συνημιτόνου.

116.- Ἄν α,β πραγματικοί ἀριθμοί μέ ἕνα τουλάχιστον διάφορον τοῦ μηδενός τότε δυνάμεθα νά θέσωμεν

(1) $\eta\mu\, x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ καί $\sigma\upsilon\nu\, x = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$

(2) $\sigma\upsilon\nu\, x = \dfrac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ καί $\eta\mu\, x = \dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$

117.- Τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι ΑΒ = 40 cm , ΒΓ = 30 cm , $\hat{A} = 42^\circ\, 30'$, $\Delta = 90^\circ$, $B = 158^\circ\, 50'$ νά ὑπολογισθοῦν τά ὑπόλοιπα στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου.

118.- Ἐάν δ καί δ' εἶναι τά μήκη τῆς ἐσωτερικῆς καί ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α ἑνός τριγώνου ΑΒΓ ἔχομεν $\dfrac{\delta}{\delta'} = \varepsilon\varphi\, \dfrac{B-\Gamma}{2}$.

119.- Ἐάν Μ εἶναι τό μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ καί Κ τό κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου του κύκλου νά δειχθῇ ὅτι $2\sigma\varphi\, \widehat{KMB} = \sigma\varphi \dfrac{\Gamma}{2} - \sigma\varphi \dfrac{B}{2}$.

120.- Ἄν Μ τό μέσον τοῦ ὕψους ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ καί Ν τό μέσον τῆς ΒΓ δείξατε ὅτι $\sigma\varphi\, \widehat{MNB} = \sigma\varphi\Gamma - \sigma\varphi B$.

121.- Ἄν θ εἶναι ὀξεῖα γωνία τοιαύτη ὥστε ημθ+ συνθ $= \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ τότε ὑπολογίσατε τό γινόμενον ημθσυνθ καί ἐν συνεχείᾳ ὑποθέτοντες $\theta < 45^{\circ}$ ὑπολογίσατε τά ημθ, συνθ καθώς καί τήν γωνίαν θ.

122.- Ἐντός γωνίας $\widehat{XO\Psi} = \theta$ εἶναι ἐγγεγραμμέναι δύο περιφέρειαι O_1 καί O_2 ἐφαπτόμεναι μεταξύ των. Ἄν R_1 ἡ ἀκτίς τῆς μικροτέρας νά ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς R_2 τῆς μεγαλυτέρας περιφερείας συναρτήσει τῶν θ, R_1.

123.- Δείξατε ὅτι τό τρίγωνον τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι Α,Β,Γ πληροῦν τήν σχέσιν $\frac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2 \Gamma} = \frac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma}$ εἶναι ὀρθογώνιον ἤ ἰσοσκελές.

124.- Δείξατε ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως $\left(\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\eta\mu\gamma} - \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\gamma}\right)^2 =$ $= \varepsilon\varphi^2\alpha - \varepsilon\varphi^2\beta$ συνεπάγεται ἡ σχέσις

$$\sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\varepsilon\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha} \text{ καί ἀντιστρόφως}$$

125.- Δείξατε ὅτι ἐκ τῆς σχέσεως $\frac{\eta\mu^4 x}{\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu^4 x}{\beta} = \frac{1}{\alpha+\beta}$

ἕπεται ἡ σχέσις $\frac{\eta\mu^{16} x}{\alpha^7} + \frac{\sigma\upsilon\nu^{16} x}{\beta^7} = \frac{1}{(\alpha+\beta)^7}$

126.- Ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ἡ ὀξεῖα γωνία $B = \theta^{\circ}$. Νά ὑπολογισθῇ τριγωνομετρικῶς ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ ΑΒΓ καί τοῦ τετραγώνου τοῦ κατασκευαζομένου ἐπί τῆς ὑποτεινούσης.

127.- Νά δειχθῆ ὅτι ἄν ὑφίσταται μία ἐκ τῶν ἰσοτήτων

$$\eta\mu^2\theta \pm \eta\mu\theta = 1$$

τότε θά ἀληθεύη καί ἡ ἰσότης

$$\sigma\upsilon\nu^4\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

128.- Νά ὁρισθοῦν αἱ τιμαί τοῦ θετικοῦ καί μικροτέρου τῶν 90° τόξου x , αἱ ὁποῖαι καθιστοῦν τήν παράστασιν

$$\frac{\varepsilon\varphi x\,(3-\varepsilon\varphi^2 x)}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$$

1ον θετική καί 2ον ἀρνητική

129.- Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ ὀρθοκέντρου ἑνός τριγώνου ἀπό τάς κορυφάς καί τάς πλευράς αὐτοῦ συναρτήσει τῶν κυρίων στοιχείων αὐτοῦ.

130.- Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ κλάσματος

$$K = \frac{\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\eta\mu^2\alpha - 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{3\eta\mu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha} \quad \text{ἄν } \varepsilon\varphi\alpha = 2$$

χωρίς νά εὑρεθοῦν τά ημα, συνα.

131.- Νά σπουδασθῆ ἡ μεταβολή τῶν συναρτήσεων

$$y_1 = 4 - \eta\mu x$$
$$y_2 = 2 - \eta\mu x$$
$$y_3 = 2 + \sigma\upsilon\nu^2 x$$

132.- Ἄν Ο τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου ΑΒΓ τότε νά δειχθῆ ὅτι τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου ΟΑΓ ἰσοῦται μέ $\frac{1}{4}\beta^2\,\sigma\varphi B$.

133.- Δίδεται διάμετρος ΑΒ κύκλου Ο καί δύο σημεῖα Μ,Μ' ἐπί τῆς περιφερείας συμμετρικός ὡς πρός τήν ΑΒ ἔστω $(\widehat{BAM})=\varphi$ $(0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τό ΑΜΜ' συναρτήσει τῶν φ,R.

134.- Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἔστω Ο τό κέντρον τοῦ ἐγγε - γραμμένου κύκλου. Θεωροῦμεν τρεῖς κύκλους ἐντός τοῦ τριγώνου τούς ἐγγεγραμμένους εἰς τάς γωνίας Α,Β,Γ καί ἐφαπτομένους τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἄν ρ_1, ρ_2, ρ_3 ἀντιστοίχως αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν καί ρ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγε - γραμμένου κύκλου τοῦ ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι

$$\rho_1 = \rho\, \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{A}{4}\right), \quad \rho_2 = \rho\, \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{B}{4}\right), \quad \rho_3 = \rho\, \varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\Gamma}{4}\right)$$

135.- Δείξατε ὅτι εἰς πᾶν τρίγωνον εἶναι $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{B-\Gamma}{2}\right) > \eta\mu\frac{A}{2}$

136.- Δείξατε ὅτι ἄν αἱ γωνίαι x καί y πληροῦν τήν σχέσιν

$$\alpha\eta\mu x\,\eta\mu y + \beta\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y = 0$$

τότε ἡ συνάρτησις

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{\alpha\eta\mu^2 x + \beta\sigma\upsilon\nu^2 x} + \frac{1}{\alpha\eta\mu^2 y + \beta\sigma\upsilon\nu^2 y}$$

εἶναι σταθερά. Νά γίνη δέ καί ἡ σχετική διερεύνησις.

137.- Ἐάν εἰς τρίγωνον ἰσχύει ἡ σχέσις

$$\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu^3\frac{B}{2} = \eta\mu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu^3\frac{A}{2}$$

τότε νά δειχθῆ ὅτι τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

138.- Ἐάν εἰς τρίγωνον εἶναι $\mu_\alpha = \gamma$ νά δειχθῆ ὅτι $\varepsilon\varphi B = 3\varepsilon\varphi\Gamma$.

139.- Εἰς τρίγωνον ΑΒΓ τὸ ὕψος ΑΔ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι θὰ εἶναι $2\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi\Gamma = \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi\Gamma$ καὶ $\sigma\varphi B + \sigma\varphi\Gamma = 2$.

140.- Ἂν ΑΔ τὸ ὕψος τριγώνου ΑΒΓ καὶ ΑΜ ἡ διάμεσος αὐτοῦ καὶ $B > \Gamma$ δείξατε ὅτι $(M\Delta) = R\eta\mu(B-\Gamma)$.

141.- Ἐὰν $0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}$ τότε νὰ δειχθῆ ὅτι

$$\varepsilon\varphi\alpha < \frac{\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta + \eta\mu\gamma}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma} < \varepsilon\varphi\gamma$$

142.- Νὰ δειχθῆ ὅτι

$$\frac{\eta\mu^{\nu+6}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu+6}x - \eta\mu^{\nu+4}x - \sigma\upsilon\nu^{\nu+4}x}{\eta\mu^{\nu+2}x + \sigma\upsilon\nu^{\nu+2}x} =$$

$$= \frac{\eta\mu^{\rho+6}x + \sigma\upsilon\nu^{\rho+6}x - \eta\mu^{\rho+4}x - \sigma\upsilon\nu^{\rho+4}x}{\eta\mu^{\rho+2}x + \sigma\upsilon\nu^{\rho+2}x}$$

ὅπου ν,ρ ἀκέραιος.

143.- Ἐὰν ἰσχύῃ ὁ τύπος $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$ τότε νὰ δειχθῇ ὅτι

$$\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{11}\,\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{11}\,\sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{11}\,\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{11}\,\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{11} = \frac{1}{32}$$

144.- Ἂν $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ νὰ δειχθῆ ὅτι

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu^4\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu^5\alpha} \geqslant 1$$

145.- Ἐὰν $0 < x < \frac{\pi}{2}$ τότε νὰ δειχθῆ

$$\eta\mu x < x < \varepsilon\varphi x$$

146.- Βάσει τοῦ τριγωνομετρικοῦ κύκλου νά ἀποδειχθῆ ὅτι

α) $\eta\mu(90^{o}+\omega)\eta\mu\omega + \sigma\upsilon\nu(90+\omega)\sigma\upsilon\nu\omega = 0$

β) $\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu(270+\omega) - \eta\mu(270-\omega)+\sigma\upsilon\nu(180+\omega) = 0$

γ) $\varepsilon\varphi 315^{o}\sigma\varphi 225^{o} - \varepsilon\varphi 225^{o}\sigma\varphi 135^{o} = 0$

δ) $\eta\mu\frac{\pi}{5}\,\eta\mu\frac{2\pi}{5}\,\eta\mu\frac{3\pi}{5}\,\eta\mu\frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$

ε) $\dfrac{\eta\mu(180+\omega)}{\varepsilon\varphi(360+\omega)} \cdot \dfrac{\sigma\varphi(270-\omega)}{\varepsilon\varphi(90+\omega)} \cdot \dfrac{\sigma\upsilon\nu(360-\omega)}{\eta\mu\omega} = \eta\mu\omega$

στ) $A = \dfrac{\eta\mu(180+\omega)\sigma\upsilon\nu(270-\omega)\varepsilon\varphi(270+\omega)}{\eta\mu(360-\omega)} = \sigma\upsilon\nu\omega$

ζ) $\dfrac{\eta\mu(\frac{19\pi}{2}+\omega)\;\eta\mu(2\pi+\omega)\eta\mu(\frac{5\pi}{2}-\omega)\sigma\upsilon\nu(\frac{3\pi}{2}+\omega)}{\varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega)\;\sigma\varphi(\frac{7\pi}{2}-\omega)\;\sigma\upsilon\nu(\frac{13\pi}{2}\;\omega)\;\sigma\upsilon\nu(\frac{7\pi}{2}+\omega)} = \sigma\upsilon\nu^2\omega$

I. Θεμελιώδεις σχέσεις

$$\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$$

$$\varepsilon\varphi\, x = \frac{\eta\mu\, x}{\sigma\upsilon\nu\, x},\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},\ k \in Z$$

$$\sigma\varphi\, x = \frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\eta\mu\, x},\ x \neq k\pi,\ k \in Z$$

II. Πίναξ δίδων τήν εκφρασιν ἑκάστου τριγωνομετρικοῦ ἀριθμοῦ βάσει τῶν ἄλλων.

	ημ x	συν x	εφ x	σφ x
ημx	ημx	$\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$\frac{\varepsilon\varphi\, x}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in Z$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2 x}}$ $x \neq k\pi$ $k \in Z$
συνx	$\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}$	συνx	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\varepsilon\varphi^2 x}}$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in Z$	$\frac{\sigma\varphi\, x}{\pm\sqrt{1+\sigma\varphi^2 x}}$ $x \neq k\pi$ $k \in Z$
εφx	$\frac{\eta\mu\, x}{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu\, x}$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in Z$	εφ x $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\frac{1}{\sigma\varphi\, x}$ $x \neq k\pi$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in Z$
σφx	$\frac{\pm\sqrt{1-\eta\mu^2 x}}{\eta\mu\, x}$ $x \neq k\pi$, $k \in Z$	$\frac{\sigma\upsilon\nu\, x}{\pm\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}}$ $x \neq k\pi$, $k \in Z$	$\frac{1}{\varepsilon\varphi\, x}$ $x \neq k\pi$ $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ $k \in Z$	σφ x $x \neq k\pi$

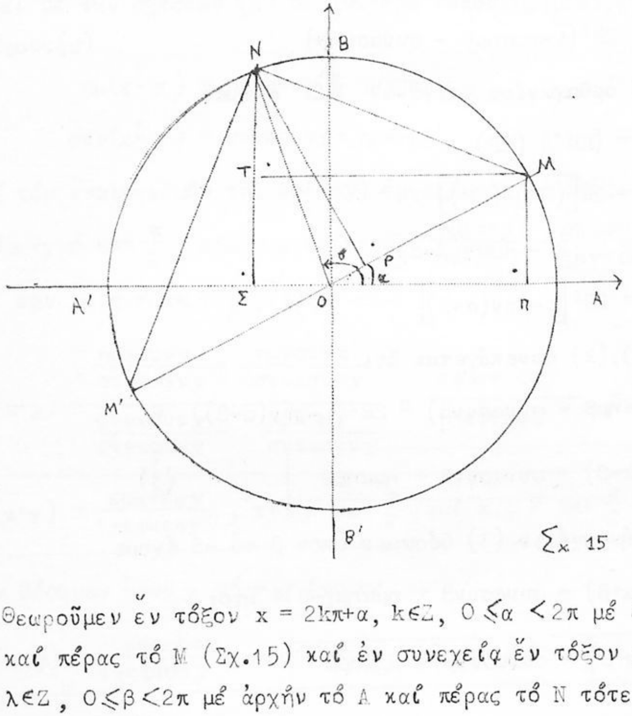
III. Τύπος ἀναγωγῆς

$\eta\mu(90-x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu\ (90+x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\sigma\upsilon\nu(90-x) = \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu\ (90+x) = -\ \eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(90-x) = \sigma\varphi x$	$\varepsilon\varphi\ (90+x) = -\ \sigma\varphi x$
$\sigma\varphi(90-x) = \varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi\ (90+x) = -\ \varepsilon\varphi x$
$\eta\mu(180-x) = \eta\mu x$	$\eta\mu(180+x) = -\ \eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu(180-x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(180+x) = -\ \sigma\upsilon\nu x$
$\varepsilon\varphi(180-x) = -\ \varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi(180+x) = \varepsilon\varphi x$
$\sigma\varphi(180-x) = -\ \sigma\varphi x$	$\sigma\varphi(180+x) = \sigma\varphi x$
$\eta\mu(270-x) = -\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu(270+x) = -\ \sigma\upsilon\nu x$
$\sigma\upsilon\nu(270-x) = -\ \eta\mu x$	$\sigma\upsilon\nu(270+x) = \eta\mu x$
$\varepsilon\varphi(270-x) = +\ \sigma\varphi x$	$\varepsilon\varphi(270+x) = -\ \sigma\varphi x$
$\sigma\varphi(270-x) = +\ \varepsilon\varphi x$	$\sigma\varphi(270+x) = -\ \varepsilon\varphi x$
$\eta\mu(360-x) = -\ \eta\mu x$	$\eta\mu(-x) = -\ \eta\mu x$
$\sigma\upsilon\nu(360-x) = \sigma\upsilon\nu x$	$\sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$
$\varepsilon\varphi(360-x) = -\ \varepsilon\varphi x$	$\varepsilon\varphi(-x) = -\ \varepsilon\varphi x$
$\sigma\varphi(360-x) = -\ \sigma\varphi x$	$\sigma\varphi(-x) = -\ \sigma\varphi x$

Τριγωνομετρικός ἀριθμός ὡρισμένων τόξων

x	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
ημx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνx	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφx	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
σφ x	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Ὑπολογισμός τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τοῦ ἀθροίσματος καί τῆς διαφορᾶς δύο τόξων ἤ ἀντιστοίχως δύο γωνιῶν.



Σχ 15

Θεωροῦμεν ἕν τόξον $x = 2k\pi+\alpha$, $k\in Z$, $0 \leq \alpha < 2\pi$ μέ ἀρχήν τό A καί πέρας τό M (Σχ.15) καί ἐν συνεχείᾳ ἕν τόξον $y = 2\lambda\pi+\beta$, $\lambda\in Z$, $0\leq\beta<2\pi$ μέ ἀρχήν τό A καί πέρας τό N τότε εἶναι

$$\left.\begin{aligned} \eta\mu x &= \eta\mu(2k\pi+\alpha) = \eta\mu\alpha \\ \eta\mu y &= \eta\mu(2\lambda\pi+\beta) = \eta\mu\beta \\ \sigma\upsilon\nu x &= \sigma\upsilon\nu(2k\pi+\alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha \\ \sigma\upsilon\nu y &= \sigma\upsilon\nu(2\lambda\pi+\beta) = \sigma\upsilon\nu\beta \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{NTM}$ ἔχομεν

$$\begin{aligned} (NM)^2 &= (NT)^2 + (TM)^2 \\ &= \Big[(N\Sigma)-(M\Pi)\Big]^2 + \Big[(O\Pi) + (O\Sigma)\Big]^2 \end{aligned}$$

$$(NM)^2 = \left[(ON)\eta\mu\ (180-\beta)-(OM)\eta\mu\alpha\right]^2 + \left[(OM)\sigma\upsilon\nu\alpha+(ON)\sigma\upsilon\nu(180-\beta)\right]^2$$

$$'' \quad = (R\eta\mu\beta - R\eta\mu\alpha)^2+ (R\sigma\upsilon\nu\alpha - R\sigma\upsilon\nu\beta)^2$$

$$'' \quad = 2R^2(1-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta) \qquad (1)$$

'Εκ δὲ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{MNM^o}$ ἔχομε:

$$(NM)^2 = (MM^o)\ (MP)$$

$$'' \quad = 2R\left[(OM)-(OP)\right]$$

$$'' \quad = 2R\left[R - R\sigma\upsilon\nu(\beta-\alpha)\right]$$

$$'' \quad = 2R^2\left[1-\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)\right] \qquad (2)$$

'Εκ τῆς (1),(2) συνεπάγεται ὅτι

$$2R^2(1-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta - \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta) = 2R^2(1-\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)) \quad \text{ἤ}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \qquad (3)$$

'Εὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) θέσωμεν ὅπου β τὸ -β ἔχομε

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha\eta\mu(-\beta) \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta} \qquad (4)$$

'Εὰν εἰς τὴν σχέσιν (3) θέσωμεν ὅπου β τὸ 90-β ἔχομε

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta-90) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu(90-\beta)+\eta\mu\alpha\eta\mu(90-\beta) \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\eta\mu(\alpha+\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (5)$$

'Εὰν εἰς τὴν σχέσιν (5) θέσωμεν ὅπου β τὸ -β ἔχομεν

$$\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu(-\beta)+\eta\mu(-\beta)\sigma\upsilon\nu\alpha \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha} \qquad (6)$$

Βάσει δέ τῶν σχέσεων (Α) οἱ ἀνωτέρω τύποι (5),(6),(4),(3) γράφονται

$$\eta\mu(x\pm y) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y \pm \eta\mu y\sigma\upsilon\nu x$$

$$\sigma\upsilon\nu(x\pm y) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y \mp \eta\mu x\eta\mu y$$

Διά τόν ὑπολογισμόν τῆς $\varepsilon\varphi(x+y)$ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Διά $x+y \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z \rightarrow \varepsilon\varphi(x+y) = \frac{\eta\mu(x+y)}{\sigma\upsilon\nu(x+y)} = \frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu x\eta\mu y}$

καί ἐάν $x,y \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in Z \rightarrow$

$$\varepsilon\varphi(x+y) = \frac{\frac{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}+\frac{\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}}{\frac{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}-\frac{\eta\mu x\eta\mu y}{\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y}} = \frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y} \quad \text{ἤτοι}$$

$$\boxed{\varepsilon\varphi(x+y) = \frac{\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y}{1-\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}, \; x+y \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ καί } x,y \neq k\pi+\frac{\pi}{2}\; k\in Z} \quad (5)$$

Ἄν θέσωμεν ὅπου y τό $-y$ ἔχομεν

$$\boxed{\varepsilon\varphi(x-y) = \frac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi y}{1+\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi y}, \; x-y \neq k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ καί } x,y \neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z} \quad (6)$$

Διά τούς ὑπολογισμούς τῆς $\sigma\varphi(x+y)$ ἐργαζόμαστε ἀναλόγως καί ἔχομεν

$$\boxed{\sigma\varphi(x+y) = \frac{\sigma\varphi x\sigma\varphi y-1}{\sigma\varphi y+\sigma\varphi x}, \; x+y \neq k\pi \text{ καί } x,y \neq k\pi,\; k\in Z} \quad (7)$$

Ἄν θέσωμεν ὅπου y τό $-y$ ἔχομεν

$$\boxed{\sigma\varphi(x-y) = \frac{\sigma\varphi x\sigma\varphi y+1}{\sigma\varphi y-\sigma\varphi x}, \; x-y \neq k\pi \text{ καί } x,y \neq k\pi,\; k\in Z} \quad (8)$$

'Εάν εἰς (1),(3),(5),(7) θέσωμεν ὅπου y τό x ἔχομεν ἀντιστοίχως

(9) $ημ2x = 2ημx συνx$

(10) $συν2x = συν^2x - ημ^2x = 2συν^2x - 1 = 1 - 2ημ^2x$

(11) $εφ2x = \frac{2εφx}{1-εφ^2x}$, $x \neq \frac{kπ}{2} + \frac{π}{4}$ καί $x \neq kπ + \frac{π}{2}$, $k \in Z$

(12) $σφ2x = \frac{σφ^2x - 1}{2σφx}$, $\neq \frac{kπ}{2}$, $k \in Z$

Βάσει τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νά ὑπολογίσωμεν καί τούς τριγωνομετρικούς ἀριθμούς τῶν τόξων τῆς μορφῆς 3x ... συναρτήσει ὁμωνύμων τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν.

$ημ3x = ημ(2x+x) = ημ2x συνx + ημx συν2x = 2ημx συν^2x + ημx - 2ημ^3x =$

$= 2ημx - 2ημ^3x + ημx - 2ημ^3x = 3ημx - 4ημ^3x$ ἤτοι

(13) $ημ3x = 3ημx - 4ημ^3x$ ὁμοίως ἔχομεν

(14) $συν3x = 4συν^3x - 3συνx$

(15) $εφ3x = \frac{3εφx - εφ^3x}{1 - 3εφ^2x}$, $x \neq \frac{kπ}{3} + \frac{π}{6}$

(16) $σφ3x = \frac{3σφx - σφ^3x}{1 - 3σφ^2x}$, $x \neq \frac{kπ}{3}$

<u>Παρατήρησις</u>

Εἰς πολλά τριγωνομετρικά θέματα εἰς τά ὁποῖα ἐμφανίζονται τά τετράγωνα ἤ οἱ κύβοι τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν χρησιμοποιοῦμε τούς τύπους

$$ημ^2x = \frac{1 - συν2x}{2}$$

$$συν^2x = \frac{1 + συν2x}{2}$$

$$\varepsilon\varphi^2 x = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\sigma\upsilon\nu 2x} \qquad x \neq k\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\sigma\varphi^2 x = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x}{1-\sigma\upsilon\nu 2x} \qquad x \neq k\pi$$

$$\eta\mu^3 x = \frac{3\eta\mu x - \eta\mu 3x}{4}$$

$$\sigma\upsilon\nu^3 x = \frac{3\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 3x}{4}$$

αἱ ὁποῖαι προκύπτουν βάσει τῶν προηγουμένων τύπων τοῦ 2x καί 3x

Μετατροπαί ἀθροισμάτων εἰς γινόμενα καί γινομένων εἰς ἀθροίσματα

1) Ἰσχύουν $\eta\mu\,(x+y) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x \qquad (1)$

$\eta\mu\,(x-y) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu y\sigma\upsilon\nu x \qquad (2)$

Διά προσθέσεως ἔχομεν

$$\eta\mu(x+y)+\eta\mu(x-y) = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y \qquad (3)$$

Ἐάν θέσωμεν $\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{array}\right\} \longrightarrow x = \frac{\alpha+\beta}{2}\,,\ y= \frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (4)$

Τότε ἡ σχέσις (3) γίνεται βάσει τῶν (4)

$$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta = 2\eta\mu\,\frac{\alpha+\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad (5)$$

Ὁμοίως ἐάν τάς (1), (2) ἀφαιρέσωμεν ἔχομε βάσει καί τῶν (4)

$$\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta = 2\eta\mu\,\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sigma\upsilon\nu\,\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (6)$$

2) Ἰσχύουν $\sigma\upsilon\nu(x+y) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y-\eta\mu x\eta\mu y \qquad (7)$

$\sigma\upsilon\nu(x-y) = \sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu y+\eta\mu x\eta\mu y \qquad (8)$

Διά προσθέσεως τῶν (7), (8) ἔχομεν

$$συν(x+y)+συν(x-y) = 2συνxσυνy \qquad (9)$$

Ἐάν θέσωμεν $\left.\begin{array}{l} x+y=\alpha \\ x-y=\beta \end{array}\right\} \to x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}, \quad y = \dfrac{\alpha-\beta}{2} \qquad (10)$

Τότε ἡ σχέσις (9) γίνεται βάσει τῶν (10)

$$\boxed{συνα + συνβ = 2συν\frac{\alpha+\beta}{2}\,συν\frac{\alpha-\beta}{2}} \qquad (11)$$

Ὁμοίως ἐάν τάς (7),(8) ἀφαιρέσωμεν ἔχομεν

$$συν(x+y) - συν(x-y) = -2ημxημy \qquad (12)$$

καί βάσει τῶν (10) ἔχομεν

$$συνα - συνβ = -2ημ\frac{\alpha+\beta}{2}\,ημ\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ἤ$$

$$\boxed{συνα - συνβ = 2ημ\frac{\alpha+\beta}{2}\,ημ\frac{\beta-\alpha}{2}} \qquad (13)$$

3) Δυνάμεθα ἐπίσης νά μετατρέψωμεν καί τάς παραστάσεις $εφα \pm εφβ$, $σφα \pm σφβ$ εἰς γινόμενα ὡς ἑξῆς:

$$εφα \pm εφβ = \frac{ημα}{συνα} \pm \frac{ημβ}{συνβ} = \frac{ημασυνβ \pm ημβσυνα}{συνασυνβ} = \frac{ημ(\alpha\pm\beta)}{συνασυνβ}$$

ἤτοι: $εφα \pm εφβ = \dfrac{ημ(\alpha \pm \beta)}{συνασυνβ}, \alpha,\beta \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}, k\in Z \qquad (14)$

καί

$$σφα \pm σφβ = \frac{συνα}{ημα} \pm \frac{συνβ}{ημβ} = \frac{ημβσυνα \pm σημασυνβ}{ημαημβ} = \frac{ημ(\beta\pm\alpha)}{ημαημβ}$$

ἤτοι: $\boxed{σφα \pm σφβ = \dfrac{ημ(\beta \pm \alpha)}{ημα\,ημβ}, \ \alpha,\beta \neq k\pi, \ k\in Z} \qquad (15)$

4) Αἱ σχέσεις (3),(9),(12) εἶναι ἐκεῖναι αἱ ὁποῖαι μετατρέπουν γινόμενα εἰς ἀθροίσματα, ἤτοι:

$$\boxed{\begin{aligned} 2ημx\,συνy &= ημ(x+y) + ημ(x-y) \\ 2συνx\,συνy &= συν(x+y)+συν(x-y) \\ 2ημx\,ημy &= συν(x-y)-συν(x+y) \end{aligned}} \qquad (16)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν $15^o, 75^o, 22{,}5^o$.

2. Ἐάν $ημα = \frac{1}{2}$, $συνβ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραστάσεις: $ημ(α \pm β)$, $συν(α \pm β)$, $εφ(α \pm β)$.

3. Ὑπολογίσατε τό $συν(x+y)$ ἐάν $ημx-ημy = α$ καί $συνx+συνy=β$

4. Ἀποδείξατε τάς κάτωθι ταυτότητας:

α) $συν(α-β)συν(α+β)-ημ(α-β)ημ(α+β) = συν2α$

β) $ημ(α+β)συνβ+συν(α+β)ημβ = ημ(α+2β)$

γ) $ημ(60^o-α)συν(30^o+α)+ημ(30+α)συν(60-α) = 1$

δ) $ημ(α+β)ημ(α-β) = ημ^2α - ημ^2β$

ε) $(συνα-ημα)(συν2α-ημ2α) = συνα-ημ3α$

στ) $\dfrac{εφ(α-β)+εφβ}{1-εφ(α-β)εφβ} = εφα$

ζ) $\dfrac{εφ^2 2α - εφ^2α}{1-εφ^2 2α\, εφ^2α} = εφ3αεφα$

η) $\dfrac{ημ(α-β)}{συνασυνβ} + \dfrac{ημ(β-γ)}{συνβσυνγ} + \dfrac{ημ(γ-α)}{συνγσυνα} = 0$

θ) $\dfrac{2ημ(α+β)}{συν(α+β)+συν(α-β)} = εφα+εφβ$

ι) $(συνx+συνy)^2+(ημx+ημy)^2 = 4συν^2\dfrac{x-y}{2}$

κ) $εφ^2α - εφ^2β = \dfrac{ημ(α+β)ημ(α-β)}{συν^2ασυν^2β}$

λ) $συν^2x+συν^2(x+\frac{2π}{3})+συν^2(x+\frac{4π}{3}) = \frac{3}{2}$

μ) $\dfrac{1-εφ^2(\frac{π}{4}-α)}{1+εφ^2(\frac{π}{4}-α)} = ημ2α$

ν) $εφ^2(\frac{π}{4}-α) = \dfrac{1-ημ2α}{1+ημ2α}$

ξ) $συν^2(α-β)+συν^2(β-γ)+συν^2(γ-α)-2συν(α-β)συν(β-γ)συν(γ-α)=1$

5. Νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι ἰσότητες

α) $τοξ_ο εφ\frac{1}{2} + τοξ_ο εφ\frac{1}{3} = \frac{π}{4}$

β) $τοξ_ο εφ\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - τοξ_ο εφ\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{π}{4}$

γ) $τοξ_ο ημ\frac{4}{5} + τοξ_ο ημ\frac{5}{13} + τοξ_ο ημ\frac{16}{65} = \frac{π}{2}$

6. Ἀποδείξατε τάς κάτωθι ταυτότητας

α) $\dfrac{σφα}{σφα - σφ3α} + \dfrac{εφα}{εφα - εφ3α} = 1$

β) $(2συνα+1)(2συνα-1)(2συν2α-1) = 2συν4α+1$

γ) $εφ(α+30^o)εφ(α-30^o) = \dfrac{1-2συν2α}{1+2συν2α}$

7. Ἐάν $αεφx = β$ δείξατε ὅτι $ασυν2x+βημ2x = α$

8. Ἐάν $εφα = (2+\sqrt{3})εφ\frac{α}{3}$ ὑπολογίσατε τήν εφα

9. Ἐάν $4ημ^2x-2(1+\sqrt{3})ημx+\sqrt{3} = 0$ ὑπολογίσατε τά $ημ2x, συν2x$

10. Νά δειχθῆ ὅτι $εφ^2x+σφ^2x = 2\,\dfrac{3+συν4x}{1-συν4x}$

11. Ἐάν $εφ^2x = 1+2εφ^2y$ δείξατε ὅτι $συν^2y = 1+συνx$

12. Ἐὰν $\varepsilon\varphi \frac{y}{2} = 4\varepsilon\varphi \frac{x}{2}$ δείξατε ὅτι $\varepsilon\varphi \frac{y-x}{2} = \frac{3\eta\mu x}{5-3\sigma\upsilon\nu x}$

13. Ἐὰν $x+y=45^{0}$ δείξατε ὅτι $(1+\varepsilon\varphi x)(1+\varepsilon\varphi y) = 2$

14. Ἐὰν $\varepsilon\varphi(\alpha+\theta) = \nu\varepsilon\varphi(\alpha-\theta)$ νὰ δειχθῆ ὅτι $\frac{\eta\mu 2\theta}{\eta\mu 2\alpha} = \frac{\nu-1}{\nu+1}$

15. Ἐὰν $\sigma\upsilon\nu\varphi = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\beta}{\alpha+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$

νὰ δειχθῆ ὅτι $\varepsilon\varphi^{2}\frac{\varphi}{2} + \varepsilon\varphi^{2}\frac{x}{2} + \varepsilon\varphi^{2}\frac{y}{2} = 1$

16. Ἀποδείξατε τὰς κάτωθι ἰσότητας

α) $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha - \sigma\upsilon\nu 4\alpha}{\eta\mu 4\alpha - \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi 3\alpha$

β) $\frac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu 5\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\eta\nu 5\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi 2\alpha$

γ) $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu(\alpha+\beta) = 4\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}$

δ) $\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta+\eta\mu\gamma - \eta\mu(\alpha+\beta+\gamma) = 4\eta\mu\frac{\alpha+\beta}{2}\,\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}\,\eta\mu\frac{\alpha+\gamma}{2}$

ε) $\frac{\sigma\upsilon\nu 6\alpha+6\sigma\upsilon\nu 4\alpha+15\sigma\upsilon\nu 2\alpha+10}{\sigma\upsilon\nu 5\alpha+5\sigma\upsilon\nu 3\alpha+10\sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$

στ) $\sigma\varphi(\alpha+15^{0}) - \varepsilon\varphi(\alpha-15^{0}) = \frac{4\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu 2\alpha+1}$

ζ) $\sigma\varphi(15^{0}-\alpha)+\varepsilon\varphi(15^{0}+\alpha) = \frac{4\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{\alpha-2\eta\mu 2\alpha}$

η) $\varepsilon\varphi 9^{0}-\varepsilon\varphi 27^{0}-\varepsilon\varphi 63^{0}+\varepsilon\varphi 81^{0} = 4$

17. Νὰ γίνουν γινόμενα αἱ κάτωθι παραστάσεις

α) $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha$

β) $\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\gamma + \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta+\gamma)$

γ) $\eta\mu^{2}\alpha + \eta\mu^{2}\beta - \eta\mu^{2}(\alpha+\beta)$

δ) $\frac{\eta\mu 3x+\sigma\upsilon\nu 3x+\eta\mu 5x+\sigma\upsilon\nu 5x+\eta\mu 7x+\sigma\upsilon\nu 7x}{\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 5x+\sigma\upsilon\nu 7x}$

18. Ἐάν $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta$ δείξατε ὅτι $\alpha-\beta = k\pi$ καί .

$\alpha+\beta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k\in Z$

19. Δείξατε ὅτι $\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{7} + \sigma\upsilon\nu\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

20. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ δείξατε ὅτι

$$\frac{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta} + \frac{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma}{\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma} + \frac{\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\alpha} = 1$$

21. Ἐάν $\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu y+\sigma\upsilon\nu z = 0$ δείξατε ὅτι $\frac{\sigma\upsilon\nu x\,\sigma\upsilon\nu y\,\sigma\upsilon\nu z}{\sigma\upsilon\nu 3x+\sigma\upsilon\nu 3y+\sigma\upsilon\nu 3z} = \frac{1}{12}$

22. Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \pi$ δείξατε ὅτι

$$\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta+\varepsilon\varphi\gamma+\varepsilon\varphi\delta}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\gamma+\sigma\varphi\delta} = \varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta\varepsilon\varphi\gamma\varepsilon\varphi\delta$$

23. Νά ὑπολογισθοῦν οἱ τριγωνομετρικοί ἀριθμοί τῶν 18°.

24. Νά δειχθοῦν αἱ ταυτότητες

α) $\varepsilon\varphi\alpha = \varepsilon\varphi\alpha - 2\sigma\varphi 2\alpha$

β) $\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha = \sigma\varphi\frac{\alpha}{2} - \sigma\varphi\alpha$

25. Εἰς πᾶν τρίγωνον νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις

α) $\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma = 4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

β) $\sigma\upsilon\nu A+\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1+4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

γ) $\sigma\upsilon\nu^2 A+\sigma\upsilon\nu^2 B+\sigma\upsilon\nu^2\Gamma+2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma = 1$

δ) $\sigma\upsilon\nu 2A+\sigma\upsilon\nu 2B+\sigma\upsilon\nu 2\Gamma = -1-4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$

26. Ἐάν $x+y+z = k\pi, k\in Z$, $x,y,z \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ τότε νά δειχθῆ

$\varepsilon\varphi x+\varepsilon\varphi y+\varepsilon\varphi z = \varepsilon\varphi x\,\varepsilon\varphi y\,\varepsilon\varphi z$

27. Ἐάν $x+y+z = k\pi, k\in Z$, $x,y,z \neq k\pi$ τότε νά δειχθῆ

$\sigma\varphi x\sigma\varphi y+\sigma\varphi y\sigma\varphi z+\sigma\varphi z\sigma\varphi x = 1$

28. 'Εάν $x+y+z = 2k\pi+\pi,\ k\in Z$ τότε νά δειχθῆ

$$\text{εφ}\frac{x}{2}\,\text{εφ}\frac{y}{2}+\text{εφ}\frac{y}{2}\,\text{εφ}\frac{z}{2}+\text{εφ}\frac{z}{2}\,\text{εφ}\frac{x}{2} = 1$$

29. 'Εάν $\text{συν}^2x+\text{συν}^2y+\text{συν}^2z+2\,\text{συν}x\,\text{συν}y\,\text{συν}z = 1$

Νά εὑρεθῆ ποία σχέσεις συνδέει τά x, y, z.

30. 'Εάν $\text{συν}x+\text{συν}y+\text{συν}z = 1+4\,\text{ημ}\frac{x}{2}\,\text{ημ}\frac{y}{2}\,\text{ημ}\frac{z}{2}$

Νά εὑρεθῆ ποία σχέσεις συνδέει τά x, y, z

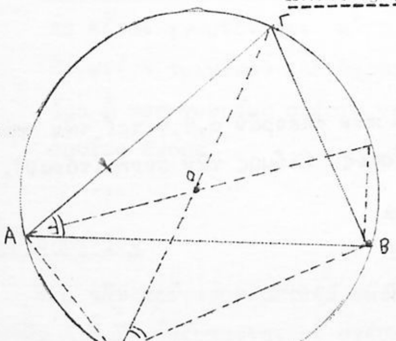
ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΥΧΟΝΤΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Θεώρημα 1ον

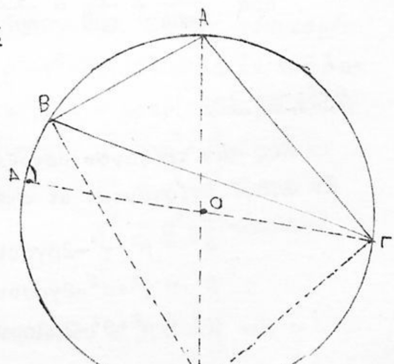
Εἰς πᾶν τρίγωνον μεταξύ τῶν πλευρῶν α,β,γ τῶν γωνιῶν Α, Β,Γ καί τῆς ἀκτῖνος R τῆς περιγεγραμμένης του περιφερείας ὑφίστανται αἱ σχέσεις:

$$\frac{\alpha}{\text{ημ}A} = \frac{\beta}{\text{ημ}B} = \frac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma} = 2R \qquad (\text{Νόμος ἡμιτόνων})$$

'Απόδειξις



Σχ. 1



Σχ. 2

α) <u>Είς όξυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$</u> (Σχ.1). Παρατηροῦμεν είς τό όρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ ὅτι (ΒΓ) = (ΓΔ)ημΔ (1) άλλά Δ = Α, (ΓΔ) = 2R, (ΓΒ) = α, ἄρα ή (1) γίνεται α = 2RημΑ ή

$$\frac{\alpha}{ημΑ} = 2R$$ όμοίως ἔχομεν

$$\frac{\beta}{ημΒ} = 2R$$ καί

$$\frac{\gamma}{ημΓ} = 2R$$

Ἄρα $$\frac{\alpha}{ημ\,Α} = \frac{\beta}{ημΒ} = \frac{\gamma}{ημΓ} = 2R$$

β) <u>Είς άμβλυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$</u> (Σχ.2). Παρατηροῦμεν εί ς τό όρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ ὅτι (ΒΓ) = (ΔΓ)ημΔ (2) άλλά Δ = 180-Α, (ΒΓ) = α, (ΔΓ) = 2R ἄρα ή (2) γίνεται

α = 2RημΑ ή $$\frac{\alpha}{ημΑ} = 2R$$ όμοίως ἔχομεν

$$\frac{\beta}{ημΒ} = 2R$$ καί

$$\frac{\gamma}{ημΓ} = 2R$$

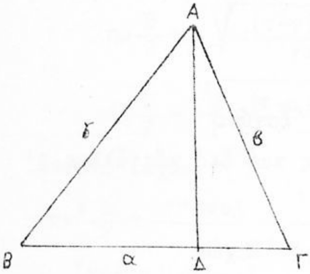
ἄρα $$\frac{\alpha}{ημΑ} = \frac{\beta}{ημΒ} = \frac{\gamma}{ημΓ} = 2R$$

<u>Θεώρημα 2ον</u>

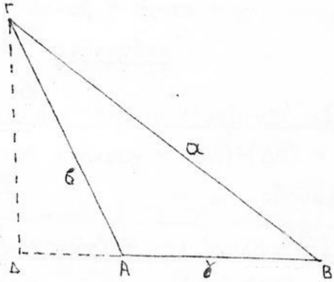
Είς πᾶν τρίγωνον μεταξύ τῶν πλευρῶν α,β,γ καί τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ ὑφίστανται αί σχέσεις. (Νόμος τῶν συνημιτόνων).

$$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma συνΑ$$
$$\beta^2 = \gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha συνΒ$$
$$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta συνΓ$$

Ἀπόδειξις



(Σχ. 3)



(Σχ.4)

α) Εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ (Σχ.3). Ἐκ τῆς γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\gamma(\Delta\Gamma)$, ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΔΓ ἔχομεν $(\Delta\Gamma) = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ἄρα ἡ προηγουμένη γίνεται

$$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma \quad \text{ὁμοίως ἔχομεν}$$
$$\beta^2 = \alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B \quad \text{καί}$$
$$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

β) Εἰς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}$ (Σχ.4). Ἐκ τῆς γεωμετρίας εἶναι γνωστὸν ὅτι $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\gamma(\mathrm{A}\Delta)$ ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Gamma}}$ ἔχομεν $(\mathrm{A}\Delta) = \beta\sigma\upsilon\nu(180-\mathrm{A}) = -\beta\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$ ἄρα ἡ προηγουμένη σχέσις γίνεται: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\mathrm{A}$
ὁμοίως ἔχομε
$$\beta^2 = \gamma^2+\alpha^2-2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B$$
$$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

Θεώρημα 3ον

Εἰς πᾶν τρίγωνον μεταξὺ τῶν πλευρῶν α,β,γ καὶ τῶν γωνιῶν Α,Β,Γ ὑφίστανται αἱ σχέσεις

$\alpha = \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B$

$\beta = \gamma\sigma\upsilon\nu A + \alpha\sigma\upsilon\nu\Gamma$

$\gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu A$

'Απόδειξις

α) Εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Σχ. 3) 'Ισχύει
$\alpha = (B\Delta)+(\Delta\Gamma) = \gamma\sigma\upsilon\nu B + \beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ὁμοίως καί διά τάς ἄλλας πλευράς.

β) Εἰς ἀμβλυγώνιον τρίγωνον $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ (Σχ. 4) 'Ισχύει
$\gamma = (\Delta B)-(\Delta A) = \alpha\sigma\upsilon\nu B - \beta\sigma\upsilon\nu(180-A) = \alpha\sigma\upsilon\nu B+\beta\sigma\upsilon\nu A$
ὁμοίως καί διά τάς ἄλλας πλευράς

'Υπολογισμός τοῦ ἐμβαδοῦ τυχόντος τριγώνου

α) Εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΝΓ (Σχ.3). 'Εκ τῆς γεωμετρίας γνωρίζομεν ὅτι $E = \frac{1}{2}\alpha(A\Delta)$ ἀλλά $(A\Delta) = \beta\eta\mu\Gamma$ ἄρα

$E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$ ὁμοίως

$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ καί

$E = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B$

'Αποδείξατε τούς ἀνωτέρω τύπους δι' ἀμβλυγώνιον τρίγωνον.

'Υπολογισμός τῶν τριγωνομετρικῶν ἀριθμῶν τῶν ἡμίσεων τῶν γωνιῶν τριγώνου συναρτήσει τῶν πλευρῶν του

'Ισχύει $\eta\mu^2\frac{A}{2} = \frac{1-\sigma\upsilon\nu A}{2} = \frac{1-\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{2} = \frac{2\beta\gamma-\beta^2-\gamma^2+\alpha^2}{4\beta\gamma} =$

$= \frac{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}{4\beta\gamma} = \frac{(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)}{4\beta\gamma} = \frac{2(\tau-\gamma)2(\tau-\beta)}{4\beta\gamma} = \frac{(\tau-\gamma)(\tau-\beta)}{\beta\gamma}$

"Αρα $\eta\mu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\beta\gamma}}$ ὁμοίως

$$\eta\mu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\gamma\alpha}} \quad \text{καί}$$

$$\eta\mu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\alpha\beta}}$$

'Επίσης ἰσχύει

$$\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu A}{2} = \frac{1+\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}}{2} = \frac{2\beta\gamma+\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4\beta\gamma} = \frac{(\beta+\gamma)^2-\alpha^2}{4\beta\gamma} =$$

$$= \frac{(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)}{4\beta\gamma} = \frac{2z\ 2(\tau-\alpha)}{4\beta\gamma} = \frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}$$

"Αρα $\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{\beta\gamma}}$ ὁμοίως

$$\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{\gamma\alpha}} \quad \text{καί}$$

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{\alpha\beta}}$$

ἐπειδή δέ $\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu \frac{A}{2}}{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}}$ καί $\sigma\varphi \frac{A}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}}{\eta\mu \frac{A}{2}}$ ἔχομεν

$$\varepsilon\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau(\tau-\alpha)}} \quad \sigma\varphi \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)}{(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau(\tau-\beta)}} \quad \text{καί} \quad \sigma\varphi \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)}{(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}}$$

$$\varepsilon\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau(\tau-\gamma)}} \quad \sigma\varphi \frac{\Gamma}{2} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}$$

Τύποι τοῦ WOLLWEIDE

Εἰς πᾶν τρίγωνον ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις

$$\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$$

Ἀπόδειξις

Θεωροῦμεν τὸν νόμον τῶν ἡμιτόνων

$\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ καὶ βάσει ἰδιοτήτων τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta-\gamma}{\eta\mu B-\eta\mu\Gamma}=\frac{\beta+\gamma}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}$$

Ἐὰν λάβωμεν πρῶτο καὶ τέταρτο κλάσμα ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\beta-\gamma}{2\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}\rightarrow\frac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\beta-\gamma}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται $\eta\mu\dfrac{B-\Gamma}{2}=\dfrac{\beta-\gamma}{\alpha}\,\sigma\upsilon\nu\dfrac{A}{2}$ (1)

Ὁμοίως ἐὰν λάβωμεν τὸ πρῶτο καὶ τελευταῖο κλάσμα ἔχομεν

$$\frac{\alpha}{2\eta\mu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}=\frac{\beta+\gamma}{2\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}\rightarrow\frac{\alpha}{\eta\mu\frac{A}{2}}=\frac{\beta+\gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

ἐκ τῆς ὁποίας συνάγεται:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}\,\eta\mu\frac{A}{2}\qquad(2)$$

Ἐὰν τὰς (1),(2) διαιρέσωμεν κατὰ μέλη ἔχομεν:

$$\varepsilon\varphi\frac{B-\Gamma}{2}=\frac{\beta-\gamma}{\beta+\gamma}\,\sigma\varphi\frac{A}{2}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εἰς πᾶν τρίγωνον νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις

α) $\alpha\eta\mu(B-\Gamma)+\beta\eta\mu(\Gamma-A)+\gamma\eta\mu(A-B) = 0$

β) $$\frac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}+\frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu\Gamma+\eta\mu A}+\frac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu A+\eta\mu B}=0$$

γ) $$\frac{\alpha^2\eta\mu(B-\Gamma)}{\eta\mu A}+\frac{\beta^2\eta\mu(\Gamma-A)}{\eta\mu B}+\frac{\gamma^2\eta\mu(A-B)}{\eta\mu\Gamma}=0$$

δ) $(\beta+\gamma)\sigma\upsilon\nu A+(\gamma+\alpha)\sigma\upsilon\nu B+(\alpha+\beta)\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha+\beta+\gamma$

ε) $$\frac{\alpha\eta\mu A+\beta\eta\mu B+\gamma\eta\mu\Gamma}{\alpha\sigma\upsilon\nu A+\beta\sigma\upsilon\nu B+\gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma}=R\,\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{\alpha\beta\gamma}$$

ζ) $\gamma^2 = (\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}$

2. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ἰσχύουν αἱ κάτωθι σχέσεις

α) $\alpha(\eta\mu B-\eta\mu\Gamma)+\beta(\eta\mu\Gamma-\eta\mu A)+\gamma(\eta\mu A-\eta\mu B) = 0$

β) $$\frac{1}{\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma-\gamma\sigma\upsilon\nu B}=\frac{\alpha}{\beta^2-\gamma^2}$$

γ) $$\frac{(\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma)(1+2\sigma\upsilon\nu A)}{1+\sigma\upsilon\nu A-2\sigma\upsilon\nu^2 A}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$$

3. Ἄν εἰς τρίγωνον ἰσχύῃ μία τῶν κάτωθι σχέσεων

α) $\eta\mu A = \dfrac{\eta\mu B+\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B+\sigma\upsilon\nu\Gamma}$, β) $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma-B)}{\eta\mu A+\eta\mu(\Gamma-B)}$

γ) $\eta\mu^2A+\eta\mu^2B+\eta\mu^2\Gamma = 2$, δ) $\eta\mu 4A+\eta\mu 4B+\eta\mu 4\Gamma = 0$

Τό τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον

4. Ἂν εἰς τρίγωνον ἰσχύη ἡ σχέσις $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 2\gamma^2(\alpha^2+\beta^2)$ δείξατε ὅτι $\Gamma = \frac{\pi}{4}$ ἢ $\Gamma = \frac{3\pi}{4}$.

5. Ἂν εἰς τρίγωνον ἰσχύουν αἱ σχέσεις $\frac{\beta^3+\gamma^3+\alpha^3}{\beta+\gamma+\alpha} = \alpha^2$ καί $\eta\mu B\eta\mu\Gamma = \frac{3}{4}$ δείξατε ὅτι $A=B=\Gamma$.

6. Εἰς πᾶν τρίγωνον δείξατε τάς κάτωθι σχέσεις

α) $U_\alpha = 2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma$

β) $E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

γ) $\delta_A = \frac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$

δ) $\delta_A^{\circ} = \frac{2\beta\gamma}{|\beta-\gamma|}\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{2R\eta\mu B\eta\mu\Gamma}{\left|\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}\right|}$

ε) $\tau = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

ζ) $\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

στ) $\tau-\alpha = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$

η) $\rho_\alpha = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

θ) Νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεις τοῦ ὀρθοκέντρου ἀπό τῆς πλευρᾶς καί κορυφᾶς τυχόντος τριγώνου συναρτή-σει τῆς R καί τῶν γωνιῶν.

ι) $4\mu_\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

7. Εἰς πᾶν τρίγωνον νά δειχθοῦν αἱ κάτωθι σχέσεις

α) $\eta\mu^2\frac{A}{2} + \eta\mu^2\frac{B}{2} + \eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 1 - \frac{\rho}{2R}$

β) $\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma = \alpha\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\,\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$

γ) $E = \dfrac{(\alpha^2-\beta^2)\eta\mu A\eta\mu B}{2\eta\mu(A-B)} = \dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{4\varepsilon\varphi\frac{A+B-\Gamma}{4}} = \dfrac{\alpha^2\eta\mu 2B+\beta^2\eta\mu 2A}{4}$

δ) $E = 2R^2\eta\mu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma$

ε) $E = \frac{2}{3}R^2\left[\eta\mu^3 A\sigma\upsilon\nu(B-\Gamma)+\eta\mu^3 B\sigma\upsilon\nu(\Gamma-A)+\eta\mu^3\Gamma\sigma\upsilon\nu(A-B)\right]$

ζ) $E = \dfrac{\mu_\alpha^2+\mu_\beta^2+\mu_\gamma^2}{3(\sigma\varphi A+\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma)} = \sqrt{\rho\rho_\alpha\rho_\beta\rho_\gamma}$

8. Ἐάν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $A = 45^\circ$ καί $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$ νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

9. Ἐάν εἰς τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $B = 135^\circ$ καί $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ νά ὑπολογισθοῦν αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ τριγώνου.

10. Εἰς πᾶν τρίγωνον νά δειχθοῦν αἱ σχέσεις

α) $\dfrac{\alpha\eta\mu(B-\Gamma)}{\beta^2-\gamma^2} = \dfrac{\beta\eta\mu(\Gamma-A)}{\gamma^2-\alpha^2} = \dfrac{\gamma\eta\mu(A-B)}{\alpha^2-\beta^2}$

β) $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-4E\sigma\varphi A$

γ) $2E(\sigma\varphi B-\sigma\varphi A) = \alpha^2-\beta^2$

11. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἰσχύῃ $\alpha\varepsilon\varphi A + \beta\varepsilon\varphi B = (\alpha+\beta)\varepsilon\varphi\frac{A+B}{2}$ τότε τό τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

12. Ἐάν εἰς τρίγωνον ἰσχύῃ $\varepsilon\varphi B = \dfrac{\sigma\upsilon\nu(\Gamma-B)}{\eta\mu A+\eta\mu(\Gamma-B)}$ τότε τό τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

13. Εἰς ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ἔστω φ ἡ γωνία τῆς δια-

μέσου ΒΔ μετά τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ νά δειχθῆ ὅτι

$$εφφ = \frac{εφB}{εφ^2B+2}$$