ΕΜΜ. Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ — ΕΜΜ. Σ. ΚΑΤΣΟΠΡΙΝΑΚΗ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ἐξισώσεις
- παραμετρικαί
- ἀριθμητικαί
  - ρηταὶ ἀλγεβρικαί
  - μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου
  - ἄρρητοι ἀλγεβρικαί
  - μὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀγνώστου
  - ὑπερβατικαί

Ἡ βασικὴ Θεωρία

530 Λελυμένα Θέματα

580 Προτεινόμεναι ἀσκήσεις

1973
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ • ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 • ΑΘΗΝΑΙ, 143

ΕΜΜ. Γ. ΜΑΡΑΓΚΑΚΗ – ΕΜΜ. Σ. ΚΑΤΣΟΠΡΙΝΑΚΗ

ΑΛΓΕΒΡΙΚΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ
ΚΑΙ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΤΩΝ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΧΟΛΩΝ

Ἐξισώσεις
- παραμετρικαί
- ἀριθμητικαί

- ῥηταὶ ἀλγεβρικαί
- μὲ ἀπολύτους τιμὰς τοῦ ἀγνώστου
- ἄρρητοι ἀλγεβρικαί
- μὲ ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀγνώστου
- ὑπερβατικαί

Ἡ βασικὴ Θεωρία

530 Λελυμένα Θέματα

580 Προτεινόμεναι ἀσκήσεις

1973
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟΝ Α. ΚΑΡΑΒΙΑ • ΑΚΑΔΗΜΙΑΣ 58 • ΑΘΗΝΑΙ, 143

ΑΦΙΕΡΟΥΤΑΙ ΕΙΣ ΤΟΥΣ ΓΟΝΕΙΣ ΜΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

"...ἐπιστήμην ἅμα καὶ τρόπον ἐπιστήμης"
Ἀριστοτέλης

Ἡ ἐργασία, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ, ἀναφέρεται εἰς τὴν ἑνότητα τῶν Ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων. Ἔγινε βασικῶς, διὰ νὰ βοηθήσῃ τοὺς μαθητὰς τοῦ Γυμνασίου καὶ τοὺς ὑποψηφίους τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν. Περιλαμβάνει τὴν βασικὴν θεωρίαν καὶ ἕνα σύνολον ἀσκήσεων. Σύμβολα, ὅροι καὶ ἔννοιαι ἔχουν διατυπωθῆ εἰς τὴν σύγχρονον Μαθηματικὴν γλῶσσαν. Ἡ ὕλη τῆς ἐξεταζομένης ἑνότητος εἶναι, κατὰ τὸ δυνατόν, αὐτοτελής. Πρὸς τοῦτο, εἰδικαὶ προτάσεις ἀπαραίτητοι διὰ τὴν ἀντιμετώπισιν διαφόρων θεμάτων, αἱ ὁποῖαι ὅμως ἀνήκουν εἰς ἄλλας ἑνότητας, ἀναφέρονται ὡς λήμματα ἢ "γνωστά" θεωρήματα. Εἶναι βασικὸν νὰ γίνουν κατανοητὰ τὰ ἑξῆς:

Α. Ἐπιλύομεν μίαν ἐξίσωσιν σημαίνει: ζητοῦμεν νὰ προσδιορίσωμεν τὰς τιμὰς τῶν ἀγνώστων στοιχείων, τὰ ὁποῖα περιέχει, εἰς τρόπον, ὥστε νὰ γίνῃ ἀριθμητικὴ ἰσότης, δηλαδὴ ζητοῦμεν τὰς ρίζας αὐτῆς εἰς τὸ πεδίον ὁρισμοῦ της.

Β. Τὸ σύμβολον "=" τῆς βασικῆς ἰσότητος δὲν ἔχει τὴν ἰδίαν σημασίαν· i) εἰς μίαν ἀριθμητικὴν ἰσότητα: $1970-4+3=1973-4$ (1) καὶ ii) εἰς μίαν ἐξίσωσιν: $x^2+2=-5+8x$ (2). Πράγματι: Εἶναι φανερὸν ὅτι κάθε τιμὴ τοῦ x δὲν καθιστᾷ τὴν τιμὴν τοῦ πρώτου μέλους τῆς (2) ἀριθμητικῶς ἴσην μὲ τὴν τιμὴν τοῦ δευτέρου μέλους της.

Δέν θά ἠδυνάμεθα νά γράφωμεν μέ ἀκρίβειαν τό σύμβολον "=„ μεταξύ τῶν δύο μελῶν παρά μέ τήν συνθήκην ὅτι ἡ τιμή τοῦ x ἐκλέγεται καταλλήλως. Ἔτσι τό "=„ δέν εἶναι μία αὐστηρά ἐπιβεβαίωσις ἰσοδυναμίας μεταξύ τῶν δύο μελῶν, ἀλλά μία διπλῆ ἐρώτησις, ἡ ὁποία τίθεται ὡς ἑξῆς: "Ὑπάρχει ἀριθμός (ἤ ἀριθμοί), τόν ὁποῖον προσωρινῶς ἄς ὀνομάσωμεν x, μέ $x \in \mathcal{D}$ (πεδίον ὁρισμοῦ) καί ὁ ὁποῖος, ἄν τοποθετηθῆ εἰς τήν ἰσότητα (2), νά τήν μετασχηματίζη εἰς ἀριθμητικήν ἰσότητα; Εἰς τήν περίπτωσιν κατά τήν ὁποίαν ἡ ἀπάντησις εἶναι καταφατική, ποῖος εἶναι αὐτός ὁ ἀριθμός;„ Συμβολικῶς:

$\exists;\ x \in \mathcal{D}: x^2+2=-5+8x$. (τό "=„ ἔχει χαρακτῆρα ἐρωτήσεως). Εἰς τήν ἁπλοποιημένην γραφήν τῆς ἐξισώσεως κατά σύμβασιν, ἡ κατάργησις τοῦ ἐρωτηματικοῦ ὑπαρξιακοῦ ποσοδείκτου ($\exists;$) εἶναι ἐπικίνδυνη, διότι δημιουργεῖ ἐσφαλμένας ἰδέας. Ἰδιαιτέρως τονίζομεν ὅτι, ὅταν δέν ὑπάρχη ὁ $\exists;$ νομίζομεν ὅτι πάντοτε ὑπάρχει μία λύσις εἰς μίαν ἐξίσωσιν, ἡ ὁποία εἶναι σκέψις ἐσφαλμένη.

Γ. Προκειμένου νά ἀναφέρωμεν τό σύνολον τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως, θά πρέπη νά γνωρίζωμεν τό σύνολον ἀναφορᾶς Ω, ἀπό τό ὁποῖον λαμβάνεται ὁ ἄγνωστος. Δηλαδή μία ἐξίσωσις $f(x)=0$ δύναται νά ὁδηγήση εἰς διαφορετικάς λύσεις ἀναλόγως τοῦ συνόλου, εἰς τό ὁποῖον περιέχεται ὁ ἄγνωστος.

Παράδειγμα: Θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν·

$(E): x\,(x+6)\,(x-\frac{3}{2})\,(x^2-2)\,(x^2+1)\,(x+\frac{8}{3})\,(x^2+x+1)=0$

i. Ἐὰν $x \in N$, ἕπεται ὅτι $A \equiv \varnothing$ (ἀδύνατος ἐν N)

ii. Ἐὰν $x \in N_0$, ἕπεται ὅτι $A = \{0\}$

iii. Ἐὰν $x \in Z^-$, ἕπεται ὅτι $A = \{-6\}$

iv. Ἐὰν $x \in \varphi_0^+$, ἕπεται ὅτι $A = \{0, \frac{3}{2}\}$

v. Ἐὰν $x \in \varphi$, ἕπεται ὅτι $A = \{0, -6, -\frac{8}{3}, \frac{3}{2}\}$

vi. Ἐὰν $x \in A\rho$, ἕπεται ὅτι $A = \{\pm\sqrt{2}\}$

vii. Ἐὰν $x \in R$, ἕπεται ὅτι $A = \{0, \frac{3}{2}, -6, -\frac{8}{3}, \pm\sqrt{2}\}$

viii. Ἐὰν $x \in I$, ἕπεται ὅτι $A = \{\pm i\}$

ix. Ἐὰν $x \in C-R$, ἕπεται ὅτι $A = \left\{\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \pm i\right\}$

x. Ἐὰν $x \in \mathcal{D} = \left\{0, -6, \frac{3}{2}, \frac{-8}{3}, \pm\sqrt{2}, \pm i, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}$, ἕπεται ὅτι $A \equiv \mathcal{D}$ (ταυτότης ἐν $\mathcal{D}$)

Δ. Κατὰ τὴν ἐξαγωγήν, διατύπωσιν καὶ σπουδὴν ἑνὸς μαθηματικοῦ νόμου, πρέπει ὁ σωστὸς μελετητὴς νὰ γνωρίζῃ σαφῶς εἰς ποῖον σύνολον ἀνήκουν τὰ στοιχεῖα, τὰ ὁποῖα περιέχει ὁ νόμος. Ἡ πρότασις π.χ. «ἐὰν $m = \frac{F}{\gamma}$, τότε $m\gamma = F$» δὲν εἶναι ἐν γένει ἀληθής, διότι: 1. Δὲν ὁρίζομεν τί εἶναι τὰ F, m, γ. 2. Ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι F, m, γ εἶναι ἀριθμοὶ καὶ πάλιν ἡ πρότασις εἶναι ψευδής, διότι δὲν ὁρίζομεν τί ἀριθμοὶ εἶναι οἱ m, γ, F. 3. Ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι m, γ, F εἶναι ἀκέραιοι καὶ πάλιν ἡ πρότασις εἶναι ψευδής, διότι δὲν ὑπάρχει πάντοτε ἀκέραιος m, διὰ τυχούσας ἀκεραίας τιμὰς γ, F. 4. Ἐὰν ὁρίσωμεν ὅτι m, γ, F εἶναι ῥητοί, καὶ πά-

λιν ἡ πρότασις εἶναι ψευδής, διότι δὲν ὑπάρχει ῥητὸς m, ἐὰν $\gamma = 0$.
Ἀλλ' ὅμως εἶναι ἀληθὴς ἡ πρότασις: "Ἐὰν m, γ, F εἶναι ῥητοί, τότε: α. Ἐὰν $m = \frac{F}{\gamma}$, τότε $\gamma \neq 0$ καὶ $m\gamma = F$, καὶ β. (ἀντιστρόφως) ἂν $\gamma \neq 0$ καὶ $m\gamma = F$, τότε $m = \frac{F}{\gamma}$". Ἡ πρότασις αὕτη, ἡ ὁποία εἶναι ὄχι μόνον ἀληθὴς ἀλλὰ καὶ πληρεστέρα τῆς ἀρχικῆς, διατυποῦται εἰς τὴν γλῶσσαν τῶν συνόλων διὰ τῆς ἑξῆς συντομωτάτης, σαφοῦς καὶ ἀκριβοῦς ἐκφράσεως:

$$\forall\, m, \gamma, F \in Q,\ m = \frac{F}{\gamma} \longleftrightarrow \gamma \neq 0 \ \wedge\ m\gamma = F.$$

Εἰς τὴν ἔκθεσιν τῆς ἑνότητος ἡ βασικὴ θεωρία ἔχει δοθῆ πλήρως. Παραθέτομεν ἐπίσης τὴν μορφολογίαν τῶν ἐξισώσεων μετὰ τοῦ τρόπου ἐπιλύσεως ἑκάστης μορφῆς. Τὰ παραδείγματα ἐξισώσεων ἔχουν λυθῆ ὑποδειγματικῶς καὶ συμπληρώνονται ὑπὸ διερευνήσεως ἐκεῖ, ὅπου αὕτη καθίσταται ἀναγκαία. Διὰ τῆς διερευνήσεως δὲν φανερώνεται μόνον ἡ δεξιότης τοῦ λύτου, ἀλλὰ εἶναι τὸ ἀπαραίτητον συμπλήρωμα πάσης λύσεως. Δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἰσχυριζώμεθα ὅτι γνωρίζομεν τὴν λύσιν ἑνὸς προβλήματος, ἂν δὲν γνωρίζωμεν ὑπὸ ποίας καὶ πόσας μορφὰς δύναται νὰ παρουσιασθῆ αὕτη. Διὰ τὰς ἀσκήσεις ἔχει ὑποδειχθῆ τρόπος λύσεως, παρέχονται ὅμως περιθώρια αὐτενεργείας. Αἱ λελυμέναι καὶ προτεινόμεναι ἀσκήσεις εἶναι προσεκτικὰ ἐπιλεγμέναι, αὐστηρῶς ἀντιπροσωπευτικαὶ καὶ ταξινομημέναι καθ' ὁμάδας.

Ἐπελέγη ἡ ἑνότης τῶν ἐξισώσεων, διότι ἀποτελεῖ θεμελιώδη περιοχὴν τῆς Ἀλγέβρας μὲ προεκτάσεις καὶ ἐφαρμογὰς εἰς ὅλους τοὺς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Φυσικῆς. Εἰς τὸ Γυμνάσιον ὁ μαθητής, οὐσιαστικῶς, ἔρχεται εἰς πρώτην ἐπαφὴν μὲ τὴν Ἄλγεβραν διὰ τῆς ἑνότητος αὐτῆς, ὁλοκληρώνει ὅμως αὐτὴν τμηματικῶς εἰς ὅλας τὰς τάξεις. Διὰ τῆς παρούσης ἐργασίας παρέχεται ἡ δυνατότης τῆς "συνολικῆς" ἀντιμετωπίσεως τοῦ Θέματος, προσέτι δὲ ἡ δυνατότης νὰ εὕρῃ τρόπους ὀργανώσεως τῆς σκέψεώς του, ὁλοκληρώσεως τῶν γνώσεών του, ἐπὶ πλέον δὲ παρέχεται μέθοδος ἐργασίας καὶ ἐρεύνης (καὶ ὄχι συνταγαὶ βασιζόμεναι εἰς τὰ ἐξωτερικὰ καὶ τυπικὰ χαρακτηριστικὰ τῶν καθ' ἕκαστα προβλημάτων), διὰ νὰ ἠμπορέσῃ πλέον μόνος του νὰ ἀντιμετωπίσῃ εὐχερῶς τὰ προβλήματα. Πρὸς τὸν Ὑποψήφιον τῶν Ἀνωτάτων Σχολῶν ἡ παροῦσα ἑνότης προσφέρεται, ὁποιαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ Σχολὴ τῆς προτιμήσεώς του.

Διετυπώθη εἰς τὴν σύγχρονον Μαθηματικὴν γλῶσσαν, διότι δι' αὐτῆς ἐξασφαλίζομεν τὴν αὐστηρῶς ἀπαραίτητον εἰς τὰ Μαθηματικὰ σαφήνειαν καὶ ἀκρίβειαν, τὴν περιεκτικότητα καὶ τὴν δομικὴν συνέπειαν.

Προτάσεις πυκνοῦ νοήματος εἶναι ἀδύνατον νὰ μὴ ὑπάρχουν. Τὸ πλῆθος αὐτῶν εἶναι βέβαια διαφορετικὸν δι' ἕκαστον μελετητήν. Δι' ἐκείνους ἐκ τῶν μελετητῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀποκρυσταλλώσει παλαιοτέρας διαφορετικὰς ἀντιλήψεις, μερικαὶ προτάσεις εἶναι ἴσως δυσνόητοι. Δι' ἐκεῖνον ὅμως, ὁ ὁποῖος ἔρχεται ἀπ' εὐθείας εἰς ἐπαφὴν μὲ τὰς ὀρθὰς νέας ἐννοίας, εἶναι ἁπλαῖ, διότι οὗτος δὲν ὑποβάλλεται εἰς τὴν προσπάθειαν ἀποβολῆς παλαιῶν ἰδεῶν, διὰ νὰ δεχθῇ νέας. Εἶναι δὲ γνωστὴ διὰ τὴν μάθησιν ἡ ψυχολογικὴ διαπίστωσις ὅτι: "ἡ δυσκολία εἰς τὴν μάθησιν δὲν ἔγκειται τόσον εἰς τὸ πῶς θὰ ἀφομοιώσωμεν νέας ἐννοίας καὶ πῶς θὰ δεχθῶμεν νέας ἰδέας, ἀλλὰ εἰς τὸ πῶς θὰ ἀποβάλωμεν τὰς παλαιὰς ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν πρόσκομμα διὰ τὰς νέας".

Βεβαίως ὑπάρχουν καὶ "πραγματικὰ" δυσνόητοι προτάσεις. Παρουσιάζονται κυρίως εἰς τὰς παραγράφους ἐκείνας, τὸ περιεχόμενον τῶν ὁποίων δίδεται περιληπτικῶς ἢ ὁρίζεται ὑπὸ ἐννοιῶν αἱ ὁποῖαι ἀνήκουν εἰς ἄλλας ἑνότητας. Τὰ δυσνόητα αὐτὰ μέρη δύνανται νὰ παραλειφθοῦν εἰς πρώτην ἀνάγνωσιν ἢ νὰ ἀναβληθῇ ἡ μελέτη των, χωρὶς νὰ διασπασθῇ ἡ συνέχεια τῆς ὕλης, καὶ νὰ ἐπανέλθῃ ὁ ἀναγνώστης, ἀφοῦ πρῶτον πληροφορηθῇ διὰ τὸ ἀκριβὲς νόημα ἑκάστου ἀναφερομένου εἰς αὐτὰ ὅρου. Περιληπτικῶς ἔχομεν ἀναφέρει κεφάλαια, τὰ ὁποῖα θεωροῦνται γνωστά, παραπέμπομεν δὲ εἰς τὰς ἀντιστοίχους παραγράφους τῶν σχολικῶν βιβλίων. Βεβαίως τὰ σχετικὰ παραδείγματα καὶ αἱ ἀσκήσεις διευκρινοῦν τὰς παραγράφους αὐτάς.

Ἡ ἐπίλυσις ἀρκετῶν ἀσκήσεων ἴσως εἶναι δυσχερής. Ἐκ τῆς πείρας ὅμως προκύπτει ὅτι: ὅταν ὁ ὑποψήφιος χρειάζεται x θέματα διὰ τὰς ἐξετάσεις του, καλύτερα νὰ τοῦ διδάσκῃς πολλαπλάσια τῶν x θεμάτων. Χάριν τῆς αὐτενεργείας τῶν ἀναγνωστῶν εἰς τὰς ἀποδείξεις καὶ ἐπιλύσεις πολλὰ ἀφήνονται εἰς τὴν σκέψιν των, ἰδίως ἐκεῖ ὅπου ὀφείλουν καὶ ἠμποροῦν νὰ συναγάγουν ταῦτα λογικῶς.

Νομίζομεν ὅτι ὁ ἀναγνώστης, πρὶν ἢ μελετήση λεπτομερειακὰ τὴν παροῦσαν ἐργασίαν (ὅπως καὶ κάθε Μαθηματικὴν ἐργασίαν), θὰ πρέπη νὰ πραγματοποιήση μίαν τρόπον τινὰ "ἀναγνώρισιν τοῦ ἐδάφους". Ἐν συνεχείᾳ θὰ πρέπη νὰ ἐπανέλθη εἰς τὰς βασικὰς ἐννοίας καὶ ὁρισμούς, διὰ νὰ γίνη κάτοχος αὐτῶν. Ἡ κατανόησις τῶν ἐννοιῶν αὐτῶν καθιστᾶ τὸ σχετικὸν θέμα περισσότερον ἀφομοιώσιμον καὶ συνεπάγεται ὄχι μόνον τὴν κατανόησιν τῶν γενικῶν ἀρχῶν, ἀλλὰ καὶ τὴν δημιουργίαν μιᾶς ὡρισμένης στάσεως ἀπέναντι εἰς τὴν μάθησιν καὶ τὴν γνῶσιν, ἡ ὁποία παραδέχεται τὴν εἰκασίαν καὶ τὴν διαίσθησιν, τὴν δυνατότητα νὰ προχωρήση ἀβοήθητος μὲ αὐτοπεποίθησιν, ἀφοῦ παραδεχθῆ ὅτι ὑπάρχουν δύο εἴδη αὐτοπεποιθήσεως: τὸ πρῶτον ἐνυπάρχει εἰς τὴν προσωπικότητα, τὸ δεύτερον εἶναι ἀποτέλεσμα γνώσεως.

Ἡ γνῶσις τῆς Θεωρίας κατὰ βάθος καὶ πλάτος ἀποτελεῖ ἀπαραίτητον προϋπόθεσιν διὰ τὴν ἐπίλυσιν τῶν προβλημάτων, διότι δι' αὐτῆς καὶ διὰ λογικῶν συλλογισμῶν προκύπτει ἡ λύσις. Θὰ ἐπακολουθήση ἡ χρησιμοποίησις τῆς Θεωρίας εἰς σχετικὰ προβλήματα καί, ἐν συνδυασμῷ μὲ παρεμφερῆ θέματα, θὰ ἠμπορέση ὁ μελετητὴς νὰ ἀποκτήση ἐκείνας τὰς λεπτὰς γνώσεις, μὲ τὴν βοήθειαν τῶν ὁποίων θὰ εἶναι εἰς θέσιν νὰ ἀντιμετωπίση ὅλα τὰ σχετικὰ προβλήματα.

Εἶναι ἀπαραίτητον ὁ μελετητὴς νὰ ἀσχοληθῆ μέ, ὅσον τὸ δυνατόν, περισσότερα παραδείγματα καὶ ἀσκήσεις διὰ νὰ ἀποκτήση τὴν κατάλλητον στάσιν ἀπέναντι εἰς τὴν μάθησιν εἰς σύντομον χρονικὸν διάστημα, ἔστω καὶ ἐὰν τοῦτο δὲν εἶναι καρπὸς ἀπολύτως προσωπικῆς τοῦ προσπαθείας.

Διὰ νὰ μὴ καταστῇ ὅμως ἡ μελέτη τῶν παραδειγμάτων καὶ ἀσκήσεων κουραστικὴ καὶ μονότονος, τὰ ἐπιλυόμενα παραδείγματα καὶ αἱ ἀσκήσεις καλύπτουν ἐν ὅλῳ ἢ ἐν μέρει καὶ ἄλλα κεφάλαια τῆς Ἀλγέβρας (π.χ. Ἀλγεβρικαὶ πράξεις, ἀλγεβρικαὶ ταυτότητες, παραγοντοποίησις ἀλγεβρικῶν παραστάσεων, ρητὰ ἀλγεβρικὰ κλάσματα, δυνάμεις καὶ ρίζαι πραγματικῶν ἀριθμῶν ἢ παραστάσεων, ἀπόλυτος τιμὴ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ἢ παραστάσεως, συστήματα ἐξισώσεων ἢ ἐξισώσεων-ἀνισώσεων κ.ἄ.). Προσέτι, περιλαμβάνονται καὶ διερευνῶνται (ἀλγεβρικῶς καὶ ὄχι ὡς ~~πρὸς τὴν φυσι~~κὴν σημασίαν τῶν συμβόλων των) ὡς πρὸς τὰ διάφορα γράμματα, τὰ ὁποῖα περιέχουν, ὡρισμένοι τύποι τῆς Φυσικῆς. Οὕτω ἡ μελέτη καθίσταται περισσότερον ἄνετος καί, προφανῶς, περισσότερον ἀποδοτική.

Μὲ τὴν ἐλπίδα ὅτι ἡ ἐργασία μας αὐτή, γραμμένη, φυσικά, εἰς τὰ μέτρα τῶν ἰδικῶν μας δυνάμεων, μὲ ζωηρὸν ὅμως καὶ ἔντονον πάντοτε τὸ αἴσθημα εὐθύνης, θὰ συμβάλῃ εἰς τὴν πραγματοποίησιν τοῦ ἀνωτέρω σκοποῦ, δηλαδή, νὰ προσφέρῃ συστηματικῶς τὴν "ἀπαραίτητον" θεωρίαν τῶν ἐξισώσεων καὶ ταυτοχρόνως, διὰ τοῦ πλήθους τῶν λελυμένων παραδειγμάτων καὶ ἀσκήσεων, νὰ καλλιεργήσῃ τὴν κριτικὴν ἱκανότητα, τὴν παραδίδομεν εἰς τὴν κρίσιν τῶν μελετητῶν μὲ ἀγάπην.

Σχόλια ἐκ μέρους τῶν ἀναγνωστῶν-μελετητῶν θὰ εἶναι πάντοτε εὐπρόσδεκτα. Μὲ ἰδιαιτέραν, ἐν τούτοις, εὐγνωμοσύνην θὰ δεχθῶμεν τὰς παρατηρήσεις τῶν συναδέλφων μας.

Ἀπρίλιος, 1973

Ε. Γ. Μαραγκάκης

Ε. Σ. Κατσοπρινάκης

"Οἱ βασικές ἰδέες πού ἀποτελοῦν τόν πυρῆνα τῶν θετικῶν ἐπιστημῶν καί τά βασικά στοιχεῖα πού διαμορφώνουν τή ζωή καί τή λογοτεχνία εἶναι τόσο ἁπλᾶ, ὅσο εἶναι παντοδύναμα. Γιά τή γνώση καί τήν ἀποδοτική τους χρήση χρειάζεται μιά διαρκής ἐμβάθυνση πού κατορθώνεται μέ τή συνεχῆ τους χρησιμοποίηση σέ διαρκῶς περιπλοκώτερες μορφές".

Τζερόμ Σ. Μπροῦνερ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΣΥΜΒΟΛΑ

1. $\forall$: "Διά κάθε„ ἤ "δι' ὅλα„ - Καθολικός ποσοδείκτης

2. $\exists$: "Ὑπάρχει τουλάχιστον ἕν ...„ ἤ "διά μερικά„ - Ὑπαρξιακός ποσοδείκτης. ($\nexists$: "δέν ὑπάρχει...„)

3. $\wedge$: "καί„ - σύμβολον τοῦ συνδέσμου τῆς "συζεύξεως„

4. $\vee$: "εἴτε„ - σύμβολον τοῦ συνδέσμου τῆς "ἐγκλειστικῆς διαζεύξεως„

5. $\veebar$: "ἤ„ - συμβολον τοῦ συνδέσμου τῆς "ἀποκλειστικῆς διαζεύξεως„

6. $\longrightarrow$: "συνεπάγεται„ ἤ "ἕπεται„ - σύμβολον τοῦ συνδέσμου τῆς "συνεπαγωγῆς„

7. $\Longleftrightarrow$: "ἰσοδύναμος πρός„ ἤ "ἕπεται καί ἀντιστρόφως„ ἤ "ἐάν καί μόνον ἐάν„ ἤ "τότε καί μόνον τότε„ - σύμβολον τοῦ συνδέσμου τῆς "ἰσοδυναμίας„

8. $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$: "τότε καί μόνον τότε ἐξ ὁρισμοῦ„ ἤ "ἐάν καί μόνον ἐάν ἐξ ὁρισμοῦ„

9. $\in$ ἤ $\ni$: (ἀντιστοίχως: $\notin$ ἤ $\not\ni$) "ἀνήκει εἰς ...„ (ἀντιστ. - "δέν ἀνήκει εἰς ...„)

10. $\{\cdots\}$: "Τό σύνολον τοῦ ὁποίου μέλη εἶναι τά ἀντικείμενα ...„

11. $=$: (ἀντιστοίχ. $\neq$) "... εἶναι ἴσον πρός ...„ (ἀντιστοίχ: "... εἶναι διάφορον τοῦ ...„

12. $\equiv$ ἤ $\overset{\text{ὁρσ.}}{=}$ ἤ $\underset{\text{ὁρσ.}}{=}$: "... Εἶναι ἴσον ἐκ ταυτότητος πρός ...„ ἤ "ταυτίζεται„ ἤ "ἴσον ἐξ ὁρισμοῦ„

13. $\subseteq$ (ἀντιστ. $\subset$): "... εἶναι ὑποσύνολον τοῦ ...„
(ἀντιστ. "... εἶναι γνήσιον ὑποσύνολον τοῦ ...„).

14. $\{x / \dots\}$ ἤ $\{x : \dots\}$ | "Τό σύνολον ὅλων τῶν x ὅπου (ἤ τοιούτων ὥστε)...„

15. $\longrightarrow$: "... ἀντιστοιχεῖ τό ...„ ἤ "... ἀπεικονίζεται εἰς τό ...„

16. $\cup$ (ἀντιστ. $\cap$): "ἕνωσις„ (ἀντιστ. "τομή„)

17. E: ἤ (E) ἤ Ei: "Ἐξίσωσις„

18. Ω: "σύνολον ἀναφορᾶς ἐξισώσεως„

19. $\mathcal{D}$: "πεδίον ὁρισμοῦ ἐξισώσεως„

20. A: "σύνολον λύσεων ἐξισώσεως„

21. Δ: "διακρίνουσα δευτεροβαθμίου ἐξισώσεως (ἤ τριωνύμου)

22. $|\ |$: "σύμβολον ἀπολύτου τιμῆς (πραγματικοῦ ἀριθμοῦ)„

23. $[\ ]$ ἤ $A_K(x)$ ἤ $E_K(x)$: "σύμβολον ἀκεραίου μέρους πραγματικοῦ ἀριθμοῦ„

24. / (ἀντιστ. $\not/$): "... διαιρεῖ τό (ἤ τόν)...(ἀντ. "... δέν διαιρεῖ τό ...„).

25. Μ.Κ.Δ. ἤ (...): Μέγιστος κοινός διαιρέτης τῶν ἀριθμῶν ...

26. Ε.Κ.Π. ἤ (...): Ἐλάχιστον κοινόν πολλαπλάσιον τῶν ἀριθμῶν ...

27. Σ: σύμβολον ἀθροίσματος $\left(\sum_{k=1}^{\nu} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_\nu\right)$

2. ΤΑ ΚΥΡΙΩΤΕΡΑ ΑΡΙΘΜΟΣΥΝΟΛΑ — ΟΡΙΣΜΟΙ

1. Τό σύνολον τῶν φυσικῶν· $N \equiv \{1, 2, 3, \cdots, \nu, \nu+1, \cdots\}$

2. Τό σύνολον τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν· $Z \equiv \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\} = \{x / x \in N \vee x = 0 \vee -x \in N\}$.

3. Τό σύνολον τῶν ρητῶν (συμμέτρων) ἀριθμῶν·
$Q \equiv \{x / x$ ἀνάγωγον κλάσμα$\}$ ἤ $Q \equiv \{\frac{\mu}{\nu} / \mu \in Z, \nu \in Z - \{0\}, (\mu, \nu) = 1\}$ ἤ $Q \equiv \{x / x$ δεκαδικός περιοδικός ἀριθμός$\}$.

4. Τό σύνολον τῶν ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν·
$A \equiv \{x / x$ ἀπειροψήφιος μή περιοδικός δεκαδικός ἀριθμός$\}$.

5. Τό σύνολον τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R.

Τά ἀνωτέρω σύνολα εἶναι ἐφωδιασμένα μέ τήν σχέσιν (ὁλικῆς) διατάξεως "... εἶναι μικρότερος ἤ ἴσος τοῦ ..." (συμβολικῶς "$\leq$"), ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τά ἀξιώματα γραμμικῆς διατάξεως τοῦ συνόλου τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἔχομεν τότε ὅτι, οἱ φυσικοί ἀριθμοί εἶναι θετικοί καί ἐάν Σ εἶναι ἕνα ἐκ τῶν ἄλλων συνόλων (ἐκτός τοῦ N) δυνάμεθα νά συμβολίζωμεν μέ:

Σ^+: τό ὑποσύνολον τῶν θετικῶν του στοιχείων π.χ. $Z^+ \equiv N$.

Σ^-: τό ὑποσύνολον τῶν ἀρνητικῶν του στοιχείων π.χ. $Z^- =$

$= \{x \in Z : -x \in N\}$.

Σ_o^+: τό ὑποσύνολον τῶν μή ἀρνητικῶν του στοιχείων

π.χ. $Z_o^+ = \{o\} \cup N \equiv N_o$

Σ_o^-: τό ὑποσύνολον τῶν μή θετικῶν του στοιχείων

π.χ. $Z_o^- = \{o, -1, -2, -3, \dots\} = \{o\} \cup Z^-$.

Δεχόμεθα δέ ὅτι ἰσχύουν:

(i) $\forall a \in \Sigma \Longrightarrow a \in \Sigma^+ \vee a = o \vee -a \in \Sigma^+ (\Longleftrightarrow a \in \Sigma^-)$.

(ii) $\forall a \in \Sigma^+,\ \forall b \in \Sigma^+ \Longrightarrow (a+b) \in \Sigma^+ \wedge (ab) \in \Sigma^+$.

Τότε εἶναι: $a > b \overset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} (a-b) \in \Sigma^+ \wedge a \geq b \overset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow}$

$a > b \veebar a = b$ (Δυϊκῶς ὁρίζεται τό $a < b \wedge a \leq b$).

Προφανῶς ἀληθεύουν τώρα καί αἱ κάτωθι σχέσεις:

"$\Sigma = \Sigma^- \cup \{o\} \cup \Sigma^+$", "$\forall a \in \Sigma^+ \Longleftrightarrow a > o$", "$\forall a \in \Sigma^-$

$\Longleftrightarrow a < o$", "$\forall a \in \Sigma_o^+ \Longleftrightarrow a \geq o$" καί "$\forall a \in \Sigma_o^- \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a \leq o$". Εἶναι γνωστόν ἐξ ἄλλου ὅτι:

$$N \subset N_o \subset Z \subset Q \subset R,\ A \subset R,$$

$A \cap Q = \phi$ καί $A \cup Q = R$.

Ὑπενθυμίζομεν ἀκόμη τούς παρακάτω ὁρισμούς.

Ἐάν A καί B εἶναι δύο σύνολα ἀντικειμένων

τότε:

"$A \subseteq B \underset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A \Longrightarrow a \in B \ (\overset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} B \supseteq A)$",

"$A = B \underset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} (\forall x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (\forall y \in B \Longrightarrow y \in A)$",

"$A \subset B \underset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B \wedge A \neq B \ (\underset{\text{όρσ.}}{\Longleftrightarrow} B \supset A)$",

"$A \cup B = \{x \in R: x \in A \vee x \in B\}$, $A \cap B = \{x \in R: x \in A \wedge x \in B\}$, ὅπου $A \subseteqq R$ καί $B \subseteqq R$.

"$\forall\ a \in R,\ \forall\ \nu \in N,\ \nu \geqslant 2 \Longrightarrow a^{\nu+1} = a^{\nu} \cdot a,\ a^{1} = a,$

$a^{0} = 1$ ἐάν $a \neq 0$ καί $a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^{\nu}}$ ἐάν $a \neq 0$"

"$\forall\ a \in R \Longrightarrow |a| = a$ ἐάν $a \geqslant 0 \wedge |a| = -a$ ἐάν $a < 0$"

ἤ "$|a| = \sqrt{a^2}$", (ἤ $|a| = \sqrt[2\nu]{a^{2\nu}}$).

"$\forall\ x \in R\ \exists$ εἷς καί μόνον εἷς $a \in Z: a \leq x < a+1$.

Τότε ὁ a καλεῖται ἀκέραιον μέρος τοῦ x ἤτοι

$$a = [x]"$$

Τέλος ὁρίζομεν τά διαστήματα τῆς εὐθείας τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν R:

$(a, b) \equiv \{x \in R: a < x < b\}$: Ανοικτόν διάστημα μέ ἄκρα $a, \beta \in R$ $(a < \beta)$.

$[a, b) \equiv \{x \in R: a \leq x < b\}$ κλειστόν ἀριστερά, ἀνοικτόν δεξιά διάστημα μέ ἄκρα a καί β.

$(a, \beta] = \{x \in R: a < x \leq \beta\}$: Ανοικτόν ἀριστερά, κλειστόν δεξιά διάστημα μέ ἄκρα a καί β.

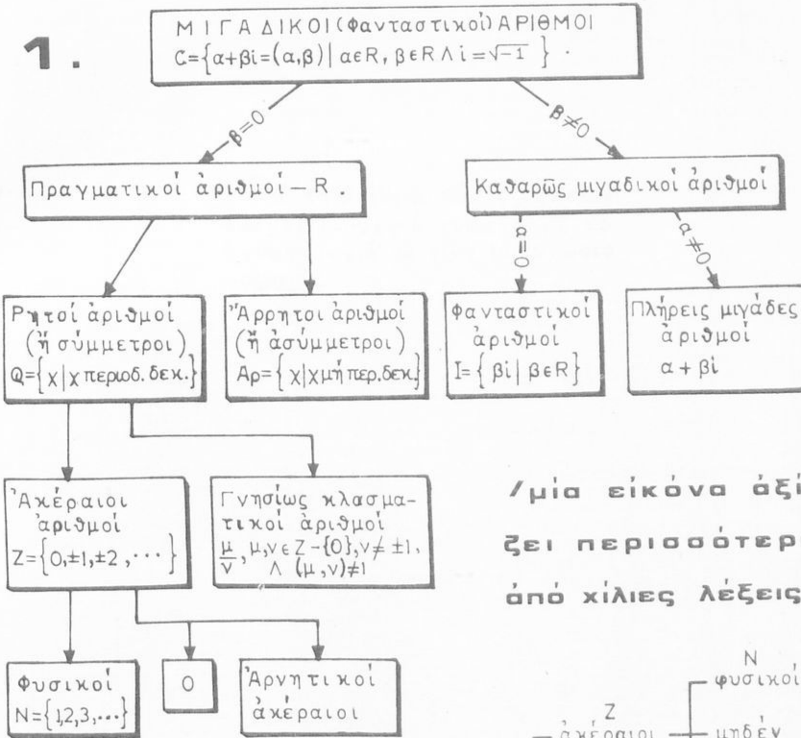
$[a, b] \equiv \{x \in R: a \leq x \leq b\}$. κλειστόν διάστημα μέ ἄκρα a καί β.

$(-\infty, a) \equiv \{x \in R: x < a\}$. $(-\infty, a] \equiv \{x \in R: x \leq a\}$.

$(a, +\infty) \equiv \{x \in R: a < x\}$. $[a, +\infty) \equiv \{x \in R: a \leq x\}$.

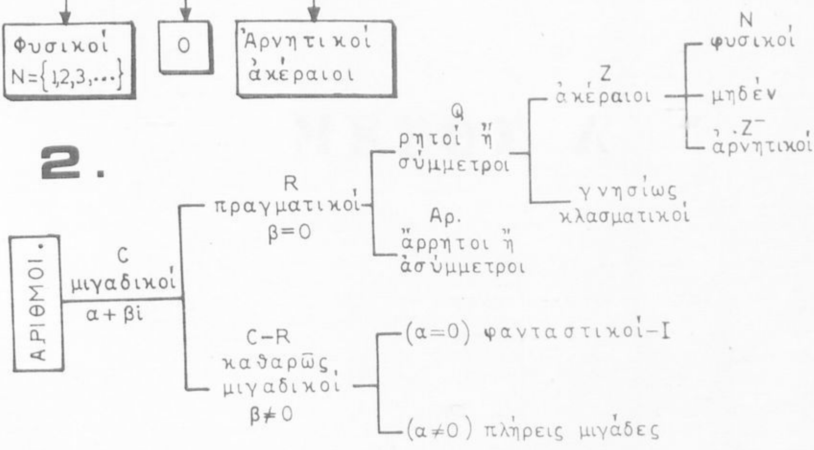
$$(-\infty, +\infty) \equiv R.$$

1.



/μία εἰκόνα ἀξίζει περισσότερο ἀπό χίλιες λέξεις/

2.



"Μέ τή βοήθεια τῶν ἐξισώσεων συσχετίζουμε, τό γνωστό μέ τό ἄγνωστο, γιά νά γίνη τό ἄγνωστο γνωστό".

ΜΕΡΟΣ Α

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ — ΟΡΙΣΜΟΙ.

Ἔστωσαν αἱ παραστάσεις $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ (ἐκφράσεις τῶν τιμῶν τῶν πραγματικῶν συναρτήσεων $B_1 \ni x \longrightarrow \varphi(x)$, $B_2 \ni x \longrightarrow \sigma(x)$).

Ο1 Καλεῖται ἐ ξ ί σ ω σ ι ς ὡς πρός x, μέ μέλη τάς $\varphi(x)$, $\sigma(x)$, ὁ προτασιακός τύπος (ἀνοικτή πρότασις): $\varphi(x) = \sigma(x)$ (I)

Τά $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ λέγονται: πρῶτον ἤ ἀριστερόν, ἀντιστοίχως δεύτερον ἤ δεξιόν μέλος, τῆς (I), τό δέ σύνολον ἀναφορᾶς Ω τοῦ προτασιακοῦ τύπου (I), καλεῖται καί σύνολον ἀναφορᾶς τῆς ἐξισώσεως.

Ο2 Τό σύνολον $\mathcal{D} \equiv B_1 \cap B_2$ καλεῖται π ε δ ί ο ν ὁ ρ ι σ μ ο ῦ τῆς ἐξισώσεως (I).

Ο3 Ρίζα ἤ λ ύ σ ι ς τῆς (I) ἐν Ω καλεῖται κάθε $\xi \in (\mathcal{D} \cap \Omega)$: $\varphi(\xi) = \sigma(\xi)$.
Τό σύνολον τῶν ριζῶν μιᾶς ἐξισώσεως καλεῖται σ ύ ν ο λ ο ν λ ύ σ ε ω ν αὐτῆς καί παρίσταται διά τοῦ Α.

Ο4 Ἡ ἐξίσωσις (I) καλεῖται ἀ λ γ ε β ρ ι κ ή $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ δύναται νά τεθῇ (Βλέπε § 4, Π2) ὑπό τήν μορφήν $f(x) = 0$ ὅπου $f(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ x.
Κάθε μή ἀλγεβρική ἐξίσωσις καλεῖται ὑ π ε ρ β α τ ι κ ή.

Ο5 Ἡ (I) καλεῖται ἀκεραία ἤ π ο λ υ ω ν υ μ ι κ ή $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\sigma(x)$ καί $\varphi(x)$ ἀκέραια πολυώνυμα.

Ἡ (I) καλεῖται ρ η τ ή ἤ κ λ α σ μ α τ ι κ ή $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\varphi(x)$ καί $\sigma(x)$ εἶναι ρητές παραστάσεις ὡς πρός x.
(Δηλαδή ἀνάγονται σέ ρητά ἀλγεβρικά κλάσματα).
Ἡ (I) καλεῖται ἄ ρ ρ η τ ο ς $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἕνας τοὐλάχιστον ὅρος τῶν $\varphi(x)$ καί $\sigma(x)$ εἶναι ἄρρητος ὡς πρός x.
Ἡ (I) καλεῖται ἐ ξ ί σ ω σ ι ς μέ ἀπόλυτα $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ εἰς ἕν τοὐλάχιστον μέλος αὐτῆς ὑπεισέρχεται ἡ ἀπόλυτος τιμή τοῦ ἀγνώστου ἤ παραστάσεως αὐτοῦ.

Ο6 Ἔστω ἡ ἀκεραία ἐξίσωσις (I): $\varphi(x) = \sigma(x) \Longleftrightarrow \varphi(x) - \sigma(x) = 0$

Καλεῖται βαθμός τῆς (I) ὁ βαθμός τοῦ πολυωνύμου: $f(x) = \varphi(x) - \sigma(x)$.
Ἡ μορφή $f(x) = 0$ καλεῖται τελική ἤ συνεπτυγμένη ἤ ἀνηγμένη μορφή τῆς ἐξισώσεως.
Τότε καί μόνον τότε κάθε ρίζα τῆς (I) καλεῖται καί ρίζα τῆς πραγματικῆς συναρτήσεως $y = f(x)$.

Ο7 Μία ρίζα ρ τῆς ἐξισώσεως (I) καλεῖται πολλαπλή τάξεως κ ἤ βαθμοῦ πολλαπλότητος κ $(\kappa \in N)$ $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν: $(x-\rho)^{\kappa} / f(x)$ καί $(x-\rho)^{\kappa+1} \not/\ f(x)$, ἤ ἐάν $f(x) = (x-a)^{\kappa}\, \eta(x)$ καί $\eta(\rho) \neq 0$ ὅπου $f(x) = \varphi(x) - \sigma(x)$.

Ο8 Καλεῖται ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως ἡ εὕρεσις τοῦ συνόλου λύσεων αὐτῆς καί τοῦ βαθμοῦ πολλαπλότητος ἑκάστης τούτων.

Ο9 Ἡ (I) καλεῖται ἀριθμητική ἐξίσωσις $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν δέν ἐμφανίζωνται εἰς τά μέλη αὐτῆς ἄλλα γράμματα ἐκτός τοῦ γράμματος τοῦ ἀγνώστου x.

Ο10 Ἡ (I) καλεῖται παραμετρική $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν, ἐκτός τοῦ ἀγνώστου x ἐμφανίζεται εἰς αὐτήν τοὐλάχιστον εἷς γενικός ἀριθμός λ (ὡρισμένος ἀλλά οἱοσδήποτε) καλούμενος παράμετρος.

Ο11 Ἡ (I) καλεῖται: (i) Ἐπιλύσιμος ἐν Ω $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν $A \neq \emptyset$ καί $A \neq \Omega$.

(ii) Μή ἐπιλύσιμος ἤ ἀδύνατος ἐν Ω $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν $A \equiv \emptyset$

(iii) Ἀόριστος ἤ ταυτότης ἐν Ω, $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν $A \equiv \Omega$.

Ο12 Δύο ἐξισώσεις τῆς μορφῆς (I) καλοῦνται ἰσοδύναμοι ἐπί τοῦ συνόλου τῆς τομῆς τῶν πεδίων ὁρισμοῦ των $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν:
i) Τά σύνολα τῶν λύσεων αὐτῶν ταυτίζωνται:
ἤ ii) Κάθε λύσις τῆς μιᾶς εἶναι λύσις καί τῆς ἄλλης καί μέ τόν αὐτόν βαθμόν πολλαπλότητος.

Ο13 Διερεύνησις παραμετρικῆς ἐξισώσεως καλεῖται ἡ ἐκ τῶν προτέρων εὕρεσις τῶν συνθηκῶν (περιορισμῶν) αἱ ὁποῖαι πρέπει νά πληροῦνται διά νά εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἐπιλύσιμος, ἀδύνατος ἤ ἀόριστος.

Ο14 Ἡ (I) καλεῖται πρωτοβάθμιος ἤ πρώτου βαθμοῦ ἤ γραμμική ἤ ὁμοπαραλληλική ἐξίσωσις μέ ἕνα ἄγνωστον $\underset{\text{ὁρσ.}}{\Longleftrightarrow}$ ἐάν εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἐξίσωσιν: $ax + \beta = 0 \mid a, \beta \in R$.

2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ διά τῶν ὁποίων ἐκ μιᾶς ἐξισώσεως μεταβαίνομεν εἰς ἄλλην ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν.

ΟΜΑΣ Ι ΕΠΙΤΡΕΠΤΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

θ1. Ἐάν εἰς ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως προσθέσωμεν ἤ ἀφαιρέσωμεν τήν αὐτήν παράστασιν, τῆς ὁποίας τό πεδίον ὁρισμοῦ συμπίπτει ἤ εἶναι ὑπερσύνολον πρός τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς ἐξισώσεως λαμβάνομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.

Π1. Δυνάμεθα νά μεταφέρωμεν ἐκ τοῦ ἑνός μέλους μιᾶς ἐξισώσεως, μίαν παράστασιν εἰς τό ἄλλο, ἀρκεῖ νά ἀλλάξωμεν τά πρόσημα τῶν ὅρων της.

Π2. Δυνάμεθα τό ἕνα μέλος μιᾶς ἐξισώσεως νά τό καταστήσωμεν μηδέν.

θ2. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν $K \neq 0$, ἡ λαμβανομένη ἐξίσωσις εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν ἀρχικήν.

Π3. Ἐάν ἀλλάξωμεν τά πρόσημα ὅλων τῶν ὅρων καί τῶν δύο μελῶν μιᾶς ἐξισώσεως, λαμβάνομεν ἰσοδύναμον ἐξίσωσιν.

Π4. Ἐάν ἀπαλείψωμεν τούς ἀριθμητικούς παρανομαστάς μιᾶς ἐξισώσεως, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν.

ΟΜΑΣ ΙΙ ΜΗ ΕΠΙΤΡΕΠΤΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ

θ1. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως ἐπί μίαν παράστασιν, περιέχουσα τόν ἄγνωστον, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν, ἐν γένει, μή ἰσοδύναμον πρός τήν ἀρχικήν.

ΕΞΑΙΡΕΣΙΣ: Ἐπειδή εἰς τάς ρητάς ἐξισώσεις τό Ε.Κ.Π. τῶν παρανομαστῶν ὑποτίθεται διάφορον τοῦ μηδενός, δέν ἰσχύει τό (ΙΙ θ1) ἀλλά τό (Ι θ2)

θ2. Ἐάν διαιρέσωμεν ἀμφότερα τά μέλη μιᾶς ἐξισώσεως διά μιᾶς καί τῆς αὐτῆς μή μηδενικῆς παραστάσεως, λαμβάνομεν ἐξίσωσιν μέ σύνολον λύσεων A_1, ὑποσύνολον τοῦ συνόλου λύσεων A τῆς ἀρχικῆς.

3. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΚΑΙ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΙΣ ΠΡΩΤΟΒΑΘΜΙΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

$$\left[\ (E):\ \alpha x+\beta=0 \mid \alpha,\ \beta\in R\ \right]$$

Διά τήν ἐπίλυσιν καί διερεύνησιν τῆς (E) διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) Ἄν $\alpha\neq 0$ ἀκολουθοῦμεν τήν ἑξῆς διαδικασίαν

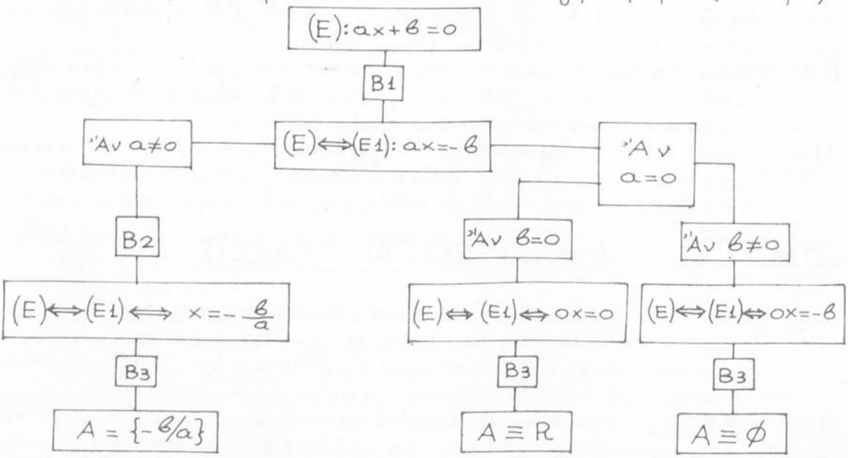
Βῆμα 1: Χωρίζομεν γνωστούς ἀπό ἀγνώστους	$(E)\Longleftrightarrow \alpha x=-\beta \Longleftrightarrow$
Βῆμα 2: Διαιροῦμεν διά τοῦ συντελεστοῦ τοῦ ἀγνώστου	$\Longleftrightarrow \dfrac{\alpha x}{\alpha}=-\dfrac{\beta}{\alpha}\Longrightarrow$
Βῆμα 3: Ἀναφέρομεν τό σύνολον λύσεως τῆς ἐξισώσεως	$\Longrightarrow A=\left\{-\dfrac{\beta}{\alpha}\right\}.$

2) Ἄν $\alpha=0$ ἔχομεν:

(i) Ἄν $\beta=0$ τότε $(E)\overset{B1}{\Longleftrightarrow} 0x=0 \overset{B3}{\Longrightarrow} A\equiv R$ (ἀόριστος)

(ii) Ἄν $\beta\neq 0$ τότε $(E)\overset{B1}{\Longleftrightarrow} 0x=-\beta \overset{B3}{\Longrightarrow} A\equiv \emptyset$ (ἀδύνατος)

τά ἀνωτέρω παρέχονται ἀπό τό γράφημα (δένδρο):



Συνοψίζονται δέ εἰς τόν πίνακα:

$\alpha\neq 0$	$\beta\in R$	$A=\{-\beta/\alpha\}$ (ἐπιλύσιμος)
$\alpha=0$	$\beta=0$	$A\equiv R$ (ἀόριστος)
	$\beta\neq 0$	$A\equiv\emptyset$ (ἀδύνατος)

4. ΓΕΝΙΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΕΩΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

I. ΕΥΡΕΣΙΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΕΞΙΣΩΣΕΩΣ πρός τήν δοθεῖσαν

1. Διαδικασία ἐπιλύσεως ἀκεραίας ἀριθμητικῆς ἐξισώσεως.

Βήματα:	Παραδείγματα:	
(Διαδικασία ἐπιλύσεως.)	Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις: (1): $x^2-(x-1)(x+1)+2=(x+1)^2-(x-1)^2$	(2): $\frac{x-1}{3}-x=\frac{1-x}{6}-\frac{5x+1}{8}$
B1: Εὑρίσκομεν τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.	——	Ε.Κ.Π. (παρονομαστῶν) = 24
B2: Πολ/ζομεν τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπί τό εὑρεθέν Ε.Κ.Π.	——	$\frac{24(x-1)}{3}-24x=\frac{24(1-x)}{6}-\frac{24(5x+1)}{8} \Leftrightarrow$
B3: Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις.	$x^2-x^2+1+2=4x\cdot 1 \Leftrightarrow$	$8(x-1)-24x=4(1-x)-3(5x+1)$ $\Leftrightarrow 8x-8-24x=4-4x-15x-3 \Leftrightarrow$
B4: Καθιστῶμεν τό ἕνα μέλος ἴσον μέ μηδέν.	$x^2-x^2+1+2-4x=0 \Leftrightarrow$	$8x-8-24x-4+4x+15x+3=0$
B5: Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων.	$-4x+3=0$	$\Leftrightarrow \quad 3x-9=0$
B6: Ἐπιλύομεν τήν ἐξίσωσιν ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ της.	Ἐπειδή ἐκ τοῦ προηγουμένου βήματος κατελήξαμεν εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν ἔχομεν (βλ. § 5): $x=\frac{3}{4}$	$x=3$
B7: Ἀναφέρομεν τό σύνολον λύσεων A (ἐλέγχοντες ἄν τά στοιχεῖα τοῦ A ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωσιν. — ἐπαλήθευσις).	$A=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ Διότι: A' μέλος $=\left(\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}-1\right)\cdot\left(\frac{3}{4}+1\right)+2=3$ B' μέλος $=\left(\frac{3}{4}+1\right)^2-\left(\frac{3}{4}-1\right)^2=3$. Ἄρα A' μέλος = B' μέλος	$A=\{3\}$ Διότι: A' μέλος $=\frac{3-1}{3}-3=-\frac{7}{3}$ B' μέλος $=\frac{1-3}{6}-\frac{5\cdot 3+1}{8}=-\frac{7}{3}$. Ἄρα A' μέλος = B' μέλος.

2. Διαδικασία ἐπιλύσεως ἀκεραίας παραμετρικῆς ἐξισώσεως.

Βήματα:	Παραδείγματα: Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις: ($\mu \in R$ καί $\lambda \in R-\{0\}$).	
(Διαδικασία ἐπιλύσεως).	(1): $\mu^2 x + 2\mu = x - 2$	(2): $\dfrac{2x+1}{3} - \dfrac{x+\mu}{\lambda} = \dfrac{3(x-1)}{4}$
B1: Εὑρίσκομεν τό Ε.Κ.Π. τῶν παρονομαστῶν.	———	Ε.Κ.Π. $= 12\lambda \ (\lambda \neq 0)$
B2: Πολ/ζομεν τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπί τό εὑρεθέν ΕΚΠ.	———	$\dfrac{12\lambda(2x+1)}{3} - \dfrac{12\lambda(x+\mu)}{\lambda} = \dfrac{36\lambda(x-1)}{4} \Longleftrightarrow$
B3: Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις.	———	$4\lambda(2x+1) - 12(x+\mu) = 9\lambda(x-1)$ $\Leftrightarrow 8\lambda x + 4\lambda - 12x - 12\mu = 9\lambda x - 9\lambda$
B4: Καθιστῶμεν τό ἕνα μέλος ἴσον μέ μηδέν.	$\mu^2 x + 2\mu - x + 2 = 0$	$8\lambda x + 4\lambda - 12x - 12\mu - 9\lambda x + 9\lambda = 0 \Longleftrightarrow$
B5: Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων.	$(\mu^2-1)x + 2(\mu+1) = 0$ (E)	$-\lambda x + 4\lambda - 12x - 12\mu + 9\lambda = 0 \Leftrightarrow$ $-(\lambda+12)x + 13\lambda - 12\mu = 0$ (E)
B6: Προχωροῦμεν εἰς τήν ἐπίλυσιν καί διερεύνησιν τῆς ἐξισώσεως ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ της.	Ἐπειδή ἐκ τοῦ B5 κατελήξαμεν εἰς πρωτοβάθμιον ἐξίσωσιν προχωροῦμεν ὡς εἰς § 5. i) $\mu^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow \mu \neq \pm 1 \Longrightarrow$ $x = \dfrac{-2(\mu+1)}{(\mu-1)(\mu+1)} \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{1-\mu}$ ii) $\mu^2-1=0 \Leftrightarrow \mu = \pm 1 \Longrightarrow$ α) $\mu = 1 \Longrightarrow (E) \Leftrightarrow 0x = -4$ β) $\mu = -1 \Longrightarrow (E) \Leftrightarrow 0x = 0$	i) $\lambda + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq -12 \Longrightarrow$ $x = \dfrac{13\lambda - 12\mu}{\lambda+12}$ ii) $\lambda + 12 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -12 \Longrightarrow$ α) $\mu \neq -13 \Longrightarrow (E) \Leftrightarrow 0x = -156 - 12\mu \neq 0$ β) $\mu = -13 \Longrightarrow (E) \Leftrightarrow 0x = 0$
B7: Ἀναφέρομεν τό σύνολον λύσεων A (ἐλέγχοντες ἄν τά στοιχεῖα τοῦ A ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωσιν — ἐπαλήθευσις).	1) $\mu \neq \pm 1 \Longrightarrow$ $A = \left\{ x \in R : x = \dfrac{2}{1-\mu} \right\}$ 2) $\mu = 1 \longrightarrow A \equiv \emptyset$ (ἀδύνατος) 3) $\mu = -1 \Longrightarrow A \equiv R$ (ἀόριστος)	1) $\lambda \neq -12 \Longrightarrow$ $A = \left\{ x \in R : x = \dfrac{13\lambda - 12\mu}{\lambda + 12}, \lambda \neq 0, \lambda \neq -12, \mu \in R \right\}$. 2) $\left.\begin{array}{l}\lambda = -12\\ \mu \neq -13\end{array}\right\} \Longrightarrow A \equiv \emptyset$ (ἀδύνατος) 3) $\left.\begin{array}{l}\lambda = -12\\ \mu = -13\end{array}\right\} \Longrightarrow A \equiv R$ (ἀόριστος)

(Ἡ ἐπαλήθευσις γίνεται εὐκόλως).

3. Διαδικασία ἐπιλύσεως ρητῆς ἀριθμητικῆς ἐξισώσεως.

Βήματα	Παραδείγματα	
	Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:	
(Διαδικασία ἐπιλύσεως).	(1) $\frac{2x-1}{x-2}=\frac{x}{x^2-4}+\frac{2x-1}{x+2}$	(2) $\frac{x-8}{x^5+1}+\frac{2}{x^4-x^3+x^2-x+1}=0$
B1: Εὑρίσκομεν τό ΕΚΠ τῶν παρονομαστῶν..	$Ε.Κ.Π.=(x+2)(x-2)$	$ΕΚΠ=x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2+$ $+x+1)$.
B2: Εὑρίσκομεν τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς ἐξισώσεως. (ἤτοι ΕΚΠ παρονομαστῶν διάφορον τοῦ μηδενός).	$\mathcal{D}=R-\{2,-2\}$	$\mathcal{D}=R-\{x\in R: x^5+1=0\}$
B3: Πολ/ζομεν τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπί τό εὑρεθέν ΕΚΠ.	$\frac{(x^2-4)(2x-1)}{x-2}=\frac{(x^2-4)x}{x^2-4}+$ $+\frac{(2x-1)(x^2-4)}{x+2}$	$\frac{(x-8)(x^5+1)}{x^5+1}+\frac{2(x^5+1)}{x^4-x^3+x^2-x+1}=0$
B4: Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις.	$(x+2)(2x-1)=x+(2x-1)(x-2)$ $\Longleftrightarrow 2x^2+4x-x-2=x+$ $+2x^2-x-4x+2$.	$x-8+2(x+1)=0$ $\Longleftrightarrow x-8+2x+2=0$
B5: Καθιστῶμεν τό ἕνα μέλος ἴσον μέ μηδέν.	$2x^2+4x-x-2-x-2x^2+x+$ $+4x-2=0$	$x-8+2x+2=0$
B6: Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων	$7x-4=0$	$3x-6=0$
B7: Προχωροῦμεν εἰς τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ της.	$x=\frac{4}{7}$	$x=2$
B8: Ἀναφέρομεν τό σύνολον λύσεων Α (ἐλέγχοντες ἄν τά στοιχεῖα τοῦ Α ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωσιν).	$A=\left\{\frac{4}{7}\right\}$	$A=\{2\}$

4. Διαδικασία ἐπιλύσεως ρητῆς παραμετρικῆς ἐξισώσεως.

Βήματα	Παράδειγμα
(Διαδικασία ἐπιλύσεως).	Νά ἐπιλυθῆ καί νά διερευνηθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις: $\frac{ax-1}{x-1}+\frac{a\beta}{x+1}=\frac{a(x^2+\beta)}{x^2-1}$ $\Big\vert$ $a,\beta\in R$.
B1: Εὑρίσκομεν τό ΕΚΠ τῶν παρονομαστῶν.	Ε.Κ.Π. $=(x+1)(x-1)$
B2: Εὑρίσκομεν τό πεδίον ὁρισμοῦ τῆς ἐξισώσεως. (ἤτοι Ε.Κ.Π. παρονομαστῶν διάφορον τοῦ μηδενός).	$\mathcal{D}=R-\{1,-1\}$
B3: Πολ/ζομεν τούς ὅρους τῆς ἐξισώσεως ἐπί τό εὑρεθέν Ε.Κ.Π	$\frac{(x^2-1)(ax-1)}{x-1}+\frac{a\beta(x^2-1)}{x+1}=\frac{a(x^2+\beta)(x^2-1)}{x^2-1}$
B4: Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις.	$(x+1)(ax-1)+a\beta(x-1)=a(x^2+\beta)\Longleftrightarrow$ $ax^2+ax-x-1+a\beta x-a\beta=ax^2+a\beta$
B5: Καθιστῶμεν τό ἕνα μέλος ἴσον μέ μηδέν.	$ax^2+ax-x-1+a\beta x-a\beta-ax^2-a\beta=0$
B6: Ἐκτελοῦμεν ἀναγωγήν ὁμοίων ὅρων.	$(a\beta+a-1)x-2a\beta-1=0$ (1)

B7: Προχωροῦμεν εἰς τήν ἐπίλυσιν καί διερεύνησιν τῆς ἐξισώσεως ἀναλόγως τοῦ βαθμοῦ της.

$(a\beta+a-1)x=2a\beta+1$ (2)

I. Ἄν $a\beta+a-1\neq 0\Longrightarrow x=\frac{2a\beta+1}{a\beta+a-1}$: ἵνα $\frac{2a\beta+1}{a\beta+a-1}\in\mathcal{D}$

πρέπει νά ἀρκεῖ $\frac{2a\beta+1}{a\beta+a+1}\neq\pm 1\Longrightarrow$ i) $\frac{2a\beta+1}{a\beta+a+1}\neq 1$

$\Longleftrightarrow 2a\beta+1\neq a\beta+a-1\Longleftrightarrow a\beta-a+2\neq 0$ ii) $\frac{2a\beta+1}{a\beta+a-1}\neq -1$

$\Longleftrightarrow 2a\beta+1\neq -a\beta-a+1\Longleftrightarrow 3a\beta+a\neq 0\Longleftrightarrow a(3\beta+1)\neq 0$

$\Longleftrightarrow a\neq 0\wedge \beta\neq -\frac{1}{3}\Longrightarrow A=\left\{x\in R:\ x=\frac{2a\beta+1}{a\beta+a-1}\ \middle\vert\ a,\beta\in R: (a\beta+a-1)(a\beta-a+2)\neq 0\wedge a\neq 0\wedge \beta\neq -\frac{1}{3}\right\}$.

II. Ἄν $a\beta+a-1=0\xRightarrow{(2)} 0.x=2a\beta+1$ (3)

II$_1$) Ἐξετάζομεν ἄν ὑπάρχουν $a,\beta\in R:\left\{\begin{array}{l}a\beta+a-1=0\\ 2a\beta+1=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ab+a-1=0 \\ ab=-\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}+a-1=0 \\ ab=-\frac{1}{2}\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{1}{3}\end{array}\right\}.$$

Ἄρα διά $(a,b)=\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ ἡ (3) γίνεται $0\cdot x=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A \equiv R-\{1,-1\}$.

II₂) Ἐξετάζομεν ἄν ὑπάρχουν $a, \beta \in R$:

$$\left\{\begin{array}{l} ab+a-1=0 \\ 2ab+1\neq 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} ab=1-a \\ 2(1-a)+1\neq 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} b=\frac{1-a}{a} \\ a\neq 3/2 \\ a\neq 0\end{array}\right\}$$

Ὥστε: $\forall\, a\in R-\left\{\frac{3}{2}\right\} \wedge b=\frac{1-a}{a}$ $(a\neq 0)$, ἡ (3) γίνεται

$0\cdot x=2ab+1\neq 0 \Longrightarrow A\equiv \emptyset$.

II. ΕΥΡΕΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΙΚΑΝΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΔΟΘΕΙΣΑΝ — (ἐπαρκές δι' αὐτήν σύστημα εἰδικῶν περιπτώσεών της).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Ἐξισώσεις παραγοντοποιημένης μορφῆς.

Θ: Ἐάν (E) $\Longleftrightarrow \varphi_1(x)\,\varphi_2(x)\,\varphi_3(x)\cdots\varphi_\nu(x)=0$ τότε. $\varphi_1(x)=0 \vee \varphi_2(x)=0 \vee \varphi_3(x)=0 \vee \cdots \vee \varphi_\nu(x)=0$.

Π1. Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις (E): $12x^2-3x-5=-5-7x \mid R$

(E) $\Longleftrightarrow 12x^2+7x+5-5-3x=0 \Longleftrightarrow 12x^2+4x=0 \Longleftrightarrow 4x(3x+1)=0$
$\Longleftrightarrow x=0 \vee 3x+1=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=-\frac{1}{3} \Longrightarrow A=\left\{0, -\frac{1}{3}\right\}$.

Π2. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις.

(E): $\left[-\frac{x}{2}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}+6x^2+\left(\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}\right)-2\right]\cdot 2^{-1} = 6^{-1}+3x$.

Ἐπίλυσις (E) $\Longleftrightarrow \left(-\frac{x}{2}+\frac{7}{3}+6x^2+\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}-2\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}+3x$
$\Longleftrightarrow -\frac{x}{4}+\frac{7}{6}+3x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{4}-1=\frac{1}{6}+3x \Longleftrightarrow -3x+14+36x^2+$

$+9x+3-12=2+36x \Longleftrightarrow 36x^2-30x+3=0 \Longleftrightarrow 12x^2-10x+1=0$
$\Longleftrightarrow 12\left(x^2-\frac{10}{12}x+\frac{1}{12}\right)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 12\left(x^2-2\,\frac{5}{12}x+\frac{25}{144}-\frac{25}{144}+\frac{1}{12}\right)=0$

$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{5}{12}\right)^2-\frac{25-12}{144}=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{5}{12}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{12}\right)^2=0$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{5}{12}+\frac{\sqrt{13}}{12}\right)\left(x-\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{13}}{12}\right)=0$$
$$\Longleftrightarrow x-\frac{5-\sqrt{13}}{12}=0 \lor x-\frac{5+\sqrt{13}}{12}=0$$
$$\Longleftrightarrow x=\frac{5-\sqrt{13}}{12} \lor x=\frac{5+\sqrt{13}}{12} \Longrightarrow A=\left\{\frac{5\pm\sqrt{13}}{12}\right\}$$

Π3. Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): (x^2+6x+9)^2+(x^2+4x+6)^2=(x^2+8x+12)^2 \quad \Big| \; R$$
$$(E) \Longleftrightarrow (x^2+6x+9)^2=(x^2+8x+12)^2-(x^2+4x+6)^2$$
$$\Longleftrightarrow (x^2+6x+9)^2=(2x^2+12x+18)(4x+6)$$
$$\Longleftrightarrow (x+3)^4-4(x+3)^2(2x+3)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+3)^2(x^2-2x-3)=0 \Longleftrightarrow (x+3)^2(x-3)(x+1)=0 \Longleftrightarrow$$
$$(x+3)^2=0 \lor x-3=0 \lor x+1=0 \Longleftrightarrow x=-3 \text{ (διπλῆ)}$$
$$\lor x=3 \lor x=-1 \Longrightarrow A=\{-3,3,-1\}$$

Π4. Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $(E): x^3+6x^2+11x+6=0 \;\Big|\; R$

$$(E) \Longleftrightarrow (x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)=0$$
$$\Longleftrightarrow x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+1)(x^2+5x+6)=0 \Longleftrightarrow (x+1)\left[(x^2+2x)+(3x+6)\right]=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+1)\left[x(x+2)+3(x+2)\right]=0 \Longleftrightarrow x+1=0 \lor x+2=0$$
$$\lor x+3=0 \Longleftrightarrow x=-1 \lor x=-2 \lor x=-3 \Longrightarrow A=\{-1,-2,-3\}$$

Π5. Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): x^4-4x^3-49x^2+28x+72=0$$
$$(E) \Longleftrightarrow x^4-8x^3+4x^3-9x^2-32x^2-8x^2-36x+64x+72=0$$
$$\Longleftrightarrow x^4-8x^3-9x^2+4x^3-32x^2-36x-8x^2+64x+72=0$$
$$\Longleftrightarrow x^2(x^2-8x-9)+4x(x^2-8x-9)-8(x^2-8x-9)=0$$
$$\Longleftrightarrow (x^2-8x-9)(x^2+4x-8)=0 \Longleftrightarrow x^2-8x-9=0 \lor x^2+$$
$$+4x-8=0 \Longleftrightarrow (x-9)(x+1)=0 \lor (x-2-2\sqrt{3})(x-2+2\sqrt{3})=$$
$$=0 \Longleftrightarrow x=9 \lor x=-1 \lor x=2\pm2\sqrt{3} \Longrightarrow A=\{-1,9,2\pm2\sqrt{3}\}$$

Π6. Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): x^4+(\alpha+\beta-\gamma-\delta)x^3+(\alpha\beta+\gamma\delta-\beta\gamma-\alpha\gamma-\beta\delta-\alpha\delta)x^2-$$
$$-(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta-\alpha\gamma\delta-\beta\gamma\delta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0$$
$$(E) \Longleftrightarrow x^4+(\alpha+\beta)x^3-(\gamma+\delta)x^3+\alpha\beta x^2+\gamma\delta x^2-(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)x^2-\alpha\beta(\gamma+\delta)x+$$
$$+\gamma\delta(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0 \Longleftrightarrow x^4+(\alpha+\beta)x^3+\alpha\beta x^2-(\gamma+\delta)x^3-(\alpha+\beta)$$
$$(\gamma+\delta)x^2-\alpha\beta(\gamma+\delta)x+\gamma\delta x^2+\gamma\delta(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\gamma\delta=0 \Longleftrightarrow$$
$$x^2\left[x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]-(\gamma+\delta)x\left[x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]+\gamma\delta\left[x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]=0$$
$$\Longleftrightarrow \left[x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\right]\left[x^2-(\gamma+\delta)x+\gamma\delta\right]=0$$
$$\Longleftrightarrow (x+\alpha)(x+\beta)(x-\gamma)(x-\delta)=0 \Longleftrightarrow x+\alpha=0 \lor x+\beta=0 \lor$$
$$x-\gamma=0 \lor x-\delta=0 \Longleftrightarrow x=-\alpha \lor x=-\beta \lor x=\gamma \lor x=\delta$$
$$\Longrightarrow A=\{-\alpha,-\beta,\gamma,\delta\}.$$

Π7. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$(E): x^5+(1+3b)x^4-3(1+3a)(a-b)x^3-x^2-(1+3b)x+3(1+3a)(a-b)=0$

$(E) \iff x^5-x^2+(1+3b)x^4-(1+3b)x-3(1+3a)(a-b)x^3+3(1+3a)(a-b)=0 \iff x^2(x^3-1)+(1+3b)x(x^3-1)-3(1+3a)(a-b)(x^3-1)=0 \iff (x^3-1)\left[x^2+(1+3b)x-3(1+3a)(a-b)\right]=0 \iff x^3-1=0$ (1) $\vee$ $x^2+(1+3b)x-3(1+3a)\cdot(a-b)=0$

$\Longrightarrow$ (1) $\iff (x-1)(x^2+x+1)=0 \iff x-1=0$ (διότι $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0 \ \forall x\in R$) $\iff x=1$

(2) $\iff x^2+(1+3b+3a-3a)x-3(1+3a)(a-b)=0$
$\iff x^2+(1+3a)x-3(a-b)x-3(1+3a)(a-b)=0$
$\iff x(x+1+3a)-3(a-b)(x+1+3a)=0$
$\iff (x+3a+1)(x-3a+3b)=0 \iff x+3a+1=0 \vee x-3a+3b=0 \iff x=-(3a+1) \vee x=3a-3b \Longrightarrow A=\{1,-(3a+1),3(a-b)\}$ ἐάν $1\neq-(3a+1)\neq3(a-b)\neq1$.

Ἐάν δύο (ἀντιστοίχως τρία) ἐκ τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου λύσεων A εἶναι ἴσα, τότε ἀναγράφομεν τό ἕν ἐξ αὐτῶν καί ἡ ὑπ' ὄψιν ρίζα θεωρεῖται διπλῆ (ἀντιστοίχως τριπλῆ) π.χ. Διά $a=-\frac{2}{3}$, $b=-1$ ἔχομεν $A=\{1\}$ μέ τήν ρίζαν 1 τριπλῆ.

Π8. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$(E): (x-a)\left[(x-a)^2+(x+a)^2\right]-2b(x^2+a^2)=0 \mid a,\ b\in R,\ a\neq0$

$(E) \iff (x-a)(x^2-2ax+a^2+x^2+2ax+a^2)-2b(x^2+a^2)=0 \iff (x-a)(2x^2+2a^2)-2b(x^2+a^2)=0 \iff 2(x-a)(x^2+a^2)-2b(x^2+a^2)=0 \iff 2(x^2+a^2)(x-a-b)=0 \iff x^2+a^2=0 \vee x-a-b=0 \iff x=a+b$, διότι $x^2+a^2\neq0 \Longrightarrow A=\{a+b\}$.

Π9. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$(E): (2x)^3+(4x-5)^3+(x^2+4x-7)^3=(x^2+4x-6)^3$.

$(E) \iff$ (Ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις) $\iff x^4-16x^3+83x^2-152x+84=0 \iff x^4-13x^3-3x^3+42x^2+39x^2+2x^2-126x-26x+84=0 \iff x^4-13x^3+42x^2-3x^3+39x^2-126x+2x^2-26x+84=0 \iff x^2(x^2-13x+42)-3x(x^2-13x+42)+2(x^2-13x+42)=0 \iff (x^2-13x+42)(x^2-3x+2)=0 \iff (x-6)(x-7)(x-1)(x-2)=0 \iff x-6=0 \vee x-7=0 \vee x-1=0 \vee x-2=0 \iff x=6 \vee x=7 \vee x=1 \vee x=2 \Longrightarrow A=\{1,2,6,7\}$.

Π10. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): \left(\frac{x-2a}{x+a}\right)^3\cdot x-x^2+a^2=a\cdot\left(\frac{a-2x}{x+a}\right)^3 \,\Big|\, a\in R$$

$(E) \iff (x-2a)^3\cdot x-a(a-2x)^3=(x+a)^3(x^2-a^2) \mid \mathcal{D}=R-\{-a\}$.

$\iff (x^3-8a^3-6x^2a+12a^2x)\cdot x-a(a^3-8x^3-6a^2x+12ax^2)=(x+a)^3(x^2-a^2) \iff x^4-8a^3\cdot x-6x^3a+12a^2x^2-a^4+8ax^3+$

$+6a^3x-12a^2x^2=(x+a)^3(x^2-a^2) \Longleftrightarrow (x^4-a^4)-6ax(x^2-a^2)+8ax\cdot$
$(x^2-a^2)=(x+a)^3(x^2-a^2) \Longleftrightarrow (x^2-a^2)(x^2+a^2)-6ax(x^2-a^2)+8ax\cdot$
$(x^2-a^2)=(x+a)^3(x^2-a^2) \Longleftrightarrow (x^2-a^2)(x^2+a^2-6ax+8ax)=(x+a)^3\cdot$
$(x^2-a^2) \Longleftrightarrow (x^2-a^2)(x+a)^2-(x+a)^3(x^2-a^2)=0 \Longleftrightarrow (x+a)^2(x^2-a^2)$
$(1-x-a)=0 \Longleftrightarrow (x-a)(x+a)^3(x+a-1)=0 \Longleftrightarrow x=a \vee x=1-a$
(διότι $x+a\neq 0$) $\Longrightarrow A=\{a,1-a\}$ ἄν $a\neq \frac{1}{2}$.
Ἄν $a=\frac{1}{2} \Longrightarrow A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$ μέ τήν ρίζαν $a=\frac{1}{2}$ διπλῆ.

2: Ἐξισώσεις ἐπιλυόμεναι τῇ βοηθείᾳ ταυτοτήτων ὑπό συνθήκας.

Π1. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): (x+a)^3+(x+\beta)^3+(x+\gamma)^3=3(x+a)(x+\beta)(x+\gamma) \quad \Big| \begin{matrix} a\in R\\ \beta\in R\\ \gamma\in R\end{matrix}$$

Ἐπίλυσις: $\forall\ x,y,z\in R$ ἰσχύει ἡ ταυτότης τοῦ Euler ὑπό συνθήκας: $x^3+y^3+z^3=3xyz \Longleftrightarrow x+y+z=0 \vee x=y=z$
Συνεπῶς (E) $\Longleftrightarrow 3x+a+\beta+\gamma=0 \vee x+a=x+\beta=x+\gamma \Longleftrightarrow$
$x=-\frac{a+\beta+\gamma}{3} \vee a=\beta=\gamma \Longrightarrow$ ἄν $a\neq\beta\neq\gamma\neq a \Longrightarrow$

$A=\left\{-\frac{a+\beta+\gamma}{3}\right\} \wedge$ ἄν $a=\beta=\gamma \Longrightarrow A\equiv R$ (ἀόριστος).

Π2. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E): x^4+a^4+\beta^4-2x^2a^2-2x^2\beta^2-2a^2\beta^2=0 \,\big|\, a,\beta\in R.$$

Ἐπίλυσις: $\forall\ x,y,z\in R$ ἰσχύει ἡ ταυτότης τοῦ Moivre ὑπό συνθήκας: $x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2x^2z^2-2y^2z^2=0$ $\Longleftrightarrow x+y+z=0 \vee x=y+z \vee y=x+z \vee z=x+y$ Συνεπῶς ἔχομεν (E) $\Longleftrightarrow x+a+\beta=0 \vee x=a+\beta \vee a=x+\beta \vee$ $\beta=x+a \Longleftrightarrow x=-(a+\beta) \vee x=a+\beta \vee x=a-\beta \vee x=$ $=\beta-a \Longrightarrow A=\{a+\beta,-(a+\beta),a-\beta,-(a-\beta)\}$ ἄν τά στοιχεῖα τοῦ A εἶναι διάφορα ἀλλήλων (Διαφορετικά προχωροῦμεν ὡς εἰς Π7).

3: Ἐξισώσεις μέ ἀπόλυτα.

Π1. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E_1): $2|x|-12=0$, (E_2): $|x^2-5x+5|=1$
(E_3): $\left|x-\frac{3}{2}\right|=\left|7x-\frac{x}{3}+1\right|$
(E_4): $\big||x|-5\big|=\big|2|x|+3\big|$

Ἐπίλυσις: Γνωρίζομεν ὅτι $|a|=|\beta| \Longleftrightarrow a=\beta \vee a=-\beta$, $a,\beta\in R$.
Συνεπῶς ἔχομεν: $(E1) \Longleftrightarrow 2|x|=12 \Longleftrightarrow |x|=6$.
$\Longleftrightarrow x=6 \vee x=-6 \Longrightarrow A=\{\pm 6\}$.

$(E_2) \iff x^2-5x+5=1 \vee x^2-5x+5=-1 \iff x^2-5x+4=0 \vee$
$x^2-5x+6=0 \iff (x-1)(x-4)=0 \vee (x-2)(x-3)=0 \iff$
$x-1=0 \vee x-4=0 \vee x-2=0 \vee x-3=0 \iff x=1 \vee x=4$
$\vee\, x=2 \vee x=3 \implies A=\{1,4,2,3\}$.

$(E_3) \iff x-\frac{3}{2}=7x-\frac{x}{3}+1 \vee x-\frac{3}{2}=-7x+\frac{x}{3}-1 \iff 6x-9=$
$=42x-2x+6 \vee 6x-9=-42x+2x-6 \iff x=-\frac{15}{34} \vee$
$x=\frac{3}{46} \implies A=\left\{-\frac{15}{34},\ \frac{3}{46}\right\}$.

$(E_4) \iff |x|-5=2|x|+3 \vee |x|-5=-2|x|-3 \iff -|x|=8 \vee$
$3|x|=2 \iff |x|=-8 \ (1) \vee |x|=\frac{2}{3} \ (2)$.
(1) ἀδύνατος διότι $\forall x\in R \implies |x|\geqq 0$.
(2) $\iff x=\frac{2}{3} \vee x=-\frac{2}{3} \implies A=\left\{\pm\frac{2}{3}\right\}$.

Π2. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E_1): $2|x|+3x-5=0$

(E_2): $x^2-5x+2\sqrt{x^2}-10=0$

(E_3): $|x-2|+3x=14$

(E_4): $\Big[\big||x|-2\big|-|x-2|\Big]\Big[|2x-3|-2x+6\Big]\Big[x^2-7|x|+10\Big]=0$

(E_5): $\Big|2x-|2x-1|\Big|+|\lambda|x=0$

Ἐπίλυσις: Γνωρίζομεν ὅτι: 1). $\forall a\in R \implies |a| \begin{cases} a, & \text{ἄν } a>0 \\ 0, & \text{ἄν } a=0 \\ -a, & \text{ἄν } a<0 \end{cases}$
ἤ $|a|=\sqrt{a^2}$

2) $\forall a\in R \implies |a|^{2\nu}=|a^{2\nu}|=a^{2\nu} \quad \forall \nu\in N$

$(E_1) \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ 2x+3x-5=0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ -2x+3x-5=0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ x=1 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ x=5 \end{Bmatrix} \implies$
$x=1>0$ (διότι τὸ δεύτερον σύστημα εἶναι ἀδύνατον) $\implies A=\{1\}$

$(E_2) \iff x^2-5x+2|x|-10=0 \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ x^2-5x+2x-10=0 \end{Bmatrix} \vee$

$\begin{Bmatrix} x<0 \\ x^2-5x-2x-10=0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ x^2-3x-10=0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ x^2-7x-10=0 \end{Bmatrix} \iff$

$\begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ (x-5)(x+2)=0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ \left(x-\frac{7+\sqrt{89}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{89}}{2}\right)=0 \end{Bmatrix} \iff$

$\begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ x=5 \vee x=-2 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ x=\frac{7+\sqrt{89}}{2} \vee x=\frac{7-\sqrt{89}}{2} \end{Bmatrix} \iff x=5 \vee$
$x=\frac{7-\sqrt{89}}{2} \implies A=\left\{5,\ \frac{7-\sqrt{89}}{2}\right\}$.

$(E_3) \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 2 \\ x-2+3x=14 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<2 \\ -x+2+3x=14 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x\geqq 2 \\ 4x=16 \end{Bmatrix} \vee$

$\vee \begin{Bmatrix} x<2 \\ 2x=12 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow x=4 \Longrightarrow A=\{4\}.$

(E4) $\Longleftrightarrow (1)\,\big||x|-2\big|-|x-2|=0 \vee (2)\,|2x-3|-2x+6=0 \vee (3)\, x^2-7|x|+10=0.$ $(1)\Longleftrightarrow \big||x|-2\big|=|x-2| \Longleftrightarrow |x|-2=x-2 \vee |x|-2=2-x \Longleftrightarrow |x|=x \vee |x|+x=4 \Longleftrightarrow x\geqq 0$ (διότι $|x|\geqq 0 \ \forall\, x\in R$) $\vee \begin{Bmatrix} x\geqq 0 \\ x+x=4 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} x<0 \\ -x+x=4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$x\geqq 0 \vee x=2 \Longleftrightarrow x\geqq 0 \Longrightarrow A_1 \equiv R_0^+$

$(2)\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-3\geqq 0 \\ 2x-3-2x+6=0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} 2x-3<0 \\ 3-2x-2x+6=0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x\geqq \frac{3}{2} \\ 3=0 \end{Bmatrix} \vee$

$\begin{Bmatrix} x<\frac{3}{2} \\ x=+\frac{9}{4} \end{Bmatrix} \Longrightarrow A_2 \equiv \emptyset$ (Ἀδύνατος).

$(3)\Longleftrightarrow |x|^2-5|x|-2|x|+10=0 \Longleftrightarrow |x|\big(|x|-5\big)-2\big(|x|-5\big)=0 \Longleftrightarrow \big(|x|-2\big)\big(|x|-5\big)=0 \Longleftrightarrow |x|-2=0 \vee |x|-5=0 \Longleftrightarrow |x|=2 \vee |x|=5$
$x=\pm 2 \vee x=\pm 5 \Longrightarrow A_3=\{\pm 2, \pm 5\}.$

Συνεπῶς: $A=A_1\cup A_2\cup A_3 = R_0^+ \cup \{-2,-5\}.$

(E5) $\Longleftrightarrow \big|2x-|2x-1|\big|=-|\lambda|\,x \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<0 \\ \big|2x-|2x-1|\big|=-|\lambda|\,x \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<0 \\ \big|2x+(2x-1)\big|=-|\lambda|\,x \end{Bmatrix}$ (διότι $x<0 \Longrightarrow 2x-1<0$)

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<0 \\ |4x-1|=-|\lambda|\,x \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<0 \\ 1-4x=-|\lambda|\,x \end{Bmatrix}$ (διότι $x<0 \longrightarrow 4x-1<0$)

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<0 \\ (4-|\lambda|)\,x=1 \end{Bmatrix} \Longrightarrow$ 1). ἄν $\lambda=\pm 4 \Rightarrow 0\cdot x=1 \Rightarrow A\equiv\emptyset$ (ἀδύν.)

2). ἄν $\lambda\neq\pm 4 \Longrightarrow \left\{x=\frac{1}{4-|\lambda|} \wedge x<0\right\} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{4-|\lambda|} \\ 4-|\lambda|<0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{4-|\lambda|} \\ |\lambda|>4 \end{Bmatrix}$

$\Longrightarrow A=\left\{\frac{1}{4-|\lambda|}\right\}$ ἄν $\lambda<-4$, $\vee\ \lambda>4$

4. Περίπτωσις ἐκθετικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς: $\{\varphi(x)\}^{\sigma(x)}=1$

Π1). Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις (E): $(x^2-2x)^{x^2-3x}=1$

Ἐπίλυσις: Θεώρημα: Γνωρίζομεν ὅτι $\{\varphi(x)\}^{\sigma(x)}=1 \Longleftrightarrow \{\varphi(x)=1\}$

$\vee \begin{Bmatrix} \varphi(x)=-1 \quad (1) \\ \sigma(\rho_\nu)=\text{ἄρτιος ἀριθμός ἤ μηδέν} \\ \text{ὅπου } \rho_\nu \text{ αἱ ρίζαι τῆς } (1) \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} \sigma(x)=0 \quad (2) \\ \varphi(\rho_i)\neq 0 \text{ ὅπου } \rho_i \\ \text{αἱ ρίζαι τῆς } (2) \end{Bmatrix}.$

Συνεπῶς ἔχομεν: **(E)** $\Longleftrightarrow \{x^2-2x=1\} \vee \begin{Bmatrix} x^2-2x=-1 \\ x^2-3x=\text{ἄρτιος} \\ \text{ἀριθμός ἤ μηδέν} \end{Bmatrix}$

$$\vee\left\{\begin{matrix} x^2-3x=0 \\ x^2-2x\neq 0\end{matrix}\right\} \iff \left\{x^2-2x-1=0\right\} \vee \left\{\begin{matrix}(x-1)^2=0 \\ x^2-3x=2k,\ k\in \mathbb{Z}\end{matrix}\right\} \vee$$

$$\vee\left\{\begin{matrix} x(x-3)=0 \\ x(x-2)\neq 0\end{matrix}\right\} \iff x=1\pm\sqrt{2} \vee \left\{\begin{matrix} x=1 \ \text{διπλῆ (δεκτή διότι} \\ 1^2-3\cdot 1=-2=\text{ἄρτιος ἀριθμός)}\end{matrix}\right\}$$

$$\vee\left\{\begin{matrix} x=0 \vee x=3 \\ x(x-2)\neq 0\end{matrix}\right\} \iff x=1\pm\sqrt{2} \vee x=1\ (\text{διπλῆ}) \vee x=3 \implies$$

$$\implies A=\left\{1\pm\sqrt{2},\ 1,\ 3\right\}.$$

Π2. Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E):\ (x^2-5x+5)^{7x^2-12x-4}=1.$$

·Ἐπίλυσις: Κατά τό θεώρημα τοῦ (Π1) ἔχομεν:

$$(E) \iff \left\{x^2-5x+5=1\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x^2-5x+5=-1 \\ 7x^2-12x-4 \ \text{ἄρτιος ἀριθμός ἤ μηδέν}\end{matrix}\right\}$$

$$\vee\left\{\begin{matrix} 7x^2-12x-4=0 \\ x^2-5x+5\neq 0\end{matrix}\right\} \iff \left\{x^2-5x+4=0\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x^2-5x+6=0 \\ 7x^2-12x-4=\text{ἄρτιος} \\ \text{ἀριθμός ἤ μηδέν}\end{matrix}\right\}.$$

$$\vee\left\{\begin{matrix} 7\left(x-\frac{12+16}{14}\right)\left(x-\frac{12-16}{14}\right)=0 \\ x^2-5x+5\neq 0\end{matrix}\right\} \iff (x-1)(x-4)=0 \ \vee$$

$$\vee\left\{\begin{matrix} (x-3)(x-2)=0 \\ 7x^2-12x-4=\text{ἄρτιος ἀριθμός ἤ μηδέν}\end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} (x-2)\left(x+\frac{2}{7}\right)=0 \\ x^2-5x+5\neq 0\end{matrix}\right\}$$

$$\iff x=1 \vee x=4 \vee \left\{\begin{matrix} x=3 \ \vee \ x=2 \\ \sigma(x)\equiv 7x^2-12x-4=\text{ἄρτιος ἀριθμός ἤ μηδέν}\end{matrix}\right\}$$

$$\vee \left\{\begin{matrix} x=2 \ \vee \ x=-\frac{2}{7} \\ \varphi(x)\equiv x^2-5x+5\neq 0\end{matrix}\right\} \iff x=1 \vee x=4 \vee x=2 \ (\text{διότι } \sigma(2)=0$$

ἐνῶ $\sigma(3)=23) \vee x=2 \vee x=-\frac{2}{7}$ (διότι $\varphi(2)\neq 0,\ \varphi\left(-\frac{2}{7}\right)\neq 0$)

$\implies A=\left\{1, 4, 2, -\frac{2}{7}\right\}$ μέ τήν ρίζαν 2 διπλῆ.

---

5. Γενικώτερα διά τῆς μεθόδου ταύτης ἡ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$ (I) ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν ἑνός πλήρους δι' αὐτήν συστήματος εἰδικῶν περιπτώσεών της: $\varphi_1(x)=0 \vee \varphi_2(x)=0 \vee \ldots \vee \varphi_\nu(x)=0$ μέ σύνολα λύσεων ἀντιστοίχως $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$.
Τότε σύνολον λύσεων τῆς (I) εἶναι τό $A=\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i$.

III. ΕΥΡΕΣΙΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΑΝΑΓΚΑΙΩΝ ΣΥΝΘΗΚΩΝ ΙΣΟΔΥΝΑΜΟΥ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΔΟΘΕΙΣΑΝ

(ἐπαρκές δι' αὐτήν σύστημα συνεπειῶν της).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:

1. Ἐξισώσεις μέ ἀπόλυτα.

Π: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

(Ε1) $|x|+\frac{x}{5}=6$, (Ε2) $\frac{|x|+2x}{|x|-x}=2$, (Ε3) $|x-2|+3=x+1$.

Ἐπίλυσις: $(\mathrm{E1}) \Longleftrightarrow |x|=6-\frac{x}{5} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\left(6-\frac{x}{5}\right)^2 \\ 6-\frac{x}{5}\geqslant 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2=36+\frac{x^2}{25}-\frac{12x}{5} \\ \frac{x}{5}\leqslant 6 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x^2+5x-75=0 \\ x\leqslant 30 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{c} 2(x-5)\left(x+\frac{15}{2}\right)=0 \\ x\leqslant 30 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=5 \vee x=-\frac{15}{2} \\ x\leqslant 30 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{15}{2},5\right\}.$$

$$(\mathrm{E2}) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |x|+2x=2|x|-2x \\ |x|\neq x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} |x|=4x \\ x<0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2=16x^2 \\ x>0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow A=\emptyset$$

$$(\mathrm{E3}) \Longleftrightarrow |x-2|+3=x+1 \Longleftrightarrow |x-2|=x-2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x-2)^2=(x-2)^2 \\ x-2\geqslant 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \{x\geqslant 2\} \Longrightarrow A=\{x\in R: x\geqslant 2\}.$$

2. Ἐξισώσεις ἐπιλυόμεναι τῇ βοηθείᾳ ταυτοτήτων ὑπό συνθήκας.

Π1. Ὑπάρχει τιμή τῆς παραμέτρου λ μεγαλυτέρα τῆς μονάδος διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις

(Ε): $\frac{2(x-1)}{3}+\frac{\lambda}{2(x-1)}=\frac{3(\lambda-1)}{\lambda}$ ἔχει λύσιν ἐν $\Omega\equiv(1,+\infty)$.

Ἐπίλυσις:

$$(\mathrm{E}) \Longleftrightarrow \frac{2(x-1)}{3}+\frac{\lambda}{2(x-1)}+\frac{3}{\lambda}=3 \Longleftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{2(x-1)}{3}}\right)^3+\left(\sqrt[3]{\frac{\lambda}{2(x-1)}}\right)^3+$$

$$+\left(\sqrt[3]{\frac{3}{\lambda}}\right)^3=3\cdot\sqrt{\frac{2(x-1)}{3}\cdot\frac{\lambda}{2(x-1)}\cdot\frac{3}{\lambda}}$$ (διότι ἡ ὑπόρριζος ποσότης τοῦ β' μέλους=1).

Γνωρίζομεν ὅτι ἐάν $a^3+b^3+\gamma^3=3ab\gamma$ τότε $a+b+\gamma=0$

εἴτε $a=b=\gamma$.

Ἐπειδή δέ, $\sqrt[3]{\frac{2(x-1)}{3}}+\sqrt[3]{\frac{\lambda}{2(x-1)}}+\sqrt[3]{\frac{3}{\lambda}}>0$ (διότι $x>1 \wedge \lambda>0$)

$$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \frac{2(x-1)}{3}=\frac{\lambda}{2(x-1)}=\frac{3}{\lambda} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 2\lambda(x-1)=9 \\ \lambda^2=6(x-1) \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} 6\lambda(x-1)=27 \\ \lambda^3=6\lambda(x-1) \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda^3=27 \\ 2\lambda(x-1)=9 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda=3 \\ x=\frac{5}{2} \end{Bmatrix} \Longrightarrow \exists\, \lambda=3>1$$

διά τό ὁποῖον $x=\frac{5}{2}>1 \Longrightarrow A=\left\{\frac{5}{2}\right\}$, διά $\lambda=3$

Π2: Ὑπάρχει ἀκεραία τιμή τῆς παραμέτρου λ, διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις:
(E): $20\lambda^2+24\left[2-\lambda(1+x)\right]=3\sqrt{x}\left(4-\sqrt{x}-3x\sqrt{x}\right)$ ἔχει λύσιν ἐν N;

Ἐπίλυσις: (E) $\Leftrightarrow 3\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-4+3x\sqrt{x}\right)+24(2-\lambda-\lambda x)+20\lambda^2=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 3x-12\sqrt{x}+48+20\lambda^2-24\lambda-24\lambda x+9x^2=0 \Longleftrightarrow 3x-12\sqrt{x}+$
$+12+4\lambda^2-24\lambda+36+9x^2+16\lambda^2-24\lambda x=0 \Longleftrightarrow 3(x-4\sqrt{x}+4)+$
$+(2\lambda-6)^2+(3x-4\lambda)^2=0 \Longleftrightarrow 3(\sqrt{x}-2)^2+(2\lambda-6)^2+(3x-4\lambda)^2=0$
Βάσει τοῦ θεωρήματος " i) ἄν $a_1, a_2, ---, a_\nu \in R_0^+ \wedge$
$a_1+a_2+a_3+---+a_\nu=0 \Longleftrightarrow a_1=a_2=a_3=---=a_\nu=0$
ii) ἄν $a_1, a_2, ---, a_\nu \in R \wedge a_1^2+a_2^2+---+a_\nu^2=0 \Leftrightarrow$
$a_1=a_2=---=a_\nu=0$"
ἕπεται: $(E) \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{x}-2=0 \\ 2\lambda-6=0 \\ 3x-4\lambda=0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=4 \\ \lambda=3 \\ 3x=4\lambda \end{Bmatrix}$ συνεπῶς $\exists\, \lambda=3\in Z$
διά τό ὁποῖον $x=4\in N \Longrightarrow A=\{4\}$, διά $\lambda=3$

Π3: Ἐάν $x+\lambda+\mu=0$, ὑπάρχει ρητή τιμή τῆς παραμέτρου λ, διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις:
(E): $(\lambda+\mu)x^2+(\lambda^2+\mu^2+3\lambda\mu+\sqrt{2})x+\lambda^2\mu+\mu^2\lambda-$
$-\lambda(\sqrt{2}+1)+3=0$ ἔχει λύσιν ἐν N;

Ἐπίλυσις: (E) $\Longleftrightarrow (\lambda+\mu)x^2+\lambda^2x+\mu^2x+3\lambda\mu x+x\sqrt{2}+\lambda^2\mu+\mu^2\lambda-$
$-\lambda(\sqrt{2}+1)+3=0 \Longleftrightarrow (\lambda+\mu)x^2+\lambda^2(x+\mu)+\mu^2(x+\lambda)+3\lambda\mu x-$
$-\lambda(\sqrt{2}+1)+x\sqrt{2}+3=0 \Longleftrightarrow -x^3-\lambda^3-\mu^3+3\lambda\mu x-\lambda(\sqrt{2}+1)+$
$+x\sqrt{2}+3=0$ διότι ἐκ τῆς $x+\lambda+\mu=0 \Longrightarrow -x=\lambda+\mu$ καί $-\lambda=$
$=x+\mu$ καί $-\mu=x+\lambda$. Ἐπειδή $x+\lambda+\mu=0 \Longrightarrow -x^3-\lambda^3-\mu^3+$
$+3\lambda\mu x=0$ (ταυτότης Euler ὑπό συνθήκας).
Συνεπῶς (E) $\Longleftrightarrow \lambda(\sqrt{2}+1)-x\sqrt{2}-3=0 \Longleftrightarrow (\lambda-x)\sqrt{2}+(\lambda-3)=0$
Γνωρίζομεν ὅτι ἄν $a, b \in Q$ καί $\gamma\in Q$ καί $\gamma\neq\delta^2, \delta\in Q$,
τότε $a+b\sqrt{\gamma}=0 \Longleftrightarrow a=b=0$.
Ἄρα τελικῶς $(E) \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda-x=0 \\ \lambda-3=0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \lambda=x \\ \lambda=3 \end{Bmatrix}$.

Ὑπάρχει κατά συνέπειαν ρητή τιμή τῆς παραμέτρου $\lambda=3$ διά τήν ὁποίαν $x=3\in N \Longrightarrow A=\{3\}$, διά $\lambda=3$

Π4: Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:
$(E): x^3 - 3(a^2 - b^2)x + 2a(a^2 + 3b^2) = 0 \mid a, b \in R$.

Ἐπίλυσις: Γνωρίζομεν ὅτι: $\left\{\begin{array}{l} a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) \\ (a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2+3b^2) \end{array}\right\}$

Ἄρα $(E) \Longleftrightarrow x^3 + (a+b)^3 + (a-b)^3 = 3(a+b)(a-b)x \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x + a + b + a - b = 0 \ \vee \ x = a + b = a - b \\ \text{(ταυτότης Euler ὑπό συνθήκας)} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{ x = -2a \ \vee [x = a \ \text{ἄν} \ b = 0] \right\} \Longrightarrow A = \{-2a, \text{ ἄν } b \neq 0\}$ ἤ
$A = \{-2a, a, \text{ ἄν } b = 0 \text{ καί } a \neq 0\}$ ἤ $A = \{0\}$ ἄν $a = 0$.

3. Ἐξισώσεις μέ ριζικά.

Π1: Νά ἐπιλυθῇ ἐν R^+ ἡ ἐξίσωσις:
$(E): x^2 - 3x - 3 = 4\sqrt{x}$.

Ἐπίλυσις: $(E) \Longleftrightarrow x^2 - 3x = 3 + 4\sqrt{x} \Longleftrightarrow x(x-3) = \underbrace{3 + 4\sqrt{x}}_{>0} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-3) = 3 + 4\sqrt{x} \\ x(x-3) > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x(x-3) = 3 + 4\sqrt{x} \\ x > 3 \end{array}\right\}$.

Συνεπῶς: $(E) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 3x - 3 = 4\sqrt{x} \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 2x + 1 = \\ = x + 4\sqrt{x} + 4 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^2 = (\sqrt{x}+2)^2 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 1 = \sqrt{x} + 2 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x - 3 = \sqrt{x} \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-3)^2 = x \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 7x + 9 = 0 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left(x - \frac{7+\sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{7-\sqrt{13}}{2}\right) = 0 \\ x > 3 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7+\sqrt{13}}{2} \vee x = \frac{7-\sqrt{13}}{2} \\ x > 3 \end{array}\right\}$
$\Longrightarrow A = \left\{\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Π2: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1): \sqrt{x^2 - 1} = 1 + x$, $(E2): \sqrt{x} + \sqrt{x + 32} = 16$

$(E3): \sqrt{2x + 8} - 2\sqrt{x + 5} = 2$, $(E4): \sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+11}$

$(E5): \left(\frac{10x - 1}{10x + 1}\right)\sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}} = 1$

$(E6): \sqrt{x - 15} - \sqrt{x - 10} = \sqrt{x + 6} - \sqrt{x + 17}$

Επίλυσις: **(E1)** $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x^2-1} = 1+x \\ 1+x \geq 0 \\ x^2-1 \geq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2-1 = (1+x)^2 \\ x-1 \geq 0 \vee x=-1 \end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x = -2 \\ x \geq 1 \ \vee x=-1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 \\ x \geq 1 \vee x=-1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \{-1\}$$

(E2) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x} + \sqrt{x+32} = 16 \\ x > 0 \\ x+32 > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (\sqrt{x} + \sqrt{x+32})^2 = 16^2 \\ x > 0 \\ x+32 > 0 \end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x+x+32+2\sqrt{x(x+32)} = 256 \\ x > 0 \\ x+32 > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x(x+32)} = 112-x \\ x > 0 \\ x+32 > 0 \\ 112-x > 0 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x(x+32) = (112-x)^2 \\ x > 0 \\ x+32 > 0 \\ 112-x > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 256x = 112^2 \\ x > 0 \\ x < 112 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = 49 \Longrightarrow A = \{49\}.$$

(E3) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{2x+8} - 2\sqrt{x+5} = 2 \\ 2x+8 > 0 \\ x+5 > 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{2x+8} - 2\sqrt{x+5} = 2 \\ x > -4 \end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+8+4(x+5) - 4\sqrt{(2x+8)(x+5)} = 4 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x+12 = \\ = 2\sqrt{(2x+8)(x+5)} \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 9x^2+72x+144 = 4(2x+8)(x+5) \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2 = 16 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 4 \ \vee \ x = -4 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow A = \{4\}.$$

(E4) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x+4} + \sqrt{x+20} = 2\sqrt{x+11} \\ x > -4 \\ x > -20 \\ x > -11 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+24+2\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20} = \\ = 4(x+11) \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x+20} = x+10 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} (x+4)(x+20) = (x+10)^2 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 5 \\ x > -4 \end{array}\right\} \Longrightarrow A = \{5\}$$

(E5) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \left(\frac{10x-1}{10x+1}\right)\cdot \sqrt{\frac{2x+1}{1-2x}} = 1 \\ \frac{10x-1}{10x+1} > 0 \ \wedge \ \frac{2x+1}{1-2x} > 0 \\ \wedge \ x \neq \frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq -\frac{1}{10} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{10x-1}{10x+1}\cdot\sqrt{\dfrac{2x+1}{1-2x}}=1 \\ -\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2},\ x<-\dfrac{1}{10},\ x>\dfrac{1}{10} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (10x-1)^2(2x+1)= \\ \left(-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{1}{10}\right)\wedge \end{cases}$$

$$\begin{cases} =(10x+1)^2(1-2x) \\ \wedge\left(\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 400x^3-36x=0 \\ \left(-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{1}{10}\right)\wedge\left(\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x(100x^2-9)=0 \\ \left(-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{1}{10}\right)\wedge\left(\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=0\ \vee x=\dfrac{3}{10}\ \vee \\ \left(-\dfrac{1}{2}<x<-\dfrac{1}{10}\right)\wedge \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vee\ x=-\dfrac{3}{10} \\ \wedge\left(\dfrac{1}{10}<x<\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} \Longrightarrow A=\left\{\pm\dfrac{3}{10}\right\}.$$

$$(E6) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-15}+\sqrt{x+17}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10} \\ x-10\geqq 0,\ x-15\geqq 0,\ x+17\geqq 0,\ x+6\geqq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-15}+\sqrt{x+17}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10} \\ x\geqq 10,\ x\geqq 15,\ x\geqq -17,\ x\geqq -6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-15}+\sqrt{x+17}= \end{cases}$$

$$\begin{cases} =\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10} \\ x\geqq 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{x-15}+\sqrt{x+17}\right)^2=\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-10}\right)^2 \\ x\geqq 15 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x-15+x+17+2\sqrt{(x-15)(x+17)}=x+6+x-10+ \\ \qquad +2\sqrt{(x+6)(x-10)} \\ x\geqq 15 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3+\sqrt{(x-15)(x+17)}=\sqrt{(x+6)(x-10)} \\ x\geqq 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[3+\sqrt{(x-15)(x+17)}\right]^2= \end{cases}$$

$$\begin{cases} =\left[\sqrt{(x+6)(x-10)}\right]^2 \\ x\geqq 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 9+(x-15)(x+17)+6\sqrt{(x-15)(x+17)}=(x+6)(x-10) \\ x\geqq 15 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-15)(x+17)}=31-x \\ x\geqq 15 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left[\sqrt{(x-15)(x+17)}\right]^2=(31-x)^2 \\ x\geqq 15 \\ 31-x\geqq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-15)(x+17)=961+x^2-62x \\ x\geqq 15 \\ x\leqq 31 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=19 \\ x\geqq 15 \\ x\leqq 31 \end{cases} \Longrightarrow A=\{19\}.$$

Π3: Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν $\mathbb{R}$ αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $x+\sqrt{x}=90$

(E2): $\sqrt{x\pm 2}=\sqrt[6]{x^3\pm 8}$

(E3): $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$

(E4): $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}=4.$

(E5): $\sqrt{1-\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}}=1$

(E6): $\sqrt{8x+17-8\sqrt{x^2-16x+64}}=9$

Επίλυσις: **(E1)** $\Longleftrightarrow \sqrt{x}=90-x \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=(90-x)^2 \\ x\geq 0 \wedge 90-x\geq 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=8.100-180x+x^2 \\ x\geqq 0 \\ 90-x\geqq 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2-181x+8100=0 \\ 0\leqq x\leqq 90 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (x-81)(x-100)=0 \\ 0\leqq x\leqq 90 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=81 \vee x=100 \\ 0\leqq x\leqq 90 \end{Bmatrix} \Longrightarrow A=\{81\}.$

(E2) $\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x\pm 2=\sqrt[3]{x^3\pm 8} \\ x\pm 2\geqq 0 \\ x^3\pm 2^3\geqq 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (x\pm 2)^3=x^3\pm 8 \\ x\geqq \mp 2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (x\pm 2)^3-x^3\mp 2^3=0 \\ x\geqq \mp 2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x\cdot 2(x\pm 2)=0 \\ x\geqq \mp 2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Uparrow$

[διότι $(a\pm b)^3-a^3\mp b^3=3ab(a\pm b)$], $\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=0 \vee x=\mp 2 \\ x\geqq \mp 2 \end{Bmatrix}$

$\Longrightarrow A=\{0,-2\}$, διά τό πρόσημον "+" καί $A'=\{2\}$,

διά τό πρόσημον "—"

(E3) $\Longleftrightarrow \sqrt{(x+1)+2\sqrt{x+1}+1}-\sqrt{(x+1)-2\sqrt{x+1}+1}=2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=2 \\ x+1>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} |\sqrt{x+1}+1|-|\sqrt{x+1}-1|= \\ x>-1 \end{Bmatrix}$

$=2\Big\} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{x+1}+1-\sqrt{x+1}+1=2 \\ x>0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} \sqrt{x+1}+1+\sqrt{x+1}-1=2 \\ -1<x\leq 0. \end{Bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 2=2 \\ x>0 \end{Bmatrix} \vee \begin{Bmatrix} \sqrt{x+1}=1 \\ -1<x\leq 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow x>0 \vee x=0 \Longleftrightarrow A\equiv \mathbb{R}_0^+$

(E4) $\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}}=4 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=16 \\ x>0 \end{Bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=3 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 7+\sqrt{3+\sqrt{x}}=9 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{3+\sqrt{x}}=2 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 3+\sqrt{x}=4 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \sqrt{x}=1 \\ x>0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\iff x^2=1 \wedge x>0 \implies A=\{1\}$.

(Ε5) $\iff \left\{\begin{array}{l} 1-\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{x}=1 \\ 1-x\geq 0,\ x\geq 0 \\ 1+\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{1-x}\geq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} \sqrt[4]{x}=\sqrt[4]{1-x} \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \iff$

$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1-x \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 2x=1 \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ 0\leq x\leq 1 \end{array}\right\} \implies A=\left\{\frac{1}{2}\right\}$

(Ε6) $\iff \left\{\begin{array}{l} 8x+17-8\sqrt{x^2-2x\cdot 8+8^2}=81 \\ 8x+17-8\sqrt{x^2-2x\cdot 8+8^2}\geq 0 \end{array}\right\} \iff$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 8x-64=8\sqrt{(x-8)^2} \\ 8(x-\sqrt{(x-8)^2})\geq -17 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x-8=|x-8| \\ 8(x-|x-8|)\geq -17 \end{array}\right\} \iff$

$\iff \left\{\begin{array}{l} x-8\geq 0 \\ x-x+8\geq -\frac{17}{8} \end{array}\right\} \iff x\geq 8 \implies A=[8,+\infty)$.

Π4: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(Ε1): $2x+2\sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{5a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$

(Ε2): $2(a-x)(x+\sqrt{x^2+b^2})=a^2+b^2$

(Ε3): $\sqrt{a^2-x}+\sqrt{b^2+x}=a+b$

(Ε4): $\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}=\sqrt{a+b-2x}$

(Ε5): $\sqrt{a-bx}+\sqrt{\gamma-\delta x}=\sqrt{a+\gamma-(b+\delta)x}$

(Ε6): $\sqrt{x^2+ax+b^2}-\sqrt{x^2-ax+b^2}=2a$

(Ε7): $\sqrt{x^2+ax+a^2}-\sqrt{x^2-ax+a^2}=\sqrt{2a^2-2b^2}$

$(a,b,\gamma,\delta\in R)$.

Ἐπίλυσις: **(Ε1)**: Ἐάν $a=0 \implies$
$(Ε1) \iff 2x+2\sqrt{x^2}=\dfrac{0}{\sqrt{x^2}} \iff$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 2x+2|x|=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x+|x|=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} |x|=-x \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \iff$

$x<0 \implies A=R^-$. Ἐάν $a\neq 0 \implies a^2+x^2>0 \implies (Ε1)$
$\iff 2x\sqrt{a^2+x^2}+2(\sqrt{a^2+x^2})^2=5a^2 \iff$
$\iff 2x\sqrt{a^2+x^2}+(\sqrt{a^2+x^2})^2+x^2=4a^2 \iff$
$\iff (x+\sqrt{a^2+x^2})^2=(2a)^2 \iff \left\{\begin{array}{l} x+\sqrt{a^2+x^2}=2a \vee x+ \\ +\sqrt{a^2+x^2}=-2a \end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \sqrt{a^2+x^2} = 2a - x \quad ① \quad \vee \quad \sqrt{a^2+x^2} = -(2a+x) \quad ② \right.$$

$$(1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2+x^2 = (2a-x)^2 \\ 2a - x \geqq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2+x^2 = 4a^2 - 4ax + x^2 \\ 2a \geqq x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4ax = 3a^2 \\ 2a \geqq x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{3a}{4} \\ 2a \geqq x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{3a}{4} \\ a > 0 \end{array} \right\}.$$

$$(2) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2+x^2 = 4a^2 + 4ax + x^2 \\ 2a + x \leqq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 4ax = -3a^2 \\ x \leqq -2a \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = -\frac{3a}{4} \\ x \leqq -2a \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{3a}{4} \\ a < 0 \end{array} \right\}. \text{ Ἄρα } A = \left\{ \frac{3}{4}|a| \right\} \text{ ἐάν } a \neq 0.$$

(Ε2) $\Longleftrightarrow 2(a-x)x + 2(a-x)\sqrt{x^2+b^2} - a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow$ $2ax - 2x^2 + 2(a-x)\sqrt{x^2+b^2} - a^2 - b^2 = 0 \Longleftrightarrow a^2 - 2ax +$ $x^2 - 2(a-x)\sqrt{x^2+b^2} + x^2 + b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a-x)^2 - 2(a-x)\sqrt{x^2+b^2} +$ $(\sqrt{x^2+b^2})^2 = 0 \Longleftrightarrow (a - x - \sqrt{x^2+b^2})^2 = 0 \Longleftrightarrow a - x = \sqrt{x^2+b^2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (a-x)^2 = x^2 + b^2 \\ a - x \geqq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} a^2 - 2ax + x^2 = x^2 + b^2 \\ a \geqq x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2ax = a^2 - b^2 \\ a \geqq x \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{a^2 - b^2}{2a} \\ a \geqslant 0 \wedge a \neq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{a^2 - b^2}{2a} \\ a > 0 \end{array} \right\}.$$

Ἐάν $a = 0 \Longrightarrow$ (i) $b = 0 \Longrightarrow a^2 + b^2 = 0 \Longrightarrow$ (Ε2) $\Longleftrightarrow -2x(x + \sqrt{x^2}) = 0 \Longleftrightarrow x(x + |x|) = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ \vee$ $\vee\ |x| = -x) \Longleftrightarrow (x = 0 \ \vee \ x < 0) \Longleftrightarrow x \leqq 0.$

ii) $b \neq 0 \Longrightarrow$ (Ε2) $\Longleftrightarrow -2x(x + \sqrt{x^2+b^2}) = b^2 \Longleftrightarrow 2x^2 + 2x \cdot$ $\cdot \sqrt{x^2+b^2} + b^2 = 0 \Longleftrightarrow (\sqrt{x^2+b^2})^2 + 2x\sqrt{x^2+b^2} + x^2 = 0. \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow (\sqrt{x^2+b^2} + x)^2 = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+b^2} = -x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2 + b^2 = x^2 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b^2 = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = 0 \\ x < 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ἄτοπον} \\ \text{διότι} \\ b \neq 0. \end{array}$$

Συνεπῶς: $A = \left\{ \frac{a^2 - b^2}{2a} \right\}$ ἐάν $a > 0$

$A = R_0^-$ ἐάν $a^2 + b^2 = 0$

$A = \emptyset$ ἐάν $a = 0,\ b \neq 0$

$$(E3) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a^2 - x + b^2 + x + 2\sqrt{(a^2-x)(b^2+x)} = a^2+b^2+2ab \\ a^2 - x \geqq 0 \quad , \quad b^2 + x \geqq 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{(a^2-x)(b^2+x)} = ab \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} (a^2-x)(b^2+x) = a^2b^2 \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2 + (b^2-a^2)x - a^2b^2 = -a^2b^2 \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x(x+b^2-a^2) = 0 \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \ \vee \ x+b^2-a^2=0 \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=0 \ \vee \ x=a^2-b^2 \\ -b^2 \leqq x \leqq a^2 \end{matrix}\right\}.$$

Συνεπῶς $A = \{0, a^2 - b^2\}$ ἐάν $a \neq \pm b$

ἤ $A = \{0\}$ ἐάν $a = \pm b$.

$$(E4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a - x + b - x + 2\sqrt{(a-x)(b-x)} = a + b - 2x \\ a - x \geqq 0 \ , \ b - x \geqq 0 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{(a-x)(b-x)} = 0 \\ a \geqq x \ , \ b \geqq x \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} (a-x)(b-x) = 0 \\ a \geqq x, \ b \geqq x \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = a \ \vee \ x = b \\ x \leqq a \ , x \leqq b \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A = \{\min(a,b)\}.$$

$$(E5) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a - bx + \gamma - \delta x + 2\sqrt{(a-bx)(\gamma-\delta x)} = a + \gamma - bx - \delta x \\ a - bx \geqq 0 \ , \ \gamma - \delta x \geqq 0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} (a-bx)(\gamma-\delta x) = 0 \\ a \geqq bx \ , \ \gamma \geqq \delta x \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a - bx = 0 \ \vee \ \gamma - \delta x = 0 \\ a \geqq bx \\ \gamma \geqq \delta x \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} bx = a \ \vee \ \delta x = \gamma \\ bx \leqq a \ , \ \delta x \leqq \gamma \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \frac{a}{b} \ \vee \ x = \frac{\gamma}{\delta} \\ b\delta \neq 0 \wedge x \leqq \min\left(\frac{a}{b}, \frac{\gamma}{\delta}\right) \end{matrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow A = \left\{\min\left(\frac{a}{b}, \frac{\gamma}{\delta}\right)\right\} \text{ ἐάν } b\delta \neq 0.$$

Ἐάν $\beta=0$, $\delta\neq 0$ ἤ $\beta\neq 0$, $\delta=0$ ἔχωμεν

$(E5)\Longleftrightarrow \sqrt{\alpha+\sqrt{\gamma-\delta x}}=\sqrt{\alpha+\gamma-\delta x}\Longleftrightarrow \sqrt{\alpha-\beta x}+\sqrt{\gamma}=$

$\sqrt{\alpha+\gamma-\beta x}$ καί ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

Ἐάν $\beta=\delta=0 \Longrightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha+\gamma-\beta x}$ καί ἐργαζόμεθα ὁμοίως.

Ἐάν $\beta=\delta=0 \Longrightarrow \sqrt{\alpha}+\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha+\gamma} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha+\gamma+2\sqrt{\alpha\gamma}=\alpha+\gamma \\ \alpha\geqq 0 \wedge \gamma\geqq 0\end{array}\right\}$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha\gamma=0 \\ \alpha\geqq 0 \\ \gamma\geqq 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} A\equiv R \text{ ἐάν } (\alpha=0 \wedge \gamma\geqq 0) \vee \\ \vee\ (\alpha\geqq 0 \wedge \gamma=0)\end{array}$$

$$(E6)\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+\alpha x+\beta^2+x^2-\alpha x+\beta^2-2\sqrt{(x^2+\alpha x+\beta^2)(x^2-\alpha x+\beta^2)}=4\alpha^2 \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0,\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+\beta^2-\sqrt{(x^2+\beta^2)^2-\alpha^2x^2}=2\alpha^2 \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0,\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+\beta^2-2\alpha^2=\sqrt{(x^2+\beta^2)^2-\alpha^2x^2} \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0,\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} (x^2+\beta^2)^2-4\alpha^2(x^2+\beta^2)+4\alpha^4=(x^2+\beta^2)^2-\alpha^2x^2 \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0,\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4\alpha^4-4\alpha^2\beta^2=3\alpha^2x^2 \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0 \\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\frac{4}{3}(\alpha^2-\beta^2) \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0 \\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \vee x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\alpha^2-\beta^2} \\ x^2+\alpha x+\beta^2\geqq 0 \\ x^2-\alpha x+\beta^2\geqq 0\end{array}\right\}$$

$$(E7)\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x^2+\alpha x+\alpha^2+x^2-\alpha x+\alpha^2-2\sqrt{(x^2+\alpha x+\alpha^2)(x^2-\alpha x+\alpha^2)}= \\ =2\alpha^2-2\beta^2 \\ x^2+\alpha x+\alpha^2\geqq 0,\ x^2-\alpha x+\alpha^2\geqq 0\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x^2+\beta^2=\sqrt{(x^2+\alpha^2)^2-\alpha^2x^2}\Longleftrightarrow x^4+\beta^4+2\beta^2x^2=x^4+\alpha^4+$$
$$+2\alpha^2x^2-2\alpha^2x^2\Longleftrightarrow (2\beta^2-\alpha^2)x^2=\alpha^4-\beta^4\Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow x^2=\frac{\alpha^4-\beta^4}{2\alpha^2-\beta^2} \quad \text{ἐάν } \beta\neq\pm\alpha\sqrt{2}.$$

Ἐάν $\beta=\pm\alpha\sqrt{2}$ καί $\alpha^4\neq\beta^4 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

Ἐάν $\beta=\pm\alpha\sqrt{2}$ καί $\alpha^4=\beta^4 \Longrightarrow A\equiv R$

4. Γενικώτερα διά τῆς μεθόδου ταύτης ἡ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως $\varphi(x)=0$ (I) ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν ἑνός ἐπαρκοῦς δι' αὐτήν συστήματος συνεπειῶν της, $\varphi_1(x) \underset{<}{\geq} 0 \wedge \varphi_2(x) \underset{<}{\geq} 0 \wedge \dots \wedge \varphi_\nu(x) \underset{<}{\geq} 0$, μέ σύνολα λύσεων $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ ἀντιστοίχως. Τότε σύνολον λύσεων τῆς (I) εἶναι τό

$$A = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_\nu \quad \text{ἤ} \quad A = \bigcap_{i=1}^{\nu} A_i \,.$$

5. ΒΑΣΙΚΑΙ ΜΟΡΦΑΙ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΕΝΑ ΑΓΝΩΣΤΟΝ

Ἔχομεν ἐξετάσει ἤδη μεθόδους διά τῶν ὁποίων ἡ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἕνα ἄγνωστον ἀνάγεται ἀντιστοίχως εἰς τήν ἐπίλυσιν:

I. Μιᾶς ἄλλης ἐξισώσεως ἰσοδυνάμου πρός τήν δοθεῖσαν, εἴτε.

II. Ἑνός πλήρους συστήματος ἱκανῶν συνθηκῶν ἰσοδυνάμου πρός τήν δοθεῖσαν εἴτε

III. Ἑνός ἐπαρκοῦς συστήματος ἀναγκαίων συνθηκῶν ἰσοδυνάμου πρός τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν.

Ἐκ τῶν ἐκτεθέντων εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων I, II, III, εἰς τήν προηγουμένην παράγραφον, εἶναι φανερόν ὅτι ἡ ἐπίλυσις μιᾶς ἐξισώσεως μέ ἕνα ἄγνωστον ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν μιᾶς ἤ περισσοτέρων ἄλλων ἐξισώσεων (περιπτώσεις I καί II) εἴτε εἰς τήν ἐπίλυσιν ἑνός συστήματος ἐξισώσεων ἤ ἐξισώσεων - ἀνισώσεων (περίπτωσις III).

Διά τήν ἐπίλυσιν τώρα ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων εἰς τάς ὁποίας καταλήγομεν ἐκ τῶν I, II, III, ἀπαιτεῖται μία ἰδιαιτέρα διαδικασία ἀναλόγως τῆς μορφῆς τῆς ἐξισώσεως.

Τοιαύτην διαδικασίαν εἴδομεν εἰς τήν παράγραφον 5 κατά τήν ἐπίλυσιν καί διερεύνησιν μιᾶς πρωτοβαθμίου ἐξισώσεως μέ ἕνα ἄγνωστον.

Πᾶσα ἄλλη ἐξίσωσις γνωστῆς μορφῆς ἀνάγεται πάντοτε εἰς τήν ἐπίλυσιν πρωτοβαθμίων ἐξισώσεων, ἰδιαιτέρως δέ εἰς τό παρόν, ὅπου σύνολον ἀναφορᾶς τῶν ἐξεταζομένων ἐξισώσεων θεωροῦμεν τό R.

Ἐν τούτοις ἀναγράφομεν κατωτέρω καί τάς λοιπάς γνωστάς μορφάς ἐξισώσεων μέ ἕνα ἄγνωστον, καθώς καί τήν διαδικασίαν ἐπιλύσεως ἑκάστης (περιληπτικῶς).

1. Δευτεροβάθμιοι ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον. ($a, b, \gamma \in R$.)

E1) $ax^2+\gamma=0$, $a\neq 0$
E2) $ax^2+bx=0$, $a\neq 0$
} (ἐλλιπεῖς μορφαί).

E3) $ax^2+bx+\gamma=0$, $a\neq 0$ (πλήρης μορφή).

Διαδικασία ἐπιλύσεως τῶν ἀνωτέρω ἐξισώσεων.

$(E1) \Longleftrightarrow ax^2=-\gamma \Longleftrightarrow x^2=-\frac{\gamma}{a} \Longrightarrow$

i) Ἐάν $a\gamma \leq 0$ (a,γ ἑτερόσημοι ἤ $\gamma=0$) $\Longrightarrow (E1) \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$

ii) Ἐάν $a\gamma>0$ (a,γ ὁμόσημοι) $\Longrightarrow$ (E1) ἀδύνατος ἐν R.
(Ἐπιλύσιμος ὅμως ἐν C μέ ρίζας
$x_{1,2}=\pm i\sqrt{\frac{\gamma}{a}}$, $i=\sqrt{-1}$).

$(E2) \Longleftrightarrow x(ax+b)=0 \Longleftrightarrow x_1=0 \vee x_2=-\frac{b}{a}$

$(E3) \Longleftrightarrow x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ (ὅπου $\Delta=b^2-4a\gamma$) $\Longrightarrow$

i) Ἐάν $\Delta\geq 0 \Longrightarrow x_{1,2}\in R$

ii) Ἐάν $\Delta<0 \Longrightarrow$ (E3) ἀδύνατος ἐν R.
(Ἐπιλύσιμος ὅμως ἐν C μέ ρίζας $x_{1,2}=\frac{-b\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$)

Παρατηρήσεις:

(a) Αἱ (E1) καί (E2) ἐπιλύονται προφανῶς καί δι' ἐφαρμογῆς τοῦ γενικοῦ τύπου ἐπιλύσεως τῆς (E3).

(b) Ἐάν εἰς τήν (E3) ὁ συντελεστής τοῦ πρωτοβαθμίου ὅρου bx, εἶναι τῆς μορφῆς $b=2b$, $b\in R$ τότε δυνάμεθα νά ἐφαρμόσωμεν τόν ἁπλοποιημένον τύπον τοῦ ἡμίσεως διά τήν ἐπίλυσιν αὐτῆς ἤτοι $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-a\gamma}}{a}$

(γ) Ἡ (E3) εἶναι ὡς εἴδομεν ἐπιλύσιμος ἐν R ἐάν $\Delta \geq 0$.
Ἡ συνθήκη αὕτη ἐξασφαλίζεται πολλάκις ἄνευ ὑπολογισμοῦ τῆς διακρινούσης Δ καί μάλιστα εἰς τάς κάτωθι περιπτώσεις.

i) Ἐάν $a\gamma \leq 0$

ii) Ἐάν γνωρίζωμεν ὅτι $|x_1| \neq |x_2|$ ($x_{1,2}$ αἱ ρίζαι τῆς E3)

iii) Ἐάν ὑπάρχῃ $\xi \in R: a\varphi(\xi) \leq 0$ ὅπου $\varphi(x) = ax^2 + bx + \gamma$ (1) ἤ $\varphi(x)$ τό πρῶτον μέλος μιᾶς ἐξισώσεως δευτέρου βαθμοῦ (μέ δεύτερον μέλος μηδέν) τό ὁποῖον ὅμως δέν ἔχει αναχθῆ εἰς τήν τελικήν μορφήν (1).

iv) Ἐάν ὑπάρχουν δύο πραγματικοί ἀριθμοί ξ_1, ξ_2 διά τάς ὁποίους ἰσχύει: $\varphi(\xi_1)\varphi(\xi_2) \leq 0$.

v) Ἐάν $a = \gamma$ καί $b \notin (-2|a|, 2|a|)$.

π.χ. (περίπτωσις iii). Διά τήν $(x-\lambda)(x-\mu) = k^2$, $k, \lambda, \mu \in R - \{0\}$: $\Longrightarrow \varphi(x) = (x-\lambda)(x-\mu) - k^2 \Longrightarrow \left.\begin{array}{l}\varphi(\lambda) = -k^2 \\ a = 1\end{array}\right\} \Longrightarrow$

$a\varphi(\lambda) = -k^2 < 0 \Longrightarrow x_{1,2} \in R$.

(περίπτωσις iv) Διά τήν $(x-2)(x+3)+(x+2)(x-3) = (2-x)(3-x) \Longrightarrow \varphi(x) = (x-2)(x+3)+(x+2)(x-3) - (2-x)(3-x) \Longrightarrow \varphi(2) = -4 \wedge \varphi(3) = 6 \Longrightarrow \varphi(2)\varphi(3) = -24 < 0 \Longrightarrow x_{1,2} \in R$.

2. Διτετράγωνοι ἐξισώσεις.

Ἡ τελική μορφή διτετραγώνου ἐξισώσεως εἶναι: (E): $ax^4 + bx^2 + \gamma = 0$ καί ἐπιλύεται διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $y = x^2$ ὁπότε.
(E) $\Longleftrightarrow ay^2 + by + \gamma = 0$ (ἐπιλύουσα τῆς (E)),
εἴτε διά τοῦ τύπου: $x = \pm\sqrt{\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}}$.

3. Διώνυμοι ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον.

Διώνυμος εἶναι κάθε ἐξίσωσις μέ ἀνηγμένην μορφήν (E): $ax^{\kappa}+bx^{\lambda}=0$ μέ $a, b \in R-\{0\}$, $\kappa, \lambda \in N$ $\kappa \neq \lambda$. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι $\kappa > \lambda$ καί θέσωμεν $\kappa-\lambda=\nu$, $\frac{b}{a}=\rho$ τότε

$$(E) \Longleftrightarrow ax^{\lambda}(x^{\nu}+\rho)=0 \Longleftrightarrow x^{\lambda}=0 \vee x^{\nu}+\rho=0$$
$\Longleftrightarrow x=0$ (βαθμοῦ πολλαπλότητος λ) $\vee\, x=\sqrt[\nu]{-\rho}$.

Διά τήν ἐπίλυσιν της $x^{\nu}+\rho=0$, διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

i) $\rho>0$., $x^{\nu}-\rho=0$. Ἡ ἐξίσωσις γράφεται:
$x^{\nu}=\rho=\rho[\text{συν.}\ 2\kappa\pi+i\ \text{ημ.}\ 2\kappa.\pi.]$, $\kappa\in Z$.

Ἐάν μέ $\sqrt[\nu]{\rho}$ συμβολίσωμεν τήν πρωτεύουσαν νιοστήν ρίζαν τοῦ ρ, δι' ἐφαρμογῆς τοῦ τύπου, τοῦ Μοίνρε διά κλασματικόν ἐκθέτην εὑρίσκομεν $x=\sqrt[\nu]{\rho}\left(\text{συν}\frac{2\kappa.\pi}{\nu}+i\ \text{ημ}\frac{2\kappa\pi}{\nu}\right)$, ὅπου
$\kappa=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$.

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχει μίαν πραγματικήν ρίζαν ὅταν τό ν εἶναι περιττός καί εὑρίσκεται ὅταν τό $\kappa=0$.
Ἐάν δέ τό ν εἶναι ἄρτιος ἔχει δύο ἀντιθέτους πραγματικάς ρίζας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τάς τιμάς τοῦ $\kappa=0$, $\frac{\nu}{2}$

ii) $\rho>0$, $x^{\nu}+\rho=0$: Ἡ ἐξίσωσις γράφεται:

$x^{\nu}=-\rho=\rho\,[\text{συν}(2\kappa+1)\pi+i\ \text{ημ.}(2\kappa+1)\pi]$, ὅπου

$\kappa\in Z$. Συνεπῶς: $x=\sqrt[\nu]{\rho}\left[\text{συν.}\frac{(2\kappa+1)\pi}{\nu}+i\ \text{ημ}\frac{(2\kappa+1)\pi}{\nu}\right]$

$\kappa=0, 1, 2, \ldots, (\nu-1)$. Ἡ ἐξίσωσις ἔχει μίαν πραγματικήν ρίζαν ὅταν τό ν εἶναι περιττός, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τό $\kappa=\frac{\nu-1}{2}$ καί καμμίαν ὅταν τό ν εἶναι ἄρτιος.

4. Τριώνυμοι ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον.

Ὀνομάζομεν τριώνυμον ἐξίσωσιν κάθε ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $Ax^{\kappa}+Bx^{\lambda}+\Gamma x^{\mu}=0$ ὅπου $AB\Gamma\neq 0$,

$\kappa, \lambda, \mu \in N$ καί τά A, B, Γ συντελεσταί μή περιέχουσαι τόν ἄγνωστον.

Ἐπίλυσις: Ἐάν $\kappa - \lambda = \lambda - \mu = \nu \Longrightarrow \lambda = \mu + \nu, \kappa = \mu + 2\nu$

ὁπότε $A x^{\kappa} + B x^{\lambda} + \Gamma x^{\mu} = 0 \Longleftrightarrow A x^{\mu+2\nu} + B x^{\mu+\nu} +$

$+ \Gamma x^{\mu} = 0 \Longleftrightarrow x^{\mu}(A x^{2\nu} + B x^{\nu} + \Gamma) = 0$ ἐξ οὗ $x^{\mu} = 0$

$\Longleftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_\mu = 0$ ἤ $A x^{2\nu} + B x^{\nu} + \Gamma = 0 \Longleftrightarrow$

$A y^2 + B y + \Gamma = 0$ ἐάν ἐκτελέσωμεν τόν M: $x^{\nu} = y$.

5. Ἀντίστροφοι ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον.

Ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = 0$ καλεῖται ἀντίστροφος, ὅταν, ἔχουσα ὡς ρίζαν τόν ἀριθμόν $\rho \neq \pm 1$, ἔχῃ ὡς ρίζαν καί τόν ἀριθμόν $\frac{1}{\rho}$ $(\rho \neq 0)$ καί μάλιστα μέ τόν αὐτόν βαθμόν πολλαπλότητος. Ἀποδεικνύεται ὅτι: Ἀναγκαία καί ἱκανή συνθήκη, ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = 0$ εἶναι ἀντίστροφος εἶναι οἱ συντελεσταί τῶν ὅρων αὐτῆς, οἱ ἰσάκις τῶν ἄκρων ἀπέχοντες, νά εἶναι ἴσοι ἤ ἀντίθετοι. (Βλέπε Μαθηματικά Δ^{ης} τάξεως παράγραφος 115 καί Ἄλγεβρα Ι. Καντᾶ παράγραφος 81).

Ἐπίλυσις ἀντιστρόφων ἐξισώσεων.

i. $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \Longleftrightarrow (ax^3 + a) + (bx^2 + bx) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a(x^3+1) + bx(x+1) \Longleftrightarrow a(x+1)(x^2 - x + 1) + bx(x+1) = 0$
$\Longleftrightarrow (x+1)\left[ax^2 + (b-a)x + a\right] = 0 \Longrightarrow x + 1 = 0 \vee ax^2 +$

$+ (b-a)x + a = 0 \dots$

ii. $ax^3 + bx^2 - bx - a = 0 \Longleftrightarrow a(x^3 - 1) + bx(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow a(x-1)(x^2 + x + 1) + bx(x-1) = 0 \Longleftrightarrow (x-1)\left[a^2x + (a+b)x +\right.$
$\left.+ a\right] = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0 \vee ax^2 + (a+b)x + a = 0 \dots$

iii. $ax^4 + bx^3 - bx - a = 0 \Longleftrightarrow (ax^4 - a) + (bx^3 - bx) = 0$
$\Longleftrightarrow a(x^4 - 1) + bx(x^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow a(x^2+1)(x^2-1) +$
$+ bx(x^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow (x^2 - 1)(ax^2 + bx + a) = 0 \Longrightarrow$
$x^2 - 1 = 0 \vee ax^2 + bx + a = 0 \dots$

iv. $ax^4 + bx^3 + \gamma x^2 + bx + a = 0 \xLeftrightarrow{(\text{διαιρῶ διά } x^2, x \neq 0)}$

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma+\frac{\beta}{x}+\frac{\alpha}{x^2}=0 \Longleftrightarrow \alpha\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+$$
$$+\beta\left(x+\frac{1}{x}\right)+\gamma=0 \xLeftrightarrow{x+\frac{1}{x}=\omega} \alpha(\omega^2-2)+\beta\omega+\gamma=0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow \omega=\omega_1$ καί $\omega=\omega_2$, ὁπότε ἔχομεν νά λύσωμεν τάς δύο δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις $x+\frac{1}{x}=\omega_1$

καί $x+\frac{1}{x}=\omega_2$ . . .

V. $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \Longleftrightarrow (\alpha x^5+\alpha)+$
$+(\beta x^4+\beta x)+(\gamma x^3+\gamma x^2)=0 \Longleftrightarrow \alpha(x^5+1)+\beta x(x^3+1)+$
$+\gamma x^2(x+1)=0 \Longleftrightarrow \alpha(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)+$
$+\beta x(x+1)(x^2-x+1)+\gamma x^2(x+1)=0 \Longleftrightarrow (x+1)(\alpha x^4-$
$-\alpha x^3+\alpha x^2-\alpha x+\alpha+\beta x^3-\beta x^2+\beta x+\gamma x^2)=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x+1)\left[\alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+(\beta-\alpha)x+\alpha\right]=0$
$\Longrightarrow x+1=0 \vee \alpha x^4+(\beta-\alpha)x^3+(\alpha-\beta+\gamma)x^2+$
$+(\beta-\alpha)x+\alpha=0$ . . .

VI. $\alpha x^5+\beta x^4+\gamma x^3-\gamma x^2-\beta x-\alpha=0 \Longleftrightarrow \alpha(x^5-1)+\beta x(x^3-1)+$
$+\gamma x^2(x-1)=0 \Longleftrightarrow (x-1)\left[\alpha(x^4+x^3+x^2+x+1)+\beta x(x^2+\right.$
$\left.+x+1)+\gamma x^2\right]=0 \Longleftrightarrow (x-1)(\alpha x^4+\alpha x^3+\alpha x^2+\alpha x+$
$+\alpha+\beta x^3+\beta x^2+\beta x+\gamma x^2)=0 \Longleftrightarrow (x-1)\left[\alpha x^4+(\alpha+\beta)x^3+\right.$
$\left.+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\right]=0 \Longleftrightarrow x-1=0 \vee \alpha x^4+$
$+(\alpha+\beta)x^3+(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha=0$ . . .

VII. $\alpha x^6+\beta x^5+\gamma x^4+\delta x^3-\gamma x^2+\beta x-\alpha=0 \xLeftrightarrow{\text{διαιρῶ διά } x^3,\, x\neq 0}$
$$\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta-\frac{\gamma}{x}+\frac{\beta}{x^2}-\frac{\alpha}{x^3}=0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\beta\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\gamma\left(x-\frac{1}{x}\right)=0.$$

Ἐκτελοῦμεν τόν Μ: $x-\frac{1}{x}=y$ καί συνεχίζομεν κατά τά γνωστά.

VIII. $ax^6+\beta x^5+\gamma x^4-\gamma x^2+\beta x-a=0$.

Λύεται ὡς ἡ προηγουμένη.

IX. $ax^6+\beta x^5+\gamma x^4+\gamma x^2-\beta x+a=0 \Longleftrightarrow a(x^6+1)+$
$+\beta x(x^4-1)+\gamma x^2(x^2+1)=0 \Longleftrightarrow (x^2+1)\left[a(x^4-x^2+1)+\right.$
$\left.+\beta x(x^2-1)+\gamma x^2\right]=0 \Longleftrightarrow$ καί εἶναι ἰσοδύναμος μέ τό ζεῦγος τῶν ἐξισώσεων $x^2+1=0$ καί $a(x^4-x^2+1)+\beta x(x^2-1)+\gamma x^2=0\ldots$

X. Μία εἰδική μορφή (ὄχι ἀντίστροφος):

$$ax^4+\beta x^3+\gamma x^2-\beta x+a=0 \xLeftrightarrow{(\text{διαιρῶ διά } x^2,\ x\neq 0)}$$
$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\beta\left(x-\frac{1}{x}\right)+\gamma=0 \xLeftrightarrow{x-\frac{1}{x}=y} a(y^2+2)+$$
$$+\beta y+\gamma=0 \Longleftrightarrow ay^2+\beta y+2a+\gamma=0.$$

Εὑρίσκομεν γενικῶς δύο ρίζας y_1, y_2 καί λύομεν τάς δευτεροβαθμίους ἐξισώσεις:

$$x-\frac{1}{x}=y_1\ ,\quad x-\frac{1}{x}=y_2\ \ldots$$

6. Ἡ ἐπίλυσις τῆς <u>γενικῆς ἐξισώσεως τρίτου καί τετάρτου βαθμοῦ</u> ἐκφεύγει τῶν ὁρίων τοῦ παρόντος. Πρός ἐπίλυσιν δέ τοιούτων ἐξισώσεων εἰς τά παρακάτω εἴτε παραγοντοποιοῦμεν τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης εἴτε χρησιμοποιοῦμεν γνωστές ταυτότητες.

7. Ἐξισώσεις μέ ἀπόλυτα (Βλέπε Μαθηματικά Ε΄ τάξεως παράγραφος 42 - παράγραφος 45).

8. Ἄρρητοι ἐξισώσεις μέ ἕνα ἄγνωστον (ἤ ἐξισώσεις μέ ριζικά) [Βλέπε Μαθηματικά Δ΄ τάξεως παράγραφος 119 - παράγραφος 121].

9. Ἐκτός ἀπό μίαν περίπτωσιν ἐκθετικῶν ἐξισώσεων τῆς μορφῆς $[\varphi(x)]^{\sigma(x)} = 1$ ἥ ὁποία ἐμελετήθη ἀνωτέρω, δέν ἐξετάζονται αἱ λοιπαί μορφαί ἐκθετικῶν ἐξισώσεων καθώς καί αἱ λογαριθμικαί ἐξισώσεις.

10. Ἐξισώσεις εἰς τάς ὁποίας ἐμφανίζεται τό ἀκέραιον μέρος τοῦ ἀγνώστου.

Ἰσχύει τό θεώρημα: $\forall\, x \in R$, $\exists$ ἕνας καί μόνον ἕνας ἀκέραιος a τοιοῦτος ὥστε, $a \leq x < a+1$.

Ὁ μονοσημάντως ὡρισμένος $a \in Z$ καλεῖται ἀκέραιον μέρος τοῦ x καί συμβολίζεται:

$[x]$ ἤ $E(x)$ ἤ $A\kappa(x)$, δηλαδή $[x] \leq a < [x]+1$.

Κατά ταῦτα ἀκέραιον μέρος τοῦ 2 εἶναι τό 2 ἤτοι $[2]=2$, $[-3]=-3$, $[3,14]=3$, $[\sqrt{3}]=1$, $[-2,5]=-3$, $[-0,1]=-1$.

Κατά τόν ὁρισμόν διά πάντα πραγματικόν ἀριθμόν x εἶναι: $x=[x]+\varepsilon$ ὅπου $0 \leq \varepsilon < 1$ καί

$$[x] \leq x < [x]+1 \iff 0 \leq x-[x] < 1 \quad \text{καί}$$

$$x-1 < [x] \leq x.$$

Τό ἴσον ὑφίσταται μόνον ὅταν τό x εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός.

∂1. Ἄν $x \in R$ καί $\lambda \in Z \Longrightarrow [x+\lambda] = \lambda + [x]$

∂2. Ἄν $x \in R \Longrightarrow [x]+[-x] = 0$ ἤ -1 καθόσον ὁ $x \in Z$ ἤ $x \notin Z$.

∂3. Ἄν $x_1, x_2 \in R \Longrightarrow [x_1+x_2] \geq [x_1]+[x_2]$

∂4. Ἄν $x_1, x_2 \in R \Longrightarrow [x_1]-[x_2] \geq [x_1-x_2]$

∂5. $\left[\frac{x}{\nu}\right] = \left[\frac{[x]}{\nu}\right]$, $x \in R \wedge \nu \in N$.

Διακρίνομεν τάς κάτωθι μορφάς ἐξισώσεων ἀκεραίου μέρους.

Α. Ἐξισώσεις ἀναγόμεναι εἰς τήν μορφήν

(E): $\varphi([x]) = 0$, ὅπου $\varphi([x])$ ἀκέραιον πολυώνυμον τοῦ $[x]$ μέ πραγματικούς συντελεστάς.

Διά τήν ἐπίλυσιν τῆς (E) ἔχομεν:

$(E) \xLeftrightarrow{[x]=y} \varphi(y) = 0 \ (1) \mid \mathcal{D} \equiv Z.$

Ἔστω y_1 μία δεκτή λύσις τῆς (1) (ἤτοι $y_1 \in Z$), Ἔχομεν τότε $x = [x]+\partial \mid 0 \leq \partial < 1 \Longrightarrow x = y_1 + \partial \mid 0 \leq \partial < 1$

$\iff y_1 \leq x < y_1+1 \Longrightarrow A_1 = [y_1, y_1+1).$

Ἐάν συνεπῶς $A' = \{y_1, y_2, \ldots, y_\nu\}$ εἶναι τό σύνολον λύσεων τῆς (1), τότε σύνολον λύσεων τῆς (E) εἶναι τό: $A = [y_1, y_1+1) \cup [y_2, y_2+1) \cup \ldots \cup [y_\nu, y_\nu+1)$.

Β. Εξισώσεις αναγόμεναι εις την μορφήν:

(Ε): $\varphi(x,[x])=0$, όπου $\varphi(x,[x])$ ακέραιον πολυώνυμον των x, $[x]$ με πραγματικούς συντελεστάς.

Διά την επίλυσιν της (Ε) έχομεν $x=[x]+\partial \mid 0\leq\partial<1$

$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \varphi([x]+\partial,[x])=0 \mid 0\leq\partial<1 \xLeftrightarrow{[x]=y} \varphi(y,\partial)=0$

$\left| \begin{array}{l} 0\leq\partial<1 \\ \mathcal{D}\equiv Z \end{array} \right. \Longleftrightarrow y=\sigma(\partial) \left| \begin{array}{l} \mathcal{D}\equiv Z \\ 0\leq\partial<1 \end{array} \right.$ (1)

Λόγω του περιορισμού $0\leq\partial<1 \Longrightarrow \exists\ a,b\in R$:

$a\leq\sigma(\partial)\leq b$ (2) (του "=" ισχύοντος μόνο εις την μίαν των ανισοτήτων (2) έστω εις την πρώτην) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a\leq y<b \\ y\in Z \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y=y_1 \vee y=y_2 \vee \cdots \vee y=y_\nu \\ y_1, y_2, \ldots, y_\nu \in Z\cap[a,b) \end{array} \right\}$

Τότε έχομεν:

Διά $y=y_1 \Longrightarrow \sigma(\partial)=y_1 \Longleftrightarrow \partial=\partial_1 \Longrightarrow x_1=y_1+\partial_1 \mid 0\leq\partial_1<1$

Διά $y=y_2 \Longrightarrow \sigma(\partial)=y_2 \Longleftrightarrow \partial=\partial_2 \Longrightarrow x_2=y_2+\partial_2 \mid 0\leq\partial_2<1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Διά $y=y_\nu \Longrightarrow \sigma(\partial)=y_\nu \Longleftrightarrow \partial=\partial_\nu \Longrightarrow x_\nu=y_\nu+\partial_\nu \mid 0\leq\partial_\nu<1$

Γ. Εξισώσεις της μορφής:

(Ε): $[a_1x+b_1]\pm[a_2x+b_2]\pm\ldots\pm[a_\nu x+b_\nu]=a$

Διά την επίλυσιν της (Ε) διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1) $a\notin Z \Longrightarrow A\equiv\varnothing$ (διατί;)

2) $a\in Z$. Τότε έχομεν:

(α) Ἐάν ὑπάρχουν $\lambda \in N$ μέ $1 \leq \lambda \leq \nu : b_\lambda \in Z \Longrightarrow$

$\Longrightarrow [a_\lambda x + b_\lambda] \overset{(\partial 1)}{=\!=} [a_\lambda x] + b_\lambda$.

(β) Ἐάν ὑπάρχουν $b_i \notin Z$, $i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ τότε δυνάμεθα νά ὑποθέσωμεν (χωρίς βλάβην τῆς γενικότητος) ὅτι $0 < b_i < 1$, διότι ἐάν $0 < b_i = b, y_1 y_2 \ldots$, ὅπου b φυσικός καί $y_1, y_2, \ldots$, ψηφία ἐκ τῶν $0, 1, 2, \ldots, 9$ ὄχι ὅλα 0 ἤ 9, τότε $b_i = b + 0, y_1 y_2 \ldots = b + b_i'$ μέ $0 < b_i' < 1 \Longrightarrow$

$[a_i x + b_i] = [a_i x + b + b_i'] \overset{(\partial 1)}{=\!=} [a_i x + b_i'] + b$.

Ἐάν ὑπάρχουν $b_i = -b, y_1 y_2 y_3 \ldots < 0$, $b \in N$ καί $y_1, y_2, y_3, \ldots$ ὡς καί προηγουμένως, τότε $b_i = -b - 0, y_1 y_2 \ldots = -(b+1) + (1 - 0, y_1 y_2 \ldots) = -(b+1) + b_i'$ μέ $0 < b_i' < 1 \Longrightarrow$

$[a_i x + b_i] \overset{(\partial 1)}{=\!=} [a_i x + b_i'] - (b+1)$.

Ἐν συνεχείᾳ ἔχομεν:

(i) Ἐάν $a_k \in Z$, $k = 1, 2, \ldots, \nu$ τότε $x = [x] + \partial \,|\, 0 \leq \partial < 1$ ὁπότε $\forall\ k = 1, 2, \ldots, \nu \Longrightarrow a_k x = a_k [x] + a_k \partial \,|\, 0 \leq \partial < 1$

$\Longrightarrow [a_k x + b_k] = [a_k [x] + a_k \partial + b_k] \overset{(\partial 1)}{=\!=} a_k [x] + [a_k \partial + b_k]$ μέ:

$b_k \leq a_k \partial + b_k < a_k + b_k$ ἐάν $a_k > 0 \Longrightarrow [a_k \partial + b_k] = 0$ ἤ 1 ἤ 2 ἤ $\ldots$ ἤ a_k διότι $0 < b_k < 1$

ἤ $a_k + b_k < a_k \partial + b_k \leq b_k$ ἐάν $a_k < 0 \Longrightarrow [a_k \partial + b_k] = a_k$ ἤ $a_k + 1$ ἤ $\ldots$ ἤ -1 ἤ 0.

Συνεπῶς ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις γίνεται· (ἐξετάζομεν τήν περίπτωσιν μέ τά +. Αἱ λοιπαί περιπτώσεις ἐξετάζονται ὁμοίως).

$$(E) \Longleftrightarrow (a_1+a_2+\cdots+a_\nu)[x]+\sum_{\kappa=1}^{\nu}[a_\kappa\partial+b_\kappa]=a \Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa\right)[x]=a-\sum_{\kappa=1}^{\nu}[a_\kappa\partial+b_\kappa] \qquad (1) \Longrightarrow$$

$$(a):\ [x]=\frac{a-\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}[a_\kappa\partial+b_\kappa]}{\sum\limits_{\kappa=1}^{\nu}a_\kappa} \quad \text{ἐάν} \quad \sum_{\kappa=1}^{\nu}a_\kappa\neq 0 .$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω τιμῶν τοῦ $[x]$ εἶναι δεκταί μόνον αἱ ἀκέραιαι, δηλαδή μόνον ἐκεῖναι διά τάς ὁποίας ὑπάρχουν συνδυασμοί τιμῶν τῶν $[a_\kappa\partial+b_\kappa]$, οἱ ὁποῖοι καθιστοῦν τό β΄ μέλος τῆς ἀνωτέρω ἀκέραιον ἀριθμόν.

Ἔστω ὅτι τό σύνολον λύσεων τῆς ἀνωτέρω εἶναι $A'=\{p_1, p_2, \cdots, p_\mu\}\subset Z$.

Τότε πρός εὕρεσιν τοῦ x ἐργαζόμεθα διά κάθε λύσιν ἐκ τοῦ A' ὡς ἑξῆς:

Ἔστω $p_i \in A'$ $(i=1,2,\cdots,\mu)$, λαμβανόμενον διά ἕνα κάποιον συνδυασμόν τιμῶν $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_\nu)$ τῶν $[a_\kappa\partial+b_\kappa]$ $\kappa=1,2,\cdots,\nu$ τότε ἔχομεν τό σύστημα:

$$\left\{\begin{array}{l} x=p_i+\partial \\ [a_1\partial+b_1]=\varepsilon_1 \\ [a_2\partial+b_2]=\varepsilon_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \\ [a_\nu\partial+b_\nu]=\varepsilon_\nu \\ 0\leq\partial<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=p_i+\partial \\ \varepsilon_1\leq a_1\partial+b_1<\varepsilon_1+1 \\ \varepsilon_2\leq a_2\partial+b_2<\varepsilon_2+1 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \varepsilon_\nu\leq a_\nu\partial+b_\nu<\varepsilon_\nu+1 \\ \qquad 0\leq\partial<1 \end{array}\right\}$$

$$\overset{a_i>0\,\forall i=1,\dots,\nu}{\Longleftrightarrow}\left\{\begin{bmatrix} x=\rho_i+\partial \\ \partial_1\leq\partial<\partial_1+\frac{1}{a_1} \\ \partial_2\leq\partial<\partial_2+\frac{1}{a_2} \\ \vdots \quad \vdots \\ \partial_\nu\leq\partial<\partial_\nu+\frac{1}{a_\nu} \\ 0\leq\partial<1\end{bmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{bmatrix}\text{όπου } \partial_i=\frac{\varepsilon_i-b_i}{a_i} \\ \forall\ i=1,2,\dots,\nu. \\ \text{Αναλόγως εργαζόμεθα} \\ \text{εάν } a_i<0\ \forall\ i=1,2,\dots,\nu \\ \text{ή μερικά } a_i \text{ θετικά} \\ \text{καί τά υπόλοιπα} \\ \text{αρνητικά.}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l} x=\rho_i+\partial \\ \max\left(\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_\nu,0\right)\leq\partial<\min\left(\partial_1+\frac{1}{a_1},\dots,\partial_\nu+\frac{1}{a_\nu},1\right)\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\rho_i+\max(\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_\nu,0)}_{x_i}\leq x<\underbrace{\rho_i+\min\left(\partial_1+\frac{1}{a_1},\dots,\partial_\nu+\frac{1}{a_\nu},1\right)}_{x_i'}$$

$$\leq x <$$

Συνεπώς: $\forall\ \rho_i\in A' \Longrightarrow A_i=[x_i,x_i')$.

Άρα $A=[x_1,x_1')\cup[x_2,x_2')\cup\dots\cup[x_\mu,x_\mu')$.

(β) Εάν $\sum_{k=1}^{\nu}a_k=0$ τότε: εάν υπάρχουν συνδυασμοί τιμών τών $[a_k\partial+b_k]$ ούτως ώστε $a-\sum_{k=1}^{\nu}[a_k\partial+b_k]=0$ (2).

Η (1) γίνεται $0[x]=0 \Longrightarrow A'\equiv Z$ οπότε εργαζόμενοι ακριβώς ώς καί είς τήν προηγουμένην περίπτωσιν έχομεν: $x=\lambda+\partial$ όπου λ τυχών ακέραιος καί

$$\max\left(\partial_1,\partial_2,\dots,\partial_\nu,0\right)\leq\partial<\min\left(\partial_1+\frac{1}{a_1},\dots,\partial_\nu+\frac{1}{a_\nu},1\right).$$

Εάν όμως δέν υπάρχουν συνδυασμοί τιμών τών $[a_k\partial+b_k]$ διά τούς οποίους νά ισχύη ή (2).

Τότε ή (1) γίνεται $0[x]=a-\sum_{k=1}^{\nu}[a_k\partial+b_k]\neq0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A'\equiv\phi \Longrightarrow A\equiv\phi$. (ήτοι (Ε) αδύνατος).

(ii) Ἐάν ὑπάρχουν $\kappa \in \{1,2,\dots,\nu\}$ διά τά ὁποῖα $a_\kappa \notin Z$, ἀλλά $a_\kappa \in Q$, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:
Ἔστω $0 < \varepsilon =$ Ε.Κ.Π. (παρονομαστῶν τῶν $a_\kappa | \kappa = 1,2,\dots,\nu$).
Τότε ἕκαστον τῶν $[a_\kappa x + b_\kappa]$, $\kappa = 1,2,\dots,\nu$ γίνεται:
$[a_\kappa x + b_\kappa] = [a_\kappa \varepsilon \frac{x}{\varepsilon} + b_\kappa] = [a'_\kappa \psi + b_\kappa]$ ὅπου $a'_\kappa = (a_\kappa \varepsilon) \in Z$
καί $y = \frac{x}{\varepsilon}$ ὁπότε:

$(E) \Longleftrightarrow [a'_1 y + b_1] \pm [a'_2 y + b_2] \pm \dots \pm [a'_\nu y + b_\nu] = a \; (E')$ μέ
τά $a'_1, a'_2, \dots, a'_\nu \in Z$ ἤτοι ἐξίσωσις τῆς μορφῆς
(i) ἐπιλυομένη κατά τά ἐκεῖ ἐκτεθέντα. Οὕτω ἐάν
π.χ. $[y_i, y'_i)$ εἶναι ἕνα διάστημα λύσεων τῆς (E')
δηλαδή $y_i \leq y < y'_i$ τότε θά ἔχωμεν:

$$y_i \leq \frac{x}{\varepsilon} < y'_i \overset{(\varepsilon>0)}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\varepsilon y_i}_{\shortparallel} \leq x < \underbrace{\varepsilon y'_i}_{\shortparallel}$$

$$\Longleftrightarrow x_i \leq x < x'_i \dots$$

Δ. Ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$\varphi(x, [a_\kappa x + b_\kappa]) = 0$, $\kappa = 1,2,\dots,\nu$, ὅπου
$\varphi(x, [a_\kappa x + b_\kappa])$ ἀκέραιον πολυώνυμον τῶν
x, $[a_\kappa x + b_\kappa]$.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἔχομεν συνδυασμόν τῶν περιπτώσεων Β καί Γ. Δηλαδή, ἐργαζόμεθα κατ' ἀρχήν ὡς εἰς τήν περίπτωσιν Γ, καί ἔχομεν: $\begin{Bmatrix} x = [x] + \vartheta \\ 0 \leq \vartheta < 1 \end{Bmatrix} \wedge$ διά κάθε $\kappa = 1,2,\dots,\nu$,

$[a_\kappa x + b_\kappa] = a_\kappa [x] + [a_\kappa \partial + b_\kappa]$ μέ $[a_\kappa \partial + b_\kappa] =$
$= 0, 1, 2, \dots, a_\kappa$ ἐάν $a_\kappa > 0$ ἤ $[a_\kappa \partial + b_\kappa] =$
$= a_\kappa, a_\kappa + 1, \dots, -1, 0$ ἐάν $a_\kappa < 0$ ὅτε:
$(E) \iff \sigma([x], [a_\kappa \partial + b_\kappa], \partial) = 0 \quad (E')$.

Ἐν συνεχείᾳ ἡ (E') ἰσοδυναμεῖ μέ μ ἐξισώσεις τῆς περιπτώσεως B ἤτοι: θέτοντες $[x] = y \in Z$
$\Longrightarrow (E') \iff \varphi_1(y, \partial) = 0 \vee \varphi_2(y, \partial) = 0 \vee \dots \vee \varphi_\mu(y, \partial) = 0$ (1) ὅπου μ εἶναι τό πλῆθος τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν τῶν τιμῶν τῶν παραστάσεων $[a_\kappa \partial + b_\kappa]$.

Προφανῶς, κατά τήν ἐπίλυσιν ἑκάστης τῶν ἐξισώσεων (1), πρέπει νά λαμβάνονται ὑπ' ὄψιν καί οἱ περιορισμοί, οἱ ὁποῖοι προκύπτουν ἐκ τοῦ συνδυασμοῦ τῶν τιμῶν τῶν $[a_\kappa \partial + b_\kappa]$, ὁ ὁποῖος ὡδήγησεν εἰς τήν ἐξεταζομένην (ἐκ τῶν (1)) ἐξίσωσιν. Οὗτοι εἰς ἑκάστην περίπτωσιν ἰσοδυναμοῦν (βλ. Γ(i)) μέ: $\max(\partial_1, \partial_2, \dots, \partial_\nu, 0) \leq \partial <$
$< \min\left(\partial_1 + \frac{1}{a_1}, \dots, \partial_\nu + \frac{1}{a_\nu}, 1\right)$.

<u>Παραδείγματα:</u> Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

Π1. (περίπτωσις A).

$$(E_1):\ \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{[x]}\right) + \frac{4}{3}\left(1 - \frac{4}{[x]}\right) = 1$$

(E_2): $\dfrac{2[x]+5}{2} - \dfrac{[x]-1}{3} = \dfrac{37}{6}$

(E_3): $2[x]^2+5[x]+2=0$

(E_4): $\dfrac{(2[x]-1)([x]+2)}{2} - 3[x]+7 = [x]^2-5[x]+6$

(E_5): $[x]^4-4[x]^3-12[x]^2+64[x]-64=0$.

Ἐπίλυσις: **(E_1)** $\xLeftrightarrow{[x]=y} \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{y}\right)+\frac{4}{3}\left(1-\frac{4}{y}\right)=1 \;\Big|\; \mathcal{D}=\mathbb{Z}-\{0\}$

$\Longleftrightarrow 9(y-3)+16(y-4)=12y \Longleftrightarrow 13y=91 \Longleftrightarrow y=7\in\mathcal{D}$

Ἄρα $[x]=7 \Longrightarrow x=7+\partial \mid 0\leq\partial<1 \Longleftrightarrow 7\leq x<8$

$\Longrightarrow A=[7,8)$.

(E_2) $\xLeftrightarrow{[x]=y} \frac{2y+5}{2}-\frac{y-1}{3}=\frac{37}{6} \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv\mathbb{Z} \Longleftrightarrow 3(2y+5)-2(y-1)=37$

$\Longleftrightarrow 4y=20 \Longleftrightarrow y=5\in\mathcal{D} \Longrightarrow [x]=5 \Longrightarrow x=5+\partial \mid$

$0\leq\partial<1 \Longleftrightarrow 5\leq x<6 \Longrightarrow A=[5,6)$.

(E_3) $\xLeftrightarrow{[x]=y\in\mathbb{Z}} 2y^2+5y+2=0 \Longleftrightarrow 2(y+2)(y+\frac{1}{2})=0$

$\Longleftrightarrow y+2=0 \vee y+\frac{1}{2}=0 \Longleftrightarrow y_1=-2 \vee y_2=-\frac{1}{2}$.

Δεκτή εἶναι μόνον ἡ $y_1\in\mathbb{Z} \Longrightarrow [x]=-2 \Longrightarrow$

$x=-2+\partial \mid 0\leq\partial<1 \Longleftrightarrow -2\leq x<-1 \Longrightarrow A=[-2,-1)$.

(E_4) $\xLeftrightarrow{[x]=y} \frac{(2y-1)(y+2)}{2}-3y+7=y^2-5y+6 \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv\mathbb{Z}$

$\Longleftrightarrow (2y-1)(y+2)-6y+14-2y^2+10y-12=0 \Longleftrightarrow 7y=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y=0\in\mathbb{Z} \Longrightarrow [x]=0 \Longrightarrow x=0+\partial \mid 0\leq\partial<1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 0\leq x<1 \Longrightarrow A=[0,1)$

$$(E5) \xLeftrightarrow{[x]=y} y^4-4y^3-12y^2+64y-64=0 \mid \mathcal{D}\equiv Z \iff$$

$$\iff (y^4-16y^2)-4y^3+64y+(4y^2-64)=0 \iff y^2(y^2-16)-$$

$$-4y(y^2-16)+4(y^2-16)=0 \iff$$

$$\iff (y^2-4y+4)(y^2-16)=0 \iff (y-2)^2(y-4)(y+4)=0$$

$$\iff y_{1,2}=2 \lor y_3=4 \lor y_4=-4 \text{ όλες δεκτές } \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow [x]=2 \lor [x]=4 \lor [x]=-4 \Longrightarrow A=[-4,-3) \cup$$

$$\cup [2,3) \cup [4,5).$$

Π2.(Περίπτωσις Β). (E_1): $2[x]+3=3x$

$$(E_2): \frac{7[x]+3}{2}=5x-\frac{11}{2}$$

$$(E_3): \frac{([x]-2)^2}{1-x}=[x]+4$$

$$(E_4): \frac{1+[x]^2}{1+x}=1-x$$

$$(E_5): \frac{[x]^3-1}{3}+2x-\frac{2}{3}=(x-1)([x]^2+4)-\frac{(x-[x])[x]^2}{3}$$

Ἐπίλυσις: Ἔχομεν $x=[x]+\partial \mid 0\leq \partial<1 \Longrightarrow$

$$(E_1) \iff 2[x]+3=3([x]+\partial) \mid 0\leq\partial<1 \iff$$

$$\iff 2[x]+3=3[x]+3\partial \mid 0\leq\partial<1 \xLeftrightarrow{[x]=y}$$

$$\iff 2y+3=3y+3\partial \;\left|\; \begin{matrix}0\leq\partial<1\\ \mathcal{D}\equiv Z\end{matrix}\right. \iff y=3-3\partial \;\left|\; \begin{matrix}0\leq\partial<1\\ \mathcal{D}\equiv Z\end{matrix}\right.$$

$$\xRightarrow{\text{Ἐπειδή } 0<3-3\partial\leq 3} 0<y\leq 3 \mid y\in Z \iff y_1=1 \lor y_2=2 \lor y_3=3$$

$$\text{Διά } y_1=1 \Longrightarrow 3-3\partial=1 \iff \partial=\frac{2}{3} \Longrightarrow x_1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$$

$$\text{Διά } y_2=2 \Longrightarrow 3-3\partial=2 \iff \partial=\frac{1}{3} \Longrightarrow x_2=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$$

$\Delta\iota\acute{\alpha} \quad y_3 = 3 \Longrightarrow 3 - 3\partial = 3 \Longleftrightarrow \partial = 0 \Longrightarrow x_3 = 3 .$

Άρα $\quad A = \left\{ \frac{5}{3} , \frac{7}{3} , 3 \right\}.$

(E2) $\Longleftrightarrow \frac{7[x]+3}{2} = 5\left([x]+\partial\right) - \frac{11}{2} \;\Big|\; 0 \leq \partial < 1 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 7[x]+3 = 10[x] + 10\partial - 11 \;\Big|\; 0 \leq \partial < 1 \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow{[x]=y} 7y+3 = 10y + 10\partial - 11 \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3y = 14 - 10\partial \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \end{matrix} \Longleftrightarrow y = \frac{14-10\partial}{3} \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \end{matrix}$

$\xRightarrow{\frac{4}{3} < \frac{14-10\partial}{3} \leq \frac{14}{3}} \frac{4}{3} < y \leq \frac{14}{3} \;\Big|\; y \in \mathbb{Z} \Longrightarrow y_1 = 2 \vee y_2 = 3 \vee y_3 = 4.$

$\Delta\iota\acute{\alpha} \quad y_1 = 2 \Longrightarrow \frac{14-10\partial}{3} = 2 \Longleftrightarrow \partial = \frac{4}{5} \Longrightarrow x_1 = 2 + \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$

$\Delta\iota\acute{\alpha} \quad y_2 = 3 \Longrightarrow \frac{14-10\partial}{3} = 3 \Longleftrightarrow \partial = \frac{1}{2} \Longrightarrow x_2 = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

$\Delta\iota\acute{\alpha} \quad y_3 = 4 \Longrightarrow \frac{14-10\partial}{3} = 4 \Longleftrightarrow \partial = \frac{1}{5} \Longrightarrow x_3 = 4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$

(E3) $\Longleftrightarrow \frac{([x]-2)^2}{1-([x]+\partial)} = [x]+4 \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ x \neq 1 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow{[x]=y} \frac{(y-2)^2}{1-y-\partial} = y+4 \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \\ x \neq 1 \end{matrix} \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y^2 - 4y + 4 = y + 4 - y^2 - 4y - \partial y - 4\partial \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \text{ και } (y,\partial) \neq (1,0) \end{matrix}$

$\Longleftrightarrow 2y^2 - (1-\partial)y + 4\partial = 0 \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv \mathbb{Z} \text{ και } (y,\partial) \neq (1,0) \end{matrix}$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1-\partial \pm \sqrt{(1-\partial)^2 - 32\partial}}{4} = \frac{1-\partial \pm \sqrt{1+\partial^2-36\partial}}{4} \;\Big|\; \begin{matrix} 0 \leq \partial < 1 \\ y \in \mathbb{Z} \\ (y,\partial) \neq (1,0) \end{matrix}$

Ἀλλά $y \in R \Longleftrightarrow \partial^2 - 36\partial + 1 \geq 0 \Longleftrightarrow (\partial - 18 - \sqrt{323})\cdot$

$\cdot(\partial - 18 + \sqrt{323}) \geq 0 \Longleftrightarrow \partial \leq 18 - \sqrt{323} \ \vee \ \partial \geq 18 + \sqrt{323}.$

Ἐπειδή δέ $0 \leq \partial < 1$ ἔπεται ὅτι $0 \leq \partial \leq 18 - \sqrt{323}.$

Τότε ὅμως εἶναι: $-17 + \sqrt{323} \leq 1 - \partial \leq 1$ καί

$0 \leq \sqrt{1 + \partial^2 - 36\partial} \leq 1$ (διατί;)

ὅτε: $\dfrac{-17 + \sqrt{323}}{4} \leq y_1 = \dfrac{1 - \partial + \sqrt{1 + \partial^2 - 36\partial}}{4} \leq \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ ἤτοι

$y_1 \notin Z$ καί

$\dfrac{-18 + \sqrt{323}}{4} < y_2 = \dfrac{1 - \partial - \sqrt{1 + \partial^2 - 36\partial}}{4} < 1$ (τοῦ "=" μή ἰσχύοντος. Διατί;)

μέ $y_2 \in Z \Longrightarrow y_2 = 0 \Longrightarrow \partial = 0 \Longrightarrow x = 0$. Ἄρα $A = \{0\}$

(E4) $\Longleftrightarrow \dfrac{1 + [x]^2}{1 + [x] + \partial} = 1 - ([x] + \partial) \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ x \neq -1 \end{array} \right.$

$\xLeftrightarrow{[x] = y} \dfrac{1 + y^2}{1 + y + \partial} = 1 - (y + \partial) \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \ \wedge \ (y, \partial) \neq (-1, 0). \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow 1 + y^2 = 1 - (y + \partial)^2 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \ \wedge \ (y, \partial) \neq (-1, 0) \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow y^2 + (y + \partial)^2 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \ \wedge \ (y, \partial) \neq (-1, 0) \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow y = 0 \ \wedge \ \partial = 0 \Longrightarrow x = 0 \Longrightarrow A = \{0\}.$

(E5) $\Longleftrightarrow \dfrac{[x]^3 - 1}{3} + 2\left([x] + \partial\right) - \dfrac{2}{3} = \left([x] + \partial - 1\right)\left([x]^2 + 4\right) - \dfrac{\partial [x]^2}{3}$

$\xLeftrightarrow{[x] = y} \dfrac{y^3 - 1}{3} + 2y + 2\partial - \dfrac{2}{3} = (y + \partial - 1)(y^2 + 4) - \dfrac{\partial y^2}{3} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right.$

$\Longleftrightarrow y^3 - 1 + 6y + 6\partial - 2 = 3y^3 + 12y + 3\partial y^2 + 12\partial - 3y^2 - 12 -$

$-\partial y^2 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right. \Longleftrightarrow 2y^3 + (2\partial - 3)y^2 + 6y + 6\partial - 9 = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right.$

$$\Longleftrightarrow 2y^3 + (2\partial - 3)y^2 + 6y + 3(2\partial - 3) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right. \quad (1)$$

Γνωρίζομεν ὅτι "ὁ ἀριθμός $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι ρίζα τοῦ ἀκεραίου πολυωνύμου $\varphi(x) \equiv a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k \in R[x]$ ἐάν μ / a_k καί ν / a_0 ". Συνεπῶς πιθαναί ρίζαι τῆς (1) εἶναι οἱ ἀριθμοί ± 3, $\pm(2\partial - 3)$, $\pm \frac{3}{2}$ καί $\pm \frac{2\partial - 3}{2}$.

Πράγματι διά τῆς συντόμου διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διά διωνύμου (καλουμένης καί συνδετικῆς διαιρέσεως - Synthetic division ἤ μέθοδος Horner) ἔχομεν:

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & 2\partial - 3 & 6 & 3(2\partial - 3) & -\frac{2\partial - 3}{2} \\ & -(2\partial - 3) & 0 & -3(2\partial - 3) & \\ \hline 2 & 0 & 6 \,\Vert & 0 & \end{array}$$

$$\text{Ἄρα } (1) \Longleftrightarrow \left(y + \frac{2\partial - 3}{2}\right)\left(2y^2 + 6\right) = 0 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow y_1 = \frac{3 - 2\partial}{2} \ \vee \ y^2 = -3 \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ \mathcal{D} \equiv Z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow y_1 = \frac{3 - 2\partial}{2} \ \vee \ y_{2,3} = \pm i\sqrt{3} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{3 - 2\partial}{2} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right. \Longrightarrow$$

$$\xRightarrow{\frac{1}{2} < \frac{3 - 2\partial}{2} \leq \frac{3}{2}} \frac{1}{2} < y \leq \frac{3}{2} \quad \Big| \ y \in Z \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y = 1 \Longrightarrow \frac{3 - 2\partial}{2} = 1 \Longleftrightarrow 3 - 2\partial = 2 \Longleftrightarrow$$

$$\partial = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Longrightarrow A = \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

Π3. (Περιπτώσεις Γ καί Δ).

$(E1)$: $[x+2{,}21]+[x+3{,}25]=9$

$(E2)$: $[3x-1{,}5]-[2x+3]=2$

$(E3)$: $[\lambda x-2{,}7]-[1{,}2-2x]=-4, \quad \lambda \in Z$

$(E4)$: $\left[\frac{x}{2}+1{,}3\right]+\left[\frac{x}{3}-0{,}7\right]=5$

$(E5)$: $x[x]+\frac{[x+1]^2}{x}-2\left(1-\frac{[x]}{x}\right)[x]^2=$

$$=\frac{[2x+1]-(x-[x])^2}{x}$$

$(E6)$: $x+[2x+2{,}4]=5{,}12$

Ἐπίλυσις: **(E1)** $\iff [x+0{,}21+2]+[x+0{,}25+3]=9 \iff$

$\xleftrightarrow{\partial 1} [x+0{,}21]+2+[x+0{,}25]+3=9 \xleftrightarrow[0\leq \partial<1]{x=[x]+\partial} [x]+$

$+[\partial+0{,}21]+[x]+[\partial+0{,}25]=4 \iff 2[x]=4-[\partial+0{,}21]-$

$-[\partial+0{,}25] \;\Big|\; 0\leq\partial<1 \xleftrightarrow{[x]=y} y=2-\frac{[\partial+0{,}21]+[\partial+0{,}25]}{2} \;\Big|$

$\Big|\begin{array}{l} 0\leq\partial<1 \\ y \in Z \end{array}$ (1) ὅπου $[\partial+0{,}21]=0$ ἤ 1 καί $[\partial+0{,}25]=0$ ἤ 1

ὅτε $y\in Z$ διά τούς συνδυασμούς $(0,0)$ καί $(1,1)$.

Πράγματι· διά $[\partial+0{,}21]=0$ καί $[\partial+0{,}25]=0$ ἔχομεν

$$(E1) \xleftrightarrow{(1)} \left\{\begin{array}{l} x=2+\partial \\ [\partial+0{,}21]=0 \\ [\partial+0{,}25]=0 \\ 0\leq\partial<1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=2+\partial \\ 0\leq\partial+0{,}21<1 \\ 0\leq\partial+0{,}25<1 \\ 0\leq\partial<1 \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=2+\partial \\ -0{,}21\leq\partial<0{,}79 \\ -0{,}25\leq\partial<0{,}75 \\ 0\leq\partial<1 \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{c} x=2+\partial \\ \\ 0\leq\partial<0{,}75 \end{array}\right\} \iff$$

$\Longleftrightarrow \quad 2 \leq x < 2,75.$

Διά $[\partial+0,21]=1$ καί $[\partial+0,25]=1$ ἔχομεν ἀναλόγως $1,79 \leq x < 2$. Ἄρα τελικῶς $(E1) \Longleftrightarrow 1,79 \leq x < 2,75$

(E2) $\Longleftrightarrow [3x+0,5-2]-([2x]+3)=2 \Longleftrightarrow [3x+0,5]-2-$

$-[2x]-3=2 \xLeftrightarrow[0 \leq \partial < 1]{x=[x]+\partial} 3[x]+[3\partial+0,5]-2[x]-[2\partial]=7$

$\xLeftrightarrow{[x]=y} y=7+[2\partial]-[3\partial+0,5] \;\Big|\; 0 \leq \partial < 1 \wedge y \in Z \quad (1)$

ὅπου $[2\partial]=0$ ἤ 1 καί $[3\partial+0,5]=0$ ἤ 1 ἤ 2 ἤ 3.

Ὅλοι οἱ δυνατοί συνδυασμοί τῶν τιμῶν αὐτῶν εἶναι δεκτοί διότι καθιστοῦν τό y ἀκέραιον. Συνεπῶς ἔχομεν: Διά $[2\partial]=0$ καί $[3\partial+0,5]=0$ εἶναι (λόγω τῆς (1)):

$$\left\{\begin{array}{l} x=7+\partial \\ [2\partial]=0 \\ [3\partial+0,5]=0 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+\partial \\ 0 \leq 2\partial < 1 \\ 0 \leq 3\partial+0,5 < 1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+\partial \\ 0 \leq \partial < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} \leq \partial < \frac{1}{6} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=7+\partial \\ 0 \leq \partial < \frac{1}{6} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 7 \leq x < \frac{43}{6} \quad (2)$$

Διά $[2\partial]=0$ καί $[3\partial+0,5]=1$ εἶναι (λόγω τῆς (1)).

$$\left\{\begin{array}{l} x=6+\partial \\ [2\partial]=0 \\ [3\partial+0,5]=1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6+\partial \\ 0 \leq 2\partial < 1 \\ 1 \leq 3\partial+0,5 < 2 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6+\partial \\ 0 \leq \partial < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \leq \partial < \frac{1}{2} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=6+\partial \\ \frac{1}{6} \leq \partial < \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \frac{37}{6} \leq x < \frac{13}{2} \quad (3)$$

Διά $[2\partial]=0$ καί $[3\partial+0,5]=2$ εἶναι (λόγω τῆς (1)).

$$\left\{\begin{array}{l} x=5+\partial \\ [2\partial]=0 \\ [3\partial+0,5]=2 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5+\partial \\ 0 \leq 2\partial < 1 \\ 2 \leq 3\partial+0,5 < 3 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=5+\partial \\ 0 \leq \partial < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \leq \partial < \frac{5}{6} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\}.$$

Τό σύστημα ὅμως τοῦτο εἶναι ἀδύνατον.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως, εὑρίσκομεν διά τούς λοιπούς συνδιασμούς:

$[2\partial]$	$[3\partial+0,5]$	λύσεις ἤ σύνολον λύσεων τῆς (E_2)	
0	3	$\emptyset$	(4)
1	0	$\emptyset$	(5)
1	1	$\emptyset$	(6)
1	2	$\frac{13}{2} \leq x < \frac{41}{6}$	(7)
1	3	$\frac{35}{6} \leq x < 6$	(8)

Ἐκ τῶν (2) ἕως (8) ἔχομεν τελικῶς διά τήν (E_2):

$A = [\frac{35}{6}, 6) \cup [\frac{37}{6}, \frac{13}{2}) \cup [\frac{13}{2}, \frac{41}{6}) \cup [7, \frac{43}{6})$ ἤ

$A = [\frac{35}{6}, 6) \cup [\frac{37}{6}, \frac{41}{6}) \cup [7, \frac{43}{6})$.

$(E_3) \Longleftrightarrow [\lambda x + 0,3 - 3] - [1 + 0,2 - 2x] = -4 \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow{\partial 1} [\lambda x + 0,3] - 3 - 1 - [0,2 - 2x] = -4 \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow[0 \leq \partial < 1]{x=[x]+\partial} \lambda [x] + [\lambda\partial + 0,3] - [0,2 - 2\partial] + 2[x] = 0 \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow{[x]=y} (\lambda+2)y = [0,2 - 2\partial] - [\lambda\partial + 0,3] \,\big|\, 0 \leq \partial < 1, \emptyset \equiv Z$ (1)

i) Ἐάν $\lambda = -2$ τότε:

$(1) \Longleftrightarrow 0y = [0,2 - 2\partial] - [0,3 - 2\partial] \,\big|\, 0 \leq \partial < 1, y \in Z$ (2)

ὅπου $[0,2 - 2\partial] = -2$ ἤ -1 ἤ 0 καί

$[0,3 - 2\partial] = -2$ ἤ -1 ἤ 0.

Τότε διά τούς συνδυασμούς $(-2,-2), (-1,-1)$ καί $(0,0)$ ἡ (2) γίνεται $0y = 0 \Longleftrightarrow y = \rho \in Z$ (ἀόριστος) ἐνῷ διά τούς λοιπούς δυνατούς συνδυασμούς ἡ (2) καθίσταται ἀδύνατος.

Διά $[0,2-2\theta]=-2 \wedge [0,3-2\theta]=-2$ ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ -2\leq 0{,}2-2\theta<-1 \\ -2\leq 0{,}3-2\theta<-1 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ -2{,}2\leq-2\theta<-1{,}2 \\ -2{,}3\leq-2\theta<-1{,}3 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ 0{,}6<\theta\leq 1{,}1 \\ \frac{13}{20}<\theta\leq\frac{23}{20} \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ \frac{13}{20}<\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \rho+\frac{13}{20}<x<\rho+1\ ,\ \forall\ \rho\in Z$$

Διά $[0,2-2\theta]=-1$ καί $[0,3-2\theta]=-1$ ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ -1\leq 0{,}2-2\theta<0 \\ -1\leq 0{,}3-2\theta<0 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ -1{,}2\leq-2\theta<-0{,}2 \\ -1{,}3\leq-2\theta<-0{,}3 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ 0{,}1<\theta\leq 0{,}6 \\ \frac{3}{20}<\theta\leq\frac{13}{20} \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ \frac{3}{20}<\theta\leq\frac{3}{5} \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \rho+\frac{3}{20}<x\leq\rho+\frac{3}{5}\ ,\ \forall\ \rho\in Z$$

Διά $[0,2-2\theta]=0$ καί $[0,3-2\theta]=0$ ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ 0\leq 0{,}2-2\theta<1 \\ 0\leq 0{,}3-2\theta<1 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=\rho+\theta\ ,\ \rho\in Z \\ -0{,}2\leq-2\theta<0{,}8 \\ -0{,}3\leq-2\theta<0{,}7 \\ 0\leq\theta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \rho + \vartheta \ , \ \rho \in Z \\ -0{,}4 < \vartheta \leq 0{,}1 \\ -\frac{7}{20} < \vartheta < \frac{3}{20} \\ 0 \leq \vartheta < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \rho + \vartheta \ , \ \rho \in Z \\ 0 \leq \vartheta \leq 0{,}1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\rho \leq x \leq \rho + 0{,}1 \ , \ \forall \ \rho \in Z .$$

Συνεπῶς ἐάν $\lambda = -2$ τό σύνολον λύσεων τῆς (Ε3) εἶναι: $A = \bigcup_{\rho \in Z} A_\rho$ ὅπου

$$A_\rho \equiv \left[\rho , \rho + 0{,}1\right] \cup \left(\rho + \frac{3}{20} , \rho + \frac{3}{5}\right] \cup \left(\rho + \frac{13}{20} , \rho + 1\right)$$

ii) Ἐάν $\lambda \neq -2$, $\lambda \in Z$ τότε ἡ (1) γίνεται

$$(1) \Longleftrightarrow y = \frac{[0{,}2 - 2\vartheta] - [\lambda\vartheta + 0{,}3]}{\lambda + 2} \quad \Big| \ 0 \leq \vartheta < 1 \ , \ y \in Z$$

ὅπου $[0{,}2 - 2\vartheta] = -2$ ἤ -1 ἤ 0 καί

$$[\lambda\vartheta + 0{,}3] = \begin{cases} 0 \text{ ἤ } 1 \text{ ἤ } 2 \text{ ἤ } \ldots \text{ ἤ } \lambda \text{ ἐάν } \lambda \geqslant 0 \\ \lambda \text{ ἤ } \lambda + 1 \text{ ἤ } \ldots \text{ ἤ } -1 \text{ ἤ } 0 \text{ ἐάν } \lambda < 0 \ (\lambda \neq -2) \end{cases}$$

Ἐκ τῶν δυνατῶν τώρα συνδυασμῶν τῶν ἀνωτέρω τιμῶν δεκτοί εἶναι μόνον ἐκεῖνοι οἱ ὁποῖοι δίδουν y ἀκέραια. Τοιαῦτοι συνδυασμοί ὑπάρχουν πάντοτε ἤτοι: (α) Ἔστω $\lambda > 0$ τότε:

Διά $[0{,}2 - 2\vartheta] = 0 \Longrightarrow y = -\dfrac{[\lambda\vartheta + 0{,}3]}{\lambda + 2} \Longrightarrow$

$y \in Z \underset{(\text{διατί;})}{\Longleftrightarrow} [\lambda\vartheta + 0{,}3] = 0$ ὅτε $y = 0$ καί

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 + \vartheta \\ [0{,}2 - 2\vartheta] = 0 \\ [\lambda\vartheta + 0{,}3] = 0 \\ 0 \leq \vartheta < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \vartheta \\ 0 \leq 0{,}2 - 2\vartheta < 1 \\ 0 \leq \lambda\vartheta + 0{,}3 < 1 \\ 0 \leq \vartheta < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \vartheta \\ -0{,}2 \leq -2\vartheta < 0{,}8 \\ -0{,}3 \leq \lambda\vartheta < 0{,}7 \\ 0 \leq \vartheta < 1 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \partial \\ -0,4 < \partial \leq 0,1 \\ -\frac{0,3}{\lambda} \leq \partial < \frac{0,7}{\lambda} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \partial \\ 0 \leq \partial \leq \min\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10\lambda}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow 0 \leq x \leq \min\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10\lambda}\right)$$

$$\left(\text{τοῦ } \text{"="} \text{ ἰσχύοντος} \Longleftrightarrow \min\left(\frac{1}{10}, \frac{7}{10\lambda}\right) = \frac{1}{10}\right)$$

Διά $[0,2-2\partial]=-1$ τότε $y = \frac{-1-[\lambda\partial+0,3]}{\lambda+2} \Longrightarrow$

$y \notin Z$ (διατί;)

Διά $[0,2-2\partial]=-2$ τότε $y = \frac{-2-[\lambda\partial+0,3]}{\lambda+2} \Longrightarrow$

$y \in Z \xLeftrightarrow{(\text{διατί;})} [\lambda\partial+0,3]=\lambda$ ὅτε $y = \frac{-(\lambda+2)}{\lambda+2} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y=-1$ καί

$$\begin{Bmatrix} x=-1+\partial \\ [0,2-2\partial]=-2 \\ [\lambda\partial+0,3]=\lambda \\ 0 \leq \partial < 1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-1+\partial \\ -2 \leq 0,2-2\partial < -1 \\ \lambda \leq \lambda\partial+0,3 < \lambda+1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-1+\partial \\ -2,2 \leq -2\partial < -1,2 \\ \lambda-0,3 \leq \lambda\partial < \lambda+0,7 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-1+\partial \\ 0,6 < \partial \leq 1,1 \\ \frac{\lambda-0,3}{\lambda} \leq \partial < \frac{\lambda+0,7}{\lambda} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x=-1+\partial \\ \max\left(\frac{3}{5}, \frac{\lambda-0,3}{\lambda}\right) \leq \partial < \min\left(1, \frac{\lambda+0,7}{\lambda}\right) \\ \frac{\lambda-0,3}{\lambda} < 1 \quad \text{καί} \quad \frac{\lambda+0,7}{\lambda} > 0,6 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\text{τοῦ } \text{"="} \text{ ἰσχύοντος} \Longleftrightarrow \max\left(\frac{3}{5}, \frac{\lambda-0,3}{\lambda}\right) = \frac{\lambda-0,3}{\lambda}\right)$$

$$\Longleftrightarrow -1 + \max\left(\frac{3}{5}, \frac{\lambda - 0{,}3}{\lambda}\right) \leq x < -1 + \min\left(1, \frac{\lambda + 0{,}7}{\lambda}\right)$$

(β) Ἔστω $\lambda = 0$ τότε $[\lambda\partial + 0{,}3] = [0{,}3] = 0$

$$\Longrightarrow y = \frac{[0{,}2 - 2\partial]}{2} \Longrightarrow y \in Z \Longleftrightarrow [0{,}2 - 2\partial] = 0 \text{ ἤ } -2.$$

Διά $[0{,}2 - 2\partial] = 0 \Longrightarrow y = 0$ καί $\left\{\begin{array}{c} x = \partial \\ [0{,}2 - 2\partial] = 0 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = \partial \\ -0{,}4 < \partial \leq 0{,}1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq 0{,}1$$

Διά $[0{,}2 - 2\partial] = -2 \Longrightarrow y = -1$ καί $\left\{\begin{array}{c} x = -1 + \partial \\ [0{,}2 - 2\partial] = -2 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{c} x = -1 + \partial \\ 0{,}6 < \partial \leq 1{,}1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -1 + \partial \\ 0{,}6 < \partial < 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow -0{,}4 < x < 0$$

(γ) Ἔστω $\lambda = -1$ τότε $[\lambda\partial + 0{,}3] = [-\partial + 0{,}3] = -1$ ἤ

ἤ 0 ὅτε $y = \dfrac{[0{,}2 - 2\partial] - [-\partial + 0{,}3]}{-1 + 2} \Longleftrightarrow y = [0{,}2 - 2\partial] - [-\partial + 0{,}3]$

καί ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν:

$[0{,}2 - 2\partial]$	$[-\partial + 0{,}3]$	Λύσεις τῆς (E_3)
-2	-1	$-0{,}4 < x < 0$
-2	0	ϕ
-1	-1	$0{,}3 < x \leq 0{,}6$
-1	0	$-0{,}9 < x \leq -0{,}7$
0	-1	ϕ
0	0	$0 \leq x \leq 0{,}1$

(δ) Ἔστω $\lambda < -2$ τότε:

Διά $[0{,}2-2\vartheta]=0 \Longrightarrow y = -\dfrac{[\lambda\vartheta+0{,}3]}{\lambda+2} \Longrightarrow$

$y \in Z \xleftrightarrow{(\text{διατί;})} \left([\lambda\vartheta+0{,}3]=0 \text{ ἤ } [\lambda\vartheta+0{,}3] = \lambda+2\right)$

Συνεπῶς ἔχομεν:

(1) Ἐάν $[0{,}2-2\vartheta]=0$ καί $[\lambda\vartheta+0{,}3]=0 \Longrightarrow$

$$y=0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\vartheta \\ -0{,}4<\vartheta\leq 0{,}1 \\ \dfrac{0{,}7}{\lambda}<\vartheta\leq -\dfrac{0{,}3}{\lambda} \\ 0\leq\vartheta<1 \end{array}\right\} \underset{\lambda\in Z}{\overset{\lambda<-2}{\Longleftrightarrow}} \left\{\begin{array}{l} x=\vartheta \\ 0\leq\vartheta\leq -\dfrac{0{,}3}{\lambda} \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow 0\leq x\leq -\frac{3}{10\lambda}$$

(2) Ἐάν $[0{,}2-2\vartheta]=0$ καί $[\lambda\vartheta+0{,}3]=\lambda+2 \Longrightarrow$

$$y=-1 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\vartheta \\ 0\leq 0{,}2-2\vartheta<1 \\ \lambda+2\leq\lambda\vartheta+0{,}3<\lambda+3 \\ 0\leq\vartheta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\vartheta \\ -0{,}4<\vartheta\leq 0{,}1 \\ \dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda}<\vartheta\leq\dfrac{\lambda+1{,}7}{\lambda} \\ 0\leq\vartheta<1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\vartheta \\ \max\left(0,\dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda}\right)<\vartheta\leq\min\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{\lambda+1{,}7}{\lambda}\right) \\ \dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda}\leq\dfrac{1}{10} \wedge \lambda\in Z^- - \{-1,-2\} \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\vartheta \\ \dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda}<\vartheta\leq\min\left(\dfrac{1}{10},\dfrac{\lambda+1{,}7}{\lambda}\right) \\ 10(\lambda+2{,}7)\geq\lambda \wedge \lambda\leq -3 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\partial \\ \dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda} < \partial \leq \min\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{\lambda+1{,}7}{\lambda}\right) \\ \lambda \geqslant -3 \;\wedge\; \lambda \leq -3 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\partial \;\wedge\; \lambda=-3 \\ \dfrac{\lambda+2{,}7}{\lambda} < \partial \leq \min\left(\dfrac{1}{10}, \dfrac{\lambda+1{,}7}{\lambda}\right) \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1+\partial \\ \dfrac{1}{10} < \partial \leq \dfrac{1}{10} \end{array}\right\} \Longrightarrow A \equiv \phi .$$

Διά $[0{,}2-2\partial]=-1 \Longrightarrow y=-\dfrac{1+[\lambda\partial+0{,}3]}{\lambda+2} \Longrightarrow$

$y \in Z \xLeftrightarrow{(\text{διατί;})} \left([\lambda\partial+0{,}3]=-1 \text{ ή } [\lambda\partial+0{,}3]=\lambda+1\right)$

Τότε εἶναι $y=0$ ἤ $y=-1$ ἀντιστοίχως, ὅτε προχωροῦμεν εἰς τήν ἐπίλυσιν τῆς ἐξισώσεως ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω.

Τελικῶς, διά $[0{,}2-2\partial]=-2 \Longrightarrow y=-\dfrac{2+[\lambda\partial+0{,}3]}{\lambda+2}$

$\Longrightarrow y \in Z \xLeftrightarrow{(\text{διατί;})} \left([\lambda\partial+0{,}3]=-2 \text{ ή } [\lambda\partial+0{,}3]=\lambda\right).$

Τότε εἰς ἑκάστην περίπτωσιν εὑρίσκομεν τάς τιμάς τοῦ x κατά τά γνωστά.

(Ποῖαι αἱ λύσεις τῆς (Ε3) εἰς τάς τελευταίας ταύτας περιπτώσεις;).

(Ε4) $\Longleftrightarrow \left[\dfrac{1}{2}\, 6\, \dfrac{x}{6}+0{,}3+1\right]+\left[\dfrac{1}{3}\, 6\, \dfrac{x}{6}+0{,}3-1\right]=5$

$\xLeftrightarrow{\frac{x}{6}=y} [3y+0{,}3]+1+[2y+0{,}3]-1=5$

$\xLeftrightarrow[0\leq\partial<1]{y=[y]+\partial} 3[y]+[3\partial+0{,}3]+2[y]+[2\partial+0{,}3]=5$

$$\overset{[y]=t}{\Longleftrightarrow} \quad 5t = 5 - [3\partial+0{,}3] - [2\partial+0{,}3] \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ t \in Z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad t = 1 - \frac{[3\partial+0{,}3]+[2\partial+0{,}3]}{5} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ t \in Z \end{array} \right. \quad (1)$$

ὅπου $[3\partial+0{,}3]=0$ ἤ 1 ἤ 2 ἤ 3 καί $[2\partial+0{,}3]=0$ ἤ 1 ἤ 2.

Ἐκ τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν τῶν προηγουμένων τιμῶν δεκτοί εἶναι μόνον οἱ $(0,0)$ καί $(3,2)$.

Διά $[3\partial+0{,}3]=0$ καί $[2\partial+0{,}3]=0$ ἔχομεν:

$$t=1 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1+\partial \\ 0 \leq 3\partial+0{,}3 < 1 \\ 0 \leq 2\partial+0{,}3 < 1 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1+\partial \\ -0{,}3 \leq 3\partial < 0{,}7 \\ -0{,}3 \leq 2\partial < 0{,}7 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1+\partial \\ -\frac{1}{10} \leq \partial < \frac{7}{30} \\ -\frac{3}{20} \leq \partial < \frac{7}{20} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1+\partial \\ 0 \leq \partial < \frac{7}{30} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \quad 1 \leq y < \frac{37}{30}$. Τότε εἶναι $1 \leq \frac{x}{6} < \frac{37}{30} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad 6 \leq x < \frac{37}{5}.$$

Διά $[3\partial+0{,}3]=3$ καί $[2\partial+0{,}3]=2$ ἔχομεν:

$$t=0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \partial \\ 3 \leq 3\partial+0{,}3 < 4 \\ 2 \leq 2\partial+0{,}3 < 3 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \partial \\ 2{,}7 \leq 3\partial < 3{,}7 \\ 1{,}7 \leq 2\partial < 2{,}7 \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = \partial \\ \frac{27}{30} \leq \partial < \frac{37}{30} \\ \frac{17}{20} \leq \partial < \frac{27}{20} \\ 0 \leq \partial < 1 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \frac{9}{10} \leq y < 1. \text{ Τότε}$$

είναι : $\frac{9}{10} \le \frac{x}{6} < 1 \iff \frac{27}{5} \le x < 6$.

Άρα τελικώς $A \equiv \left[\frac{27}{5}, \frac{37}{5}\right)$.

(E5) $\overset{x\neq 0}{\iff} x^2[x]+[x+1]^2-2(x-[x])[x]^2=[2x+1]-(x-[x])^2$

$\underset{0\le\partial<1}{\overset{x=[x]+\partial}{\iff}} ([x]+\partial)^2[x]+([x]+1)^2-2\partial[x]^2=[2x]+1-\partial^2 \mid x\neq 0$

$\iff ([x]^2+2\partial[x]+\partial^2)[x]+[x]^2+2[x]+1-2\partial\,[x]^2 =$

$= 2[x]+[2\partial]+1-\partial^2 \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1 \\ x\neq 0 \end{array}\right.$

$\overset{[x]=y}{\iff} y^3+2\partial y^2+\partial^2 y+y^2+2y+1-2\partial y^2-2y-1+\partial^2=[2\partial] \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1 \\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right.$

$\iff y^3+\partial^2 y+y^2+\partial^2=[2\partial] \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1,\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right.$

$\iff y(y^2+\partial^2)+y^2+\partial^2=[2\partial] \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1,\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right.$

$\iff (y^2+\partial^2)(y+1)=[2\partial] \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1,\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right.$ (1)

όπου $[2\partial]=0$ ή 1

Διά $[2\partial]=0 \iff 0\le\partial<\frac{1}{2}$ έχομεν:

(1) $\iff (y^2+\partial^2)(y+1)=0 \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1/2,\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right. \iff$

$\iff y^2+\partial^2=0 \ \vee\ y+1=0 \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1/2,\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right. \iff$

$\iff y=\partial=0 \ \vee\ y=-1 \left| \begin{array}{l} 0\le\partial<1/2 \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right. \iff$

$\iff y=-1 \mid 0\le\partial<\frac{1}{2} \implies \left\{\begin{array}{l} x=-1+\partial \\ 0\le\partial<\frac{1}{2} \end{array}\right\} \iff -1\le x<-\frac{1}{2}$.

Διά $[2\partial]=1 \iff \frac{1}{2}\le\partial<1$ έχομεν:

(1) $\iff (y^2+\partial^2)(y+1)=1 \left| \begin{array}{l} 1/2\le\partial<1;\ y\in Z \\ (y,\partial)\neq(0,0) \end{array}\right.$ (2)

Εἰς τήν (2) παρατηροῦμεν ὅτι $(y+1) \in Z$ διότι $y \in Z$ ἐνῷ $(y^2+\partial^2) \notin Z$ διότι $1/2 \leq \partial < 1$ καί $y \in Z$.

Συνεπῶς $(y^2+\partial^2)(y+1) \notin Z \Longrightarrow (y^2+\partial^2)(y+1) \neq 1$, $\forall\ y \in Z \Longrightarrow$ (2) ἀδύνατος ἐν Z.

Ἄρα τελικῶς εἶναι $A = [-1, -\frac{1}{2})$.

(Ε6) $\Longleftrightarrow x + [2x+0{,}4+2] = 5{,}12 \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow[0 \leq \partial < 1]{x=[x]+\partial} [x]+\partial+2[x]+[2\partial+0{,}4]+2 = 5{,}12$

$\Longleftrightarrow 3[x] = 3{,}12 - \partial - [2\partial+0{,}4] \ \Big|\ 0 \leq \partial < 1$

$$\xLeftrightarrow{[x]=y} y = 1{,}04 - \frac{\partial}{3} - \frac{[2\partial+0{,}4]}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \qquad (1)$$

ὅπου $[2\partial+0{,}4] = 0$ ἤ 1 ἤ 2.

Διά $[2\partial+0{,}4] = 0 \Longleftrightarrow -0{,}2 \leq \partial < 0{,}3$ ἔχομεν:

$$(1) \Longleftrightarrow y = 1{,}04 - \frac{\partial}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} -0{,}2 \leq \partial < 0{,}3 \\ 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \Longleftrightarrow y = 1{,}04 - \frac{\partial}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0 \leq \partial < 0{,}3 \\ y \in Z \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow y = 1{,}04 - \frac{\partial}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0 \leq \frac{\partial}{3} < 0{,}1 \\ y \in Z \end{array} \Longrightarrow y \in Z \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \frac{\partial}{3} = 0{,}04 \Longleftrightarrow \partial = 0{,}12$. Τότε $y = 1 \Longrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1+\partial \\ \partial = 0{,}12 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow x = 1{,}12 = \frac{28}{25}$$

Διά $[2\partial+0{,}4] = 1 \Longleftrightarrow 0{,}3 \leq \partial < 0{,}8$ ἔχομεν:

$$(1) \Longleftrightarrow y = 1{,}04 - \frac{\partial}{3} - \frac{1}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0{,}3 \leq \partial < 0{,}8 \\ 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{53}{75} - \frac{\partial}{3} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0{,}3 \leq \partial < 0{,}8 \\ y \in Z \end{array} \Longleftrightarrow y = \frac{53-25\partial}{75} \ \Bigg|\ \begin{array}{l} 0{,}3 \leq \partial < 0{,}8 \\ y \in Z \end{array}$$

$\Longrightarrow y \notin Z$ (διατί;) $\Longrightarrow$ ἡ (1) ἀδύνατος ἐν Z εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν.

Διά $[2\partial+0,4]=2 \Longleftrightarrow 0,8 \leq \partial < 1,3$ ἔχομεν:

$$(1) \Longleftrightarrow y = 1,04 - \frac{\partial}{3} - \frac{2}{3} \left| \begin{array}{l} 0,8 \leq \partial < 1,3 \\ 0 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right. \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y = 1,04 - \frac{2}{3} - \frac{\partial}{3} \left| \begin{array}{l} 0,8 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right. \Longleftrightarrow y = \frac{28}{75} - \frac{\partial}{3} \left| \begin{array}{l} 0,8 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{28-25\partial}{75} \left| \begin{array}{l} 0,8 \leq \partial < 1 \\ y \in Z \end{array} \right.$$

Ἀλλά $0,8 \leq \partial < 1 \Longleftrightarrow 20 \leq 25\partial < 25 \Longleftrightarrow -25 < -25\partial \leq -20$

$\Longleftrightarrow 3 < 28-25\partial \leq 8 \Longleftrightarrow \frac{3}{75} < \frac{28-25\partial}{75} \leq \frac{8}{75} \Longrightarrow \frac{3}{75} < y \leq \frac{8}{75}$

$\Longrightarrow y \notin Z$, ἤτοι ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος καί εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν.

Ἄρα τελικῶς εἶναι $A = \left\{ \frac{28}{25} \right\}$

<u>Παρατήρησις:</u> Τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν δυνάμεθα νά ἐπιλύσωμεν καί ὡς ἑξῆς:

$$(E6) \Longleftrightarrow x + [2x+0,4]+2 = 5,12 \xleftrightarrow[0 \leq \partial < 1]{x=[x]+\partial}$$

$$\Longleftrightarrow [x]+\partial+[2x+0,4] = 3,12 \;\big|\; 0 \leq \partial < 1 \Longleftrightarrow [x] + [2x+0,4] = 3,12-\partial \;\big|\; 0 \leq \partial < 1 \quad (1)$$

Ἐπειδή τό πρῶτον μέλος τῆς (1) εἶναι ἀκέραιος πρέπει καί $(3,12-\partial) \in Z \Longleftrightarrow \partial = 0,12$ διότι $0 \leq \partial < 1$, ὅτε $(1) \Longleftrightarrow [x]+2[x]+[2\partial+0,4] = 3,12-\partial \;|\; \partial = 0,12 \Longleftrightarrow 3[x] = 3-[0,64] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow [x]=1 \Longrightarrow x = 1+\partial = 1,12.$

"Διά τῶν μαθηματικῶν ἀσκήσεων καλλιεργεῖται ἡ μνήμη, ἡ ἱκανότης πρός συγκέντρωσιν τῆς προσοχῆς, ἡ πειθαρχία τῆς σκέψεως, ἡ ἀφαιρετική ἱκανότης τοῦ πνεύματος καί ἡ ἀγάπη πρός τήν ἐργασίαν. Ἀναπτύσσεται κατά μοναδικόν τρόπον ἡ κρίσις, ἡ φαντασία, ἡ πνευματική λεπτότης, τό πνεῦμα τοῦ κριτικοῦ ἐλέγχου, τό συναίσθημα τῆς εὐθύνης καί τῆς καλαισθησίας"

Ι. Γ. ΤΑΜΒΑΚΛΗΣ

(Πρακτικά Παιδαγωγικοῦ συνεδρίου τῆς Ι' περ. Μ.Ε. εἰς Σέρρας 1969)

ΜΕΡΟΣ Β

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

I. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Π1. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

$(E1): (2x+5)^2-(x-1)(x+2)=(x-3)^2+(2x-1)(x+2)$

$(E2): (3x+8)(7x-2)+35x^2-10x-1=8(7x-2)(x+1)$

$(E3): 3(x-2)-(5-12x)+x(x-4)=(x+2)^2+7x-15$

Ἐπίλυσις: **(E1)** $\Longleftrightarrow 4x^2+25+20x-(x^2+x-2)=x^2+9-6x+2x^2-$
$-x+4x-2 \Longleftrightarrow 4x^2+25+20x-x^2-x+2-x^2-9+6x-2x^2+x-$
$-4x+2=0 \Longleftrightarrow 22x=-20 \Longleftrightarrow x=-\frac{10}{11} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{10}{11}\right\}$.

(E2) $\Longleftrightarrow (3x+8)(7x-2)+5x(7x-2)-8(7x-2)(x+1)=1 \Longleftrightarrow$
$(7x-2)(3x+8+5x-8x-8)=1 \Longleftrightarrow (7x-2)\cdot 0=1 \Longleftrightarrow 0=1$
$\Longrightarrow A\equiv\phi$ (Ἀδύνατος).

(E3) $\Longrightarrow 3x-6-5+12x+x^2-4x=x^2+4x+4+7x-15 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 3x+12x+x^2-4x-x^2-4x-7x=4-15+6+5 \Longleftrightarrow 0\cdot x=0$
$\Longrightarrow A\equiv R$ (Ἀόριστος).

Π2. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1): \frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$

$(E2): \frac{7x-2}{5}-\frac{x-1}{2}=x-\frac{x+2}{10}$

$(E3): \frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$

Ἐπίλυσις: **(E1)** $\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(8-\frac{x}{3}-x-10\right)-\left(6-\frac{3x}{2}+3x-15\right)+$
$+5=0 \Longleftrightarrow 4-\frac{x}{6}-\frac{x}{2}-5-6+\frac{3x}{2}-3x+15+5=0$

$\Longleftrightarrow 13-\frac{x}{6}-\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}-3x=0 \Longleftrightarrow 6\cdot 13-6\cdot\frac{x}{6}-$
$-\frac{6\cdot x}{2}+\frac{6\cdot 3x}{2}-6\cdot 3x=0 \Longleftrightarrow 78-x-3x+9x-18x=0$

$\Longleftrightarrow -13x+78=0 \Longleftrightarrow -13x=-78 \Longleftrightarrow \frac{-13x}{-13}=\frac{-78}{-13}$

$\Longleftrightarrow x=6 \Longrightarrow A=\{6\}$

(Ε2) $\Longleftrightarrow 10\,\frac{7x-2}{5}-10\,\frac{x-1}{2}=10x-10\cdot\frac{x+2}{10} \Longleftrightarrow 2(7x-2)-$ $-5(x-1)=10x-(x+2) \Longleftrightarrow 14x-4-5x+5=10x-x-2$

$\Longleftrightarrow 14x-5x-10x+x=-2+4-5 \Longleftrightarrow 0\cdot x=-3 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A\equiv\phi$ (ἀδύνατος).

(Ε3) $\Longleftrightarrow 6\cdot\frac{x+6}{2}+6\cdot\frac{2(x+17)}{3}+6\cdot\frac{5(x-10)}{6}=6\cdot 2x+6\cdot 6$

$\Longleftrightarrow 3(x+6)+4(x+17)+5(x-10)=12x+36 \Longleftrightarrow 3x+18+$ $+4x+68+5x-50=12x+36 \Longleftrightarrow 3x+4x+5x-12x=$ $=-18-68+50+36 \Longleftrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$ (Ἀόριστος).

Π3. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(Ε1): $\frac{2x+3}{2x+1}-\frac{2x+5}{2x+7}=1-\frac{3(2x^2+3x-3)}{4x^2+16x+7}$

(Ε2): $\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{x^2+2x-3}=0$

(Ε3): $\frac{x+1}{2x-2}-\frac{x-1}{2(x+1)}+\frac{4x}{1-x^2}+\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{x-1}{x+1}$

Ἐπίλυσις: **(Ε1)** $\Longleftrightarrow \frac{2x+3}{2x+1}-\frac{2x+5}{2x+7}=1-\frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$ $\Big|\, \mathcal{D}=R-\left\{-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right\} \Longleftrightarrow (2x+1)(2x+7)\frac{2x+3}{2x+1}-(2x+1)(2x+$ $+7)\cdot\frac{2x+5}{2x+7}\quad (2x+1)(2x+7)-(2x+1)(2x+7)\cdot\frac{6x^2+9x-9}{(2x+1)(2x+7)}$

$\Longleftrightarrow (2x+7)(2x+3)-(2x+1)(2x+5)=(2x+1)(2x+7)-(6x^2+9x-9)$ $\Longleftrightarrow 4x^2+14x+6x+21-4x^2-2x-10x-5=4x^2+16x+7-6x^2-$ $-9x+9 \Longleftrightarrow 2x^2+x=0 \Longleftrightarrow x(2x+1)=0 \Longleftrightarrow x=0$ διότι $2x+1\neq$ $\neq 0 \Longrightarrow A=\{0\}\subset\mathcal{D}$.

(Ε2) $\Longleftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{x+2}{x+3}+\frac{4}{(x-1)(x+3)}=0 \;\Big|\; \mathcal{D}=R-\{-3,1\} \Longleftrightarrow$ $(x-1)(x+3)\frac{x+1}{x-1}-(x-1)(x+3)\frac{x+2}{x+3}+\frac{4(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+3)}=0 \Longleftrightarrow (x+$ $+3)(x+1)-(x-1)(x+2)+4=0 \Longleftrightarrow x^2+4x+3-x^2-x+2+4=0 \Longleftrightarrow 3x+$ $+9=0 \Longleftrightarrow 3(x+3)=0 \Longleftrightarrow x+3=0 \Longleftrightarrow x=-3\notin\mathcal{D} \Rightarrow A\equiv\phi$ (Ἀδύνατος)

$(E3): \iff \dfrac{x+1}{2(x-1)} - \dfrac{x-1}{2(x+1)} - \dfrac{4x}{(x-1)(x+1)} + \dfrac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{x-1}{x+1} \Big| \varnothing = R - \{\pm 1\}.$

$\iff 2(x-1)(x+1)\dfrac{x+1}{2(x-1)} - 2(x-1)(x+1)\dfrac{x-1}{2(x+1)} - 2(x^2-1)\dfrac{4x}{x^2-1} +$

$+ 2(x^2-1)\dfrac{x^2+1}{x^2-1} = 2(x-1)(x+1)\dfrac{x-1}{x+1} \iff (x+1)^2 - (x-1)^2 -$

$-8x + 2(x^2+1) = 2(x-1)^2 \iff 4x - 8x + 2x^2 + 2 - 2x^2 + 4x - 2 = 0 \iff$

$\iff 0 \cdot x = 0 \implies A = R - \{\pm 1\} \equiv \varnothing.$

Π4. Ἀναλύσατε εἰς γινόμενον παραγόντων τά: $\varphi(x) = (3x-5)\cdot(2x-3) - (3x-5)(x+4)$ καί $\sigma(x) = 9x^2 - 25$ καί ἐπιλύσατε ἐν Ω τήν ἐξίσωσιν:

$(E): \ 2\varphi(x) - 3\sigma(x) = 0$ ($\Omega = R$ ἤ $\Omega = Z$ ἤ $\Omega = N$ ἤ $\Omega = \left\{-\frac{29}{7}, \frac{5}{3}\right\}$).

Λύσις: $\varphi(x) = (3x-5)(2x-3) - (3x-5)(x+4) = (3x-5)[2x - 3 - (x+4)] = (3x-5)(2x-3-x-4) = (3x-5)(x-7)$.

$\sigma(x) = 9x^2 - 25 = (3x)^2 - 5^2 = (3x-5)(3x+5)$. Ἄρα $(E) \iff 2(3x-5)(x-7) - 3(3x-5)(3x+5) = 0 \iff (3x-5)\cdot[2(x-7) - 3(3x+5)] = 0 \iff (3x-5)(2x-14-9x-15) = 0 \iff (3x-5)(-7x-29) = 0 \iff 3x-5 = 0 \vee -7x-29 = 0 \iff 3x = 5 \vee -7x = 29 \iff x = \frac{5}{3} \vee x = -29/7$. Συνεπῶς (i) ἐάν $\Omega = R \implies A = \left\{-\frac{29}{7}, \frac{5}{3}\right\}$, (ii) ἐάν $\Omega = Z \implies A = \varnothing$.

III. Ἐάν $\Omega = N \implies A = \varnothing$ καί (iv) ἐάν $\Omega = \left\{-\frac{29}{7}, \frac{5}{3}\right\} \implies A = \Omega$

(ἀόριστος ἤ ταυτότης ἐν $\Omega = \left\{-\frac{29}{7}, \frac{5}{3}\right\}$).

Π5. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις: $(E1): \ (x^2 + 4x - 12)\cdot(2x^2 + 5x + 2) = 0$ $(E2): \ (x^2 - \sqrt{3}\cdot x + \sqrt{3} - 1)\,[x(\sqrt{3}+1) + 3 - x - 3\sqrt{3}] = 0$ καί $(E3): \ \dfrac{x}{x-2} - \dfrac{x^2-x+1}{x^2-5x+6} = 3 - \dfrac{x+1}{x-3}$

Ἐπιλυσις: $(E1)$ Ἐπειδή $x^2 + 4x - 12 = x^2 + 6x - 2x - 12 = x(x+6) - 2(x+6) = (x+6)(x-2)$ καί ἐπειδή ἡ $2x^2 + 5x + 2 = 0$ ἔχει διακρίνουσα $\Delta = 5^2 - 4\cdot 2\cdot 2 = 25 - 16 = 9 \implies \sqrt{\Delta} = \sqrt{9} = 3$ ἕπεται ὅτι $(E1) \iff (x+6)(x-2)\cdot 2\cdot\left(x - \dfrac{-5+3}{2\cdot 2}\right)\left(x - \dfrac{-5-3}{2\cdot 2}\right) =$

$= 0 \iff (x+6)(x-2)\cdot\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2) = 0 \implies x+6 = 0 \vee x + \frac{1}{2} = 0 \vee x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0 \implies x = -6 \vee x = -\frac{1}{2} \vee x = \pm 2 \implies$

$\implies A = \left\{-6, \dfrac{-1}{2}, \pm 2\right\}.$

(E2): Ἐπειδὴ $x^2-\sqrt{3}\cdot x+\sqrt{3}-1=x^2-(\sqrt{3}-1+1)x+1(\sqrt{3}-1)=(x-1)[x-(\sqrt{3}-1)]$ κατὰ τὴν ταυτότητα: $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$, ἕπεται ὅτι: $(E2)\Longleftrightarrow(x-1)[x-(\sqrt{3}-1)](x\sqrt{3}+x+3-x-3\sqrt{3})=0\Longleftrightarrow(x-1)(x-\sqrt{3}+1)(x\sqrt{3}+3-3\sqrt{3})=0\Longleftrightarrow x-1=0\ \vee\ x-\sqrt{3}+1=0\ \vee\ \vee\ x\sqrt{3}+3-3\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x=1\ \vee\ x=\sqrt{3}-1\ \vee\ x=\dfrac{-3+3\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=$
$=\dfrac{3(-1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{3[-\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2]}{3}=3-\sqrt{3}\Longrightarrow A=\{1,\sqrt{3}-1,3-\sqrt{3}\}$.

(E3): $\Longleftrightarrow\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{x^2-x+1}{(x-2)(x-3)}=3-\dfrac{x+1}{x-3}\ \Big|\ \mathcal{D}=R-\{2,3\}\Longleftrightarrow$
$(x-2)(x-3)\dfrac{x}{x-2}-(x-2)(x-3)\dfrac{x^2-x+1}{(x-2)(x-3)}=3(x-2)(x-3)-$
$-(x-2)\cdot(x-3)\cdot\dfrac{x+1}{x-3}\Longleftrightarrow x(x-3)-(x^2-x+1)=3(x^2-5x+6)-$
$-(x-2)(x+1)\Longleftrightarrow x^2-3x-x^2+x-1=3x^2-15x+18-x^2+x+2\Longleftrightarrow$ $x^2-3x-x^2+x-1-3x^2+15x-18+x^2-x-2=0\Longleftrightarrow-2x^2+12x-21=$ $=0$ μὲ διακρίνουσα $\Delta=-24<0\Longrightarrow(E3)$ ἀδύνατος ἐν R.

Π6. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $x^2+2ax-bx-3a^2+5ab-2b^2=0$, $a\in R$, $\beta\in R$.
(E2): $(x^3+2x^2-43x-140)(x^3-4x^2+x+6)=0$
(E3): $(x+1)^3+x(x-1)(x+5)(x+1)-5x+1=0$
(E4): $x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1=0$
(E5): $x^6+x^5\pm3(x^4-x^3-2x^2)=8(x^3+x^2)$.

Ἐπιλύσεις: **(E1)** $\Longleftrightarrow x^2+(2a-b)x-3a^2+5ab-2b^2=0\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x^2+2\,\dfrac{2a-b}{2}x+\left(\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-3a^2+5ab-2b^2=0$
$\Longleftrightarrow\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-\dfrac{4a^2-4ab+b^2}{4}-3a^2+5ab-2b^2=0\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-\dfrac{4a^2-4ab+b^2+12a^2-20ab+8b^2}{4}=0\Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-\dfrac{16a^2-24ab+9b^2}{4}=0\Longleftrightarrow\left(x+\dfrac{2a-b}{2}\right)^2-$
$-\left(\dfrac{4a-3b}{2}\right)^2=0\Longleftrightarrow\left(x+\dfrac{2a-b}{2}+\dfrac{4a-3b}{2}\right)\cdot\left(x+\dfrac{2a-b}{2}-\dfrac{4a-3b}{2}\right)=$
$=0\Longleftrightarrow x+3a-2b=0\ \vee\ x-a+b=0\Longleftrightarrow x=2b-3a\ \vee$ $x=a-b\Longrightarrow A=\{a-b,2b-3a\}$ ἐφ' ὅσον $a-b\neq 2b-3a\Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow 4a\neq 3b$. Ἐὰν $4a=3b\Longrightarrow A=\{a-b\}$ ὅπου ἡ ῥίζα $a-b$ ἔχει πολλαπλότητα 2 (Διπλῆ).

(E2): Ἐπειδὴ $x^3+2x^2-43x-140=x^3+(-7+4+5)x^2+(-7\cdot4-7\cdot5+4\cdot5)x-7\cdot4\cdot5=(x-7)(x+4)\cdot(x+5)$.

[Συμφώνως πρός γνωστήν ταυτότητα].

Ἐπίσης $x^3-4x^2+x+6 = x^3-5x^2+6x+x^2-5x+6 = x(x^2-5x+6)+x^2-5x+6 = (x^2-5x+6)(x+1) = (x-2)(x-3)(x+1)$, ἕπεται ὅτι $(E2) \Longleftrightarrow (x-7)(x+4)(x+5)(x-2)(x-3)(x+1)=0$
$\Longleftrightarrow x-7=0 \vee x+4=0 \vee x+5=0 \vee x-2=0 \vee x-3=0 \vee x+1=0 \Longleftrightarrow x=7 \vee x=-4 \vee x=-5 \vee x=+2 \vee x=3 \vee x=-1 \Rightarrow$

$$A=\{-5,-4,-1,2,3,7\}$$

$(E3)$: $\Longleftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+x^4+(-1+5+1)x^3+(-5-1+5)x^2+(-5)x+0(-1)5\cdot 1-5x+1=0 \Longleftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+x^4+5x^3-x^2-5x-5x+1=0 \Longleftrightarrow x^4+6x^3+2x^2-7x+2=0 \Longleftrightarrow x^4+5x^3-2x^2+x^3+5x^2-2x-x^2-5x+2=0 \Longleftrightarrow x^2(x^2+5x-2)+x(x^2+5x-2)-(x^2+5x-2)=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+5x-2)(x^2+x-1)=0$

$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{-5+\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{33}}{2}\right)\left(x-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$

$\Longleftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{33}}{2} \vee x=\frac{-5-\sqrt{33}}{2} \vee x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$\Longleftrightarrow A=\left\{\frac{-5\pm\sqrt{33}}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

$(E4)$: $\Longleftrightarrow x^5-1+2x^4-2x+x^3-x^2=0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)+2x(x-1)(x^2+x+1)+x^2(x-1)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1+2x^3+2x^2+2x+x^2)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^4+3x^3+4x^2+3x+1)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x^4+4x^3+6x^2+4x+1-x^3-2x^2-x)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)[(x+1)^4-x(x+1)^2]=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(x+1)^2(x^2+x+1)=0$ ①

__Διαφορετικά:__ $(E4)$: $\Longleftrightarrow x^3(x^2+2x+1)-(x^2+2x+1)=0$

$\Longleftrightarrow (x+1)^2(x^3-1)=0 \Longleftrightarrow (x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)=0$ ①

$\Longleftrightarrow x-1=0 \vee (x+1)^2=0 \vee x^2+x+1=0$

$\Longleftrightarrow x=1 \vee x=-1$ (διπλῆ) $\Longrightarrow A=\{\pm 1\}$ μέ τήν -1 ρίζαν διπλῆν. Ἡ $x^2+x+1=0$ εἶναι ἀδύνατος ἐν R διότι $\Delta=1^2-4\cdot1\cdot1=1-4=-3<0$. (εἴτε $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$).

$(E5)$: $\Longleftrightarrow x^6+x^5-8x^3-8x^2\pm 3x^2(x^2-x-2)=0$

$\Longleftrightarrow x^2[x(x^3-8)+x^3-8]\pm 3x^2[x(x-2)+(x-2)]=0$

$\Longleftrightarrow x^2(x^3-8)(x+1)\pm 3x^2(x-2)(x+1)=0$

$\Longleftrightarrow x^2(x-2)(x+1)(x^2+2x+4)\pm 3x^2(x-2)(x+1)=0$

$\Longleftrightarrow x^2(x-2)(x+1)(x^2+2x+4\pm 3)=0$

$\Longleftrightarrow x^2=0 \vee x-2=0 \vee x+1=0 \vee x^2+2x+4\pm 3=0$

$\Longleftrightarrow x=0$ (διπλῆ) $\vee x=2 \vee x=-1 \vee$
[① $x^2+2x+7=0$ διά τό $(+)$] $\vee$ [② $x^2+2x+1=0$ διά τό $(-)$].

Εἰς περίπτωσιν ① ἔχομεν $\Delta = 2^2-4\cdot 1\cdot 7 = 4-28=-24<0$ καὶ εἰς τὴν ②, $(x+1)^2=0 \Longleftrightarrow x=-1$ (διπλῆ). Ἄρα ① διὰ τὸ $(+) \Longrightarrow A=\{-1,0,2\}$ ὅπου ἡ ρίζα 0 διπλῆ καὶ

② διὰ τὸ πρόσημον $(-)$ εἰς τὴν (Ε5) ἔχομεν $A=\{-1,0,2\}$ ὅπου ἡ ρίζα 0 διπλῆ καὶ ἡ -1 τριπλῆ.

Π7. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(Ε1): $(x^2-x)(2x-5)=(x^2-x)(x+9)$

(Ε2): $\dfrac{(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2}{x^2+x-12}=0$

(Ε3): $4x^5-65a^2x^3+16a^4x=0$

Ἐπίλυσις: (Ε1) $\Longleftrightarrow (x^2-x)(2x-5)-(x^2-x)(x+9)=0$
$\Longleftrightarrow (x^2-x)(2x-5-x-9)=0 \Longleftrightarrow x(x-1)(4x-14)=0$
$\Longleftrightarrow x=0 \vee x-1=0 \vee 4x-14=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee 4x=14$
$\Longleftrightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=\frac{7}{2} \Longrightarrow A=\{0,1,\frac{7}{2}\}$.

(Ε2): $\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}(x^2-9)^2-(x+5)(x-3)^2=0\\ x^2+x-12\neq 0\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}(x-3)^2(x+3)^2-(x+5)(x-3)^2=0\\ x^2+(4-3)x+4(-3)\neq 0\end{Bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}(x-3)^2[(x+3)^2-(x+5)]=0\\ (x+4)(x-3)\neq 0\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}(x-3)^2(x^2+6x+9-x-5)=0\\ (x+4)(x-3)\neq 0\end{Bmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}x^2+5x+4=0\\ x+4\neq 0\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}x^2+(4+1)x+4\cdot 1=0\\ x+4\neq 0\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix}(x+4)(x+1)=0\\ x+4\neq 0\end{Bmatrix} \Longleftrightarrow x+1=0 \Longleftrightarrow x=-1 \Longrightarrow A=\{-1\}$

(Ε3): $\Longleftrightarrow 4x^5-64a^2x^3-a^2x^3+16a^4x=0$
$\Longleftrightarrow 4x^3(x^2-16a^2)-a^2x(x^2-16a^2)=0$
$\Longleftrightarrow x(x^2-16a^2)(4x^2-a^2)=0$
$\Longleftrightarrow x(x-4a)(x+4a)(2x-a)(2x+a)=0$
$\Longleftrightarrow x=0 \vee x-4a=0 \vee x+4a=0 \vee 2x-a=0$
$\vee\ 2x+a=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=4a \vee x=-4a$
$\vee\ x=\frac{a}{2} \vee x=-\frac{a}{2} \Longrightarrow A=\{0,\pm 4a,\pm\frac{a}{2}\}$ ἢ $A=\{0\}$

μὲ τὸ 0 ρίζαν βαθμοῦ πολλαπλότητος 5 ἐὰν καὶ μόνον ἐὰν $a=0$. Πράγματι ἐὰν $a=0 \Longrightarrow \pm 4a=\pm\frac{a}{2}=0$. Ἐὰν $a\neq 0$ τότε

$(1) \pm 7a \neq 0 \Longleftrightarrow \pm 7a \pm a \neq \pm a \Longleftrightarrow \pm 8a \neq \pm a \Longleftrightarrow \pm 4a \neq \pm \frac{a}{2}$,
$(2) \pm 9a \neq 0 \Longleftrightarrow \pm 9a \mp a \neq \mp a \Longleftrightarrow \pm 8a \neq \mp a \Longleftrightarrow \pm 4a \neq \mp \frac{a}{2}$

καί $(3)\ 8a \neq 0 \Longleftrightarrow 4a + 4a \neq 0 \Longleftrightarrow 4a \neq -4a$ (ὁμοίως καί $\frac{a}{2} \neq -\frac{a}{2}$).

Π8. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:
(E1): $x^4 + x^3 - 31x^2 - 25x + 150 = 0$
(E2): $x^2(2x^2 - 1) + (2x+1)^3 = 0$
(E3): $x^3 - \frac{37}{12}x^2 + \frac{37}{12}x - 1 = 0$

Ὑπόδειξις: Χρησιμοποιήσατε τό θεώρημα: «Ἐάν πολυώνυμον $\varphi(x) = a_0 x^{\kappa} + a_1 x^{\kappa-1} + \ldots + a_{\kappa}$ ἔχῃ ἀκεραίους συντελεστάς καί δέχεται ὡς ρίζαν τόν ρητόν ἀριθμόν $\frac{\mu}{\nu}$, ἤτοι $\varphi\left(\frac{\mu}{\nu}\right) = 0$ ἤ $\varphi(x) = \left(x - \frac{\mu}{\nu}\right)\eta(x)$ (1) $\wedge\ \mu \in Z, \nu \in Z - \{0\}$, $(\mu, \nu) = 1$, τότε $\mu / a_{\kappa} \wedge \nu / a_0$ ». Πρός εὕρεσιν τοῦ πηλίκου $\eta(x)$ εἰς τήν ἀνάλυσιν (1) νά ἐφαρμοσθῇ ἡ μέθοδος τῆς συντόμου διαιρέσεως ἀκεραίου πολυωνύμου διά διωνύμου - Μέθοδος Horner.

Ἐπίλυσις: Ἐπειδή $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ ἕπεται ὅτι : $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 25, \pm 30, \pm 50, \pm 75, \pm 150/150$.
Εὐκόλως διαπιστοῦται τώρα ὅτι, ἐάν $\varphi(x)$ = μέ τό πρῶτον μέλος τῆς (E1), εἶναι $\varphi(2) = \varphi(-3) = \varphi(\pm 5) = 0$
Ἐξ ἄλλου τό $\varphi(x)$, ἄρα καί ἡ (E1) εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καί συνεπῶς ἔχει 4 ρίζες ἤτοι: (E1) $\Longleftrightarrow x = 2 \vee x = -3 \vee x = 5 \vee x = -5 \Longrightarrow A = \{-5, -3, 2, 5\}$.
(E2) $\Longleftrightarrow 2x^4 - x^2 + (2x)^3 + 3(2x)^2 + 3 \cdot 2x + 1 = 0 \Longleftrightarrow 2x^4 + 8x^3 + 11x^2 + 6x + 1 = 0$ (1). Ἔχομεν $\pm 1/1 \wedge \pm 1, \pm 2/2 \Longrightarrow$ πιθανές ρητές ρίζες τῆς (1): $\pm 1, \pm \frac{1}{2}$. Προφανῶς ἡ (1) δέν δέχεται θετικήν ρίζαν, ἄρα θά ἐξετάσωμεν μόνο τό -1 καί $-\frac{1}{2}$.
Ἐάν $\varphi(x)$ = μέ τό πρῶτον μέλος τῆς (1) $\Longrightarrow \varphi(-1) = 2 - 8 + 11 - 6 + 1 = 14 - 14 = 0$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{16} - 8 \cdot \frac{1}{8} + 11 \cdot \frac{1}{4} - 6 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{31}{8} - \frac{32}{8} = -\frac{1}{8} \neq 0 \Longrightarrow x + 1 / \varphi(x)$.

Ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 8 & 11 & 6 & 1 & -1 \\ & -2 & -6 & -5 & -1 & \\ \hline 2 & 6 & 5 & 1 & 0 & \end{array}\right\} \Longrightarrow (E2) \Longleftrightarrow (x+1)\cdot$$

$\cdot(2x^3+6x^2+5x+1)=0$ καὶ ἐπειδὴ $-2+6-5+1=0 \Longrightarrow$

$$(E_2) \iff (x+1)^2\,\Pi(x)=0 \iff \begin{array}{|cccc|c} 2 & 6 & 5 & 1 & -1 \\ & -2 & -4 & -1 & \\ \hline 2 & 4 & 1 & \| \; 0 & \end{array}$$

$\iff (x+1)^2(2x^2+4x+1)=0 \iff$

$\iff (x+1)^2=0 \;\vee\; 2x^2+4x+1=0 \iff x=-1$ (Διπλῆ)

$\vee\; 2\left(x-\dfrac{-4+\sqrt{8}}{4}\right)\left(x-\dfrac{-4-\sqrt{8}}{4}\right)=0 \iff x=-1$ (Διπλῆ)

$\vee\; x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}$ (Διότι $\Delta=4^2-4\cdot2\cdot1=16-8=8 \Longrightarrow \sqrt{\Delta}=$

$=\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot2}=2\sqrt{2}$). Συνεπῶς $A=\left\{-1,\ \dfrac{-2\pm\sqrt{2}}{2}\right\}$ (ἡ -1 διπλῆ).

$(E_3) \iff 12x^3-37x^2+37x-12=0$ ①

Ἔχομεν ὅτι, $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12/12$.

προφανῶς ἡ δοθεῖσα δὲν δέχεται ἀρνητικὰς ρίζας ἄρα, θὰ ἐξετάσωμεν μόνο τὰς πιθανὰς θετικὰς ρίζας αἱ ὁποῖαι προκύπτουν ἐκ τῶν δυνατῶν συνδυασμῶν τῶν διαιρετῶν τοῦ 12. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι, ἐὰν $\varphi(x)=$ α' μέλος τῆς ①, $\varphi(1)=\varphi\left(\frac{4}{3}\right)=$ $=\varphi\left(\frac{3}{4}\right)=0$. Συνεπῶς:

$(E_3) \iff x=1 \;\vee\; x=\dfrac{3}{4} \;\vee\; x=\dfrac{4}{3}$ (ἀφοῦ εἶναι 3ου βαθμοῦ)

$\Rightarrow A=\left\{1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{3}\right\}$.

Σημείωσις: Ἐπειδὴ διὰ τὴν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν ἰσχύει ὅτι "ἐὰν $\frac{\mu}{\nu}$ εἶναι μία ρίζα αὐτῆς, τότε καὶ ἡ $\frac{\nu}{\mu}$ θὰ εἶναι ρίζα αὐτῆς, καλεῖται αὕτη ἀντίστροφος. $\mu\nu\neq0$." (βλέπε καὶ Π 5.5)

Π9. Ἐὰν $\varphi(x)=\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\dfrac{2}{x-1}\right)$

καὶ $\sigma(x)=(x^3+x^2+x+1)^2-x^3$, δείξατε ὅτι ἡ (E): $\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}=1$ δὲν ἔχει καμμίαν σύμμετρον ρίζαν διάφορον τοῦ μηδενός.

Λύσις: $\varphi(x)=\left(\dfrac{x^5-1}{x-1}+\dfrac{2}{x-1}\right)\left(\dfrac{x^5+1}{x+1}-\dfrac{2}{x+1}\right)=\dfrac{x^5+1}{x-1}\cdot\dfrac{x^5-1}{x+1}=$

$=\dfrac{x^5+1}{x+1}\cdot\dfrac{x^5-1}{x-1}=(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$ καὶ

$\sigma(x)=\left(\dfrac{x^4-1}{x-1}\right)^2-x^3=\dfrac{(x^4-1)^2-x^3(x-1)^2}{(x-1)^2}=$

$$= \frac{x^8-2x^4+1-x^3(x^2-2x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^8-2x^4+1-x^5+2x^4-x^3}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{x^8+1-x^5-x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^5(x^3-1)-(x^3-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x^5-1)(x^3-1)}{(x-1)^2} =$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1).$$

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1)} = 1 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^4-x^3+x^2-x+1 = x^2+x+1 \\ (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^2+x+1) \neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x^4-x^3+x^2-x+1-$$

$$-x^2-x-1=0 \Longleftrightarrow x^4-x^3-2x=0 \Longleftrightarrow x(x^3-x^2-2)=0 \Longleftrightarrow$$

$x=0 \vee x^3-x^2-2=0$. Ἔχομεν ± 1, $\pm 2/2$.

Τὸ $f(x) \equiv x^3-x^2-2$ δέν δέχεται προφανῶς ἀρνητικάς ρίζας ἄρα θὰ ἐξετάσωμεν μόνο τὸ $+1$ καὶ τὸ $+2$. Εἶναι ὅμως $f(1)=1-1-2=-2\neq 0$ καὶ $f(2)=8-4-2=2\neq 0 \Rightarrow$ (E) ἔχει μόνο τὸ 0 ὡς σύμμετρον ρίζαν.

Π10. Ἐάν ἡ ἐξίσωσις $(E1)$: $(x-\rho_1)(x-\rho_2)(x-\rho_3)\dots(x-\rho_\nu)+a=0$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς ἀριθμοὺς $x_1, x_2, x_3, \dots, x_\nu$ $(\nu\in N)$, τότε ἡ $(E2)$: $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)-a=0$ ἔχει ὡς ρίζας τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ $(E1)$ δέχεται ὡς ρίζας τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς $x_1, x_2, \dots x_\nu$ καὶ ἔχει συντελεστὴν τῆς μεγαλυτέρας δυνάμεως τοῦ ἀγνώστου τὴν μονάδα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν: $(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)+a=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu) \Longleftrightarrow (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_\nu)-a=(x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)$. Ἡ τελευταία αὕτη ἰσότης συνεπάγεται ὅτι $(E2) \Longleftrightarrow (x-\rho_1)(x-\rho_2)\dots(x-\rho_\nu)=0 \Longleftrightarrow x=\rho_1 \vee x=\rho_2 \vee \dots \vee x=\rho_\nu$ ἤτοι δέχεται αὕτη τοὺς ἀριθμοὺς $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\nu$ ὡς ρίζας.

Π11. Τῇ βοηθείᾳ γνωστῶν ταυτοτήτων νὰ καταστοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις παραγοντοποιημένης μορφῆς καὶ ἐν συνεχείᾳ νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R.

$(E1)$: $(x^2-2x+1)^2=(x^2-4x+3)^2$, $(E2)$: $4(3x-1)^2=9(2x+3)^2$, $(E3)$: $\left(\frac{x^3}{289}-x\right)(x^4-4)=0$, $(E4)$: $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=$

$= \frac{(x+1)^4+x^4+1}{2}$, (E5): $x^2-4x+4a-2ax+4=0$ $(a\in R)$,

(E6): $(2x+1)^5-2x-1=0$.

Επίλυσις: **(E1)** $\Longleftrightarrow \left[(x-1)^2\right]^2=\left[(x-1)(x-3)\right]^2 \Longleftrightarrow (x-1)^4-$
$-(x-1)^2(x-3)^2=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2\left[(x-1)^2-(x-3)^2\right]=0$
$\Longleftrightarrow (x-1)^2(x-1-x+3)(x-1+x-3)=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2\cdot 2(2x-4)=0$
$\Longleftrightarrow 4(x-1)^2\cdot(x-2)=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2=0 \vee x-2=0$
$\Longleftrightarrow x=1$ (Διπλή) $\vee$ $x=2$.

(E2) $\Longleftrightarrow \left[2(3x-1)\right]^2-\left[3(2x+3)\right]^2=0 \Longleftrightarrow \left[2(3x-1)-3(2x+3)\right]\cdot$
$\cdot\left[2(3x-1)+3(2x+3)\right]=0 \Longleftrightarrow (6x-2-6x-9)(6x-2+6x+9)=0 \Longleftrightarrow$
$-11(12x+7)=0 \Longleftrightarrow 12x=-7 \Longleftrightarrow x=-\frac{7}{12}$

(E3) $\Longleftrightarrow x\left(\frac{x^2}{289}-1\right)(x^2-2)(x^2+2)=0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{x}{17}-1\right)\left(\frac{x}{17}-1\right)+(x+\sqrt{2})$
$(x-\sqrt{2})(x^2+2)=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee \frac{x}{17}-1=0 \vee \frac{x}{17}-1=0 \vee x+\sqrt{2}=0$
$x-\sqrt{2}=0$ (τό $x^2+2\neq 0 \ \forall\ x\in R$) $\Longleftrightarrow x=0 \vee x=\pm 17 \vee$
$x=\pm\sqrt{2} \Longrightarrow A=\{-17,-\sqrt{2},0,\sqrt{2},17\}$.

(E4) $\Longleftrightarrow \left[x(x+3)\right]\left[(x+1)(x+2)\right]+1=\frac{(x+1)^4+x^4+1}{2} \Longleftrightarrow$

$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=\frac{x^4+4x^3+6x^2+4x+1+x^4+1}{2} \Longleftrightarrow$

$(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1=x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \Longleftrightarrow$

$(x^2+3x+1)^2=(x^2+x+1)^2 \Longleftrightarrow (x^2+3x+1)^2-(x^2+x+1)^2=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+3x+1+x^2+x+1)(x^2+3x+1-x^2-x-1)=0 \Longleftrightarrow$

$(2x^2+4x+2)(2x)=0 \Longleftrightarrow 4x(x^2+2x+1)=0 \Longleftrightarrow x(x+1)^2=$

$=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee (x+1)^2=0 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=-1$ (Διπλή)

$\Longrightarrow A=\{0,-1\}$ (-1 διπλή)

(E5) $\Longleftrightarrow x^2+a^2-2ax-4x+4a=a^2 \Longleftrightarrow (x-a)^2$

$-4(x-a)+4=a^2 \Longleftrightarrow (x-a-2)^2=a^2 \Longleftrightarrow (x-a-2)^2-a^2=0$

$\Longleftrightarrow (x-a-2+a)(x-a-2-a)=0 \Longleftrightarrow (x-2)\left[x-2(a+1)\right]=$

$=0 \Longleftrightarrow x=2 \vee x=2(a+1) \Longrightarrow A=\{2(a+1),2\}$, 'Εάν $a+1 \neq 1 \iff a \neq 0$, ή $A=\{2\}$ (2 διπλή) εάν $a=0$.

$(E6) \iff (2x+1)^5-(2x+1)=0 \iff (2x+1)\left[(2x+1)^4-1\right]=0$
$\iff (2x+1)\left[(2x+1)^2+1\right]\left[(2x+1)^2-1\right]=0 \iff$
$(2x+1)(4x^2+4x+2)(2x+1-1)(2x+1+1)=0 \iff$
$(2x+1)\cdot 2\cdot(2x^2+2x+1)\cdot 2x\cdot 2\cdot(x+1)=0 \iff$
$x(x+1)(2x+1)(2x^2+2x+1)=0 \iff x=0 \lor x+1=0$
$\lor\ 2x+1=0 \lor 2x^2+2x+1=0$ και επειδή διά την τελευταίαν έχομεν $\Delta=2^2-4\cdot 2\cdot 1=4-8=-4<0$ (ήτοι αδύνατος εν R) $\implies A=\left\{0,-1,-\frac{1}{2}\right\}$

Π12. Ὁμοίως ὡς εἰς Π11 διὰ τὰς ἐξισώσεις:

$(E1)$: $3(x^3 \pm 8)=(x\pm 2)^3$

$(E2)$: $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=\dfrac{x^2+x+1}{x}$, $(E3)$: $\dfrac{x^3}{27}-\dfrac{x^2}{3}+x-1=$
$=\dfrac{24-36x+18x^2-3x^3}{81}$

'Επιλύσεις: $(E1) \iff 3(x^3\pm 2^3)=(x\pm 2)^3 \iff$
$3\left[(x\pm 2)(x^2\mp 2x+4)\right]-(x\pm 2)^3=0$
$\iff (x\pm 2)\left[3(x^2\mp 2x+4)-(x\pm 2)^2\right]=0$
$\iff (x\pm 2)(3x^2\mp 6x+12-x^2\mp 4x-4)=0$
$\iff (x\pm 2)(2x^2\pm 10x+8)=0 \iff (x\pm 2)(x^2\mp 5x+4)=0$
$\iff (x\pm 2)\left[x^2\mp(4+1)x+4\cdot 1\right]=0 \iff (x\pm 2)(x\mp 1)(x\mp 4)=0$
$\iff x\pm 2=0 \lor x\mp 1=0 \lor x\mp 4=0 \iff$
$x=\mp 2 \lor x=\pm 1 \lor x=\pm 4$

$(E2) \iff \dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}-\dfrac{x^2+x+1}{x}=0 \quad \Big| \quad \mathcal{D}=R-\{0\}$

$\iff x^4+x^2+1-x^3-x^2-x=0 \iff x^4-x^3-x+1=0 \iff x^3(x-1)-(x-1)=0$
$\iff (x-1)(x^3-1)=0 \iff (x-1)^2(x^2+x+1)=0 \iff (x-1)^2=0 \lor$
$x^2+x+1=0$ (μὲ $\Delta=1-4=-3<0$) $\iff x=1$ (διπλῆ).

$(E3) \iff \left(\frac{x}{3}\right)^3-3\left(\frac{x}{3}\right)^2+3\,\frac{x}{3}-1=\dfrac{3(8-12x+6x^2-x^3)}{3^4} \iff \left(\frac{x}{3}-1\right)^3=$
$=\dfrac{3(2-x)^3}{3^4} \iff \dfrac{(x-3)^3}{3^3}=\dfrac{(2-x)^3}{3^3} \iff (x-3)^3-(2-x)^3=0 \iff$
$(x-3-2+x)\left[(x-3)^2+(x-3)(2-x)+(2-x)^2\right]=0 \iff (2x-5)\cdot$
$\cdot(x^2-6x+9-x^2+5x-6+x^2-4x+4)=0 \iff$
$\iff (2x-5)(x^2-5x+7)=0 \iff 2x-5=0 \lor x^2-5x+7=0$

(μὲ $\Delta=5^2-4\cdot 1\cdot 7=25-28=-3<0$) $\iff x=\dfrac{5}{2}$.

Π13. Ὁμοίως ὡς εἰς Π11 διὰ τὰς ἐξισώσεις: (Ε1): $x^3-3x^2-2x+2=0$, (Ε2): $16x^6-24x^5-7x^4+20x^3-2x^2-4x+1=0$, (Ε3): $x(x-1)(x-2)(x-3)=120$.

Ἐπίλυσις: **(Ε1)** $\Longleftrightarrow (x+1)(x^2-4x+2)=0$ διότι διὰ $x=-1$ ἔχομεν $-1-3+2+2=0 \Longrightarrow$

1	−3	−2	2	−1
	−1	+4	−2	
1	−4	2	0	

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \eta(x)=x^2-4x+2$ (βλ. ὑπόδ. Π8).

(Ε1) $\Longleftrightarrow (x+1)(x^2-4x+4-2)=0 \Longleftrightarrow (x+1)\left[(x-2)^2-(\sqrt{2})^2\right]=0$
$\Longleftrightarrow (x+1)(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2})=0 \Longleftrightarrow x+1=0 \vee x-2\mp\sqrt{2}=0$
$\Longleftrightarrow x=-1 \vee x=2\pm\sqrt{2} \Longrightarrow A=\left\{-1,\ 2\pm\sqrt{2}\right\}$

(Ε2) $\Longleftrightarrow 16x^6-24x^5+9x^4-16x^4+8x^3+12x^3+4x^2-6x^2-4x+1=0$
$\Longleftrightarrow (4x^3)^2+(-3x^2)^2+(-2x)^2+1-24x^5-16x^4+8x^3+12x^3-6x^2-4x=$
$=0 \Longleftrightarrow (4x^3-3x^2-2x+1)^2=0.$

Ἐὰν $\varphi(x)\equiv 4x^3-3x^2-2x+1$ ἔχομεν $\varphi(1)=0 \Longrightarrow \varphi(x)=(x-1)(4x^2+x-1)$. Ἄρα:

(Ε2) $\Longleftrightarrow \left[(x-1)^2=0 \ \vee\ (4x^2+x-1)^2=0\right]$ (μὲ $\Delta=1-4\cdot4(-1)=1+16=17$) $\Longleftrightarrow x=1$ (διπλῆ) $\vee\ 4^2\left(x-\frac{-1+\sqrt{17}}{8}\right)^2\cdot\left(x-\frac{-1-\sqrt{17}}{8}\right)^2=0 \Longleftrightarrow$

$x=1$ (Διπλῆ) $\vee\ x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{8}$ (Διπλές) ἤτοι $A=\left\{1,\ \frac{-1\pm\sqrt{17}}{8}\right\}$

(μὲ ὅλες τὶς ρίζες διπλές).

(Ε3) $\Longleftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)=5\cdot4\cdot3\cdot2 \Longrightarrow$ μία ρίζα εἶναι τὸ 5. Ἔχομεν καὶ (Ε3) $\Longleftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)=(-2)(-3)(-4)(-5) \Longrightarrow$ μία ἄλλη ρίζα εἶναι τὸ -2.

Εἶναι $x(x-1)(x-2)(x-3)=x^4-(1+2+3)x^3+(2+3+6)x^2-1\cdot2\cdot3\cdot x=x^4-6x^3+11x^2-6x$. Ἄρα:

(Ε3) $\Longleftrightarrow x^4-6x^3+11x^2-6x-120=0 \Longleftrightarrow (x-5)(x+2)\cdot(x^2-3x+12)=$
$=0 \Longleftrightarrow x-5=0 \vee x+2=0 \vee x^2-3x+12=0$
(μὲ $\Delta=3^2-4\cdot12=9-48=-39<0$) $\Longleftrightarrow x=5 \vee x=-2 \Longrightarrow$
$A=\left\{-2,5\right\}$. <u>Σημειώσεις:</u>

1	−6	11	−6	−120	5
	5	−5	30	120	
1	−1	6	24	0	−2
	−2	6	−24		
1	−3	12	0		

Π14. Ὁμοίως ὡς εἰς Π11 διὰ τὰς ἐξισώσεις:
(Ε1): $(x-2)^3 = x^3 - 8$ (σύνολον ἀναφορᾶς N_0)
(Ε2): $(2x+1)^5 - 32x^5 - 1 = 0$ (ἐν Q)
(Ε3): $C_1 + C_2 + C_3 = \frac{7x}{2}$ (ἐν N_0) ὅπου C_1, C_2, C_3 οἱ τρεῖς πρῶτοι συντελεσταὶ τοῦ ἀναπτύγματος τοῦ $(a+b)^x$, $x \in N_0$.

Ἐπίλυσις: (Ε1) $\Longleftrightarrow (x-2)^3 - x^3 + 2^3 = 0 \Longleftrightarrow 3(-2)x(x-2) = 0$ (ἐκ τῆς ταυτότητος $(a+b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$) $\Longleftrightarrow x(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \Longrightarrow A = \{0, 2\} \subset N_0$

(Ε2) $\Longleftrightarrow (2x+1)^5 - (2x)^5 - 1 = 0 \Longleftrightarrow 5 \cdot 2x(2x+1) \cdot (4x^2 + 2x + 1) = 0$
[ταυτότης Cauchy: $(a+b)^5 - a^5 - b^5 = 5ab(a+b)(a^2+ab+b^2)$]
$\Longleftrightarrow x = 0 \vee 2x+1 = 0 \vee 4x^2 + 2x + 1 = 0$ (μὲ $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 4 - 16 = -12 < 0 \Longleftrightarrow$ ἀδύνατος ἐν R) $\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = -\frac{1}{2}$
$\Longrightarrow A = \left\{0, -\frac{1}{2}\right\} \subset Q$

(Ε3) $\Longleftrightarrow x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{2 \cdot 3} = \frac{7x}{2} \Longleftrightarrow 6x + \frac{6(x-1)x}{2} + \frac{6x(x-1)(x-2)}{6} = 6 \cdot \frac{7x}{2}$

$\Longleftrightarrow 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = 21x$
$\Longleftrightarrow 6x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) - 21x = 0$
$\Longleftrightarrow 3x(x-1) + x(x^2 - 3x + 2) - 15x = 0$
$\Longleftrightarrow x(3x - 3 + x^2 - 3x + 2 - 15) = 0$
$\Longleftrightarrow x(x^2 - 16) = 0 \Longleftrightarrow x(x^2 - 4^2) = 0 \Longleftrightarrow x(x-4)(x+4) = 0$
$\Longleftrightarrow x = 0 \vee x - 4 = 0 \vee x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 4 \vee x = -4 \notin N_0$
$\Longrightarrow A = \{0, +4\}$

Π15. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν Ω αἱ ἐξισώσεις:
(Ε1): $3(x^2+8) = (x+4)^2$ ($\Omega = N$)

(Ε2): $3\sqrt{x}(4 - \sqrt{x} - 3x\sqrt{x}) = 24[2 - 3(1+x)] + 180$ ($\Omega = N$)
Ὑπόδειξις: Χρησιμοποιήσατε: 1) τὴν πρότασιν: $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_\nu^2 = 0 \Longleftrightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_\nu = 0$ ἐὰν $a_j \in R$ $\forall j = 1, 2, \dots, \nu$ 2) γνωστὲς ταυτότητες.

Ἐπίλυσις: (Ε1) $\Longleftrightarrow 3(x^2+8) - (x+4)^2 = 0 \Longleftrightarrow (1^2+1^2+1^2)(x^2+2^2+2^2) - (1 \cdot x + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2)^2 = 0$
$\Longleftrightarrow$ (κατὰ τὴν ταυτότητα τοῦ Lagrange) $\Longleftrightarrow (x-2)^2 + (2-2)^2 + (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2(x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=2$ (διπλῆ) $\Longrightarrow A=\{2\}\subset N$, (ἡ ρίζα 2 εἶναι διπλῆ).

(E2) $\Longleftrightarrow 3\sqrt{x}(\sqrt{x}-4+3x\cdot\sqrt{x})+24(2-3-3x)+180=0$
$\Longleftrightarrow 3x-12\sqrt{x}+48+180-72-72x+9x^2=0$
$\Longleftrightarrow 3x-12\sqrt{x}+12+9x^2-72x+144=0$
$\Longleftrightarrow 3(x-4\sqrt{x}+4)+(3x)^2-2(3x)12+12^2=0$
$\Longleftrightarrow 3(\sqrt{x}-2)^2+(3x-12)^2=0 \Longleftrightarrow 3(\sqrt{x}-2)^2+9(x-4)^2=0$
$\Longleftrightarrow \sqrt{x}-2=0 \wedge x-4=0 \Longleftrightarrow \sqrt{x}=2\wedge x=4 \Longleftrightarrow x=4\wedge x=4$
$\Longrightarrow A=\{4\}\subset N$.

Π16. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:
(E1): $8x^3-18x-28=(2x-4)^3$
(E2): $(x-1)^3-3x(2-x)-1=0$
(E3): $(x^3-6x+9)(216x^3-216x+91)=0$
(E4): $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$
(E5): $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3=0$

Ὑπόδειξις: Νά χρησιμοποιηθῆ ἡ ταυτότης τοῦ Euler.

Ἐπίλυσις: (E1) $\Longleftrightarrow (2x)^3+(-3)^3+(-1)^3-3(2x)(-3)(-1)-$
$-(2x-4)^3=0 \Longleftrightarrow (2x-4)(4x^2+9+1+6x+2x-3)-(2x-4)^3=$
$=0 \Longleftrightarrow (2x-4)(4x^2+7+8x-4x^2+16x-16)=0 \Longleftrightarrow (x-2)(24x-9)=$
$=0 \Longleftrightarrow (x-2)(8x-3)=0 \Longleftrightarrow x=2 \vee x=\frac{3}{8} \Longrightarrow A=\{2,\frac{3}{8}\}$

(E2) $\Longleftrightarrow x^3-3x(x-1)-1-3x(2-x)-1=0 \Longleftrightarrow x^3+(-1)^3+(-1)^3-$
$-3x(-1)(-1)=0 \Longleftrightarrow (x-2)(x^2+1+1+x+x-1)=0 \Longleftrightarrow x=2 \vee$
$x^2+2x+1=0 \Longleftrightarrow x=2 \vee (x+1)^2=0 \Longleftrightarrow x=2 \vee x=-1$
(διπλῆ).

(E3) $\Longleftrightarrow x^3-6x+9=0$ (I) $\vee\ 216x^3-216x+91=0$ (II)
(I) $\Longleftrightarrow x^3+2^3+1^3-3(x)(2)(1)=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x+2+1)\cdot$
$\cdot\left[(x-2)^2+(x-1)^2+(2-1)^2\right]=0 \Longleftrightarrow x+3=0 \vee (x-2)^2+(x-1)^2+$
$+1=0 \Longleftrightarrow x=-3$, διότι τό ἄθροισμα $(x-2)^2+(x-1)^2+1$ εἶναι διάφορον τοῦ μηδενός $\forall\ x\in R$. (Διατί;)
(II) $\Longleftrightarrow x^3-x+\frac{91}{216}=0 \Longleftrightarrow x^3-x+\frac{64+27}{2^3\cdot 3^3}=0 \Longleftrightarrow x^3-x+$
$+\frac{2^6}{2^3\cdot 3^3}+\frac{3^3}{2^3\cdot 3^3}=0 \Longleftrightarrow x^3+\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3-3(x)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=0$
$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2\right]=0 \Longleftrightarrow$
$x+\frac{7}{6}=0 \vee \left[\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)^2\right]=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x=-\frac{7}{6}$ διότι ἡ ἐντός τῆς ἀγκύλης παράστασις εἶναι διάφορος τοῦ μηδενός, $\forall\ x\in R$ (διατί;).

(E4): $\Longleftrightarrow (x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3-3(x-1)(x-2)(x-3)=0$
$\Longleftrightarrow (x-1+x-2+x-3)\left[(x-1)^2+(x-2)^2+(x-3)^2-(x-1)(x-2)-\right.$
$\left.-(x-1)(x-3)-(x-2)(x-3)\right]=0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x-2)\cdot 3\cdot\left[(x-1-x+\right.$
$\left.+2)^2+(x-1-x+3)^2+(x-2-x+3)^2\right]=0 \Longleftrightarrow \frac{3}{2}(x-2)(1+4+$
$+1)=0 \Longleftrightarrow x-2=0 \Longleftrightarrow x=2.$

(E5): $\Longleftrightarrow (x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3 = 3(x-1)(x-2)(3-2x)=$
$=0$ διότι $x-1+x-2+3-2x=0$.
Συνεπῶς: $3(x-1)(x-2)(3-2x)=0 \Longleftrightarrow x-1=0 \vee x-2=0$
$\vee\ 3-2x=0 \Longleftrightarrow x=1 \vee x=2 \vee x=\frac{3}{2}$.

Π17. Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:
(E1): $(3-2x)^4+(1-5x)^4+(7-3x)^4=2(3-2x)^2(1-$
$-5x)^2+2(3-2x)^2(7-3x)^2+2(1-5x)^2(7-3x)^2$

Ὑπόδειξις: Νά χρησιμοποιηθῆ ἡ ταυτότης τοῦ Moivre.

(E1): $\Longleftrightarrow -(3-2x+1-5x+7-3x)(-3+2x+1-5x+7-3x)\cdot$
$(3-2x-1+5x+7-3x)(3-2x+1-5x-7+3x)$
$+3x)=0 \Longleftrightarrow -(11-10x)(5-6x)\cdot 9\cdot(3-4x)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{11}{10} \vee$
$x=\frac{5}{6} \vee x=\frac{-3}{4}. \Longrightarrow A=\left\{-\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{11}{10}\right\}$

Π18. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:
Ὑποδείξεις: Χρησιμοποιήσατε κατάλληλον βοηθητικόν ἄγνωστον.

(E1): $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=0$
(E2): $(2x^2+3x-1)^2-5(2x^2+3x+3)+24=0$
(E3): $(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$
(E4): $(x-2)(x-4)(x-5)(x-1)=4$.
(E5): $4(x+5)(x+6)(x+10)(x+12)-3x^2=0$
(E6): $(x+1)(x+2)(x-5)(x-6)-(x+8)^2+10(2x+6)+21=0$
(E7): $\frac{2x^2+7}{2}+\frac{1}{3x^2-5}=\frac{107}{14}$.
(E8): $x^6-28x^3+27=0$

Ἐπίλυσις: **(E1)** $\xLeftrightarrow{x^2+x=w} w^2-14w+24=0 \Longleftrightarrow (w-12)\cdot$
$\cdot(w-2)=0 \Longleftrightarrow w-12=0 \vee w-2=0 \Longleftrightarrow x^2+x-12=0 \vee$
$\vee\ x^2+x-2=0 \Longleftrightarrow (x+4)(x-3)=0 \vee (x+2)(x-1)=0 \Longleftrightarrow$
$x=-4 \vee x=3 \vee x=-2 \vee x=1 \Longrightarrow A=\{-4,-2,1,3\}$
(E2) $\xLeftrightarrow{2x^2+3x+3=y} (y-4)^2-5y+24=0 \Longleftrightarrow y^2+16-8y-5y+24=$
$=0 \Longleftrightarrow y^2-13y+40=0 \Longleftrightarrow (y-8)(y-5)=0 \Longleftrightarrow y-8=0$
$\vee\ y-5=0 \Longleftrightarrow 2x^2+3x+3-8=0$ (1) $\vee\ 2x^2+3x+3-5=0$ (2).
(1) $\Longleftrightarrow 2x^2+3x-5=0 \Longleftrightarrow 2(x-1)(x+\frac{5}{2})=0 \Longleftrightarrow x=1 \vee x=-\frac{5}{2}$.

$(2) \Longleftrightarrow 2x^2+3x+3=5 \Longleftrightarrow 2x^2+3x-2=0 \Longleftrightarrow 2(x+2)\cdot$
$\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x+2=0 \vee x-\frac{1}{2}=0 \Longleftrightarrow x=-2 \vee x=\frac{1}{2}$
$\Longrightarrow A=\left\{1, \frac{-5}{2}, -2, \frac{1}{2}\right\}.$

(E3) $\xLeftrightarrow{x^2+x+4=y} y^2+8xy+15x^2=0 \Longleftrightarrow y^2+(5+3)xy+15x^2=$
$=0 \Longleftrightarrow y^2+5xy+3xy+15x^2=0 \Longleftrightarrow y(y+5x)+3x(y+5x)=0$
$\Longleftrightarrow (y+5x)(y+3x)=0 \Longleftrightarrow y+5x=0 \vee y+3x=0 \Longleftrightarrow x^2+x+$
$+4+5x=0 \vee x^2+x+4+3x=0 \Longleftrightarrow x^2+6x+4=0 \vee x^2+4x+4=$
$=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{-6+2\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-6-2\sqrt{5}}{2}\right)=0 \vee (x+2)^2=0 \Longleftrightarrow$

$x=-3\pm\sqrt{5} \vee x=-2$ (διπλή) $\Longrightarrow A=\{-3\pm\sqrt{5}, -2\}$

<u>Υπόδειξις:</u> Διαιρέσατε διά x^2 ($x\neq 0$, διατί;) καί χρησιμοποιήσατε τόν μετασχηματισμόν:
$\frac{x^2+x+4}{x}=W$ (βλέπε E5).

(E4) $\Longleftrightarrow (x^2-6x+8)(x^2-6x+5)=4 \xLeftrightarrow{x^2-6x=y} (y+8)(y+5)=$
$=4 \Longleftrightarrow y^2+13y+36=0 \Longleftrightarrow (y+4)(y+9)=0 \Longleftrightarrow y=-4 \vee$
$y=-9$. Συνεπῶς: $x^2-6x=-4$ (1) $\vee$ $x^2-6x=-9$ (2)
$(1) \Longleftrightarrow x^2-6x+4=0 \Longleftrightarrow [x-(3+\sqrt{5})][x-(3-\sqrt{5})]=0 \Longleftrightarrow x-(3+$
$+\sqrt{5})=0 \vee x-(3-\sqrt{5})=0 \Longleftrightarrow x=+3+\sqrt{5} \vee x=3-\sqrt{5}$
$(2) \Longleftrightarrow x^2-6x+9=0 \Longleftrightarrow (x-3)^2=0 \Longleftrightarrow x=3$ (διπλή) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow A=\{3+\sqrt{5}, 3-\sqrt{5}, 3\}$

(E5) $\Longleftrightarrow 4(x+5)(x+12)(x+6)(x+10)-3x^2=0 \Longleftrightarrow 4(x^2+17x+60)$
$(x^2+16x+60)-3x^2=0 \Longleftrightarrow 4[(x^2+60)^2+33x(x^2+60)+17\cdot 16x^2]-$

$-3x^2=0 \Longleftrightarrow 4(x^2+60)^2+132x(x^2+60)+1088x^2-3x^2=0 \Longleftrightarrow$
$4(x^2+60)^2+132x(x^2+60)+1085x^2=0$ (1)
Διαιροῦμεν διά x^2 ($x\neq 0$, διότι $0\notin A$).
$(1) \Longleftrightarrow 4\left(\frac{x^2+60}{x}\right)^2+132\left(\frac{x^2+60}{x}\right)+1085=0 \xLeftrightarrow{\frac{x^2+60}{x}=y} 4y^2+$
$+132y+1085=0 \Longleftrightarrow 4\left(y+\frac{35}{2}\right)\left(y+\frac{31}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow y+\frac{35}{2}=$
$=0 \vee y+\frac{31}{2}=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow \frac{x^2+60}{x}+\frac{35}{2}=0$ (2) $\vee$ $\frac{x^2+60}{x}+\frac{31}{2}=0$ (3)

$(2) \Longleftrightarrow 2x^2+120+35x=0 \Longleftrightarrow 2x^2+35x+120=0$ (μέ $\Delta=265$)
$\Longrightarrow 2\left(x-\frac{-35+\sqrt{265}}{4}\right)\left(x-\frac{-35-\sqrt{265}}{4}\right)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{-35\pm\sqrt{265}}{4}$

$(3) \Longleftrightarrow 2x^2+120+31x=0 \Longleftrightarrow 2x^2+31x+120=0$ (μέ $\Delta=1$)
$\Longleftrightarrow 2\left(x-\frac{-31+1}{4}\right)\left(x-\frac{-31-1}{4}\right)=0 \Longleftrightarrow x+\frac{15}{2}=0 \vee x+8=$
$=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{15}{2} \vee x=-8 \Longrightarrow A=\left\{\frac{-35+\sqrt{265}}{4}, \frac{-35-\sqrt{265}}{4}, -\frac{15}{2}, -8\right\}.$

$(E6) \Longleftrightarrow (x+1)(x-5)(x+2)(x-6)-(x^2+16x+64)+20x+60+21=0$
$\Longleftrightarrow (x^2-4x-5)\cdot(x^2-4x-12)-(x^2-4x-17)=0 \xLeftrightarrow{x^2-4x=\omega} (\omega-5)\cdot$
$(\omega-12)-(\omega-17)=0 \Longleftrightarrow \omega^2-18\omega+77=0 \Longleftrightarrow (\omega-11)(\omega-7)=0 \Longleftrightarrow$
$\omega-11=0$ (1) $\vee$ $\omega-7=0$ (2)
(1) $\Longleftrightarrow x^2-4x-11=0$ $(\Delta=60) \Longleftrightarrow (x-2-\sqrt{15})(x-2+\sqrt{15})=0$
$\Longleftrightarrow x=2+\sqrt{15} \;\vee\; x=2-\sqrt{15}$.
(2) $\Longleftrightarrow x^2-4x-7=0$ $(\Delta=44) \Longleftrightarrow (x-2-\sqrt{11})=0 \Longleftrightarrow x=2+\sqrt{11} \;\vee$
$x=2-\sqrt{11} \Longrightarrow A=\{2\pm\sqrt{15},\ 2\pm\sqrt{11}\}$.

$(E7) \Longleftrightarrow 14(3x^2-5)\cdot\frac{2x^2+7}{2}+14(3x^2-5)\cdot\frac{1}{3x^2-5}=14(3x^2-5)\cdot\frac{107}{14}$

$\Big| \mathcal{D}=R-\left\{\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right\}$.
$\Longleftrightarrow 7(3x^2-5)(2x^2+7)+14=107\;(3x^2-5)$
$\Longleftrightarrow$ (Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων) $42x^4-244x^2+304=0$
$\Longleftrightarrow 21x^4-122x^2+152=0 \xLeftrightarrow{x^2=y} 21y^2-122y+152=0$
$\Longleftrightarrow 21(y-4)(y-\frac{38}{21})=0 \Longleftrightarrow y-4=0$ (1) $\vee$ $y-\frac{38}{21}=0$ (2)
(1) $x^2-4=0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-2)=0 \Longleftrightarrow x=2 \;\vee\; x=-2$
(2) $\Longleftrightarrow x^2-\frac{38}{21}=0 \Longleftrightarrow x^2=\frac{38}{21} \Longleftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{38}{21}} \Longrightarrow$

$A=\left\{\pm 2,\ \pm\sqrt{\frac{38}{21}}\right\}$

$(E8) \xLeftrightarrow{x^3=y} y^2-28y+27=0 \Longleftrightarrow y^2-y-27y+27=0 \Longleftrightarrow$
$y(y-1)-27(y-1)=0 \Longleftrightarrow (y-1)(y-27)=0 \Longleftrightarrow y-1=0$ (1) $\vee$
$y-27=0$ (2)
(1) $\Longleftrightarrow x^3-1=0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0 \Longleftrightarrow x-1=0$
(διότι $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0,\ \forall\ x\in R$) $\Longleftrightarrow x=1$
(2) $\Longleftrightarrow x^3-3^3=0 \Longleftrightarrow (x-3)(x^2+3x+9)=0 \Longleftrightarrow x-3=0$
(διότι $x^2+3x+9=(x+\frac{3}{2})^2+\frac{27}{4}>0,\forall\ x\in R$) $\Longleftrightarrow$
$x=3 \Longrightarrow A=\{1,3\}$.

Π19. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$$(E):\ \frac{3}{4(x^2-7x+10)}+\frac{2}{7(x^2+x-2)}+\frac{2}{7(x^2+2x-3)}=$$

$$=\frac{4}{7(x^2-2x-15)}+\frac{1}{4(x^2-5x+6)}+\frac{2}{4(x^2-4x-5)}.$$

Ἐπίλυσις: (E) $\Longleftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4(x-2)(x-5)}+\frac{2}{7(x+2)(x-1)}+\frac{2}{7(x+3)(x-1)}=\frac{4}{7(x+3)(x-5)}+$$

$$+\frac{1}{4(x-2)(x-3)}+\frac{2}{4(x+1)(x-5)} \quad \Big| \; \mathcal{D}=R-\left\{\pm 2,+5,\pm 3,\pm 1\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3}{4(x-2)(x-5)}-\frac{1}{4(x-2)(x-3)}-\frac{2}{4(x+1)(x-5)}=\frac{4}{7(x+3)(x-5)}-$$

$$-\frac{2}{7(x+2)(x-1)}-\frac{2}{7(x+3)(x-1)} \quad \Big| \; \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3(x-3)(x+1)-(x-5)(x+1)-2(x-2)(x-3)}{4(x-2)(x-5)(x-3)(x+1)}=$$

$$=\frac{4(x+2)(x-1)-2(x+3)(x-5)-2(x-5)(x+2)}{7(x+3)(x-5)(x+2)(x-1)} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{3(x^2-2x-3)-(x^2-4x-5)-2(x^2-5x+6)}{4(x-2)(x-5)(x-3)(x+1)}=$$

$$=\frac{4(x^2+x-2)-2(x^2-2x-15)-2(x^2-3x-10)}{7(x+3)(x-5)(x+2)(x-1)} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{8(x-2)}{4(x-2)(x-5)(x-3)(x+1)}=\frac{14(x+3)}{7(x+3)(x-5)(x+2)(x-1)} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow (x-3)(x-5)(x+1)=(x-5)(x+2)(x-1) \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow (x-3)(x+1)=(x+2)(x-1) \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow x^2-2x-3=x^2+x-2 \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow -2x-x-3+2=0 \Longleftrightarrow -3x=1 \Longleftrightarrow x=-\frac{1}{3} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow A=\left\{-\frac{1}{3}\right\}.$$

Π20. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1)$: $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$.

$(E2)$: $3x^2+\dfrac{4}{x}=-\dfrac{3}{x^2}+4x+\dfrac{19}{4}$.

$(E3)$: $\dfrac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\dfrac{1}{x}$.

$(E4): \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = 6\left(x + \frac{1}{x}\right).$

$(E5): \quad \frac{x^4+x^2+1}{x^2} = \frac{x^2+x+1}{x} \quad \Big| \quad \mathcal{D} = R - \{0\}.$

Ἐπίλυσις:

(E1) $\Longleftrightarrow 6(x^4+1) - 35(x^3+x) + 62x^2 = 0$

Ἐπειδή $\quad x \neq 0 \Longrightarrow (E1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62 = 0.$ Θέτομεν $x + \frac{1}{x} = y$

$\Longrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2 \Longrightarrow$

$(E1) \Longleftrightarrow 6(y^2-2) - 35y + 62 = 0 \Longleftrightarrow 6y^2 - 12 - 35y + 62 = 0$

$\Longleftrightarrow 6y^2 - 35y + 50 = 0 \Longleftrightarrow 6\left(y - \frac{10}{3}\right)\left(y - \frac{5}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y = \frac{10}{3} \vee y = \frac{5}{2}.$

Συνεπῶς: $(\alpha)\ x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} \vee (\beta):\ x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$

$(\alpha) \Longleftrightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Longleftrightarrow 3(x-3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{1}{3}.\ (\beta) \Longleftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2} \vee x = 2 \Longrightarrow$

$$A = \left\{3, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

(E2) $\Longleftrightarrow 3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{19}{4} \Longleftrightarrow x - \frac{1}{x} = y$

$3(y^2+2) = 4y + \frac{19}{4} \Longleftrightarrow 12y^2 + 24 = 16y + 19 \Longleftrightarrow 12y^2 -$

$16y + 5 = 0 \Longleftrightarrow 12\left(y - \frac{5}{6}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{5}{6} \vee$

$\vee\ y = \frac{1}{2}$ Συνεπῶς $(\alpha):\ x - \frac{1}{x} = \frac{5}{6} \vee (\beta):\ x - \frac{1}{x} = \frac{1}{2}.$

$(\alpha) \Longleftrightarrow 6x^2 - 5x - 6 = 0 \Longleftrightarrow 6\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right) = 0$

$\Longleftrightarrow x = \frac{3}{2} \vee x = -\frac{2}{3}.$

$(\beta) \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{4}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \vee x = \frac{1-\sqrt{17}}{4}$

Συνεπῶς: $A\left\{\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1\pm\sqrt{17}}{4}\right\}$.

$$(\mathrm{E}3)\Longleftrightarrow \frac{(x^2+1)(x^2+2x+1)+x^2}{x^4+x^2+1} = x+\frac{1}{x} \quad \Big| \ \mathcal{D}=R-\{0\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x^2+1)[(x^2+1)+2x]+x^2}{(x^2+1)^2-x^2} = x+\frac{1}{x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = x+\frac{1}{x} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{[(x^2+1)+x]^2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)} = x+\frac{1}{x} \Longleftrightarrow \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} = x+\frac{1}{x}$$

$$\Big| \ \mathcal{D}=R-\{0\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x+\frac{1}{x}+1}{x+\frac{1}{x}-1} = x+\frac{1}{x} \quad \Big| \ \mathcal{D}=R-\{0\}$$

$$\xLeftrightarrow{x+\frac{1}{x}=y} \frac{y+1}{y-1} = y \Longleftrightarrow y^2-2y-1=0 \Longleftrightarrow (y-1+\sqrt{2})$$

$$(y-1-\sqrt{2})=0 \Longleftrightarrow y=1-\sqrt{2} \ \vee \ y=1+\sqrt{2}.$$

Συνεπῶς: $(\mathrm{E}3)\Longleftrightarrow (\alpha)\ x+\frac{1}{x}=1+\sqrt{2} \ \vee \ (\beta)\ x+\frac{1}{x}=1-\sqrt{2}$.

$$(\alpha)\Longleftrightarrow x^2-(1+\sqrt{2})x+1=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)\cdot$$

$$\left(x-\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \ \vee$$

$$\vee \ x=\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}.$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (β) εἶναι: $\Delta=-2\sqrt{2}-1<0 \Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ δὲν ὑπάρχουν αἱ ρίζαι αὐτῆς ἐν R.

Συνεπῶς: $A=\left\{\frac{1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right\}$.

$$(\mathrm{E}4)\Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3x\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)=6\left(x+\frac{1}{x}\right) \Big| \ \mathcal{D}=R-\{0\}.$$

$$\xLeftrightarrow{x+\frac{1}{x}=y} y^3-3y=6y \Longleftrightarrow y^3-9y=0 \Longleftrightarrow y(y^2-3^2)=0$$

$\Longleftrightarrow y(y+3)(y-3)=0 \Longleftrightarrow y=0 \vee y=3 \vee y=-3.$

Συνεπώς:

(E4) $\Longleftrightarrow$ (α): $x+\frac{1}{x}=0 \vee$ (β): $x+\frac{1}{x}=3 \vee$ (γ): $x+\frac{1}{x}=-3.$

(α) $\Longleftrightarrow x^2+1=0 \Longrightarrow x \notin R.$ (β) $x^2-3x+1=0 \Longleftrightarrow$

$\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$

(γ) $\Longleftrightarrow x^2+3x+1=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \vee x=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

Συνεπώς: $A=\left\{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}, -\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right\}.$

(E5) $\Longleftrightarrow x^2+1+\frac{1}{x^2}=x+1+\frac{1}{x} \;\Big|\; x\in R-\{0\}.$

$\xLeftrightarrow{x+\frac{1}{x}=y} y^2-2=y \Longleftrightarrow y^2-y-2=0 \Longleftrightarrow (y-2)(y+1)=0$

$\Longleftrightarrow$
- $x+\frac{1}{x}=2 \Longleftrightarrow x^2-2x+1=0 \Longleftrightarrow (x-1)^2=0 \Longleftrightarrow x=1$ (διπλή).
- $x+\frac{1}{x}=-1 \Longleftrightarrow x^2+x+1=0 \Longleftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

Συνεπώς: $A=\{1 \text{ (διπλή)}\}.$

Π21. Νά έπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0$

(E2): $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$

(E3): $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}+\frac{x+3}{x-3}=3$

Ἐπίλυσις:

(E1) $\Longleftrightarrow \left(\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x+8}\right)+\left(\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}\right)=0 \;\Big|\; \mathcal{D}=R-\{\pm 6, \pm 8\}.$

$\Longleftrightarrow \frac{2x}{x^2-64}+\frac{2x}{x^2-36}=0 \Longleftrightarrow 2x\left(\frac{1}{x^2-64}+\frac{1}{x^2-36}\right)=0$

$\Longleftrightarrow$ (α) $x=0 \vee$ (β) $\frac{1}{x^2-64}+\frac{1}{x^2-36}=0.$

$(\beta) \Longleftrightarrow 2x^2 - 100 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = 50 \Longleftrightarrow x^2 - (\sqrt{50})^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x + \sqrt{50})(x - \sqrt{50}) = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \vee x = -\sqrt{50} =$

$= -5\sqrt{2}$. Συνεπώς: $A = \left\{ 0, \pm 5\sqrt{2} \right\}$.

(Ε2) $\dfrac{x-1}{x-2} - \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{x-4}{x-5} - \dfrac{x-5}{x-6} \quad \Big| \mathcal{D} = R - \left\{2,3,5,6\right\}$.

$\Longleftrightarrow \dfrac{(x-2)+1}{x-2} - \dfrac{(x-3)+1}{x-3} = \dfrac{(x-5)+1}{x-5} - \dfrac{(x-6)+1}{x-6} \Longleftrightarrow 1 + \dfrac{1}{x-2} - 1 -$

$- \dfrac{1}{x-3} = 1 + \dfrac{1}{x-5} - 1 - \dfrac{1}{x-6} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-6}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} = \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-6} \Longleftrightarrow \dfrac{x-3-x+2}{(x-2)(x-3)} =$

$= \dfrac{x-6-x+5}{(x-5)(x-6)} \Longleftrightarrow \dfrac{-1}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{-1}{(x-5)(x-6)} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x-2)(x-3) = (x-5)(x-6) \Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 = x^2 - 11x + 30 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 6x = 24 \Longrightarrow x = 4$ Συνεπώς: $A = \left\{ 4 \right\}$.

(Ε3) $\Longleftrightarrow \left(\dfrac{x+1}{x-1} - 1\right) + \left(\dfrac{x+2}{x-2} - 1\right) + \left(\dfrac{x+3}{x-3} - 1\right) = 0 \quad \Big| \mathcal{D} = R - \left\{1,2,3\right\}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{x+1-x+1}{x-1} + \dfrac{x+2-x+2}{x-2} + \dfrac{x+3-x+3}{x-3} = 0 \quad \Big| \mathcal{D}$.

$\Longleftrightarrow \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{6}{x-3} = 0 \quad \Big| \mathcal{D} \Longleftrightarrow \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} +$

$+ \dfrac{3}{x-3} = 0 \Longleftrightarrow (x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) + 3(x-1)(x-2) = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 + 2(x^2 - 4x + 3) + 3(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\Longleftrightarrow x^2 - 5x + 6 + 2x^2 - 8x + 6 + 3x^2 - 9x + 6 = 0$

$\Longleftrightarrow 6x^2 - 22x + 18 = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 - 11x + 9 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3\left(x - \dfrac{11+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x - \dfrac{11-\sqrt{13}}{6}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{11+\sqrt{13}}{6} \vee$

$x = \dfrac{11-\sqrt{13}}{6}$ Συνεπώς: $A = \left\{ \dfrac{11 \pm \sqrt{13}}{6} \right\}$.

722. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)=5$

(E2): $\dfrac{1}{x^2+2x-3} + \dfrac{18}{x^2+2x+2} = \dfrac{18}{x^2+2x+1}$

(E3): $\dfrac{x^3+9[2+x+(x+1)^2]}{x^2(x-9)+27(x-1)} + \dfrac{x^2+3(2x+3)}{9-x(6-x)} = \dfrac{6(x+3)}{x-3}$.

Ἐπιλύσεις:

(E1) $\Longleftrightarrow (12x-1)(12x-2)(12x-3)(12x-4)=120$

(Πολλαπλασιάζω τήν δευτέραν παρένθεσιν ἐπί 2, τήν τρίτην ἐπί 3 καί τήν τετάρτην ἐπί 4).–

$\xLeftrightarrow{12x=y} (y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=120 \Longleftrightarrow (y-1)(y-4)(y-2)(y-3)=120 \Longleftrightarrow (y^2-5y+4)(y^2-5y+6)=120$

$\xLeftrightarrow{y^2-5y=z} (z+4)(z+6)=120 \Longleftrightarrow z^2+10z+24-120=0 \Longleftrightarrow z^2+10z-96=0 \Longleftrightarrow (z+16)(z-6)=0 \Longleftrightarrow z=-16 \vee z=6$ Συνεπῶς: (α): $y^2-5y=-16$ $\vee$ (β): $y^2-5y=6$.

(α) $\Longleftrightarrow y^2-5y+16=0$ Ἡ διακρίνουσα τῆς (α): $\Delta=25-64=-39<0$, Συνεπῶς: $y\notin R$.

(β) $\Longleftrightarrow y^2-5y-6=0 \Longleftrightarrow (y-6)(y+1)=0 \Longleftrightarrow y=6 \vee y=-1$.

Συνεπῶς: (γ): $12x=6$ $\vee$ (δ): $12x=-1$. $\Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2} \vee x=-\dfrac{1}{12}$ Τελικῶς: $A=\left\{\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{12}\right\}$.

Παρατήρησις: Γνωστοῦ ὄντος ὅτι:

$(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)+1 =$ τέλειον τετράγωνον ἐπιλύσατε τήν ἀνωτέρω ἐξίσωσιν, τῇ βοηθείᾳ τῆς ταυτότητος: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

(E2) $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{(x^2+2x+1)-4} + \dfrac{18}{(x^2+2x+1)+1} = \dfrac{18}{x^2+2x+1} \;\Big|\; \mathcal{D}$

$\xLeftrightarrow{x^2+2x+1=y} \dfrac{1}{y-4} + \dfrac{18}{y+1} = \dfrac{18}{y} \;\Big|\; y\in R-\{0,-1,4\}$

$\Longleftrightarrow y^2-17y+72=0 \,\Big|\, y\in R-\{0,-1,4\}.$

$\Longleftrightarrow (y-9)(y-8)=0 \Longleftrightarrow y=9 \vee y=8.$

Συνεπῶς: $(E2) \Longleftrightarrow (a){:}\ x^2+2x+1=9 \vee (b){:}\ x^2+2x+1=8.$

$(a) \Longleftrightarrow x^2+2x-8=0 \Longleftrightarrow (x-2)(x+4)=0 \Longleftrightarrow x=2$

$\vee\ x=-4.\ (b) \Longleftrightarrow x^2+2x-7=0 \Longleftrightarrow (x+1+2\sqrt{2})(x+1-2\sqrt{2})=0$

$\Longleftrightarrow x=-1+2\sqrt{2} \vee x=-1-2\sqrt{2}.$

Συνεπῶς: $A=\{2,-4,-1\pm 2\sqrt{2}\}$

$$\textbf{(E3)} \Longleftrightarrow \frac{x^3+9[2+x+(x+1)^2]}{x^2(x-9)+27(x-1)}+\frac{x^2+3(2x+3)}{9-x(6-x)}=\frac{6(x+3)}{x-3} \,\Big|\, \mathcal{D}.$$

$$\xLeftrightarrow{\text{Εκτελῶ πράξεις}} \frac{(x+3)^3}{(x-3)^3}+\frac{(x+3)^2}{(x-3)^2}=\frac{6(x+3)}{x-3} \,\Big|\, \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x+3}{x-3}\right)\left[\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-3}\right)-6\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow (a){:}\ \frac{x+3}{x-3}=0 \vee (b){:}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2+\left(\frac{x+3}{x-3}\right)-6=0$$

$$(a) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+3=0 \\ x-3\neq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x=-3$$

$$(b) \xLeftrightarrow{\frac{x+3}{x-3}=y} y^2+y-6=0 \Longleftrightarrow (y-2)(y+3)=0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow y=2 \vee y=-3$ Συνεπῶς: $(b){:}\Longleftrightarrow (\gamma){:}\ \dfrac{x+3}{x-3}=2\ \vee$

$\vee\ (\delta){:}\ \dfrac{x+3}{x-3}=-3.\ (\gamma) \Longleftrightarrow x+3=2x-6 \Longleftrightarrow x=9\ \vee (\delta) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x+3=-3x+9 \Longleftrightarrow x=\dfrac{3}{2}.$

Τελικῶς: $A=\left\{-3,9,\dfrac{3}{2}\right\}.$

Π23. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1){:}\ \dfrac{x^2-x-9}{x^2-x-15}=\dfrac{x^2-x-3}{x^2-x-5}.$

(E_2): $\dfrac{x^2-4x+11}{x^2-4x+16} = \dfrac{x(x-5)+15}{x^2-5(x-4)}$

(E_3): $\left(\dfrac{1-3x}{1+3x}\right)^3 = \dfrac{1-x}{1+x}$

$(E4)$: $14(x^3+3a^2x)-13(a^2+3ax^2)=0$

Επιλύσεις:

$(E_1) \Longleftrightarrow \dfrac{(x^2-x-9)-(x^2-x-15)}{x^2-x-15} = \dfrac{(x^2-x-3)-(x^2-x-5)}{x^2-x-5} \Big| \mathcal{D}$

(θεώρημα: άν $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\gamma}{\delta} \wedge b\delta \neq 0 \Longleftrightarrow \dfrac{a-b}{b} = \dfrac{\gamma-\delta}{\delta}$)

$\Longleftrightarrow \dfrac{6}{x^2-x-15} = \dfrac{2}{x^2-x-5} \Longleftrightarrow 6x^2-6x-30 =$

$= 2x^2-2x-30 \Longleftrightarrow 4x^2-4x=0 \Longleftrightarrow 4x(x-1)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=0 \vee x=1 \Longrightarrow A=\{0,1\}$.

$(E_2) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-4x+11}{x^2-4x+16} = \dfrac{x^2-5x+15}{x^2-5x+20} \Big| \mathcal{D}$.

(θεώρημα: άν $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\gamma}{\delta} \wedge \underset{a\neq b \wedge \gamma\neq\delta}{b\delta \neq 0} \Longleftrightarrow \dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}$)

$\Longleftrightarrow \dfrac{x^2-4x+11+x^2-4x-16}{x^2-4x+11-x^2+4x-16} = \dfrac{x^2-5x+15+x^2-5x+20}{x^2-5x+15-x^2+5x-20} \Big| \mathcal{D}$.

$\Longleftrightarrow \dfrac{2x^2-8x+27}{-5} = \dfrac{2x^2-10x+35}{-5} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2x^2-8x+27 = 2x^2-10x+35 \Longleftrightarrow 2x=8 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x=4 \Longrightarrow A=\{4\}$.

$(E_3) \Longleftrightarrow \dfrac{(1+3x)^3-(1-3x)^3}{(1+3x)^3+(1-3x)^3} = \dfrac{1+x-(1-x)}{1+x+1-x} \Big| \mathcal{D}$.

(θεώρημα: Άν $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\gamma}{\delta} \wedge \underset{\substack{a\neq -b \\ \gamma\neq-\delta}}{b\delta \neq 0} \Longleftrightarrow \dfrac{b-a}{b+a} = \dfrac{\delta-\gamma}{\delta+\gamma}$)

$$\Longleftrightarrow \frac{6\cdot 3\cdot x+2\cdot 3^3 x^3}{2+6\cdot 3^2 x^2}=\frac{2x}{2} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(9+27x^2)\,x}{1+27x^2}=x \Longleftrightarrow x=0 \quad \vee$$

$$\vee \quad \frac{9+27x^2}{1+27x^2}=1 \Longleftrightarrow x=0 \quad \vee \frac{9+27x^2-1-27x^2}{9+27x^2+1+27x^2}=$$

$$=\frac{1-1}{1+1} \Longleftrightarrow x=0 \quad \vee \quad \frac{8}{54x^2+10}=0 \Longleftrightarrow x=0 \Longrightarrow A=\{0\}$$

$$(E4) \Longleftrightarrow \frac{x^3+3a^2x}{3ax^2+a^3}=\frac{13}{14} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^3+3a^2x+3ax^2+a^3}{x^3+3a^2x-3ax^2-a^3}=\frac{13+14}{13-14} \quad \Big| \; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3=-27 \Longleftrightarrow \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^3+3^3=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{x+a}{x-a}+3\right)\left[\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2-3\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+9\right]=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a): \frac{x+a}{x-a}+3=0 \quad \vee \quad (b): \left(\frac{x+a}{x-a}\right)^2-3\left(\frac{x+a}{x-a}\right)+9=0$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{a}{2} \quad (x\neq a) \quad \vee \quad (b) \xLeftrightarrow{\frac{x+a}{x-a}=y} y^2-3y+9=0$$

Ἡ διακρίνουσα τῆς (β): $\Delta = 9-36=-27<0 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow A=\left\{\frac{a}{2}\right\} \text{ μέ } x\neq a.$$

Π24. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R. αἱ ἐξισώσεις:

$$(E1): \quad a^2x-x^3=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$$

$$(E2): \quad \frac{x(x^3+6)+45(2x-\sqrt[3]{3})}{x^2}=18\sqrt[3]{9}$$

Ἐπίλυσις: **(E1)** $\xLeftrightarrow{x=\frac{y}{\sqrt{3}}} a^2\frac{y}{\sqrt{3}}-\frac{y^3}{3\sqrt{3}}=\frac{2a^3\sqrt{3}}{9} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow y^3-3a^2y+2a^3=0 \Longleftrightarrow (y^3-a^2y)+(2a^3-2a^2y)=0$$

$$\Longleftrightarrow y(y^2-a^2)-2a^2(y-a)=0 \Longleftrightarrow y(y-a)(y+a)-2a^2\cdot$$

$$\cdot(y-a)=0 \Longleftrightarrow (y-a)(y^2+ya-2a^2)=0 \Longleftrightarrow (y-a)\cdot$$

$$\cdot\left[(y^2-a^2)+a(y-a)\right]=0 \Longleftrightarrow (y-a)^2(y+2a)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y_1=y_2=a \ \vee \ y_3=-2a \Longrightarrow x_1=x_2=\frac{a}{\sqrt{3}} \ \vee$$

$$\vee\ x_3=-\frac{2a}{\sqrt{3}} \Longrightarrow A=\left\{\frac{a}{\sqrt{3}},\ \frac{-2a}{\sqrt{3}}\right\} \text{ μέ } a\neq 0.$$

(E2) $\Longleftrightarrow x(x^3+6)+45(2x-\sqrt[3]{3})=18x^2\sqrt[3]{9} \ \Big|\ \mathcal{D}=\mathbb{R}-\{0\}.$

$$\Longleftrightarrow x^4+6x+90x-45\sqrt[3]{3}-18\sqrt[3]{9}\,x^2=0 \Longleftrightarrow x^4-18\sqrt[3]{9}x^2+$$

$$+96x-45\sqrt[3]{3}=0 \xLeftrightarrow{x=y\sqrt[3]{3}} 3y^4\cdot\sqrt[3]{3}-18\sqrt[3]{9}\cdot y^2\cdot\sqrt[3]{9}+$$

$$+96y\sqrt[3]{3}-45\cdot\sqrt[3]{3}=0 \Longleftrightarrow 3\sqrt[3]{3}(y^4-18y^2+32y-15)=0.$$

$$\Longleftrightarrow y^4+2y^3-15y^2-2y^3-4y^2+30y+y^2+2y-15=0$$

$$\Longleftrightarrow y^2(y^2+2y-15)-2y(y^2+2y-15)+y^2+2y-15=0$$

$$\Longleftrightarrow (y^2+2y-15)(y^2-2y+1)=0 \Longleftrightarrow (y-3)(y+5)(y-1)^2=0$$

$$\Longleftrightarrow y=3 \ \vee\ y=-5 \ \vee\ y=1 \ (\text{διπλῆ}) \Longrightarrow x_1=3\cdot\sqrt[3]{3} \ \vee$$

$$\vee\ x_2=-5\sqrt[3]{3} \ \vee\ x_3=x_4=\sqrt[3]{3} \Longrightarrow A=\left\{3\sqrt[3]{3},\ -5\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}\right\}$$

Π25. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν $\mathbb{R}$ αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+4x+3}=\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-6x+8}+\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}\ \Big|\ \mathcal{D}$

(E2): $6x^2-(x+1)(x+4)=x^2(x-1)^2$

(E3): $(x+1)(x-1)(x^2-5)(x+2)(x-2)(x^2-2)=4$

(E4): $2(x^2+3x+2)^4+5x(x^2+3x+2)^3-5x^3(x^2+3x+2)-$
$-2x^4=0.$

$(E5)$: $(2x-1)^3+(4x+2)^3+(2x^2+4x+2)^3=(2x^2+4x+3)^3$

$(E6)$: $x^2-x-18+\dfrac{72}{x^2-x}=0$

$(E7)$: $\dfrac{1}{2}-\dfrac{3\left(x^2+\frac{1}{3}\right)}{2x^2+18x+28}=-\dfrac{x}{x+7}$

Ἐπίλυσις:

(E1) θέτομεν: (1) $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\omega\neq 0 \wedge$ (2) $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-6x+8}=z\neq 0$

Ἄρα $(E1)\Longleftrightarrow \omega+\dfrac{1}{\omega}=z+\dfrac{1}{z}\Longleftrightarrow(\omega-z)(\omega z-1)=0\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \omega-z=0 \vee \omega z-1=0\Longleftrightarrow(a):\omega=z \vee (b):\omega z=1$

$(a)\overset{(1)(2)}{\Longleftrightarrow}\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2+6x+8}{x^2-6x+8}\Longrightarrow$

(ἐκτελῶ πράξεις ἢ χρησιμοποιῶ τέχνασμα ἀναλογίας).

$x(x^2-7)=0\Longleftrightarrow x=0 \vee x^2-7=0\Longleftrightarrow x=0 \vee x^2-(\sqrt{7})^2=$

$=0\Longleftrightarrow x=0 \vee (x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0\Longleftrightarrow x=0 \vee x_2=+\sqrt{7},$

$\vee x_3=-\sqrt{7}$. $(b)\overset{(1)(2)}{\Longleftrightarrow}\omega=\dfrac{1}{z}\Longleftrightarrow\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=$

$=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}\Longleftrightarrow$ (ἐκτελῶ πράξεις ἢ χρησιμοποιῶ τέχνασμα ἀναλογίας).

$x(x^2+5)=0\Longleftrightarrow x=0 \vee x^2+5=0\Longrightarrow x=0$ διότι

$x^2+5>0\Longrightarrow A=\left\{0,\pm\sqrt{7}\right\}$ (μὲ τὴ ρίζα 0 διπλῆ).

(E2) $\Longleftrightarrow 6x^2-x^2-5x-4=(x-1)^2x^2\Longleftrightarrow x^2(x-1)^2-5x(x-1)+$

$+4=0\overset{x(x-1)=y}{\Longleftrightarrow}y^2-5y+4=0\Longleftrightarrow(y-1)(y-4)=0$

$\Longleftrightarrow(a): y=1 \vee (b): y=4$

$(a)\Longleftrightarrow x(x-1)=1\Longleftrightarrow x^2-x-1=0\Longleftrightarrow\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

$\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \vee x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$(\beta) \Longleftrightarrow x(x-1)=4 \Longleftrightarrow x^2-x-4=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

$\left(x-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)=0 \Longleftrightarrow x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{2} \vee x_4=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$

Συνεπῶς: $A=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

(E3) $\Longleftrightarrow (x^2-1)(x^2-5)(x^2-4)(x^2-2)=4 \Longleftrightarrow (x^4-6x^2+5)$
$(x^4-6x^2+8)=4 \Longleftrightarrow \xLeftrightarrow{x^4-6x^2=\omega} (\omega+5)(\omega+8)=4 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \omega^2+13\omega+36=0 \Longleftrightarrow (\omega+4)(\omega+9)=0 \Longleftrightarrow \omega=-4$
$\vee\ \omega=-9 \Longrightarrow (E3) \Longleftrightarrow (\alpha): x^4-6x^2=-4 \vee (\beta): x^4-$
$-6x^2=-9$. $(\alpha) \Longleftrightarrow x^4-6x^2+4=0 \xLeftrightarrow{x^2=y} y^2-6y+4=0$
$\Longleftrightarrow (y-3+\sqrt{5})(y-3-\sqrt{5})=0 \Longleftrightarrow y_1=3-\sqrt{5} \vee y_2=$
$=3+\sqrt{5} \Longleftrightarrow (\gamma): x^2=3-\sqrt{5} \vee (\delta): x^2=3+\sqrt{5}$.

Διά τάς (γ) καί (δ) έχομεν: $x^2-\left(\sqrt{3\pm\sqrt{5}}\right)^2=0 \Longleftrightarrow$
$\left(x+\sqrt{3\pm\sqrt{5}}\right)\left(x-\sqrt{3\pm\sqrt{5}}\right)=0 \Longleftrightarrow x_{1,2}=-\sqrt{3\pm\sqrt{5}} \vee$
$\vee\ x_{3,4}=+\sqrt{3\pm\sqrt{5}}$.

$x_{1,2}=-\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}\pm 2\sqrt{\frac{5}{4}}}=$
$=-\sqrt{\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=-\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$.

$x_{3,4}=+\sqrt{3\pm\sqrt{5}}=+\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}\pm 1)$.

$(\beta)\ x^4-6x^2+9=0 \xLeftrightarrow{x^2=z} z^2-6z+9=0 \Longleftrightarrow (z-3)^2=0$

$\Longleftrightarrow z=3$ διπλή.

Συνεπῶς: $x^2=3 \Longleftrightarrow x^2-(\sqrt{3})^2=0 \Longleftrightarrow (x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=$
$=0 \Longrightarrow x_5=-\sqrt{3} \vee x_6=+\sqrt{3}$.

Τελικώς: $A = \left\{ \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5} \pm 1), \pm \sqrt{3} \right\}$.

(E4) $\xLeftrightarrow{\text{επειδή } x \neq 0} 2\left(\frac{x^2+3x+2}{x}\right)^4 + 5\left(\frac{x^2+3x+2}{x}\right)^3 -$

$-5\left(\frac{x^2+3x+2}{x}\right) - 2 = 0 \xLeftrightarrow{\frac{x^2+3x+2}{x} = y} \Longleftrightarrow 2y^4 + 5y^3 - 5y - 2 =$

$= 0 \Longleftrightarrow 2(y^4 - 1) + 5y(y^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow (y^2 - 1)(2y^2 + 5y + 2) =$

$= 0 \Longleftrightarrow (1)\ y = 1 \vee (2)\ y = -1 \vee (3)\ y = -2 \vee (4)\ y = -\frac{1}{2}$.

1. $\Longleftrightarrow x^2 + 2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow$ αδύνατος εν R.

2. $\Longleftrightarrow x^2 + 4x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{2}$

3. $\Longleftrightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$

4. $\Longleftrightarrow 2x^2 + 7x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{17}}{4}$

(E5) $\xLeftrightarrow{\text{Εκτελώ πράξεις}} 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 + 64x^3 + 96x^2 + 48x +$

$+ 8 + 8x^6 + 64x^3 + 8 + 48x^5 + 24x^4 + 96x^4 + 96x^2 + 24x^2 +$

$+ 48x + 96x^3 = 8x^6 + 64x^3 + 27 + 48x^5 + 36x^4 + 96x^4 +$

$+ 144x^2 + 54x^2 + 108x + 144x^3 \Longleftrightarrow 12x^4 - 24x^3 - 6x^2 +$

$+ 6x + 12 = 0 \Longleftrightarrow 2x^4 - 4x^3 - x^2 + x + 2 = 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x-2)$

$(2x^2 + 2x + 1) = 0 \Longleftrightarrow x - 1 = 0 \vee x - 2 = 0 \vee 2x^2 + 2x + 1 =$

$= 0 \Longleftrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2$

(Η διακρίνουσα της $2x^2 + 2x + 1 = 0$ είναι $\mathcal{D} = 1 - 2 = -1 > 0$

$\Longrightarrow x_1 = 1 \vee x_2 = 2$.

Συνεπῶς: $A=\{1,\ 2\}$.

(E6) $\xLeftrightarrow{x^2-x=\omega}$ $\omega-18+\dfrac{72}{\omega}=0 \;\Big|\; \mathcal{D} \Longleftrightarrow \omega^2-18\omega+72=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\omega-6)(\omega-12)=0 \Longleftrightarrow (\alpha): \omega=6 \ \vee\ (\beta): \omega=12.$

$(\alpha) \Longleftrightarrow x^2-x-6=0 \Longleftrightarrow (x+2)(x-3)=0 \Longleftrightarrow x_1=-2 \ \vee$

$\vee\ x_2=3.\ (\beta) \Longleftrightarrow x^2-x-12=0 \Longleftrightarrow (x+3)(x-4)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x_3=-3 \ \vee\ x_4=4 \Longrightarrow A=\{-2,\ \pm 3,\ 4\}.$

(E7) $\Longleftrightarrow \dfrac{1}{2}-\dfrac{3x^2+1}{2(x^2+9x+14)}=-\dfrac{x}{x+7} \;\Big|\; \mathcal{D}=R-\{-2,-7\}$

$\Longleftrightarrow x^2+9x+14-3x^2-1+2x(x+2)=0 \Longleftrightarrow 13x=-13$

$\Longleftrightarrow x=-1 \Longrightarrow A=\{-1\}.$

Π26. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $$\frac{\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}}{\dfrac{2x}{1-x}}=\frac{1}{4+\dfrac{2-x}{3}}$$

(E2): $$1+\frac{x}{1-\dfrac{x}{1+x}}+\Big[1+x(1+x)\Big]^2=56$$

(E3): $$\frac{\dfrac{x+1}{x}+\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{x}{x+1}}=1$$

(E4): $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}}=2$$

(E5): $$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=\frac{\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3x}{2}}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}.$$

›Επιλυσις:

$$(\text{E}1) \Longleftrightarrow \frac{\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)\cdot(1+x)}}{\dfrac{2x}{1-x}} = \frac{1}{\dfrac{12+2-x}{3}} \quad \Big| \quad \mathcal{D}=R-\{0,\pm 1,+14\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left[(1+x)^2-(1-x)^2\right](1-x)}{2x(1-x)(1+x)} = \frac{3}{14-x} \quad \Big| \quad \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(1+x)^2-(1-x)^2}{2x(1+x)} = \frac{3}{14-x} \quad \Big| \quad \mathcal{D} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4x}{2x(1+x)} = \frac{3}{14-x} \xLeftrightarrow{x\neq 0} \frac{2}{1+x} = \frac{3}{14-x}$$

$$\xLeftrightarrow{x\neq 14,-1} 2(14-x)=3(1+x) \Longleftrightarrow x=5 \Longrightarrow A=\{5\}.$$

(Ε2): ›Επειδή $\dfrac{x}{1-\dfrac{x}{1+x}} = \dfrac{x(1+x)}{(x+1)-x} = x(1+x) \quad \Big| \quad \mathcal{D} \Longrightarrow$

$$(\text{E}2) \Longleftrightarrow [1+x(1+x)] + [1+x(1+x)]^2 - 56 = 0 \quad \Big| \quad \mathcal{D}$$

$$\xLeftrightarrow{1+x(1+x)=y} y^2+y-56=0 \Longleftrightarrow (\alpha): y_1 = 7 \;\vee\; (\beta): y_2=-8$$

$$(\alpha) \Longleftrightarrow 1+x(1+x)=7 \Longleftrightarrow x^2+x-6=0 \Longleftrightarrow (x+3)(x-2)=$$

$$=0 \Longleftrightarrow x_1=-3 \;\vee\; x_2=2$$

$$(\beta) \Longleftrightarrow 1+x(1+x)=-8 \Longleftrightarrow x^2+x+9=0 \quad (\gamma)$$

›Επειδή διακρίνουσα τῆς (γ): $\mathcal{D}=1-36=-35<0$ ἕπεται ὅτι δέν ὑπάρχουν ρίζες τῆς (γ) ἐν R.

Συνεπῶς: $A=\{2,-3\}$.

$$(\text{E}3) \xLeftrightarrow{\frac{x+1}{x}=y} \frac{y+\dfrac{1}{y}}{1+\dfrac{1}{y}} = 1 \quad \Big| \quad \mathcal{D}=R-\left\{0,-1,-\tfrac{1}{2}\right\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^2+1}{y+1}=1 \Longleftrightarrow y^2+1=y+1 \Longleftrightarrow y^2-y=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha): y_1=0 \ \vee (\beta): y_2=1$$

$$(\alpha) \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x}=0 \Longleftrightarrow x=-1 \notin \mathcal{D}$$

$$(\beta) \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x}=1 \Longleftrightarrow x+1=x \Longleftrightarrow 1=0 \ \text{άτοπον}$$

$$\Longrightarrow A=\varnothing$$

(E4) $$\Longleftrightarrow \frac{\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{x^2-1}}{\dfrac{x-1+x+1}{x^2-1}}=2 \quad \Big| \quad \mathcal{D}=R-\{0, \pm 1\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4x}{2x}=2 \Longleftrightarrow 2=2 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D}.$$

(E5) ,Επειδή 1) $\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{(1+x)^2-(1-x)^2}{(1-x)(1+x)}=$

$$=\frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1-x)(1+x)}=\frac{4x}{1-x^2} \quad \text{και} \quad \frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x=$$

$$=\frac{3+x^2-4x^2}{4x}=\frac{3-3x^2}{4x}=\frac{3(1-x^2)}{4x}.$$

2) $\left(x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\dfrac{3x}{2}=\dfrac{(x-3)(2x-6)+5x}{2x-6}\cdot\dfrac{3x}{2}=$

$$=\frac{(2x^2-7x+18)3x}{4(x-3)}.$$

3) $2x-1+\dfrac{15}{x-3}=\dfrac{2x(x-3)-(x-3)+15}{x-3}=\dfrac{2x^2-6x-x+3+15}{(x-3)}=$

$$=\frac{2x^2-7x+18}{x-3} \Longrightarrow (E5) \Longleftrightarrow \frac{4x}{1-x^2}\cdot\frac{3(1-x^2)}{4x}=$$

$$=\frac{(2x^2-7x+18)3x}{4(x-3)}\cdot\frac{x-3}{2x^2-7x+18} \quad \Big| \quad \mathcal{D}=R-\{\pm 1, 0, 3\}$$

$\Longleftrightarrow \quad 3 = \frac{3x}{4} \Longleftrightarrow \quad x = 4 \quad \Longrightarrow A = \left\{4\right\}$.

Π27. Νὰ ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1): \ 3x^4 + 10x^3 + 13x^2 + 6x + 3 = 0$

$(E2): \ 2x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 4x + 2 = 0$

$(E3): \ 4(x^2 - x + 1)^3 = 27x^2 \cdot (x-1)^2$

$(E4): \ 10(x^4+1) - 63x(x^2-1) + 52x^2 = 0$

$(E5): \ (x^2 - x + 1)^2 - 4x(x-1)^2 = 0$

Ἐπίλυσις:

(E1) $\Longleftrightarrow \quad 3x^4 + 10x^3 + (10+3)x^2 + 2\cdot 3x + 3 = 0$

$\Longleftrightarrow 3x^4 + 3x^2 + 2\cdot 3x + 3 + 10x^2(x+1) = 0$

$\Longleftrightarrow 3(x^4 + x^2 + 2x + 1) + 10x^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow 3\left[x^4 + (x+1)^2\right] +$

$+ 10x^2(x+1) = 0 \xleftrightarrow{\text{διαιρῶ διά } x^2(x+1) \neq 0} 3\left[\frac{x^2}{x+1} - \frac{x+1}{x^2}\right] +$

$+ 10 = 0 \xleftrightarrow{\frac{x^2}{x+1} = y} 3\left(y + \frac{1}{y}\right) + 10 = 0 \Longleftrightarrow 3y^2 + 10y +$

$+ 3 = 0 \Longleftrightarrow 3\left(y + \frac{1}{3}\right)(y+3) = 0 \Longleftrightarrow$

$(\alpha): y_1 = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad (\beta): y_2 = -3$

$(\alpha) \ \frac{x^2}{x+1} = -\frac{1}{3} \Longleftrightarrow 3x^2 = -x - 1 \Longleftrightarrow 3x^2 + x + 1 = 0.$

$\Delta = 1 - 12 = -11 < 0 \Longrightarrow$ δὲν ὑπάρχουν ρίζαι ἐν R.

$(\beta) \ \frac{x^2}{x+1} = -3 \Longleftrightarrow x^2 + 3x + 3 = 0$, μέ

$\Delta_1 = 9 - 12 = -3 < 0 \Longrightarrow$ δέν ὑπάρχουν ρίζαι ἐν R

Συνεπῶς $A = \emptyset$

$(E_2) \Longleftrightarrow 2x^4 - 5x^3 + (2-5)x^2 + 2\cdot 2x + 2 = 0$

$\Longleftrightarrow 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x^2 + 2\cdot 2x + 2 = 0 \Longleftrightarrow 2(x^4 + x^2 + 2x + 1) - 5x^2(x+1) = 0 \Longleftrightarrow 2\left[x^4 + (x+1)^2\right] - 5x^2\cdot(x+1) = 0 \xLeftrightarrow{\Delta\iota\alpha\iota\rho\tilde{\omega}\ \delta\iota\acute{\alpha}\ x^2(x+1)\neq 0} 2\left[\frac{x^2}{x+1} + \frac{x+1}{x^2}\right] - 5 = 0$

$\xLeftrightarrow{\frac{x^2}{x+1}=y} 2\left(y + \frac{1}{y}\right) - 5 = 0 \Longleftrightarrow 2y^2 - 5y + 2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2(y-2)\left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow (\alpha): y_1 = 2 \ \vee\ (\beta): y_2 = \frac{1}{2}$

$(\alpha) \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = 2 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow (x - 1 + \sqrt{3})\cdot(x - 1 - \sqrt{3}) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3} \ \vee\ x_2 = 1 + \sqrt{3}$

$(\beta) \Longleftrightarrow \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Longleftrightarrow 2\left(x + \frac{1}{2}\right)\cdot(x-1) = 0 \Longleftrightarrow x_3 = -\frac{1}{2} \ \vee\ x_4 = 1$

Συνεπῶς $A = \left\{1 \pm \sqrt{3},\ -\frac{1}{2},\ 1\right\}$.

(E_3): Επειδή $x^2 - x + 1 = x^2 - (x-1) \Longrightarrow$

$(E_3) \xLeftrightarrow{\delta\iota\alpha\iota\rho\tilde{\omega}\ \delta\iota\acute{\alpha}\ (x-1)^3 \,|\, x\neq 1} 4\left(\frac{x^2}{x-1} - 1\right)^3 = 27\,\frac{x^2}{x-1} \Longleftrightarrow$

$\xLeftrightarrow{\frac{x^2}{x-1}=y} 4(y-1)^3 = 27y \Longleftrightarrow 4(y^3 - 1 - 3y^2 + 3y) - 27y = 0 \Longleftrightarrow 4y^3 - 4 - 12y^2 + 12y - 27y = 0 \Longleftrightarrow 4y^3 - 12y^2 - 15y - 4 = 0 \ (1)$.

Παρατηροῦμεν ὅτι τό πρῶτον μέλος τῆς (1) μηδενίζεται ἄν ὅπου y τεθῇ 4 συνεπῶς διαιρεῖται. διά $y - 4 \Longrightarrow 4y^3 - 12y^2 - 15y - 4 = (y-4)(4y^2 + 4y + 1)$.

$$x+\frac{1}{x}=y+1 \;\Big|\; x,\, y \in R-\{0,\,1\}.$$

τότε $x+\frac{1}{x}-1=y \iff \frac{x^2-x+1}{x}=y \quad (1).$

$x+\frac{1}{x}-2=y-1 \iff \frac{x^2-2x+1}{x}=y-1 \iff$

$\iff \frac{(x-1)^2}{x}=y-1 \quad (2).$

$(1) \Longrightarrow \frac{(x^2-x+1)^2}{x^2}=y^2 \quad (3)$ καί $\frac{(x^2-x+1)^3}{x^3}=y^3 \quad (4).$

Συνεπῶς: $\frac{(3)}{(2)} \Longrightarrow \frac{(x^2-x+1)^2}{x(x-1)^2}=\frac{y^2}{y-1} \quad (5)$

καί $\frac{(4)}{(2)} \Longrightarrow \frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=\frac{y^3}{y-1} \quad (6)$

Μέ τήν χρησιμοποίησιν τοῦ ἀνωτέρου μετασχηματισμοῦ ἡ ἐπίλυσις τῶν (Ε3) καί (Ε5) ἐπιτυγχάνεται καί ὡς ἑξῆς:

$$(E3) \xLeftrightarrow{\text{Διαιρῶ διά } x^2(x-1)^2 \mid x\in R-\{0,1\}} \frac{4(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2}=27$$

Ἄρα διά $x+\frac{1}{x}=y+1 \xRightarrow{(6)} (E3) \iff \frac{4y^3}{y-1}=27 \iff$

$\iff 4y^3-27y+27=0$ (α): Παρατηρῶ ὅτι τό πρῶτον μέλος τῆς (α) μηδενίζεται διά $y=\frac{3}{2}\left(3/27 \wedge 2/4\right)$, ἄρα διαιρεῖται διά $y-\frac{3}{2}$.

4	0	−27	27	3/2
	6	9	−27	
4	6	−18	0.	

Συνεπῶς: $(a) \Longleftrightarrow \left(y-\frac{3}{2}\right)(4y^2+6y-18)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y-\frac{3}{2}=0 \vee 2y^2+3y-9=0 \Longleftrightarrow y=\frac{3}{2} \vee$

$2\left(y-\frac{-3+9}{4}\right)\left(y-\frac{-3-9}{4}\right)=0$.

$\Longleftrightarrow y_1=\frac{3}{2} \vee y_2=\frac{3}{2} \vee y_3=-3$

Ἄρα: $x+\frac{1}{x}=\frac{3}{2}+1 \vee x+\frac{1}{x}=-3+1 \Longleftrightarrow 2x-$

$-5x+2=0 \vee x^2+2x+1=0 \Longleftrightarrow 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2)=0$

$\vee (x+1)^2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{1}{2} \vee x=2 \vee x=-1$ (ὅλες διπλές.).-

Τελικῶς θά ἔχωμεν $A=\left\{\frac{1}{2}, 2, -1\right\}$ (διπλές).

$(E5) \xrightarrow{\text{Διαιρῶ διά } x(x-1)^2} \frac{(x^2-x+1)^2}{x(x-1)^2}-4=0$, ἐφ᾽ ὅσον $x\in R-\{0,1\}$

Ἄρα διά $x+\frac{1}{x}=y+1 \xrightarrow{(5)}$

$(E5) \Longleftrightarrow \frac{y^2}{y-1}-4=0 \Longleftrightarrow y^2-4y+4=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (y-2)^2=0 \Longleftrightarrow y=2$ διπλῆ.

Συνεπῶς: $x+\frac{1}{x}=2+1 \Longleftrightarrow x^2-3x+1=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (διπλές).

Π28. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

$(E1): \frac{x}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=3x^{\frac{1}{3}}$

$(E2): (x-2)^{\frac{1}{3}}+(x-3)^{\frac{1}{3}}+(x-4)^{\frac{1}{3}}=0$

$$(E3):\ \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-(1+x)^{\frac{1}{2}}}{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{15}{8}\left(\frac{x}{15}\right)^{\frac{1}{3}}$$

›Επίλυσις **(E1)**: ›Εκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν.

$$x^{\frac{1}{3}}=y \wedge x^{\frac{2}{3}}=y^2 \Longleftrightarrow x=y^3 \Longrightarrow (E1) \Longleftrightarrow \frac{y^3}{y-1}-$$

$$-\frac{y^2}{y+1}-\frac{1}{y-1}+\frac{1}{y+1}=3y \ \Big|\ y\in R-\{\pm 1\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^3-1}{y-1}-\frac{y^2-1}{y+1}=3y \Longleftrightarrow y^2+y+1-y+1-3y=0$$

$$\Longleftrightarrow y^2-3y+2=0 \Longleftrightarrow (y-2)(y-1)=0 \Longleftrightarrow y_1=2$$

$\vee\ y_2=1$ (ἀπαράδεκτος) $\Longleftrightarrow x^{\frac{1}{3}}=2 \Longleftrightarrow x=8$

$$\Longrightarrow A=\{8\}.$$

$$(E2) \Longleftrightarrow \sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-4}=0$$

›Εκτελοῦμεν τούς μετασχηματισμούς:

$$\sqrt[3]{x-2}=a,\quad \sqrt[3]{x-3}=b,\quad \sqrt[3]{x-4}=\gamma \Longrightarrow a+b+\gamma=0$$

$$\xrightarrow{\text{ταυτότης Euler}} a^3+b^3+\gamma^3=3ab\gamma \Longrightarrow (E2) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x-3}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x-4}\right)^3=3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)(x-4)}$$

$$\Longleftrightarrow x-2+x-3+x-4=3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)(x-4)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 3x-9=3\sqrt[3]{(x-2)(x-3)(x-4)} \Longleftrightarrow x-3=$$

$$=\sqrt[3]{(x-2)(x-3)(x-4)} \Longleftrightarrow (x-3)^3=(x-2)(x-3)(x-4) \Longleftrightarrow$$

$$(x-3)\left[(x-3)^2-(x-2)(x-4)\right]=0 \Longleftrightarrow (x-3)=0 \ \vee$$

$$\left[(x^2-6x+9)-(x^2-6x+8)\right]=0 \Longleftrightarrow x-3=0 \quad =3$$

$$\Longrightarrow A=\{3\}.$$

(Ε3) $\overset{\text{θέτομεν}}{\Longleftrightarrow}$ $\sqrt[3]{\frac{x}{15}} = y \Longrightarrow x = 15y^3$ $\dfrac{\sqrt{1+15y^3} - \sqrt{1-15y^3}}{\sqrt{1+15y^3} + \sqrt{1-15y^3}} =$

$= \dfrac{15y}{8}$ $\overset{\text{ἰδιότης ἀναλογιῶν}}{\Longleftrightarrow}$ (Ε'3): $\dfrac{2\sqrt{1+15y^3}}{2\sqrt{1-15y^3}} =$

$= \dfrac{15y+8}{8-15y}$ | Περιορισμός:

$\dfrac{15y+8}{8-15y} > 0 \Longleftrightarrow (15y+8)(15y-8) < 0 \Longleftrightarrow 225y^2 -$

$-64 < 0 \Longleftrightarrow y^2 < \dfrac{64}{225} \Longleftrightarrow -\dfrac{8}{15} < y < \dfrac{8}{15}$

(Ε'3) $\Longleftrightarrow \dfrac{1+15y^3}{1-15y^3} = \dfrac{225y^2+240y+64}{225y^2-240y+64} \Longleftrightarrow \dfrac{30y^3}{2} =$

$= \dfrac{2\cdot 240y}{2(225y^2+64)} \Longleftrightarrow y^3 = \dfrac{16y}{225y+64} \Longleftrightarrow y^3(225y^2+$

$+64) = 16y \Longleftrightarrow (1)\ y_1 = 0 \lor 225y^4 + 64y^2 - 16 = 0\ (2)$

$(1) \Longleftrightarrow x_1 = 0$. $(2) \Longleftrightarrow y_2 = +\dfrac{6}{15} \lor y_3 = -\dfrac{6}{15} \lor$

$y_4 = \dfrac{10i}{15} \notin R \lor y_5 = -\dfrac{10i}{15} \notin R$. $y_2 = \dfrac{6}{15} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x_2 = 15\cdot\dfrac{6^3}{15^3} = \dfrac{216}{225} = \dfrac{24}{25}$. $y_3 = -\dfrac{6}{15} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x_3 = 15\left(-\dfrac{6}{15}\right)^3 = -\dfrac{216}{225} = -\dfrac{24}{25} \Longrightarrow A = \left\{0, \pm\dfrac{24}{25}\right\}$

Π29. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(Ε1): $4|x-5| - 3|x+3| - 5|x+1| + 2x + 6 = 0$

(Ε2): $|x| + |2x-1| + |4x+1| - 3|x-3| + 7 = 0$

(Ε3): $\dfrac{1}{|x-1|} - \dfrac{2}{|x-2|} + \dfrac{1}{|x-3|} = 0$

(Ε4): $|x-2| + 2|x| - 3x = |x+1| + 10$.

Ἐπίλυσις: (E_1): Θέτομεν $K \equiv x-5$, $M \equiv x+3$, $N \equiv x+1$. Αἱ τιμαὶ τοῦ x, αἱ ὁποῖαι μηδενίζουν ἑκάστην παράστασιν εὑρισκομένην ἐντός τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς κατά σειράν: $x=5$, $x=-3$, $x=-1$.

Θέτομεν τάς χαρακτηριστικάς αὐτάς τιμάς κατά τάξιν αὔξοντος μεγέθους καί σχηματίζομεν τόν ἀκόλουθον πίνακα.

x	M	N	K	(E_1)	Συμπεράσματα
$-\infty$ … -3	$-$	$-$	$-$	$2x+3(x+3)+5(x+1)-4(x-5)+6=0$	$\Rightarrow x=-6\frac{2}{3} \in (-\infty,-3)$ $\Rightarrow A=\left\{-6\frac{2}{3}\right\}$ δεκτή
-3 … -1	$+$	$-$	$-$	$2x-3(x+3)+5(x+1)-4(x-5)+6=0$	$\Rightarrow 22=0 \Rightarrow A=\emptyset$
-1 … 5	$+$	$+$	$-$	$2x-3(x+3)-5(x+1)-4(x-5)+6=0$	$\Rightarrow x=1,2 \in [-1,5)$ $\Rightarrow A_2=\left\{\frac{6}{5}\right\}$
5 … $+\infty$	$+$	$+$	$+$	$2x-3(x+3)-5(x+1)+4(x-5)+6=0$	$\Rightarrow x=-14 \notin [5,+\infty)$ $\Rightarrow A=\emptyset$

Συνεπῶς $A=\left\{-6\frac{2}{3}, \frac{6}{5}\right\}$

(E_2): Θέτομεν $A \equiv 4x+1$, $B \equiv x$, $\Gamma \equiv 2x-1$, $\Delta \equiv x-3$

Χαρακτηριστικαί τιμαί πού μηδενίζουν ἑκάστην παράστασιν εὑρισκομένην ἐντός τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς κατά τάξιν αὔξοντος μεγέθους:

$x=-\frac{1}{4}$, $x=0$, $x=\frac{1}{2}$, $x=3$.

x	A	B	Γ	Δ	(E_2)	Συμπεράσματα
$-\infty$						
	$-$	$-$	$-$	$-$	$-(4x+1)-x+(1-2x)+3(x-3)+7=0$	$\Rightarrow x=-\frac{1}{2}\in\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow A_1=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$
$-\frac{1}{4}$	0					
	$+$	$-$	$-$	$-$	$(4x+1)-x+(1-2x)+3(x-3)+7=0$	$\Rightarrow x=0\notin\left[-\frac{1}{4},0\right) \Rightarrow A_2=\emptyset$
0		0				
	$+$	$+$	$-$	$-$	$(4x+1)+x+(1-2x)+3(x-3)+7=0$	$\Rightarrow x=0\in\left[0,+\frac{1}{2}\right) \Rightarrow A_3=\{0\}$
$\frac{1}{2}$			0			
	$+$	$+$	$+$	$-$	$(4x+1)+x+(2x-1)+3(x-3)+7=0$	$\Rightarrow x=\frac{1}{5}\notin\left[\frac{1}{2},3\right) \Rightarrow A_4=\emptyset$
$+3$				0		
	$+$	$+$	$+$	$+$	$(4x+1)+x+(2x-1)-3(x-3)+7=0$	$\Rightarrow x=-4\notin[3,+\infty) \Rightarrow A_5=\emptyset$
$+\infty$						

Συνεπώς $A=\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$.

(E_3): Εὑρίσκομεν πρῶτον τάς τιμάς διά τάς ὁποίας μηδενίζεται ἑκάστη παράστασις, ἡ ὁποία εὑρίσκεται ἐντός τοῦ συμβόλου τῆς ἀπολύτου τιμῆς. Αἱ χαρακτηριστικαί τιμαί αὐταί εἶναι $1, 2, 3$ διαφορετικάς τῶν ὁποίων πρέπει νά λάβη τό x διά νά ἔχη ἔνοιαν ἡ ἐξίσωσις:

περίπτωσις α) $x<1$, ὁπότε $|x-1|=-(x-1)$, $|x-2|=$

$=-(x-2)$, $|x-3|=-(x-3)$.

περίπτωσις β) $1<x<2$ ὁπότε:

$$|x-1|=(x-1),\quad |x-2|=-(x-2),\quad |x-3|=-(x-3).$$

Περίπτωσις γ) $2 < x < 3$ ὁπότε

$|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$, $|x-3| = -(x-3)$

Περίπτωσις δ) $x > 3$ ὁπότε $|x-1| = x-1$, $|x-2| = x-2$,

$|x-3| = x-3$.

Κατά τήν α) καί δ) περίπτωσιν ἡ ἐξίσωσις

ἰσοδυναμεῖ μέ τήν $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2} + \dfrac{1}{x-3} = 0 \iff$

$\iff (x-2)(x-3) - 2(x-1)(x-3) + (x-1)(x-2) = 0$

$\iff 0 \cdot x = -2 \implies A_1 = \emptyset$

Κατά τήν β) περίπτωσιν ἡ $(E_3) \iff \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} =$

$= 0 \iff (x-2)(x-3) + 2(x-1)(x-3) - (x-1)(x-2) = 0 \iff$

$\iff x^2 - 5x + 5 = 0 \iff \left(x - \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = 0 \implies$

$x_1 = \dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = -\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ αἱ ὁποῖαι ἀπορρίπτονται

διότι δέν περιέχονται μεταξύ τῶν 1 καί 2 $\implies A_2 = \emptyset$

Κατά τήν γ) περίπτωσιν $(E_3) \iff \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{x-3} = 0$

$\iff x^2 - 3x + 1 = 0 \iff \left(x - \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 0$

$\implies x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

Δεκτή ἡ $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ ὡς περιεχομένη μεταξύ

τῶν 2 καί 3 $\implies A_3 = \left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$. Συνεπῶς $A = \left\{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

(E4): Εὑρίσκω τάς τιμάς τοῦ x πού μηδενίζουν τά ἀπόλυτα.

$$-\infty \qquad -1 \qquad 0 \qquad +2 \qquad +\infty$$

I). $x \leqq -1 \Longrightarrow \begin{cases} |x-2| = -(x-2) \\ |x| = -x \\ |x+1| = -(x+1) \end{cases}$ Συνεπῶς:

$$(E4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -(x-2)-2x-3x = -(x+1)+10 \\ x \leqq 1 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{7}{5} \\ x \leqq -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow A_1 = \left\{-\frac{7}{5}\right\}.$$

II) $-1 < x \leqq 0 \Longrightarrow \left.\begin{cases} |x-2| = -(x-2) \\ |x| = -x \\ |x+1| = x+1 \end{cases}\right\}$ Συνεπῶς:

$$(E4) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} -(x-2)-2x-3x = x+1+10 \\ -1 \leqq x \leqq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{9}{7} \\ -1 \leqq x \leqq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A_2 = \emptyset$$

III) $0 < x \leqq 2 \Longrightarrow \left.\begin{cases} |x-2| = -(x-2) \\ |x| = x \\ |x+1| = x+1 \end{cases}\right\}$ Συνεπῶς:

$$(E4) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{c} -(x-2)+2x-3x = x+1+10 \\ 0 < x \leqq 2 \end{array}\right] \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-3 \\ 0<x\leqq 2 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A_3 = \phi$$

IV) $2<x \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} |x-2| = x-2 \\ |x| = x \\ |x+1| = x+1 \end{matrix}\right\}$ Συνεπῶς:

$$(E4) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-2+2x-3x = x+1+10 \\ 2<x \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-13 \\ 2<x \end{matrix}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow A4 = \phi$. Τελικῶς $\Longrightarrow A = \left\{-\frac{7}{5}\right\}$.

Π30: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E1): $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$

(E2): $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x - 12 = 0$

Ὑπόδειξις: Ἰσχύει· $\varphi(x) \equiv \varphi(1-x)$, ὅπου $\varphi(x)$ τό πρῶτον μέλος ἑκάστης τῶν δοθεισῶν ἐξισώσεων.

Ἐπίλυσις: Ἐάν ρ ρίζα μιᾶς τῶν δοθεισῶν τότε καί ὁ ἀριθμός $1-\rho$ εἶναι ρίζα αὐτῆς λόγω τῆς $\varphi(x) \equiv \varphi(1-x)$ (τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια διαπιστοῦται εὐκόλως).
Ἑκάστη τῶν δοθεισῶν ἔχει 4 ρίζας (διότι εἶναι 4ου βαθμοῦ), ἔστωσαν ρ_1, $1-\rho_1$, ρ_2, $1-\rho_2$.
Τότε:
$\varphi(x) \equiv (x-\rho_1)(x-1+\rho_1)(x-\rho_2)(x-1+\rho_2) \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \varphi(x) \equiv \left[x^2-(\rho_1+1-\rho_1)x+\rho_1(1-\rho_1)\right]\left[x^2-(\rho_2+\right.$$

$$\left.+1-\rho_2)x+\rho_2(1-\rho_2)\right] \Longleftrightarrow \varphi(x) \equiv (x^2-x+a)(x^2-x+b) \quad (1$$

ὅπου $a = \rho_1(1-\rho_1)$ καί $b = \rho_2(1-\rho_2)$.

$(1) \Longleftrightarrow \varphi(x) \equiv x^4 - 2x^3 + (a+b+1)x^2 - (a+b)x + ab = 0 \quad (2)$

Συνεπῶς διά τήν **(E1)** ἐκ τῆς (2) ἕπεται:

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \equiv x^4 - 2x^3 + (a+b+1)x^2 - (a+b)x + b$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b+1 = 3 \\ a+b = 2 \\ ab = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+b = 2 \\ ab = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2-b \\ ab = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2-b \\ (2-b)\,b = 2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2-b \\ 2b - b^2 = 2 \end{array}\right\}$$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 2-b \\ b^2 - 2b + 2 = 0 \end{array}\right\}$. Ἐκ τούτων ἡ δευτέρα ἔχει:

$$\Delta = 4 - 8 = -4 < 0 \Longrightarrow b \notin R.$$

Συνεπῶς ἡ (E1) εἶναι ἀδύνατος ἐν R $(A \equiv \emptyset)$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως διά τήν **(E2)** ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b = 4 \\ ab = -12 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -2 \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 6 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\varphi(x) \equiv (x^2 - x + 6)(x^2 - x - 2).$$

Ἄρα: $(x^2 - x + 6)(x^2 - x - 2) = 0 \Longleftrightarrow x^2 - x + 6 = 0 \ (i)$

$\vee \ x^2 - x - 2 = 0 \ (ii)$.

$(i) \Longrightarrow \Delta = 1 - 24 = -23 < 0$ ἄρα $A_1 = \emptyset$

$(ii) \Longrightarrow (x+1)(x-2) = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \vee x = 2 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow A_2 = \{-1; 2\} \Longrightarrow A = \{-1, 2\}.$$

Παρατηρήσεις: 1) Διά τήν (E2) δυνατόν νά παρατηρήσωμεν ὅτι $\varphi(-1) = 0$. Ἄρα $\rho_1 = -1 \Longrightarrow 1 - \rho_1 = 2$

$\Longrightarrow (x+1)(x-2) / \varphi(x) \Longrightarrow \varphi(x) \equiv (x+1)(x-2)\cdot$
$\cdot(x^2-x+6)$ (δι᾽ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως) $\Longrightarrow$
$A = \{-1, 2\}$.

2) Γενικώτερον διά τάς ἐξισώσεις $\varphi(x)=0$, ὅπου $\varphi(x)$ ἀκέραιον πολυώνυμον μέ $\varphi(x) \equiv \varphi(a-x)$ ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ μετασχηματισμός $y = x(a-x)$ ὑποβιβάζει τόν βαθμόν τῆς δοθείσης (Βλ. Ἄλγεβρα τόμος ΙΙ. Θ. Καζαντζῆ).

Οὕτω διά τήν (Ε2) δι᾽ ἐκτελέσεως τῆς διαιρέσεως $\varphi(x) : x(1-x)$ ἔχομεν:

$\varphi(x) \equiv x(1-x)(-x^2+x-4)-12 \Longleftrightarrow \varphi(x) \equiv x(1-x)\cdot [x(1-x)-4]-12$

Ἄρα διά $x(1-x)=y \Longrightarrow (E2) \Longleftrightarrow y(y-4)-12=0$
$\Longleftrightarrow y^2-4y-12=0 \Longleftrightarrow (y-6)(y+2)=0 \Longleftrightarrow y=6 \vee$
$y=-2 \Longrightarrow x(1-x)=6 \vee x(1-x)=-2 \Longleftrightarrow$
$x^2-x+6=0 \vee x^2-x-2=0 \Longrightarrow A = \{-1, 2\}$.

Διά τήν (Ε1) (Βλ. Ἄλγεβρα Θ. Καζαντζῆ).

II. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1. $\left(x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = x-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}x^2$

2. $\frac{(x-1)(x+2)}{3}-\frac{7x}{2}=\frac{x^2}{3}-2+x$

3. $\frac{1}{9}\left[3x-6-5\left(\frac{7x}{2}-5\right)\right]+13(x-5)+\frac{1}{4}=0$

4. $\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+2}{12}=\frac{x-3}{4}+1$

5. $3\left[5x-(3x-5x-10+2x-10)\right]-5x-25=10x+35$

6. $\frac{x+6}{2}+\frac{2(x+17)}{3}+\frac{5(x-10)}{6}=2x+6$

7. $\frac{3}{4}\left(x-\frac{x+4}{3}+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{x+3}{2}-\frac{x-3}{4}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x+6}{8}$

8. $\frac{x-1}{3}-x=\frac{1-x}{6}-\frac{5x+1}{8}$

9. $(3x^2+2x-9)^2=(x^2+2x+9)^2$

10. $(2x-3)(x^2-4x+4)=(4x^2-9)(2x+3)$

11. $(x^2-2x+1)^2-(x-1)^2(x-3)^2=0$

12. $(3x+2)(x^2-1)=(4x+3)(x^2-1)$

13. $4(3x-1)^2=9(2x+3)^2$

14. $4x^2+4x+1=x^2$

15. $\frac{x^3}{289}-x=0$ (βλέπε Π_{11}, E_3)

16. $2(x^3-125)=(x-5)^3$

17. $(x-1)(2x+3)-(x-1)(3x+1)+2(1-x)=0$

18. $(3x-2)(4x-3)-(2-3x)(x-1)-2(3x-2)(x+1)=0$

19. $2(1-x^2)-3(1+x)-(1+x)(3x-2)=0$

20. $3x(2+3x)-(2+3x)^2-(4-9x^2)=0$

21. $(4x+5)(2x-1)=4x^2-1$

22. $(3x-7)(x-1)=4(9x^2-49)$

23. $(4-3x)(1-x)-(16-9x^2)+(6x+2)(4-3x)=0$

24. $(4x^2-1)(5x+3)=(25x^2-9)(2x+1)$

25. $4x^2-\frac{1}{9}=4x-1$

26. $(4x^2-9)(3x+2)-6(2x-3)=0$

27. $x^2-4x^2+3x(4x-3)+7=2(4x-3)\left(x-\frac{1}{4}\right)+1$

28. $(3x+1)^2-(3-2x)^2-2(x+4)=0$

29. $(3x-1)(x-2)^2-9(3x-1)=0$

30. $\dfrac{x+2}{x^2-5x+6}+\dfrac{2x-1}{2x^2-4x}=\dfrac{2}{3-x}$

31. $\dfrac{x-1}{x^2-4}+\dfrac{3}{2x+4}=\dfrac{5x-16}{2x^2-4x}$

32. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{4x^2-2}{7+16x+4x^2}$

33. $\dfrac{14x-4}{2x+1}-\dfrac{3x-3}{2x^2-x-1}-\dfrac{30(2x-3)}{3x-2}+\dfrac{26(2x^2-3x-2)}{4x^2-1}=$

$$=\frac{-170}{59(2x+1)(6x^2-7x+2)}$$

34. $(x^2 - x)(2x-5) = (x^2 - x)(x+9)$

35. $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 32x + 16$

36. $(x-3)^2 + 2x + 1 = x(x-4) + 10$

37. $\frac{3}{4}\left(x - \frac{x+4}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{6}\left(\frac{x+3}{2} - \frac{x-3}{4}\right) =$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+6}{8}\right)$$

38. $\frac{(x+3)(x-2)}{10} - \frac{(x+2)(x-1)}{14} = \frac{(x-3)(x+2)+4}{35}$

39. $3\left\{5x - \left[3x - 5(x+2) + 2(x-5)\right]\right\} - 5(x+5) =$

$$= 10x + 35$$

40. $\left(\frac{6x^2 + 7x + 5}{\sqrt{2}}\right)^2 - 18x^2 - 21x = \frac{21}{2}$

41. $(x^2 - 10x + 26)^2 - 11(x^2 - 10x + 26) + 30 = 0$

42. $3(2x-1)^2 - 2(2x-1) = 65$

43. $(x^2 - 7x + 13)^2 - 6(x^2 - 7x + 13) + 5 = 0$

44. $(x^2 + x)^2 + 4(x^2 + x) - 12 = 0$

45. $2(x^2 + 6x + 1)^2 + 5(x^2 + 6x + 1)(x^2 + 1) +$

$$+ 2(x^2 + 1)^2 = 0$$

46. $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0$

47. $(x+3)(x+4)(x+5)(x+6) = 840$

48. $(x+3)(x+6)(x+4)(x+5) = 84$

49. $(x-5)(x+14)(x+8)(x-11) = 2992$

50. $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$

51. $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=0$

52. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-4)-24=0$

53. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$

54. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6)+10=0$

55. $(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+8)\cdot(x+12)=4x^2$

56. $\left[(2x+1)(x-2)\right]\left[x(2x-3)\right]=63$

57. $(x^2-5)(x^2-2)(x-1)(x+1)(x^2+2)=-36$

58. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+6)^2(x+9)(x+10)(x+11)=-5040$

59. $(x+2)(x+3)(x+6)(x-1)+x^2+5x-6=0$

60. $(2x^3-5x^2+3)(x^3+2x^2-3)(x^3+x^2-2)=0$

61. $x^4-4x-1=0$

62. $x^3-3x^2+2x-504=0$

63. $x^4+x^3-31x^2-25x+150=0$

64. $x^4-10x^3+32x^2-36x+12=0$

65. $x^4-10x^3+35x^2-50x+24=0$

66. $25x^4+30x^3-11x^2-12x+4=0$

67. $3x^4+22x^3+61x^2+74x+35=0$

68. $27x^4+54x^3+15x^2-12x-4=0$

69. $x^4+x^3-56x^2-36x+720=0$

70. $x^4-9x^3+27x^2-15x-52=0$

71. $x^6-6x^4+2x^3+10x^2-4x\,\eta\mu\,10^\circ-6x+4\,\eta\mu^2 10^\circ+1=0$

72. $x^2+2ax-3a^2-2\beta(x-a)=0$

73. $x^2+3a^2-\beta^2+2a\beta-4ax=0$

74. $x^2-a^2-\beta^2+\gamma^2-2(\gamma x-a\beta)=0$

75. $x^2+2ax-a^4-a^2-1=0$

76. $2x^2-5\lambda x+2\lambda^2-a\lambda-ax-a^2=0$

77. $x^2-3a^2-3\beta^2+10a\beta-2\beta x-2ax=0$

78. $2x^2-7ax-22a^2-5x+35a-3=0$

79. $x^3-12x+16=0$

80. $x^3-45x+152=0$

81. $x^3+9x\pm 26=0$

82. $x^3+15x\pm 124=0$

83. $\left[3(x+1)-2(x+3)\right]^3+\left[2(x+3)-x+5\right]^3+\left[x-5-3(x+1)\right]^3=0$

84. $\left[5(x+1)-2(x+5)\right]^3+\left[2(x+5)-(x-7)\right]^3+$

$+\left[(x-7)-5(x+1)\right]^3=0$

85. $\left[(x^2+x+1)^3-(x^2+1)^3-x^3\right]\left[(x^2-x+1)^3-(x^2+1)^3+x^3\right]=$

$=3\left[(x^4+x^2+1)^3-(x^4+1)^3-x^6\right]$

86. $\dfrac{40}{x^2+2x-48}-\dfrac{20}{x^2+9x+8}+\dfrac{8}{x^2+10x}-\dfrac{12}{x^2+5x-50}=-1$

87. $\dfrac{1}{x^2+x}+\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\dfrac{1}{x^2+5x+6}-\dfrac{2}{x^2+3x}=\dfrac{1}{x(x-5)}$

88. $(x^2+7x+5)^2-3x^2-21x=19$

89. $$\frac{\dfrac{1}{x+1}}{1-\dfrac{1}{x+1}}-\frac{\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{x}{1-x}}+\frac{\dfrac{1}{x-1}}{\dfrac{x}{x+1}}=\frac{-3}{2x}$$

90. $$\frac{\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{x-1}{x+1}}{1-\dfrac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

91. $$\frac{(1+x)^2}{1+\dfrac{x}{1-x+\dfrac{x}{1+x+x^2}}}=x+2$$

92. $$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}\right)\left(\frac{3}{4x}+\frac{x}{4}-x\right)=$$
$$=\frac{\left(4x-3+\dfrac{5x}{2x-6}\right)\cdot\dfrac{3}{2}}{2x-1+\dfrac{15}{x-3}}$$

93. $$\left(\frac{x^2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)\frac{\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x+1}}{1+\dfrac{x}{x+1}}=5$$

94. $$\frac{\dfrac{1-x}{1+x}-\dfrac{1+x}{1-x}}{1-\dfrac{1+x}{1-x}}=\frac{3}{14-x}$$

95. $$\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-8}{x-6}$$

96. $$\frac{x^3}{x-1}+\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$$

97. $$\frac{1}{1+2x}-\frac{2}{2+3x}+\frac{3}{3+4x}-\frac{4}{4+5x}=0$$

98. $$\frac{(3-x)^3+(4+x)^3}{(3-x)^2+(4+x)^2}=7$$

99. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-2}=0$

100. $\dfrac{3-x}{8-x}+\dfrac{8-x}{6-x}+\dfrac{2-x}{4-x}=\dfrac{10-x}{8-x}+\dfrac{x+2}{x-6}+\dfrac{5-x}{4-x}$

101. $\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-7x+12}=\dfrac{x^2+3x-10}{x^2+3x-8}$

102. $\dfrac{x^2-x-9}{x^2-x-12}=\dfrac{x^2-x-3}{x^2-x-4}$

103. $\dfrac{x^2+4x+3}{x^2-4x+3}=\dfrac{x^2-6x+8}{x^2+6x+8}$

104. $\dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10}=\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2$

105. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2-x-12}=\dfrac{x^2-x-3}{x^2-x-13}$

106. $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1}+\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+2}=\dfrac{5}{2}$.

107. $\dfrac{x^2+2x+1-\frac{1}{x^2}}{x+\frac{1}{x}+1}=x+1-\dfrac{1}{x}$

108. $x^4+x^2+1=\dfrac{42}{x^4+x^2}$

109. $\dfrac{12}{5}\cdot\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=x+\dfrac{1}{x}$

110. $x^2+x-10+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}+3\right)\left(x+\dfrac{1}{x}-4\right)$

111. $\dfrac{x^5-1}{5}=\dfrac{x^4-1}{4}$

112. $\dfrac{x^3-1}{x^2}+\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2}=0$

113. $\dfrac{2x^3-3x^2+x+1}{2x^3-3x^2-x-1} = \dfrac{3x^3-x^2+5x-13}{3x^3-x^2-5x+13}$

114. $\dfrac{3x^4+x^2-2x-3}{3x^4-x^2+2x+3} = \dfrac{5x^4+2x^2-7x+3}{5x^4-2x^2+7x-3}$

115. $\dfrac{2x-3}{x-1} - \dfrac{3x-8}{x-2} + \dfrac{x+3}{x-3} = 0$

116. $(5x\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} - 296)(4x - 17\sqrt[4]{x^3} + 17\sqrt[4]{x} - 4) = 0 \mid x > 0$

117. $2x^2 - 4x + 3\sqrt{x^2-2x+6} = 15$

118. $2x^2 - 3x - 2x\sqrt{x^2-3x-4} = 20$

119. $\sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{2x-2} = 0$

120. $(1-x)(x+\sqrt{x^2+1}) = 1$

121. $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}} = \dfrac{13}{6}$

122. $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$

123. $2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}} = 20$

124. $3\sqrt{1+x} - 2\sqrt[4]{1+x} = 8$

125. $\sqrt[3]{2-x} = 1 - \sqrt{x-1}$

126. $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[6]{x^2-1}$

127. $(x+\sqrt{x})^4 - (x+\sqrt{x})^2 = 159.600$

128. $\dfrac{x^2 - x\sqrt{x^2-2} - 1}{x^2 + x\sqrt{x^2-2} - 1} = 8\,\dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}}$

129. $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$

130. $\sqrt[\nu]{(1+x)^2} - \sqrt[\nu]{(1-x)^2} = \sqrt[\nu]{1-x^2}$

131. $\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{2x^2-x}+\sqrt{12-x-x^2}=0$

132. $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2-7x+12}=0$

133. $2(3x^2-2x+5)+\sqrt{x^2-3x+3}=9$

134. $x(x-1)+3\sqrt{2x^2-7x+3}=-1/4$

135. $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{4x^2+12x+9}=-7$

136. $\sqrt[\nu]{\frac{x}{|x|}-\frac{\sqrt{x^2}}{x}}+\sqrt[2\nu]{2-|x|+2x^2-|x|^3}=0$, $(\nu\in N-\{1\})$

137. $|x-1|+|x^2-x|=0$

138. $(|x|+1)\left(\frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{x}\right)(3|x|-5)=0$

139. $(x^2-4|x|-12)(|x|^3-5x^2-17|x|+21)=0$

140. $x^4+x^2+2=4|x|^3-2(|3x|-1)$

141. $x^4-6|x|^3-21x^2+90|x|+216=0$

142. $(x^2+x+|x|+2)(x^2-\sqrt{2}\,x+2\sqrt{2}\,|x|-4)=0$

143. $(2|x|+x-6)(|x|+3x-12)(x^2+8x+|x|+20)=0$

144. $\frac{7}{2}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{|x-2|}=6-\frac{1}{|x-2|}$

145. $|x^2-5x+6|=|x^2-x+2|$

146. $|2x-3|+7|x-1|+10x-2=0$

147. $\left|x-|x-1|\right|=2x-3|x|+6$

148. $|x^3-x^2+x-1|+|x^2-x+1|=|x|^3$

149. $|x^3-3x^2+2x-1|=(x^2+x+1)|x-1|+|x|\,|3x-2|$

150. $\left|x+\frac{5}{2}\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|+\left|x-2\right|=\frac{9}{2}$

Ὑποδείξεις διά τήν λύσιν τῶν προηγουμένων ἀσκήσεων

1. Ἡ δοθεῖσα ἰσοδυνάμως γράφεται: $x-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)=$

$= x-x^2+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}x^2 \Longleftrightarrow -\frac{1}{2}-\frac{1}{3}x-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}=0 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -4x=10 \Longleftrightarrow x=-\frac{5}{2} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{5}{2}\right\}.$

Τί εἶναι ἡ ἐξίσωσις ἐν N καί ἐν Z;

2. Ἔχομεν ἰσοδυνάμως: $2(x-1)(x+2)-21x=2x^2-12+$

$+6x \Longleftrightarrow 2x^2+2x-4-21x=2x^2-12+6x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2x^2+2x-21x-2x^2-6x=4-12 \Longleftrightarrow -25x=-8$

$\Longleftrightarrow \quad x=\frac{8}{25} \quad \Longrightarrow A=\left\{\frac{8}{25}\right\}$

3. $(E) \Longleftrightarrow 12x-24-70x+100+468x-2340+9=0 \Longleftrightarrow$

$12x-70x+468x=24-100+2340-9 \Longleftrightarrow 410x=$

$=2.255 \Longleftrightarrow x=5{,}5 \Longrightarrow A=\left\{5\frac{1}{2}\right\}$

4. $(E) \Longleftrightarrow 4(2x-1)-(5x+2)=3(x-3)+12 \Longleftrightarrow 8x-4-$

$-5x-2=3x-9+12 \Longleftrightarrow 8x-5x-3x=4+2-9+12$

$\Longleftrightarrow 0\cdot x=9 \quad \Longrightarrow \quad A=\phi$

5. $(E) \Longleftrightarrow 3(5x-3x+5x+10-2x+10)-5x-25=10x+35$

$\Longleftrightarrow 15x-9x+15x+30-6x+30-5x-25-10x-35=0$

$\Longleftrightarrow 0x=0 \quad \Longrightarrow \quad A=R.$

6. $(E) \Longleftrightarrow 3(x+6)+4(x+17)+5(x-10)=6(2x+6) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3x+18+4x+68+5x-50=12x+36 \qquad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 3x+4x+5x-12x=-18-68+50+36 \Longleftrightarrow 0\cdot x=0$$

$$\Longrightarrow A \equiv R.$$

7. $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{3x}{4}-\dfrac{x+4}{4}-\dfrac{3}{8}-\dfrac{5(x+3)}{12}+\dfrac{5(x-3)}{24}=\dfrac{x+6}{24} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 18x-6(x+4)+9-10(x+3)+5(x-3)=x+6 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 18x-6x-24+9-10x-30+5x-15=x+6 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 6x=66 \Longleftrightarrow x=11 \Longrightarrow A=\{11\}.$$

8. $(E) \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)24}{3}-24x=\dfrac{24(1-x)}{6}-\dfrac{24(5x+1)}{8} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 8(x-1)-24x=4(1-x)-3(5x+1) \Longleftrightarrow 8x-8-$

$-24x=4-4x-15x-3 \Longleftrightarrow 8x-24x+4x+15x=8+4-$

$-3 \Longleftrightarrow 3x=9 \Longleftrightarrow x=3 \Longrightarrow A=\{3\}.$

9. $(E) \Longleftrightarrow (3x^2+2x-9+x^2+2x+9)(3x^2+2x-9-x^2-2x-9)=$

$=0 \Longleftrightarrow (4x^2+4x)(2x^2-18)=0 \Longleftrightarrow 4x(x+1)\,2(x+3)\cdot$

$\cdot(x-3)=0 \Longleftrightarrow x_1=0 \vee x_2=-1 \vee x_3=-3 \vee x_4=3$

10. $(E) \Longleftrightarrow (2x-3)(x-2)^2-(2x+3)(2x-3)(2x+3)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (2x-3)\left[(x-2)^2-(2x+3)^2\right]=0 \Longleftrightarrow (2x-3)(x-2+$

$+2x+3)(x-2-2x-3)=0 \Longleftrightarrow (2x-3)(3x+1)(-x-5)=0$

$\Longleftrightarrow x_1=\frac{3}{2} \vee x_2=-\frac{1}{3} \vee x_3=-5$

11. $(E) \Longleftrightarrow (x-1)^4-(x-1)^2(x-3)^2=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow (x-1)^2\left[(x-1)^2-(x-3)^2\right]=0$$

$\Longleftrightarrow (x-1)^2(x-1+x-3)(x-1-x+3)=0$

$\Longleftrightarrow 4(x-1)^2(x-2)=0 \Longleftrightarrow x_1=1$ (διπλή) $\vee\, x_2=2.$

12. $(E) \Longleftrightarrow (3x+2)(x^2-1)-(4x+3)(x^2-1)=0$

$\Longleftrightarrow (x^2-1)\left[(3x+2)-(4x+3)\right]=0$

$\Longleftrightarrow (x^2-1)(3x+2-4x-3)=0 \Longleftrightarrow (x+1)(x-1)(-x-1)=0$

$\Longrightarrow x_1=-1$ (μέ πολλαπλότητα 2) $\vee\, x_2=1$

13. $(E) \Longleftrightarrow \left[2(3x-1)\right]^2-\left[3(2x+3)\right]^2=0$

$\Longleftrightarrow \left[2(3x-1)+3(2x+3)\right]\left[2(3x-1)-3(2x+3)\right]=0$

$\Longleftrightarrow (6x-2+6x+9)(6x-2-6x-9)=0$

$\Longleftrightarrow (12x+7)(-11)=0 \Longleftrightarrow x=-\frac{7}{12} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{7}{12}\right\}.$

14. $(E) \Longleftrightarrow (4x^2+4x+1)-x^2=0 \Longleftrightarrow (2x+1)^2-x^2=0 \Longleftrightarrow$

$(2x+1+x)(2x+1-x)=0 \Longleftrightarrow (3x+1)(x+1)=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x_1=-\frac{1}{3} \;\vee\; x_2=-1$

15. $(E) \Longleftrightarrow x\left(\frac{x^2}{289}-1\right)=0 \Longleftrightarrow x\left(\frac{x}{17}+1\right)\left(\frac{x}{17}-1\right)=0$

$\Longleftrightarrow x_1=0 \;\vee\; x_2=-17 \;\vee\; x_3=+17 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A=\left\{\pm 17,\ 0\right\}.$

16. $(E) \Longleftrightarrow 2\left[(x-5)(x^2+5x+25)\right]-(x-5)^3=0$

$\Longleftrightarrow (x-5)\left[2(x^2+5x+25)-(x-5)^2\right]=0$

$\Longleftrightarrow (x-5)(2x^2+10x+50-x^2-25+10x)=0$

$\Longleftrightarrow (x-5)(x^2+20x+25)=0$

$\Longleftrightarrow x-5=0 \ \vee \ x^2+20x+25=0 \Longleftrightarrow x-5=0 \ \vee$
$(x+10+5\sqrt{3})(x+10-5\sqrt{3})=0 \Longleftrightarrow x_1=5 \ \vee \ x_2=-10+$
$+5\sqrt{3} \ \vee \ x_3=-10-5\sqrt{3} \Longrightarrow A=\{5,-10\pm5\sqrt{3}\}.$

17. $(E) \Longleftrightarrow (x-1)\left[(2x+3)-(3x+1)-2\right]=0$
$\Longleftrightarrow (x-1)(2x+3-3x-1-2)=0 \Longleftrightarrow (x-1)(-x)=0$
$\Longleftrightarrow x_1=0 \ \vee \ x_2=1$

18. $(E) \Longleftrightarrow (3x-2)\left[(4x-3)+(x-1)-2(x+1)\right]=0$
$\Longleftrightarrow (3x-2)(4x-3+x-1-2x-2)=0$
$\Longleftrightarrow (3x-2)(3x-6)=0 \Longrightarrow x_1=\frac{2}{3} \ \vee \ x_2=2$

19. $(E) \Longleftrightarrow (1+x)\left[2(1-x)-3-(3x-2)\right]=0 \Longleftrightarrow (1+x)(2-2x-$
$-3-3x+2)=0 \Longleftrightarrow (1+x)(-5x+1)=0 \Longrightarrow x_1=-1 \ \vee$
$x_2=5 \Longrightarrow A=\{-1,+5\}.$

20. $(E) \Longleftrightarrow (2+3x)\left[3x-(2+3x)-(2-3x)\right]=0$
$\Longleftrightarrow (2+3x)(3x-2-3x-2+3x)=0 \Longleftrightarrow (2+3x)(3x-4)=0$
$\Longleftrightarrow x_1=-\frac{2}{3} \ \vee \ x_2=\frac{4}{3} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right\}.$

21. $(E) \Longleftrightarrow (2x-1)\left[(4x+5)-(2x+1)\right]=0$
$\Longleftrightarrow (2x-1)(4x+5-2x-1)=0 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (2x-1)(2x+4)=0 \Longleftrightarrow x_1=\frac{1}{2} \ \vee \ x_2=-2$

22. $(E) \Longleftrightarrow (3x-7)\left[(x-1)-4(3x+7)\right]=0$
$\Longleftrightarrow (3x-7)(x-1-12x-28)=0$

$$\Longleftrightarrow (3x-7)(-11x-29)=0 \Longleftrightarrow x_1=\frac{7}{3} \vee x_2=-\frac{29}{11}$$

23. $(E) \Longleftrightarrow (4-3x)\left[(1-x)-(4+3x)+(6x+2)\right]=0$

$$\Longleftrightarrow (4-3x)(1-x-4-3x+6x+2)=0$$

$$\Longleftrightarrow (4-3x)(-1+2x)=0 \Longleftrightarrow x_1=\frac{4}{3} \vee x_2=\frac{1}{2}$$

24. $(E) \Longleftrightarrow (2x+1)(5x+3)\left[(2x-1)-(5x-3)\right]=0$

$$\Longleftrightarrow (2x+1)(5x+3)(-3x+2)=0 \Longleftrightarrow x_1=-\frac{1}{2} \quad \vee$$

$$x_2=-\frac{3}{5} \quad \vee x_3=\frac{2}{3}$$

25. $(E) \Longleftrightarrow (2x-1)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=0 \Longleftrightarrow \left(2x-1+\frac{1}{3}\right)\left(2x-1-\frac{1}{3}\right)=0$

$$\Longleftrightarrow \left(2x-\frac{2}{3}\right)\left(2x-\frac{4}{3}\right)=0 \Longleftrightarrow x_1=\frac{1}{3} \vee x_2=\frac{2}{3}$$

26. $(E) \Longleftrightarrow (2x-3)\left[(2x+3)(3x+2)-6\right]=0$

$$\Longleftrightarrow (2x-3)(6x^2+4x+9x+6-6)=0$$

$$\Longleftrightarrow (2x-3)(6x^2+13x)=0 \Longleftrightarrow (2x-3)x(6x+13)=0$$

$$\Longrightarrow x_1=\frac{3}{2} \vee x_2=0 \vee x_3=-\frac{13}{6}$$

27. $(E) \Longleftrightarrow 3x(4x-3)-2(4x-3)\left(x-\frac{1}{4}\right)=4x^2-x-6$

$$\Longleftrightarrow (4x-3)\left(3x-2x+\frac{1}{2}\right)=(4x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (4x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(4x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) \Longrightarrow A \equiv R.$$

28. $(E) \Longleftrightarrow \left[(3x+1)^2-(3-2x)^2\right]-2(x+4)=0$

$$\Longleftrightarrow \left[(3x+1+3-2x)(3x+1-3+2x)\right]-2(x+4)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+4)(5x-2)-2(x+4)=0 \qquad \Longleftrightarrow$$

$\iff (x+4)(5x-2-2)=0 \implies x_1=-4 \lor x_2=\frac{4}{5}$

29. $(E) \iff (3x-1)\left[(x-2)^2-9\right]=0 \iff (3x-1)(x^2+4-4x-9)=0$

$\iff (3x-1)(x^2-4x-5)=0 \iff 3x-1=0 \lor x^2-4x-5=0$

$\implies x_1=\frac{1}{3} \lor x_2=5 \lor x_3=-1.$

30. $(E) \iff \left\{\begin{array}{c} 2x(x+2)+(2x-1)(x-3)=-4x(x-2) \\ 2x(x-2)(x-3)\neq 0 \end{array}\right\}$

$\iff \left\{\begin{array}{l} 8x^2-11x+3=0 \\ x\in R-\{0,2,3\} \end{array}\right\} \implies A=\left\{1, \frac{3}{8}\right\}.$

31. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 30.

$E.K.\Pi. \equiv (x+2)(x-2)x\neq 0 \implies \mathcal{D}=R-\{0,\pm 2\}.$

32. $(E) \iff \frac{3+2x}{1+2x}-\frac{5+2x}{7+2x}=1-\frac{4x^2-2}{(1+2x)(7+2x)} \quad \Big| \ \mathcal{D}=R-\left\{-\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right\}$

$\iff \frac{(3+2x)(7+2x)-(5+2x)(1+2x)-(7+16x+4x^2-4x^2+2)}{(1+2x)(7+2x)}=0$

$\iff \frac{21+6x+14x+4x^2-5-10x-2x-4x^2-7-16x-4x^2+4x^2-2}{(1+2x)(7+2x)}=0$

$\iff \frac{-8x+7}{(1+2x)(7+2x)}=0 \iff \left\{\begin{array}{l} x=\frac{7}{8} \\ (1+2x)(7+2x)\neq 0 \end{array}\right\} \implies$

$\implies A=\left\{\frac{7}{8}\right\}.$

33. $(E) \iff \frac{14x-4}{2x+1}-\frac{3(x-1)}{(2x+1)(x-1)}-\frac{30(2x-3)}{3x-2}+\frac{26(2x+1)(x-2)}{(2x+1)(2x-1)}=$

$=\frac{-170\cdot 59^{-1}}{(2x+1)(2x-1)(3x-2)} \quad \Big| \ \mathcal{D}=R-\left\{\frac{2}{3}, \pm\frac{1}{2}, 1\right\}.$

$\iff \frac{14x-4}{2x+1}-\frac{3}{2x+1}-\frac{30(2x-3)}{3x-2}+\frac{26(x-2)}{2x-1}=\frac{-170\cdot 59^{-1}}{(2x+1)(2x-1)(3x-2)}$

$$\Longleftrightarrow (14x-7)(3x-2)(2x-1)-(60x-90)(2x+1)(2x-1)+$$
$$+(26x-52)(2x+1)(3x-2)=-170\cdot 59^{-1} \mid \mathcal{D}$$
$$\Longleftrightarrow (84x^3-56x^2-84x^2-56x+21x-14)-(240x^3-360x^2-$$
$$-60x+90)+(156x^3-312x^2-26x^2+52x+104-52x)=$$
$$=-170\cdot 59^{-1}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 118x^2-25x-170\cdot 59^{-1}=0 \quad (\mathrm{I})$$

Διακρίνουσα $=\Delta=625+4\cdot 118\cdot 170\cdot 59^{-1}=2025 \Longrightarrow$

$$118x^2-25x-170\cdot 59^{-1}=118\left[\left(x-\frac{25}{2\cdot 118}\right)^2-\left(\frac{45}{236}\right)^2\right]$$
$$=118\left(x-\frac{25}{236}+\frac{45}{236}\right)\cdot\left(x-\frac{25}{236}-\frac{45}{236}\right)=$$
$$=118\left(x+\frac{20}{236}\right)\left(x-\frac{70}{236}\right)\cdot \ (\mathrm{I}) \Longleftrightarrow 118\left(x+\frac{5}{59}\right)$$
$$\left(x-\frac{35}{118}\right)=0 \Longleftrightarrow x+\frac{5}{59}=0 \ \vee \ x-\frac{35}{118}=0$$
$$\Longleftrightarrow x_1=-\frac{5}{59} \quad \vee \quad x_2=\frac{35}{118} \Longrightarrow A=\left\{-\frac{5}{59},\ \frac{35}{118}\right\}.$$

34. Υπόδ: $(E) \Longleftrightarrow (x^2-x)\left[(2x-5)-(x+9)\right]=0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow x(x-1)(x-14)=0 \Longrightarrow x_1=0 \ \vee \ x_2=1 \ \vee \ x_3=14.$$

35. Υπόδ: $(a+b)^3-(a-b)^3=2b(3a^2+b^2) \Longrightarrow$

$$(E) \Longleftrightarrow 4(3x^2+4)=32x+16 \Longleftrightarrow 4x(3x-8)=0$$
$$\Longrightarrow x_1=0 \ \vee \ x_2=\frac{8}{3}.$$

36. Υπόδ: $(E) \Longleftrightarrow x^2-6x+2x-x^2+4x=10-9-1 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv \mathbb{R}.$$

37. (Ε) $\Longleftrightarrow \frac{3x}{4} - \frac{3(x+4)}{12} + \frac{3}{8} - \frac{5(x+3)}{12} + \frac{5(x-3)}{24} = \frac{x+6}{24} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 18x - 6(x+4) + 9 - 10(x+3) + 5(x-3) = x+6 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \ldots\ 6x = 66 \Longleftrightarrow x = 11$ (βλ. και άσκ. 7)

38. (Ε) $\Longleftrightarrow 7(x+3)(x-2) - 5(x+2)(x-1) = 2(x-3)(x+2) + 8 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 7(x^2+x-6) - 5(x^2+x-2) = 2(x^2-x-6) + 8 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 7x^2 + 7x - 42 - 5x^2 - 5x + 10 = 2x^2 - 2x - 12 + 8 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 4x = 28 \Longrightarrow x = 7.$

39. <u>Υπόδ.</u> (Ε) $\Longleftrightarrow 3[5x - (3x - 5x - 10 + 2x - 10)] - 5x - 25 =$

$= 10x + 35 \Longleftrightarrow 15x - 5x - 10x = -60 + 25 + 35 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv \mathbb{R}.$ (βλ. και άσκ. 5)

40. <u>Υπόδ.</u> (Ε) $\Longleftrightarrow (6x^2 + 7x + 5)^2 - 2[3(6x^2 + 7x + 5)] + 9 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (6x^2 + 7x + 2)^2 = 0 \Longrightarrow A = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right\}$ (διπλές).

41. <u>Υπόδ.</u> (Ε) $\xleftrightarrow{x^2 - 10x + 26 = y} y^2 - (5+6)y + 5 \cdot 6 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (y-5)(y-6) = 0 \Longleftrightarrow y - 5 = 0 \ \vee\ y - 6 = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x^2 - 10x + 26 - 5 = 0 \ \vee\ x^2 - 10x + 26 - 6 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2 - 10x + 21 = 0 \ (i) \ \vee\ x^2 - 10x + 20 = 0 \ (ii).$

$(i) \Longleftrightarrow x^2 - (7+3)x + 7 \cdot 3 = 0 \Longleftrightarrow (x-7)(x-3) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = 7 \ \vee\ x = 3$

$(ii) \Longleftrightarrow (x - 5 - \sqrt{5})(x - 5 + \sqrt{5}) = 0 \Longleftrightarrow x = 5 + \sqrt{5} \ \vee\ x = 5 - \sqrt{5}.$

Άρα: $A = \{3, 7, 5 \pm \sqrt{5}\}$

42. <u>Υπόδ.</u> (Ε) $\xleftrightarrow{2x - 1 = y} 3y^2 - 2y - 65 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3(y-5)\left(y + \frac{13}{3}\right) = 0 \Longrightarrow 2x - 1 - 5 = 0 \ \vee$

$\vee\ 3(2x-1) + 13 = 0 \Longrightarrow x_1 = 3 \ \vee\ x_2 = -\frac{5}{3}$

43. <u>Υπόδ.</u> (Ε) $\xleftrightarrow{x^2 - 7x + 13 = y} y^2 - (5+1)y + 5 \cdot 1 = 0$

$$\Longleftrightarrow (y-5)(y-1)=0 \Longrightarrow x^2-7x+13-5=0 \quad \vee$$

$$x^2-7x+13-1=0 \Longleftrightarrow x^2-7x+8=0 \ \vee \ x^2-7x+12=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{17}}{2}\right)=0 \ \vee \ (x-3)(x-4)=0$$

$$\Longrightarrow A=\left\{3,\ 4,\ \frac{7\pm\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

44. Υποδ. $(E) \Longleftrightarrow (x^2+x)^2+(6-2)(x^2+x)+6(-2)=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2+x-2)(x^2+x+6)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+2)(x-1)\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{23}{4}\right]=0$$

$$\Longrightarrow A=\{-2,\ 1\}.$$

45. $(E) \xLeftrightarrow[x^2+1=\omega]{x^2+6x+1=y} 2y^2+5y\omega+2\omega^2=0 \Longleftrightarrow (y+2\omega)\cdot$

$$\cdot(2y+\omega)=0 \Longrightarrow x^2+6x+1+2(x^2+1)=0 \ \ (i) \quad \vee$$

$$\vee \ 2(x^2+6x+1)+x^2+1=0 \ \ (ii)$$

$$(i) \Longleftrightarrow 3x^2+6x+3=0 \Longleftrightarrow x^2+2x+1=0 \Longleftrightarrow (x+1)^2=0$$

$$\Longleftrightarrow x=-1 \ (\text{διπλή})$$

$$(ii) \Longleftrightarrow 3x^2+12x+3=0 \Longleftrightarrow x^2+4x+1=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x+2+\sqrt{3})(x+2-\sqrt{3})=0 \Longleftrightarrow x=-2-\sqrt{3} \quad \vee$$

$$\vee \ x=-2+\sqrt{3} \quad \text{Άρα } A=\{-1\ (\text{διπλή}),\ -2\pm\sqrt{3}\}.$$

46. Υπόδ. $(E) \xLeftrightarrow{x^2+4x+8=y} y^2+3xy+2x^2=0.$

$$\Longleftrightarrow y^2+(2+1)xy+2\cdot 1x^2=0 \Longleftrightarrow (y+2x)(y+x)=$$

$$=0 \Longrightarrow x^2+4x+8+2x=0 \ \vee \ x^2+4x+8+x=0$$

$\Longleftrightarrow x^2+6x+8=0 \quad \vee \quad x^2+5x+8=0 \quad \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A=\{-2,-4\}$ διότι

$x^2+5x+8=(x+\frac{5}{2})^2+\frac{7}{4}>0 \quad \forall \; x\in R.$

47. $(E) \Longleftrightarrow \underbrace{(x+3)(x+6)}\;\underbrace{(x+4)(x+5)}-840=0 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x^2+9x+18)(x^2+9x+20)-840=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+9x)^2+38(x^2+9x)+360-840=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+9x)^2+38(x^2+9x)-480=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+9x)^2+(48-10)(x^2+9x)+48(-10)=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+9x+48)(x^2+9x-10)=0$

$\Longleftrightarrow x^2+9x+48=0 \;(i) \quad \vee \quad x^2+9x-10=0 \;(ii)$

Ἡ (i) ἔχει $\Delta=81-192=-111<0 \Longrightarrow A_1=\emptyset$ καί

$(ii) \Longleftrightarrow x^2+(10-1)x+10(-1)=0 \Longleftrightarrow (x+10)(x-1)=0$

$\Longleftrightarrow x+10=0 \quad \vee \quad x-1=0 \Longrightarrow A_2=\{-10,1\}.$

Ἄρα $A=\{-10,1\}.$

48. <u>Ὑπόδ.</u> Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 47

$(E) \Longleftrightarrow (x^2+9x)^2+38(x^2+9x)+360-84=0$

$\xLeftrightarrow{x^2+9x=y} \quad y^2+38y+276=0 \;\ldots$

49. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \underbrace{(x-5)(x+8)}\;\underbrace{(x+14)(x-11)}-2992=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+3x-40)(x^2+3x-154)-2992=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+3x)^2-194(x^2+3x)+3168=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2+3x)^2-(176+18)(x^2+3x)+176\cdot 18=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+3x-176)(x^2+3x-18)=0 \Longleftrightarrow x^2+3x-176=0$$

$$\vee\ x^2+3x-18=0\ \ldots$$

50. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \underbrace{(x-5)(x+4)}\ \underbrace{(x-7)(x+6)}-504=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2-x-20)(x^2-x-42)-504=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-x)^2-62(x^2-x)+336=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-x)^2-(56+6)(x^2-x)+56\cdot 6=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-x-56)(x^2-x-6)=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2-x-56=0\ \vee\ x^2-x-6=0 \Longrightarrow A=\{-7,8,-2,3\}$$

51. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \underbrace{x(x+3)}\ \underbrace{(x+1)(x+2)}+1=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+3x)^2+2(x^2+3x)+1=0 \Longleftrightarrow (x^2+3x+1)^2=$$

$$=0 \Longleftrightarrow x^2+3x+1=0 \Longrightarrow A=\left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\ \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}$$

(διπλές)

52. Υπόδ. (1) $(E) \Longleftrightarrow (x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1-25=0$

$$\xLeftrightarrow{\text{κατά τήν 51}} (x^2+5x+5)^2-5^2=0 \Longleftrightarrow (x^2+5x+5+5)\cdot$$

$$(x^2+5x+5-5)=0 \Longleftrightarrow (x^2+5x+10)(x^2+5x)=0\ (\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow x=0\ \vee\ x+5=0\ \vee\ x^2+5x+10=0\ \ldots$$

(2). Εἰς τήν (ε) καταλήγομεν καί ἀπ' εὐθείας, ἄνευ προσθαφαιρέσεως τῆς μονάδος.

53. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow (x+1)(x+7)(x+3)(x+5)+15=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+8x)^2+22(x^2+8x)+120=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2+8x+10)(x^2+8x+12)=0$$

$$\Longleftrightarrow x^2+8x+10=0 \ \vee \ x^2+8x+12=0 \ldots$$

54. Ὑπόδ.(E) $\Longleftrightarrow (x-1)(x-6)(x-3)(x-4)+10=0$

$$\Longleftrightarrow (x^2-7x+6)(x^2-7x+12)+10=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-7x)^2+18(x^2-7x)+82=0$$

$$\Longleftrightarrow (x^2-7x+9)^2+1=0 \Longrightarrow A\equiv\emptyset.$$

55. Ὑπόδ.(E) $\Longleftrightarrow (x+2)(x+12)(x+3)(x+8)=4x^2$

$$\Longleftrightarrow (x^2+14x+24)(x^2+11x+24)=4x^2$$

Εἰς τάς δύο νέας παρενθέσεις ἔχομεν (ὡς καί εἰς τάς προηγουμένας περιπτώσεις) δύο ὅρους ὁμοίους. Τότε, ἔχομεν τήν δυνατότητα νά ἀκολουθήσωμεν τήν διαδικασίαν ἐπιλύσεως τῶν ἀσκήσεων 47...54, εἴτε νά θέσωμεν ὡς βοηθητικόν ἄγνωστον τό ἡμιάθροισμα τῶν δύο παρενθέσεων. Ὁ βαθμός τῆς ἐξισώσεως ἔχει ὑποβιβασθῆ καί συνεπῶς ἡ λύσις της διευκολύνεται.
Ἐφαρμόζομεν τά ἀνωτέρω εἰς τήν δοθεῖσαν:
$$(x^2+14x+24)\cdot(x^2+11x+24)=4x^2.$$

Ἡ βοηθητική ἀντικατάστασις εἶναι:
$$y=\frac{x^2+14x+24+x^2+11x+24}{2}=x^2+24+\frac{25x}{2}.$$

Ἡ ἐξίσωσις γίνεται: $\left(y+\frac{3x}{2}\right)\left(y-\frac{3x}{2}\right)=4x^2 \Longleftrightarrow y^2-\frac{9x^2}{4}=4x^2$

$\Longleftrightarrow y^2=\frac{25}{4}x^2 \Longleftrightarrow y=\pm\frac{5}{2}x.$ Ἄρα ἔχομεν τάς ἑξῆς

δύο ἐξισώσεις: 1) $x^2+24+\frac{25x}{2}=\frac{5x}{2}$ καί $x^2+24+\frac{25x}{2}=-\frac{5x}{2}$

$\Longrightarrow x_1=-6,\ x_2=-4,\ x_3=\dfrac{-15+\sqrt{129}}{2},\ x_4=\dfrac{-15-\sqrt{129}}{2}$

56. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow (2x^2-3x-2)(2x^2-3x)-63=0$

$\Longleftrightarrow (2x^2-3x)^2-2(2x^2-3x)-63=0$

$\xLeftrightarrow{2x^2-3x=y} y^2-2y+1-64=0$

$\Longleftrightarrow (y-1)^2-8^2=0 \Longleftrightarrow (y-9)(y+7)=0$

$\Longleftrightarrow 2x^2-3x-9=0 \vee 2x^2-3x+7=0\ldots$

57. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow (x^2-5)(x^2+2)(x^2-2)(x^2-1)+36=0$

$\Longleftrightarrow (x^4-3x^2-10)(x^4-3x^2+2)+36=0$

$\Longleftrightarrow (x^4-3x^2)^2-8(x^4-3x^2)-20+36=0$

$\Longleftrightarrow (x^4-3x^2)^2-8(x^4-3x^2)+16=0 \Longleftrightarrow (x^4-3x^2-4)^2=0$

$\Longleftrightarrow x^4-3x^2-4=0 \Longleftrightarrow x^4+(1-4)x^2+1(-4)=0$

$\Longleftrightarrow (x^2+1)(x^2-4)=0 \Longleftrightarrow x^2-4=0$ διότι $x^2+1>0$

$\forall x\in R$. Ἄρα, $A=\{\pm 2$ (διπλές) $\}$.

58. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow (x+1)(x+11)(x+2)(x+10)(x+3)(x+9)(x+6)^2=$

$=-5040 \Longleftrightarrow (x^2+12x+11)(x^2+12x+20)(x^2+12x+27)(x^2+$

$+12x+36)=-5040 \xLeftrightarrow{x^2+12x+11=y} y(y+9)(y+16)(y+25)+$

$+5040=0 \Longleftrightarrow (y^2+25y)(y^2+25y+144)+5040=0$

$\Longleftrightarrow (y^2+25y)^2+144(y^2+25y)+5040=0$

$\xLeftrightarrow{y^2+25y=\omega} \omega^2+(84+60)\omega+84\cdot 60=0 \Longleftrightarrow (\omega+84)(\omega+$

$+60)=0 \Longrightarrow y^2+25y+84=0 \vee y^2+25y+60=0$

$\Longleftrightarrow (y+21)(y+4)=0 \vee \left(y+\dfrac{25+\sqrt{385}}{2}\right)\left(y+\dfrac{25-\sqrt{385}}{2}\right)=0$

$\Longrightarrow x^2+12x+33=0 \ \vee \ x^2+12x+15=0 \ \vee \ x^2+12x+11+$

$+\frac{25+\sqrt{385}}{2}=0 \ \vee \ x^2+12x+11+\frac{25-\sqrt{385}}{2}=0 \ \ldots$

59. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow(x^2+5x+6)(x^2+5x-6)+x^2+5x-6=0$

$\xLeftrightarrow{x^2+5x=y} (y+6)(y-6)+y-6=0 \Longleftrightarrow (y-6)(y+7)=0$

$\Longrightarrow x^2+5x-6=0 \ \vee \ x^2+5x+7=0 \Longleftrightarrow (x+6)(x-1)=0$ διότι

$x^2+5x+7=\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0 \ \ \forall x\in R \Longrightarrow A=\{-6,1\}$.

60. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow\left[(x-1)(2x^2-3x-3)\right]\left[(x-1)(x^2+3x+3)\right]\cdot\left[(x-1)(x^2+\right.$

$\left.+2x+2)\right]=0 \Longleftrightarrow (x-1)^3(2x^2-3x-3)(x^2+3x+3)(x^2+2x+2)=0$

$\Longleftrightarrow x=1$ (τριπλῆ) $\vee \ 2x^2-3x-3=0$ διότι: x^2+3x+

$+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \ \forall x\in R$ καί $x^2+2x+2=(x+1)^2+$

$+1>0, \ \forall \ x\in R \ \ldots$

61. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow x^4+2x^2+1-2x^2-4x-2=0 \Longleftrightarrow (x^2+1)^2-$

$-\left[\sqrt{2}(x+1)\right]^2=0 \Longleftrightarrow \left[x^2+1+\sqrt{2}(x+1)\right]\left[x^2+1-\sqrt{2}(x+1)\right]=0\ldots$

62. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow x(x^2-3x+2)=504 \Longleftrightarrow x(x-1)(x-2)=9.8.7$

$\Longrightarrow x_1=9$. Συνεπῶς τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης διαιρεῖται διά $x-9$. Ἔχομεν:

1	-3	2	-504	9
	9	54	504	
1	6	56	0	

$\Longrightarrow$

$\Longrightarrow (E)\Longleftrightarrow (x-9)(x^2+6x+56)=0 \Longleftrightarrow x=9$, διότι x^2+6x+
$+56=(x+3)^2+47>0, \ \forall \ x\in R$.

63. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow x^4+x^3-6x^2-25x^2-25x+150=0 \Longleftrightarrow x^2(x^2+$
$+x-6)-25(x^2+x-6)=0 \Longleftrightarrow (x^2+x-6)(x^2-25)=0 \Longleftrightarrow x^2+x-6=0 \ \vee$

$(x-5)(x+5)=0 \Longrightarrow A=\{-3,\ 2,\ \pm 5\}$
(Βλέπε καί παράδειγμα 8 (Ε1)).

64. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow x^4-6x^3-4x^3+24x^2+6x^2+2x^2-24x-12x+$

$+12=0 \Longleftrightarrow x^2(x^2-6x+6)-4x(x^2-6x+6)+2(x^2-6x+6)=$

$=0 \Longleftrightarrow (x^2-6x+6)(x^2-4x+2)=0 \Longleftrightarrow x^2-6x+6=0 \ \vee$

$x^2-4x+2=0 \Longrightarrow A=\{3\pm\sqrt{3},\ 2\pm\sqrt{2}\}.$

65. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (x^4-10x^3+25x^2)+(10x^2-50x)+24=0 \Longleftrightarrow$

$(x^2-5x)^2+10(x^2-5x)+24=0 \Longleftrightarrow (x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=0$

$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)=0 \Longleftrightarrow A=\{1,2,3,4\}.$

66. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $x+1=y \Longleftrightarrow x=y-1$ καί ἔχομεν:

			y^4	y^3	y^2	y^1	y^0	Συντελεσταί
$(y-1)^4$	=	1	25 -4	-100 6	150 -4	-100 1	25	25
$(y-1)^3$	=		1	30 -3	-90 3	90 -1	-30	30
$(y-1)^2$	=			1	-11 -2	22 1	-11	-11
$(y-1)^1$	=				1	-12 -1	12	-12
$(y-1)^0$	=					1	4	4
Α' μέλος (Ε)			25	-70	49	0	0	

Συνεπῶς εἶναι $(E) \xLeftrightarrow{y=x+1} 25y^4-70y^3+49y^2=0 \Longleftrightarrow$

$y^2(25y^2-70y+49)=0 \Longleftrightarrow y^2(5y-7)^2=0 \qquad \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow (x+1)^2(5x+5-7)^2=0 \Longleftrightarrow (x+1)^2(5x-2)^2=0$

$\Longrightarrow A=\left\{-1,\ \frac{2}{5}\right\}$ (διπλές).

67. <u>Ὑπόδ.</u> (I) $(E) \Longleftrightarrow 3x^4+12x^3+10x^3+21x^2+40x^2+24x+$

$+50x+15+20=0 \Longleftrightarrow 3(x^4+4x^3+7x^2+8x+5)+10(x^3+4x^2+$

$+5x+2)=0 \Longleftrightarrow 3\left[(x^2+2x+1)^2+(x+2)^2\right]+10(x+1)^2(x+2)=0$

$\xLeftrightarrow{x+2\neq 0} 3\left[\frac{(x+1)^4}{(x+2)^2}+1\right]+10\,\frac{(x+1)^2}{x+2}=0$

$\xLeftrightarrow{\frac{(x+1)^2}{x+2}=y} 3(y^2+1)+10y=0 \Longleftrightarrow 3y^2+10y+3=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y=-3 \vee y=-\frac{1}{3} \Longrightarrow x^2+5x+7=0 \vee 3x^2+7x+5=0 \ldots$

$(2)(E) \Longleftrightarrow 3x^4+7x^3+15x^3+5x^2+35x^2+21x^2+25x+49x+35=0$

$\Longleftrightarrow (3x^4+7x^3+5x^2)+(15x^3+35x^2+25x)+(21x^2+49x+35)=0$

$\Longleftrightarrow x^2(3x^2+7x+5)+5x(3x^2+7x+5)+7(3x^2+7x+5)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (3x^2+7x+5)(x^2+5x+7)=0 \ldots$

68. $(E) \Longleftrightarrow \underline{27x^4}+\underline{45x^3}+9x^3+\underline{15x^2}-\underline{12x}-4=0$

$\Longleftrightarrow 3x(9x^3-4)+15x^2(3x+1)+9x^3-4=0 \Longleftrightarrow (9x^3-4)\cdot$

$\cdot(3x+1)+15x^2(3x+1)=0 \Longleftrightarrow (3x+1)(9x^3+15x^2-4)=0$

$\Longleftrightarrow 3x+1=0 \ (i) \ \vee \ 9x^3+15x^2-4=0 \ (ii)\cdot$

$(i) \Longleftrightarrow x_1=-\frac{1}{3}$ καί $(ii) \Longleftrightarrow \underline{9x^3+9x^2}+6x^2-\underline{6x}+6x-4=0$

$\Longleftrightarrow 3x(3x^2+3x-2)+2(3x^2+3x-2)=0 \Longleftrightarrow x_2=-\frac{2}{3} \vee$

$\vee \ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{6}.$

69. Ἔστω $\varphi(x) \equiv x^4+x^3-56x^2-36x+720$. Διά τόν διαιρέτην 4 τοῦ σταθεροῦ ὅρου 720 ἔχομεν:

$\varphi(4)=4^4+4^3-56\cdot 4^2-36\cdot 4+720=0$. Συνεπῶς τό πρῶτο μέλος τῆς δοθείσης διαιρεῖται διά $x-4$

καί δίδει πηλίκον $x^3+5x^2-36x-180 \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow (x-4)(x^3+5x^2-36x-180)=0 \Longleftrightarrow x-4=0$

$\vee\ x^3+5x^2-36x-180=0$. (I) Ἡ (I) μηδενίζεται διά

$x=-5$ ἄρα διαιρεῖται διά $x+5$ καί δίδει πηλίκον

x^2-36. $(I) \Longleftrightarrow (x+5)(x^2-36)=0 \Longleftrightarrow x+5=0\ \vee$

$\vee\ x^2-36=0 \Longleftrightarrow x=-5 \vee x=\pm 6 \Longrightarrow x_1=4,\ x_2=-5,$

$x_3=6,\ x_4=-6 \Longrightarrow A=\{-6,-5,4,6\}$.

70. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^4-6x^3-3x^3-4x^2+18x^2+13x^2+$

$+24x-39x-52=0$

$\Longleftrightarrow x^2(x^2-3x-4)-6x(x^2-3x-4)+13(x^2-3x-4)=0$

$\Longleftrightarrow (x^2-3x-4)(x^2-6x+13)=0 \Longrightarrow A=\{-1,4\}$.

71. Ὑπόδ. ἔχομεν

$x^6-6x^4+2x^3+10x^2-6x+1 = x^6+(3x)^2+1+2x^3(-3x)$

$+2x^3+2(-3x)+x^2=(x^3-3x+1)^2+x^2$. Συνεπῶς

$(E) \Longleftrightarrow (x^3-3x+1)^2+x^2-4x\,ημ10°+4\,ημ^2 10°=0$

$\Longleftrightarrow (x^3-3x+1)^2+(x-2\,ημ10°)^2=0$

$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x^3-3x+1=0 \\ x-2\,ημ.10°=0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x^3-3x+1=0 \\ x=2ημ.10° \end{Bmatrix} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A=\{2\,ημ.10°\}$ ἐάν καί μόνον ἐάν

$(2ημ10°)^3-3(2ημ10°)+1=0 \Longleftrightarrow 8ημ^3 10°-6ημ10°+$

$+1=0 \Longleftrightarrow 2(4ημ.^3 10°-3ημ.10°)+1=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2(-\eta\mu 3\cdot 10^\circ)+1=0 \Longleftrightarrow -2\eta\mu 30^\circ+1=0 \quad \Longleftrightarrow$

$-2\,\frac{1}{2}+1=0 \Longleftrightarrow -1+1=0$ ἀληθής.

72. $(E) \Longleftrightarrow x^2+2(a-b)x-3a^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow x^2+2(a-b)x+(a-b)^2-(a-b)^2-3a^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow (x+a-b)^2-a^2+2ab-b^2-3a^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow (x+a-b)^2-(4a^2-4ab+b^2)=0$

$\Longleftrightarrow (x+a-b)^2-(2a-b)^2=0 \Longleftrightarrow (x+a-b+2a-b)$

$(x+a-b-2a+b)=0 \Longleftrightarrow x+3a-2b=0 \vee x-a=0$

$\Longleftrightarrow x=2b-3a \vee x=a.$

73. $(E) \Longleftrightarrow x^2-4ax+3a^2-b^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow x^2-4ax+(2a)^2-(2a)^2+3a^2-b^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow (x-2a)^2-(a^2+b^2-2ab)=0$

$\Longleftrightarrow (x-2a)^2-(a-b)^2=0 \Longleftrightarrow (x-2a+a-b)$

$(x-2a-a+b)=0 \Longleftrightarrow x-a-b=0 \vee x-3a+b=0$

$\Longleftrightarrow x=a+b \vee x=3a-b$

74. $(E) \Longleftrightarrow x^2-2\gamma x-a^2-b^2+\gamma^2+2ab=0$

$\Longleftrightarrow x^2-2\gamma x+\gamma^2-(a^2+b^2-2ab)=0$

$\Longleftrightarrow (x-\gamma)^2-(a-b)^2=0 \Longleftrightarrow (x-\gamma+a-b)(x-\gamma-a+b)=0$

$\Longleftrightarrow x=-a+b+\gamma \vee x=a-b+\gamma.$

75. $(E) \Longleftrightarrow x^2+2ax+a^2-(a^4+2a^2+1)=0$

$\Longleftrightarrow (x+a)^2-(a^2+1)^2=0 \Longleftrightarrow (x+a+a^2+1)(x+a-a^2-1)=0$

$\Longleftrightarrow x=-(a^2+a+1) \vee x=a^2-a+1.$

76. $(E) \Longleftrightarrow a^2+(\lambda+x)a-2x^2+5\lambda x-2\lambda^2=0$

$\Longleftrightarrow a^2+2\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)a+\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)^2-\left(\frac{\lambda+x}{2}\right)^2-2x^2+5\lambda x-2\lambda^2=0$

$\Longleftrightarrow \left(a+\frac{\lambda+x}{2}\right)^2-\frac{\lambda^2+2\lambda x+x^2}{4}-2x^2+5\lambda x-2\lambda^2=0$

$\Longleftrightarrow \left(a+\frac{\lambda+x}{2}\right)^2+\frac{\lambda^2+2\lambda x+x^2+8x^2-20\lambda x+8\lambda^2}{4}=0$

$\Longleftrightarrow \left(a+\frac{\lambda+x}{2}\right)^2-\frac{9\lambda^2-18\lambda x+9x^2}{4}=0$

$\Longleftrightarrow \left(a+\frac{\lambda+x}{2}\right)^2-\left(\frac{3\lambda-3x}{2}\right)^2=0$

$\Longleftrightarrow \left(a+\frac{\lambda+x}{2}+\frac{3\lambda-3x}{2}\right)\left(a+\frac{\lambda+x}{2}-\frac{3\lambda-3x}{2}\right)=0$

$\Longleftrightarrow (a+2\lambda-x)(a-\lambda+2x)=0 \Longleftrightarrow x=a+2\lambda \vee$

$\vee \ x=\frac{\lambda-a}{2}$

77. $(E) \Longleftrightarrow x^2-2(a+b)x-3a^2-3b^2+10ab=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2-2(a+b)x+(a+b)^2-(a+b)^2-3a^2-3b^2+10ab=$

$=0 \Longleftrightarrow (x-a-b)^2-4a^2-4b^2+8ab=0 \Longleftrightarrow (x-a-b)^2-$

$-(2a-2b)^2=0 \Longleftrightarrow (x-a-b+2a-2b)(x-a-b-2a+2b)=$

$=0 \Longleftrightarrow x+a-3b=0 \vee x-3a+b=0 \Longleftrightarrow x=3b-a \vee$

$\vee \ x=3a-b.$

78. $(E) \Longleftrightarrow 2x^2-(7a+5)x-22a^2+35a-3=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 2\left[x^2-\left(\frac{7a+5}{2}\right)x-11a^2+\frac{35a}{2}-\frac{3}{2}\right]=0$

$$\Longleftrightarrow x^2-2\left(\frac{7a+5}{4}\right)x+\left(\frac{7a+5}{4}\right)^2-\left(\frac{7a+5}{4}\right)^2-11a^2+$$

$$+\frac{35a}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{7a+5}{4}\right)^2-\frac{49a^2+70a+25}{16}-11a^2+\frac{35a}{2}-\frac{3}{2}=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{7a+5}{4}\right)^2-\frac{49a^2+70a+25+176a^2-280a+24}{16}=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{7a+5}{4}\right)^2-\frac{225a^2-210a+49}{16}=0$$

$$\Longleftrightarrow \left(x-\frac{7a+5}{4}\right)-\left(\frac{15a-7}{4}\right)^2=0 \Longleftrightarrow \left(x-\frac{7a+5}{4}+\right.$$

$$\left.+\frac{15a-7}{4}\right)\left(x-\frac{7a+5}{4}-\frac{15a-7}{4}\right)=0 \Longleftrightarrow x+2a-3=0$$

$$\vee\ x-\frac{11a-1}{2}=0 \Longleftrightarrow x=3-2a \ \vee\ x=\frac{11a-1}{2}.$$

79. $(E) \Leftrightarrow x^3+2^3+2^3-3\cdot2\cdot2\cdot x=0 \xLeftrightarrow{\text{Euler}} (x+2+2)\cdot$

$\cdot(x^2+2^2+2^2-2x-2x-2\cdot2)=0 \Longleftrightarrow (x+4)(x^2-4x+4)=0$

$\Longleftrightarrow x+4=0 \ \vee\ (x-2)^2=0 \Longrightarrow A=\{-4,\ 2\ (\text{διπλῆ})\}$

80. Ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 63 ἐφαρμόσατε τὴν ταυτότητα τοῦ Euler εἰς τὴν $(E) \Longleftrightarrow x^3+3^3+5^3-3\cdot3\cdot5\cdot$ $\cdot x=0 \ldots$

81. Ὁμοίως εἰς τὴν

$$(E) \Longleftrightarrow x^3+(\pm3)^3+(\mp1)^3-3(\pm3)(\mp1)x=0$$

82. Ὁμοίως εἰς τήν

$$(E) \Longleftrightarrow x^3+(\pm 5)^3+(\mp 1)^3-3(\pm 5)(\mp 1)x=0$$

83. Ἐπειδή $3(x+1)-2(x+3)+2(x+3)-x+5+x-5-3(x+1)=0$

$\xRightarrow{\text{Euler ὑπό συνθήκας}} (E) \Longleftrightarrow 3\left[3(x+1)-2(x+3)\right]\cdot$

$\left[2(x+3)-x+5\right]\left[x-5-3(x+1)\right]=0 \Longleftrightarrow (x-3)(x+11)(x+4)=0$

$$\Longrightarrow A=\{-11,-4,3\}$$

84. Ἐργαζόμεθα ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 83.

85. Ὑπόδ. Σύμφωνα μέ τήν ταυτότητα

$$(a+b)^3-a^3-b^3=3ab(a+b)$$

Ἔχομεν:

$(E) \Longleftrightarrow 3(x^2+1)x(x^2+x+1)3(x^2+1)(-x)(x^2-x+1)=$

$=3(x^4+1)x^2(x^4+x^2+1) \Longleftrightarrow x=0$ (διπλῆ) $\vee -3(x^2+1)^2$

$(x^4+x^2+1)=(x^4+1)(x^4+x^2+1) \Longleftrightarrow (4x^4+3x^2+4)(x^4+$

$+x^2+1)=0$ (i) $\Longrightarrow A=\{0$ (διπλῆ)$\}$ διότι ἡ (i) εἶναι

ἀδύνατος ἐν R.

86. Ὑπόδ. $x^2+2x-48=(x+8)(x-6)$, $x^2+9x+8=(x+8)(x+1)$

$x^2+10x=x(x+10)$, $x^2+5x-50=(x+10)(x-5)$.

Συνεπῶς Ε.Κ.Π. $=(x+8)(x-6)(x+1)x(x+10)(x-5)\neq 0$

$\Longrightarrow \mathcal{D}\equiv R-\{-10,-8,-1,0,5,6\}$ καί

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{40(x+1)-20(x-6)}{(x+8)(x-6)(x+1)}+\frac{8(x-5)-12x}{x(x+10)(x-5)}=-1 \;\Big|\; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{20x+160}{(x+8)(x-6)(x+1)} + \frac{-4x-40}{x(x+10)(x-5)} = -1 \;\Big|\; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{20(x+8)}{(x+8)(x-6)(x+1)} - \frac{4(x+10)}{x(x+10)(x-5)} = -1 \;\Big|\; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{20}{(x-6)(x+1)} - \frac{4}{x(x-5)} = -1 \;\Big|\; \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow 20(x^2-5x)-4(x^2-5x-6)+(x^2-5x-6)(x^2-5x)=0$$

$$\xLeftrightarrow{x^2-5x=y} 20y-4(y-6)+(y-6)y=0$$

$$\Longleftrightarrow y^2+10y+24=0 \Longleftrightarrow (y+4)(y+6)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x^2-5x+4=0 \;\vee\; x^2-5x+6=0 \Longrightarrow A=\{1,2,3,4\}.$$

87. <u>Ὑπόδ.</u> $x^2+x=x(x+1)$, $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)$

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, $x^2+3x=x(x+3)$

Συνεπῶς $E.K.\Pi. = x(x+1)(x+2)(x+3)(x-5) \neq 0$

$\Longrightarrow \mathcal{D} \equiv R-\{-3,-2,-1,0;5\}$ καί

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{(x+2)(x+3)+x(x+3)+x(x+1)-2(x+1)(x+2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-5)} \;\Big|\; \mathcal{D} \Longleftrightarrow \frac{x^2+3x+2}{x(x^2+3x+2)(x+3)} =$$

$$= \frac{1}{x(x-5)} \;\Big|\; \mathcal{D} \Longleftrightarrow \frac{1}{x(x+3)} = \frac{1}{x(x-5)} \;\Big|\; \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow x(x+3)=x(x-5) \Longleftrightarrow x(x+3)-x(x-5)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(x+3-x+5)=0 \Longleftrightarrow 8x=0 \Longleftrightarrow x=0.$$ Ἀλλά

ὁ ἀριθμός 0 δέν ἀνήκει εἰς τό $\mathcal{D} \Longrightarrow A \equiv \emptyset$

88. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $\frac{x+1}{x-1}=y$ καί ἔχομεν·

$$(E)\Longleftrightarrow \frac{y-\frac{1}{y}}{1-y}=\frac{1}{2} \quad \Big| \ \mathcal{D}\equiv R-\{0,1\}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y^2-1}{y(1-y)}=\frac{1}{2}\Longleftrightarrow \frac{y+1}{y}=-\frac{1}{2}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{y+1-y}{y}=\frac{-1-2}{2}\Longleftrightarrow \frac{1}{y}=-\frac{3}{2}\Longrightarrow \frac{x-1}{x+1}=$$

$$=-\frac{3}{2}\xLeftrightarrow{x\neq -1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{3}{2}\Longleftrightarrow \frac{1-x+1+x}{1-x-1-x}=\frac{3+2}{3-2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2}{-2x}=5\Longleftrightarrow x=-\frac{1}{5}$$

89. <u>Ὑπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow \frac{1}{x}-\frac{1-x}{x(x+1)}+\frac{x+1}{x(x-1)}=-\frac{3}{2x} \quad \Big| \ \mathcal{D}\equiv R-\{0,\pm 1\}$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x-1)^2+(x+1)^2}{x(x+1)(x-1)}=-\frac{5}{2x}\Longleftrightarrow 4x(x^2+1)+5x(x^2-1)=0$$

$$\Longleftrightarrow x=0 \ \vee \ 9x^2-1=0\Longleftrightarrow x=0 \ \vee \ 3x+1=0 \ \vee$$

$$\vee \ 3x-1=0 \Longrightarrow A=\left\{\pm\frac{1}{3}\right\} \text{ διότι } 0\notin\mathcal{D}.$$

90. $(E)\Leftrightarrow \frac{(1+x)^2}{1+\frac{x(1+x+x^2)}{1+x-x^3}}=x+2\Longleftrightarrow \frac{(1+x)^2}{\frac{(1+x)^2}{-x^3+x+1}}=$

$$=x+2 \xLeftrightarrow{x+1\neq 0} -x^3+x+1=x+2\Longleftrightarrow x^3+1=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+1)(x^2-x+1)=0\Longleftrightarrow x+1=0 \ \vee \ x^2-x+1=0$$

$$\Longrightarrow A\equiv\emptyset$$

91. <u>Ὑπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow \frac{4x}{1-x^2}\cdot\frac{3(1-x^2)}{4x}=\frac{3}{4}\cdot\frac{8x^2-25x+18}{2x^2-7x+18} \ \Big|$

$$\left| \; \mathcal{D} \equiv R - \{0, \pm 1, 3\} \right.$$

$$\Longleftrightarrow 8x^2 - 28x + 72 = 8x^2 - 25x - 18 \Longleftrightarrow 3x = 54$$

$$\Longrightarrow A = \{18\}.$$

92. <u>Υποδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} \cdot \dfrac{\dfrac{2x+1}{x(x+1)}}{\dfrac{2x+1}{x+1}} = 5 \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv$

$\equiv R - \left\{0, \pm 1, -\dfrac{1}{2}\right\} \Longleftrightarrow (x+1)\dfrac{1}{x} = 5 \Longleftrightarrow x + 1 = 5x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{4}$

93. <u>Υπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{\dfrac{-4x}{1-x^2}}{\dfrac{-2x}{1-x}} = \dfrac{3}{14 - x} \;\Big|\; \mathcal{D} = R - \{0, \pm 1, 14\}$

$\Longleftrightarrow 2(14 - x) = 3(1 + x) \Longleftrightarrow 5x = 25 \Longleftrightarrow x = 5$

94. <u>Υπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{x}{x-2} - 1 + \dfrac{x-9}{x-7} - 1 = \dfrac{x+1}{x-1} - 1 + \dfrac{x-8}{x-6} - 1$

$\xLeftrightarrow{\mathcal{D} \equiv R - \{1, 2, 6, 7\}} \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{2}{x-7} = \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{x-6} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dfrac{-5}{(x-2)(x-7)} = \dfrac{-5}{(x-1)(x-6)} \Longleftrightarrow x^2 - 9x + 14 =$

$= x^2 - 7x + 6 \Longleftrightarrow x = 4$

95. <u>Υπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} + \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = 0 \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R - \{\pm 1\}$

$\Longleftrightarrow x^2 + x + 1 + x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x(x + 2) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = -2.$

96. <u>Υπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{2 + 3x - 2(1 + 2x)}{(1 + 2x)(2 + 3x)} + \dfrac{3(4 + 5x) - 4(3 + 4x)}{(3 + 4x)(4 + 5x)} =$

$$= 0 \quad \Big| \; \mathcal{D} \equiv R - \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5} \right\} \iff$$

$$\iff -x\left(\frac{1}{2+7x+6x^2} + \frac{1}{12+31x+20x^2} \right) = 0$$

$$\iff x=0 \;\vee\; 13x^2+19x+7=0 \;\ldots$$

97. <u>Ὑπόδ.</u> (1) Προφανῶς οἱ ἀριθμοί $x=3$ καί $x=-4$ εἶναι ρίζαι τῆς δοθείσης. (διατί;)

Ἐξ ἄλλου ὁ συντελεστής τοῦ x^3 εἶναι μηδέν δηλαδή ἡ δοθεῖσα εἶναι δευτέρου βαθμοῦ.

Συνεπῶς $A = \{-4, 3\}$

(2)(i) Ἐάν $x \neq -4$

$$(E) \iff \frac{\left(\frac{3-x}{4+x}\right)^3 + 1}{\left(\frac{3-x}{4+x}\right)^2 + 1} = \frac{7}{4+x} \quad (\varepsilon)$$

Θέτομεν $\dfrac{3-x}{4+x} = y \implies \dfrac{7}{4+x} = y+1$ ὅτε

$$(\varepsilon) \iff \frac{y^3+1}{y^2+1} = y+1 \iff (y+1)(y^2-y+1) = (y+1)(y^2+1)$$

$$\iff y+1=0 \;\vee\; y^2-y+1-y^2-1=0 \iff y=-1 \vee y=0$$

Διά $y=-1 \implies \dfrac{3-x}{4+x} = -1 \iff 7 = 0\cdot x$ (ἀδύνατος).

Διά $y=0 \implies 3-x=0 \iff x=3$

(ii) Ἐάν $x=-4 \implies (E) \iff \dfrac{7^3}{7^2} = 7$ (ἀληθής).

Συνεπῶς $A = \{-4, 3\}$.

98. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \iff \dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{2x}{x^2-4} = 0 \quad \Big| \; \mathcal{D} \equiv R - \{\pm 1, \pm 2\}$

$$\Longleftrightarrow \; x=0 \;\lor\; \frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-4}=0 \Longleftrightarrow x=0 \;\lor\; 2x^2-5=0$$

$$\Longrightarrow A=\left\{0, \pm\sqrt{\frac{5}{2}}\right\}.$$

99. <u>῾Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{-7}{8-x}+\frac{10}{6-x}+\frac{-3}{4-x}=0 \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\{4,6,8\}$

$$\Longleftrightarrow \frac{7}{6-x}-\frac{7}{8-x}+\frac{3}{6-x}-\frac{3}{4-x}=0 \Longleftrightarrow \frac{14}{(6-x)(8-x)}=$$

$$=\frac{6}{(6-x)(4-x)} \Longleftrightarrow 7(4-x)=3(8-x) \Longleftrightarrow x=1.$$

100. <u>῾Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{x^2-7x+10+x^2-7x+12}{x^2-7x+10-(x^2-7x+12)}=$

$$=\frac{x^2+3x-10+x^2+3x-8}{x^2+3x-10-(x^2+3x-8)} \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\left\{3,4,\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x^2-7x+11=x^2+3x-9 \Longleftrightarrow 10x=20 \Longleftrightarrow x=2.$$

101. <u>῾Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{x^2-x-9+x^2-x-12}{x^2-x-9-(x^2-x-12)}=$

$$=\frac{x^2-x-3+x^2-x-4}{x^2-x-3-(x^2-x-4)} \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\left\{-3,4,\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2-2x-21=6x^2-6x-21 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4x^2-4x=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x(x-1)=0 \Longleftrightarrow x=0 \;\lor\; x=1$$

102. <u>῾Υπόδ.</u> ᾿Εργαζόμεθα ὡς εἰς τάς ἀσκήσεις 88 - 89.

103. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-4x+5}{x^2+6x+10} = \dfrac{x^2-4x+4}{x^2+6x+9} \quad \Big| \; \mathcal{D} \equiv R - \{-3\}$

Ἕκαστον τῶν μελῶν τῆς (E) ἰσοῦται τότε μέ

$\dfrac{x^2-4x+5-(x^2-4x+4)}{x^2+6x+10-(x^2+6x+9)} = \dfrac{1}{1} = 1.$ Συνεπῶς

$\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^2 = 1 \Longleftrightarrow x-2 = \pm(x+3) \Longleftrightarrow x = -\dfrac{5}{2}.$

104. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{x^2-x-2-(x^2-x-12)}{x^2-x-12} = \dfrac{x^2-x-3-(x^2-x-13)}{x^2-x-13}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{10}{x^2-x-12} = \dfrac{10}{x^2-x-13} \Longrightarrow A \equiv \emptyset.$

105. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $\dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1} = y$ καί ἔχομεν $\forall x \neq -2 \pm \sqrt{3}$

$(E) \Longleftrightarrow y + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{2} \Longleftrightarrow 2y^2-5y+2=0 \quad | \; y \neq 0$

$\Longleftrightarrow 2(y-2)\left(y-\dfrac{1}{2}\right) = 0 \Longrightarrow \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1} = 2 \quad (i)$

$\vee \quad \dfrac{x^2+2}{x^2+4x+1} = \dfrac{1}{2} \quad (ii)$

$(i) \Longleftrightarrow x(x+8) = 0 \Longleftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = -8$

$(ii) \Longleftrightarrow x^2-4x+1=0 \Longleftrightarrow x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}.$

106. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $x^2+7x = y$ καί ἔχομεν

$(E) \Longleftrightarrow (y+5)^2 - 3y = 19 \Longleftrightarrow y^2+7y+6=0$

$\Longleftrightarrow y^2-1+7y+7=0 \Longleftrightarrow (y+1)(y-1)+7(y+1)=0$

$\Longleftrightarrow (y+1)(y+6)=0 \Longrightarrow x^2+7x+1=0 \quad \vee \quad x^2+7x+6=0$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{-7 \pm 3\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x = -6 \quad \vee \quad x = -1.$

107. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{(x+1)^2-\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x+1+\frac{1}{x}} = x+1-\dfrac{1}{x} \;\Big|\; D \equiv R-\{0\}$

$\Longleftrightarrow x+1-\dfrac{1}{x} = x+1-\dfrac{1}{x} \Longrightarrow A \equiv D.$

108. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \overset{x^4+x^2=y}{\Longleftrightarrow} \quad y+1 = \dfrac{42}{y} \;\Big|\; D \equiv R-\{0\}$

$\Longleftrightarrow y^2+y-42=0 \Longleftrightarrow (y-6)(y+7)=0$

$\Longrightarrow x^4+x^2-6=0 \quad \vee \quad x^4+x^2+7=0 \quad (1)$

$\Longleftrightarrow (x^2-2)(x^2+3)=0$ διότι ἡ (1) δέν ἀναλύεται

ἐν R (διατί;)

Συνεπῶς $x=\pm\sqrt{2}$ (διατί;)

109. <u>Ὑπόδ.</u> (1) Δι' ἐκτελέσεως τῶν πράξεων ἀναλύεται εἰς τήν ἀντίστροφον ἐξίσωσιν $5x^4-17x^3-$
$-2x^2-17x+5=0 \;|\; x \neq 0$

(2) Ἐπειδή $x \neq 0$ ἔχομεν $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{12}{5} \quad \dfrac{x+\frac{1}{x}+1}{x+\frac{1}{x}-1} =$

$= x+\dfrac{1}{x} \overset{x+\frac{1}{x}=y}{\Longleftrightarrow} \dfrac{12}{5} \quad \dfrac{y+1}{y-1} = y \Longleftrightarrow 5y^2-17y-12=0$

$\Longleftrightarrow y=4 \;\vee\; y=-\dfrac{3}{5} \Longrightarrow x+\dfrac{1}{x}=4 \;(1) \;\vee\; x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{3}{5} (2)$

$(1) \Longleftrightarrow x^2-4x+1=0 \Longleftrightarrow x=2\pm\sqrt{3}$

$(2) \Longleftrightarrow 5x^2+3x+5=0$ μέ $\Delta<0 \ldots$

110. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $x+\dfrac{1}{x}=y \Longrightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$ καί

ἔχομεν $(E) \Longleftrightarrow y^2+y-12=(y+3)(y-4) \Longleftrightarrow$

$y^2+y-12=y^2-y-12 \Longleftrightarrow y=0 \Longrightarrow x+\dfrac{1}{x}=0$

$\Longleftrightarrow x^2+1=0 \Longrightarrow A\equiv\varnothing.$

111. Ὑπόδ. $(E)\Longleftrightarrow 4(x^5-1)=5(x^4-1)\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x-1)\left[4(x^4+x^3+x^2+x+1)-5(x^3+x^2+x+1)\right]=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)(4x^4-x^3-x^2-x-1)=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)\left[(x^4-x^3)+(x^4-x^2)+(x^4-x)+(x^4-1)\right]=0$

$\Longleftrightarrow (x-1)^2(4x^3+3x^2+2x+1)=0 \quad \ldots$

112. Ὑπόδ. $(E)\Longleftrightarrow 2(x^3-1)+3\sqrt[3]{2}\,x^2=0 \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\{0\}.$

$\Longleftrightarrow 2x^3+3\sqrt[3]{2}\,x^2-2=0 \xleftrightarrow{x=y\sqrt[3]{2}} 4y^3+6y^2-2=0$

$\Longleftrightarrow 2y^3+3y^2-1=0 \Longleftrightarrow 2y^3+2y^2+y^2-1=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (y+1)(2y^2+y-1)=0 \Longleftrightarrow (y+1)(y^2+y+y^2-1)=0$

$\Longleftrightarrow (y+1)^2(2y-1)=0 \Longleftrightarrow y=-1$ (διπλῆ)

$\vee\; y=\frac{1}{2} \Longrightarrow x=-\sqrt[3]{2}$ (διπλῆ) $\vee\; y=\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

113. Ὑπόδ. Ἐάν ἐφαρμόσωμεν γνωστήν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἔχομεν ἐν $\mathcal{D}$:

$(E)\Longleftrightarrow \frac{4x^3-6x^2}{2(x+1)}=\frac{6x^3-2x^2}{2(5x-13)}\Longleftrightarrow \frac{x^2(2x-3)}{x+1}=$

$=\frac{x^2(3x-1)}{5x-13}\Longleftrightarrow x^2=0 \;\vee\; \frac{2x-3}{x+1}=\frac{3x-1}{5x-13}\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=0$ (διπλῆ) $\vee\; x=5 \;\vee\; x=8/7.$

114. Ὑπόδ. Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω ἔχομεν ἐν $\mathcal{D}$:

$(E)\Longleftrightarrow \frac{6x^4}{2(x^2-2x-3)}=\frac{10x^4}{2(2x^2-7x+3)}\Longleftrightarrow x^4=0\;\vee$

$$\vee \ \frac{3}{x^2-2x-3} = \frac{5}{2x^2-7x+3} \Longrightarrow A = \left\{ 0 \,(\text{τετραπλῆ}),\, 8,\, 3 \right\}$$

115. <u>Ὑπόδ.</u> Διαιροῦμεν τούς ἀριθμητάς διά τῶν παρονομαστῶν καί ἔχομεν ἐν $\mathcal{D} \equiv R - \{1, 2, 3\}$:

$$(E) \Longleftrightarrow \left(2 - \frac{1}{x-1}\right) - \left(3 - \frac{2}{x-2}\right) + \left(1 + \frac{6}{x-3}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{6}{x-3} = 0 \Longleftrightarrow 7x^2 - 21x + 12 = 0 \ \ldots$$

116. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 5x\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x^3} - 296 = 0 \ (1) \ \vee \ 4x - 17\sqrt[4]{x^3} + 17\sqrt[4]{x} - 4 = 0 \ (2)$. $(1) \xLeftrightarrow{\sqrt[4]{x^3} = y \geq 0 \Leftrightarrow x\sqrt{x} = y^2} 5y^2 - 3y - 296 = 0 \Longleftrightarrow y = 8 > 0$ (δεκτή) $\vee \ y = -37/5 < 0$ (ἀπορρίπτ.)

$\Longrightarrow \sqrt[4]{x^3} = 8 \Longleftrightarrow (x-16)(x^2 + 16x + 256) = 0 \Longleftrightarrow x = 16$ (διατί;).

$(2) \xLeftrightarrow{x = y^4 \Leftrightarrow x^3 = y^{12}} 4y^4 - 17y^3 + 17y - 4 = 0 \Longleftrightarrow 4(y^4 - 1) - 17y(y^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow (y^2 - 1)(4y^2 + 4 - 17y) = 0 \Longleftrightarrow y = \pm 1 \ \vee \ \vee \ y = 4 \ \vee \ y = 1/4 \Longrightarrow x = 1 \ \vee \ x = 256 \ \vee \ x = 1/256$

117. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 15 - 2x^2 + 4x \\ x^2 - 2x + 6 \geq 0 \ \wedge \ 15 - 2x^2 + 4x \geq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2(x^2 - 2x + 6) + 3\sqrt{x^2 - 2x + 6} - 27 = 0 \quad (1) \\ \dfrac{2 - \sqrt{34}}{2} < x < \dfrac{2 + \sqrt{34}}{2} \end{array} \right\}$$

$(1) \xLeftrightarrow{\sqrt{x^2 - 2x + 6} = y > 0} 2y^2 + 3y - 27 = 0 \Longleftrightarrow y = 3$ (δεκτή) $\vee$

$\vee \ y = -9/2$ (ἀπορρίπτ.) $\Longrightarrow x^2 - 2x + 6 = 9 \Longleftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\Longleftrightarrow x = 3 \ \vee \ x = -1$.

118. <u>Ὑπόδ.</u> Πρέπει $x^2 - 3x - 4 \geq 0 \Longleftrightarrow (x-4)(x+1) \geq 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \leq -1 \quad \vee \quad x \geq 4$. Συνεπώς είναι $x \neq 0 \quad \Longrightarrow$

$$(E) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2x^2-3x-20}{x} = 2\sqrt{x^2-3x-4} \\ x^2-3x-4 \geq 0 \quad \wedge \quad \dfrac{2x^2-3x-20}{x} \geq 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x^2-3x-4) - 2x\sqrt{x^2-3x-4} + x^2 - 16 = 0 \\ (x \leq -1 \ \vee \ x \geq 4) \wedge (-5/2 \leq x < 0 \ \vee \ x \geq 4) \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \left(\sqrt{x^2-3x-4} - x\right)^2 - 16 = 0 & (1) \\ -5/2 < x < -1 \quad \vee \quad x \geq 4 & (2) \end{array} \right\}. (1) \Longleftrightarrow \sqrt{x^2-3x-4} =$$

$$= x+4 \ \vee \ \sqrt{x^2-3x-4} = x-4 \Longleftrightarrow x^2-3x-4 = x^2+8x+16 \ \vee$$

$$\vee \ x^2-3x-4 = x^2-8x+16 \Longleftrightarrow x = -20/11 \ \vee \ x = 4 \xrightarrow{(2)}$$

$$\Longrightarrow A = \{-20/11, 4\}.$$

119. Υπόδ. $(E) \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{x+1}{2} + \dfrac{x-1}{2} - 2\dfrac{\sqrt{(x+1)(x-1)}}{2}} - \sqrt{2(x-1)} = 0$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\dfrac{x-1}{2}}\right)^2 - 2\sqrt{\dfrac{x+1}{2} \cdot \dfrac{x-1}{2}}} - \sqrt{2}\sqrt{x-1} = 0 \\ x+1 \geq 0 \quad \wedge \quad x-1 \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2}} - \sqrt{\dfrac{x-1}{2}}\right)^2} - \sqrt{2}\sqrt{x-1} = 0 \ \wedge \ x \geq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\left|\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}\right|}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\sqrt{x-1} = 0 \ \wedge \ x \geq 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x-1} = 0 \quad \wedge \quad x \geq 1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt{x+1} = 3\sqrt{x-1} \quad \wedge \ x \geq 1 \Longleftrightarrow x+1 = 9(x-1) \ \wedge$$

$$\wedge \ x \geq 1 \Longleftrightarrow 8x = 10 \ \wedge \ x \geq 1 \Longleftrightarrow x = 5/4.$$

120. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 2(1-x)(x + \sqrt{x^2+1}) = 2 \Longleftrightarrow 2(1-x)x +$

$+2(1-x)\sqrt{x^2+1}-2=0 \iff -2x+2x^2-2(1-x)\sqrt{x^2+1}+2=0$

$\iff (x^2-2x+1)-2(1-x)\sqrt{x^2+1}+x^2+1=0 \iff (1-x)^2-$

$-2(1-x)\sqrt{x^2+1}+\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2=0 \iff \left(1-x-\sqrt{x^2+1}\right)^2=0 \iff$

$\iff 1-x=\sqrt{x^2+1} \iff x^2-2x+1=x^2+1 \wedge 1-x>0 \iff$

$\iff x=0 \wedge x<1 \iff x=0$ (διπλῆ).

121. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}=y$ καί ἔχομεν ἐν $\mathcal{D}\equiv R-$

$-\left\{-3,-2/5\right\}$: $(E)\iff y+\dfrac{1}{y}=\dfrac{13}{6} \iff 6y^2-13y+6=0$

$\iff y=\dfrac{3}{2} \vee y=\dfrac{2}{3} \implies \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}=\dfrac{3}{2} \vee \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}=\dfrac{2}{3} \iff \dfrac{x+3}{5x+2}=$

$=\dfrac{27}{8} \vee \dfrac{x+3}{5x+2}=\dfrac{8}{27} \iff x=-\dfrac{30}{127} \vee x=5$

122. <u>Ὑπόδ.</u> $(E)\iff \sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{-5x}=0 \overset{(\text{διατί;})}{\iff} (x+1+x-$

$-1-5x)^3=27(x+1)(x-1)(-5x) \iff -27x^3=-27\cdot 5x(x^2-1)$

$\iff x^3-5x(x^2-1)=0 \iff x(4x^2-5)=0 \iff x=0 \vee$

$\vee\ x=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

123. <u>Ὑπόδ.</u> $(E)\iff 2\left(\sqrt[3]{x}\right)^4-3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2-20=0 \,\Big|\, x\neq 0$

$\xleftrightarrow{\sqrt[3]{x}=y\neq 0} 2y^4-3y^2-20=0 \iff y^2=4 \vee y^2=-5/2$

$\iff y=\pm 2 \implies x=\pm 8$.

124. <u>Ὑπόδ.</u> $(E)\xleftrightarrow{\sqrt[4]{1+x}=y\geq 0} 3y^2-2y-8=0 \iff y=\dfrac{1\pm 5}{3}$

$\iff y=2$ (δεκτή) $\vee\ y=-\dfrac{4}{3}$ (ἀπορρίπτ.) $\implies$

$\Longrightarrow \sqrt[4]{1+x} = 2 \Longleftrightarrow 1+x=16 \Longleftrightarrow x=15.$

125. <u>Υπόδ.</u> $(E) \xLeftrightarrow{\sqrt{x-1}=y\geq 0} \sqrt[3]{1-y^2} = 1-y \Longleftrightarrow 1-y^2=(1-y)^3$

$\Longleftrightarrow (1-y)(1+y)-(1-y)^3=0 \Longleftrightarrow (1-y)(1+y-1+2y-y^2)=0$

$\Longleftrightarrow y=1 \ \vee\ y^2-3y=0 \Longleftrightarrow y=1 \vee y=0 \vee y=3 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \sqrt{x-1}=1 \ \vee\ \sqrt{x-1}=0 \ \vee\ \sqrt{x-1}=3 \Longleftrightarrow x-1=1 \ \vee$

$\vee\ x-1=0 \ \vee\ x-1=9 \Longleftrightarrow x=2 \ \vee\ x=1 \ \vee\ x=10.$

126. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \sqrt[6]{(x+1)^2} - \sqrt[6]{(x-1)^2} = \sqrt[6]{x^2-1} \ \wedge\ x^2-1\geq 0$

$\Longleftrightarrow \sqrt[6]{\frac{(x+1)^2}{x^2-1}} - \sqrt[6]{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}} = 1 \ \wedge\ x^2-1>0 \Longleftrightarrow \sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} -$

$-\sqrt[6]{\frac{x-1}{x+1}} = 1 \ \wedge\ (x<-1 \ \vee\ x>1) \xLeftrightarrow{\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}}=y>0} y-\frac{1}{y}=$

$=1 \Longleftrightarrow y^2-y-1=0 \Longleftrightarrow y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$

Δεκτή ρίζα είναι μόνον ή $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Τότε $\sqrt[6]{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6 \Longleftrightarrow x=\frac{(1+\sqrt{5})^6+2^6}{(1+\sqrt{5})^6-2^6}$

. . .

127. <u>Υπόδ.</u> $(E) \xLeftrightarrow{(x+\sqrt{x})^2=y>0} y^2-y-159.600=0$

$\Longleftrightarrow (y-400)(y+399)=0 \Longleftrightarrow y=400$ (δεκτή) $\vee\ y=-399$

(απορρίπτεται) $\Longrightarrow (x+\sqrt{x})^2=400 \Longleftrightarrow (x+\sqrt{x})^2-20^2=0$

$\Longleftrightarrow (x+\sqrt{x}+20)(x+\sqrt{x}-20)=0 \xLeftrightarrow{(\text{διότι } x\geq 0)} x+\sqrt{x}-20=$

$=0 \Longleftrightarrow \sqrt{x}=\frac{-1\pm 9}{2} \Longleftrightarrow \sqrt{x}=-5$ (απορρίπτεται) $\vee$

$\vee\ \sqrt{x}=4$ (δεκτή) $\Longleftrightarrow x=16.$

128. <u>Υπόδ.</u> (α).(Ε) $\Longleftrightarrow \dfrac{(x^2-1-x\sqrt{x^2-2})^2}{(x^2-1)^2-x^2(x^2-2)} = 8\,\dfrac{(x+\sqrt{x^2-2})^2}{x^2-(x^2-2)}$

$\wedge\ x^2-2 \geq 0 \Longleftrightarrow (x^2-1-x\sqrt{x^2-2})^2 = 4(x+\sqrt{x^2-2})^2$ (1)

$\wedge (x \leq -\sqrt{2} \ \vee\ x \geq \sqrt{2})$ (2). (1) $\Longleftrightarrow x^2-1-x\sqrt{x^2-2} =$

$=2(x+\sqrt{x^2-2})$ (3) $\vee\ x^2-1-x\sqrt{x^2-2} = -2(x+\sqrt{x^2-2})$ (4)

(3) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x^3-12x-9=0 \\ (x^2-2x-1)(x+2)\geq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2x-3)(4x^2+6x+3)=0 \\ -2\leq x\leq 1-\sqrt{2} \ \vee x\geq 1+\sqrt{2} \end{array}\right\}$

$\Longleftrightarrow x = 3/2 \wedge (-2 \leq x \leq -\sqrt{2} \ \vee\ x \geq 1+\sqrt{2})$ (λόγω της (2))

$\Longrightarrow A_1 \equiv \phi$.

(4) $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 8x^3-12x+9=0 \\ (x^2+2x-1)(x-2)\geq 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (2x+3)(4x^2-6x+3)=0 \\ -1-\sqrt{2}\leq x\leq -1+\sqrt{2} \ \vee x\geq 2 \end{array}\right\}$

$\Longleftrightarrow x = -3/2 \wedge (-1-\sqrt{2} \leq x \leq -\sqrt{2} \ \vee\ x \geq 2)$ (λόγω της (2))

$\Longrightarrow A = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

(β). Πρέπει $x^2-2 \geq 0 \Longleftrightarrow x^2-1 \geq 1$. Θέτομεν $x^2-1 = y \Longleftrightarrow$

$x^2-2 = y-1$ καί $x\sqrt{x^2-2} = \omega \Longleftrightarrow x\sqrt{y-1} = \omega \Longleftrightarrow$

$x = \dfrac{\omega}{\sqrt{y-1}} \;\Big|\; y \neq 1.$

Ἐπειδή $x^2 = 1+y$ καί $x^2(x^2-2) = \omega^2$ ἔχομεν

$(1+y)(y-1) = \omega^2 \Longleftrightarrow y^2-1 = \omega^2 \Longleftrightarrow y^2-\omega^2 = 1 \Longleftrightarrow$

$(y+\omega)(y-\omega) = 1$. (1).

Εἶναι $\sqrt{x^2-2} = \dfrac{\omega}{x} > 0$, δηλαδή ω καί x ὁμόσημα.

Τότε (Ε) $\Longleftrightarrow \dfrac{y-\omega}{y+\omega} = 8\,\dfrac{\frac{\omega}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1}}{\frac{\omega}{y-1} - \sqrt{y-1}} \Longleftrightarrow \dfrac{y-\omega}{y+\omega} =$

$$= 8\,\frac{\omega+y-1}{\omega-y+1} \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} (y-\omega)^2 = 8\,\frac{1-y+\omega}{(y-\omega)(1-y+\omega)} \overset{1-y+\omega\neq 0}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow (y-\omega)^3 = 8 \underset{(\text{διατί;})}{\Longleftrightarrow} y-\omega = 2 \quad (2).$$ Τότε ἐκ τῆς (1)

ἔχομεν $y+\omega = 1/2$ (3). Ἐκ τῶν (2) $\wedge$ (3) $\Longrightarrow y = 5/4\ (\neq 1)$

καί $\omega = -3/4$, συνεπῶς $x^2 = 1+y \Longleftrightarrow x^2 = 9/4 \Longleftrightarrow x =$

$= \pm 3/2$. Δεκτή εἶναι μόνον ἡ $x = -3/2$ ὁμόσημος τοῦ ω.

(γ). Ἐπειδή $(x-\sqrt{x^2-2})^2 = 2(x^2 - x\sqrt{x^2-2} - 1)$ καί

$(x+\sqrt{x^2-2})^2 = 2(x^2+x\sqrt{x^2-2}-1)$ ἔχομεν: (Ε) $\Longleftrightarrow$

$$\left(\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x+\sqrt{x^2-2}}\right)^2 = 8\,\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{x-\sqrt{x^2-2}} \Longleftrightarrow \left(\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x+\sqrt{x^2-2}}\right)^3 = 8 \underset{}{\overset{(\text{διατί;})}{\Longleftrightarrow}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x-\sqrt{x^2-2}}{x+\sqrt{x^2-2}} = 2 \Longleftrightarrow 3\sqrt{x^2-2} = -x \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 9(x^2-2) = x^2 \\ x<0 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = 9/4 \ \wedge\ x<0 \Longleftrightarrow (x = \pm 3/2 \ \wedge\ x<0) \Longrightarrow A = \{-3/2\}.$$

129. <u>Ὑπόδ.</u> Πρέπει $2x^2-1\geqslant 0 \ \wedge\ x^2-3x-2\geqslant 0$ διότι $2x^2+2x+3>0$ $\wedge\ x^2-x+2>0,\ \forall\ x\in R$. Τοῦτο ἰσχύει $\forall\ x<\frac{3-\sqrt{17}}{2}\ \vee$ $\vee\ x>\frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Τότε (Ε) $\Longleftrightarrow \sqrt{(2x^2-1)(x^2-3x-2)} = 2x+4+$ $+\sqrt{(2x^2+2x+3)(x^2-x+2)} \Longleftrightarrow \dots \Longleftrightarrow x=-2 \ \vee\ x = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.

130. <u>Ὑπόδ.</u> (Ε) $\overset{x\neq\pm 1}{\Longleftrightarrow} \sqrt[\nu]{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} - \sqrt[\nu]{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}} = 1 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[\nu]{\frac{1-x}{1+x}} = 1$ (1). Θέτομεν $\sqrt[\nu]{\frac{1+x}{1-x}} = y$.

Τότε (1) $\Longleftrightarrow y - \frac{1}{y} = 1 \Longleftrightarrow y^2 - y - 1 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

(i) Ἐάν $\nu = 2\kappa \Longrightarrow \sqrt[\nu]{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{(1+\sqrt{5})^\nu}{2^\nu} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{(1+\sqrt{5})^\nu - 2^\nu}{(1+\sqrt{5})^\nu + 2^\nu}$.

(ii) Ἐάν $\nu = 2\kappa+1 \Longrightarrow \sqrt[\nu]{\dfrac{1+x}{1-x}} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Longleftrightarrow \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{(1\pm\sqrt{5})^\nu}{2^\nu}$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{(1\pm\sqrt{5})^\nu - 2^\nu}{(1\pm\sqrt{5})^\nu + 2^\nu}$.

131. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης εἶναι ἄθροισμα μή ἀρνητικῶν ποσοτήτων συνεπῶς ἔχομεν:

$(E) \Longleftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \wedge 2x^2 - x = 0 \wedge 12 - x - x^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$(x = 2 \vee x = -1) \wedge (x = 0 \vee x = 1/2) \wedge (x = 3 \vee x = -4) \Longrightarrow A \equiv \phi$.

132. Ὑπόδ. Ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 131 ἔχομεν:

$(E) \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \wedge x^2 - 9 = 0 \wedge x^2 - 7x + 12 = 0$

$\Longleftrightarrow (x = 3 \vee x = 1) \wedge (x = 3 \vee x = -3) \wedge (x = 3 \vee x = 4) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A = \{3\}$.

133. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 6x^2 - 4x + 1 + \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 0$.

Εἶναι $6x^2 - 4x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} > 0, \ \forall \ x \in R$

καί $x^2 - 3x + 3 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \ \forall \ x \in R$.

Ἄρα $A \equiv \phi$.

134. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 + 12\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 0$

$\Longleftrightarrow (2x-1)^2 + 12\sqrt{2x^2 - 7x + 3} = 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 0 \ \wedge$

$\wedge \ 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 1/2 \wedge (x = 1/2 \vee x = 3) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = 1/2 \Longrightarrow A = \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$.

135. Υπόδ. (Ε) $\Longleftrightarrow \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(2x+3)^2} = -7 \Longleftrightarrow |x-1| +$
$+ |2x+3| = -7 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$ (διατί;)

136. Υπόδ. (Ε) $\Longleftrightarrow \sqrt[\nu]{\dfrac{x}{|x|} - \dfrac{|x|}{x}} + \sqrt[2\nu]{2-|x|+x^2(2-|x|)} = 0$
$\Longleftrightarrow \sqrt[\nu]{0} + \sqrt[2\nu]{(2-|x|)(1+x^2)} = 0 \Longleftrightarrow 2-|x| = 0 \Longleftrightarrow |x| = 2$
$\Longleftrightarrow x = \pm 2 \Longrightarrow A = \{\pm 2\}$.

137. Υπόδ. (1) (Ε) $\Longleftrightarrow |x-1| + |x||x-1| = 0 \Longleftrightarrow |x-1|(1+|x|) = 0$
$\Longleftrightarrow |x-1| = 0 \Longleftrightarrow x-1 = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A = \{1\}$.
(2) (Ε) $\Longleftrightarrow |x-1| = 0 \wedge |x^2 - x| = 0 \Longleftrightarrow x = 1 \wedge (x=0 \vee x=1)$
$\Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A = \{1\}$.

138. Υπόδ. (Ε) $\overset{x \neq 0}{\Longleftrightarrow} |x|+1 = 0 \vee \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{|x|}{x} = 0 \vee 3|x| - 5 = 0$
$\overset{(\text{διατί;})}{\Longleftrightarrow} |x| = -1 \vee \pm 2 = 0 \vee |x| = 5/3 \Longleftrightarrow x = \pm 5/3$.

139. Υπόδ. (Ε) $\Longleftrightarrow |x|^2 - 4|x| - 12 = 0 \vee |x|^3 - 5|x|^2 - 17|x| + 21 = 0$
$\overset{|x| = y > 0}{\Longleftrightarrow} y^2 - 44 - 12 = 0 \;(1) \vee y^3 - 5y^2 - 17y + 21 = 0 \;(2)$.
(1) $\Longleftrightarrow y = 6$ (δεκτή) $\vee\; y = -2$ (άπορρίπτεται)
(2) $\Longleftrightarrow (y-1)(y^2 - 4y - 21) = 0 \Longleftrightarrow y = 1$ (δεκτή) $\vee\; y = 7$
(δεκτή) $\vee\; y = -3$ (άπορρίπτεται) $\Longrightarrow |x| = 6 \vee |x| = 1 \vee$
$\vee\; |x| = 7 \Longleftrightarrow x = \pm 6 \vee x = \pm 1 \vee x = \pm 7$.

140. Υπόδ. (Ε) $\Longleftrightarrow |x|^4 + |x|^2 - 4|x|^3 + 6|x| = 0 \Longleftrightarrow |x|(|x|^3 -$

$-4|x|^2+|x|+6)=0 \xLeftrightarrow{|x|=y\geq 0} y=0 \vee y^3-4y^2+y+6=0$

$\Longleftrightarrow y=0 \vee (y-2)(y^2-2y-3)=0 \Longleftrightarrow y=0 \vee y=2 \vee$

$\vee\ y=3 \vee y=-1$ (ἀπορρίπτεται) $\Longrightarrow |x|=0 \vee |x|=2 \vee$

$\vee\ |x|=3 \Longleftrightarrow x=0 \vee x=\pm 2 \vee x=\pm 3.$

141. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow |x|^4-6|x|^3-21|x|^2+90|x|+216=0$

$\xLeftrightarrow{|x|=y>0} y^4-6y^3-21y+90y+216=0 \Longleftrightarrow (y^2-3y-18)(y^2-$

$-3y-12)=0 \Longleftrightarrow y=6 \vee y=-3 \vee y=\dfrac{3\pm\sqrt{57}}{2}$.

Αἱ ἀρνητικαί τιμαί τοῦ y ἀπορρίπτονται καί

ἔχομεν: $|x|=6 \vee |x|=\dfrac{3+\sqrt{57}}{2} \Longleftrightarrow x=\pm 6 \vee x=\pm\dfrac{3+\sqrt{57}}{2}$

142. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^2+x+|x|+2=0 \ (1) \vee x^2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2}|x|-4=0 \ (2)$

$(1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+2x+2 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x^2+2 \\ x<0\end{matrix}\right\} \Longrightarrow A_1 \equiv \phi$

$(2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+\sqrt{2}x-4 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x^2-3\sqrt{2}x-4 \\ x<0\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \\ x\geq 0\end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3\pm\sqrt{17}) \\ x<0\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=2\sqrt{2} \vee x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{17}).$

Ἄρα $A=\left\{2\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}(3-\sqrt{17})\right\}.$

143. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 2|x|+x-6=0 \ (1) \vee |x|+3x-12=0 \ (2) \vee$

$\vee\ x^2+8x+|x|+20=0 \ (3).$

$(1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} 3x-6=0 \\ x\geq 0\end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} -x-6=0 \\ x<0\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x=2 \vee x=-6 \Rightarrow A_1=\{2,-6\}$

$$(2) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x-12=0 \\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} 2x-12=0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x=3 \Longrightarrow A_2=\{3\}$$

$$(3) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2+9x+20=0 \\ x \geqslant 0 \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x^2+7x+20=0 \\ x<0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x=-4 \vee x=-5) \wedge x \geqslant 0 \Longrightarrow A_3 \equiv \emptyset$$

Ἄρα $A = \{-6, 2, 3\}$.

144. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \dfrac{3}{4|x-2|} + \dfrac{1}{|x-2|} = 6 - \dfrac{7}{2} \quad \Big| \; \mathcal{D} \equiv R - \{2\}$

$\Longleftrightarrow |x-2| = \dfrac{7}{10} \Longleftrightarrow x-2 = \pm\dfrac{7}{10} \Longleftrightarrow x = \dfrac{7}{10}+2 \;\vee$

$\vee\; x = -\dfrac{7}{10}+2 \Longleftrightarrow x = \dfrac{27}{10} \vee x = \dfrac{13}{10}$.

145. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow x^2-5x+6 = \pm(x^2-x+2) \Longleftrightarrow x^2-5x+6 =$

$= x^2-x+2 \;\vee\; x^2-5x+6 = -x^2+x-2 \Longleftrightarrow 4x=4 \;\vee$

$\vee\; 2x^2-6x+8=0 \Longleftrightarrow x=1$ (διατί;)

146. <u>Ὑπόδ.</u>

x	$2x-3$	$x-1$	$(E) \Longleftrightarrow$	$A=\{-8\}$
$-\infty$				
	$-$	$-$	$\Longleftrightarrow x+8=0 \Longleftrightarrow x=-8 \in (-\infty, 1)$	$A_1=\{-8\}$
1		0	$\Longleftrightarrow \lvert -1\rvert + 7\cdot 0 + 10 - 2 \neq 0$	$A_2 \equiv \emptyset$
	$-$	$+$	$\Longleftrightarrow 15x-6=0 \Longleftrightarrow x=\frac{2}{5} \notin (1, \frac{3}{2})$	$A_3 \equiv \emptyset$
$\frac{3}{2}$	0		$\Longleftrightarrow 0 + 7/2 + 5 - 2 \neq 0$	$A_4 \equiv \emptyset$
	$+$	$+$	$\Longleftrightarrow 19x-13=0 \Longleftrightarrow x=\frac{13}{19} \notin (\frac{3}{2}, +\infty)$	$A_5 \equiv \emptyset$
$+\infty$				

147. <u>Ὑπόδ.</u>

x	$x-1$	x	$2x-1$	$(E) \Longleftrightarrow$	$A=\left\{-\frac{5}{7},5\right\}$
$-\infty$					
	$-$	$-$	$-$	$\Longleftrightarrow \lvert 2x-1\rvert=2x+3x+6 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x=-5/7 \in (-\infty,0)$	$A_1=\left\{-\frac{5}{7}\right\}$
0		0		$\Longleftrightarrow 1\neq 6$	$A_2\equiv\emptyset$
	$-$	$+$	$-$	$\Longleftrightarrow \lvert 2x-1\rvert=2x-3x+6 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow x+5=0 \Longleftrightarrow x=-5 \notin (0,1/2)$	$A_3\equiv\emptyset$
$\frac{1}{2}$			0	$\Longleftrightarrow 1-3/2+6\neq 0$	$A_4\equiv\emptyset$
	$-$	$+$	$+$	$\Longleftrightarrow \lvert 2x-1\rvert=2x-3x+6 \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow 3x-7=0 \Longleftrightarrow x=7/3 \notin (1/2,1)$	$A_5\equiv\emptyset$
1	0			$\Longleftrightarrow 1\neq 5$	$A_6\equiv\emptyset$
	$+$	$+$	$+$	$\Longleftrightarrow 1=2x-3x+6 \Longleftrightarrow x=5\in(1,+\infty)$	$A_7=\{5\}$
$+\infty$					

148. <u>Ὑπόδ.</u> Γνωρίζομεν ὅτι: "ἐάν $a,b\in R$ τότε: $|a-b|=|a|-|b| \Longleftrightarrow (a=b=0)$ (1) $\vee$ $(0<b\leq a)$ (2) $\vee$ $(a\leq b<0)$ (3)". $(E)\Longleftrightarrow |x^3-(x^2-x+1)|=|x^3|-|x^2-x+1|$ καί ἐπειδή $x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4>0, \forall x\in R$, ἕπεται ὅτι ἰσχύει ἡ περίπτωσις (2) τῆς ἀνωτέρω προτάσεως. Συνεπῶς ἔχομεν: $0<x^2-x+1\leq x^3 \Longleftrightarrow$ $x^3-x^2+x-1\geq 0 \Longleftrightarrow (x-1)(x^2+1)\geq 0 \Longleftrightarrow x-1\geq 0$ $\Longleftrightarrow x\geq 1 \Longrightarrow A=[1,+\infty)$.

149. <u>Ὑπόδ.</u> Γνωρίζομεν ὅτι: "ἐάν $a,b\in R$ τότε:

$|a-b|=|a|+|b| \iff a\cdot b \leq 0$ //. Ἐπειδή $x^2+x+1=(x+1/2)^2+$
$+3/4>0,\ \forall x\in R$, ἕπεται: $(E) \iff |x^3-3x^2+2x-1|=|x^2+x+1||x-$
$-1|+|x||3x-2| \overset{|a||b|=|ab|}{\iff} |x^3-3x^2+2x-1|=|(x^2+x+1)(x-1)|+$
$+|3x^2-2x| \iff |(x^3-1)-(3x^2-2x)|=|x^3-1|+|3x^2-2x| \iff$
$(x^3-1)(3x^2-2x)\leq 0 \iff (x-1)(x^2+x+1)x(3x-2)\leq 0 \iff$
$x\leq 0 \ \vee \ 2/3\leq x\leq 1 \implies A=(-\infty,0]\cup[2/3,1]$.

150. <u>Ὑπόδ.</u> Γνωρίζομεν ὅτι: (i) $|a|=|-a|,\ \forall a\in R$.

(ii) $|a+b|=|a|+|b| \iff a\cdot b\geq 0,\ a,b\in R$. Τότε:

$(E) \overset{(i)}{\iff} |x+5/2|+|2-x|+|x-1/2|=9/2 \overset{(ii)}{\iff}$

$$\iff \left\{\left|x+\frac{5}{2}+2-x\right|+\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{9}{2} \wedge \left(x+\frac{5}{2}\right)(2-x)\geq 0\right\}$$

$$\iff \left\{\frac{9}{2}+\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{9}{2} \wedge -\frac{5}{2}\leq x\leq 2\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\left|x-\frac{1}{2}\right|=0 \wedge -\frac{5}{2}\leq x\leq 2\right\} \iff$$

$$\iff x-\frac{1}{2}=0 \wedge -\frac{5}{2}\leq x\leq 2 \iff$$

$$\iff x=\frac{1}{2} \implies A=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

2. ΕΠΙΛΥΣΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

Π1. (Ε1): $a\left\{a\left[a(ax-b)-b\right]-b\right\}-b=x$

(Ε2): $x^2+a(2a-x)-\frac{3b^2}{4}=\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+a^2$

(Ε3): $(\lambda^2-5\lambda+6)x=\lambda-2$

(Ε4): $\lambda^2(x-1)+3\lambda x=(\lambda^2+3)x-1$

(Ε5): $a^2x-a(x+2)=b-4$

Ἐπίλυσις:

$$(E1)\Longleftrightarrow a\left[a^2(ax-b)-ab-b\right]-b=x$$

$$\Longleftrightarrow a(a^3x-a^2b-ab-b)-b=x$$

$$\Longleftrightarrow a^4x-a^3b-a^2b-ab-b-x=0$$

$$\Longleftrightarrow x(a^4-1)=b(a^3+a^2+a+1)$$

$$\Longleftrightarrow x(a-1)(a^3+a^2+a+1)=b(a^3+a^2+a+1)$$

$$\Longleftrightarrow x(a-1)(a+1)(a^2+1)=b(a+1)(a^2+1)$$

$$\Longleftrightarrow x(a-1)(a+1)=b(a+1) \text{ διότι } a^2+1\neq 0\ \forall a\in R.$$

Ἄν $a\in R-\{-1,1\}\Longrightarrow x=\frac{b}{a-1}\Longrightarrow A=\left\{\frac{b}{a-1}\right\}$.

Ἄν $a=1$ καί $b\neq 0\Longrightarrow A=\emptyset$

Ἄν $a=1$ καί $b=0\Longrightarrow A\equiv R$.

Ἄν $a=-1\Longrightarrow A\equiv R$.

$(E_2) \iff x^2 + 2a^2 - ax - \frac{3b^2}{4} = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} + a^2$

$\iff bx - ax = \frac{3b^2}{4} + \frac{b^2}{4} + a^2 - 2a^2$

$\iff (b-a)x = b^2 - a^2 \iff (b-a)x = (b+a)(b-a)$

Ἄν $b - a \neq 0 \implies x = b + a \implies A = \{ b + a \}$

Ἄν $b - a = 0 \implies b = a \implies A \equiv R$

$(E_3) \iff (\lambda-2)(\lambda-3)x = \lambda - 2$. Ἄν $(\lambda-2)(\lambda-3) \neq 0 \iff$ $\lambda \in R - \{2,3\} \implies x = \frac{1}{\lambda-3} \implies A = \left\{ x : x = \frac{1}{\lambda-3}, \forall \lambda \in R - \{2,3\} \right\}$. Ἄν $(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \iff \lambda \in \{2,3\}$, ἔχομεν

α) διά $\lambda = 2 \implies A \equiv R$

β) διά $\lambda = 3 \implies 0 \cdot x = 1 \implies A = \emptyset$

(E_4): Ἐκτελοῦμεν τάς σημειωμένας πράξεις :

$\lambda^2 x - \lambda^2 + 3\lambda x = \lambda^2 x + 3x - 1 \iff \lambda^2 x + 3\lambda x - \lambda^2 x - 3x = \lambda^2 - 1 \iff 3(\lambda-1)x = (\lambda+1)(\lambda-1)$.

Ἄν $\lambda - 1 \neq 0 \implies \lambda \neq 1 \implies x = \frac{(\lambda+1)(\lambda-1)}{3(\lambda-1)} = \frac{\lambda+1}{3}$

Ἄν $\lambda - 1 = 0 \implies \lambda = 1 \implies 3 \cdot 0 \cdot x = (1+1)(1-1) =$

$= 2 \cdot 0 = 0 \implies 0 \cdot x = 0 \implies A \equiv R$.

$(E_5) \iff a^2 x - ax - 2a = b - 4 \iff a(a-1)x = 2a + b - 4 \quad (I)$

i) Ἄν $a(a-1) \neq 0 \implies a \neq 0$ καί $a \neq 1 \implies$

$x = \frac{2a+b-4}{a(a-1)}$

ii) ἄν $a(a-1)=0 \Longrightarrow a=0 \vee a=1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ 1) $a=0$ καί $b=4 \Longrightarrow A\equiv R$

2) $a=0$ καί $b\neq 4 \Longrightarrow A=\emptyset$

3) $a=1$ καί $b=2 \Longrightarrow A\equiv R$

4) $a=1$ καί $b\neq 2 \Longrightarrow A = \emptyset$

Ἀνακεφαλαίωσις

$a(a-1)\neq 0$		ἡ (I) ἔχει ρίζαν: $x=\dfrac{2a+b-4}{a(a-1)}$
$a=0$	$b=4$	ἡ ἐξίσωσις (I) εἶναι ἀόριστος.
	$b\neq 4$	ἡ ἐξίσωσις (I) εἶναι ἀδύνατος.
$a=1$	$b=2$	ἡ ἐξίσωσις (I) εἶναι ἀόριστος.
	$b\neq 2$	ἡ ἐξίσωσις (I) εἶναι ἀδύνατος.

Πα. (Ε1): $\dfrac{5ax-7b}{12}-\dfrac{3x-4ab}{9}=1$

(Ε2): $\dfrac{(x-\lambda)^2-(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)-(x+\mu)^2}{12}+x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{\lambda}{6}$

Ἐπίλυσις: (Ε1) $\Longleftrightarrow 15ax-21b-12x+16ab=36$

$\Longleftrightarrow (15a-12)x=21b-16ab+36$

$\Longleftrightarrow 3(5a-4)x=21b-16ab+36$

I) ἄν $5a-4\neq 0 \Longleftrightarrow a\neq\dfrac{4}{5} \Longrightarrow x=\dfrac{21b-16ab+36}{3(5a-4)}$

II) ἄν $5a-4=0 \Longleftrightarrow a=\dfrac{4}{5}$ καί $21b-16ab+36=0$

$\left(21b-16\cdot\dfrac{4}{5}\cdot b+36=0 \Longleftrightarrow \dfrac{105b-64b+180}{5}=0\right.$

$$\Longleftrightarrow \frac{41\beta+180}{5}=0 \Longrightarrow \beta=-\frac{180}{41}.\Big)$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{l} i)\ \text{ἄν}\ \alpha=\frac{4}{5}\ \text{καί}\ \beta\neq-\frac{180}{41} \Longrightarrow A=\emptyset \\ ii)\ \text{ἄν}\ \alpha=\frac{4}{5}\ \text{καί}\ \beta=-\frac{180}{41} \Longrightarrow A\equiv R. \end{array}$$

(Ε2) $\Longleftrightarrow (x-\lambda)^2-(\lambda+\mu)(\lambda-\mu)-(x+\mu)^2+12x=8-2\lambda \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2-2\lambda x+\lambda^2+12x=\lambda^2-\mu^2+8-2\lambda+x^2+2\mu x+\mu^2$

$\Longleftrightarrow (\lambda+\mu-6)x=\lambda-4 \Longrightarrow$ I) $\lambda+\mu\neq 6 \Longrightarrow x=\frac{\lambda-4}{\lambda+\mu-6}$

II) $\left.\begin{array}{l}\lambda+\mu=6\\ \lambda-4=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda=4$ καί $\mu=2 \Longrightarrow A\equiv R.$

Π3. (Ε1): $\frac{x-\alpha}{\beta\gamma}+\frac{x-\beta}{\alpha\gamma}+\frac{x-\gamma}{\alpha\beta}=2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)$

(Ε2): $\frac{x+2}{3\lambda}-\frac{1}{6\lambda}=\frac{\lambda}{6}-\frac{x}{2\lambda}$

(Ε3): $\frac{(\alpha+\beta)^2(x+1)}{\alpha+\beta+1}+\alpha+\beta-1=\frac{\alpha x+\beta x+\alpha+\beta-x-1}{\alpha+\beta+1}+$
$+(\alpha+\beta)^2$

(Ε4): $\frac{\alpha^2x}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^2x}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}-\frac{\gamma^2x}{(\alpha-\gamma)(\gamma-\beta)}=\alpha\beta\gamma$

(Ε5): $\frac{x-\lambda_1}{\mu-\lambda_1}+\frac{x-\lambda_2}{\mu-\lambda_2}+\cdots+\frac{x-\lambda_\nu}{\mu-\lambda_\nu}=\frac{\nu x}{\mu}$

ὅπου $\lambda_i\in R^+$ καί $\mu>\lambda_i\ \ \forall i=1,2,\ldots,\nu.$

Ἐπίλυσις (Ε1) $\xLeftrightarrow{\alpha\beta\gamma\neq 0} \alpha(x-\alpha)+\beta(x-\beta)+\gamma(x-\gamma)=$
$=2\beta\gamma+2\alpha\gamma+2\alpha\beta \Longleftrightarrow \alpha x-\alpha^2+\beta x-\beta^2+\gamma x-\gamma^2=2\beta\gamma+$
$+2\alpha\gamma+2\alpha\beta \Longleftrightarrow \alpha x+\beta x+\gamma x=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\beta\gamma+2\alpha\gamma+$
$+2\alpha\beta \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\ x=(\alpha+\beta+\gamma)^2.$

i) άν $\alpha+\beta+\gamma \neq 0 \Longrightarrow x = \alpha+\beta+\gamma$
ii) άν $\alpha+\beta+\gamma = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

$(E_2) \overset{\lambda\neq 0}{\Longleftrightarrow} 2(x+2)-1 = \lambda^2 - 3x \Longleftrightarrow 2x+4-1 = \lambda^2-3x$.

$\Longleftrightarrow 5x = \lambda^2 - 3 \Longrightarrow x = \dfrac{\lambda^2-3}{5}$

Συνεπώς: $A = \left\{ x : x = \dfrac{\lambda^2-3}{5}, \ \forall \ \lambda \in R - \{0\} \right\}$

$(E_3) \overset{\alpha+\beta\neq -1}{\Longleftrightarrow} \dfrac{(\alpha+\beta)^2(x+1) - \alpha x - \beta x + x + 1 - \alpha - \beta}{\alpha+\beta+1} = (\alpha+\beta)^2 -$

$-(\alpha+\beta)+1 \Longleftrightarrow \dfrac{(\alpha+\beta)^2(x+1) - x(\alpha+\beta) + (x+1) - (\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+1} =$

$= (\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)+1.$

$\Longleftrightarrow (x+1)\left[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)+1\right] = \left[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta+1)\right](\alpha+\beta+1) \ (\mathrm{I})$

$\Longrightarrow x+1 = \alpha+\beta+1 \Longrightarrow x = \alpha+\beta$.

$\Big[$Διότι: $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha+\beta)+1 = (\alpha+\beta)^2 - 2\cdot\frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{4} +$

$+ \frac{3}{4} = (\alpha+\beta-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \neq 0 \Big]$.

$(E_4) \Longleftrightarrow \alpha^2 x(\beta-\gamma) - \beta^2 x(\alpha-\gamma) + \gamma^2 x(\alpha-\beta) =$

$= \alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \ \big| \ \alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$

$\Longleftrightarrow x\left[\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta)\right] =$

$= \alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \Longleftrightarrow (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\cdot x =$

$\alpha\beta\gamma(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha) \Longrightarrow x = \alpha\beta\gamma$ διότι $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$.

Παρατήρησις: Ισχύει: $\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta) =$

$= (\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$

$(E_5) \Longleftrightarrow \dfrac{x-\lambda_1}{\mu-\lambda_1} - 1 + \dots + \dfrac{x-\lambda_\nu}{\mu-\lambda_\nu} - 1 = \dfrac{\nu x}{\mu} - \nu \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{x-\mu}{\mu-\lambda_1}+\frac{x-\mu}{\mu-\lambda_2}+\cdots+\frac{x-\mu}{\mu-\lambda_\nu}=\frac{\nu(x-\mu)}{\mu} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (x-\mu)\left(\frac{1}{\mu-\lambda_1}-\frac{1}{\mu-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\mu-\lambda_\nu}-\frac{\nu}{\mu}\right)=0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x=\mu \quad \text{διότι} \quad \Sigma=\frac{1}{\mu-\lambda_1}+\frac{1}{\mu-\lambda_2}+\cdots+\frac{1}{\mu-\lambda_\nu}\neq\frac{\nu}{\mu}$$

καθ' ὅσον $\mu>\lambda_i \ \forall i=1,2,\dots,\nu$.

Π4. (Ε1): $\dfrac{ax^5-x^4}{x-1}+\dfrac{ax^4}{x+1}=\dfrac{ax^4(x^2-2x+1)}{x^2-1}$

(Ε2): $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{2}{x}$

(Ε3): $\dfrac{x-a}{x-a-1}-\dfrac{x-a-1}{x-a-2}=\dfrac{x-b}{x-b-1}-\dfrac{x-b-1}{x-b-2}$

(Ε4): $\dfrac{x+\lambda+\nu}{x-1}=\dfrac{x+2\lambda-\nu-3}{x+2}$

(Ε5): $\dfrac{x+a}{x-a}+\dfrac{x+2a}{x-2a}=\dfrac{x-2a}{x+2a}+\dfrac{x-a}{x+a}$

Ἐπίλυσις:

(Ε1) $\Longleftrightarrow \dfrac{ax^5-x^4}{x-1}+\dfrac{ax^4}{x+1}=\dfrac{ax^4(x^2-2x+1)}{(x+1)(x-1)} \ \Big|\ \mathcal{D}=R-\{-1,1\}$

$\Longleftrightarrow (ax^5-x^4)(x+1)+ax^4(x-1)=ax^4(x^2-2x+1) \mid \mathcal{D}$

$\Longleftrightarrow ax^6+ax^5-x^5-x^4+ax^5-ax^4-ax^6+2ax^5-ax^4=0 \mid \mathcal{D}$

$\Longleftrightarrow 4ax^5-x^5-2ax^4-x^4=0 \mid \mathcal{D} \Longleftrightarrow$

$x^4(4ax-x-2a-1)=0 \mid \mathcal{D} \Longleftrightarrow x^4=0 \ \vee$

$4ax-x-2a-1=0 \mid \mathcal{D} \Longleftrightarrow x^4=0 \ \vee \ (4a-1)x=$

$=2a+1 \ \text{(I)} \mid \mathcal{D} \Longrightarrow x=0$ (μέ πολλαπλότητα 4).

Διερεύνησις τῆς (I).

1) $4a-1\neq 0 \Longrightarrow a\neq\dfrac{1}{4} \Longrightarrow x=\dfrac{2a+1}{4a-1}$

Διά νά εἶναι δεκτή ἡ ρίζα αὐτή θά πρέπη:

$x \in \mathcal{D} \Longrightarrow \dfrac{2a+1}{4a-1} \in \mathcal{D} \Longrightarrow \dfrac{2a+1}{4a-1} \neq \pm 1 \Longrightarrow$

i) $\dfrac{2a+1}{4a-1} \neq 1 \Longleftrightarrow 2a+1 \neq 4a-1 \Longleftrightarrow -2a \neq -2$

$\Longleftrightarrow a \neq 1$

ii) $\dfrac{2a+1}{4a-1} \neq -1 \Longleftrightarrow 2a+1 \neq -4a+1 \Longleftrightarrow 6a \neq 0$

$\Longleftrightarrow a \neq 0.$

Συνεπῶς: ἄν $a \in R - \left\{\dfrac{1}{4}, 1, 0\right\} \Longrightarrow A = \left\{0, \dfrac{2a+1}{4a-1}\right\}$

2) $4a-1=0 \Longleftrightarrow a = \dfrac{1}{4} \Longrightarrow 0 \cdot x = \dfrac{1}{2} + 1 \Longrightarrow A = \emptyset$

$(E_2) \Longleftrightarrow x(x-b)+x(x-a)=2(x-a)(x-b) \,\Big|\, \mathcal{D}=R-\{a,b,0\}$

$\Longleftrightarrow x^2 - bx + x^2 - ax = 2x^2 - 2bx - 2ax + 2ab \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (a+b)x = 2ab \quad (\mathrm{I})$

Διερεύνησις: 1) ἄν $a+b \neq 0$ ἡ (I) δίδει:

$x = \dfrac{2ab}{a+b}$. Διά νά εἶναι ὅμως αὔτη παραδεκτή,

θά πρέπη νά εἶναι: $\dfrac{2ab}{a+b} \neq a$, $\dfrac{2ab}{a+b} \neq b$, $\dfrac{2ab}{a+b} \neq 0$

i) Ἐάν $a \neq 0$ καί $b \neq 0$, τότε ἡ $x = \dfrac{2ab}{a+b}$ εἶναι λύσις (I)

ii) Ἐάν ἦτο $\dfrac{2ab}{a+b} = a \Longrightarrow \dfrac{2b}{a+b} = 1$ ἤ $2b = a+b \Longrightarrow$
$a = b$

iii) Ἐάν ἦτο $\dfrac{2ab}{a+b} = b \Longrightarrow \dfrac{2a}{a+b} = 1$ ἤ $2a = a+b \longrightarrow a = b$

Συνεπῶς θά πρέπη $a \neq b$ καί $ab \neq 0$

2) Ἄν $a+b=0$ ἡ (I) γίνεται: $0 \cdot x = 2ab \quad (\mathrm{II})$

i) Ἄν $ab \neq 0 \Longrightarrow$ (II) ἀδύνατος

ii) Ἄν $ab = 0 \Longrightarrow$ (II) ταυτότης, διότι τότε εἶναι
$a=0$, $b=0$ καθόσον $a+b=0$.
Πράγματι διά $a=0$ καί $b=0$ ἡ ἀρχική ἐξίσωσις
καταντᾶ: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x}$ δηλ. ταυτότης ἄν $x \neq 0$

$$(E_3) \Longleftrightarrow \frac{(x-a)(x-a-2)-(x-a-1)^2}{(x-a-1)(x-a-2)} = \frac{(x-b)(x-b-2)-(x-b-1)^2}{(x-b-1)(x-b-2)} \;\Big|$$

$$\mathcal{D} = R - \{a+1,\ a+2,\ b+1,\ b+2\}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-1}{(x-a-1)(x-a-2)} = \frac{-1}{(x-b-1)(x-b-2)} \;\Big|\; \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow (x-a-1)(x-a-2) = (x-b-1)(x-b-2) \quad (\varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow 2(a-b)x = (a-b)(a+b+3) \quad (\mathrm{I})$$

Διερεύνησις: (1) $a-b \neq 0 \Longrightarrow a \neq b$, ἡ (I) ἔχει τήν λύσιν: $x = \dfrac{a+b+3}{2}$.

Ἡ τιμή αὕτη εἶναι παραδεκτή, ἐφ᾽ ὅσον $x \in \mathcal{D}$.

Δηλαδή: i) $\dfrac{a+b+3}{2} \neq a+1 \Longleftrightarrow a+b+3 \neq 2a+2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow a-b \neq 1$$

ii) $\dfrac{a+b+3}{2} \neq a+2 \Longleftrightarrow a+b+3 \neq 2a+4 \Longleftrightarrow a-b \neq -1$

iii) $\dfrac{a+b+3}{2} \neq b+1 \Longleftrightarrow a+b+3 \neq 2b+2 \Longleftrightarrow a-b \neq -1$

iv) $\dfrac{a+b+3}{2} \neq b+2 \Longleftrightarrow a+b+3 \neq 2b+4 \Longleftrightarrow a-b \neq 1$

Συνεπῶς: ἄν $a \neq b$ καί $a-b \neq \pm 1 \Longrightarrow x = \dfrac{a+b+3}{2}$

2) ἄν $a-b=0 \Longrightarrow a=b$ ἡ (I) γίνεται:

$0(2x-2a-3)=0$ (II) καί οἱ περιορισμοί γίνονται ἐπίσης $x \neq a+1$ καί $x \neq a+2$.

Ἡ (II) ἀληθεύει $\forall\, x \in R$, συνεπῶς καί ἡ ἀρχική ἀληθεύει $\forall\, x \in R$ ἐκτός τῶν τιμῶν

$$x = a+1 \text{ καί } x = a+2.$$

Παρατήρησις: Εἰς τήν (ε) ἠδυνάμενα νά καταλήξωμεν (i) Διά προσθέσεως τοῦ μηδενός.
(γραφομένου ὑπό τήν μορφήν: $0 = 1-1$) εἰς τόν ἀριθμητήν ἑκάστου κλάσματος.

ii) δι' ἐκτελέσεως ἑκάστης διαιρέσεως ἡ ὁποία ἔχει σημειωθῆ καί ἐν συνεχείᾳ διά χρησιμοποιήσεως τῆς ταυτότητος τῆς ἀλγοριθμικῆς διαιρέσεως.

$$(E_4) \Longleftrightarrow (x+\lambda+\nu)(x+2) = (x-1)(x+2\lambda-\nu-3) \,|\, \mathcal{D} = R - \{1, -2\}$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + (\lambda+\nu+2)x + 2\lambda + 2\nu = x^2 + (2\lambda-\nu-4)x - 2\lambda+\nu+3$$

$$\Longleftrightarrow (-\lambda+2\nu+6)x = 4\lambda - \nu + 3 \,|\, \mathcal{D}.$$

(I) Ἄν $-\lambda+2\nu+6 \neq 0 \Longrightarrow \lambda \neq 2\nu+6 \Longrightarrow$

$$x = \frac{-4\lambda-\nu+3}{-\lambda+2\nu+6} \quad \text{μέ } x \neq -2 \text{ καί } x \neq 1.$$

1) $\dfrac{-4\lambda-\nu+3}{-\lambda+2\nu+6} \neq -2 \Longrightarrow -4\lambda-\nu+3 \neq 2\lambda-4\nu-12 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow -6\lambda \neq -3\nu-15 \Longrightarrow \lambda \neq \dfrac{\nu+5}{2}$.

2) $\dfrac{-4\lambda-\nu+3}{-\lambda+2\nu+6} \neq 1 \Longrightarrow -4\lambda-\nu+3 \neq -\lambda+2\nu+6$

$\Longrightarrow -3\lambda \neq 3\nu+3 \Longrightarrow \lambda \neq -(\nu+1)$

Συνεπῶς: ἄν $\lambda \neq 2\nu+6$, $\lambda \neq \dfrac{\nu+5}{2}$, $\lambda \neq -(\nu+1)$

$\Longrightarrow \exists$ λύσις ἡ $x = \dfrac{-4\lambda-\nu+3}{-\lambda+2\nu+6}$

II) Ἄν $\lambda = 2\nu+6$, ἐκ τῆς ἀνηγμένης ἐξισώσεως μας.

$\Longrightarrow 0\cdot x = -4\lambda - \nu + 3$ ὁπότε

1) Ἄν $-4\lambda - \nu + 3 = 0 \Longrightarrow A \equiv R$

2) Ἄν $-4\lambda - \nu + 3 \neq 0 \Longrightarrow A = \emptyset$

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῆς ἀοριστίας εἶναι: $\left\{\begin{array}{l}\lambda - 2\nu = 6\\ 4\lambda + \nu = 3\end{array}\right\}$

(Σ). Ἐκ τῆς ἐπιλύσεως δέ τοῦ συστήματος (Σ) λαμβάνομεν $\lambda = \frac{4}{3}$, $\nu = -\frac{7}{3}$. Συνεπῶς: διά $\lambda = \frac{4}{3}$ καί $\nu = -\frac{7}{3}$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀόριστος.

Ἐνῶ διά $\lambda = 2\nu + 6$ καί $\lambda \neq \frac{3-\nu}{4}$ εἶναι ἀδύνατος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τοῦ ἀδυνάτου εἶναι:

$$2\nu + 6 \neq \frac{3-\nu}{4} \Longleftrightarrow 8\nu + 24 \neq 3 - \nu \Longleftrightarrow 9\nu \neq 3 - 24$$

$$\Longleftrightarrow 9\nu \neq -21 \Longrightarrow \nu \neq -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$$

δηλ. $\nu \neq -\frac{7}{3}$ καί $\lambda = 2\nu + 6$.

(E5) $\Longleftrightarrow \left(\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a}\right) + \left(\frac{x+2a}{x-2a} - \frac{x-2a}{x+2a}\right) = 0 \,\Big|\, \mathcal{D} = R - \{\pm a, \pm 2a\}$.

$$\Longleftrightarrow \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{x^2 - a^2} + \frac{(x+2a)^2 - (x-2a)^2}{x^2 - 4a^2} = 0 \,\Big|\, \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4ax}{x^2 - a^2} + \frac{8ax}{x^2 - 4a^2} = 0 \,\Big|\, \mathcal{D} \Longleftrightarrow 4ax\left(\frac{1}{x^2 - a^2} + \frac{2}{x^2 - 4a^2}\right) = 0 \,\Big|\, \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{4ax(3x^2 - 6a^2)}{(x^2 - a^2)(x^2 - 4a^2)} = 0 \,\Big|\, \mathcal{D} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ax(x^2 - 2a^2)}{(x^2 - a^2)(x^2 - 4a^2)} = 0 \,\Big|\, \mathcal{D} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{ax(x+a\sqrt{2})(x-a\sqrt{2})}{(x+a)(x-a)(x+2a)(x-2a)}=0 \quad \Big| \ \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} ax(x+a\sqrt{2})(x-a\sqrt{2})=0 \\ x\in\mathcal{D} \end{array}\right\} \quad (1)$$

I) Ἂν $a=0 \xrightarrow{(1)} \left\{\begin{array}{c} 0\cdot x^3=0 \\ x\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x\neq 0$

II) Ἂν $a\neq 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} x(x+a\sqrt{2})(x-a\sqrt{2})=0 \\ x\in\mathcal{D} \end{array}\right\} \quad (2)$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ x\neq a,-a,2a,-2a \end{array}\right\} \overset{(2\cdot 1)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ 0\neq a,-a,2a,-2a \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ a\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x+a\sqrt{2}=0 \\ x\neq a,-a,2a,-2a \end{array}\right\} \overset{(2\cdot 2)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=-a\sqrt{2} \\ -a\sqrt{2}\neq a,-a,2a,-2a \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-a\sqrt{2} \\ -2\neq 1,-1,2,-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow x=-a\sqrt{2}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x-a\sqrt{2}=0 \\ x\neq a,-a,2a,-2a \end{array}\right\} \overset{(2\cdot 3)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} x=a\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\neq 1,-1,2,-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x=a\sqrt{2}.$$

Παρατήρησις:

Ἐάν εἰς τήν **(E5)** θέσωμεν $\dfrac{x+a}{x-a}=u$ καί

$$\frac{x+2a}{x-2a}=W \Longrightarrow$$

$$(E5) \Longleftrightarrow u+W=\frac{1}{u}+\frac{1}{W} \Longleftrightarrow (u+W)\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{1}{uW}\right)=0 \Longleftrightarrow u+W=0 \ \vee \ uW=1 \ldots$$

Π5. (Ε1): $$\frac{1}{\dfrac{3(\mu+\nu)^2}{\rho^2 x} - \dfrac{\mu+\nu}{\rho}} = \frac{1}{\dfrac{2(\mu+\nu)}{\rho}}$$

(Ε2): $$\frac{1}{x-\lambda}\left[1-\frac{x-\lambda^2}{x(x-\lambda)}\right] = \frac{1}{x}\left[\left(\frac{\mu+\lambda}{x-\lambda}\right)^2 + 1\right] - \frac{2\lambda\mu}{x(x-\lambda)^2}$$

(Ε3): $$\frac{x^2(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-\beta)(x-\gamma)} + \frac{\beta^2(\beta+\gamma)(\beta+x)}{(\beta-\gamma)(\beta-x)} + \frac{\gamma^2(\beta+\gamma)(\gamma+\;)}{(\gamma-\beta)(\gamma-x)} = (\beta+\gamma)^2$$

Ἐπίλυσις:

(Ε1) Πρέπει· $\left\{\dfrac{3(\mu+\nu)^2}{\rho^2 x} - \dfrac{\mu+\nu}{\rho} \neq 0 \,,\ \dfrac{\mu+\nu}{\rho} \neq 0\right\}$

$$\Longleftrightarrow \frac{(\mu+\nu)}{\rho}\cdot\left[\frac{3(\mu+\nu)}{\rho x} - 1\right] \neq 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\frac{\mu+\nu}{\rho} \neq 0 \quad \text{καί} \quad 3(\mu+\nu) \neq \rho x\right\} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x \neq \frac{3(\mu+\nu)}{\rho}\,.$$

Εἰς τήν δοθεῖσαν ἐξίσωσιν οἱ ἀριθμηταί εἶναι ἴσοι, συνεπῶς καί οἱ παρανομασταί.

Ἄρα (Ε1) $\Longleftrightarrow \dfrac{3(\mu+\nu)^2}{\rho^2 x} - \dfrac{\mu+\nu}{\rho} = \dfrac{2(\mu+\nu)}{\rho}$

$$\Longleftrightarrow \frac{3(\mu+\nu)^2}{\rho^2 x} = \frac{3(\mu+\nu)}{\rho} \Longleftrightarrow \frac{(\mu+\nu)^2}{\rho^2 x} = \frac{\mu+\nu}{\rho} \Longleftrightarrow$$

$(\mu+\nu)\rho x = (\mu+\nu)^2$ ὅμως · $\dfrac{\mu+\nu}{\rho} \neq 0 \Longrightarrow (\mu+\nu)\rho \neq 0 \Longrightarrow$

$x = \dfrac{(\mu+\nu)^2}{(\mu+\nu)\rho} = \dfrac{\mu+\nu}{\rho}$ Συνεπῶς $A = \left\{\dfrac{\mu+\nu}{\rho}\right\}$.

$$(E_2) \iff \frac{1}{x-\lambda} - \frac{x-\lambda^2}{x(x-\lambda)^2} = \frac{(\mu+\lambda)^2}{x(x-\lambda)^2} + \frac{1}{x} - \frac{2\lambda\mu}{x(x-\lambda)^2}$$

$\mathcal{D} = R - \{0, \lambda\}$ μέ $\lambda \neq 0$

$$\iff x(x-\lambda) - x + \lambda^2 = (\mu+\lambda)^2 + (x-\lambda)^2 - 2\lambda\mu \iff$$

$$\iff x^2 - \lambda x - x + \lambda^2 = \mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda^2 + x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 2\lambda\mu$$

$$\iff \lambda x - x = \mu^2 + \lambda^2 \iff x(\lambda-1) = \mu^2 + \lambda^2. \quad (1)$$

(I) Ἄν $\lambda \neq 1 \iff x = \dfrac{\mu^2+\lambda^2}{\lambda-1}$, ἡ ὁποία ρίζα θά εἶναι δεκτή ἐάν καί ἐφ' ὅσον i) $\dfrac{\mu^2+\lambda^2}{\lambda-1} \neq 0 \iff$ $\mu^2+\lambda^2 \neq 0 \iff \mu \neq 0$ καί $\lambda \neq 0$ καί

ii) $\dfrac{\mu^2+\lambda^2}{\lambda-1} \neq \lambda \iff \mu^2+\lambda^2 \neq \lambda^2 - \lambda \iff \mu^2 \neq -\lambda.$

Συνεπῶς: $\exists$ ἡ λύσις $x = \dfrac{\mu^2+\lambda^2}{\lambda-1} \iff$

$$\lambda \neq 1, \ \lambda \neq 0, \ \mu \neq 0, \ \mu^2 \neq -\lambda.$$

II) Ἄν $\lambda = 1 \xrightarrow{(1)} x \cdot 0 = \mu^2 + 1 \iff \mu^2 + 1 = 0 \iff$ $\mu^2 = -1$ τό ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον $\forall \mu \in R$

$$\implies A = \varnothing.$$

(E_3): Θέτομεν

$$A = \frac{x^2(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$$B = \frac{\beta^2(\beta+\gamma)(\beta+x)}{(\beta-\gamma)(\beta-x)}$$

$$\Gamma = \frac{\gamma^2(\gamma+x)(\beta+\gamma)}{(\gamma-x)(\gamma-\beta)}$$

$x \neq \beta$

$x \neq \gamma$

$\beta \neq \gamma$

Τότε θά έχωμεν:

$$A = \frac{\alpha^3(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha(\beta\gamma\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}.$$

$$B = \frac{\beta^3(\alpha+\beta+\gamma)+\beta(\beta\gamma\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}.$$

$$\Gamma = \frac{\gamma^3(\alpha+\beta+\gamma)+\gamma(\beta\gamma\alpha)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}.$$

Ἄρα: $(E3) \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\left[\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right]+$

$$+\alpha\cdot\beta\cdot\gamma\left[\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}\right]=$$

$$=(\beta+\gamma)^2. \quad (I)$$

Δι' ἐκτελέσεως πράξεων εὑρίσκω ὅτι:

1) $\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\alpha+\beta+\gamma$

2) $\frac{\alpha}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{\gamma}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=0$

Ἐκ τῆς $(I) \Longrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2=(\beta+\gamma)^2 \Longleftrightarrow$

$\xleftrightarrow{\text{Δι' ἐκτελέσεως πράξεων}} x_1=0 \vee x_2=-2(\beta+\gamma).$

Π6. (E1): $\frac{(1-\alpha x)^3}{(1+\alpha x)^3}=\frac{1-\beta x}{1+\beta x}$

(E2): $\frac{1+\alpha x}{1-\alpha x}=\frac{3+\alpha^2x^2}{1-\alpha^2x^2}$

(E3): $\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\frac{3\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+3\beta^2}$

Ἐπιλύσεις:

$$(E_1) \iff \frac{(1+ax)^3-(1-ax)^3}{(1+ax)^3+(1-ax)^3} = \frac{(1+bx)-(1-bx)}{(1+bx)+(1-bx)} \Big|$$

$$\mathcal{D} = R - \left\{-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}\right\} \text{ μὲ } ab \neq 0$$

$$\iff \frac{6ax+2a^3x^3}{2+6a^2x^2} = \frac{2bx}{2} \Big| \mathcal{D}.$$

$$\iff \frac{3ax+a^3x^3}{1+3a^2x^2} = bx \Big| \mathcal{D}$$

$$\iff x_1 = 0 \vee \frac{3a+a^3x^2}{1+3a^2x^2} = b \ (1) \Big| \mathcal{D}$$

$$(1) \iff a^2x^2(a-3b) = b-3a \iff x^2 = \frac{b-3a}{a^2(a-3b)}$$

$$\iff x^2 = \frac{1}{a^2}\,\frac{\lambda-3}{1-3\lambda} \quad (\text{ἔνθα ἐτέθη } \lambda = \frac{b}{a}).$$

$$\iff x = \pm\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}}. \quad (2)$$

i) Ἐάν $\dfrac{\lambda-3}{1-3\lambda} > 0 \iff (\lambda-3)(3\lambda-1) < 0 \iff$

$\iff \dfrac{1}{3} < \lambda < 3 \implies$ ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας $x_1, x_2 \in R$.

ii) Ἐάν $\dfrac{\lambda-3}{1-3\lambda} < 0 \iff (\lambda-3)(3\lambda-1) > 0 \iff \lambda < \dfrac{1}{3} \vee$

$\vee\ 3 > \lambda \implies$ ἡ (2) ἔχει δύο ρίζας $x_1, x_2 \notin R$.

ui) Ἐάν $\lambda = \dfrac{1}{3} \implies \nexists$ λύσις τῆς (2).

$$(E_2) \xleftrightarrow{ax=\omega} \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{3+\omega^2}{1-\omega} \Big| \mathcal{D} = R - \{\pm 1\}$$

$$\iff \frac{1+\omega}{1-\omega} = \frac{3+\omega^2}{(1+\omega)(1-\omega)} \Big| \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow (1+\omega)^2 = 3+\omega^2 \mid \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow 1+\omega^2+2\omega = 3+\omega^2 \mid \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow 2\omega = 1 \Longrightarrow \omega = 1 \notin \mathcal{D} \Longrightarrow A = \emptyset$$

$$(E_3) \Longleftrightarrow \frac{x^2+x+1+x^2-x+1}{x^2+x+1-x^2+x-1} = \frac{3a^2+b^2+a^2+3b^2}{3a^2+b^2-a^2-3b^2} \Bigg| \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2x^2+2}{2x} = \frac{4a^2+4b^2}{2a^2-2b^2} \Bigg| \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \Bigg| \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2+1}{2x} = \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \Bigg| \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1} = \frac{a^2+b^2+a^2-b^2}{a^2+b^2-a^2+b^2} \Bigg| \mathcal{D}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{2a^2}{2b^2} \Bigg| \mathcal{D} \Longleftrightarrow \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \Bigg| \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = \pm\frac{a}{b} \Bigg| \mathcal{D} \Longleftrightarrow \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \pm\frac{a+b}{a-b} \Bigg| \mathcal{D}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2x}{2} = \pm\frac{a+b}{a-b} \Bigg| \mathcal{D} \Longleftrightarrow x = \pm\frac{a+b}{a-b} \Bigg| \mathcal{D}$$

$\Longrightarrow x = \pm\dfrac{a+b}{a-b}$ ἐφ' ὅσον η λnρ τοὺς ἀναγκαίους περιορισμούς.

Π7. (E_1): $$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x+b} + \frac{\gamma}{x+\gamma} = 3$$

(E_2): $$\frac{b+\gamma}{b\gamma-x} + \frac{\gamma+a}{\gamma a-x} + \frac{a+b}{ab-x} = \frac{a+b+\gamma}{x}$$

(E_3): $$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} + \frac{x+b}{x-b} + \frac{x-b}{x+b} = 0$$

Π7. (Ε1): $\frac{a}{x+a}+\frac{\beta}{x+\beta}+\frac{\gamma}{x+\gamma}=3$

(Ε2): $\frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma-x}+\frac{\gamma+a}{\gamma a-x}+\frac{a+\beta}{a\beta-x}=\frac{a+\beta+\gamma}{x}$

(Ε3): $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x-a}{x+a}+\frac{x+\beta}{x-\beta}+\frac{x-\beta}{x+\beta}=0$

(Ε4): $\frac{a+\beta}{x+\beta}+\frac{a+\gamma}{x+\gamma}=\frac{2(a+\beta+\gamma)}{x+\beta+\gamma}$

(Ε5): $ax^4\pm\beta x^3+(a\pm\beta)x^2+2ax+a=0 \mid a\neq 0$

(Ε6): $\frac{a}{\beta+\gamma-x}+\frac{\beta}{\gamma+a-x}+\frac{\gamma}{a+\beta-x}+3=0$

Επίλυσις:

(Ε1) $\Longleftrightarrow \frac{a}{x+a}-1+\frac{\beta}{x+\beta}-1+\frac{\gamma}{x+\gamma}-1=0 \quad \Big| \; x\neq -a,\; x\neq-\beta,\; x\neq-\gamma$

$\Longleftrightarrow \frac{x}{x+a}+\frac{x}{x+\beta}+\frac{x}{x+\gamma}=0$

$\Longleftrightarrow x=0 \lor \frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\gamma}=0 \quad (1)$

Η (1) γράφεται ἰσοδυνάμως:

$(x+\beta)(x+\gamma)+(x+\gamma)(x+a)+(x+a)(x+\beta)=0$

$\Longleftrightarrow 3x^2+2x(a+\beta+\gamma)+\beta\gamma+a\gamma+a\beta=0$ τῆς ὁποίας αἱ λύσεις εἶναι $x_{1,2}=-\frac{1}{3}\left\{(a+\beta+\gamma)\pm\sqrt{a^2+\beta^2+\gamma^2-a\beta-a\gamma-\beta\gamma}\right\}$

(Ε2) $\Longleftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{\beta\gamma-x}-\frac{a}{x}+\frac{\gamma+a}{\gamma a-x}-\frac{\beta}{x}+\frac{a+\beta}{a\beta-x}-\frac{\gamma}{x}=0 \quad \Big| \; x\neq 0,\; x\neq a\beta,\; x\neq\beta\gamma,\; x\neq a\gamma$

$$\Longleftrightarrow \frac{(a+\beta+\gamma)x-a\beta\gamma}{x(\beta\gamma-x)}+\frac{(a+\beta+\gamma)x-a\beta\gamma}{x(a\gamma-x)}+\frac{(a+\beta+\gamma)x-a\beta\gamma}{x(a\beta-x)}$$

$$\Longleftrightarrow (a+\beta+\gamma)x-a\beta\gamma=0 \ (\mathrm{I}) \ \vee$$

$$\frac{1}{x(\beta\gamma-x)}+\frac{1}{x(a\gamma-x)}+\frac{1}{x(a\beta-x)}=0 \quad (\mathrm{II})$$

$$(\mathrm{I}) \Longrightarrow x=\frac{a\beta\gamma}{a+\beta+\gamma} \quad \Big| \ a+\beta+\gamma\neq 0$$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow (\gamma a-x)(a\beta-x)+(\beta\gamma-x)(a\beta-x)+(\beta\gamma-x)\cdot$$

$$\cdot(\gamma a-x)=0 \Longleftrightarrow 3x^2-2x(\beta\gamma+a\gamma+a\beta)+a\beta\gamma\cdot$$

$\cdot(a+\beta+\gamma)=0$, τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι:

$$x_{1,2}=\frac{1}{3}\left\{\beta\gamma+a\gamma+a\beta\pm\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2a^2+a^2\beta^2-a\beta\gamma(a+\beta+\gamma)}\right\}$$

(E3) Θέτομεν $\frac{x+a}{x-a}=y$, $\frac{x+\beta}{x-\beta}=\omega$· ὅτε ἔχομεν:

$y+\frac{1}{y}+\omega+\frac{1}{\omega}=0$ καί ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τήν ἐξίσωσιν E5 τοῦ παραδ. 4.

$$(\mathrm{E4}) \Longleftrightarrow \frac{a+\beta+x-x}{x+\beta}+\frac{a+\gamma+x-x}{x+\gamma}=\frac{2(a+\beta+\gamma+x-x)}{x+\beta+\gamma} \ \Bigg| \begin{array}{l} x\neq-\beta \\ x\neq-\gamma \\ x\neq-(\beta+\gamma)\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{a-x}{x+\beta}+1+\frac{a-x}{x+\gamma}=2+\frac{2(a-x)}{x+\beta+\gamma} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a-x)\left(\frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\gamma}-\frac{2}{x+\beta+\gamma}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow x=a \ \vee \ \frac{1}{x+\beta}+\frac{1}{x+\gamma}-\frac{2}{x+\beta+\gamma}=0 \quad (\mathrm{I})$$

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow (x+\beta+\gamma)(x+\gamma)+(x+\beta+\gamma)(x+\beta)-2(x+\beta)(x+\gamma)=$$

$$=0 \Longleftrightarrow (x+\gamma)^2+\beta(x+\gamma)+(x+\beta)^2+\gamma(x+\beta)-2(x+\beta)(x+\gamma)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+\gamma-x-\beta)^2+\beta x+\beta\gamma+\gamma x+\gamma\beta=0$$

$$\Longleftrightarrow (\gamma-\beta)^2+(\beta+\gamma)x+2\beta\gamma=0 \Longleftrightarrow \beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+(\beta+\gamma)x+2\beta\gamma=0$$

$$\Longleftrightarrow (\beta+\gamma)x=-(\beta^2+\gamma^2) \Longleftrightarrow x=-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma} \text{ εάν } \beta+\gamma\neq 0$$

Άρα (i) $x_1=a$ και $x_2=-\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}$ εάν $\beta+\gamma\neq 0$

και $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$

(ii) Εάν $\beta=\gamma=0 \Longrightarrow A=\mathcal{D}$ (αόριστος)

(iii) Εάν $\beta=-\gamma\neq 0$ και $a\in\mathcal{D} \Longrightarrow A=\{a\}$.

(Ε5) $\Longleftrightarrow ax^4\pm\beta x^3+ax^2\pm\beta x^2+2ax+a=0$

$$\Longleftrightarrow a(x^4+x^2+2x+1)\pm\beta x^2(x+1)=0$$

$$\Longleftrightarrow a\left[x^4+(x+1)^2\right]\pm\beta x^2(x+1)=0$$

$$\overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} a\left[\frac{x^4}{(x+1)^2}+1\right]\pm\beta\frac{x^2}{x+1}=0$$

$$\Longleftrightarrow a\left[\left(\frac{x^2}{x+1}\right)^2+1\right]\pm\beta\frac{x^2}{x+1}=0$$

$$\overset{\frac{x^2}{x+1}=y}{\Longleftrightarrow} a(y^2+1)\pm\beta y=0 \Longleftrightarrow ay^2\pm\beta y+a=0.$$

$$\Longleftrightarrow y_1=\rho \vee y_2=\frac{1}{\rho} \quad (\text{διατί;})$$

Τότε (Ε5) $\Longleftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}=\rho \vee \dfrac{x^2}{x+1}=\dfrac{1}{\rho}$

$\Longleftrightarrow x^2-\rho x-\rho=0 \vee \rho x^2-x-1=0$ επιλυόμεναι εύκόλως.

(Ε6) $\Longleftrightarrow \dfrac{a}{\beta+\gamma-x}+1+\dfrac{\beta}{\gamma+a-x}+1+\dfrac{\gamma}{a+\beta-x}+1=0 \quad \left|\begin{array}{l} x\neq a+\beta \\ x\neq a+\gamma \\ x\neq \beta+\gamma \end{array}\right.$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha+\beta+\gamma-x}{\beta+\gamma-x}+\frac{\alpha+\beta+\gamma-x}{\gamma+\alpha-x}+\frac{\alpha+\beta+\gamma-x}{\alpha+\beta-x}=0$$

$$\Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma-x)\left(\frac{1}{\beta+\gamma-x}+\frac{1}{\gamma+\alpha-x}+\frac{1}{\alpha+\beta-x}\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow x=\alpha+\beta+\gamma \vee (\alpha+\beta-x)(\gamma+\alpha-x)+(\beta+\gamma-x)(\alpha+\beta-x)+$$
$$+(\beta+\gamma-x)(\gamma+\alpha-x)=0 \Longleftrightarrow x=\alpha+\beta+\gamma \vee 3x^2-4(\alpha+\beta+\gamma)x$$
$$+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0 \ (\mathrm{I}) \Longrightarrow x_1=\alpha+\beta+\gamma \vee$$
$x_2=\rho_1 \vee x_3=\rho_2$ ὅπου ρ_1, ρ_2 αἱ ῥίζαι τῆς (I)

Πβ. (Ε1): $$\frac{\frac{\alpha+x}{\alpha-x}+\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}{1-\frac{\alpha-x}{\alpha+x}}=\alpha-1$$

(Ε2): $$\frac{\frac{x+\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{x-\alpha}{\alpha-\beta}}{3\alpha-2\beta}=\frac{\frac{x+\beta}{\alpha+\beta}-\frac{x-\beta}{\alpha-\beta}}{2\alpha-3\beta}$$

(Ε3): $$\frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\beta^3}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=$$

$$=\left[1+\frac{1+\frac{1-7x}{1-3x}}{1-\frac{3+3x}{1-3x}}\right]:\left[1-3\,\frac{1+\frac{1+x}{1-3x}}{1-\frac{3+3x}{1-3x}}\right].$$

Ἐπίλυσις:

$$(\mathrm{E}1)\Longleftrightarrow \frac{\frac{(\alpha+x)^2+(\alpha-x)^2}{(\alpha-x)(\alpha+x)}}{\frac{(\alpha+x)-(\alpha-x)}{\alpha+x}}=\alpha-1 \quad \Big| \ \mathcal{D}\in R-\left\{\begin{matrix}\alpha,-\alpha\\0\end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\alpha^2+2\alpha x+x^2+\alpha^2-2\alpha x+x^2}{(\alpha+x-\alpha+x)(\alpha-x)}=\alpha-1 \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{a^2+x^2}{x(a-x)} = a-1 \Longleftrightarrow a^2+x^2 = x(a-x)(a-1) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow a^2+x^2 = x(a-x)(a-1) \Longleftrightarrow a^2+x^2 = a^2x - ax^2 - ax + x^2$$

$$\Longleftrightarrow ax^2 - a^2x + ax + a^2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 - ax + x + a = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow x^2-(a-1)x+a=0$ τῆς ὁποίας αἱ ῥίζαι εἶναι

$x_{1,2} = \dfrac{a-1 \pm \sqrt{a^2-6a+1}}{2}$ αἱ ὁποῖαι εἶναι δεκταί

ἐφ' ὅσον ἀνήκουν εἰς τό $\mathcal{D}$.

(Ε2) $\Longleftrightarrow \dfrac{\dfrac{(x+a)(a-b)+(x-a)(a+b)}{a^2-b^2}}{3a-2b} = \dfrac{\dfrac{(x+b)(a-b)-(a+b)(x-b)}{a^2-b^2}}{2a-3b}$

$$\Longleftrightarrow \frac{\dfrac{2ax-2ab}{a^2-b^2}}{3a-2b} = \frac{\dfrac{2ab-2bx}{a^2-b^2}}{2a-3b} \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{l} a \neq \pm b \\ 3a \neq 2b \\ 2a \neq 3b \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2ax-2ab}{(a^2-b^2)(3a-2b)} = \frac{2ab-2bx}{(a^2-b^2)(2a-3b)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (2ax-2ab)(2a-3b) = (2ab-2bx)(3a-2b) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 4a^2x - 4b^2x = 10ab^2 - 10ab^2 \Longleftrightarrow 4x(a^2-b^2) =$$

$$= 10ab(a-b) \Longleftrightarrow x = \frac{10ab(a-b)}{4(a^2-b^2)} = \frac{5ab}{2(a+b)}$$

(Ε3): Τό πρῶταν μέλος γράφεται:

$$\frac{a^3(b-\gamma)+b^3(\gamma-a)+\gamma^3(a-b)}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)} = \quad \Big| \; a \neq b \neq \gamma \neq a$$

$$= \frac{a^3(b-\gamma)+b\gamma(b^2-\gamma^2)-a(b^3-\gamma^3)}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)} =$$

$$= \frac{a^3(b-\gamma)+b\gamma(b+\gamma)(b-\gamma)-a(b-\gamma)(b^2+b\gamma+\gamma^2)}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)} =$$

$$= \frac{(\beta-\gamma)(\alpha^3+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2-\alpha\beta^2-\alpha\beta\gamma-\alpha\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{(\beta-\gamma)\left[\alpha(\alpha^2-\beta^2)-\beta\gamma(\alpha-\beta)-\gamma^2(\alpha-\beta)\right]}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{(\beta-\gamma)(\alpha-\beta)\left[(\alpha+\gamma)(\alpha-\gamma)+\beta(\alpha-\gamma)\right]}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} =$$

$$= \frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\alpha-\gamma)\,(\alpha+\gamma+\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} = \alpha+\beta+\gamma$$

Τό δεύτερον μέλος τῆς (Ε3) γράφεται:

$$\left[1+\frac{\dfrac{1-3x+1-7x}{1-3x}}{\dfrac{1-3x-3-3x}{1-3x}}\right] : \left[1-3\,\frac{\dfrac{1-3x+1+x}{1-3x}}{\dfrac{1-3x-3-3x}{1-3x}}\right] = \Bigg|\, x \neq \frac{1}{3}$$

$$\left[1+\frac{2-10x}{-2-6x}\right] : \left[1-3\,\frac{2-2x}{-2-6x}\right] = \frac{\dfrac{-2-6x+2-10x}{-2-6x}}{\dfrac{-2-6x-6+6x}{-2-6x}} =$$

$$= \frac{-16x}{-8} = 2x$$

Τελικῶς ἡ (Ε3) καταντᾷ εἰς τήν $2x = \alpha+\beta+\gamma \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \Longrightarrow A = \left\{ \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \right\}.$$

Π9. (Ε1): $(x+\alpha+\beta)^3 - x^3 - \alpha^3 - \beta^3 = 3\,(x+\alpha)(x+\beta)(\alpha+\beta)$

(Ε2): $(\alpha-x)^3 + (\beta-x)^3 = (\alpha+\beta-2x)^3$

(Ε3): $(x+\alpha+\beta)^5 + (x+\gamma+\delta)^5 =$

$$= 3\left[(x+a+\gamma)^5+(x+\beta+\delta)^5\right].$$

(Ε4): $(x+\lambda)^3+3\lambda x(1-x-\lambda)-1=0$

(Ε5): $8x^3-18\lambda x-27\lambda^3-1=(2x-3\lambda-1)^3$

(Ε6): $(14x)^3(2a+x)^3(2a-x)^3+(14x^3-39ax^2+12a^2x-$

$-13a^3)^3=a^3(98ax-39x^2-13a^2)^3$

(Ε7): $(x+a)^4+(x+\beta)^4+(x+\gamma)^4=2(x+a)^2(x+\beta)^2+$

$+2(x+\beta)^2(x+\gamma)^2+2(x+\gamma)^2(x+a)^2$

(Ε8): Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$x(x+1)+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+\dots+(x+\nu-1)(x+\nu)=10\nu$

ἄν γνωρίζομεν ὅτι ἔχει ὡς ρίζας δύο διαδοχικούς ἀκεραίους ἀριθμούς, τοῦ ν ὄντος φυσικοῦ.

Ἐπίλυσις:

(Ε1) $\Longleftrightarrow (x+a+\beta)^3-x^3-a^3-\beta^3-3a\beta(a+\beta)=$

$=3(x+a)(x+\beta)(a+\beta)-3a\beta(a+\beta)\Longleftrightarrow(x+a+\beta)^3-$

$-x^3-(a+\beta)^3=3(a+\beta)\left[(x+a)(x+\beta)-a\beta\right]\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 3x(a+\beta)(x+a+\beta)=3(a+\beta)\left[x^2+(a+\beta)x\right]\Longleftrightarrow x(a+\beta)\cdot$

$\cdot(x+a+\beta)=x(a+\beta)(x+a+\beta)\Longrightarrow A\equiv R$

(Ε2) $\Longleftrightarrow (a-x)^3+(\beta-x)^3+(2x-a-\beta)^3=0$

Ἐπειδή $a-x+\beta-x+2x-a-\beta=0\Longrightarrow$

(Ε2) $\Longleftrightarrow 3(a-x)(\beta-x)(2x-a-\beta)=0$

$\Longleftrightarrow x_1=a \vee x_2=\beta \vee x_3=\dfrac{a+\beta}{2}.$

(E3): Παρατηροῦμεν ὅτι τό ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων εἰς ἀμφότερα τά μέλη εἶναι: $2x+\alpha+\beta+\gamma+\delta$ καί συνεπῶς διαιροῦνται δι' αὐτοῦ αὐτά.

Ἄρα ἐάν ὀνομάσωμεν: $2x+\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2y$ (1)

ἡ μία ρίζα διά τό y εἶναι ἡ μηδενική.

Θέτομεν: $\alpha+\beta-\gamma-\delta = 2\lambda$ (2)

$\alpha+\gamma-\beta-\delta = 2\mu$ (3)

Ἐκ τῶν (1) καί (2) διά προσθέσεως $\Longrightarrow x+\alpha+\beta = y+\lambda$

Ἐκ τῶν (1) καί (2) δι' ἀφαιρέσεως $\Longrightarrow x+\gamma+\delta = y-\lambda$

Ἐκ τῶν (1) καί (3) διά προσθέσεως $\Longrightarrow x+\alpha+\gamma = y+\mu$

Ἐκ τῶν (1) καί (3) δι' ἀφαιρέσεως $\Longrightarrow x+\beta+\delta = y-\mu$

Συνεπῶς (E3) $\Longleftrightarrow (y+\lambda)^5+(y-\lambda)^5 = 3\left[(y+\mu)^5+(y-\mu)^5\right] \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y^5+10\lambda^2y^3+5\lambda^4y = 3(y^5+10\mu^2y^3+5\mu^4y)$ (I)

Ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχει μίαν ρίζαν τήν $y=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = -\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}$ καί οἱ ἄλλες τέσσαρες εἶναι αἱ ρίζαι τῆς διτετραγώνου:

$2y^4+10(3\mu^2-\lambda^2)y^2+5(3\mu^4-\lambda^4) = 0$

Εὑρίσκω τάς ρίζας αὐτῆς y_1, y_2, y_3, y_4 καί ἐν συνεχεία εὑρίσκομεν τά ἀντίστοιχα x.

(E4) $\Longleftrightarrow x^3+3\lambda x(x+\lambda)+\lambda^3+3\lambda x(1-x-\lambda)-1 = 0$

$\Longleftrightarrow x^3+\lambda^3+(-1)^3-3\lambda x(-1)=0 \Longleftrightarrow (x+\lambda-1)(x^2+\lambda^2+$
$+1-x\lambda+x+\lambda)=0 \Longleftrightarrow x+\lambda-1=0 \vee x^2-(\lambda-1)x+\lambda^2+$
$+\lambda+1=0$ (α) Ἐκ τῆς (α) $\Longrightarrow$ Διακρίνουσα $=\Delta=$
$=-3(\lambda+1)^2 \leqq 0$ (τό $=$ διά $\lambda=-1$). Συνεπῶς αἱ
ρίζαι ρ_1, ρ_2 τῆς (α) δέν ἀνήκουν εἰς τό R.

Τελικῶς $\Longrightarrow x=1-\lambda \Longrightarrow A=\{1-\lambda\}$

(Ε5) $\Longleftrightarrow (2x-3\lambda-1)(4x^2+9\lambda^2+1+6\lambda x+2x-3\lambda)=(2x-3\lambda-$
$-1)^3 \Longleftrightarrow (2x-3\lambda-1)\left[4x^2+2(3\lambda+1)x+9\lambda^2-3\lambda+1-4x^2-\right.$
$\left.-9\lambda^2-1+4(3\lambda+1)x-6\lambda\right]=0 \Longleftrightarrow (2x-3\lambda-1)\left[6(3\lambda+1)x-\right.$
$\left.-9\lambda\right]=0 \Longleftrightarrow x=\dfrac{3\lambda+1}{2} \vee (3\lambda+1)x=\dfrac{3\lambda}{2}$ (α)

Ἐκ τῆς (α) $\Longrightarrow$ i) ἄν $\lambda \neq -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow x=\dfrac{3\lambda}{2(3\lambda+1)}$

ii) ἄν $\lambda=-\dfrac{1}{3} \Longrightarrow 0\cdot x=-\dfrac{1}{2} \Longrightarrow A=\emptyset$

Τελικῶς: ἄν $\lambda \neq -\dfrac{1}{3} \Longrightarrow A=\left\{\dfrac{3\lambda+1}{2}, \dfrac{3\lambda}{2(3\lambda+1)}\right\}$.

(Ε6) $\Longleftrightarrow (56a^2x-14x^3)^3+(14x^2-39x^2a+42a^2x-13a)^3=$
$=(98a^2x-39ax^2-13a^3)^3 \Longleftrightarrow (56a^2x-14x^3)^3+(14x^3-$
$-39ax^2+42a^2x-13a^3)^3+(39ax^2-98a^2x+13a^3)=0$

(Βασική ταυτότης τοῦ Euler: Ἄν $A^3+B^3+\Gamma^3=0$

καί $A+B+\Gamma=0 \Longrightarrow A\cdot B\cdot\Gamma=0$)

Συνεπῶς: $14ax(4a^2-x^2)(14x^3-39ax^2+42a^2x-13a^3)\cdot$
$\cdot(39x^2-98ax+13a^2)=0 \Longrightarrow$ 1). ἄν $a=0 \Longrightarrow A=R$

2) ἄν $a \neq 0 \Longrightarrow$ i) $x = 0$

ii) $4a^2 - x^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (2a+x)(2a-x) = 0 \Longleftrightarrow x = +2a \vee x = -2a$

iii) $39x^2 - 98ax + 13a^2 = 0 \Longrightarrow x = \dfrac{a(4 \pm \sqrt{1894}}{39}$

iv) $14x^3 - 39ax + 42a^2x - 13a^3 = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x^3 + 3a^2x}{3ax^2 + a^2} =$

$= \dfrac{13}{4} \quad (3ax^2 + a^3 \neq 0) \Longleftrightarrow \dfrac{x^3 + 3a^2x + 3ax^2 + a^2}{x^3 + 3a^2x - 3ax^2 - a^2} =$

$= \dfrac{13+14}{13-14} \Longleftrightarrow \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^3 = -27 \Longleftrightarrow \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^3 + 3^3 = 0$

$\Longleftrightarrow \left(\dfrac{x+a}{x-a} + 3\right)\left[\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right) + 9\right] = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{x+a}{x-a} + 3 = 0 \; (1)$

$\vee \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^2 - 3\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right) + 9 = 0 \quad (2)$

$(1) \Longleftrightarrow \dfrac{x+a}{x-a} = -3 \xRightarrow{x \neq a}$ i) $x = \dfrac{a}{2}$

ii) $x = a$ καί $a \neq 0 \Longrightarrow$ Ἀδύνατος.

iii) $x = a$ καί $a = 0 \Longrightarrow$ Ἀόριστος.

Ἡ (2) ἔχει Διακρίνουσα ἀρνητική, συνεπῶς αὕτη εἶναι ἀδύνατος ἐν R.

(E7): Θέτομεν $x + a = p$, $x + b = q$, $x + \gamma = r$ ὁπότε (E7)

$\Longleftrightarrow p^4 + q^4 + r^4 - 2p^2q^2 - 2p^2r^2 - 2q^2r^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow -(p+q+r)(p-q+r)(-p+q+r)(p+q-r) = 0$

$\Longleftrightarrow p+q+r = 0 \; (1) \vee p-q+r = 0 \; (2) \vee q-p+r = 0 \; (3)$

$$\nu p+q-\sqrt{\ }=0 \quad (4)$$

$$(1)\Longleftrightarrow x+\alpha+x+\beta+x+\gamma=0 \Longrightarrow x=-\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$(2)\Longleftrightarrow x+\alpha-x-\beta+x+\gamma=0 \Longrightarrow x=\beta-\alpha-\gamma$$

$$(3)\Longleftrightarrow -x-\alpha+x+\beta+x+\gamma=0 \Longrightarrow x=\alpha-\beta-\gamma$$

$$(4)\Longleftrightarrow x+\alpha+x+\beta-x-\gamma=0 \Longrightarrow x=\gamma-\alpha-\beta$$

$$(\text{E}8)\Longleftrightarrow \nu x^2+\left[1+3+5+7+\cdots+(2\nu-1)\right]x+$$

$$+\left[1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(\nu-1)\nu\right]=10\nu. \quad (1)$$

Ἡ πρώτη ἀγκύλη, ἀποτελεῖ ἀριθμητικήν πρόοδον μέ ἄθροισμα $\frac{\nu(1+2\nu-1)}{2}=\nu^2$.

Τό ἄθροισμα τῆς δευτέρας ἀγκύλης ὑπολογίζεται ὡς ἑξῆς: Εἰς τόν γενικόν ὅρον $\nu(\nu-1)=\nu^2-\nu$ θέτομεν διαδοχικῶς $1, 2, 3, \ldots, \nu$

$$\Longrightarrow \begin{array}{rcl} 0\cdot 1 & = & 1-1 \\ 1\cdot 2 & = & 2^2-2 \\ 2\cdot 3 & = & 3^2-3 \\ 3\cdot 4 & = & 4^2-4 \\ \vdots & & \vdots \\ (+)\quad (\nu-1)\nu & = & \nu^2-\nu \end{array}$$

$$0\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+(\nu-1)\nu=(1^2+2^2+3^2+\cdots\nu^2)-(1+2+3+\cdots\nu)=$$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}-\frac{\nu(\nu+1)}{2}=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)-3\nu(\nu+1)}{6}=$$

$$=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1-3)}{6}=\frac{\nu(\nu+1)(2\nu-2)}{6}=\frac{\nu(\nu^2-1)}{3}$$

Συνεπῶς ἡ (1) γίνεται $\nu x^2+\nu^2x+\frac{\nu(\nu^2-1)}{3}=10\nu$ ἤ

(ἐπειδὴ $\nu \neq 0$) $3x^2+3\nu x+\nu^2-1=30 \Longleftrightarrow 3x^2+3\nu x+\nu^2-$
$-31=0$ (2). Ἐὰν ρ καὶ $\rho+1$ εἶναι αἱ δύο διαδοχικαὶ ἀκέραιαι ρίζαι τῆς (2) $\Longrightarrow \rho+\rho+1=-\nu$ (3)

καὶ $\rho(\rho+1)=\dfrac{\nu^2-31}{3}$ (4).

Ἐκ τῆς (3) ἔχομεν $\rho=-\dfrac{\nu+1}{2}$, ὁπότε ἡ (4) γίνεται:

$$\left(-\frac{\nu+1}{2}\right)^2-\frac{\nu+1}{2}=\frac{\nu^2-31}{3} \Longleftrightarrow \frac{\nu^2+2\nu+1}{4}-\frac{\nu+1}{2}=\frac{\nu^2-21}{3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\nu^2+2\nu+1-2\nu-2}{4}=\frac{\nu^2-31}{3} \Longleftrightarrow \frac{\nu^2-1}{4}=\frac{\nu^2-31}{3} \Longleftrightarrow$$

$3\nu^2-3=4\nu^2-124 \Longrightarrow \nu^2=121 \Longrightarrow \nu=11$ (ἡ $\nu=-11$ ἀπορρίπτεται).

Συνεπῶς (2) $\Longleftrightarrow 3x^2+33x+90=0 \Longleftrightarrow x^2+11x+30=0$
$\Longleftrightarrow (x+5)(x+6)=0 \Longleftrightarrow x+5=0 \vee x+6=0 \Longrightarrow x=-5$
$\vee\ x_2=-6 \Longrightarrow A=\{-5,-6\}$.

Π10. (Ε1): $\mu|x-3|+6\mu x-x=3\mu+2$

(Ε2): $2x+3|x|=\lambda x+2$

(Ε3): $|\mu-1|x+(\mu-1)|x|=\mu^2-1$

(Ε4): $ax+a_1|x-k_1|+a_2|x-k_2|+\dots+a_\nu|x-k_\nu|=\gamma$,

ὅπου $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\nu, x, \gamma, k_1, k_2, k_3, \dots, k_\nu \in R$.

Ἐπίλυσις: (Ε1): I) $x-3 \geq 0 \Longrightarrow |x-3|=x-3$.

Τότε $(E1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu(x-3)+6\mu x - x = 3\mu+2 \\ x \geqq 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{6\mu+2}{7\mu-1} \\ x \geqq 3, \quad \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\}$$

Διά νά εἶναι δεκτή ἡ λύσις πρέπει καί ἀρκεῖ:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{6\mu+2}{7\mu-1} \geqq 3 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{6\mu+2}{7\mu-1} - 3 \geqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{6\mu+2-21\mu+3}{7\mu-1} \geqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{-15\mu+5}{7\mu-1} \geqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{c} (-15\mu+5)(7\mu-1) \geqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (15\mu-5)(7\mu-1) \leqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{7} \end{array} \right\}.$$

Διά τοῦ παρακάτω διαγράμματος ἔχομεν τάς λύσεις.

μ	$-\infty$		$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$(15\mu-5)(7\mu-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Συνεπῶς ἡ λύσις τῆς (E1) εἶναι ἡ $x = \dfrac{6\mu+2}{7\mu-1}$

μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι: $\dfrac{1}{7} < \mu \leqq \dfrac{1}{3}$

II). $x-3 \leqq 0 \Longrightarrow |x-3| = -(x-3) = 3-x$

Τότε $(E1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -\mu(x-3)+6\mu x - x = 3\mu+2 \\ x \leqq 3 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{2}{5\mu-1} \\ x \leqq 3, \quad \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{2}{5\mu-1} \leqq 3 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{5\mu-1}-3 \leqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2-15\mu+3}{5\mu-1} \leqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{-15\mu+5}{5\mu-1} \leqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (-15\mu+5)(5\mu-1) \leqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} (15\mu-5)(5\mu-1) \geqq 0 \\ \mu \neq \dfrac{1}{5} \end{array}\right\}$$ Διά τοῦ παρακάτω διαγράμματος ἔχομεν τάς λύσεις.

μ	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$(15\mu-5)(5\mu-1)$		+	0	−	0	+	

Συνεπῶς ἡ λύσις τῆς (Ε1) εἶναι ἡ $x=\dfrac{2}{5\mu-1}$, μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι $\mu<\dfrac{1}{5} \vee \mu>\dfrac{1}{3}$

(Ε2): Διά $x=0$ ἡ ἐξίσωσις εἶναι ἀδύνατος.

Συνεπῶς: $(E2) \Longleftrightarrow \underbrace{\left\{\begin{array}{l} 2x+3x=\lambda x+2 \\ x>0 \end{array}\right\}}_{(\Sigma 1)} \vee \underbrace{\left\{\begin{array}{l} 2x-3\lambda=\lambda x+2 \\ x<0 \end{array}\right\}}_{(\Sigma 2)}$

1) $(\Sigma 1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x=\lambda x+2 \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (5-\lambda)x=2 \\ x>0 \end{array}\right\} \; (\Sigma'_1).$

• Εάν $\lambda=5$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ $(\Sigma'1)$ καταντᾶ:

$0\cdot x=2$ (ἀδύνατος $\forall\, x\in R$) $\Longrightarrow$ καί ἡ ἀρχική ἀδύνατος.

• Εάν $\lambda\neq 5 \Longrightarrow (\Sigma'_1) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{5-\lambda} \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{ \dfrac{2}{5-\lambda}>0 \right\}.$

$$\Longleftrightarrow 5-\lambda>0 \Longrightarrow \lambda<5.$$

2. $(\Sigma 2) \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} -x = \lambda x + 2 \\ x < 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} (\lambda+1)x = -2 \\ x < 0 \end{Bmatrix} \quad (\Sigma'2)$

Ἐάν $\lambda = -1$ ἡ ἐξίσωσις τοῦ $(\Sigma'2)$ καταντᾶ:

$0 \cdot x = -2$ (ἀδύνατος $\forall\ x \in R$) $\Longrightarrow$ καί ἡ ἀρχική ἀδύνατος.

Ἐάν $\lambda \neq -1 \Longrightarrow (\Sigma'2) \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x = \frac{-2}{\lambda+1} \\ x < 0 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \left\{ -\frac{2}{\lambda+1} < 0 \right\}$

$\Longleftrightarrow \lambda + 1 > 0 \Longrightarrow \lambda > -1.$

(Ε3):

Α. $\mu > 1 \Longrightarrow \mu - 1 > 0 \Longrightarrow |\mu - 1| = \mu - 1$ καί

$(E3) \Longleftrightarrow x + |x| = \mu + 1 \quad (1)$

i) $x > 0$. Τότε ἡ (1) γίνεται: $2x = \mu + 1 \Longrightarrow x = \frac{\mu+1}{2}$, ρίζα παραδεκτή, ἀφοῦ $\frac{\mu+1}{2} > 0$ $(\mu > 1)$

ii) $x \leq 0$. Τότε ἡ (1) γίνεται: $0 = \mu + 1 \Longrightarrow A = \emptyset$

Β. $\mu = 1$. Τότε ἡ (1) γίνεται:

$0 \cdot (x + |x|) = 0 \Longrightarrow A \equiv R.$

Γ. $\mu < 1 \Longrightarrow \mu - 1 < 0 \Longrightarrow |\mu - 1| = 1 - \mu$

$(E3) \Longleftrightarrow -x + |x| = \mu + 1 \quad (2)$

i) $x \geq 0$. Τότε ἡ (2) γίνεται: $0 = \mu + 1 \Longrightarrow A = \emptyset$ ἄν $\mu \neq -1$ καί $A \equiv R$ ἄν $\mu = -1$.

ii) Ἐάν $x < 0$. Τότε ἡ (2) γίνεται: $-2x = \mu + 1$ $\Longrightarrow x = -\frac{\mu+1}{2}$, ρίζα ἀπαράδεκτη ἄν $\mu + 1 < 0$ $(\mu < -1)$ καί παραδεκτή ἄν $\mu + 1 > 0$ $(\mu > -1)$.

Ἀνακεφαλαιώσεις

μ	Συμπεράσματα διά τάς λύσεις τῆς (Ε3)
$-\infty$	$\nexists$ λύσις
-1	Ἀληθεύει $\forall\ x \in R^+$
	$\exists$ λύσις: $x = -\frac{\mu+1}{2}$
$+1$	Ἀληθεύει $\forall\ x \in R$.
$+\infty$	$\exists$ λύσις: $x = \frac{\mu+1}{2}$

(Ε4) Ἔστω ὅτι: $K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_\nu$. Τότε οἱ ἀριθμοί αὐτοί χωρίζουν τό διάστημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν εἰς $\nu+1$ διαστήματα, τά:

$$-\infty \quad K_1 \quad K_2 \quad K_3 \quad \dots \quad K_{\nu-1} \quad K_\nu \quad +\infty$$

Ἔστω δέ: $-\infty < x \leqq K_1$, $K_1 < x \leqq K_2$, $K_2 < x \leqq K_3, \dots,$

$$K_{\nu-1} < x \leqq K_\nu,\ K_\nu < x < +\infty$$

Διακρίνομεν διαφόρους περιπτώσεις.

α) Ἐάν $x \leqq K_1 < K_2 < K_3 < \dots < K_{\nu-1} < K_\nu$, τότε θά εἶναι:

$$\left.\begin{matrix} x - K_1 \leqq 0 \\ x - K_2 < 0 \\ x - K_3 < 0 \\ \dots\dots \\ x - K_\nu < 0 \end{matrix}\right] \Longrightarrow \left.\begin{matrix} |x-K_1| = K_1 - x \\ |x-K_2| = K_2 - x \\ |x-K_3| = K_3 - x \\ \dots\dots \\ |x-K_\nu| = K_\nu - x \end{matrix}\right\}.$$

Συνεπῶς $E4 \iff \left\{\begin{array}{l} ax + a_1(\kappa_1 - x) + a_2(\kappa_2 - x) + \dots + \\ \dots + a_\nu(\kappa_\nu - x) = \gamma \\ x \leqq \kappa_1 \end{array}\right\}$

ἀπηλλαγμένη τῶν ἀπολύτων τιμῶν.

β) Ἐάν $\kappa_1 < x \leqq \kappa_2 < \kappa_3 < \dots < \kappa_{\nu-1} < \kappa_\nu \Longrightarrow$

$$(E4) \iff \left\{\begin{array}{l} ax + a_1(x - \kappa_1) + a_2(\kappa_2 - x) + \dots + a_\nu(\kappa_\nu - x) = \gamma \\ \kappa_1 < x \leqq \kappa_2 \end{array}\right\}$$

γ) Ἐάν $\kappa_1 < \kappa_2 < x \leqq \kappa_3 < \kappa_4 < \dots < \kappa_{\nu-1} < \kappa_\nu \Longrightarrow$

$$(E4) \iff \left\{\begin{array}{l} ax + a_1(x - \kappa_1) + a_2(x - \kappa_2) + a_3(\kappa_3 - x) + \dots + \\ + a_\nu(\kappa_\nu - x) = \gamma \\ \kappa_2 < x \leqq \kappa_3 \end{array}\right\}$$

Τέλος, ἐάν $\kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 < \dots < \kappa_{\nu-1} < \kappa_\nu < x \Longrightarrow$

$$(E4) \iff \left\{\begin{array}{l} ax + a_1(x - \kappa_1) + a_2(x - \kappa_2) + \dots + a_\nu(x - \kappa_\nu) = \gamma \\ \kappa_\nu < x \end{array}\right\}$$

Διά τῶν $\nu+1$ τούτων συστημάτων εὑρίσκομεν ὅλας τάς λύσεις τῆς (E4), τῶν ὁποίων τό πλῆθος κυμαίνεται ἀπό 0 ἕως $\nu+1$.

Π11. (E1): $\sqrt{x^2+\beta^2} = x - a$

(E2): $\sqrt{x^2+ax} = x - a$

(E3): $\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \dfrac{1}{x^2}} = ax$

(E4): $\sqrt{mx+a} + \sqrt{x+\beta} = \gamma$

(E5): $\sqrt{x+3a^2} + \sqrt{x-2a^2} = 5a$

(E6): $\dfrac{x}{\tau} + \sqrt{\dfrac{2x}{g}} = \theta, \quad g > 0.$

Ἐπίλυσις:

$$(E1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x^2+\beta^2=(x-a)^2 \\ x-a \geqslant 0 \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 2ax=a^2-\beta^2 \\ x \geqslant a \end{array} \right\} \Longrightarrow$$

(i) Ἐάν $a=\beta=0$ τότε $(E1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0x=0 \\ x\geqslant 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow A \equiv R_0^+$

(ii) Ἐάν $a=0$, $\beta \neq 0$ τότε $(E1) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0x=-\beta^2 \\ x\geqslant 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow A \equiv \phi$

(iii) Ἐάν $a\neq 0$ τότε $(E1) \Longleftrightarrow x=\dfrac{a^2-\beta^2}{2a} \wedge x \geqslant a \Longleftrightarrow$

$$x=\frac{a^2-\beta^2}{2a} \wedge \frac{a^2-\beta^2}{2a} \geqslant a \Longleftrightarrow x=\frac{a^2-\beta^2}{2a} \wedge \frac{a^2+\beta^2}{2a} \leqslant 0.$$

Ἐπειδή $a\neq 0 \Longrightarrow a^2+\beta^2>0 \quad \forall \beta \in R \Longrightarrow$

$\dfrac{a^2+\beta^2}{2a} \leqslant 0 \Longleftrightarrow a<0 \Longrightarrow$ Ἐάν $a<0$, $\beta\in R$

τότε $A=\left\{x\in R:\ x=\dfrac{a^2-\beta^2}{2a}\right\}$

$$(E2) \Longleftrightarrow x \geqq a \wedge x^2+ax=(x-a)^2 \Longleftrightarrow x \geqq a \wedge 3ax=a^2$$

(i) $a\neq 0 \Longrightarrow (E2) \Longleftrightarrow x \geq a \wedge x=\dfrac{a}{3} \Longleftrightarrow x=\dfrac{a}{3}$

$\wedge \dfrac{a}{3} \geqslant a \Longleftrightarrow x=\dfrac{a}{3} \wedge a\leqslant 0 \Longrightarrow A=\left\{\dfrac{a}{3}\right\}$,

Ἐάν $a<0$.

(ii) Ἐάν $a>0$ τότε $A\equiv\phi$.

(iii) Ἐάν $a=0$ τότε $(E2) \Longleftrightarrow x\geqslant 0 \wedge 0x=0 \Longrightarrow A\equiv R_0^+$

$$(E3) \Longleftrightarrow x^2-\frac{1}{x^2} \geq 0 \wedge ax\geq 0 \wedge 2x^2+2\sqrt{x^4-\frac{1}{x^4}}=a^2x^2$$

$$\Longleftrightarrow |x|\geq 1 \wedge ax\geq 0 \wedge 2\sqrt{x^4-\frac{1}{x^4}}=(a^2-2)x^2 \Longleftrightarrow$$

$$|x|\geqslant 1 \wedge ax\geqslant 0 \wedge a^2-2\geqslant 0 \wedge 4\left(x^4-\frac{1}{x^4}\right)=\left(a^2-2\right)^2x^4$$

$$\Longleftrightarrow |x|\geqslant 1 \wedge ax\geqslant 0 \wedge |a|\geqslant\sqrt{2} \wedge \left[4-(a^2-2)^2\right]x^8=4$$

$|x| \geq 1 \wedge ax \geq 0 \wedge |a| \geq \sqrt{2} \wedge 4-(a^2-2)^2 > 0 \wedge$

$x^8 = \dfrac{4}{4-(a^2-2)^2} \iff |x| \geq 1 \wedge ax \geq 0 \wedge \sqrt{2} \leq |a| < 2 \wedge$

$|x| = \sqrt[8]{\dfrac{4}{4-(a^2-2)^2}} \iff ax \geq 0 \wedge \sqrt{2} \leq |a| < 2 \wedge$

$|x| = \sqrt[8]{\dfrac{4}{4-(a^2-2)^2}}$ (Διότι: $\sqrt{2} \leq |a| < 2 \implies$

$|x| = \sqrt[8]{\dfrac{4}{4-(a^2-2)^2}} \geq 1$). Συνεπώς:

(i) Ἐάν $\sqrt{2} \leq a < 2$ τότε $x = \sqrt[8]{\dfrac{4}{4-(a^2-2)^2}}$

(ii) Ἐάν $-2 < a \leq -\sqrt{2}$ τότε $x = -\sqrt[8]{\dfrac{4}{4-(a^2-2)^2}}$

(E4) $\iff \sqrt{x+b} = \gamma - \sqrt{mx+a}$ (μέ θετικά ὑπόρριζα)

$\iff \gamma^2 + (a-b) + (m-1)x = 2\gamma\sqrt{mx+a} \iff (m-1)^2x^2 +$

$+2\left[(m-1)(\gamma^2+a-b) - 2\gamma^2 m\right]x + (\gamma^2+a-b)^2 - 4a\gamma^2 = 0$ (I)

Δι' ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως (I) (2ου βαθμοῦ)

εὑρίσκομεν τάς τιμάς τοῦ x.

Αἱ τιμαί τοῦ x εἶναι πραγματικαί, ἐάν καί μόνον ἐάν

$\left[(m-1)(\gamma^2+a-b) - 2\gamma^2 m\right]^2 - (m-1)^2\left[(\gamma^2+a-b)^2 - 4a\gamma^2\right] \geq 0$

$\iff \gamma^2 m^2 - m(m-1)(\gamma^2+a-b) + a(m-1)^2 \geq 0 \iff$

$\gamma^2 m - (m-1)(a-bm) \geq 0$ (II).

(i) ἄν $m=1$ ἡ ἀνισότης (II) καταντᾷ εἰς τήν

$\gamma^2 \geq 0$ ἡ ὁποία εἶναι μόνιμος.

(ii) ἄν $m = \dfrac{a}{b}$ τότε ἡ (II) πληροῦται ἐφ' ὅσον $m \geq 0$.

(iii) ἄν $m>1$ τότε: (α) $a<\beta m \Longrightarrow$ ἡ (II) πληροῦται $\forall \gamma \in R$.

(β) $a>\beta m \Longrightarrow$ ἡ (II) πληροῦται ἐάν

καί μόνον ἐάν $\gamma^2 \geq \dfrac{(m-1)(a-\beta m)}{m}$.

(iv) ἄν $0<m<1$ τότε: (α) $a>\beta m$ ἡ (II) πληροῦται $\forall \gamma \in R$.

(β) $a<\beta m$ ἡ (II) πληροῦται ἐάν

καί μόνον ἐάν $\gamma^2 \geq \dfrac{(m-1)(a-\beta m)}{m}$.

(v) ἄν $m=0$ ἡ (II) καταντᾷ εἰς τήν $a \geq 0$.

(vi) ἄν $m<0$ τότε ἡ (II) πληροῦται ἐάν καί μόνον

ἐάν $a>\beta m \wedge \gamma^2 \leq \dfrac{(m-1)(a-\beta m)}{m}$

<u>Παρατήρησις:</u> Ἠδυνάμεθα νά θέσωμεν: $\sqrt{mx+a}=\varphi>0$ καί $\sqrt{x+\beta}=\omega>0 \Longrightarrow mx+a=\varphi^2$ καί $x+\beta=\omega^2$, ὅτε ἡ ἐξίσωσις μας εἶναι ἰσοδύναμος πρός τό σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} \varphi+\omega=\gamma \\ \varphi^2-m\omega^2=a-m\beta \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega=\gamma-\varphi \\ \varphi^2-m(\gamma-\varphi)^2=a-m\beta \end{Bmatrix} \ldots$$

(E5): (α) Ἐάν $a=0$ τότε (E5) $\Longleftrightarrow 2\sqrt{x}=0 \Longleftrightarrow x=0$

(β) Ἐάν $a<0$ τότε $A\equiv\emptyset$.

(γ) Ἐάν $a>0$ τότε (E5) $\Longleftrightarrow \begin{cases} 25a^2-(x+3a^2+x-2a^2)>0 \\ 4(x+3a^2)(x-2a^2)= \\ =\left[25a^2-(x+3a^2+x-2a^2)\right]^2 \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} 24a^2-2x>0 \\ 4(x^2+a^2x-6a^4)=(24a^2-2x)^2 \end{Bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<12a^2 \\ 25a^2x=150a^4 \end{Bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{Bmatrix} x<12a^2 \\ x=\dfrac{150a^2}{25} \end{Bmatrix} \Longrightarrow x=\frac{150a^2}{25} \text{ διότι } x=6a^2<12a^2$$

Ὑποπεριπτώσεις:

(i) $x+3a^2=0 \Longrightarrow x=-3a^2 \Longrightarrow \sqrt{x-2a^2} \notin R \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(ii) $x-2a^2=0 \Longrightarrow x=2a^2$ ἡ ἀρχική ἐξίσωσις καταντᾶ εἰς τήν $\sqrt{5a^2}=5a \Longrightarrow A\equiv\phi$

(E6) $\Longleftrightarrow \sqrt{\dfrac{2x}{g}}=\theta-\dfrac{x}{\tau} \wedge x\geqslant 0 \wedge \theta\geqslant \dfrac{x}{\tau} \Longrightarrow$

(i)· Ἐάν $\tau>0$ τότε $\theta\geqslant 0$ (ἄλλως ἡ δοθεῖσα εἶναι ἀδύνατος) $\Longrightarrow$ (E6) $\Longleftrightarrow \dfrac{2x}{g}=\left(\theta-\dfrac{x}{\tau}\right)^2 \wedge 0\leq x\leq \tau\theta$

$\Longleftrightarrow x^2-2\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)x+\theta^2\tau^2=0 \wedge 0\leq x\leq\tau\theta \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)\pm\tau\sqrt{\dfrac{\tau}{g}\left(\dfrac{\tau}{g}+2\theta\right)} \wedge 0\leq x\leq\tau\theta$

$\Longleftrightarrow x=\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)-\tau\sqrt{\dfrac{\tau}{g}\left(\dfrac{\tau}{g}+2\theta\right)}$ (διατί;)

(ii)· Ἐάν $\tau<0 \wedge \theta<0$ τότε $x\geqslant 0 \wedge \theta\geqslant\dfrac{x}{\tau} \Longleftrightarrow$ $\theta\tau\leq x \Longrightarrow$ (E6) $\Longleftrightarrow \dfrac{2x}{g}=\left(\theta-\dfrac{x}{\tau}\right)^2 \wedge \theta\tau\leq x$

$\Longleftrightarrow x^2-2\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)+\theta^2\tau^2=0 \wedge \theta\tau\leq x \Longleftrightarrow$

$x=\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)\pm|\tau|\sqrt{\dfrac{\tau}{g}\left(\dfrac{\tau}{g}+2\theta\right)} \wedge \theta\tau\leq x \Longleftrightarrow$

$x=\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)-\tau\sqrt{\dfrac{\tau}{g}\left(\dfrac{\tau}{g}+2\theta\right)}$ (διατί;)

(iii)· Ἐάν $\tau<0 \wedge \theta\geqslant 0$ τότε $x\geqslant 0 \wedge \theta\geqslant\dfrac{x}{\tau} \Longleftrightarrow$ $x\geqslant 0 \wedge \theta\tau\leq x \Longleftrightarrow x\geqslant 0 \Longrightarrow$ (E6) $\Longleftrightarrow \dfrac{2x}{g}=$ $=\left(\theta-\dfrac{x}{\tau}\right)^2 \wedge x\geqslant 0 \Longleftrightarrow x^2-2\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)+\theta^2\tau^2=0 \wedge$ $\wedge x\geqslant 0 \Longleftrightarrow x=\tau\left(\theta+\dfrac{\tau}{g}\right)\pm|\tau|\sqrt{\dfrac{\tau}{g}\left(\dfrac{\tau}{g}+2\theta\right)}$.

δεκτές ἐάν $\theta\leq-\tau/2g$ (διατί;).

Π12. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις

(Ε1): $(a-1)x + a\sqrt{1-x^2} = a+1$

(Ε2): $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (\lambda+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}}$

(Ε3): $\sqrt{x^2 - a\sqrt{x^2+a^2}} = x-a$

(Ε4): $\sqrt{a^2-x^2} + \sqrt{2ax-x^2} = b$

(Ε5): $\sqrt{b^2 + x\sqrt{a^2+x^2-b^2}} = x-b$

(Ε6): $\dfrac{1+x-\sqrt{2x+x^2}}{1+x+\sqrt{2x+x^2}} = \lambda^3 \dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}$

Ἐπίλυσις:

(Ε1): Ἐπειδή $1-x^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow -1 \leq x \leq 1$, ἀντικαθιστῶμεν ὅπου: $x = συνω$ μέ $0 \leq ω \leq \pi \Longrightarrow ημω \geqslant 0$. Ἄρα $(Ε1) \Longleftrightarrow (a-1)συνω + a\sqrt{1-συν^2ω} = a+1 \Longleftrightarrow (a-1)συνω + a|ημω| = a+1 \Longleftrightarrow (a-1)συνω + aημω = a+1$. (Ε)

Διά νά ἔχῃ λύσιν ἡ ἐξίσωσις (Ε), συνεπῶς καί ἡ ἀρχική, πρέπει: (βλ. Μαθηματικά ΣΤ' Γυμνασίου - Τριγωνομετρία παράγρ. 3.4.1. καί παράγραφος 3.4.2.), $(a-1)^2 + a^2 \geqslant (a+1)^2 \Longleftrightarrow a^2 - 4a \geqslant 0 \Longleftrightarrow a \leq 0 \vee a \geqslant 4$. Ἐπιλύοντες τότε τήν (Ε) εὑρίσκομεν καί τάς λύσεις τῆς δοθείσης ἐκ τῆς σχέσεως $x = συνω$.

<u>Παρατήρησις:</u> Ἠδυνάμεθα νά ἐργασθῶμεν καί κατά τόν ἀκόλουθον τρόπον: **(Ε1)** $\Longleftrightarrow$

$a\sqrt{1-x^2} = a+1+(1-a)x \wedge |x|\le 1 \iff (2a^2-2a+1)x^2 -$

$- 2(a^2-1)x+2a+1=0 \wedge |x|\le 1 \iff |x|\le 1$ καί

$x = \dfrac{a^2-1\pm a\sqrt{a(a-4)}}{2a^2-2a+1}$, ἐάν $a\le 0 \vee a\ge 4$.

(Ε2) $\iff \sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x-\sqrt{x}} = (\lambda+1)\sqrt{\dfrac{x}{x+\sqrt{x}}} \wedge x>0 \wedge$

$\wedge\ x-\sqrt{x}\ge 0 \wedge \lambda+1>0 \iff$

$\iff x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x} = (\lambda+1)\sqrt{x} \wedge x>0 \wedge x^2\ge x \wedge \lambda>-1$

$\iff x+\sqrt{x}-\sqrt{x^2-x} = \lambda\sqrt{x}+\sqrt{x} \wedge x\ge 1 \wedge \lambda>-1 \iff$

$\iff x-\sqrt{x}\,\sqrt{x-1} = \lambda\sqrt{x} \wedge x\ge 1 \wedge \lambda>-1 \iff$

$\iff \sqrt{x}-\sqrt{x-1} = \lambda \wedge x\ge 1 \wedge \lambda>-1 \wedge \lambda>0 \iff$

$\iff x+x-1-2\sqrt{x}\,\sqrt{x-1} = \lambda^2 \wedge x\ge 1 \wedge \lambda>0 \iff$

$\iff 2x-1-\lambda^2 = 2\sqrt{x(x-1)} \wedge x\ge 1 \wedge 2x-1\ge\lambda^2 \wedge \lambda>0$

$\iff (2x-1-\lambda^2)^2 = 4x(x-1) \wedge \lambda>0 \wedge x\ge 1 \wedge x\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2}$

$\iff 4x^2+1+\lambda^4-4x-4x\lambda^2+2\lambda^2 = 4x^2-4x \wedge \lambda>0 \wedge$

$\wedge\ x\ge 1 \wedge x\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2} \iff x=\dfrac{\lambda^4+2\lambda^2+1}{4\lambda^2} \wedge \lambda>0 \wedge$

$\wedge\ x\ge 1 \wedge x\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2} \implies$

1. ἐάν $\dfrac{\lambda^2+1}{2}\ge 1 \iff \lambda^2+1\ge 2 \iff \lambda^2\ge 1 \iff$

$\iff (\lambda-1)(\lambda+1)\ge 0$. Τότε ἐκ τῶν $x\ge 1\wedge x\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2}$

ἀρκεῖ ἡ $x\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2} \iff \dfrac{\lambda^4+2\lambda^2+1}{4\lambda^2}\ge\dfrac{\lambda^2+1}{2} \iff$

$\iff 2\lambda^4+4\lambda^2+2\ge 4\lambda^4+4\lambda^2 \iff 2\ge 2\lambda^2 \implies$

$\implies 1\ge\lambda^2 \iff (\lambda+1)(\lambda-1)\le 0$. Ἄρα ἔχομεν

$$\left.\begin{array}{l} i)\ \lambda > 0 \\ ii)\ (\lambda+1)(\lambda-1) \geqslant 0 \\ iii)\ (\lambda+1)(\lambda-1) \leqslant 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1$$

2. ›Εάν $\frac{\lambda^2+1}{2} < 1 \Longleftrightarrow \lambda^2+1 < 2 \Longleftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1) < 0$

Τότε ἀρκεῖ ἤ $x \geqslant 1 \Longleftrightarrow \frac{\lambda^4+2\lambda^2+1}{4\lambda^2} \geqslant 1 \Longleftrightarrow \lambda^4+2\lambda^2+$

$+1 \geqslant 4\lambda^2 \Longleftrightarrow \lambda^4-2\lambda^2+1 \geqslant 0 \Longleftrightarrow (\lambda^2-1)^2 \geqslant 0$

›Ἄρα ἔχομεν $\left\{\begin{array}{l} \lambda > 0 \\ (\lambda+1)(\lambda-1) < 0 \\ (\lambda^2-1)^2 \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 0 < \lambda < 1 \Longrightarrow x = \frac{\lambda^4+2\lambda^2+1}{4\lambda^2}$

(E3): (α) ›Εάν $a=0$ τότε $(E3) \Longleftrightarrow \sqrt{x^2} = x \Longleftrightarrow |x| = x$

$\Longrightarrow A \equiv R_0^+$.

(β) ›Εάν $a \neq 0$ τότε $(E3) \Longleftrightarrow x^2 - a\sqrt{x^2+a^2} = (x-a)^2 \wedge$

$\wedge\ x-a \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sqrt{x^2+a^2} = 2x-a \wedge x-a \geqslant 0 \Longleftrightarrow$

$x^2+a^2 = (2x-a)^2 \wedge 2x \geqslant a \wedge x \geqslant a \Longleftrightarrow 3x^2-4ax=0$

$\wedge\ x \geqslant \frac{a}{2} \wedge x \geqslant a \Longleftrightarrow x(3x-4a)=0 \wedge x \geqslant a > 0$

ἤ $x(3x-4a)=0\ \ x \geqslant \frac{a}{2} \wedge a<0 \Longleftrightarrow x=0 \vee$

$\vee\ x = \frac{4a}{3} \wedge x \geqslant a > 0$ ἤ $x=0 \vee x = \frac{4a}{3} \wedge x \geqslant \frac{a}{2}$

$\wedge\ a<0 \Longleftrightarrow x = \frac{4a}{3}$ ›εάν $a>0 \vee x=0$ ›εάν $a<0$

(E4): (α) ›Εάν $a=\beta=0$ τότε $(E4) \Longleftrightarrow \sqrt{-x^2} + \sqrt{-x^2} = 0 \Longleftrightarrow$

$|x|\sqrt{-1} = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

(β) Ἐάν $a \neq 0$ τότε πρέπει $b > 0$, διαφορετικά ἡ (E4) εἶναι ἀδύνατος. Ἐάν $a > 0$ ἔχωμεν (E4) $\Longleftrightarrow$

$\sqrt{2ax - x^2} = b - \sqrt{a^2 - x^2} \wedge a^2 - x^2 \geqslant 0 \wedge 2ax - x^2 \geqslant 0$

$\wedge\ b - \sqrt{a^2 - x^2} \geqslant 0 \Longleftrightarrow 2ax - x^2 = b^2 + a^2 - x^2 -$

$- 2b\sqrt{a^2 - x^2} \wedge x^2 \leqslant a^2 \wedge x(2a - x) \geqslant 0 \wedge b \geqslant \sqrt{a^2 - x^2}$

$\Longleftrightarrow 2ax = b^2 + a^2 - 2b\sqrt{a^2 - x^2} \wedge |x| \leqslant a \wedge 0 \leqslant x \leqslant 2a$

$\wedge\ b^2 \geqslant a^2 - x^2 \Longleftrightarrow 2ax - (a^2 + b^2) = -2b\sqrt{a^2 - x^2} \wedge$

$\wedge\ 0 \leqslant x \leqslant a \wedge x^2 \geqslant a^2 - b^2 \wedge 2ax - (a^2 + b^2) \leqslant 0$

$\Longleftrightarrow 4(a^2 + b^2)x^2 - 4a(a^2 + b^2)x + (a^2 + b^2)^2 - 4a^2 b^2 = 0$

$\wedge\ 0 \leqslant x \leqslant a \wedge x \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2a} \wedge x^2 - (a^2 - b^2) \geqslant 0 \Longrightarrow$

(i) Ἐάν $a \leqslant b$ τότε $a \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2a} \Longrightarrow$ (E4) $\Longleftrightarrow$

$4(a^2 + b^2)x^2 - 4a(a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)^2 = 0 \wedge 0 \leqslant x \leqslant a$

$\Longleftrightarrow x^2 - ax + \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4(a^2 + b^2)} = 0 \wedge 0 \leqslant x \leqslant a \Longleftrightarrow$

$x = \dfrac{1}{2}\left(a \pm b \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}\right) \wedge 0 \leqslant x \leqslant a \wedge 3a^2 \geqslant b^2$

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(a \pm b \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}\right) \wedge 0 < a \leqslant b \leqslant a\sqrt{3}$

(διατί; Ὑπόδ: $x_1 + x_2 = a > 0 \wedge x_1 x_2 = (a^2 - b^2)^2 / 4(a^2 + b^2) > 0$).

(ii) Ἐάν $b \leqslant a$ τότε $\dfrac{a^2 + b^2}{2a} \leqslant a \Longrightarrow$ (E4) $\Longleftrightarrow$

$x^2 - ax + \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{4(a^2 + b^2)} = 0 \wedge 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{a^2 + b^2}{2a} \wedge$

$\wedge\ x^2 \geqslant \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 \Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\left(a \pm b \cdot \sqrt{\dfrac{3a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}\right) \wedge$

$\wedge\ 0 \leq x \leq \dfrac{a^2+b^2}{2a} \ \wedge\ \sqrt{a^2-b^2} \leq x \implies$

(α) Ἐάν $\sqrt{a^2-b^2} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2a} \leq \dfrac{a^2+b^2}{2a} \iff a \leq \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} b$

τότε $(E4) \iff x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(a \pm b\sqrt{\dfrac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right) \ \wedge$

$\wedge\ \sqrt{a^2-b^2} \leq x \leq \dfrac{a^2+b^2}{2a}$ (ι)

(β) Ἐάν $\dfrac{a^2+b^2}{2a} < \sqrt{a^2-b^2} \iff a > \dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6} b$

τότε $(E4) \iff x_{1,2} = \dfrac{1}{2}\left(a \pm b\sqrt{\dfrac{3a^2-b^2}{a^2+b^2}}\right) \ \wedge$

$\wedge\ \dfrac{a^2+b^2}{2a} \leq x \leq \sqrt{a^2-b^2}$ (ι')

Ἔστω $\varphi(x) = x^2 - ax + \dfrac{(a^2-b^2)^2}{4(a^2+b^2)}$ τότε $\varphi\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a}\right) =$

$= -\dfrac{b^2(a^2-b^2)(b^2+3a^2)}{4a^2(a^2+b^2)} \leq 0$ διότι $0 < b \leq a$

Συνεπῶς (i_1) Ἐάν $a=b$ τότε $x_1 = 0 \vee x_2 = a$ μέ $0 \leq x \leq a$ (διατί;) $\implies A = \{0, a\}$

(i_2) Ἐάν $b<a$ τότε $\varphi\left(\dfrac{a^2+b^2}{2a}\right) < 0$ ὅτε ἐάν $\varphi(\sqrt{a^2-b^2}) > 0$ μία μόνο ρίζα πληροῖ τόν περιορισμόν (ι) ἤ (ι') καί συνεπῶς εἶναι δεκτή, διαφορετικά οὐδεμία ρίζα εἶναι δεκτή (διατί;)

Ἡ περίπτωσις $a<0$ ἐξετάζεται ὁμοίως ...

(E5) $\iff b^2 + x\sqrt{a^2+x^2-b^2} = (x-b)^2 \ \wedge\ x-b \geq 0 \iff$

$$\Longleftrightarrow x\sqrt{a^2+x^2-b^2} = x(x-2b) \wedge x \geq b \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ b \leq 0 \end{array} \right\} (1) \vee \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{a^2+x^2-b^2} = x-2b \\ x \geq b \wedge x \geq 2b \end{array} \right\} (2)$$

$$(1) \Longrightarrow A_1 = \{0\}, \forall a \in R \wedge b \leq 0.$$

$$(2) \Longleftrightarrow a^2+x^2-b^2 = (x-2b)^2 \wedge x \geq b \wedge x \geq 2b$$

$$\Longleftrightarrow 4bx = 5b^2-a^2 \wedge x \geq b \wedge x = 2b \Longrightarrow$$

(i), Εάν $b=0$ τότε $x \geq 0$ και $0x = -a^2 \Longrightarrow$

(α), Εάν $a=0 \Longrightarrow A_2 \equiv R_0^+$

(β), Εάν $a \neq 0 \Longrightarrow A_2 \equiv \phi$

(ii), Εάν $b \neq 0$ τότε $x = \dfrac{5b^2-a^2}{4b} \wedge x \geq b \wedge x \geq 2b$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5b^2-a^2}{4b} \wedge \frac{5b^2-a^2}{4b} \geq b \wedge \frac{5b^2-a^2}{4b} \geq 2b$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5b^2-a^2}{4b} \wedge b(b^2-a^2) \geq 0 \wedge b(a^2+3b) \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5b^2-a^2}{4b} \wedge b(b^2-a^2) \geq 0 \wedge b < 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5b^2-a^2}{4b} \wedge b^2 \leq a^2 \wedge b < 0$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{5b^2-a^2}{4b} \wedge -|a| \leq b < 0$$

Συνεπώς α), εάν $a=b=0 \Longrightarrow A = A_1 \cup A_2 \equiv R_0^+$

β), εάν $-|a| \leq b < 0 \Longrightarrow A = A_1 \cup A_2 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow A = \{0 \text{ (διπλή)}\}$, εάν $a = \pm b\sqrt{5}$ ή

$A = \left\{0, \dfrac{5b^2-a^2}{4b}\right\}$, εάν $a \neq \pm b\sqrt{5}$

γ), ἐάν $\left\{ \begin{array}{l} b = 0 \ , \ a \neq 0 \\ \text{ἤ} \ \ b < -|a| \end{array} \right\} \Longrightarrow A = A_1 \cup A_2 = A_1 = \{0\}$.

δ), ἐάν $b > 0 \Longrightarrow A \equiv \phi$.

$$(E6) \Longleftrightarrow \frac{2+2x-2\sqrt{x(2+x)}}{2+2x+2\sqrt{x(2+x)}} = \lambda^3 \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}} \wedge x \geq 0 \wedge \lambda > 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^2 = \lambda^3 \frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}} \wedge x \geq 0 \wedge \lambda > 0$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}}\right)^3 = \lambda^3 \quad \wedge \quad x \geq 0 \ \wedge \ \lambda > 0$$

$$\xLeftrightarrow{(\delta\iota\alpha\tau\acute{\iota};)} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{x}}{\sqrt{2+x}+\sqrt{x}} = \lambda \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ \lambda > 0$$

$$\xLeftrightarrow{(\delta\iota\alpha\tau\acute{\iota};)} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \geq 0 \ \wedge \ \lambda > 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{x+2} = \left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^2 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ 0 < \lambda \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{(1-\lambda)^2}{(1+\lambda)^2-(1-\lambda)^2} \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ 0 < \lambda \leq 1$$

$$\Longleftrightarrow x = \frac{(1-\lambda)^2}{2\lambda} \quad , \text{ἐάν} \quad 0 < \lambda \leq 1 .$$

Π13. Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις

$(E1)$: $\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{5a}$

$(E2)$: $\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{b-x} = \sqrt[4]{a+b-2x}$

$(E3)$: $\sqrt[3]{a+x} - \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[6]{a^2-x^2} \quad | \ a \in R - \{0\}$

$(E4)$: $\dfrac{1-ax}{1+ax} - \sqrt[3]{\dfrac{1-bx}{1+bx}} = 0 \quad \Big| \ a, b \in R^+$

$(E5)$: $\dfrac{\sqrt[3]{(27a+8x)^2}}{15\sqrt[15]{x^{13}}} + \dfrac{8\sqrt[15]{x^2}}{3\sqrt[3]{27a+8x}} = \dfrac{8}{5\sqrt[5]{x}}$

(Ε6): $\sqrt[\nu]{(\alpha+x)^2} + 2\sqrt[\nu]{(\alpha-x)^2} = 3\sqrt[\nu]{\alpha^2-x^2}$

Ἐπίλυσις: $(\text{Ε}1) \iff \left(\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{x}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{x}}\right)^3 +$

$+\left(\sqrt[3]{-5\alpha}\right)^3 = 3\sqrt[3]{\alpha+\sqrt{x}}\;\sqrt[3]{\alpha-\sqrt{x}}\;\sqrt[3]{-5\alpha}$ (διατί;)

$\iff -3\alpha = -3\sqrt[3]{\alpha^2-x}\;\sqrt[3]{5\alpha} \iff \alpha^3 = 5\alpha(\alpha^2-x)$

(i) Ἐάν $\alpha=0 \implies A \equiv R$

(ii) Ἐάν $\alpha\neq 0 \implies (\text{Ε}1) \iff \alpha^2 = 5\alpha^2 - 5x \iff x = \dfrac{4\alpha^2}{5} \implies$

$$\implies A = \left\{\frac{4\alpha^2}{5}\right\}.$$

$(\text{Ε}2) \iff \left\{\begin{array}{l}\left(\sqrt[4]{\alpha-x} + \sqrt[4]{\beta-x}\right)^4 = \left(\sqrt[4]{\alpha+\beta-2x}\right)^4 \\ \alpha \geq x \ \wedge\ \beta \geq x\end{array}\right\} \iff$

$\iff \left\{\begin{array}{l}\sqrt[4]{\alpha-x}\;\sqrt[4]{\beta-x}\left(2\sqrt{\alpha-x} + 2\sqrt{\beta-x} + 3\sqrt[4]{\alpha-x}\;\sqrt[4]{\beta-x}\right) = 0 \\ x \leq \alpha \ \wedge\ x \leq \beta\end{array}\right\}$

$\iff x=\alpha \ \vee\ x=\beta \ \vee\ \left\{\begin{array}{l}2\sqrt{\alpha-x} + 2\sqrt{\beta-x} + 3\sqrt[4]{(\alpha-x)(\beta-x)} = 0 \\ x \leq \alpha \ \wedge\ x \leq \beta\end{array}\right\}$

$\iff x=\alpha \ \vee\ x=\beta \ \vee\ x=\alpha=\beta$

Ἄρα ἐάν $\alpha=\beta$ ἤ $\alpha\neq\beta \implies x=\alpha \ \vee\ x=\beta$

$(\text{Ε}3) \iff \sqrt[3]{\alpha+x} + \left(-\sqrt[3]{\alpha-x}\right) + \left(-\sqrt[6]{\alpha^2-x^2}\right) = 0 \quad (1)$

Εἶναι γνωστόν, ὅτι ἡ ταυτότης $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma =$
$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$ διά $\alpha\neq\beta$ ἤ

$\beta\neq\gamma$ ἤ $\gamma\neq\alpha$ δίδει τήν ἰσοδυναμίαν $\alpha+\beta+\gamma=0$

$\iff \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$.

Ἐάν εἰς τήν (1) ἦτο π.χ. $\sqrt[3]{\alpha+x} = -\sqrt[3]{\alpha-x}$

ὁπότε $\alpha+x = -(\alpha-x)$, θά ἦτο ἐξ αὐτῆς $2\alpha=0$ ἄτοπον

Ἡ (1) λοιπόν, μέ $\alpha^2-x^2>0$, $\iff$

$$(\sqrt[3]{a+x})^3 + (-\sqrt[3]{a-x})^3 + (-\sqrt[6]{a^2-x^2})^3 = 3\sqrt[3]{a+x}\cdot\sqrt[3]{a-x}\cdot$$

$$\sqrt[6]{a^2-x^2} \iff a+x-a+x-\sqrt{a^2-x^2} = 3\cdot\sqrt[3]{a^2-x^2}\ \sqrt[6]{a^2-x^2}$$

$$\iff 2x-\sqrt{a^2-x^2} = 3\ \sqrt[6]{(a^2-x^2)^2}\quad \sqrt[6]{a^2-x^2} \iff$$

$$\iff 2x-\sqrt{a^2-x^2} = 3\ \sqrt[6]{(a^2-x^2)^3} \iff x = 2\sqrt{a^2-x^2}$$

καί διά $x>0$ (ἡ $x=0$ δέν ἐπαληθεύει τήν Ε3 ἀφοῦ $a\neq 0$), $\iff x^2 = 4(a^2-x^2) \iff 5x^2 = 4a^2$ $\iff x = \frac{2}{\sqrt{5}}|a|$. Συνεπῶς ρίζα τῆς (Ε3) εἶναι ἡ

$x = \frac{2}{\sqrt{5}}|a|$ ὡς ἐπαληθεύουσα καί τήν $a^2-x^2>0$

καί τήν $x>0$.

Παρατήρησις:

›Ηδυνάμεθα νά διαιρέσωμεν καί τά δύο μέλη τῆς ἀρχικῆς διά $\sqrt[6]{a^2-x^2}$.

›Επειδή $a^2-x^2>0 \implies \sqrt[6]{a^2-x^2} \in R^+$.

$$(E3) \iff \sqrt[6]{\frac{a+x}{a-x}} - \sqrt[6]{\frac{a-x}{a+x}} - 1 = 0 \xleftrightarrow{\sqrt[6]{\frac{a+x}{a-x}} = \omega\ (1)}$$

$$\omega - \frac{1}{\omega} - 1 = 0 \iff \omega^2-\omega-1 = 0 \implies \omega = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

$$(1) \implies \sqrt[6]{\frac{a+x}{a-x}} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \iff \frac{a+x}{a-x} = \left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^6 \iff$$

$$\iff \frac{a+x}{a-x} = \frac{1\pm 6\sqrt{5}\pm 75\pm 100\sqrt{5}\pm 375\pm 150\sqrt{5}}{64} \iff$$

$$\iff \frac{a+x}{a-x} = 9\pm 4\sqrt{5} \xrightarrow{(\text{τέχνασμα ἀναλογιῶν})} x = \pm\frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

(E4) Προφανῶς αἱ ρίζαι τῆς (E4) πρέπει νά ἐπαληθεύουν τάς σχέσεις $1+ax\neq 0 \wedge 1+bx\neq 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x\neq -\frac{1}{a} \wedge x\neq -\frac{1}{b}$ (1).

Συνεπῶς: (E4) $\Longleftrightarrow \left(\frac{1-ax}{1+ax}\right)^3=\frac{1-bx}{1+bx} \Longleftrightarrow \frac{(1-ax)^3-(1+ax)^3}{(1-ax)^3+(1+ax)^3}=$

$=\frac{1-bx-(1+bx)}{1-bx+(1+bx)} \Longleftrightarrow x\left(\frac{3a+a^3x^2}{1+3a^2x^2}-b\right)=0$ (2).

Ἐκ τῆς (2) $\Longrightarrow x_1=0$ καί αἱ x_2, x_3 ἐκ τῆς ἐξισώσεως $\frac{3a+a^3x^2}{1+3a^2x^2}=b \Longleftrightarrow a^2(a-3b)x^2=b-3a$

καί μέ $a\neq 3b$, $\Longleftrightarrow x^2=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{b-3a}{a-3b} \Longleftrightarrow x^2=\frac{1}{a^2}\cdot$

$\cdot\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}$. Αἱ λύσεις ἄρα τῆς (E4) εἶναι αἱ:

$$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}},\ x_3=-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}}.$$

<u>Διερεύνησις:</u> Διά νά εἶναι $x_1, x_2, x_3\in R$ πρέπει

$\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}\geq 0 \Longleftrightarrow (\lambda-3)(\lambda-\frac{1}{3})\leq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{3}<\lambda\leq 3$.

Διά νά εἶναι αἱ x_1, x_2, x_3 δεκταί, πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τάς σχέσεις (1).

Ἡ x_1 τάς ἱκανοποιεῖ ἀφοῦ $x_1=0>-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}$.

Ἡ x_2 ἐπίσης, διότι διά $\frac{1}{3}<\lambda\leq 3$ εἶναι

$$x_2\geq 0>-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}.$$

Διά τήν x_3 πρέπει $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}}\neq -\frac{1}{a} \wedge -$

$$-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}} \neq -\frac{1}{b} \iff \sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}} \neq 1 \wedge \sqrt{\frac{\lambda-3}{1-3\lambda}} \neq$$

$$\neq \frac{a}{b} = \frac{1}{\lambda} \iff \frac{\lambda-3}{1-3\lambda} \neq 1 \wedge \frac{\lambda-3}{1-3\lambda} \neq \frac{1}{\lambda^2}$$

καί μετά τάς πράξεις

$$\iff 4(\lambda-1) \neq 1 \wedge (\lambda-1)^3 \neq 1 \iff \lambda \neq 1.$$

Ὥστε $\forall \lambda: \frac{1}{3} < \lambda \leq 3 \wedge \lambda \neq 1 \Longrightarrow x_1, x_2, x_3 \in R$, δεκταί.

Διά $a = 3b \iff \lambda = \frac{1}{3}$ ἡ (2) γίνεται

$$x\left(\frac{9b+27b^3x^2}{1+27b^2x^2} - b\right) = 0 \iff 8bx = 0 \iff x = 0$$

ἤτοι διά $\lambda = \frac{1}{3}$ ἡ (E4) ἔχει μόνον τήν λύσιν

$$x_1 = 0.$$

(E5). Ἐξαλείφομεν τούς παρανομαστάς πολλαπλασιάζοντες ἀμφότερα τά μέλη αὐτῆς ἐπί

$$15\sqrt[15]{x^{13}} \cdot \sqrt[3]{27a+8x}.$$

Τότε $(E5) \iff 9a + 16x = 8\sqrt[3]{(27a+8x)x^2} \iff$

$$\xleftrightarrow{\text{Δι' ὑψώσεως εἰς τόν κύβον}} 256x^2 - 144ax - 27a^2 = 0$$

$$\Longrightarrow x = \frac{3a(3 \pm \sqrt{21})}{32}$$

(E6) 1. Ἡ ἐξίσωσις δέχεται τήν λύσιν $x = a = 0$

2. Ἡ ἐξίσωσις δέν δέχεται τήν λύσιν $x = \pm a \neq 0$

3. $\nu = 2\kappa+1,\ \kappa \in N \xRightarrow{\text{(2) περίπτωσις}}$

$$\sqrt[\nu]{(a+x)^2} + 2\sqrt[\nu]{(a-x)^2} = 3\sqrt[\nu]{a^2-x^2} \iff$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt[\nu]{(a+x)^2}}{\sqrt[\nu]{a^2-x^2}} + 2\frac{\sqrt[\nu]{(a-x)^2}}{\sqrt[\nu]{a^2-x^2}} - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} + 2\sqrt[\nu]{\frac{a-x}{a+x}} - 3 = 0 \quad (\mathrm{I}).$$

$$(\mathrm{I}) \xLeftrightarrow{\sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} = \psi \ . \ (\mathrm{II})} y + \frac{2}{y} - 3 = 0$$

$$\Longleftrightarrow y^2 - 3y + 2 = 0 \Longleftrightarrow y = 1 \ \vee \ y = 2 .$$

$$(\mathrm{II}) \Longleftrightarrow \sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} = 1 \ \vee \ \sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} = 2 \Longleftrightarrow \frac{a+x}{a-x} = 1$$

$$\vee \ \frac{a+x}{a-x} = 2^\nu \Longleftrightarrow x = 0 \ \vee \ x = a\,\frac{2^\nu - 1}{2^\nu + 1} \Longrightarrow \text{ἄν}$$

$\nu = 2\kappa + 1$ τό $A = \left\{0,\ a\,\dfrac{2^\nu - 1}{2^\nu + 1}\right\}$.

4) $\nu = 2\kappa$, $\kappa \in N$. Διά τό σημεῖον τῆς $a^2 - x^2$ ἔχομεν:

4.1. $a > 0 \rightarrow$

$$\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -a & & +a & & +\infty \\ \hline a^2-x^2 & & - & | & + & | & - & \end{array}$$

i) Διά $x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$ προφανῶς ἡ (1) εἶναι ἀδύνατος.

ii) Ἐξετάζομεν ἐάν ὑπάρχῃ λύσις εἰς τό διάστημα $(-a, +a)$. Ἔχομεν:

$$\left\{\begin{array}{c} \sqrt[\nu]{(a+x)^2} + 2\cdot\sqrt[\nu]{(a-x)^2} = 3\sqrt[\nu]{a^2-x^2} \\ -a < x < a \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} + 2\cdot\sqrt[\nu]{\frac{a-x}{a+x}} - 3 = 0 \\ \\ -a < x < a \end{array}\right] \xLeftrightarrow{\sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} = \psi}$$

$$\Longleftrightarrow \psi + 2\,\frac{1}{\psi} - 3 = 0 \Longleftrightarrow \psi^2 - 3\psi + 2 = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \psi = 1 \vee \psi = 2$. Ἄρα.

$$\left\{\begin{matrix} \sqrt[\nu]{\dfrac{a+x}{a-x}} + 2\sqrt[\nu]{\dfrac{a-x}{a+x}} - 3 = 0 \\ -a < x < a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt[\nu]{\dfrac{a+x}{a-x}} = 1 \vee & \sqrt[\nu]{\dfrac{a+x}{a-x}} = 2 \\ -a<x<a & -a<x<a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{a+x}{a-x} = 1 & \vee & \dfrac{a+x}{a-x} = 2^\nu \\ -a<x<a & & -a<x<a \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x = 0 & \vee & x = a\dfrac{2^\nu - 1}{2^\nu + 1} \\ -a<x<a & & -a<x<a \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{x = 0 \vee x = a\frac{2^\nu-1}{2^\nu+1}\right\}. \text{ Ἄρα } A = \left\{0, a\frac{2^\nu-1}{2^\nu+1}\right\}.$$

4.2. Ἐάν $a<0$, τότε

x	$-\infty$	a		$-a$	$+\infty$
a^2-x^2	$-$		$+$		$-$

i) Διά $x \in (-\infty, a] \cup [a, +\infty)$ προφανῶς ἡ (I) εἶναι ἀδύνατος.

ii) Ἐξετάζομεν ἐάν ὑπάρχῃ λύσις εἰς τό διάστημα $(a, -a)$. Ἔχομεν

$$(E6) \xLeftrightarrow{\sqrt[\nu]{\frac{a+x}{a-x}} = y} y^2 - 3y + 2 = 0 \Longleftrightarrow y = 1 \vee y = 2$$

$$\xRightarrow{\text{ὡς ἀνωτέρω}} \left\{\begin{matrix} x = 0 \vee x = a\dfrac{2^\nu-1}{2^\nu+1} \\ a < x < -a \end{matrix}\right\}$$

$$\Longrightarrow A = \left\{0, a\frac{2^\nu-1}{2^\nu+1}\right\}.$$

Π14. (Ε1): $$a^2\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\beta^2\frac{(x-\gamma)(x-a)}{(\beta-\gamma)(\beta-a)}=x^2$$

(Ε2): $$a^2\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\beta^2\frac{(x-\gamma)(x-a)}{(\beta-\gamma)(\beta-a)}+\gamma^2\frac{(x-a)(x-\beta)}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}=$$
$$=x^2$$

(Ε3): $$a^3\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\beta^3\frac{(x-\gamma)(x-a)}{(\beta-\gamma)(\beta-a)}+\gamma^3\frac{(x-a)(x-\beta)}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}=x^3$$

(Ε4): $$a^4\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(a-\beta)(a-\gamma)}+\beta^4\frac{(x-\gamma)(x-a)}{(\beta-\gamma)(\beta-a)}+\gamma^4\frac{(x-a)(x-\beta)}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)}=x^4$$

Ἐπίλυσις:

(Ε1): Προφανῶς ἡ δοθεῖσα ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖται διά $x=a$ καί διά $x=\beta$, ὄχι ὅμως καί διά $x=\gamma$. Ἐπειδή εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ἕπεται ὅτι ἔχει ὡς ρίζας τούς ἀριθμούς a, καί β (μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι $a\neq\beta\neq\gamma\neq a$).

(Ε2): Ἡ ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖται διά $x=a$, $x=\beta$, $x=\gamma$. Εἶναι ὅμως δευτέρου βαθμοῦ, συνεπῶς εἶναι ταυτότης. (Περιορισμός: $a\neq\beta\neq$ $\neq\gamma\neq a$).

(Ε3): Ἡ ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖται διά $x=a$, $x=\beta$, $x=\gamma$. Ἐπειδή εἶναι τρίτου βαθμοῦ ἕπεται ὅτι $A=\{a,\beta,\gamma\}$. Περιορισμός: $a\neq\beta\neq\gamma\neq a$.

(Ε4): Ἡ ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖται διά $x=a$, $x=\beta$, $x=\gamma$. Εἶναι τετάρτου βαθμοῦ καί ὁ συντελεστής τοῦ x^3 εἶναι μηδέν. Κατά συνέπειαν ἄν ρ ἡ τετάρτη ρίζα αὐτῆς θά εἶναι $\rho+\alpha+\beta+$ $+\gamma=0 \Longrightarrow \rho=-(\alpha+\beta+\gamma) \Longrightarrow A=\{\alpha,\beta,\gamma,-(\alpha+\beta+\gamma)\}$.

Περιορισμός: $\alpha\neq\beta\neq\gamma\neq\alpha$.

Π15. (Ε1): $(x-\alpha)^3(\beta-\gamma)^3+(x-\beta)^3(\gamma-\alpha)^3+(x-\gamma)^3(\alpha-\beta)^3=0$

(Ε2): $x^2(\alpha-\beta)+\alpha^2(\beta-x)+\beta^2(x-\alpha)=0$

(Ε3): $\alpha\beta\gamma x(x+\alpha+\beta+\gamma)^2-(\beta\gamma x+\alpha\gamma x+\alpha\beta x+\alpha\beta\gamma)^2=0$

(Ε4): $\alpha\beta x(x+\alpha+\beta)^3-(\alpha x+\beta x+\alpha\beta)^3=0$

(Ε5): $(\alpha-x)^4+(x-\beta)^4=(\alpha-\beta)^4$.

Ἐπίλυσις:

(Ε1): Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, $\alpha=\beta$, $\beta=\gamma$, $\gamma=\alpha$. Ἄρα διαιρεῖται διά $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $\alpha-\beta$, $\beta-\gamma$, $\gamma-\alpha$. Συνεπῶς:

(Ε1) $\Longleftrightarrow \lambda(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$ ὅπου $\lambda\in R-\{0\} \Longrightarrow A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ ἄν $\alpha\neq\beta\neq$ $\neq\gamma\neq\alpha$ καί $A\equiv R$ ἄν $(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)=0$.

(Ε2): Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=\alpha$, $x=\beta$, $\alpha=\beta$. Ἄρα (Ε2) $\Longleftrightarrow \lambda(x-\alpha)(x-\beta)(\alpha-\beta)=0$ ὅπου $\lambda\in R-\{0\} \Longrightarrow A=\{\alpha,\beta\}$ ἄν $\alpha\neq\beta$ καί $A\equiv R$ ἄν $\alpha=\beta$.

(Ε3): Ὁμοίως ἄν $\varphi(x)$ τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἰσχύει: $\varphi\left(\frac{\beta\gamma}{a}\right)=0,\ \varphi\left(\frac{a\gamma}{\beta}\right)=0,\ \varphi\left(\frac{a\beta}{\gamma}\right)=0$

$\Longrightarrow A=\left\{\frac{\beta\gamma}{a},\ \frac{a\gamma}{\beta},\ \frac{a\beta}{\gamma}\right\}\ \Big|\ a\beta\gamma\neq 0$ διότι ἡ

δοθεῖσα εἶναι τρίτου βαθμοῦ.

(Ε4): (1) Ἐργαζόμενοι ὡς ἀνωτέρω εὑρίσκομεν ὡς ρίζας τούς ἀριθμούς $\frac{a^2}{\beta},\ \frac{\beta^2}{a},\ \pm\sqrt{a\beta}$.

(2) Ὡς γνωστόν ἡ δοθεῖσα εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν $a\beta x(x^3+a^3+\beta^3)-(a^3x^3+\beta^3x^3+a^3\beta^3)=0$ ἡ ὁποία ἀναλυομένη εἰς γινόμενον παραγόντων καταντᾶ εἰς τήν: $(x^2-a\beta)(a^2-x\beta)(\beta^2-xa)=$

$=0 \Longrightarrow A=\left\{\pm\sqrt{a\beta},\ \frac{a^2}{\beta},\ \frac{\beta^2}{a}\right\}$.

(Ε5): Ἡ ἐξίσωσις ἱκανοποιεῖται διά $x=a$, καί $x=\beta$, συνεπῶς διαιροῦντες διά $(x-a)(x-\beta)$ τό πολυώνυμον $(a-x)^4+(x-\beta)^4-(a-\beta)^4$ εὑρίσκομεν πηλίκον $(x^2-(a+\beta)x+2a^2-3a\beta+2\beta^2)\lambda,\ \lambda\in R-$ $-\{0\}$. Ἄρα ρίζαι τῆς δοθείσης εἶναι οἱ ἀριθμοί a,β καί αἱ ρίζαι τῆς $x^2-(a+\beta)x+2a^2-$ $-3a\beta+2\beta^2=0$

Π16. (Ε1): $x^4+(a-x)^4=\beta^4$

(Ε2): $(x+a)^4+(x+\beta)^4=17(a-\beta)^4$

(Ε3): $(a-x)^5-(\beta-x)^5=a-\beta$

$$(E4): \quad \frac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$$

$$(E5): \quad \frac{(x-a)^4+(x-b)^4}{(x-a)(x-b)} = \frac{a^4+b^4}{ab}.$$

Ἐπίλυσις:

$(E1) \xleftrightarrow{x=y+\frac{a}{2}} \left(y+\frac{a}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a}{2}\right)^4 = b^4 \iff 16y^4+$

$+24y^2a^2+a^4-8b^4=0 \iff (4y^2)^2+2(4y^2)(3a^2)+$

$+(3a^2)^2-9a^4+a^4-8b^4=0 \iff (4y^2+3a^2)^2-8(a^4+$

$+b^4)=0 \iff (4y^2+3a^2)^2-\left(\sqrt{8(a^4+b^4)}\right)^2=0 \iff$

$\iff \left[4y^2+3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}\right]\cdot\left[4y^2+3a^2-\sqrt{8(a^4+b^4)}\right]=0$

$\iff 4y^2+3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}=0 \; (1) \vee 4y^2+3a^2-$

$-\sqrt{8(a^4+b^4)}=0 \; (2).$

$(E2) \xleftrightarrow{x=y-\frac{a+b}{2}} \left(y+\frac{a-b}{2}\right)^4+\left(y-\frac{a-b}{2}\right)^4=17(a-b)^4 \; (1).$

Τότε $(1) \iff 16y^4+24y^2(a-b)^2-135(a-b)^4=0 \; (2).$

Ἐργαζόμενοι ὡς εἰς τήν προηγουμένην (E1) ἐξίσωσιν εὑρίσκομεν: $y_1=\frac{3}{2}(a-b)$ καί $y_2=-\frac{3}{2}(a-b)$ (ἀπορριπτομένων τῶν λοιπῶν λύσεων διότι δέν ἀνήκουν εἰς τό R). Τελικῶς ἔχομεν $A=\{a-2b,\ b-2a\}$ μέ $a\neq b$

$(E3) \xleftrightarrow{x=y+\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a-b}{2}-y\right)^5-\left(-\frac{a-b}{2}-y\right)^5=a-b \; (1)$

$(1) \iff 5y^4+10\left(\frac{a-b}{2}\right)^2y^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^4-1=0$ μέ $a\neq b$

Συνεπῶς: $(1) \iff 4y^2=-3a^2-\sqrt{8(a^4+b^4)} \iff$

$$\Longleftrightarrow \quad y^2 = \frac{-3a^2 - \sqrt{8(a^4+b^4)}}{4} \Longrightarrow A = \emptyset.$$

$$(2) \Longleftrightarrow 4y^2 = -3a^2 + \sqrt{8(a^4+b^4)} \Longleftrightarrow y^2 = \frac{-3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}}{4}$$

$$\Longleftrightarrow y^2 = \left(\sqrt{\frac{-3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}}{4}}\right)^2 \Longleftrightarrow y = \frac{+\sqrt{-3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}}}{2}$$

$$\vee \quad y = \frac{-\sqrt{-3a^2+\sqrt{8(a^4+b^4)}}}{2}$$ καί ἐν συνεχείᾳ ἐκ τοῦ:

$x = y + \frac{a}{2}$ εὑρίσκομεν τάς ζητουμένας ρίζας.

Ἐν συνεχείᾳ ἐργαζόμεθα ὡς εἰς ἐξίσωσιν

(Ε1) καί (Ε2)

(Ε4) $x = y + \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow 2x = 2y + a + b \Longleftrightarrow \frac{(y+k)^4 + (y+k)^4}{4y^2} =$

$= \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2}$ (1) ὅπου ἐτέθη $k = \frac{b-a}{2}$.

$$(1) \Longrightarrow \frac{y^4 + 6k^2y^2 + k^4}{2y^2} = \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\xleftrightarrow{k=\frac{b-a}{2}} \frac{16y^4 + 24(b-a)^2 + (b-a)^4}{32y^2} = \frac{a^4+b^4}{(a+b)^2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 16(a+b)^2y^4 + 8\left[3(b^2-a^2)^2 - 4(a^4+b^4)\right]y^2 +$$

$$+(b-a)^4(a+b)^2 = 0 \Longleftrightarrow 16(a+b)^2y^4 - 8(a^4+b^4+$$

$+6a^2b^2)y^2 + (b-a)^4(a+b)^2 = 0$ καί συνεχίζομεν κατά τά γνωστά.

(Ε5): Πρέπει· $a, b \in R - \{0\}$, $a \neq b$.

Ἐκτελοῦμεν τόν μετασχηματισμόν:

$y = (x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab$ καί $k = ab \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow (x-a)^2+(x-b)^2=\Big[(x-a)-(x-b)\Big]^2+2(x-a)(x-b)=$$
$$=(a-b)^2+2y \quad \text{καί} \quad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=(a-b)^2+2k.$$

Ἔτσι θά ἔχωμεν: $(x-a)^4+(x-b)^4=\Big[(x-a)^2+(x-b)^2\Big]^2-$
$$-2(x-a)^2(x-b)^2=\Big[(a-b)^2+2y\Big]^2-2k^2=(a-b)^4+$$
$$+4(a-b)^2y+2y^2 \quad \text{καί} \quad a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=$$
$$=(a-b)^4+4(a-b)^2k+2k^2.$$

Συνεπῶς: $(E_5)\Longleftrightarrow \dfrac{(a-b)^4+4(a-b)^2y+2y^2}{y}=$
$$=\frac{(a-b)^4+4(a-b)^2k+2k^2}{k} \overset{y\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{(a-b)^4}{y}+2y=$$
$$=\frac{(a-b)^4}{k}+2k \Longleftrightarrow 2(y-k)-\frac{(a-b)^4}{ky}(y-k)=0 \Longleftrightarrow$$
$$(y-k)\left[2-\frac{(a-b)^4}{ky}\right]=0 \Longleftrightarrow y=k \vee y=\frac{(a-b)^4}{2k} \quad \text{μέ}$$
$$y\neq 0 \Longleftrightarrow \Big\{(x-a)(x-b)=k=ab\Big\} \vee \left\{(x-a)(x-b)=\frac{(a-b)^4}{2ab}\right\}$$
$$\Longleftrightarrow \Big\{x^2-(a+b)x=0\Big\}(a) \vee \Big\{2ab\,x^2-2ab(a+b)x+$$
$$+2a^2b^2-(a-b)^4=0\Big\} \qquad (b).$$

$(a) \Longleftrightarrow x=0 \vee x=a+b$

(b) Τό τέταρτον τῆς Διακρινούσης αὐτῆς ἰσοῦται

μέ $a^2b^2(a+b)^2-4a^3b^3+2ab(a-b)^4=a^2b^2\Big[(a+$
$$+b)^2-4ab\Big]+2ab(a-b)^4=a^2b^2(a-b)^2+2ab(a-b)^4=$$
$$=ab(a-b)^2\Big[ab+2(a-b)^2\Big]=ab(a-b)^2(2a^2-3ab+2b^2)=$$
$$=\frac{1}{4}ab(a-b)^2\Big[(4a-3b)^2+7b^2\Big].$$

Συνεπῶς: (i) $\Delta > 0$ ἄν $a\beta > 0$ καί ἡ ἐξίσωσίς μας θά ἔχῃ 4 ρίζας ἐν R.

(ii) $\Delta < 0$ ἄν $a\beta < 0$ καί ἡ ἐξίσωσίς μας ἔχει δύο ρίζας ἐν R.

Παρατήρησις: Εἰς τάς συμμετρικάς ὡς πρός $x-a$ καί $x-\beta$ ἐξισώσεις ἐκτελοῦμεν τόν

(M_1): $y = \dfrac{x-a+x-\beta}{2} = x - \dfrac{a+\beta}{2} \Longrightarrow x-a = y - \dfrac{a-\beta}{2}$

καί $x-\beta = y + \dfrac{a-\beta}{2}$ ἤ τόν (M_2): $y=(x-a)(x-\beta)$.

(βλ. Ἄλγεβρα II τόμος Θ. Καζαντζῆ: Σελίς 117).

Π17. Νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις:

$$x^8 + A_7x^7 + A_6x^6 + A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (1)$$

ἐάν μεταξύ τῶν συντελεστῶν της ἰσχύουν αἱ σχέσεις:

$$\frac{A_0}{A_2} = \frac{A_3}{A_5} = A_6 \ (2) \quad \text{καί} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_4}{A_5} = A_7 \ (3)$$

<u>Ἐφαρμογή:</u> Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$x^8 - 3x^7 + 7x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 21x^3 + 2x^2 - 6x + 14 = 0$ (I).

Ἐπίλυσις: Περιορισμός· $A_2A_5 \neq 0$.

Ἐάν $A_6 \neq 0$, $A_7 \neq 0 \Longrightarrow A_i \neq 0 \ \forall i = 1,2\ldots 7$,

ἐπειδή δέ $A_0 = A_2 \cdot A_6$, $A_3 = A_5 \cdot A_6$, $A_3 = A_5 \cdot A_6$,

$A_1 = A_2A_7$, $A_4 = A_5 \cdot A_7$ θά ἔχωμεν: (1) $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^8 + A_7x^7 + A_6x^6 + A_5x^5 + A_5A_7x^4 + A_5A_6x^3 + A_2x^2 + A_2A_7x + A_2A_6 = 0 \Longleftrightarrow x^6(x^2 + A_7x + A_6) +$

$+A_5x^3(x^2+A_7x+A_6)+A_2(x^2+A_7x+A_6)=0 \iff$

$\iff (x^2+A_7x+A_6)(x^6+A_5x^3+A_2)=0 \iff x^2+A_7x+$

$+A_6=0_{(4)} \vee x^6+A_5x^3+A_2=0_{(5)}$ Ἡ $(5) \xLeftrightarrow{x^3=y} y^2+$

$+A_5y+A_2=0_{(6)}$

Εἰδικαί περιπτώσεις:

i) Ἄν $A_2A_5 \neq 0$, $A_6 \neq 0$, $A_7=0 \Longrightarrow (4) \iff x^2+$

$+A_6=0$ καί $(5) \iff x^6+A_5x^3+A_2=0$.

ii) $A_2A_5 \neq 0$, $A_6=0$, $A_7=0 \Longrightarrow (4) \iff x^2=0$

$\Longrightarrow x=0$ (διπλῆ) καί $(5) \iff x^6+A_5x^3+A_2=0$

Ἐφαρμογή:

$(I) \iff (x^8-3x^7+7x^6)+(3x^5-9x^4+21x^3)+(2x^2-6x+14)=0$

$\iff x^6(x^2-3x+7)+3x^3(x^2-3x+7)+2(x^2-3x+7)=0$

$\iff (x^2-3x+7)(x^6+3x^3+2)=0 \iff x^2-3x+7=0$ (II)

$\vee\ x^6+3x^3+2=0$ (III).

Τότε θά ἔχωμεν: $(II) \iff \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{19}{4}=0$

(ἀδύνατον ἐν R)

$(III) \iff (x^3+1)(x^3+2)=0 \iff (x+1)(x^2-x+1)\left[x^3+(\sqrt[3]{2})^3\right]=0$

$\iff (x+1)(x^2-x+1)(x+\sqrt[3]{2})(x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})=0 \iff$

$x+1=0 \vee x^2-x+1=0 \vee x+\sqrt[3]{2} \vee x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4}=0$

$\iff x_1=-1 \vee x_2=-\sqrt[3]{2}$ διότι $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+$

$+\frac{3}{4} \neq 0 \ \forall x \in R$ καί $x^2-\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4} \neq 0 \ \forall x \in R$

$\Longrightarrow A=\{-1,-\sqrt[3]{2}\}$.

Π18. (Ε1): Νά ἐπιλυθῆ ἡ: $\frac{1}{f}=(\eta-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$

(α) ὡς πρός f (β) ὡς πρός η (γ) ὡς πρός R_1 (δ) ὡς πρός R_2 καί νά διερευνηθῆ δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

(Ε2): Νά ἐπιλυθῆ ἡ: $\frac{1}{a}+\frac{1}{\beta}=\frac{2}{R}$ (i) ὡς πρός a (ii) ὡς πρός β (iii) ὡς πρός R καί νά διερευνηθῆ δι' ἑκάστην περίπτωσιν.

(Ε3) Νά ἐπιλυθῆ ἡ: $S=V_o g-\frac{1}{2}gt^2$ (α) ὡς πρός g (β) ὡς πρός V_o, ὅταν, $S, V_o, g, t \in R$.

(γ) Νά διερευνηθῆ ὡς πρός τόν ἄγνωστον g.

(δ) Νά ἐπιλυθῆ ἡ: $S=V_o t+\frac{1}{2}\gamma t^2$ ὡς πρός V_o.

Ἐπίλυσις:

(Ε1) $\Longleftrightarrow \frac{1}{f}=(\eta-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$ Συνεπῶς

1. $f=\frac{1}{\eta-1}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ $\Big|$ $\eta\neq 1$, $R_1\neq -R_2$

2. Ὡς πρός η: Μέ $fR_1R_2\neq 0$ ἔχομεν

$R_1R_2=(\eta-1)f\cdot(R_1+R_2)\Longleftrightarrow \eta f(R_1+R_2)=$
$=f(R_1+R_2)+R_1R_2 \Longleftrightarrow \eta=1+\frac{R_1R_2}{f(R_1+R_2)}$

3. Ὡς πρός R_1: Ἔχομεν $R_1R_2=(\eta-1)f(R_1+R_2)$

$\Longleftrightarrow R_1R_2=(\eta-1)fR_1+(\eta-1)fR_2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow R_1R_2+(1-\eta)fR_1=(\eta-1)fR_2 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad R_1 = \frac{(n-1) f R_2}{(1-n) f + R_2}$$

4. ὡς πρός R_2 εὑρίσκομεν $R_2 = \dfrac{(n-1) f R_1}{(1-n) f + R_1}$

(E2) $\xLeftrightarrow{abR \neq 0} aR + bR = 2ab$. Ἄρα:

1. ὡς πρός a: $(2b - R) a = bR \Longleftrightarrow a = \dfrac{bR}{2b - R}$

i) Ἄν $2b - R \neq 0$ δηλ. $R \neq 2b \Longrightarrow \exists$ ἀκριβῶς μία λύσις.

ii) Ἄν $R = 2b \neq 0 \Longrightarrow A = \phi$

iii) Ἄν $R = 2b = 0 \Longrightarrow A \equiv R$

2. ὡς πρός b: $(2a - R) b = aR \Longleftrightarrow b = \dfrac{aR}{2a - R}$

i) $2a - R \neq 0 \Longrightarrow R \neq 2b \Longrightarrow \exists$ ἀκριβῶς μία λύσις.

ii) $2a = R \neq 0 \Longrightarrow A = \phi$

iii) $2a = R = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

3. ὡς πρός R: $(a+b) R = 2ab \Longleftrightarrow R = \dfrac{2ab}{a+b}$

i) $a + b \neq 0$ $(a \neq -b) \Longrightarrow \exists$ ἀκριβῶς μία λύσις.

ii) $a + b = 0$ καί $ab \neq 0 \Longrightarrow A = \phi$

iii) $a + b = 0$ καί $a = b = 0 \Longrightarrow A = R$

(E3): (a) $\Longleftrightarrow 2v_0 g - g t^2 = 2S \Longrightarrow g = \dfrac{2S}{2v_0 - t^2}$

(γ): i) Ἄν $2v_0 - t^2 \neq 0 \Longrightarrow \exists$ ἀκριβῶς μία λύσις

ii) Ἄν $2v_0 - t^2 = 0 \wedge S = 0 \Longrightarrow A \equiv R$

iii) Ἄν $2v_0 - t^2 = 0 \wedge S \neq 0 \Longrightarrow A = \phi$.

(E3): (β) $\Longleftrightarrow$ $V_0 = \frac{S}{g} + \frac{1}{2}t^2$

(E3): (δ) $S = V_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2 \Longleftrightarrow 2V_0 t + \gamma t^2 = 2S$

$$\Longrightarrow V_0 = \frac{2S - \gamma t^2}{2t} = \frac{S}{t} - \frac{1}{2}\gamma t^2 \quad \Big| \; t \neq 0.$$

Π19. (E1): 1) Ἂν $F, b, B, \varepsilon, \pi, \ell \in R - \{0\}$ νά ἐπιλυθῇ ἡ: $F = \frac{b}{\varepsilon \pi \ell} B$ ὡς πρός ἕκαστον τῶν γραμμάτων της.

2). Ἂν $\gamma t \neq 0$ νά ἐπιλυθῇ ἡ: $\gamma = \frac{V - V_0}{t}$ ὡς πρός t, ὡς πρός V καί ὡς πρός V_0.

3). Ἂν $\gamma S \neq 0$ νά ἐπιλυθῇ ἡ: $V^2 = V_0^2 + 2\gamma S$ ὡς πρός S καί ὡς πρός γ.

(E2): Νά ἐπιλυθῇ ἡ: $H\omega\lambda = \omega(\lambda - x)\left[VH - x\left(1 + \frac{\omega}{E}\right)\right]$ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι διά $V = 1 \Longrightarrow x = 0$.

(E3) Δίδονται αἱ σχέσεις:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{K}{K-1}} \quad (1) \quad \text{καί} \quad \frac{P_3}{P_2} = \frac{T_1}{T_2} \quad (2).$$

ἔνθα P_1, P_2, P_3, T_1, T_2 θετικοί ἀριθμοί καί $K > 1$. Νά ἐκφρασθῇ ὁ λόγος $\frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_1}$ συναρτήσει τοῦ λόγου $\frac{T_2}{T_1}$ καί τοῦ K.

(E4): Ἐάν $\rho v^{\gamma} = \rho_1 v_1^{\gamma}$ (1) $V = 10 v_1$ (2).
$\gamma = 1,41$ (3), $\dfrac{\rho v}{T} = \dfrac{\rho_1 v_1}{T_1}$ (4), νά εὑρεθῇ

ὁ λόγος $\dfrac{T_1}{T}$.

(E5): Ἐάν $P_1 v_1^{\gamma} = P_2 v_2^{\gamma}$ (1)

$$\frac{\rho_1 v_1}{T_1} = \frac{P_2 v_2}{T_2} \ (2) \quad \text{καί} \quad v_2 = 2v_1 \ (3)$$

νά εὑρεθῇ τό T_2 συναρτήσει τῶν T_1 καί $(\gamma-1)$.

Ἐπίλυσις: **(E1)**-(1) $\Longleftrightarrow B = \dfrac{\varepsilon \pi \ell F}{b} \Longleftrightarrow b = \dfrac{\varepsilon \pi \ell F}{B} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \varepsilon = \dfrac{Bb}{\pi \ell F} \Longleftrightarrow \pi = \dfrac{Bb}{\varepsilon \ell F}$.

(E1)-(2) $\overset{\gamma \neq 0}{\Longleftrightarrow} t = \dfrac{v - v_o}{\gamma} \Longleftrightarrow V = v_o + \gamma t \Longleftrightarrow v_o = v - \gamma t$

(E1)-(3) $\overset{\gamma \neq 0}{\Longleftrightarrow} S = \dfrac{v^2 - v_o^2}{2\gamma} \overset{S \neq 0}{\Longleftrightarrow} \gamma = \dfrac{v^2 - v_o^2}{2S}$

(E2) $\Longleftrightarrow (E+\omega)x^2 - \left[\nu HE + \lambda(E+\omega)\right]x + (\nu - 1)HE\lambda = 0$

$$\Longrightarrow x = \frac{\nu HE + \lambda(E+\omega) \pm \sqrt{[\nu HE + \lambda(E+\omega)]^2 - 4(E+\omega)(\nu-1)HE\lambda}}{2(E+\omega)}$$

Ἐπειδή δέ διά $\nu = 1$ πρέπει νά εὑρίσκωμεν $x = 0$, ἕπεται ὅτι ἐκ τῶν δύο τιμῶν τοῦ x ἁρμόζει ἐκ τοῦ τύπου τούτου, ὅταν πρό τοῦ ριζικοῦ θέσωμεν τό σημεῖον $-$, δηλαδή:

$$x = \frac{\nu HE + \lambda(E+\omega) - \sqrt{[\nu HE + \lambda(E+\omega)]^2 - 4(E+\omega)(\nu-1)HE\lambda}}{2(E+\omega)}$$

(Ε3): Διά πολλαπλασιασμοῦ τῶν (1) καί (2) κατά μέλη

$$\Longrightarrow \frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \cdot \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$

Τελικῶς $\frac{P_3}{P_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$ (3).

$$\text{Ἄρα: } \frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_1} = \frac{\frac{P_2}{P_1} - 1}{\frac{P_3}{P_1} - 1} = \frac{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} - 1}{\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} - 1}.$$

(Ε4): Ἐκ τῶν (1) καί (4) διά διαιρέσεως κατά μέλη

ἔχομεν ἰσοδυνάμως $\frac{T V^{\gamma}}{V} = \frac{T_1 V_1^{\gamma}}{V_1} \Longrightarrow T V^{\gamma-1} =$

$$= T_1 V_1^{\gamma-1} \Longrightarrow \frac{T_1}{T} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^{\gamma-1} \overset{(2)}{=\!=} \left(\frac{10 V_1}{V_1}\right)^{\gamma-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{T_1}{T} = 10^{\gamma-1} = 10^{0,41}$$

(Ε5): Ἐκ τῆς (2) $\Longrightarrow P_2 = P_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1}$ (4)

Ἐκ τῆς (1) $\xrightarrow{(4)} P_1 V_1^{\gamma} = P_1 \frac{V_1 T_2}{V_2 T_1} V_2^{\gamma} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow T_1 \cdot \frac{V_1^{\gamma}}{V_1} = T_2 \cdot \frac{V_2^{\gamma}}{V_2} \Longrightarrow T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1} =$$

$$\overset{(3)}{=\!=} T_2 (2V_1)^{\gamma-1} \Longrightarrow T_1 = T_2 \quad 2^{\gamma-1} \Longrightarrow$$

$$T_2 = \frac{T_1}{2^{\gamma-1}} = F\ (T_1, \gamma-1).$$

Π20. (Ε1) Ἐάν $y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$ καί $y = 372$ mm, $v_0 = \sqrt{248\, g}$, $t = \frac{500}{3157}$ sec, νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ g.

(Ε2): Ἐάν $W = Mgh$ (1) καί $W = \frac{1}{2} m\rho^2 \frac{\upsilon^2}{r^2} + \frac{1}{2} M\upsilon^2$ (2) νά εὑρεθῇ τό υ συναρτήσει τῶν ἄλλων.

(Ε3): Ἐάν $F = Bq\upsilon = \frac{m\upsilon^2}{r}$ (1) καί $\omega = 2\pi\nu = \frac{\upsilon}{r} = \frac{2\pi}{T}$ (2) νά εὑρεθῇ τό Τ συναρτήσει τῶν π, m, q B.

(Ε4): Ἐάν $R_1 = \frac{R_o^2 - 45R_o}{45}$ καί $-80R_1 - 430R_o + 3R_o^2 + 14875 = 0$, νά εὑρεθῇ τό R_o.

(Ε5): Εἰς ἕνα φαινόμενον καταλήγομεν εἰς μίαν ἐξίσωσιν τῆς μορφῆς: $3^{x^3+y^3} = \left(\frac{27^{xy}}{3^{\omega^2}}\right)^{\omega}$ μέ τήν προϋπόθεσιν ὅτι πάντες οἱ ἀριθμοί $x, y, \omega \in R$ καί τό ἄθροισμα αὐτῶν διάφορον τοῦ μηδενός. Ἕνεκα τῶν προυποθέσεων τούτων ὁ παρατηρητής κατέληξεν εἰς τό συμπέρασμα ὅτι πρέπει νά εἶναι $x = y = \omega$. Νά δεχθῇ ὅτι τό συμπέρασμα τοῦτο εἶναι ὀρθόν.

Ἐπίλυσις: (Ε1): Ἡ $y = \upsilon_o t + \frac{1}{2} g t^2 \Longleftrightarrow 372 = \sqrt{248g}\,\frac{500}{3157} + \frac{1}{2} g \left(\frac{500}{3157}\right)^2 \xLeftrightarrow{\frac{500}{3157}\sqrt{g} = x > 0} 372 = \sqrt{248}\,x + \frac{1}{2}x^2 \Longleftrightarrow x^2 + 2\sqrt{248}\,x - 744 = 0 \Longrightarrow x = 15,75$.

Ὥστε $\frac{500}{3157}\sqrt{g} = 15,75$ καί $g = \left(\frac{15,75 \cdot 3157}{500}\right)^2 = 9891 \text{ mm sec}^{-2} = 989 \cdot \text{cm sec}^{-2}$.

(Ε2): Ἐκ τῆς (1) $\xrightarrow{(2)}$ ὅτι: $\frac{1}{2}\left\{m\frac{\rho^2}{r^2}+M\right\}v^2=Mgh$

$\Longrightarrow v=\sqrt{2\frac{Mg}{m\frac{\rho^2}{r^2}+M}\cdot h}$ (3). Ἡ (3) εἶναι τῆς μορφῆς

$v=\sqrt{2\gamma h}$ μέ $\gamma=\frac{Mg}{m\frac{\rho^2}{r^2}+M}$.

(Ε3): Ἐκ τῆς (1) $\Longrightarrow r=\frac{Mv}{B\cdot q}\xrightarrow{(2)} T=\frac{2\pi M}{qB}$.

(Ε4): Ἐκ τῆς $-80R_1-430R_o+3R_o^2+14875=0$

$\xrightarrow{R_1=\frac{R_o^2-45R_o}{45}} 3R_o^2-430R_o-80\frac{R_o^2-45R_o}{45}+$

$+14875=0 \Longleftrightarrow 27R_o^2-3870R_o-16R_o^2+720R_o+133875=$

$=0 \Longleftrightarrow 11R_o^2-3150R_o+133875=0$. Συνεπῶς ἔχομεν

$\Longrightarrow R_o=\frac{3150\pm\sqrt{9922500-5890500}}{22} \Longleftrightarrow$

$R_o=\frac{3150\pm 2008}{22} \Longleftrightarrow R_o'=234,4$ ἢ $R_o''=52$.

(Ε5) $\Longleftrightarrow 3^{x^3+y^3}=\left(3^{3xy-\omega^2}\right)^{\omega} \Longleftrightarrow 3^{x^3+y^3}=3^{xy\omega-\omega^3} \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^3+y^3=3xy\omega-\omega^3 \Longleftrightarrow x^3+y^3+\omega^3-3xy\omega=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x+y+\omega)\left[(x-y)^2+(x-\omega)^2+(\omega-x)^2\right]=0 \Longrightarrow$

$\xrightarrow{x+y+\omega\neq 0} (x-y)^2+(y-\omega)^2+(\omega-x)^2=0 \Longrightarrow x-y=0\,\wedge$

$\wedge\, y-\omega=0 \;\wedge\; \omega-x=0 \Longrightarrow x=y=\omega.$

II. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

1. $1+ax+9(a+x)-(a+x)-9(1+ax)=0 \mid a\in R$
2. $(6-x)^2+(\lambda+6)^2+(\lambda-x)^2=(\lambda+x)^2-x(6-x)+$
   $+(\lambda+6)(12+\lambda-6) \mid \lambda\in R.$
3. $32(x-a)^3-27x^2(x-2a)=0 \mid a\in R.$
4. $(3x+4\lambda)^2-(5x-2\lambda)^2-2(x+2\lambda)(-8x+\lambda)=0 \mid \lambda\in R$
5. $\lambda x-\mu-2=(\mu x+1)^2-(\mu^2x+1)(x+\lambda)+(1+2\mu^3)x \mid \lambda,\mu\in R$
6. $3a-\{-2b+a+[x-a+b+(b-2x)+3x-2b]+2x\}-4a=$
   $=2a-b+(a-b-4)x \mid a,b\in R.$
7. $a^2(a-x)-b^2(b+x)=abx \mid a,b\in R.$
8. $(1-x)(a-x)=(a-x)(1-b)-(1+x)(b-x) \mid a,b\in R.$
9. $a(ax+b)+b=b(bx+a)+a \mid a,b\in R.$
10. $a(ax-a)=b(bx-b) \mid a,b\in R$
11. $(x+a)^2-(x+b)^2=b-a \mid a,b\in R.$
12. $(a+b)^2x^2-(a-b)(a^2-b^2)x-2ab(a^2+b^2)=0 \mid a,b\in R.$
13. $\lambda(3x-\lambda)=3x-1 \mid \lambda\in R.$
14. $(x-a)^3(x+2b+a)-(x-b)^3(x-2a-b)=0 \mid a,b\in R.$
15. $[(a^2-b^2)x-1]^2+(2abx-1)^2=[(a^2+b^2)x+1]^2 \mid a,b\in R$
16. $(x-a-k)^2+(x-a+k)^2=2k^2 \mid a,k\in R.$

17. $\alpha^2 x^2 + 1 = \beta^2 x^2 + (\alpha - \beta)x + (\alpha + \beta)x \quad | \; \alpha, \beta \in R.$

18. $(x-\alpha)^3 + (x+\alpha)^2(x-\alpha) - 2\beta(x^2+\alpha^2) = 0 \quad | \; \alpha \in R.$

19. $(x+\lambda)^3 + 3\lambda x(1 - x - \lambda) - 1 = 0 \quad | \; \lambda \in R.$

20. $x^2 - (\alpha^4 + \beta^2)x + \alpha^4 \beta^2 = 0 \quad | \; \alpha, \beta \in R.$

21. $[\lambda^2 x - \lambda(x+2) + 2][\lambda^2(x-2) - x - (3\lambda+1)] = 0 \quad | \; \lambda \in R.$

22. $\lambda(\lambda^2 - 4)x = 5(\lambda^2 - 1) - (\lambda^2 - 4)x \quad | \; \lambda \in R$

23. $(\alpha^2 + \beta^2)(x-1) + 2\alpha\beta(x+1) = 0 \quad | \; \alpha, \beta \in R.$

24. $3x + 4\lambda^2 = 9 + 2\lambda x \quad | \; \lambda \in R.$

25. $\lambda^2 x - 4\lambda = \lambda^2 + 4(x+1) \quad \lambda \in R.$

26. $x^2 + (\lambda - 2x)^2 = (\lambda - 3x)^2 \; | \; \lambda \in R.$

27. $(2x-1)(x^3-1)[(\lambda-1)x - 2\lambda] = 0 \; | \; \lambda \in R.$

28. $(\lambda-\mu)x^2 + (\mu-\kappa)x + (\kappa-\lambda) = 0 \; | \; \kappa, \lambda, \mu \in R.$

29. $\alpha x(x^2 - 4\alpha^2) + 2\alpha x(x^2 - \alpha^2) = 0 \; | \; \alpha \in R$

30. $16(x+\alpha)(x+2\alpha)(x+3\alpha)(x+4\alpha) - 9\alpha^4 = 0 \; | \; \alpha \in R$

31. $(x+\alpha)(x+3\alpha)(x+5\alpha)(x+7\alpha) = 384\alpha^4 \; | \; \alpha \in R.$

32. $(x-3\alpha)(x-\alpha)(x+2\alpha)(x+4\alpha) = 2376\alpha^4 \; | \; \alpha \in R.$

33. $x^4 - 2(\alpha+\beta)x^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \; | \; \alpha, \beta \in R.$

34. $x^4 - 2x^2\alpha^2 - 2x^2\beta^2 + \alpha^4 + \beta^4 - 2\alpha^2\beta^2 = 0 \; | \; \alpha, \beta \in R.$

35. $4x^4 - 5x^2\alpha^4 + \alpha^8 = 0 \; | \; \alpha \in R.$

36. $2x^4 - 3\alpha x^3 + 3\alpha^2 x^2 + 16\alpha^4 = 0 \; | \; \alpha \in R.$

37. $(x+\lambda+\mu)^3 - x^3 - \lambda^3 - \mu^3 = 0 \; | \; \lambda, \mu \in R.$

38. $(x+\alpha+\beta)^5 - x^5 - \alpha^5 - \beta^5 = 0 \mid \alpha, \beta \in R.$

39. $(\lambda+\mu)^3+(\mu+x)^3+(x+\lambda)^3+(x+\kappa)^3+(\lambda+\kappa)^3+(\mu+\kappa)^3 = 0$
$\kappa, \lambda, \mu \in R.$

40. $(\alpha-1)(1+x+x^2)^2 = (\alpha+1)(1+x^2+x^4) \mid \alpha \in R.$

41. $x^4+\beta(\alpha+\beta)x^3+(\alpha\beta-2)\beta^2x^2-(\alpha+\beta)\beta^3x+\beta^4=0 \mid$

42. $(x^2+\beta^2)^2 = 2\alpha x^3+2\alpha\beta^2x-\alpha^2x^2 \mid \alpha, \beta \in R.$

43. $(x+\beta+\gamma)(x+\gamma+\alpha)(x+\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma = 0 \mid \alpha, \beta, \gamma \in R.$

44. $(x-\alpha)(x^3+\alpha^3)+(\alpha-\beta)(\alpha^3+\beta^3)+(\beta-x)(\beta^3+x^3) = 0$
$\alpha, \beta \in R.$

45. $x(\alpha-\beta)^2+\alpha(\beta-x)^2+\beta(x-\alpha)^2+8\alpha\beta x = 0 \mid \alpha, \beta \in R.$

46. $x^2(\alpha+\beta)+\alpha^2(\beta+x)+\beta^2(x+\alpha)+2\alpha\beta x = 0 \mid \alpha, \beta \in R.$

47. $x(\alpha^4-\beta^4)+\alpha(\beta^4-x^4)+\beta(x^4-\alpha^4) = 0 \mid \alpha, \beta \in R.$

48. $(x-\alpha)(x+\alpha)^2+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^2+(\beta-x)(\beta+x)^2=0$

49. $(x+\alpha+\beta)^5-(\alpha+\beta-x)^5-(\beta+x-\alpha)^5-(x+\alpha-\beta)^5=0$

50. $(\alpha-\beta)^2(\alpha+\beta-2x)+(\beta-x)^2(\beta+x-2\alpha)+(x-\alpha)^2(x+\alpha-2\beta)=0$

51. $x(\alpha+\beta)^2+\alpha(\beta+x)^2+\beta(x+\alpha)^2-4\alpha\beta x = 0$

52. $(x+\alpha)^3+(x+\beta)^3+(\alpha+\beta)^3-2(x^3+\alpha^3+\beta^3)+6\alpha\beta x=0$

53. $(x+\alpha+\beta)^4-(x+\alpha)^4-(x+\beta)^4-(\alpha+\beta)^4+x^4+\alpha^4+\beta^4=0$

54. $x^4(\alpha^2-\beta^2)+\alpha^4(\beta^2-x^2)+\beta^4(x^2-\alpha^2)=0$

55. $x(\alpha^2-\beta^2)+\alpha(\beta^2-x^2)+\beta(x^2-\alpha^2) = 0$

56. $3x^2+12\alpha^2+10\beta^2+26\alpha\beta+17\beta x+13\alpha x = 0$

57. $(x-\alpha)^3+(\alpha-\beta)^3-3(x-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-x) = 0$

58. $(x+a)^3+(x+\beta)^3+(a+\beta)^3-3(x+a)(x+\beta)(a+\beta)-x^3-a^3-$

$-\beta^3+3a\beta x=0$

59. $(a+\beta-x)^3+(x+a-\beta)^3+(x+\beta-a)^3-3(a+\beta-x)(x+a-\beta)\cdot$

$\cdot(x+\beta-a)-3(x^3+a^3+\beta^3-3a\beta x)=0$

60. $(x^2-a\beta)^3+(a^2-\beta x)^3+(\beta^2-ax)^3-3(x^2-a\beta)(a^2-\beta x)(\beta^2-ax)=0$

61. $(3x-a-\beta)^3+(3a-x-\beta)^3+(3\beta-x-a)^3-3(3x-a-\beta)(3a-$

$-x-\beta)(3\beta-x-a)-15(x^3+a^3+\beta^3-3a\beta x)=0$

62. $(x^2+2a\beta)^3+(a^2+2\beta x)^3+(\beta^2+2ax)^3-3(x^2+2a\beta)(a^2+2\beta x)\cdot$

$\cdot(\beta^2+2ax)=0$

63. $(ax+\beta\lambda)^3+(\beta x+a\mu)^3+(\beta\mu+a\lambda)^3-3(ax+\beta\lambda)(\beta x+a\mu)\cdot$

$\cdot(\beta\mu+a\lambda)=0$

64. $(x^2+a^2+\beta^2)^3+2(ax+\beta x+a\beta)^3-3(x^2+a^2+\beta^2)(ax+$

$+\beta x+a\beta)^2=0$

65. $8(x+a+\beta)^3-(x+a)^3-(x+\beta)^3-(a+\beta)^3=0$

66. $(x+a+\beta+\gamma)^5-(x+a+\beta)^5-(x+a+\gamma)^5-(x+\beta+\gamma)^5-$

$-(a+\beta+\gamma)^5+(x+a)^5+(x+\beta)^5+(x+\gamma)^5+(a+\beta)^5+$

$+(a+\gamma)^5+(\beta+\gamma)^5-x^5-a^5-\beta^5-\gamma^5=0$

67. $(\beta+\gamma-a-x)^4(\beta-\gamma)(a-x)+(\gamma+a-\beta-x)^4(\gamma-a)(\beta-x)+$

$+(a+\beta-\gamma-x)^4(a-\beta)(\gamma-x)=0$

68. $(x+a+\beta)^2=3(ax+\beta x+a\beta)$

69. $3(x^2+a^2+\beta^2)=(x+a+\beta)^2$

70. $5(3x^2+\lambda^2+\mu^2)=(3x+\lambda+\mu)^2$

71. $(a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2)x^2+2(a_1\beta_1+a_2\beta_2+\dots+a_\nu\beta_\nu)x+$

$$+(\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_\nu^2)=0$$

72. $(x-a)^2+(\lambda-\beta)^2+(\mu-\gamma)^2+(x^2+\lambda^2+\mu^2-1)(a^2+\beta^2+\gamma^2-1)=0$

73. $(x^2+a^2)(\lambda^2+\beta^2)=4a\beta\lambda x$

74. $(a^2+\beta^2)x^2-2\beta(a+\gamma)x+\beta^2+\gamma^2=0$

75. $x^4+\lambda^4+\mu^4+\nu^4=4\lambda\mu\nu x$

76. $2(x^2+ax+a^2)(a^2+a\beta+\beta^2)-(\beta^2+\beta x+x^2)^2+2(a^2+$
$+a\beta+\beta^2)(\beta^2+\beta x+x^2)-(x^2+ax+a^2)^2+2(\beta^2+\beta x+x^2)$
$(x^2+ax+a^2)-(a^2+a\beta+\beta^2)^2=0$

77. $\dfrac{4x+2}{3}-\dfrac{x+\lambda}{\mu}=\dfrac{5(x-1)}{6}\quad,\quad \mu\neq 0$

78. $\dfrac{2x+\mu}{\lambda}+\dfrac{\lambda-x}{\mu}=\dfrac{3\mu x+(\lambda-\mu)^2}{\lambda\mu}\quad,\quad \lambda\mu\neq 0$

79. $\dfrac{a+x}{a-\beta}+\dfrac{x-a}{a+\beta}=\dfrac{x+\beta}{a+\beta}+\dfrac{2(x-\beta)}{a-\beta}\quad,\quad a\neq\pm\beta$

80. $(a+x)(\beta+x)-a(\beta+\gamma)=\dfrac{a^2\gamma}{\beta}+x^2\qquad \beta\neq 0$

81. $\dfrac{\lambda x-\kappa}{a+\beta}+\dfrac{\mu x+\kappa}{a-\beta}=\dfrac{\mu x+\kappa}{a+\beta}-\dfrac{\lambda x+\kappa}{a-\beta}\quad,\quad a\neq\pm\beta.$

82. $\dfrac{a-x}{a-\beta}+\dfrac{a+x}{a+\beta}+\dfrac{x}{2}=\dfrac{a\beta x}{a^2-\beta^2}+\dfrac{(a-\beta)x}{2(a+\beta)}\qquad a\neq\pm\beta$

83. $\dfrac{a^2+x^2}{(a-\beta)^2}+\dfrac{5(x+2a-3\beta)}{a-\beta}=\dfrac{3(a-x)}{a-\beta}+\dfrac{2ax}{(a-\beta)^2}\quad,\quad a\neq\beta$

84. $\dfrac{x+2a}{2\beta-x}+\dfrac{x-2a}{2\beta+x}=\dfrac{4a\beta}{4\beta^2-x^2}$

85. $\frac{\alpha}{\beta}\left(1-\frac{\alpha}{x}\right)+\frac{\beta}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{x}\right)=1, \quad \alpha\beta \neq 0$

86. $\frac{2\alpha+x}{2\alpha-x}+\frac{\alpha-2x}{\alpha+2x}=\frac{8}{3}$

87. $\left(\frac{x+\alpha}{x+\beta}\right)^2=\frac{x^2+\alpha^2}{x^2+\beta^2}, \quad \beta \neq 0$

88. $\frac{\alpha}{x-\alpha}-\frac{\beta}{x-\beta}=\frac{\alpha-\beta}{x+\alpha-\beta}$

89. $\frac{1}{\alpha+\beta+x}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}, \quad \alpha\beta \neq 0$

90. $\left(x^2+\alpha^2-\beta^2\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\alpha^2+\beta^2-x^2\right)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+$

$+\left(\beta^2+x^2-\alpha^2\right)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}\right)=0 \quad \Big| \; \alpha\beta \neq 0$

91. $\alpha+\alpha x\left(1+\frac{1}{x}\right)=\alpha\left(\alpha+x\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)+\alpha^2\left(1-\frac{1}{x}\right)-\frac{\alpha}{x}$

92. $\frac{x}{\alpha}+\frac{\beta}{x}+\frac{\beta^2}{x^2}=1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\beta^2}{\alpha^2} \quad \Big| \; \alpha \neq 0$

93. $\frac{1}{x-\alpha}+\frac{1}{x-\beta}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta} \quad \Big| \; \alpha\beta \neq 0$

94. $\frac{1}{x-4}=\frac{4}{4\mu-x}-\frac{5}{\mu-x}$

95. $\frac{1}{\alpha-\beta}+\frac{\alpha-\beta}{x}=\alpha\beta^2+\frac{\alpha+\beta}{x} \quad \Big| \; \alpha \neq \beta$

96. $\frac{x}{x-\beta}-\frac{1}{2}=\frac{x}{2\alpha}+\frac{x+2\alpha}{\beta-x} \quad \Big| \; \alpha \neq 0$

97. $\frac{x+\alpha}{x+\beta}+\frac{x+\beta}{x+\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}+\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \quad \Big| \; \alpha\beta \neq 0$

98. $\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{x+a}{x-a} = 2$

99. $\dfrac{2x-a}{\gamma^2 x + 3a\gamma^2} = \dfrac{(2x+\beta+\gamma)^2}{(4\gamma x + 2\beta\gamma + 2\gamma^2)} \quad \Big| \ \gamma \neq 0$

100. $\dfrac{(\beta-\gamma)(1+a^2)}{x+a^2} + \dfrac{(\gamma-a)(1+\beta^2)}{x+\beta^2} + \dfrac{(a-\beta)(1+\gamma^2)}{x+\gamma^2} = 0$

101. $\dfrac{x(x-2a)^3}{(x+a)^3} + a\dfrac{(2x-a)^3}{(x+a)^3} = x^2 - a^2$

102. $\dfrac{x-a}{x^2-4ax+3a^2} + \dfrac{x+\beta}{x^2+4\beta x+3\beta^2} = \dfrac{2x+a+\beta}{(x-3a)(x+3\beta)}$

103. $\dfrac{1}{(x+a)^2-\beta^2} + \dfrac{1}{(x-\beta)^2-a^2} = \dfrac{1}{x^2-(a+\beta)^2} + \dfrac{1}{x^2-(a-\beta)^2}$

104. $\dfrac{(x-a)^2}{(x-a)^2-(\beta-\gamma)^2} + \dfrac{(x-\beta)^2}{(x-\beta)^2-(\gamma-a)^2} + \dfrac{(x-\gamma)^2}{(x-\gamma)^2-(a-\beta)^2} = 1$

105. $\dfrac{(x+a)(x+\beta)}{(x-a)(x-\beta)} + \dfrac{(x-a)(x-\beta)}{(x+a)(x+\beta)} = \dfrac{(x+\gamma)(x+\delta)}{(x-\gamma)(x-\delta)} + \dfrac{(x-\gamma)(x-\delta)}{(x+\gamma)(x+\delta)}$

106. $\dfrac{a}{a-x} + \dfrac{a}{a+x} + \dfrac{2a^2}{a^2+x^2} + \dfrac{4a^4}{a^4+x^4} = 8$

107. $\dfrac{a^2}{(a-\beta)(a-x)} + \dfrac{\beta^2}{(\beta-x)(\beta-a)} + \dfrac{x^2}{(x-a)(x-\beta)} = x \quad \Big| \ a \neq \beta$

108. $\dfrac{a^2}{(a-\beta)(a-\gamma)(x+a)} + \dfrac{\beta^2}{(\beta-\gamma)(\beta-a)(x+\beta)} + \dfrac{\gamma^2}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)(x+\gamma)} = 0$

$a \neq \beta \neq \gamma \neq a$

109. $\dfrac{\dfrac{a+x}{a-x} - \dfrac{a-x}{a+x}}{\dfrac{a+x}{a-x} + \dfrac{a-x}{a+x}} = \dfrac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{a^2}} \quad \Big| \ a \neq 0$

110. $\left[\sum \dfrac{a}{(a-\beta)(a-\gamma)}\right] x = \sum \dfrac{x^2 - \lambda\mu}{(x+\lambda)(x+\mu)} \quad \Big| \ \begin{array}{l} a \neq \beta \neq \gamma \neq a \\ \lambda \neq -\mu \end{array}$

111. $\sum \frac{\beta\gamma(\alpha+x)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} = \sum \frac{(1+\alpha\beta)(1+\alpha\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \quad \Big| \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

112. $\left[\sum \frac{\alpha^3}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right]x = \sum \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \quad \Big| \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

113. $2\cdot\sum \frac{x^4}{(x-\lambda)(x-\mu)} = \sum \frac{\beta-\gamma}{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2} \quad \Big| \ \alpha \neq \beta+\gamma, \ \beta \neq \gamma+\alpha, \ \gamma \neq \alpha+\beta, \ \lambda \neq \mu$

114. $$\frac{\alpha^2\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{x}\right)+\beta^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)+x^2\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)}{\alpha\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{x}\right)+\beta\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\alpha}\right)+x\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)} =$$

$$=(\alpha x+\beta x+\alpha\beta)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-\alpha\beta x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}\right)$$

$\alpha\beta \neq 0$

115. $$\frac{\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x+\beta}{x-\beta}+\frac{x+\gamma}{x-\gamma}-3\frac{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}}{\frac{\alpha}{x-\alpha}+\frac{\beta}{x-\beta}+\frac{\gamma}{x-\gamma}-3\frac{x^3+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x}{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}} = 4x$$

116. $$\frac{(\alpha+\lambda)(\alpha+\mu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(x+\alpha)}+\frac{(\beta+\lambda)(\beta+\mu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)(x+\beta)}+\frac{(\gamma+\lambda)(\gamma+\mu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)(x+\gamma)}=0$$

$\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

117. $\left[\sum \frac{\alpha(\beta+\gamma-\alpha)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}\right]x = \sum \frac{(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} \quad \Big| \ \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$

118. $$1+\frac{\alpha_1}{x-\alpha_1}+\frac{\alpha_2 x}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}+\dots+\frac{\alpha_\nu x^{\nu-1}}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_\nu)}=$$

$=0 \quad \Big| \ \nu \in N$

119. $$\frac{\alpha x^{\mu+1}-x^\mu}{x-1}+\frac{\beta x^\mu}{x+1}=\frac{\alpha x^\mu(x^2+1)}{x^2-1}$$

120. $\left[\sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{a_\kappa^\mu}{(a_\kappa-a_1)(a_\kappa-a_2)\cdots(a_\kappa-a_{\kappa-1})(a_\kappa-a_{\kappa+1})\cdots(a_\kappa-a_\nu)}\right]x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa$

ὅπου $a_\kappa \neq a_\lambda$, $\forall\ \kappa \neq \lambda\ (=1,2,3,\dots,\nu)$ καὶ $\mu,\nu \in N$ μὲ $\mu \leq \nu$.

121. $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{\beta}{a} - \frac{6a}{\beta} \quad \Big|\ a\beta \neq 0$

122. $\sqrt{ax+\lambda} + \sqrt{\beta x+\mu} = \sqrt{\gamma x+\kappa} \quad \Big|\ a, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \kappa \in R.\ a\beta\gamma \neq 0.$

123. $\sqrt{x-a} - \sqrt{x-\beta} = 1 \quad \Big|\ a, \beta \in R.$

124. $\sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x-1)} = \lambda \quad \Big|\ \lambda \in R.$

125. $\sqrt{x+a} - \sqrt{\frac{a^2}{a+x}} = \sqrt{2a+x} \quad \Big|\ a \in R.$

126. $\frac{x}{\sqrt{17}}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{17}} + \frac{\lambda}{\sqrt{17}}\sqrt{1-\frac{x^2}{17}} = 1 \quad \Big|\ \lambda \in N_0.$

127. $\sqrt[3]{(a+x)^2} + 4\cdot\sqrt[3]{(a-x)^2} = 5\cdot\sqrt[3]{(a^2-x^2)} \quad \Big|\ a \in R.$

128. $\frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} = 2a\,\frac{1-a^2}{a^4+6a^2+1} \quad \Big|\ a \in R.$

129. $\sqrt{a+x} + \sqrt{\beta+x} = \mu \quad \Big|\ a, \beta, \mu \in R.$

130. $\sqrt{|x^2-1|} = x + \frac{\lambda}{2} \quad \Big|\ \lambda \in R_0^-.$

131. $\big||a-x|+|\beta-x|\big| = |a-\beta| \quad \Big|\ a, \beta \in R.$

132. $\frac{a-\beta}{\sqrt{|\gamma-x|}} + \frac{\beta-\gamma}{\sqrt{|a-x|}} + \frac{\gamma-a}{\sqrt{|\beta-x|}} = 0 \quad \Big|\ \gamma<\beta<a$ καὶ $\Omega \equiv R-[\gamma,a]$

133. $\big||x|-1\big| = 7\lambda - 2x \quad \Big|\ \lambda \in R.$

134. $|a-2|x + (a-2)|x| = 3a+2 \quad \Big|\ a \in R.$

135. $132x^2 + 99 + 33\lambda^2 = (10|x| + 2\sqrt{3} + 2\lambda)^2 \quad \Big|\ \lambda \in R.$

Ὑποδείξεις διά τήν λύσιν τῶν προηγουμένων ἀσκήσεων

1. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 8\left[a+x-(1+ax)\right]=0 \Longleftrightarrow (x-1)(1-a)=0$

$\Longrightarrow$ (i) ἐάν $a=1 \Longrightarrow A \equiv R$ (ταυτότης)

(ii) ἐάν $a \neq 1 \Longrightarrow x-1=0 \Longleftrightarrow x=1$

2. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (6-x)(6-x+x)+(\lambda+6)(\lambda+6-12-\lambda+x)+$

$+\left[(\lambda-x)-(\lambda+x)\right]\left[(\lambda-x)+(\lambda+x)\right]=0$

$\Longleftrightarrow 6(6-x)+(\lambda+6)(x-6)-4\lambda x=0 \Longleftrightarrow (6-x)(6-\lambda-6)-4\lambda x=0$

$\Longleftrightarrow \lambda(6-x-4x)=0 \Longrightarrow$ (i) Ἐάν $\lambda=0 \Longrightarrow A\equiv R$ (ταυτότης)

(ii) Ἐάν $\lambda \neq 0 \Longrightarrow 3x-6=0 \Leftrightarrow x=2$

3. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 5x^3-42ax^2+96a^2x-32a^3=0$

$\Longleftrightarrow 5x^2(x-8a)-2ax(x-8a)+16a^2(5x-2a)=0$

$\Longleftrightarrow x(5x-2a)(x-8a)+16a^2(5x-2a)=0$

$\Longleftrightarrow (5x-2a)(x-4a)^2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{2a}{5} \vee x=4a$

(διπλῆ) $\Longrightarrow$

(i) Ἐάν $a=0 \Longrightarrow A \equiv \{0$ (τριπλῆ)$\}$

(ii) Ἐάν $a \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \left\{\frac{2a}{5}, 4a\right\}$.

4. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \left[(3x+4\lambda)-(5x-2\lambda)\right]\left[(3x+4\lambda)+(5x-2\lambda)\right]-$

$-2(x+2\lambda)(-8x+\lambda)=0 \Longleftrightarrow 2\lambda(37x+4\lambda)=0 \Longrightarrow$

(i) Ἐάν $\lambda=0 \Longrightarrow A\equiv R$ (ταυτότης)

(ii) Ἐάν $\lambda \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \left\{-\frac{4\lambda}{37}\right\}$.

5. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (\lambda-2\mu)(1+\mu^2)x = \mu-\lambda+3$

$$\Longrightarrow (i)\ \lambda \neq 2\mu \Longrightarrow x = \frac{\mu-\lambda+3}{(\lambda-2\mu)(1+\mu^2)}$$

$$(ii)\ \left.\begin{array}{l}\lambda = 2\mu\\ \mu = 3\end{array}\right\} \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$$

$$(iii)\ \begin{array}{l}\lambda = 2\mu\\ \mu \neq 3\end{array} \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 0\cdot x = 3-\mu \Longrightarrow A \equiv \emptyset$$

6. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow -a+2b-1x = 2a-b+(a-b-4)x$

$\Longleftrightarrow (a-b)x = -3(a-b) \Longrightarrow (i)$ Ἐάν $a=b$

$\Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$ (ii) Ἐάν $a \neq b \Longrightarrow x = -3$

7. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (a^2+ab+b^2)x = a^3-b^3$

$\Longrightarrow (i)\ a^2+ab+b^2 \neq 0 \Longrightarrow x = a-b$

$(ii)\ a^2+ab+b^2 = 0 \Longleftrightarrow (a+\frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4} = 0$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a+\frac{b}{2} = 0\\ \frac{3b^2}{4} = 0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2a+b=0\\ b=0\end{array}\right\} \Longleftrightarrow a = b = 0$$

$$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R.$$

8. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (a-x)(1-x-1+b)+(1+x)(b-x) = 0$

$\Longleftrightarrow (a-x)(b-x)+(1+x)(b-x) = 0$

$\Longleftrightarrow (b-x)(a-x+1+x) = 0 \Longleftrightarrow (b-x)(a+1) = 0$

$\Longrightarrow (i)\ a \neq -1 \Longrightarrow b-x = 0 \Longleftrightarrow x = b$

$(ii)\ a = -1 \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R.$

9. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow a^2x+ab+b = b^2x+ab+a \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (a^2-b^2)x = a-b \Longrightarrow$ (i). $a \neq \pm b \Rightarrow x = \frac{1}{a+b}$.

(ii). $a = b \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(iii). $a = -b \neq 0 \Longrightarrow 0 \cdot x = -2b \Longrightarrow A \equiv \emptyset$.

10. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (a^2-b^2)x = a-b$ (βλ. ἄσκ. 9)

11. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (2x+a+b)(a-b) = b-a$

$\Longrightarrow$ (i) $a = b \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$

(ii) $a \neq b \Longrightarrow x = -\frac{a+b+1}{2}$

12. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (a+b)^2x^2 - (a-b)^2(a+b)x - 2ab(a^2+$
$+b^2) = 0 \Longleftrightarrow (a+b)^2x^2 - (a^2-2ab+b^2)(a+b)x - 2ab\cdot$
$\cdot(a^2+b^2) = 0 \Longleftrightarrow (a+b)^2x^2 + 2ab(a+b)x - (a^2+b^2)(a+b)\cdot$
$\cdot x - 2ab(a^2+b^2) = 0 \Longleftrightarrow \left[(a+b)x + 2ab\right]\left[(a+b)x - (a^2+b^2)\right] = 0$
$\Longleftrightarrow (a+b)x = -2ab \ \vee \ (a+b)x = a^2+b^2 \Longrightarrow$

(i) $a = b = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) $a = -b \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$

(iii) $a \neq -b \Longrightarrow A = \left\{-\frac{2ab}{a+b}, \frac{a^2+b^2}{a+b}\right\}$.

διότι $\frac{a^2+b^2}{a+b} \neq -\frac{2ab}{a+b} \Longleftrightarrow \big(a^2+b^2+2ab \neq 0$
$\Longleftrightarrow (a+b)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow a \neq -b$ ἀληθής$\big)$.

13. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 3(\lambda-1)x = \lambda^2-1 \Longrightarrow$

(i) Ἐάν $\lambda = 1 \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) Ἐάν $\lambda \neq 1 \Longrightarrow x = \frac{\lambda+1}{3}$

14. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 2(a^3+b^3+3a^2b+3ab^2)x =$
$= a^4-b^4+2ab(a^2-b^2) \Longleftrightarrow 2(a+b)^3x=(a^2-b^2)(a+$
$+b)^2 \Longrightarrow$ (i) $a+b=0 \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.
(ii) $a+b\neq 0 \Longrightarrow x=\dfrac{a-b}{2}$

15. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow [(a^2-b^2)x-1]^2-[(a^2+b^2)x+1]^2+(2abx-$
$-1)^2=0 \Longleftrightarrow (-2b^2x-2)(2a^2x)+4a^2b^2x^2+1-$
$-4abx=0 \Longleftrightarrow -4a^2x-4abx=-1 \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow 4a(a+b)x=1 \Longrightarrow$ (i) $a=0 \vee a=-b \Longrightarrow$
$\Longrightarrow 0\cdot x=1 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$.
(ii) $a\neq 0 \wedge a\neq -b \Longrightarrow x=\dfrac{1}{4a(a+b)}$

16. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 2[(x-a)^2+k^2]=2k^2 \Longleftrightarrow (x-a)^2=0$
$\Longrightarrow x=a$ (διπλῆ).

17. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow a^2x^2+1=b^2x^2+2ax \Longleftrightarrow (ax)^2-2ax+$
$+1-b^2x^2=0 \Longleftrightarrow (ax-1)^2-(bx)^2=0 \Longleftrightarrow (ax-1-bx)\cdot$
$\cdot(ax-1+bx)=0 \Longleftrightarrow (a-b)x=1 \vee (a+b)x=1 \Longrightarrow$
(i) $a=b=0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 0\cdot x=1 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$
(ii) $a=\pm b\neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{2a}$
(iii) $a\neq\pm b \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow x=\dfrac{1}{a\pm b}$

18. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (x-a)^3+(x+a)^2(x-a)-b[(x+a)^2+(x-a)^2]=0$
$\Longleftrightarrow (x-a)^2(x-a-b)+(x+a)^2(x-a-b)=0$

$$\Longleftrightarrow (x-a-b)\left[(x+a)^2+(x-a)^2\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow 2(x^2+a^2)(x-a-b)=0 \Longleftrightarrow x^2+a^2=0 \vee x-a-b=0$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a=0 \Longrightarrow x=0$ (διπλῆ) $\vee$ $x=b$.

(ii) Ἐάν $a\neq 0 \Longrightarrow x=a+b$ διότι $x^2+a^2>0$, $\forall x\in R$.

19. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (x+\lambda)^3-1-3\lambda x(x+\lambda-1)=0$

$$\Longleftrightarrow (x+\lambda-1)\left[(x+\lambda)^2+(x+\lambda)+1\right]-3\lambda x(x+\lambda-1)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+\lambda-1)(x^2+2\lambda x+\lambda^2+x+\lambda+1-3\lambda x)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+\lambda-1)\left[x^2-(\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1\right]=0$$

$$\Longleftrightarrow x+\lambda-1=0 \vee x^2-(\lambda-1)x+\lambda^2+\lambda+1=0 \;---$$

20. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^2-a^4x-b^2x+a^4b^2=0$

$$\Longleftrightarrow x(x-a^4)-b^2(x-a^4)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x-b^2)(x-a^4)=0 \Longleftrightarrow x=b^2 \vee x=a^4$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $b\neq \pm a^2 \Longrightarrow A\equiv\{a^4, b^2\}$.

(ii) Ἐάν $b=\pm a^2 \Longrightarrow A\equiv\{a^4$ (διπλῆ) $\}$.

21. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \lambda^2x-\lambda(x+2)+2=0$ (1)

$\vee\ \lambda^2(x-2)-x-(3\lambda+1)=0$ (2)

(1) $\Longleftrightarrow \lambda(\lambda-1)x=2(\lambda-1) \Longrightarrow$ (i) $\lambda=1 \Longrightarrow 0\cdot x=0$

$\Longrightarrow A_1\equiv R$ (ii) $\lambda\neq 1 \Longrightarrow \lambda\cdot x=2 \Longrightarrow$

(a) $\lambda=0 \Longrightarrow 0\cdot x=2 \Longrightarrow A_1\equiv\emptyset$

(b) $\lambda\neq 0 \Longrightarrow x=\frac{2}{\lambda} \Longrightarrow A_1=\left\{\frac{2}{\lambda}\right\}$

$(2) \Longleftrightarrow (\lambda^2-1)\, x = 2\lambda^2+3\lambda+1 \Longleftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)\, x = (\lambda+1)\cdot(2\lambda+1) \Longrightarrow$ (i) $\lambda=-1 \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A_2 \equiv R$.

(ii) $\lambda \neq -1 \Longrightarrow (\lambda-1)\, x = 2\lambda+1 \Longrightarrow$

(α) $\lambda = 1 \Longrightarrow 0\cdot x = 3 \Longrightarrow A_2 \equiv \emptyset$

(β) $\lambda \neq 1 \Longrightarrow x = \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} \Longrightarrow A_2 = \left\{\dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1}\right\}$.

Συνεπῶς διά τήν (Ε) $\Longleftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda x-2)\left[(\lambda-1)x-(2\lambda+1)\right] = 0$ ἔχομεν:

(i)· Ἐάν $\lambda = \pm 1 \Longrightarrow A = A_1 \cup A_2 = R$.

(ii)· Ἐάν $\lambda \neq \pm 1 \Longrightarrow$ (α) $\lambda = 0 \Longrightarrow A = \left\{ \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} = -1 \right\}$

(β) $\lambda \neq 0 \Longrightarrow A = \left\{ \dfrac{2}{\lambda},\ \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1} \right\}$

διότι: $\dfrac{2}{\lambda} \neq \dfrac{2\lambda+1}{\lambda-1},\ \forall\ \lambda \in R - \{0,\ 1\}$.

22. · <u>Ὑπόδ.</u> (Ε) $\Longleftrightarrow (\lambda+1)(\lambda^2-4)\, x = 5\,(\lambda+1)(\lambda-1)$

$\Longrightarrow$ (i) · Ἐάν $\lambda = -1 \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$

(ii) · Ἐάν $\lambda \neq -1 \Longrightarrow (\lambda^2-4)\, x = 5\,(\lambda-1) \Longrightarrow$

(α) · Ἐάν $\lambda \neq \pm 2 \Longrightarrow x = \dfrac{5(\lambda-1)}{\lambda^2-4}$

(β) · Ἐάν $\lambda = \pm 2 \Longrightarrow 0\cdot x = 5\,(\lambda-1) \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$.

23. · <u>Ὑπόδ.</u> (Ε) $\Longleftrightarrow (\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta)\, x = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (\alpha+\beta)^2 x = (\alpha-\beta)^2 \Longrightarrow$

(i) $a \neq -b \Longrightarrow x = \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$

(ii) $a = b = 0 \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(iii) $a = -b \neq 0 \Longrightarrow 0\cdot x = 4a^2 \Longrightarrow A \equiv \phi$

24. ʽΥπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (3-2\lambda)x = 9-4\lambda^2 \Longleftrightarrow$

$(3-2\lambda)x = (3-2\lambda)(3+2\lambda) \Longrightarrow$ (i) ʼΕάν $3-2\lambda = 0$

$\Longleftrightarrow \lambda = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) ʼΕάν $3-2\lambda \neq 0 \Longleftrightarrow \lambda \neq \dfrac{3}{2} \Longrightarrow x = 2\lambda + 3$

25. ʽΥπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (\lambda^2-4)x = \lambda^2+4\lambda+4 \Longleftrightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)x =$

$= (\lambda+2)^2 \Longrightarrow$ (i) ʼΕάν $\lambda = -2 \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) ʼΕάν $\lambda \neq -2 \Longrightarrow (\lambda-2)x = \lambda+2 \Longrightarrow$

(α) $\lambda = 2 \Longrightarrow 0\cdot x = 4 \Longrightarrow A \equiv \phi$

(β) $\lambda \neq 2 \Longrightarrow x = \dfrac{\lambda+2}{\lambda-2}$

26. ʽΥπόδ. $(E) \Longleftrightarrow -4x^2 + 2\lambda x = 0 \Longleftrightarrow x(2x-\lambda) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = 0 \vee x = \dfrac{\lambda}{2} \Longrightarrow$ (i) ʼΕάν $\lambda = 0 \Longrightarrow A =$

$= \{0$ (διπλῆ)$\}$. (ii) ʼΕάν $\lambda \neq 0 \Longrightarrow A = \left\{0, \dfrac{\lambda}{2}\right\}$.

27. ʽΥπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (2x-1)(x-1)(x^2+x+1)\left[(\lambda-1)x - 2\lambda\right] = 0$

$\Longleftrightarrow 2x-1 = 0 \vee x-1 = 0 \vee (\lambda-1)x - 2\lambda = 0$

(διότι $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0, \forall\ x \in R$).

$\Longleftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \vee x = 1 \vee x = \dfrac{2\lambda}{\lambda-1}$, ʼΕάν $\lambda \neq 1$

$\Longrightarrow$ (i) $A = \left\{\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{2\lambda}{\lambda-1}\right\}$, ʼΕάν $\lambda \neq -\dfrac{1}{3} \wedge \lambda \neq \pm 1$

(ii) $A = \left\{ 1, \frac{1}{2} \ (\delta\iota\pi\lambda\tilde{\eta}) \right\}$, ἐάν $\lambda = -\frac{1}{3}$

(iii) $A = \left\{ \frac{1}{2}, 1 (\delta\iota\pi\lambda\tilde{\eta}) \right\}$, ἐάν $\lambda = -1$ καί

(iv) $A = \{ 1/2, 1 \}$, ἐάν $\lambda = 1$.

28. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \lambda(x^2-1) - \mu x(x-1) - \kappa(x-1) = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x-1)[\lambda(x+1) - \mu x - \kappa] = 0 \Longleftrightarrow (x-1)[(\lambda-\mu)x + \lambda - \kappa] = 0$

$\Longleftrightarrow x - 1 = 0 \ (1) \ \vee \ (\lambda-\mu)x = \kappa - \lambda \quad (2) \Longrightarrow$ (i) Ἐάν

$\lambda \neq \mu \Longrightarrow x = \frac{\kappa-\lambda}{\lambda-\mu}$ (ii) Ἐάν $\lambda = \mu \Longrightarrow 0 \cdot x = \kappa - \lambda \Longrightarrow$

(α) $\kappa = \lambda \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A' \equiv R$.

(β) $\kappa \neq \lambda \Longrightarrow 0 \cdot x = \kappa - \lambda \Longrightarrow A' \equiv \emptyset$

Συνεπῶς διά τήν (E) ἔχομεν:

(i) $\lambda \neq \mu \Longrightarrow A = \left\{ 1, \frac{\kappa-\lambda}{\lambda-\mu} \right\}$, ἐάν $\kappa + \mu \neq 2\lambda$

(ii) $\lambda \neq \mu \Longrightarrow A = \left\{ 1 \ (\delta\iota\pi\lambda\tilde{\eta}) \right\}$, ἐάν $\kappa + \mu = 2\lambda$

(iii) $\kappa = \lambda = \mu \Longrightarrow A \equiv R$

(iv) $\kappa \neq \lambda = \mu \Longrightarrow A = \{ 1 \}$

29. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow ax(x^2 - 4a^2 + 2x^2 - 2a^2) = 0$

$\Longleftrightarrow ax(3x^2 - 6a^2) = 0 \Longleftrightarrow ax(x^2 - 2a^2) = 0$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a = 0 \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) Ἐάν $a \neq 0 \Longrightarrow x = 0 \ \vee \ x = \pm a\sqrt{2}$

30. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow [(x+a)(x+4a)][(x+2a)(x+3a)] = \frac{9}{16} a^4$

$\Longleftrightarrow (x^2 + 5ax + 4a^2)(x^2 + 5ax + 6a^2) = \frac{9}{16} a^4$

$$\iff (x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+24a^4 = \frac{9}{16}\,a^4$$

$$\xleftrightarrow{x^2+5ax=y} \quad y^2+10a^2y+\frac{375}{16}\,a^4=0$$

$$\iff \left(y+\frac{25}{4}\,a^2\right)\left(y+\frac{15}{4}\,a^2\right)=0 \implies x^2+5ax+\frac{25}{4}a^2=$$

$$=0 \lor x^2+5ax+\frac{15}{4}\,a^2=0 \iff \left(x+\frac{5a}{2}\right)^2=0 \lor$$

$$\left(x+\frac{5a}{2}+\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)\left(x+\frac{5a}{2}-\frac{a\sqrt{10}}{2}\right)=0$$

$$\iff x=-\frac{5a}{2}\ (\text{διπλή}) \lor x=-\frac{5\pm\sqrt{10}}{2}\,a.$$

31. <u>Υπόδ.</u> $(E) \iff \left[(x+a)(x+7a)\right]\left[(x+3a)(x+5a)\right]=384a^4$

$$\iff (x^2+8ax+7a^2)(x^2+8ax+15a^2)=384a^4$$

$$\iff (x^2+8ax)^2+22a^2(x^2+8ax)-279a^4=0$$

$$\xleftrightarrow{x^2+8ax=y} \quad y^2+22a^2y-279a^4=0$$

$$\iff (y+31a^2)(y-9a^2)=0 \quad ---$$

32. <u>Υπόδ.</u> $(E) \iff \left[(x-3a)(x+4a)\right]\left[(x-a)(x+2a)\right]=2376a^4$

$$\iff (x^2+ax-12a^2)(x^2+ax-2a^2)=2376a^4$$

$$\iff (x^2+ax)^2-14a^2(x^2+ax)-2352a^4=0$$

$$\xleftrightarrow{x^2+ax=y} \quad y^2-(56-42)a^2y-56\cdot42a^4=0 \iff (y-56a^2)\cdot$$

$$\cdot(y+42a^2)=0 \implies x^2+ax-56a^2=0\ (1) \lor x^2+ax+42a^2=$$

$=0\ (2) \iff x=7a \lor x=-8a$ διότι ἡ (2) ἔχει

$$\Delta=a^2-168a^2=-167a^2\leqq 0 \quad \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

$$\implies (i)\ a=0 \implies A=\left\{0\ (\text{τετραπλή})\right\}$$

(ii) $a \neq 0 \Longrightarrow A = \left\{-8a, 7a\right\}$.

33. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^4 - 2(a+b)x^2 + (a+b)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (x^2 - a - b)^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = a + b \Longrightarrow$

(i) Εάν $a+b \geq 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a+b}$ (διπλές)

(ii) Εάν $a+b < 0 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$ (αδύνατος εν R).

34. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^4 - 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (x^2 - a^2 + b^2)^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = a^2 - b^2$

$\Longrightarrow$ (i) $a^2 - b^2 \geq 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$

(ii) $a^2 - b^2 < 0 \Longleftrightarrow -|b| < a < |b| \Longleftrightarrow |a| < |b| \Longrightarrow$

(E) αδύνατος εν R $(A \equiv \emptyset)$

35. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 4x^4 - 4x^2a^4 - x^2a^4 + a^8 = 0 \Longleftrightarrow 4x^2(x^2 - a^4) - a^4(x^2 - a^4) = 0 \Longleftrightarrow (4x^2 - a^4)(x^2 - a^4) = 0$

$\Longleftrightarrow (2x + a^2)(2x - a^2)(x + a^2)(x - a^2) = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\dfrac{a^2}{2}$

$\vee\ x = \pm a^2 \Longrightarrow$ (i) Εάν $a = 0 \Longrightarrow A = \{0$ (τετραπλή)$\}$

(ii) Εάν $a \neq 0 \Longrightarrow A = \left\{\pm\dfrac{a^2}{2}, \pm a^2\right\}$

36. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow (2x^2 + 4a^2)^2 - 16x^2a^2 - 2x^4 - 3ax^3 + 3x^2a^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (2x^2 + 4a^2)^2 - 9x^2a^2 - 4x^2a^2 - 2x^4 - 3x^3a = 0$

$\Longleftrightarrow (2x^2 + 4a^2 + 3ax)(2x^2 + 4a^2 - 3ax) - x^2(2x^2 + 4a^2 + 3ax) = 0 \Longleftrightarrow (2x^2 + 4a^2 + 3ax)(x^2 + 4a^2 - 3ax) = 0$

$$\Longleftrightarrow (2x^2+4a^2+3ax)(x^2+4a^2-3ax)=0$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2+3ax+4a^2=0 \ \vee \ x^2-3ax+4a^2=0 \ ---$$

37. <u>Ὑπόδ.</u> Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=-\lambda$ συνεπῶς διαιρεῖται διά $x+\lambda$, $x+\mu$, $\lambda+\mu \Longrightarrow (x+\lambda)(x+\mu)(\lambda+\mu) / (x+\lambda+\mu)^3-x^3-\lambda^3-\mu^3$.

Ἡ δοθεῖσα ἐξ ἄλλου εἶναι δευτέρου βαθμοῦ ὡς πρός x (συντελεστής τοῦ x^3 εἶναι τό 0).

συνεπῶς $(E) \Longleftrightarrow a(x+\lambda)(x+\mu)(\lambda+\mu)=0$ (ὅπου $a=3\neq 0$)

$\Longrightarrow$ (i) $\lambda\neq-\mu \Longrightarrow x=-\lambda \ \vee \ x=-\mu$.

(ii) $\lambda=-\mu \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

38. <u>Ὑπόδ.</u> Ὡς εἰς τήν ἄσκησιν 37 ἔχομεν

$$(x+a)(x+b)(a+b) / (x+a+b)^5-x^5-a^5-b^5$$

καί δίδει πηλίκον $5(x^2+a^2+b^2+ax+bx+ab)$

(βλ. Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου Τ. Α΄ σελίς 118 παρ. 2ον).

Συνεπῶς $(E) \Longleftrightarrow (a+b)(x+a)(x+b)\left[x^2+(a+b)x+a^2+b^2+ab\right]=0$

$\Longrightarrow$ (i) $a=-b \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) $a\neq-b \Longrightarrow x+a=0 \ \vee \ x+b=0 \ \vee \ x^2+(a+b)x+a^2+b^2+ab=0 \quad (1)$

$\Longleftrightarrow x=-a \ \vee \ x=-b$ (διότι) $(1) \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x+a)^2+(x+b)^2+\right.$

$+(a+b)^2 \neq 0\Big], \forall\ x, a, b \in R - \{0\} \wedge a \neq -b.$

39. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 3(x+\lambda+\mu+\kappa)(x^2+\lambda^2+\mu^2+\kappa^2)=0$

$\Longleftrightarrow x+\lambda+\mu+\kappa=0 \quad \vee \quad x^2+\lambda^2+\mu^2+\kappa^2=0$

$\Longleftrightarrow x=-(\lambda+\mu+\kappa) \vee x=\lambda=\mu=\kappa=0 \qquad \Longrightarrow$

(i) Εάν $\lambda=\mu=\kappa=0 \Longrightarrow x=0$ (τριπλή)

(ii) Εάν $\lambda\mu\kappa \neq 0 \Longrightarrow x=-(\lambda+\mu+\kappa)$.

40. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (a-1)(1+x+x^2)^2=(a+1)(1+2x^2+x^4-x^2)$

$\Longleftrightarrow (a-1)(1+x+x^2)^2-(a+1)\left[(1+x^2)^2-x^2\right]=0$

$\Longleftrightarrow (a-1)(1+x+x^2)^2-(a+1)(1+x+x^2)(1-x+x^2)=0$

$\Longleftrightarrow (1+x+x^2)\left[(a-1)(1+x+x^2)-(a+1)(1-x+x^2)\right]=0$

$\Longleftrightarrow a(1+x^2)+ax-(1+x^2)-x-a(1+x^2)+ax-(1+x^2)+$

$+x=0$ (διότι $x^2+x+1>0, \forall\ x\in R$).

$\Longleftrightarrow -2(x^2-ax+1)=0 \Longleftrightarrow x^2-ax+1=0 \qquad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2} \Longrightarrow$ (i) Εάν $a^2-4 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a^2 \geq 4 \Longrightarrow A \equiv \left\{\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}\right\}.$

(ii) Εάν $a^2-4<0 \Longleftrightarrow -2<a<2 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$

41. <u>Υπόδ.</u> (i) Εάν $b=0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow x^4=0 \Longleftrightarrow x=0$ (τετραπλή).

(ii) Εάν $b\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$ τότε

$(E) \Longleftrightarrow \left(\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{x^2}\right)+(a+b)\left(\dfrac{x}{b}-\dfrac{b}{x}\right)+ab-2=0.$

$$\frac{x}{\beta}-\frac{\beta}{x}=y \Longrightarrow \frac{x^2}{\beta^2}+\frac{\beta^2}{x^2}=y^2+2$$

$$\Longleftrightarrow y^2+(a+\beta)y+a\beta=0$$

$$\Longleftrightarrow (y+a)(y+\beta)=0 \Longrightarrow \frac{x}{\beta}-\frac{\beta}{x}+a=0 \vee$$

$$\vee \frac{x}{\beta}-\frac{\beta}{x}+\beta=0 \Longleftrightarrow x^2+a\beta x-\beta^2=0 \vee x^2+\beta^2 x-\beta^2=0$$

$$\Longleftrightarrow x=\frac{-a\beta\pm\beta\sqrt{a^2+4}}{2} \vee x=\frac{-\beta^2\pm\beta\sqrt{\beta^2+4}}{2} \ ---$$

42. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow x^4-2ax^3+(2\beta^2+a^2)x^2-2a\beta^2x+\beta^4=0$

$\Longrightarrow$ (i) Εάν $\beta=0 \Longrightarrow x^4-2ax^3+a^2x^2=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x^2(x^2-2ax+a^2)=0 \Longleftrightarrow x^2(x-a)^2=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x=0$ (διπλή) $\vee$ $x=a$ (διπλή)

(ii) Εάν $\beta\neq 0 \Longrightarrow x\neq 0$ τότε

$$(E) \Longleftrightarrow \left(x^2+\frac{\beta^4}{x^2}\right)-2a\left(x+\frac{\beta^2}{x}\right)+2\beta^2+a^2=0$$

$$\xleftrightarrow{x+\frac{\beta^2}{x}=y \Longrightarrow x^2+\frac{\beta^4}{x^2}=y^2-2\beta^2} y^2-2ay+a^2=0$$

$\Longleftrightarrow (y-a)^2=0 \Longleftrightarrow y=a$. (διπλή) $\Longrightarrow x+\dfrac{\beta^2}{x}=a$

$$\Longleftrightarrow x^2-ax+\beta^2=0 \Longleftrightarrow x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2} \Longrightarrow$$

(i) $a^2-4\beta^2\geqslant 0 \Longrightarrow A=\left\{\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4\beta^2}}{2}\right\}$

(ii) $a^2-4\beta^2<0 \Longleftrightarrow |a|<2|\beta| \Longleftrightarrow -2|\beta|<a<2|\beta|$

$\Longrightarrow A\equiv\varnothing$ (αδύνατος εν R.)

43. <u>Υπόδ.</u> $(E) \xleftrightarrow{x+a+\beta+\gamma=y} (y-a)(y-\beta)(y-\gamma)+a\beta\gamma=0$

$$\Longleftrightarrow y^3-(a+\beta+\gamma)y^2+(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)y-a\beta\gamma+a\beta\gamma=0$$

$$\Longleftrightarrow y\left[y^2-(a+\beta+\gamma)y+(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)\right]=0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow y=0 \vee y^2-(a+b+\gamma)y+ab+b\gamma+\gamma a=0$ ---

44. <u>Ὑπόδ.</u> Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=a$ συνεπῶς $(x-a)(x-b)(b-a) / \sum(x-y)(x^3-y^3)$

καί δίδει πηλίκον $x+a+b$ (βλ. Μαθηματικά Ε΄ Γυμνασίου Τ. Α΄ σελίς 117, παράδ. 1^{ov}).

Ἄρα $(E) \Longleftrightarrow (x+a+b)(x-a)(x-b)(b-a)=0$

$\Longrightarrow$ (i) $a=b \Longrightarrow 0 \cdot x=0 \Longrightarrow A \equiv R.$

(ii) $a \neq b \Longrightarrow x=a \vee x=b \vee x=-(a+b).$

45. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow x(a^2+b^2)+a(x^2+b^2)+b(x^2+a^2)-$

$-6abx+8abx=0 \Longleftrightarrow a^2x+a^2b+b^2x+b^2a+$

$+x^2a+x^2b+2abx=0$

(βλ. Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου Τ. Α΄ σελίς 109, Παράδειγμα 5^{ov}).

$\Longleftrightarrow (a+b)(x+a)(x+b)=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a=-b \Longrightarrow 0 \cdot x=0 \Longrightarrow A \equiv R.$

(ii) Ἐάν $a \neq -b \Longrightarrow x=-a \vee x=-b$

46. <u>Ὑπόδ.</u> (βλ. Ἄσκησιν 45)

$x^2(a+b)+a^2(x+a)+b^2(x+b)+2abx=(a+b)(x+a)\cdot(x+b)$ (βλ. Μαθηματικά Δ΄ Γυμνασίου Τ. Α΄ σελίς 64, παραγρ. 8, παραδ. α).

47. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=a \Longrightarrow (x-a)(x-b)(b-a) / \Sigma x(a^4-b^4)$

καί δίδει πηλίκον τῆς μορφῆς $\lambda(x^2+a^2+b^2)+\mu(ax+bx+ab)$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν $\lambda=\mu=1 \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow (x-a)(x-b)(b-a)(x^2+a^2+b^2+ax+bx+ab)=0$

$\Longrightarrow$ (i) $a=b \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) $a\neq b \Longrightarrow x=a \vee x=b \vee x^2+(a+b)x+a^2+b^2+ab=0 \quad (1)$

$\Longleftrightarrow x=a \vee x=b$ διότι $(1) \Longleftrightarrow$

$\frac{1}{2}\left[(x+a)^2+(x+b)^2+(a+b)^2\right]\neq 0, \forall\, x,a,b\in R$ μέ $x^2+a^2+b^2\neq 0$

48. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=a \Longrightarrow (x-a)(x-b)(b-a) / \Sigma(x-a)(x+a)^2$

καί δίδει πηλίκον $-1 \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow (a-b)(x-a)(x-b)=0 \Longrightarrow$

(i) $a=b \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) $a\neq b \Longrightarrow x=a \vee x=b$

49. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=0,\ a=0,\ b=0$.

$\Longrightarrow abx \,/\, (x+a+b)^5-(a+b-x)^5-(b+x-a)^5-(x+a-b)^5$

καί δίδει πηλίκον τῆς μορφῆς $\lambda(x^2+a^2+b^2)+$ $+\mu(ax+bx+ab)$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν $\lambda=80$ καί $\mu=0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 80\,abx(x^2+a^2+b^2)=0$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $ab=0 \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) Ἐάν $ab\neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow x=0$ (διατί;)

50. Ὑπόδ. Θέτομεν $a-b=a_1$, $b-x=b_1$, $x-a=y$ καί ἔχομεν $a+b-2x=b_1-y$, $b+x-2a=y-a_1$, $x+a-2b=a_1-b_1 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow a_1^2(b_1-y)+b_1^2(y-a_1)$ $+y^2(a_1-b_1)=0$ (βλ. (Ε6) παραδ. 12 παραμετρ. ἐξισ.).

51. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x(a^2+b^2)+a(b^2+x^2)+b(x^2+a^2)+$

$+6abx-4abx=0$

$\Longleftrightarrow a^2x+a^2b+b^2x+b^2a+x^2a+x^2b+2abx=0$

(βλ. Ἀσκ. 45 ἤ 46).

52. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=-a \Longrightarrow (x+a)(x+b)(a+b) \,/$ $/\, \Sigma(x+a)^3-2\Sigma x^3+6abx$ καί δίδει πηλίκον $3 \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow 3(x+a)(x+b)(a+b)=0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (i) $a=-b \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) $a\neq -b \Longrightarrow x=-a \;\vee\; x=-b$.

53. ῾Υπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται

διά $x=0$, $a=0$, $\beta=0$ $\Longrightarrow$

$a\beta x \,/\, (x+a+\beta)^4-\Sigma(x+a)^4+\Sigma x^4$ καί δίδει

πηλίκον τῆς μορφῆς $\lambda(x+a+\beta)$ μέ $\lambda=12\neq 0 \Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow a\beta x(x+a+\beta)=0$

$\Longrightarrow$ (i) $a\beta=0 \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$

(ii) $a\beta\neq 0 \Longrightarrow x=0 \vee x=-(a+\beta).$

54. ῾Υπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται

διά $x=a$ καί $x=-a$ $\Longrightarrow$

$(x^2-a^2)(x^2-\beta^2)(\beta^2-a^2) \,/\, \Sigma x^4(a^2-\beta^2)$

καί δίδει πηλίκον -1 Συνεπῶς

$(E) \Longleftrightarrow (x^2-a^2)(x^2-\beta^2)(\beta^2-a^2)=0$

$\Longrightarrow$ (i) $a\neq\pm\beta \Longrightarrow x=\pm a \vee x=\pm\beta$

(ii) $a=\pm\beta \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$

55. ῾Υπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=a \Longrightarrow (x-a)(x-\beta)(\beta-a) \,/\, \Sigma x(a^2-\beta^2)$

καί δίδει πηλίκον 1 $\Longrightarrow$

$(E) \Longleftrightarrow (\beta-a)(x-a)(x-\beta)=0 \Longrightarrow$

(i) $a=\beta \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$

(ii) $a\neq\beta \Longrightarrow x=a \vee x=\beta.$

56. <u>Υπόδ.</u> Θέτομεν $3x^2+12a^2+10b^2+26ab+17bx+$ $+13ax \equiv (3x+\lambda a+\mu b)(x+\rho a+\kappa b)$ καὶ ἔχομεν

$3x^2+12a^2+10b^2+26ab+17bx+13ax \equiv$

$\equiv 3x^2+\lambda\rho a^2+\mu\kappa b^2+(\lambda\kappa+\mu\rho)ab+(3\kappa+\mu)bx+(3\rho+\lambda)ax$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda\rho &= 12 \\ \mu\kappa &= 10 \\ \lambda\kappa+\mu\rho &= 26 \\ 3\kappa+\mu &= 17 \\ 3\rho+\lambda &= 13 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda &= \frac{12}{\rho} \\ \mu &= \frac{10}{\kappa} \\ 3\kappa+\mu &= 17 \\ 3\rho+\lambda &= 13 \\ \lambda\kappa+\mu\rho &= 26 \end{aligned}\right\} \quad (\Sigma)$$

Λόγω τῶν δύο πρώτων αἱ δύο ἑπόμεναι ἐξισώσεις τοῦ (Σ) δίδουν ἀντιστοίχως: $3\kappa^2-17\kappa+10=0$ καὶ $3\rho^2-13\rho+12=0 \Longrightarrow \kappa_1=5 \vee \kappa_2=\frac{2}{3}$ καὶ $\rho_1=3 \vee \rho_2=\frac{4}{3} \Longrightarrow$

$$\text{(i)} \quad \left.\begin{aligned} \kappa_1 &= 5 \\ \rho_1 &= 3 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{12}{3} = 4 \\ \mu_1 &= \frac{10}{5} = 2 \end{aligned}\right\}$$

Αἱ τιμαὶ αὗται ἐπαληθεύουν καὶ τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τοῦ (Σ) συνεπῶς:

$(E) \Longleftrightarrow (3x+4a+2b)(x+3a+5b)=0 \quad (1).$

$$\text{(ii)} \quad \left.\begin{aligned} \kappa_1 &= 5 \\ \rho_2 &= \frac{4}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= 9 \\ \mu_1 &= 2 \end{aligned}\right\}$$

Αἱ τιμαὶ αὗται δὲν ἐπαληθεύουν τὴν τελευταίαν ἐξίσωσιν τοῦ (Σ) συνεπῶς ἀπορρίπτονται.

iii) $\left.\begin{array}{l} k_2 = \frac{2}{3} \\ \rho_1 = 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 4 \\ \mu_1 = 15 \end{array}\right\}$ ἀπορρίπτονται.

iv) $\left.\begin{array}{l} k_2 = \frac{2}{3} \\ \rho_2 = \frac{4}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = 9 \\ \mu_1 = 15 \end{array}\right\}$ δεκταί συνεπῶς

$$(E) \Longleftrightarrow (3x+9a+15\beta)\left(x+\frac{4}{3}a+\frac{2}{3}\beta\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow (x+3a+5\beta)(3x+4a+2\beta)=0 \Longleftrightarrow (1).$$

Ἄρα $(E) \Longleftrightarrow x+3a+5\beta=0 \ \vee \ 3x+4a+2\beta=0$

$$\Longleftrightarrow x=-(3a+5\beta) \ \vee \ x=-\frac{2(2a+\beta)}{3}$$

Παρατήρησις:

Διά τήν ἐπίλυσιν τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως, ἐτέθη τό πρῶτον μέλος αὐτῆς ἴσον ἐκ ταυτότητος μέ τό γινόμενον δύο ὁμογενῶν (ὡς πρός x, a, β) πρωτοβαθμίων πολυωνύμων.

Τοῦτο δέν εἶναι πάντοτε δυνατόν. π.χ. ἔστω

$$ax^2+2\beta xy+\gamma y^2+2\delta x+2\partial y+\eta \equiv (\lambda x+\mu y+\nu)(\lambda' x+\mu' y+\nu') \quad (I).$$

$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda\lambda' = a \\ \mu\mu' = \gamma \\ \nu\nu' = \eta \\ \mu\nu'+\mu'\nu = 2\partial \\ \nu\lambda'+\nu'\lambda = 2\delta \\ \lambda\mu'+\lambda'\mu = 2\beta \end{array}\right\}$ (Σ). Διά πολ/σμοῦ τῶν τριῶν τελευταίων ἐξισώσεων τοῦ (Σ) ἔχομεν:

$$8\beta\delta\partial = 2\lambda\mu\nu\lambda'\mu'\nu' + \lambda\lambda'\left[\mu^2(\nu')^2 + (\mu')^2\nu^2\right] +$$
$$+\mu\mu'\left[\nu^2(\lambda')^2 + (\nu')^2\lambda^2\right] + \nu\nu'\left[\lambda^2(\mu')^2 + (\lambda')^2\mu^2\right] =$$
$$= \lambda\lambda'(\mu\nu' + \mu'\nu)^2 + \mu\mu'(\nu\lambda' + \nu'\lambda)^2 + \nu\nu'(\lambda\mu' + \lambda'\mu)^2 -$$
$$-4\lambda\lambda'\mu\mu'\nu\nu' = 4\alpha\partial^2 + 4\gamma\delta^2 + 4\eta\beta^2 - 4\alpha\gamma\eta \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \alpha\gamma\eta + 2\beta\delta\partial - \alpha\partial^2 - \gamma\delta^2 - \eta\beta^2 = 0 \quad (\text{II}).$$

Συνεπῶς ἡ (I) εἶναι ἀληθής ἐάν καί μόνον ἐάν ἰσχύῃ ἡ (II).

<u>Ἐφαρμογή:</u> Εὕρετε διά ποίαν τιμήν τοῦ $\lambda \in R$, τό $\varphi(x,\alpha) \equiv 2x^2 - 10\alpha x + 2\alpha^2 + 11x - 5\alpha + \lambda$ ἀναλύεται εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων ὡς πρός x καί α πολυωνύμων καί ἐπιλύσατε τήν $\varphi(x,\alpha) = 0$

57. <u>Ὑπόδ.</u> Ἐπειδή $(x-\alpha)+(\alpha-\beta)+(\beta-x)=0$

$$\xRightarrow{\text{Euler}} (x-\alpha)^3 + (\alpha-\beta)^3 + (\beta-x)^3 = 3(x-\alpha)(\alpha-\beta)(\beta-x)$$
$$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (x-\beta)^3 = 0 \Longrightarrow x = \beta \ (\text{τριπλῆ})$$

58. <u>Ὑπόδ.</u> Ἐπειδή:

$$(x+\alpha)^3 + (x+\beta)^3 + (\alpha+\beta)^3 - 3(x+\alpha)(x+\beta)(\alpha+\beta) =$$
$$= \frac{1}{2}(x+\alpha+x+\beta+\alpha+\beta)\left[(x+\alpha-x-\beta)^2 + (x+\alpha-\alpha-\beta)^2 +\right.$$
$$\left.+(x+\beta-\alpha-\beta)^2\right] = (x+\alpha+\beta)\left[(x-\alpha)^2 + (x-\beta)^2 + (\alpha-\beta)^2\right] =$$
$$= 2(x^3+\alpha^3+\beta^3 - 3\alpha\beta x) \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow x^3+\alpha^3+\beta^3 -$$
$$-3\alpha\beta x = 0 \quad (1).$$
$$\Longleftrightarrow (x+\alpha+\beta)(x^2+\alpha^2+\beta^2-\alpha x-\alpha\beta-\beta x) = 0$$

$\iff x+a+b=0 \vee \frac{1}{2}\left[(x-a)^2+(x-b)^2+(a-b)^2\right]=0$

$\iff x=-(a+b) \vee x=a=b \implies$

$\implies$ (i) Ἐάν $a=b \implies x=-(a+b) \vee x=a \ldots$

(ii) Ἐάν $a\neq b \implies x=-(a+b)$.

59. Ὑπόδ. Ἐπειδή $(a+b-x)^3+(x+a-b)^3+(x+b-a)^3-$ $-3(a+b-x)(x+a-b)(x+b-a)=\frac{1}{2}(x+a+b)\left[(2a-\right.$ $\left.-2b)^2+(2a-2x)^2+(2b-2x)^2\right]=4(x^3+a^3+b^3-3abx)$ $\implies (E) \iff x^3+a^3+b^3-3abx=0 \iff (1)$ ἀσκήσεως 58.

60. Ὑπόδ. Ἐπειδή $(x^2-ab)^3+(a^2-bx)^3+(b^2-ax)^3-$ $-3(x^2-ab)(a^2-bx)(b^2-ax)=\frac{1}{2}(x^2+a^2+b^2-ax-$ $-bx-ab)\left[(a^2-bx-b^2+ax)^2+(x^2-ab-a^2+bx)^2+\right.$ $\left.+(x^2-ab-b^2+ax)^2\right]=\frac{1}{2}(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$ $(x+a+b)^2\left[(x-a)^2+(x-b)^2+(a-b)^2\right]=(x^3+a^3+b^3-$ $-3abx)^2 \implies (E) \iff (x^3+a^3+b^3-3abx)^2=0$ $\iff (1)$ ἀσκήσεως 58 μέ τάς εὑρεθείσας ρίζας διπλᾶς.

61. Ὑπόδ. Ἐπειδή $(\nu a-b-\gamma)^3+(\nu b-\gamma-a)^3+(\nu\gamma-a-b)^3-$ $-3(\nu a-b-\gamma)(\nu b-\gamma-a)(\nu\gamma-a-b)\equiv(\nu+1)^2(\nu-2)(a^3+$ $+b^3+\gamma^3-3ab\gamma)$ ἕπεται (διά $\nu=3$) ὅτι:

$(E) \iff 16(x^3+a^3+b^3-3abx)-15(x^3+a^3+b^3-3abx)=0$

$\iff x^3+a^3+b^3-3abx=0 \iff (1)$ ἀσκήσεως (58).

62. <u>Ὑπόδ.</u> Ὁμοίως ὡς εἰς τάς προηγουμένας ἀσκήσεως ἔχομεν.

$(E) \Longleftrightarrow (x^3+a^3+\beta^3-3a\beta x)^2=0$

$\Longleftrightarrow$ (1) ἀσκήσεως 58 μέ τάς ρίζας διπλᾶς.

63. <u>Ὑπόδ.</u> Ὁμοίως ὡς εἰς τάς ἀνωτέρω ἀσκήσεις

$(E) \Longleftrightarrow (a^3+\beta^3)(x^3+\lambda^3+\mu^3-3\lambda\mu x)=0$

$\Longleftrightarrow (a+\beta)(a^2-a\beta+\beta^2)(x^3+\lambda^3+\mu^3-3\lambda\mu x)=0$

$\Longleftrightarrow (a+\beta)(x^3+\lambda^3+\mu^3-3\lambda\mu x)=0 \Longrightarrow$

(i) $a=-\beta \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$

(ii) $a\neq-\beta \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow$ (1) ἀσκήσεως 58.

64. <u>Ὑπόδ.</u> Ὁμοίως ὡς ἀνωτέρω (διά τῆς ταυτότητος τοῦ Euler) ἔχομεν

$(E) \Longleftrightarrow (x^3+a^3+\beta^3-3a\beta x)^2=0 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ (1) ἀσκήσεως 58 μέ τάς ρίζας διπλᾶς.

65. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \left[2(x+a+\beta)\right]^3-(x+a)^3-(x+\beta)^3-(a+\beta)^3=0$

$\Longleftrightarrow \left[(x+a)+(x+\beta)+(a+\beta)\right]^3-(x+a)^3-(x+\beta)^3-(a+\beta)^3=0$

$\xLeftrightarrow{(\beta\lambda.\ \text{ἀσκ. } 37)} 3(2x+a+\beta)(x+2a+\beta)(x+a+2\beta)=0$

$\Longleftrightarrow x=-\dfrac{a+\beta}{2} \ \vee\ x=-(2a+\beta) \ \vee\ x=-(a+2\beta).$

66. <u>Ὑπόδ.</u> Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης μηδενίζεται διά $x=0$, $a=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ συνεπῶς διαιρεῖται διά $a\beta\gamma x$ καί δίδει πηλίκον τῆς μορφῆς $\lambda(x+a+\beta+\gamma)$ μέ $\lambda = 60$ (διατί;).

Ἄρα $(E) \Longleftrightarrow a\beta\gamma x(x+a+\beta+\gamma) \Longrightarrow$ (i) $a\beta\gamma = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow A \equiv R$ (ii) $a\beta\gamma \neq 0 \Longrightarrow x = 0 \vee x = -(a+\beta+\gamma)$.

67. Ὑπόδ. Τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης εἶναι κυκλικῶς συμμετρικόν πολυώνυμον ὡς πρός τά γράμματα a, β, γ καί μηδενίζεται διά $a = \beta$ συνεπῶς διαιρεῖται διά $(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)$ καί δίδει πηλίκον τῆς μορφῆς: $\kappa a\beta\gamma + \lambda(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)+\mu(a+\beta+\gamma)+\nu$. Εὐκόλως εὑρίσκομεν ὅτι $\kappa = -16$, $\lambda = 16x$, $\mu = -16x^2$ καί $\nu = 16x^3 \Longrightarrow$

$$(E) \Longleftrightarrow 16(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)\left[x^3-(a+\beta+\gamma)x+(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)x - a\beta\gamma\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)(x-a)(x-\beta)(x-\gamma) = 0 \Longrightarrow$$

(i) Ἐάν $(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a) = 0 \Longrightarrow A \equiv R$.

(ii) Ἐάν $a \neq \beta \neq \gamma \neq a \Longrightarrow x = a \vee x = \beta \vee x = \gamma$.

68. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^2+a^2+\beta^2+2(a\beta+\beta\gamma+\gamma a) = 3(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)$ $\Longleftrightarrow x^2+a^2+\beta^2-a\beta-\beta\gamma-\gamma-a = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left[(x-a)^2+(x-\beta)^2+(a-\beta)^2\right] = 0 \Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a = \beta \Longrightarrow$ $\Longrightarrow x = a$ (διπλῆ) (ii) Ἐάν $a \neq \beta \Longrightarrow A \equiv \emptyset$.

69. Ὑπόδ. Ἡ ταυτότης τοῦ Lagrange διά τούς ἀριθμούς $\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & \beta \end{Bmatrix}$ δίδει $(1^2+1^2+1^2)(x^2+a^2+\beta^2)-(x+a+$

$+\beta)^2 = (x-a)^2+(x-\beta)^2+(a-\beta)^2 \iff 3(x^2+a^2+\beta^2)-$

$-(x+a+\beta)^2 = (x-a)^2+(x-\beta)^2+(a-\beta)^2 \Longrightarrow (E) \iff$

$(x-a)^2+(x-\beta)^2+(a-\beta)^2 = 0$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a=\beta \Longrightarrow x=a$ (διπλῆ)

(ii) Ἐάν $a\neq\beta \Longrightarrow A \equiv \emptyset$

70. <u>Ὑπόδ.</u> Ὡς εἰς τὴν ἄσκησιν 69 ἔχομεν

$(E) \iff (1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(x^2+x^2+x^2+\lambda^2+\mu^2) -$

$-(x+x+x+\lambda+\mu)^2 = 0 \iff 3\left[(x-\lambda)^2+(x-\mu)^2\right] +$

$+(\lambda-\mu)^2 = 0 \Longrightarrow$ (i) Ἐάν $\lambda=\mu \Longrightarrow x=\lambda$ (διπλῆ)

(ii) Ἐάν $\lambda\neq\mu \Longrightarrow A\equiv\emptyset$.

71. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $a_1^2+a_2^2+\dots+a_\nu^2 = a$

$a_1\beta_1+a_2\beta_2+\dots+a_\nu\beta_\nu=\beta$

$\beta_1^2+\beta_2^2+\dots+\beta_\nu^2 = \gamma$.

$\Longrightarrow (E) \iff ax^2+2\beta x+\gamma=0 \iff a\left(x^2+2\frac{\beta}{a}x+\right.$

$\left.+\frac{\gamma}{a}\right)=0 \iff a\left[x^2+2\frac{\beta}{a}x+\left(\frac{\beta}{a}\right)^2-\left(\frac{\beta}{a}\right)^2+\frac{\gamma}{a}\right]=0$

$\iff a\left[\left(x+\frac{\beta}{a}\right)^2-\frac{\beta^2-a\gamma}{a^2}\right]=0$

$\iff a\left[\left(x+\frac{\beta}{a}\right)^2+\frac{a\gamma-\beta^2}{a^2}\right]=0 \Longrightarrow$

(i) $a=0 \iff a_1=a_2=\dots=a_\nu=0 \Longrightarrow \beta=0 \Longrightarrow$ $\gamma=0 \Rightarrow A\equiv R$ / $\gamma\neq0\Rightarrow A\equiv\emptyset$

(ii) $a\gamma\neq0 \Longrightarrow \left(x+\frac{\beta}{a}\right)^2+\frac{a\gamma-\beta^2}{a^2}=0$

Εἶναι $a\gamma - \beta^2 = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_\nu^2)(\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_\nu^2) -$
$-(a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \dots + a_\nu\beta_\nu)$ ἄρα κατά τήν ἀνισότητα τοῦ **Schwarz** ἔχομεν (α)᾽Εάν $\frac{a_1}{\beta_1} = \frac{a_2}{\beta_2} = \dots =$
$= \frac{a_\nu}{\beta_\nu}$ (1) $\Longrightarrow a\gamma - \beta^2 = 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{a}\right)^2 = 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = -\frac{\beta}{a}$ (διπλῆ) (β)᾽Εάν δέν ἰσχύει ἡ (1) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow a\gamma - \beta^2 > 0 \Longrightarrow A \equiv \phi$

(iii)᾽Εάν $\gamma = 0 \Longleftrightarrow \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_\nu = 0 \Longrightarrow \beta = 0 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow ax^2 = 0 \xLeftrightarrow{a \neq 0} x = 0$ (διπλῆ).

72. <u>῾Υπόδ.</u> Γνωστοῦ ὄντος ὅτι $-1 = i^2$ ἔχομεν κατά τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange: $(x^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 1)\cdot$
$\cdot(a^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1) = (x^2 + \lambda^2 + \mu^2 + i^2)(a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + i^2) =$
$= (ax + \beta\lambda + \gamma\mu + i^2)^2 + (\beta x - a\lambda)^2 + (\gamma x - a\mu)^2 + (x-a)^2 i^2 +$
$+ (\gamma\lambda - \beta\mu)^2 + (\lambda - \beta)^2 i^2 + (\mu - \gamma)^2 i^2 = (ax + \beta\lambda + \gamma\mu - 1)^2 +$
$+ (\beta x - a\lambda)^2 + (\gamma x - a\mu)^2 + (\gamma\lambda - \beta\mu)^2 - (x-a)^2 - (\lambda - \beta)^2 -$
$- (\mu - \gamma)^2 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (ax + \beta\lambda + \gamma\mu - 1)^2 + (\gamma x - a\mu)^2 +$
$+ (\beta x - a\lambda)^2 + (\gamma\lambda - \beta\mu)^2 = 0 \Longrightarrow$ (i)᾽Εάν $\gamma\lambda - \beta\mu = 0$
$\Longleftrightarrow \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\mu}{\gamma}$ (1) τότε $(E) \Longleftrightarrow ax + \beta\lambda + \gamma\mu = 1$
$\wedge\ \gamma x = a\mu \ \wedge\ \beta x = a\lambda$.

᾽Εκ τῶν δύο τελευταίων λόγω τῆς (1) ἔχομεν

$\frac{x}{a} = \frac{\lambda}{\beta} = \frac{\mu}{\gamma} \left(= \frac{ax}{a^2} = \frac{\beta\lambda}{\beta^2} = \frac{\gamma\mu}{\gamma^2}\right.$ <u>Θ. ἴσων κλασμάτων</u>

$$= \frac{ax+\beta\lambda+\gamma\mu}{a^2+\beta^2+\gamma^2} = \frac{1}{a^2+\beta^2+\gamma^2}\Big) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow x = \dfrac{a}{a^2+\beta^2+\gamma^2}$, ᾿Εάν $\lambda = \dfrac{\beta}{a^2+\beta^2+\gamma^2}$ καί

$\mu = \dfrac{\gamma}{a^2+\beta^2+\gamma^2}$ (ii) ᾿Εάν $\dfrac{\lambda}{\beta} \neq \dfrac{\mu}{\gamma}$ $\Big($ἤ $\lambda \neq \dfrac{\beta}{a^2+\beta^2+\gamma^2} \wedge$

$\wedge\ \mu \neq \dfrac{\gamma}{a^2+\beta^2+\gamma^2} \Longrightarrow A \equiv \emptyset$.

73. <u>῾Υπόδ.</u> Κατά τήν ταυτότητα τοῦ Lagrange ἔχομεν: $(x^2+a^2)(\lambda^2+\beta^2) = (\lambda x+a\beta)^2+(\beta x-a\lambda)^2$

$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (\lambda x+a\beta)^2+(\beta x-a\lambda)^2-4a\beta\lambda x=0$

$\Longleftrightarrow \lambda^2x^2+2a\beta\lambda x+a^2\beta^2+\beta^2x^2-2a\beta\lambda x+a^2\lambda^2-$

$-4a\beta\lambda x=0 \Longleftrightarrow (\lambda x-a\beta)^2+(\beta x-a\lambda)^2=0$

$\Longleftrightarrow \lambda x-a\beta = \beta x-a\lambda = 0$. ῎Αρα

(i) $\lambda=\beta=0\ (\Longleftrightarrow \lambda^2+\beta^2=0) \Longrightarrow A\equiv R$.

(ii) $\left.\begin{array}{l}\lambda^2+\beta^2\neq 0\\ \lambda\beta=0\end{array}\right\} \Longrightarrow$
- ᾿Εάν $a=0 \Longrightarrow x=0$ (διπλῆ)
- ᾿Εάν $a\neq 0 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(iii) $\lambda\beta\neq 0 \Longrightarrow$
- ᾿Εάν $a=0 \Longrightarrow x=0$ (διπλῆ)
- ᾿Εάν $a\neq 0 \Longrightarrow$
  - $\lambda=\pm\beta \Longrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{\beta}{\lambda}=\dfrac{\lambda}{\beta}$ ἤ ἐκ τῆς (E) $x=\pm a$ (διπλῆ) (διατί;).
  - $\lambda\neq\pm\beta \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

74. <u>῾Υπόδ.</u> ᾿Εκ τῆς ἀσκήσεως 71 διά $\nu=2$ καί $a_1=a$, $a_2=\beta_1=\beta$, $\beta_2=\gamma$.

$\Longrightarrow$ (i) ᾿Εάν $a=\beta=0 \Rightarrow (E) \Leftrightarrow \gamma^2=0 \Rightarrow$
- $\gamma=0 \Rightarrow A\equiv R$
- $\gamma\neq 0 \Rightarrow A\equiv\emptyset$

(ii) Ἐάν $\left.\begin{array}{l} a=\gamma=0 \\ \beta\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \beta^2(x^2+1)=0$

$\Longleftrightarrow x^2+1=0 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(iii) Ἐάν $\left.\begin{array}{l} \beta=\gamma=0 \\ a\neq 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow a^2x^2=0 \Longleftrightarrow x=0$ (διπλῆ)

(iv) Ἐάν $a=0 \wedge \beta\gamma\neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (\beta x-\gamma)^2+\beta^2=0$

$\Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(v) Ἐάν $\beta=0 \wedge a\gamma\neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow a^2x^2+\gamma^2=0$

$\Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(vi) Ἐάν $\gamma=0 \wedge a\beta\neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (ax-\beta)^2+\beta^2x^2=0$

$\Longrightarrow A\equiv\emptyset$ (διατί;)

(vii) Ἐάν $a\beta\gamma\neq 0 \Longrightarrow$ (1) Ἐάν $\dfrac{a}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}\ \left(\Longleftrightarrow \beta^2=a\gamma\right)$

$\Longrightarrow x=-\dfrac{\beta}{a}=-\dfrac{\gamma}{\beta}$ (διπλῆ)

(2) Ἐάν $\dfrac{a}{\beta}\neq\dfrac{\beta}{\gamma} \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

75. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x^4+\lambda^4-2\lambda^2x^2+\mu^4+\nu^4-2\mu^2\nu^2+2\lambda^2x^2+$

$+2\mu^2\nu^2-4\lambda\mu\nu x=0$

$\Longleftrightarrow (x^2-\lambda^2)^2+(\mu^2-\nu^2)^2+2(\lambda x-\mu\nu)^2=0$

(i) Ἐάν $\mu\neq\pm\nu \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(ii) Ἐάν $\mu=-\nu \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\lambda^2 \\ \lambda x=\mu x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\pm\lambda \\ x=-\dfrac{\mu^2}{\lambda} \end{array}\right\}$

$\Longrightarrow$ (α) Ἐάν $\lambda=\mu \Longrightarrow x=-\lambda=-\mu=\nu$

(β) Ἐάν $\lambda=-\mu \Longrightarrow x=-\lambda=\mu=-\nu$

(γ) Ἐάν $\lambda \neq \pm \mu \Longrightarrow A \equiv \phi$

(iii) Ἐάν $\mu = \nu \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 = \lambda^2 \\ \lambda x = \mu\nu \end{array} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \lambda \\ x = \dfrac{\mu^2}{\lambda} \end{array} \right\}$

$\Longrightarrow$ (α) Ἐάν $\lambda = \mu \Longrightarrow x = \lambda = \mu = \nu$

(β) Ἐάν $\lambda = -\mu \Longrightarrow x = \lambda = -\mu = -\nu$

(γ) Ἐάν $\lambda \neq \pm\mu \Longrightarrow A \equiv \phi$.

76. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow 3(\beta x + \alpha x + \alpha\beta)^2 = 0$

$\Longleftrightarrow (\beta x + \alpha x + \alpha\beta)^2 = 0 \Longrightarrow (\alpha+\beta)x = -\alpha\beta \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (i) $\alpha + \beta \neq 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (διπλῆ)

(ii) $\alpha + \beta = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \alpha\beta = 0 \Longrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv R \\ \alpha\beta \neq 0 \Longrightarrow 0 \cdot x = -\alpha\beta \Longrightarrow A \equiv \phi \end{cases}$

77. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow 2\mu(4x+2) - 6(x+\lambda) = 5\mu(x-1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (3\mu - 6)x = 6\lambda - 9\mu \Longleftrightarrow (\mu-2)x = 2\lambda - 3\mu \Longleftrightarrow$

α) $\mu \neq 2 \Longrightarrow x = \dfrac{2\lambda - 3\mu}{\mu - 2}$

β) $\mu = 2 \Longrightarrow 0 \cdot x = 2(\lambda - 3) \begin{cases} \lambda = 3 \Longrightarrow A \equiv R \\ \lambda \neq 3 \Longrightarrow A \equiv \phi \end{cases}$

78. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \mu(2x+\mu) + \lambda(\lambda - x) = 3\mu x + (\lambda-\mu)^2$

$\Longleftrightarrow -\lambda x - \mu x = -2\mu\lambda \Longleftrightarrow (\lambda+\mu)x = 2\lambda\mu \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (α) $\mu + \lambda \neq 0 \Longrightarrow x = \dfrac{2\lambda\mu}{\mu+\lambda}$

(β) $\lambda + \mu = 0 \Longrightarrow 0 \cdot x = 2\mu\lambda \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \phi$

79. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{\alpha + x}{\alpha - \beta} - \dfrac{2x - 2\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{x + \beta}{\alpha + \beta} - \dfrac{x - \alpha}{\alpha + \beta}$

$$\Longleftrightarrow \frac{a+2\beta-x}{a-\beta}=\frac{a+\beta}{a+\beta} \Longleftrightarrow \frac{a+2\beta-x}{a-\beta}=1$$

$$\Longleftrightarrow a+2\beta-x=a-\beta \Longleftrightarrow x=3\beta.$$

80. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (a+\beta)x-\frac{a^2\gamma}{\beta}-a\gamma=0$

$$\Longleftrightarrow (a+\beta)\beta x=a\gamma(a+\beta) \xrightarrow{\text{Ἐπειδή } \beta\neq 0}$$

$$\Longrightarrow \text{(i) Ἐάν } a+\beta\neq 0 \Longrightarrow x=\frac{a\gamma}{\beta}$$

$$\text{(ii) Ἐάν } a+\beta=0 \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$$

81. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{\lambda x-\kappa}{a+\beta}-\frac{\mu x+\kappa}{a+\beta}+\frac{\mu x+\kappa}{a-\beta}+\frac{\lambda x+\kappa}{a-\beta}=0$

$$\Longleftrightarrow \frac{(\lambda-\mu)x-2\kappa}{a+\beta}+\frac{(\lambda+\mu)x+2\kappa}{a-\beta}=0$$

$$\Longleftrightarrow (a-\beta)(\lambda-\mu)x-2\kappa(a-\beta)+(a+\beta)(\lambda+\mu)x+2\kappa(a+\beta)=0$$

$$\Longleftrightarrow 2(a\lambda+\beta\mu)x=-4\kappa\beta \Longleftrightarrow (a\lambda+\beta\mu)x=-2\beta\kappa\ldots$$

82. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow 2(a+\beta)(a-x)+2(a-\beta)(a+x)+$

$$+(a^2-\beta^2)x=a\beta x+(a-\beta)^2x \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \beta(2\beta-a+4)x=4a^2 \Longrightarrow$$

$$\text{(i) Ἐάν } \beta\neq 0 \wedge a\neq 2\beta+4 \Longrightarrow x=\frac{4a^2}{\beta(2\beta-a+4)}$$

$$\text{(ii) Ἐάν } \left\{\begin{array}{l} a=2\beta+4 \\ a=0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=0 \\ \beta=-2 \end{array}\right\} \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$$

$$\text{(iii) Ἐάν } \beta(2\beta-a+4)=0 \wedge a\neq 0 \Longrightarrow 0\cdot x=4a^2 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$$

83. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{a^2+x^2-2ax}{(a-\beta)^2}=\frac{3(a-x)}{a-\beta}-\frac{5(x+2a-3\beta)}{a-\beta}$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^2 = 3\,\frac{a-x}{a-b} + 5\cdot\frac{a-x-3(a-b)}{a-b} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{a-x}{a-b}\right)^2 - 8\left(\frac{a-x}{a-b}\right) + 15 = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\xLeftrightarrow{\frac{a-x}{a-b}=y} y^2 - 8y + 15 = 0 \Longleftrightarrow (y-3)(y-5) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{a-x}{a-b} = 3 \ \vee\ \frac{a-x}{a-b} = 5 \ ---$$

84. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow x(4b+4a) = 4ab \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \{\pm 2b\}$

$$\Longleftrightarrow (a+b)\,x = ab \Longrightarrow$$

(i) $a+b \neq 0 \Longrightarrow x = \dfrac{ab}{a+b}$

(ii) $a+b=0 \Longrightarrow 0\cdot x = ab \begin{cases} ab=0 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D} \\ ab \neq 0 \Longrightarrow A \equiv \phi \end{cases}$

85. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right)\frac{1}{x} \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \{0\}.$

$$\xLeftrightarrow{ab\neq 0} (a^2 - ab + b^2)\,x = a^3 + b^3 \Longleftrightarrow x = a+b$$

(διότι $a^2 - ab + b^2 \neq 0$ – διατί;)

86. <u>Υπόδ.</u> $(E) \Leftrightarrow 3(2a+x)(a+2x) + 3(2a-x)(a-2x) = 8(2a-x)(a+2x) \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \left\{2a, -\frac{a}{2}\right\}$

$$\Longleftrightarrow 7x^2 - 6ax - a^2 = 0 \Longleftrightarrow 7(x-a)\left(x + \frac{a}{7}\right) = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow \quad x = a \quad \vee \quad x = -\frac{a}{7}$

87. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \frac{x^2+a^2+2ax}{x^2+b^2+2bx} = \frac{x^2+a^2}{x^2+b^2} \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R - \{-b\}$

$\Longleftrightarrow \frac{x^2+a^2}{x^2+b^2} = \frac{2ax}{2bx}$ (διατί;) $\Longleftrightarrow x=0 \vee (a-b)x^2 =$

$= ab(a-b).$

$\Longrightarrow$ (i) $a=b \Longrightarrow 0\cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D}.$

(ii) $a \neq b \Longrightarrow x^2 = ab \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ (α) $ab > 0 \Longrightarrow A = \{0, \pm\sqrt{ab}\}$

(β) $ab < 0 \Longrightarrow A = \{0\}$

(γ). $a = 0 \Longrightarrow A = \{0$ (τριπλῆ) $\}$.

Αἱ ρίζαι $\pm\sqrt{ab}$ εἶναι δεκταί ἐάν $\pm\sqrt{ab} \neq -b$

$\Longleftrightarrow ab \neq b^2 \Longleftrightarrow a \neq b \ldots$

88. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b} = \frac{a-b}{x+a-b} \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R - \{a, b, b-a\}$

$\Longleftrightarrow 2a(a-b)x = ab(a-b) \Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a(a-b) \neq 0$

$\Longleftrightarrow a \neq 0 \;\wedge\; a \neq b \Longrightarrow x = \frac{b}{2}$ δεκτή ἐάν $\frac{b}{2} \in \mathcal{D}$

$\Longleftrightarrow b \neq 2a,\; b \neq 0 \;\wedge\; b \neq 2(b-a) \Longleftrightarrow b \neq 0 \;\wedge$

$\wedge\; b \neq 2a$ (διατί;) ἤτοι ἐάν $a \neq 0, b \neq 0, b \neq a \wedge b \neq 2a$

$\Longrightarrow A = \left\{\frac{b}{2}\right\}$.

(ii) Ἐάν $a = 0 \vee a = b \Longrightarrow 0x = 0 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D}.$

89. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow abx = (a+b+x)(ax+bx+ab) \;\Big|$

$\Big|\; \mathcal{D} \equiv R - \{0, -(a+b)\}.$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2(x+b)+b^2(x+a)+x^2(a+b)+2abx=0$$

(βλ. ἀσκήσεις 45-46).

90. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \; x^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)+$

$+\frac{1}{x}(a^2-b^2+b^2-a^2)+\frac{a^2-b^2}{a}+(a^2+b^2)\frac{a+b}{ab}+$

$+(b^2-a^2)\frac{1}{b}=0 \quad \Big| \; \mathcal{D}\equiv R-\{0\}.$

$$\Longleftrightarrow \quad 2x+\frac{2ab(a+b)}{ab}=0 \xLeftrightarrow{ab\neq 0} x=-(a+b)$$

91. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \; a=2a^2-\frac{a}{x} \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\{0\}.$

$\Longleftrightarrow a\left[(2a-1)x-1\right]=0 \Longrightarrow$

(i) $a=0 \Longrightarrow 0\cdot x=0 \Longrightarrow A\equiv\mathcal{D}$

(ii) $a\neq 0 \Longrightarrow (2a-1)x=1 \Longrightarrow$

(α) $a=\frac{1}{2} \Longrightarrow 0\cdot x=1 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

(β) $a\neq\frac{1}{2} \Longrightarrow x=\frac{1}{2a-1}$

92. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \left(\frac{x}{a}-1\right)-b\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)-b^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{x^2}\right)=0$

$\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\{0\}$

$\Longleftrightarrow (x-a)\left[ax^2-b(a+b)x-ab^2\right]=0$

$\Longleftrightarrow x=a \;\vee\; ax^2+b(a+b)x-ab^2=0$ ---

93. Ὑπόδ. (E) $\Longleftrightarrow \frac{1}{x-a}-\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{x-b} \;\Big|\; \mathcal{D}\equiv R-\{a,b\}.$

$$\Longleftrightarrow \frac{2a-x}{x-a} = \frac{x-2b}{x-b} \Longleftrightarrow (x-a)(x-2b)+(x-b)(x-2a)=0$$

$$\Longleftrightarrow 2x^2-3(a+b)x+4ab=0 \quad ---$$

94. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow (4\mu-x)(\mu-x) = 4(x-4)(\mu-x)-$

$$-5(4\mu-x)(x-4) \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R-\{4,\mu,4\mu\}$$

$$\Longleftrightarrow (11\mu+4)x = 4\mu(16-\mu) \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $11\mu+4 \neq 0 \Longleftrightarrow \mu \neq -\frac{4}{11} \Longrightarrow x = \frac{4\mu(16-\mu)}{11\mu+4}$

δεκτή ἐάν καί μόνον ἐάν:

$$\left[\frac{4\mu(16-\mu)}{11\mu-4}-4\right]\left[4\mu-\frac{4\mu(16-\mu)}{11\mu-4}\right]\left[\mu-\frac{4\mu(16-\mu)}{11\mu+4}\right] \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow 4(5\mu-\mu^2-4)\cdot 48\mu(\mu-1)\cdot 15\mu(\mu-4) \neq 0$$

$\Longleftrightarrow \mu \neq 0,\ \mu \neq 1 \ \wedge\ \mu \neq 4$. Συνεπῶς

Ἐάν $\mu(\mu-1)(\mu-4)(11\mu+4) \neq 0 \Longrightarrow x = \frac{4\mu(16-\mu)}{11\mu+4}$

(ii) Ἐάν $\mu(\mu-1)(\mu-4)(11\mu+4) = 0 \Longrightarrow A \equiv \phi$.

95. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \Longleftrightarrow \frac{a-b}{x} - \frac{a+b}{x} = ab^2 - \frac{1}{a-b} \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R-\{0\}$

$$\Longleftrightarrow \frac{-2b}{x} = \frac{ab^2(a-b)-1}{a-b} \Longrightarrow$$

(i) $b=0 \Longrightarrow \frac{0}{x} = -\frac{1}{a} \neq 0$ (διότι $a \neq b = 0$) $\Longrightarrow A \equiv \phi$

(ii) $b \neq 0 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \frac{x}{2b} = \frac{a-b}{1-ab^2(a-b)} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x = \frac{2b(a-b)}{1-ab^2(a-b)}$ ἀρκεῖ $1 \neq ab^2(a-b)$. Ἄλλως $A \equiv \phi$.

96. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x+2a}{x-b}=\dfrac{x}{2a}+\dfrac{1}{2} \Big| \mathcal{D}\equiv R-\{b\}$

$\Longleftrightarrow \dfrac{2(x+a)}{x-b}=\dfrac{x+a}{2a} \Longleftrightarrow (x+a)\left(\dfrac{1}{x-b}-\dfrac{1}{2a}\right)=0$

$\Longleftrightarrow x=-a \quad \vee \quad x=2a+b$, ἐάν $-a,\ 2a+b \in \mathcal{D}$ - - -

97. <u>Ὑπόδ.</u> Θέτομεν $\dfrac{x+a}{x+b}=y$ καί $\dfrac{a^2+b^2}{ab}=\lambda$.

καί ἔχομεν:

(E) $\Longleftrightarrow y+\dfrac{1}{y}=\lambda+\dfrac{1}{\lambda} \quad \Big| \quad \mathcal{D}\equiv R-\{-a,-b\}$

$\Longleftrightarrow y-\lambda+\dfrac{\lambda-\mu}{\lambda y}=0 \Longleftrightarrow (y-\lambda)(\lambda y-1)=0$

$\Longleftrightarrow y=\lambda \quad \vee \quad \lambda y=1 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{a^2+b^2}{ab} \quad \vee \quad \dfrac{x+a}{x+b}=\dfrac{ab}{a^2+b^2}$

$\Longleftrightarrow (a^2+b^2-ab)x=-b^3 \quad \vee \quad (a^2+b^2-ab)x=-a^3$

$\overset{ab\neq 0}{\Longleftrightarrow} x=-\dfrac{b^3}{a^2+b^2-ab} \quad \vee \quad x=-\dfrac{a^3}{a^2+b^2-ab}$

δεκτές ἐάν καί μόνον ἐάν ἀνήκουν εἰς τό $\mathcal{D}$.

98. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow (x-a)^2+(x+a)^2-2(x-a)(x+a)=0$

$\Big| \mathcal{D}\equiv R-\{\pm a\}$

$\Longleftrightarrow (x-a-x-a)^2=0 \Longleftrightarrow 4a^2=0 \Longrightarrow$

(i) Ἐάν $a=0 \Longrightarrow A\equiv\mathcal{D}$

(ii) Ἐάν $a\neq 0 \Longrightarrow A\equiv\emptyset$

99. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{2x-a}{\gamma^2(x+3a)} = \dfrac{(2x+\beta+\gamma)}{4\gamma^2(2x+\beta+\gamma)^2} \quad \Big| \mathcal{D} \equiv R -$

$$- \left\{-3a, \frac{-\beta-\gamma}{2}\right\}.$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2x-a}{x+3a} = \frac{1}{4} \Longleftrightarrow 7x = 7a \Longleftrightarrow x = a$$

δεκτή $\Longleftrightarrow (a+3a)(2a+\beta+\gamma) \neq 0 \Longleftrightarrow$

$$a \neq 0 \ \wedge \ 2a+\beta+\gamma \neq 0.$$

100. <u>Ὑπόδ.</u> (E) $\Longleftrightarrow \dfrac{(\beta-\gamma)(x+a^2+1-x)}{x+a^2} + \dfrac{(\gamma-a)(x+\beta^2+1-x)}{x+\beta^2} +$

$$+\frac{(a-\beta)(x+\gamma^2+1-x)}{x+\gamma^2} = 0 \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \left\{-a^2, -\beta^2, -\gamma^2\right\}$$

$$\Longleftrightarrow (1-x)\left(\frac{\beta-\gamma}{x+a^2} + \frac{\gamma-a}{x+\beta^2} + \frac{a-\beta}{x+\gamma^2}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x = 1 \ \vee \ \frac{\beta-\gamma}{x+a^2} + \frac{\gamma-a}{x+\beta^2} + \frac{a-\beta}{x+\gamma^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 1$$

$$\vee \ \left[(\beta^2+\gamma^2)(\beta-\gamma)+(a^2+\gamma^2)(\gamma-a)+(a^2+\beta^2)(a-\beta)\right] x =$$

$$= (\gamma-\beta)\beta^2\gamma^2 + (a-\gamma)a^2\gamma^2 + (\beta-a)a^2\beta^2 \Longleftrightarrow x = 1 \ \vee$$

$$\vee \ (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)x = (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $a=\beta=\gamma \ \vee \ a=\beta\neq\gamma \ \vee \ a\neq\beta=\gamma \ \vee \ a=\gamma\neq\beta \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow 0x = 0 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D}.$$

(ii) Ἐάν $a\neq\beta\neq\gamma\neq a \Longrightarrow x = 1$ δεκτή (διατί;) $\vee$

$\vee \ x = a\beta+\beta\gamma+\gamma a$ δεκτή ἐάν $a\beta+\beta\gamma+\gamma a \in \mathcal{D}$

δηλαδή ἐάν $(a\beta+\beta\gamma+\gamma a+a^2)(a\beta+\beta\gamma+\gamma a+\beta^2)$

$(a\beta+\beta\gamma+\gamma a+\gamma^2) \neq 0 \Longleftrightarrow (a+\beta)^2(a+\gamma)^2(\beta+\gamma)^2 \neq 0 \Longleftrightarrow$

$\iff a \neq -\beta \wedge a \neq -\gamma \wedge \beta \neq -\gamma$. Ἄρα $a \neq \pm\beta,\ a \neq \pm\gamma,$

$\beta \neq \pm\gamma \implies A = \{1,\ a\beta + \beta\gamma + \gamma a\}$

(iii) Ἐάν $a = -\beta \vee a = -\gamma \vee \beta = -\gamma \implies A = \{1\}$.

101. Ὑπόδ. (E) $\iff x(x-2a)^3 + a(2x-a)^3 = (x^2-a^2)(x+a)^3 \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \{-a\}$

$\iff x^4 - a^4 + 2ax(x^2-a^2) = (x^2-a^2)(x+a)^3$

$\iff (x^2-a^2)(x+a)^2 = (x^2-a^2)(x+a)^3 \iff$

$\iff (x-a)(x+a)^3 = (x^2-a^2)(x+a)^3$

$\xLeftrightarrow{x+a\neq 0} x - a - (x-a)(x+a) = 0$

$\iff (x-a)(1-x-a) = 0 \iff x = a \vee x = 1-a$

$\implies$ (i) Ἐάν $a = 0 \implies A = \{1\}$

(ii) Ἐάν $a = \frac{1}{2} \implies A = \left\{\frac{1}{2}\ (\text{διπλῆ})\right\}$

(iii) Ἐάν $a \neq 0 \wedge a \neq \frac{1}{2} \implies A = \{a,\ 1-a\}$.

102. Ὑπόδ. (E) $\iff \dfrac{x-a}{(x-a)(x-3a)} + \dfrac{x+\beta}{(x+\beta)(x+3\beta)} =$

$= \dfrac{2x+a+\beta}{(x-3a)(x+3\beta)} \ \Big|\ \mathcal{D} \equiv R - \{a, -\beta, 3a, -3\beta\}$

$\iff \dfrac{1}{x-3a} + \dfrac{1}{x+3\beta} = \dfrac{2x+a+\beta}{(x-3a)(x+3\beta)}$

$\iff \dfrac{2x-3a+3\beta}{(x-3a)(x+3\beta)} = \dfrac{2x+a+\beta}{(x-3a)(x+3\beta)} \iff$

$\iff 2x - 3a + 3\beta = 2x + a + \beta \iff 2\beta = 4a \iff$

$\iff \beta = 2a$ ἤτοι (i) Ἐάν $\beta = 2a \implies A \equiv R$.

(ii) Ἐάν $\beta \neq 2a \implies A \equiv \phi$.

103. Ὑπόδ. (Ε) $\iff \dfrac{1}{(x+a+\beta)(x+a-\beta)} - \dfrac{1}{(x+a+\beta)(x-a-\beta)} =$

$= \dfrac{1}{(x+a-\beta)(x-a+\beta)} - \dfrac{1}{(x-\beta+a)(x-\beta-a)} \quad \Big| \mathcal{D} \equiv R - \{\pm(a+\beta), \pm(a-\beta)\}$

$\iff \dfrac{-2a}{(x+a+\beta)(x+a-\beta)(x-a-\beta)} = \dfrac{-2\beta}{(x+a-\beta)(x-a+\beta)(x-\beta-a)}$

$\iff a(x-a+\beta) = \beta(x+a+\beta) \iff (a-\beta)x = a^2+\beta^2 \implies$

(i) Ἐάν $a \neq \beta \implies x = \dfrac{a^2+\beta^2}{a-\beta}$ δεκτή ἐάν $a\beta \neq 0$

(ii) Ἐάν $\left.\begin{array}{l} a\beta = 0 \\ a \neq \beta \end{array}\right\} \implies A \equiv \phi$

(iii) Ἐάν $a = \beta = 0 \implies$ (Ε) $\iff 0 \cdot x = 0 \implies A \equiv \mathcal{D}$

(iv) Ἐάν $a = \beta \neq 0 \implies$ (Ε) $\iff 0x = a^2+\beta^2 \implies A \equiv \phi$

104. Ὑπόδ. (Ε) $\iff \dfrac{(x-a)^2}{(x-a+\beta-\gamma)(x-a-\beta+\gamma)} +$

$+ \dfrac{(x-\beta)^2}{(x-\beta+a-\gamma)(x-\beta-a+\gamma)} + \dfrac{(x-\gamma)^2}{(x-\gamma+a-\beta)(x-\gamma-a+\beta)} = 1$

$\Big| \mathcal{D} \equiv R - \{a-\beta+\gamma,\ a+\beta-\gamma,\ -a+\beta+\gamma\}$

Θέτομεν $x = y+a+\beta+\gamma$, ἀπαλοίφομεν παρονομαστάς καί ἐκτελοῦμεν τάς πράξεις ὅτε:

(Ε) $\iff (y+2a)(y+2\beta)(y+2\gamma)(y+a+\beta)(y+a+\gamma)(y+\beta+\gamma) = 0$

$$\Longleftrightarrow (x+\alpha-\beta-\gamma)(x-\alpha+\beta-\gamma)(x-\alpha-\beta+\gamma)(x-\gamma)(x-\beta)$$

$$(x-\alpha)=0 \quad ---$$

105. Ὑπόδ. Θέτομεν $\dfrac{(x+\alpha)(x+\beta)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = y$ καί

$$\frac{(x+\gamma)(x+\delta)}{(x-\gamma)(x-\delta)} = \omega \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow y+\frac{1}{y} = \omega + \frac{1}{\omega}$$

$$\Longleftrightarrow (y^2+1)\omega = (\omega^2+1)y \Longleftrightarrow (y-\omega)(y\omega-1)=0$$

$$\Longleftrightarrow y=\omega \quad \vee \quad y\omega = 1. \quad ---$$

Εἶναι $\mathcal{D} \equiv R - \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm\delta\}$

106. Ὑπόδ. $\dfrac{\alpha}{\alpha-x} + \dfrac{\alpha}{\alpha+x} = \dfrac{\alpha(\alpha+x+\alpha-x)}{(\alpha-x)(\alpha+x)} = \dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2-x^2}$ (1).

$$\frac{2\alpha^2}{\alpha^2-x^2} + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+x^2} = \frac{4\alpha^2}{\alpha^4-x^4}$$ (λόγω (1)). (διατί;).

$$\frac{4\alpha^2}{\alpha^4-x^4} + \frac{4\alpha^2}{\alpha^4+x^4} = \frac{8\alpha^8}{\alpha^8-x^8}$$ (λόγω (1)) $\Longrightarrow$

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{8\alpha^8}{\alpha^8-x^8} = 8 \quad \Big| \ \mathcal{D} \equiv R - \{\pm\alpha\}$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^8 = \alpha^8 - x^8 \Longleftrightarrow x^8 = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$ μέ

βαθμόν πολ/τος ὀκτώ (8). $\Longrightarrow$

(i) Ἐάν $\alpha=0 \Longrightarrow A \equiv \emptyset$

(ii) Ἐάν $\alpha \neq 0 \Longrightarrow A = \{0$ (μέ πολ/τα ὀκτώ)$\}$

107. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow x = \dfrac{\alpha^2(x-\beta)+\beta^2(\alpha-x)+x^2(\beta-\alpha)}{(\beta-x)(x-\alpha)(\alpha-\beta)}$

$$\Big| \ \mathcal{D} \equiv R - \{\alpha, \beta\}.$$

$$\Longleftrightarrow\ x=\frac{(\beta-x)(x-a)(a-\beta)}{(\beta-x)(x-a)(a-\beta)}=1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \text{(i) Εάν } a=1 \ \veebar\ \beta=1 \Longrightarrow A\equiv\phi$$

$$\text{(ii) Εάν } a\neq 1 \ \wedge\ \beta\neq 1 \Longrightarrow A=\{1\}$$

108 Υπόδ. $(E)\Longleftrightarrow\left[a^2(\gamma-\beta)+\beta^2(a-\gamma)+\gamma^2(\beta-a)\right]x^2+$

$+\left[a^2(\gamma^2-\beta^2)+\beta^2(a^2-\gamma^2)+\gamma^2(\beta^2-a^2)\right]x+$

$+a\beta\gamma\left[a(\gamma-\beta)+\beta(a-\gamma)+\gamma(\beta-a)\right]=0$

$\quad \Big|\ \mathcal{D}\equiv R-\{-a,-\beta,-\gamma\}$

$\Longleftrightarrow (a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)x^2=0\Longleftrightarrow x^2=0$

$\Longleftrightarrow x=0$ (διπλή) $\Longrightarrow$ (i) $a\beta\gamma=0\Longrightarrow A\equiv\phi$

(ii) $a\beta\gamma\neq 0\Longrightarrow A=\{0\ (\text{διπλ.})\}$

109. Υπόδ. $\dfrac{a+x}{a-x}-\dfrac{a-x}{a+x}=\dfrac{(a+x)^2-(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}=\dfrac{4ax}{a^2-x^2}$

$$\frac{a+x}{a-x}-\frac{a-x}{a+x}=\frac{(a+x^2)+(a-x)^2}{(a-x)(a+x)}=\frac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{a}=\frac{a-x}{ax} \quad \text{καί} \quad \frac{1}{x^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}$$

Συνεπώς $(E)\Longleftrightarrow \dfrac{\dfrac{4ax}{a^2-x^2}}{\dfrac{2(a^2+x^2)}{a^2-x^2}}=\dfrac{\dfrac{a-x}{ax}}{\dfrac{a^2-x^2}{a^2x^2}} \quad \Big|\ \mathcal{D}\equiv R-\{0,\pm a\}$

$$\Longleftrightarrow \frac{2ax}{x^2+a^2}=\frac{ax}{a+x}\Longleftrightarrow ax\left(\frac{2}{x^2+a^2}-\frac{1}{x+a}\right)=0$$

$$\overset{a\neq 0}{\Longleftrightarrow} x=0 \ \vee\ x^2-2x+a^2-2a=0$$

$$\Longleftrightarrow x=0 \ \vee\ x=1\pm\sqrt{1+2a-a^2}=1\pm\sqrt{2-(a-1)^2}\Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ (i)· Ἐάν $\left.\begin{matrix} 1-\sqrt{2} \leq a \leq 1+\sqrt{2} \\ a \neq 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow A = \left\{0,\ 1 \pm \sqrt{1+2a-a^2}\right\}$

(ii)· Ἐάν $a \notin \left[1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\right] \Longrightarrow A = \{0\}$.

110. <u>Ὑπόδ.</u> $\Sigma \dfrac{a}{(a-b)(a-\gamma)} = \dfrac{a(b-\gamma)+b(\gamma-a)+\gamma(a-b)}{(a-b)(b-\gamma)(\gamma-a)} = 0$

$$\Sigma \frac{x^2-\lambda\mu}{(x+\lambda)(x+\mu)} = \frac{x^2-\lambda\mu}{(x+\lambda)(x+\mu)} + \frac{\lambda^2-x\mu}{(\lambda+x)(\lambda+\mu)} +$$

$$+ \frac{\mu^2-x\lambda}{(\mu+x)(\mu+\lambda)} = \frac{(x^2-\lambda\mu)(\lambda+\mu)+(\lambda^2-x\mu)(x+\mu)+(\mu^2-x\lambda)(x+\lambda)}{(x+\lambda)(x+\mu)(\lambda+\mu)}$$

$$= \frac{0}{(x+\lambda)(x+\mu)(\lambda+\mu)} = 0 \quad \Big| \quad \mathcal{D} \equiv R - \{-\lambda, -\mu\}$$

Συνεπῶς (E) $\Longleftrightarrow 0 \cdot x = 0 \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D}$.

111. <u>Ὑπόδ.</u> Ἔχομεν:

$$\Sigma \frac{b\gamma(a+x)}{(a-b)(a-\gamma)} = \frac{b\gamma(a+x)}{(a-b)(a-\gamma)} + \frac{\gamma a(b+x)}{(b-\gamma)(b-a)} + \frac{ab(\gamma+x)}{(\gamma-a)(\gamma-b)} =$$

$$= \frac{ab\gamma(a-b+b-\gamma+\gamma-a)+\left[b\gamma(b-\gamma)+\gamma a(a-\gamma)+ab(a-b)\right]x}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)} =$$

$$= \frac{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)}\, x = x \quad \text{καί}$$

$$\Sigma \frac{(1+ab)(1+a\gamma)}{(a-b)(a-\gamma)} = \frac{(1+ab)(1+a\gamma)}{(a-b)(a-\gamma)} + \frac{(1+b\gamma)(1+ba)}{(b-\gamma)(b-a)} +$$

$$+ \frac{(1+\gamma a)(1+\gamma b)}{(\gamma-a)(\gamma-b)} = \frac{-(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)}{(a-b)(a-\gamma)(b-\gamma)} = -1 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ (E) $\Longleftrightarrow x = -1$

112. <u>Ὑπόδ.</u> $\Sigma \dfrac{a^3}{(a-b)(a-\gamma)} = \dfrac{a^3}{(a-b)(a-\gamma)} + \dfrac{b^3}{(b-\gamma)(b-a)} +$

$$+\frac{\gamma^3}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\frac{\alpha^3(\beta-\gamma)+\beta^3(\gamma-\alpha)+\gamma^3(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=\alpha+\beta+\gamma \quad \text{καί}$$

$$\Sigma\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=\alpha^2\frac{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\beta^2\frac{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}+$$

$$+\gamma^2\frac{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}=\frac{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)^2}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=(\alpha+\beta+\gamma)^2$$

$$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\,x=(\alpha+\beta+\gamma)^2 \quad \Longrightarrow$$

(i) Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma\neq 0 \Longrightarrow x=\alpha+\beta+\gamma$

(ii) Ἐάν $\alpha+\beta+\gamma=0 \Longrightarrow 0x=0 \Longrightarrow A\equiv R.$

115. Ὑπόδ. $\Sigma\frac{x^4}{(x-\lambda)(x-\mu)}=\frac{x^4}{(x-\lambda)(x-\mu)}+\frac{\lambda^4}{(\lambda-\mu)(\lambda-x)}+$

$$+\frac{\mu^4}{(\mu-x)(\mu-\lambda)}=\frac{x^4(\lambda-\mu)+\lambda^4(\mu-x)+\mu^4(x-\lambda)}{(\lambda-\mu)(\mu-x)(x-\lambda)}=$$

$$=\frac{(\lambda-\mu)(\mu-x)(x-\lambda)(x^2+\lambda^2+\mu^2+\lambda x+\mu x+\lambda\mu)}{(\lambda-\mu)(\mu-x)(x-\lambda)}=$$

$$=x^2+\lambda^2+\mu^2+\lambda x+\mu x+\lambda\mu \quad \text{ἐν } \mathcal{D} \quad \text{καί}$$

$$\Sigma\frac{\beta-\gamma}{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}=\frac{\beta-\gamma}{\alpha^2-(\beta-\gamma)^2}+\frac{\gamma-\alpha}{\beta^2-(\gamma-\alpha)}+\frac{\alpha-\beta}{\gamma^2-(\alpha-\beta)^2}=$$

$$=\frac{(\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)+(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta+\gamma)+(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-\gamma)}{(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\beta+\gamma-\alpha)}=0$$

Συνεπῶς $(E)\Longleftrightarrow 2(x^2+\lambda^2+\mu^2+\lambda x+\mu x+\lambda\mu)=0$

$$\Big|\ \mathcal{D}\equiv R-\{\lambda,\mu\}.$$

$$\Longleftrightarrow (x+\lambda)^2+(x+\mu)^2+(\lambda+\mu)^2=0$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $\lambda=-\mu \Longrightarrow x=-\lambda \wedge x=-\mu \quad \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \lambda = \mu \quad \text{ἄτοπον} \Longrightarrow A \equiv \phi$$

(ii) Ἐάν $\lambda \neq -\mu \Longrightarrow A \equiv \phi$

114. Ὑπόδ. Τό Α΄ μέλος τῆς δοθείσης ἰσοῦται μέ

$$\frac{\dfrac{a^3(x-\beta)+\beta^3(a-x)+x^3(\beta-a)}{a\beta x}}{\dfrac{a^2(x-\beta)+\beta^2(a-x)+x^2(\beta-a)}{a\beta x}} = \frac{(x-\beta)(\beta-a)(a-x)(x+a+\beta)}{(x-\beta)(\beta-a)(a-x)}$$

$$= x+a+\beta \quad \text{ἐν } \mathcal{D} \equiv R - \{0, a, \beta\}.$$

Τό Β΄ μέλος τῆς δοθείσης ἰσοῦται μέ

$$\frac{(ax+\beta x+a\beta)^2}{a\beta x} - a\beta x \, \frac{a^2x^2+\beta^2x^2+a^2\beta^2}{a^2\beta^2x^2} = \frac{2a\beta x(x+a+\beta)}{a\beta x}$$

$$= 2(x+a+\beta) \Longrightarrow$$

$$(E) \Longleftrightarrow x+a+\beta = 2(x+a+\beta) \mid \mathcal{D} \equiv R - \{0, a, \beta\}.$$

$$\Longleftrightarrow x+a+\beta = 0 \Longleftrightarrow x = -(a+\beta).$$

$\Longrightarrow$ (i) Ἐάν $-(a+\beta) \neq 0$, $-(a+\beta) \neq a$ καί

$$-(a+\beta) \neq \beta \Longrightarrow A = \{-(a+\beta)\}.$$

(ii) Ἐάν $a = -\beta \vee a = -2\beta \vee \beta = -2a$.

$$\Longrightarrow A \equiv \phi.$$

115. Ὑπόδ. Ἔχομεν ἐν $\mathcal{D}$

$$\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+\beta}{x-\beta} + \frac{x+\gamma}{x-\gamma} - 3\,\frac{(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)} =$$

$$= \frac{x-a+2a}{x-a} + \frac{x-\beta+2\beta}{x-\beta} + \frac{x-\gamma+2\gamma}{x-\gamma} - 3\,\frac{(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$$= 2\left(\frac{a}{x-a} + \frac{\beta}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-\gamma}\right) - 3\,\frac{(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)} + 3$$

$$= 2\left(\frac{a}{x-a} + \frac{\beta}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-\gamma}\right) - 3\,\frac{2x^3+2(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)x}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)}$$

$$= 2\left[\frac{a}{x-a} + \frac{\beta}{x-\beta} + \frac{\gamma}{x-\gamma} - 3\,\frac{x^3+(a\beta+\beta\gamma+\gamma a)x}{(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)}\right]$$

$\Longrightarrow$ Α΄ μέλος δοθείσης $= 2$ ἐν $\mathcal{D}$ $\Longrightarrow$

(Ε) $\Longleftrightarrow$ $2 = 4x$ $\Longleftrightarrow$ $x = \frac{1}{2}$.

116. <u>Ὑπόδ.</u> Ἔχομεν Ε.Κ.Π. παρονομαστῶν

$$(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)(x+a)(x+\beta)(x+\gamma) \neq 0$$

$\mathcal{D} \equiv R - \{-a, -\beta, -\gamma\}$ καί μετά τάς πράξεις

$$(E) \Longleftrightarrow \frac{(x-\lambda)(x-\mu)}{(x+a)(x+\beta)(x+\gamma)} = 0 \Longleftrightarrow (x-\lambda)(x-\mu) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $x = \lambda \vee x = \mu$ δεκτές ἐάν ἀνήκουν στό $\mathcal{D}$

δηλαδή ἐάν $(\lambda+a)(\lambda+\beta)(\lambda+\gamma)(\mu+a)(\mu+\beta)(\mu+\gamma) \neq 0 \ldots$

117. <u>Ὑπόδ.</u> Ἔχομεν

$$\sum \frac{a(\beta+\gamma-a)}{(a-\beta)(a-\gamma)} = \frac{a(\beta+\gamma-a)}{(a-\beta)(a-\gamma)} + \frac{\beta(\gamma+a-\beta)}{(\beta-\gamma)(\beta-a)} + \frac{\gamma(a+\beta-\gamma)}{(\gamma-a)(\gamma-\beta)} =$$

$$= \frac{a(\beta+\gamma-a)(\beta-\gamma)+\beta(\gamma+a-\beta)(\gamma-a)+\gamma(a+\beta-\gamma)(a-\beta)}{(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)} =$$

$$= \frac{a(\beta^2-\gamma^2)-a^2(\beta-\gamma)+\beta(\gamma^2-a^2)-\beta^2(\gamma-a)+\gamma(a^2-\beta^2)-\gamma^2(a-\beta)}{(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)}$$

$$= \frac{-2(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)}{(a-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-a)} = -2.$$

Ὁμοίως $\sum \frac{(a-\beta+\gamma)(a+\beta-\gamma)}{(a-\beta)(a-\gamma)} = 4$ Συνεπῶς

(Ε) $\Longleftrightarrow$ $-2x = 4$ $\Longleftrightarrow$ $x = -2$.

118. Υπόδ. Εἶναι εὔκολον νά ἀποδειχθῆ διά τῆς τελείας (Μαθηματικῆς) ἐπαγωγῆς ὅτι τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἰσοῦται μέ

$$\frac{x^\nu}{(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\nu)} \text{ ἤ ἄλλως: } \frac{x^\nu}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} -$$

$$-\frac{a_\nu x^{\nu-1}}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} = \frac{x^{\nu-1}(x-a_\nu)}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} = \frac{x^{\nu-1}}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})}$$

$$\frac{x^{\nu-1}}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})} - \frac{a_{\nu-1}x^{\nu-2}}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})} = \frac{x^{\nu-2}(x-a_{\nu-1})}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})}$$

$$= \frac{x^{\nu-2}}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})} \quad \cdots \text{ κ.λ.π.}$$

$$\frac{x^2}{(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{a_2 x}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{x(x-a_2)}{(x-a_1)(x-a_2)} = \frac{x}{x-a_1}$$

$$\frac{x}{x-a_1} - \frac{a_1}{x-a_1} = \frac{x-a_1}{x-a_1} = 1.$$

Διά προσθέσεως τῶν ἀνωτέρω ἰσοτήτων κατά μέλη λαμβάνομεν.

$$\frac{x^\nu}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} - \frac{a_\nu x^{\nu-1}}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} - \frac{a_{\nu-1}x^{\nu-2}}{(x-a_1)\cdots(x-a_{\nu-1})} -$$

$$-\cdots-\frac{a_2 x}{(x-a_1)(x-a_2)} - \frac{a_1}{x-a_1} = 1.$$

$$\Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow \frac{x^\nu}{(x-a_1)\cdots(x-a_\nu)} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^\nu = 0 \;\Big|\; \mathcal{D} \equiv R - \{a_1, a_2, \cdots, a_\nu\}.$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \text{ (βαθμοῦ πολ/τος } \nu\text{), δεκτή} \Longleftrightarrow 0 \in \mathcal{D}.$$

119. <u>Ὑπόδ.</u> $(E) \iff (ax^{\mu+1} - x^{\mu})(x+1) + bx^{\mu}(x-1) =$
$= ax^{\mu} \cdot (x^2+1) \quad \Big| \; \mathcal{D} \equiv R - \{\pm 1\}.$

$\iff x^{\mu}\left[(ax+bx-x)-(a+b+1)\right] = 0$

$\iff x^{\mu}\left[(a+b-1)x-(a+b+1)\right] = 0 \iff x^{\mu} = 0 \;\vee$

$\vee\; (a+b-1)x = a+b+1 \implies$

(i) Ἐάν $a+b \neq 1 \implies x = \dfrac{a+b+1}{a+b-1} \;\vee\; x=0 \left(\begin{matrix}\text{πολ/τας}\\ \mu\end{matrix}\right)$

$\xrightarrow[\text{(διατί;)}]{}$ (α) $a+b=0 \implies A = \{0 \;(\text{πολ/τος } \mu)\}$

(β) $a+b \neq 0 \implies A = \left\{0,\; \dfrac{a+b+1}{a+b-1}\right\}$

(ii) Ἐάν $a+b=1 \implies (E) \iff x^{\mu}(-2) = 0 \implies$

$\implies A = \{0 \;(\text{πολ/τος } \mu)\}.$

120. <u>Ὑπόδ.</u> (1) Ἐάν $\mu < \nu - 1$ τότε ὁ συντελεστής τοῦ x ἰσοῦται μέ 0 (διατί;) καί ἡ ἐξίσωσις γίνεται:

$(E) \iff 0 \cdot x = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \implies$ (i) Ἐάν $\sum_{k=1}^{\nu} a_k = 0$ τότε $A \equiv R$.

(ii) Ἐάν $\sum_{k=1}^{\nu} a_k \neq 0$ τότε $(E) \iff 0 \cdot x = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \implies A \equiv \emptyset$.

(2) Ἐάν $\mu = \nu - 1$ τότε ὁ συντελεστής τοῦ x ἰσοῦται μέ 1 (διατί;) καί ἔχομεν:

$(E) \iff x = \sum_{k=1}^{\nu} a_k \implies A = \left\{\sum_{k=1}^{\nu} a_k\right\}$

(3) Ἐάν $\mu = \nu$ τότε ὁ συντελεστής τοῦ x ἰσοῦται μέ $\sum_{k=1}^{\nu} a_k$ (διατί;) καί ἔχομεν:

$(E) \Longleftrightarrow \left(\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa\right) x = \sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa \Longrightarrow$ (i) Ἐάν $\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa = 0$ τότε $A \equiv \mathbb{R}$.

(ii) Ἐάν $\sum_{\kappa=1}^{\nu} a_\kappa \neq 0$ τότε $(E) \Longleftrightarrow x = 1 \Longrightarrow A \equiv \{1\}$.

121. Ὑπόδ. Πρέπει νά εἶναι $x \neq 0$ καί $ax > 0$, ἤτοι x ὁμόσημον τοῦ a. Θέτομεν $\sqrt{\frac{x}{a}} = y > 0$ ὁπότε $\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{y}$ καί ἔχομεν:

$$(E) \Longleftrightarrow 2y + \frac{3}{y} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b} \Longleftrightarrow 2aby^2 - (b^2 + 6a^2)y + 3ab = 0$$

$$\Longleftrightarrow y = \frac{b}{2a} \vee y = \frac{3a}{b}.$$

(i) Ἐάν $ab < 0$ τότε οὐδεμία ρίζα εἶναι δεκτή καί ἡ (E) εἶναι ἀδύνατος $(A \equiv \emptyset)$.

(ii) Ἐάν $ab > 0$ τότε $(E) \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{x}{a}} = \frac{b}{2a} \vee \sqrt{\frac{x}{a}} =$

$$= \frac{3a}{b} \Longleftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{b^2}{4a^2} \vee \frac{x}{a} = \frac{9a^2}{b^2} \Longleftrightarrow x = \frac{b^2}{4a} \vee x = \frac{9a^3}{b^2}.$$

122. Ὑπόδ. Πρέπει $ax + \lambda \geqslant 0 \wedge bx + \mu \geqslant 0 \wedge \gamma x + \kappa \geqslant 0$

$$\xLeftrightarrow{ab\gamma \neq 0} x \gtrless -\lambda/a \wedge x \gtrless -\mu/b \wedge x \gtrless -\kappa/\gamma \quad (1).$$

$$(E) \Longleftrightarrow \left(\sqrt{ax+\lambda} + \sqrt{bx+\mu}\right)^2 = \left(\sqrt{\gamma x + \kappa}\right)^2 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow (a + b - \gamma)x + \lambda + \mu - \kappa = -2\sqrt{(ax+\lambda)(bx+\mu)}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} [(a+b-\gamma)x + \lambda + \mu - \kappa]^2 = 4(ax+\lambda)(bx+\mu) \\ (a+b-\gamma)x + \lambda + \mu - \kappa \leqslant 0 \qquad (2) \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow (a^2 + b^2 + \gamma^2 - 2ab - 2b\gamma - 2\gamma a) \cdot x^2 + 2(a\lambda + b\mu +$$

$$+ \gamma\kappa - a\kappa - a\mu - b\kappa - b\lambda - \gamma\lambda - \gamma\mu)x + (\kappa^2 + \lambda^2 + \mu^2 - 2\kappa\lambda - 2\lambda\mu -$$

$$- 2\kappa\mu) = 0 \ \ldots$$

123. <u>Υπόδ.</u> Πρέπει $x-a \geq 0 \wedge x-b \geq 0 \iff x \geq a \wedge x \geq b \ (1)$

(i) Εάν $a \geq b$ τότε $(1) \iff x \geq a \ (2)$.

Είναι όμως καί $-a \leq -b \iff x-a \leq x-b \overset{(2)}{\iff} \sqrt{x-a} \leq \sqrt{x-b}$

$\iff \sqrt{x-a} - \sqrt{x-b} \leq 0 \implies$ (E) ἀδύνατος $(A \equiv \emptyset)$.

(ii) Εάν $a < b$ τότε $(1) \iff x \geq b \ (3)$ καί ἔχομεν:

$(E) \iff x-a = (1-\sqrt{x-b})^2 \iff 2\sqrt{x-b} = b-a-1 \iff$

$$\iff \begin{Bmatrix} 4(x-b)=(b-a-1)^2 \\ b-a-1 \geq 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} x = b + \frac{1}{4}(b-a-1)^2 \\ b \geq a+1 \end{Bmatrix}$$

ὅπου ἡ εὑρεθεῖσα ρίζα ἱκανοποιεῖ τήν (3).

Συνεπῶς συνοψίζοντες ἔχομεν:

Εάν $b < a+1 \implies A \equiv \emptyset$.

Εάν $b \geq a+1 \implies A = \left\{ b + \frac{1}{4}(b-a-1)^2 \right\}$.

124. <u>Υπόδ.</u> Πρέπει $x(x+1) \geq 0 \ \wedge \ x(x-1) \geq 0 \iff$

$\iff x \leq -1 \ \vee \ x=0 \ \vee \ x \geq 1 \ (1$

(i) Εάν $\lambda < 0$ τότε (E) ἀδύνατος $(A \equiv \emptyset)$

(ii) Εάν $\lambda = 0$ τότε $A = \{0\}$.

(iii) Εάν $\lambda > 0$ τότε $(E) \iff \begin{Bmatrix} 2x^2 + 2\sqrt{x^2(x^2-1)} = \lambda^2 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \end{Bmatrix}$

$$\iff \begin{Bmatrix} 4x^2(x^2-1) = (\lambda^2-2x^2)^2 \\ \lambda^2 - 2x^2 \geq 0 \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \end{Bmatrix} \iff \begin{Bmatrix} 4(\lambda^2-1)x^2 = \lambda^4 \\ x^2 \leq \frac{\lambda^2}{2} \\ x \leq -1 \ \vee \ x \geq 1 \end{Bmatrix} \implies$$

(α) Εάν $\lambda \leq 1$ τότε (E) ἀδύνατος $(A \equiv \emptyset)$

(β) Εάν $\lambda > 1$ τότε $(E) \iff$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \\ x^2 \leq \dfrac{\lambda^2}{2} \\ x \leq -1 \vee x \geqslant 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \pm \dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2-1}} \\ \lambda \geqslant \sqrt{2} \end{cases}.$$

Ἄρα τελικῶς ἔχομεν: Ἐάν $a<\sqrt{2} \wedge a \neq 0$ τότε $A \equiv \phi$. Ἐάν $a=0$ τότε $A=\{0\}$ καί ἐάν $a \geqslant \sqrt{2}$ τότε $A=\left\{\pm \dfrac{\lambda^2}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\right\}$.

125. Ὑπόδ. Πρέπει $a+x \geqslant 0 \wedge 2a+x \geqslant 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x \geqslant -a \wedge x \geqslant -2a$ (1).

(i) Ἐάν $a=0$ τότε $(E) \Longleftrightarrow \sqrt{x}=\sqrt{x} \Longrightarrow A \equiv \mathcal{D} = R^+$.

(ii) Ἐάν $a<0$ τότε $(E) \Longleftrightarrow (\sqrt{a+x})^2-(-a) =$

$= \sqrt{(a+x)(2a+x)} \wedge (1) \Longleftrightarrow x \geqslant -2a$ (2) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a+x = \sqrt{(a+x)(2a+x)} \\ x \geqslant -2a \end{cases} \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow \underset{(\delta\varepsilon\kappa\tau\acute{\eta})}{x=-2a}$$

(iii) Ἐάν $a>0$ τότε $(E) \Longleftrightarrow (\sqrt{a+x})^2 - a =$

$= \sqrt{(a+x)(2a+x)} \wedge (1) \Longleftrightarrow x \geqslant -a \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = \sqrt{(a+x)(2a+x)} \wedge x>0 \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow x = -\dfrac{2a}{3} < 0$ (ἀπορρίπτεται).

126. Ὑπόδ. $(E) \Longleftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{17-\lambda^2} + \lambda\sqrt{17-x^2} = 17 \\ 17-\lambda^2 \geqslant 0 \wedge 17-x^2 \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 17(x^2+\lambda^2) - 2\lambda^2x^2 + 2\lambda x\sqrt{289-17(x^2+\lambda^2)+\lambda^2x^2} = 289 \\ -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17} \wedge 0 \leq \lambda \leq \sqrt{17} \text{ (διότι } \lambda \in N_0) \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 289-17(x^2-\lambda^2)+\lambda^2x^2 - 2\lambda x\sqrt{289-17(x^2+\lambda^2)+\lambda^2x^2} + \\ +\lambda^2x^2 = 0 \wedge -\sqrt{17} \leq x \leq \sqrt{17} \wedge 0 \leq \lambda \leq \sqrt{17}. \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\sqrt{289-17(x^2+\lambda^2)+\lambda^2x^2}-\lambda x\right]^2=0\\ -\sqrt{17}\le x\le\sqrt{17}\ \wedge\ 0\le\lambda\le\sqrt{17}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sqrt{289-17(x^2+\lambda^2)+\lambda^2x^2}=\lambda x\\ 0\le x\le\sqrt{17}\ \wedge\ 0\le\lambda\le\sqrt{17}\end{array}\right\}\Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}289-17(x^2+\lambda^2)=0\\ 0\le x\le\sqrt{17}\ \wedge\ \lambda=0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3 \text{ ή } 4\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda^2+x^2=17\\ 0\le x\le\sqrt{17}\\ \lambda=0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2 \text{ ή } 3 \text{ ή } 4\end{array}\right\}\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\sqrt{17-\lambda^2}\\ \lambda=0 \text{ ή } 1 \text{ ή } 2\\ \text{ ή } 3 \text{ ή } 4\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x=\sqrt{17}\ \vee\ x=4\ \vee\ x=\sqrt{13}\ \vee\ x=\sqrt{8}\ \vee\ x=1\,.$$

127. <u>Υπόδ.</u> $(E)\Longleftrightarrow \sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}+(-5)\sqrt[3]{a^2-x^2}=0$

$\xLeftrightarrow{\text{Euler}} (a+x)^2+4^3(a-x)^2+(-5)^3(a^2-x^2)=3\cdot4\,(-5)\cdot$

$\cdot\sqrt[3]{(a+x)^2(a-x)^2(a^2-x^2)}\Longleftrightarrow 190x^2-126ax-$

$-60a^2=-60a^2+60x^2\Longleftrightarrow 130x^2-126ax=0$

$\Longleftrightarrow x=0\ \vee\ x=\dfrac{63a}{65}\,.$

128. <u>Υπόδ.</u> Πρέπει: (1) $1-x^2\geqslant0\ (\Longleftrightarrow -1\le x\le 1)\wedge a(1-a^2)x\geqslant0$ (2)

(i) Εάν $a=0$ τότε $(E)\Longleftrightarrow x\sqrt{1-x^2}=0\Longleftrightarrow x=0\vee x=1\vee x=-1$

(ii) Εάν $a\neq0$ τότε θέτομεν $2a\dfrac{1-a^2}{a^4+6a^2+1}=\lambda\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \lambda=2\,\frac{\frac{1}{a}-a}{a^2+\frac{1}{a^2}+6}\ \xLeftrightarrow{b=\frac{1}{a}-a}\ \lambda=\frac{2b}{b^2+8}$$

και έχομεν: $(E)\Longleftrightarrow \dfrac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=\lambda^2\Longleftrightarrow(\lambda^2+1)x^4+$

$+(2\lambda^2-1)x^2+\lambda^2=0\ \ldots$

129. <u>Υπόδ.</u> Πρέπει $a+x \geqslant 0 \wedge b+x \geqslant 0 \iff$

$\iff x \geqslant -a \wedge x \geqslant -b \quad (1).$

(i) Εάν $\mu < 0$ τότε (E) αδύνατος $(A \equiv \emptyset)$

(ii) Εάν $\mu = 0$ τότε:

(α) Εάν $a = b \implies x = -a = -b$

(β) Εάν $a \neq b \implies$ (E) αδύνατος $(A \equiv \emptyset)$

(iii) Εάν $\mu > 0$ τότε $(E) \iff 2\sqrt{(a+x)(b+x)} = \mu^2 - a - b - 2x \iff$

$$\iff \left\{\begin{matrix} 4(a+x)(b+x) = (\mu^2-a-b)^2 + 4x^2 - 4x(\mu^2-a-b) \\ x \geqslant -a \wedge x \geqslant -b \wedge x \leqslant \dfrac{\mu^2-a-b}{2} \end{matrix}\right\}$$

$$\iff x = \frac{\mu^4 + a^2 + b^2 - 2a\mu^2 - 2\mu^2 b - 2ab}{4\mu^2} = \cdots$$

130. <u>Υπόδ.</u> (1) Εάν $\lambda = 0$ τότε:

$$(E) \iff \left\{\begin{matrix} \sqrt{|x^2-1|} = x \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \iff \left\{\begin{matrix} |x^2-1| = x^2 \\ x > 0 \end{matrix}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{matrix} x^2 - 1 = x^2 \\ x \geqslant 1 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} 1 - x^2 = x^2 \\ 0 < x < 1 \end{matrix}\right\} \iff$$

$$\iff 2x^2 = 1 \wedge 0 < x < 1 \iff x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) Εάν $\lambda < 0$ τότε: $(E) \iff \left\{\begin{matrix} |x^2-1| = \left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 \\ x \geqslant -\frac{\lambda}{2} \end{matrix}\right\}$

$$\iff (\alpha) \left\{\begin{matrix} x = -\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ x \geqslant 1 \wedge x \geqslant -\frac{\lambda}{2} \end{matrix}\right\} \vee (\beta) \left\{\begin{matrix} 8x^2 + 4\lambda x + \lambda^2 - 4 = 0 \\ -\frac{\lambda}{2} \leqslant x < 1 \end{matrix}\right\}$$

(i) Εάν $\lambda \leqslant -2 \iff -\lambda \geqslant 2 \iff -\frac{\lambda}{2} \geqslant 1$ τότε τό σύστημα (β) είναι αδύνατον καί έχομεν:

$$(\alpha) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ x \geqslant -\dfrac{\lambda}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ -\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \geqslant -\dfrac{\lambda}{2} \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ -2 \leqslant \lambda \leqslant 2 \end{matrix}\right\} \overset{(i)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ \lambda=-2 \end{matrix}\right\} \Longleftrightarrow x=1.$$

(ii) Ἐάν $-2<\lambda<0 \Longleftrightarrow -\lambda<2 \Longleftrightarrow -\dfrac{\lambda}{2}<1$ τότε

$$(E) \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ x \geqslant 1 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} 8x^2+4\lambda x+\lambda^2-4=0 \\ -\dfrac{\lambda}{2} \leqslant x < 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ -\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \geqslant 1 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x=\dfrac{-\lambda \pm \sqrt{8-\lambda^2}}{4} \\ 8-\lambda^2 \geqslant 0,\ -\dfrac{\lambda}{2} \leqslant x < 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=-\dfrac{4+\lambda^2}{4\lambda} \\ (\lambda+2)^2 \geqslant 0 \end{matrix}\right\} \vee \left\{\begin{matrix} x=\dfrac{-\lambda \pm \sqrt{8-\lambda^2}}{4} \\ -\dfrac{\lambda}{2} \leqslant \dfrac{-\lambda \pm \sqrt{8-\lambda^2}}{4} < 1 \end{matrix}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow x=-\frac{4+\lambda^2}{4\lambda} \vee x=\frac{-\lambda+\sqrt{8-\lambda^2}}{4} \quad (\delta\iota\alpha\tau\acute{\iota};).$$

131. <u>Ὑπόδ.</u> (1) Ἐάν $a=b \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 2|a-x|=0 \Longleftrightarrow x=a$

(2) Ἐάν $a \neq b$ (ἔστω π.χ. $a>b$)

Τότε: (i) Ἐάν $b<x<a \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow$

$|a-x-b+x|=|a-b| \Longleftrightarrow |a-b|=|a-b| \Longrightarrow (E)$ ταυτότης ἐν (b,a).

(ii) Ἐάν $x \leqslant b \vee x \geqslant a$ τότε $(E) \Longleftrightarrow (x-a)(x-b)=0.$

Πράγματι ἔχομεν:

$$A.\ (E) \Longleftrightarrow |a-x|+|b-x|=|a-b| \Longleftrightarrow \left\{\begin{matrix} a-x+b-x=a-b \\ x \leqslant b < a \end{matrix}\right\} \vee$$

$$\vee \begin{cases} x-a+x-b=a-b \\ b<a\le x \end{cases} \Longleftrightarrow x=b \vee x=a \Longleftrightarrow (x-a)(x-b)=0.$$

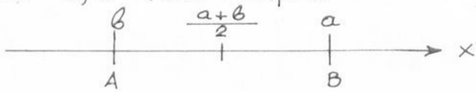
Β. $(E) \Longleftrightarrow (|a-x|+|b-x|)^2=(a-b)^2 \overset{(\delta\iota\alpha\tau\acute{\iota};)}{\Longleftrightarrow} 4x^2-4(a+b)x+$

$+(a+b)^2=(a-b)^2 \Longleftrightarrow x^2-(a+b)x+ab=0 \quad \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x-a)(x-b)=0.$

Γ. $(E) \overset{(\delta\iota\alpha\tau\acute{\iota};)}{\Longleftrightarrow} |2x-(a+b)|=|a-b| \Longleftrightarrow \left|x-\frac{a+b}{2}\right|=\frac{1}{2}|a-b| \; (1)$

Λαμβάνομεν ἐπί ἄξονος τά σημεῖα a καί b καί τό μέσον $\frac{a+b}{2}$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος μέ ἄκρα τά σημεῖα a, b (βλ. Σχῆμα).



Ἡ (Ε) ὑπό τήν μορφήν (1) ἐκφράζει ὅτι:

"ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου x ἀπό τό μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $\overline{AB}$ εἶναι ἴση μέ $\frac{1}{2}$ τοῦ μήκους τοῦ τμήματος αὐτοῦ". Τοῦτο ὅμως ἰσχύει ἐάν καί μόνον ἐάν τό x εὑρίσκεται εἰς τό σημεῖον a ἤ εἰς τό σημεῖον b ἤτοι $x=a \vee x=b \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x-a)(x-b)=0.$

Σημείωσις: Ἐάν $a \in C-R \vee b \in C-R$ τότε ἡ $|2x-(a+b)|=|a-b|$ δέν εἶναι ἰσοδύναμος πρός τήν $(x-a)(x-b)=0$.

(βλ. ἄλγεβρα **Γ. Γ. Λεγάτου** παρ. 3, κεφ. 7, σελίς 56)

132. <u>Υπόδ.</u> Θέτομεν $\sqrt{|\gamma-x|}=\mu>0$, $\sqrt{|\beta-x|}=\lambda>0$ καί $\sqrt{|\alpha-x|}=\kappa>0 \iff |\alpha-x|=\kappa^2 \wedge |\beta-x|=\lambda^2 \wedge$ $\wedge\ |\gamma-x|=\mu^2$. Τότε ἔχομεν

	$\alpha-x$	$\beta-x$	$\gamma-x$		$\alpha-\beta$	$\beta-\gamma$	$\gamma-\alpha$	
$x<\gamma<\beta<\alpha$	$+$	$+$	$+$	$\Longrightarrow$	$\kappa^2-\lambda^2$	$\lambda^2-\mu^2$	$\mu^2-\kappa^2$	(1)
$\gamma<\beta<\alpha<x$	$-$	$-$	$-$	$\Longrightarrow$	$-\kappa^2+\lambda^2$	$-\lambda^2+\mu^2$	$-\mu^2+\kappa^2$	(2)

$$(1)\Longrightarrow (E)\iff \frac{\kappa^2-\lambda^2}{\mu}+\frac{\lambda^2-\mu^2}{\kappa}+\frac{\mu^2-\kappa^2}{\mu}=0 \iff$$

$$\overset{(\text{διατί;})}{\iff} \frac{(\lambda-\kappa)(\kappa-\mu)(\mu-\lambda)(\kappa+\lambda+\mu)}{\kappa\lambda\mu}=0$$

$$(2)\Longrightarrow (E)\iff \frac{-\kappa^2+\lambda^2}{\mu}+\frac{-\lambda^2+\mu^2}{\kappa}+\frac{-\mu^2+\kappa^2}{\mu}=0 \iff$$

$\iff \dfrac{(\lambda-\kappa)(\kappa-\mu)(\lambda-\mu)(\kappa+\lambda+\mu)}{\kappa\lambda\mu}=0$. Ἐπειδή $\kappa+\lambda+\mu>0$ ἔχομεν

τελικῶς $(E)\iff(\lambda-\kappa)(\kappa-\mu)(\lambda-\mu)=0$. Ἀλλά διά τήν περίπτωσιν (1) εἶναι $\kappa>\lambda>\mu>0$ (διατί;) καί διά τήν (2) $0<\kappa<\lambda<\mu$ (διατί;) ἤτοι (E) ἀδύνατος ἐν $\Omega=R-[\gamma,\alpha]$.

133. <u>Υπόδ.</u> (1) Ἐάν $\lambda=0$ τότε $(E)\iff \left\{\begin{matrix}||x|-1|=-2x\\ x<0\end{matrix}\right\}$.

Διακρίνομεν τάς περιπτώσεις $x\le -1$ καί $-1<x<0$ καί εὑρίσκομεν $x=-1/3$.

(2) Ἐάν $\lambda\neq 0$ τότε $(E)\iff \left\{\begin{matrix}||x|-1|=7\lambda-2x\\ x\le \frac{7\lambda}{2}\quad (1)\end{matrix}\right\}$

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

(i) $\lambda < 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} x < 0$ καί καταλήγομεν εἰς: (E)

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7\lambda + 1 \\ x \leq -1 \wedge x \leq \frac{7\lambda}{2} \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\lambda - 1}{3} \\ -1 < x < 0 \wedge x \leq \frac{7\lambda}{2} \end{array}\right\} \ldots$$

(ii) $\lambda > 0$ καί ἔχομεν

$$(E) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} |x-1| = 7\lambda - 2x \\ 0 \leq x < \frac{7\lambda}{2} \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} |-x-1| = 7\lambda - 2x \\ x < 0 \left(< \frac{7\lambda}{2}\right) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\lambda+1}{3} \\ 1 \leq x \leq \frac{7\lambda}{2} \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x = 7\lambda - 1 \\ 0 \leq x \leq \frac{7\lambda}{1} < 1 \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x = 7\lambda + 1 \\ x \leq -1 \end{array}\right\}$$

$$\vee \left\{\begin{array}{l} x = \frac{7\lambda - 1}{3} \\ -1 < x < 0 \end{array}\right\} \ldots$$

134. Ὑπόδ. (1) Ἐάν $a = 2 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow 0 \cdot x = 2 \Longrightarrow A \equiv \phi$.

(2) Ἐάν $a < 2 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow -(a-2)x + (a-2)|x| = 3a+2$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \cdot x = 3a+2 \\ x \geq 0, \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} 2(2-a)x = 3a+2 \\ x < 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \cdot x = 0 \\ x \geq 0 \\ a = -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} 0 \cdot x \neq 0 \\ x \geq 0 \\ a \neq -\frac{2}{3} \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3a+2}{4-2a} \\ x < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow A_1 \equiv R_0^+$, ἐάν $a = -\frac{2}{3}$, $A_2 \equiv \phi$, ἐάν $a \neq -\frac{2}{3}$,
$A_3 = \left\{\frac{3a+2}{4-2a}\right\}$ ἐάν $a < -\frac{2}{3}$ ($\vee\ a > 2$ ἄτοπον)

(3) Ἐάν $a > 2 \Longrightarrow (E) \Longleftrightarrow (a-2)x + (a-2)|x| = 3a+2$

$$\Longleftrightarrow (a-2)(x+|x|) = 3a+2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 \cdot x = 3a+2 \\ x < 0 \end{array}\right\} \vee \left\{\begin{array}{l} x = \frac{3a+2}{2(a-2)} \\ x \geq 0 \end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow A_1 \equiv \emptyset$ (διατί;), $A_2 = \left\{ \frac{3a+2}{2(a-2)} \right\}$ (διατί;).

135. Υπόδ. $(E) \Longleftrightarrow 33\left(4|x|^2+3+\lambda^2\right)=\left(10|x|+2\sqrt{3}+2\lambda\right)^2$

$\xleftrightarrow{|x|=y\geq 0} 33\left(4y^2+3+\lambda^2\right)-\left(10y+2\sqrt{3}+2\lambda\right)^2=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \left(5^2+2^2+2^2\right)\left(4y^2+\sqrt{3}^2+\lambda^2\right)-\left(10y+2\sqrt{3}+2\lambda\right)^2=0$

$\xleftrightarrow{\text{Lagrange}} \left(5\sqrt{3}-4y\right)^2+\left(2\lambda-2\sqrt{3}\right)^2+\left(5\lambda-4y\right)^2=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow y=\frac{5\sqrt{3}}{4} \wedge \lambda=\sqrt{3} \wedge 5\lambda=4y \quad (1).$

Τό σύστημα (1) εἶναι συμβιβαστόν ἄρα διά

$\lambda=\sqrt{3} \Longrightarrow |x|=\frac{5\sqrt{3}}{4} \Longleftrightarrow x=\pm\frac{5\sqrt{3}}{4}.$

«Όταν δέν μπορῆς νά λύσης ἕνα πρόβλημα, σκέψου ἕνα ὅμοιο ἀλλά εὐκολώτερο πρόβλημα καί χρησιμοποίησε τήν μέθοδο μέ τήν ὁποίαν λύεις τό εὐκολώτερο σάν ἀχνάρι γιά νά λύσης τό δυσκολώτερο».

ΜΕΡΟΣ Γ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. ## ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Ἐάν α καί β εἶναι θετικοί ἀριθμοί, νά ὑπολογισθῆ ἡ ἀριθμητική τιμή τῆς παραστάσεως:

$\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots}}}}$, ὅταν τό πλῆθος τῶν ἀλλεπαλλήλων ριζικῶν εἶναι μή συγκεκριμένον.

Νά ὑπολογισθοῦν κατόπιν αἱ παραστάσεις:

1) $\sqrt{\frac{77}{40}+\sqrt{\frac{3689}{1600}+\sqrt{\frac{77}{40}+\sqrt{\frac{3689}{1600}+\cdots}}}}$

2) $\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\cdots}}}}}$

3) $\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{\cdots}}}}}$

<u>Λύσις:</u> Θέτομεν: $0<x=\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots}}}}\Longrightarrow$

$$\Longrightarrow x^2=a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots}}}\iff$$

$$\iff x^2-a=\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots}}}\iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x^2-a>0 \\ (x^2-a)^2=b+\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots}}}_{x} \end{array}\right\}\iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{c} x^2>a \\ (x^2-a)^2=b+x \end{array}\right\}\iff\left\{\begin{array}{c} x^2>a \\ x^4-2ax^2-x^2+a^2-b^2=0 \end{array}\quad(1)\right\}.$$

Ἀπό τάς ρίζας τῆς (1) παραδεκταί εἶναι αἱ θετικαί καί αἱ πληροῦσαι τόν περιορισμόν: $x^2>a$.
Εἶναι φανερόν ὅτι ἀπό τάς ρίζας τῆς (1) ἀπορρίπτονται καί αἱ πραγματικαί, αἱ ὁποῖαι περιέχουν

ριζικά τρίτης τάξεως.

1. Θέτομεν: $x = \sqrt{\frac{77}{40} + \sqrt{\frac{3689}{1600} + \sqrt{\cdots}}}$

Είναι $x > 0$ καί

$$\frac{77}{40} + \sqrt{\frac{3689}{1600} + x} = x^2 \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ x^2 - \frac{77}{40} = \sqrt{\frac{3689}{1600} + x} \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ \left(x^2 - \frac{77}{40}\right)^2 = \frac{3689}{1600} + x \end{array}\right\}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ 20x^4 - 77x^2 - 20x + 28 = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ 20x^2(x^2 - 4) + 3(x^2 - 4) - 20(x - 2) = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ (x-2)(20x^3 + 40x^2 + 3x - 14) = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ (x-2)(2x-1)(10x^2 + 25x + 14) = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ x - 2 = 0 \vee 2x - 1 = 0 \vee 10x^2 + 25x + 14 = 0 \end{array}\right\} \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 > \frac{77}{40} \\ x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2},\ x_3 = \frac{-25 + \sqrt{65}}{20},\ x_4 = \frac{-25 - \sqrt{65}}{20} \end{array}\right\} \iff x = 2.$$

Συνεπώς: $x=\sqrt{\frac{77}{40}+\sqrt{\frac{3689}{1600}+\sqrt{\frac{77}{40}+\sqrt{\frac{3689}{40}+\cdots}}}}=2.$

2. Θέτομεν: $\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\cdots}}}}}=x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+x} \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{7}{9}+x=\left(x^2-\frac{7}{3}\right)^2 \\ x^2>\frac{7}{3} \\ x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^4-\frac{14}{3}x^2-x+\frac{14}{3}=0 \\ x^2>\frac{7}{3}, \quad x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x^4-14x^2-3x+14=0 \\ x^2>\frac{7}{3}, \quad x>0 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)(x-2)(3x^2+9x+7)=0 \\ x^2>\frac{7}{3}, \quad x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2>\frac{7}{3}, \quad x>0 \\ x_1=1, \ x_2=2, \ x_{3,4}=\frac{-9\pm i\sqrt{3}}{6} \end{array}\right\} \Longrightarrow x=2.$$

Συνεπώς: $\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\sqrt{\frac{7}{9}+\sqrt{\frac{7}{3}+\cdots}}}}}=2$

3. Θέτομεν: $\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{\cdots}}}}}=x \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3+2\sqrt{3-2x}=x^2 \\ 0<x<3/2 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x^2-3)^2=(2\sqrt{3-2x})^2 \\ x^2>3 \\ 3/2>x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4(3-2x)=x^4-6x^2+9 \\ x^2>3, \quad 3/2>x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^4-6x^2+8x-3=0 \\ x^2>3, \quad 3/2>x>0 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x-1)^3(x+3)=0 \\ x^2>3 \\ 3/2>x>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow x=1 \text{ (τριπλῆ)},\ x=-3.$$

Αἱ τιμαί αὗται τοῦ x ἀπορρίπτονται διότι πρέπει $x^2>3$ καί $3/2>x>0$.

Συνεπῶς $\nexists\ x\in R$:

$$:\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{3+2\sqrt{3-2\sqrt{\ldots}}}}}=x.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2α

Νά ἀποδειχθοῦν αἱ ἰσότητες.

1) $$\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5\ldots}}}}}=3$$

2) $$\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}+\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}=6$$

3) $$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}=\sqrt{2}$$

<u>Λύσις</u>: 1) Ἔστω $A=\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{\ldots}}}}} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A^2=5+\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\ldots}}} \\ A>0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A^2-5=\sqrt{13+\sqrt{5+\sqrt{13+\sqrt{5+\ldots}}}} \\ A^2>5 \\ A>0 \end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (A^2-5)^2=13+A \\ A>\sqrt{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} A^4-10A^2+25-13-A=0 \\ A>\sqrt{5} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A^4 - 10A^2 - A + 12 = 0 \\ A > \sqrt{5} \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} (A-3)(A^3 + 3A^2 - A - 4) = 0 \\ A > \sqrt{5} \end{matrix} \right\}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} (A-3)(A^3 + 3A^2 - A - 4) = 0 \\ A > \sqrt{5} \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A - 3 = 0 \ \vee \ A^3 + 3A^2 - A - 4 = 0 \\ A > \sqrt{5} \Longleftrightarrow A > 2 \end{matrix} \right\} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} A = 3 \ \vee \ A^3 + 3A^2 - A - 4 = 0 \\ A > \sqrt{5} \ \ (A > 2) \end{matrix} \right\} \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow A = 3$ καθ' ὅσον αἱ πραγματικαί ρίζαι τῆς $A^3 + 3A^2 - A - 4 = 0$ εἶναι μικρότεραι τοῦ 2 καί τοῦτο διότι: $x^3 + 3x^2 - x - 4 = x^3 + 3x^2 - x - 6 = -2$ $\Longleftrightarrow x^2(x+2) + x(x+2) - 3(x+2) = -2 \Longleftrightarrow (x+2)(x^2 + + x - 3) = -2.$

$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$		-2		$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$	
$-$	$+$		$-$		$+$

Ἡ μεγαλυτέρα ρίζα εἶναι ἡ $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ καί συμβαίνει $\frac{-1+\sqrt{13}}{2} < 2$

2). Ἔστω: $\sqrt[3]{45 + 29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45 - 29\sqrt{2}} = x \Longleftrightarrow$

$$\left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} \left(\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}\right) = x^3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 90 + 3\sqrt[3]{2025 - 1682} \cdot x = x^3 \Longleftrightarrow 90 + 21x = x^3 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x^3 - 21x - 90 = 0 \Longleftrightarrow (x-6)(x^2 + 6x + 25) = 0 \Longleftrightarrow$$

$\Longleftrightarrow x - 6 = 0 \ \vee \ x^2 + 6x + 25 = 0 \Longrightarrow x = 6$ διότι

$x^2+6x+25 \neq 0 \quad \forall\, x\in R.$

Συνεπῶς: $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6$

3) Θέτομεν:

$$\frac{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}} - \sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}} = x \quad \Big| \quad x>0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{\left(\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)} + \sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}} = x^2 \Longleftrightarrow \frac{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{\sqrt{8}-(\sqrt{2}-1)}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}} = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1}}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}} = x^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)}{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}} = x^2 \Longleftrightarrow x^2=2 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x=\sqrt{2}\ldots$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

1. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $\rho = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}}$

εἶναι ρίζα τῆς ἑξῆς ἐξισώσεως: $x^3+3x+2=0$.

Ἀπόδ. Θέτομεν $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}=\omega \Longrightarrow \omega^3=\sqrt{2}-1$ καί

$\omega^6 = 3-2\sqrt{2}$, συνεπῶς $\rho = \omega - \dfrac{1}{\omega} = \dfrac{\omega^2-1}{\omega}$. Θέτομεν

εἰς τό τριώνυμον x^3+3x+2 τήν τιμήν τοῦ ρ καί λαμβάνομεν: $x^3+3x+2=\frac{(\omega^2-1)^3}{\omega^3}+\frac{3(\omega^2-1)}{\omega}+2=$

$=\frac{\omega^6+2\omega^3-1}{\omega^3}=\frac{3-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2-1}{\omega^3}=0$.

2. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $x=\sqrt[3]{-\frac{\kappa}{2}+\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}+$

$+\sqrt[3]{-\frac{\kappa}{2}-\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$ εἶναι ρίζα τῆς (Ε): $x^3+\lambda x+\kappa=0$.

<u>Ἀπόδ.</u> Θέτομεν $a=\sqrt[3]{-\frac{\kappa}{2}+\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$ καί

$b=\sqrt[3]{-\frac{\kappa}{2}-\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}}$.

Ἔχομεν τότε: $x=a+b\Longrightarrow x^3=(a+b)^3=a^3+b^3+$

$+3ab(a+b)$ (1). Ἐπειδή $\left.\begin{aligned} a^3&=-\frac{\kappa}{2}+\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}\\ \text{καί}\quad b^3&=-\frac{\kappa}{2}-\sqrt{\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}}\end{aligned}\right]$

$\Longrightarrow a^3+b^3=-\kappa$ καί $ab=\sqrt[3]{\frac{\kappa^2}{4}-\left(\frac{\kappa^2}{4}+\frac{\lambda^3}{27}\right)}=$

$=\sqrt[3]{-\frac{\lambda^3}{27}}=-\frac{\lambda}{3}$ καί ἡ (1) γίνεται: $x^3=-\kappa+3(-\lambda/3)\cdot x$

$\Longrightarrow x^3+\lambda x+\kappa=0$.

3. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός $x=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$

εἶναι ρίζα τῆς (Ε): $x^3+3bx-2a=0$.

<u>Ἀπόδ.</u> Θέτομεν: $A=\sqrt[3]{a+\sqrt{a^2+b^3}}$, $B=\sqrt[3]{a-\sqrt{a^2+b^3}}$, συνεπῶς

$x=A+B\Longrightarrow x^3=(A+B)^3=A^3+B^3+3AB(A+B)$. (1).

Ἰσχύει: $\left.\begin{aligned} A^3 &= a+\sqrt{a^2+b^3} \\ B^3 &= a-\sqrt{a^2+b^3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow A^3+B^3=2a$ καί

$AB=\sqrt[3]{a^2-(a^2+b^2)}=\sqrt[3]{-b^3}=-b$. Ἡ (1) τότε γίνεται:

$x^3=2a-3bx \Longleftrightarrow x^3+3bx-2a=0$.

4. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός: $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ εἶναι

ρίζα τῆς (Ε): $x^3+3x-2=0$.

Ἀπόδ. Θέτομεν: $a=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}$, $b=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$.

Συνεπῶς ἔχομεν $x=a-b \Longleftrightarrow x^3=(a-b)^3=a^3-b^3-$

$-3ab(a-b)$ (1). Ἰσχύει $a^3=\sqrt{2}+1$, $b^3=\sqrt{2}-1$, $a^3-b^3=2$

καί $ab=\sqrt[3]{2-1}=1$. Τότε ἡ (1) γίνεται:

$x^3=2-3x \Longleftrightarrow x^3+3x-2=0$.

Παρατήρησις: Ἐάν εἰς τό παράδειγμα 3 (εφ. 3η)

θέσωμεν: $a=b=1$ τότε ὁ ἀριθμός $x=\sqrt[3]{1+\sqrt{1^2+1^3}}+$

$+\sqrt[3]{1-\sqrt{1^2+1^3}}=\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$ εἶναι

ρίζαι τῆς $x^2+3\cdot 1x-2\cdot 1=0 \Longleftrightarrow x^2+3x-2=0$.

5. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ἀριθμός: $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ εἶναι

ρίζα τῆς (Ε): $x^3+3x-4=0$.

Ἀπόδ. Εἰς τό παράδειγμα 3 (εφ. 3) θέτομεν:

$a=2$, $b=1$ καί ἔχομεν ὅτι ὁ ἀριθμός:

$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{2^2+1^3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{2^2+1^3}}=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ εἶναι

ρίζα τῆς (Ε): $x^2+3\cdot 1\cdot x-2\cdot 2=0 \Longleftrightarrow x^2+3x-4=0$,

2. Ἐπίλυσις ἐν R ἀρρήτου ἐξισώσεως $A=0$ μέ σύγχρονον ἐπίλυσιν τῶν ἀντιστοίχων πρός αὐτήν ἀνισώσεων $A \gtrless 0$, ὅπου A ἀλγεβρικόν ἄθροισμα τετραγωνικῶν ριζῶν πολυωνύμων, πρώτων πρός ἄλληλα (1), ἐκ τοῦ πολυωνυμικοῦ δακτυλίου $R[x]$.

Ὁ Ὑφηγητής κ. Γεώργιος Ξηρουδάκης ὑποδεικνύει ἕνα ἄνετον καί συγχρόνως διδακτικόν τρόπον, ἀντιμετωπίσεως τοῦ ἀνωτέρω θέματος.

Ἐπειδή ἡ παράστασις A εἶναι ἄθροισμα ἑτεροσήμων τετραγωνικῶν ριζῶν, διότι ἄλλως ἡ ἐξίσωσις $A=0$ θά ἦτο ἀδύνατος (λόγῳ (1)), ὑπάρχει πάντοτε συζυγής τῆς A παράστασις, ἡ B, ἡ ὁποία καθίσταται μονίμως ἀριθμός θετικός (ἀρνητικός) διά τάς πραγματικάς τιμάς τοῦ x, τάς καθιστώσας τά ὑπόρριζα μή ἀρνητικούς ἀριθμούς.

Πράγματι, μία τοιαύτη παράστασις B εἶναι τό ἄθροισμα τῶν τετραγωνικῶν ριζῶν τῆς A, λαμβανομένων ὁμοσήμως, καθώς καί κάθε ἄλλη παράστασις κατά τά κατωτέρω ἀναφερόμενα. Προκειμένου συνετῶς νά προχωρήσωμεν, θεωροῦμεν τό γινόμενον AB, τό ὁποῖον, λόγῳ τῆς ἀνωτέρω ἰδιότητος τῆς B, χρησιμοποιοῦμεν πρός ἐπίλυσιν ἐν R τῆς ἐξισώσεως $A=0$

καί τῶν ἀνισώσεων $A \gtrless 0$.
Ἡ τοιαύτη χρησιμοποίησις δύναται νά γίνῃ. Διότι ἡ A μηδενίζεται μόνον, ὅταν τό AB μηδενισθῇ, ἐνῶ διά τάς ἄλλας τιμάς τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς A, αἱ ὁποῖαι δέν τήν μηδενίζουν καθίσταται ὁμόσημος ἤ ἑτερόσημος πρός τό γινόμενον AB, καθ᾽ ὅσον $B>0$ ἤ $B<0$. Ἔτσι ἡ ἐπίλυσις τῶν $A=0$ καί $A \gtrless 0$ ἀνάγεται εἰς τήν ἐπίλυσιν τῶν $\left.\begin{matrix} AB=0 \\ AB \gtrless 0 \end{matrix}\right\}$ (2) Τήν ἀναγωγήν συνεχίζομεν καί ἐπί τῶν σχέσεων (2) θεωροῦντες πάλιν τήν ὑπάρχουσαν πάντοτε παράστασιν B' συζυγῆ τῆς AB, ἐφωδιασμένην μέ τήν ἰδιότητα τῆς B, ἐφ᾽ ὅσον τό γινόμενον AB ἀνήκει εἰς τάς ἀρρήτους παραστάσεις. Ἔτσι ἐκ τοῦ μηδενισμοῦ ἤ τοῦ προσήμου τοῦ γινομένου $(AB)B'$ θά συνάγωμεν τά τοῦ μηδενισμοῦ ἤ τοῦ προσήμου τοῦ AB καί συνεπῶς καί τῆς A, ἐφ᾽ ὅσον δέν ἤθελε παραστῆ ἀνάγκη νά συνεχίσωμεν τάς ἀνωτέρω ἀναγωγάς, μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς ῥητόν γινόμενον ἐκ τοῦ ὁποίου θά λάβωμεν τάς ζητουμένας λύσεις.

Παράδειγμα:

Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις:
(Ε): $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+17} = \sqrt{x-15} - \sqrt{x-10}$ ὡς καί αἱ ἀντί-

στοιχοι πρός αὐτήν ἀνισώσεις:

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x+17} \leqq \sqrt{x-15} - \sqrt{x-10}.$$

Τά ὑπόρριζα καθίστανται ἀριθμοί μή ἀρνητικοί διά $x \geqslant 15$. Ὑπό τήν προϋπόθεσιν αὐτήν θέτομεν:

$A = (\sqrt{x+6} - \sqrt{x+17}) - (\sqrt{x-15} - \sqrt{x-10})$.

Ἐπειδή ἡ διαφορά δύο θετικῶν ἀριθμῶν εἶναι ὁμόσημος πρός τήν διαφοράν τῶν τετραγώνων των, ἑκάστη τῶν ἐντός τῶν παρενθέσεων δύο διαφορῶν εἰς τήν A εἶναι ὁμόσημος ἀντιστοίχως πρός τήν $(x+6)-(x+17) = -11 < 0$ καί $(x-15)-(x-10) = -5 < 0$.

Εἶναι λοιπόν $B = (\sqrt{x+6} - \sqrt{x+17}) + (\sqrt{x-15} - \sqrt{x-10}) < 0$ καί ἐκ τοῦ γινομένου $AB = 2\left(24 + \sqrt{(x-10)(x-15)} - \sqrt{(x+6)(x+17)}\right)$ συνάγομεν, ὅτι $A = 0$, ἐάν $AB = 0$ καί $A > 0$, ἐάν $AB < 0$.

Διά τήν συζυγῆ $B' = 2\left(24 + \sqrt{(x-10)(x-15)} + \sqrt{(x+6)(x+17)}\right)$ τοῦ AB προφανῶς εἶναι $B' > 0$, θά εἶναι δέ $A = 0$, ἐάν $(AB)B' = 96\left(13 - x + \sqrt{(x-10)(x-15)}\right) = 0$ καί $A > 0$, ἐάν $(AB)B' < 0$.

Ἀλλά διά τήν $x \geqslant 15$ προφανῶς ἔχομεν:

$B'' = 13 - x - \sqrt{(x-10)(x-15)} < 0$ καί ἐκ τοῦ γινομένου $[(AB)B']B'' = 96(19-x)$, μετά τοῦ ὁποίου μηδενίζεται ἡ A ἤ πρός τό ὁποῖον καθίσταται ὁμόσημος αὐτη, λαμβάνομεν τάς ζητουμένας λύσεις:

$A = 0$ διά $x = 19$, $A > 0$ διά $15 \leqq x < 19$ καί $A < 0$ διά $x > 19$

3. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ομας 1η: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1

(α): $20(7x+4)-18(3x+4)-5=25(x+5)$

(β): $4(x-3)-2(3-x)=5(x+2)-9(8-x)+20+(3-x)$

(γ): $3(x-2)-2(x+1)-5(x-3)=7(2x-1)-4(x+5)$

(δ): $5(x-2)-2(3-x)=3x-4$, (ε): $x-1=2(3-2x)-3(1-x)$

(στ): $5-4(x-3)=x-2(x-1)$, (ζ): $6(x-1)-(3x+11)+7=0$

(η): $11(4-5x)-2(1-4x)=2x-(3x-7)$, (θ): $25(4x-1)+2x=11(3-4x)-5x+8$

(ι): $2x-1-(3x+7)-8(9-2x)=5-(x-3)+18x+2(x-36)$

2

(α): $0{,}8x+0{,}5(x-6)=1{,}8(0{,}5x-5)$

(β): $0{,}5(3x-1)-0{,}75(x-1)-0{,}2(2x-3)=0{,}5(14x+23)+5{,}5$

(γ): $0{,}25(x-1)-0{,}125[0{,}25(x-5)-0{,}2(14-2x)]=0{,}4375(x-9)$

(δ): $1{,}3+3(x-0{,}2)-(x+0{,}5)=0$, (ε): $0{,}4x+1=2+x-0{,}6(x-1)$

3

(α): $6-[2x-(3x-4)-1]=0$, (β): $4-[3x-(5x-3)+2]=1$

(γ): $3x-[3x-(2x-7)]=7x-[8x-(9x-8)]$

(δ): $9x-[8x-(6x-5)]=7-[(2-91x)-4x]$

(ε): $8-[4x-(5x+15)+(2x-5)]=x-[7-x-(9+5x)]$

(στ): $x-[5-(2x+3)+(3-4x)]=8-[3(2x-5)-2(3x-7)]$

(ζ): $(2-x)[16-12(12+2x)]=2x[12(x+5)-12]$

(η): $(x-3)[2(x-1)-(3+2x)]=10x-[5(x-2)-7(4-x)]$

(θ): $x-1-5\{2x-3-[8-7(3x+5)]\}-235=0$

(ι): $3x-2\{7x+5-[12-5(x+3)+x]-(2-3x)\}+2=0$

4

(α): $(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-\sqrt{2})x+2\sqrt{3}=(\sqrt{2}+1)(1-\sqrt{2})[x-2(2+\sqrt{3})]$

(β): $x\sqrt{27}+(x+1)\sqrt{243}=x(\sqrt{768}-\sqrt{48})$

(γ): $(3x+1)^2-(x\sqrt{2}-1)^2=7(x-3)(x-\sqrt{2})$

(δ): $x(2\sqrt{3}-2)-4=2(\sqrt{3}-x)+4$, (ε): $3(\sqrt{7}-2)x-11=\sqrt{7}(3x+\sqrt{7})$

5

(α): $x-\dfrac{2x-1}{3}=\dfrac{3(x+1)}{4}$, (β): $2x+\dfrac{x}{3}-\dfrac{x}{4}=\dfrac{5x}{3}+30$

(γ): $\dfrac{4-5x}{12}-\dfrac{3(x-1)}{2}=2x-6$, (δ): $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{5x-2}{12}=\dfrac{x+1}{4}$

(ε): $2x-\dfrac{5x-12}{4}=3+\dfrac{3x}{4}$, (στ): $\dfrac{5(x+3)}{7}-\dfrac{4(x-1)}{2}+\dfrac{6(x-1)}{14}=0$

(ζ): $\dfrac{2x-1}{3}-\dfrac{3x-2}{4}=\dfrac{5x-4}{6}-\dfrac{7x+6}{6}$, (η): $\dfrac{7x-4}{15}+\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{3x-1}{5}-\dfrac{7+x}{10}$

(θ): $\dfrac{18x+13}{9}=\dfrac{6x+1}{5}+4-x$, (ι): $\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{2}{7}\right)=\dfrac{5}{7}\left(\dfrac{12x}{25}-\dfrac{1}{75}\right)$

6 (α): $\frac{1}{3}\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{3}{5}\left(x+\frac{4}{3}\right)+\frac{7}{2}=0$, (β): $2\left(\frac{5}{2}-x\right)=\frac{1}{2}+2\left(\frac{3}{2}-x\right)$

(γ): $\frac{x-7}{4}+\frac{x+10}{21}+1=\frac{5x-7}{8}-\frac{9x+6}{35}$

(δ): $\frac{3x-2}{8}-\frac{13x+3}{27}+9=\frac{5x-12}{18}-\frac{2-5x}{4}$

(ε): $\frac{3x}{4}+\frac{5}{17}(2x+1)=x-1+\frac{7x-5}{51}-\frac{2-x}{2}$

(στ): $\frac{4+13x}{22}+\frac{x}{2}-\frac{7x-1}{3}+\frac{3-15x}{33}-\frac{6-5x}{4}=0$

(ζ): $3x-\frac{x-2}{3}+\frac{2x-1}{2}-1=\frac{3(x-1)}{2}+\frac{1}{5}$

(η): $\frac{4x}{7}-\frac{2(3x-2)}{21}-\frac{x-5}{3}=\frac{5(3-4x)}{7}+\frac{1}{3}$

(θ): $\frac{3x-1}{2}-\frac{3(x-1)}{4}-\frac{2x-3}{3}-\frac{3(x+3)}{4}+\frac{5(x-3)}{6}=0$

(ι): $\frac{1}{3}\left[\frac{x-2}{2}-\frac{2(x+1)}{5}-1\right]=\frac{3(x+2)}{10}-1$

7 (α): $\frac{2x-2{,}5}{3}=\frac{4x-5}{6}$, (β): $\frac{2x-1{,}5}{5}=\frac{0{,}8x-1}{2}$

(γ): $\frac{2x}{3}+\frac{x}{6}+5-\frac{5x}{4}=4{,}5-\frac{5x-3}{6}+1{,}25-\frac{x}{3}$

(δ): $x-\frac{x-6}{6}=0{,}5x-\frac{x+3}{3}$, (ε): $\frac{3x-2}{0{,}5}-\frac{2x-3}{0{,}2}=11-4x$

8 (α): $\frac{3}{8}\left\{\frac{2}{5}[8(2x+3)+9]-9\right\}-99=0$

(β): $\frac{1}{6}[(8-x)-3(x+6)-4]=1-x-\frac{x}{3}$

(γ): $\frac{1}{3}(x-2)-\left[5\left(\frac{7x}{2}-5\right)-13(x-5)\right]+\frac{1}{4}=0$

(δ): $\frac{3}{5}\left(4-\frac{x-6}{12}\right)-(x-4)=\frac{2}{3}\left[\frac{1}{5}(7-3x)+\frac{1}{2}-\frac{7x}{3}\right]$

(ε): $\frac{x-1}{4}-\frac{1}{8}\left(\frac{x-5}{4}-\frac{14-2x}{5}\right)=\frac{x-9}{2}-\frac{7}{8}$

(στ): $\frac{1}{2}\left[8-\frac{x}{3}-2\left(\frac{x}{2}+5\right)\right]-\left[6-\frac{3x}{2}+3(x-5)\right]+5=0$

(ζ): $\frac{1}{2}\left(\frac{2x+9}{2}-\frac{x+4}{2}\right)+\frac{5x+6}{4}=\frac{7x-2}{4}$

(η): $\frac{1}{5}\left[\frac{1}{2}(3x-1)-(x+1)+\frac{x}{3}\right]=1$

$$(\theta):\ \left\{-\left[-\left(7\,\frac{x-1}{4}+3\,\frac{2-x}{8}-5\,\frac{x-3}{6}\right)\right]\right\}-\left\{-\left[-\left(3\,\frac{x-1}{4}-5\,\frac{2-x}{8}-\frac{x-3}{6}\right)\right]\right\}=0$$

$$(i):\ \left[\frac{2}{3}x^3-\left(\frac{x^2}{3}+2x\right)+\frac{10}{3}\right]-\left[\left(x^3+\frac{2}{3}x^2\right)-\left(3x-\frac{4}{3}\right)\right]-\left[-\frac{5x^3}{3}-\left(x^2-\frac{7}{6}x-2\right)\right]=\frac{4}{3}x^3$$

9

$$(\alpha):\ \frac{x}{6}-\frac{x-\frac{1}{2}}{3}-\frac{\frac{2}{5}-\frac{x}{3}}{3}=0$$

$$(\beta):\ \frac{x-\frac{2(x+1)}{3}}{8}-\frac{x-5}{6}=x+5-\frac{2x-\frac{3(2x+1)}{4}}{4}$$

$$(\gamma):\ \frac{x+\frac{2(3-x)}{5}}{14}-\frac{5x-4(x-1)}{24}=\frac{7x+2+\frac{9-3x}{5}}{12}+\frac{2}{3}$$

$$(\delta):\ \frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2}{5}}-\frac{2x-\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{6x-3}{5}-1}{3-\frac{3-4x}{10}}-3$$

$$(\varepsilon):\ \frac{25x-655}{95}-\frac{5(x-12)}{209}=\frac{89-3x-\frac{2(x-18)}{5}}{11}$$

10

$$(\alpha):\ \frac{x}{\sqrt{2}}-\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{6}}-2\ ,\quad (\beta):\ \frac{x-2}{\sqrt{2}+1}-\frac{3(x-5)}{\sqrt{2}-1}=\frac{3x-1}{4}$$

$$(\gamma):\ \frac{3(x-1)}{\sqrt{5}+3}-\frac{2(x+3)}{4+\sqrt{7}}-\frac{3(x+1)}{3-\sqrt{5}}-\frac{2(x-5)}{4-\sqrt{7}}$$

$$(\delta):\ \frac{3x+2}{11+\sqrt{5}}-\frac{x-1}{8-\sqrt{17}}+\frac{x-2}{11-\sqrt{5}}-\frac{3(x+2)}{8+\sqrt{17}}=1$$

$$(\varepsilon):\ \frac{13-5x}{8+\sqrt{97}}-\frac{5(x-2)}{4-\sqrt{7}}+\frac{3x+2}{8-\sqrt{97}}-\frac{1}{4+\sqrt{7}}=2$$

11

(α): $(x-2)(x-3)+(x-4)(x-5)=2(x-3)(x-4)$

(β): $3(x-1)^2-2(x-1)(x+1)=(x+1)^2$

(γ): $(3x+4)(4x-1)-(7x-2)(x+1)=(5x-3)(x-2)+1$

(δ): $(5x-2)^2-2(4x-3)^2=(7x+2)(1-x)+14$

(ε): $(x+5)^2-2(3x-6)+3(2x+5)-(x-3)^2=0$

$(\sigma\tau)$: $(x-1)^2+(x-3)^2+(x-5)^2=3(x+15)(x-7)$

(ζ): $(2x-3)(x+2)-4(1+x)=x(2x+1)-2(2x+5)$

(η): $(x+1)^3-2x(x-4)-12x=(x+1)(x^2-1)+7$

(θ): $(x+1)^2-(x-1)^2=(x+2)^2-x^2$, (i): $(x+1)^4-(x-1)^4=8x(x^2+1)$

12

(α): $(x-1)^2-(x-2)^2=(1-2x)^2-(3-2x)^2$

(β): $(x^2+x+1)^2=(x^2-3)^2+2x(x^2-4)+3x(3x-4)$

(γ): $5(x^2-2x-1)+2(3x-2)=5(x+1)^2$

(δ): $(9x^2-24x+16)[5(x^2+4)-4(x^2+9)](x^2-3x+2)=0$
(ε): $(3x^2-8x-3)(16x^2+16x+3)[3(x^2-1)-(2x^2-2x-4)]=0$
(στ): $[(x-1)^2-(3x+8)^2-(2x+5)^2](x^2-2x+2)=0$
(ζ): $(6x-1)^2+(3x+4)^2-(5x-2)(5x+2)=53$
(η): $(169x^2-225)(x^2+0{,}002x)(0{,}04x^2-0{,}49)(x^2-0{,}7x-0{,}6)=0$
(θ): $[x^2-(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}][4x^2-2(1+\sqrt{3})x+\sqrt{3}]=0$
(ι): $[(x+1)^3-x^3-(x+2)^2](x^2+x\sqrt{8}+2)=0$

13 (α): $\left(x-\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)-(x-5)(x+3)=37/4$,
(β): $\frac{x}{3}-\frac{1}{4}\left[2x-1-\frac{1}{3}(x+2)\right]-\frac{1}{2}x^2=2-\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)$
(γ): $(x-1)(2x^2-x+5)=(x-1)\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x^2+\frac{19}{4}\right)\right]$
(δ): $\left(2x-\frac{3}{5}\right)\left(5x+\frac{2}{3}\right)=10(x-1)(x+1)-\frac{2}{5}$
(ε): $\frac{1}{3}(x-5)(x+1)+\frac{1}{5}(x+2)(x-3)=\frac{8}{15}(x-2)^2$
(στ): $\frac{(x+3)(x-2)}{10}-\frac{(x+2)(x-1)}{14}=\frac{(x-3)(x+2)+4}{35}$
(ζ): $\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(x+3)^2}{6}=\frac{(x-2)(x+1)}{2}$
(η): $\frac{(3x+1)(3x-1)}{9}-\frac{(x-5)(x+1)}{2}=\frac{(9x-1)(x+3)}{18}-\frac{8}{9}$
(θ): $\frac{(x-5)^2}{5}-\frac{(x+3)^2}{3}=\frac{(3x+1)(3x-1)-x(x+1)}{15}$
(ι): $\frac{3x^2-2}{12}-\frac{(2-x)^2}{9}+\frac{7x-19}{6}=\frac{(x+1)(x+7)+5}{3}-\frac{x-1}{2}$

14 (α): $(x^2-4)^2-(x+2)^2(5x-4)=0$
(β): $(1-x)^3=(1-x)(2x+1)(x+1)$
(γ): $x^3-1+3(2x-2)=3(x-1)(x^2+4)$
(δ): $(x+2)(x+3)+3(x^2+5x)^2=120$
(ε): $x^3+(x+3)(x-9)+27=0$
(στ): $(1-2x)^3+(7x-3)^3+(4+5x)^3=(2+10x)^3$
(ζ): $x^3(x+1)-3x^2-5x-2=0$ (Υπόδ. $5x=3x+2x$)
(η): $(8x^3+12x^2+6x+1)(x^3+x^2-2)=0$
(θ): $(x+3)^2-1-3x(x+4)=0$, (ι): $x^9-27x^6-x^3+27=0$

15 (α): $[(x+2)^2+x^2]^3=8x^4(x+2)^2$
(β): $(2x^3-15x^2+37x-30)(x^3-x^2-14x+24)=0$
(γ): $(2x^3-15x^2+46x-42)(x^3+2x^2-11x+6)=0$
(δ): $x^4-5x^3+12x^2-15x+9=0$, (ε): $x^4-6x^3-28x^2+120x+288=0$
(στ): $x^4-27x^2+42x+8=0$, (ζ): $x^4-5x^3-9x^2+81x-108=0$
(η): $x^5-15x^3+10x^2+60x-72=0$, (θ): $x^5-x^4-27x^3-13x^2+34x-120=0$
(ι): $(3x^3-14x^2+20x-8)(x^4-15x^2+10x+24)(3x^4+4x^2-12544)=0$

16 (α): $12x^3+13x^2-13x-12=0$, (β): $3x^3+13x^2+13x+3=0$
(γ): $(x+2)^3-3\left[x^3+(x+1)^3\right]=0$
(δ): $12x^3-37x^2+37x-12=0$, (ε): $2(1+x^4)=(1+x)^4$
(στ): $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$, (ζ): $(1-x)(1+x)^3=x^2$, (η): $x^4-6x^3+6x-1=0$
(θ): $2x^4-5x^3+7x^2-5x+2=0$, (ι): $2x^4+x^3-17x^2+x+2=0$

17 (α): $x^5-4x^4+3x^3+3x^2-4x+1=0$
(β): $2x^5-3x^4-5x^3+5x^2+3x-2=0$
(γ): $32x^5+16x^4-24x^3-12x^2+2x+1=0$ (Ὑπόδ. $2x=y$)
(δ): $78x^6-135x^5+135x-78=0$, (ε): $x^6+2x^4+2x^2+1=0$
(στ): $6x^6-25x^5+31x^4-31x^2+25x-6=0$
(ζ): $216x^7-216x^5-211x^4-211x^3-216x^2+216=0$
(η): $6x^7-41x^6+103x^5-138x^4+138x^3-103x^2+41x-6=0$
(θ): $2x^8-9x^7+8x^6+10x^5-18x^4+10x^3+8x^2-9x+2=0$
(ι): $3x^8-20x^7+45x^6-40x^5+12x^4=0$ (Ὑπόδ. $x+\frac{2}{x}=y$).

18 (α): $\frac{x-1}{x-2}+\frac{x-2}{x-1}=2$, (β): $\frac{3}{x}+\frac{1}{x^3}=7-\frac{3}{x^2}$
(γ): $\frac{3}{4}(2x-3)^3+\frac{1}{9}\left[2(3x-2)^3+\frac{(6x-5)^3}{4}\right]=\frac{(2x-3)(3x-2)(6x-5)}{2}$
(δ): $x^3-33x+18=0$ (Ὑπόδ. $x^3-33x+18=x^3+1^3+2^3+3^3-3(2x+3x+6x+6)$).
(ε): $6(x^2+5)=(x+5)^2$ (Ὑπόδ. Lagrange διά τούς $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$ καί $x,\sqrt{2},\sqrt{3}$)

Ὁμάς 2α: Νά εὑρεθῇ τό πεδίον ὁρισμοῦ $\mathcal{D}$ καί νά ἐπιλυθῇ ἐν $\mathcal{D}$ ἑκάστη τῶν ἐξισώσεων:

1 (α): $\frac{1-3x}{6x}=\frac{-2x+1}{4x-1}$, (β): $\frac{1}{2x-3}=\frac{3}{2x^2-3x}$
(γ): $\frac{2x+1}{x}+\frac{x-4}{x+1}=3$, (δ): $\frac{1}{5x+8}+\frac{1}{x+4}=\frac{9}{8(x+3)}$
(ε): $\frac{5}{x-1}-\frac{5}{x+1}=\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+3}$, (στ): $\frac{3x-4}{x+1}=x^2+2x-\frac{7}{x+1}$
(ζ): $\frac{2x-1}{x+1}+\frac{3x-1}{x+2}=4+\frac{x-7}{x-1}$, (η): $\frac{x+1}{x-1}-3x\left(1-\frac{x-1}{x+1}\right)=\frac{x-1}{x+1}$
(θ): $\frac{2}{x+5}-\frac{1}{x+2}=\frac{x-3}{(x+5)(x+2)}$, (ι): $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2+2x}=\frac{2x-1}{x(x+2)}$

2 (α): $\frac{6x^2+7x+8}{2x+1}=\frac{3x^2-2x-16}{x-2}$, (β): $\frac{13}{x+1}-\frac{1}{1-x}=\frac{5x-3}{x^2-1}$
(γ): $\frac{5x}{16-x^2}+\frac{3}{x+4}+\frac{2}{x-4}=0$, (δ): $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x+3}{x-3}+\frac{2}{x^2-5x+6}$
(ε): $\frac{2x^2+8x-6}{x^2-81}=\frac{x-1}{x+9}+\frac{x-1}{x-9}$, (στ): $x+1+\frac{x^2}{x^2+1}=\frac{x^2}{x+1}+\frac{5x-4}{x^2-1}$

$$(\zeta): \frac{1}{x-3}+\frac{1}{x-1}+\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{2}{x-2}$$

$$(\eta): \frac{2(1+x)}{9x^2-4}-\frac{x-2}{9x^2+12x+4}=\frac{x+4}{9x^2-4}, \quad (\vartheta): \frac{1}{3x-1}+\frac{2(x+1)}{x-1}-\frac{3x^2+1}{3x^2-4x+1}=1$$

$$(\iota): \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}-\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{(x-2)(x-3)}=0$$

3

$$(\alpha): \frac{2+\frac{x}{x-4}}{1-\frac{x}{x-4}}=3, \quad (\beta): \frac{\frac{x+1}{x-1}-2}{\frac{4}{x-1}-\frac{x+1}{2}}=4$$

$$(\gamma): \frac{\frac{3x-5}{2}-1}{4}=\frac{4(2x-7)}{9}+\frac{3-\frac{5(x-2)}{3}}{3}+\frac{13}{24}$$

$$(\delta): \frac{(x+1/x)^2-2(1+1/x^2)}{(x-1/x)^2}+\frac{1}{x^2-1}=3+\frac{(x-1)^{-1}}{x+1}$$

$$(\varepsilon): \frac{1-x}{1-x+x^3}-\frac{1/x\,(1/x-2)}{1/x^3+1}=3x-1$$

$$(\sigma\tau): \frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1-\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{x+1}{2}=2x-3$$

$$(\zeta): \frac{\frac{x-1}{3}+\frac{x-1}{x-2}}{\frac{x+2}{4}+\frac{x+2}{x-3}} : \frac{\frac{x+3}{7}-\frac{x+3}{x+4}}{\frac{x-2}{3}+\frac{x-2}{x-1}}=2$$

$$(\eta): \left[\frac{1-2/x}{1/x+2}-\frac{x-3}{1+3x}\right]:\left[1+\frac{(1-2/x)(1-3/x)}{(2+1/x)(3+1/x)}\right]=3x-2$$

$$(\vartheta): \frac{4x^{-16}+7x^{-17}}{6x-37}=\frac{6x^{-15}-30x^{-16}+21x^{-17}}{3x-16}-2x^{-16}$$

$$(\iota): \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}=3x-2$$

4

$$(\alpha): \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}, \quad (\beta): \frac{x^2+x+1}{x^2+x+2}+\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}=\frac{5}{2}$$

$$(\gamma): \frac{2x}{2x-1}-\frac{2x}{2x+1}+\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{1-2x}=\frac{1+x^2}{1-x^2}-\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$(\delta): \frac{x-2}{x+2}-1=\left[\frac{2(x+2)}{x-2}-1\right]:\frac{x+2}{2-x}$$

$$(\varepsilon): \frac{(6x-1)(4x-1)}{5}=\frac{1}{3(3x-1)(2x-1)}$$

(Υπόδ. Χρησιμοποιήσατε καταλλήλους βοηθητικούς αγνώστους).

5

(α): $\frac{x+8}{x+9}+\frac{x+4}{x+5}=\frac{x+9}{x+10}+\frac{x+3}{x+4}$, (β): $\frac{x-3}{x-5}+\frac{x-9}{x-11}=\frac{x-7}{x-9}+\frac{x-5}{x-7}$

(γ): $\frac{x-1}{x-3}-\frac{x-4}{x-6}=\frac{x-2}{x-4}-\frac{x-5}{x-7}$, (δ): $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$

(ε): $\frac{x+5}{x+4}-\frac{x-6}{x-7}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-15}{x-16}$, (στ): $\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}+\frac{2}{x+1}$

(ζ): $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-4}{x-5}-\frac{x-5}{x-6}$ (η): $\frac{3}{x^2-1}-\frac{2x}{x+1}=\frac{5x}{x^2-1}-\frac{2x}{x-1}$

(θ): $\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}$ (ι): $\frac{3-x}{3+x}-\frac{2-x}{2+x}-\frac{1-x}{1+x}=-1$

6

(α): $\frac{x^2+1}{x^2}=\frac{1}{(x-1)^2}$, (β): $\frac{x^2(x+1)}{(x^2+1)(x^3+1)}=\frac{4}{15}$

(γ): $\frac{(x^2-x+1)^2}{x^4-x^3+x^2-x-1}=\frac{9}{13}$, (δ): $x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2-3=0$

(ε): $x^3+\frac{1}{x^3}=6\left(x+\frac{1}{x}\right)$, (στ): $\frac{(1+x+x^2+\cdots+x^\nu)^2-x^\nu}{(x^\nu-1)(x^{\nu+2}-1)}=1$

(ζ): $\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\cdot\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x-1}\right)=x^8+x^6+x^4+5$

(η): $\frac{x^2-3x+9}{x^2+2x+4}=\frac{x-3}{x+2}$, (θ): $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}=\frac{x^3-3x^2-2x+5}{x^3+3x^2+2x+5}$

(ι): $\frac{x^2-x+1}{6(x-1)}-\frac{x^2+x+1}{6(x+1)}=\frac{2x}{x^2-1}$

Ομας 3η: θεωροῦμεν τά πολυώνυμα $\Pi=2(x-5)+x^2-25$, $P=5x^2-25x$ καί ἔστω Σ τό ἄθροισμα αὐτῶν.

1

1. Ἀναλύσατε εἰς ἕνα γινόμενον παραγόντων ἕκαστον τῶν πολυωνύμων Π, P καί Σ.

2. Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\Pi+4P=0$.

2

(α): Θέσατε ὑπό μορφήν γινομένου παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ τάς κάτωθι παραστάσεις:

$A=(x^2-2x+1)-(x-1)(2x+3)$, $B=x^2-16$.

(β): Ἁπλοποιήσατε τό κλάσμα $\frac{A}{B}$.

(γ): Ποίας τιμάς πρέπει νά δόσωμεν είς τό x ὥστε νά εἶναι $\frac{A}{B}=0$; Διά ποίας τιμάς τοῦ x τό κλάσμα $\frac{A}{B}$ δέν ἔχει ἔννοιαν;

3 Ἄν $A=\frac{6x-2}{9x^2-1}$, $B=\frac{9x+3}{9x^2+6x+1}$ νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $A=B+1$. Ἐκτελέσατε τήν ἐπαλήθευσιν.

4 Θέσατε τάς παραστάσεις: $A=9-4x^2$, $B=(2x-3)(5x-1)-(2x-3)(x+1)$ ὑπό τήν μορφήν γινομένου. Θέσατε τήν $\Gamma=3A-2B$ ὑπό τήν μορφήν γινομένου καί λύσατε ἀκολούθως τήν ἐξίσωσιν: $\Gamma=0$.

5 Θεωροῦμεν τήν παράστασιν:

$$E=(-2x+3)(-x-2)-(3x-2)(2x-3)+(2x-3)(4x-1)$$

(α): Θέσατε τήν παράστασιν E ὑπό τήν μορφήν ἑνός γινομένου δύο παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ.

(β): Νά λυθῆ ἡ ἐξίσωσις: $E=0$.

6 Θεωροῦμεν τήν παράστασιν:

$$E=(4-3x)(1-x)-(16-9x^2)+(6x+2)(4-3x)$$

1. Θέσατε τήν παράστασιν αὐτήν ὑπό τήν μορφήν

(α) ἑνός γινομένου παραγόντων τοῦ πρώτου βαθμοῦ

(β) ἑνός ἀνηγμένου διατεταγμένου πολυωνύμου.

2. Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $E=0$.

$\boxed{7}$ 1. Ἀναπτύξατε καί διατάξατε τήν παράστασιν: $E=(x+3)(2x+5)-(2x+5)^2+4x-25$ καί ὑπολογίσατε τήν ἀριθμητικήν τιμήν τοῦ πολυωνύμου διά $x=7, x=\frac{5}{2}$.

2. Μετασχηματίσατε τήν παράστασιν E εἰς γινόμενον δύο πρωτοβαθμίων παραγόντων καί λύσατε τήν ἐξίσωσιν $E=0$, ἐν R.

3. Ὑπολογίσατε τό x εἰς τήν περίπτωσιν ὅπου $E=-35$.

$\boxed{8}$ Ἔστω ἡ παράστασις:

$$E=(2x-1)(x+3)+(4x^2-1)-(2x-1)^2.$$

1. Νά ἀναπτυχθῆ καί νά διαταχθῆ κατά τάς κατιούσας δυνάμεις τοῦ x.

2. Νά ἀναζητηθῆ ἕνας κοινός παράγων καί νά ἀναλυθῆ εἰς γινόμενον παραγόντων ἡ δοθεῖσα παράστασις.

3. Λύσατε τήν ἐξίσωσιν $E=0$, ἐν R.

4. Ὑπολογίσατε τήν τιμήν τῆς E διά $x=0$ καί διά $x=3$.

$\boxed{9}$ Δείξατε ὅτι: $\dfrac{\varphi(x)}{\sigma(x)}+\dfrac{\sigma(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{5}{2} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \left[2\varphi(x)-\sigma(x)\right]\left[\varphi(x)-2\sigma(x)\right]=0$$

Ἐφαρμογή: 1. $\varphi(x)=x$ καί $\sigma(x)=x^2+1$

2. $\varphi(x)=x^2+2$ καί $\sigma(x)=x^2+4x+1$

3. $\varphi(x)=2-x$ καί $\sigma(x)=x^2-3x+2$.

10

(α): Δείξατε ὅτι κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $A(x)\cdot\Gamma(x)=B(x)\cdot\Gamma(x)$ εἶναι ἰσοδύναμος πρός τό σύνολον τῶν ἐξισώσεων $\Gamma(x)=0$, $A(x)=B(x)$.

(β): Δείξατε ὅτι κάθε ἐξίσωσις τῆς μορφῆς $[A(x)]^2=$ $=[B(x)]^2$ εἶναι ἰσοδύναμος πρός τό σύνολον τῶν ἐξισώσεων $A(x)=B(x)$, $A(x)=-B(x)$.

(γ): Ἐάν ἡ ἐξίσωσις $ax+\beta=0$ πληροῦται διά δύο διακεκριμένας τιμάς τοῦ $x\in R$, τότε θά πληροῦται $\forall\ x\in R$ $(a,\beta\in R)$.

(δ): Θεωροῦμεν τήν ἐξίσωσιν:

$$(a_1x+\beta_1)^2+(a_2x+\beta_2)^2+\dots+(a_\nu x+\beta_\nu)^2=0$$

ὅπου $a_i,\ \beta_i\in R-\{0\},\ \forall\ i=1,2,\dots,\nu$. Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι ἵνα αὕτη δέχεται λύσεις ἐν R.

(ε): Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ἵνα αἱ ρηταί ἐξισώσεις

$$\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}=0,\quad \frac{\kappa x+\lambda}{\mu x+\nu}=0$$

εἶναι δυνατaί καί ἰσοδύναμοι ἐν R.

(ζ): Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ἵνα αἱ ρηταί ἐξισώσεις

$$\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}=0,\quad \frac{ax+\beta}{(Ax+B)(\Gamma x+\Delta)}=0$$

εἶναι ἰσοδύναμοι ἐν R.

(στ): Νά εὑρεθοῦν αἱ συνθῆκαι, ἵνα αἱ ρηταί ἐξισώσεις

$$\frac{ax+\beta}{\gamma x+\delta}=0,\quad \frac{ax+\beta}{(Ax+B)(\Gamma x+\Delta)}=0$$

εἶναι ἀδύνατοι ἐν R.

11 Νά εὑρεθῆ τό ὑπόλοιπον ἑκάστης τῶν διαιρέσεων.

(α) $\varphi_1(x) \equiv x^3 - x^2 - 21x + 45 : x+5$
(β) $\varphi_2(x) \equiv 4x^3 - 24x^2 + 45x - 27 : x-3$
(γ) $\varphi_3(x) \equiv x^3 + 2x^2 - 3 : x-1$
(δ) $\varphi_4(x) \equiv x^3 - x^2 - 4 : x-2$
(ε) $\varphi_5(x) \equiv x^3 - 2x^2 - x + 2 : x+1$

Ἐν συνεχείᾳ νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

(Ε): $\varphi_1(x)\varphi_2(x)\varphi_3(x)\varphi_4(x)\varphi_5(x) = 0.$

12 Νά τραποῦν εἰς γινόμενα παραγόντων τά πολυώνυμα:

(α) $F_1(x) \equiv (x^2-9)^2 - (x+5)(x-3)^2$
(β) $F_2(x) \equiv x(x^2-2x-24) + 9x + 36$
(γ) $F_3(x) \equiv (3x-1)(x-2)^2 - 9(3x-1)$
(δ) $F_4(x) \equiv (x^2-4x+5)^2 - (1+x)^3$
(ε) $F_5(x) \equiv 6x^4 - 11x^3 + 8x^2 - 6 - 2(3x+2)(x+1)$ καί νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $F(x) \equiv F_1(x)F_2(x)F_3(x)F_4(x)F_5(x) = 0.$

13 (1). Νά συμπτυχθῆ τό πολυώνυμον $\Delta(x) \equiv x + 5\lambda - \lambda x^2 + 3x^3 + 4x^2 - 4\lambda x$, ὅταν $\lambda = 6$ καί ἔπειτα νά γίνῃ ἡ διαίρεσις $\Delta(x) : (x+3)(x-2)$.

Νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\Delta(x) = 0$.

(2). Νά προσδιορισθῆ ὁ $\lambda \in R$ διά νά εἶναι τελεία ἡ διαίρεσις τοῦ $\varphi(x) \equiv x^4 + (\lambda-1)x^3 - (3\lambda-5)x - \lambda + 1$ διά τοῦ $x+1$. Νά ἐπιλυθῆ κατόπιν ἐν R ἡ ἐξίσωσις $\varphi(x) = 0$.

14 Δίδεται τό πολυώνυμον $\varphi(x) \equiv x^3 - 8x^2 + x - 2$. Ἐάν τά $\varphi(x+1) - 4$ καί $\varphi(x-1)$ εἶναι ἴσα, νά εὑρεθῆ ὁ x.

15 Δίδεται ἡ ἐξίσωσις $\mu x^3+(\mu-3)x^2-\mu x+2=0$.

1). Νά ὑπολογισθῆ ἡ παράμετρος μ, ἵνα ἡ ἐξίσωσις αὐτή ἔχη τήν λύσιν $x=-1$.

2). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τό πρῶτον μέλος τῆς δοθείσης ἐξισώσεως δύναται νά τεθῆ ὑπό τήν μορφήν $(x+1)(ax^2+bx+\gamma)$ ὅπου a, b, γ εἶναι τρεῖς ἀριθμοί πραγματικοί, τούς ὁποίους νά ὑπολογίσετε.

3). Ὑπό τούς ὅρους αὐτούς νά λυθῆ ἡ δοθεῖσα.

Ομας 4η: Διά ποίας τιμάς τοῦ a $(a\in R)$ αἱ κάτωθι

1 ἐξισώσεις εἶναι **(a)** Δυναταί **(b)** Ἀδύνατοι **(γ)** Ἀόριστοι: **(1)** $x(a+2)=5(x+a)-(4a+3)$

(2) $a(x-a)=2a-(x-1)$ **(3)** $a(2x-a)+(2x-1)=2a$

(4) $(x+a)(x+2)-(x-a)(x-2)=(a+2)^2$ **(5)** $a(1-a)x^2=ax$

(6) $(a^2+x)(9+x)=(3a+x)^2$ **(7)** $\dfrac{ax-1}{3}+\dfrac{x+1}{2}=4$

(8) $\dfrac{x-a+3}{2}=\dfrac{2x+3ax}{3}$ **(9)** $\dfrac{x^2+2ax}{1-2a}=x^2$

(10) $\dfrac{ax-4}{3}+\dfrac{x}{2}=3x-a$.

2 **(1)**. Διά ποίαν τιμήν τοῦ $\mu\in R$ εἶναι ἀδύνατος ἐν R ἡ ἐξίσωσις: $\dfrac{\mu x}{2}+4x=(\mu-1)x+5$;

(2). Δίδεται ἡ ἐξίσωσις (Ε): $\mu(x-\mu)=x+\mu$, $(\mu\in R)$.

Νά προσδιορισθῆ ὁ μ εἰς τρόπον ὥστε ἡ (Ε):

(α): νά εἶναι ἀδύνατος (β): νά ἔχη λύσιν μηδενικήν
(γ): νά ἔχη λύσιν τόν $x = -2/3$ (δ) νά εἶναι ἀόριστος.

3. Νά ὁρισθῆ ὁ $\mu \in R$ εἰς τρόπον ὥστε ἡ ἐξίσωσις:

$$[(\mu^2-1)x-1]^2 = [(\mu^2+1)x+1]^2-(2\mu x-1)^2$$

(α) νά εἶναι ἀδύνατος καί (β) νά δέχεται ὡς ρίζαν τόν $x=1/3$

4. Δίδεται ἡ ἐξίσωσις (Ε): $\mu x - 2\mu = 3x + 5\mu - 4$ $(\mu \in R)$.

(α) Διά ποίαν τιμήν τοῦ μ ἡ (Ε) εἶναι ἀδύνατος;

(β) Νά ὁρισθῆ ὁ μ εἰς τρόπον ὥστε ἡ (Ε) νά δέχεται ὡς ρίζα τόν μηδέν. (γ) Δύναται νά προσδιορισθῆ ὁ μ ὥστε ἡ (Ε) νά εἶναι ταυτότης;

5. Νά ὁρισθῆ εἰς τήν ἐξίσωσιν $\dfrac{x(5\lambda+3)}{15} + \dfrac{1}{3} = \dfrac{2(x+1)}{3} + \dfrac{1}{5}$ ἡ παράμετρος $\lambda \in R$ διά νά εἶναι αὕτη ἀδύνατος.

$\boxed{3}$

(1): Διά ποίας τιμάς τῶν λ, μ $(\lambda, \mu \in R)$, ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{5\lambda x - 5\mu}{4} + 4 = \dfrac{3\lambda - 3\mu x}{4} + 8x$ εἶναι ταυτότης.

(2): Διά ποίας πραγματικάς τιμάς τῶν a καί b ἡ ἐξίσωσις:

$$\frac{a}{3x+2} = \frac{1}{3x+2} - \frac{11}{(3x+2)(x-3)} - \frac{b}{x-3}$$ εἶναι ταυτότης.

(3): Ποίας σχέσεις πρέπει νά πληροῦν τά a καί b ἵνα ἡ ἐξίσωσις $\dfrac{2ax}{6} + \dfrac{6x}{2} - \dfrac{3b}{3} + 9 = 20ax$ ἔχη μίαν λύσιν, καμμίαν ἤ ἀπείρους λύσεις.

(4): Δίδεται ἡ ἐξίσωσις εἰς τήν ὁποίαν τά $\lambda, \mu \in R$.

(Ε): $\frac{\lambda x-1}{3}+\frac{2\mu-x}{4}=\frac{3x+4}{6}+\lambda$. Εὕρετε διά ποίας τιμάς τῶν λ, μ δέχεται ὡς λύσιν τόν τυχόντα πραγματικόν ἀριθμόν.

(5). Νά εὑρεθοῦν τά λ, μ, ν, ὥστε ἡ ἐξίσωσις:

$\frac{2x-1}{\mu}+\frac{x+1}{\lambda}-\frac{\nu x}{\lambda\mu}=\frac{3\nu-11}{\lambda\mu}$ νά εἶναι ταυτότης, τό δέ πολυώνυμον $F(x)=\lambda x^3+(\lambda-\mu)x^2+(\mu+3\nu)x-2$ διαιρούμενον διά $x+2$ νά δίδη ὑπόλοιπον 10.

4

(1). Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: $\frac{x^3+x^2-2x-20}{x^2-4}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}+x+1$. Νά προσδιορισθοῦν τά a καί b οὕτως ὥστε ἡ ἐξίσωσις αὕτη νά ἐπαληθεύεται διά $x=0$ καί $x=1$. Νά γίνη ἐπαλήθευσις διά τῆς ἀντικαταστάσεως τῶν a καί b διά τῶν εὑρεθεισῶν τιμῶν.

(2). Νά ὁρισθῆ ὁ κ εἰς τήν ἐξίσωσιν.

$(4\lambda-\mu-2\kappa)x=\lambda+2\mu-\frac{7\kappa}{2}$, διά νά ἔχη αὕτη ἀπείρους λύσεις ἐν R ὅταν $\lambda-\mu=1$ καί $\lambda, \mu, \kappa \in R$.

(3). Νά δειχθῆ ὅτι ἐάν τό πολυώνυμον:

$F(x)=3x^3-\lambda x^2-(2\lambda+\mu)x+\lambda$ ἔχη ρίζας $x=-2$ καί $x=5$, ἡ ἐξίσωσις: $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{1}{\lambda}-\frac{2(x-7)}{\lambda(3x+1)}=\frac{\mu}{\lambda}$

εἶναι ἀδύνατος. Νά τραπῆ τό $F(x)$ εἰς γινόμενον παραγόντων καί νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$\varphi(x)=0$ ὅπου: $\varphi(x)=(x-2)^4(x-1)^3(3\sqrt{2}x+5)(x-\sqrt{3})\cdot$

$(x^2+\sqrt{3})(x^2+1)\ F(x)=0$.

(Ἀπάντησις: $\lambda=10$, $\mu=7$, $F(x)=3x^3-10x^2-27x+10$).

(4). Δίδεται ἡ ἐξίσωσις:

(E): $\dfrac{x-3}{x-4}+\dfrac{x-4}{x-3}=\dfrac{2x-\kappa}{x-5}$ Νά εὑρεθῇ διά ποίαν τιμήν τοῦ κ δέχεται αὕτη ὡς λύσιν τόν μηδέν.

Ἐν συνεχείᾳ νά ἐπιλυθῇ αὕτη ἐν R.

(Ὑπόδ. $(E)\Longleftrightarrow 1+\dfrac{1}{x-4}+1-\dfrac{1}{x-3}=2+\dfrac{10-\kappa}{x-5}\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dfrac{1}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{10-\kappa}{x-5}\quad\ldots$).

5 (1). Νά ἐπιλυθῇ καί νά διερευνηθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις:

$a^2x+b(bx-ax)=\dfrac{\gamma(3ab-\gamma^2)}{a+b}$ ὅταν $a+b+\gamma=0\,|\,a\neq -b$

(2). Νά ὁρισθῇ ἡ τιμή τῆς παραμέτρου α, ἵνα ἡ ἐξίσωσις (E): $(a-1)x^5+3ax^4-(a+1)x^3-(a+1)x^2+3ax+a-1=0$ ἔχῃ ὡς ρίζαν τόν ἀριθμόν 2 καί νά λυθῇ ἡ ἐξίσωσις, πού θά προκύψῃ ὅταν ἀντικαταστήσωμεν τό α μέ τήν τιμήν του αὐτήν.

(3). Νά ἐπιλυθῇ καί νά διερευνηθῇ ἡ ἐξίσωσις (ἐν R):

(E): $\dfrac{1}{(x-a)^2}+\dfrac{1}{(x-b)^2}=\lambda\ \Big|\ a\neq b,\ a,b,\lambda\in R,\ x\in R-\{a,b\}$.

(Ὑπόδ. Θέτομεν: $\dfrac{1}{x-a}=\dfrac{1}{\omega}$, $\dfrac{1}{x-b}=\dfrac{1}{\varphi}\ \Big|\ \omega\varphi\neq 0$

$\Longrightarrow x-a=\omega$ καί $x-b=\varphi \Longrightarrow \omega-\varphi=b-a$ καί ἔχομεν:

$(E) \Longleftrightarrow \dfrac{1}{\omega^2} + \dfrac{1}{\varphi^2} = \lambda \quad \Longleftrightarrow \ldots \ \lambda(\omega\varphi)^2 - 2\omega\varphi - (b-a)^2 = 0$

$\Longrightarrow \omega\varphi = C_{1,2}$. Ἐκ τῶν $\omega\varphi = C_{1,2}$ καί $\omega - \varphi = C_3$ εὑρίσκομεν τά ω καί φ καί ἐξ αὐτῶν τάς λύσεις τῆς ἀρχικῆς ...).

6 (1). Ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ $a \in R$ διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις (E): $20x^2 + 50a + a^2x = 3ax$ ἔχει λύσιν ἐν N; (Ὑπόδ. Euler. Διαιρέσατε διά $ax \neq 0$. Εἶναι $\frac{2x}{a}\,\frac{5}{x}\,\frac{a}{10} = 1$).

(2). Ὑπάρχει θετική τιμή τοῦ $\lambda \in R$ διά τήν ὁποίαν ἡ ἐξίσωσις (E): $2x^2(3\lambda - 2\lambda x - x) = \lambda^2$ ἔχει λύσιν ἐν Q^+.

(3). Νά ἐπιλυθῇ καί νά διερευνηθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις (E): $\dfrac{x}{3} + \dfrac{2\mu}{3} = x^{1/3}\mu^{2/3}$. (Ὑπόδ. χρησιμοποιήσατε τήν ταυτότητα τοῦ Euler. Διαιρέσατε διά $2x^2\lambda \neq 0$ καί παρατηρήσατε ὅτι $2x\,\dfrac{x}{\lambda}\,\dfrac{\lambda}{2x^2} = 1$, διά τήν (2), εἰς δέ τήν (3) εἶναι $2\mu = \mu + \mu$ καί $\mu^{2/3} = \mu^{1/3}\mu^{1/3}$).

7 Ἐάν $A \equiv 2\lambda\mu x\left(1 + \dfrac{3}{\mu} + \dfrac{a}{\lambda} - \dfrac{3}{2\mu x}\right) - 3a\left(1 + \dfrac{\mu}{3} - 2x + \dfrac{\lambda\mu}{3a}\right)$;

$B \equiv [\lambda\mu(\frac{a}{\lambda} + 1) + 3a\lambda(\frac{1}{a} + \frac{1}{\lambda})](bx + a)$ καί

$F \equiv x\{\lambda\mu[(\lambda+\mu)(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2) - 2x^3]\} +$

$+\lambda\{x\mu[(x+\mu)(x^2 - \mu x + \mu^2) - 2\lambda^3]\} +$

$+\mu\{x\lambda[(x+\lambda)(x^2 - \lambda x + \lambda^2) - 2\mu^3]\}$, $G \equiv (x+\lambda+\mu)^3 -$

$-(x-\lambda+\mu)^3 - (x+\lambda-\mu)^3 - (\lambda+\mu-x)^3$ νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν ἐν R αἱ ἐξισώσεις:

(E_1): $A - B = 0$, (E_2): $2F - \lambda\mu x G = 0$.
(λ, μ, a, b πραγματικοί ἀριθμοί ...).

8 (1). Νά εὑρεθῆ ἡ πραγματική ρίζα τοῦ $\varphi(x) \equiv \equiv x^3 - (\lambda - 1)x + \lambda$ καί ἡ τιμή τοῦ $\lambda \in R$, γνωστοῦ ὄντος ὅτι τοῦτο εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ $x^2 - x + 1$.

(2). Νά εὑρεθῆ ἡ τιμή τοῦ $\lambda \in R$ ἵνα ἡ ἐξίσωσις (E): $x^{16} - 257x^8 + 256\lambda^{16} = 0$ δέχεται ὡς ρίζαν τόν $x=1$. Κατόπιν τούτου νά ἐπιλυθῆ ἐν R ἡ (E).

(3). Δίδεται ἡ ἐξίσωσις: (E): $\varphi(x) \equiv x^3 - (\lambda^2+3)x^2 + (\lambda^2+3)x + \lambda^4 - 1 = 0$ ὅπου ἡ παράμετρος $\lambda \in R$.
Παρατηροῦντες ὅτι ὡς πρός λ εἶναι διτετράγωνος ἐξίσωσις, ἐπιλύσατε αὐτήν.

(4). Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = 0$ ἐάν μία ρίζα αὐτῆς εἶναι διπλασία μιᾶς ἄλλης.

(5). Ἐάν ρ_1, ρ_2, ρ_3 αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων νά ἐπιλυθοῦν αὗται γνωστοῦ ὄντος ὅτι $2\rho_2 = \rho_1 + \rho_3$
(E_1): $2x^3 - 15x^2 + 37x - 30 = 0$, (E_2): $x^3 - 3x^2 - 13x + 15 = 0$.

(6). Νά ἐπιλυθοῦν αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:
(a) $4x^3 - 32x^2 - x + 8 = 0$, (b) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 8x + 6 = 0$, ἐάν ἑκάστη ἔχῃ δύο ρίζας ἀντιθέτους.

(7). Νά ἐπιλυθῆ ἡ ἐξίσωσις $3x^3 - 32x^2 + 33x + 108 = 0$ ἐάν μία ρίζα αὐτῆς ἰσοῦται μέ τό τετράγωνο μιᾶς ἄλλης.

(8). Νά ἐπιλυθῇ ἡ ἐξίσωσις $x^3-79x+210=0$, ἐάν δύο ρίζαι αὐτῆς συνδέονται μέ τήν σχέσιν $\rho_1=2\rho_2+1$

(9). Νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις $x^5-209x-56=0$, ἐάν ἔχῃ δύο ρίζας ἀντιστρόφους.

$\boxed{9}$

(1). Νά ὁρισθῇ ὁ $\lambda \in R$ ἐάν οἱ ἀριθμοί $3-\sqrt{2}$ καί $-3+\sqrt{2}$ εἶναι ρίζαι τῆς ἐξισώσεως $x^4-(11+\lambda+6\sqrt{2})x^2+11\lambda+6\lambda\sqrt{2}=0$.

(2). Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις, ἐάν ρ εἶναι μία ρίζα ἑκάστης τούτων:

(α) $x^4-2x^3-22x^2+62x-15=0$, $\rho=2+\sqrt{3}$
(β) $x^4-27x^2+42x+8=0$, $\rho=-3+2\sqrt{2}$
(γ) $x^4+2x^3-16x^2-22x+7=0$, $\rho=2+\sqrt{3}$
(δ) $x^4-26x^2+48x+9=0$, $\rho=-3-\sqrt{8}$
(ε) $3x^5-4x^4-42x^3+56x^2+27x-36=0$, $\rho=\sqrt{2}-\sqrt{5}$
(στ.) $x^6-4x^5-11x^4+40x^3+11x^2-4x-1=0$, $\rho=\sqrt{2}+\sqrt{3}$
(ζ) $x^4-x^3-9x^2-14x+8=0$, $\rho=-1+\sqrt[3]{3}$

(Ὑπόδ. βλ. θεώρημα παράγρ. 71, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ. Διά τήν (2ζ) θά ἔχωμεν ὡς διαιρέτην τό $\delta(x)\equiv(x+1)^3-3$, ἀναλόγως πρός τούς διαιρέτας $(x-\alpha)^2-\beta$ τῶν α΄ μελῶν τῶν λοιπῶν ἐξισώσεων).

(3). Νά εὑρεθοῦν αἱ πραγματικαί ρίζαι (ἐάν ὑπάρχουν) τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἐάν ρ εἶναι μία ρίζα ἑκάστης.

(α) $2x^3-15x^2+46x-42=0$, $\rho=3+i\sqrt{5}$
(β) $3x^3-23x^2+72x-70=0$, $\rho=3+i\sqrt{5}$

(γ) $x^4+6x^3+14x^2+22x+5=0$, $\rho=-1+2i$
(δ) $x^4-12x-5=0$, $\rho=-1-2i$ (ε) $x^4+2x^3+14x+15=0$, $\rho=1+2i$
(στ) $x^4-6x^3+13x^2-24x+36=0$, $\rho=2i$
(ζ) $4x^4+4x^3-7x^2-4x-12=0$, $\rho=(1/4)\cdot(-1+i\sqrt{15})$
(η) $2x^5-7x^4+6x^3-11x^2+4x+6=0$, $\rho=i\sqrt{2}$
(θ) $2x^6-3x^5+5x^4+6x^3-27x+81=0$, $\rho=\sqrt{2}+i$

(4). Νά δειχθῆ ὅτι ἐάν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ εἶναι ἄνισοι θετικοί πραγματικοί ἀριθμοί τότε αἱ ρίζαι τῆς ἐξισώσεως
(Ε): $\dfrac{x}{x-\alpha}+\dfrac{x}{x-\beta}+\dfrac{x}{x-\gamma}+x+\delta=0$ εἶναι ὅλαι πραγματικαί.

(5). Νά δειχθῆ ὅτι ὅλαι αἱ ρίζαι τῶν κάτωθι ἐξισώσεων εἶναι πραγματικαί:

(E_1) $\dfrac{a_1^2}{x-b_1}+\dfrac{a_2^2}{x-b_2}+\dots+\dfrac{a_\nu^2}{x-b_\nu}=K \quad \Big|\ a_i,\ b_i,\ K\in R.$

(E_2) $\dfrac{a_1^2}{x-b_1}+\dfrac{a_2^2}{x-b_2}+\dfrac{a_3^2}{x-b_3}+\dots=K+\lambda^2x \quad \Big|\ a_i,\ b_i,\ K,\lambda\in R.$

(ὑπόδ. βλ. θεώρημα παραγρ. 70, ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, ΤΟΜΟΣ ΠΡΩΤΟΣ. Διά τάς ἐξισώσεις τετάρτου βαθμοῦ δυνάμεθα νά ἀκολουθήσωμεν τήν λύσιν τοῦ Ferrari: Προσθέτομεν $(ax+b)^2$ εἰς ἀμφότερα τά μέλη τῆς ἐξισώσεως: $x^4+\kappa x^3+\lambda x^2+\mu x+\nu=0$ καί ἀπαιτοῦμεν ὅπως τό α΄ μέλος τῆς προκυπτούσης εἶναι τέλειον τετράγωνον, ἔστω τό $\left(x^2+\frac{\kappa}{2}x+\rho\right)^2$, ὅτε παρουσιάζεται διαφορά τετραγώνων. π.χ. διά τήν (3γ) εὑρίσκομεν ὅτι εἶναι: $\rho=3$, $a=1$ καί $b=-2$ ὅτε (3γ) $\Longleftrightarrow (x^2+3x+3)^2 = (x-2)^2 \Longleftrightarrow x^2+3x+3=\pm(x-2)$ . . .).

10 ›Εάν $|x|<1$ νά ἐπιλυθῇ ἐν R ἡ ἐξίσωσις (Ε):

$$(1+x+x^2+\dots+x^\nu+\dots)^{\frac{1}{1-x}}+36(1+x+x^2+\dots+x^\nu+\dots)^{\frac{1}{x-1}}-13=0$$

Ὑπόδ. Ἐπειδή $|x|<1$ εἶναι $1+x+x^2+\dots+x^\nu+\dots=\frac{1}{1-x}$, ὅτε

$$(E) \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{1-x}}+36\left(\frac{1}{1-x}\right)^{\frac{1}{x-1}}-13=0$$

$$\xLeftrightarrow{\frac{1}{1-x}=\omega \,\mid\, \omega>0} \omega^\omega+36\omega^{-\omega}-13=0 \Longleftrightarrow \omega^\omega+\frac{36}{\omega^\omega}-13=0$$

$$\xLeftrightarrow{\omega^\omega=y} y^2-13y+36=0 \Longrightarrow y=9 \ \vee \ y=4.$$

Συνεπῶς: $\omega^\omega=4 \Longrightarrow \omega=2 \Longrightarrow x=\frac{1}{2}$ (ἀπορριπτομένης τῆς τιμῆς $y=9$).

Ομας 5η: Νά ἐπιλυθοῦν καί νά διερευνηθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις.

1
(α): $[(x-\alpha)-(7-\alpha)]+[13-x+(x-9)]=0$
(β): $\{x-[\alpha-(\beta+2)]\}-\{x+[\beta-(x-1)]\}+\alpha-1=1973$
(γ): $3x+4\lambda+3\{x-[2(\lambda-x)+\lambda]\}=0$
(δ): $3-\{2x-[1-(x+\mu)]+(x-2\mu)\}=10$
(ε): $5x^2-\{2\alpha\beta+[3\alpha\beta+\beta^2-(4\beta^2-5\alpha\beta)+4x^2]-x^2\}-x(2x+1)=20$
(στ): $0{,}7(x-\alpha)+2{,}8(x-3)=3{,}5-1{,}4(x+\alpha/2)$
(ζ): $2{,}7(4-x)-0{,}7(3-2x)=7{,}1\lambda-0{,}9x$
(η): $17{,}3x-[4{,}9x+\lambda-(-10{,}4x+\lambda-\mu)+2\mu]=0$
(θ): $\alpha(x+\sqrt{2})-\beta(x-\sqrt{3})=\alpha\sqrt{3}+\beta\sqrt{2}$
(ι): $\alpha x^2+\sqrt{\beta}(\alpha x-\alpha)=\alpha x, \quad \beta\geq 0$

2
(α): $(2\mu-1)x-5=x+\mu x-2\mu$, (β): $\mu^2(x-1)=\mu(\mu+1)$
(γ): $\mu^2(x-1)+3\mu x=(\mu^2+3)x-1$, (δ): $(\mu+1)^2x+6\mu=\mu^2+9-(2\mu+10)x$
(ε): $\mu x-(\mu-2)^2=2x$, (στ): $3(\mu-2)x+\mu(4x-7)=3(\mu-1)$
(ζ): $4(\mu+1)^2x+1-4\mu^2=(2\mu+1)^2+4x$, (η): $4(x+2\mu)+40=10(3x-\mu)+2\mu-(\mu-2x)$
(θ): $\frac{1}{3}(5x-\mu)-\frac{1}{4}(4x+\mu)=\frac{1}{2}(3x+4)$, (ι): $\frac{1}{6}(5x-\mu)-1=\frac{1}{5}(2x+\mu)-\frac{\mu}{10}-\frac{1}{4}(5-x)$

3
(α): $x^2+x=\alpha^2+\alpha$, (β): $x^2+2\alpha x=\beta^2+2\alpha\beta$
(γ): $x^2-(\alpha-2x)^2=(\alpha-3x)^2$, (δ): $x^2+(\alpha-2x)^2=(\alpha-3x)^2$
(ε): $x^2+(\alpha-x)^2=(\alpha-2x)^2$, (στ): $x(x-1)(x-2)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$

(ζ): $\alpha x^2 + \alpha^2 x + x + \alpha = 0$ (η): $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2+\beta^2)x + \alpha\beta = 0$

(θ): $\mu^2(x+2)^2 - 16(2x+\mu+1) = 8(\mu+1)^2 + \mu^2(x-2)^2 + 8$

(ι): $4\mu(x+4) + (x-1)^2 = 4(\mu^2+4) + (x+1)^2$

4 (α): $(\alpha+x)(1+\beta x) = \alpha(1+\beta) + \alpha^2\beta^2 + \beta x^2$

(β): $(x-\alpha)(2x-\beta)^2 = (x-\beta)(2x-\alpha)^2$

(γ): $(2x-\alpha-\beta)[(x-\alpha)^3 - (x-\beta)^3] = 3(\beta-\alpha)[(x-\alpha)^3 + (x-\beta)^3]$

(δ): $x^2 + (\lambda-2x)^2 = (\lambda-3x)^2$, (ε): $(\lambda-\mu)x^2 + (\mu-\kappa)x + (\kappa-\lambda) = 0$

(στ): $(3\mu-6)x = 6\lambda - 9\mu$, (ζ): $(2x-\lambda+1)[(\lambda-1)x - 2\lambda] = 0$

(η): $\lambda(x+1) = x - 1 + 2[\lambda + (1-\lambda)]$, (θ): $2\alpha x + 9x - 6\beta + 54 = 120\alpha x$

(ι): $(\alpha^2+\alpha-2)x^2 + (2\alpha^2+\alpha+3)x + \alpha^2 - 1 = 0$

5 (α): $x(x+2\lambda+2) + \lambda(\lambda+2\mu+2) + \mu(\mu+2x+2) - 35 = 0$

(β): $\alpha(x^2-\pi x+\kappa)^2 + \beta(x^2+\pi x+\kappa)^2 = x^2$

(γ): $(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\beta)(x-\gamma) + (x-\gamma)(x-\alpha) = \lambda$

(δ): $(x+\alpha+\beta)(x+\beta+\gamma)(x+\gamma+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma) = \alpha\beta\gamma x$

(ε): $(\alpha^2-\beta^2)(x^2+1) = 2(\alpha^2+\beta^2)x$

(στ): $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)(x+\delta) = \lambda$, ἐάν $\alpha+\beta = \gamma+\delta$

(ζ): $(\alpha x+\beta\gamma)(\beta x+\alpha\gamma)(\gamma x+\alpha\beta) = [(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)]^2$

(η): $[(\alpha^2-\beta^2)x - 1]^2 - [(\alpha^2+\beta^2)x + 1]^2 + (2\alpha\beta x - 1)^2 = 0$

(θ): $(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma+\delta) = (x+\gamma)(x+\delta)(x+\alpha+\beta)$

(ι): $(x-\alpha)(x-\beta)(x+\mu\alpha)(x+\mu\beta) = (x+\alpha)(x+\beta)(x-\mu\alpha)(x-\mu\beta)$

6 (α): $\dfrac{3\mu+2}{5} + \dfrac{\mu^2-x}{3} = 2\mu - 1$, (β): $\dfrac{\lambda x}{\lambda-2} - \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{2x-3}{4}$, $\lambda \neq 2$

(γ): $\dfrac{x+\alpha}{\alpha-2} = 3 - x$, $\alpha \neq 2$, (δ): $\dfrac{x}{\lambda} + \dfrac{1-3x}{2} = \dfrac{x+2}{4\lambda}$, $\lambda \neq 0$

(ε): $\dfrac{x-3}{\lambda-2} + \dfrac{2x}{3} = \dfrac{1-4x}{2(\lambda-2)}$, (στ): $\dfrac{5-3x}{\lambda+2} + \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{2-x}{3} + \dfrac{1-x}{\lambda+2}$

(ζ): $\dfrac{4x+2}{3} - \dfrac{x+\lambda}{\mu} = \dfrac{5(x-1)}{6}$, $\mu \neq 0$ (η): $\dfrac{2x+\kappa}{\lambda} - \dfrac{x-\lambda}{\kappa} = \dfrac{3\kappa x + (\kappa-\lambda)^2}{\kappa\lambda}$

(θ): $\dfrac{x}{2\alpha-\beta} + 2(\alpha-2\beta) = \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha\beta}x - \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$, (ι): $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}x + 2(\alpha-\beta) = \dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha^2+\beta^2} - \dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}x$

7 (α): $\dfrac{x+\alpha}{1+\alpha x} = \beta$, (β): $\dfrac{1+x^2}{1+\lambda x} = 1 - x$, (γ): $\dfrac{(x-2)^2}{1-\lambda x} = x + 4$

(δ): $\dfrac{\alpha x-1}{x-\beta} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{x+2\alpha}{\beta-x}$, (ε): $\dfrac{\mu+1}{x-2} + \dfrac{\mu-1}{x+1} = \dfrac{2\lambda}{x}$

(στ): $\dfrac{3x-4}{x^3+2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\lambda-x}{x^2+2}$, (ζ): $\left(\dfrac{\alpha x+\beta}{\alpha x-\beta}\right)^2 = \dfrac{\alpha x+\beta}{\alpha x-\beta}$, (η): $\dfrac{x+\alpha}{x+\beta} = \dfrac{(2x+\alpha+\gamma)^2}{(2x+\beta+\gamma)^2}$

(θ): $x(x-2\alpha) = \dfrac{8\alpha^4}{x^2-2\alpha x} + 7\alpha^2$, (ι): $\dfrac{1}{\alpha-\beta} + \dfrac{\alpha-\beta}{x} = \alpha\beta^2 - \dfrac{\alpha+\beta}{x}$

8

(α): $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\mu(\mu-1)$, (β): $\frac{x^2}{x^2-\alpha^2}+\frac{x^2}{x^2-\beta^2}=4$

(γ): $(\lambda x+\mu x+\lambda\mu)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}\right)-\lambda\mu x\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\mu^2}\right)=2$

(δ): $\frac{x}{\alpha\beta}+\frac{x}{\beta\gamma}+\frac{x}{\gamma\alpha}-1=\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)x$, (ε): $\frac{1}{1-\lambda^2x^2}=\frac{\lambda}{1+\lambda x}-\frac{1}{1-\lambda x}$

(στ): $(x^2+\alpha^2-\beta^2)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}\right)+(\alpha^2+\beta^2-x^2)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+(\beta^2+x^2-\alpha^2)\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{x}\right)=0$

(ζ): $\frac{x-1}{x+\alpha-\beta}=\frac{1-x}{x-\alpha+\beta}+2$, (η): $\frac{\lambda+2x+1}{\lambda+2x-1}=\frac{x+\lambda}{x-\lambda}$

(θ): $\frac{\alpha+x}{\beta(\beta-3x)}-\frac{\beta-x}{\alpha\beta+3\alpha x}+\frac{3x^2-3\beta x-\alpha\beta}{\alpha\beta^2-9\alpha x^2}=\frac{3x^2+3\alpha x+\alpha\beta}{\beta^3-9\beta x^2}$

(ι): $\left(\frac{x-\alpha}{x+\alpha}\right)^2+\left(\frac{x-\beta}{x+\beta}\right)^2+\left(\frac{x-\gamma}{x+\gamma}\right)^2+2\frac{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)}-1=0$

9

(α): $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha}(x-\beta)=2\alpha(2\alpha+\beta-x)-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta}(x-\alpha)$, $\alpha\beta\neq0$

(β): $\frac{\alpha^6-\beta^6}{\alpha^3-\beta^3}+\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}[2x-(\alpha+\beta)]=2\frac{\alpha^4-\beta^4}{\alpha^2-\beta^2}x$; $\alpha\neq\pm\beta$

(γ): $\frac{(x-\alpha)(x-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}+\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}=1$, (δ): $\frac{\beta^2\gamma^2x-\alpha^2}{\beta\gamma(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}+\frac{\gamma^2\alpha^2x-\beta^2}{\alpha\gamma(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}=\frac{\gamma^2-\alpha^2\beta^2x\ldots}{\alpha\beta(\gamma-\alpha)(\gamma\ldots}$

(ε): $\frac{\alpha x-1}{\alpha^2(\beta+\gamma)}+\frac{\beta x-1}{\beta^2(\alpha+\gamma)}+\frac{\gamma x-1}{\gamma^2(\alpha+\beta)}=\frac{3x}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}$

(στ): $\frac{x+2\alpha\beta}{\alpha+\beta-\gamma}+\frac{x-2\alpha\beta}{\alpha-\beta+\gamma}+\frac{x-2\alpha\beta}{\beta+\gamma-\alpha}=\frac{x+2\alpha\beta}{\alpha+\beta+\gamma}$

(ζ): $\frac{\beta+\gamma-x}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha-x}{\beta}+\frac{\alpha+\beta-x}{\gamma}+\frac{4x}{\alpha+\beta+\gamma}=1$

(η): $\frac{\alpha(\alpha^2x-\beta^2x)}{\beta}+\frac{\beta(\alpha^2x-\beta^2x)}{\alpha}+\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha^2x-\beta^2x)}{\alpha\beta}$

(θ): $\frac{(\alpha+\gamma)(x-\beta)}{\alpha^2}+\frac{(\beta+\gamma)(x-2\beta)}{\beta\gamma}=\frac{(2x-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}-2-\frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha\gamma}$

(ι): $\frac{(\alpha+x)(\alpha-\beta)}{\alpha+\beta}+\frac{(\alpha-x)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\frac{(x-\alpha)(\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2}$

10

(α): $\frac{x+\alpha}{x+\beta}+\frac{x+\beta}{x+\alpha}=\frac{x+\gamma}{x+\delta}+\frac{x+\delta}{x+\gamma}$

(β): $\frac{2\alpha+x}{2\alpha-x}+\frac{\alpha-2x}{\alpha+2x}=\frac{8}{3}$, (γ): $\frac{\alpha+\gamma}{x+2\beta}+\frac{\beta+\gamma}{x+2\alpha}=\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{x+\alpha+\beta}$

(δ): $\frac{x-\alpha}{x-\beta}+\frac{x-\beta}{x-\gamma}+\frac{x-\gamma}{x-\alpha}=3$, (ε): $\frac{x+\alpha}{x-\alpha}+\frac{x+\beta}{x-\beta}+\frac{x+\gamma}{x-\gamma}=3$

(στ): $\frac{x+\alpha}{\alpha-x}+\frac{x+\beta}{\beta-x}+\frac{x+\gamma}{\gamma-x}=3$, (ζ): $\frac{x-2\alpha}{\beta+\gamma-\alpha}+\frac{x-2\beta}{\alpha+\gamma-\beta}+\frac{x-2\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}=3$

(η): $\frac{x}{\alpha}-\frac{\beta}{x}=\frac{x}{\beta}-\frac{\alpha}{x}$, (θ): $\frac{\alpha-x}{1-\alpha x}=\frac{1-\beta x}{\beta-x}$, (ι): $\frac{\alpha x+\beta}{\alpha+\beta x}=\frac{\gamma x+\delta}{\gamma+\delta x}$

11 (α): $\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{x}{4\lambda}\right)^2=\dfrac{\lambda}{x}$, $\lambda\neq 0$ (Ὑπόδ. $x^3+16\lambda^3-12\lambda^2x=x^3+(2\lambda)^3+(2\lambda)^3-3(2\lambda)(2\lambda)x=\cdots$)

(β): $\dfrac{x^3\pm 7a^3}{(2a)^3}=\left(\dfrac{a}{x}\right)^3$, $a\neq 0$ (Ὑπόδ. $x^6-8a^6\pm 7a^3x^3=(x^2)^3+(-2a^2)^3+(\pm ax)^3-3x^2(-2a^2)(\pm ax)$)

(γ): $x^2(x-1)^2+ax(x-1)^2+ax(x-1)+x^2=\beta(x-1)^2$ (Ὑπόδ. $\dfrac{x^2}{x-1}=y$)

(δ): $(x-a)^2+(x-\beta)^2=(a-\beta)^3$, (ε): $(a-x)^3+(x-\beta)^3=(a-\beta)^3$

12 (α): $x^4+x^3+x^2+\lambda x+\lambda^2=0$, (β): $x^3+\dfrac{1}{x^3}+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\mu$

(γ): $x^3+ax^2+\beta x+\gamma+\dfrac{\beta}{x}+\dfrac{a}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=0$

(δ): $x^4+ax^3+\beta x^2+ax+1=0$, (ε): $x^4+\lambda x^3+(\lambda+1)x^2+\lambda x+1=0$

(στ): $x^4+\lambda x^3+(3\lambda-1)x^2+\lambda x+1=0$, (ζ): $x^4-ax^2-6ax+18(18-a)=0$

(η): $x^6+x^4+x^2+1=\lambda(x^3+x^2+x+1)^2$, (θ): $\mu(x^2+1)^2-2(x^4+1)=0$

(ι): $[(1+x)^2:(1+x^3)]+[(1-x)^2:(1-x^3)]=\lambda$

13 (α): $\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{\beta}{ax}\right)(a+\beta+x)}{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{ax}-\dfrac{\beta^2}{a^2x^2}}=\beta$

(β): $\dfrac{\dfrac{2a\beta}{\beta+x}-\beta}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\beta-2x}}+\dfrac{\dfrac{2\beta x}{\beta+x}-x}{\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{x-2\beta}}=a\beta$

(γ): $\dfrac{1}{x+a+\dfrac{1}{x+\beta}}=\dfrac{1}{x-a+\dfrac{1}{x-\beta}}$; (δ): $\dfrac{\dfrac{x}{a+\beta}}{1+\dfrac{x}{a+\beta}}+\dfrac{\dfrac{a}{\beta+x}}{1+\dfrac{a}{\beta+x}}+\dfrac{\dfrac{\beta}{x+a}}{1+\dfrac{\beta}{x+a}}=\lambda x$

(ε): $\left(\dfrac{x}{\lambda-\mu}+\dfrac{\lambda}{\mu-x}+\dfrac{\mu}{x-\lambda}\right)\left(\dfrac{\lambda-\mu}{x}+\dfrac{\mu-x}{\lambda}+\dfrac{x-\lambda}{\mu}\right)=-9x$, ἐάν $x+\lambda+\mu=0$

Ὁμάς Βη: Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

1 (α): $(3|x|+2)(2|x|-8)(|x|-1)=0$

(β): $(|x|+1)(|x|-2)-(|x|-1)(|x|+2)=1$

(γ): $(x^2-7|x|+6)(4x^2-7|x|+3)=0$

(δ): $(2|x|^3-5x^2+3)(2|x|^3-3x^2-|3x|+2)=0$

(ε): $(|x|^3-2x^2-2|x|+1)(x^4+|x|^3+x^2-3)=0$

(στ): $(x^2-13|x|+42)(x^2-2|x|+a^2)=0$, $a\in R$

(ζ): $(|x|-1)^3+|x^3|+(|x|+1)^3=3|x|(x^2-1)$

(η): $\left(\dfrac{3|x|+1}{7}-\left|\dfrac{x}{3}\right|+1\right)\left(\dfrac{3}{|x|-5}-5+\dfrac{2|x|}{|x|-3}\right)=0$

(θ): $\left(\dfrac{x^2-3|x|}{x^2-1}+2+\dfrac{1}{|x|-1}\right)\left(\dfrac{2}{2|x|-3}+\dfrac{1}{|x|-2}-\dfrac{6}{3|x|+2}\right)=0$

(ι): $\dfrac{|x|-1}{|x|-3}+\dfrac{|x|-7}{|x|-9}=\dfrac{|x|-3}{|x|-5}+\dfrac{|x|-5}{|x|-7}$

2

(α): $9x-3|x|+6=0$ (β): $2x-5|x|=3$

(γ): $7|x|=3x+4$ (δ): $(|x|-2x+1)[|x|-3-(2x+16)^2]=0$

(ε): $[15x-4-2(1+6|x|)](x^2-2x+2\sqrt{2}|x|-2)=0$

(στ): $\frac{|x|+3}{2}+\frac{x+5}{3}=1$ (ζ): $\frac{|x|-5}{3}-\frac{x-8}{4}=0$

(η): $\frac{3|x|+1}{4}-\frac{4-x}{3}=1$ (θ): $\left(\frac{x}{|x|}+\frac{|x|}{x}-2\right)\left(x-|x|-\frac{1}{|x|+x}\right)=0$

(ι): $\frac{x^3+27}{2|x|}=9-\frac{4}{x}$ (Υπόδ. $x^3+27+8\frac{|x|}{x}-18|x|=x^3+3^3+(\pm 2)^3-3\cdot 3(\pm 2)x=\dots$ Euler...)

3

(α): $|3x-1|=5x-2$ (β): $|x+2|=3x$

(γ): $|3x-1|=x+2$ (δ): $|2x+1|\pm|x-2|=0$

(ε): $|3x-1|=10-x$ (στ): $|x-|x-3||=10$

(ζ): $||x-1|-3x|=10$ (η): $|(x-1)(x+1)-3\lambda|=|3\lambda-x^2+1|$

(θ): $\left|\frac{x+1}{x-1}\right|=\frac{a^2-a+1}{a^2+a+1}$, $a\in R$ (ι): $|x+3|+\frac{1}{|x+3|}=|2x-1|+\frac{1}{|2x-1|}$

4

(α): $|x-3|+|x-1/3|+|x-2|=1$, (β): $|x^2-1|+5|x|+|x^2-5x+6|=11$

(γ): $|x-1|+3|x+1|=20$, (δ): $7|5x-2|-5|3x-1|=30$

(ε): $|2x|+3|x-2|x-1||=30$, (στ): $||3x-1|-|4x-10||=100$

(ζ): $|x^2-5x+6|+2x=2|x-1|+3$, (η): $|x+1|-2|x|+|x-1|=(2x+4)/5$

(θ): $|x^2-5x+6|+|x^2-4x+3|+|x^2-3x+2|=11$ (ι): $\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}=x$

5

(α): $(2x-|x-1|)(|11x+5|-|7x-3|)(x-|x-3|+2|x-6|)=0$

(β): $2x-3|x+5|-2|1-x|+6|x+3|+2=0$

(γ): $(|x+12|-x)(x^2+a|x|+2ax+4a^2)=0$

(δ): $\lambda x+|x-3|-4=0$ (ε): $|x-\lambda|+|x-\mu|=2x+2$

(στ): $|x-1|=a(x-a)$, $a\geq 0$, (ζ): $\lambda\sqrt{x^2}-x\sqrt{\lambda^2}+x|x|-\lambda|\lambda|=0$

(η): $|x|+x+1=\lambda(1+|x|)$, $0<\lambda<2$, (θ): $|x-|x-1||=(\lambda-1)x+1$

(ι): $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-10|=a$, $a\geq 0$

6

(α): $\left|\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\right|-\left|\frac{2x-1}{2x^2-5x+2}\right|+\frac{a}{|x-2|}=0$

(β): $\left|\frac{x^2-1}{x(x^3+x-2)}\right|+\left|\frac{2x^2+3x-2}{2x^3+x^2+3x-2}\right|=\frac{|x+2|}{x^2+x+2}$

(γ): $\left|\frac{x^2+x-2}{x^2+7x+10}\right|+\left|\frac{x^2-x-2}{x^2+3x-10}\right|+\left|\frac{4x^2-1}{4x+20}\right|=\frac{2}{|x+5|}$

(δ): $\left|\frac{2x^2+x-3}{2(x-1)}\right|+\left|\frac{x^2-(\lambda-1)x-\lambda}{x+1}\right|+\left|\frac{4x^2-(4\mu-1)x+\mu}{4(x-\mu)}\right|=\frac{7}{4}$

(ε): $\min(x-1,\ 2x+1)\cdot\max(x+1,\ 2x-1)=14$

2 (α): $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}=\sqrt{9+4\sqrt{3}}$, (β): $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$

(γ): $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}\,(\sqrt{5}+1)$

(δ): $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{9-5\sqrt{3}}{9+5\sqrt{3}}}$, (ε): $\dfrac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$

(στ): $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt[3]{20+12\sqrt{3}}}$, (ζ): $\dfrac{5\sqrt{6}}{\sqrt{6}-1}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{2})$

(η): $\left(\dfrac{11}{5-\sqrt{3}}\right)^2-\left(\dfrac{5-2\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}\right)^2=\sqrt{\dfrac{91}{4}+10\sqrt{3}}$, (θ): $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}=\sqrt[3]{2}-1$

(ι): $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}=3\sqrt[3]{3}+1$, (ια): $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}=\dfrac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}}{4}$

(ιβ): $\sqrt[4]{97-56\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$, (ιγ): $\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

(ιδ): $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, (ιε): $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{15}}=\dfrac{1}{8}(\sqrt{3}-1)(\sqrt{5}-1)$

3 (α): $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}=\left(x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^2$

(β): $\left(x^{\frac{7}{2}}-x^3+x^{\frac{5}{2}}-x^2+x^{\frac{3}{2}}-x+x^{\frac{1}{2}}-1\right)\left(x^{1/2}+1\right)=x^4-1$

(γ): $(2x+a^{-1})(2a+x^{-1})=\left(2x^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

(δ): $\dfrac{x}{x^{1/3}-1}-\dfrac{x^{2/3}}{x^{1/3}+1}-\dfrac{1}{x^{1/3}-1}+\dfrac{1}{x^{1/3}+1}=x^{2/3}+2$

(ε): $x^{8/5}-2a^{-3/5}x^{11/5}+2a^{4/5}x^{4/5}+a^{-6/5}x^{14/5}-2a^{1/5}x^{7/5}+a^{8/5}=\left(a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}\right)^2$

4 $(a-\lambda)x^2+(\beta-\lambda)y^2+(\gamma-\lambda)\omega^2+2\kappa y\omega+2\mu\omega x+2\rho xy=$ τέλειον τετράγωνον ρητῆς ἐκφράσεως τῶν $x, y, \omega \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow a-\dfrac{\mu\rho}{\kappa}=\beta-\dfrac{\rho\kappa}{\mu}=\gamma-\dfrac{\kappa\mu}{\rho}=\lambda$

5 $ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=$ τέλειος κύβος ρητῆς ἐκφράσεως τοῦ $x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \beta^2=3a\gamma$ καὶ $\gamma^2=3\beta\delta$.

6 Νά ἐπιλυθοῦν ἐν R αἱ κάτωθι ἐξισώσεις:

(E_1): $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=4$

(E_2): $\left(\sqrt[3]{\sqrt{6}+\sqrt{5}}\right)^x+\left(\sqrt[3]{\sqrt{6}-\sqrt{5}}\right)^x=2\sqrt{6}$.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Σελίς

Ὑπὸ ἔκδοσιν

• ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ