Δ 2 , ΜΜΙ

Παγέλη ⟨Γ.⟩

ΓΕΩΡΓΙΟΥ ΠΑΤΕΛΗ
ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΑΝΩΤΕΡΑ
ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ

1) Τῶν Δημοδιδασκάλων. 2) Τῶν Ὑποψηφίων διὰ τὰς εἰσιτηρίους ἐξετάσεις τῶν Σχολῶν Ἀνωτάτης Ἐμπορικῆς—Ἀνωτάτης Βιομηχανικῆς — Μικροῦ Πολυτεχνείου (Σ Υ Π) — Ἐμποροπλοιάρχων 3) Τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων τῶν Γυμνασίων — τῶν Νυκτερινῶν Τεχνικῶν Σχολῶν. 4) Τῶν ὑποψηφίων Τραπεζιτικῶν Ὑπαλλήλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΝΝΟΙΑΙ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

α) Ποσά

Ποσόν ή Μέγεθος λέγεται κάθε πράγμα πού ήμπορεῖ νά αὐξηθῇ ἤ νά ἐλαττωθῇ ὅπως π.χ. σωρός μήλων, ὁμάς ἀτόμων, ἡ γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια κ.ἄ.

Ἡ Ἐπιστήμη πού ἀσχολεῖται μέ τά ποσά λέγεται Μαθηματική Ἐπιστήμη ἤ ἁπλῶς Μαθηματικά.

β) Εἴδη ποσῶν

Τά ποσά διακρίνομεν εἰς Συνεχῆ καί Ἀσυνεχῆ.

Ἀσυνεχές εἶναι τό ποσόν πού ἀποτελεῖται ἀπό μέρη, ἤ στοιχεῖα, χωρισμένα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο ὅπως π.χ. ἕνας σωρός μήλων, μία ὁμάς ἀτόμων, ἕνα πλῆθος δένδρων κ.τ.δ.

Συνεχές εἶναι τό ποσόν πού ἀποτελεῖται ἀπό μέρη ἤ στοιχεῖα μή χωρισμένα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο ὅπως π.χ. ἡ γραμμή, ἡ ἐπιφάνεια, ὁ χῶρος, ὁ χρόνος, κ.τ.δ.

γ) Ἀκεραία Μονάς

Εἰς τό ἀσυνεχές ποσόν ἕνα ὁποιοδήποτε μέρος αὐτοῦ λέγεται ἀκεραία μονάς ἤ ἁπλῶς μονάς· π.χ. εἰς ἕνα σωρόν μήλων τό ἕνα, ὁποιοδήποτε, μῆλον εἶναι μία ἀκεραία μονάς.

Εἰς τό συνεχές ποσόν ἡ ἀκεραία μονάς ἐκλέγεται κατόπιν συμφωνίας, εἶναι δέ αὐτή ἕνα ἄλλο ποσόν ὁμοειδές πρός τό συνεχές καί περιέχεται εἰς αὐτό. π.χ. Εἰς τόν χρόνον ἀκεραία μονάς λαμβάνεται κατόπιν συμφωνίας ἡ ὥρα ἡ ὁποία εἶναι ὁμοειδής πρός τόν χρόνον καί περιέχεται εἰς αὐτόν.

δ) Ἀκέραιος Ἀριθμός

Εἰς τό ἀσυνεχές ποσόν, ἡ ἔννοια πού φανερώνει ἀπό πόσας ἀκεραίας μονάδας ἀποτελεῖται τό ἀσυνεχές ποσόν λέγεται Ἀκέραιος Ἀριθμός, ἡ δέ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπό πόσας ἀκεραίας μονάδας ἀποτελεῖται τό ἀσυνεχές ποσόν λέγεται Ἀρίθμησις. Εἰς τό συνεχές ποσόν ἡ ἔννοια πού φανερώνει πόσας φοράς περιέχεται εἰς αὐτό ἡ ἀκεραία μονάς, λέγεται Ἀκέραιος Ἀριθμός, ἡ δέ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν πόσας φοράς περιέχεται ἡ ἀκεραία μονάς εἰς τό συνεχές ποσόν λέγεται Μέτρησις. Ἑπομένως τά ἀσυνεχῆ ποσά τά ἀριθμοῦμεν ἐνῷ τά συνεχῆ τά μετροῦμεν, τό ἀποτέλεσμα δέ καί τῆς μιᾶς καί τῆς ἄλλης πράξεως λέγεται Ἀριθμός.

Ὥστε: Ἀριθμός λέγεται τό ἐξαγόμενον τῆς ἀριθμήσεως ἀσυνεχοῦς ποσοῦ ἤ τό ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως συνεχοῦς ποσοῦ· εἶναι δέ καί εἰς τήν μίαν καί εἰς τήν ἄλλην περίπτωσιν σύνολον μονάδων.

δ) Ἀριθμητική

Τό πρῶτον μέρος τῶν Μαθηματικῶν λέγεται Ἀριθμητική.

Διακρίνομεν δέ τήν Ἀριθμητικήν εἰς τήν Ἀνωτέραν καί τήν Στοιχειώδη. Ἡ Ἀνωτέρα Ἀριθμητική λέγεται καί Θεωρία τῶν Ἀριθμῶν καί εἶναι κλάδος τῶν Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν. Ἡ στοιχειώδης Ἀριθμητική εἶναι ἡ γνωστή Ἀριθμητική ἡ ὁποία διδάσκεται εἰς τάς διαφόρους Σχολάς καί διαιρεῖται:

α) Εἰς τήν Πρακτικήν Ἀριθμητικήν τῆς ὁποίας σκοπός εἶναι νά μᾶς δώσῃ τάς ἀπαραιτήτους γνώσεις διά τόν βίον.

β) Εἰς τήν Ἐμπορικήν ἤ Πολιτικήν Ἀριθμητικήν ἡ ὁποία ἀφορᾶ τόν ἔμπορον.

γ) Εἰς τήν Θεωρητικήν Ἀριθμητικήν ἡ ὁποία ἐξετάζει τάς ἰδιότητας τῶν ἀριθμῶν θεωρητικῶς.

Κατά τόν Γερμανόν Μαθηματικόν Gauss ἡ Ἀριθμητική θεωρεῖται ἡ βασίλισσα τῶν μαθηματικῶν διότι εἶναι ἡ βάσις αὐτῶν.

Ἀ ρ ί θ μ η σ ι ς

Ἀρίθμησις καθώς γνωρίζομεν εἶναι ἡ πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν ἀπό πόσας ἀκεραίας μονάδας ἀποτελεῖται ἕνα ποσόν ἀσυνεχές. Ἀρίθμησις λέγεται ἐπίσης α) ἡ διδασκαλία περί τῆς ὀνομασίας τῶν ἀριθμῶν, ἡ ὁποία λέγεται προφορική ἀρίθμησις καί β)ἡ διδασκαλία πρός γραφήν τῶν ἀριθμῶν μέ σύμβολα ἡ ὁποία λέγεται Γραπτή Ἀρίθμησις.

α) Προφορική Ἀρίθμησις

Ἐάν εἰς κάθε ἕνα ἀριθμόν ἐδίδομεν ἰδιαίτερον ὄνομα, ἐπειδή οἱ ἀριθμοί εἶναι ἄπειροι θά ἐχρειαζόμεθα ἄπειρα ὀνόματα τά ὁποῖα θά ἦτο ἀδύνατον νά συγκρατήσῃ ἡ μνήμη. Διά τοῦτο ἐπενοήθη τρόπος μέ τόν ὁποῖον ὅλοι οι ἀριθμοί ὀνομάζονται

ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀκεραία μο

ὀνομάζεται Μ

πάρωμεν τή

ἀκεραίαν μονάδα, γίνεται ὁ ἀριθμός Δύο. Ἐάν πάρωμεν δύο ἀκεραίας μονάδας καί μίαν ἀκόμη ἀκεραίαν μονάδα γίνεται ὁ ἀριθμός Τρία. Μέ τόν ἴδιον τρόπον γίνονται οἱ ἀριθμοί Τέσσαρα, Πέντε, Ἕξ, Ἑπτά, Ὀκτώ, Ἐννέα, οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀριθμοί πρώτης τάξεως διότι ὁ καθένας παριστᾷ μονάδας πρώτης τάξεως. Ἐάν πάρωμεν τόν ἀριθμόν Ἐννέα καί μίαν ἀκεραίαν μονάδα γίνεται ὁ ἀριθμός Δέκα ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα μονάς καί ὀνομάζεται Δεκάς ἤ Μονάς δευτέρας τάξεως.

Διά τῆς ἐπαναλήψεως τῆς δεκάδος γίνονται οἱ ἀριθμοί: εἴκοσι, τριάκοντα, τεσσαράκοντα, πεντήκοντα, ἑξήκοντα, ἑβδομήκοντα, ὀγδοήκοντα, ἐνενήκοντα, οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀριθμοί δευτέρας τάξεως, διότι ὁ καθένας παριστᾷ μονάδας δευτέρας τάξεως. Οἱ ἀριθμοί πού εὑρίσκονται μεταξύ δύο διαδοχικῶν δεκάδων πέρνουν τά ὀνόματα τῶν δεκάδων καί τά ὀνόματα τῶν ἁπλῶν μονάδων δηλ. δέκα ἕν ἤ ἕνδεκα, δέκα δύο ἤ δώδεκα, δέκα τρία κ.ο.κ. μέχρι τοῦ ἐνενήκοντα ἐννέα. Ἐάν πάρωμεν δέκα δεκάδας κάμνομεν τόν ἀριθμόν Ἑκατόν ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα μονάς καί ὀνομάζεται Ἑκατοντάς ἤ Μονάς τρίτης τάξεως. Διά τῆς ἐπαναλήψεως τῆς ἑκατοντάδος γίνονται οἱ ἀριθμοί Διακόσια, Τριακόσια, Τετρακόσια, Πεντακόσια, Ἑξακόσια, Ἑπτακόσια, Ὀκτακόσια, Ἐννεακόσια, οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀριθμοί τρίτης τάξεως διότι ὁ καθένας παριστᾷ μονάδας τρίτης τάξεως

Ἐάν πάρωμεν δέκα ἑκατοντάδας κάμνομεν τόν ἀριθμόν Χίλια, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα μονάς καί ὀνομάζεται Χιλιάς ἤ Μονάς τετάρτης τάξεως. Διά τῆς ἐπαναλήψεως τῆς χιλιάδος γίνονται οἱ ἀριθμοί Δύο χιλιάδες, Τρεῖς χιλιάδες, Τέσσαρες χιλιάδες, πέντε χιλιάδες, Ἕξ χιλιάδες, Ἑπτά χιλιάδες, Ὀκτώ χιλιάδες, Ἐννέα χιλιάδες, οἱ ὁποῖοι λέγονται ἀριθμοί τετάρτης τάξεως διότι ὁ καθένας παριστᾶ μονάδας τετάρτης τάξεως.

Ἐάν πάρωμεν δέκα χιλιάδας κάμνομεν τόν ἀριθμόν Δέκα χιλιάδας ἤ Μύριοι ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς νέα Μονάς καί ὀνομάζεται Δεκάς τῶν χιλιάδων ἤ Μυριάς ἤ μονάς πέμπτης τάξεως κ.ο.κ.

Ἀπό ὅλα αὐτά συνάγονται τά ἑξῆς:

α) Δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ὁ τρόπος αὐτός τῆς ἀριθμήσεως ὀνομάζεται Δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως. Ὁ ἀριθμός Δέκα λέγεται βάσις τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

β) Κάθε ἀριθμός περιέχει μονάδας διαφόρων τάξεων καί ἀπό τήν κάθε μίαν τῶν τάξεων αὐτῶν ἔχει τό πολύ ἐννέα μονάδας.

β) Γραπτή Ἀρίθμησις

Διά νά παραστήσωμεν τούς ἀριθμούς μεταχειριζόμεθα τά ἑξῆς σύμβολα: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, τά ὁποῖα λέγονται ψηφία ἤ Ἀραβικοί χαρακτῆρες. Τό πρῶτον ἀπό αὐτά λέγεται μηδέν ἤ βοηθητικόν ψηφίον καί τά ἄλλα ἐννέα λέγονται σημαντικά ψηφία καί μέ αὐτά παριστάνονται οἱ ἐννέα πρῶτοι ἀριθμοί: 1(ἕν), 2(δύο), 3 (τρία), 4(τέσσαρα), 5(πέντε), 6(ἕξ), 7(ἑπτά), 8(ὀκτώ), 9(ἐννέα). Διά νά ἠμποροῦμεν νά γράφωμεν τούς ἀριθμούς μέ τά ψηφία αὐτά ἔγινεν ἡ ἑξῆς συμφωνία.

"Κάθε ψηφίον τό ὁποῖον γράφεται πρός τά ἀριστερά ἄλλου ψηφίου θά παριστᾶ μονάδας δέκα φοράς μεγαλυτέρας δηλ. θά παριστᾶ μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως" Κατόπιν τῆς συμφωνίας αὐτῆς τό πρῶτον πρός τά δεξιά ψηφίον παριστᾷ απλᾶς μονάδας, τό δεύτερον δεκάδας, τό τρίτον ἑκατοντάδας κ.ο.κ. π.χ. ὁ ἀριθμός 'Οκτακόσια εἴκοσι πέντε ἔχει ὀκτώ ἑκατοντάδας, 2 δεκάδας καί 5 ἁπλᾶς μονάδας καί ἑπομένως θά γραφῇ 825 μέ τρόπον ὥστε τό 5 νά ειναι εἰς τήν πρώτην θέσιν, τό 2 εἰς τήν δευτέραν θέσιν καί τό 8 εἰς τήν τρίτην θέσιν. 'Ωστε: 'Η σημασια κάθε ψηφίου ἐξαρτᾶται ἀπό τήν θέσιν ποῦ έχει.

<u>Χρησιμοποίησις τοῦ Μηδενικοῦ.</u> "Οταν ἐλλείπουν μονάδες μιᾶς τάξεως τότε ἀναπληρώνομεν αὐτάς διά τοῦ μηδενικοῦ.0. π.χ. ὁ ἀριθμός πεντακόσια δύο θά γραφῇ 502. Διά τόν λόγον αὐτόν τό μηδενικόν ὀνομάζεται Βοηθητικόν ψηφίον.

Οἱ ἀριθμοί ποῦ ἔχουν ἕν, δύο,τρία ψηφία λέγονται μονοψήφιοι, διψήφιοι,τριψήφιοι καί οἱ ἀριθμοί ποῦ ἔχουν ψηφία περισσότερα ἀπό τρία λέγονται πολυψήφιοι.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς 1η.- Τά σύμβολα 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9, καί ἡ μέθοδος τῆς γραφῆς τῶν ἀριθμῶν ἐπενοήθησαν ὑπό τῶν 'Ινδῶν, ἀπό αὐτούς τά παρέλαβον οἱ"Αραβες καί κατά τόν 12ον μ.Χ.αἰῶνα τά παρέλαβον ἀπό τούς "Αραβας οἱ "Ελληνες τοῦ Βυζαντίου.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς 2α.- Οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,....... λέγονται Φυσικοί 'Αριθμοί.

<u>'Απαγγελία τῶν 'Αριθμῶν</u>

α) "Οταν ὁ ἀριθμός δέν ἔχῃ περισσότερα ἀπό τρία ψηφία τότε ἀπαγγέλλομεν διαδοχικῶς ἐξ ἀριστερῶν πρός τά δεξιά τάς ἑκατοντάδας,τάς δεκάδας, τάς μονάδας π.χ. ὁ 527 ἀπαγγέλλεται πεντακόσια εἴκοσι ἑπτά.

β) Ὅταν ὁ ἀριθμός ἔχῃ περισσότερα ἀπό τρία ψηφία τότε τόν χωρίζομεν είς τριψήφια τμήματα ἀρχίζοντες ἐκ δεξιῶν (τό τελευταῖον πρός τά ἀριστερά τμῆμα δυνατόν νά ἔχῃ ἕνα ἤ καί δύο ψηφία). Κατόπιν ἀρχίζομεν ἐξ ἀριστερῶν και ἀπαγγέλλομεν καθε ἕνα τμῆμα χωριστά (ὡς νά ἦτο μόνον) μέ τό ονομα τῆς ἀρχικῆς μονάδος τήν ὁποίαν παριστᾷ.π.χ.'Ο 32.678.145 ἀπαγγέλλεται: 32 εκατομμύρια, 678 χιλιάδες,145 μονάδες.

Ἀπόλυτος καί Σχετική ἀξία τῶν ψηφίων

Κάθε σημαντικόν ψηφίον ἔχει δυο ἀξίας,'Απόλυτον καί Σχετικήν . Καί ἀπόλυτος μέν ἀξία ἑνός ψηφίου εἶναι ἐκείνην τήν ὁποίαν θά είχεν ἄν ἦτο μόνον,σχετική δέ εἶναι ἐκείνη,τήν ὁποιαν πέρνει ἀπό τήν θέσιν πού ἔχει π.χ. είς τόν ἀριθμόν 1948 ἡ ἀπόλυτος ἀξία τοῦ ψηφίου 9 είναι ἐννέα μονάδες καί ἡ σχετική ἀξία τοῦ ψηφίου 9 είναι 9 ἑκατοντάδες ἤ 900.

Κάθε ἀριθμός ειναι ἴσος μέ τό ἄθροισμα τῶν σχετικῶν ἀξιῶν τῶν διαφόρων ψηφίων αὐτοῦ π.χ. ὁ ἀριθμός 1948 γράφεται 1000+900+40+8.

Ἀριθμοί συγκεκριμένοι καί Ἀφηρημένοι
Ὁμοειδεῖς καί Ἑτεροειδεῖς

α) Ὅταν π.χ. λέγωμεν ἕν βιβλίον, δύο δένδρα,τρία παιδιά κ.λ.π. τότε ἔχομεν ἀριθμούς συγκεκριμένους: Ὥστε συγκεκριμένοι ἀριθμοί λέγονται οἱ ἀριθμοί πού προσδιορίζουν καί τό εἶδος τοῦ ποσοῦ.

β) Ὅταν ὅμως λέγωμεν ἕν,δύο,τρία κλπ. τότε ἔχομεν ἀριθμούς ἀφηρημένους: Ὥστε ἀφηρημένοι ἀριθμοί λέγονται οἱ ἀριθμοί πού δέν προσδιορίζουν καί τό εἶδος τοῦ ποσοῦ.

γ) Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί θά λέγωνται ὁμοειδεῖς ὅταν εἶναι ἐξαγόμενα ἀριθμήσεως ποσῶν ἀσυνεχῶν τοῦ ἰδίου εἴδους καί τῶν ὁποίων ἡ ἀρίθμησις ἔχει γίνει μέ τήν ἰδίαν μονάδα π.χ. Οἱ συγκεκριμένοι 7 τετράδια καί 12 τετράδια εἶναι ὁμοειδεῖς. Ἐπίσης ὅταν εἶναι ἐξαγόμενα μετρήσεως συνεχῶν ποσῶν τοῦ ἰδίου εἴδους καί τῶν ὁποίων ἡ μέτρησις ἔχει γίνει μέ τήν ἰδίαν μονάδα π.χ. οἱ συγκεκριμένοι 5 ὧραι καί 8 ὧραι εἶναι ὁμοειδεῖς.

δ) Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί θά λέγωνται ἑτεροειδεῖς ὅταν εἶναι ἐξαγόμενα ἀριθμήσεως ἀσυνεχῶν ποσῶν διαφορετικοῦ εἴδους π.χ. οἱ συγκεκριμένοι 7 δένδρα καί 9 πόλεις εἶναι ἑτεροειδεῖς. Ἐπίσης ὅταν εἶναι ἐξαγόμενα μετρήσεως συνεχῶν ποσῶν τοῦ ἰδίου εἴδους καί τῶν ὁποίων ἡ μέτρησις ἔχει γίνει μέ διαφορετικάς μονάδας π.χ. οἱ συγκεκριμένοι 2 ὧραι καί 120 πρῶτα λεπτά εἶναι ἑτεροειδεῖς, 48 μέτρα καί 75 πήχεις εἶναι ἑτεροειδεῖς.

Ἄλλα συστήματα Ἀριθμήσεως

Γνωρίζομεν ὅτι ὁ τρόπος τῆς ἀριθμήσεως κατά τόν ὁποῖον δέκα μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως λέγεται "Δεκαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως" καί ὅτι ὁ ἀριθμός 10 λέγεται βάσις τοῦ συστήματος τούτου.

Ἐάν ὡς βάσιν τοῦ συστήματος πάρωμεν τόν ἀριθμόν 2 θά ἔχωμεν τό δυαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως δηλ. ἄλλον τρόπον ἀριθμήσεως κατά τόν ὁποῖον δύο μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονλαδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. Ἐάν ὡς βάσιν τοῦ συστήματος πάρωμεν τόν ἀριθμόν 3 θά ἔχωμεν τό τριαδικόν σύστημα ἀριθμήσεως δηλ.ἄλλον τρόπον ἀριθμήσεως κατά τόν ὁποῖον τρεῖς μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως κ.ο.κ. Ὑπάρχουν λοιπόν καί ἄλλα συστήματα ἀριθμήσεως· μάλιστα εἰς μερικά τμήματα τῆς Εὐρώπης φαίνεται ὅτι εἶχεν ἐπικρατήσει τό εἰκοσαδικόν σύστημα καί τό δωδεκαδικόν σύστημα· τό μέν εἰκοσαδικόν διότι ἐχρησιμοποίουν τά δάκτυλα τῶν χειρῶν καί τῶν ποδῶν τά ὁποῖα εἶναι 20 τό δέ δωδεκαδικόν ἀπό τήν διάπλασιν τῶν δακτύλων τῶν χειρῶν.

	2/κόν	3/κόν	4/κόν	5/κόν	6/κόν	7/κόν	8/κον	9/κόν	10/κόν
0,1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$2^2=4$	$3^2=9$	$4^2=16$	$5^2=25$	$6^2=36$	$7^2=49$	$8^2=64$	$9^2=81$	$10^2=100$
	$2^3=8$	$3^3=27$	$4^3=64$	$5^3=125$	$6^3=216$	$7^3=343$	$8^3=512$	$9^3=729$	$10^3=1000$
	$2^4=16$	$3^4=81$	$4^4=256$	$5^4=625$	$6^4=1296$	$7^4=2401$	$8^4=4096$	$9^4=6561$	$10^4=10.000$
..	...	..	..	...	...	..	...	..	.....
...	...	...	...	...	...	...	...	...	.....

Ἀσκήσεις

1) Ποῖα ἀπό τά ψηφία 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 δέν μεταχειριζόμεθα κατά τήν γραφήν τῶν ἀριθμῶν τοῦ 6/δικοῦ συστήματος;

Λύσις: Τά ψηφία 6,7,8,9, δέν τά μεταχειριζόμεθα.

2) Πόσοι εἶναι οἱ μονοψήφιοι ἀριθμοί τοῦ 6/δικοῦ

καί πόσοι εἶναι τοῦ 12/δικοῦ συστήματος;

Λύσις: Οἱ μονοψήφιοι τοῦ 6/δικοῦ εἶναι πέντε οἱ 1,2,3,4,5, καί τοῦ 12/δικοῦ εἶναι ἕνδεκα 1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,11.

3) Εἰς ποῖον σύστημα ἀριθμήσεως κάθε μονάς $β^{ας}$ τάξεως ἔχει 17 ἁπλᾶς μονάδας;

Λύσις: Εἰς τό 17/δικόν διότι εἰς αὐτό 17 μονάδες $α^{ης}$ τάξεως κάμνουν μίαν μονάδα $β^{ας}$ τάξεως.

4) Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος διψήφιος ἀριθμός τοῦ τριαδικοῦ συστήματος;

Λύσις: Εἶναι ὁ $9=3^2$ ὅπως εἰς τό δεκαδικόν εἶναι ὁ $100=10^2$.

5) Ποῖοι ἀπό τούς ἀριθμούς τοῦ 10/δικοῦ παριστάνουν τάς μονάδας τῶν πέντε πρώτων τάξεων τοῦ 2/δικοῦ καί τοῦ 3/δικοῦ;

Λύσις: Τοῦ 2/δικοῦ αἱ μονάδες τῶν πέντε πρώτων τάξεων παριστάνονται ὑπό τῶν ἀριθμῶν 2, $2^2=4$, $2^3=8$. $2^4=16$, $2^5=32$ καί τοῦ 3/δικοῦ ὑπό τῶν ἀριθμῶν 3, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5=243$.

6) Αἱ μονάδες τοῦ δεκαδικοῦ 1,10,100,1000, νά παρασταθοῦν εἰς τό 4/δικόν καί 5/δικόν σύστημα.

Λύσις: Εἰς μέν τό 4/δικόν εἶναι: 1,4, $4^2=16$, $4^3=64$ εἰς δέ τό 5/δικόν εἶναι 1,5, $5^2=25$, $5^3=125$.

7) Ὁ ἀριθμός 65 τοῦ 10/δικοῦ συστήματος νά τραπῇ εἰς ἀριθμόν τοῦ 7/δικοῦ.

Λύσις
$$\begin{array}{r|l} 65 & 7 \\ \hline 2 & 9 \;\big|\; 7 \\ & 2 \;\;\; 1 \end{array}$$
. Ὁ 65 εἰς τό 7/δικόν γράφεται 122.

8) Ὁ ἀριθμός 122 τοῦ 7/δικοῦ νά τραπῇ εἰς τό

εἰς τὸ 10/δικὸν σύστημα.

Λύσις: $2+2\cdot7+1\cdot7^2$ ἤ $2+14+49=65$. Ὁ 122 γράφεται 65.

9) Ὁ 331 τοῦ 6/δικοῦ νὰ τραπῇ εἰς τὸ 2/δικὸν σύστημα.

Λύσις: Τρέπομεν πρῶτον τὸν 331 τοῦ 6/δικοῦ εἰς τὸ 10/δικὸν καὶ ἔχομεν $1+3\cdot6+3\cdot6^2$ ἤ $1+18+108=127$. Τώρα τὸν 127 τοῦ 10/δικοῦ τὸν τρέπομεν εἰς τὸ 2/δικὸν καὶ ἔχομεν

127	2					
07	63	2				
1	3	31	2			
	1	11	15	2		
		1	1	7	2	
				1	3	2
					1	1

Δηλ. ὁ 331 τοῦ 6/δικοῦ τρεπόμενος εἰς τὸ 2/δικὸν γράφεται:1111111

10) Ὁ ἀριθμὸς 601 (10202) συστήματος ἀγνώστου βάσεως τρεπόμενος εἰς τὸ 10/δικὸν γράφεται 25(101). Νὰ εὑρεθῇ ἡ βάσις τοῦ συστήματος εἰς τὸ ὁποῖον ἀνήκει 'Απ. 2(3).

Παράστασις τῶν ἀριθμῶν μὲ γράμματα

Τὰ γράμματα α,β,γ,..... τοῦ ἀλφαβήτου χρησιμεύουν διὰ νὰ παριστάνωμεν γενικῶς τοὺς ἀριθμοὺς π.χ. Ὅταν θὰ λέγωμεν ὁ ἀριθμὸς α θὰ ἐννοοῦμεν ἕνα ὁποιοδήποτε ἀριθμὸν ὁ ὁποῖος ἠμπορεῖ νὰ εἶναι ὁ 2 ἢ ὁ 17 ἢ ὁ 300 κ.ο.κ.

Ἴσοι καὶ Ἄνισοι Ἀριθμοὶ

Ἴσοι λέγονται δύο ἀκέραιοι ἀριθμοὶ ὅταν εἰς κάθε μονάδα τοῦ ἑνὸς ἀριθμοῦ ἀντιστοιχῇ μία μονὰς τοῦ ἄλλου ἀριθμοῦ. Π.χ. ὁ ἀριθμὸς τῶν δακτύλων ποὺ ἔχει τό ἕνα χέρι εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμόν τῶν δακτύλων ποῦ ἔχει τό ἄλλο χέρι. Διά νά δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοί εἶναι ἴσοι γράφομεν μεταξύ των τό σύμβολον (=) τό ὁποῖον ὀνομάζεται "ἴσον".

π.χ. 5=5 καί γενικῶς α=β.

Ἰσότης λέγεται ἡ σχέσις ποῦ ἔχουν δύο ἴσοι ἀριθμοί.

Ὁ ἀριθμός πού εἶναι ἀριστερά τοῦ συμβόλου (=) λέγεται πρῶτον μέλος τῆς ἰσότητος, ὁ ἀριθμός ποῦ εἶναι δεξιά τοῦ συμβόλου (=) λέγεται δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος καί οἱ δύο μαζί λέγονται μέλη τῆς ἰσότητος.

Ἄνισοι λέγονται δύο ἀκέραιοι ἀριθμοί ὅταν μία ἤ περισσότεραι μονάδες τοῦ ἑνός ἀριθμοῦ δέν ἔχουν ἀντιστοίχους μονάδας εἰς τόν ἄλλον ἀριθμόν. Ὁ ἀριθμός ποῦ ἔχει τάς περισσοτέρας μονάδας λέγεται μεγαλύτερος ὁ δέ ἄλλος λέγεται μικρότερος.

Διά νά δηλώσωμεν ὅτι δύο ἀριθμοί εἶναι ἄνισοι γράφομεν μεταξύ των τό σύμβολον > καί θέτομεν τόν μεγαλύτερον εἰς τό ἄνοιγμα καί τόν μικρότερον εἰς τήν κορυφήν π.χ. 5>4 ἤ 4<5 καί γενικῶς α>β ἤ β<α.

Ἀνισότης λέγεται ἡ σχέσις ποῦ ἔχουν δύο ἄνισοι ἀριθμοί.

Ὁ ἀριθμός ποῦ εἶναι ἀριστερά τοῦ συμβόλου > λέγεται πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος, ὁ ἀριθμός πού εἶναι δεξιά τοῦ συμβόλου λέγεται δεύτερον μέλος τῆς ἀνισότητος καί οἱ δύο μαζί λέγονται μέλη τῆς ἀνισότητος.

Ἰδιότητες τῶν ἴσων ἀριθμῶν

α) Αὐτοπαθής Ἰδιότης. Κάθε ἀριθμός εἶναι ἴσος μέ τόν ἑαυτό του δηλ. 5=5 καί γενικῶς α=α.

β) Συμμετρική Ἰδιότης. Ἐάν ὁ ἀριθμός α εἶναι ἴσος μέ τόν ἀριθμόν β τότε καί ὁ β εἶναι ἴσος μέ τόν α δηλ. Ἐάν α=β τότε καί β=α.

γ) Μεταβατική Ἰδιότης. Ἀριθμοί ἴσοι πρός ἄλλον εἶναι καί μεταξύ των ἴσοι δηλ. Ἐάν α=β, α=γ τότε εἶναι β=γ.

Ἰδιότης τῶν ἀνίσων ἀριθμῶν

Ἐάν ὁ ἀριθμός α εἶναι μεγαλύτερος τοῦ ἀριθμοῦ β καί ὁ β εἶναι μεγαλύτερος ἤ ἴσος τοῦ γ τότε ὁ α θά εἶναι μεγαλύτερος τοῦ γ. δηλ. Ἐάν εἶναι $\alpha > \beta$, $\beta \geq \gamma$ τότε $\alpha > \gamma$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

Θεμελιώδεις πράξεις τῶν ἀκεραίων

Ἀριθμητικαί πράξεις λέγονται οἱ διάφοροι τρόποι κατά τούς ὁποίους συνδυάζονται οἱ ἀριθμοί ὥστε νά παράγηται ἀπ᾽αὐτούς νέος ἀριθμός. Αἱ ἀριθμητικαί πράξεις εἶναι τέσσαρες: ἡ πρόσθεσις, ἡ ἀφαίρεσις, ὁ Πολλαπλασιασμός καί ἡ Διαίρεσις καί λέγονται θεμελιώδεις (ἤ βασικαί) πράξεις τῆς Ἀριθμητικῆς. Αἱ Ἀριθμητικαί πράξεις κυρίως εἶναι δύο, ἡ Πρόσθεσις καί ἡ Ἀφαίρεσις διότι ὅπως θά γνωρίσωμεν παρακάτω ὁ μέν πολλαπλασιασμός εἶναι σύντομος πρόσθεσις ἡ δέ Διαίρεσις σύντομος 'Αφαίρεσις.

Δοκιμή ἤ 'Επαλήθευσις μιᾶς πράξεως λέγεται δευτέρα πρᾶξις τήν ὁποίαν κάμνομεν διά νά βεβαιωθῶμεν, ἄν ἡ πρώτη ἔγινε χωρίς λάθος.

Π ρ ό σ θ ε σ ι ς

"Μία Σχολή ἔχει τρεῖς τάξεις. Η πρώτη τάξις περιέχει 57 μαθητάς, ἡ δευτέρα 50 καί ἡ τρίτη 43. Πόσοι εἶναι όλοι οἱ μαθηταί τῆς Σχολῆς;"

Πρέπει νά εὕρωμεν ἕνα ἀριθμόν, ὁ ὁποῖος νά περιέχῃ τούς μαθητάς ὅλων τῶν τάξεων, δηλ.τάς μονάδας τοῦ 57, τοῦ 50 καί τοῦ 43 καί μόνον αὐτάς. 'Η πρᾶξις μέ τήν ὁποίαν θά εὕρωμεν τόν ἀριθμόν αὐτόν λέγεται Πρόσθεσις. "Αρα

<u>Πρόσθεσις</u> εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας μᾶς δίδονται δύο,τρεῖς, τέσσαρες κ.λ.π.ἀριθμοί καί εὑρίσκομεν ἄλλον ἀριθμόν ὁ ὁποῖος ἔχει τόσας μονάδας, ὅσας ἔχουν ὅλοι μαζί οἱ δοθέντες ἀριθμοί καί μόνον αὐτάς.

Οἱ ἀριθμοί πού πρέπει νά προστεθοῦν λέγονται προσθετέοι, τό δέ ἐξαγόμενον τῆς προσθέσεως λέγεται ἄθροισμα ἤ κεφάλαιον.

"Αν οἱ προσθετέοι εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί πρέπει νά εἶναι ὁμοειδεῖς διά νά προστεθοῦν (ἑτεροειδεῖς δέν προστίθενται), τό δέ ἄθροισμα εἶναι ὁμοειδές πρός αὐτούς π.χ. 7 δραχμαί καί 5 δραχμαί προστίθενται καί δίδουν 12 δραχμάς, ἐνῷ 7 δραχμαί καί 5 θρανία δέν προστίθενται. Αν οἱ προσθετέοι εἶναι ἀφηρημένοι ἀριθμοί ἠμποροῦμεν πάντοτε νά κάνωμεν τήν πρόσθεσιν.

Τό σημεῖον τῆς προσθέσεως εἶναι (+) καί ἀπαγγέλλεται σύν ἤ καί ἤ πλέον. τίθεται δέ μεταξύ τῶν προσ θετέων π.χ.2+3+4. 'Εάν θέλωμεν τό τελικόν έξαγόμενον τοῦ 2+3+4 προσθέτομεν τούς δύο πρώτους καί εἰς τό ἄθροισμα αὐτῶν 5 προσθέτομεν τόν τρίτον 4. Ἄρα

Διά νά προσθέσωμεν πολλούς ἀριθμούς προσθέτομεν τούς δύο πρώτους εἰς τό ἄθροισμα αὐτῶν προσθέτομεν τόν τρίτον εἰς τό νέον ἄθροισμα τόν τέταρτον κ.ο.κ.

'Εάν θέλωμεν νά δηλώσωμεν ὅτι εὑρέθη τό ἄθροισμα 2+3+4 χωρίς νά γίνῃ ἡ πρᾶξις τῆς προσθέσεως κλείομεν τούς προσθετέους εἰς μίαν παρένθεσιν ὡς ἑξῆς (2+3+4) καί λέγεται ἡ ἔκφρασις αὐτή, τυπικόν ἄθροισμα, τό δέ ἐξαγόμενον 9 λέγεται πραγματικόν ἄθροισμα.

Θεμελιώδης ἰδιότης τῆς Προσθέσεως

Νόμος τῆς 'Αντιμεταθέσεως. " Τό ἄθροισμα δέν ἀλλάσσει μέ ὁποιαδήποτε τάξιν καί ἄν προσθέσωμεν τούς προσθετέους" Δηλ.4+5+7 = 7+4+5· καί γενικῶς α+β+γ= =γ+α+β.

'Ο Νόμος τῆς 'Αντιμεταθέσεως λέγεται καί 'Ανταλλακτική 'Ιδιότης καί 'Ιδιότης τῆς ἀδιαφορίας περί τήν τάξιν τῶν προσθετέων.

Πίναξ ἁπλῆς προσθέσεως

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Οἱ προσθετέοι εὑρίσκονται ὁ ἕνας εἰς τήν πρώτην ὁριζοντίαν στήλην ὁ ἄλλος εἰς τήν πρώτην πρός τά ἀριστερά κατακόρυφον στήλην καί τό ἄθροισμα αὐτῶν εἰς τήν διασταύρωσιν τῶν δύο στηλῶν.

Ἐκτέλεσις τῆς Προσθέσεως

Πρόσθεσις Πολυψηφίων ἀριθμῶν

"Διά νά προσθέσωμεν πολυψηφίους ἀριθμούς γράφομεν τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλον μέ τρόπον ὥστε αἱ μονάδες νά εἶναι κάτω ἀπό τά μονάδας, αἱ δεκάδες κάτω ἀπό τάς δεκάδας κλπ. καί σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν Κατόπιν ἀρχίζομεν ἀπό τ ά δεξιά καί ἐκ τῶν κάτω πρός τά ἄνω προσθέτομεν ὅλα τά ψηφία τῆς στήλης τῶν μονάδων καί ἄν εὕρωμεν 9 ἤ μικρότερον τοῦ 9 τόν γράφομεν κάτω ἀπό τήν ὁριζοντίαν γραμμήν καί εἰς τή στήλην τῶν μονάδων, ἐάν εὕρωμεν ἀριθμόν μεγαλύτερον τοῦ 9 γράφομεν μόνον τάς μονάδας αὐτοῦ καί κρατοῦμεν τάς δεκάδας διά νά τάς προσθέσωμεν εἰς τήν στήλην τῶν δεκάδων κ.ο.κ. μέχρι τῆς τελευταίας πρός τ' ἀριστερά στήλης".

<u>Παράδειγμα:</u>

$$\begin{array}{r} 718 \\ +\ 235 \\ \underline{429} \\ 1382 \end{array}$$

Δοκιμή τῆς προσθέσεως

Αος τρόπος: Ἐπαναλαμβάνομεν τήν πρόσθεσιν ἐκ τῶ ἄνω πρός τά κάτω καί ἄν εὕρωμεν τό ἴδιο ἄθροισμα θά πῇ ὅτι η πρᾶξις ἔγινε χωρις λάθος (ὁ τρόπος αὐτός στηρίζεται ἐπί τῆς θεμελιώδους ἰδιότητος τῆς προσθέσεως)

Βος τρόπος: Προσθέτομεν τά ψηφία καθενός προσθετέου ἕως ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν. Προσθέτομεν τούς μονοψηφίους ἀριθμούς πού θά προκύψουν ἕως ὅτου καταλήξωμεν πάλιν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν. Ἐάν ὁ μονοψήφιος αὐτός εἶναι ἴσος μέ τόν μονοψήφιον πού θά προκύψη ἀπό τήν πρόσθεσιν τῶν ψηφίων τοῦ ἀθροίσματος τοτε ή πρᾶξις πιθανόν νά ἔγινε χωρίς λάθος.

Ὁ τρόπος αὐτός τῆς δοκιμῆς λέγεται "δοκιμή διά τοῦ 9".

Παράδειγμα: 736+825 = 1561

Δοκιμή: 7+3+6 = 16, 1+6=7 | 7+6=13, 1+3=4
8+2+5 = 15 1+5=6 |

Τῶρα: 1+5+6+1=13 καί ἐπειδή 1+3=4 σημαίνει ὅτι ἡ πρᾶξις πιθανόν νά εἶναι σωστή.

Ὁ τρόπος αὐτός τῆς δοκιμῆς λέγεται "Δοκιμή διά τοῦ 9" διότι εἰς τούς ἰδίους μονοψηφίους καταλήγομεν ὅταν ἀφαιροῦμεν 9 ἀπό τά ἀθροίσματα πού εὑρίσκομεν κάθε φορά.

Δηλ. 7+3+6=16, 16-9=7 | 7+6=13, 13-9=4
8+2+5=15, 15-9=6 |

Τῶρα: 1+5+6+1=13, 13-9=4

Π ρ ό β λ η μ α. Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ὑπάρχουν 47 ἐφαρμοσταί, 36 τορναδόροι, 93 βοηθοί καί 2 σχεδιασταί. Πόσους τεχνικούς εχει τό ἐργοστάσιον;

Λ ύ σ ι ς

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Διά νά εὕρω πόσους τεχνικούς ἔχει τό ἐργοστάσιον πρέπει νά εὕρω ἕναν ἀριθμόν πού νά περιέχῃ τάς μονάδας τοῦ 47, τοῦ 36, τοῦ 93 καί τοῦ 2 καί μόνον αὐτάς. θά κάμω λοιπόν πρόσθεσιν	47+36+93+2 =178 47 + 36 93 2 ------ 178 Ὅλο τό ἐργοστάσιον ἔχει 178 τεχνικούς

Προσ... ...Σ.ΠΑΠΑΔΗ

(Φυλ.2ον)

'Ιδιότητες τῆς προσθέσεως

α)'Ενωτική ἰδιότης. "Εἰς ἕνα ἄθροισμα ἠμποροῦμε νά ἀντικαταστήσωμεν ὅσους προσθετέους θέλομεν μέ τό ἄθροισμά των". Δηλ. $7+4+5=12+4$ ὅπου ὁ $12=7+5$

Γενικῶς: $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

β) Διαλυτική 'Ιδιότης. "Εἰς ἕνα ἄθροισμα ἠμποροῦμεν νά ἀναλύσωμεν ἕνα πρόσθετέον (ἤ καί περισσοτέρους) εἰς ἄλλους πού ἔχουν αὐτόν ὡς ἄθροισμα".

Δηλ. $12+4 = 7+5+4$

Γενικῶς $\alpha+(\beta+\delta)+\gamma = \alpha+\beta+\gamma+\delta$

'Η διαλυτική ἰδιότης εἶναι τό ἀντίστροφον τῆς ἐνωτικῆς.

γ) " Διά νά προσθέσωμεν ἀριθμόν εἰς ἄθροισμα ἤ ἄθροισμα εἰς ἀριθμόν ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν τόν ἀριθμόν εἰς ἕνα προσθετέον τοῦ ἀθροίσματος".

Δηλ. $(2+3+4)+7=2+10+4$ ὅπου ὁ $10=3+7$

Γενικῶς $(\alpha+\beta+\gamma)+\delta = \alpha+(\beta+\delta)+\gamma$.

δ) " Διά νά προσθέσωμεν ἀθροίσματα σχηματίζομεν ἕνα ἄθροισμα μέ ὅλους τούς προσθετέους τῶν ἀθροισμάτων".

Δηλ. $(2+3)+(5+6+7) = 2+3+5+6+7$

Γενικῶς $(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta+\varepsilon)=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$

Τό Μηδέν εἰς τήν Πρόσθεσιν

Τό Μηδέν προστιθέμενον εἰς ἀριθμόν δέν ἀλλάσσει τόν ἀριθμόν.

Δηλ.$7+0=7$ καί $0+7=7$. Γενικῶς $\alpha+0=\alpha$ καί $0+\alpha=\alpha$

'Ιδιότητες τῆς 'Ισότητος καί'Ανισότητος εἰς τήν Πρόσθεσιν

α) "'Εάν προσθέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν καί εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος θά προκύψη πάλιν ἰσότης"

Δηλ. Ἔστω ἡ ἰσότης 7=4+3 καί ὁ ἀριθμός 5 πού θά προσθέσωμεν.

Θά ἔχωμεν 7+5=(4+3)+5 ἤ 12 = 4+8 ὅπου ὁ 8=3+5.

Γενικῶς. Ἔστω ἡ ἰσότης α+β καί ὁ ἀριθμός γ, θά ἔχωμεν α+γ=β+γ.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἠμπορεῖ νά διατυπωθῇ καί ὡς ἑξ:

" Ἐάν προσθέσωμεν κατά μέλη δύο,τρεῖς τέσσαρας κλπ. ἰσότητας θά προκύψη πάλιν ἰσότης".

β) "Ἐάν προσθέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν καί εἰς τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος θά προκύψη πάλιν ἀνισότης καί ὁμοία τῆς πρώτης".

Δηλ. Ἔστω ἡ ἀνισότης 7>3+2 καί ὁ ἀριθμός 5 πού θά προσθέσωμεν θά ἔχωμεν 7+5>(3+2)+5 ἤ 12>3+7 ὅπου ὁ 7=2+5.

Γενικῶς: Ἔστω ἡ ἀνισότης α>β καί ὁ ἀριθμός γ: θά ἔχωμεν α+γ>β+γ.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1) Ποῖον ἀριθμόν δίδει ὁ 987 ἐάν αὐξηθῇ κατά τούς ἀριθμούς: 8905, 708009, 600950.

2) Ζητεῖται ὁ ἀριθμός πού εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 600709 κατά τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν 9807068, 7.038900698.

3) Ἐκ τριῶν ἀριθμῶν ὁ α εἶναι μικρότερος τοῦ β κατά 987 καί ὁ β μικρότερος τοῦ γ κατά 789 εἶναι δέ ὁ α ὁ 876. Νά εὑρεθῇ τό ἄθροισμα τῶν τριῶν ἀριθμῶν.

4) Κάθε δένδρον εἶναι τόσων ἐτῶν ὅσοι εἶναι οἱ γύροι τοῦ ξύλου τοῦ κορμοῦ του. Ἕνα δένδρον ἐφυτεύ-

θη τό 1036 καί ὅταν ἐκόπη εἶχεν 312 γύρους.Πότε ἐκόπη;

5) Τό ἀπόβαρον βυτίου εἶναι 28 ὀκάδες καί τό βάρος τοῦ ἐμπορεύματος ποῦ περιέχει εἶναι 97 όκ. Πόσον εἶναι τό μικτόν βάρος;

6) Οἱ Ὀλυμπιακοί ἀγῶνες ἤρχισαν τό 776 π.Χ.Πόσα ἔτη εἶναι μέχρι σήμερον;

7) Δύο ἄνθρωποι ἀνεχώρησαν ἀπό τό ἴδιον σημεῖον καί βαδίζουν ἀντιθέτως. Ὁ ἕνας ἐβάδισεν 789 μ. καί ὁ ἄλλος 897 μ.Πόσον ἀπέχουν μεταξύ των;

8)Ἕνα σῶμα ἐβυθίσθη εἰς τό νερό καί ἐζύγιζεν μαζύ μέ αὐτό 250 δράμια. Ὅταν ἐβυθίσθη ἐχύθησαν 125 δράμια νερό. Πόσον ἐζύγιζεν εἰς τόν ἀέρα τό σῶμα αὐτό;

9) Διατί ἀρχίζομεν τήν πρόσθεσιν ἐκ δεξιῶν καί πότε δέν γίνεται πολυπλοκωτέρα ἡ πρόσθεσις ὅταν ἀρχίζωμεν ἐξ ἀριστερῶν;

10) Ἐάν ἀλλάξωμεν τήν σχετικήν ἀξίαν τῶν ψηφίων ἑνός ἀθροίσματος ἐλέγχεται αὐτό μέ τήν δοκιμήν διά τοῦ 9;

11)Ἐφαρμόσατε τάς ἰδιότητας τῆς προσθέσεως εἰς τά ἀθροίσματα

$$(5+7+9+8)+13$$

$$14+(12+15+17+23)$$

$$(7+7)+(2+8+9)+(6+4+3)$$

12) Ἐάν προσθέσωμεν δύο,τρεῖς,τέσσαρας κλπ.ἀνισότητας, τόν μεγαλύτερον μέ τόν μεγαλύτερον καί τόν μικρότερον μέ τόν μικρότερον τί θά προκύψῃ;

Ἀ φ α ί ρ ε σ ι ς

Ἐάν ἔχω 7 βόλους καί δώσω τούς 2 βόλους διά νά εὕρωμεν πόσοι βόλοι μοῦ μένουν, πρέπει νά ἐλαττώσωμεν τάς μονάδας τοῦ 7 κατά τάς μονάδας τοῦ 2. Ἡ πρᾶξις αὐτή λέγεται Ἀφαίρεσις. Ἄρα

Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τήν ὁποίαν μᾶς διδονται δύο ἀριθμοί καί ἐλαττώνομεν τόν ἕνα ἀπό αὐτούς κατά τάς μονάδας τοῦ ἄλλου.

Ὁ ἀριθμός πού πρόκειται νά ἐλαττωθῇ λέγεται Μειωτέος, ὁ ἀριθμός πού φανερώνει κατά πόσας μονάδας θά ἐλαττωθῇ ὁ μειωτέος λέγεται Ἀφαιρετέος καί τό ἐξαγόμενον λέγεται ὑπόλοιπον τῆς ἀφαιρέσεως, ἤ Διαφορά τῶν δύο ἀριθμῶν ἤ Ὑπεροχή τοῦ μειωτέου.

Ἐπειδή τό ὑπόλοιπον ὅταν προστεθῇ εἰς τόν ἀφαιρετέον δίδει τόν μειωτέον διά τοῦτο ἡ πρᾶξις τῆς ἀφαιρέσεως ὁρίζεται καί ὡς ἑξῆς:

Ἀφαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τήν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοί καί ζητεῖται τρίτος, ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθῇ εἰς τόν μικρότερον δίδει ἄθροισμα τόν μεγαλύτερον.

Τό σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως εἶναι (-) καί ἀπαγγέλλεται Πλήν, ἤ Μεῖον τίθεται δέ μεταξύ μειωτέου καί ἀφαιρετέου π.χ. 7-2. Τό σημεῖον τῆς ἀφαιρέσεως ἀπαγγέλλεται ἀκόμη καί παρά π.χ. ὅταν λέγωμεν ἡ ὥρα εἶναι 12 παρά 5 ἐννοοῦμεν ὅτι ἡ ὥρα εἶναι 12 ἄν ἀφαιρέσωσωμεν 5 πρῶτα λεπτά αὐτῆς.

Ἐάν θέλωμεν νά δηλώσωμεν ὅτι εὑρέθη ἡ διαφορά 7-2 χωρίς νά γίνῃ ἡ πρᾶξις τῆς Ἀφαιρέσεως κλείομεν αὐτήν εἰς μίαν παρένθεσιν (7-2) καί λέγεται ἡ ἔκφρασις αὐτή Τυπική διαφορά τό δέ ἐξαγόμενον 5 λέγεται πραγματική διαφορά.

Ἐάν ὁ μειωτέος καί ὁ ἀφαιρετέος εἶναι συγκεκριμένοι ἀριθμοί πρέπει νά εἶναι ὁμοειδεῖς ἡ δέ διαφορά των εἶναι ὁμοειδής πρός αὐτούς. Ἀφαίρεσις ἑτεροειδῶν ἀριθμῶν δέν γίνεται· ἐπίσης δέν γίνεται ἡ ἀφαίρεσις ὅταν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ μειωτέου. Ἐάν ὁ ἀφαιρετέος εἶναι ἴσος μέ τόν μειωτέον τότε μετά τήν ἀφαίρεσιν δέν μένει καμμία μονάς τοῦ μειωτέου καί λέγομεν ὅτι ἡ διαφορά εἶναι μηδέν.

Ἐκτέλεσις τῆς Ἀφαιρέσεως

Πίναξ ἁπλῆς ἀφαιρέσεως

	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0									
8		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0								
7			9	8	7	6	5	4	3	2	1	0							
6				9	8	7	6	5	4	3	2	1	0						
5					9	8	7	6	5	4	3	2	1	0					
4						9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
3							9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			
2								9	8	7	6	5	4	3	2	1	0		
1									9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
0										9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Ὁ μειωτέος εὑρίσκεται εἰς τήν πρώτην ὁριζοντίαν στήλην, ὁ ἀφαιρετέος εἰς τήν πρώτην κατακόρυφον στήλην (πρός τά ἀριστερά) καί ἡ διαφορά εἰς τήν διασταύρωσιν τῶν δύο στηλῶν.

Ἀφαίρεσις δύο πολυψηφίων

" Διά νά ἀφαιρέσωμεν δύο πολυψηφίους γράφομεν τόν ἀφαιρετέον κάτω ἀπό τόν μειωτέον, καί μέ τρόπον ὥστε αἱ μονάδες νά εἶναι κάτω ἀπό τάς μονάδας, αἱ δεκάδες κάτω ἀπό τάς δεκάδας κλπ. καί σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν. Κατόπιν ἀρχίζομεν ἀπό τάς μονάδας καί ἀφαιροῦμεν κάθε ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου ἀπό κάθε ψηφίον τοῦ μειωτέου. Ἐάν τύχῃ ἕνα ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου νά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου του εἰς τόν μειωτέον τότε αὐξάνομεν τό μέν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατά 10 τό δέ προηγούμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατά 1 καί ἀφαιροῦμεν"

Παραδείγματα:

745	534
-732	-278
=13	256

Δοκιμή τῆς Ἀφαιρέσεως

Α^{ος}) Τρόπος. Προσθέτομεν τήν διαφοράν εἰς τόν ἀφαιρετέον καί ἐάν τό ἄθροισμά των εἶναι ἴσον μέ τόν μειωτέον θά πῆ ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρίς λάθος.

Β^{ος}) τρόπος. Προσθέτομεν τά ψηφία τοῦ ἀφαιρετέου μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν. Προσθέτομεν τά ψηφία τοῦ ὑπολοίπου μέχρις ὅτου εὕρωμεν μονοψήφιον ἀριθμόν. Κατόπιν προσθέτομεν τούς δύο αὐτούς μονοψηφίους ἀριθμούς μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰςμονοψήφιον ἀριθμόν. Ἐάν ὁ μονοψήφιος αὐτός εἶναι ἴσος μέ τόν μονοψήφιον τόν ὁποῖον θά εὕρωμεν ὅταν προσθέσωμεν τά ψηφία τοῦ μειωτέου τότε ἡ πρᾶξις πιθανόν νά ἔγινε χωρίς λάθος.

Παράδειγμα: 592-177=415

Δοκιμή. 1+7+7=15, 1+5=6 | 6+1=7

4+1+5=10, 1+0=1 |

Ἐπειδή καί 5+9+2=16 καί 1+6=7 λέγομεν ὅτι ἡ ἀφαίρεσις πιθανόν νά ἔγινε χωρίς λάθος.

Πότε κάμνομεν Ἀφαίρεσιν

Ἀφαίρεσιν κάμνομεν εἰς τάς εξῆς περιπτώσεις:

α) Ὅταν θέλωμεν νά ἐλαττώσωμεν ἕναν ἀριθμόν πού μᾶς δίδεται κατά τάς μονάδας ἄλλου ἀριθμοῦ πού ἐπίσης μᾶς δίδεται.

Πρόβλημα: Ἕνα αὐτοκίνητον εἶχε 12 γαλόνια βενζίνη καί ἔκάψε τά 7 γαλόνια. Πόσα γαλόνια βενζίνης ἔχει ἀκόμη;

Λύσις

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Διά νά εὕρω πόσα γαλόνια βενζίνης ἔχει ἀκόμη τό αὐτοκίνητον πρέπει νά ἐλαττώσω τάς μονάδας τοῦ 12 κατά τάς μονάδας τοῦ 7. Θά κάμω λοιπόν ἀφαίρεσιν.	$\begin{array}{r} 12 \\ -7 \\ \hline =5 \end{array}$ Τό αὐτοκίνητον ἔχει ἀκόμη 5 γαλόνια βενζίνης.

Σημείωσις: 1 γαλόνι βενζίνης εἶναι 2,6 ὀκ. βενζίνης.

β)" Ὅταν γνωρίζωμεν τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν, γνωρίζωμεν ἐπίσης τόν ἕνα ἀπό αὐτούς καί ζητοῦμεν τόν ἄλλον".

Πρόβλημα. " Διά νά γίνῃ ἕνα ἔργον ἐργάζονται δύο ἀτμομηχαναί συνολικῆς δυνάμεως 18 ἵππων. Ἡ δύναμις μιᾶς ἀτμομηχανῆς εἶναι 10 ἵππων. Πόση εἶναι ἡ δύναμις τῆς ἄλλης ἀτμομηχανῆς;"

Λύσις

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Γνωρίζω τό ἄθροισμα 18 τῶν δυνάμεων τῶν δύο ἀτμομηχανῶν ἐπίσης καί τήν δύναμιν 10 τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν. Ἐπομένως θά κάμω ἀφαίρεσιν τοῦ 10 ἀπό τοῦ 18 διά νά εὕρω τήν δύναμιν τῆς ἄλλης ἀτμομηχανῆς.	18 -10 =8 Ἡ ἄλλη ἀτμομηχανή ἔχει δύναμιν 8 ἵππων.

Σημείωσις: Εἰς τήν μηχανικήν ἵππος λέγεται ἡ δύναμις πού εἶναι ἱκανή νά ὑψώση βάρος 75 χιλιογράμμων εἰς ὕψος 1 μέτρου ἐντός ἑνός δευτερολέπτου.

Σχέσεις Μειωτέου Ἀφαιρετέου καί Ὑπολοίπου

α) Ὅταν μόνον εἰς τόν μειωτέον προσθέσωμεν (ἤ ἀφαιρέσωμεν) ἕνα ἀριθμόν τότε τό ὑπόλοιπον αὐξάνεται ἤ ἐλαττώνεται) κατά τόν ἴδιον ἀριθμόν.

β) Ὅταν μόνον εἰς τόν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν (ἤ ἀφαιρέσωμεν) ἕνα ἀριθμόν τότε τό ὑπόλοιπον ἐλαττώνεται (ἤ αὐξάνεται) κατά τόν ἴδιον ἀριθμόν.

γ) Ὅταν εἰς τόν μειωτέον καί εἰς τόν Ἀφαιρετέον προσθέσωμεν ἤ ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν τότε τό ὑπόλοιπον μένει τό ἴδιο.

Παράδειγμα: Πατέρας 54 ἐτῶν ἔχει υἱόν 21 ἐτῶν· ποίαν διαφοράν ἡλικίας εἶχον πρό 7 ἐτῶν καί ποίαν θά ἔχουν μετά 5 ἔτη.

Ἡ παροῦσα διαφορά ἡλικιῶν εἶναι 54-21=33 ἔτη. Τόση εἶχον καί πρό 7 ἐτῶν, τόση ἐπίσης θά εἶναι καί μετά 5 ἔτη. (54-7)-(21-7)=33 ἐπίσης (54+5)-(21+5)=33.

Εἰς τήν ἰδιότητα αὐτήν στηριζόμεθα ὅταν κάμνωμεν τήν ἀφαίρεσιν δύο ἀριθμῶν καί συμβῇ ἕνα ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου νά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστοίχου του εἰς τόν μειωτέον τότε αὐξάνομεν τό μέν ψηφίον τοῦ μειωτέου κατά 10 τό δέ προηγούμενον ψηφίον τοῦ ἀφαιρετέου κατά 1.

Σχέσις προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως

Ὅταν εἰς δοθέντα ἀριθμόν προσθέσωμεν καί συγχρόνως ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἄλλον ἀριθμόν τότε ἡ μία πρᾶξις καταστρέφει τήν ἄλλην καί ὁ δοθείς ἀριθμός μένει ὁ ἴδιος π.χ. ἐάν εἰς τόν 7 προσθέσωμεν καί συγχρόνως ἀφαιρέσωμεν τόν 2 θά ἔχωμεν $(7+2)-2=9-2=7$. Διά τόν λόγον αὐτόν ἡ πρόσθεσις καί ἡ ἀφαίρεσις λέγονται <u>πράξεις ἀντίστροφοι</u>. Ὥστε

" <u>Ἀντίστροφοι</u> λέγονται δύο πράξεις ὅταν γίνωνται συγχρόνως εἰς ἕνα ἀριθμόν καί ὁ ἀριθμός αὐτός δέν ἀλλάσσει".

Ἰδιότητες τῆς Ἀφαιρέσεως

α) " Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἀριθμόν ἀπό ἄθροισμα ἀρκεῖ νά ἀφαιρέσωμεν τόν ἀριθμόν ἀπό ἕνα προσθετέον ἐάν ἀφαιρῆται"

Δηλ. $(7+2)-4=(7-4)+2$

<u>Γενικῶς</u> $(\alpha+\beta)-\gamma=(\alpha-\gamma)+\beta$

β) "Διά νά προσθέσωμεν εἰς ἕνα ἀριθμόν τήν διαφοράν δύο ἄλλων ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν εἰς τόν ἀριθμόν τόν μειωτέον καί ἀπό τό ἄθροισμα νά ἀφαιρέσωμεν τόν ἀφαιρετέον".

Δηλ. $7+(5-2)=(7+5)-2$

<u>Γενικῶς</u> $\beta+(\alpha-\gamma)=(\alpha+\beta)-\gamma$

'Η ἰδιότης αὐτή εἶναι τό ἀντίστροφον τῆς προηγουμένης.

γ)" Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἄθροισμα ἀπό ἀριθμόν ἀρκεῖ νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν ἀριθμόν τόν πρῶτον προσθετέον ἀπό τό ὑπόλοιπον αὐτῶν τόν δεύτερον, ἀπό τό νέον ὑπόλοιπον τόν τρίτον κ.ο.κ."

Δηλ. $10-(2+3+4) = 10-2-3-4$

<u>Γενικῶς</u>: $\alpha-(\beta+\gamma+\delta) = \alpha-\beta-\gamma-\delta$

δ)" Διά νά προσθέσωμεν διαφοράς ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν χωριστά τούς μειωτέους, χωριστά τούς ἀφαιρετέους καί ἀπό τό πρῶτον ἄθροισμα νά ἀφαιρέσωμεν τό δεύτερον".

Δηλ. $(7-5)+(9-4)=(7+9)-(5+4)$

<u>Γενικῶς</u> $(\alpha-\beta)+(\gamma-\delta)=(\alpha+\gamma)-(\beta+\delta)$

ε) " Διά νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό ἕνα ἀριθμόν τήν διαφοράν δύο ἄλλων ἀρκεῖ νά προσθέσωμεν εἰς τόν ἀριθμόν τόν ἀφαιρετέον καί ἀπό τό ἄθροισμα νά ἀφαιρέσωμεν τόν μειωτέον"

Δηλ. $7-(5-2)=(7+2)-5$

<u>Γενικῶς</u> $\alpha-(\beta-\gamma)=(\alpha+\gamma)-\beta$

<u>Τό Μηδέν εἰς τήν Ἀφαίρεσιν</u>

α) Τό μηδέν ἀφαιρούμενον ἀπό ἀριθμόν δέν τόν ἀλλάσσει. π.χ. $7-0=7$ καί Γενικῶς $\alpha-0=\alpha$

β) Ἀφαίρεσις ἀριθμοῦ ἀπό μηδέν δέν γίνεται. π.χ. $0-7$ δέν ἀφαιρεῖται.

Ἰδιότητες Ἰσότητος καί Ἀνισότητος εἰς τήν Ἀφαίρεσιν

α) "Ἐάν ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν καί ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος θά προκύψῃ πάλιν Ἰσότης"

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ἰσότης $7=4+3$ καί ὁ ἀριθμός 2 πού θά ἀφαιρέσωμεν. Θά ἔχωμεν: $7-2=(4+3)-2$ ἤ $7-2=(3-2)+4$ ἤ $5=1+4$.

Γενικῶς: Ἔστω ἡ ἰσότης $\alpha=\beta$ καί ὁ ἀριγμός γ: θά ἔχωμεν: $\alpha-\gamma=\beta-\gamma$. Ἡ ἰδιότης αὐτή ἠμπορεῖ νά διατυπωθῇ καί ὡς ἑξῆς:

"Ἐάν ἀφαιρέσωμεν κατά μέλη δύο ἰσότητας θά προκύψῃ πάλιν ἰσότης"

β) "Ἐάν ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν καί ἀπό τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος θά προκύψῃ πάλιν ἀνισότης καί ὁμοία τῆς πρώτης".

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ἀνισότης $7>4+2$ καί ὁ ἀριθμός 3 πού θά ἀφαιρέσωμεν. Θά ἔχωμεν: $7-3>(4+2)-3$ ἤ $7-3>(4-3)+2$ ἤ $4>1+2$. Γενικῶς. Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$ καί ὁ ἀριθμός γ. Θά ἔχωμεν $\alpha-\gamma>\beta-\gamma$.

Σημείωσις: Εἰς ὅλας τάς ἰδιότητας αἱ ἀφαιρέσεις ὑποτίθενται δυναταί.

Προβλήματα

1) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν 742 διά νά προκύψῃ ὁ 273;

2) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά προσθέσωμεν εἰν τόν 5728 διά νά προκύψῃ ὁ 14660;

3) Πόσας φοράς ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν τόν 36 ἀπό τόν 109 καί ποῖον τό τελευταῖον ὑπόλοιπον;

4) Πόσα ἔτη ἐπέρασαν μέχρι σήμερον ἀπό τῆς ἐφευρέ-

θεως τῶν ἀτμομηχανῶν ὑπό τοῦ ατε τῷ 1799;

5) Τό ἄθροισμα δύο (τριῶν) ἀριθμῶν εἶναι 216· ὁ ἕνας εἶναι ὁ 68 (ὁ ἄλλος εἶναι ὁ 56). Ποῖος εἶναι ὁ δεύτερος; (ὁ τρίτος);

6) Νά συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες

α) 978-;=689 β) ;-10203=19998 γ) 637 - ; = 0

7) Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἀφαιρούμενος ἀπό τόν 365 νά δίδῃ ὑπόλοιπον τριψήφιον καί τοῦ ὁποίου ὅλα τά ψηφία νά εἶναι ὅμοια.

8) Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἀφαιρούμενος ἀπό τόν 1912 νά δίδῃ ὑπόλοιπον τοῦ ὁποίου ὅλατά ψηφία νά εἶναι 7.

9) Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθῇ εἰς τόν 1894 νά δίδῃ ἄθροισμα τοῦ ὁποίου ὅλα τά ψηφία νά εἶναι 6.

10) Κατά τήν ἐκτέλεσιν τῆς προσθέσεως κατά στήλας εἰς τήν 1ην στήλην δεξιά ἐπρόσθεσα 2 μονάδας περισσότερον, εἰς τήν 2αν στήλην παρέλειψα νά προσθέσω τό κρατούμενον 1 μονάδα, εἰς τήν 3ην στήλην ἀντί νά προσθέσω ὡς κρατούμενον 1 ἐπρόσθεσα ὡς κρατούμενον 2 καί κατέληξα εἰς τό λανθασμένον ἄθροισμα 2019. Ζητεῖται τό ἀληθές ἄθροισμα.

11) Ἐάν ὁ μειωτέος ἐλαττωθῇ κατά 12 καί ὁ ἀφαιρετέος αὐξηθῇ κατά 15 ποίαν μεταβολήν θά πάθῃ ἡ διαφορά;

12) Ποῖος εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν προστεθῇ εἰς τόν 18 τόν κάμνει ὄχι μεγαλύτερον τοῦ 42;

13) Ἐφαρμόσατε τάς ἰδιότητας τῆς ἀφαιρέσεως

α) (12+35+27)-30 β) 75+(64-27)

γ) 120-(15+21+34) δ) 150-(75-64)

ε) (12-7)+(25-9)+(31-18)

Πολλαπλασιασμός

Όταν π.χ. θέλωμεν νά εύρωμεν πόσας δραχμάς άξίζουν αί 3 όκ. ένός πράγματος τοῦ όποίου ἡ όκᾶ άξίζει 5 δρχ. τότε σκεπτόμεθα ώς έξῆς: Ἡ 1 όκᾶ άξίζει 5 δραχ., αί 2 όκ. θά άξίζουν 2 φοράς τό 5 δρχ δηλ. 5 δρχ+5δρχ.=10 δρχ. καί αί 3 όκ. θά άξίζουν 3 φοράς τό 5 δρχ. δηλ. 5 δρχ+5δρχ.+5δρχ.=15 δρχ. Διά νά εύρωμεν λοιπόν πόσον άξίζουν αί 3 όκ. πρέπει νά έπαναλάβωμεν ἤ νά προσθέσωμεν 3 φοράς τάς 5 δρχ. Ἡ πρᾶξις αύτή λέγεται Πολλαπλασιασμός. Ἄρα

"Πολλαπλασιασμός εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς όποίας έπαναλαμβάνομεν ἤ προσθέτομεν εναν άριθμόν τόσας φοράς όσας μονάδας ἔχει δεύτερος άριθμός"

Ὁ πολλαπλασιασμός λοιπόν εἶναι σύντομος πρόσθεσις είς τήν όποίαν ὅλοι οί προσθετέοι εἶναι ἴσοι. Δηλ. άντί νά γράψωμεν 5δρχ+5δρχ.+5δρχ=15 δρχ. γράφομεν συντόμως 5δρχ.Χ3=15 δρχ. Ὅπου τό (Χ) εἶναι τό σημεῖον τοῦ πολλαπλασιασμοῦ καί άπαγγέλλεται "έπί" Ὁ κάθε ἕνας άπό τούς ἴσους προσθετέους δηλ.έκεῖνος πού έπαναλαμβάνεται όνομάζεται <u>πολλαπλασιαστέος</u>, ό άριθμός πού φανερώνει πόσοι εἶναι οί ἴσοι προσθετέοι δηλ. πόσας φοράς θά έπαναληφθῆ ό πολλαπλασιαστέος όνομάζεται <u>πολλαπλασιαστής</u> καί τό έξαγόμενον άντί νά λέγεται ἄθροισμα λέγεται <u>γινόμενον</u>. Ὁ πολλαπλασιαστέος καί ό πολλαπλασιαστής μέ ἕνα ὄνομα λέγονται <u>παράγοντες τοῦ γινομένου</u>. Παρατηροῦμεν ὅτι: έδόθη σαν δύο ἀριθμοί, ὁ ἀριθμός 5 δρχ.καί ὁ ἀριθμός 3 δκ. καί ἀπό τόν πρῶτον 5 δρχ. ἔγινε τρίτος ἀριθμός ὁ 15 δρχ. ὅπως ἔγινε ὁ δεύτερος ἀριθμός 3 δκ. ἀπό τήν ἀκεραίαν μονάδα 1 δκ. Ἄρα ὁ πολλαπλασιασμός ὁρίζεται καί ὡς ἑξῆς:

" <u>Πολλαπλασιασμός</u> εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας ὅταν δοθοῦν δύο ἀριθμοί σχηματίζεται ἀπό τόν πρῶτον ἀριθμόν τρίτος ἀριθμός ὅπως σχηματίζεται ὁ δεύτερος ἀριθμός ἀπό τήν μονάδα.

Ὅταν οἱ ἀριθμοί εἶναι συγκεκριμένοι τότε εἰς τόν πολλαπλασιασμόν παρατηροῦμεν τά ἑξῆς:

α) Ὁ πολλαπλασιαστέος καί ὁ πολλαπλασιαστής οὐδέποτε εἶναι ὁμοειδεῖς ἀριθμοί.

β) Ὁ πολλαπλασιαστέος παραμένει συγκεκριμένος, ἐνῷ ὁ πολλαπλασιαστής γίνεται ἀφηρημένος διά νά μᾶς δηλώσῃ πόσας φοράς θά ἐπαναλάβωμεν τόν πολλαπλασιαστέον.

γ) Τό γινόμενον εἶναι πάντοτε ὁμοειδές πρός τόν πολλαπλασιαστέον π.χ. 5δρχ.Χ3=15 δρχ., 7δκ.Χ2=14 δκ.

<u>Θεμελιώδης Ἰδιότης τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ</u>

<u>Νόμος τῆς Ἀντιμεταθέσεως.</u> "Τό γινόμενον δέν ἀλλάσσει ἄν ἀλλάξωμεν τάς θέσεις τῶν παραγόντων αὐτοῦ" Δηλ. 2Χ3=3Χ2 καί γενικῶς αΧβ=βΧα.

Ὁ νόμος τῆς ἀντιμεταθέσεως λέγεται καί Ἀνταλλακτική Ἰδιότης καί Ἰδιότης τῆς Ἀδιαφορίας περί τήν τάξιν τῶν παραγόντων.

<u>Ἐκτέλεσις τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ.</u>

Πίναξ ἁπλοῦ πολλαπλασιασμοῦ ἢ πίναξ τοῦ Πυθαγόρα

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Ὁ πολλαπλασιαστέος εὑρίσκεται εἰς τὴν 1ην ὁριζοντίαν στήλην, ὁ πολλαπλασιαστὴς εἰς τὴν 1ην πρὸς τὰ ἀριστερὰ κατακόρυφον στήλην καὶ τὸ γινόμενον εἰς τὴν διασταύρωσιν τῶν δύο αὐτῶν στηλῶν.

Πολλαπλασιασμὸς δύο πολυψηφίων ἀριθμῶν

"Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν πολυψήφιον ἀριθμὸν ἐπὶ ἄλλον πολυψήφιον ἀριθμὸν γράφομεν τὸν ἕνα κάτω ἀπὸ τὸν ἄλλον μὲ τρόπον ὥστε αἱ μονάδες νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὰς μονάδας, αἱ δεκάδες κάτω ἀπὸ τὰς δεκάδας κλπ. καὶ σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμήν. Κατόπιν ἀρχίζομεν ἐκ δεξιῶν καὶ πολλαπλασιάζομεν τὸν πολλαπλασιαστέον μὲ κάθε ἕνα ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ. γράφομεν δὲ κάθε μερικὸν γινόμενον μὲ τρόπον ὥστε τὸ τελευταῖον ψηφίον του νὰ εἶναι κάτω ἀπὸ τὸ ψηφίον μὲ τὸ ὁποῖον ἐπολλαπλασιάσαμεν. Μετὰ ἀπὸ αὐτὰ σύρομεν ὁριζοντίαν γραμμὴν καὶ προσθέτομεν τὰ μερικὰ γινόμενα, τὸ ἄθροισμα δὲ [illegible]".

Παράδειγμα:

Πολλαπλασιαστέος 567

Πολλαπλασιαστής .... X 332

1ον μερικόν γινόμενον 1134

2ον " " 1701

3ον " " 1701

ὁλικόν γινόμενον 188244

Γινόμενον πολλῶν ἀριθμῶν ἤ πολλῶν παραγόντων

Ὅταν ἔχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν πολλούς ἀριθμούς π.χ. τούς ἀριθμούς 2,3,4,5 τότε πολλαπλασιάζομεν τούς δύο πρώτους καί εὑρίσκομεν 2χ3=6, ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τό γινόμενον αὐτῶν 6 ἐπί τόν τρίτον 4 καί εὑρίσκομεν 6χ4=24 τό νέον γινόμενον 24 τό πολλαπλασιάζομεν ἐπί τόν τέταρτον 5 καί εὑρίσκομεν 24Χ5=120. Ὁ 120 λέγεται γινόμενον τῶν τεσσάρων παραγόντων 2,3,4,5=120: ἄρα:

Γινόμενον πολλῶν παραγόντων λέγεται ὁ ἀριθμός πού εὑρίσκομεν όταν πολλαπλασιάσωμεν τόν πρῶτον ἐπί τόν δεύτερον τό γινόμενον αὐτῶν ἐπί τό τρίτον, τό νέον γινόμενον ἐπί τό τέταρτον κ.ο.κ.

Δοκιμή τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ

Αος Τρόπος. Ἐπαναλαμβάνομεν τήν πρᾶξιν λαμβάνοντες τόν πολλαπλασιαστέον ὡς πολλαπλασιαστήν.

Βος Τρόπος: Προσθέτομεν χωριστά τά ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστέου καί χωριστά τα ψηφία τοῦ πολλαπλασιαστοῦ μέχρις ότου καταλήξωμεν εἰς μονοψηφίους τούς ὁποίους γράφομεν εἰς τάς ἄνω γωνίας ἑνός σταυροῦ. Πολλαπλασιάζομεν τούς δύο αὐτούς μονοψηφίους καί προσθέτομεν τά ψηφία μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν καί τόν γράφομεν εἰς μίαν ἀπό τάς κάτω δύο γωνίας τοῦ σταυροῦ. Προσθέτομεν τώρα καί τά ψηφία τοῦ γινομένου μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν τόν ὁποῖον γράφομεν εἰς τήν ἄλλην ἀπό τάς κάτω δύο γωνίας τοῦ σταυροῦ. Ἐάν οἱ μονοψήφιοι τῶν δύο κάτω γωνιῶν τοῦ σταυροῦ εἶναι ἴσοι τότε ἡ πρᾶξις πιθανόν νά ἔγινε χωρίς λάθος.

Παράδειγμα: 625X75+46875

Δοκιμή: 6+2+5=13 1+3=4
7+5 = 12 1+2=3 | 4X3=12, 1+2=3
4+6+8+7+5=30, 3+0=3

4	3
3	3

Πότε κάμνομεν Πολλαπλασιασμόν

Πολλαπλασιασμόν κάμνομεν εἰς τάς ἑξῆς περιπτώσεις

α) "Οταν θέλωμεν νά ἐπαναλάβωμεν ἕνα ἀριθμόν πολλάς φοράς.

Πρόβλημα. Ἡ ἡλικία ἑνός πατέρα εἶναι πενταπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ὁ ὁποῖος εἶναι 8 ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατέρας;

Λύσις

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Πρέπει νά ἐπαναλάβωμεν τήν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ 5 φοράς. Δηλ. θά πολλαπλασιάσωμεν τόν 8 ἐπί 5.	8 ἔτη X 5=40 ἔτη. "Αρα ὁ πατέρας εἶναι 40 ἐτῶν.

β) "Οταν γνωρίζωμεν τήν ἀξίαν τῆς μονάδος ἑνός πράγματος καί ζητοῦμεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος".

Πρόβλημα. "Τό μέτρον ὑφάσματος ἀξίζει 75 δραχ. Πόσον ἀξίζουν τά 10 μέτρα τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;"

Λύσις

Σκέψις	Κατάταξις-Έκτέλεσις
Τό 1 μέτρον άξίζει 75 δρχ. τά 2,3,4,κλπ. μέτρα θά άξίζουν 2,3,4 κλπ.φοράς τάς 75 δραχ.καί τά 10 μ. θά άξίζουν 10 φοράς τάς 75 δρχ. Πρέπει λοιπόν νά πολλαπλασιάσωμεν τάς 75 δρχ. έπί 10.	Τό 1 μ.άξίζει 75 δρχ. τά 10μ. ; 75 δρχ.Χ10=750 δρχ. Άρα τά 10 μέτρα άξίζουν 750 δρχ.

Συντομίαι Πολλαπλασιασμοΰ

α) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν άριθμόν έπί 10,100, 1000 κλπ. γράφομεν εις τό τέλος τοΰ άριθμοΰ όσα μηδενικά έχει ό 10,ό 100,ό 1000 κλπ. π.χ.17Χ10=170, 98Χ100=9800.—

β) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν άριθμούς πού τελειώνουν είς μηδενικά, πολλαπλασιάζομεν μόνον τά σημαντικά ψηφία των καί είς τό τέλος τοΰ γινομένου γράφομεν τά μηδενικά πού έχουν όλοι μαζί οί παράγοντες π.χ.1200Χ5000=60.00000.

γ) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν δοθέντα άριθμόν έπί 11 έάν μέν τό άθροισμα τών ψηφίων τοΰ δοθέντος είναι μονοψήφιος τότε γράφομεν τόν μονοψήφιον αύτόν μεταξύ τών ψηφίων τοΰ δοθέντος. Έάν όμως είναι διψήφιος τότε γράφομεν τάς μονάδας αύτοΰ μεταξύ τών ψηφίων τοΰ δοθέντος καί τάς δεκάδας αύτοΰ τάς προσθέτομεν είς τάς δεκάδας τοΰ δοθέντος.

π.χ. 72Χ11=792 όπου τό 9=7+2

73Χ11=803.

Σχέσις πολ/στέου, πολ/στοῦ καί γινομένου

"Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μόνον τόν πολ/στέον ἤ μόνον τόν πολ/στήν ἐπί ἕνα ἀριθμόν τότε τό γινόμενον πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν αὐτόν ἀριθμόν" Ἄρα:

" Τό γινόμενον ἀλλάσσει ἐάν ἀλλάξωμεν τόν πολλαπλασιαστέον ἤ τόν πολλαπλασιαστήν".

Ἰδιότητες τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ

α) Ἑνωτική Ἰδιότης "Εἰς κάθε γινόμενον ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ὅσους παράγοντας θέλομεν μέ τό γινόμενον αὐτῶν".

Δηλ. 2Χ3Χ4Χ5=2Χ15Χ4   ὅπου ὁ 15 = 3Χ5

Γενικῶς   αΧβΧγΧδ = αΧ(βΧγ)Χδ

β) Διαλυτική ἰδιότης. "Εἰς κάθε γινόμενον ἠμποροῦμεν νά ἀντικαταστήσωμεν ὁποιοδήποτε παράγοντα μέ ἄλλους πού νά ἔχουν αὐτόν ὡς γινόμενον".

Δηλ.   2Χ15Χ4 = 2Χ3Χ5Χ4

Γενικῶς   αΧ(βΧγ)Χδ = αΧβΧγΧδ

Ἡ διαλυτική ἰδιότης εἶναι τό ἀντίστροφον τῆς ἑνωτικῆς.

γ) "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενον ἐπί ἀριθμόν ἤ ἀριθμόν ἐπί γινόμενον ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα ἐπί τόν ἀριθμόν".

Δηλ.   (2Χ3Χ5)Χ7 = 2Χ21Χ5

Γενικῶς   (αΧβΧγ)Χδ = αΧ(βΧδ)Χγ

δ) " Διά νά πολλαπλασιάσωμεν γινόμενα ἀρκεῖ νά σχηματίσωμεν ἕνα γινόμενον ἀπό ὅλους τούς παράγοντας".

Δηλ.   (2Χ3)Χ(4Χ5) = 2Χ3Χ4Χ5

Γενικῶς   (αΧβ)Χ(γΧδ) = αΧβΧγΧδ

ε) Ἐπιμεριστική Ἰδιότης ἀθροίσματος. "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἄθροισμα ἐπί ἀριθμόν ἤ ἀριθμόν ἐπί ἄθροισμα ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν κάθε προσθετέον ἐπί τόν ἀριθμόν καί ἔπειτα νά προσθέσωμεν τά μερικά γινόμενα πού θά προκύψουν".

Δηλ. (3+4)X7 = 7X(3+4) = (3X7)+(4X7)

Γενικῶς (α+β)Xγ = γX(α+β) = (αXγ)+(βXγ)

<u>Παρατήρησις:</u> Τό ἄθροισμα (3X7)+(4X7) εἶναι ἄθροισμα γινομένων εἰς τά ὁποῖα ὁ παράγων 7 εἶναι κοινός. Διά τοῦτο ὁ 7 λέγεται κοινός παράγων. Ἐπειδή τό ἄθροισμα (3X7)+(4X7) εἶναι ἴσον μέ τό 7X(3+4) διά τοῦτο λέγομεν: "Κάθε ἄθροισμα γινομένων εἰς τά ὁποῖα ὑπάρχει κοινός παράγων εἶναι ἴσον μέ τόν κοινόν παράγοντα ἐπί τό ἄθροισμα τῶν μή κοινῶν παραγόντων".

<u>στ) Ἐπιμεριστική Ἰδιότης διαφορᾶς.</u> "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν διαφοράν ἐπί ἀριθμόν ἤ ἀριθμόν ἐπί διαφοράν ἀρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν χωριστά τόν μειωτέον καί χωριστά τόν ἀφαιρετέον ἐπί τόν ἀριθμόν καί ἀπό τό πρῶτον γινόμενον νά ἀφαιρέσωμεν τό δεύτερον γινόμενον".

Δηλ. (5-3)X7 = 7X(5-3) = (5X7)-(3X7)

Γενικῶς (α-β)Xγ = γX(α-β) = (αXγ)-(βXγ)

<u>Παρατήρησις:</u> Ἡ διαφορά (5X7)-(3X7) εἶναι διαφορά γινομένων εἰς τά ὁποῖα ὁ 7 εἶναι κοινός παράγων. Ἐπειδή δέ ἡ διαφορά (5X7)-(3X7) εἶναι ἴση μέ 7X(5-3) διά τοῦτο λέγομεν "Κάθε διαφορα γινομένων εἰς τά ὁποῖα ὑπάρχει κοινός παράγων εἶναι ἴση μέ τόν κοινόν παράγοντα ἐπί τήν διαφοράν τῶν μή κοινῶν παραγόντων".

<u>Σημείωσις:</u> Ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας ἀπομονώνομεν τόν κοινόν παράγοντα καί πολλαπλασιάζομεν αὐτόν ἐπί τό ἄθροισμα ἤ ἐπί τήν διαφοράν τῶν μή κοινῶν παραγόντων λέγεται <u>Ἐξαγωγή κοινοῦ παράγοντος.</u>

ε) " Διά νά πολλαπλασιάσωμεν δύο άθροίσματα άρκεῖ νά πολλαπλασιάσωμεν κάθε προσθετέον τοῦ ἑνός ἀθροίσματος μέ κάθε προσθετέρον τοῦ ἄλλου ἀθροίσματος καί ἔπειτα νά προσθέσωμεν τά προκύπτοντα μερικά γινόμενα"

Δηλ. $(2+3)X(4+5)=(4X2)+(4X3)+(5X2)+(5X3)$

Γενικῶς $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)=(\alpha X\gamma)+(\beta X\gamma)+(\alpha X\delta)+(\beta X\delta)$

Τό Μηδέν εἰς τόν Πολλαπλασιασμόν

Ἐπειδή $0+0=0$ κατά τόν πρῶτον ὁρισμόν τοῦ Πολλαπλασιασμοῦ θά ἔχωμεν $0X2=0$ καί κατά τόν νόμον τῆς Ἀντιμεταθέσεως θά ἔχωμεν $2X0=0$. Γενικῶς $0X\alpha=0$ καί $\alpha X0=0$. Ἄρα

α) Ὅταν ἕνας ἀριθμός πολλαπλασιασθῆ μέ τό μηδέν τότε γίνεται καί αὐτό μηδέν.

β) Ὅταν ἕνα γινόμενον εἶναι ἴσον μέ τό μηδέν τότε ἕνας παράγων αὐτοῦ θά εἶναι ἴσος μέ τό μηδέν.

Ἰδιότητες Ἰσότητος καί Ἀνισότητος εἰς τόν Πολλαπλασιασμόν

α) Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος θά προκύψη πάλιν ἰσότης".

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ἰσότης $7=4+3$ καί ὁ ἀριθμός 2 μέ τόν ὁποῖον θά πολλαπλασιάσωμεν. Θά ἔχωμεν: $7X2=(4+3)X2$ ἤ $7X2=(4X2)+(3X2)$ ἤ $14=8+6$. Γενικῶς ἔστω ἡ ἰδότης $\alpha=\beta$ καί ὁ ἀριθμός γ. Θά ἔχωμεν $\alpha X\gamma=\beta X\gamma$.

Ἡ ἰδιότης αὐτή ἠμπορεῖ νά διατυπωθῆ καί ὡς ἑξῆς: "Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν ἰσότητας κατά μέλη θά προκύψη πάλιν ἰσότης".

β) "Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος θά προκύψη πάλιν ἀνισότης καί ὁμοία πρός τήν πρώτην".

Παράδειγμα: Ἔστω ἡ ἀνισότης $7>5+1$ καί ὁ ἀριθμός 2 μέ τόν ὁποῖον θά πολλαπλασιάσωμεν: θά ἔχωμεν $7X2>(5+1)X2$ ἤ $14>(5X2)+(1X2)$ ἤ $14>10+2$. Γενικῶς Ἔστω ἡ ἀνισότης $\alpha>\beta$ καί ὁ ἀριθμός γ, θά ἔχωμεν $\alpha X\gamma>\beta X\gamma$.

Πολλαπλάσιον

Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμός $6=2X3$. Ὁ 6 προκύπτει ἀπό τόν 2. Ἐάν πολλαπλασιασθῇ ὁ 2 ἐπί τόν 3. Ἐπίσης ὁ 6 προκύπτει ἀπό τόν 3 ἐάν πολλαπλασιασθῇ ὁ 3 ἐπί τον 2. Διά τοῦτο ὁ "6" λέγεται πολλαπλάσιον τοῦ "2" καί πολλαπλάσιον τοῦ "3". Ὁ "2" καί ὁ "3" λέγονται ὑποπολλαπλάσια τοῦ "6". Ἄρα "Πολλαπλάσιον ἑνός ἀριθμοῦ λέγεται τό γινόμενον αὐτοῦ ἐπί ἄλλον ἀριθμόν".

Αἱ ἐκφράσεις γινόμενον καί πολλαπλάσιον εἶναι συνώνυμοι. Ἐπίσης αἱ ἐκφράσεις παράγων καί ὑποπολλαπλάσιον εἶναι συνώνυμοι.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1) Ποῖον τό 70/πλάσιον τοῦ 8970 καί τό 25/πλάσιον τοῦ 97800;

2) Μία ὀκᾶ τσιμέντου ἀνταλλάσσεται μέ 7 ὀκ.ἄμμου. Ἐάν δώσωμεν 19 ὀκ.τσιμέντου πόσας ὀκάδας ἄμμου θά πάρωμεν;

3) Τροχός ἔκαμε 789 στροφάς ἐπί ἑνός δρόμου.Ποῖον τό μῆκος τοῦ δρόμου ἄν ἡ περιφέρεια τοῦ τροχοῦ εἶναι 7 πήχεις;

4) Τά νέφη διωκόμενα ὑπό τοῦ ἀνέμου τρέχουν 50 μ. κατά δευτερόλεπτον. Ποίαν ἀπόστασιν θά διατρέξουν εἰς μίαν ὥραν;

5) Πόσα πρῶτα λεπτά καί πόσα δεύτερα ἔχει τό ἡμερονύκτιον;

6) Βιβλίον ἔχει 487 σελίδας κάθε σελίς ἔχει 45 στίχους καί κάθε στίχος ἔχει 54 γράμματα.Πόσα γράμματα ἔχει τό βιβλίον;

7) Ὁ ἦχος εἰς τόν ἀέρα τρέχει 340 μ. κατά δευτερόλεπτον.Εἰς ποίαν ἀπόστασιν εὑρίσκεται ἕνα νέφος τοῦ ὁποίου ἡ βροντή ἠκούσθη 8 δευτερόλεπτα μετά ἀπό τήν ἀστραπήν;

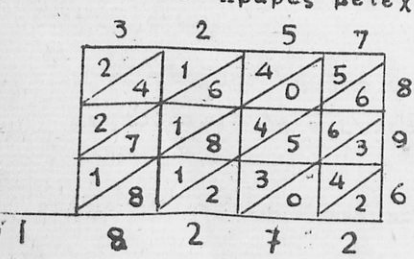
8) Ὁ ἦχος εἰς τό νερό τρέχει 1435 μέτρα κατά δευτερόλεπτον."Ενα ὑποβρύχιον ἤκουσε τήν μηχανήν ἑνός θωρηκτοῦ 3 δευτερόλεπτα μετά ἀπό τήν λάμψιν τῶν τηλεβόλων.Πόσον ἀπέχει τό ὑποβρύχιον ἀπό τό θωρηκτόν;

9) Μία βρύση ἠμπορεῖ νά δώσῃ εἰς μίαν ὥραν 198 ὀκ. νερό.Πόσας ὀκάδας χωρεῖ δεξαμενή πού γεμίζει ἀπό τήν βρύσην εἰς 35 ὥρας;

10) Διά νά γίνῃ ἕνα ἔργον ἠργάσθησαν 27 τεχνῖται ἐπί 15 ἡμέρας καί ἀπό 8 ὥρας τήν ἡμέραν.Εἰς πόσας ὥρας ὁ ἕνας τεχνίτης θά κάμῃ μόνος του τό ἔργον αὐτό;

11) Κατά τήν ἐκτέλεσιν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τοῦ 756 ἐπί ἕνα ἀριθμόν εὑρέθη ὡς γινόμενον 20412.Ἐλήφθη ὅμως ὡς τελευταῖον ψηφίον τοῦ πολλαπλασιαστοῦ τό 7 ἀντί τό 9. Πόσον τό λάθος καί ποῖον τό ἀληθές γινόμενον;

12) Ἔστω ὁ πολλαπλασιασμός τοῦ 3257Χ896.Οἱ Ἰνδοί καί οἱ Ἄραβες μετεχειρίζοντο τήν ἑξῆς διάταξιν



Κατά τήν διάταξιν αὐτήν εἰς τά μερικά γινόμενα τῶν ψηφίων δέν φυλάττομεν κρατούμενα τό ὁλικόν δέ γινόμενον 2918272 εὑρίσκομεν προσθέτοντες τούς ἀριθμούς πού εὑρίσκονται εἰς ἑκάστην διαγώνιον ζώνην.

Νά ἀποδειχθῇ τό ὀρθόν τῆς διατάξεως αὐτῆς.

13) Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν δύο,τρεῖς,τέσσαρας κλπ. ἀνισότητας ἀλλά τόν μεγαλύτερον μέ τόν μεγαλύτερον καί τόν μικρότερον μέ τόν μικρότερον τί θά προκύψῃ;

Διαίρεσις

α) Ἔχομεν π.χ.ἕνα βαρέλι πού χωρεῖ 10 ὀκ.νερό καί ἕνα δοχεῖον πού χωρεῖ 5 ὀκ.νερό καί θέλομεν νά μάθωμεν πόσας φοράς περιέχεται ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου εἰς τήν χωρητικότητα τοῦ βαρελιοῦ. Πρός τοῦτο πρέπει νά γεμίσωμεν διαδοχικῶς μέ νερό τοῦ βαρελιοῦ τό δοχεῖον μέχρις ὅτου ἔλθῃ στιγμή πού νά μή ἠμποροῦμε πλέον νά γεμίσωμεν μέ νερό τοῦ βαρελιοῦ τό δοχεῖον. Αὐτό σημαίνει ὅτι πρέπει νά ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς τάς 5 ὀκ.πού χωρεῖ τό δοχεῖον ἀπό τάς 10 ὀκ. τοῦ βαρελιοῦ μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς ὑπόλοιπον πέραν τοῦ ὁποίου νά μή ἠμποροῦμεν νά συνεχίσωμεν τήν ἀφαίρεσιν δηλ.10 ὀκ.-5 ὀκ.=5 ὀκ. 5ὀκ.-5 ὀκ.=0 ὀκ. Ἀφαιρέσαμεν λοιπόν τάς 5 ὀκ.διαδοχικῶς 2 φοράς χωρίς νά μείνῃ καμμία ὀκᾶ. Ἐάν τό βαρέλι περιεῖχεν 11 ὀκ.νερό τότε θά ἀφαιροῦσαμεν πάλιν τάς 5 ὀκ.διαδοχικῶς 2 φοράς καί θά ἐπερίσσευε 1 ὀκᾶ. Ὥστε ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου περιέχεται 2 φοράς εἰς τήν χωρητικότητα τοῦ βαρελιοῦ. Ἡ πρᾶξις αὐτή λέγεται Μ έ τ ρ η σ ι ς. Ἄρα

<u>Μέτρησις</u> εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φοράς περιέχεται ἕνας ἀριθμός εἰς ἄλλον ἀριθμόν.

β) Ἔχομεν π.χ.10 βόλους καί θέλομεν νά τούς μοιράσωμεν ἐξ ἴσου εἰς 5 παιδιά καί νά μάθωμεν ἀπό πόσους βόλους θά πάρῃ τό καθένα παιδί.Πρός τοῦτο παίρνουμε 5 βόλους (διότι τά παιδιά εἶναι 5) καί δίδομεν ἀπό 1 βόλον εἰς τό καθένα παιδί. Παίρνομε πάλι 5 βόλους ἀπό τούς ὑπολοίπους καί δίδομεν πάλιν ἀπό 1 βόλον εἰς τό καθένα παιδί. Ὥστε κάθε παιδί θά πάρῃ συνολικῶς ἀπό 2 βόλους χωρίς νά μείνῃ κανένας βόλος. Ἐάν οἱ βόλοι ἦσαν 11 τότε κάθε παιδί θά πάρῃ πάλιν συνολικῶς ἀπό 2 βόλους ἀλλά θά περισσεύσῃ 1 βόλος. Ἡ πρᾶξις αὐτή λέγεται Μερισμός εἰς ἴσα μέρη ἤ ἁπλῶς Μερισμός. Ἄρα

Μ ε ρ ι σ μ ό ς εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας χωρίζομεν ἕνα ἀριθμόν εἰς τόσα ἴσα μέρη ὅσας μονάδας ἔχει ἕνας ἄλλος ἀριθμός.

Ἡ Μέτρησις καί ὁ Μερισμός μαζί ἀποτελοῦν τήν Διαίρεσιν.

Εἰς τά δύο προηγούμενα παραδείγματα παρατηροῦμε τά ἑξῆς:

1ον) Ἐδόθησαν δύο ἀριθμοί ὁ 10 (ἤ ὁ 11) καί ὁ 5 καί ἀπό αὐτούς εὑρέθη τρίτος ὁ 2 ὁ ὁποῖος φανερώνει ὅτι ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν τόν 5 ἀπό τόν 10 (ἤ ἀπό τόν 11) διαδοχικῶς 2 φοράς. Ἄρα:

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν πόσας φοράς ἠμποροῦμεν νά ἀφαιρέσωμεν διαδοχικῶς ἕνα ἀριθμόν ἀπό ἄλλον ἀριθμόν.

2ον) Ἐδόθησαν δύο ἀριθμοί ὁ 10 καί ὁ 5 καί ἀπό αὐτούς εὑρέθη τρίτος ἀριθμός ὁ 2 ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τόν 5 δίδει τόν 10.

Ἐπίσης: ἐδόθησαν δύο ἀριθμοί ὁ 11 καί ὁ 5 καί ἀπό αὐτούς εὑρέθη τρίτος ἀριθμός ὁ 2 ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τόν 5 δίδει τόν 10 ὁ ὁποῖος εἶναι τό μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά πολλαπλάσια τοῦ 5 ποῦ χωροῦν εἰς τόν 11. Ἄρα:

Διαίρεσις εἶναι ἡ πρᾶξις εἰς τήν ὁποίαν δίδονται δύο ἀριθμοί καί ἀπό αὐτούς εὑρίσκομεν τρίτον ἀριθμόν ὁ ὁποῖος πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τόν δεύτερον δίδει ἤ τόν πρῶτον ἤ τό μεγαλύτερον πολλαπλάσιον τοῦ δευτέρου τό ὁποῖον χωρεῖ εἰς τόν πρῶτον.

Ὁ τρίτος ἀριθμός πού εὑρίσκομεν λέγεται πηλίκον. Ἀπό τούς δύο ἀριθμούς ποῦ μᾶς δίδονται ἐκεῖνος μέ τόν ὁποῖον θά πολλαπλασιάσωμεν τόν τρίτον λέγεται διαιρέτης, ὁ ἄλλος Διαιρετέος καί ἡ διαφορά τοῦ γινομένου διαιρετέου καί πηλίκου ἀπό τοῦ διαιρετέου λέγεται Ὑπόλοιπον καί εἶναι πάντοτε μικρότερον τοῦ διαιρέτου.

Εἰς τήν Μέτρησιν ὁ διαιρετέος λέγεται Μετρητέος, ὁ διαιρέτης λέγεται Μέτρον καί τό πηλίκον λέγεται Λόγος τοῦ διαιρετέου πρός τόν διαιρέτην. Εἰς τήν μέτρησιν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι πάντοτε ὁμοειδεῖς ἀριθμοί τό δέ πηλίκον εἶναι πάντοτε ἀφηρημένος ἀριθμός διότι φανερώνει πόσας φοράς ὁ διαιρετέος περιέχει τόν διαιρέτην· ἀλλά διά νά ἀπαντήσωμεν εἰς τό πρόβλημα τόν κάμνομεν συγκεκριμένον ἀπό τήν μονάδα τοῦ προβλήματος τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τήν ἀξίαν. Ἐπομένως εἰς τήν μέτρησιν τό πηλῖκον παριστάνει τό ζητούμενον εἰς τό πρόβλημα.

Εἰς τόν Μερισμόν ὁ διαιρετέος λέγεται Μεριστέος ὁ διαιρέτης λέγεται Μεριστής καί τό πηλίκον λέγεται Μερίδιον. Εἰς τόν Μερισμόν ὁ διαιρετέος καί ὁ διαιρέτης εἶναι πάντοτε ἑτεροειδεῖς ἀριθμοί τό δέ πηλίκον εἶναι πάντοτε ὁμοειδές πρός τόν διαιρετέον διότι εἶναι μέρος αὐτοῦ.

Τό σημεῖον τῆς διαιρέσεως εἶναι δύο τελεῖαι(:) ἀπαγγέλλεται "διά" καί "πρός" καί τίθεται μεταξύ διαιρετέου καί διαιρέτου π.χ. 10:5

Σημείωσις: 'Η λέξις"πηλίκον" εἶναι τό οὐδέτερον τῆς ἐρωτηματικῆς ἀντωνυμίας πηλίκος,πηλίκη,πηλίκον πού σημαίνουν πόσος,πόση,πόσον.

Τελεία καί 'Ατελής Διαίρεσις

α) "Οταν τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως εἶναι μηδέν τότε ἡ διαίρεσις λέγεται τελεία ἤ ἀκριβής καί πηλίκον λέγεται Τέλειον ἤ 'Ακριβές .

Εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τόν διαιρέτην ἐπί τό πηλίκον."Οταν ἔχωμεν διαίρεσιν μετρήσεως τότε ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τόν διαιρέτην ἐπί τό πηλίκον."Οταν ἔχωμεν διαίρεσιν μετρήσεως τότε ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τόν διαιρέτην ἐπί τό πηλίκον ὅταν ὅμως ἔχωμεν διαίρεσιν μερισμοῦ τότε ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τό πηλίκον ἐπί τόν διαιρέτην.

β) "Οταν τό ὑπόλοιπον δέν εἶναι μηδέν τότε ἡ διαίρεσις λέγεται 'Ατελής καί τό πηλίκον λέγεται 'Ατελές.

Εἰς κάθε ἀτελῆ διαίρεσιν ὁ διαιρετέος ἰσοῦται μέ τόν διαιρέτην ἐπί τό πηλίκον ηὐξημένο κατά τό ὑπόλοιπον.

Πλῆθος τῶν ψηφίων τοῦ πηλίκου

'Ημποροῦμεν πάντοτε νά γνωρίζωμεν ἀπό πόσα ψηφία ἀποτελεῖται τό πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως χωρίς νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν.

α) "Ὅταν δεξιά τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἕνα μηδενικόν καί προκύψῃ ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου τότε τό πηλίκον εἶναι μονοψήφιον."

π.χ. Τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως 3597:421 εἶναι μονοψήφιον διότι ἄν γράψωμεν ἕνα μηδενικόν δεξιά τοῦ 421 θά προκύψῃ ὁ 4210, ὁ ὁποῖος εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 3597.

<u>Ἐξήγησις</u>. Ὅταν γράψωμεν ἕνα μηδενικόν δεξιά τοῦ διαιρετέου κάμνομεν αὐτόν 10 φοράς μεγαλύτερον. Ἐάν το 10/πλάσιον τοῦ διαιρετέου εἶναι λοιπόν μεγαλύτερον τοῦ διαιρέτου θά πῆ ὅτι ὁ διαιρέτης χωρεῖ εἰς τόν διαιρετέον ὀλιγώτερον ἀπό 10 φοράς δηλ. θά πῆ ὅτι τό πηλίκον εἶναι ἕνας ἀριθμός μικρότερος τοῦ 10 ἄρα λοιπόν εἶναι μονοψήφιον.

β) "Ὅταν δεξιά τοῦ διαιρετέου γράψωμεν ἕνα μηδενικόν καί προκύψῃ ἀριθμός μικρότερος τοῦ διαιρέτου τότε τό πηλίκον εἶναι πολυψήφιον". Π.χ. τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως 9625:87 εἶναι πολυψήφιον διότι ἄν γράψωμεν ἕνα μηδενικόν δεξιά τοῦ 87 θά προκύψῃ ὁ 870, ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 9625.

<u>Ἐξήγησις</u>. Ὅταν γράψωμεν ἕνα μηδενικόν δεξιά τοῦ διαιρέτου κάμνομεν αὐτόν 10 φοράς μεγαλύτερον. Ἐάν λοιπόν τό 10/πλάσιον τοῦ διαιρέτου εἶναι μικρότερον τοῦ διαιρετέου θά πῆ ὅτι ὁ διαιρέτης χωρεῖ εἰς τόν διαιρετέον περισσότερον ἀπό 10 φοράς δηλ. θά πῆ ὅτι τό πηλίκον εἶναι ἕνας ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 10. Ἄρα λοιπόν εἶναι πολυψήφιον.

<u>Ὥστε</u> "Διά νά ἴδωμεν ἀπό πόσα ψηφία ἀποτελεῖται

τό πηλίκον μιᾶς διαιρέσεως χωρίς νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν γράφομεν δεξιά τοῦ διαιρέτου μηδενικά μέχρις ὅτου γίνει μεγαλύτερος τοῦ διαιρετέου. Ὅσα μηδενικά γράψωμεν τόσα ψηφία θά ἔχη τό πηλίκον".

Ἐκτέλεσις τῆς διαιρέσεως

Πίναξ ἁπλῆς διαιρέσεως

Δεκάδες	Μονάδες Β										9	8	7	6	5	4	3	2	1
															Γ				
8	9	8	7	6	5	4	3	2	1		9								
										0	8								
7	9	8	7	6	5	4	3	2			8	9							
									1	0	7	8							
6	9	8	7	6	5	4					7	8	9						
							3				7	7	9						
								2	1	0	6	7	8						
5	9	8	7	6							6	7	8	9					
					5	4					6	6	7	9					
							3	2	1	0	5	6	7	8					
4	9										5	6	7	8	9				
		8									5	6	7	8	9				
			7	6	5						5	5	6	7	9				
						4	3	2			4	5	6	7	8				
									1	0	4	5	5	6	8				
3	9	7	8	6							4	4	5	6	7	9			
					5						3	4	5	5	7	8			
						4	3	2			3	4	4	5	6	8			
									1	0	3	3	4	5	6	7			
2	9	8									3	3	4	4	5	7	9		
			7								3	3	3	4	5	6	9		
				6	5						2	3	3	4	5	6	8		
						4					2	3	3	4	4	6	8		
							3	2	1		2	2	3	3	4	5	7		
										0	2	2	2	3	4	5	6		
1	9	8									2	2	2	3	4	4	6	9	
			7	6							1	2	2	2	3	4	5	8	
					5						1	1	2	2	3	3	5	7	
						4					1	1	2	2	3	3	4	7	
							3	2			1	1	1	2	2	3	4	6	
									1	0	1	1	1	1	2	2	3	5	
0	9										1	1	1	1	2	2	3	4	9
		8									0	1	1	1	1	2	2	4	8

			7								0	0	1	1	1	1	2	3	7
				6							0	0	0	1	1	1	2	3	6
					5						0	0	0	0	1	1	1	2	5
						4					0	0	0	0	0	1	1	2	4
							3				0	0	0	0	0	0	1	1	3
								2			0	0	0	0	0	0	0	1	2
									1		0	0	0	0	0	0	0	0	1
										0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

<u>Χρῆσις τοῦ πίνακος</u> Εἰς τὴν κατακόρυφον στήλην (Α) εὑρίσκονται αἱ δεκάδες τοῦ Διαιρετέου, εἰς τὰς ὁριζοντίας στήλας (Β) εὑρίσκονται αἱ μονάδες τοῦ Διαιρετέου καὶ εἰς τὴν πρώτην ἄνω ὁριζοντίαν στήλην (Γ) εὑρίσκεται ὁ Διαιρέτης. Τὸ πηλῖκον τὸ ὁποῖον ἄλλοτε εἶναι ἀκριβὲς καὶ ἄλλοτε δὲν εἶναι ἀκριβὲς θά τὸ ἀναζητοῦμεν εἰς τὴν διασταύρωσιν τῆς ὁριζοντίας στήλης τοῦ διαιρετέου καὶ τῆς κατακορύφου στήλης τοῦ Διαιρέτου ἐντὸς τῶν τετραγωνιδίων ποὺ σχηματίζουν αἱ στῆλαι (Γ).

<u>Διαίρεσις εἰς τὴν ὁποίαν τὸ πηλίκον εἶναι πολυψήφιον.</u>

<u>Παράδειγμα:</u>

```
Διαιρετέος .....5537 | 45 διαιρέτης
                 45  | 123 πηλίκον
1ος μερ.διαιρετ. 103
                  90
2ος  "     "    =137
                 135
  Ὑπόλοιπον       =2
```

Λέγομεν δύο ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης, δύο ψηφία χωρίζομεν καὶ ἀπό τὸν διαιρετέον; Τὸ 45 εἰς τὸ 55 χωρεῖ μιά φορά. Γράφομεν εἰς τὸ πηλῖκον 1. Τὸ 1Χ45=45: Τὸ γινόμενον 45 τὸ γράφομεν κάτω ἀπὸ τὸ τμῆμα 55 τοῦ διαιρετέου ποὺ ἐχωρίσαμεν καὶ ἀφαιροῦμεν.Προκύπτει τό ὑπόλοιπον 10.Δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 10 κατεβάζομεν τό ψηφίον 3 τοῦ διαιρετέου καί σχηματίζεται ὁ ἀριθμός 103 ὁ ὁποῖος λέγεται πρῶτος μερικός διαιρετέος. Λέγομεν: ὁ 45 εἰς τόν 103 χωρεῖ δύο φοράς. Γράφομεν 2 εἰς τό πηλίκον. Τό 2Χ45=90.Τό γινόμενον 90 τό γράφομεν κάτω ἀπό τά δύο τελευταῖα ψηφία τοῦ πρώτου μερικοῦ διαιρετέου καί ἀφαιροῦμεν.Προκύπτει ὑπόλοιπον 13, Δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 13 κατεβάζομεν τό ψηφίον 7 τοῦ διαιρετέου καί σχηματίζεται ὁ ἀριθμός 137 ὁ ὁποῖος λέγεται δεύτερος μερικός διαιρετέος.Λέγομεν: ὁ 45 εἰς τόν 137 χωρεῖ 3 φοράς. Γράφομεν εἰς τό πηλίκον τό 3. Τό 3Χ45=135.Τό γινόμενον 135 τό γράφομεν κάπω ἀπό τά τρία τελευταῖα ψηφία τοῦ δευτέρου μερικοῦ διαιρετέου καί ἀφαιροῦμεν. Προκύπτει ὑπόλοιπον 2.

Ἐάν τύχῃ ἕνας ἀπό τούς μερικούς διαιρετέους νά μή διαιρῆται διά τοῦ διαιρέτου τότε γράφομεν μηδέν εἰς τό πηλίκον καί κατεβάζομεν τό ἑπόμενον ψηφίον.

Δοκιμή τῆς Διαιρέσεως

Αος Τρόπος: Πολλαπλασιάζομεν τόν διαιρέτην ἐπί τό πηλίκον καί εἰς τό γινόμενον προσθέτομεν τό ὑπόλοιπον.Ἐάν τό ἐξαγόμενον ἰσοῦται μέ τόν διαιρετέον τότε ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρίς λάθος.

Βος Τρόπος: Ἔστω ἡ διαίρεσις: 9483:168 εἰς τήν ὁποίαν τό πηλίκον εἶναι 56 καί τό ὑπόλοιπον 75.

Προσθέτομεν χωριστά τά ψηφία τοῦ διαιρέτου καί χωριστά τά ψηφία τοῦ πηλίκου μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψηφίους ἀριθμούς τούς ὁποίους γράφομεν εἰς τάς ἄνω γωνίας ἑνός σταυροῦ.

Δηλ. 1+0+8=15, 1+5=6   5+6=11, 1+1=2. Πολλαπλασιάζομεν τούς μονοψηφίους αὐτούς καί τοῦ γινομένου προσθέτομεν τά ψηφία μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον ἀριθμόν δηλ. 6Χ2=12, 1+2=3. Προσθέτομεν τά ψηφία τοῦ ὑπολοίπου μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον δηλ. 7+5=12, 1+2=3 Τόν μονοψήφιον αὐτόν καί τόν προηγούμενον τούς προσθέτομεν μέχρις ὅτου καταλήξωμεν εἰς μονοψήφιον δηλ. 3+3=6 καί τό ἄθροισμά των τό γράφομεν εἰς μίαν ἀπό τάς κάτω γωνίας τοῦ σταυροῦ, εἰς δέ τήν ἄλλην γωνίαν γράφομεν τόν μονοψήφιον πού θά εὕρωμεν ὅταν προσθέσωμεν τά ψηφία τοῦ διαιρετέου. Ἐάν οἱ ἀριθμοί τῶν δύο κάτω γωνιῶν εἶναι ἴσοι τότε ἡ πρᾶξις πιθανόν νά ἔγινε χωρίς λάθος.

6	2
6	6

<u>Σπουδαία παρατήρησις</u>

Ὅταν ἡ δοκιμή διά τοῦ 9 δέν ἐπιτυγχάνει θέ πῆ ὅτι ἔγινε λάθος εἰς τήν ἐκτέλεσιν τῆς πράξεως. Ἀλλά καί ὅταν ἡ δοκιμή διά τοῦ 9 ἐπιτυγχάνει καί τότε δέν ἠμποροῦμε νά εἴπωμεν μετά βεβαιότητος ὅτι ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρίς λάθος καί διά τοῦτο λέγομεν "Ἡ πρᾶξις <u>πιθανόν</u> νά ἔγινε χωρίς λάθος" Διότι ὑπάρχουν περιπτώσεις εἰς τάς ὁποίας ἡ δοκιμή διά τοῦ 9 δέν ἐλέγχει τά λάθη. Τά κυριώτερα δέ ἀπό τά λάθη αὐτά εἶναι τά ἑξῆς:

1) Ἐάν εἰς τό ἐξαγόμενον γίνῃ λάθος ἴσον μέ πολλαπλάσιον τοῦ 9.

2) Ἐάν αλλάξῃ ἡ τάξις δύο ψηφίων τοῦ γινομένου

3) Ἐάν γραφῇ 9 εἰς τήν θέσιν μηδενικοῦ καί ἀντιστρόφως

4) Ἐάν τό τελευτῖον ψηφίον ἑνός μερικοῦ γινομένου δέν γραφῆ κάτω ἀπό τό δεύτερον πρός τά δεξιά τοῦ προηγουμένου μερικοῦ γινομένου.

5) Ἐάν εἰς τήν πρόσθεσιν μιᾶς στήλης κατά λάθος αὐξήσωμεν (ἤ ἐλαττώσωμεν) τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων της κατά ἕνα ἀριθμόν εἰς δαε τήν πρόσθεσιν ἄλλης στήλης ἐλαττώσωμεν (ἤ αὐξήσωμεν) τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων της κατά τόν ἴδιον ἀριθμόν.

<u>Συντομίαι</u>

α) Διά νά διαιρέσωμεν ἀριθμόν πού τελειώνει εἰς μηδενικά, διά τοῦ 10,100,1000 κλπ. σβύνομεν ἀπό τόν ἀριθμόν τόσα μηδενικά ὅσα ἔχει ὁ 10,100,1000,κλπ.

β) Διά νά διαιρέσωμεν διά τοῦ 11 τριψήφιον ἀριθμόν τοῦ ὁποίου το μεσαῖον ψηφίον εἶναι ἴσον μέ τό ἄθροισμα τῶν ἄκρων ψηφίων, σβύνομεν τό μεσαῖον ψηφίον αὐτοῦ.

Π.χ. 583:11=53 δηλ.ἔσβυσα τό 8 καί ἔμεινε 53.

<u>Πότε κάμνομεν Διαίρεσιν.</u>

Διαίρεσιν κάμνομεν εἰς τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) ""Οταν θέλωμεν νά μοιράσωμεν εἰς ἴσα μέρη ἕνα ἀριθμόν".

Πρόβλημα: ""Εχω 37 βόλους τούς ὁποίους θέλω νά μοιράσω ἐξ ἴσου εἰς 7 πιιδιά καί νά μάθω ἀπό πόσους βόλους θά πάρη τό καθένα παιδί".

Λ ύ σ ι ς.

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Ἐπειδή τά παιδιά εἶναι 7 θά ἀφαιρέσω 7 βόλους ἀπό τούς 37 βόλους καί θά δώσω ἀπό 1 βόλο	$\begin{array}{r\|l} 37 & 7 \\ \hline 2 & 5 \end{array}$

εἰς τό καθένα παιδί. Θά μείνουν 30 βόλοι. Ἔπειτα θά ἀφαιρέσωμεν πάλιν 7 βόλους ἀπό 30 βόλους πού ἔμειναν καί θά δώσω ἀπό 1 βόλο εἰς τό καθένα παιδί κ.ο.κ. Ὥστε κάθε παιδί θά πάρῃ τόσους βόλους ὅσας φοράς ἠμπορεῖ νά ἀφαιρεθῇ ὁ 7 ἀπό τόν 37. Ἐπομένως θά διαιρέσω τόν 37 διά τοῦ 7.

Κάθε παιδί θά πάρῃ ἀπό 5 βόλους καί θά περισσεύσουν 2 βόλοι οἱ ὁποῖοι δέν εἶναι δυνατόν νά μοιρασθοῦν εἰς τά 7 παιδιά.

β) "Ὅταν ζητοῦμε πόσας φοράς ἕνας ἀριθμός περιέχεται εἰς ἄλλον"

<u>Πρόβλημα.</u> "Μία φιάλη εἶναι γεμάτη μέ 250 δράμια κρασί. Πόσα ποτήρια τῶν 20 δραμίων κρασί περιέχει ἡ φιάλη;"

<u>Λύσις</u>

<u>Σκέψις</u>

Πρέπει ἀπό τά 250 δράμια κρασί τῆς φιάλης νά ἀφαιροῦμε 20 δράμια κρασί πού χωρεῖ τό ποτῆρι. Ὅσας φοράς ἀφαιρέσωμεν τά 20 δράμια τόσα ποτήρια τῶν 20 δραμίων περιέχει ἡ φιάλη. Ἐπομένως θά διαιρέσωμεν τόν 250 διά τοῦ 20.

<u>Ἐκτέλεσις</u>

250	20
=50	12
10	

Ἡ φιάλη περιέχει 12 ποτήρια τῶν 20 δραμίων περισσεύουν δέ καί 10 δράμια μέ τά ὁποῖα δέν γεμίζει ἕνα τέτοιο ποτῆρι.

γ) "Ὅταν γνωρίζωμεν τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν καί τόν ἕνα ἀπό τούς δύο καί ζητοῦμεν τόν ἄλλον".

<u>Πρόβλημα:</u> "Τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 391. ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ 17. ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;"

Λ ύ σ ι ς

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ 391 διά 17° διότι καθώς γνωρίζομεν τό πηλίκον πολλαπλασιαζόμενον ἐπί τόν διαιρέτην δίδει γινό-	391:17=23 Ὥστε ὁ ἄλλος ἀριθμός εἶναι ὁ 23.

μενον τόν διαιρετέον. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν θά διαιροῦμεν πάντοτε τό γνωστόν γινόμενον διά τοῦ γνωστοῦ παράγοντος. Ἐπίσης ἐάν ὁ ζητούμενος παράγων εἶναι ὁ πολλαπλασιαστέος τότε ἡ διαίρεσις εἶναι τοῦ Μερισμοῦ ἐάν ὁ ζητούμενος παράγων εἶναι ὁ πολλαπλασιαστής τότε ἡ διαίρεσις εἶναι τῆς Μετρήσεως.

β) "Ὅταν γνωρίζωμεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων ἑνός πράγματος καί ζητοῦμεν τήν ἀξίαν τῆς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος".

Πρόβλημα: "Ἀγόρασα 3 μέτρα ὑφάσματος καί ἐπλήρωσα 138 δρχ. Πόσον ἀξίζει τό 1 μέτρο τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;"

Λ ύ σ ι ς

Σκέψις	Κατάταξις-Ἐκτέλεσις
Αἱ 138 δρχ. εἶναι ἡ ἀξία τῶν 3 μέτρων. Διά νά εὕρω λοιπόν τήν ἀξίαν τοῦ ἑνός μέτρου πρέπει νά μοιράσω τάς 138 δρχ. εἰς 3 ἴσα μέρη διότι τά μέτρα εἶναι 3 θά διαιρέσω ἐπομένως τόν 138 δρχ. διά τοῦ 3.	Τά 3 μ. ἀξίζουν 138 δρχ. τό 1 μ. ; 138 δρχ:3 = 46 δρχ. Ὥστε τό ἕνα μέτρο τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ ἀξίζει 46 δρχ.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιρετέος εἶναι ἡ ἀξία τῶν πολλῶν μονάδων καὶ διαιρέτης ὁ ἀριθμὸς ποὺ φανερώνει τὸ πλῆθος τῶν πολλῶν μονάδων καὶ ὁ ὁποῖος θεωρεῖται ὡς ἀφηρημένος εἰς τὴν σκέψιν καὶ εἰς τὴν ἐκτέλεσιν.

Ἐπειδὴ ἡ διαίρεσις τοῦ 138 διὰ τοῦ 3 εἶναι τελεία διὰ τοῦτο τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἠμποροῦμεν νὰ τὸ λύσωμεν καὶ διὰ τῆς ἑξῆς σκέψεως.

"Ἐὰν ἐγνώριζα τὴν ἀξίαν τοῦ ἑνὸς μέτρου καὶ τὴν πολλαπλασιάσω ἐπὶ 3 ποὺ εἶναι τὰ μέτρα ποὺ ἀγόρασα θὰ εὕρω γινόμενον τὰς 138 δρχ. ποὺ ἐπλήρωσα. Θὰ διαιρέσω λοιπὸν τὸ γνωστὸν γινόμενον 138 διὰ τοῦ γνωστοῦ παράγοντος 3".

ε) "Ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος ἑνὸς πράγματος, καθὼς καὶ τὴν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος καὶ ζητοῦμεν νὰ μάθωμεν πόσαι εἶναι αἱ πολλαὶ αὗται μονάδες"

<u>Πρόβλημα:</u> Τὸ μέτρον ὑφάσματος ἀξίζει 46 δραχ. πόσα μέτρα θὰ ἀγρράσω μὲ 138 δρχ;"

<u>Λύσις</u>

<u>Σκέψις</u>	<u>Κατάταξις-Ἐκτέλεσις</u>
Ὅταν ἀπὸ τὰς 138 δρχ. δώσω 46 δρχ. θὰ ἀγοράσω ἕνα μέτρο ἐὰν ἔπειτα δώσω ἄλλας 46 δρχ. θὰ ἀγοράσω ἄλλο μέτρο κ.ο.α.	Τὸ 1μ. ἀξίζει 46 δρχ. ; 138 " 138 : 46 = 3 φορές
Ἑπομένως θὰ ἀγοράσω τόσα μέτρα ὅσας φορὰς χωρεῖ ὁ 46 εἰς τὸν 138. Θὰ διαιρέσω λοιπὸν τὸν 138 διὰ τοῦ 46.	Ὥστε θὰ ἀγοράσω 3 μέτρα.

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν διαιρετέος εἶναι ἡ ἀξία τῶν ζητουμένων πολλῶν μονάδων καί διαιρέτης ἡ ἀξία τῆς μιᾶς μονάδος. Τό πηλίκον 3 ποῦ προέκυψεν εἶναι ἀφηρημένος ἀριθμός διότι φανερώνει τάς φοράς ποῦ χωρεῖ ὁ 46 εἰς τόν 138 ἀλλά διά νά ἀπαντήσωμεν εἰς τό πρόβλημα τόν κάμνομεν συγκεκριμένον ἀπό τήν μονάδα 1 μέτρον τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τήν ἀξίαν καί λέγομεν 3 μέτρα ἀντί 3 φοραί. Ἐπειδή ἡ διαίρεσις τοῦ 138 διά τοῦ 46 εἶναι τελεία διά τοῦτο τό πρόβλημα αὐτό ἠμποροῦμεν νά τό λύσωμεν καί μέ τήν ἑξῆς σκέψιν: "Ἐάν ἐγνώριζα πόσα μέτρα θά ἀγοράσω καί μέ αὐτά πολλαπλασιάσω τάς 46 δρχ. ποῦ εἶναι ἡ ἀξία τοῦ 1 μέτρου θά εὕρω γινόμενον τάς 138 δρχ. Θά διαιρέσω λοιπόν τό γνωστόν γινόμενον 138 διά τοῦ γνωστοῦ παράγοντος 46".

<u>Σχέσεις Διαιρετέου, διαιρέτου πηλίκου καί Ὑπολοίπου.</u>

α) Εἰς κάθε ἀτελῆ διαίρεσιν ὅταν πολλαπλασιάσωμεν (ἤ διαιρέσωμεν) τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην μέ ἕνα ἀριθμόν τότε τό μέν πηλίκο μένει τό ἴδιο τό δέ ὑπόλοιπον πολλαπλασιάζεται (ἤ διαιρεῖται) μέ τόν ἀριθμόν αὐτόν".

β) "Εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν ἐάν πολλαπλασιάσωμεν (ἤ διαιρέσωμεν) μόνον τόν διαιρετέον μέ ἕνα ἀριθμόν τότε τό πηλίκον πολλαπλασιάζεται (ἤ διαιρεῖται) μέ τόν ἀριθμόν αὐτόν".

γ) "Εἰς κάθε τελείαν διαίρεσιν ὅταν πολλαπλασιάσωμεν (ἤ διαιρέσωμεν) μόνον τόν διαιρέτην μέ ενα ἀριθμόν τότε, τό πηλίκον διαιρεῖται (ἤ πολλαπλασιάζεται) μέ τόν ἀριθμόν αὐτόν".

Σχέσις πολλαπλασιασμοῦ καί διαιρέσεως

Ὁ πολλαπλασιασμός καί ἡ διαίρεσις εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι, διότι ὅταν ἕνα δοθέντα ἀριθμόν τόν πολλαπλασιάσωμεν καί συγχρόνως τόν διαιρέσωμεν μέ ἄλλον ἀριθμόν τότε ὁ δοθείς δέν θά ἀλλάξῃ. π.χ. (7X2):2=14:2=7.

Ἰδιότητες τῆς Διαιρέσεως

α) "Διά νά διαιρέσωμεν ἄθροισμα δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν ἕκαστον προσθετέον διά τοῦ ἀριθμοῦ καί ἔπειτα νά προσθέσωμεν τά μερικά πηλίκα".

Δηλ. (15+24):3=(15:3)+(24:3)=5+8=13.

Γενικῶς. (α+β+γ):δ = (α:δ)+(β:δ)+(γ:δ)

β) "Διά νά διαιρέσωμεν διαφοράν δι' ἀριθμοῦ, ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν χωριστά τόν μειωτέον καί χωριστά τόν ἀφαιρετέον διά τοῦ ἀριθμοῦ καί ἀπό τοῦ πρώτου πηλίκου νά ἀφαιρέσωμεν τό δεύτερον πηλίκον".

Δηλ. (56-35):7 = (56:7)-(35:7)=8-5=3

Γενικῶς. (α-β):γ = (α:γ)-(β:γ)

γ) "Διά νά διαιρέσωμεν γινόμενον δι' ἀριθμοῦ ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν ἕνα μόνον παράγοντα διά τοῦ ἀριθμοῦ"

Δηλ. (3X8X5):4 = 3X(8:4)X5 = 3X2X5

Γενικῶς (αXβXγ):δ = αX(β:δ)Xγ

δ) "Διά νά διαιρέσωμεν ἀριθμόν διά γινομένου ἀρκεῖ νά διαιρέσωμεν τόν ἀριθμόν διά τοῦ πρώτου παράγοντος, τό πηλίκον αὐτῶν διά τοῦ δευτέρου παράγοντος, τό νέον πηλίκον διά τοῦ τρίτου παράγοντος κ.ο.κ."

Δηλ. 216:(2X3X4). Θά ἔχωμεν 216:2=108, 108:3=36, 36:4=9.

Γενικῶς. α:(βXγXδ)= (α:β):γ :δ

Τό Μηδέν είς τήν Διαίρεσιν

α) 0:7=0 διότι: 7Χ0=0 Γενικῶς 0:α=0

β) 7:0 Ἡ διαίρεσις αὐτή εἶναι ἀδύνατος διότι δέν ὑπάρχει ἀριθμός ὁ ὁποῖος πολλαπλασιζόμενος ἐπί τό μηδέν νά δίδῃ γινόμενον τόν διαιρέτέον 7.: Γενικῶς α:0 εἶναι διαίρεσις ἀδύνατος.

γ) 0:0. Ἡ διαίρεσις αὐτή δίδει πηλίκον ὅποιον ἀριθμόν θέλομεν διότι κάθε ἀριθμός πολλαπλασιαζόμενος ἐπί τό μηδέν δίδει γινόμενον μηδέν. Διά τοῦτο λέγομεν ὅτι τό πηλῖκον 0:0 εἶναι <u>ἀόριστον.</u>

Ἰδιότητες τῆς Ἰσότητος καί Ἀνισότητος είς τήν Διαίρεσιν.

α) "Ἐάν διαιρέσωμεν μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἰσότητος θά προκύψῃ πάλιν ἰσότης".

Δηλ. Ἔστω ἡ ἰσότης 18=12+6 καί ὁ ἀριθμός 3 μέ τόν ὁποῖον θά διαιρέσωμεν. θά ἔχωμεν: 18:3=(12+6):3 ἤ 18:3=(12:3)+(6:3) ἤ 6=4+2. Γενικῶς: Ἔστω ἡ ἰσότης α=β καί ὁ ἀριθμός γ. θά ἔχωμεν: α:γ=β:γ Ἡ ἰδιότης αὐτή ἠμπορεῖ νά διατυπωθῇ καί ὡς ἑξῆς:
"Ἐάν διαιρέσωμεν κατά μέλη δύο ἰσότητας θά προκύψῃ πάλιν ἰσότης".

β) Ἐάν διαιρέσωμεν μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν καί τά δύο μέλη μιᾶς ἀνισότητος θά προκύψῃ πάλιν ἀνισότης καί ὅμοια τῆς πρώτης".

Δηλ. Ἔστω ἡ ἀνισότης 18 > 10+6 καί ὁ ἀριθμός 2 μέ τόν ὁποῖον θά διαιρέσωμεν. θά ἔχωμεν: 18:2 > (10+6):2 ἤ 18:2 > (10:2)+(6:2)+9 > 5+3

Γενικῶς Ἔστω ἡ ἀνισότης α > β καί ὁ ἀριθμός γ θά ἔχωμεν (α:γ) > (β:γ).

Σημείωσις. Εἰς ὅλας τάς ἰδιότητας αἱ διαιρέσεις ὑποτίθενται τέλειαι.

Π ρ ο β λ ή μ α τ α

1) Πόσας φοράς ἠμπορεῖ νά ἀφαιρεθῇ ὁ 111 ἀπό τόν 39627;

2) Πόσας φοράς περιέχεται ὁ 40601 εἰς τόν 3045075;

3) Νά εὑρεθῇ ἀριθμός 37 φοράς μικρότερος τοῦ 3330.

4) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά διαιρεθῇ ὁ 458703 (740) διά νά προκύψῃ πηλῖκον 567; (διά νά προκύψῃ πηλίκον 33 καί ὑπόλοιπον 14);

5) Τροχός ἔκαμε 1800 στροφάς εἰς 25 π.λ. Πόσας κάμνει εἰς ἕνα πρῶτον λεπτόν;

6) Τροχός ἔκαμε 164 στροφάς εἰς ἕνα πρῶτον λεπτόν. Εἰς πόσα πρῶτα λεπτά θά κάμῃ 4920 στροφάς;

7) Νά συμπληρωθοῦν αἱ ἰσότητες α) 39Χ;=546 β) ;Χ23;=3792.

Προτάσεις μέ τάς ὁποίας λύονται διάφορα προβλήματα

α)"Ὅταν εἰς τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν προστεθῇ ἡ διαφορά αὐτῶν τότε προκύπτει τό διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Ὅταν ἀπό τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν ἀφαιρεθῇ ἡ διαφορά αὐτῶν τότε προκύπτει τό διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν".

Π ρ ό β λ η μ α. Δύο ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 139 καί διαφοράν 11. Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

Λ ύ σ ι ς: Τό ἄθροισμα 139+11=150 εἶναι τό διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου τῶν ἀριθμῶν ποῦ ζητοῦμεν: ὥστε ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 150:2=75.

Ἡ διαφορά 139-11=128 εἶναι τό διπλάσιον τοῦ μικροτέρου τῶν ἀριθμῶν πού ζητοῦμεν; ὥστε ὁ μικρότερος εἶναι ὁ 128:2=64.

'Επαλήθευσις:75+64=139 καί 75-64=11.

β) " Όταν ὁ μειωτέος αὐξηθῇ (ἤ ἐλαττωθῇ) κατά ἕνα ἀριθμόν καί ὁ ἀφαιρετέος ἐλαττωθῇ (ἤ αὐξηθῇ) κατά ἕνα ἄλλον ἀριθμόν τότε ἡ διαφορά αὐξάνεται (ἤ ἐλαττοῦται) κατά τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν".

Π ρ ό β λ η μ α; Δύο ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 71. 'Εάν ἀπό τόν μεγαλύτερον ἀφαιρέσωμεν 7 καί εἰς τόν μικρότερον προσθέσωμεν 10 τότε οἱ ἀριθμοί αὐτοί γίνονται ἴσοι: Νά ευρεθοῦν οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί.

Λ ύ σ ι ς: Όταν ἀπό τόν μειωτέον ἀφαιρέσωμεν 7 καί εἰς τόν ἀφαιρετέον προσθέσωμεν 10 τότε ἡ διαφορά τῶν δύο ἀριθμῶν πού ζητοῦμεν θά ἐλαττωθῇ κατά 7+10=17. 'Επειδή δέ ὅταν γίνῃ αὐτό οἱ δύο ἀριθμοί πού ζητοῦμεν γίνονται ἴσοι σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά των εἶναι 17 καί ἐλαττουμένη κατόπιν κατά 17 γίνεται μηδέν. Ὥστε ἔχομεν τό ἄθροισμα 71 καί τήν διαφοράν 17 τῶν δύο ἀριθμῶν πού ζητοῦμεν. Ἑπομένως τό ἄθροισμα 71+17=88 εἶναι τό διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου· καί ἄρα ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 88:2=44. Ὁ μικρότερος εἶναι ὁ 71-44=27.

γ)" Όταν ἀπό τόν μειωτέον ἀφαιρέσωμεν ἕνα 'ριθμόν καί προσθέσωμεν αὐτόν εἰς τόν ἀφαιρετέον τότε ἡ διαφορά ἐλαττώνεται κατά τό διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ. Όταν ἀπό τόν ἀφαιρετέον ἀφαιρέσωμεν ἕνα ἀριθμόν καί προσθέσωμεν αὐτόν εἰς τόν μειωτέον τότε ἡ διαφορά αὐξάνεται κατά τό διπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ".

Π ρ ό β λ η μ α: Δύο ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 54. Ἐάν ἀπό τόν μεγαλύτερον ἀφαιρέσωμεν 4 καί προσθέσωμεν αὐτό εἰς τόν μικρότερον τότε οἱ δύο ἀριθμοί γίνονται ἴσοι. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

Λ ύ σ ι ς: Ὅταν ἀπό τόν μειωτέον ἀφαιρέσωμεν 4 καί τά προσθέσω εἰς τόν ἀφαιρετέον τότε ἡ διαφορά τῶν δύο ἀριθμῶν πού ζητοῦμεν θά ἐλαττωθῇ κατά 4x2=8. Ἐπειδή δέ ὅταν γίνῃ αὐτό οἱ δύο ἀριθμοί πού ζητοῦμεν γίνονται ἴσοι, σημαίνει ὅτι ἡ διαφορά των εἶναι 8 καί ἐλαττουμένη κατόπιν κατά 8 γίνεται 0. Ὥστε ἔχομεν τό ἄθροισμα 54 καί τήν διαφοράν 8 τῶν δύο ἀριθμῶν πού ζητοῦμεν. Ἑπομένως τό ἄθροισμα 54+8=62 εἶναι τό διπλάσιον τοῦ μεγαλυτέρου καί ἄρα ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 62:2=31. Ὁ μικρότερος εἶναι ὁ 54-31=23.

δ) "Ὅταν εἰς τόν διαιρετέον προσθέσωμεν (ἤ ἀφαιρέσωμεν) τόν διαιρέτην τότε τό μέν πηλίκον αὐξάνεται (ἤ ἐλαττοῦται) κατά μίαν μονάδα τό δέ ὑπόλοιπον μένει τό ἴδιον".

Π ρ ό β λ η μ α: Τό ἄθροισμα δύο ἀριθμῶν εἶναι 319 τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῶν εἶναι 23 καί τό ὑπόλοιπον 7. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί.

Λ ύ σ ι ς: Αὐξάνομεν τό πηλίκον 23 κατά μίαν μονάδα καί γίνεται 24. Ὁ ἕνας ἀπό τούς ζητουμένους εἶναι ὁ 319:24=13 καί ὁ ἄλλος εἶναι ὁ 319-13=306.

Προβλήματα ἐπί τῆς προηγουμένης ὕλης

1) α) Πόσα ψηφία χρειάζονται διά νά σχηματισθοῦν ὅλοι οἱ μονοψήφιοι, οἱ διψήφιοι καί οἱ τριψήφιοι ἀριθμοί; β) Πόσοι διψήφιοι τελειώνουν εἰς 8; γ) Πόσοι

οιψήφιοι γράφονται διά σημαντικῶν ψηφίων; δ)Πόσοι τριψήφιοι ἔχουν δεύτερον ψηφίον τό μηδέν; ('Απ. 2889, 9, 81, 10).

2) Ἕνα βιβλίον ἔχει 2880 σελίδας. Πόσα ψηφία χρειάζονται διά νά ἀριθμήσωμεν ὅλας τάς σελίδας; ('Απ. 10413)

3) Βιβλίου οἱ ἀριθμοί τῶν σελίδων του ἀποτελοῦνται ἀπό 10413 ψηφία. Πόσας σελίδας ἔχει τό βιβλίο αὐτό, ('Απ.2880).

4) Ἐάν γράψωμεν τούς ἀκεραίους ἀριθμούς κατά τήν φυσικήν αὐτήν σειράν καί ἐν συνεχείᾳ ποῖα θά εἶναι τά ψηφία πού θά κατέχουν τήν θέσιν 109 τήν θέσιν 2878 καί τήν θέσιν 5639; ('Απ. τό 9 τοῦ 59, τό πρῶτον ἐξ ἀριστερῶν 9 τοῦ 995, τό 6 τοῦ 16).

5) Ἕνα παιδί ἔχει 35 βόλους καί ἀφοῦ ἔδωσε ένα μέρος ἀπό αὐτούς τοῦ ἔμειναν τετραπλάσιοι ἀπό ἐκείνους πού ἔδωσε. Πόσους ἔδωσε;

<u>Λ ύ σ ι ς:</u> Θά χωρίσωμεν τόν ἀριθμόν τῶν βόλων εἰς 4+1=5 ἴσα μέρη καί τό καθένα μέρος θά ἀποτελῆται ἀπό 35:5=7 βόλους. Ἐπομένως ἔδωσε 7Χ1=7 βόλους καί τοῦ ἔμειναν 7Χ4=28 βόλοι.

6) Τρία παιδιά ἔπαιξαν βόλους καί τά δύο εχασαν. Τό α΄ εἶχεν 21 βόλους καί τοῦ ἔμειναν 6/πλάσιοι ἀπό ἐκείνους πού ἔχασεν, τό β΄ εἶχε 24 βόλους καί τοῦ ἔμειναν 5/πλάσιοι ἀπό ἐκείνους πού ἔχασε καί τό γ΄ είχε 10 βόλους καί ἐκέρδισεν όσους ἔχασαν τά ἄλλα δύο παιδιά. Από πόσους βόλους ἔχει τώρα τό κάθε παιδί; ('Απ. 18, 20, 17).

7) Μέ πόσα τάλληρα καί μέ πόσα δίδραχμα ἠμποροῦμεν νά σχηματίσωμεν 165 δρχ. εἰς τάς ὁποίας τά δίδραχμα νά εἶναι πενταπλάσια τῶν ταλλήρων;('Απ. 11 τ. καί 55 δ.)

8) Ἕνα αὐτοκίνητο ἀνεχώρησε εἰς τά 8 π.μ. καί πρέπει νά ἐπιστρέψῃ ἐντός 13 ὡρῶν. Ποίαν ὥραν θά ἐπιστρέψῃ;

Λ ύ σ ι ς: 8 ὧραι+13ὧραι=21 ὧραι ἤ 9 μετά μεσημβρίαν. Τό αὐτοκίνητον θά ἐπιστρέψῃ εἰς τάς 9 μ.μ.

9) Ἕνα αὐτοκίνητον ἀνεχώρησεν καί μετά 16 ὥρας ἐπέστρεψε εἰς τάς 11 τήν νύκτα. Ποίαν ὥραν ἀνεχώρησεν;

Λ ύ σ ι ς: Ἡ 11η νυκτερινή ὥρα εἶναι ἡ 23η ὥρα τοῦ ἡμερονυκτίου. Ἀφαιροῦμεν ἀπό τάς 23 ὥρας τάς 16 ὥρας καί ἔχομεν 23-16=7 ὧραι. Αἱ 7 ὧραι εἶναι προμεσημβριναί. Τό αὐτοκίνητον λοιπόν ἀνεχώρησε εἰς τάς 7 π.μ.

10) Δεξαμενή χωρεῖ 357(405) ὀκ. νερό. Ἀνοίγομεν συγχρόνως τρεῖς βρύσες εἰς τάς 8 π.μ.(7 μ.μ.) ἀπό τάς ὁποίας ἡ α' εἰς μίαν (3) ὥρ. δίδει 19(42) ὀκ. νερό, ἡ β' εἰς μίαν (2) ὥρ. δίδει 15(36) ὀκ. νερό καί ἡ γ' εἰς μίαν (4) ὥρ. δίδει 17(52) ὀκ. νερό. Κατά ποίαν ὥραν θά γεμίσουν καί αἱ τρεῖς βρύσες τήν δεξαμενήν; ('Απ. 3 μ.μ., 4 π.μ.)

11) Ἐργοστάσιον λεπίδων δίδει μία λεπίδα δωρεάν εἰς τούς ἀγοράζοντας 12 λεπίδας. Ἐάν ἀγοράσωμεν 1950

λεπίδας πρός 5 δρχ. τήν μίαν πόσον θά πληρώσωμεν ('Απ. 9000).

12) Είς ένα πλοΐον υπάρχουν 120 άτομα καί τροφαί διά 30 ημέρας. Εάν θέλουν αί τροφαί νά διαρκέσουν άκόμη 10 ήμ. πόσοι πρέπει νά φύγουν άπό τό πλοΐον; 'Απ. 30).

13) Είς ένα πλοΐον υπάρχουν 120 άτομα καί τροφαί διά 30 ημέρας. Μετά 20 ημέρας έπεβιβάσθησαν καί άλλα 30 άτομα. Πόσας ημέρας θά διαρκέσουν άκόμη αί τροφαί; ('Απ. 8).

14) Έχομεν 60 χαρτονομίσματα είς τάλληρα καί είς δίδραχμα, τά όποια είναι κατά 10 περισσότερα τών ταλλήρων. Μέ πόσα μονόδραχμα άντιστοιχούν τά 60 χαρτονομίσματα; ('Απ. 135).

15) Δύο άτομα άγόρασαν άπό τό ίδιο κατάστημα 65 όκ. άπό ένα έμπόρευμα πρός 28 δρχ. τήν όκά καί ό ένας έπλήρωσε 252 δρχ. περισσότερον τού άλλου. Πόσας δραχ. έπλήρωσεν ό καθένας καί άπό πόσας όκάδας άγόρασεν; ('Απ. 28 όκ., 37 όκ.)

16) Τρεΐς φίλοι διά νά διασκεδάσουν κατέβαλον ό α΄ 1750 δρχ., ό β΄ 2580 δρχ. καί ό γ΄ 2090 δρχ. τούς έπερίσσευσαν δέ καί 1170 δρχ. Πώς θά μοιρασθούν τάς 1170 δρχ. διά νά μοιρασθούν έξ ίσου τά έξοδα της διασκεδάσεως; ('Απ. Ό α΄ δέν θά πάρη, ό β΄ θά πάρη 830 καί ό γ΄ 340).

17) Τεχνίτης είργάσθη μερικάς ημέρας καί πήρε 408 δρχ. Εάν είργάζετο άκόμη 39 ημέρες θά έπαιρνε 720 δρχ. Πόσας ημέρας είργάσθη; ('Απ. 51)

18) Τό ἡμερομίσθιον τεχνίτου εἶναι 75 δρχ.καί ἐξοδεύει 40 δρχ.τήν ἡμέραν.Μετά 30 ἡμέρας ἐπερίσσευσεν 300 δρχ. Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη καί πόσας δέν εἰργάσθη; ('Απ.20 ἡμέρ.εἰργάσθη).

19) 'Αγόρασε κάποιος αὐγά πρός 264 δρχ.τήν δωδεκάδα καί ἐπειδή τοῦ ἔσπασαν 18 αὐγά ἐπώλησε πρός 260 δρχ.τήν δεκάδα τά ὑπόλοιπα καί κέρδισε 60 δρχ. Πόσα ἦσαν τά αὐγά; ('Απ.132)

20) 'Αγόρασε κάποιος ὕφασμα μέ 432(275) δρχ.καί ἐπώλησε τούς 23(20) πήχεις ἀντί 391(160) δρχ.μέ κέρδος (ζημίαν) 5(3) δρχ. εἰς τόν ἕνα πῆχυν.Πόσους πήχεις ἀγόρασε; ('Απ.36 πήχ., 26 πήχ.)

21) 'Αγόρασε κάποιος ὕφασμα πρός 12 δρχ.τόν πῆχυ. 'Εάν ἡ τιμή τοῦ πήχεως ἦτο κατά 2 δρχ.μικροτέρα θά ἀγόραζε μέ τά ἴδια χρήματα 3 πήχεις περισσότερον.Πόσους πήχεις ἀγόρασεν; ('Απ.15 πήχ.)

22) 'Αγόρασε κάποιος 15 πήχεις ὕφασμα.'Εάν ἡ τιμή τοῦ πήχεως ἦτο κατά 2 δρχ.μικροτέρα θά ἀγόραζε μέ τά ἴδια χρήματα 3 πήχεις περισσότερον. Ζητεῖται ἡ τιμή τοῦ πήχεως.('Απ.12 δρχ.)

23) "Ενα παιδί ἀγόρασε μέ 269 δρχ.βόλους 15 λευκούς,12 μαύρους καί 11 κόκκινους.'Ο ἕνας μαῦρος ἐπωλεῖτο κατά 2 δρχ. περισσότερον τοῦ ἑνός λευκοῦ καί ὁ ἕνας κόκκινος κατά 3 δρχ.περισσότερον τοῦ ἑνός μαύρου. Ζητεῖται ἡ τιμή τοῦ ἑνός βόλου κάθε χρώματος. ('Απ.5 δρχ.ὁ ἕνας λευκός).

24) 'Αγόρασε κάποιος μία ὀκᾶ ζάχαρην περισσότερον παρά καφφέ καί ἐπλήρωσε 1425 δρχ.Πόσας ὀκάδας ἀπό

κάθε εἶδος ἀγόρασεν ἐάν ἡ ὀκᾶ ἡ ζάχαρη ἐτιμᾶτο 75 δρχ. καί ὁ καφφές 60 ὀρχ. ('Απ.11 καί 10).

25) Ἕνας πατέρας εἶναι 44 ἐτῶν καί τά παιδιά του εἶναι 16 ἐτῶν, 14 ἐτῶν καί 12 ἐτῶν. Πρό πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ πατέρα ἦτο διπλασία τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἡλικιῶν τῶν τριῶν παιδιῶν του; ('Απ.8).

26) Ἕνας πατέρας ἐρωτηθείς περί τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ἀπήντησεν ὅτι μετά 15(17) ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ υἱοῦ του θά εἶναι τριπλασία (δεκαπλασία) τῆς περισινῆς. Ζητεῖται ἡ παροῦσα ἡλικία τοῦ υἱοῦ του ('Απ.9, 3).

27) Ὁ (Α) εἶναι κατά 18 ἔτη μεγαλύτερος τοῦ (Β) εἶναι δέ ἡ ἡλικία τοῦ (Α) τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ (Β). Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ καθένας;('Απ.9, 27).

28) Ὁ (Α) εἶναι 37 ἐτῶν καί ὁ (Β) εἶναι 8 ἐτῶν. Μετά πόσα ἔτη ἡ ἡλικία τοῦ (Α) θά εἶναι διπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ (Β); ('Απ 21 ἔτη).

29) Ὁ (Α) εἶναι 36 ἐτῶν καί ὁ (Β) εἶναι 26 ἐτῶν. Πρό πόσων ἐτῶν ἡ ἡλικία τοῦ (Α) ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ (Β); ('Απ.21 ἔτη).

30) Τεχνίτης διά τήν ἐκτέλεσιν ἔργου συνεφώνησε διά κάθε ἐργάσιμον ἡμέραν νά παίρνῃ 80 δρχ. καί διά κάθε μή ἐργάσιμον ἡμέραν νά δίδῃ 20 δρχ.διά συντήρησίν του.Τό ἔργον ἐτελείωσεν μετά ἕνα μῆνα καί πῆρε 2000 δρχ.Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη; ('Απ.26 ἡμ.)

31) Διδάσκαλος ἔδωσε εἰς μαθητήν 16 προβλήματα. μέ τήν συμφωνίαν νά τοῦ δίδῃ 5 βαθμούς εἰς κάθε πρόβλημα ποῦ θά ἔλυε καί νά τοῦ ἀφαιρῇ 3 βαθμούς εἰς

κάθε πρόβλημα πού δέν θά ἔλυεν. Εἰς τό τέλος οὔτε τοῦ ἔδωσε οὔτε τοῦ ἀφήρεσε κανένα βαθμόν. Πόσα προβλήματα ἔλυσε; (Ἀπ. 6).

32) Δύο τεχνῖται ἀπό τούς ὁποίους ὁ πρῶτος παίρνει 100 δρχ. περισσότερον τοῦ δευτέρου εἰργάσθησαν τάς ἰδίας ἡμέρας καί ὁ πρῶτος πῆρε 25.500 δρχ.καί ὁ δεύτερος 22.500 δρχ.Πόσας ἡμέρας εἰργάσθησαν καί ποῖον τό ἡμερομίσθιον καθενός;(Ἀπ. 30 ἡμ. 850 δρχ.καί 750 δρχ.)

33) Καπνεργοστάσιον ἀπέλυσε δύο ἐργάτας πού ἔπαιρναν τό ἴδιο ἡμερομίσθιον.Ὁ ἕνας ἀπελύθη μετά 2(4) μῆνας καί τοῦ ἔδωσαν 7428(5550) δρχ. καί 6(6) πακέττα σιγάρα.Ὁ ἄλλος ἀπελύθη ἕνα μῆνα (ἕνα ἔτος) μετά ἀπό τόν πρῶτον καί τοῦ ἔδωσαν 11154(17100) δρχ.καί 8(12) πακέττα σιγάρα ὅμοια μέ ἐκεῖνα πού πῆρε καί ὁ πρῶτος Ζητοῦνται ἡ ἀξία τοῦ ἑνός πακέττου καί τό ἡμερομίσθιον (Ἀπ.12 δρχ.)

34) Δύο τεχνῖται συνεργάζονται καί ὁ πρῶτος παίρνει 100 δρχ.τήν ἡμέραν περισσότερον τοῦ δευτέρου.Διά 7 ἡμερομίσθια τοῦ πρώτου καί 5 ἡμερομίσθια τοῦ δευτέρου πῆραν 9700 δρχ.Ζητεῖται τό ἡμερομίσθιον τοῦ καθενός (Ἀπ.850 καί 750).

35) Ἐργολάβος διά νά κάμῃ ἕνα ἔργον εἶχεν 6 τεχνίτας καί μετά 5 ἡμέρας πῆρε καί ἄλλους 4 τεχνίτας εἰς τούς ὁποίους ηὔξησε τό ἡμερομίσθιον κατά 25 δρχ καί ἐτελείωσε τό ἔργον ταχύτερον. Ἡ ἀμοιβή καί τῶν 10 τεχνιτῶν τοῦ ἐστοίχισε 15.000 δρχ.Ζητεῖται τό ἡμερομίσθιον καθενός τεχνίτου (Ἀπ.75 καί 100 δρχ.)

36) Τά κεφάλαια δύο ἐμπόρων εἶναι τοῦ πρώτου 9000 (8500) δρχ.καί τοῦ δευτέρου 7500(10700) δρχ.Κάθε ἕ-

τος ὁ πρῶτος κερδίζει 600(450) δρχ.καί ὁ δεύτερος κερδίζει (χάνει) 750(650) δρχ. Κατά ποῖον ἔτος τά κεφάλαιά των θά γίνουν ἴσα;('Απ.10 ἔτη,2 ἔτη).

37) Τά κεφάλαια δύο ἐμπόρων εἶναι τοῦ πρώτου 2895 δρχ. καί τοῦ δευτέρου 9450 δρχ.'Ο πρῶτος κερδίζει κατ'ἔτος 220 δρχ.καί ὁ δεύτερος κερδίζει 74 δρχ. Κατά ποῖον ἔτος τό κεφάλαιον τοῦ πρώτου θά εἶναι τό ἥμισυ τοῦ κεφαλαίου τοῦ δευτέρου ('Απ.10 ἔτη).

38) 'Αγόρασε κάποιος 3(4) ὑφάσματα τοῦ ἰδίου μήκους καί ἐπλήρωσεν 2160(1848) δρχ.Τό μέτρον καθενός ὑφάσματος ἐτιμᾶτο τοῦ α:50(32) δρχ.τοῦ β: 60(45)δρχ. καί τοῦ γ:70(51) δρχ.(τοῦ δ:40 δρχ. Πόσα μέτρα ἦτο τό καθένα ὕφασμα;

<u>Λύσις</u>.'Εάν ἀγόραζε ἀπό τό καθένα ὕφασμα ἕνα μέτρο τότε θά ἐπλήρωνε 50+60+70=180 δρχ.'Επομένως ἀγόρασε ἀπό τό καθένα ὕφασμα 2160:180=12 μέτρα.

39) Εἰς μίαν συγκέντρωσιν ἦσαν 54 ἄτομα ἄνδρες, γυναῖκες καί παιδιά. Οἱ ἄνδρες ἦσαν κατά 5 περισσότεροι τῶν γυναικῶν καί κατά 8 ὀλιγώτεροι τῶν παιδιῶν.Πόσοι ἦσαν ἀπό κάθε φῦλο; ('Απ.17,12,25).

40) Εἰς μίαν ἐκδρομήν ἦσαν 63 ἄτομα ἄνδρες γυναῖκες καί παιδιά. Αἱ γυναῖκες ἦσαν 2/πλάσιαι τῶν παιδιῶν καί οἱ ἄνδρες 3/πλάσιοι τῶν γυναικῶν.Πόσοι ἦσαν ἀπό κάθε φῦλον;('Απ.42,14,7).

41) 'Αγόρασε κάποιος εἰς πακέττα τσάϊ πρώτης ποιότητος τῶν 50 δραμίων τό καθένα καί πρός20 δρχ.τό δράμι.'Αγόρασε ἐπίσης ἰσάριθμα πακέττα τσάϊ δευτέρας ποιότητος τῶν 75 δραμίων τό καθένα καί πρός 15 δρχ. τό δράμι.'Επλήρωσε δέ συνολικῶς 10625 δρχ.Πόσα πακέττα κάθε ποιότητος ἀγόρασε καί πόσα δράμια τσάϊ('Απ.5

42) Είς ένα έργοστάσιον έργάζονται 24 άνδρες,42 γυναίκες καί 10 παιδιά."Ολοι παίρνουν μαζί ώς ήμερομίσθιον 684 δραχμάς. Αί 6 γυναίκες παίρνουν όσον 8 παιδιά καί οί 8 άνδρες όσον 12 γυναίκες.Πόσον είναι τό ήμερομίσθιον καθενός.

__Λύσις__."Εχομεν:ότι αί 6 γυν.παίρνουν όσον 8 παιδιά. 'Επειδή 42 γυν.:6=7 όκτάδες παιδιά,έπεται ότι αί 42 γυν. θά παίρνουν όσον 7X8=56 παιδιά. "Εχομεν ότι:οί 8 άνδρες (ή 12 γυναίκες) παίρνουν όσον 16 παιδιά.'Επειδή 24 άνδρ : 8=3 δεκαεξάδες παιδιά,έπεται ότι οί 24 άνδρες θά παίρνουν όσον 3X16=48 παιδιά."Ωστε άν όλοι οί έργάται ήσαν παιδιά θά ήσαν: 56+48+10=114 παιδιά, έπομένως τό ήμερομίσθιον κάθε παιδιού ήτο 684:114=6 δρχ. Εύκόλως τώρα εύρίσκομεν ότι τό ήμερομίσθιον κάθε γυναίκας ήτο 8 δρχ.καί κάθε άνδρας 12δρχ.

43) 'Εάν είς κάθε θρανίον μιάς τάξεως οί μαθηταί καθίσουν άνά 3 τότε μένουν όρθιοι 4 μαθηταί έάν δέ καθίσουν άνά 5 τότε 20 θέσεις μένουν κεναί.Πόσοι ήσαν οί μαθηταί καί πόσα τά θρανία;

__Λύσις__: 5-3=2 μαθηταί (ή θέσεις) είναι ή διαφορά μεταξύ πρώτης καί δευτέρας κατατάξεως τών μαθητών. 'Ο άριθμός τών μαθητών πού θά καθίσουν άνά 3 καί ό άριθμός των μαθητών πού θά καθίσουν άνά 5 διαφέρουν κατά 4+20=24."Αρα ό ζητούμενος άριθμός τών θρανίων θά είναι τόσος όσος είναι ό άριθμός έπί τόν όποίον πολλαπλασιαζόμενος ό 2 δίδει γινόμενον τόν 24."Αρα λοιπόν είναι 24:2=12 θρανία. Οί μαθηταί δέ ήσαν: 12X3=36+4=40 μαθηταί.

44) Είς ένα κήπο άπό δένδρα υπάρχει φωλιά πουλιών 'Εάν τά πουλιά καθίσουν άπό ένα είς κάθε δένδρον τό-

ἕνα πουλί δέν εὑρίσκει δένδρον νά καθίσῃ. Ἐάν τά πουλιά καθίσουν κατά ζεύγη εἰς κάθε δένδρον τότε περισσεύει ἕνα δένδρον. Πόσα εἶναι τά δένδρα καί πόσα τά πουλιά; (Ἀπ. 3 δένδρα καί 4 πουλιά).

45) Θέλει κάποιος νά βγάλῃ εἰς τόν λόττο τό ὡρολόϊ του καί σκέπτεται ὅτι: ἄν πωλήσῃ κάθε λαχεῖον πρός 7 δρχ. θά χάσῃ 15 δρχ. ἐάν δέ πρός 11 δρχ. θά κερδίσῃ 25 δρχ. Πόσα πρέπει νά ἐκδόσῃ, καί ποία ἡ τιμή τοῦ ὡρολογίου. (Ἀπ. 10 λαχεῖα, 85 δρχ.)

46) Ἔμπορος ὑπολογίζει ὅτι ἄν πωλήσῃ τό ἐμπόρευμά του πρός 30 δρχ. τάς 100 δκ. θά κερδίσῃ 120 δρχ. ἐάν δέ πρός 22 δρχ. τάς 100 δκ. θά ζημιωθῇ 360 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἐμπόρευμα ἔχει καί πρός πόσον θά πωλήσῃ τήν ὀκᾶ (Ἀπ. 60 δκ. 28 δρχ.).

47) Εἰς μίαν ἐκδρομήν ἦσαν 63 ἄτομα ἄνδρες, γυναῖκες καί παιδιά. οἱ ἄνδρες ἦσαν κατά 2 περισσότεροι τῶν γυναικῶν μαζί δέ μέ τάς γυναῖκας ἦσαν 52. Πόσοι ἦσαν ἀπό κάθε φῦλον;

48) Ἕνα παιδί ἀγόρασε 54 βόλους μαύρους καί κόκκινους πρός 12 δρχ. τόν ἕνα καί ἐπειδή ἀγόρασε 22 κόκκινους περισσότερον ἀπό τούς μαύρους τοῦ ἔγινε ἔκπτωσις 5 δρχ. εἰς κάθε βόλον λευκόν. Πόσα ἐπλήρωσε διά τούς 54 βόλους;

49) Διψηφίου ἀριθμοῦ τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι 15(14) καί ἡ διαφορά αὐτῶν εἶναι 3(4). Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

50) Δύο διαδοχικοί ζυγοί ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 1930(1474). Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

51) Δύο διαδοχικοί μονοί ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα 1504(1028). Νά εὑρεθοῦν οἱ ἀριθμοί αὐτοί.

52) Ποταμόπλοιον δταν κατεβαίνη τόν ποταμόν τρέχει 33100 μ.τήν ὥραν καί ὅταν ἀναβαίνη αὐτόν τρέχει 14100 μ.τήν ὥραν.Ζητοῦνται πόσον τρέχει τό πλοῖον εἰς ἤρεμον νερό καί πόσον τρέχει τό νερό τοῦ ποταμοῦ εἰς μίαν ὥραν.

53)Δύο πλοῖαἀναχωροῦν ἀπό τό ἴδιο σημεῖον.Ἐάν κινηθοῦν ἐπί 13 ὥρας μέ τήν ἰδίαν διεύθυνσιν θά ἀπέχουν 351 μίλια καί ἐάν κινηθοῦν μέ ἀντίθετον διεύθυνσιν θά ἀπέχουν 351 μίλια.Πόσον τρέχει τό καθένα εἰς μίαν ὥραν;

54)Ἡ περίμετρος ὀρθογωνίου εἶναι 58 μ. καί ἡ βάσις του κατά 5 μ.μεγαλυτέρα τοῦ ὕψους του. Ποῖον τό ἐμβαδόν του;

55)Ἡ διαφορά δύο γωνιῶν ρομβοειδοῦς εἶναι 135°. πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε γωνία του;

56) Τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι μικροτέρα τῆς Α κατά 59°.Ἐάν προεκτείνωμεν τήν ΒΓ πρός τό μέρος τῆς γωνίας Γ,ἡ ἐξωτερική γωνία πού σχηματίζεται εἶναι 143°.Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ κάθε γωνία τοῦ τριγώνου;

57) Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων ὅταν ἐφάπτωνται ἐξωτερικῶς εἶναι 9 πόντοι καί ὅταν ἐφάπτωνται ἐσωτερικῶς εἶναι 1 πόντος.Ζητοῦνται αἱ ἀκτῖνες αὐτῶν.

58)Εἰς μίαν συγκέντρωσιν ἦσαν 40(48) ἄνδρες καί γυναῖκες. Ἐάν 4(5) ἀπό τούς ἄνδρες ἦσαν γυναῖκες τότε αἱ γυναῖκες θά ἦσαν ἴσαι μέ τούς ἄνδρας, ἐάν 5(3) ἀπό τάς γυναῖκας ἦσαν ἄνδρες τότε οἱ ἄνδρες θά ἦσαν 3/πλάσιοι (2/πλάσιοι) ἀπό τάς γυναῖκας.Πόσοι ἀπό κάθε φῦλο ἦσαν; Ἀπ.(24 ἄνδρ..16 γυν.),(29 ἄνδρ.19 γυν.)

Περί δυνάμεων

Όταν όλοι οί παράγοντες ένός γινομένου είναι ἴσοι τότε γράφομεν τό γινόμενον αὐτό χάριν συντομίας ὡς ἑξῆς: π.χ.

$5X5 = 5^2$ Τό καθένα ἀπό τά γινόμενα αὐτά

$5X5X5 = 5^3$ λέγεται __δύναμις__ του ἀριθμοῦ 5.

$5X5X5X5 = 5^4$ κ.ο.κ. Ἄρα

__Δύναμις__ λέγεται τό γινόμενον ἴσων ἀριθμῶν.

Τόν λόγον διά τόν όποῖον τό γινόμενον ἴσων ἀριθμῶν ὀνομάσθη __δύναμις__ θά τόν μάθωμεν παρακάτω καί εἰς εἰδικόν κεφάλαιον.

Τό 5^2 λέγεται __δευτέρα δύναμις__ ἤ __τετράγωνον τοῦ 5__ Λέγεται δέ τετράγωνον τοῦ 5 διότι γεωμετρικῶς παριστάνει τό ἐμβαδόν τετραγώνου πού ἔχει πλευράν 5. Τό 5^3 λέγεται __τρίτη δύναμις__ ἤ __κύβος τοῦ 5__. Λέγεται δέ κύβος τοῦ 5 διότι γεωμετρικῶς παριστάνει τόν ὄγκον κύβου ἀκμῆς 5. Τό 5^4 λέγεται __τετάρτη δύναμις__ τοῦ 5 κ.ο.κ. Ὁ ἀριθμός 5 λέγεται __βάσις__ τῆς δυνάμεως καί οἱ ἀριθμοί 2,3,4, λέγονται __ἐκθέται__. Εἰς κάθε δύναμιν ὁ ἐκθέτης φανερώνει πόσοι εἶναι οἱ παράγοντες πού εἶναι ἴσοι μέ τήν βάσιν αὐτῆς. π.χ. εἰς τήν δύναμιν 7^5 ὁ 5 σημαίνει νά σχηματίσωμεν γινόμενον ἀπό πέντε 7 δηλ. 7X7X7X7X7.

Ἰδιότητες τῶν δυνάμεων

α) Διά νά πολλαπλασιάσωμεν δυνάμεις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ γράφομεν βάσιν τήν ἰδίαν καί ἐκθέτην τό ἄθροισμα τῶν ἐκθετῶν.

Δηλ. $7^2X7^3 = 7^5$. Διότι: $7^2X7^3 = 7X7X7X7X7 = 7^5$.

β) Διά νά διαιρέσωμεν δύο δυνάμεις τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ γράφομεν βάσιν τήν ἰδίαν καί ἐκθέτην τήν διαφορά τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρέτου ἀπό τοῦ ἐκθέτου τοῦ διαιρετέου.

Δηλ. $7^5:7^3=7^2$. Διότι $7^3 X 7^2=7^5$.

γ) Διά νά ὑψώσωμεν δύναμιν εἰς ἄλλην δύναμιν γράφομεν βάσιν τήν ἰδίαν καί ἐκθέτην τό γινόμενον τῶν ἐκθετῶν.

Δηλ. $(7^2)^3=7^6$. Διότι $(7^2)^3=7^2 X 7^2 X 7^2=7X7X7X7X7X7=7^6$.

δ) Διά νά ὑψώσωμεν γινόμενον εἰς δύναμιν ὑψώνομεν κάθε παράγοντα εἰς τήν δύναμιν αὐτήν.

Δηλ. $(4X5)^2=4^2 X 5^2$. Διότι: $(4X5)^2=(4X5)=(4X4)X(5X5)$ $=4^2 X 5^2$.

ε) Ἡ μηδενική δύναμις κάθε ἀριθμοῦ εἶναι ἴση μέ τήν μονάδα.

Δηλ. $7^0=1$. Διότι $7^0=7^{2-2}=7^2:7^2=49:49=1$

στ) Ἡ πρώτη δύναμις κάθε ἀριθμοῦ εἶναι ἴση μέ τόν ἀριθμόν αὐτόν.

Δηλ. $7^1=7$. Ἄρα κάθε ἀριθμός πού δέν ἔχει ἐκθέτην ὑποτίθεται ὅτι ἔχει ἐκθέτην τήν μονάδα.

Ἀ σ κ ή σ ε ι ς

1) Μέ τί ἰσοῦται κάθε δύναμις τῆς μονάδος;

2) Μέ τί ἰσοῦται κάθε δύναμις τοῦ δέκα;

3) Νά εὑρεθῇ τό τελικόν ἐξαγόμενον τῶν ἑξῆς πράξεων ἀφοῦ πρῶτον ἐφαρμοσθοῦν αἱ ἰδιότητες τῶν δυνάμεων.

$2X2^2X2^3$ $2^8:2^5$ $(9^2)^0$ $(1X4X5)^2$ $2+2^2+3^2+4^0$

$3X3^0X3^3$ $5^7:5^4$ $(7^0)^4$ $(10X100)^3$ $1^8+10^4+100^0$

4^2X4X4^3 $3^4:3$ $(2^2)^3$ $(2^2X3^3X4)^2$ 5^2-4^2

Διαιρετότης

Γνωρίζομεν ὅτι "Πολλαπλάσιον ἑνός ἀριθμοῦ λέγεται τό γινόμενον αὐτοῦ ἐπί ἄλλον ἀριθμόν".π.χ.ὁ 6 εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 2 διότι 6=2Χ3. Ἐπειδή ὁ 6 διαιρεῖται ἀκριβῶς ὑπό τοῦ 2 λέγεται διαιρετός διά 2. Αἱ ἐκφράσεις λοιπόν διαιρετός,γινόμενον καί πολλαπλάσιον εἶναι συνώνυμοι δηλ. ἕνας ἀριθμός εἶναι ὁ διαιρετός δι'ἄλλου ἤ εἶναι γινόμενον, ἤ εἶναι πολλαπλάσιον ἄλλου, ὅταν διαιρῆται ὑπ'αὐτοῦ ἀκριβῶς. Ὁ παράγων 2 ὁ ὁποῖος ὡς γνωστόν λέγεται ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 6,λέγεται ἀκόμη καιδιαιρέτης τοῦ 6 διότι ὁ 2 διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν 6. Αἱ ἐκφράσεις λοιπόν διαιρέτης, παράγων καί ὑποπολλαπλάσιον εἶναι συνώνυμοι:δηλ, διαιρέτης ἤ παράγων ἤ ὑποπολλαπλάσιον ἑνός ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός πού τόν διαιρεῖ ἀκριβῶς.

Κάθε ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά τῆς μονάδος καί διά τοῦ ἑαυτοῦ του.

Ἰδιότητες τῆς Διαιρετότητος

α) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ἄλλους τότε θά διαιρῇ καί τό ἄθροισμααὐτῶν.

1) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ἄλλον τότε θά διαιρῇ καί τά πολλαπλάσια αὐτοῦ.

2) Ὅταν ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός δι'ἄλλου τότε εἶναι διαιρετός καί διά τῶν ὑποπολλαπλασίων αὐτοῦ.

β) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ἄλλους τότε θά διαιρῇ καί τήν διαφοράν αὐτῶν.

γ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ τό ἄθροισμα δύο ἄλλων καί τόν ἕνα ἀπό αὐτούς τότε θά διαιρῇ καί τόν ἄλλον.

δ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην τότε θά διαιρῇ καί τό ὑπόλοιπον.

ε) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ τόν διαιρέτην καί τό ὑπόλοιπον τότε θά διαιρῇ καί τόν διαιρετέον.

στ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ὅλους τούς προσθετέους ἑνός ἀθροίσματος καί δέν διαιρεῖ ἕνα μόνον προσθετέον, τότε ὁ ἀριθμός αὐτός δέν διαιρεῖ καί τό ἄθροισμα. Τό ὑπόλοιπον δέ τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος διά τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ εἶναι ἴσον μέ τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ μή διαιρετοῦ προσθετέου διά τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Κριτηρια ἤ Χαρακτῆρες Διαιρετότητος

Κριτήρια Διαιρετότητος εἶναι προτάσεις μέ τήν βοήθειαν τῶν ὁποίων κρίνομεν ἐάν ἕνας ἀριθμός διαιρῆται ἀκριβῶς δι'ἄλλου ἀριθμοῦ χωρίς νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν.

Κριτήριον 1ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 2. ἐάν τελειώνῃ εἰς 0,2,4,6,8.

Π.χ. οἱ ἀριθμοί 50,72,94,136.578 εἶναι διαιρετοί διά 2.

Οἱ ἀριθμοί πού εἶναι διαιρετοί διά 2 λέγονται Ἄρτιοι καί οἱ ἀριθμοί πού δέν εἶναι διαιρετοί διά 2 λέγονται περιττοί.

Σημείωσις: Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀριθμοῦ διά 2 εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ τελευταίου ψηφίου του διά 2.

Κριτήριον 2ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 3, ἐάν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά 3".

Π.χ. Ὁ ἀριθμός 534 εἶναι διαιρετός διά 3 διότι 5+3+4=12 καί ὁ 12 εἶναι διαιρετός διά 3.

Σημείωσις: Τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως ἑνός ἀριθμοῦ διά 3 εἶναι τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ψηφίων του διά 3.

Κριτήριον 3ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 4, ἐάν τά δύο τελευταῖα ψηφία του εἶναι μηδενικά ἤ ἀποτελοῦν ἀριθμόν διαιρετόν διά 4".

Π.χ.Οἱ ἀριθμοί 7800,5000,3916 εἶναι διαιρετοί διά 4.

Κριτήριον 4ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 5, ἐάν τελειώνῃ εἰς 0 ἤ εἰς 5".

Π.χ. Οἱ ἀριθμοί 170,2300.4685 εἶναι διαιρετοί διά 5.

Κριτήριον 5ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 6 ἐάν εἶναι διαιρετός διά 2 καί διά 3".

Π.χ.ὁ ἀριθμός 174 εἶναι διαιρετός διά 2 διότι τελειώνει εἰς 4. εἶναι διαιρετός διά 3 διότι 1+7+4=12 καί ὁ 12 εἶναι διαιρετός διά 3. Ἐπειδή λοιπόν ὁ 174 εἶναι διαιρετός διά 2 καί διά 3 εἶναι διαιρετός καί διά 6.

Κριτήριον 6ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 7 ἐάν τό ἄθροισμα τοῦ ψηφίου τῶν μονάδων καί τοῦ τριπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ πού σχηματίζουν τά ἄλλα ψηφία του εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά 7".

Π.χ.ὁ ἀριθμός 105 εἶναι διαιρετός διά 7 διότι 5+10Χ3 κάμνουν 35 καί ὁ 35 εἶναι διαιρετός διά 7.

Κριτήριον 7ον. "Ἕνας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 8, ἐάν τά τρία τελευταῖα ψηφία του εἶναι μηδενικά ἤ ἀριθμός διαιρετός διά 8".

Π.χ.Οἱ ἀριθμοί 13000,50.000,1520 εἶναι διαιρετοί διά 8

Κριτήριον 8ον."Ένας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 9,ἐάν τό ἄθροισμα τῶν ψηφίων του εἶναι ἀριθμός διαιρετός διά 9".

Π.χ.'Ο ἀριθμός 12456 εἶναι διαιρετός διά 9 διότι 1+2+4+5+6=18 καί ὁ 18 εἶναι διαιρετός διά 9.

Κριτήριον 9ον. "Ένας ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 11 ἐάν τό ἄθροισμα τῶν διψηφίων τμημάτων του ἐκ δεξιῶν πρός τά ἀριστερά εἶναι διαιρετόν διά 11"

Π.χ.ὁ ἀριθμός 1045 εἶναι διαιρετός διά 11 διότι 10+45=55 καί ὁ 55 εἶναι διαιρετός διά 11.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα διαιρετότητος

1) Νά γραφοῦν δύο τριψήφιοι διαιρετοί διά 9(3).(15) καί νά τελειώνουν εἰς 7(2),(5).

2) Νά γραφοῦν δύο τετραψήφιοι διαιρετοί διά 12 καί νά τελειώνουν εἰς 6.

3) Νά γραφοῦνδύο τριψήφιοι διαιρετοί διά 9 καί νά ἔχουν εἰς τό μέσον ἕνα 5.

4) Νά γραφοῦν δύο τετραψήφιοι διαιρετοί διά 6 καί νά ἔχουν εἰς τό μέσον 43.

5) Νά γραφοῦν δύο τριψήφιοι διαιρετοί διά 45 καί νά ἀρχίζουν ἀπό 6.

6) τοῦ ἀριθμοῦ 358167 νά ἀντικατασταθῇ μέ ἄλλο ὥστε νά προκύψῃ ἀριθμός διαιρετός διά 2,(4),(6).

7) Ἐάν ἀριθμός εἶναι διαιρετός διά 3(9) καί ἀλλάξωμεν τήν τάξιν τῶν ψηφίων του θά εἶναι πάλιν διαιρετός διά 3 (9);

8) Τῶν διαιρέσεων (418:3), (2540:9),(343:7),(1331:11) νά εὕρετε τά ὑπόλοιπα χωρίς νά γίνουν αἱ διαιρέσεις.

διαιρέσεις.

9)"Εμπορος θέλει νά θέση 8317 λεμόνια είς κιβώτια άπό τά όποία τό καθένα χωρεί 100 λεμόνια.'Ημπορεί νά γίνη αύτό χωρίς νά περισσεύση κανένα;

10)'Ημπορούμε νά μεταφέρωμεν 542 όκ.λάδι είς φιάλας τών 3 όκ.τελείως γεμάτας;

11) Βοσκός ήρωτήθη πόσα πρόβατα έχει καί άπήντησεν."Εχω περισσότερα άπό 400(100) καί όλιγώτερα άπό 500(200).'Εάν τά μετρήσετε άνά 9 περισσεύουν 7 καί έάν τά μετρήσετε άνά 10 περισσεύουν 2(5).Πόσα πρόβατα έχει;

12)'Ηρωτήθη ένας πόσας δραχμάς έχει καί άπήντησεν. 'Ο άριθμός τών χρημάτων μου είναι τριψήφιος διαιρετός διά 45 καί έχει είς τό μέσον μίαν μονάδα.Πόσα χρήματα έχει;

13)'Ηρωτήθη ένας πόσας δραχμάς έχει καί άπήντησεν. 'Ο άριθμός τών χρημάτων μου είναι μεγαλύτερος τού 300 τριψήφιος μέ μεσαίον ψηφίον τό 2 καί όταν τά μετρήσετε άνά 45 δέν μένει καμμία δραχμή.Πόσα είναι;

14) Είς ένα καλάθι ύπάρχουν μήλα άπό 200(500) έως 300(600).'Υπάρχει άκριβής άριθμός δεκάδων καί δωδεκάδων.Πόσα είναι τά μήλα; 240

15) Ποία ή χωρητικότης βυτίου τό όποίον χωρεί άπό 100 έως 150 όκάδας νερό καί ήμπορεί μά γεμίση άκριβώς μέ ένα δοχείον τών 12 όκ.ή μέ δοχείον τών 15 όκάδων;

16) Είς τήν σειράν τών άρτίων άριθμών ποίος είναι ό 100/στός, ό 400/στός, ό 1000/στός;

17) Είς τήν σειράν τών περιττών άριθμών ποίος είναι ό 50/στός, ό 99/στός;

Δεύτερος Διαιρέτης Ἀριθμοῦ

Ὁ ἀριθμὸς 6 ἔχει διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1,2,3,6. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ 2 ποὺ εἶναι ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα λέγεται δεύτερος διαιρέτης τοῦ 6.

Ὁ ἀριθμὸς 9 ἔχει διαιρέτας τοὺς ἀριθμοὺς 1,3,9. Ἀπὸ αὐτοὺς ὁ 3 ποὺ εἶναι ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα λέγεται δεύτερος διαιρέτης τοῦ 9.

Ἄρα Δεύτερος διαιρέτης ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀμέσως μετὰ τὴν μονάδα διαιρέτης αὐτοῦ.

Κοινὸς διαιρέτης Ἀριθμῶν

Ὁ ἀριθμὸς 24 ἔχει διαιρέτης τοὺς 1,2,3,4,6,8,12, 24. Ἐπίσης ὁ ἀριθμὸς 36 ἔχει διαιρέτας τοὺς 1,2,3, 4,6,9,12,18,36. Ἀπὸ αὐτοὺς οἱ ἀριθμοὶ 1,2,3,4,6,12. Ἐπειδὴ διαιροῦν ἀκριβῶς τὸν 24 καὶ τὸν 36 λέγονται κοινοὶ διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 24 καὶ 36. Ἄρα Κοινὸς Διαιρέτης δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀριθμὸς ποὺ τοὺς διαιρεῖ ἀκριβῶς.

Ἀριθμοὶ πρῶτοι, Σύνθετοι καὶ πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους

α) Κάθε ἕνας ἀπὸ τοὺς ἀριθμοὺς 2,3,5,7,11,13,διαιρεῖται ἀκριβῶς μόνο μὲ τὴν μονάδα καὶ μὲ τὸν ἑαυτό του. Διὰ τοῦτο οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ ὀνομάζονται πρῶτοι.

Ὥστε

Πρῶτος λέγεται κάθε ἀριθμὸς ποὺ διαιρεῖται ἀκριβῶς μόνον μὲ τὴν μονάδα καὶ μὲ τὸν ἑαυτόν του.

Πλῆθος τῶν πρώτων ἀριθμῶν

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ εἶναι ἄπειροι.

Εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν

Διά νά εὕρωμεν ὅλους τούς πρώτους ἀριθμούς π.χ. ἀπό 1 ἕως 100 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Γράφομεν κατά σειράν ὅλους τούς ἀριθμούς ἀπό 1 ἕως 100, καί ἔπειτα διαγράφομεν τούς ἀριθμούς πού διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τῶν πρώτων ἀριθμῶν 2,3,5 καί 7. Οἱ ἀριθμοί πού θά μείνουν εἶναι οἱ πρῶτοι ἀριθμοί ἀπό 1 ἕως 100. Ἡ μέθοδος αὐτή ἀνήκει εἰς τόν φιλόσοφον Ἐρατοσθένη καί λέγεται "Κόσκινο τοῦ Ἐρατοσθένους".

β) Κάθε ἕνας ἀπό τούς ἀριθμούς π.χ. 4,6,8,9,10,12, 14,15 διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τήν μονάδα, μέ τόν ἑαυτό του καί μέ ἄλλους ἀριθμούς. Διά τοῦτο οἱ ἀριθμοί αὐτοί ὀνομάζονται Σύνθετοι. Ὥστε

<u>Σύνθετος</u> λέγεται κάθε ἀριθμός πού διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ τήν μονάδα, μέ τόν ἑαυτό του καί μέ ἄλλους ἀριθμούς: Δηλ. <u>Σύνθετος</u> λέγεται κάθε ἀριθμός πού δέν εἶναι <u>πρῶτος</u>.

Ὅλοι οἱ <u>πρῶτοι</u> ἀριθμοί, ἐκτός τοῦ 2 καί τοῦ 3 γίνονται <u>Σύνθετοι</u> ὅταν αὐξηθοῦν ἤ ἐλαττωθοῦν κατά μίαν μονάδα.

<u>Κριτήριον</u> Ὅταν ἕνας ἀριθμός δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ κανένα ἀπό τούς πρώτους ἀριθμούς, τῶν ὁποίων τά τετράγωνα χωροῦν εἰς αὐτόν τότε ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι πρῶτος.

Π.χ. Ὁ 167 εἶναι πρῶτος· διότι δέν διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ κανένα ἀπό τούς πρώτους 2,3,5,7,11 τῶν ὁποίων τά τετράγωνα 4,9,25,49,121 χωροῦν εἰς τόν 167. Ὁ ἀριθμός 165 δέν εἶναι πρῶτος ἀλλ' σύνθετος διότι ἀπό τούς πρώτους ἀριθμούς 2,3,5,7,11 τῶν ὁποίων τά τετράγωνα 4,9,25,49,121 χωροῦν εἰς τόν 165 ὁ ἀριθμός 5 διαιρεῖ ἀκριβῶς τόν 165.

γ)'Από τούς ἀριθμούς π.χ.6 καί 7 ὁ 6 ἔχει διαιρέτας τούς ἀριθμούς 1,2,3,6 καί ὁ 7 ἔχει διαιρέτας τούς ἀριθμούς 1,7. Κοινός διαιρέτης καί τῶν δύο ἀριθμῶν 6 καί 7 εἶναι ἡ μονάς.Διά τοῦτο οἱ ἀριθμοί 6 καί 7 λέγονται πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Ὥστε

<u>Πρῶτοι πρός 'Αλλήλους</u> λέγονται οἱ ἀριθμοί πού ἔχουν κοινόν διαιρέτην μόνον τήν μονάδα.

Διά νά δηλώσωμεν ὅτι οἱ ἀριθμοί 6 καί 7 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους γράφομεν αὐτούς ὡς ἑξῆς: 6 \/ 7
1

Οἱ πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι καί πρῶτοι πρός ἀλλήλους ἀλλά οἱ πρῶτοι πρός ἀλλήλους δέν εἶναι πάντοτε πρῶτοι ἀριθμοί.

Π.χ.Οἱ ἀριθμοί 3,5,7, εἶναι πρῶτοι ἀριθμοί εἶναι δέ καί πρῶτοι πρός ἀλλήλους.Οἱ ἀριθμοί 9 καί 14 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους καί σύνθετοι. Οἱ ἀριθμοί 6 καί 7 εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους καί εἶναι ὁ 6 σύνθετος καί ὁ 7 πρῶτος.

<u>'Ιδιότητες τῶν πρώτων πρός ἀλλήλων ἀριθμῶν</u>

α) Δύο διαδοχικοί ἀκέραιοι ἀριθμοί εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

β) Ὅταν ἕνας πρῶτος ἀριθμός δέν διαιρῇ ἀκριβῶς ἕναν ἄλλον ἀριθμόν τότε οἱ δύο αὐτοί ἀριθμοί εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

γ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ἀκριβῶς τό γινόμενον δύο ἄλλων καί εἶναι πρῶτος πρός τόν ἕνα παράγοντα τότε ὁ ἀριθμός αὐτός θά διαιρῇ ἀκριβῶς τόν ἄλλον παράγοντα.

δ) Ὅταν ἕνας πρῶτος ἀριθμός διαιρῇ ἀκριβῶς τό γινόμενον ἄλλων ἀριθμῶν, τότε θά διαιρῆ ἀκριβῶς τοὐλάχιστον ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.

ε) Ὅταν ἕνας πρῶτος ἀριθμός διαιρῆ ἀκριβῶς τό γινόμενον δύο ἄλλων πρώτων ἀριθμῶν τότε ὁ πρῶτος αὐτός ἀριθμός εἶναι ἴσος μέ τόν ἕνα παράγοντα τοῦ γινομένου.

στ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός πρῶτος διαιρῆ ἀκριβῶς δύναμιν ἑνός ἀριθμοῦ τότε θά διαιρῆ ἀκριβῶς καί τήν βάσιν τῆς δυνάμεως.

ζ) Ὅταν δύο ἀριθμοί εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους τότε καί κάθε δύναμις αὐτῶν εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους καί ἀντιστρόφως.

η) Ὅταν ἕνας ἀριθμός εἶναι πρῶτος πρός κάθε ἕνα χωριστά παράγοντα ἑνός γινομένου τότε ὁ ἀριθμός αὐτός εἶναι πρῶτος καί πρός τό γινόμενον αὐτῶν δηλ. ὁ ἀριθμός αὐτός καί τό γινόμενον εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Καί ἀντιστρόφως.

θ) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῆται ἀκριβῶς ὑπό ἄλλων οἱ ὁποῖοι νά εἶναι ἀνά δύο πρῶτοι πρός ἀλλήλους τότε ὁ ἀριθμός αὐτός διαιρεῖται ἀκριβῶς καί μέ τό γινόμενον αὐτῶν.

Διά τοῦτο εἰς τό 5ον Κριτήριον τῆς διαιρετότητος ἕνας ἀριθμός διαιρεῖται ἀκριβῶς διά 6 ὅταν διαιρῆται ἀκριβῶς διά 2 καί διά 3.

<u>Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας</u>

<u>Εὕρεσις ὅλων τῶν διαιρετῶν συνθέτου ἀριθμοῦ</u>

α) Ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας εἶναι ἡ εὕρεσις τῶν πρώτων ἀριθμῶν οἱ ὁποῖοι ἔχουν γινόμενον τόν σύνθετον

'Η ἀνάλυσις συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας γίν αι ὡς ἑξῆς:

Διαιροῦμεν τόν σύνθετον μέ τόν δεύτερον διαιρέτην του. Τό πηλῖκον πού θά προκύψῃ τό διαιροῦμεν μέ τό ἰδικόν του δεύτερον διαιρέτην. Τό νέον πηλίκον πού θά προκύψῃ τό διαιροῦμεν μέ τόν ἰδικόν του δεύτερον διαιρέτην κ.ο.κ. μέχρις ὅτου εὕρωμεν πηλίκον 1. Τό τελευταῖον πηλίκον καί ὅλοι οἱ διαιρέται τῶν ἀκριβῶν διαιρέσεων εἶναι οἱ πρῶτοι παράγοντες πού ζητοῦμεν.

Παράδειγμα

504	2
252	2
126	2
63	3
21	3
7	7
1	

$504 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7$

ἤ

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

β) Διά τῆς ἀναλύσεως ἑνός συνθέτου ἀριθμοῦ εἰς πρώτους παράγοντας εὑρίσκομεν πόσοι καί ποῖοι εἶναι ὅλοι οἱ διαιρέται τοῦ συνθέτυυ. π.χ. 'Ο σύνθετος ἀριθμός 504 ὅταν ἀναλυθῇ θά γίνῃ $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1$. Αὐξάνομεν κατά μονάδα τούς ἐκθέτας 3,2,1 καί γίνονται 4, 3,2. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τούς ἀριθμούς 4,3,2 καί τό γινόμενον $4 \times 3 \times 2 = 24$ εἶναι καί τό πλῆθος τῶν διαιρετῶν τοῦ 504 δηλ. 'Ο 504 ἔχει 24 διαιρέτας.

Διά νά εὕρωμεν τώρα καί ποῖοι εἶναι οἱ 24 διαιρέται τοῦ 504 ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: 'Επειδή $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7^1$ γράφομεν εἰς μίαν σειράν τάς δυνάμεις τοῦ 2 ἀπό τῆς 2^0 ἕως τῆς 2^3, εἰς δευτέραν σειράν τάς δυνάμεις τοῦ 3 ἀπό τῆς 3^0 ἕως τῆς 3^2 καί εἰς τρίτην σειράν τάς δυνάμεις τοῦ 7 ἀπό τῆς 7^0 ἕως τῆς 7^1 καί ἔχομεν:

$2^0, 2^1. 2^2, 2^3$		1, 2, 4, 8
$3^0, 3^1. 3^2$	ἤ	1, 3, 9
$7^0, 7^1$		1, 7.

Μετά ταῦτα πολλαπλασιάζομεν χωριστά κάθε ένα άριθμόν τής πρώτης σειράς έπί κάθε ένα άριθμόν τής δευτέρας σειράς καί σχηματίζεται νέα σειρά 1, 3, 9, 2, 6, 18, 4,12,36,8,24,72.

Κάθε ένα άριθμόν τής νέας σειράς τόν πολλαπλασιάζομεν έπί κάθε ένα άριθμόν τής τρίτης σειράς καί έχομεν: 1,3,9,2,6,18,4,12,36,8,24,72,7,21,63,14,42,126,28,84,252,56,168,504.

Οί άριθμοί αύτοί είναι οί 24 διαιρέται τοῦ συνθέτου άριθμοῦ 504.

__Ἀσκήσεις__. Νά γίνῃ ἀνάλυσις εἰς πρώτους παράγοντας καί νά εὑρεθοῦν ὅλοι οἱ διαιρέται τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν: 120,216,238,105,385,420,525,660,480,840,780,973.

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (μ.κ.δ.)

Οἱ διαιρέται π.χ. τοῦ 24 εἶναι:1,2,3,4,6,8,12,24. Ἐπίσης οἱ διαιρέται π.χ. τοῦ 36 εἶναι: 1,2,3,4,6,9,12,18,36.

Οἱ κοινοί διαιρέται τῶν ἀριθμῶν 24 καί 36 εἶναι: 1,2,3,4,6,12.

Ἀπό αὐτούς ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ 12 καί ὀνομάζεται: __Μέγιστος κοινός διαιρέτης__ τῶν ἀριθμῶν 24 καί 36. Ἄρα:

__Μέγιστος κοινός διαιρέτης__ δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς κοινούς διαιρέτας τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Εὕρεσις τοῦ Μεγίστου κοινοῦ διαιρέτου

__Μέθοδος τῶν ὑπολοίπων.__

Γράφομεν εἰς μίαν σειράν τούς ἀριθμούς τῶν ὁποίων ζητεῖται ὁ μ.κ.δ.

Κατόπιν μέ τόν μικρότερον ἀπό αὐτούς διαιροῦμεν ὅλους τούς ἄλλους.

'Εάν μέν τά ὑπόλοιπα πού θά προκύψουν εἶναι ὅλα μηδενικά τότε ὁ μικρότερος μέ τόν ὁποῖον διαιρέσαμεν εἶναι ὁ μ.κ.δ. 'Εάν ὅμως δέν εἶναι μηδενικά ὅλα τά ὑπόλοιπα, τότε ἀντικαθιστῶμεν τούς ἀριθμούς μέ τά ὑπόλοιπα καί σχηματίζομεν νέαν σειράν μέ τά ὑπόλοιπα αὐτά καί μέ τόν ἀριθμόν μέ τόν ὁποῖον διαιρέσαμεν.

Εἰς τήν νέαν σειράν εὑρίσκομεν τόν μικρότερον ἀριθμόν καί μέ αὐτόν διαιροῦμεν ὅλους τούς ἄλλους ὅπως καί προηγουμένως κ.ο.κ. ἕως ὅτου εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 ἤ 1. 'Εάν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 0 τότε ὁ μ.κ.δ. εἶναι ὁ τελευταῖος διαιρέτης. 'Εάν εὕρωμεν ὑπόλοιπον 1 τότε ὁ μ.κ.δ. εἶναι ὁ 1.

'Η μέθοδος αὐτή λέγεται καί μέθοδος τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων.

Π α ρ α δ ε ί γ μ α τ α

1ον) Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν 312 καί 84.

	3	1	2	2	πηλίκα
312	84	60	24	12	(μ.κ.δ. =12
60	24	12	0		

2ον) Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 180, 120. 96.

180.	120,	96
84	24	96
21	24	0
21	3	0
0	3	0

Ο μ.κ.δ. εἶναι ὁ 3.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς: Ὅταν οἱ ἀριθμοί εἶναι πρῶτοι πρός ἀλλήλους τότε ὁ μ.κ.δ. αὐτῶν εἶναι ἡ μονάς Ὥστε.

Πρῶτοι πρός ἀλλήλους λέγονται οἱ ἀριθμοί πού ἔχουν μ.κ.δ. τήν μονάδα

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ὁ ἀριθμός τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων πρός εὕρεσιν μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν εἶναι μικρότερος τοῦ τετραπλασίου τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ψηφίων τοῦ μιπροτέρου τῶν δύο ἀριθμῶν (θεώρημα τοῦ Lamé).

Μέθοδος τῆς ἀναλύσεως.

Διά νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτούς εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων καί ἔπειτα σχηματίζομεν ἄλλο γινόμενον μόνον μέ τούς κοινούς παράγοντας πού ἔχουν τόν μικρότερον ἐκθέτην.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α. Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 18 καί 60. Ἐάν ἀναλύσωμεν τούς ἀριθμούς 18 καί 60 θά ἔχωμεν:

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$\text{μ.κ.δ.} = 2 \times 3 = 6$$

Ἰδιότητες τοῦ μ.κ.δ.

α) Ὅταν ἕνας ἀριθμός διαιρῇ ἀκριβῶς ἄλλους ἀριθμούς τότε θά διαιρῇ ἀκριβῶς καί τόν μ.κ.δ. αὐτῶν. Καί ἀντιστρόφως.

β) Οἱ κοινοί διαιρέται δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι διαιρέται καί τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

γ) Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν δοθέντας ἀριθμούς μέ ἕνα ἄλλον ἀριθμόν τότε καί ὁ μ.κ.δ.αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἤ διαιρεῖται μέ τόν ἀριθμόν αὐτόν.

δ) Ὅταν διαιρέσωμεν δοθέντας ἀριθμούς μέ τόν μ.κ.δ.αὐτῶν τότε τά πηλίκα πού θά προκύψουν εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους.

Π ρ ό β λ η μ α. Δύο ἀριθμοί ἔχουν μ.κ.δ.τόν 12. Τά πηλίκα δέ τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων εἶναι κατά σειράν 3,1,2,2. Νά εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

Λύσις: Παριστάνομεν τούς δύο ἀριθμούς μέ τά γράμματα Α καὶ Β καὶ ἔχομεν:

	3	1	2	
Α	Β	Γ	Δ	12
Γ	Δ	12	0	

$\Delta = 2 \times 12 = 24$

Ἑπομένως $\Gamma = 2 \times 24 + 12 = 60$

$B = 1 \times 60 + 24 = 84$

$A = 3 \times 84 + 60 = 312$

Οἱ ἀριθμοὶ ποὺ ζητοῦμεν εἶναι ὁ 312 καὶ ὁ 84.

<u>Ἀ σ κ ή σ ε ι ς</u>

1) Νὰ εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 620 καὶ 236, 618 καὶ 213, 84,90 καὶ 126, 150,180 καὶ 700.

2) Δύο ἀριθμοὶ ἔχουν μ.κ.δ. τὸν 1,(13),(12). Τὰ πηλίκα δὲ τῶν διαδοχικῶν διαιρέσεων εἶναι κατὰ σειρὰν 2,8,1,4,9, (2,1,3),(2,2,5). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ δύο ἀριθμοί.

<u>Ἐλάχιστο κοινὸ πολλαπλάσιο (ε.κ.π.)</u>

Τὰ πολλαπλάσια π.χ. τοῦ 4 εἶναι 4,8,12,16,20,24, 36.....(ἄπειρα).

Τὰ πολλαπλάσια π.χ. τοῦ 6 εἶναι 6,12,18,24,30,36, 42,48...(ἄπειρα)

Ἀπὸ αὐτὰ οἱ ἀριθμοὶ 12,24,36,48,60.... εἶναι πολλαπλάσια καὶ τοῦ 4 καὶ τοῦ 6 καὶ λέγονται <u>κοινὰ πολλαπλάσια</u> τοῦ 4 καὶ τοῦ 6. Ἀπὸ τὰ κοινὰ πολλαπλάσια 12,24,36,48,60.... Τὸ μικρότερο ἀπὸ ὅλα εἶναι ὁ 12 καὶ ὀνομάζεται <u>Ἐλάχιστο Κοινὸ Πολλαπλάσιον</u> τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 6. Ἄρα

<u>Ἐλάχιστο κοινὸ Πολλαπλάσιον</u> δύο ἢ περισσοτέρων ἀριθμῶν λέγεται τὸ μικρότερον ἀπὸ ὅλα τὰ κοινὰ πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν.

Εὕρεσις τοῦ Ἐλαχίστου κοινοῦ πολλαπλασίου

Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν γράφομεν αὐτούς εἰς μίαν σειράν καί ἔπειτα διαιροῦμεν κάθε ἕνα μέ τόν δεύτερον διαιρέτην αὐτοῦ ἕως ὅτου εὕρωμεν πηλίκον μονάδα.Τό γινόμενον ὅλων τῶν διαιρετῶν εἶναι τό ε.κ.π. πού ζητοῦμεν.

Παράδειγμα

Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π.τῶν 12. 15,18.

12,15,18	2
6,15, 9	2
3,15, 9	3
1 5 3	3
1, 5, 1	5
1, 1, 1	ε.κ.π.=2Χ2Χ3Χ3Χ5
	ε.κ.π.=180

Μέθοδος τῆς Ἀναλύσεως

Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π.δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν ἀναλύομεν αὐτούς εἰς γινόμενα παραγόντων πρώτων καί ἔπειτα σχηματίζομεν ἄλλο γινόμενον ἀπό τούς κοινούς καί μή κοινούς παράγοντας πού ἔχουν τόν μεγαλύτερον ἐκθέτην.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α: Νά εὑρεθῇ τό ε.κ.π.τῶν ἀριθμῶν 126 καί 660.

Ἐάν ἀναλύσωμεν τούς ἀριθμούς 126 καί 660 θά ἔχωμεν:

$$126 = 2X3^2X7$$
$$660 = 2^2X3X5X11$$

$$\text{ε.κ.π.} = 2^2X3^2X7X5X11 = 13860$$

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς. Ὅταν ὁ μεγαλύτερος ἀπό τούς ἀριθμούς πού μᾶς δίδονται διαιρεῖται ἀκριβῶς μέ ὅλους τούς ἄλλους τότε ὁ μεγαλύτερος αὐτός εἶναι τό ε.κ.π. π.χ. τό ε.κ.π.τῶν ἀριθμῶν 10,12,15,60 εἶναι ὁ 60.

'Ιδιότητες τοῦ ε.κ.π.

α) Τά κοινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν εἶναι πολλαπλάσια καί τοῦ ε,κ,π, τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν. Καί ἀντιστρόφως.π.χ. Τά κοινά πολλαπλάσια τῶν ἀριθμῶν 4 καί 6 εἶναι: 24,36,48,60..... Κάθε ἕνα δέ ἀπό αὐτά εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 12 πού εἶναι τό ε,κ.π.τῶν ἀριθμῶν 4 καί 6. Ἄρα:

Διά νά σχηματίσωμεν ὅλα τά κ οινά πολλαπλάσια δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν πολλαπλάσιάζομεν τό ε,κ,π.αὐτῶν μέ κάθε ἕνα ἀπό τούς ἀριθμούς 1,2,3,4,5,......

β) Τό ε.κ.π.ἀριθμῶν πρώτων πρός ἀλλήλους ἀνά δύο εἶναι τό γινόμενον αὐτῶν π.χ.Τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμῶν 3.5,7, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἀνά δύο πρῶτοι πρός ἀλλήλους εἶναι τό γινόμενον αὐτῶν 3X5X7=105.

γ) Τό ε.κ.π. δύο ἤ περισσοτέρων ἀριθμῶν εὑρίσκεται μεταξύ τοῦ μεγαλυτέρου τῶν ἀριθμῶν καί τοῦ γινομένου αὐτῶν. Οὐδέποτε δέ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ γινομένου αὐτῶν.

δ) Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν δύο ἤ περισσοτέρους ἀριθμούς μέ ἕνα ἄλλον ἀριθμόν τότε τό ε.κ.π. αὐτῶν πολλαπλασιάζεται ἤ διαιρεῖται μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν.

Σχέσις μ.κ.δ.καί ε.κ.π.δύο ἀριθμῶν

Οἱ ἀριθμοί π.χ.12 καί 15 ἔχουν μ.κ.δ.=3 καί ε.κ.π. =60. Ἐπειδή 12X15=180 καί ἐπειδή 3X60=180 συνάγομεν ὅτι:

" Τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ μ,κ,δ, καί τοῦ ε.κ.π.αὐτῶν". Ἄρα

α) Τό ε.κ.π.δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό γινόμενον αὐτῶν διά τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν.

β) Ὁ μ.κ.δ. δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον αὐτῶν διά τοῦ ε.κ.π. αὐτῶν.

Ἀσκήσεις καί προβλήματα μ.κ.δ. καί ε.κ.π.

1) Εὕρετε τὸ ε.κ.π. καί μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν

α) 20,24,36. β) 60,72,84 γ) 32,40,108 δ) 35,70, 75,90 ε) 60,45,130 στ) 32,84,90 ζ) 56,112,140 η) 75,90,450 θ) 24,30,42,60 ι) 9,36,45,72.

2) Ποῖον τὸ μέγιστον κοινὸ μέτρον τριῶν εὐθειῶν τῶν ὁποίων τά μήκη εἶναι 280μ., 180μ., 150μ.

3) Πόσοι τὸ πολὺ ἄνθρωποι ἠμποροπυν νά μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου 1512 (1620) κιλά κριθάρι καί 1764 (1800) κιλά σιτάρι καί πόσα κιλά ἀπὸ κάθε εἶδος θά πάρῃ ὁ καθένας;

4) Εἰς πόσα τὸ πολὺ παιδιά εἶναι δυνατὸν νά μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου βόλοι 528 λευκοί, 504 κόκκινοι, καί 180 μαῦροι καί πόσους ἀπὸ κάθε χρῶμα θά πάρῃ τὸ καθένα παιδί;

5) Αἴθουσα μήκους 576 δακτύλων καί πλάτους 468 δακτύλων πρόκειται νά στρωθῇ μὲ ἴσας τετραγωνικάς πλάκας ὅσον τὸ δυνατὸν μεγαλυτέρας πλευρᾶς. Ποίαν πλευράν πρέπει νά ἔχῃ ἡ πλάκα καί πόσας θά χρειασθοῦμεν;

6) Τέσσαρα τεμάχια ὑφάσματος ἔχουν μήκη 72 μ., 64 μ, 88μ., 96μ. καί προορίζονται διά τήν κατασκευήν ἴσων καλυμμάτων καί νά ἔχουν τήν μεγαλυτέραν δυνατήν ἔκτασιν ἀλλά χωρίς ραφάς. Ἀνά πόσα μέτρα πρέπει νά κοπῇ κάθε τεμάχιον;

7) Ἔχομεν δύο κιβώτια χωρητικότητος 930 κυβ.παλαμῶν τὸ ἕνα καί 324 κυβ.παλαμῶν τὸ ἄλλο καί πρόκειται νά τά γεμίσωμεν μὲ πλάκας σαποῦνι τῆς ἰδίας ἀ-

ξίας καί ὅσον τό δυνατόν μεγαλυτέρας. Ζητεῖται ὁ ὄγκος πού πρέπει νά ἔχῃ κάθε πλάκα καί πόσας πλάκας θά χωρέσῃ τό κάθε ἕνα κιβώτιον;

8) Τρία τεπόζιτα περιέχουν 400, 480, 320 ὀκάδες νερό. Ποία πρέπει νά εἶναι ἡ χωρητικότης δοχείου ὅσον τό δυνατόν μεγαλυτέρου διά τοῦ ὁποίου θά ἀδειάσωμεν κάθε ἕνα τεπόζιτο καί πόσας φοράς θά γεμίσωμεν τό δοχεῖον ἀπό τό κάθε ἕνα τεπόζιτο;

9) Εἰς ἐργοστάσιον ὑπάρχουν 40 ἐφαρμοσταί, 24 τορναδόροι καί 96 βοηθοί. Πόσα τό πολύ ὅμοια τμήματα εἶναι δυνατόν νά σχηματίσωμεν ἀπό αὐτούς καί πόσοι τεχνῖται ἀπό κάθε εἰδικότητα θά ἀνήκουν εἰς τά τμήματα.

10) Εἰς πόσα τό πολύ κουτιά εἶναι δυνατόν νά διανεμηθοῦν ὁμοίως καρφιά, 160 τῶν 4 πόντων, 120 τῶν 5 πόντων, καί 140 τῶν 7 πόντων καί πόσα καρφιά ἀπό κάθε εἶδος θά περιέχῃ τό κάθε ἕνα κουτί.

11) Ἔχομεν 80 γαλόνια βενζίνη τῶν 5 δραχ. τό γαλόνι 120 γαλόνια βενζίνη τῶν 4 δρχ. τό γαλόνι καί 60 γαλόνια βενζίνη τῶν 3 δρχ. τό γαλόνι. Θέλομεν νά πωλήσωμεν καί τάς τρεῖς ποιότητας εἰς δοχεῖα ὅσον τό δυνατόν μεγαλύτερα καί τῆς ἰδίας ἀξίας. Ζητοῦνται α) ἡ κοινή ἀξία β) πόσα δοχεῖα θά γίνουν γ) ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου κάθε εἴδους βενζίνης.

12) Εἰς ἕνα ὑπόστεγον τελειώνουν 4 γραμμαί τράμ. Ἀπό τήν μίαν φθάνει ἕνα τράμ κάθε 20 π.λ. ἀπό τήν ἄλλην κάθε 15 π.λ. ἀπό τήν τρίτην κάθε 30 π.λ. καί ἀπό τήν τετάρτην κάθε 10 π.λ. Ἐάν συμβῇ νά φθάσουν καί τά 4 τράμ τήν ἰδίαν στιγμήν εἰς τό ὑπόστεγον, μετά πόσον χρόνον θά συμβῇ ἐκ νέου νά φθάσουν εἰς τό ὑπόστεγον συγχρόνως;

13) Δύο ὡρολόγια ἤρχισαν νά κτυποῦν τήν ὥραν συγχρόνως. Μεταξύ δύο κτυπημάτων τοῦ 1ου περνοῦν 3 δ.λ. καί μεταξύ δύο κτυπημάτων τοῦ 2ου περνοῦν 4 δ.λ. Μετά πόσα δευτερόλεπτα θά συμβῇ νά ἀρχίσουν συγχρόνως νά κτυποῦν;

14) Τέσσαρα ἀτμόπλοια ἀνεχώρησαν μαζί ἀπό τόν Πειραιᾶ τήν 1ην Ἰουνίου διά νά κάμουν περιοδικά δρομολόγια. Τό πρῶτον διά μετάβασιν καί ἐπιστροφήν χρειάζεται 27 ἡμ., τό δεύτερον 36 ἡμ. τό τρίτον 45 ημ. καί τό τέταρτον 54 ἡμ. Ποίαν ἡμέραν θά εὑρεθοῦν καί πάλιν εἰς τόν Πειραιᾶ καί τά τέσσαρα μαζί;

15) Τρεῖς τροχοί τίθενται εἰς κίνησιν συγχρόνως. Ὁ πρῶτος εἰς 1 π.λ. κάμνει 360 στροφάς ὁ δεύτερος 450 καί ὁ τρίτος 600. Μετά πόσον χρόνον θά συμπληρώσουν συγχρόνως καί οἱ τρεῖς ἀκέραιον ἀριθμόν στροφῶν καί πόσας στροφάς θά κάμνῃ ὁ καθένας;

16) Τρεῖς κώδωνες κτυποῦν ὁ 1ος κάθε 4 λεπτά ὁ δεύτερος κάθε 8 λεπτά καί ὁ 3ος κάθε 20 λεπτά. Ἐάν εἰς μίαν στιγμήν κτυπήσουν καί οἱ τρεῖς συγχρόνως μετά πόσον χρόνον θά συμβῇ νά κτυπήσουν πάλιν συγχρόνως καί οἱ τρεῖς;

17) Θέλομεν κιβώτιον ὅσον τό δυνατόν μικρότερον διά νά χωρῇ ἀκέραιον ἀριθμόν φιαλῶν χωρητικότητος 45,75,180 δραμίων. Ζητοῦνται α) ἡ χωρητικότης τοῦ κιβωτίου β) πόσας φιάλας ἀπό κάθε μέγεθος θά χωρέσῃ τό κιβώτιον.

18) Ἕνας μετρᾷ τά χρήματά του ἀνά 12,15,20 καί εὑρίσκει ὅτι δέν τοῦ περισσεύει καμμία δραχμή. Πόσας ἔχει ἐάν ὅλον τό ποσόν εἶναι μικρότερον τῶν 100 δραχμῶν.

19) Ὁ Νεύτων ὅταν ἀπέθανε δέν ἦτο 90 ἐτῶν. Ἐάν μετρήσωμεν δέ τά ἔτη του ἀνά 4 καί ἀνά 21 περισσεύει πάντοτε 1 ἔτος. Πόσων ἐτῶν ἀπέθανε;

20) Εἰς ἕνα καλάθι ὑπάρχουν αὐγά. Ἐάν τά μετρήσωμεν ἀνά 2,3,4,5,6, μένει εἰς τό καλάθι ἕνα αὐγό. Ἐάν ὅμως τά μετρήσωμεν ἀνά 7 δέν μένει κανένα αὐγό εἰς τό καλάθι. Τό καλάθι δέν χωρεῖ περισσότερα ἀπό 305 αὐγά. Πόσα αὐγά ὑπάρχουν εἰς τό καλάθι;

21) Βοσκός ἔχει πρόβατα περισσότερα ἀπό 2500 καί ὀλιγώτερα ἀπό 3000. Ἐάν τά μετρήσωμεν ἀνά 14,20,24 δέν περισσεύει κανένα. Πόσα πρόβατα ἔχει;

22) Ἀξιωματικός ἔχει ἀπό 600 ἕως 900 στρατιώτας. Ἐάν τούς μετρήσωμεν ἀνά 60,45,36 θά περισσεύσουν 15 στρατιῶται Πόσους ἔχει;

23) Τέσσαρα ἀτμόπλοια ἀναχωροῦν ἐκ Πειραιῶς κάθε 4ην,6ην,8ην καί 15ην ἡμέραν ἤρχισαν δέ τήν ὑπηρεσίαν των τήν ἰδίαν ἡμέραν. Μετά πόσον χρόνον θά συμβῇ νά ἀναχωρήσουν καί πάλιν ἀπό τόν Πειραιᾶ τήν ἰδίαν ἡμέραν;

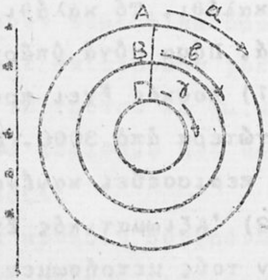
24) Θέλομεν νά περικυκλώσωμεν μέ δένδρα ἀπέχοντα ἐξ ἴσου τήν μεγαλυτέραν δυνατήν ἀπόστασιν, ἕνα χωράφι σχήματος τετραπλεύρου μέ πλευράς 2100 μ., 1008μ. 1320 μ.1260 μ. Ποία εἶναι ἡ δαπάνη ἐάν κάθε δένδρον ἀξίζει 50 δρχ.

25) Δύο κομμάτια ὑφάσματος τῆς ἰδίας ποιότητος ἐπληρώθησαν τό ἕνα 360 δρχ. καί τό ἄλλο 585 δρχ. Ποία ἡ ἀξία τοῦ μέτρου ἐάν ἡ ἀξία αὐτή εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός μεγαλύτερος τοῦ 5 καί μικρότερος τοῦ 14;

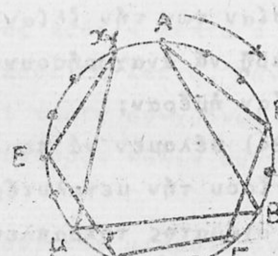
26) Μαθητής ἔχει πολλά φύλλα χάρτου καί ἠμπορεῖ νά κάμῃ τετράδια τῶν 25 ἤ τῶν 32, ἤ τῶν 48 ἤ τῶν 20

φύλλων χωρίς νά μείνη κανένα φύλλον. Ὁ ἀριθμός ὅμως τῶν φύλλων κάθε τετραδίου καί εἰς τάς τέσσαρας περιπτώσεις εἶναι ἀριθμοί πρῶτοι πρός ἀλλήλους. Πόσα φύλλα ἔχει ὁ μαθητής;

27) Τρία κινητά α,β,γ, εὑρίσκονται ἐπί τῆς ἰδίας διευθύνσεως ΑΒΓ καί πρόκειται νά ἀναχωρήσουν συγχρόνως διά νά διαγράφουν μέ τήν ἰδίαν φοράν τάς ὁμοκέντρους περιφερείας Α,Β,Γ. Τό α; διαγράφει τήν περιφέρειαν Α εἰς 40 δ.λ. τό β; τήν Β εἰς 50 δ.λ καί τό γ; τήν Γ εἰς 60 δ.λ. Μετά πόσον χρόνον θά κατέχουν συγχρόνως καί τά τρία τό ἴδιον σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως;



28) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διηρημένη εἰς 16 ἴσα μέρη. Ἀπό τοῦ σημείου Α καί κατά τήν φοράν τοῦ βέλους ἀναχωροῦν ἐγγεγραμμέναι τεθλασμέναι γραμμαί Α Β Γ....χ καί Α Β' Γ' ..... Κάθε πλευρά τῆς πρώτης ὑποτείνει 3 διαιρέσεις τῆς περιφερείας καί κάθε πλευρά τῆς δευτέρας 5. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆ περιφερείας θά γίνη ἡ πρώτη συνάντησις τῶν κορυφῶν αὐτῶν;



29) Περιφέρεια κύκλου εἶναι διηρημένη εἰς 16 ἴσα μέρη. Ἐάν ἀρχίσωμεν ἀπό τοῦ σημείου Μ τῆς διαιρέσεως καί ἑνώσωμεν μέ χορδάς ἀνά 3 τά σημεῖα τῆς διαιρέσεως, μετά πόσας τοιαύτας χορδάς τό ὀλιγώτερον θά ἐ-

πιστρέψωμεν εἰς τό σημεῖον Μ;

30) Τρία κινητά διαγράφουν τό καθένα ἰδική του περιφέρεια κύκλου ἐπί τῆς ὁποίας κατέχει ὡρισμένη θέσιν καί ἀπό τήν ὁποίαν τό α: διαγράφει τήν περιφέρειά του εἰς 18 δ.λ. τό β: τήν ἰδική του εἰς 20 δ.λ. καί τό γ: τήν ἰδική του εἰς 10 δ.λ. Ἐάν ἀναχωρήσουν συγχρόνως ἀπό τάς ὡρισμένας θέσεις των μετά πόσον χρόνον θά ἐπανέλθουν εἰς αὐτάς;

31) Τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 447680(22680) Ὁ μ.δ.κ.(ε.κ.π.) αὐτῶν εἶναι 36 (1260). Ποῖον τό ε.κ.π. (μ.κ.δ.) αὐτῶν;

32) Δύο ἀριθμοί ἀπό τούς ὁποίους ὁ ἕνας εἶναι ὁ 540 ἔχουν μ.κ.δ.=30, ε.κ.π.=2700. Ποῖος εἶναι ὁ ἄλλος;

Κεφάλαιον Β'

Κλάσματα

Ἔννοιαι καί Ὁρισμοί

Κάθε πρᾶγμα θεωρεῖται ὡς μία ἀκεραία μονάς π.χ. ἕνα σύρμα, εἴτε μεγάλο εἶναι, εἴτε μικρό εἶναι, θεωρεῖται μία ἀκεραία μονάς καί παριστάνεται μέ τήν μονάδα 1.

Ἐάν κόψωμεν τό σύρμα αὐτό εἰς δύο ἴσα μέρη τό καθένα ἀπό αὐτά καλεῖται <u>κλασματική μονάς</u> ἡ ὁποία σημειώνεται $\frac{1}{2}$ καί ἀπαγγέλλεται <u>ἥμισυ</u> ἤ <u>ἕν δεύτερον</u> τοῦ σύρματος. Ἐάν κόψωμεν τό σύρμα εἰς τρία ἴσα μέρη τό καθένα ἀπό αὐτά καλεῖται <u>κλασματική μονάς</u> ἡ ὁποία σημειώνεται $\frac{1}{3}$ καί ἀπαγγέλλεται <u>ἕν τρίτον</u> τοῦ σύρματος. Ὁμοίως εὑρίσκομεν τό $\frac{1}{4}$, τό $\frac{1}{5}$, τό $\frac{1}{6}$ κλπ. τοῦ σύρματος. Ἄρα

<u>Κλασματική μονάς</u> λέγεται ἕνα ἀπό τά ἴσα μέρη εἰς

τά ὁποῖα χωρίζομεν τήν ἀκεραίαν μονάδα.

'Εάν χωρίσωμεν τήν ἀκεραίαν μονάδα εἰς ἴσα μέρη καί πάρωμεν δύο μέρη ἤ τρία μέρη ἤ τέσσαρα μέρη κλπ. τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά λέγεται κλασματικός ἀριθμός ἤ κλάσμα. Ἄρα

Κλάσμα λέγεται ὁἀριθμός ὁ ὁποῖος προκύπτει ὅταν ἐπαναλάβωμεν τήν κλασματικήν μονάδα πολλάς φοράς. π.χ. ἐάν κόψωμεν τό σύρμα εἰς 7 ἴσα μέρη καί πάρωμεν τά 2 αὐτό λέγεται κλάσμα, ἀπαγγέλλεται δύο ἕβδομα καί σημειώνεται $\frac{2}{7}$. Κάθε κλάσμα γράφεται μέ δύο ἀριθμούς τόν ἕνα ὑπό τόν ἄλλον καί χωρίζονται διά ὁριζοντίας γραμμῆς ὅπως τό $\frac{2}{7}$. Ὁ ὑπό τήν γραμμήν ἀριθμός λέγεται παρονομαστής (ἐκ τοῦ ρήματος παρονομάζω) διότι φανερώνει τό ὄνομα τῶν ἴσων μερῶν εἰς τά ὁποῖα ἐχωρίσθη ἡ ἀκεραία μονάς. Ὁ ἄνω τῆς γραμμῆς ἀριθμός λέγεται ἀριθμητής (ἐκ τοῦ ρήματος ἀριθμῶ), διότι φανερώνει τόν ἀριθμόν τῶν μερῶν ἀπό τά ὁποῖα ἀποτελεῖται τό κλάσμα. Ὁ ἀριθμητής καί ὁ παρονομαστής μαζί λέγονται ὅροι τοῦ κλάσματος.

Τά κλάσματα τῶν ὁποίων ὁ παρονομαστής δέν εἶναι 10,100,1000 κλπ. λέγονται κοινά κλάσματα.

Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς: Καί μία μόνη κλασματική μονάς θεωρεῖται κλάσμα.

Σ η μ ε ί ω σ ι ς. Ἡ λέξις κλάσμα προέρχεται ἀπό τό ρῆμα κλάω(κλῶ) τό ὁποῖον σημαίνει κόπτω. Κλάσμα λοιπόν σημαίνει κομμάτι. Τά κλάσματα ἦσαν γνωστά ἀπό ἀρχαιοτάτων χρόνων. Τήν γραμμήν τοῦ κλάσματος τήν ἐπενόησαν οἱ Ἄραβες καί τήν ἔγραφον πλαγίως π. χ. 2/7.

'Ομώνυμα καί 'Ετερώνυμα κλάσματα

Τά κλάσματα πού γίνονται άπό τήν ίδία κλασματική μονάδα, έχουν έπομένως τόν ίδιον παρονομαστήν, καί λέγονται <u>'Ομώνυμα</u> π.χ. τά κλάσματα $\frac{2}{7}$ καί $\frac{5}{7}$ είναι όμώνυμα "Αρα

<u>'Ομώνυμα</u> λέγονται τά κλάσματα πού έχουν τόν ίδιον παρονομαστήν.

Τά κλάσματα πού γίνονται άπό διαφορετικάς κλασματικάς μονάδας, έχουν έπομένως διαφορετικούς παρονομαστάς καί λέγονται <u>'Ετερώνυμα</u>.π.χ. τά κλάσματα $\frac{3}{7}$ καί τ $\frac{5}{6}$ είναι έτερώνυμα.

<u>'Ετερώνυμα</u> λέγονται τά κλάσματα πού έχουν διαφορετικούς παρονομαστάς.

Σύγκρισις κλάσματος πρός τήν άκεραίαν μονάδα

'Από τόν όρισμόν τοῦ κλάσματος συνάγονται τά έξῆς:

α) "Οταν ό άριθμητής είναι μικρότερος τοῦ παρονομαστοῦ τότε τό κλάσμα είναι μικρότερον τῆς άκεραίας μονάδος 1 δηλ. $\frac{3}{4}<1$.

β) "Οταν ό άριθμητής είναι ίσος μέ τόν παρονομαστήν τότε τό κλάσμα είναι ίσον μέ τήν άκεραίαν μονάδα 1 δηλ. $\frac{4}{4}=1$. "Αρα

1) 'Η άκεραία μονάς 1 είναι ίση μέ κάθε κλάσμα πού έχει ίσους όρους δηλ. $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\frac{37}{37}=\frac{568}{568}$ κ.ο.κ.

2) "Οταν ένα κλάσμα είναι ίσο μέ τήν άκεραίαν μονάδα τότε οί όροι αύτοῦ είναι ίσοι δηλ. έπειδή $\frac{2+3}{1+4}=1$ έπεται $2+3=1+4$.

γ) "Οταν ό άριθμητής είναι μεγαλύτερος τοῦ παρονομαστοῦ τότε τό κλάσμα είναι μεγαλύτερο τῆς άκεραίας μονάδος 1 καί ὀνομάζεται Καταχρηστικόν ἤ Νόθον δηλ. $\frac{5}{4}>1$.

Μικτοί ἀριθμοί

Ἐάν ἀγοράσωμεν π.χ. δυόμιση ὀκάδες λάδι δηλ. 2 ὀκάδες καί $\frac{1}{2}$ τῆς ὀκᾶς λάδι τόν ἀριθμόν αὐτόν θά τόν γράψωμεν ὡς ἑξῆς $2+\frac{1}{2}$ χάριν δέ συντομίας παραλείπομεν τό σημεῖον (+) καί γράφομεν αὐτόν ὡς ἑξῆς $2\frac{1}{2}$
Ὁ ἀριθμός αὐτός ἐπειδή ἀποτελεῖται ἀπό ἀκέραιον καί ἀπό κλάσμα ὀνομάζεται μικτός καί ἀπαγγέλλεται δύο καί ἕν δεύτερον. Ὥστε

Μικτός λέγεται ὁ ἀριθμός πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀκέραιον καί ἀπό κλάσμα.

Τό σημεῖον (+) πού παραλείπομεν χάριν συντομίας θά τό φανταζώμεθα πάντοτε ὅτι ὑπάρχει μεταξύ τοῦ ἀκεραίου καί τοῦ κλάσματος δηλ. ὁ μικτός $7\frac{3}{4}$ γράφεται $7+\frac{3}{4}$.

Ἰδιότητες τῶν κλασμάτων

1η Ἰδιότης. "Κάθε κλάσμα παριστάνει τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διά τοῦ παρονομαστοῦ"

Τό κλάσμα π.χ. $\frac{3}{4}$ παριστάνει τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμοῦ 3 διά τοῦ παρονομαστοῦ 4. Διότι ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι 3 μέτρα ὑφάσματος πρόκειται νά μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου εἰς 4 ἄτομα, κάθε ἄτομον θά πάρῃ ἀπό $\frac{3}{4}$ τοῦ μέτρου: Αὐτό δέ θά τό εὕρωμεν ἐάν διαιρέσωμεν τά 3 μέτρα διά τοῦ ἀριθμοῦ 4 τῶν ἀτόμων. Ἀπό τήν ἰδιότητα αὐτήν ἔχομεν τά ἑξῆς:

α) Κάθε κλάσμα γράφεται καί ἀπαγγέλλεται ὡς διαίρεσις: π.χ. τό $\frac{3}{4}$ γράφεται 3:4 καί ἀπαγγέλλεται τρία διά τέσσαρα.

β) Ὅταν μία διαίρεσις εἶναι ἀτελής τότε συμπληρώνομεν τό πηλῖκον μέ ἕνα κλάσμα τό ὁποῖον ἔχει ἀριθμητήν τό ὑπόλοιπον καί παρονομαστήν τόν διαιρέτην π.χ. ἀπό τήν διαίρεσιν $\begin{array}{r|l} 11 & 5 \\ 1 & 2 \end{array}$ ἔχομεν πηλῖκον $2\frac{1}{5}$. Παρατηροῦμεν ὅτι διά τῶν κλασμάτων κάθε διαίρεσις ἀκεραίων γίνεται τελεία. Αὐτό ὑπῆρξεν ἡ αἰτία τῆς ἐπινοήσεως τῶν κλασμάτων.

2α Ἰδιότης. "Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν μόνον τόν ἀριθμητήν ἤ διαιρέσωμεν μόνον τόν παρονομαστήν (ἄν διαιρῆται ἀκριβῶς) μέ ἕνα ἀριθμόν τότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν ἀριθμητήν αὐτόν".

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α Ἔστω τό κλάσμα $\frac{5}{12}$. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τόν ἀριθμητήν αὐτοῦ ἐπί 2 προκύπτει τό κλάσμα $\frac{10}{12}$ τό ὁποῖον εἶναι δύο φοράς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{12}$, διότι ἀμφότερα περιέχουν δωδέκατα, ἀλλά τό ἕνα περιέχει 5 καί τό ἄλλο 10 δηλ.δύο φοράς περισσότερα. Ἐάν διαιρέσωμεν τόν παρονομαστήν αὐτοῦ διά 2 προκύπτει τό κλάσμα $\frac{5}{6}$ τό ὁποῖον εἶναι δύο φοράς μεγαλύτερον τοῦ $\frac{5}{12}$, διότι ἀμφότερα ἀποτελοῦνται ἀπό 5 μέρη τῆς μονάδος ἀλλά τά ἕκτα εἶναι δύο φοράς μεγαλύτερα τῶν δωδεκάτων."Ἄρα

Διά νά γίνῃ ἕνα κλάσμα 2,3,4 κλπ.φοράς μεγαλύτερον ἤ πολλαπλασιάζομεν τόν ἀριθμητήν του ἐπί 2,3,4 κλπ. ἤ διαιροῦμεν τόν παρονομαστήν του διά 2,3,4 κλπ.ἄν διαιρῆται ἀκριβῶς.

Ἡ ἰδιότης αὐτη μᾶς δίδει δύο τρόπους πολλαπλασιασμοῦ κλάσματος ἐπί ἀκέραιον.

3η Ἰδιότης. "Ὅταν διαιρέσωμεν μόνον τόν ἀριθμητήν (ἄν διαιρῆται ἀκριβῶς) ἤ πολλαπλασιάσωμεν μόνον τόν παρονομαστήν μέ ἕνα ἀριθμόν,τότε ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος διαιρεῖται διά τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ.

Παράδειγμα. Ἔστω τό κλάσμα $\frac{4}{7}$. Ἐάν διαιρέσωμεν τόν ἀριθμητήν αὐτοῦ διά 2 προκύπτει τό κλάσμα $\frac{2}{7}$ τό ὁποῖον εἶναι δύο φοράς μικρότερον τοῦ $\frac{4}{7}$, διότι ἀμφότερα περιέχουν ἕβδομα ἀλλά τό μέν πρῶτον περιέχει 4, τό δέ δεύτερον περιέχει 2 δηλ.δύο φοράς ὀλιγώτερα τοῦ πρώτου. Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τόν παρονομαστήν αὐτοῦἐπί 2 προκύπτει τό κλάσμα $\frac{4}{14}$ τό ὁποῖον εἶναι δύο φοράς μικρότερον τοῦ $\frac{4}{7}$, διότι ἀμφότερα ἔχουν 4 μέρη τῆς μονάδος ἀλλά τά δέκατα τέταρτα εἶναι δύο φοράς μικρότερα τῶν ἑβδόμων. Ἄρα

Διά νά γίνῃ κλάσμα 2,3,4 κλπ.φοράς μικρότερον ἤ διαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν του διά 2,3,4 κλπ.ἄν διαιρῆται ἀκριβῶς ἤ πολλαπλασιάζομεν τόν παρονομαστήν ἐπί 2,3,4 κλπ. Ἡ ἰδιότης αὐτή μᾶς δίδει δύο τρόπους διαιρέσεως κλάσματος διά ἀκεραίου.

4η Ἰδιότης. "Ὅταν πολλαπλασιάσωμεν ἤ διαιρέσωμεν καί τούς δύο ὅρους ἑνός κλάσματος μέ τόν ἴδιον ἀριθμόν τότε, ἡ ἀξία τοῦ κλάσματος δέν ἀλλάσσει"

Παράδειγμα. Ἔστω τό κλάσμα $\frac{6}{8}$. Ἐάν καί οἱ δύο ὅροι πολλαπλασιασθοῦν ἐπί 2, τό κλάσμα γίνεται πρῶτον μέν δύο φοράς μικρότερον. ἄρα ἐπανέρχεται εἰς τήν ἀρχικήν ἀξίαν του. Ἐάν καί οἱ δύο ὅροι διαιρεθοῦν διά 2,τό κλάσμα γίνεται πρῶτον 2 φοράς μικρότερον καί ἔπειτα 2 φοράς μεγαλύτερον· ἄρα ἐπανέρχεται εἰς τήν ἀρχικήν ἀξίαν του.

Ὥστε: $\frac{6}{8} = \frac{6X2}{8X2} = \frac{6:2}{8:2}$ ἤ $\frac{6}{8} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$

5η Ἰδιότης: α) "Ὅταν καί εἰς τούς δύο ὅρους προσθέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν τότε ἐάν τό κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος θά μεγαλώσῃ ἐάν εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος θά μικράνῃ.

β) Ὅταν καί ἀπό τούς δύο ὅρους ἀφαιρέσωμεν τόν ἴδιον ἀριθμόν τότε ἐάν τό κλάσμα εἶναι μικρότερον τῆς μονάδος θά μικράνῃ ἐάν τό κλάσμα εἶναι μεγαλύτερον τῆς μονάδος θά μεγαλώσῃ.

γ) Ὅταν καί εἰς τούς δύο ὅρους προσθέσωμεν ἤ ἀφαιρέσωμεν πολλαπλάσια αὐτῶν, τά ὁποῖα θά προκύπτουν ἀπό πολλαπλασιασμόν τῶν ὅρων τοῦ κλάσματος ἐπί τόν ἴδιον ἀριθμόν, τότε τό κλάσμα δέν ἀλλάσσει.

Π.χ. τό κλάσμα $\frac{3}{4}$ ἔχει τήν ἰδίαν ἀξίαν μέ τό κλάσμα $\frac{3+6}{4+8}$ ἤ $\frac{9}{12}$ ὅπου 6 = 3Χ2 καί 8=4Χ2. Ἐπίσης τό κλάσμα $\frac{9}{12}$ ἔχει τήν ἰδίαν ἀξίαν μέ τό κλάσμα $\frac{9-6}{12-8}$ ἤ $\frac{3}{4}$

Βοηθητικαί Πράξεις

1η) Τροπή ἀκεραίου εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας

Ὅταν ἕνα ἀκέραιον π.χ. τόν 7 τόν πολλαπλασιάσωμεν καί συγχρόνως τόν διαιρέσωμεν διά 1,2,3,4 κλπ. τότε κατά τά γνωστά ὁ 7 δέν θά ἀλλάξῃ δηλ. $7=\frac{7X1}{1}=\frac{7X2}{2}=\frac{7X3}{3}=\frac{7X4}{4}$ κ.ο.κ. δηλ. $7=\frac{7}{1}=\frac{14}{2}=\frac{21}{3}=\frac{28}{4}$ κ.ο.κ. Ἄρα

α) Κάθε ἀκέραιος γράφεται ὡς κλάσμα τό ὁποῖον ἔχει ἀριθμητήν τόν ἑαυτόν του καί παρονομαστήν τήν μονάδα.

β) Κάθε ἀκέραιος γράφεται ὡς κλάσμα μέ παρονομαστήν τῆς ἀρεσκείας μας.

2α) Τροπή ἀκεραίου εἰς μικτόν τῆς ἰδίας ἀξίας

Ἔστω π.χ. ὁ ἀκέραιος 7 τόν ὁποῖον γράφομεν ὡς ἑξῆς: 6+1. Ἐπειδή κατά τά γνωστά $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}$ κ.ο.κ. τό ἄθροισμα 6+1 ἠμπορεῖ νά γραφῇ ὡς ἑξῆς: $6+\frac{2}{2}$ ἤ $6+\frac{3}{3}$ ἤ $6+\frac{4}{4}$ καί ἐπειδή χάριν συντομίας παραλείπομεν τό σημετον (+) θά ἔχωμεν: $6\frac{2}{2}$ ἤ $6\frac{3}{3}$ ἤ $6\frac{4}{4}$ κ.ο.κ. Ὥστε

$7 = 6\frac{2}{2}$, $7 = 6\frac{3}{3}$, $7 = 6\frac{4}{4}$ κ.ο.κ. Ἄρα

Διά νά τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς μικτόν τῆς ἰδίας ἀξίας ἐλαττώνομεν τόν ἀκέραιον κατά μίαν ἀκεραίαν μονάδα τήν ὁποίαν κάμνομεν κλάσμα μέ ὅρους ἴσους.

3η) Τροπή μικτοῦ εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας

Ἔστω π.χ. ὁ μικτός $2\frac{1}{5}$. Ἐπειδή $1=\frac{5}{5}$ λέγομεν. Ἡ μία ἀκεραία εἶναι ἴση μέ 5 πέμπτα, ἑπομένως αἱ δύο ἀκέραιαι μονάδες πού ἔχει ὁ μικτός εἶναι ἴσαι μέ (2Χ5) πέμπτα· ἐάν προσθέσωμεν εἰς αὐτό καί τό 1 πέμπτον πού ἔχει ὁ μικτός θά ἔχωμεν:

(2Χ5)+ 1 πέμπτα ἤ 11 πέμπτα δηλ. $2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$ Ἄρα

Διά νά τρέψωμεν μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας πολλαπλασιάζομεν τόν ἀκέραιον ἐπί τόν παρονομαστήν, εἰς τό γινόμενον προσθέτομεν τόν ἀριθμητήν καί ὑπό τό τελικόν ἐξαγόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστήν, τόν παρονομαστήν πού ἔχει τό κλάσμα τοῦ μικτοῦ.

4η) Ἐξαγωγή τῶν ἀκεραίων μονάδων καταχρηστικοῦ κλάσματος

Ἔστω π.χ. τό καταχρηστικόν κλάσμα $\frac{11}{5}$. Ἐπειδή ὡς γνωστόν τό $\frac{11}{5}$ παριστάνει 11:5 ἤ $2\frac{1}{5}$ διά τοῦτο γράφομεν $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$. Ἄρα διά νά ἐξαγάγωμεν τάς ἀκεραίας μονάδας πού περιέχει ἕνα καταχρηστικόν κλάσμα διαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν διά τοῦ παρονομαστοῦ. Ἐάν μείνῃ ὑπόλοιπον γράφομεν αὐτό ἀριθμητήν καί παρονομαστήν γράφομεν τόν παρονομαστήν τοῦ καταχρηστικοῦ κλάσματος.

5η) Ἁπλοποίησις κλάσματος

Ἁπλοποιῶ ἕνα κλάσμα σημαίνει νά εὕρω ἄλλο κλάσμα μὲ μικροτέρους ὅρους καὶ τῆς ἰδίας ἀξίας.

Διὰ νὰ ἁπλοποιήσωμεν ἕνα κλάσμα διαιροῦμεν καὶ τοὺς δύο ὅρους του μὲ ἕνα κοινὸν διαιρέτην αὐτῶν.

<u>Παράδειγμα:</u> Νὰ ἁπλοποιηθῇ τὸ κλάσμα $\frac{36}{54}$

Ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο ὅροι 36 καὶ 54 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 2 κάμνομεν τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ ἔχομεν $\frac{18}{27}$. Ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο ὅροι 18 καὶ 27 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 3 κάμνομεν καὶ τὴν διαίρεσιν αὐτὴν καὶ εὑρίσκομεν $\frac{6}{9}$. Ἐπειδὴ καὶ οἱ δύο ὅροι 6 καὶ 9 διαιροῦνται ἀκριβῶς διὰ 3 κάμνομεν καὶ αὐτὴν τὴν διαίρεσιν καὶ εὑρίσκομεν $\frac{2}{3}$. Ἐπειδὴ οἱ ὅροι 2 καὶ 3 δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην ἐκτὸς τῆς μονάδος διὰ τοῦτο ἡ πρᾶξις τῆς ἁπλοποιήσεως τερματίζεται. Κάθε ἕνα ἀπὸ τὰ κλάσματα $\frac{18}{27}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{2}{3}$ ποὺ προέκυψαν ἔχει τὴν ἰδίαν ἀξίαν μὲ τὸ ἀρχικὸν κλάσμα $\frac{36}{54}$ καὶ εἶναι ἁπλούστερα αὐτοῦ· ἀλλὰ τὸ ἁπλούστερον ἀπὸ ὅλα εἶναι τὸ $\frac{2}{3}$ διότι οἱ ὅροι αὐτοῦ 2 καὶ 3 δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα. δηλ. εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους.

Κάθε κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι δὲν ἔχουν ἄλλον κοινὸν διαιρέτην παρὰ τὴν μονάδα δηλ. εἶναι πρῶτοι πρὸς ἀλλήλους ὀνομάζεται <u>Ἀνάγωγον</u>. π.χ. τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{12}{17}$, $\frac{13}{18}$ εἶναι ἀνάγωγα. Διὰ νὰ κάμωμεν ἕνα κλάσμα ἀνάγωγον διαιροῦμεν τοὺς ὅρους αὐτοῦ διὰ τοῦ μ.κ.δ. αὐτῶν. π.χ. Διὰ νὰ γίνῃ ἀνάγωγον τὸ $\frac{36}{54}$ διαιροῦμεν τοὺς ὅρους του διὰ τοῦ 18 ποὺ εἶναι ὁ μ.κ.δ. τοῦ 36 καὶ 54 καὶ ἔχομεν: $\frac{36}{54} = \frac{36:18}{54:18} = \frac{2}{3}$

Ἐὰν τύχῃ ἡ λύσις ἑνὸς προβλήματος νὰ ὁδηγήσῃ εἰς κλάσμα τοῦ ὁποίου οἱ ὅροι εἶναι γινόμενα πολλῶν παραγόντων τότε ἀντὶ νὰ κάμωμεν ὅλους τοὺς πολλαπλασιασμοὺς κάμνομεν ἁπλοποιήσεις.

<u>Παράδειγμα:</u> Νά ἁπλοποιηθῇ τό κλάσμα $\frac{11X3X17X6}{19X18X11}$

Ἐπειδή ὁ 11 εὑρίσκεται καί εἰς τούς δύο ὅρους διαγράφομεν ἀπό τόν ἀριθμητήν τόν 3 καί τόν 6 καί ἀπό τόν παρονομαστήν τόν 18 καί μένει $\frac{17}{19}$. Τό $\frac{17}{19}$ εἶναι ἀνάλογον καί ἡ ἁπλοποίησις τερματίζεται. Ἄρα

$$\frac{11X3X17X6}{19X18X11} = \frac{17}{19}$$

<u>Σημείωσις</u>. Ἐπειδή τά ἀνάγωγα κλάσματα δέν ἁπλοποιοῦνται διά τοῦτο ὁρίζομεν αὐτά καί ὡς ἑξῆς:

Ἀ<u>νάγωγον</u> λέγεται τό κλάσμα τό ὁποῖον δέν ἁπλοποιεῖται.

6η) Τροπή ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς Ὁμώνυμα

Τρέπω δοθέντα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα σημαίνει εὑρίσκω ἄλλα κλάσματα τῆς ἰδίας ἀξίας μέ τά δοθέντα καί τά ὁποῖα νά ἔχουν τόν ἴδιον παρονομαστήν. Διά νά τρέψωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς ὁμώνυμα ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Γενικός τρόπος

Εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν. Κατόπιν διαιροῦμεν τό ε.κ.π. χωριστά μέ κάθε ἕνα παρονομαστήν καί μέ τό πηλίκον πολλαπλασιάζομεν καί τούς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει ὁ παρονομαστής μέ τόν ὁποῖον διαιρέσαμεν τό ε.κ.π.

Παράδειγμα

Νά γίνουν ὁμώνυμα τά ἑξῆς κλάσματα.

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ καί $\frac{4}{15}$

$\underline{20}$ $\underline{5}$ $\underline{4}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{15}$ → $\frac{40}{60}$, $\frac{25}{60}$, $\frac{16}{60}$

3	12	15	2
3	6	15	2
3	3	15	3
1	1	5	5
1	1	1	ε.κ.π. = 2X2X3X5 = 60

Ὅταν τά ἑτερώνυμα κλάσματα εἶναι δύο τότε ἐκτός

τοῦ γενικοῦ τρόπου μεταχειριζόμεθα καί τόν ἑξῆς τρόπον: "Πολλαπλασιάζομεν τούς ὅρους τοῦ πρώτου κλάσματος μέ τόν παρονομαστήν τοῦ δευτέρου καί τούς ὅρους τοῦ δευτέρου κλάσματος μέ τόν παρονομαστήν τοῦ πρώτου" π.χ. Διά τά κλάσματα $\frac{2}{3}$ καί $\frac{5}{7}$ θά ἔχωμεν:
$\frac{2X7}{3X7}=\frac{14}{21}$ καί $\frac{5X3}{7X3}=\frac{15}{21}$.

<u>Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς 1η.</u> Τά κλάσματα π.χ. $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ γίνονται συντόμως ὁμώνυμα ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τούς ὅρους τοῦ πρώτου ἐπί 3 τοῦ δευτέρου ἐπί 4 καί τοῦ τρίτου ἐπί 2.

<u>Π α ρ α τ ή ρ η σ ι ς 2α.</u> Τά κλάσματα π.χ. $\frac{8}{10}$ $\frac{15}{25}$ $\frac{14}{35}$ γίνονται συντόμως ὁμώνυμα ἐάν διαιρέσωμεν τούς ὅρους τοῦ πρώτου μέ τό 2, τοῦ δευτέρου μέ τό 5 καί τοῦ τρίτου μέ τό 7.

Τροπή ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς τόν ἐλάχιστον κοινόν παρονομαστήν

Τρέπω δοθέντα ἑτερώνυμα κλάσματα εἰς τόν ἐλάχιστον κοινόν παρονομαστήν σημαίνει νά τρέψω αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί ὁ κοινός παρονομαστής πού θά ἔχουν νά εἶναι ὁ ἐλάχιστος ἀπό ὅλους τούς κοινούς παρονομαστάς πού εἶναι δυνατόν νά ἀποκτήσουν τά δοθέντα κλάσματα. Ἡ τροπή ἑτερωνύμων κλασμάτων εἰς τόν ἐλάχιστον κοινόν παρονομαστήν γίνεται ὡς ἑξῆς:

α) Ὅταν τά ἑτερώνυμα κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα (δηλ. δέν ἁπλοποιοῦνται) τότε εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν καί τρέπομεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα ὅπως γνωρίζωμεν.

β) Ὅταν τά ἑτερώνυμα κλάσματα δέν εἶναι ἀνάγωγα τότε ἁπλοποιοῦμεν αὐτά διά νά γίνουν ἀνάγωγα καί ἔπειτα εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τῶν ἀναγώγων κλασμάτων καί ἀκολούθως τρέπομεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα.

<u>Παράδειγμα</u>. Νά τραποῦν εἰς τόν ἐλάχιστον κοινόν παρονομαστήν τά κλάσματα $\frac{6}{9}$ $\frac{15}{36}$ $\frac{12}{45}$

Ἐπειδή τά κλάσματα αὐτά δέν εἶναι ἀνάγωγα, τά ἁπλοποιοῦμεν διά νά γίνουν ἀνάγωγα καί ἔχομεν $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{12}$ $\frac{4}{15}$. Ἐπειδή τά νέα αὐτά κλάσματα εἶναι ἀνάγωγα δηλ. δέν ἁπλοποιοῦνται εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν τό ὁποῖον εἶναι ὁ 60 καί τρέπομεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί ἔχομεν: $\frac{40}{60}$ $\frac{25}{60}$ $\frac{16}{60}$. Ὁ 60 εἶναι ὁ ἐλάχιστος κοινός παρονομαστής εἰς τόν ὁποῖον ἠμποροῦμεν νά τρέψωμεν τά δοθέντα κλάσματα $\frac{6}{9}$ $\frac{15}{36}$ $\frac{12}{45}$.

<u>Σημείωσις</u>. Κλάσματα μέ διαφορετικούς ἀριθμητάς τρέπονται εἰς τόν αὐτόν ἀριθμητήν. Πρός τοῦτο εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμητῶν. Κατόπιν διαιροῦμεν τό ε.κ.π. μέ κάθε ἕνα χωριστά ἀριθμητήν καί μέ τό πηλῖκον πολλαπλασιάζομεν τούς ὅρους τοῦ κλάσματος εἰς τό ὁποῖον ἀνήκει ὁ ἀριθμητής μέ τόν ὁποῖον διαιρέσαμεν τό ε.κ.π.

<u>Σύγκρισις κλασμάτων</u>

α) Ἀπό δύο ἤ περισσότερα κλάσματα πού ἔχουν τόν ἴδιον ἀριθμητήν, μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τόν μικρότερον παρονομαστήν.

Π.χ. Ἀπό τά κλάσματα $\frac{4}{9}$ $\frac{4}{7}$ $\frac{4}{5}$ μεγαλύτερον εἶναι τό $\frac{4}{5}$ καί μικρότερον εἶναι τό $\frac{4}{9}$.

β) Ἀπό δύο ἤ περισσότερα κλάσματα πού ἔχουν τόν ἴδιον παρονομαστήν μεγαλύτερον εἶναι ἐκεῖνο πού ἔχει τόν μεγαλύτερον ἀριθμητήν.

Π.χ. ἀπό τά κλάσματα $\frac{2}{11}$ $\frac{5}{11}$ $\frac{7}{11}$ μεγαλύτερον εἶναι τό $\frac{7}{11}$ καί μικρότερον εἶναι τό $\frac{2}{11}$.

γ) Ὅταν τά κλάσματα ἔχουν διαφορετικούς ἀριθμητάς καί διαφορετικούς παρονομαστάς τότε τά τρέπομεν εἰς ὁμώνυμα καί ἔπειτα τά συγκρίνομεν.

Προβλήματα καί Ἀσκήσεις

1) Τί κλάσμα τῆς δραχμῆς εἶναι 30,50,75 λεπτά;
" " " ὀκᾶς " 50, 125,300 δράμια;
" " " ὥρας " 1 5 20 π.λεπτά;
" " " περιφερείας " 90^o,120^o,270^oμοῖραι;
" " τοῦ 9,(11),(29) " ὁ 2, ὁ 5, ὁ 7;

2) Τεχνίτης κάμνει ἔργον εἰς 5 ἡμ. καί ἄλλος εἰς 6 ἡμ. Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου κάμνει ὁ καθένας εἰς 1 ἡμ.

3) Βρύση γεμίζει δεξαμενήν εἰς 3 ὥρ.καί ἄλλη βρύση εἰς 4 ὥρ.Πόσο μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζει ἡ κάθε μία εἰς 1 ὥρ.;

4) Νά γίνουν 2,3,4 φοράς μεγαλύτερα τά κλάσματα $\frac{7}{15}$ $\frac{8}{45}$ $\frac{11}{24}$ $\frac{17}{30}$ $\frac{13}{120}$. Ἐπίσης νά γίνουν 2,3,4 φοράς μικρότερα τά κλάσματα: $\frac{8}{13}$ $\frac{6}{11}$ $\frac{12}{25}$ $\frac{15}{17}$ $\frac{20}{31}$

5) Νά τρέψετε τόν 2 εἰς πέμπτα, τόν 9 εἰς τέταρτα, τόν 5 εἰς Ὄγδοα καί τήν μονάδα 1 εἰς ἕβδομα.

6) Οἱ ἀκέραιοι 2,11,15 νά τραποῦν εἰς μικτούς τῶν ὁποίων τό κλάσμα νά ἔχῃ παρονομαστήν 5 ἤ 7 ἤ ἕνα ἄλλο ἀκέραιον.

7) Νά τραποῦν εἰς κλάσματα οἱ μικτοί $7\frac{5}{9}$,$11\frac{10}{17}$ $12\frac{7}{12}$, $15\frac{11}{15}$.

8) Νά ἐξαχθοῦν αἱ ἀκέραιαι μονάδες ἀπό τά ἑξῆς καταχρηστικά:
$\frac{84}{7}$ $\frac{86}{5}$ $\frac{155}{8}$ $\frac{313}{44}$ στατῆρες $\frac{29}{8}$ πήχεις, $\frac{75}{12}$ ὀκ.

9) Νά ἁπλοποιηθοῦν τά κλάσματα

$\frac{8}{24}$ $\frac{12}{36}$ $\frac{15}{35}$ $\frac{318}{417}$ $\frac{135}{154}$ $\frac{187}{198}$ $\frac{14X24}{6}$ $\frac{8}{32X5}$ $\frac{55X18}{36X11}$

$\frac{120X90X15X24}{100X15X4X6}$ $\frac{75X64X44}{11X25X8}$ $\frac{78X84X22}{98X99X520}$

10) Νά τραποῦν εἰς τόν ἐλάχιστον κοινόν παρονομαστήν τά κλάσματα

α) $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ β) $\frac{6}{8}$ $\frac{10}{12}$ $\frac{2}{16}$ γ) $\frac{1}{2}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{6}{64}$

11) Νά γραφοῦν κατά μέγεθος τά κλάσματα

α) $\frac{7}{13}$ $\frac{10}{13}$ $\frac{5}{13}$ β) $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{23}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{7}{12}$ γ) $\frac{5}{9}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{36}$

δ) $\frac{5}{16}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{8}$ $\frac{9}{32}$

12) Ἀπό δύο κομμάτια ὑφάσματος τῆς ἰδίας ποιότητος καί τῆς ἰδίας ἀξίας πλάτους $\frac{7}{8}$ πήχ. καί $\frac{15}{17}$ πήχ. ποῖον θά προτιμήσωμεν;

13) Δύο σύρματα ἀπό χαλκό ἔχουν τό ἴδιο πάχος καί τό ἴδιο βάρος. Τό μῆκος τοῦ ἑνός εἶναι $1\frac{21}{28}$ μ. ($1\frac{3}{4}$ μ.) καί τοῦ ἄλλου $1\frac{15}{18}$ μ. ($\frac{21}{18}$ μ.) ποῖον ἔχει μεγαλύτερον μῆκος;

Θεμελιώδεις πράξεις ἐπί τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

Πρόσθεσις

Ἡ πρόσθεσις ὁρίζεται εἰς τούς κλασματικούς ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους μέ τήν διαφοράν ὅτι αἱ μονάδες τῶν προσθετέων εἶναι ἤ κλασματικαί ἤ ἀκέραιαι καί κλασματικαί. Εἰς τήν ἐκτέλεσιν δέ τῆς προσθέσεως διακρίνομεν κυρίως τρεῖς περιπτώσεις:

α) Πρόσθεσις ὁμωνύμων κλασμάτων

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν πρόσθεσιν $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$

'Επειδή έχομεν άριθμούς οί όποίοι είναι καμωμένοι άπό τήν ίδίαν μονάδα $\frac{1}{5}$ ήμποροῦμεν νά τούς προσθέσωμεν. Θά προσθέσωμεν δέ μόνον τούς άριθμητάς 2,3,4, διότι μόνον εἰς αὐτούς ὑπάρχει τό πλῆθος τῶν μονάδων, καθενός κλάσματος, τῶν όποίων τό ἄθροισμα ζητοῦμεν. Κατόπιν ὑπό τό ἄθροισμα $2+3+4=9$ θά γράψωμεν τόν κοινόν παρονομαστήν 5 διά νά δηλώσωμεν ὅτι ἡ μονάς ἀπό τήν όποίαν εἶναι καμωμένο τό ἄθροισμα εἶναι ἡ ἰδία μέ τήν μονάδα ἀπό τήν όποίαν εἶναι καμωμένοι οἱ προσθετέοι. Δηλ.

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=\frac{2+3+4}{5}=\frac{9}{5}=1\frac{4}{5}$$ "Αρα

" Διά νά προσθέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα, προσθέτομεν μόνον τούς ἀριθμητάς καί ὑπό τό ἄθροισμα αὐτῶν γράφομεν τόν κοινόν παρονομαστήν".

β) Πρόσθεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν πρόσθεσιν $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$.

'Επειδή ἔχομεν ἀριθμούς οἱ όποῖοι εἶναι καμωμένοι ἀπό τάς διαφορετικοῦ μεγέθους μονάδας $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ διά τοῦτο δέν ἡμποροῦμεν νά τούς προσθέσωμεν. Πρέπει λοιπόν νά κάμωμεν τούς ἀριθμούς αὐτούς $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ ἀπό τήν ἰδίαν μονάδα. Αὐτό θά τό ἐπιτύχωμεν ὅταν τρέψωμεν τά κλάσματα $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{5}{6}$ εἰς ὁμώνυμα. Θά ἔχωμεν λοιπόν

$$\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{12}+\frac{9}{12}+\frac{10}{12}=\frac{8+9+10}{12}=\frac{27}{12}=2\frac{1}{4}$$. "Αρα

" Διά νά προσθέσωμεν ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί ἔπειτα τά προσθέτομεν"

γ) Πρόσθεσις μικτῶν

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν πρόσθεσιν $5\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}$. 'Εάν τρέψωμεν κάθε ἕνα μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας θά ἔχωμεν: $5\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}=\frac{11}{2}+\frac{9}{4}=$

$\frac{22}{4}+\frac{9}{4}=\frac{31}{4}=7\frac{3}{4}$

Εἰς τό ἴδιο ἐξαγόμενον φθάνομεν καί ἐάν προσθέσωμεν χωριστά τούς ἀκεραίους, χωριστά τά κλάσματα καί ἔπειτα ἑνώσωμεν τά δύο ἀθροίσματα πού θά εὕρωμεν. Δηλ. $5\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}=(5+2)+(\frac{1}{2}+\frac{1}{4})=7+\frac{3}{4}=7\frac{3}{4}$ "Αρα

" Διά νά προσθέσωμεν μικτούς ἤ τρέπομεν αὐτούς εἰς κλάσματα ἤ προσθέτομεν χωριστά τούς ἀκεραίους καί χωριστά τά κλάσματα καί ἔπειτα προσθέτομεν τά δύο αὐτά ἀθροίσματα"

<u>Παρατήρησις.</u> Αἱ ἰδιότητες τῆς προσθέσεως εἰς τούς ἀκεραίους ἰσχύουν καί εἰς τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

<u>'Αφαίρεσις</u>

Ἡ 'Αφαίρεσις ὁρίζεται εἰς τούς κλασματικούς ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους μέ τήν διαφοράν ὅτι αἱ μονάδες τοῦ μειωτέου καί τοῦ ἀφαιρετέου εἶναι ἤ κλασματικαί ἤ ἀκέραιαι καί κλασματικαί. Εἰς τήν ἐκτέλεσιν δέ τῆς ἀφαιρέσεως διακρίνομεν κυρίως τρεῖς περιπτώσεις:

<u>α) 'Αφαίρεσις ὁμωνύμων κλασμάτων</u>

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν ἀφαίρεσιν $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}$ 'Επειδή ἔχομεν ἀριθμούς οἱ ὁποῖοι εἶναι καμωμένοι ἀπό τήν ἰδίαν μονάδα $\frac{1}{9}$ ἠμποροῦμεν νά τούς ἀφαιρέσωμεν. Θά κάμωμεν δέ μόνον τήν ἀφαίρεσιν 7-2 τῶν ἀριθμητῶν διότι μόνον εἰς αὐτούς ὑπάρχει τό πλῆθος τῶν μονάδων καθενός κλάσματος τῶν ὁποίων τήν διαφοράν ζητοῦμεν. Κατόπιν ὑπό τήν διαφοράν τῶν ἀριθμητῶν θά γράψωμεν τόν κοινόν παρονομαστήν 9 διά νά δηλώσωμεν ὅτι ἡ μονάς ἀπό τήν ὁποίαν εἶναι καμωμένη ἡ διαφορά τῶν ἀριθμητῶν εἶναι ἡ ἴδία μέ τήν μονάδα ἀπό τήν ὁποίαν εἶναι καμωμένοι ὁ μειωτέος καί ὁ ἀφαιρετέος Δηλ. $\frac{7}{9}-\frac{2}{9}=\frac{7-2}{9}=\frac{5}{9}$ Ἄρα

" Διά νά ἀφαιρέσωμεν ὁμώνυμα κλάσματα ἀφαιροῦμεν μόνον τούς ἀριθμητάς καί ὑπό τήν διαφοράν αὐτῶν γράφομεν τόν κοινόν παρονομαστήν".

β) Ἀφαίρεσις ἑτερωνύμων κλασμάτων

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν ἀφαίρεσιν $\frac{3}{4}-\frac{5}{7}$

Ἐπειδή ἔχομεν ἀριθμούς καμωμένους ἀπό τάς διαφορετικοῦ μεγέθους μονάδας $\frac{1}{4}$ κάί $\frac{1}{7}$ διά τοῦτο δέν ἠμποροῦμεν νά τούς ἀφαιρέσωμεν. Πρέπει λοιπόν νά κάμωμεν τούς ἀριθμούς αὐτούς $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{7}$ ἀπό τήν ἴδιαν μονάδα. Αὐτό θά τό ἐπιτύχωμεν ὅταν τρέψωμεν τά κλάσματα $\frac{3}{4}$ καί $\frac{5}{7}$ εἰς ὁμώνυμα. Θά ἔχωμεν λοιπόν

$$\frac{3}{4}-\frac{5}{7}=\frac{21}{28}-\frac{20}{28}=\frac{21-20}{28}=\frac{1}{28}$$ Ἄρα

" Διά νά ἀφαιρέσωμεν δύο ἑτερώνυμα κλάσματα, τρέπομεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί ἔπειτα τά ἀφαιροῦμεν".

γ) Ἀφαίρεσις μικτῶν ἀριθμῶν

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν ἀφαίρεσιν $5\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}$. Ἐάν τρέψωμεν κάθε ἕνα μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας θά ἔχωμεν: $5\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}=\frac{11}{4}-\frac{9}{4}=$ $\frac{22}{4}-\frac{9}{4}=\frac{22-9}{4}=\frac{13}{4}=3\frac{1}{4}$

Εἰς τό ἴδιον ἐξαγόμενον φθάνομεν καί ἐάν ἀφαιρέσωμεν χωριστά τούς ἀκεραίους, χωριστά τά κλάσματα καί ἑνώσωμεν κατόπιν τάς δύο διαφοράς δηλ. $5\frac{1}{2}-2\frac{1}{4}$ $=(5-2)+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})=3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$

Ἐάν τύχῃ τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νά εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τά κλάσμα τοῦ μειωτέου τότε αὐξάνομεν τό κλάσμα τοῦ μειωτέου κατά μίαν ἀκεραίαν μονάδα καί διά νά μή ἀλλάξῃ ἡ διαφορά προσθέτομεν καί εἰς τόν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου μίαν ἀκεραίαν μονάδα π.χ. Εἰς τήν ἀφαίρεσιν $5\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4}$ ἐπειδή εἶναι $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{3}$ θά ἔχωμεν:

$5\frac{1}{3} - 2\frac{3}{4} = 5\frac{4}{3} - 3\frac{3}{4} = (5-3)+(\frac{4}{3} - \frac{3}{4}) = 2+\frac{7}{12} =$ $2\frac{7}{12}$. Ἄρα

" Διά νά ἀφαιρέσωμεν δύο μικτούς ἤ τρέπομεν αὐτούς εἰς κλάσματα ἤ ἀφαιροῦμεν χωριστά τούς ἀκεραίους καί χωριστά τά κλάσματα καί προσθέτομεν κατόπιν τάς δύο διαφοράς.

Ἐάν τύχῃ τό κλάσμα τοῦ ἀφαιρετέου νά εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό κλάσμα τοῦ μειωτέου τότε αὐξάνομεν κατά μίαν ἀκεραίαν μονάδα τό κλάσμα τοῦ μειωτέου καί τόν ἀκέραιον τοῦ ἀφαιρετέου".

<u>Παρατήρησις</u>. Αἱ ἰδιότητες τῆς ἀφαιρέσεως εἰς τούς ἀκεραίους ἰσχύουν καί εἰς τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

Προβλήματα προσθέσεως καί ἀφαιρέσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

1) Ποῖον ἀριθμόν δίδει ὁ $20\frac{4}{7}$ ἐάν αὐξηθῇ κατά $9+4\frac{2}{3}$.

2) Ποῖον ἀριθμόν δίδει ὁ $36\frac{5}{11}$ ἐάν αὐξηθῇ κατά $10\frac{5}{6} - 3\frac{2}{7}$.

3) Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός πού ὑπερβαίνει τόν 7 $(\frac{1}{2})$ κατά τό ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν $\frac{5}{6}$ $(2\frac{3}{8})$, $\frac{7}{9}$ $(3\frac{5}{6})$, $\frac{11}{15}$, $(4\frac{7}{12})$

4) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τόν $9\frac{2}{5}$ $(11\frac{3}{7})$ διά νά προκύψῃ ὁ $2\frac{3}{4}$ $(5\frac{2}{3})$

5) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τόν

$\frac{3}{11}$ $(\frac{4}{15})$ διά νά προκύψη ὁ 9 $(7\frac{1}{7})$

6) Τρεῖς ἀριθμοί ἔχουν ἄθροισμα $72\frac{5}{8}$. Ὁ α΄εἶναι $12\frac{7}{8}$ ὁ β΄εἶναι $56\frac{1}{2}$. Νά εὑρεθῆ ὁ τρίτος.

7) Διά τήν κατασκευήν κώδωνος βάρους $417\frac{13}{60}$ κιλῶν ἀνεμίχθησαν $109\frac{2}{5}$ κιλά κασσίτερος, $3\frac{1}{2}$ κιλά τσίγκος $300\frac{1}{4}$ κιλά χαλκός καί ποσότης μολύβδου. Πόσος ἦτο ὁ μόλυβδος.

8) Ἀπό ἕνα καλώδιον μήκους 200 πήχ. ἐκόπησαν α΄ $56\frac{1}{2}$ πήχ. β΄ $4\frac{3}{8}$ πήχ. περισσότερον ἀπό τήν πρώτην φοράν καί γ΄$6\frac{3}{4}$ πήχ. ὀλιγώτερον ἀπό τήν πρώτην φοράν.Πόσοι πήχεις ἔμειναν;

9) Ἐκ τριῶν δοχείων ἀπό τά ὁποῖα τό καθένα χωρεῖ μίαν ὀκᾶν βενζίνην τό α΄περιέχει $\frac{2}{3}$ ὀκάδ.βενζίνη τό β΄ περιέχει $\frac{1}{12}$ ὀκ.περισσότερον τοῦ πρώτου καί τό γ΄περιέχει $\frac{2}{9}$ ὀκ.περισσότερον τοῦ β΄. Πόσην βενζίνην χρειαζόμεθα διά νά γεμίσωμεν καί τά τρία δοχεῖα;

10) Πόσαι ὧραι μεσολαβοῦν ἀπό τάς $6\frac{1}{2}$ τό πρωΐ ἕως τάς 9 τό πρωΐ τῆς ἑπομένης καί πόσαι ἕως τάς $10\frac{1}{4}$ μετά μεσημβρίαν τῆς ἑπομένης;

11) Ὑδραυλικός ἤρχισε τήν ἐργασίαν του εἰς τάς 8 παρά $\frac{1}{4}$ τό πρωΐ, καί ἔκαμε 3 δοχεῖα διαφορετικά.Διά τό α΄ ἐχρειάσθη $2\frac{1}{3}$ ὡρ. διά τό β΄ $1\frac{3}{5}$ ὥρ. καί διά τό γ΄ $2\frac{1}{15}$ ὥρ. Τήν μεσημβρίαν ἀνεπαύθη μίαν ὥραν.Κατά ποίαν ὥραν ἐτελείωσεν τήν ἐργασίαν του;

12) Τεχνίτης τελειώνει ἔργον εἰς 5 ημ. δεύτερος τεχνίτης τελειώνει τό ἴδιο ἔργον εἰς 6 ἡμ.Ζητοῦνται α) Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου τελειώνει ὁ καθένας χωριστά εἰς 1 ἡμ. β) ποῖον μέρος τοῦ ἔργου τελειώνουν καί οἱ

δύο μαζί εἰς 1 ἡμ. καί ποῖον μέρος τοῦ ἔργου μένει.

12) Τρεῖς βρύσες γεμίζουν μίαν δεξαμενήν. ἡ α΄εἰς 8 ὥρ. ἡ β΄εἰς 12 ὥρ. καί ἡ γ΄εἰς 24 ὥρ. Ποῖον μέρος τῆς δεξαμενῆς γεμίζουν εἰς 1 ὥρ. ἐάν ἀνοιχθοῦν συγχρόνως καί αἱ τρεῖς καί ποῖον μέρος μένει ἄδειο.

13) Τρεῖς τεχνῖται τελειώνουν μαζί ἕνα ἔργον εἰς 6 ἡμ. ὁ α΄καί ὁ β΄μαζί τό τελειώνουν εἰς 8 ἡμ.Ποῖον μέρος τοῦ ἔργου κάμνει ὁ γ΄μόνος του εἰς 1 ἡμ.καί ποῖον δέν κάμνει.

Πολλαπλασιασμός

Εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν κυρίως δύο περιπτώσεις: Ἡ μία εἶναι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι ἀκέραιος καί ἡ ἄλλη εἶναι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι κλάσμα.

Α΄ Περίπτωσις. Ὁ πολλαπλασιαστής ἀκέραιος

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι ἀκέραιος τότε ἰσχύει ὁ πρῶτος ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι κλάσμα ἤ μικτός.

Γα) Πολλαπλασιασμός κλάσματος ἐπί μικτόν

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $\frac{5}{6}$Χ 3. Σύμφωνα μέ τόν πρῶτον ὁρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ πρέπει νά ἐπαναλάβωμεν τρεῖς φοράς τό κλάσμα $\frac{5}{6}$ δηλ.πρέπει νά κάμωμεν 3 φοράς μεγαλύτερον τό κλάσμα $\frac{5}{6}$. Ἑπομένως σύμφωνα μέ τά γνωστά θά ἔχωμεν

1ος τρόπος. $\frac{5}{6}\times 3 = \frac{5\times 3}{6} = \frac{15}{6} = 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2}$

2ος τρόπος. $\frac{5}{6}\times 3 = \frac{5}{6:3} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$ Ἄρα

"Διά νά πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα ἐπί ἀκέραιον ἤ πολλαπλασιάζομεν μόνον τόν ἀριθμητήν μέ τόν ἀκέραιον ἤ διαιροῦμεν μόνον τόν παρονομαστήν μέ τόν ἀκέραιον, ἐάν διαιρῆται δι' αὐτοῦ ἀκριβῶς".

β) Πολλαπλασιαμός μικτοῦ ἐπί ἀκέραιον

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $2\frac{1}{5}$ X3. Τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας καί μεταπίπτομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν. Δηλ. $2\frac{1}{5} \times 3 = \frac{11}{5} \times 3 = \frac{33}{5} = 6\frac{3}{5}$

Τό ἴδιο ἐξαγόμενο εὑρίσκομεν καί ὅταν πολλαπλασιάσωμεν χωριστά κάθε μέρος τοῦ μικτοῦ μέ τόν ἀκέραιον καί ἔπειτα νά προσθέσωμεν τά δύο γινόμενα δηλ. $2\frac{1}{5} \times 3 = (2 \times 3) + (\frac{1}{5} \times 3) = 6 + \frac{3}{5} = 6\frac{3}{5}$. "Αρα

"Διά νά πολλαπλασιάσωμεν μικτόν ἐπί ἀκέραιον ἤ τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα ἤ πολλαπλασιάζομεν κάθε μέρος τοῦ μικτοῦ χωριστά μέ τόν ἀκέραιον καί ἔπειτα προσθέτομεν τά δύο γινόμενα".

Βα περίπτωσις. Ὁ πολλαπλασιαστής κλάσμα

"Οταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι κλάσμα ἰσχύει ὁ δεύτερος ὁρισμός τοῦ πολλαπλασιασμοῦ τῶν ἀκεραίων. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι ἀκέραιος ἤ κλάσμα.

α) Πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἐπί κλάσμα

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $5 \times \frac{3}{7}$.

Σύμφωνα μέ τόν δεύτερον ὁρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ ζητοῦμεν τρίτον ἀριθμόν τόν ὁποῖον θά τόν κάμωμεν ἀπό τόν 5 μέ τόν τρόπον πού ἔγινε ὁ $\frac{3}{7}$ ἀπό τήν ἀκεραίαν μονάδα. 'Αλλά ὁ $\frac{3}{7}$ ἔγινε ἀπό τό $\frac{1}{7}$ τῆς ἀκεραίας μονάδας διά έπαναλήψεως αύτοῦ 3 φοράς δηλ.ώς έξῆς: $\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$. Ὥστε καί ὁ τρίτος άριθμός πού ζητοῦμεν θά γίνῃ έάν έπαναλάβωμεν 3 φοράς τό $\frac{1}{7}$ τοῦ 5 τό ὁποῖον εἶναι 5:7 ἤ $\frac{5}{7}$. Δηλ. $\frac{5}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}=\frac{5X3}{7}$ καί ἔχομεν $5X\frac{3}{7}=\frac{5X3}{7}$.

Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν άκέραιον έπί κλάσμα εἶναι ὁ ἴδιος μέ τόν τρόπον μέ τόν ὁποῖον πολλαπλασιάζομεν κλάσμα έπί άκέραιον. Ἄρα

" Διά νά πολλαπλασιάσωμεν άκέραιον έπί κλάσμα ἤ πολλαπλασιάζομεν μόνον τόν άριθμητήν έπί τόν άκέραιον ἤ διαιροῦμεν μόνον τόν παρονομαστήν μέ τόν άκέραιον έάν διαιρῆται δι'αύτοῦ άκριβῶς".

<u>Παρατήρησις</u>: Ὁ πολλαπλασιασμός κλάσματος έπί άκέραιον καί ὁ πολλαπλασιασμός άκεραίου έπί κλάσμα γίνονται μέ τόν ἴδιον τρόπον ἔχουν ὅμως διαφορετικήν σημασίαν π.χ.ὁ πολλαπλασιαμός $\frac{5}{6}X18$ σημαίνει νά κάμωμεν 18 φοράς μεγαλύτερον τό κλάσμα $\frac{5}{6}$ καί ὁ πολλαπλασιασμός $18X\frac{5}{6}$ σημαίνει νά εὕρωμεν τά $\frac{5}{6}$ τοῦ 18.

<u>β) Πολλαπλασιασμός κλάσματος έπί κλάσμα</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $\frac{4}{5}X\frac{3}{7}$. Σύμφωνα μέ τόν δεύτερον ὁρισμόν τοῦ πολλαπλασιασμοῦ θά έπαναλάβωμεν 3 φοράς τό $\frac{1}{7}$ τοῦ $\frac{4}{5}$ τό ὁποῖον εἶναι $\frac{4}{5}:7$ ἤ $\frac{4}{5X7}$ κ ί θά ἔχωμεν $\frac{4}{5X7}X3$ ἤ $\frac{4}{5}X\frac{3}{7}=\frac{4X3}{5X7}$. Ἄρα

" Διά νά πολλαπλασιάσωμεν κλάσμα έπί κλάσμα πολλαπλασιάζομεν χωριστά τούς άριθμητάς καί χωριστά τούς παρονομαστάς των"

<u>γ) Πολλαπλασιασμός μικτοῦ έπί κλάσμα</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν

$2\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}$. Ἐάν τρέψωμεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα μεταπίπτομεν εἰς πολλαπλασιασμόν κλάσματος ἐπί κλάσμα δηλ. $2\frac{1}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{7}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{35}{21}=1\frac{2}{3}$. Ἄρα

" Διά νά πολλαπλασιάσωμεν μικτόν ἐπί κλάσμα τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα καί πολλαπλασιάζομεν τά δύο κλάσματα".

δ) <u>Πολλαπλασιασμός μικτοῦ ἐπί μικτόν</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $2\frac{1}{3}\times 5\frac{4}{9}$. Ἐάν τρέψωμεν τούς μικτούς εἰς κλάσματα τῆς ἰδίας ἀξίας μεταπίπτομεν εἰς πολλαπλασιασμόν κλάσματος ἐπί κλάσμα δηλ. $2\frac{1}{3}\times 5\frac{4}{9}=\frac{7}{3}\times\frac{49}{9}=\frac{343}{27}=12\frac{19}{27}$. Ἄρα

" Διά νά πολλαπλασιάσωμεν μικτόν ἐπί μικτόν τρέπομεν αὐτούς εἰς κλάσματα καί τά πολλαπλασιάζομεν".

<u>Παρατήρησις</u>. Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής εἶναι μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος τότε τό γινόμενον εἶναι μικρότερον τοῦ πολλαπλασιαστέου.

<u>Παρατήρησις</u>. Αἱ ἰδιότητες τοῦ πολλαπλασιασμοῦ εἰς τούς ἀκεραίους ἰσχύουν καί εἰς τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

Γινόμενον πολλῶν κλασμάτων

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τόν πολλαπλασιασμόν $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{11}$. Πολλαπλασιάζομεν τά δύο πρῶτα κλάσματα καί ἔχομεν: $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times 4}{3\times 5}=\frac{8}{15}$. Τό γινόμενον αὐτό τό πολλαπλασιάζομεν ἐπί τό τρίτον κλάσμα καί ἔχομεν $\frac{8}{15}\times\frac{7}{9}=\frac{56}{135}$. Τό νέον αὐτό γινόμενον τό πολλαπλασιάζομεν ἐπί τό τέταρτον κλάσμα καί ἔχομεν $\frac{56}{135}\times\frac{8}{11}=\frac{448}{1485}$. Ὥστε $\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{7}{9}\times\frac{8}{11}=\frac{2\times 4\times 7\times 8}{3\times 5\times 9\times 11}=$

$=\frac{448}{1485}$. Ἄρα

" Διά νά πολλαπλασιάσωμεν πολλά κλάσματα πολλαπλασιάζομεν ὅλους τούς ἀριθμητάς, ἔπειτα ὅλους τούς παρονομαστάς καί κάτω ἀπό τό πρῶτο γινόμενον γράφομεν ὡς παρονομαστήν τό δεύτερον γινόμενον".

Πότε κάμνομεν πολλαπλασιασμόν

Πολλαπλασιασμόν κάμνομεν εἰς τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

α)" Ὅταν θέλωμεν νά ἐπαναλάβωμεν ἕνα ἀριθμόν πολλάς φοράς".

<u>Πρόβλημα</u> " Ἡ ἡλικία ἑνός πατέρα εἶναι πενταπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ υἱοῦ του ὁ ὁποῖος εἶναι $8\frac{1}{2}$ ἐτῶν. Πόσων ἐτῶν εἶναι ὁ πατέρας;"

Λ ύ σ ι ς

<u>Σκέψις</u>

Πρέπει νά ἐπαναλάβωμεν τήν ἡλικίαν τοῦ υἱοῦ 5 φοράς δηλ. θά πολλαπλασιάσωμεν τόν $8\frac{1}{2}$ ἐπί τόν 5

<u>Ἐκτέλεσις</u>

$8\frac{1}{2} \times 5 = \frac{17}{2} \times 5 = \frac{85}{2} = 42\frac{1}{2}$. Ἄρα ὁ πατέρας εἶναι $42\frac{1}{2}$ ἐτῶν.

β) " Ὅταν γνωρίζωμεν τήν ἀξίαν τῆς μονάδος ἑνός πράγματος καί ζητοῦμεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων ἤ τῶν πολλῶν μερῶν τῆς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος".

<u>Πρόβλημα.</u> "Τό μέτρον ὑφάσματος ἀξίζει 75 δρχ. Πόσον ἀξίζουν α) τά $10\frac{3}{5}$ μέτρα καί β) τά $\frac{4}{5}$ τοῦ μέτρου τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;"

Λύσις

Σκέψις

α) Τό 1 μ. άξίζει 75 δρχ. τά 2,3,4,κλπ. μέτρα άξίζουν 2,3,4,κλπ. φοράς τάς 75 δρχ. καί τά $10\frac{3}{5}$ θά άξίζουν 75 δρχ. Χ $10\frac{3}{5}$. Δηλ. θά πολλαπλασιάσωμεν τάς 75 δρχ. έπί $10\frac{3}{5}$ διότι μόνον ό άριθμός τῶν μέτρων ἤλλαξεν

β) Θά πολλαπλασιάσωμεν καί έδῶ τάς 75 δρχ. έπί $\frac{4}{5}$ διότι μόνον ό άριθμός τῶν μέτρων ἤλλαξεν.

Κατάταξις-'Εκτέλεσις

α) 1 μ. 75 δρχ.

$10\frac{3}{5}$ μ. ;

75 δρχ. Χ $10\frac{3}{5}$ = 75 δρχ. Χ $\frac{53}{5}$ = 795 δρχ.

"Αρα τά $10\frac{3}{5}$ μ. άξίζουν 795 δρχ.

β) 1μ. 75 δρχ.

$\frac{4}{5}$ μ. ;

75 δρχ. Χ $\frac{4}{5}$ = 60 δρχ. "Αρα τά $\frac{4}{5}$ μ. άξίζουν 60 δρχ.

γ) ""Οταν θέλωμεν νά εὕρωμεν ὡρισμένο μέρος ένός άριθμοῦ".

Πρόβλημα. Νά εὕρετε τά $\frac{2}{3}$ τοῦ άριθμοῦ 60.

Λύσις

Σκέψις

'Εδῶ πρέπει νά διαιρέσωμεν τόν 60 διά τοῦ 3 καί τό πηλίκον $\frac{60}{3}$ νά τό πολλαπλασιάσωμεν έπί 2. Θά ἔχωμεν λοιπόν $\frac{60}{2}$ Χ 2· αὐτό ὅμως γράφεται καί ὡς ἑξῆς: 60 Χ $\frac{2}{3}$. "Ωστε διά νά εὕρωμεν τά $\frac{2}{3}$ τοῦ άριθμοῦ 60 θά πολλαπλασιάσωμεν τόν 60 έπί $\frac{2}{3}$.

'Εκτέλεσις

$60 \times \frac{2}{3} = \frac{120}{3} = 40$

"Αρα τά $\frac{2}{3}$ τοῦ άριθμοῦ 60 εἶναι ό άριθμός 40.

Προβλήματα

1) Εὕρετε τά $\frac{3}{4}$ $(\frac{4}{5})$, $(\frac{11}{20})$ τῆς δραχμῆς (τῆς ὀκᾶς), (τῆς περιφερείας)

2) Εὕρετε τά $\frac{2}{5}$, $(\frac{1}{4})$, $(\frac{7}{12})$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, (τοῦ πήχεως), (τοῦ ἡμερονυκτίου).

3) Εὕρετε τά $\frac{2}{3}$ $(\frac{7}{9})$ τῶν $\frac{4}{5}$ $(\frac{13}{14})$ τοῦ 720 (620).

4) Ὁ πῆχυς ὑφάσματος ἀξίζει $120\frac{3}{4}$ δρχ. Πόσον θά πληρώσωμεν ἄν ἀγοράσωμεν $5\frac{1}{2}$ πήχεις καί πόσον ἄν ἀγοράσωμεν $\frac{3}{8}$ περισσότερον ἤ $\frac{5}{8}$ ὀλιγώτερον;

5) Ὁ 1° τοῦ θερμομέτρου Ρεωμύρου ἰσοδυναμεῖ μέ $(1+\frac{1}{4})^{\circ}$ τοῦ Κελσίου καί ὁ 1° τοῦ Κελσίου ἰσοδυναμεῖ μέ $(1+\frac{4}{5})^{\circ}$ τοῦ Φαρενάϊτ. Οἱ 26° τοῦ Ρεωμύρου μέ πόσους τοῦ Κελσίου καί μέ πόσους τοῦ Φαρενάϊτ ἰσοδυναμοῦν;

6) Μαθητής τά $\frac{5}{12}$ $(\frac{3}{8})$ τοῦ ἡμερονυκτίου κοιμᾶται τό $\frac{1}{4}$ $(\frac{5}{12})$ εἶναι εἰς τό σχολεῖον καί τό $\frac{1}{3}$ $(\frac{3}{16})$ παίζει. Πόσαι ὧραί τοῦ μένουν διά μελέτην;

7) Σχολεῖον ἔχει τρεῖς τάξεις. Ἡ α΄ ἔχει 75 (120) μαθητάς ἡ β΄ ἔχει τά $\frac{4}{5}$ $(\frac{5}{6})$ τῆς α΄ καί ἡ γ΄ ἔχει τά $\frac{3}{4}$ $(\frac{3}{5})$ τῆς β΄ πόσους μαθητάς ἔχει τό σχολεῖον;

8) Δύο χωρικοί ἐξεκίνησαν ἀπό τά χωριά των τά ὁποῖα ἀπέχουν 30,000μ. (32000). Ὁ α΄ διήνυσε τά $\frac{2}{5}$ $(\frac{7}{16})$ τῆς ἀποστάσεως καί ὁ β΄ τά $\frac{5}{9}$ $(\frac{7}{9})$ τοῦ ὑπολοίπου. Πόσα μέτρα διήνυσε ὁ καθένας καί πόση ἀπόστασις τούς χωρίζει ἀκόμη διά νά συναντηθοῦν;

9) Βρύση ρίπτει κάθε λεπτόν $8\frac{3}{4}$ λίτρας νερό εἰς μίαν δεξαμενήν καί ἀπό μίαν ὀπήν τρέχουν ἀπό τήν δεξαμενήν κάθε λεπτόν $3\frac{5}{6}$ λίτραι νερό. Ἐάν ἀνοίξωμεν συγχρόνως τήν βρύσην καί τήν ὀπήν ἡ δεξαμενή θά γεμίσῃ μετά ἀπό $4\frac{1}{2}$ ὧρας. Πόσο νερό χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

10) Ἀγόρασε ἕνας 900 κιλά σιτάρι πρός $11\frac{4}{5}$ δρχ. τό κιλόν. Κατόπιν ἐπώλησε τά $\frac{2}{3}$ τῶν κιλῶν πρός 20 δρχ. τό κιλόν καί τά ὑπόλοιπα κιλά εἰς τά $\frac{3}{4}$ τῆς προηγουμένης τιμῆς πωλήσεως κάθε κιλόν. Πόσον ἐκέρδισεν;

Δύναμις Κλάσματος

Αἱ δυνάμεις τῶν κλασμάτων ὁρίζονται ὅπως καί αἱ δυνάμεις τῶν ἀκεραίων. π.χ. τό γινόμενον $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}$ εἶναι δύναμις τοῦ $\frac{2}{5}$ καί γράφεται συντόμως $(\frac{2}{5})^3$. Ἐπειδή $\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{2\times2\times2}{5\times5\times5}=\frac{2^3}{5^3}$ θά ἔχωμεν $(\frac{2}{5})^3=\frac{2^3}{5^3}$.

Ἄρα: "Διά νά ὑψώσωμεν κλάσμα εἰς δύναμιν ὑψώνομεν χωριστά τόν ἀριθμητήνκαί χωριστά τόν παρονομαστήν εἰς τήν δύναμιν αὐτήν".

Διαίρεσις

Ἡ Διαίρεσις ὁρίζεται εἰς τούς κλασματικούς ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους. Εἰς τήν ἐκτέλεσιν τῆς διαιρέσεως διακρίνομεν κυρίως δύο περιπτώσεις. Ἡ μία εἶναι ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος καί ἡ ἄλλη εἶναι ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι κλάσμα.

Α: περίπτωσις. Ὁ διαιρέτης Ἀκέραιος

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ διαιρετέος εἶναι ἤ κλάσμα ἤ μικτός.

α) Διαίρεσις κλάσματος δι' ἀκεραίου

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $\frac{6}{7}:3$

Ἐπειδή $\frac{6}{7}$ διά 3 σημαίνει νά κάμωμεν 3 φοράς μικρότερον τό κλάσμα $\frac{6}{7}$ διά τοῦτο κατά τά γνωστά θά ἔχωμεν:

1ος τρόπος $\frac{6}{7}:3=\frac{6:3}{7}=\frac{2}{7}$

2ος τρόπος $\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7\times3}=\frac{6}{21}$ ἤ $\frac{2}{7}$ Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν κλάσμα δι'ἀκεραίου ἤ διαιροῦμεν μόνον τόν ἀριθμητήν διά τοῦ ἀκεραίου ἐάν διαιρῆται δι'αὐτοῦ ἀκριβῶς ἤ πολλαπλασιάζομεν μόνον τόν παρονομαστήν μέ τόν ἀκέραιον".

β) Διαίρεσις μικτοῦ δι'ἀκεραίου

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $5\frac{1}{3}:8$ Ἐάν τρέψωμεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας μεταπίπτομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν. Δηλ. $5\frac{1}{3}:8=\frac{16}{3}:8=\frac{2}{3}$ Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν μικτόν δι'ἀκεραίου τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα καί διαιροῦμεν κατόπιν τό κλάσμα διά τοῦ ἀκεραίου".

B^α Περίπτωσις. Ὁ διαιρέτης κλάσμα

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ διαιρετέος εἶναι ἤ ἀκέραιος ἤ κλάσμα.

α) Διαίρεσις ἀκεραίου διά κλάσματος

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $3:\frac{6}{7}$ Ἡ διαίρεσις $3:\frac{6}{7}$ σημαίνει νά διαιρέσωμεν τόν 3 διά τοῦ ἀριθμητοῦ 6 καί τό πηλῖκον τό ὁποῖον εἶναι $\frac{3}{6}$ νά τό πολλαπλασιάσωμεν ἐπί τόν παρονομαστήν 7 καί νά γίνῃ $\frac{3}{6}$X7. Διότι ἐάν διαιρέσωμεν τόν 3 διά τοῦ ἀριθμητοῦ 6 θά ἔχωμεν πηλῖκον $\frac{3}{6}$. Ἐάν τώρα διαιρέσωμεν τόν διαιρέτην 6 μέ τόν 7 διά νά προκύψῃ τό $\frac{6}{7}$ κατά τά γνωστά θά πολλαπλασιασθῇ μέ τόν 7 καί θά γίνῃ $\frac{3}{6}$X7 Ὥστε $3:\frac{6}{7}=3\times\frac{7}{6}=3\frac{1}{2}$. Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν ἀκέραιον διά κλάσματος ἀντιστρέφομεν τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καί πολλαπλασιάζομεν".

β) Διαίρεσις κλάσματος διά κλάσματος

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$

Ἡ διαίρεσις $\frac{3}{4} : \frac{5}{7}$ σημαίνει νά διαιρέσωμεν τό $\frac{3}{4}$ διά τοῦ ἀριθμητοῦ 5 καί τό πηλῖκον τό ὁποῖον εἶναι $\frac{3}{4X5}$ νά τόν πολλαπλασιάσωμεν μέ τόν παρονομαστήν 7 καί νά γίνῃ $\frac{3X7}{4X5}$. Διότι ἐάν διαιρέσωμεν τό $\frac{3}{4}$ διά τοῦ ἀριθμητοῦ 5 θά ἔχωμεν πηλῖκον $\frac{3}{4X5}$. Ἐάν τώρα διαιρέσωμεν τόν διαιρέτην 5 μέ τόν 7 διά νά προκύψῃ τό $\frac{5}{7}$ τότε τό πηλίκον $\frac{3}{4X5}$ κατά τά γνωστά θά πολλαπλασιασθῇ μέ τόν 7 καί θά γίνῃ $\frac{3X7}{4X5}$. Ὥστε $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3X7}{4X5}$ Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν κλάσμα διά κλάσματος ἀντιστρέφομεν τούς ὅρους τοῦ κλασματικοῦ διαιρέτου καί πολλαπλασιάζομεν".

γ) Διαίρεσις μικτοῦ διά κλάσματος

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $2\frac{1}{3} : \frac{4}{5}$

Ἐάν τρέψωμεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα τῆς ἰδίας ἀξίας μεταπίπτομεν εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν δηλ. $2\frac{1}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{3} : \frac{4}{5} = \frac{7}{3} X \frac{5}{4} = 2\frac{11}{12}$ Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν μικτόν διά κλάσματος τρέπομεν τόν μικτόν εἰς κλάσμα καί κάμνομεν ὅπως καί προηγουμένως".

δ) Διαίρεσις μικτοῦ διά μικτοῦ

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν $5\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3}$.

Ἐάν τρέψωμεν τούς μικτούς εἰς κλάσματα τῆς ἰδίας ἀξίας μεταπίπτομεν εἰς διαίρεσιν δύο κλασμάτων δηλ. $5\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} = \frac{11}{2} : \frac{13}{3} = \frac{11}{2} X \frac{3}{13} = 1\frac{7}{26}$. Ἄρα

" Διά νά διαιρέσωμεν μικτόν διά μικτοῦ τρέπομεν αὐτούς εἰς κλάσματα καί διαιροῦμεν".

Παρατήρησις. Όταν ὁ διαιρέτης εἶναι μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος τότε τό πηλίκον εἶναι μεγαλύτερον τοῦ διαιρετέου.

Παρατήρησις. Αἱ ἰδιότητες τῆς διαιρέσεως εἰς τούς ἀκεραίους ἰσχύουν καί διά τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

Πότε κάμνομεν διαίρεσιν

Οἱ περιπτώσεις πού κάμνομεν διαίρεσιν εἰς τούς ἀκεραίους εἶναι αἱ ἴδιαι καί εἰς τούς κλασματικούς Δηλ.

α) Όταν θέλωμεν νά μοιράσωμεν εἰς ἴσα μέρη ἕνα ἀριθμόν.

β) Όταν ζητοῦμεν πόσας φοράς ἕνας ἀριθμός περιέχεται εἰς ἄλλον.

γ) Όταν γνωρίζωμεν τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν καί τόν ἕνα ἀπό τούς δύο καί ζητοῦμεν τόν ἄλλον.

δ) Όταν γνωρίζωμεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων ἤ τῶν πολλῶν μερῶν τῆς μονάδος πράγματος καί ζητοῦμεν τήν ἀξίαν τῆς μονάδος τοῦ ἰδίου πράγματος.

ε) Όταν γνωρίζωμεν τήν ἀξίαν τῆς μονάδος πράγματος, τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων τοῦ ἰδίου πράγματος καί ζητοῦμεν τό πλῆθος τῶν πολλῶν μονάδων.

Ἐκτός τῶν τεσσάρων αὐτῶν περιπτώσεων ἔχομεν εἰς τούς κλασματικούς καί ἕκτην περίπτωσιν τήν ἑξῆς:

στ) Όταν γνωρίζωμεν ὡρισμένο μέρος ἀριθμοῦ καί ζητοῦμεν ὁλόκληρον τόν ἀριθμόν".

Πρόβλημα. " Τά $\frac{2}{3}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 40 Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

Λύσις

Σκέψις	Ἐκτέλεσις
Ἐάν ἐγνώριζα τόν ἀριθμόν καί τόν πολλαπλασίαζα μέ τόν $\frac{2}{3}$ θά εὕρισκα γινόμενον 40. Πρέπει λοιπόν νά διαιρέσωμεν τό γνωστόν γινόμενον 40 διά τοῦ γνωστοῦ παράγοντος $\frac{2}{3}$.	$40 : \frac{2}{3} = 40 X \frac{3}{2} = 60$ Ἄρα ὁ ἀριθμός πού ζητοῦμεν εἶναι ὁ 60.

Προβλήματα

1) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν τόν $6\frac{3}{4}$, $(3\frac{1}{2})$, $(8\frac{1}{3})$ διά νά προκύψη γινόμενον $60\frac{3}{4}$, $(1\frac{3}{4})$, (1);

2) Δύο ἀριθμοί ἔχουν γινόμενον $5\frac{3}{8}$, (15), $(\frac{7}{8})$. Ὁ ἕνας ἀπ' αὐτούς εἶναι ὁ $2\frac{11}{16}$, $(3\frac{6}{13})$, (21). Νά εὑρεθῆ ὁ ἄλλος.

3) Μέ 160, $(24\frac{1}{2})$, $(\frac{3}{4})$ δραχμάς ἀγοράσαμεν ὕφασμα πήχεων $\frac{5}{8}$, $(1\frac{7}{8})$, $(\frac{3}{4})$. Πόσον ἐπωλεῖτο ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;

4) Μέ ἕνα γαλόνι βενζίνης παίρνομεν $5\frac{1}{2}$ γαλόνια πετρέλαιον. Πόσην βενζίνην θά δώσωμεν διά νά πάρωμεν $38\frac{1}{2}$ γαλόνια πετρέλαιον;

5) Ὁ τροχός ἁμάξης ἔχει περιφέρειαν $4\frac{3}{8}$ πήχεις. Πόσας στροφάς θά κάμῃ διά νά διατρέξῃ δρόμον 1750 πήχεων;

6) Τά $\frac{4}{5}$, $(\frac{3}{4})$, $(\frac{6}{7})$ ἑνός βάρους εἶναι 136 ὀκ. (180 Κιλά), (660 γρμ.) πόσον εἶναι ὅλον τό βάρος;

7) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά διαιρέσωμεν τό $\frac{5}{7}$ $(11\frac{3}{4})$ διά νά προκύψῃ πηλίκον $\frac{2}{7}$ $(17\frac{5}{8})$;

8) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά πολλαπλασιάσωμεν τόν 49,(35) διά νά αὐξηθῇ (ἐλαττωθῇ) κατά 35 $(17\frac{3}{2})$;

9) Εἰς πόσα ἴσα μέρη πρέπει νά διαιρεθῇ τό $\frac{3}{7}$ $(\frac{4}{5})$, $(\frac{2}{3})$ διά νά εἶναι τό καθένα ἴσον μέ $\frac{1}{14}$, $(\frac{1}{10})$, $(\frac{7}{6})$.

10) Μία βρύση γεμίζει μίαν δεξαμενή εἰς $6\frac{2}{3}$ ὥρ. Ποῖον μέρος αὐτῆς γεμίζει εἰς μίαν ὥραν;

11) Ἕνας τεχνίτης εἰς μίαν ὥραν ἔκαμε τά $\frac{4}{5}$ ἑνός ἔργου. Εἰς πόσας ὥρας θά κάμῃ ὅλο τό ἔργον;

12) Κάποιος ἠρωτήθη πόσων ἐτῶν εἶναι καί ἀπήντησεν. Ἐάν ἤμουν κατά 9 ἔτη μεγαλύτερος θά εἶχα τά $\frac{19}{16}$ τῶν ἐτῶν πού ἔχω. Πόσων ἐτῶν εἶναι;

Ἰσότης καί Ἀνισότης τῶν Κλασματικῶν Ἀριθμῶν

Ἡ ἰσότης καί ἡ ἀνισότης τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ἀνάγονται εἰς ἰσότητα καί εἰς ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν. Δηλ.

α) Ἴσοι λέγονται δύο κλασματικοί ἀριθμοί ὅταν ἐπαναλάβωμεν αὐτούς ἴσας φοράς καί γίνουν ἀκέραιοι ἴσοι. π.χ. οἱ ἀριθμοί $\frac{3}{5}$ καί $\frac{6}{10}$ εἶναι ἴσοι διότι ἐάν ἐπαναλάβωμεν αὐτούς 5 φοράς θά ἔχωμεν $\frac{3}{5}\times 5=3$ καί $\frac{6}{10}\times 5 = 3$.

Ἐπειδή ἡ ἰσότης τῶν κλασματικῶν ἀνάγεται εἰς ἰσότητα τῶν ἀκεραίων διά τοῦτο αἱ ἰδιότητες τῆς ἰσότητος ἰσχύουν καί εἰς τούς κλασματικούς ἀριθμούς.

β) Ἄνισοι λέγονται δύο κλασματικοί ἀριθμοί ὅταν ἐπαναλάβωμεν αὐτούς ἴσας φοράς καί γίνουν ἀκέραιοι ἄνισοι· καί μεγαλύτερος λέγεται ἐκεῖνος πού θά δώσῃ τόν μεγαλύτερον ἀκέραιον, μικρότερος δέ ἐκεῖνος πού θά δώσῃ τόν μικρότερον ἀκέραιον. π.χ. οἱ ἀριθμοί $\frac{3}{4}$ καί $\frac{1}{2}$ εἶναι ἄνισοι διότι ἐάν ἐπαναλάβωμεν αὐτούς 4 φοράς θά ἔχωμεν $\frac{3}{4}\times 4=3$ καί $\frac{1}{2}\times 4=2$ ἐπειδή δέ εἶναι $3>2$ διά τοῦτο εἶναι $\frac{3}{4} \quad \frac{1}{2}$.

<u>Σημείωσις</u>. Ὁ λόγος διά τόν ὁποῖον ἡ ἰσότης καί ἡ ἀνισότης τῶν κλασματικῶν ἀνάγεται εἰς ἰσότητα καί ἀνισότητα τῶν ἀκεραίων εἶναι ὁ ἑξῆς: Γνωρίζομεν ὅτι αἰτία τῆς ἐπινοήσεως τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν εἶναι νά γίνῃ δυνατή κάθε διαίρεσις. Ἐπειδή λοιπόν μέ τούς κλασματικούς ἀριθμούς κάθε ἀριθμός θά εἶναι δυνατόν νά διαιρεθῇ εἰς ὅσα ἴσα μέρη θέλομεν, ἕπεται ὅτι θά ὑπάρχῃ ἕνας ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν ἐπαναληφθῇ δύο φοράς θά δίδῃ τήν μονάδα 1. Ἐπίσης θά ὑπάρχῃ ἕνας ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν ἐπαναληφθῇ 3 φοράς θά δίδῃ τήν μονάδα 1 κ.ο.κ. Τούς ἀριθμούς αὐτούς τούς παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, κλπ. καί τούς ὀνομάζομεν κλασματικάς μονάδας.

Αἱ κλασματικαί μονάδες ἔχουν λοιπόν τήν ἰδιότητα νά γίνωνται ἀκέραιαι δι' ἐπαναλήψεως. Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν αὐτῶν πού εἴπαμε παραπάνω εἶναι: $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$ κλπ. Τήν ἰδιότητα ὅμως αὐτήν τῶν κλασματικῶν μονάδων τήν ἔχουν καί οἱ κλασματικοί ἀριθμοί διότι ὅλαι αἱ μονάδες ἀπό τάς ὁποίας ἀποτελοῦνται γίνονται ἀκέραιοι ἀριθμοί δι' ἐπαναλήψεως.

<u>Διαιρετότης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν</u>

Ἀποδεικνύεται εἰς τήν Θεωρητικήν Ἀριθμητικήν ὅτι τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως δύο ἀναγώγων κλασμάτων διά νά εἶναι ἀκέραιος ἀριθμός πρέπει ὁ ἀριθμητής τοῦ διαιρετέου νά εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ διαιρέτου καί ὁ παρονομαστής τοῦ διαιρετέου νά εἶναι ὑποπολλαπλάσιον τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ διαιρέτου π.χ. $\frac{4}{5} : \frac{2}{25} = 2$ (ἀκέραιος) διότι εἶναι ὁ 4 πολλαπλάσιον τοῦ 2 καί ὁ 5 ὑποπολλαπλάσιον τοῦ 25. Τό κλάσμα $\frac{4}{5}$ εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγεται διαιρετόν διά τοῦ $\frac{2}{25}$. Ὥστε

Διαιρετόν λέγεται ἕνα ἀνάγωγον κλάσμα δι'ἄλλου ἀναγώγου κλάσματος ὅταν δίδουν πηλίκον ἀκέραιον ἀριθμόν.

Μ.Κ.Δ. ἀναγώγων κλασμάτων

Ἄς πάρωμεν ὡς παράδειγμα τά ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$.

Οἱ διαιρέται τοῦ $\frac{2}{9}$ εἶναι: $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{18}$, $\frac{2}{36}$, $\frac{2}{45}$, $\frac{2}{54}$, $\frac{2}{63}$, $\frac{2}{72}$, $\frac{2}{81}$, $\frac{2}{90}$ κλπ. καί οἱ διαιρέται τοῦ $\frac{4}{15}$ εἶναι: $\frac{2}{15}$ $\frac{2}{30}$ $\frac{2}{45}$ $\frac{2}{60}$ $\frac{2}{75}$ $\frac{2}{90}$ κλπ. Οἱ κοινοί διαιρέται τῶν $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$ εἶναι $\frac{2}{45}$ $\frac{2}{90}$ κλπ. Ἀπό αὐτούς ὁ μεγαλύτερος εἶναι ὁ $\frac{2}{45}$ καί λέγεται μ.κ.δ. τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$. Ἄρα

"Μ.Κ.Δ. δοθέντων ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι τό μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά κλάσματα μέ τά ὁποῖα διαιρούμενα τά δοθέντα δίδουν πηλίκα ἀκεραίους ἀριθμούς"

Εὕρεσις τοῦ Μ.Κ.Δ. ἀναγώγων κλασμάτων

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$. Ἐάν τρέψωμεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα διά τοῦ ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν θά ἔχωμεν $\frac{10}{45}$ καί $\frac{12}{45}$ ὅπου ὁ 45 εἶναι τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν 9 καί 15. Ἐπειδή τώρα ἔχομεν ἀριθμούς καμωμένους ἀπό τήν ἰδίαν μονάδα $\frac{1}{45}$ θά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. μόνον τῶν ἀριθμητῶν 10 καί 12 καί κάτω ἀπό αὐτόν θά γράψωμεν ὡς παρονομαστήν 45 διά νά δηλώσωμεν ὅτι ἡ μονάς ἀπό τήν ὁποίαν εἶναι καμωμένος ὁ μ.κ.δ. εἶναι ἡ ἰδία μέ τήν μονάδα ἀπό τήν ὁποίαν εἶναι καμωμένα καί τά κλάσματα $\frac{10}{45}$ καί $\frac{12}{45}$ (βλέπε στή παρακάτω σημείωσι). Ἀλλά ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμητῶν 10 καί 12 εἶναι ὁ 2· ἄρα ὁ μ.κ.δ. τῶν κλασμάτων $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$ εἶναι ὁ $\frac{2}{45}$. Ἄρα

" Διά νά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. ἀναγώγων κλασμάτων εὑρίσκομεν τόν μ.κ.δ. τῶν ἀριθμητῶν καί κάτω ἀπό αὐτόν γράφομεν ὡς παρονομαστήν τό ε.κ.π. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν".

Σημείωσις. Ἐάν π.χ. ζητεῖται ὁ μ.κ.δ. τῶν ἀριθμῶν 30 μέτρα καί 75 πήχεις πρέπει νά τρέψωμεν τούς πήχεις εἰς μέτρα (ἤ τά μέτρα εἰς πήχεις) καί ἔπειτα θά εὕρωμεν τόν μ.κ.δ. ὁ ὁποῖος θά εἶναι μέτρα (ἤ πήχεις).

Ε.Κ.Π. ἀναγώγων κλασμάτων

Ἄς πάρωμεν ὡς παράδειγμα τά ἀνάγωγα κλάσματα $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$.

Τά διαιρετά ὑπό τοῦ $\frac{2}{9}$ εἶναι $\frac{4}{3}, \frac{6}{3}, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, \frac{12}{3}$ κλπ. Τά διαιρετά συγχρόνως ὑπό τοῦ $\frac{2}{9}$ καί ὑπό τοῦ $\frac{4}{15}$ εἶναι $\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{12}{3}$ κλπ. Ἀπό αὐτά τό μικρότερον εἶναι τό $\frac{4}{3}$ καί λέγεται ε.κ.π. τῶν $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$. Ἄρα

"Ε.Κ.Π. δοθέντων ἀναγώγων κλασμάτων εἶναι τό μικρότερον ἀπό ὅλα τά κλάσματα τά ὁποῖα διαιρούμενα μέ τά δοθέντα δίδουν πηλίκα ἀκεραίους ἀριθμούς".

Εὕρεσις τοῦ ε.κ.π. ἀναγώγων κλασμάτων

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. τῶν ἀναγώγων κλασμάτων $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$. Ἐάν τρέψωμεν αὐτά εἰς ὁμώνυμα διά τοῦ ε.κ.π. 45 τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν θά ἔχωμεν $\frac{10}{45}$ καί $\frac{12}{45}$. Εὑρίσκομεν τώρα τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμητῶν 10 καί 12 τό ὁποῖον εἶναι ὁ 60 καί κάτω ἀπό αὐτό γράφομεν ὡς παρονομαστήν τόν κοινόν παρονομαστήν 45 καί ἔχομεν $\frac{60}{45}$ ἤ $\frac{4}{3}$. Ὥστε τό ε.κ.π. τῶν $\frac{2}{9}$ καί $\frac{4}{15}$ εἶναι τό $\frac{4}{3}$ τοῦ ὁποίου ὁ ἀριθμητής 4 εἶναι τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμητῶν 2 καί 4 τῶν ἀναγώγων κλασμάτων καί τοῦ ὁποίου ὁ παρονομαστής 3 εἶναι ὁ μ.κ.δ. τῶν παρονομαστῶν 9 καί 15 τῶν ἀναγώγων κλασμάτων.

Ἄρα

" Διά νά εὕρωμεν τό ε.κ.π. ἀναγώγων κλασμάτων εὑρίσκομεν τό ε.κ.π. τῶν ἀριθμητῶν καί κάτω ἀπό αὐτό γράφομεν ὡς παρονομαστήν τόν μ.κ.δ. τῶν παρονομαστῶν αὐτῶν".

Ἀσκήσεις

Νά εὑρεθῇ ὁ μ.κ.δ. καί τό ε.κ.π. τῶν κλασμάτων

α) $\frac{3}{14}$, $\frac{15}{28}$, β) $\frac{16}{25}$, $\frac{12}{35}$ γ) $\frac{3}{28}$, $\frac{6}{7}$ δ) $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{40}$, $\frac{21}{32}$

ε) $\frac{6}{7}$, $\frac{9}{14}$, $\frac{5}{12}$

Μέθοδος ἀναγωγῆς εἰς τήν μονάδα

<u>Μέθοδος</u> εἶναι γενικός τρόπος μέ τόν ὁποῖον λύονται προβλήματα τοῦ ἰδίου εἴδους.

<u>Ἀναγωγή εἰς τήν μονάδα</u>, λέγεται ἡ μέθοδος μέ τήν ὁποίαν εὑρίσκομεν πρῶτον τήν ἀξίαν τῆς μιᾶς μονάδος, ἀκεραίας ἤ κλασματικῆς, καί ἀπό αὐτήν κατόπιν εὑρίσκομεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων.

Όταν εὑρίσκωμεν τήν ἀξίαν τῆς μιᾶς ἀκεραίας μονάδος τότε ἔχομεν <u>Ἀναγωγήν εἰς τήν ἀκεραίαν μονάδα</u> καί ὅταν εὑρίσκωμεν τήν ἀξίαν τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδος τότε ἔχομεν <u>ἀναγωγήν εἰς τήν κλασματικήν μονάδα</u>.

<u>Πρόβλημα 1ον</u>. "Οἱ 5 πήχεις ὑφάσματος ἀξίζουν 70 δρχ. πόσον ἀξίζουν οἱ 3 πήχεις τοῦ ἰδίου ὑφάσματος;

Λ ύ σ ι ς

<u>Σκέψις</u>

Ἀφοῦ οἱ 5 πήχεις ἀξίζουν 70 δρχ. ὁ 1 πῆχυς πού εἶναι 5 φοράς μικρότερος τῶν 5 πήχεων θά ἀξίζῃ 5 φοράς ὀλιγώτερον τάς 70 δρχ. δηλ. θά ἀξίζῃ $\frac{70}{5}$ δρχ. καί οἱ 3 πήχεις πού εἶναι 3 φοράς μεγαλύτεροι ἀπό τόν 1 πῆχυ θά ἀξίζουν 3 φοράς περισσότερον τάς $\frac{70}{5}$ δρχ. δηλ. θά ἀξίζουν $\frac{70}{5}$ Χ3 =42 δρχ.

<u>Διάταξις</u>

5	70
1	$\frac{70}{5}$
3	$\frac{70}{5}$Χ3=
	= 42

Ἄρα οἱ 3 πήχεις ἀξίζουν 42 δραχμάς.

Παρατηροῦμεν ὅτι διά νά εὕρωμεν τήν ἀξίαν τῶν 3 πήχεων (πολλῶν μονάδων) εὑρήκαμε πρῶτον τήν ἀξίαν τοῦ 1 πήχεως (μιᾶς ἀκεραίας μονάδος). Τό πρόβλημα λοιπόν ἐλύθη μέ τήν ἀναγωγήν εἰς τήν ἀκεραίαν μονάδα.

<u>Πρόβλημα 2ον</u>." Τά $\frac{2}{3}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 40. Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός.

Λ ύ σ ι ς

<u>Σκέψις</u>

Ἀφοῦ τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 40 τό $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πού εἶναι 2 φοράς μι-

<u>Διάταξις</u>

μικρότερον ἀπό τά $\frac{2}{3}$ θά εἶναι ὁ 40 μικρότερος 2 φοράς δηλ. $\frac{40}{2}$ καί τά $\frac{3}{3}$ αὐτοῦ πού εἶναι 3 φοράς μεγαλύτερα ἀπό τό $\frac{1}{3}$ θά εἶναι θά εἶναι τό $\frac{40}{2}$ Χ3. Ἀλλά $\frac{3}{3}$ εἶναι ὁλόκληρος ὁ ἀριθμός πού ζητοῦμεν ἄρα λοιπόν ὁ ἀριθμός πού ζητοῦμεν εἶναι ὁ ἀριθμός $\frac{40}{2}$ Χ3 = 60.	$\frac{2}{3}$ 40 $\frac{1}{3}$ $\frac{40}{2}$ $\frac{3}{3}$ $\frac{40}{2}$ Χ3=60 Ἄρα ὁ ζητούμενος ἀριθμός εἶναι ὁ 60.

<u>Συντομία</u>. Ἐπειδή γνωρίζομεν ὡρισμένο μέρος ἀριθμοῦ καί ζητοῦμεν ὁλόκληρον τόν ἀριθμόν τό πρόβλημα λύεται διά μιᾶς διαιρέσεως δηλ. 40 : $\frac{2}{3}$ = 40Χ$\frac{3}{2}$ = 60.

<u>Πρόβλημα 3ον.</u> "Νά εὕρετε τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ 60"

<u>Λ ύ σ ι ς</u>

<u>Σκέψις</u>	<u>Διάταξις</u>
Ἀφοῦ τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 60, τό $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ πού εἶναι 3 φοράς μικρότερον ἀπό τά $\frac{3}{3}$ θά εἶναι ὁ 60 μικρότερος 3 φοράς δηλ. $\frac{60}{3}$ · καί τά $\frac{2}{3}$ αὐτοῦ πού εἶναι 2 φοράς μεγαλύτερα ἀπό τό $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ θά εἶναι ὁ $\frac{60}{3}$ μεγαλύτερος 2 φοράς δηλ. $\frac{60}{3}$Χ2 = 40.	$\frac{3}{3}$ 60 $\frac{1}{3}$ $\frac{60}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{60}{3}$ Χ2=40 Ἄρα τά $\frac{2}{3}$ τοῦ 60 εἶναι ὁ 40

<u>Συντομία</u>. Ἐπειδή ζητοῦμεν ὡρισμένο μέρος ἀριθμοῦ τό πρόβλημα λύεται μέ ἕνα πολλαπλασιασμόν δηλ. 60Χ$\frac{2}{3}$ =40.

<u>Πρόβλημα 4ον.</u> "Τά $\frac{2}{3}$ ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 40. Πόσον εἶναι τά $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ;

Λύσις

Σκέψις

Ἀφοῦ τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 40, τό $\frac{1}{3}$ αὐτοῦ θά εἶναι ὁ 40 μικρότερος 2 φοράς δηλ. $\frac{40}{2}$ καί τά $\frac{3}{3}$ αὐτοῦ, δηλ. ὁλόκληρος ὁ ἀριθμός θά εἶναι τό $\frac{40}{2}$ μεγαλύτερον 3 φοράς δηλ. $\frac{40X3}{2}=60$. Ἀλλά $\frac{3}{3}=\frac{5}{5}$ καί λέγομεν: Ἀφοῦ τά $\frac{5}{5}$ εἶναι ὁ 60 τό $\frac{1}{5}$ αὐτοῦ θά εἶναι ὁ 60 μικρότερος 5 φοράς δηλ. $\frac{60}{5}$ καί τά $\frac{4}{5}$ αὐτοῦ θά εἶναι τό $\frac{60}{5}$ μεγαλύτερον 4 φοράς δηλ. $\frac{60}{5}X4=48$.

Διάταξις

$$\frac{2}{3} \quad 40$$
$$\frac{1}{3} \quad \frac{40}{2}$$
$$\frac{3}{3}=\frac{5}{5} \quad \frac{40}{2}X3=60$$
$$\frac{1}{5} \quad \frac{60}{5}$$
$$\frac{4}{5} \quad \frac{60}{5}X4=48$$

Ἄρα τά $\frac{4}{5}$ τοῦ ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 48.

__Συντομία:__ Διά μιᾶς διαιρέσεως εὑρίσκομεν ὁλόκληρον τόν ἀριθμόν δηλ. $40:\frac{2}{3}=40X\frac{3}{2}=60$. Κατόπιν μέ ἕνα πολλαπλασιασμόν τοῦ 60 ἐπί $\frac{4}{5}$ ἔχομεν $60X\frac{4}{5}=48$.

__Παρατήρησις.__ Εἰς τό 2ον, 3ον καί 4ον πρόβλημα διά νά εὕρωμεν τήν ἀξίαν τῶν πολλῶν μονάδων εὑρήκαμε πρῶτον τήν ἀξίαν τῆς μιᾶς κλασματικῆς μονάδος. Τά προβλήματα αὐτά λοιπόν ἐλύθησαν μέ τήν ἀναγωγήν εἰς τήν κλασματικήν μονάδα.

Σύνθετα κλάσματα

Ἐπειδή τό πηλίκον δύο ὁποιωνδήποτε ἀριθμῶν παριστάνεται μέ κλάσμα διά τοῦτο καί τό πηλίκον π.χ. $\frac{3}{4}:\frac{5}{7}$ παριστάνεται μέ κλάσμα $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$ τό ὁποῖον λέγεται __σύνθετον κλάσμα.__ Ὁμοίως καί τό πηλίκον $4:\frac{5}{7}$ παριστάνεται μέ τό κλάσμα $\frac{4}{5}$ τό ὁποῖον λέγεται ἐπίσης __σύνθετον κλάσμα.__ Ἐπομένως

<u>Σύνθετον</u> λέγεται τό κλάσμα τοῦ ὁποίου ἕνας τοὐλάχιστον ὅρος εἶναι κλασματικός ἀριθμός.

Ἔστω τό σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}}$ Ὁ 3 καί ὁ 7 λέγονται <u>ἄκροι</u> ὅροι, ὁ 4 καί ὁ 5 λέγονται <u>μέσοι</u> ὅροι. Ὅταν ἕνας ὅρος τοῦ συνθέτου κλάσματος εἶναι ἀκέραιος τότε γράφομεν κάτω ἀπό αὐτόν ὡς παρονομαστήν τήν μονάδα 1 π.χ. τό σύνθετον κλάσμα $\frac{4}{\frac{3}{8}}$ θά τό γράφωμεν $\frac{\frac{4}{1}}{\frac{3}{8}}$ καί τό σύνθετον $\frac{\frac{5}{7}}{9}$ ὡς ἑξῆς $\frac{\frac{5}{7}}{\frac{9}{1}}$

<u>Τροπή συνθέτου κλάσματος εἰς ἁπλοῦν</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά τρέψωμεν εἰς ἁπλοῦν τό σύνθετον κλάσμα $\frac{\frac{2}{4}}{\frac{5}{7}}$ Σύμφωνα μέ τά παραπάνω εἶναι: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3}{4}$

$: \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$

Καί συντομώτερον: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$

Δηλ. " Διά ~~νά~~ τρέψωμεν σύνθετον κλάσμα εἰς ἁπλοῦν πολλαπλασιάζομεν τούς ἄκρους καί τό γινόμενον τό κάμνομεν ἀριθμητήν· κατόπιν πολλαπλασιάζομεν τούς μέσους καί τό γινόμενον τό κάμνομεν παρονομαστήν".

<u>Παρατήρησις</u>. Τά σύνθετα κλάσματα ἔχουν ὅλας τάς ἰδιότητας πού ἔχουν καί τά ἁπλᾶ κλάσματα καί αἱ πράξεις ἐπ' αὐτῶν γίνονται μέ τούς ἰδίους κανόνας πού γίνονται καί εἰς τά ἁπλᾶ κλάσματα.

<u>Ἀσκήσεις</u>

1) Νά γίνουν ἁπλᾶ τά σύνθετα κλάσματα

$$\frac{1}{\frac{1}{2}},\ \frac{2}{\frac{1}{5}},\ \frac{5}{\frac{2}{3}},\ \frac{\frac{8}{9}}{\frac{7}{9}},\ \frac{6}{1\frac{4}{5}},\ \frac{5\frac{2}{3}}{6},\ \frac{\frac{4}{4}}{2\frac{3}{4}},\ \frac{5\frac{1}{4}}{\frac{3}{7}},\ \frac{3\frac{2}{5}}{6\frac{1}{2}}$$

Προβλήματα

1) Τεχνίτης τελειώνει ἔργον εἰς 4(5)(9) ὥρας. Εἰς πόσας ὥρας θά τελειώση τά $\frac{3}{4}$ $(\frac{4}{5})$, $(\frac{2}{3})$ τοῦ ἰδίου ἔργου;

2) Βρύση εἰς 3,(4),(9) ὥρας ἐγέμισε τά $\frac{3}{4}$, $(\frac{4}{5})$, $(\frac{2}{3})$ μιᾶς δεξαμενῆς. Εἰς πόσας ὥρας θά γεμίση τά $\frac{3}{5}$ $(\frac{5}{6})$ $(\frac{4}{9})$ τῆς δεξαμενῆς;

3) Τεχνίτης τελειώνει ἔργον εἰς 3 (5),(4), ἡμέρας, δεύτερος τεχνίτης τό τελειώνει εἰς 4,(6),(6) ἡμέρας καί τρίτος τεχνίτης εἰς 6,(10),(9) ἡμέρας. Ἐάν καί οἱ τρεῖς συνεργασθοῦν εἰς πόσον χρόνον θά τελειώσουν τά $\frac{15}{16}$, $(\frac{14}{15})$, $(\frac{19}{72})$ τοῦ ἔργου;

4) Τρεῖς τεχνῖται ἐτελείωσαν μαζί ἔργον εἰς $1\frac{1}{12}$ ἡμ. ἀλλά ὁ α΄ καί ὁ β΄ μαζί ἠμποροῦν νά τελειώσουν τό ἔργον εἰς $2\frac{1}{2}$ ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ γ΄ μόνος τελειώνει τό ἔργον καί εἰς πόσας τά $\frac{2}{13}$ αὐτοῦ;

5) Τρεῖς τεχνῖται ἔκαμαν μαζί ἕνα ἔργον εἰς 8 ἡμ. Ὁ α΄ μόνος του τελειώνει τό ἔργον αὐτό εἰς 15 ἡμ. καί ὁ β΄ μόνος του εἰς 20 ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ γ΄ μόνος του κάμνει τό ἔργον αὐτό καί εἰς πόσας ἡμέρας ὁ καθένας κάμνει τά $\frac{4}{5}$ τοῦ ἔργου;

6) Δεξαμενή ἔχει 3 κάνουλες. Ἐάν ἀνοιχθοῦν αἱ δύο πρῶται ἡ δεξαμενή ἀδειάζει εἰς $2\frac{1}{2}$ ὥρας. Ἐάν ἀνοιχθοῦν καί αἱ τρεῖς ἡ δεξαμενή ἀδειάζει εἰς 2 ὥρας. Ἐάν ἀνοιχθῆ μόνον ἡ τρίτη εἰς πόσας ὥρας θά ἀδειάση τήν δεξαμενήν;

7) Δεξαμενή γεμίζει ἀπό μίαν βρύση εἰς 4 ὥρ.καί ἀπό μίαν ἄλλην βρύσην εἰς 6 ὥρ.Μία δέ κάνουλα τήν ἀδειάζει εἰς $2\frac{2}{5}$ ὥρας. Ὑποθέτομεν ὅτι ἡ δεξαμενή εἶναι γεμάτη ἀπό νερό καί ἀφίνομεν συγχρόνως ἀνοικτάς τίς δυό βρύσες καί τήν κάνουλαν. Μετά πόσας ὥρας θά ἀδειάσῃ ἡ δεξαμενή;

8) Βρύση γεμίζει δεξαμενή εἰς 7 ὥρ.,δευτέρα βρύση εἰς 9 ὥρ. καί τρίτη εἰς 12 ὥρ."Οταν ἀνοιχθοῦν καί αἱ τρεῖς συγχόνως ἐπί 4(2) ὥρας τότε ἡ δεξαμενή θέλει ἀκόμη 50(41) λίτρας νερό διά νά γεμίσῃ ἐντελῶς Πόσας λίτρας νερό χωρεῖ ἡ δεξαμενή;

9) Ἐάν εἰς ἕνα βαρέλι ρίψωμεν $25\frac{3}{5}$ $(35\frac{5}{6})$ ὀκ,νερό θά μείνουν ἄδεια τά $\frac{2}{5}$ $(\frac{3}{5})$ τοῦ βαρελιοῦ. Πόσας ὀκάδες νερό χωρεῖ τό βαρέλι καί πόσες ὀκάδες νερό θέλει διά νά γεμίσῃ.

10) Τό βάρος τῆς οὐρᾶς ἑνός ψαριοῦ ἦτο τό $\frac{1}{4}$ $(\frac{1}{5})$ τοῦ ὅλου βάρους του. Τό σῶμα του ἐζύγιζεν 5(11) ὀκ. ἡ δέ κεφαλή του τό $\frac{1}{3}$ $(\frac{1}{4})$ τοῦ ὅλου βάρους του.Πόσας ὀκάδας ἐζύγιζεν τό ψάρι;

11)Τέσσαρα δοχεῖα περιέχουν τήν βενζίνην ἑνός βυτίου. Τό δ'περιέχει τό $\frac{1}{5}$ τῆς ὅλης ποσότητος. τό γ' τά $\frac{3}{10}$ αὐτῆς, τό β"τά $\frac{6}{25}$ αὐτῆς καί τό α"περιέχει 25 γαλόνια. Πόσα γαλόνια βενζίνη εἶχε τό βυτίον;

12) Σχολή ἔχει 5 τάξεις. Ἡ α"ἔχει τό $\frac{1}{10}$ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μαθητῶν ἡ β"τό $\frac{1}{6}$, ἡ γ"τό $\frac{1}{5}$, ἡ δ"τό $\frac{1}{4}$ καί ἡ ε"εἶχαν 17 μαθητάς Πόσους μαθητάς ἔχει ἡ Σχολή;

13) Ἐάν εἰς τά χρήματα πού ἔχω προσθέσετε καί τά $\frac{3}{5}$ τῶν 6000 δραχμῶν θά σχηματίσετε τά $\frac{17}{15}$ τῶν χρημάτων

μου πόσα ἔχω;

14) Ἐάν εἰς τό $\frac{1}{2}$ τῶν χρημάτων πού ἔχω προσθέσετε τό $\frac{1}{3}$ αὐτῶν ἔπειτα τό $\frac{1}{4}$ καί τέλος τό $\frac{1}{5}$ θά εὕρετε παραπάνω 3400 δρχ. Πόσας δραχμάς ἔχω;

15) Τό $\frac{1}{2}$ καί τό $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτωνμου μαζύ ὑπερβαίνουν τό $\frac{1}{5}$ αὐτῶν κατά 3800 δρχ. Πόσας ἔχω;

16) Ἔχω εἰς τόν νοῦν μου ἕνα ἀριθμόν. Ἐάν τόν διπλασιάσετε καί εἰς αὐτό προσθέσετε τό τριπλάσιον τοῦ $\frac{1}{4}$, τό ἑξαπλάσιον τοῦ $\frac{1}{12}$ καί 5 μονάδας ἀκόμη θά σχηματίσετε τόν ἀριθμόν 200. Ποῖον ἀριθμόν ἔχω εἰς τόν νοῦν μου;

17) Ἕνα παιδί ἠρωτήθη πόσα μῆλα εἶχεν εἰς τό καλάθι καί ἀπήντησεν, Ἐάν εἶχα τό $\frac{1}{3}$, τά $\frac{3}{4}$, τά $\frac{5}{6}$ καί τά $\frac{5}{8}$ τοῦ τετραπλασίου αὐτῶν πού ἔχω καί 83 ἀκόμη τό καλάθι μου θά εἶχε 418 μῆλα. Πόσα μῆλα εἶχεν;

18) Ὁ καλός σῖτος ἀποδίδει ἄλευρον $\frac{19}{25}$ τοῦ βάρους του. Ἀπό πόσον σῖτον προέκυψεν πίτουρον $368\frac{7}{50}$;

19) Ὁ καφές ὅταν καβουρντισθῇ χάνει τά $\frac{4}{25}$ τοῦ βάρους του. Ζητοῦνται α) ἐάν καβουρδίσωμεν $1\frac{1}{4}$ ὀκ. πόσος θά μείνῃ καί β) ἐάν ἔχωμεν 315 δράμια καβουρδισμένον πόσος ἦτο πρίν καβουρδισθῇ;

20) Κατά τήν μετατροπήν τοῦ βάμβακος εἰς νῆμα συμβαίνει φῦρα ἴση μέ τά $\frac{7}{64}$ τοῦ βάρους του. Πόσας ὀκάδας βάμβακος πρέπει νά ἔχωμεν διά 35625 ὀκ. νῆμα;

21) Τό κρέας ὅταν ψηθῇ χάνει τό $\frac{1}{4}$ τοῦ βάρους του. Πόσον ἦτο ἐάν ψημένο ζυγίζῃ $1\frac{7}{8}$ ὀκ.

22) Ἡ πίσσωσις ἐλαττώνει τήν ἀντίστασιν τῶν καλω-

δίων κατά τά $\frac{2}{7}$ τῆς ἀρχικῆς ἀντιστάσεως αὐτῶν. Ἕνα καλώδιον μετά τήν πύσσωσιν ἀκόπη διά τῆς ἕλξεως φορτίου 4240 κιλῶν ποία ἡ ἀρχική του ἀντίστασις;

23) Ἕνας τεχνίτης ἔκαμε ἀπό ἕνα ἔργον τά $\frac{3}{7}$ ($\frac{4}{9}$) κατόπιν τά $\frac{3}{4}$ ($\frac{4}{15}$) τοῦ ὑπολοίπου καί τοῦ ἔμειναν νά κάμῃ ἀκόμη $5\frac{5}{14}$ ($13\frac{4}{9}$) μέτρα. Πόσα μέτρα ἦτο ὅλο τό ἔργον;

24) Ἀπό ἕνα βαρέλι λάδι ἐπωλήσαμεν τά $\frac{2}{5}$ ($\frac{3}{8}$) τῆς ποσότητος ὅλης, κατόπιν τά $\frac{3}{4}$ ($\frac{2}{3}$) τῆς ὑπολοίπου ποσότητος καί κατόπιν τά $\frac{4}{5}$ ($\frac{4}{15}$) τῆς νέας ὑπολοίπου ποσότητος. Ἔμειναν δέ εἰς τό βαρέλι $75\frac{3}{4}$ ($12\frac{1}{10}$) ὀκάδες λάδι. Πόσες ὀκάδες λάδι εἶχε τό βαρέλι;

25) Σφαῖρα ἐλαστική ἔπεσε ἀπό ὕψος $1\frac{3}{4}$ μέτρα ἀνεπήδησε τρεῖς φοράς καί κάθε ἀναπήδησις εἶναι τά $\frac{2}{5}$ τῆς προηγουμένης. Ζητεῖται τό ὕψος τῆς τελευταίας ἀναπηδήσεως.

26) Σφαῖρα ἐλαστική ἔπεσεν ἀπό ἄγνωστον ὕψος ἀνεπήδησε τρεῖς φοράς καί κάθε ἀναπήδησις ἦτο τά $\frac{2}{5}$ τῆς προηγουμένης. Ἡ τελευταία ἀναπήδησις εἶχεν ὕψος $\frac{14}{125}$ τοῦ μέτρου. Ζητεῖται τό ὕψος ἀπό τό ὁποῖον ἔπεσεν ἡ σφαῖρα τήν πρώτην φοράν.

27) Ἕνας σκύλλος καταδιώκει μίαν ἀλώπεκαν ἡ ὁποία ἀπέχει 60(40) πηδήματα αὐτῆς. Ὅταν αὐτή κάμνει 9 (10) πηδήματα ὁ σκύλλος κάμνει 6(5). Ἀλλά 3 πηδήματα αὐτοῦ ἰσοδυναμοῦν μέ 7 πηδήματα ἐκείνης. Ζητεῖται μετά πόσα πηδήματά του θά τήν φθάσῃ;

28) Ἕνας σκύλλος καταδιώκει μίαν ἀλώπεκαν ἡ ὁποία ἀπέχει $27\frac{1}{2}$ πηδήματα αὐτῆς. Κάθε πήδημα ἐκεί-

νου εἶναι $1\frac{1}{5}$ μέτρα καί κάθε πήδημα ἐκείνης εἶναι $\frac{17}{20}$ μ. Μέχρις ὅτου ὅμως ἐκεῖνος κάμνει 4 πηδήματα ἐκείνη κάμνει 5 πηδήματα. Μετά πόσα πηδήματά του θά τήν φθάσῃ;

29) Βρύση γεμίζει δεξαμενήν εἰς 7 ὥρ.καί μία κάνουλα τήν ἀδειάζει εἰς 11 ὥρ. Ὅταν ἡ δεξαμενή εἶναι γεμάτη κατά τό $\frac{1}{3}$ αὐτῆς ἀφίνομεν ἀνοικτές τήν βρύσην καί τήν κάνουλαν. Εἰς πόσον χρόνον θά γεμίσουν τά $\frac{3}{4}$ τῆς δεξαμενῆς ὁλοκλήρου;

30) Βρύση γεμίζει δεξαμενήν εἰς 8(12) ὥρας, δευτέρα βρύση τήν γεμίζει εἰς 3(20) ὥρας καί τρίτη βρύση εἰς 6(18) ὥρας. Ἀνοίγομεν τήν πρώτην εἰς τάς 12 τό μεσημέρι. τήν δευτέραν εἰμ τήν 1 μ.μ. καί τήν 3ην εἰς τάς 2 μ.μ. Κατά ποίαν ὥραν θά γεμίσῃ ἡ δεξαμενή;

31) Νά χωρισθῇ ὁ 100 εἰς δύο μέρη τοιαῦτα ὥστε τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ἑνός καί τό $\frac{1}{9}$ τοῦ ἄλλου νά ἀποτελοῦν τόν 12.

32) Συνεργεῖον ἀπό 6 τεχνίτας εἰς 10 ἡμέρας ἐτελείωσεν τό $\frac{1}{4}$ ἑνός ἔργου. Ἐάν γίνῃ ἀνάγκη νά τελειώσῃ τό ἔργον μετά 5 ἡμέρας πόσοι τεχνῖται πρέπει νά προσληφθοῦν;

33) Τά κεφάλαια δύο συνεταίρων εἶναι 33.000 δρχ. Νά εὑρεθῇ τό κεφάλαιον καθενός χωριστά ἐάν τό $\frac{1}{3}$ καί τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ἑνός μαζί κάμνουν τά $\frac{7}{10}$ τοῦ κεφαλαίου τοῦ ἄλλου;

34) Πατέρας καί υἱός ὑπολογίζουν νά τελειώσουν ἕνα ἔργον εἰς 15 ἡμ. Μετά 12 ἡμέρας ὁ υἱός ἀφοῦ ἔκαμε τά $\frac{3}{4}$ τῆς ἐργασίας τοῦ πατέρα του ἠσθένησεν. Πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διά νά τελειώσῃ ὁ πατέρας τό ἔργον;

35) Δύο τεχνῖται ἀνίσου ἱκανότητος ὅταν συνεργάζωνται ἠμποροῦν νά κάμουν ἕνα ἔργον εἰς 12 ἡμ.Μετά συνεργασίαν 4 ἡμερῶν ὁ ἱκανώτερος ἔφυγε καί ὁ ἄλλος ἐτελείωσεν τό ἔργον πού ἔμεινεν εἰς 18 ἡμ.Εἰς πόσας ἡμέρας ὁ καθένας μόνος του τελειώνει τό ἔργον;

36) Τεχνίτης τελειώνει ἔργον εἰς 60 ἡμ.ἐργαζόμενος 9 ὥρ.τήν ἡμέραν καί ἕνας ἄλλος εἰς 80 ἡμ.ἐργαζόμενος 7 ὥρ.τήν ἡμέραν.Ἐάν συνεργασθοῦν καί ἀπό 8 ὥρ.τήν ἡμέραν εἰς πόσον χρόνον θά τελειώσουν τό ἔργον;

37) Μία βρύση γεμίζει δεξαμενήν εἰς 15 ὥρ.καί μία ἄλλη βρύση δίδει εἰς τόν ἴδιον χρόνον 4/πλασίαν ποσότητα νεροῦ ἀπό ἐκείνην πού δίδει ἡ πρώτη βρύση.Ἐάν ἀνοιχθοῦν καί αἱ δύο βρύσες ἐπί 2 ὥρας ἡ δεξαμενή χρειάζεται ἀκόμη 200 δκ.νερό διά νά γεμίσῃ.Ποία ἡ χωρητικότης τπης δεξαμενῆς καί εἰς πόσον χρόνον ἡ δευτέρα βρύση μόνη της γεμίζει τήν δεξαμενήν;

38) Δεξαμενή γεμάτη νερό ἀδειάζει ἀπό δύο ἄνισες κάνουλες.Ἀνοίγομεν τήν πρώτην καί τρέχει τό $\frac{1}{4}$ τοῦ περιεχομένου νεροῦ. Τότε ἀνοίγομεν καί τήν δευτέραν καί τρέχει καί ἀπό τάς δύο τό νερό. Μέ αὐτόν τόν τρόπον ἀδειάζουν καί τά λοιπά $\frac{3}{4}$ τῆς δεξαμενῆς εἰς χρόνον κατά $1\frac{1}{4}$ ὥρας περισσότερον ἀπό τόν χρόνον πού ἐχρειάσθη ἡ πρώτη κάνουλα διά τό $\frac{1}{4}$. Ἐάν καί αἱ δύο κάνουλες ἠνοίγοντο ἐξ ἀρχῆς ἡ δεξαμενή θά ἄδειαζεν εἰς $\frac{1}{4}$ τῆς ὥρας ἐνωρίτερον. Εἰς πόσας ὥρας ἡ κάθε μία κάνουλα μόνη της ἀδειάζει τήν δεξαμενήν;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

Δεκαδικοί Ἀριθμοί

Ὁρισμοί

Αἱ κλασματικαί μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. λέγονται δεκαδικαί κλασματικαί μονάδες ἤ δεκαδικαί μονάδες. Ἀπό αὐτάς τό $\frac{1}{10}$ ἀπαγγέλλεται ἕν δέκατον ἤ δέκατον καί λέγεται δεκαδική μονάς πρώτης τάξεως ἔχει δέ εἰς τόν παρονομαστήν ἕνα μηδενικό. Τό $\frac{1}{100}$ ἀπαγγέλλεται ἕν ἑκατοστόν ἤ ἑκατοστόν καί λέγεται δεκαδική μονάς δευτέρας τάξεως ἔχει δέ εἰς τόν παρονομαστήν δύο μηδενικά. Τό $\frac{1}{1000}$ ἀπαγγέλλεται ἕν χιλιοστόν ἤ χιλιοστόν καί λέγεται δεκαδική μονάς τρίτης τάξεως ἔχει δέ εἰς τόν παρονομαστήν τρία μηδενικά κ.ο.κ. Ὥστε

" Ἡ τάξις μιᾶς δεκαδικῆς μονάδος εἶναι ἴση μέ τόν ἀριθμόν τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ αὐτῆς"

Ἐάν χωρίσωμεν τήν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 10 ἴσα μέρη καί πάρωμεν 2 μέρη ἤ 3 μέρη κλπ. αὐτό καλεῖται δεκαδικόν κλάσμα. Ἐπίσης ἐάν χωρίσωμεν τήν ἀκεραίαν μονάδα εἰς 100 ἴσα μέρη καί πάρωμεν 2 μέρη ἤ 3 μέρη κλπ. αὐτό καλεῖται δεκαδικόν κλάσμα καί σημειώνομεν $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ κλπ. $\frac{2}{100}$, $\frac{3}{100}$ κλπ. $\frac{2}{1000}$, $\frac{3}{1000}$ κλπ. Ἐπομένως

"Δεκαδικόν κλάσμα λέγεται τό κλάσμα τό ὁποῖον προκύπτει ἐάν ἐπαναλάβωμεν τήν δεκαδικήν μονάδα πολλάς φοράς"

Αἱ κλασματικαί μονάδες $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. ὠνομάσθησαν δεκαδικαί μονάδες διότι ἡ κάθε μία γίνεται ἐκ τῆς ἑπομένης πρός τά δεξιά ἐάν ἐπαναληφθῇ 10 φοράς. Δηλ. $\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, $\frac{1}{100}=\frac{10}{1000}$ κ.ο.κ. Ὥστε " Κάθε μία δεκαδική μονάς εἶναι 10 φοράς μεγαλυτέρα ἀπό τήν ἀμέσως ἑπομένην". Αὐτό ἀποτελεῖ συνέχειαν τοῦ δεκαδικοῦ συστήματος πού ἔχομεν γνωρίσει καί ἀνήκει ἡ συνέχεια αὐτή εἰς τόν Βέλγον Μαθηματικόν καί Μηχανικόν Simon Stevin (1548-1620).

Κατόπιν τούτου κάθε δεκαδικόν κλάσμα ἠμπορεῖ νά ἀναλυθῇ εἰς μονάδας ἀκεραίας ἤ δεκαδικάς οὕτως ὥστε ἀπό κάθε τάξιν νά μή περιέχῃ περισσοτέρας τῶν 9 π.χ. τό δεκαδικόν κλάσμα $\frac{7689}{1000}$ ἀναλύεται ὡς ἑξῆς: $\frac{7689}{1000}=$ $\frac{7000+600+80+9}{1000}=\frac{7000}{1000}+\frac{600}{1000}+\frac{80}{1000}+\frac{9}{1000}$ ἤ δι' ἁπλοποιήσεως

$\frac{689}{1000}=\frac{6}{10}+\frac{8}{100}+\frac{9}{1000}=$ 0 ἀκέραιος + 6 δέκατα + 8 ἑκατοστά + 9 χιλιοστά.

Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά βλέπομεν ὅτι μετά ἀπό τάς ἀκεραίας μονάδας ἔρχονται τά δέκατα, κατόπιν τά ἑκατοστά, τά χιλιοστά κ.ο.κ.

Γραφή τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων χωρίς παρονομαστήν δεκαδικοί ἀριθμοί

Τά δεκαδικά κλάσματα γράφονται, ὅπως καί οἱ ἀκέραιοι ἀριθμοί χωρίς παρονομαστάς· διότι ἀπό τήν θέσιν ἠμποροῦμεν νά κρίνωμεν τήν ἀξίαν κάθε ψηφίου, ὅπως συμβαίνῃ καί εἰς τούς ἀκεραίους.

Ἐάν τό δεκαδικόν κλάσμα ἔχῃ ἀκεραίας μονάδας, τότε γράφομεν πρῶτον αὐτάς καί ἔπειτα θέτομεν ἕνα κόμμα πού λέγεται ὑποδιαστολή. Ἐάν τό δεκαδικόν κλάσμα δέν ἔχῃ ἀκεραίας μονάδας τότε γράφομεν πρῶτον ἕνα μηδενικόν καί ἔπειτα θέτομεν τήν ὑποδιαστολήν. Τά δεκαδικά κλάσματα ὅταν γραφοῦν χωρίς παρονομαστήν τότε λέγονται <u>δεκαδικοί ἀριθμοί</u>.

Σύμφωνα λοιπόν μέ αὐτά ἔχομεν:

$\frac{7689}{1000}$ = 7 ἀκέραιος + 6 δέκατα + 8 ἑκατοστά + 9 χιλιοστά =7,689. Ἐπίσης $\frac{689}{1000}$ = 0 ἀκέραιος+6 δέκατα+ 8 ἑκατοστά + 9 χιλιοστά = 0,689.

Ἡ ὑποδιαστολή χωρίζει τόν δεκαδικόν ἀριθμόν εἰς δύο μέρη, εἰς ἀκέραιον μέρος καί εἰς δεκαδικόν μέρος τοῦ ὁποίου τά ψηφία λέγονται δεκαδικά ψηφία.

Ἡ γραφή τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων χωρίς παρονομαστάς γίνονται συντόμως ὡς ἑξῆς: Πέρνομεν μόνον τόν ἀριθμητήν καί ἀπό τοῦ τέλους αὐτοῦ χωρίζομεν τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσα μηδενικά ἔχει ὁ παρονομαστής.

Ἐάν τά ψηφία τοῦ ἀριθμητοῦ δέν ἐπαρκοῦν τότε συμπληρώνομεν μέ μηδενικά τά ὁποῖα γράφομεν πρό αὐτοῦ π.χ.

$\frac{37}{10}$ = 3,7 ; $\frac{37}{100}$ = 0,37 ; $\frac{37}{1000}$ = 0,037

<u>Ἀντιστρόφως</u>. Ἐπειδή 3,7 = $\frac{37}{10}$, 0,37 = $\frac{37}{100}$,0,037= $\frac{37}{1000}$ ἕπεται ὅτι "Κάθε δεκαδικός ἀριθμός γράφεται ὡς δεκαδικόν κλάσμα ἐάν παραλείψωμεν τήν ὑποδιαστολήν καί κάτω ἀπό αὐτόν γράψωμεν παρονομαστήν τήν μονάδα ἀκολουθουμένη ἀπό τόσα μηδενικά ὅσα εἶναι τά δεκαδικά ψηφία του"

<u>Ἀπαγγελία τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν</u>

Οἱ δεκαδικοί ἀριθμοί ἀπαγγέλλονται μέ τρεῖς τρόπους.

α) Ἀπαγγέλλομεν πρῶτον τό ἀκέραιον μέρος καί ἔπειτα κάθε ἕνα ψηφίον τοῦ δεκαδικοῦ μέρους μέ τό ὄνομα τῆς τάξεως αὐτοῦ π.χ.

Ὁ 5,64 ἀπαγγέλλεται: 5 ἀκέραιος,6 δέκατα,4 ἑκατο-

'Ο 0,07 ἀπαγγέλλεται: 0 ἀκέραιος,0 δέκατα,7 ἑκατοστά.

β) 'Απαγγέλλομεν πρῶτον τό ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ καί ἔπειτα ὁλόκληρον τό δεκαδικόν μέρος ὡς ἀκέραιον καί τό ὀνομάζομεν μέ τό ὄνομα τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου π.χ.

'Ο 5,64 ἀπαγγέλλεται: 5 ἀκέραιος καί 64 ἑκατοστά.
'Ο 0,07 ἀπαγγέλλεται: 0 ἀκέραιος καί 7 ἑκατοστά.

"Οταν ὁ δεκαδικός ἀριθμός ἔχῃ πολλά δεκαδικά ψηφία τότε ἀπαγγέλλεμεν αὐτά ἀνά τρία καί ὀνομάζομεν κάθε ἕνα τριψήφιον τμῆμα μέ τό ὄνομα τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου αὐτοῦ.

π.χ. ὁ δεκαδικός 2,125973 ἀπαγγέλλεται: 2 ἀκέραιος 125 χιλιοστά καί 973 ἑκατομμυριοστά. 'Ο δεκαδικός 1,00027 ἀπαγγέλλεται 1 ἀκέραιος,0 χιλιοστά καί 27 ἑκατοντάκις χιλιοστά. 'Ο δεκαδικός 0,00720345 ἀπαγγέλλεται: 0 ἀκέραιος, 7 χιλιοστά, 203 ἑκατομμυριοστά καί 45 ἑκατοντάκις ἑκατομμυριοστά.

γ) 'Απαγγέλλομεν ὁλόκληρον τόν ἀριθμόν ὡς ἀκέραιον ὀνομάζοντες αὐτόν μέ τό ὄνομα τῆς τάξεως τοῦ τελευταίου ψηφίου π.χ. 'Ο δεκαδικός 62,5 ἀπαγγέλλεται 625 δέκατα, ὁ δεκαδικός 125,341 ἀπαγγέλλεται 125341 χιλιοστά καί ὁ δεκαδικός 0,064 ἀπαγγέλλεται 64 χιλιοστά.

'Ιδιότης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

'Η ἀξία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δέν ἀλλάσσει ὅσα μηδενικά καί ἄν γράψωμεν εἰς τό τέλος αὐτοῦ ἤ ὅσα μηδενικά καί ἄν σβύσωμεν ἀπό τό τέλος αὐτοῦ.

'Η ἰδιότης αὐτή συνάγεται ἀπό γνωστήν ἰδιότητα τῶν κλασμάτων ὅπως φαίνεται ἀπό τό ἑξῆς παράδειγμα.

$$3{,}7 = \frac{37}{10} = \frac{370}{100} = \frac{3700}{1000} = 3{,}70 = 3{,}700$$

Σύγκρισις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν μεταξύ των

Διά νά συγκρίνωμεν δεκαδικούς ἀριθμούς μεταξύ των τρέπομεν αὐτούς εἰς δεκαδικά κλάσματα τά ὁποῖα συγκρίνομεν ὅπως τά κοινά κλάσματα. Κάμνοντες αὐτό καταλήγομεν εἰς τά ἑξῆς:

α) Ἐκ δύο ἤ περισσοτέρων δεκαδικῶν ἀριθμῶν μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τό μεγαλύτερον ἀκέραιον μέρος, καί μικρότερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τό μικρότερον ἀκέραιον μέρος.

π.χ. Ἀπό τούς δεκαδικούς 7,12 καί 1,987 μεγαλύτερος εἶναι ὁ 7,12.

β) Ἐάν οἱ δεκαδικοί ἔχουν τό ἴδιον ἀκέραιον μέρος τότε ἀπό αὐτούς εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τά περισσότερα δέκατα, ἐάν ἔχουν καί ἴσα δέκατα τότε μεγαλύτερος εἶναι ἐκεῖνος πού ἔχει τά περισσότερα ἑκατοστά κ.ο.κ. π.χ. Ἐκ τῶν δεκαδικῶν 5,198 καί 5,200 μεγαλύτερος εἶναι ὁ 5,200. Ἐκ τῶν δεκαδικῶν 0,0397 καί 0,04 μεγαλύτερος εἶναι ὁ 0,04.

Θεμελιώδεις πράξεις ἐπί τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Π ρ ό σ θ ε σ ι ς

Διά νά προσθέσωμεν δεκαδικούς ἀριθμούς τρέπομεν αὐτούς εἰς δεκαδικά κλάσματα τά ὁποῖα κατόπιν προσθέτομεν. Σύντομα ὅμως ἡ πρόσθεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς ἑξῆς:

" Γράφομεν τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν ἄλλον καί μέ τρόπον ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην. Πρός τοῦτο δέν πρέπει αἱ ὑποδιαστολαί νά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην. Κατόπιν προσθέτομεν αὐτούς ὡς νά ἦσαν ἀκέραιοι, καί εἰς τό ἄθροισμα θέτομεν ὑποδιαστολήν ὑπό τήν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν.

<u>Παράδειγμα</u> Νά γίνῃ ἡ πρόσθεσις: 17,563+2,4+0,0007

```
  17,563
+  2,4
   0,0007
----------
  19,9637
```

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους

<u>Ἀ φ α ί ρ ε σ ι ς</u>

Διά νά ἀφαιρέσωμεν δεκαδικόν ἀριθμόν ἀπό ἄλλον τρέπομεν αὐτούς εἰς δεκαδικά κλάσματα τά ὁποῖα κατόπιν ἀφαιροῦμεν. Σύντομα ὅμως ἡ ἀφαίρεσις τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν γίνεται ὡς ἑξῆς:

" Γράφομεν τόν ἀφαιρετέον κάτω ἀπό τόν μειωτέον καί μέ τρόπον ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰδίας τάξεως νά εὑρίσκωνται εἰς τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην. Πρός τοῦτο δέ πρέπει αἱ ὑποδιαστολαί νά εἶναι εἰς τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην. Κατόπιν ἀφαιροῦμεν αὐτούς ὡς νά ἦσαν ἀκέραιοι καί εἰς τήν διαφοράν θέτομεν ὑποδιαστολήν ὑπό τήν στήλην τῶν ὑποδιαστολῶν"

<u>Παράδειγμα.</u> Νά γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις 6,25-4,7856

```
  6,25
- 4,7856
---------
  1,4644
```

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους.

<u>Πολλαπλασιασμός</u>

Εἰς τόν πολλαπλασιασμόν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Ἡ μία εἶναι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής είναι ἀκέραιος καί ἡ ἄλλη είναι ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής είναι δεκαδικός ἀριθμός.

Αη περίπτωσις. Ὁ πολλαπλασιαστής ἀκέραιος

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστής είναι ἀκέραιος τότε τρέπομεν τόν δεκαδικόν ἀριθμόν εἰς δεκαδικόν κλάσμα καί μεταπίπτομεν εἰς πολλαπλασιασμόν κλάσματος ἐπί ἀκέραιον. Σύντομα ὅμως ὁ πολλαπλασιασμός δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπί ἀκέραιον γίνεται ὡς ἑξῆς:

"Κάμνομεν τόν πολλαπλασιασμόν ὡς νά ἦτο καί ὁ δεκαδικός ἀριθμός ἀκέραιος ἀριθμός καί ἔπειτα ἀπό τό τέλος τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσα ἔχει ὁ δεκαδικός ἀριθμός"

Παράδειγμα: Νά γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός 4,75Χ13.

```
   4,75
  X 13
  1425
  475
  61,75
```

Βα περίπτωσις. Ὁ πολλαπλασιαστής δεκαδικός

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ πολλαπλασιαστέος είναι ἤ ἀκέραιος ἤ δεκαδικός ἀριθμός.

α) Πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἐπί δεκαδικόν

Ὅταν ὁ πολλαπλασιαστέος είναι ἀκέραιος τότε τρέπομεν τόν δεκαδικόν ἀριθμόν εἰς δεκαδικόν κλάσμα καί μεταπίπτομεν εἰς πολλαπλασιασμόν ἀκεραίου ἐπί κλάσμα. Σύντομα ὅμως ὁ πολλαπλασιασμός ἀκεραίου ἐπί δεκαδικόν γίνεται ὡς ἑξῆς:

"Κάμνομεν τόν πολλαπλασιασμόν ὡς νά ἦτο καί ὁ δεκαδικός ἀριθμός ἀκέραιος ἀριθμός καί ἔπειτα ἀπό τό τέλος τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικά ψηφία δσα ἔχει ὁ δεκαδικὸς ἀριθμὸς"

<u>Παράδειγμα:</u> Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς 423Χ2,8

$$\begin{array}{r} 423 \\ \times\ 2{,}8 \\ \hline 3384 \\ 846 \\ \hline 1184{,}4 \end{array}$$

β) <u>Πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἐπὶ δεκαδικόν</u>

"Οταν ὁ πολλαπλασιαστέος εἶναι δεκαδικὸς ἀριθμὸς τότε τρέπομεν τοὺς δύο δεκαδικοὺς ἀριθμοὺς εἰς δεκαδικὰ κλάσματα καὶ μεταπίπτομεν εἰς πολλαπλασιασμὸν δύο κλασμάτων. Σύντομα ὅμως ὁ πολλαπλασιασμὸς δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ δεκαδικὸν ἀριθμὸν γίνεται ὡς ἑξῆς:

"Κάμνομεν τὸν πολλαπλασιασμὸν ὡς νὰ ἦσαν ἀκέραιοι ἀριθμοί. Ἔπειτα ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικὰ ψηφία ὅσα ἔχουν μαζὶ καὶ οἱ δύο δεκαδικοὶ ἀριθμοί".

<u>Παράδειγμα:</u> Νὰ γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμὸς 3,15Χ2,7

$$\begin{array}{r} 3{,}15 \\ \times 2{,}7 \\ \hline 2205 \\ 630 \\ \hline 8{,}505 \end{array}$$

Ἡ δοκιμὴ γίνεται ὅπως καὶ εἰς τοὺς ἀκεραίους.

<u>Συντομίαι</u>

α) Διὰ νὰ πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικὸν ἀριθμὸν ἐπὶ 10,100,1000 κλπ. μεταφέρομεν τὴν ὑποδιαστολὴν πρὸς τὰ δεξιὰ τόσας θέσεις ὅσα εἶναι τὰ μηδενικὰ τοῦ 10, 100,1000 κλπ. Ἐὰν τὰ δεκαδικὰ ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δὲν ἐπαρκοῦν τότε συμπληρώνομεν αὐτὰ μὲ μηδενικὰ τὰ ὁποῖα γράφομεν εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ.

π.χ. 7,25Χ10 = 72,5

7,25Χ1000=7250

β) Όταν έχωμεν νά πολλαπλασιάσωμεν δεκαδικούς ἀριθμούς τῶν ὁποίων τό ἀκέραιον μέρος εἶναι μηδενικά τότε πολλαπλασιάζομεν μόνον τούς ἀριθμούς πού σχηματίζουν τά σημαντικά ψηφία τῶν δεκαδικῶν μερῶν αὐτῶν καί ἔπειτα ἀπό τό τέλος τοῦ γινομένου χωρίζομεν τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσα δεκαδικά ψηφία ἔχουν ὅλοι μαζί οἱ παράγοντες.

<u>Παράδειγμα 1ον.</u> Ὁ πολλαπλασιασμός 14,25Χ0,00017 σύντομα γίνεται ὡς ἑξῆς: 1425Χ17=24225 καί τό γινόμενον πού ζητοῦμεν εἶναι 0,0024225.

<u>Παράδειγμα 2ον.</u> Ὁ πολλαπλασιασμός 0,12Χ0,003Χ0,0004 σύντομα γίνεται ὡς ἑξῆς: 12Χ3Χ4=144 καί τό γινόμενον πού ζητοῦμεν εἶναι 0,000000144.

<u>Διαίρεσις</u>

Εἰς τήν διαίρεσιν τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν διακρίνομεν δύο περιπτώσεις. Ἡ μία εἶναι ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι ἀκέραιος καί ἡ ἄλλη εἶναι ὅταν ὁ διαιρέτης εἶναι δεκαδικός.

<u>Αη περίπτωσις. Ὁ διαιρέτης ἀκέραιος</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν 11,72:5 Ἐάν τρέψωμεν τόν δεκαδικόν ἀριθμόν εἰς δεκαδικόν κλάσμα μεταπίπτομεν εἰς διαίρεσιν κλάσματος διά ἀκεραίου. Σύντομα ὅμως ἡ διαίρεσις αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:

<u>Ἐκτέλεσις</u>

11,72	5
1 7	2,34
22	
2	

Λέγομεν: Ἐάν διαιρέσωμεν 1172 ἀκεραίας μονάδας διά τοῦ 5 θά εὕρωμεν πηλίκον 234 ἀκεραίας μονάδας καί ὑπόλοιπον 2 ἀκεραίας μονάδας. Τώρα πού διαιροῦμεν 1172 ἑκατοστά διά τοῦ 5 θά ἔχωμεν πηλίκον 234 ἑκατοστά δηλαδή $\frac{234}{100}$ = 2,34 καί ὑπόλοιπον 2 ἑκατοστά. Ὥστε

" Διά νά διαιρέσωμεν δεκαδικόν ἀριθμόν δι' ἀκεραίου διαιροῦμεν πρῶτον τό ἀκέραιον μέρος αὐτοῦ, κατόπιν θέτομεν εἰς τό πηλίκον ὑποδιαστολήν καί κατά συνέχειαν διαιροῦμεν καί τό δεκαδικόν μέρος".

<u>Β΄ Περίπτωσις. Ὁ διαιρέτης δεκαδικός</u>

Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ διαιρετέος εἶναι ἤ ἀκέραιος ἤ δεκαδικός.

<u>α) Διαίρεσις ἀκεραίου διά δεκαδικοῦ</u>

Ἔστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν 17:4,5

Ἐάν τρέψωμεν τόν δεκαδικόν ἀριθμόν εἰς δεκαδικόν κλάσμα μεταπίπτομεν εἰς διαίρεσιν ἀκεραίου διά κλάσματος. Σύντομα ὅμως γίνεται ἡ διαίρεσις αὐτή ὡς ἑξῆς:

Ἐπειδή ὁ διαιρέτης 4,5 ἔχει ἕνα δεκαδικόν ψηφίον μεταφέρομεν τήν ὑποδιαστολήν αὐτοῦ μίαν θέσιν πρός τά δεξιά καί γίνεται 45 δηλ. 10 φοράς μεγαλύτερος· ἀλλά διά νά μή ἀλλάξῃ τό πηλίκον πολλαπλασιάζομεν καί τόν διαιρετέον 17 ἐπί 10 καί γίνεται 170. Τοιουτοτρόπως ἡ διαίρεσις 17:4,5 ἀνάγεται εἰς τήν διαίρεσιν 170:45, τῆς ὁποίας τό πηλίκον 3 εἶναι καί πηλίκον τῆς διαιρέσεως 17:4,5 ἀλλά τό ὑπόλοιπον 35 εἶναι 10 φοράς μεγαλύτερον ἀπό τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 17:4,5 ἄρα τό ὑπόλοιπον τῆς διαιρέσεως 17:4,5 εἶναι 35:10=3,5. Ὥστε:

<u>Ἐκτέλεσις</u>

170	45
35	3

"Διά νά διαιρέσωμεν ἀκέραιον διά δεκαδικοῦ ἐξαλείφομεν τήν ὑποδιαστολήν τοῦ διαιρέτου καί εἰς τό τέλος τοῦ διαιρετέου γράφομεν τόσα μηδενικά ὅσα εἶναι τά δεκαδικά ψηφία τοῦ διαιρέτου"

'Ο τρόπος αὐτός τῆς διαιρέσεως στηρίζεται εἰς τήν σχέσιν διαιρετέου, διαιρέτου, πηλίκου καί ὑπολοίπου σελίς 54 α:

β) Διαίρεσις δεκαδικοῦ διά δεκαδικοῦ

"Εστω ὅτι θέλομεν νά κάμωμεν τήν διαίρεσιν 15,4943: 5,734.

'Εάν τρέψωμεν τούς δεκαδικούς ἀριθμούς εἰς δεκαδικά κλάσματα μεταπίπτομεν εἰς διαίρεσιν δύο κλασμάτων. Σύντομα ὅμως ἡ διαίρεσις αὐτή γίνεται ὡς ἑξῆς:

-'Εάν μεταφέρωμεν τήν ὑποδιαστολήν τοῦ διαιρέτου πρός τά δεξιά 3 θέσεις ὁ ἀριθμός γίνεται 5734 δηλαδή 1000 φοράς μεγαλύτερος καί διά νά μή ἀλλάξῃ τό πηλίκον πολλαπλασιάζομεν καί τόν διαιρετέον ἐπί 1000 καί γίνεται 15494,3;

'Εκτέλεσις

15494,3	5734
4026 3	2,7
12 5	

Τοιουτοτρόπως ἡ διαίρεσις 15,4943:5,734 ἀνάγεται εἰς τήν διαίρεσιν 15494,3:5734 τῆς ὁποίας τό πηλίκον 2,7 εἶναι καί πηλίκον τῆς διαιρέσεως 15,4943:5,734, ἀλλά τό ὑπόλοιπον 125 εἶναι 1000 φοράς μεγαλύτερον τοῦ ὑπολοίπου τκης διαιρέσεως 15,4943:5,734 ἄρα τό ὑπόλοιπον αὐτῆς εἶναι 125:1000 = 0,125. "Ωστε:

" Διά νά διαιρέσωμεν δεκαδικόν διά δεκαδικοῦ ἐξαλείφομεν τήν ὑποδιαστολήν τοῦ διαιρέτου καί μεταφέρομεν τήν ὑποδιαστολήν τοῦ διαιρετέου πρός τά δεξιά τόσας θέσεις ὅσα δεκαδικά ψηφία ἔχει ὁ διαιρέτης. 'Εάν τά δεκαδικά ψηφία τοῦ διαιρετέου δέν ἐπαρκοῦν διά τήν μεταφοράν τῆς ὑποδιαστολῆς συμπληρώνομεν αὐτά μέ μηδενικά τά ὁποῖα γράφομεν εἰς τό τέλος αὐτοῦ".

'Ο τρόπος αὐτός τῆς διαιρέσεως στηρίζεται εἰς τήν σχέσιν Διαιρετέου,Διαιρέτου πηλίκου καί ὑπολοίπου σελ.54(α΄).

Ἡ δοκιμή γίνεται ὅπως καί εἰς τούς ἀκεραίους.

Συντομία

Διά νά διαιρέσωμεν δεκαδικόν ἀριθμόν διά 10,100, 1000 κλπ. μεταφέρομεν πρός τά ἀριστερά τήν ὑποδιαστολήν τόσας θέσεις ὅσα εἶναι τά μηδενικά τοῦ 10,100, 1000 κλπ. Ἐάν τά ψηφία τοῦ ἀκεραίου μέρους δέν ἐπαρκοῦν διά τήν μεταφοράν τῆς ὑποδιαστολῆς συμπληρώνομεν αὐτά μέ μηδενικά τά ὁποῖα γράφομεν εἰς τήν ἀρχήν αὐτοῦ. Π.χ. 75,9:10 = 7,59

75,9:100 = 0,759

75,9:1000 = 0.0759

Ἐξακολούθησις τῆς διαιρέσεως

Διαίρεσις μικροῦ ἀριθμοῦ διά μεγάλου ἀριθμοῦ

α) Ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι ἀτελής τότε πρός μεγαλυτέραν ἀκρίβειαν συνεχίζομεν τήνπρᾶξιν γράφοντες ἕν μηδενικόν δεξιά τοῦ ὑπολοίπου τό ὁποῖον παρουσιάζεται κάθε φοράν.π.χ.εἰς τήν διαίρεσιν 2,5:1,4 διαιροῦμεν τόν 25 διά τοῦ 14 καί εὑρίσκομεν πηλίκον 1 καί ὑπόλοιπον 11.Εἰς τά δεξιά τοῦ ὑπολοίπου 11 θέτομεν ἕνα μηδενικόν καί γίνεται 110 δέκατα.Διαιροῦμεν τά 110 δέκατα διά τοῦ 14 καί εὑρίσκομεν πηλίκον 7 δέκατα καί ὑπόλοιπον 12 δέκατα, τά ὁποῖα μέ

Παραδείγματα

α) 25:1,4=25

25	14
110	1,785
120	
80	
10	

β) 3:8=3,0

3,0	8
60	0,375
40	
0	

τόν ἴδιον τρόπον τά τρέπομεν εἰς 120 ἑκατοστά. Διαιροῦμεν τά 120 ἑκατοστά διά τοῦ 14 καί εὑρίσκομεν πηλίκον 8 ἑκατοστά καί ὑπόλοιπον 8 ἑκατοστά κ.ο.κ.

β) Ὅταν ὁ διαιρετέος εἶναι μικρότερος τοῦ διαιρέτου (π.χ. 3:8) τότε θέτομεν ἕνα μηδενικόν εἰς τάς ἀκεραίας μονάδας τοῦ πηλίκου καί μαζί μέ τό μηδενικόν καί μίαν ὑποδιαστολήν. Ἔπειτα τρέπομεν τόν διαιρετέον εἰς δέκατα, ἑκατοστά κλπ. καί κάμνομεν τήν διαίρεσιν ὅπως καί προηγουμένως.

Πηλίκον κατά προσέγγισιν

Ὅταν εἰς μίαν διαίρεσιν δέν ἠμποροῦμεν νά εὕρωμεν ἀκριβές πηλίκον, ἐπίσης ὅταν τό ἀκριβές πηλίκον ἔχει πολλά δεκαδικά ψηφία, τότε παίρνομεν τό πηλίκον μέ προσέγγισιν π.χ. Ἡ διαίρεσις τοῦ 36,182705 διά τοῦ 5 δίδει ἀκριβές πηλίκον 7,236541. Ἐάν πάρωμεν ὡς πηλίκον μέχρι 7,2 θά ἔχωμεν πηλίκον <u>μέ προσέγγισιν 0,1 κατ' ἔλλειψιν</u>, διότι τό 7,2 εἶναι μικρότερον τοῦ 7,236541 κατά 0,036541 ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος ἀπό τό 0,1. Ἐάν μεγαλώσωμεν κατά μονάδα τό τελευταῖο ψηφίον τοῦ 7,2 καί τόν κάμωμεν 7,3 θά ἔχωμεν πηλίκον <u>μέ προσέγγισιν 0,1 καθ' ὑπεροχή</u>, διότι ὁ 7,3 εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 7,236541 κατά 0,063459 ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 0,1. Ἐάν πάρωμεν ὡς πηλίκον μέχρι 7,23 θά ἔχωμεν πηλίκον <u>μέ προσέγγισιν 0,01 κατ' ἔλλειψιν</u>, διότι ὁ 7,23 εἶναι μικρότερος τοῦ 7,236541 κατά 0,006541 ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος ἀπό τόν 0,01. Ἐάν μεγαλώσωμεν κατά μονάδα τό τελευταῖο ψηφίον τοῦ 7,23 καί τόν κάμωμεν 7,24 θά ἔχωμεν πηλίκον μέ <u>προσέγγισιν 0,01 καθ' ὑπε-</u>

<u>ροχήν</u> διότι ὁ 7,24 εἶναι μεγαλύτερος τοῦ 7,236541 κατά 0,003459 ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τοῦ 0,01 κ.ο.κ.

Ἐπεκράτησεν ἡ συνήθεια νά παίρνωμεν τό πηλίκον μέ προσέγγισιν <u>ἡμίσεως δεκάτου</u>, <u>ἡμίσεως ἑκατοστοῦ</u>, <u>ἡμίσεως χιλιοστοῦ</u> κλπ. Πρός τοῦτο α) Ὅταν τό πρῶτον ἀπό τά ψηφία ποῦ παραλείπομεν εἶναι μικρότερον τοῦ 5, τότε τό τελευταῖον ἀπό τά ψηφία ποῦ παίρνομεν ὡς πηλίκον τό ἀφίνομεν ὅπως εἶναι π.χ. Ἐάν πάρωμεν ὡς πηλίκον μέχρι τόν 7,2 τό ψηφίον 2 θά τό ἀφίσωμεν ὅπως εἶναι διότι τό πρῶτον ἀπό τά ψηφία ποῦ παραλείπομεν εἶναι τό 3 καί τό 3 εἶναι μικρότερον τοῦ 5. Ὁ 7,2 εἶναι πηλίκον μέ προσέγγισιν ἡμίσεως δεκάτου κατ' ἔλλειψιν. β) Ὅταν τό πρῶτον ἀπό τά ψηφία ποῦ παραλείπομεν εἶναι ἤ 5 ἤ μεγαλύτερον τοῦ 5 τότε μεγαλύνομεν κατά μονάδα τό τελευταῖο ἀπό τά ψηφία ποῦ παίρνομεν ὡς πηλίκον π.χ. Ἐάν πάρωμεν ὡς πηλίκον μέχρι 7,23 θά τό κάμωμεν 7,24, διότι τό πρῶτον ἀπό τά ψηφία ποῦ παραλείπομεν εἶναι τό 6 καί τό 6 εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 5. Ὁ 7,24 εἶναι πηλίκον μέ προσέγγισιν ἡμίσεως ἑκατοστοῦ καθ' ὑπεροχήν.

Προβλήματα ἐπί τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

1) Νά εὑρεθῇ ὁ ἀριθμός ποῦ εἶναι μεγαλύτερος ἀπό τόν 54 α) κατά τό ἄθροισμα 0,064+9,08+12,5+107,001 β) κατά τήν διαφοράν 7-0,0026.

2) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά ἀφαιρέσωμεν ἀπό τήν ἀκεραίαν μονάδα διά νά προκύψῃ ὁ 0,09925;

3) Ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά προσθέσωμεν εἰς τόν

1,0781 διά νά προκύψῃ ὁ 1,100;

4) Πόσας φοράς ἀφαιρεῖται ὁ 0.007(21.07) ἀπό τόν 0,126 (653.17);

5) Μέ ποῖον ἀριθμόν πρέπει νά διαιρεθῇ ὁ 0,1515 (31,151) διά νά προκύψῃ πηλίκον 0,025(3,5) καί ὑπόλοιπον 0,106(0,526).

6) Τό ἄθροισμα δύο δεκαδικῶν ἀριθμῶν εἶναι 0,1134 ὁ ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ 0.0789(0.1067) Νά εὑρεθῇ ὁ ἄλλος προσθετέος.

7) Τό γινόμενον δύο ἀριθμῶν εἶναι 0,0455(34,25) 'Ο ἕνας ἀπό αὐτούς εἶναι ὁ 1,82 (100).Νά εὑρεθῇ ὁ ἄλλος παράγων.

8) Νά εὕρετε τά 0,75(0,064) τῶν ἀριθμῶν 10,100. 1000 καί 1,44.

9) Νά εὕρετε τά 0,6 τῶν 0,8 τῶν ἀριθμῶν 0,0074 καί 8,0607.

10) Τά 0,64 (0,025) ἑνός βάρους εἶναι 100(1000) ὀκ.Πόσες ὀκάδες ἦτο ὅλο τό βάρος;

11) Τά 0,034 (0,05) ἑνός ἀριθμοῦ εἶναι ὁ 2(7.5) Ποῖος εἶναι ὁ ἀριθμός;

12) 'Αγόρασε κάποιος 350 ὀκ.κρασί πρός 6.80 δρχ. τήν ὀκᾶ ἔπειτα ἔρριψε μέσα 40 ὀκ.νερό καί ἀπό τήν πώλησι τοῦ μίγματος ἐκέρδισε 1130 δρχ. Πόσον ἐπώλει τήν ὀκᾶ;

13) Ἕνας εἰς 4 ἡμ.θέλει 2,25 ὀκ.ψωμί καί ἕνας ἄλλος εἰς 5 ἡμ.θέλει 3,625 ὀκ.ψωμί. Εἰς πόσας ἡμέρας θά φάγουν μαζί 27,5 ὀκ. ψωμί καί πόσον μέρος αὐτοῦ

θά φάγη ὁ καθένας;

14) Ἀγόρασε ἕνας 40 ὀκ.ρακί πρός 43,50 δρχ.τήν ὀκᾶ καί ἔρριψε μέσα τόσο νερό ὥστε νά πωλῇ τό ποτῆρι πρός 1,5 δρχ.χωρίς νά κερδίζῃ καί χωρίς νά ζημιώνεται Πόσο νερό ἀνέμειξε;

15) Ἔμπορος ἐπώλησε ὕφασμα πρός 72,80 δρχ.τόν πῆχυ καί ἐκέρδισε 83,20 δρχ. Ἐάν ἐπώλει πρός 75 δρχ. τόν πῆχυν θά ἐκέρδιζε 97,50 δρχ. Πόσους πήχεις ἐπώλησε;

16) Τεχνίτης διά νά κάμῃ ἕνα ἔργον συνεφώνησεν ἕνα χρηματικόν ποσόν. Ἐπειδή ὅμως ἔκαμε μόνον τά 0,4 τοῦ ἔργου διά τοῦτο τοῦ ἐκράτησαν 234,70 ἀπό τό ποσόν πού συνεφώνησεν. Πόσας δραχμάς τοῦ ἔδωσαν καί πόσον ἦτο τό ποσόν πού συνεφώνησεν.

17) Νά εὑρεθῇ τό ἀκριβές πηλίκον τῶν διαιρέσεων
α) 9,54:7,2 β) 39,4:8 γ) 0,444:12 δ) 1,096:2
ε) 34:16

18) Νά τραποῦν εἰς δεκαδικούς κατά προσέγγισιν 0,01 καί 0,001 τά κλάσματα $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$. $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{9}$

19) Εἰς τήν διαίρεσιν 36,182705:5 ἄν πάρωμεν ὡς πηλίκον τόν 7,2 διατί λέγεται τό πηλίκον αὐτό κατά προσέγγισιν ἡμίσεως δεκάτου; καί ἄν πάρωμεν ὡς πηλίκον τόν 7,24 διατί λέγεται τό πηλίκον αὐτό κατά προσέγγισιν ἡμίσεως ἑκατοστοῦ;

20) Ὅταν τό πρῶτον ἀπό τά ψηφία πού παραλείπομεν εἶναι 5 τότε μεγαλώνομεν κατά μονάδα τό τελευταῖο ἀπό τά ψηφία πού παίρνομενὡς πηλίκον. Μήπως εἰς τήν περίπτ σιν αὐτήν ἠμποροπυμεν ἀντί νά τό μεγαλώσωμεν

κατά μονάδα νά τό άφήσωμεν όπως είναι;

Τροπή κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν

Γνωρίζομεν ὅτι κάθε κοινό κλάσμα παριστᾷ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀριθμητοῦ διά τοῦ παρονομαστοῦ αὐτοῦ, ἐπομένως τροπή κοινοῦ κλάσματος εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν σημαίνει νά παραστήσωμεν τό πηλίκον αὐτό διά δεκαδικῶν μερῶν τῆς μονάδος, δηλ. μέ δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά κλπ. Ὥστε:

"Διά νά τρέψωμεν κοινό κλάσμα εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν διαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν μέ τόν παρονομαστήν".

Παράδειγμα 1ον. Διά νά τρέψωμεν τό κοινό κλάσμα $\frac{7}{8}$ εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν διαιροῦμεν τόν 7 διά τοῦ 8 καί ἔχομεν: $\frac{7}{8} = 0,875$.

$$\begin{array}{r|l} 7,0 & 8 \\ \hline 60 & 0,875 \\ 40 & \\ 0 & \end{array}$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις ἐτερματίσθη λέγομεν ὅτι τό $\frac{7}{8}$ τρέπεται ἀκριβῶς εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν.

Παράδειγμα 2ον. Διά νά τρέψωμεν τό κοινό κλάσμα $\frac{7}{9}$ εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν διαιροῦμεν τόν 7 διά τοῦ 9 καί ἔχομεν $\frac{7}{9} = 0,7777....$

$$\begin{array}{r|l} 7,0 & 9 \\ \hline 70 & 0,7777... \\ 70 & \\ 70 & \\ \vdots & \end{array}$$

Ἐπειδή ἡ διαίρεσις δέν τερματίζεται λέγομεν ὅτι τό $\frac{7}{9}$ τρέπεται εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν κατά προσέγγισιν.

Περιοδικά κλάσματα

Ἔστω π.χ. τό κοινό κλάσμα $\frac{13}{37}$. Ἐάν τρέψωμεν αὐτό εἰς δεκαδικόν ἀριθμόν παρατηροῦμεν ὅτι ἡ διαίρεσις

$$\begin{array}{r|l} 13,0 & 37 \\ \hline 1\ 90 & 0,351351... \\ 50 & \\ 13 & \end{array}$$

δέν τερματίζεται καί εἰς τό ψηφίον 1 τοῦ πηλίκου 0,351 εὑρίσκομεν ὑπόλοιπον τόν ἀριθμητήν 13 καί ἐπομένως ἐάν συνεχίσωμεν τήν διαίρεσιν θά εὕρωμεν τά ἴδια ψηφία δηλ.3, 5, 1, τοῦ πηλίκου καί μέ τήν ἰδίαν τάξιν. Ἡ ὁμάς τῶν ψηφίων τά ὁποῖα ἐπαναλμβάνονται λέγεται __περίοδος__ καί ὁ δεκαδικός ἀριθμός τοῦ ὁποίου τά ψηφία ἐπαναμαλβάνοντα τά ἴδια καί μέ τήν ἰδίαν τάξιν λέγεται __περιοδικόν δεκαδικόν κλάσμα.__

Τό περιοδικόν δεκαδικόν κλάσμα λέγεται __ἁπλοῦν__ ὅταν ἡ περίοδος ἀρχίζει ἀμέσως μετά ἀπό τήν ὑποδιαστολήν, __μικτόν__ δέ ὅταν ἡ περίοδος ἀρχίζει ὕστερα ἀπό μερικά ψηφία.π.χ.τό περιοδικόν 0,727272.... εἶναι __ἁπλοῦν__ καί τό περιοδικόν 0,12727272.... εἶναι __μικτόν__.Ἐπίσης τό περιοδικόν 3,181818.....εἶναι __ἁπλοῦν__ καί τό περιοδικόν 1,2666.... εἶναι __μικτόν__.Τό μή περιοδικόν μέρος μικτοῦ περιοδικοῦ δεκαδικοῦ κλάσματος λέγεται __Ἀντιπερίοδος__ π.χ. τό μικτόν περιοδικόν κλάσμα 0,12 72 72.... ἔχει περίοδον 72 καί ἀντιπερίοδον 12.

__Κριτήριον.__ α) Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ κλάσματος δέν περιέχει ἄλλους πρώτους παράγοντας παρά μόνον τόν 2 ἤ τόν 5 ἤ καί τούς δύο τότε τό κοινό κλάσμα τρέπετα εἰς δεκαδικόν ἀκριβῶς.

β) Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ κλάσματας περιέχῃ ἄλλους πρώτους παράγοντας ἐκτός τοῦ 2 καί τοῦ 5 τότε τό κοινό κλάσμα τρέπεται εἰς ἁπλοῦν περιοδικόν.

γ) Ὅταν ὁ παρονομαστής κοινοῦ κλάσματος περιέχῃ τόν 2 ἤ τόν 5 ἤ καί τούς δύο,περιέχει ἐπίσης καί ἄλλους πρώτους παράγοντας τότε τό κοινό κλάσμα τρέπεται εἰς μικτόν περιοδικόν.

Τροπή δεκαδικοῦ κλάσματος εἰς κοινό κλάσμα

__1η περίπτωσις.__ Ὅταν τό δεκαδικόν κλάσμα εἶναι ἁπλοῦν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ γράφωμεν ἀριθμητὴν τὴν περίοδον καὶ παρονομαστὴν τόσα (9) ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου.

π.χ. τὸ 0,727272....$=\frac{72}{99}=\frac{8}{11}$. τὸ 3,181818....$=3+\frac{18}{99}$ $=\frac{35}{11}$

<u>2α περίπτωσις</u>. Ὅταν τὸ δεκαδικὸν κλάσμα εἶναι μικτόν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ γράφωμεμ ἀριθμητὴν τὴν διαφορὰν τῆς περιόδου ἀπὸ τὸν ἀριθμὸν τὸν ὁποῖον σχηματίζουν ἡ ἀντιπερίοδος καὶ ἡ περίοδος ὅπως εἶναι γραμμέναι, καὶ παρονομαστὴν τὸν ἀριθμὸν ποὺ ἔχει τόσα (9) ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς περιόδου καὶ εἰς τὸ τέλος αὐτοῦ ἔχει τόσα μηδενικὰ ὅσα εἶναι τὰ ψηφία τῆς ἀντιπεριόδου.

π.χ. ὁ 0,12727272....$=\frac{1272-12}{9900}=\frac{1260}{9900}=\frac{7}{55}$

ὁ 1,26666....$=1+\frac{26-2}{90}=1+\frac{24}{90}=1+\frac{4}{15}=\frac{19}{15}$

<u>Περὶ παραστάσεων καὶ τύπων</u>

<u>α) Παράστασις</u> εἶναι συγκρότημα ἀριθμῶν ἢ γραμμάτων, ἢ καὶ τὰ δύο, μεταξὺ τῶν ὁποίων εἶναι σημειωμέναι ἀριθμητικαὶ πράξεις.

π.χ. 7+(4X5), (α-β)Xγ , 2+α

Ὅταν εἰς μίαν παράστασιν ἡ ὁποία εἶναι παρμωμένη μόνον ἀπὸ ἀριθμοὺς ὑπάρχουν παρενθέσεις ἢ ἀγκύλαι (ἢ καὶ τὰ δύο) τότε κάμνομεν πρῶτον τὰς πράξεις ποὺ εἶναι σημειωμέναι ἐντὸς τῆς παρενθέσεως ἢ ἐντὸς τῆς ἀγκύλης, μὲ τὸ ἐξαγόμενον ἀντικαθιστῶμεν τὴν παρένθεσιν ἢ τὴν ἀγκύλην καί ἔπειτα κάμωμεν τάς ὑπολοίπους σημειωμένας πράξεις

Ὅταν ἡ παράστασις ἔχει καί γράμματα τότε ἀντικαθιστῶμεν αὐτά μέ ἀριθμούς τῆς ἀρεσκείας μας, ἐκτός ἐάν μᾶς δοθοῦν ἀριθμοί καί ἔπειτα κάμνομεν ὅπως καί προηγουμένως.

Οἱ ἀριθμοί μέ τούς ὁποίους ἀντικαθιστῶμεν τά γράμματα λέγονται <u>τιμαί τῶν γραμμάτων</u> καί ὁ ἀριθμός πού προκύπτει ὅταν κάμωμεν ὅλας τάς σημειωμένας πράξεις λέγεται <u>τιμή τῆς παραστάσεως</u>.

Αἱ παραστάσεις πού ἔχουν τήν ἰδίαν τιμήν ὅταν εἰς τά γράμματα αὐτῶν δώσωμεν τάς ἰδίας τιμάς λέγονται <u>ἰσοδύναμοι παραστάσεις</u>.

<u>Παράδειγμα</u>: Νά εὑρεθῇ ἡ τιμή τῶν παραστάσεων $(\alpha+\beta)X(\alpha-\beta)$ καί $(\alpha X\alpha)-(\beta X\beta)$ ἐάν $\alpha=12$ καί $\beta=2$ θά ἔχωμεν: $(\alpha+\beta)X(\alpha-\beta)=(12+2)X(12-2)=14X10=140$, καί $(\alpha X\alpha)-(\beta X\beta)=(12X12)-(2X2)=144-4=140$. Ἐπειδή καί αἱ δύο παραστάσεις ἔχουν τήν ἰδίαν τιμήν 140 (διά τάς ἰδίας τιμάς τῶν γραμμάτων αὐτῶν) διά τοῦτο αἱ παραστάσεις αὐταί εἶναι ἰσοδύναμοι.

<u>β) Τύπος</u> εἶναι παράστασις μέ τήν ὁποίαν παριστάνομεν σύντομα τό περιεχόμενον ἑνός κανόνος ἢ τήν λύσιν ἑνός προβλήματος.

π.χ. Γνωρίζομεν ἀπό τήν Γεωμετρίαν ὅτι τό ἐμβαδόν ὀρθογωνίου ἰσοῦται μέ τήν βάσιν ἐπί τό ὕψος αὐτοῦ. Ἐάν λοιπόν παραστήσωμεν τήν βάσιν μέ τό (β) τό ὕψος μέ τό (υ) καί τό ἐμβαδόν μέ τό (Ε) θά ἔχωμεν: $E=\beta X\upsilon$. Ἡ παράστασις αὐτή παριστάνει σύντομα τό ἐμβαδόν κάθε ὀρθογωνίου καί ὀνομάζεται <u>τύπος τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου</u>.

'Υποθέσωμεν τώρα ὅτι τό Ε=12 τ.μ. τό υ=3 μ.καί ζητεῖται ἡ βάσις (β) τοῦ ὀρθογωνίου. Θά ἀντικαταστήσωμεν εἰς τόν προηγούμενον τύπον τοῦ ἐμβαδοῦ τά γράμματα μέ τούς ἀριθμούς καί θά ἔχωμεν: 12=βΧ3.'Ο τύπος αὐτός σύντομα μᾶς λέγει τόν γνωστόν κανόνα ὅτι γνωρίζομεν τό γινόμενον 12 δύο ἀριθμῶν τοῦ (β) καί τοῦ 3, καί ζητοῦμεν τόν παράγοντα (β), καί ἐπομένως θά κάμωμεν διαίρεσιν."Αρα λοιπόν β=12:3=4 μ. ἤ β= 4 μ.

Περί Κινήσεως

'Ο ρ ι σ μ ο ί

Κινητόν λέγεται κάθε σῶμα πού ἀλλάζει θέσιν

Κίνησις λέγεται ἡ ἀλλαγή θέσεως ὑπό τοῦ κινητοῦ.

Τροχιά λέγεται τό σύνολον τῶν θέσεων πού καταλαμβάνει διαδοχικῶς τό κινητόν.

Ταχύτης λέγεται ὁ δρόμος πού διανύει τό κινητόν εἰς μίαν ὥραν καί λέγεται ὡριαία ταχύτης ἤ εἰς ἕνα δευτερόλεπτον καί λέγεται ταχύτης κατά δευτερόλεπτον.

'Η ταχύτης συνήθως ἐκφράζεται εἰς χιλιόμετρα καθ' ὥραν ἤ εἰς μέτρα κατά δευτερόλεπτον. π.χ.ἡ ταχύτης ἁμαξοστοιχίας ἤ αὐτοκινήτου εἰς χιλιόμετρα καθ'ὥραν ἤ εἰς μίλια ξηρᾶς καθ'ὥραν, ἡ ταχύτης τοῦ ἐμβόλου ἀτμομηχανῆς ἐκφράζεται εἰς μέτρα ἤ εἰς πόδας κατά δευτερόλεπτον καί ἡ ταχύτης τοῦ ἀνωγοῦ ἐπαγωγίμου δυναμοηλεκτρικῆς μηχανῆς ἐκφράζεται εἰς ἑκατοστόμετρα (πόντους) κατά δευτερόλεπτον.

Διάστημα λέγεται ὁ δρόμος πού ἔχει διανύσει ἤ πού θά διανύσῃ τό κινητό μέ κάποια ταχύτητα καί εἰς ὡρισμένο χρονικό διάστημα.

<u>Χρόνος</u> λέγεται τό χρονικό διάστημα πού χρειάζεται τό κινητό διά νά διανύσῃ ἕνα δρόμο δηλ.μίαν ἀπόστασιν μέ κάποια ταχύτητα.

Ἔχομεν λοιπόν τρία ποσά τήν ταχύτητα (τ).τό διάστημα (δ) καί τόν χρόνον (χ). Τά τρία αὐτά ποσά εἶναι μεταξύ των συνδεδεμένα μέ τέτοιον τρόπον ὥστε διά νά εὕρωμεν τό ἕνα ἀπό αὐτά πρέπει νά γνωρίζωμεν τά ἄλλα δύο:καί ὡς ἑξῆς.

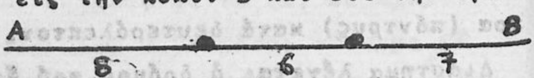
α) Διά νά εὕρωμεν τό διάστημα θά πολλαπλασιάσωμεν τήν ταχύτητα ἐπί τόν χρόνον δηλ. $δ=τ\times χ$ π.χ. Ἕνα αὐτοκίνητον μέ ὡριαίαν ταχύτητα 45 χιλιομέτρων ἔτρεχεν ἐπί 2 ὥρας. Πόσον διάστημα διήνυσεν; Θά ἔχωμεν $δ= 45\times 2=90$ χιλιόμετρα.

β) Διά νά εὕρωμεν τήν ταχύτητα θά διαιρέσωμεν τό διάστημα διά τοῦ χρόνου δηλ. $τ=\frac{δ}{χ}$. π.χ. Ἕνα αὐτοκίνητον διήνυσεν 90 χιλιόμετρα εἰς 2 ὥρας,Πόσην ταχύτητα εἶχεν; Θά ἔχωμεν $τ=\frac{90}{2}=45$ χιλιόμετρα.

γ) Διά νά εὕρωμεν τόν χρόνον θά διαιρέσωμεν τό διάστημα διά τῆς ταχύτητος δηλ. $χ=\frac{δ}{τ}$ π.χ. Ἕνα αὐτοκίνητον διήνυσε 90 χιλιόμετρα μέ ὡριαίαν ταχύτητα 45 χιλιόμετρα. Ἐπί πόσον χρόνον ἔτρεχεν; Θά ἔχωμεν $χ=\frac{90}{45}=2$ ὥρας.

<u>Μέση ταχύτης</u>

Ὑποθέσωμεν ὅτι ἕνας πεζός ἀνεχώρησεν ἀπό μίαν πόλιν Α διά νά μεταβῇ εἰς τήν πόλιν Β καί ὅτι τήν πρώτην ὥραν ἐβάδισεν 8



χλμ. τήν δευτέραν ὥραν 6 χλμ. τήν τρίτην 7 χλμ. καί ἔφθασεν εἰς τήν πόλιν Β. Ὁ πεζὸς αὐτὸς ἐβάδιζεν ἐπὶ 3 ὥρας καὶ συνολικῶς ἐβάδισεν 8+6+7 = 21 χλμ. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὸ ἄθροισμα 21 χλμ. (τῶν διαστημάτων ποὺ ἐβάδισεν) μὲ τὸν χρόνον 3 ὥρας (ποὺ ἔχαμε νὰ τὰ διανύσῃ) θὰ εὕρωμεν 21:3=7 χλμ. δηλ. ὁ πεζὸς αὐτὸς ἠμποροῦσε νὰ φθάσῃ εἰς τὴν πόλιν Β ἂν ἐβάδιζε κάθε ὥραν ἀπὸ 7 χλμ. κατὰ τὴν διάρκειαν τῶν 3 ὡρῶν. Ἡ ταχύτης αὐτὴ 7 χλμ. λέγεται <u>Μέση ταχύτης</u>.

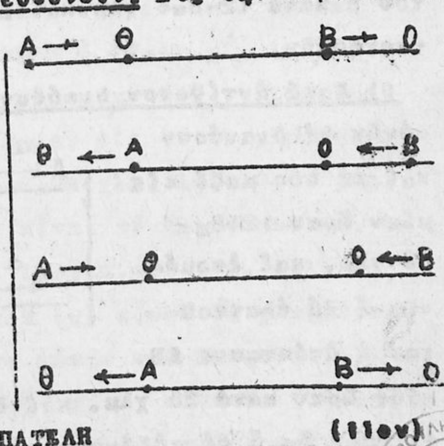
Προβλήματα Κινήσεως

<u>Πρόβλημα 1ον.</u> Ἀπὸ δύο πόλεις ποὺ ἀπέχουν μεταξύ των 1000 χλμ. ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο κινητὰ καὶ μετὰ 5 ὥρ. τὸ ἕνα διήνυσε 300 χλμ. καὶ τὸ ἄλλο 200 χλμ. Πόσον ἀπέχουν μεταξύ των ἐὰν κινοῦνται κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν καὶ πόσον ἐὰν κινοῦνται κατὰ ἀντίθετον διεύθυνσιν;

<u>Λύσις.</u> Ἔστω Α καὶ Β αἱ δύο πόλεις καὶ ὅτι ΑΒ = 1000 χλμ., ΑΘ=300 χλμ. ΒΟ=200 χλμ.

α) <u>Κατὰ τὴν ἰδίαν διεύθυνσιν.</u> Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ κινοῦνται ἢ κατὰ τὴν ΑΒ καὶ θὰ ἀπέχουν ΘΟ=(1000−300)+200=900 χλμ. ἢ κατὰ τὴν ΒΑ καὶ θὰ ἀπέχουν ΘΟ=300+(1000−200)=1100 χλμ.

β) Κατὰ τὴν ἀντίθετον διεύθυνσιν. Εἰς τὴν

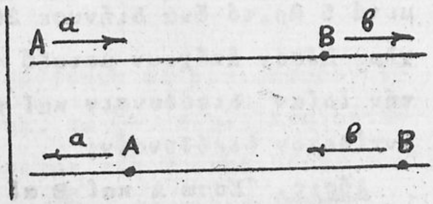


περίπτωσιν αὐτήν θά ἀπέχουν ή θθ=1000-300-200 = 500 χλμ. ή θθ=1000+300+200=1500 χλμ.

<u>Πρόβλημα 2ον</u>. Ἀπό δύο πόλεις πού ἀπέχουν μεταξύ των 40 χλμ. ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο κινητά μέ ὡριαίας ταχύτητας 12 χλμ. καί 8 χλμ. Ἐάν κινοῦνται κατά τήν ἰδίαν ή κατά ἀντίθετον διεύθυνσιν θά συναντηθοῦν;

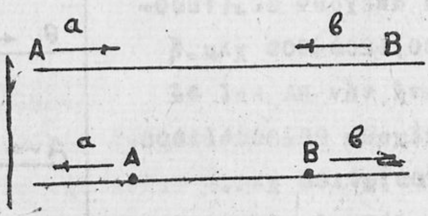
<u>Λύσις</u>. Ἔστω Α καί Β αἱ δύο πόλεις καί α τό κινητόν πού ἔχει 12 χλμ. καί ἀναχωρεῖ ἀπό τήν πόλιν Α, καί β τό κινητόν πού ἔχει ταχύτητα 8 χλμ. καί ἀναχωρεῖ ἀπό τήν πόλιν Β.

<u>α) Κατά τήν ἰδίαν διεύθυνσιν.</u> Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ἐάν κινοῦνται κατά ΑΒ τό α πλησιάζει τό β κάθε ὥραν κατά 12-8=4 χλμ. καί ἑπομένως θά τό φθάσῃ μετά 40:4=10 ὥρας.



Ἐάν κινοῦνται κατά ΒΑ τό α κάθε ὥραν ἀπομακρύνεται τοῦ β κατά 12-8=4 χλμ. καί ἑπομένως οὐδέποτε θά συναντηθοῦν.

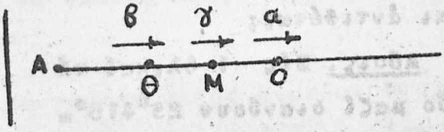
<u>β) Κατά ἀντίθετον διεύθυνσιν.</u> Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν θά διανύουν καί τά δύο μαζί εἰς μίαν ὥραν 12+8=20 χλμ. καί ἑπομένως ή θά ἐλαττοῦται ἡ ἀπόστασις ΑΒ κάθε ὥραν κατά 20 χλμ. καί θά συναντηθοῦν μετά 40:20=2 ὥρ. ή θά αὐξάνεται ἡ ἀπόστασις ΑΒ κάθε ὥραν



κατά 20 χλμ. καί οὐδέποτε θά συναντηθοῦν.

<u>Πρόβλημα 3ον</u>. Τρία κινητά (α),(β),(γ) ἀνεχώρησαν συγχρόνως ἀπό τήν πόλιν Α μέ τήν ἰδίαν διεύθυνσιν. Τό (α) ἔχει ὡριαίαν ταχύτητα 60 χλμ. τό (β) ἔχει ὡριαίαν ταχύτητα 40 χλμ. καί τό (γ) ἔχει ἄγνωστον ὡριαίαν ταχύτητα. Μίαν ὥραν μετά ἀπό τήν ἀναχώρησιν αὐτῶν τό (γ) εὑρίσκετο εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως πού ἐχώριζε τά κινητά (α) καί (β). Ζητεῖται ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ κινητοῦ (γ).

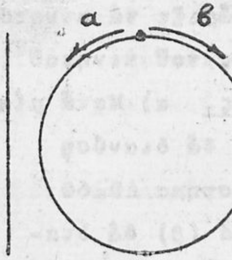
<u>Λύσις.</u> α) Μετά μίαν ὥραν ἀπό τήν ἀναχώρησίν των τό (α) θά διανύσῃ τό διάστημα ΑΟ=60 χλμ. τό (β) θά διανύσῃ τό διάστημα ΑΘ=40 χλμ. καί τό (γ) θά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον Μ τῆς ἀποστάσεως ΘΟ πού χωρίζει τά δύο κινητά (α) καί (β). Ἐπειδή τό κινητό (γ) ἀνεχώρησεν ἀπό τήν πόλιν Α καί μετά μίαν ὥραν διήνυσε τόν δρόμον ΑΜ διά τοῦτο ὅσα χιλιόμετρα εἶναι ὁ δρόμος ΑΜ τόσα χιλιόμετρα εἶναι ἡ ὡριαία ταχύτης αὐτοῦ. Πρέπει λοιπόν νά εὕρωμεν πόσα χιλιόμετρα εἶναι ὁ δρόμος ΑΜ. Παρατηροῦμεν ὅτι ΑΜ=ΑΘ+ΘΜ ἤ ΑΜ=40 χλμ.+ΘΜ.(Διότι ΑΘ=40 χλμ.) Μένει τώρα νά εὕρωμεν πόσα χιλιόμετρα εἶναι τό ΘΜ διά νά προσθέσωμεν εἰς τό 40 χλμ. Παρατηροῦμεν ὅτι ΑΟ-ΑΘ=ΘΟ ἤ 60-40=20 χλμ. δηλ. ΘΟ=20 χλμ. Θά ἄρα ΘΜ=10 χλμ. διότι τό ΘΜ εἶναι τό ἥμισυ τοῦ ΘΟ. ἔχωμεν λοιπόν ΑΜ=40 χλμ.+10 χλμ.=50 χλμ. δηλ. ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ κινητοῦ (γ) εἶναι 50 χλμ. Σύντομα εὑρίσκομεν τήν ταχύτητα αὐτήν τοῦ κινητοῦ (γ) Ἐάν προσθέσωμεν τάς ταχύτητας τῶν κινητῶν (α) καί (β) καί τό ἄθροισμα διαιρέσωμεν διά τοῦ 2 δηλ.



ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ γ = $\frac{60+40}{2}$ = 50 χλμ. Ἄρα

"Ἡ ταχύτης τοῦ κινητοῦ (γ) τό ὁποῖον εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως πού χωρίζει τά δύο κινητά (α) καί (β) ἰσοῦται μέ τό ἡμιάθροισμα τῶν ταχυτήτων τῶν δύο κινητῶν (α) καί (β)"

<u>Πρόβλημα 4ον</u>. Ἀπό ἕνα σημεῖον περιφερείας ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο κινητά (α) καί (β) μέ ταχύτητας κατά δευτερόλεπτον τό μέν (α), 25° τό δέ (β), 15° πότε θά συναντηθοῦν ἄν κινοῦνται ἀντιθέτως;



<u>Λύσις.</u> Εἰς 1 δλ. καί τά δύο μαζί διανύουν 25°+15°= 40°. Ὅταν θά συναντηθοῦν θά ἔχουν διανύση καί τά δύο μαζί ὁλόκληρον τήν περιφέρειαν δηλ. 360° ἑπομένως θά συναντηθοῦν μετά ἀπό 360°:40°=9 δλ.

5) Ἀπό μίαν πόλιν ἀνεχώρησεν εἰς τάς 7 π.μ.(7μ.μ. σιδηρόδρομος μέ ὡριαίαν ταχύτητα 25(20) χλμ. Εἰς τάς 10 π.μ.(10μ.μ.) ἀνεχώρησεν ἀπό αὐτήν δεύτερος σιδηρόδρομος μέ ὡριαίαν ταχύτητα 30(28) χλμ. Κατά ποίαν ὥραν ὁ δεύτερος θά φθάση τόν πρῶτον καί εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπό τῆς πόλεως;

6) Ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων Α καί Β εἶναι 366. Ἀπό αὐτάς ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο σιδηρόδρομοι διά νά συναντηθοῦν μέ ὡριαίας ταχύτητας ὁ ἕνας 25 χλμ. καί ὁ ἄλλος 36 χλμ. Μετά πόσας ὥρας θά συναντηθοῦν καί εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπό τάς πόλεις αὐτάς;

7) Ἡ ἀπόστασις δύο πόλεων Α καί Β εἶναι 665 χλμ.

'Από τήν Α άνεχώρησεν είς τάς 4 μ.μ. σιδηρόδρομος μέ ώριαίαν ταχύτητα 29 χλμ. μεταβαίνων είς τήν Β καί είς τάς 9 μ.μ. άνεχώρησεν άπό τήν Β δεύτερος σιδηρόδρομος μέ ώριαίαν ταχύτητα 36 χλμ. μεταβαίνων είς τήν πόλιν Α. Πότε θά συναντηθοΰν καί είς ποίας άποστάσεις άπό τάς πόλεις;

8) 'Από ένα τόπον άνεχώρησε πεζός διανύων 60 χλμ. τήν ήμέραν. Μετά 4 ήμ.άνεχώρησεν άπό τόν ίδιον τόπον άλλος πεζός διά νά φθάση τόν πρώτον έντός 8 ήμερών. Πόσα χιλιόμετρα πρέπει νά διανύη ό δεύτερος κάθε ήμέραν;

9) 'Από ένα τόπον άνεχώρησε πεζός διανύων 80 χλμ. τήν ήμέραν. Μετά πόσας ήμέρας πρέπει νά άναχωρήση δεύτερος διανύων 120 χλμ.τήν ήμέραν διά νά φθάση τόν πρώτον έντός 6 ήμερών;

10) 'Από ένα τόπον άνεχώρησε κάποιος καί μίαν ώραν βραδύτερον άνεχώρησεν άπό τόν ίδιον τόπον ένας άλλος μέ ποδήλατον καί μέ ώριαίαν ταχύτητα 8 χλμ.καί συνήντησεν τόν πρώτον μετά 3 ώρας, άπό τής άναχωρήσεώς του. Ζητεΐται ή ταχύτης τοΰ πρώτου.

11) Έχει κάποιος είς τήν διάθεσίν του $1\frac{3}{4}$ ώρ. έως ότου έλθη ή ώρα διά νά πάη είς τήν έργασίαν του. Πόσο μακρυά ήμπορεΐ νά πάη μέ ένα τράμ ώριαίας ταχύτητος 24 χλμ. ώστε έπιστρέφων μέ τά πόδια καί μέ ώριαίαν ταχύτητα 4 χλμ. νά είναι παρών είς τήν έργασίαν του;

Μέθοδοι λύσεως προβλημάτων

Α) Μέθοδος τῆς Προσθέσεως

Πρόβλημα. Ἔχομεν τρία κουτιά μέ βόλους. Τό πρῶτον καί τό δεύτερον μαζί περιέχουν 27 βόλους, τό δεύτερον καί τό τρίτον μαζί περιέχουν 33 βόλους, τό πρῶτον καί τόν τρίτον μαζί περιέχουν 30 βόλους. Πόσους βόλους περιέχει τό κάθε ἕνα κουτί;

Λύσις. Προσθέτομεν τούς δοθέντας ἀριθμούς καί τό ἄθροισμα αὐτῶν 27+33+30=90 εἶναι 2 φοραί οἱ βόλοι τοῦ πρώτου. 2 φοραί οἱ βόλοι τοῦ δευτέρου καί 2 φοραί οἱ βόλοι τοῦ τρίτου κουτιοῦ. Ὥστε ἐάν τό ἄθροισμα 90 τό διαιρέσωμεν διά τοῦ 2 τό πηλίκον 45 πού θά εὕρωμεν εἶναι μία φορά οἱ βόλοι τοῦ πρώτου, μία φορά οἱ βόλοι τοῦ δευτέρου καί μία φορά οἱ βόλοι τοῦ τρίτου κουτιοῦ. Ἀλλά ἀπό μίαν φοράν οἱ βῶλοι τοῦ πρώτου καί τοῦ δευτέρου κάμνουν 27 βόλους ἄρα λοιπόν τό τρίτον κουτί ἔχει 45-27=18 βόλους. Ἐπίσης ἀπό μίαν φοράν οἱ βόλοι τοῦ δευτέρου καί τοῦ τρίτου κάμνουν 33 βόλους ἄρα λοιπόν τό πρῶτο κουτί ἔχει 45-33 = 12 βόλους ἄρα λοιπόν τό δεύτερον κουτί ἔχει 45-30=15 βόλους. Ὥστε. Τό πρῶτον κουτί περιέχει 12 βόλους. τό δεύτερον περιέχει 15 καί τό τρίτον περιέχει 18.

Ἐπαλήθευσις. 12+15=27, 15+18=33, 12+18=30.

Β) Μέθοδος τῆς Ἀφαιρέσεως

Πρόβλημα. Ἕνας μαθητής ἀγόρασε 2 τετράδια καί 3 μολύβια καί ἐπλήρωσε 31 δρχ. Ἔπειτα ἀγόρασε ἀπό τά ἴδια 5 τετράδια καί 4 μολύβια καί ἐπλήρωσε 53 δρχ. Πόσον ἐπωλεῖτο τό ἕνα τετράδιον καί πόσον. τό ἕνα μολύβι;

<u>Λύσις.</u> Κάμνομεν πρῶτον τήν κατάταξιν καί ἔπειτα σκεπτόμεθα ὡς ἑξῆς:

<u>Κατάταξις</u>

Τήν πρώτην φοράν ἀγόρασε 2 τετράδια καί τήν δευτέραν φοράν 5 τετράδια.	2 τετρ.,3 μολ., 31 δρχ. 5 τετρ.,4 μολ., 53 δρχ.

'Εάν λοιπόν τήν δευτέραν φοράν ἀγόραζε 2/πλάσια τετράδια καί 2/πλάσια μολύβια θά ἔδιδε καί 2/πλάσια χρήματα. 'Επίσης ἐάν τήν πρώτην φοράν ἀγόραζε 5/πλάσια τετράδια καί 5/πλάσια μολύβια θά ἔδιδε καί 5/πλάσια χρήματα.

Δηλ.10 τετρ.15 μολ. 155 δρχ.

<u>10 τετρ. 8 μολ. 106 δρχ.</u> 0 τετρ. 7 μολ. 49 δρχ.	'Εάν τώρα ἀφαιρέσωμεν ἀπό τά μεγάλα ποσά τά μικρά ποσά θά ἔχωμεν:

10 τετρ.-10 τετρ.=0 τετρ., 15 μολ.-8 μολ.=7 μολ.
155 δρχ.-106 δρχ.=49 δρχ.δηλ.τά 7 μολ.ἄξιζουν 49 δρχ. ἄρα τό ἕνα μολύβι ἄξιζεν 49:7=7 δρχ. Διά νά εὕρωμεν τώρα καί τήν ἀξίαν τοῦ ἑνός τετραδίου ἀφαιροῦμεν ἀπό τάς 31 δρχ. πού ἔδωσεν τήν πρώτην φοράν τήν ἀξίαν 7 δρχ.X3=21 δρχ. τῶν τριῶν μολυβιῶν καί τήν διαφοράν 31-20=10 δρχ. πού εἶναι ἡ ἀξία τῶν δύο τετραδίων πού ἀγόρασε τήν πρώτην φοράν, τήν διαιροῦμεν διά 2 καί ἔχομεν 10:2=5 δρχ. ἄρα τό ἕνα τετράδιον ἄξιζεν 5 δρχ.

<u>'Επαλήθευσις:</u>

5 δρχ.X2 = 10 δρχ.	5 δρχ.X5 = 25 δρχ.
7 " X3 = <u>21 δρχ.</u>	7 " X4 = <u>28 δρχ.</u>
31 δρχ.	53 δρχ.

Γ) Μέθοδος του σφάλματος

<u>Πρόβλημα:</u> Ἀγόρασε κάποιος 8 όκ. καρύδια καί κάστανα καί ἐπλήρωσε 121 δρχ. Ἡ ὀκᾶ τά καρύδια ἐτιμᾶτο 17 δρχ. καί ἡ ὀκᾶ τά κάστανα ἐτιμᾶτο 12 δρχ. Πόσας ὀκάδας ἀπό κάθε εἶδος ἀγόρασε;

<u>Λύσις:</u> Θά ὑποθέσωμεν ὅτι καί αἱ 8 όκ. ἦσαν καρύδια. Ἀφοῦ ἡ μία ὀκᾶ καρύδια ἐτιμᾶτο 17 δρχ. αἱ 8 όκ. θά ἐτιμῶντο 17Χ8=136 δρχ. Κατά τό πρόβλημα ὅμως διά τάς 8 όκ. ἐπλήρωσεν 121 δρχ. δηλαδή προκύπτει σφάλμα 136-121=15 δρχ. περισσότεραι. Τό σφάλμα αὐτό συνέβη διότι ἐνῷ ἡ ὀκᾶ τά κάστανα ἐτιμᾶτο 12 δρχ. τώρα λόγῳ τῆς ὑποθέσεως ἐτιμᾶτο 17 δρχ. δηλ. ἐτιμᾶτο κατά 17-12=5 δρχ. περισσότερον. Λέγομεν λοιπόν

Ἀπό 1 όκ. κάστανα προῆλθεν αὔξησις 5 δρχ.
" ; " " " 15 "

Θά διαιρέσωμεν τόν 15 διά τοῦ 5 καί εὑρίσκομεν πηλίκον 3 ἄρα τά κάστανα ἦσαν 3 όκ. Ἑπομένως τά καρύδια ἦσαν 8-3=5 όκ.

<u>Ἐπαλήθευσις:</u>

17 δρχ. 5 = 85 δρχ.
12 " 3 = <u>36 "</u>
121 δρχ.

<u>Σημείωσις:</u>

Σφάλμα εἶναι ἡ ἀπομάκρυνσις ἀπό τοῦ ὀρθοῦ.

Προβλήματα διάφορα

1) Ἐπλήρωσε κάποιος 1079 δρχ. διά τρία κομμάτια ὑφάσματος. Τό (α) ἦτο κατά 5 πήχ. μεγαλύτερον τοῦ (β) καί κατά 8 πήχ. μεγαλύτερον τοῦ (γ) καί τό ἀγό-

ρασε πρός 20 δρχ.τόν πῆχυν, τό (β) πρός 15 δρχ.τόν πῆχυν καί τό (γ) πρός 14 δρχ.τόν πῆχυν.Πόσων πήχεων ἦτο τό καθένα κομμάτι;

2) Ἕνας ὑπάλληλος ἐξοδεύει κάθε ἡμέραν τό ἴδιο χρηματικόν ποσόν.Ὅταν ὁ μῆνας ἔχῃ 31 ἡμ.ἀναγκάζεται διά νά τόν φθάσῃ ὁ μισθός του, νά ἐξοδεύῃ κάθε ἡμέραν 0,50 τῆς δραχμῆς ὀλιγώτερον, παρά ὅταν ὁ μῆνας ἔχῃ 30 ἡμ. Πόσος εἶναι ὁ μισθός του;

3) Ἔχασε κάποιος τά $\frac{2}{3}$ $(\frac{1}{2})$ τῶν χρημάτων του καί 1(3) δρχ. Ἐκέρδισεν ἔπειτα τά $\frac{3}{5}$ $(\frac{1}{2})$ τῶν ὑπολοίπων καί 1(3) δρχ. καί τέλος ἔχασε τά $\frac{5}{6}$$(\frac{2}{3})$ τῶν χρημάτων πού εἶχε μετά ἀπό τό κέρδος καί τοῦ ἔμειναν 8,5 (10) δρχ. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

4) Κάποιος εἶπεν. Εἰς ἐκεῖνον πού θά μοῦ τριπλασιάσῃ τά χρήματά μου δίδω 27 δρχ. Ἡ ἐπιθυμία του ἐξεπληρώθη τρεῖς φοράς καί ἔχασεν ὅσα χρήματα εἶχεν. Πόσα εἶχεν;

5) Ἔδωσε κάποιος εἰς ἄλλους τρεῖς αὐγά μέ τήν ἐντολήν νά τά πωλήσουν μέ τήν ἰδίαν τιμήν καί νά τοῦ φέρουν ὁ καθένας τό ἴδιο χρηματικόν ποσόν. Ἐάν εἰς τόν (α) ἔδωσε 50 εἰς τόν (β) 30 καί εἰς τόν (γ) 10 ἠμποροῦσε νά γίνῃ ἡ ἐντολή του;

6) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται ἄνδρες καί γυναῖκες καί παιδιά. Τό ἡμερομίσθιον κάθε γυναίκας εἶναι τά 0,75 τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ ἀνδρός, καί τό ἡμερομίσθιον κάθε παιδιοῦ εἶναι τά 0,50 τοῦ ἡμερομισθίου τῆς γυναικός. 12 ἄνδρες, 8 γυναῖκες καί 16 παιδιά πῆραν εἰς μίαν ἡμέραν μαζί 132 δραχ. Πόσον εἶναι

τό ἡμερομίσθιον καθενός;

7) Κάποιος περισσεύει τό $\frac{1}{7}$ τοῦ ἐτησίου εἰσοδήματός του καί ἐξοδεύει τά $\frac{6}{7}$. Ἐάν εἶχεν ἀκόμη 400 δρχ. περισσότερον ἐτήσιον εἰσόδημα τότε θά ἠμποροῦσε νά περισσεύσῃ τό $\frac{1}{5}$ τοῦ εἰσοδήματός του καί νά ἐξοδεύῃ ὅσα καί τώρα. Πόσον εἶναι τό ἐτήσιον εἰσόδημά του;

8) Τρεῖς τεχνῖται συνειργάσθησαν ὡς ἑξῆς: Ὁ (α) καί ὁ (β) μαζί εἰργάσθησαν 60 ἡμ. καί ἔκαμαν ἔργον μήκους 1128 μ. Ὁ (α) καί ὁ (γ) μαζί εἰργάσθησαν 64 ἡμ. καί ἔκαμαν ἔργον μήκους 1160 μ. Ὁ (β) καί ὁ (γ) μαζί εἰργάσθησαν 76 ἡμ. καί ἔκαμαν ἔργον μήκους 1328 μ. Ζητοῦνται α) Πόσας ἡμέρας εἰργάσθη χωριστά ὁ καθένας β) Πόσα μέτρα ἔκαμε χωριστά ὁ καθένας.

9) Τρεῖς τεχνῖται συνειργάσθησαν ἐπί τοῦ ἰδίου ἔργου ὡς ἑξῆς: Ὁ (α) καί ὁ (β) μαζί καί τό ἐτελείωσαν εἰς 5 ἡμ. Ὁ (α) καί ὁ (γ) μαζί καί τό ἐτελείωσαν εἰς 4 ἡμ. Ὁ (β) καί ὁ (γ) μαζί καί τό ἐτελείωσαν εἰς 6 ἡμ. Πόσο μέρος τοῦ ἔργου τελειώνει ὁ καθένας μόνος του εἰς μίαν ἡμέραν;

10) Τρεῖς βρύσες γεμίζουν δεξαμενήν ὡς ἑξῆς: Ἡ (α) καί ἡ (β) μαζί εἰς 2 ὥρας ἡ (α) καί ἡ (γ) μαζί εἰς 4 ὥρ. Εἰς πόσας ὥρας ἡ κάθε μία μόνη της θά γεμίσῃ τά $\frac{7}{8}$ τῆς δεξαμενῆς;

11) Παρήγγειλε κάποιος 5 ὀκ. ζάχαρη καί 2 ὀκ. καφέ καί ἔστειλε 293 δρχ.. Τό κατάστημα ὅμως τόν ἐχρέωσεν ἀκόμη 91,30 δρχ. παραπάνω διότι κατά λάθος τοῦ ἔστειλε 6 ὀκ. ζάχαρη καί 3 ὀκ. καφέ. Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς κάθε εἴδους.

12) Δύο ἄτομα ἀγόρασαν ἀπό τό ἴδιο κατάστημα καί ἀπό τήν ἴδια ποιότητα καί ἀξίαν, ὁ ἕνας 4 όκ. λάδι καί 3 όκ.βούτυρο καί ἐπλήρωσεν 240.30 δρχ. καί ὁ ἄλλος 5 όκ.λάδι καί 7 όκάδ.βούτυρο καί ἐπλήρωσεν 471 δρχ. Ἐάν ἀπό κάθε εἶδος ἀγόραζεν ὁ καθένας 6 όκ. πόσα θά ἐπλήρωνε;

13) Ἀγόρασε κάποιος περιστέρια καί κόττες ἐν ὅλῳ 180 καί πρός 300 δρχ. τό κάθε περιστέρι καί 200 δρχ. τήν κάθε κόττα. Ἔπειτα ἐπώλησεν ὅλα μαζί πρός 270,50 δρχ. τό καθένα καί ἐκέρδισεν 6690 δρχ. Πόσα ἦσαν ἀπό κάθε εἶδος;

14) Ἀγρότης ἔχει πρόβατα καί γαλλοποῦλες κεφάλια 165 καί πόδια 504. Ἀφοῦ ἐκράτησε 10 κεφάλια ἀπό κάθε εἶδος κατόπιν ἐπώλησεν ἀπό τίς γαλλοποῦλες ἄλλες πρός 48 δρχ.τήν μίαν καί ἄλλες πρός 40 δρχ.τήν μίαν καί εἰσέπραξεν 2690 δρχ. ἀπό τά πρόβατα ἄλλα ἐπώλησε πρός 200 δρχ.τό ἕνα καί ἄλλα πρός 250 δρχ.τό ἕνα καί εἰσέπραξε 4900 δρχ. Ζητοῦνται α) Πόσα εἶχεν ἀπό κάθε εἶδος β) πόσες γαλλοποῦλες ἐπώλησε πρός 48 δρχ. καί πόσες πρός 40 δρχ. γ) Πόσα πρόβατα ἐπώλησε πρός 200 δρχ. καί πόσα πρός 250 δρχ.

15) Ἄνδρες γυναῖκες ἕνδεκα καί τά κουλούρια δέκα. Ὁ κάθε ἄνδρας τρώγει δυό, μισό κάθε γυναῖκα. Πόσοι εἶναι οἱ ἄνδρες καί πόσαι αἱ γυναῖκες;

16) Κάποιος εἶχεν ἕνα ποσόν αὐγά. Ἐπώλησεν $\frac{1}{2}$ τοῦ ποσοῦ καί $\frac{1}{2}$ τοῦ αὐγοῦ ἔπειτα ἐπώλησεν $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου ποσοῦ καί $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ, τέλος ἐπώλησεν τό $\frac{1}{2}$ τοῦ νέου ὑπολοίπου τοῦ ποσοῦ καί $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ. Τοιουτοτρόπως τά ἐπώλησεν ὅλα. Πόσα εἶχεν;

Λύσις. Τήν πρώτην φοράν ἐπώλησεν $\frac{1}{2}$ τοῦ ποσοῦ + $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ. Τήν δευτέραν φοράν ἐπώλησεν $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ + $\frac{1}{4}$ αὐγοῦ. Τήν τρίτην φοράν ἐπώλησεν $\frac{1}{8}$ τοῦ ποσοῦ + $\frac{1}{8}$ τοῦ αὐγοῦ. Δηλ, καί τάς τρεῖς φοράς μαζί ἐπώλησεν τά $\frac{7}{8}$ τοῦ ποσοῦ καί τά $\frac{7}{8}$ τοῦ αὐγοῦ. Ἑπομένως τό $\frac{1}{8}$ τοῦ ποσοῦ τῶν αὐγῶν πού λείπει, πρέπει νά εἶναι ἴσον πρός τά $\frac{7}{8}$ τοῦ αὐγοῦ ἄρα τά $\frac{8}{8}$ πού εἶναι ὅλος ὁ ἀριθμός θά εἶναι ἴσος μέ $\frac{7X8}{8}$ = 7 αὐγά. Δηλ. εἶχεν 7 αὐγά.

17) Κάποιος ἐπώλησε τό $\frac{1}{2}$ τῶν αὐγῶν πού εἶχεν καί $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ χωρίς νά σπάσῃ κανένα. Ἐπώλησε πάλιν τό $\frac{1}{2}$ τῶν ὑπολοίπων καί $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ χωρίς νά σπάσῃ κανένα. Τρίτην καί τετάρτην φοράν ἐπώλησεν ὁμοίως καί τοῦ ἔμεινεν ἕνα αὐγό. Πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς;

18) Κάποιος εἶχε ἕνα ποσόν αὐγά. Ἐπώλησεν εἰς ἕνα τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ποσοῦ καί $\frac{1}{2}$ αὐγοῦ καί ἔπειτα ἐπώλησεν τό $\frac{1}{2}$ τοῦ ὑπολοίπου ποσοῦ καί $\frac{1}{2}$ τοῦ αὐγοῦ καί τοῦ ἔμειναν δύο αὐγά. Πόσα αὐγά ἐπώλησεν εἰς τόν πρῶτον πόσα εἰς τόν δεύτερον καί πόσα εἶχεν ἐξ ἀρχῆς.

19) Ἕνα βαρέλι περιέχει 200 όκ. κρασί. Ἀφαιροῦμεν 50 όκ. καί τάς συμπληρώνομεν μέ νερό, ἀπό τό μῖγμα ἀφαιροῦμεν 50 όκ. καί τάς συμπληρώνομεν μέ νερό. ἀπό τό νεόν μῖγμα ἀφαιροῦμεν 50 όκ. καί τάς συμπληρώνομεν μέ νερό. Πόσο κρασί καί πόσο νερό περιέχει τό βαρέλι;

Λύσις. Τήν πρώτην φοράν. Ἀφαιροῦμεν ἀπό τάς 200 όκ. κρασί τάς 50 όκ. κρασί καί μένουν 150 όκ. κρασί, αἱ ὁποῖαι μαζί μέ τάς 50 όκ. νερό θά ἀποτελέσουν τό πρῶτο μῖγμα 200 όκ. ἀποτελούμενον ἀπό 150 όκ. κρασί+50 δκ.νερό. Τήν δευτέραν φοράν. Ἀφαιροῦμεν ἀπό τό πρῶτο μῖγμα τῶν 200 δκ. τάς 50 δκ. καί ἐπειδή τό 50 εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τοῦ 200 διά τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπό τό 150 τό $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ δηλ. 37,5 δκ.κρασί καί ἀπό τό 50 τό $\frac{1}{4}$ αὐτοῦ δηλ.12,5 δκ.νερό καί θά ἔχωμεν:

μῖγμα 150 δκ.=112,5 δκ.κρασί + 37,5 δκ. νερό. Ἐάν τώρα συμπληρώσωμεν μέ νερό τάς 50 δκ. πού ἀφαιρέσαμεν θά ἔχωμεν

δεύτερον μῖγμα 200 δκ.=112,5 δκ.κρασί + 87,5 δκ.νερό. Τήν τρίτην φοράν. Ἀφαιροπυμεν ἀπό τό δεύτερον μῖγμα τῶν 200 δκ. τάς 50 δκ. καί ἐπειδή τό 50 εἶναι τό $\frac{1}{4}$ τοῦ 200 διά τοῦτο ἀφαιροῦμεν ἀπό τάς 112,5 δκ. κρασί τό $\frac{1}{4}$ αὐτῶν δηλ.28,125 δκ.κρασί καί ἀπό τάς 87,5 δκ.νερό τό $\frac{1}{4}$ αὐτῶν δηλ.21,875 δκ.νερό καί θά ἔχωμεν:

μῖγμα 150 δκ.=84,375 δκ.κρασί + 65,625 δκ.νερό. Ἐάν τώρα συμπληρώσωμεν μέ νερό τάς 50 δκ.πού ἀφαιρέσαμεν θά ἔχωμεν:

τρίτο μῖγμα 200 δκ.= 84,375 δκ.κρασί+115,625 δκ.νερό. Δηλ. τό βαρέλι περιέχει 84,375 δκ.κρασί καί 115,625 δκ.νερό.

20) Βαρέλι περιέχει 50 δκ.κρασί. Ἀφαιροῦμεν τό $\frac{1}{3}$ καί τό συμπληρώνομεν μέ νερό. Ἀπό τό μῖγμα ἀφαιροῦμεν τό $\frac{1}{4}$ καί τό συμπληρώνομεν μέ νερό, ἀπό τό νέον μῖγμα ἀφαιροῦμεν τό $\frac{1}{5}$ καί τό συμπληρώνομεν μέ νερό. Πόσο κρασί καί πόσο νερό περιέχει τώρα τό βαρέλι;

21) Τό δοχεῖον (Α) ἔχει 10 δκ.γάλα καί 5 δκ.νερό καί τό δυχεῖον (Β) ἔχει 7 δκ.γάλα καί 5 δκ.νερό. Ἀφαιροῦμεν ἀπό τό (Α) 5 δκ. καί ἀπό τό (Β) 5 δκ. καί τάς 5 δκ.τοῦ (Α) τάς ρίπτομεν εἰς τό (Β) καί τάς

5 όκ, τοῦ (Β) τάς ρίπτομεν εἰς τό (Α). Πόσο γάλα καί πόσο νερό περιέχει κάθε ἕνα δοχεῖον χωριστά.

22) Ἐκ τριῶν δοχείων τό (α) χωρεῖ 10 όκ.γάλα τό (β) χωρεῖ 7 όκ.γάλα καί τό (γ) χωρεῖ 3 όκ.γάλα.Τό (α) εἶναι γεμᾶτο μέ γάλα καί τά ἄλλα δύο εἶναι κενά. Νά μοιρασθοῦν ἐξ ἴσου αἱ 10 όκ.τοῦ δοχείου (α) εἰς δύο ἄτομα μέ τήν βοήθειαν τῶν δοχείων (β) καί (γ).

23) Ποδηλάτης ἀναχωρεῖ ἀπό ἕνα τόπον μέ ὡριαίαν ταχύτητα 12 χλμ. Μετά 3 ὥρ.ἀναχωρεῖ ἀπό τόν ἴδιον τόπον δεύτερος ποδηλάτης μέ ὡριαίαν ταχύτητα 16 χλμ. Πότε ἀπό τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ πρώτου θά προηγεῖται ὁ πρῶτος τοῦ δευτέρου κατά 12 χλμ. καί πότε θά προηγεῖται ὁ δεύτερος τοῦ πρώτου κατά 48 χλμ.

24) Ἡ ταχύτης σιδηροδρόμου εἶναι κατά 4 χλμ. μεγαλυτέρα τῆς ταχύτητος δευτέρου σιδηροδρόμου. Ὁ πρῶτος διατρέχει μίαν ἀπόστασιν εἰς 12 ὥρ. τήν ὁποίαν ὁ δεύτερος διατρέχει εἰς 14 ὥρ. Ζητοῦνται αἱ ταχύτητες τῶν σιδηροδρόμων καί ἡ ἀπόστασις.

25) Δύο ὁδοιπόροι μέ ὡριαίας ταχύτητας ὁ (α) 3 χλμ. καί ὁ (β) 5 χλμ. ἀναχωροῦν ἀπό τό ἴδιον σημεῖον καί μέ τήν ἰδίαν κατεύθυνσιν διά νά διανύσουν δρόμον 60 χλμ. Ὁ (β) φθάσας εἰς τό τέρμα τοῦ δρόμου ἐπιστρέφει ἀμέσως. Ποῦ θά συναντήσῃ τόν (α);

26) Ἀπό δύο πόλεις ἀνεχώρησαν συγχρόνως δύο σιδηρόδρομοι διά νά συναντηθοῦν. Συνηντήθησαν 9 ὥρ. μετά τήν ἀναχώρησίν των. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πόλεων ἦτο 486 χλμ. καί ἡ ὡριαία ταχύτης τοῦ ἑνός ἦτο κατά 6 χλμ.μεγαλυτέρα τῆς ὡριαίας ταχύτητος τοῦ ἄλλου. Πόσα χλμ.διέτρεξεν ὁ καθένας;

27) Δύο σιδηρόδρομοι ἀναχωρήσαντες συγχρόνως ἀπό δύο πόλεις τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι 364 χλμ.καί κινούμενοι ἀντιθέτως συνηντήθησαν εἰς τό 189ον χιλιόμετρον ἀπό τῆς μιᾶς τῶν πόλεων. Ἐάν ὁ ταχύτερος ἔτρεχεν κατά 1 χλμ.τήν ὥραν ὀλιγώτερον καί ὁ βραδύτερος ἔτρεχεν κατά 1 χλμ.τήν ὥραν περισσότερον θά συνηντῶντο εἰς μέσον τῶν δύο πόλεων. Ζητεῖται ἡ ταχύτης καθενός.

28) Ἀπό μίαν πόλιν ἀναχωροῦν συγχρόνως δύο αὐτοκίνητα, μέ ὡριαίας ταχύτητας τό (α) 60 χλμ. τό (β) 40 χλμ. καί κατευθύνονται εἰς ἄλλην πόλιν. Μετά 3 ὥρας ἀναχωρεῖ ἀπό τήν ἰδίαν πόλιν τό αὐτοκίνητον (γ) μέ ὡριαίαν ταχύτητα 70 χλμ. Μετά πόσας ὥρας ἀπό τῆς ἀναχωρήσεώς του τό (γ) θά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο ἄλλων;

<u>Λύσις:</u> Θά ὑποθέσωμεν ὅτι εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν αὐτοκινήτων (α) καί (β) ὑπάρχει ἕνα ἄλλο αὐτοκίνητον (δ) μέ τό ὁποῖον θά ἀντικαταστήσωμεν τά αὐτοκίνητα (α) καί (β). Δηλ.ὅσον χρόνον χρειάζεται τό (γ) διά νά φθάσῃ τό (δ) τόσον χρόνον χρειάζεται τό (γ) διά νά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν (α) καί (β). Τό αὐτοκίνητον (δ) κατά τά γνωστά ἔχει ὡριαίαν ταχύτητα $\frac{60+40}{2}=50$ χλμ. Τό (δ) ἀνεχώρησεν 3 ὥρας ἐνωρίτερον ἀπό τό (γ) ἐπομένως ἔχει διανύσει $50X3=150$ χλμ. δηλ.τό (δ) ἀπέχει τοῦ (γ) κατά 150 χλμ. Ἀλλά τό (γ) πλησιάζει τό (δ) κάθε ὥραν κατά $70-50=20$ χιλ.ἐπομένως τό (γ) θά φθάσῃ τό (δ) μετά ἀπό $150:20 = 7\frac{1}{2}$ ὥρας. Δηλ.τό (γ) θά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῆς ἀποστάσεως τῶν (α) καί (β) μετά ἀπό $7\frac{1}{2}$ ὥρας.

29) Τρία κινητά (α),(β),(γ) ἀναχωροῦν ἀπό τό ἴδιον σημεῖον καί διευθύνονται πρός ἕνα ἄλλο σημεῖον μέ ὡριαίας ταχύτητας ἀντιστοίχως 4,5,6 χλμ. Τό (β) ἀναχωρεῖ 3 ὥρας βραδύτερον τοῦ (α). Μετά πόσον χρόνον ἀπό τῆς ἀναχωρήσεως τοῦ (β) πρέπει νά ἀναχωρήσῃ τό (γ) ὥστε καί τά δύο νά φθάσουν τό (α) συγχρόνως;

30) Τρία κινητά (α),(β),(γ) μέ ὡριαίας ταχύτητας ἀντιστοίχως 12,16,20 χλμ. κινοῦνται τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ἀναχωρήσαντα ἀπό ἕνα σημεῖον Α καί κατευθύνονται πρός ἄλλο σημεῖον Β. Τό (β) ἀνεχώρησε 5 ὥρ. βραδύτερον τοῦ (α) καί τό (γ) ἀνεχώρησεν ὅταν τό (β) συνήντησε τό (α). Μετά πόσας ὥρας τό (γ) θά φθάσῃ τά ἄλλα καί εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπό τῆς ἀφετηρίας αὐτῶν;

31) Τρία κινητά (α),(β),(γ) μέ ὡριαίας ταχύτητας ἀντιστοίχως 10,14,20 χλμ. κινοῦνται τό ἕνα κατόπιν τοῦ ἄλλου ἀναχωρήσαντα ἀπό ἕνα σημεῖον Α καί κατευθύνονται πρός ἄλλο σημεῖον Β. Τό (α) ἀνεχώρησεν 8 ὥρ. ἐνωρίτερον τοῦ (β) τό δέ (γ) ὅταν τό (β) συντήντησε τό (α). Ἀλλά ὅταν τό (β) συνήντησε τό (α) τότε τό (α) ἤρχισεν ἀμέσως νά ἐπιστρέφῃ εἰς τό σημεῖον Α. Μετά πόσας ὥρας τό (γ) θά φθάσῃ τά ἄλλα καί εἰς ποίας ἀποστάσεις ἀπό τοῦ σημείου Α.

32) Τρία βενζινόπλοια (α),(β),(γ) μέ τήν ἰδίαν γραμμήν πορείας καί μέ ὡριαίαν ταχύτητα τά μέν (α) καί (β) 6 μιλίων τόδέ (γ) 8 μιλίων εὑρίσκονται εἰς μίαν στιγμήν κατά τήν ἑξῆς διάταξιν, Τά (β) καί (γ) εἰς τό αὐτό σημεῖον, τό δέ (α) προηγεῖται αὐτῶν κατά 60 μίλια. Μετά πόσον χρόνον τό (γ) θά εὑρίσκεται εἰς τό μέσον τῶν (α) καί (β)

33) Ἀπό τήν κορυφήν ἑνός στύλου 10 μ. ἀνεχώρησε καί κατεβαίνει ἕνας τζίτζικας μέ ὡριαίαν ταχύτητα 2 μ. Τήν ἰδίαν στιγμήν ἀπό τήν βάσιν τοῦ στύλου ἀναβαίνει ἕνα μηρμύγγι μέ ὡριαία ταχύτητα 5 μ. συναντᾷ τόν τζίτζικα καί ἐπιστρέφει εἰς τήν βάσιν του. Ἀπ᾽ ἐκεῖ χωρίς νά σταματήσῃ καθόλου κάμνει παρομοίαν διαδρομήν διά δευτέραν τρίτην κλπ. φοράν ἐνῷ ὁ τζίτζικας ἐξακολουθεῖ νά κατεβαίνῃ. Νά εὑρεθῇ τό συνολικό διάστημα πού θά διατρέξῃ τό μηρμύγγι εἰς τάς διαδοχικάς διαδρομάς του.

34) Τέσσαρες ταξειδιῶται πρόκειται νά διανύσουν ἀπόστασιν 84 χλμ. Ἔχουν δέ εἰς τήν διάθεσίν των ἕνα αὐτοκίνητον δύο θέσεων, ἐκτός τῆς θέσεως τοῦ σωφέρ, καί ὡριαίας ταχύτητας 30 χλμ. Οἱ δύο ταξειδιῶται ἀναχωροῦν μέ τό αὐτοκίνητον καί φθάνουν μέχρις ὡρισμένης ἀποστάσεως διά νά διανύσουν τό ὑπόλοιπον αὐτῆς πεζῇ μέ ὡριαίαν ταχύτητα 4 χλμ. Τό αὐτοκίνητον ἐπιστρέφει ἀμέσως καί πέρνει τούς δύο ἄλλους πού εἶχον ἀναχωρήσει πεζῇ μέ τήν ἰδίαν ὡριαίαν ταχύτητα τῶν 4 χλμ. ταὐτοχρόνως μέ τήν ἀναχώρησιν τοῦ αὐτοκινήτου. Ποῦ πρέπει νά ἀφίσῃ τό αὐτοκίνητο τούς δύο πρώτους ταξειδιώτας διά νά φθάσουν καί οἱ τέσσαρες συγχρόνως εἰς τό τέρμα τῆς ἀποστάσεως;

35) Ἕνας κανών ΑΒ εἶναι διῃρημένος εἰς χιλιοστόμετρα καί δύο ἄλλοι κανόνες ΓΔ καί ΕΖ εἶναι διῃρημένοι εἰς ἴσα μέρη ὁ ἕνας εἰς $\frac{15}{16}$ τοῦ χιλιοστομέτρου καί ὁ ἄλλος εἰς $\frac{27}{28}$ τοῦ χιλιοστομέτρου. Θέτομεν αὐτούς τόν ἕνα ἐπί τοῦ ἄλλου μέ τρόπον ὥστε νά συμπέσουν τά ἄκρα αὐτῶν Α, Γ, Ε. Ζητεῖται ποῖα εἶναι ἐπί τοῦ κανό-

νος ΑΒ ἡ πρώτη χαραγή τῆς διαιρέσεως ποῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς δύο χαραγάς σημειωμένας ἐπί τῶν δύο ἄλλων κανόνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄

Περί τετραγωνικῆς καί κυβικῆς ρίζης

Α) Τετραγωνική ρίζα ἀκριβής

Εἰς τό κεφάλαιον περί δυνάμεων εἴπομεν ὅτι τό γινόμενον $5 \times 5 = 25$ γράφεται συμβολικῶς 5^2 καί ἑπομένως εἶναι $5^2 = 25$. Ὁ $5^2 = 25$ λέγεται δευτέρα δύναμις ἤ τέλειον τετράγωνον τοῦ 5. Ἀντιστρόφως. Ὁ 5 λέγεται ἀκριβής τετραγωνική (ἤ δευτέρα) ρίζα τοῦ 5^2 ἤ τοῦ 25. Ἡ τετραγωνική ρίζα παριστάνεται μέ τό σύμβολον ($\sqrt[2]{\ }$) καί σύντομα μέ τό σύμβολον ($\sqrt{\ }$). Δηλ. $\sqrt{5^2} = 5$, Ἐπίσης $\sqrt{25} = 5$. Ἄρα

α) Ἀκριβής τετρ. ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν ὑψωθῇ εἰς τό τετράγωνον δίδει ἀκριβῶς τόν δοθέντα ἀριθμόν.

β) Τέλειον τετράγωνον λέγεται ἕνας ἀριθμός ὅταν ἔχῃ ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν. Τό σύμβολον ($\sqrt[2]{\ }$) ὀνομάζεται ριζικόν καί εἶναι τό ἀρχικόν γράμμα τῆς γαλλικῆς λέξεως racine (=ρίζα). Ὁ ἀριθμός (2) ποῦ εὑρίσκεται ἄνω τοῦ ριζικοῦ λέγεται δείκτης τῆς ρίζης, διότι δεικνύει τήν τάξιν τῆς ρίζης, χάριν δέ συντομίας ἐξ τήν τετρ. ρίζαν ὁ δείκτης (2) παραλείπεται δηλ. ἀντί $\sqrt[2]{25}$ γράφομεν $\sqrt{25}$. Ὁ ἀριθμός ποῦ εὑρίσκεται κάτω ἀπό τό ριζικόν ὅπως π.χ. ὁ (25) λέγεται ὑπόρριζον.

Σύμφωνα μέ τόν ὁρισμόν τῆς ἀκριβοῦς τετραγωνικῆς ρίζης εἶναι:

$\sqrt{1} = 1$ διότι $1^2 = 1$	$\sqrt{36} = 6$ διότι $6^2 = 36$
$\sqrt{4} = 2$ " $2^2 = 4$	$\sqrt{49} = 7$ " $7^2 = 49$
$\sqrt{9} = 3$ " $3^2 = 9$	$\sqrt{64} = 8$ " $8^2 = 64$
$\sqrt{16} = 4$ " $4^2 = 16$	$\sqrt{81} = 9$ " $9^2 = 81$
$\sqrt{25} = 5$ " $5^2 = 25$	$\sqrt{100} = 10$ " $10^2 = 100$

Ἐδῶ ἔχομεν νά παρατηρήσωμεν τά ἑξῆς:

α) Κάθε ἀριθμός πού τελειώνει εἰς 2 ἤ εἰς 3 ἤ εἰς 7 ἤ εἰς 8 ἤ εἰς περιττόν ἀριθμόν μηδενικά, εἶναι βέβαιον ὅτι δέν ἔχει ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν.

β) Κάθε ἀριθμός πού τελειώνει εἰς 1 ἤ εἰς 4 ἤ εἰς 5 ἤ εἰς 6 ἤ εἰς 9 ἤ εἰς ἄρτιον ἀριθμόν μηδενικά ἠμπορεῖ νά ἔχῃ, ἠμπορεῖ καί νά μή ἔχῃ ἀκριβῆ ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν. π.χ. Οἱ ἀριθμοί 25 καί 15 ἐνῷ τελειώνουν καί οἱ δύο εἰς 5 ἐν τούτοις ὁ μέν 25 ἔχει ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν ὁ δέ 15 δέν ἔχει ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν διότι δέν ὑπάρχει ἀριθμός ἀκέραιος ἤ κλασματικός ὁ ὁποῖος ὅταν ὑψωθῇ εἰς τό τετράγωνον νά δίδῃ τόν 15.

<u>Παρατήρησις</u>. Εἰς τήν Θ. Ἀριθμητικήν ἀποδεικνύεται ὅτι "Ὅταν ἕνας ἀκέραιος δέν ἔχῃ ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν πάλιν ἀκέραιον, τότε δέν ἔχει ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν οὔτε κλασμα".

<u>Κριτήριον</u> "Ἕνας ἀριθμός ἀκέραιος θά ἔχῃ ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν ὅταν ὅλοι οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς μέ τόν 2" π.χ. Ὁ $5184 = 2^6 \times 3^4$ ἔχει ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν διότι οἱ ἐκθέται 6 καί 4 διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τοῦ 2.

<u>Β) Τετραγωνική ρίζα μή ἀκριβής</u>

<u>α) Τετρ. ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος</u>

Ἔστω π.χ. ὁ ἀκέραιος 26. Ὁ 26 δέν ἔχει ἀκριβῆ τετρ.

ρίζαν ἄλλον ἀκέραιον, ἄρα οὔτε καί κλάσμα. Παρατηροῦμεν ὅμως ὅτι ὁ 26 εὑρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 25 καί 36 οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἀκριβῆ τετρ.ρίζαν. Ἐπειδή δέ $\sqrt{25}=5$ καί $\sqrt{36}=6$ διά τοῦτο ἡ $\sqrt{26}$ εὑρίσκεται μεταξύ τῶν ἀριθμῶν 5 καί 6. Ὁ (5) εἶναι ἡ $\sqrt{26}$ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος κατ'ἔλλειψιν καί ὁ (6) εἶναι ἡ $\sqrt{26}$ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος καθ'ὑπεροχήν. Παίρνομεν ὅμως πάντοτε τήν κατ'ἔλλειψιν καί γράφομεν $\sqrt{26}=5$. Ἐπειδή δέ ὁ (5) εἶναι ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς ἀκεραίους 1,2,3,4,5 τῶν ὁποίων τά τετράγωνα 1,4,9,16,25 χωροῦν εἰς τόν 26, διά τοῦτο λέγομεν. Τετρ.ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς ἀκεραίους τῶν ὁποίων τά τετράγωνα χωροῦν εἰς τόν δοθέντα ἀριθμόν".

<u>Ἐξήγησις</u>. Καθώς θά μάθωμεν ἡ $\sqrt{26}=5{,}0990195\ldots$ Ἐπειδή παίρνομεν ὡς $\sqrt{26}$ μόνον τόν 5 καί παραλείπομεν τόν $0{,}0990195\ldots$ ὁ ὁποῖος εἶναι μικρότερος τῆς ἀκεραίας μονάδος 1, κάμνομεν σφάλμα μικρότερον τῆς ἀκεραίας μονάδος 1. Αὐτό λέγεται <u>κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος</u>.

<u>β) Τετρ.ρίζα κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος</u>.

Ἔστω π.χ. ὁ ἀκέραιος 2. Κατά τά προηγούμενα ἡ $\sqrt{2}$ κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος, δηλ. μέ σφάλμα μικρότερον τῆς μονάδος 1, εἶναι ὁ ἀριθμός 1. Ὑποθέσωμεν τώρα, ὅτι θέλομεν τό σφάλμα νά εἶναι μικρότερον μιᾶς κλασματικῆς μονάδος π.χ. τοῦ $\frac{1}{10}$. Πρός τοῦτο παίρνομεν τά κλάσματα $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \ldots\ldots, \frac{11}{10}, \frac{12}{10}, \frac{13}{10}, \ldots\ldots$ δηλ. παίρνομεν κλάσματα ποῦ ἔχουν ἀριθμητήν τούς ἀκεραίους ἀριθμούς 1,2,3,4,5......καί παρονομαστήν τόν

10 ποὺ εἶναι ὁ παρονομαστὴς τῆς προσεγγίσεως. Τὰ τετράγωνα τῶν κλασμάτων αὐτῶν εἶναι:

$(\frac{1}{10})^2 = \frac{1}{100} = 0,01$

$(\frac{2}{10})^2 = \frac{4}{100} = 0,04$

....

....

$(\frac{14}{10})^2 = \frac{196}{100} = 1,96$

$(\frac{15}{10})^2 = \frac{225}{100} = 2,25$

....

....

Ἀπὸ τὰ τετράγωνα αὐτὰ μόνον τὸ 0,01 τὸ 0,04, τὸ 0,09 κλπ. μέχρι τοῦ 1,96 καὶ αὐτοῦ συμπεριλαμβανομένου, χωροῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2 ἐνῷ τὰ ἄλλα ἀπὸ τοῦ 2,25 καὶ πέραν δὲν χωροῦν εἰς τὸν ἀριθμὸν 2. Ἐπειδὴ δὲ ὁ 2 εὑρίσκεται μεταξὺ 1,96 καὶ 2,25 ἕπεται ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κεῖται μεταξὺ τῆς $\sqrt{1,96} = \frac{14}{10}$ καὶ τῆς $\sqrt{2,25} = \frac{15}{10}$. Ὁ $\frac{14}{10}$ εἶναι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ κατ' ἔλλειψιν καὶ ὁ $\frac{15}{10}$ εἶναι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ καθ' ὑπεροχήν. Παίρνομεν ὅμως πάντοτε τὴν κατ' ἔλλειψιν καὶ γράφομεν $\sqrt{2} = \frac{14}{10}$ ἢ $\sqrt{2} = 1,4$. Ἄρα

" Τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος $(\frac{1}{\nu})$ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἀπὸ ὅλα τὰ κλάσματα ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἔχουν παρονομαστὴν (ν) καὶ τῶν ὁποίων τὰ τετράγωνα χωροῦν εἰς τὸν δοθέντα ἀριθμόν".

Μὲ τὸ κλάσμα $\frac{1}{\nu}$ παριστάνομεν κάθε κλασματικὴν μονάδα δηλαδὴ τὸ $\frac{1}{\nu}$ μπορεῖ νὰ εἶναι $\frac{1}{10}$ ἢ $\frac{1}{100}$ ἢ $\frac{1}{5}$ ἢ $\frac{1}{30}$ κλπ.

Ἐὰν θέλωμεν τὸ σφάλμα νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{100}$ θὰ εὕρωμεν $\sqrt{2} = 1,41$. Ἐὰν θέλωμεν τὸ σφάλμα νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ $\frac{1}{1000}$ θὰ εὕρωμεν $\sqrt{2} = 1,414$ κ.ο.κ. Δηλ. ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,1 ἔχει ἕνα δεκαδικὸν ψηφίον. ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,01 ἔχει δύο δεκαδικὰ ψηφία, ἡ τετρ. ρίζα κατὰ προσέγγισιν 0,001 ἔχει τρία δεκαδικὰ ψηφία κ.ο.κ.

Ἐὰν τύχῃ ἕνα δεκαδικὸν ψηφίον τῆς τετρ. ρίζης νὰ εἶναι μηδέν τότε σημαίνει ὅτι ὁ ἀριθμός ποῦ ἐδόθη δέν ἔχει τετρ.ρίζαν κατά προσέγγισιν δεκάτου ἤ ἑκατοστοῦ ἤ χιλιοστοῦ κλπ. π.χ. ἡ $\sqrt{26} = 5,0990195......$ Ὁ 26 δέν ἔχει τετρ.ρίζαν κατά προσέγγισιν δεκάτου καί δεκάκις χιλιοστοῦ.

Ἐξαγωγή ρίζης

Ἐξαγωγή ρίζης λέγεται ἡ πρᾶξις διά τῆς ὁποίας εὑρίσκομεν τήν ἀκριβῆ ἤ μέ προσέγγισιν ρίζαν ἑνός ἀριθμοῦ.

Α) Ἐξαγωγή τετρ.ρίζης ἀκεραίου ἀριθμοῦ

Παράδειγμα. Νά εὑρεθῇ ἡ τετρ.ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 582169. Ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς:

1ος τρόπος

$\sqrt{58,21,69}$ | 763
49 | 7Χ2=14 76Χ2=152
92.1 | 146 1523
87 6 | Χ 6 Χ 3
456.9 | 876 4569
456 9
0

2ος τρόπος

$\sqrt{58,21,69}$ | 763
$7^2 = 49$
921 :14(=2Χ7)
2.7.6= 84
$6^2 = 36$
456.9:152(=2Χ76)
2.76.3 = 456
$3^2 = 9$
0

Ὅταν τό τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μηδέν τότε ἔχομεν ἀκριβῆ τετραγωνικήν ρίζαν. Ὅταν τό τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι ἴσον ἤ μεγαλύτερον τῆς τετρ.ρίζης ποῦ θά εὕρωμεν τότε ἔχομεν τετρ.ρίζαν κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Ὅταν τό τελευταῖον ὑπόλοιπον εἶναι μικρότερον ἀπό τήν τετρ.ρίζαν ποῦ θά εὕρωμεν τότε ἔχομεν τετρ.ρίζαν κατά προσέγγισιν $\frac{1}{2}$ τῆς ἀκεραίας μονάδος.

Παρατηρήσεις. α) Ἡ τετρ.ρίζα κάθε ἀριθμοῦ ἔχει τόσα ψηφία, ὅσα εἶναι τά τμήματα εἰς τά ὁποῖα χωρίζεται ὁ ἀριθμός. β) Ὅλα τά ψηφία τῆς τετρ.ρίζης, ἐκτός τοῦ πρώτου, ευρίσκονται διά διαιρέσεων. Ἐάν τύχῃ εἰς μίαν τῶν διαιρέσεων αὐτῶν νά μή χωρῇ εἰς τόν διαιρετέον τό 2/πλάσιον τῆς ευρεθείσης ρίζης τότε γράφομεν μηδέν εἰς τήν θέσιν τοῦ ζητουμένου ψηφίου τῆς ρίζης. Ἔπειτα καταβιβάζομεν τό ἑπόμενον διψήφιον τμῆμα καί συνεχίζομεν τήν πρᾶξιν. γ) Κάθε ὑπόλοιπον δέν πρέπει νά εἶναι μεγαλύτερον τοῦ 2/πλασίου τῆς ἀντιστοίχου ρίζης.

<u>Δοκιμή.</u> Ἐάν τό τετρ.τῆς τετρ.ρίζης σύν τό ὑπόλοιπον δίδουν τό ὑπόρριζον τότε ἡ πρᾶξις ἔγινε χωρίς λάθος.

<u>Β) Ἐξαγωγή τετρ.ρίζης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν</u>

Ἡ τετρ.ρίζα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν ἐξάγεται ὡς ἑξῆς:

α) Ὅταν ὁ δεκαδικός ἀριθμός ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων τότε τόν χωρίζομεν εἰς διψήφια τμήματα, ὡς νά ἦτο ἀκέραιος, καί ἀφοῦ εὕρωμεν τήν τετρ.ρίζαν ὅλου τοῦ ἀκεραίου μέρους θέτομεν ὑποδιαστολήν καί ἔπειτα ευρίσκομεν καί τήν τετρ.ρίζαν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους αὐτοῦ.

β) Ὅταν ὁ δεκαδικός ἀριθμός ἔχῃ περιττόν πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων τότε γράφομεν εἰς τό τέλος αὐτοῦ ἕνα μηδενικόν διά νά ἔχῃ ἄρτιον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων καί ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὅπως καί εἰς τήν προηγουμένην περίπτωσιν.

π.χ. $\sqrt{58,2169} = 7,63$ $\sqrt{0,005625} = 0,075$,

$\sqrt{0,5476} = 0,74$, $\sqrt{53,824} = \sqrt{53,8240} = 7,32$,

$\sqrt{0,05626} = \sqrt{0,056260} = 0,236$

Γ) <u>Ἐξαγωγὴ τετρ.ρίζης ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν $(\frac{1}{\nu})$ καὶ $(\frac{\mu}{\nu})$.</u>

α) Ἡ ἐξαγωγὴ τῆς τετρ.ρίζης ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος $(\frac{1}{\nu})$ γίνεται ὡς ἑξῆς:

" Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ θὰ μᾶς δοθῇ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ (ν), τῆς προσεγγίσεως, καὶ τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετρ.ρίζαν τὴν ὁποίαν κατόπιν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ (ν) τῆς προσεγγίσεως" π.χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ πολλαπλασιάζομεν τὸν 2 ἐπὶ τὸ τετράγωνον τοῦ παρονομαστοῦ 15 δηλ.ἐπὶ $15^2 = 225$ καὶ τοῦ γινομένου $2 \times 225 = 450$ εὑρίσκομεν τὴν τετρ.ρίζαν δηλ. $\sqrt{450} = 21$. Τὴν τετρ.ρίζαν 21 ποὺ εὑρήκαμεν τὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ 15 καὶ ἔχομεν ὅτι ἡ $\sqrt{2}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ εἶναι $\frac{21}{15}$ ἢ $\frac{7}{5}$.

β) Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ.ρίζης ἑνὸς ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατὰ προσέγγισιν κλάσματος $(\frac{\mu}{\nu})$ γίνεται ὡς ἑξῆς:

" Πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμὸν ποὺ θὰ μᾶς δοθῇ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ κλάσματος $(\frac{\mu}{\nu})$ ἀντεστραμμένον, δηλ. ἐπὶ $(\frac{\nu^2}{\mu^2})$, τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετρ.ρίζαν τὴν ὁποίαν κατόπιν πολλαπλασιάζομεν ἐπὶ τὸ κλάσμα $(\frac{\mu}{\nu})$ ὅπως εἶναι" π.χ. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν 5 κατὰ προσέγγισιν $\frac{2}{15}$ θὰ ἐργασθῶμεν ὡς ἑξῆς: $5 \times (\frac{15}{2})^2 = 5 \times \frac{225}{4} = \frac{1125}{4} = 281,25$. Κατόπιν ἡ $\sqrt{281,25} = 16,7$ καὶ τέλος θὰ ἔχωμεν $16,7 \times \frac{2}{15} = \frac{73,4}{15} = 4,88$.

<u>Συντομίαι</u>

α) Διὰ νὰ εὕρωμεν τὴν τετρ.ρίζαν ἀκεραίου ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. θέτομεν είς τό τέλος τοῦ ἀκεραίου ὑποδιαστολήν καί μετά ἀπό τήν ὑποδιαστολήν γράφομεν διπλάσια μηδενικά ἀπό τά μηδενικά πού ἔχει ὁ παρονομαστής τοῦ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. καί ἔπειτα ἐξάγομεν τήν τετρ.ρίζαν ὅπως καί είς τούς δεκαδικούς ἀριθμούς π.χ. Ἡ τετρ.ρίζα τοῦ 556 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{100}$ εἶναι: $\sqrt{556,0000} = 23,58$

β) Διά νά εὕρωμεν τήν τετρ.ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. παίρνομεν ἀπό τό δεκαδικόν μέρος τοῦ ἀριθμοῦ τόσα δεκαδικά ψηφία ὅσον εἶναι τό διπλάσιον τῶν μηδενικῶν τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. Ἐάν τά δεκαδικά ψηφία τοῦ δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ δέν ἐπαρκοῦν συμπληρώνομεν αὐτά μέ μηδενικά π.χ. Διά νά εὕρωμεν τήν τετρ.ρίζαν τοῦ 58,3043 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ θά εὕρωμεν τήν τετραγ. ρίζαν τοῦ 58,30 ἐπίσης διά νά εὕρωμεν τήν τετρ.ρίζαν τοῦ 58,3043 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ θά εὕρωμεν τήν τ τετρ.ρίζαν τοῦ 58,304300.

<u>Δ) Ἐξαγωγή τῆς τετρ.ρίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν</u>

Ἐπειδή π.χ. εἶναι $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$ ἔπεται ὅτι ἡ $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ $\sqrt{9} = 3$ καί ἡ $\sqrt{16} = 4$ ὥστε ἡ $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$. Ἄρα:

" Διά νά ἐξαγάγωμεν τήν τετρ. ρίζαν κλάσματος ἀρκεῖ νά ἐξαγάγωμεν χωριστά τήν τετρ.ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καί χωριστά τήν τετρ.ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ."

Εἰς τήν ἐξαγωγήν τῆς τετρ.ρίζης ἑνός κλάσματος διακρίνομεν τάς ἑξῆς περιπτώσεις:

α) Ὅταν ὁ ἀριθμητήν καί ὁ παρονομαστής εἶναι τέ- εἶναι τέλεια τετράγωνα π.χ. ἡ $\sqrt{\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}}$ ἡ $\sqrt{\frac{8}{50}} =$

$\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{2}{5}$ ἤ $\sqrt{\frac{72}{98}} = \sqrt{\frac{36}{49}} = \frac{6}{7}$.

β) Ὅταν μόνον ὁ ἀριθμητής δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ κατὰ προσέγγισιν καὶ τὴν ἀκριβῆ τετρ. ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ. π.χ. ἡ $\sqrt{\frac{7}{25}} = \frac{2}{5}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{5}$ καὶ ἡ $\sqrt{\frac{11}{49}} = \frac{3}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$.

γ) Ὅταν ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶναι τέλειον τετράγωνον ἐνῷ ὁ ἀριθμητὴς ἠμπορεῖ νὰ εἶναι, ἠμπορεῖ καὶ νὰ μὴ εἶναι τέλειον τετράγωνον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν πολλαπλασιάζομεν τὸν ἀριθμητὴν καὶ τὸν παρονομαστὴν μὲ τὸν παρονομαστὴν καὶ τοιουτοτρόπως γίνεται ὁ παρονομαστὴς τέλειον τετράγωνον π.χ.

ἡ $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{3X7}{7X7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{4}{7}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$ ἐπίσης ἡ $\sqrt{\frac{4}{11}} = \sqrt{\frac{4X11}{11X11}} = \sqrt{\frac{44}{121}} = \frac{6}{11}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{11}$.

δ) Ὅταν ὁ ἀριθμητὴς καὶ ὁ παρονομαστὴς δὲν εἶναι τέλεια τετράγωνα τότε ἢ εὑρίσκομεν τὴν τετρ. ρίζαν χωριστὰ τοῦ ἀριθμητοῦ καὶ χωριστὰ τοῦ παρονομαστοῦ ἢ τρέπομεν τὸ κλάσμα εἰς δεκαδικὸν ἀριθμόν.

Ἐξαγωγὴ τῆς τετρ. ρίζης κλάσματος μὲ ὁποιαδήποτε προσέγγισιν

Ἡ τετραγωνικὴ ρίζα κλάσματος μὲ ὁποιαδήποτε προσέγγισιν εὑρίσκεται καὶ ὡς ἑξῆς: "Πολλαπλασιάζομεν τοὺς δύο ὅρους τοῦ κλάσματος, τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τὴν τετρ. ρίζαν μὲ τὴν προσέγγισιν ποὺ θέλομεν καὶ ἔπειτα τὴν διαιροῦμεν διὰ τοῦ παρονομαστοῦ τοῦ κλάσματος".

Προβλήματα

1) Μὲ παραδείγματα νὰ φανῇ ἡ ἀλήθεια τῶν ἑξῆς προ-

τάσεων.

α) Τό τετράγωνον τοῦ ἀθροίσματος (τῆς διαφορᾶς) δύο ἀριθμῶν ἰσοῦται μέ τό τετράγωνον τοῦ πρώτου σύν (πλήν) τό διπλάσιον τοῦ πρώτου ἐπί τόν δεύτερον, σύν τό τετράγωνον τοῦ δευτέρου.

β) Ἐάν εἰς τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν προσθέσωμεν (ἀφαιρέσωμεν) τήν διαφοράν τῶν τετραγώνων αὐτῶν θά προκύψῃ τόδιπλάσιον τοῦ τετραγώνου τοῦ μεγαλυτέρου (τοῦ μικροτέρου).

γ) Ἐάν πολλαπλασιάσωμεν τό ἄθροισμα καί τήν διαφοράν δύο ἀριθμῶν προκύπτει ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων τῶν δύο αὐτῶν ἀριθμῶν.

2) Κηπουρός ἔχει 1764 κράμβας τάς ὁποίας πρόκειται νά φυτεύσῃ ἐντός τετραγώνου κήπου καί μέ τρόπον ὥστε νά ἀπέχουν μεταξύ των 1μ. καί νά σχηματίζουν γραμμάς εὐθείας καί παραλλήλους κατά μῆκος καί πλάτος. Πόσαι κράμβαι θά ὑπάρχουν εἰς κάθε σειράν;

3) Ἀγρός τετράγωνος περιέχει 94864 δένδρα ἀπέχοντα μεταξύ των 1 μ. Πόσα δένδρα ὑπάρχουν εἰς κάθε πλευράν;

4) Ἀγρότης ἤθελε νά φυτεύσῃ δένδρα εἰς σχῆμα τετραγώνου καί ἔθεσεν ἕνα ὡρισμένον ἀριθμόν εἰς κάθε πλευράν τοῦ τετραγώνου καί παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἐχρειάζοντο ἀκόμη 12 δένδρα. Κατόπιν ἔθεσεν ἕνα δένδρον ὀλιγώτερον εἰς κάθε πλευράν καί παρετήρησεν ὅτι τοῦ ἐπερίσσευσαν 23 δένδρα. Πόσα ἦσαν τά δένδρα;

5) Στρατηγός θέλει νά σχηματίσῃ τετράγωνον μέ 1152 ἄνδρας μέ τρόπον ὥστε τό ἐσωτερικόν τετράγωνον νά ἔχῃ 42 ἄνδρας εἰς κάθε πλευράν. Πόσοι ἄνδρες θά εἶναι

εἰς κάθε πλευράν τοῦ ἐξωτερικοῦ τετραγώνου καί πόσαι στῆλαι.

Α) Κύβική ρίζα ἀκριβής

Εἰς τό κεφάλαιον περί δυνάμεων εἴπομεν ὅτι τό γινόμενον 5Χ5Χ5=125 γράφεται συμβολικῶς 5^3 καί ἑπομένως εἶναι $5^3=125$. Ὁ $5^3=125$ λέγεται τρίτη δύναμις ἤ τέλειος κύβος τοῦ 5. Ἀντιστρόφως

Ὁ 5 λέγεται ἀκριβής κυβική (ἤ τρίτη) ρίζα τοῦ 5^3 ἤ τοῦ 125 καί παριστάνεται ὡς ἑξῆς:

$\sqrt[3]{5^3} = 5$ ἐπίσης $\sqrt{125} = 5$. Ἄρα

α) Ἀκριβής κυβ. ρίζα δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ ἀριθμός ὁ ὁποῖος ὅταν ὑψωθῇ εἰς τόν κῦβον δίδει ἀκριβῶς τόν δοθέντα ἀριθμόν.

β) Τέλειος κύβος λέγεται ἕνας ἀριθμός ὅταν ἔχῃ ἀκριβῆ κυβική ρίζαν. Σύμφωνα λοιπόν μέ τόν ὁρισμόν τῆς ἀκριβοῦς κυβικῆς ρίζης εἶναι:

$\sqrt[3]{1} = 1$	διότι	$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{216} = 6$	διότι	$6^3 = 216$
$\sqrt[3]{8} = 2$	"	$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{343} = 7$	"	$7^3 = 343$
$\sqrt[3]{27} = 3$	"	$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{512} = 8$	"	$8^3 = 512$
$\sqrt[3]{64} = 4$	"	$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{729} = 9$	"	$9^3 = 729$
$\sqrt[3]{125} = 5$	"	$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	"	$10^3 = 1000$

Παρατηροῦμεν ὅτι οἱ τέλειοι κύβοι τῶν μονοψηφίων ἀριθμῶν δέν τελειώνουν εἰς μηδέν.

Κριτήριον. "Ἕνας ἀριθμός ἀκέραιος εἶναι τέλειος κύβος ἄλλου ἀριθμοῦ δηλ. θά ἔχῃ ἀκριβῆ κυβική ρίζαν ὅταν ὅλοι οἱ ἐκθέται τῶν πρώτων παραγόντων αὐτοῦ διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τοῦ 3" π.χ. Ὁ $1728=2^6.3^3$ ἔχει ἀκριβῆ κυβική ρίζαν διότι οἱ ἐκθέται 6 καί 3 διαιροῦνται ἀκριβῶς διά τοῦ 3.

Β) Κυβική ρίζα μή ἀκριβής

α) Κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος.

Ἡ κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος ὁρίζεται ὅπως καί ἡ τετρ.ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος. Δηλ.

" Κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν ἀκεραίας μονάδος δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται ὁ μεγαλύτερος ἀπό ὅλους τούς ἀκεραίους τῶν ὁποίων οἱ κύβοι χωροῦν εἰς τόν δοθέντα ἀριθμόν".

π.χ. $\sqrt[3]{2}=1$, $\sqrt[3]{9}=2$, $\sqrt[3]{28}=3$, $\sqrt[3]{65}=4$, $\sqrt[3]{126}=5$

β) Κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος.

Ἡ κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος ὁρίζεται ὅπως ἡ τετρ.ρίζα κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος δηλ.

" Κυβική ρίζα κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος $(\frac{1}{\nu})$ δοθέντος ἀριθμοῦ λέγεται τό μεγαλύτερον ἀπό ὅλα τά κλάσματα πού ἔχουν παρονομαστήν (ν) καί τῶν ὁποίων οἱ κύβοι χωροῦν εἰς τόν δοθέντα ἀριθμόν π.χ. $\sqrt[3]{2}=$ 1,2 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$.

Β) Ἐξαγωγή κυβ.ρίζης ἀκεραίου

<u>Παράδειγμα.</u> Νά εὑρεθῇ ἡ κυβ.ρίζα τοῦ ἀριθμοῦ 12812904. Ἡ πρᾶξις ἐκτελεῖται ὡς ἑξῆς:

1ος τρόπος

$\sqrt[3]{12.812.904}$ | 234

$2^3 = 8$ | $3\times2^2=12$ | $3\times23^2=1587$

48 | $48:12=3$ | $6459:1587=4$

α.β 12812

$23^3 = 12167$

6459

α.β.γ. 12812904

$234^3 = 12812904$

Ø

2ος τρόπος.

$\sqrt[3]{12.812.904}$ | 234

$2^3 = 8$ | $48:(3\times2^2)=3$

48,12 | $6459:(3\times23^2)=4$

$3\times2^2\times3 = 36$

$3\times2\times3^2 = 54$

$3^3 = 27$

6459,04

$3\times23^2\times4 = 6348$

$3\times23\times4^2 = 1104$

$4^3 = 64$

ØØØØØØ

Ἐξήγησις τοῦ πρώτου τρόπου. Χωρίζομεν τόν ἀριθμόν εἰς τριψήφια τμήματα ἀρχίζοντες ἀπό τό τέλος αὐτοῦ. Τό πρῶτον πρός τ'ἀριστερά τμῆμα ἠμπορεῖ μά μή εἶναι τριψήφιον. Κατόπιν

α) Ἐξάγομεν τήν κυβικήν ρίζαν τοῦ πρώτου πρός τά ἀριστερά τμήματος (12) καί αὐτή (τό 2) εἶναι τό πρῶτομ ψηφίον τῆς ζητουμένης ρίζης.

β) Τόν κύβον τοῦ ψηφίου αὐτοῦ ($2^3=8$) ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ πρώτου τμήματος (12) καί πλησίον τοῦ ὑπολοίπου (4) καταβιβάζομεν μόνον τό πρῶτον ψηφίον (8) τοῦ δευτέρου τμήματος, τόν σχηματιζόμενον ἀριθμόν (48) διαιροῦμεν διά τοῦ ($3X2^2$) τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ πρώτου ψηφίου τῆς ζητουμένης κυβικῆς ρίζης καί τό πηλῖκον (3) εἶναι τό δεύτερον ψηφίον τῆς ζητουμένης κυβ. ρίζης. Τήν εὑρεθεῖσαν κυβικήν ρίζαν (23) ὑψώνομεν εἰς τον κύβον (δηλ.$23^3=12167$) καί τό ἐξαγόμενον (12167) ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ (12812) τόν ὁποῖον σχηματίζουν τό α. καί β. τμῆμα, καί θά προκύψῃ δεύτερον ὑπόλοιπον (645).

γ) Δεξιά τοῦ δευτέρου ὑπολοίπου (645) καταβιβάζομεν μόνον τό πρῶτον ψηφίον (9) τοῦ τρίτου τμήματος, τόν σχηματιζόμενον ἀριθμόν (6459) διαιροῦμεν διά τοῦ ($3X23^2$) τριπλασίου τοῦ τετραγώνου τοῦ ἀριθμοῦ (23) τό ὁποῖον ἀποτελοῦν τά δύο εὑρεθέντα ψηφία τῆς ζητουμένης κυβικῆς ρίζης καί τό πηλῖκον (4) εἶναι τό τρίτον ψηφίον τῆς ζητουμένης κυβικῆς ρίζης. Τήν εὑρεθεῖσαν κυβικήν ρίζαν (234) ὑψώνομεν εἰς τόν κύβον (δηλ. $234^3=12812904$) καί τό ἐξαγόμενον (12812904) ἀφαιροῦμεν ἐκ τοῦ ἀριθμοῦ τόν ὁποῖον σχηματίζουν τά α,β,γ τμήματα κ.ο.κ.

Γ) Ἐξαγωγή κυβικῆς ρίζης τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν

Ἡ κυβ. ρίζα τῶν δεκαδικῶν ἀριθμῶν εὑρίσκεται ὡς ἑξῆς:

α) Ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος ἀριθμοῦ εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3 δηλ. 3,6,9,12κλπ. τόν χωρίζομεν εἰς τριψήφια τμήματα, εὑρίσκομεν τήν κυβικήν ρίζαν ὅλου τοῦ ἀκεραίου μέρους καί θέτομεν ὑποδιαστολήν. Κατόπιν εὑρίσκομεν καί τήν κυβ.ρίζαν τοῦ δεκαδικοῦ μέρους.

β) Ἐάν ὁ ἀριθμός τῶν δεκαδικῶν ψηφίων τοῦ δοθέντος δέν εἶναι πολλαπλάσιον τοῦ 3, γράφομεν εἰς τό τέλος τοῦ δοθέντος ὅσα μηδενικά χρειάζονται πρός τοῦτο

π.χ. $\sqrt[3]{242,970624} = 6,24$. $\sqrt[3]{0,000614125} = 0,085$

$\sqrt[3]{11,85} = \sqrt[3]{11,850} = 2,3$.

Δ) Ἐξαγωγή κυβικῆς ρίζης ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $(\frac{1}{\nu})$ καί $(\frac{\mu}{\nu})$

α) Διά νά εὕρωμεν τήν κυβικήν ρίζαν ἑνός ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν κλασματικῆς μονάδος $(\frac{1}{\nu})$ πολλαπλασιάζομεν αὐτόν ἐπί τόν κύβον τοῦ παρονομαστοῦ τῆς προσεγγίσεως δηλ.ἐπί (ν^3), τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τήν κυβ.ρίζαν καί τήν διαιροῦμεν διά τοῦ παρονομαστοῦ (ν) τῆς προσεγγίσεως.

β) Διά νά εὕρωμεν τήν κυβ.ρίζαν ἑνός ὁποιουδήποτε ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν κλάσματος $(\frac{\mu}{\nu})$ πολλαπλασιάζομεν αὐτόν ἐπί τόν κύβον τοῦ κλάσματος ἀντεστραμμένον δηλ.ἐπί $(\frac{\nu^3}{\mu^3})$, τοῦ γινομένου ἐξάγομεν τήν κυβ.ρίζαν καί τήν πολλαπλασιάζομεν κατόπιν ἐπί τό κλάσμα ὅπως εἶναι.

Παράδειγμα 1ον. Νά εὑρεθῇ ἡ $\sqrt[3]{2}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ θά ἔχωμεν $2 X 15^3 = 6750$. Ἡ $\sqrt[3]{6750} = 18$ ἄρα ἡ $\sqrt[3]{2}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{15}$ εἶναι $\frac{18}{15}$ ἤ $\frac{6}{5}$

Παράδειγμα 2ον. Νά εὑρεθῇ ἡ $\sqrt[3]{5}$ κατά προσέγγισιν $\frac{2}{15}$ θά ἔχωμεν

$$\frac{2 X \sqrt[3]{5 X (\frac{15}{2})^3}}{15}$$ κάμνομεν τάς πράξεις καί εὑρίσκομεν.

Συντομίαι

α) Διά νά εὕρωμεν τήν κυβικήν ρίζαν ἀκεραίου κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. θέτομεν εἰς τό τέλος τοῦ ἀκεραίου ὑποδιαστολήν καί ἔπειτα γράφομεν τριπλάσια μηδενικά ἀπό τά μηδενικά ποῦ ἔχει ὁ παρονομαστής τοῦ $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ.καί κατόπιν ἐξάγομεν τήν κυβ.ρίζαν ὅπως εἰς τούς δεκαδικούς ἀριθμούς π.χ. ἡ $\sqrt[3]{75}$ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι ἡ $\sqrt[3]{75,000} = 4,2$.

β) Διά νά εὕρωμεν τήν κυβ.ρίζαν δεκαδικοῦ ἀριθμοῦ κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. παίρνομεν ἀπό τό δεκαδικόν μέρος του, τριπλάσια ψηφία ἀπό τά μηδενικά ποῦ ἔχει ὁ παρονομαστής $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ κλπ. Ἐάν τά δεκαδικά ψηφία του δέν ἐπαρκοῦν συμπληρώνομεν αὐτά μέ μηδενικά π.χ. ἡ κυβική ρίζα τοῦ 32,6150345 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{10}$ εἶναι ἡ κυβική ρίζα τοῦ 32,615. Ἡ κυβική ρίζα τοῦ 32,6150345 κατά προσέγγισιν $\frac{1}{1000}$ εἶναι ἡ κυβική ρίζα τοῦ 32,615034500.

Ε) Ἐξαγωγή τῆς κυβ.ρίζης τῶν κλασματικῶν ἀριθμῶν

Ἐπειδή π.χ. εἶναι $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$ ἔπεται ὅτι ἡ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$. Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι ἡ $\sqrt[3]{27} = 3$ καί ἡ $\sqrt[3]{64} = 4$. Ὥστε ἡ $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{3}{4}$. Ἄρα "Διά νά ἐξαγάγωμεν τήν κυβ.ρίζαν ἑνός κλάσματος ἀρκεῖ νά ἐξαγάγωμεν χωριστά τήν κυβ.ρίζαν τοῦ ἀριθμητοῦ καί χωριστά τήν κυβ.ρίζαν τοῦ παρονομαστοῦ."

Παραδείγματα. $\sqrt[3]{\frac{16}{54}} = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{\frac{1X4}{2X4}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1,09}{2}$

Παρατήρησις. Ἡ τετραγωνική ρίζα τελείου τετραγώνου καί ἡ κυβική ρίζα τελείου κύβου εὑρίσκονται διά τῆς ἀναλύσεως εἰς πρώτους παράγοντας π.χ. ἡ $\sqrt{2304}=\sqrt{2^2X2^2X2^2X2^2X3^2}$ = 2X2X2X2X3 = 48 καί ἡ $\sqrt[3]{21952}=\sqrt[3]{2^3X2^3X7^3}$ = 2X2X7 = 28.

Σχέσις δυνάμεως καί ρίζης

Ἡ ὕψωσις εἰς δύναμιν ἑνός ἀριθμοῦ καί ἡ ἐξαγωγή τῆς ρίζης αὐτοῦ, ὅταν ὁ δείκτης τῆς ρίζης καί ὁ ἐκθέτης τῆς δυνάμεως εἶναι ἴσοι, εἶναι πράξεις ἀντίστροφοι διότι ὁ ἀριθμός δέν ἀλλάσσει ὅταν αἱ δύο αὐταί πράξεις γίνωνται συγχρόνως π.χ. Ἐάν τόν ἀριθμόν 7 τόν ὑψώσωμεν εἰς τό τετράγωνον θά γίνῃ 49 ἐάν τώρα ἐξαγάγωμεν τήν τετρ.ρίζαν τοῦ 49 θά προκύψῃ ὁ 7.

Ἀσκήσεις

Νά εὑρεθῇ ἡ κυβική ρίζα τῶν ἑξῆς ἀριθμῶν

1)	2744	79507	912673	68,921	0,004096
	6859	12167	551368	1,404928	0,006859
	2356	74088	753571	9663,597	0,000175616

2) $\frac{64}{343}$, $15\frac{5}{8}$, $2\frac{10}{27}$ 3) 4, 2, 9 κατά προσέγγισιν 0,01.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄

Μονάδες Μετρήσεως

Γνωρίζομεν ὅτι αἱ γραμμαί, αἱ ἐπιφάνειαι, ὁ ὄγκος, τό βάρος, ὁ χρόνος κ.τ.δ. εἶναι συνεχῆ ποσά καί ὅτι διά τήν μέτρησιν ἑνός συνεχοῦς ποσοῦ συγκρίνομεν αὐτό πρός ἄλλο συνεχές καί ὁμοειδές ποσόν τό ὁποῖον παίρνομεν αὐθαιρέτως καί τό ὁποῖον κατόπιν συμφωνίας τό καλοῦμεν <u>μονάδα</u>. Κάθε χώρα λοιπόν διά νά ὑπολογίζη τά μήκη τῶν γραμμῶν πῆρε αὐθαιρέτως καί ἀπό ἕνα ὡρισμένο κομμάτι γραμμῆς τό ὁποῖον ἐκάλεσε <u>μονάδα μήκους</u>· διά νά ὑπολογίζη τά ἐμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν πῆρε αὐθαιρέτως καί ἀπό ἕνα ὡρισμένο κομμάτι ἐπιφανείας τό ὁποῖον ἐκάλεσε <u>μονάδα ἐπιφανείας</u> κλπ. Διά τοῦτο ὑπάρχει ποικιλία μονάδων ἐπιφανείας, ὄγκου κλπ. Ἀπό τάς μονάδας αὐτάς ἄλλαι σχηματίζουν τά ὑποπολλαπλάσιά των καί τά πολλαπλάσιά των σύμφωνα μέ τό δεκαδικόν σύστημα καί ἄλλαι δέν τά σχηματίζουν σύμφωνα μέ τό δεκαδικόν σύστημα.

<u>Μονάδες μήκους</u>

α) Μονάς μήκους μέ δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν εἶναι τό <u>μέτρον</u> (πασσέτο). Τό μέτρον εἶναι γαλλική μονάς ἴση μέ τό $\frac{1}{40.000.000}$ τῆς περιφερείας τοῦ μεσημβρινοῦ τῶν Παρισίων καί ὡρίσθη ὑπό τῆς Γαλλικῆς Ἐθνοσυνελεύσεως τό ἔτος 1791. Τό πρῶτον πού ἔγινε φυλάσσεται εἰς Sèvres τῆς Γαλλίας καί εἶναι καμωμένον ἀπό ἰριδιοῦχον λευκόχρυσον.

<u>Ὑποπολλαπλάσια τοῦ μέτρου</u>. Τό μέτρον διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη καί τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά λέγεται <u>παλάμη</u> ἤ <u>Ὑποδεκάμετρον</u> ἤ <u>Δεκατόμετρον</u>. Ἡ παλάμη διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη καί τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά λέγεται <u>Δάκτυλος</u> ἤ <u>Ἑκατοστόμετρον</u> ἤ <u>Ὑφεκατόμετρον</u> καί κοινῶς <u>Πόντος</u>. Ὁ δάκτυλος διαιρεῖται εἰς 10 ἴσα μέρη καί τό κάθε ἕνα ἀπό αὐτά λέγεται <u>Γραμμή</u> ἤ <u>Χιλιοστόμετρον</u> ἤ <u>Ὑποχιλιόμετρον</u>. Δηλ.

1μ.=10π.=100δ.=1000γρ.	1π.=0,1μ.	Ἐπειδή τό
1π.= 10δ.= 100γρ.	Ὥστε 1δ.=0,01μ.	μέτρον εἶναι
1δ.= 10γρ.	1γ.=0,001μ.	μονάς μέ δε-

καδικήν ὑποδιαίρεσιν διά τοῦτο τό ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μέ τό μέτρον γράφεται ὡς δεκαδικός ἀριθμός π.χ. ἕνας δρόμος ἔχει μῆκος 425μ. 7π. 6δ.3 γρ.῾Ο ἀριθμός αὐτός γράφεται 425,763 μ.

Πολλαπλάσια τοῦ μέτρου. Τό Δεκάμετρον = 10μ. Τό ῾Εκατόμετρον = 100 μ. Τό Χιλιόμετρον ἤ Στάδιον = 1000 μ.῞Ενα χιλιόμετρον εἶναι διάστημα τό ὁποῖον ἕνας πεζός βαδίζει μέ συνηθισμένο βάδισμα εἰς 12 πρῶτα λεπτά.

β) Μονάδες μήκους χωρίς δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν

1) Τεκτονικός πῆχυς: 1 τεκτ.πῆχυς = 0,75 μ.ἤ $\frac{3}{4}$ μ. καί διαιρεῖται εἰς 24 δακτύλους. τόν μεταχειρίζονται οἱ τέκτονες διά τήν μέτρησιν οἰκοπέδων,τοίχων κλπ.

2) ᾿Εμπορικός πῆχυς (ἐντεζέ). 1 ἐμπ.πῆχυς = 0,648μ. Εἰς τό ἐμπόριον ὅμως λαμβάνεται 1 ἐμπ.πῆχυς=0,64μ. καί διαιρεῖται εἰς 8 ρούπια.

3) Ρωσσικός πῆχυς (ἀρσίν) 1 ρωσ.πῆχυς = 0,711 μ. καί διαιρεῖται εἰς 8 ρούπια.1500 ρωσ.πήχεις=1 βέρτσιον=1067 μ.

4)῾Υάρδα (᾿Αγγλική καί ᾿Αμερικανική μονάς).

1 ὑάρ.= 3 πόδας = 36 δακτύλους ἤ ἴντζες

1 πούς = 12 δακτύλους ἤ ἴντζες

1 δάκτυλος διαιρεῖται εἰς $\frac{100}{100}$

1 ὑάρδ.= 0,914 μ. 1 πούς = 0,305 μ. 1 δάκτ.ἤ ἴντζα= 2,5 πόντοι.

5) ᾿Οργυιά (Γαλλική μονάς)

1 ὀργ.=6 πόδ.ς=72 δακτύλους

1 πούς =12 δακτύλους. ῾Η 1 ὀργ.=1,95 μ.Μετά τήν παραδοχήν τοῦ μέτρου ἡ ὀργυιά ἐγκατελείφθη.Σήμερον τήν μεταχειρίζονται οἱ δῦται καί οἱ σπογγαλιεῖς.

Μονάδες μεγάλων Ἀποστάσεων

1) Ταχυδρομική ἤ μετρική λεῦγα = 4000 μ.

2) Γεωγραφική ἤ Γηΐνη λεῦγα = 4444,44 μ.

3) Ναυτική λεῦγα = 5555,55 μ.

4) Γεωγραφικόν ἤ Γερμανικόν μίλιον = 7420,44 μ.

5) Ἀγγλικόν μίλιον = 1760 μ.

6) Ναυτικόν μίλιον = 1852 μ. Τό $\frac{1}{120}$ τοῦ ναυτικοῦ μιλίου εἶναι ἴσον μέ 15,432 μ. καί λέγεται κόμβος διότι εἶναι ἡ ἀπόστασις δύο διαδοχικῶν κόμβων τοῦ δρομομέτρου τῶν πλοίων. Οἱ ναυτικοί ὅμως ὅταν λέγουν ὅτι τό πλοῖον ἔχει ταχύτητα π.χ. 35 κόμβων ἐννοοῦν 35 μίλια διότι κατά τούς ναυτικούς τό πλοῖον εἰς $\frac{1}{2}$ τοῦ πρώτου λεπτοῦ τρέχει 35 κόμβους, εἰς $\frac{2}{2}$ = 1 πρῶτον λεπτόν τρέχει 35Χ2 κόμβους καί 60 πρῶτα λεπτά = 1 ὥρ. θά τρέχῃ 35Χ2Χ60 κόμβους = 35Χ120 κόμβους = 1 μίλιον Χ 35 = 35 μίλια ναυτικά.

Μονάδες Ἐπιφανείας

α) Μονάς ἐπιφανείας μέ δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν εἶναι τό τετραγωνικόν μέτρον δηλ. τετράγωνον τοῦ ὁποίου κάθε πλευρά ἔχει μῆκος 1 μ.

Ὑποπολλαπλάσια τοῦ τετραγωνικοῦ μέτρου, Τό τετραγωνικόν μέτρον ἰσοῦται μέ 100 τετραγωνικάς παλάμας. Ἡ τετραγωνική πάλάμη ἰσοῦται μέ 100 τετραγωνικούς δακτύλους. Ὁ τετραγωνικός δάκτυλος ἰσοῦται μέ 100 τετραγωνικάς γραμμάς. Δηλ.

1τμ.=100τ.π.=10.000τ.δ.=1.000.000τ.γρ.		1τ.π=0,01τ.μ
1 τ.π.= 100 τ.δ.= 10.000 τ.γρ.	ὥστε	1τ.δ=0,001τ.μ
1 τ.δ. = 100 τ.γρ.		1τγρ=0,00000

Ἐπειδή τό τετραγωνικό μέτρον εἶναι μονάς μέ δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν, τό ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μέ τό

τετραγωνικόν μέτρον γράφεται ὡς δεκαδικός ἀριθμός.
π.χ. Μία ἐπιφάνεια ἔχει ἔκτασιν 12 τμ 5 τ.π.18 τ.δ. 54 τ.γρ. Ὁ ἀριθμός αὐτός γράφεται καί ὡς ἑξῆς 12,051854 τμ.

Πολλαπλάσια τοῦ τετρ.μέτρου

τό τετραγωνικόν δεκάμετρον ἤ Ἄριον = 100 τμ. Τό τετραγωνικόν ἑκατόμετρον ἤ Ἑκτάριον = 10.000 τμ. Τό τετραγωνικόν χιλιόμετρον = 1.000.000 τμ.

β) Μονάδες ἐπιφανείας χωρίς δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν. 1) Τετραγωνικός τεκτονικός πῆχυς = $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ τμ. $=\frac{9}{16}$ τμ. Τόν μεταχειρίζονται διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν οἰκοπέδων. Διά τήν μέτρησιν τῆς ἐπιφανείας τῶν ἀγρῶν κλπ. χρησιμοποιεῖται τό βασιλικόν στρέμμα = 1000 τμ . καί εἶναι αὐτό ἕνα τετράγωνον μέ πλευράν 31,62 μ. Πρό αὐτοῦ ὑπῆρχε τό Παλαιόν ἤ Πελοποννησιακόν στρέμμα = 1270,2 τμ.=1,27 βασιλ. στρέμματα. Ἑπομένως 1 βασιλ.στρ.= 0,787 παλ.στρ.
2) Τετραγωνικός Ρωσσικός πῆχυς =$(0,711)^2$ τ.μ. = 0,505 τ.μ. 3) Τετραγωνική Ὑάρδα = $(0,914)^2$ τ.μ.= = 0,835 τ.μ. Ἡ 1 τετρ.ὑάρ.= 9 τετρ.πόδας. Ὁ 1 τετρ. πούς = 144 τετρ.δάκτ. ἤ τετρ.ἴντζες.

Μονάδες Ὄγκου

α) Μονάς ὄγκου μέ δεκαδικήν ὑποδιαίρεσιν εἶναι τό κυβικόν μέτρον δηλ.ἕνας κύβος μέ ἀκμήν μήκους 1 μ.

Ὑποπολλαπλάσια τοῦ κυβικοῦ μέτρου. Τό κυβ.μέτρον ἰσοῦται μέ 1000 κυβ.παλάμας. Ἡ κυβ.παλάμη ἰσοῦται μέ 1000 κυβ.δακτύλους. Ὁ κυβ.δάκτυλος ἰσοῦται μέ 1000 κυβ.γραμμάς. Δηλ.

1 κ.μ. = 1000 κ.π.

1 κ.π. = 1000 κ.δ.

1 κ.δ. = 1000 κυβ.γρ. Ὥστε

1 κ.μ. = 1000 κ.π. = 1.000.000 κ.δ. = 1000.000.000 κ.γρ.

Ἐπειδὴ τὸ κυβικὸν μέτρον εἶναι μονὰς μὲ δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν, τὸ ἐξαγόμενον τῆς μετρήσεως μὲ τὸ κυβικὸν μέτρον γράφεται ὡς δεκαδικὸς ἀριθμός. π.χ. Ὁ ὄγκος σώματος εἶναι 2 κ.μ. 34 κ.π. 147 κ.δ. 245 κ.γρ. Ὁ ἀριθμὸς αὐτὸς γράφεται ὡς ἑξῆς 2,034147245 κ.μ.

<u>Πολλαπλάσια τοῦ κυβ.μέτρου</u>

<u>Τὸ κυβικὸν δεκάμετρον</u> = 1000 κ.μ. <u>Τὸ κυβικὸν ἑκατόμετρον</u> = 1.000.000 κ.μ. <u>Τὸ κυβικὸν χιλιόμετρον</u> = 1.000.000.000 κ.μ.

β) <u>Μονάδες ὄγκου χωρὶς δεκαδικὴν ὑποδιαίρεσιν.</u> 1) <u>Κυβικὸς τεκτονικὸς πῆχυς</u> = $(\frac{3}{4})^3$ κ.μ. = $\frac{27}{64}$ κ.μ. χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν τοίχων. 2) <u>Κυβικὸς ρωσσικὸς πῆχυς</u> = $(0,711)^3$ κ.μ. = 0,3544 κ.μ. <u>3) Κυβικὴ ὑάρδα</u> = $(0,914)^3$ κ.μ. = 0,7645 κ.μ. Ἡ 1 κυβ. ὑάρδα = 27 κυβ.πόδας. Ὁ 1 κυβ.ποῦς = 172 κυβ.δακτύλους ἢ κυβ.ἴντζες 4) <u>Κόρος ἢ τόνος</u> = 2,832 κ.μ. καὶ χρησιμοποιεῖται εἰς τὴν μέτρησιν τοῦ ὄγκου τῶν πλοίων.

<u>Μονάδες χωρητικότητος</u>

Ἡ χωρητικότης μετρεῖται μὲ τὰς μονάδας ὄγκου.

Μονάδες χωρητικότητος λοιπὸν εἶναι:

<u>Τὸ κυβικὸν μέτρον</u> δηλ. ἡ χωρητικότης ἑνὸς κυβικοῦ μέτρου.

<u>Τὸ λίτρον ἢ ἡ λίτρα</u> δηλ. ἡ χωρητικότης μιᾶς κυβικῆς παλάμης καὶ χρησιμοποιεῖται μόνον εἰς τὰ ὑγρά. Ἐπει-

δή 1 κ.μ.=1000 κ.π.=1000 λίτρα διά τοῦτο,διά νά τρέψωμεν κυβ.μέτρα εἰς λίτρα πολλαπλασιάζομεν τά κυβ. μέτρα ἐπί 1000 καί διά νά τρέψωμεν λίτρα εἰς κυβ.μέτρα διαιροῦμεν τά λίτρα διά 1000.

Τό Ἑκατόλιτρον ἤ Κοιλόν = 100 λίτρα, καί χρησιμοποιεῖται εἰς τήν μέτρησιν τῶν σιτηρῶν καί δημητριακῶν καρπῶν.

1 κοιλόν σίτου = 24 όκ.περίπου.

Τό γαλλόνι δηλ.ἡ χωρητικότης 277,274 κυβ.ἰντζῶν

1 γαλλόνι = 8 πίντας = 32 ζίλλα

1 πίντα = 4 ζίλλα

1 γαλλόνι=4,54 λίτρα = 3,55 όκ. (Γαλλόνι βενζίνης= 3,33 χιλιόγραμμα=2,6 όκ.βενζίνης). 8 γαλλόνια = 36 λίτρα περίπου = 1 μποῦσελ.

64 γαλλόνια = 290,78 λίτρα = 1 κουάρτερ.

Ἡ ὀκᾶ τῶν ὑγρῶν. Ἡ ὀκᾶ τῶν ὑγρῶν εἶναι δοχεῖον κυλινδρικόν τό ὁποῖον γεμίζει ἀπό βάρος μιᾶς σταθμικῆς ὀκᾶς. Τό μέγεθος τοῦ δοχείου αὐτοῦ δέν εἶναι τό ἴδιον δι'ὅλα τά ὑγρά."Οσον μικρότερον εἶναι τό ειδικόν βάρος τοῦ ὑγροῦ τόσον μεγαλύτερον εἶναι καί τό δοχεῖον αὐτό π.χ.τό δοχεῖον τῆς ὀκᾶς τοῦ λαδιοῦ εἶναι μεγαλύτερον ἀπό τό δοχεῖον τῆς ὀκᾶς τοῦ κρασιοῦ διότι τό λάδι ἔχει μικρότερον ειδικόν βάρος ἀπό τό κρασί.

μία ὀκᾶ λάδι καί μία ὀκᾶ κρασί ἔχουν τό ἴδιον βάρος ἀλλά ἕνα λίτρον λάδι καί ἕνα λίτρον κρασί δέν ἔχουν τό ἴδιον βάρος.

Τό Στέρ (Γαλλική μονάς) εἶναι κυβικόν μέτρον μέ βάσιν καί μέ δύο ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας καί χρησιμοποιεῖται εἰς τά καυσόξυλα.

1 στέρ καυσόξυλα δέν εἶναι ἀκριβῶς 1 κυβ.μέτρον ἀλ-

λά όλιγώτερόν κατά 0,35 κυβ.μέτρου περίπου όσος εί-
ναι ο κενός χώρος πού μένει μεταξύ των κιπυσοξύλων.

Ό Κόρος ή τόνος = 2,832 κυβ.μέτρα καί χρησιμοποι-
εΐται διά τήν μέτρησιν τής χωρητικότητος τών πλοίων,

Μονάδες Βάρους

α) Μονάς βάρους μέ δεκαδικήν υποδιαίρεσιν είναι τό Χιλιόγραμμον ή Κιλόν δηλ.τό βάρος ύδατος άπεσταγμένου καί θερμοκρασίας 4° Κελσίου, τό όποΐον χωρεΐ έντός μιάς κυβικής παλάμης.Τό χιλιόγραμμον διαιρεΐται είς 1000 ίσα μέρη τά όποΐα λέγονται γραμμάρια. Ένα γραμμάριον είναι τό βάρος ύδατος άπεσταγμένου καί θερμοκρασίας 4°Κ.τό όποΐον χωρεΐ είς ενα κυβικόν δάκτυλον.

Πολλαπλάσια τοΰ Χιλιογράμμου

Ό Μετρικός στατήρ = 100 χιλιόγραμμα ή Κιλά. Ό μετρικός τόνος =1000 χιλιόγραμμα ή Κιλά = 10 μετρικοί στατήρες. Ώστε

1 μετρ.τόνος = 10 μετρ.στατ.=1000 χιλιόγρ.=1000.000γρ.

1 μετρ.στατ.=100 χιλιόγρ.=100.000 γρ.

1 χιλιόγρ.= 1.000 γρ.

β) Μονάδες βάρους χωρίς δεκαδικήν υποδιαίρεσιν. 1) Ή σταθμική όκά, ή όποία διαιρεΐται είς 400 δράμια.Πολλαπλάσιον αύτής είναι ό στατήρ (πού λέγεται καί καντάρι) καί είναι ίσος μέ 44 όκ.

1 όκ.=1282 γραμμάρια = 1,282 χιλιόγραμμα ή Κιλά.

1 δράμι= 3,2 γραμμάρια καί 1 γραμμάριον = 0,32 τοΰ δραμίου

1 χιλιόγραμμον ή κιλόν = 312,5 δράμια=0,78 τής όκάς.

1 τόνος = 780,031 όκάδες.2) Ή Ένετική λίτρα = 480 γραμμάρια = $\frac{3}{8}$ τής όκάς = 150 δράμια.Χρησιμοποιεΐται

διά τήν στάθμευσιν τῆς σταφίδος.

3) Ἡ Ἀγγλική λίτρα ἤ Λίμπρα = 453,6 γραμμάρια= =141,75 δράμια καί ὑποδιαιρεῖται εἰς 16 ὄνζες ἤ ούγγιές. 4) Ὁ Ρωσσικός τόνος.

1 ρωσ.τόνος = 6 μπέρκοβιτσ

1 μπέρκοβιτσ = 10 πούντια

1 πούντιον=40 φούντια

1 ρωσ.τόνος=792 όκ. 1 φούντιον = 132 δράμια.

5) Τό μετρικόν καράτιον =0,2 γραμμαρίου καί χρησιμοποιεῖται διά τήν ζύγισιν τῶν πολυτίμων λίθων.1 δράμι = 16 καρατίων,

Μονάδες Χρόνου

Ἡ ἡμέρα ἤ ἡμερονύκτιον. Εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάζεται ἡ Γῆ διά νά κάμῃ μίαν πλήρη περιστροφήν περί τόν ἄξονά της.

Ὑποπολλαπλάσια τῆς ἡμέρας. 1 Ημ.=24 ὥρας.1 ὥρα= 60 πρῶτα λεπτά καί 1 π.λ.= 60 δεύτερα λεπτά.

Πολλαπλάσια τῆς ημέρας. Ἡ ἑβδομάς = 7 ἡμέραι. Ὁ μήν. Τό Ἔτος.

Ἔχομεν ἔτος Τροπικόν καί ἔτος Πολιτικόν. Τό τροπικόν ἔτος εἶναι ὁ χρόνος πού χρειάζεται ἡ Γῆ διά νά κάμῃ περί τό Ἥλιον μίαν πλήρη περιφοράν καί ἔχει $365\frac{1}{4}$ ἡμέρας περίπου. Πολιτικόν ἔτος εἶναι τό ἔτος πού ἀποτελεῖται ἀπό ἀκέραιον ἀριθμόν ἡμερῶν καί εἶναι δύο εἰδῶν Κοινόν καί Δίσεκτον.Τό κοινόν ἔτος ἔχει 365 ἡμέρας καί εἰς αὐτό ὁ Φεβρουάριος ἔχει 28 ἡμέρας.Τό Δίσεκτον ἔτος ἔχει 366 ἡμέρας καί εἰς αὐτό ὁ Φεβρουάριος ἔχει 29 ἡμέρας.Κάθε 4 ἔτη τό ἕνα εἶναι Δίσεκτον καί εἶναι ἐκεῖνο πού ὁ ἀριθμός του διαιρεῖται ἀκριβῶς διά τοῦ 4.

Μονάδες Νομισμάτων

1) Εἰς τὴν Ἑλλάδα ἡ δραχμή = 100 λεπτά
2) Εἰς τὴν Τουρκίαν ἡ λίρα. Ἡ 1 τουρκ.λίρα = 100 γρόσια 1 γρόσι = 40 παράδες.
3) Εἰς τὴν Αἴγυπτον ἡ Λίρα. Ἡ 1 Αἰγυπτ.λίρα = 100 πιάστρες, 1 πιάστρ.= 10 μιλιέμ.
4) Εἰς τὴν Ἀγγλίαν ἡ Λίρα. Ἡ 1 Ἀγγλ.λίρα=20 σελίνια 1 σελίνιον = 12 πέννες

1 πέννα = 4 φαρδίνια.

Εἰδικὸν Βάρος ἢ Πυκνότης τῶν σωμάτων

Τὰ διάφορα σώματα λαμβανόμενα ὑπὸ τὸν αὐτὸν ὄγκον δὲν ἔχουν καὶ τὸ αὐτὸ βάρος ἀλλὰ τὸ ἕνα ἔχει διαφορετικὸν βάρος ἀπὸ τὸ ἄλλο. Μὲ ἄλλας λέξεις: Κάθε σῶμα ἔχει ειδικό του βάρος τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται Εἰδικὸν Βάρος τοῦ σώματος. Διακρίνομεν δὲ δύο Εἰδικὰ βάρη. Τὸ Ἀπόλυτον καὶ τὸ Σχετικόν.

α) Ἀπόλυτον Εἰδ.Βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ βάρος 1 κυβ.δακτύλου τοῦ σώματος τούτου. β) Σχετικὸν Εἰδ.βάρος ἢ ἁπλῶς Εἰδ.Βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ πηλίκον τῆς Διαιρέσεως τοῦ Ἀπολύτου Εἰδ.βάρους τοῦ σώματος τούτου διὰ τοῦ Ἀπολύτου εἰδ.βάρους νεροῦ ἀπεσταγμένου καὶ θερμοκρασίας 4° Κελσίου. Ἐπειδὴ ὅμως ἀντὶ τοῦ βάρους 1 κυβ.δακτύλου ἑνὸς σώματος ἠμποροῦμεν νὰ πάρωμεν τὸ βάρος ἑνὸς ἄλλου ὄγκου τοῦ σώματος τούτου καὶ νὰ τὸν συγκρίνωμεν πρὸς τὸ βάρος ἴσου ὄγκου νεροῦ διὰ τοῦτο λέγομεν ὅτι: Εἰδικὸν βάρος ἑνὸς σώματος λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ βάρους ὁποιουδήποτε ὄγκου τοῦ σώματος τούτου, διὰ τοῦ βάρους ἴσου ὄγκου νεροῦ. Ἀλλὰ συμβαίνει, τὸ βάρος καὶ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ καὶ παριστάνονται μὲ τόν ἴδιον ἀριθμόν καί ἐπομένως ἠμποροῦμεν νά πάρωμεν τόν ὄγκον τοῦ νεροῦ ἀντί τοῦ βάρους του, καί ἐπειδή ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ εἶναι ἴσος μέ τόν ὄγκον τοῦ σώματος διά τοῦτο ὁρίζομεν τό Εἰδικόν Βάρος ὡς ἑξῆς:

<u>Εἰδικόν βάρος</u> ἑνός σώματος λέγεται τό πηλῖκον τῆς διαιρέσεως τοῦ <u>Βάρους</u> του διά τοῦ <u>"Ογκου</u> του. Δηλ, Εἰδ.Βάρ. $= \frac{\text{Βάρος}}{\text{Ογκου}}$. Ὅταν τό βάρος εἶναι τόνοι ὁ ὄγκος θά εἶναι κυβ.μέτρα. Ὅταν τό βάρος εἶναι χιλιόγραμμα ο "Ογκος θά εἶναι κυβ.παλάμαι. Ὅταν τό βάρος εἶναι γραμμάρια ὁ "Ογκος θά εἶναι κυβ.δάκτυλοι. Ὅταν τό βάρος εἶναι ὀκάδες τότε θά τρέψωμεν τάς ὀκάδας εἰς χιλιόγραμμα ἤ εἰς γραμμάρια. Ὅταν λέγωμεν π.χ. τό Εἰδ. βάρος τοῦ χάλυβος εἶναι 7,816 θά ἐννοοῦμεν ὅτι: ἕνας ὁποιοσδήποτε ὄγκος χάλυβος εἶναι κατά 7,816 φοράς βαρύτερος ἀπό ἴσον ὄγκον νεροῦ: Δηλ. ἐάν ἕνας ὄγκος νεροῦ ἔχῃ βάρος 100 χιλιογράμμων (ἤ 100 γραμμαρίων) τότε ἴσος ὄγκος χάλυβος θά ἔχῃ βάρος 100X7,816 = 781,6 χιλιογράμμων (ἤ 100X7,816 = 781,6 γραμμαρίων). Ὥστε τό εἰδικόν βάρος εἶναι ἀριθμός ἀφηρημένος.

Ἀπό τόν τύπον Εἰδ.βάρος $= \frac{\text{Βάρος}}{\text{ὄγκου}}$, σύμφωνα μέ τά γνωστά ἔχομεν:

α) Βάρος = "Ογκος X Εἰδ.βάρος καί β) "Ογκος $= \frac{\text{Βάρος}}{\text{εἰδ,βάρ.}}$

Τόν ὄγκον ἑνός σώματος εὑρίσκομεν καί μέ τήν Ἀρχήν τοῦ Ἀρχιμήδους ἡ ὁποία λέγει ὅτι "Κάθε σῶμα στερεόν ὅταν βυθισθῇ εἰς τό νερό θά ἐκτοπίσῃ τόσο νερό ὅσος εἶναι ὁ ὄγκος του". π.χ. Ἕνα σῶμα εἰς τόν ἀέρα ζυγίζει 540 γραμμάρια καί εἰς τό νερό 440 γραμμάρια, η διαφορά 540-440=100 γραμμάρια εἶναι τό βάρος τοῦ νεροῦ πού ἔχει ἐκτοπισθῇ ἀπό τό σῶμα αὐτό.

Ἐπειδή 1 γραμμάριον νεροῦ ἔχει ὄγκον 1 κυβ.δάκτυλον ἕπεται ὅτι τά 100 γραμμάρια νεροῦ ἔχουν ὄγκον 100 κυβ.δακτύλων δηλ.ὁ ὄγκος τοῦ σώματος αὐτοῦ εἶναι 100 κυβ.δάκτυλοι.

Προβλήματα ἐπί τοῦ μετρικοῦ συστήματος καί εἰδ. βάρους

1) Ὁ ἀριθμός 4μ.7π.5δ.6 γρ.νά γίνῃ δεκαδικός καί ἔπειτα νά τραπῇ εἰς δακτύλους καί τέλος εἰς χιλιόμετρα.

Λύσις. 4 μ.7π.5δ.6 γρ.= 4,756. Διά νά τραπῇ εἰς δακτύλους μεταφέρομεν τήν ὑποδιαστολήν πρός τά δεξιά δύο θέσεις δηλ.475,6 δάκτυλοι. Διά νά τραπῇ εἰς χιλιόμετρα μεταφέρομεν τήν ὑποδιαστολήν πρός τ'ἀριστερά τρεῖς θέσεις δηλ. 0,004756 χλμ. Διατί;

2) Νά γίνουν δεκαδικοί οἱ ἀριθμοί α) 3 τμ.12 τπ. β) 4 τμ.15 τ.δ. γ) 16 τπ.5 τ.δ.

Λύσις: α) 3,12 τμ. β) 4,0015 τμ. γ) 0,1605 τμ.

3) Ὁ ἀριθμός 14,5386 τ.μ.νά γίνῃ τετρ.παλάμαι.

Λύσις. Μεταθέτω τήν ὑποδιαστολήν πρός τά δεξιά δύο θέσεις δηλ.1453,86 τ.π.

4) Νά γίνουν δεκαδικοί οἱ ἀριθμοί α) 13 κ.μ.17 κ.π. 4 κ.δ. β) 20 κ.μ. 437 κ.δ.

Λύσις α) 13,017004 κ.μ. β) 20,000437 κ.μ.

5) Ἀπαγγείλατε τούς ἀριθμούς α) 4,25 κ.μ. β) 7,5431 κ.μ.

Λύσις α) Γράφομεν δεξιά τοῦ 4,25 κ.μ. ἕνα μηδενικόν διά νά γίνῃ τριψήφιον τό δεκαδικόν μέρος δηλ. 4,250 κ.μ. καί τώρα ἀπαγγέλλομεν 4 κ.μ.καί 250 κ.πάλ. β) χωρίζομεν τό δεκαδικόν μέρος τοῦ 7,5431 κ.μ. εἰς τριψήφια τμήματα συμπληρώνοντες τό τελευταῖον τμήμα μέ δύο μηδενικά δηλ.7,543.100 καί ἀπαγγέλλομεν 7 κ.μ.543 κ.π. 100 κ.δ.

6) Νά τραποῦν ὁ μέν 2,45678 κ.μ.είς κυβ.παλ.ο δέ 3,7812459 κ.μ.είς κυβ.δακτ.

<u>Λύσις</u>. 2,45678 κ.μ.= 2456,78 κ.π. καί 3,7812459= = 3781245,9 κυβ.δάκτ.

7) Νά τραποῦν είς μέτρα α) 75 πήχεις ἐμπορίου β) 55 υάρδες.

<u>Λύσις</u> α) 0.64 μ.Χ 75=48 μ. β) 0,914μ.Χ55=50,27 μ.

<u>Συμπέρασμα.</u> Ὅταν τρέπωμεν μονάδας είς ἄλλας μεγαλυτέρας τότε κάμνομεν πολλαπλασιασμόν.

8) Νά τραποῦν α) 48 μ.είς πήχ.ἐμπορίου β) 50,27 μ.είς υάρδας.

<u>Λύσις</u>. α) 48:0,64=75 πήχεις β) 50,27:0,914 =55 υάρδαι.

<u>Συμπέρασμα.</u> Ὅταν τρέπωμεν μονάδας είς ἄλλας μικροτέρας τότε κάμνομεν διαίρεσιν.

9) Ἕνα κομμάτι χαλκοῦ ἔχει βάρος 61,866 χιλιόγραμμα καί ὄγκον 7 κ.παλ.ποῖον τό είδ.βάρος τοῦ χαλκοῦ;

<u>Λύσις</u>. Εἰδ.βάρος = $\frac{61,866}{7}$ = 8,838

10) Σφαῖρα ἀπό μόλυβδον ζυγίζει 17,230 χιλιόγραμμα. Τό είδ.βάρος τοῦ μολύβδου εἶναι 11,35.Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας;

<u>Λύσις</u>. 17,230:11,35 = 1,518 κυβ.παλ.

11) Ἕνα κομμάτι ψευδαργύρου είδ.βάρ.=7,19 ἔχει ὄγκον 1,5 κ.παλ.Πόσον εἶναι τό βάρος του;

<u>Λύσις</u>. α) 1,5Χ7,19=10,785 χιλιόγραμμα

β) 10,785Χ1000 = 10785 γραμμάρια γ) 10,785Χ0,78=
=8,4123 ὀκάδας.

12) Πόσον βάρος ἔχουν τά 7,235 κυβ.μέτρ.νεροῦ;

<u>Λύσις</u>. Ἐπειδή ὅταν ὁ ὄγκος εἶναι κυβ.μέτρα τότε τό βάρος εἶναι τόνοι καί ἐπειδή 1 τόνος = 1000 χιλιόγραμμα διά τοῦτο θά ἔχωμεν.

7,235Χ1000 = 7235 χιλιόγρ.= 7 τόνοι καί 235 χιλιογρ.

13) Νά εὑρεθῇ πόσον ὄγκον ἔχουν τά 375 χιλιόγρ. νερό.

<u>Λύσις</u>. Ἐπειδή ὅταν τό βάρος εἶναι εἰς χιλιόγραμμα τότε ο ὄγκος εἶναι εἰς κυβ.παλ. θά ἔχωμεν:Ὄγκος= =375 κυβ.παλ.=0,375 κυβ.μέτρου.

14) Δοχεῖον χωρητικότητος 3 κυβ.παλ.εἶναι γεμᾶτο βενζίνη εἰδ.βάρους 0,884. Ζητεῖται τό βάρος τῆς βενζίνης ποῦ περιέχει.

<u>Λύσις</u>. Ἐάν τό δοχεῖον ἦτο γεμᾶτο μέ νερό θά εἶχε βάρος 3 χιλιογρ. Τῶρα ποῦ εἶναι γεμᾶτο μέ βενζίνη εἰδ.βάρους 0,884 θά ἔχῃ βάρος 3Χ0,884 = 2,652 χιλιόγραμμα.

15) Πόσα δράμια λάδι κλέπτει ἐκεῖνος ποῦ πωλεῖ τό λάδι μέ τήν ὀκᾶ τοῦ κρασιοῦ;

<u>Λύσις</u>: Τό εἰδ.βάρος κρασιοῦ = 0,990 καί τό εἰδ. βάρος λαδιοῦ = 0,915, η διαφορά αὐτῶν 0,075 φανερώνει πόσας φοράς τό κρασί εἶναι βαρύτερον ἀπό τό λάδι. Ἑπομένως εἰς τά 400 δράμια = 1 ὀκᾶ, προκύπτει διαφορά 400Χ0,075 = 30 δράμια. Δηλ.κλέπτει 30 δράμια.

16) Ἕνα κομμάτι ἀπό μέταλλον εἰδ.βάρους =10,5 ζυγίζει εἰς τόν ἀέρα $2\frac{5}{8}$ ὀκ. καί εἰς τό νερό $2\frac{3}{8}$ ὀκ.

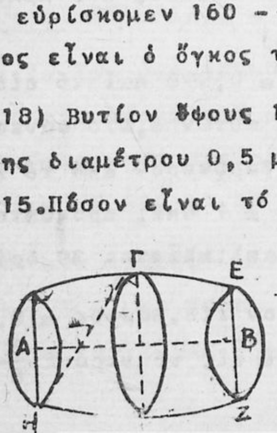
'Υπάρχει κοιλότης είς τό έσωτερικόν αύτοῦ;

<u>Λύσις</u>. Είς τόν άέρα ζυγίζει $2\frac{5}{8} X 1280 = 3360$ γραμμάρια καί είς τό νερό ζυγίζει $2\frac{3}{8} X 1280 = 3040$ γραμμάρια. Ή διαφορά 320 γραμμάρια φανερώνει ὅτι τό κομμάτι αύτό ὅταν βυθισθῇ είς τό νερό χάνει άπό τό βάρος του 320 γραμμάρια δηλ.έχει ὄγκον 320 κυβ. δακτ. 'Επειδή Β=Ο Χ είδ.β. θά ἔχωμεν 320Χ10,5 =3360 γραμμ.δηλ.όσον ζυγίζει τό κομμάτι είς τόν άέρα. Άρα τό κομμάτι δέν ἔχει κοιλότητα έσωτερικῶς.

17) Ενα κομμάτι άπό μέταλλον είδ.βάρους 7,8 ζυγίζει είς τόν άέρα 250 δράμια καί είς τό νερό 200 δράμια. Ύπάρχει είς τό έσωτερικόν κοιλότης,

<u>Λύσις</u>. Είς τόν άέρα ζυγίζει 250Χ3,2 = 800 γραμ. καί είς τό νερό 200Χ3,2= 640 γραμμ. Ή διαφορά αύτῶν 160 γρμ. σημαίνει οτι τό κομμάτι ἔχει"ὄγκον 160 κυβ. δακτύλων. 'Επειδή δέ τό γινόμενον 160Χ7,8=1248 γραμ. εἶναι μεγαλύτερον άπό τά 800 γραμμ.πού ζυγίζει τό κομμάτι είς τόν άέρα, διά τοῦτο τό κομμάτι ἔχει κοιλότητα έσωτερικῶς. Ό ὄγκος τῆς κοιλότητος αύτῆς ὑπολογίζεται ὡς έξῆς: Άπό τόν ὄγκον 160 κυβ.δακτ.άφαιροῦμεν τόν ὄγκον $\frac{800}{7,8}$ κυβ.δακτ. πού ἔχει τό κομμάτι καί εὑρίσκομεν $160 - \frac{800}{7,8} = 57$ κυβ.δακτ. περίπου. Τόσος εἶναι ὁ ὄγκος τῆς κοιλότητος.

18) Βυτίον ὕψους 1,5 μ.διαμέτρου βάσεως 0,3 μ.καί μέσης διαμέτρου 0,5 μ.εἶναι γεμᾶτο λάδι είδ.βάρους= 0,915.Πόσον εἶναι τό βάρος τοῦ λαδιοῦ πού περιέχει;



ΑΒ=υ,ΓΔ=Δ, ΕΖ=δ. Ό ὄγκος βυτίου ἤ πύθου δίδεται άπό τόν τύπον $0,2618.υ(2Δ^2+δ^2)$ ὁ όποῖος άνήκει είς τόν Άγγλον Oughtered ("Οτερτ)

Συμμιγεῖς Ἀριθμοί

Ἔστω π.χ. ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός 8 στατ. 11 ὀκ. 350 δράμια. Ἐπειδή 10 δράμιά δέν κάμνουν μίαν ὀκᾶν, καί 10 ὀκ. δέν κάμνουν 1 στατῆρα διά τοῦτο ὁ ἀριθμός αὐτός 8 στατ. 11 ὀκ. 350 δράμ. λέγεται συμμιγής. Ἄρα

Συμμιγής λέγεται ὁ συγκεκριμένος ἀριθμός, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖται ἀπό μέρη, διαφόρων ὁμοειδῶν μονάδων, τῶν ὁποίων, τά πολλαπλάσια καί ὑποπολλαπλάσια δέν σχηματίζονται κατά τόν δεκαδικόν Νόμον.

Σημείωσις. Οἱ συγκεκριμένοι ἀριθμοί πού ἀποτελοῦνται ἀπό μέτρα, παλάμας, δακτύλους, καί γραμμάς, ὅπως π.χ. ὁ 2μ.7π.6δ.3 γρ. ἀποτελοῦνται ἀπό μέρη διαφόρων ὁμοειδῶν μονάδων, τῶν ὁποίων τά πολλαπλάσια καί ὑποπολλαπλάσια σχηματίζονται κατά τόν δεκαδικόν Νόμον καί ἑπομένως δέν εἶναι συμμιγεῖς, ἐν τούτοις θά θεωροῦνται ὡς συμμιγεῖς.

Ἀριθμός ἤ Συντελεστής Ἀναγωγῆς, λέγεται ὁ ἀριθμός πού φανερώνει πόσαι μονάδες μιᾶς τάξεως ἀποτελοῦν μίαν μονάδα τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως. π.χ. Ἐπειδή 12 δάκτυλοι ἀποτελοῦν 1 πόδα διά τοῦτο ὁ 12 λέγεται συντελεστής ἀναγωγῆς δακτύλου καί ποδός. Ἐπειδή 3 πόδες ἀποτελοῦν 1 ὑάρδαν διά τοῦτο ὁ 3 λέγεται συντελεστής ἀναγωγῆς ποδόν καί ὑάρδας.

Βοηθητικαί πράξεις

α) Τροπή συμμιγοῦς εἰς μονάδας μιᾶς ὁποιασδήποτε τάξεως δηλ. εἰς ἀκέραιον.

Παράδειγμα. Ὁ συμμιγής 4 ὑαρ. 2 πόδ. 7δακτ. νά τραπῆ εἰς δακτύλους.

Κανών.

Διά νά τρέψωμεν δοθέντα συμμιγῆ εἰς ἀκέραιον τρέπο-

μεν κάθε μέρος αὐτοῦ εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως πολλαπλασιάζοντες αὐτό μέ τόν ἀντίστοιχον συντελεστήν ἀναγωγῆς καί εἰς τό γινόμενον προσθέτομεν τάς μονάδας τῆς ἰδίας τάξεως ποῦ ἔχει ὁ δοθείς συμμιγής.	**Ἐκτέλεσις** 4ὑάρ.Χ3πόδ=12 πόδ. + 2 πόδ. 14 πόδ. 14π.Χ12δ. =168δ. + 7δ. 175δ.

β) Τροπή ἀκεραίου εἰς συμμιγῆ

Παράδειγμα. Νά τραπῆ ὁ 175 δάκτυλοι ὑάρδας, εἰς συμμιγῆ.

Κανών	Ἐκτέλεσις
Διά νά τρέψωμεν ἀκέραιον εἰς συμμιγῆ τρέπομεν αὐτόν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, εἶναι δέ αὐ-	175δ. ⌊ 12 55 14π. ⌊ 3 7δ. 2π. 4ὑ.

ταί τό πηλῖκον τοῦ δοθέντος διά τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ ἀναγωγῆς. Τό πηλίκον αὐτό τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως ἀνωτέρας τάξεως, εἶναι δέ αὐταί τό πηλίκον τοῦ πρώτου πηλίκου διά τοῦ ἀντιστοίχου συντελεστοῦ ἀναγωγῆς κ.ο.κ. Τό τελευταῖον πηλίκον μαζί μέ τά ὑπόλοιπα εἶναι ὁ συμμιγής πού ζητοῦμεν. Δηλ. 175δ= = 4υ.2π.7δ.

γ) Τροπή συμμιγοῦς εἰς κλάσμα καί ἔπειτα εἰς δεκαδικόν.

Παράδειγμα. Ὁ συμμιγής 4 ὑάρ.2 πόδ.7 δάκτ. νά γίνῃ 1ον) κλάσμα ὑάρδων καί ἔπειτα δεκαδικός 2ον) κλάσμα ποδῶν καί ἔπειτα δεκαδικός,

Λύσις. Τρέπομεν τόν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως πού περιέχει δηλ. εἰς δακτύλους: καί ἔχομεν: 4 ὑάρ.2 πόδ 7 δάκτ. = 175 δάκτ. Ὁ ἀριθμός αὐτός 175 δάκτ. θά γραφῇ ὡς ἀριθμητής τοῦ κλάσματος πού ζητοῦμεν. Κατόπιν 1ον) Ἐπειδή θέλομεν νά γίνῃ ὁ συμμιγής κλάσμα ὑάρδων, θά τρέψωμεν τήν 1 ὑάρδ. εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως πού περιέχει ὁ συμμιγής δηλ. εἰς δακτύλους καί ἔχομεν: 1ὑάρ. = 36 δάκτ. Ὁ ἀριθμός αὐτός 36 δάκτ. θά γραφῇ ὡς παρονομαστής καί θά ἔχωμεν 4ὑάρ. 2πόδ. 7δάκτ. = $\frac{175}{36}$ ὑάρδ. = 4,86 ὑάρ. 2ον) Ἐπειδή θέλομεν νά γίνῃ ὁ συμμιγής κλάσμα ποδῶν, θά τρέψωμεν τόν 1 πόδα εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως πού περιέχει ὁ συμμιγής δηλ. εἰς δακτύλους: καί ἔχομεν 1πούς =12 δάκτ. Ὁ ἀριθμός αὐτός 12 δάκτ. θά γραφῇ ὡς παρονομαστής καί θά ἔχωμεν 4 ὑάρ. 2 πόδ. 7δάκτ. = $\frac{175}{12}$ πόδ. = =14,58 πόδ.

<u>δ) Τροπή κλασματικοῦ καί δεκαδικοῦ εἰς συμμιγῆ.</u>

<u>Παράδειγμα</u>. Νά τραπῇ εἰς συμμιγῆ τό κλάσμα $\frac{175}{36}$ ὑάρ.

<u>Κανών</u>	<u>Ἐκτέλεσις</u>
Διά νά τρέψωμεν κλασματικόν εἰς συμμιγῆν διαιροῦμεν τόν ἀριθμητήν διά τοῦ παρονομαστοῦ τό δέ πηλίκον θά εἶναι ὁμοειδές μέ τόν κλασματικόν: τό ὑπόλοιπον αὐτό τό τρέπομεν εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξε-	175 | 36 31ὑ. | 4 ὑάρ. 2 πόδ. 7δάκ. X 3 93πόδ. 21πόδ. X 12 42 21 252 000

ως καί τάς διαιροῦμεν διά τοῦ παρονομαστοῦ, τό δέ πηλίκον τῆς διαιρέσεως αὐτῆς θά παριστάνῃ μονάδα τῆς ἰδίας τάξεως: τρέπομεν πάλιν τό νέον ὑπόλοιπον εἰς μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως κ.ο.κ. ἕως ὅτου φθάσωμεν εἰς τάς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως.

Διά νά τρέψωμεν δεκαδικόν εἰς συμμιγῆ τρέπομεν τόν δεκαδικόν εἰς κλάσμα καί ἔπειτα ἐργαζόμεθα ὅπως καί προηγουμένως. π.χ. 0,625ὑάρ. = $\frac{625}{1000}$ ὑ. = 0ὑ. 1π. 10,5δάκτ.

Πράξεις ἐπί τῶν συμμιγῶν

Α) Πρόσθεσις συμμιγῶν

Παράδειγμα. Νά γίνῃ ἡ πρόσθεσις (11 στ.24δκ.300δρ.)+ +(14στ.29δκ.150δρ.).

Κανών	Ἐκτέλεσις
Γράφομεν τόν ἕνα κάτω ἀπό τόν	11 στατ.24δκ.300 δρμ.
ἄλλον ὥστε αἱ μονάδες τῆς ἰ-	14 στατ.29δκ.150 δρμ.
δίας τάξεως νά εὑρίσκωνται εἰς	25 στατ.53δκ.450 δρμ. ἤ
τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην	26 στατ.10δκ. 50 δρμ.

καί ἔπειτα προσθέτομεν κατά στήλας.

Β) Ἀφαίρεσις συμμιγῶν

Παράδειγμα. Νά γίνῃ ἡ ἀφαίρεσις(7στ.10δκ.100δρ.) - -(4 στ.11 δκ.150δρμ.)

Κανών	Ἐκτέλεσις
Γράφομεν τόν μειωτέον ὑπό τόν	7στατ.10δκ.100 δρμ.
ἀφαιρετέον, ὥστε αἱ μονάδες τῆς	4στατ.11δκ.150 δρμ.
ἰδίας τάξεως νά εὑρίσκωνται εἰς	2στατ.42δκ.350 δρμ.
τήν ἰδίαν κατακόρυφον στήλην	

καί ἔπειτα ἀφαιροῦμεν κατά στήλας. Λέγομεν ἐπειδή 150δρμ. δέν ἀφαιροῦνται ἀπό τά 100 δρμ. προσθέτομεν εἰς τά 100 δρμ. 1δκ.=400 δρμ. δηλ. 100+400=500 δρμ. καί τώρα λέγομεν: 150δρμ. ἀπό 500 δρμ.=350 δρμ. Γράφομεν 350 δρμ. καί κρατοῦμεν 1 δκ. Ἡ 1 δκ.+ 11 δκ.=12 δκ. ἀπό 10 δκ. δέν ἀφαιροῦνται. Προσθέτομεν εἰς τάς 10δκ. 1 στατ.=44 δκ. δηλ. 10δκ.+44δκ.=54δκ. καί λέγομεν 12δκ. ἀπό 54δκ.=42δκ. Γράφομεν 42 δκ. καί κρατοῦμεν 1 στατ. Ὁ 1 στατ.+4 στατ.=5 στατ. ἀπό 7 στατ.=2 στατ. Γράφομεν 2 στατ. Ἡ διαφορά πού ζητοῦμεν εἶναι 2 στατ.42 δκ.350 δρμ.

Γ) Πολλαπλασιασμός καί Διαίρεσις

α) Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπί ἀκέραιον

Παράδειγμα.Νά γίνῃ ὁ πολλαπλασιασμός (4ὀαρ.2ποδ. 5 δάκτ.)Χ3.

Κανών	Ἐκτέλεσις
Διά νά πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπί ἀκέραιον πολλαπλασιάζομεν κάθε ἕνα μέρος τοῦ συμμιγοῦς ἐπί τόν ἀκέραιον.	4ὀάρ.2ποδ.5δάκτ. 3 12ὀάρ.6ποδ.15 δάκτ.ἤ 14ὀάρ.1πούς 3 δάκτ.

β) Διαίρεσις συμμιγοῦς δι'ἀκεραίου

Παράδειγμα.Νά γίνῃ ἡ διαίρεσις(14ὀάρ.1πούς 3δ.):3

Κανών	Ἐκτέλεσις
Διά νά διαιρέσωμεν συμμιγῆ διά ἀκεραίου διαιροῦμεν κάθε ἕνα μέρος τοῦ συμμιγοῦς διά τοῦ ἀκεραίου.'Οσάκις δέ μένει ὑπόλοιπον θά τότρέπωμεν εἰς	14ὀάρ.1π.3δ. | 3 12 6 12 | 4ὀ.2ποδ.5δ. 2ὀάρ.7π.15δ. 3 6 6ὀάρ.1π. 12 12 δάκτ.

μονάδας τῆς ἀμέσως κατωτέρας τάξεως καί θά τάς προσθέτομεν εἰς τάς μονάδας τῆς ἰδίας τάξεως τοῦ συμμιγοῦ

'Ο πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπί κλάσμα καί ἡ διαίρεσις συμμιγοῦς διά κλάσματος ἐκτελοῦνται ἐν συνδυασμῷ τῶν δύο προηγουμένων πράξεων.

γ) Πολλαπλασιασμός ἀριθμοῦ ἐπί συμμιγῆ.

Πρόβλημα."'Η ὀκᾶ ἐμπορεύματος ἀξίζει 60 δρχ.Πόσον ἀξίζουν τοῦ ἐμπορεύματος αὐτοῦ ὁ στατ.6ὀκ.200 δρμ."

Λύσις.Προφανῶς θά ἔχωμεν 60δρχ.Χ(1 στατ.6ὀκ.200δρμ) 'Επειδή τό πρόβλημα,μᾶς δίδει τήν ἀξίαν τῆς μιᾶς ὀκᾶς θά τρέψωμεν τόν συμμιγῆ εἰς κλάσμα ὀκάδων καί θά ἔχωμεν 60 δρχ.Χ $\frac{20200}{400}$ = 3,050 δρχ. "Ωστε

"Διά νά πολλαπλασιάσωμεν ἀριθμόν ἐπί συμμιγῆ τρέπομεν τόν πολλαπλασιαστήν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς πρός τήν μονάδα τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τήν ἀξίαν.

δ) Πολλαπλασιασμός συμμιγοῦς ἐπί συμμιγῆ

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἐμπορεύματος ἀξίζει 8 δρχ.50 λεπτά Πόσας δραχμάς ἀξίζουν οἱ 2 στατ.4ὀκ.300 δράμια;

Λύσις. Προφανῶς θά ἔχωμεν (8δρχ.50λεπ.)Χ(2 στατ.4ὀκ. 300 δρμ.). Ἐπειδή τό πρόβλημα μᾶς δίδει τήν ἀξίαν τῆς 1 ὀκᾶς θά τρέψωμεν τόν πολλαπλασιαστήν εἰς κλάσμα ὀκάδων καί θά ἔχωμεν (8δρχ.50λεπ.)Χ $\frac{37100}{400}$ =1576 $\frac{3}{4}$ δρχ. Ἐπίσης. Ἐπειδή τό πρόβλημα ζητεῖ δραχμάς ἠμποροῦμεν νά τρέψωμεν καί τόν πολλαπλασιαστέον εἰς κλάσμα δραχμῶν καί θά ἔχωμεν $\frac{17}{2}$ Χ $\frac{371}{4}$ = 1576 $\frac{3}{4}$ δρχ. Ἄρα "Διά νά πολλαπλασιάσωμεν συμμιγῆ ἐπί συμμιγῆ ἤ τρέπομεν τόν πολλαπλασιαστήν εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς πρός τήν μονάδα τῆς ὁποίας γνωρίζομεν τήν ἀξίαν ἤ τρέπομεν καί τόν πολλαπλασιαστέον εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς πρός τό ζητούμενον τοῦ προβλήματος".

ε) Διαίρεσις ἀριθμοῦ διά συμμιγοῦς.

1η περίπτωσις. Μερισμός

Πρόβλημα. "Οἱ 4 στατ.24 ὀκ.300 δρμ.ἐμπορεύματος ἀξίζουν 1606 δρχ. Πόσον ἀξίζει ἡ μία ὀκᾶ;"

Λύσις Προφανῶς θά ἔχωμεν 1606 δρχ.:(4στ.24ὀκ.300 δρμ.). Ἐπειδή ἡ μονάς τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τήν ἀξίαν εἶναι ὀκᾶ διά τοῦτο θά τρέψωμεν τόν διαιρέτην εἰς κλάσμα ὀκάδων καί θά ἔχωμεν 1606: $\frac{803}{4}$ = 8 δρχ.

2α περίπτωσις. Μέτρησις

Πρόβλημα. Ἡ ὀκᾶ ἐμπορεύματος ἀξίζει 8 δρχ.20 λεπ. Πόσας ὀκάδας θά ἀγοράσωμεν μέ 41 δρχ.

Λύσις. Προφανῶς θά ἔχωμεν 41 δρχ.:(8δρχ.20λεπ.)= =4100 λεπ.:820λεπ.=5 ὀκ. Ἄρα.

"Διά νά διαιρέσωμεν ἀριθμόν διά συμμιγοῦς ἐάν μέν εἶναι μερισμός θά τρέπωμεν πάντοτε τόν διαιρέτην εἰςμονάδας ὁμοειδεῖς πρός τήν μονάδα τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τήν ἀξίαν,ἐάν δέ εἶναι μέτρησις θά τρέπωμεν τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην εἰς μονάδας μιᾶς καί τῆς ἰδίας τάξεως".

<u>στ) Διαίρεσις συμμιγοῦς διά συμμιγοῦς</u>

<u>1η περίπτωσις.Μερισμός.</u>

<u>Πρόβλημα.</u>"Οἱ 4πήχ.2 ρούπ.ὑφάσματος ἀξίζουν 68 δρχ. 50λεπ.πόσον ἀξίζει ὁ 1 πήχ.;"

<u>Λύσις.</u>Προφανῶς θά ἔχωμεν (68 δρχ.50λεπ.):(4πήχ.2 ρούπ.).'Επειδή ἡ μονάς τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τήν ἀξίαν εἶναι 1 πήχ.θά τρέψωμεν τόν διαιρέτην εἰς κλάσμα πήχεων καί θά ἔχωμεν: (68 δρχ.50λεπ.):$4\frac{2}{8}$ πήχ.=$8\ \frac{1}{17}$ δ.

<u>2α περίπτωσις.Μέτρησις.</u>

<u>Πρόβλημα</u> "Ἕνας ὑφαίνει εἰς μίαν ὥραν 1 πήχ.2 ρούπ. ὑφάσματος. Εἰς πόσον χρόνον θά ὑφάνῃ 18 πήχεις,4 ρούπια;"

<u>Λύσις.</u>Προφανῶς θά ἔχωμεν (18πήχ.4ρούπ.):(1 πήχ.2 ρούπ.=148 ρούπ.:10ρούπ.=14 ὥρ.48 πρωτ.λεπτ. Ὥστε "Διά νά διαιρέσωμεν συμμιγῆ μέ ἄλλον συμμιγῆ ἐάν μέν εἶναι μερισμός θά τρέπωμεν τόν διαιρέτην εἰς μονάδας ὁμοειδεῖς πρός τήν μονάδα τῆς ὁποίας ζητοῦμεν τήν ἀξίαν,ἐάν δέ εἶναι μέτρησις θά τρέπωμεν τόν διαιρετέον καί τόν διαιρέτην εἰς μονάδας μιᾶς καί τῆς αὐτῆς τάξεως".

<u>Προβλήματα</u>

Α) Τοῖχος ἀπό τοῦβλα ἔχει ὄγκον 108,040 κ.μ.καί κάθε τοῦβλον ἔχει ὄγκον 2,130 κ.π.'Από πόσα τοῦβλα ἀποτελεῖται ὁ τοῖχος;

2) Ἡ χωρητικότης πλοίου εἶναι 6585,4 κόροι. Πόσα κυβ.μέτρα χωρεῖ;

3) Εἰς κάθε ὄγκον ἀέρος τά 0,21 εἶναι ὀξυγόνον καί τό ὑπόλοιπον ἄζωτον. Πόσον ὀξυγόνον καί πόσον ἄζωτον περιέχει δωμάτιον τοῦ ὁποίου ἡ χωρητικότης εἶναι 85,245 κ.μ.

4) Νά τραποῦν 4,625 κ.μ.νεροῦ εἰς λίτρα καί ἔπειτα εἰς ὀκάδας.

5) Νά τραποῦν 3613,28 ὀκ.νεροῦ εἰς λίτρα καί ἔπειτα εἰς κυβ.μέτρα.

6) Ποῖον τό βάρος ἀέρος δωματίου μήκους 3μ.πλάτους 2,3, καί ὕψους 3,5 μ.ἐάν μία κυβ.παλ.ἀέρος ζυγίζει 1,3 γραμμάρια.

7) Πόσας ὀκάδας νερό χωρεῖ ἕνα τεπόζιτο μήκους 0,40 μ.πλάτους 0,20μ.καί ὕψους 0,40μ.

8) Μία πόλις φωτίζεται μέ 625 φανούς φωταερίου. Κάθε φανός καίει 140 λίτρα φωταερίου τήν ὥραν καί καίει ἐπί 6,5 ὥρας κάθε νύκτα. Πόσα κυβ.μέτρα καίονται εἰς ἕνα ἔτος;

Β) Δύο τεχνῖται εἰργάσθησαν εἰς τό ἴδιον ἔργον καί μέ τό ἴδιον ἡμερομίσθιον, ὁ ἕνας 8 ἡμ.καί ὁ ἄλλος 5 ἡμ.καί ἔλαβον μαζί 2 λίρ.17 σελ.5 πέν.πόσα ἀνήκουν εἰς τόν καθένα;

2) Πατέρας καί υἱός ἔχουν μαζί ἡλικίαν 42 ἔτη 1 μῆνα 15 ἡμ.22ὥρ. Ὁ πατέρας εἶναι μεγαλύτερος τοῦ υἱοῦ κατά 34 ἔτη 11 μῆν.25ἡμ.2ὥρ. Νά εὑρεθῇ ἡ ἡλικία καθενός.

3) Τρεῖς σωροί ἀνθρακίτου ἀπό τούς ὁποίους ὁ (α) καί ὁ (β) μαζί ἔχουν βάρος 6 στατ.21 ὀκ.100 δρμ. Ὁ (α) καί ὁ (γ) μαζί ἔχουν βάρος 7 στατ.3 ὀκ.300 δρμ.

καί ὁ (β) καί ὁ (γ) ἔχουν βάρος 8 στ.14ὀκ.ἐπωλήθησαν ὡς ἑξῆς. Τοῦ (α) ἡ ὀκᾶ πρός 6,20δρχ.τοῦ (β) ἡ ὀκᾶ πρός 7,80 δρχ.καί ἡ ὀκᾶ τοῦ (γ) πρός 8δρχ.Ζητεῖται ἡ ὁλική εἴσπραξις.

Γ) Μέ σύρμα μήκους 1 μ.ἔγιναν 125 καρφάκια.Πόσα καρφάκια θά γίνουν μέ σύρμα μήκους 2μ.4π.8δ.;

2) Μέ 1 χιλιόγραμμον βενζίνης ἐργάζεται μία μηχανή ἐπί 3,5 ὥρ.Πόσον χρόνον θά ἐργασθῇ μέ 4 χιλιόγραμμα 546 γραμ.βενζίνης;

3) Μία οἰκογένεια ἐξοδεύει 3 λίτρα νερό τήν ὥραν. Πόσας ὀκάδας νερό χρειάζεται εἰς 6ὥρ.20π.λ.50δ.λ.

Δ) Κάποιος ὑφαίνει ἕνα μέτρον εἰς 1ὥρ.30π.λ.40δ.λ. εἰς πόσον χρόνον θά ὑφάνῃ 69μ.2π.7δ.3γρ.;

2) Μηχανή καίει εἰς 1ὥρ.5ὀκ.100 δρμ.κάρβουνον.Πόσον κάρβουνον θά κάψῃ εἰς 10ὥρ.20π.λ.

3) Κινητόν τρέχει 8μ.4παλ.εἰς 1π.λ.Πόσον διάστημα θά τρέξῃ εἰς 20π.λ.45δ.λ.

Ε)'Ατμόπλοιον διήνυσεν 1490 μίλια εἰς 4ἡμ.3ὥρ.20 π.λ.Πόσα μίλια ἔτρεχε τήν ὥραν;

2)'Ατμάμαξα εἰς 1 ὥρ.τρέχει 35 χλμ.Εἰς πόσον χρόνον θά διατρέξῃ ἀπόστασιν 110χλμ.250μ.;

3) Τροχός κάμνει 2340 στροφάς εἰς 3π.λ.15δ.λ.Πόσας στροφάς κάμνει εἰς 1 δ.λ.;

4) Τόξον 3^{0} 20'ἔχει μῆκος 10 μ.Πόσον τό μῆκος τόξου 1^{0};

5) Εἰς μίαν ὑάρδαν ἀντιστοιχεῖ τόξον 6^{0} 15'.Πόσαι ὑάρδες εἶναι τόξον 75^{0};

ΣΤ) Κινητόν ἔτρεξεν 2 ὑαρ.1π.4δακτ.εἰς 1δ.λ.Εἰς πόσον χρόνον θά τρέξῃ ἀπόστασιν 7 ὑαρ.2πδδ.;

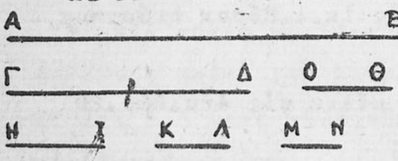
2)Πόσα δοχεῖα τῶν 14 ὀκ.100 δρμ.ἕκαστον ἀπαιτοῦνται διά νά μεταφέρωμεν 11 στ.14ὀκ.300 δρμ.σιτάρι;

3) Μηχανή καίει 19 τόν.62 χιλγ.500 γρ.κάρβουνο εἰς 7ἡμ.5ὥρ.Πόσον καίει εἰς 1 ἡμ.;

4) Σιδηρόδρομος τρέχει 215 χλγρ.950μ.εἰς 8ὥρ.45π.λ. Πόσον τρέχει εἰς 1 ὥραν;

Ἀσύμμετροι Ἀριθμοί

Γνωρίζομεν ὅτι ἕνας δεκαδικός ἀριθμός ὅταν ἔχῃ ὡρισμένον πλῆθος δεκαδικῶν ψηφίων ἤ ὅταν ἔχῃ ἄπειρον πλῆθος δεκαδικῶν καί περιοδικῶν ψηφίων τότε τρέπεται εἰς κοινόν κλάσμα.Δηλ.$0,75=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, $0,5454....=\frac{54}{99}=\frac{6}{11}$ καί $4,999...=4\frac{9}{9}=5$. Γνωρίζομεν ἐπίσης ὅτι συνεχές λέγεται τό ποσόν πού ἀποτελεῖται ἀπό μέρη τά ὁποῖα δέν εἶναι χωρισμένα τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο:ὅπως αἱ γραμμαί,αἱ ἐπιφάνειαι,ὁ χρόνος,ὁ χῶρος κ.ἄ."Ας πάρωμεν τρία συνεχῆ ὁμοειδῆ ποσά π.χ.τά εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ ΓΔ καί ΟΘ. Ἐάν τό ΑΒ περιέχῃ τό ΟΘ ἀκριβῶς,π.χ. 6 φοράς,καί τό ΓΔ περιέχει τό ΟΘ ἀκριβῶς,π.χ.5φοράς,εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγομεν,τό μέν ΟΘ κοινό μέτρον τῶν ΑΒ καί ΓΔ,



τά δέ ΑΒ καί ΓΔ,ὅτι ἔχουν κοινόν μέτρον ἤ ὅτι εἶναι σύμμετρα. "Ωστε

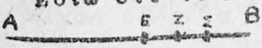
Κοινόν μέτρον τῶν συνεχῶν ὁμοειδῶν ποσῶν ΑΒ καί ΓΔ λέγεται τό συνεχές καί ὁμοειδές πρός αὐτά ποσόν ΟΘ, ἐάν κάθε ἕνα ἀπό τά ΑΒ καί ΓΔ περιέχῃ ἀκριβῶς τό ΟΘ.

Σύμμετρα ποσά λέγονται τά συνεχῆ καί ὁμοειδῆ ποσά πού ἔχουν κοινόν μέτρον.

Ἀσύμμετρα ποσά λέγονται τά συνεχῆ καί ὁμοειδῆ ποσά πού δέν ἔχουν κοινόν μέτρον.

"Ας ὑποθέσωμεν τώρα ὅτι,τό ΟΘ εἶναι ἡ μονάς τῶν ΑΒ καί ΓΔ λ.χ.(ΟΘ)=1 μέτρον καί ὅτι,τά κλασματικά μέρη τοῦ ΟΘ=1μέτρον,εἶναι τά (ΗΙ)=ὑποδεκάμετρον=$\frac{1}{10}$ μ., (ΚΛ)=έκατοστόμετρον $=\frac{1}{100}$ μ. καί (ΜΝ)=χιλιοστόμετρον= $=\frac{1}{1000}$ μ. 'Εάν κάθε ένα άπό τά ΑΒ καί ΓΔ περιέχη άκριβῶς τό μέτρον (ΟΘ) ἤ τό ὑποδεκάμετρον (ΗΙ) ἤ τό έκατοστόμετρον (ΚΛ) ἤ τό χιλιοστόμετρον (ΜΝ), τότε είς τήν περίπτωσιν αὐτήν λέγομεν ὅτι, τό (ΟΘ) ἤ τό (ΗΙ) ἤ τό (ΚΛ) ἤ τό (ΜΝ) εἶναι τό κοινόν μέτρον τῶν ΑΒ καί ΓΔ. 'Επίσης λέγομεν ὅτι, τά ΑΒ καί ΓΔ ἔχουν κοινό μέτρον τό (ΟΘ) ἤ τό (ΗΙ) ἤ τό (ΚΛ) ἤ τό (ΜΝ), εἴτε λέγομεν ὅτι, κάθε ένα άπό τά ΑΒ καί ΓΔ εἶναι σύμμετρον πρός τήν μονάδα 1 μέτρον. Ὥστε Σύμμετρον πρός τήν μονάδα λέγεται ένα συνεχές ποσόν, ὅταν περιέχη άκριβῶς ἤ τήν μονάδα, ἤ κλασματικόν μέρος αὐτῆς. 'Ασύμμετρον δέ πρός τήν μονάδα, λέγεται ένα συνεχές ποσόν, ὅταν δέν περιέχη άκριβῶς, οὔτε τήν μονάδα οὔτε κλασματικόν μέροςαὐτῆς.

Κάθε σύμμετρον πρός τήν μονάδα ποσόν παριστάνεται μέ άκέραιον άριθμόν ἤ μέ κλασματικόν άριθμόν π.χ. Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ΑΒ περιέχη 6 φοράς τό μέτρον τότε θά ἔχωμεν ΑΒ=6 μέτρα ἤ άκόμη ΑΒ=5,999... Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ΑΒ περιέχει 625 φοράς τό έκατοστόμετρον, τότε θά ἔχωμεν ΑΒ=625 έκατοστόμετρα=6,25μ.=$6\frac{1}{4}$μ. Διά τόν λόγον αὐτόν οἱ άκέραιοι καί οἱ κλασματικοί μαζί λέγονται σύμμετροι άριθμοί. Κάθε άσύμμετρον πρός τήν μονάδα ποσόν δέν παριστάνεται οὔτε μέ άκέραιον οὔτε μέ κλασματικόν άριθμόν. Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι τό ΑΒ εἶναι άσύμμετρον πρός τήν μονάδα ΟΘ, έπομένως δέν περιέχει άκριβῶς οὔτε τήν μονάδα ΟΘ οὔτε κλασματικόν μέρος αὐτῆς. π.χ. Ἔστω ὅτι τό ΑΒ περιέχει 6 φοράς τό μέτρον μέχρι τοῦ Ε καί μένει τό ΕΒ μικρότερον τοῦ μέτρου. Ἔστω ὅτι τό ΕΒ περιέχει τό ὑποδεκάμετρον 1 φοράν



μέχρι τοῦ Ζ καί μένει τό ΖΒ μικρότερονάπό τό ὑποδεκάμετρον. Ἔστω ὅτι τό ΖΒ περιέχει τό ἑκατοστόμετρον 2 φοράς μέχρι τοῦ Σ καί μένει τό ΣΒ μικρότερον ἀπό τό ἑκατοστόμετρον κ.ο.κ.ἐπ'ἄπειρον καί θά ἔχωμεν ΑΒ=6,12.... Παρατηροῦμεν ὅτι τά δεκαδικά ψηφία τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ εἶναι ἄπειρα καί μή περιοδικά. ἑπομένως δέν τρέπεται οὔτε εἰς ἀκέραιον οὔτε εἰς κλασματικόν καί λέγεται ἀσύμμετρος. Ἄρα

<u>Ἀσύμμετρος Ἀριθμός</u> λέγεται ὁ δεκαδικός ἀριθμός ὁ ὁποῖος ἔχει ἄπειρα δεκαδικά ψηφία μή περιοδικά.

Μεταβλητά καί Σταθερά ποσά

Ἕνα ποσόν πού παίρνει διαφόρους τιμάς,ἤ διαφόρους καταστάσεις λέγεται <u>μεταβλητόν</u> π.χ.ἡ ἀξία ἑνός ὑφάσματος εἶναι ποσόν μεταβλητόν,διότι ἄλλην τιμήν θά ἔχῃ ὅταν ἀπό τό ὕφασμα αὐτό ἀγοράσωμεν 2 πήχ.καί ἄλλην τιμήν θά ἔχῃ ὅταν ἀγοράσωμεν 5 πήχεις.Ἡ φυσική κατάστασις τοῦ νεροῦ εἶναι μεταβλητή,διότι εἰς 0° μεταβαίνει εἰς τήν στερεάν κατάστασιν καί εἰς 100° μεταβαίνει εἰς τήν ἀερώδη κατάστασιν.Τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι ποσόν μεταβλητόν,διότι ἐάν ἀλλάξωμεν τό μῆκος ἤ τό πλάτος τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ ἤ καί τά δύο μαζί, τότε τό ἐμβαδόν θά ἀλλάξῃ.Τό ἄθροισμα 180° τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου δέν εἶναι μεταβλητόν ποσόν διότι εἴτε μεγαλώσωμεν εἴτε μικρύνωμεν τάς πλευράς αὐτοῦ, τό ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν τοῦ νέου τριγώνου πού θά προκύψῃ θά εἶναι πάλιν 180°.Ἀπό τά παραδείγματα αὐτά βλέπομεν ὅτι:

α) Ἡ ἀξία ἑνός ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἀπό τόν ἀριθμόν τῶν πήχεων.Αὐτό μέ ἄλλα λόγια λέγεται ὡς ἑξῆς:"Ἡ ἀξία ἑνός ὑφάσματος εἶναι συνάρτησις τοῦ ἀριθμοῦ τῶν πήχεων" β)Τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου ἐξαρτᾶται ἀπό τό μῆκος καί ἀπό τό πλάτος αὐτοῦ.Αὐτό μέ ἄλλα λόγια λέγεται ὡς ἑξῆς:"τό ἐμβαδόν ἑνός ὀρθογωνίου εἶναι συνάρτησις τοῦ μήκους καί τοῦ πλάτους αὐτοῦ"γ)Τό ἄθροισμα 180° τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τά μήκη τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.Αὐτό μέ ἄλλα λόγια λέγεται ὡς ἑξῆς "Τό ἄθροισμα 180° τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου δέν εἶναι συνάρτησις τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν αὐτοῦ: εἶτε τό ἄθροισμα 180° τῶν τριῶν γωνιῶν ἑνός τριγώνου εἶναι <u>σταθερόν</u>.

Ὁ ἀριθμός πού παριστάνει τό μεταβλητόν ποσόν λέγεται <u>μεταβλητός ἀριθμός</u>.

<u>Ἐφαρμογαί</u>

α)Ἐάν τό ἄθροισμα δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν,τότε τό γινόμενον αὐτῶν γίνεται μέγιστον,ὅταν οἱ δύο ἀριθμοί γίνουν ἴσοι (ἐάν γίνωνται).

Ἄς πάρωμεν τούς ἀριθμούς 1 καί 9 τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα εἶναι 1+9=10.Ἐάν τούς μεταβάλωμεν μέ τρόπον ὥστε τό ἄθροισμά των νά εἶναι πάλιν 10 καί κατόπιν εὕρωμεν τά γινόμενα αὐτῶν θά παρατηρήσωμεν ὅτι τό μεγαλύτερον

1+9=10	1X9= 9
2+8=10	2X8=16
3+7=10	3X7=21
4+6=10	4X6=24
5+5=10	5X5=25

γινόμενον εἶναι 5X5=25, τό ὁποῖον ἀνήκει εἰς τό ζεῦγος 5+5 εἰς τό ὁποῖον οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἴσοι.

<u>Πρόβλημα</u>.Ἕνα τετράγωνον καί ἕνα ὀρθογώνιον μέ βάσιν 9μ.ἔχουν ἴσην περίμετρον.Ποῖον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν;

<u>Λύσις</u>.Τοῦ τετραγώνου ἡ πλευρά εἶναι 36:4=9μ.καί τό ἐμβαδόν του εἶναι 9X9=81. Τοῦ ὀρθογωνίου τό ὕψος εἶναι 36:9=4μ.καί τό ἐμβαδόν του εἶναι 9X4=36τ.μ.Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι τό τετράγωνον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν.Ἄρα

"Ἀπό ὅλα τά ὀρθογώνια πού ἔχουν ἴσην περίμετρον, τό τετράγωνον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν".

β)'Εάν τό γινόμενον δύο μεταβλητῶν ἀριθμῶν εἶναι σταθερόν,τότε τό ἄθροισμα αὐτῶν γίνεται ἐλάχιστον, ὅταν οἱ δύο ἀριθμοί γίνουν ἴσοι.

"Ας πάρωμεν τούς ἀριθμούς 1 καί 16 τῶν ὁποίων τό γινόμενον εἶναι 1Χ16=16.'Εάν τούς μεταβάλωμεν μέ τρόπον ὥστε τό γινόμενον αὐτῶν νά εἶναι πάλιν 16 καί κατόπιν εὕρωμεν τά ἀθροίσματα αὐτῶν,θά παρατηρήσωμεν ὅτι τό ἐλάχιστον ἄθροισμα εἶναι τό 4+4=8,τό ὁποῖον ἀνήκει εἰς τό ζεῦγος 4Χ4 εἰς τό ὁποῖον οἱ δύο ἀριθμοί εἶναι ἴσοι.

1Χ16=16	1+16=17
2Χ8= 16	2+ 8=10
4Χ4 =16	4+4 = 8

<u>Πρόβλημα</u>. "Ενα τετράγωνον καί ἕνα ὀρθογώνιον μέ βάσιν 8μ.ἔχουν ἴσον ἐμβαδόν 36τ.μ.Ποῖον ἔχει τήν ἐλαχίστην περίμετρον;

<u>Λύσις</u>.Τοῦ τετραγώνου ἡ πλευρά εἶναι $\sqrt{36}$=6μ.καί ἡ περίμετρός του εἶναι 6μ Χ4=24μ.Τοῦ ὀρθογωνίου τό ὕψος εἶναι 36:8=4,5 καί ἡ περίμετρός του εἶναι 4,5+4,5+8+8=25μ.Παρατηροῦμεν ὅτι τό τετράγωνον ἔχει τήν ἐλαχίστην περίμετρον."Αρα

"'Από ὅλα τά ὀρθογώνια πού ἔχουν ἴσον ἐμβαδόν,ἐκεῖνο πού ἔχει τήν ἐλαχίστην περίμετρον εἶναι τό τετράγωνον". Μέ ἀνάλογα ἀριθμητικά παραδείγματα εὑρίσκομεν ὅτι:

1ον)"'Από ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα πού ἔχουν ἴσην παράπλευρον ἐπιφάνειαν,τόν μέγιστον ὄγκον ἔχει ἐκεῖνο πού ἔχει βάσιν τετράγωνον.

2ον)"'Από ὅλα τά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα πού ἔχουν ἴσον ὄγκον τήν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν ἔχει ἐκεῖνο πού ἔχει βάσιν τετράγωνον".

<u>Παρατήρησις</u>.Εἰς τό κεφάλαιον "περί δυνάμεων σελίς 70" εἴπαμεν ὅτι,τό γινόμενον 5Χ5 λέγεται δύναμις.'Ο

λόγος διά τόν όποῖον ώνομάσθη "δύναμις" εἶναι ὁ ἐξῆς. Τό 5Χ5 εἶναι τό μεγαλύτερον,ἤ μέ ἄλλα λόγια δυνατώτερον,ἀπό ὅλα τά γινόμενα 1Χ9,2Χ8,3Χ7,4Χ6 κλπ.τῶν ὁποίων οἱ παράγοντες ἔχουν τό ἴδιο ἄθροισμα 10,πού ἔχει καί τό 5+5.

Προβλήματα.1) Νά χωρισθῇ ὁ 214 εἰς δύο ἀριθμούς οὕτως ὥστε τό γινόμενον αὐτῶν νά εἶναι μέγιστον('Απ. 107,107).

2) Νά χωρισθῇ ὁ 215 εἰς δυο ἀκεραίους οὕτως ὥστε τό γινόμενον αὐτῶν νά εἶναι μέγιστον('Απ.107,108).

3) 'Από ὅλα τά ὀρθογώνια τῶν ὁποίων αἱ κάθετοι πλευραί ἔχουν ἄθροισμα σταθερόν ποῖον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν ('Απ.τό ἰσοσκελές).

4) 'Από ὅλα τά ὀρθογώνια πού ἔχουν σταθερόν ἐμβαδόν, ποῖον ἔχει τό ἐλάχιστον ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν; ('Απ.τό ἰσοσκελές).

5) 'Από ὅλα τά τρίγωνα πού ἔχουν σταθεράν.περίμετρον ποῖον ἔχει τό μέγιστον ἐμβαδόν;('Απ.τό ἰσόπλευρον)

Περί Λόγων

Εἰς τό κεφάλαιον τῆς Διαιρέσεως τῶν ἀκεραίων εἴπαμεν ὅτι,ὅταν ἡ διαίρεσις εἶναι τῆς μετρήσεως,τότε τό πηλίκον λέγεται λόγος καί ὅτι ὁ λόγος εἶναι ἀφηρημένος ἀριθμός.Σύμφωνα λοιπόν μέ αὐτά ὁ λόγος τῶν 15 μ. καί τῶν 5 μ.εἶναι 15μ.:5μ.=3 (ἀφηρημένος) καί ὁ λόγος τῶν 3 δκ.καί τῶν 4 δκ.εἶναι 3δκ.:4δκ.$=\frac{3}{4}=$0,75 (ἀφηρημένος).Γενικῶς ὁ λόγος τοῦ (α) καί τοῦ (β) εἶναι α:β ἤ $\frac{\alpha}{\beta}$ καί ἀπαγγέλλεται (α) πρός (β). Μέ τά γράμματα (α) καί (β) παριστάνομεν ἤ δύο ποσά ὁμοειδῆ ἤ τούς ἀριθμούς πού εὑρίσκομεν,ὅταν μετρήσωμεν τά ποσά αὐτά μέ τήν ἰδίαν μονάδα.

"Οταν θά λέγω π.χ.ὅτι,ὁ λόγος τῶν 'λικιῶν δύο ἀτόμων εἶναι $\frac{3}{4}$ δέν θά έννοοῦμεν ὅτι,τό ἕνα ἄτομον εἶναι 3 ἐτῶν καί τό ἄλλο 4 ἐτῶν. 'Ημπορεῖ τό ἕνα νά εἶναι 3 ἐτῶν καί τό ἄλλο 4 ἐτῶν. ἠμπορεῖ ὅμως τό ἕνα νά εἶναι 6 ἐτῶν καί τό ἄλλο 8 ἐτῶν ἤ νά εἶναι τό ἕνα 9 ἐτῶν καί τό ἄλλο 12 ἐτῶν, ἤ νά εἶναι τό ἕνα 30 ἐτῶν καί τό ἄλλο 40 ἐτῶν.

'Αντίστροφοι λέγονται δύο λόγοι ὅταν,ὁ ἀριθμητής τοῦ ἑνός εἶναι παρονομαστής τοῦ ἄλλου. π.χ.οἱ λόγοι $\frac{3}{4}$ καί $\frac{4}{3}$ εἶναι ἀντίστροφοι καί οἱ λόγοι $\frac{8}{1}$ καί $\frac{1}{8}$ εἶναι ἀντίστροφοι.

'Ιδιότης. Τό γινόμενον δύο ἀντιστρόφων λόγων εἶναι ἴσον μέ τήν ἀκεραίαν μονάδα 1 π.χ. $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$, $8 \times \frac{1}{8} = 1$.

Πρόβλημα.Τά ἡμερομίσθια μιᾶς γυναικός καί ἑνός ἀνδρός ἔχουν λόγον $\frac{8}{15}$. 'Ο ἄνδρας παίρνει 35 δρχ.περισσότερον ἀπό τήν γυναῖκα. Ποῖον τό ἡμερομίσθιον ἑκάστου;

Λύσις.'Εάν ὑποθέσωμεν ὅτι τό ἡμερομίσθιον τῆς γυναικός εἶναι 1 δρχ.τότε τοῦ ἀνδρός θά εἶναι $\frac{15}{8}$ δρχ. (διά νά ἔχουν λόγον $1:\frac{15}{8} = \frac{8}{15}$). 'Η διαφορά $\frac{15}{8} - 1 = \frac{7}{8}$ θά ἀντιστοιχῇ λοιπόν πρός τάς 35 δρχ. Καί λέγομεν ἀφοῦ τά $\frac{7}{8}$ ἀντιστοιχοῦν πρός 35 δρχ..τό $\frac{1}{8}$ θά ἀντιστοιχῇ πρός $\frac{35}{7}$ δρχ. καί τά $\frac{8}{8} = 1$ πού εἶναι τό ἡμερομίσθιον τῆς γυναικός, θά ἀντιστοιχῇ πρός $\frac{35 \times 8}{7} = 40$ δρχ.

Ὥστε ἡ γυναῖκα παίρνει 40 δρχ.καί ὁ ἄνδρας 40+35=75 δρχ.

Περί 'Αναλογιῶν.

'Αναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.Δηλ.ἐάν οἱ λόγοι $\frac{\alpha}{\beta}$ καί $\frac{\gamma}{\delta}$ εἶναι ἴσοι,τότε ἡ ἰσότης $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ λέγεται ἀναλογία,γράφεται δέ ὡς ἑξῆς: $\alpha:\beta=\gamma:\delta$ ἐπίσης καί ὡς ἑξῆς. $\alpha:\beta::\gamma:\delta$. Οἱ ἀριθμοί πού ἀποτελοῦν τήν ἀναλογίαν λέγονται ὅροι τῆς ἀναλογίας. 'Ο (α) λέγεται πρῶτος ὁ (β) δεύτε ,ὁ (γ) τρίτος καί ὁ (δ) τέταρτος ὅρος τῆς ἀναλογίας. Ὁ (α) καί ὁ (γ) λέγονται ἡγούμενοι, ὁ (β) καί ὁ (δ) ἑπόμενοι, ὁ (α) καί ὁ (δ) ἄκροι. Ὁ (β) καί ὁ (γ) μέσοι. Ὅταν τά (α),(β),(γ),(δ) εἶναι ποσά τότε ἔχομεν ἀναλογίαν ποσῶν, ὅταν εἶναι ἀριθμοί, τότε ἔχομεν ἀναλογίαν ἀριθμῶν. Ὑπάρχουν ἀναλογίαι πού ἔχουν καί τούς τέσσαρας ὅρους ὁμοειδεῖς π.χ. $\frac{6\text{δρχ.}}{3\text{δρχ.}} = \frac{8\text{δραχ.}}{4\text{ δρχ.}}$ Ὑπάρχουν ἀναλογίαι εἰς τάς ὁποίας οἱ ὅροι τοῦ ἑνός λόγου εἶναι ἑτεροειδεῖς πρός τούς ὅρους τοῦ ἄλλου λόγου. π.χ. $\frac{15\text{ δρχ.}}{5\text{ δρχ.}} = \frac{21\text{ ὀκ.}}{7\text{ ὀκ.}}$ Ὅταν μιᾶς ἀναλογίας, οἱ μέσοι ὅροι εἶναι ἴσοι, τότε ἡ ἀναλογία λέγεται Συνεχής π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ εἶναι συνεχής, καί ὁ ὅρος αὐτῆς (β) λέγεται μέσος ἀνάλογος τῶν ἄκρων ὅρων (α) καί (γ).

Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν

α) Ἔστω π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{5}{7} = \frac{10}{14}$. Ἐάν τρέψωμεν τούς λόγους αὐτούς εἰς τόν ἴδιον παρονομαστήν θά ἔχωμεν $\frac{5X14}{7X14} = \frac{7X10}{7X14}$. Ἄρα 5X14 = 7X10. Δηλ. "Τό γινόμενον τῶν ἄκρων ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τῶν μέσων". Γενικῶς ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν $\alpha X\delta = \beta X\gamma$. Ὁμοίως ἐκ τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ ἔχομεν $\beta X\beta = \alpha X\gamma$ ἤ $\beta^2 = \alpha X\gamma$ καί $\beta = \sqrt{\alpha X\gamma}$. δηλ. "ὁ μέσος ἀνάλογος συνεχοῦς ἀναλογίας εἶναι ἴσος μέ τήν τετρ. ρίζαν τοῦ γινομένου τῶν ἄκρων ὅρων αὐτῆς."

Ἐφαρμογή 1η. Νά σχηματισθῇ ἀναλογία ἐκ τῆς ἰσότητος 3X20=5X12 πρός τοῦτο γράφομεν ὡς ἄκρους τούς παράγοντας τοῦ ἑνός γινομένου καί ὡς μέσους τούς παράγοντας τοῦ ἄλλου γινομένου καί ἔχομεν $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$.

Ἐφαρμογή 2α. Οἱ ἀριθμοί 7,14,9,18 σχηματίζουν ἀναλογίαν;

Διά νά σχηματίζουν ἀναλογίαν πρέπει, τό γινόμενον δύο ἐξ αὐτῶν νά εἶναι ἴσον μέ τό γινόμενον τῶν δύο ἄλλων. Ἐπειδή λοιπόν εἶναι 7Χ8=9Χ14 διά τοῦτο οἱ ἀριθμοί αὐτοί σχηματίζουν ἀναλογίαν ἡ ὁποία εἶναι $\frac{7}{9}=\frac{14}{18}$

β) Ἔστω π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ ἰσότης 5Χ14=7Χ10 ἐάν διαιρέσωμεν καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς μέ τό γινόμενον 10Χ14 καί ἔπειτα μέ τό γινόμενον 5Χ7 θά προκύψῃ ἡ ἀναλογία $\frac{5}{10}=\frac{7}{14}$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ πρώτη ἀναλογία μέ ἀνταλλαγμένους τούς μέσους ὅρους καί ἔπειτα ἡ ἀναλογία $\frac{14}{7}=\frac{10}{5}$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ πρώτη ἀναλογία μέ ἀνταλλαγμένους τούς ἄκρους ὅρους. Ὥστε "Ἠμποροῦμεν νά ἀνταλλάξωμεν τούς ἄκρους ἤ τούς μέσους ὅρους μιᾶς ἀναλογίας". Γενικῶς ἀπό τήν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν $\frac{\delta}{\beta}=\frac{\gamma}{\alpha}$ καί $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$

Παρατήρησις. Ἄς πάρωμεν ἀναλογίαν, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι τοῦ πρώτου λόγου δέν εἶναι ὁμοειδεῖς πρός τούς ὅρους τοῦ δευτέρου λόγου αὐτῆς π.χ. τήν ἀναλογίαν $\frac{15\mu.}{5\mu.}=\frac{21\text{οκ.}}{7\text{οκ.}}$ Ἐάν ἀνταλλάξωμεν τούς μέσους ὅρους θά προκύψῃ ἡ ἀναλογία $\frac{15\mu.}{21\text{οκ.}}=\frac{5\mu.}{7\text{οκ.}}$ ἡ ὁποία εἶναι ψευδής διότι λόγος μέτρων πρός ὀκάδας δέν ὑπάρχει. Διά τοῦτο τήν ἀναλογίαν $\frac{15\mu.}{5\mu.}=\frac{21\text{οκ.}}{7\text{οκ.}}$ θά τήν γράφωμεν $\frac{15}{5}=\frac{21}{7}$

γ) Ἔστω π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$ ἐκ τῆς ὁποίας προκύπτει ἡ ἰσότης 5Χ14=7Χ10. Ἐάν διαιρέσωμεν καί τά δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς μέ τό γινόμενον 5Χ10 θά προκύψῃ ἡ ἀναλογία $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}$ ἡ ὁποία εἶναι ἡ πρώτη ἀλλά ἀντεστραμμένη. Ὥστε "Ἠμποροῦμεν νά ἀντιστρέψωμεν μίαν ἀναλογίαν". Γενικῶς ἀπό τήν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\delta}{\gamma}$.

δ) Ἔστω π.χ. ἡ ἀναλογία $\frac{5}{7}=\frac{10}{14}$. Ἐάν καί εἰς τά δύο μέλη αὐτῆς προσθέσωμεν τήν μονάδα 1 θά ἔχωμεν

$\frac{5}{7}+1=\frac{10}{14}+1$ ἢ $\frac{5+7}{7}=\frac{10+14}{14}$ Ὥστε: "Ἠμποροῦμεν εἰς κάθε ἡγούμενον νά προσθέσωμεν (ἢ νά ἀφαιρέσωμεν, ἐάν ἀφαιρῆται) τόν ἑπόμενον αὐτοῦ. Γενικῶς ἀπό τήν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ ἔχομεν $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\delta}$ καί $\frac{\alpha-\beta}{\beta}=\frac{\gamma-\delta}{\delta}$

ε)"Ὅταν ἔχωμεν δύο,τρεῖς,τέσσαρας κλπ.ἴσους λόγους τότε ὁ κάθε ἕνας εἶναι ἴσος μέ λόγον ποῦ ἔχει ἀριθμητήν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν ἀριθμητῶν καί παρονομαστήν τό ἄθροισμα ὅλων τῶν παρονομαστῶν".

Δηλ. $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{8}{12}=\dots=\frac{2+4+8+\dots}{3+6+12+\dots}$ Πράγματι.Ὁ τελευταῖος λόγος,μετά τήν ἐκτέλεσιν τῶν σημειωμένων προσθέσεων,θά γίνῃ $\frac{14}{21}$, αὐτός δέ πάλιν εἶναι ἴσος μέ κάθε ἕνα ἀπό τούς λόγους $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{8}{12}$ διότι,ἄν τούς τρέψωμεν εἰς τόν ἴδιον παρονομαστήν, θά ἔχουν ἀριθμητάς ἴσους. Γενικῶς. $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\frac{\varepsilon}{\zeta}=\dots=\frac{\alpha+\gamma+\varepsilon+\dots}{\beta+\delta+\zeta+\dots}$

Παρατήρησις.

Ὅσα εἶναι τά σύμβολα (=), τόσας ἰσότητας ἔχομεν. π.χ. Ἐάν γράψωμεν $7=1+6=2+5=3+4$ θά ἔχωμεν τρεῖς ἰσότητας διότι τά (=) εἶναι τρία. Ἐάν γράψωμεν: $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$ θά ἔχωμεν τέσσαρας ἰσότητας διότι τά (=) εἶναι τέσσαρα.

Ποσά κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα καί ἀντιστρόφως ἀνάλογα.

Ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον ἐξαρτᾶται ἕνα ποσόν ἀπό ἕνα ἄλλο ποσόν δέν εἶναι ὁ ἴδιος εἰς ὅλα τά ποσά ποῦ ἐξαρτῶνται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο,ἀλλά διαφορετικός. Οἱ ἁπλούστεροι τρόποι εἶναι δύο:οἱ ἑξῆς.

α) "Ὅταν τό ἕνα ποσόν πολλαπλασιάζεται ἐπί ἕνα ἀριθμόν,τότε καί τό ἄλλο ποσόν,νά πολλαπλασιάζεται ἐπί τόν ἴδιον ἀριθμόν". Τά ποσά ποῦ ἐξαρτῶνται τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο,μέ τόν τρόπον αὐτόν λέγονται κατ'εὐθεῖαν ἀνάλογα ἢ ἁπλῶς ἀνάλογα. π.χ. Τό μῆκος ὑφάσματος καί ἡ ἀξία αὐτοῦ εἶναι ποσά ἀνάλογα. Διότι Ἐάν οἱ 6 πήχ. ἑνός ὑφάσματος ἀξίζουν 120 δρχ. τότε οἱ 6 πήχ.Χ2=12 πήχ. αὐτοῦ θά ἀξίζουν 120δρχ.Χ2=240 δρχ. Ἐπίσης τά $\frac{2}{3}$ τῶν 6 πήχεων δηλ.οἱ 6 πήχ.Χ $\frac{2}{3}$ = 4 πήχ. θά ἀξίζουν τά $\frac{2}{3}$ τῶν 120δρχ.δηλ.120 Χ $\frac{2}{3}$ = 80 δρχ.κ.ο.κ. Ἀνάλογα ποσά ἐπίσης εἶναι ἡ ἀξία ἐμπορεύματος καί τό βάρος αὐτοῦ, ὁ μισθός ἐργάτου καί ὁ χρόνος πού ἠργάσθη,κ.ἄ.

Παρατήρησις. Ὅταν δύο ποσά εἶναι ἀνάλογα,τότε αὐξανομένου τοῦ ἑνός ποσοῦ,αὐξάνεται καί τό ἄλλο. Τό ἀντίστροφον ὅμως δέν ἀληθεύει πάντοτε. Δηλ. Ὅταν δύο ποσά εἶναι τέτοια,ὥστε αὐξανομένου τοῦ ἑνός νά αὐξάνεται καί τό ἄλλο, δέν ἕπεται ὅτι εἶναι ἀνάλογα:πιθανόν νά εἶναι, πιθανόν καί νά μή εἶναι ἀνάλογα. Π.χ. ἡ ἡλικία καί τό ἀνάστημα τοῦ ἀνθρώπου εἶναι δύο ποσά πού αὐξάνονται μαζί ἐν τούτοις τά ποσά αὐτά δέν εἶναι ἀνάλογα,διότι ἐάν εἰς ἡλικίαν 12 ἐτῶν ἔχει ἀνάστημα 1,20μ.δέν ἕπεται ὅτι εἰς ἡλικίαν 12Χ3=36 ἐτῶν θά ἔχῃ ἀνάστημα 1,20Χ3=3,60 μ. Ἐπίσης. Ἐάν ὁ υἱός εἶναι 7 ἐτῶν καί ὁ πατέρας εἶναι 32 ἐτῶν,δέν ἕπεται ὅτι ὅταν ὁ υἱός γίνῃ 7Χ2=14 ἐτῶν, ὁ πατέρας θά γίνῃ 32Χ2=64 ἐτῶν, διότι ὁ πατέρας θά γίνῃ 32+7=39 ἐτῶν.

β) "Ὅταν τό ἕνα ποσόν πολλαπλασιάζεται ἐπί ἕνα ἀριθμόν,τότε τό ἄλλο ποσόν νά διαιρῆται διά τοῦ ἰδίου ἀριθμοῦ". Τά ποσά πού ἐξαρτῶνται,τό ἕνα ἀπό τό ἄλλο μέ τόν τρόπον αὐτόν λέγονται ἀντιστρόφως ἀνάλογα ἤ ἁπλῶς ἀντίστροφα. π.χ. ὁ ἀριθμός τῶν ἐργατῶν καί αἱ ἡμέραι πού θά τελειώσουν ἕνα ἔργον εἶναι ποσά ἀντίστροφα. Διότι: Ἐάν ἕνα ἔργον τό τελειώνουν 5 ἐργάται εἰς 12 ἡμ.τό ἴδιον ἔργον θά τό τελειώσουν οἱ 5 ἐργ.Χ2 = 10 ἐργ.εἰς 12 ημ.:2=6 ἡμ. Ἐπίσης τά $\frac{3}{5}$ τῶν

5 εργ.δηλ.οἱ 5 ἐργ.Χ $\frac{3}{5}$ = 3 ἐργ.θά τελειώσουν τό ἴδιον ἔργον εἰς 12 ἡμ: $\frac{3}{5}$ = 20 ἡμ.

Παρατήρησις. Ὅταν δύο ποσά εἶναι ἀντίστροφα,τότε αὐξανομένου τοῦ ἑνός ποσοῦ, τό ἄλλο ποσόν ἐλαττοῦται. Τό ἀντίστροφον ὅμως δέν ἀληθεύει πάντοτε. Δηλ. Ὅταν δύο ποσά εἶναι τέτοια,ὥστε αὐξανομένου τοῦ ἑνός νά ἐλαττώνεται τό ἄλλο,δέν ἕπεται οτι εἶναι ἀντίστροφα: πιθανόν νά εἶναι, πιθανόν καί νά μή εἶναι ἀντίστροφα π.χ. ἐάν μία αμαξα μέ 2 ιππους χρειάζεται 1 ωραν διά νά διανύση μίαν ἀπόστασιν δέν ἕπεται ὅτι μέ 2ἵπ.Χ2= 4 ἵππους θά διανύση τήν ἀπόστασιν αὐτήν εἰς 1 ὥρ:2= 30 π.λ.καί μέ 2 ἱπ.Χ3=6 ἵππους εἰς 1 ὥρ : 3= 20 π.λ. Ὥστε: ὁ ἀριθμός τῶν ἵππων καί ὁ χρόνος δέν εἶναι ποσά ἀντίστροφα.

Μέθοδος τῶν τριῶν

Μέθοδος τῶν τριῶν εἶναι ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον εὑρίσκομεν τάς μεταβολάς πού παθαίνει ἕνα ποσόν, ὅταν μεταβάλλεται ἕνα ἤ περισσότερα ἄλλα ποσά πρός τά ὁποῖα τό πρῶτον εἶναι ἀνάλογον ἤ ἀντίστροφον. Ἐάν αἱ μεταβολαί τοῦ πρώτου ποσοῦ προέρχωνται ἀπό τάς μεταβολάς ἑνός μόνον ποσοῦ, τότε ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον θά εὕρωμεν τάς μεταβολάς τοῦ πρώτου ποσοῦ λέγεται ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν. Ἐάν αἱ μεταβολαί τοῦ πρώτου ποσοῦ προέρχωνται ἀπό τάς μεταβολάς πολλῶν αλλων ποσῶν,τότε ὁ τρόπος μέ τόν ὁποῖον θά εὕρωμεν τάς μεταβολάς τοῦ πρώτου ποσοῦ λέγεται Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν. Ἡ μέθοδος ὠνομάσθη "τῶν τριῶν" διότι μᾶς δίδονται πάντοτε τρεῖς ἀριθμοί.

Α) Ἁπλῆ μέθοδος τῶν τριῶν

<u>Πρόβλημα 1ον.</u> "Τά 12 μέτρα ὑφάσματος ἀξίζουν 900 δρχ. πόσον ἀξίζουν τά 25 μέτρα τοῦ ἰδίου ὑφάσματος";

<u>Λύσις.</u> Ἐάν λύσωμεν τό πρόβλημα μέ τήν ἀναγωγήν εἰς τήν μονάδα θά ἔχωμεν: Ἀφοῦ τά 12 μέτρα ἀξίζουν 900 δρχ. τό 1 μέτρον θά ἀξίζῃ $\frac{900}{12}$ δρχ. καί τά 25 μ. θά ἀξίζουν $\frac{900X25}{12}$ ἤ $900 X \frac{25}{12} = 1875$ δρχ. Ὁ σκοπός εἶναι νά λύσωμεν τό πρόβλημα συντομώτερα. Πρός τοῦτο λοιπόν παριστάνομεν τό ζητούμενον μέ τό Χ καί γράφομεν εἰς τήν ἰδίαν στήλην τάς δύο τιμάς τοῦ ἰδίου ποσοῦ καί πρός τά δεξιά τόν ὁμοειδῆ τοῦ ἀγνώστου Χ. Ἡ ἐργασία αὐτή λέγεται <u>κατάστρωσις</u> τοῦ προβλήματος Δηλ.

12 μ.	900 δρχ.	Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς: 1ον) Ἡ
25 μ.	Χ	ἀξία τοῦ ὑφάσματος ἐξαρτᾶται ἀπό ἕ-

να μόνον ποσόν τό ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν μέτρων. Ἄρα τό πρόβλημα εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. 2ον) Ἡ ἀξία τοῦ ὑφάσματος εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἀριθμοῦ τῶν μέτρων, διότι 2/πλάσια, 3/πλάσια κλπ. μέτρα ἀξίζουν 2/πλασίας, 3/πλασίας κλπ. δραχμάς. Ἐάν τώρα χωρίσωμεν τά ποσά μέ ὁριζοντίας γραμμάς καί ἔπειτα πολλαπλασιάσωμεν τάς 900 δρχ. ἐπί τό κλάσμα $\frac{12}{25}$ ἀντεστραμμένον δηλ. ἐπί $\frac{25}{12}$ θά ἐπανεύρωμεν τό προηγούμενον ἐξαγόμενον δηλ. $900X\frac{25}{12} = 1875$ δρχ.

<u>Πρόβλημα 2ον.</u> "Οἱ 27 τεχνῖται τελειώνουν ἔργον εἰς 15 ἡμ. Οἱ 45 τεχνῖται τῆς ἰδίας ἱκανότητος εἰς πόσας ἡμέρας θά τελειώσουν τό ἴδιον ἔργον;"

<u>Λύσις.</u> Ἐάν λύσωμεν τό πρόβλημα μέ τήν ἀναγωγήν εἰς τήν μονάδα θά ἔχωμεν: Ἀφοῦ οἱ 27 τεχνῖται τελειώνουν τό ἔργον εἰς 15 ἡμ., ὁ 1 τεχνίτης θά τό τελειώσῃ εἰς 15Χ27 ἡμέρας καί οἱ 45 τεχνῖται θά τό τε-

λειώσουν εἰς $\frac{15X27}{45}$ ἡμέρας ἤ εἰς 15 ἡμ.Χ $\frac{27}{45}$ = 9 ἡμέρας. Διά νά λύσωμεν τώρα τό πρόβλημα αὐτό συντομώτερα κάμνομεν τήν κατάστρωσιν δηλ.

27 τεχν.	15 ἡμ.	Παρατηροῦμεν τώρα τά ἑξῆς 1ον)Αἱ
45 τεχν.	Χ	ἡμέραι ποῦ ζητοῦμεν ἐξαρτῶνται ἀπό

ἕνα μόνον ποσόν τό ὁποῖον εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν τεχνιτῶν: ἄρα τό πρόβλημα εἶναι τῆς ἁπλῆς μεθόδου τῶν τριῶν. 2ον)'Ο ἀριθμός τῶν ἡμερῶν εἶναι ποσόν ἀντίστροφον τοῦ ἀριθμοῦ τῶν τεχνιτῶν, διότι ἄν οἱ τεχνῖται γίνουν 2,3 κλπ.φοράς περισσότεροι θά χρειασθοῦν 2,3κλπ. φοράς ὀλιγωτέρας ἡμέρας. 'Εάν τώρα χωρίσωμεν τά ποσά μέ ὁριζοντίας γραμμάς καί πολλαπλασιάσωμεν τάς 15 ἡμ. ἐπί τό κλάσμα $\frac{27}{45}$ (ὅπως εἶναι) θά ἐπανεύρωμεν τό προηγούμενον ἐξαγόμενον δηλ.15 Χ $\frac{27}{45}$ = 9 ἡμέραι.

'Από τά δύο αὐτά προβλήματα συνέγεται ὁ ἑξῆς κανών: "Κάμνομεν τήν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος καί ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τόν ἄνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμόν ἐπί τό κλάσμα τῶν δύο γνωστῶν ἀντεστραμμένον μέν ἐάν τά ποσά εἶναι ἀνάλογα,ὅπως εἶναι δέ,ἐάν τά ποσά εἶναι ἀντίστροφα".

Προβλήματα

1) Μέ ὡρισμένο βάρος νήματος ἔγινεν ὕφασμα μήκους 96 μ.καί πλάτους 1,20 μ.'Εάν τό πλάτος ἦτο 0,80 μ.πόσον ὕφασμα θά ἐγίνετο; ('Απ.144 μ.)

2) Διά μίαν ἐνδυμασίαν θέλομεν $3\frac{1}{2}$ πήχ.ὕφασμα πλάτους $1\frac{3}{8}$ πήχ. Πόσους πήχεις θέλομεν ἐάν τό πλάτος εἶναι 7 ρούπια; ('Απ. $5\frac{1}{2}$ πήχ.)

3) Ράβδος κάθετος ἐπί τοῦ ἐδάφους καί μήκους 1,50 μ.ρίπτει σκιάν 0,75 μ. Συγχρόνως ἕνα δένδρον ρίπτει σκιάν 12,30μ. Ποῖον τό ὕψος του; ('Απ.24,6 μ.)

4) Δωμάτιον μήκους 5,40 μ.καί πλάτους 4 μ.θά στρω-

θῆ μέ ὕφασμα πλάτους 0,90 μ. Πόσον ὕφασμα θά χρειασθῇ ('Απ.24 μ.)

5) Δύο χάλκινα σύρματα ἔχουν τό ἴδιο βάρος.Τό μῆκος τοῦ πρώτου εἶναι 62 μ.καί ἡ τομήτοῦ δευτέρου εἶναι 6 φοράς μικροτέρα τῆς τομῆς τοῦ πρώτου. Πόσον εἶναι τό μῆκος τοῦ δευτέρου; ('Απ.372 μ.)

6) Τροχός διαμέτρου 0.70 μ. μεταδίδει τήν κίνησιν διά λωρίδος εἰς ἄλλον διαμέτρου 0,25μ.'Εάν ὁ πρῶτος κάμῃ 100 στροφάς πόσας θά κάμῃ ὁ δεύτερος;('Απ.280 στροφάς).

7) Τροχός μέ 144 ὀδόντας συμπλέκεται μέ ἄλλον ποῦ ἔχει 38 ὀδόντας.'Εάν ὁ πρῶτος κάμῃ 5 στροφάς, πόσας θά κάμῃ ὁ δεύτερος;('Απ.15 στρ.)

8) Τρεῖς τροχοί ἀπό τούς ὁποίους ὁ (α) ἔχει 144 ὀδόντας, ὁ (β) 95 ὀδόντας καί ὁ (γ) κάμνει 450 στροφάς εἰς τάς 150 στροφάς τοῦ (α), 'Εάν ὁ (α) κάμῃ 150 στροφάς πόσας θά κάμῃ ὁ (β) καί πόσους ὀδόντας ἔχει ὁ (γ); ('Απ.225 στρ.48 ὀδ.)

9) 'Ομάς ἀνδρῶν ἔχει τροφάς διά 45 ἡμ. καί πρέπει νά περάσουν μέ αὐτάς 60 ἡμ.Πόσουμέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου πρέπει νά παίρνῃ ὁ καθένας;('Απ. $\frac{3}{4}$)

10) 600 ἄνδρες ἔχουν τροφάς διά 40 ἡμ. καί πρέπει νά περάσουν μέ αὐτάς 50 ἡμ. Κατά πόσον θά ἐλαττωθῇ τό ἀρχικόν σιτηρέσιον; ('Απ. $\frac{1}{3}$)

11) Οἱ δύο δεῖκται ὡρολογίου δεικνύουν μεσημέρι. Πότε ὁ λεπτοδείκτης θά συναντήσῃ διά πρώτη φορά τόν ὡροδείκτη, καί πόσαι συναντήσεις θά γίνουν εἰς 12 ὥρας; ('Απ. εἰς τήν 1 ὥρ. $5\frac{5}{11}$ π.λ.συναντήσεις=11).

12) 'Ωρολόγιον πηγαίνει ὀπίσω $5\frac{1}{2}$ π.λ.εἰς 3 ὥρ.Μετά πόσον χρόνον θά δεικνύῃ τήν σωστή ὥρα; ('Απ. $392\frac{8}{11}$)

13) Δύο ὡρολόγια δεικνύουν μεσημέρι. Τό ἕνα εἰς 5 ωρ. πηγαίνει ὀπίσω 3 π.λ. καί τό ἄλλο πηγαίνει ἐμπρός 3 π.λ. Ὅταν ἡ σωστή ὥρα εἶναι 10 ποίαν ὥραν δεικνύουν αὐτά; ('Απ. 9ωρ. 45 π.λ. καί τό ἄλλο 10ὥρ. 6π.λ.)

14) Δύο ὡρολόγια δεικνύουν αὐτήν τήν στιγμήν μεσημέρι. Εἰς 24 ὥρ. τό (α) πηγαίνει ὀπίσω 5 π.λ. καί τό (β) 3π.λ. καί διά τοῦτο μετά ἀπό ὀλίγον χρόνον διαφέρουν διά πρώτην φοράν κατά 18 π.λ. 40δ.λ. Ποία ἡ σωστή ὥρα ('Απ. 8 μ.μ.)

15) Δύο ὡρολόγια δεικνύουν τώρα 2μ.μ. Τό (α) πηγαίνει ἐμπρός 16 π.λ. εἰς 24ὥρ. καί τό ἄλλο πηγαίνει ὀπίσω 4 π.λ. εἰς 12 ὥρ. Μετά πόσας ὥρας θά διαφέρουν κατά $\frac{1}{2}$ ὥρας καί ποίας ὥρας θά δεικνύουν τότε ('Απ. 30ὥρ., 8ὥρ. 20' μ.μ., 7ὥρ. 50 μ.μ.)

16) Ὡρολόγιον πηγαίνει ὀπίσω 6 π.λ. εἰς 24 ὥρ. καί ἐκανονίσθη μέ ἄλλο ἀκριβές πού δεικνύει μεσημέρι. Ποία θά εἶναι ἡ σωστή ὥρα ὅταν τό πρῶτον δεικνύει 8 μ.μ.; ('Απ. 8ωρ. $2\frac{12}{239}$ π.λ.)

17) Ὡρολόγιον πηγαίνει ὀπίσω $5\frac{1}{2}$ π.λ. εἰς 3 ὥρ. Ἐάν σήμερον δεικνύῃ μεσημέρι, τότε ποίαν ὥραν θά δεικνύῃ τό μεσημέρι τῆς ἑπομένης; ('Απ, 11 ὥρ. 16 π.λ.)

Β) Σύνθετος μέθοδος τῶν τριῶν

Πρόβλημα. "τεχνίτης εἰργάσθη 12 ἡμ. καί ἀπό 8 ὡρ. τήν ἡμέραν καί πῆρε 672 δρχ. Πόσας ἡμέρας θά ἐργασθῇ ἀπό 6ὥρ. τήν ἡμέραν διά νά πάρῃ 630 δρχ.;"

Λύσις. Ἀπό τήν ἐκφώνησιν τοῦ προβλήματος βλέπομεν ὅτι ὁ ἀριθμός τῶν ἡμερῶν πού ζητοῦμεν ἐξαρτᾶται ἀπό δύο ἄλλα ποσά τά ὁποῖα εἶναι ὁ ἀριθμός τῶν ὡρῶν καί ὁ ἀριθμός τῶν δραχμῶν. Ἄρα τό πρόβλημα εἶναι τῆς συνθέτου μεθόδου τῶν τριῶν. Πρός λύσιν αὐτοῦ κάμνομεν τήν κατάταξιν,ὅπως καί εἰς τήν ἁπλῆν μέθοδον τῶν τριῶν Δηλ.

12 ἡμ.	8ὧρ.	672δρχ.	Μετά ἀπό τήν κατάτξιν κάμνομεν
X	6	630	σύγκρισιν τῶν ποσῶν ὡς ἑξῆς:

1ον) ὑποθέτομεν τόν ἀριθμόν τῶν ὡρῶν ἀμετάβλητον καί λέγομεν: Ἐπειδή ὁ μισθός τοῦ τεχνίτου καί αἱ ἡμέραι ποῦ εἰργάσθη εἶναι ποσά ἀνάλογα, διά τοῦτο σύμφωνα μέ τά γνωστά ἀπό τήν ἁπλῆ μέθοδον τῶν τριῶν θά ἔχωμεν $12 \times \frac{630}{672}$ ἡμέρας δηλ. διά νά πάρῃ 630 δρχ. πρέπει νά ἐργασθῇ $12 \times \frac{630}{672}$ ἡμέρας καί ἀπό 8 ὧρ.τήν ἡμέραν. 2ον) Ὑποθέτομεν τόν ἀριθμόν τῶν δραχμῶν ἀμετάβλητον καί λέγομεν:Ὅταν ἐργάζεται ἀπό 8ὧρ.τήν ἡμέραν χρειάζεται $12 \times \frac{630}{672}$ ἡμέρας. Ἐάν ἐργασθῇ ἀπό 6 ὧρ.τήν ἡμέραν θά χρειασθῇ περισσοτέρας ἡμέρας διότι ὁ ἀριθμός τῶν ἡμερῶν εἶναι ἀντίστροφος πρός τόν ἀριθμόν τῶν ὡρῶν. Σύμφωνα λοιπόν μέ τά γνωστά ἀπό τήν ἁπλῆ μέθοδον τῶν τριῶν θά ἔχωμεν: $12 \times \frac{630}{672} \times \frac{8}{6}$ καί ἐπειδή αὐτό εἶναι τό ζητούμενον γράφομεν: $X = 12 \times \frac{630}{672} \times \frac{8}{6} = 15$ ἡμέραι.

Ἀπό τό πρόβλημα αὐτό συνάγεται ὁ ἑξῆς κανών: "Κάμνομεν τήν κατάστρωσιν τοῦ προβλήματος καί ἔπειτα πολλαπλασιάζομεν τόν ἄνω τοῦ ἀγνώστου ἀριθμόν ἐπί τά κλάσματα,ἀντεστραμμένα μέν, ἐάν τά ποσά εἶναι ἀνάλογα,ὅπως εἶναι δέ, ἐάν τά ποσά εἶναι ἀντίστροφα.

Προβλήματα

1) Οἱ 40 ἐργ.ἐργαζόμενοι 8 ὧρ.τήν ἡμέραν ἔκαμαν εἰς 50 ἡμ.ὑπόνομον μήκους 128μ.πλάτους 6μ.καί βάθους 3μ. Εἰς πόσας ἡμέρας οἱ 30 ἐργ.ἐργαζόμενοι 10ὧρ.τήν ἡμέραν θά κάμουν ὑπόνομον μήκους 100 μ.πλάτους 9μ.καί βάθους 4μ. εἰς ἔδαφος 3 φοράς σκληρότερον τοῦ πρώ

του; ('Απ.250 ἡμ.)

2) 'Ατμομηχανή δυνάμεως 8 ἵππων ἔδωσεν 600 στατῆρας ἀλεύρι εἰς 3 ὥρ.Πόση δύναμι ἔχει μία ἄλλη ἀτμομηχανή ποῦ εἰς 5 ὥρ.ἔδωσεν 1250 στατ.ἀλεῦρι;('Απ. 10 ἵππων).

3) Πρός σανίδωσιν πατώματος μήκους 15μ.καί πλάτους 12μ.ἐζητήθησαν σανίδες μήκους 7,5μ.καί πλάτους 0,32μ. Εὑρέθησαν ὅμως σανίδες μήκους 6μ.καί πλάτους 0,30 μ. Πόσας σανίδας ἀπό κάθε εἶδος χρειάζονται('Απ.75 καί 100).

4) Πόσαι πλάκες μήκους 0,38μ.καί πλάτους 0,26μ. χρειάζονται διά νά στρωθῇ μία αὐλή μήκους 9,5καί πλάτους 5,72μ.; ('Απ.550).

5) Πρός τύπωσιν βιβλίου τοῦ ὁποίου κάθε σελίς ἔχει 32 στίχους καί κάθε στίχος 30 γράμματα ἐχρειάσθησαν 24 τυπογραφικά φύλλα. Πόσα φύλλα θά χρειασθοῦν ἐάν κάθε σελίς ἔχει 36 στίχους καί κάθε στίχος 32 γράμματα; ('Απ.20).

6) Βιβλίον ἔχει 256 σελίδας,κάθε σελίς 36 στίχους καί κάθε στίχος 50 γράμματα.Πόσας σελίδας θά ἔχῃ ἐάν κάθε σελίς ἔχῃ 40 στίχους καί κάθε στίχος 48 γράμματα; ('Απ.240).

7) 1200 ἄτομα ἔχουν τροφάς διά 3 μῆνας.Εἰς πόσους πρέπει νά περιορισθοῦν διά νά διαρκέσουν αἱ τροφαί 10 μῆνας ἀφοῦ ἐλαττωθῇ τό μερίδιον καθενός κατά τό $\frac{1}{5}$; ('Απ.450)

8) 700 ἄτομα ἔχουν τροφάς διά 50 ἡμ.ἀπό αὐτούς ἔφυγαν 240 ἄτομα μέ τροφάς διά 3 ἡμ. Πόσας ἡμέρας θά περάσουν οἱ ὑπόλοιποι μέ τάς τροφάς ποῦ τούς ἔμειναν;('Απ. 74 ἡμ.)

9) 500 ἄτομα ἔχουν τροφάς διά 40 ἡμ.Μετά 12 ἡμ.ἀνε-

χώρησαν 80 ἄτομα καί οἱ ὑπόλοιποι ἠλάττωσαν τό σιτηρέσιόν των εἰς τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀρχικοῦ. Πόσας ἡμέρας ἐπέρασαν; ('Απ. 50 ἡμ.)

10) 700 ἄνδρες ἔχουν τροφάς διά 50 ἡμ. Εἰς αὐτούς προσετέθησαν καί ἄλλοι 200 ἄνδρες μέ τροφάς 2 ἡμερῶν. Ποῖον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου θά παίρνῃ ὁ καθένας διά νά περάσουν τάς 50 ἡμ.; ('Απ. $\frac{354}{450}$)

11) 400 στρατιῶται εἶχον τήν 2αν 'Απριλίου τροφάς δι'ὅλον τόν μῆνα. Τήν νύκτα τῆς 9ης 'Απριλίου κατέφθασαν καί ἄλλοι 120 στρατιῶται φέροντες διά τούς ἑαυτούς των τροφάς 5 ἡμερῶν καί ἥνωσαν τάς τροφάς των. Πόσον μέρος τοῦ ἀρχικοῦ σιτηρεσίου θά παίρνῃ τώρα ὁ καθένας διάνά ἀρκέσουν αἱ τροφαί μέχρι τέλους 'Απριλίου; ('Απ. $\frac{75}{91}$)

12) Ταχυδρόμος αὐξάνει τήν ταχύτητα του κατά $\frac{2}{5}$. Πόσας ωρας πρέπει νά βαδίζῃ κάθε ἡμέραν διά νά διανύσῃ εἰς 5 ἡμ. τήν ἰδίαν ἀπόστασιν πού εἶχε διανύσει εἰς 7 ἡμ. βαδίζων 9 ωρ. τήν ἡμέραν; ('Απ. 9 ὡρ.)

13) 6 τεχνῖται εἰς 10 ἡμ. ἔκαμαν τό $\frac{1}{3}$ τοῦ ἔργου, 'Επειδή ομως εἶχον συμφωνήσει νά τελειώσουν ὅλο τό ἔργον εἰς 25 ημ. θέλουν νά μάθουν πόσους τεχνίτας πρέπει νά προσλάβουν ἀκόμη διά νά τελειώσῃ τό ἔργον εἰς τήν προθεσμίαν πού συνεφώνησαν ('Απ. 2 ἐργ.)

14) Διά νά γίνῃ τό $\frac{1}{3}$ ἔργου εἰργάσθησαν 8 ἐργάται ἐπί 10 ἡμ. Πόσους πρέπει νά πάρουν ἀκόμη διά νά γίνῃ τό ὑπόλοιπον ἔργον εἰς 8 ἡμ.; ('Απ. 20 ἐργ.)

15) Ἔργον ἠμπορεῖ νά γίνῃ ἀπό 15 ἄνδρες ἤ ἀπό 40 παιδιά εἰς 12 ἡμ. Εἰς πόσας ἡμέρας 10 ἄνδρες καί 20 παιδιά θά κάμουν μαζί 3/πλάσιον ἔργον; ('Απ. 30 $\frac{6}{7}$)

16) Ἕνα ὀρθογωνικόν δοχεῖον μήκους 1μ. καί πλάτους 0,8μ. (0,6) ἐγέμισεν μέ 27(800) λίτρας νερό (οἰνόπνευ-

μα είδ.β.=0,800).Ποΐον είναι τό βάθος τοῦ δοχείου; 0.033μ.(1,66μ.)

17) Τό προσωπικόν ἐργοστασίου είναι 10 ἄτομα καί χρειάζονται κάθε ἑβδομάδα 343 λίτρας νερό.Πρόκειται δέ νά κατασκευασθοῦν 8 δοχεῖα μήκους 1,5μ.καί πλάτους 0,80 μ.διά νά χωρέσουν νερό διά 40 ἄτομα ἐπί 55 ἡμ.Ποΐον πρέπει νά είναι τό βάθος κάθε δοχείου; ('Απ.0,714 μ.περίπου)

18) Ένα τεπόζιτο χωρεῖ 7 όκ.νερό περισσότερον παρά βενζίνη είδικοῦ βάρους 0,72.Πόσας όκάδας χωρεῖ ἀπό κάθε εἶδος;('Απ.25, 18).

19)Στέρνα κυβική χωρεῖ 7.168.000 όκ.νερό περισσότερον παρά βενζίνη είδ.βάρους 0,72.Πόσας όκάδας ἀπό κάθε εἶδος χωρεῖ καί ποΐον τό βάθος αὐτῆς.('Απ. 25.600.000 όκ.νερό, 18.432.000 όκ.βενζίνη,βάθος 32μ.)

20) Στέρνα ὀρθογωνική μήκους 12 μ.καί πλάτους $5\frac{1}{3}$ μ χωρεῖ 11.000 όκ.νερό περισσότερον παρά πετρέλαιον είδ. βάρους 0,78.Ζητεῖται τό βάθος αὐτῆς ('Απ.1 μέτρον)

<u>Μερισμός είς μέρη ἀνάλογα καί ἀντίστροφα</u>

α) Μερίζω ἀριθμόν είς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν σημαίνει, χωρίζω τόν ἀριθμόν αὐτόν είς τόσα μέρη ὅσα είναι οἱ ἄλλοι ἀριθμοί καί τά ὁποῖα νά είναι ἀνάλογα πρός αὐτούς. Ὁ ἀριθμός ποῦ μερίζομεν λέγεται <u>Μεριστέος</u>.Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νά μερίσωμεν τόν ἀριθμόν 100 είς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 12 καί 13. Ἐπειδή 12+13=25 λέγομεν:

Ἐάν μεριστέος είναι 25,τά μέρη θά είναι 12 καί 13

" " " 1 " " " " $\frac{12}{25}$ καί $\frac{13}{25}$

" " " 100 " " " " $\frac{12X100}{25}$ καί $\frac{13X100}{25}$ Ὥστε τά ζητούμενα μέρη είναι $\frac{12X100}{25}$ =48 καί $\frac{13X100}{25} = 52$. Πράγματι $48+52=100$. Ἄρα "Διά νά μερίσω ἀριθμόν εἰς μέρη ἀνάλογα ἄλλων ἀριθμῶν, πολλαπλασιάζω τόν μεριστέον μέ κάθε ἕνα ἀπό τούς ἄλλους ἀριθμούς καί κάθε γινόμενον διαιρῶ διά τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων αὐτῶν ἀριθμῶν"

β) Μερίζω ἀριθμόν εἰς μέρη ἀντίστροφα ἄλλων ἀριθμῶν σημαίνει χωρίζω τόν ἀριθμόν αὐτόν εἰς τόσα μέρη, ὅσα εἶναι οἱ ἄλλοι ἀριθμοί καί τά ὁποῖα νά εἶναι ἀνάλογα πρός τούς ἀντιστρόφους τῶν ἄλλων αὐτῶν ἀριθμῶν,

Ἄς ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νά μερίσωμεν τόν 100 εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν $\frac{1}{2}$ καί $\frac{3}{4}$. Πρός τοῦτο θά μερίσωμεν τόν 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν $\frac{2}{1}$ καί $\frac{4}{3}$. Αὐτό σύντομα γίνεται ὡς ἑξῆς: Τρέπομεν τά κλάσματα αὐτά εἰς ὁμώνυμα καί ἔχομεν $\frac{6}{3}$ καί $\frac{4}{3}$. Καί τώρα μερίζομεν τόν 100 εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμητῶν 6 καί 4 καί σύμφωνα μέ τά προηγούμενα εὑρίσκομεν $\frac{100X6}{6+4} = 60$ καί $\frac{100X4}{6+4} = 40$

Εἴδη μερισμοῦ. Ἔχομεν δύο εἴδη μερισμοῦ. Εἰς τό πρῶτον εἶδος ὑπάγονται τά προβλήματα ἐκεῖνα εἰς τά ὁποῖα δίδονται ἀμέσως οἱ ἀριθμοί ἀναλόγως τῶν ὁποίων θά μερισθῇ ὁ μεριστέος. Εἰς τό δεύτερον εἶδος ὑπάγονται τά προβλήματα ἐκεῖνα εἰς τά ὁποῖα δίδονται ἐμμέσως οἱ ἀριθμοί ἀναλόγως τῶν ὁποίων θά μερισθῇ ὁ μεριστέος.

Προβλήματα

1) Τρεῖς ποδηλάται συνεφώνησαν νά μοιρασθοῦν 24000 δρχ. ἀναλόγως τῶν ταχυτήτων μέ τάς ὁποίας θά διατρέξουν μίαν ἀπόστασιν. Ὁ (α) διέτρεξεν τήν ἀπόστασιν αὐτήν εἰς 12 π.λ.ὁ (β) εἰς 15 π.λ. καί ὁ (γ) εἰς 20 π.λ. Πόσας δραχμάς θά πάρῃ ὁ καθένας; (Ἀπ. 10.000, 8.000, 6.000)

2) Ἐργοστάσιον ἔχει ἐφαρμοστάς τορναδόρους καί βοηθούς ἐν ὅλῳ 170. Οἱ τορναδόροι εἶναι 3/πλάσιοι τῶν ἐφαρμοστῶν καί οἱ βοηθοί εἶναι 2/πλάσιοι τῶν τορναδόρων. Πόσους ἔχει ἀπό κάθε εἰδικότητα;('Απ.17ἐφ.51τορ. 102βοηθ.)

3) Ἐπώλησεν ἕνας, ἕνα βιβλίο, μία κασσετίνα καί ἕνα στυλό ἀντί 7360 δρχ. Ἡ ἀξία τοῦ βιβλίου εἶναι τό $\frac{1}{20}$ τῆς ἀξίας τῆς κασσετίνας, καί ἡ ἀξία τῆς κασσετίνας εἶναι τά $\frac{4}{5}$ τῆς ἀξίας τοῦ στυλό. Ποία ἡ ἀξία χωριστά τοῦ κάθε ἑνός πράγματος; ('Απ.160δρχ.,3200 δρχ.,4000δρ)

4) 7210 δρχ. νά μοιρασθοῦν εἰς τρία πρόσωπα, οὕτως ὥστε, τό μερίδιον τοῦ (α) πρός τό μερίδιον τοῦ (β) νά εἶναι ὅπως ὁ 4:5 καί τό μερίδιον τοῦ (β) πρός τό μερίδιον τοῦ (γ) νά εἶναι ὅπως ὁ 7:8. Πόσας θά πάρῃ ὁ καθένας; ('Απ.1960, 2450,2800)

5) 55800 δρχ.νά μοιρασθοῦν εἰς τέσσαρα ἄτομα,οὕτως ὥστε ὁ (β) νά πάρῃ τά 0,75 τοῦ μεριδίου τοῦ (α),ὁ(γ) τά $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν μεριδίων (α) καί (β) καί ὁ (δ) τά 0,80 τῶν μεριδίων (α) καί (γ). Πόσας δραχμάς θά πάρῃ ὁ καθένας ἀπό αὐτούς;('Απ.12000,9000,14000, 20800).

6) Μία σχολή διά νά κάμῃ 210 θρανία ἀνέθεσεν εἰς τρεῖς ξυλουργούς ἀπό τούς ὁποίους ὁ (α) κάμνει 18 θρανία εἰς 3 ἡμ., ὁ (β) 28 θρανία εἰς 4 ἡμ., καί ὁ (γ) 40 θρανία εἰς 5 ἡμ. Πόσα θρανία πρέπει νά ἀναθέσῃ εἰς τόν καθένα διά νά εἶναι ὅλα ἕτοιμα συγχρόνως; ('Απ.60,70,80).

Περί ποσοστῶν

Τό κέρδος, ἡ ζημία, ἡ μεσιτεία, ἡ προμήθεια, ἡ ἔκπτωσις τά ἀσφάλιστρα κ.ἄ. ἐπεκράτησεν ἡ συνήθεια νά προσδιορίζωνται μέ βάσιν τό 100 ἤ τό 1000. π.χ. ἔκπτωσις

8 τοῖς ἑκατόν, σημαίνει ἐπί 100 δραχμῶν νά γίνεται ἔκπτωσις 8 δρχ.καί γράφεται 8%. Αἱ 8 δρχ.λέγονται ποσοστόν. Ὁμοίως ἀσφάλιστρα 1 τοῖς χιλίοις σημαίνει, ἐπί 1000 δρχ.νά πληρώσωμεν 1 δρχ.καί γράφεται 1‰ Ἡ 1 δρχ.λέγεται ποσοστόν. Ἐπομένως ποσοστόν λέγεται τό ποσόν ποῦ ἀναλογεῖ ἐπί 100 ἤ ἐπί 1000 μονάδων ἑνός ποσοῦ.

Τά προβλήματα τῶν ποσοστῶν λύονται διά τῆς μεθόδου τῶν τριῶν. Εἰς τά προβλήματα τῶν ποσοστῶν πρέπει νά ἔχωμεν ὑπ'ὄψιν τά ἑξῆς:

α) Κέρδος π.χ. 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ἤ μέ ἄλλα λόγια: κέρδος 25% ἐπί τῶν χρημάτων ποῦ ἔδωσε διά νά ἀγοράσῃ τό ἐμπόρευμα σημαίνει, τό ἀγορασθέν μέ 100 δρχ. νά πωληθῇ πρός 100+25=125 δρχ. Ἀλλά ζημία π.χ.25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς σημαίνει,τό ἀγορασθέν μέ 100 δρχ.νά πωληθῇ ἀντί 100-25=75 δρχ.

β) Κέρδος π.χ. 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως,δηλ. ἐπί τῆς εἰσπράξεως σημαίνει, τό ἀγορασθέν μέ 100 δρχ. νά πωληθῇ ἀντί 100-25=75 δρχ.Ἀλλά ζημία 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως σημαίνει,τό ἀγορασθέν μέ 100 δρχ. νά πωληθῇ ἀντί 100+25=125 δρχ.

Μέσος ὅρος ἤ Ἀριθμητικόν μέσον

Μέσος ὅρος ἤ ἀριθμητικόν μέσον δοθέντων ἀριθμῶν λέγεται τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀριθμῶν διά τοῦ ἀριθμοῦ ποῦ ἐκφράζει τό πλῆθος αὐτῶν. π.χ. ὁ μέσος ὅρος τῶν ἀριθμῶν 12,7,11 εἶναι $\frac{12+7+11}{3} = 10$.

Τόκος (ἐκ τοῦ ῥήματος τίκτω=γεννῶ)

Τόκος λέγεται τό κέρδος ποῦ παίρνει ὁ δανείζων χρήματα.Τά χρήματα ποῦ δανείζομεν λέγονται Κεφάλαιον,ὁ δέ τόκος τῶν 100 δρχ.εἰς 1 ἔτος λέγεται Ἐπιτόκιον.

Τό χρονικό διάστημα πού μένει τό κεφάλαιον εἰς τόν τόκον λέγεται χρόνος. Ὁ τόκος εἶναι δύο εἰδῶν: Ἁπλοῦς καί Σύνθετος. Ἁπλοῦς τόκος λέγεται ὅταν τό κεφάλαιον μένῃ τό ἴδιο καθ'ὅλην τήν διάρκειαν τοῦ δανείου. Σύνθετος τόκος ἤ Ἀνατοκισμός λέγεται ὅταν εἰς τό τέλος κάθε ἔτους, ὁ τόκος προστίθεται εἰς τό κεφάλαιον διά νά ἀποφέρῃ καί αὐτός τόκον.

Α) Ἁπλοῦς τόκος. Εἰς τά προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ τόκου παρουσιάζονται τέσσαρα ποσά. Τό Κεφάλαιον (Κ), τό Ἐπιτόκιον (Ε), ὁ Τόκος (Τ) καί ὁ Χρόνος (Χ), τά ὁποῖα ἔχουν τέτοιαν σχέσιν μεταξύ των, ὥστε ὅταν γνωρίζωμεν τά τρία ἀπό αὐτά, ἠμποροῦμεν πάντοτε νά εὑρίσκωμεν τό τέταρτον διά τῆς μεθόδου τῶν τριῶν, ἀρκεῖ νά ἔχωμεν ὑπ'ὄψιν τά ἑξῆς: 1ον) Ὅταν ζητῆται ὁ τόκος τότε τό κεφάλαιον καί ὁ χρόνος εἶναι ποσά ἀνάλογα πρός τόν τόκον 2ον) Ὅταν ζητῆται τό Ἐπιτόκιον τότε τό κεφάλαιον καί ὁ χρόνος εἶναι ποσά ἀνάλογα πρός τό ἐπιτόκιον. 3ον) Ὅταν ζητῆται τό κεφάλαιον, τότε ὁ μέν χρόνος εἶναι ποσόν ἀντίστροφον πρός τό κεφάλαιον, ὁ δέ τόκος εἶναι ποσόν ἀνάλογον πρός τό κεφάλαιον. 4ον) Ὅταν ζητῆται ὁ χρόνος, τότε τό μέν κεφάλαιον εἶναι ποσόν ἀντίστροφον πρός τόν χρόνον, ὁ δέ τόκος εἶναι ποσόν ἀνάλογον πρός τόν χρόνον. Τά προβλήματα τοῦ τόκου λύονται σύντομα μέ τούς ἑξῆς τύπους:

$T = \frac{K.E.X}{100}$, $K = \frac{T.100}{E.X}$, $E = \frac{T.100}{K.X}$, $X = \frac{T.100}{K.E}$. Εἰς τά προβλήματα, ὅταν ὁ χρόνος εἶναι μῆνες τότε ἀντί τοῦ 100 θά γράφωμεν εἰς τόν τύπον τό 1200(=100X12), ὅταν ὁ χρόνος εἶναι ἡμέραι, τότε ἀντί τοῦ 100 θά γράφωμεν εἰς τόν τύπον τό 36.000(=100X360). Ὅταν ὁ χρόνος τοῦ προβλήματος εἶναι συμμιγής δηλ.ἔτη,μῆνες,ἡμέραι τότε θά τρέπωμεν τόν συμμιγῆ εἰς μονάδας τῆς τελευταίας τάξεως ποῦ ἔχει ὁ συμμιγής τοῦ προβλήματος.

<u>Β)Τό κεφάλαιον ἡνωμένον μέ τόν τόκον αὐτοῦ.</u>Εἰς τά προβλήματα τοῦ ἁπλοῦ τόκου,πολλές φορές, τό κεφάλαιον εἶναι ἡνωμένον μέ τόν τόκον αὐτοῦ.

<u>Παράδειγμα.</u> "Κεφάλαιον ἐτοκίσθη διά 5 ἔτη πρός 8% καί ἔγινε μέ τόν τόκον του 22 800 δρχ. Ποῖον τό κεφάλαιον καί πόσος ὁ τόκος αὐτοῦ;

<u>Λύσις:</u> Παίρνομεν βοηθητικόν κεφάλαιον 100 δρχ.καί εὑρίσκομεν τόν τόκον αὐτοῦ εἰς 5 ἔτη πρός 8% καί ἔχομεν $T = \frac{100.5.18}{100} = 90$ δρχ.Αἱ 100 δρχ.μέ τόν τόκον αὐτῶν 90 γίνονται $100+90=190$ δρχ. Καί τώρα λέγομεν

Κεφ.καί τόκος 190 δρχ.προέρχονται ἀπό κεφάλ.100.δρχ.

" " " 22800 " X;

$X = \frac{100X22800}{190} = 12.000$ δρχ. Ὥστε τό μέν Κεφάλαιον ἦτο 12.000 δρχ. ὁ δέ τόκος αὐτῶν ἦτο $22.800-12.000=10800$Δρ

<u>Γ) Σύνθετος τόκος ἤ Ἀνατοκισμός.</u> Ὁ σύνθετος τόκος εὑρίσκεται μέ τόν τύπον $K = \alpha.(1+\tau)^{\nu}$ ὅπου α=ἀρχικόν κεφάλαιον, τ=τόκος μιᾶς δραχμῆς εἰς ἕνα ἔτος, ν=ἀριθμός ἐτῶν καί Κ= τελικόν κεφάλαιον.π.χ. "Κεφάλαιον 12.000 δρχ.ἀνατοκίζεται κατ'ἔτος πρός 10% πόσον θά γίνῃ μετά 4 ἔτη;"

Εὑρίσκομεν πρῶτον τόν τόκον τῆς 1 δρχ.εἰς 1 ἔτος.

Πρός τοῦτο λέγομεν:

Αἱ 100 δρχ. εἰς ἕνα ἔτος φέρουν τόκον 10 δρχ.

ἡ 1 δρχ. " " " " " $\frac{10}{100} = 0,1$. Ὥστε $\tau = 0,1$.$\alpha = 12.000$ καί $\nu = 4$ ἀντικαθιστῶμεν τάς τιμάς αὐτάς εἰς τόν προηγούμενον τύπον καί ἔχομεν:

$K = 12000.(1+0,1)^4$ ἤ $K = 12.000.(1,1)^4$ καί τέλος ἔχομεν

$K = 12000X1,1X1,1X1,1X1,1 = 175.692$ δρχ.

Προβλήματα

1) Κεφάλαιον αύξάνεται είς 15 μήνας κατά τό $\frac{1}{16}$ αύτοΰ. Ποΐον τό έπιτόκιον;

2) Μετά πόσον χρόνον κεφάλαιον τοκιζόμενον πρός 4,5% διπλασιάζεται;

3) Μέ ποΐον έπιτόκιον θά τοκισθῆ κεφάλαιον διά νά διπλασιασθῆ μετά 10 ἔτη;

4) Είς πόσον χρόνον κεφάλαιον πρός 4% αύξάνεται κατά τό $\frac{1}{2}$ τῆς άξίας του;

5) Κεφαλαίου τά $\frac{4}{5}$ έδανείσθησαν μέ 4% καί τό ύπόλοιπον μέ 5% καί δίδει κάθε ἔτος τόκον 2940 δρχ. Ποΐον εἶναι τό κεφάλαιον;

6) Κεφάλαιον έδανείσθη διά 10 μῆνας πρός 9% καί έγινε μέ τούς τόκους του 1032 δρχ. Ποΐον τό κεφάλαιον καί πόσος ό τόκος;

7) Κάποιος έδάνεισεν ἄλλον 15000 δρχ.πρός 10% διά 4 ἔτη καί άφοΰ έκράτησε τόν τόκον ἔδωσεν είς αύτόν τό ύπόλοιπον.Πρός πόσον τοΐς έκατόν πραγματικῶς τόν έδάνεισεν;

8) Κάποιος έδάνεισεν ἄλλον διά 5 ἔτη καί τά μέν 2 πρῶτα ἔτη πρός 8% καί άφοΰ έπέρασαν τά 5 ἔτη ἔλαβεν διά κεφάλαιον καί τόκους 13140 δρχ.Πόσα τόν έδάνεισεν;

9) Τά $\frac{3}{5}$ ένός κεφαλαίου έτοκίσθησαν πρός 8% καί τό ύπόλοιπον πρός 7%. Μετά ἕνα ἔτος ἔγινε μέ τούς τόκους του 45.600 δρχ.Ποΐον ἦτο τό κεφάλαιον;

Περί Ύφαιρέσεως

Ἡ ύφαίρεσις εἶναι ή μέθοδος μέ τήν όποίαν λύονται τά προβλήματα πού άφοροΰν τά γραμμάτια πού προεξοφλοΰνται δηλαδή πληρώνονται,πρό τῆς λήξεως τῆς προθεσμίας. Τό κατωτέρω σχέδιον εἶναι γραμμάτιον κάποιου ἐμπόρου (Α) ποῦ ἐδανείσθη 4000 δρχ. πρός 15% διά 3 μῆνας ἀπό ἄλλον ἔμπορον (Β) τήν 1ην Ἀπριλίου τοῦ 1951 καί αἱ ὁποῖαι μέ τούς τόκους τῶν τριῶν μηνῶν γίνονται 4150 δρχ. Ὁ ἀριθμός 4150 δρχ.

> Διά δραχμάς 4150
>
> Τήν 1ην Ἰουλίου 1951 ὑπόσχομαι καί ὑποχρεοῦμαι νά πληρώσω εἰς τόν κ. Β ἤ εἰς διαταγήν αὐτοῦ 4150 δρχ.
>
> Ἐν Ἀθήναις τῇ 1 Ἀπριλίου 1951
>
> (Ὑπογραφή) Α

λέγεται Ὀνομαστική ἤ Μέλλουσα ἀξία τοῦ γραμματίου. Ὀνομαστική ἀξία μέν λέγεται διότι τό γραμμάτιον παίρνει ὄνομα ἀπό τόν ἀριθμόν αὐτόν δηλ. λέγεται γραμμάτιον τῶν 4150 δρχ. Μέλλουσα ἀξία δέ λέγεται διότι τό γραμμάτιον θά ἀξίζῃ 4150 δρχ. ὅταν ἔλθῃ ἡ 1η Ἰουλίου 1951 δηλ. εἰς τό μέλλον. Ἡ ἡμερομηνία 1η Ἰουλίου 1951 λέγεται ἡμέρα λήξεως τοῦ γραμματίου. Αἱ λέξεις εἰς διαταγήν αὐτοῦ ἀναγράφονται διά νά ἠμπορῇ ὁ (Β) νά πωλήσῃ τό γραμμάτιον εἰς ἄλλον ἔμπορον (Γ) ἐάν συμβῇ νά λάβῃ ἀνάγκη χρημάτων πρό τῆς 1ης Ἰουλίου 1951. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ὁ (Β) θά γράφῃ ὄπισθεν τοῦ γραμματίου τά ἑξῆς: Πληρώσατε εἰς τήν διαταγήν τοῦ ἀγοραστοῦ (Γ) τάς 4150 δρχ. καί αὐτό λέγεται Ὀπισθογράφησις τοῦ γραμματίου. Ἡ ὀπισθογράφησις γίνεται διά νά ἠμπορῇ ὁ (Γ) νά πάρῃ τά χρήματα ἀπό τόν (Α) ἤ διά νά ἠμπορῇ ὁ (Γ) νά πωλήσῃ τό γραμμάτιον εἰς ἄλλον ἔμπορον (Δ) ἐάν συμβῇ νά λάβῃ καί ὁ (Γ) ἀνάγκη χρημάτων πρό τῆς 1ης Ἰουλίου 1951.

Ἐάν τύχῃ ὁ (Β) νά λάβῃ ἀνάγκη χρημάτων πρό τῆς

1ης 'Ιουλίου 1951 π.χ. τήν 1ην Μαΐου 1951 (δηλ.2 μῆνες πρό τῆς λήξεως) καί πωλήσει τό γραμμάτιον εἰς ἄλλον ἔμπορον (Γ),θά τό πωλήση ἀναγκαστικά μέ ἔκπτωσιν ἡ ὁποία λέγεται ἐδῶ ὑφαίρεσις,καί τό ποσόν πού θά πάρη ὁ (Β) ἀπό τήν πώλησιν τοῦ γραμματίου λέγεται Πραγματική ἤ Παροῦσα ἤ Τρέχουσα ἀξία τοῦ γραμματίου.

"Ωστε 'Υφαίρεσις λέγεται τό ποσόν κατά τό ὁποῖον ἐκπίπτει ἡ ἀξία ἑνός γραμματίου,ὅταν πωλῆται πρίν ἔλθη ἡ ἡμέρα λήξεως αὐτοῦ.

Πραγματική ἀξία γραμματίου λέγεται τό ποσόν πού παίρνει ἐκεῖνος πού πωλεῖ τό γραμμάτιον,ἀφοῦ ἀφαιρεθῆ ἡ ὑφαίρεσις.

'Υφαιρέσεως ὑπάρχουν δύο εἴδη:ἡ ἐξωτερική ἤ ἐμπορική ὑφαίρεσις καί ἡ ἐσωτερική ὑφαίρεσις.

'Εξωτερική ὑφαίρεσις εἶναι ὁ ἁπλοῦς τόκος τῆς ὀνομαστικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπό τῆς ἡμέρας τῆς πωλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας λήξεως αὐτοῦ.

'Εσωτερική ὑφαίρεσις εἶναι ὁ ἁπλοῦς τόκος τῆς πραγματικῆς ἀξίας τοῦ γραμματίου ἀπό τῆς ἡμέρας τῆς πωλήσεως μέχρι τῆς ἡμέρας λήξεως αὐτοῦ.

Τά προβλήματα τῆς ὑφαιρέσεως λύονται μέ τήν βοήθειαν τῶν γνωστῶν τύπων τοῦ ἁπλοῦ τόκου,ἀρκεῖ νά ἔχωμεν ὑπ' ὄψιν τά ἑξῆς: Εἰς μέν τήν ἐξωτερικήν ὑφαίρεσιν τό Κ= 'Ονομαστική ἀξία καί τό Τ=ἐξ.ὑφαίρεσις εἰς δέ τήν ἐσωτερικήν ὑφαίρεσιν τό Κ=πραγματική ἀξία καί Τ=ἐσ.ὑφαίρεσις.

Παράδειγμα 1ον. "Γραμμάτιον ὀν.ἀξίας 2000 δρχ.προεξωφλήθη 3 μῆνας πρό τῆς λήξεώς του μέ 20%. Ποία ἡ ἐξωτερική καί ποία ἡ ἐσωτερική ὑφαίρεσις.

Λύσις: α)ἐξ.ὑφ. $\frac{2000X3X20}{1200}$ = 100 δρχ.δηλ.ἐξ.ὑφ.= 100 δρχ.τό ποσόν αὐτό θά τό πάρη ὁ ἀγοραστής τοῦ γραμματίου. κατόπιν λέγομεν. 'Ον.άξία-έξ.ύφ.=πραγμ. άξία ή 2000-100=1900 δρχ.δηλ.πραγμ.άξία=1900 δρχ.Τό ποσόν αύτό θά τό πάρη ό πωλῶν τό γραμμάτιον καί λέγεται πραγματική άξία τοῦ γραμματίου έξωτερική.'Από τήν σχέσιν 'Ον.άξία - έξ.ύφ.=πραγ.άξία προκύπτουν αί έξῆς δύο σχέσεις.'Ον.άξία=πραγ.άξία+έξ.ύφ.καί'Ον.άξία-πραγμ.άξία = έξ.ύφ.

β) έσ.ύφ.= $\frac{1900X3X20}{1200}$ = 95 δρχ.δηλ.έσ,ύφ.=95 δρχ. Τό ποσόν αύτό θά τό πάρη ό άγοραστής τοῦ γραμματίου. Κατόπιν λέγομεν 'Ον.'Αξ.-έσ.ύφ.=πραγμ.'Αξία ή 2000-95=1905 δρχ.δηλ.πραγ.άξία = 1905 δρχ.Τό ποσόν αύτό θά τόπάρη ό πωλῶν τό γραμμάτιον καί λέγεται πραγματική άξία τοῦ γραμματίου έσωτερική. Ωστε τά ζητούμενα είναι:έξ.ύφ.=100 δρχ.καί έσ.ύφ.=95 δρχ.

Παρατηροῦμεν τώρα ότι ή έξ.ύφαίρεσις είναι μεγαλυτέρα τῆς έσ.ύφαιρέσεως κατά 5 δρχ. Ή διαφορά αύτη 5 δρχ.είναι ό τόκος τῆς έξ.ύφ.=100 δρχ.είς 3 μῆνας πρός 20% ,διότι $\frac{100X3X20}{1200}$ = 5 δρχ."Αρα:έξ.ύφ.-έσ.ύφ.=τόκος έξ.ύφ. άπό τήν σχέσιν αύτήν έχομεν 1ον)έξ.ύφ.=έσ.ύφ. + τόκος έξ.ύφ.δηλ.έκεῖνος πού άγοράζει γραμμάτιον μέ έξωτερικήν ύφαίρεσιν,παίρνει τόκον,παίρνει έπίσης καί τόκον τοῦ τόκου.'Από αύτό βλέπομεν τό άδικον τῆς έξ. ύφαιρέσεως.'Επίσης έπειδή ή έσωτ.ύφαίρεσις εύρίσκεται έντός τῆς έξωτερικῆς ύφαιρέσεως,ώς μικροτέρα αύτῆς,διά τοῦτο πῆρε τό όνομα <u>έσωτερική</u> καί ή άλλη πῆρε τό όνομα <u>έξωτερική.</u> 2ον) έσ.ύφ.= έξ.ύφ.-τόκος έξ. ύφ. δηλ.ή έσωτ.ύφαίρεσις εύρίσκεται καί ώς έξῆς:"Εύρίσκομεν τήν έξ.ύφαίρεσιν τοῦ γραμματίου,κατόπιν εύρίσκομεν τόν τόκον τῆς έξ.ύφαιρέσεως (είς χρόνον καί μέ έπιτόκιον τά δοθέντα ύπό τοῦ προβλήματος)καί τέλος άφαιροῦμεν τόν τόκον πού θά εύρωμεν άπό τήν έξωτ.ύφαίρεσιν.

Παράδειγμα 2ον. "Γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐξωτερικῶς 3 μῆνας πρό τῆς λήξεώς του μέ 20% ἀντί 1900 δρχ. Ζητεῖται ἡ ὀν. ἀξία αὐτοῦ.

Λύσις. Παίρνομεν βοηθητικόν γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 100 δρχ. καί εὑρίσκομεν τήν ἐξωτερικήν ὑφαίρεσιν αὐτοῦ εἰς 3 μῆνας μέ 20%. Θά ἔχωμεν ἐξ. ὑφ. $=\frac{100X3X20}{1200}=5$ δρχ. καί ἑπομένως τό βοηθητικόν γραμμάτιον ἔχει πραγ. ἀξίαν 100-5=95 δρχ. Τώρα λέγομεν:

Πραγ. ἀξ. 95 δρχ. ἔχει 100 δρχ. Ὀν. ἀξ.

" " 1900 " X; $X=\frac{100X1900}{95}=2000$ δρ.

Ὥστε ἡ Ὀν. ἀξία πού ζητοῦμεν εἶναι 2000 δρχ.

Παράδειγμα 3ον. "Γραμμάτιον προεξωφλήθη ἐσωτερικῶς 3 μῆνας πρό τῆς λήξεώς του μέ 20% ἀντί 1905 δρχ. Ζητεῖται ἡ Ὀν. ἀξία αὐτοῦ.

Λύσις. Παίρνομεν βοηθητικόν γραμμάτιον ὀν. ἀξίας 100 δρχ. καί εὑρίσκομεν τήν ἐσωτερικήν πραγματικήν ἀξίαν αὐτοῦ. Θά ἔχωμεν ἐξ. ὑφ. $=\frac{100X3X20}{1200}=5$ δρχ. ἑπομένως ἐξ. πραγ. ἀξία $=100-5=95$ δρχ. καί ἐσ. ὑφ. $\frac{95X3X20}{1200}=4{,}75$ δρχ. ἄρα ἐσωτ. πραγμ. ἀξία $=100-4{,}75=95{,}25$ δρχ. Καί λέγομεν

πραγ. ἀξ. 95,25 δρ. ἔχει 100 δρ. Ὀν. ἀξ.

" 1905 X; $X=\frac{100X1905}{95{,}25}=2000$ δρχ.

Ὥστε ἡ Ὀν. ἀξία πού ζητοῦμεν εἶναι 2000 δρχ.

Προβλήματα. 1) Ποία ἡ ὀν. ἀξία γραμματίου πού προεξωφλήθη 5 μῆνες πρό τῆς λήξεώς του μέ 6,40% ἐξωτερικῶς (ἐσωτερικῶς) καί ἀντί 11680 δρχ. (10.000 δρχ;) ('Απ. 12.000 δρχ.)

2) Ἡ διαφορά ἐξωτ. καί ἐσωτ. ὑφαιρέσεως γραμματίου προεξοφληθέντος πρός 20% καί 3 μῆνας πρό τῆς λήξεώς του εἶναι 5 δραχ. Ζητοῦνται αἱ δύο ὑφαιρέσεις καί αἱ δύο πραγμ. ἀξίαι ('Απ. ἐξ. ὑφ. =100, ἐσ. ὑφ. =95 πραγμ.

ἀξία 1900 καί 1905)

Προβλήματα Ἑταιρείας

Τά προβλήματα τῆς Ἑταιρείας εἶναι δύο εἰδῶν:

1ον) Ὅταν τά κεφάλαια εἶναι διαφορετικά καί ὁ χρόνος εἶναι ὁ ἴδιος.

2ον) Ὅταν τά κεφάλαια εἶναι διαφορετικά καί ὁ χρόνος εἶναι ἐπίσης διαφορετικός.

Πρόβλημα 1ον. Δύο ἄτομα ἔκαμαν ἐπιχείρησιν.κατέβαλον δέ ὁ (α) 230 λίρας καί ὁ (β) 370 λίρας καί ἐκέρδισεν 120 λίρας. Πόσας θά πάρῃ ὁ καθένας ἀπό τό κέρδος;

Λύσις.Αἱ 230+370=600 λίραι ἔφεραν κέρδος 120 λίρας.

Λέγομεν λοιπόν αἱ 600 λ.ἔφεραν κέρδος 120 λίρας

ἡ 1 λ. " " $\frac{120}{600}$ λίρας

τοῦ (α) αἱ 230 λ. " " $\frac{230X120}{600}=46$ λ.

καί τοῦ (β) αἱ 370 λ. " " $\frac{370X120}{600}=74$ λ.

Αὐτό ὅμως εἶναι μερισμός τοῦ κέρδους 120 λίρας εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 230 λίραι καί 370 λίραι. Ὥστε "Ὅταν τά κεφάλαια εἶναι διαφορετικά καί ὁ χρόνος εἶναι ὁ ἴδιος τότε θά μοιράζωμεν τό κέρδος ἤ τήν ζημίαν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων".

Πρόβλημα 2ον."Κάποιος ἤρχισεν ἐπιχείρησιν μέ 40 λίρας καί μετά ἀπό 2 μῆνες πῆρε (β) συνέταιρον ὁ ὁποῖος εἶχε 50 λίρας,καί 3 μῆνες μετά ταῦτα πῆρε (γ) συνέταιρον ὁ ὁποῖος εἶχεν 60 λίρας. Πέρασεν ἕνα ἔτος ἀπό τήν ἡμέραν πού ἤρχισεν τήν ἐπιχείρησιν καί προέκυψεν κέρδος 420 λίραι.Πόσας θά πάρῃ ὁ καθένας ἀπό τό κέρδος;

Λύσις: Ἡ ἐπιχείρησις διήρκεσεν 1 ἔτος=12 μῆνες. Ὁ (α) ἦτο εἰς τήν ἐπιχείρησιν 12 μῆνας,ὁ (β) ἦτο

12-2=10 μῆνας καί ὁ (γ) ἦτο 10-3=7 μῆνας ἤ 12-(2+3)= =7 μῆνας. Κατόπιν λέγομεν: Τοῦ (α) αἱ 40 λίραι εἰς 12 μῆνας δίδουν τόσον κέρδος ὅσον αἱ 40Χ12=480 λίρας εἰς 1 μῆνα. Τοῦ (β) αἱ 50 λίραι εἰς 10 μῆνας δίδουν τόσον κέρδος ὅσον αἱ 50Χ10=500 λίραι εἰς 1 μῆνα. Τοῦ (γ) αἱ 60 λίραι εἰς 7 μῆνας φέρουν τόσον κέρδος ὅσον αἱ 60Χ7 =420 λίραι εἰς 1 μῆνα. Ὥστε ἐάν ὁ (α) εἶχε καταθέσει 480 λίρας, ὁ (β) 500 λίρας καί ὁ (γ) 600 λίρας, εἰς 1 μῆνα τό κέρδος 420 λίρας θά μοιρασθῇ εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν κεφαλαίων 480 λίραι, 500 λίραι, 420λίραι καί ἑπομένως θά πάρουν ὁ (α) $\frac{420\times480}{1400}=144$ λίρας ὁ (β) $\frac{420\times500}{1400}=150$ λίρας καί ὁ (γ) $\frac{420\times420}{1400}=126$ λίρας.

Ὥστε ὅταν τά κεφάλαια εἶναι διαφορετικά καί ὁ χρόνος διαφορετικός τότε τό κέρδος ἤ ἡ ζημία θά μοιράζεται εἰς μέρη ἀνάλογα τπων κεφαλαίων καί τῶν χρόνων.

Περί μίγματος καί κράματος

Μῖγμα λέγεται ἡ συγχώνευσις δύο ἤ περισσοτέρων ποσῶν εἰς ἕνα.

Κρᾶμα λέγεται ἡ σύντηξις δύο ἤ περισσοτέρων μετάλλων εἰς ἕνα.

Ὁ χρυσός καί ὁ ἄργυρος λέγονται πολύτιμα μέταλλα καί τά ἄλλα λέγονται κοινά μέταλλα.

Τίτλος ἤ βαθμός καθαρότητος ἑνός κράματος λέγεται ἡ ποσότης τοῦ πολυτίμου μετάλλου πού περιέχεται εἰς τήν μονάδα τοῦ κράματος. Ὁ τίτλος (τ) κράματος ἰσοῦται μέ τό πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ βάρους (β) τοῦ πολυτίμου μετάλλου πού περιέχει τό κρᾶμα, διά τοῦ βάρους (Β) τοῦ κράματος δηλ. $\tau=\frac{\beta}{B}$ (1) καί ἑπομένως $\beta=B\times\tau$ δηλ. τό βάρος (β) τοῦ πολυτίμου μετάλλου πού ὑπάρχει εἰς ἕνα κρᾶμα ἰσοῦται μέ τό βάρος (Β) τοῦ κράματος ἐπί τόν τίτλον (τ) τοῦ κράματος. Ἐπίσης $B=\frac{\beta}{\tau}$

δηλ.τό βάρος (Β) ἑνός κράματος ἰσοῦται μέ τό βάρος (β) τοῦ πολυτίμου μετάλλου πού περιέχει διά τοῦ τίτλου (τ) τοῦ κράματος. Ὁ τίτλος ὁρίζεται εἰς χιλιοστά: π.χ.ὅταν λέγωμεν,ὅτι τό κρᾶμα ἔχει τίτλον 0,800 ἐννοοῦμεν ὅτι εἰς κάθε μονάδα βάρους (1 γραμμάριον ἤ 1 δράμι κ.τ.ὅ.) τά $\frac{800}{1000}$ εἶναι καθαρόν πολύτιμον μέταλλον καί τά $\frac{200}{1000}$ εἶναι ἄλλο μέταλλον. Ὁ τίτλος τῶν χρυσῶν ἐκφράζεται ἀκόμη καί εἰς $\frac{24}{24}$ τό κάθε ἕνα δέ $\frac{1}{24}$ λέγεται καράτιον. π.χ.ὅταν λέγωμεν ὅτι ἕνα κόσμημα εἶναι τῶν 18 καρατίων,ἐννοοῦμεν ὅτι, εἰς κάθε μονάδα βάρους τά $\frac{18}{24}$ εἶναι καθαρός χρυσός καί τά $\frac{6}{24}$ αὐτῆς εἶναι ἄλλο μέταλλον.

Βαθμός οἰνοπνεύματος λέγεται τό ἐπί τοῖς ἑκατόν καθαρόν οἰνόπνευμα πού ὑπάρχει εἰς μίαν ποσότητα οἰνοπνεύματος. Ὅταν λέγωμεν ὅτι τό οἰνόπνευμα εἶναι 80 βαθμῶν σημαίνει,ὅτι ἐπί 100 ἴσων μερῶν οἰνοπνεύματος τά 80 μέρη εἶναι καθαρόν οἰνόπνευμα καί γράφεται ὡς ἑξῆς 80°

Προβλήματα μίξεως

Μίξεως ὑπάρχουν δύο εἴδη: Εἰς τό (α) δίδονται τά ποσά πού θά ἀναμιχθοῦν,δίδεται ἐπίσης ἡ τιμή τῆς μονάδος κάθε ἑνός ποσοῦ, καί ζητεῖται ἡ τιμή τῆς μονάδος τοῦ μίγματος. Εἰς τό (β) δίδονται αἱ τιμαί τῆς μονάδος τῶν ποσῶν πού θά ἀναμιχθοῦν καί ζητεῖται πόσα μέρη θά πάρωμεν ἀπό κάθε ἕνα ποσόν χωριστά.ὥστε ἡ μονάς τοῦ μίγματος νά πάρῃ ὡρισμένην τιμήν.

Πρόβλημα 1ον. Ἀνεμίχθησαν δύο εἴδη καφέ. 70 όκ. τῶν 40 δρχ.ἡ ὀκᾶ καί 30 όκ.τῶν 50 δρχ.ἡ ὀκᾶ.Πόσον θά ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος;

Λύσις: Αἱ 70 όκ.τοῦ (α) εἴδ.ἀξίζουν 70Χ40=2800 δρχ.
" 30 " " (β) " " 30Χ50=1500 "

"Αρα αἱ 70+30=100 ὀκ.ἀξίζουν 2800+1500=4300 δρχ.ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἀξίζει 4300:100=43 δρχ.

<u>Πρόβλημα 2ον.</u> "Εχομεν δύο εἴδη σίτου, τῶν 5 δρχ. καί 8 δρχ.ἡ ὀκᾶ. Ζητοῦνται 1ον) Πόσον θά πάρωμεν ἀπό κάθε ἕνα εἶδος, διά νά ἀξίζῃ ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 6 δρχ. 2ον) 'Εάν θέλωμεν νά σχηματίσωμεν μίγμα 90 ὀκ. πόσας ὀκάδας ἀπό κάθε εἶδος θά πάρωμεν καί 3ον) 'Εάν ἀπό τό (α) εἶδος πάρωμεν 20 ὀκ. πόσας πρέπει νά πάρωμεν ἀπό τό (β) εἶδος.

<u>Λύσις.</u> 1ον) 'Η διαφορά 6-5=1 δρχ. σημαίνει ὅτι εἰς κάθε ὀκᾶ τοῦ (α) εἴδους πού εὑρίσκεται εἰς τό μῖγμα κερδίζομεν 1 δρχ.καί ἡ διαφορά 8-6=2 σημαίνει,ὅτι εἰς κάθε ὀκᾶ τοῦ (β) εἴδους πού εὑρίσκεται εἰς τό μῖγμα ζημιούμεθα 2 δραχ. 'Εάν λοιπόν πάρωμεν 2 ὀκ. ἀπό τό (α) θά ἔχωμεν κέρδος 1Χ2=2 δρχ. καί ἐάν πάρωμεν 1 ὀκ.ἀπό τό (β) θά ἔχωμεν ζημίαν 2Χ1=2 δρχ. 'Επειδή λοιπόν μέ τόν τρόπον αὐτόν δέν ἔχομεν οὔτε κέρδος οὔτε ζημίαν διά τοῦτο θά πάρωμεν 2 ὀκάδας ἀπό τόν (α) καί 1 ὀκᾶ ἀπό τό (β). 'Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

(α)	5 δρχ.	6	2 δρχ.ζημία
(β)	8 δρχ.		1 δρχ.κέρδος

2ον) 'Επειδή θά πάρωμεν 2 ὀκ.ἀπό τό (α) καί 1 ὀκ. ἀπό τό (β) λέγομεν:

μῖγμα 2+1=3 ὀκ.περιέχει 2 ὀκ.τοῦ (α) καί 1 ὀκ.τοῦ(β)
" 90 Χ " " " " Χ " " "

εὑρίσκομεν ὅτι θά πάρωμεν $\frac{2Χ90}{3}$ = 60 ὀκ.ἀπό τό (α) καί $\frac{1Χ90}{3}$ =30 ὀκ. ἀπό τό (β).

3ον) 'Επειδή θά πάρωμεν ἀπό τό (α) 2 ὀκ. καί ἀπό τό (β) 1 ὀκ. λέγομεν:

Εἰς τάς 2ὀκ.τοῦ(α) ἀναλογεῖ 1ὀκ.τοῦ(β)
" " 20 " " " Χ " "- Χ= $\frac{1Χ20}{2}$ =10ὀκ.

Παρατήρησις. Όταν μᾶς δοθοῦν αἱ τιμαί τῆς μονάδος, ποσῶν περισσοτέρων τῶν δύο, τότε ἐργαζόμεθα ὅπως εἰς τά παρακάτω δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ον. Ἔχομεν πρός ἀνάμιξιν τέσσαρας ποιότητας σίτου τῶν 25 δρχ. τῶν 28 δρχ. τῶν 35 δρχ. καί τῶν 40 δρχ. τήν ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας θά πάρωμεν ἀπό κάθε εἶδος, διά νά τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 32 δρχ.

Λύσις. Παίρνομεν τάς τιμάς ἀνά δύο καί μέ τρόπον ὥστε ὅταν ἀφαιροῦμεν αὐτάς ἀπό τήν τιμήν τῆς μονάδος τοῦ μίγματος νά προκύπτῃ ἀπό τήν μίαν κέρδος καί ἀπό τήν ἄλλην ζημίαν. Δηλ.

(α) 25		3 δρχ. ζημία	(β) 28		8 δρ. ζημία
	32			32	
(γ) 35		7 δρχ. κέρδος	(δ) 40		4 δρχ. κέρδ

θά πάρωμεν λοιπόν ἀπό τό (α) 3 ὀκ. ἀπό τό (β) 8 ὀκ. ἀπό τό (γ) 7 ὀκ. καί ἀπό τό (δ) 4 ὀκ.

Ἐπαλήθευσις. 25Χ3=75 δρχ., 28Χ8=224 δρχ., 35Χ7=245 δρχ. καί 40Χ4=160 δρχ. Δηλ, μῖγμα ἀπό 3+8+7+4=22 ὀκ, τιμᾶται 75+224+245+160=704 δρχ. ἄρα ἡ μία ὀκᾶ τοῦ μίγματος αὐτοῦ θά τιμᾶται 704:22=32 δρχ.

Παράδειγμα 2ον. Ἔχομεν πρός ἀνάμιξιν πέντε ποιότητας σίτου τῶν 10 δρχ. τῶν 12 δρχ., τῶν 20 δρχ., τῶν 25 δρχ. καί τῶν 30 δρχ. ἡ ὀκᾶ, Πόσας ὀκάδας θά πάρωμεν ἀπό κάθε εἶδος διά νά τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος 17 δρχ.

Λύσις: Ἐπειδή ἀπό τάς τιμάς πού ἐδόθησαν αἱ δύο εἶναι μικρότεραι τῆς τιμῆς τῆς μονάδος τοῦ μίγματος καί αἱ τρεῖς εἶναι μεγαλύτεραι αὐτῆς διά τοῦτο θά ἐπαναλάβωμεν ἀκόμη μίαν φοράν τήν μίαν ἀπό τάς μικροτέρας ἔστω τήν τιμήν τῶν 10 δρχ, Κατόπιν παίρνομεν τάς τιμάς ἀνά δύο, ὅπως καί προηγουμένως

(α) 10 ╲ ╱ 3 δρχ.ζημ.
17
(γ) 20 ╱ ╲ 7 δρχ.κέρ.

(α) 10 ╲ ╱ 8δρχ.ζημία
17
(δ- 25 ╱ ╲ 7δρχ.κέρδος

(β) 12 ╲ ╱ 13 δρχ.ζημ.
17
(ε) 30 ╱ ╲ 5 δρχ.κέρδος

Θά πάρωμεν λοιπόν ἀπό τό (α) 3+18=11 δκ., ἀπό τό (β) 13 δκ. ἀπό τό (γ) 7 δκ. ἀπό τό (δ) 7 δκ. καί ἀπό τό (ε) 5 δκ.

Προβλήματα Μίξεως

1) Ἕνας χρυσοχόος συνέτηξεν δύο τεμάχια χρυσοῦ ἀπό τά ὁποῖα τό ἕνα εἶχεν τίτλον 0,520 καί βάρος 10 δράμια, τό ἄλλο εἶχε τίτλο 0,680 καί βάρος 15 δράμια. Ποῖος ὁ τίτλος τοῦ κράματος;

<u>Λύσις</u>: Τά 10 δρ. ἔχουν καθαρ. χρυσ. 0,520Χ10=5,20δρ. ἐπίσης
τά 15 " " " " 0,680Χ15=10,20 Δηλ.
τά 10+15=25 δράμια τοῦ κράματος, περιέχουν καθαρόν χρυσόν 5,20+10,20=15,40 δράμια ἑπομένως τό ἕνα δράμι τοῦ κράματος περιέχει καθαρόν χρυσόν 15,40:25= 0,616 δράμια. Ἄρα ὁ τίτλος τοῦ κράματος εἶναι 0,616

2) Ἀνεμίχθησαν 7 χιλιόγραμμα οἰνόπνευμα τῶν 12° μέ 6 χιλιόγραμμα οἰνόπνευμα τῶν 25°. Ποῖος ὁ βαθμός τοῦ μίγματος;

<u>Λύσις</u>: τά 7 χλγ. ἔχουν καθ. οἰνόπν. 7Χ12=84χλγ. ἐπίσης
τά 6 " " " 6Χ25=150 " Δηλ.
6+7=13 χλγ. τοῦ μίγματος, περιέχουν καθαρόν οἰνόπνευμα 84+150=234 χλγ. ἄρα ὁ βαθμός τοῦ μίγματος εἶναι 234:13=18.

3) Χρυσοχόος ἔχει δύο κομμάτια χρυσᾶ τίτλων 0,900 καί 0,620. Πόσα δράμια θά πάρῃ ἀπό τό καθένα διά νά κάμῃ κρᾶμα 840 δράμια καί τίτλου 0,737;

<u>Λύσις</u>: (α) 0,900 ╲ ╱ 0,117
0,737
(β) 0,520 ╱ ╲ 0,163

117 →
163
280

Δηλ. διά κρᾶμα 280 δραμίων θά πάρῃ 117 δράμια ἀπό τό (α) καί 163 δρμ. ἀπό τό (β) ἑπομένως διά κρᾶμα 840 δρμ. θά πάρῃ ἀπό τό (α) $\frac{117X840}{280}$ = 351 δρμ. καί ἀπό τό (β) θά πάρῃ $\frac{163X840}{280}$ = 489 δρμ.

4) Ἀνεμίχθησαν 3 εἴδη καφέ καί ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος ἐπωλεῖτο πρός 41 δρχ. Ἀπό τό (α) εἶδος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 40 δρχ. ὑπῆρχον εἰς τό μῖγμα 90 ὀκ., ἀπό τό (β), εἶδος τοῦ ὁποίου ἡ ὀκᾶ ἐτιμᾶτο 32 δρχ. ὑπῆρχον εἰς τό μῖγμα 75 ὀκ. καί ἀπό τό (γ) 85 ὀκ. πόσον ἐτιμᾶτο ἡ ὀκᾶ τοῦ τρίτου εἴδους;

<u>Λύσις</u>: Τό μῖγμα ἦτο 90+75+85=250 ὀκ. καί ἡ ἀξία του ἦτο 41Χ250=10250 δρχ. Ἐάν ἀπό τάς 10250 δρχ. ἀφαιρέσωμεν τάς (40Χ90)+(32Χ75)=6000 δρχ. ἡ διαφορά 4250 δρχ. εἶναι ἡ ἀξία τῶν 85 ὀκ. τοῦ (γ) εἴδους. Ἄρα ἡ ὀκᾶ τοῦ (γ) εἴδους ἐτιμᾶτο 4250:85=50 δρχ.

5) Ἀνεμίχθησαν δύο εἴδη καφέ 6 ὀκ. τῶν 25 δρχ. καί 4 ὀκ. τῶν 15 δρχ. ἡ ὀκᾶ. Μέ πόσας ὀκάδας καφέ τρίτου εἴδους τῶν 18 δρχ. ἡ ὀκᾶ θά ἀναμίξωμεν τό προηγούμενον μῖγμα, διά νά τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ νέου μίγματος 20 δρχ.

<u>Λύσις</u>: Εὑρίσκομεν πρῶτον πόσον ἀξίζει ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος τῶν δύο πρώτων ποιοτήτων. Θά ἔχωμεν: αἱ 6+4=10 ὀκ. μῖγμα, ἀξίζουν (6Χ25)+(4Χ15)=210 δρχ. ἑπομένως ἡ 1 ὀκᾶ τοῦ μίγματος αὐτοῦ ἀξίζει 210:10=21 δρχ. Τώρα ἔχομεν δύο εἴδη καφέ τῶν 21 δρχ. καί τῶν 18 δρχ. ἡ ὀκᾶ

$$\begin{array}{ccc} 21 & & 2 \\ & 20 & \\ 18 & & 1 \end{array}$$

Ἔπειτα λέγομεν εἰς τάς 2 ὀκ. ἀναλογεῖ 1 ὀκ.
εἰς τάς 10 " " Χ;
Χ=5 ὀκ.

6) Ἀνεμίχθησαν δύο εἴδη κρασιά: 20 ὀκ. τῶν 10 δρχ. καί 50 ὀκ. τῶν 12 δρχ. ἡ ὀκᾶ. Πόσας ὀκάδας νερό πρέπει νά ρίψωμεν διά νά τιμᾶται ἡ ὀκᾶ τοῦ μίγματος

8 δρχ;

Λύσις: Αἱ 20+50=70 όκ. κρασί χωρίς νερό τιμῶνται (20Χ10)+(50Χ12)=800 δρχ. Αἱ 20+50=70 όκ. κρασί μέ νερό θά πωληθῶσι πρός 70Χ8=560 δρχ. Τήν διαφοράν 800-560 =240 δρχ. διαιροῦμεν διά τοῦ 8 δρχ. διότι καί τό νερό ἐπωλήθη εἰς τό μῖγμα πρός 8 δρχ. τήν όκᾶ καί εὑρίσκομεν 240:8=30 όκ. νερό.

Σημείωσις: Ὅταν ἀπό τά ποσά ποῦ ἀναμιγνύονται, τό ἕνα εἶναι νερό, θά παίρνωμεν ὡς ἀξίαν τοῦ νεροῦ 0 δρχ.

Μέθοδος τῶν δύο σφαλμάτων

Πρόβλημα. Κάποιος ἠγόρασε 30 πήχεις ὑφάσματος, καί ἐπειδή τοῦ ἔγινε ἔκπτωσις εἰς κάθε πῆχυν 2 δρχ. διά τοῦτο μέ τό ἴδιο χρηματικό ποσό πού διέθετε ἠγόρασε 4 πήχεις πάρα πάνω. Πόσον ἐτιμᾶτο ὁ πῆχυς τοῦ ὑφάσματος αὐτοῦ;

Λύσις: Ὑποθέτομεν ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἐτιμᾶτο 22 δρχ. καί ἐπομένως τό χρηματικόν ποσόν ποῦ διέθετε ἦτο 22Χ 30=660 δρχ. Ἐάν εἶναι ἀληθές, ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἐτιμᾶτο 22 δρχ. πρέπει οἱ 30+4=34 πήχεις πρός 22-2=20 δρχ. ὁ ἕνας νά σχηματίζουν τό χρηματικόν ποσόν 660δρχ. Ἀλλά 20Χ34=680 δρχ. δηλ. προκύπτει σφάλμα 680-660=20 δρχ. Ὑποθέτομεν τώρα, ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἐτιμᾶτο 32 δρχ. καί ἐπομένως τό χρηματικόν ποσόν ποῦ διέθετε ἦτο 32Χ 30=960 δρχ. Ἀλλά, ὅπως καί προηγουμένως, εἶναι 30Χ34= 1020 δρχ. δηλ. προκύπτει σφάλμα 1020-960=60 δρχ. Ὥστε ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἐτιμᾶτο 22 δρχ. προκύπτει σφάλμα 20 δρχ. Ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι ὁ ἕνας πῆχυς ἐτιμᾶτο 32 δρχ. προκύπτει σφάλμα 60 δρχ. Πολλαπλασιάζομεν τώρα τήν πρώτην ὑπόθεσιν 22 δρχ. μέ τό δεύτερον σφάλμα 60 δρχ., ἔπειτα τήν δευτέραν ὑπόθεσιν 32 δρχ. μέ τό πρῶτον σφάλμα 20 δρχ. καί ἀπό τό μεγαλύτερον .

γινόμενον ἀφαιροῦμεν τό μικρότερον καί ἔχομεν: (22X60)-(32X20)=1320-640=680. Τήν διαφοράν 680 διαιροῦμεν διά τῆς διαφορᾶς 60-20=40 τῶν δύο σφαλμάτων καί ευρίσκομεν: 648:40=17 δηλ,ὁ πῆχυς ἐτιμᾶτο 17δρχ.

<u>'Επαλήθευσις</u>. 17X30=510 δρχ. καί 15X34=510 δρχ.

'Η πρᾶξις διατάσσεται ὡς ἑξῆς:

<u>'Υποθέσεις</u>		<u>Σφάλματα</u>
(α) 22	X	(α) 20
(β) 32		(β) 60

$$X = \frac{(22X60)-(32X20)}{60-20} = \frac{680}{40} = 17$$

<u>Πρόβλημα</u>. 'Ανέμειξε κάποιος 4 δκ.οἰνόπνευμα μέ 6 δκ.οἰνόπνευμα διαφορετικοῦ βαθμοῦ καί ἐσχημάτισε μεῖγμα 36^0.'Εάν ὅμως ἀνεμείγνυε 8 δκ.ἀπό τό πρῶτο οἰνόπνευμα μέ 2 δκ.ἀπό τό δεύτερο,θά ἔκαμνε μεῖγμα 32^0. Ζητοῦνται ὁ βαθμός τοῦ πρώτου καί ὁ βαθμός τοῦ δευτέρου οἰνοπνεύματος.

<u>Λύσις</u>: Ἔστω ὅτι τό (α) ἦτο 60^0. θά ἔχωμεν (4+6)X36=360 ἐπίσης 4X60=240 ἄρα ὁ βαθμός τοῦ (β) θά εἶναι $\frac{360-240}{6} = 20^0$. 'Εάν εἶναι ἀληθές,ὅτι τό (α) εἶναι 60^0 καί τό (β) εἶναι 20^0 τότε πρέπει τό μῖγμα πού θά σχηματίσῃ μέ 8 δκ.ἀπό τό (α) καί μέ 2 δκ.ἀπό τό (β) νά εἶναι 32^0.'Αλλά (8X60)+(2X20)=520 καί ἐπειδή 8+2=10, εὑρίσκομεν ὅτι τό μῖγμα πού θά σχηματίσῃ εἶναι 520:10 =52^0 δηλ.προκύπτει σφάλμα 52-32=20^0. Ἔστω τώρα ὅτι τό (α) ἦτο 42^0 θά ἔχωμεν: (4+6)X36=360 ἐπίσης 4X42= =168 ἄρα ὁ βαθμός τοῦ (β) θά εἶναι $\frac{360-168}{6} = 32^0$. 'Εάν εἶναι ἀληθές ὅτι τό (α) εἶναι 42^0 καί τό(β) εἶναι 32^0, τότε πρέπει τό μῖγμα πού θά σχηματίσῃ μέ 8 δκ.ἀπό τό (α) καί μέ 2 δκ.ἀπό τό (β) νά εἶναι 32^0. 'Αλλά (8X42)+(2X32)=400 καί ἐπειδή 8+2=10, εὑρίσκομεν ὅτι τό μῖγμα εἶναι 400:10=40^0 δηλ.προκύπτει σφάλμα 40-32=8.

Ὑποθέσεις		Σφάλματα	
(α)	60	(α)	20
(β)	42	(β)	8

$X = \frac{(42X20)-(60X8)}{20-8} = 30^0$ εἶναι τό πρῶτον

Ὑποθέσεις		Σφάλματα	
(α)	20	(α)	20
(β)	32	(β)	8

$X = \frac{(32X20)-(20X8)}{20-8} = 40^0$ εἶναι τό δεύτερον

Προβλήματα Διάφορα

1) Ἔμπορος πωλήσας τρία κομμάτιαυφάσματος τοῦ ἰδίου μήκους, ἐκέρδισε καί ἀπό τά τρία 81 δρχ. Ἀπό κάθε μέτρον τοῦ (α) ἐκέρδιζε $\frac{3}{4}$ δρχ., ἀπό κάθε μέτρον τοῦ (β) ἐκέρδιζε $\frac{4}{5}$ δρχ. καί ἀπό κάθε μέτρον τοῦ (γ) ἐζημιώνετο $\frac{11}{10}$ δρχ. Ζητοῦνται 1) τό κέρδος εἰς κάθε μέτρον τοῦ (α), τοῦ (β) καί τοῦ (γ) χωριστά 2) Τό μῆκος πού εἶχε κάθε κομμάτι 3) Πόσα μέτρα ἐπώλησεν (Ἀπ. $\frac{9}{20}$; 180)

2) Ἐργολάβος διέθεσε 6 ἐργάτας δι' ἕνα ἔργον. Μετά 5 ἡμ. πῆρε ἄλλους 4 μέ ηὐξημένο ἡμερομίσθιον κατά μίαν δραχμήν, καί τό ἔργον ἐτελείωσεν εἰς 15 ἡμ. μετά τήν πρόσληψιν τῶν τεσσάρων. Ὅλοι οἱ ἐργάται δι' ὅλον τό ἔργον ἔλαβον 780 δρχ. Ζητεῖται τό ἡμερομίσθιον τῶν 6 ἐργατῶν καί τῶν 4 ἐργατῶν (Ἀπ. 4, 5).

3) Ὅταν ὁ τροχός μιᾶς ἁμάξης κάμῃ μίαν ὁλόκληρον περιστροφήν, τότε ἡ ἅμαξα προχωρεῖ κατά 3,85 μ. Πόσας φοράς θά περιστραφῇ ὁ τροχός, ἐάν ἡ ἅμαξα διανύσῃ δρόμον 250,25μ.; (Ἀπ. 65)

4) Ἅμαξα διήνυσεν ἕνα δρόμον. Ὁ ἐμπρόσθιος τροχός ἔχει περιφέρειαν 1,75μ. καί ἔκαμε 2000 στροφάς

περισσοτέρας ἀπό τόν ὀπίσθιον τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 1,375 μ. Πόσα μέτρα εἶναι ὁ δρόμος;('Απ. 133000 μ.)

5) Ἔργον ἐπρόκειτο νά τελειώσῃ ἀπό 22 ἐργάτας εἰς 15 ἡμ. ἐργαζόμενοι ἀπό 8 ἡμ.τήν ἡμέραν. Ἐπειδή μετά 8 ἡμ.ἔφυγαν 2 ἐργάται,οἱ ἄλλοι εἰργάζοντο $8\frac{1}{2}$ ὥρας τήν ἡμέραν καί τό ἐτελείωσαν εἰς τήν προθεσμίαν του. Ζητοῦνται 1) πόσον ἔργον ἔκαμαν πρίν φύγουν οἱ δύο, καί πόσον ἔπειτα. 2)'Εάν ὅλο τό ἔργον συνεφωνήθη ἀντί 1296 δρχ. πόσας θά πάρῃ ὁ καθένας ('Απ. $\frac{77}{162}$, $\frac{85}{162}$, 28,62)

6) Πρόκειται νά μεταφέρωμεν 500 ὀκ.κρασί εἰς φιάλας πού χωροῦν $1\frac{3}{4}$ ὀκ. καί $1\frac{2}{3}$ ὀκ. Πόσας ἀπό κάθε εἶδος θά πάρωμεν; ('Απ.90 τῶν $1\frac{2}{3}$ ὀκ,καί 200 τῶν $1\frac{3}{4}$ ὀκ.)

7) Ἕνας ὑπάλληλος λογαριάζει,ὅτι, ἄν πάρῃ σήμερον τόν μισθόν του ὁ ὁποῖος εἶναι 350 δρχ. θά πληρώσῃ τάς 425,5 δρχ, εἰς τόν παντοπώλην καί θά τοῦ μείνουν καί τό ἥμισυ τῶν ὅσα ἔχει τώρα.Πόσα ἔχει;('Απ. 151 δρχ.)

8) Αἱ ὡριαῖαι ταχύτητες δύο αὐτοκινήτων ἔχουν λόγον $\frac{13}{15}$. Εἰς τό ἴδιο χρονικό διάστημα τό (β) διέτρεξε 12 χλμ. περισσότερον τοῦ (α).Ζητοῦνται αἱ ὡριαῖαι ταχύτητες αὐτῶν ('Απ.78 χλμ.καί 90 χλμ)

9) Ἄνδρας 30 ἐτῶν ἔχει γυναῖκα 20 ἐτῶν.Μετά πόσα ἔτη αἱ ἡλικίαι των θά ἔχουν λόγον $\frac{5}{4}$;('Απ.20 ἔτη)

10) 'Από δύο κρουνούς τῶν ὁποίων αἱ διαστάσεις ἔχουν λόγον $\frac{5}{13}$ τρέχει τό νερό εἰς μίαν δεξαμενήν καί μέ ταχύτητας αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγον $\frac{8}{7}$. Ὁ ἕνας κρουνός εἰς ἕνα χρονικό διάστημα ἔρριψε εἰς τήν δεξαμενήν 561 κυβ.μέτρα περισσότερον τοῦ ἄλλου.Πόσον

νερό ἔρριψε ὁ καθένας εἰς αὐτό τό χρονικό διάστημα; ('Απ.440 κ.μ.,1001 κ.μ.)

11) Δύο πυροβόλα βάλλουν κατά τοῦ ἰδίου στόχου.Τό (α) ἔρριψε 36 βολάς πρίν ἀρχίσει τό (β).Τό (α) ρίπτει 8 βολάς ὅταν τό (β) ρίπτει 7 βολάς ἀλλά τό (β) δαπανᾷ πυρίτιδα διά 3 βολάς ὅσην δαπανᾷ τό (α) διά 4 βολάς. Ζητεῖται πόσας βολάς πρέπει νά ρίψη τό (β) διά νά δαπανήση τόσην πυρίτιδα,ὅσην καί τό (α)('Απ. 189 βολάς)

12) 'Επώλησε κάποιος ἐμπόρευμα ἀξίας 4000 δρχ.μέ κέρδος 25%.Πόσας δραχμάς ἐκέρδισεν; ('Απ.1000 δρχ.)

13) Κερδίζει κάποιος 25%. Πόσον τοῖς χιλίοις κερδίζει; ('Απ.250).

14) Κερδίζει κάποιος 250% πόσον τοῖς ἑκατόν κερδίζει; ('Απ.25)

15) 'Ηγόρασε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 4000 δρχ.πόσον πρέπει νά τό πωλήση διά νά κερδίση 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ('Απ.5000)

16) 'Ηγόρασε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 4000 δρχ.καί τό ἐπώλησεν ἀντί 5000 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατόν ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς ἐκέρδισεν;('Απ.25)

17) 'Επώλησε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 5000 δρχ.καί ἐκέρδισε 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς,Μέ πόσας δραχμάς τό ἠγόρασεν;('Απ.4000)

18) 'Ηγόρασε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 4000 δρχ.Πόσον πρέπει νά τό πωλήση διά νά κερδίση 20% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως;('Απ.5000)

19) 'Ηγόρασε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 4000 δρχ.καί τό ἐπώλησεν ἀντί 5000 δρχ. Πόσον τοῖς ἑκατόν ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως ἐκέρδισεν;('Απ.20)

20) 'Επώλησε κάποιος ἐμπόρευμα ἀντί 5000 δρχ.καί ἐκέρδισε 20% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως.Πόσον τό ἠ-

γόρασεν; ('Απ.5000).

21) Ὅταν κερδίζωμεν 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς πόσον κερδίζομεν ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως; Ἐπίσης ὅταν κερδίζωμεν 25% ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως, πόσον κερδίζομεν ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς;('Απ.20 καί $33\frac{1}{3}$)

22) Ἔμπορος ἠσφάλισε ἐπί πλοίου πρός 3,5% ἐτησίως 25 βαρέλια ἐμπόρευμα ἀπό τά ὁποῖα τό κάθε ἕνα ἐζύγιζε 140 χιλιόγραμμα πρός 150 δρχ.τό καντάρι. Τό ἐμπόρευμα ἠσφαλίσθη τήν 20ήν Μαΐου καί ἔφθασε εἰς τόν προορισμό του τήν 4ην Σεπτεμβρίου τοῦ ἰδίου ἔτους. Ζητεῖται πόσα ἀσφάλιστρα θά πληρώσῃ ('Απ.53,08)

23) Ἀγρότης ἠσφάλισε διά 8 μῆνας πρός 4^{0}/oo τά ἑξῆς: α) 200 στρέμματα σιτάρι,σπορᾶς 1,5 κιλοῦ κατά στρέμμα, καί παραγωγῆς 12 κιλά ἐπί 1 κιλοῦ σπορᾶς καί πρός 6 δρχ.τό κιλόν. β) 50 στρέμματα κριθάρι σπορᾶς 1 κιλοῦ κατά στρέμμα καί παραγωγῆς 9 κιλά ἐπί ἑνός κιλοῦ σπορᾶς καί πρός 4 δρχ.τό κιλόν γ) 10 στρέμματα ἀραβόσιτον,σπορᾶς 0,5 κιλόν κατά στρέμμα καί παραγωγῆς 20 κιλά ἐπί ἑνός κιλοῦ σπορᾶς καί πρός 5 δρχ.τό κιλόν.Πόσα εἶναι τά ἀσφάλιστρα;('Απ.11,20)

24) Ἠγόρασε κάποιος 85 βιβλία καί τετράδια.Τό κάθε ἕνα βιβλίον τό ἠγόρασεν πρός 32 δρχ.καί τό κάθε ἕνα τετράδιον πρός 28 δρχ.Κατόπιν τά ἐπώλησε πρός 36,90 δρχ.τό ἕνα καί ἐκέρδισε 27,5% ἐπί τῆς ἀξίας των.Πόσα ἦσαν τά βιβλία καί πόσα τά τετράδια ('Απ, 20,65).

25) Ἔμπορος ἠγόρασε 2540 κιλά καλαμπόκι καί ἐπώλησε τά μέν 1750 κιλά μέ κέρδος 8% ἐπί τῆς ἀξίας των τά δέ ὑπόλοιπα κιλά μέ κέρδος 12% ἐπί τῆς ἀξίας των, Ἐάν ὅμως ἐπώλει ὅλα τά κιλά μέ κέρδος 10% ἐπί τῆς

ἀξίας των θά ἔπαιρνε 25 δρχ.περισσότερον.Πόσον ἐπλήρωσεν διά τήν ἀγοράν ὅλων τῶν κιλῶν;('Απ.3239,80)

26) Ἐπιχειρηματίας ἀπό τήν πρώτην ἐπιχείρησιν ἐκέρδισε ποσόν ἴσον μέ τά $\frac{2}{7}$ τοῦ κεφαλαίου του,κατόπιν ἥνωσε τό κεφάλαιον μέ τό κέρδος καί ἔκαμεν δευτέραν ἐπιχείρησιν καί ἐκέρδισε τά $\frac{2}{3}$ τοῦ νέου κεφαλαίου καί τώρα ἔχει 45.000 δρχ.Πόσον τό ἀρχικόν κεφάλαιον;('Απ.21.000).

27) Κάποιος ἐδάνεισε τό $\frac{1}{3}$ τῶν χρημάτων του πρός 5%,τό $\frac{1}{5}$ πρός 4% καί τό ὑπόλοιπον πρός 3% καί ἔλαβε τόκον 1740 δρχ. Ζητεῖται πόσα χρήματα εἶχεν.('Απ.45000)

28) Κάποιος ἐδάνεισε τά $\frac{3}{4}$ τῶν χρημάτων του πρός 6% καί τά ὑπόλοιπα πρός 8%. Μετά ἕνα ἔτος πῆρε κεφάλαιον καί τόκον μαζί 25560 δρχ. Πόσα χρήματα εἶχεν ('Απ.24.000).

29) Δύο κεφάλαια ἔχουν λόγον $\frac{3}{5}$. Τό μικρότερον ἐδανείσθη πρός 10% καί τό μεγαλύτερον πρός 12%.Μετά 1 ἔτος καί 8 μῆνας τά δύο κεφάλαια μαζί μέ τούς τόκους αὐτῶν ἐσχημάτισαν τό ποσόν 126.000 δρχ. Ζητοῦνται τά δύο κεφάλαια ('Απ.42000 καί 70000).

30) Μετά πόσον χρόνον πρέπει νά πληρώσωμεν 1360 λίρας ἀντί νά πληρώσωμεν τά 0,50 αὐτῶν μετά 8 μῆνας καί τά ἄλλα 0,50 αὐτῶν μετά 10 μῆνας;('Απ.9 μῆνας)

31) Ἔμπορος χρεωστεῖ 7420 λίρας τοῖς μετρητοῖς 2600 λίρας μετά 8 μῆνας καί 2600 λίρας μετά ἕνα ἔτος. Συνεφώνησε δέ μέ τήν Τράπεζαν νά πληρώσῃ ὅλα τά ποσά διά μιᾶς. Μετά πόσον χρόνον πρέπει νά γίνῃ ἡ πληρωμή; ('Απ.4 μῆνας 22 ἡμ.περίπου)

32) Ἔμπορος χρεωστεῖ εἰς Τράπεζαν ἕνα ποσόν τό ὁποῖον πρέπει νά πληρώσῃ μετά $6\frac{1}{2}$ μῆνας.Κατόπιν συνεφώνησε νά πληρώσῃ σήμερον τό $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ καί

μετά 2 μῆνας τό ἄλλο $\frac{1}{4}$ τοῦ ποσοῦ. Πότε πρέπει νά πληρώσῃ τό ὑπόλοιπον μέρος τοῦ χρέους του;('Απ.μετά 1 ἔτος ἀπό σήμερον).

33) Ἔμπορος ἠγόρασε σιτάρι τό ὁποῖον ἐπώλησε ἀντί 84.000 δρχ. μέ κέρδος 20%. Πόσον ἠγόρασε τό σιτάρι ἐάν τό κέρδος 20% εἶναι ἐπί τῆς ἀξίας τῆς ἀγορᾶς καί πόσον ἐάν εἶναι ἐπί τῆς ἀξίας τῆς πωλήσεως ('Απ.70.000 καί 67.200)

34) Ἔμπορος ἠγόρασε καφέ πρός 21 δρχ.τήν ὀκᾶ.'Αφοῦ ἐκράτησε 64 ὀκάδας κατόπιν ἐκαβούρδισε τόν ὑπόλοιπον καί τόν ἐπώλησε πρός 40 δρχ. τήν ὀκᾶ,διότι μετά τό καβούρδισμα ἐπῆλθε φῦρα 16%.'Εκ τῆς πωλήσεως εἰσέπραξε τά χρήματα μέ τά ὁποῖα τόν ἠγόρασε,ἐκέρδισεν ἐπίσης καί 300 δρχ.πόσας ὀκάδας ἠγόρασε;('Απ. 1763,84)

35) Τρεῖς τεχνῖται ἐζήτησαν 35.000 δρχ.διά νά κάμουν ἕνα ἔργον τό ὁποῖον ἐάν ἐργασθοῦν καί οἱ τρεῖς μαζί ἠμποροῦν νά τό τελειώσουν εἰς 12 ἡμ.'Ο (α)εἰς 3 ἡμ.ἔκαμε τόσον ἔργον ὅσον ἔκαμεν ὁ (β) εἰς 6 ἡμ. καί ὁ (γ) εἰς 12 ἡμ.Ζητοῦνται 1)εἰς πόσας ἡμέρας κάμνει τό ἔργον ὁ καθένας μόνος του 2) Νά μοιρασθοῦν τά χρήματα ἀναλόγως τῆς ἐργασίας τοῦ καθενός ('Απ. 21,42,84,20.000,10.000,5.000)

36) Δύο κεφάλαια ἔχουν ἄθροισμα 112.500 δρχ.Τό (β) εἶναι τά $\frac{5}{4}$ τοῦ (α). Δανείζομεν σήμερον τό (α) πρός 4% καί μετά 3 μῆνας τό (β) πρός 4,5%.Μετά πόσον χρόνον ἀπό σήμερον οἱ τόκοι αὐτῶν θά εἶναι ἴσοι ('Απ.10 μῆν.11 μῆν.).

37) Τρεῖς συνεταῖροι ἐκέρδισαν 45.000 δρχ.'Ο (α). πῆρε ἀπό τό κέρδος 12.000 δρχ. ὁ (β) πῆρε κεφάλαιον καί κέρδος 20.000 δρχ. καί ὁ(γ) πῆρε κεφάλαιον καί

κέρδος 24.000 δρχ. Ζητοῦνται πόσον ἦτο τό κεφάλαιον καί πόσον τό κέρδος καθενός.('Απ.Κεφ.4.000.5.000, 6.000 Κερδ.12.000,15.000,18.000)

38) Τρεῖς ὑφαντουργοί ἐργάζονται εἰς τό ἴδιο ἐργοστάσιον. Ο (α) παίρνει ἡμερομίσθιον 84 δρχ.κάμνει δέ εἰς 5 ὥρ.τόσον ἔργον ὅσον κάμνει ὁ (β) εἰς 6 ὥρ. ἤ ὅσον κάμνει ὁ (γ) εἰς 7 ὥρ.Πόσον εἶναι τό ἡμερομίσθιον τοῦ (β) καί τοῦ (γ) ('Απ.70 καί 60).

39) Τά κεφάλαια τριῶν συνεταίρων εἶναι 4000 δρχ. τοῦ (α),5000 δρχ.τοῦ (β) καί 6000 δρχ.τοῦ (γ) καί τό κέρδος τῆς ἐπιχειρήσεως 45.000 δρχ. Ἡ ἐργασία τοῦ (α) εἰς τήν ἐπιχείρησιν ἰσοδυναμεῖ μέ τά $\frac{3}{5}$ τοῦ συνεταιρικοῦ κεφαλαίου,ἡ ἐργασία τοῦ (β) ἰσοδυναμεῖ μέ τά $\frac{2}{3}$ τοῦ συνεταιρικοῦ κεφαλαίου καί ἡ ἐργασία τοῦ (γ) ἰσοδυναμεῖ μέ τά $\frac{4}{15}$ τοῦ συνεταιρικοῦ κεφαλαίου.Πόσον θά πάρῃ ὁ καθένας ἀπό τό κέρδος;('Απ.15394,17763, 11842 περίπου).

40) Κάποιος ἐχώρισε τό κεφάλαιόν του εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\frac{4}{5}$ καί ἐτόκισε τό μικρότερον πρός 6% καί τό μεγαλύτερον πρός 5% καί ἔλαβε τόκον καί ἀπό τά δύο μαζί 492 δρχ. Πόσον ἦτο τό κεφάλαιον;('Απ.3542,40)

41)Ἔμπορος ὑποχρεοῦται διά γραμματίων νά πληρώσῃ τήν 15 Σεπτεμβρίου 800 δρχ. τήν 25 Αὐγούστου 680 δρχ. καί τήν 28 Αὐγούστου 540 δρχ. Θέλει δέ τήν 25 Μαΐου νά τά ἀνταλλάξῃ μέ ἕνα μόνον γραμμάτιον.Ποία ἡ ἡμέρα τῆς λήξεως αὐτοῦ; ('Απ.3 Σεπτεμβρίου).

42) Ἔμπορος ὑποχρεοῦται νά πληρώσῃ γραμμάτιον 850 δρχ. λῆγον μετά 10 μῆνας, δεύτερον γραμμάτιον 1220 δρχ. λῆγον μετά 9 μῆνας καί θέλει νά τά ἀντικαταστήσῃ μέ ἕνα γραμμάτιον λῆγον μετά 12 μῆνας.'Εάν τό ἐπιτόκιον εἶναι 8% πόσον ποσόν θά ἔχῃ τό γραμμάτιον αὐτό; ('Απ.2096,80)

43) Ἐτόκισε κάποιος τά $\frac{3}{7}$ ἑνός κεφαλαίου πρός 5% τό δέ ὑπόλοιπον τό ἐχώρισεν εἰς δύο μέρη καί μέ τρόπον ὥστε τό πρῶτον τοκιζόμενον πρός 6% καί τό δεύτερον πρός 3% νά φέρουν ἴσους τόκους. Ἐάν ὁ ἐτήσιος τόκος εἶναι 9300 δρχ., ποῖον ἦτο τό κεφάλαιον καί ποῖα τά τρία μέρη αὐτοῦ; (Ἀπ. 210.000, 90.000, 40.000, 80.000)

44) Ἱέρων, ὁ τύραννος τῶν Συρακουσῶν, ἔδωσεν εἰς χρυσοχόον 10 λίτρας χρυσοῦ, διά νά τοῦ κατασκευάσῃ στέφανον διά τόν Δία. Ὁ Ἱέρων διά νά βεβαιωθῇ περί τῆς ἀξιοπιστίας τοῦ χρυσοχόου, ἔδωσε τόν στέφανον εἰς τόν Ἀρχιμήδην διά τόν ἔλεγξῃ. Ὁ Ἀρχιμήδης ἐγνώριζεν ὅτι ὁ χρυσός μέσα εἰς τό νερό ἀποβάλλει τά 0,052 τοῦ βάρους του καί ὁ ἄργυρος τά 0,099. Ἐζύγισε λοιπόν τόν στέφανον μέσα εἰς τό νερό καί εὑρῆκε ὅτι εἶχε βάρος 9 λίτρας καί 6 οὐγγίας. Πόσον χρυσόν ἔκλεψεν ὁ χρυσοχόος καί μέ πόσον ἄργυρον ἀντεκατέστησε τόν χρυσόν πού ἔκλεψε;

<u>Λύσις.</u> Ἡ 1 λίτρα ἰσοῦται μέ 16 οὐγγίες, ὥστε αἱ 10 λίτραι χρυσοῦ ἦσαν 160 οὐγγίες χρυσοῦ. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔκλεψε 70 οὐγγίες χρυσοῦ καί ἔβαλλε 90 οὐγγίες ἀργύρου (διά νά εἶναι 70+90=160 οὐγγίες). Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι (0,052Χ70)+(0,099Χ90) = 12,55 λίτρας ἐνῷ σύμφωνα μέ τό πρόβλημα αἱ λίτραι ἦσα 10 δηλ. προκύπτει σφάλμα 2,55. Ὑποθέσωμεν ὅτι ἔκλεψε 50 οὐγγίες χρυσοῦ καί ἔβαλλε 110 οὐγγίες ἀργύρου (διά νά εἶναι 50+110=160 οὐγγίες). Παρατηροῦμεν τώρα ὅτι (0,052Χ50)+(0,099Χ110) =13,49 λίτραι ἐνῷ αἱ λίτραι ἦσαν 10 δηλ. προκύπτει σφάλμα 3,49. Καί τώρα θά ἔχωμεν

Ὑποθέσεις		Σφάλματα
(α) 70		(α) 2,55
	x	
(β) 50		(β) 3,49

$$x = \frac{(3,49X70)-(2,55X50)}{3,49-2,55} = 124\ \frac{12}{47}$$

οὐγγίας χρυσοῦ ἔκλεψε.

Ὑποθέσεις		Σφάλματα
(α) 90		(α) 2,55
	X	
(β) 110		(β) 3,49

$$X = \frac{(3,49X90)-(2,55X110)}{3,49-2,55} = 35\frac{35}{47}$$ οὐγγίας ἀργ.ἔβαλεν.

45) Ἡ ἀξία τῶν 7 πήχεων ἑνός ὑφάσματος διαφέρει ἀπό τάς 500 δρχ. οσον διαφέρουν αἱ 500 δρχ.ἀπό τήν ἀξίαν 13 πήχεων τοῦ ἰδίου ὑφάσματος.Πόσον τιμᾶται ὁ πῆχυς;('Απ.50 δρχ.)

46) Ὑφαντουργεῖον προσέλαβεν ὑφάντριαν ὑφαίνουσα 15 πήχεις τήν ἡμέραν μετά 4 ἡμέρας προσέλαβε καί δευτέραν ὑφάντριαν ὑφαίνουσα 18 πήχεις τήν ἡμέραν.Μετά πόσας ἡμέρας ἡ κάθε μία θά ἔχῃ υφάνῃ ἐν ὅλῳ τόν ἴδιον ἀριθμόν πήχεων; ('Απ.20 ἡμ.)

47) Κάποιος ἠγόρασε μέ 5200 δρχ. μίαν ἀγελάδα καί εναν ιππον.Ἡ ἀξία τοῦ ἵππου εἶναι κατά 460 δρχ.μεγαλυτέρα τοῦ διπλασίου τῆς ἀξίας τῆς ἀγελάδας. Ποία ἡ ἀξία κάθε ἑνός ζώου;('Απ.1580,3620).

48)Πρό τεσσάρων ἐτῶν ἡ ἡλικία ἑνός ἦτο τριπλασία τῆς ἡλικίας τοῦ ἀδελφοῦ του,καί μετά 8 ετη θά εἶναι διπλασία. Ζητεῖται η σημερινή ἡλικία αὐτῶν ('Απ.40,16)

49) Εἰς ἕνα δοχεῖον γεμᾶτο ἀπό νερό ἐβυθίσθη λίθος καί ἐχύθησαν 8 γραμμάρια νερό.Πόσος εἶναι ο ὄγκος τοῦ λίθου;('Απ.8 κυβ.πόντοι).

50) Πόσον εἶναι τό βάρος πλοίου τοῦ ὁποίου τό μέρος ποῦ βυθίζεται εἰς τήν θάλασσαν εἶναι 15 $μ^3$.('Απ. 15 τόνοι 390 χιλιόγραμμα).

51) Σφαῖρα κοίλη ἐξωτερικῆς ἀκτῖνος 0,03 μ.ἐρρίφθη εἰς τό νερό καί ἐβυθίσθη τό ἥμισυ αὐτῆς.Πόσον τό βάρος της ('Απ. $56\frac{538}{1000}$ γραμμάρια)

52) Δοχεῖον κενό ζυγίζει 350 γραμ.γεμᾶτο δέ νερό ζυγίζει 1600 γραμ.Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ('Απ. 1 κ.παλ.250κ.πόντοι)

53) Δοχεῖον κενό ζυγίζει 250 γραμ.γεμᾶτο δέ τσιμέντο εἰδ.βάρους 3,1 ζυγίζει 1750 γραμ. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης αὐτοῦ ('Απ.483 κυβ.πόντοι περίπου).

54) Δοχεῖον μέ βάσιν τετράγωνον πλευρᾶς 0,35 μ.ἔχει ὕψος 0,45 μ.Πόσας ὀκάδας οἰνόπνευμα εἰδ.βάρους 0,781 χωρεῖ;

Λύσις.'Ο ὄγκος τοῦ δοχείου εἶναι 0,35Χ0,35Χ0,45=$=0,055125$ $μ^3$. Πολλαπλασιάζομεν ἐπί 1000 καί ἔχομεν ὅτι ὁ ὄγκος εἶναι 0,055125Χ1000=55,125 κυβικαί παλάμαι.'Εάν τό δοχεῖον ἦτο γεμᾶτο μέ νερό τότε ἡ χωρητικότης θά εἶναι 55,125 χιλιόγραμμα νερό. Τώρα ποῦ θά τό γεμίσωμεν μέ οἰνόπνευμα εἰδ.βάρους 0,781 θά ἔχῃ χωρητικότητα 55,125Χ0,781=43,052 χιλιόγραμμα οἰνοπνεύματος. 'Επειδή 1 χιλιόγραμμον = 0,78 τῆς ὀκᾶς θά ἔχωμεν ὅτι τό δοχεῖον χωρεῖ 43,052Χ0,78=33,58056 ὀκάδας οἰνόπνευμα.

55) Δοχεῖον σχήματος ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου περιέχει 38,688 ὀκ.πετρέλαιον εἰδ.βάρους 0,825.'Η βάσις του ἔχει μῆκος 0,6μ.καί πλάτος 0,2 μ.Πόσον εἶναι τό ὕψος του.

Λύσις.'Επειδή 1 χιλιόγρ.=0,78 ὀκᾶς,θά ἔχωμεν: 38,688:0,78=49,6 χιλιόγραμμα πετρέλαιον.'Επειδή τό εἰδ.βάρος εἶναι 0,825 θά ἔχωμεν ὅτι τό δοχεῖον χωρεῖ 49,6:0,825=48 χιλιόγραμμα νερό ἄρα ἔχει ὄγκον 48 κυβ.παλαμῶν ἤ 48:1000=0,048$μ^3$.'Επειδή δέ ἡ βάσις του ἔχει ἐμβαδόν 0,6Χ0,2=0,12 $μ^2$ ἔπεται ὅτι τό ὕψος του εἶναι 0,048:0,12=0,4μ.

56) 'Ο ἀτμός πού σχηματίζεται εἰς τόν ἐλεύθερον ἀέρα καταλαμβάνει ὄγκον 1695 φοράς μεγαλύτερον τοῦ νεροῦ ἀπό τόν ὁποῖον παράγεται.Μέ ἕνα κυβ.μ.νερό πόσας λίτρας ἀτμοῦ εἶναι δυνατόν νά παρασκευάσωμεν;

('Απ.1695000 λίτρας)

57) Τό νερό όταν γίνη πάγος αυξάνεται κατά τόν όγκον ούτως ώστε μία κυβική παλάμη πάγου νά ζυγίζη 918 γραμ. Εάν κάμωμεν πάγον 100 κυβ.παλάμας νερό πόσος θά είναι ό όγκος του πάγου ('Απ.108,932461 κ.π.)

58) Ένα σώμα εις τό νερό χάνει άπό τό βάρος του 30 γραμ.καί εις άλμυρό νερό χάνει άπό τό βάρος του 35 γραμ.Ζητεϊται τό βάρος μιας κυβικής παλάμης άλμυρού νερού ('Απ.1 χλγ.400 γραμ.)

59) Ένα σώμα εις τόν άέρα ζυγίζει 350 γραμ.εις τό νερό 325 γραμ.καί εις μϊγμα νερού καί οίνοπνεύματος 337 γραμ. Ζητεϊται τό είδικόν βάρος του μίγματος ('Απ.0,52)

60)Μϊγμα άποτελεϊται άπό 7 μέρη Νίτρου καί 3 μέρη θείου. Ζητούνται α) Πόσα μέρη άπό τό καθένα θά πάρωμεν διά νά κάμωμεν μϊγμα 80 χιλιογράμμων β) Πόσον Νίτρον θά προσθέσωμεν, ΐνα τό μϊγμα έχη 11 μέρη Νίτρου καί 4 μέρη θείου γ) Πόσον θεϊον πρέπει νά άφαιρέσωμεν ΐνα ό λόγος του μίγματος είναι $\frac{11}{4}$ δ) 'Εάν άφαιρέσωμεν τόσον θεϊον,όσον Νίτρον έπροσθέσαμεν, χωρίς νά άλλάξουν ό λόγος $\frac{11}{4}$ καί τό βάρος 80 χιλιόγραμμα,πόσον νίτρον έπροσθέσαμεν ('Απ.56 χλγ.24 χλγ.10 Νίτρου, $3\frac{7}{11}$ θεϊον, $2\frac{2}{3}$ θεϊον καί $2\frac{2}{3}$ Νίτρου)

61) Αί 32 λίτραι θαλασσίου νερού περιέχουν μίαν λίτραν άλάτι. Πόσον γλυκό νερό πρέπει νά προστεθή εις αυτό,ΐνα 40 λίτραι του κράματος περιέχουν 0,20 της λίτρας άλάτι ('Απ.168).

62) Έχομεν τρία βαρέλια. Τό (α) έχει τήν χωρητικότητα του (β) μεϊον $\frac{2}{9}$ αυτής, ό (β) έχει τήν χωρητικότητα τού (γ) μεϊον τό $\frac{1}{4}$ αυτής καί ό (γ) έχει τήν χωρητικότητα του (α) καί 50 όκάδας άκόμη.Πόση είναι

ἡ χωρητικότης τοῦ κάθε ἑνός;('Απ.70,60,120).

63) Ἔχομεν τέσσαρα βαρέλια. Τό (α) γεμίζει τό (β) καί μένουν τά $\frac{4}{7}$ τῶν ὀκάδων του, τό (β) γεμίζει τό (γ) καί μένει τό $\frac{1}{4}$ τῶν ὀκάδων του, τό (γ) γεμίζει μόνον τά $\frac{9}{16}$ τοῦ $\frac{1}{4}$. Ἐπίσης τό (α) γεμίζει τό (γ) καί τό (δ) καί μένουν 15 ὀκάδες. Ζητεῖται ἡ χωρητικότης χωριστά κάθε βαρελιοῦ ('Απ.140,60,45,90)

64) Ἐδανείσθη κάποιος ἕνα ποσόν πρός 5% καί διά ἕνα ἔτος. Ἐπειδή εἰς τό τέλος τοῦ ἔτους δέν ἠμπόρεσε νά πληρώσῃ τόν τόκον διά τοῦτο ὑπεχρεώθη καί τόκον διά τόν τόκον πού δέν ἐπλήρωσε. Ἐάν ἐπλήρωσε 15 λίρας εἰς τό τέλος τοῦ δευτέρου ἔτους, διά τόκον τοῦ τόκου πού δέν ἐπλήρωσεν νά εὑρεθῇ πόσας λίρας εἶχε δανεισθῇ ('Απ.6000).

65) Ἐδάνεισε κάποιος ἕνα ποσόν πρό 3 ἐτῶν πρός 10% καί πῆρε σήμερον διά τόκους καί κεφάλαιον μαζί 1200 λίρες ἀφοῦ ἐχάρισε προηγουμένως εἰς τόν ὀφειλέτην του τούς τόκους ἑνός ἔτους. Ζητεῖται πόσας λίρας εἶχε δανείσει ('Απ.1000).

66) Δύο ἔμποροι κατέβαλον 8700 δρχ.διά νά κάμουν ἐπιχείρησιν. Ὁ (α) πῆρε 1200 δρχ.κέρδος καί ὁ (β) 500 δρχ.περισσότερον.Πόσας δραχμάς εἶχε καταθέσει ὁ καθένας; ('Απ.3600,5100).

67) Ἕνα βαρέλι χωρεῖ 158 ὀκ.350 δρμ.λάδι εἰδ.βάρους 0,912.Πόσας ὀκάδας νερό χωρεῖ; ('Απ.174 ὀκ.82 δρμ.περίπου).

68) Μῖγμα ἀποτελεῖται ἀπό 250 ὀκ.λάδι καί ἀπό 150 ὀκ.σπορέλαιον καί πωλεῖται πρός 42,50 δρχ.ἡ ὀκᾶ. Ἡ ὀκᾶ τό λάδι ἀξίζει κατά 20 δρχ.περισσότερον ἀπό τήν ὀκᾶ τό σπορέλαιον.Ζητεῖται ἡ ἀξία τῆς ὀκᾶς κάθε ἑνός εἴδους χωριστά ('Απ.50 δρχ.,30 δρχ.)

69) Ἠγόρασε κάποιος μέ 525.000 δρχ.150 βαρέλια βούτυρο τῶν 50 ὀκ.τό καθένα. Ἐπειδή τά 30 βαρέλια ἔπαθαν βλάβη θέλει νά πωλήση τό βούτυρο πού περιέχουν πρός 60 δρχ.τήν ὀκᾶ. Πόσον πρέπει νά πωλῆ τήν ὀκᾶ τό καλό βούτυρο καί πόσον τήν ὀκᾶ τό ἐλαττωματικό βούτυρο διά νά μή ζημιωθῆ;('Απ.90 καί 80).

70) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται ἄνδρες γυναῖκες καί παιδιά καί ὅλοι μαζί πῆραν 13200 δρχ.διά 25 ἡμερομίσθια ἀνδρῶν,21 ἡμερομίσθια γυναικῶν καί 26 ἡμερομίσθια παιδιῶν.Νά εὑρεθῆ τό ἡμερομίσθιον κάθε ἀνδρός κάθε γυναικός καί κάθε παιδιοῦ,ἐάν 9 ἡμερομίσθια τῶν γυναικῶν ἰσοδυναμοῦν μέ 16 ἡμερομίσθια παιδιῶν καί 8 ἡμερομίσθια ἀνδρῶν μέ 15 ἡμερομίσθια γυναικῶν ('Απ. 3000,1600,900)

71) Εἰς ἕνα ἐργοστάσιον ἐργάζονται ἄνδρες γυναῖκες καί παιδιά.Τό ἡμερομίσθιον κάθε γυναικός εἶναι τά $\frac{3}{15}$ τοῦ ἡμερομισθίου τοῦ ἀνδρός καί τό ἡμερομίσθιον κάθε παιδιοῦ εἶναι τά $\frac{9}{16}$ τοῦ ἡμερομισθίου τῆς γυναικός. Εἰς μίαν ἡμέραν 7 ἄνδρες 8 γυναῖκες καί 9 παιδιά πῆραν ὅλοι μαζί 41900 δρχ.Ποῖον τό ἡμερομίσθιον τοῦ κάθε ἑνός ('Απ.3000,1600,900).

Ἐν Ἀθήναις τῇ 15 Μαΐου 1951

Δ Ι Ο Ρ Θ Ω Τ Ε Α

Σελ.69 Πρόβλημα 53 τό δεύτερο 351 μίλια νά γίνῃ 611 μίλια

" 97 'Ιδιότης. Τό πολλαπλασιάζεται ἐπί τοῦ ἀριθμητοῦ αὐτοῦ νά γίνῃ ἐπί τόν ἀριθμόν αὐτοῦ.

" 185 στίχ.21 ἀντί 9=3 καί ἡ 16=4 νά γίνουν

$\sqrt{9} = 3$ καί ἡ $\sqrt{16}=4$